

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**İKİ RİJİT DİKDÖRTGEN BLOK İLE YÜKLENMİŞ ELASTİK YARI SONSUZ DÜZLEM  
ÜZERİNE OTURAN İKİ ELASTİK TABAKANIN TEMAS PROBLEMİ**

**DOKTORA TEZİ**

**İnş. Yük. Müh. Pınar BORA**

**HAZİRAN - 2016  
TRABZON**



**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**İKİ RİJİT DİKDÖRTGEN BLOK İLE YÜKLENMİŞ  
ELASTİK YARI SONSUZ DÜZLEM ÜZERİNE OTURAN  
İKİ ELASTİK TABAKANIN TEMAS PROBLEMİ**

**İnş. Yük. Müh. Pınar BORA**

**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce**  
**"DOKTOR (İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ)"**  
**Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 20 / 05 / 2016**

**Tezin Savunma Tarihi : 30 / 06 / 2016**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Talat Şükrü ÖZŞAHİN**

**Trabzon 2016**

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalında  
Pınar BORA Tarafından Hazırlanan**

**İKİ RİJİT DİKDÖRTGEN BLOK İLE YÜKLENMİŞ  
ELASTİK YARI SONSUZ DÜZLEM ÜZERİNE OTURAN  
İKİ ELASTİK TABAKANIN TEMAS PROBLEMİ**

**başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 31 /05/2016 gün ve 1655 sayılı  
kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda  
DOKTORA TEZİ  
olarak kabul edilmiştir.**

**Jüri Üyeleri**

**Başkan : Prof. Dr. Ragıp ERDÖL** .....

**Üye : Prof. Dr. Mehmet ÜLKER** .....

**Üye : Prof. Dr. Hasan SOFUOĞLU** .....

**Üye : Prof. Dr. Kurtuluş SOYLUK** .....

**Üye : Prof. Dr. Talat Şükrü ÖZŞAHİN** .....

**Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ**

**Enstitü Müdürü**

## ÖNSÖZ

Bu çalışma Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Doktora tezi olarak hazırlanmıştır.

“İki Rijit Dikdörtgen Blok ile Yüklenmiş Elastik Yarı Sonsuz Düzlem Üzerine Oturan İki Elastik Tabakanın Temas Problemi” isimli tez çalışmasını bana öneren ve her aşamasında bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım, öğrencisi olmaktan ve kendisi ile çalışmaktan onur duyduğum danışman Hocam Sayın Prof. Dr. Talat Şükrü ÖZŞAHİN' ne minnet ve şükranlarımı sunarım.

Öğrenim hayatım boyunca bana emeği geçen tüm hocalarımı saygıyla anar, kendilerine minnettar olduğumu belirtmek isterim.

Tez çalışmam boyunca bilgi ve birikimlerinden faydalandığım Sayın Prof. Dr. Ragıp ERDÖL'e Sayın Prof. Dr. Hasan SOFUOĞLU'na, Sayın Prof. Dr. Ali Osman ÇAKIROĞLU'na, ve Sayın Prof. Dr. Ümit UZMAN'a teşekkür ederim. Tez savunma sınavı jüri üyeliğini kabul eden Sayın Prof. Dr. Mehmet ÜLKER'e ve Sayın Prof. Dr. Kurtuluş SOYLUK'a teşekkür ederim.

Çalışmalarım sırasında tezim ile ilgili birçok konuda yardım ve değerli fikirlerini esirgemeyen Sayın Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ'ye, Sayın Doç. Dr. Volkan KAHYA'ya, Sayın Yrd. Doç. Dr. Murat BOSTANCIOĞLU'na ve Sayın Arş. Gör. Erdal ÖNER'e ayrıca teşekkür etmek isterim.

Öğrenim hayatım süresince beni sabırla destekleyen, eşime, anneme, babama ve canım oğluma müteşekkir olduğumu belirtir, çalışmanın ülkemize yararlı olmasını içtenlikle dilerim.

Pınar BORA

Trabzon 2016

## **TEZ ETİK BEYANNAMESİ**

Doktora Tezi olarak sunduğum “İki Rijit Dikdörtgen Blok ile Yüklenmiş Elastik Yarı Sonsuz Düzlem Üzerine Oturan İki Elastik Tabakanın Temas Problemi” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Talat Şükrü ÖZŞAHİN'nin sorumluluğunda tamamladığımı, verileri /örnekleri kendim topladığımı, deneyleri /analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı /yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 30/06/2016

Pınar BORA

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ .....	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ .....	IV
İÇİNDEKİLER .....	V
ÖZET .....	VII
SUMMARY .....	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	IX
TABLolar DİZİNİ .....	XIII
SEMBOLLER DİZİNİ .....	XIV
1. GENEL BİLGİLER .....	1
1.1. Giriş .....	1
1.1.1. Literatür Araştırması .....	1
1.1.2. Çalışmanın Amacı ve Kapsamı .....	10
1.2. Genel Denklemlerin Elde Edilmesi. ....	12
1.2.1. Kütle Kuvvetlerinin Bulunmaması Durumunda Genel Denklemlerin Elde Edilmesi .....	12
1.2.2. Kütle Kuvvetlerinin Bulunması Durumunda Genel Denklemlerin Elde Edilmesi .....	20
1.3. Sonlu Elemanlar Yöntemi .....	25
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR .....	36
2.1. Problemin Tanımı .....	36
2.2. Kullanılacak Denklemler .....	37
2.3. Sürekli Temas .....	39
2.3.1. Problemin Sınır Şartları .....	39
2.3.2. Katsayıların Belirlenmesi .....	40
2.3.3. İntegral Denklemlerin Elde Edilmesi .....	46
2.3.4. İntegral Denklem Sisteminin Sayısal Çözümü .....	50
2.3.5. Gerilme Çekirdeklerinin Yakınsama Kontrolü.....	53
2.3.6. Alt Tabaka ile Elastik Yarı Sonsuz Düzlem Arasındaki ve Tabakalar Arasındaki İlk Ayrılma Yükleri ve İlk Ayrılma Uzaklıkları.....	56
2.4. Süreksiz Temas.....	58
2.4.1. Alt Tabaka ile Elastik Yarı Sonsuz Düzleme Ait Ara Yüzeyde Meydana Gelen Süreksizlik.....	58
2.4.1.1. Sınır Şartları .....	59
2.4.1.2. Katsayıların Belirlenmesi .....	61
2.4.1.3. İntegral Denklemlerin Elde Edilmesi .....	64
2.4.1.4. Alt Tabaka ile Elastik Yarı Sonsuz Düzleme Ait Ara Yüzeyde Meydana Gelen Ayrılmanın Belirlenmesi.....	69
2.4.2. Tabakalara Ait Ara Yüzeyde Meydana Gelen Süreksizlik.....	73
2.4.2.1. Sınır Şartları .....	74
2.4.2.2. Katsayıların Belirlenmesi .....	76
2.4.2.3. İntegral Denklemlerin Elde Edilmesi .....	78

2.4.2.4.	Tabakalara Ait Ara Yüzeyde Meydana Gelen Ayrılmanın Belirlenmesi.....	83
2.5.	Sonlu Elemanlar Yöntemiyle Analiz .....	87
3.	BULGULAR VE İRDELEME .....	91
3.1.	Giriş .....	91
3.2.	Rijit Bloklar Altındaki Temas Gerilmelerinin İncelenmesi .....	91
3.3.	Normal Gerilme ve Kayma Gerilmelerinin İncelenmesi .....	95
3.3.1.	$\sigma_x$ Normal Gerilmesinin İncelenmesi.....	95
3.3.2.	$\sigma_y$ Normal Gerilmelerinin İncelenmesi .....	103
3.3.3.	$\tau_{xy}$ Kayma Gerilmelerinin İncelenmesi .....	107
3.4.	Alt Tabaka ile Elastik Yarı Sonsuz Düzlem ve Tabakalar Arası İlk Ayrılma Uzaklıkları ve İlk Ayrılma Yüklerinin Hesaplanması .....	112
3.5.	Süreksiz Temas Durumunda Alt Tabaka ile Elastik Yarı Sonsuz Düzlem ve Tabakalara Ait Ara Yüzeylerdeki Düşey Gerilme Yayılımı ve Ayrılma Mesafelerinin İncelenmesi.....	125
3.6.	Süreksiz Temas Durumunda Ayrılma Bölgelerindeki Düşey Yer Değiştirme Farklarının İncelenmesi.....	134
3.7.	Sonlu Elemanlar Yöntemi Sonuçları ve Teorik Sonuçlarla Karşılaştırma .....	140
4.	SONUÇLAR VE ÖNERİLER .....	152
5.	KAYNAKLAR .....	158
ÖZGEÇMİŞ		

Doktora Tezi

ÖZET

RIJİT İKİ BLOK ARACILIĞI İLE YÜKLENMİŞ ELASTİK YARI SONSUZ DÜZLEME  
OTURAN İKİ ELASTİK TABAKANIN TEMAS PROBLEMİ

Pınar BORA

Karadeniz Teknik Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Talat Şükrü ÖZŞAHİN

2016, 163 Sayfa

Bu çalışmada rijit iki dikdörtgen blok aracılığı ile yüklenmiş ve elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan, elastik özellikleri ve yükseklikleri farklı homojen ve izotrop iki tabakanın sürekli ve süreksiz temas problemi elastisite teorisine göre incelenmiştir. Ayrıca bu problem sonlu elemanlar yöntemini kullanan ANSYS paket programı ile de analiz edilmiştir. Birinci bölümde, temas problemlerinin tarihsel gelişiminden bahsedilmiş, temas konusu üzerine yapılan bazı çalışmalar özetlenmiştir. Ayrıca bu bölümde, tabakalar ve elastik yarı sonsuz düzlem için elastisite teorisine ait temel denklemler ve integral dönüşüm teknikleri kullanılarak gerilme ve yer değiştirmelerin genel ifadeleri elde edilmiştir. İkinci bölümde, önce sürekli temas durumu incelenmiştir. Sürekli temasta probleme ait sınır şartlarına, gerilme ve yer değiştirme ifadeleri uygulanmış, problem bloklar altındaki temas gerilmelerinin bilinmeyen olduğu tekil integral denklemlere indirgenmiştir. Tekil integral denklemlerin çözümünde ise Gauss-Chebyshev integrasyon formülleri kullanılmıştır. Daha sonra iki elastik tabaka ve alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında ilk ayrılmayı meydana getirecek yük ve ilk ayrılmanın meydana geleceği uzaklık araştırılmıştır. Sürekli temasın ardından süreksiz temas incelenmiştir. Öncelikle alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ayrılma ele alınmıştır. Daha sonra ise iki elastik tabakaya ait ara yüzeyde ayrılma olması durumunda yazılan sınır şartlarına uygulanan gerilme ve yer değiştirme denklemleri ile problem temas gerilmeleri ve iki elastik tabakaya ait ara yüzeyde meydana gelen ayrılmanın eğiminin bilinmeyenler olduğu üç integral denkleme indirgenmiş ve denklem takımları çözülmüştür. İntegral denklemler çözüldükten sonra temas gerilmeleri, alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlem ile tabakalara ait ara yüzeydeki ayrılmalar ve herhangi bir noktadaki  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  gerilme bileşenleri kolayca belirlenebilir hale gelmiştir. Ayrıca bu bölümde, yukarıda ele alınan elastik yarı sonsuz düzlem ve elastik tabakalara ait temas problemi sonlu elemanlar yöntemi ile analiz edilmiştir. Üçüncü bölümde, blok genişliği, bloklar arası mesafe, tabaka yükseklikleri, yük oranı ve malzeme özellikleri gibi değişik boyutsuz büyüklüklerin farklı değerleri için gerilme ve yer değiştirmelere ait sonuçlar şekiller ve tablolar halinde sunulmuştur. Dördüncü bölümde, bu çalışmadan çıkartılan sonuçlar ve öneriler verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Elastisite Teorisi, Sürekli Temas, Süreksiz Temas, Temas Gerilmesi, İlk Ayrılma Yüğü, İlk Ayrılma Uzaklığı, Ayrılma, İntegral Dönüşüm Teknikleri, Sonlu Elemanlar Yöntemi, ANSYS



PhD Thesis

SUMMARY

THE CONTACT PROBLEM FOR TWO ELASTIC LAYERS LOADED BY MEANS OF TWO RIGID RECTANGLE BLOCKS AND RESTING ON AN ELASTIC HALF INFINITE PLANE

Pınar BORA

Karadeniz Technical University  
The Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Civil Engineering Graduate Program  
Supervisor: Prof. Dr. Talat Şükrü Özşahin  
2016, 163 Pages

In this study, the analytical solution is derived according to the theory of elasticity for the continuous and discontinuous contact problems in two homogeneous and isotropic layers with different thicknesses and elastic properties; the layers are underlain by an elastic semi-infinite plane and are loaded with two rectangular blocks. Analytical solution results are then compared with numerical solutions using ANSYS. The study consists of four chapters. Chapter I briefly reviews the historical development of contact problems and provides the general expressions for stresses and displacements of the two layers and the underlying plane using fundamental equations of elasticity and integral transform techniques. Chapter II provides the analytical solution derived for the continuous and discontinuous contact problems and provides the base for numerical computation in ANSYS. First, the continuous contact case is covered. Stress and displacement expressions are substituted into the boundary conditions, and the problem is reduced to singular integral equations, where the contact stresses are the unknown function. The solution of singular integral equations is obtained using Gauss- Chebyshev integration formulas. The load which causes the first separation and the point where the separation starts are obtained for the interfaces. Second, the discontinuous contact case is examined in two parts. First for the interface between the bottom layer and the semi-infinite plane, and then for the interface between the two layers. The same procedure as in continuous contact problem is followed for the discontinuous contact problem, except the number of singular integral equations become three with the third unknown being the slope at the separation region. By solving these three integral equations, one can easily obtain the separation between the interfaces, contact stresses under the blocks, and  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  stress components at every point of interfaces. Then, this problem was adopted and computed in ANSYS using Finite Element Method. In Chapter III, stresses and displacements are obtained using various dimensionless quantities of block widths, distances between blocks, layer thicknesses, load rates (applied to different blocks), and material properties, and the results are documented in tables and figures. The final chapter includes the conclusions and recommendations.

**Key Words:** Theory of Elasticity, Continuous Contact, Discontinuous Contact, Contact Stress, Initial Separation Load, Initial Separation Distance, Separation, Integral Transforms Technique, Finit Element Method, ANSYS

## ŞEKİLLER DİZİNİ

### Sayfa No

Şekil 1. Bir ve iki boyutlu sonlu elemanlar.....	27
Şekil 2. Üç boyutlu sonlu elemanlar.....	27
Şekil 3. Üçgen eleman ve polinom yaklaşımı.....	28
Şekil 4. Tek bir dörtgen elemana ait rijitlik matrisi.....	31
Şekil 5. Genel serbestlik derecesi terimleri içerisinde eleman rijitlik matrisleri .....	32
Şekil 6. İki elemanlı bir sonlu elemanlar ağında genel rijitlik matrisinin oluşturulması.....	33
Şekil 7. Problemin geometrisi .....	36
Şekil 8. Alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki süreksiz temas probleminin geometrisi.....	59
Şekil 9. Tabakalar arasındaki süreksiz temas probleminin geometrisi .....	74
Şekil 10. PLANE 183 elemanı ve TARGE 169/CONTA 172 temas elemanları.....	89
Şekil 11. Analiz geometrisi.....	89
Şekil 12. Problemin ANSYS modeli.....	90
Şekil 13. Çeşitli blok genişlikleri için bloklar altındaki temas gerilmesi yayılımı ( $\kappa_1=2$ , $\kappa_2=2$ , $\kappa_3=2$ , $\mu_2/\mu_1=2$ , $\mu_3/\mu_2=2$ , $a/h=3$ , $(c-b)/h=1$ , $Q=P$ ).....	92
Şekil 14. Bloklar arası mesafe değişimlerinde bloklar altındaki temas gerilmesi yayılımı ( $\kappa_1=2$ , $\kappa_2=2$ , $\kappa_3=2$ , $\mu_2/\mu_1=2$ , $\mu_3/\mu_2=2$ , $a/h=3$ , $(b-a)/h=1$ , $(d-b)/h=1$ , $Q=2P$ ).....	93
Şekil 15. Tabakaların kayma modülleri oranlarına bağlı olarak bloklar altındaki temas gerilmeleri yayılımı ( $\kappa_1=2$ , $\kappa_2=2$ , $\kappa_3=2$ , $\mu_3/\mu_2=2$ , $a/h=3$ , $(b-a)/h=1$ , $(d-c)/h=1$ , $(c-b)/h=1$ , $Q=2P$ ).....	93
Şekil 16. Alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modüllerinin oranlarına bağlı olarak bloklar altındaki temas gerilmesi yayılımı ( $\kappa_1=2$ , $\kappa_2=2$ , $\kappa_3=2$ , $\mu_2/\mu_1=2$ , $a/h=3$ , $(b-a)/h=1$ , $(d-c)/h=1$ , $(c-b)/h=1$ , $Q=2P$ ).....	94
Şekil 17. Çeşitli yük oranı değerleri için bloklar altındaki temas gerilmeleri yayılımı ( $\kappa_1=2$ , $\kappa_2=2$ , $\kappa_3=2$ , $\mu_2/\mu_1=2$ , $\mu_3/\mu_2=2$ , $a/h=3$ , $(b-a)/h=1$ , $(d-c)/h=1$ , $(c-b)/h=1$ ).....	94
Şekil 18. $\sigma_x(3.5, y)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin blok genişlikleri ile değişimi ( $\kappa_1=2$ , $\kappa_2=2$ , $\kappa_3=2$ , $\mu_2/\mu_1=1$ , $\mu_3/\mu_2=1$ , $a/h=3$ , $(c-b)/h=2$ , $Q=P$ ).....	98
Şekil 19. $\sigma_x(3.5, y)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin bloklar arası mesafe ile değişimi ( $\kappa_1=2$ , $\kappa_2=2$ , $\kappa_3=2$ , $\mu_2/\mu_1=2$ , $\mu_3/\mu_2=2$ , $a/h=3$ , $(b-a)/h=1$ , $(d-c)/h=1$ , $Q=P$ ).....	98

Şekil 20. $\sigma_x (3.5, y)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=1, (d-c)/h=1, (c-b)/h=2, Q=P$ ).....	99
Şekil 21. $\sigma_x (4.5, y)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=1, (d-c)/h=1, (c-b)/h=1, Q=P$ ).....	99
Şekil 22. $\sigma_x (0, y)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=1, (d-c)/h=1, (c-b)/h=2, Q=P$ ).....	100
Şekil 23. $\sigma_x (3.5, y)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, a/h=3, (b-a)/h=1, (d-c)/h=1, (c-b)/h=2, Q=P$ ).....	100
Şekil 24. $\sigma_x (6.5, y)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin yük oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=1, (d-c)/h=1, (c-b)/h=2$ ).....	101
Şekil 25. Tabakaların kayma modüllerinin oranına bağlı olarak x eksenini boyunca $\sigma_{x_1} (x, h_2)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=1, (d-c)/h=1, (c-b)/h=1, Q=2P$ ).....	101
Şekil 26. Tabakaların kayma modüllerinin oranına bağlı olarak x eksenini boyunca $\sigma_{x_2} (x, 0)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=1, (d-c)/h=1, (c-b)/h=1, Q=2P$ ).....	102
Şekil 27. Alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modüllerinin oranına bağlı olarak x eksenini boyunca $\sigma_{x_1} (x, h_2)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, a/h=3, (b-a)/h=1, (d-c)/h=1, (c-b)/h=1, Q=2P$ ).....	102
Şekil 28. Alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modüllerinin oranına bağlı olarak x eksenini boyunca $\sigma_{x_2} (x, 0)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, a/h=3, (b-a)/h=1, (d-c)/h=1, (c-b)/h=1, Q=2P$ ).....	103
Şekil 29. $\sigma_y (3.5, y)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin blok genişlikleri ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (c-b)/h=2, Q=P$ ).....	104
Şekil 30. $\sigma_y (3.5, y)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin bloklar arası mesafe ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=2, \mu_3/\mu_2=2, a/h=3, (b-a)/h=1, (d-c)/h=1, Q=P$ ).....	105
Şekil 31. $\sigma_y (3.5, y)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=1, (d-c)/h=1, (c-b)/h=2, Q=P$ ).....	105

Şekil 32. $\sigma_y (3.5, y)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, a/h=3, (b-a)/h=1, (d-c)/h=1, (c-b)/h=2, Q=P$ ).....	106
Şekil 33. $\sigma_y (3.5, y)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin yük oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=1, (d-c)/h=1, (c-b)/h=2$ ).....	106
Şekil 34. $\sigma_y (x, y)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin ekseninde, blok altında ve bloklar arasındaki değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=1, (d-c)/h=1, (c-b)/h=2, Q=P$ ).....	107
Şekil 35. $\tau_{xy} (0, y)/(P/h)$ boyutsuz kayma gerilmesinin blok genişlikleri ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, \mu_3/\mu_2=1, a/h=1, (c-b)/h=1, Q=P$ ).....	109
Şekil 36. $\tau_{xy} (0, y)/(P/h)$ boyutsuz kayma gerilmesinin tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_3/\mu_2=1, a/h=1, (b-a)/h=1, (d-c)/h=1, (c-b)/h=1, Q=P$ ).....	109
Şekil 37. $\tau_{xy} (1.5, y)/(P/h)$ boyutsuz kayma gerilmesinin tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_3/\mu_2=1, a/h=1, (b-a)/h=1, (d-c)/h=1, (c-b)/h=1, Q=P$ ).....	110
Şekil 38. $\tau_{xy} (2.45, y)/(P/h)$ boyutsuz kayma gerilmesinin tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_3/\mu_2=1, a/h=1, (b-a)/h=1, (d-c)/h=1, (c-b)/h=1, Q=P$ ).....	110
Şekil 39. $\tau_{xy} (0, y)/(P/h)$ boyutsuz kayma gerilmesinin $a/h$ oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, \mu_3/\mu_2=1, a/h=1, (b-a)/h=1, (d-c)/h=1, (c-b)/h=1, Q=P$ ).....	111
Şekil 40. $\tau_{xy} (0, y)/(P/h)$ boyutsuz kayma gerilmesinin alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, a/h=1, (b-a)/h=1, (d-c)/h=1, (c-b)/h=1, Q=P$ ).....	111
Şekil 41. $\tau_{xy} (0, y)/(P/h)$ boyutsuz kayma gerilmesinin yük oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, \mu_3/\mu_2=1, a/h=1, (b-a)/h=1, (d-c)/h=1, (c-b)/h=1$ ).....	112
Şekil 42. $\sigma_y (x,0)/(P/h)$ boyutsuz gerilme dağılımının blok genişlikleri ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=2, \mu_3/\mu_2=0.5, a/h=3, (c-b)/h=1, Q=2P, h_2/h=0.5$ ).....	114
Şekil 43. $\sigma_y (x, h_2)/(P/h)$ boyutsuz gerilme dağılımının blok genişlikleri ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=2, \mu_3/\mu_2=0.5, a/h=3, (c-b)/h=1, Q=2P$ ).....	115
Şekil 44. $\sigma_y (x,0)/(P/h)$ boyutsuz gerilme dağılımının bloklar arası mesafe ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, Q=2P, h_2/h=0.5$ ).....	116

Şekil 45. $\sigma_y(x, h_2)/(P/h)$ boyutsuz gerilme dağılımının bloklar arası mesafe ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1 = 1, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, Q=2P$ ).....	116
Şekil 46. $\sigma_y(x, 0)/(P/h)$ boyutsuz gerilme dağılımının yük ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=2, \mu_3/\mu_2=0.5, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, (c-b)/h=1, h_2/h=0.5$ ).....	117
Şekil 47. $\sigma_y(x, h_2)/(P/h)$ boyutsuz gerilme dağılımının yük ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=2, \mu_3/\mu_2 =0.5, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, (c-b)/h=1, h_2/h=0.5$ ).....	118
Şekil 48. $\sigma_y(x, 0)/(P/h)$ boyutsuz gerilme dağılımının tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, (c-b)/h=1, Q=2P, h_2/h=0.5$ ).....	119
Şekil 49. $\sigma_y(x, h_2)/(P/h)$ boyutsuz gerilme dağılımının tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, (c-b)/h=1, Q=2P, h_2/h=0.5$ ).....	120
Şekil 50. $\sigma_y(x, 0)/(P/h)$ boyutsuz gerilme dağılımının alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, (c-b)/h=1, Q=2P, h_2/h=0.5$ ).....	120
Şekil 51. $\sigma_y(x, h_2)/(P/h)$ boyutsuz gerilme dağılımının alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, (c-b)/h=1, Q=2P, h_2/h=0.5$ ).....	121
Şekil 52. Alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıklarının alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ( $Q=2P, (b-a)/h=(d-c)/h=1, (c-b)/h=1.5, a/h=3, h_2/h=0.5$ ).....	121
Şekil 53. Tabakalar arasındaki ilk ayrılma yüklerinin alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ( $Q=2P, (b-a)/h=(d-c)/h=1, (c-b)/h=1.5, a/h=3, h_2/h=0.5$ ).....	122
Şekil 54. Tabakalar arasındaki ilk ayrılma uzaklıklarının alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ( $Q=2P, (b-a)/h=1, (d-c)/h=1, (c-b)/h=1.5, a/h=3, h_2/h=0.5$ ).....	122
Şekil 55. Alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıklarının tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ( $Q=2P, (b-a)/h=(d-c)/h=1, (c-b)/h=1.5, a/h=3, h_2/h=0.5$ ).....	123

- Şekil 56. Tabakalar arasındaki ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıklarının tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ( $Q=2P$ ,  $(b-a)/h=(d-c)/h=1$ ,  $(c-b)/h=1.5$ ,  $a/h=3$ ,  $h_2/h=0.5$ ).....123
- Şekil 57. Süreksiz temas durumunda alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki  $\sigma_y(x,0)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımının blok genişliği ile değişimi ( $\kappa_1=2$ ,  $\kappa_2=2$ ,  $\kappa_3=2$ ,  $\mu_2/\mu_1=2$ ,  $\mu_3/\mu_2=0.5$ ,  $a/h=3$ ,  $(c-b)/h=1$ ,  $\lambda=60$ ).....128
- Şekil 58. Süreksiz temas durumunda alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki  $\sigma_y(x,0)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımının bloklar arası mesafe ile değişimi ( $\kappa_1=2$ ,  $\kappa_2=2$ ,  $\kappa_3=2$ ,  $\mu_2/\mu_1=1$ ,  $\mu_3/\mu_2=1$ ,  $a/h=3$ ,  $(b-a)/h=0.5$ ,  $(d-c)/h=0.5$ ,  $Q=2P$ ,  $\lambda=31$ ).....129
- Şekil 59. Süreksiz temas durumunda alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki  $\sigma_y(x,0)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımının tabakalar arasında ki kayma modülleri oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2$ ,  $\kappa_2=2$ ,  $\kappa_3=2$ ,  $\mu_3/\mu_2=1$ ,  $a/h=3$ ,  $(b-a)/h=0.5$ ,  $(d-c)/h=0.5$ ,  $(c-b)/h=1$ ,  $Q=2P$ ,  $\lambda=40$ ).....129
- Şekil 60. Süreksiz temas durumunda alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki  $\sigma_y(x,0)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımının alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ( $\mu_2/\mu_1=1$ ,  $a/h=3$ ,  $(b-a)/h=0.5$ ,  $(d-c)/h=0.5$ ,  $Q=2P$ ,  $\lambda=70$ ).....130
- Şekil 61. Süreksiz temas durumunda alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki  $\sigma_y(x,0)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımının yük oranı ile değişimi ( $\mu_2/\mu_1=2$ ,  $\mu_3/\mu_2=0.5$ ,  $a/h=3$ ,  $(b-a)/h=0.5$ ,  $(d-c)/h=0.5$ ,  $(c-b)/h=1$ ,  $\lambda=55$ ).....130
- Şekil 62. Sürekli temas ( $\lambda < \lambda_{cr}$ ) ve süreksiz temas ( $\lambda > \lambda_{cr}$ ) durumlarında alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki  $\sigma_y(x,0)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımı ( $\kappa_1=2$ ,  $\kappa_2=2$ ,  $\kappa_3=2$ ,  $\mu_2/\mu_1=1$ ,  $\mu_3/\mu_2=1$ ,  $a/h=3$ ,  $(b-a)/h=0.5$ ,  $(d-c)/h=0.5$ ,  $(c-b)/h=3$ ,  $Q=2P$ ).....131
- Şekil 63. Sürekli temas ( $\lambda < \lambda_{cr}$ ) ve süreksiz temas ( $\lambda > \lambda_{cr}$ ) durumlarında alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki  $\sigma_y(x,0)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımı ( $\kappa_1=2$ ,  $\kappa_2=2$ ,  $\kappa_3=2$ ,  $\mu_2/\mu_1=1$ ,  $\mu_3/\mu_2=1$ ,  $a/h=3$ ,  $(b-a)/h=0.5$ ,  $(d-c)/h=0.5$ ,  $(c-b)/h=1$ ,  $Q=2P$ ).....131
- Şekil 64. Süreksiz temas durumunda tabakalar arasındaki  $\sigma_y(x, h_2)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımının bloklar arası mesafe ile değişimi ( $\kappa_1=2$ ,  $\kappa_2=2$ ,  $\kappa_3=2$ ,  $\mu_2/\mu_1=1$ ,  $\mu_3/\mu_2=1$ ,  $a/h=3$ ,  $(b-a)/h=0.5$ ,  $(d-c)/h=0.5$ ,  $Q=2P$ ,  $\lambda=30$ ,  $h_2/h=0.7$ ).....132
- Şekil 65. Süreksiz temas durumunda tabakalar arasındaki  $\sigma_y(x, h_2)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımının tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2$ ,  $\kappa_2=2$ ,  $\kappa_3=2$ ,  $\mu_3/\mu_2=1$ ,  $a/h=3$ ,  $(b-a)/h=0.5$ ,  $(d-c)/h=0.5$ ,  $(c-b)/h=1$ ,  $Q=2P$ ,  $\lambda=30$ ,  $h_2/h=0.7$ ).....132

Şekil 66. Süreksiz temas durumunda tabakalar arasındaki $\sigma_y(x, h_2)/(P/h)$ boyutsuz gerilme dağılımının yük oranı ile değişimi ( $\mu_2/\mu_1=1, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3$ ( $b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, (c-b)/h=1, \lambda=40, h_2/h=0.7$ ).....	133
Şekil 67. Sürekli temas ( $\lambda < \lambda_{cr}$ ) ve süreksiz temas ( $\lambda > \lambda_{cr}$ ) durumlarında tabakalar arasındaki $\sigma_y(x, h_2)/(P/h)$ boyutsuz gerilme dağılımı ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=0.5,$ ( $d-c)/h=0.5, (c-b)/h=1, Q=2P$ ).....	133
Şekil 68. Sürekli temas ( $\lambda < \lambda_{cr}$ ) ve süreksiz temas ( $\lambda > \lambda_{cr}$ ) durumlarında tabakalar arasındaki $\sigma_y(x, h_2)/(P/h)$ boyutsuz gerilme dağılımı ( $\kappa_1=2,$ $\kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5,$ ( $c-b)/h=1, Q=2P$ ).....	134
Şekil 69. Alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzleme ait ara yüzeydeki kabarmaların blok genişliği ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=2, \mu_3/\mu_2=0.5,$ $a/h=3, (c-b)/h=1, \lambda=60$ ).....	136
Şekil 70. Alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzleme ait ara yüzeydeki kabarmaların bloklar arası mesafe ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3,$ ( $b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, Q=2P, \lambda=31$ ).....	136
Şekil 71. Alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzleme ait ara yüzeydeki kabarmaların tabakalar arasındaki kayma modülleri oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2,$ $\kappa_3=2, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, (c-b)/h=1, Q=2P,$ $\lambda=40$ ).....	137
Şekil 72. Alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzleme ait ara yüzeydeki kabarmaların alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5,$ $Q=2P, \lambda=70$ ).....	137
Şekil 73. Alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzleme ait ara yüzeydeki kabarmaların yük oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=2, \mu_3/\mu_2=0.5, a/h=3,$ ( $b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, (c-b)/h=1, \lambda=55$ ).....	138
Şekil 74. Tabakalara ait ara yüzeydeki kabarmaların bloklar arası mesafe ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5,$ $Q=2P, \lambda=40$ ).....	138
Şekil 75. Tabakalara ait ara yüzeydeki kabarmaların tabakalar arasındaki kayma modülleri oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3,$ ( $b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, (c-b)/h=1, Q=2P, \lambda=30$ ).....	139
Şekil 76. Tabakalara ait ara yüzeydeki kabarmaların yük oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=2, \mu_3/\mu_2=0.5, a/h=3, (b-a)/h=0.5,$ ( $d-c)/h=0.5, (c-b)/h=1, \lambda=40$ ).....	139
Şekil 77. Tabakaların kayma modülleri oranlarına bağlı olarak bloklar altındaki temas gerilmeleri değişimlerinin teorik ve sayısal sonuçları ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2,$ $\kappa_3=2, \mu_3/\mu_2=2, a/h=3, (b-a)/h=1, (d-c)/h=1, (c-b)/h=1, Q=2P$ ).....	141

- Şekil 78. Çeşitli yük oranı değerleri için bloklar altındaki temas gerilmeleri değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=2, \mu_3/\mu_2=2, a/h=3, (b-a)/h=1, (d-c)/h=1, (c-b)/h=1$ ).....142
- Şekil 79.  $\sigma_y(x, y)/(P/h)$  boyutsuz normal gerilmesinin eksende, blok altında ve bloklar arasındaki değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, \mu_3/\mu_2=1, a/h=1, (b-a)/h=1, (d-c)/h=1, (c-b)/h=2, Q=P$ ).....143
- Şekil 80.  $\sigma_x(x, y)/(P/h)$  boyutsuz normal gerilmesinin eksende, blok altında ve bloklar arasındaki değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=1, (d-c)/h=1, (c-b)/h=2, Q=P$ ).....143
- Şekil 81.  $\tau_{xy}(x, y)/(P/h)$  boyutsuz kayma gerilmesinin eksende, blok altında ve bloklar arasındaki değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (c-b)/h=1, Q=P$ ).....144
- Şekil 82.  $\sigma_y(x, 0)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımının bloklar arası mesafe ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, Q=2P$ ).....145
- Şekil 83.  $\sigma_y(x, h_2)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımının bloklar arası mesafe ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, Q=2P$ ).....145
- Şekil 84.  $\sigma_y(x, 0)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımının yük ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=2, \mu_3/\mu_2=0.5, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, (c-b)/h=1$ ).....146
- Şekil 85.  $\sigma_y(x, h_2)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımının yük ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=2, \mu_3/\mu_2=0.5, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, (c-b)/h=1$ ).....146
- Şekil 86.  $\sigma_y(x, 0)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımının tabakaların kayma modülleri oranı ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, (c-b)/h=1, Q=2P$ ).....147
- Şekil 87.  $\sigma_y(x, h_2)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımının tabakaların kayma modülleri oranı ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, (c-b)/h=1, Q=2P$ ).....147
- Şekil 88. Sürekli temas ( $\lambda < \lambda_{cr}$ ) ve süreksiz temas ( $\lambda > \lambda_{cr}$ ) durumlarında alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki  $\sigma_y(x, 0)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımının teorik ve sayısal sonuçları ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, (c-b)/h=3, Q=2P$ ).....149
- Şekil 89. Sürekli temas ( $\lambda < \lambda_{cr}$ ) ve süreksiz temas ( $\lambda > \lambda_{cr}$ ) durumlarında alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki  $\sigma_y(x, 0)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımının teorik ve sayısal sonuçları ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, (c-b)/h=1, Q=2P$ ).....150



Şekil 90. Sürekli temas ( $\lambda < \lambda_{cr}$ ) ve süreksiz temas ( $\lambda > \lambda_{cr}$ ) durumlarında tabakalar arasındaki  $\sigma_y(x, h_2)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımının teorik ve sayısal sonuçları ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, (c-b)/h=1, Q=2P$ ).....150



## TABLolar DİZİNİ

### Sayfa No

Tablo 1.	Alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem ara yüzeyinde, kritik yük faktörü ( $\lambda_{cr}$ ) değerlerinin bloklar arasındaki uzaklıkla $((c-b)/h)$ değişimi ( $Q=2P$ , $\mu_2/\mu_1=2$ , $\mu_3/\mu_2=2$ , $a/h=3$ , $(b-a)/h=(d-c)/h=1$ , $h_2/h=0.5$ ).....	115
Tablo 2.	Alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem ara yüzeyinde iki blok arasındaki etkileşimin son bulunduğu uzaklığın $((c-b)/h)$ yük ile değişimi ( $a/h=3$ , $(b-a)/h=(d-c)/h=0.5$ , $\mu_2/\mu_1=1$ , $\mu_3/\mu_2=1$ , $h_2/h=0.5$ ).....	117
Tablo 3.	Alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranına bağlı olarak alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve uzaklıklarının tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi $((b-a)/h=(d-c)/h=0.5$ , $(c-b)/h=1$ , $Q=2P$ , $h_2/h=0.5$ ).....	118
Tablo 4.	Alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranına bağlı olarak tabakalar arasındaki ilk ayrılma yükleri ve uzaklıklarının tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi $((b-a)/h=(d-c)/h=0.5$ , $(c-b)/h=1$ , $Q=2P$ , $h_2/h=0.5$ ).....	119
Tablo 5.	Tabakaların ve elastik yarı sonsuz düzlemin malzeme özelliklerine bağlı olarak alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yüklerinin ve ilk ayrılma uzaklıklarının alt tabaka yüksekliğinin toplam tabaka yüksekliğine oranı ile değişimi $((b-a)/h=(d-c)/h=0.5$ , $(c-b)/h=1$ , $Q=2P$ ).....	124
Tablo 6.	Tabakaların ve elastik yarı sonsuz düzlemin malzeme özelliklerine bağlı olarak tabakalar arasındaki ilk ayrılma yüklerinin ve ilk ayrılma uzaklıklarının alt tabaka yüksekliğinin toplam tabaka yüksekliğine oranı ile değişim $((b-a)/h=(d-c)/h=0.5$ , $(c-b)/h=1$ , $Q=2P$ ).....	124
Tablo 7.	$\sigma_y(x, h_2)/(P/h)$ boyutsuz gerilme dağılımının blok genişlikleri ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçlarının karşılaştırılması ( $\kappa_1=2$ , $\kappa_2=2$ , $\kappa_3=2$ , $\mu_2/\mu_1=2$ , $\mu_3/\mu_2=0.5$ , $a/h=3$ , $(c-b)/h=1$ , $Q=2P$ ).....	140
Tablo 8.	$\sigma_y(x, h_2)/(P/h)$ boyutsuz gerilme dağılımının alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçlarının karşılaştırılması ( $\kappa_1=2$ , $\kappa_2=2$ , $\kappa_3=2$ , $\mu_2/\mu_1=1$ , $a/h=3$ , $(b-a)/h=0.5$ , $(d-c)/h=0.5$ , $(c-b)/h=1$ , $Q=2P$ ).....	141
Tablo 9.	Süreksiz temas durumunda alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem ara yüzeyindeki ayrılmanın başlangıç ve bitiş noktası ile ayrılma bölgesi büyüklüğünün tabakalar arasındaki kayma modülleri oranı ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçlarının karşılaştırılması ( $\kappa_1=2$ , $\kappa_2=2$ , $\kappa_3=2$ , $\mu_3/\mu_2=1$ , $a/h=3$ , $(b-a)/h=0.5$ , $(d-c)/h=0.5$ , $(c-b)/h=1$ , $Q=2P$ , $\lambda=40$ ).....	148

- Tablo 10. Süreksiz temas durumunda tabakalar ara yüzeyindeki ayrılmanın başlangıç ve bitiş noktası ile ayrılma bölgesi büyüklüğünün kayma modülleri oranı ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçlarının karşılaştırılması ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, (c-b)/h=1, Q=2P, \lambda=50$ ).....148
- Tablo 11. Süreksiz temas durumunda alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem ara yüzeyindeki ayrılmanın başlangıç ve bitiş noktası ile ayrılma bölgesi büyüklüğünün yük oranı ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçlarının karşılaştırılması ( $\mu_2/\mu_1=2, \mu_3/\mu_2=0.5, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, (c-b)/h=1, \lambda=55$ ).....149



## SEMBOLLER DİZİNİ

a	1. bloğun başlangıç noktasının eksene olan uzaklığı
b	1. bloğun bitiş noktasının eksene olan uzaklığı
c	2. bloğun başlangıç noktasının eksene olan uzaklığı
d	2. bloğun bitiş noktasının eksene olan uzaklığı
e	Alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ayrılmanın başlangıç noktası
f	Alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ayrılmanın bitiş noktası
k	Tabakalar arasında meydana gelen ayrılmanın başlangıç noktası
l	Tabakalar arasında meydana gelen ayrılmanın bitiş noktası
e	Hacim değiştirme oranı
E	Elastisite modülü
X, Y, Z	x, y, z eksenleri doğrultusundaki kütle kuvveti bileşenleri
x, y, z	Kartezyen koordinatları
h	Tabakaların toplam yüksekliği
$h_1$	1 nolu tabakanın (üst tabaka) yüksekliği
$h_2$	2 nolu tabakanın (alt tabaka) yüksekliği
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	x, y, z eksenlerine paralel doğrultudaki normal gerilme bileşenleri
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Kayma gerilmesi bileşenleri
$m_1$	Tabakaların kayma modülleri oranı
$m_2$	Elastik yarı sonsuz düzlem ile 2 nolu tabakanın kayma modülleri oranı
P	1. bloğa uygulanan tekil yük
Q	2. bloğa uygulanan tekil yük
p(x)	1. blok altındaki temas gerilmesi
q(x)	2. blok altındaki temas gerilmesi
u, v, w	Kartezyen koordinatlardaki yer değiştirme bileşenleri

$x_{cr}$	İlk ayrılma uzaklığı (kritik ayrılma uzaklığı)
$\partial$	Türev operatörü
$\lambda$	Yük faktörü
$\lambda_{cr}$	Kritik yük faktörü
$\mu$	Kayma modülü
$\kappa$	Malzeme sabiti
$\nu$	Poisson oranı
$\nabla^2$	Laplace operatörü
$\rho_1$	1 nolu tabakanın yoğunluğu
$\rho_2$	2 nolu tabakanın yoğunluğu
$\varphi, \psi$	Ters Fourier dönüşüm fonksiyonları
$\Delta$	Katsayılar matrisinin determinanı
$\varepsilon_x, \varepsilon_y$	x, y doğrultularındaki uzama şekil değiştirme bileşenleri
$\gamma_{xy}$	Kayma şekil değiştirme bileşenleri

Not : Bu listede verilmeyen bazı semboller metin içerisinde ilgili oldukları yerlerde tanımlanmıştır.

## **1.GENEL BİLGİLER**

### **1.1.Giriş**

Birçok yapı ve mekanik sistemlerin elemanları birbirleri ile temas halindedir. Bu nedenle temas problemleri mühendislik yapılarında geniş uygulama alanı bulmuşlardır. Yol ve havaalanı üst yapıları, demiryolları, temeller, tahıl siloları, akaryakıt tankları, silindirik miller, küresel veya silindirik bilyeler temas konusunun ortaya çıktığı mühendislik uygulamalarından bazılarıdır (Civelek, 1974).

Mühendislik yapılarındaki gerilme, yer değiştirme, şekil değiştirme problemlerinin çözümünde mukavemetin elemanter metotlarının yetersiz kaldığı durumlarda elastisite teorisine ihtiyaç duyulmaktadır (Timoshenko, 1969). Elemanter teoriye göre daha kesin sonuçlar veren elastisite teorisi yardımıyla problemlerin çözümü, bilgisayar teknolojisi ve sayısal çözüm yöntemlerinin gelişmeyle birlikte yoğunluk kazanmış ve bu konudaki çalışmaların sayısında önemli ölçüde artış göstermiştir.

Bilgisayar teknolojisindeki gelişmelere bağlı olarak, düşük hata oranlarıyla çözümler veren sonlu elemanlar, sonlu farklar ve sınır elemanlar gibi sayısal yöntemler mühendislik problemlerinin çözümünde kullanılmaktadır. Bu sayısal yöntemler içerisinde problem çözümünde kullanılan en yaygın ve en etkili yöntem ise sonlu elemanlardır. Bu yöntemde, gerçek fiziksel bir problemin matematiksel modeli oluşturularak çözüme gidilir.

#### **1.1.1. Literatür Araştırması**

Temas mekaniği konusunun, Hertz tarafından 1882 yılında yazılan “Elastik Cisimlerin Teması” adlı makaleyle başladığı söylenebilir (Johnson, 1985). Hertz temas halindeki iki elastik cismin dengesini, temas bölgesinin eliptik olduğunu kabul ederek incelemiştir, temas gerilmesi ve şekil değiştirmeler için formülasyon geliştirmiştir. Bu nedenle temas problemleri günümüz literatürüne “Hertz Değme Problemi” olarak geçmiştir (İnan, 1969). Hertz’in yapmış olduğu bu çalışma sürtünmesiz yüzey ve tam elastik cisimlerle sınırlandırılmıştır. Ancak 1950’li yıllarda temas mekaniğindeki gelişmelerle birlikte bu

sınırlamalar kaldırılmıştır. Temas problemleri ile ilgili çalışmaların 1950'li yıllara kadar olan literatürü ve çözüm yöntemleri Galin'in eserinde belirtilmiştir (Galin, 1961). İntegral dönüşüm tekniklerinin bu probleme uygulandığı çalışmalar ise Uffliand'ın eserinde verilmiştir (Uffliand, 1965).

Temas problemleri üzerine yapılan çalışmalar bilgisayar teknolojisinin ve sayısal çözüm yöntemlerinin gelişmesi ile yoğunluk kazanmıştır. Bu başlık altında ağırlıklı olarak statik yük etkisindeki bileşik tabakaların sürtünmenin ihmal edildiği durumda ki, sürekli ve süreksiz temas problemleri üzerinde durulacaktır. Değişik çözüm metotları arasında elastisite teorisi ve integral dönüşüm teknikleri kullanılarak yapılmış çalışmalar ağırlıktadır.

Weitsman (1969), elastik yarım düzlem ve üzerine tekil yük ile bastırılan plak için temas problemini incelemiştir.

Pu ve Hussain (1970), elastik yarım düzlem ve üzerine tekil yük ile bastırılan plak probleminde elastik düzlemin rijitliğinin sonsuza götürülmesi durumunda, temas uzunluğunun sıfır olduğunu ve bunun fiziksel olarak mümkün olmadığını belirtmişlerdir. Bu problemin yaklaşık çözümünü bulmak için varyasyonel yöntem kullanmışlardır.

Dhaliwal ve Rau (1970), rijit bloğun silindirik, konik, küresel, parabolik ve eliptik olması durumları için çözümü genişletmişler; her blok profili için bloğun elastik tabakada meydana getireceği çökmeyi sağlayan kuvveti, çökme değerini ve temas gerilmesini elde etmişlerdir.

Chan ve Tuba (1971), elastik cisimlerin düzlem temas problemine sonlu elemanlar yönteminden yola çıkarak bir çözüm yolu geliştirmişlerdir. Elastik cisimler üçgen elemanlar ile modellenerek, yöntemin Hertz problemi ve ortasında disk bulunan levha problemi için temas gerilmesi dağılımlarında kesin sonuçlara yakın değerler verdiği gösterilmiştir.

Chen ve Engel (1972), elastik yarım düzleme rijit blok ile bastırılan bir veya iki tabakadan oluşan tabakalı ortamın temas problemini incelemiştir. Rijit bloğun farklı şekillerde olması durumları için problem çözülmüş, blok altındaki temas gerilmesi dağılımı ve çökmeler hesaplanmıştır.

Keer ve Chantaramongkorn (1972), elastik yarım düzlem üzerine yayılı yük ile bastırılan elastik tabakanın sürtünmesiz temas problemini incelemiştir. Yayılı yük tabaka üzerinde bir bölge hariç etki ettirilmiş ve tabaka ile düzlem arasında yayılı yükün etki etmediği mesafeden daha küçük bir ayrılma bölgesi meydana geleceği kabul edilerek problem çözülmüştür.

Keer, Dundurs ve Tsai (1972), elastik yarım düzleme oturan tabakanın sürtünmesiz temas problemini incelemişlerdir.

Ratwani ve Erdoğan (1973), değişik profillerdeki blok ile bastırılan ve elastik yarım düzleme oturan tabakanın sürtünmesiz düzlemsel temas problemini incelemişlerdir. Çözüm için integral dönüşüm teknikleri kullanılarak blok ile tabaka arasında ve tabaka ile düzlem arasındaki temas uzunlukları ve gerilme dağılımları hesaplanmıştır.

Ratwani ve Erdoğan (1973), iki elastik çeyrek düzlemle mesnetlenmiş elastik bir tabakanın sürtünmesiz temas problemini incelemişlerdir.

Civelek ve Erdoğan (1974), tekil yükün elastik tabakaya doğrudan ya da eğrisel veya dikdörtge bir blok ile etki ettirilmesi durumları için problemi, dönel simetrik olarak ele almış, integral denklem sistemini çözmüş, tabaka ile yarım düzlem arasındaki temas uzunlukları ve temas gerilmesi dağılımlarını bulmuşlardır.

Shibuya, Koizumi ve Nakahara (1974), yarı sonsuz düzleme, düz halka biçimli rijit bir blok tarafından baskı uygulanan temas problemini incelemişlerdir.

Gladwell (1976), düzlem elastisitede yapışık olmayan bazı temas problemlerini incelemiştir.

Adams ve Boggy (1977), sonsuz uçlarından etki ettirilen tekil yük ile kısa kenarları boyunca birbirlerine bastırılan, genişlikleri birbirinden farklı yarı sonsuz iki elastik tabaka arasındaki temas problemini incelemişlerdir.

Boduroğlu ve Delale (1980), elastik yarım düzleme oturan ve yayılı yük ile bastırılan tabakanın sürtünmeli temas problemini incelemişlerdir. Yarım düzlem ve tabaka arasında sürtünme olmaması halindeki sonuçlar ile karşılaştırma yapmışlardır.

Bakırtaş (1980), rijit blok ile yarı sonsuz düzlem arasındaki karışık sınır değer problemini Fourier dönüşüm tekniğini kullanarak tekil integral denkleme indirgemiş ve blok altındaki homojen olmayan gerilme dağılımını araştırmıştır.

Geçit (1980), yarı sonsuz düzlem üzerine oturan, sonsuz uzunluktaki elastik tabakaya ait temas problemini incelemiştir. Önce sürekli temas durumunu ele almış ve ayrılmaya sebep olacak kritik yükü belirlemiştir. Daha sonra süreksiz temas durumunu incelemiştir.

Hung ve Saxce (1980), düzlem hal için elastik cisimlerin sürtünmesiz temas problemini, şekil değiştirmelerin küçük olduğunu kabul ederek matematiksel programlama tekniğiyle incelemişlerdir. Hertz problemi ve piston çubuk problemi belirtilen formülasyona



göre sonlu elemanlar algoritmasıyla modellenmiş, temas bölgelerindeki gerilme yayılışları elde edilmiştir.

Schmuser, Comniou ve Dundurs (1980), yarı sonsuz düzgün yayılı yük ile bastırılan ve simetri eksenini üzerinde tekil bir yük ile çekilen yapışık iki tabaka arasında meydana gelen ayrılma ve kayma değerlerini hesaplamışlardır.

Geçit (1981), yarı sonsuz düzlem üzerine oturan elastik tabakada asimetrik yüklü temas problemini çözmüştür.

Fabrikant ve Sankar (1984), homojenliği derinliği ile değişen elastik yarım düzlem probleminin kesin çözümünü dönel simetrik problem olarak araştırmıştır. Blok problemi, çalışmada verilen çözüm yöntemiyle ele alınmış ve blok altındaki temas gerilmesini veren ifadeler elde edilmiştir.

Geçit ve Gökpinar (1985), rijit dairesel bir mesnete oturan elastik tabakanın temas problemini incelemişlerdir. Tabaka ve mesnetler arasında sürtünme olmadığı ve temas yüzeyleri boyunca sadece basınç gerilmeleri aktarıldığı varsayılmıştır. Tabakaların üst yüzeyine üniform bir basınç uygulanmış, farklı blok şekilleri için temas yüzeylerindeki gerilme yayılışları ve temas uzunlukları hesaplanmıştır.

Geçit (1986), yarı sonsuz silindir ile elastik yarım düzleme bastırılan tabakanın temas problemini incelemiştir. İntegral dönüşüm tekniği kullanılarak her üç eleman için yer değiştirme ve gerilmeler hesaplanmıştır. Elde edilen integral denklemler sayısal olarak çözümlenerek elemanların değişik malzeme özellikleri ve boyutları için yarı sonsuz silindir ile tabaka arasındaki temas gerilmesi dağılımı, tabaka ile düzlem arasındaki temas gerilmesi dağılımları ve temas uzunlukları bulunmuştur.

Klarbring (1986), üç boyutlu sürtünmeli temas problemini sonlu elemanlar yöntemine bağlı doğrudan çözüm yöntemi olan matematiksel programlama tekniği ile incelemiştir. Geliştirilen yöntem elastik yarım düzleme oturan elastik dikdörtgen blok problemine uygulanmış, temas bölgesinde bulunan normal gerilme ve kayma gerilmesi dağılımları daha önceki araştırmacılar tarafından bulunmuş çözüme yakın değerlerde olduğu gösterilmiştir.

King (1987), elastik izotrop yarı sonsuz bir düzlemin silindirik, dörtgen ve üçgen bloklar ile yüklenmesini incelemiştir.

Loboda (1987), yarı sonsuz bir tabaka ile sonlu genişliğe sahip bir tabaka arasındaki temas problemini incelemiştir.

Çakıroğlu ve Erdöl (1987), elastik sabitleri farklı iki kirişin yapıştırılmasıyla meydana gelen ve iki basit mesnete oturan bileşik tabaka problemini, elastisite teorisi ve integral dönüşüm tekniğini kullanarak incelemiştir. Elastisite teorisinden ve elemanter teoriden elde edilen sonuçları karşılaştırmışlardır.

Nowell ve Hills (1988), ince bir elastik şerit ile simetrik yerleştirilmiş tekerlekler arasında meydana gelen düzlemsel temas problemini incelemiştir. Sürtünmesiz ve sürtümlü temas problemleri için yüzey gerilmelerini elde etmişlerdir.

Fabrikant ve Sankar (1988), elastik temas problemlerinde köşe noktadaki tekillikleri incelemiştir.

Shield ve Bogy (1989), asimetrik rijit blok ile tabakalı elastik yarım düzlem arasındaki teması incelemiştir.

Çakıroğlu ve Erdöl (1989), elastik zemine oturan elastik özellikleri ve yükseklikleri farklı iki tabakanın sürekli temas problemini incelemiştir. Değişik yükleme durumları, malzeme özellikleri ve tabaka kalınlıkları için bileşik tabakadaki normal gerilme yayılışları belirlenmiştir. Bunların dışında iki elastik tabaka arasındaki ilk ayrılma uzaklığı, ilk ayrılma yükü ile bu yük ve bu yükten daha küçük yükler için temas yüzeyi boyunca gerilme yayılışlarını elde etmişlerdir.

Çakıroğlu ve Erdöl (1990), bütün yüzeyleri sürtünmesiz elastik yarısız bir düzleme oturan bileşik tabakaların sürekli ve süreksiz değme problemlerini incelemiştir.

Lan, Graham ve Selvadurai (1996), iki dairesel bloğun etkidiği elastik tabakada temas bölgesinde meydana gelecek şekil değiştirmeleri incelenmiştir.

Dempsey vd. (1990), Winkler temeli üzerine oturan elastik bir tabakanın tekil yük, yayılı yük ve rijit bloklar ile simetrik olarak yüklenmesi durumlarına ait temas problemlerini incelemiştir. Çözümleme elastisite teorisi ve kiriş teorisine göre ayrı ayrı yapılmış ve sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Klarbring, vd. (1991), rijit bir blok ile elastik ortam arasında sürünme bulunması durumundaki teması incelemiştir.

Çakıroğlu ve Çakıroğlu (1991), elastik yarım düzlem ve üzerine yayılı yük etki ettirilmiş elastik tabaka arasındaki sürekli ve süreksiz temas problemini incelenmiştir. Değişik malzeme özellikleri ve tabaka kalınlığı için ilk ayrılma uzaklığı ve temas bölgesindeki gerilme yayılışı elde edilmiştir.

Jaffar (1991), rijit zemine serbestçe oturan dairesel blok ile bastırılan tabakanın sürtünmeli temas problemini incelemiştir.

Dempsey, Zhao ve Li (1991), Winkler temeli ile mesnetlenmiş elastik bir tabakanın konik, parabolik ve eliptik rijit bloklarla yüklenmesi durumlarındaki temas problemlerini incelemiştir.

Bjarnehed (1991), üst yüzeyinde rijit bir blok aracılığı ile yüklenen ve enine doğrultuda gerilme etkisinde bırakılmış ortotropik yarım düzlem problemini çözmüştür. Problem temas gerilmelerinin bilinmeyen olduğu tekil integral denkleme indirgenmiş ve rijit blok ile yarı sonsuz düzlem arasındaki gerilmenin dağılımı araştırılmıştır.

Gao, Chiu ve Lee (1992), çok tabakalı elastik bir yarım düzlem üzerine oturan silindirik rijit bir bloğun temas problemini incelemiştir.

Pindera ve Lane (1993), çok sayıda izotropik ve ortotropik tabakadan oluşan tabakalı yarım düzlemlerin sürtünmesiz temas problemlerini incelemiştir.

Aksoğan, Akavcı ve Becker (1997), iki elastik çeyrek düzlemle mesnetlenmiş elastik bir tabakanın sürtünmesiz temas problemini farklı yöntemler ile ele almış ve sonuçları karşılaştırmışlardır.

Jaffar (1993), üst yüzeyinde sürtünmesiz rijit silindirik bir blok aracılığı ile yüklenmiş ve rijit bir düzleme oturan elastik tabakanın yüzey deformasyonlarını incelemiştir.

Birinci ve Erdöl (1995), elastik mesnetlere oturan elastik sabitleri ve yükseklikleri farklı iki farklı malzemedan yapılmış bileşik tabakanın temas problemini incelemiştir. Bileşik tabakada herhangi bir noktada meydana gelen gerilme ve yer değiştirme bileşenlerini integral dönüşüm tekniği kullanarak elde etmişlerdir.

Çepni, Birinci ve Çakıroğlu (1996), elastik sabitleri ve yükseklikleri farklı, belirli noktalardan tutturulmuş iki tabakadan oluşan, sınırlı yayılı yük etkisindeki basit mesnetlere oturan bileşik tabakanın ele alındığı temas problemini çözmüşlerdir.

Birinci, Kahya ve Erdöl (1997), Winkler temeli tarafından mesnetlenmiş bileşik tabakada sürekli temas problemini incelemiştir. Çalışma sonucunda tabakalar arasında ayrılmanın başladığı ilk noktayı ve ilk ayrılma yükünü bulmuşlar ve temas gerilmesi dağılımını elde etmişlerdir.

Birinci ve Erdöl (1997), üzerinde rijit dikdörtgen bir blok bulunan, iki noktadan mesnetlenmiş bileşik tabaka problemini önce tekil integral denklemlere indirgemiş, daha sonra uygun Gauss-Chebyshev integrasyon formülleri kullanarak çözmüşlerdir.

Kanber (1997), iki boyutlu temas problemlerini geçiş elemanları kullanarak Sonlu Elemanlar Metoduyla incelemiştir. Çalışmada köşegen ve üçgen geçiş elemanları Lagrange tabanlı bir yaklaşım ve Paskal Üçgeni kullanılarak türetilmiştir. Elemanları türetilmesinde Mathematica programı kullanılmış ve bu geçiş elemanları ANSYS paket programına uyarlanmıştır.

Garrido ve Lorenza (1998), elastik yarım düzleme oturan tabakanın sürtünmesiz ayrılmalı temas probleminin büyük şekil değiştirmeler; içeren çözümünü Sınır Elemanları Yöntemi ile incelemiştir.

Hasebe ve Qian (1999), dairesel blok ile yüklenmiş elastik yarım düzlemin sürtünmeli temas problemini incelemiştir.

Birinci, Özşahin, Erdöl (1999), rijit dikdörtgen bir blok ile yüklenen ve basit mesnetlere oturan bileşik tabakada süreksiz temas problemini incelemiştir.

Birinci ve Erdöl (1999), basit mesnetler üzerine oturan ağırlıksız iki tabakadan oluşan bileşik tabakanın sürtünmesiz temas problemini incelemiştir. Bileşik tabaka dairesel veya dikdörtgen blok aracılığı ile mesnetlere bastırılmış, her iki blok profili için problem çözülmüş ve temas gerilmeleri bulunmuştur.

Özşahin (2000), rijit iki düz blok üzerine oturan, sonlu bir bölgede etki ettirilen yayılı yük ile bastırılan iki elastik tabakalı bileşik tabakada sürekli ve süreksiz temas problemini incelemiştir. Sürekli temasta iki elastik tabaka arasında sürtünme bulunması ve bulunmaması hallerinde ilk ayrılmayı meydana getiren kritik yükü bulmuştur. Süreksiz temas probleminde sürtünme dikkate alınmamıştır. Ayrılmanın iki elastik tabak arasında veya bileşik tabaka ile düz rijit bloklar arasında meydana gelmesi durumu için problem çözülmüştür.

Çakıroğlu vd. (2001), elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan iki elastik tabakanın, sürtünmesiz, sürekli ve süreksiz temas problemini incelemiştir. Sürekli temas durumunda ilk ayrılmayı meydana getiren kritik yükü bulmuş, süreksiz temas durumunda ise ayrılmanın alt tabaka ile yarı sonsuz düzlem arasında ayrı, ayrı veya aynı anda meydana gelmesi durumlarını incelemiştir.

Birinci ve Erdöl (2001), tekil yük ile yüklü dikdörtgen blok ile basit mesnetlere oturan bileşik tabakalar arasındaki sürekli ve süreksiz temas problemini incelemişlerdir. Sürekli temas durumunda ilk ayrılmayı meydana getiren kritik yükü bulmuş, süreksiz temas durumunda ise ayrılmanın rijit blok ile üstteki tabaka arasında veya bileşik tabakalar arasında olması durumları için ayrı, ayrı inceleme yapmışlardır.

Dag (2001), elastik yarım düzlemin sürtünmeli temas ve çatlak problemini incelemiştir.

Birinci vd. (2002), elastik zemine oturan, malzeme özellikleri ve yükseklikleri farklı birbirine tam bağlı iki tabakadan oluşan bileşik tabakada sürekli temas problemini bileşik tabakanın ağırlığını ihmal ederek incelemişlerdir. Tabakalar arasında ayrılmanın başladığı ilk nokta ile ayrılma yükleri bulunarak, ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma yükünden küçük yükler için temas yüzeyindeki gerilme dağılımlarını elde etmişlerdir.

Çömez (2003), alt tarafında rijit mesnetli birbirine yapışık olmayan iki elastik tabakanın ve tekil yükü bu tabakaları bastıran rijit, dairesel veya parabolik bloğun temas problemini incelemiştir. Tabakalar arası ve tabaka ile blok arasındaki temas uzunluklarını ve temas gerilmelerini değişik malzeme özellikleri, geometrileri ve yük değerleri için elde edilmiştir.

Ma ve Korsunsky (2004), elastik yarım düzleme tam yapışık ve dairesel blok ile bastırılan tabakanın sürtünmeli temas problemini incelemişlerdir.

Sezer (2005), ANSYS Sonlu Elemanlar paket programını kullanarak temas eden sistem yapı elemanlarını modellemiş ve ANSYS paket programı içerisinde bulunan değişik temas algoritmaları ve temas elemanı uygulama seçeneklerini irdelemiştir.

Jackson ve Green (2005), Sonlu elemanlar yöntemini kullanarak rijit düzlem üzerine oturan elasto-plastik yarım kürenin temas problemini incelemişlerdir.

El- Borgi, Abdelmoula ve Keer (2006), elastik yarım düzleme oturan yayılı yüküyle yüklü tabakanın fonksiyonel derecelendirilmiş olması durumunda sürtünmesiz temas problemini incelemişlerdir.

Kahya vd. (2007), tekil yükün anizotrop tabakaya doğrudan ya da eğrisel veya dikdörtgen bir blok ile etki ettirilmesi durumları için integral denklem sistemini çözmüş, tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme uzunlukları ve değme gerilmesi dağılımlarını bulmuşlardır.

Özşahin vd. (2007), rijit iki düz blok üzerine oturan değişik elastik sabitlere ve yüksekliklere sahip tabakalardan oluşan sistemin sürtünmesiz temas problemini elastisite teorisine göre incelemişlerdir

Adıbelli vd. (2009), rijit blok ile bastırılmış ve elastik yarım düzleme oturmuş ağırlıksız çift şeritte sürtünmesiz temas problemini araştırmışlardır.

Çömez (2009), rijit dairesel bir blok aracılığı ile yüklenen homojen, izotrop, elastik bir tabaka ve yarım düzlemin sürtünmeli temas problemini elastisite teorisi ve integral dönüşüm tekniklerini kullanarak incelemiştir. Çalışmada kütle kuvvetleri ihmal edilmiştir.

Çömez (2010), rijit silindirik bir blok aracılığı ile yüklenmiş yarım düzleme oturan bir elastik tabaka için sürtünmeli temas problemini incelemiştir.

Franke (2010), temas problemlerinde sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak yapılan analizlerde çözüm yöntemlerinin (h-, p-, hp- ve rp modeli) karşılaştırılmasını ele almıştır.

Roncevic ve Siminiati (2010), sonlu elemanlar yöntemini esas alan NX-NASTRAN paket programını kullanarak ayrılmalı temas problemini analiz etmişler ve elde edilen temas mesafelerini literatürde bulunan teorik sonuçlarla karşılaştırmışlardır.

Öner (2011), rijit dairesel bir panç aracılığıyla yüklenmiş ve elastik yarı sonsuz düzleme oturan iki elastik tabakanın sürekli temas problemini incelemiştir. Problem tüm yüzeylerin sürtünmesiz olduğu kabulüne göre çözülmüştür.

Bussetta vd. (2012), temas problemlerinde sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak yapılan analizlerde temas algoritmalarının (Augmented Lagrangian Method, Penalty Method, Adapted Penalty Method, Adapted Augmented Lagrangian Method) karşılaştırılmasını ele almışlardır.

Yaylacı (2013), düzgün yayılı yüke maruz homojen, izotrop ve simetrik iki çeyrek düzleme oturan, iki elastik tabakanın sürtünmesiz temas problemini elastisite teorisine göre incelemiştir. Aynı problemi sonlu elemanlar yöntemini kullanan ANSYS paket programı ile analiz etmiştir.

Yan ve Li (2014), üstten dairesel bir blok aracılığı ile yüklenmiş Fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ve elastik tabaka arasındaki ayrılmalı temas problemini inceleyerek, temas gerilmeleri ve temas uzunluklarını elde etmişlerdir.

Birinci vd. (2015), düzgün yayılı yük ile yüklenmiş Winkler zeminine oturan iki tabakanın sürekli temas problemi sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak incelenmiştir.

Karabulut (2016), rijit dikdörtgen iki blok ile yüklenmiş ve elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan, elastik tabakanın sürtünmesiz ve ayrılmalı temas problemini incelemiştir.

### 1.1.2. Çalışmanın Amacı ve Kapsamı

Bu çalışmada, elastik yarı sonsuz düzleme oturan elastik özellikleri ve yükseklikleri farklı iki tabakanın sürtünmesiz temas problemi, elastisite teorisi ve integral dönüşüm teknikleri kullanılarak incelenmiştir. P ve Q dış yükleri, iki farklı blok ile tabakalara aktarılmaktadır. Blokların genişlikleri farklıdır. Tüm yüzeyler sürtünmesizdir. Problemin çözümünde elastisitenin temel denklemleri olan denge denklemleri, bünye denklemleri, yer değiştirme ve şekil değiştirme bağıntıları ile bunlara bağlı olarak bulunan Navier denklemleri kullanılmıştır. Navier denklemlerinden integral dönüşüm teknikleri yardımıyla gerilme ve yer değiştirmelere ait integral ifadeler elde edilip karşılaşılan tekil integral denklemlerin çözümünde ise Gauss-Chebyshev integrasyon formüllerinden faydalanılmıştır. Teorik çalışma sonucu elde edilen gerilme ve yer değiştirmelere ait integral denklemler ve bu denklemlerin çözümünde kullanılan Gauss-Chebyshev integrasyon formüllerinden bulunan ifadelerin çözümü ise FOTRAN dilinde yazılan bilgisayar programları yardımıyla yapılmıştır. Ayrıca bu problem sonlu elemanlar yöntemine dayanan ANSYS paket programı ile de sayısal olarak analiz edilmiştir.

Problem sürekli ve süreksiz temas olmak üzere iki kısımdan oluşmaktadır. Sürekli temasta hiçbir şekilde ayrılma olmazken, süreksiz temasta iki farklı durum incelenmiştir. Bunlardan birincisi alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ayrılma diğeri ise tabakalar arasında meydana gelen ayrılmadır.

Birinci bölümde temas problemlerinin tarihsel gelişiminden bahsedilmiş, temas problemleri ile ilgili daha önce yapılmış bazı çalışmalar özetlenmiştir. Problemden kullanılan çözüm metodu hakkında kısa bilgi verildikten sonra elastisite teorisine ait temel denklemler

ve integral dönüşüm teknikleri kullanılarak düzlem haldeki genel gerilme ve yer değiştirme ifadeleri elde edilmiştir.

