

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**İKİ ÇEYREK DÜZLEM ÜZERİNE OTURAN ELASTİK BİR TABAKANIN**  
**SÜRTÜNMESİZ VE AYRILMALI TEMAS PROBLEMİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Gökhan ADIYAMAN**

**EKİM 2013**  
**TRABZON**

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**İKİ ÇEYREK DÜZLEM ÜZERİNE OTURAN ELASTİK BİR TABAKANIN  
SÜRTÜNMESİZ VE AYRILMALI TEMAS PROBLEMİ**

**İnş. Müh. Gökhan ADIYAMAN**

**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde  
“İNŞAAT YÜKSEK MÜHENDİSİ”  
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 23.09.2013  
Tezin Savunma Tarihi : 23.10.2013**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ**

**Trabzon 2013**

**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**  
**İnşaat Mühendisliği Ana Bilim Dalında**  
**Gökhan ADIYAMAN tarafından hazırlanan**

**İKİ ÇEYREK DÜZLEM ÜZERİNE OTURAN ELASTİK BİR TABAKANIN**  
**SÜRTÜNMESİZ VE AYRILMALI TEMAS PROBLEMİ**

**başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 24 / 09 / 2013 gün ve 1524 sayılı**  
**kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda**  
**YÜKSEK LİSANS TEZİ**  
**olarak kabul edilmiştir.**

**Jüri Üyeleri**

**Başkan** : Prof. Dr. Hasan SOFUOĞLU .....

**Üye** : Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ .....

**Üye** : Doç. Dr. Talat Şükrü ÖZŞAHİN .....

**Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ**  
**Enstitü Müdürü**

## ÖNSÖZ

Bu çalışma Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlanmıştır.

“İki Çeyrek Düzlem Üzerine Oturan Elastik Bir Tabakanın Sürtünmesiz ve Ayrılmalı Temas Problemi” isimli tez çalışmasını bana öneren ve her aşamasında bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım, öğrencileri olmaktan ve kendileriyle çalışmaktan onur duyduğum danışman Hocalarım Sayın Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ' ye ve Sayın Prof. Dr. Ragıp ERDÖL' e minnet ve şükranlarımı sunmayı zevkli bir görev sayarım.

Öğrenim hayatım boyunca bana emeği geçen tüm hocalarımı saygıyla anar, kendilerine minnettar olduğumu belirtmek isterim.

Tez çalışmam boyunca bilgi ve birikimlerinden faydalandığım Sayın Prof. Dr. A. Osman ÇAKIROĞLU' na, Sayın Prof. Dr. Ümit UZMAN' a ve Sayın Yrd. Doç. Dr. F. Lütfü ÇAKIROĞLU' na teşekkür ederim.

Çalışmalarım sırasında tezim ile ilgili birçok konuda yardım ve değerli fikirlerini esirgemeyen Sayın Doç. Dr. T. Şükrü ÖZŞAHİN' e, Sayın Doç. Dr. Volkan KAHYA' ya ve Sayın Yrd. Doç. Dr. İsa ÇÖMEZ' e ayrıca teşekkür etmek isterim.

Öğrenim hayatım süresince bana her türlü desteği veren ve beni sabırla destekleyen anneme, babama, eşime ve kardeşlerime müteşekkir olduğumu belirtir, çalışmamın ülkemize faydalı olmasını temenni ederim.

Gökhan Adıyaman  
Trabzon 2013

## TEZ BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “İki Çeyrek Düzlem Üzerine Oturan Elastik Bir Tabakanın Sürtünmesiz ve Ayrılmalı Temas Problemi” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ'nin sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 23/09/2013

Gökhan ADIYAMAN

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	III
TEZ BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET .....	VII
SUMMARY .....	VIII
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	IX
TABLolar LİSTESİ .....	XII
SEMBOLLER DİZİNİ .....	XIII
1. GENEL BİLGİLER .....	1
1.1. Giriş.....	1
1.1.1. Temas Problemlerinin Tarihsel Gelişimi .....	1
1.1.2. Çalışmanın Amacı ve Kapsamı .....	7
1.2. Genel Denklemlerin Elde Edilmesi .....	8
1.2.1. Elastik Tabakaya İlişkin Denklemlerin Elde Edilmesi.....	9
1.2.1.1. Navier Denklemleri .....	9
1.2.1.2. Navier Denklemlerinin İki Boyutlu Hale İndirgenmesi .....	11
1.2.1.1. Navier Denklemlerinin İntegral Dönüşümleri.....	12
1.2.2. Çeyrek Düzleme İlişkin Denklemlerin Elde Edilmesi .....	17
1.2.2.1. Fonksiyonu ve Gerilme Fonksiyonlarının Mellin Dönüşümleri.....	17
1.2.2.2. Yer Değiştirmelerin Mellin Dönüşümleri.....	20
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR .....	23
2.1. Problemin Tanımı.....	23
2.2. Kullanılacak Denklemler.....	24
2.3. Problemin Sınır Şartları.....	26
2.4. Katsayıların Belirlenmesi .....	28
2.5. İntegral Denklemin Elde Edilmesi .....	31
2.5.1. Birinci İntegral Denklemin Elde Edilmesi .....	31
2.5.2. İkinci İntegral Denklemin Elde Edilmesi.....	35

2.6.	İntegral Denklemin Boyutsuzlaştırılması .....	43
2.7.	İntegral Denklemin Sayısal Çözümü .....	45
3.	BULGULAR VE İRDELEME.....	49
3.1.	Giriş.....	49
3.2.	Problemin Akış Diagramı.....	49
3.3.	Sayısal Uygulamalar.....	51
4.	SONUÇLAR .....	76
5.	KAYNAKLAR.....	78
ÖZGEÇMİŞ		

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

İKİ ÇEYREK DÜZLEM ÜZERİNE OTURAN ELASTİK BİR TABAKANIN  
SÜRTÜNMESİZ VE AYRILMALI TEMAS PROBLEMİ

Gökhan ADIYAMAN

Karadeniz Teknik Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı  
Danışman: Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ  
2013, 82 Sayfa

Bu çalışmada, iki elastik çeyrek düzlem üzerine oturan, homojen, izotrop elastik bir tabakanın sürtünmesiz ve ayrılmalı temas problemi elastisite teorisine göre incelenmiştir. Problemden tabakaya üstten rijit bir panç ile iletilen tekil bir yük ve simetrik şekilde yerleştirilmiş iki sabit yayılı yük etki ettirilmiştir. Birinci bölümde temas problemleri ile ilgili daha önce yapılmış bazı çalışmalar özetlenmiştir ve integral dönüşüm teknikleri kullanılarak tabaka ve çeyrek düzlem için gerilme ve yer değiştirme bileşenleri elde edilmiştir. İkinci bölümde problem tanımlandıktan sonra birinci bölümde elde edilen gerilme ve yer değiştirme ifadelerine problemin sınır şartları uygulanmış ve problem tabaka-panç ve tabaka-çeyrek düzlem temas yüzeylerindeki gerilmelerin bilinmeyen olduğu iki adet tekil integral denklemden oluşan bir integral denklem sistemine indirgenmiştir. Daha sonra Gauss-Jacobi integrasyon formülasyonu kullanılarak integral denklem sistemi sayısal olarak çözülmüştür. Üçüncü bölümde, panç-tabaka ve tabaka-çeyrek düzlem arasındaki boyutsuz temas boyları ve boyutsuz gerilme dağılımları ile ilgili sayısal değerler farklı yükleme, malzeme ve geometrik verilere göre bir bilgisayar programı kullanılarak hesaplanmıştır. Elde edilen bu değerler tablo ve grafiklerle sunulmuş ve bunlarla ilgili değerlendirmeler yapılmıştır. Dördüncü bölümde bu çalışmadan çıkarılan sonuçlar sıralanmıştır. Temas boyları ile temas gerilme dağılımlarının ilişkili bir değişim gösterdiği ve yayılı yükün konumunun ve şiddetinin yarı temas uzunlukları ve temas gerilme dağılımları üzerinde önemli bir etkiye sahip olduğu sonucuna varılmıştır. Bu bölümden sonra kaynaklar verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Ayrılmalı temas problemi, çeyrek düzlem, tekil integral denklem, Gauss-Jacobi İntegrasyon formülasyonu



Master Thesis

SUMMARY

THE FRICTIONLESS AND RECEDING CONTACT PROBLEM FOR AN ELASTIC  
LAYER RESTING ON TWO QUARTER PLANES

Gökhan ADIYAMAN

Karadeniz Technical University  
The Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Civil Engineering Graduate Program  
Supervisor: Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ  
2013, 82 Pages

In this study, the frictionless and receding contact problem for an elastic layer resting on two quarter planes is considered according to the theory of elasticity. The layer is forced with a concentrated load applied over a punch and two uniform load placed symmetrically. In the first chapter, some studies which are done on contact problems are summarized and general expressions of stresses and displacements are obtained for the layer and quarter plane using integral transform techniques. In the second chapter, after the description of the problem, the stress and the displacements expressions obtained in the first chapter are substituted into the boundary conditions of the problem and the problem is reduced to a system of integral equations consisted of two singular integral equations, which the contact stress between the layer and the rigid punch and the contact stress between the layer and the quarter plane are the unknown functions. After that, the system of integral equations is solved numerically by using Gauss-Jacobi integration formulation. In the third chapter, the numerical values for the dimensionless contact lengths, the dimensionless contact stresses between the layer and the rigid punch and between the layer and the quarter plane are calculated for different loading, material and geometric properties using a computer program. These obtained quantities are shown in tables and figures and related assessments are discussed. In the fourth chapter, the conclusions drawn from this study are given. It is concluded that the contact lengths and the contact stress distributions show a related change and the position and the magnitude of the distributed load have an important role on the contact lengths and stress distributions. The sources are given after this chapter.

**Key Words:** Reciding Contact Problem, Quarter Plane, Singular Integral Equation, Gauss-Jacobi Integration Formulation

## ŞEKİLLER LİSTESİ

### Sayfa No

- Şekil 2.1. Rijit dairesel bir panç aracılığıyla yüklenmiş ve elastik yarı sonsuz düzleme oturan elastik tabaka ..... 23
- Şekil 3.1. Program Akış Diyagramı..... 50
- Şekil 3.2. Tabaka-panç yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $a/h$ ) artan ( $Q/P$ ) oranına göre değişimi ( $G_1/G_2 = 2$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $R/h = 250$ ,  $d_1/h = 1.0$ ,  $d_2/h = 2.0$ ,  $f/h = 1.0$ )..... 53
- Şekil 3.3. Tabaka-panç yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $a/h$ ) artan  $G_1/(P/h)$  oranına göre değişimi ( $G_1/G_2 = 2$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $R/h = 250$ ,  $d_1/h = 1.0$ ,  $d_2/h = 2.0$ ,  $f/h = 1.0$ )..... 53
- Şekil 3.4. Tabaka-panç temas yüzeyi boyunca farklı  $Q/P$  oranları için boyutsuz gerilme dağılımı ( $G_1/(P/h) = 1000$ ,  $G_1/G_2 = 2$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $R/h = 250$ ,  $d_1/h = 1.0$ ,  $d_2/h = 2.0$ ,  $f/h = 1.0$ )..... 54
- Şekil 3.5. Tabaka-panç temas yüzeyi boyunca farklı  $G_1/(P/h)$  oranları için boyutsuz gerilme dağılımı ( $Q/P = 1.0$ ,  $G_1/G_2 = 2$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $R/h = 250$ ,  $d_1/h = 1.0$ ,  $d_2/h = 2.0$ ,  $f/h = 1.0$ )..... 54
- Şekil 3.6. Tabaka-çeyrek düzlem yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $c/h$ ) artan  $Q/P$  oranlarına göre değişimi ( $G_1/G_2 = 2$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $R/h = 250$ ,  $d_1/h = 1.0$ ,  $d_2/h = 2.0$ )..... 56
- Şekil 3.7. Tabaka-çeyrek düzlem temas yüzeyi boyunca farklı  $Q/P$  oranları için boyutsuz gerilme dağılımı ( $G_1/(P/h) = 1000$ ,  $G_1/G_2 = 2$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $R/h = 250$ ,  $d_1/h = 1.0$ ,  $d_2/h = 2.0$ )..... 57
- Şekil 3.8. Tabaka-çeyrek düzlem temas yüzeyi boyunca  $G_1/(P/h)$  oranları için boyutsuz gerilme dağılımı ( $Q/P = 1.0$ ,  $G_1/G_2 = 2$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $R/h = 250$ ,  $d_1/h = 1.0$ ,  $d_2/h = 2.0$ ,  $f/h = 1.0$ )..... 57
- Şekil 3.9. Tabaka-panç yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $a/h$ ) artan kayma modülü oranlarına ( $G_1/G_2$ ) göre değişimi ( $Q/P = 1$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $R/h = 250$ ,  $d_1/h = 1.0$ ,  $d_2/h = 2.0$ ,  $f/h = 1.0$ )..... 59

- Şekil 3.10. Tabaka-panç yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $a/h$ ) artan  $G_1/(P/h)$  oranlarına göre değişimi ( $Q/P=1$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $R/h = 250$ ,  $d_1/h = 1.0$ ,  $d_2/h = 2.0$ ,  $f/h = 1.0$ )..... 60
- Şekil 3.11. Tabaka-panç temas yüzeyi boyunca faklı kayma modülü oranları için boyutsuz gerilme dağılımı ( $G_1/(P/h)=1000$ ,  $Q/P = 1.0$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $R/h = 250$ ,  $d_1/h = 1.0$ ,  $d_2/h = 2.0$ ,  $f/h = 1.0$ )..... 60
- Şekil 3.12. Tabaka-çeyrek düzlem yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $c/h$ ) artan kayma modülü oranlarına ( $G_1/G_2$ ) göre değişimi ( $Q/P=1$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $R/h = 250$ ,  $d_1/h = 1.0$ ,  $d_2/h = 2.0$ ,  $f/h = 1.0$ ). 62
- Şekil 3.13. Tabaka-çeyrek düzlem temas yüzeyi boyunca farklı  $G_1/G_2$  oranları için boyutsuz gerilme dağılımı ( $G_1/(P/h)=1000$ ,  $Q/P = 1.0$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $R/h = 250$ ,  $d_1/h = 1.0$ ,  $d_2/h = 2.0$ ,  $f/h = 1.0$ )..... 62
- Şekil 3.14. Tabaka-panç yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $a/h$ ) artan yayılı yükün başlama mesafesinin tabaka yüksekliğine oranları ( $d_1/h$ ) için boyutsuz değişimi ( $Q/P = 0.5$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $G_1/G_2 = 2$ ,  $R/h = 250$ ,  $d_2/h = d_1/h + 0.25$ ,  $f/h = 1.0$ )..... 64
- Şekil 3.15. Tabaka-panç yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $a/h$ ) farklı  $d_1/h$  oranları için artan  $G_1/(P/h)$  oranlarına göre değişimi ( $Q/P = 0.5$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $G_1/G_2 = 2$ ,  $R/h = 250$ ,  $d_2/h = d_1/h + 0.25$ ,  $f/h = 1.0$ )..... 64
- Şekil 3.16. Tabaka-panç temas yüzeyi boyunca faklı yayılı yükün başlama mesafesinin tabaka yüksekliğine oranları ( $d_1/h$ ) için boyutsuz gerilme dağılımı ( $Q/P = 0.5$ ,  $G_1/(P/h)=1000$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $G_1/G_2 = 2$ ,  $R/h = 250$ ,  $d_2/h = d_1/h + 0.25$ )..... 65
- Şekil 3.17. Tabaka-çeyrek düzlem yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $c/h$ ) artan yayılı yükün başlama mesafesinin tabaka yüksekliği oranına ( $d_1/h$ ) göre değişimi ( $Q/P = 0.5$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $G_1/G_2 = 2$ ,  $R/h = 250$ ,  $d_2/h = d_1/h + 0.25$ ,  $f/h = 1.0$ )..... 66
- Şekil 3.18. Tabaka-çeyrek düzlem temas yüzeyi boyunca faklı yayılı yük başlama mesafesinin tabaka yüksekliği oranları ( $d_1/h$ ) için boyutsuz gerilme dağılımı ( $Q/P = 0.5$ ,  $G_1/(P/h)=1000$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $G_1/G_2 = 2$ ,  $R/h = 250$ ,  $d_2/h = d_1/h + 0.25$ ,  $f/h = 1.0$ )..... 67

Şekil 3.19.	Tabaka-panç yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $a/h$ ) artan yayılı yük bitiş mesafesinin tabaka yüksekliği oranına ( $d_2/h$ ) göre değişimi ( $Q/P = 0.5$ , $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ , $G_1/G_2 = 2$ , $R/h = 250$ , $d_1/h = 0.75$ , $f/h = 1.0$ ).....	68
Şekil 3.20	Tabaka-panç temas yüzeyi boyunca faklı yayılı yük bitiş mesafesinin tabaka yüksekliği oranları ( $d_2/h$ ) için boyutsuz gerilme dağılımı ( $Q/P = 0.5$ , $G_1/(P/h) = 1000$ , $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ , $G_1/G_2 = 2$ , $R/h = 250$ , $d_1/h = 0.75$ , $f/h = 1.0$ ).....	69
Şekil 3.21	Tabaka-çeyrek düzlem yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $a/h$ ) artan yayılı yük bitiş mesafesinin tabaka yüksekliği oranına ( $d_2/h$ ) göre değişimi ( $Q/P = 0.5$ , $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ , $G_1/G_2 = 2$ , $R/h = 250$ , $d_1/h = 0.75$ ).....	70
Şekil 3.22	Tabaka-çeyrek düzlem temas yüzeyi boyunca faklı yayılı yük bitiş mesafesinin tabaka yüksekliği oranları ( $d_2/h$ ) için boyutsuz gerilme dağılımı ( $Q/P = 0.5$ , $G_1/(P/h) = 1000$ , $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ , $G_1/G_2 = 2$ , $R/h = 250$ , $d_1/h = 0.75$ , $d_2/h = 0.75$ ).....	71
Şekil 3.23	Tabaka-panç yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $a/h$ ) artan çeyrek düzlemler arası yarı uzaklığının tabaka yüksekliğine oranına ( $f/h$ ) göre değişimi ( $Q/P = 0.5$ , $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ , $G_1/G_2 = 2$ , $R/h = 250$ , $d_1/h = 1.00$ , $d_2/h = 1.50$ ).....	72
Şekil 2.24	Tabaka-panç temas yüzeyi boyunca faklı çeyrek düzlemler arası yarı uzaklığının tabaka yüksekliğine oranları ( $f/h$ ) için boyutsuz gerilme dağılımı ( $Q/P = 0.5$ , $G_1/(P/h) = 1000$ , $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ , $G_1/G_2 = 2$ , $R/h = 250$ , $d_1/h = 1.00$ , $d_2/h = 1.50$ ).....	73
Şekil 2.25	Tabaka-çeyrek düzlem yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $c/h$ ) artan çeyrek düzlemler arası yarı uzaklığının tabaka yüksekliğine oranına ( $f/h$ ) göre değişimi ( $Q/P = 0.5$ , $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ , $G_1/G_2 = 2$ , $R/h = 250$ , $d_1/h = 1.00$ , $d_2/h = 1.50$ ).....	74
Şekil 2.26	Tabaka-çeyrek düzlem temas yüzeyi boyunca faklı çeyrek düzlemler arası yarı uzaklığının tabaka yüksekliğine oranları ( $f/h$ ) için boyutsuz gerilme dağılımı ( $Q/P = 0.5$ , $G_1/(P/h) = 1000$ , $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ , $G_1/G_2 = 2$ , $R/h = 250$ , $d_1/h = 1.00$ , $d_2/h = 1.50$ ).....	75

## TABLÖLAR LİSTESİ

### Sayfa No

Tablo 3.1.	Tabaka-panç yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $a/h$ ) farklı $G_1/(P/h)$ ve $Q/P$ oranlarına göre değişimi ( $G_1/G_2 = 2$ , $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ , $R/h = 250$ , $d_1/h = 1.0$ , $d_2/h = 2.0$ , $f/h = 1.0$ ).....	52
Tablo 3.2	Tabaka-çeyrek düzlem yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $c/h$ ) farklı $G_1/(P/h)$ ve $Q/P$ oranlarına göre değişimi ( $G_1/G_2 = 2$ , $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ , $R/h = 250$ , $d_1/h = 1.0$ , $d_2/h = 2.0$ , $f/h = 1.0$ ).....	56
Tablo 3.3	Tabaka-panç yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $a/h$ ) farklı $G_1/(P/h)$ ve ( $G_1/G_2$ ) oranlarına göre değişimi ( $Q/P = 1$ , $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ , $R/h = 250$ , $d_1/h = 1.0$ , $d_2/h = 2.0$ , $f/h = 1.0$ ).....	59
Tablo 3.4	Tabaka-çeyrek düzlem yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $c/h$ ) farklı $G_1/(P/h)$ ve ( $G_1/G_2$ ) oranlarına göre değişimi ( $Q/P = 1$ , $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ , $R/h = 250$ , $d_1/h = 1.0$ , $d_2/h = 2.0$ , $f/h = 1.0$ ).....	61
Tablo 3.5	Tabaka-panç yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $a/h$ ) farklı $G_1/(P/h)$ ve ( $d_1/h$ ) oranlarına göre değişimi ( $Q/P = 0.5$ , $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ , $G_1/G_2 = 2$ , $R/h = 250$ , $d_2/h = d_1/h + 0.25$ , $f/h = 1.0$ )....	63
Tablo 3.6	Tabaka-çeyrek düzlem yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $c/h$ ) farklı $G_1/(P/h)$ ve ( $d_1/h$ ) oranlarına göre değişimi ( $Q/P = 0.5$ , $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ , $G_1/G_2 = 2$ , $R/h = 250$ , $d_2/h = d_1/h + 0.25$ , $f/h = 1.0$ )....	66
Tablo 3.7	Tabaka-panç yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $a/h$ ) farklı $G_1/(P/h)$ ve ( $d_2/h$ ) oranlarına göre değişimi ( $Q/P = 0.5$ , $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ , $G_1/G_2 = 2$ , $R/h = 250$ , $d_1/h = 0.75$ , $f/h = 1.0$ ).....	68
Tablo 3.8	Tabaka-çeyrek düzlem yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $c/h$ ) farklı $G_1/(P/h)$ ve ( $d_2/h$ ) oranlarına göre değişimi ( $Q/P = 0.5$ , $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ , $G_1/G_2 = 2$ , $R/h = 250$ , $d_1/h = 0.75$ , $f/h = 1.0$ ).....	70
Tablo 3.9	Tabaka-panç yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $a/h$ ) farklı $G_1/(P/h)$ ve ( $f/h$ ) oranlarına göre değişimi ( $Q/P = 0.5$ , $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ , $G_1/G_2 = 2$ , $R/h = 250$ , $d_1/h = 1.00$ , $d_2/h = 1.50$ ).....	72
Tablo 3.10	Tabaka-çeyrek yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $c/h$ ) farklı $G_1/(P/h)$ ve ( $f/h$ ) oranlarına göre değişimi ( $Q/P = 0.5$ , $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ , $G_1/G_2 = 2$ , $R/h = 250$ , $d_1/h = 1.00$ , $d_2/h = 1.50$ ).....	74

## SEMBOLLER DİZİNİ

$P$	Tekil yük
$q$	Yayıllı yükün şiddeti
$Q$	Yayıllı yükün toplam şiddeti
$X, Y, Z$	Sırayla x, y, z doğrultularındaki kütle kuvvetleri
$u, v, w$	Sırayla x, y, z doğrultularındaki yer değiştirme bileşenleri
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	x, y, z doğrultularındaki birim şekil değiştirmeler
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Dik koordinatlarda açısal şekil değiştirme bileşenleri
$e$	Hacim değiştirme oranı
$\lambda$	Lâme sabiti
$G$	Kayma modülü
$\nu$	Poisson oranı
$E$	Elastisite modülü
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	x, y, z doğrultularındaki normal gerilmeler
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Dik koordinatlarda kayma gerilmesi bileşenleri
$\kappa$	Malzeme sabiti
$\Delta$	Laplace operatörü
$\Delta^2$	Biharmonik operatör
$u_r, u_\theta$	Polar koordinatlarda yer değiştirme bileşenleri
$\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$	Polar koordinatlarda gerilme bileşenleri
$\kappa_1, \kappa_2$	Tabaka ve çeyrek düzlem malzeme sabitleri
$p_1(x)$	Panç-tabaka temas mesafesi boyunca gerilme dağılımı
$p_2(x), p_2(r)$	Tabaka-çeyrek düzlem mesafesi boyunca gerilme dağılımı
$R$	Dairesel rijit pançın yarıçapı
$F(x)$	Dairesel rijit pançın şekil fonksiyonu
$f(x)$	Dairesel rijit pançın şekil fonksiyonunun x'e göre türevi
$h$	Tabaka yüksekliği
$a$	Panç-tabaka yarı temas uzunluğu

$c$	Tabaka-çeyrek düzlem yarı temas uzunluğu
$f$	Çeyrek düzlemler arası açıklığın yarı uzunluğu
$c_0$	Tabaka-çeyrek düzlem temas yüzeyinin orta noktasının y eksenine olan uzaklığı
$d_1, d_2$	Yayıllı yükün uygulama noktasının başlama ve bitiş mesafeleri
$\phi_1(r_1), \phi_2(r_2)$	Panç-tabaka temas mesafesi ve tabaka çeyrek düzlem temas mesafesi boyunca boyutsuz gerilme dağılımları

**Not:** Bu listede verilmeyen bazı semboller metin içerisinde ilgili oldukları yerlerde tanımlanmışlardır.

## 1. GENEL BİLGİLER

### 1.1. Giriş

Çoğu yapıların ve mekanik sistemlerin elemanları birbirleri ile değme halindedir. Bu değmenin karakteri, cisimlerin gerilmeleri birbirlerine iletişim şekilleri, değme halindeki cisimlerde meydana gelen şekil değiştirmeler, değme uzunlukları ve değme bölgesindeki değme gerilmesi dağılımı yapının davranışında önemli rol oynamaktadır. Yol ve havaalanı üst yapıları, demiryolları, temeller, tahıl siloları, akaryakıt tankları, silindirik miller ve bilyeler değmenin söz konusu olduğu mühendislik uygulamalarından bazılarıdır. Taşıt çarpışmalarının simülasyonu, insan eklemlerinin davranışı gibi konular da değme probleminin uygulama sahasına girmektedir (Çömez, 2009).

Elastisite teorisinin ifadeleri karışık ve uzun olmasına karşın elemanter teoriye göre daha kesin sonuçlar vermektedir. Bilgisayar teknolojisi ve sayısal çözüm yöntemlerinin gelişmesine paralel olarak elastisite teorisi kullanılarak mühendislik yapılarının gerilme ve şekil değiştirme problemlerinin çözümü de yoğunluk kazanmış ve temas problemi konusundaki çalışmalarda önemli artışlar kaydedilmiştir. İntegral dönüşüm teknikleri, sonlu elemanlar, sınır elemanları ve sonlu farklar gibi yöntemler kullanılarak temas problemleri ile ilgili son yıllarda pek çok çalışma yapılmıştır

#### 1.1.1. Temas Problemlerinin Tarihsel Gelişimi

Değme mekaniği konusuna Heinrich Hertz tarafından 1882 yılında yazılan “On the Contact of Elastic Solids” adlı makaleyle girildiği söylenebilir (Johnson, 1985). Çalışmalarına sürtünmesiz yüzeyler ve tam elastik cisimleri konu edinen Hertz, eliptik değme bölgelerine sahip olduğunu kabul ettiği cisimlerin birbirlerine değme durumunu incelemiş ve şekil değiştirme ve değme gerilmelerini araştırmıştır. Ayrıca bulduğu sonuçları rijit düzleme oturan farklı geometrilere sahip problemlere uygulamıştır. Bu tip problemler Hertz değme problemleri olarak adlandırılmıştır.

Kompleks değişkenler metodunun geliştirilmesi (Muskhelishvili, 1953) ve Sneddon’ un integral dönüşüm tekniklerini elastisite teorisinde kullanması ile beraber değme



problemleri üzerine yapılan çalışmalarda bir artış gözlenmiştir. Galin (1961), 1950 ' li yıllara kadar olan değme problemleri ile ilgili literatürü ve çözüm yöntemlerini eserinde toplamıştır. Uffliand (1965), bu problemlere integral dönüşüm tekniklerinin uygulanmasını gerçekleştirmiştir.

Erdoğan (1969), potansiyel teori ve katı cisim mekaniğinin karışık sınır değer problemlerinde çok sık rastlanan tekil integral denklem takımlarının çözümü için bir yöntem geliştirmiştir. Bu yöntemde bilinmeyen tekil fonksiyon, bu fonksiyonun tekil davranışını gösteren bir temel fonksiyon ile bilinmeyen sonlu bir fonksiyonun çarpımı şeklinde ifade edilir. Böylece ilgili ortogonal polinomların özelliklerinden yararlanılarak bilinmeyen sonlu fonksiyon çözümün tekilliği korunarak bulunmuş olur. Erdoğan tarafından geliştirilen bu yöntem çoğunlukla çatlak ve temas problemlerine uygulanmıştır.

Dhaliwal (1970), yarı sonsuz düzlem üzerine dairesel rijit bir panç ile bastırılması problemini incelemiştir. Fredholm integral denkleminde indirgenen karışık sınır değer problemi, kuvvet serileri ve sayısal yöntemlerin yardımıyla çözülmüştür. Problemin çözümü Dhaliwal ve Rau (1970) tarafından rijit silindirik, konik, küresel ve eliptik durumlar için genişletilmiştir.

Erdoğan ve Gupta (1971), çatlak içeren çok tabakalı ortamların düzlem şekil değiştirme ve kayma problemini ele almışlar ve çatlağın varlığı durumunda gerilme dağılımını incelemiştir. Problemden elde edilen tekil integral denklemin çözümü için yeni bir yöntem geliştirilmiştir. Bazı özel durumlar için elde edilen denklemler çözülmüş ve gerilme şiddeti faktörü için sayısal sonuçlar verilmiştir.

Keer ve Chantaramungkom (1972), belirli bir yüzeyi dışında tüm yüzeyi sabit yayılı yük ile yüklenmiş elastik bir tabaka ile üzerine oturduğu yarı sonsuz düzlem arasındaki sürtünmesiz değme problemini incelemiştir. Ayrılma bölgesinin yayılı yükün etki etmediği mesafeden küçük olduğu kabul edilerek problem Papkovich-Neuber potansiyelleri kullanılarak çözülmüştür.

Farklı panç profilleri aracılığı ile yüklenen ve yarı sonsuz düzleme oturan çok sayıdaki elastik tabakanın düzlem temas problemi Chen ve Engel (1972) tarafından ele alınmış ve farklı tabaka kalınlıkları için gerilme analizi yapılmıştır.

