

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**İKİ ELASTİK ÇEYREK DÜZLEME OTURAN
İKİ ELASTİK TABAKANIN TEMAS PROBLEMİ**

DOKTORA TEZİ

İnş. Yük. Müh. Murat YAYLACI

**EYLÜL 2013
TRABZON**

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

İKİ ELASTİK ÇEYREK DÜZLEME OTURAN
İKİ ELASTİK TABAKANIN TEMAS PROBLEMİ

İnş. Yük. Müh. Murat YAYLACI

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
" DOKTOR (İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 27.06.2013
Tezin Savunma Tarihi : 12.09.2013

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ

Trabzon 2013

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalında
Murat YAYLACI tarafından hazırlanan

İKİ ELASTİK ÇEYREK DÜZLEME OTURAN
İKİ ELASTİK TABAKANIN TEMAS PROBLEMİ

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 16/07/2013 gün ve 1514 sayılı
kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda

DOKTORA TEZİ
olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Mehmet ÜLKER

Üye : Prof. Dr. Ragip ERDÖL

Üye : Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ

Üye : Prof. Dr. Hasan SOFUOĞLU

Üye : Doç. Dr. Talat Şükrü ÖZŞAHİN

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışma Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Doktora tezi olarak hazırlanmıştır.

“ İki Elastik Çeyrek Düzleme Oturan İki Elastik Tabakanın Temas Problemi” isimli tez çalışmasını bana öneren ve her aşamasında bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım, öğrencisi olmaktan ve kendisi ile çalışmaktan onur duyduğum danışman Hocam Sayın Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ'ye minnet ve şükranlarımı sunmayı zevkli bir görev sayarım.

Öğrenim hayatım boyunca bana emeği geçen tüm hocalarımı saygıyla anar, kendilerine minnettar olduğumu belirtmek isterim.

Tez çalışmam boyunca bilgi ve birikimlerinden faydalandığım Sayın Prof. Dr. Ragip ERDÖL'e, Sayın Prof. Dr. Hasan SOFUOĞLU'na, Sayın Prof. Dr. A. Osman ÇAKIROĞLU'na, Sayın Prof. Dr. Ümit UZMAN'a ve Sayın Yrd. Doç. Dr. F. Lütfü ÇAKIROĞLU'na teşekkür ederim. Tez savunma sınavı jüri üyeliğini kabul eden Sayın Prof. Dr. Mehmet ÜLKER'e teşekkür ederim.

Çalışmalarım sırasında tezim ile ilgili birçok konuda yardım ve değerli fikirlerini esirgemeyen Sayın Doç. Dr. T. Şükrü ÖZŞAHİN'e, Sayın Yrd. Doç. Dr. Volkan KAHYA'ya, Sayın Yrd. Doç. Dr. Hasan GEDİKLİ'ye, Sayın Yrd. Doç. Dr. M. Emre KARTAL'a ve Sayın Yrd. Doç. Dr. İsa ÇÖMEZ'e ayrıca teşekkür etmek isterim.

Çalışmalarım boyunca yakın ilgi ve desteğini gördüğüm değerli bölüm başkanım Sayın Prof. Dr. Ercan KÖSE'ye ve şahsımdan yardımlarını esirgemeyen Muhammet YAYLACI'ya teşekkürlerimi sunarım.

Öğrenim hayatım süresince beni sabırla destekleyen, başta annem Zinnet YAYLACI ve babam Hasan YAYLACI olmak üzere ailemin tüm fertlerine ve Ecren UZUN'a müteşekkir olduğumu belirtir, çalışmanın ülkemize yararlı olmasını içtenlikle dilerim.

Murat YAYLACI
Trabzon 2013

TEZ BEYANNAMESİ

Doktora Tezi olarak sunduğum “İki Elastik eyrek Düzleme Oturan İki Elastik Tabakanın Temas Problemi” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ'nin sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 27/06/2013

Murat YAYLACI

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	III
TEZ BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET	VII
SUMMARY	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ	IX
TABLolar DİZİNİ.....	XIII
SEMBOLLER DİZİNİ	XIV
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Literatür Araştırması	2
1.2.1. Yarım Düzleme Oturan Tabakalarla İlgili Çalışmalar	2
1.2.2. Winkler Temeli, Rijit Temel ve Rijit Mesnetlere Oturan Tabakalarla İlgili Çalışmalar.....	5
1.2.3. Çeyrek Düzleme Oturan Tabakalarla İlgili Çalışmalar.....	7
1.2.4. Sonlu Elemanlar Yöntemi ile İncelenen Temas Problemleri	8
1.3. Çalışmanın Amacı ve Kapsamı	9
1.4. Tabakalar İçin Genel Denklemlerin Elde Edilmesi.....	11
1.5. Elastik Çeyrek Düzlem İçin Çözüm.....	19
1.5.1. Gerilme Fonksiyonlarının Mellin Dönüşümleri.....	19
1.5.2. Yer Değiştirmelerle İlgili Bazı Mellin Dönüşüm Uygulamaları.....	21
1.6. Sonlu Elemanlar Yöntemi	23
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR	33
2.1. Giriş.....	33
2.2. Problemin Tanımı.....	33
2.3. Problemin Çözümü.....	34
2.3.1. Elastisite Teorisine Göre Teorik Çözüm.....	34
2.3.1.1. Kullanılacak Denklemler.....	34
2.3.1.1.1.Tabakalar İçin Kullanılacak Denklemler.....	34
2.3.1.1.2.Çeyrek Düzlemler İçin Kullanılacak Denklemler	36

2.3.1.2. Problemin Sınır Şartları.....	37
2.3.1.3. Katsayıların Belirlenmesi.....	39
2.3.1.3.1.Tabakalar İçin Katsayıların Belirlenmesi.....	39
2.3.1.3.2.Çeyrek Düzlemler İçin Katsayıların Belirlenmesi.....	43
2.3.1.4. İntegral Denklemlerin Elde Edilmesi.....	44
2.3.1.4.1.Birinci İntegral Denklem.....	44
2.3.1.4.2.İkinci İntegral Denklem.....	49
2.3.1.5. İntegral Denklem Sisteminin Boyutsuzlaştırılması.....	56
2.3.1.6. İntegral Denklem Sisteminin Sayısal Çözümü.....	58
2.3.1.7. Gerilmelerin Bulunması.....	62
2.3.2. Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Sayısal Analiz.....	65
2.3.2.1. Literatürde Bulunan Ayrılmalı Temas Probleminin Sonlu Elemanlar Paket Programı ile Sayısal Analizi.....	65
2.3.2.2. Problemin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Sayısal Analizi.....	67
3. BULGULAR VE İRDELEME.....	72
3.1. Giriş.....	72
3.2. Teorik Çözümünden Elde Edilen Sonuçlar.....	72
3.2.1. Temas Uzunlukları ve Temas Gerilmeleri.....	72
3.2.2. Gerilmelerin İncelenmesi.....	84
3.2.2.1. σ_x Normal Gerilmelerinin İncelenmesi.....	84
3.2.2.2. σ_y Normal Gerilmelerinin İncelenmesi.....	87
3.2.2.3. τ_{xy} Kayma Gerilmelerinin İncelenmesi.....	91
3.3. Sonlu Elemanlar Yöntemi Sonuçları ve Teorik Sonuçlarla Karşılaştırma.....	94
4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	106
5. KAYNAKLAR.....	109
ÖZGEÇMİŞ	

Doktora Tezi

ÖZET

İKİ ELASTİK ÇEYREK DÜZLEME OTURAN
İKİ ELASTİK TABAKANIN TEMAS PROBLEMİ

Murat YAYLACI

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ
2013, 113 Sayfa

Bu çalışmada, düzgün yayılı yüke maruz, homojen, izotrop ve simetrik iki elastik çeyrek düzleme oturan, elastik özellikleri ve yükseklikleri farklı homojen ve izotrop iki elastik tabakanın sürtünmesiz temas problemi elastisite teorisine göre incelenmiştir. Ayrıca bu problem sonlu elemanlar yöntemini kullanan ANSYS paket programı ile de analiz edilmiştir. Birinci bölümde, temas problemlerinin tarihsel gelişiminden bahsedilmiş ve temas problemleri ile ilgili daha önce yapılmış bazı çalışmalar özetlenmiştir. Yine bu bölümde, tabakalar ve çeyrek düzlemler için elastisite teorisine ait temel denklemler ve integral dönüşüm teknikleri kullanılarak kartezyen ve polar kooordinatlardaki gerilme ve yer değiştirme ifadeleri elde edilmiştir. Ayrıca sonlu elemanlar yöntemi hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölümde, problemin tanımı yapılmış ve çözümü ilk olarak elastisite teorisine göre yapılmıştır. Birinci bölümde verilen genel gerilme ve yer değiştirme ifadeleri sınır şartlarında yerlerine yazılarak iki integral denklemden oluşan bir integral denklem sistemi elde edilmiştir. İntegral denklem sisteminin sayısal çözümü Gauss-Jacobi integrasyon formülasyonu ile gerçekleştirilmiş ve temas uzunlukları, temas gerilme yayılışları, normal gerilmeler ve kayma gerilmeleri elde edilmiştir. Ayrıca bu bölümde, sonlu elemanlar paket programında kullanılan ağ yapısı ve eleman tiplerinin uygunluğunu doğrulamak açısından literatürde bulunan bir ayrılmalı temas problemi incelenmiştir. Daha sonra yukarıda ele alınan çeyrek düzlemler üzerindeki tabakalara ait temas problemi sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal analiz edilmiştir. Üçüncü bölümde, probleme ilişkin yük genişliği, çeyrek düzlem açıklık mesafesi, tabaka yükseklikleri ve malzeme özelliklerini ifade eden çeşitli boyutsuz büyüklükler için sayısal uygulamalar yapılmış ve sonuçlar tablolar ve grafiklerle irdelenmiştir. Dördüncü bölümde, bu çalışmadan çıkartılan sonuçlar ve öneriler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Elastisite teorisi, Temas mekaniği, Temas gerilmesi, Temas uzunluğu, İntegral dönüşüm teknikleri, Çeyrek düzlem, Sonlu elemanlar yöntemi, ANSYS

PhD. Thesis

SUMMARY

RECEDING CONTACT PROBLEM OF TWO ELASTIC LAYERS SUPPORTED BY
TWO ELASTIC QUARTER PLANES

Murat YAYLACI

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Civil Engineering Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ
2013, 113 Pages

In this study, a receding contact problem for two elastic layers whose elastic constants and heights are different supported by two elastic quarter planes and subjected to a uniformly distributed load is considered according to the theory of elasticity. Besides, this problem has been developed based on the Finite Element Method using ANSYS software. In the first chapter, the historical developments of contact problems are mentioned and some studies which are done on contact problems are summarized. In addition, to this general expressions of stresses and displacements for the cartesian and polar coordinates are obtained by using the fundamental equations of theory of elasticity and integral transformation technique of layers and quarter planes. Beside this, it has been given information about finite elements method. In the second chapter, the problem is described and firstly the problem is formulated and solved by using Theory of Elasticity. Stress and displacement expressions are substituted into the boundary conditions of the problem, the problem is reduced to a system of singular integral equations. The system of singular integral equations is solved numerically by using Gauss-Jacobi integration formulation and the contact areas, the contact pressures, normal stresses and shear stresses are determined. Furthermore in this section, a receding contact problem in literature is investigated via Finite Element Method to verify the suitability of the mesh structure and component types used in the software. Subsequently the contact problem of elastic layers supported by elastic quarter planes which are mentioned above is also numerical analyzed by finite element method. In the third chapter, the numerical applications of the problem given in the previous chapter for various dimensionless quantities such as load width, distance between two quarter planes, height of layers and material properties are obtained and results are shown and discussed in graphics and tables. In the fourth chapter, the conclusions and recommendation drawn from this study are given.

Key Words: Theory of Elasticity, Contact mechanics, Contact pressure, Contact area, Integral transform technique, Quarter plane, Finite elements method, ANSYS

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1. Genel yükleme altındaki elastik bir çeyrek düzlem	19
Şekil 2. Sonlu elemanlar yöntemi	24
Şekil 3. Tipik iki boyutlu sonlu elemanlar	25
Şekil 4. Üçgen eleman ve polinom yaklaşımı	25
Şekil 5. Tek bir dörtgen elemana ait rijitlik matrisi	29
Şekil 6. Genel serbestlik derecesi terimleri içerisinde eleman rijitlik matrisleri	29
Şekil 7. İki elemanlı bir sonlu elemanlar ağında genel rijitlik matrisinin oluşturulması, a) iki elemanlı sonlu elemanlar ağı, b) ilk elemanın bağlanması, c) ikinci elemanın bağlanması, d) en son oluşan genel rijitlik matrisi	30
Şekil 8. Problemin geometrisi	33
Şekil 9. Analiz geometrisi	66
Şekil 10. Analiz sonrası problemin geometrisi (şekil değiştirmiş hal)	67
Şekil 11. Analiz geometrisi	68
Şekil 12. PLANE183 elemanın geometrisi (üçgen ve dörtgen)	69
Şekil 13. ANSYS programında oluşturulan üçgen ağ yapısının bir bölümü	69
Şekil 14. PLANE183 elemanı ve TARGE169/CONTA172 temas elemanları	70
Şekil 15. Analiz sonrası problemin geometrisi (şekil değiştirmiş hal)	71
Şekil 16. Malzeme sabitlerine (κ_2, κ_3) bağlı olarak, (c/h_2)'ye göre tabakalar arasındaki temas uzunluğu değişimi ($a/h_2 = 0.5, h_1/h_2 = 1, \kappa_1 = 2, \mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)	74
Şekil 17. Malzeme sabitlerine (κ_2, κ_3) bağlı olarak, (c/h_2)'ye göre 2 nolu tabaka ile çeyrek düzlem arasındaki temas uzunluğu değişimi ($a/h_2 = 0.5, h_1/h_2 = 1, \kappa_1 = 2, \mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)	74
Şekil 18. Yük genişliğine (a/h_2) bağlı olarak, (c/h_2)'ye göre tabakalar arasındaki temas uzunluğu değişimi ($h_1/h_2 = 1, \kappa_{1,2,3} = 2, \mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)	75
Şekil 19. Yük genişliğine (a/h_2)'ye bağlı olarak, 2 nolu tabaka ile çeyrek düzlem arasındaki temas uzunluğunun (c/h_2) ile değişimi ($h_1/h_2 = 1, \kappa_{1,2,3} = 2, \mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)	76
Şekil 20. Malzeme sabitlerine (κ_2, κ_3) bağlı olarak, (μ_3/μ_2) oranına göre tabakalar arasındaki temas uzunluğu değişimi ($c/h_2 = a/h_2 = 0.5, h_1/h_2 = 1, \kappa_1 = 2, \mu_2/\mu_1 = 2$)	77
Şekil 21. Malzeme sabitlerine (κ_2, κ_3) bağlı olarak, (μ_3/μ_2) oranına göre 2 nolu tabaka ile çeyrek düzlem arasındaki temas uzunluğu değişimi ($c/h_2 = a/h_2 = 0.5, h_1/h_2 = 1, \kappa_1 = 2, \mu_2/\mu_1 = 2$)	77

Şekil 22. Çeşitli yük genişliği (a/h_2) değerleri için tabakalar arasındaki temas gerilme yayılımı ($c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)	79
Şekil 23. Çeşitli yük genişliği (a/h_2) değerleri için 2 nolu tabaka ile çeyrek düzlem arasındaki temas gerilme yayılımı ($c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)	79
Şekil 24. Çeşitli çeyrek düzlem açıklık mesafesi (c/h_2) değerleri için tabakalar arasındaki temas gerilme yayılımı ($a/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)	80
Şekil 25. Çeşitli çeyrek düzlem açıklık mesafesi (c/h_2) değerleri için 2 nolu tabaka ile çeyrek düzlem arasındaki temas gerilme yayılımı ($a/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = 2$, $\mu_3/\mu_2 = 2$).....	80
Şekil 26. Çeşitli (h_1/h_2) oranı değerleri için tabakalar arasındaki temas gerilme yayılımı ($a/h_2 = c/h_2 = 0.5$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)	81
Şekil 27. Çeşitli (h_1/h_2) oranı değerleri için 2 nolu tabaka ile çeyrek düzlem arasındaki temas gerilme yayılımı ($a/h_2 = c/h_2 = 0.5$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)	81
Şekil 28. Tabakaların kayma modüllerinin (μ_2/μ_1) çeşitli oranları için tabakalar arasındaki temas gerilme yayılımı ($a/h_2 = c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_3/\mu_2 = 2$)	82
Şekil 29. Tabakaların kayma modüllerinin (μ_2/μ_1) çeşitli oranları için 2 nolu tabaka ile çeyrek düzlem arasındaki temas gerilme yayılımı ($a/h_2 = c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_3/\mu_2 = 2$).....	82
Şekil 30. Çeyrek düzlemin ve alttaki tabakanın kayma modüllerinin (μ_3/μ_2) çeşitli oranları için tabakalar arasındaki temas gerilme yayılımı ($a/h_2 = c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = 2$)	83
Şekil 31. Çeyrek düzlemin ve alttaki tabakanın kayma modüllerinin (μ_3/μ_2) çeşitli oranları için 2 nolu tabaka ile çeyrek düzlem arasındaki temas gerilme yayılımı ($a/h_2 = c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = 2$)	83
Şekil 32. $\sigma_x(0, y)/p_0$ normal gerilmesinin yük genişliği (a/h_2) ile değişimi ($c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)	85
Şekil 33. $\sigma_x(0, y)/p_0$ normal gerilmesinin çeyrek düzlem açıklık mesafesi (c/h_2) ile değişimi ($a/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)	85
Şekil 34. $\sigma_x(0, y)/p_0$ normal gerilmesinin (h_1/h_2) oranı ile değişimi ($a/h_2 = c/h_2 = 0.5$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)	86
Şekil 35. $\sigma_x(0, y)/p_0$ normal gerilmesinin (μ_2/μ_1) oranı ile değişimi ($a/h_2 = c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_3/\mu_2 = 2$)	86
Şekil 36. $\sigma_x(0, y)/p_0$ normal gerilmesinin (μ_3/μ_2) oranı ile değişimi ($a/h_2 = c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = 2$)	87
Şekil 37. $\sigma_y(0, y)/p_0$ normal gerilmesinin yük genişliği (a/h_2) ile değişimi ($c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)	88
Şekil 38. $\sigma_y(0, y)/p_0$ normal gerilmesinin çeyrek düzlem açıklık mesafesi (c/h_2) ile değişimi ($a/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)	89
Şekil 39. $\sigma_y(0, y)/p_0$ normal gerilmesinin (h_1/h_2) oranı ile değişimi ($a/h_2 = 0.5$, $c/h_2 = 0.5$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)	89

Şekil 40.	$\sigma_y(0, y)/p_0$ normal gerilmesinin (μ_2/μ_1) oranı ile değişimi ($a/h_2 = c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_3/\mu_2 = 2$)	90
Şekil 41.	$\sigma_y(0, y)/p_0$ normal gerilmesinin (μ_3/μ_2) oranı ile değişimi ($a/h_2 = c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = 2$)	90
Şekil 42.	$\tau_{xy}(0.05, y)/p_0$ kayma gerilmesinin yük genişliği (a/h_2) ile değişimi ($c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)	92
Şekil 43.	$\tau_{xy}(0.05, y)/p_0$ kayma gerilmesinin çeyrek düzlem açıklık mesafesi (c/h_2) ile değişimi ($c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)	92
Şekil 44.	$\tau_{xy}(0.05, y)/p_0$ kayma gerilmesinin (μ_2/μ_1) oranı ile değişimi ($a/h_2 = 0.5$, $c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_3/\mu_2 = 2$)	93
Şekil 45.	$\tau_{xy}(0.05, y)/p_0$ kayma gerilmesinin (μ_3/μ_2) oranı ile değişimi ($a/h_2 = 0.5$, $c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = 2$)	93
Şekil 46.	Tabakalar arasındaki temas gerilmesinin yük genişliği (a/h_2) ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ($c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)	96
Şekil 47.	2 nolu tabaka ile çeyrek düzlem arasındaki temas gerilmesinin yük genişliği (a/h_2) ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ($c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)	97
Şekil 48.	Tabakalar arasındaki temas gerilmesinin çeyrek düzlem açıklık mesafesi (c/h_2) ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ($a/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = 2$, $\mu_3/\mu_2 = 2$)	97
Şekil 49.	2 nolu tabaka ile çeyrek düzlem arasındaki temas gerilmesinin çeyrek düzlem açıklık mesafesi (c/h_2) ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ($a/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)	98
Şekil 50.	Tabakalar arasındaki temas gerilmesinin (h_1/h_2) oranı ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ($a/h_2 = c/h_2 = 0.5$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)	98
Şekil 51.	2 nolu tabaka ile çeyrek düzlem arasındaki temas gerilmesinin (h_1/h_2) oranı ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ($c/h_2 = c/h_2 = 0.5$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$).	99
Şekil 52.	Tabakalar arasındaki temas gerilmesinin (μ_2/μ_1) oranı ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ($a/h_2 = c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_3/\mu_2 = 2$)	99
Şekil 53.	2 nolu tabaka ile çeyrek düzlem arasındaki temas gerilmesinin (μ_2/μ_1) oranı ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ($a/h_2 = c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_3/\mu_2 = 2$)	100
Şekil 54.	$\sigma_x(0, y)/p_0$ normal gerilmesinin yük genişliği (a/h_2) ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ($c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)	101
Şekil 55.	$\sigma_y(0, y)/p_0$ normal gerilmesinin yük genişliği (a/h_2) ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ($c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)	101
Şekil 56.	$\sigma_x(0, y)/p_0$ normal gerilmesinin çeyrek düzlem açıklık mesafesi (c/h_2) ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ($a/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = 2$, $\mu_3/\mu_2 = 2$)	102

Şekil 57. $\sigma_y(0, y)/p_0$ normal gerilmesinin çeyrek düzlem açıklık mesafesi (c/h_2) ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ($a/h_2 = 0.5, h_1/h_2 = 1, \mu_2/\mu_1 = 2, \mu_3/\mu_2 = 2$).....	102
Şekil 58. $\sigma_x(0, y)/p_0$ normal gerilmesinin (h_1/h_2) oranı ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ($a/h_2 = c/h_2 = 0.5, \mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)	103
Şekil 59. $\sigma_y(0, y)/p_0$ normal gerilmesinin (h_1/h_2) oranı ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ($a/h_2 = c/h_2 = 0.5, \mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)	103
Şekil 60. $\sigma_x(0, y)/p_0$ normal gerilmesinin (μ_2/μ_1) oranı ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ($a/h_2 = c/h_2 = 0.5, h_1/h_2 = 1, \mu_3/\mu_2 = 2$)	104
Şekil 61. $\sigma_y(0, y)/p_0$ normal gerilmesinin (μ_2/μ_1) oranı ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ($a/h_2 = c/h_2 = 0.5, h_1/h_2 = 1, \mu_3/\mu_2 = 2$)	104

TABLULAR DİZİNİ

Sayfa No

- Tablo 1. Çeşitli (κ_2, κ_3) değerleri için temas uzunluklarının çeyrek düzlem açıklık mesafesi (c/h_2) ile değişimi ($a/h_2 = 0.5, h_1/h_2 = 1, \kappa_1 = 2, \mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$) 73
- Tablo 2. Çeşitli yük genişliği (a/h_2) değerleri için, temas uzunluklarının çeyrek düzlem açıklık mesafesi (c/h_2) ile değişimi ($h_1/h_2 = 1, \kappa_{1,2,3} = 2, \mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$) . 75
- Tablo 3. Çeşitli (κ_2, κ_3) değerleri için, temas uzunluklarının (μ_3/μ_2) oranı ile değişimi ($c/h_2 = a/h_2 = 0.5, h_1/h_2 = 1, \kappa_1 = 2, \mu_2/\mu_1 = 2$) 76
- Tablo 4. Çeşitli (a/h_2) ve (μ_2/μ_1) değerleri için analizlerde kullanılan eleman sayısı ve temas eleman sayısı ($c/h_2 = 0.5, h_1/h_2 = 1, \mu_3/\mu_2 = 2$) 94
- Tablo 5. Çeşitli (c/h_2) ve h_1/h_2) değerleri için analizlerde kullanılan eleman sayısı ve temas eleman sayısı ($a/h_2 = 0.5, \mu_2/\mu_1 = 2, \mu_3/\mu_2 = 2$) 94
- Tablo 6. Yük genişliğine (a/h_2) bağlı olarak temas uzunluklarının teorik ve sayısal sonuçlarının karşılaştırılması ($c/h_2 = 0.5, h_1/h_2 = 1, \mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$) 95
- Tablo 7. Çeyrek düzlem açıklık mesafesine (c/h_2) bağlı olarak temas uzunluklarının teorik ve sayısal sonuçlarının karşılaştırılması ($a/h_2 = 0.5, h_1/h_2 = 1, \mu_2/\mu_1 = 2, \mu_3/\mu_2 = 2$) 95
- Tablo 8. Tabakaların yükseklikleri oranına (h_1/h_2) bağlı olarak temas uzunluklarının teorik ve sayısal sonuçlarının karşılaştırılması ($a/h_2 = c/h_2 = 0.5, \mu_2/\mu_1 = 2, \mu_3/\mu_2 = 2$) 95
- Tablo 9. (μ_2/μ_1) oranına bağlı olarak temas uzunluklarının teorik ve sayısal sonuçlarının karşılaştırılması ($a/h_2 = c/h_2 = 0.5, h_1/h_2 = 1, \mu_3/\mu_2 = 2$) 96

SEMBOLLER DİZİNİ

a	Yük genişliği
e	Hacim değiştirme oranı
E	Elastisite modülü
h	Tabakaların toplam yüksekliği
h_1	1 nolu tabakanın yüksekliği
h_2	2 nolu tabakanın yüksekliği
p_0	Yayıllı yükün şiddeti
u, v, w	Kartezyen koordinatlardaki yer değiştirme bileşenleri
X, Y, Z	Sırasıyla x, y ve z eksenleri doğrultusundaki kütle kuvveti bileşenleri
x, y, z	Kartezyen koordinatlar
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Sırasıyla x, y, z eksenleri doğrultusundaki normal gerilme bileşenleri
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Kayma gerilmesi bileşenleri
u_r, u_θ	Polar koordinatlarda yer değiştirme bileşenleri
$\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$	Polar koordinatlarda gerilme bileşenleri
μ	Kayma modülü
κ	Malzeme sabiti
ν	Poisson oranı
∇^2	Laplace operatörü
λ	Lame sabiti
ϕ, ψ	Ters Fourier dönüşüm fonksiyonları
$\varepsilon_x, \varepsilon_y$	x, y doğrultularındaki uzama şekil değiştirme bileşenleri
γ_{xy}	Kayma şekil değiştirme bileşenleri

Not: Bu listede verilmeyen bazı semboller metin içerisinde ilgili oldukları yerlerde tanımlanmıştır.

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Çoğu yapıların ve mekanik sistemlerin elemanları birbirleri ile temas halindedir. Bu temasın karakteri, cisimlerin gerilmeleri birbirlerine iletiş şekilleri, temas halindeki cisimlerde meydana gelen şekil değiştirmeler, temas uzunlukları ve temas bölgesindeki temas gerilmesi dağılımı yapının davranışında önemli rol oynamaktadır. Yol ve havaalanı üst yapıları, demiryolları, temeller, tahıl siloları, akaryakıt tankları, silindirik miller ve bilyeler temasın söz konusu olduğu mühendislik uygulamalarından bazılarıdır. Taşıt çarpışmalarının simülasyonu, insan eklemlerinin davranışı gibi konular da temas probleminin uygulama sahasına girmektedir (Çömez, 2009).

İçinde bulunduğumuz yıllarda, Elastisite teorisi mühendislik problemlerinin çözümünde kayda değer bir uygulama alanı bulmuştur. Mühendislik yapılarındaki gerilme, yer ve şekil değiştirme problemlerinin çözümünde mukavemetin elemanter metotlarının yetersiz kaldığı pek çok durum vardır. Özellikle işaret değiştiren gerilmelere maruz yapılarda içeriye girik köşelerdeki yüksek gerilme yığılmaları sonucunda ortaya çıkan çatlaklarda, kiriş ve millerin enkesitlerindeki ani değişim sonucu ortaya çıkan gerilmelerin araştırılmasında, kayıcı mesnet ruloları ile yatak bilyelerindeki gerilmelerin belirlenmesinde ve kirişlerde tekil yük ve mesnetlere yakın bölgelerdeki gerilmelerin incelenmesinde Elastisite teorisini kullanmak uygun olmaktadır (Birinci,1998).

Bilgisayar teknolojisindeki gelişmelere paralel olarak, kabul edilebilir yaklaşıklıkla çözümler veren sonlu elemanlar, sonlu farklar ve sınır elemanlar gibi sayısal yöntemler mühendislik problemlerinin çözümünde kullanılmaktadır. Günümüzde, mühendislikte karşılaşılan birçok problemin çözümünde kullanılan, en yaygın ve etkili sayısal yöntemlerden biri de sonlu elemanlar yöntemidir. Bu yöntemde, gerçek bir fiziksel problemin matematiksel modeli oluşturularak çözüme gidilir. Bu yöntem özellikle kullandığı çözüm yöntemi sebebiyle bilgisayar kullanımını zorunlu hale getirmektedir.

1.2. Literatür Araştırması

Temas mekaniği konusunun, Heinrich Hertz tarafından 1882 yılında yazılan “On the contact of elastic solids” adlı makaleyle başladığı söylenebilir (Johnson, 1985). Hertz temas halindeki iki elastik cismin dengesini, temas bölgesinin eliptik olduğunu kabul ederek incelemiş, temas gerilmesi ve şekil değiştirmeler için formülasyon geliştirmiştir. Bu sonuçlar rijit düzleme oturan silindir veya küre gibi problemlere uygulanmış ve bu tip problemler Hertz temas problemi olarak adlandırılmıştır.

Temas problemleri üzerine yapılan çalışmalar, kompleks değişkenler yönteminin Muskhelishvili tarafından geliştirilmesi (Muskhelishvili, 1953) ve özellikle Sneddon’un integral dönüşüm tekniklerini elastisite teorisinde kullanmasıyla (Sneddon, 1951) artmaya başlamıştır. Temas problemi ile ilgili çalışmaların 1950’li yıllara kadar olan tarihçesi ve çözüm yöntemleri Galin’in eserinde detaylarıyla verilmiştir (Galin, 1961). İntegral Dönüşüm Tekniklerinin bu probleme uygulanma yöntemleri ise Uffliand’ın eserinde ortaya konmuştur (Uffliand, 1965).

Son yıllarda bilgisayar teknolojisinin ve sayısal çözüm yöntemlerinin gelişmesi ile temas problemleri üzerinde yapılan çalışmalar yoğunluk kazanmıştır. İntegral dönüşüm teknikleri, sınır elemanlar, sonlu farklar ve sonlu elemanlar gibi yöntemler kullanılarak temas problemleri ile ilgili pek çok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalarda tabakalar genellikle elastik yarım düzlem üzerine oturmuştur. Ancak elastik tabakaların rijit mesnetlere, Winkler temeline ve elastik çeyrek düzlemlere vs. oturduğu çalışmalar da mevcuttur (Birinci, 1998).