İkinci bölümde problemin tanımı yapılmış ve sürekli temas durumu incelenmiştir. Gerilme ve yer değiştirme ifadeleri problemin sınır şartlarına uygulanarak on bilinmeyenli on cebrik denklemden oluşan bir denklem takımı elde edilmiştir. Bloklar altındaki temas gerilmeleri bilinmeyenlerdir. Bloklar ile (1) nolu tabaka arasındaki düşey yer değiştirme fonksiyonlarının türevinin sifıra eşit olması şartı kullanılarak problem singüler integral denklemlere indirgenmiştir. Daha sonra bu integral denklemler sayısal olarak çözülmüş ve bloklar altındaki boyutsuz temas gerilmeleri hesaplanmıştır. Bu çözümden elde edilen boyutsuz temas gerilmelerinden faydalanılarak eksende, bloklar altında ve bloklar arasında meydana gelen normal gerilmeler ve kayma gerilmeleri değişimi incelenmiş, tabakalar arası ve alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzleme ait ara yüzeylerde ilk ayrılmayı meydana getirecek yük ve ilk ayrılmanın meydana geleceği uzaklık araştırılmıştır.

Sürekli temasın ardından süreksiz temas incelenmiş öncelikle alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ayrılma ele alınmıştır. Gerilme ve yer değiştirme ifadeleri sınır şartlarına uygulanarak on bilinmeyenli on cebrik denklemden oluşan bir denklem sistemi elde edilmiş, denklem takımının çözümünden bulunan katsayılar, bloklar altındaki temas gerilmeleri ve alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki yüzeyde meydana gelecek ayrılmanın eğimini ifade eden bilinmeyen fonksiyonlara bağlı olarak bulunmuştur. Rijit blokların düşey yer değiştirmesi ve ayrılmanın meydana geldiği bölgedeki düşey gerilme ifadelerinden faydalanılarak integral denklemler yazılmış ve integral denklem takımı Gauss-Chebyshev integrasyon formülleri yardımıyla çözülmüştür. Bu şekilde temas gerilmeleri ve ayrılmanın eğimi dolayısıyla bu değerlere bağlı olan katsayılar elde edilmiştir. Eğimlerin integralleri alınarak alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki yüzeyde ayrılma bölgesindeki düşey yer değiştirme ifadeleri bulunmuştur. Daha sonra benzer işlemler iki elastik tabakaya ait ara yüzeyde ayrılma olması durumunda tekrarlanmıştır. Yazılan yeni sınır şartlarına bağlı olarak elde edilmiş denklem takımının çözümünden bulunan katsayılar, bloklar altındaki temas gerilmeleri ve tabakalar arasındaki yüzeyde meydana gelecek ayrılmanın eğimini ifade eden bilinmeyen fonksiyonlara bağlı olarak bulunmuştur. Rijit blokların düşey yer değiştirmesi ve ayrılmanın meydana geldiği bölgedeki düşey gerilme ifadelerinden faydalanılarak integral denklemler yazılmış ve integral denklem takımı Gauss-Chebyshev integrasyon formülleri yardımıyla çözülmüştür.



Bu şekilde temas gerilmeleri ve ayrılmaların eğimleri dolayısıyla bu değerlere bağlı olan katsayılar elde edilmiştir. Eğimlerin integralleri alınarak ara yüzeydeki ayrılma bölgesindeki düşey yer değiştirme ifadeleri bulunmuştur. Çözümlerde karşılaşılan tekil terimler ve bunların kapalı integralleri ile integral denklemlerde ortaya çıkan çekirdekler de yine bu bölümde verilmiştir.

Üçüncü bölümde blok genişlikleri, bloklar arası mesafe değişimi, kayma modülleri oranı, tabaka yükseklikleri oranı ve yük oranı değişimi gibi çeşitli boyutsuz büyüklüklerin farklı değerleri için, rijit bloklar altındaki temas gerilmesi dağılımları, alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlem ve tabakalar arasındaki ayrılma bölgeleri ve bu bölgelerdeki düşey yer değiştirmeler ve düşey gerilme yayılımı ile y eksenini doğrultusunda bloklar altında ve bloklar arasında meydana gelen normal gerilmeler ve kayma gerilmelerinin değişimine ait sonuçlar grafikler halinde sunulmuştur. Yine bu bölümde, sonlu elemanlar paket programı ile yapılan çözümden elde edilen sayısal sonuçlar teorik sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Dördüncü bölümde, bu çalışmadan çıkarılan sonuçlar ve öneriler verilmiştir.

## 1.2. Genel Denklemlerin Elde Edilmesi

İki rijit düz blok aracılığı ile yüklenmiş elastik yarı sonsuz düzleme oturan tabakalara ait temas probleminin, elastisite teorisine göre çözümünde kullanılacak yer değiştirme ve gerilmelere ait genel ifadeler aşağıda elde edilecektir.

### 1.2.1. Kütle Kuvvetlerinin Bulunmaması Durumunda Genel Denklemlerin Elde Edilmesi

Dengede olan bir cisim için  $x, y, z$  dik koordinat takımında  $F_x, F_y, F_z$  hacim (kütle) kuvvetlerini,  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  gerilme bileşenlerini göstermek üzere, gerilmelerin herhangi bir nokta civarındaki değişimlerine ait denge denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z = 0 \quad (3)$$

Bünye denklemleri ile şekil değiştirmeler gerilmeler cinsinden yazılabilir:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \quad \gamma_{xy} = \tau_{xy}/\mu \quad (4)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], \quad \gamma_{xz} = \tau_{xz}/\mu \quad (5)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \quad \gamma_{yz} = \tau_{yz}/\mu \quad (6)$$

Şekil değiştirme, yer değiştirme bağıntıları ise;

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (7)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (8)$$

şeklinde yazılabilir.

Bünye denklemleri ve yer değiştirme, şekil değiştirme bağıntıları kullanılarak gerilmeler yer değiştirmeler cinsinden yazılabilir:

$$\sigma_x = \lambda e + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (9)$$

$$\sigma_y = \lambda e + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (10)$$

$$\sigma_z = \lambda e + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \quad (11)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (12)$$

$$\tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (13)$$

$$\tau_{yz} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (14)$$

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  sırasıyla x, y, z doğrultularındaki şekil değiştirme bileşenlerini; u, v ve w ise sırasıyla x, y, z doğrultularındaki yer değiştirme bileşenlerini ifade etmektedir. e hacim değiştirme oranı,  $\lambda$  ve  $\mu$  Lamé sabitlerini göstermektedir. Hacim değiştirme oranını ve sabitleri aşağıdaki gibi tanımlamak mümkündür.

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (15)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (16)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (17)$$

(16) ve (17) nolu denklemlerdeki E ve  $\nu$  sırasıyla elastisite modülü ve Poisson oranını göstermektedir. (9)-(14) nolu eşitliklerle verilen bünye denklemlerinin gerekli türevleri alınıp denge denklemlerinde yerine yazılırsa **Navier** denklemleri olarak adlandırılan aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + F_x = 0 \quad (18)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + F_y = 0 \quad (19)$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial e}{\partial z}+\mu\nabla^2 w+F_z=0 \quad (20)$$

$\nabla^2$  Laplace operatörü olup aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (21)$$

Problem iki boyutlu olarak incelendiğinden z ile ilgili terimler çıkarılırsa Navier denklemleri aşağıdaki şeklini alır.

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial e}{\partial x}+\mu\nabla^2 u+F_x=0 \quad (22)$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial e}{\partial y}+\mu\nabla^2 v+F_y=0 \quad (23)$$

Aynı şekilde hacim değıştirme oranı e ve Laplace operatörü  $\nabla^2$  iki boyutlu problemlerde,

$$e=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} \quad (24)$$

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (25)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Eğer kütle kuvvetleri ihmal edilecek olursa Navier denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial e}{\partial x}+\mu\nabla^2 u=0 \quad (26)$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial e}{\partial y}+\mu\nabla^2v=0 \quad (27)$$

Navier denklemlerini adi diferansiyel denklem takımına dönüştürmek ve çözümü kolaylaştırmak için yer değiştirmeler  $u(x,y)$  ve  $v(x,y)$ , bilinmeyen fonksiyonlar  $U(\alpha,y)$ ,  $V(\alpha,y)$  'nin Fourier dönüşümleri olarak tanımlanırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}U(\alpha,y)e^{i\alpha x}d\alpha \quad (28)$$

$$v(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}V(\alpha,y)e^{i\alpha x}d\alpha \quad (29)$$

(28) ve (29) nolu denklemlerin ters dönüşümleri alınacak olursa;

$$U(\alpha,y)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,y)e^{-i\alpha x}dx \quad (30)$$

$$V(\alpha,y)=\int_{-\infty}^{\infty}v(x,y)e^{-i\alpha x}dx \quad (31)$$

eşitlikleri elde edilir.

Bilinmeyen  $U(\alpha,y)$ ,  $V(\alpha,y)$  fonksiyonlarının belirlenebilmesi için (26) ve (27) no'lu denklemler  $e^{i\alpha x}$  dx ile çarpılıp  $(-\infty,\infty)$  aralığında integre edilirse;

$$\int_{-\infty}^{\infty}[(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2v}{\partial x\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)]e^{i\alpha x}dx=0 \quad (32)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}[(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2v}{\partial y^2}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2v}{\partial y^2}\right)]e^{i\alpha x}dx=0 \quad (33)$$

ifadeleri elde edilir. (30) ve (31) no'lu denklemlerde  $u$  ve  $v$  'nin gerekli türevleri alınır

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{i\alpha x} dx = -\alpha^2 U(\alpha, y) \quad (34)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} e^{i\alpha x} dx = \frac{\partial^2}{\partial y^2} U(\alpha, y) \quad (35)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} e^{i\alpha x} dx = \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x} e^{i\alpha x} dx = -i\alpha \frac{\partial}{\partial y} U(\alpha, y) \quad (36)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} e^{i\alpha x} dx = -\alpha^2 V(\alpha, y) \quad (37)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} e^{i\alpha x} dx = \frac{\partial^2}{\partial y^2} V(\alpha, y) \quad (38)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} e^{i\alpha x} dx = \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial v}{\partial x} e^{i\alpha x} dx = -i\alpha \frac{\partial}{\partial y} V(\alpha, y) \quad (39)$$

ifadeleri elde edilir. (34)-(39) no'lu denklemlerden elde edilen türevler (32) ve (33) no'lu denklemlerde yerlerine yazılırsa;

$$-\alpha^2 (\lambda + 2\mu)U + \mu U^{II} - \alpha(\lambda + \mu)iV^I = 0 \quad (40)$$

$$-\alpha^2 \mu V + (\lambda + 2\mu)V^{II} + \alpha(\lambda + \mu)iU^I = 0 \quad (41)$$

adi diferansiyel denklem takımı elde edilmiş olur. Denklemlerdeki üsler  $y'$  ye göre türevleri göstermektedir. (40) numaralı denklem iki defa, (41) numaralı denklem bir defa  $y'$  ye göre türetilirse;

$$-\alpha^2(\lambda+2\mu)U'' + \mu U^{IV} + \alpha(\lambda+\mu)iV''' = 0 \quad (42)$$

$$-\alpha^2\mu V' + (\lambda + 2\mu)V''' + \alpha(\lambda + \mu)iU'' = 0 \quad (43)$$

denklemleri oluşur.

(42) no'lu denklemden  $V'''$  çekilip (43) no'lu denklemde yerine yazılırsa;

$$(\lambda+2\mu)\frac{1}{\alpha(\lambda+\mu)}[\mu U^{IV} - (\lambda+2\mu)\alpha^2 U''] - \alpha^2\mu V' + (\lambda+\mu)\alpha U'' = 0 \quad (44)$$

elde edilir.

Bu denklemden  $V'$  çekilip (40) no'lu denklemde yerine yazılır ve düzenlenirse  $U'$  ye göre dördüncü mertebeden sabit katsayılı, lineer homojen diferansiyel denklem elde edilir.

$$U^{IV} - 2\alpha^2 U'' + \alpha^4 U = 0 \quad (45)$$

Bu diferansiyel denklemin çözümü  $U=e^{my}$  şeklinde aranır ve çözümün gerekli türevleri alınıp (45) no'lu denklemde yerine yazılırsa karakteristik denklem;

$$\alpha^4 - 2\alpha^2 m^2 + m^4 = 0 \quad (46)$$

olarak elde edilir. Bu denklemin kökleri ise  $m_1 = m_2 = \alpha, m_3 = m_4 = -\alpha$  şeklinde bulunur.

Bu durumda (45) no'lu diferansiyel denklemin çözümü aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$U(\alpha,y) = e^{-|\alpha|y} [-A_1 + A_2(\frac{\kappa}{\alpha} - y)] + e^{|\alpha|y} [A_3 + A_4(\frac{\kappa}{\alpha} + y)] \quad (47)$$

$V(\alpha, y)$  bilinmeyen fonksiyonunun çözümü için (40) no'lu denklemin  $y'$  ye göre bir defa türevi alınıp, elde edilecek denklemden  $V''$  ifadesi çekilerek (41) no'lu denklemde yerine yazılırsa,  $V(\alpha, y)$  bilinmeyen fonksiyonu  $U(\alpha, y)$  fonksiyonuna ve türevine bağlı olarak bulunur. Buradan gerekli türevler alınır ve yerlerine konulduktan sonra benzer işlemler yapılırsa;

$$V(\alpha, y) = [A_1 + A_2 y] i e^{-|\alpha| y} + [A_3 + A_4 y] i e^{|\alpha| y} \quad (48)$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitlikte geçen  $\kappa$  bir malzeme sabiti olup düzlem şekil değiştirme halinde  $\kappa = (3-4\nu)$ , düzlem gerilme halinde ise  $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$  olduğu bilinmektedir. Bu denklemlerde  $\nu$  Poisson oranını göstermektedir.  $V(\alpha, y)$ ,  $U(\alpha, y)$  sırasıyla (28) ve (29) nolu denklemlerde yerine yazılırlarsa  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$u_h(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ i e^{-|\alpha| y} \left[ -A_1 \frac{|\alpha|}{\alpha} + A_2 \left( \frac{\kappa}{\alpha} - \frac{|\alpha|}{\alpha} y \right) \right] + i e^{|\alpha| y} \left[ A_3 \frac{|\alpha|}{\alpha} + A_4 \left( \frac{\kappa}{\alpha} + \frac{|\alpha|}{\alpha} y \right) \right] \right\} e^{i\alpha x} d\alpha \quad (49)$$

$$v_h(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ i e^{-|\alpha| y} [A_1 + A_2 y] + i e^{|\alpha| y} [A_3 + A_4 y] \right\} e^{i\alpha x} d\alpha \quad (50)$$

Bu eşitliklerdeki  $h$  indisi, bu denklemlerin kütle kuvvetsiz durumda homojen çözüme ait ifadeleri göstermektedir.

Kartezyen eksen takımındaki  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  gerilme bileşenleri bünye denklemleri yardımıyla  $u$  ve  $v$  yer değiştirmeleri cinsinden (9), (10) ve (12) no'lu denklemlerin daha açık ifadesi olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\sigma_x = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} \quad (51)$$



$$\sigma_y = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \quad (52)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (53)$$

u ve v yer değiştirme fonksiyonlarının gerekli türevleri alınıp (51), (52), (53) no' lu denklemlerde yerlerine yazılırsa, gerilme bileşenleri

$$\begin{aligned} \sigma_{x_h}(x, y) = & -\frac{\mu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \{e^{-|\alpha|y} \{-2A_1|\alpha| + A_2[(\kappa+3) - 2|\alpha|y]\} \\ & + e^{|\alpha|y} \{2A_3|\alpha| + A_4[(\kappa+3) + 2|\alpha|y]\} \} d\alpha \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{y_h}(x, y) = & \frac{\mu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \{e^{-|\alpha|y} \{-2A_1|\alpha| + A_2[(\kappa-1) - 2|\alpha|y]\} \\ & + e^{|\alpha|y} \{2A_3|\alpha| + A_4[(\kappa-1) + 2|\alpha|y]\} \} d\alpha \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy_h}(x, y) = & \frac{i\mu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \{e^{-|\alpha|y} \{2A_1\alpha + A_2[-\frac{|\alpha|}{\alpha}(\kappa+1) + 2\alpha y]\} \\ & + e^{|\alpha|y} \{2A_3\alpha + A_4[\frac{|\alpha|}{\alpha}(\kappa+1) + 2\alpha y]\} \} d\alpha \end{aligned} \quad (56)$$

şeklinde bulunur.

### 1.2.2. Kütle Kuvvetlerinin Bulunması Durumunda Özel Çözümünün Elde Edilmesi

Kütle kuvvetlerinin hesaba katılması durumunda genel denklemlere ilave edilecek gerilme ve yer değiştirmelere ait özel çözümlerin elde edilmesi aşağıda verilmiştir. Kütle Kuvvetlerinin  $X=0$  ve  $Y=\rho g$  olması durumunda Navier denklemleri,

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x} + \mu \nabla^2 u = 0 \quad (57)$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial e}{\partial y}+\mu\nabla^2v-\rho g=0 \quad (58)$$

olarak yazılabilir. (58) nolu denklemde  $\rho$  tabakanın yoğunluğunu,  $g$  ise yerçekimi ivmesini göstermektedir. Navier denklemleri daha açık bir şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$[(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2v}{\partial x\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)]=0 \quad (59)$$

$$[(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2v}{\partial y^2}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2v}{\partial y^2}\right)]=\rho g \quad (60)$$

Yer değiştirmelerle Şekil değiştirmeler arasındaki bağıntılar (7), (8) nolu denklemlerde verilmiştir. Bu denklemlerde  $\epsilon_x, \epsilon_y$  sırasıyla x ve y eksenleri doğrultularındaki Şekil değiştirme bileşenlerini,  $\gamma_{xy}$  kayma Şekil değiştirme bileşenini göstermektedir. Düzlem gerilme hali için Şekil değiştirmelerle gerilmeler arasındaki ilişkiyi veren Hooke kanunları da aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \quad (61)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \quad (62)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \quad (63)$$

Yer değiştirme fonksiyonları  $u=u(x)$ ,  $v=v(y)$  olarak seğilirse ve gerekli tőrevler alınarak (59), (60) no'lu Navier denklemlerinde yerlerine yazılırsa (59) nolu denklemden,

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2} = 0 \quad (64)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a \quad (65)$$

$$u = ax + b \quad (66)$$

ve (60) nolu denklemden de,

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \rho g \quad (67)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\rho g}{(\lambda + 2\mu)} \quad (68)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\rho g}{(\lambda + 2\mu)} y + c \quad (69)$$

$$v = \frac{\rho g}{(\lambda + 2\mu)} y^2 + cy + d \quad (70)$$

bulunur. u ve v yer değiştirme ifadelerinde geçen bilinmeyen a, b, c, d katsayılarının belirlenebilmesi için kütle kuvveti  $\rho g$  ve kalınlığı h olan tek tabaka için x eksenini tabakanın altından geçmek üzere aşağıdaki sınır Şartlarından yararlanılacaktır.

$$u(0) = 0 \quad (71)$$

$$v(h) = 0 \quad (72)$$

$$\sigma_y = \rho g(y - h) \quad (73)$$

$$\sigma_x = \int_0^h \sigma_x dy = 0 \quad (74)$$

Sınır şartlarının (64) - (70) nolu denklemlere uygulanması ile bilinmeyen katsayılar,

$$a = \left( \frac{3-\kappa}{8\mu} \right) \left( \frac{\rho gh}{2} \right) \quad (75)$$

$$b = 0 \quad (76)$$

$$c = - \left( \frac{\rho gh}{2\mu} \right) \left( \frac{\kappa-1}{\kappa+1} + \frac{1+\kappa}{8} \right) \quad (77)$$

$$d = \frac{\rho gh^2}{2\mu} \left( \frac{\kappa+1}{8} \right) \quad (78)$$

olarak bulunur. Bu eşitlikler (66) ve (70) nolu denklemlerde yerlerine yazılırsa kütle kuvveti olması durumunda yer değiştirmelere ait özel çözümler aşağıdaki gibi bulunmuş olur.

$$u_{\delta} = \left( \frac{3-\kappa}{8\mu} \right) \left( \frac{\rho gh}{2} \right) x \quad (79)$$

$$v_{\delta} = - \frac{\rho g}{2\mu} \left[ \left( \frac{\kappa-1}{\kappa+1} y(y-h) + \frac{1+\kappa}{8} h(y-h) \right) \right] \quad 0 \leq y \leq h \quad (80)$$

Yer değiştirmelere ait bu denklemlerin gerekli türevleri alınıp (51) (52) (53) nolu denklemlerde yerine yazılırsa, kütle kuvveti olması durumunda gerilmelere ait çözümler,

$$\sigma_{x_{\delta}} = \left( \frac{3-\kappa}{1+\kappa} \right) \rho g (y-h) \quad (81)$$

$$\sigma_{y_{\delta}} = \rho g (y-h) \quad (82)$$

$$\tau_{xy} = 0 \quad (83)$$

olarak belirlenir. Burada  $\kappa$  indisi kütle kuvveti olması durumunda elde edilen yer değiştirme ve gerilme bileşenlerine ait özel çözüm ifadelerini göstermektedir.

Genel yer değiştirme ve gerilme ifadeleri ise homojen çözümden elde edilen ifadelerle özel çözüm sonucu elde edilen ifadelerin toplamıdır. Yani;

$$u(x, y) = u_h(x, y) + u_o(x, y) \quad (84)$$

$$v(x, y) = v_h(x, y) + v_o(x, y) \quad (85)$$

$$\sigma_x(x, y) = \sigma_{x_h}(x, y) + \sigma_{x_o}(x, y) \quad (86)$$

$$\sigma_y(x, y) = \sigma_{y_h}(x, y) + \sigma_{y_o}(x, y) \quad (87)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \tau_{xy_h}(x, y) + \tau_{xy_o}(x, y) \quad (88)$$

yazılabilir. İfadelerin açık şekilleri ise aşağıda verilmiştir.

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{ ie^{-|\alpha|y} [-A_1 \frac{|\alpha|}{\alpha} + A_2 (\frac{\kappa}{\alpha} - \frac{|\alpha|}{\alpha} y)] + ie^{|\alpha|y} [A_3 \frac{|\alpha|}{\alpha} + A_4 (\frac{\kappa}{\alpha} + \frac{|\alpha|}{\alpha} y)] \} e^{i\alpha x} d\alpha + (\frac{3-\kappa}{8\mu}) (\frac{\rho g h}{2}) x \quad (89)$$

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{ ie^{-|\alpha|y} [A_1 + A_2 y] + ie^{|\alpha|y} [A_3 + A_4 y] \} e^{i\alpha x} d\alpha + \frac{\rho g}{2\mu} \left[ \left( \frac{\kappa-1}{\kappa+1} y(y-h) + \frac{1+\kappa}{8} h(y-h) \right) \right] \quad (90)$$

$$\sigma_x(x, y) = -\frac{\mu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \{ e^{-|\alpha|y} \{-2A_1 |\alpha| + A_2 [(\kappa+3) - 2|\alpha|y]\} + e^{|\alpha|y} \{2A_3 |\alpha| + A_4 [(\kappa+3) + 2|\alpha|y]\} \} d\alpha + \frac{3-\kappa}{1+\kappa} \rho g (y-h) \quad (91)$$

$$\sigma_y(x,y) = \frac{\mu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \{e^{-|\alpha|y} \{-2A_1|\alpha| + A_2[(\kappa-1)-2|\alpha|y]\} + e^{|\alpha|y} \{2A_3|\alpha| + A_4[(\kappa-1)+2|\alpha|y]\}\} d\alpha + \rho g(y-h) \quad (92)$$

$$\tau_{xy}(x,y) = \frac{i\mu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \{e^{-|\alpha|y} \{2A_1\alpha + A_2[-\frac{|\alpha|}{\alpha}(\kappa+1) + 2\alpha y]\} + e^{|\alpha|y} \{2A_3\alpha + A_4[\frac{|\alpha|}{\alpha}(\kappa+1) + 2\alpha y]\}\} d\alpha \quad (93)$$

### 1.3. Sonlu Elemanlar Yöntemi

Sonlu elemanlar yöntemi; karmaşık olan problemlerin daha basit alt problemlere ayrılarak her birinin kendi içinde çözülmesiyle tam çözümün bulunduğu sayısal bir yöntemdir. Esas problemin daha basit bir probleme indirgenmiş olması nedeni ile kesin sonuç yerine yaklaşık bir sonuç elde edilmekte, ancak bu sonucun çözüm için iyileştirilmesi ve kesin sonuca çok yaklaşılması hatta kesin sonuca ulaşılması mümkün olmaktadır. Sonlu elemanlar yönteminin temel prensibi, öncelikle bir elemana ait sistem özelliklerini içeren denklemlerin çıkartılıp tüm sistemi temsil edecek şekilde eleman denklemlerini birleştirerek sisteme ait denklem takımının elde edilmesidir.

Sonlu elemanlar yönteminin avantajlarını aşağıdaki gibi sıralayabiliriz.

- Geometrisi karmaşık şekillerin incelenmesine olanak sağlar.
- Çözüm bölgesi alt bölgelere ayrılabilir ve değişik sonlu elemanlar kullanılabilir.
- Gerektiğinde bazı alt bölgelerde daha hassas hesaplamalar yapılabilir.
- Değişik ve karmaşık malzeme özellikleri olan sistemlerde kolaylıkla uygulanabilir.
- Parçanın geometrisinde basitleştirme yapma ihtiyacı duyulmaz.
- Sınır koşulları, sistemin temel denklemleri kurulduktan sonra, oldukça basit satır sütun işlemleriyle denklem sistemine dahil edilebilir.
- Matematiksel olarak genelleştirilebilir ve çok sayıda problemi çözmek için aynı model kullanılabilir.
- Mühendislik uygulamalarında kullanılacak birçok yazılım mevcuttur (Fortran kodları, ABAQUS, ANSYS vs.)

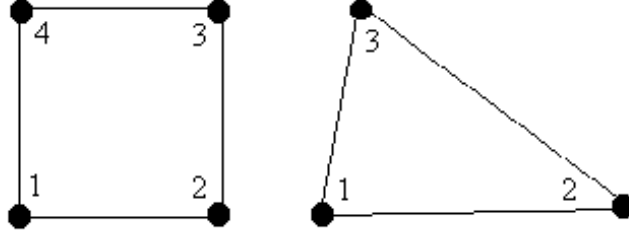
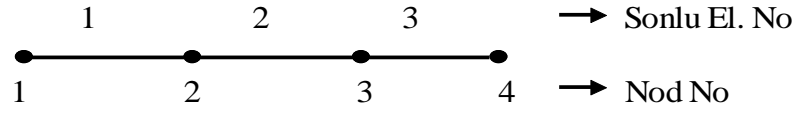
Çözüm yöntemindeki adımlar şunlardır;

- a) Cismin sonlu elemanlara ayırma,
- b) Yaklaşım modeli(şekil fonksiyonu ),
- c) Eleman rijitlik matrisinin teşkili,
- d) Sistem rijitlik matrisinin hesaplanması,
- e) Sisteme etki eden kuvvetlerin bulunması,
- f) Sınır şartlarının belirlenmesi,
- g) Sistem denklemlerinin çözümü.

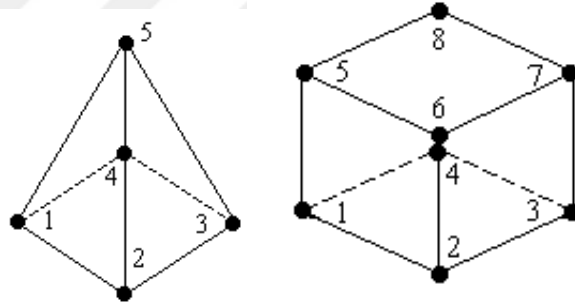
Çözüm yöntemindeki adımlarda gerçekleştirilen işlemler aşağıda detaylı olarak verilmiştir.

Cismi sonlu elemanlara ayırma: Yapının veya çalışmak istenilen alanın sonlu sayıda küçük elemanlara bölünmesidir. Buradaki amaç bir diferansiyel denklemin çözümünü basitleştirmektir. Daha basit geometrilerde (yapılarda) veya az sayıda elemanlar için işlemler matrisle tanımlanıp elle sayısal olarak çözülebilirken, karmaşık geometriler veya elemanlar için bu işlemlerin elle çözülmesi imkansız hale gelmektedir. Problemlerin çözümünde daha hassas sonuçlar elde etmek için binlerce eleman kullanılmaktadır. Bu işlemlerin çözümü ise bilgisayarlar tarafından yapılmaktadır.

Sonlu elemanlar metodunda incelenecek geometri veya yapı uygun parçalara ayrılmalıdır ( bir boyutlu, iki boyutlu, üç boyutlu ). Bu belirli geometriler üzerindeki anahtar noktalar düğüm noktası veya nod olarak isimlendirilir. Bu noktalar genellikle elemanın köşe noktalarıdır. Bu sistem içerisinde elemanlar birbirine kenarlarından ve düğüm noktalarından bağlıdırlar (Şekil 1). Genellikle iki boyutlu problemler için üçgen veya dörtgen şekilli elemanlar kullanılır.



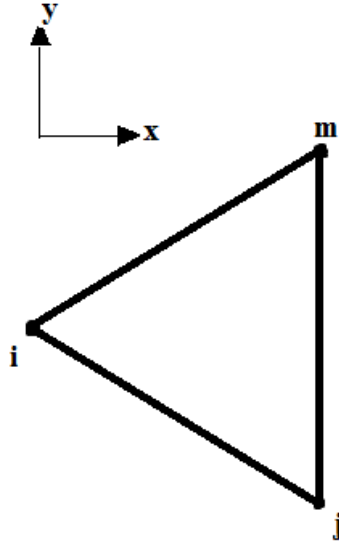
Şekil 1. Bir ve iki boyutlu sonlu elemanlar



Şekil 2. Üç boyutlu sonlu elemanlar

Yaklaşım Modeli (Şekil fonksiyonu): Sonlu elemanlar yönteminde üçgen veya dörtgen şekilli elemanlar tanımlandıktan sonra bu elemanların köşelerinde bulunan düğüm noktalarının yardımı ile herhangi bir sürekli fonksiyon için polinom eşitliklerinden faydalanarak bu fonksiyona yaklaşım sağlanır.





Şekil 3. Üçgen eleman ve polinom yaklaşımı

Bu yaklaşım bir üçgen eleman için Şekil 3'de gösterilmiştir. Üçgenin köşe noktalarında toplam üç düğüm noktası mevcut olup, komşu elemanlara bu düğümler aracılığıyla bağlanır. Üçgen eleman için bilinmeyen değerler polinom (yer değiştirme) denklemleri ile tanımlanır ve polinom denkleminin kuvveti eleman içindeki düğüm noktalarının sayısına bağlıdır. Eleman içindeki bilinmeyen değerler aşağıdaki gibi bir polinom eşitliğinde verilir.

$$\varphi(x,y)=a_1+a_2x+a_3y \quad (94)$$

Bu eşitlik içerisinde tanımlı  $a_1, a_2$  ve  $a_3$  sabit katsayı değerleri düğüm noktalarının koordinatlarına bağlı olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned} \varphi(x_i, y_i) &= a_1 + a_2 x_i + a_3 y_i \\ \varphi(x_j, y_j) &= a_1 + a_2 x_j + a_3 y_j \\ \varphi(x_m, y_m) &= a_1 + a_2 x_m + a_3 y_m \end{aligned} \quad (95)$$

Bu denklem sistemlerinin matris formu aşağıdaki (96) ifadesi şeklinde olacaktır. Yazılan bu matris formunda  $a_1, a_2$  ve  $a_3$ , değerleri düğüm noktalarında tanımlı  $\varphi_i, \varphi_j$  ve  $\varphi_m$  terimleri içinde çözülür.

$$\begin{bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ \varphi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (96)$$

$$\varphi = \frac{1}{2\Delta} \left[ (a_i + b_i x + c_i y) \varphi_i + (a_j + b_j x + c_j y) \varphi_j + (a_m + b_m x + c_m y) \varphi_m \right] \quad (97)$$

Bu eşitlik içinde  $\Delta$ , (i, j, m) üçgenin alanını temsil eder.  $a_i, b_i$  ve  $c_i$  katsayıları ise aşağıdaki eşitliklerle tanımlanır.

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_m - x_m y_j \\ b_i &= y_j - y_m \\ c_i &= x_m - x_j \end{aligned} \quad (98)$$

Diğer indislere bağlı katsayılar (j ve m) sıra içerisinde permütasyon yapılarak elde edilir. (97) ifadesiyle verilen denklem daha basit olarak matris formunda düzenlenebilir.

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} a_i & a_j & a_m \\ b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ \varphi_m \end{bmatrix} \quad (99)$$

Burada;

$$2\Delta = \det \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \quad (100)$$

formuyla elde edilir.

$$\begin{bmatrix} N_i & N_j & N_m \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ a_i & a_j & a_m \\ b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \end{bmatrix} \quad (101)$$

(101) no'lu denklem gibi tanımlama yapılırsa,  $N_i$ ,  $N_j$  ve  $N_m$  değişkenleri şekil fonksiyonu olarak isimlendirilir. Şekil fonksiyonu denklemi sadece elemanın koordinatlarına bağlıdır. Yukarıdaki (97) denklemi standart eşitlik olarak aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\begin{aligned}\varphi &= N_i \varphi_i + N_j \varphi_j + N_m \varphi_m \\ N_i &= \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2\Delta}\end{aligned}\quad (102)$$

Burada bir elemandaki alan değeri elemanın düğüm noktalarında tanımlanan alan değeri ve şekil fonksiyonları cinsinden tanımlanmıştır. Hesaplanması gereken noktalardaki  $\varphi_i$ ,  $\varphi_j$  ve  $\varphi_m$  değerleri tanımlı denklemlerin çözümünden elde edilir (Zienkiewicz ve Taylor, 2000).

Yukarıda bahsedildiği gibi elemanın herhangi bir yerindeki koordinatı, düğüm noktası koordinatlarına bağlı olarak polinom (yer değiştirme) fonksiyonları cinsinden ifade edilir (Desai ve Abe, 1972). Şekil fonksiyonları eleman ve geometrik rijitlik matrislerinin türetilmesinde kullanılır. Eleman ve geometrik rijitlik matrisleri yapının toplam rijitlik matrisinin oluşturulması için birleştirilir.

**Rijitlik matrisi:** Eleman rijitlik matrisini hesaplayabilmek için yer değiştirme fonksiyonlarının oluşturulması gerekir. Daha sonra aşağıda genel ifadesi ile verilen rijitlik matrisi oluşturulur.

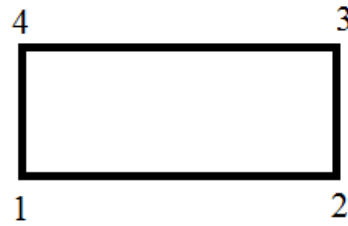
$$K = \sum_e^n [B]^e [C]^e [B]^e dx dy \quad (103)$$

Burada;  $[C]$  malzeme özelliklerine bağlı matristir.  $[B]$  matrisindeki elemanlar yerel koordinat  $(x, y, z)$  eksenlerinin fonksiyonlardır ve yer değiştirme matrisini ifade ederler (Bathe, 2004).

Her eleman için elde edilen rijitlik matrislerinin oluşturulmasından sonra sonlu elemanlar ağına bağlı şekilde birleştirilerek genel rijitlik matrisi elde edilir. Bu birleştirme yöntemine ait detaylı bilgi aşağıda sunulmuştur. Sonlu elemanlar yönteminde bundan sonraki adım, elde edilen genel rijitlik matrisi yük vektörleri ve denge denklemleri sonlu

elemanlar ağına bağlı olarak birleştirilmesi ve genel denge denklemlerinin elde edilmesidir. (103) nolu denklemde verilen rijitlik matrisi formülünde malzeme matrisi ([C]) simetriktir. Dolayısıyla, genel rijitlik matrisi de simetrik özellikte olacaktır. Bu durum malzeme davranışının geniş bir aralığı için sağlanır ve lineer elastik malzeme davranışını içerir.

Genel rijitlik matrisinin oluşturulması: Bir eleman içerisindeki rijitlik matrisi terimi elemanın sahip olduğu serbestlik dereceleri arasındaki rölatif rijitliği ifade eder. Diğer taraftan, sonlu ağ içerisinde rijitlik matrisi terimi tüm ağ boyunca serbestlik dereceleri arasındaki rölatif rijitliği ifade eder. Bu sebepten dolayı, genel rijitlik matrisinin boyutu toplam serbestlik derecesinin miktarına bağlıdır. Dört düğüm noktasından oluşmuş tek bir dörtgen elemana ait rijitlik matrisinin formu ve serbestlik derecesi numaralaması Şekil 4’de gösterilmiştir.

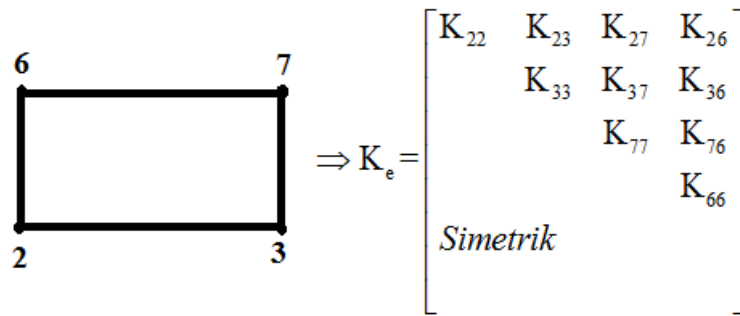
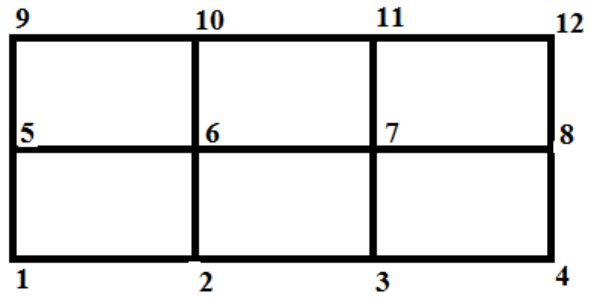


$$\Rightarrow K_e = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ & & K_{33} & K_{34} \\ & & & K_{44} \end{bmatrix}$$

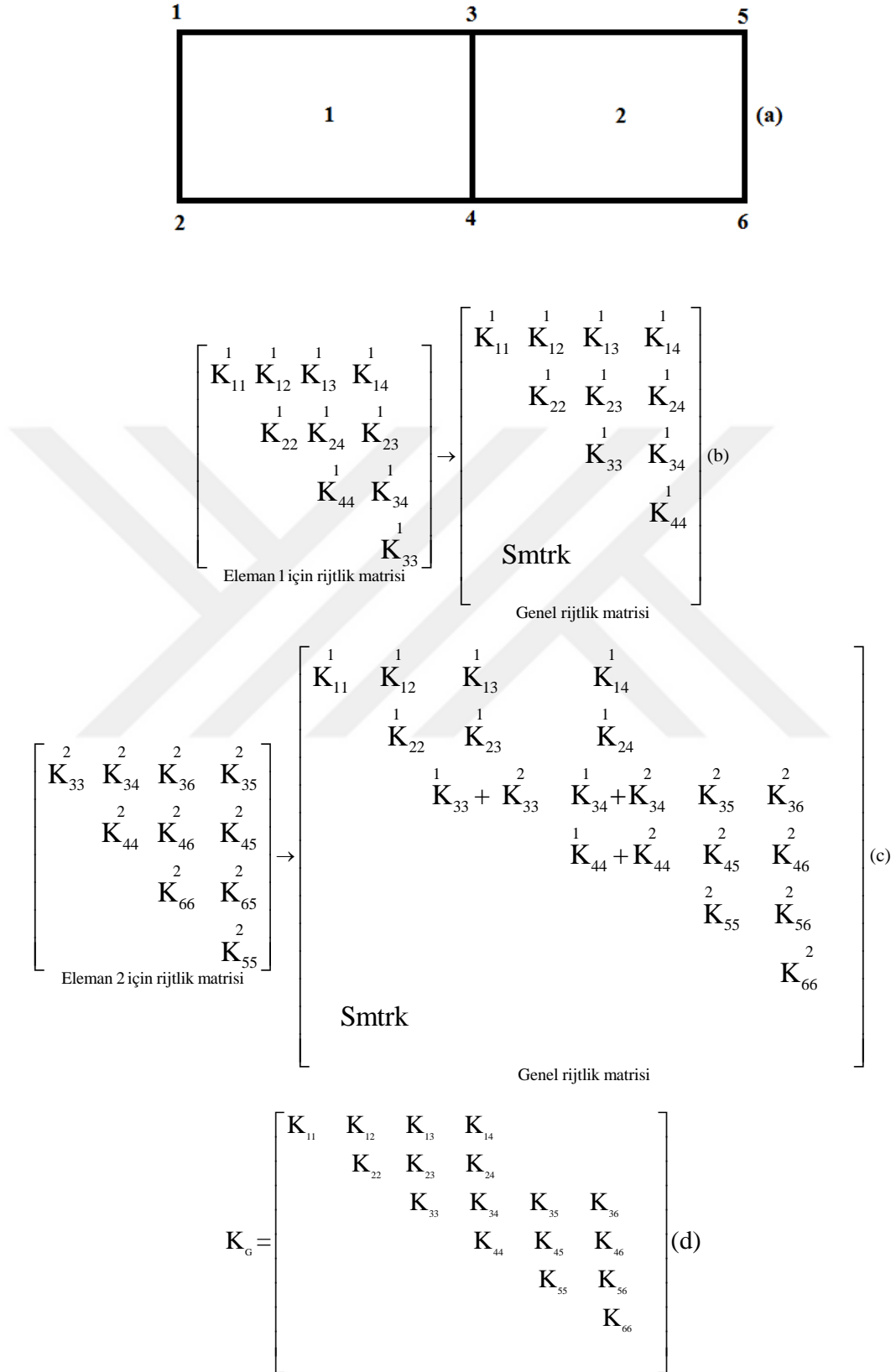
Simetrik

Şekil 4. Tek bir dörtgen elemana ait rijitlik matrisi

Eğer bu tek eleman sonlu elemanlar ağı içerisinde bir parçayı oluşturuyorsa, rijitlik matrisi Şekil 5’deki formu oluşturacaktır. Rijitlik matrisinin nümerik değerleri aynıdır. Fakat genel terimler içerisinde miktarı farklıdır. Örnek olarak, Şekil 4’de rijitlik matrisi terimi  $K_{11}$  serbestlik derecesinin 1 olduğunu ifade eder. Oysa Şekil 5’de aynı serbestlik derecesi genel serbestlik derecesi içerisinde 2 olarak görülmektedir. Bu yüzden, elemanın  $K_{22}$ ’nin genel değerine katkısı  $K_{11}$ ’e eşittir. Burada önemli bir not, eleman rijitlik matrisi içerisinde her kolon ve satır değeri elemanın serbestlik derecesini ifade eder.



Şekil 5. Genel serbestlik derecesi terimleri içerisinde eleman rijitlik matrisleri



Şekil 6. İki elemanlı bir sonlu elemanlar ağında genel rijtlik matrisinin oluşturulması

Genel serbestlik derecesi terimleri içerisinde açıklanan rijitlik matrisleri kullanılarak sistemin genel rijitlik matrisi oluşturulur. Şekil 6 iki elemandan oluşan basit bir sonlu elemanlar ağını ve serbestlik derecelerini göstermektedir. Bu şekilde basit bir ağ için sistemin genel rijitlik matrisinin nasıl oluşturulduğu açıklanmıştır. Burada not edilmesi gereken bir husus, serbestlik derecesi ve elemanların genel numaralandırılmaları arasındaki farklılığa bağlı olarak terimlerin tekrar sıralanmalarıdır. Bununla birlikte, genel rijitlik matrisi içindeki terimler serbestlik derecelerini ifade eder (Selçuk, 2009).

Genel rijitlik matrisinin yapısı bilgisayarın veya işlemcinin hafızasının etkin kullanılabilmesi için özellikle önemlidir. Genel rijitlik matrisinde sıfırdan farklı terimler sadece elemanın serbestlik dereceleri arasındaki bağlantılarda oluşur. Böylece genel rijitlik matrisi içinde her sıra için sıfırdan farklı olacak son terim en yüksek serbestlik derecesini ifade edecektir. Bu özellik rijitlik matrisinin genellikle dağınık ve bantlı yapıda oluşmasını sağlar (Potts ve Zdravkovic, 1999).

Sonlu elemanlar yöntemi içerisinde bundan sonraki adım genel denklemler içerisinde elemanlara ait denge denklemlerinin birleştirilmesidir.

$$[K_g]\{\varphi\}_{ng} = \{R_g\} \quad (104)$$

$[K_g]$ : Genel rijitlik matrisi

$\{\varphi\}_{ng}$ : Tüm sonlu elemanlar ağı için bilinmeyen serbestlik derecelerini içeren vektör (Düğüm noktalarındaki bilinmeyen deplasman değerleri)

$\{R_g\}$ : Genel yük vektörüdür.

Yukarıda verilen (104) denklemini yardımcı ile düğüm noktasındaki bilinmeyen değerler hesaplanır. Örnek olarak, yukarıda verilen iki elemandan oluşan sistem için oluşturulan matris formundaki eşitlik aşağıdaki şekilde çözülür. Bu matris formunda (6x6) boyutlu matris sistemin genel rijitlik matrisidir. Bu matris düğüm koordinatlarına ve elemanın malzeme özelliklerine bağlıdır.  $\varphi(3 \times 1)$  matrisi düğüm noktalarındaki bilinmeyenleri veya deplasman değerlerini temsil eden boyuna matristir. R matrisi ise uygulanan sınır koşullarına bağlı boyuna matristir. Sonlu elemanlar yöntemi içerisinde sınır koşullarını temsil eden düğüm noktalarındaki değerler bu noktada belirtilmelidir. Genellikle bu değerler "0" (sıfır)

olarak kabul edilir. Bu genel denge denklemleri problemin sınır şartları uygulanarak düzeltildikten sonra düğüm noktalarındaki bilinmeyen değerler çözümlenmelidir.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{21} & K_{13} & K_{14} & 0 & 0 \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & 0 & 0 \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{14} & K_{24} & K_{34} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ 0 & 0 & K_{35} & K_{45} & K_{55} & K_{56} \\ 0 & 0 & K_{36} & K_{46} & K_{56} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{bmatrix} \quad (105)$$

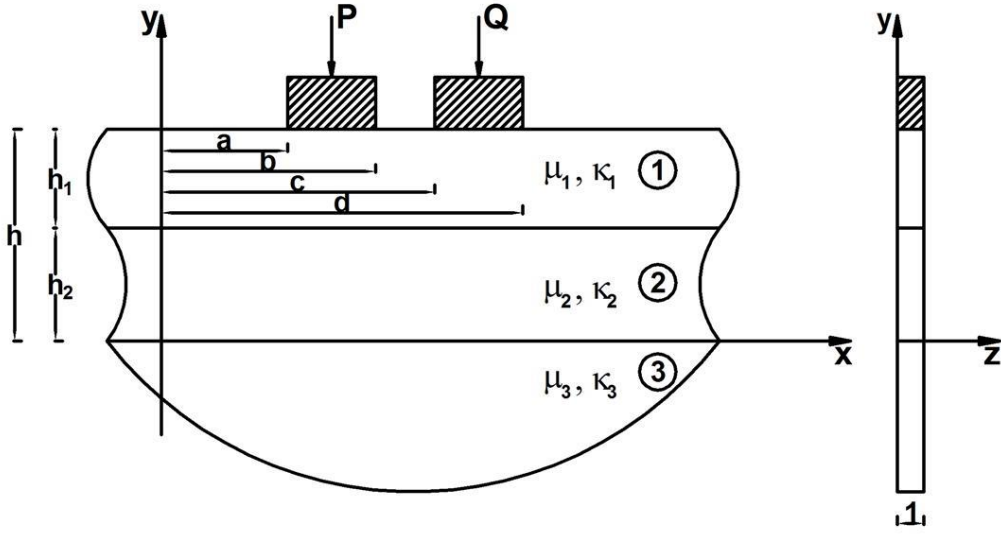
Bilgisayar teknolojisindeki gelişmelere bağlı olarak geliştirilen paket programlar sonlu elemanlar yönteminin etkin kullanımını sağlamaktadır. Sonlu elemanlar yöntemini kullanan çok sayıda bilgisayar programı mevcut olup, FLUENT, LS-DYNA, LINFLOW, ALGOR, COSMO/M, NASTRAN, ADINA ve ANSYS bunlara örnek verilebilir.



## 2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

### 2.1. Problemin Tanımı

Elastik yarı sonsuz düzleme oturan elastik özellikleri ve yükseklikleri farklı iki tabakanın temas problemi, elastisite teorisi ve integral dönüşüm teknikleri kullanılarak incelenmiştir. P ve Q dış yükleri iki farklı blok ile tabakalara aktarılmaktadır. Tüm yüzeyler sürtünmesizdir. Ayrıca rijit bloklar (a, b) ve (c, d) aralığında (1) nolu tabaka ile temas halindedir. Çözümde tabakaların kütle kuvvetleri dikkate alınırken elastik yarı sonsuz düzlemin kütle kuvveti ihmal edilmiştir. Problem düzlem hal için inceleneceğinden z eksenini doğrultusundaki kalınlık birim olarak alınmıştır.



Şekil 7. Problemin geometrisi

## 2.2. Kullanılacak Denklemler

Problemde  $h$ ,  $h_1, h_2$  sırasıyla tabakaların toplam yüksekliğini, 1 nolu tabakanın yüksekliğini ve 2 nolu tabakanın yüksekliğini göstermektedir. Ayrıca  $\rho_i$  ( $i=1,2$ ); 1 ve 2 no'lu tabakaların yoğunluklarını ve  $g$  yerçekimi ivmesini ifade etmektedir. Kütle kuvvetinin ihmal edildiği durumlarda problemin çözümünde kullanılacak denklemler aşağıdaki gibi yazılabilir.

(1) nolu tabaka için ( $-\infty \leq x < \infty$ ,  $h_2 \leq y \leq h$ )

$$u_{1h}(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{ie^{-|\alpha|y} [-A_1 \frac{|\alpha|}{\alpha} + A_2 (\frac{\kappa_1}{\alpha} - \frac{|\alpha|}{\alpha} y)] + ie^{|\alpha|y} [A_3 \frac{|\alpha|}{\alpha} + A_4 (\frac{\kappa_1}{\alpha} + \frac{|\alpha|}{\alpha} y)]\} e^{i\alpha x} d\alpha \quad (106)$$

$$v_{1h}(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{ie^{-|\alpha|y} [A_1 + A_2 y] + ie^{|\alpha|y} [A_3 + A_4 y]\} e^{i\alpha x} d\alpha \quad (107)$$

$$\sigma_{x_{1h}} = -\frac{\mu_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \{e^{-|\alpha|y} \{-2A_1 |\alpha| + A_2 [(\kappa_1 + 3) - 2|\alpha|y]\} + e^{|\alpha|y} \{2A_3 |\alpha| + A_4 [(\kappa_1 + 3) + 2|\alpha|y]\}\} d\alpha \quad (108)$$

$$\sigma_{y_{1h}} = \frac{\mu_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \{e^{-|\alpha|y} \{-2A_1 |\alpha| + A_2 [(\kappa_1 - 1) - 2|\alpha|y]\} + e^{|\alpha|y} \{2A_3 |\alpha| + A_4 [(\kappa_1 - 1) + 2|\alpha|y]\}\} d\alpha \quad (109)$$

$$\tau_{xy_{1h}}(x,y) = \frac{i\mu_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \{e^{-|\alpha|y} \{2A_1 \alpha + A_2 [-\frac{|\alpha|}{\alpha} (\kappa_1 + 1) + 2\alpha y]\} + e^{|\alpha|y} \{2A_3 \alpha + A_4 [\frac{|\alpha|}{\alpha} (\kappa_1 + 1) + 2\alpha y]\}\} d\alpha \quad (110)$$

(2) nolu tabaka için ( $-\infty \leq x < \infty$ )

$0 \leq y < h_2$

$$u_{2h}(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ ie^{-|\alpha|y} \left[ -B_1 \frac{|\alpha|}{\alpha} + B_2 \left( \frac{\kappa_2}{\alpha} - \frac{|\alpha|}{\alpha} y \right) \right] + ie^{|\alpha|y} \left[ B_3 \frac{|\alpha|}{\alpha} + B_4 \left( \frac{\kappa_2}{\alpha} + \frac{|\alpha|}{\alpha} y \right) \right] \right\} e^{i\alpha x} d\alpha \quad (111)$$

$$v_{2h}(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ ie^{-|\alpha|y} [B_1 + B_2 y] + ie^{|\alpha|y} [B_3 + B_4 y] \right\} e^{i\alpha x} d\alpha \quad (112)$$

$$\sigma_{x2h} = -\frac{\mu_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \left\{ e^{-|\alpha|y} \left\{ -2B_1 |\alpha| + B_2 [(\kappa_2 + 3) - 2|\alpha|y] \right\} + e^{|\alpha|y} \left\{ 2B_3 |\alpha| + B_4 [(\kappa_2 + 3) + 2|\alpha|y] \right\} \right\} d\alpha \quad (113)$$

$$\sigma_{y2h} = \frac{\mu_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \left\{ e^{-|\alpha|y} \left\{ -2B_1 |\alpha| + B_2 [(\kappa_2 - 1) - 2|\alpha|y] \right\} + e^{|\alpha|y} \left\{ 2B_3 |\alpha| + B_4 [(\kappa_2 - 1) + 2|\alpha|y] \right\} \right\} d\alpha \quad (114)$$

$$\tau_{xy2h}(x,y) = \frac{i\mu_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \left\{ e^{-|\alpha|y} \left\{ 2B_1 \alpha + B_2 \left[ -\frac{|\alpha|}{\alpha} (\kappa_2 + 1) + 2\alpha y \right] \right\} + e^{|\alpha|y} \left\{ 2B_3 \alpha + B_4 \left[ \frac{|\alpha|}{\alpha} (\kappa_2 + 1) + 2\alpha y \right] \right\} \right\} d\alpha \quad (115)$$

(3) nolu eleman (elastik yarı sonsuz ortam) için ( $-\infty < x < \infty$ )

$-\infty \leq y < 0$

$$u_{3h}(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ ie^{|\alpha|y} \left[ C_1 \frac{|\alpha|}{\alpha} + C_2 \left( \frac{\kappa_3}{\alpha} + \frac{|\alpha|}{\alpha} y \right) \right] \right\} e^{i\alpha x} d\alpha \quad (116)$$

$$v_{3h}(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ ie^{|\alpha|y} [C_1 + C_2 y] \right\} e^{i\alpha x} d\alpha \quad (117)$$

$$\sigma_{x_{3h}} = -\frac{\mu_3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \{e^{|\alpha|y} \{2C_1|\alpha| + C_2[(\kappa_3+3)+2|\alpha|y]\}\} d\alpha \quad (118)$$

$$\sigma_{y_{3h}} = \frac{\mu_3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \{e^{|\alpha|y} \{2C_1|\alpha| + C_2[(\kappa_3-1)+2|\alpha|y]\}\} d\alpha \quad (119)$$

$$\tau_{xy_{3h}}(x, y) = \frac{i\mu_3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \{e^{|\alpha|y} \{2C_1\alpha + C_2[\frac{|\alpha|}{\alpha}(\kappa_3+1)+2\alpha y]\}\} d\alpha \quad (120)$$

## 2.3. Sürekli Temas

### 2.3.1. Problemin Sınır Şartları

$u(x,y)$  ve  $v(x,y)$  yer değiştirme bileşenlerini,  $\sigma_x(x,y)$ ,  $\sigma_y(x,y)$ ,  $\tau_{xy}(x,y)$  de gerilme bileşenlerini göstermek üzere problemin sınır şartları aşağıdaki gibidir.

$$\sigma_{y_1}(x, h) = \left\{ \begin{array}{ll} -p(x) & a < x < b \\ -q(x) & c < x < d \\ 0 & -\infty < x < a, b < x < c, d < x < \infty \end{array} \right\} \quad (121)$$

$$\tau_{xy_1}(x, h) = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (122)$$

$$\tau_{xy_1}(x, h_2) = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (123)$$

$$\tau_{xy_2}(x, 0) = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (124)$$

$$\tau_{xy_2}(x, h_2) = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (125)$$

$$\sigma_{y_2}(x, h_2) = \sigma_{y_1}(x, h_2) \quad -\infty < x < \infty \quad (126)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_2(x, h_2) - v_1(x, h_2)] = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (127)$$

$$\tau_{xy_3}(x, 0) = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (128)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_2(x, 0) - v_3(x, 0)] = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (129)$$

$$\sigma_{y_2}(x, 0) = \sigma_{y_3}(x, 0) \quad -\infty < x < \infty \quad (130)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, h)] = 0 \quad a < x < b \quad (a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, h)] = 0 \quad c < x < d \quad (b) \quad (131a-b)$$

(121) nolu ifadedeki  $p(x)$  ve  $q(x)$  rijit bloklar ile (1) nolu tabaka arasındaki bilinmeyen temas gerilmeleridir.

### 2.3.2. Katsayıların Belirlenmesi

(121)-(130) nolu eşitliklerle verilen sınır şartlarının (106)-(120) ile verilen yer değiştirmeler ve gerilmelere ait denklemlerde kullanılması ile katsayılarının bilinmeyen olduğu on tane cebrik denklem elde edilir. Bu denklemler aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} & (-2|\alpha|e^{-2|\alpha|h})A_1 + [(-2|\alpha|h + (\kappa_1 - 1))e^{-2|\alpha|h}]A_2 + 2|\alpha|A_3 \\ & + [(2|\alpha|h + (\kappa_1 - 1))]A_4 = (P + Q)e^{-|\alpha|h} \end{aligned} \quad (132)$$

$$\begin{aligned}
& (2\alpha e^{-2|\alpha|h})A_1 + \left[ \left(-\frac{|\alpha|}{\alpha}(\kappa_1 + 1) + 2\alpha h\right)e^{-2|\alpha|h} \right]A_2 \\
& + 2\alpha A_3 + \left[ \left(\frac{|\alpha|}{\alpha}(\kappa_1 + 1) + 2\alpha h\right) \right]A_4 = 0
\end{aligned} \tag{133}$$

$$\begin{aligned}
& (2\alpha e^{-2|\alpha|h_2})A_1 + \left[ \left(-\frac{|\alpha|}{\alpha}(\kappa_1 + 1) + 2\alpha h_2\right)e^{-2|\alpha|h_2} \right]A_2 + 2\alpha A_3 \\
& + \left[ \left(\frac{|\alpha|}{\alpha}(\kappa_1 + 1) + 2\alpha h_2\right) \right]A_4 = 0
\end{aligned} \tag{134}$$

$$2\alpha B_1 + \left[ \left(-\frac{|\alpha|}{\alpha}(\kappa_2 + 1)\right) \right]B_2 + 2\alpha B_3 + \left[ \left(\frac{|\alpha|}{\alpha}(\kappa_2 + 1)\right) \right]B_4 = 0 \tag{135}$$

$$\begin{aligned}
& (2\alpha e^{-2|\alpha|h_2})B_1 + \left[ \left(-\frac{|\alpha|}{\alpha}(\kappa_2 + 1) + 2\alpha h_2\right)e^{-2|\alpha|h_2} \right]B_2 + 2\alpha B_3 \\
& + \left[ \left(\frac{|\alpha|}{\alpha}(\kappa_2 + 1) + 2\alpha h_2\right) \right]B_4 = 0
\end{aligned} \tag{136}$$

$$\begin{aligned}
& (-2|\alpha|e^{-2|\alpha|h_2}B_1 \frac{\mu_2}{\mu_1} + [(-2|\alpha|h_2 + (\kappa_2 - 1))e^{-2|\alpha|h_2}]B_2 \frac{\mu_2}{\mu_1} + 2|\alpha|B_3 \frac{\mu_2}{\mu_1} \\
& + [(2|\alpha|h_2 + (\kappa_2 - 1))]B_4 \frac{\mu_2}{\mu_1} + (2|\alpha|e^{-2|\alpha|h_2})A_1 - [(-2|\alpha|h_2 + (\kappa_1 - 1))e^{-2|\alpha|h_2}]A_2 \\
& - 2|\alpha|A_3 - [(2|\alpha|h_2 + (\kappa_1 - 1))]A_4 = 0
\end{aligned} \tag{137}$$

$$[B_1 + B_2 h_2]e^{-2|\alpha|h_2} + [B_3 + B_4 h_2] - [A_1 + A_2 h_2]e^{-2|\alpha|h_2} - [A_3 + A_4 h_2] = 0 \tag{138}$$

$$2\alpha C_1 + \left[ \left(\frac{|\alpha|}{\alpha}(\kappa_3 + 1)\right) \right]C_2 = 0 \tag{139}$$

$$B_1 + B_3 - C_1 = 0 \tag{140}$$

$$(-2|\alpha|B_1 + (\kappa_2 - 1)B_2 + 2|\alpha|B_3 + (\kappa_2 - 1)B_4 - \frac{\mu_3}{\mu_2}[2|\alpha|C_1 + (\kappa_3 + 1)C_2]) = 0 \quad (141)$$

On bilinmeyenli on denklem takımının çözümünden katsayılar aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} +A_1 = & -16\alpha^2(P+Q)\{[(-1+2\alpha h - \kappa_1)e^{-3\alpha h} + (-4\alpha h_2 + (1+2\alpha h + \kappa_1)e^{-\alpha h - 2\alpha h_2}] \\ & (1+\kappa_1)[e^{-4\alpha h_2}((1+\kappa_3) - (1+\kappa_2)mb) + ((1+\kappa_3) + (1+\kappa_2)mb) \\ & - 2e^{-2\alpha h_2}((1+2\alpha^2 h_2^2)(1+\kappa_3) - 2\alpha h_2(1+\kappa_2)mb)] + [(-1+2\alpha h - \kappa_1)e^{-3\alpha h} \\ & - (2\alpha h_2 - \kappa_1)(2\alpha h - 2\alpha h_2) + 2\alpha h_2 - (1+\kappa_1)]e^{-\alpha h - 2\alpha h_2}] \\ & (1+\kappa_2)ma[e^{-4\alpha h_2}((1+\kappa_3) - (1+\kappa_2)mb) - ((1+\kappa_3) + (1+\kappa_2)mb) + \\ & 2e^{-2\alpha h_2}(-2\alpha h_2(1+\kappa_3) + (1+\kappa_2)mb)]\}/\Delta \end{aligned} \quad (142)$$

$$\begin{aligned} -A_1 = & 16\alpha^2(P+Q)\{[-(1+2\alpha h - \kappa_1)e^{3\alpha h} + (4\alpha h_2 + (1-2\alpha h + \kappa_1)e^{\alpha h + 2\alpha h_2}] \\ & (1+\kappa_1)[e^{4\alpha h_2}((1+\kappa_3) - (1+\kappa_2)mb) + ((1+\kappa_3) + (1+\kappa_2)mb) \\ & - 2e^{2\alpha h_2}((1+2\alpha^2 h_2^2)(1+\kappa_3) + 2\alpha h_2(1+\kappa_2)mb)] + [-(1+2\alpha h + \\ & \kappa_1)e^{3\alpha h} + (2\alpha h_2 + \kappa_1)(-2\alpha h + 2\alpha h_2) + 2\alpha h_2 + (1+\kappa_1)]e^{\alpha h + 2\alpha h_2}] \\ & (1+\kappa_2)ma[e^{4\alpha h_2}((1+\kappa_3) - (1+\kappa_2)mb) - ((1+\kappa_3) + (1+\kappa_2)mb) + \\ & 2e^{2\alpha h_2}(2\alpha h_2(1+\kappa_3) + (1+\kappa_2)mb)]\}/\Delta \end{aligned} \quad (143)$$

$$\begin{aligned} +A_2 = & 32\alpha^3(P+Q)\{(e^{-3\alpha h} - e^{-\alpha h - 2\alpha h_2})(1+\kappa_1)[e^{-4\alpha h_2}((1+\kappa_3) - (1+\kappa_2) \\ & mb) + ((1+\kappa_3) + (1+\kappa_2)mb) - 2e^{-2\alpha h_2}((1+2\alpha^2 h_2^2)(1+\kappa_3) - \\ & 2\alpha h_2(1+\kappa_2)mb)] + [e^{-3\alpha h} + (-1+2\alpha h - 2\alpha h_2)e^{-\alpha h - 2\alpha h_2}](1+\kappa_2) \\ & ma[e^{-4\alpha h_2}((1+\kappa_3) - (1+\kappa_2)mb) - ((1+\kappa_3) + (1+\kappa_2)mb) - \\ & 2e^{-2\alpha h_2}(2\alpha h_2(1+\kappa_3) - (1+\kappa_2)mb)]\}/\Delta \end{aligned} \quad (144)$$

$$\begin{aligned}
-A_2 = & 32\alpha^3(P+Q)\{(-e^{3ah} + e^{ah+2ah_2})(1+\kappa_1)[e^{4ah_2}((1+\kappa_3)-(1+\kappa_2)mb) \\
& + ((1+\kappa_3)+(1+\kappa_2)mb) - 2e^{2ah_2}((1+2\alpha^2h_2^2)(1+\kappa_3) + 2\alpha h_2(1+ \\
& \kappa_2)mb)] + [e^{3ah} + (-1+2\alpha h - 2\alpha h_2)e^{ah+2ah_2}](1+\kappa_2)ma[e^{4ah_2}(-1+ \\
& \kappa_3) + (1+\kappa_2)mb) + ((1+\kappa_3)+(1+\kappa_2)mb) + 2e^{2ah_2}(2\alpha h_2(1+\kappa_3) \\
& + (1+\kappa_2)mb)]\}/\Delta
\end{aligned} \tag{145}$$

$$\begin{aligned}
+A_3 = & 16\alpha^2(P+Q)\{[(-4\alpha h_2 + (-1+2\alpha h - \kappa_1)e^{-3ah} + (-1+2\alpha h - \kappa_1)e^{-ah-2ah_2}] \\
& (1+\kappa_1)[e^{6ah_2}((1+\kappa_3)-(1+\kappa_2)mb) + e^{-2ah_2}((1+\kappa_3)+(1+\kappa_2)mb) \\
& - 2e^{-4ah_2}(-(1+2\alpha^2h_2^2)(1+\kappa_3) + 2\alpha h_2(1+\kappa_2)mb)] + [(2\alpha h_2 + \kappa_1)(2\alpha h_2 \\
& - 2\alpha h) + 2\alpha h_2 + (1+\kappa_1)]e^{-3ah} - (1+2\alpha h + \kappa_1)e^{-ah-2ah_2}](1+\kappa_2)ma[e^{-6ah_2} \\
& ((1+\kappa_3)-(1+\kappa_2)mb) + e^{-2ah_2}(-(1+\kappa_3)+(1+\kappa_2)mb) + 2e^{-4ah_2}(-2\alpha h_2 \\
& (1+\kappa_3) + (1+\kappa_2)mb)]\}/\Delta
\end{aligned} \tag{146}$$

$$\begin{aligned}
-A_3 = & -16\alpha^2(P+Q)\{[-(-4\alpha h_2 + (1+2\alpha h + \kappa_1)e^{3ah} - (-1+2\alpha h - \kappa_1)e^{ah+2ah_2}] \\
& (1+\kappa_1)[e^{6ah_2}((1+\kappa_3)-(1+\kappa_2)mb) + e^{2ah_2}((1+\kappa_3)+(1+\kappa_2)mb) \\
& - 2e^{4ah_2}((1+2\alpha^2h_2^2)(1+\kappa_3) + 2\alpha h_2(1+\kappa_2)mb)] + [(2\alpha h_2 - \kappa_1)(2\alpha h_2 - \\
& 2\alpha h) - 2\alpha h_2 + (1+\kappa_1)]e^{3ah} + (-1+2\alpha h - \kappa_1)e^{ah+2ah_2}](1+\kappa_2)ma[e^{6ah_2} \\
& ((1+\kappa_3)-(1+\kappa_2)mb) - e^{2ah_2}((1+\kappa_3)+(1+\kappa_2)mb) + 2e^{4ah_2}(2\alpha h_2(1+\kappa_3) \\
& + (1+\kappa_2)mb)]\}/\Delta
\end{aligned} \tag{147}$$

$$\begin{aligned}
+A_4 = & 32\alpha^3(P+Q)\{(e^{-3ah} - e^{-ah-2ah_2})(1+\kappa_1)[e^{-6ah_2}((1+\kappa_3)-(1+\kappa_2)mb) \\
& + e^{-2ah_2}((1+\kappa_3)+(1+\kappa_2)mb) - 2e^{-4ah_2}((1+2\alpha^2h_2^2)(1+\kappa_3) - 2\alpha h_2( \\
& 1+\kappa_2)mb)] + [(-1+2\alpha h - 2\alpha h_2)e^{-3ah} + e^{-ah-2ah_2}](1+\kappa_2)ma[e^{-6ah_2}((1 \\
& +\kappa_3)-(1+\kappa_2)mb) - e^{-2ah_2}((1+\kappa_3)+(1+\kappa_2)mb) - 2e^{-4ah_2}(2\alpha h_2(1+\kappa_3) \\
& ) - (1+\kappa_2)mb)]\}/\Delta
\end{aligned} \tag{148}$$



$$\begin{aligned}
-A_4 = & 32\alpha^3 (P+Q) \{ (e^{3ah} - e^{ah+2ah_2})(1+\kappa_1)[e^{6ah_2}((1+\kappa_3)-(1+\kappa_2)mb \\
& + e^{2ah_2}((1+\kappa_3)+(1+\kappa_2)mb) - 2e^{4ah_2}((1+2\alpha^2 h_2^2)(1+\kappa_3) - 2\alpha h_2 \\
& (1+\kappa_2)mb)] + [-(1+2\alpha h_2 - 2\alpha h_2)e^{3ah} + e^{ah+2ah_2}](1+\kappa_2)ma[e^{6ah_2} ( \\
& (1+\kappa_3)-(1+\kappa_2)mb) - e^{2ah_2}((1+\kappa_3)+(1+\kappa_2)mb) + 2e^{4ah_2}(2\alpha h_2( \\
& 1+\kappa_3)-(1+\kappa_2)mb)] \} / \Delta
\end{aligned} \tag{149}$$

$$\begin{aligned}
+B_1 = & 32\alpha^2 (P+Q) \{ [-1+\alpha(h-h_2)]e^{-3ah} + (1+\alpha(h-h_2))e^{-ah-2ah_2} ] \\
& (1+\kappa_1)ma[e^{-4ah_2}(-(1+(1-2\alpha h_2-\kappa_2))(-1+\kappa_3)+(1+\kappa_2) \\
& mb))] + e^{-2ah_2}(1+(1+2\alpha h_2)\kappa_2)(1+\kappa_3)-(2\alpha h_2+(1+\kappa_2) \\
& )(1+\kappa_2)mb] \} / \Delta
\end{aligned} \tag{150}$$

$$\begin{aligned}
-B_1 = & 32\alpha^2 (P+Q) \{ [-(1+\alpha(-h+h_2))e^{3ah} - (1+\alpha(h-h_2))e^{ah+2ah_2} ] \\
& (1+\kappa_1)ma[e^{4ah_2}((1+(1+2\alpha h_2+\kappa_2))(-1+\kappa_3)+(1+\kappa_2)mb)) \\
& e^{2ah_2}((-1+(-1+2\alpha h_2)\kappa_2)(1+\kappa_3)+(-2\alpha h_2+(1+\kappa_2))(1+\kappa_2)mb)] \} / \Delta
\end{aligned} \tag{151}$$

$$\begin{aligned}
+B_2 = & 64\alpha^3 (P+Q) \{ [-(1+\alpha(h-h_2))e^{-3ah} - (1+\alpha(h-h_2))e^{-ah-2ah_2} ] \\
& (1+\kappa_1)ma[e^{-4ah_2}((1+\kappa_3)-(1+\kappa_2)mb) \\
& - e^{-2ah_2}((1+2\alpha h_2)(1+\kappa_3)+(1+\kappa_2)mb)] \} / \Delta
\end{aligned} \tag{152}$$

$$\begin{aligned}
-B_2 = & 64\alpha^3 (P+Q) \{ [(1+\alpha(h-h_2))e^{3ah} + (-1+\alpha(h-h_2))e^{ah+2ah_2} ] \\
& (1+\kappa_1)ma[e^{4ah_2}((1+\kappa_3)-(1+\kappa_2)mb) \\
& + e^{2ah_2}((-1+2\alpha h_2)(1+\kappa_3)+(1+\kappa_2)mb)] \} / \Delta
\end{aligned} \tag{153}$$

$$\begin{aligned}
+B_3 = & 32\alpha^2 (P+Q) \{ [-1+\alpha(h-h_2)]e^{-3ah} + (1+\alpha(h-h_2))e^{-ah-ah_2} ] \\
& (1+\kappa_1)ma[e^{-4ah_2}(-(1+(1-2\alpha h_2)\kappa_2)(1+\kappa_3)+(2\alpha h_2-(1 \\
& +\kappa_2))(1+\kappa_2)mb) + e^{-2ah_2}((1+2\alpha h_2+\kappa_2)(1+\kappa_3)+ \\
& (1+\kappa_2)mb)] \} / \Delta
\end{aligned} \tag{154}$$

$$\begin{aligned}
-B_3 = & 32\alpha^2(P+Q)\{[-1+\alpha(-h+h_2)]e^{3\alpha h} + (1+\alpha(-h+h_2))e^{\alpha h+\alpha h_2}\} \\
& (1+\kappa_1)ma[e^{4\alpha h_2}((1+(1+2\alpha h_2)\kappa_2)(1+\kappa_3)+(2\alpha h_2+(1+ \\
& \kappa_2))(1+\kappa_2)mb) + e^{2\alpha h_2}((-1+2\alpha h_2-\kappa_2)(1+\kappa_3)+(1+\kappa_2)mb)]/\Delta
\end{aligned} \tag{155}$$

$$\begin{aligned}
+B_4 = & -64\alpha^3(P+Q)\{[-1+\alpha(h-h_2)]e^{-3\alpha h} + (1+\alpha(h-h_2))e^{-\alpha h-2\alpha h_2}\} \\
& (1+\kappa_1)ma[e^{-4\alpha h_2}((-1+2\alpha h_2)(1+\kappa_3)-(1+\kappa_2)mb) \\
& + e^{-2\alpha h_2}((1+\kappa_3)+(1+\kappa_2)mb)]/\Delta
\end{aligned} \tag{156}$$

$$\begin{aligned}
-B_4 = & -64\alpha^3(P+Q)\{[-1+\alpha(h-h_2)]e^{3\alpha h} + (1+\alpha(h-h_2))e^{\alpha h+2\alpha h_2}\} \\
& (1+\kappa_1)ma[e^{4\alpha h_2}((1+2\alpha h_2)(1+\kappa_3)+(1+\kappa_2)mb) - e^{2\alpha h_2}((1+\kappa_3) \\
& + (1+\kappa_2)mb)]/\Delta
\end{aligned} \tag{157}$$

$$\begin{aligned}
+C_1 = & 64\alpha^2(P+Q)\{[-1+\alpha(h-h_2)]e^{-3\alpha h} + (1+\alpha(h-h_2))e^{-\alpha h-2\alpha h_2}\} \\
& (1+\kappa_1)(1+\kappa_2)(1+\kappa_3)ma[(-1+\alpha h_2)e^{-4\alpha h_2} + (1+\alpha h_2)e^{-2\alpha h_2}]/\Delta
\end{aligned} \tag{158}$$

$$\begin{aligned}
-C_1 = & -64\alpha^2(P+Q)\{[1+\alpha(h-h_2)]e^{3\alpha h} + (-1+\alpha(h-h_2))e^{\alpha h+2\alpha h_2}\} \\
& (1+\kappa_1)(1+\kappa_2)(1+\kappa_3)ma[1+\alpha h_2)e^{4\alpha h_2} + (-1+\alpha h_2)e^{2\alpha h_2}]/\Delta
\end{aligned} \tag{159}$$

$$\begin{aligned}
+C_2 = & 128\alpha^3(P+Q)\{[1+\alpha(-h+h_2)]e^{-3\alpha h} + (-1+\alpha(-h+h_2))e^{-\alpha h-2\alpha h_2}\} \\
& (1+\kappa_1)(1+\kappa_2)ma[(-1+\alpha h_2)e^{-4\alpha h_2} + (1+\alpha h_2)e^{-2\alpha h_2}]/\Delta
\end{aligned} \tag{160}$$

$$\begin{aligned}
-C_2 = & 128\alpha^3(P+Q)\{[1+\alpha(h-h_2)]e^{3\alpha h} + (-1+\alpha(h-h_2))e^{\alpha h+2\alpha h_2}\} \\
& (1+\kappa_1)(1+\kappa_2)ma[(1+\alpha h_2)e^{4\alpha h_2} + (-1+\alpha h_2)e^{2\alpha h_2}]/\Delta
\end{aligned} \tag{161}$$

$$\frac{(-A_1)}{(-\Delta)} = \frac{(A_1)}{(\Delta)}$$

Bu ifadelerde geçen  $ma$ ,  $mb$  büyüklükleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$ma = \frac{\mu_2}{\mu_1} \quad (162)$$

$$mb = \frac{\mu_3}{\mu_2} \quad (163)$$

Probleme ilişkin denge şartları olarak

$$\int_a^b p(x) dx = P^I \quad (a)$$

$$\int_c^d q(x) dx = Q^I \quad (b) \quad (164a-b)$$

ifadeleri yazılabilir.

$$\begin{aligned} \Delta = & -64\alpha^3 \{ [-e^{-4ah_2} - 2(2\alpha h - 2\alpha h_2)e^{-2ah-2ah_2} + e^{-4ah}] (1 + \kappa_1) [e^{-4ah_2} \\ & ((1 + \kappa_3) - (1 + \kappa_2)mb) - ((1 + \kappa_3) + (1 + \kappa_2)mb) - 2e^{-2ah_2} (-1 \\ & + 2\alpha^2 h_2^2)(1 + \kappa_3) + 2\alpha h_2(1 + \kappa_2)mb) ] + [e^{-4ah_2} - 2(1 + 2\alpha^2 \\ & (h - h_2)^2)e^{-2ah-2ah_2} + e^{-4ah}] (1 + \kappa_2)ma [e^{-4ah_2} ((1 + \kappa_3) - (1 + \kappa_2)mb) - \\ & ((1 + \kappa_3) + (1 + \kappa_2)mb) - 2e^{-2ah_2} (-2\alpha h_2(1 + \kappa_3) + (1 + \kappa_2)mb)] \} \end{aligned} \quad (165)$$

### 2.3.3. İntegral Denklemin Elde Edilmesi

Rijit bloklar altındaki  $p(x)$  ve  $q(x)$  temas gerilmesi yayılışlarının bilinmeyenler olduğu daha önceki kısımlarda belirtilmişti. Bu gerilme yayılışlarını elde edebilmek için, katsayıların belirlenmesinde kullanılmayan (131) nolu sınır şartından faydalanılacaktır. Bu eşitlik  $y=h'$ 'de  $a < x < b$  ve  $c < x < d$  için sıfırdır. Problemin çözümü için kullanılacak integral denklemler bu sınır şartından elde edilecektir. (131) nolu sınır şartı aşağıda açık biçimde verilmiştir.

$$\frac{\partial v_1}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\alpha \{ [A_1 + A_2 y] e^{-|\alpha|y} + [A_3 + A_4 y] e^{|\alpha|y} \} e^{i\alpha x} d\alpha = 0 \quad (166)$$

Bu ifadede katsayılar yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$\frac{\partial}{\partial x}[v_1(x,y)]=0$  ifadesi en geniş şekliyle tanımlanmış olur.