Keer vd. (1972), üstten yüklenen elastik bir tabaka ile üzerine oturduğu yarı sonsuz düzlem arasındaki değme problemini ele almışlardır. Problemden dönele simetrik durum için Hankel dönüşümleri ve düzlem şekil değiştirme durumu için üstel Fourier dönüşümleri kullanılmıştır. Problem bilinmeyen olarak tabaka ile yarım düzlem arasındaki gerilme

dağılımının alındığı ikinci tür Fredholm integral denklemleri olarak ifade edilmiştir. Bu çalışma sonucunda yüklemenin sadece gerilme dağılımını değiştirdiği ve temas bölgesinin uzunluğuna bir etkisi olmadığı görülmüştür.

Ratwani ve Erdoğan (1973), baskı uygulanan elastik tabaka ile üzerine oturduğu elastik yarım uzay arasındaki sürtünmesiz değme problemini incelemiştir. Problemden temas bölgesinde sadece basınç gerilmeleri olacağı kabul edilmiştir. Problem basınç gerilmelerinin bilinmeyen olarak alındığı tekil integral denklem takımına indirgenmiştir. Problem tekil yük, keskin kenarlı düz panç ve dairesel geometrilikli panç profilleri için incelenmiştir.

Erdoğan ve Ratwani (1974), iki elastik çeyrek düzlem üzerine oturtulmuş ve üzerine baskı uygulanan elastik bir tabakanın sürtünmesiz değme problemi incelemiştir. Tabaka için Fourier dönüşümlerinin ve çeyrek düzlemler için Mellin dönüşümünün kullanıldığı problem, bilinmeyen olarak temas gerilmelerinin alındığı genelleştirilmiş Cauchy tipi integral denkleme dönüştürülmüştür. Farklı yükleme durumları için gerilme tekilliği, temas bölgesinin boyu ve temas bölgesindeki gerilme dağılımları için sayısal sonuçlar verilmiştir. Çalışma sonucunda temas bölgesi boyunun yükün dağılımına bağlı olduğu ve yükün şiddetinden bağımsız olduğu gösterilmiştir.

Spence (1975), dikdörtgen veya eğrisel profillerdeki dönel simetrik pançla bastırılan yarı sonsuz düzlemin sürtünmeli değme problemini incelemiştir. Sürtünme Coulomb kanununa göre ele alınmış ve problemin karışık sınır değer problemi olarak formülasyonu yapılmıştır.

Erdoğan ve Gupta (1976), eksantrik yüklü rijit bir panç ile bastırılan elastik bir kama problemini incelemiştir. Problem Mellin dönüşümünden faydalanılarak, bilinmeyen olarak temas bölgesindeki gerilme dağılımının alındığı Cauchy tipi tekil integral denklem takımına dönüştürülmüştür. Problem farklı yükleme ve kama durumları için çözülmüştür. Düz tabanlı rijit panç, yükleme simetrik olmadığından bir miktar dönme yapmaktadır. Benzer şekilde yükleme simetrik olsa bile zeminin simetrik olmamasından dolayı temelde de bir miktar dönme oluşabilmektedir.

Aksoğan (1978), yaptığı bir çalışma ile Erdoğan tarafından geliştirilen ve iki veya üç parçalı sınır değer problemleri ile ilgili tekil integral denklem çözüm yöntemini çok parçalı sınır değer problemlerine de uygulanacak şekilde geliştirmiştir. Böylece çok parçalı karışık sınır değer problemlerinin çözümleri, iki veya üç parçalı karışık sınır değer problemlerinden hareketle yapılabilmektedir.

Adams (1978), üzerinde sabit hızla tekil yük hareket eden ve elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan elastik bir tabakanın temas problemini incelemiştir. Araştırmacı çözümün, simetrik olan ve olmayan iki problemin toplamı şeklinde ele alınabileceğini göstermiştir. İntegral denklemlere indirgenen bu karışık sınır değer problemi için çözüm aranmıştır.

Çakıroğlu (1979), üzerine rijit düz bir blokla bastırılan elastik bir tabaka ile üzerine oturduğu elastik yarı düzlem arasında meydana gelen sürekli ve süreksiz değme problemini incelemiştir. Sürekli durum için, ilk ayrılma uzaklığı ve ilk ayrılma yükü, bu yükten büyük yükler için meydana gelen ayrılma bölgesinin boyu ile ilgili sayısal sonuçlar verilmiştir. Ayrıca her iki durumda blok altındaki ve tabaka yarı düzlem arasındaki değme gerilmelerinin yayılışı ile ilgili sayısal sonuçlar sunulmuştur.

Boduroğlu ve Delale (1980), elastik bir tabaka ile üzerine oturduğu elastik yarı düzlem arasındaki sürtünmeli değme problemini incelemiştir. Problem, Fourier dönüşüm teknikleri kullanılarak temas gerilmelerinin bilinmeyen olarak alındığı ikinci tür tekil integral denkleme dönüştürülerek çözüm aranmıştır. Çalışma sonucunda sürtünmenin değme alanını büyüttüğü ve bunun sonucunda gerilme sivriliklerinin azaldığı gözlenmiştir. Tabakanın ağırlığı göz önüne alındığında, tabaka ile yarı düzlem arasında bir ayrılmanın zor olacağı sonucuna varılmıştır.

Keer vd. (1984), üzerine rijit bir bloğun etkidiği elastik çeyrek düzlem problemini incelemiştir. Problemin çözümünde iteratif yöntem kullanılmıştır. Önce tahmini bir değme bölgesi seçilmiş ve bu bölge dikdörtgensel bölgelere ayrılarak her bir bölgede gerilmelerin sabit olduğu düşünülmüştür. Bu şekilde integral denklem lineer denklem sisteminin çözümüne dönüştürülerek değme bölgesinin uzunluğu ve değme bölgesindeki gerilme dağılımı elde edilmeye çalışılmıştır.

Fabrikant ve Sankar (1984), üzerine panç ile bastırılan, homojenliği ve derinliği değişen elastik yarı düzlem probleminin çözümünü dönele simetrik alan olarak incelemişler ve panç altında meydana gelen değme gerilmeleri ile ilgili ifadeleri elde etmişlerdir.

King ve O'Sullivan (1987), üzerine dairesel rijit bir panç ile bastırılan elastik bir tabaka ile üzerine oturduğu elastik yarı düzlem arasındaki sürtünmeli değme problemini incelemiştir. Problem düzlem şekil değiştirme problemi olarak ele alınmış ve ara yüzeydeki gerilme dağılımları incelenmiştir.

Çakıroğlu ve Erdöl (1989), malzeme sabitleri ve yükseklikleri farklı üst üste oturan iki elastik tabaka ve üzerine oturdukları elastik zemin arasındaki sürtünmesiz değme problemini incelemişlerdir. Problemdede, zeminin küttele kuvveti ihmal edilmiş olup tabakalar, kendi ağırlıkları ve üstten etkiyen tekil yük veya yayılı yükün etkisi altında bulunmaktadır. Bu çalışma sonucunda yer değiştirmeler, ilk ayrılma uzaklıkları ve bu ayrılmayı meydana getirecek dış yüklere ait sayısal sonuçlar verilmiştir.

Çakıroğlu (1990), elastik yarım düzleme oturan bileşik tabakaların sürtünmesiz temas problemini incelemiştir. Problemin simetrik yayılı yükün genel hali için formülasyonu verilmiştir ve Fourier dönüşüm teknikleri kullanılarak elde edilen integral denklemler sayısal yöntemlerle çözülmüştür.

Çakıroğlu ve Çakıroğlu (1991), elastik bir tabaka ile üzerine oturduğu yarı sonsuz elastik düzlem arasındaki sürtünmesiz değme problemini sürekli ve süreksiz durum için incelemişlerdir. Sürekli durum için, uygulanan yük ile ilk ayrılma sağlanmış ve değme yüzeyindeki gerilme dağılımları, uzunluğun genişliğe farklı oranları ve farklı malzeme özellikleri için grafiklerle gösterilmiştir. Süreksiz durum için ise problem tekil integral denkleme indirgenmiş ve bu denklem Gauss-Chebyshev integrasyon formülasyonu ile sayısal olarak çözülmüştür.

Binienda ve Pindera (1994), rijit parabolik bir pańçla bastırılan metal-matriks ve polimer-matriks kompozit malzemelerden oluşan yarım düzlem problemini incelemişlerdir. Çalışmada, düzlemlerin gösterdikleri benzerlikler ve farklılıklar araştırılarak değme bölgesindeki normal gerilme ve değme uzunluğunun yük ile değişimi incelenmiştir. Ayrıca izotropik, ortotropik ve monoklinik yarım düzlemler için malzeme özelliklerinin etkileri sürtünmesiz değme problemi için oluşturulan bir metotla analiz edilmiştir.

Birinci vd. (1997), farklı malzeme özellikleri ve yüksekliklerden oluşan tam bağlı iki elastik tabakadan oluşan bileşik tabaka ile üzerine oturdukları elastik zemin arasındaki sürekli değme problemini incelemişlerdir.

Birinci ve Erdöl (1999), basit mesnetler üzerine oturan ağırlıksız iki tabakadan oluşan bileşik tabakanın sürtünmesiz değme problemini incelemişlerdir. Bileşik tabakanın üstten dairesel veya dikdörtgensel bloklar ile bastırılması sonucu oluşan değme uzunlukları ve değme gerilmeleri her iki durum için de elde edilmiştir.

Özşahin (2000), iki rijit blok üzerine oturtulmuş iki elastik tabakadan oluşan bileşik bir tabakanın sürekli ve süreksiz değme problemini incelemiştir. Problemdede tabaka üzerine sonlu bir bölgede yayılı yük etki ettirilmiş ve sürekli değme için ilk ayrılmayı meydana

getiren kritik yük sürtünme olması ve olmaması durumları için ayrı ayrı hesaplanmıştır. Süreksiz değme için ise sürtünmenin olmadığı kabul edilerek, problem ilk ayrılmanın iki elastik tabaka arasında veya bileşik tabaka ile rijit düz bloklar arasında meydana gelme durumları için ayrı ayrı çözülmüştür.

Kahya vd. (2001), rijit bir temele oturan ve üzerine dairesel, parabolik veya dikdörtgen profile sahip rijit bir panç aracılığı ile yüklenen elastik bir tabakanın değme problemini kütle kuvvetlerinin ve sürtünmenin ihmal edildiği durum için incelemiştir.

Birinci vd. (2001), elastik bir zemin üzerine oturan, farklı yükseklik ve elastik sabitlere sahip iki farklı elastik tabakadan oluşan bileşik bir tabakanın değme problemini incelemiştir. İntegral dönüşüm teknikleri kullanılarak tabakanın gerilme ve yer değiştirme bileşenleri elde edilmiştir. Tabakanın herhangi bir noktasındaki gerilme ve yer değiştirme değerleri araştırılarak grafikleri çizilmiştir.

Kahya (2003), ortotrop ve elastik iki tabakanın birleşiminden oluşan ve rijit bir temel üzerine oturtulmuş tabakanın sürekli ve süreksiz değme problemini incelemiştir. Tabakalar arasında ilk ayrılmayı başlatan kritik yük değeri, ilk ayrılma uzaklığı, kritik yükün aşılması durumunda tabakalar arasında meydana gelen ayrılma bölgesinin büyüklüğü ve açılma miktarı elde edilmiştir. Her iki durum için tabakaların ara yüzeyindeki değme gerilmesi dağılımı bulunmuştur.

Çömez vd. (2003,2004), üstten rijit bir panç ile bastırılan ve alttan rijit olarak mesnetlenmiş yapışık olmayan iki elastik tabakanın sürtünmesiz değme problemini incelemiştir.

Güler ve Erdoğan (2004,2007), yarım düzlem üzerine oturan ve fonksiyonel derecelendirilmiş özellikteki tabakanın sürtünmeli değme problemini incelemiştir. Problemden tabakanın kayma modülü derinliğe bağlı olarak değişmekte ve düşey ve yatay kuvvetler dikdörtgensel ve eğrisel profillere sahip değişik şekillerdeki pançlar ile tabakaya etki ettirilmiştir. Problem integral dönüşüm teknikleri kullanılarak tekil integral denkleme dönüştürülerek gerilme dağılımları elde edilmiştir.

Kahya vd. (2007), anizotrop elastik bir yarım düzlem üzerine oturan ve rijit bir panç ile bastırılan anizotrop elastik bir tabakanın değme problemini incelemiştir. Problem değme uzunluğunun ve değme gerilmelerinin bilinmeyen olduğu tekil bir integral denkleme indirgenmiştir.

Özşahin vd. (2007), rijit iki blok üzerine oturan farklı yükseklik ve elastik sabitlerden oluşan bileşik bir elastik tabakanın değme problemini incelemiştir. Tabakalar arasında

sürtünme olduğu kabul edilirken, rijit bloklar ile bileşik tabaka arasında sürtünme olmadığı kabul edilmiştir. Bileşik tabakanın üst yüzeyi sınırlı bir bölge için basınç yükü etkisi altında bırakılmış ve problem değme gerilmelerinin bilinmeyen olduğu tekil bir integral denkleme dönüştürülmüştür. Elde edilen integral denklemin sayısal çözümü yapılarak sonuçlar grafiklerle gösterilmiştir.

Çömez (2010), elastik yarım düzlem üzerine oturan ve rijit bir panç ile bastırılan elastik bir tabakanın ayrılmalı ve sürtünmeli değme problemini incelemiştir. Problem Fourier dönüşümleri kullanılarak değme boylarının ve değme gerilmelerinin bilinmeyen olduğu tekil integral denklemlere dönüştürülmüştür. Elde edilen denklemler Gauss-Jacobi integrasyon formülasyonu kullanılarak sayısal olarak çözülmüş ve sonuçlar grafiklerle gösterilmiştir.

Wang vd. (2012), üst yüzeyleri tek bir düzlem üzerinde olan birbiri ile bitişik iki çeyrek düzlemin temas problemini incelemiştir. Çalışmada problemin çözümü için sayısal bir çözüm yöntemi önerilmektedir. Problemin çözümünde üç boyutlu hızlı Fourier dönüşümü kullanılmış ve elde edilen sonuçların sonlu eleman analizinden bulunan sonuçlarla benzerlik gösterdiği görülmüştür.

### **1.1.2. Çalışmanın Amacı ve Kapsamı**

Bu çalışmada, iki elastik çeyrek düzlem üzerine oturan, homojen, izotrop elastik bir tabakanın sürtünmesiz ve ayrılmalı temas problemi elastisite teorisine göre incelenmiştir. Problemden tabakaya üstten rijit bir panç ile iletilen tekil bir yük ve simetrik şekilde yerleştirilmiş iki sabit yayılı yük etki ettirilmiştir.

Problemin amacı panç-tabaka ve tabaka-çeyrek düzlem arasındaki temas mesafelerinin ve bu temas yüzeyleri boyunca oluşacak temas gerilmesi dağılımlarının farklı yükleme, geometri ve malzeme özellikleri altında belirlenmesidir.

Birinci bölümde, temas problemlerinin tarihsel gelişiminden bahsedilmiş ve temas problemleri ile ilgili daha önce yapılmış bazı çalışmalar özetlenmiştir. Elastisite teorisine ait temel denklemlerden yola çıkılarak düzlem haldeki Navier denklemleri elde edilmiştir. Tabaka için Fourier integral dönüşümü ve çeyrek düzlem için ise Mellin integral dönüşümü kullanılarak gerilme ve yer değiştirme bileşenlerinin genel denklemleri elde edilmiştir.

İkinci bölümde problemin tanımı yapılmıştır. Birinci bölümde tabaka ve çeyrek düzlem için elde edilen gerilme ve yer değiştirme ifadelerine problemin sınır şartları uygulanarak tabaka ve çeyrek düzlem için ayrı ayrı dört bilinmeyenli dört denklem elde edilerek gerilme ve yer değiştirme ifadelerindeki bilinmeyen katsayılar bulunmuştur. Elde edilen bu katsayılar temas yüzeyleri boyunca oluşan gerilme dağılımları bilinmeyenlerdir. Panç ile tabaka arasındaki temas yüzeyi boyunca tabakanın düşey yer değiştirme fonksiyonunun türevinin, panç profilini tanımlayan fonksiyonun türevine eşit olması şartı kullanılarak problemin birinci tekil integral denklemi elde edilmiştir. Tabaka ile çeyrek düzlem arasındaki temas mesafesi boyunca tabakanın düşey yer değiştirme fonksiyonunun türevinin, çeyrek düzlemin düşey yer değiştirme fonksiyonunun türevine eşit olması şartı kullanılarak da problemin ikinci tekil integral denklemi elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen bu integral denklemler boyutsuzlaştırılarak elde edilen integral denklemlerin sayısal çözümü Gauss-Jacobi formülasyonu kullanılarak yapılmıştır.

Üçüncü bölümde, probleme ilişkin sayısal uygulamalar yapılmıştır. Farklı yükleme, malzeme ve geometrik verilere göre panç-tabaka ve tabaka-çeyrek düzlem arasındaki temas boyları ve temas yüzeyleri boyunca oluşan gerilme dağılımları boyutsuz olarak elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar tablo ve grafiklerle sunulmuş ve bunlarla ilgili değerlendirmeler yapılmıştır.

Dördüncü bölümde çalışmadan çıkarılan sonuçlar sıralanmıştır. Bu son bölümü yararlanan kaynaklar izlemektedir.

## **1.2. Genel Denklemlerin Elde Edilmesi**

Bu kısımda, elastisite teorisinden yararlanılarak gerilme ve yer değiştirme bileşenlerinin genel ifadeleri elde edilecektir. Bu amaçla, önce bünye denklemleri ve yer değiştirme-şekil değiştirme bağıntıları kullanılarak denge denklemleri, yer değiştirmeler cinsinden yazılarak Navier denklemleri elde edilecektir. Yer değiştirme bileşenlerinin gerekli türevleri Navier denklemlerinde yerine yazılarak elde edilecek adi diferansiyel denklem takımının çözümü sonucunda da yer değiştirme bileşenlerinin genel ifadeleri bulunacaktır. Bu ifadelerin bünye denklemlerinde yerine yazılması ile de gerilme bileşenlerinin genel ifadeleri belirlenecektir.

## 1.2.1 Elastik Tabakaya İlişkin Denklemlerin Elde Edilmesi

### 1.2.1.1 Navier Denklemleri

Üç boyutlu halde bir cisim için  $x, y, z$  dik koordinat takımında  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  gerilme bileşenlerini ve  $X, Y, Z$  kütle kuvveti bileşenlerini göstermek üzere bir nokta civarında gerilme değişimlerini gösteren denge denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \quad (1.3)$$

Yer değiştirme ve şekilde değiştirme bileşenleri arasındaki bağıntılar;

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.3)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.4)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.5)$$



$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.6)$$

olarak tanımlanabilmektedir.

Burada  $u, v, w$  sırasıyla  $x, y, z$  doğrultularındaki yer değiştirme bileşenlerini,  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  ise birim şekil değiştirme bileşenlerini göstermektedir.

Bünye denklemleri ise;

$$\sigma_x = \lambda e + 2G \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.1)$$

$$\sigma_y = \lambda e + 2G \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.2)$$

$$\sigma_z = \lambda e + 2G \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.3)$$

$$\tau_{xy} = G \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (3.4)$$

$$\tau_{xz} = G \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (3.5)$$

$$\tau_{yz} = G \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (3.6)$$

olarak yazılabilmektedir.

Bu denklemlerde;  $e$  hacim değiştirme oranını,  $\lambda$  Lamé sabitini ve  $G$  Kayma modülünü göstermekte olup,

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (4)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{2\nu G}{(1-2\nu)} \quad (5)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (6)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Burada;  $E$  Elastisite modülünü ve  $\nu$  Poisson oranını göstermektedir.

(3) ifadeleri (1) ifadelerinde yerine yazılırsa Navier denklemleri;

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G\Delta u + X = 0 \quad (7.1)$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial y} + G\Delta v + Y = 0 \quad (7.2)$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial z} + G\Delta w + Z = 0 \quad (7.3)$$

olarak elde edilir.

Burada  $\Delta$  Laplace operatörü olup aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (8)$$

### 1.2.1.2 Navier Denklemlerinin İki Boyutlu Hale İndirgenmesi

Analitik çözümü yapılacak problem iki boyutlu olduğundan (7) ifadesi ile verilen Navier denklemlerinin iki boyutlu hale indirgenmesi gerekir. Navier denklemlerinde  $z$  yönündeki birim şekil değiştirme bileşenleri  $\varepsilon_z, \gamma_{zx}, \gamma_{yz}$  ve kütle kuvveti bileşenleri  $X, Y, Z$  sıfır alınıp denklemler düzenlenirse, düzlem şekil değiştirme için Navier denklemleri aşağıda verildiği gibi elde edilir.

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G\Delta u = 0 \quad (9.1)$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial y} + G \Delta v = 0 \quad (9.2)$$

(9) ifadeleri G ile bölünüp gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$(\alpha + 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0 \quad (10.1)$$

$$(\alpha + 1) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \quad (10.2)$$

bir  $\alpha$  sabiti yardımı ile (10) ifadesindeki gibi yazılabilir (Birinci, 1998). Burada,

$$\alpha = \frac{\lambda + G}{G} \quad (11)$$

şeklindedir. İki boyutlu elastisite denklemlerinden yola çıkılarak düzlem gerilme hali için elde edilen iki boyutlu Navier denklemleri,

$$\alpha = \frac{2E}{G(1-\nu)} \quad (12)$$

değeri için (10) numaralı denklemlerle özdeştir.

### 1.2.1.3. Navier Denklemlerinin İntegral Dönüşümleri

Problem y eksenine göre simetrik olduğundan, yer değiştirmeler için:

$$u(x, y) = -u(-x, y) \quad (13.1)$$

$$v(x, y) = v(-x, y) \quad (13.2)$$

eşitlikleri sağlanır. Navier denklemlerinin yer değiştirmelerin kısmi türevlerini içermesi problemin çözümünü zorlaştırır.  $u, v$  yer değiştirmelerinin sırasıyla Fourier sinüs ve Fourier kosinüs dönüşümleri alınırsa,

$$\phi(\xi, y) = F_s[u(x, y); x \rightarrow \xi] = \int_0^{\infty} u(x, y) \sin \xi x dx \quad (14.1)$$

$$\psi(\xi, y) = F_c[v(x, y); x \rightarrow \xi] = \int_0^{\infty} v(x, y) \cos \xi x dx \quad (14.2)$$

elde edilir. (14) ifadelerinin ters Fourier dönüşümleri alınarak yer değiştirmeler:

$$u(x, y) = F_s[\phi(x, y); \xi \rightarrow x] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \phi(\xi, y) \sin \xi x dx \quad (15.1)$$

$$v(x, y) = F_c[\psi(\xi, y); \xi \rightarrow x] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \psi(\xi, y) \cos \xi x dx \quad (15.2)$$

şeklinde elde edilir. Yer değiştirmelerin bazı türevlerinin Fourier dönüşümleri de aşağıdaki şekildedir.

$$F_s\left[\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2}; x \rightarrow \xi\right] = -\xi^2 \phi \quad (16.1)$$

$$F_s\left[\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2}; x \rightarrow \xi\right] = \frac{d^2 \phi}{dy^2} \quad (16.2)$$

$$F_s\left[\frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y}; x \rightarrow \xi\right] = -\xi \frac{d\psi}{dy} \quad (16.3)$$

$$F_c\left[\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y}; x \rightarrow \xi\right] = \xi \frac{d\phi}{dy} \quad (16.4)$$

$$F_c\left[\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2}; x \rightarrow \xi\right] = -\xi^2 \psi \quad (16.5)$$

$$F_c\left[\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2}; x \rightarrow \xi\right] = \frac{d^2 \psi}{dy^2} \quad (16.6)$$

(10.1) ifadesi  $\sin \xi x$  ve (10.2) ifadesi  $\cos \xi x$  ile çarpılır ve her iki ifadenin 0'dan sonsuza kadar  $\xi$  'ye göre integrali alınırsa;

$$\int_0^{\infty} \left[ (\alpha + 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] \sin \xi x d\xi = 0 \quad (17.1)$$

$$\int_0^{\infty} \left[ (\alpha + 1) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] \cos \xi x d\xi = 0 \quad (17.2)$$

elde edilir. (16) ifadeleri (17) ifadelerinde yerine konup düzenlenirse;

$$\frac{d^2 \phi}{dy^2} - \xi^2 (1 + \alpha) \phi - \xi \alpha \frac{d\psi}{dy} = 0 \quad (18.1)$$

$$(1 + \alpha) \frac{d^2 \psi}{dy^2} - \xi^2 \psi + \xi \alpha \frac{d\phi}{dy} = 0 \quad (18.2)$$

olarak elde edilirler. (18.1) ifadesi  $y$  'ye göre iki, (18.2) ifadesi  $y$  'ye göre bir defa türetildikten sonra ilk ifadeden edilen  $\frac{d^3 \psi}{dy^3}$  değeri ikinci ifadede yerine yazılır ve bu denklem  $\frac{\xi \alpha}{1 + \alpha}$  ile çarpıldıktan sonra düzenlenirse dördüncü mertebeden, homojen adi diferansiyel denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{d^4 \phi}{d^4 y} - 2\xi^2 \frac{d^2 \phi}{dy^2} + \xi^4 \phi = 0 \quad (19)$$

Bu diferansiyel denklemin çözümü;

$$\phi = e^{\lambda y} \quad (20)$$

olarak aranır ve (19) ifadesinde yerine yazılıp düzenlenirse:

$$\lambda^4 - 2\xi^2 \lambda^2 + \xi^4 = 0 \quad (21)$$

karakteristik denklemini elde edilir. Bu denklemin kökleri:

$$\lambda_{1,2} = \xi \quad (22.1)$$

$$\lambda_{3,4} = -\xi \quad (22.2)$$

olarak bulunur. (19) ifadesinde verilen diferansiyel denklemin genel çözümü ise

$$\phi = (A_1 + A_2 y)e^{-\xi y} + (A_3 + A_4 y)e^{\xi y} \quad (23)$$

olarak bulunur.  $\phi$  fonksiyonunun (23) ifadesinde verilen değeri ve bu fonksiyonun  $y$ 'ye göre birinci ve ikinci türevi alınıp (18.1) ifadesinde yerine konulup gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\psi = \left[ A_1 + \left( \frac{\kappa}{\xi} + y \right) A_2 \right] e^{-\xi y} + \left[ -A_3 + \left( \frac{\kappa}{\xi} - y \right) A_4 \right] e^{\xi y} \quad (24)$$

olarak elde edilir. Bu ifadelerdeki  $\kappa$  değeri düzlem şekil değiştirme halinde;

$$\kappa = 3 - 4\nu \quad (25)$$

ve düzlem gerilme halinde;

$$\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu} \quad (26)$$

olduğu bilinmektedir. (23) ve (24) nolu ifadeler (15) nolu ifadelerde yerlerine yazılırsa, yer değiştirme bileşenleri;

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ (A_1 + A_2 y) e^{-\xi y} + (A_3 + A_4 y) e^{\xi y} \right] \sin \xi x d\xi \quad (27.1)$$

$$v(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[ A_1 + \left( \frac{\kappa}{\xi} + y \right) A_2 \right] e^{-\xi y} + \left[ -A_3 + \left( \frac{\kappa}{\xi} - y \right) A_4 \right] e^{\xi y} \right\} \cos \xi x d\xi \quad (27.2)$$

olarak bulunur.

(27) ifadelerinin gerekli türevleri alınıp (3) nolu ifadelerde yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa, gerilme bileşenleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\frac{1}{2G} \sigma_x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[ \xi (A_1 + A_2 y) - \frac{3-\kappa}{2} A_2 \right] e^{-\xi y} + \left[ \xi (A_3 + A_4 y) + \frac{3-\kappa}{2} A_4 \right] e^{\xi y} \right\} \cos \xi x dx \quad (28.1)$$

$$\frac{1}{2G} \sigma_y = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ - \left[ \xi (A_1 + A_2 y) + \frac{\kappa+1}{2} A_2 \right] e^{-\xi y} + \left[ -\xi (A_3 + A_4 y) + \frac{\kappa+1}{2} A_4 \right] e^{\xi y} \right\} \cos \xi x dx \quad (28.2)$$

$$\frac{1}{2G} \tau_{xy} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ - \left[ \xi (A_1 + A_2 y) + \frac{\kappa-1}{2} A_2 \right] e^{-\xi y} + \left[ \xi (A_3 + A_4 y) - \frac{\kappa-1}{2} A_4 \right] e^{\xi y} \right\} \sin \xi x dx \quad (28.3)$$

## 1.2.2. Çeyrek Düzleme İlişkin Denklemlerin Elde Edilmesi

### 1.2.2.1. Gerilme Fonksiyonu ve Gerilme Fonksiyonlarının Mellin Dönüşümleri

Düzlem elastisite problemlerinin çözümünde Airy gerilme fonksiyonlarının kullanılması, oldukça kolaylık sağlar. Burada Airy gerilme fonksiyonu:

$$\varphi = \varphi(r, \theta) \quad (29)$$

olarak tamamlanırsa, bilinmeyen gerilme bileşenleri polar koordinatlarda kütle kuvvetsiz halde aşağıdaki şekilde ifade edilebilirler.

$$\sigma_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad (30.1)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \quad (30.2)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} \quad (30.3)$$

(30) ifadeleriyle verilen gerilme bileşenleri kullanılarak yazılan denge denklemleri özdeş olarak sağlanır ve uygunluk şartı aşağıdaki hale gelir.

$$\Delta(\sigma_r + \sigma_\theta) = 0 \quad (31)$$

Burada,  $\Delta$  polar koordinatlar için Laplace operatörü olup aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (32)$$



(30) ifadeleriyle verilen gerilme bileşenleri (31) ifadelerinde yerlerine yazılırsa, problemin çözümü Airy gerilme fonksiyonunun arandığı aşağıdaki diferansiyel denklemin bulunmasına indirgenmiş olur:

$$\Delta\Delta\varphi = 0 \quad (33)$$

Verilen bir  $f(r, \theta)$  fonksiyonu için  $r$  değişkenine göre Mellin dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$f^M(s, \theta) = M[f(r, \theta); r \rightarrow s] = \int_0^{\infty} f(r, \theta) r^{s-1} dr \quad (34)$$

Burada  $f^M$  Mellin uzayına taşınmış fonksiyonu ve  $s$  dönüşüm parametresini göstermektedir.  $f^M$  fonksiyonunun ters dönüşümü ise;

$$f(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f^M r^{-s} ds \quad (0 \leq r < \infty) \quad (35)$$

şeklinde ifade edilebilir.  $n$ . dereceye kadar türevleri olan bir  $f(r, \theta)$  fonksiyonu için;

$$\left( \frac{\partial^n f}{\partial \theta^n} \right)^M = M \left[ \frac{\partial^n f}{\partial \theta^n}; r \rightarrow s \right] = \frac{\partial^n f^M}{\partial \theta^n} \quad (36.1)$$

$$\left( r^m \frac{\partial^n f}{\partial r^n} \right)^M = M \left[ r^m \frac{\partial^n f}{\partial r^n}; r \rightarrow s \right] = (-1)^n \frac{\Gamma(s+m)}{\Gamma(s+m-(n-1)-1)} M[f; r \rightarrow s+(m-n)] \quad (36.2)$$

Mellin dönüşümleri yazılabilir. Airy gerilme fonksiyonunun Mellin dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\varphi^M = M[\varphi; r \rightarrow s] = \int_0^{\infty} \varphi r^{s-1} dr \quad (37)$$

(33) ifadesinde verilen uygunluk denklemi  $r^4$  ile çarpılarak Mellin dönüşümü alınırsa:

$$\int_0^{\infty} \left[ r^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + r^3 \frac{\partial}{\partial r} + r^4 \frac{\partial^4}{\partial^4} \right] \Delta \varphi r^{s-1} dr = 0 \quad (38.1)$$

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - (s+2) + (s+3)(s+2) \right] M[\Delta \varphi; r \rightarrow s+2] = 0 \quad (38.2)$$

olarak bulunur. (38.2) ifadesi düzenlenirse:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + (s+2)^2 \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + s^2 \right) \varphi^M = 0 \quad (39)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü;

$$\varphi^M = e^{\lambda \theta} \quad (40)$$

şeklinde aranır ve (39) ifadelerinde yerine yazılırsa:

$$(\lambda^2 + s^2)(\lambda^2 + (s+2)^2) e^{\lambda \theta} = 0 \quad (41)$$

karakteristik denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri;

$$\lambda_{1,2} = \pm is \quad (42.1)$$

$$\lambda_{3,4} = \pm i(s+2) \quad (42.2)$$

olarak bulunur. (39) ifadesinin genel çözümü;

$$\varphi^M = B_1 e^{is\theta} + B_2 e^{-is\theta} + B_3 e^{i(s+2)\theta} + B_4 e^{-i(s+2)\theta} \quad (43)$$

olarak elde edilir.

