

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**YARIM DÜZLEM ÜZERİNE OTURAN ELASTİK TABAKANIN SÜRTÜNMESİZ TEMAS
PROBLEMİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnş. Müh. Pembe Merve KARABULUT

**OCAK - 2016
TRABZON**



KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**YARIM DÜZLEM ÜZERİNE OTURAN ELASTİK TABAKANIN SÜRTÜNMESİZ TEMAS
PROBLEMİ**

Pembe Merve KARABULUT

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
"İNŞAAT YÜKSEK MÜHENDİSİ"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 07 / 12 / 2015

Tezin Savunma Tarihi : 08 / 01 / 2016

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ

Trabzon 2016

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
"Pembe Merve KARABULUT Tarafından Hazırlanan"

YARIM DÜZLEM ÜZERİNE OTURAN ELASTİK TABAKANIN SÜRTÜNMESİZ TEMAS
PROBLEMİ

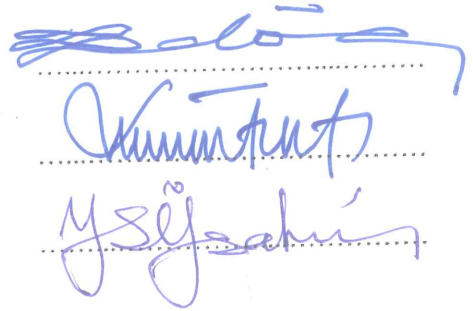
başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 08 / 12 / 2015 gün ve 1630 sayılı
kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Ragıp ERDÖL

Üye : Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ

Üye : Prof. Dr. Talat Şükrü ÖZŞAHİN



Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışma Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlanmıştır.

“Yarım Düzlem Üzerine Oturan Elastik Bir Tabakanın Sürtünmesiz ve Ayrılmalı Temas Problemi” isimli tez çalışmasını bana öneren bilgi ve deneyimleriyle bana ışık tutan, çalışmaktan onur duyduğum Sayın Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ'ye teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmam esnasında bilgi ve birikimlerinden faydalandığım Sayın Prof Dr. Ali Osman ÇAKIROĞLU, Sayın Prof. Dr. Ragıp ERDÖL, Sayın Prof Dr. Talat Şükrü ÖZŞAHİN ve Sayın Yrd. Doç Dr. Fevzi Lütfi ÇAKIROĞLU' na teşekkür ederim.

Çalışmam sırasında yardım ve desteklerini benden esirgemeyen, bilgi ve birikimlerinden faydalandığım Sayın Yrd. Doç Dr. İsa Çömez, Sayın Doç Dr Volkan KAHYA ve Sayın Yrd Doç Dr. Murat YAYLACI'ya teşekkür etmek isterim.

Çalışmamın her anında benden desteğini esirgemeyen Arş Gör. Gökhan ADIYAMAN, Arş. Gör. Erdal ÖNER ve Arş Gör Muhittin TURAN'a, adlarını sayamadığım bütün iş arkadaşlarıma, anneme, babama, aileme en içten dileklerle teşekkür ederim.

Pembe Merve KARABULUT
Trabzon 2016

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Yarım Düzlem Üzerine Oturan Elastik Bir Tabakanın Sürtünmesiz Temas Problemi” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ'nin sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 07/12/2015

Pembe Merve KARABULUT

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET.....	VII
SUMMARY.....	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	IX
TABLolar DİZİNİ.....	XII
SEMBOLLER DİZİNİ.....	XIII
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş.....	1
1.1.1. Temas Problemlerinin Tarihsel Gelişimi.....	1
1.1.2. Çalışmanın Amacı ve Kapsamı.....	6
1.2. Genel Denklemlerin Elde Edilmesi.....	7
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	15
2.1. Problemin Tanımı.....	15
2.2. Kullanılacak Denklemler.....	16
2.3. Problemin Sınır Şartları.....	17
2.4. Katsayıların Belirlenmesi.....	19
2.5. İntegral Denklemlerin Elde Edilmesi.....	21
2.5.1. Birinci İntegral Denklemin Elde Edilmesi.....	21
2.5.2. İkinci İntegral Denklemin Elde Edilmesi.....	24
2.6. İntegral Denklemlerin Boyutsuzlaştırılması.....	26
2.7. İntegral Denklemlerin Sayısal Çözümü.....	28
2.8. Gerilmelerin Bulunması.....	31
3. BULGULAR VE İRDELEME.....	34
3.1. Giriş.....	34
3.2. Temas Uzunlukları ve Temas Gerilmeleri.....	34

3.3.	Gerilmelerin İncelenmesi	48
3.3.1.	σ_x Normal Gerilmelerinin İncelenmesi	48
3.3.2.	σ_y Normal Gerilmelerinin İncelenmesi	51
3.3.3.	τ_{xy} Kayma Gerilmelerinin İncelenmesi.....	53
4.	SONUÇLAR.....	56
5.	KAYNAKLAR.....	59
ÖZGEÇMİŞ		

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

YARIM DÜZLEM ÜZERİNE OTURAN ELASTİK TABAKANIN SÜRTÜNMESİZ TEMAS
PROBLEMİ

Pembe Merve Karabulut

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ
2016, 63 Sayfa

Bu çalışmada, yarım düzlem üzerine oturan homojen, izotrop, elastik bir tabakanın sürtünmesiz ve ayrılmalı temas problemi elastisite teorisine göre incelenmiştir. Problemden, tabakaya üstten rijit dikdörtgen iki blok aracılığıyla iki tekil yük etki etmektedir.

Birinci bölümde, temas problemleri üzerine günümüze kadar yapılmış olan bazı çalışmalardan bahsedilmiştir. Problemin çözümünde kullanılacak olan gerilme ve yerdeğiştirme ifadeleri, elastisitenin temel denklemleri ve integral dönüşüm teknikleri kullanılarak elde edilmiştir. İkinci bölümde, problem tanımlandıktan sonra birinci bölümde elde edilen gerilme ve yerdeğiştirme ifadelerine sınır şartları uygulanmış ve problem tabaka-blok ve tabaka-yarım düzlem temas yüzeylerindeki gerilmelerin bilinmeyenler olduğu iki adet tekil integral denklemden oluşan bir integral denklem sistemine indirgenmiştir. Daha sonra Gauss-Jacobi formülasyonu kullanılarak integral denklem sistemi sayısal olarak çözülmüştür. Üçüncü bölümde blok-tabaka ve tabaka-yarım düzlem arasındaki boyutsuz temas uzunlukları ve boyutsuz gerilme dağılımları ile ilgili sayısal değerler farklı malzeme ve geometrik verilere göre bir bilgisayar programı kullanılarak hesaplanmıştır. Elde edilen bu değerler tablo ve grafiklerle sunulmuş ve bunlarla ilgili değerlendirmeler yapılmıştır. Aynı zamanda y eksenini boyunca tabaka ve yarım düzlemde oluşacak olan σ_x ve σ_y normal gerilmeleri ile τ_{xy} kayma gerilmesi dağılımları da incelenmiştir. Dördüncü bölümde ise çalışmadan ortaya çıkan sonuçlar sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Ayrılmalı temas problemi, yarım düzlem, tekil integral denklem, Gauss-Jacobi İntegrasyon formülasyonu

Master Thesis

SUMMARY

**THE FRICTIONLESS CONTACT PROBLEM FOR AN ELASTIC LAYER RESTING ON
A HALF PLANE**

Pembe Merve KARABULUT

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Civil Engineering Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ
2016, 63 Pages

In this study, the frictionless and receding contact problem for an elastic layer resting on a half plane is considered according to the theory of elasticity. The layer is forced with two concentrated load applied over two rigid rectangular stamps placed symmetrically.

In the first chapter, some studies on the contact problems investigated until now are mentioned. General equations of stresses and displacements which are required for the solution of the problem are obtained by using theory of elasticity and the integral transform techniques. In the second chapter, after the description of the problem the stresses and the displacements expressions obtained in the first chapter are substituted into the boundary conditions of the problem and the problem is reduced to a system of singular integral equations which the contact stress between the layer and the rigid rectangular stamps, contact stresses between the layer and the half plane are unknown functions. After that, the system of singular integral equations is solved numerically by using Gauss-Jacobi integration formulation. In the third chapter, numerical values for the dimensionless contact lengths, the dimensionless contact stresses between the layer and the half plane are calculated for different material and geometric properties using a computer program. These obtained quantities are shown in tables and figures and related assessment are discussed. Furthermore σ_x , σ_y and τ_{xy} stress components for the layer and the half plane are determined along the y axis. The conclusions obtained from the study are mentioned in the last chapter.

Key Words: Contact Problem, Half Plane, Singular Integral Equation, Gauss Jacobi Integration Formulation

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

- Şekil 2.1. Elastik yarım düzlem üzerine oturan simetrik rijit iki dikdörtgen blok aracılığıyla yüklenmiş homojen izotrop tabaka..... 15
- Şekil 3.1. Elastik tabaka ve blok arasındaki $p_1(x)/(P/h)$ boyutsuz temas gerilmesinin G_1/G_2 malzeme oranı ile değişimi
 $((b-a)/h = 1.25, (b+a)/(2h) = 1.25, \kappa_1 = \kappa_2 = 2)$ 38
- Şekil 3.2. Elastik tabaka ve blok arasındaki $p_2(x)/(P/h)$ boyutsuz temas gerilmesinin G_1/G_2 malzeme oranı ile değişimi
 $((b-a)/h = 1.25, (b+a)/(2h) = 1.25, \kappa_1 = \kappa_2 = 2)$ 38
- Şekil 3.3. Elastik tabaka ve blok arasındaki $p_1(x)/(P/h)$ boyutsuz temas gerilmesinin blok genişliği ile değişimi
 $((b+a)/(2h) = 1.25, G_1/G_2 = 4, \kappa_1 = \kappa_2 = 2)$ 39
- Şekil 3.4. Elastik tabaka ve yarım düzlem arasındaki $p_2(x)/(P/h)$ boyutsuz temas gerilmesinin blok genişliği ile değişimi
 $((b+a)/(2h) = 1.25, G_1/G_2 = 4, \kappa_1 = \kappa_2 = 2)$ 39
- Şekil 3.5. Elastik tabaka ve blok arasındaki $p_1(x)/(P/h)$ boyutsuz temas gerilmesinin bloğun simetri ekseninden uzaklığı ile değişimi
 $((b-a)/h = 1.25, G_1/G_2 = 4, \kappa_1 = \kappa_2 = 2)$ 40
- Şekil 3.6. Elastik tabaka ve yarım düzlem arasındaki $p_2(x)/(P/h)$ boyutsuz temas gerilmesinin bloğun simetri ekseninden uzaklığı ile değişimi
 $((b-a)/h = 1.25, G_1/G_2 = 4, \kappa_1 = \kappa_2 = 2)$ 40
- Şekil 3.7. Simetri ekseninde tabaka ile yarım düzlem arasında ayrılma olmaması için bloğun simetri ekseninden uzaklığının alabileceği maksimum değer için G_1/G_2 malzeme oranı ile değişimi
 $((b-a)/h = 1.25, \kappa_1 = \kappa_2 = 2)$ 41
- Şekil 3.8. Simetri ekseninde tabaka ile yarım düzlem arasında ayrılma olmaması için bloğun simetri ekseninden uzaklığının alabileceği maksimum değer için blok genişliği ile değişimi
 $(G_1/G_2 = 4, \kappa_1 = \kappa_2 = 2)$ 42
- Şekil 3.9. Simetri ekseninde tabaka ile yarım düzlem arasında ayrılma olmaması için blok genişliğinin G_1/G_2 malzeme oranı ile değişimi
 $((b+a)/(2h) = 1.25, \kappa_1 = \kappa_2 = 2)$ 43

Şekil 3.10. Simetri ekseninde tek bir blok olması halinde blok genişliğinin $p_1(x)/(P/h)$ boyutsuz temas gerilmesine etkisi ($G_1/G_2 = 1, \kappa_1 = \kappa_2 = 2$)	45
Şekil 3.11. Simetri ekseninde tek bir blok olması halinde blok genişliğinin $p_2(x)/(P/h)$ boyutsuz temas gerilmesine etkisi ($G_1/G_2 = 1, \kappa_1 = \kappa_2 = 2$)	46
Şekil 3.12. Simetri ekseninde tek bir blok olması halinde G_1/G_2 oranının $p_1(x)/(P/h)$ boyutsuz temas gerilmesine etkisi ($d/h = 0.5, \kappa_1 = \kappa_2 = 2$)	46
Şekil 3.13. Simetri ekseninde tek bir blok olması halinde G_1/G_2 oranının $p_2(x)/(P/h)$ boyutsuz temas gerilmesine etkisi ($d/h = 0.5, \kappa_1 = \kappa_2 = 2$)	47
Şekil 3.14. Simetri ekseninde tek bir blok ve simetrik iki ayrı blok olması durumları için $p_1(x)/(P/h)$ boyutsuz temas gerilmesi dağılımları ($d/h = 0.5, (b-a)/h = 1, \kappa_1 = \kappa_2 = 2$)	48
Şekil 3.15. G_1/G_2 kayma modülleri oranının simetri eksenindeki ($x = 0$) σ_x normal gerilme dağılımına etkisi ($(b+a)/(2h) = 1.25, (b-a)/h = 1.25$)	49
Şekil 3.16. Blokların simetri ekseninden olan uzaklıklarının simetri eksenindeki ($x = 0$) σ_x normal gerilme dağılımına etkisi ($(b-a)/h = 1, G_1/G_2 = 1$)	50
Şekil 3.17. Blok genişliğinin simetri eksenindeki ($x = 0$) σ_x normal gerilme dağılımına etkisi ($(b+a)/(2h) = 1, G_1/G_2 = 1$)	50
Şekil 3.18. G_1/G_2 kayma modülleri oranının simetri eksenindeki ($x = 0$) σ_y normal gerilme dağılımına etkisi ($(b+a)/(2h) = 1.25, (b-a)/h = 1.25$)	52
Şekil 3.19. Blokların simetri ekseninden olan uzaklıklarının simetri eksenindeki ($x = 0$) σ_y normal gerilme dağılımına etkisi ($(b-a)/h = 1, G_1/G_2 = 1$)	52
Şekil 3.20. Blok genişliğinin simetri eksenindeki ($x = 0$) σ_y normal gerilme dağılımına etkisi ($(b+a)/(2h) = 1, G_1/G_2 = 1$)	53

- Şekil 3.21. G_1/G_2 kayma modülü oranının simetri eksenine yakın bir kesitte ($x/h = 0.25$) y eksenini boyunca τ_{xy} kayma gerilme dağılımına etkisi
($(b+a)/(2h) = 1.25, (b-a)/h = 1.25$)..... 54
- Şekil 3.22. Blokların simetri ekseninden olan uzaklıklarının simetri eksenine yakın bir kesitte ($x/h = 0.25$) y eksenini boyunca τ_{xy} kayma gerilme dağılımına etkisi
($(b-a)/h = 1, G_1/G_2 = 1$) 55
- Şekil 3.23. Blok genişliğinin simetri eksenine yakın bir kesitte y eksenini boyunca ($x/h = 0.25$) τ_{xy} kayma gerilme dağılımına etkisi
($(b+a)/(2h) = 1, G_1/G_2 = 1$)..... 55

TABLULAR DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 3.1. Sabit blok genişliği ($(b - a)/h = 1.25$) durumunda elastik tabaka ve yarım düzlem arasındaki temas mesafesinin bloğun simetri ekseninden uzaklığı ile değişimi ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$).....	35
Tablo 3.2 Sabit blok genişliği ($(b - a)/h = 1$) durumunda elastik tabaka ve yarım düzlem arasındaki temas mesafesinin bloğun simetri ekseninden uzaklığı ile değişimi	35
Tablo 3.3 Bloğun simetri ekseninden uzaklığı $(b + a)/(2h) = 1$ durumunda elastik tabaka ve yarım düzlem arasındaki temas mesafesinin blok genişliği ile değişimi ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$).....	36
Tablo 3.4 Bloğun simetri ekseninden uzaklığı ' $(b + a)/(2h) = 1.25$ ' durumunda elastik tabaka ve yarım düzlem arasındaki temas mesafesinin blok genişliği ile değişimi ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$).....	36
Tablo 3.4 Simetri ekseninde tek blok olması halinde elastik tabaka ve yarım düzlem arasındaki temas mesafesinin blok genişliği ile değişimi ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$)	44

SEMBOLLER DİZİNİ

P	Tekil yük
X, Y, Z	Sırayla x, y, z doğrultularındaki kütle kuvvetleri
u, v, w	Sırayla x, y, z doğrultularındaki yer değiştirme bileşenleri
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	x, y, z doğrultularındaki birim şekil değiştirmeler
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Dik koordinatlarda açısal şekil değiştirme bileşenleri
e	Hacim değiştirme oranı
λ	Lâme sabiti
G	Kayma modülü
ν	Poisson oranı
E	Elastisite modülü
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	x, y, z doğrultularındaki normal gerilmeler
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Dik koordinatlarda kayma gerilmesi bileşenleri
κ	Malzeme sabiti
Δ	Laplace operatörü
Δ^2	Biharmonik operatör
κ_1, κ_2	Tabaka ve yarım düzlem malzeme sabitleri
$p_1(x)$	Rijit blok-tabaka arasındaki temas gerilmesi
$p_2(x)$	Tabaka-yarım düzlem arasındaki temas gerilmesi
h	Tabaka yüksekliği
a	Tabaka-rijit blok arasındaki temasın ilk noktası
b	Tabaka-rijit blok arasındaki temasın son noktası
c	Tabaka-yarım düzlem arasındaki yarı temas uzunluğu
d	Özel halde tabaka- rijit blok arasındaki yarı temas uzunluğu
$\phi_1(r_1), \phi_2(r_2)$	Tabaka-rijit blok ve tabaka yarım düzlem arasındaki boyutsuz temas gerilmeleri

Not: Bu listede verilmeyen bazı semboller metin içerisinde ilgili oldukları yerlerde tanımlanmışlardır.

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Temas problemi elastisitenin temel problemlerinden biridir. Birçok yapının ve mekanik sistemlerin hesabı elastik cisimlerin temasını esas alır. Karayolları, havaalanı pistleri, demiryolları, tahıl ambarları, çelik birleşimler, ve temeller mühendislik yapıları bunlara verilebilecek örneklerden bazılarıdır.

Son yıllarda elastisite teorisi mühendislik problemlerinin çözümünde kayda değer bir uygulama alanı bulmuştur. Mühendislik yapılarındaki gerilme, yer ve şekil değiştirme problemlerinin çözümünde elemanter metotların yetersiz kaldığı pek çok duruma göre elastisite teorisi kesin sonuçlar vermektedir. Bilgisayar teknolojisi ve sayısal çözüm yöntemlerinin geliştirilmesiyle temas problemlerinin çözümünde önemli artış sağlanmıştır. Ayrıca integral dönüşüm teknikleri, sonlu elemanlar, sonlu farklar, sınır elemanları gibi yöntemlerle de son yıllarda temas problemleri ile ilgili pek çok çalışma yapılmıştır.

1.1.1. Temas Problemlerinin Tarihsel Gelişimi

Temas mekaniği ile ilgili ilk çalışmalar 1882 yılına Heinrich Hertz'in "On The Contact of Elastic Solids" makalesinin yayınlanmasına dayanır. Çalışmalarında tam elastik cisimler ve sürtünmesiz yüzeyleri konu edinen Hertz, değme gerilmesi yayılışının yarım elipsoid ve değme bölgesinin elips olduğunu göstermiştir. Ayrıca bulduğu sonuçları rijit düzleme oturan farklı geometrilere sahip problemlere uygulamıştır. Bu tip problemler Hertz değme problemi olarak adlandırılırlar.

Sneddon'un integral dönüşüm tekniklerini elastisite teorisinde kullanmasının ardından Muskhelishvili tarafından kompleks değişkenler metodunun geliştirilmesiyle beraber temas problemleriyle ilgili yapılan çalışmalarda bir artış gözlenmiştir. Galin "Contact Problems in the Theory of Elasticity" adlı eserinde 1950'li yıllara kadar temas mekaniğiyle ilgili yapılan çalışmaları bir araya getirmiş, Uffliand ise eserinde (1965) bu problemlerin çözümüne integral dönüşüm tekniklerinin uygulamasını gerçekleştirmiştir.

Erdoğan ve Gupta (1969) uygulamalı fizik ve mühendislikte karışık sınır değer problemlerinin formülasyonlarında ortaya çıkan tekil integral denklemlerin sayısal çözümlenmesi için bir yöntem geliştirmişlerdir. Bu yöntem özellikle katı cisim mekaniğindeki temas ve çatlak problemlerinin çözümlerine uygulanmıştır.

Dhaliwal (1970), rijit dairesel bir panç aracılığıyla yüklenmiş yarım düzlem problemini incelemiştir. Karışık sınır değer problemi Fredholm integral denklemine indirgenmiş, sayısal yöntemler ve kuvvet serileri yardımıyla integral denklem çözülmüştür. Daha sonra Dhaliwal ve Rau tarafından (1972) pançın değme yüzeyinin silindirik, konik, küresel, parabolik ve eliptik olması durumları için problemin çözümü genişletilmiştir.

Keer vd. (1972) , elastik yarım düzlem üzerine oturan, yayılı yük ile yüklenmiş elastik tabakanın sürtünmesiz ve ayrılmalı temas problemini incelemiştir. Problem integral dönüşüm teknikleri kullanılarak dönele simetrik ve düzlem gerilme olarak ayrı ayrı incelenmiştir. Sonuç olarak yüklemenin temas uzunluğuna bir etkisi olmadığı ve sadece temas gerilmesi dağılımını değiştirdiği görülmüştür.