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x}(x,y) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\mu_1} \int_a^b p(t) e^{-iat} dt \int_{-\infty}^{\infty} ie^{iax} \{ [\alpha A_1 + A_2 \alpha y] e^{-|\alpha|y} + [\alpha A_3 + A_4 \alpha y] e^{|\alpha|y} \} d\alpha \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\mu_1} \int_c^d q(t) e^{-iat} dt \int_{-\infty}^{\infty} ie^{iax} \{ [\alpha A_1 + A_2 \alpha y] e^{-|\alpha|y} + [\alpha A_3 + A_4 \alpha y] e^{|\alpha|y} \} d\alpha = 0 \end{aligned} \quad (167)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x}(x,y) &= P^1 \int_0^{\infty} ie^{-ia(t-x)} \{ [\alpha A_1 + A_2 \alpha y] e^{-\alpha y} + [\alpha A_3 + A_4 \alpha y] e^{\alpha y} \} d\alpha \\ &\quad + Q^1 \int_0^{\infty} ie^{-ia(t-x)} \{ [\alpha A_1 + A_2 \alpha y] e^{-\alpha y} + [\alpha A_3 + A_4 \alpha y] e^{\alpha y} \} d\alpha \\ &\quad + P^1 \int_{-\infty}^0 ie^{-ia(t-x)} \{ [\alpha A_1 + A_2 \alpha y] e^{-\alpha y} + [\alpha A_3 + A_4 \alpha y] e^{\alpha y} \} d\alpha \\ &\quad + Q^1 \int_{-\infty}^0 ie^{ia(t-x)} \{ [\alpha A_1 + A_2 \alpha y] e^{-\alpha y} + [\alpha A_3 + A_4 \alpha y] e^{\alpha y} \} d\alpha = 0 \end{aligned} \quad (168)$$

İntegralin sınırları değiştirilip denklem tekrar yazıldığında;

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x}(x,y) &= P^1 \int_0^{\infty} ie^{-ia(t-x)} \{ [\alpha A_1 + A_2 \alpha y] e^{-\alpha y} + [\alpha A_3 + A_4 \alpha y] e^{\alpha y} \} d\alpha \\ &\quad + Q^1 \int_0^{\infty} ie^{-ia(t-x)} \{ [\alpha A_1 + A_2 \alpha y] e^{-\alpha y} + [\alpha A_3 + A_4 \alpha y] e^{\alpha y} \} d\alpha \\ &\quad + P^1 \int_0^{\infty} ie^{ia(t-x)} \left\{ \begin{aligned} & [(-\alpha)(-A_1) + (-A_2)(-\alpha)y] e^{-\alpha y} \\ & + [(-\alpha)(-A_3) + (-A_4)(-\alpha)y] e^{\alpha y} \end{aligned} \right\} d\alpha \\ &\quad + Q^1 \int_0^{\infty} ie^{ia(t-x)} \left\{ \begin{aligned} & [(-\alpha)(-A_1) + (-A_2)(-\alpha)y] e^{-\alpha y} \\ & + [(-\alpha)(-A_3) + (-A_4)(-\alpha)y] e^{\alpha y} \end{aligned} \right\} d\alpha = 0 \end{aligned} \quad (169)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_1}{\partial x}(x,y) &= P^1 \int_0^\infty \left\{ [\alpha A_1 + A_2 \alpha y] e^{-\alpha y} + [\alpha A_3 + A_4 \alpha y] e^{\alpha y} \right\} i [\cos \alpha(t-x) - i \sin \alpha(t-x)] d\alpha \\
&+ Q^1 \int_0^\infty \left\{ [\alpha A_1 + A_2 \alpha y] e^{-\alpha y} + [\alpha A_3 + A_4 \alpha y] e^{\alpha y} \right\} i [\cos \alpha(t-x) - i \sin \alpha(t-x)] d\alpha \\
&+ P^1 \int_0^\infty \left\{ \begin{aligned} & [(-\alpha)(-A_1) + (-A_2)(-\alpha)y] e^{-\alpha y} + \\ & [(-\alpha)(-A_3) + (-A_4)(-\alpha)y] e^{\alpha y} \end{aligned} \right\} i [\cos \alpha(t-x) + i \sin \alpha(t-x)] d\alpha \\
&+ Q^1 \int_0^\infty \left\{ \begin{aligned} & [(-\alpha)(-A_1) + (-A_2)(-\alpha)y] e^{-\alpha y} + \\ & [(-\alpha)(-A_3) + (-A_4)(-\alpha)y] e^{\alpha y} \end{aligned} \right\} i [\cos \alpha(t-x) + i \sin \alpha(t-x)] d\alpha = 0 \quad (170)
\end{aligned}$$

Gerekli sadeleştirmeler yapıldıktan sonra denklem aşağıdaki halini alır.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_1}{\partial x}(x,y) &= -2 \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\mu_1} \int_a^b p(t) dt \int_0^\infty \left\{ \begin{aligned} & [\alpha A_1 + A_2 \alpha y] e^{-\alpha y} + \\ & [\alpha A_3 + A_4 \alpha y] e^{\alpha y} \end{aligned} \right\} [\sin \alpha(t-x) d\alpha] dt \\
&- 2 \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\mu_1} \int_c^d q(t) dt \int_0^\infty \left\{ \begin{aligned} & [\alpha A_1 + A_2 \alpha y] e^{-\alpha y} + \\ & [\alpha A_3 + A_4 \alpha y] e^{\alpha y} \end{aligned} \right\} [\sin \alpha(t-x) d\alpha] dt = 0 \quad (171)
\end{aligned}$$

(171) nolu denklemde  $y \rightarrow h$  limitine geçilirken pay paydaya bölündüğünde ıraksak, temas gerilmesinin düzgün bir şekilde elde edilmesini önleyen terimler ortaya çıkmaktadır. Bu durumu gidermek için ortaya çıkan;

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_1} \int_a^b p(t) dt \int_0^\infty e^{-\alpha(h-y)} \left[ \frac{1+\kappa_1}{4} - \frac{\alpha}{2}(h-y) \right] \sin \alpha(t-x) d\alpha \\
& - \frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_1} \int_c^d q(t) dt \left[ \int_0^\infty e^{-\alpha(h-y)} \left[ \frac{1+\kappa_1}{4} - \frac{\alpha}{2}(h-y) \right] \sin \alpha(t-x) d\alpha \right] \quad (172)
\end{aligned}$$

İfadesinin kapalı integrali integral dönüşüm tablolarından kolaylıkla bulunabilir. Buna göre;

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha(h-y)} \sin \alpha(t-x) d\alpha = \frac{(t-x)}{(h-y)^2 + (t-x)^2}$$

$$\int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha(h-y)} \sin \alpha(t-x) d\alpha = (h-y) \frac{2(h-y)(t-x)}{[(h-y)^2 + (t-x)^2]^2} \quad (173)$$

olarak elde edilip  $y \rightarrow h$  limitine geçilirse, gerekli kısaltmalarında yapılması sonucunda aşağıdaki integral denklemler elde edilmiş olur.

$$-\frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_1} \int_a^b p(t_1) dt_1 \left[ k_1(x_1, t_1) + \frac{1+\kappa_1}{4} \frac{1}{(t_1-x_1)} \right]$$

$$-\frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_1} \int_c^d q(t_2) dt_2 \left[ k_1(x_1, t_2) + \frac{1+\kappa_1}{4} \frac{1}{(t_2-x_1)} \right] = 0 \quad a < x_1 < b \quad (174)$$

$$-\frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_1} \int_a^b p(t_1) dt_1 \left[ k_1(x_2, t_1) + \frac{1+\kappa_1}{4} \frac{1}{(t_1-x_2)} \right]$$

$$-\frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_1} \int_c^d q(t_2) dt_2 \left[ k_1(x_2, t_2) + \frac{1+\kappa_1}{4} \frac{1}{(t_2-x_2)} \right] = 0 \quad c < x_2 < d \quad (175)$$

Denklemden geçen  $k_1$  çekirdeği aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$k_1(x, t) = \int_0^{\infty} \{ \{ 16 \alpha^3 (1 + \kappa_1) ((e^{-4\alpha h} - e^{-4\alpha h_2} - 4\alpha e^{-2\alpha h - 2\alpha h_2} (h - h_2)) (1 + \kappa_2) \\ ma(-1 - \kappa_3 - (1 + \kappa_2) mb) + e^{-4\alpha h_2} (1 + \kappa_3 - (1 + \kappa_2) mb) + 2e^{-2\alpha h_2} \\ (-2\alpha h_2 (1 + \kappa_3) + (1 + \kappa_2) mb)) + (e^{-4\alpha h} + e^{-4\alpha h_2} - 2e^{-2\alpha h - 2\alpha h_2}) \\ (1 + \kappa_1) (1 + \kappa_3 + (1 + \kappa_2) mb) + e^{-4\alpha h_2} (1 + \kappa_3 - (1 + \kappa_2) mb) + \\ 2e^{-2\alpha h_2} ((1 + 2\alpha^2 h_2^2)(-1 - \kappa_3) + 2\alpha h_2 (1 + \kappa_2) mb) \} / \Delta - \\ (1 + \kappa_1) / 4 \} \{ \sin \alpha(t - x) \} d\alpha \quad (176)$$

### 2.3.4. İntegral Denklemın Sayısal Çözümü

İntegral denklemın sayısal çözümünü kolaylaştırmak için  $\alpha=h/z$  değişken dönüşümü yapılmış ve  $a<x_1<b, c<x_2<d$  olmak üzere aşağıdaki boyutsuz büyüklükler tanımlanmıştır.

$$x_1 = \frac{b-a}{2} r_1 + \frac{b+a}{2} \quad t_1 = \frac{b-a}{2} s_1 + \frac{b+a}{2} \quad (177)$$

$$x_2 = \frac{d-c}{2} r_2 + \frac{d+c}{2} \quad t_2 = \frac{d-c}{2} s_2 + \frac{d+c}{2} \quad (178)$$

$$G_1 = p(s_1)/P/h \quad G_2 = q(s_2)/P/h \quad (179)$$

Tanımlanan bu boyutsuz büyüklükler (174) ve (175) no'lu integral denklemlerde yerlerine yazıldığında;

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_1(s_1) \frac{b-a}{2h} ds_1 + [m_1(r_1, s_1) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{\frac{b-a}{2}(s_1-r_1)}] \\ & -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_2(s_2) \frac{d-c}{2h} ds_2 + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{[\frac{d-c}{2}s_2 + \frac{d+c}{2}] - [\frac{b-a}{2}r_1 + \frac{b+a}{2}]} = 0 \end{aligned} \quad (180)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_1(s_1) \frac{b-a}{2h} ds_1 + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{[\frac{b-a}{2}s_1 + \frac{b+a}{2}] - [\frac{d-c}{2}r_2 + \frac{d+c}{2}]} \\ & -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_2(s_2) \frac{d-c}{2h} ds_2 + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{[\frac{d-c}{2}(s_2-r_2)]} = 0 \end{aligned} \quad (181)$$

$$m_1(r_1, s_1) = k_1(x_1, t_1), m_2(r_1, s_2) = k_1(x_1, t_2)$$

$$m_3(r_2, s_1) = k_1(x_2, t_1), m_4(r_2, s_2) = k_1(x_2, t_2)$$

denklemleri elde edilir. Burada  $g(s)$  rijit blok altında ortaya çıkan boyutsuz temas gerilmesidir.  $g(s)$   $s=\pm 1$  'de tekilliğe sahip olduğundan integral denklemin indeksi +1'dir ve çözüm;

$$g_i(s_i) = \frac{G_i(s_i)}{(1-s_i^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (-1 < s_i < 1) \quad (i=1,2) \quad (182)$$

olarak alınabilir (Erdoğan ve Gupta, 1972). Uygun Gauss-Chebyshev integrasyon formülü kullanılacak olursa (180) ve (181) nolu denklemler;

$$\begin{aligned} & -\sum_{i=1}^n W_i G_1(s_{1i}) \frac{b-a}{2h} \left[ m_1(r_1, s_1) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{\frac{b-a}{2}(s_{1i}-r_{1j})} \right] \\ & -\sum_{i=1}^n W_i G_2(s_{2i}) \frac{d-c}{2h} \left[ m_2(r_1, s_2) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{\left[ \frac{d-c}{2}s_{2i} + \frac{d+c}{2} \right] - \left[ \frac{b-a}{2}r_{1j} + \frac{b+a}{2} \right]} \right] = 0 \\ & \quad \quad \quad (j=1, \dots, n-1) \end{aligned} \quad (183)$$

$$\begin{aligned} & -\sum_{i=1}^n W_i G_1(s_{1i}) \frac{b-a}{2h} \left[ m_3(r_2, s_1) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{\left[ \frac{b-a}{2}s_{1i} + \frac{b+a}{2} \right] - \left[ \frac{d-c}{2}r_{2j} + \frac{d+c}{2} \right]} \right] \\ & -\sum_{i=1}^n W_i G_2(s_{2i}) \frac{d-c}{2h} \left[ m_4(r_2, s_2) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{\left[ \frac{d-c}{2}(s_{2i}-r_{2j}) \right]} \right] = 0 \\ & \quad \quad \quad (j=1, \dots, n-1) \end{aligned} \quad (184)$$

şeklini alır.



Probleme ait denge şartları ;

$$\int_a^b p(t_1) dt_1 = P \quad (a)$$

$$\int_c^d q(t_2) dt_2 = Q \quad (b) \quad (185a-b)$$

Bu şartlarda tanımlanan boyutsuz büyüklükler kullanılırsa

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_1(s_1) \frac{b-a}{2} ds_1 = 1 \quad (a)$$

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_2(s_2) \frac{d-c}{2} ds_2 = \frac{Q}{P} \quad (b) \quad (186a-b)$$

elde edilir.

Uygun Gauss Chebyshev integrasyon formülleri kullanılırsa denge denklemleri

$$\sum_{i=1}^n \pi W_i G_1(s_{1i}) \frac{b-a}{2h} = 1 \quad (a)$$

$$\sum_{i=1}^n \pi W_i G_2(s_{2i}) \frac{d-c}{2h} = Q/P \quad (b) \quad (187a-b)$$

olarak elde edilir.

Bu eşitliklerde;

$$W_{1i} = W_{2i} \quad W_1 = W_n = \frac{1}{2n-2} \quad W_i = \frac{1}{n-1} \quad i=2, \dots, n-1 \quad (188)$$

$$s_{1i} = s_{2i} = \cos\left(\frac{i-1}{n-1}\pi\right) \quad i=1, \dots, n \quad (a)$$

$$r_{1j} = r_{2j} = \cos\left(\frac{2j-1}{2n-2}\pi\right) \quad j=1, \dots, n-1 \quad (b) \quad (189a-b)$$

olarak tanımlanmıştır. Böylece (183) ve (184) ve (187) nolu denklemlerden  $2n$  bilinmeyenli  $2n$  tane denklem elde edilmiş olur ve bilinmeyen temas gerilmeleri  $p(x)$ ,  $q(x)$  ve bunlara bağlı olarak bulunan  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_j$  ( $i=1,2,\dots,4$ ) ( $j=1,2$ ) katsayıları belirlenebilir.

### 2.3.5. Gerilme Çekirdeklerinin Yakınsama Kontrolü

Elastik yarı sonsuz düzleme oturan elastik iki tabaka problemine ait gerilme ve yer değiştirme ifadeleri (89)-(93) nolu denklemlerde elde edilmiştir. Bölüm 2.3.2 'de belirlenmiş olan  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_j$  ( $i=1,2,\dots,4$ ) ( $j=1,2$ ) katsayıları ile integral denklemin çözülmesiyle elde edilen  $p(x)$  ve  $q(x)$  temas gerilmelerinin gerilme ve yer değiştirme ifadelerinde yerine konularak bu ifadelerin çekirdeklerinin yakınsayıp yakınsamadığının kontrol edilmesi gerekmektedir. Çünkü gerilme ve yer değiştirmelerin doğru olarak hesaplanabilmesi için gerilme ve yer değiştirme çekirdeklerinin yakınsamaları gerekir aksi halde integral sınırları doğru olarak belirlenemez dolayısıyla gerilme ve yer değiştirmeler doğru olarak hesaplanamaz.

Yapılan çalışmalar sonucu yalnız  $y \rightarrow h$  durumunda  $\sigma_x(x,y)$ ,  $\sigma_y(x,y)$ ,  $\tau_{xy}(x,y)$  gerilmelerine ait çekirdeklerde yakınsama durumunun bozulduğu gözlenmiştir. Diğer yerlerde ise gerilme ve yer değiştirmelere ait çekirdeklerin yakınsadığı yani sürekli olarak sıfıra yaklaştıkları belirlenmiştir.

$\sigma_x(x,y)$ ,  $\sigma_y(x,y)$ ,  $\tau_{xy}(x,y)$  gerilmelerine ait çekirdekleri bozan singüler terimler aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\begin{aligned}\sigma_{x_{1k}}(x,y) = & -\frac{1}{\pi} \int_a^b p(t_1) dt_1 \int_0^\infty [-1 + \alpha(h-y)] e^{-\alpha(h-y)} [\cos\alpha(t_1-x)] d\alpha \\ & -\frac{1}{\pi} \int_c^d q(t_2) dt_2 \int_0^\infty [-1 + \alpha(h-y)] e^{-\alpha(h-y)} [\cos\alpha(t_2-x)] d\alpha\end{aligned}\quad (190)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{y_{1k}}(x,y) = & -\frac{1}{\pi} \int_a^b p(t_1) dt_1 \int_0^\infty [1 + \alpha(h-y)] e^{-\alpha(h-y)} [\cos\alpha(t_1-x)] d\alpha \\ & -\frac{1}{\pi} \int_c^d q(t_2) dt_2 \int_0^\infty [1 + \alpha(h-y)] e^{-\alpha(h-y)} [\cos\alpha(t_2-x)] d\alpha\end{aligned}\quad (191)$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy_{1k}}(x,y) = & -\frac{1}{\pi} \int_a^b p(t_1) dt_1 \int_0^\infty [\alpha(h-y)] e^{-\alpha(h-y)} [\sin\alpha(t_1-x)] d\alpha \\ & -\frac{1}{\pi} \int_c^d q(t_2) dt_2 \int_0^\infty [\alpha(h-y)] e^{-\alpha(h-y)} [\sin\alpha(t_2-x)] d\alpha\end{aligned}\quad (192)$$

Bu singüler terimlerin kapalı integralleri ise;

$$\begin{aligned}\sigma_{x_{1m}} = & -\int_a^b p(t_1) \left[ -\frac{(h-y)}{(h-y)^2 + (t_1-x)^2} + (h-y) \frac{(h-y)^2 - (t_1-x)^2}{[(h-y)^2 + (t_1-x)^2]^2} \right] dt_1 \\ & -\int_c^d q(t_2) \left[ -\frac{(h-y)}{(h-y)^2 + (t_2-x)^2} + (h-y) \frac{(h-y)^2 - (t_2-x)^2}{[(h-y)^2 + (t_2-x)^2]^2} \right] dt_2\end{aligned}\quad (193)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{y_{1m}} = & -\int_a^b p(t_1) \left[ \frac{(h-y)}{(h-y)^2 + (t_1-x)^2} + (h-y) \frac{(h-y)^2 - (t_1-x)^2}{[(h-y)^2 + (t_1-x)^2]^2} \right] dt_1 \\ & -\int_c^d q(t_2) \left[ \frac{(h-y)}{(h-y)^2 + (t_2-x)^2} + (h-y) \frac{(h-y)^2 - (t_2-x)^2}{[(h-y)^2 + (t_2-x)^2]^2} \right] dt_2\end{aligned}\quad (194)$$

$$\tau_{xy_{1m}} = -\int_a^b p(t_1) [(h-y) \frac{2(h-y)(t_1-x)}{[(h-y)^2 + (t_1-x)^2]^2}] dt_1$$

$$-\int_c^d q(t_2) [(h-y) \frac{2(h-y)(t_2-x)}{[(h-y)^2 + (t_2-x)^2]}] dt_2 \quad (195)$$

olarak belirlenmiştir.

Yakınsamayı bozan (190), (191), (192) ifadelerindeki singüler terimlerin gerilme ifadelerinden çıkarılarak, bunların kapalı integrallerinin ilave edilmesi ile çekirdekteki bozulmalar giderilmiş olur. Buna göre;

$$\sigma_{x_1}^*(x, y) = \sigma_{x_1}(x, y) - \sigma_{x_{1k}}(x, y) + \sigma_{x_{1m}}(x, y) \quad (196)$$

$$\sigma_{y_1}^*(x, y) = \sigma_{y_1}(x, y) - \sigma_{y_{1k}}(x, y) + \sigma_{y_{1m}}(x, y) \quad (197)$$

$$\tau_{xy_1}^*(x, y) = \tau_{xy_1}(x, y) - \tau_{xy_{1k}}(x, y) + \tau_{xy_{1m}}(x, y) \quad (198)$$

Gerilme ve yer değiştirme ifadeleri boyutsuz hale getirildikten sonra Fortran programlama dilinde yazılmış bir bilgisayar programı ile herhangi bir noktadaki gerilme ve yer değiştirmeler hesaplanmıştır.

### 2.3.6. Alt Tabaka ile Elastik Yarı Sonsuz Düzlem ve Tabakalar Arasındaki İlk Ayrılma Yükleri ve İlk Ayrılma Uzaklıkları

Tabakaların birbirine temas ettikleri yüzeydeki  $\sigma_y(x,y)$  gerilme yayılımı ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklığının hesaplanmasında kullanılır. Temas yüzeylerindeki  $\sigma_{y_1}(x,h_2)$  ve  $\sigma_{y_2}(x,0)$  gerilmelerine, kütle kuvvetleri eklenip gerekli ara işlemlerin yapılması sonucunda ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıklarını veren ifadeler aşağıdaki gibi elde edilirler:

$$\sigma_{y_1}(x,h_2) = -\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\pi} \int_a^b k_2(x,t_1)p(t_1)dt_1 - \frac{1}{\pi} \int_c^d k_2(x,t_2)q(t_2)dt_2 \quad -\infty < x < \infty \quad (199)$$

$$\sigma_{y_2}(x,0) = -\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\pi} \frac{\mu_2}{\mu_1} \int_a^b k_3(x,t_1)p(t_1)dt_1 - \frac{1}{\pi} \frac{\mu_2}{\mu_1} \int_c^d k_3(x,t_2)q(t_2)dt_2 \quad -\infty < x < \infty \quad (200)$$

Burada  $\lambda_1, \lambda_2$  yük faktörleri olup;

$$\lambda_1 = \frac{P}{\rho_1 g h_1} \quad (201)$$

$$\lambda_2 = \frac{P}{\rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2} \quad (202)$$

olarak tanımlanmıştır.

(199) ve (200) ifadelerinde geçen  $k_2(x,t)$  ve  $k_3(x,t)$  integral denklemlerin çekirdekleri olup açık halleri aşağıdaki gibidir.

$$k_2(x,t) = \int_0^{\infty} [128\alpha^3 (e^{-2\alpha h} (-1 + \alpha(h-h_2)) + e^{-2\alpha h_2} (1 + \alpha(h-h_2)))] (1 + \kappa_1) [e^{-\alpha h - 5\alpha h_2} ((1 + \kappa_3) - (1 + \kappa_2)mb) + e^{-\alpha h - \alpha h_2} ((1 + \kappa_3) + (1 + \kappa_2)mb) - 2e^{-\alpha h - 3\alpha h_2} ((1 + 2\alpha^2 h_2^2)(1 + \kappa_3) - 2\alpha h_2(1 + \kappa_2)mb)] / (\cos \alpha(t-x)) d\alpha \quad (203)$$

$$k_3(x,t) = \int_0^{\infty} \{ -256\alpha^3 [(1+\alpha h_2) + e^{-2\alpha h_2} (-1+\alpha h_2)] (1+\kappa_1)(1+\kappa_2) mb [e^{-\alpha h - 4\alpha h_2} (-1+\alpha(-h+h_2)) + e^{-3\alpha h - 2\alpha h_2} (1+\alpha(-h+h_2))] \} / (\cos\alpha(t-x)) d\alpha \quad (204)$$

$\lambda_1$  yük faktörünün belli bir kritik değere ( $\lambda_{cr_1}$ ) ulaşması durumunda tabakalar arasında ayrılmalar söz konusu olur ve problem süreksiz temas problemine dönüşür. Bu nedenle sürekli temas durumunun gerçekleşmesi için temas gerilmelerinin temas yüzeyi boyunca her yerde basınç olması gerekir bu da ancak  $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_{cr_1}$  olması ile sağlanabilir.  $\lambda_1 > \lambda_{cr_1}$  olması durumunda tabakalar arasında ayrılmalar olur ve problem süreksiz temas problemine dönüşür.

Tabakalar arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklığının belirlenebilmesi için (199) ifadesinin sıfıra eşitlenmesi gerekir. Bu eşitlikler yardımıyla ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıkları birlikte bulunabilir. Bu eşitliği sağlayan  $x$  uzaklığı, ilk ayrılma uzaklığı ( $x_{cr_1}$ ) ve buna karşılık gelen yük faktörü de kritik yük faktörü ( $\lambda_{cr_1}$ ) olarak ifade edilebilir.

$$\lambda_{cr_1} = \frac{P_{cr}}{\rho_1 g h_1} \quad (205)$$

Elastik yarı sonsuz düzlem ve alt tabakaya ait ara yüzeydeki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklığının belirlenebilmesi için ise (200) nolu ifadenin sıfıra eşitlenmesi gerekir.  $\lambda_2$  yük faktörünün belli bir kritik değere ( $\lambda_{cr_2}$ ) ulaşması durumunda ise elastik yarı sonsuz düzlem ve alt tabaka arasında ayrılmalar söz konusu olur ve problem süreksiz temas problemine dönüşür. Bu nedenle sürekli temas durumunun gerçekleşmesi için temas gerilmelerinin temas yüzeyi boyunca her yerde basınç olması gerekir bu da ancak  $0 \leq \lambda_2 \leq \lambda_{cr_2}$  olması ile sağlanabilir.  $\lambda_2 > \lambda_{cr_2}$  olması durumunda alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında ayrılmalar olur ve problem süreksiz temas problemine dönüşür.

Bu durumda ilk ayrılma uzaklığı ( $x_{cr_2}$ ) ve buna karşılık gelen yük faktörü de kritik yük faktörü  $\lambda_{cr_2}$  olarak ifade edilebilir.

$$\lambda_{cr_2} = \frac{P_{cr}}{\rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2} \quad (206)$$

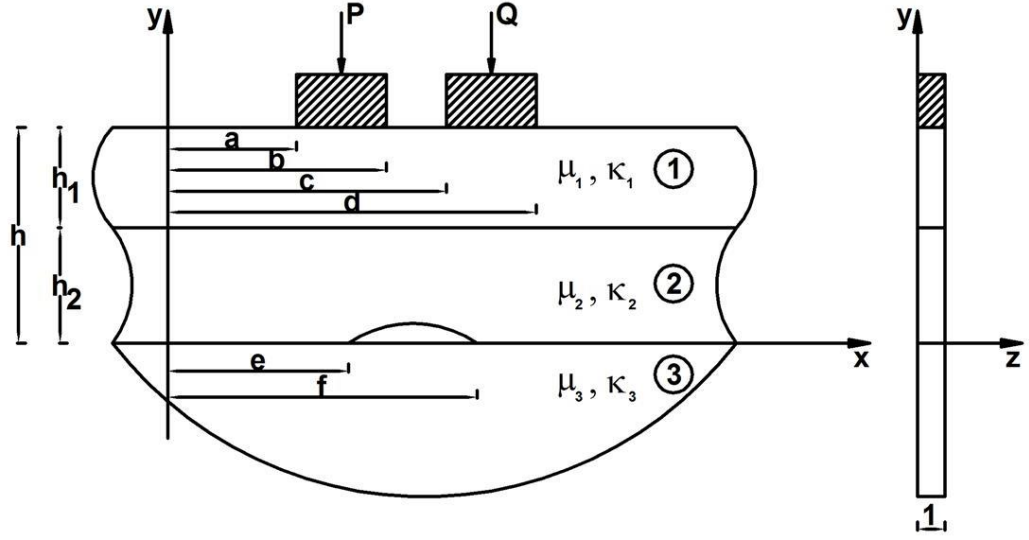
## 2.4. Süreksiz Temas

İki rijit düz blok aracılığı ile yüklenmiş elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan tabakalara ait süreksiz temas problemi iki durum için ayrı ayrı incelenmiştir. Bunlardan birincisi alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki süreksizlik, ikincisi ise iki elastik tabakaya ait ara yüzeyde meydana gelecek süreksizlik durumudur.

Problem çözülürken bütün yüzeylerin sürtünmesiz olduğu kabulü yapılmış ve çözümde elastisite teorisinden yararlanılmıştır.

### 2.4.1. Alt Tabaka ve Elastik Yarı Sonsuz Düzleme Ait Ara Yüzeyde Meydana Gelen Süreksizlik

Elastik tabaka ve elastik yarı sonsuz düzleme ait ara yüzeyde ayrılma meydana gelebilmesi için yükün ( $\lambda_2$ ), bu yüzeyde ilk ayrılmayı meydana getirecek yükten ( $\lambda_{cr_2}$ ) daha büyük değerler alması gerekir.  $\lambda_2 > \lambda_{cr_2}$  olması durumunda sürekli temasta geçen (129) nolu sınır şartı artık geçerli olmayacaktır. Elastik yarı sonsuz düzlem ve alt tabakanın birbirinden ayrıldığı (e, f) aralığında düşey yer değiştirmeler farkının türevi  $\varphi(x)$  gibi bilinmeyen bir fonksiyona eşit alınmıştır. Bu fonksiyonun integrali ise (e, f) aralığındaki elastik yarı sonsuz düzlem ile alt tabaka arasındaki ayrılmayı verecektir. Elastik tabakalar ve elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki süreksizlikler incelenirken, ara yüzeylerde sürtünmenin bulunmadığı kabul edilmiştir. Tabakalara ait kütle kuvvetleri ise hesaba katılmıştır. Elastik yarı sonsuz düzlem ve alt tabaka arasında süreksizlik bulunması halinde kullanılacak sınır şartları aşağıda verilmiştir.



Şekil 8. Alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki süreksiz temas probleminin geometrisi

#### 2.4.1.1. Sınır Şartları

$$\sigma_{y_1}(x, h) = \begin{cases} -p(x) & a < x < b \\ -q(x) & c < x < d \\ 0 & -\infty < x < a, b < x < c, d < x < \infty \end{cases} \quad (207)$$

$$\tau_{xy_1}(x, h) = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (208)$$

$$\tau_{xy_1}(x, h_2) = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (209)$$

$$\tau_{xy_2}(x, 0) = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (210)$$

$$\tau_{xy_2}(x, h_2) = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (211)$$

$$\sigma_{y_2}(x, h_2) = \sigma_{y_1}(x, h_2) \quad -\infty < x < \infty \quad (212)$$



$$\frac{\partial}{\partial x} [v_2(x, h_2) - v_1(x, h_2)] = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (213)$$

$$\tau_{xy_3}(x, 0) = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (214)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_2(x, 0) - v_3(x, 0)] = \begin{cases} \varphi(x) & e < x < f \\ 0 & -\infty < x < e, f < x < \infty \end{cases} \quad (215)$$

$$\sigma_{y_2}(x, 0) = \sigma_{y_3}(x, 0) = 0 \quad e < x < f \quad (216)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, h)] &= 0 & a < x < b & \text{(a)} \\ \frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, h)] &= 0 & c < x < d & \text{(b)} \end{aligned} \quad (217a-b)$$

Probleme ait denge şartları ;

$$\int_a^b p(x) dx = P^II \quad (a)$$

$$\int_c^d q(x) dx = Q^II \quad (b)$$

iken tek değeriilik şartı ise, aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\int_e^f \varphi(x) dx = 0 \quad (c) \quad (218a-b-c)$$

### 2.4.1.2. Katsayıların Belirlenmesi

Sürekli temasla ilgili olarak (207)-(216) nolu eşitliklerle verilen sınır şartlarında gerilme ve yer değiştirme ifadelerinin uygulanması sonucu 10 tane cebrik denklem takımı elde edilmiştir. Bu denklem takımında bilinmeyenler  $A_i^*, B_i^*, C_j^*$  ( $i=1, \dots, 4$   $j=1, 2$ ) 'dir.

$$(-2|\alpha|e^{-2|\alpha|h})A_1^* + [(-2|\alpha|h + (\kappa_1 - 1))e^{-2|\alpha|h}]A_2^* + 2|\alpha|A_3^* + [(2|\alpha|h + (\kappa_1 - 1))]A_4^* = (P + Q)e^{-|\alpha|h} \quad (219)$$

$$(2\alpha e^{-2|\alpha|h})A_1^* + [(-\frac{|\alpha|}{\alpha}(\kappa_1 + 1) + 2\alpha h)e^{-2|\alpha|h}]A_2^* + 2\alpha A_3^* + [(\frac{|\alpha|}{\alpha}(\kappa_1 + 1) + 2\alpha h)]A_4^* = 0 \quad (220)$$

$$(2\alpha e^{-2|\alpha|h_2})A_1^* + [(-\frac{|\alpha|}{\alpha}(\kappa_1 + 1) + 2\alpha h_2)e^{-2|\alpha|h_2}]A_2^* + 2\alpha A_3^* + [(\frac{|\alpha|}{\alpha}(\kappa_1 + 1) + 2\alpha h_2)]A_4^* = 0 \quad (221)$$

$$2\alpha B_1^* + [(-\frac{|\alpha|}{\alpha}(\kappa_2 + 1))]B_2^* + 2\alpha B_3^* + [(\frac{|\alpha|}{\alpha}(\kappa_2 + 1))]B_4^* = 0 \quad (222)$$

$$(2\alpha e^{-2|\alpha|h_2})B_1^* + [(-\frac{|\alpha|}{\alpha}(\kappa_2 + 1) + 2\alpha h_2)e^{-2|\alpha|h_2}]B_2^* + 2\alpha B_3^* + [(\frac{|\alpha|}{\alpha}(\kappa_2 + 1) + 2\alpha h_2)]B_4^* = 0 \quad (223)$$

$$\begin{aligned}
& (-2|\alpha|e^{-2|\alpha|h_2} B_1^* \frac{\mu_2}{\mu_1} + [(-2|\alpha|h_2 + (\kappa_2 - 1))e^{-2|\alpha|h_2}] B_2^* \frac{\mu_2}{\mu_1} + 2|\alpha| B_3^* \frac{\mu_2}{\mu_1} + [(2|\alpha|h_2 \\
& + (\kappa_2 - 1))] B_4^* \frac{\mu_2}{\mu_1} + (2|\alpha|e^{-2|\alpha|h_2}) A_1^* - [(-2|\alpha|h_2 + (\kappa_1 - 1))e^{-2|\alpha|h_2}] A_2^* \\
& - 2|\alpha| A_3^* - [(2|\alpha|h_2 + (\kappa_1 - 1))] A_4^* = 0
\end{aligned} \tag{224}$$

$$[B_1^* + B_2^* h_2] e^{-2|\alpha|h_2} + [B_3^* + B_4^* h_2] - [A_1^* + A_2^* h_2] e^{-2|\alpha|h_2} - [A_3^* + A_4^* h_2] = 0 \tag{225}$$

$$2\alpha C_1^* + \left[ \frac{|\alpha|}{\alpha} (\kappa_3 + 1) \right] C_2^* = 0 \tag{226}$$

$$B_1^* + B_3^* - C_1^* = \frac{F}{i\alpha} \tag{227}$$

$$\begin{aligned}
& (-2|\alpha| B_1^* + (\kappa_2 - 1) B_2^* + 2|\alpha| B_3^* + (\kappa_2 - 1) B_4^* \\
& - \frac{\mu_3}{\mu_2} [2|\alpha| C_1^* + (\kappa_3 + 1) C_2^*]) = 0
\end{aligned} \tag{228}$$

$$F = \frac{1}{2\pi} \int_e^f \varphi(t) dt \tag{229}$$

Bu denklem sisteminin çözümünden katsayılar, bilinmeyen temas gerilmeleri  $p(x)$ ,  $q(x)$ 'e ve  $\varphi(x)$  e bağlı olarak aşağıdaki gibi belirlenmiştir.

$$\begin{aligned}
A_1^* &= 128\alpha^2 \frac{Fmb}{i} (1 + \kappa_2) \{ [e^{-2ah_2} (-1 + \alpha h_2) + (1 + \alpha h_2)] \\
& + [e^{-4ah_2} (1 - 2\alpha h_2 + \kappa_1) + e^{-2ah_2 - 2\alpha h_2} (1 - 2\alpha h_2 + \kappa_1) + 2a(h - h_2)(2a - \kappa_1)] \} / \Delta
\end{aligned} \tag{230}$$

$$A_2^* = 256\alpha^3 \frac{Fmb}{i} (1 + \kappa_2) \{ [e^{-4ah_2} + e^{-2ah-2ah_2} (-1 + 2\alpha(h - h_2))] [(-1 + \alpha h_2) (e^{-2ah_2} + (1 + \alpha h_2))] \} / \Delta \quad (231)$$

$$A_3^* = -128\alpha^2 \frac{Fmb}{i} (1 + \kappa_2) \{ [e^{-2ah_2} (-1 + \alpha h_2) + (1 + \alpha h_2)] + [e^{-4ah-2ah_2} (1 + 2\alpha h_2 + \kappa_1) - e^{-2ah-4ah_2} (1 + (2\alpha h + \kappa_1)(1 + 2\alpha h - 2\alpha h_2))] \} / \Delta \quad (232)$$

$$A_4^* = 256\alpha^3 \frac{Fmb}{i} (1 + \kappa_2) \{ [e^{-2ah_2} (1 + \alpha h_2) + (-1 + \alpha h_2)] + [e^{-4ah-2ah_2} + e^{-2ah-4ah_2} (-1 + 2\alpha h - 2\alpha h_2)] \} / \Delta \quad (233)$$

$$B_1^* = -64\alpha^2 \frac{Fmb}{i} \{ [e^{-4ah} - e^{-4ah_2} - 2e^{-2ah-2ah_2} (2\alpha(h - h_2))] (1 + \kappa_1) [(1 - e^{-2ah_2} (1 - 2\alpha h_2)) ((1 + \kappa_2) - 4\alpha^2 h_2^2 e^{-2ah_2})] + [e^{-4ah} - e^{-4ah_2} - 2e^{-2ah-2ah_2} (1 + 2\alpha^2 (h - h_2)^2)] (1 + \kappa_2) ma [(-1 + e^{-2ah_2} (1 + \kappa_2) - 4\alpha h_2 e^{-2ah_2})] \} / \Delta \quad (234)$$

$$B_2^* = -128\alpha^3 \frac{Fmb}{i} \{ [e^{-4ah} - e^{-4ah_2} + 2e^{-2ah-2ah_2} (-2\alpha(h - h_2))] (1 + \kappa_1) [(1 + e^{-2ah_2} (-1 + 2\alpha h_2))] + [e^{-4ah} + e^{-4ah_2} - 2e^{-2ah-2ah_2} (1 + 2\alpha^2 (h - h_2)^2)] [-1 + e^{-2ah_2}] (1 + \kappa_2) ma \} / \Delta \quad (235)$$

$$B_3^* = 64\alpha^2 \frac{Fmb}{i} \{ [e^{-4ah} - e^{-4ah_2} - 2e^{-2ah-2ah_2} (2\alpha(h - h_2))] (1 + \kappa_1) [(e^{-4ah_2} - e^{-2ah_2} (1 + 2\alpha h_2)) (1 + \kappa_2) - 4\alpha h_2 e^{-2ah_2}] + [e^{-4ah} + e^{-4ah_2} - 2e^{-2ah-2ah_2} (1 + 2\alpha^2 (h - h_2)^2)] (1 + \kappa_2) ma [(e^{-4ah_2} - e^{-2ah_2}) (1 + \kappa_2) - 4\alpha h_2 e^{-2ah_2}] \} / \Delta \quad (236)$$

$$\begin{aligned}
B_4^* = 128\alpha^3 \frac{Fmb}{i} \{ & [e^{-4ah_2} (1 + 2\alpha h_2) - e^{-2ah_2}] (1 + \kappa_1) [-e^{-4ah} + e^{-4ah_2}] \\
& + 2e^{-2ah-2ah_2} (2\alpha(h - h_2)) [-e^{-4ah_2} + e^{-2ah_2}] (1 + \kappa_2) ma [-e^{-4ah} + e^{-4ah_2}] \\
& - 2e^{-2ah-2ah_2} (1 + 2\alpha^2 (h - h_2)^2) + 4\alpha h_2 ma [-e^{-4ah} + e^{-2ah_2}] [e^{-4ah} \\
& + e^{-4ah_2} - 2e^{-2ah-2ah_2}] + 8\alpha^3 (h - h_2)^2 h_2 2e^{-2ah-2ah_2} (e^{-4ah_2} - e^{-2ah_2}) \} / \Delta
\end{aligned} \quad (237)$$

$$\begin{aligned}
C_1^* = 64\alpha^2 \frac{F}{i} (1 + \kappa_3) \{ & [e^{-4ah} + e^{-4ah_2} + 2e^{-2ah-2ah_2} (2\alpha(h - h_2))] [-1 - e^{-4ah_2}] \\
& + 2e^{-2ah_2} (1 + 2\alpha^2 h^2) (1 + \kappa_1) + [e^{-4ah} + e^{-4ah_2} - 2e^{-2ah-2ah_2} (1 \\
& + 2\alpha^2 (h - h_2)^2)] [-1 + e^{-4ah_2} - 2e^{-2ah-2ah_2} (2\alpha h_2)] (1 + \kappa_2) ma \} / \Delta
\end{aligned} \quad (238)$$

$$\begin{aligned}
C_2^* = -128\alpha^3 \frac{F}{i} \{ & [e^{-4ah} - e^{-4ah_2} - 2e^{-2ah_2} (2\alpha(h - h_2))] [1 + e^{-4ah_2}] \\
& - 2e^{-2ah_2} (1 + 2\alpha^2 h^2) (1 + \kappa_1) + [e^{-4ah} + e^{-4ah_2} - 2e^{-2ah_2} (2\alpha h_2)] \\
& [-1 + e^{-4ah_2} - 2e^{-2ah_2} (1 + 2\alpha^2 (h - h_2)^2)] (1 + \kappa_2) ma \} / \Delta
\end{aligned} \quad (239)$$

### 2.4.1.3. İntegral Denklemlerin Elde Edilmesi

Elastik tabaka ve elastik yarı sonsuz düzleme ait ara yüzeyde ayrılma meydana gelmesi durumunda sınır şartlarından elde edilen  $A^*_1, A^*_2, A^*_3, A^*_4, B^*_1, B^*_2, B^*_3, B^*_4, C^*_1, C^*_2$  katsayıları  $p(x), q(x), \varphi(x)$  gibi bilinmeyen üç fonksiyona bağlı olarak belirlenmiştir. Bu fonksiyonların bulunabilmesi için (216) ve (217) nolu

$$\sigma_{y_2}(x, 0) - (\rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2) = 0 \quad e < x < f \quad (a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, h)] = 0 \quad a < x < b \quad (b)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, h)] = 0 \quad c < x < d \quad (c) \quad (240a,b,c)$$

sınır şartlarından faydalanılacaktır.

$A^*_1, A^*_2, A^*_3, A^*_4$ , katsayıları  $\frac{\partial}{\partial x}[v_1(x, y)]$  'de yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x}(x, y) = & -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\mu_1} \int_a^b p(t) e^{-iat} dt \int_{-\infty}^{\infty} i e^{iax} \left\{ \begin{array}{l} [\alpha A^*_1 + A^*_2 \alpha y] e^{-|\alpha|y} \\ + [\alpha A^*_3 + A^*_4 \alpha y] e^{|\alpha|y} \end{array} \right\} d\alpha \\ & -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\mu_1} \int_c^d q(t) e^{-iat} dt \int_{-\infty}^{\infty} i e^{iax} \left\{ \begin{array}{l} [\alpha A^*_1 + A^*_2 \alpha y] e^{-|\alpha|y} \\ + [\alpha A^*_3 + A^*_4 \alpha y] e^{|\alpha|y} \end{array} \right\} d\alpha \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_e^f \varphi(t) e^{-iat} dt \int_{-\infty}^{\infty} i e^{iax} \left\{ \begin{array}{l} [\alpha A^*_1 + A^*_2 \alpha y] e^{-|\alpha|y} \\ + [\alpha A^*_3 + A^*_4 \alpha y] e^{|\alpha|y} \end{array} \right\} d\alpha = 0 \end{aligned} \quad (241)$$

elde edilir. (241) nolu denklemde integral sınırları değiştirilip düzenlendikten sonra denklem

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x}(x, y) = & -2 \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\mu_1} \int_a^b p(t) dt \int_0^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} [\alpha A^*_1 + A^*_2 \alpha y] e^{-\alpha y} + \\ [\alpha A^*_3 + A^*_4 \alpha y] e^{\alpha y} \end{array} \right\} \{\sin\alpha(t-x)\} d\alpha \\ & -2 \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\mu_1} \int_c^d q(t) dt \int_0^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} [\alpha A^*_1 + A^*_2 \alpha y] e^{-\alpha y} + \\ [\alpha A^*_3 + A^*_4 \alpha y] e^{\alpha y} \end{array} \right\} \{\sin\alpha(t-x)\} d\alpha \\ & + 2 \frac{1}{2\pi} \int_e^f \varphi(t) dt \int_0^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} [\alpha A^*_1 + A^*_2 \alpha y] e^{-\alpha y} + \\ [\alpha A^*_3 + A^*_4 \alpha y] e^{\alpha y} \end{array} \right\} \{i \cos\alpha(t-x)\} d\alpha \end{aligned} \quad (242)$$

şeklini alır.

Yukarıdaki denklemde  $y \rightarrow h$  limitine geçilirken pay paydaya bölündüğünde, ortaya çıkan ıraksak ( integral denklemin yakınsamasını bozan ) singüler terimler,  $p(t)$  ve  $q(t)$  nin çarpan olduğu çekirdekler sürekli temastakinin aynısı olacağından sürekli temastakinin aynısıdır.

Bu durumda (240-b,c) den  $a < x < b$  ve  $c < x < d$  aralıklarında integral denklemlerden ikisi aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_1} \int_a^b p(t_1) dt_1 \left[ k_1(x_1, t_1) + \frac{1 + \kappa_1}{4} \frac{1}{(t_1 - x_1)} \right] \\
& -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_1} \int_c^d q(t_2) dt_2 \left[ k_1(x_1, t_2) + \frac{1 + \kappa_1}{4} \frac{1}{(t_2 - x_1)} \right] \\
& + \frac{1}{\pi} \int_e^f \varphi(t_3) dt_3 [k_3(x_1, t_3)] = 0 \quad a < x_1 < b \quad (243)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_1} \int_a^b p(t_1) dt_1 \left[ k_1(x_2, t_1) + \frac{1 + \kappa_1}{4} \frac{1}{(t_1 - x_2)} \right] \\
& -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_1} \int_c^d q(t_2) dt_2 \left[ k_1(x_2, t_2) + \frac{1 + \kappa_1}{4} \frac{1}{(t_2 - x_2)} \right] \\
& + \frac{1}{\pi} \int_e^f \varphi(t_3) dt_3 [k_3(x_2, t_3)] = 0 \quad c < x_2 < d \quad (244)
\end{aligned}$$

İntegral denklemde geçen  $k_1(x, t)$  ve  $k_3(x, t)$  çekirdekleri sırasıyla (176) ve (204) eşitlikleri ile tanımlanmıştır.

Bilinmeyen fonksiyonlar  $p(x)$ ,  $q(x)$  ve  $\varphi(x)$  'in belirlenmesinde kullanılacak üçüncü denklem ise (240-a) nolu eşitliktir.

$$\sigma_{y_2}(x, 0) - (\rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2) = 0 \quad e < x < f$$

$B^*_1, B^*_2, B^*_3, B^*_4$  katsayıları kütle kuvvetleri dikkate alındığı durumda ortaya çıkacak  $\sigma_{y_2}(x, y)$  düşey gerilme ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\sigma_{y_2}(x,y) = & \left[ -\frac{1}{\mu_1} \frac{\mu_2}{2\pi} \int_a^b p(t) e^{-iat} dt \int_{-\infty}^{\infty} i e^{iax} \left\{ \begin{array}{l} e^{-|\alpha|y} \{-2B_1^* |\alpha| + B_2^* [(\kappa_2 - 1) - 2|\alpha|y]\} \\ + e^{|\alpha|y} \{2B_3^* |\alpha| + B_4^* [(\kappa_2 - 1) + 2|\alpha|y]\} \end{array} \right\} d\alpha \right. \\
& - \frac{1}{\mu_1} \frac{\mu_2}{2\pi} \int_c^d q(t) e^{-iat} dt \int_{-\infty}^{\infty} i e^{iax} \left\{ \begin{array}{l} e^{-|\alpha|y} \{-2B_1^* |\alpha| + B_2^* [(\kappa_2 - 1) - 2|\alpha|y]\} \\ + e^{|\alpha|y} \{2B_3^* |\alpha| + B_4^* [(\kappa_2 - 1) + 2|\alpha|y]\} \end{array} \right\} d\alpha \\
& + \frac{\mu_2}{2\pi} \int_e^f \varphi(t) e^{-iat} dt \int_{-\infty}^{\infty} i e^{iax} \left\{ \begin{array}{l} e^{-|\alpha|y} \{-2B_1^* |\alpha| + B_2^* [(\kappa_2 - 1) - 2|\alpha|y]\} \\ + e^{|\alpha|y} \{2B_3^* |\alpha| + B_4^* [(\kappa_2 - 1) + 2|\alpha|y]\} \end{array} \right\} d\alpha \Big] \\
& - (\rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2) = 0 \tag{245}
\end{aligned}$$

Sınırlar değiştirilip gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra denklem aşağıdaki şeklini alır.

$$\begin{aligned}
\sigma_{y_2}(x,y) = & \left[ -2 \frac{1}{\mu_1} \frac{\mu_2}{2\pi} \int_a^b p(t) dt \int_0^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} e^{-\alpha y} \{-2\alpha B_1^* + B_2^* [(\kappa_2 - 1) - 2\alpha y]\} \\ + e^{\alpha y} \{2\alpha B_3^* + B_4^* [(\kappa_2 - 1) + 2\alpha y]\} \end{array} \right\} [\cos\alpha(t-x)] d\alpha \right. \\
& - 2 \frac{1}{\mu_1} \frac{\mu_2}{2\pi} \int_c^d q(t) dt \int_0^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} e^{-\alpha y} \{-2\alpha B_1^* + B_2^* [(\kappa_2 - 1) - 2\alpha y]\} \\ + e^{\alpha y} \{2\alpha B_3^* + B_4^* [(\kappa_2 - 1) + 2\alpha y]\} \end{array} \right\} [\cos\alpha(t-x)] d\alpha \\
& - 2 \frac{\mu_2}{2\pi} \int_e^f \varphi(t) dt \int_0^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} e^{-\alpha y} \{-2\alpha B_1^* + B_2^* [(\kappa_2 - 1) - 2\alpha y]\} \\ + e^{\alpha y} \{2\alpha B_3^* + B_4^* [(\kappa_2 - 1) + 2\alpha y]\} \end{array} \right\} [\sin\alpha(t-x)] d\alpha \Big] \\
& + (\rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2) = 0 \tag{246}
\end{aligned}$$

Yukarıdaki denklemde  $y \rightarrow 0$  limitine geçilirken integral denklemde ortaya çıkan tekil terimler ise;

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha y} \left[ -\frac{4mb}{[(1+\kappa_3)+(1+\kappa_2)mb]} \right] [1+\alpha y] \sin\alpha(t-x) d\alpha \tag{247}$$

olarak belirlenmiştir. Yakınsamayı bozan bu terimler (246) nolu integral denklemlerden çıkarılmalı (247) nolu eşitliğin kapalı integrali alındıktan sonra  $y \rightarrow 0$  limitine geçilmelidir.



(247) nolu eşitlikle ifade edilen integralin, integral dönüşüm tabloları yardımıyla kapalı integrali alınırsa;

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha y} \left[ -\frac{4mb}{[(1+\kappa_3)+(1+\kappa_2)mb]} \right] [1+\alpha y] \sin \alpha(t-x) d\alpha = \left[ -\frac{4mb}{[(1+\kappa_3)+(1+\kappa_2)mb]} \right] \left\{ \left[ \frac{(t-x)}{y^2+(t-x)^2} \right] - \left[ \frac{2y(t-x)}{[y^2+(t-x)^2]^2} \right] \right\} \quad (248)$$

yazılabilir. Elde edilen kapalı integralde  $y$  yerine 0 (sıfır) yazılıp sadeleştirmeler yapıldığında üçüncü integral denklem aşağıdaki şeklini alır.

$$-\frac{1}{\pi} \int_a^b k_3(x_3, t_1) p(t_1) dt_1 - \frac{1}{\pi} \int_c^d k_3(x_3, t_2) q(t_2) dt_2 - \frac{\mu_2}{\pi} \int_e^f [k_4(x_3, t_3) - \frac{4\mu_3/\mu_2}{(1+\kappa_3)+\mu_3/\mu_2} \frac{1}{t_3-x_3}] \varphi(t_3) dt_3 - \rho_1 g h_1 - \rho_2 g h_2 = 0, \quad e < x < f \quad (249)$$

$k_4$  çekirdeği ise ;

$$k_4(x_3, t_3) = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{256\alpha^3 \mu_3}{\mu_2} \{ [1 + e^{-4\alpha h_2} - 2e^{-2\alpha h_2} (1 + 2\alpha^2 h_2^2)] (1 + \kappa_1) [e^{-4\alpha h} - e^{-4\alpha h_2} + 2e^{-2\alpha h - 2\alpha h_2} (-2\alpha(h-h_2))] + [e^{-4\alpha h} + e^{-4\alpha h_2} - 2e^{-2\alpha h - 2\alpha h_2} (1 + 2\alpha^2 (h-h_2)^2)] (1 + \kappa_2) m a [-1 + e^{-4\alpha h_2} - 2e^{-2\alpha h_2} (2\alpha h_2)] \} / \Delta + \frac{4\mu_3/\mu_2}{(1+\kappa_3)+\mu_3/\mu_2 (1+\kappa_2)} \right\} \{ \sin \alpha(t_3 - x_3) \} d\alpha \quad (250)$$

şeklinde bulunur.

#### 2.4.1.4. Alt Tabaka ve Elastik Yarı Sonsuz Düzleme Ait Ara Yüzeydeki Ayrılmanın Belirlenmesi

Tabaka ve elastik yarı sonsuz düzleme ait ara yüzeyde ortaya çıkan ayrılma bölgesinin belirlenebilmesi için (243), (244) ve (249) nolu denklemler beraber çözülmüştür.

İntegral denklem takımının sayısal çözümünde  $\alpha = \frac{h}{z}$  değişken dönüşümü yapılmış ve (177), (178), (179) nolu denklemlere ek olarak aşağıdaki boyutsuz büyüklükler tanımlanmıştır.

$$x_3 = \frac{f-e}{2} r_3 + \frac{f+e}{2} \quad t_3 = \frac{f-e}{2} s_3 + \frac{f+e}{2} \quad (251)$$

$$g_3(s_3) = \mu_2 \varphi \left( \frac{f-e}{2} s_3 + \frac{f+e}{2} \right) / P/h \quad (252)$$

Bu boyutsuz büyüklükler tekil integral denklemlerde yerlerine yazılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_1(s_1) \frac{b-a}{2h} ds_1 + [m_1^*(r_1, s_1) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{\frac{b-a}{2}(s_1-r_1)}] \\ & -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_2(s_2) \frac{d-c}{2h} ds_2 [m_2^*(r_1, s_2) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{[\frac{d-c}{2}s_2 + \frac{d+c}{2}] - [\frac{b-a}{2}r_1 + \frac{b+a}{2}]}] + \\ & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_3(s_3) m_3^*(r_1, s_3) \frac{f-e}{2h} ds_3 = 0 \quad -1 < r_1 < 1 \end{aligned} \quad (253)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_1(s_1) \frac{b-a}{2h} ds_1 [m_4^*(r_2, s_1) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{[\frac{b-a}{2}s_1 + \frac{b+a}{2}] - [\frac{d-c}{2}r_2 + \frac{d+c}{2}]}] \\
& -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_2(s_2) \frac{d-c}{2} ds_2 [m_5^*(r_2, s_2) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{[\frac{d-c}{2}(s_2-r_2)}] + \\
& \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_3(s_3) m_6^*(r_2, s_3) \frac{f-e}{2h} ds_3 \quad -1 < r_2 < 1 \quad (254)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_1(s_1) m_7^*(r_3, s_1) \frac{b-a}{2h} ds_1 - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_2(s_2) m_8^*(r_3, s_2) \frac{d-c}{2h} ds_2 + \\
& \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_3(s_3) \frac{f-e}{2h} ds_3 [m_9^*(r_3, s_3) - \frac{4\mu_3/\mu_2}{(1+\kappa_3) + \mu_3/\mu_2} \frac{1}{(1+\kappa_2) \frac{f-e}{2h} (s_3-r_3)}] - \frac{1}{\lambda_2} = 0 \\
& \quad -1 < r_3 < 1 \quad (255)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_1^*(r_1, s_1) &= k_1(x_1, t_1), & m_2^*(r_1, s_2) &= k_1(x_1, t_2), & m_3^*(r_1, s_3) &= k_3(x_1, t_3) \\
m_4^*(r_2, s_1) &= k_1(x_2, t_1), & m_5^*(r_2, s_2) &= k_1(x_2, t_2), & m_6^*(r_2, s_3) &= k_3(x_2, t_3) \\
m_7^*(r_3, s_1) &= k_3(x_3, t_1), & m_8^*(r_3, s_2) &= k_3(x_3, t_2), & m_9^*(r_3, s_3) &= k_4(x_3, t_3)
\end{aligned} \quad (256)$$

Probleme ait (164) nolu eşitlikle verilen denge ve (218) nolu eşitlikle verilen tek değerlilik şartları sırasıyla

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 g_1(s_1) \frac{b-a}{2h} ds_1 &= 1 \quad (a) \\
\int_{-1}^1 g_2(s_2) \frac{d-c}{2h} ds_2 &= Q/P \quad (b) \\
\int_{-1}^1 g_3(s_3) ds_3 &= 0 \quad (c) \quad (257a-c)
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir.  $g_1(s_1)$ ,  $g_2(s_2)$  boyutsuz temas gerilmesi ve  $g_3(s_3)$  eğim fonksiyonlarıdır.

(243),(244) nolu integral denklemlerin indeksi  $s_1, s_2 = \pm 1$ 'de  $g_1(s_1), g_2(s_2)$  tekliğe sahip olduğundan +1 dir. (249) nolu integral denklemin indeksi ise  $s_3 = \pm 1$ 'de  $g_3(s_3)$  sıfır olduğundan, -1'dir. Ancak ayrılma bölgesinin uç noktalarında ayrılma gayet yatık olacağından  $G_3(-1)=0, G_3(+1)=0$  olup integral denklem takımının birlikte çözümü için (249) nolu integral denklemin indeksinde +1 almak uygun olmaktadır. Böylece integral denklemler için çözüm;

$$g_i(s_i) = \frac{G_i(s_i)}{(1-s_i^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (-1 < s_i < 1) \quad (i=1, \dots, 3) \quad (258)$$

şeklinde aranabilir.