(30) nolu denklemlerde verilen gerilme bileşenleri  $r^2$  ile çarpıldıktan sonra Mellin dönüşümleri alınırsa;

$$(r^2 \sigma_r)^M = \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - s \right) \varphi^M \quad (44.1)$$

$$(r^2 \sigma_\theta)^M = s(s+1) \varphi^M \quad (44.2)$$

$$(r^2 \tau_{r\theta})^M = (s+1) \frac{\partial}{\partial \theta} \varphi^M \quad (44.3)$$

olarak elde edilirler.

### 1.2.2.2. Yer Değiştirmelerin Mellin Dönüşümleri

Polar koordinatlarda yer değiştirme bileşenleri:

$$2Gu_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} + (1-\nu)r \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad (45.1)$$

$$2Gu_\theta = -\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + (1-\nu)r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (45.2)$$

olarak tanımlanabilir. Burada;

$$\Delta \Psi = 0 \quad (46.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) = \Delta \varphi \quad (46.2)$$

şeklindedir. Probleme ilişkin ikinci integral denklemin elde edilmesinde kullanılacak sınır şartı için  $\frac{\partial u_\theta}{\partial r}$  değerine ihtiyaç vardır. (45.2) numaralı ifade  $r$  'ye göre bir defa türetilirse;

$$2G \frac{\partial u_\theta}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} + (1-\nu) \left[ 2r \frac{\partial \Psi}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \right] \quad (47)$$

elde edilir. (47) ifadesi  $r^2$  ile çarpılıp Mellin dönüşümü alınırsa;

$$2G \left( r^2 \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right)^M = (s+1) \frac{\partial \varphi^M}{\partial \theta} + (1-\nu)(s+2)(s+1) M[\Psi; r \rightarrow s+2] \quad (48)$$

olur. Burada,  $M[\Psi; r \rightarrow s+2]$  ifadesi  $r^2 \Psi$  fonksiyonun Mellin dönüşümünü ifade etmektedir. (46.2) ifadesi  $r^2$  ile çarpılıp Mellin dönüşümü alınırsa;

$$(s+1) \frac{\partial}{\partial \theta} M[\Psi; r \rightarrow s+2] = \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + s^2 \right) \varphi^M \quad (49.1)$$

olarak elde edilir. (46.1) ifadesi  $r^4$  ile çarpılıp Mellin dönüşümü alınırsa;

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} M[\Psi; r \rightarrow s+2] = -(s+2)^2 M[\Psi; r \rightarrow s+2] \quad (49.2)$$

olur. (49.1) ifadesi  $\theta$  'ya göre türetilir ve (49.2) numaralı ifadeden  $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} M[\Psi; r \rightarrow s+2]$  değeri alınıp burada yerine yazılırsa:

$$M[\Psi; r \rightarrow s+2] = \frac{1}{(s+1)(s+2)^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + s^2 \right) \frac{\partial \varphi^M}{\partial \theta} \quad (50)$$

bulunur. (50) ifadesi (48) ifadesinde yerine yazılırsa;

$$2G\left(r^2 \frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)^M = \left(s+1 + \frac{1-\nu}{s+2} s^2\right) \frac{\partial \varphi^M}{\partial \theta} + \left(\frac{1-\nu}{s+2}\right) \frac{\partial^3 \varphi^M}{\partial \theta^3} \quad (51)$$

elde edilir. Denklem (43) 'ün birinci ve üçüncü türevleri alınıp (51) ifadesinde yerine yazılırsa;

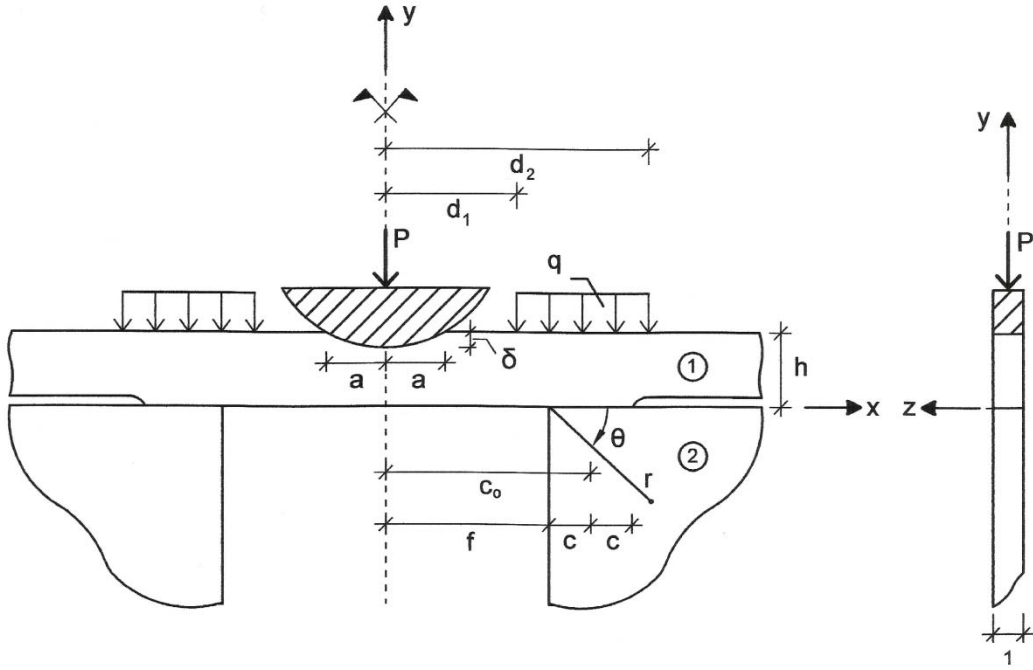
$$2G\left(r^2 \frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)^M = is(s+1)(B_1 e^{is\theta} - B_2 e^{-is\theta}) + \\ + i[(s+2)(s+1) + (1-\nu)(-4s-4)][B_3 e^{i(s+2)\theta} - B_4 e^{-i(s+2)\theta}] \quad (52)$$

elde edilmiş olur.

## 2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

### 2.1. Problemin Tanımı

Bu çalışmada, iki elastik çeyrek düzlem üzerine oturan, homojen, izotrop bir tabakanın sürtünmesiz ve ayrılmalı temas problemi elastisite teorisine göre incelenmiştir. Tabaka  $y$  eksenine göre simetrik olacak şekilde üstten rijit bir panç ile iletilen tekil bir yük ve iki sabit yayılı yük ile yüklenmektedir. Tekil yük  $x = 0$  simetri ekseninde ve yayılı yükler ise  $(d_1, d_2)$  ve  $(-d_2, -d_1)$  aralıklarında etkimektedir. Tabaka; panç ile  $(-a, +a)$  aralığında ve çeyrek düzlemler ile de  $(c_0 - c, c_0 + c)$  ve  $(-c_0 - c, -c_0 + c)$  aralıklarında temas halindedir. Problemden kütle kuvvetleri ihmal edilmiştir.



Şekil 2.1. Rijit dairesel bir panç aracılığı ile  $P$  tekil kuvveti ve simetrik olarak etkiyen yayılı bir yük ile yüklenen ve iki çeyrek düzlem üzerine oturan elastik bir tabaka

Tabaka  $x$  ekseninde boyunca  $(-\infty, \infty)$  aralığında uzanmaktadır. Çeyrek düzlemler ise  $(f, \infty)$  ve  $(-\infty, -f)$  aralıklarında uzanmaktadır. Problem  $y$  eksenine göre simetrik

olduğundan hesapların  $(0, +\infty)$  aralığında yapılması yeterlidir. Problem düzlem hal için inceleneceğinden  $z$  eksenini doğrultusundaki kalınlık birim olarak alınmıştır.

## 2.2. Kullanılacak Denklemler

Problemde (1) indisli ifadeler elastik tabaka ile ilgili denklemleri, (2) indisli ifadeler ise çeyrek düzlem ile ilgili denklemleri göstermektedir. Ayrıca  $h$  tabaka yüksekliğini,  $\kappa_1$  ve  $\kappa_2$  malzeme sabitlerini,  $G_1$  ve  $G_2$  kayma modüllerini,  $\nu_1$  ve  $\nu_2$  Poisson oranlarını göstermektedir. Burada verilmiş olan elastik sabitlere göre yer değiştirme ve gerilme ifadeleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

Tabaka için yer değiştirme ve gerilme ifadeleri (27) ve (28) ifadelerinden, sırasıyla;

$$u_1(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ (A_1 + A_2 y) e^{-\xi y} + (A_3 + A_4 y) e^{\xi y} \right] \sin \xi x d\xi \quad (53.1)$$

$$v_1(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[ A_1 + \left( \frac{\kappa}{\xi} + y \right) A_2 \right] e^{-\xi y} + \left[ -A_3 + \left( \frac{\kappa}{\xi} - y \right) A_4 \right] e^{\xi y} \right\} \cos \xi x d\xi \quad (53.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G_1} \sigma_{x_1}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[ \xi(A_1 + A_2 y) - \frac{3-\kappa}{2} A_2 \right] e^{-\xi y} \right. \\ \left. + \left[ \xi(A_3 + A_4 y) + \frac{3-\kappa}{2} A_4 \right] e^{\xi y} \right\} \cos \xi x dx \end{aligned} \quad (53.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G_1} \sigma_{y_1}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ - \left[ \xi(A_1 + A_2 y) + \frac{\kappa+1}{2} A_2 \right] e^{-\xi y} \right. \\ \left. + \left[ -\xi(A_3 + A_4 y) + \frac{\kappa+1}{2} A_4 \right] e^{\xi y} \right\} \cos \xi x dx \end{aligned} \quad (53.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G_1} \tau_{xy_1}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ - \left[ \xi(A_1 + A_2 y) + \frac{\kappa-1}{2} A_2 \right] e^{-\xi y} \right. \\ \left. + \left[ \xi(A_3 + A_4 y) - \frac{\kappa-1}{2} A_4 \right] e^{\xi y} \right\} \sin \xi x dx \end{aligned} \quad (53.5)$$

olarak yazılabilir.

Çeyrek düzlemde, polar koordinatlarda (30) ifadelerinde verilen gerilme ve yer değiştirme bileşenlerinin  $r^2$  ile çarpımlarının Mellin dönüşümleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\left(r^2 \sigma_{r_2}\right)^M = \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - s\right) \varphi^M \quad (54.1)$$

$$\left(r^2 \sigma_{\theta_2}\right)^M = s(s+1) \varphi^M \quad (54.2)$$

$$\left(r^2 \tau_{r\theta_2}\right)^M = (s+1) \frac{\partial}{\partial \theta} \varphi^M \quad (54.3)$$

$$2G \left(r^2 \frac{\partial u_{\theta_2}}{\partial r}\right)^M = is(s+1) (B_1 e^{is\theta} - B_2 e^{-is\theta}) + \\ + i[(s+2)(s+1) + (1-\nu)(-4s-4)] [B_3 e^{i(s+2)\theta} - B_4 e^{-i(s+2)\theta}] \quad (54.4)$$

Bu ifadelerde geçen  $(\dots)^M$  ifadesi ile parantez içindeki ifadenin Mellin dönüşümü anlatılmakta ve  $\varphi$  ifadesi Airy Gerilme fonksiyonu olup genel çözümü aşağıdaki şekildedir:

$$\varphi^M = B_1 e^{is\theta} + B_2 e^{-is\theta} + B_3 e^{i(s+2)\theta} + B_4 e^{-i(s+2)\theta}$$

Yukarıdaki ifadelerde geçen  $A_1, A_2, A_3, A_4$  katsayıları tabaka ile ilgili sınır şartları sağlatılarak,  $B_1, B_2, B_3, B_4$  katsayıları ise çeyrek düzlem ile ilgili sınır şartları sağlatılarak bulunacak sabitlerdir.

Problemin denge şartları da:

$$\int_{-a}^a p_1(x) dx = P \quad (55.1)$$



$$\int_{c_0-c}^{c_0+c} p_2(x)dx = \frac{P}{2} + Q \quad (55.2)$$

olarak ifade edilebilirler. Burada geçen  $Q$  ifadesi toplam yayılı yük şiddeti olup

$$Q = q(d_2 - d_1) \quad (56)$$

şeklinde tanımlanabilir.

### 2.3. Problemin Sınır Şartları

$u(x, y)$  ve  $v(x, y)$  yer değiştirme bileşenlerini,  $\sigma_x(x, y)$ ,  $\sigma_y(x, y)$  ve  $\tau_{xy}(x, y)$  de gerilme bileşenlerini göstermek üzere tabaka ile ilgili sınır şartları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\sigma_{y1}(x, h) = \begin{cases} -p_1(x) & 0 \leq x < a \\ -q & d1 \leq x \leq d2 \\ 0 & \text{diğer aralıklarda} \end{cases}, \quad (57.1)$$

$$\tau_{xy1}(x, h) = 0 \quad 0 \leq x < \infty \quad (57.2)$$

$$\sigma_{y1}(x, 0) = \begin{cases} -p_2(x) & c_0 - c \leq x \leq c_0 + c \\ 0 & \text{diğer aralıklarda} \end{cases}, \quad (57.3)$$

$$\tau_{xy1}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x < \infty \quad (57.4)$$

$$\frac{\partial v_1(x, h)}{\partial x} = f(x), \quad -a < x < a \quad (57.5)$$

$u_r(r, \theta)$  ve  $u_\theta(r, \theta)$  polar koordinatlarda yer değiştirme bileşenlerini,  $\sigma_r(r, \theta)$ ,  $\sigma_\theta(r, \theta)$  ve  $\tau_{r\theta}(r, \theta)$  de polar koordinatlarda gerilme bileşenlerini göstermek üzere çeyrek düzlem için sınır şartları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\sigma_{\theta_2}(r, 0) = \begin{cases} p_2(r) & 0 < r < 2c \\ 0 & \text{diğer aralıklarda} \end{cases}, \quad (58.1)$$

$$\tau_{r\theta_2}(r, 0) = 0, \quad 0 \leq r < \infty \quad (58.2)$$

$$\sigma_{\theta_2}(r, \frac{\pi}{2}) = 0, \quad 0 \leq r < \infty \quad (58.3)$$

$$\tau_{r\theta_2}(r, \frac{\pi}{2}) = 0, \quad 0 \leq r < \infty \quad (58.4)$$

$$\frac{\partial v_1(x, 0)}{\partial x} = \frac{\partial u_{\theta_2}(r, 0)}{\partial r}, \quad c_0 - c < x < c_0 + c, \quad 0 \leq r < 2c \quad (58.5)$$

Burada  $a$  tabaka-panç yarı temas uzunluğunu,  $c$  tabaka-çeyrek düzlem yarı temas uzunluğunu ve  $c_0$  tabaka-çeyrek düzlem temas yüzeyinin orta noktasının  $x$  eksenine olan uzaklığını göstermektedir.  $q$  yayılı yükün şiddetini,  $p_1(x)$  tabaka-panç temas yüzeyi boyunca meydana gelen temas gerilmelerini,  $p_2(x)$  ve  $p_2(r)$  ise tabaka-çeyrek düzlem temas yüzeyi boyunca meydana gelen temas gerilmelerini göstermektedir.  $f(x)$  ise panç şekil fonksiyonunun  $x$ 'e göre türevini göstermektedir.

Probleme ilişkin dairesel panç için şekil fonksiyonu,

$$F(x) = R + h - \delta - (R^2 - x^2)^{0.5} \quad (59)$$

ve bu fonksiyonun  $x$ 'e göre türevi

$$f(x) = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{x}{(R^2 - x^2)^{0.5}} \cong \frac{x}{R} \quad R \gg x \quad (60)$$

olarak ifade edilebilirler. Bu ifadelerde geçen  $\delta$  simetri ekseninde tabakada oluşan en büyük düşey yer değiştirme miktarını ve  $R$  dairesel pançın yarıçapını göstermektedir.

#### 2.4. Katsayıların Belirlenmesi

(57.1-57.4) denklemleri ile verilmiş olan sınır şartlarının ters Fourier dönüşümleri alınması ile aşağıdaki gibi dört bilinmeyenli dört denklem elde edilir.

$$2G_1 \left\{ - \left[ \xi(A_1 + A_2h) + \frac{\kappa_1 + 1}{2} A_2 \right] e^{-\xi h} + \left[ -\xi(A_3 + A_4h) + \frac{\kappa_1 + 1}{2} A_4 \right] e^{\xi h} \right\} = -p_1(\xi) - p_3(\xi) \quad (61.1)$$

$$2G_1 \left\{ - \left[ \xi(A_1 + A_2h) + \frac{\kappa_1 - 1}{2} A_2 \right] e^{-\xi h} + \left[ \xi(A_3 + A_4h) - \frac{\kappa_1 - 1}{2} A_4 \right] e^{\xi h} \right\} = 0 \quad (61.2)$$

$$2G_1 \left\{ - \left[ \xi(A_1 + A_2h) + \frac{\kappa_1 + 1}{2} A_2 \right] + \left[ -\xi(A_3 + A_4h) + \frac{\kappa_1 + 1}{2} A_4 \right] \right\} = -p_2(\xi) \quad (61.3)$$

$$2G_1 \left\{ - \left[ \xi(A_1 + A_2h) + \frac{\kappa_1 - 1}{2} A_2 \right] + \left[ \xi(A_3 + A_4h) - \frac{\kappa_1 - 1}{2} A_4 \right] \right\} = 0 \quad (61.4)$$

Burada;

$$p_1(\xi) = \int_0^{\infty} p_1(x) \cos \xi x dx = \int_0^a p_1(t_1) \cos \xi t_1 dt_1 \quad (62.1)$$

$$p_2(\xi) = \int_0^{\infty} p_2(x) \cos \xi x dx = \int_{c_0 - c}^{c_0 + c} p_2(t_2) \cos \xi t_2 dt_2 \quad (62.2)$$

$$p_3(\xi) = \int_0^{\infty} q \cos \xi x dx = q \int_{d_1}^{d_2} \cos \xi t_3 dt_3 = -\frac{q}{\xi} [\sin \xi d_2 - \sin \xi d_1] \quad (62.3)$$

şeklindedir. Denklemlerde geçen  $p_1(\xi)$  ve  $p_2(\xi)$  bilinmeyen temas gerileme fonksiyonları olup daha sonraki kısımlarda integral denklemlerin çözümlerinden elde edilecektir.

(61.1-61.4) denklemlerinin ortak çözümü sonucunda, bilinmeyenler  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  ve  $A_4$  katsayıları;

$$A_1 = \frac{1}{4G_1\xi\Delta_A} [p_1(\xi)A_{11} + p_2(\xi)A_{12} + p_3(\xi)A_{13}] \quad (63.1)$$

$$A_{11} = e^{-\xi h} (2\xi K_1 h + \kappa_1 - 1) - e^{-3\xi h} (2\xi h + \kappa_1 - 1) \quad (63.2)$$

$$A_{12} = (\kappa_1 - 1) [e^{-2\xi h} (-2\xi h + 1) - 1] - 4\xi^2 h^2 e^{-2\xi h} \quad (63.3)$$

$$A_{13} = e^{-\xi h} (2\xi K_1 h + \kappa_1 - 1) - e^{-3\xi h} (2\xi h + \kappa_1 - 1) \quad (63.4)$$

$$A_2 = \frac{1}{2G_1\Delta_A} [p_1(\xi)A_{21} + p_2(\xi)A_{22} + p_3(\xi)A_{23}] \quad (64.1)$$

$$A_{21} = -e^{-\xi h} (2\xi h + 1) + e^{-3\xi h} \quad (64.2)$$

$$A_{22} = e^{-2\xi h} (2\xi h - 1) + 1 \quad (64.3)$$

$$A_{23} = -e^{-\xi h} (2\xi h + 1) + e^{-3\xi h} \quad (64.4)$$

$$A_3 = \frac{1}{4G_1\xi\Delta_A} [p_1(\xi)A_{31} + p_2(\xi)A_{32} + p_3(\xi)A_{33}] \quad (65.1)$$

$$A_{31} = e^{-\xi h} (2\xi h - \kappa_1 + 1) - e^{-3\xi h} (2\xi K_1 h - \kappa_1 + 1) \quad (65.2)$$

$$A_{32} = (\kappa_1 - 1) [e^{-2\xi h} (2\xi h + 1) - e^{-4\xi h}] - 4\xi^2 h^2 e^{-2\xi h} \quad (65.3)$$

$$A_{33} = e^{-\xi h} (2\xi h - \kappa_1 + 1) - e^{-3\xi h} (2\xi K_1 h - \kappa_1 + 1) \quad (65.4)$$

$$A_4 = \frac{1}{2G_1\Delta_A} [p_1(\xi)A_{41} + p_2(\xi)A_{42} + p_3(\xi)A_{43}] \quad (66.1)$$

$$A_{41} = -e^{-\xi h} - e^{-3\xi h} (2\xi h - 1) \quad (66.2)$$

$$A_{42} = e^{-2\xi h} (2\xi h + 1) - e^{-4\xi h} \quad (66.3)$$

$$A_{43} = -e^{-\xi h} + e^{-3\xi h} (-2\xi h + 1) \quad (66.4)$$

olarak elde edilir. Burada;

$$\Delta_A = e^{-4\xi h} - e^{-2\xi h} (4\xi^2 h^2 + 2) + 1 \quad (67)$$

şeklindedir.

Çeyrek düzlem için (58) de verilen (1,2,3,4) numaralı denklemlerin  $r^2$  ile çarpılıp Mellin dönüşümleri alınıp (44) nolu denklemlerde verilen ilgili gerilme ifadelerinde yerine yazılırsa, aşağıdaki dört bilinmeyenli dört denklem elde edilir.

$$s(s+1)B_1 + s(s+1)B_2 + s(s+1)B_3 + s(s+1)B_4 = p_2(s) \quad (68.1)$$

$$sB_1 - sB_2 + (s+2)B_3 - (s+2)B_4 = 0 \quad (68.2)$$

$$e^{\frac{\pi}{2}is} B_1 + e^{-\frac{\pi}{2}is} B_2 + e^{\frac{\pi}{2}i(s+2)} B_3 + e^{-\frac{\pi}{2}i(s+2)} B_4 = 0 \quad (68.3)$$

$$se^{\frac{\pi}{2}is} B_1 - se^{-\frac{\pi}{2}is} B_2 + (s+2)e^{\frac{\pi}{2}i(s+2)} B_3 - (s+2)e^{-\frac{\pi}{2}i(s+2)} B_4 = 0 \quad (68.4)$$

Burada;

$$p_2(s) = p_2(\xi) = \int_0^{\infty} p_2(r) r^{s+1} dr \quad (67)$$

şeklinde tanımlanır. Denklemlerde geçen  $p_2(s)$  bilinmeyen temas gerilme fonksiyonu olup daha sonraki kısımlarda integral denklemlerin çözümlerinden elde edilecektir.

(68.1-68.4) denklemlerinin ortak çözümü sonucunda, bilinmeyen  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  ve  $B_4$  katsayıları;

$$B_1 = \frac{1}{\Delta_B} p_2(s)(s+2) \left[ (s+1)e^{\pi i} - s - e^{-\pi i(s+1)} \right] \quad (70.1)$$

$$B_2 = \frac{1}{\Delta_B} p_2(s)(s+2) \left[ (s+1)e^{-\pi i} - s - e^{\pi i(s+1)} \right] \quad (70.2)$$

$$B_3 = \frac{1}{\Delta_B} p_2(s)s \left[ (s+1)e^{-\pi i} - (s+2) + e^{-\pi i(s+1)} \right] \quad (70.3)$$

$$B_4 = \frac{1}{\Delta_B} p_2(s)s \left[ (s+1)e^{\pi i} - (s+2) + e^{\pi i(s+1)} \right] \quad (70.4)$$

şeklinde bulunur. Burada;

$$\Delta_B = 2s(s+1) \left[ -(s+1)^2 (e^{\pi i} + e^{-\pi i}) + 2s(s+2) + e^{\pi i(s+1)} + e^{-\pi i(s+1)} \right] \quad (71)$$

olarak tanımlıdır.

## 2.5. İntegral Denklemlerinin Elde Edilmesi

$p_1(x)$  ve  $p_2(x)$  fonksiyonları temas yüzeyleri arasındaki gerilme fonksiyonlarını göstermekte olup henüz bilinmemektedir. Bu temas gerilme fonksiyonları henüz kullanılmamış olan (57.5) ve (58.5) numaralı sınır şartları kullanılarak elde edilecek integral denklemlerin çözümünden bulunacaktır.

### 2.5.1. Birinci İntegral Denklemin Elde Edilmesi

Birinci integral denklem için (57.5) nolu sınır şartı kullanılacaktır. Söz konusu sınır şartının sol tarafı;

$$\frac{\partial}{\partial x} v_1(x, y) = -\frac{2}{\pi} \xi \int_0^{\infty} \left\{ \left[ A_1 + A_2 \left( \frac{K_1}{\xi} + y \right) \right] e^{-\xi y} + \left[ -A_3 + \left( \frac{K_1}{\xi} - y \right) A_4 \right] e^{\xi y} \right\} \sin \xi x d\xi \quad (72)$$

şeklindedir.

(2.4) kısmında elde edilmiş olan  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  ve  $A_4$  katsayıları (72) numaralı denklemde yerine yazılırsa ve  $x$  yerine  $x_1$  değişken dönüşümü yapıлып denklem yeniden düzenlenirse;

$$\frac{\partial}{\partial x} v_1(x, y) = \frac{1}{2\pi G_1} \left\{ \int_0^a p_1(t_1) N_{11}(x_1, t_1) dt_1 + \int_{c_0-c}^{c_0+c} p_2(t_2) N_{12}(x_1, t_2) dt_2 + q N_{13}(x_1) \right\} \quad (73)$$

elde edilir. Burada;

$$N_{11} = \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_A} \left\{ [-A_{11} - 2A_{21}(\kappa_1 + \xi y)] e^{-\xi y} + [A_{31} - 2A_{41}(\kappa_1 - \xi y)] e^{\xi y} \right\} \sin \xi x_1 \cos \xi t_1 d\xi \quad (74.1)$$

$$N_{12} = \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_A} \left\{ [-A_{12} - 2A_{22}(\kappa_1 + \xi y)] e^{-\xi y} + [A_{32} - 2A_{42}(\kappa_1 - y)] e^{\xi y} \right\} \sin \xi x_1 \cos \xi t_2 d\xi \quad (74.2)$$

$$N_{13} = \int_0^\infty \frac{1}{\xi \Delta_A} \left\{ [-A_{13} - 2A_{23}(\kappa_1 + \xi y)] e^{-\xi y} + [A_{33} - 2A_{43}(\kappa_1 - y)] e^{\xi y} \right\} \sin \xi x_1 \{ \sin \xi d_2 - \sin \xi d_1 \} d\xi \quad (74.3)$$

şeklindedir. (57.5) nolu sınır şartı  $y = h$  için yazıldığından, (74) numaralı ifadelerde  $y \rightarrow h$  limitine geçmek gerekir. Fakat  $N_{11}$  integralinin çekirdeğinin yakınsaması  $y \rightarrow h$  limiti için bozulur. Başka bir ifadeyle büyük  $\xi$  değerleri için çekirdeğin integrali sıfırdan farklı bir sabit değere yaklaşmaktadır. Çekirdeğin yakınsamasını bozan singüler terim araştırıldığında;

$$NS_{11} = \int_0^\infty e^{\xi(y-h)} [(\kappa_1 + 1) + 2\xi(y-h)] \sin \xi x_1 \cos \xi t_1 d\xi \quad (75)$$

olarak bulunur. Çekirdeğin yakınsamasını bozan bu terim çekirdek içinden çıkarılıp kapalı integrali alındıktan sonra  $y \rightarrow h$  limitine geçilir ve elde edilen değer daha sonra (75) numaralı ifadeye eklenirse;

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} v_1(x, y) = \frac{1}{2\pi G_1} \left\{ \int_0^a p_1(t_1) N_{11}^*(x_1, t_1) dt_1 + \int_{c_0-c}^{c_0+c} p_2(t_2) N_{12}(x_1, t_2) dt_2 + q N_{13}(x_1) \right\} \\ + \frac{1}{2\pi G_1} \lim_{y \rightarrow h} \int_0^a p_1(t_1) N_{S_{11}}(x_1, t_1) dt_1 \end{aligned} \quad (76)$$

elde edilir. Burada  $N_{11}^*$  terimi,  $N_{11}$  teriminden singüler terimin çıkartılmasıyla elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} N_{11}^*(x_1, t_1) = \int_0^\infty \left( \frac{1}{\Delta_A} \left\{ [-A_{11} - 2A_{21}(\kappa_1 + \xi y)] e^{-\xi y} + [A_{31} - 2A_{41}(\kappa_1 - \xi y)] e^{\xi y} \right\} \right. \\ \left. - e^{\xi(y-h)} [(\kappa_1 + 1) + 2\xi(y-h)] \right) \sin \xi x_1 \cos \xi t_1 d\xi \end{aligned} \quad (77)$$

Singüler terimin kapalı integrali integral dönüşüm tabloları yardımıyla alınıp [Erdelyi vd., 1954]  $y \rightarrow h$  limitine geçilirse;

$$\lim_{y \rightarrow h} \int_0^\infty e^{\xi(y-h)} [(\kappa_1 + 1) + 2\xi(y-h)] \sin \xi x_1 \cos \xi t_1 d\xi = \left[ \frac{\kappa_1 + 1}{2} \right] \left[ \frac{1}{t_1 + x_1} - \frac{1}{t_1 - x_1} \right] \quad (78)$$

olarak elde edilir. (78) nolu ifade (77) nolu denklemde yerine yazılıp denklem düzenlenirse;

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} v_1(x, y) = \frac{\kappa_1 + 1}{4\pi G_1} \left\{ \int_0^a \left[ \frac{1}{t_1 + x_1} - \frac{1}{t_1 - x_1} + N_{11}^{**}(x_1, t_1) \right] p_1(t_1) dt_1 + \right. \\ \left. + \int_{c_0-c}^{c_0+c} p_2(t_2) N_{12}^*(x_1, t_2) dt_2 + q N_{13}^*(x_1) \right\} \end{aligned} \quad (79)$$



olur. Burada;

$$N_{11}^{**}(x_1, t_1) = \int_0^{\infty} \left( \frac{2}{\Delta_A} \left\{ e^{-2\xi h} [1 + 2\xi h + 2\xi^2 h^2] - e^{-4\xi h} \right\} \sin \xi x_1 \cos \xi t_1 \right) d\xi \quad (80.1)$$

$$N_{12}^*(x_1, t_2) = \int_0^{\infty} \left( \frac{4}{\Delta_A} \left\{ e^{-\xi h} [-1 - \xi h] - e^{-3\xi h} (1 - \xi h) \right\} \sin \xi x_1 \cos \xi t_2 \right) d\xi \quad (80.2)$$

$$N_{13}^*(x_1) = \int_0^{\infty} \left( \frac{2}{\xi \Delta_A} \left\{ 1 + e^{-2\xi h} (4\xi h) - e^{-4\xi h} \right\} \sin \xi x_1 [\sin \xi d_2 - \sin \xi d_1] \right) d\xi \quad (80.3)$$

şeklindedir. (57.5) numaralı sınır şartında geçen rijit dairesel pançın şekil fonksiyonunun türevini gösteren  $f(x)$  ifadesinin değeri (60) numaralı ifadede verilmiştir.