Erdoğan ve Ratwani (1974), iki çeyrek düzlem üzerine oturan elastik tabakanın sürtünmesiz temas problemini incelemiştir. Çalışma sonucunda, temas uzunluklarının dış yükün büyüklüğünden bağımsız olduğu fakat yük genişliğine bağlı olarak değiştiği gösterilmiştir.

Spence (1975), dikdörtgen ve eğrisel profillerdeki dönele simetrik panç aracılığıyla yüklenmiş yarı sonsuz düzlemin sürtünmeli değme problemini incelemiştir. Sürtünme Coulomb kanuna göre incelenmiş, problemin formülasyonu karışık sınır değer problemi olarak yapılmıştır.

Adams ve Boggy (1977), farklı elastik özelliklere sahip, değişik kalınlıklardaki iki yarı sonsuz tabakanın bağlı temasını incelemiştir. Çalışmada integral denklemler çıkarılmış ve değişik malzeme kombinasyonları ve kalınlık oranları için sonuçlar elde edilmiştir.

Civelek ve Erdoğan (1977) dikdörtgen rijit bir blok aracılığıyla yüklenmiş ve rijit düzlem üzerine oturan sonsuz uzunluktaki elastik bir tabakanın sürtünmesiz temas problemini incelemiştir. İlk ayrılma yükleri, ilk ayrılma uzaklıkları, temas gerilmeleri, temas uzunlukları ve düşey yer değiştirmelere ait sayısal sonuçlar elde edilmiştir.

Bakırtaş (1980), rijit bir blok aracılığıyla yüklenmiş, elastik özellikleri derinlikle değişen yarım düzlemin temas problemini incelemiştir. Değişen elastik özelliklerin gerilme dağılımlarına olan etkileri araştırılmıştır.

Keer vd. (1984), elastik çeyrek düzlem ve çeyrek düzlemin üzerine oturan rijit bloğun sürtünmesiz değme problemini incelemişlerdir. Öncelikle seçilen tahmini değme bölgesi dikdörtgensel bölgelere ayrılmış ve her bir bölgedeki gerilmenin sabit olduğu kabulü yapılmıştır. Bu şekilde integral denklem lineer bir denklem sistemine dönüştürülerek, temas uzunlukları ve temas bölgesindeki gerilme dağılımı elde edilmiştir.

Geçit (1986), yarı sonsuz düzlem üzerine oturan, yarı sonsuz uzunluklu silindirin aksenal simetrik temas problemini incelemiştir. Sürtünme olmadığı ve çekme kuvvetlerinin değme yüzeyi boyunca aktarılmadığı kabulü yapılmıştır. Değişik malzeme özellikleri için değme uzunlukları ve değme gerilmesi dağılımları elde edilmiş ve grafiklerle sunulmuştur.

Nowell ve Hills (1988), ince bir elastik şerit ile simetrik yerleştirilmiş tekerlekler arasında meydana gelen düzlemsel değme problemini bir hibrit metot kullanarak incelemişlerdir. Yüzey gerilmeleri sürtünmeli ve sürtünmesiz temas problemleri için ayrı ayrı elde edilmiş olup, yapışma ve kayma bölgelerinin detaylı bir analizi yapılmıştır.

Çakıroğlu ve Erdöl (1989), elastik zemine oturan bileşik tabaka problemini çözmüşlerdir. Değişik malzeme sabitleri ve yükseklikler için; gerilmeler, yer değiştirmeler, ilk ayrılma uzaklıkları ve bu ayrılmayı meydana getiren yüklere ait sayısal sonuçlar elde edilmiştir.

Çakıroğlu (1990), elastik yarım düzlem üzerine oturan bileşik tabakaların temas problemini incelemiştir.

Dempsey vd. (1991), Winkler zemine oturan elastik tabakanın aksenal simetrik temas problemini incelemişlerdir. Tabakaya üst yüzeyinden yayılı yük etki etmesi, tekil yükün konik, parabolik, ve elipsoidal temas yüzeyli bloklar aracılığıyla iletilmesi durumları elastisite teorisi ve kiriş teorisine göre ayrı ayrı çözülmüş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Pindera vd. (1993), sonlu sayıdaki izotropik, ortotropik, ve monoklinik tabakalardan oluşan yarım düzlemin sürtünmesiz temas problemini incelemişlerdir. Kompozit yarım düzlemin temas gerilmesi dağılımları, yük ve temas uzunluğu ilişkisine ait sonuçlar elde edilmiştir.

Fan vd. (1994), anizotropik yarım düzlemin iki boyutlu temas problemini ele almışlardır.

Aksoğan vd. (1997), iki çeyrek düzlem üzerine oturan elastik tabakanın simetrik olmayan düzlem elastisite problemini incelemişlerdir.

Birinci ve Erdöl (1999), basit mesnetler üzerine oturan üstten rijit bir blok aracılığıyla yüklenmiş iki tabakadan oluşan bileşik tabakanın sürtünmesiz değme problemini incelemişlerdir. Dairesel ve parabolik blok profilleri için temas uzunlukları ve temas gerilmeleri elde edilmiştir.

Birinci ve Erdöl (2001), iki basit mesnet üzerine uzanan değişik yükseklik ve elastik sabitlerdeki iki tabakadan oluşan kompozit bir tabakanın sürtünmesiz temas problemini ele almışlardır. İlk ayrılma yükleri, ilk ayrılma uzaklıkları, temas gerilmeleri, temas uzunlukları ve ayrılma bölgesindeki düşey yer değiştirmelere ait sayısal sonuçları elde etmişlerdir.

Çakıroğlu vd. (2001), elastik yarım düzlem üzerine oturan iki elastik tabakanın sürekli ve süreksiz temas problemini incelemişlerdir. Problem sürekli olmayan temas durumu için singüler integral denklemler cinsinden formülize edilerek, Gauss-Chebyhev integrasyon formülasyonu ile çözülmüştür. Temas gerilmeleri, ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıklarına ait sayısal sonuçlar grafiklerle gösterilmiştir.

Güler ve Erdoğan (2004), yarım düzlem üzerine oturan fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın sürtünmeli temas problemini incelemişlerdir. Tabaka üstten yatay ve düşey kuvvetler etkisindeki dikdörtgen veya eğrisel profillere sahip bloklar aracılığıyla yüklenmiştir. Tabakanın kayma modülü derinliğe bağlı olarak değişmektedir. Problem integral dönüşüm teknikleri kullanılarak tekil integral denkleme indirgenerek sayısal sonuçlar elde edilmiştir.

El-Borgi vd. (2005), elastik yarım düzlem üzerine oturan üstten yayılı yük etkisindeki fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın sürtünmesiz ve ayrılmalı temas problemini incelemişlerdir.

Kahya vd. (2007), anizotropik elastik yarım düzlem ve anizotropik tabakanın sürtünmesiz ve ayrılmalı temas problemini incelemişlerdir. Problem temas gerilmelerinin bilinmeyen fonksiyonlar olduğu bir integral denklem sistemine indirgenmiştir. Tek doğrultulu kompozitte olduğu gibi temas gerilmelerinin ve temas uzunluklarının malzemenin lif açısıyla büyük ölçüde değiştiği sonucuna varılmıştır.

Rhimi vd. (2009), fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ve elastik yarım düzlem arasındaki eksenel simetrik temas problemini incelemişlerdir. Henkel dönüşümleri kullanılarak elastisite denklemleri temas gerilmelerinin bilinmeyenler olduğu tekil integral denkleme dönüştürülmüştür. Tekil integral denklem uygunluk şartını sağlayan doğru temas

uzunluklarını elde etmek için ortogonal Chebyhev polinomları ve iterasyon yardımıyla çözülmüştür.

Rhimi vd. (2011) elastik yarım düzlem üzerine oturan, rijit bir panç aracılığıyla yüklenmiş fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın sürtünmesiz ve ayrılmalı temas problemini ele almışlardır. Nonhomojenite parametresinin, derecelendirilmiş tabaka kalınlığının ve yükün şiddetinin, temas gerilmeleri ve temas uzunlukları üzerine etkileri araştırılmıştır.

Özşahin vd. (2012) elastik yarım düzlem üzerine oturan üç rijit blok aracılığıyla yüklenmiş elastik tabakanın sürekli ve süreksiz temas problemini incelemişleridir. Sayısal sonuçlar, blok genişliklerinin, elastik sabitlerin, dış yüklerin, bloklar arasındaki mesafenin; sürekli ve süreksiz temas uzunlukları, ilk ayrılma noktası ve yükü, ayrılma uzaklıkları, bloklar arası etkileşimin bittiği limit uzunluk ve temas gerilme dağılımlarında önemli rol oynadığını göstermiştir.

Çömez (2013), Winkler zemin üzerine oturan fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın temas problemini incelemiştir. Elastisite modülünün tabaka kalınlığı yönünde eksponansiyel olarak değiştiği varsayılmıştır. Problem Fourier dönüşüm teknikleri yardımıyla bir singüler integral denkleme dönüştürülmüştür. Gauss-Chebyshev integrasyon formülasyonu yardımıyla integral denklem çözülmüştür. Malzeme nonhomojenitesinin, Winkler zeminin rijitliğinin ve panç çapının temas gerilmelerine, temas uzunluklarına ve normal gerilmelere olan etkisi gösterilmiştir.

El-Borgi vd. (2014) fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ve yarım düzlemin sürtünmeli ve ayrılmalı temas problemini incelemişlerdir. Çalışmada sürtünme katsayısının ve nonhomojenite faktörünün, temas gerilmeleri dağılımı ve temas bölgesinin büyüklüğü üzerine etkileri araştırılmıştır.

Yan ve Li (2014), üstten dairesel bir panç aracılığıyla yüklenmiş fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ve elastik tabaka arasındaki ayrılmalı temas problemini inceleyerek, temas gerilmeleri ve temas uzunluklarını elde etmişlerdir.

Çömez (2015), rijit silindirik bir panç ve fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka arasındaki hareketli değme problemini incelemiştir. Temas uzunluklarının pançın hızı ve tabakanın rijitliğiyle orantılı olarak arttığı, artan hız ve rijitliğin de yüzeydeki çekme gerilmelerini arttırdığı sonucuna varılmıştır.

Peijian vd (2015), Gelişigüzel yönde derecelendirilmiş tabaka ve silindirik pançın sürtünmeli temas problemini incelemişlerdir.

Küçükü vd. (2015), rijit bir panç ve fonksiyonel derecelendirilmiş ortotropik yarım düzlemin temas problemini incelemişleridir. Problemdede elastisite modülünün derinlikle değiştiği kabulü yapılmıştır. Nonhomojenite parametresi β , rijit panç ve yarım düzlem arasındaki sürtünme η ve ortotropik elastik malzeme parametrelerinin (rijitlik oranı δ , poisson oranı ν , kayma parametresi κ gibi.) gerilme dağılımlarına etkisi elde edilmiştir.

1.1.2. Çalışmanın Amacı ve Kapsamı

Bu çalışmada, rijit dikdörtgen iki blok aracılığıyla yüklenmiş ve elastik yarım sonsuz düzlem üzerine oturan, homojen, izotrop elastik tabakanın sürtünmesiz ve ayrılmalı temas problemi elastisite teorisine göre incelenmiştir.

Çalışmanın amacı, blok ile tabaka ve tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme gerilmesi dağılımlarını, tabaka ile yarım düzlem arasındaki temas uzunluklarını, tabakanın ve yarım düzlemin herhangi bir noktasındaki normal gerilme ve kayma gerilmesi değerlerini elde etmektir.

Birinci bölümde temas problemlerinin tarihsel gelişiminden bahsedilmiş ve temas problemleriyle ilgili yapılan bazı çalışmalar özetlenmiştir. Elastisite teorisinin temel denklemleri ve integral dönüşüm teknikleri kullanılarak düzlem haldeki gerilme ve yerdeğiştirme ifadeleri elde edilmiştir.

İkinci bölümde, problemin tanımı yapılmıştır. Tabaka ve yarım düzlem için elde edilen gerilme ve yerdeğiştirme ifadelerine sınır şartları uygulanarak 6 bilinmeyenli 6 adet cebrik denklem elde edilmiş ve bu denklem sisteminin çözümünden bilinmeyen katsayılar elde edilmiştir. Elde edilen bu katsayılarda rijit blok ile elastik tabaka ve elastik tabaka ile yarım düzlem arasındaki temas gerilmeleri bilinmeyenlerdir. Blok ile tabaka arasındaki temas yüzeyi boyunca tabakanın düşey yer değiştirme fonksiyonunun türevinin, blok profilini tanımlayan fonksiyonun türevine eşit olması şartı kullanılarak probleme ilişkin birinci integral denklem elde edilmiştir. Tabaka ve yarım düzlem arasındaki temas mesafesi boyunca tabakanın düşey yer değiştirme fonksiyonunun türevinin, yarım düzlemin düşey yerdeğiştirme fonksiyonunun türevine eşit olması şartı kullanılarak da probleme ilişkin ikinci integral denklem elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen bu integral denklemler boyutsuzlaştırılarak integral denklemlerin sayısal çözümü Gauss-Jacobi formülasyonu kullanılarak gerçekleştirilmiştir.

Üçüncü bölümde, probleme ilişkin sayısal uygulamalar yapılmıştır. Farklı malzeme oranları ve farklı geometrik verilere göre değme gerilmeleri, değme uzunlukları ve gerilme bileşenleri sayısal olarak elde edilerek bunların değişimi tablo ve grafiklerle sunulmuş ve elde edilen sonuçlar irdelenmiştir.

Dördüncü bölümde, çalışmadan çıkarılan sonuçlar verilmiştir. Son bölümü ise yararlanılan kaynaklar izlemektedir.

1.2. Genel Denklemlerin Elde Edilmesi

Bu kısımda, elastisite teorisinden yararlanılarak gerilme ve yer değiştirme bileşenlerinin genel ifadeleri elde edilecektir. Bu amaçla önce bünye denklemleri ve yer değiştirme-şekil değiştirme ifadeleri kullanılarak denge denklemleri yer değiştirmeler cinsinden yazılarak Navier denklemleri elde edilecektir. Yer değiştirme bileşenlerinin gerekli türevleri Navier denklemlerinde yerlerine yazılarak elde edilecek adi diferansiyel denklem takımının çözümü sonucunda da yer değiştirme ifadelerinin genel denklemleri bulunacaktır. Bu ifadelerin bünye denklemlerinde yerlerine yazılması ile de gerilme bileşenlerinin genel ifadeleri elde edilecektir.

Üç boyutlu halde bir cisim için x, y, z dik koordinat takımında $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ gerilme bileşenlerini ve X, Y, Z kütle kuvveti bileşenlerini göstermek üzere bir nokta civarında denge denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \quad (3)$$

Şekil değiştirme ve yer değiştirme arasındaki bağıntılar;

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (5)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (6)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (7)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (8)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (9)$$

şeklinde yazılabilirler. Burada ε_x , ε_y , ε_z , γ_{xy} , γ_{yz} ve γ_{xz} şekil değiştirme bileşenlerini, u , v ve w ise sırasıyla x , y ve z doğrultularındaki yer değiştirme bileşenlerini göstermektedir.

Bir nokta civarındaki gerilmelerle şekil değiştirmeler arasındaki bağıntılar olan bünye denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilirler.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (10)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (11)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (12)$$

Gerilme bileşenleri; (4)-(9) nolu şekil değiştirme ve yer değiştirme bağıntıları ve (10)-(12) nolu bünye denklemleri kullanılarak, yer değiştirmeler cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilirler.

$$\sigma_x = \lambda e + 2G \frac{\partial u}{\partial x} \quad (13)$$

$$\sigma_y = \lambda e + 2G \frac{\partial v}{\partial y} \quad (14)$$

$$\sigma_z = \lambda e + 2G \frac{\partial w}{\partial z} \quad (15)$$

$$\tau_{xy} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (16)$$

$$\tau_{yz} = G \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (17)$$

$$\tau_{zx} = G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (18)$$

Bu ifadelerde geçen

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (19)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (20)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (21)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada; E, ν, G, e, λ sırasıyla elastisite modülünü, Poisson oranını, kayma modülünü, hacim değıştirme oranını ve Lâme sabitini göstermektedirler. Ayrıca denklemlerde geçen kayma gerilmeleri arasında $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$ eşitliklerinin olduğu da bilinmektedir.

Bünye denklemlerinin gerekli türevleri alınıp denge denklemlerinde yerlerine yazılması ile Navier denklemleri olarak bilinen aşağıdaki bağıntılar elde edilirler.

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G \nabla^2 u + X = 0 \quad (22)$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial y} + G \nabla^2 v + Y = 0 \quad (23)$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial z} + G \nabla^2 w + Z = 0 \quad (24)$$

Bu denklemlerde geçen ∇^2 Laplace operatörü olup,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (25)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Çözümü yapılacak problem iki boyutlu olup kütle kuvvetlerinin etkisi ihmal edilmektedir. Bu durumda, Navier denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilirler.

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G \nabla^2 u = 0 \quad (26)$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial y} + G \nabla^2 v = 0 \quad (27)$$

Düzlem halde hacim değiştirme oranı e ve Laplace operatörü ∇^2 ,

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (28)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (29)$$

řekliini alırlar.

Problemin yükleme durumu, malzeme özellikleri ve geometrisi y eksenine göre simetrik olduğundan u ve v yer deęiřtirmeleri aşağıdaki eşitlikleri saęlarlar.

$$u(x, y) = -u(-x, y) \quad (30)$$

$$v(x, y) = v(-x, y) \quad (31)$$

Yer değiştirmeler $u(x, y)$ ve $v(x, y)$, bilinmeyen fonksiyonlar $\phi(\xi, y)$ ve $\psi(\xi, y)$ 'nin Fourier sinüs ve Fourier kosinüs dönüşümleri olarak tanımlanırlarsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$u(x, y) = F_s [\phi(\xi, y); \xi \rightarrow x] = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \phi(\xi, y) \sin(\xi x) dx \quad (32)$$

$$v(x, y) = F_s [\psi(\xi, y); \xi \rightarrow x] = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \psi(\xi, y) \cos(\xi x) dx \quad (33)$$

Bu ifadelerin ters Fourier dönüşümleri alınacak olursa,

$$\phi(\xi, y) = F_s^{-1} [u(x, y); x \rightarrow \xi] = \int_0^\infty u(x, y) \sin(\xi x) d\xi \quad (34)$$

$$\psi(\xi, y) = F_s^{-1} [v(x, y); x \rightarrow \xi] = \int_0^{\infty} v(x, y) \cos(\xi x) d\xi \quad (35)$$

eşitlikleri elde edilir. (32) ve (33) nolu ifadelerde geçen u ve v 'nin ilgili türevlerinin Fourier dönüşümleri aşağıda gösterildiği gibidir.

$$F_s \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; x \rightarrow \xi \right] = -\xi^2 \phi \quad (36)$$

$$F_s \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; x \rightarrow \xi \right] = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad (37)$$

$$F_s \left[\frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y}; x \rightarrow \xi \right] = -\xi \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (38)$$

$$F_s \left[\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y}; x \rightarrow \xi \right] = \xi \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (39)$$

$$F_s \left[\frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2}; x \rightarrow \xi \right] = -\xi^2 \psi \quad (40)$$

$$F_s \left[\frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2}; x \rightarrow \xi \right] = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad (41)$$

Kısmi integrasyon kullanılarak elde edilen bu eşitliklerde aşağıdaki sınır şartlarından faydalanılmıştır.

$$u(0) = u(\infty) = v(\infty) = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\infty} = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=\infty} = 0 \quad (42)$$

(36)-(41) nolu denklemlerde bulunan türev ifadeleri (26) ve (27) nolu denklemlerde yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$-(\lambda + 2G)\xi^2 \phi + G \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - (\lambda + G)\xi \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad (43)$$

$$(\lambda + 2G) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \xi^2 G \psi - (\lambda + G) \xi \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (44)$$

adi diferansiyel denklem takımı elde edilmiş olur. Bu denklem sisteminin çözümü için (43) nolu denklem y 'e göre iki defa, (44) nolu denklem y 'e göre bir defa türetilirse,

$$-(\lambda + 2G) \xi^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + G \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} - (\lambda + G) \xi \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = 0 \quad (45)$$

$$(\lambda + 2G) \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} - \xi^2 G \frac{\partial \psi}{\partial y} - (\lambda + G) \xi \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (46)$$

denklemleri elde edilir. (45) nolu denklemden $\partial^3 \psi / \partial y^3$ çekilip (46) nolu denklemde yerine konulursa,

$$(\lambda + 2G) \frac{1}{\xi(\lambda + G)} \left[G \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} - (\lambda + 2G) \xi^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right] - \xi^2 G \frac{\partial \psi}{\partial y} + (\lambda + G) \xi \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (47)$$

yazılabilir. Bu denklemden de $\partial \psi / \partial y$ çekilip (43) nolu denklemde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa, ϕ 'e göre dördüncü mertebeden sabit katsayılı, lineer, homojen bir diferansiyel denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} - 2\xi^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \xi^4 \phi = 0 \quad (48)$$

Bu diferansiyel denklemin çözümü

$$\phi = e^{\lambda y} \quad (49)$$

olarak aranır ve (48) ifadesinde yerlerine yazılıp düzenlenirse karakteristik denklem

$$\lambda^4 - 2\xi^2 \lambda^2 + \xi^4 = 0 \quad (50)$$

olarak elde edilir. Bu denklemin kökleri,

$$\lambda_{1,2} = \xi \quad (51-1)$$

$$\lambda_{3,4} = -\xi \quad (51-2)$$

olarak hesaplanır. (48) ifadesinde verilen diferansiyel denklemin genel çözümü aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\phi(\xi, y) = (A_1 + A_2 y)e^{-\xi y} + (A_3 + A_4 y)e^{\xi y} \quad (52)$$

$\psi(\xi, y)$ bilinmeyen fonksiyonunun çözümünü elde etmek için (43) nolu denklemin y 'e göre bir defa türevi alınıp $\partial^2 \psi / \partial y^2$ değeri çekilerek (44) nolu denklemde yerine yazılırsa, $\psi(\xi, y)$ fonksiyonu, $\phi(\xi, y)$ fonksiyonu ve türevlerine bağlı olarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$\psi(\xi, y) = \left[A_1 + \left(\frac{\kappa}{\xi} + y \right) A_2 \right] e^{-\xi y} + \left[-A_3 + \left(\frac{\kappa}{\xi} - y \right) A_4 \right] e^{\xi y} \quad (53)$$

Bu ifadede geçen κ bir malzeme sabiti olup düzlem gerilme ve düzlem şekil değiştirme hallerine ait tek bir formülasyon kullanılmasını sağlar. Düzlem gerilme halinde $\kappa = (3 - \nu) / (1 + \nu)$ ve düzlem şekil değiştirme halinde ise $\kappa = (3 - 4\nu)$ olarak bilinmektedir. $\psi(\xi, y)$ ve $\phi(\xi, y)$ bilinmeyen fonksiyonları (32) ve (33) eşitliklerinde yerlerine yazılırlarsa, $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ yer değiştirme ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilirler.