Uygun Gauss-Chebyshev integrasyon formülleri kullanılacak olursa integral denklemler;

$$\begin{aligned} & -\sum_{i=1}^n W_i G_1(s_{1i}) \frac{b-a}{2h} [m^*_1(r_j, s_{1i}) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{\frac{b-a}{2}(s_{1i} - r_{1j})}] \\ & -\sum_{i=1}^n W_i G_2(s_{2i}) \frac{d-c}{2h} [m^*_2(r_j, s_{2i}) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{[\frac{d-c}{2}s_{2i} + \frac{d+c}{2}] - [\frac{b-a}{2}r_{1j} + \frac{b+a}{2}]}] \\ & + \sum_{i=2}^{n-1} W_i G_3(s_{3i}) \frac{f-e}{2h} m^*_3(r_j, s_{3i}) = 0 \quad (j=1, \dots, n-1) \end{aligned} \quad (259)$$

$$\begin{aligned} & -\sum_{i=1}^n W_i G_1(s_{1i}) \frac{b-a}{2h} [m^*_4(r_j, s_{1i}) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{[\frac{b-a}{2}s_{1i} + \frac{b+a}{2}] - [\frac{d-c}{2}r_{2j} + \frac{d+c}{2}]}] \\ & -\sum_{i=1}^n W_i G_2(s_{2i}) \frac{d-c}{2h} [m^*_5(r_j, s_{2i}) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{[\frac{d-c}{2}(s_{2i} - r_{2j})]}] + \\ & \sum_{i=2}^{n-1} W_i G_3(s_{3i}) \frac{f-e}{2h} m^*_6(r_j, s_{3i}) = 0 \quad (j=1, \dots, n-1) \end{aligned} \quad (260)$$

$$\begin{aligned}
& -\sum_{i=1}^n W_i G_1(s_{1i}) \frac{b-a}{2h} m_7^*(r_{3j}, s_{1i}) - \sum_{i=1}^n W_i G_2(s_{2i}) \frac{d-c}{2h} m_8^*(r_{3j}, s_{2i}) \\
& - \sum_{i=2}^{n-1} W_i G_3(s_{3i}) \frac{f-e}{2h} [m_9^*(r_{3j}, s_{3i}) - \frac{4\mu_3/\mu_2}{(1+\kappa_3) + \mu_3/\mu_2} \frac{1}{(1+\kappa_2) \frac{f-e}{2h} (s_{3i} - r_{3j})}] - \frac{1}{\lambda_2} = 0 \\
& \hspace{20em} (j=1, \dots, n-1) \hspace{10em} (261)
\end{aligned}$$

Denge ve tek değerlilik şartlarından;

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \pi W_i \frac{b-a}{2h} G_1(s_{1i}) &= 1 \hspace{10em} (a) \\
\sum_{i=1}^n \pi W_i \frac{d-c}{2h} G_2(s_{2i}) &= Q/P \hspace{10em} (b) \\
\sum_{i=2}^{n-1} \pi W_i G_3(s_{3i}) &= 0 \hspace{10em} (c) \hspace{10em} (262a-c)
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Bu eşitliklerde geçen  $W_i, s_i, r_j$  büyüklükleri (188-189a,b) nolu denklemlerde tanımlanmıştır.

Böylece  $G_1(s_i), G_2(s_i), G_3(s_i)$ , e ve f için (259),(260),(261) ve (262a) nolu eşitliklerle 3n bilinmeyenli 3n denklem takımı elde edilmiş olur.

$\lambda_2 > \lambda_{cr_2}$  olması durumunda seçilen bir  $\lambda$  değeri için e ve f' ye aynı anda değerler verilir. Seçilen e ve f değerleri için (262b-c) denklemleri aynı anda sağlanmalıdır. Eğer sağlanmıyorsa çözüm için yeniden e ve f değerleri belirlenmeli ve çözüm sağlayana kadar tekrarlanmalıdır. Alınan  $\lambda$  değeri için e değeri ile f değeri bulunduğunda, (e, f) aralığı dışındaki temas yüzeyinde  $\sigma_{y_2}(x,0)$  gerilme yayılımı elde edilir.

(e, f) ayrılma bölgesinde  $v_2(x,0) - v_3(x,0)$  yer değiştirmeler farkı, yani elastik yarı sonsuz düzlem ile alt tabakaya ait ara yüzeyde meydana gelen ayrılmanın belirlenebilmesi için

$$v^*(x,0) = v_2(x,0) - v_3(x,0) = \int_e^x g_3(t) dt \quad e < x < f \hspace{10em} (263)$$

$$\frac{\mu_2}{P/h} v^*(x, 0) = \frac{f - e}{2h} \int_{-1}^{r_3} G_3(s_3) ds_3 \quad -1 < r_3 < 1 \quad (264)$$

$$x = \frac{f - e}{2} r_3 + \frac{f + e}{2}$$

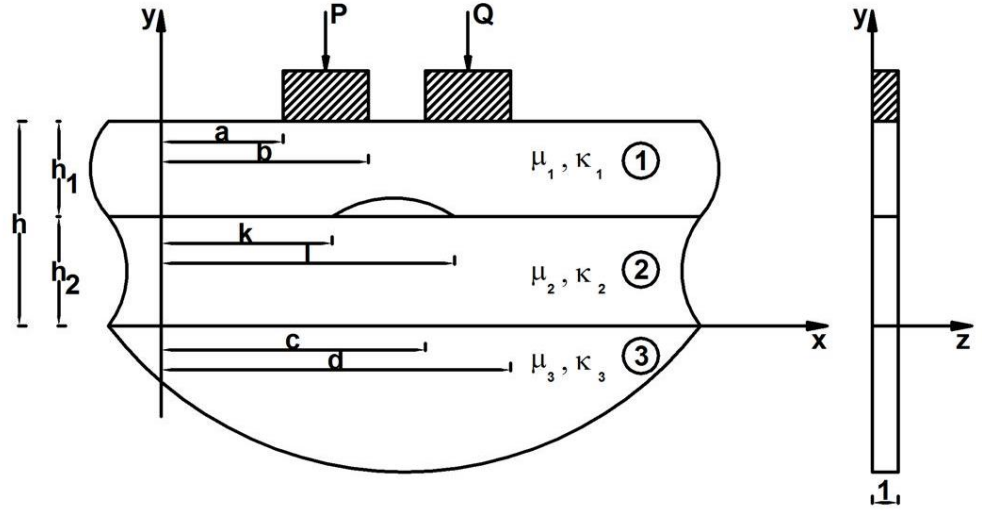
yazılıp. (264) nolu integral denklemin indeksi +1 alınır

$$\frac{\mu_2}{P/h} v^*(x, 0) = \frac{f - e}{2h} \sum_{i=2}^{k-1} W_i G_3(s_{3i}) \quad (k = 2, \dots, n - 1) \quad (265)$$

yazılabilir. Böylece (265) nolu denklemden alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlem arasında meydana gelen ayrılma belirlenebilir.

#### 2.4.2. Tabakalara Ait Ara Yüzeyde Meydana Gelen Süreksizlik

Tabakalara ait ara yüzeyde ayrılma meydana gelebilmesi için yükün ( $\lambda_1$ ), bu yüzeyde ilk ayrılmayı meydana getirecek yükten ( $\lambda_{cr}$ ) daha büyük değerler alması gerekir.  $\lambda_1 > \lambda_{cr}$  olması durumunda sürekli temasta geçen (127) nolu sınır şartı artık geçerli olmayacaktır. Tabakaların birbirinden ayrıldığı ( $k, l$ ) aralığında düşey yer değiştirmeler farkının türevi  $\omega(x)$  gibi bilinmeyen bir fonksiyona eşit alınmıştır. Bu fonksiyonun integrali ise ( $k, l$ ) aralığındaki tabakalar arasındaki ayrılmayı verecektir. Tabakalar arasındaki süreksizlikler incelenirken, tabakalar arasında sürtünmenin bulunmadığı kabul edilmiştir. Tabakalara ait kütle kuvvetleri ise hesaba katılmıştır. Tabakalar arasında süreksizlik bulunması halinde kullanılacak sınır şartları aşağıda verilmiştir.



Şekil 9. Tabakalar arasındaki süreksiz temas probleminin geometrisi

#### 2.4.2.1. Sınır Şartları

$$\sigma_{y_1}(x, h) = \begin{cases} -p(x) & a < x < b \\ -q(x) & c < x < d \\ 0 & -\infty < x < a, b < x < c, d < x < \infty \end{cases} \quad (266)$$

$$\tau_{xy_1}(x, h) = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (267)$$

$$\tau_{xy_1}(x, h_2) = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (268)$$

$$\tau_{xy_2}(x, 0) = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (269)$$

$$\tau_{xy_2}(x, h_2) = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (270)$$

$$\sigma_{y_2}(x, h_2) = \sigma_{y_1}(x, h_2) = 0 \quad k < x < l \quad (271)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_2(x, h_2) - v_1(x, h_2)] = \begin{cases} \omega(x) & k < x < l \\ 0 & -\infty < x < k, l < x < \infty \end{cases} \quad (272)$$

$$\tau_{xy_3}(x, 0) = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (273)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_2(x, 0) - v_3(x, 0)] = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (274)$$

$$\sigma_{y_2}(x, 0) = \sigma_{y_3}(x, 0) \quad -\infty < x < \infty \quad (275)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, h)] = 0 \quad a < x < b \quad (a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, h)] = 0 \quad c < x < d \quad (b) \quad (276a-b)$$

Probleme ait denge şartları;

$$\int_a^b p(x) dx = P^{\text{II}} \quad (a)$$

$$\int_c^d q(x) dx = Q^{\text{II}} \quad (b)$$

iken tek değerlilik şartı ise,

$$\int_k^l \omega(x) dx = 0 \quad (c) \quad (277a-b-c)$$

dir.



### 2.4.2.2. Katsayıların Belirlenmesi

Süresiz temasla ilgili olarak (266)-(275) nolu eşitliklerle verilen sınır şartlarında gerilme ve yer değiştirme ifadelerinin uygulanması sonucu 10 tane cebrik denklem takımı elde edilmiştir. Bu denklem takımında bilinmeyenler  $A_i^{**}, B_i^{**}, C_j^{**}$  ( $i=1, \dots, 4$   $j=1, 2$ ) dir.

$$(-2|\alpha|e^{-2|\alpha|h})A_1^{**} + [(-2|\alpha|h + (\kappa_1 - 1))e^{-2|\alpha|h}]A_2^{**} + 2|\alpha|A_3^{**} + [(2|\alpha|h + (\kappa_1 - 1))]A_4^{**} = (P^{\text{II}} + Q^{\text{II}})e^{-|\alpha|h} \quad (278)$$

$$(2\alpha e^{-2|\alpha|h})A_1^{**} + [(-\frac{|\alpha|}{\alpha}(\kappa_1 + 1) + 2\alpha h)e^{-2|\alpha|h}]A_2^{**} + 2\alpha A_3^{**} + [(\frac{|\alpha|}{\alpha}(\kappa_1 + 1) + 2\alpha h)]A_4^{**} = 0 \quad (279)$$

$$(2\alpha e^{-2|\alpha|h_2})A_1^{**} + [(-\frac{|\alpha|}{\alpha}(\kappa_1 + 1) + 2\alpha h_2)e^{-2|\alpha|h_2}]A_2^{**} + 2\alpha A_3^{**} + [(\frac{|\alpha|}{\alpha}(\kappa_1 + 1) + 2\alpha h_2)]A_4^{**} = 0 \quad (280)$$

$$2\alpha B_1^{**} + [(-\frac{|\alpha|}{\alpha}(\kappa_2 + 1))]B_2^{**} + 2\alpha B_3^{**} + [(\frac{|\alpha|}{\alpha}(\kappa_2 + 1))]B_4^{**} = 0 \quad (281)$$

$$(2\alpha e^{-2|\alpha|h_2})B_1^{**} + [(-\frac{|\alpha|}{\alpha}(\kappa_2 + 1) + 2\alpha h_2)e^{-2|\alpha|h_2}]B_2^{**} + 2\alpha B_3^{**} + [(\frac{|\alpha|}{\alpha}(\kappa_2 + 1) + 2\alpha h_2)]B_4^{**} = 0 \quad (282)$$

$$\begin{aligned}
& (-2|\alpha|e^{-2|\alpha|h_2}B_1^{**}\frac{\mu_2}{\mu_1} + [(-2|\alpha|h_2 + (\kappa_2 - 1))e^{-2|\alpha|h_2}]B_2^{**}\frac{\mu_2}{\mu_1} + 2|\alpha|B_3^{**}\frac{\mu_2}{\mu_1} + [(2|\alpha|h_2 \\
& + (\kappa_2 - 1))]B_4^{**}\frac{\mu_2}{\mu_1} + (2|\alpha|e^{-2|\alpha|h_2})A_1^{**} - [(-2|\alpha|h_2 + (\kappa_1 - 1))e^{-2|\alpha|h_2}]A_2^{**} \\
& - 2|\alpha|A_3^{**} - [(2|\alpha|h_2 + (\kappa_1 - 1))]A_4^{**} = 0
\end{aligned} \tag{283}$$

$$[B_1^{**} + B_2^{**}h_2]e^{-2|\alpha|h_2} + [B_3^{**} + B_4^{**}h_2] - [A_1^{**} + A_2^{**}h_2]e^{-2|\alpha|h_2} - [A_3^{**} + A_4^{**}h_2] = \frac{W}{i\alpha} \tag{284}$$

$$2\alpha C_1^{**} + \left[\frac{|\alpha|}{\alpha}(\kappa_3 + 1)\right]C_2^{**} = 0 \tag{285}$$

$$B_1^{**} + B_3^{**} - C_1^{**} = 0 \tag{286}$$

$$\begin{aligned}
& (-2|\alpha|B_1^{**} + (\kappa_2 - 1)B_2^{**} + 2|\alpha|B_3^{**} + (\kappa_2 - 1)B_4^{**} - \frac{\mu_3}{\mu_2}[2|\alpha|C_1^{**} \\
& + (\kappa_3 + 1)C_2^{**}]) = 0
\end{aligned} \tag{287}$$

$$W = \frac{1}{2\pi} \int_k^1 \omega(t) dt \tag{288}$$

Problemin çözümünde kullanılan katsayılar ( $A_1^{**}, A_2^{**}, A_3^{**}, A_4^{**}$ ), temas gerilmeleri  $p(x), q(x)$ 'e ve  $\omega(x)$ ' e bağlı olarak aşağıdaki gibi belirlenmiştir.

$$\begin{aligned}
A_1^{**} = & 64\alpha^2 \frac{W}{i\alpha} [e^{-4\alpha h_2} ((1+\kappa_3)-(1+\kappa_2)mb) + ((1+\kappa_3)-(1+\kappa_2)mb) \\
& - 2e^{-2\alpha h_2} ((1+2\alpha^2 h_2^2)(1+\kappa_3) - 2\alpha h_2(1+\kappa_2)mb)] [e^{-2\alpha h_2} (-1+2\alpha h_2 - \kappa_1) \\
& + e^{-2\alpha h} (1+(\kappa_1 - 2\alpha h)(1-2\alpha h + 2\alpha h_2))] / \Delta
\end{aligned} \tag{289}$$

$$\begin{aligned}
A_2^{**} = & 128\alpha^3 \frac{W}{i\alpha} [e^{-4ah_2} (-(1+\kappa_3)+(1+\kappa_2)mb) - ((1+\kappa_3)+(1+\kappa_2)mb) \\
& + 2e^{-2ah_2} ((1+2\alpha^2h_2^2)(1+\kappa_3) - 2\alpha h_2(1+\kappa_2)mb)] [e^{-2ah_2} + e^{-2ah} ( \\
& -1+2\alpha(h-h_2))] / \Delta
\end{aligned} \tag{290}$$

$$\begin{aligned}
A_3^{**} = & 64\alpha^2 \frac{W}{i\alpha} [e^{-4ah_2} ((1+\kappa_3)-(1+\kappa_2)mb) + ((1+\kappa_3)-(1+\kappa_2)mb) \\
& - 2e^{-2ah_2} ((1+2\alpha^2h_2^2)(1+\kappa_3) - 2\alpha h_2(1+\kappa_2)mb)] [e^{-4ah_2} (1+2\alpha h_2 + \kappa_1) \\
& - e^{-2ah-2ah_2} (1 + \kappa_1 + 2\alpha h)(1+2\alpha h-2\alpha h_2)] / \Delta
\end{aligned} \tag{291}$$

$$\begin{aligned}
A_4^{**} = & -128\alpha^3 \frac{W}{i\alpha} [e^{-4ah_2} ((1+\kappa_3)-(1+\kappa_2)mb) + ((1+\kappa_3)+(1+\kappa_2)mb) \\
& - 2e^{-2ah_2} ((1+2\alpha^2h_2^2)(1+\kappa_3) - 2\alpha h_2(1+\kappa_2)mb)] [e^{-4ah} + e^{-2ah-2ah_2} ( \\
& -1-2\alpha(h-h_2))] / \Delta
\end{aligned} \tag{292}$$

### 2.4.2.3. İntegral Denklemlerin Elde Edilmesi

Tabakalar arasında ayrılma meydana gelmesi durumunda sınır şartlarından elde edilen  $A_1^{**}, A_2^{**}, A_3^{**}, A_4^{**}$  katsayıları  $p(x), q(x), \omega(x)$  gibi bilinmeyen üç fonksiyona bağlı olarak belirlenmiştir. Bu fonksiyonların bulunabilmesi için (276a-b) nolu sınır şartı

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, h)] &= 0 & a < x < b \\
\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, h)] &= 0 & c < x < d
\end{aligned}$$

$$\sigma_{y_1}(x, h_2) - \rho_1 g h_1 = 0 \quad k < x < l \tag{293}$$

ve (293) nolu denklemden faydalanılacaktır.

$A_1^{**}, A_2^{**}, A_3^{**}, A_4^{**}$  katsayıları  $\frac{\partial}{\partial x}[v_1(x, y)]$ 'de yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x}(x, y) = & -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\mu_1} \int_a^b p(t) e^{-iat} dt \int_{-\infty}^{\infty} ie^{iax} \left\{ \begin{aligned} & [\alpha A_1^{**} + A_2^{**} \alpha y] e^{-|\alpha|y} \\ & + [\alpha A_3^{**} + A_4^{**} \alpha y] e^{|\alpha|y} \end{aligned} \right\} d\alpha \\ & - \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\mu_1} \int_c^d q(t) e^{-iat} dt \int_{-\infty}^{\infty} ie^{iax} \left\{ \begin{aligned} & [\alpha A_1^{**} + A_2^{**} \alpha y] e^{-|\alpha|y} \\ & + [\alpha A_3^{**} + A_4^{**} \alpha y] e^{|\alpha|y} \end{aligned} \right\} d\alpha \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_k^l \omega(t) e^{-iat} dt \int_{-\infty}^{\infty} ie^{iax} \left\{ \begin{aligned} & [\alpha A_1^{**} + A_2^{**} \alpha y] e^{-|\alpha|y} \\ & + [\alpha A_3^{**} + A_4^{**} \alpha y] e^{|\alpha|y} \end{aligned} \right\} d\alpha = 0 \end{aligned} \quad (294)$$

elde edilir. İntegral sınırları değiştirilip düzenlendikten sonra denklem

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x}(x, y) = & -2 \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\mu_1} \int_a^b p(t) dt \int_0^{\infty} \left\{ \begin{aligned} & [\alpha A_1^{**} + A_2^{**} \alpha y] e^{-\alpha y} + \\ & [\alpha A_3^{**} + A_4^{**} \alpha y] e^{\alpha y} \end{aligned} \right\} [\sin \alpha(t-x) d\alpha] \\ & - 2 \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\mu_1} \int_c^d q(t) dt \int_0^{\infty} \left\{ \begin{aligned} & [\alpha A_1^{**} + A_2^{**} \alpha y] e^{-\alpha y} + \\ & [\alpha A_3^{**} + A_4^{**} \alpha y] e^{\alpha y} \end{aligned} \right\} [\sin \alpha(t-x) d\alpha] \\ & + 2 \frac{1}{2\pi} \int_k^l \omega(t) dt \int_0^{\infty} \left\{ \begin{aligned} & [\alpha A_1^{**} + A_2^{**} \alpha y] e^{-\alpha y} + \\ & [\alpha A_3^{**} + A_4^{**} \alpha y] e^{\alpha y} \end{aligned} \right\} [i \cos \alpha(t-x) d\alpha] = 0 \end{aligned} \quad (295)$$

şeklini alır.

Yukarıdaki denklemde  $y \rightarrow h$  limitine geçilirken pay paydaya bölündüğünde, ortaya çıkan ıraksak (integral denklemin yakınsamasını bozan) singüler terimler,  $p(t)$  ve  $q(t)$  nin çarpan olduğu çekirdekler sürekli temastakinin aynısı olacağından sürekli temastakinin aynısıdır.

Bu durumda (276a-b)'den  $a < x < b$  ve  $c < x < d$  aralıklarında integral denklemler aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_1} \int_a^b p(t_1) dt_1 \left[ k_1(x_1, t_1) + \frac{1+\kappa_1}{4} \frac{1}{(t_1-x_1)} \right] - \frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_1} \int_c^d q(t_2) dt_2 \\
& \left[ k_1(x_1, t_2) + \frac{1+\kappa_1}{4} \frac{1}{(t_2-x_1)} \right] + \frac{1}{\pi} \int_k^l \omega(t_4) dt_4 [k_2(x_1, t_4)] = 0 \quad a < x_1 < b \quad (296)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_1} \int_a^b p(t_1) dt_1 \left[ k_1(x_2, t_1) + \frac{1+\kappa_1}{4} \frac{1}{(t_1-x_2)} \right] - \frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_1} \int_c^d q(t_2) dt_2 \\
& \left[ k_1(x_2, t_2) + \frac{1+\kappa_1}{4} \frac{1}{(t_2-x_2)} \right] + \frac{1}{\pi} \int_k^l \omega(t_4) dt_4 [k_2(x_2, t_4)] = 0 \quad c < x_2 < d \quad (297)
\end{aligned}$$

İntegral denklemde geçen  $k_1(x,t)$  ve  $k_2(x,t)$  çekirdekleri sırasıyla (176) ve (203) eşitlikleri ile tanımlanmıştır.

Bilinmeyen fonksiyonlar  $p(x)$ ,  $q(x)$  ve  $\omega(x)$  'in belirlenmesinde kullanılacak üçüncü denklem ise (293) nolu eşitliktir.

$$\sigma_{y_1}(x, h_2) - \rho_1 g h_1 = 0 \quad k < x < l$$

$A_1^{**}, A_2^{**}, A_3^{**}, A_4^{**}$ , katsayıları kütle kuvvetleri dikkate alındığı durumda ortaya çıkacak  $\sigma_{y_1}(x, y)$  düşey gerilme ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\sigma_{y_1}(x,y) = & \left[ -\frac{1}{\mu_1} \frac{\mu_1}{2\pi} \int_a^b p(t) e^{-iat} dt \int_{-\infty}^{\infty} ie^{i\alpha x} \left\{ \begin{aligned} & e^{-|\alpha|y} \{-2A_1^{**} |\alpha| + A_2^{**} [(\kappa_2 - 1) - 2|\alpha|y]\} \\ & + e^{|\alpha|y} \{2A_3^{**} |\alpha| + A_4^{**} [(\kappa_2 - 1) + 2|\alpha|y]\} \end{aligned} \right\} d\alpha \right. \\
& - \frac{1}{\mu_1} \frac{\mu_1}{2\pi} \int_c^d q(t) e^{-iat} dt \int_{-\infty}^{\infty} ie^{i\alpha x} \left\{ \begin{aligned} & e^{-|\alpha|y} \{-2A_1^{**} |\alpha| + A_2^{**} [(\kappa_2 - 1) - 2|\alpha|y]\} \\ & + e^{|\alpha|y} \{2A_3^{**} |\alpha| + A_4^{**} [(\kappa_2 - 1) + 2|\alpha|y]\} \end{aligned} \right\} d\alpha \\
& + \frac{\mu_1}{2\pi} \int_k^l \omega(t) e^{-iat} dt \int_{-\infty}^{\infty} ie^{i\alpha x} \left\{ \begin{aligned} & e^{-|\alpha|y} \{-2A_1^{**} |\alpha| + A_2^{**} [(\kappa_2 - 1) - 2|\alpha|y]\} \\ & + e^{|\alpha|y} \{2A_3^{**} |\alpha| + A_4^{**} [(\kappa_2 - 1) + 2|\alpha|y]\} \end{aligned} \right\} d\alpha \Big] \\
& - (\rho_1 g h_1) = 0 \tag{298}
\end{aligned}$$

elde edilir. İntegral sınırları değiştirilip gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra denklem aşağıdaki şeklini alır.

$$\begin{aligned}
\sigma_{y_1}(x,y) = & \left[ -2 \frac{1}{\mu_1} \frac{\mu_1}{2\pi} \int_a^b p(t) dt \int_0^{\infty} \left\{ \begin{aligned} & e^{-\alpha y} \{-2\alpha A_1^{**} + A_2^{**} [(\kappa_2 - 1) - 2\alpha y]\} \\ & + e^{\alpha y} \{2\alpha A_3^{**} + A_4^{**} [(\kappa_2 - 1) + 2\alpha y]\} \end{aligned} \right\} [\cos\alpha(t-x) d\alpha] \right. \\
& - 2 \frac{1}{\mu_1} \frac{\mu_1}{2\pi} \int_c^d q(t) dt \int_0^{\infty} \left\{ \begin{aligned} & e^{-\alpha y} \{-2\alpha A_1^{**} + A_2^{**} [(\kappa_2 - 1) - 2\alpha y]\} \\ & + e^{\alpha y} \{2\alpha A_3^{**} + A_4^{**} [(\kappa_2 - 1) + 2\alpha y]\} \end{aligned} \right\} [\cos\alpha(t-x) d\alpha] \\
& - 2 \frac{\mu_1}{2\pi} \int_k^l \omega(t) dt \int_0^{\infty} \left\{ \begin{aligned} & e^{-\alpha y} \{-2\alpha A_1^{**} + A_2^{**} [(\kappa_2 - 1) - 2\alpha y]\} \\ & + e^{\alpha y} \{2\alpha A_3^{**} + A_4^{**} [(\kappa_2 - 1) + 2\alpha y]\} \end{aligned} \right\} [i \sin\alpha(t-x) d\alpha] \Big] \\
& - (\rho_1 g h_1) = 0 \tag{299}
\end{aligned}$$

Yukarıdaki denklemde  $y \rightarrow h_2$  limitine geçilirken integral denklemde ortaya çıkan tekil terimler ise;

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha(h_2-y)} \left[ -\frac{4(1+\kappa_1)}{[(1+\kappa_1)+(1+\kappa_2)ma]} \right] [1+\alpha(h_2-y) \sin\alpha(t-x) d\alpha \tag{300}$$

olarak belirlenmiştir. Yakınsamayı bozan bu terimler (299) nolu integral denklemlerden çıkarılmalı (300) nolu eşitliğin kapalı integrali alındıktan sonra  $y \rightarrow h_2$  limitine geçilmelidir.

(300) nolu eşitlikle ifade edilen integralin, tablolar yardımıyla kapalı integrali alınırsa;

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} e^{-\alpha(h_2-y)} \left[ -\frac{4(1+\kappa_1)}{[(1+\kappa_1)+(1+\kappa_2)ma]} \right] [1+\alpha(h_2-y)] \sin \alpha(t-x) d\alpha \\ &= \left[ -\frac{4(1+\kappa_1)}{[(1+\kappa_1)+(1+\kappa_2)ma]} \right] \left\{ \left[ \frac{(t-x)}{(h_2-y)^2+(t-x)^2} \right] - \left[ \frac{2(h_2-y)(t-x)}{[(h_2-y)^2+(t-x)^2]^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (301)$$

yazılabilir. Elde edilen kapalı integralde  $y$  yerine  $h_2$  yazılıp sadeleştirmeler yapıldığında üçüncü integral denklem aşağıdaki şeklini alır.

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi} \int_a^b k_2(x_4, t_1) p(t_1) dt_1 - \frac{1}{\pi} \int_c^d k_2(x_4, t_2) q(t_2) dt_2 \\ & - \frac{\mu_1}{\pi} \int_e^f \left[ k_5(x_4, t_4) - \frac{4(1+\kappa_1)}{(1+\kappa_1)+(1+\kappa_2)} \frac{1}{\mu_2} \frac{1}{t_4-x_4} \right] \omega(t_4) dt_4 - \rho_1 g h_1 = 0, \quad k < x_4 < l \end{aligned} \quad (302)$$

$k_5$  çekirdeği ise ;

$$\begin{aligned} k_5(x_4, t_4) = & \int_0^{\infty} [-256\alpha^3 e^{-4\alpha h - 8\alpha h_2} [(e^{4\alpha h} + e^{4\alpha h_2} - 2e^{-2\alpha h - 2\alpha h_2} (1+2\alpha^2(h-h_2)^2)] (1+\kappa_1) \\ & [((1+\kappa_3)-(1+\kappa_2)mb) + e^{4\alpha h_2} ((1+\kappa_3)+(1+\kappa_2)mb) - 2e^{2\alpha h_2} ((1+2\alpha^2 h_2^2) \\ & (1+\kappa_3) - 2\alpha h_2(1+\kappa_2)mb)] / \Delta - \left( \frac{-4(1+\kappa_1)}{((1+\kappa_1)+(1+\kappa_1)ma)} \right)] (\sin \alpha(t_4-x_4)) d\alpha \end{aligned} \quad (303)$$

şeklinde bulunur.

#### 2.4.2.4. Tabakalara Ait Ara Yüzeyde Meydana Gelen Ayrılmanın Belirlenmesi

Tabakalara ait ara yüzeyde ortaya çıkan ayrılma bölgesinin belirlenebilmesi için (296) , (297) ve (302) nolu denklemler beraber çözülmüştür.

İntegral denklem takımının sayısal çözümünde  $\alpha = \frac{h}{z}$  değişken dönüşümü yapılmış ve (177), (178), (179) nolu denklemlere ek olarak aşağıdaki büyüklükler tanımlanmıştır.

$$x_4 = \frac{l-k}{2} r_4 + \frac{l+k}{2} \quad t_4 = \frac{l-k}{2} s_4 + \frac{l+k}{2} \quad (304)$$

$$g_4(s_4) = \mu_1 \omega \left( \frac{l-k}{2} s_4 + \frac{l+k}{2} \right) / P/h \quad (305)$$

Bu boyutsuz büyüklükler tekil integral denklemde yerine yazılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_1(s_1) \frac{b-a}{2h} ds_1 + [m_{11}^{**}(r_1, s_1) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{\frac{b-a}{2}(s_1-r_1)}] \\ & -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_2(s_2) \frac{d-c}{2h} ds_2 [m_{22}^{**}(r_1, s_2) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{[\frac{d-c}{2}s_2 + \frac{d+c}{2}] - [\frac{b-a}{2}r_1 + \frac{b+a}{2}]}] + \\ & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_4(s_4) m_{33}^{**}(r_1, s_4) \frac{l-k}{2h} ds_4 = 0 \quad -1 < r_1 < 1 \end{aligned} \quad (306)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_1(s_1) \frac{b-a}{2h} ds_1 [m_{44}^{**}(r_2, s_1) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{[\frac{b-a}{2}s_1 + \frac{b+a}{2}] - [\frac{d-c}{2}r_2 + \frac{d+c}{2}]}] \\ & -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_2(s_2) \frac{d-c}{2h} ds_2 [m_{55}^{**}(r_2, s_2) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{[\frac{d-c}{2}(s_2-r_2)}] + \\ & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_4(s_4) m_{66}^{**}(r_2, s_4) \frac{l-k}{2h} ds_4 \quad -1 < r_2 < 1 \end{aligned} \quad (307)$$



$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_1(s_1) m_7^{**}(r_4, s_1) \frac{b-a}{2h} ds_1 - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_2(s_2) m_8^{**}(r_4, s_2) \frac{d-c}{2h} ds_2 + \\
& \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_4(s_4) \frac{l-k}{2h} ds_4 \left[ m_9^{**}(r_4, s_4) - \frac{4(1+\kappa_1)}{(1+\kappa_1) + (1+\kappa_2)ma} \frac{1}{\frac{l-k}{2h}(s_4-r_4)} \right] - \frac{1}{\lambda_1} = 0
\end{aligned}$$

-1 < r<sub>4</sub> < 1 (308)

$$\begin{aligned}
m_1^{**}(r_1, s_1) &= k_1(x_1, t_1), & m_2^{**}(r_1, s_2) &= k_1(x_1, t_2), & m_3^{**}(r_1, s_4) &= k_2(x_1, t_4) \\
m_4^{**}(r_2, s_1) &= k_1(x_2, t_1), & m_5^{**}(r_2, s_2) &= k_1(x_2, t_2), & m_6^{**}(r_2, s_4) &= k_2(x_2, t_4) \\
m_7^{**}(r_4, s_1) &= k_2(x_4, t_1), & m_8^{**}(r_4, s_2) &= k_2(x_4, t_2), & m_9^{**}(r_4, s_4) &= k_5(x_4, t_4)
\end{aligned}$$

(309)

Probleme ait (164) nolu eşitlikle verilen denge ve (277c) nolu eşitlikle verilen tek değerlilik şartları sırasıyla

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 g_1(s_1) \frac{b-a}{2h} ds_1 = 1 \\
& \int_{-1}^1 g_2(s_2) \frac{d-c}{2h} ds_2 = \frac{Q}{P} \\
& \int_{-1}^1 g_4(s_4) ds_4 = 0
\end{aligned}$$

(310a-c)

olarak yazılabilir.  $g_1(s_1)$ ,  $g_2(s_2)$  boyutsuz temas gerilmesi ve  $g_4(s_4)$  eğim fonksiyonlarıdır.

(296), (297) nolu integral denklemlerin indeksi  $s_1, s_2 = \pm 1$ 'de  $g_1(s_1)$ ,  $g_2(s_2)$  tekliğe sahip olduğundan +1 dir. (302) nolu integral denklemin indeksi ise  $s_4 = \pm 1$ 'de  $g_4(s_4)$  sıfır olduğundan, -1'dir. Ancak ayrılma bölgesinin uç noktalarında ayrılma gayet yatık olacağından  $G_4(-1)=0$   $G_4(+1)=0$  olup integral denklem takımının birlikte çözümü için (302) nolu integral denklemin indeksinde +1 almak uygun olmaktadır. Böylece integral denklemler için çözüm (258) nolu denklem kullanılarak;

$$g_i(s_i) = \frac{G_i(s_i)}{(1-s_i^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (-1 < s_i < 1) \quad (i=1, 2, 3)$$

şeklinde aranabilir.

Uygun Gauss-Chebyshev integrasyon formülleri kullanılacak olursa integral denklemler;

$$\begin{aligned} & -\sum_{i=1}^n W_i G_1(s_{1i}) \frac{b-a}{2h} [m_{11}^{**}(r_{1j}, s_{1i}) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{\frac{b-a}{2}(s_{1i} - r_{1j})}] \\ & -\sum_{i=1}^n W_i G_2(s_{2i}) \frac{d-c}{2h} [m_{22}^{**}(r_{1j}, s_{2i}) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{[\frac{d-c}{2}s_{2i} + \frac{d+c}{2}] - [\frac{b-a}{2}r_{1j} + \frac{b+a}{2}]}] \\ & + \sum_{i=2}^{n-1} W_i G_4(s_{4i}) \frac{1-k}{2h} m_{33}^{**}(r_{1j}, s_{4i}) = 0 \quad (j=1, \dots, n-1) \end{aligned} \quad (311)$$

$$\begin{aligned} & -\sum_{i=1}^n W_i G_1(s_{1i}) \frac{b-a}{2h} [m_{44}^{**}(r_{2j}, s_{1i}) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{[\frac{b-a}{2}s_{1i} + \frac{b+a}{2}] - [\frac{d-c}{2}r_{2j} + \frac{d+c}{2}]}] \\ & -\sum_{i=1}^n W_i G_2(s_{2i}) \frac{d-c}{2h} [m_{55}^{**}(r_{2j}, s_{2i}) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{[\frac{d-c}{2}(s_{2i} - r_{2j})]}] + \\ & \sum_{i=2}^{n-1} W_i G_4(s_{4i}) \frac{1-k}{2h} m_{66}^{**}(r_{2j}, s_{4i}) = 0 \quad (j=1, \dots, n-1) \end{aligned} \quad (312)$$

$$\begin{aligned} & -\sum_{i=1}^n W_i G_1(s_{1i}) \frac{b-a}{2h} m_{77}^{**}(r_{4j}, s_{1i}) - \sum_{i=1}^n W_i G_2(s_{2i}) \frac{d-c}{2h} m_{88}^{**}(r_{4j}, s_{2i}) \\ & -\sum_{i=2}^{n-1} W_i G_4(s_{4i}) \frac{1-k}{2h} [m_{99}^{**}(r_{4j}, s_{4i}) - \frac{4(1+\kappa_1)}{(1+\kappa_1) + (1+\kappa_2)ma} \frac{1}{\frac{1-k}{2h}(s_{4i} - r_{4j})}] - \frac{1}{\lambda_1} = 0 \\ & (j=1, \dots, n-1) \end{aligned} \quad (313)$$

Denge ve tek değerlilik şartlarında

$$\sum_{i=1}^n \pi W_i \frac{b-a}{2h} G_1(s_{1i}) = 1 \quad (a)$$

$$\sum_{i=1}^n \pi W_i \frac{d-c}{2h} G_2(s_{2i}) = Q/P \quad (b)$$

$$\sum_{i=2}^{n-1} \pi W_i G_4(s_{4i}) = 0 \quad (c) \quad (314a-c)$$

olarak yazılabilir. Bu eşitliklerde geçen  $W_i, s_i, r_j$  büyüklükleri (187-189a,b) nolu denklemlerde tanımlanmıştır.

Böylece  $G_1(s_i), G_2(s_i), G_4(s_i)$ ,  $k$  ve  $l$  için (311),(312),(313) ve (314) nolu eşitliklerle  $3n$  bilinmeyenli  $3n$  denklem takımı elde edilmiş olur.

$\lambda_1 > \lambda_{cr1}$  olması durumunda seçilen bir  $\lambda$  değeri için  $k$  ve  $l$  ye aynı anda değerler verilir. Seçilen  $k$  ve  $l$  değerleri için (314- a-c) denklemleri aynı anda sağlanmalıdır. Eğer sağlanmıyorsa çözüm için yeniden  $k$  ve  $l$  değerleri belirlenmeli ve çözüm sağlanana kadar tekrarlanmalıdır. Alınan  $\lambda$  değeri için  $k$  değeri ile  $l$  değeri bulunduğu,  $(k, l)$  aralığı dışındaki temas yüzeyinde  $\sigma_{y1}(x, h_2)$  gerilme yayılımı elde edilir.

$(k, l)$  ayrılma bölgesinde  $v_2(x, h_2) - v_1(x, h_2)$  yer değiştirmeler farkı, yani iki elastik tabakaya ait ara yüzeyde meydana gelen ayrılmanın belirlenebilmesi için

$$v^*(x, h_2) = v_2(x, h_2) - v_1(x, h_2) = \int_k^x g_4(t) dt \quad k < x < l \quad (315)$$

$$\frac{\mu_1}{P/h} v^*(x, h_2) = \frac{l-k}{2h} \int_{-1}^{r_4} G_4(s_4) ds_4 \quad -1 < r_4 < 1 \quad (316)$$

$$x = \frac{l-k}{2} r_4 + \frac{l+k}{2}$$

yazılıp (316) nolu integral denklemin indeksi +1 alınırsa

$$\frac{\mu_1}{P/h} v^*(x, h_2) = \frac{1-k}{2h} \sum_{i=2}^{m-1} W_i G_4(s_{4i}) \quad (m = 2, \dots, n-1) \quad (317)$$

yazılabilir. Böylece (317) nolu denklemden tabakalar arasında meydana gelen ayrılma belirlenebilir.

## 2.5. Sonlu Elemanlar Yöntemiyle Sayısal Analiz

Bu kısımda elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan iki elastik tabakanın temas problemi ANSYS (2012) paket programı yardımıyla çözülmüştür.

Sonlu elemanlar paket programıyla sayısal analiz işlemi yapılırken problemin çözümü ve analiz sonuçlarının elde edilebilmesi için birçok işlem gerçekleştirilmiştir. İşlem aşamaları problemin geometrisinin oluşturulması, eleman tipinin belirlenmesi, malzeme özelliklerinin atanması, modelin sonlu elemanlara ayrılması, blokların üst kısmındaki düğüm noktalarının düşey yer değiştirmelerinin birbirine bağlanması (coupling), temas yüzeylerinin tanımlanması, sınır koşullarının belirlenmesi ve yüklemenin yapılması şeklinde gerçekleştirilmiştir. Bu bölümde amaç temas gerilmeleri, normal gerilmeler ve kayma gerilmelerinin sonlu elemanlar paket programı yardımıyla hesaplanmasıdır.

Problem modellenip sürtünme kuvveti ihmal edilmiştir. Modelin tüm parçalarında; lineer, elastik ve izotropik malzeme kullanılmıştır. Problem tabakaların kayma modülü oranları, blok genişlikleri, bloklar arası mesafe ve farklı yük oranı değerleri için çözülmüştür.

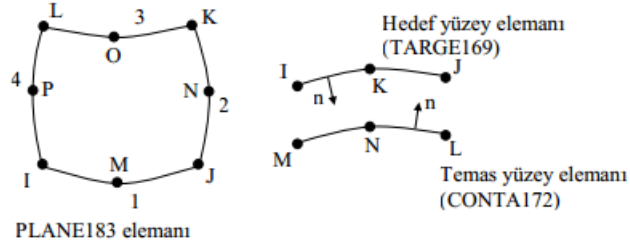
Eleman seçimi, analizde kullanılacak olan matematiksel modelin belirlenmesi açısından önemlidir. Eleman tipi yapılacak analizin çeşidine göre seçilir. Analiz edilecek modelin 2 veya 3 boyutlu olmasında eleman seçimindeki etkenlerden biridir. Seçilen elemanın düğüm noktalarına ait serbestlik derecelerinin tipi ve sayısında analizin doğru yapılmasında önemli bir etkidir. Yapılan analizde ANSYS paket programının

kütüphanesinde bulunan PLANE 183 tipi yapısal eleman kullanılmıştır. Bu eleman tipinin sekiz düğüm noktası ve her düğüm noktası için iki serbestlik derecesi bulunmaktadır. Düğüm noktaları x ve y doğrultularında yer değiştirebilirken noktaların dönme serbestliği bulunmamaktadır. PLANE 183 elemanı, karmaşık geometrilerin ağ yapısının oluşturulmasında dört bağlantı noktasına sahip iki boyutlu diğer elemanlara göre daha iyi sonuçlar vermektedir (ANSYS, 2012). Modelin elemanlara bölünmesinde dörtgen eleman kullanılmıştır.

Temas problemlerini çözebilecek elemanların ve çözüm yöntemlerinin analiz programlarına girmesi ile mühendislik alanında oldukça yaygın olarak kullanılan ANSYS sonlu eleman yazılımı, kütüphanesinde bulundurduğu iki ve üç boyutlu elemanlarla üç değişik tipte temas analizi yapılmasına olanak sağlamaktadır. Yüzey yüzey, düğüm-yüzey ve düğüm-düğüm temas analizleri ve bu analizler içerisinde kullanılacak değişik algoritmalar yapı elemanlarının birbirleriyle olan etkileşimlerini modellemede etkin olarak kullanılmaktadır.

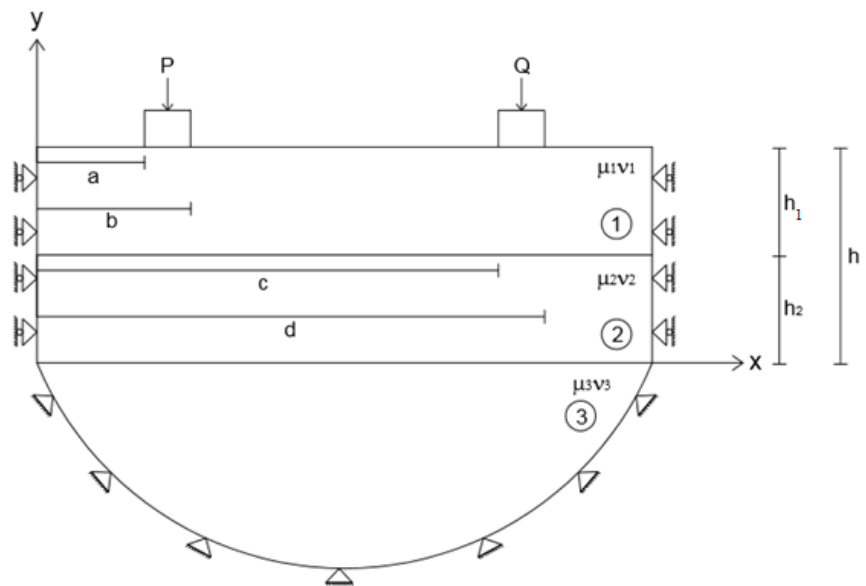
Bu çalışmada yüzey yüzey temas modeli kullanılmıştır. Bu modelin avantajı düğüm noktalarının üst üste gelmemesi halinde de çözüme olanak sağlamasıdır. Modelde bloklar üst tabaka, tabakalar arası ve alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem yüzeyleri arasında temas vardır ve bu temas yüzeyleri için temas çiftleri tanımlanmıştır. Sunulan çalışmada temas çiftinin oluşturulmasında hedef yüzeyi TARGE169 elemanı ile, temas yüzeyi ise CONTA172 elemanı ile tanımlanmıştır. Hedef olarak birbirine temas edecek yüzeyler arasından elastisite modülü büyük olan seçilir. TARGE169 ve CONTA172 elemanları üç düğüm noktası içeren elemanlardır ve bu düğümler PLANE183 elemanın yüzeyindeki düğümlerle örtüşür. Bu elemanların düğüm noktası sıralamaları temas analizi için önemlidir.

Oluşturulan temas yüzeylerinin normalleri birbirlerine bakacak şekilde modellenmelidir (Şekil10).

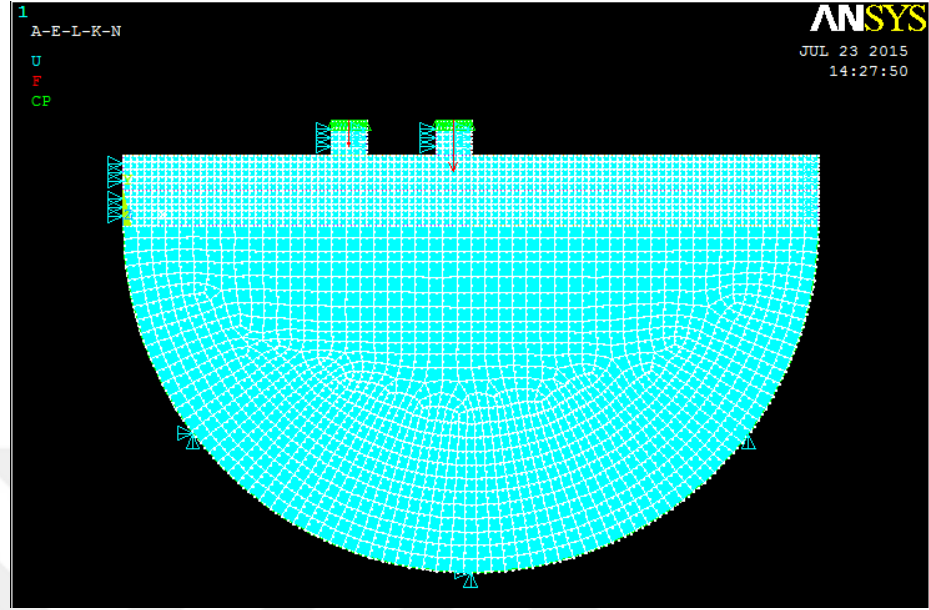


Şekil 10. PLANE 183 elemanı ve TARGE 169/CONTA 172 temas elemanları

Bu çalışmada ANSYS paket programının temas yüzeylerindeki davranışa yönelik farklı temas algoritmalarından Lagrange Metodu kullanılmıştır. Sınır şartları uygulanıp yükleme yapıldıktan sonra problem program yardımıyla çözülmektedir. Çözüm işlemi gerçekleştikten sonra elde edilen sonuçlara çıkış kısmından grafik, şekil veya liste halinde ulaşılmaktadır.



Şekil 11. Analiz Geometrisi



Şekil 12 . Problemin ANSYS modeli

### 3.BULGULAR VE İRDELEME

#### 3.1. Giriş

Bu bölümde blok genişlikleri ( (b-a)/h, (d-c)/h), malzeme özellikleri ( $\mu_2/\mu_1, \mu_3/\mu_2$ ), bloklar arası mesafe ((c-b)/h), yük oranı (Q/P) gibi çeşitli boyutsuz büyüklükler için elde edilen ifadeler yardımıyla rijit bloklar altındaki temas gerilmeleri (p(x)/P/h q(x)/Q/h), y ekseninde ve bloklar arasında ortaya çıkan ( $\sigma_x, \sigma_y$ ) normal gerilmeler ile y ekseninde ve bloklar arasında ortaya çıkan  $\tau_{xy}$  kayma gerilmeleri incelenmiştir. Ayrıca alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında ve tabakalar arasında, ilk ayrılmayı meydana getirecek yükler ( $\lambda_{cr}$ ) ve ilk ayrılma uzaklıkları( $x_{cr}$ ) incelenmiştir.

İlk ayrılma yükü ve bu yükten büyük yükler ( $\lambda$ ) için ara yüzeylerdeki düşey gerilme dağılımları, tabakalar ve elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ayrılma bölgeleri ((f-e)/h) ,(l-k)/h) araştırılmıştır. Elde edilen grafik ve tablolarda yine bu başlık altında verilmiştir.

#### 3.2. Rijit Bloklar Altındaki Temas Gerilmelerinin İrdelenmesi

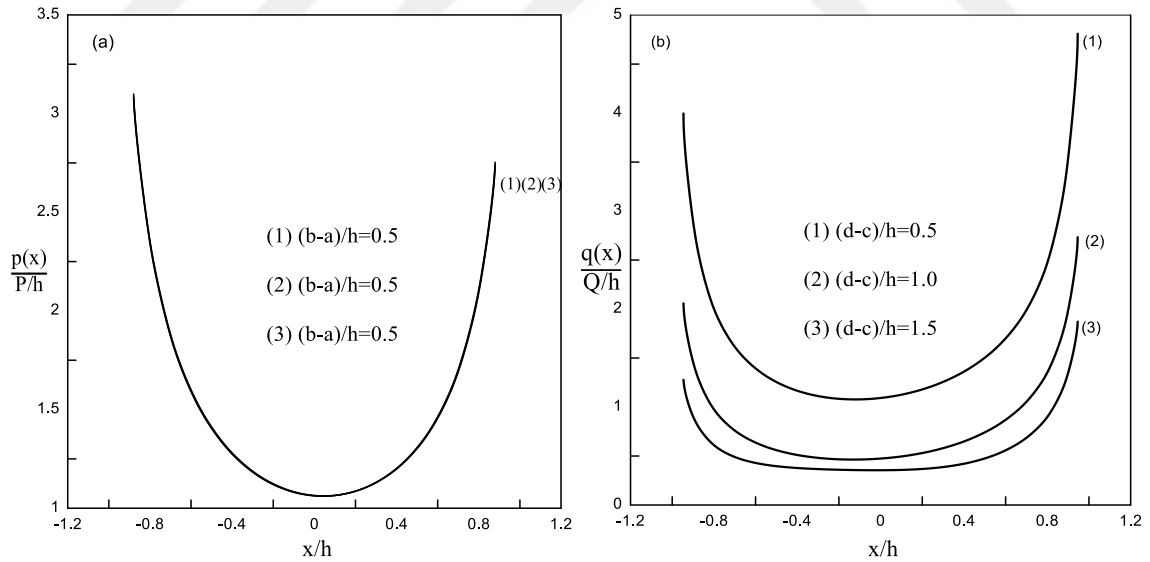
Tabakaların ve elastik yarı sonsuz düzlemin malzeme özellikleri, blok genişlikleri bloklar arasındaki mesafe, yük oranı gibi boyutsuz büyüklüklerin çeşitli değerleri için temas gerilmeleri elde edilmiştir. Grafiklerde 1. blok altındaki gerilmeler şekil (a), 2. blok altındaki gerilmeler şekil (b) 'de gösterilmektedir.

Şekil 13' de blok genişliği artırıldığında meydana gelen temas gerilmeleri görülmektedir. Buna göre blok genişliği artırıldığında yük daha geniş bir alana yayılacağından temas gerilmelerinde azalma meydana gelmektedir. Şekilden de anlaşılacağı gibi temas gerilmeleri rijit bloğun kenarlarında sonsuza gitmekte, blok ortasına yaklaştıkça düzgün bir şekilde azalmaktadır. Rijit bloğun kenarlarının gerilme için singüler noktalar olduğu düşünülürse bu beklenen bir sonuçtur. Şekil 14'de bloklar arası mesafe değişiminin

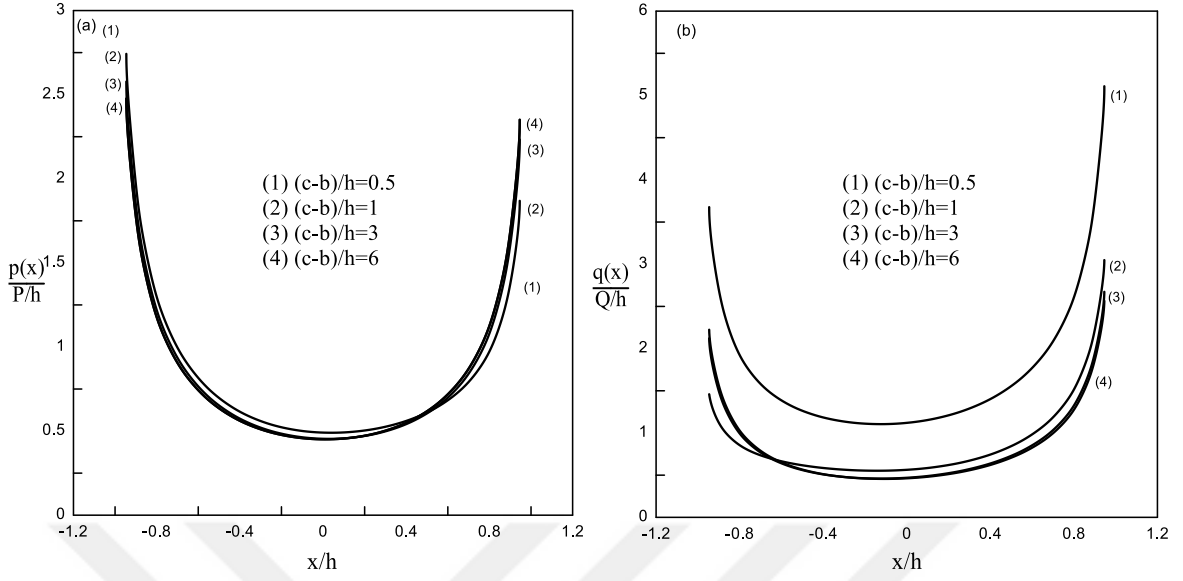


temas gerilmesine etkisi görülmektedir. Bloklar birbirinden uzaklaştırıldığında blokların dış kenarlarında ve blok ortasında gerilme değerlerinde azalmalar gözlemlenmiş, belirli bir limit değerin ( $(d-c)/h=6.0647$ ) aşılması durumunda ise blokların birbirine herhangi bir etkisi kalmamış ve her blok ayrı incelenecek birer problem haline dönüşmüştür.

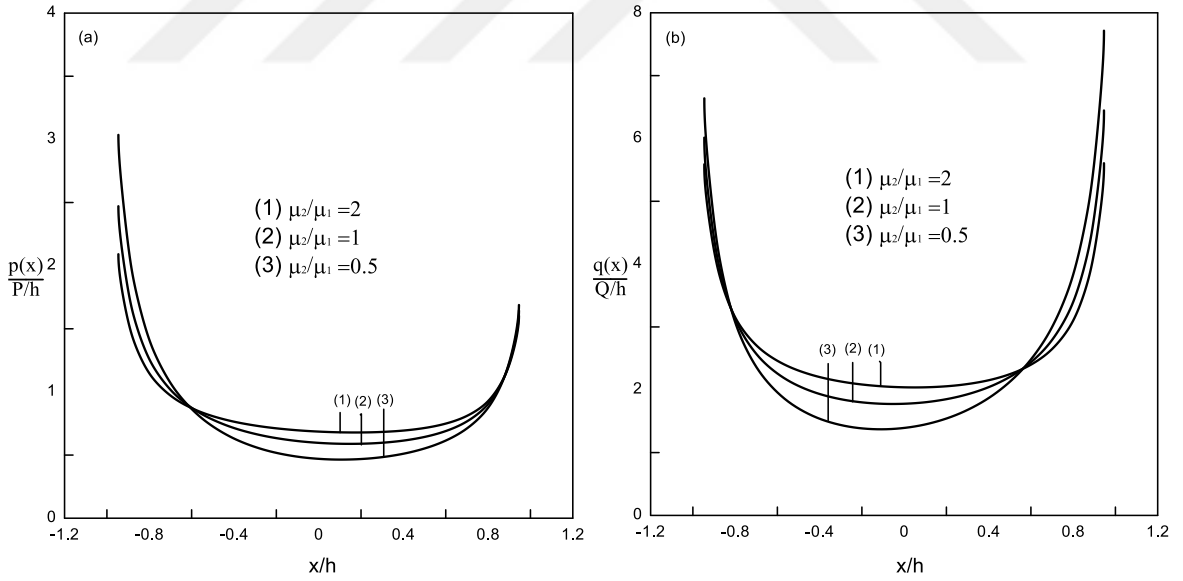
Şekil 15-16'da tabakaların ve elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranlarına bağlı olarak temas gerilmesinin dağılımı verilmektedir. Buna göre alt tabakanın rijitliği üst tabakaya oranla giderek azaldıkça veya elastik yarı sonsuz düzlemin rijitliği alt tabakaya göre azaldıkça blok kenarına yakın bölgelerde gerilme dağılımlarında artış meydana geldiği görülmektedir. Şekil 17'de ise yük oranının artırılması durumunda hem blok kenarına yakın bölgelerde hem blok altında temas gerilmesi değerlerinin arttığı görülmektedir.



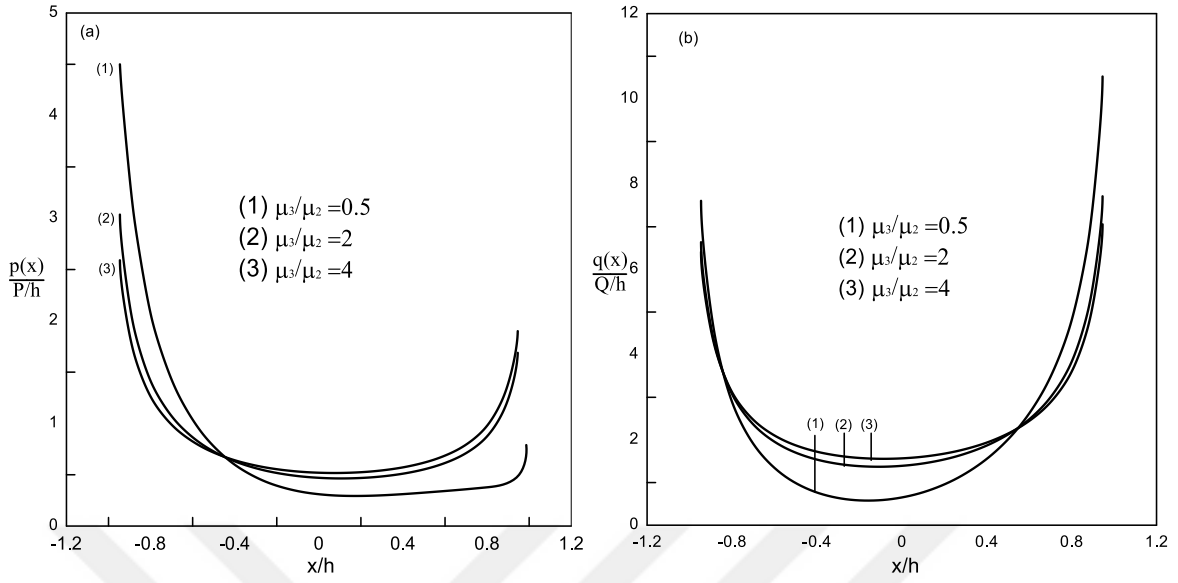
Şekil 13a-b. Çeşitli blok genişlikleri için bloklar altındaki temas gerilmesi yayılımı ( $\kappa_1=2$ ,  $\kappa_2=2$ ,  $\kappa_3=2$ ,  $\mu_2/\mu_1=2$ ,  $\mu_3/\mu_2=2$ ,  $a/h=3$ ,  $(c-b)/h=1$ ,  $Q=P$ )



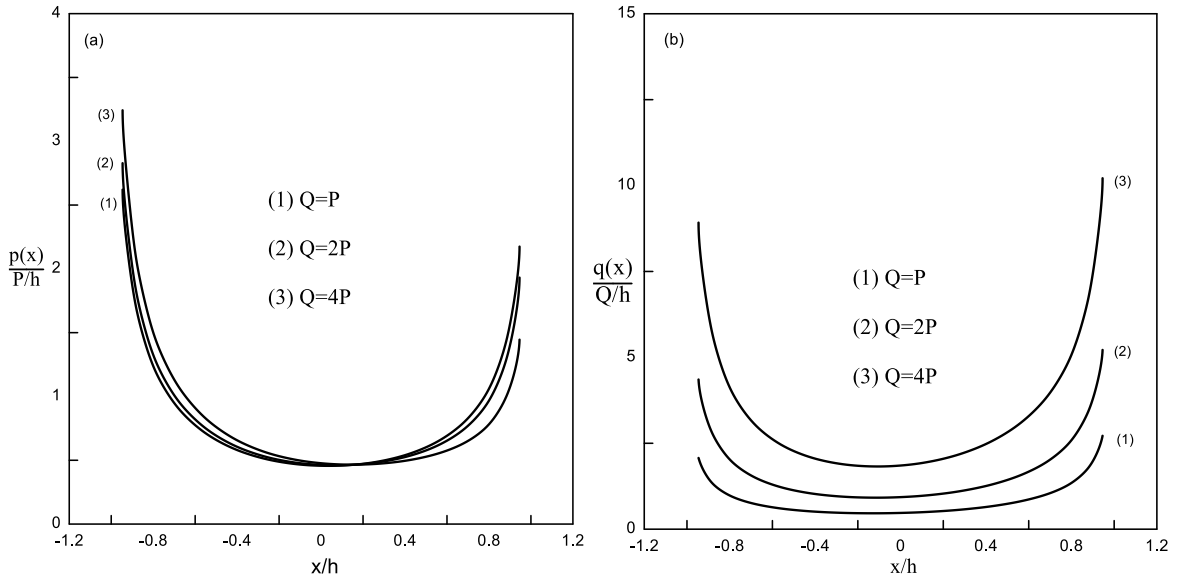
Şekil 14 a-b. Bloklar arası mesafe değişimlerinde bloklar altındaki temas gerilmesi yayılışı ( $\kappa_1=2$ ,  $\kappa_2=2$ ,  $\kappa_3=2$ ,  $\mu_2/\mu_1=2$ ,  $\mu_3/\mu_2=2$ ,  $a/h=3$ ,  $(b-a)/h=1$ ,  $(d-b)/h=1$ ,  $Q=2P$ )



Şekil 15a-b. Tabakaların kayma modülleri oranlarına bağlı olarak bloklar altındaki temas gerilmeleri yayılışı ( $\kappa_1=2$ ,  $\kappa_2=2$ ,  $\kappa_3=2$ ,  $\mu_3/\mu_2=2$ ,  $a/h=3$ ,  $(b-a)/h=1$ ,  $(d-c)/h=1$ ,  $(c-b)/h=1$ ,  $Q=2P$ )



Şekil 16a-b. Alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modüllerinin oranlarına bağlı olarak bloklar altındaki temas gerilmesi yayılımı ( $\kappa_1=2$ ,  $\kappa_2=2$ ,  $\kappa_3=2$ ,  $\mu_2/\mu_1=2$ ,  $a/h=3$ ,  $(b-a)/h=1$ ,  $(d-c)/h=1$ ,  $(c-b)/h=1$ ,  $Q=2P$ )



Şekil 17 a-b. Çeşitli yük oranı değerleri için bloklar altındaki temas gerilmeleri yayılımı ( $\kappa_1=2$ ,  $\kappa_2=2$ ,  $\kappa_3=2$ ,  $\mu_2/\mu_1=2$ ,  $\mu_3/\mu_2=2$ ,  $a/h=3$ ,  $(b-a)/h=1$ ,  $(d-c)/h=1$ ,  $(c-b)/h=1$ )

### 3.3. Normal Gerilme ve Kayma Gerilmelerinin İncelenmesi

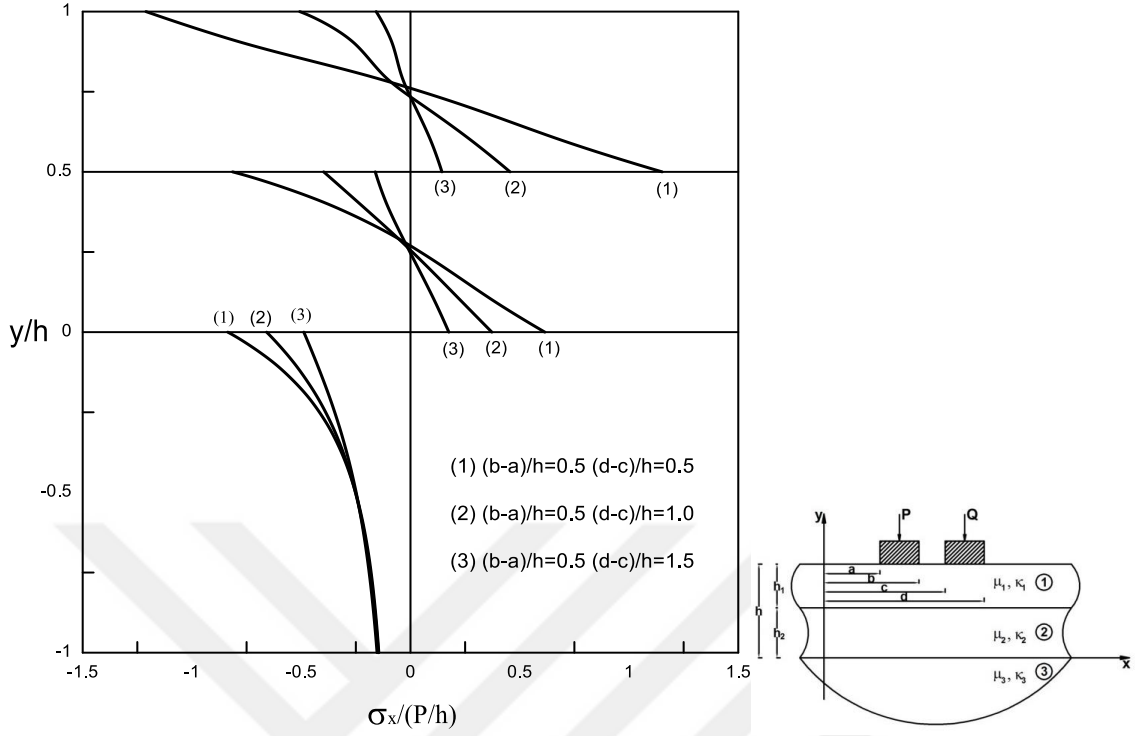
Yük altında ve bloklar arasında y eksenini boyunca  $\sigma_x, \sigma_y$  normal gerilmeleri ve  $\tau_{xy}$  kayma gerilmeleri incelenmiştir. Ayrıca x eksenini boyunca tabakalar arasında ve alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında  $\sigma_x$  gerilmesinin dağılımını elde edilmiştir.