Simetri nedeniyle rijit panç altındaki gerilme yayılımının,

$$p_1(t_1) = p_1(-t_1)$$

olduğu göz önünde bulundurularak (79) numaralı denklemdeki  $[0, a]$  integral aralığını  $[-a, a]$  aralığına getirmek mümkündür. (79) numaralı ifade gerekli işlemler yapıp elde edilen denklem yeniden düzenlenirse:

$$\int_{-a}^a \left[ -\frac{1}{t_1 - x_1} + M_{11}(x_1, t_1) \right] p_1(t_1) dt_1 + \int_{c_0 - c}^{c_0 + c} p_2(t_2) M_{12}(x_1, t_2) dt_2 = \frac{4\pi G_1}{\kappa_1 + 1} \frac{x_1}{R} - q M_{13}(x_1) \quad (81)$$

olarak bulunur. Burada;

$$M_{11}(x_1, t_1) = \int_0^{\infty} \frac{-2}{\Delta_A} \left\{ e^{-2\xi h} [1 + 2\xi h + 2\xi^2 h^2] - e^{-4\xi h} \right\} \sin \xi (t_1 - x_1) d\xi \quad (82.1)$$

$$M_{12}(x_1, t_2) = N_{12}^*(x_1, t_2) \quad (82.2)$$

$$M_{13}(x_1) = N_{13}^*(x_1) \quad (82.3)$$

şeklindedir.

### 2.5.2. İkinci İntegral Denklemin Elde Edilmesi

İkinci integral denklemini elde etmek için (58.5) nolu sınır şartı kullanılacaktır. Bu sınır şartının sol tarafı (72) numaralı denklemde  $x_1$  yerine  $x_2$  değişken dönüşümü yapıp yeniden düzenlenirse:

$$\frac{\partial}{\partial x} v_1(x, y) = \frac{1}{2\pi G_1} \left\{ \int_0^a p_1(t_1) N_{21}(x_2, t_1) dt_1 + \int_{c_0-c}^{c_0+c} p_2(t_2) N_{22}(x_2, t_2) dt_2 + q N_{23}(x_2) \right\} \quad (81)$$

olarak yazılabilir. Burada;

$$N_{11} = \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_A} \left\{ [-A_{11} - 2A_{21}(\kappa_1 + \xi y)] e^{-\xi y} + [A_{31} - 2A_{41}(\kappa_1 - \xi y)] e^{\xi y} \right\} \sin \xi x_1 \cos \xi t_1 d\xi \quad (84.1)$$

$$N_{12} = \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_A} \left\{ [-A_{12} - 2A_{22}(\kappa_1 + \xi y)] e^{-\xi y} + [A_{32} - 2A_{42}(\kappa_1 - y)] e^{\xi y} \right\} \sin \xi x_1 \cos \xi t_2 d\xi \quad (84.2)$$

$$N_{13} = \int_0^\infty \frac{1}{\xi \Delta_A} \left\{ [-A_{13} - 2A_{23}(\kappa_1 + \xi y)] e^{-\xi y} + [A_{33} - 2A_{43}(\kappa_1 - y)] e^{\xi y} \right\} \sin \xi x_1 \{ \sin \xi d_2 - \sin \xi d_1 \} d\xi \quad (84.3)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. (58.5) nolu sınır şartı  $y = 0$  için yazıldığından, (84) numaralı ifadelerde  $y \rightarrow 0$  limitine geçmek gerekir. Fakat  $N_{22}$  integralinin çekirdeğinin yakınsaması  $y \rightarrow 0$  limiti için bozular. Başka bir ifadeyle büyük  $\xi$  değerleri için

çekirdeğin integrali sıfırdan farklı bir sabit değere yaklaşmakta yani yakınsamamaktadır. Çekirdeğin yakınsamasını bozan singüler terim araştırıldığında;

$$NS_{22} = \int_0^{\infty} e^{\xi(-y)} [-(\kappa_1 + 1) - 2\xi y] \sin \xi x_2 \cos \xi t_2 d\xi \quad (85)$$

olarak bulunur.

Çekirdeğin yakınsamasını bozan bu terim çekirdek içinden çıkarılıp kapalı integrali alındıktan sonra  $y \rightarrow 0$  limitine geçilir ve elde edilen değer daha sonra (83) nolu denkleme eklenirse;

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} v_1(x, y) = \frac{1}{2\pi G_1} \left\{ \int_0^a p_1(t_1) N_{21}(x_2, t_1) dt_1 + \int_{c_0-c}^{c_0+c} p_2(t_2) N_{22}^*(x_2, t_2) dt_2 + q N_{23}(x_2) \right\} \\ + \frac{1}{2\pi G_1} \lim_{y \rightarrow 0} \int_{c_0-c}^{c_0+c} p_2(t_2) NS_{22}(x_2, t_2) dt_2 \quad (86) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada  $N_{22}^*$  terimi,  $N_{22}$  teriminden singüler terimin çıkartılmasıyla elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} N_{22}^*(x_2, t_2) = \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{\Delta_A} \left\{ [-A_{12} - 2A_{22}(\kappa_1 + \xi y)] e^{-\xi y} + [A_{32} - 2A_{42}(\kappa_1 - \xi y)] e^{\xi y} \right\} \right. \\ \left. - e^{\xi(-y)} [-(\kappa_1 + 1) - 2\xi y] \right) \sin \xi x_2 \cos \xi t_2 d\xi \quad (87) \end{aligned}$$

Singüler terimin kapalı integrali, integral dönüşüm tabloları yardımıyla alınıp [Erdelyi vd., 1954]  $y \rightarrow 0$  limitine geçilirse;

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{\xi(-y)} [-(\kappa_1 + 1) - 2\xi y] \sin \xi x_2 \cos \xi t_2 d\xi = \left[ \frac{\kappa_1 + 1}{2} \right] \left[ -\frac{1}{t_1 + x_1} + \frac{1}{t_1 - x_1} \right] \quad (88)$$

terimi elde edilir. Bu ifade (87) numaralı ifadede yerine yazılıp ifade düzenlenirse;

$$\frac{\partial}{\partial x} v_1(x, y) = \frac{\kappa_1 + 1}{4\pi G_1} \left\{ \int_0^a p_1(t_1) N_{21}^*(x_2, t_1) dt_1 + \int_{c_0-c}^{c_0+c} \left[ -\frac{1}{t_2 + x_2} + \frac{1}{t_2 - x_2} + N_{22}^{**}(x_2, t_2) \right] p_2(t_2) dt_2 + q N_{23}^*(x_2) \right\} \quad (89)$$

bulunur. Burada;

$$N_{21}^* = \int_0^{\infty} \frac{4}{\Delta_A} \left\{ e^{-\xi h} (1 + \xi h) + e^{-3\xi h} (-1 + \xi h) \right\} \sin \xi x_2 \cos \xi t_1 d\xi \quad (90.1)$$

$$N_{22}^{**} = \int_0^{\infty} \frac{4}{\Delta_A} \left\{ e^{-2\xi h} (-1 - 2\xi h - 2\xi^2 h^2) + e^{-4\xi h} \right\} \sin \xi x_2 \cos \xi t_2 d\xi \quad (90.2)$$

$$N_{23}^* = \int_0^{\infty} \frac{4}{\xi \Delta_A} \left\{ e^{-\xi h} (1 + \xi h) + e^{-3\xi h} (-1 + \xi h) \right\} \sin \xi x_2 \cos \xi t_1 d\xi \quad (90.3)$$

şeklinindedir. Simetri nedeniyle rijit panç altındaki gerilme yayılımının,

$$p_1(t_1) = p_1(-t_1)$$

olduğu göz önünde bulundurularak (89) numaralı ifadedeki  $[0, a]$  integral aralığını  $[-a, a]$  aralığına getirmek mümkündür. Gerekli ara işlemler yapılarak elde edilen denklem (89) numaralı ifadede yerine yazılırsa;

$$\frac{\partial}{\partial x} v_1(x, y) = \frac{\kappa_1 + 1}{4\pi G_1} \left\{ \int_{-a}^a p_1(t_1) M_{11}(x_2, t_1) dt_1 + \int_{c_0-c}^{c_0+c} \left[ -\frac{1}{t_2 + x_2} + \frac{1}{t_2 - x_2} + M_{22}(x_2, t_2) \right] p_2(t_2) dt_2 + q M_{23}(x_2) \right\} \quad (91)$$

elde edilir. Burada;

$$M_{21}(x_2, t_1) = \int_0^{\infty} \frac{-2}{\Delta_A} \left\{ e^{-\xi h} (1 + \xi h) + e^{-3\xi h} (-1 + \xi h) \right\} \sin \xi (t_1 - x_2) d\xi \quad (92.1)$$

$$M_{22}(x_2, t_2) = N_{22}^{**}(x_2, t_2) \quad (92.2)$$

$$M_{23}(x_2) = N_{23}^*(x_2) \quad (92.3)$$

şeklinde tanımlanabilir.

(58.5) numaralı sınır şartının sağ tarafı (52) numaralı ifadeden,

$$2G_2 \left( r^2 \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right)^M = is(s+1) (B_1 e^{is\theta} - B_2 e^{-is\theta}) + \\ + i[(s+2)(s+1) + (1-\nu)(-4s-4)] [B_3 e^{i(s+2)\theta} - B_4 e^{-i(s+2)\theta}] \quad (93)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadedeki  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  ve  $B_4$  bilinmeyen katsayılar (70) numaralı ifadelerden alınıp yerine yazılırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$2G_2 \left( r^2 \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right)^M = is(s+1) p_2(s) \frac{1}{\Delta_B} [(s+2)R_1(s, \theta) + (s+1+K_2)R_2(s, \theta)] \quad (94)$$

şeklinde elde edilir. Burada;

$$R_1(s, \theta) = e^{-\theta si} (2s+1 + e^{\pi(s+1)i}) - e^{\theta si} (2s+1 + e^{-\pi(s+1)i}) \quad (95.1)$$

$$R_2(s, \theta) = e^{-\theta(s+2)i} (2s+3 - e^{\pi(s+1)i}) - e^{\theta(s+2)i} (2s+3 - e^{-\pi(s+1)i}) \quad (95.2)$$

şeklindedir. (58.5) numaralı sınır şartı  $\theta = 0$  için yazıldığından, (95) numaralı ifadeler  $\theta = 0$  için;

$$R_1(s, 0) = -R_2(s, 0) \quad (96)$$

şeklinde elde edilir.  $\theta = 0$  için  $R_2$  değeri (94) nolu denklemde yerine yazılırsa,

$$2G_2 \left( r^2 \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right)^M = is(s+1)p_2(s) \frac{1}{\Delta_B} (K_2+1)R_1 \quad (97)$$

olur.  $R_1$  ve  $\Delta_B$  fonksiyonları trigonometrik fonksiyonlar cinsinden yazılıp (94) nolu denklem tekrar düzenlenirse,

$$\frac{4G_2}{K_2+1} \left( r^2 \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right)^M = -p_2(s) \frac{1}{\Delta_B^*} R_1^* \quad (98)$$

olarak elde edilir. Burada;

$$R_1^* = 2 \sin[\pi(s+1)] \quad (99.1)$$

$$\Delta_B^* = 2(s+1)^2 + 2s(s+2) + 2 \cos[\pi(s+1)] \quad (99.2)$$

şeklindedir. (98) nolu denklemin ters Mellin dönüşümü alınır;

$$\frac{4G_2}{K_2+1} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{e-i\infty}^{e+i\infty} \left( r^2 \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right)^M r^{-s} ds \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{e-i\infty}^{e+i\infty} -p_2(s) \frac{1}{\Delta_B^*} R_1^* r^{-s} ds \quad (100)$$

olur. Burada;

$$p_2(s) = M [p_2(r); r \rightarrow s+2] = \int_0^\infty p_2(r) r^{s+1} dr = \int_0^{2c} p_2(\tau) \tau^{s+1} d\tau \quad (101)$$

şeklindedir. Bu şekilde tanımlanan  $p_2(s)$  fonksiyonu (100) numaralı ifadede yerine yazılır ve daha sonra her iki taraf  $r$  ile bölünüp denklem yeniden düzenlenirse;

$$-\frac{4G_2}{K_2+1} \left( r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) = \int_0^{2c} p_2(\tau) d\tau \frac{1}{2\pi i} \int_{e^{-i\infty}}^{e^{+i\infty}} \left( \frac{\tau}{r} \right)^{s+1} \frac{1}{\Delta_B^*} R_1^*(s, 0) ds \quad (102)$$

olarak elde edilir. Aşağıda verilen değişken dönüşümleri yapılırsa;

$$s = -1 + iy \quad (103.1)$$

$$ds = idy \quad (103.2)$$

$$R_1^{**}(y, 0) = \sin(\pi iy) = i \sinh(\pi y) \quad (104.1)$$

$$\Delta_B^{**}(y) = -2y^2 - 1 + i \cosh(\pi y) \quad (104.2)$$

$$\left( \frac{\tau}{r} \right)^{s+1} = \left( \frac{\tau}{r} \right)^{iy} = e^{\log \left[ \left( \frac{\tau}{r} \right)^{iy} \right]} = \cos \alpha y + i \sin \alpha y \quad (104.3)$$

elde edilir. Burada;

$$\alpha = \log \left( \frac{\tau}{r} \right) \quad (105)$$

şeklinde tanımlanabilir. (104) numaralı ifadelerde verilen değerler (102) numaralı ifadelerde yerlerine yazılırsa;

$$-\frac{4G_2}{K_2+1} \left( r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) = \int_0^{2c} p_2(\tau) d\tau \frac{1}{2\pi} \int_{e^{-i\infty}}^{e^{+i\infty}} N_1(r, \tau, y) dy \quad (106)$$

olarak elde edilir. Burada;

$$N_1(r, \tau, y) = (\cos \alpha y + i \sin \alpha y) \frac{1}{\Delta_B^{**}} R_1^{**}(y, 0) \quad (107)$$

şeklindedir. (106) nolu denklemi  $i$  teriminden kurtarmak için Rezidü teoreminden yararlanılabilir.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{e^{-i\infty}}^{e^{+i\infty}} N_1(r, \tau, y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} N_1 dy - \frac{1}{2} \text{rezidü}(N_1) \quad (108)$$

Bu denklemde  $M_1$  ifadesinin rezidüsü bulunup integral aralığı  $(-\infty, \infty)$ ' dan  $[0, \infty)$  aralığına dönüştürmek için gerekli işlemler yapıp denklem düzenlenirse;

$$\text{rezidü } N_1 = -\frac{2\pi}{4 - \pi^2} \quad (109)$$

$$-\frac{4G_2}{K_2 + 1} \left( r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) = \int_0^{2c} p_2(\tau) d\tau \frac{1}{2\pi} \left\{ N_2 - \frac{2\pi^2 \alpha}{4 - \pi^2} \right\} \quad (110)$$

elde edilir. Buna göre (108) numaralı ifade düzenlenirse;

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial r} = -\frac{K_2 + 1}{4G_2} \int_0^{2c} p_2(\tau) d\tau \frac{1}{\pi} \left\{ N_3 - \frac{1}{r} \frac{\pi^2 \alpha}{4 - \pi^2} \right\} \quad (111)$$

elde edilir. Bu ifadede;

$$N_3 = -\int_0^{\infty} \frac{1}{r} \frac{\sinh(\pi y) \sin(\alpha y)}{-2y^2 - 1 + \cosh(\pi y)} dy \quad (112)$$

olarak tanımlanabilir. (112) numaralı ifade büyük  $y$  değerleri için sıfırdan farklı sabit bir değere yaklaşmakta yani yakınsamamaktadır. Yakınsamayı bozan terim pay paydaya bölünerek;

$$NS_3 = \int_0^{\infty} \frac{1}{r} \sin \alpha y dy \quad (113)$$



şeklinde hesaplanır. Bu terimin integrali kapalı olarak alınıp değeri (112) nolu denkleme eklenip gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial r} = -\frac{(K_2+1)}{4G_2} \frac{1}{r} \int_0^{2b} p_2(\tau) d\tau \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{\alpha} + N_4 + -\frac{\pi^2}{\pi^2-4} \right\} \quad (114)$$

elde edilir. Burada:

$$N_4 = \int_0^\infty \left[ \frac{\sinh \pi y}{-2y^2 - 1 + \cosh \pi y} - 1 \right] \sin \alpha y dy \quad (115)$$

şeklindedir.

Çeyrek düzlem  $y$  simetri ekseninden  $(c_0 - c)$  kadar uzaktadır. Denklemlerde geçen değişkenler arasında;

$$r = x_2 - (c_0 - c) \quad \rightarrow \quad dr = dx_2 \quad (116.1)$$

$$\tau = t_2 - (c_0 - c) \quad \rightarrow \quad d\tau = dt_2 \quad (116.2)$$

dönüşümleri yapılabilir. (114) numaralı ifadelerde bu dönüşümler uygulanırsa:

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial r} = \frac{\partial v_2(x_2, 0)}{\partial x_2} = -\frac{1}{\pi} \frac{(K_2+1)}{4G_2} \frac{1}{x_2 - (c_0 - c)} \int_{c_0-c}^{c_0+c} p_2(t_2) * \left\{ \frac{1}{\log \left( \frac{x_2 - (c_0 - c)}{t_2 - (c_0 - c)} \right)} + M_1 - \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4} \right\} dt_2 \quad (115)$$

elde edilir. Burada;

$$M_1 = N_4 \quad (116)$$

şeklindedir.

(91) ve (117) numaralı ifadeler (58.5) numaralı sınır şartında yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa ikinci integral denklem,

$$\int_{-a}^a p_1(t_1) M_{21}(x_2, t_1) dt_1 + \int_{c_0-c}^{c_0+c} p_2(t_2) \left\{ -\frac{1}{t_2+x_2} + \frac{1}{t_2-x_2} + M_{22}(x_2, t_2) \right. \\ \left. + \frac{G_1}{G_2} \frac{K_2+1}{K_1+1} \frac{1}{x_2-(c_0-c)} \left[ \frac{1}{\log\left(\frac{x_2-(c_0-c)}{t_2-(c_0-c)}\right)} + M_1 - \frac{\pi^2}{\pi^2-4} \right] \right\} dt_2 = -qM_{23}(x_2) \quad (119)$$

olarak elde edilmiş olur.

## 2.6. İntegral Denklemlerin Boyutsuzlaştırılması

Elde edilen integral denklemlerin sayısal çözümünü yapabilmek için aşağıda verilen değişken dönüşümleri yapılarak boyutsuz ifadeler elde edilebilir:

$$t_1 = ar_1, \quad dt_1 = adr_1 \quad (120.1)$$

$$x_1 = as_1 \quad (120.2)$$

$$t_2 = cr_2 + c_0, \quad dt_2 = cdr_2 \quad (120.3)$$

$$x_2 = cs_2 + c_0 \quad (120.4)$$

$$z = \xi h, \quad dz = h d\xi \quad (120.5)$$

$$\phi_1(r_1) = \frac{h}{P} p_1(t_1) \quad (120.6)$$

$$\phi_2(r_2) = \frac{h}{P} p_2(t_2) \quad (120.7)$$

Burada geçen  $\phi_1(r_1)$  ve  $\phi_2(r_2)$  ifadeleri panç-tabaka ve tabaka-çeyrek düzlem temas yüzeyi boyunca oluşan boyutsuz temas gerilmeleridir.

Birinci integral denklemde, yukarda tanımlanan boyutsuz büyüklükler yerlerine yazılıp denklem düzenlenirse;

$$\int_{-1}^1 \phi_1 \left[ -\frac{1}{r_1 - s_1} + \frac{a}{h} K_{11}(r_1, s_1) \right] dr_1 + \int_{-1}^1 \phi_2 \frac{c}{h} K_{12}(r_2, s_1) dr_2 = \frac{4\pi}{\kappa_1 + 1} \frac{G_1}{P/h} \frac{a/h}{R/h} s_1 - \frac{q}{P/h} K_{13}(s_1) \quad (121)$$

olarak elde edilir. Burada;

$$K_{11}(r_1, s_1) = \int_0^{\infty} \frac{-2}{\Delta_A^*} \left\{ e^{-2z} (1 + 2z + 2z^2) - e^{-4z} \right\} \sin \left[ z \left( \frac{a}{h} r_1 - \frac{a}{h} s_1 \right) \right] dz \quad (122.1)$$

$$K_{12}(r_2, s_1) = \int_0^{\infty} \frac{4}{\Delta_A^*} \left\{ e^{-z} (-1 - z) + e^{-3z} (1 - z) \right\} \sin \left[ z \frac{a}{h} s_1 \right] \cos \left[ z \left( \frac{c}{h} r_2 + \frac{c_0}{h} \right) \right] dz \quad (122.2)$$

$$K_{13}(s_1) = \int_0^{\infty} \frac{2}{\Delta_A^*} \left\{ 1 + e^{-2z} (4z) - e^{-4z} \right\} \sin \left[ z \frac{a}{h} s_1 \right] \left\{ \sin \left[ z \frac{d_2}{h} \right] - \sin \left[ z \frac{d_1}{h} \right] \right\} dz \quad (122.3)$$

$$\Delta_A^* = e^{-4z} - (4z^2 + 2)e^{-2z} + 1 \quad (122.4)$$

şeklindedir.

İkinci integral denklemde (120) ifadeleri yerlerine yazılıp denklem düzenlenirse;

$$\int_{-1}^1 \phi_1 \frac{a}{h} K_{21}(r_1, s_2) dr_1 + \int_{-1}^1 \phi_2 \left[ -\frac{1}{r_2 + s_2 + 2 \frac{c_0/h}{c/h}} + \frac{1}{r_2 - s_2} + \frac{c}{h} K_{22}(r_2, s_2) + \frac{G_1}{G_2} \frac{\kappa_2 + 1}{\kappa_1 + 1} \frac{c}{h} K_3(r_2, s_2) \right] dr_2 = -\frac{q}{P/h} K_{23}(s_2) \quad (123)$$

elde edilir. Burada;

$$K_{21}(r_1, s_2) = \int_0^{\infty} \frac{-2}{\Delta_A^*} \{e^{-2}(1+z) + e^{-3z}(-1+z)\} \sin \left[ z \left( \frac{a}{h} r_1 - \frac{c}{h} s_2 - \frac{c_0}{h} \right) \right] dz \quad (124.1)$$

$$K_{22}(r_2, s_2) = \int_0^{\infty} \frac{4}{\Delta_A^*} \{e^{-2z}(-1-2z-2z^2) + e^{-4z}\} \\ * \sin \left[ z \left( \frac{c}{h} s_2 + \frac{c_0}{h} \right) \right] \cos \left[ z \left( \frac{c}{h} r_2 + \frac{c_0}{h} \right) \right] dz \quad (124.2)$$

$$K_{23}(s_2) = \int_0^{\infty} \frac{4}{\Delta_A^*} \{e^{-2}(1+z) + e^{-3z}(-1+z)\} \\ * \sin \left[ z \left( \frac{c}{h} s_2 + \frac{c_0}{h} \right) \right] \left\{ \sin \left[ z \frac{d_2}{h} \right] - \sin \left[ z \frac{d_1}{h} \right] \right\} dz \quad (124.3)$$

olarak yazılabilir. Denge şartlarında da söz konusu değişken dönüşümleri yapılırsa;

$$\frac{a}{h} \int_{-1}^1 \phi_1 dr_1 = 1 \quad (125.1)$$

$$\frac{c}{h} \int_{-1}^1 \phi_2 dr_2 = 0.5 + \frac{Q}{P} \quad (125.2)$$

elde edilir. Burada geçen  $Q$  ifadesi toplam yayılı yük değerini göstermektedir.

## 2.7. İntegral Denklemlerin Sayısal Çözümü

Bu integral denklem sisteminin sayısal çözümü Gauss-Jacobi İntegral formülasyonu ile yapılacaktır (Erdoğan ve Gupta, 1972).

İntegral denklemlerin çözümü:

$$\phi(r) = w(r)g(r) \quad (-1 \leq r \leq 1) \quad (126)$$

$$w(r) = (1-r)^\alpha (1+r)^\beta \quad (127)$$

şeklinde aranabilir.

Birinci integral denklem panç-tabaka temas yüzeyi için elde edilmiştir. Temas yüzeyinin bittiği andan itibaren gerilmeler sıfırdır. Bu nedenle birinci integral denklemin indisi “-1” dir (Erdoğan ve Gupta, 1972). Bu durumda Gauss-Jacobi İntegral formülasyonu Gauss-Chebyshev integrasyon formülasyonuna dönüşür ve  $\alpha_1 = \beta_1 = 0.5$  olarak alınır. Buna göre;

$$\phi_1(r_{1i}) = w_1(r_{1i})g_1(r_{1i}) \quad (i = 1, \dots, N) \quad (128)$$

$$w_1(r_{1i}) = (1 - r_{1i}^2)^{0.5} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (129)$$

olurlar.

İkinci integral denklem tabaka-çeyrek düzlem temas yüzeyi için elde edilmiştir. Temasın bitimi ile yüzeyin sağ tarafında gerilmeler sıfır olduğundan  $\alpha_2 = 0.5$  olur. Yüzeyin sol tarafında ise gerilmeler, teorik olarak sonsuza gittiğinden gerilme tekilliği oluşur. Bu durumda  $\beta_2$  değeri aşağıda verilen denklemlerden faydalanılarak bulunur (Erdoğan ve Gupta, 1972).

$$\frac{G_2(1 + \kappa_1)}{G_1(1 + \kappa_2)} (2\lambda^2 - 1 + \cos \pi\lambda) \cos \pi\lambda - \sin^2 \pi\lambda = 0 \quad (130)$$

$$\beta_2 = \lambda - 1 \quad (131)$$

Burada  $\lambda$  denklemin pozitif en küçük köküdür. Bu durumda

$$\phi_2(r_{2i}) = w_2(r_{2i})g_2(r_{2i}) \quad (i = 1, \dots, N) \quad (132)$$

$$w_2(r_{2i}) = (1 - r_{2i})^{0.5} (1 + r_{2i})^{\beta_2} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (133)$$

olur.

Gerilmeler için tanımlanan bu ifadeler her iki integral denklemde yerlerine yazılırsa, integral denklemler temas gerilmelerinin bilinmeyen olduğu aşağıdaki denklem takımına indirgenebilir;

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N W_{1i}^N g_1(r_{1i}) \left[ -\frac{1}{r_{1i} - s_{1k}} + \frac{a}{h} K_{11}(r_{1i}, s_{1k}) \right] + \sum_{i=1}^N W_{2i}^N g_2(r_{2i}) \frac{c}{h} K_{12}(r_{2i}, s_{1k}) \\ &= \frac{4\pi}{\kappa_1 + 1} \frac{G_1}{P/h} \frac{a/h}{R/h} s_{1k} - \frac{q}{P/h} K_{13}(s_{1k}) \quad (k=1, \dots, N+1) \end{aligned} \quad (134)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N W_{1i}^N g_1(r_{1i}) \frac{a}{h} K_{21}(r_{1i}, s_{2k}) + \\ & \sum_{i=1}^N W_{2i}^N g_2(r_{2i}) \left[ -\frac{1}{r_{2i} + s_{2k} + 2\frac{c_0/h}{c/h}} + \frac{1}{r_{2i} - s_{2k}} + \frac{c}{h} K_{22}(r_{2i}, s_{2k}) \right. \\ & \left. \frac{G_1}{G_2} \frac{\kappa_2 + 1}{\kappa_1 + 1} \frac{c}{h} K_3(r_{2i}, s_{2k}) \right] = -\frac{q}{P/h} K_{23}(s_{2k}) \quad (k=1, \dots, N) \end{aligned} \quad (135)$$

Burada;

$$r_{1i} = \cos\left(\frac{i\pi}{N+1}\right) \quad (i=1, \dots, N) \quad (136)$$

$$s_{1k} = \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{2k-1}{N+1}\right) \quad (k=1, \dots, N+1) \quad (137)$$

$$W_{1i}^N = \pi \frac{1-r_{1i}^2}{N+1} \quad (i=1, \dots, N) \quad (138)$$

$$P_N^{(\alpha_2, \beta_2)}(r_{2i}) = 0 \quad (i=1, \dots, N) \quad (139)$$

$$P_N^{(\alpha_2-1, \beta_2+1)}(s_{2k}) = 0 \quad (k=1, \dots, N) \quad (140)$$

$$\begin{aligned} W_{2i}^N = & -\frac{2N+2+\alpha_2+\beta_2}{(N+1)!(N+1+\alpha_2+\beta_2)} \frac{\Gamma(N+1+\alpha_2)\Gamma(N+1+\beta_2)}{\Gamma(N+1+\alpha_2+\beta_2)} \\ & \times \frac{2^{\alpha_2+\beta_2}}{P_N^{(\alpha_2, \beta_2)}(r_{2i}) P_{N+1}^{(\alpha_2, \beta_2)}(r_{2i})} \end{aligned} \quad (141)$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu ifadelerde geçen  $P_N^{(\alpha, \beta)}$  fonksiyonu Jacobi Polinomlarını,  $\Gamma$  ifadesi ise Gamma Fonksiyonunu göstermektedir.  $r_{2i}$  ve  $s_{2k}$  ise ilgili Jacobi Polinomunun kökleridir.