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[(A_1 + A_2 y)e^{-\xi y} + (A_3 + A_4 y)e^{\xi y} \right] \sin(\xi x) d\xi \quad (54)$$

$$v(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[A_1 + \left(\frac{\kappa}{\xi} + y \right) A_2 \right] e^{-\xi y} + \left[-A_3 + \left(\frac{\kappa}{\xi} - y \right) A_4 \right] e^{\xi y} \right\} \cos(\xi x) d\xi \quad (55)$$

$u(x, y)$ ve $v(x, y)$ yerdeğiştirme fonksiyonlarının gerekli türevlerinin alınıp (13), (14) ve (16) nolu ifadelerde yerlerine yazılmasıyla gerilme bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilirler.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G} \sigma_x(x, y) = & \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \left[\xi(A_1 + A_2 y) - \left(\frac{3-\kappa}{2} \right) A_2 \right] e^{-\xi y} \right. \\ & \left. + \left[\xi(A_3 + A_4 y) + \left(\frac{3-\kappa}{2} \right) A_4 \right] e^{\xi y} \right\} \cos(\xi x) d\xi \end{aligned} \quad (56)$$

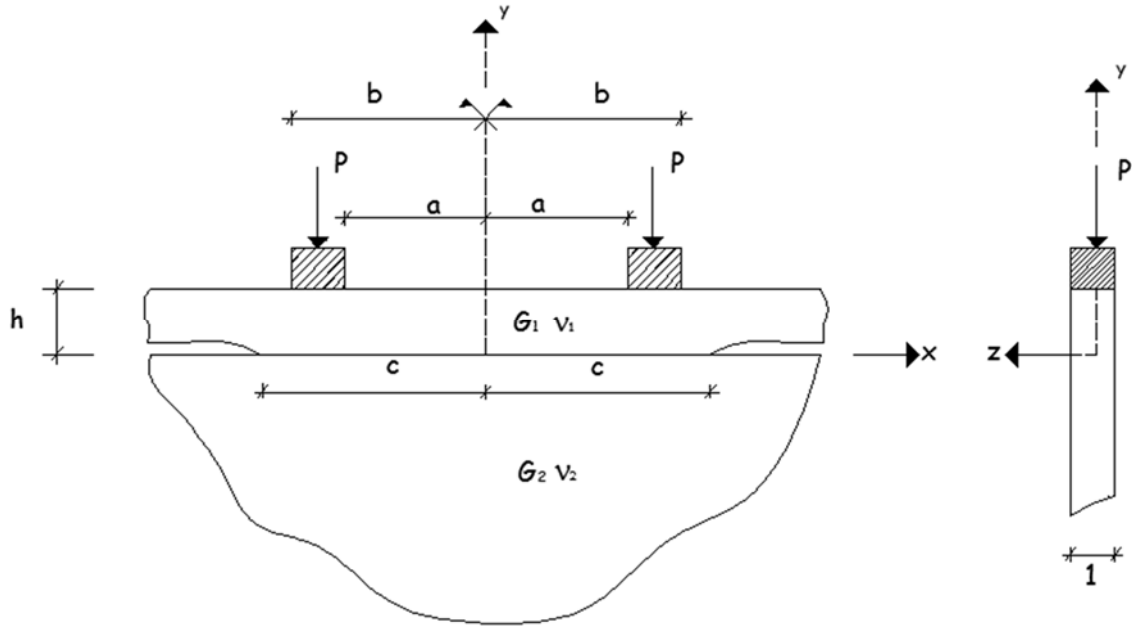
$$\begin{aligned} \frac{1}{2G} \sigma_y(x, y) = & \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ - \left[\xi(A_1 + A_2 y) + \left(\frac{1+\kappa}{2} \right) A_2 \right] e^{-\xi y} \right. \\ & \left. + \left[-\xi(A_3 + A_4 y) + \left(\frac{1+\kappa}{2} \right) A_4 \right] e^{\xi y} \right\} \cos(\xi x) d\xi \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G} \tau_{xy}(x, y) = & \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ - \left[\xi(A_1 + A_2 y) + \left(\frac{\kappa-1}{2} \right) A_2 \right] e^{-\xi y} \right. \\ & \left. + \left[\xi(A_3 + A_4 y) - \left(\frac{\kappa-1}{2} \right) A_4 \right] e^{\xi y} \right\} \sin(\xi x) d\xi \end{aligned} \quad (58)$$

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Problemin Tanımı

Bu çalışmada, elastik yarım düzlem üzerine oturan simetrik rijit iki dikdörtgen blok aracılığıyla yüklenmiş homojen izotrop bir tabakanın sürtünmesiz ve ayrılmalı temas problemi elastisite teorisine göre incelenmiştir. Tabaka yüksekliği sabit ve h 'dir. Rijit bloklar aracılığıyla iletilen tekil yükler blokların orta noktalarından etmektedirler. Tabaka; bloklar ile $(-a, -b)$ ve (a, b) , yarım düzlem ile $(-c, c)$ aralıklarında temas halindedirler. Problemden kütle kuvvetleri ihmal edilmiştir.



Şekil 2.1. Elastik yarım düzlem üzerine oturan simetrik rijit iki dikdörtgen blok aracılığıyla yüklenmiş homojen ve izotrop tabaka

Tabaka x eksenini boyunca $(-\infty, \infty)$ aralığında uzanmaktadır. Problem x eksenine göre simetrik olduğundan hesapların $(0, \infty)$ aralığında yapılması yeterlidir. Problem düzlem hal için inceleneceğinden z eksenini doğrultusundaki kalınlık birim olarak alınmıştır.

2.2. Kullanılacak Denklemler

Problemde (1) indisli ifadeler elastik tabakaya, (2) indisli ifadeler ise yarım düzleme ait ifadeleri göstermektedir. Ayrıca κ_i ($i=1,2$) elastik malzeme sabitlerini ve G_i ($i=1,2$) kayma modüllerini göstermektedir. Yukarıda verilen elastik sabitlere göre tabaka ve yarım düzlem için gerilme ve yerdeğiştirme ifadeleri aşağıdaki gibi yazılabilirler.

(1) nolu tabaka için $(0 \leq x < \infty, \quad 0 \leq y \leq h)$:

$$u_1(x,y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ [A_1 + A_2 y] e^{-\xi y} + [A_3 + A_4 y] e^{-\xi y} \right\} \sin(\xi x) d\xi \quad (59)$$

$$v_1(x,y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[A_1 + \left(\frac{\kappa_1}{2} + y \right) A_2 \right] e^{-\xi y} + \left[-A_3 + \left(\frac{\kappa_1}{2} - y \right) A_4 \right] e^{\xi y} \right\} \cos(\xi x) d\xi \quad (60)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G} \sigma_{x1}(x,y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[\xi (A_1 + A_2 y) - \left(\frac{3-\kappa_1}{2} \right) A_2 \right] e^{-\xi y} \right. \\ \left. + \left[\xi (A_3 + A_4 y) + \left(\frac{3-\kappa_1}{2} \right) A_4 \right] e^{\xi y} \right\} \cos(\xi x) d\xi \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G} \sigma_{y1}(x,y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ - \left[\xi (A_1 + A_2 y) + \left(\frac{1+\kappa_1}{2} \right) A_2 \right] e^{-\xi y} \right. \\ \left. + \left[-\xi (A_3 + A_4 y) + \left(\frac{1+\kappa_1}{2} \right) A_4 \right] e^{\xi y} \right\} \cos(\xi x) d\xi \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G} \tau_{xy1}(x,y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ - \left[\xi (A_1 + A_2 y) + \left(\frac{\kappa_1-1}{2} \right) A_2 \right] e^{-\xi y} \right. \\ \left. + \left[\xi (A_3 + A_4 y) - \left(\frac{\kappa_1-1}{2} \right) A_4 \right] e^{\xi y} \right\} \sin(\xi x) d\xi \end{aligned} \quad (63)$$

(2) nolu yarım düzlem için ($0 \leq x < \infty$, $-\infty < y \leq 0$)

$$u_2(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [B_1 + B_2 y] e^{\xi y} \cos(\xi x) d\xi \quad (64)$$

$$v_2(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[-B_1 + \left(\frac{\kappa_2}{2} - y \right) B_2 \right] e^{\xi y} \sin(\xi x) d\xi \quad (65)$$

$$\frac{1}{2G_2} \sigma_{x_2}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\xi (B_1 + B_2 y) + \left(\frac{3 - \kappa_1}{2} \right) B_2 \right] e^{\xi y} \cos(\xi x) d\xi \quad (66)$$

$$\frac{1}{2G_2} \sigma_{y_2}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[-\xi (B_1 + B_2 y) + \left(\frac{1 + \kappa_2}{2} \right) B_2 \right] e^{\xi y} \cos(\xi x) d\xi \quad (67)$$

$$\frac{1}{2G_2} \tau_{xy_2}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\xi (B_1 + B_2 y) - \left(\frac{\kappa_2 - 1}{2} \right) B_2 \right] e^{\xi y} \sin(\xi x) d\xi \quad (68)$$

şeklinde ifade edilirler.

Yukarıdaki denklemlerde geçen bilinmeyen A_1, A_2, A_3, A_4, B_1 ve B_2 katsayıları probleme ait sınır şartlarından belirlenecektir.

2.3. Problemin Sınır Şartları

$u(x, y)$ ve $v(x, y)$ yerdeğiştirme bileşenlerini $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$ ve $\tau_{xy}(x, y)$ gerilme bileşenlerini göstermek üzere probleme ilişkin sınır şartları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\sigma_{y_1}(x, h) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < a \\ -p_1(x) & a \leq x \leq b \\ 0 & b < x < \infty \end{cases} \quad (69)$$

$$\tau_{xy_1}(x, h) = 0 \quad 0 \leq x < \infty \quad (70)$$

$$\sigma_{y_1}(x, 0) = \begin{cases} -p_2(x) & 0 \leq x < c \\ 0 & c \leq x < \infty \end{cases} \quad (71)$$

$$\sigma_{y_1}(x, 0) = \sigma_{y_2}(x, 0) \quad 0 \leq x < \infty \quad (72)$$

$$\tau_{xy_1}(x, 0) = 0 \quad 0 \leq x < \infty \quad (73)$$

$$\tau_{xy_2}(x, 0) = 0 \quad 0 \leq x < \infty \quad (74)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, 0) - v_2(x, 0)] = 0 \quad 0 \leq x < c \quad (75)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, h)] = 0 \quad a < x < b \quad (76)$$

Probleme ilişkin denge şartları ise aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

$$\int_a^b p_1(x) dx = P \quad (77)$$

$$\int_0^c p_2(x) dx = P \quad (78)$$

Yukarıdaki eşitliklerde geçen $p_1(x)$ elastik tabaka ile blok, $p_2(x)$ ise elastik tabaka ile yarım düzlem arasındaki temas gerilmelerini ifade eden bilinmeyenlerdir. P , tabakaya etki ettirilen tekil yüküdür. a ve b sırasıyla blok ile elastik tabakanın temas uzunluğunun başlangıç ve bitiş noktalarını, c ise elastik tabaka ile yarım düzlemin ayrıldığı noktanın y eksenine olan uzaklığını ifade etmektedir.

(69)-(74) ifadeleriyle verilen sınır şartları bilinmeyen katsayıların $p_1(x)$ ve $p_2(x)$ temas gerilmelerine bağlı ifadelerinin bulunmasında kullanılır. Temas gerilmelerine bağlı olarak bulunan katsayılar (75) ve (76) nolu sınır şartlarında yerlerine konulup gerekli düzenlemeler yapılırsa integral denklem sistemi elde edilir. (77) ve (78) nolu denge şartları da göz önünde bulundurularak integral denklem sisteminin çözümü yapılır ve bilinmeyen temas gerilmeleri $p_1(x)$ ve $p_2(x)$ elde edilirler.

2.4. Katsayıların Belirlenmesi

(69) ve (74) nolu sınır şartlarının gerilme ve yerdeğiştirme ifadelerine uygulanması ve bu ifadelerin ters Fourier dönüşümlerinin alınması sonucu A_1, A_2, A_3, A_4, B_1 ve B_2 katsayılarını içeren aşağıdaki 6 adet cebrik denklem elde edilir.

$$-\xi e^{-\xi h} A_1 + \left(-h\xi - \frac{\kappa_1}{2} - \frac{1}{2}\right) e^{-\xi h} A_2 - \xi e^{\xi h} A_3 + \left(-h\xi + \frac{\kappa_1}{2} + \frac{1}{2}\right) e^{\xi h} A_4 = -P_1(\xi) \quad (79)$$

$$-\xi e^{-\xi h} A_1 + \left(-\xi h + \frac{1}{2} - \frac{\kappa_1}{2}\right) e^{-\xi h} A_2 + \xi e^{\xi h} A_3 + \left(\xi h - \frac{\kappa_1}{2} + \frac{1}{2}\right) e^{\xi h} A_4 = 0 \quad (80)$$

$$-\xi B_1 + \left(\frac{1 + \kappa_2}{2}\right) B_2 = -P_2(\xi) \quad (81)$$

$$2\xi B_1 + (1 - \kappa_2) B_2 = 0 \quad (82)$$

$$-2G_1\xi A_1 - G_1(\kappa_1 + 1)A_2 - 2G_1\xi A_3 + G_1(\kappa_1 + 1)A_4 + 2G_2\xi B_1 - G_2(\kappa_2 + 1)B_2 = 0 \quad (83)$$

$$-2\xi A_1 + (1 - \kappa_1)A_2 + 2\xi A_3 + (1 - \kappa_1)A_4 = 0 \quad (84)$$

Bu denklemlerde;

$$P_1(\xi) = \frac{1}{2G_1} \int_a^b p_1(t_1) \cos(\xi t_1) dt_1 \quad (85)$$

$$P_2(\xi) = \frac{1}{2G_2} \int_0^c p_2(t_2) \cos(\xi t_2) dt_2 \quad (86)$$

olarak ifade edilebilir.

(79)-(84) denklemlerinin ortak çözümü sonucu bilinmeyenler A_1, A_2, A_3, A_4, B_1 ve B_2 katsayıları,

$$A_1 = \frac{1}{2\Delta\xi} e^{\xi h} \left[P_1(\xi) A_{11} + P_2(\xi) A_{12} \right] \quad (87)$$

$$A_2 = \frac{1}{\Delta} e^{\xi h} \left[P_1(\xi) A_{21} + P_2(\xi) A_{22} \right] \quad (88)$$

$$A_3 = \frac{1}{2\Delta\xi} e^{\xi h} [P_1(\xi)A_{31} + P_2(\xi)A_{32}] \quad (89)$$

$$A_4 = \frac{1}{\Delta} e^{\xi h} [P_1(\xi)A_{41} + P_2(\xi)A_{42}] \quad (90)$$

$$B_1 = \frac{1}{2\xi} P_2(\xi)B_{11} \quad (91)$$

$$B_2 = P_2(\xi)B_{21} \quad (92)$$

olarak ifade edilir. Bu ifadelerde geçen $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, A_{31}, A_{32}, A_{41}, A_{42}, B_{11}, B_{12}$ ve Δ ise;

$$A_{11} = -(\kappa_1 + e^{2\xi h} - \kappa_1 e^{2\xi h} + 2\xi h - 2h\kappa_1\xi e^{2\xi h} - 1) \quad (93)$$

$$A_{12} = -\frac{G_2}{G_1} e^{h\xi} (\kappa_1 e^{2\xi h} - e^{2\xi h} - \kappa_1 + 4h^2\xi^2 - 2h\xi + 2h\kappa_1\xi + 1) \quad (94)$$

$$A_{21} = \frac{G_2}{G_1} e^{h\xi} (e^{2h\xi} + 2h\xi - 1) \quad (95)$$

$$A_{22} = -(e^{2\xi h} + 2h\xi e^{2\xi h} - 1) \quad (96)$$

$$A_{31} = (\kappa_1 + e^{2\xi h} - \kappa_1 e^{2\xi h} - 2h\kappa_1\xi + 2h\xi e^{2\xi h} - 1) \quad (97)$$

$$A_{32} = -\frac{G_2}{G_1} e^{-h\xi} (\kappa_1 e^{2\xi h} + e^{2\xi h} - \kappa_1 e^{2\xi h} + 4h^2\xi^2 e^{2\xi h} + 2h\xi e^{2\xi h} - 2h\kappa_1\xi e^{2\xi h} + 1) \quad (98)$$

$$A_{41} = -(e^{2h\xi} + 2h\xi - 1) \quad (99)$$

$$A_{42} = \frac{G_2}{G_1} e^{-h\xi} (e^{2\xi h} + 2h\xi e^{2\xi h} - 1) \quad (100)$$

$$B_{11} = (\kappa_2 - 1) \quad (101)$$

$$B_{21} = 1 \quad (102)$$

$$\Delta = (2e^{4h\xi} - e^{4h\xi} + 4h^2\xi^2 e^{2h\xi} - 1) \quad (103)$$

şeklinde tanımlanabilirler.

2.5. İntegral Denklemlerin Elde Edilmesi

Elastik tabaka ve blok arasındaki $p_1(x)$ ile elastik tabaka ve yarım düzlem arasındaki $p_2(x)$ temas gerilmeleri bilinmeyenler olup, (75) ve (76) nolu sınır şartları kullanılarak elde edilecek integral denklemlerin ortak çözümlerinden elde edilecektir.

2.5.1. Birinci İntegral Denklemin Elde Edilmesi

Birinci integral denklemi elde etmek için (76) nolu sınır şartı kullanılacaktır. Söz konusu sınır şartı;

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, y)] = & -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[\xi A_1 + (\kappa_1 + \xi y) A_2 \right] e^{-\xi y} \right. \\ & \left. + \left[-\xi A_3 + (\kappa_1 - \xi y) A_4 \right] e^{\xi y} \right\} \sin(\xi x) d\xi = 0 \end{aligned} \quad (104)$$

şeklindedir. Denklem A_1, A_2, A_3, A_4, B_1 ve B_2 katsayılarında geçen $p_1(t_1)$ ve $p_2(t_2)$ cinsinden yazılıp, x yerine x_1 dönüşümü yapıлып düzenlenirse,

$$\frac{1}{\pi G_1} \int_a^b p_1(t_1) [N_1(x_1, t_1)] dt_1 + \frac{1}{\pi G_1} \int_0^c p_2(t_2) N_2(x_1, t_2) dt_2 = 0 \quad (105)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Burada,

$$\begin{aligned} N_1(x_1, t_1) = & \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta} \left\{ \left[\frac{A_{11}}{2} + (\kappa_1 + \xi y) A_{21} \right] e^{-\xi(y-h)} + \right. \\ & \left. \left[-\frac{A_{31}}{2} + (\kappa_1 - \xi y) A_{41} \right] e^{\xi(y+h)} \right\} \sin(\xi x_1) \cos(\xi t_1) d\xi \end{aligned} \quad (106)$$

$$N_2(x_1, t_2) = \int_0^\infty \frac{G_1}{G_2} \frac{1}{\Delta} \left\{ \left[\frac{-A_{12}}{2} + (\kappa_1 + \xi y) A_{22} \right] e^{-\xi(y-h)} + \left[\frac{-A_{32}}{2} + (\kappa_1 - \xi y) A_{42} \right] e^{\xi(y+h)} \right\} \sin(\xi x_1) \cos(\xi t_2) d\xi \quad (107)$$

olarak tanımlanabilir.