#### 3.3.1. $\sigma_x$ Normal Gerilmesinin İncelenmesi

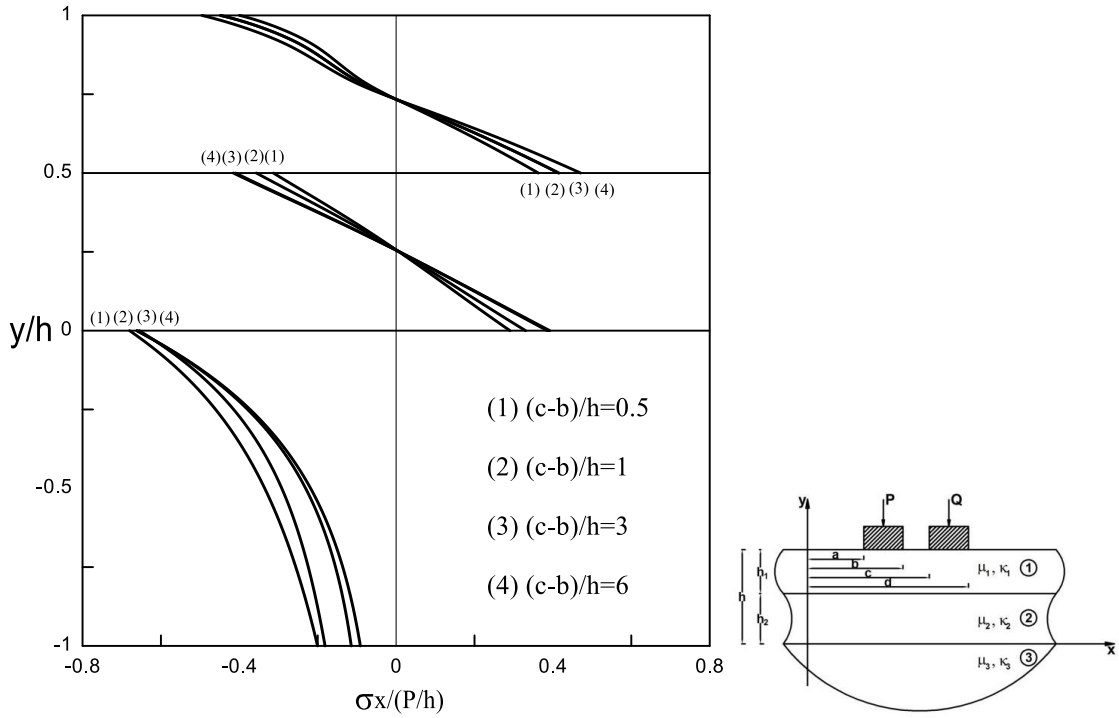
İlk olarak birinci bloğun orta noktasında,  $\sigma_x$  normal gerilme değerleri çeşitli boyutsuz büyüklükler için hesaplanmıştır. Şekil 18'de  $\sigma_x$  normal gerilmesinin blok genişliği ile değişimi görülmektedir. Birinci blokta genişlik sabit tutulup ikinci blokta artırılmış ve bu artımın birinci bloğun orta noktasındaki normal gerilmenin değişimine etkisi incelenmiştir. Şekilden de görülebileceği gibi blok genişliği küçüldükçe  $\sigma_x$  normal gerilmesinin değeri her iki tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemde artmaktadır. Üst tabakada tabakanın üst bölgelerinde basınç gerilmeleri oluşmakta, tabakanın alt kısımlarına doğru inildikçe değeri azalarak sıfır olmakta daha sonra işaret değiştirerek çekme gerilmesi olarak artmaktadır. Alt tabakada da benzer durum söz konusudur. Elastik yarı sonsuz düzlemde ise en büyük gerilme değeri alt tabakaya temas yüzeyinde meydana gelmekte, derine inildikçe her yerde basınç gerilmesi olacak şekilde azalarak sıfıra yaklaşmaktadır. Şekil 19'da  $\sigma_x$  normal gerilmesinin bloklar arası mesafe ile değişimi görülmektedir. Bloklar arasında ki mesafe arttıkça  $\sigma_x$  normal gerilmesinin değeri her iki tabakada da artarken elastik yarı sonsuz düzlemde azalmaktadır. Belli bir mesafeden sonra  $((c-b)/h=6.0643)$  bloklar arasındaki etkileşim sonlandığı için  $\sigma_x$  normal gerilmesi değerinde herhangi bir değişiklik olmamaktadır. Benzer şekilde üst tabakada tabakanın üst bölgelerinde basınç gerilmeleri oluşmakta, tabakanın alt kısımlarına doğru inildikçe değeri azalarak sıfır olmakta daha sonra işaret değiştirerek çekme gerilmesi olarak artmaktadır. Alt tabakada da benzer durum söz konusudur. Elastik yarı sonsuz düzlemde ise en büyük gerilme değeri alt tabakaya temas yüzeyinde meydana gelmekte, derine inildikçe her yerde basınç gerilmesi olacak şekilde azalarak sıfıra yaklaşmaktadır. Şekil 20'de birinci bloğun orta noktası olan  $x/h=3.5$  'de  $\sigma_x$  normal gerilmesinin tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi görülmektedir. Şekle

bakıldığında alt tabakanın kayma modülünün üst tabakanın kayma modülüne oranı azaldıkça alttaki tabakada  $\sigma_x$  normal gerilmeleri azalmakta üst tabakadaki gerilmeler ise artmaktadır. Elastik tabakaların rijitlikleri birbirine göre değişirken rijitlikte artışın olduğu tabakada  $\sigma_x$  normal gerilmesi değerlerinin de büyüyeceği aksi halde azalacağı görülmektedir. Elastik yarı sonsuz düzlemde ise kayma gerilmeleri oranı arttıkça gerilmeler de artmaktadır. Şekil 21’de yine  $\sigma_x$  normal gerilmesinin tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi görülmektedir, ancak bu defa birinci blok altında değil bloklar arasındaki değişim incelenmiştir. Benzer şekilde alt tabakanın kayma modülünün üst tabakanın kayma modülüne oranı azaldıkça alttaki tabakada  $\sigma_x$  normal gerilmeleri azalmakta üst tabakadaki gerilmeler ise artmaktadır. Farklı olarak ise üst tabakada tabakanın alt bölgelerinde basınç gerilmeleri oluşmakta, tabakanın üst kısımlarına doğru çıkıldıkça değeri azalarak sıfır olmakta daha sonra işaret değiştirerek çekme gerilmesi olarak artmaktadır. Alt tabakada da benzer durum söz konusudur. Elastik yarı sonsuz düzlemde ise alt tabakaya temas yüzeyinde azalarak sıfıra yaklaşmaktadır. Şekil 22’de ise y ekseninde ( $x/h=0$ )  $\sigma_x$  normal gerilmesinin tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi görülmektedir.  $\mu_2/\mu_1$  oranı arttıkça tabakalarda ve elastik yarı sonsuz düzlemdeki kayma gerilmeleri değerleride azalmaktadır. Yine üst tabakada tabakanın alt bölgelerinde basınç gerilmeleri oluşmakta, tabakanın üst kısımlarına doğru çıkıldıkça değeri azalarak sıfır olmakta daha sonra işaret değiştirerek çekme gerilmesi olarak artmaktadır. Alt tabakada da benzer durum söz konusudur ancak değerler birbirine çok yakındır. Şekil 23’de ise elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülünün alt tabakanın kayma modülüne oranının çeşitli değerleri için  $\sigma_x$  normal gerilmesi dağılımı görülmektedir. Bu durumda ise  $\mu_3/\mu_2$  oranı arttıkça yani alt tabakanın rijitliği elastik yarı sonsuz düzlemin rijitliğine göre azaldıkça elastik yarı sonsuz düzlemde gerilmeler artmakta diğer tabakalarda ise azalmaktadır. Tabakalar ve elastik yarı sonsuz düzlem için çekme ve basınç bölgelerindeki değişim ise Şekil 18, Şekil 19 ve Şekil 20’dekine benzer şekilde gerçekleşmektedir. Üst tabakada tabakanın üst bölgelerinde basınç gerilmeleri oluşmakta, tabakanın alt kısımlarına doğru inildikçe değeri azalarak sıfır olmakta daha sonra işaret değiştirerek çekme gerilmesi olarak artmaktadır. Alt tabakada da benzer durum söz konusudur. Elastik yarı sonsuz düzlemde ise en büyük gerilme değeri alt tabakaya temas yüzeyinde meydana gelmekte, derine inildikçe her yerde basınç gerilmesi olacak şekilde

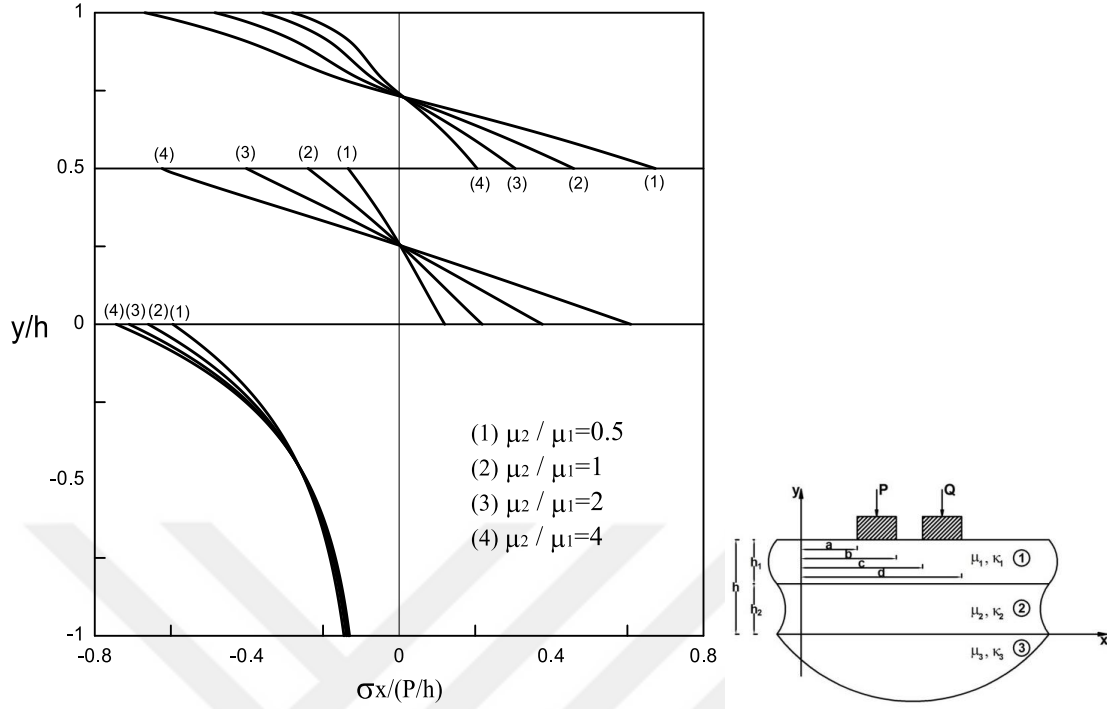
azalarak sıfıra yaklaşmaktadır. Şekil 24'de  $\sigma_x$  normal gerilmesinin ikinci bloğun orta noktası olan  $x/h=6.5$ ' de, yük oranı (Q/P) ile değişimi verilmektedir. Yük oranı arttıkça üst tabakada, alt tabakada ve elastik yarı sonsuz düzlemde  $\sigma_x$  normal gerilmesinin arttığı görülmektedir. Şekil 25-28 'de çeşitli boyutsuz büyüklükler için tabakalar arasında ve alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında x eksenini boyunca  $\sigma_x$  boyutsuz normal gerilmesinin değişimi incelenmiştir. Şekil 25'de tabakaların kayma modülleri oranına bağlı olarak x eksenini boyunca oluşan  $\sigma_x$  normal gerilmesinin değişimi görülmektedir. Kayma modülleri oranı arttıkça ( $\mu_2/\mu_1$ ) tabakalar arasındaki  $\sigma_x$  boyutsuz normal gerilmesinin çekme ve basınç bölgelerinde aldığı değerlerde azalmaktadır. x ekseninin başlangıcıyla 1. Blok arasındaki mesafede, bloklar arasında ve 2. Bloktan hemen sonra ki bölgede basınç gerilmeleri meydana gelirken, bloklar altında ise çekme gerilmeleri oluşmakta ve bu gerilmeler en büyük değerini yük altında almaktadır. Şekil 26 tabakaların kayma modülleri oranına bağlı olarak x eksenini boyunca alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında meydana gelen  $\sigma_x$  gerilmesinin değişimi görülmektedir. Oran arttıkça meydana gelen gerilme değerleri azalmaktadır. Şekil 27-28 'de görüldüğü gibi alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı  $\mu_3/\mu_2$  arttıkça hem tabakalar arasında hem de alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında  $\sigma_x$  boyutsuz normal gerilmesinin çekme ve basınç bölgelerinde aldığı değerler azalmaktadır.



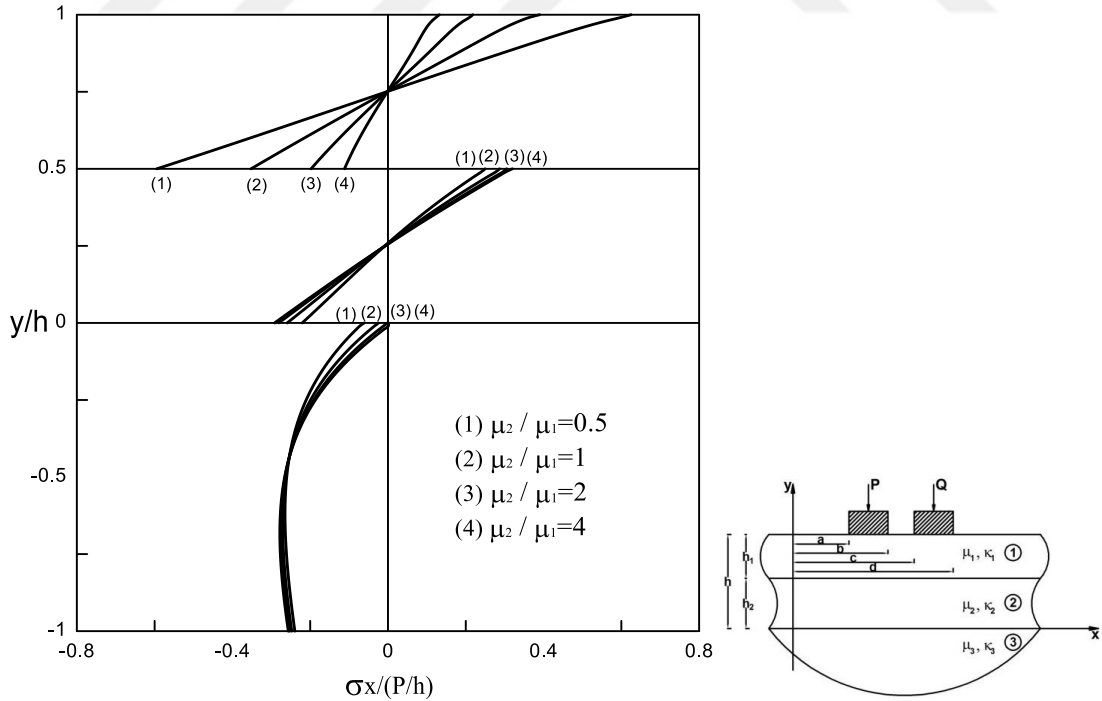
Şekil 18.  $\sigma_x$  (3.25,  $y$ )/(P/h) boyutsuz normal gerilmesinin blok genişlikleri ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (c-b)/h=2, Q=P$ )



Şekil 19.  $\sigma_x$  (3.5,  $y$ )/(P/h) boyutsuz normal gerilmesinin bloklar arası mesafe ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=2, \mu_3/\mu_2=2, a/h=3, (b-a)/h=1, (d-c)/h=1, Q=P$ )

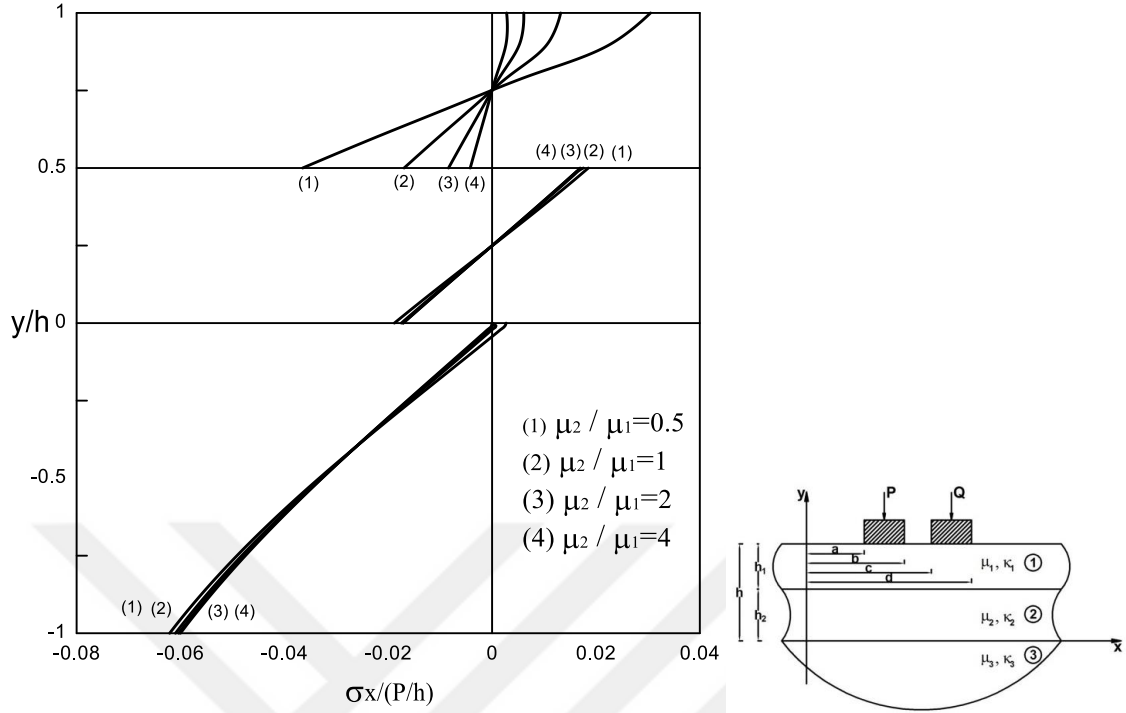


Şekil 20.  $\sigma_x(3.5, y)/(P/h)$  boyutsuz normal gerilmesinin tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=1, (d-c)/h=1, (c-b)/h=2, Q=P$ )

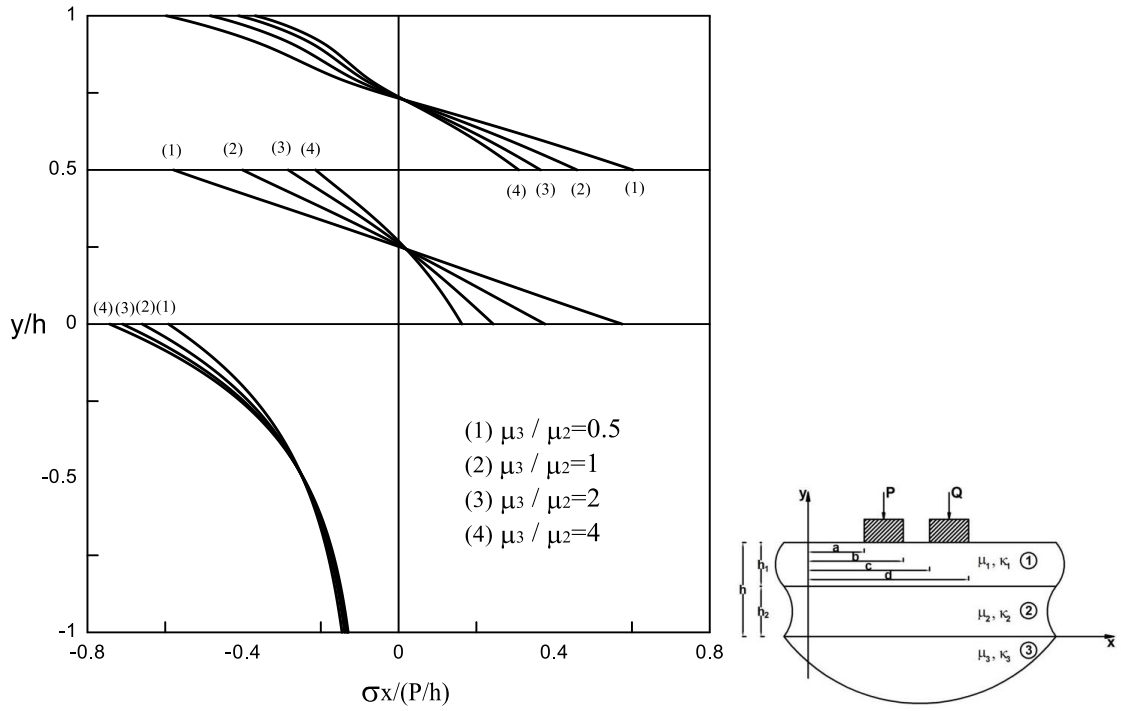


Şekil 21.  $\sigma_x(4.5, y)/(P/h)$  boyutsuz normal gerilmesinin tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=1, (d-c)/h=1, (c-b)/h=1, Q=P$ )

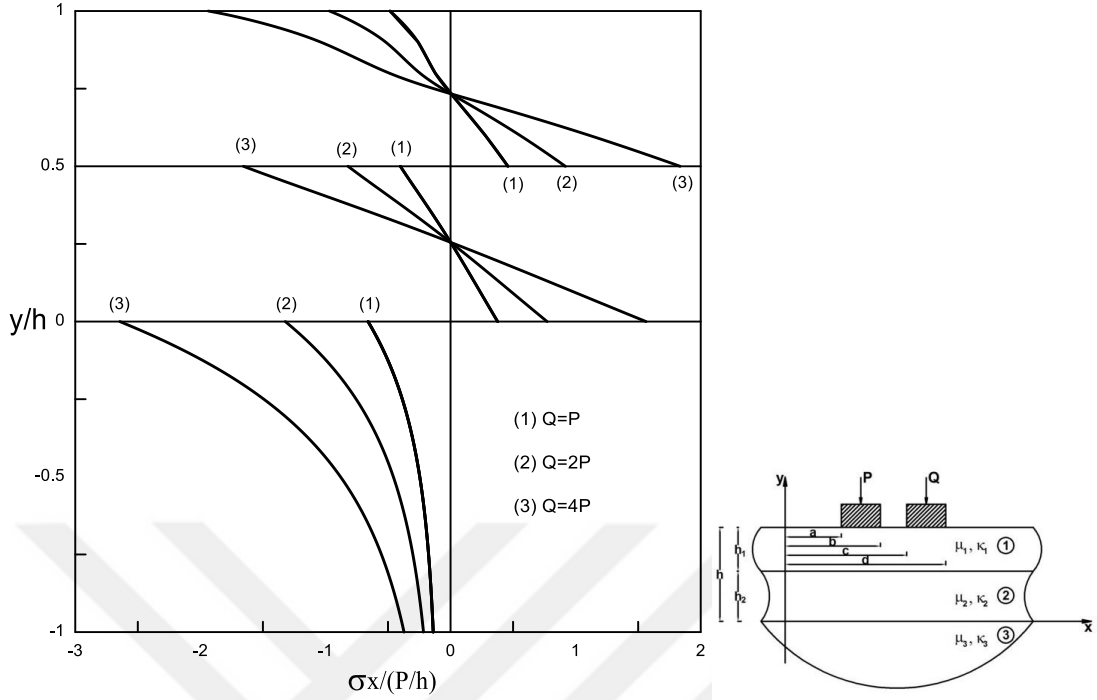




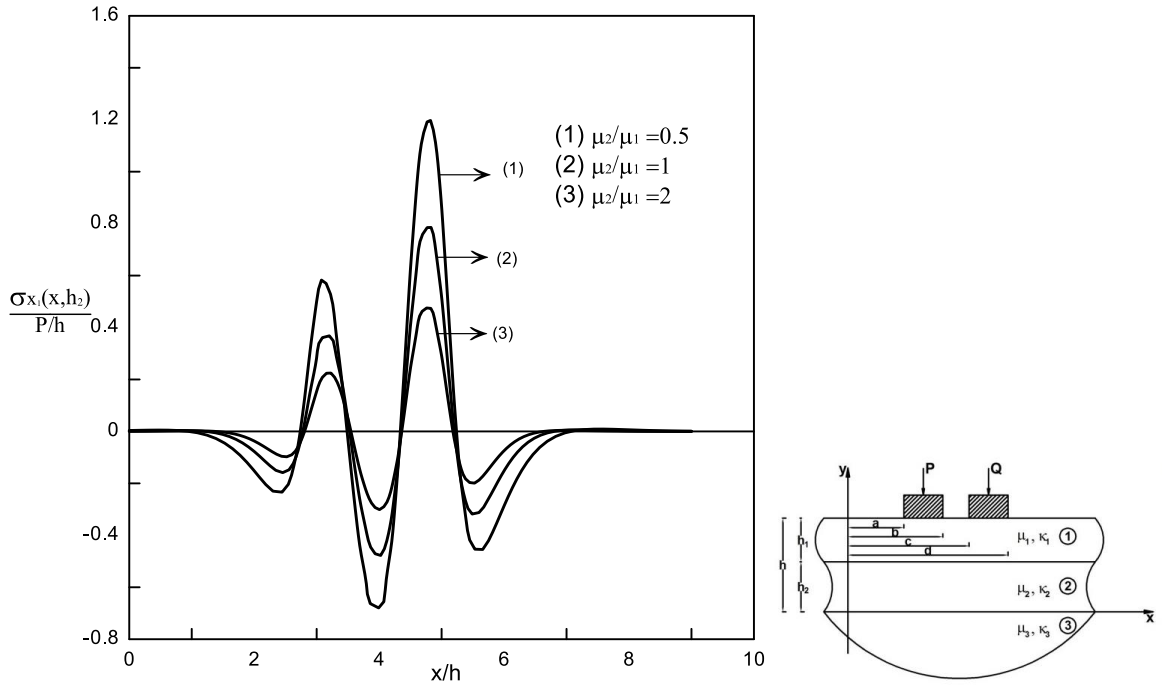
Şekil 22.  $\sigma_x(0, y)/(P/h)$  boyutsuz normal gerilmesinin tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=1, (d-c)/h=1, (c-b)/h=2, Q=P$ )



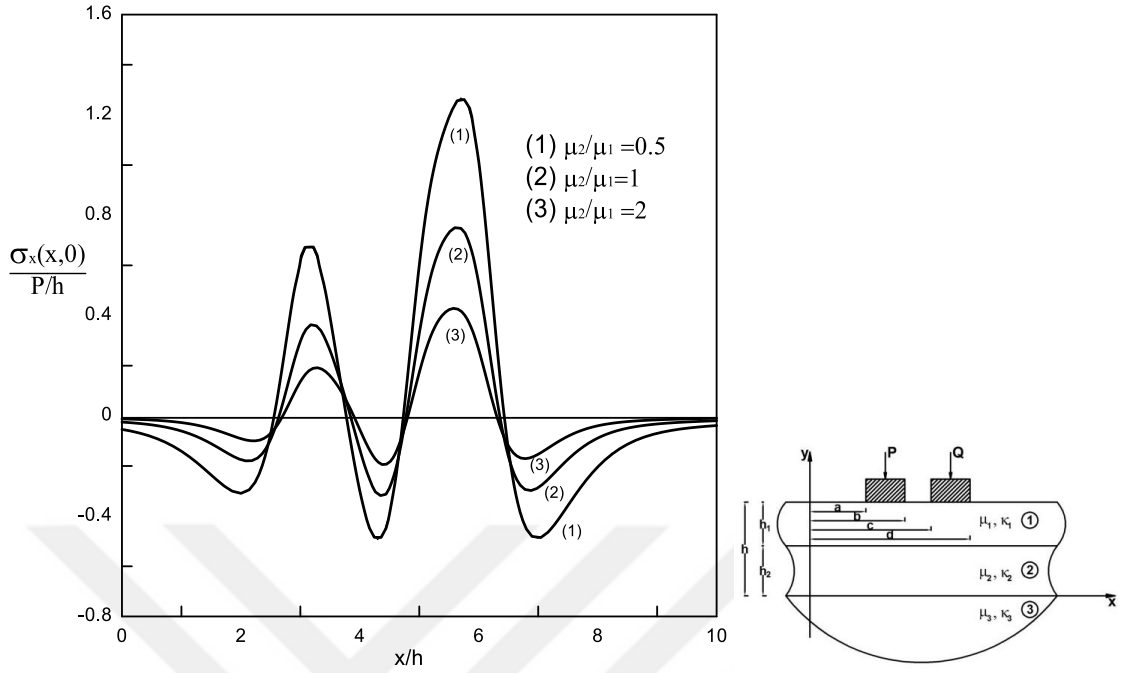
Şekil 23.  $\sigma_x(3.5, y)/(P/h)$  boyutsuz normal gerilmesinin alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, a/h=3, (b-a)/h=1, (d-c)/h=1, (c-b)/h=2, Q=P$ )



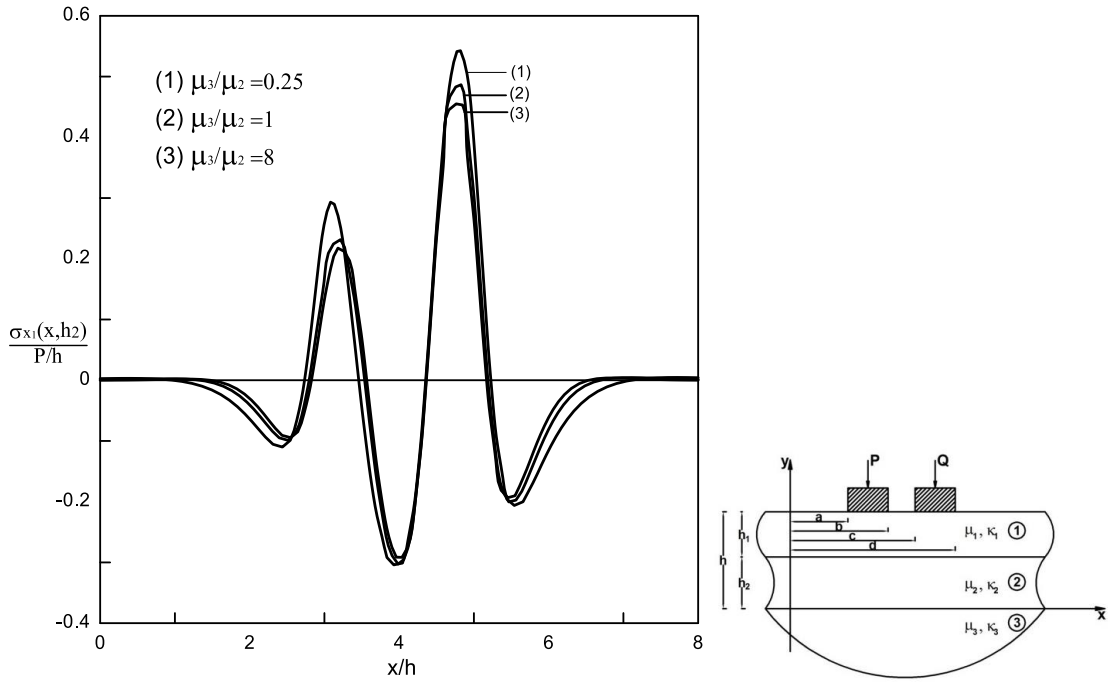
Şekil 24.  $\sigma_x(6.5, y)/(P/h)$  boyutsuz normal gerilmesinin yük oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2$ ,  $\kappa_2=2$ ,  $\kappa_3=2$ ,  $\mu_2/\mu_1=1$ ,  $\mu_3/\mu_2=1$ ,  $a/h=3$ ,  $(b-a)/h=1$ ,  $(d-c)/h=1$ ,  $(c-b)/h=2$ )



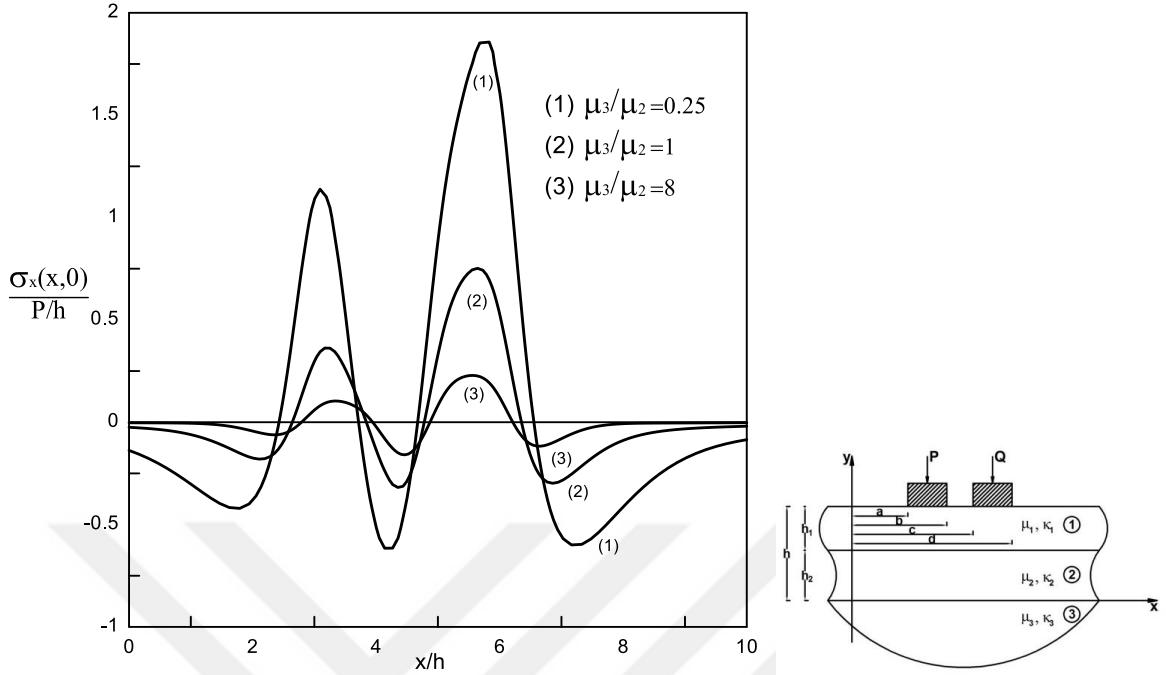
Şekil 25. Tabakaların kayma modüllerinin oranına bağlı olarak  $x$  eksenı boyunca  $\sigma_{x_1}(x, h_2)/(P/h)$  boyutsuz normal gerilmesinin değişimi ( $\kappa_1=2$ ,  $\kappa_2=2$ ,  $\kappa_3=2$ ,  $\mu_3/\mu_2=1$ ,  $a/h=3$ ,  $(b-a)/h=1$ ,  $(d-c)/h=1$ ,  $(c-b)/h=1$ ,  $Q=2P$ )



Şekil 26. Tabakaların kayma modüllerinin oranına bağlı olarak  $x$  eksenini boyunca  $\sigma_{x_2}(x,0)/(P/h)$  boyutsuz normal gerilmesinin değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=1, (d-c)/h=1, (c-b)/h=1, Q=2P$ )



Şekil 27. Alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modüllerinin oranına bağlı olarak  $x$  eksenini boyunca  $\sigma_{x_1}(x,h_2)/(P/h)$  boyutsuz normal gerilmesinin değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, a/h=3, (b-a)/h=1, (d-c)/h=1, (c-b)/h=1, Q=2P$ )

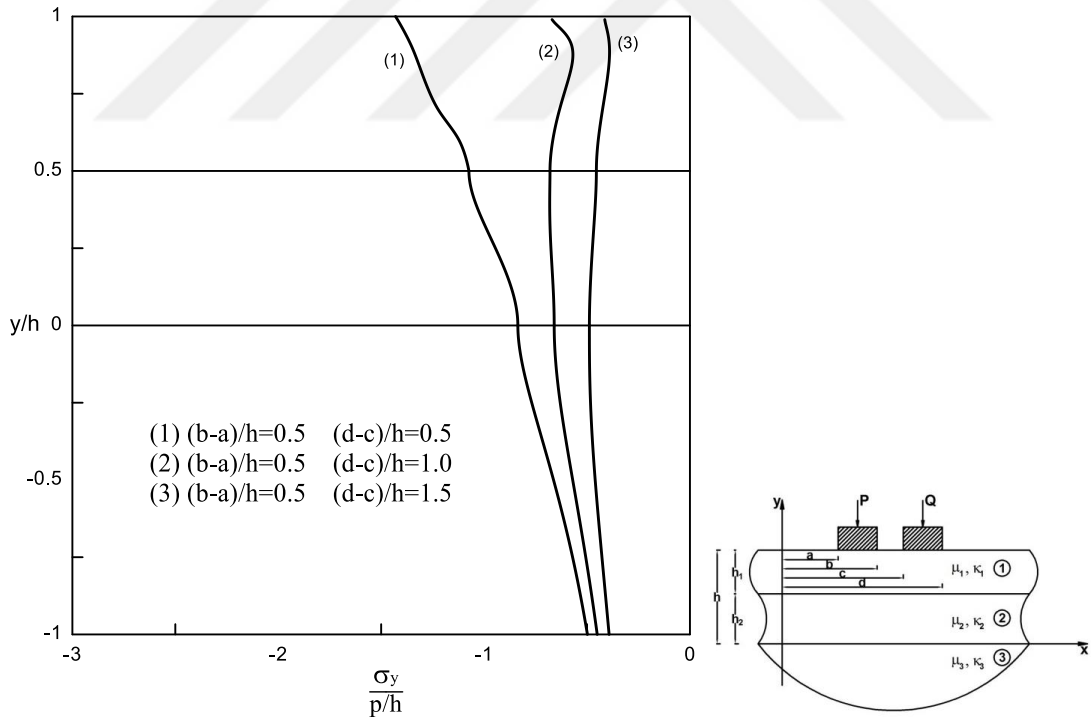


Şekil 28. Alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modüllerinin oranına bağlı olarak x eksenini boyunca  $\sigma_{x_2}(x,0)/(P/h)$  boyutsuz normal gerilmesinin değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, a/h=3, (b-a)/h=1, (d-c)/h=1, (c-b)/h=1, Q=2P$ )

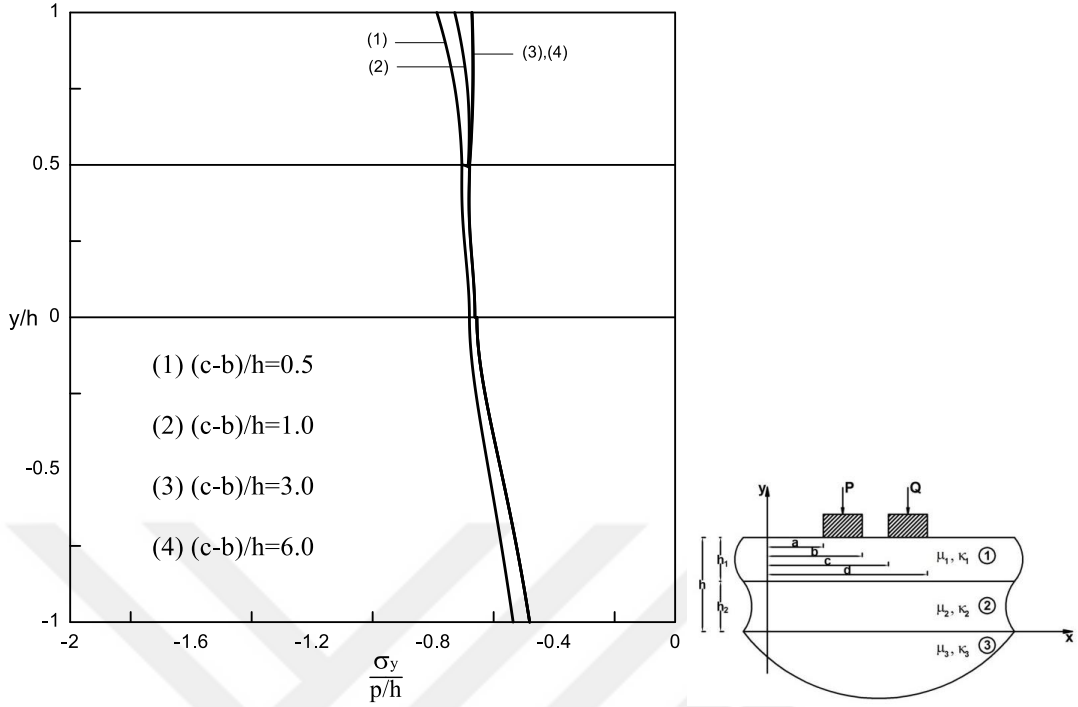
### 3.2.2. $\sigma_y$ Normal Gerilmesinin İncelenmesi

Şekil 29-33 'de 1.blok altındaki eksen boyunca  $\sigma_y$  boyutsuz normal gerilmesi dağılımı incelenmiştir.  $\sigma_y$  normal gerilmeleri en büyük değerlerini blokların temas yüzeyinde ( $y=h$ ) almakta ve bloklardan uzaklaştıkça (derine inildikçe) azalarak sıfıra doğru yaklaşmaktadır. Sınır şartlarında da verildiği gibi üst tabaka ile alt tabakanın temas yüzeyinde ve alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin temas yüzeyinde gerilmeler aynı değeri almıştır. Şekil 29' da görüldüğü gibi blok genişlikleri arttıkça  $\sigma_y$  normal gerilmeleri azalmaktadır. Şekil 30'da  $\sigma_y$  normal gerilmesinin bloklar arası mesafe ile değişimi görülmektedir. Buna göre bloklar arasındaki mesafe arttıkça gerilme değerinde bir miktar azalma meydana gelmekte, mesafenin belli bir değerinden ( $(c-b)/h=6.0643$ ) sonra ise  $\sigma_y$  gerilmesinde herhangi bir değişim olamamaktadır. Şekil 31-32'de ise tabakaların ve alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranının çeşitli değerleri için  $\sigma_y$  gerilmesinin değişimi görülmektedir. Şekillere göre alt tabakanın rijitliği üst tabakaya göre

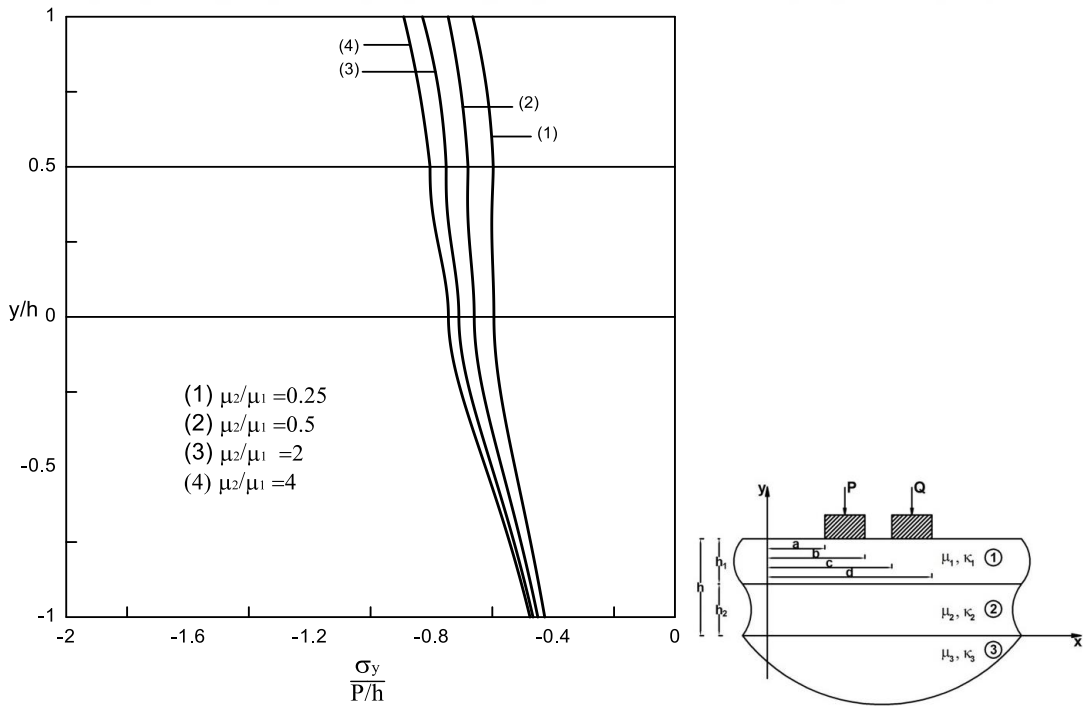
artıkça veya elastik yarı sonsuz düzlemin rijitliği alt tabakaya göre arttıkça  $\sigma_y$  normal gerilmeleri artmaktadır. Şekil 33’de yük oranının değişimine göre  $\sigma_y$  normal gerilmelerinin dağılışı görülmektedir.  $\sigma_y$  normal gerilmeleri yük oranları ile doğru orantılı olarak artmaktadır. Şekil 34’ de ise  $\sigma_y$  normal gerilmelerinin 1. bloktaki yük altında, bloklar arasındaki ve y eksenindeki değerleri karşılaştırılmıştır. Buna göre yük altındaki durumda daha öncede belirtildiği gibi gerilmeler en büyük değerlerini blokların temas yüzeyinde ( $y=h$ ) almakta ve bloklardan uzaklaştıkça (derine inildikçe) azalarak sifıra doğru yaklaşmaktadır. y ekseninde her iki tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemde  $\sigma_y$  normal gerilmesinin değerinin çok küçük olduğu (sıfıra yakın ) görülmektedir. Bloklar arasında ise elastik zeminde meydana gelen basınç gerilmesi alt tabakaya yaklaştıkça çekme gerilmesine dönüşmekte ve tabakalarda da çekme gerilmeleri görülmektedir.



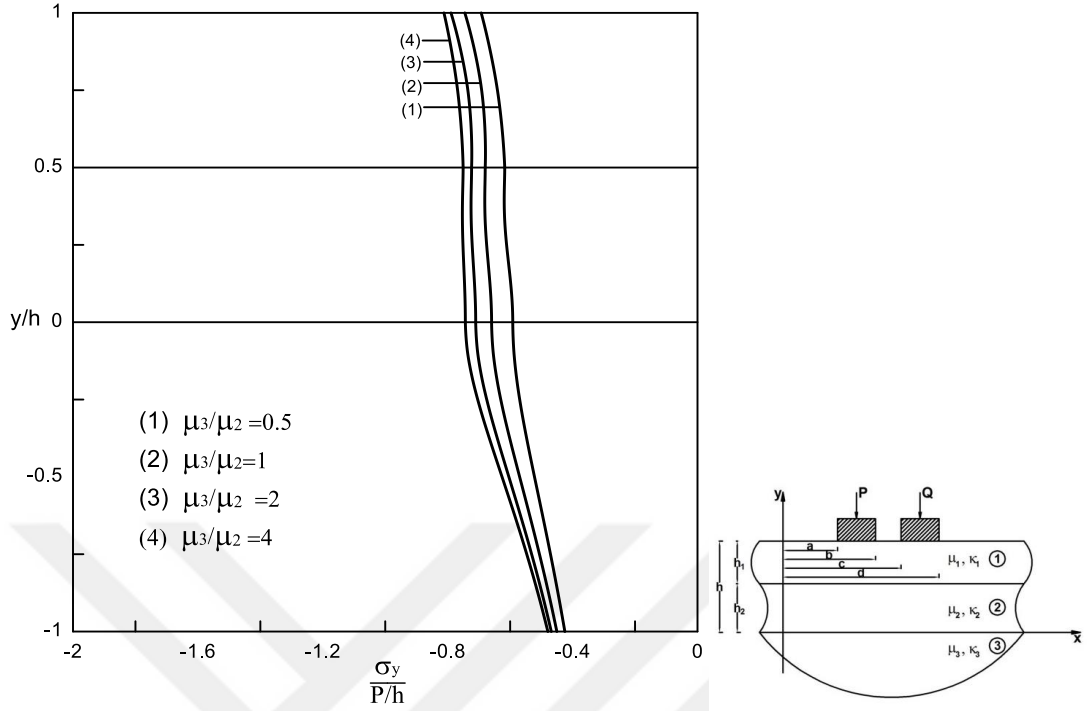
Şekil 29.  $\sigma_y (3.25, y)/(P/h)$  boyutsuz normal gerilmesinin blok genişlikleri ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (c-b)/h=2, Q=P$ )



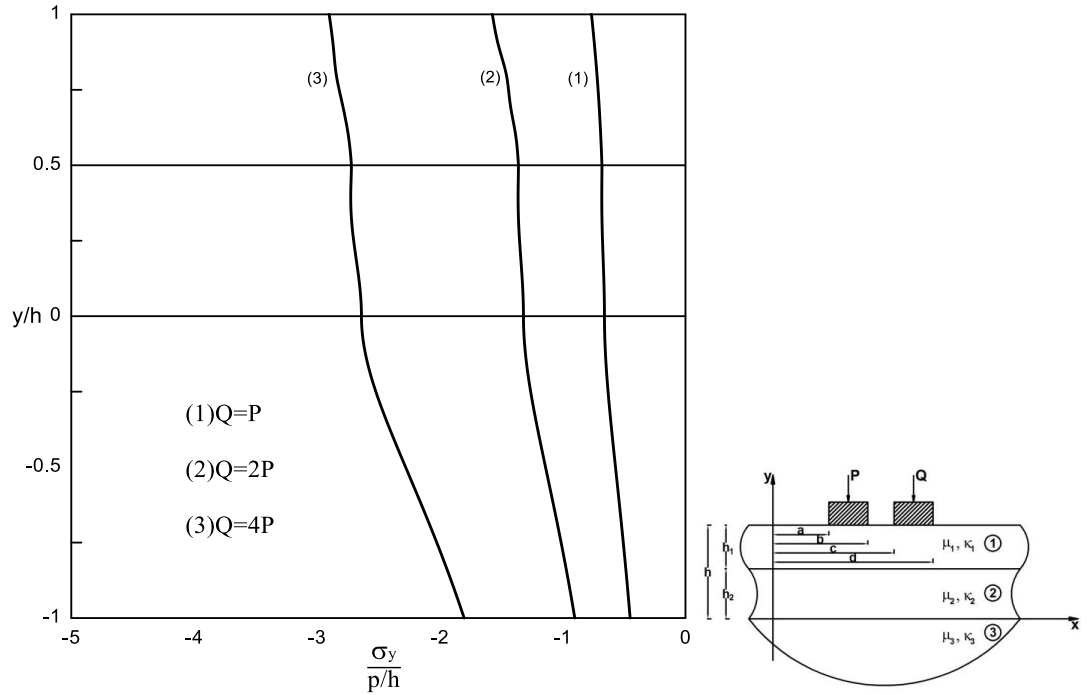
Şekil 30.  $\sigma_y (3.5, y)/(P/h)$  boyutsuz normal gerilmesinin bloklar arası mesafe ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=2, \mu_3/\mu_2=2, a/h=3, (b-a)/h=1, (d-c)/h=1, Q=P$ )



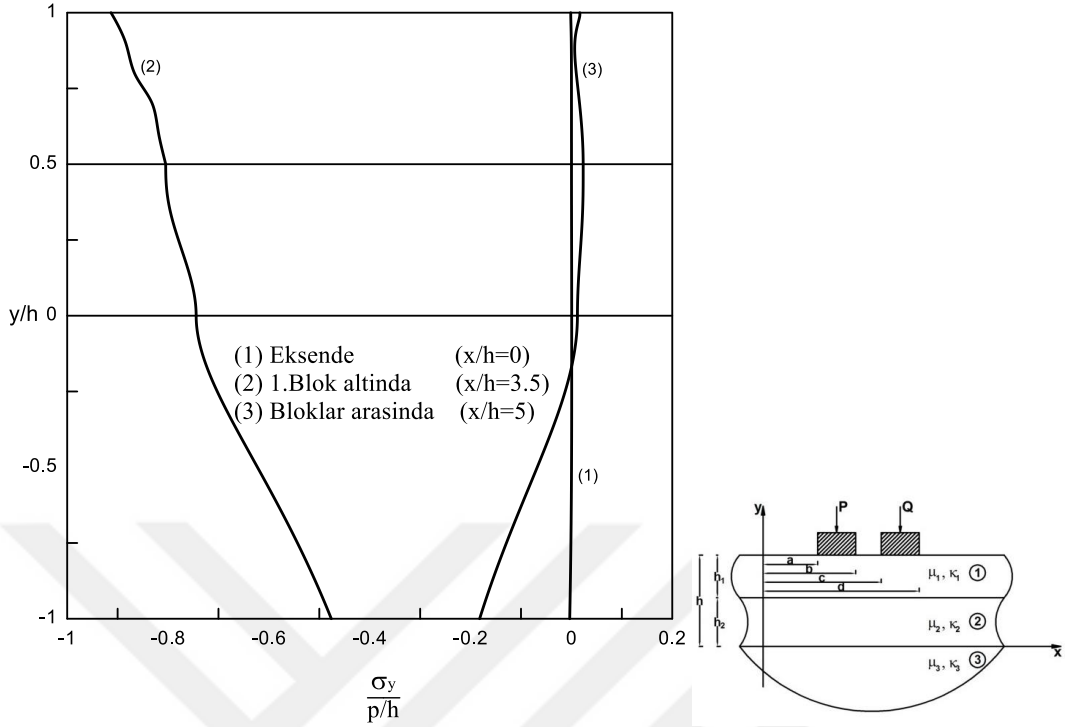
Şekil 31.  $\sigma_y (3.5, y)/(P/h)$  boyutsuz normal gerilmesinin tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=1, (d-c)/h=1, (c-b)/h=2, Q=P$ )



Şekil 32.  $\sigma_y(3.5, y)/(P/h)$  boyutsuz normal gerilmesinin alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, a/h=3, (b-a)/h=1, (d-c)/h=1, (c-b)/h=2, Q=P$ )



Şekil 33.  $\sigma_y(3.5, y)/(P/h)$  boyutsuz normal gerilmesinin yük oranı ( $Q/P$ ) ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=1, (d-c)/h=1, (c-b)/h=2$ )



Şekil 34.  $\sigma_y(x, y)/(P/h)$  boyutsuz normal gerilmesinin, y ekseninde blok altında ve bloklar arasındaki değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=1, (d-c)/h=1, (c-b)/h=2, Q=P$ )

### 3.3.3. $\tau_{xy}$ Kayma Gerilmesinin İncelenmesi

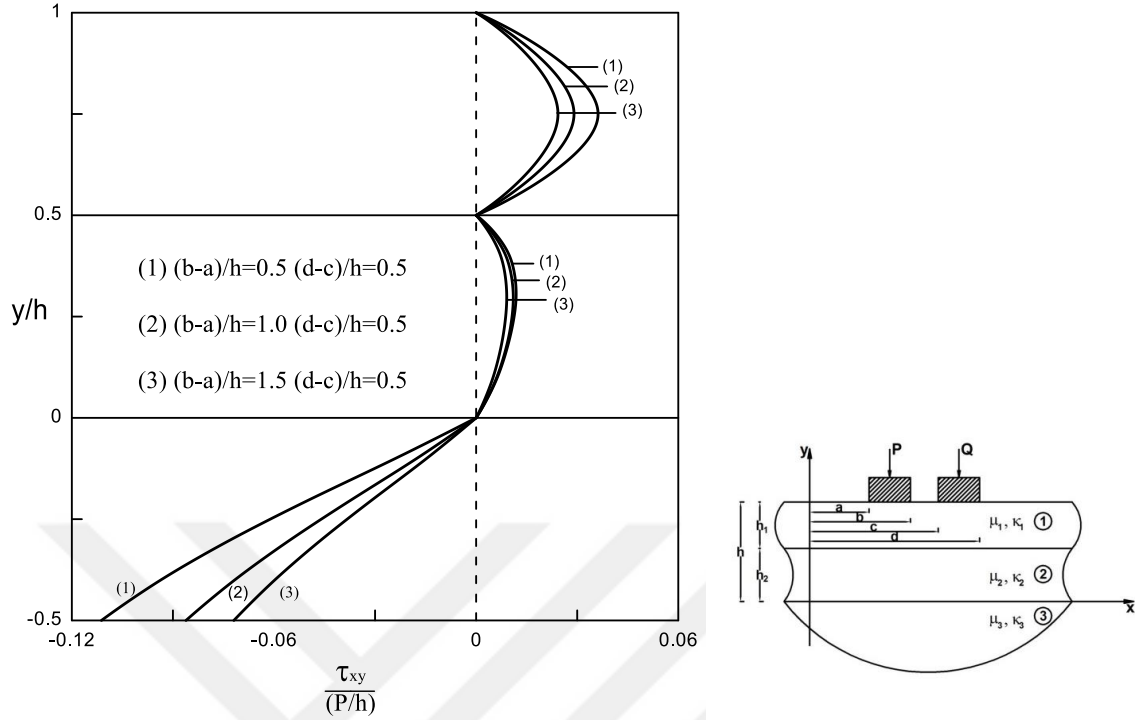
Tabakalar ve elastik yarı sonsuz düzlemde meydana gelen kayma gerilmeleri y ekseninde, yük altında ve bloklar arasında incelenmiştir.  $\tau_{xy}(x, 0), \tau_{xy}(x, h_2), \tau_{xy}(x, h)$  kayma gerilmeleri temas yüzeyleri boyunca sıfırdır ve problemin çözümünde verilen sınır şartlarını sağladığı görülmüştür.

Şekil 35'de 1. blok genişliğine bağlı olarak y ekseninde meydana gelen kayma gerilmesi yayılışı görülmektedir. Üst tabakada 1. blok genişliğinin artmasıyla kayma gerilmeleri azalmaktadır. Kayma gerilmesi tabakaların ortasında maksimum değere ulaşmaktadır. Benzer şekilde alt tabakada da azalma görülmektedir ancak alt tabaka blok genişliği değişiminden üst tabaka kadar etkilenmemektedir. Elastik yarı sonsuz düzlemde ise blok genişliğindeki artış kayma gerilmesinde azalmaya neden olmaktadır. Şekil 36'da y eksenindeki  $\tau_{xy}$  kayma gerilmesi değişimi görülmektedir.  $\mu_2/\mu_1$  oranı arttıkça yani alt

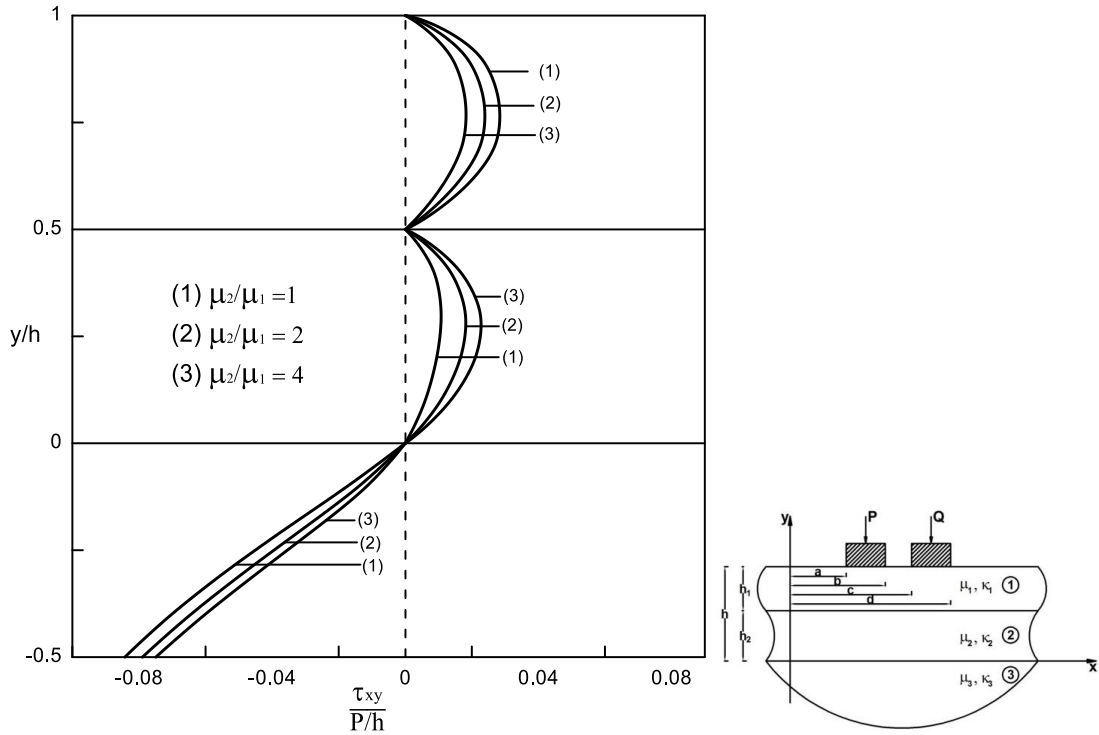


tabakanın rijitliği üst tabakaya göre arttıkça üst tabakada kayma gerilmesinin değeri azalmakta, alt tabakada ise artmaktadır. Elastik yarı sonsuz düzlem ve alt tabakanın malzeme özellikleri aynı seçildiğinde elastik yarı sonsuz düzlemde tabakaların kayma modülleri oranının artışına bağlı olarak gerilme değeri azaldığı görülmektedir. Tabakalarda meydana gelen gerilmeler birbirine yakındır. Şekil 37’de 1.bloğun orta noktası olan  $x/h=1.5$ ’de meydana gelen kayma gerilmeleri değeri  $\mu_2/\mu_1$  kayma modülleri oranı ile değişimi incelenmiştir.  $\mu_2/\mu_1$  oranı arttıkça her iki tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin kayma gerilmelerinin azaldığı görülmektedir.

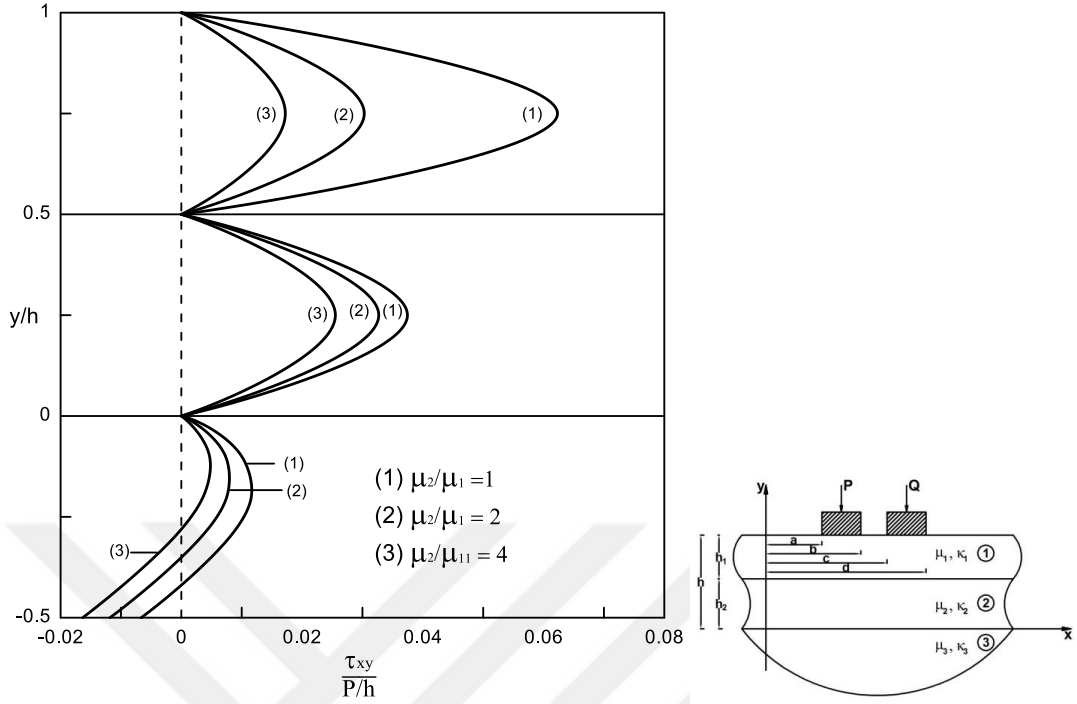
Şekil 38’de bloklar arasında ( $x/h=2.45$ ) meydana gelen kayma gerilmesinin  $\mu_2/\mu_1$  kayma modülleri oranı ile değişimi görülmektedir. Bloklar arasında yapılan incelemede tabakalarda meydana gelen kayma gerilmesi değeri y ekseninde yapılan incelemede meydana gelen gerilme değeriyle benzer şekilde değişim göstermektedir.  $\mu_2/\mu_1$  kayma modülündeki artış üst tabakada gerilmede azalmaya neden olurken alt tabakada gerilme değeri artışı görülmektedir. Elastik yarı sonsuz düzlemde ise gerilme değeri çekme gerilmesine dönüşmüştür ve kayma modüllerindeki artma oranına bağlı olarak değeri artışı gözlenmektedir. Şekil 39’da y eksenine 1. blok arasındaki mesafe değişiminin ( $a/h$ ) y ekseninde meydana gelen kayma gerilmesine etkisi incelenmiştir. Şekilden de anlaşılacağı gibi eksenle 1. blok arasındaki mesafe artırıldıkça y ekseninde meydana gelen kayma gerilmesi değeri her iki tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemde azalmaktadır. Şekil 40’da y ekseninde meydana gelen kayma gerilmesinin alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi görülmektedir. Buna göre  $\mu_3/\mu_2$  oranı arttıkça yani elastik yarı sonsuz düzlem tabakalara oranla rijitleştikçe elastik yarı sonsuz düzlemde kayma gerilmeleri azalmakta, tabakalarda ise artmaktadır. Şekil 41’de kayma gerilmesi yayılışının yük oranı ile değişimi görülmektedir. Yük oranı arttıkça kayma gerilmeleri de hem tabakalarda hem de elastik yarı sonsuz düzlemde artmaktadır. Bu artış üst tabakada daha belirgindir.