1.2.1 Yarım Düzleme Oturan Tabakalarla İlgili Çalışmalar

Yarım düzleme oturan tabakalarla ilgili çalışmalardan bazıları aşağıdaki gibi özetlenebilir.

Keer vd. (1972), elastik yarım düzleme oturan ve yayılı yük ile yüklenmiş elastik bir tabakanın sürtünmesiz temas problemini ele almışlardır. Bu çalışmada simetrik olmayan düzlem temas problemleri çözülerek temas alanları ve temas gerilmeleri elde edilmiştir.

Sonlu bölgede elastik yarım düzlem üzerine oturan elastik bir tabakanın sürtünmesiz bir blok aracılığıyla yüklenmesi haline ait temas problemi Ratwani ve Erdoğan (1973)

tarafından ele alınmıştır. Çalışmada, blok profilinin dikdörtgen ve dairesel olması durumlarında temas yüzeyi boyunca gerilme yayılımı elde edilmiştir.

Civelek ve Erdoğan (1974), sonlu bölgede elastik yarım düzlem üzerine oturan elastik bir tabakanın rijit ve elastik bloklar aracılığıyla yüklenmesi durumunda çift temas problemi halini ele almışlardır. Söz konusu bu çalışmada problem bir singüler integral denkleme indirgenmiş ve çeşitli blok profilleri için integral denklem sayısal olarak çözülerek blok altındaki temas gerilme yayılımı ile blok ile elastik tabaka ve elastik tabaka ile yarım düzlem arasındaki temas alanları belirlenmiştir.

Boduroğlu ve Delale (1980), homojen, izotrop ve elastik yarım düzlem ve bunun üzerine oturan tabakanın sürtünmeli temas problemini incelemişlerdir. Yarım düzlem ve tabaka arasında sürtünme olmaması halindeki sonuçlar ile karşılaştırma yapmışlardır.

King ve O'Sullivan (1987), rijit bir pançla bastırılan tabakalı elastik yarım düzlemin sürtünmeli temas problemini ele almışlardır. Tek bir tabaka ve elastik yarım düzlemin sürtünmeli temas problemi düzlem şekil değiştirme hali için incelenmiş ve ara yüzeydeki gerilme dağılımları elde edilmiştir.

Çakıroğlu ve Çakıroğlu (1991), yayılı yük ile bastırılan elastik tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki sürekli ve süreksiz temas problemini incelemişlerdir. Yükün düzgün yayılı veya bir fonksiyona bağlı olması durumlarında, değişik malzeme özellikleri ve tabaka kalınlığı için ilk ayrılma mesafesi ve temas bölgesindeki gerilme dağılımları incelenmiştir.

Pindera ve Lane (1993), elastik yarım düzlem üzerine oturan, izotrop, ortotrop veya monoklinik tabakaların sürtünmesiz temas problemi için çözüm geliştirmişler ve bununla ilgili sayısal örnekler sunmuşlardır.

Urquart ve Pindera (1994), elastik yarım düzleme oturan ve rijit dikdörtgen bir panç aracılığıyla yüklenen anizotropik tabakaların temas problemini incelemişlerdir.

Değişik sayıda ince elastik tabakalarla kaplanmış elastik yarım düzlemde sürtünmeli temas problemi Elsharkawy (1999) tarafından ele alınmıştır. İki elastik tabaka ile kaplı elastik yarım düzlemin rijit eğrisel bir pançla bastırılması durumunda gerilme dağılımları çeşitli sürtünme katsayısı değerleri için bulunmuş, yüzey kaplamasının temas gerilmesine etkisi belirlenmiştir. Ayrıca dikdörtgen pançla rijit düzleme bastırılan tabaka durumunda, tabaka ile düzlemin tam bağlı veya bağlı olmadığı durumlar için temas gerilmesi dağılımı sürtünme katsayısının değişik değerleri için bulunmuştur.

Çakıroğlu vd. (2001), elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan iki elastik tabakanın, sürtünmesiz sürekli ve süreksiz temas problemini incelemişlerdir. Sürekli temas probleminde ilk ayrılmayı meydana getiren kritik yük bulunmuştur. Süreksiz temas problemi, ayrılmanın yalnızca iki tabaka arasında, alt tabaka ile yarı sonsuz düzlem arasında veya aynı anda hem tabakalar arasında hemde alt tabaka ile yarı sonsuz düzlem arasında meydana gelmesi durumlarında ayrı ayrı incelenmiştir.

Güler ve Erdoğan (2004, 2007), fonksiyonel derecelendirilmiş özellikteki tabaka ile kaplı olan elastik yarım düzlemin sürtünmeli temas problemini incelemişlerdir. Kayma modülü, derinliği boyunca üstel olarak değişen tabakaya, düşey ve yatay kuvvetler dikdörtgen ve eğrisel profillerde olan değişik şekillerdeki pançların aracılığıyla etki ettirilmiştir. Problem integral dönüşüm tekniği kullanılarak bir tekil integral denkleme dönüştürülerek gerilme yayılışları elde edilmiştir.

Çömez ve Erdöl (2007), elastik yarım düzleme tam yapışık tabakanın sürtünmeli temas problemini elastisite teorisine göre çözmüşlerdir. Tabaka dairesel panç aracılığıyla tekil yükü bastırılırken, pança aynı zamanda yatay bir kuvvet etki ettirilmiştir. Problem integral dönüşüm tekniği ve sınır şartları kullanılmasıyla tekil bir integral denkleme indirgenmiştir. Jacobi Polinomları ve Gauss Jacobi integral formülasyonu kullanılarak sürtünmeli ve sürtünmesiz durumda, temas mesafeleri, temas gerilmeleri, normal gerilmeler ve kayma gerilmeleri bulunmuştur.

Tabakanın anizotrop olması halinde rijit dairesel bir panç aracılığıyla yüklenen ve elastik yarım düzleme oturan tabakada temas problemi Kahya vd. (2007) tarafından çözülmüştür. Anizotrop tabakanın değişik malzeme özellikleri için pançın altında ve tabaka ile yarım düzlem arasındaki temas uzunlukları ve temas gerilmesi dağılımları elde edilmiştir.

Çömez (2009), rijit dairesel bir panç aracılığıyla yüklenen homojen, izotrop, elastik bir tabaka ve yarım düzlemin sürtünmeli temas problemini elastisite teorisi ve integral dönüşüm tekniğini kullanarak incelemiştir. Düşey ve yatay tekil yükleri ileten rijit panç, h yüksekliğindeki homojen ve izotrop tabakanın üst yüzeyinden etki ettirilmiş ve kütle kuvvetleri ihmal edilmiştir.

Öner (2013), rijit dairesel bir panç aracılığı ile yüklenmiş ve elastik yarı sonsuz düzleme oturan elastik özellikleri ve yükseklikleri farklı iki elastik tabakanın sürekli temas problemini elastisite teorisine göre çözmüştür. Çalışmada, temas uzunlukları, rijit panç ile üst tabaka arasında oluşacak temas gerilmesi dağılımları, tabakaların ve elastik yarı sonsuz

düzlemin herhangi bir noktasındaki normal gerilme ve kayma gerilmesi değerleri elde edilmiştir. Tabakalar arasındaki ve alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yüklerini ve ilk ayrılma uzaklıkları belirlenmiştir.

1.2.2. Winkler Temeli, Rijit Temel ve Rijit Mesnetlere Oturan Tabakalarla İlgili Çalışmalar

Tabakaların Winkler temeli, rijit temel ve rijit mesnetler üzerine oturduğu çalışmalardan bazıları aşağıdaki gibi özetlenebilir.

Civelek ve Erdoğan (1975), rijit bir düzleme oturan elastik bir tabakanın tekil yük ile kaldırılması durumundaki sürekli ve süreksiz temas problemini incelemiştir. Önce tabakanın rijit düzlemde ayrılmasına sebep olan en küçük yük değeri belirlenmiş ve ardından süreksiz temas problemi tekil integral denkleme indirgenerek, kritik yükten daha büyük yükler için meydana gelen ayrılma bölgesi ve gerilme dağılışı sayısal olarak elde edilmiştir.

Geçit ve Erdoğan (1978), elastik bir tabakanın rijit bir düzlem üzerine oturduğu ve eksenel simetrik yük etkisinde olduğu durumda sürtünmesiz temas problemini incelemiştir. Çözümde ayrılma bölgesinin büyüklüğü ve temas gerilmesinin dağılışı ile ilgili sonuçlar verilmiştir.

Rijit bloklar üzerine oturan elastik tabakanın sürtünmesiz temas problemi Geçit ve Yapıcı (1986) tarafından ele alınmış ve tabakalar arasındaki gerilme dağılışı elde edilmiştir.

Dempsey vd. (1990), üst yüzeyinden rijit bir blokla sıkıştırılan ve Winkler temele oturan sabit yükseklikli, elastik, homojen ve sonsuz uzun tabakadaki düzlem temas problemini incelemiştir. Çalışmada, eğrisel veya dikdörtgen bir blok aracılığıyla tekil yük veya düzgün yayılı yük etki etmesi durumları dikkate alınmıştır.

Birinci ve Erdöl (1999), basit mesnetler üzerine oturan kütle kuvvetleri ihmal edilmiş iki tabakadan oluşan temas problemini incelemiştir. Bileşik tabaka dairesel ve dikdörtgen rijit blok aracılığıyla yüklemiş ve her iki durumda temas mesafeleri ve temas gerilmeleri hesaplanmıştır.

Rijit düz iki blok üzerine oturan, sonlu bir bölgede etki ettirilen yayılı yük ile yüklenen, sabit yükseklikte ve farklı malzeme özelliklerine sahip homojen, izotrop iki tabakadan oluşan bileşik tabakada sürekli ve süreksiz temas problemi Özşahin (2000)

tarafından elastisite teorisine göre çözülmüştür. Çalışmada sürekli ve süreksiz temas durumlarında, temas yüzeylerindeki gerilme dağılımları belirlenmiştir. Bileşik tabakada ayrılmaya neden olan kritik yük faktörleri ve ayrılmanın meydana geleceği uzaklıklar araştırılmış, ayrılma ve temas bölgelerinin büyüklükleri incelenmiştir.

Birinci ve Erdöl (2001), tekil yükün dikdörtgen rijit blok aracılığıyla yüklendiği, basit mesnetlere oturan bileşik tabakalar arasındaki sürekli ve süreksiz temas problemini incelemiştir. Sürekli temas halinde bileşik tabakalar arasındaki ilk ayrılmayı başlatan kritik yük ve ilk ayrılma uzaklığı bulunmuştur. Süreksiz temas, süreksizliğin rijit blok ile üstteki tabaka arasında veya bileşik tabakalar arasında olması durumları için ayrı ayrı incelenmiştir. Değişik malzeme sabitleri, tabaka kalınlıkları ve mesnet aralığı için düşey yer değiştirmeler ve temas gerilme dağılımları elde edilmiştir.

Dairesel, parabolik ve dikdörtgen olarak alınan farklı panç profilleri için rijit bir temele oturan elastik tabakanın temas problemi kütle kuvvetleri ve sürtünme ihmal edilerek Kahya vd. (2001) tarafından çözülmüş ve temas uzunlukları ve gerilme dağılımları elde edilmiştir.

Winkler temeline oturan elastik sabitleri ve yükseklikleri farklı iki sonsuz elastik tabakanın sürtünmesiz temas problemi Birinci ve Erdöl (2003) tarafından incelenmiştir. Sürekli temas probleminde ilk ayrılmayı başlatan kritik yük değeri hesaplanmış ve daha sonra süreksiz temas problemi tekil bir integral denkleme indirgenmiştir. Değişik ayrılma alanı, kritik yük ve yayılı yük değerleri için düşey yer değiştirmeler ve temas gerilme dağılımları elde edilmiştir.

Kahya (2003), rijit bir temele oturan üst tarafından sonlu yayılı yüklerle bastırılan iki ortotrop, elastik ve sonsuz uzunluklu tabakadan meydana gelen bileşik tabakada sürekli ve süreksiz temas problemini incelemiştir. Tabakalar arasında ilk ayrılmayı başlatan kritik yük değeri, ilk ayrılma uzaklığı, kritik yükün aşılması durumunda tabakalar arasında meydana gelen ayrılma bölgesinin büyüklüğü, açılma miktarı ve her iki problem için tabakaların ara yüzeyindeki temas gerilme yayılımı elde edilmiştir.

Alt tarafından rijit olarak mesnetlenmiş, iki elastik tabakanın ve rijit pançın temas problemi Çömez vd. (2004) tarafından incelenmiştir. Tabakalara, rijit dairesel veya parabolik panç aracılığıyla tekil yük etki ettirilmiştir. Tabakalar arasındaki ve panç ile tabaka arasındaki temas uzunlukları ve bu iki temas bölgesindeki temas gerilmesi dağılımı değişik malzeme özellikleri ve geometrileri ile yük değerleri için elde edilmiştir.

1.2.3. Çeyrek Düzleme Oturan Tabakalarla İlgili Çalışmalar

Çeyrek düzleme oturan tabakalarla ilgili çalışmalardan bazıları aşağıdaki gibi özetlenebilir.

Erdoğan ve Ratwani (1974), iki çeyrek düzlem ile mesnetlenmiş bir tabakada süreksiz temas problemini çözmüşlerdir. Problem temas gerilmelerinin bilinmeyen olduğu tekil bir integral denkleme indirgemiş ve integral denklemin sayısal çözümü sonucunda temas gerilmesi ve temas alanına ait sayısal sonuçlar verilmiştir.

Aksoğan vd. (1996, 1997), iki elastik çeyrek düzleme oturan elastik bir tabakanın simetrik ve simetrik olmaması durumlarında temas problemini ele almışlardır. İntegral dönüşüm teknikleri ile yapılan çözümde tabaka için Fourier, çeyrek düzlem için Mellin dönüşümü kullanılmıştır. Sonlu Elemanlar Yöntemi (FEM) ve Sınır Elemanlar Yöntemi (SEM) ile de çözümler yapılmıştır. Elastik tabakaya üstten tekil yük, simetrik yayılı yük ve simetrik olmayan yayılı yük etki ettirilmesi durumunda temas gerilmelerinin yayılışı incelenmiş ve her üç yöntemde de birbirine çok yakın sonuçlar ortaya çıkmıştır.

İki elastik çeyrek düzlem üzerine oturan bir elastik tabakanın yüklemeye göre simetrik olması ve olmaması durumlarında temas problemi Akavcı (1999) tarafından incelenmiştir. Çalışmada tabaka ile çeyrek düzlemler arası sürtünmesiz kabul edilip temas bölgesinde yalnız normal basınç gerilmelerinin olduğu düşünülmüştür. Problem, tekil integral denklemlere uygulanabilen sayısal bir çözüm tekniğiyle birlikte integral dönüşüm tekniğinden yararlanarak formüle edilmiştir. Elde edilen tekil integral denklem takımında, bilinmeyen fonksiyon olarak temas bölgesi boyunca tabaka ile çeyrek düzlemler arasındaki temas gerilmeleri bulunmuştur. Elde edilen denklem takımını Jacobi polinomlarından yararlanılarak uygulanan bir kolokasyon metodu ile çözmek için bir bilgisayar programı hazırlanmıştır.

Çakıroğlu (2011), tekil yükü ileten dairesel rijit bir panç aracılığıyla yüklenen ve iki elastik çeyrek düzleme oturan sürtünmesiz bir elastik tabaka problemini incelemiş ve bu probleme yapay sinir ağı yöntemini uygulamıştır. Problemin çözümünde elastisite teorisi ve integral dönüşüm tekniği kullanılarak yer değiştirme ve gerilme ifadeleri elde edilmiş, değişik yükleme, malzeme ve geometri durumlarında temas mesafeleri ve temas gerilmeleri hesaplanmıştır. Ayrıca temas mesafeleri yapay sinir ağı yöntemi ile de elde edilmiş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır.

1.2.4. Sonlu Elemanlar Yöntemi ile İncelenen Temas Problemleri

Temas gerilmelerinin kesin sonuçlarla bulunabilmesi, idealize edilmiş sistemlerin oldukça karmaşık matematiksel analizlerinin yapılmasını gerektirir. Bu çözümler, problemin gerçek geometrisinin ve yükleme durumunun matematiksel modellemeye ne kadar yakın olduğuna bağlı olarak az veya çok başarılı olarak birçok probleme uygulanabilir. Çoğu durumda kesin çözümün mümkün olduğu uygun model şekli bulunamaz ve temas gerilmelerini belirlemek için sayısal yöntemlere ihtiyaç duyulur (Chan ve Tuba, 1971). Bu ihtiyaçtan dolayı birçok araştırmacı tarafından temas problemlerinin Sonlu Elemanlar Yöntemi (FEM) gibi yaklaşık bir yöntemle çözümleri araştırılmıştır.

Chan ve Tuba (1971), elastik cisimlerin düzlem temas problemine sonlu elemanlar yönteminden yola çıkarak bir çözüm yolu geliştirmişlerdir. Elastik cisimler üçgen elemanlar ile modellenerek, yöntemin Hertz problemi ve ortasında disk bulunan levha problemi için temas gerilmesi dağılımlarında kesin sonuçlara yakın değerler verdiği gösterilmiştir.

Düzlem hal için elastik cisimlerin sürtünmesiz temas problemi şekil değiştirmelerin küçük olduğu düşünülerek Hung ve Saxce (1980) tarafından matematiksel programlama tekniğiyle incelenmiştir. Hertz problemi ve piston çubuk problemi belirtilen formülasyona göre sonlu elemanlar algoritmasıyla modellenmiş, temas bölgelerindeki gerilme yayılışları elde edilmiştir.

Chaudhary ve Bathe (1986), iki ya da üç boyutlu sürtünmeli temas probleminin statik ve dinamik analizini, Lagrange Çarpınları Yöntemini kullanarak yapmışlardır. Geliştirilen yöntem ve ADINA sonlu elemanlar paket programı kullanılarak Hertz temas problemi analiz edilmiş ve analitik çözüme yakın sonuçlar elde edildiği görülmüştür.

Üç boyutlu sürtünmeli temas problemi sonlu elemanlar yöntemine bağlı doğrudan çözüm yöntemi olan matematiksel programlama tekniği ile Klarbring (1986) tarafından incelenmiştir. Geliştirilen yöntem elastik yarım düzleme oturan elastik dikdörtgen panç problemine uygulanmış, temas bölgesinde bulunan normal gerilme ve kayma gerilmesi dağılımları daha önceki araştırmacılar tarafından bulunmuş çözüme yakın değerlerde olduğu gösterilmiştir.

Kanber (1997), iki boyutlu temas problemlerini geçiş elemanları kullanarak Sonlu Elemanlar Metoduyla incelemiştir. Çalışmada, köşegen ve üçgen geçiş elemanları Lagrange tabanlı bir yaklaşım ve Paskal Üçgenini kullanılarak türetilmiştir. Bütün

elemanların türetilmesi Mathematica programı kullanılarak yapılmış ve bu geçiş elemanları ANSYS paket programına uyarlanmıştır. İki ayrı yöntemden Pascal üçgeninin daha az çözüm zamanı ile daha hassas doğrulukta sonuçlar verdiği gösterilmiştir.

İki boyutlu temas problemi sınır elemanlar metodunda suni sınır yaklaşımı kullanılarak TONUÇ (1999) tarafından analiz edilmiştir. Suni sınır yaklaşımı yeni bir şekilde tanımlanarak iki boyutlu sınır elemanları temas programına adapte edilmiştir. Bu çalışmada, yeni yaklaşımın sonuçları direk sınır elemanları metodunun sonuçları ve diğer suni sınır yaklaşımının sonuçları ile karşılaştırılmış ve benzer hassasiyette sonuçlar verdiği görülmüştür. Geliştirilen yaklaşım temas problemlerine uygulanmış ve tüm sayısal uygulamalar ANSYS Sonlu Elemanlar paket programı ile test edilmiştir.

Sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak rijit düzlem üzerine oturan elasto-plastik yarım kürenin temas problemi Jackson ve Green (2005) tarafından incelenmiştir. Problemin analizinde ANSYS paket programı kullanılmış ve elde edilen sonuçlar literatürde bulunan teorik ve ABAQUS programı sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır.

Sezer (2005), ANSYS Sonlu Elemanlar paket programını kullanarak temas elemanları modellemiş ve ANSYS paket programı temas elemanları kütüphanesinde bulunan değişik temas algoritmaları ve temas elemanı uygulama seçeneklerini irdelemiştir.

Sonlu elemanlar yöntemini esas alan NX-NASTRAN paket programı kullanılarak ayrılmalı temas problemi Roncevic ve Siminiati (2010) tarafından analiz edilmiş ve elde edilen temas mesafeleri literatürde bulunan teorik sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Temas problemlerinde sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak yapılan analizlerde temas algoritmalarının (Augmented Lagrangian Method, Penalty Method, Adapted Penalty Method, Adapted Augmented Lagrangian Method) karşılaştırılması Bussetta vd. (2012) tarafından ve çözüm yöntemlerinin (h-, p-, hp- ve rp-modeli) karşılaştırılması ise Franke (2010) tarafından ele alınmıştır.

1.3. Çalışmanın Amacı ve Kapsamı

Bu çalışmada, homojen, izotrop ve simetrik iki elastik çeyrek düzleme oturan, elastik özellikleri ve yükseklikleri farklı homojen ve izotrop iki elastik tabakanın sürtünmesiz temas problemi elastisite teorisine göre incelenmiştir. Ayrıca bu problem sonlu elemanlar yöntemine dayanan ANSYS paket programı ile de sayısal analiz yapılmıştır. Problemden, kütle kuvvetleri ihmal edilmiş ve sürtünmenin bulunmadığı kabul edilmiştir.

Çalışmadaki amaç, iki elastik tabaka ve alt tabaka ile çeyrek düzlemler arasındaki temas uzunluklarını, temas gerilmelerini ve düşey y simetri eksenini boyunca oluşan normal gerilmeleri ve bu eksen yakınlarındaki kayma gerilmelerini elde etmektir. Çalışmanın diğer bir amacı elde edilen teorik ve sayısal sonuçları karşılaştırmak ve yakınsaklığı göstermektir.

Birinci bölümde, temas problemlerinin tarihsel gelişiminden bahsedilmiş ve temas problemleri ile ilgili daha önce yapılmış bazı çalışmalar özetlenmiştir. Yine bu bölümde, tabakalar ve çeyrek düzlemler için elastisite teorisine ait temel denklemler ve integral dönüşüm teknikleri kullanılarak kartezyen ve polar koordinatlardaki gerilme ve yer değiştirme ifadeleri elde edilmiştir. Ayrıca sonlu elemanlar yöntemi hakkında bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde, problemin tanımı yapılmış ve problemin çözümü ilk olarak elastisite teorisine göre yapılmıştır. Birinci bölümde verilen gerilme ve yer değiştirme ifadeleri sınır şartlarında yerlerine yazılarak tabakalara ve çeyrek düzlemlere ait gerilme ve yer değiştirme ifadelerindeki katsayılar hesaplanmıştır. Tabakalar ve çeyrek düzlemler için elde edilen katsayılar kullanılmayan diğer iki sınır şartında yerlerine yazılarak iki integral denklemden oluşan bir integral denklem sistemi elde edilmiştir. İntegral denklem sisteminin sayısal çözümü, denge şartları da dikkate alınarak, Gauss-Jacobi integrasyon formülasyonu ile gerçekleştirilmiş ve tabakalar ve alt tabaka ile çeyrek düzlemler arasındaki temas uzunlukları, temas gerilme dağılımları, düşey y -simetri eksenini boyunca normal gerilmeler ve bu eksen yakınlarındaki kayma gerilmeleri elde edilmiştir. Ayrıca bu bölümde, sonlu elemanlar paket programında kullanılan ağ yapısı ve eleman tiplerinin uygunluğunu doğrulamak açısından literatürde bulunan bir ayrılmalı temas problemi incelenmiştir. Bu problemle sonlu elemanlar paket programının temas problemlerinde teorik sonuçlara yakın sonuçlar verdiği görülmüştür. Aynı yaklaşımlığı gösterebilmek amacıyla yukarıda ele alınan çeyrek düzlemler üzerindeki tabakalara ait temas problemi sonlu elemanlar paket programı ile ayrıca analiz edilmiştir.

Üçüncü bölümde, probleme ilişkin sayısal uygulamalar yapılmıştır. Farklı yük, malzeme ve geometrik büyüklüklere göre temas uzunlukları, temas gerilmeleri, y simetri eksenini boyunca oluşan normal gerilmeler ve bu eksen yakınlarındaki kayma gerilmeleri teorik çözümdeki ifadeler yardımıyla elde edilmiş; bunların değişimleri tablolar ve grafiklerle sunulmuş, sonuçlar irdelenmiştir. Yine bu bölümde, sonlu elemanlar paket

programı ile yapılan çözümden elde edilen sayısal sonuçlar teorik sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Dördüncü bölümde, bu çalışmadan çıkartılan sonuçlar ve öneriler verilmiştir. Bu son bölümü yararlanılan kaynaklar ve özgeçmiş izlemektedir.

1.4. Tabakalar İçin Genel Denklemlerin Elde Edilmesi

Bu kısımda, elastisite teorisinden yararlanılarak tabakalar için gerilme ve yer değiştirme bileşenlerinin genel ifadeleri elde edilmektedir. Bu amaçla, bünye denklemleri ve yer değiştirme-şekil değiştirme bağıntıları kullanmak suretiyle denge denklemleri, yer değiştirmeler cinsinden yazılarak Navier denklemleri elde edilmektedir. Yer değiştirme bileşenlerinin gerekli türevleri Navier denklemlerinde yerine yazılarak elde edilen adi diferansiyel denklem takımının çözümü sonucunda da yer değiştirme bileşenlerinin genel ifadeleri bulunmaktadır. Bu ifadelerin bünye denklemlerinde yerine yazılması ile gerilme bileşenlerinin genel ifadeleri elde edilmektedir (Birinci, 1998).

Üç boyutlu halde X , Y ve Z kütle kuvvetlerini, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ ve τ_{yz} de gerilme bileşenlerini göstermek üzere denge denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \quad (3)$$

Bu denklemlerde geçen gerilme bileşenleri, bünye denklemleri ve yer değiştirme şekil değiştirme bağıntıları kullanılarak aşağıdaki gibi tanımlanabilmektedir.

$$\sigma_x = \lambda e + 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (4)$$

$$\sigma_y = \lambda e + 2\mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (5)$$

$$\sigma_z = \lambda e + 2\mu \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (6)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (7)$$

$$\tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (8)$$

$$\tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (9)$$

Yukarıdaki ifadelerde geçen u , v ve w sırasıyla x , y ve z doğrultularındaki yer değiştirme bileşenlerini göstermektedir. Ayrıca e hacim değiştirme oranını, λ Lamé sabitini ve μ ise kayma modülünü göstermekte olup, bu büyüklükler aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (10)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (11)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (12)$$

(11) ve (12) nolu denklemlerdeki E ve ν sırasıyla elastisite modülünü ve Poisson oranını göstermektedir. Ayrıca $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ olduğu bilinmektedir.

(4-9) ifadelerinin gerekli türevleri alınıp (1-3) ifadelerinde yerlerine yazılmasıyla Navier denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + X = 0 \quad (13)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + Y = 0 \quad (14)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial z} + \mu \nabla^2 w + Z = 0 \quad (15)$$

Bu denklemlerde ∇^2 , Laplace operatörü olup aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (16)$$

Düzlem halde Navier denklemleri,

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + X = 0 \quad (17)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + Y = 0 \quad (18)$$

olarak yazılabilir. Bu ifadelerdeki hacim değiştirme oranı e ve Laplace operatörü ∇^2 'nin iki boyutlu problemlerde,

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (19)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (20)$$

şeklinde olacağı açıktır. Ele alınan problemde kütle kuvvetleri ihmal edileceğinden Navier denklemleri aşağıdaki hale gelir.