$y \rightarrow h$ limitine geçildiğinde $N_1(x_1, t_1)$ integralinin yakınsaması bozulmaktadır. Başka bir ifadeyle ξ 'nin büyük değerleri için $N_1(x_1, t_1)$ çekirdek fonksiyonun değeri sıfırdan farklı sabit bir değere yakınsamaktadır. $N_1(x_1, t_1)$ çekirdeğinin integralinin hesaplanabilmesi için bu limit değeri integralden çıkarılarak hesaplanan kapalı integralleri integral denkleme ilave edilecektir. Çekirdeğin yakınsamasını bozan bu terimler (singüler terim) araştırıldığında

$N_1(x_1, t_1)$ ifadesinde,

$$ST_1 = \int_0^\infty e^{\xi(y-h)} \left[\left(\frac{\kappa_1 + 1}{2} \right) - \xi(y-h) \right] \quad (108)$$

singüler terimdir.

$$\sin(\xi x_1) \cos(\xi t_1) = \frac{1}{2} \left[\sin(\xi(t_1 + x_1)) - \sin(\xi(t_1 - x_1)) \right] \quad (109)$$

yarım açılı formülünden yararlanılarak ve integral dönüşüm tabloları yardımıyla singüler terimin kapalı integrali

$$ST_1 = \left(\frac{\kappa_1 + 1}{2} \right) \left[\frac{1}{t_1 + x_1} - \frac{1}{t_1 - x_1} \right] \quad (110)$$

olarak hesaplanır.

Singüler terim $N_1(x_1, t_1)$ çekirdeğinden çıkarılıp kapalı integrali eklendikten sonra denklem yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \frac{1+\kappa_1}{4\pi G_1} \int_a^b p_1(t_1) \left\{ N_1^*(x_1, t_1) + \left[\frac{1}{t_1+x_1} + \frac{1}{t_1-x_1} \right] \right\} dt_1 \\ + \frac{1+\kappa_1}{4\pi G_1} \int_0^c p_2(t_2) N_2^*(x_1, t_2) dt_2 = 0 \end{aligned} \quad (111)$$

olur. Bu denklemde geçen,

$$N_1^*(x_1, t_1) = \int_0^\infty \left[\frac{1}{\Delta} (2 - 2e^{4h\xi} - 8h\xi e^{2h\xi}) - 2 \right] \sin(\xi x_1) \cos(\xi t_1) d\xi \quad (112)$$

$$N_2^*(x_1, t_2) = \int_0^\infty \frac{1}{\Delta} (4e^{3h\xi} - 4e^{h\xi} + 4h\xi e^{h\xi} + 4h\xi e^{3h\xi}) \sin(\xi x_1) \cos(\xi t_2) d\xi \quad (113)$$

şeklinde tanımlamaktadır.

Simetri nedeniyle elastik tabaka ve yarım düzlem arasındaki $p_2(t_2)$ temas fonksiyonunun

$$p_2(t_2) = p_2(-t_2) \quad (114)$$

olduğu göz önünde bulundurularak (111) nolu denklemdeki $(0, c]$ integral aralığını $[-c, c]$ aralığına getirmek mümkündür. Gerekli işlemler yapıp (111) nolu denklem yeniden düzenlenirse aşağıdaki gibi olur.

$$\int_a^b p_1(t_1) \left\{ k_1(x_1, t_1) + \left[\frac{1}{t_1-x_1} + \frac{1}{t_1+x_1} \right] \right\} dt_1 + \int_{-c}^c p_2(t_2) k_2(x_1, t_2) dt_2 = 0 \quad (115)$$

Burada

$$k_1(x_1, t_1) = N_1^*(x_1, t_1) \quad (116)$$

$$k_2(x_1, t_2) = \int_0^\infty \frac{1}{\Delta} \left(-2e^{3h\xi} + 2e^{h\xi} - 2h\xi e^{h\xi} - 2h\xi e^{3h\xi} \right) \sin(\xi(t_2 - x_1)) d\xi \quad (117)$$

şeklindedir.

2.5.2. İkinci İntegral Denklemin Elde Edilmesi

İkinci integral denklemi elde etmek için (75) nolu sınır şartı kullanılacaktır. Söz konusu sınır şartı düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, y) - v_1(x, y)] &= \frac{1}{\pi G_1} \int_a^b p_1(t_1) M_1(x_2, t_1) dt_1 \\ &+ \frac{1}{\pi G_1} \int_0^c p_1(t_1) [L_1(x_2, t_2) + L_2(x_2, t_2)] dt_2 \end{aligned} \quad (118)$$

şeklini alır.

Bu ifadede geçen

$$\begin{aligned} M_1(x_2, t_1) &= \int_0^\infty \frac{1}{\Delta} \left\{ \left[\frac{A_{11}}{2} + (\kappa_1 + \xi y) A_{21} \right] e^{-\xi(y-h)} \right. \\ &\quad \left. + \left[-\frac{A_{31}}{2} + (\kappa_1 - \xi y) A_{41} \right] e^{\xi(y+h)} \right\} \sin(\xi x_2) \cos(\xi t_1) d\xi \end{aligned} \quad (119)$$

$$\begin{aligned} L_1(x_2, t_2) &= \int_0^\infty \frac{1}{\Delta} \left\{ \left[\frac{A_{21}}{2} + (\kappa_1 + \xi y) A_{22} \right] e^{-\xi(y-h)} \right. \\ &\quad \left. + \left[-\frac{A_{32}}{2} + (\kappa_1 - \xi y) A_{42} \right] e^{\xi(y+h)} \right\} \sin(\xi x_2) \cos(\xi t_2) d\xi \end{aligned} \quad (120)$$

$$L_2(x_2, t_2) = \int_0^\infty \frac{G_1}{G_2} \left\{ -\frac{B_{12}}{2} + (\kappa_2 - \xi y) B_{21} \right\} e^{\xi y} \sin(\xi x_2) \cos(\xi t_2) d\xi \quad (121)$$

olarak tanımlanabilirler.

$L_1(x_2, t_2)$ çekirdeğinin yakınsamasını bozan singüler terim araştırıldığında,

$$ST_2 = \int_0^{\infty} e^{\xi y} \left(\frac{\kappa_1 + 1}{2} + \xi y \right) \sin(\xi x_2) \cos(\xi t_2) d\xi \quad (122)$$

olarak bulunur.

Trigonometrik formüller ve integral dönüşüm tabloları yardımıyla singüler terimin kapalı integrali

$$\left(\frac{\kappa_1 + 1}{2} \right) \left[\frac{1}{t_2 - x_2} - \frac{1}{t_2 + x_2} \right] \quad (123)$$

olarak hesaplanır. (118) nolu ifadede yakınsamayı bozan singüler terim çıkartılıp yerine kapalı formu ilave edilirse

$$\int_a^b p_1(t_1) M_1^*(x_2, t_1) dt_1 + \int_0^c p_2(t_2) \left\{ L_1^*(x_2, t_2) + \left[\frac{1}{t_2 - x_2} + \frac{1}{t_2 + x_2} \right] \right\} dt_2 = 0 \quad (124)$$

olarak bulunur.

Bu ifadede geçen

$$M_1^*(x_2, t_1) = \frac{1}{1 + \beta} \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta} (4e^{h\xi} - 4e^{3h\xi} - 4h\xi e^{h\xi} - 4h\xi e^{3h\xi}) \sin(\xi x_2) \cos(\xi t_2) d\xi \quad (125)$$

$$L_1^*(x_2, t_2) = \frac{1}{1 + \beta} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{\Delta} (2e^{4h\xi} + 8h\xi e^{2h\xi} - 2) + 2 \right] \sin(\xi x_2) \cos(\xi t_2) d\xi \quad (126)$$

$$\beta = \frac{G_1}{G_2} \frac{1 + \kappa_2}{1 + \kappa_1} \quad (127)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Simetri özelliğinden $p_2(t_2)$ temas fonksiyonunun

$$p_2(t_2) = p_2(-t_2)$$

şeklinde çift fonksiyon olduğu göz önünde bulundurulursa denklemin yeni hali aşağıdaki gibi olur.

$$\int_a^b p_1(t_1) k_3(x_2, t_1) dt_1 + \int_{-c}^c p_2(t_2) \left\{ k_4(x_2, t_2) + \left[\frac{1}{t_2 - x_2} + \frac{1}{t_2 + x_2} \right] \right\} dt_2 = 0 \quad (128)$$

Burada

$$k_3(x_2, t_1) = M_1^*(x_2, t_1) \quad (129)$$

$$k_4(x_2, t_2) = \frac{1}{1 + \beta} \int_0^\infty \left[\frac{1}{\Delta} (-e^{4h\xi} - 4h\xi e^{2h\xi} + 1) - 1 \right] \sin(\xi(t_2 - x_2)) d\xi \quad (130)$$

olarak tanımlanabilir.

2.6. İntegral Denklemin Boyutsuzlaştırılması

İntegral denklemlerin sayısal çözümlerinin yapılabilmesi için aşağıda verilen değişken dönüşümleri yapılarak boyutsuz büyüklükler tanımlanabilir.

$$z = \xi h \quad dz = h d\xi \quad (131)$$

$$x_1 = \frac{b-a}{2} s_1 + \frac{b+a}{2} \quad dx_1 = \frac{b-a}{2} ds_1 \quad (132)$$

$$t_1 = \frac{b-a}{2} s_1 + \frac{b+a}{2} \quad dt_1 = \frac{b-a}{2} ds_1 \quad (133)$$

$$x_2 = \frac{c}{2} s_2 \quad dx_2 = \frac{c}{2} ds_2 \quad (134)$$

$$t_2 = \frac{c}{2} r_2 \quad dt_2 = \frac{c}{2} dr_2 \quad (135)$$

$$\phi_1(r_1) = \frac{h}{P} p_1(t_1) \quad (136)$$

$$\phi_2(r_2) = \frac{h}{P} p_2(t_2) \quad (137)$$

Burada $\phi_1(r_1)$ ve $\phi_2(r_2)$ ifadeleri sırasıyla elastik tabaka ve blok, elastik tabaka ve yarım düzlem arasındaki bilinmeyen boyutsuz temas gerilmeleridir.

Tanımlanan bu boyutsuz büyüklükler (115) numaralı birinci integral denklemde yerlerine konulup denklem düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{2h} \int_{-1}^1 \phi_1(r_1) \left[k_1(s_1, r_1) + \frac{1}{r_1 + s_1 + 2\frac{b+a}{b-a}} - \frac{1}{r_1 - s_1} \right] dr_1 \\ + \frac{c}{h} \int_{-1}^1 \phi_2(r_2) k_2(s_1, r_1) dr_2 = 0 \end{aligned} \quad (138)$$

olarak elde edilir.

Burada,

$$k_1(s_1, r_1) = \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{\Delta_D} (2 - 2e^{4z} - 8ze^{2z}) - 2 \right] \sin \left(z \left(\frac{b-a}{2h} s_1 + \frac{b+a}{2h} \right) \right) \cos \left(z \left(\frac{b-a}{2h} r_1 + \frac{b+a}{2h} \right) \right) dz \quad (139)$$

$$k_2(s_1, r_2) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta_D} (-2e^{3z} + 2e^z - 2ze^z - 2ze^{3z}) \sin \left(z \left(\frac{c}{h} r_2 - \frac{b-a}{2h} s_1 - \frac{b+a}{2h} \right) \right) dz \quad (140)$$

$$\Delta_D = (2e^{2z} - e^{4z} + 4ze^{2z} - 1) \quad (141)$$

şeklindedir.

Boyutsuz büyüklükler (128) numaralı ikinci integral denklemde yerlerine yazılıp denklem düzenlenirse,

$$\int_{-1}^1 \phi_1(r_1) \left[\frac{b-a}{2h} k_3(s_2, r_1) \right] dr_1 + \frac{c}{h} \int_{-1}^1 \phi_2(r_2) k_4(s_2, r_2) dr_2 = 0 \quad (142)$$

olarak elde edilir.

Bu ifadede geçen

$$k_3(s_2, r_1) = \frac{1}{1+\beta} \int_0^\infty (4e^z - 4e^{3z} - 4ze^z - 4ze^{3z}) \sin\left(z\left(\frac{c}{h}s_2\right)\right) \cos\left(z\left(\frac{b-a}{2h}r_1 + \frac{b+a}{2h}\right)\right) dz \quad (143)$$

$$k_4(s_2, r_2) = \frac{1}{1+\beta} \int_0^\infty [(-e^{4z} - 4ze^{2z} + 1) - 1] \sin\left(z\left(\frac{c}{h}r_2 - \frac{c}{h}s_2\right)\right) dz \quad (144)$$

şeklindedir.

Boyutsuz büyüklükler denge şartlarında yerlerine yazılırsa,

$$\frac{b-a}{2h} \int_{-1}^1 \phi_1(r_1) dr_1 = 1 \quad (145)$$

$$\frac{c}{h} \int_{-1}^1 \phi_2(r_2) dr_2 = 2 \quad (146)$$

olarak elde edilirler.

2.7. İntegral Denklemlerin Sayısal Çözümü

Boyutsuz hale getirilen (138) ve (142) nolu integral denklemlerden oluşan integral denklem sisteminin çözümü, Gauss-Jacobi integrasyon formülasyonu yardımıyla yapılacaktır.

İntegral denklemlerin çözümü

$$\phi(r) = w(r) g(r) \quad (147)$$

$$w(r) = (1-r)^\alpha (1+r)^\beta \quad (-1 \leq r \leq 1) \quad (148)$$

şeklinde aranabilir, (Erdoğan ve Gupta, 1972).

Birinci integral denklem blok ve tabaka arasındaki temas yüzeyi için elde edilmiştir. Temas yüzeyinin uç noktalarında temas gerilmeleri sonsuza gitmektedir. Başka bir ifadeyle elastik tabaka ve blok arasındaki temas gerilmesi her iki uç noktası için singülariteye

sahiptir. Bu nedenle birinci integral denklemin indisi (+1) ve $(\alpha = \beta = -0.5)$ 'dir, (Erdoğan ve Gupta,1972). Bu durumda Gauss-Jacobi integrasyon formülasyonu, Gauss-Chebyshev integrasyon formülasyonuna indirgenebilir. Buna göre

$$\phi_1(r_i) = w(r_i) g(r_i) \quad (i = 1, \dots, N) \quad (149)$$

$$w_1(r_i) = (1 - r_i^2)^{-0.5} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (150)$$

olur.

(+1) indis için bu formülasyon kullanılarak bilinmeyen temas gerilmelerine ait $(N-1)$ adet denklem elde edilecektir. Eksik denklem yerine problemin denge şartı kullanılabilir, (Erdoğan ve Gupta, 1972).

İkinci integral denklem tabaka ve yarım düzlem arasındaki temas yüzeyi için elde edilmiştir. Tabaka ve yarım düzlem arasındaki temas gerilmesi fonksiyonu sınırlı bir fonksiyondur ve uç noktalarındaki değeri sıfırdır. Bu nedenle ikinci integral denklemin indisi (-1), (Erdoğan ve Gupta,1972) ve $(\alpha = \beta = 0.5)$ 'dir, (Erdoğan ve Gupta, 1972).

Buna göre,

$$\phi_2(r_{2i}) = w(r_{2i}) g(r_{2i}) \quad (i = 1, \dots, N) \quad (151)$$

$$w_2(r_{2i}) = (1 - r_{2i}^2)^{0.5} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (152)$$

olur.

Gerilmeler için yazılan bu ifadeler integral denklemlerde ve denge şartlarında yerlerine yazıldığında, temas gerilmelerinin bilinmeyenler olduğu aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$\sum_{i=1}^N W_{1i} g_1(r_{1i}) \left[\frac{b-a}{2h} k_1(s_{1k}, r_{1i}) + \frac{1}{r_{1i} + s_{1k} + 2 \frac{b-a}{b+a}} - \frac{1}{r_{1i} - s_{1k}} \right] +$$

$$\sum_{i=1}^N W_{2i} g_2(r_{2i}) \frac{c}{h} k_2(s_{2k}, r_{2i}) = 0 \quad (k = 1, \dots, N-1) \quad (153)$$

$$\frac{b-a}{2h} \sum_{i=1}^N W_{1i} g_1(r_{1i}) = 1 \quad (i=1, \dots, N) \quad (154)$$

$$\sum_{i=1}^N W_{1i} g_1(r_{1i}) \frac{b-a}{2h} k_3(s_{2k}, r_{1i}) + \sum_{i=1}^N W_{2i} g_2(r_{2i}) \left[\frac{c}{h} k_4(s_{2k}, r_{2i}) + \frac{1}{r_{2i} - s_{2k}} \right] = 0 \quad (155)$$

($k=1, \dots, N+1$)

$$\frac{c}{h} \sum_{i=1}^N W_{1i} g_1(r_{1i}) = 2 \quad (i=1, \dots, N) \quad (156)$$

Burada,

$$W_{1i}^1 = W_{1i}^N = \frac{\pi}{2N-2} \quad W_{1i} = \frac{\pi}{N-1} \quad (i=2, \dots, N-1) \quad (157)$$

$$r_{1i} = \cos\left(\pi \frac{i-1}{N-1}\right) \quad (i=1, \dots, N) \quad (158)$$

$$s_{1k} = \cos\left(\pi \frac{2k-1}{2N-2}\right) \quad (k=1, \dots, N-1) \quad (159)$$

$$W_{2i}^N = \frac{1-r_{2i}^2}{N+1} \quad (i=1, \dots, N) \quad (160)$$

$$r_{2i} = \cos\left(\pi \frac{i}{N+1}\right) \quad (i=1, \dots, N) \quad (161)$$

$$s_{2k} = \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{2k-1}{N+1}\right) \quad (k=1, \dots, N+1) \quad (162)$$

şeklinde tanımlanabilir.

Elde edilen lineer denklem sisteminde $g_1(r_{1i})$ ve $g_2(r_{2i})$ ($i=1, \dots, N$) temas gerilme değerleri ve (c/h) boyutsuz temas uzunlukları olmak üzere $(2N+1)$ tane bilinmeyenli $(2N+2)$ tane denklem elde edilir. (156)'daki $(N/2+1)$. denklem uygunluk bağıntısına karşılık gelir ve otomatik sağlanır. Bu denklem takımının çözümünden elastik tabaka-blok, elastik tabaka-yarım düzlem temas gerilme dağılımları ve tabaka yarım düzlem yarı temas uzunlukları hesaplanabilir. Ancak bu hesaplar yapılırken interpolasyon işleminin yapılması gerekmektedir. Önce seçilen bir temas uzunluğu (c/h) için denklem takımı çözülür ve $g_1(r_{1i})$, $g_2(r_{2i})$ 'ler hesaplanır. Hesaplanan ilgili değerler (156) denkleminde yerine

yazılarak bu eşitliğin sağlanıp sağlanmadığı kontrol edilir. Eğer eşitlik sağlanmıyorsa yaklaşım oranlarına göre (c/h) 'ye değerler verilerek yukarıda verilen işlemler tekrarlanır. Hesaplanan $g_1(r_{1i})$, $g_2(r_{2i})$ değerleri (149) ve (151) ifadelerinde yerlerine yazılarak (c/h) boyutsuz temas uzunlukları belirlenmiş olur.

2.8. Gerilmelerin Bulunması

Elastik tabakada ve yarım düzlemde meydana gelen σ_x ve σ_y normal gerilme bileşenleri ($x=0$) simetri eksenini üzerinde y eksenini boyunca, τ_{xy} kayma gerilmeleri ($x/h=0.25$) olmak üzere yine y eksenini boyunca incelenmektedir. (87)-(92) ifadelerinde geçen A_1, A_2, A_3, A_4, B_1 ve B_2 katsayıları (61)-(63) ve (66)-(68) nolu gerilme ifadelerinde yerlerine konulduğunda, gerilme çekirdeklerinde $y \rightarrow h$ ve $y \rightarrow 0$ için yakınsamayı bozan terimler ortaya çıkmaktadır.