(133) ve (134) ifadelerinde geçen  $g_1(r_{1i})$  ve  $g_2(r_{2i})$  ifadeleri bilinmeyen olup toplamda  $2N$  tanedir. İntegral denklemlerden  $2N+1$  tane denklemden oluşan bir lineer denklem sistemi elde edilmektedir. Problem sürtünmesiz olduğundan birinci integral denklemden gelen  $s_{1k} = 0$  için yazılan  $(N/2+1)$  nolu denklem uygunluk şartına karşılık gelip otomatik olarak sağlanmaktadır. Bu denklem, denklem sisteminden çıkartıldığında  $2N$  bilinmeyenli  $2N$  denklemden oluşan bir lineer denklem sistemi elde edilir. Denklem sisteminin çözülmesi ile elde edilen gerilme değerlerinin ve seçilen temas mesafelerinin aşağıda verilen probleme ait boyutsuz denge şartlarını da sağlaması gerekir.

$$\frac{a}{h} \sum_{i=1}^N W_{1i}(r_{1i}) g_1(r_{1i}) = 1 \quad (142.1)$$

$$\frac{c}{h} \sum_{i=1}^N W_{2i}(r_{2i}) g_2(r_{2i}) = 0.5 + \frac{Q}{P} \quad (142.2)$$

Doğru temas gerilmeleri için denge şartları sağlatılana kadar interpolasyona devam edilir. Problemin çözümünde önce ilk temas mesafeleri tahmin edilir ve lineer denklem sisteminin çözümünden  $g_1(r_{1i})$  ve  $g_2(r_{2i})$  değerleri hesaplanır. Elde edilen değerler denge şartlarında yerine yazılarak eşitliğin sağlanıp sağlanmadığı kontrol edilir. Eşitlik istenilen hassasiyet ile sağlanmıyorsa, temas mesafeleri için yeni değerler belirlenir ve problem tekrar çözülür. Hassasiyet sağlanıyorsa problemin çözümü elde edilmiş olur ve temas mesafeleri ve temas yüzeyi boyunca gerilme dağılımları belirlenmiş olur.

### **3. BULGULAR VE İRDELEMELER**

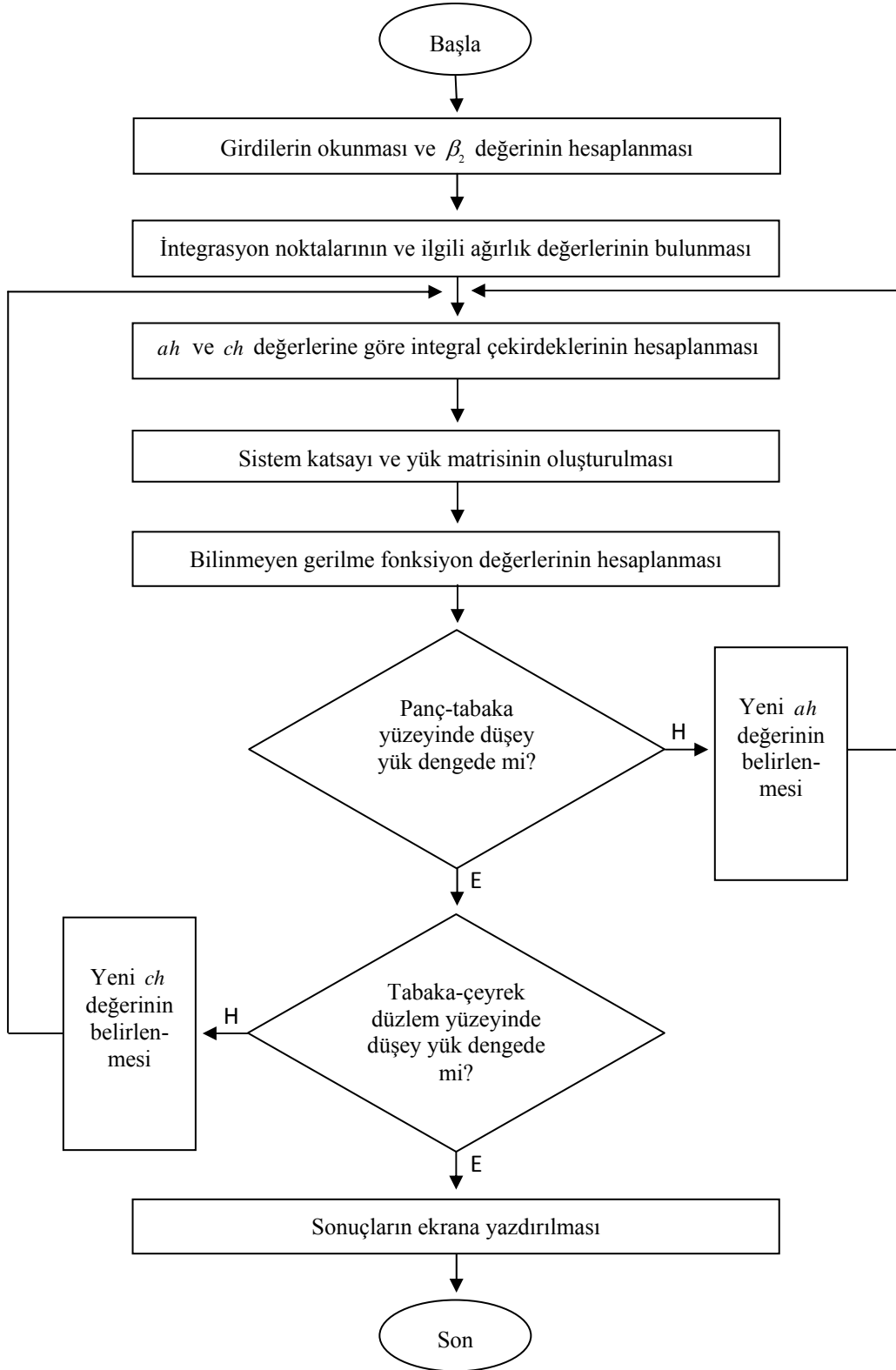
#### **3.1. Giriş**

Bu bölümde, iki elastik çeyrek düzlem üzerine oturan elastik bir tabakanın temas problemi ile ilgili sayısal sonuçlar ve grafikler verilmiştir. Problemin sayısal çözümü için Matlab ile hazırlanmış bir program kullanılmıştır.

#### **3.2. Programın Akış Diyagramı**

Hazırlanan program üç bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde problem ile ilgili değerler alınmaktadır. İkinci bölümde verilen ilk değerlere göre problem çözülmekte ve denge şartları kontrol edilmektedir. İstenen hassasiyet sağlanana kadar temas mesafeleri yeniden belirlenip hesaplama işlemleri yeniden yapılmaktadır. Üçüncü bölümde istenen hassasiyeti sağlayan temas mesafe boylarına göre elde edilen boyutsuz temas gerilmeleri verilmektedir. Probleme ait akış diyagramı Şekil 3.1' de verilmiştir.





Şekil 3.1. Program Akış Diyagramı

### 3.3. Sayısal Uygulamalar

Bu kısımda akış diyagramı 3.2 'de verilen program kullanılarak farklı yükleme, malzeme sabitleri ve geometrik durumlar için sayısal sonuçlar verilmektedir. Bu sonuçlar elde edilirken tabaka yüksekliği  $h$  ve tabakanın kayma modülü  $G_1$  sabit tutulmuştur. Hassasiyetler ise 0,0001 olarak seçilmiştir. Sayısal sonuçlar elde edilirken yirmi nokta ( $N = 20$ ) kullanılarak çözüm aranmıştır.

Tabaka-panç arasındaki boyutsuz gerilme dağılımı  $x$  eksenine göre simetrik bir dağılım gösterdiğinden, grafiklerde sadece  $x \geq 0$  için değerler verilmiştir.

Sayısal örneklerde geçen  $Q$  ifadesi sisteme etkiyen yayılı yükün toplam şiddetini göstermektedir. Problemin çözümünde  $G_1$  kayma modülü değeri sabit tutulduğundan tekil yükün şiddeti  $P$  arttıkça  $G_1/(P/h)$  oranı azalmaktadır.

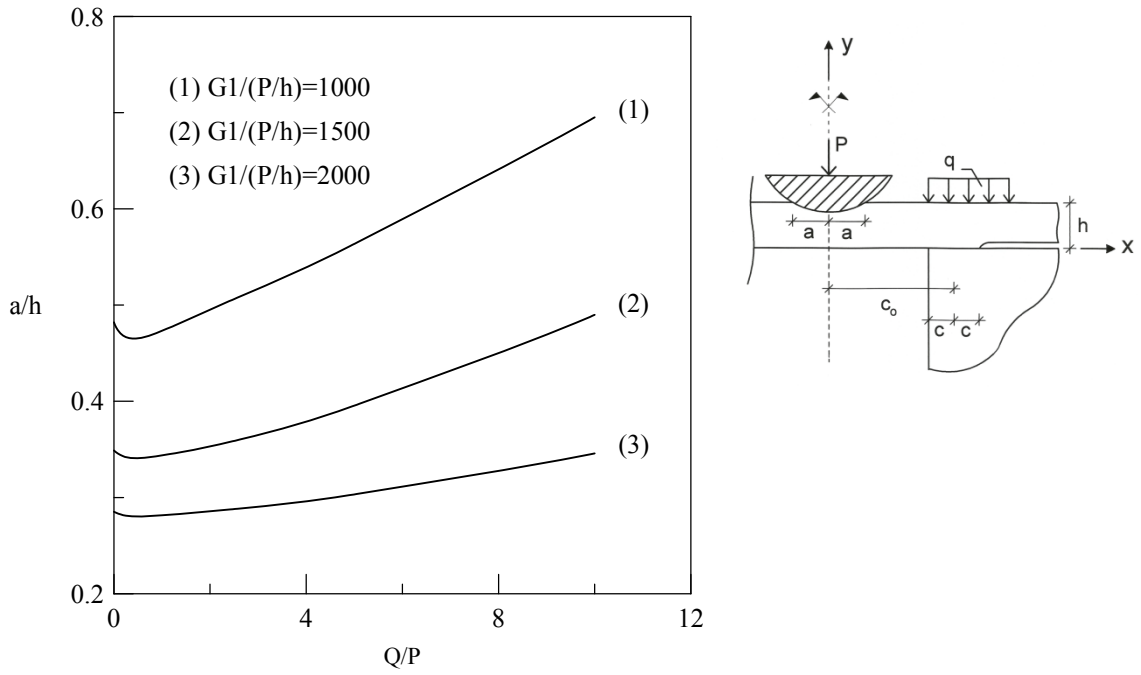
Farklı veriler için elde edilen sonuçlar önce tabaka-panç temas yüzeyi için daha sonra tabaka-çeyrek düzlem temas yüzeyi için sırayla verilmiştir.

Tablo 3.1' de tabaka-panç arasındaki yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $a/h$ ), değişen  $G_1/(P/h)$  oranı ve yük oranı ( $Q/P$ ) durumlarına göre değişimi verilmiştir. Şekil 3.2'de yarı temas uzunluğunun yük oranına ( $Q/P$ ) göre değişimi seçilen farklı  $G_1/(P/h)$  oranları için gösterilmiştir. Tabloda verilen değerler ve şekil incelendiğinde, sabit bir  $G_1/(P/h)$  oranı için yük oranının sıfırdan artmaya başlaması ile temas uzunluğunun parabolik olarak azalmaya başladığı ve temas uzunluğunun  $Q/P \cong 0.5$  değeri için en küçük olduğu görülmektedir. Bu noktadan sonra yük oranında meydana gelen artış ile temas mesafesinin arttığı gözlenmektedir. Şekil 3.3'de yarı temas uzunluğunun artan  $G_1/(P/h)$  oranına göre seçilen farklı yük oranları ( $Q/P$ ) için değişimi gösterilmiştir. Yük oranı ( $Q/P$ ) sabit tutulduğunda  $G_1/(P/h)$  oranının artırılması ile temas uzunluğunun da azalarak parabolik olarak sıfıra yaklaştığı görülmektedir. Şekilden de görüldüğü gibi  $Q \cong 0.5P$  yükleme durumu için yarı temas uzunluğu en küçük değerine sahip olmaktadır. Şekil 3.4'de tabaka-panç temas yüzeyi boyunca boyutsuz gerilme dağılımının grafiği sabit bir  $G_1/(P/h)$  oranı ve farklı yük oranları ( $Q/P$ ) için verilmiştir. Şekilden de görülebildiği gibi, grafiğin tepe noktasında yarı temas uzunluğunun en küçük olduğu  $Q = 0.5P$  yükleme durumu için en büyük

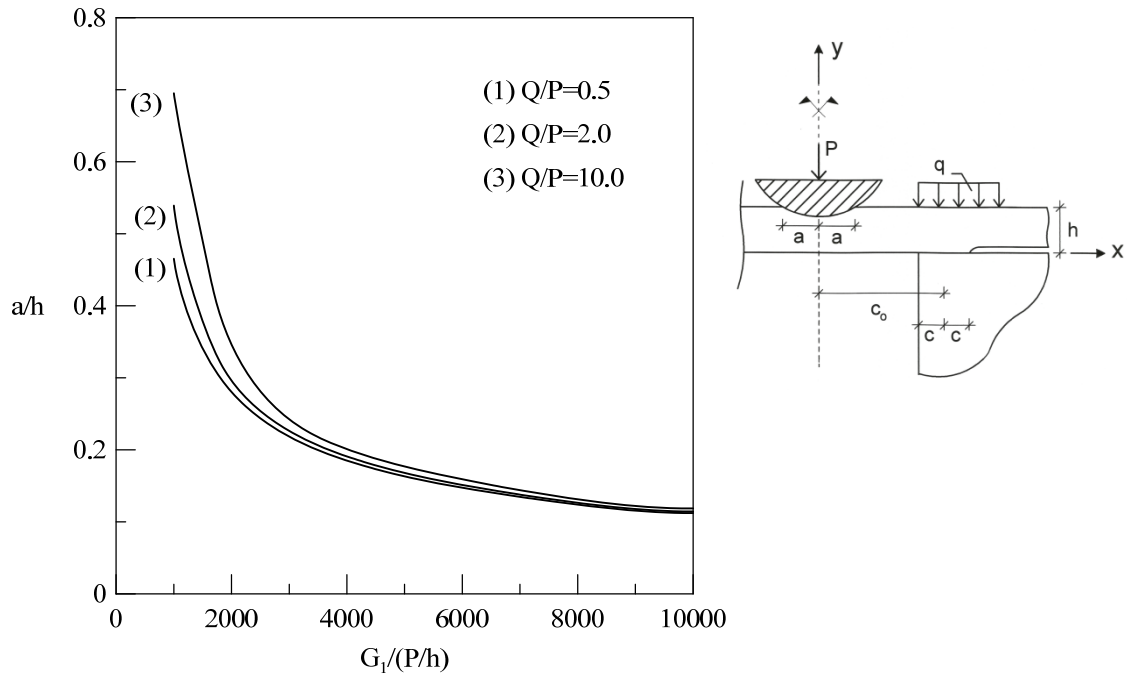
boyutsuz gerilme değeri, yarı temas uzunluğunun en büyük olduğu  $Q = 2P$  için ise en küçük boyutsuz gerilme değeri elde edilmektedir. Şekil 3.5’de tabaka-panç temas yüzeyi boyutsuz gerilme dağılımının grafiği sabit bir yük oranı ( $Q/P=1.0$ ) ve  $G_1/(P/h)$  oranları için gösterilmiştir. Şekil incelendiğinde,  $G_1/(P/h)$  oranı büyüdükçe yarı temas uzunluğunun azalması nedeniyle boyutsuz temas gerilmelerinin büyüdüğü görülmektedir. Şekil 3.4 ve Şekil 3.5 beraber incelendiğinde, tabaka-panç temas yüzeyi boyunca boyutsuz gerilme dağılımlarının oluşmasında  $G_1/(P/h)$  oranının daha etkin olduğu sonucuna ulaşılabılır.

Tablo 3.1. Tabaka-panç yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $a/h$ ) farklı  $G_1/(P/h)$  ve  $Q/P$  oranlarına göre değişimi ( $G_2/G_1 = 2$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $R/h = 250$ ,  $d_1/h = 1.0$ ,  $d_2/h = 2.0$ ,  $f/h = 1.0$ )

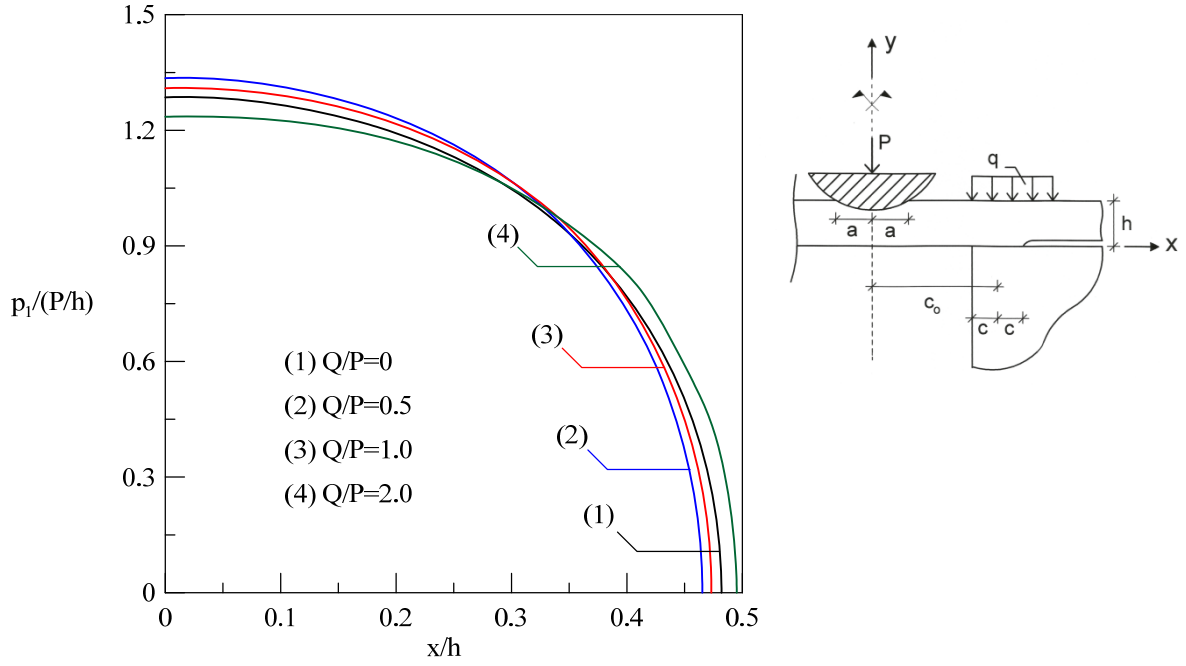
$a/h$						
$\frac{Q}{P}$	$G_1/(P/h)$					
	1000	1500	2000	3000	5000	10000
0,00	0,4820	0,3489	0,2852	0,2204	0,1638	0,1124
0,25	0,4668	0,3419	0,2811	0,2186	0,1631	0,1122
0,50	0,4654	0,3409	0,2803	0,2182	0,1631	0,1123
0,75	0,4685	0,3420	0,2807	0,2185	0,1633	0,1124
1,00	0,4732	0,3438	0,2815	0,2190	0,1636	0,1125
2,00	0,4952	0,3531	0,2857	0,2212	0,1650	0,1132
4,00	0,5391	0,3788	0,2960	0,2261	0,1679	0,1145
10,00	0,6952	0,4900	0,3459	0,2422	0,1770	0,1187



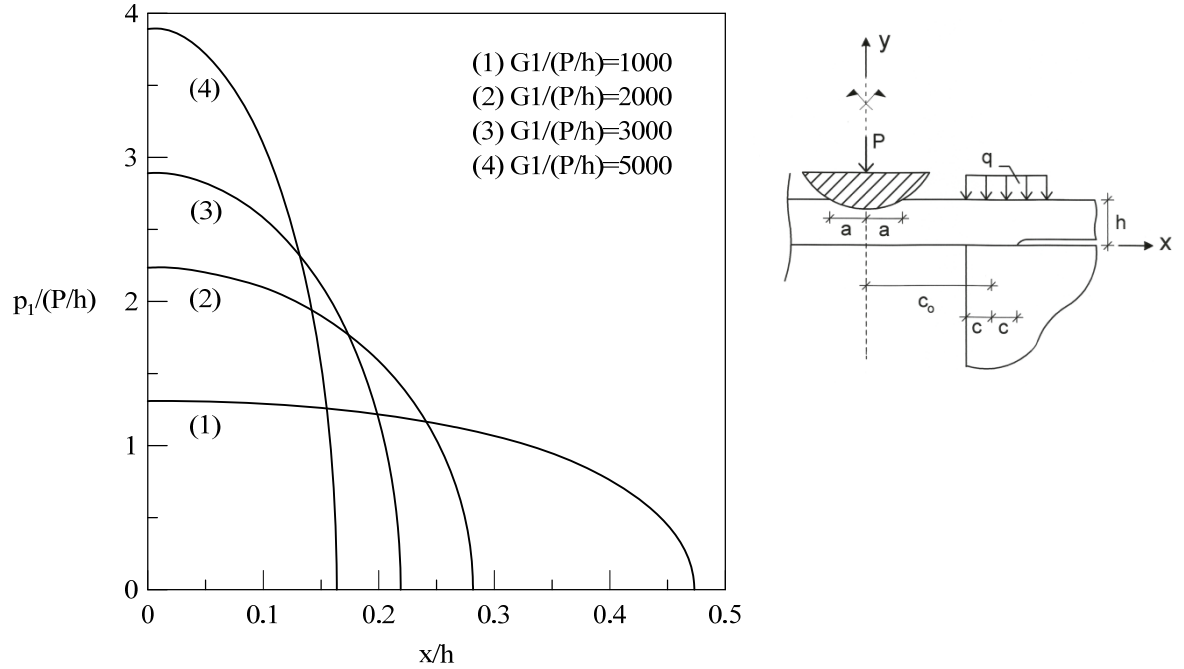
Şekil 3.2. Tabaka-panç yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $a/h$ ) artan ( $Q/P$ ) oranına göre değişimi ( $G_2/G_1=2$ ,  $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $R/h=250$ ,  $d_1/h=1.0$ ,  $d_2/h=2.0$ ,  $f/h=1.0$ )



Şekil 3.3. Tabaka-panç yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $a/h$ ) artan  $G_1/(P/h)$  oranına göre değişimi ( $G_2/G_1=2$ ,  $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $R/h=250$ ,  $d_1/h=1.0$ ,  $d_2/h=2.0$ ,  $f/h=1.0$ )



Şekil 3.4. Tabaka-panç temas yüzeyi boyunca farklı  $Q/P$  oranları için boyutsuz gerilme dağılımı ( $G_1/(P/h)=1000$ ,  $G_2/G_1=2$ ,  $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $R/h=250$ ,  $d_1/h=1.0$ ,  $d_2/h=2.0$ ,  $f/h=1.0$ )

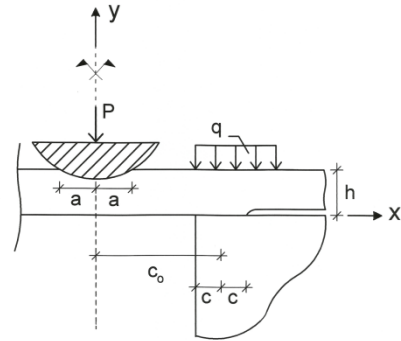
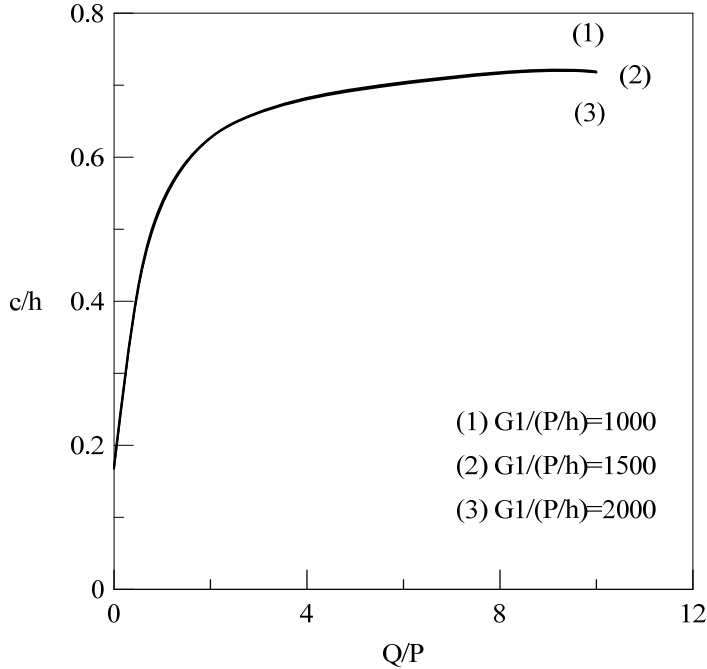


Şekil 3.5. Tabaka-panç temas yüzeyi boyunca farklı  $G_1/(P/h)$  oranları için boyutsuz gerilme dağılımı ( $Q/P=1.0$ ,  $G_2/G_1=2$ ,  $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $R/h=250$ ,  $d_1/h=1.0$ ,  $d_2/h=2.0$ ,  $f/h=1.0$ )

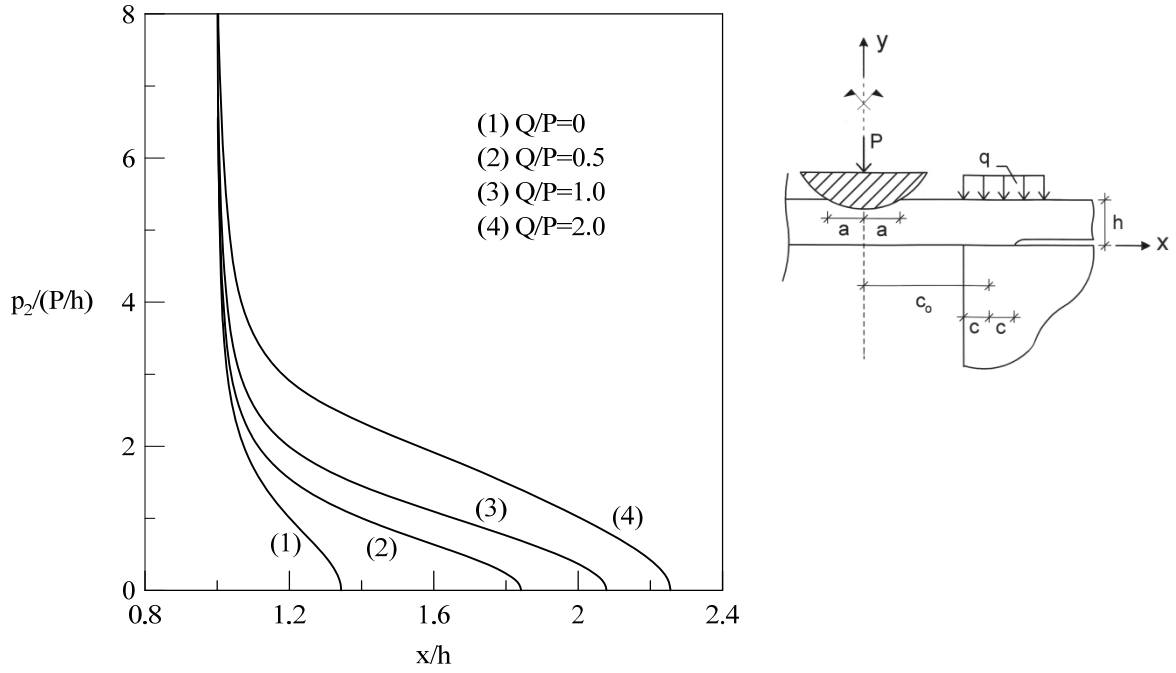
Tablo 3.2’de tabaka-çeyrek düzlem arasındaki yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $c/h$ ), değişen  $G_1/(P/h)$  oranı ve yük oranı ( $Q/P$ ) durumlarına göre değişimi verilmiştir. Şekil 3.6’da tabaka-çeyrek düzlem yarı temas uzunluğunun artan yük oranına ( $Q/P$ ) göre seçilen farklı  $G_1/(P/h)$  oranları için değişimi gösterilmiştir. Tabloda verilen değerler ve şekil incelendiğinde, yarı temas uzunluğunun toplam yük oranı ile parabolik olarak arttığı ve yarı temas uzunluğunun yaklaşık olarak 0,72 değerine yakınsadığı görülmektedir. Sabit bir yük oranı ( $Q/P$ ) için  $G_1/(P/h)$  oranının artması ile yarı temas uzunluğunda değişimler gözlemlense de bu değişimler çok küçük olduğundan şekilde farklı  $G_1/(P/h)$  oranları için elde edilen grafikler çakışık görülmektedir. Buradan yola çıkılarak sonuçları Tablo 3.2’de verilen yükleme durumu için tabaka-çeyrek yarı temas uzunluğunun değişiminde yük oranının ( $Q/P$ ) daha etkin olduğu sonucuna varılabilir. Şekil 3.7’de tabaka-çeyrek düzlem temas yüzeyi boyutsuz gerilme dağılışının grafiği sabit bir  $G_1/(P/h)$  oranı ve farklı ( $Q/P$ ) oranları için gösterilmiştir. Şekilden de görülebildiği gibi çeyrek düzlemin köşesine yaklaştıkça ve yük oranı ( $Q/P$ ) arttıkça gerilme değerleri de artmaktadır. Şekil 3.8’de tabaka-çeyrek düzlem temas yüzeyi boyutsuz gerilme dağılışının grafiği sabit bir yük oranı ve farklı  $G_1/(P/h)$  oranları için gösterilmiştir. Temas mesafesi boyunca boyutsuz gerilme dağılımları farklı  $G_1/(P/h)$  oranları için çok küçük değişimler gösterdiğinden şekildeki grafikler çakışık görülmektedir. Şekil 3.7 ve şekil 3.8 beraber incelendiğinde, yarı temas uzunluğunun ( $c/h$ ) değişiminde olduğu gibi tabaka-çeyrek düzlem temas yüzeyi boyunca boyutsuz gerilme dağılımlarının değişiminde de yük oranının ( $Q/P$ ),  $G_1/(P/h)$  oranına göre daha etkin olduğu sonucuna ulaşılabilir.