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x} + \mu \nabla^2 u = 0 \quad (21)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial y} + \mu \nabla^2 v = 0 \quad (22)$$

Problemin y eksenine göre simetrik olması nedeniyle, u ve v yer değiştirme bileşenleri aşağıdaki eşitlikleri sağlarlar.

$$u(x, y) = -u(-x, y) \quad (23)$$

$$v(x, y) = v(-x, y) \quad (24)$$

Tabakalar için $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ yer değiştirme bileşenleri, Fourier sinüs ve Fourier kosinüs dönüşümleri şeklinde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \phi(\alpha, y) \sin(\alpha x) d\alpha \quad (25)$$

$$v(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \psi(\alpha, y) \cos(\alpha x) d\alpha \quad (26)$$

Bu ifadelerin ters Fourier dönüşümleri ise,

$$\phi(\alpha, y) = \int_0^{\infty} u(x, y) \sin(\alpha x) dx \quad (27)$$

$$\psi(\alpha, y) = \int_0^{\infty} v(x, y) \cos(\alpha x) dx \quad (28)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadelerdeki $\phi(\alpha, y)$ ve $\psi(\alpha, y)$ fonksiyonları $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ fonksiyonlarının ters Fourier dönüşüm fonksiyonları olup, bu fonksiyonlar

bilinmemektedir. Bu fonksiyonların belirlenebilmesi için (21) nolu denklem $\sin(\alpha x)dx$, (22) nolu denklem ise $\cos(\alpha x)dx$ ile çarpılıp $(0, +\infty)$ aralığında integre edilirse,

$$\int_0^{\infty} \left[(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x \partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2} \right) \right] \sin(\alpha x) dx = 0 \quad (29)$$

$$\int_0^{\infty} \left[(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial y^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial y^2} \right) \right] \cos(\alpha x) dx = 0 \quad (30)$$

ifadeleri elde edilir. (27) ve (28) nolu denklemlerde geçen u ve v 'nin bu ifadelerde yerine konulmak üzere gerekli türevleri alınırsa,

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} \sin(\alpha x) dx = -\alpha^2 \phi \quad (31)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2} \sin(\alpha x) dx = \frac{d^2 \phi}{dy^2} \quad (32)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x \partial y} \sin(\alpha x) dx = -\alpha \frac{d\psi}{dy} \quad (33)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2} \cos(\alpha x) dx = -\alpha^2 \psi \quad (34)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial y^2} \cos(\alpha x) dx = \frac{d^2 \psi}{dy^2} \quad (35)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x \partial y} \cos(\alpha x) dx = \alpha \frac{d\phi}{dy} \quad (36)$$

ifadeleri elde edilir. Bu eşitliklerin elde edilmesinde kısmi integrasyon uygulanmış ve aşağıdaki sınır şartları dikkate alınmıştır.

$$u(0) = u(\infty) = v(\infty) = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\infty} = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=\infty} = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (37)$$

(31-36) nolu denklemler olarak elde edilen türev ifadeleri (29) ve (30) nolu denklemlerde yerlerine konulur ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$-(\lambda + 2\mu)\alpha^2\phi + \mu\phi'' - (\lambda + \mu)\alpha\psi' = 0 \quad (38)$$

$$(\lambda + 2\mu)\psi'' - \alpha^2\mu\psi + (\lambda + \mu)\alpha\phi' = 0 \quad (39)$$

şeklinde adi diferansiyel denklem takımı elde edilmiş olur. Bu adi diferansiyel denklem takımında üsler y 'ye göre türevleri göstermektedir. (38) nolu denklem y 'ye göre iki defa, (39) nolu denklem y 'ye göre bir defa türetilirse,

$$-(\lambda + 2\mu)\alpha^2\phi'' + \mu\phi^{IV} - (\lambda + \mu)\alpha\psi''' = 0 \quad (40)$$

$$(\lambda + 2\mu)\psi''' - \alpha^2\mu\psi' + (\lambda + \mu)\alpha\phi'' = 0 \quad (41)$$

ifadeleri elde edilir. (40) nolu denklemden ψ''' çekilip (41) nolu denklemde yerine konulursa,

$$(\lambda + 2\mu)\frac{1}{\alpha(\lambda + \mu)}[\mu\phi^{IV} - (\lambda + 2\mu)\alpha^2\phi''] - \alpha^2\mu\psi' + \alpha(\lambda + \mu)\phi'' = 0 \quad (42)$$

bulunur. Bu denklemden de ψ' çekilip (38) nolu denklemde yerine yazılır ve düzenlenirse ϕ 'ye göre dördüncü mertebeden sabit katsayılı, lineer, homojen diferansiyel denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\phi^{IV} - 2\alpha^2\phi'' + \alpha^4\phi = 0 \quad (43)$$

Bu diferansiyel denklemin çözümü $\phi = e^{sy}$ şeklinde aranır ve bu çözümün gerekli türevleri alınıp (43) nolu denklemde yerine yazılırsa karakteristik denklem,

$$s^4 - 2\alpha^2 s^2 + \alpha^4 = 0 \quad (44)$$

olarak elde edilir. Bu denklemin kökleri $s_1 = s_2 = \alpha$ ve $s_3 = s_4 = -\alpha$ olarak belirlenir. Bu durumda (43) nolu adi diferansiyel denklem sisteminin çözümü aşağıdaki gibi elde edilmiş olur.

$$\phi(\alpha, y) = Ae^{-\alpha y} + Bye^{-\alpha y} + Ce^{\alpha y} + Dye^{\alpha y} \quad (45)$$

(38) nolu denklemin y 'ye göre bir defa türevi alınıp elde edilecek denklemden ψ^{II} ifadesi çekilerek (39) nolu denklemde yerine yazılırsa, $\psi(\alpha, y)$ bilinmeyen fonksiyonu, $\phi(\alpha, y)$ fonksiyonuna ve türevlerine bağlı olarak bulunur. Buradan gerekli türevler alınır ve yerlerine konulduktan sonra benzer işlemler yapılırsa,

$$\psi(\alpha, y) = Ae^{-\alpha y} + B\left(\frac{\kappa}{\alpha} + y\right)e^{-\alpha y} - Ce^{\alpha y} + D\left(\frac{\kappa}{\alpha} - y\right)e^{\alpha y} \quad (46)$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitlikde geçen κ bir malzeme sabiti olup düzlem şekil değiştirme halinde $\kappa = (3 - 4\nu)$, düzlem gerilme halinde ise $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ olduğu bilinmektedir. $\phi(\alpha, y)$ ve $\psi(\alpha, y)$ fonksiyonları sırasıyla (25) ve (26) nolu denklemlerde yerlerine yazılırsa tabakalara ait $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ yer değiştirme bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ [A + By]e^{-\alpha y} + [C + Dy]e^{\alpha y} \right\} \sin(\alpha x) d\alpha \quad (47)$$

$$v(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[A + B\left(\frac{\kappa}{\alpha} + y\right) \right] e^{-\alpha y} + \left[-C + D\left(\frac{\kappa}{\alpha} - y\right) \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (48)$$

Yukarıdaki eşitliklerde geçen A, B, C ve D sabitleri bilinmeyen katsayılar olup probleme ait sınır şartlarından elde edileceklerdir.

Düzlem halde, σ_x, σ_y ve τ_{xy} gerilme bileşenlerinin bünye denklemleri yardımıyla u ve v yer değiştirmeleri cinsinden aşağıdaki gibi yazılabileceği bilinmektedir.

$$\sigma_x = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} \quad (49)$$

$$\sigma_y = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \quad (50)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (51)$$

u ve v yer değiştirme bileşenlerinin gerekli turevleri alınıp yukarıdaki bağıntılarında yerlerine yazılması ile tabakalara ait duzlem hal icin gerilme bileşenleri,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu} \sigma_x(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty & \left[\alpha(A + By) - \left(\frac{3-\kappa}{2} \right) B \right] e^{-\alpha y} + \\ & \left[\alpha(C + Dy) + \left(\frac{3-\kappa}{2} \right) D \right] e^{\alpha y} \right] \cos(\alpha x) d\alpha \end{aligned} \quad (52)$$

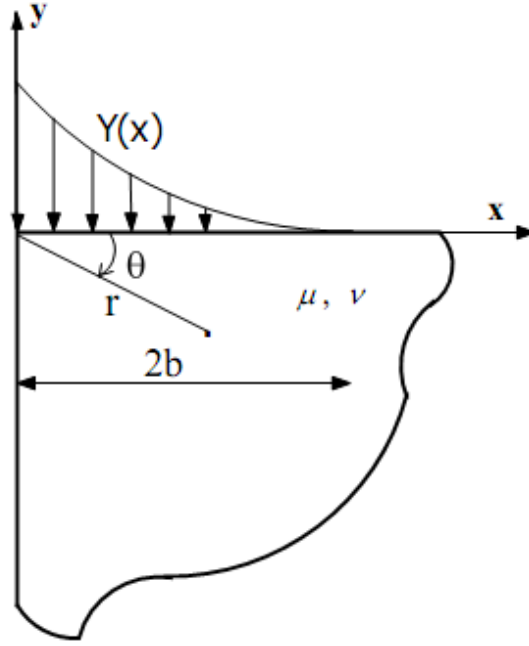
$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu} \sigma_y(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty & \left[-\left[\alpha(A + By) + \left(\frac{1+\kappa}{2} \right) B \right] e^{-\alpha y} + \right. \\ & \left. \left[-\alpha(C + Dy) + \left(\frac{1+\kappa}{2} \right) D \right] e^{\alpha y} \right] \cos(\alpha x) d\alpha \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu} \tau_{xy}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty & \left[-\left[\alpha(A + By) + \left(\frac{\kappa-1}{2} \right) B \right] e^{-\alpha y} + \right. \\ & \left. \left[\alpha(C + Dy) - \left(\frac{\kappa-1}{2} \right) D \right] e^{\alpha y} \right] \sin(\alpha x) d\alpha \end{aligned} \quad (54)$$

olarak bulunurlar.

1.5. Elastik Çeyrek Düzlem İçin Çözüm

Şekil 1'de görülen genel yükleme altındaki elastik çeyrek düzlem, ele alınan problemin bir parçasını oluşturmaktadır. Bu kısımda elastik, homojen ve izotrop kabul edilen çeyrek düzlemle ilgili denklemler elde edilecektir.



Şekil 1. Genel yükleme altındaki elastik bir çeyrek düzlem

1.5.1. Gerilme Fonksiyonlarının Mellin Dönüşümleri

Sınır değer problemlerinin çözümünde özellikle kamalar ve aksenal simetrik koniler gibi bazı özel geometrik durumlarda Mellin dönüşümleri kolaylık sağlamaktadır. Bu çalışmada, Mellin dönüşümü r radyal koordinatına göre alınır ve problem kompleks Mellin uzayına taşınmış olur (Sneddon, 1972).

Polar koordinatlarda tanımlı bir $f(r)$ fonksiyonunun Mellin dönüşümü,

$$f^M = \int_0^{\infty} f(r)r^{s-1}dr \quad (55)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada, s Mellin dönüşüm parametresidir. (55) nolu denklemin ters Mellin dönüşümü ise;

$$f(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta-i\infty}^{\zeta+i\infty} f^M r^{-s} ds \quad (0 \leq r < \infty) \quad (56)$$

olarak ifade edilir. Burada $f(r)$, $(0, \infty)$ aralığında integralı alınabilen bir fonksiyondur. n . dereceye kadar türevleri var olan bir $f(r)$ fonksiyonu için,

$$\left(r^{s+m} \frac{d^m f(r)}{dr^m} \right) \rightarrow 0 \quad (0 \leq r < \infty), \quad m=1, \dots, n-1 \quad (57)$$

olmak üzere,

$$(f^n)^M = \int_0^\infty r^n \frac{d^n f(r)}{dr^n} r^{s+1} = (-1)^n \frac{\Gamma(s+n)}{\Gamma(s)} f^M \quad (58)$$

ifadesi geçerlidir (Sneddon, 1972). Polar koordinatlarda tanımlı $\phi(r, \theta)$ Airy gerilme fonksiyonunun Mellin dönüşümü ise;

$$\phi^M = \int_0^\infty \phi(r, \theta) r^{s-1} dr \quad (59)$$

şeklinde yazılabilir. Polar koordinatlarda iki boyutlu elastisite problemlerinin gerilme fonksiyonu cinsinden uygunluk denklemi,

$$\nabla^4 \phi(r, \theta) = 0 \quad (60)$$

şeklindedir. Bu denklem açık olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}\right) = 0 \quad (61)$$

(61) nolu denkleme Mellin dönüşümü uygulanır ve (58) denkleminde yararlanılırsa,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + s^2\right)\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + (s+2)^2\right]\phi^M = 0 \quad (62)$$

ifadesi elde edilir. Bu denklemin genel çözümü aşağıdaki gibidir.

$$\phi^M(s, \theta) = F_1 e^{is\theta} + F_2 e^{-is\theta} + G_1 e^{i(s+2)\theta} + G_2 e^{-i(s+2)\theta} \quad (63)$$

Burada F_1, F_2, G_1 ve G_2 karmaşık integrasyon katsayıları olup s 'nin fonksiyonlarıdır.

Polar koordinatlarda, kütle kuvvetsiz halde gerilme bileşenleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\sigma_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} \quad (64)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} \quad (65)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) \quad (66)$$

1.5.2. Yer Değiştirmelerle İlgili Bazı Mellin Dönüşüm Uygulamaları

İki boyutlu elastisitede polar koordinatlarda u_r ve u_θ yer değiştirmeleri,

$$2\mu u_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} + (1-\nu)r\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \quad (67)$$

$$2\mu u_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + (1-\nu)r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (68)$$

şeklindedir. Burada ψ fonksiyonu,

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (69)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = \nabla^2 \phi \quad (70)$$

şartlarını sağlar. (68) ifadesinin r değişkenine göre türevi alınırsa,

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial r} = \frac{1}{2\mu} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} + (1-\nu) \left(2r \frac{\partial \psi}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right) \right] \quad (71)$$

olarak elde edilir. (71) nolu denkleme r^2 ile çarpılmış olarak Mellin dönüşümü uygulanırsa,

$$2\mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} r^2 \right)^M = (s+1) \frac{\partial \phi^M}{\partial \theta} + (1-\nu) [(s+2)(s+1)] \psi^M(s+2, \theta) \quad (72)$$

ifadesi bulunur. Bu ifadede,

$$\psi^M(s+2, \theta) = \frac{1}{(s+1)(s+2)^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + s^2 \right] \frac{\partial \phi^M}{\partial \theta} \quad (73)$$

olarak yerine yazılırsa;

$$2\mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} r^2 \right)^M = \frac{\partial \phi^M}{\partial \theta} \left[(s+1) + \frac{(1-\nu)}{(s+2)} s^2 \right] + \frac{(1-\nu)}{(s+2)} \frac{\partial^3 \phi^M}{\partial \theta^3} \quad (74)$$

denklemler elde edilir. Daha önce elde edilen (63) nolu gerilme fonksiyonunun θ değişkenine göre 1., 2. ve 3. türevleri alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa aşağıdaki türev ifadeleri elde edilmiş olur.

$$\frac{\partial \phi^M}{\partial \theta} = F_1 i s e^{is\theta} - F_2 i s e^{-is\theta} + G_1 i (s+2) e^{i(s+2)\theta} - G_2 i (s+2) e^{-i(s+2)\theta} \quad (75)$$

$$\frac{\partial^2 \phi^M}{\partial \theta^2} = -F_1 s^2 e^{is\theta} - F_2 s^2 e^{-is\theta} - G_1 (s+2)^2 e^{i(s+2)\theta} - G_2 (s+2)^2 e^{-i(s+2)\theta} \quad (76)$$

$$\frac{\partial^3 \phi^M}{\partial \theta^3} = -F_1 i s^3 e^{is\theta} + F_2 i s^3 e^{-is\theta} - G_1 i (s+2)^3 e^{i(s+2)\theta} + G_2 i (s+2)^3 e^{-i(s+2)\theta} \quad (77)$$

Bu türev ifadeleri (74) nolu denklemde yerlerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa, polar koordinatlarda yer değiştirmenin r değişkenine göre türevinin Mellin dönüşümü aşağıdaki gibi elde edilmiş olur.

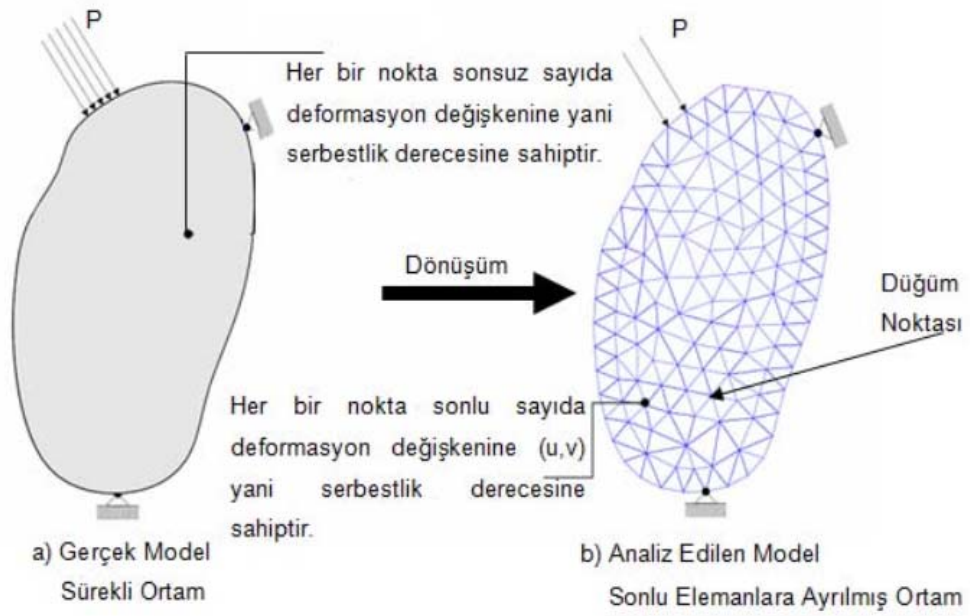
$$2\mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} r^2 \right)^M = s(s+1) i \left[F_1 e^{is\theta} - F_2 e^{-is\theta} \right] + i \left[(s+1)(s+2) + (1-\nu)(-4s-4) \right] \left[G_1 e^{i(s+2)\theta} - G_2 e^{-i(s+2)\theta} \right] \quad (78)$$

1.6. Sonlu Elemanlar Yöntemi

Sonlu elemanlar yöntemi, günümüzde karmaşık mühendislik problemlerinin hassas olarak çözülmesinde etkin olarak kullanılan sayısal bir yöntemdir. İlk defa 1956 yılında uçak gövdelerinin gerilme analizi için geliştirilmiş olan bu yöntemin, daha sonraki on yıl içerisinde uygulamalı bilimler ve mühendislik problemlerinin çözümünde de kullanılabileceği anlaşılmıştır. Daha sonraki yıllarda ise sonlu elemanlar yöntemi ve çözüm teknikleri hızlı gelişmeler kaydetmiş ve günümüzde birçok pratik problemin çözümü için kullanılan en iyi yöntemlerden birisi olmuştur.

Sonlu elemanlar yöntemindeki temel düşünce; Şekil 2'de görüldüğü gibi karmaşık bir probleme, problemi basite indirgeyerek bir çözüm bulmaktır. Esas problemin daha basit bir probleme indirgenmiş olması nedeni ile kesin sonuç yerine yaklaşık bir sonuç elde

edilmekte, ancak bu sonucun çözüm için daha fazla çaba harcıyarak iyileştirilmesi ve kesin sonuca çok yaklaşılması, hatta kesin sonuca ulaşılması mümkün olmaktadır.



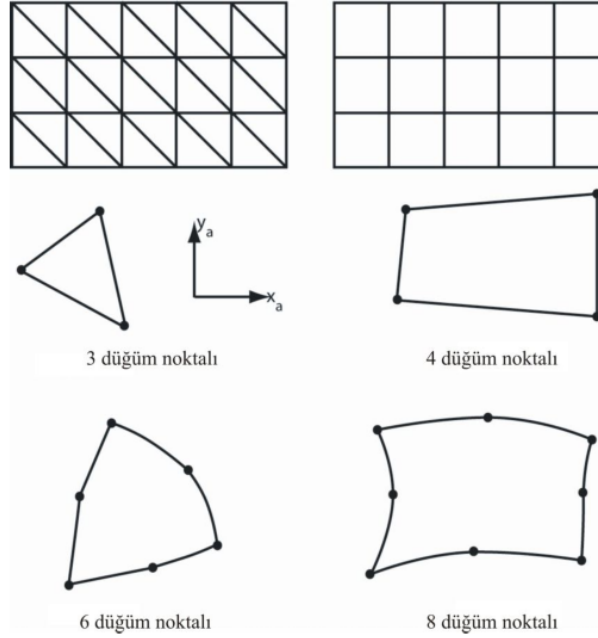
Şekil 2. Sonlu elemanlar yöntemi (Uncuoğlu, 2009)

Aşağıda sonlu elemanlar yöntemine ait çözüm adımları ayrıntılı olarak tanımlanmıştır.

A) Elemanlara ayırma: Sonlu elemanlar metodunda ilk uygulama adımı, yapının veya çalışmak istenilen alanın sonlu sayıda küçük elemanlara bölünmesidir. Buradaki amaç bir diferansiyel denklemin çözümünü basitleştirmektir. Sonlu elemanlara ayırma veya ağ üretme işlemi geniş uygulama alanları için kullanılmaktadır. Ancak, esas kullanım alanı sonlu elemanlar yöntemi içerisinde kullanılmasıdır. Basit geometriler (yapılar) veya az sayıda elemanlar için işlemler matrisle tanımlanıp sayısal olarak elle yapılabilir. Fakat, eleman sayısının azlığı sonuçların hassasiyetini etkiler. Diğer taraftan, karmaşık geometriler veya çok sayıda elemanlar için bu işlemlerin elle çözülmesi imkânsız hale gelmektedir. Bugün birçok problemde binlerce eleman kullanılmaktadır. Bu işlemlerin çözümü ise bilgisayarlar tarafından yapılmaktadır (Selçuk, 2009).

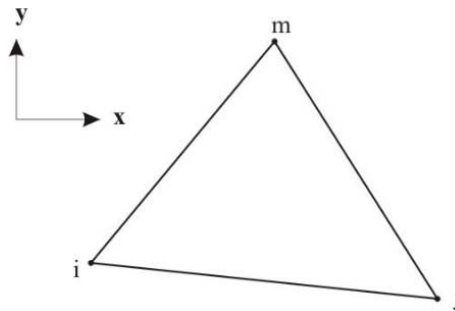
Sonlu elemanlar metodunda incelenecek geometri veya yapı uygun parçalara ayrılmalıdır. Genellikle iki boyutlu problemler için üçgen veya dörtgen şekilli elemanlar kullanılır (Potts ve Zdravkovic, 1999). Bu belirli geometriler üzerindeki anahtar noktalar

düğüm noktası veya nod olarak isimlendirilir. Bu noktalar genellikle elemanın köşe noktalarıdır. Bu sistem içerisinde elemanlar birbirlerine kenarlarından ve düğüm noktalarından bağlıdırlar (Şekil 3).



Şekil 3. Tipik iki boyutlu sonlu elemanlar

B. Yaklaşım modeli (Şekil fonksiyonu): Sonlu elemanlar yönteminde üçgen veya dörtgen şekilli elemanlar tanımlandıktan sonra bu elemanların köşelerinde bulunan düğüm noktalarının yardımı ile herhangi bir sürekli fonksiyon için polinom eşitliklerinden faydalanarak bu fonksiyona yaklaşım sağlanır.



Şekil 4. Üçgen eleman ve polinom yaklaşımı

Bu yaklaşım bir üçgen eleman için Şekil 4'de gösterilmiştir. Üçgenin köşe noktalarında toplam üç düğüm noktası mevcut olup, komşu elemanlara bu düğümler vasıtasıyla bağlanır. Üçgen eleman için bilinmeyen değerler polinom (yer değiştirme) denklemleri ile tanımlanır ve polinom denkleminin kuvveti eleman içindeki düğüm noktalarının sayısına bağlıdır. Eleman içindeki bilinmeyen değerler aşağıdaki gibi bir polinom eşitliğinde verilir.

$$\varphi(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y \quad (79)$$

Bu eşitlik içerisinde tanımlı a_1, a_2 ve a_3 sabit katsayı değerleri düğüm noktalarının koordinatlarına bağlı olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned} \varphi(x_i, y_i) &= a_1 + a_2x_i + a_3y_i \\ \varphi(x_j, y_j) &= a_1 + a_2x_j + a_3y_j \\ \varphi(x_m, y_m) &= a_1 + a_2x_m + a_3y_m \end{aligned} \quad (80)$$

Bu denklem sistemlerinin matris formu aşağıdaki (81) ifadesi şeklinde olacaktır. Yazılan bu matris formunda, a_1, a_2 ve a_3 değerleri düğüm noktalarında tanımlı φ_i, φ_j ve φ_m terimleri içinde çözülür.

$$\begin{bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ \varphi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (81)$$

$$\varphi = \frac{1}{2\Delta} \left[(a_i + b_ix + c_iy)\varphi_i + (a_j + b_jx + c_jy)\varphi_j + (a_m + b_mx + c_my)\varphi_m \right] \quad (82)$$

Bu eşitlik içinde $\Delta, (ijm)$ üçgenin alanını temsil eder. a_i, b_i ve c_i katsayıları ise aşağıdaki eşitliklerle tanımlanır.

$$\begin{aligned}
a_i &= x_j y_m - x_m y_j \\
b_i &= y_j - y_m \\
c_i &= x_m - x_j
\end{aligned} \tag{83}$$

Diğer indislere bağlı katsayılar (j ve m) sıra içerisinde permütasyon yapılarak elde edilir. (82) ifadesiyle verilen denklem daha basit olarak matris formunda düzenlenebilir.

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} a_i & a_j & a_m \\ b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ \varphi_m \end{bmatrix} \tag{84}$$

Burada;

$$2\Delta = \det \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \tag{85}$$

formuyla elde edilir.

$$\begin{bmatrix} N_i & N_j & N_m \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i & a_j & a_m \\ b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \end{bmatrix} \tag{86}$$

(86) nolu denklem gibi tanımlama yapılırsa, N_i, N_j ve N_m değişkenleri şekil fonksiyon olarak isimlendirilir. Şekil fonksiyonu denklemini sadece elemanın koordinatlarına bağlıdır. Yukarıdaki (82) denklemini standart eşitlik olarak aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\begin{aligned}
\varphi &= N_i \varphi_i + N_j \varphi_j + N_m \varphi_m \\
N_i &= \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2\Delta}
\end{aligned} \tag{87}$$

Burada bir elemandaki alan değeri elemanın düğüm noktalarında tanımlanan alan değeri ve şekil fonksiyonları cinsinden tanımlanmıştır. Hesaplanması gereken noktalardaki

(φ_i, φ_j ve φ_m) değerleri tanımlı denklemlerin çözümünden elde edilir (Zienkiewicz ve Taylor, 2000).

Yukarıda bahsedildiği gibi elemanın herhangi bir yerindeki koordinatı, düğüm noktası koordinatlarına bağlı olarak polinom (yer değiştirme) fonksiyonları cinsinden ifade edilir (Desai ve Abe, 1972). Şekil fonksiyonları eleman ve geometrik rijitlik matrislerinin türetilmesinde kullanılır. Eleman ve geometrik rijitlik matrisleri yapının toplam rijitlik matrisinin oluşturulması için birleştirilir.

C) Rijitlik matrisi: Eleman rijitlik matrisini hesaplayabilmek için yer değiştirme fonksiyonlarının oluşturulması gerekir. Daha sonra aşağıda genel ifadesi ile verilen rijitlik matrisi oluşturulur.

$$K = \sum_e \int [B]^{(e)T} [C]^e [B]^{(e)} dx dy \quad (88)$$

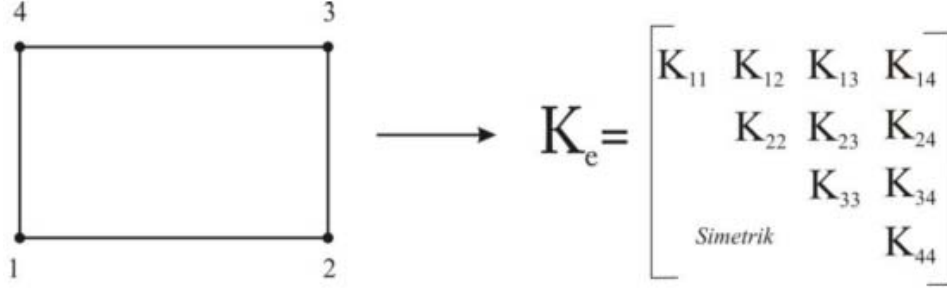
Burada; [C] malzeme özelliklerine bağlı matristir. [B] matrisindeki elemanlar yerel koordinat (x, y, z) eksenlerinin fonksiyonudurlar ve yer değiştirme matrisini ifade ederler (Bathe, 2004).

Her eleman için elde edilen rijitlik matrislerinin oluşturulmasından sonra sonlu elemanlar ağına bağlı şekilde birleştirilerek genel rijitlik matrisi elde edilir. Bu birleştirme yöntemine ait detaylı bilgi aşağıda sunulmuştur. Sonlu elemanlar yönteminde bundan sonraki adım, elde edilen genel rijitlik matrisi yük vektörleri ve denge denklemleri sonlu elemanlar ağına bağlı olarak birleştirilmesi ve genel denge denklemlerinin elde edilmesidir.

(88) nolu denklemde verilen rijitlik matrisi formülünde ([C]) malzeme matrisi simetriktir. Dolayısıyla, genel rijitlik matrisi de simetrik özellikte olacaktır. Bu durum malzeme davranışının geniş bir aralığı için sağlanır ve lineer elastik malzeme davranışını içerir. Rijitlik matrisinin sıfırdan farklı terimleri elemanların serbestlik derecesindeki bağlantılarından ortaya çıkar. Her serbestlik derecesi sadece diğer serbestlik derecesinin en küçük numarasına eklenir. Böylece çok sayıda sıfırı içine alan genel rijitlik matrisi oluşur (Potts ve Zdravkovic, 1999).

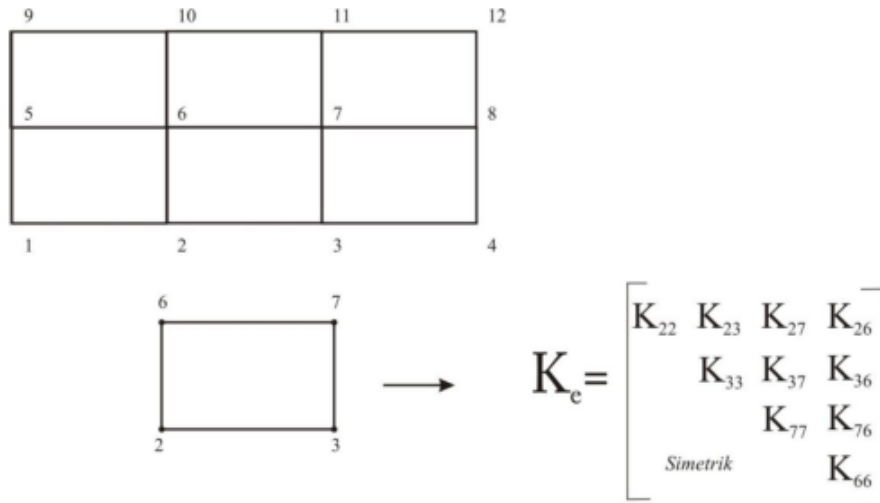
D) Genel rijitlik matrisinin oluşturulması: Bir eleman içerisindeki rijitlik matrisi terimi elemanın sahip olduğu serbestlik dereceleri arasındaki rölatif rijitliği ifade eder. Diğer taraftan, sonlu ağ içerisinde rijitlik matrisi terimi tüm ağ boyunca serbestlik

dereceleri arasındaki rölatif rijitliği ifade eder. Bu sebepten dolayı, genel rijitlik matrisinin boyutu toplam serbestlik derecesinin miktarına bağlıdır. Dört düğüm noktasından oluşmuş bir eleman için rijitlik matrisinin formu ve serbestlik derecesi numaralaması Şekil 5’de gösterilmiştir.