$y \rightarrow h$ durumunda singüler terimler;

$$\sigma_{x1}(x, y)_{st0} = \frac{1}{\pi} \int_a^b p_1(t_1) \left\{ \int_0^\infty [1 - \xi(h-y)] e^{-\xi(h-y)} [\cos(\xi(t_1+x)) + \cos(\xi(t_1-x))] d\xi \right\} dt_1 \quad (163)$$

$$\sigma_{y1}(x, y)_{st0} = \frac{1}{\pi} \int_a^b p_1(t_1) \left\{ \int_0^\infty [1 + \xi(h-y)] e^{-\xi(h-y)} [\cos(\xi(t_1+x)) + \cos(\xi(t_1-x))] d\xi \right\} dt_1 \quad (164)$$

$$\tau_{xy1}(x, y)_{st0} = \frac{1}{\pi} \int_a^b p_1(t_1) \left\{ \int_0^\infty \xi(h-y) e^{-\xi(h-y)} [\sin(\xi(t_1+x)) + \sin(\xi(t_1-x))] d\xi \right\} dt_1 \quad (165)$$

$y \rightarrow 0$ durumunda singüler terimler;

$$\sigma_{x1}(x, y)_{st1} = \frac{1}{\pi} \int_0^c p_2(t_2) \left\{ \int_0^\infty [1 - \xi y] e^{-\xi y} [\cos(\xi(t_2+x)) + \cos(\xi(t_2-x))] d\xi \right\} dt_2 \quad (166)$$

$$\sigma_{y1}(x, y)_{st1} = \frac{1}{\pi} \int_0^c p_2(t_2) \left\{ \int_0^\infty [1 + \xi y] e^{-\xi y} [\cos(\xi(t_2+x)) + \cos(\xi(t_2-x))] d\xi \right\} dt_2 \quad (167)$$

$$\tau_{xy1}(x, y)_{st1} = -\frac{1}{\pi} \int_0^c p_2(t_2) \left\{ \int_0^\infty \xi y e^{-\xi y} [\sin(\xi(t_2+x)) + \sin(\xi(t_2-x))] d\xi \right\} dt_2 \quad (168)$$

$$\sigma_{x_2}(x, y)_{st_2} = -\frac{1}{\pi} \int_0^c p_2(t_2) \left\{ \int_0^\infty [1 + \xi y] e^{-\xi y} [\cos(\xi(t_2 + x)) + \cos(\xi(t_2 - x))] d\xi \right\} dt_2 \quad (169)$$

$$\sigma_{y_2}(x, y)_{st_2} = -\frac{1}{\pi} \int_a^b p_1(t_1) \left\{ \int_0^\infty [1 - \xi y] e^{-\xi y} [\cos(\xi(t_1 + x)) + \cos(\xi(t_1 - x))] d\xi \right\} dt_1 \quad (170)$$

$$\tau_{xy_2}(x, y)_{st_2} = \frac{1}{\pi} \int_0^c p_2(t_2) \left\{ \int_0^\infty \xi y e^{-\xi y} [\sin(\xi(t_2 + x)) + \sin(\xi(t_2 - x))] d\xi \right\} dt_2 \quad (171)$$

Belirlenen singüler terimlerin kapalı integralleri integral dönüşüm tabloları yardımıyla bulunursa,

$y \rightarrow h$ için;

$$\sigma_{x_1}(x, y)_{kt_0} = \frac{2}{\pi} \int_0^c p_1(t_1) \left\{ \frac{(h-y)(t_1-x)^2}{[(h-y)^2 + (t_1-x)^2]^2} + \frac{(h-y)(t_1+x)^2}{[(h-y)^2 + (t_1+x)^2]^2} \right\} dt_1 \quad (172)$$

$$\sigma_{y_1}(x, y)_{kt_0} = \frac{2}{\pi} \int_0^c p_1(t_1) \left\{ \frac{(h-y)^3}{[(h-y)^2 + (t_1-x)^2]^2} + \frac{(h-y)^3}{[(h-y)^2 + (t_1+x)^2]^2} \right\} dt_1 \quad (173)$$

$$\tau_{xy_1}(x, y)_{kt_0} = \frac{2}{\pi} \int_0^c p_1(t_1) \left\{ \frac{(h-y)^2(t_1-x)}{[(h-y)^2 + (t_1-x)^2]^2} + \frac{(h-y)^2(t_1+x)}{[(h-y)^2 + (t_1+x)^2]^2} \right\} dt_1 \quad (174)$$

$y \rightarrow 0$ için;

$$\sigma_{x_1}(x, y)_{kt_1} = \frac{2}{\pi} \int_0^c p_1(t_1) \left\{ \frac{y(t_1-x)^2}{[y^2 + (t_1-x)^2]^2} + \frac{y(t_1+x)^2}{[y^2 + (t_1+x)^2]^2} \right\} dt_1 \quad (175)$$

$$\sigma_{y_1}(x, y)_{kt_1} = \frac{2}{\pi} \int_0^c p_1(t_1) \left\{ \frac{y^3}{[y^2 + (t_1-x)^2]^2} + \frac{y^3}{[y^2 + (t_1+x)^2]^2} \right\} dt_1 \quad (176)$$

$$\tau_{xy1}(x, y)_{kt1} = -\frac{2}{\pi} \int_0^c p_1(t_1) \left\{ \frac{y^2(t_1-x)}{[y^2+(t_1-x)^2]^2} + \frac{y^2(t_1+x)}{[y^2+(t_1+x)^2]^2} \right\} dt_1 \quad (177)$$

$$\sigma_{x1}(x, y)_{kt2} = \frac{2}{\pi} \int_0^c p_1(t_1) \left\{ \frac{y(t_1-x)^2}{[y^2+(t_1-x)^2]^2} + \frac{y(t_1+x)^2}{[y^2+(t_1+x)^2]^2} \right\} dt_1 \quad (178)$$

$$\sigma_{y1}(x, y)_{kt2} = \frac{2}{\pi} \int_0^c p_1(t_1) \left\{ \frac{y^3}{[y^2+(t_1-x)^2]^2} + \frac{y^3}{[y^2+(t_1+x)^2]^2} \right\} dt_1 \quad (179)$$

$$\tau_{xy1}(x, y)_{kt2} = -\frac{2}{\pi} \int_0^c p_1(t_1) \left\{ \frac{y^2(t_1-x)}{[y^2+(t_1-x)^2]^2} + \frac{y^2(t_1+x)}{[y^2+(t_1+x)^2]^2} \right\} dt_1 \quad (180)$$

şeklinde elde edilirler.

Yakınsamayı bozan (166)-(174) nolu ifadelerde verilen singüler terimler, gerilmelere ait ifadelerden çıkartıldığında gerilme çekirdeklerinde yakınsama sağlanır

Gerilme ifadelerinde boyutsuzlaştırma ve değişken dönüşümleri yapıldığında tabaka ve yarım düzlemin herhangi bir noktasında gerilme ifadeleri aşağıda verildiği gibi olur.

$$\frac{\sigma_{x1}}{P/h} = \frac{\sigma_{x1}}{P/h} - \frac{(\sigma_{x1})_{st0}}{P/h} - \frac{(\sigma_{x1})_{st1}}{P/h} + \frac{(\sigma_{x1})_{kt0}}{P/h} + \frac{(\sigma_{x1})_{kt1}}{P/h} \quad (181)$$

$$\frac{\sigma_{x2}}{P/h} = \frac{\sigma_{x2}}{P/h} - \frac{(\sigma_{x2})_{st2}}{P/h} + \frac{(\sigma_{x2})_{kt2}}{P/h} \quad (182)$$

$$\frac{\sigma_{y1}}{P/h} = \frac{\sigma_{y1}}{P/h} - \frac{(\sigma_{y1})_{st0}}{P/h} - \frac{(\sigma_{y1})_{st1}}{P/h} + \frac{(\sigma_{y1})_{kt0}}{P/h} + \frac{(\sigma_{y1})_{kt1}}{P/h} \quad (183)$$

$$\frac{\sigma_{y2}}{P/h} = \frac{\sigma_{y2}}{P/h} - \frac{(\sigma_{y2})_{st2}}{P/h} + \frac{(\sigma_{y2})_{kt2}}{P/h} \quad (184)$$

$$\frac{\tau_{xy1}}{P/h} = \frac{\tau_{xy1}}{P/h} - \frac{(\tau_{xy1})_{st0}}{P/h} - \frac{(\tau_{xy1})_{st1}}{P/h} + \frac{(\tau_{xy1})_{kt0}}{P/h} + \frac{(\tau_{xy1})_{kt1}}{P/h} \quad (185)$$

$$\frac{\tau_{xy2}}{P/h} = \frac{\tau_{xy2}}{P/h} - \frac{(\tau_{xy2})_{st2}}{P/h} + \frac{(\tau_{xy2})_{kt2}}{P/h} \quad (186)$$

3. BULGULAR VE İRDELEME

3.1. Giriş

Bu bölümde, tabaka ve yarım düzlemin malzeme özellikleri, bloğun simetri ekseninden uzaklığı ve blok genişliği ile ilgili olan boyutsuz büyüklüklerin değişik değerleri için temas gerilmeleri, temas uzunlukları, y simetri ekseninde ortaya çıkan σ_x ve σ_y normal gerilmeleri ile bu eksen yakınlarında ortaya çıkan τ_{xy} kayma gerilmelerinin değişimi incelenmiştir.

3.2. Temas Uzunlukları ve Temas Gerilmeleri

$(b - a)/h$ blok genişliğini, $(b + a)/(2h)$ bloğun simetri ekseninden uzaklığını, G_1/G_2 kayma modülleri oranını (elastik tabakanın yarım düzleme göre rijitliğini) ifade etmek üzere, tabaka ile blok ve tabaka ile yarım düzlem arasındaki boyutsuz temas gerilmeleri ve boyutsuz temas uzunlukları çeşitli boyutsuz büyüklükler için elde edilmiştir.

Tablo 3.1 ve 3.2’de elastik tabaka ve yarım düzlem arasındaki temas uzunluğunun bloğun simetri ekseninden olan uzaklığı ile değişimi gösterilmiştir. Tablolardan da anlaşılacağı üzere, blok simetri ekseninden uzaklaştıkça elastik tabaka ve yarım düzlem arasındaki temas uzunluğu artmaktadır. Ayrıca G_1/G_2 oranının artması temas uzunluklarını da arttırmaktadır.

Tablo 3.1. Sabit blok genişliği ($(b-a)/h=1.25$) durumunda elastik tabaka ve yarım düzlem arasındaki temas mesafesinin bloğun simetri ekseninden olan uzaklığı ile değişimi ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$)

$\frac{G_1}{G_2}$	$\frac{c}{h}$				
	$\frac{b+a}{2h} = 0.75$	$\frac{b+a}{2h} = 1$	$\frac{b+a}{2h} = 1.25$	$\frac{b+a}{2h} = 1.5$	$\frac{b+a}{2h} = 1.75$
0.05	1.9197	2.1816	2.4393	2.6924	2.9432
0.1	1.9436	2.2057	2.4620	2.7175	2.9687
0.2	1.9890	2.2517	2.5110	2.7655	3.0173
0.4	2.0731	2.3361	2.5972	2.8540	3.1067
1	2.2818	2.5458	2.8099	3.0703	3.3269
2	2.5419	2.8061	3.0717	3.3350	3.5948
4	2.9036	3.1676	3.4333	3.6980	3.9603

Tablo 3.2. Sabit blok genişliği ($(b-a)/h=1$) durumunda elastik tabaka ve yarım düzlem arasındaki temas mesafesinin bloğun simetri ekseninden olan uzaklığı ile değişimi ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$)

$\frac{G_1}{G_2}$	$\frac{c}{h}$			
	$\frac{b+a}{2h} = 0.75$	$\frac{b+a}{2h} = 1$	$\frac{b+a}{2h} = 1.25$	$\frac{b+a}{2h} = 1.5$
0.05	1.8077	2.0760	2.3354	2.5882
0.1	1.8312	2.1000	2.3605	2.6146
0.2	1.8760	2.1450	2.4075	2.6588
0.4	1.9586	2.2292	2.4938	2.7518
1	2.1642	2.4356	2.7060	2.9700
2	2.4203	2.6911	2.9633	3.2320
4	2.7770	3.0440	3.3157	3.5880

Tablo 3.3. Bloğun simetri ekseninden uzaklığı $(b+a)/(2h)=1$ durumunda elastik tabaka ve yarım düzlem arasındaki temas mesafesinin blok genişliği ile değişimi ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$)

$\frac{G_1}{G_2}$	$\frac{c}{h}$						
	$\frac{b-a}{h} = 0.25$	$\frac{b-a}{h} = 0.5$	$\frac{b-a}{h} = 0.75$	$\frac{b-a}{h} = 1$	$\frac{b-a}{h} = 1.25$	$\frac{b-a}{h} = 1.5$	$\frac{b-a}{h} = 1.75$
0.05	1.8700	1.9149	1.9853	2.0761	2.1816	2.2968	2.4179
0.1	1.8936	1.9384	2.0087	2.1000	2.2060	2.3205	2.4425
0.2	1.9385	1.9837	2.0531	2.0538	2.2501	2.3679	2.4895
0.4	2.0205	2.0663	2.1370	2.2287	2.2292	2.4529	2.5753
1	2.2159	2.2642	2.3398	2.4356	2.5925	2.6648	2.7887
2	2.4420	2.5005	2.5861	2.6906	2.8548	2.9281	3.0542
4	2.7442	2.8218	2.9267	3.0440	3.1675	3.2939	3.4219

Tablo 3.4. Bloğun simetri ekseninden uzaklığı $(b+a)/(2h)=1.25$ durumunda elastik tabaka ve yarım düzlem arasındaki temas mesafesinin blok genişliği ile değişimi ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$)

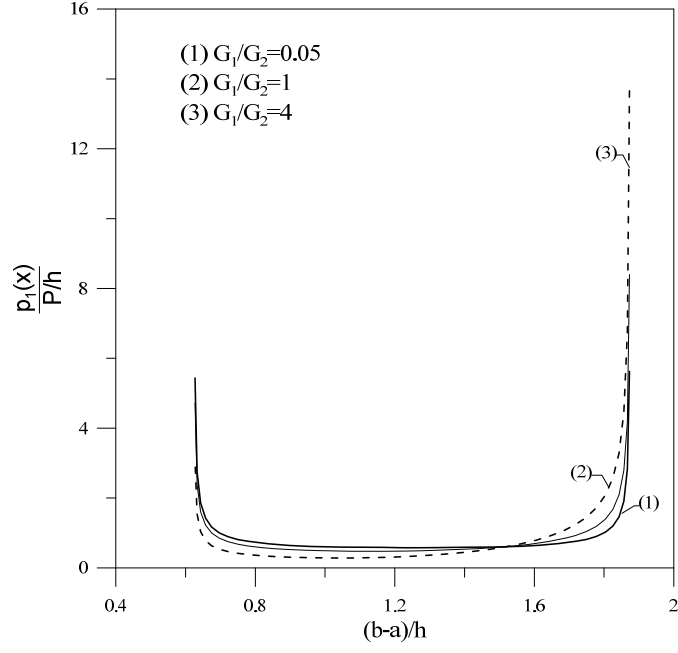
$\frac{G_1}{G_2}$	$\frac{c}{h}$							
	$\frac{b-a}{h} = 0.25$	$\frac{b-a}{h} = 0.5$	$\frac{b-a}{h} = 0.75$	$\frac{b-a}{h} = 1$	$\frac{b-a}{h} = 1.25$	$\frac{b-a}{h} = 1.5$	$\frac{b-a}{h} = 1.75$	$\frac{b-a}{h} = 2$
0.05	2.1310	2.1757	2.2456	2.3354	2.4393	2.5526	2.6715	2.7938
0.1	2.1566	2.2010	2.2706	2.3601	2.4640	2.5773	2.6964	2.8190
0.2	2.2054	2.2492	2.3183	2.4074	2.5110	2.6244	2.7438	2.8666
0.4	2.2944	2.3375	2.4055	2.4938	2.5972	2.7107	2.8304	2.9537
1	2.5047	2.5481	2.6166	2.7056	2.8099	2.9244	3.0453	3.1695
2	2.7403	2.7908	2.8672	2.9628	3.0717	3.1892	3.3120	3.4374
4	2.0413	3.1106	3.2062	3.3158	3.4333	3.5556	3.6810	3.8079

Tablo 3.3 ve 3.4’de elastik tabaka ve yarım düzlem arasındaki temas uzunluğunun blok genişliği ile değişimi gösterilmiştir. Tablolardan da görülebileceği gibi blok genişliğinin artması elastik tabaka ve yarım düzlem arasındaki temas uzunluklarını arttırmaktadır.

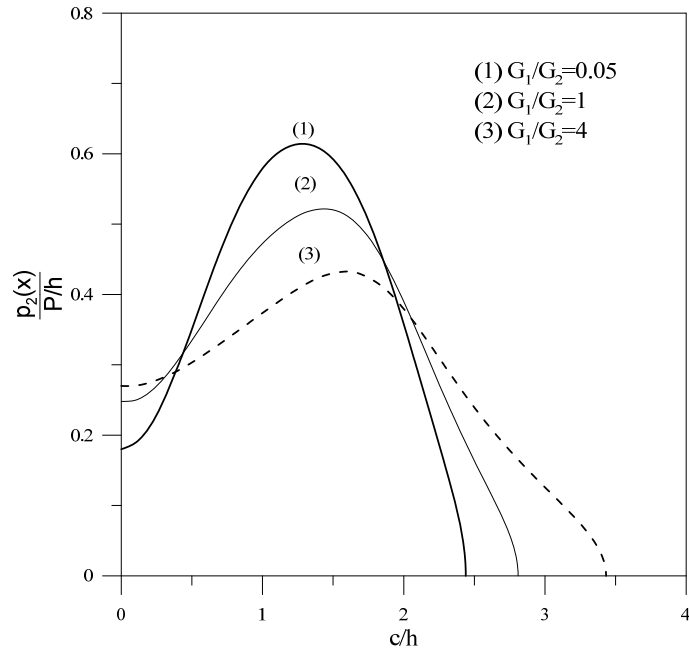
Şekil 3.1 ve 3.2’de sırasıyla G_1/G_2 malzeme oranının rijit blok altındaki $p_1(x)/(P/h)$ boyutsuz temas gerilmesi ile elastik tabaka ve yarım düzlem arasındaki $p_2(x)/(P/h)$ temas gerilmelerinin dağılımlarına etkisi verilmiştir. G_1/G_2 malzeme oranı arttıkça tabaka ve yarım düzlem arasındaki temas uzunluğu da artmaktadır. Temas uzunluğu arttıkça temas gerilmesinin aldığı en büyük değer azalmakta ve bu değeri aldığı noktanın konumu simetri ekseninden uzaklaşmaktadır. Ayrıca elastik tabaka ve yarım düzlem arasındaki temas gerilmesinin simetri ekseninde aldığı değerler artmaktadır.

Şekil 3.3 ve 3.4’de sırasıyla blok genişliğinin $p_1(x)/(P/h)$ ve $p_2(x)/(P/h)$ temas gerilmelerinin dağılımlarına etkisi verilmiştir. Blok genişliği arttıkça $p_1(x)/(P/h)$ temas gerilmesi daha geniş bir alanda etki göstereceğinden değeri azalmaktadır. $(b-a)/h$ oranı arttıkça elastik tabaka ve yarım düzlem arasındaki temas uzunluğu artmakta, $p_2(x)/(P/h)$ gerilmesinin simetri ekseninde aldığı değerler azalmaktadır.

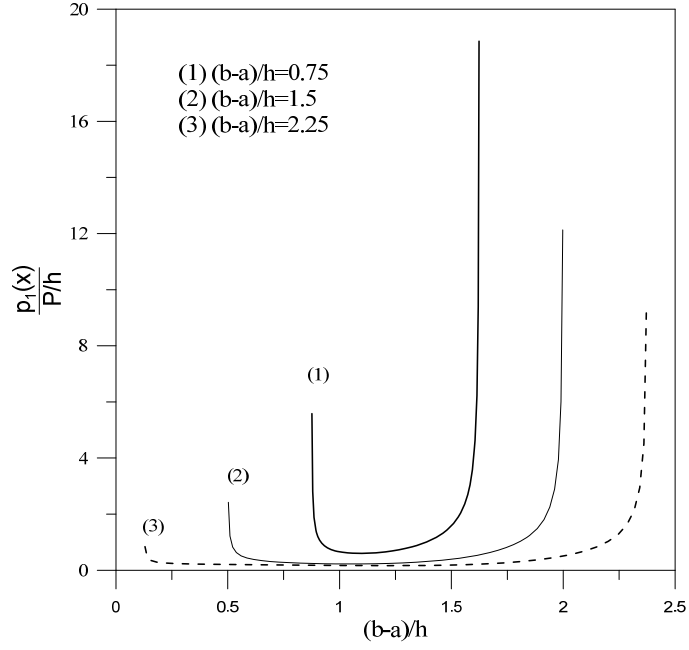
Şekil 3.5 ve 3.6’da sırasıyla rijit blokların simetri ekseninden olan uzaklıklarının $p_1(x)/(P/h)$ ve $p_2(x)/(P/h)$ boyutsuz temas gerilme dağılımlarına olan etkisi incelenmiştir. Bloklar simetri ekseninden uzaklaştıkça elastik tabaka ve blok arasındaki temasın sağ ucuna yakın gerilme değerleri azalmakta sol ucuna yakın gerilme değerleri ise artmaktadır. Blokların simetri ekseninden olan uzaklıklarının artması; elastik tabaka ve yarım düzlem arasındaki temas uzunluğunu arttırmakta, $p_2(x)/(P/h)$ gerilmesinin simetri ekseninde aldığı değerleri azaltmaktadır.