Tablo 3.2. Tabaka-çeyrek düzlem yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $c/h$ ) farklı  $G_1/(P/h)$  ve  $Q/P$  oranlarına göre değişimi ( $G_2/G_1=2$ ,  $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $R/h=250$ ,  $d_1/h=1.0$ ,  $d_2/h=2.0$ ,  $f/h=1.0$ )

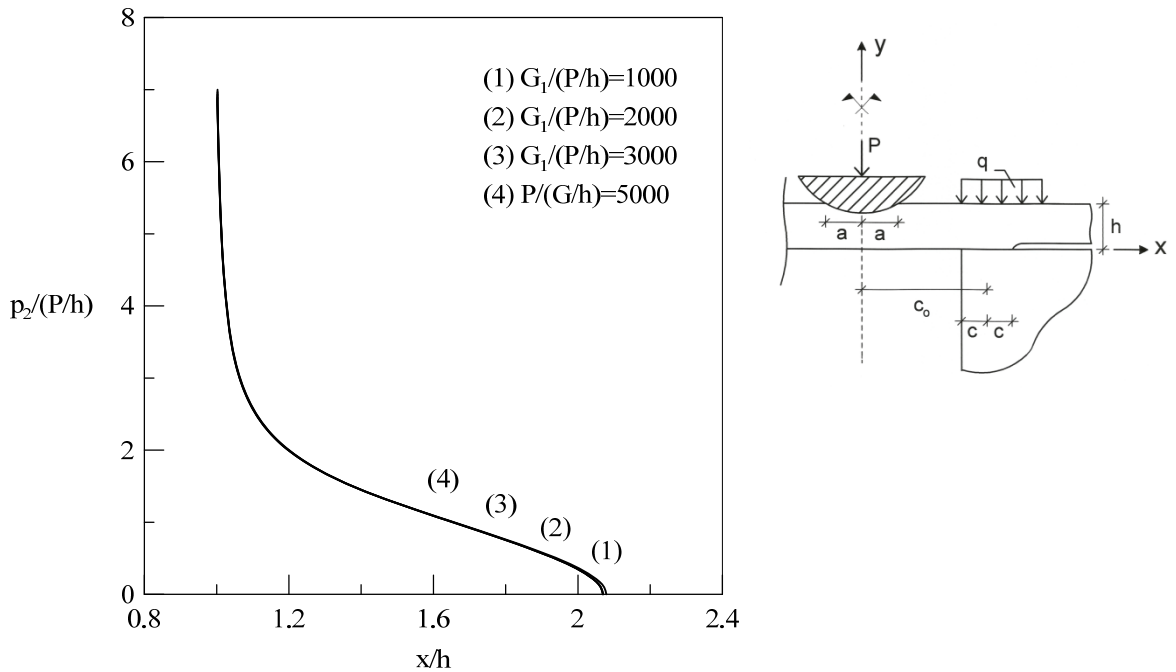
$c/h$						
$\frac{Q}{P}$	$G_1/(P/h)$					
	1000	1500	2000	3000	5000	10000
0,00	0,1716	0,1684	0,1671	0,1663	0,1656	0,1645
0,25	0,3082	0,3043	0,3023	0,2998	0,3003	0,2988
0,50	0,4209	0,4176	0,4164	0,4152	0,4141	0,4125
0,75	0,4930	0,4891	0,4875	0,4867	0,4875	0,4864
1,00	0,5393	0,5359	0,5346	0,5344	0,5348	0,5358
2,00	0,6278	0,6269	0,6268	0,6242	0,6247	0,6247
4,00	0,6824	0,6813	0,6802	0,6796	0,6797	0,6807
10,00	0,7192	0,7178	0,7177	0,7173	0,7173	0,7181



Şekil 3.6. Tabaka-çeyrek düzlem yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $c/h$ ) artan  $Q/P$  oranlarına göre değişimi ( $G_2/G_1=2$ ,  $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $R/h=250$ ,  $d_1/h=1.0$ ,  $d_2/h=2.0$ )



Şekil 3.7. Tabaka-çeyrek düzlem temas yüzeyi boyunca farklı  $Q/P$  oranları için boyutsuz gerilme dağılımı ( $G_1/(P/h)=1000$ ,  $G_2/G_1=2$ ,  $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $R/h=250$ ,  $d_1/h=1.0$ ,  $d_2/h=2.0$ )



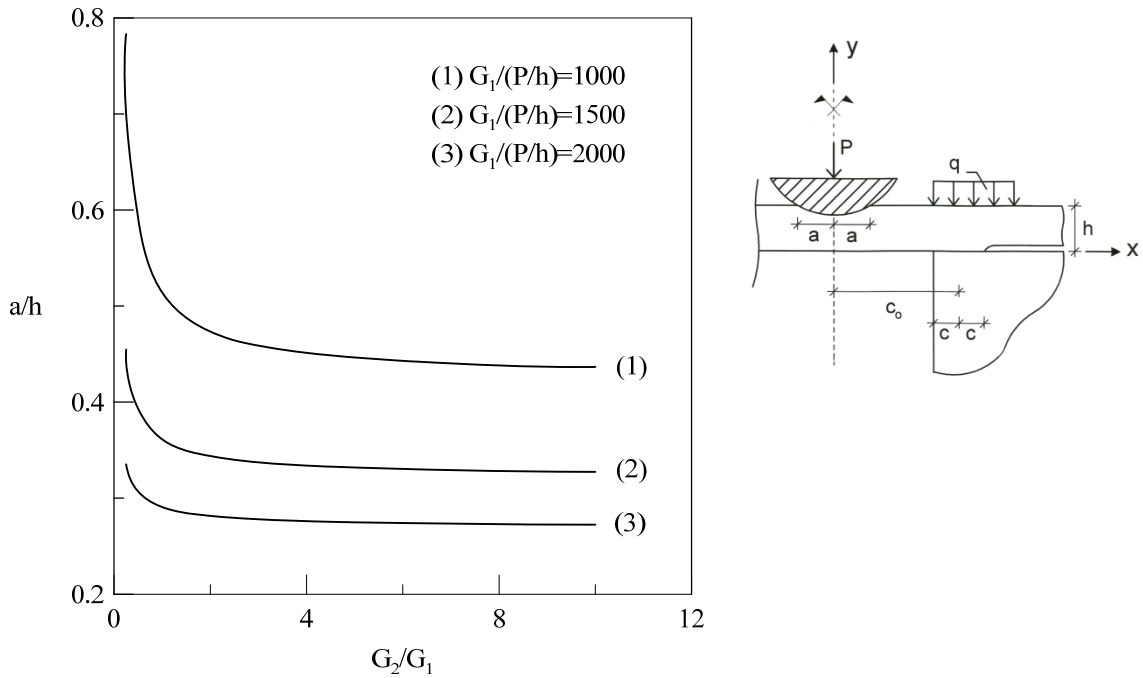
Şekil 3.8. Tabaka-çeyrek düzlem temas yüzeyi boyunca  $G_1/(P/h)$  oranları için boyutsuz gerilme dağılımı ( $Q/P=1.0$ ,  $G_2/G_1=2$ ,  $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $R/h=250$ ,  $d_1/h=1.0$ ,  $d_2/h=2.0$ ,  $f/h=1.0$ )



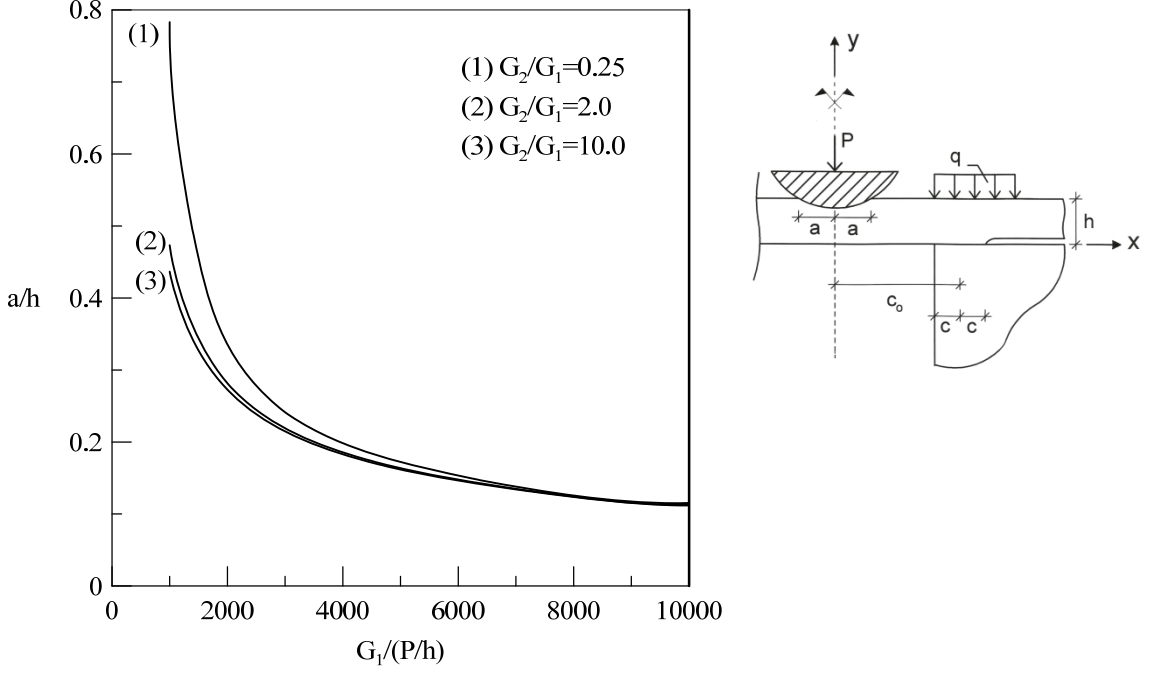
Tablo 3.3’de tabaka-panç arasındaki yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının  $(a/h)$  değişen  $G_1/(P/h)$  oranı ve çeyrek düzlem kayma modülünün tabaka kayma modülüne oranı  $(G_2/G_1)$  için değişimi verilmiştir. Şekil 3.9’da yarı temas uzunluğunun artan kayma modülü oranlarına göre seçilen farklı  $G_1/(P/h)$  oranları için değişimi gösterilmiştir. Tabloda verilen değerler ve grafik incelendiğinde, yarı temas uzunluğunun kayma modülleri oranının  $G_2/G_1$  artması ile parabolik bir şekilde azaldığı görülmektedir. Şekil 3.10’da yarı temas uzunluğunun artan  $G_1/(P/h)$  oranlarına göre değişimi seçilen farklı kayma modülü oranları için değişimi verilmiştir. Şekil incelendiğinde sabit  $G_2/G_1$  oranı için  $G_1/(P/h)$  oranı arttıkça temas mesafesinin parabolik olarak azaldığı ve yarı temas uzunluğunun 0,11 değerine yakınsadığı görülmektedir. Şekil 3.11’de tabaka-panç temas yüzeyi boyunca oluşan boyutsuz gerilme dağılımının grafiği sabit bir  $G_1/(P/h)$  oranı ve farklı  $G_2/G_1$  oranları için gösterilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi, kayma modülleri oranını büyüdükçe en büyük boyutsuz temas gerilmelerinin değerleri de artmaktadır. Gerilme değerlerindeki bu artış  $G_2/G_1$  oranının artması ile azalmaktadır. Buradan  $G_2/G_1$  oranı arttıkça yarı temas uzunluğunun parabolik olarak azalmasına karşılık olarak en büyük boyutsuz temas gerilme değerlerinin parabolik olarak arttığı sonucuna ulaşılabılır.

Tablo 3.3. Tabaka-panç yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $a/h$ ) farklı  $G_1/(P/h)$  ve  $G_2/G_1$  oranlarına göre değişimi ( $Q/P=1$ ,  $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $R/h=250$ ,  $d_1/h=1.0$ ,  $d_2/h=2.0$ ,  $f/h=1.0$ )

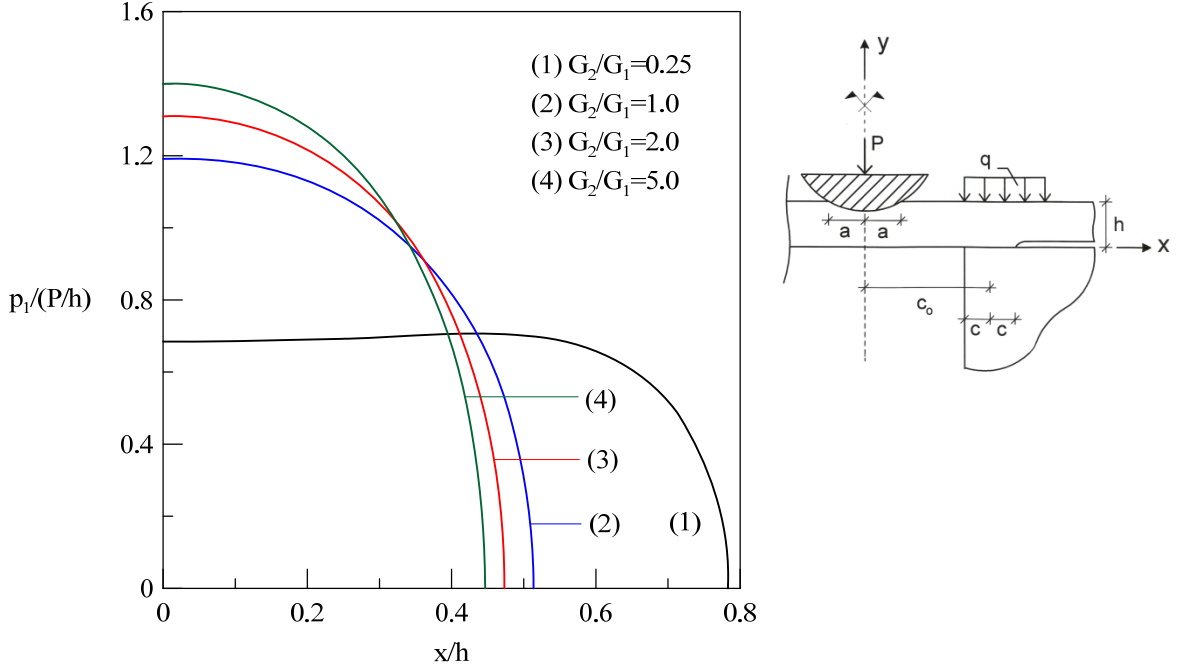
$a/h$						
$\frac{G_2}{G_1}$	$G_1/(P/h)$					
	1000	1500	2000	3000	5000	10000
0,25	0,7831	0,4547	0,3353	0,2412	0,1723	0,1153
0,50	0,5921	0,3931	0,3067	0,2301	0,1681	0,1140
1,00	0,5136	0,3612	0,2908	0,2232	0,1654	0,1131
2,00	0,4732	0,3438	0,2815	0,2190	0,1636	0,1125
3,00	0,4587	0,3373	0,2780	0,2173	0,1629	0,1123
5,00	0,4464	0,3318	0,2749	0,2158	0,1623	0,1121
10,00	0,4367	0,3274	0,2724	0,2146	0,1618	0,1119



Şekil 3.9. Tabaka-panç yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $a/h$ ) artan kayma modülü oranlarına  $G_2/G_1$  göre değişimi ( $Q/P=1$ ,  $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $R/h=250$ ,  $d_1/h=1.0$ ,  $d_2/h=2.0$ ,  $f/h=1.0$ )



Şekil 3.10. Tabaka-panç yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $a/h$ ) artan  $G_1/(P/h)$  oranlarına göre değişimi ( $Q/P=1$ ,  $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $R/h=250$ ,  $d_1/h=1.0$ ,  $d_2/h=2.0$ ,  $f/h=1.0$ )

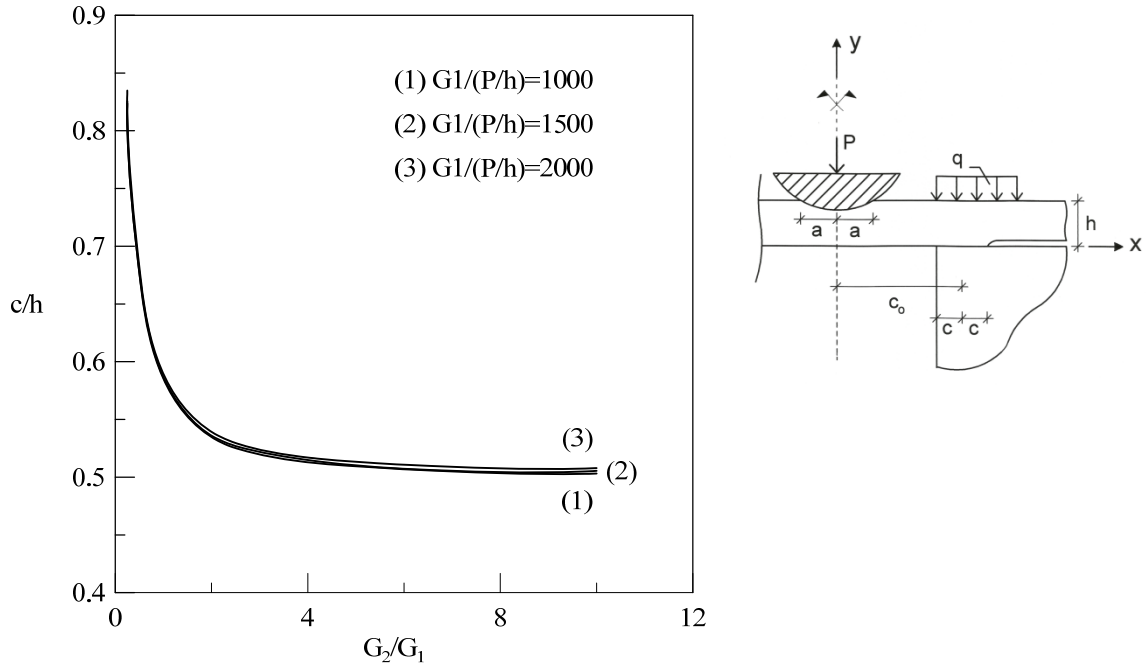


Şekil 3.11. Tabaka-panç temas yüzeyi boyunca farklı kayma modülü oranları için boyutsuz gerilme dağılımı ( $G_1/(P/h)=1000$ ,  $Q/P=1.0$ ,  $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $R/h=250$ ,  $d_1/h=1.0$ ,  $d_2/h=2.0$ ,  $f/h=1.0$ )

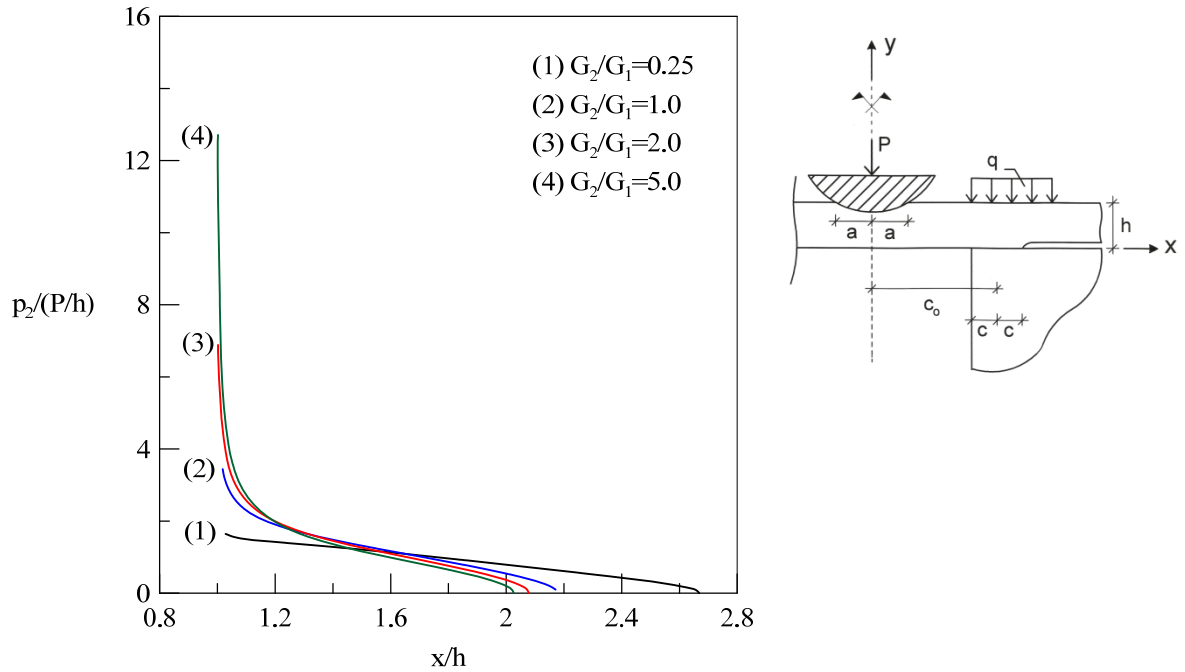
Tablo 3.4’de tabaka-panç arasındaki yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $c/h$ ) değişen  $G_1/(P/h)$  oranı ve çeyrek düzlem kayma modülünün tabaka kayma modülüne oranı ( $G_2/G_1$ ) için değişimi verilmiştir. Şekil 3.12’de yarı temas uzunluğunun artan kayma modülü oranlarına göre seçilen farklı  $G_1/(P/h)$  oranları için değişimi gösterilmiştir. Tabloda verilen değerler ve grafik incelendiğinde; yarı temas uzunluğunun, kayma modülleri oranı arttıkça parabolik olarak azaldığı görülmektedir. Yarı temas uzunlukları farklı  $G_1/(P/h)$  oranları için küçük değişimler gösterse de bu değişimler kayma modülleri oranının yapmış olduğu etki yanında küçük olduğundan elde edilen grafikler şekilde çakışık olarak görülmektedir. Buradan yola çıkılarak sonuçları Tablo 3.4’de verilen yükleme durumu ve malzeme sabitleri için tabaka-çeyrek yarı temas uzunluğunun değişiminde kayma modülleri oranının,  $G_1/(P/h)$  oranına göre daha etkin olduğu sonucuna ulaşılabilir. Şekil 3.13’de tabaka-çeyrek düzlem temas yüzeyi boyutsuz gerilme dağılışının grafiği sabit bir  $G_1/(P/h)$  ve farklı ( $G_2/G_1$ ) oranları için gösterilmiştir. Şekilden de görülebileceği gibi kayma modülleri oranı arttıkça boyutsuz gerilme değerlerindeki değişimler de artmaktadır.

Tablo 3.4. Tabaka-çeyrek düzlem yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $c/h$ ) farklı  $G_1/(P/h)$  ve  $G_2/G_1$  oranlarına göre değişimi ( $Q/P=1$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $R/h=250$ ,  $d_1/h=1.0$ ,  $d_2/h=2.0$ ,  $f/h=1.0$ )

$c/h$						
$\frac{G_2}{G_1}$	$G_1/(P/h)$					
	1000	1500	2000	3000	5000	10000
0,25	0,8349	0,8257	0,8238	0,8245	0,8236	0,8253
0,50	0,6819	0,6775	0,6768	0,6762	0,6764	0,6764
1,00	0,5891	0,5867	0,5850	0,5844	0,5845	0,5838
2,00	0,5393	0,5359	0,5346	0,5344	0,5348	0,5358
3,00	0,5238	0,5219	0,5195	0,5188	0,5188	0,5188
5,00	0,5133	0,5102	0,5094	0,5094	0,5078	0,5063
10,00	0,5078	0,5055	0,5031	0,5047	0,5025	0,5031



Şekil 3.12. Tabaka-çeyrek düzlem yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $c/h$ ) artan kayma modülü oranlarına  $G_2/G_1$  göre değişimi ( $Q/P=1$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $R/h=250$ ,  $d_1/h=1.0$ ,  $d_2/h=2.0$ ,  $f/h=1.0$ )

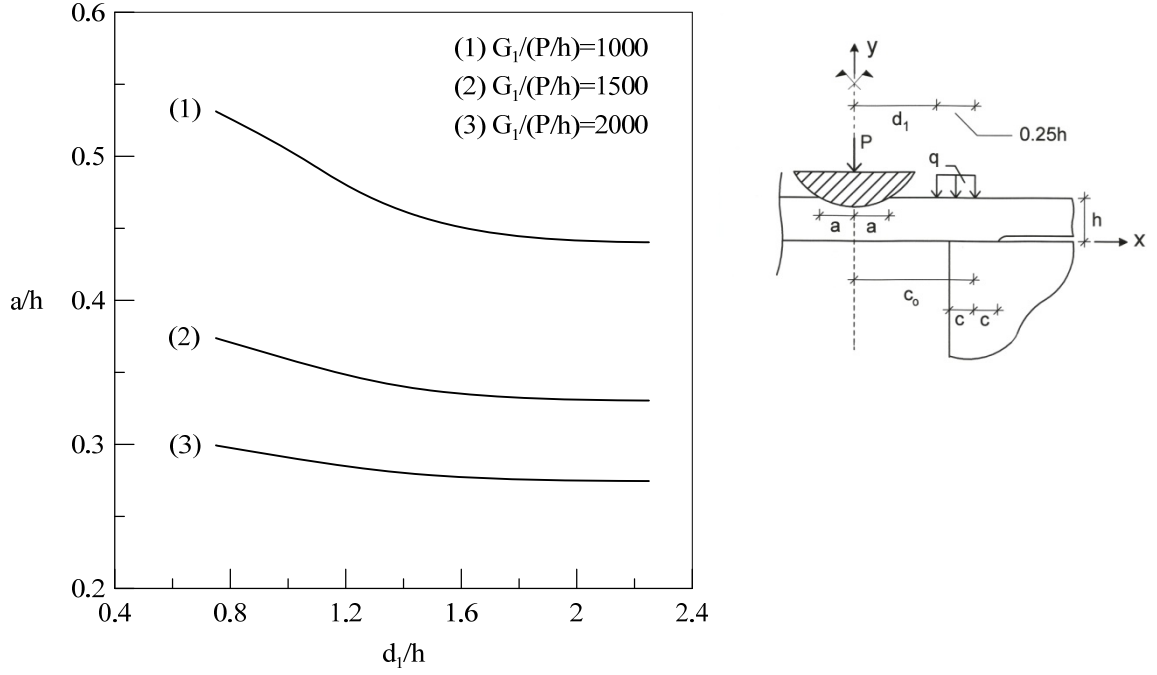


Şekil 3.13. Tabaka-çeyrek düzlem temas yüzeyi boyunca farklı  $G_2/G_1$  oranları için boyutsuz gerilme dağılımı ( $G_1/(P/h)=1000$ ,  $Q/P=1.0$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $R/h=250$ ,  $d_1/h=1.0$ ,  $d_2/h=2.0$ ,  $f/h=1.0$ )

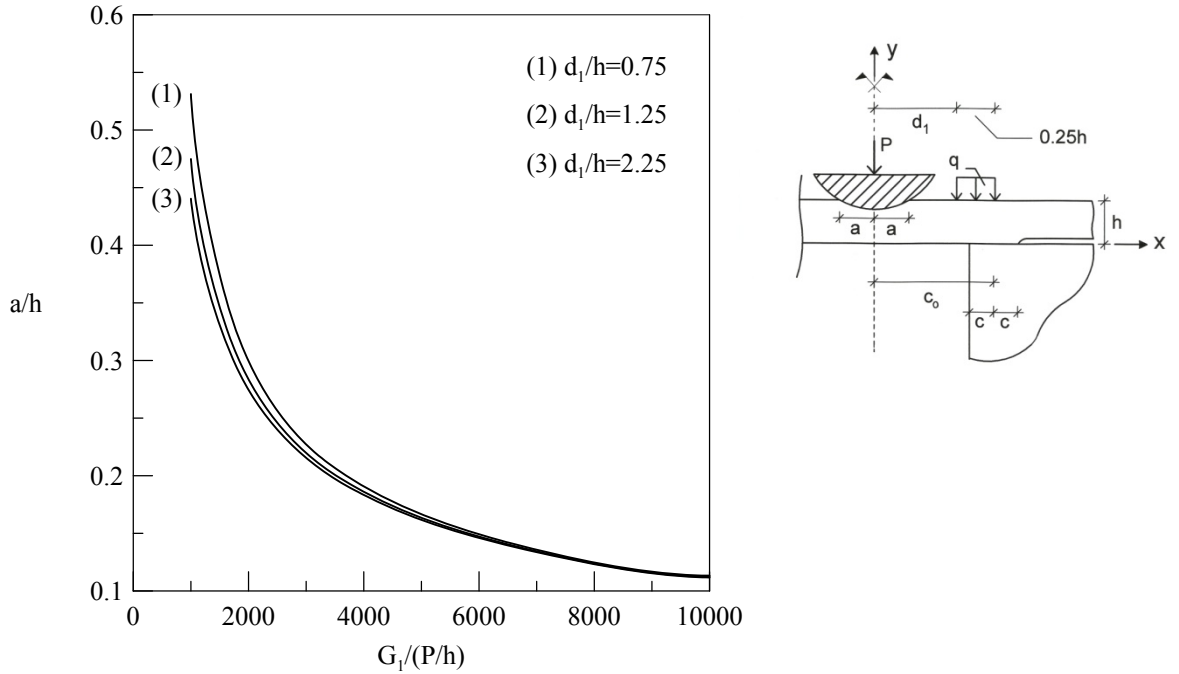
Tablo 3.5’de tabaka-panç arasındaki yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $a/h$ ) değişen  $G_1/(P/h)$  oranı ve yayılı yükün başlama mesafesinin tabaka yüksekliğine oranı ( $d_1/h$ ) için değişimi verilmiştir. Tabloda verilen değerler elde edilirken yayılı yükün genliğinin tabaka yüksekliğine oranı 0,25 değerinde sabit tutulmuştur. Şekil 3.14’te yarı temas uzunluğunun artan  $d_1/h$  oranına göre seçilen farklı  $G_1/(P/h)$  oranları için değişimi gösterilmiştir. İlgili tablo ve şekil incelendiğinde, yarı temas uzunluğunun  $d_1/h$  oranının artması ile parabolik olarak azaldığı ve  $G_1/(P/h)$  oranı azaldıkça temas uzunluğunun da daha küçük bir değere yakınsadığı görülmektedir. Yani etkiyen yayılı yükün tabaka üzerinde x eksenini yönünde ilerlemesi ile yarı temas uzunluğuna olan etkisi de giderek azalmaktadır. Şekil 3.15’de yarı temas uzunluğunun artan  $G_1/(P/h)$  oranına göre seçilen farklı  $d_1/h$  oranları için değişimi verilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi yarı temas uzunluğu  $G_1/(P/h)$  oranının artması ile parabolik olarak azalmaktadır. Şekil 3.16’da tabaka-panç temas yüzeyi boyunca boyutsuz gerilme dağılımının grafiği sabit bir  $G_1/(P/h)$  oranı ve farklı ( $d_1/h$ ) oranları için gösterilmiştir. Grafik incelendiğinde,  $d_1/h$  oranı arttıkça en büyük boyutsuz temas gerilmesinin değerinin de arttığı görülmektedir.