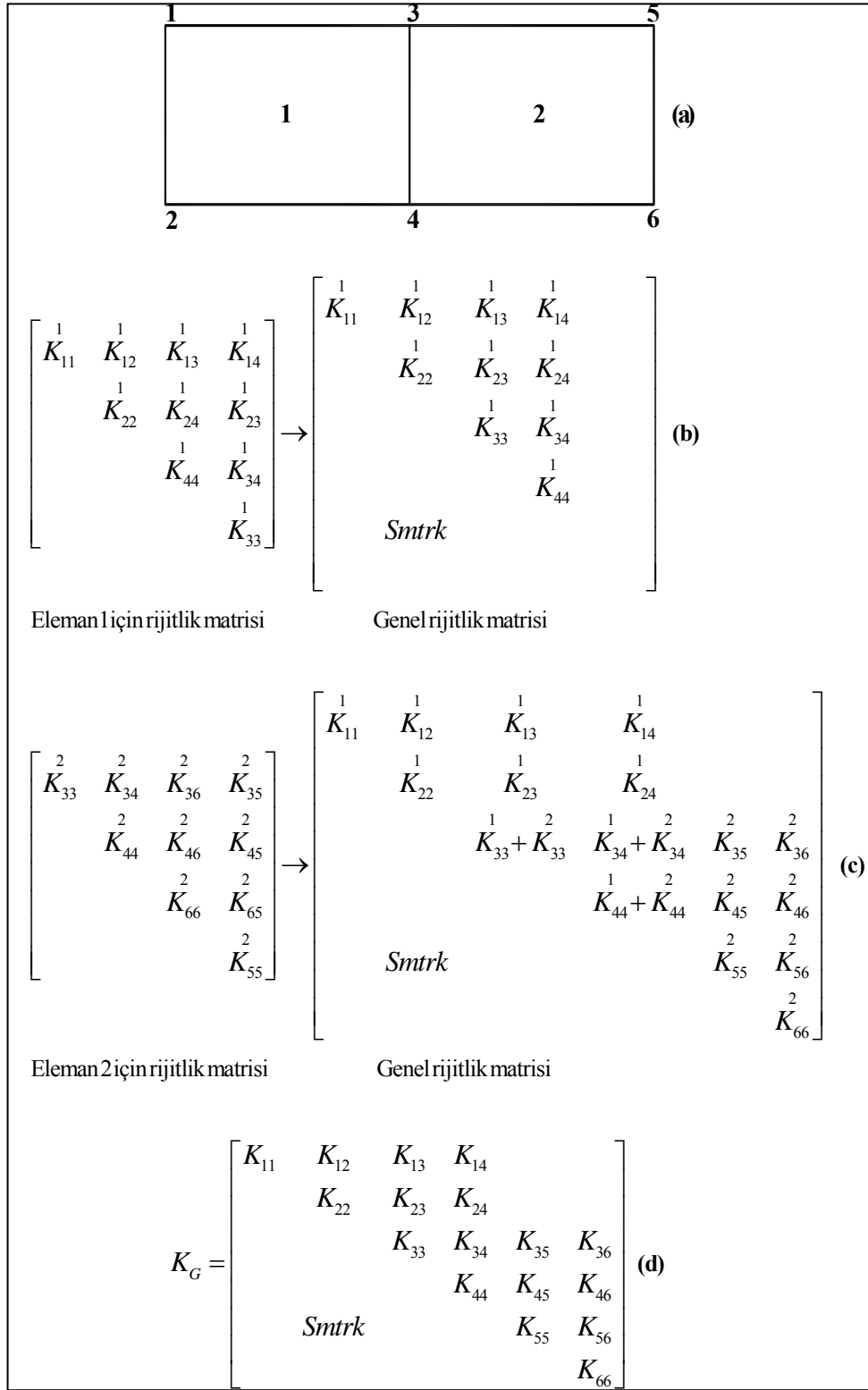


Şekil 5. Tek bir dörtgen elemana ait rijitlik matrisi

Eğer bu tek eleman sonlu elemanlar ağı içerisinde bir parçayı oluşturuyorsa, rijitlik matrisi Şekil 6’deki formu oluşturacaktır. Rijitlik matrisinin nümerik değerleri aynıdır. Fakat genel terimler içerisinde miktarı farklıdır. Örnek olarak, Şekil 5’de rijitlik matrisi terimi K_{11} serbestlik derecesinin 1 olduğunu ifade eder. Oysa Şekil 6’de aynı serbestlik derecesi genel serbestlik derecesi içerisinde 2 olarak görülmektedir. Bu yüzden, elemanın K_{22} ’nin genel değerine katkısı K_{11} ’e eşittir. Burada önemli bir not, eleman rijitlik matrisi içerisinde her kolon ve satır değeri elemanın serbestlik derecesini ifade etmesidir.



Şekil 6. Genel serbestlik derecesi terimleri içerisinde eleman rijitlik matrisleri



Şekil 7. İki elemanlı bir sonlu elemanlar ağında genel rijitlik matrisinin oluşturulması, a) İki elemanlı sonlu elemanlar ağı, b) İlk elemanın bağlanması, c) İkinci elemanın bağlanması, d) En son oluşan genel rijitlik matrisi

Genel serbestlik derecesi terimleri içerisinde açıklanan rijitlik matrisleri kullanılarak sistemin genel rijitlik matrisi oluşturulur. Şekil 7 iki elemandan oluşan basit bir sonlu elemanlar ağını ve serbestlik derecelerini göstermektedir. Bu şekilde basit bir ağ için sistemin genel rijitlik matrisinin nasıl oluşturulduğu açıklanmıştır. Burada not edilmesi gereken bir husus, serbestlik derecesi ve elemanların genel numaralandırılmaları arasındaki farklılığa bağlı olarak terimlerin tekrar sıralanmalarıdır. Bununla birlikte, genel rijitlik matrisi içindeki terimler serbestlik derecelerini ifade eder (Selçuk, 2009).

Genel rijitlik matrisinin yapısı bilgisayarın veya işlemcinin hafızasının etkin kullanılabilmesi için özellikle önemlidir. Genel rijitlik matrisinde sıfırdan farklı terimler sadece elemanın serbestlik dereceleri arasındaki bağlantılarda oluşur. Böylece genel rijitlik matrisi içinde her sıra için sıfırdan farklı olacak son terim en yüksek serbestlik derecesini ifade edecektir. Bu özellik rijitlik matrisinin genellikle dağınık ve bantlı yapıda oluşmasını sağlar (Potts ve Zdravkovic, 1999).

Sonlu elemanlar yöntemi içerisinde bundan sonraki adım genel denklemler içerisinde elemanlara ait denge denklemlerinin birleştirilmesidir.

$$[K_G]\{\varphi\}_{n_G} = \{R_G\} \quad (89)$$

Burada;

$[K_G]$: Genel rijitlik matrisi

$\{\varphi\}_{n_G}$: Tüm sonlu elemanlar ağı için bilinmeyen serbestlik derecelerini içeren vektör (Düğüm noktalarındaki bilinmeyen deplasman değerleri)

$\{R_G\}$: Genel yük vektörüdür.

Yukarıda verilen (89) denklemi yardımı ile düğüm noktasındaki bilinmeyen değerler hesaplanır. Örnek olarak, yukarıda verilen iki elemandan oluşan sistem için oluşturulan matris formundaki eşitlik aşağıdaki şekilde çözülür. Bu matris formunda (6x6) boyutlu matris sistemin genel rijitlik matrisidir. Bu matris düğüm koordinatlarına ve elemanın malzeme özelliklerine bağlıdır. $\varphi(3x1)$ matrisi düğüm noktalarındaki bilinmeyenleri veya deplasman değerlerini temsil eden boyuna matristir. R matrisi ise uygulanan sınır koşullarına bağlı boyuna matristir. Sonlu elemanlar yöntemi içerisinde sınır koşullarını temsil eden düğüm noktalarındaki değerler bu noktada belirtilmelidir. Genellikle bu değerler "0" (sıfır) olarak kabul edilir. Bu genel denge denklemleri problemin sınır şartları

uygulanarak düzeltildikten sonra düğüm noktalarındaki bilinmeyen değerler çözülmelidir (Selçuk, 2009).

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{21} & K_{13} & K_{14} & 0 & 0 \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & 0 & 0 \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{14} & K_{24} & K_{34} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ 0 & 0 & K_{35} & K_{45} & K_{55} & K_{56} \\ 0 & 0 & K_{36} & K_{46} & K_{56} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{bmatrix} \quad (90)$$

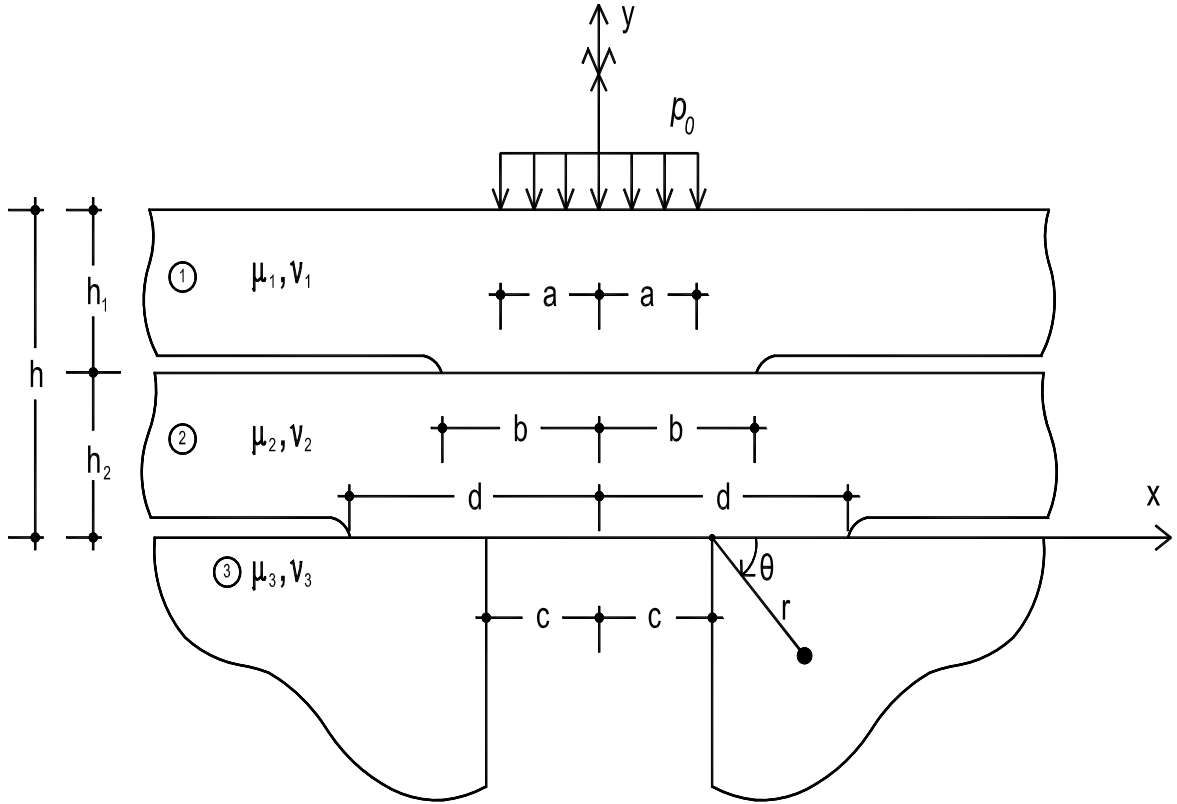
Bilgisayar teknolojisindeki gelişmelere bağlı olarak geliştirilen paket programlar sonlu elemanlar yönteminin etkin kullanımını sağlamaktadır. Sonlu elemanlar yöntemini kullanan çok sayıda bilgisayar programı mevcut olup, FLUENT, LS-DYNA, LINFLOW, ALGOR, COSMO/M, NASTRAN, ADINA ve ANSYS bunlara örnek verilebilir. Bu çalışmada ise problemin analizi için ANSYS paket programı kullanılmıştır.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Giriş

Bu bölümde, simetrik iki elastik çeyrek düzleme oturan elastik özellikleri ve yükseklikleri farklı iki elastik tabakanın sürtünmesiz temas probleminin çözümü ilk olarak elastisite teorisine göre yapılmış daha sonra aynı problem sonlu elemanlar paket programı kullanılarak çözülmüştür. Ayrıca programda kullanılan ağ yapısı ve eleman tiplerinin uygunluğunu doğrulamak açısından literatürde bulunan ayrılmalı bir temas problemi de sonlu elemanlar paket programı yardımıyla çözülmüştür.

2.2. Problemin Tanımı



Şekil 8. Problemin geometrisi

Şekil 8’de geometrisi verilen simetrik iki elastik çeyrek düzleme oturan elastik özellikleri ve yükseklikleri farklı iki tabakanın sürtünmesiz temas probleminde, 1 nolu tabaka üst yüzeyinden $(-a, a)$ aralığında simetrik yayılı yük etkisindedir. 1 nolu tabaka ile 2 nolu tabaka $(-b, b)$ aralığında ve 2 nolu tabaka ile çeyrek düzlemler (c, d) aralığında temas halindedir. h_1 ve h_2 tabaka yüksekliklerini, μ_i, ν_i ($i = 1,2,3$) tabakalara ve çeyrek düzlemlere ait elastik sabitleri göstermektedir. Çeyrek düzlemler ve tabakalar $(-\infty, +\infty)$ aralığında olup y eksenine göre simetrik olduğundan, hesaplar $(0 \leq x < \infty)$ aralığında yapılmıştır. Problem düzlem hal için incelendiğinden z eksenini doğrultusundaki kalınlık birim olarak alınmıştır. Çözümlerde sürtünmenin bulunmadığı kabul edilmiş ve kütle kuvvetlerinin etkisi ihmal edilmiştir. Problemden tabakalar ve çeyrek düzlemler homojen ve izotropdur.

2.3. Problemin Çözümü

2.3.1. Elastisite Teorisine Göre Teorik Çözüm

Bu kısımda, problem elastisite teorisi ve integral dönüşüm tekniği kullanılarak çözülmüştür. Problem; tabakalar için Fourier dönüşümleri, çeyrek düzlemler için Mellin dönüşümleri uygulanıp sınır şartlarının kullanılmasıyla, temas uzunluklarının ve temas gerilmelerinin bilinmeyen olduğu iki tekil integral denklemden oluşan bir integral denklem sistemine indirgenmiştir. İntegral denklem sisteminin sayısal çözümü Gauss-Jacobi integrasyon formülasyonu yardımıyla yapılmış ve denge denklemleri de sağlatılmak koşuluyla temas gerilmeleri ve temas uzunlukları belirlenmiştir.

2.3.1.1. Kullanılacak Denklemler

2.3.1.1.1. Tabakalar İçin Kullanılacak Denklemler

Yüksekliği h_1 olan 1 nolu tabakanın elastik sabitleri ν_1 ve μ_1 dir. Elastik sabitleri ν_2 ve μ_2 olan 2 nolu tabakanın yüksekliği ise h_2 dir. İki tabakanın toplam yüksekliği ise $h_1 + h_2 = h$ olarak verilmektedir. Burada verilmiş olan yükseklik ve elastik sabitlere göre

gerilme ve yer değiştirme ifadeleri, (47,48) ve (52-54) ifadelerinden faydalanılarak 1 ve 2 nolu tabakalar için aşağıdaki gibi yazılabilir.

1 nolu tabaka için ($0 \leq x < \infty$, $h_2 \leq y \leq h$):

$$u_1(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[(A_1 + B_1 y) e^{-\alpha y} + (C_1 + D_1 y) e^{\alpha y} \right] \sin(\alpha x) d\alpha \quad (91)$$

$$v_1(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\left(A_1 + \left(\frac{\kappa_1}{\alpha} + y \right) B_1 \right) e^{-\alpha y} + \left(-C_1 + \left(\frac{\kappa_1}{\alpha} - y \right) D_1 \right) e^{\alpha y} \right] \cos(\alpha x) d\alpha \quad (92)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu_1} \sigma_{x_1}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} & \left[\left[\alpha(A_1 + B_1 y) - \left(\frac{3 - \kappa_1}{2} \right) B_1 \right] e^{-\alpha y} + \right. \\ & \left. \left[\alpha(C_1 + D_1 y) + \left(\frac{3 - \kappa_1}{2} \right) D_1 \right] e^{\alpha y} \right] \cos(\alpha x) d\alpha \end{aligned} \quad (93)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu_1} \sigma_{y_1}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} & \left[- \left[\alpha(A_1 + B_1 y) + \left(\frac{\kappa_1 + 1}{2} \right) B_1 \right] e^{-\alpha y} \right. \\ & \left. \left[-\alpha(C_1 + D_1 y) + \left(\frac{\kappa_1 + 1}{2} \right) D_1 \right] e^{\alpha y} \right] \cos(\alpha x) d\alpha \end{aligned} \quad (94)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu_1} \tau_{xy_1}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} & \left[- \left[\alpha(A_1 + B_1 y) + \left(\frac{\kappa_1 - 1}{2} \right) B_1 \right] e^{-\alpha y} + \right. \\ & \left. \left[\alpha(C_1 + D_1 y) - \left(\frac{\kappa_1 - 1}{2} \right) D_1 \right] e^{\alpha y} \right] \sin(\alpha x) d\alpha \end{aligned} \quad (95)$$

2 nolu tabaka için ($0 \leq x < \infty$, $0 \leq y \leq h_2$):

$$u_2(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[(A_2 + B_2 y) e^{-\alpha y} + (C_2 + D_2 y) e^{\alpha y} \right] \sin(\alpha x) d\alpha \quad (96)$$

$$v_2(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\left(A_2 + \left(\frac{\kappa_2}{\alpha} + y \right) B_2 \right) e^{-\alpha y} + \left(-C_2 + \left(\frac{\kappa_2}{\alpha} - y \right) D_2 \right) e^{\alpha y} \right] \cos(\alpha x) d\alpha \quad (97)$$

$$\frac{1}{2\mu_2} \sigma_{x_2}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\left[\alpha(A_2 + B_2 y) - \left(\frac{3 - \kappa_2}{2} \right) B_2 \right] e^{-\alpha y} + \left[\alpha(C_2 + D_2 y) + \left(\frac{3 - \kappa_2}{2} \right) D_2 \right] e^{\alpha y} \right] \cos(\alpha x) d\alpha \quad (98)$$

$$\frac{1}{2\mu_2} \sigma_{y_2}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[- \left[\alpha(A_2 + B_2 y) + \left(\frac{\kappa_2 + 1}{2} \right) B_2 \right] e^{-\alpha y} \left[-\alpha(C_2 + D_2 y) + \left(\frac{\kappa_2 + 1}{2} \right) D_2 \right] e^{\alpha y} \right] \cos(\alpha x) d\alpha \quad (99)$$

$$\frac{1}{2\mu_2} \tau_{xy_2}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[- \left[\alpha(A_2 + B_2 y) + \left(\frac{\kappa_2 - 1}{2} \right) B_2 \right] e^{-\alpha y} + \left[\alpha(C_2 + D_2 y) - \left(\frac{\kappa_2 - 1}{2} \right) D_2 \right] e^{\alpha y} \right] \sin(\alpha x) d\alpha \quad (100)$$

Yukarıdaki ifadelerde geçen A_i, B_i, C_i ve D_i ($i = 1, 2$) bilinmeyen katsayılar olup probleme ait sınır şartlarından belirlenecektir.

2.3.1.1.2. Çeyrek Düzlemler İçin Kullanılacak Denklemler

Polar koordinatlarda gerilme ifadelerinin r^2 ile çarpımlarının Mellin dönüşümleri (64- 66) ifadelerinden faydalanılarak çeyrek düzlemler için aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$(r^2 \sigma_r)^M = \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - s \right) \phi^M \quad (101)$$

$$(r^2 \sigma_\theta)^M = s(s+1) \phi^M \quad (102)$$

$$(r^2 \tau_{r\theta})^M = (s+1) \frac{\partial}{\partial \theta} \phi^M \quad (103)$$

Burada (63) nolu ifadede belirtilen ϕ^M , sınır şartlarından belirlenecek F_1, F_2, G_1 ve G_2 katsayılarını içermektedir.

2.3.1.2. Problemin Sınır Şartları

Kütle kuvvetleri ihmal edilen probleme ait sınır şartları tabakalar ve çeyrek düzlemler için aşağıdaki gibi yazılabilir.

$u(x, y), v(x, y)$ yer değiştirme bileşenlerini ve $\sigma_x(x, y), \sigma_y(x, y), \tau_{xy}(x, y)$ gerilme bileşenlerini göstermek üzere tabakalara ait sınır şartları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\tau_{xy_1}(x, h) = 0 \quad (0 \leq x < \infty) \quad (104)$$

$$\sigma_{y_1}(x, h) = \begin{cases} -p_0 & (0 \leq x < a) \\ 0 & (a \leq x < \infty) \end{cases} ; \quad (105)$$

$$\tau_{xy_1}(x, h_2) = 0 \quad (0 \leq x < \infty) \quad (106)$$

$$\tau_{xy_2}(x, h_2) = 0 \quad (0 \leq x < \infty) \quad (107)$$

$$\sigma_{y_1}(x, h_2) = \begin{cases} -p_1(x) & (0 \leq x < b) \\ 0 & (b \leq x < \infty) \end{cases} ; \quad (108)$$

$$\sigma_{y_1}(x, h_2) = \sigma_{y_2}(x, h_2) \quad (0 \leq x < \infty) \quad (109)$$

$$\sigma_{y_2}(x, 0) = \begin{cases} -p_2(x) & (c < x < d) \\ 0 & (0 \leq x \leq c, d \leq x < \infty) \end{cases} ; \quad (110)$$

$$\tau_{xy_2}(x, 0) = 0 \quad (0 \leq x < \infty) \quad (111)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, h_2) - v_2(x, h_2)] = 0 \quad (0 \leq x < b) \quad (112)$$

$$\frac{\partial v_2(x,0)}{\partial x} = \frac{\partial u_\theta(r,0)}{\partial r} \quad (c < x < d) \quad (113)$$

Polar koordinatlarda, $u_r(r, \theta), u_\theta(r, \theta)$ yer değiştirme bileşenlerini ve $\sigma_r(r, \theta), \sigma_\theta(r, \theta), \tau_{r\theta}(r, \theta)$ gerilme bileşenlerini göstermek üzere elastik çeyrek düzleme ait sınır şartları ise aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\sigma_\theta(r, 0) = -p_2(r), \quad (c < r < d) \quad (114)$$

$$\tau_{r\theta}(r, 0) = 0, \quad (d < r < \infty) \quad (115)$$

$$\sigma_\theta(r, \pi/2) = 0, \quad (0 < r < \infty) \quad (116)$$

$$\tau_{r\theta}(r, \pi/2) = 0, \quad (0 < r < \infty) \quad (117)$$

Probleme ilişkin denge şartları da,

$$\int_{-b}^b p_1(x) dx = 2ap_0 \quad (118)$$

$$\int_c^d p_2(x) dx = ap_0 \quad (119)$$

şeklinde yazılabilir. Yukarıdaki ifadelerde geçen, p_0 yayılı yükün şiddetini, $p_1(x)$ 1 nolu tabaka ile 2 nolu tabaka arasında ve $p_2(x)$ ise 2 nolu tabaka ile çeyrek düzlemler arasında oluşan bilinmeyen temas gerilmelerini göstermektedir. c çeyrek düzlemin y simetri eksenine olan uzaklığını, $2a$ yayılı yükü genişliğini, b tabakalar arasındaki yarı temas uzunluğunu, $(d - c)$ ise 2 nolu tabaka ile çeyrek düzlem arasındaki yarı temas uzunluğunu göstermektedir.

2.3.1.3. Katsayıların Belirlenmesi

2.3.1.3.1. Tabakalar İçin Katsayıların Belirlenmesi

Yukarıda (91-100) denklemleri ile verilmiş olan gerilme ve yer değiştirme ifadelerinin (104-111) denklemleriyle gösterilen sınır şartlarında yerine yazılması ve ters Fourier dönüşüm alınması sonucunda A_i, B_i, C_i ve D_i ($i = 1,2$) katsayılarının içeren sekiz bilinmeyenli sekiz cebrik denklem elde edilir. Bu denklemler,

$$\left[-\alpha e^{-\alpha(h_1+h_2)} A_1 - \left(\alpha(h_1+h_2) + \frac{\kappa_1-1}{2} \right) e^{-\alpha(h_1+h_2)} B_1 + \alpha e^{\alpha(h_1+h_2)} C_1 + \left(\alpha(h_1+h_2) - \frac{\kappa_1-1}{2} \right) e^{\alpha(h_1+h_2)} D_1 \right] = 0 \quad (120)$$

$$\left[-\alpha e^{-\alpha(h_1+h_2)} A_1 - \left(\alpha(h_1+h_2) + \frac{\kappa_1+1}{2} \right) e^{-\alpha(h_1+h_2)} B_1 - \alpha e^{\alpha(h_1+h_2)} C_1 + \left(-\alpha(h_1+h_2) + \frac{\kappa_1+1}{2} \right) e^{\alpha(h_1+h_2)} D_1 \right] = P(\alpha) \quad (121)$$

$$-\alpha e^{-\alpha h_2} A_1 - \left(\alpha h_2 + \frac{\kappa_1-1}{2} \right) e^{-\alpha h_2} B_1 + \alpha e^{\alpha h_2} C_1 + \left(\alpha h_2 - \frac{\kappa_1-1}{2} \right) e^{\alpha h_2} D_1 = 0 \quad (122)$$

$$-\alpha e^{-\alpha h_2} A_2 - \left(\alpha h_2 + \frac{\kappa_2-1}{2} \right) e^{-\alpha h_2} B_2 + \alpha e^{\alpha h_2} C_2 + \left(\alpha h_2 - \frac{\kappa_2-1}{2} \right) e^{\alpha h_2} D_2 = 0 \quad (123)$$

$$\left[-\alpha e^{-\alpha h_2} A_1 - \left(\alpha h_2 + \frac{\kappa_1+1}{2} \right) e^{-\alpha h_2} B_1 - \alpha e^{\alpha h_2} C_1 + \left(-\alpha h_2 + \frac{\kappa_1+1}{2} \right) e^{\alpha h_2} D_1 \right] = P_1(\alpha) \quad (124)$$

$$\left[-\alpha e^{-\alpha h_2} A_1 - \left(\alpha h_2 + \frac{\kappa_1+1}{2} \right) e^{-\alpha h_2} B_1 - \alpha e^{\alpha h_2} C_1 + \left(-\alpha h_2 + \frac{\kappa_1+1}{2} \right) e^{\alpha h_2} D_1 \right] - m \left[-\alpha e^{-\alpha h_2} A_2 - \left(\alpha h_2 + \frac{\kappa_2+1}{2} \right) e^{-\alpha h_2} B_2 - \alpha e^{\alpha h_2} C_2 + \left(-\alpha h_2 + \frac{\kappa_2+1}{2} \right) e^{\alpha h_2} D_2 \right] = 0 \quad (125)$$

$$\left[-\alpha A_2 - \left(\frac{\kappa_2 + 1}{2} \right) B_2 - \alpha C_2 + \left(\frac{\kappa_2 + 1}{2} \right) D_2 \right] = P_2(\alpha) \quad (126)$$

$$\left[-\alpha A_2 - \left(\frac{\kappa_2 - 1}{2} \right) B_2 + \alpha C_2 - \left(\frac{\kappa_2 - 1}{2} \right) D_2 \right] = 0 \quad (127)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklem takımının çözümü ile A_i, B_i, C_i ve D_i ($i = 1, 2$) katsayıları, bilinmeyen temas gerilmeleri $p_1(x)$ ve $p_2(x)$ 'e bağlı olarak aşağıdaki gibi bulunurlar.

$$A_1 = \frac{1}{2\alpha\Delta_1} [P(\alpha)A_{11} + P_1(\alpha)A_{12}] \quad (128)$$

$$B_1 = -\frac{1}{\Delta_1} [P(\alpha)B_{11} + P_1(\alpha)B_{12}] \quad (129)$$

$$C_1 = -\frac{1}{2\alpha\Delta_1} [P(\alpha)C_{11} + P_1(\alpha)C_{12}] \quad (130)$$

$$D_1 = \frac{1}{\Delta_1} [P(\alpha)D_{11} + P_1(\alpha)D_{12}] \quad (131)$$

$$A_2 = -\frac{1}{2\alpha\Delta_2} [P_1(\alpha)A_{21} + P_2(\alpha)A_{22}m] \quad (132)$$

$$B_2 = \frac{1}{\Delta_2} [P_1(\alpha)B_{21} + P_2(\alpha)B_{22}m] \quad (133)$$

$$C_2 = -\frac{1}{2\alpha\Delta_2} [P_1(\alpha)C_{21} + P_2(\alpha)C_{22}m] \quad (134)$$

$$D_2 = -\frac{1}{\Delta_2} [P_1(\alpha)D_{21} + P_2(\alpha)D_{22}m] \quad (135)$$

Burada,

$$\Delta_1 = \left\{ e^{-4\alpha h_1} + 1 - 2e^{-2\alpha h_1} (1 + 2\alpha^2 h_1^2) \right\} \quad (136)$$

$$\Delta_2 = \left\{ -e^{-4\alpha h_2} - 1 + 2e^{-2\alpha h_2} (1 + 2\alpha^2 h_2^2) \right\} m \quad (137)$$

$$A_{11} = \left\{ e^{-3\alpha h_1 + \alpha h_2} (-1 + 2\alpha(h_1 + h_2) + \kappa_1) - e^{-\alpha h_1 + \alpha h_2} (-1 + 4\alpha^2 h_1 h_2 + \kappa_1 + 2\alpha(h_2 + h_1 \kappa_1)) \right\} \quad (138)$$

$$A_{12} = \left\{ e^{\alpha h_2} (-1 + 2\alpha h_2 + \kappa_1) + e^{-2\alpha h_1 + \alpha h_2} (1 + 4\alpha^2 h_1(h_1 + h_2) - \kappa_1 + 2\alpha(-h_1 - h_2 + h_1 \kappa_1)) \right\} \quad (139)$$

$$B_{11} = -e^{-3\alpha h_1 + \alpha h_2} \left\{ -1 + e^{2\alpha h_1} (1 + 2\alpha h_1) \right\} \quad (140)$$

$$B_{12} = e^{-2\alpha h_1 + \alpha h_2} \left\{ -1 + e^{2\alpha h_1} + 2\alpha h_1 \right\} \quad (141)$$

$$C_{11} = e^{-\alpha(h_1 + h_2)} (1 + 2\alpha(h_1 + h_2) - \kappa_1) + e^{-\alpha(3h_1 + h_2)} (-1 + 4\alpha^2 h_1 h_2 + \kappa_1 - 2\alpha(h_2 + h_1 \kappa_1)) \quad (142)$$

$$C_{12} = e^{-4\alpha h_1 - \alpha h_2} (1 + 2\alpha h_2 - \kappa_1) - e^{-2\alpha h_1 - \alpha h_2} (1 + 4\alpha^2 h_1(h_1 + h_2) - \kappa_1 + 2\alpha(h_1 + h_2 - h_1 \kappa_1)) \quad (143)$$

$$D_{11} = \left\{ e^{-\alpha h_1 - \alpha h_2} + e^{-3\alpha h_1 - \alpha h_2} (-1 + 2\alpha h_1) \right\} \quad (144)$$

$$D_{12} = \left\{ e^{-4\alpha h_1 - \alpha h_2} - e^{-2\alpha h_1 - \alpha h_2} (1 + 2\alpha h_1) \right\} \quad (145)$$

$$A_{21} = e^{-3\alpha h_2} \left(-1 + 2\alpha h_2 + \kappa_2 - e^{2\alpha h_2} (-1 + \kappa_2 + 2\alpha h_2 \kappa_2) \right) \quad (146)$$

$$A_{22} = e^{-2\alpha h_2} \left(1 + 4\alpha^2 h_2^2 + e^{2\alpha h_2} (-1 + \kappa_2) + 2\alpha h_2 (-1 + \kappa_2) - \kappa_2 \right) \quad (147)$$

$$B_{21} = -e^{-3\alpha h_2} \left(-1 + e^{2\alpha h_2} (1 + 2\alpha h_2) \right) \quad (148)$$

$$B_{22} = e^{-2\alpha h_2} \left(-1 + e^{2\alpha h_2} + 2\alpha h_2 \right) \quad (149)$$

$$C_{21} = -e^{-\alpha h_2} \left(1 + 2\alpha h_2 - \kappa_2 \right) + e^{-3\alpha h_2} \left(1 + \kappa_2 (-1 + 2\alpha h_2) \right) \quad (150)$$

$$C_{22} = e^{-2\alpha h_2} \left(1 + 4\alpha^2 h_2^2 - 2\alpha h_2 (\kappa_2 - 1) - \kappa_2 \right) + e^{-4\alpha h_2} (\kappa_2 - 1) \quad (151)$$

$$D_{21} = \left\{ e^{-\alpha h_2} + e^{-3\alpha h_2} (-1 + 2\alpha h_2) \right\} \quad (152)$$

$$D_{22} = \left\{ e^{-4\alpha h_2} - e^{-2\alpha h_2} (1 + 2\alpha h_2) \right\} \quad (153)$$

olarak tanımlanabilir. Bu ifadelerde geçen $P(\alpha), P_1(\alpha), P_2(\alpha)$ ve m büyüklükleri ise aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$P(\alpha) = -\frac{1}{2\mu_1} \int_0^a p_0 \cos(\alpha t) dt = -\frac{p_0}{2\mu_1 \alpha} \sin(\alpha a) \quad (154)$$

$$P_1(\alpha) = -\frac{1}{2\mu_1} \int_0^b p_1(t_1) \cos(\alpha t_1) dt_1 \quad (155)$$

$$P_2(\alpha) = -\frac{1}{2\mu_2} \int_c^d p_2(t_2) \cos(\alpha t_2) dt_2 \quad (156)$$

$$m = \frac{\mu_2}{\mu_1} \quad (157)$$

2.3.1.3.2. Çeyrek Düzlemler İçin Katsayıların Belirlenmesi

(101-103) ifadelerinin (114-117) denklemleriyle gösterilen sınır şartlarında yerine yazılması ve ters Mellin dönüşümü alınması sonucunda aşağıdaki gibi dört bilinmeyenli dört denklem elde edilir.

$$(F_1 + F_2 + G_1 + G_2) = \frac{-P_2(s)}{s(s+1)} \quad (158)$$

$$(sF_1 + sF_2 + (s+2)G_1 + (s+2)G_2) = 0 \quad (159)$$

$$(F_1 e^{is\pi/2} + F_2 e^{-is\pi/2} + G_1 e^{i(s+2)\pi/2} + G_2 e^{-i(s+2)\pi/2}) = 0 \quad (160)$$

$$(F_1 s e^{is\pi/2} + F_2 s e^{-is\pi/2} + G_1 (s+2) e^{i(s+2)\pi/2} + G_2 (s+2) e^{-i(s+2)\pi/2}) = 0 \quad (161)$$

Bu denklem takımının çözümü ile F_1, F_2, G_1 ve G_2 katsayıları, polar koordinatlarda 2 nolu tabaka ile çeyrek düzlem arasında oluşan temas gerilmesi $p_2(r)$ 'e bağlı olarak aşağıdaki gibi elde edilirler.

$$F_1 = \frac{P_2(s)(s+2)(-1 + e^{i\pi s} + 2e^{2i\pi s})}{2s(s+1)(1 - 2e^{i\pi s} + e^{2i\pi s} - 8se^{i\pi s} - 4s^2 e^{2i\pi s})} \quad (162)$$

$$F_2 = \frac{P_2(s)(s+2)(1 - e^{i\pi s} + 2s)e^{i\pi s}}{2s(s+1)(1 - 2e^{i\pi s} + e^{2i\pi s} - 8se^{i\pi s} - 4s^2 e^{2i\pi s})} \quad (163)$$

$$G_1 = \frac{P_2(s)(1 + 3e^{i\pi s} + 2se^{i\pi s})}{2s(s+1)(1 - 2e^{i\pi s} + e^{2i\pi s} - 8se^{i\pi s} - 4s^2 e^{2i\pi s})} \quad (164)$$

$$G_2 = \frac{P_2(s)(3 + e^{i\pi s} + 2s)e^{i\pi s}}{2s(s+1)(1 - 2e^{i\pi s} + e^{2i\pi s} - 8se^{i\pi s} - 4s^2e^{i\pi s})} \quad (165)$$

Bu ifadelerde geçen $P_2(s)$ aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$P_2(s) = \int_0^{\infty} p_2(r)r^{s+1}dr \quad (166)$$

2.3.1.4. İntegral Denklemlerin Elde Edilmesi

$p_1(x)$ ve $p_2(x)$ temas gerilmelerin bilinmeyenler olduğu daha önceki kısımlarda belirtilmişti. Bu gerilmeleri elde edebilmek için katsayıların belirlenmesinde kullanılmayan (112) ve (113) nolu sınır şartlarından faydalanılacaktır. Bu sınır şartlarının kullanılması ile iki tane integral denklemden oluşan bir integral denklem sistemi elde edilecektir.