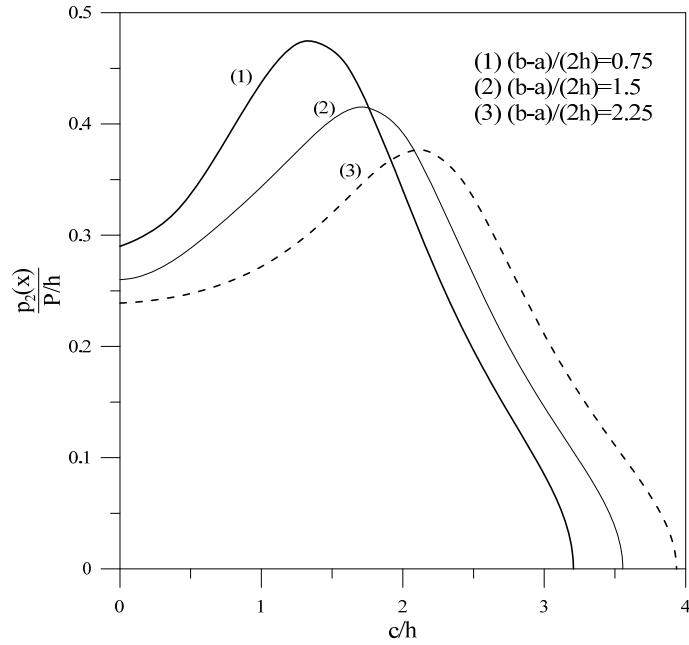
Şekil 3.1. Elastik tabaka ve blok arasındaki $p_1(x)/(P/h)$ boyutsuz temas gerilmesinin G_1/G_2 malzeme oranı ile değişimi
 $((b-a)/h = 1.25, (b+a)/(2h) = 1.25, \kappa_1 = \kappa_2 = 2)$



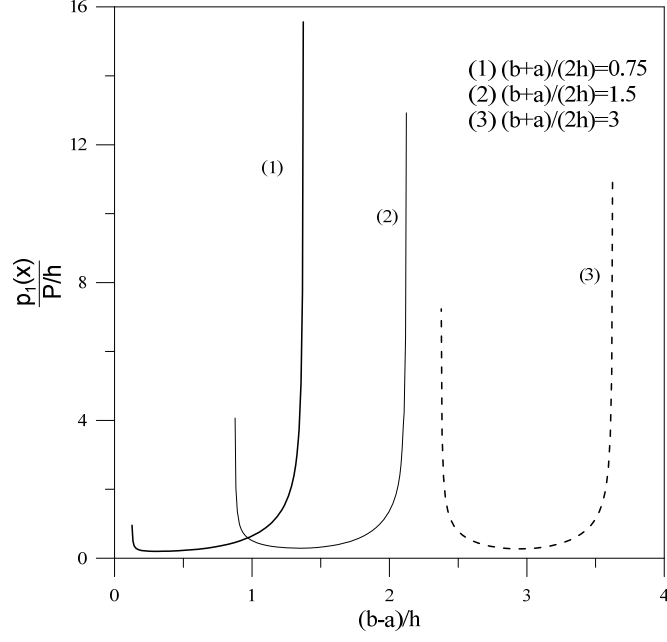
Şekil 3.2. Elastik tabaka ve yarım düzlem arasındaki $p_2(x)/(P/h)$ boyutsuz temas gerilmesinin G_1/G_2 malzeme oranı ile değişimi
 $((b-a)/h = 1.25, (b+a)/(2h) = 1.25, \kappa_1 = \kappa_2 = 2)$



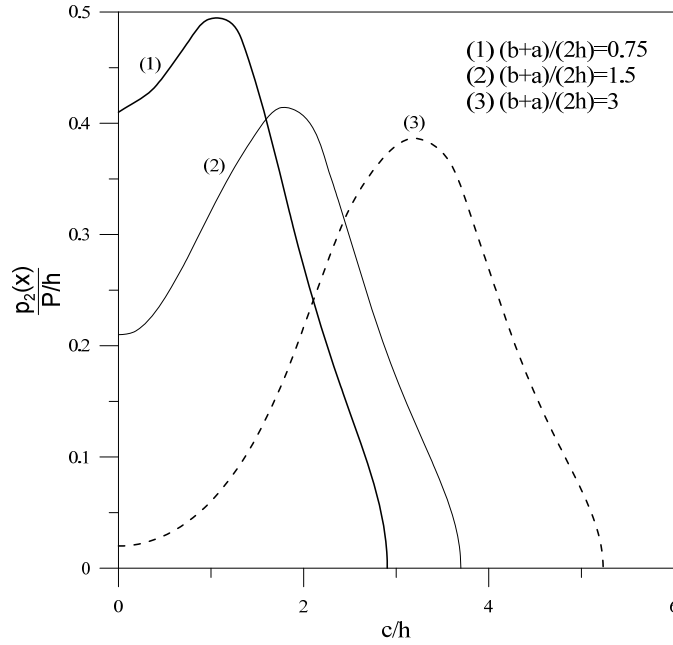
Şekil 3.3. Elastik tabaka ve blok arasındaki $p_1(x)/(P/h)$ boyutsuz temas gerilmesinin blok genişliği ile değişimi ($(b+a)/(2h)=1.25$, $G_1/G_2=4$, $\kappa_1=\kappa_2=2$)



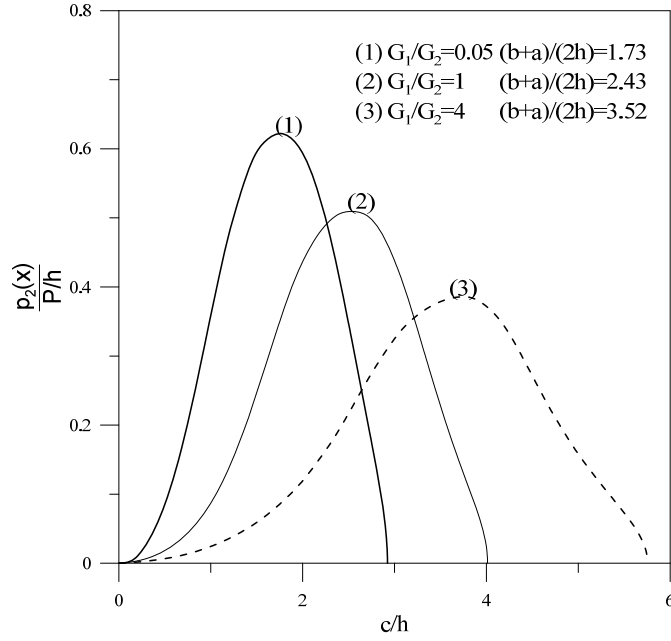
Şekil 3.4. Elastik tabaka ve yarım düzlem arasındaki $p_2(x)/(P/h)$ boyutsuz temas gerilmesinin blok genişliği ile değişimi ($(b+a)/(2h)=1.25$, $G_1/G_2=4$, $\kappa_1=\kappa_2=2$)



Şekil 3.5. Elastik tabaka ve blok arasındaki $p_1(x)/(P/h)$ boyutsuz temas gerilmesinin bloğun simetri ekseninden olan uzaklığı ile değişimi ($(b-a)/h = 1.25$, $G_1/G_2 = 4$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$)

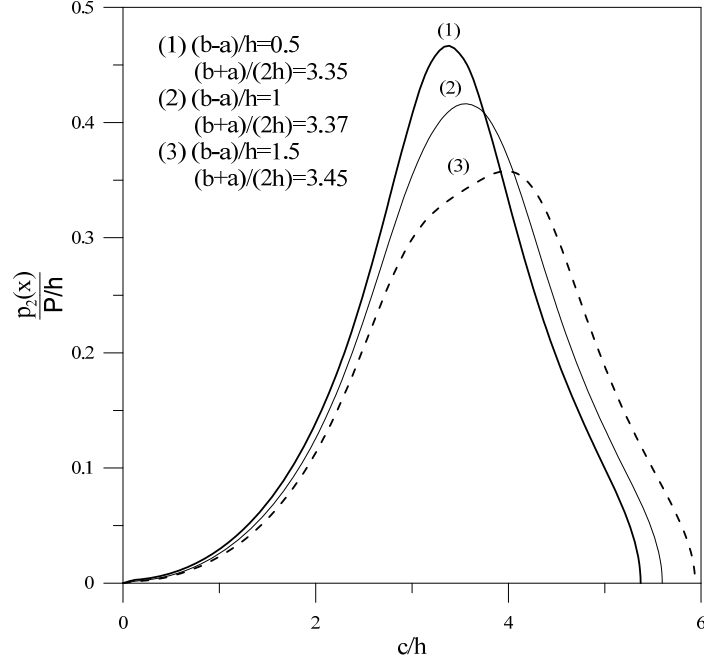


Şekil 3.6. Elastik tabaka ve yarım düzlem arasındaki $p_2(x)/(P/h)$ boyutsuz temas gerilmesinin bloğun simetri ekseninden olan uzaklığı ile değişimi ($(b-a)/h = 1.25$, $G_1/G_2 = 4$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$)



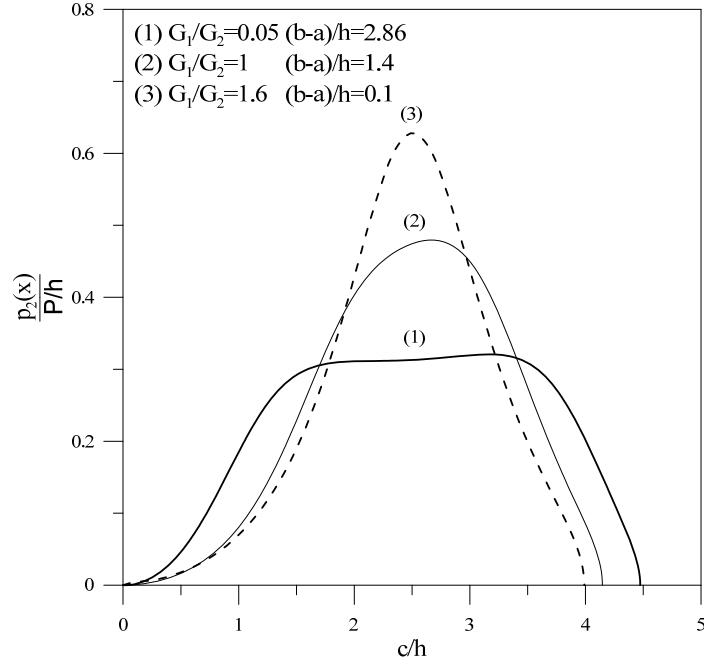
Şekil 3.7. Simetri ekseninde tabaka ile yarım düzlem arasında ayrılma olmaması için bloğun simetri ekseninden uzaklığının alabileceği maksimum değer G_1/G_2 malzeme oranı ile değişiminin $p_2(x)/(P/h)$ temas gerilme dağılımının değişimine etkisi
 $((b-a)/h = 1.25, \kappa_1 = \kappa_2 = 2)$

Şekil 3.7’de simetri ekseninde tabaka ile yarım düzlem arasında ayrılma olmaması için bloğun simetri ekseninden uzaklığının alabileceği maksimum değer G_1/G_2 malzeme oranı ile değişiminin $p_2(x)/(P/h)$ temas gerilme dağılımının değişimine etkisi verilmiştir. Şekilden de görülebileceği gibi G_1/G_2 malzeme oranı arttıkça bloğun simetri ekseninden olan uzaklığının alabileceği maksimum değer artmaktadır.



Şekil 3.8. Simetri ekseninde tabaka ile yarım düzlem arasında ayrılma olmaması için bloğun simetri ekseninden uzaklığının alabileceği maksimum değerin blok genişliği ile değişiminin $p_2(x)/(P/h)$ temas gerilme dağılımının değişimine etkisi ($G_1/G_2 = 4, \kappa_1 = \kappa_2 = 2$)

Simetri ekseninde tabaka ile yarım düzlem arasında ayrılma olmaması için bloğun simetri ekseninden uzaklığının alabileceği maksimum değerin blok genişliği ile değişiminin $p_2(x)/(P/h)$ temas gerilme dağılımının değişimine etkisi Şekil 3.8’de incelenmiştir. Şekilden de görülebileceği gibi blok genişliğinin artması bloğun simetri ekseninden olan uzaklığının alabileceği maksimum değeri arttırmaktadır.



Şekil 3.9. Simetri ekseninde tabaka ile yarım düzlem arasında ayrılma olmaması için blok genişliğinin G_1/G_2 malzeme oranı ile değişiminin $p_2(x)/(P/h)$ temas gerilme dağılımının değişimine etkisi

$$((b+a)/(2h) = 1.25, \kappa_1 = \kappa_2 = 2)$$

Şekil 3.9.' da simetri ekseninde tabaka ile yarım düzlem arasında ayrılma olmaması için blok genişliğinin G_1/G_2 kayma modülleri oranı ile değişiminin $p_2(x)/(P/h)$ temas gerilme dağılımının değişimine etkisi incelenmiştir. Simetri ekseninde ayrılma olmaması için G_1/G_2 kayma modülleri oranı arttıkça blok genişliğinin alabileceği maksimum değer azalmaktadır.

Tablo 3.5. Simetri eksenü üzerinde tek blok olması halinde elastik tabaka ve yarım düzlem arasındaki temas mesafesinin blok genişliğine göre değışimi

$\frac{G_1}{G_2}$	$\frac{d}{h}$							
	$\frac{d}{h} = 0.125$	$\frac{d}{h} = 0.25$	$\frac{d}{h} = 0.375$	$\frac{d}{h} = 0.5$	$\frac{d}{h} = 0.625$	$\frac{d}{h} = 0.75$	$\frac{d}{h} = 0.875$	$\frac{d}{h} = 1$
0.05	0.9003	0.9420	1.0083	1.0946	1.1957	1.3068	1.4241	1.5450
0.1	0.9281	0.9693	1.0348	1.1203	1.2206	1.3312	1.4481	1.5689
0.2	0.9823	1.0223	1.0861	1.1697	1.2685	1.3778	1.4940	1.6144
0.4	1.0839	1.1214	1.1816	1.2614	1.3569	1.4638	1.5785	1.6982
1	1.3363	1.3671	1.4183	1.4887	1.2761	1.6772	1.7884	1.9064
2	1.6326	1.6577	1.7009	1.7630	1.8433	1.9394	2.0477	2.1648
4	2.0196	2.0401	2.0770	2.1324	2.2071	2.2995	2.4062	2.5231

Özel hal olarak; elastik tabaka simetri eksenü üzerinde tek bir blok aracılığıyla yüklendiğinde, blok genişliğinin ve kayma modülleri oranının temas uzunluğuna etkisi Tablo 3.5' de gösterilmiştir. Tablodan da görülebileceği gibi blok genişliğinin artması tabaka ile yarım düzlem arasındaki temas uzunluklarını arttırmaktadır. Benzer şekilde kayma modülleri oranının artması da temas uzunluklarını arttırmaktadır.

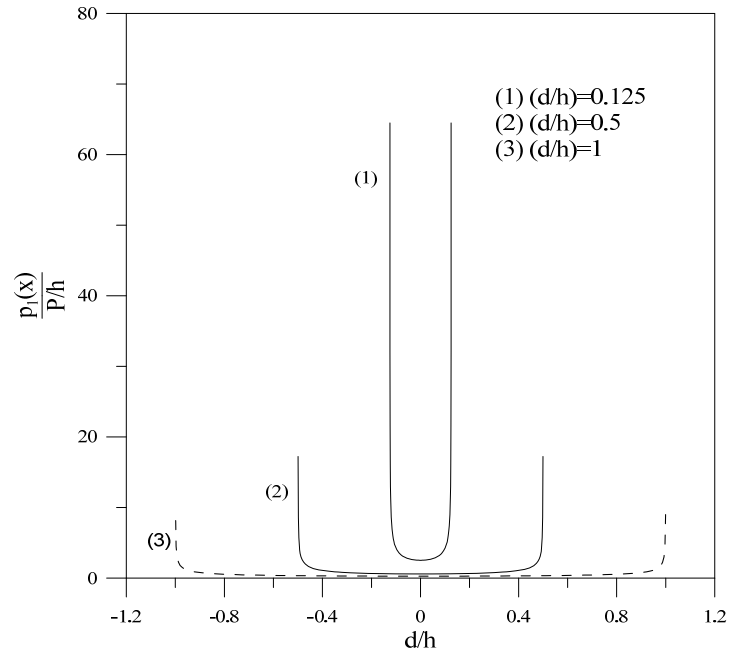
Şekil 10-13 'de elastik tabaka, simetri eksenü üzerinde bulunan tek bir blok aracılığıyla yüklendiğinde, oluşacak gerilme dağılımlarının çeşitli boyutsuz parametrelerle değışimi gösterilmiştir.

Blok genişliğinin elastik tabaka ve blok arasındaki temas gerilme dağılımlarına etkisi Şekil 10 'da gösterilmiştir. Şekilden de görülebileceği gibi blok genişliğinin artması yükün etki alanını arttıracığından, tabaka ve blok arasındaki temas gerilmesinin değeri azalmaktadır.

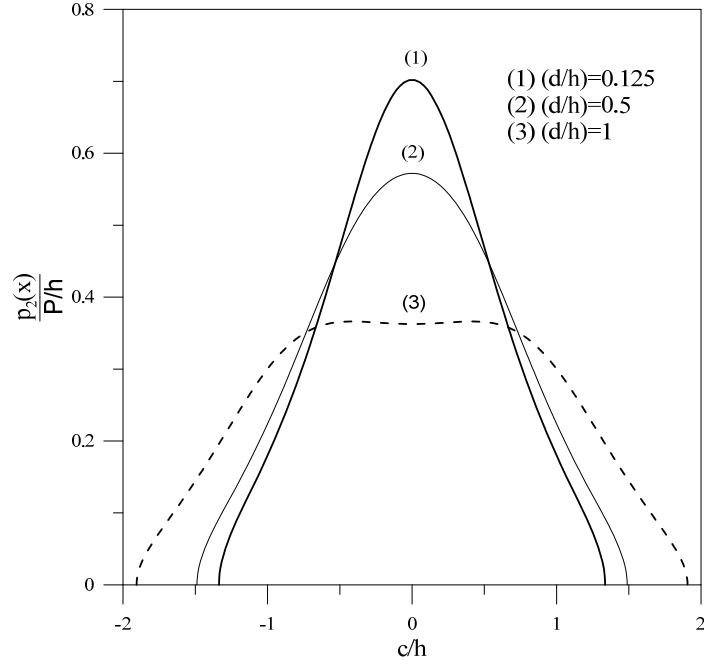
Şekil 11' de ise blok genişliğinin tabaka ve yarım düzlem arasındaki boyutsuz temas gerilme dağılımlarına olan etkisi gösterilmiştir. Blok genişliğinin artması temas uzunluklarını da arttıracığından gerilmenin alacağı maksimum değeri azalmaktadır.

Kayma modülleri oranının tabaka ve blok arasındaki temas gerilmesi dağılımına etkisi Şekil 12' de gösterilmiştir. Kayma modülleri oranının artmasıyla tabaka ve blok arasındaki temas gerilmesinin değeri azalmakta, uçlara yaklaşıldıkça ise gerilmenin değeri artmaktadır.

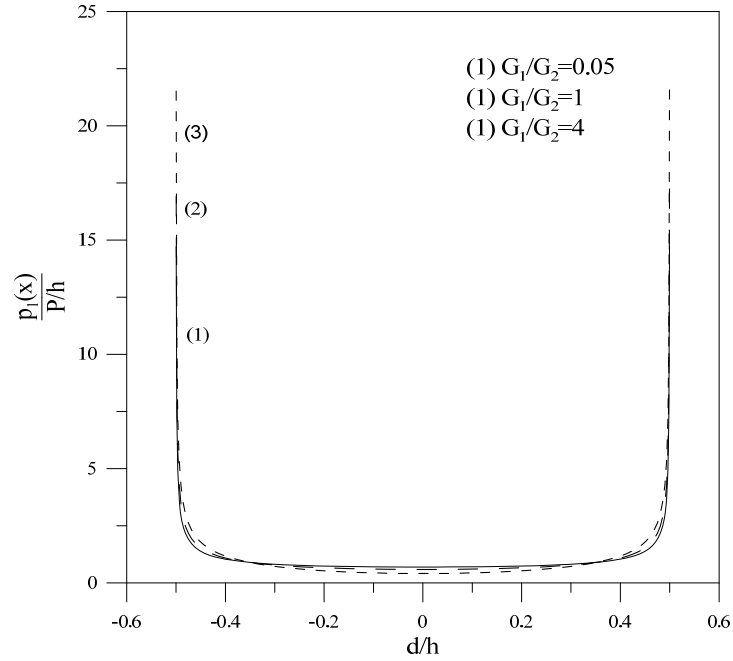
Tabaka ve yarım düzlem arasındaki temas gerilmesi dağılımının G_1/G_2 kayma modülleri oranı ile değişimi Şekil 13' de verilmiştir. Şekilden de görülebileceği gibi kayma modülleri oranının artması sonucu tabaka ve yarım düzlem arasındaki temas gerilmeleri azalmaktadır.