Tablo 3.5. Tabaka-panç yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $a/h$ ) farklı  $G_1/(P/h)$  ve ( $d_1/h$ ) oranlarına göre değişimi ( $Q/P = 0.5$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $G_2/G_1 = 2$ ,  $R/h = 250$ ,  $d_2/h = d_1/h + 0.25$ ,  $f/h = 1.0$ )

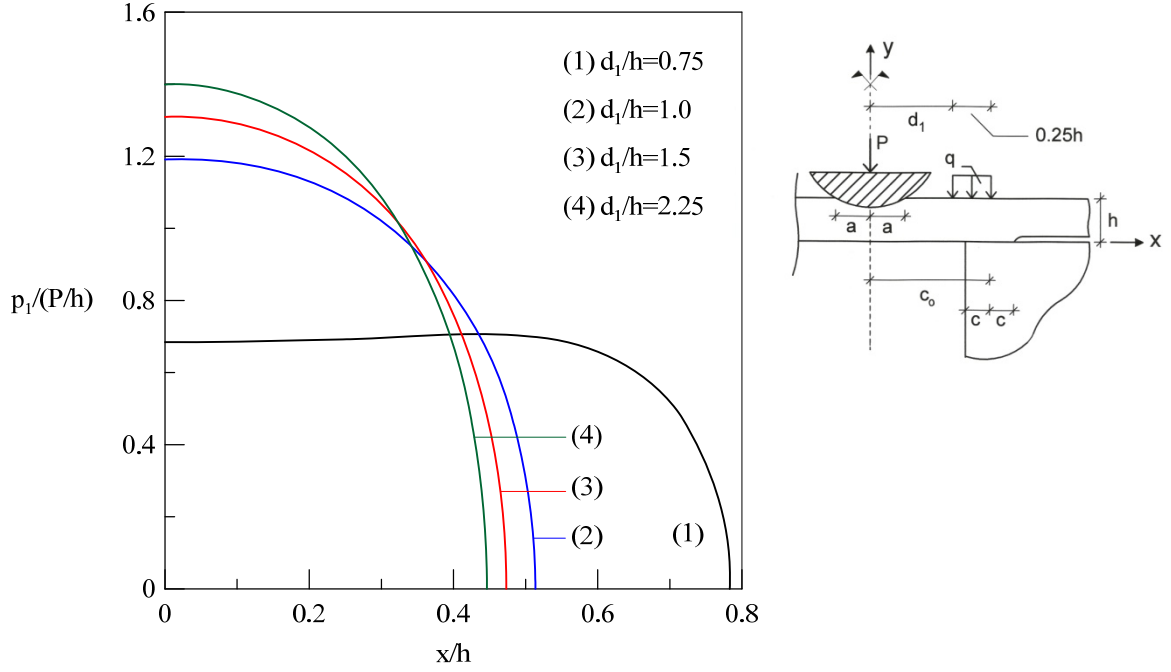
$a/h$						
$\frac{d_1}{h}$	$G_1/(P/h)$					
	1000	1500	2000	3000	5000	10000
0,75	0,5312	0,3738	0,2993	0,2271	0,1666	0,1133
1,00	0,5045	0,3592	0,2910	0,2231	0,1649	0,1128
1,25	0,4749	0,3460	0,2835	0,2196	0,1634	0,1123
1,50	0,4555	0,3373	0,2786	0,2172	0,1629	0,1120
1,75	0,4457	0,3330	0,2760	0,2160	0,1625	0,1118
2,00	0,4416	0,3311	0,2749	0,2155	0,1617	0,1117
2,25	0,4403	0,3305	0,2746	0,2153	0,1616	0,1117



Şekil 3.14. Tabaka-panç yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $a/h$ ) artan yayılı yükün başlama mesafesinin tabaka yüksekliği oranına ( $d_1/h$ ) göre değişimi ( $Q/P=0.5$ ,  $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $G_2/G_1=2$ ,  $R/h=250$ ,  $d_2/h=d_1/h+0.25$ ,  $f/h=1.0$ )



Şekil 3.15. Tabaka-panç yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $a/h$ ) farklı  $d_1/h$  oranları için artan  $G_1/(P/h)$  oranlarına göre değişimi ( $Q/P=0.5$ ,  $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $G_2/G_1=2$ ,  $R/h=250$ ,  $d_2/h=d_1/h+0.25$ ,  $f/h=1.0$ )



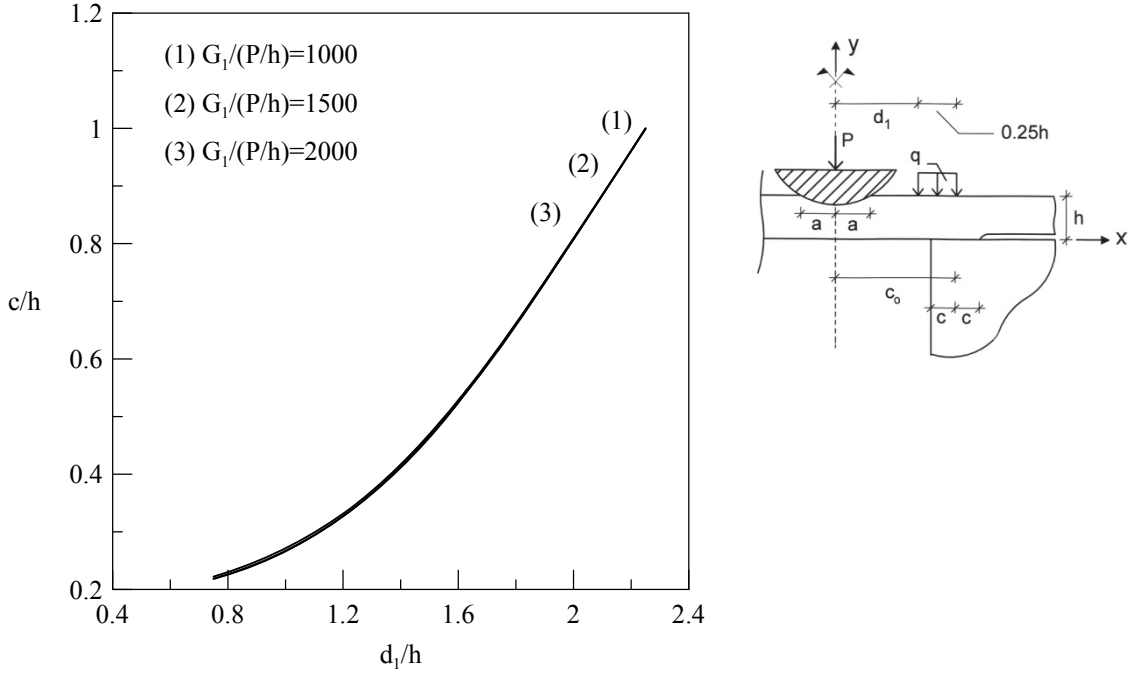
Şekil 3.16. Tabaka-panç temas yüzeyi boyunca farklı yayılı yük etkimeye başlama mesafesinin tabaka yüksekliği oranları ( $d_1/h$ ) için boyutsuz gerilme dağılımı ( $Q/P = 0.5$ ,  $G_1/(P/h) = 1000$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $G_2/G_1 = 2$ ,  $R/h = 250$ ,  $d_2/h = d_1/h + 0.25$ )

Tablo 3.6’da tabaka-panç arasındaki yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $c/h$ ) değişen  $G_1/(P/h)$  oranı ve yayılı yükün başlama mesafesinin tabaka yüksekliğine oranı ( $d_1/h$ ) için değişimi verilmiştir. Bu değerler elde edilirken yayılı yükün genliğinin tabaka yüksekliğine oranı 0,25 değerinde sabit tutulmuştur. Şekil 3.17’de yarı temas uzunluğunun artan  $d_1/h$  oranına göre seçilen farklı  $G_1/(P/h)$  oranları için değişimi gösterilmiştir. İlgili tablo ve şekil incelendiğinde, yarı temas uzunluğunun  $d_1/h$  oranının artması ile parabolik olarak arttığı görülmektedir. Yarı temas uzunluğu farklı  $G_1/(P/h)$  oranları için küçük değişimler gösterse de bu değişimler  $d_1/h$  oranının etkisi yanında çok küçük kaldığından elde edilen grafikler çakışık olarak görülmektedir. Şekil 3.18’de tabaka-çeyrek düzlem temas yüzeyi boyunca boyutsuz gerilme dağılımının grafiği sabit bir  $G_1/(P/h)$  oranı ve farklı  $d_1/h$  oranları için gösterilmiştir. Şekil incelendiğinde,  $d_1/h$  oranının artması ile boyutsuz gerilme dağılımındaki değişimlerin azaldığı görülmektedir.  $d_1/h$  oranının artması ile yayılı yükün tabaka-çeyrek düzlem temas yüzeyi boyunca oluşan gerilme dağılımına etkisi belirginleşmektedir.

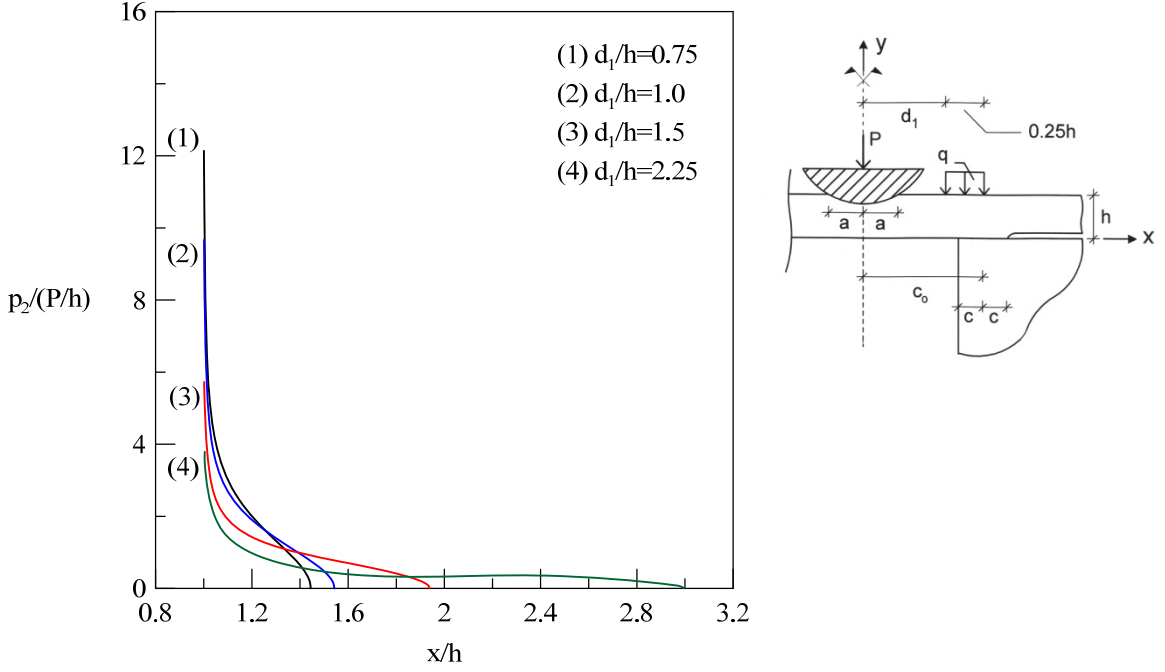


Tablo 3.6. Tabaka-çeyrek yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $c/h$ ) farklı  $G_1/(P/h)$  ve  $(d_1/h)$  oranlarına göre değişimi ( $Q/P = 0.5$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $G_2/G_1 = 2$ ,  $R/h = 250$ ,  $d_2/h = d_1/h + 0.25$ ,  $f/h = 1.0$ )

$c/h$						
$\frac{d_1}{h}$	$G_1/(P/h)$					
	1000	1500	2000	3000	5000	10000
0,75	0,2222	0,2187	0,2181	0,2175	0,2164	0,2163
1,00	0,2713	0,2668	0,2661	0,2656	0,2646	0,2644
1,25	0,3500	0,3459	0,3451	0,3438	0,3438	0,3428
1,50	0,4694	0,4663	0,4638	0,4644	0,4140	0,4600
1,75	0,6263	0,6225	0,6250	0,6200	0,4590	0,6200
2,00	0,8095	0,8080	0,8075	0,8070	0,8070	0,8080
2,25	0,9990	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000



Şekil 3.17. Tabaka-çeyrek düzlem yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $c/h$ ) artan yayılı yükün başlama mesafesinin tabaka yüksekliği oranına ( $d_1/h$ ) göre değişimi ( $Q/P = 0.5$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $G_2/G_1 = 2$ ,  $R/h = 250$ ,  $d_2/h = d_1/h + 0.25$ ,  $f/h = 1.0$ )

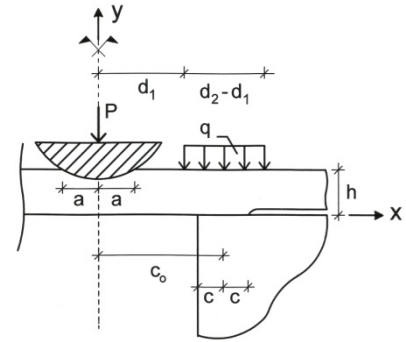
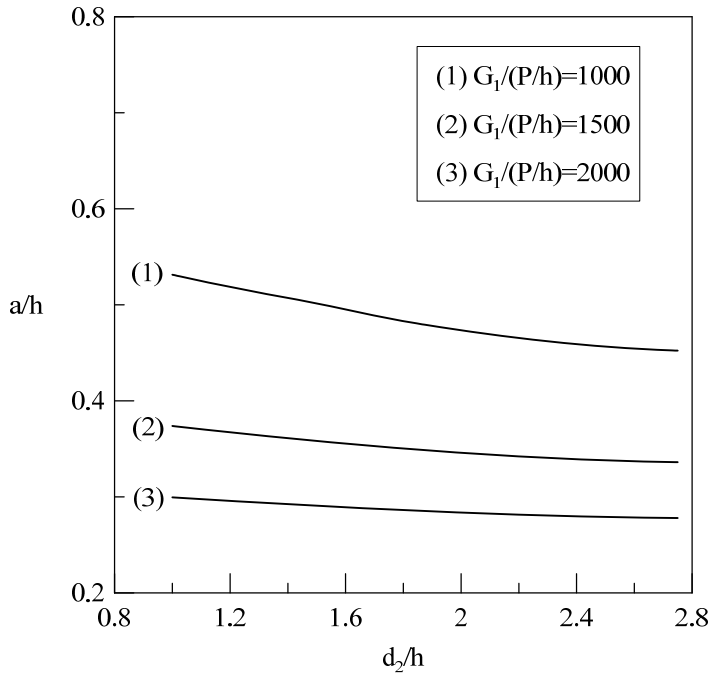


Şekil 3.18. Tabaka-çeyrek düzlem temas yüzeyi boyunca farklı yayılı yük başlama mesafesinin tabaka yüksekliği oranları ( $d_1/h$ ) için boyutsuz gerilme dağılımı ( $Q/P = 0.5$ ,  $G_1/(P/h) = 1000$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $G_2/G_1 = 2$ ,  $R/h = 250$ ,  $d_2/h = d_1/h + 0.25$ ,  $f/h = 1.0$ )

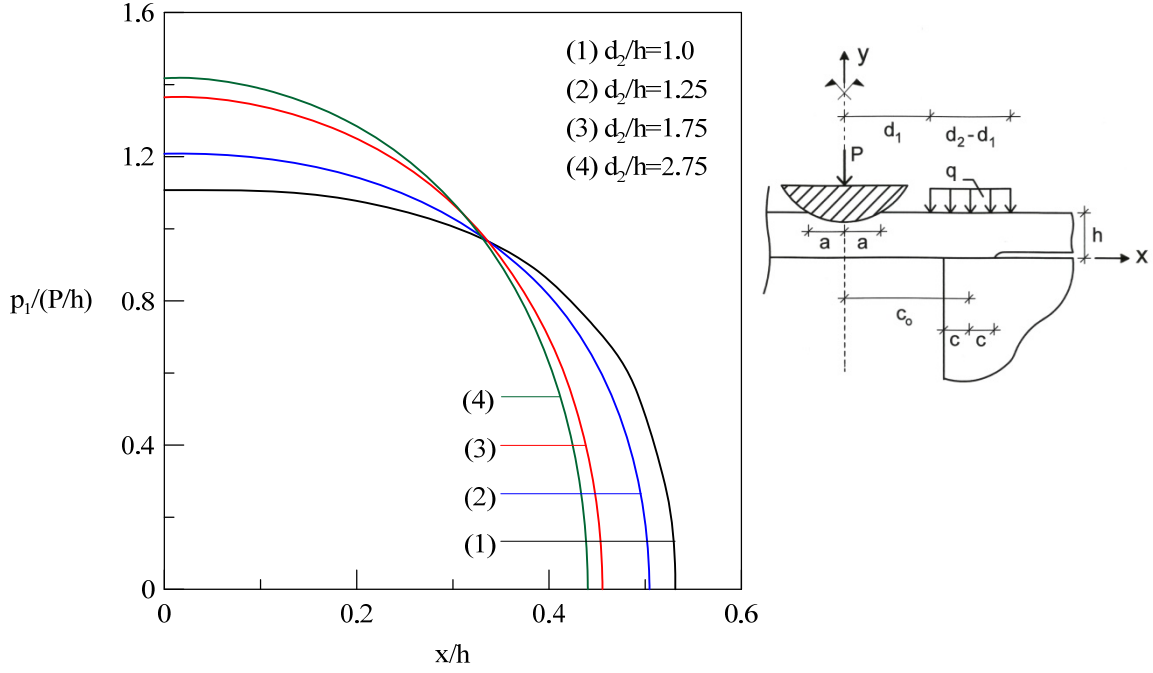
Tablo 3.7’de tabaka-panç arasındaki yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $a/h$ ) değişen  $G_1/(P/h)$  oranı ve yayılı yükün bitiş mesafesinin tabaka yüksekliğine oranı ( $d_2/h$ ) için değişimi verilmiştir. Bu değerler elde edilirken yayılı yükün başlama mesafesi ve toplam yayılı yük miktarı sabit tutulmuştur. Şekil 3.19’de yarı temas uzunluğunun artan  $d_2/h$  oranına göre seçilen farklı  $G_1/(P/h)$  oranları için değişimi gösterilmiştir. İlgili tablo ve şekil incelendiğinde, yarı temas uzunluğunun  $d_2/h$  oranının artması ile parabolik olarak azaldığı görülmektedir. Şekil 3.20’de tabaka-panç temas yüzeyi boyunca boyutsuz temas gerilme dağılışının grafiği sabit bir  $G_1/(P/h)$  oranı ve farklı  $d_2/h$  oranları için gösterilmiştir. Şekilde de görüldüğü gibi  $d_2/h$  oranı arttıkça en büyük boyutsuz gerilme değeri de artmaktadır.

Tablo 3.7. Tabaka-panç yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $a/h$ ) farklı  $G_1/(P/h)$  ve  $(d_2/h)$  oranlarına göre değişimi ( $Q/P = 0.5$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $G_1/G_2 = 2$ ,  $R/h = 250$ ,  $d_1/h = 0.75$ ,  $f/h = 1.0$ )

$a/h$						
$\frac{d_2}{h}$	$G_1/(P/h)$					
	1000	1500	2000	3000	5000	10000
1,00	0,5314	0,3738	0,2994	0,2271	0,1665	0,1133
1,25	0,5156	0,3659	0,2949	0,2250	0,1657	0,1130
1,50	0,5015	0,3582	0,2909	0,2230	0,1649	0,1128
1,75	0,4858	0,3514	0,2867	0,2212	0,1641	0,1125
2,00	0,4735	0,3458	0,2838	0,2197	0,1635	0,1123
2,25	0,4637	0,3414	0,2810	0,2185	0,1630	0,1122
2,50	0,4564	0,3381	0,2791	0,2175	0,1626	0,1120
2,75	0,4523	0,3362	0,2779	0,2170	0,1623	0,1119



Şekil 3.19. Tabaka-panç yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $a/h$ ) artan yayılı yük bitiş mesafesinin tabaka yüksekliği oranına ( $d_2/h$ ) göre değişimi ( $Q/P = 0.5$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $G_2/G_1 = 2$ ,  $R/h = 250$ ,  $d_1/h = 0.75$ ,  $f/h = 1.0$ )

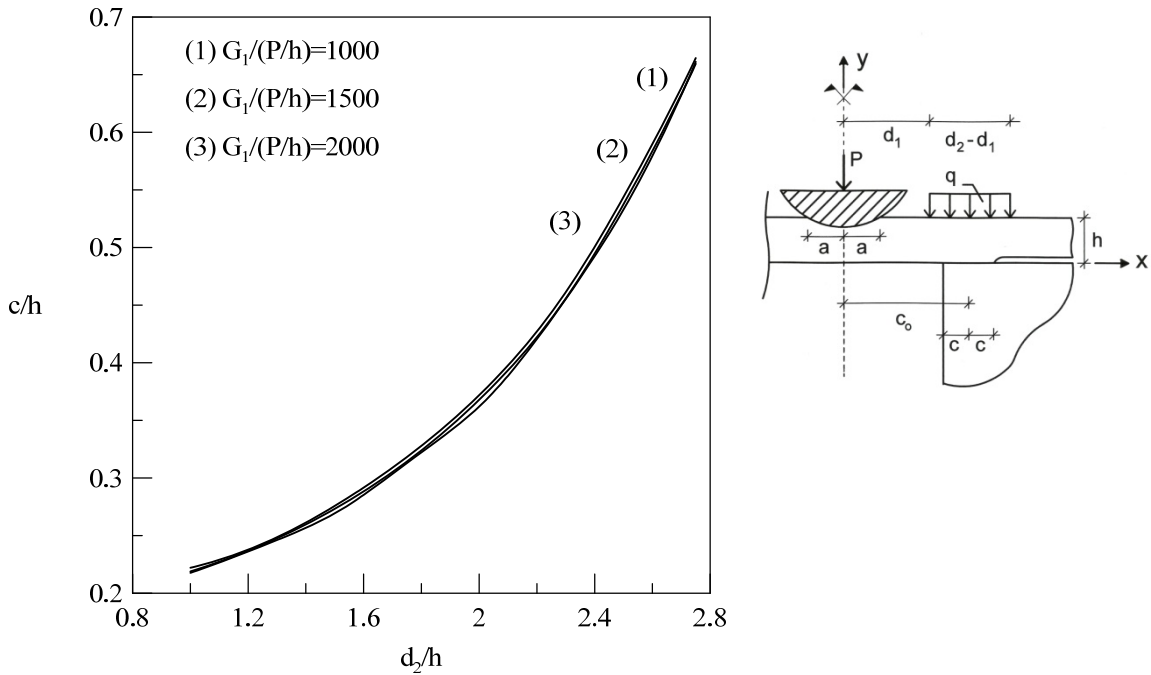


Şekil 3.20. Tabaka-panç temas yüzeyi boyunca faklı yayılı yük bitiş mesafesinin tabaka yüksekliği oranları ( $d_2/h$ ) için boyutsuz gerilme dağılımı ( $Q/P=0.5$ ,  $G_1/(P/h)=1000$ ,  $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $G_2/G_1=2$ ,  $R/h=250$ ,  $d_1/h=0.75$ ,  $f/h=1.0$ )

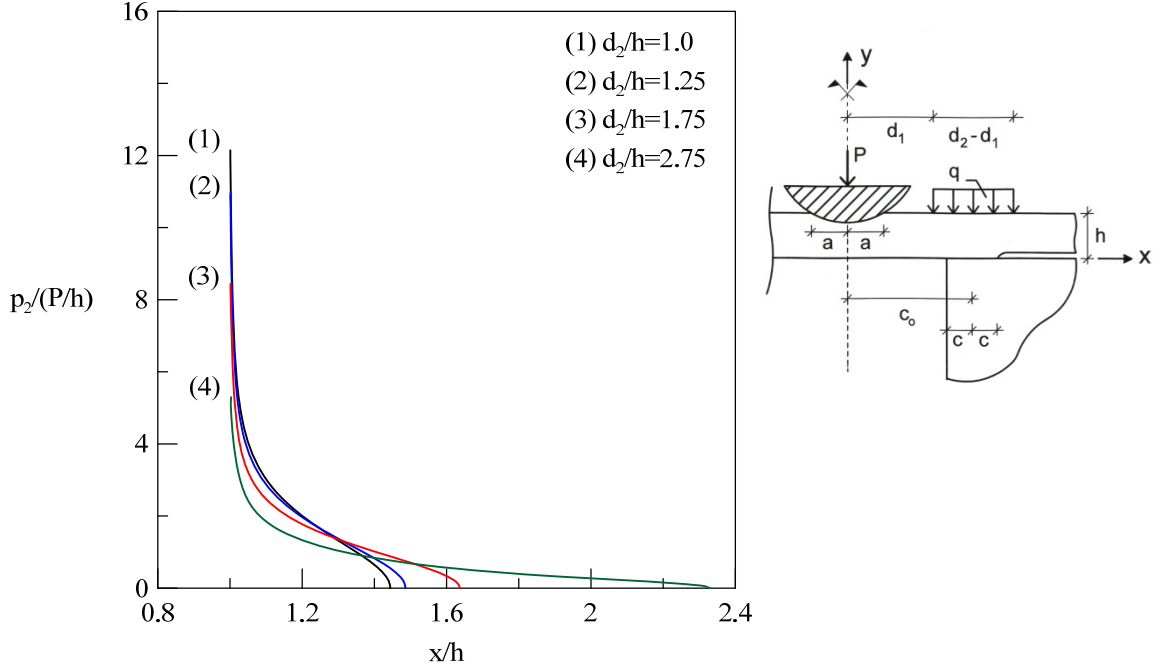
Tablo 3.8’de tabaka-çeyrek düzlem arasındaki yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $c/h$ ) değişen  $G_1/(P/h)$  oranı ve yayılı yükün bitiş mesafesinin tabaka yüksekliğine oranı ( $d_2/h$ ) için değişimi verilmiştir. Bu değerler elde edilirken yayılı yükün başlama mesafesi ve toplam yayılı yük miktarı sabit tutulmuştur. Şekil 3.21’de yarı temas uzunluğunun artan  $d_2/h$  oranına göre seçilen farklı  $G_1/(P/h)$  oranları için değişimi gösterilmiştir. İlgili tablo ve şekil incelendiğinde, yarı temas uzunluğunun  $d_2/h$  oranının artması ile parabolik olarak arttığı görülmektedir. Yarı temas uzunluğu farklı  $G_1/(P/h)$  oranları için küçük değişimler gösterse de bu değişimler  $d_2/h$  oranı etkisi yanında çok küçük kaldığından elde edilen grafikler şekilde çakışık olarak görülmektedir. Şekil 3.22’de tabaka-çeyrek düzlem temas yüzeyi boyunca boyutsuz gerilme dağılımının grafiği sabit bir  $G_1/(P/h)$  oranı ve faklı  $d_2/h$  oranları için gösterilmiştir. Şekil incelendiğinde,  $d_2/h$  oranının artması ile boyutsuz gerilme dağılımlarındaki değişimlerin azaldığı görülmektedir.

Tablo 3.8. Tabaka-çeyrek düzlem yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $c/h$ ) farklı  $G_1/(P/h)$  ve  $(d_2/h)$  oranlarına göre değişimi ( $Q/P = 0.5$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $G_2/G_1 = 2$ ,  $R/h = 250$ ,  $d_1/h = 0.75$ ,  $f/h = 1.0$ )

$c/h$						
$\frac{d_2}{h}$	$G_1/(P/h)$					
	1000	1500	2000	3000	5000	10000
1,00	0,2220	0,2188	0,2176	0,2169	0,2166	0,2161
1,25	0,2428	0,2420	0,2411	0,2399	0,2395	0,2384
1,50	0,2757	0,2731	0,2692	0,2705	0,2698	0,2697
1,75	0,3181	0,3142	0,3129	0,3116	0,3103	0,3100
2,00	0,3717	0,3677	0,3619	0,3642	0,3647	0,3625
2,25	0,4434	0,4381	0,4375	0,4320	0,4344	0,4294
2,50	0,5438	0,5375	0,5328	0,5325	0,5325	0,5300
2,75	0,6644	0,6594	0,6613	0,6600	0,6600	0,6600



Şekil 3.21. Tabaka-çeyrek düzlem yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $a/h$ ) artan yayılı yük bitiş mesafesinin tabaka yüksekliği oranına ( $d_2/h$ ) göre değişimi ( $Q/P = 0.5$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $G_2/G_1 = 2$ ,  $R/h = 250$ ,  $d_1/h = 0.75$ )

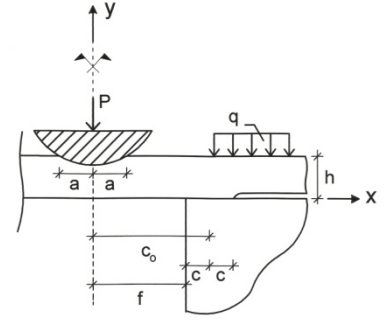
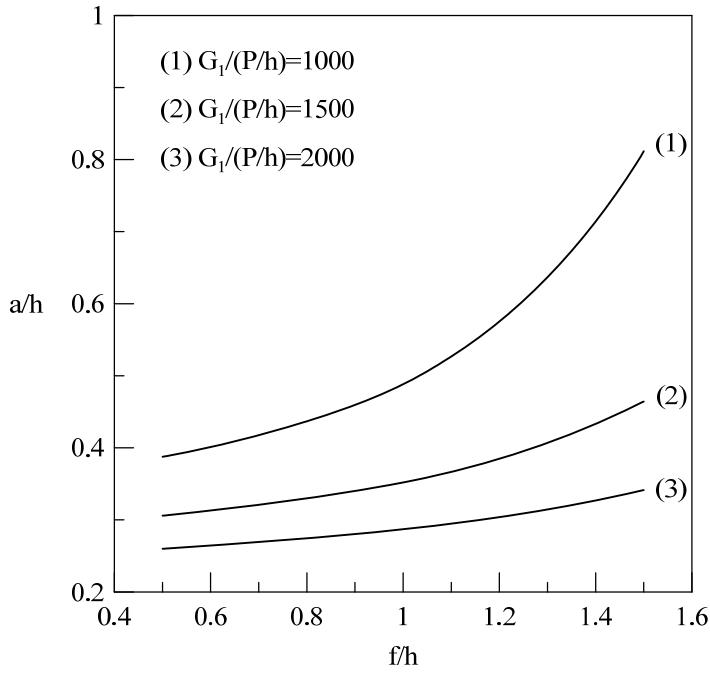


Şekil 3.22. Tabaka-çeyrek düzlem temas yüzeyi boyunca faklı yayılı yük bitiş mesafesinin tabaka yüksekliği oranları ( $d_2/h$ ) için boyutsuz gerilme dağılımı ( $Q/P = 0.5$ ,  $G_1/(P/h) = 1000$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $G_2/G_1 = 2$ ,  $R/h = 250$ ,  $d_1/h = 0.75$ ,  $d_2/h = 0.75$ )

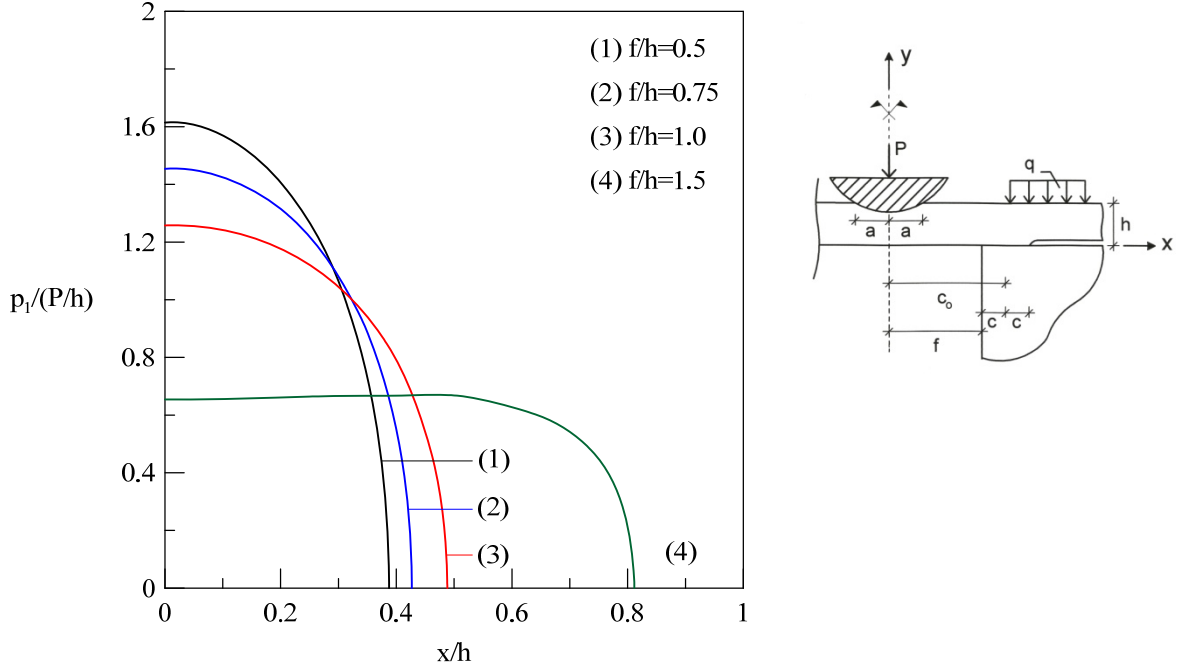
Tablo 3.9’da tabaka-panç arasındaki yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $a/h$ ) değişen  $G_1/(P/h)$  oranı ve çeyrek düzlemler arası açıklığın yarısının tabaka yüksekliğine oranı ( $f/h$ ) için değişimi verilmiştir. Bu değerler elde edilirken yayılı yükün etkidiği yüzey sabit tutulmuştur. Şekil 3.23’de yarı temas uzunluğunun artan  $f/h$  oranına göre seçilen farklı  $G_1/(P/h)$  oranları için değişimi gösterilmiştir. İlgili tablo ve şekil incelendiğinde, yarı temas uzunluğunun  $f/h$  oranının artması ile parabolik olarak arttığı ve  $f/h$  oranının  $d_1/h$  oranını geçmesi durumunda da yarı temas boyundaki değişimin arttığı görülmektedir. Şekil 3.24’de tabaka-panç temas yüzeyi boyunca boyutsuz gerilme dağılımının grafiği sabit bir  $G_1/(P/h)$  oranı ve faklı  $f/h$  oranları için gösterilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi  $f/h$  oranı arttıkça en büyük boyutsuz temas gerilme değeri küçülmekte ve  $f/h$  oranının  $d_1/h$  oranını geçmesi durumunda da en büyük boyutsuz temas gerilmesindeki değişim artmaktadır.