2.3.1.4.1. Birinci İntegral Denklem

Birinci integral denklemi elde etmek için (112) sınır şartından faydalanılacaktır. (92) ifadesinden faydalanılarak $\partial v_1(x, y)/\partial x$ ifadesi oluşturulursa,

$$\frac{\partial v_1(x, y)}{\partial x} = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\left[\alpha A_1 + (\kappa_1 + \alpha y) B_1 \right] e^{-\alpha y} + \left[-\alpha C_1 + (\kappa_1 - \alpha y) D_1 \right] e^{\alpha y} \right] \sin(\alpha x) d\alpha \quad (167)$$

olarak elde edilir. A_1, B_1, C_1 ve D_1 katsayıları (167) nolu denklemde yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{\partial v_1(x, y)}{\partial x} = \frac{p_0}{\pi \mu_1} M(x_1) + \frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_1} \int_0^b p_1(t_1) M_{11}(x_1, t_1) dt_1 \quad (168)$$

şeklinde bulunur. Bu ifadede geçen,

$$M(x_1) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta_1} \left[\frac{A_{11}}{2} e^{-\alpha y} - \kappa_1 B_{11} e^{-\alpha y} - \alpha y B_{11} e^{-\alpha y} + \frac{C_{11}}{2} e^{\alpha y} + \kappa_1 D_{11} e^{\alpha y} - \alpha y D_{11} e^{\alpha y} \right] \sin(\alpha a) \sin(\alpha x_1) \frac{d\alpha}{\alpha} \quad (169)$$

$$M_{11}(x_1, t_1) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta_1} \left[\frac{A_{12}}{2} e^{-\alpha y} - \kappa_1 B_{12} e^{-\alpha y} - \alpha y B_{12} e^{-\alpha y} + \frac{C_{12}}{2} e^{\alpha y} + \kappa_1 D_{12} e^{\alpha y} - \alpha y D_{12} e^{\alpha y} \right] \cos(\alpha t_1) \sin(\alpha x_1) d\alpha \quad (170)$$

olarak tanımlanabilir. $y \rightarrow h_2$ limitine geçilirken (168) nolu denklemde yer alan $M_{11}(x_{11}, t_{11})$ ifadesinin çekirdeğinin yakınsaması bozulmaktadır. Diğer bir deyişle α 'nın büyük değerlerinde integralin çekirdeğini oluşturan fonksiyon sıfıra yaklaşmamakta, α 'nın belirli bir değerinden sonra sıfırdan farklı sabit bir değerde kalmaktadır. Çekirdeğin içindeki yakınsamayı bozan singüler terim aşağıdaki gibi hesaplanabilir

$$ST_1 = \left[\frac{-1 - \kappa_1}{2} + \alpha(h_2 - y) \right] e^{\alpha(h_2 - y)} \quad (171)$$

Çekirdeğin yakınsamasını sağlamak için ST_1 singüler terimi çekirdekten çıkartılır ve bu terimin kapalı integrali, integral dönüşüm tabloları yardımıyla bulunup ifadeye ilave edildikten sonra $M_{11}(x_1, t_1)$ ifadesi,

$$M_{11}(x_1, t_1) = \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{A_{11}}{2} - \kappa_1 B_{11} - \alpha y B_{11} \right) e^{-\alpha y} + \left(\frac{C_{11}}{2} + \kappa_1 D_{11} - \alpha y D_{11} \right) e^{\alpha y} - ST_1 \right] \cos(\alpha t_1) \sin(\alpha x_1) d\alpha + \left[-\frac{(1 + \kappa_1)}{4} \left(\frac{1}{t_1 + x_1} - \frac{1}{t_1 - x_1} \right) \right] \quad (172)$$

elde edilir. Bu düzenlemelerden sonra $y \rightarrow h_2$ limitine geçilir ve gerekli kısaltmalarda yapılırsa (168) ifadesi aşağıdaki denkleme dönüşmüş olur.

$$\frac{\partial v_1(x, h_2)}{\partial x} = \frac{p_0}{\pi \mu_1} \bar{M}(x_1) + \frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_1} \int_0^b \left[\bar{M}_{11}(x_1, t_1) - \frac{1 + \kappa_1}{4} \left(\frac{1}{t_1 + x_1} - \frac{1}{t_1 - x_1} \right) \right] p_1(t_1) dt_1 \quad (173)$$

Bu denklemde,

$$\bar{M}(x_1) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta_1} \left[e^{-3\alpha h_1} (-1 + \alpha h_1 + e^{2\alpha h_1} (1 + \alpha h_1)) (1 + \kappa_1) \right] \sin(\alpha a) \sin(\alpha x_1) \frac{d\alpha}{\alpha} \quad (174)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_{11}(x_1, t_1) = \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{\Delta_1} \left(-\frac{1}{2} e^{-4\alpha h_1} (-1 + e^{4\alpha h_1} + 4\alpha e^{2\alpha h_1} h_1) (1 + \kappa_1) \right) + \right. \\ \left. \left(\frac{1 + \kappa_1}{2} \right) \right] \cos(\alpha t_1) \sin(\alpha x_1) d\alpha \end{aligned} \quad (175)$$

şeklinde tanımlanabilir.

(97) ifadesinden faydalanılarak $\partial v_2(x, y)/\partial x$ oluşturulursa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_2(x, y)}{\partial x} = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\left[\alpha A_2 + (\kappa_2 + \alpha y) B_2 \right] e^{-\alpha y} + \right. \\ \left. \left[-\alpha C_2 + (\kappa_2 - \alpha y) D_2 \right] e^{\alpha y} \right] \sin(\alpha x) d\alpha \end{aligned} \quad (176)$$

olarak elde edilir. A_2, B_2, C_2 ve D_2 katsayıları (176) nolu denklemde yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{\partial v_2(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_1} \int_0^b p_1(t_1) R_{11}(x_1, t_1) dt_1 + \frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_2} \int_0^d p_2(t_2) R_{12}(x_1, t_2) dt_2 \quad (177)$$

şeklinde bulunur. Bu ifadede geçen,

$$\begin{aligned} R_{11}(x_1, t_1) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta_2} \left[-\frac{A_{21}}{2} e^{-\alpha y} + \kappa_2 B_{21} e^{-\alpha y} + \alpha y B_{21} e^{-\alpha y} + \frac{C_{21}}{2} e^{\alpha y} - \kappa_2 D_{21} e^{\alpha y} + \alpha y D_{21} e^{\alpha y} \right] \\ \cos(\alpha t_1) \sin(\alpha x_1) d\alpha \end{aligned} \quad (178)$$

$$\begin{aligned} R_{12}(x_1, t_2) = \int_0^{\infty} \frac{m}{\Delta_2} \left[-\frac{A_{22}}{2} e^{-\alpha y} + \kappa_2 B_{22} e^{-\alpha y} + \alpha y B_{22} e^{-\alpha y} + \frac{C_{22}}{2} e^{\alpha y} - \kappa_2 D_{22} e^{\alpha y} + \alpha y D_{22} e^{\alpha y} \right] \\ \cos(\alpha t_2) \sin(\alpha x_1) d\alpha \end{aligned} \quad (179)$$

olarak tanımlanabilir. $y \rightarrow h_2$ limitine geçilirken (177) nolu denklemde yer alan $R_{11}(x_1, t_1)$ ifadesinin çekirdeğinin yakınsaması bozulmaktadır. Çekirdeğin içindeki yakınsamayı bozan singüler terim aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$ST_2 = \frac{1}{m} \left[\left(\frac{1+\kappa_2}{2} \right) + \alpha(h_2 - y) \right] e^{-\alpha(h_2-y)} \quad (180)$$

Çekirdeğin yakınsamasını sağlamak için ST_2 singüler terimi çekirdekten çıkartılır ve bu terimin kapalı integrali, integral dönüşüm tabloları yardımıyla bulunup ifadeye ilave edildikten sonra $R_{11}(x_1, t_1)$ ifadesi,

$$R_{11}(x_1, t_1) = \int_0^\infty \left[\left(-\frac{A_{21}}{2} + \kappa_2 B_{21} + \alpha y B_{21} \right) e^{-\alpha y} + \left(\frac{C_{21}}{2} - \kappa_2 D_{21} + \alpha y D_{21} \right) e^{\alpha y} - ST_2 \right] \cos(\alpha t_1) \sin(\alpha x_1) d\alpha + \left[\frac{1+\kappa_2}{4m} \left(\frac{1}{t_1+x_1} - \frac{1}{t_1-x_1} \right) \right] \quad (181)$$

olarak elde edilir. Bu düzenlemelerden sonra $y \rightarrow h_2$ limitine geçilir ve gerekli kısaltmalar da yapılırsa (177) ifadesi aşağıdaki denkleme dönüşmüş olur.

$$\frac{\partial v_2(x, h_2)}{\partial x} = \frac{1}{\pi \mu_1} \int_0^b \left[\bar{R}_{11}(x_1, t_1) + \frac{1+\kappa_2}{4m} \left(\frac{1}{t_1+x_1} - \frac{1}{t_1-x_1} \right) \right] p_1(t_1) dt_1 + \frac{1}{\pi \mu_2} \int_0^d \left[\bar{R}_{12}(x_1, t_2) \right] p_2(t_2) dt_2 \quad (182)$$

Bu denklemde,

$$\bar{R}_{11}(x_1, t_1) = \int_0^\infty \left[\frac{1}{\Delta_2} \left(-\frac{1}{2} e^{-4\alpha h_2} (-1 + e^{4\alpha h_2} + 4\alpha h_2 e^{2\alpha h_2}) (1 + \kappa_2) \right) - \left(\frac{1+\kappa_2}{2m} \right) \right] \cos(\alpha t_1) \sin(\alpha x_1) d\alpha \quad (183)$$

$$\bar{R}_{12}(x_1, t_2) = \int_0^\infty \frac{m}{\Delta_2} \left[e^{-3\alpha h_2} (-1 + \alpha h_2 + e^{2\alpha h_2} (1 + \alpha h_2)) (1 + \kappa_2) \right] \cos(\alpha t_2) \sin(\alpha x_1) d\alpha \quad (184)$$

şeklinde tanımlanabilir.

Elde edilen $\partial v_1(x, h_2)/\partial x$ ve $\partial v_2(x, h_2)/\partial x$ ifadeleri (112) nolu sınır şartında yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra birinci integral denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi_0} \int_0^b \left[\left(\frac{1}{t_1+x_1} - \frac{1}{t_1-x_1} \right) + [\bar{M}_{11}(x_1, t_1)] - [\bar{R}_{11}(x_1, t_1)] \right] p_1(t_1) dt_1 - \frac{1}{\pi_c} \int_c^d [\bar{R}_{12}(x_1, t_2)] p_2(t_2) dt_2 \\ + \frac{1}{\pi} p_0 \bar{M}(x_1) = 0 \end{aligned} \quad (185)$$

Simetri nedeniyle tabakalar arasındaki ve alt tabaka ile çeyrek düzlemler arasındaki temas gerilme yayılışlarının,

$$p_1(t_1) = p_1(-t_1) \quad (186)$$

$$p_2(t_2) = p_2(-t_2) \quad (187)$$

olduğu gözönünde bulundurulursa, (185) nolu integral denklem,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi_{-b}} \int_{-b}^b \left[\frac{1}{t_1-x_1} - \bar{\bar{M}}_{11}(x_1, t_1) - \bar{\bar{R}}_{11}(x_1, t_1) \right] p_1(t_1) dt_1 + \frac{1}{\pi_c} \int_c^d [\bar{R}_{12}(x_1, t_2)] p_2(t_2) dt_2 \\ = \frac{1}{\pi} p_0 \bar{M}(x_1) \end{aligned} \quad (188)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemde,

$$\begin{aligned} \bar{\bar{M}}_{11}(x_1, t_1) = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \left[\frac{1}{\Delta_1} \left(-\frac{1}{2} e^{-4\alpha h_1} (-1 + e^{4\alpha h_1} + 4\alpha e^{2\alpha h_1} h_1)(1 + \kappa_1) \right) + \right. \\ \left. \left(\frac{1 + \kappa_1}{2} \right) \right] \sin \alpha(t_1 - x_1) d\alpha \end{aligned} \quad (189)$$

$$\bar{\bar{R}}_{11}(x_1, t_1) = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{\Delta_2} \left(-\frac{1}{2} e^{-4\alpha h_2} (-1 + e^{4\alpha h_2} + 4\alpha h_2 e^{2\alpha h_2}) (1 + \kappa_2) \right) - \left(\frac{1 + \kappa_2}{2m} \right) \right] \sin \alpha (t_1 - x_1) d\alpha \quad (190)$$

olarak tanımlanabilir.

2.3.1.4.2. İkinci İntegral Denklem

İkinci integral denklemi elde etmek için (113) sınır şartı kullanılacaktır. Öncelikle sınır şartının sol tarafı $\partial v_2(x, 0)/\partial x$ ifadesini oluşturmak için A_2, B_2, C_2 ve D_2 katsayıları (176) nolu denklemde yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{\partial v_2(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_1} \int_0^b p_1(t_1) M_{21}(x_2, t_1) dt_1 + \frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_2} \int_c^d p_2(t_2) M_{22}(x_2, t_2) dt_2 \quad (191)$$

şeklinde bulunur. Bu ifadede geçen,

$$M_{21}(x_2, t_1) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta_2} \left[-\frac{A_{21}}{2} e^{-\alpha y} + \kappa_2 B_{21} e^{-\alpha y} + \alpha y B_{21} e^{-\alpha y} + \frac{C_{21}}{2} e^{-\alpha y} - \kappa_2 D_{21} e^{-\alpha y} + \alpha y D_{21} e^{-\alpha y} \right] \cos(\alpha t_1) \sin(\alpha x_2) d\alpha \quad (192)$$

$$M_{22}(x_2, t_2) = \int_0^{\infty} \frac{m}{\Delta_2} \left[-\frac{A_{22}}{2} e^{-\alpha y} + \kappa_2 B_{22} e^{-\alpha y} + \alpha y B_{22} e^{-\alpha y} + \frac{C_{22}}{2} e^{-\alpha y} - \kappa_2 D_{22} e^{-\alpha y} + \alpha y D_{22} e^{-\alpha y} \right] \cos(\alpha t_2) \sin(\alpha x_2) d\alpha \quad (193)$$

olarak tanımlanabilir. $y \rightarrow 0$ limitine geçilirken (191) nolu denklemde yer alan $M_{22}(x_2, t_2)$ ifadesinin çekirdeğinin yakınsaması bozulmaktadır. Çekirdeğin içindeki yakınsamayı bozan singüler terim aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$ST_3 = - \left[\frac{1 + \kappa_2}{2} + \alpha y \right] e^{-\alpha y} \quad (194)$$

Çekirdeğin yakınsamasını sağlamak için ST_3 singüler terimi çekirdekten çıkartılır ve bu terimin kapalı integrali, integral dönüşümü tabloları yardımıyla bulunup ifadeye ilave edildikten sonra $M_{22}(x_2, t_2)$ ifadesi,

$$M_{22}(x_2, t_2) = \int_0^{\infty} \left[\left(-\frac{A_{22}}{2} + \kappa_2 B_{22} + \alpha y B_{22} \right) e^{-\alpha y} + \left(\frac{C_{22}}{2} - \kappa_2 D_{22} + \alpha y D_{22} \right) e^{\alpha y} - ST_3 \right] \cos(\alpha t_2) \sin(\alpha x_2) d\alpha + \left[-\frac{1 + \kappa_2}{4} \left(\frac{1}{t_2 + x_2} - \frac{1}{t_2 - x_2} \right) \right] \quad (195)$$

olarak elde edilir. Bu düzenlemelerden sonra $y \rightarrow 0$ limitine geçilir ve gerekli kısaltmalarda yapılırsa (191) ifadesi aşağıdaki denkleme dönüşmüş olur.

$$\frac{\partial v_2(x, 0)}{\partial x} = \frac{1}{\pi \mu_1} \int_0^b \bar{M}_{21}(x_2, t_1) p_1(t_1) dt_1 + \frac{1}{\pi \mu_2} \int_c^d \left[\bar{M}_{22}(x_2, t_2) - \frac{1 + \kappa_2}{4} \left(\frac{1}{t_2 + x_2} - \frac{1}{t_2 - x_2} \right) \right] p_2(t_2) dt_2 \quad (196)$$

Bu denklemde,

$$\bar{M}_{21}(x_2, t_1) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta_2} \left[-e^{-3\alpha h_2} (-1 + \alpha h_2 + e^{2\alpha h_2} (1 + \alpha h_2)) (1 + \kappa_2) \right] \cos(\alpha t_2) \sin(\alpha x_1) d\alpha \quad (197)$$

$$\bar{M}_{22}(x_2, t_2) = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{m}{\Delta_2} \left(\frac{1}{2} e^{-4\alpha h_2} (-1 + e^{4\alpha h_2} + 4\alpha e^{2\alpha h_2} h_2) (1 + \kappa_2) \right) + \left(\frac{1 + \kappa_2}{2} \right) \right\} \cos(\alpha t_2) \sin(\alpha x_2) d\alpha \quad (198)$$

şeklinde tanımlanabilir.

(113) sınır şartının sağ tarafı olan $[\partial u_{\theta}(r, 0)/\partial r]$ ifadesini oluşturmak için, F_1, F_2, G_1 ve G_2 katsayıları (78) nolu denklemde yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$2\mu_3 \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} r^2 \right)^M = is(s+1)P_2(s) \frac{1}{\Delta_B} [(s+2)R_1(s, \theta) + (s+1-\kappa_3)R_2(s, \theta)] \quad (199)$$

şeklinde bulunur. Bu ifadede geçen,

$$R_1(s, \theta) = e^{is\theta} [-s + (s+1)e^{\pi i} + e^{-\pi i(s+1)}] + e^{-is\theta} [-(s+1)e^{-\pi i} + s + e^{\pi i(s+1)}] \quad (200)$$

$$R_2(s, \theta) = e^{i(s+2)\theta} [-(s+2) + (s+1)e^{-\pi i} - e^{-\pi i(s+1)}] + e^{-i(s+2)\theta} [(s+2) - (s+1)e^{\pi i} + e^{\pi i(s+1)}] \quad (201)$$

$$\Delta_B = 2s(s+2) - (s+1)^2 (e^{\pi i} - e^{-\pi i}) + e^{\pi i(s+1)} + e^{-\pi i(s+1)} \quad (202)$$

olarak tanımlanabilir. $\theta = 0$ durumu için,

$$R_2(s, 0) = -R_1(s, 0) \quad (203)$$

ifadesi yazılabilir. $R_2(s, 0)$ ifadesi (199) nolu denklemde yerine yazılırsa,

$$4\mu_3 \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} r^2 \right)^M = iP_2(s) \frac{1}{\Delta_B} R_1(s, 0) \quad (204)$$

olur. $R_1(s, 0)$ ve Δ_B trigonometrik fonksiyonlar cinsinden yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa (204) ifadesi,

$$-4\mu_3 \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} r^2 \right)^M = P_2(s) \frac{1}{\Delta_B^*} R_1^*(s, 0) \quad (205)$$

olarak elde edilir. Burada,

$$R_1^*(s, 0) = \sin[\pi(s+1)] \quad (206)$$

$$\Delta_B^* = s(s+2) + (s+1)^2 + \cos[\pi(s+1)] \quad (207)$$

şeklinde tanımlanabilir. (205) ifadesinin ters Mellin dönüşümü alınırsa,

$$-\frac{4\mu_3}{\kappa_3+1} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} r^2 \right) r^{-s} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta-i\infty}^{\zeta+i\infty} \left(P_2(s) \frac{1}{\Delta_B^*} R_1^*(s,0) \right) r^{-s} ds \quad (208)$$

olarak elde edilir. Bu ifadede geçen $P_2(s)$,

$$P_2(s) = \int_0^\infty p_2(r) r^{s+1} dr = \int_c^d p_2(\tau) r^{s+1} d\tau \quad (209)$$

şeklinde yazılabilir. $P_2(s)$ ifadesi (208) nolu denklemde yerine yazılırsa,

$$-\frac{4\mu_3}{\kappa_3+1} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} r \right) = \int_c^d p_2(\tau) d\tau \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta-i\infty}^{\zeta+i\infty} \left(\frac{\tau}{r} \right)^{s+1} \frac{1}{\Delta_B^*} R_1^*(s,0) ds \quad (210)$$

olarak elde edilir. Aşağıda verilen değişken dönüşümleri yapılırsa;

$$\begin{aligned} s &= -1 + iy \\ ds &= idy \end{aligned} \quad (211)$$

(206) ve (207) ifadeleri,

$$R_1^{**}(y,0) = i \sinh(\pi y) \quad (212)$$

$$\Delta_B^{**} = -2y^2 - 1 + i \cosh(\pi y) \quad (213)$$

ve

$$\left(\frac{\tau}{r} \right)^{s+1} = \left(\frac{\tau}{r} \right)^{iy} = \cos(\rho y) + i \sin(\rho y) \quad (214)$$

$$\rho = \log\left(\frac{\tau}{r}\right) \quad (215)$$

şeklinde elde edilir. Bu ifadeler (210) nolu denklemde yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$-\frac{4\mu_3}{\kappa_3+1}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} r\right) = \int_c^d p_2(\tau) d\tau \frac{1}{2\pi} \int_{\zeta-i\infty}^{\zeta+i\infty} k(r, \tau, y) dy \quad (216)$$

olarak bulunur. Bu ifadede geçen,

$$k(r, \tau, y) = [\cos(\rho y) + i \sin(\rho y)] \frac{1}{\Delta_B^{**}} R_1^{**}(y, 0) \quad (217)$$

şeklinde tanımlanabilir. İntegrali i teriminden kurtarabilmek için Rezidü teoreminden yararlanılır. Bu durumda (216) ifadesi aşağıdaki gibi olur.

$$-\frac{4\mu_3}{\kappa_3+1}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} r\right) = \int_c^d p_2(\tau) d\tau \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k(r, \tau, y) dy - \frac{1}{2} \text{rezidü}(k(r, \tau, y)) \right] \quad (218)$$

Burada;

$$\text{rezidü}[k(r, \tau, y)] = \left(-\frac{2\pi}{4-\pi^2} \right) \quad (219)$$

olarak elde edilebilir. Bu ifade (218) denkleminde yerine yazılır ve denklemdeki integral aralığı $[0, \infty)$ aralığına dönüştürmek için gerekli işlemler yapılırsa,

$$\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right) = -\frac{1}{r} \frac{\kappa_3+1}{4\mu_3} \int_c^d p_2(\tau) d\tau \frac{1}{\pi} \left[k^* - \frac{\pi^2}{(\pi^2-4)} \right] \quad (220)$$

olarak elde edilir. Burada,

$$k^* = \int_0^{\infty} \frac{\sinh(\pi y)}{-2y^2 - 1 + \cosh(\pi y)} \sin(\rho y) dy \quad (221)$$

şeklinde tanımlanır. (220) nolu ifadede $y \rightarrow 0$ limitine geçilirken k^* ifadesinin çekirdeğinin yakınsaması bozulmaktadır. Çekirdeğin yakınsamasını sağlamak için yakınsamayı bozan singüler terim, çekirdekten çıkartılır ve bu terimin kapalı integrali integral dönüşüm tabloları yardımıyla bulunup ifadeye ilave edilirse (220) nolu denklem,

$$\frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} = -\frac{1}{\pi} \int_c^d p_2(\tau) d\tau \frac{1}{r} \frac{\kappa_3 + 1}{4\mu_3} \left[k^{**} + \frac{1}{\log\left(\frac{r}{c}\right)} - \frac{\pi^2}{(\pi^2 - 4)} \right] \quad (222)$$

olarak elde edilir. Burada,

$$k^{**} = \int_0^{\infty} \left[\frac{\sinh(\pi y)}{-2y^2 - 1 + \cosh(\pi y)} - 1 \right] \sin \left[\log\left(\frac{r}{c}\right) y \right] dy \quad (223)$$

şeklinde tanımlanabilir. Şekil 8'de görüldüğü üzere çeyrek düzlem y simetri ekseninden c mesafesi kadar uzaktadır. Denklemlerde geçen değişkenler arasında aşağıdaki dönüşümler yapılabilir.

$$r = x_2 - c \quad \rightarrow dr = dx_2 \quad (224)$$

$$\tau = t_2 - c \quad \rightarrow d\tau = dt_2 \quad (225)$$

Bu dönüşümler (222) ifadesine uygulanırsa,

$$\frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} = -\frac{1 + \kappa_3}{4\pi\mu_3} \int_c^d k_{22}(x_2, t_2) p_2(t_2) dt_2 \quad (226)$$

olarak elde edilir. Bu ifadede geçen,

$$k_{22}(x_2, t_2) = \frac{1}{x_2 - c} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\log\left(\frac{t_2 - c}{x_2 - c}\right)} - \frac{\pi^2}{(\pi^2 - 4)} + \\ & \int_0^\infty \left(\frac{\sinh \pi y}{\cosh \pi y - 1 - 2y^2} - 1 \right) \sin \left[\log\left(\frac{t_2 - c}{x_2 - c}\right) y \right] dy \end{aligned} \right\} \quad (227)$$

şeklinde tanımlanabilir.

Elde edilen $\partial v_2(x, 0)/\partial x$ ve $(\partial u_\theta(r, 0)/\partial r)$ ifadeleri (113) nolu sınır şartında yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra ikinci integral denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi \mu_1} \int_0^b \bar{M}_{21}(x_2, t_1) p_1(t_1) dt_1 + \frac{1}{\pi \mu_2} \int_c^d \left[\bar{M}_{22}(x_2, t_2) - \frac{1 + \kappa_2}{4} \left(\frac{1}{t_2 + x_2} - \frac{1}{t_2 - x_2} \right) \right] p_2(t_2) dt_2 \\ = - \frac{1 + \kappa_3}{4 \pi \mu_3} \int_c^d k_{22}(x_2, t_2) p_2(t_2) dt_2 \end{aligned} \quad (228)$$

Simetri nedeniyle (186) ve (187) ifadeleri dikkate alınırsa (228) nolu integral denklem,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_c^d \left[\frac{1}{t_2 + x_2} - \frac{1}{t_2 - x_2} + \bar{M}_{22}(x_2, t_2) - \frac{\mu_2}{\mu_3} \frac{1 + \kappa_3}{1 + \kappa_2} k_{22}(x_2, t_2) \right] p_2(t_2) dt_2 \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-b}^b \bar{\bar{M}}_{21}(x_2, t_1) p_1(t_1) dt_1 = 0 \end{aligned} \quad (229)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemde geçen,

$$\bar{\bar{M}}_{21}(x_2, t_1) = - \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_2} \left[-e^{-3\alpha h_2} (-1 + \alpha h_2 + e^{2\alpha h_2} (1 + \alpha h_2)) (1 + \kappa_2) \right] \sin \alpha (t_2 - x_1) d\alpha \quad (230)$$

olarak tanımlanır.