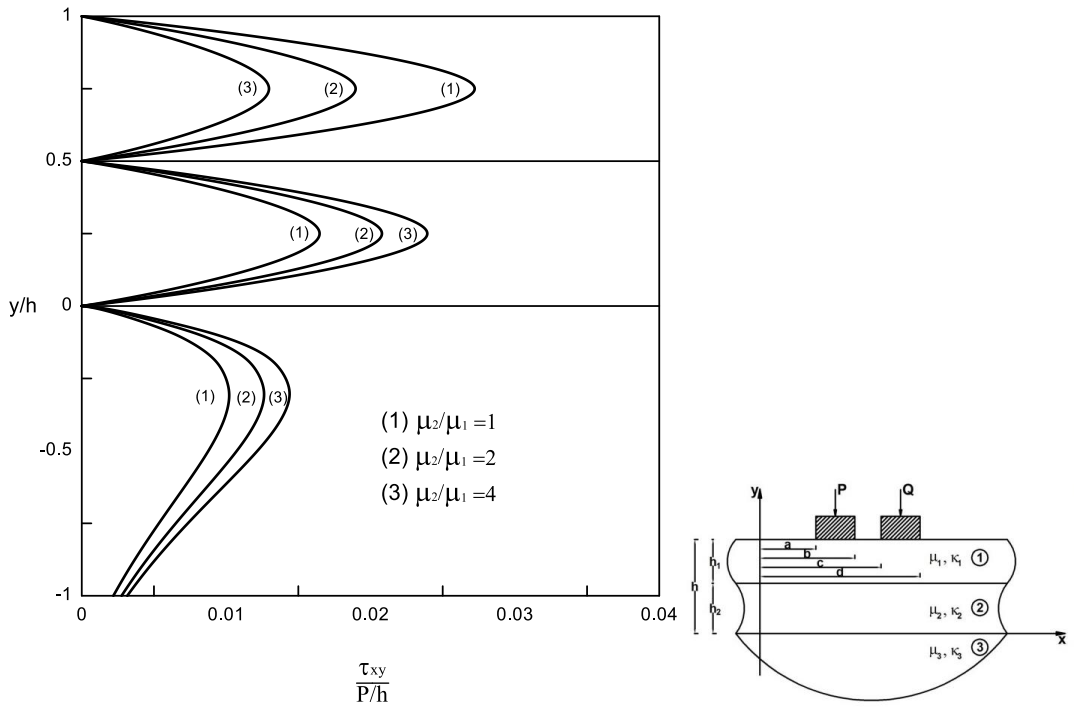
Şekil 35.  $\tau_{xy}(0, y)/(P/h)$  boyutsuz kayma gerilmesinin blok genişlikleri ile değişimi ( $\kappa_1=2$ ,  $\kappa_2=2$ ,  $\kappa_3=2$ ,  $\mu_2/\mu_1=1$ ,  $\mu_3/\mu_2=1$ ,  $a/h=1$ ,  $(c-b)/h=1$ ,  $Q=P$ )



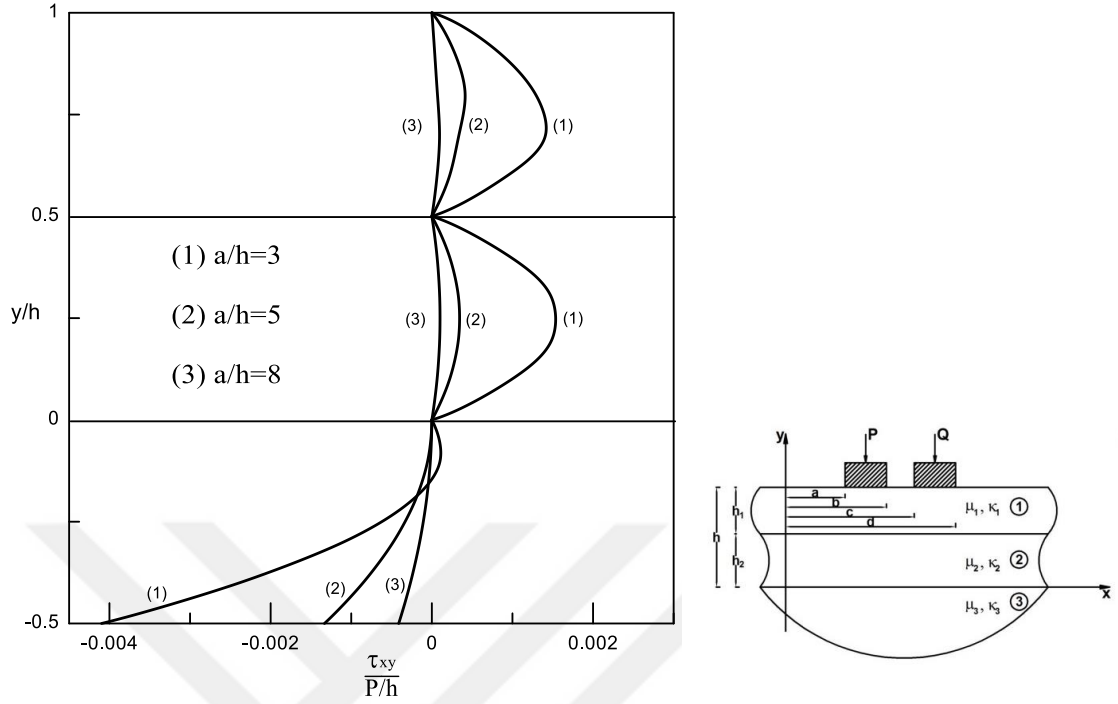
Şekil 36.  $\tau_{xy}(0, y)/(P/h)$  boyutsuz kayma gerilmesinin tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2$ ,  $\kappa_2=2$ ,  $\kappa_3=2$ ,  $\mu_3/\mu_2=1$ ,  $a/h=1$ ,  $(b-a)/h=1$ ,  $(d-c)/h=1$ ,  $(c-b)/h=1$ ,  $Q=P$ )



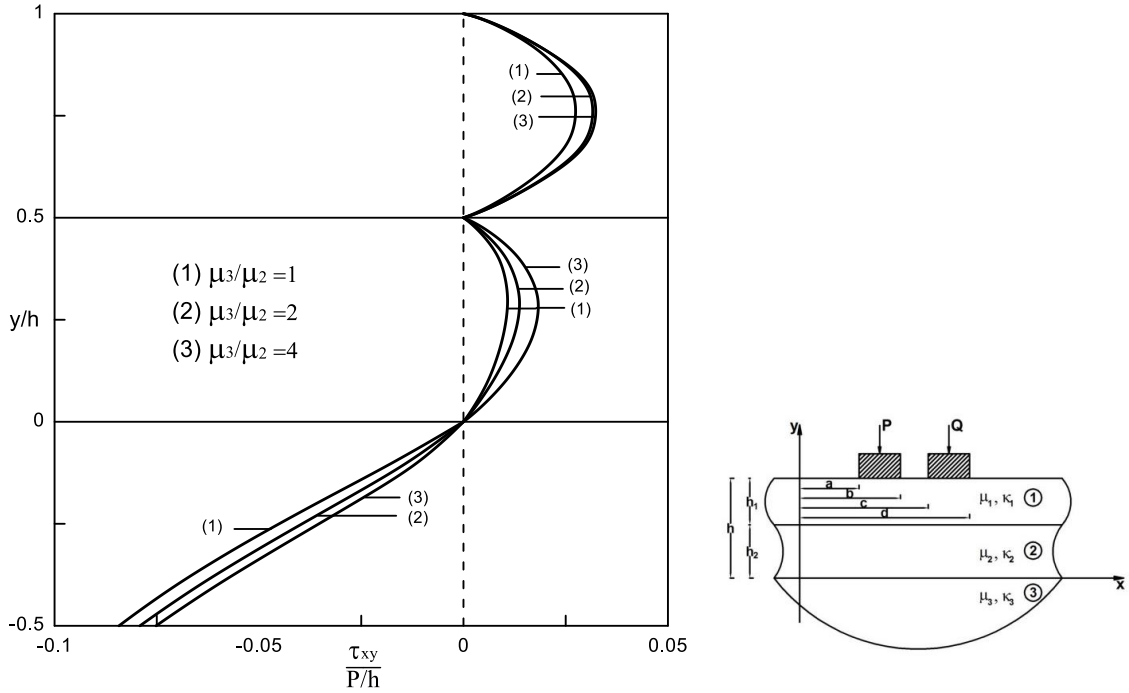
Şekil 37.  $\tau_{xy} (1.5, y)/(P/h)$  boyutsuz kayma gerilmesinin tabakaların kayma modülü oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_3/\mu_2=1, a/h=1, (b-a)/h=1, (d-c)/h=1, (c-b)/h=1, Q=P$ )



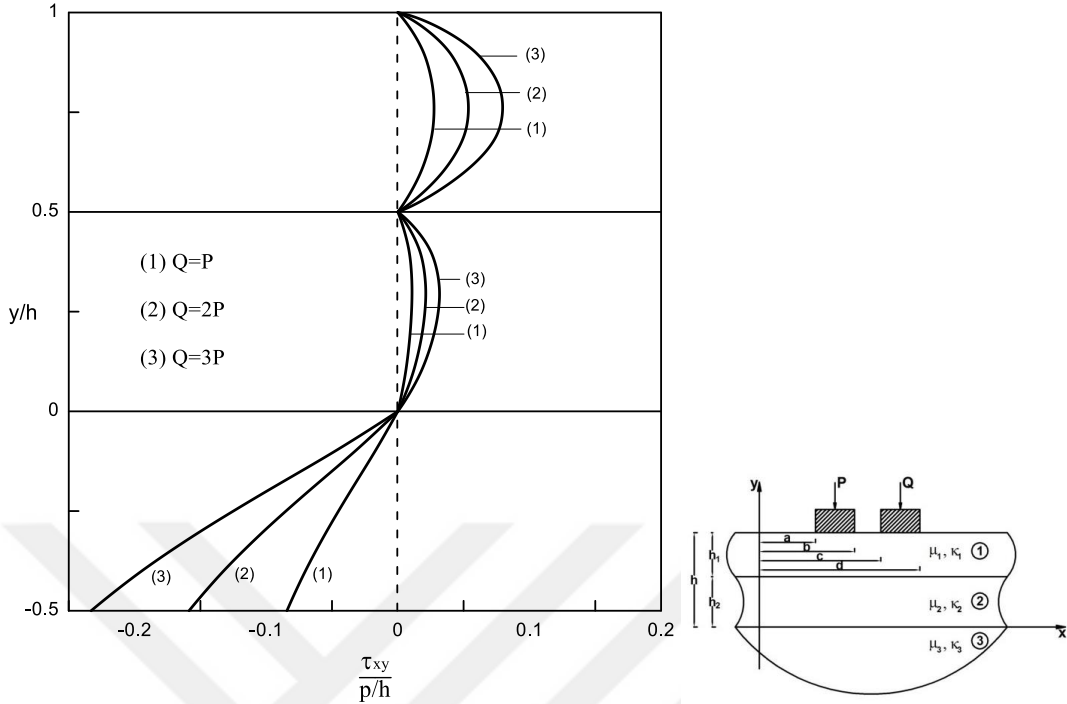
Şekil 38.  $\tau_{xy} (2.45, y)/(P/h)$  boyutsuz kayma gerilmesinin tabakaların kayma modülü oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_3/\mu_2=1, a/h=1, (b-a)/h=1, (d-c)/h=1, (c-b)/h=1, Q=P$ )



Şekil 39.  $\tau_{xy}(0, y)/(P/h)$  boyutsuz kayma gerilmesinin  $a/h$  oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2$ ,  $\kappa_2=2$ ,  $\kappa_3=2$ ,  $\mu_2/\mu_1=1$ ,  $\mu_3/\mu_2=1$ ,  $a/h=1$ ,  $(b-a)/h=1$ ,  $(d-c)/h=1$ ,  $(c-b)/h=1$ ,  $Q=P$ )



Şekil 40.  $\tau_{xy}(0, y)/(P/h)$  boyutsuz kayma gerilmesinin alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2$ ,  $\kappa_2=2$ ,  $\kappa_3=2$ ,  $\mu_2/\mu_1=1$ ,  $a/h=1$ ,  $(b-a)/h=1$ ,  $(d-c)/h=1$ ,  $(c-b)/h=1$ ,  $Q=P$ )



Şekil 41.  $\tau_{xy}(0, y)/(P/h)$  boyutsuz kayma gerilmesinin yük oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2$ ,  $\kappa_2=2$ ,  $\kappa_3=2$ ,  $\mu_2/\mu_1=1$ ,  $\mu_3/\mu_2=1$ ,  $a/h=1$ ,  $(b-a)/h=1$ ,  $(d-c)/h=1$ ,  $(c-b)/h=1$ )

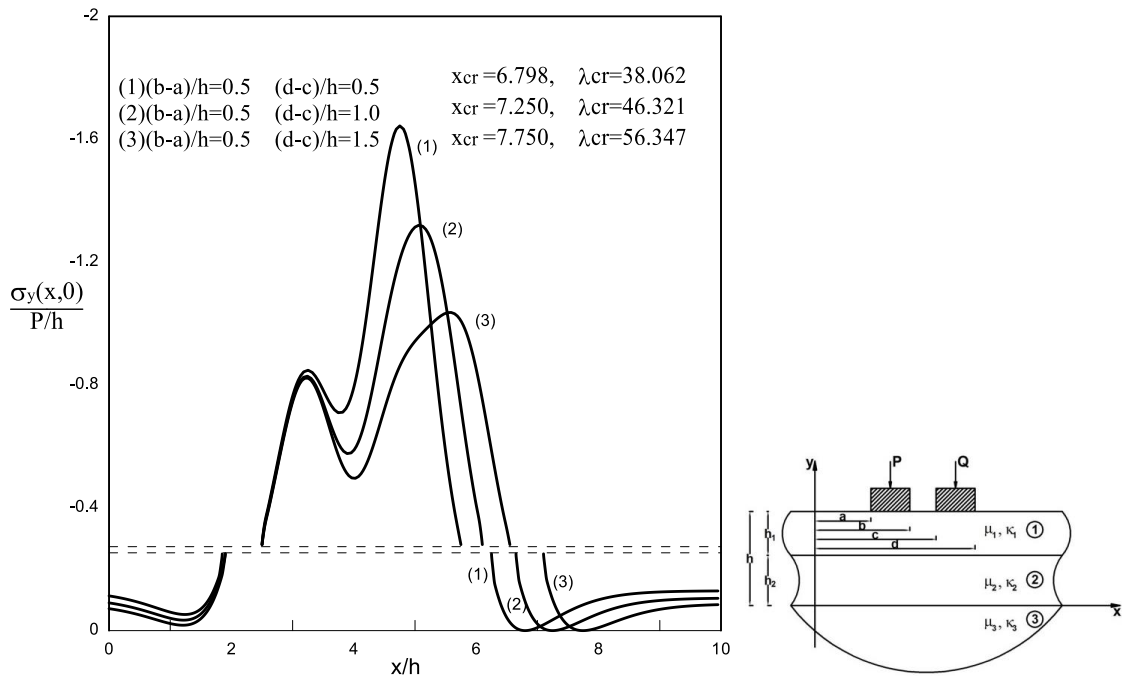
### 3.4. Alt Tabaka ile Elastik Yarı Sonsuz Düzlem ve Tabakalar Arasındaki İlk Ayrılma Yüklerinin ve Uzaklıklarının İncelenmesi

Alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem ve tabakalar arasındaki ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıkları; blok genişlikleri, bloklar arası mesafe, kayma modülleri değişimi ve yük oranı gibi çeşitli boyutsuz büyüklükler için incelenmiştir. Şekil 42-43’de blok genişliklerindeki değişimin, alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem ve tabakalar arasındaki ilk ayrılma yüküne ve ilk ayrılma uzaklığına etkisi görülmektedir. Şekillerden de görüldüğü gibi blok genişlikleri arttıkça ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıkları artmaktadır. Blok genişliklerinin artması durumunda her iki temas yüzeyinde de ayrılma daha zor gerçekleşmektedir. Şekiller birlikte incelendiğinde ilk ayrılmanın alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlem arasında gerçekleştiği görülmektedir. Tablo 1’de alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklığının bloklar arasındaki mesafe ile değişimi görülmektedir. Buna göre  $(c-b)/h$ ’ın küçük değerleri için  $((c-b)/h) < 3$   $\lambda$ ’ya bağlı olarak iki ayrılma bölgesi meydana gelme ihtimali ortaya çıkmaktadır.  $Q/h \geq P/h$  olduğundan ilk ayrılma bölgesi ikinci bloğun sağ tarafında olmaktadır. Bu durumda eğer  $\lambda$

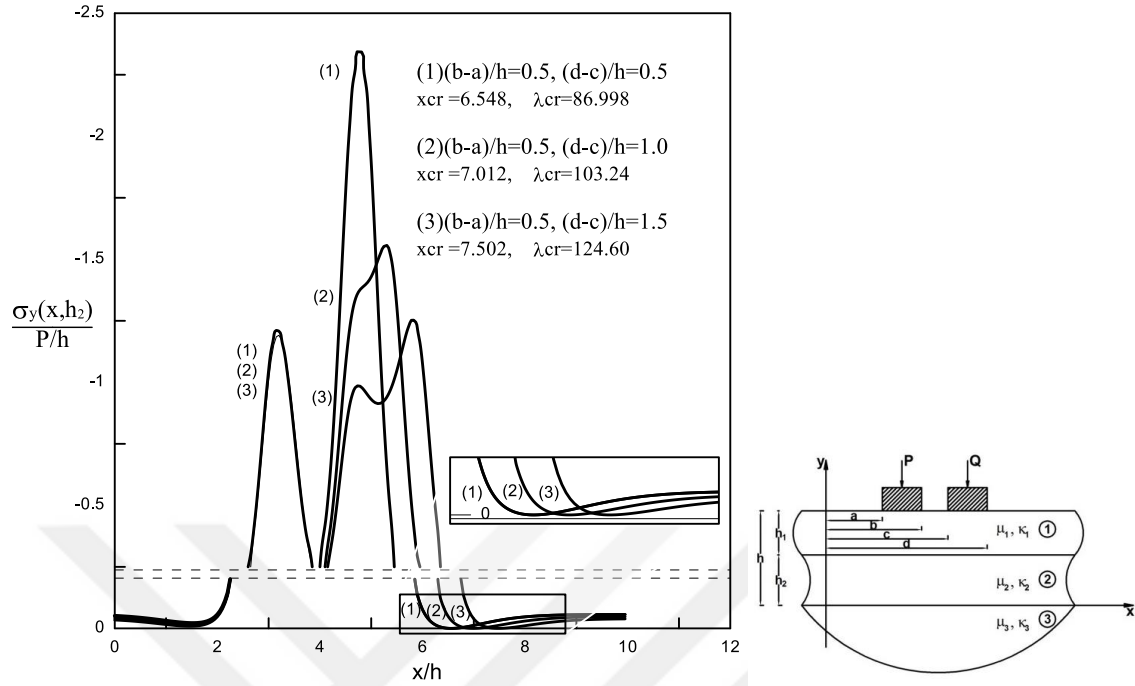
yeterince büyük olursa, ikinci ayrılma bölgesi birinci bloğun sol tarafında meydana gelme ihtimali söz konusudur. Bloklar arasındaki uzaklık ( $(c-b)/h > 3$ ) daha da artırılırsa bloklar arasında bir ayrılma bölgesi daha ortaya çıkmaktadır. Ve bu bölge muhtemelen ilk ayrılma bölgesidir. Tabakalar arasındaki uzaklık artırılmaya devam edildiğinde ( $(c-b)/h > 5$ ) ise yük faktörü  $\lambda'$ 'ya bağlı olarak dört ayrılma bölgesi meydana gelme ihtimali vardır. İlk ayrılma bölgesinin ise yine bloklar arasında oluşmaktadır ve  $(c-b)/h$ ' in belli bir değerinden sonra ( $(c-b)/h = 6.0647$ ) bloklar arasındaki etkileşim kaybolmaktadır. Şekil 44-45'de ise alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem ve tabakalar arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklığının bloklar arasındaki mesafe ile değişimi grafikler ile gösterilmiştir. Şekil 44'de bloklar arasındaki mesafe değişiminin, alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki boyutsuz gerilme dağılımına etkisi incelenmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi  $(c-b)/h = 1$  olduğunda ilk ayrılma ikinci bloğun sağ tarafında gerçekleşmekte,  $(c-b)/h = 3$ ,  $(c-b)/h = 6$  olması durumlarında ise ilk ayrılmalar bloklar arasında gerçekleşmektedir. Şekil 45 'te ise bloklar arasındaki mesafe değişiminin, tabakalar arasında meydana gelen boyutsuz gerilme dağılımına etkisi incelenmiştir.  $(c-b)/h = 1$ ,  $(c-b)/h = 6$  olması durumlarında ilk ayrılmalar ikinci bloğun sağ tarafında gerçekleşmekte,  $(c-b)/h = 3$  olması durumunda ise ilk ayrılma bloklar arasında gerçekleşmektedir. Tablo 2' de alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki yüzeyde iki blok arasındaki etkileşimin son bulunduğu uzaklığın yük ile değişimi görülmektedir. Şekil 46-47'de alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında ve tabakalar arasındaki ilk ayrılma yükü ve uzaklığının yük oranı ile değişimi görülmektedir. Şekillerden de görüldüğü gibi yük oranı arttıkça her iki temas yüzeyinde de ilk ayrılma yükleri azalmakta ilk ayrılma uzaklıklarında ise çok küçük değişiklikler görülmektedir. Şekillerden de görüldüğü gibi yük oranı arttıkça ayrılmalar daha kolay olmaktadır.

Tablo 3-4 ve Şekil 48-56' da alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem ve tabakalar arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklığının tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi görülmektedir. Tablo ve şekillerdeki değerler incelendiğinde alt tabakanın kayma modülünün üst tabakanın kayma modülüne oranı arttıkça yani alt tabakanın üst tabakaya oranla rijitliği arttıkça tabakalar arasında ve alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıkları azalmakta, bu durumda ayrılmalar daha kolay gerçekleşmektedir. Aynı şekilde elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülünün alt tabakanın kayma modülüne oranı arttıkça tabakalar arasında ve alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıkları azalmaktadır. Yapılan

çalışmalarda tabaka yükseklikleri aynı seçilmiştir.  $\mu_2/\mu_1=10$ ,  $\mu_2/\mu_1=50$  olması durumunda ilk ayrılmalar tabakalar arasında gerçekleşmektedir. Tablo 5-6'da elastik yarı sonsuz düzlem ve tabakaların malzeme özelliklerine bağlı olarak çeşitli tabaka yüksekliği oranları için, alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında ve tabakalar arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklıklarının değişimi verilmektedir. Alt tabaka yüksekliğinin toplam tabaka yüksekliğine oranı arttıkça hem alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında hem de tabakalar arasındaki ilk ayrılma yüklerinde ve ilk ayrılma uzaklıklarında malzeme özelliklerine bağlı olarak artışlar ve azalmalar gözlenmektedir. Alt tabaka yüksekliğinin üst tabakaya göre daha küçük veya eşit seçildiği durumlarda ilk ayrılmalar çoğunlukla alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında gerçekleşmektedir. Ayrıca elastik yarı sonsuz düzlemden üst tabakaya doğru gidildikçe daha rijit malzemelerin seçilmesi durumunda ( $\mu_1 > \mu_2 > \mu_3$ ) alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem ve tabakalar arasında ilk ayrılma yüklerinin diğer durumlara göre daha büyük olduğu yani ayrılmaların daha zor gerçekleştiği görülmektedir. Rijitliğin üst tabakadan alt tabakaya doğru inildikçe artması durumunda ise ilk ayrılma yükü değerleri azalmakta ve ayrılmalar daha kolay gerçekleşmektedir.



Şekil 42.  $\sigma_y(x,0)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımının blok genişlikleri ile değişimi ( $\kappa_1=2$ ,  $\kappa_2=2$ ,  $\kappa_3=2$ ,  $\mu_2/\mu_1=2$ ,  $\mu_3/\mu_2=0.5$ ,  $a/h=3$ ,  $(c-b)/h=1$ ,  $Q=2P$ ,  $h_2/h=0.5$ )

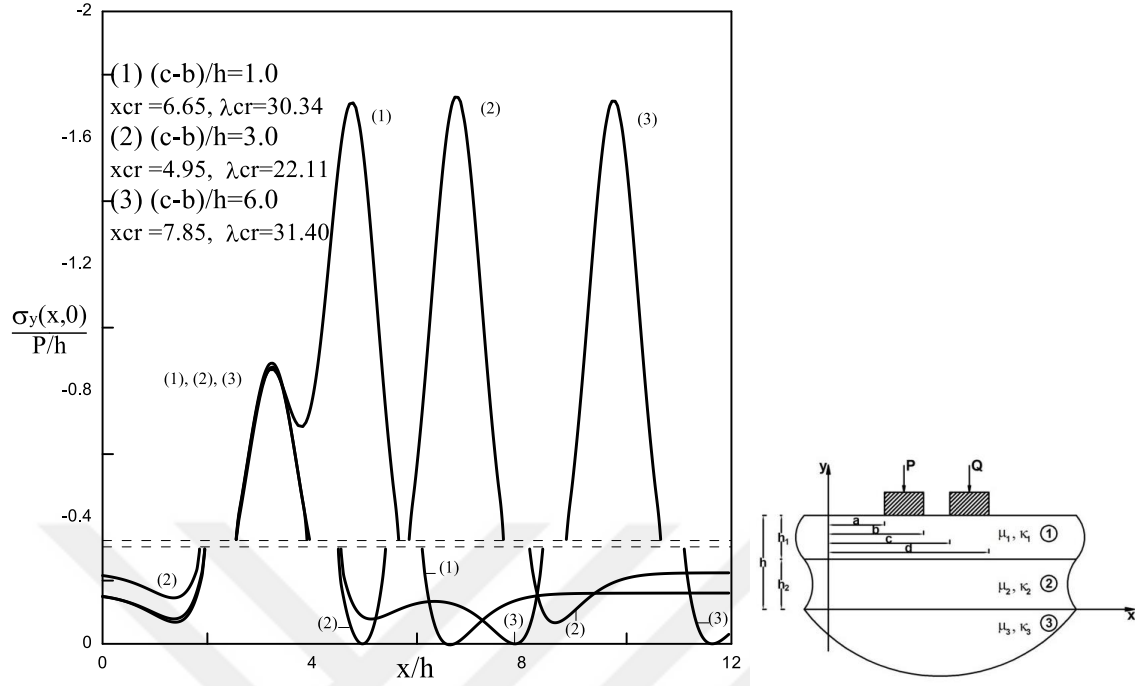


Şekil 43.  $\sigma_y(x, h_2)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımının blok genişlikleri ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=2, \mu_3/\mu_2=0.5, a/h=3, (c-b)/h=1, Q=2P, h_2/h=0.5$ )

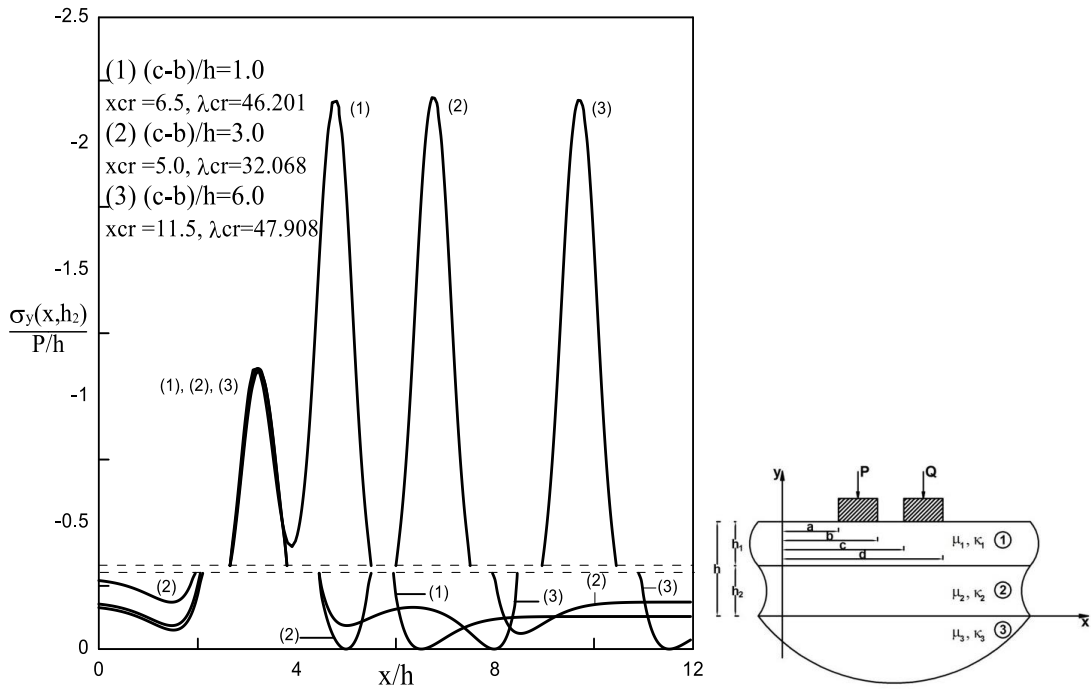
Tablo 1. Alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem ara yüzeyinde, kritik yük faktörü ( $\lambda_{cr}$ ) değerlerinin bloklar arasındaki uzaklıkla ( $(c-b)/h$ ) değişimi ( $Q=2P, \mu_2/\mu_1=2, \mu_3/\mu_2=2, a/h=3, (b-a)/h=(d-c)/h=1, h_2/h=0.5$ )

$\frac{(c-b)}{h}$	BLOK I				BLOK II			
	$\lambda_{crsol}$	$x_{crsol}$	$\lambda_{crsağ}$	$x_{crsağ}$	$\lambda_{crsol}$	$x_{crsol}$	$\lambda_{crsağ}$	$x_{crsağ}$
0.5	71.2228	1.2556					<b>48.7765</b>	7.2451
1	82.4970	1.2284					<b>47.0447</b>	7.7476
3	92.9404	1.2317					<b>48.3093</b>	9.7452
5	94.4009	1.2402	<b>46.2553</b>	7.2439	<b>46.2553</b>	7.2439	48.4878	11.743
6.0647	<b>94.6074</b>	1.2430	<b>94.6074</b>	5.2570	<b>48.5176</b>	8.3303	<b>48.5176</b>	12.799





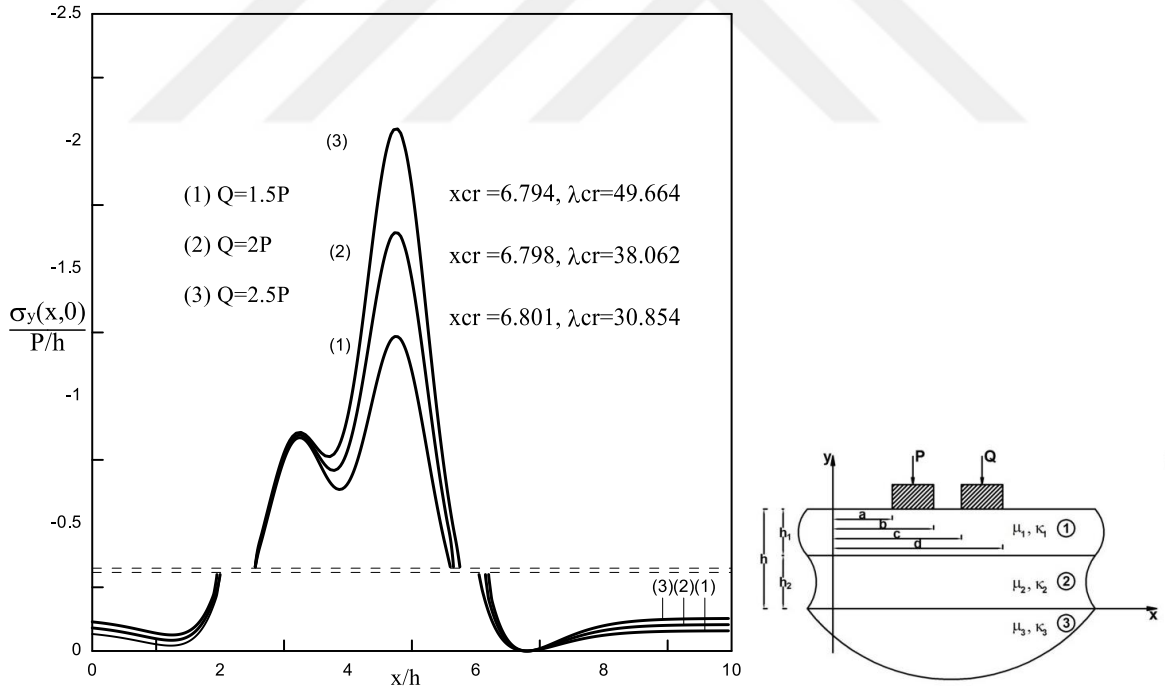
Şekil 44.  $\sigma_y(x,0)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımının bloklar arası mesafe ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, Q=2P, h_2/h=0.5$ )



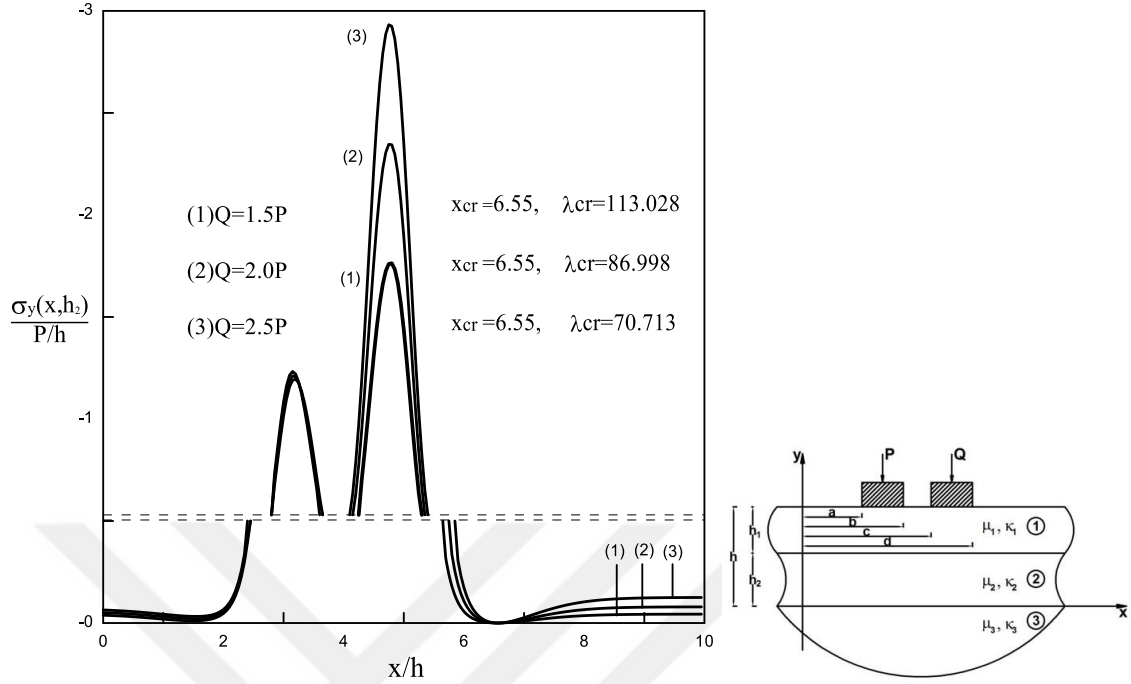
Şekil 45.  $\sigma_y(x,h_2)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımının bloklar arası mesafe ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, Q=2P, h_2/h=0.5$ )

Tablo 2. Alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem ara yüzeyinde iki blok arasındaki etkileşimin son bulunduğu uzaklığın  $((c-b)/h)$  yük oranı ile değişimi ( $a/h=3$ ,  $(b-a)/h=(d-c)/h=0.5$ ,  $\mu_2/\mu_1=1$ ,  $\mu_3/\mu_2=1$ ,  $h_2/h=0.5$ )

Q	$\frac{(c-b)}{h}$	BLOK I		BLOK II	
		$\lambda_{crsol}=\lambda_{crsağ}$	$\frac{(a-x_{crsol})}{h}$ = $\frac{(x_{crsağ}-b)}{h}$	$\lambda_{crsol}=\lambda_{crsağ}$	$\frac{(c-x_{crsol})}{h}$ = $\frac{(x_{crsağ}-d)}{h}$
P	6.8396	62.6331	1.6320	62.3310	1.6320
2P	6.8392	62.2586	1.6321	31.4103	1.6320
4P	6.8368	61.5107	1.6323	15.7285	1.6320
6P	6.8362	60.7652	1.6324	10.4909	1.6319
8P	6.8360	60.0224	1.6327	7.87010	1.6319



Şekil 46.  $\sigma_y(x,0)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımının yük oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2$ ,  $\kappa_2=2$ ,  $\kappa_3=2$ ,  $\mu_2/\mu_1=2$ ,  $\mu_3/\mu_2=0.5$ ,  $a/h=3$ ,  $(b-a)/h=(d-c)/h=0.5$ ,  $(c-b)/h=1$ ,  $h_2/h=0.5$ )



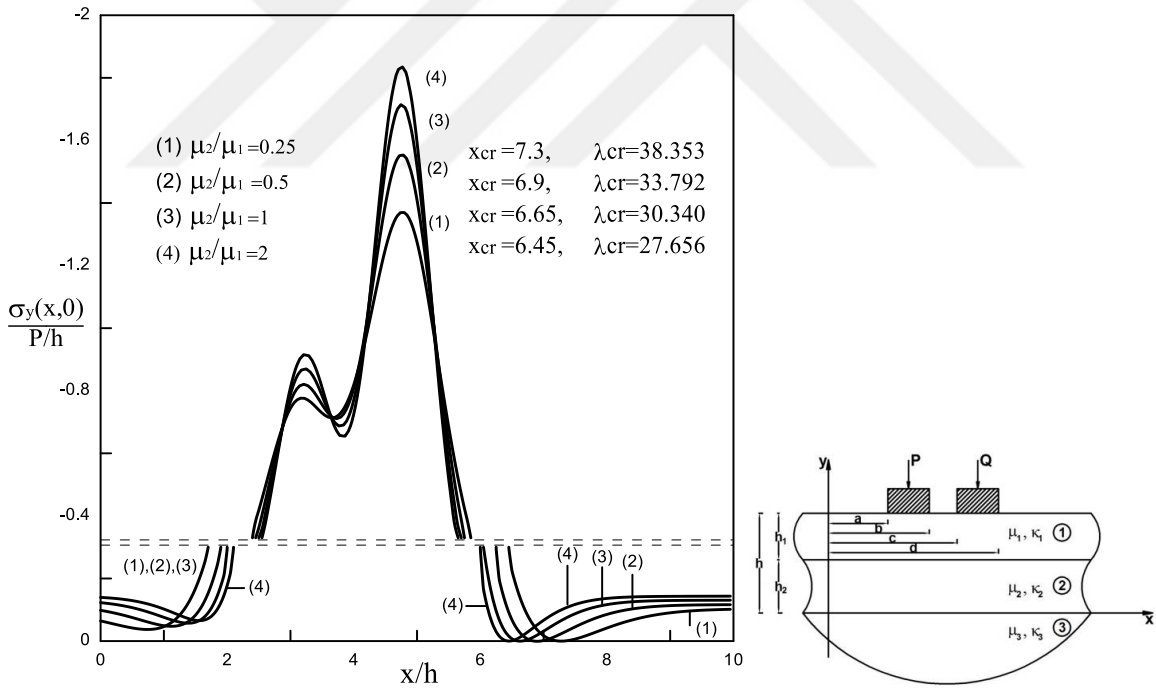
Şekil 47.  $\sigma_y(x, h_2)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımının yük oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=2, \mu_3/\mu_2=0.5, a/h=3, (b-a)/h=(d-c)/h=0.5, (c-b)/h=1, h_2/h=0.5$ )

Tablo 3. Alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranına bağlı olarak alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve uzaklıklarının tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ( $(b-a)/h=(d-c)/h=0.5, (c-b)/h=1, Q=2P, h_2/h=0.5$ )

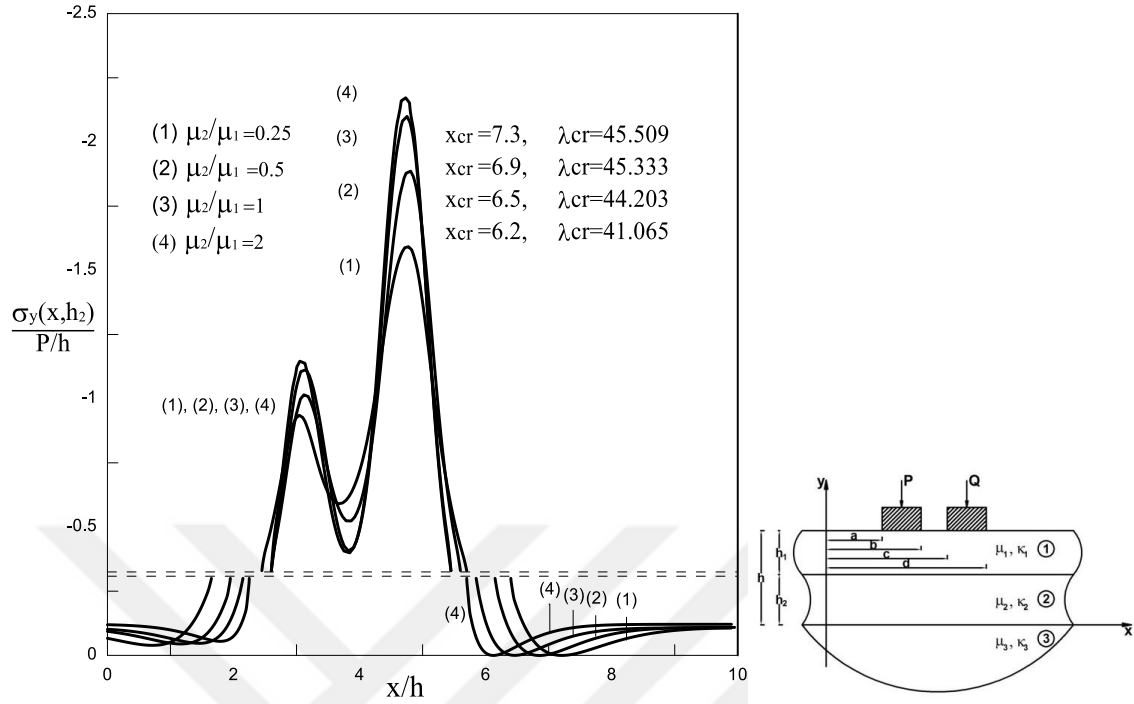
$\mu_2/\mu_1$	$\mu_3/\mu_2 = 0.1$		$\mu_3/\mu_2 = 0.5$		$\mu_3/\mu_2 = 1$		$\mu_3/\mu_2 = 2$		$\mu_3/\mu_2 = 5$		$\mu_3/\mu_2 = 10$	
	$x_{cr}$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}$	$x_{cr}$	$x_{cr}$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}$	$\lambda_{cr}$
0.1	11.33	99.017	8.7	61.081	7.99	46.745	7.49	35.069	7.17	25.853	7.04	22.518
0.5	9.04	71.039	7.31	44.716	6.90	33.792	6.62	25.384	6.43	19.437	6.37	19.402
2	8.14	59.717	6.80	38.062	6.45	27.656	6.25	20.432	6.12	18.348	6.08	17.353
5	7.88	56.444	6.64	35.843	6.32	25.432	6.15	18.692	6.04	16.715	6.00	15.278
10	7.79	55.182	6.58	34.917	6.28	24.518	6.11	17.898	6.01	15.160	5.97	14.854
50	7.7	54.077	6.53	34.076	6.24	23.705	6.08	17.394	5.98	14.596	5.95	13.486

Tablo 4. Alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranına bağlı olarak tabakalar arasındaki ilk ayrılma yükleri ve uzaklıklarının tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ((b-a)/h=(d-c)/h=0.5, (c-b)/h=1, Q=2P, h<sub>2</sub>/h=0.5)

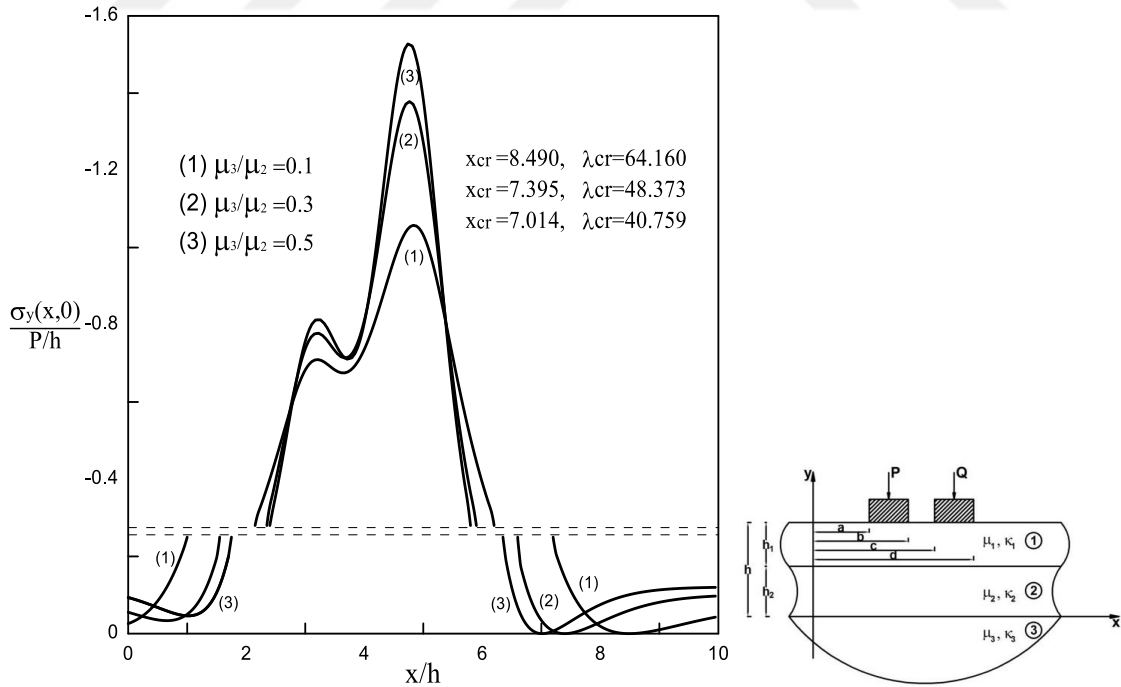
$\mu_2/\mu_1$	$\mu_3/\mu_2 = 0.1$		$\mu_3/\mu_2 = 0.5$		$\mu_3/\mu_2 = 1$		$\mu_3/\mu_2 = 2$		$\mu_3/\mu_2 = 5$		$\mu_3/\mu_2 = 10$	
	$x_{cr}$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}$	$x_{cr}$	$x_{cr}$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}$	$\lambda_{cr}$
0.1	11.33	108.62	8.69	66.541	7.98	50.426	7.5	37.343	7.16	27.250	7.04	23.660
0.5	9.02	105.59	7.32	63.508	6.85	45.124	6.57	31.813	6.4	23.580	6.35	21.002
2	8.13	95.28	6.56	56.981	6.17	40.936	6.06	27.188	6.01	21.280	5.99	19.593
5	7.88	59.11	5.92	36.608	5.90	25.327	5.88	20.813	5.86	15.851	5.86	17.563
10	5.82	38.381	5.82	22.676	5.82	19.567	5.81	17.930	5.81	14.102	5.80	12.854
50	5.76	17.053	5.76	16.010	5.76	15.624	5.76	15.357	5.76	13.681	5.76	12.486



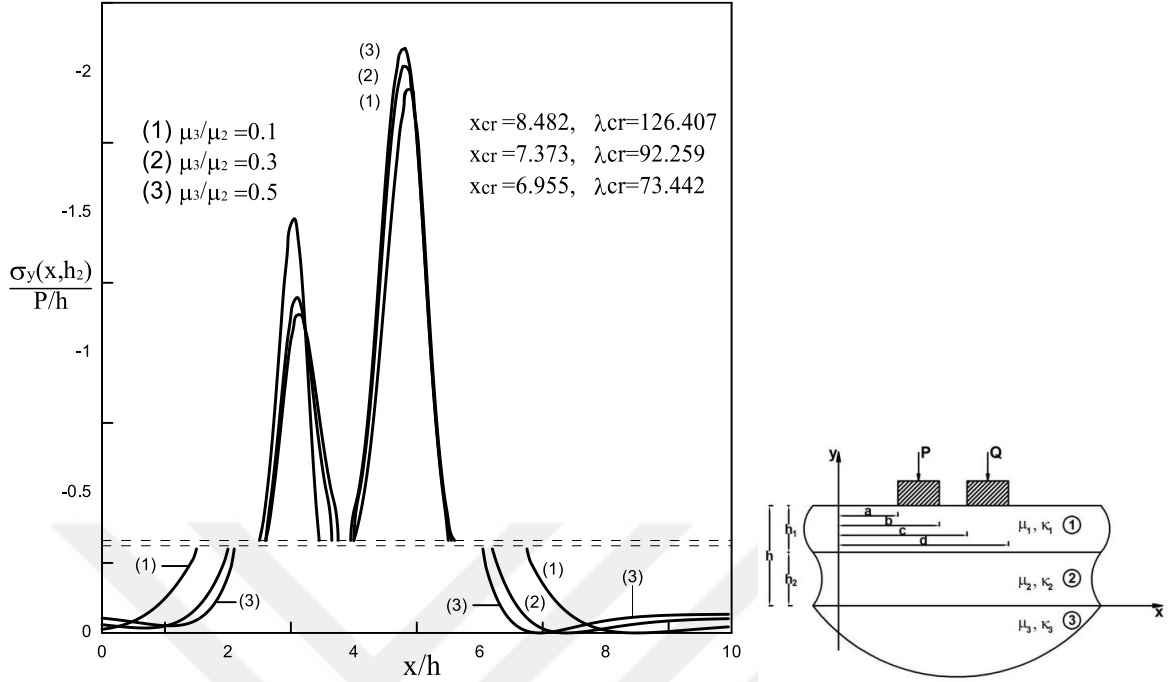
Şekil 48.  $\sigma_y(x,0)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımının tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, (c-b)/h=1, Q=2P, h_2/h=0.5$ )



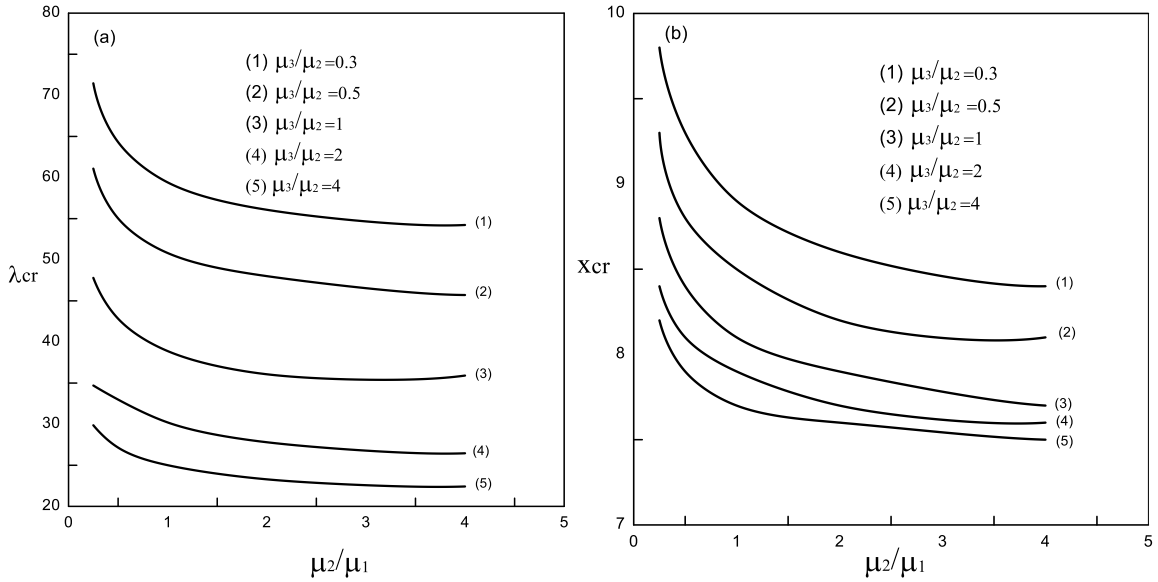
Şekil 49.  $\sigma_y(x, h_2)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımının tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, (c-b)/h=1, Q=2P, h_2/h=0.5$ )



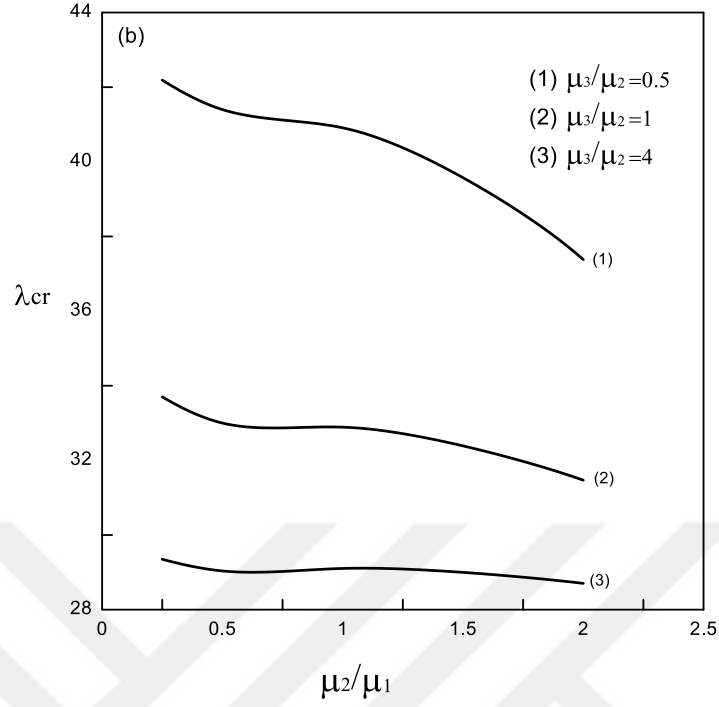
Şekil 50.  $\sigma_y(x, 0)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımının alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, (c-b)/h=1, Q=2P, h_2/h=0.5$ )



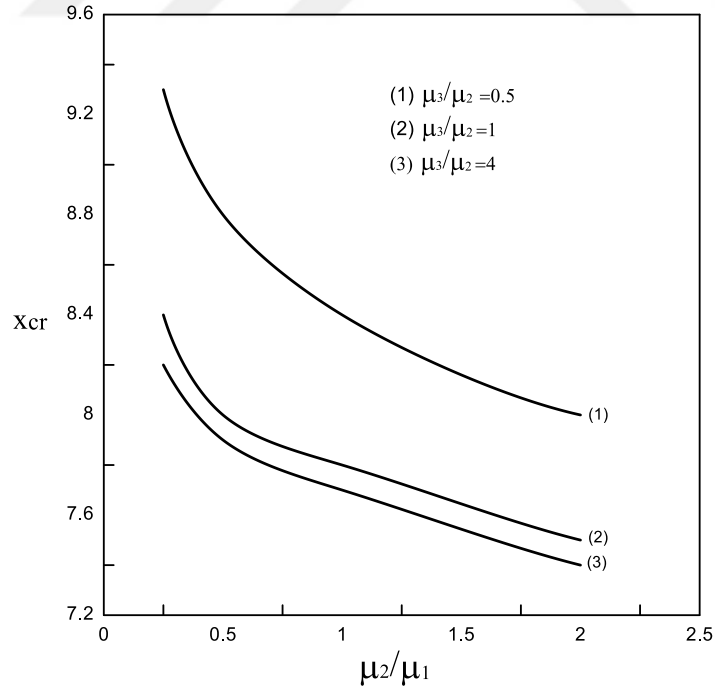
Şekil 51.  $\sigma_y(x, h_2)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımının alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, (c-b)/h=1, Q=2P, h_2/h=0.5$ )



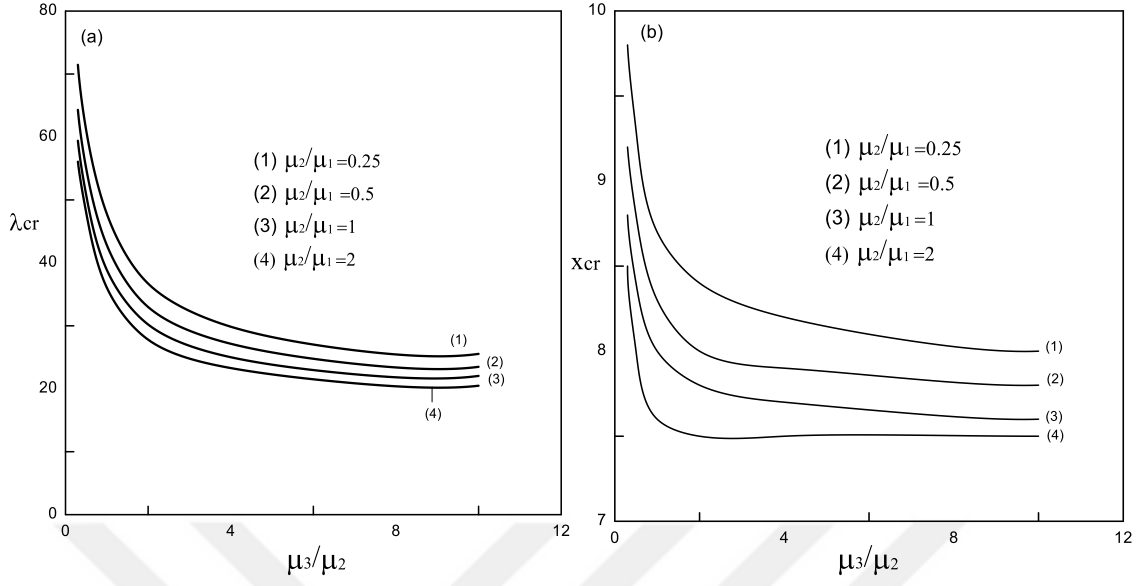
Şekil 52. a-b. Alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıklarının alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ( $Q=2P, (b-a)/h=(d-c)/h=1, (c-b)/h=1.5, a/h=3, h_2/h=0.5$ )



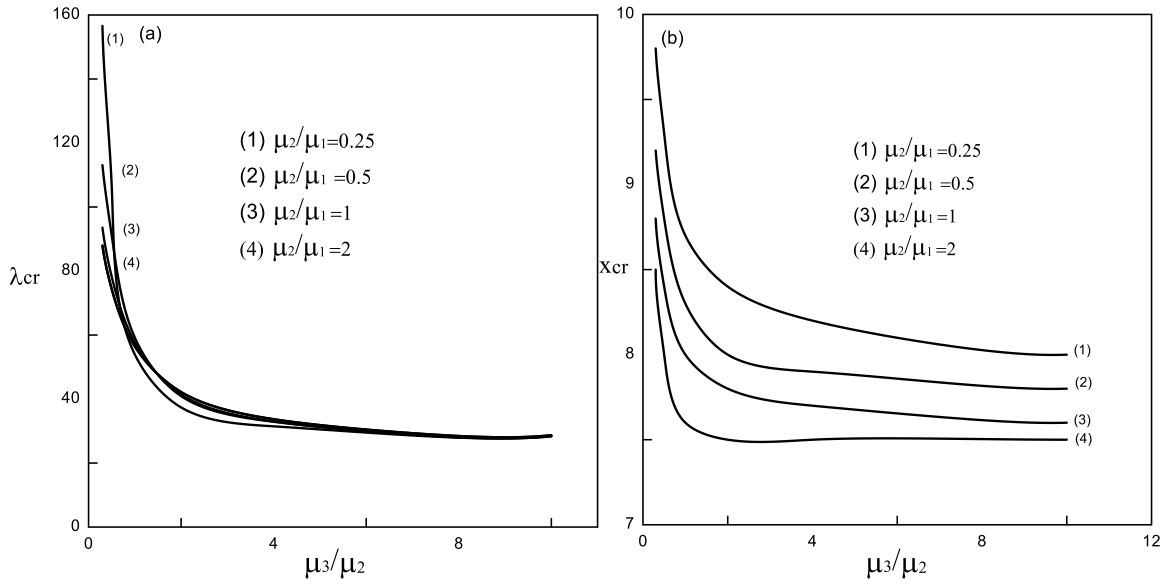
Şekil 53. Tabakalar arasındaki ilk ayrılma yüklerinin alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ( $Q=2P$ ,  $(b-a)/h=(d-c)/h=1$ ,  $(c-b)/h=1.5$ ,  $a/h=3$ ,  $h_2/h=0.5$ )



Şekil 54. Tabakalar arasındaki ilk ayrılma uzaklıklarının alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ( $Q=2P$ ,  $(b-a)/h=(d-c)/h=1$ ,  $(c-b)/h=1.5$ ,  $a/h=3$ ,  $h_2/h=0.5$ )



Şekil 55. a-b. Alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıklarının tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ( $Q=2P$ ,  $(b-a)/h=(d-c)/h=1$ ,  $(c-b)/h=1.5$ ,  $a/h=3$ ,  $h_2/h=0.5$ )



Şekil 56. a-b. Tabakalar arasındaki ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıklarının tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ( $Q=2P$ ,  $(b-a)/h=(d-c)/h=1$ ,  $(c-b)/h=1.5$ ,  $a/h=3$ ,  $h_2/h=0.5$ )



Tablo 5. Tabakaların ve elastik yarı sonsuz düzlemin malzeme özelliklerine bağlı olarak alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yüklerinin ve ilk ayrılma uzaklıklarının alt tabaka yüksekliğinin toplam tabaka yüksekliğine oranı ile değişimi ((b-a)/h=(d-c)/h=0.5, (c-b)/h=1, Q=2P)

$h_2/h$	$\mu_2/\mu_1=0.5$ $\mu_3/\mu_2=1.5$		$\mu_2/\mu_1=1.5$ $\mu_3/\mu_2=0.5$		$\mu_2/\mu_1=2.0$ $\mu_3/\mu_2=1.5$		$\mu_2/\mu_1=0.1$ $\mu_3/\mu_2=0.1$		$\mu_2/\mu_1=1.0$ $\mu_3/\mu_2=1.0$	
	$x_{cr}$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}$	$\lambda_{cr}$
0.3	7.12	40.277	7.67	54.926	6.46	27.340	13.57	122.451	6.91	39.708
0.4	6.89	33.402	7.38	47.405	6.35	23.314	12.42	111.070	6.73	33.247
0.5	6.71	28.437	7.19	42.859	6.32	22.944	11.33	99.001	6.63	30.297
0.6	6.62	27.554	7.17	45.170	6.39	28.146	10.42	88.541	6.84	36.610
0.7	6.65	33.454	7.35	53.862	6.59	37.891	9.48	86.674	6.83	43.639
0.8	6.86	43.828	7.64	62.148	6.84	44.983	9.77	83.529	7.10	52.047
	$\mu_1 > \mu_3 > \mu_2$		$\mu_2 > \mu_1 > \mu_3$		$\mu_3 > \mu_2 > \mu_1$		$\mu_1 > \mu_2 > \mu_3$		$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$	

Tablo 6. Tabakaların ve elastik yarı sonsuz düzlemin malzeme özelliklerine bağlı olarak tabakalar arasındaki ilk ayrılma yüklerinin ve ilk ayrılma uzaklıklarının alt tabaka yüksekliğinin toplam tabaka yüksekliğine oranı ile değişim ((b-a)/h=(d-c)/h=0.5, (c-b)/h=1, Q=2P)

$h_2/h$	$\mu_2/\mu_1=0.5$ $\mu_3/\mu_2=1.5$		$\mu_2/\mu_1=1.5$ $\mu_3/\mu_2=0.5$		$\mu_2/\mu_1=2.0$ $\mu_3/\mu_2=1.5$		$\mu_2/\mu_1=0.1$ $\mu_3/\mu_2=0.1$		$\mu_2/\mu_1=1.0$ $\mu_3/\mu_2=1.0$	
	$x_{cr}$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}$	$\lambda_{cr}$
0.3	7.12	41.705	7.68	57.907	6.46	30.332	13.57	124.201	6.92	42.659
0.4	6.89	37.298	7.39	56.423	6.30	29.908	12.42	114.308	6.73	41.315
0.5	6.67	36.448	7.15	66.637	6.10	31.140	11.33	108.626	6.51	46.184
0.6	6.39	39.789	6.97	78.109	5.84	29.670	10.39	116.759	6.16	54.064
0.7	5.99	31.733	5.93	51.710	5.61	24.094	9.45	110.346	5.77	37.534
0.8	5.58	29.382	3.96	22.051	4.00	17.358	9.32	105.421	5.53	22.683
	$\mu_1 > \mu_3 > \mu_2$		$\mu_2 > \mu_1 > \mu_3$		$\mu_3 > \mu_2 > \mu_1$		$\mu_1 > \mu_2 > \mu_3$		$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$	

### 3.5.Süreksiz Temas Durumunda Alt Tabaka ile Elastik Yarı Sonsuz Düzleme ve Tabakalara Ait Ara Yüzeylerdeki Düşey Gerilme Yayılışları ve Ayrılma Mesafelerinin İncelenmesi

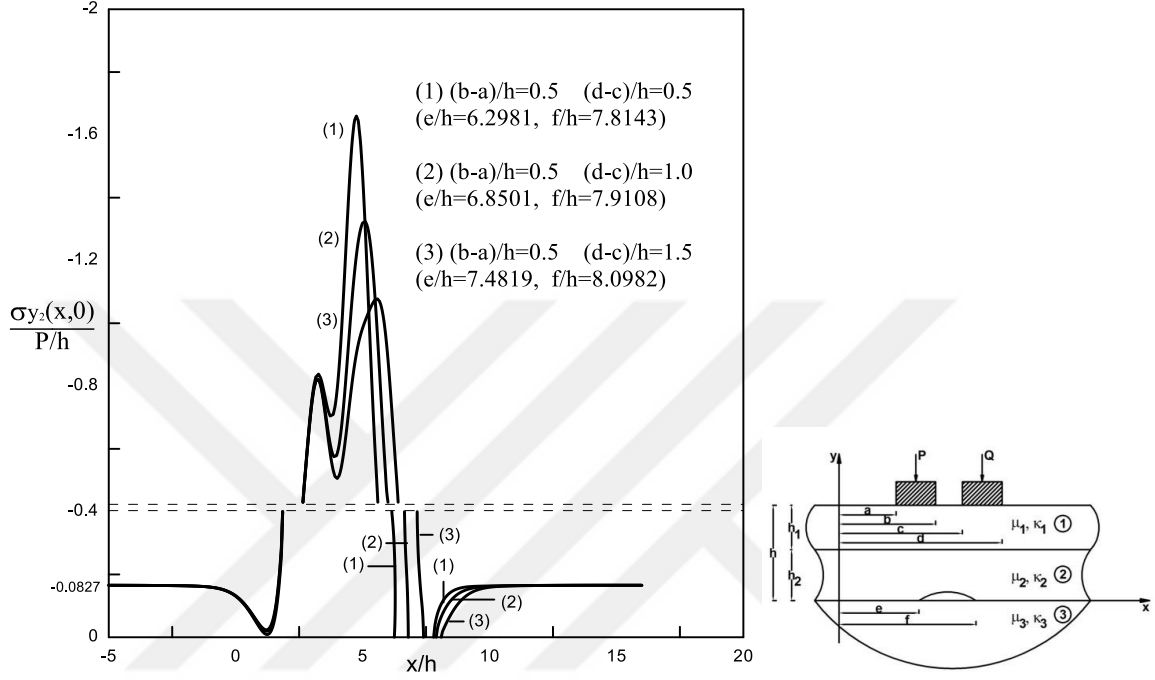
Bir önceki bölümde sürekli temas durumu için belirlenen sınır şartlarına bağlı olarak yapılan çözümler sonucu elde edilen grafiklerde ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıkları verilmiştir. Yük faktörünün kritik yük faktöründen büyük olduğu ( $\lambda > \lambda_{cr}$ ) süreksiz temas durumunda ise yeniden belirlenen sınır koşulları kullanılarak elde edilen integral denklem sisteminin çözümü sonucu yeni grafikler elde edilmiştir. Bu çözümlerden tabakalara ve alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzleme ait ara yüzeydeki gerilme dağılımları ve ayrılma mesafeleri; blok genişliği, bloklar arası mesafe, kayma modülleri oranı ve yük oranı gibi boyutsuz büyüklükler için belirlenmiştir.

Alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzleme ait ara yüzeyde  $\sigma_y(x,0)/P/h$  gerilme dağılımını veren grafikler incelendiğinde sürekli temas bölgeleri ve süreksiz temas bölgesi görülmektedir.  $\sigma_y(x,0)/P/h$  gerilme değeri 1. Blok kenarından itibaren artmakta yük altında en büyük değerini almaktadır. Bloklar arasında gerilme değerleri azalmakta daha sonra yeniden artarak ikinci bloğun kenarından itibaren birinci blokta ki duruma benzer şekilde artış gözlenmekte en büyük değerini yük altında aldıktan sonra tekrar azalarak alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzleme ait ara yüzeyde meydana gelen ayrılmanın başlangıç noktası  $e/h$ 'da sıfır olmakta ve ayrılma bölgesi  $(e/h, f/h)$  boyunca sıfır kalmaktadır. Ayrılmanın bittiği nokta  $f/h$ ' dan sonra ise gerilme değerleri artarak yük faktörü  $\lambda$  'ya eşitlenmektedir. Şekil 57'de blok genişliği arttıkça alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzleme ait ara yüzeydeki ayrılma bölgelerinde ki değişim görülmektedir. Buna göre blok genişlikleri arttıkça ayrılma bölgesi küçülmektedir. Blok genişlikleri artırıldığında ilk ayrılma uzaklıkları ve ilk ayrılma yükleri ise büyümektedir( Şekil 42-43). Şekil 58'de bloklar arasındaki mesafe değişiminin ayrılma bölgesi üzerindeki etkileri görülmektedir. Buna göre  $(c-b)/h$  'ın küçük değerleri için  $((c-b)/h) < 3$   $\lambda$  'ya bağlı iki ayrılma bölgesi meydana gelme ihtimali ortaya çıkmakta ve  $Q/h \geq P/h$  iken ilk ayrılma bölgesi ikinci bloğun sağ tarafında olmaktadır. Bloklar arasındaki uzaklık  $((c-b)/h=3)$  daha da artırılırsa bloklar arasında bir ayrılma bölgesi daha ortaya çıkmaktadır. Ve bu bölge muhtemelen ilk ayrılma bölgesi olmaktadır. Bloklar arasındaki uzaklık artırılmaya devam ettiğinde  $((c-b)/h > 5)$  ise yük faktörü  $\lambda$ 'ya bağlı olarak dört ayrılma bölgesi meydana gelme ihtimali ortaya çıkmaktadır. İlk ayrılma bölgesi yine bloklar

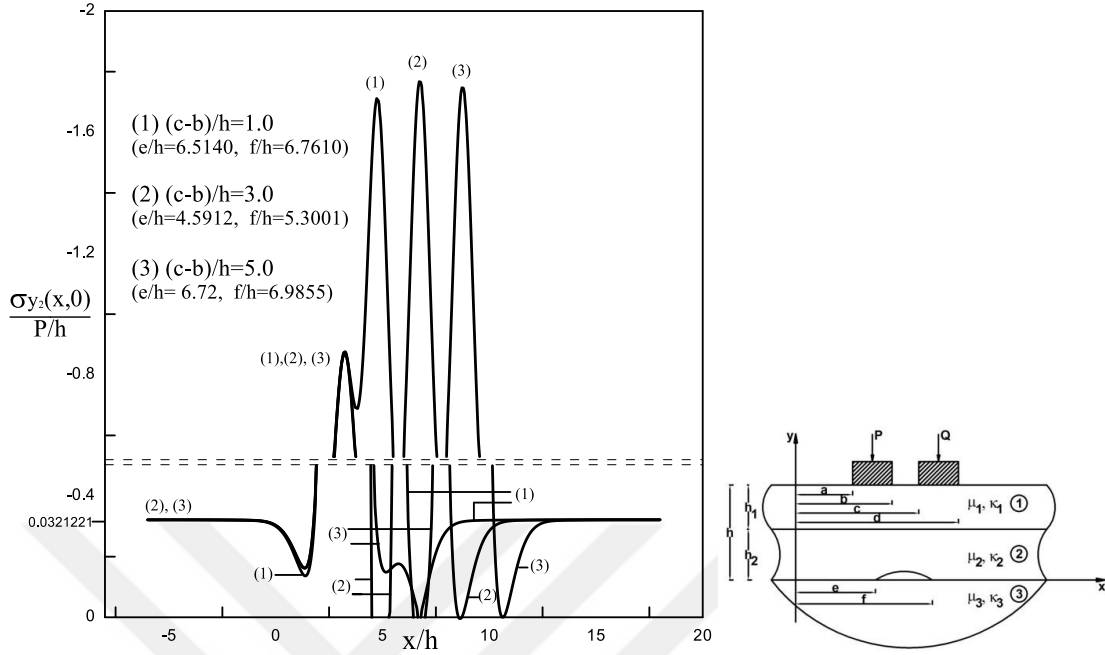
arasında meydana gelmektedir ve  $(c-b)/h$ ' in belli bir değerinden sonra bloklar arasındaki etkileşim kaybolmaktadır. Şekil 59'da tabakalar arasındaki kayma modülleri oranına bağlı olarak alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki temas yüzeyinde meydana gelen ayrılma bölgelerindeki değişim görülmektedir. Buna göre kayma modülleri oranı artırıldığında yani alttaki tabakanın rijitliği üst tabakaya göre artırıldığında alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ayrılma genelde daha kolay meydana gelmektedir ve ayrılma bölgesi büyümektedir. Şekil 60'da alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlem kayma modülleri oranındaki değişimin yine alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlem temas yüzeyinde meydana getirdiği ayrılmaya etkisi görülmektedir. Bu oran büyüdükçe yani elastik yarı sonsuz düzlemin rijitliği artırıldığında ayrılma daha kolay meydana gelmekte ve ayrılma bölgesi büyümektedir. Ayrılma bölgesinin yük oranına göre değişimi Şekil 61'de incelenmiştir. Şekilde görüldüğü gibi yük oranı arttıkça ayrılma kolaylaşmakta ve ayrılma bölgesi büyümektedir. Yük artırıldığında ayrılmanın bitiş noktası  $f/h$  büyürken, ayrılmanın başlangıç noktası  $e/h$ ' da azalarak sabit bir değere doğru yaklaşmaktadır. Şekil 62'de alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlem arasında yük faktörüne ( $\lambda$ ) bağlı olarak meydana gelen sürekli ve süreksiz temas durumundaki gerilme dağılımları görülmektedir.  $\lambda=18 < \lambda_{cr}$  olması durumunda sürekli temas mevcuttur ve herhangi bir noktada ayrılma söz konusu değildir.  $\lambda=22.101 = \lambda_{cr}$  olması durumunda ilk ayrılmanın bloklar arasında  $((c-b)/h=3, x_{cr}=4.961)$  meydana geleceği anlaşılmaktadır.  $\lambda=31 > \lambda_{cr}$  olması durumunda ise alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlem arasında bir ayrılma bölgesi  $(e/h=4.5912, f/h=5.3001)$  meydana gelmekte ve bu bölgede gerilme değerleri sıfır olmaktadır. Şekilden de görüldüğü gibi ilk ayrılma uzaklığı bu ayrılma bölgesi içinde bir noktada değer almaktadır. Şekil 63'de alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlem arasında yük faktörüne ( $\lambda$ ) bağlı olarak meydana gelen sürekli ve süreksiz temas durumundaki gerilme dağılımları görülmektedir.  $\lambda=20 < \lambda_{cr}$  olması durumunda sürekli temas mevcuttur ve herhangi bir noktada ayrılma söz konusu değildir.  $\lambda=30.340 = \lambda_{cr}$  olması durumunda ilk ayrılmanın ikinci bloğun sağında  $((c-b)/h=1, x_{cr}=6.65)$  meydana gelme ihtimali gözükmemektedir.  $\lambda=40 > \lambda_{cr}$  olması durumunda ise alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlem arasında bir ayrılma bölgesi  $(e/h=6.260, f/h=7.2477)$  meydana gelmekte ve bu bölgede gerilme değerleri sıfır olmaktadır. Şekilden de görüldüğü gibi ilk ayrılma uzaklığı bu ayrılma bölgesi içinde bir noktada değer almaktadır. Şekil 64'de bloklar

arasındaki mesafe değişiminin tabakalar arasında ki ayrılma bölgesi üzerindeki etkileri görölmektedir. Buna göre  $(c-b)/h$  'ın küçük değerleri için  $((c-b)/h) < 3$   $\lambda$  'ya bağlı iki ayrılma bölgesi meydana gelme ihtimali ortaya çıkmakta,  $Q/h \geq P/h$  iken ilk ayrılma bölgesi ikinci bloğun sağ tarafında olmaktadır. Bloklar arasındaki uzaklık  $((c-b)/h=3)$  daha da artırılırsa bloklar arasında da bir ayrılma bölgesi olabileceği gözükmemektedir. Ve bu bölge muhtemelen ilk ayrılma bölgesi olmaktadır. Tabakalar arasındaki uzaklık artırılmaya devam edildiğinde  $((c-b)/h > 5)$  ise yük faktörü  $\lambda$ 'ya bağlı olarak dört ayrılma bölgesi meydana gelebileceği anlaşılmaktadır. Bu durumda muhtemel ilk ayrılma bölgesi ikinci bloğun yakınlarında gerçekleşmektedir ve  $(c-b)/h$  'ın belli bir değerinden sonra bloklar arasındaki etkileşim kaybolmaktadır. Şekil 65'de tabakalar arasındaki kayma modülleri oranına bağlı olarak tabakalar arasındaki temas yüzeyinde meydana gelen ayrılma bölgelerindeki değişim görölmektedir. Buna göre kayma modülleri oranı artırıldığında yani alttaki tabakanın rijitliği üstteki tabakaya göre artırıldığında tabakalar arasındaki ayrılma bölgesi küçölmektedir. Tabakalar arasındaki boyutsuz gerilme dağılımının yük oranı ile değişimi Şekil 66' da incelenmiştir. Bloklar arasındaki mesafe  $(c-b)/h=1$  alındığında ilk ayrılmalar ikinci bloğun sağ tarafında gerçekleşmektedir. Şekilde göröldüğü gibi yük değeri arttıkça ayrılma kolaylaşmakta ve ayrılma bölgesi büyömektedir. Yük artırıldığında ayrılmanın bitiş noktası  $l/h$  büyöürken, ayrılmanın başlangıç noktası  $k/h$  'da azalarak sabit bir değere doğru yaklaşmaktadır. Şekil 67'de tabakalar arasında yük faktörüne ( $\lambda$ ) bağlı olarak meydana gelen sürekli ve süreksiz temas durumundaki gerilme dağılışları görölmektedir.  $\lambda=20 < \lambda_{cr}$  olması durumunda sürekli temas mevcuttur ve herhangi bir noktada ayrılma söz konusu değildir.  $\lambda=37.534 = \lambda_{cr}$  olması durumunda ilk ayrılmanın ikinci bloğun sağında olması ihtimali ortaya çıkmaktadır ( $x_{cr} = 5.77$ ).  $\lambda=55 > \lambda_{cr}$  olması durumunda ise tabakalar arasında bir ayrılma bölgesi ( $k/h=5.5998$ ,  $l/h=6.013$ ) meydana gelmekte ve bu bölgede gerilme değerleri sıfır olmaktadır. Şekil 68'de tabakalar arasında yük faktörüne ( $\lambda$ ) bağlı olarak meydana gelen sürekli ve süreksiz temas gerilmeleri görölmektedir.  $\lambda=25 < \lambda_{cr}$  olması durumunda sürekli temas mevcuttur ve herhangi bir noktada ayrılma söz konusu değildir.  $\lambda=38.27 = \lambda_{cr}$  olması durumunda ilk ayrılmanın bloklar arasında meydana gelme ihtimali gözükmemektedir ( $x_{cr} = 5.74$ ).  $\lambda=55 > \lambda_{cr}$  olması durumunda ise tabakalar arasında bir ayrılma bölgesi ( $k/h=5.5830$ ,  $l/h=5.8505$ ) meydana gelmekte ve bu bölgede gerilme değerleri sıfır

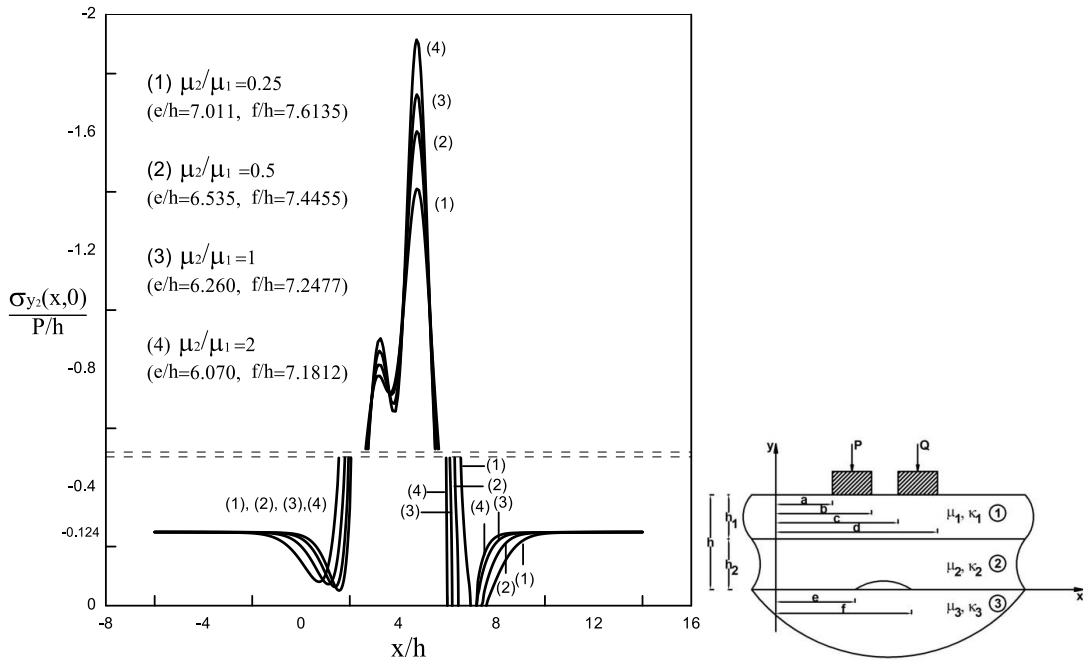
olmaktadır. Şekilde görüldüğü gibi ilk ayrılma uzaklığı bu ayrılma bölgesi içinde bir noktada değer almaktadır.