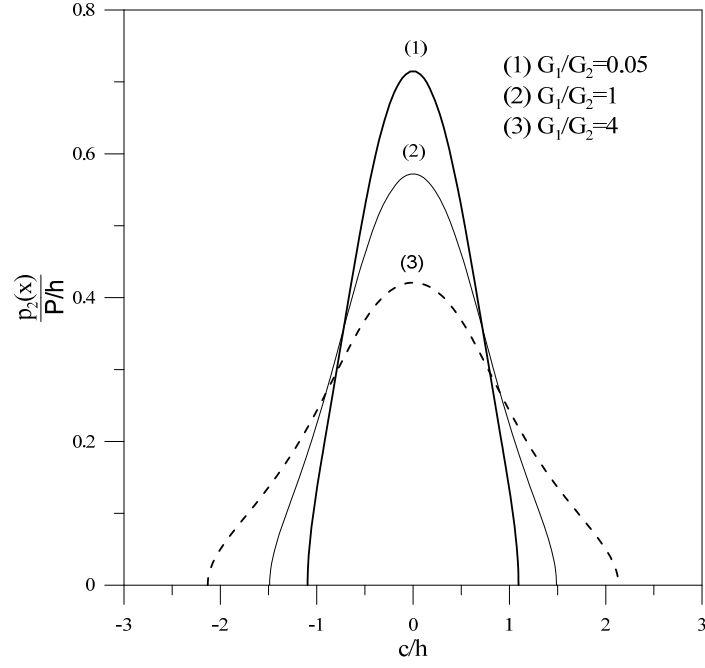
Şekil 3.10. Simetri ekseninde tek bir blok olması halinde blok genişliğinin, $p_1(x)/(P/h)$ boyutsuz temas gerilmesine etkisi ($G_1/G_2=1, \kappa_1 = \kappa_2 = 2$)



Şekil 3.11. Simetri ekseninde tek bir blok olması halinde, blok genişliğinin $p_2(x)/(P/h)$ boyutsuz temas gerilmesine etkisi ($G_1/G_2=1, \kappa_1 = \kappa_2 = 2$)

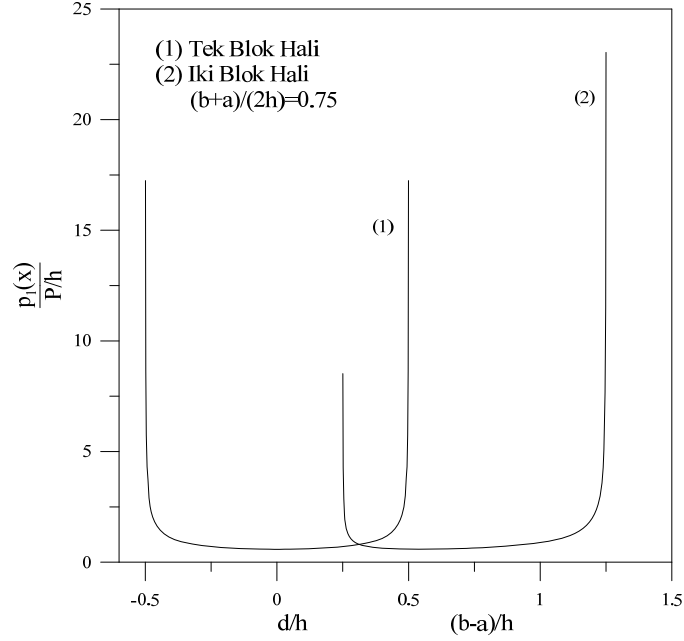


Şekil 3.12. Simetri ekseninde tek bir blok olması halinde, G_1/G_2 oranının $p_1(x)/(P/h)$ boyutsuz temas gerilmesine etkisi ($d/h=0.5, \kappa_1 = \kappa_2 = 2$)



Şekil 3.13. Simetri eksenü üzerinde tek bir blok olması halinde, G_1/G_2 oranının $p_2(x)/(P/h)$ boyutsuz temas gerilmesine etkisi ($d/h=0.5, \kappa_1=\kappa_2=2$)

Şekil 14 'de simetri eksenü üzerinde tek blok olması durumu ve simetrik iki ayrı blok olması durumları için elastik tabaka ve blok arasındaki boyutsuz temas gerilmelerinin dağılımı görülmektedir. Şekilden de görülebileceği gibi blokların birbirlerine olan mesafeleri azaldıkça elastik tabaka ve rijit blok arasındaki boyutsuz temas gerilmelerinin sağ uca yakın gerilme değerlerinin azaldığı, sol uca yakın gerilme değerlerinin ise arttığı görülmektedir.



Şekil 3.14. Simetri ekseninde tek bir blok ve simetrik iki ayrı blok olması durumları için $p_1(x)/(P/h)$ boyutsuz temas gerilme dağılımları

3.3. Gerilmelerin İncelenmesi

Burada y simetri eksenini boyunca ($x = 0$) σ_x ve σ_y normal gerilmeleri ile bu eksen boyunca $x/h = 0.25$ durumu için boyutsuz τ_{xy} kayma gerilmelerinin dağılımını incelenmiştir.

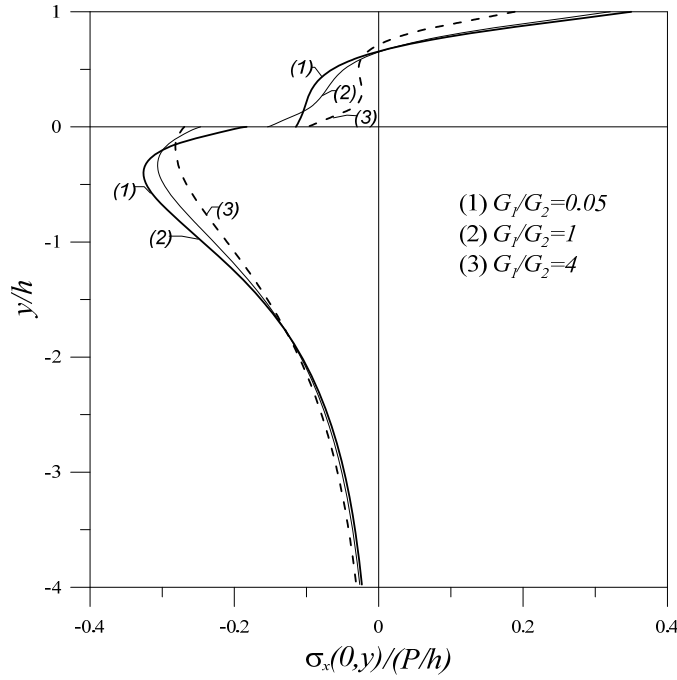
3.3.1 σ_x Normal Gerilmelerinin İncelenmesi

Burada; ($x = 0$) simetri eksenindeki boyutsuz σ_x normal gerilmesinin; blok genişliği, G_1/G_2 kayma modülleri oranı ve bloğun simetri ekseninden uzaklığı ile değişimi verilmiştir. Yapılan incelemelerden simetri kesitinde tabakanın üst yüzeyinde çekme alt yüzeyinde ise basınç gerilmeleri oluşmaktadır. Yarım düzlemde ise σ_x normal gerilmesi belli bir maksimum değere kadar basınç gerilmeleri olarak artmakta, belirli bir değerden sonra azalarak etkisini kaybetmektedir.

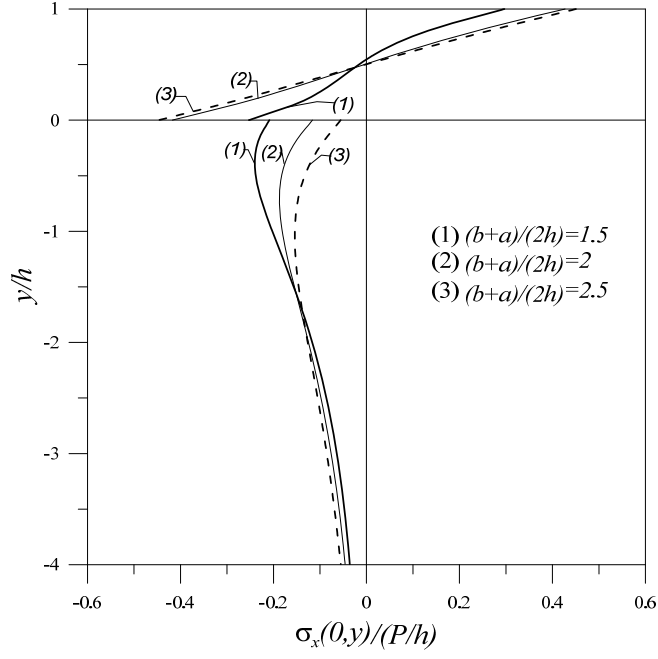
İlk olarak G_1/G_2 kayma modülü oranının, σ_x normal gerilme dağılımına etkisi incelenmiştir. Şekil 3.16' da görüldüğü gibi G_1/G_2 kayma modülü oranı arttıkça σ_x normal gerilmesinin simetri eksenini üzerinde aldığı değerler azalmaktadır.

Şekil 3.17' de rijit blokların simetri ekseninden olan uzaklıklarının simetri eksenini üzerindeki σ_x normal gerilme dağılımına etkisi gösterilmiştir. Bloklar simetri ekseninden uzaklaştıkça, elastik tabakada σ_x gerilmesinin dağılımını lineerliğe yaklaşmaktadır Yarım düzlemde ise blokların simetri ekseninden uzaklaşması, gerilmenin maksimum değerini azaltmaktadır.

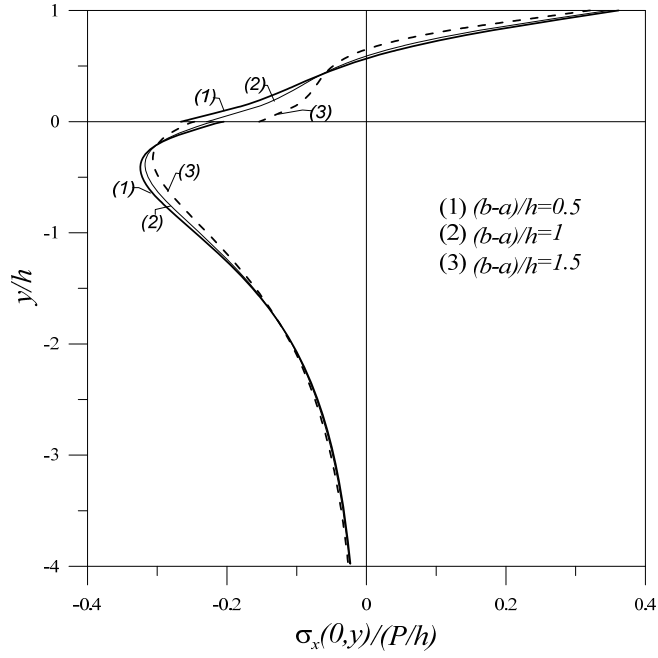
Blok genişliğinin σ_x normal gerilme dağılımına etkisi Şekil 3.18' de incelenmiştir. Blok genişliğinin artmasıyla elastik tabakada σ_x normal gerilmesinin değeri azalmakta, yarım düzlemde ise fazlaca değişmemektedir.



Şekil 3.15. G_1/G_2 kayma modülleri oranının simetri eksenini üzerindeki ($x=0$) σ_x normal gerilme dağılımına etkisi
($(b+a)/(2h)=1.25, (b-a)/h=1.25$)



Şekil 3.16. Blokların simetri ekseninden olan uzaklıklarının simetri eksenini üzerindeki ($x=0$) σ_x normal gerilme dağılımına etkisi ($(b-a)/h=1, G_1/G_2=1$)



Şekil 3.17. Blok genişliğinin simetri eksenini üzerindeki ($x=0$) σ_x normal gerilme dağılımına etkisi ($(b+a)/(2h)=1.25, G_1/G_2=1$)

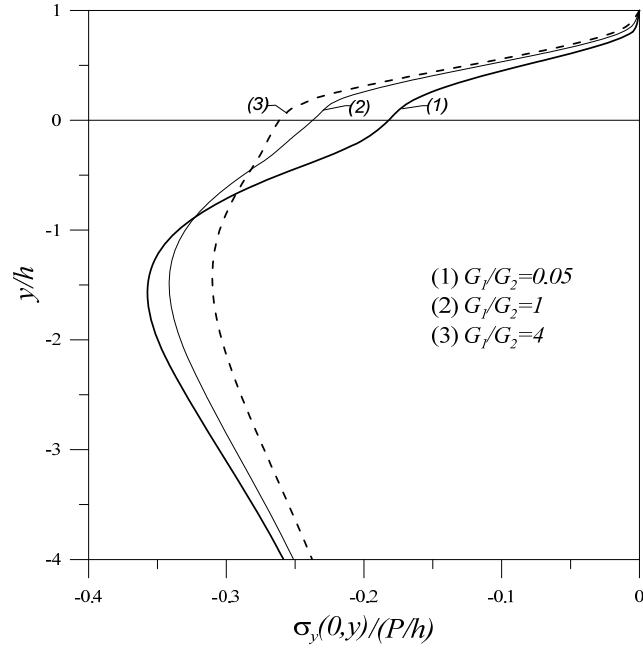
3.3.2. σ_y Normal Gerilmelerinin İncelenmesi

Elastik tabakada boyutsuz σ_y normal gerilmeleri en büyük değerini blokların altında almaktadır. Bloklardan uzaklaştıkça σ_y normal gerilmesinin değeri azalmaktadır. Simetri ekseninde tabakanın üst yüzeyinde σ_y normal gerilmesinin değeri sıfır olup sınır şartı sağlanmaktadır. σ_y normal gerilmesi simetri ekseninde her zaman basınç olarak etkisini göstermektedir. Tabaka derinliği boyunca σ_y normal gerilmesinin değeri artmaktadır. Elastik tabaka ve yarım düzlemin değme yüzeyinde gerilme değerleri birbirine eşit olup böylece sınır şartı sağlanmaktadır. Yarım düzlemde σ_y normal gerilmesinin değeri belli bir noktaya kadar artarak maksimum değerine ulaşmakta, bu noktadan sonra değeri azalarak etkisini kaybetmektedir.

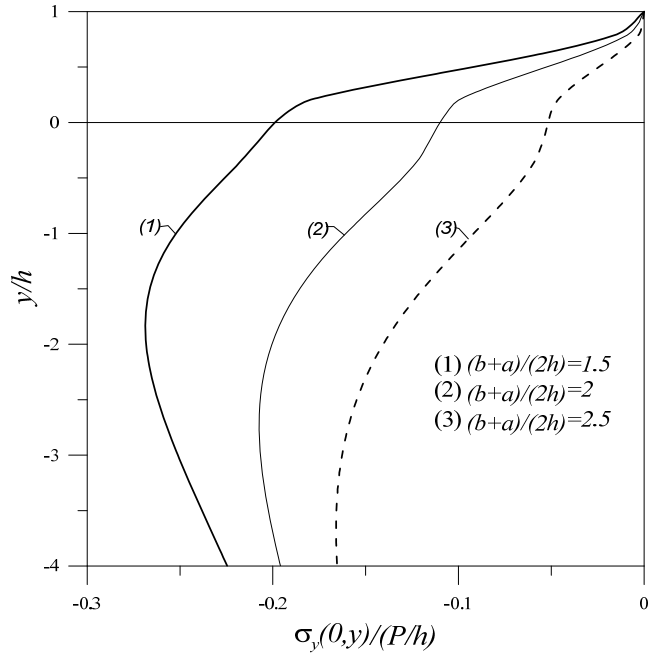
Şekil 3.18' de G_1/G_2 oranının ($x=0$) simetri eksenini üzerindeki σ_y normal gerilmelerinin değişimine olan etkisi incelenmiştir. G_1/G_2 oranı arttıkça, yani elastik tabakanın rijitliği yarım düzleme oranla artarsa tabakadaki σ_y normal gerilmelerinin değeri artmakta, yarım düzlemde ise azalmaktadır.

Blokların simetri ekseninden olan uzaklıklarının σ_y normal gerilmesinin dağılımına etkisi Şekil 3.19' de ele alınmıştır. Şekilden de görülebileceği gibi bloklar simetri ekseninden uzaklaştıkça simetri eksenini üzerindeki σ_y normal gerilmesinin değeri hem tabaka hem de yarım düzlemde azalmaktadır.

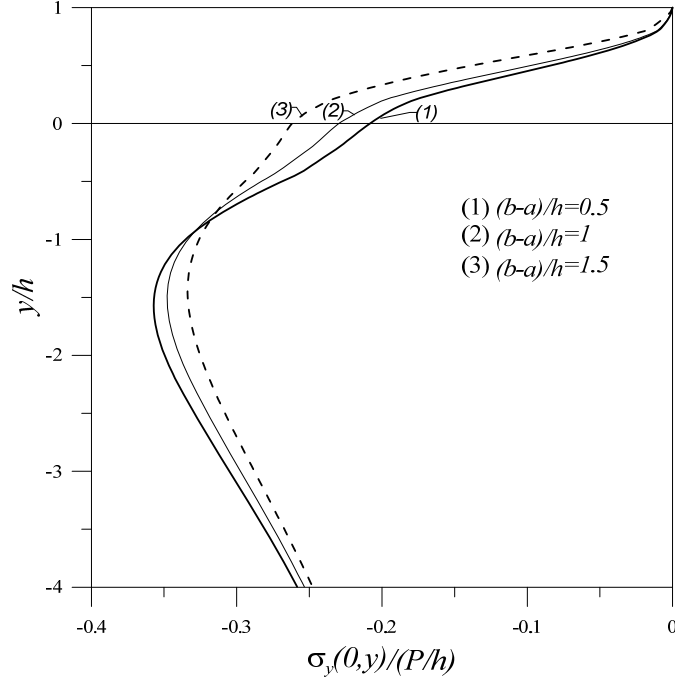
Şekil 3.20' de blok genişliğinin ($x=0$) simetri eksenini üzerindeki σ_y normal gerilme dağılımına etkisi incelenmiştir. Blok sabit bir konumda iken blok genişliği arttıkça tabaka derinliği boyunca σ_y normal gerilmesinin değeri artmaktadır. Elastik yarım düzlemde ise blok genişliğinin artmasıyla σ_y normal gerilmesinin alacağı maksimum değer azalmaktadır.



Şekil 3.18. G_1 / G_2 kayma modülleri oranının simetri eksenindeki ($x = 0$) σ_y normal gerilme dağılımına etkisi
 ($(b + a)/(2h) = 1.25, (b - a)/h = 1.25$)



Şekil 3.19. Blokların simetri ekseninden olan uzaklıklarının simetri eksenindeki ($x = 0$) σ_y normal gerilme dağılımına etkisi ($(b - a)/h = 1, G_1 / G_2 = 1$)



Şekil 3.20. Blok genişliğinin simetri eksenindeki ($x = 0$) σ_y normal gerilme dağılımına etkisi
 $((b+a)/(2h) = 1.25, G_1/G_2 = 1)$

3.3.3. τ_{xy} Kayma Gerilmelerinin İncelenmesi

Elastik tabaka ve yarım düzlemde simetri eksenini boyunca τ_{xy} kayma gerilmesinin değeri sıfırdır. Bu nedenle, kayma gerilmeleri y eksenini boyunca $x/h = 0.25$ değeri için incelenmiştir.

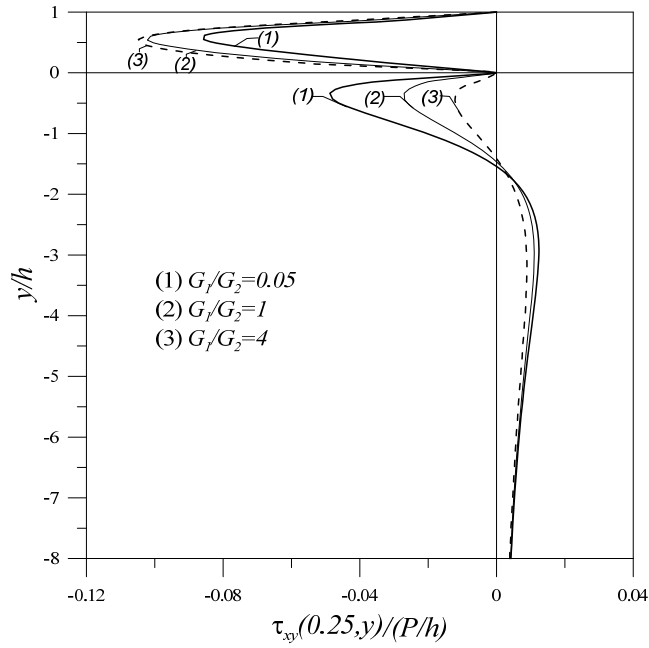
Kayma gerilmeleri $x = 0$ ve $y = h$ ve $x = y = 0$ yüzeyleri boyunca sıfır olmakta ve problemin koşulan sınır şartlarını sağlamaktadır. Yarım düzlemde, derinlik boyunca önce τ_{xy} kayma gerilmesinin değeri artarak maksimum değerini almakta, daha sonra azalarak etkisini kaybetmektedir.

Şekil 3.21' de G_1/G_2 kayma modülleri oranının τ_{xy} kayma gerilmesinin dağılımına olan etkisi incelenmiştir. Buna göre G_1/G_2 kayma modülleri oranının artmasıyla elastik

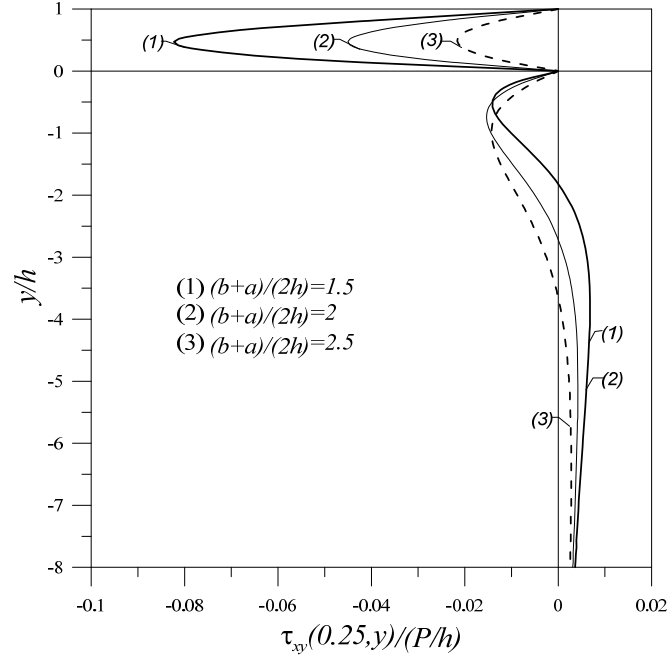
tabakadaki τ_{xy} kayma gerilmesinin değeri artmaktadır. Yarım düzlemde ise τ_{xy} kayma gerilmesinin maksimum değeri G_1/G_2 kayma modülü oranının artmasıyla azalmaktadır.