2.3.1.5. İntegral Denklem Sisteminin Boyutsuzlaştırılması

İntegral denklem sisteminin sayısal çözümünü kolaylaştırmak için aşağıdaki değişken dönüşümleri ve boyutsuz büyüklükler tanımlanabilir

$$\alpha = \frac{z}{h_2} \quad (231)$$

$$\hbar = \frac{h_1}{h_2} \quad (232)$$

$$t_1 = br_1 \quad (233)$$

$$x_1 = bs_1 \quad (234)$$

$$g_1(r_1) = \frac{p_1(br_1)}{p_0} \quad (235)$$

$$t_2 = \frac{d-c}{2} r_2 + \frac{d+c}{2} \quad (236)$$

$$x_2 = \frac{d-c}{2} s_2 + \frac{d+c}{2} \quad (237)$$

$$g_2(r_2) = \frac{p_2 \left(\frac{d-c}{2} r_2 + \frac{d+c}{2} \right)}{p_0} \quad (238)$$

Tanımlanan bu değişken dönüşümleri ve boyutsuz büyüklükler (118, 119, 188 ve 229) denklemlerinde yerlerine yazılırsa bu ifadeler,

$$\frac{b}{2a} \int_{-1}^1 g_1(r_1) dr_1 = 1 \quad (239)$$

$$\frac{d-c}{2a} \int_{-1}^1 g_2(r_2) dr_2 = 1 \quad (240)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{r_1 - s_1} - \bar{\bar{M}}_{11}(s_1, r_1) - \bar{\bar{R}}_{11}(s_1, r_1) \right] g_1(r_1) dr_1 + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\bar{\bar{R}}_{12}(s_1, r_2) \right] g_2(r_2) dr_2 \\ = \frac{1}{\pi} \bar{M}(s_1) \end{aligned} \quad (241)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{(r_2 + s_2) + 2\left(\frac{d+c}{d-c}\right)} - \frac{1}{(r_2 - s_2)} + \bar{M}_{22}(s_2, r_2) - \frac{\mu_2}{\mu_3} \frac{1+\kappa_3}{1+\kappa_2} k_{22}(s_2, r_2) \right] g(r_2) dr_2 \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \bar{\bar{M}}_{21}(s_2, r_1) g(r_1) dr_1 = 0 \end{aligned} \quad (242)$$

olarak elde edilir. Bu ifadelerde geçen,

$$\begin{aligned} \bar{\bar{M}}_{11}(s_1, r_1) = \int_0^\infty \left[\frac{2m}{K} \frac{b}{h_2} \right] \left[\frac{1}{\Delta_1^*} \left(-\frac{1}{2} e^{-4zh} (-1 + e^{4zh} + 4zh e^{2zh})(1 + \kappa_1) \right) + \left(\frac{1 + \kappa_1}{2} \right) \right] \\ \sin z \left[\frac{b}{h_2} (r_1 - s_1) \right] dz \end{aligned} \quad (243)$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{R}}_{11}(s_1, r_1) = \int_0^\infty \left[-\frac{2m}{K} \frac{b}{h_2} \right] \left[\frac{1}{\Delta_2^*} \left(-\frac{1}{2} e^{-4z} (-1 + e^{4z} + 4ze^{2z})(1 + \kappa_1) \right) - \left(\frac{1 + \kappa_2}{2m} \right) \right] \\ \sin z \left[\frac{b}{h_2} (r_1 - s_1) \right] dz \end{aligned} \quad (244)$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{R}}_{12}(s_1, r_2) = \int_0^\infty \left[-\frac{2}{K} \frac{d-c}{h_2} \right] \left[\frac{m}{\Delta_2^*} \left(\frac{1}{2} e^{-3z} (-1 + z + e^{2z}(1+z))(1 + \kappa_2) \right) \right] \\ \sin z \left[\frac{b}{h_2} s_1 \right] \cos z \left[\frac{d-c}{2h_2} r_2 + \frac{d+c}{2h_2} \right] dz \end{aligned} \quad (245)$$

$$\bar{M}(s_1) = \int_0^\infty \left[-\frac{4m}{K} \right] \left[\frac{1}{\Delta_1^*} \left(e^{-3zh} (-1 + zh + e^{2zh}(1+zh))(1 + \kappa_1) \right) \right] \sin z \left[\frac{b}{h_2} s_1 \right] \frac{\sin z \left[\frac{a}{h_2} \right]}{z} dz \quad (246)$$

$$\bar{M}_{21}(s_2, r_1) = \frac{b}{h_2} \int_0^\infty \left[\frac{2m}{1+\kappa_2} \right] \left[\frac{1}{\Delta_2^*} (-e^{-3z}(-1+z+e^{2z}(1+z)))(1+\kappa_2) \right] \sin z \left[\frac{b}{h_2} r_1 - \left(\frac{d-c}{2h_2} s_2 + \frac{d+c}{2h_2} \right) \right] dz \quad (247)$$

$$\bar{M}_{22}(s_2, r_2) = \frac{d-c}{h_2} \int_0^\infty \left[-\frac{2}{1+\kappa_2} \right] \left[\frac{m}{\Delta_2^*} \left(\frac{1}{2} e^{-4z} (-1+4z+4ze^{2z})(1+\kappa_2) \right) + \left(\frac{1+\kappa_2}{2} \right) \right] \sin z \left[\frac{d-c}{2h_2} s_2 + \frac{d+c}{2h_2} \right] \cos z \left[\frac{d-c}{2h_2} r_2 + \frac{d+c}{2h_2} \right] dz \quad (248)$$

$$k_{22}(s_2, r_2) = \frac{1}{s_2+1} \left[\int_0^\infty \left(\frac{\sinh \pi y}{\cosh \pi y - 1 - 2y^2} - 1 \right) \sin \left[\log \left(\frac{r_2+1}{s_2+1} \right) y \right] dy + \frac{1}{\log \left(\frac{r_2+1}{s_2+1} \right) - \frac{\pi^2}{\pi^2-4}} \right] \quad (249)$$

olarak tanımlanabilir. Burada,

$$\Delta_1^* = \left[e^{-4z\hbar} + 1 - 2e^{-2z\hbar} + (1+2z^2\hbar^2) \right] \quad (250)$$

$$\Delta_2^* = \left[1 + e^{-4z} - 2e^{-2z} + (1+2z^2) \right] m \quad (251)$$

$$K = 1 + \kappa_2 + m + m\kappa_1 \quad (252)$$

şeklinde yazılabilir.

2.3.1.6. İntegral Denklem Sisteminin Sayısal Çözümü

(241) ve (242) nolu integral denklemlerden oluşan integral denklem sisteminin sayısal çözümü, Gauss-Jacobi integrasyon formülasyonu yardımıyla yapılacaktır (Krenk, 1975). İntegral denklem sisteminin sayısal çözümü,

$$g(r) = G(r)(1-r)^\alpha(1+r)^\beta, \quad (-1 < r < 1) \quad (253)$$

şeklinde aranabilir. Burada α ve β tekillik dereceleridir (powers of singularity).

İntegral denklemlerin indisleri birbirinden farklıdır. Birinci integral denklem tabakalar arası temas yüzeyi için elde edilmiştir. Temas gerilmeleri temasın bittiği noktalarda sıfır olduğundan $g(\pm 1) = 0$ olur. Bu durumda (241) nolu integral denklemin indisi “-1”dir. “-1” indis için incelenen problemde α ve β ,

$$\alpha = \frac{1}{2\pi i} \ln \left[\frac{\omega - i\gamma}{\omega + i\gamma} \right] + N \quad (254)$$

$$\beta = -\frac{1}{2\pi i} \ln \left[\frac{\omega - i\gamma}{\omega + i\gamma} \right] + M \quad (255)$$

$$0 < \text{Re}[\alpha, \beta] < 1 \quad (256)$$

olarak tanımlanabilir. Burada N ve M tam sayılar olup $\alpha_1 = \beta_1 = 0.5$ olmaktadır. Buna göre singüler integral denklemin sayısal çözümü aşağıdaki şekilde aranabilir (Erdoğan ve Gupta, 1972).

$$g_1(r_{1j}) = G_1(r_{1j})(1-r_{1j}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (j=1, \dots, N) \quad (257)$$

(241) nolu integral denklem, verilen bu çözüm ile $G_1(r_{1j})$ ve $G_2(r_{2j})$ fonksiyonlarının N noktadaki değerleri için aşağıdaki gibi bir lineer denklem takımına indirgenebilir.

$$\sum_{i=1}^N W_{1i}^N \left[\frac{1}{r_{1i} - s_{1k}} - \bar{\bar{M}}_{11}(s_{1k}, r_{1i}) - \bar{\bar{R}}_{11}(s_{1k}, r_{1i}) \right] G_1(r_{1i}) + \sum_{i=1}^N W_{2i}^N \bar{\bar{R}}_{12}(s_{1k}, r_{2i}) G_2(r_{2i}) \quad (258)$$

$$= \frac{1}{\pi} \bar{\bar{M}}(s_{1k}) \quad (k=1, 2, \dots, N+1)$$

(239) ifadesindeki denge şartı ise,

$$\frac{b}{2a} \sum_{i=1}^N W_{i_i}^N G_1(r_{i_i}) - \frac{1}{\pi} = 0 \quad (259)$$

olarak yazılabilir. Bu ifadelerde geçen ve aşağıdaki gibi tanımlanan r_{ji} ve s_{jk} 'lar ilgili Jacobi polinomlarının kökleri ve W_{ji}^N 'ler ise Jacobi polinomlarının ağırlık katsayılarıdır.

$$r_{i_i} = \cos\left(\frac{i\pi}{N+1}\right) \quad (i = 1, \dots, N) \quad (260)$$

$$s_{1k} = \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2(N+1)}\right) \quad (k = 1, \dots, N+1) \quad (261)$$

$$W_{i_i}^N = \frac{1-r_{i_i}^2}{N+1} \quad (262)$$

İkinci integral denklem ise alt tabaka ile çeyrek düzlem arasındaki temas yüzeyi için elde edilmiştir. Çeyrek düzlemlerin alt tabakadan ayrıldığı noktalarda temas gerilmesi sıfır ve çeyrek düzlemin iç kenarında ise temas gerilmesi teorik olarak sonsuza gideceğinden (242) nolu integral denklemin indisi "0" olur. "0" indis için incelenen problemde $\alpha_2 = 0.5$ olmaktadır. β_2 ise aşağıdaki formüller yardımı ile bulunur (Dundurs ve Lee, 1972; Bakioğlu, 1976).

$$\frac{\mu_2}{\mu_3} \frac{1+\kappa_3}{1+\kappa_2} (2\lambda_1^2 - 1 + \cos \pi\lambda_1) \cos \pi\lambda_1 - \sin^2 \pi\lambda_1 = 0 \quad (263)$$

Bu denklemin λ_1 pozitif kökü kullanılarak β_2 aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\beta_2 = \lambda_1 - 1 \quad (264)$$

(242) nolu integral denklemin çözümü ise,

$$g_2(r_{2j}) = G_2(r_{2j})(1-r_{2j})^{1/2}(1+r_{2j})^{\beta_2} \quad (j = 1, \dots, N) \quad (265)$$

olarak aranabilir. “0” indis için verilen bu çözüm ile $G_1(r_{1j})$ ve $G_2(r_{2j})$ fonksiyonlarının N noktadaki değerleri için aşağıdaki lineer denklem takımı elde edilir.

$$\sum_{i=1}^N W_{1i}^N \bar{M}_{21}(s_{2k}, r_{1i}) G_1(r_{1i}) + \sum_{i=1}^N W_{2i}^N \left[\frac{1}{r_{2i} + s_{2k} + 2\left(\frac{d+c}{d-c}\right)} - \frac{1}{r_{2i} - s_{2k}} + \bar{M}_{22}(s_{2k}, r_{2i}) - \frac{\mu_2}{\mu_3} \frac{1 + \kappa_3}{1 + \kappa_2} k_{22}(s_{2k}, r_{2i}) \right] G_2(r_{2i}) = 0 \quad (266)$$

$k = 1, 2, \dots, N+1$

(140) ifadesindeki denge şartı ise,

$$\frac{d-c}{2a} \sum_{i=1}^N W_{2i}^N G_2(r_{2i}) - \frac{1}{\pi} = 0 \quad (267)$$

haline dönüşür. Bu ifadelerdeki r_{ji} , s_{jk} ve W_{ji}^N ,

$$P_N^{(\alpha_2, \beta_2)}(r_{2i}) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (268)$$

$$P_N^{(\alpha_2-1, \beta_2-1)}(s_{2k}) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (269)$$

$$W_{2i}^N = -\frac{1}{\pi} \frac{2N + \alpha_2 + \beta_2 + 2}{(N+1)!(N + \alpha_2 + \beta_2 + 1)} \frac{\Gamma(N + \alpha_2 + 1)\Gamma(N + \beta_2 + 1)}{\Gamma(N + \alpha_2 + \beta_2 + 1)} \frac{2^{\alpha_2 + \beta_2}}{P_N^{(\alpha_2 + \beta_2)}(r_{2i}) P_{N+1}^{(\alpha_2 + \beta_2)}(r_{2i})} \quad (270)$$

şeklinde hesaplanabilir. P_N Jacobi polinomlarını ve Γ Gamma fonksiyonunu simgelemektedir.

Bu denklemlerde geçen $G_1(r_{1j})$ ve $G_2(r_{2j})$ ifadeleri bilinmeyen olup toplamda $2N$ tanedir. İntegral denklemlerden $(2N+1)$ tane denklemden oluşan bir lineer denklem sistemi elde edilmektedir. Bu denklem sistemindeki ekstra denklem (241) ifadesi ile gösterilen orijinal integral denklemin uygunluk şartına karşılık gelir. Bu durumda (258) ifadesindeki $(N/2 + 1)$ 'inci denklem otomatik olarak sağlanmakta olup denklem sisteminden

çıkartıldığında $2N$ bilinmeyenli $2N$ denklemden oluşan denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözümünden elde edilen temas gerilme değerlerinin ve seçilen temas yarı uzunluklarının (259) ve (267) denklemlerini sağlaması gerekir. Önce seçilen temas bölgeleri (b) ve ($d-c$) için (258) ve (266) denklemlerinin çözümünden $G_1(r_{1j})$ ve $G_2(r_{2j})$ 'ler hesaplanır ve bulunan bu değerler (259) ve (267) ifadelerinde yerlerine yazılarak bu eşitliklerin sağlanıp sağlanmadığı kontrol edilir. Eğer eşitlik sağlanmıyorsa (b) ve ($d-c$)'ye artımlar verilerek yukarıdaki işlemler tekrarlanır. Bu şekilde yapılacak işlemler sonucunda bulunacak $G_1(r_{1j})$ ve $G_2(r_{2j})$ değerleri (245) ve (253) ifadelerinde yerlerine yazılarak $g_1(r_1)$ ve $g_2(r_2)$ boyutsuz temas gerilmeleri ve temas yüzeylerinin yarı uzunlukları (b) ve ($d-c$) belirlenmiş olur. Gerekli hesaplamalar için Mathematica programlama dilinde kodlanan bir programı kullanılmıştır.

2.3.1.7. Gerilmelerin Bulunması

Kısım 2.3.1.3.1.'de belirlenmiş olan A_i, B_i, C_i ve D_i ($i = 1,2$) katsayıları gerilme ifadelerinde yerlerine konularak çekirdeklerin incelenmesi gerekmektedir. Çünkü gerilmelerin doğru olarak hesaplanabilmesi için gerilme çekirdeklerinin yakınsamaları gerekir. Aksi halde integral sınırları doğru olarak belirlenememekte dolayısıyla da gerilme ifadelerine ait integraller sağlıklı olarak hesaplanamamaktadır.

Yapılan incelemeler sonucunda 1 nolu tabaka için $y \rightarrow h_2$ durumunda ve 2 nolu tabaka için ise $y \rightarrow 0$ ve $y \rightarrow h_2$ durumlarında $\sigma_x(x, y)$ ve $\sigma_y(x, y)$ normal gerilmelerine ait çekirdeklerde yakınsamanın bozulduğu gözlenmiştir. Diğer durumlarda ise gerilmelere ait çekirdeklerin yakınsadığı yani sürekli olarak sıfıra yaklaştıkları belirlenmiştir.

$\sigma_x(x, y)$ ve $\sigma_y(x, y)$ normal gerilmelerine ait çekirdekleri bozan singüler terimler araştırıldığında:

1 nolu tabaka için ($y \rightarrow h_2, \quad 0 \leq x < \infty, \quad h_2 \leq y \leq h$):

$$\sigma_{x_1, s}(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_c^d \left\{ \int_0^\infty [-1 + \alpha(h_2 - y)] e^{-\alpha(h_2 - y)} [\cos \alpha(t_1 + x_1) + \cos \alpha(t_1 - x_1)] d\alpha \right\} p_1(t_1) dt_1 \quad (271)$$

$$\sigma_{y_1y}(x, y) = \frac{1}{\pi_c} \int_0^d \left\{ \int_0^\infty [-1 + \alpha(h_2 - y)] e^{\alpha(h_2 - y)} [\cos \alpha(t_1 + x_1) + \cos \alpha(t_1 - x_1)] d\alpha \right\} p_1(t_1) dt_1 \quad (272)$$

2 nolu tabaka için ($y \rightarrow 0$, $0 \leq x < \infty$, $0 \leq y \leq h_2$):

$$\sigma_{x_2s_0}(x, y) = -\frac{1}{\pi_c} \int_0^d p_2(t_2) \left\{ \int_0^\infty (1 - \alpha y) e^{-\alpha y} [\cos \alpha(t_2 + x_2) + \cos \alpha(t_2 - x_2)] d\alpha \right\} dt_2 \quad (273)$$

$$\sigma_{y_2s_0}(x, y) = -\frac{1}{\pi_c} \int_0^d p_2(t_2) \left\{ \int_0^\infty (\alpha y + 1) e^{-\alpha y} [\cos \alpha(t_2 + x_2) + \cos \alpha(t_2 - x_2)] d\alpha \right\} dt_2 \quad (274)$$

($y \rightarrow h_2$, $0 \leq x < \infty$, $0 \leq y \leq h_2$):

$$\sigma_{x_2h_2}(x, y) = \frac{1}{\pi_c} \int_0^d \left\{ \int_0^\infty [-1 + \alpha(y - h_2)] e^{-\alpha(y - h_2)} [\cos \alpha(t_1 + x_2) + \cos \alpha(t_1 - x_2)] d\alpha \right\} p_1(t_1) dt_1 \quad (275)$$

$$\sigma_{y_2h_2}(x, y) = -\frac{1}{\pi_c} \int_0^d \left\{ \int_0^\infty [1 + \alpha(h_2 - y)] e^{-\alpha(h_2 - y)} [\cos \alpha(t_1 + x_2) + \cos \alpha(t_1 - x_2)] d\alpha \right\} p_1(t_1) dt_1 \quad (276)$$

olarak bulunurlar. Bu singüler terimlerin kapalı integralleri ise (Sneddon, 1972);

1 nolu tabaka için ($0 \leq x < \infty$, $h_2 \leq y \leq h$):

$$\sigma_{x_1k}(x, y) = -2 \left\{ \frac{(y - h_2)(t_1 + x_1)^2}{\left[(y - h_2)^2 + (t_1 + x_1)^2 \right]^2} + \frac{(y - h_2)(t_1 - x_1)^2}{\left[(y - h_2)^2 + (t_1 - x_1)^2 \right]^2} \right\} \quad (277)$$

$$\sigma_{y_1k}(x, y) = 2 \left\{ \frac{(h_2 - y)^3}{\left[(h_2 - y)^2 + (t_1 + x_1)^2 \right]^2} + \frac{(h_2 - y)^3}{\left[(h_2 - y)^2 + (t_1 - x_1)^2 \right]^2} \right\} \quad (278)$$

2 nolu tabaka için ($0 \leq x < \infty$, $0 \leq y \leq h_2$):

$$\sigma_{x_2 k_0}(x, y) = -2y \left\{ \frac{(t_2 + x_2)^2}{[y^2 + (t_2 + x_2)^2]^2} + \frac{(t_2 - x_2)^2}{[y^2 + (t_2 - x_2)^2]^2} \right\} \quad (279)$$

$$\sigma_{y_2 k_0}(x, y) = -2y^3 \left\{ \frac{1}{[y^2 + (t_2 + x_2)^2]^2} + \frac{1}{[y^2 + (t_2 - x_2)^2]^2} \right\} \quad (280)$$

$$\sigma_{x_2 k_{h_2}}(x, y) = -2 \left\{ \frac{(h_2 - y)(t_1 + x_2)^2}{[(h_2 - y)^2 + (t_1 + x_2)^2]^2} + \frac{(h_2 - y)(t_1 - x_2)^2}{[(h_2 - y)^2 + (t_1 - x_2)^2]^2} \right\} \quad (281)$$

$$\sigma_{y_2 k_{h_2}}(x, y) = -2 \left\{ \frac{(h_2 - y)^3}{[(h_2 - y)^2 + (t_1 + x_2)^2]^2} + \frac{(h_2 - y)^3}{[(h_2 - y)^2 + (t_1 - x_2)^2]^2} \right\} \quad (282)$$

olarak hesaplanabilirler.

Yakınsamayı bozan (271-276) ifadeleri ile verilen singüler terimlerin normal gerilme ifadelerinden çıkartılarak, bunların yerine (277-282) ifadeleri ile verilen kapalı integrallerinin ilave edilmesi sonucunda gerilme ifadelerinin çekirdeklerinde meydana gelen bozulmalar giderilmiş olur. Eğer bu işlemler sırasıyla yapılırsa sonuçta $\sigma_x(x, y)$ ve $\sigma_y(x, y)$ normal gerilme ifadeleri aşağıdaki şekilde elde edilmiş olur.

1 nolu tabaka için ($0 \leq x < \infty$, $h_2 \leq y \leq h$):

$$\sigma_{x_1}^*(x, y) = \sigma_{x_1}(x, y) - \sigma_{x_{1s}}(x, y) + \sigma_{x_{1k}}(x, y) \quad (283)$$

$$\sigma_{y_1}^*(x, y) = \sigma_{y_1}(x, y) - \sigma_{y_{1s}}(x, y) + \sigma_{y_{1k}}(x, y) \quad (284)$$

2 nolu tabaka için ($0 \leq x < \infty$, $0 \leq y \leq h_2$):

$$\sigma_{x_2}^*(x, y) = \sigma_{x_2}(x, y) - \left[\sigma_{x_2s_0}(x, y) + \sigma_{x_2s_{h_2}}(x, y) \right] + \left[\sigma_{x_2k_0}(x, y) + \sigma_{x_2k_{h_2}}(x, y) \right] \quad (285)$$

$$\sigma_{y_2}^*(x, y) = \sigma_{y_2}(x, y) - \left[\sigma_{y_2s_0}(x, y) + \sigma_{y_2s_{h_2}}(x, y) \right] + \left[\sigma_{y_2k_0}(x, y) + \sigma_{y_2k_{h_2}}(x, y) \right] \quad (286)$$

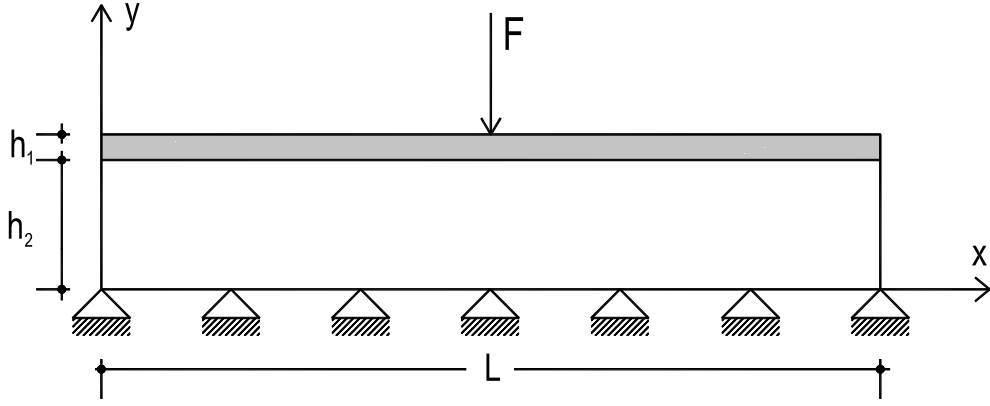
Gerilmeleri sayısal olarak hesaplayabilmek için (231-238) ifadeleri ile verilen boyutsuz büyüklükler ve değişken dönüşümleri kullanılarak ifadelerin boyutsuz hale getirilmeleri gerekir. Gerilme ifadeleri boyutsuz hale getirildikten sonra Mathematica programlama dilinde yazılmış bir bilgisayar programı yardımıyla herhangi bir noktadaki gerilmeler hesaplanabilir.

2.3.2. Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Sayısal Analiz

Bu kısımda, öncelikle sonlu elemanlar paket programında kullanılan ağ yapısı ve eleman tiplerinin uygunluğunu doğrulamak açısından literatürde bulunan ayrılmalı temas problemi ele alınmış ve daha sonra simetrik iki elastik çeyrek düzleme oturan elastik özellikleri ve yükseklikleri farklı iki elastik tabakanın temas problemi ANSYS (2012) paket programı yardımıyla çözülmüştür.

2.3.2.1. Literatürde Bulunan Ayrılmalı Temas Probleminin Sonlu Elemanlar Paket Programı ile Sayısal Analizi

Sonlu elemanlar paket programında kullanılan ağ yapısı ve eleman tiplerinin uygunluğunu doğrulamak açısından, analitik sonuçları ve NX NASTRAN sonlu elemanlar paket programı sonuçları verilmiş iki boyutlu ayrılmalı temas problemi (Roncevic ve Siminiati, 2010) analiz edilmiştir. Bu yapılan analizdeki amaç, elde edilen temas uzunluğunu önceden yapılmış çalışmadaki temas uzunluğu ile karşılaştırmaktır. Bu nedenle problem, ANSYS paket programı yardımıyla çözülmüştür. Sonlu elemanlar analizinde kullanılan modelin boyutları, malzemeleri ve sınır şartları aşağıdaki gibidir (Şekil 9).



Şekil 9. Analiz geometrisi

Geometrik parametreler:

Tabaka uzunlukları: $L= 1000 \text{ mm}$

Üstteki tabaka yüksekliği : $h_1= 20 \text{ mm}$

Altteki tabaka yüksekliği : $h_2= 100 \text{ mm}$

Malzeme parametreleri:

Lineer ve izotropik malzeme,

Elastisite sabiti : $E_{1,2}= 210000 \text{ MPa}$

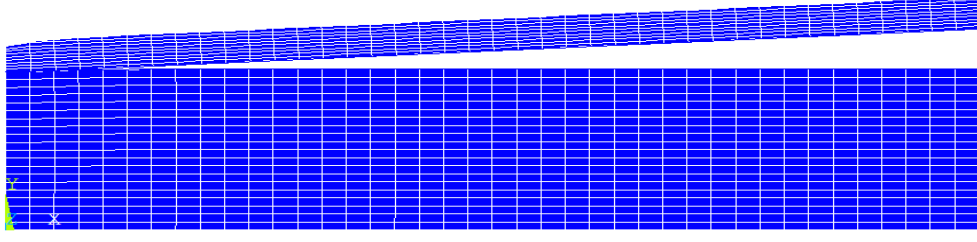
Poisson oranı: $\nu_{1,2}= 0.3$

Yoğunluk : $\rho_{1,2}= 78500 \text{ N/m}^3$

Yükleme:

$F=1000 \text{ N}$

Problemin sonlu elemanlar analizinde ANSYS paket programı kütüphanesinde bulunan PLANE183 tipi yapısal eleman ve dörtgen ağ yapısı kullanılmıştır. Temas çifti olarak TARGE169 ve CONTA172 elemanları kullanılmış ve yüzey-yüzey temas modeli oluşturulmuştur. Sonlu elemanlar paket programı yardımıyla yapılan analiz sonrası temas uzunlukları elde edilmiştir. Problemin çözümünde 3822 düğüm noktası, 1280 eleman ve 40 temas elemanı kullanılmış olup analiz sonrası oluşan şekil değişikliği aşağıda verilmiştir (Şekil 10).



Şekil 10. Analiz sonrası problemin geometrisi (şekil değiştirmiş hal)

Literatürde, analitik çözümden bulunan yarı temas uzunluğu $24.53mm$ ve NX NASTRAN paket programından elde edilen yarı temas uzunluğu ise $25.3mm$ 'dir (Roncevic ve Siminiati, 2010). Sonlu elemanlar paket programı kullanılarak yapılan çözümden elde edilen yarı temas uzunluğu $25mm$ olarak elde edilmiştir. Bulunan bu temas uzunluğunun (Roncevic ve Siminiati, 2010)'in analitik ve NX NASTRAN sonuçlarına yakın olduğu görülmektedir.

2.3.2.2. Problemin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Sayısal Analizi

Sonlu elemanlar paket programıyla yapılan bu analizde, eleman tiplerinin belirlenmesi, elemanların malzeme özelliklerinin atanması, problemin geometrisinin oluşturulması, ağ yapısının oluşturulması, temas elemanlarının temas yüzeylerine yerleştirilmesi, sınır şartlarının verilmesi, yüklemenin yapılması, problemin çözümü ve analiz sonuçlarının alınması gibi birçok işlem gerçekleştirilmiştir. Bu kısımda amaç, temas uzunluklarını, temas gerilmelerini ve normal gerilmeleri sonlu elemanlar paket programı yardımıyla bulmaktır.

Problem y eksenine göre simetrik modellenmiş olup tabakalar ve çeyrek düzlemlerin ağırlığı ve sürtünme ihmal edilmiştir (Şekil 11). Sonlu elemanlar modelinin tüm parçalarında lineer, elastik ve izotropik malzeme kullanılmıştır. Kullanılan geometrik ve malzeme parametrelerinde sabit değerler aşağıdaki gibidir.