Tablo 3.9. Tabaka-panç yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $a/h$ ) farklı  $G_1/(P/h)$  ve ( $f/h$ ) oranlarına göre değişimi ( $Q/P = 0.5$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $G_2/G_1 = 2$ ,  $R/h = 250$ ,  $d_1/h = 1.00$ ,  $d_2/h = 1.50$ )

$a/h$						
$\frac{f}{h}$	$G_1/(P/h)$					
	1000	1500	2000	3000	5000	10000
0,50	0,3876	0,3058	0,2599	0,2081	0,1585	0,1107
0,75	0,4268	0,3254	0,2718	0,2140	0,1611	0,1115
1,00	0,4882	0,3519	0,2869	0,2213	0,1641	0,1125
1,25	0,6039	0,3951	0,3088	0,2310	0,1680	0,1137
1,50	0,8116	0,4643	0,3414	0,2438	0,1728	0,1152



Şekil 3.23. Tabaka-panç yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $a/h$ ) artan çeyrek düzlemler arası yarı uzaklığının tabaka yüksekliğine oranına ( $f/h$ ) göre değişimi ( $Q/P = 0.5$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $G_2/G_1 = 2$ ,  $R/h = 250$ ,  $d_1/h = 1.00$ ,  $d_2/h = 1.50$ )



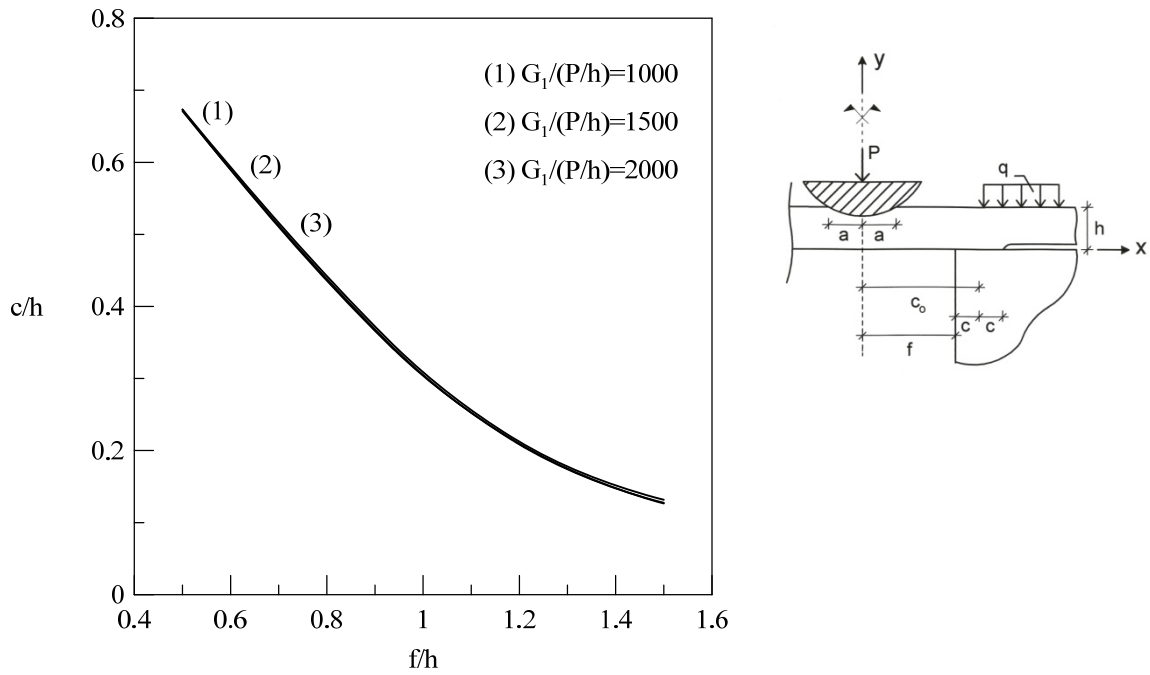
Şekil 3.24. Tabaka-panç temas yüzeyi boyunca farklı çeyrek düzlemler arası yarı uzaklığının tabaka yüksekliğine oranları ( $f/h$ ) için boyutsuz gerilme dağılımı ( $Q/P = 0.5$ ,  $G_1/(P/h) = 1000$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $G_2/G_1 = 2$ ,  $R/h = 250$ ,  $d_1/h = 1.00$ ,  $d_2/h = 1.50$ )

Tablo 3.10'da tabaka-çeyrek düzlem arasındaki yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $c/h$ ) değişen  $G_1/(P/h)$  oranı ve çeyrek düzlemler arası açıklık yarı mesafesinin tabaka yüksekliğine oranı ( $f/h$ ) için değişimi verilmiştir. Bu değerler elde edilirken yayılı yükün etkilediği yüzey sabit tutulmuştur. Şekil 3.25'de yarı temas uzunluğunun artan  $f/h$  oranına göre seçilen farklı  $G_1/(P/h)$  oranları için değişimi gösterilmiştir. İlgili tablo ve şekil incelendiğinde, yarı temas uzunluğunun  $f/h$  oranının artması ile parabolik olarak azaldığı görülmektedir. Yarı temas uzunluğu farklı  $G_1/(P/h)$  oranları için küçük değişimler gösterse de bu değişimler  $f/h$  oranının etkisi yanında çok küçük kaldığından elde edilen grafikler şekilde çakışık olarak görülmektedir. Şekil 3.26'da tabaka-çeyrek düzlem temas yüzeyi boyunca boyutsuz temas gerilme dağılımının grafiği sabit bir  $G_1/(P/h)$  oranı ve farklı  $f/h$  oranları için gösterilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi  $f/h$  oranı arttıkça boyutsuz gerilme değerleri de artmaktadır.

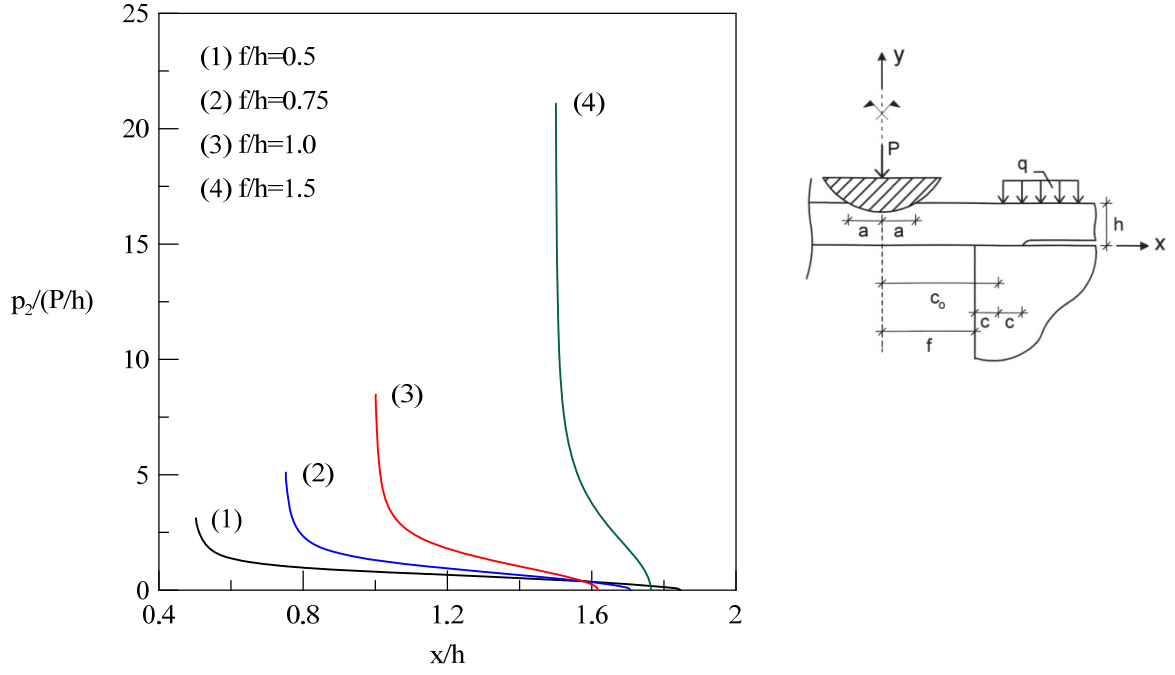


Tablo 3.10. Tabaka-çeyrek düzlem yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $c/h$ ) farklı  $G_1/(P/h)$  ve ( $f/h$ ) oranlarına göre değişimi ( $Q/P = 0.5$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $G_2/G_1 = 2$ ,  $R/h = 250$ ,  $d_1/h = 1.00$ ,  $d_2/h = 1.50$ )

$c/h$						
$\frac{f}{h}$	$G_1/(P/h)$					
	1000	1500	2000	3000	5000	10000
0,50	0,6734	0,6713	0,6731	0,6706	0,6725	0,6675
0,75	0,4789	0,4750	0,4727	0,4734	0,4719	0,4688
1,00	0,3087	0,3048	0,3038	0,3026	0,3013	0,3006
1,25	0,1938	0,1900	0,1912	0,1903	0,1902	0,1894
1,50	0,1318	0,1274	0,1265	0,1262	0,1258	0,1254



Şekil 3.25. Tabaka-çeyrek düzlem yarı temas uzunluğunun tabaka yüksekliğine oranının ( $c/h$ ) artan çeyrek düzlemler arası yarı uzaklığının tabaka yüksekliğine oranına ( $f/h$ ) göre değişimi ( $Q/P = 0.5$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $G_2/G_1 = 2$ ,  $R/h = 250$ ,  $d_1/h = 1.00$ ,  $d_2/h = 1.50$ )



Şekil 3.26. Tabaka-çeyrek düzlem temas yüzeyi boyunca farklı çeyrek düzlemler arası yarı uzaklığının tabaka yüksekliğine oranları ( $f/h$ ) için boyutsuz gerilme dağılımı ( $Q/P = 0.5$ ,  $G_1/(P/h) = 1000$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $G_2/G_1 = 2$ ,  $R/h = 250$ ,  $d_1/h = 1.00$ ,  $d_2/h = 1.50$ )

#### 4. SONUÇLAR

Bu çalışmada, rijit dairesel bir panç ile iletilen tekil bir yük ve düzgün yayılı yükler ile yüklenmiş ve iki elastik çeyrek düzlem üzerine oturan elastik bir tabakanın temas problemi incelenmiştir. Çözümde, öncelikle tabaka-panç temas mesafesi ve tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi belirlenmiş ve bilinmeyen temas gerilmeleri hesaplanmıştır. Buna bağlı olarak da boyutsuz gerilme dağılımları elde edilmiştir. Problem farklı yükleme, malzeme ve geometri durumları için çözülmüş ve bulunan değerlerin irdelenmesi ile elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Tabaka-panç arası yarı temas uzunluğu  $G_1 / (P/h)$  oranının artması ile parabolik olarak azalıp sifıra yaklaşmaktadır. Benzer şekilde çeyrek düzlemler arası açıklığın yarısının tabaka yüksekliğine oranı  $(f/h)$  arttıkça yarı temas uzunluğu da parabolik olarak artmaktadır. Çeyrek düzlem kayma modülünün tabaka kayma modülüne oranı  $(G_2 / G_1)$  arttıkça yarı temas uzunluğu parabolik olarak azalmakta ve farklı  $G_1 / (P/h)$  oranları için farklı değerlere yakınsamaktadır. Yayılı yükün genliği sabit tutulup etkimeye başlama mesafesinin tabaka yüksekliğine oranı  $(d_1/h)$  arttıkça yarı temas uzunluğu parabolik olarak azalmakta ve farklı  $G_1 / (P/h)$  oranları için farklı değerlere yakınsamaktadır. Benzer şekilde  $d_1/h$  oranı sabit tutulup yayılı yükün bitiş mesafesinin tabaka yüksekliğine oranı  $(d_2/h)$  arttıkça yarı temas uzunluğu parabolik olarak azalmaktadır. Yük oranının  $(Q/P)$  farklı değer aralıkları için temas boyu farklı değişimler göstermektedir. Bu oran  $Q/P \cong 0.5$  oluncaya kadar yarı temas uzunluğu azalmakta olup  $Q/P \cong 0.5$  için en küçük değere ulaşmaktadır. Bu değerden daha büyük değerler için ise yarı temas uzunluğu artmaktadır.

Tabaka-panç temas yüzeyi boyunca boyutsuz gerilme dağılımı yarı temas uzunluğu ile ilişkili bir dağılım göstermektedir. Temas boyu azaldıkça boyutsuz gerilme değerlerinin değişimi ve en büyük boyutsuz temas gerilmeleri artmaktadır.

Tabaka-çeyrek düzlem arası yarı temas uzunluğu,  $G_1 / (P/h)$  oranının değişimi ile çok küçük değişimler göstermektedir. Yük oranı  $(Q/P)$  arttıkça yarı temas uzunluğu da parabolik olarak artmakta ve yarı temas uzunluğu yaklaşık olarak 0,72 değerine yakınsamaktadır. Benzer şekilde yayılı yükün genliği sabit tutulup etkimeye başlama mesafesinin tabaka

yüksekliğine oranı ( $d_1/h$ ) arttıkça temas boyu da parabolik olarak artmaktadır. Benzer şekilde  $d_1/h$  oranı sabit tutulup yayılı yük etkime bitiş mesafesinin tabaka yüksekliğine oranı ( $d_2/h$ ) arttıkça yarı temas uzunluğu yine parabolik olarak artmaktadır. Ancak tabaka kayma modülünün çeyrek düzlem kayma modülüne oranı ( $G_2/G_1$ ) arttıkça temas boyu parabolik olarak azalmaktadır. Çeyrek düzlemler arası açıklığın yarısının tabaka yüksekliğine oranı ( $f/h$ ) arttıkça yarı temas uzunluğu parabolik olarak azalmaktadır.

Tabaka-çeyrek düzlem temas yüzeyi boyunca boyutsuz gerilme dağılımı, yük oranının ( $Q/P$ ) sabit kaldığı durumlarda yarı temas uzunluğu ile ilişkili bir dağılım göstermekte ve yarı temas uzunluğu arttıkça boyutsuz gerilmedeki değişimler azalmaktadır. Yük oranının değişip diğer parametrelerin sabit kaldığı durumlarda, yük oranı arttıkça yarı temas uzunluğu da artmakta ve gerilme değişimleri küçülmektedir.

Etkiyen yayılı yükün çeyrek düzleme göre konumu yarı temas uzunlukları üzerinde önemli bir etkiye sahiptir.  $d_1/h$  oranının  $f/h$  oranını geçmesi ile, yani yayılı yükün etkime yüzeyinin tamamının çeyrek düzlem üzerine geçmesi ile, yayılı yükün tabaka-panç yarı temas uzunluğuna olan etkisi azalmakta buna karşılık tabaka-çeyrek düzlem yarı temas uzunluğuna olan etkisi artmaktadır.

## 5. KAYNAKLAR

- Adams, G.G. ve Bogy D.B., 1977. The Plane Symmetric Contact Problem for Dissimilar Elastic Semi-Infinite Strips of Different Widths, ASME Journal of Applied Mechanics, 604-610.
- Adams, G.G., 1978. An Elastic Strip Pressed Against an Elastic Half Plane by a Steadily Moving Force, Journal of Applied Mechanics, 45,89-94.
- Adams, G.G. ve Zeid, I., 1984. An Elastic Punch Moving Across the Surface of a Semi-Infinite Solid, Journal of Applied Mechanics, 51, 622-629.
- Adıbelli H., Çömez, İ. ve Erdöl, R., 2009. Rijit Panç ile Bastırılmış ve Elastik Yarım Düzleme Oturmuş Ağırılıksız Çift Şeritte Sürtünmesiz Değme Problemi, XVI. Ulusal Mekanik Kongresi, Haziran, Kayseri, Bildiriler Kitabı: 71-82.
- Agarwal, V.K., 1978. Axisymmetric Solution of the End-Problem for a Semi-Infinite Elastic Circular Cylinder and its Application to Joined Dissimilar Cylinders under Uniform Tension, International Journal of Engineering Science, 16, 985-998.
- Aksoğan, O., 1978. Numerical Solutions for a Class of Multipart Mixed Boundary Value Problems,. International Journal of Numerical Mathematics and Engineering, 12, 1025-1030.
- Akavcı S., 1999. İki Elastik Çeyrek Düzlem Üzerine Oturan Elastik Bir Tabakanın Sürtünmesiz Temas Problemi, Doktora Tezi, Ç.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Adana.
- Binienda, W.K. ve Pindera, M.J., 1994. Frictionless Contact of Layered Metal-Matrix and Polymer-Matrix Composite Half Plane, Composite Science and Technology, 50,119-128.
- Birinci, A., Kahya, V. ve Erdöl, R., 1997. Elastik Mesnete Oturan Bileşik Tabakalarda Sürekli Değme Problemi, TUMTMK, X. Ulusal Mekanik Kongresi, Eylül, İstanbul, Bildiriler Kitabı: 165-173.
- Birinci, A., 1998. Alt Tabakasında Düşey Bir Çatlağı Bulunan ve Rijit Bir Blok Aracılığıyla Yüklenen Bileşik Tabaka Problemi, Doktora Tezi, K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Birinci, A. ve Erdöl, R., 1999. Frictionless Contact Between a Rigid Stamp and an Elastic Layered Composite Resting on Simple Supports, Mathematical & Computational Applications, 4, 3, 262-272.

- Birinci, A. ve Erdöl, R., 2001. Continuous and Discontinuous Contact Problem for a Layered Composite Resting on Simple Supports, Structural Engineering and Mechanics, 12, 1, 17-34.
- Birinci, A., Çakıroğlu, M. ve Erdöl, R., 2002. Two Strips Problems Resting on an Elastic Foundation, Mathematical & Computational Applications, 7, 3, 275-286.
- Blaibel, A.F. ve Geçit, M.R., 1989. Bending of a Semi-Infinite Elastic Strip Bonded to an Infinite Strip, International Journal of Engineering Science, 27, 7, 793-807.
- Caonway, H.D., 1971. The Effect of Friction on Normal Contact Stresses, ASME Journal of Applied Mechanics, 38, 1094-1095.
- Chen, W. H. ve Engel, P. A., 1972. Impact and Contact Stress Analysis in Multilayered Media, Internatinonal Journal of Solids and Structures, 8, 1257-1281.
- Civelek, M.B. ve Erdoğan, F., 1975. The Frictionless Contact Problem for an Elastic Layer Under Gravity, ASME Journal of Applied Mechanics, 42, 97, 136-140.
- Comninou, M., Schmueser, D. ve Dundurs, J., 1980. Frictional Slip Between a Layer and a Substrate Caused by a Normal Load, International Journal of Engineering Science, 18, 131-137.
- Conway, H. D., 1971. The Effect of Friction on Normal Contact Stresses, ASME Journal of Applied Mechanics, 38, 1094-1095.
- Çakıroğlu E., 2010. İki Çeyrek Düzleme Oturan ve Rijit Bir Panç ile Bastırılan Elastik Bir Tabaka Probleminin Çözümü ve Yapay Sinir Ağı Uygulaması, Doktora Tezi, K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Çakıroğlu. F.L. ve Erdöl, R., 1989. Elastik Zemine Oturan Bileşik Şeritte Sürekli Temas Problemi, 6. Ulusal Mekanik Kongresi, Bursa, Bildiriler Kitabı, Cilt I, 243-248.
- Çakıroğlu, F.L., 1990. Elastik Yarı Sonsuz Düzleme Oturan Bileşik Tabakaların Değme Problemi, Doktora Tezi, K.T.Ü., İnşaat Mühendisliği Bölümü, Trabzon.
- Çakıroğlu, A.O. ve Çakıroğlu, F.L., 1991. Continuous and Discontinuous Contact Problems for Strips on an Elastic Semi-Infinite Plane, International Journal of Engineering Science, 29, 1, 99-111.
- Çakıroğlu. F.L., Çakıroğlu. M. ve Erdöl, R., 2001. Contact Problems for two Elastic Layers Resting on Elastic Half-Plane, Journal of Engineering Mechanics, 127, 2, 113-118.
- Çömez, İ., Birinci, A. ve Erdöl, R., 2003. Rijit Bir Panç Aracılığıyla Bastırılmış ve Alttan Tam Bağlı Ağırlıksız Çift Şeritte Değme Problemi, TUMTMK, XIII. Ulusal Mekanik Kongresi, Eylül, Gaziantep, Bildiriler Kitabı, 321-332.
- Çömez, İ., 2003. Rijit Bir Panç ile Bastırılmış ve Tabanda Tam Olarak Bağlı Ağırlıksız Çift Şerit Problemi, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

- Çömez, İ., 2009. Rijit Dairesel Bir Pançla Bastırılan Elastik Tabaka ve Yarım Düzlemin Sürtünmeli Değme Problemi, Doktora Tezi, K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Dempsey, J.P., Zhao, Z.G., Minnetyan, L. ve Li, H., 1990. Plane Contact of an Elastic Layer Supported by a Winkler Foundation, International Journal of Mechanics, 57, 974-980.
- Dhaliwal, R.S., 1970. Punch Problem for an Elastic Layer Overlying an Elastic Foundation, Internatinonal Journal of Engineering Science, 8, 273-288.
- Dhaliwal, R.S. ve Rau, I.S., 1970. Axisymmetric Boussinesq Problem for a Thick Elastic Layer under a Punch of Arbitrary Profile, Internatinonal Journal of Engineering Science, 8, 843-856.
- Dhaliwal, R.S. ve Rau, I.S., 1972. Further Considerations on The Axisymmetric Boussinesq Problem, Internatinonal Journal of Engineering Science, 10, 659-663.
- Erdelyi, A., Magnus, W., Oberthettinger, F. ve Tricomi, F.G., 1954. Tables of Integral Transforms, Mc Graw Hill, New York.
- Erdoğan, F., 1969. Approximate Solution of System of Singular Integral Equations, SIAM Journal of Applies Mathematics, 17, 1041-1069.
- Erdoğan, F. and Gupta, G., 1971. The Stress Analysis of Multi-Layered Composites with a Flaw, International Journal of Solids Structures, 7, 39-61.
- Erdoğan, F. ve Gupta, G.D., 1972. On the Numerical Solution of Singular Integral Equations, Quarterly Journal of Applied Mathematics, 29, 525-534.
- Erdoğan, F. and Gupta, G.D., 1976. Contact and Crack Problems for an Elastic Wedge, International Journal of Engineering. Science, 14, 155-164.
- Erdoğan F. ve Ratwani, M., 1974. The Contact Problem for an Elastic Layer Supported by two Elastic Quarter Planes, ASME Journal of Aplied Mechanics, 41, 673-677.
- Fabrikant, V.I. ve Sankar, T.S., 1984. On Contact Problems in an Inhomogeneous Half-Space, International Journal of Solids and Structures, 20, 2, 159-166.
- Fabrikant, V.I. ve Sankar, T.S., 1986. Concentrated Force Underneath a Punch Bounded to a Transversely Isotropic Half-Space, Internatinonal Journal of Engineering Science, 24, 1, 111-117.
- Galın, L.A., 1961. Contact Problems in the Theory of Elasticity, İngilizce Çeviri: Moss, H., North Carolina State College Translation Series, Raleigh, North Carolina.

- Geçit, M.R. ve Erdoğan, F., 1978. Frictionless Contact Problem for an Elastic Layer Under Axisymmetric Loading, International Journal of Solids and Structures, 14, 771-785.
- Geçit, M.R., 1980. A Tensionless Contact Without Friction Between an Elastic Layer and an Elastic Foundation, International Journal of Solids and Structures, 16, 387-396.
- Geçit, M.R. ve Gökpınar, S., 1985. Frictionless Contact Between an Elastic Layer and a Rigid Rounded Support, The Arabian Journal for Science and Engineering, 10, 3, 245-251.
- Geçit, M.R., 1986. The Axisymmetric Double Contact Problem for a Frictionless Elastic Layer Indented by an Elastic Cylinder, International Journal of Engineering Science, 24, 1571-1584.
- Geçit, M.R. ve Yapıcı, H., 1986. Contact problem for an Elastic Layer Resting on Rigid Flat Support, The Arabian Journal for Science and Engineering, 11, 3, 235-242.
- Guler, M.A. ve Erdoğan, F., 2007. The Frictional Sliding Contact Problems of Rigid Parabolic and Cylindrical Stamps on Graded Coatings, International Journal of Mechanical Sciences, 49, 2, 161-182.
- Johnson, K.L., 1985. Contact Mechanics, Cambridge University Press, Cambridge.
- Kahya, V., Birinci A. ve Erdöl R., 2001. Frictionless Contact Problem Between an Elastic Layer Bonded to a Rigid Support and a Rigid Stamp, Mathematical & Computational Applications, 6, 1, 13-22.
- Kahya, V., 2003. İki Tabakalı Elastik Ortamda Sürekli ve Süreksiz Değme Problemlerinin İncelenmesi, Doktora Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Kahya, V., Ozsahin, T.S., Birinci, A. ve Erdöl, R., 2007. A Receding Contact Problem for an Anisotropic Elastic Medium Consisting of a Layer and a Half Plane, International Journal of Solids and Structures, 44, 5695-5710.
- Keer, L.M. ve Chantaramungkorn, K., 1972. Loss of Contact Between an Elastic Layer and Half-Space, Journal of Elasticity, 2,3, 191-197.
- Keer, L.M., Dundurs, J. ve Tsai, K.C., 1972. Problems Involving of a Receding Contact Between a Layer and a Half Space, ASME Journal of Applied Mechanics, 39, 1115-1120.
- Keer, L.M. ve Miller, G.R., 1983. Contact Between an Elastically Supported Circular Plate and a Rigid Indenter, International Journal of Engineering Science, 21, 681-690.
- Keer, L.M., Lee, J.C. ve Mura, T., 1984. A Contact Problem for the Elastic Quarter Space, International Journal of Solids and Structures, 20, 2, 513-524.
- King, R.B. ve O'Sullivan, T.C., 1987. Sliding Contact Stress in a Two-Dimensional Layered Elastic Half-Space, International Journal of Solids and Structures, 23, 5, 581-597.



- Loboda, V.V. ve Tauchert, T.R., 1985. The Elastic Contact Problem for Dissimilar Orthotropic Semi-Infinite and Infinite Strips, International Journal of Engineering Science, 23, 12, 1337-1349.
- Muskhelishvili, N.I., 1953. Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity, Noordhoff, Groningen.
- Nowell, D. ve Hills, D.A., 1988. Contact Problems Incorporating Elastic Layers, International Journal of Solids and Structures, 24, 1, 105-111.
- Özşahin, T.Ş., 2000. Rijit İki Blok Üzerine Bileşik Tabakada Sürekli ve Süreksiz Temas Problemi, Doktora Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Özşahin, T.Ş., Kahya, V. ve Çakıroğlu, A.O., 2007. Contact Problem For an Elastic Layered Composite Resting On Rigid Flat Supports, International Journal of Computational and Mathematical Sciences, 1,2, 154-159.
- Ratwani, M. and Erdoğan, F., 1973. On the Plane Contact Problem for a Frictionless Elastic Layer, International Journal of Solids Structures, 9, 921-936.
- Sabin, G.C.W. ve Kaloni, P.N., 1989. Contact Problem of a Rigid Indentor with Rotational Friction in Second Order Elasticity, International Journal of Engineering Science, 27, 3, 203-217.
- Sneddon, I.N., 1951. Fourier Transforms, McGraw-Hill, New York.
- Sneddon, I.N., 1972. The Use of Integral Transforms, McGraw-Hill, New York.
- Spence, D.A., 1975. The Hertz Contact Problem with Finite Friction, Journal of Elasticity, 5, 297-319.
- Uffliand, I.S., 1965. Survey of Articles on the Application of Integral Transforms in the Theory of Elasticity, North Carolina State College Translation Series, Raleigh, North Carolina.
- Urquhart, E.E. ve Pindera, M.J., 1994. Incipient Separation Between a Frictionless Flat Punch and an Anisotropic Multilayered Half Plane, International Journal of Solids and Structures, 31, 18, 2445-2461.
- Weitsman, Y., 1969. On the Unbounded Between Plates and an Elastic Half Space, ASME Journal of Applied Mechanics, 36, 198-202.

## ÖZGEÇMİŞ

Gökhan ADIYAMAN, 1983 yılında Malatya' da doğdu. İlköğretimini Malatya Konak İlköğretim Okulu 'nda, orta öğretimini Malatya Fen Lisesi 'nde tamamladı. 2010 yılında Ortadoğu Teknik Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümünden mezun oldu. 2012 yılında ÖYP Araştırma görevlisi olarak Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne atandı ve Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimine başladı. Evli olan ADIYAMAN, iyi derecede İngilizce bilmekte ve Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsündeki görevine devam etmektedir.