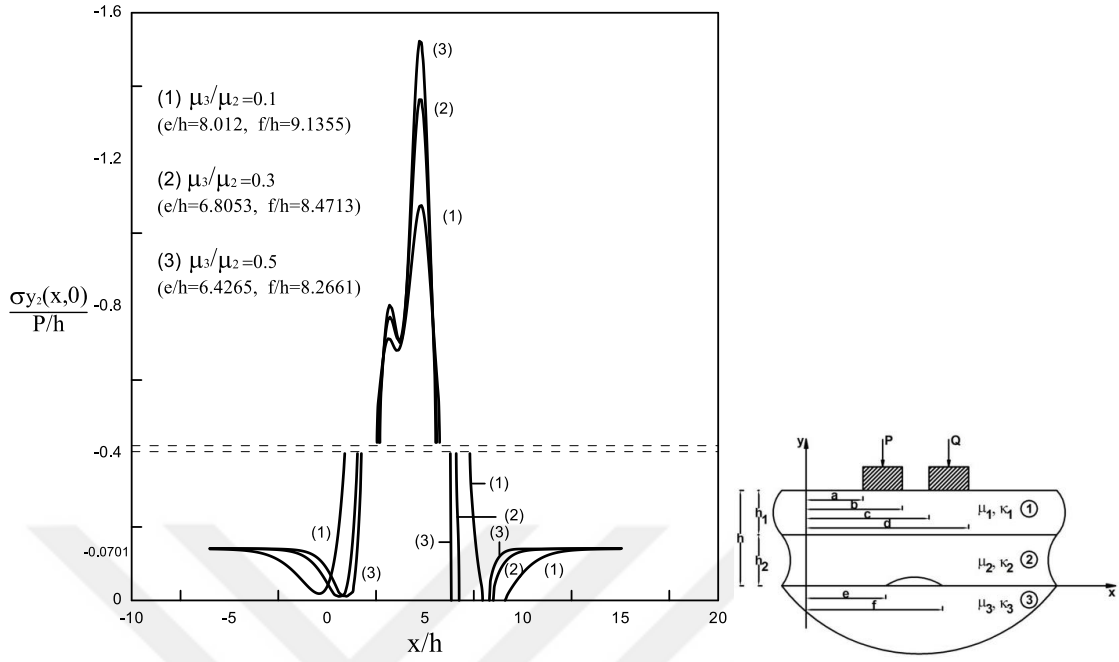
Şekil 57. Süreksiz temas durumunda alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki  $\sigma_y(x,0)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımının blok genişliği ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=2, \mu_3/\mu_2=0.5, a/h=3, (c-b)/h=1, \lambda=60$ )



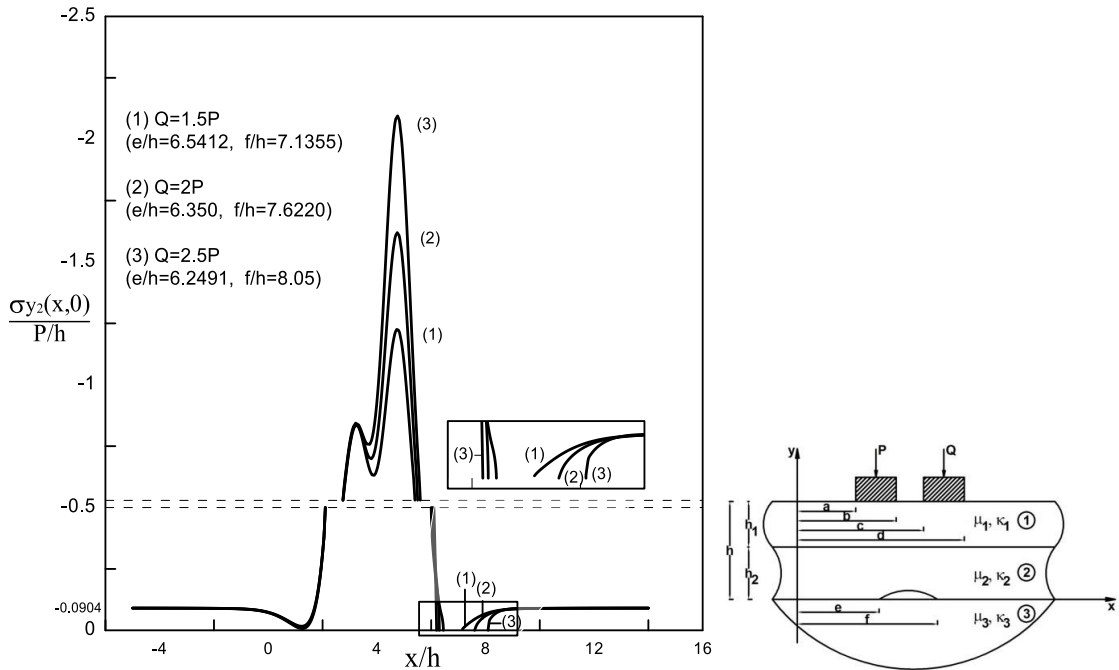
Şekil 58. Süreksiz temas durumunda alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki  $\sigma_y(x,0)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımının bloklar arası mesafe ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, Q=2P, \lambda=31$ )



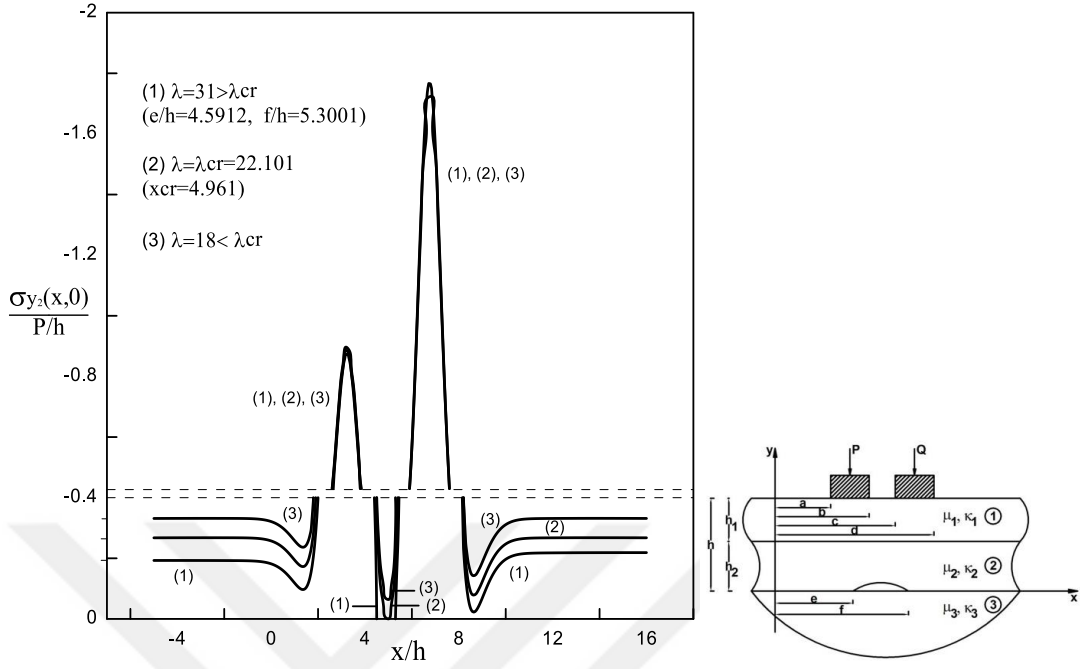
Şekil 59. Süreksiz temas durumunda alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki  $\sigma_y(x,0)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımının tabakalar arasındaki kayma modülleri oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, (c-b)/h=1, Q=2P, \lambda=40$ )



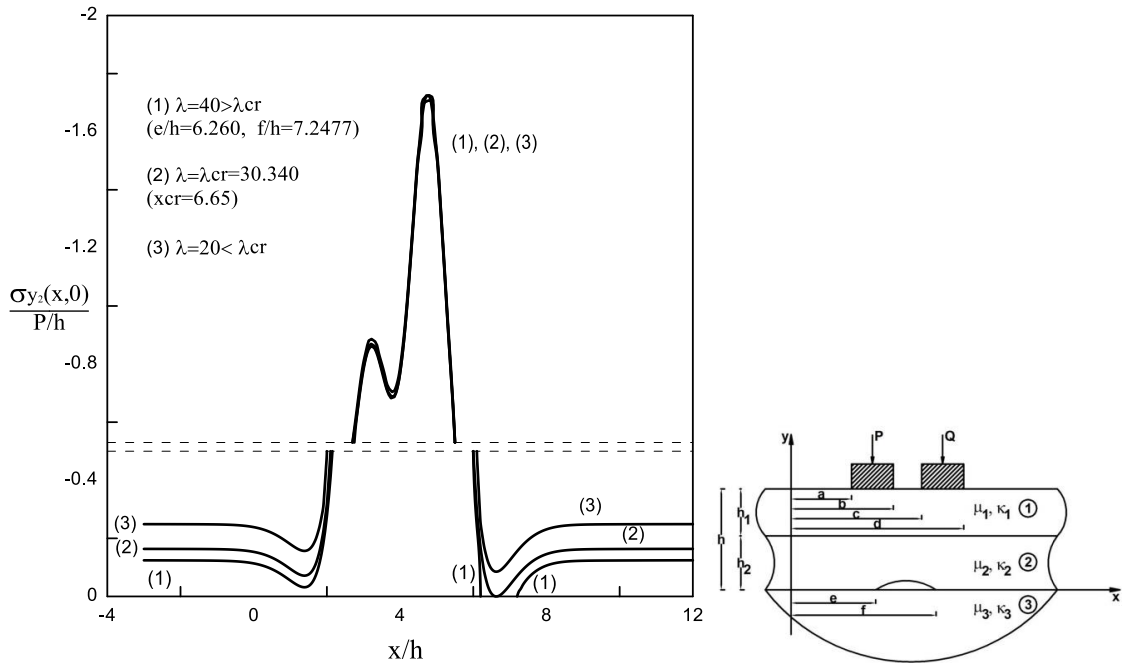
Şekil 60. Süreksiz temas durumunda alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki  $\sigma_y(x,0)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımının alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ( $\mu_2/\mu_1=1, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, Q=2P, \lambda=70$ )



Şekil 61. Süreksiz temas durumunda alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki  $\sigma_y(x,0)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımının yük oranı ile değişimi ( $\mu_2/\mu_1=2, \mu_3/\mu_2=0.5, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, (c-b)/h=1, \lambda=55$ )

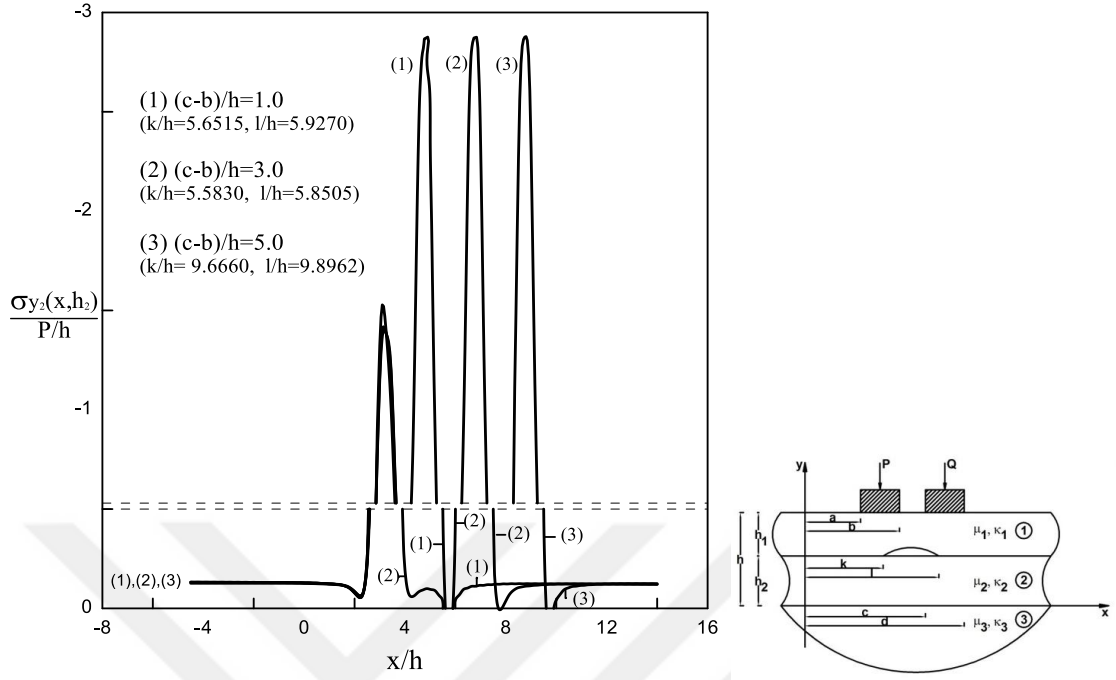


Şekil 62. Sürekli temas ( $\lambda < \lambda_{cr}$ ) ve süreksiz temas ( $\lambda > \lambda_{cr}$ ) durumlarında alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki  $\sigma_y(x,0)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımı ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, (c-b)/h=3, Q=2P$ )

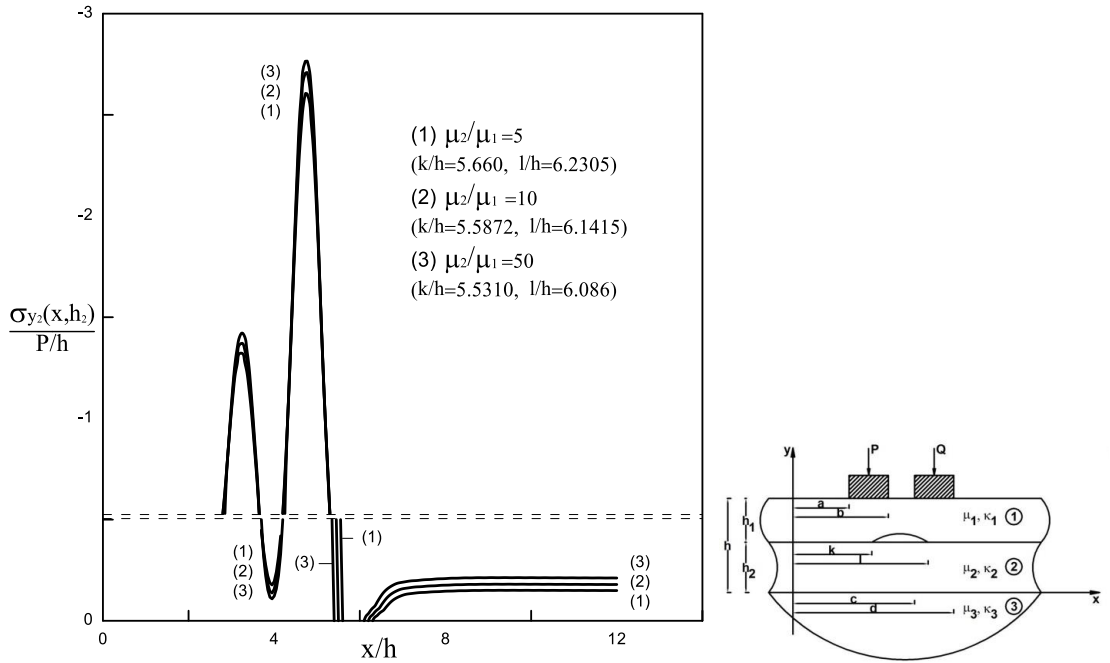


Şekil 63. Sürekli temas ( $\lambda < \lambda_{cr}$ ) ve süreksiz temas ( $\lambda > \lambda_{cr}$ ) durumlarında alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki  $\sigma_y(x,0)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımı ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, (c-b)/h=1, Q=2P$ )

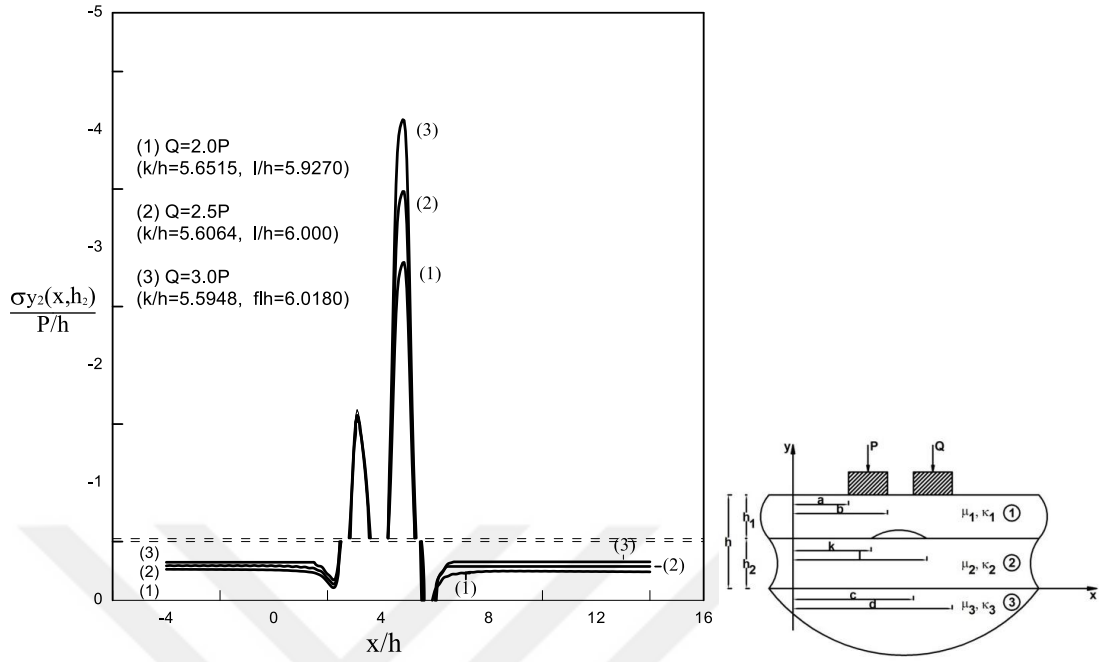




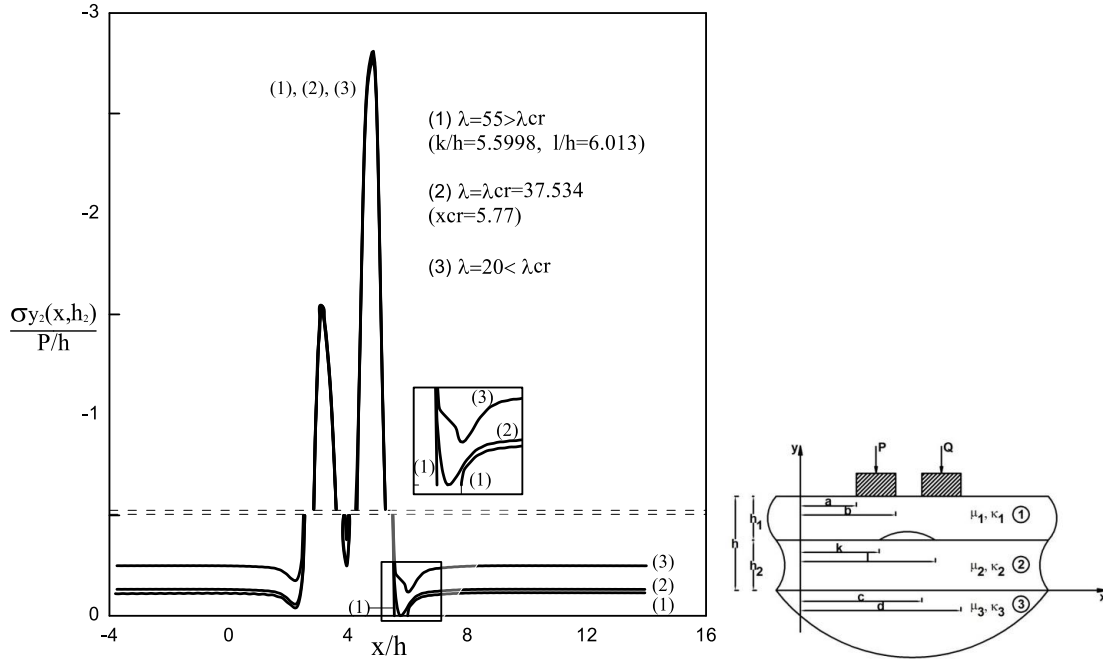
Şekil 64. Süreksiz temas durumunda tabakalar arasındaki  $\sigma_y(x, h_2)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımının bloklar arası mesafe ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, Q=2P, \lambda=30, h_2/h=0.7$ )



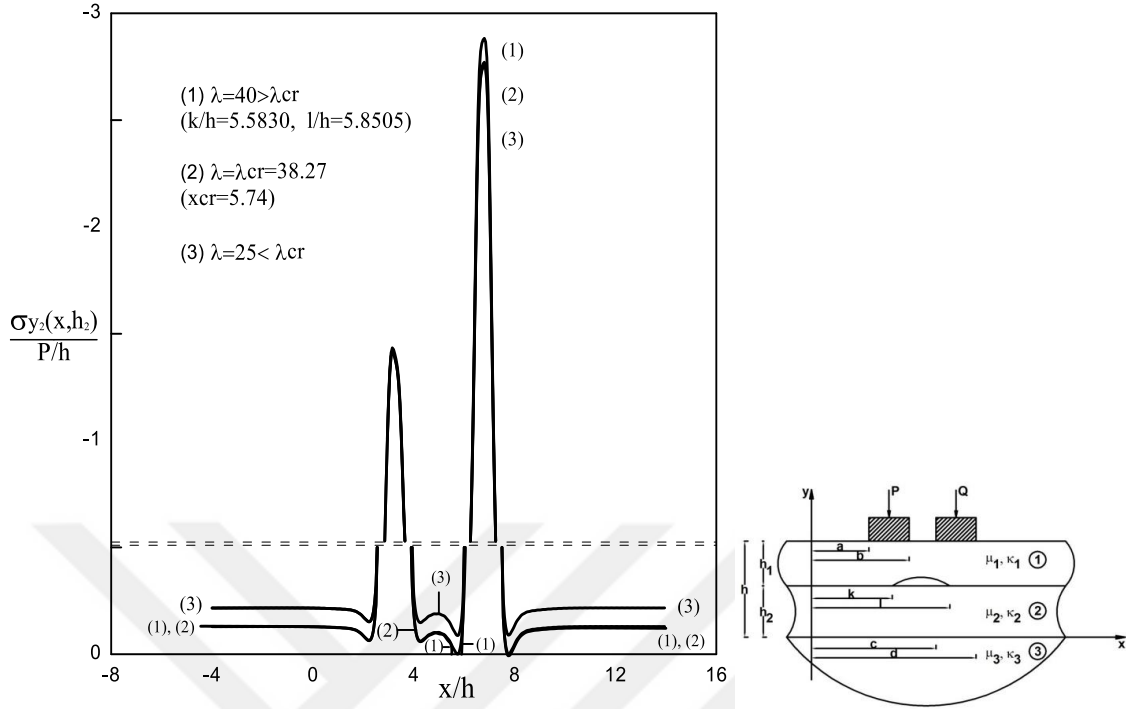
Şekil 65. Süreksiz temas durumunda tabakalar arasındaki  $\sigma_y(x, h_2)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımının tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, (c-b)/h=1, Q=2P, \lambda=30, h_2/h=0.7$ )



Şekil 66. Süreksiz temas durumunda tabakalar arasındaki  $\sigma_y(x, h_2)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımının yük oranı ile değişimi ( $\mu_2/\mu_1=1, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, (c-b)/h=1, \lambda=40, h_2/h=0.7$ )



Şekil 67. Sürekli temas ( $\lambda < \lambda_{cr}$ ) ve süreksiz temas ( $\lambda > \lambda_{cr}$ ) durumlarında tabakalar arasındaki  $\sigma_y(x, h_2)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımı ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, (c-b)/h=1, Q=2P$ )

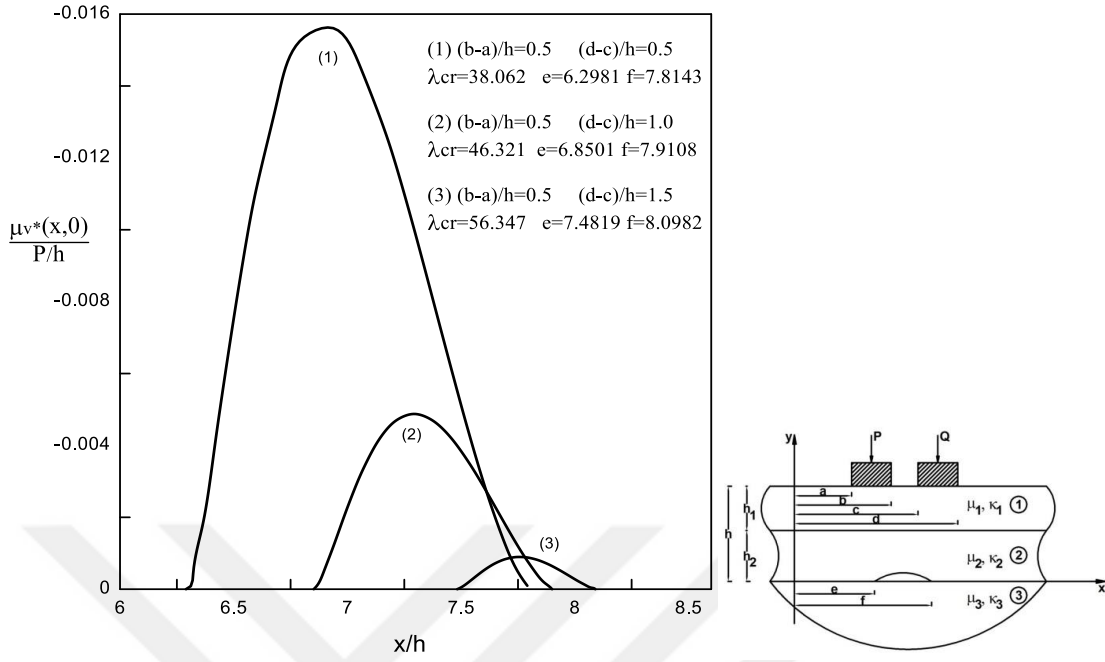


Şekil 68. Sürekli temas ( $\lambda < \lambda_{cr}$ ) ve süreksiz temas ( $\lambda > \lambda_{cr}$ ) durumlarında tabakalar arasındaki  $\sigma_y(x, h_2)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımı ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, (c-b)/h=1, Q=2P$ )

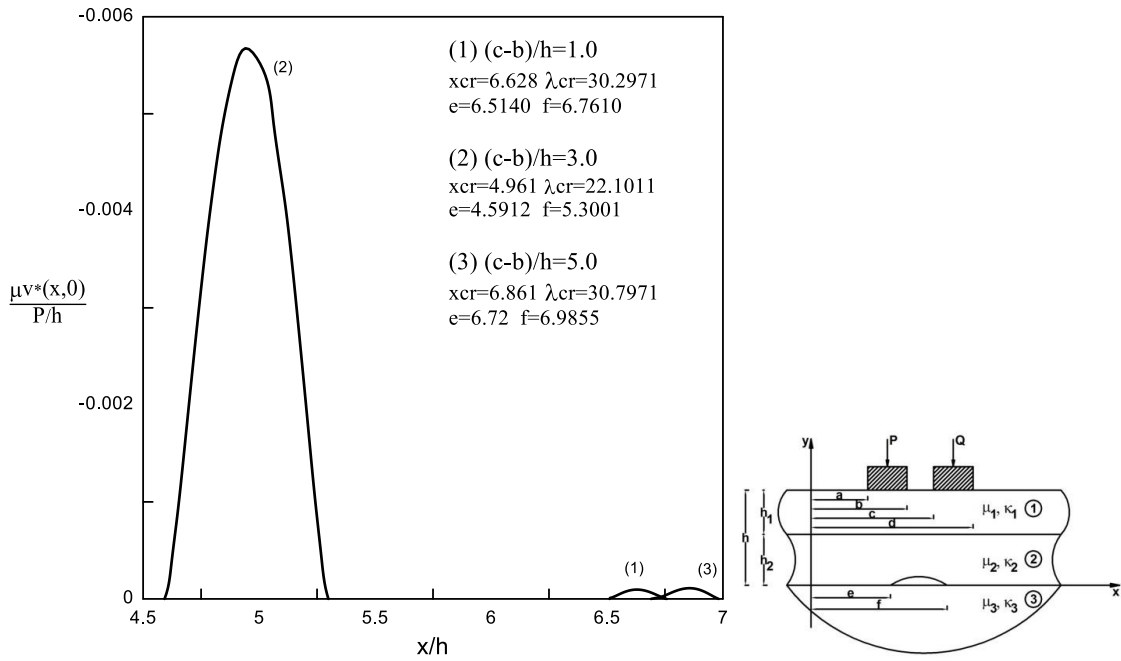
### 3.6. Süreksiz Temas Durumunda Ayrılma Bölgelerindeki Düşey Yer Değişimleri Farkının İrdelenmesi

Yükün ilk ayrılma yükünden daha büyük olması durumunda ( $\lambda > \lambda_{cr}$ ) alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzleme ait ara yüzeyde ve tabakalar arasında meydana gelen ayrılmalar blok genişlikleri, bloklar arası mesafe, kayma modüllerinin değişimi ve yük oranı gibi çeşitli boyutsuz büyüklükler için incelenmiş ve grafikler halinde aşağıda verilmiştir. Şekil 69'da alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzleme ait ara yüzeydeki kabarmaların 2. bloğun genişliği ile değişimi görülmektedir. Şekle göre blok genişliği artırıldıkça ayrılma bölgesi küçülmekte ve bu bölgede meydana gelen kabarmalar azalmaktadır. Blok genişliği artırıldıkça ayrılma bölgesi y başlangıç ekseninden uzaklaşmaktadır. Şekil 70'de alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzleme ait ara yüzeydeki kabarmaların bloklar arası mesafe ile değişimi görülmektedir. Bloklar arasındaki mesafe değeri  $(c-b)/h=1$  olduğunda ilk ayrılma ikinci bloğun sağ tarafında gerçekleşmekte, kabarma değeri ve ayrılma bölgesi daha küçük olmaktadır.  $(c-b)/h=3$ ,  $(c-$

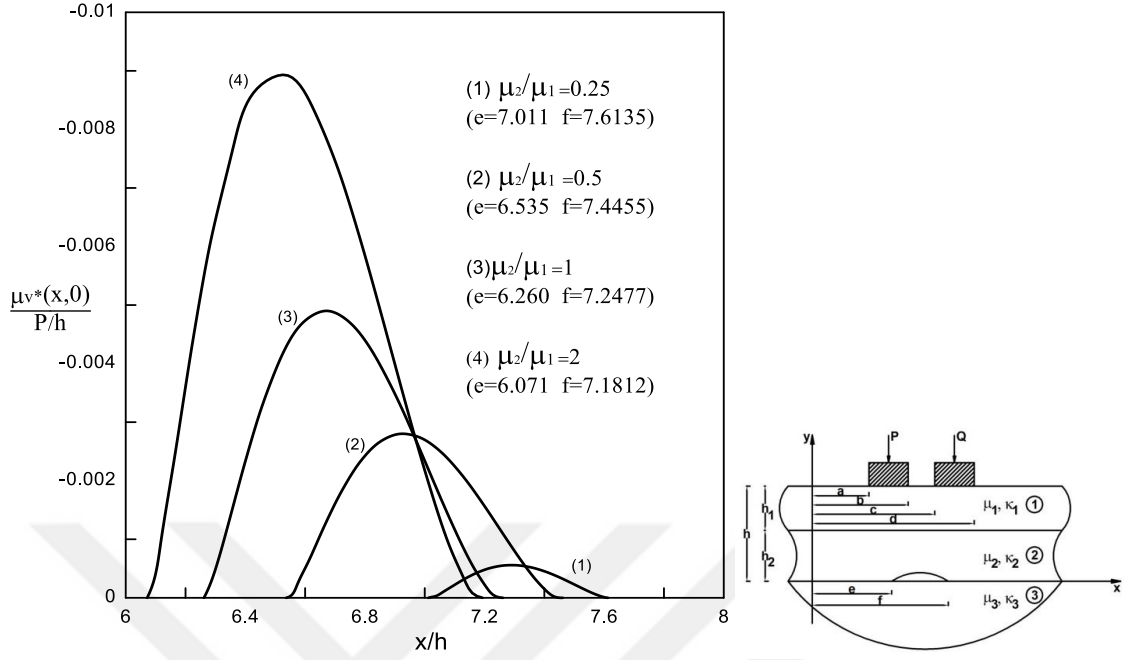
b)/h=5 olduğunda ise ilk ayrılmalar bloklar arasında gerçekleşir, (c-b)/h=3 durumunda kabarma değeri ve ayrılma bölgesi büyürken (c-b)/h=5 olması durumunda kabarma değeri ve ayrılma bölgesi küçülmektedir. Şekil 71’de tabaka ile elastik yarı sonsuz düzleme ait ara yüzeyde meydana gelen kabarmaların tabakalar arasındaki kayma modülleri oranı ile değişimi görülmektedir. Alt tabakanın rijitliği üstteki tabakaya göre artırıldığında ayrılma bölgesi büyümekte ve daha büyük kabarma değeri elde edilmektedir. Benzer durum Şekil 72’de de görülmektedir. Elastik yarı sonsuz düzlemin rijitliği alt tabakaya göre artırıldığında ayrılma bölgesi büyümekte kabarma değeri ise artmaktadır. Şekil 73’de görüldüğü gibi yük oranı artırıldığında alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzleme ait ara yüzeydeki ayrılma bölgesi büyümekte ve bu bölgede meydana gelen kabarmalar artmaktadır. Şekil 74’de tabakalara ait ara yüzeyde meydana gelen kabarmaların bloklar arası mesafe ile değişimi verilmektedir. Bloklar arası mesafe değişimi (c-b)/h=1, (c-b)/h=5 olduğunda ilk ayrılmalar ikinci bloğun sağ tarafında meydana gelmektedir, (c-b)/h=3 olduğunda ise ayrılma bloklar arasında gerçekleşmektedir. Bloklar arası mesafe arttıkça meydana gelen kabarmalar ve ayrılma bölgeleri küçülmektedir. Şekil 75’de tabakalara ait ara yüzeyde meydana gelen kabarmaların tabakalar arasındaki kayma modülleri oranı ile değişimi görülmektedir. Alt tabakanın rijitliği üstteki tabakaya göre artırıldığında ayrılma bölgesi çok az miktarda büyümekte ve  $\mu_2/\mu_1$  oranı arttıkça büyük kabarma değerleri elde edilmektedir. Şekil 76’da görüldüğü gibi yük oranı artırıldığında tabakalara ait ara yüzeydeki ayrılma bölgesi büyümekte ve bu bölgede meydana gelen kabarmalar artmaktadır.



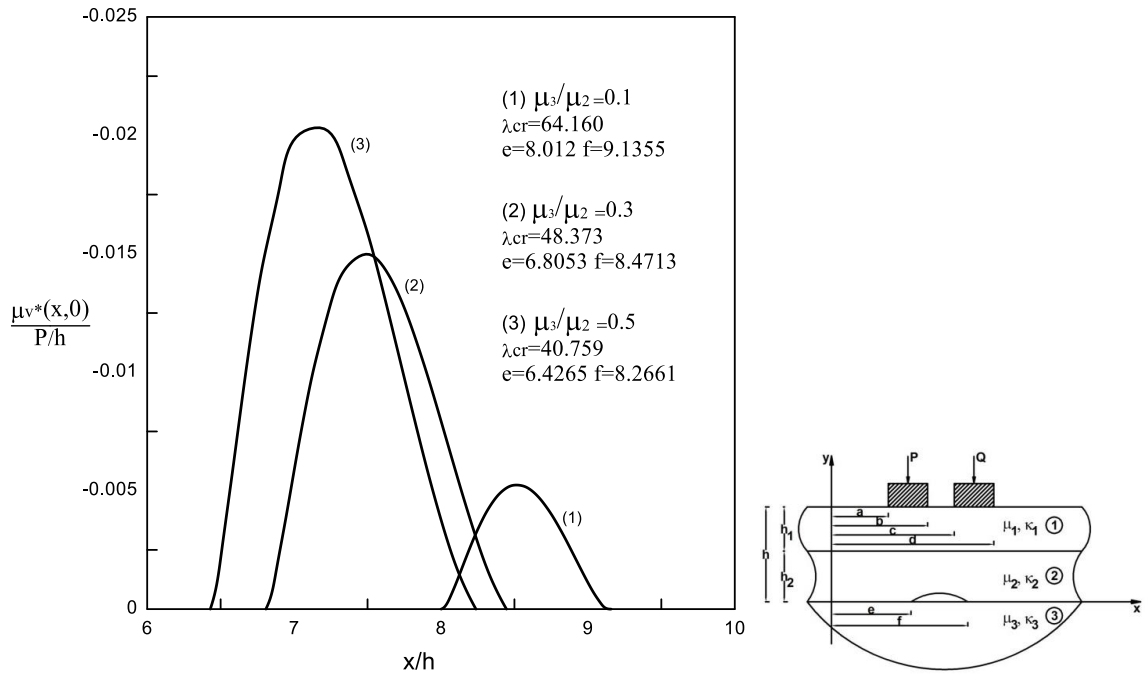
Şekil 69. Alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzleme ait ara yüzeydeki kabarmaların blok genişliği ile değişimi ( $\kappa_1=2$ ,  $\kappa_2=2$ ,  $\kappa_3=2$ ,  $\mu_2/\mu_1=2$ ,  $\mu_3/\mu_2=0.5$ ,  $a/h=3$ ,  $(c-b)/h=1$ ,  $\lambda=60$ )



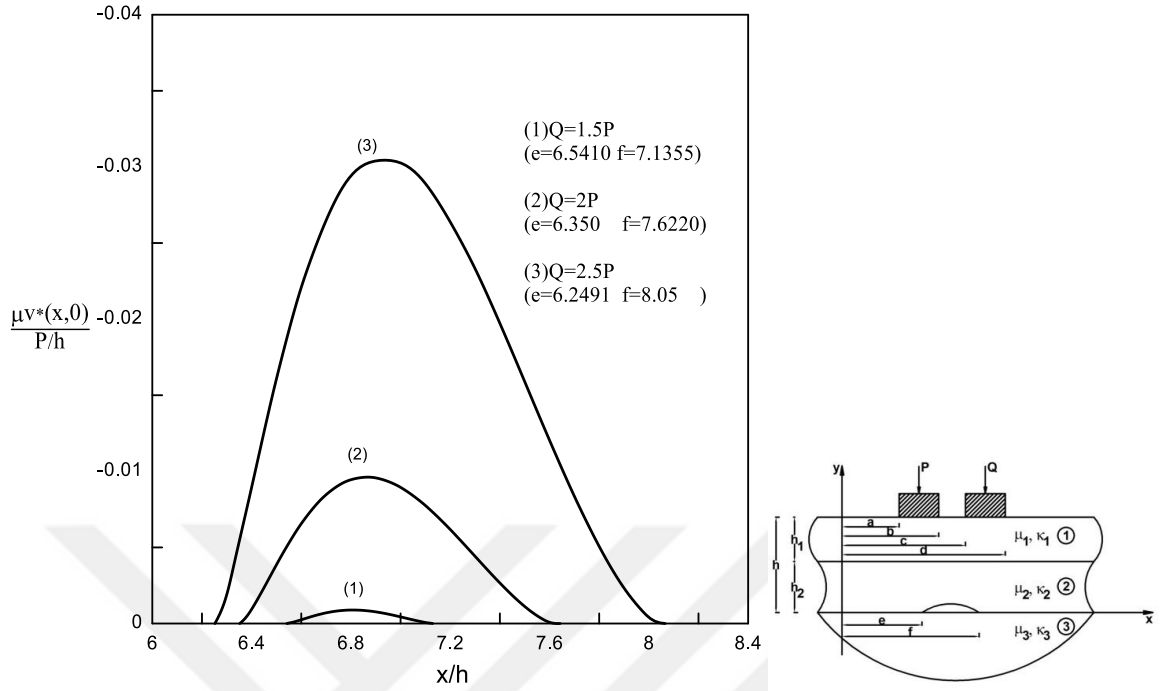
Şekil 70. Alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzleme ait ara yüzeydeki kabarmaların bloklar arası mesafe ile değişimi ( $\kappa_1=2$ ,  $\kappa_2=2$ ,  $\kappa_3=2$ ,  $\mu_2/\mu_1=1$ ,  $\mu_3/\mu_2=1$ ,  $a/h=3$ ,  $(b-a)/h=0.5$ ,  $(d-c)/h=0.5$ ,  $Q=2P$ ,  $\lambda=31$ )



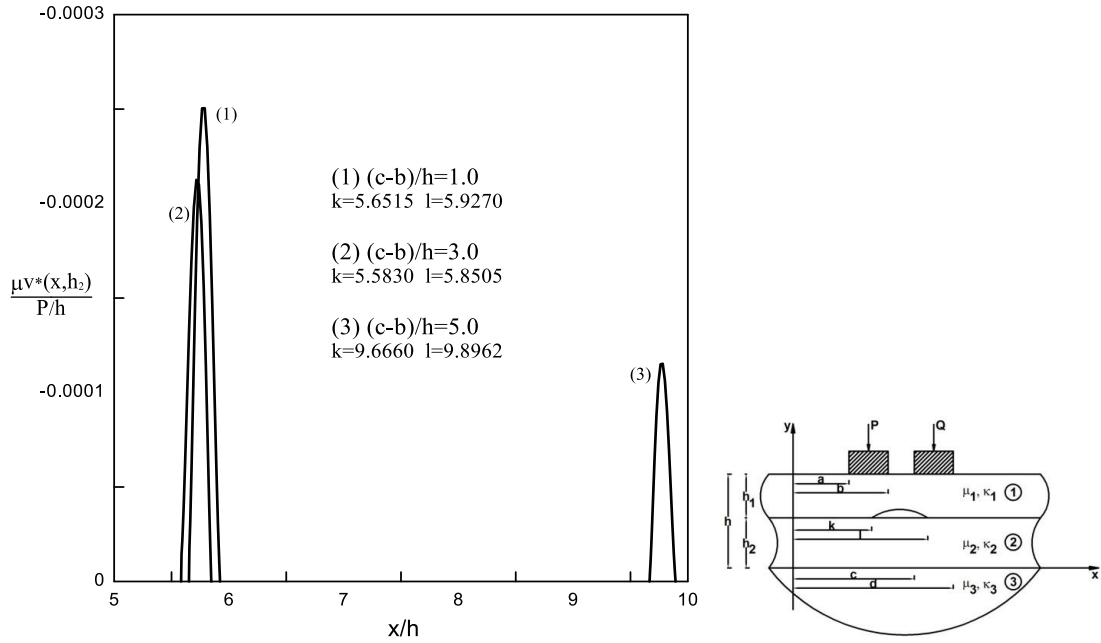
Şekil 71. Alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzleme ait ara yüzeydeki kabarmaların tabakalar arasındaki kayma modülleri oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2$ ,  $\kappa_2=2$ ,  $\kappa_3=2$ ,  $\mu_3/\mu_2=1$ ,  $a/h=3$ ,  $(b-a)/h=0.5$ ,  $(d-c)/h=0.5$ ,  $(c-b)/h=1$ ,  $Q=2P$ ,  $\lambda=40$ )



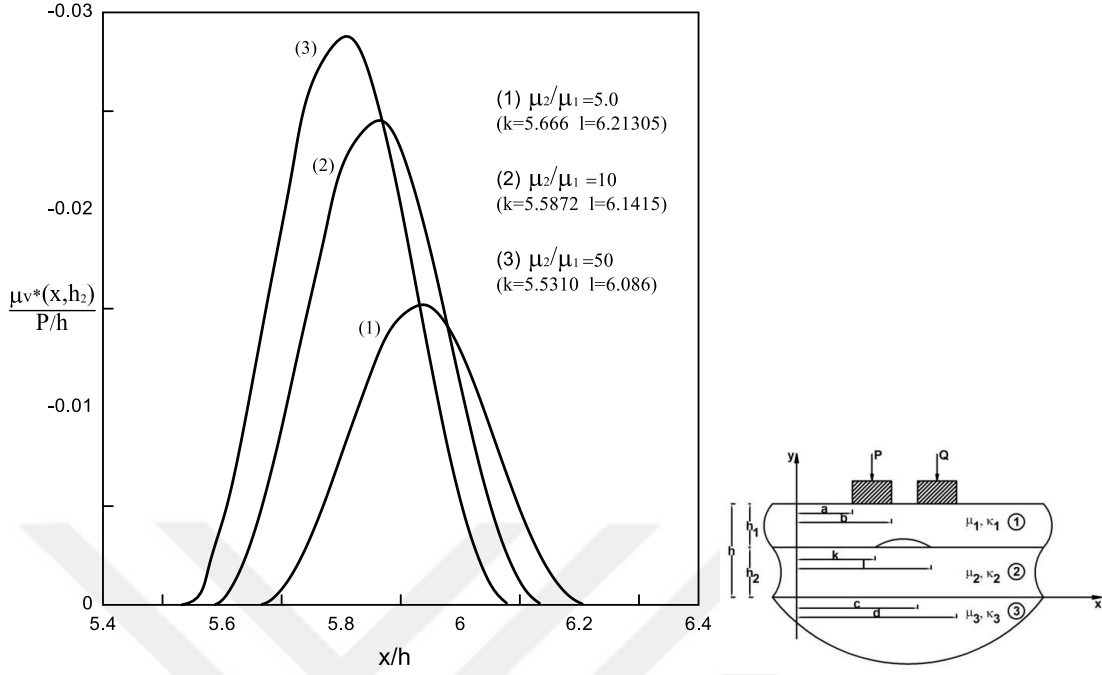
Şekil 72. Alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzleme ait ara yüzeydeki kabarmaların alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2$ ,  $\kappa_2=2$ ,  $\kappa_3=2$ ,  $\mu_2/\mu_1=1$ ,  $a/h=3$ ,  $(b-a)/h=0.5$ ,  $(d-c)/h=0.5$ ,  $(c-b)/h=1$ ,  $Q=2P$ ,  $\lambda=70$ )



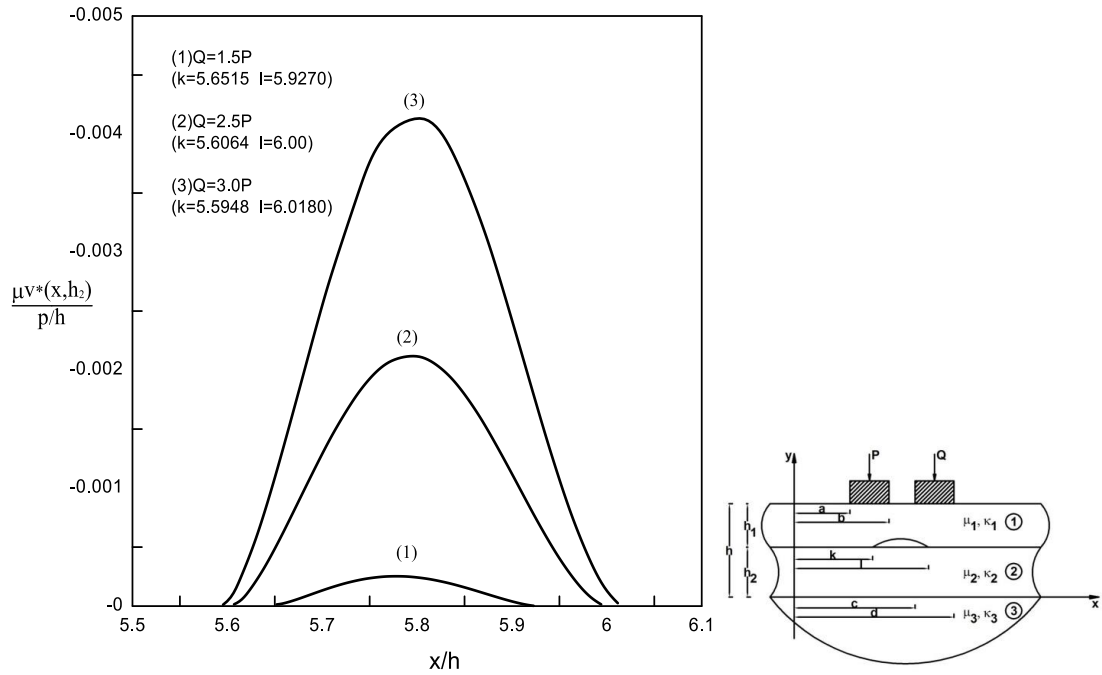
Şekil 73. Alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzleme ait ara yüzeydeki kabarmaların yük oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2$ ,  $\kappa_2=2$ ,  $\kappa_3=2$ ,  $\mu_2/\mu_1=2$ ,  $\mu_3/\mu_2=0.5$ ,  $a/h=3$ ,  $(b-a)/h=0.5$ ,  $(d-c)/h=0.5$ ,  $(c-b)/h=1$ ,  $\lambda=55$ )



Şekil 74. Tabakalara ait ara yüzeydeki kabarmaların bloklar arası mesafe ile değişimi ( $\kappa_1=2$ ,  $\kappa_2=2$ ,  $\kappa_3=2$ ,  $\mu_2/\mu_1=1$ ,  $\mu_3/\mu_2=1$ ,  $a/h=3$ ,  $(b-a)/h=0.5$ ,  $(d-c)/h=0.5$ ,  $Q=2P$ ,  $\lambda=40$ )



Şekil 75. Tabakalara ait ara yüzeydeki kabarmaların tabakalar arasındaki kayma modülleri oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2$ ,  $\kappa_2=2$ ,  $\kappa_3=2$ ,  $\mu_3/\mu_2 = 1$ ,  $a/h=3$ ,  $(b-a)/h=0.5$ ,  $(d-c)/h=0.5$ ,  $(c-b)/h=1$ ,  $Q=2P$ ,  $\lambda=30$ )



Şekil 76. Tabakalara ait ara yüzeydeki kabarmaların yük oranı ile değişimi ( $\kappa_1=2$ ,  $\kappa_2=2$ ,  $\kappa_3=2$ ,  $\mu_2/\mu_1=2$ ,  $\mu_3/\mu_2=0.5$ ,  $a/h=3$ ,  $(b-a)/h=0.5$ ,  $(d-c)/h=0.5$ ,  $(c-b)/h=1$ ,  $\lambda=40$ )



### 3.7. Sonlu Elemanlar Yöntemi Sonuçları ve Teorik Sonuçlarla Karşılaştırma

Bu kısımda elastik yarı sonsuz düzleme oturan iki elastik tabakanın temas probleminin sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen sayısal analiz sonuçları irdelenmekte ve sonuçlar teorik sonuçlarla karşılaştırılmaktadır. Yapılan analizlerde; bloklar altındaki temas gerilmeleri, y eksenine doğrultusunda y eksenine üzerindeki, blok altında ve bloklar arasındaki normal ve kayma gerilmeleri ile yine x eksenine doğrultusundaki gerilme değerleri elde edilmiştir. Aynı zamanda hem tabakalar arasında hem de alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında meydana gelen ilk ayrılmalar analizlerde yük oranları ve malzeme sabitleri gibi boyutsuz büyüklüklerin farklı sayısal değerleri için hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar tablolar ve grafikler halinde teorik sonuçlarla birlikte karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Grafik ve tablolarda ki malzeme sabitleri  $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$  olarak alınmıştır. Yük oranındaki değişim ve malzeme sabitlerinin değişimleri, analizlerde kullanılan eleman sayısı ve temas eleman sayısını değiştirmedeği halde blok genişlikleri değişimi eleman sayısını ve temas elemanı sayısını değiştirmektedir.

İlk ayrılma uzaklıklarının çeşitli boyutsuz büyüklükler için sonlu elemanlar yöntemi ve teorik çalışmalarından elde edilen sonuçları aşağıdaki tablolarda verilmektedir (Tablo 7-8).

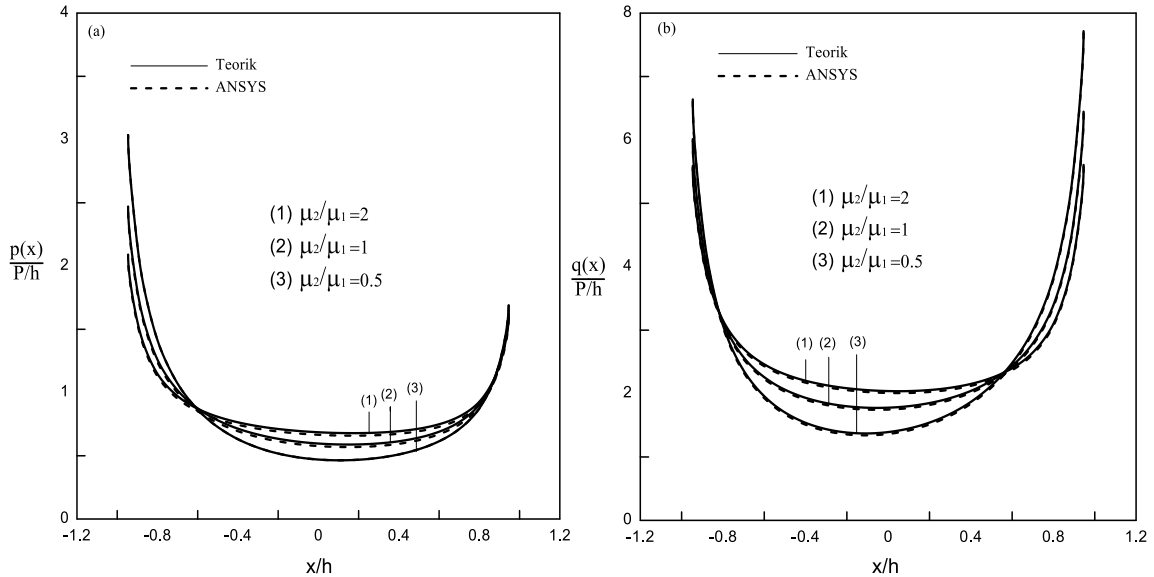
Tablo 7. Tabakalar arasında meydana gelen ilk ayrılma uzaklıklarının, blok genişlikleri ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçlarının karşılaştırılması ( $\kappa_1=2$ ,  $\kappa_2=2$ ,  $\kappa_3=2$ ,  $\mu_2/\mu_1 = 2$ ,  $\mu_3/\mu_2=0.5$ ,  $a/h=3$ ,  $(c-b)/h=1$ ,  $Q=2P$ )

(b-a)/h	(d-c)/h	$x_{cr}/h$		
		Analitik	FEM	Hata(%)
0.5	0.5	6.5481	6.53	0.28
0.5	1.0	7.0128	7.00	0.18
0.5	1.5	7.5026	7.51	0.098

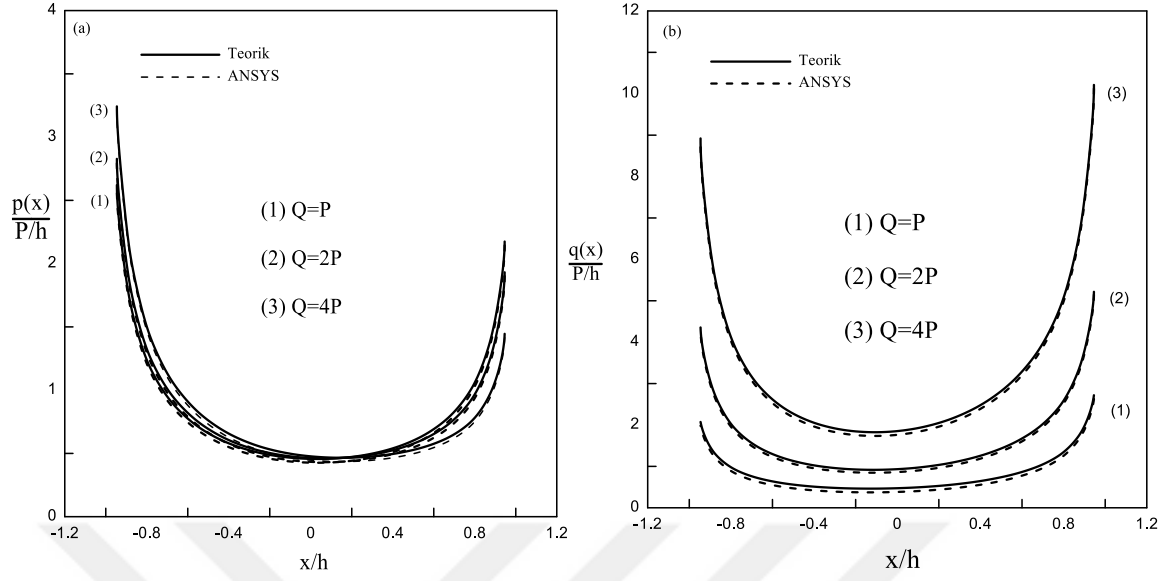
Tablo 8. Tabakalar arasında meydana gelen ilk ayrılma uzaklıklarının, alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçlarının karşılaştırılması ( $\kappa_1=2$ ,  $\kappa_2=2$ ,  $\kappa_3=2$ ,  $\mu_2/\mu_1=1$ ,  $a/h=3$ ,  $(b-a)/h=0.5$ ,  $(d-c)/h=0.5$ ,  $(c-b)/h=1$ ,  $Q=2P$ )

$\mu_3/\mu_2$	$x_{cr}/h$		
	Analitik	FEM	Hata(%)
0.1	8.4826	8.50	0.20
0.3	7.3731	7.35	0.31
0.5	6.9552	6.95	0.074

Şekil 77a-b' de malzeme sabitleri oranına bağlı olarak temas gerilmelerindeki değişimin, Şekil 78 a-b'de ise yük oranı değişimine bağlı olarak meydana gelen temas gerilmelerindeki değişimin sonlu elemanlar yöntemi ve teorik çalışmalardan elde edilen sonuçları birlikte verilmektedir. Şekillerde a birinci blok altındaki değişimi b ise ikinci blok altındaki değişimi göstermektedir.

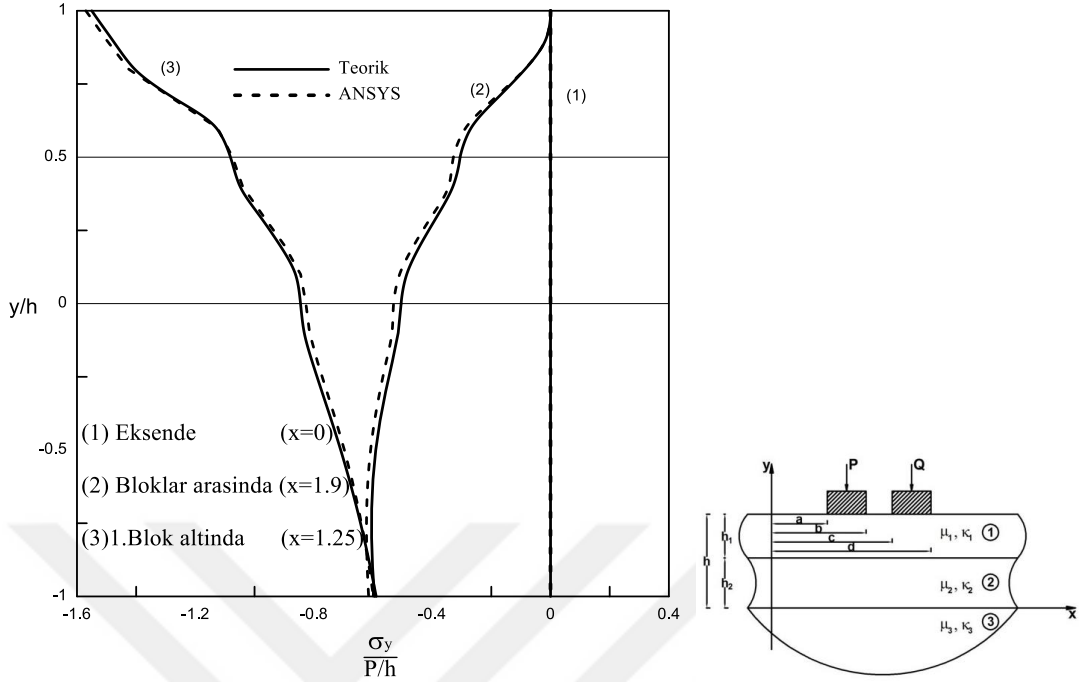


Şekil 77. a-b. Tabakaların kayma modülleri oranlarına bağlı olarak bloklar altındaki temas gerilmeleri değişimlerinin teorik ve sayısal sonuçları ( $\kappa_1=2$ ,  $\kappa_2=2$ ,  $\kappa_3=2$ ,  $\mu_3/\mu_2=2$ ,  $a/h=3$ ,  $(b-a)/h=1$ ,  $(d-c)/h=1$ ,  $(c-b)/h=1$ ,  $Q=2P$ )

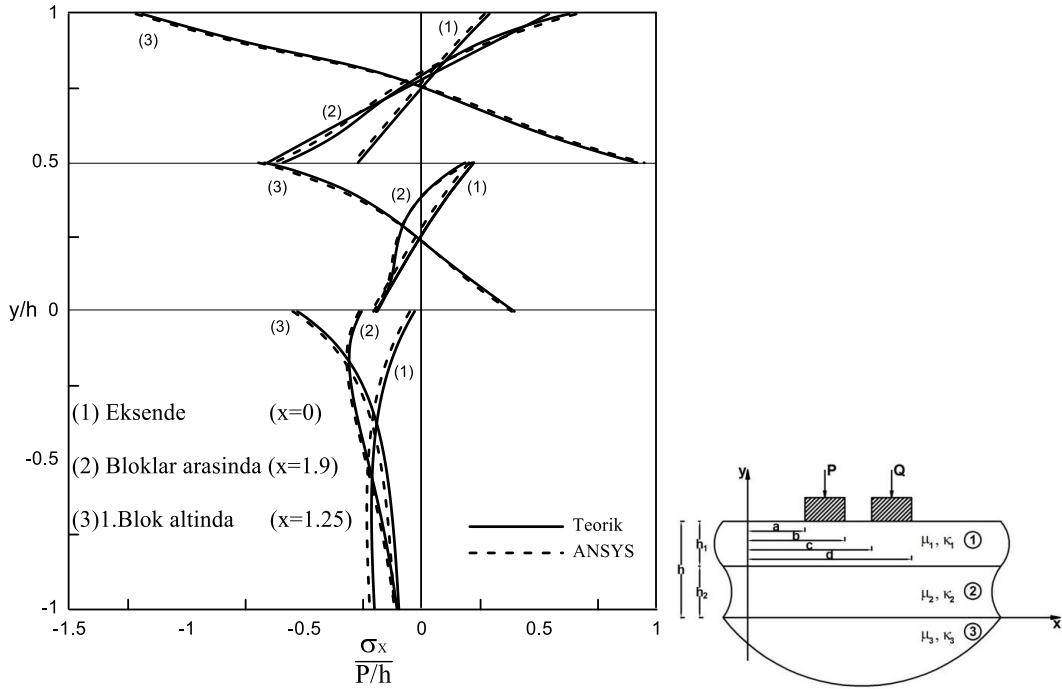


Şekil 78. a-b. Çeşitli yük oranı değerleri için bloklar altındaki temas gerilmeleri değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ( $\kappa_1=2$ ,  $\kappa_2=2$ ,  $\kappa_3=2$ ,  $\mu_2/\mu_1=2$ ,  $\mu_3/\mu_2=2$ ,  $a/h=3$ ,  $(b-a)/h=1$ ,  $(d-c)/h=1$ ,  $(c-b)/h=1$ )

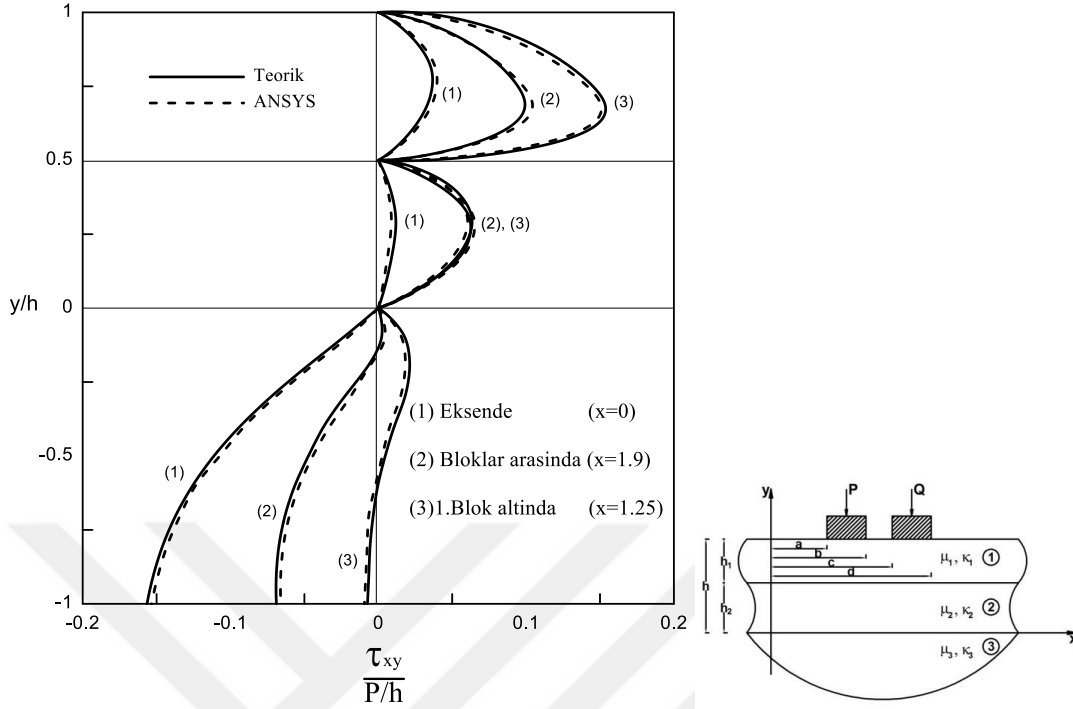
y ekseninde, 1.blok altında ve bloklar arasında meydana gelen normal gerilme ve kayma gerilmesi değerlerinin sonlu elemanlar yönteminden ve teorik çalışmalardan elde edilen sonuçları birlikte grafikler halinde aşağıda verilmektedir ( Şekil 79-81).