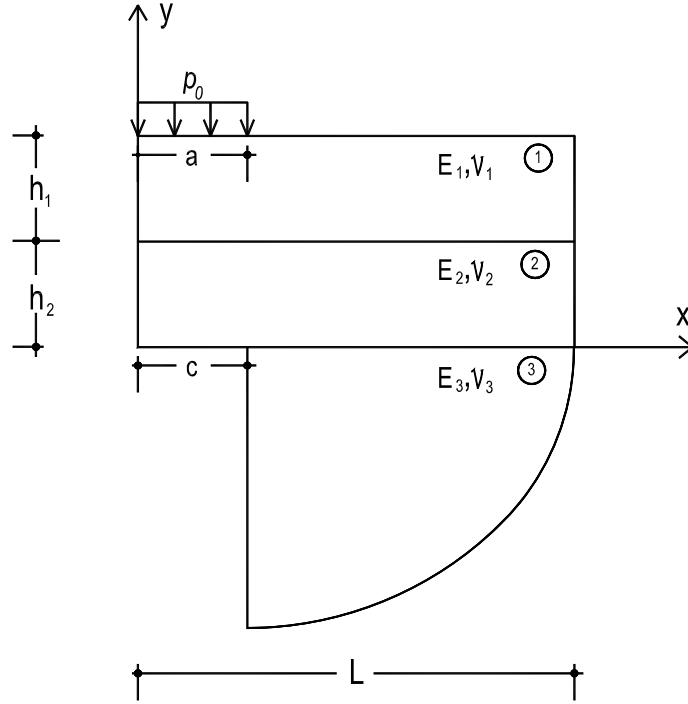
Tabakaların yarı uzunluğu: $L = 200cm$

2 nolu tabaka yüksekliği: $h_2 = 20cm$

Elastisite modülü: $E_2 = 105 \times 10^9 Pa$

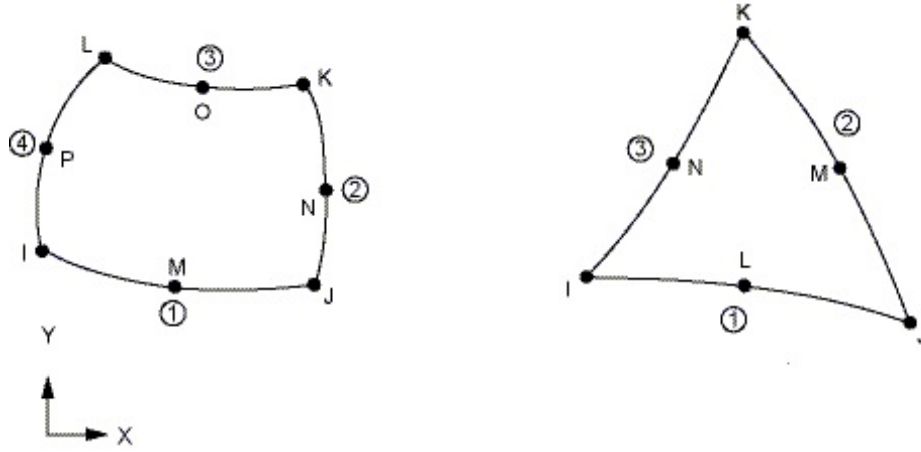
Poisson oranı: $\nu_{1,2,3} = 0.25$

Yayıllı yük: $P_0 = 10 \times 10^4 N/m$



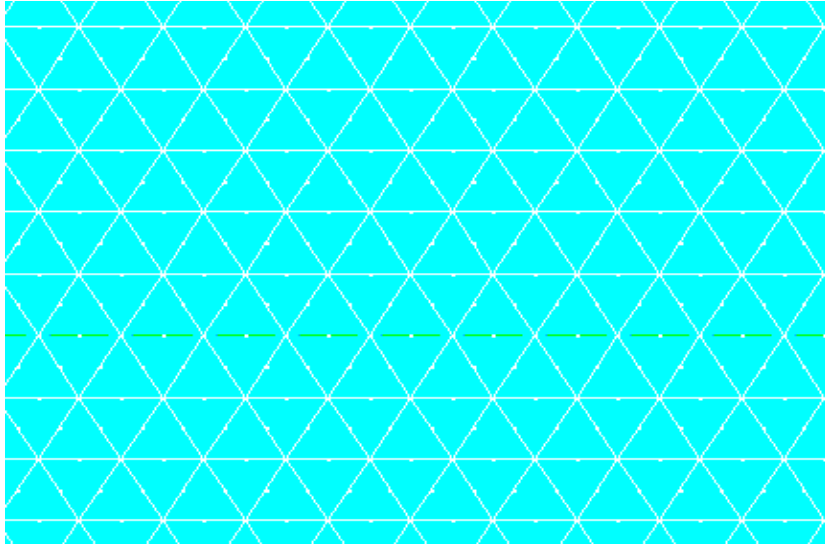
Şekil 11. Analiz geometrisi

Eleman seçimi, analizde kullanılacak olan matematiksel modelin belirlenmesi açısından son derece önemlidir. Elemanlar yapılacak analizin çeşidine göre seçilir. Yani statik, termal, akışkan veya elektromanyetik analizler için farklı elemanlar kullanılır. Benzer şekilde analiz edilecek olan modelin 2 veya 3 boyutlu olması eleman seçimindeki etkenlerden biridir. Seçilen elemanın düğüm noktalarına ait serbestlik derecelerinin tipi ve sayısı analizin doğru yapılması açısından çok önemlidir. Sonlu eleman analizinde ANSYS paket programı kütüphanesinde bulunan PLANE183 tipi yapısal eleman kullanılmıştır. PLANE183 tipi eleman, sekiz düğüm noktası ile tanımlanır ve her düğüm noktasının iki serbestlik derecesi bulunmakta olup dönme serbestliği bulunmamaktadır (Şekil 12). Dolayısıyla x ve y doğrultularında yer ve şekil değiştirebilir. Elemanın plastiklik, büyük esnemelere dayanma ve oldukça fazla şekil değiştirme özellikleri vardır. PLANE183 elemanı, karmaşık geometrilerin ağ yapısının oluşturulmasında dört bağlantı noktasına sahip iki boyutlu diğer elemanlara göre daha iyi sonuç vermektedir. (ANSYS, 2012).



Şekil 12. PLANE183 elemanın geometrisi (üçgen ve dörtgen)

Modelin elemanlara bölünmesi işlemi sırasında geometrideki parçalara ait malzeme özellikleri ve eleman tipleri atanmakta olup kullanılan ağ yapısı ve sıklığı belirlenmektedir. Yapılan analizlerde üçgen (TRIANGLE) ağ yapısı kullanılmıştır. Üçgen elemanın altı, dokuz ve daha fazla düğüm noktaları ihtiva eden çeşitleri vardır. Üçgen eleman, çözüm bölgesini aslına uygun olarak temsil etmesi bakımından kullanışlı eleman tipidir. Oluşturulan üçgen ağ yapısının bir bölümü Şekil 13’de gösterilmiştir.

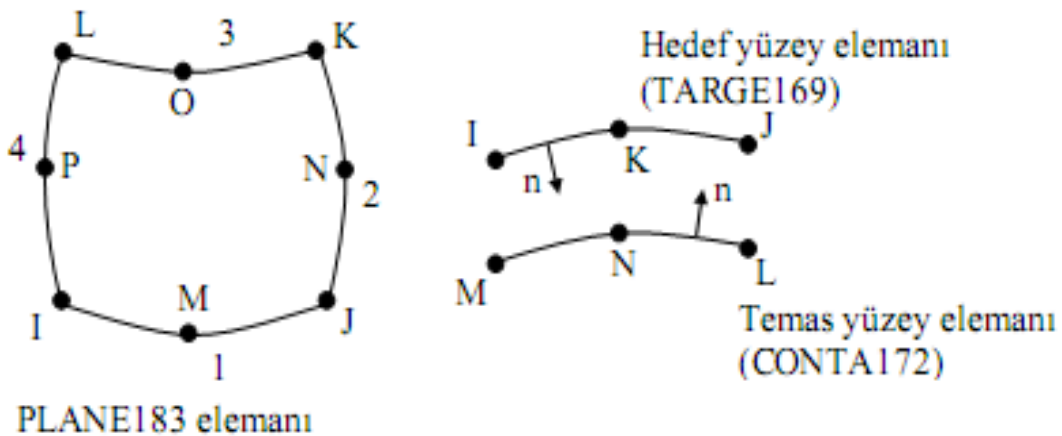


Şekil 13. ANSYS programında oluşturulan üçgen ağ yapısının bir bölümü

Geçtiğimiz yıllar içerisinde yapısal sonlu eleman analizindeki en önemli değişikliklerden biri temas problemlerini çözebilecek elemanların ve çözüm yöntemlerinin analiz programlarına girmiş olmasıdır. Modeldeki parçalar arasında teması sağlamak için özel temas elemanları kullanılır. Bu elemanların seçilmesinde problemin iki ya da üç boyutlu olması ve kullanılan eleman tipi önemli bir unsurdur. İki boyutlu problemlerde temas çizgisel olurken, üç boyutlu problemlerde temas yüzeyseldir. Temas analizlerinde çeşitli temas uygulama yöntemleri mevcut olup bunlar;

- Düğüm noktası-Düğüm noktası
- Düğüm noktası-Yüzey teması
- Yüzey-Yüzey teması (ANSYS 2012; Dursun 2006).

şeklindedir. Bu çalışmada yapılan analizlerde temas çiftinin modellenmesinde yüzey-yüzey (SURFACE TO SURFACE) temas modeli kullanılmıştır. Yüzey-yüzey temas modeli düğüm noktalarının üst üste gelmemesi halinde de çözüme olanak sağlamaktadır. Problemden temas eden bölgede temas çifti (Contact Pair) oluşturulmuştur. Temas çiftleri iki eleman tipinden oluşur. Bunlar TARGET ve CONTACT eleman tipleridir. Temas çiftinin oluşturulmasında hedef yüzey TARGE169 ve temas yüzey CONTA172 elemanları kullanılmıştır. TARGE169 ve CONTA172 elemanları üç düğüm noktası içeren elemanlardır ve bu düğüm noktaları Şekil 14’da görülebileceği gibi PLANE183 elemanının yüzeyindeki düğümlerle örtüşmektedir.

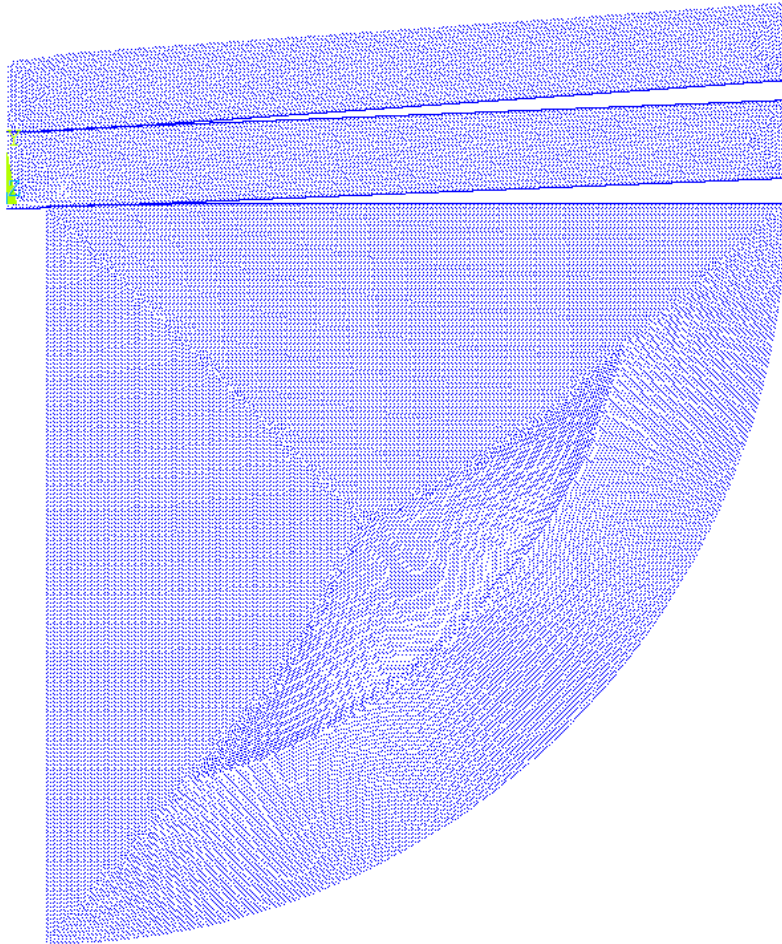


Şekil 14. PLANE183 elemanı ve TARGE169/CONTA172 temas elemanları

ANSYS paket programı temas yüzeylerindeki davranışa yönelik farklı temas algoritmaları sunmaktadır. Bu algoritmalar şu şekilde sıralanabilir,

- Ceza (Penalty) metodu
- Artırılmış Lagrange (Augmented Lagrangian) Metodu
- MPC algoritması
- Lagrange metodu (Lagrange Multiplier)

Bu çalışmada, temas modellemesinde uygun sonuçlar veren Artırılmış Lagrange Metodu kullanılmıştır. Sınır şartlarının uygulanması ve yüklemenin yapılması işlemlerinden sonra problem program yardımıyla çözülmektedir. Çıkış kısmında (General Postprocessor), çözüm kısmından elde edilen sonuçlara grafik, şekil ya da liste halinde ulaşılabilir. Analiz sonrası modelde oluşan şekil değişikliği Şekil 15’de verilmektedir.



Şekil 15. Analiz sonrası problemin geometrisi (şekil değiştirmiş hal)

3. BULGULAR VE İRDELEME

3.1. Giriş

Bu bölümde, yük genişliği (a/h_2), malzeme özellikleri (μ_2/μ_1 , μ_3/μ_2 ve $\kappa_{1,2,3}$), çeyrek düzlem açıklık mesafesi (c/h_2) ve tabakaların yükseklikleri oranı (h_1/h_2) gibi çeşitli boyutsuz büyüklükler için bir önceki bölümde elde edilen teorik çözümdeki ifadeler yardımıyla, boyutsuz temas uzunlukları (b/h_2 ve $(d - c)/h_2$), temas gerilmeleri ($p_1(x)/p_0$ ve $p_2(x)/p_0$), y simetri eksenini boyunca oluşan normal gerilmeler (σ_x/p_0 ve σ_y/p_0) ve bu eksen yakınlarındaki kayma gerilmeleri (τ_{xy}/p_0) incelenmiştir. Ayrıca sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal analizlerden elde edilen temas uzunlukları, temas gerilmeleri ve y simetri eksenini boyunca oluşan normal gerilmeler torik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Sayısal uygulamalardan elde edilen sonuçlar, tablolar ve grafikler halinde verilmiş ve bunlara ait bulgular tartışılmıştır.

3.2. Teorik Çözümde Elde Edilen Sonuçlar

3.2.1. Temas Uzunlukları ve Temas Gerilmeleri

Burada tabakalar arasındaki ve alt tabaka ile çeyrek düzlemler arasındaki temas uzunlukları ve temas gerilme yayılışları ayrı ayrı incelenmiştir.

Tablo 1’de malzeme sabitlerine (κ_2 ve κ_3) bağlı olarak temas uzunluklarının çeyrek düzlem açıklık mesafesi (c/h_2) ile değişimi görülmekte ve şekil (16-17)’de ise bunların değişimleri grafik olarak verilmektedir. Buna göre çeyrek düzlem açıklık mesafesi arttıkça tabakalar arası temas uzunluğu artmasına rağmen alt tabaka ile çeyrek düzlemler arasındaki temas uzunluğu azalmaktadır. Malzeme sabitlerinin (κ_2 ve κ_3) artması durumunda ise tabakalar arasındaki temas uzunluğu ve alt tabaka ile çeyrek düzlemler arasındaki temas uzunluğu az da olsa artmaktadır.

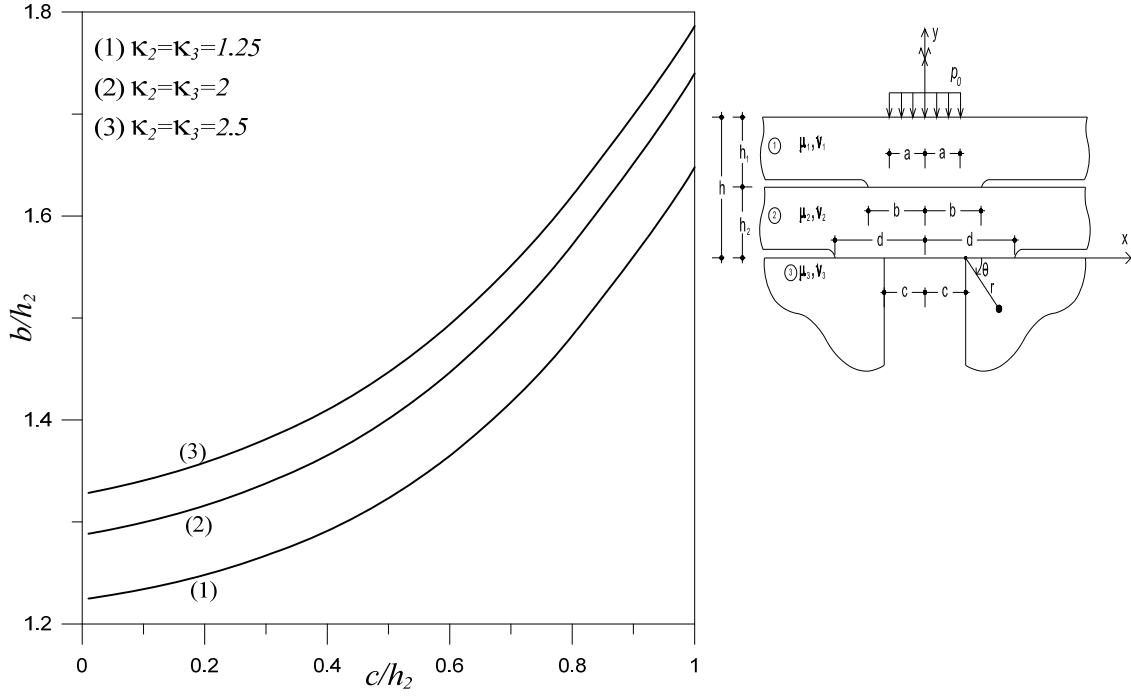
Çeyrek düzlem açıklık mesafesinin çeşitli değerleri için, yük genişliğine (a/h_2) bağlı olarak temas uzunluklarının değişimi Tablo 2’de verilmektedir. Şekil (18-19)’de ise bunların değişimleri grafik olarak verilmektedir. Burada yük genişliği arttıkça tabakalar

arasındaki temas uzunluğu ve alt tabaka ile çeyrek düzlemler arasındaki temas uzunluğunun arttığı görülmektedir.

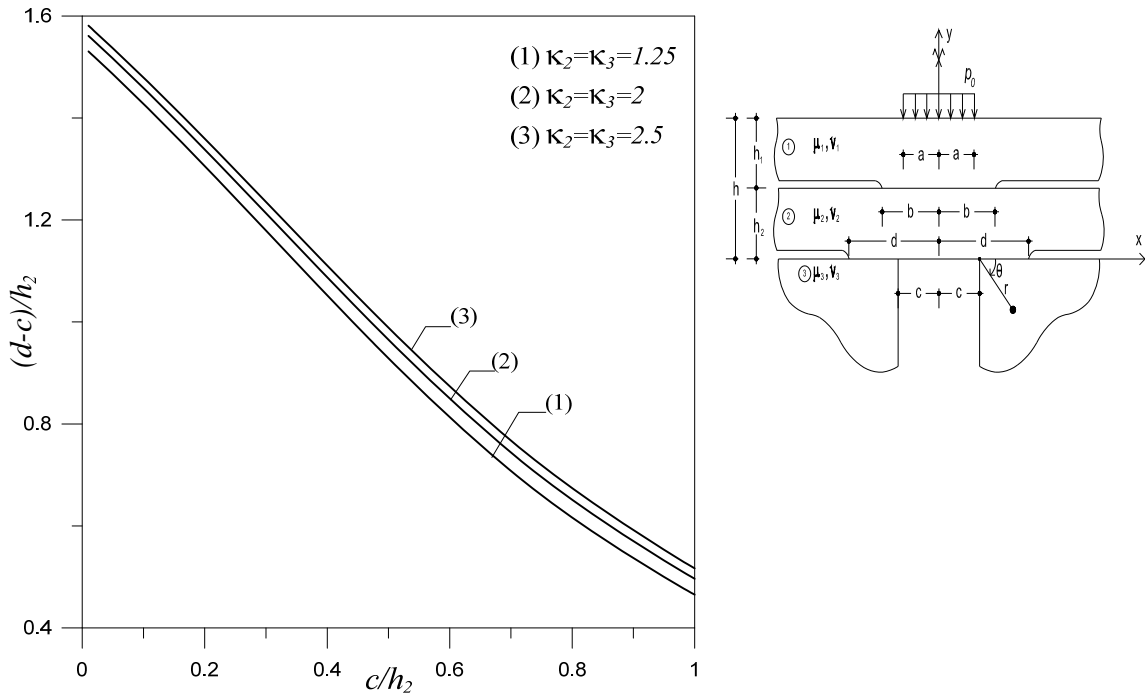
Tablo 3, Şekil 20 ve Şekil 21’da malzeme sabitleri (κ_2 ve κ_3) birbirlerine eşit olarak değiştirilerek çeşitli kayma modülleri oranı (μ_3/μ_2) değerleri için tabakalar arasındaki temas uzunluğu ve alt tabaka ile çeyrek düzlemler arasındaki temas uzunluğu incelenmiştir. Burada, kayma modülleri oranının (μ_3/μ_2) artması durumunda tabakalar arasındaki temas uzunluğu ve alt tabaka ile çeyrek düzlemler arasındaki temas uzunluğunun azaldığı görülmektedir.

Tablo 1. Çeşitli (κ_2, κ_3) değerleri için temas uzunluklarının çeyrek düzlem açıklık mesafesi (c/h_2) ile değişimi ($a/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\kappa_1 = 2$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)

$\frac{c}{h_2}$	$\kappa_2 = \kappa_3 = 1.25$		$\kappa_2 = \kappa_3 = 2$		$\kappa_2 = \kappa_3 = 2.5$	
	$\frac{b}{h_2}$	$\frac{(d-c)}{h_2}$	$\frac{b}{h_2}$	$\frac{(d-c)}{h_2}$	$\frac{b}{h_2}$	$\frac{(d-c)}{h_2}$
0.01	1.2248	1.5307	1.2884	1.5612	1.3285	1.5811
0.05	1.2286	1.4858	1.293	1.5165	1.3335	1.5367
0.1	1.2341	1.4276	1.2996	1.4588	1.3407	1.4793
0.2	1.248	1.3057	1.3159	1.3382	1.3581	1.3595
0.4	1.2911	1.0522	1.3651	1.0876	1.4097	1.1107
0.5	1.3233	0.9289	1.401	0.9652	1.4469	0.9889
0.6	1.3648	0.8132	1.4466	0.8498	1.4935	0.8736
0.75	1.4477	0.6599	1.5354	0.6956	1.5835	0.7188
1	1.6478	0.4653	1.7398	0.4965	1.7862	0.5169



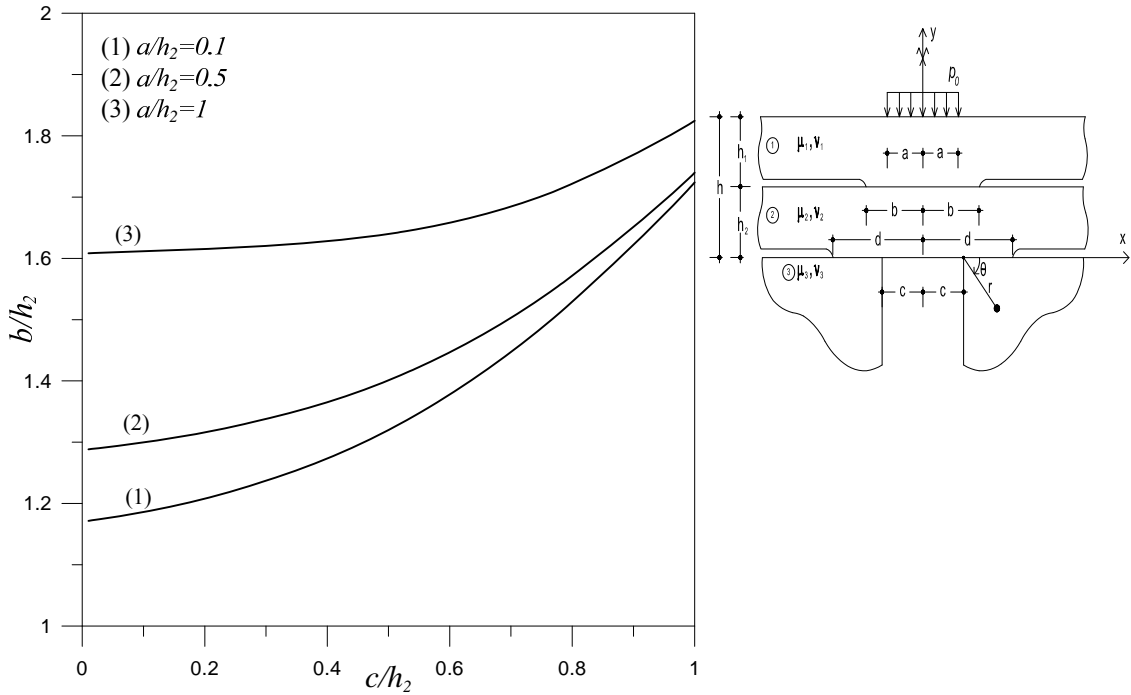
Şekil 16. Malzeme sabitlerine (κ_2, κ_3) bağlı olarak, (c/h_2) 'ye göre tabakalar arasındaki temas uzunluğu değişimi ($a/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\kappa_1 = 2$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)



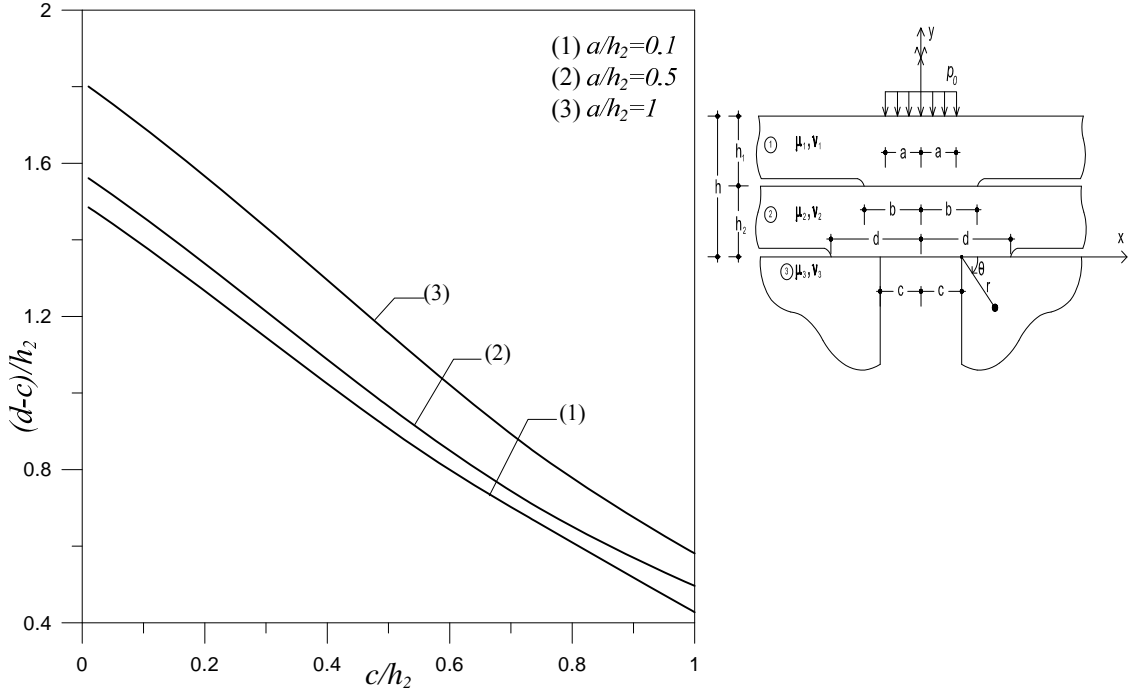
Şekil 17. Malzeme sabitlerine (κ_2, κ_3) bağlı olarak, (c/h_2) 'ye göre 2 nolu tabaka ile çeyrek düzlem arasındaki temas uzunluğu değişimi ($a/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\kappa_1 = 2$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)

Tablo 2. Çeşitli yük genişliği (a/h_2) değerleri için, temas uzunluklarının çeyrek düzlem açıklık mesafesi (c/h_2) ile değişimi ($h_1/h_2 = 1$, $\kappa_{1,2,3} = 2$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)

$\frac{c}{h_2}$	$\frac{a}{h_2} = 0.1$		$\frac{a}{h_2} = 0.5$		$\frac{a}{h_2} = 1$	
	$\frac{b}{h_2}$	$\frac{(d-c)}{h_2}$	$\frac{b}{h_2}$	$\frac{(d-c)}{h_2}$	$\frac{b}{h_2}$	$\frac{(d-c)}{h_2}$
0.01	1.1717	1.485	1.2884	1.5612	1.6083	1.8005
0.05	1.1775	1.4413	1.293	1.5165	1.6098	1.7538
0.1	1.1861	1.3846	1.2996	1.4588	1.6115	1.6934
0.2	1.2077	1.2666	1.3159	1.3382	1.6153	1.5666
0.4	1.2733	1.0242	1.3651	1.0876	1.6279	1.29534
0.5	1.3199	0.9078	1.401	0.9652	1.6399	1.1567
0.6	1.3777	0.7993	1.4466	0.8497	1.6581	1.0214
0.75	1.4862	0.656	1.5354	0.6955	1.7012	0.8332
1	1.7239	0.4277	1.7398	0.4965	1.8247	0.5812



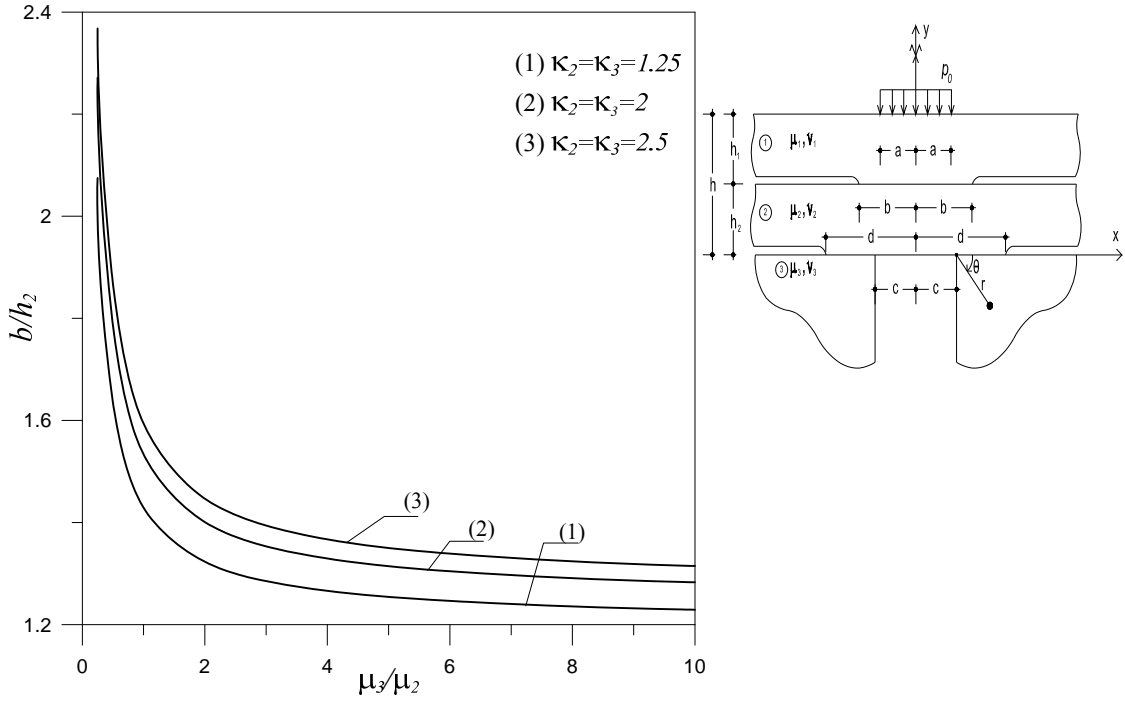
Şekil 18. Yük genişliğine (a/h_2) bağlı olarak, (c/h_2)'ye göre tabakalar arasındaki temas uzunluğu değişimi ($h_1/h_2 = 1$, $\kappa_{1,2,3} = 2$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)