Blokların simetri ekseninden olan uzaklıklarının τ_{xy} kayma gerilmelerine olan etkisi Şekil 3.22' de gösterilmiştir. Bloklar simetri ekseninden uzaklaştıkça kayma gerilmelerinin etkisi azalmaktadır

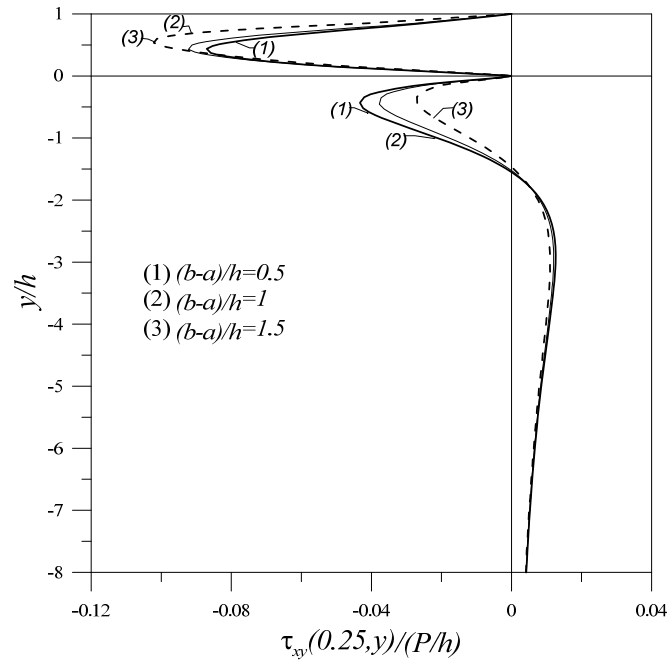
Bloklar sabit bir konumda iken blok genişliğinin τ_{xy} kayma gerilmelerinin dağılımına etkisi Şekil 3.23' de gösterilmiştir. Blok genişliği arttıkça τ_{xy} kayma gerilmelerinin değeri artmakta ve maksimum değeri aldığı noktanın konumu tabakanın üst yüzeyine yaklaşmaktadır. Elastik yarım düzlemde ise blok genişliğinin artmasıyla τ_{xy} kayma gerilmelerinin aldığı değerler azalmaktadır.



Şekil 3.21. G_1/G_2 kayma modülü oranının simetri eksenine yakın bir kesitte ($x/h = 0.25$) y ekseninde τ_{xy} kayma gerilme dağılımına etkisi ($(b+a)/(2h) = 1.25$, $(b-a)/h = 1.25$)



Şekil 3.22. Blokların simetri ekseninden olan uzaklıklarının simetri eksenine yakın bir kesitte ($x/h = 0.25$) y eksenine boyunca τ_{xy} kayma gerilme dağılımına etkisi
 ($(b-a)/h = 1, G_1/G_2 = 1$)



Şekil 3.23. Blok genişliğinin simetri eksenine yakın bir kesitte ($x/h = 0.25$) y eksenine boyunca τ_{xy} kayma gerilme dağılımına etkisi ($(b+a)/(2h) = 1.25, G_1/G_2 = 1$)

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada, simetrik rijit iki dikdörtgen blok aracılığıyla yüklenmiş ve yarım düzlem üzerine oturan elastik bir tabakanın temas problemi incelenmiştir. Çözümde öncelikle tabaka-yarım düzlem temas uzunluğu belirlenmiş ve bilinmeyen temas gerilmeleri hesaplanmıştır. Aynı zamanda y simetri eksenini boyunca tabaka ve yarım düzlemde oluşacak olan σ_x ve σ_y normal gerilmeleri ile τ_{xy} kayma gerilmesi dağılımları da araştırılmıştır. Problem farklı malzeme ve geometri durumları için çözülmüş ve elde edilen bulguların irdelenmesi ile elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Tabaka ve yarım düzlem arasındaki temas uzunluğu; G_1/G_2 malzeme oranı, blok genişliği ve bloğun simetri ekseninden olan uzaklığı parametreleri ile değişmektedir. G_1/G_2 malzeme oranının artması, blokların simetri ekseninden olan uzaklıklarının artması ya da blok genişliğinin artması temas uzunluklarını arttırmaktadır.

Blok genişliği, blokların simetri ekseninden olan uzaklıkları, G_1/G_2 malzeme oranı parametreleri tabaka-blok ve tabaka-yarım düzlem arasındaki temas gerilme dağılımlarını da etkilemektedir. Blok genişliği arttıkça $p_1(x)/(P/h)$ boyutsuz temas gerilmesi daha geniş bir alanda etki göstereceğinden ortalama değeri azalmaktadır. $(b-a)/h$ oranı arttıkça $p_2(x)/(P/h)$ temas gerilmesinin simetri eksenini üzerinde aldığı değerler azalmaktadır. G_1/G_2 malzeme oranı arttıkça elastik tabaka ve yarım düzlem arasındaki temas uzunluğu da artmaktadır. Temas uzunluğu arttıkça temas gerilmesinin aldığı en büyük değer azalmakta ve bu değeri aldığı noktanın konumu simetri ekseninden uzaklaşmaktadır. Ayrıca tabaka ve yarım düzlem arasındaki temas gerilmesinin simetri eksenini üzerinde aldığı değerler artmaktadır. Bloklar simetri ekseninden uzaklaştıkça elastik tabaka ve blok arasındaki temasın sağ ucuna yakın gerilme değerleri azalmakta, sol ucuna yakın gerilme değerleri ise artmaktadır. Blokların simetri ekseninden olan uzaklıklarının artması elastik tabaka ve yarım düzlem arasındaki gerilmenin maksimum değerini ve gerilmenin simetri eksenini üzerinde aldığı değeri azaltmaktadır.

Bloklar simetri ekseninden belirli bir konuma kadar uzaklaşabilmektedirler. Belirli bir değerden sonra simetri eksenini üzerinde blok ile yarım düzlem arasında ayrılma meydana gelmektedir. G_1/G_2 malzeme oranı arttıkça bloğun simetri ekseninden olan

uzaklığının alabileceği maksimum değer artmaktadır. Blok genişliğinin artmasıyla elastik tabaka ve yarım düzlem arasındaki temas uzunlukları da artmaktadır. Bununla birlikte ayrılma olmaması için blok konumunun alabileceği son değer de simetri ekseninden uzaklaşmaktadır. Simetri eksenini üzerinde tabaka ile yarım düzlem arasında ayrılma olmaması için kayma modüllerinin oranı artarken blok genişliği azalmalıdır.

Elastik tabaka simetri eksenini üzerinde tek bir blok aracılığıyla yüklendiğinde, G_1 / G_2 malzeme oranının artması veya blok genişliğinin artması elastik tabaka ve yarım düzlem arasındaki temas uzunluklarını da arttırmaktadır. Blok genişliğinin artmasıyla elastik tabaka ve blok arasındaki gerilmenin ortalama değeri ile tabaka ve yarım düzlem arasındaki temas gerilmesinin alacağı maksimum değer azalmaktadır.

Simetrik iki blok halinde elastik tabaka ve blok ile elastik tabaka ve yarım düzlem arasındaki temas gerilmeleri bloklar birbirine yaklaştıkça simetri eksenini üzerinde tek bir bloğun bulunması halindeki etkiye yaklaşmaktadır. Bloklar birbirlerinden uzaklaştıkça elastik tabaka ve yarım düzlem arasındaki temas gerilmesi, birbirinden bağımsız iki bloğun etkisine yaklaşmaktadır.

σ_x normal gerilmesi simetri ekseninde tabakanın üst yüzeyinde çekme alt yüzeyinde ise basınç gerilmeleri olarak ortaya çıkmaktadır. Yarım düzlemde ise σ_x normal gerilmesi belirli bir değere kadar basınç gerilmesi olarak artmakta, belirli bir değerden sonra azalarak etkisini kaybetmektedir. G_1 / G_2 kayma modülleri oranı arttıkça σ_x normal gerilmesinin simetri eksenini üzerinde aldığı değerler azalmaktadır. Blok genişliği arttıkça elastik tabakada σ_x normal gerilmesinin değeri azalmakta, yarım düzlemde ise gerilmenin aldığı maksimum değerler azalmaktadır.

σ_y normal gerilmesi, en büyük değerini blokların altında almaktadır. Bloklardan uzaklaşınca σ_y normal gerilmesinin değeri azalmaktadır. Simetri ekseninde tabakanın üst yüzeyinde σ_y normal gerilmesi sıfır değerini almaktadır. Tabaka derinliği boyunca σ_y normal gerilmesinin değeri artmaktadır. Yarım düzlemde σ_y normal gerilmesi belirli bir maksimum değere kadar artmakta, sonrasında ise azalarak etkisini kaybetmektedir. G_1 / G_2 oranı arttıkça elastik tabakadaki σ_y normal gerilmesinin değeri artmaktadır, yarım düzlemde ise maksimum değer azalmaktadır. Tabaka derinliği boyunca, blok genişliğinin

artmasıyla tabaka derinliği boyunca σ_y normal gerilmeleri artmakta elastik yarım düzlemde ise gerilmelerin alacağı maksimum değer azalmaktadır.

Kayma gerilmeleri $x=0$ ve $y=h$, $x=y=0$ yüzeylerinde sıfır olmaktadır. Yarım düzlemde ise derinlik boyunca τ_{xy} kayma gerilmesinin değeri artarak maksimum değerini almakta, sonrasında ise azalarak etkisini kaybetmektedir. G_1/G_2 kayma modülleri oranının artmasıyla elastik tabakadaki τ_{xy} kayma gerilmesinin değeri azalmakta, yarım düzlemde ise gerilmelerin maksimum değeri azalmaktadır. Bloklar simetri ekseninden uzaklaştıkça τ_{xy} kayma gerilmesinin değerleri elastik tabakada artmakta, elastik yarım düzlemde ise azalmaktadır.

5. KAYNAKLAR

1. Adams, G. G. ve Bogy, D. B., The Plane Symmetric Contact Problem for Dissimilar Elastic Semi-Infinite Strips of Different Widths, Journal of Applied Mechanics,44,4 (1977) 604-610.
2. Adıyaman, G., Yaylacı, M. ve Birinci, A. , Analytical and Finite Element Solution on a Receiving Contact Problem, Structural Engineering and Mechanics , 54 (2015) 69-85.
3. Aksoğan, O., Akavcı, S. ve Becker, A. A., A Comparative Study of the Contact Problem for an Elastic Layer Supported by Two Elastic Quarter Planes, C.U. Journal of Faculty of Engineering and Architecture, 11,1 (1996) 25-31.
4. Aksoğan, O., Akavcı ve S. Becker, A. A., The Solution of the Nonsymmetrical Contact Problem of an Elastic Layer Supported by Two Elastic Quarter Planes Using Three Different Methods, C.U. Journal of Faculty of Engineering and Architecture,12 (1997) 1-14.
5. Bakırtaş, I., The Problem of a Rigid Punch on a Non-Homogeneous Elastic Half Space, International Journal of Engineering Science, 18,4 (1980) 597-610.
6. Birinci, A. ve Erdöl, R., Üzerinde Rijit Dikdörtgen Bir Blok Bulunan ve Basit Mesnetlere Oturan İki Elastik Tabakanın Sürekli Temas Problemi, 10. Ulusal Mekanik Kongresi, Eylül 1997, İstanbul, Bildiriler Kitabı, 151-164.
7. Birinci, A., Kahya, V. ve Erdöl R., Elastik Mesnete Oturan Bileşik Tabakalarda Sürekli Değme Problemi, , 10. Ulusal Mekanik Kongresi, Eylül 1997, İstanbul, Bildiriler Kitabı, 165-173.
8. Birinci, A., Axisymmetric Crack Problem of a Thick Walled Cylinder with Cladding, International Journal of Engineering Science, 40 (2002) 1729-1750.
9. Birinci, A. ve Çakıroğlu, F. L., Partial Closure of a Crack Located in an Infinite Elastic Layer, European Journal of Mechanics, 22 (2003) 583-590.
10. Birinci, A. ve Erdöl, R., Continuous and Discontinuous Contact Problem for a Layered Composite Resting on Simple Supports, Structural Engineering and Mechanics, 1 (2004) 17-34.
11. Birinci, A. ve Erdöl, R., A Frictionless Contact Problem For Two Elastic Layers Supported By A Winkler Foundation, Structural Engineering and Mechanics, 15 (2013) 331-344.
12. Birinci, A. , Adıyaman. G. ve Yaylacı, M. , Analysis of Continuous and Discontinuous Cases of a Contact Problem Using Analytical Method and FEM, Latin American Journal of Solids and Structures, 12 (2015) 1771-1789.

13. Çakıroğlu, F.L. ve Erdöl, R., Bileşik Çubukların Elastisite Teorisine Göre Çözümü, A.U. Mühendislik Fakültesi Dergisi, 3 (1987) 53-60.
14. Çakıroğlu, F. L., Çakıroğlu, M. ve Erdöl, R., Contact Problems for two Elastic Layers Resting on Elastic Half Plane, Journal of Engineering Mechanics, 127 (2001) 113-118.
15. Gao, H., Chui., C., Lee., ve J., Lee, Elastic Contact Versus Indentation Modeling of Multi-Layered Materials, International Journal Solid Structures, 29 (1992) 2471-2492.
16. Civelek, M.B., Erdoğan ve F.,Çakıroğlu,A.O., Interface Separation for an Elastic Layer Loaded by a Rigid Stamp, International Journal Of Engineering Science, 17 (1973) 669-679.
17. Çepni, T., Birinci, A. ve Çakıroğlu A. O., Belirli Noktalardan Tutturulmuş Bileşik Çubukların Elastisite Teorisine Göre Çözümü, 2. Ulusal Hesaplamalı Mekanik Kongresi, Eylül 1996, Trabzon, Bildiriler Kitabı, 54-64.
18. Çömez, İ., Rijit Dairesel Bir Pançla Bastırılmış, Elastik Yarım Düzleme Tam Yapışık Tabakanın Sürtünmeli Değme Problemi, 15. Ulusal Mekanik Kongresi, Eylül 2007, Isparta, 309-314.
19. Çömez, İ., Birinci, A., Erdol, R., Double Receding Contact Problem for a Rigid Stamp and Two Elastic Layers, European Journal of Mechanics A/Solids, 23 (2004) 301-309.
20. Çömez, İ., Frictional Contact Problem for a Rigid Cylindrical Stamp and an Elastic Layer Resting on a Half Plane, International Journal of Solids and Structures, 47 (2010) 1090-1097.
21. Çömez, İ., Contact Problem of a Functionally Graded Layer Resting on a Winkler Foundation, Acta Mechanica, 224,11 (2013) 2833-2843.
22. Çömez, İ., Contact Problem for a Functionally Graded Layer Intended by a Moving Punch, International Journal of Mechanical Sciences, 100 (2015) 339-344.
23. Dhaliwal, R. S. ve Rau, I. S., The Axisymmetric Boussineq Problem for a Thick Elastic Layer Under a Punch of Arbitrary Profile, International Journal Of Engineering Science, 8 (1970) 843-856.
24. Dempsey, J.P., Zhao, Z. G. ve Li, H. ,Axisymmetric Indentation of an Elastic Layer Supported By a Winkler Foundation, International Journal of Solids and Structures, 27,1 (1991) 73-87.
25. El-Borgi, Abdelmoula, R. ve Keer L., A Receding Contact Problem Between a Functionally Graded Layer and a Homogeneous Substrate, International Journal of Solids and Structures, 43 (2006) 658-674.
26. El-Borgi, S., Usman, S. ve Güler, M. A.,A Frictional Receding Contact Plane Problem Between a Functionally Graded Layer and a Homogeneous Substrate, , International Journal of Solids and Structures, 51 (2014) 4462-4476.

27. Elabbasi, N. ve Hong, J., Bathe, K., On the Reliable Solution of Contact Problems in Engineering Design, International Journal of Mechanics and Materials in Design, 1 (2014) 3-16.
28. Fan, H., Keer ve L. M., Two Dimensional Contact on an Anizotropic Elastic Half Space, ASME Journal of Applied Mechanics, 61 (1964) 250-255.
29. Ficher-Cripps, A.C., The Hertzian Contact Surface, Journal of Materials Science, 34 (1999) 129-137.
30. Gecit , M. R., Axisymmetric Contact Problem For a Semi-Infinite Cylinder and a Half Space, International Journal Of Engineering Science, 24,8 (1986) 1245-1256.
31. Gladwell, G. M. L., A Note a Three-Part Contact Problem, Chebyshev Polynomials and Elliptic Integrals, International Journal Of Engineering Science, 18 (1980) 61-67.
32. Guler, M.A., Erdoğan, F., Contact Mechanics of Graded Coatings, , International Journal of Solids and Structures, 41 (2004) 3865-3889.
33. Kahya, V., Birinci, A. ve Erdöl, R., Frictionless Contact Problem Between an Elastic Layer Bonded to a Rigid Support and a Rigid Stamp, Mathematical & Computational Applications, 6,1 (2001) 13-22.
34. Kahya, V., Ozsahin, T. S., Birinci ve A., Erdol, R., A Receding Contact Problem for an Anizotropic Elastic Medium Consisting of a Layer and a Half Plane, International Journal of Solids and Structures, 44 (2007) 5695-5710.
35. King, R. B., Elastic Analysis of a Some Punch Problems for a Layered Medium, , International Journal of Solids and Structures, 23 , 12 (1987) 1657-1664.
36. Kucuksucu, A., Guler, M. A. ve Avcı, A., Mechanics of Sliding Frictional Contact for a Graded Orthotropic Half-Plane, Acta Mech, 226 (2015) 3333-3374.
37. Ma, L. F. ve Korsunsky, A. M., Fundemental Formulation for Frictional Contact Problems of Coated Systems, International Journal of Solids and Structures, 41 (2004) 2837-2854.
38. Noor, M. A. ve Tirmızı, S. I. A., Numerical Methods for a Class of Contact Problems, International Journal of Engineering Science, 29, 4 (1991) 513-521.
39. Peijian, C., Shaohua ve C., Juan, P., Sliding Contact Between a Cylindrical Punch and a Graded Half Plane With an Arbitrary Gradient Direction, Journal of Applied Mechanics, 82 (2015) 041008.
40. Pindera, M. J. ve Lane, M. S., Frictionless Contact of Layered Half-Planes, Part I: Analysis, Journal of Applied Mechanics, 60 (1993) 633-639.
41. Pindera, M. J., Lane ve M. S., Frictionless Contact of Layered Half-Planes, Part II: Numerical Results, Journal of Applied Mechanics, 60 (1993) 640-645.

42. Rhimi, M., El-Borgi, S., Ben Said, W. ve Ben Jemaa, F., A Receding Contact Axisymmetric Problem Between a Functionally Graded Layer and a Homogeneous Substrate, International Journal of Solids and Structures, 46 (2009) 3633-3642.
43. Rhimi, M., El-Borgi, S. ve Lajnef, N., A Double Receiving Contact Axisymmetric Problem Between a Functionally Graded Layer and a Homogeneous Substrate, Mechanics of Materials, 43 (2011) 787-798.
44. Shibuya, T., Kouzumi, T. ve Nakahara, I., An Elastic Contact Problem for a Half-Space Indented by a Flat Annular Rigid Stamp, International Journal Of Engineering Science, 12 (1974) 759-771.
45. Öner, E. ve Birinci, A., Continuous Contact Problem For Two Elastic Layers Resting On An Elastic Half-Infinite Plane , Journal of Mechanics of Materials and Structures, 9 (2014) 105-119.
46. Öner, E. , Yaylacı ve M. , Birinci , A. , Solution of a Receiving Contact Problem Using an Analytical Method and a Finite Element Method , Journal of Mechanics of Materials and Structures , 9 (2014) 333-344.
47. Özşahin, T. Ş., Kahya, V. ve Çakıroğlu, A. O., Elastik Tabakalara Ait Ara Yüzeyde Süreksizliği Bulunan Bileşik Tabaka Problemi, 11. Ulusal Mekanik Kongresi, Eylül 1999, Bolu, Bildiriler Kitabı, 543-554.
48. Özşahin, T. Ş. ve Çakıroğlu, A. O., Rijit İki Yarım Daire Blok Üzerine Oturan İki Bileşik Tabakada Temas Problemi, 10. Ulusal Mekanik Kongresi, Eylül 1997, İstanbul, Bildiriler Kitabı, 377-390
49. Özşahin, T. Ş. ve Taskiner, O., Contact Problem for an Elastic Layer on an Elastic Half Plane Loaded by Means of Three Rigid Flat Punches, Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering, 10.1155 (2013)
50. Sabin, G. C. W. ve Kaloni, P. N., Contact Problem of a Rigid Indentor with Rotational Friction in Second Order Elasticity, International Journal Of Engineering Science, 27, 3 (1989) 203-217.
51. Yaylacı, M., Öner, E. ve Birinci, A. , Comparison Between Analytical and ANSYS Calculations for a Receding Contact Problem , Journal of Engineering Mechanics , 140 (2014).
52. Yan, J., Li ve X., Double Receding Contact Plane Problem Between a Functionally Graded Layer and a Elastic Layer, European Journal of Mechanics A/Solids, 53 (2015) 143-150.

ÖZGEÇMİŞ

1988 yılında Ordu' da doğdu. İlköğrenimini Ordu Durugöl İlköğretim Okulu' nda, ortaöğrenimini Ordu Fen Lisesi' de tamamladı. 2013 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü'nden mezun oldu . 2013 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı 'nda yüksek lisans eğitimine başladı ve yine aynı yıl Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı' na Araştırma Görevlisi olarak atandı. Halen araştırma görevlisi olan İnş. Müh. Pembe Merve KARABULUT, İngilizce bilmektedir.