Şekil79.  $\sigma_y(x, y)/(P/h)$  boyutsuz normal gerilmesinin ekseninde, 1. blok altında ve bloklar arasındaki değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, \mu_3/\mu_2=1, a/h=1, (b-a)/h=1, (d-c)/h=1, (c-b)/h=2, Q=P$ )

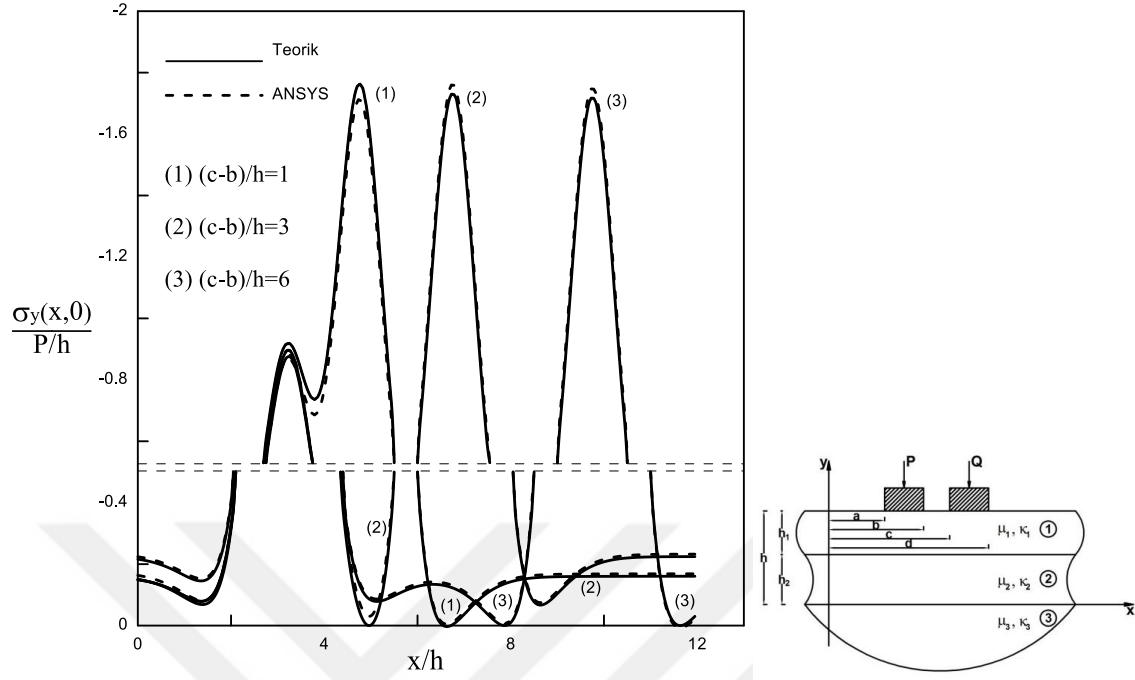


Şekil 80.  $\sigma_x(x, y)/(P/h)$  boyutsuz normal gerilmesinin ekseninde, 1. blok altında ve bloklar arasındaki değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=1, (d-c)/h=1, (c-b)/h=2, Q=P$ )

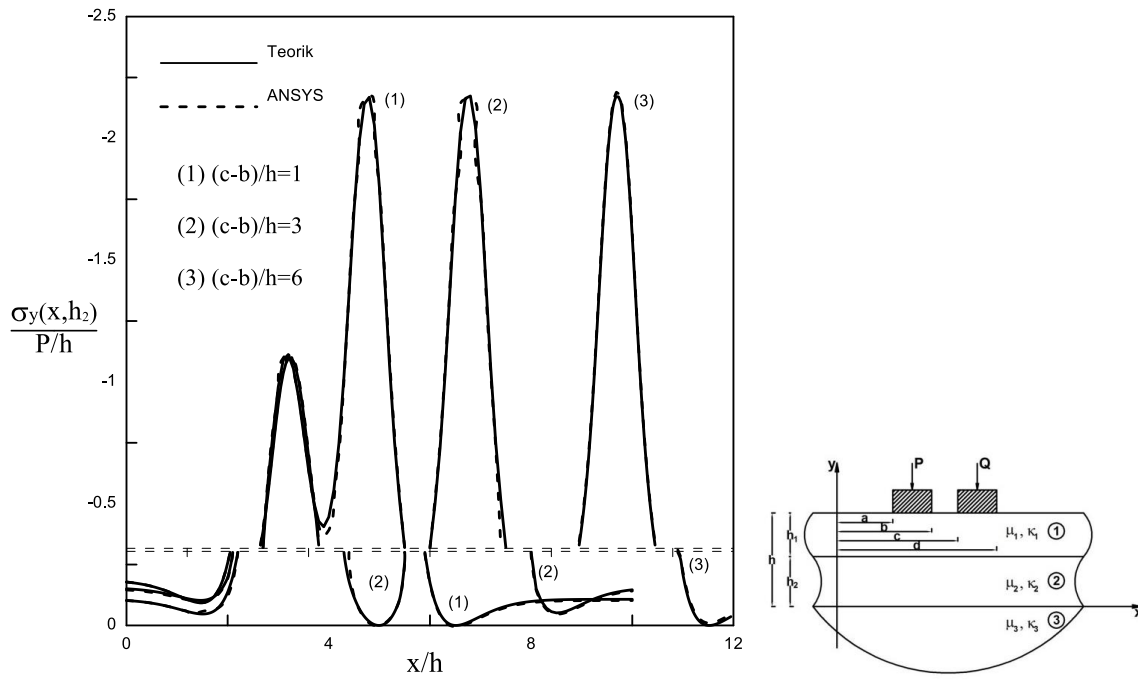


Şekil 81.  $\tau_{xy}(x, y)/(P/h)$  boyutsuz kayma gerilmesinin ekseninde, blok altında ve bloklar arasındaki değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (c-b)/h=1, Q=P$ )

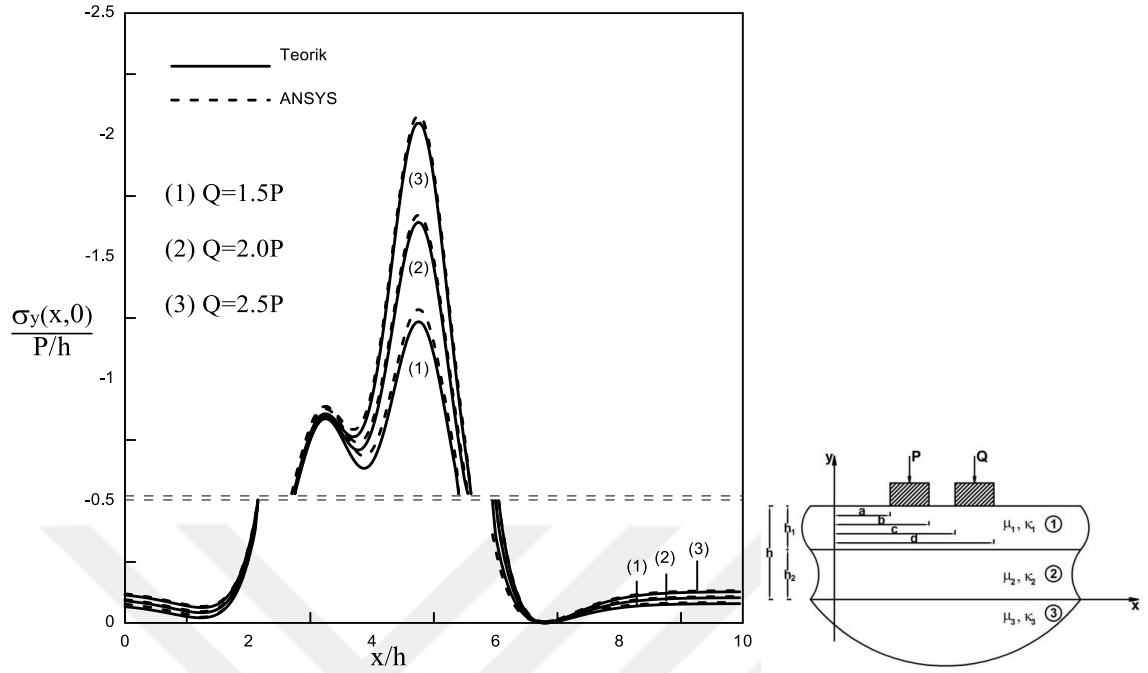
Yük ve malzeme oranları değişimi gibi çeşitli boyutsuz büyüklükler için tabakalar arasında ve alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında  $x$  eksenini boyunca meydana gelen  $\sigma_y(x, 0), \sigma_y(x, h_2)$  boyutsuz normal gerilme değişimlerinin, sonlu elamanlar yönteminden ve teorik çalışmalardan elde edilen sonuçları birlikte grafikler halinde aşağıda verilmektedir (Şekil 82-87).



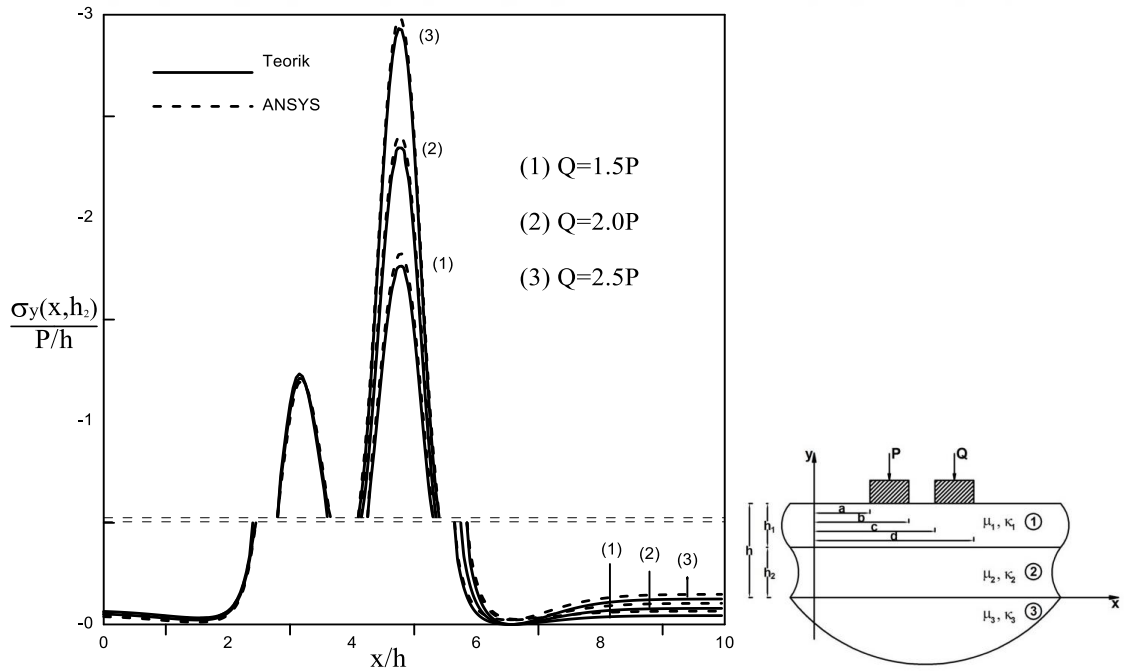
Şekil 82.  $\sigma_y(x,0)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımının bloklar arası mesafe ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, Q=2P$ )



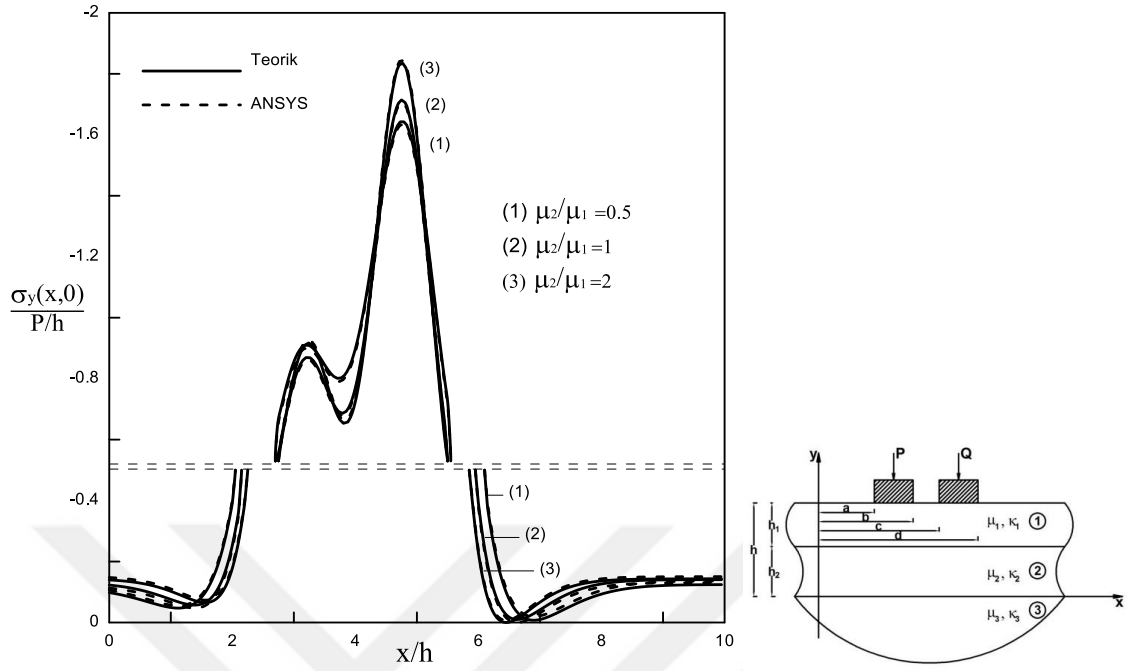
Şekil 83.  $\sigma_y(x,h_2)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımının bloklar arası mesafe ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_2/\mu_1=1, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, Q=2P$ )



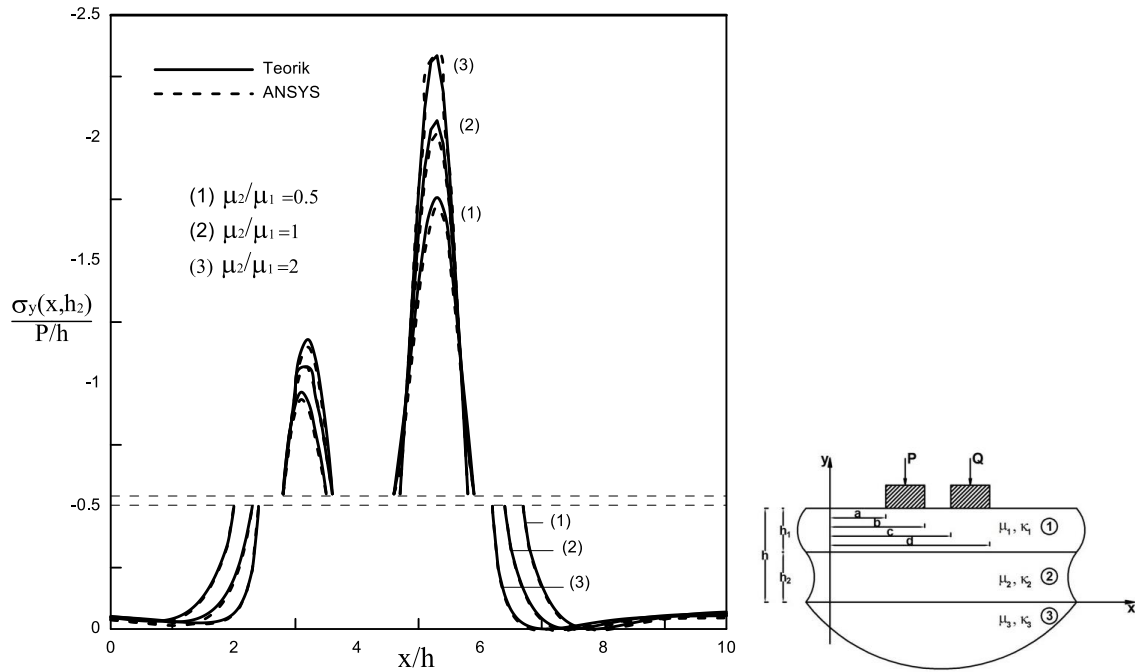
Şekil 84.  $\sigma_y(x,0)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımının yük ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ( $\kappa_1=2$ ,  $\kappa_2=2$ ,  $\kappa_3=2$ ,  $\mu_2/\mu_1=2$ ,  $\mu_3/\mu_2=0.5$ ,  $a/h=3$ ,  $(b-a)/h=0.5$ ,  $(d-c)/h=0.5$ ,  $(c-b)/h=1$ )



Şekil 85.  $\sigma_y(x,h_2)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımının yük ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ( $\kappa_1=2$ ,  $\kappa_2=2$ ,  $\kappa_3=2$ ,  $\mu_2/\mu_1=2$ ,  $\mu_3/\mu_2=0.5$ ,  $a/h=3$ ,  $(b-a)/h=0.5$ ,  $(d-c)/h=0.5$ ,  $(c-b)/h=1$ )



Şekil 86.  $\sigma_y(x,0)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımının tabakaların kayma modülleri oranı ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, (c-b)/h=1, Q=2P$ )



Şekil 87.  $\sigma_y(x,h_2)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımının tabakaların kayma modülleri oranı ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ( $\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \mu_3/\mu_2=1, a/h=3, (b-a)/h=0.5, (d-c)/h=0.5, (c-b)/h=1, Q=2P$ )



Süreksiz temas durumunda alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem ve tabakalar arasında meydana gelen ayrılmanın başlangıç ve bitiş noktaları ile ayrılma bölgelerinin büyüklüğünün, yük oranı ve kayma modülleri oranı ile değişiminin sonlu elemanlar yönteminden ve teorik çalışmalardan elde edilen sonuçları tablolar halinde aşağıda verilmiştir (Tablo 9-11).

Tablo 9. Süreksiz temas durumunda alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem ara yüzeyindeki ayrılmanın başlangıç ve bitiş noktası ile ayrılma bölgesi büyüklüğünün tabakalar arasında ki kayma modülleri oranı ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçlarının karşılaştırılması ( $\kappa_1=2$ ,  $\kappa_2=2$ ,  $\kappa_3=2$ ,  $\mu_3/\mu_2=1$ ,  $a/h=3$ ,  $(b-a)/h=0.5$ ,  $(d-c)/h=0.5$ ,  $(c-b)/h=1$ ,  $Q=2P$ ,  $\lambda=40$ )

$\mu_2/\mu_1$	e/h			f/h			(f-e)/h		
	Analitik	FEM	Hata (%)	Analitik	FEM	Hata (%)	Analitik	FEM	Hata (%)
0.25	7.0113	7.10	1.2	7.6135	7.70	1.36	0.6022	0.60	0.36
0.5	6.5351	6.53	0.08	7.4455	7.45	0.06	0.9104	0.92	1.05
1	6.2594	6.25	0.15	7.2477	7.24	0.10	0.9883	0.99	0.17
2	6.0706	6.10	0,48	7.1812	7.19	0.12	1.1106	1.09	1.85

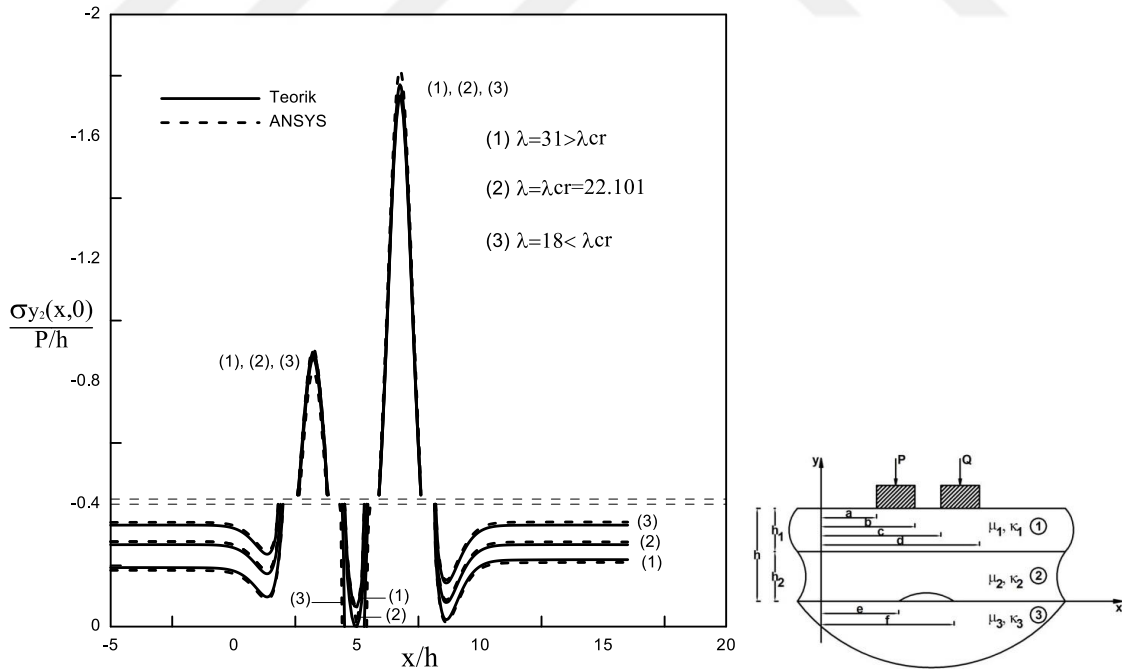
Tablo 10. Süreksiz temas durumunda tabakalar ara yüzeyindeki ayrılmanın başlangıç ve bitiş noktası ile ayrılma bölgesi büyüklüğünün kayma modülleri oranı ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçlarının karşılaştırılması ( $\kappa_1=2$ ,  $\kappa_2=2$ ,  $\kappa_3=2$ ,  $\mu_3/\mu_2=1$ ,  $a/h=3$ ,  $(b-a)/h=0.5$ ,  $(d-c)/h=0.5$ ,  $(c-b)/h=1$ ,  $Q=2P$ ,  $\lambda=50$ )

$\mu_2/\mu_1$	k/h			l/h			(l-k)/h		
	Analitik	FEM	Hata %	Analitik	FEM	Hata %	Analitik	FEM	Hata %
5	5.6660	5.66	0.10	6.2130	6.22	0.11	0.5474	0.56	2.37
10	5.5872	5.58	0.13	6.1415	6.15	0.14	0.5544	0.57	2.81
50	5.5310	5.54	0.16	6.0861	6.10	0.23	0.5551	0.56	0.88

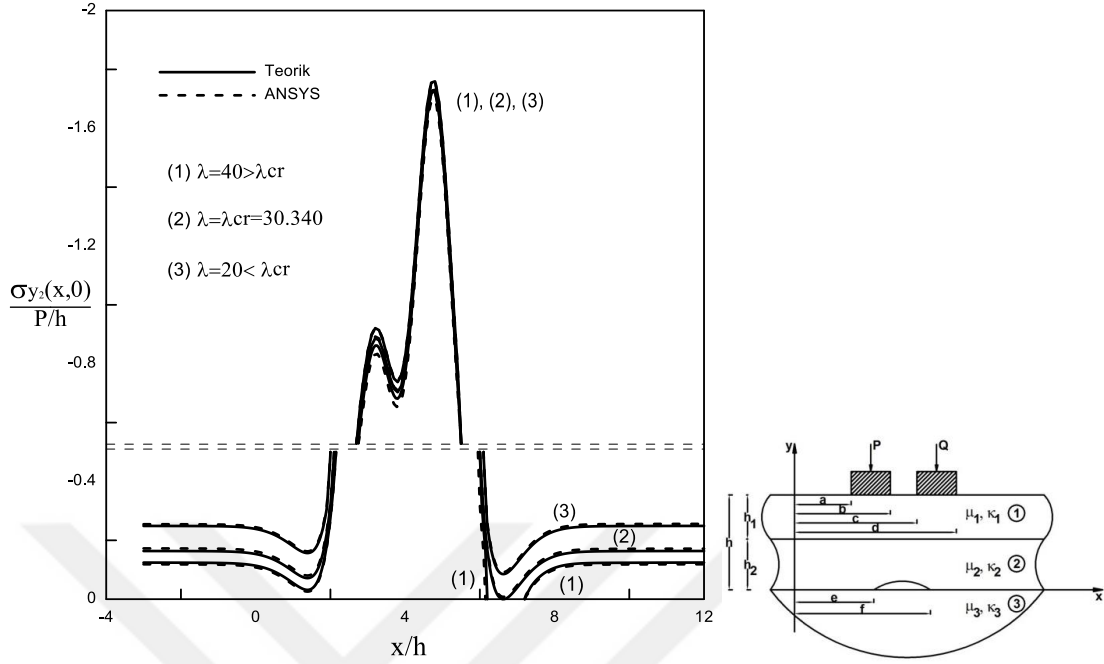
Tablo 11. Süreksiz temas durumunda alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem ara yüzündeki ayrılmanın başlangıç ve bitiş noktası ile ayrılma bölgesi büyüklüğünün yük oranı ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçlarının karşılaştırılması ( $\mu_2/\mu_1=2$ ,  $\mu_3/\mu_2=0.5$ ,  $a/h=3$ ,  $(b-a)/h=0.5$ ,  $(d-c)/h=0.5$ ,  $(c-b)/h=1$ ,  $\lambda=55$ )

Q	e/h			f/h			(f-e)/h		
	Anolitik	FEM	Hata %	Anolitik	FEM	Hata %	Anolitik	FEM	Hata %
1.5P	6.5412	6.55	0.13	7.1355	7.13	0.08	0.5943	0.58	2.4
2P	6.3495	6.36	0.16	7.6220	7.63	0.10	1.2721	1.27	0.15
2.5P	6.2491	6.23	0.30	8.0534	8.00	0.66	1.7509	1.77	1.08

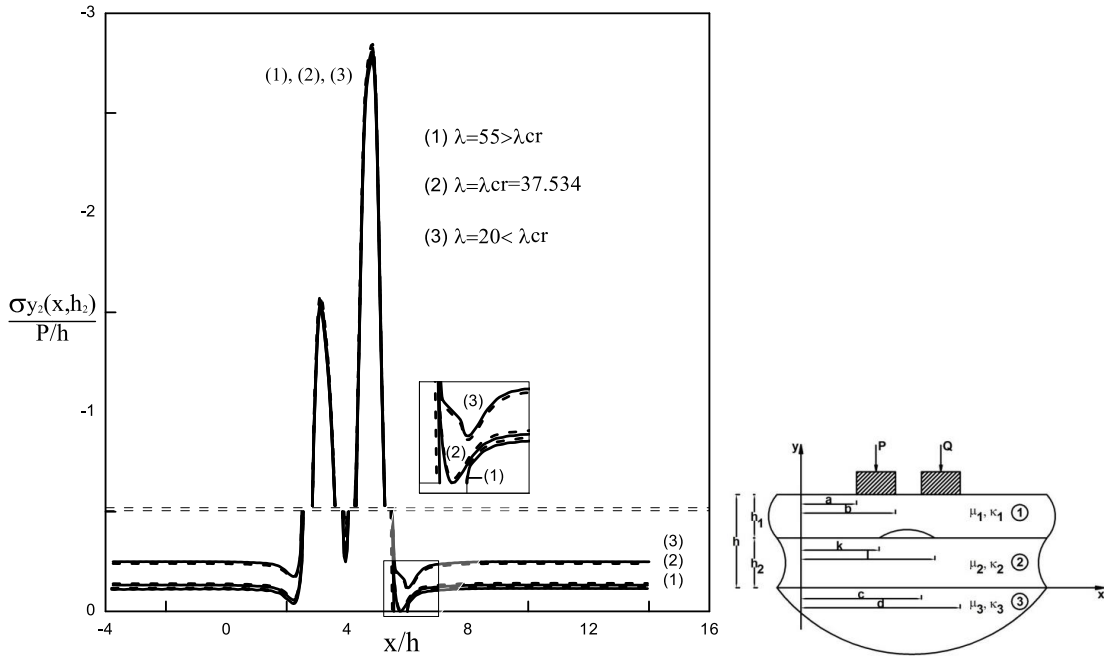
Sürekli temas ( $\lambda < \lambda_{cr}$ ) ve süreksiz temas ( $\lambda > \lambda_{cr}$ ) durumlarında alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem ve tabakalar arasındaki gerilme dağılımlarının, sonlu elemanlar yönteminden ve teorik çalışmalardan elde edilen sonuçları grafikler halinde aşağıda verilmiştir (Şekil 88-90).



Şekil 88. Sürekli temas ( $\lambda < \lambda_{cr}$ ) ve süreksiz temas ( $\lambda > \lambda_{cr}$ ) durumlarında alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki  $\sigma_y(x,0)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımının teorik ve sayısal sonuçları ( $\kappa_1=2$ ,  $\kappa_2=2$ ,  $\kappa_3=2$ ,  $\mu_2/\mu_1=1$ ,  $\mu_3/\mu_2=1$ ,  $a/h=3$ ,  $(b-a)/h=0.5$ ,  $(d-c)/h=0.5$ ,  $(c-b)/h=3$ ,  $Q=2P$ )



Şekil 89. Sürekli temas ( $\lambda < \lambda_{cr}$ ) ve süreksiz temas ( $\lambda > \lambda_{cr}$ ) durumlarında alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki  $\sigma_y(x,0)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımının teorik ve sayısal sonuçları ( $\kappa_1=2$ ,  $\kappa_2=2$ ,  $\kappa_3=2$ ,  $\mu_2/\mu_1=1$ ,  $\mu_3/\mu_2=1$ ,  $a/h=3$ ,  $(b-a)/h=0.5$ ,  $(d-c)/h=0.5$ ,  $(c-b)/h=1$ ,  $Q=2P$ )



Şekil 90. Sürekli temas ( $\lambda < \lambda_{cr}$ ) ve süreksiz temas ( $\lambda > \lambda_{cr}$ ) durumlarında tabakalar arasındaki  $\sigma_y(x,h_2)/(P/h)$  boyutsuz gerilme dağılımının teorik ve sayısal sonuçları ( $\kappa_1=2$ ,  $\kappa_2=2$ ,  $\kappa_3=2$ ,  $\mu_2/\mu_1=1$ ,  $\mu_3/\mu_2=1$ ,  $a/h=3$ ,  $(b-a)/h=0.5$ ,  $(d-c)/h=0.5$ ,  $(c-b)/h=1$ ,  $Q=2P$ )

Sonlu elemanlar yönteminden ve teorik çalışmalardan elde edilen sonuçlar; ilk ayrılma uzaklıkları, temas gerilmeleri, ilk ayrılma yükleri, süreksiz temas durumunda ayrılmanın başlangıç noktası, bitiş noktası ve ayrılma bölgesinin büyüklüğü,  $\lambda$  'nın kritik yükten küçük, eşit veya büyük olması gibi durumlar için karşılaştırılmıştır. Karşılaştırmalar için Şekil 43-Şekil 51'de sunulan ilk ayrılma uzaklıkları, Şekil 15- Şekil 17 'de sunulan temas gerilmeleri, Şekil (44-49)' da sunulan ilk ayrılma yük ve uzaklıkları, Şekil 59- Şekil 61-Şekil 65'te sunulan süreksiz temas durumunda ayrılmanın başlangıç noktası, bitiş noktası, ayrılma bölgesinin büyüklüğü ve son olarak Şekil 62- Şekil 63- Şekil 67' de sunulan  $\lambda$  'nın kritik yükten küçük, eşit veya büyük olması durumu için elde edilen teorik sonuçlar kullanılmıştır.

Sonlu elemanlar yönteminden elde edilen ilk ayrılma uzaklıkları ile teorik çözümlerden elde edilen ilk ayrılma uzaklıkları arasındaki hata oranının en büyük değerinin 0.31 olduğu görülmektedir. Süreksiz temas durumunda çeşitli boyutsuz büyüklüklere bağlı olarak meydana gelen ayrılmaların başlangıç noktası, bitiş noktası ve ayrılma bölgesinin büyüklüğü için sonlu elemanlar yöntemi ve teorik çözümlerden elde edilen sonuçlar karşılaştırıldığında ise en büyük hata oranının 2.81 olduğu görülmektedir.

#### 4.SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada; rijit dikdörtgen iki blok aracılığı ile yüklenmiş ve elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan, elastik sabitleri ve yükseklikleri farklı iki tabakanın sürekli ve süreksiz temas problemi incelenmiştir. Söz konusu problemin incelenmesinde öncelikle sürekli temas durumunda bloklar altındaki bilinmeyen temas gerilmeleri hesaplanmış, buna bağlı olarak  $y$  ekseninde, bloklar arasında ve 1.blok altındaki boyutsuz normal gerilme dağılımları ve boyutsuz kayma gerilmesi dağılımları hesaplanmıştır. Ayrıca çeşitli boyutsuz büyüklükler için  $x$  eksenini boyunca alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında ve tabakalar arasındaki  $\sigma_x$  boyutsuz normal gerilmesinin değişimi incelenmiş, blok genişlikleri, bloklar arası mesafe, kayma modülü oranları, yük oranı gibi çeşitli boyutsuz büyüklükler için alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında ve tabakalar arasındaki ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıkları elde edilmiştir. Yine bu çalışmada alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzleme ait ara yüzeyde ve tabakalar arasında, yükün ilk ayrılma yükünden büyük olması durumunda meydana gelen ayrılmalar ile ayrılma bölgelerindeki kabarmalarda incelenmiştir. Son olarak sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal analiz yapılarak ele alınan problem çözülmüş ve temas gerilmeleri, normal gerilmeler, ilk ayrılma uzaklıkları, ayrılmalar elde edilmiş ve teorik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Bütün bu gerilme ve yer değiştirme değerlerinin irdelenmesinden elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Blok genişliğinin artırılması durumunda yük daha geniş bir alana yayılacağından temas gerilmelerinde azalma meydana gelmektedir. Temas gerilmeleri rijit bloğun kenarlarında sonsuza giderken blok ortasına yaklaştıkça düzgün bir şekilde azalmaktadır. Bloklar arası mesafe değişiminde, bloklar birbirinden uzaklaştırıldığında gerilme değerlerinde azalma gözlemlenmektedir. Belirlenen bir limit değer aşıldığında ise blokların birbirine herhangi bir etkisinin kalmadığı, her bloğun ayrı incelenecek bir problem haline dönüştüğü görülmektedir. Tabakaların ve elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranına bağlı olarak alt tabakanın rijitliği üst tabakaya oranla giderek azaldıkça veya elastik yarı sonsuz düzlemin rijitliği alt tabakaya göre azaldıkça blok kenarlarına yakın bölgelerde gerilme dağılımlarında artış meydana geldiği görülmektedir. Yük oranının artırılması durumunda ise hem blok kenarına yakın bölgelerde hem de blok altında temas gerilmesi değerlerinin arttığı gözlemlenmektedir.

$\sigma_x$  boyutsuz normal gerilmesinin dağılımı 1. blok altında; blok genişliği, bloklar arası mesafe, kayma modülleri oranı ve yük oranı gibi boyutsuz büyüklükler için incelenmiştir. Ayrıca kayma modülleri oranı değişimi için bloklar arasında ve y eksenini boyunca da inceleme yapılmıştır. 1. blok altında  $\sigma_x$  boyutsuz gerilme dağılımı incelendiğinde her iki tabakada da ayrı ayrı çekme ve basınç bölgeleri meydana geldiği görülmektedir. Üst bölgelerde basınç alt bölgelerde ise çekme gerilmeleri oluşmaktadır. Elastik yarı sonsuz düzlemde ise  $\sigma_x$  boyutsuz gerilmesi en büyük değerini alt tabakaya temas yüzeyinde almakta ve derine inildikçe her yerde basınç gerilmesi olacak şekilde azalarak sıfır değerine yaklaşmaktadır. Blok genişlikleri küçültüldüğünde  $\sigma_x$  normal gerilmesi değerinin her iki tabakada ve elastik yarı sonsuz düzlemde arttığı görülmektedir. Bloklar arasındaki mesafe arttıkça  $\sigma_x$  normal gerilmesinin değeri her iki tabakada da artış göstermektedir. Elastik yarı sonsuz düzlemde ise bu durum tam tersidir bloklar arası mesafe arttığında gerilme değeri azalmaktadır. Mesafe belirli bir değeri aştığında ise bloklar arasındaki etkileşim sonlandığı için  $\sigma_x$  normal gerilmesi değerinde herhangi bir değişiklik olmadığı görülmektedir. Alt tabakanın rijitliği üst tabakaya göre azaldıkça alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemde  $\sigma_x$  boyutsuz normal gerilmeleri azalmakta, üst tabakadaki gerilmeler ise artmaktadır. Elastik yarı sonsuz düzlemde ise rijitlik arttıkça gerilmelerinde arttığı görülmektedir.  $\sigma_x$  normal gerilmesinin tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi bloklar arasında incelendiğinde ise alt tabakanın rijitliği üst tabakaya göre azaldıkça alt tabakada gerilme değerleri azalmakta, üst tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemde ise artmaktadır. 1. blok altındaki durumdan farklı olarak bloklar arasında yapılan incelemede tabakalarda tabakanın alt bölgelerinde basınç gerilmeleri oluşmakta, tabakanın üst kısımlarına doğru çıkıldıkça ise değeri azalarak sıfır olmakta ve işaret değiştirerek çekme gerilmesi şeklinde artmaktadır. Elastik yarı sonsuz düzlemde ise alt tabakaya temas yüzeyinde azalarak sıfıra yaklaşmaktadır. Yine kayma modülleri oranı değişimi y ekseninde incelendiğinde, alt tabakanın rijitliği üst tabakaya göre azaldığında her iki tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemde  $\sigma_x$  normal gerilme değerlerinde artış olduğu görülmektedir.

Yük oranının artırılması durumunda tabakalarda ve elastik yarı sonsuz düzlemde  $\sigma_x$  normal gerilmesi değerleri artmaktadır.

$\sigma_x$  boyutsuz normal gerilmesinin x eksenini boyunca incelenmesi sonucunda, alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında ve tabakalar arasındaki temas yüzeyinde blok altlarında basınç, blokların yanlarında çekme gerilmeleri meydana gelmekte bloklardan yani yüklerden uzaklaştıkça ise gerilmeler sifira gitmektedir. Alt tabakanın rijitliği üst tabakaya oranla arttıkça tabakalar arasındaki  $\sigma_{x_1}(x, h_2)/(P/h)$  ve alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki  $\sigma_{x_2}(x, 0)/(P/h)$  boyutsuz gerilmesinin çekme ve basınç bölgelerinde aldığı maksimum değerler azalmaktadır. Elastik yarı sonsuz düzlemin rijitliği üst tabakaya göre arttıkça hem tabakalar arasındaki  $\sigma_{x_1}(x, h_2)/(P/h)$  boyutsuz gerilmesi hem de alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki  $\sigma_{x_2}(x, 0)/(P/h)$  boyutsuz gerilmesinin çekme ve basınç bölgelerinde aldığı maksimum değerler azalmaktadır. Ayrıca tabakalar arasında basınç bölgelerinde maksimum değerlerin birbirine yakın çıktığı gözlemlenmektedir.

$\sigma_y$  boyutsuz normal gerilmeleri en büyük değeri bloğun temas yüzeyinde almakta ve bloktan uzaklaştıkça azalarak sıfır değerine yaklaşmaktadır. Alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki temas yüzeyinde ve tabakalar arasındaki yüzeyde gerilmeler aynı değeri almakta ve böylelikle problemin tanımında verilen sınır şartları sağlanmış olmaktadır. Blok genişlikleri arttıkça temas yüzeyi genişlediği için  $\sigma_y$  boyutsuz normal gerilme değeri azalmaktadır. Bloklar arasındaki mesafe artırıldıkça gerilme değerinde azalma görülmekte, belirli bir değerden sonra ise  $\sigma_y$  boyutsuz normal gerilmesinde herhangi bir değişim olmamaktadır. Alt tabakanın rijitliğinin üst tabakaya göre artması ve elastik yarı sonsuz düzlemin rijitliğinin alt tabakaya göre artması durumlarında ise  $\sigma_y$  boyutsuz normal gerilmesinde artış gözlenmektedir.  $\sigma_y$  normal gerilmesinin y eksenindeki değişimi incelendiğinde ise her iki tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemde  $\sigma_y$  normal gerilmesi meydana gelmediği ve sıfır değerini aldığı görülmektedir.  $\sigma_y$  boyutsuz normal gerilmesi yük oranı ile doğru orantılı olarak artmaktadır.

Kayma gerilmesi dağılımı y ekseninde; blok genişliği, kayma modülleri oranı ve yük oranı gibi boyutsuz büyüklükler için incelenmiştir. Kayma gerilmeleri  $\tau_{xy}(x, 0)$ ,  $\tau_{xy}(x, h_2)$ ,  $\tau_{xy}(x, h)$  temas yüzeyleri boyunca sıfır olmakta ve problemin tanımında verilen sınır şartlarını sağlamaktadır. Tabakalarda kayma gerilmelerinin maksimum değeri tabakaların orta noktasında veya bu noktaya çok yakın bir yerde olmaktadır. Blok

genişliklerindeki artışa bağlı olarak kayma gerilmeleri değeri her iki tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemde azalmaktadır. Blok genişliğindeki artıştan en fazla üst tabaka etkilenmektedir. Alt tabakanın rijitliği üst tabakaya göre arttıkça üst tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemde kayma gerilmesinin değeri azalmakta alt tabakada ise artmaktadır. 1. blok altında yapılan incelemede alt tabakanın rijitliği üst tabakaya göre arttıkça her iki tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemdeki kayma gerilmesi değerleri azalmaktadır. Elastik yarı sonsuz düzlemde meydana gelen kayma gerilmesi değerleri basınçtan çekmeye doğru kaymaktadır. Bloklar arasında yapılan incelemede ise alt tabakanın rijitliği üst tabakaya göre arttıkça üst tabakada kayma gerilmeleri azalmakta, alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemde ise artmaktadır. Elastik yarı sonsuz düzlemde kayma gerilmeleri çekme bölgesinde oluşmaktadır. Elastik yarı sonsuz düzlem tabakalara oranla rijitleştikçe kayma gerilmeleri her iki tabakada da artmakta, elastik yarı sonsuz düzlemde ise azalmaktadır. Yük oranı arttıkça kayma gerilmesi değerleri hem tabakalar arasında hem de alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında artmaktadır, bu artış üst tabakada daha belirgindir. Birinci bloğun eksene olan uzaklığı arttıkça eksende meydana gelen kayma gerilmesi değerleri azalmaktadır.

Çeşitli boyutsuz büyüklükler için alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında ve tabakalar arasında ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıkları belirlenmiştir. Tabaka yükseklikleri ve malzeme özelliklerine bağlı olarak ilk ayrılmalar tabakalar arasında veya alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında gerçekleşmektedir. Blok genişliklerindeki artış ilk ayrılma yük ve ilk ayrılma uzaklığında artış meydana getirmektedir. Blok genişliğinin artması durumunda her iki temas yüzeyinde de ayrılma daha zor gerçekleşmektedir. Bloklar arasındaki mesafe değişimi incelendiğinde her iki ayrılma bölgesinde de  $(c-b)/h$  'ın küçük değerleri için  $\lambda$  'ya bağlı öncelikle iki ayrılma bölgesi meydana gelme ihtimali ortaya çıkmakta ve  $Q \geq P$  olmasından dolayı ilk ayrılmanın ikinci bloğun sağ tarafında meydana geldiği görülmektedir. Bloklar arasındaki uzaklık artırıldıkça bloklar arasında üçüncü bir ayrılma bölgesi meydana gelmekte ve ilk ayrılmanın burada oluştuğu görülmektedir. Uzaklık daha da artırıldığında yine  $\lambda$  'ya bağlı 4 ayrılma bölgesi meydana gelme ihtimali oluşmakta ve tabakalar arasında ilk ayrılmanın ikinci bloğun yakınlarında gerçekleştiği, alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında ise ilk ayrılmanın yine bloklar arasında gerçekleştiği görülmektedir.  $(c-b)/h$ 'ın belirli bir değerinden sonra ise bloklar arasındaki etkileşim kaybolmaktadır. Alt tabaka üst tabakaya



oranla rijitleştikçe tabakalar arasında ve alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında ilk ayrılma yük ve ilk ayrılma uzaklıkları azalmakta ayrılmalar daha kolay gerçekleşmektedir. Aynı şekilde elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülü oranı alt tabakaninkine göre artırıldığında tabakalar arasında ve alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıkları azalmaktadır. Tabaka yüksekliklerindeki değişime bağlı olarak alt tabaka yüksekliğinin üst tabaya eşit veya daha küçük seçildiği durumlarda ilk ayrılmalar çoğunlukla alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında gerçekleşmektedir. Ayrıca üst tabakadan alt tabakaya inildikçe rijitliğin azalması durumunda tabaklar arasında ve alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yüklerinin diğer durumlara göre daha büyük olduğu görülmektedir. Bu da ayrılmaların bu durumda daha zor gerçekleşeceği anlamına gelmektedir. Yük oranının artırılması durumunda her iki temas yüzeyinde de ilk ayrılma yükleri azalmakta, ilk ayrılma uzaklıklarında ise çok küçük değişiklikler gözlemlenmektedir. Yük oranı arttıkça ayrılmalar daha kolay gerçekleşmektedir.

Yükün ( $\lambda$ ) ilk ayrılma yükünden ( $\lambda_{cr}$ ) büyük olması durumunda alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem ve tabakalara ait ara yüzeylerde ayrılmalar meydana gelmektedir. Bu durumda her iki temas yüzeyinde de ( $\sigma_y(x, h_2)/P/h, \sigma_y(x, 0)/P/h$ ) gerilme dağılımlarını veren grafikler incelendiğinde sürekli ve süreksiz temas bölgeleri görülmektedir. Gerilme değerleri birinci blok kenarından itibaren artmakta yük altında değer iyice büyümekte, bloklar arasında gerilme değerleri tekrar azalmakta daha sonra yeniden artarak ikinci blok altında en büyük değerini almakta sonra azalarak tabakalar arasında ( $e/h, f/h$ ) ve alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında ise ( $k/h, l/h$ ) ayrılma bölgeleri boyunca sıfır olmaktadır. Her iki temas yüzeyi içinde ayrılmanın bittiği  $f/h$  ve  $l/h$  değerlerinden sonra ise gerilme değeri artarak  $\lambda'$  ya eşitlenmektedir. Blok genişliği arttıkça her iki ayrılma yüzeyinde de ayrılma bölgesi küçülmekte ve bu bölgede meydana gelen kabarmalar azalmaktadır. Bloklar arasındaki mesafe değişiminde yine tabakalar arasında ve alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında benzer durumlar gözlemlenmektedir. Kayma modülleri oranı artırıldığında yani alt tabakanın rijitliği üst tabakaya göre arttığında her iki temas yüzeyinde de ayrılmanın daha kolay meydana geldiği, ayrılma bölgelerinin büyüdüğü ve daha büyük kabarma değerleri elde edildiği görülmektedir. Yük değerindeki artış ise hem tabakalar arasında hem de alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında ayrılmayı kolaylaştırmakta ayrılma bölgesini büyütme ve bu bölgede meydana gelen kabarmaları artırmaktadır. Yük

artırıldığında ayrılmanın bitiş noktası değerleri ( $f/h$ ,  $l/h$ ) büyürken, ayrılmanın başlangıç noktası değerleri ( $e/h$ ,  $k/h$ ) azalarak sabit bir değere yaklaşmaktadır.

Sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal analizden elde edilen temas gerilmeleri, normal gerilmeler, ilk ayrılma uzaklıkları ve ayrılma bölgeleri değerlerinin teorik sonuçlarla oldukça uyumlu olduğu görülmektedir. Sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen normal gerilmeler ve temas gerilmeleri problemin tanımında verilen sınır şartlarını sağlamaktadır. Sonlu elemanlar yöntemi ile yapılan çözümden elde edilen ilk ayrılma uzaklıkları ile teorik çözümden elde edilen ilk ayrılma uzaklıkları arasındaki hata oranının en büyük değerinin %0.31 olduğu görülmektedir. Benzer şekilde süreksiz temasta meydana gelen ayrılmalarda ayrılmaların başlangıç ve bitiş noktaları arasındaki uzaklığın sonlu elemanlar yöntemi ile yapılan çözüm ve teorik sonuçları karşılaştırıldığında hata oranının en büyük değeri %2.81 olduğu görülmektedir.

Öneriler:

Söz konusu problem aşağıdaki durumlar içinde incelenebilir.

- Problem her iki ara yüzeyde aynı anda ayrılma olması durumu için incelenebilir.
- Problem sınır elemanlar ve başka sonlu elemanlar yöntemine dayanan paket programları ile çözülebilir.
- Tabakaların fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden ve anizotropik olması halinde çözüm yapılabilir.
- Problemden tüm yüzeylerde sürtünme olması durumu için çözüm yapılabilir.

## 5.KAYNAKLAR

- Adams, G. G. ve Bogy, D. B., 1977. The Plane Symmetric Contact Problem for Dissimilar Elastic Semi-Infinite Strips of Different Widths, Journal of Applied Mechanics, 604-610.
- Adıbelli, H., Çömez, İ. ve Erdöl, R., 2009. Rijit Panç İle Bastırılmış Elastik Yarım Düzleme Oturmuş Ağırksız Çift Şeritte Değme Problemi, XVI. Ulusal Mekanik Kongresi, Erciyes Üniversitesi, Kayseri, Bildiriler Kitabı Cilt 1, 71-82.
- Aksoğan, O., Akavcı, S. ve Becker, A., 1996. A Comparative Study of the Contact Problem of an Elastic Layer Supported by two Elastic Quarter Planes, Journal of Faculty of Engineering and Architecture of Çukurova Üniversitesi, 11, 1, 25-31.
- Bakırtaş, I., 1980. The Problem of a Rigid Punch on a Non-Homogeneous Elastic Half Space, International Journal of Engineering Science, 18, 597-610.
- Boduroğlu, H. ve Delale, F., 1980. Elastik bir Tabakanın Sürtünmeli Değme Problemi, DOĞA:MAG/ÇAG, 17-26.
- Bijarnhed, H. L., 1991. Rigid Punch on Stressed Orthotropic Half-Plane with Partial Slip, Journal of Applied Mechanics, 58, 128-133.
- Birinci, A. ve Erdöl, R., 1995. Elastik Mesnete Oturan Çift Şerit Problemi, III. Balıkesir Mühendislik-Mimarlık Sempozyumu, Balıkesir, Bildiriler Kitabı, 11-19.
- Birinci, A. ve Erdöl, R., 1997. Üzerinde Rijit Dikdörtgen Bir Blok Bulunan ve Basit Mesnetlere Oturan İki Elastik Tabakanın Sürekli Temas Problemi, X. Ulusal Mekanik Kongresi, İstanbul, Bildiriler Kitabı, 151-164.
- Birinci, A., Kahya, V. ve Erdöl, R., 1997. Elastik Mesnete Oturan Bileşik Tabakalarda Sürekli Değme Problemi, X. Ulusal Mekanik Kongresi, İstanbul, Bildiriler Kitabı, 165-173.
- Birinci, A., Özşahin, T. Ş. ve Erdöl, R., 1999. Rijit Dikdörtgen Bir Blok Aracılığı ile Yüklenen ve Basit Mesnetlere Oturan Bileşik Tabakada Süreksiz Temas Problemi, XI. Ulusal Mekanik Kongresi, Eylül, Bolu, Bildiriler Kitabı: 231.
- Birinci, A. ve Erdöl, R., 1999. Frictionless Contact Between a Rigid Stamp and an Elastic Layered Composite Resting on Simple Supports, Mathematical and Computational Applications, 4, 3, 261-272.
- Birinci, A. ve Erdöl, R., 2001. Continuous and Discontinuous Contact Problem for a Layered Composite Resting on Simple Supports, Structure Engineering Mechanics, 12, 17-34.
- Birinci, A., Çakıroğlu, M. ve Erdöl, R., 2002. Two Strips Problem Resting on an Elastic Foundation, Mathematical & Computational Applications, 7, 275-286.
- Birinci, A., Yaylacı, M. ve Öner, E., 2015. Winkler Zemine Oturan Elastik İki Tabaka İçin Sürekli Temas Probleminin Sonlu Elemanlar Yöntemi Kullanılarak Çözümü, XIX. Ulusal Mekanik Kongresi, Ağustos, Trabzon, Bildiriler Kitabı,

- Bussetta, P., Marceau, D. ve Ponthot, J.P., 2012. The Adapted Augmented Lagrangian Method: A New Method for the Resolution of the Mechanical Frictional Contact Problem, Comput. Mechanics, 49, 259-275.
- Chan, S.K. ve Tuba, I.S., 1971. A Finite Element Method for Contact Problems of Solid Bodies— Part I. Theory and Validation, International Journal of Mechanical Sciences, 13, 615-625.
- Chen, W. T. ve Engel, P. A., 1972. Impact and Contact Stress Analysis in Multilayered Media, International Journal of Solids and Structure, 8, 1257-1281.
- Civelek, M. B. ve Erdoğan, F., 1974. The Axisymmetric Double Contact Problem for a Frictionless Elastic Layer, International Journal of Solids and Structures, 10, 939-659.
- Çakıroğlu, A. O., 1979. Elastik Yarım Düzleme Oturan Plaklarda Temas Problemi, Doçentlik Tezi, K.T.Ü., İnşaat Mühendisliği Bölümü, Trabzon.
- Çakıroğlu, F. L., 1984. Bileşik Çubukların Eğilme Problemi, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Çakıroğlu, F. L., ve Erdöl, R., 1987. Bileşik Çubukların Elastisite Teorisine Göre Çözümü, A.Ü. Isparta Müh. Mim. Fak. Dergisi, 53-60.
- Çakıroğlu, F. L. ve Erdöl, R., 1990. Elastik Zemine Oturan Bileşik Şeritte Sürekli Değme Problemi, 6. Ulusal Mekanik Kongresi, Bursa, Bildiriler Kitabı, Cilt I, 234-248.
- Çakıroğlu, A. O. ve Çakıroğlu, F. L., 1991. Continuous and Discontinuous Contact Problems for Strips on an Elastic Semi-Infinite Plane, International Journal of Engineering Science, 29, 1, 99-111.
- Çakıroğlu F. L., Çakıroğlu, M. ve Erdöl, R., 2001. Contact Problems for Two Elastic Layers Resting on Elastic Half-Plane, Journal of Engineering Mechanics, 127, 2, 113-118.
- Çepni, T., Birinci, A. ve Çakıroğlu, A. O., 1996. Belirli Noktalarından Tutturulmuş Bileşik Çubukların Elastisite Teorisine Göre Çözümü, II. Ulusal Hesaplamalı Mekanik Konferansı, Trabzon, Eylül, Bildiriler Kitabı, 54-64.
- Çömez, I., Birinci, A., ve Erdöl, R., 2004. Double Receding Contact Problem for a Rigid Stamp and Two Elastic Layers , European J. Mech. A/ Solids, 23, 301-309.
- Çömez, İ., 2009. Rijit Dairesel Bir Panç ile Bastırılan Elastik Tabaka ve Yarım Düzlemin Sürtünmeli Değme Problemi, Doktora Tezi, K.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Çömez, İ., 2010. Frictional Contact Problem For a Rigid Cylindrical Stamp and an Elastic Layer Resting On a Half Plane, International Journal of Solids and Structures, 47, 1090-1097.
- Dag, S., 2001. Crack and Contact Problems in Graded Materials, Doktora Tezi, Lehigh University.
- Dempsey, J. P., Zhao, Z. G., Minnetyan, L. ve Li, H., 1990. Plane Contact of an Elastic Layer Supported by a Winkler Foundation, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, 57, 974-980.

- Dempsey, J. P., Zhao, Z. G. ve Li, H., 1991. Axisymmetric Indentation of an Elastic Layer Supported by a Winkler Foundation, International Journal of Solids and Structures, 27, 1, 73-87.
- Dhaliwal, R. S., 1970. Punch Problem for an Elastic Layer Overlying an Elastic Foundation, International Journal of Engineering Science, 8 , 273-288.
- Desai, C. S. ve Abel, J. F., 1972. Introduction to the Finite Element Method. Van Nostrand Reinhold Company, 477, New York.
- El- Borgi, S., Abdelmoula, R. ve Keer, L., 2006. A Receding Contact Between a Functionally Graded Layer and a Homogeneous Substrate, International Journal of Solids and Structures, 43, 3-4, 658-674.
- Erdelyi, A., Magnus, W., Oberhettinger F., ve Tricomi, F. G., 1954. Tables of Integral Transforms, vol 1, MC Graw-Hill, Inc, New York.
- Erdoğan, F. ve Gupta, G. D., 1972. On the Numerical Solution of Singular Integral Equations, Quarterly Journal of Applied Mathematics, 29, 525-534.
- Fabrikant, V. I., ve Sankar, T. S., 1984. On Contact Problems in an Inhomogeneous Half-Space, International Journal of Solids and Structures, 20, 2, 159-166.
- Fabrikant, V. I. ve Sankar, T. S., 1988. Singularities at Angular Points in Elastic Contact Problems, Communications in Applied Numerical Methods, 4, 2, 173-178.
- Franke, D. ve Düster, A., Nübel, V. ve Rank, E., 2010. A Comparison Of The H-, P-, Hp- and Rp Version Of The FEM For The Solution of the 2D Hertzian Contact Problem, Comput. Mech., 45, 513-522.
- Galin, L. A., 1961. Contact Problems in the Theory of Elasticity, North Carolina State Collage Articles on the Application Series, Raleigh, N. C..
- Gao, H., Chiu, C. ve Lee, J., 1992. Elastic Contact Versus Indentation Modeling of Multi-Layered Materials, International Journal of Solids and Structures, 29, 20, 2471-2492.
- Garrido, J. A. ve Lorenza, A., 1998. Receding Contact Problem Involving Large Displacement Using the BEM, Engineering Analysis with Boundary Elements, 21, 295-303.
- Geçit, M., R., 1980. Tensionless Contact without Friction between an Elastic Layer and an Elastic Foundation, International Journal of Solids and Structures, 16, 387-396.
- Geçit, M., R., 1981. Axisymmetric Contact Problem for an Elastic Layer and an Elastic Foundation, International Journal of Solids and Structures, 19, 747-755.
- Geçit, M.R., 1986. Axisymmetric Contact Problem for a Semi-Infinite Cylinder and a Half Space, International Journal of Engineering Science, 24, 8, 1245-1256.
- Gladwell, G. M. L., 1976. On some Unbounded Contact Problems in Plane Elasticity Theory, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, 263-267.
- Hasebe, N. ve Qian, J., 1999. Fundamental Solution of a Circular Rigid Punch Problem for a Half Plane, Engineering Analysis with Boundary Elements, 23, 10, 841-846.

- Hertz, H., 1895. Gessammelte Werke von Heinrich Hertz, Leipzig.
- Hung, D.N. ve Saxce, G. D., 1980. Frictionless Contact of Elastic Bodies By Finite Element Method Mathematical Programming Technique, Computers and Structures, 11, 55-67.
- İnan, M., 1969. Düzlemde Elastisite Teorisi, İTÜ Yayınları , İstanbul.
- Jackson, R.L. ve Green, I., 2005. A Finite Element Study of Elasto-Plastic Hemispherical Contact Against a Rigid Flat, ASME Journal of Applied Mechanics, 127, 343-354.
- Johnson, K. L., 1985. Contact Mechanics, First Edition, Cambridge University Press, Cambridge.
- Jaffar, M. J., 1991. Elastic Strips in Sliding Contact, Journal of Strain Analysis for Engineering Desing, 26, 3, 193-199.
- Jaffar, M. J., 1993. Determination of Surface Deformation of Bonded Elastic Layer Indented by a Rigid Cylinder Using the Chebyshev Method, Wear, 170, 291-294.
- Kahya, V., 2003. İki Tabakalı Elastik Ortamda Sürekli ve Süreksiz Temas Problemlerinin İncelenmesi, Doktora Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Kahya vd., 2007. A receding Contact Problems for an Anisotropic Elastic Medium Consisting of a Layer and a Half Plane, International Journal of Solids and Structure, 44, 5695-5710.
- Kanber, B., 1997. Finite Element Analysis of Contact Problems Using Transition Elements, Yüksek Lisans Tezi, Gaziantep Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Gaziantep.
- Keer, L. M. ve Silva , M. A. G., 1972. Two Mixed Problems for a Semi-Infinite Layer, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, 39, 94 , 1121-1124.
- Keer, L. M., Dundurs, J. ve Tsai, K. C., 1972. Problems Involving a Receding Contact Between a Layer and a Half Space, Journal of Applied Mechanics, December, 1115-1120.
- King, R. B., 1987. Elastic Analysis of some Punch Problems for a Layered Medium, International Journal of Solids and Structures, 23, 12, 1657-1664.
- Klarbring, A., 1986. A Mathematical Programming Approach to Three-Dimensional Contact Problems with Friction, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 58, 2, 175-200.
- Klarbring, A., Mikelic, A. ve Shillor, M., 1991. The Rigid Punch Problem with Friction, International Journal of Engineering Science, 29, 6, 751-768.
- Lan, Q., Graham, G. A. C. ve Selvadurai, A. P. S., 1996. Certain Two –Punch Problems for an Elastic Layer, International Journal of Solids and Structures, 33, 19, 2759-2774.
- Loboda, V. V., 1987. Plane Solution for Elastic Contact Problem of a Strip and Semi- Infinite Strip, Mechanics of Solids, 22, 1, 62-71.
- Ma, L. F. ve Korsunsky, A. M., 2004. Fundamental Formulation for Frictional Contact Problems of Coated Systems, International Journal of Solids and Structures, 41, 11-12, 2837-2854.

- Nowell, D. ve Hills, D. A., 1988. Contact Problems Incorporating Elastic Layers, International Journal of Solids and Structures, 24, 1, 105-115.
- Öner, E., 2011. Rijit Dairesel Bir Panç Aracılığı ile Yüklenmiş ve Elastik Yarı Sonsuz Düzleme Oturan İki Elastik Tabakanın Sürekli Temas Problemi, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Özşahin, T. Ş., 2000. Rijit İki Blok Üzerine Oturan Bileşik Tabakada Sürekli ve Süreksiz Temas Problemi, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Özşahin, T. Ş., Kahya, V. ve Çakıroğlu, A. O., 2007. Contact Problem For an Elastic Layered Composite Resting On Rigid Flat Supports, International Journal of Computational and Mathematical Sciences, 1, 2, 154-159.
- Pu, S. L., Hussain, M. A., 1970. Note on the Unbounded Contact Between Plates and an Elastic Half Space, ASME Journal of Applied Mechanics, 37, 859-861.
- Ratwani, M. ve Erdoğan, F., 1973. On the Plane Contact Problem for a Frictionless Elastic Layer, International Journal of Solids and Structures, 9, 921-936.
- Pindera, M. J. ve Lane, M. S., 1993. Frictionless Contact of Layered Half-Planes, Part I: Analysis, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, 60, 633-639.
- Pindera, M. J. ve Lane, M. S., 1993. Frictionless Contact of Layered Half -Planes, Part II: Analysis, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, 60, 640-645.
- Potts, D. ve Zdravkovic, L., 1999. Finite Element Analysis in Geotechnical Engineering: Volume I- Theory. Telford Publishing, 500p, London.
- Roncevic, B. ve Siminiati, D., 2010. Two Dimensional Receding Contact Problem Analysis with NX-NASTRAN, Advanced Engineering, 4, 1, 1846-5900.
- Schmueser, D., Comninou, M. ve Dundurs, J., 1980. Separation and Slip Between a Layer and a Substrate Caused by a Tensile Load, International Journal of Engineering Science, 18, 131-137.
- Selçuk, L., 2009. Zemin Sıvılaşmasına Karşı Optimum Taş Kolon Tasarımının Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Modellenmesi, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Sezer, S., 2005. An Evaluation of ANSYS Contact Elements, Master of Science in Mechanical Engineering, Louisiana State University.
- Shield, T. W. ve Bogy, D. B., 1989. Some Axisymmetric Problems for Layered Elastic Media: Part I- Multi Region Contact Solutions for Simply- Connected Indenters, Journal of Applied Mechanics, 56, 798-806.
- Shibuya, T., Koizumi, T. ve Nakahara, I., 1974. An Elastic Contact Problem for a Half Space Indented by a Flat Annular Rigid Stamp, International Journal of Engineering Science, 12, 759-771.
- Sneddon, I. N., 1951. Fourier Transforms, Mc Graw-Hill, New York.
- Sneddon, I. N., 1974. The Use of Integral Transforms, TMH Edition, New York.

- Timoshenko, S. ve Goodier, J. N., 1969. Elastisite Teorisi, Ç. Kayan, İ. ve Şuhubi, E., Arı Kitabevi, İstanbul.
- Ufliand, I. S., 1965. Survey of Articles on the Applications of Integral Transforms in the Theory of Elasticity, North Carolina State Collage Translations Series, Raleigh, N. C..
- Weitsman, Y., 1969. On The Unbonded Contact Between Plates and an Elastic Half Space, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 36, 198-202.
- Yaylacı, M., 2013. İki Elastik Çeyrek Düzleme Oturan İki Elastik Tabakanın Temas Problemi, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Yan, J., Li ve X., 2015. Double Receding Contact Plane Problem Between a Functionally Graded Layer and a Elastic Layer, *European Journal of Mechanics A/Solids*, 53, 143-150.
- Zienkiewicz, O. C. ve Taylor, R. L., 2000. The Finite Element Method, Volume:1, Butterworth Heinemann inc,689p, London.
- Karabulut, P., M., 2016. Yarım Düzlem Üzerine Oturan Elastik Tabakanın Sürtünmesiz Temas Problemi, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.



## ÖZGEÇMİŞ

1982 yılında Sivas'ta doğdu. İlköğretim ve lise öğrenimini Sivas'ta tamamladı. 2000 yılında Cumhuriyet Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü'nde lisans öğrenimine başladı. 2004 yılında lisans öğrenimini tamamlayarak, 2005 yılında Cumhuriyet Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimine başladı. 2008 yılında yüksek lisans öğrenimini tamamlayarak, 2009 yılında K.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim dalında doktora öğrenimine başladı. Ocak 2006'da Cumhuriyet Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi kadrosuna Araştırma Görevlisi olarak atandı. Halen bu görevine devam etmektedir.