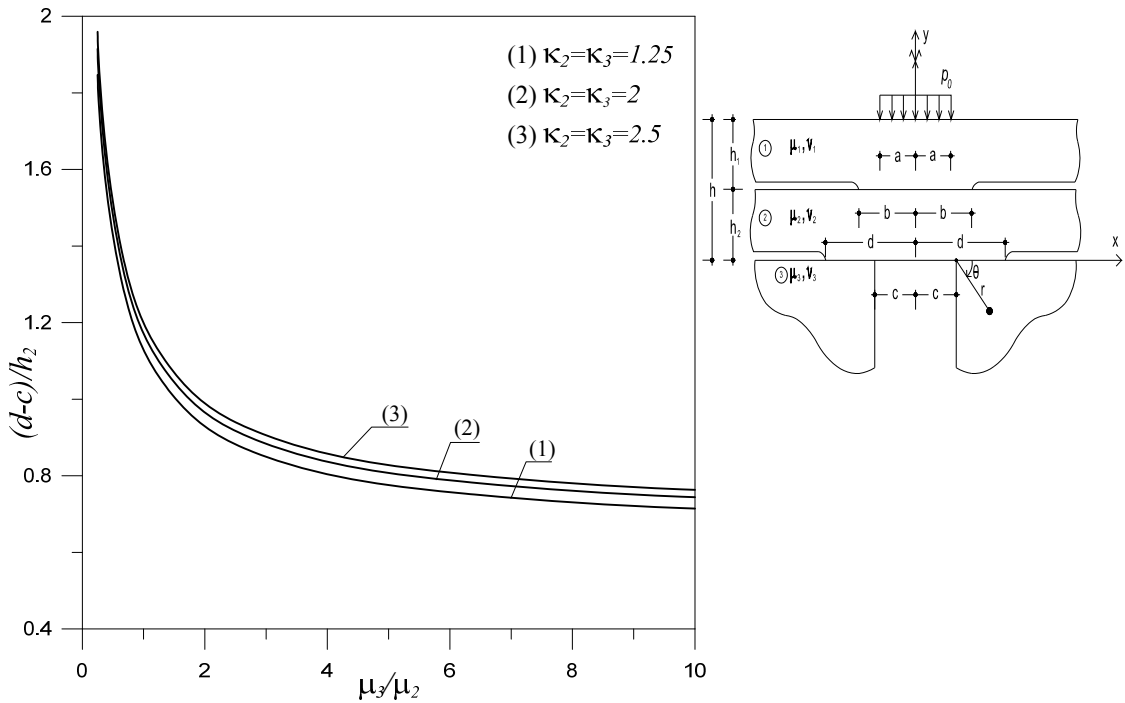
Şekil 19. Yük genişliğine (a/h_2)'ye bağlı olarak, 2 nolu tabaka ile çeyrek düzlem arasındaki temas uzunluğunun (c/h_2) ile değişimi ($h_1/h_2 = 1$, $\kappa_{1,2,3} = 2$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)

Tablo 3. Çeşitli (κ_2, κ_3) değerleri için, temas uzunluklarının (μ_3/μ_2) oranı ile değişimi ($c/h_2 = a/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\kappa_1 = 2$, $\mu_2/\mu_1 = 2$)

$\frac{\mu_3}{\mu_2}$	$\kappa_2 = \kappa_3 = 1.25$		$\kappa_2 = \kappa_3 = 2$		$\kappa_2 = \kappa_3 = 2.5$	
	$\frac{b}{h_2}$	$\frac{(d-c)}{h_2}$	$\frac{b}{h_2}$	$\frac{(d-c)}{h_2}$	$\frac{b}{h_2}$	$\frac{(d-c)}{h_2}$
0.25	2.0752	1.8472	2.2717	1.9154	2.368	1.9594
0.5	1.6352	1.4267	1.7859	1.4793	1.8684	1.5138
0.75	1.4975	1.2389	1.6184	1.2851	1.6871	1.3154
1	1.4291	1.1284	1.5334	1.1710	1.5937	1.1989
2	1.3233	0.9289	1.401	0.9652	1.4469	0.9889
4	1.2664	0.8039	1.3296	0.8365	1.3671	0.8575
5	1.2542	0.7757	1.3145	0.80737	1.3502	0.8278
8	1.2357	0.7304	1.2911	0.7607	1.324	0.7802
10	1.2293	0.7144	1.2831	0.7442	1.315	0.7634



Şekil 20. Malzeme sabitlerine (κ_2, κ_3) bağlı olarak, (μ_3/μ_2) oranına göre tabakalar arasındaki temas uzunluğu değişimi ($c/h_2 = a/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\kappa_1 = 2$, $\mu_2/\mu_1 = 2$)



Şekil 21. Malzeme sabitlerine (κ_2, κ_3) bağlı olarak, (μ_3/μ_2) oranına göre 2 nolu tabaka ile çeyrek düzlem arasındaki temas uzunluğu değişimi ($c/h_2 = a/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\kappa_1 = 2$, $\mu_2/\mu_1 = 2$)

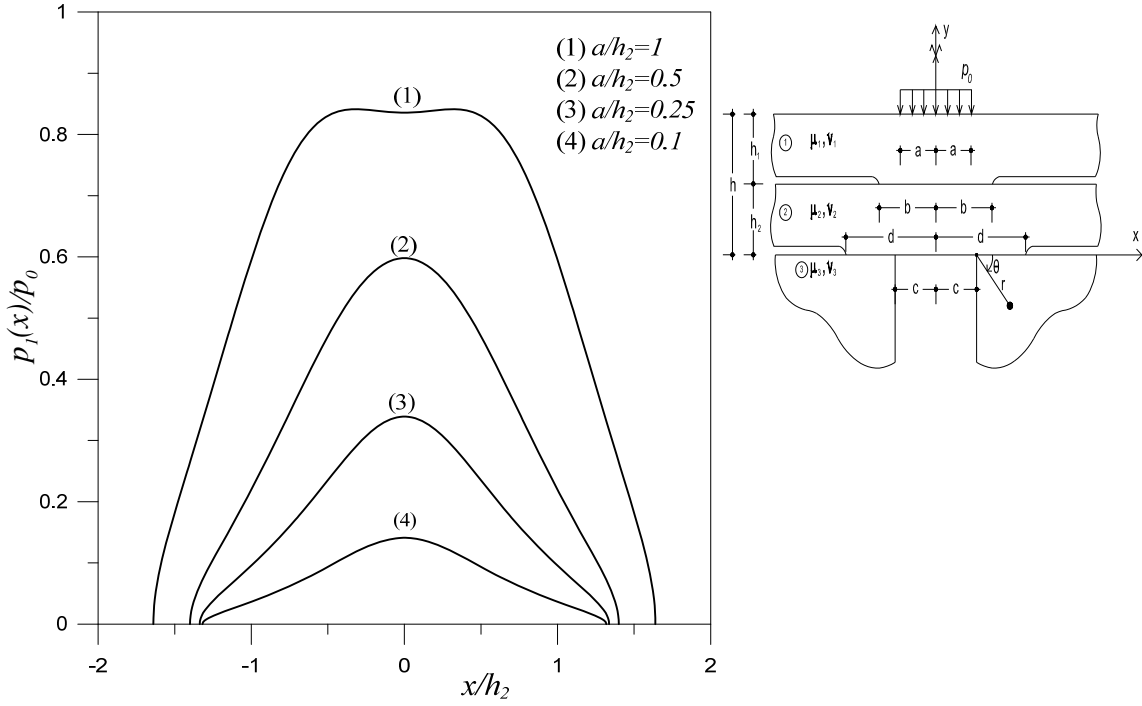
Tabakalar arasındaki ve alt tabaka ile çeyrek düzlem arasındaki temas gerilme yayılışları çeşitli boyutsuz büyüklükler için Şekil (22-31)'de verilmiştir. Burada malzeme sabitleri $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 2$ olarak alınmıştır.

Şekil 22 ve Şekil 23'da temas gerilme yayılışlarının yük genişliği (a/h_2) ile değişimleri görülmektedir. Grafiklerden de görüleceği gibi yük genişliği arttıkça tabakalar arasındaki ve alt tabaka ile çeyrek düzlem arasındaki temas gerilmeleri artmaktadır.

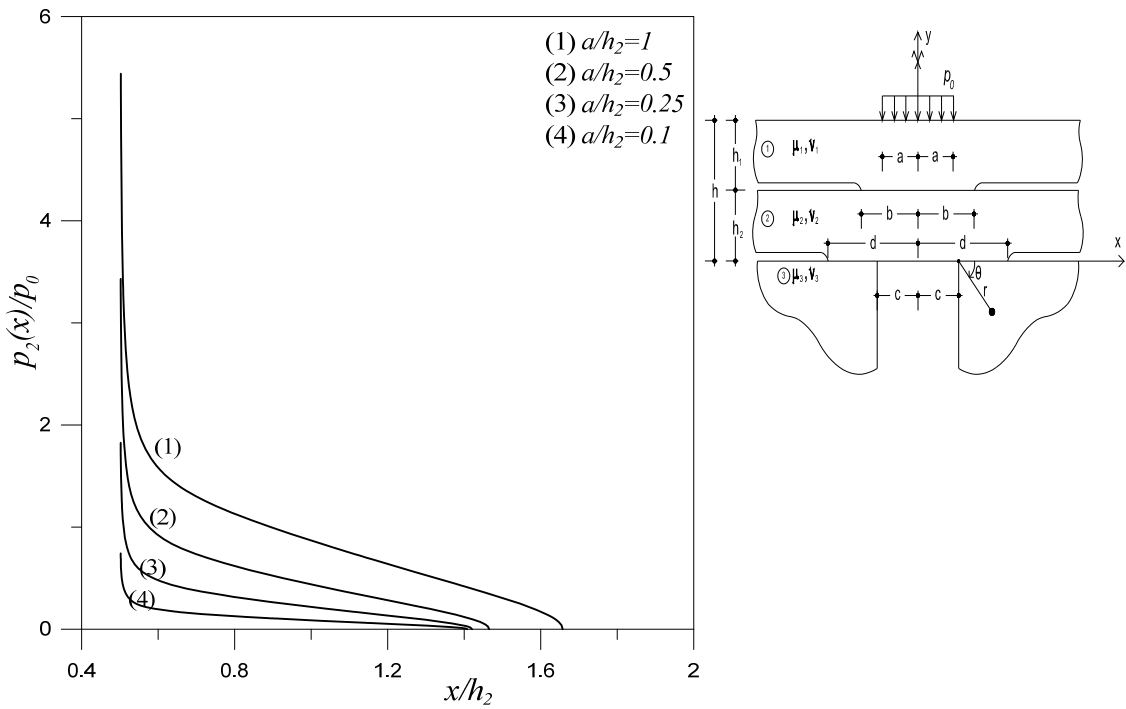
Çeşitli çeyrek düzlem açıklık mesafesi (c/h_2) değerleri için, tabakalar arasındaki ve alt tabaka ile çeyrek düzlem arasındaki temas mesafeleri boyunca oluşan gerilme yayılışları Şekil (24,25)'de görülmektedir. Çeyrek düzlem açıklık mesafesi arttıkça tabakalar arasında oluşan temas gerilmeleri azaldığı halde alt tabaka ile çeyrek düzlemler arasında oluşan temas gerilmeleri artmaktadır.

Temas gerilme yayılışlarının tabakaların yükseklikleri oranı olan (h_1/h_2) ile değişimi Şekil (26,27)'de verilmektedir. Şekillerden de görüleceği gibi (h_1/h_2) oranı arttıkça tabakalar arasındaki ve alt tabaka ile çeyrek düzlem arasındaki temas gerilmeleri azalmaktadır.

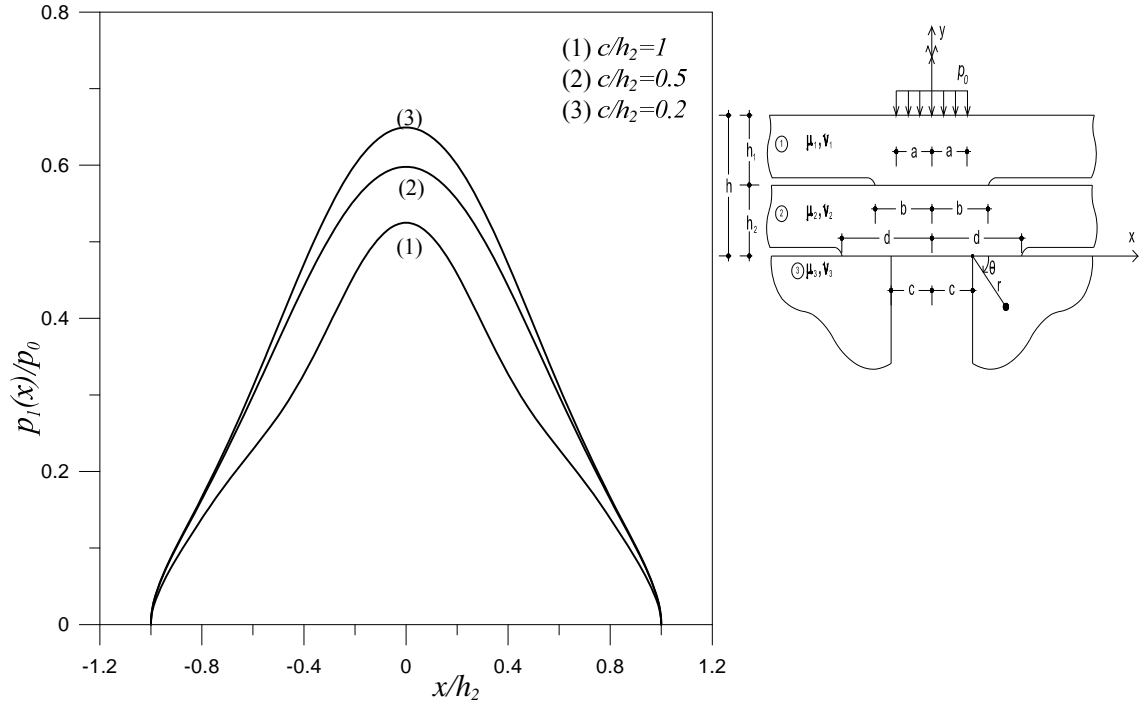
Tabakalar ve elastik çeyrek düzlem ile alt tabakanın kayma modülleri (μ_3/μ_2), (μ_2/μ_1) oranlarının değişik değerleri için temas gerilme yayılışları Şekil (28-31)'de verilmektedir. Şekillerden de görüleceği üzere alttaki tabakanın rijitliğinin üstteki tabakaya oranla ve çeyrek düzlem rijitliğinin alttaki tabakaya oranla artması durumlarında tabakalar arasındaki ve alt tabaka ile çeyrek düzlem arasındaki temas gerilmelerinde artış görülmektedir.



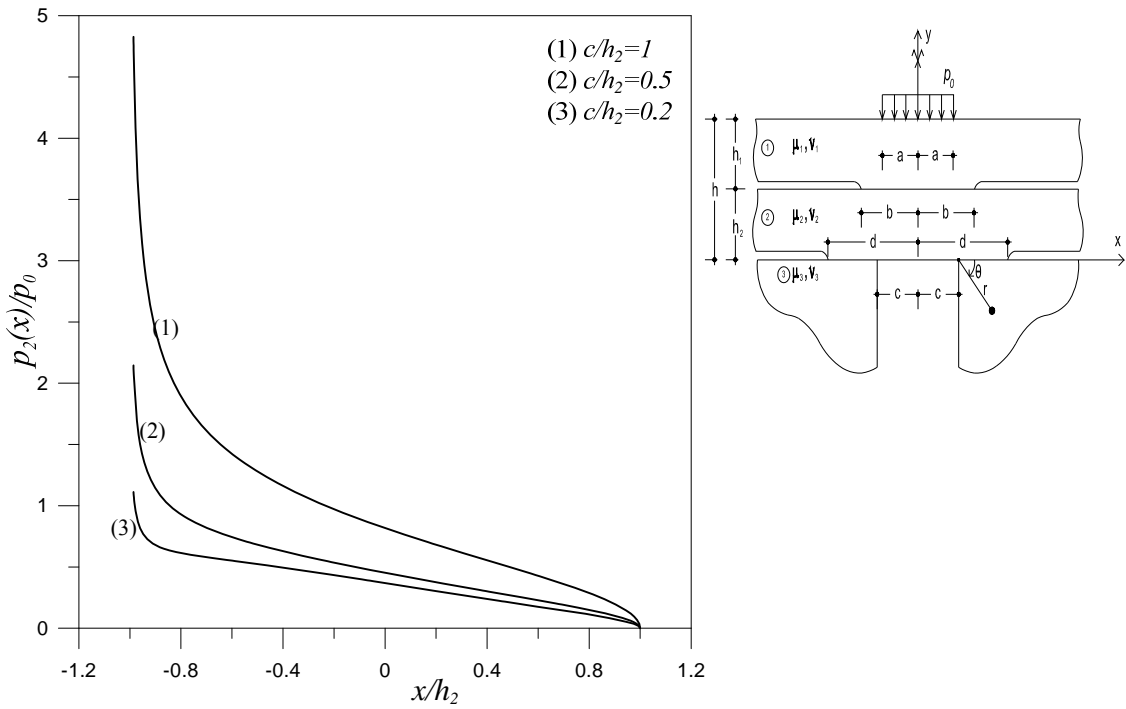
Şekil 22. Çeşitli yük genişliği (a/h_2) değerleri için tabakalar arasındaki temas gerilme yayılımı ($c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)



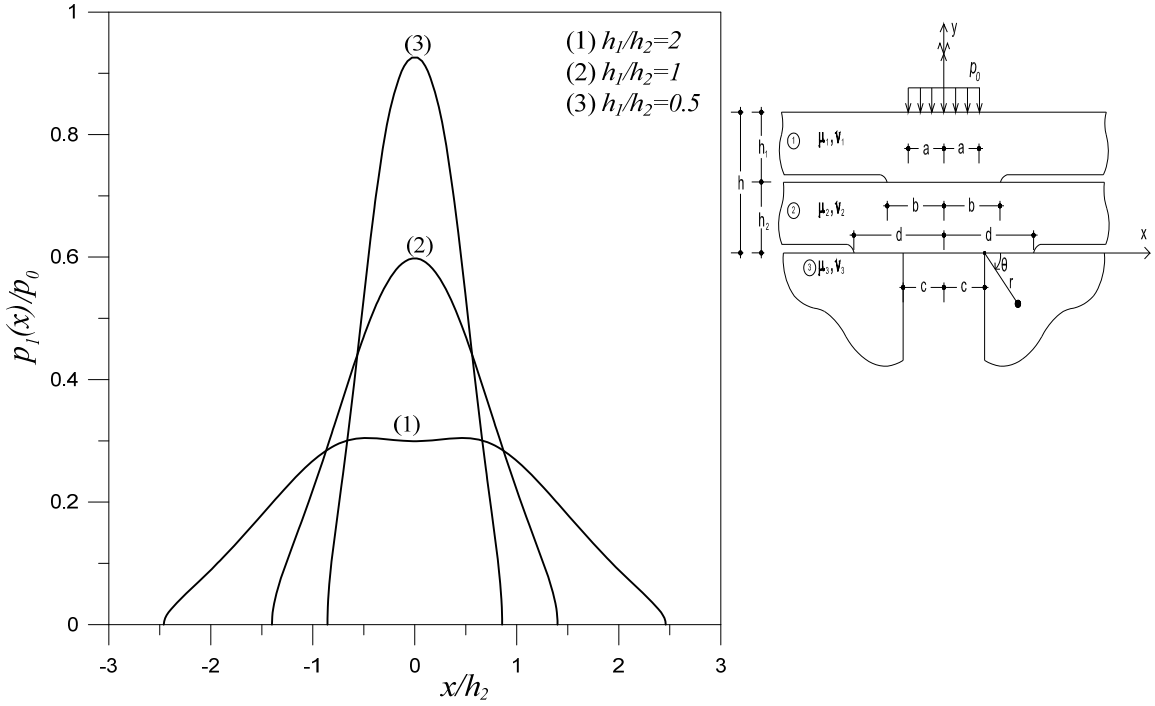
Şekil 23. Çeşitli yük genişliği (a/h_2) değerleri için 2 nolu tabaka ile çeyrek düzlem arasındaki temas gerilme yayılımı ($c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)



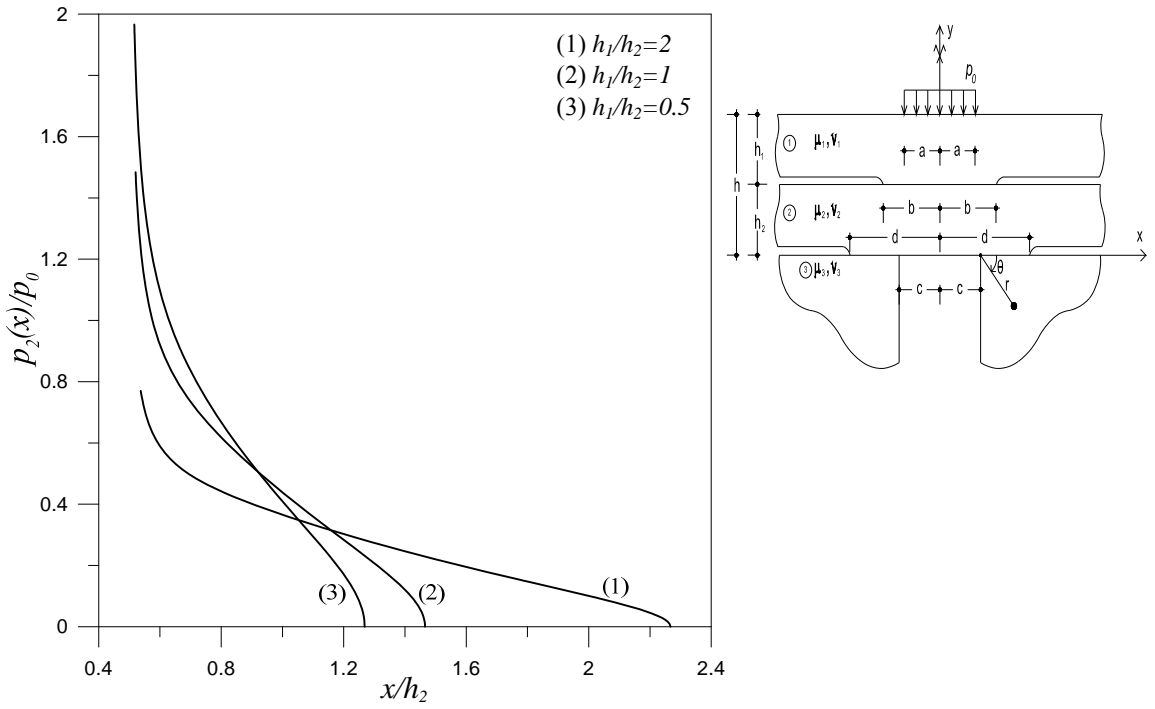
Şekil 24. Çeşitli çeyrek düzlem açıklık mesafesi (c/h_2) değerleri için tabakalar arasındaki temas gerilme yayılımı ($a/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)



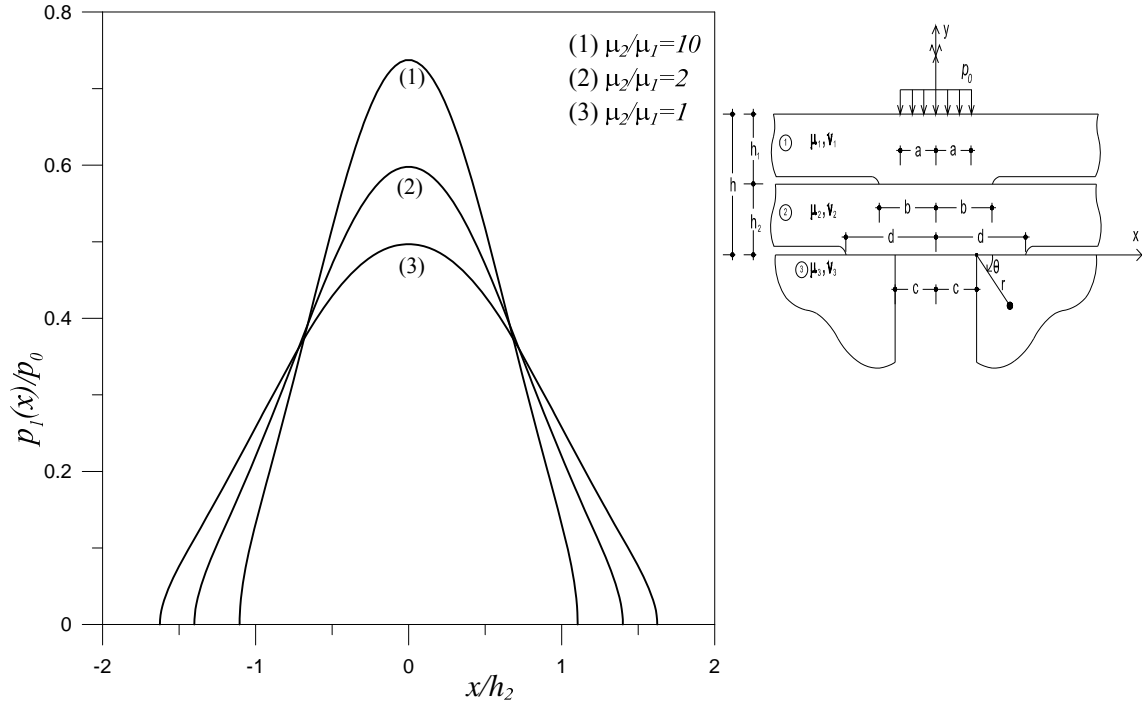
Şekil 25. Çeşitli çeyrek düzlem açıklık mesafesi (c/h_2) değerleri için 2 nolu tabaka ile çeyrek düzlem arasındaki temas gerilme yayılımı ($a/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = 2$, $\mu_3/\mu_2 = 2$)



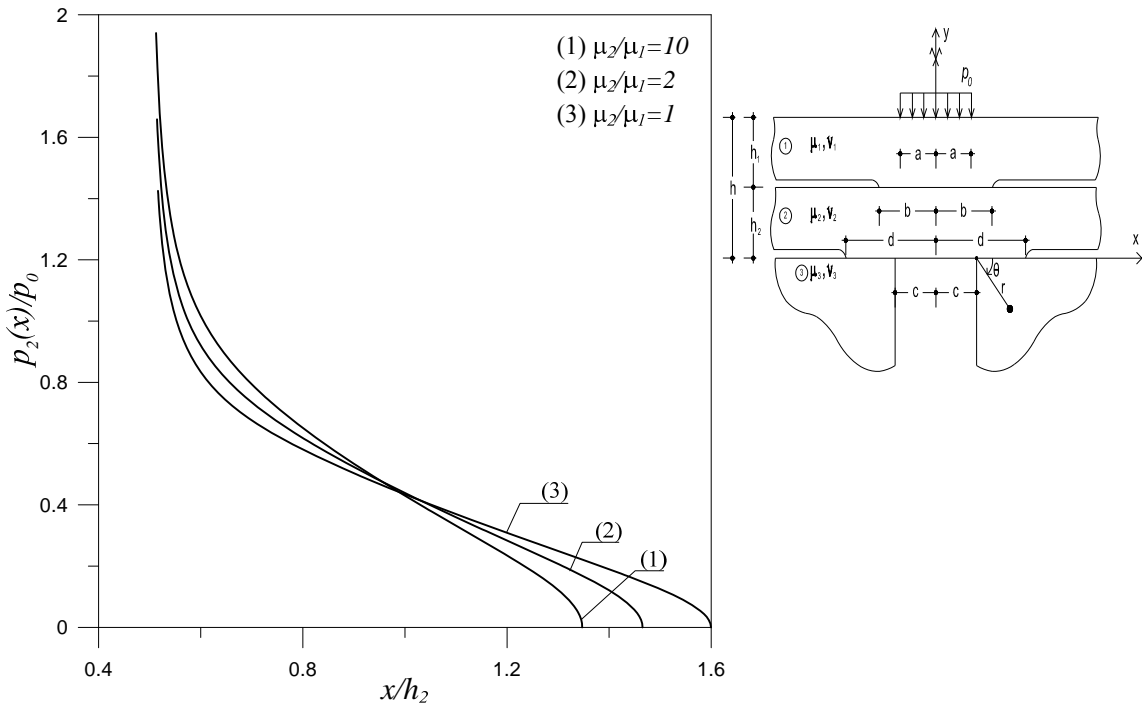
Şekil 26. Çeşitli (h_1/h_2) oranı değerleri için tabakalar arasındaki temas gerilme yayılımı ($a/h_2 = c/h_2 = 0.5$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)



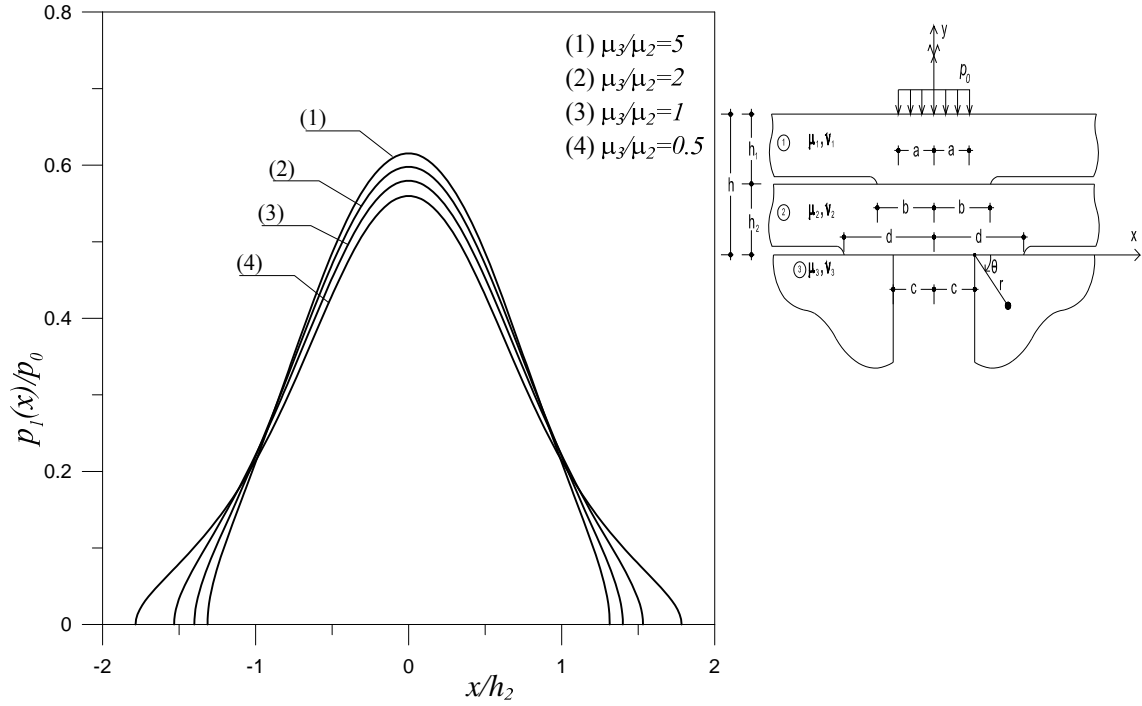
Şekil 27. Çeşitli (h_1/h_2) oranı değerleri için 2 nolu tabaka ile çeyrek düzlem arasındaki temas gerilme yayılımı ($a/h_2 = c/h_2 = 0.5$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)



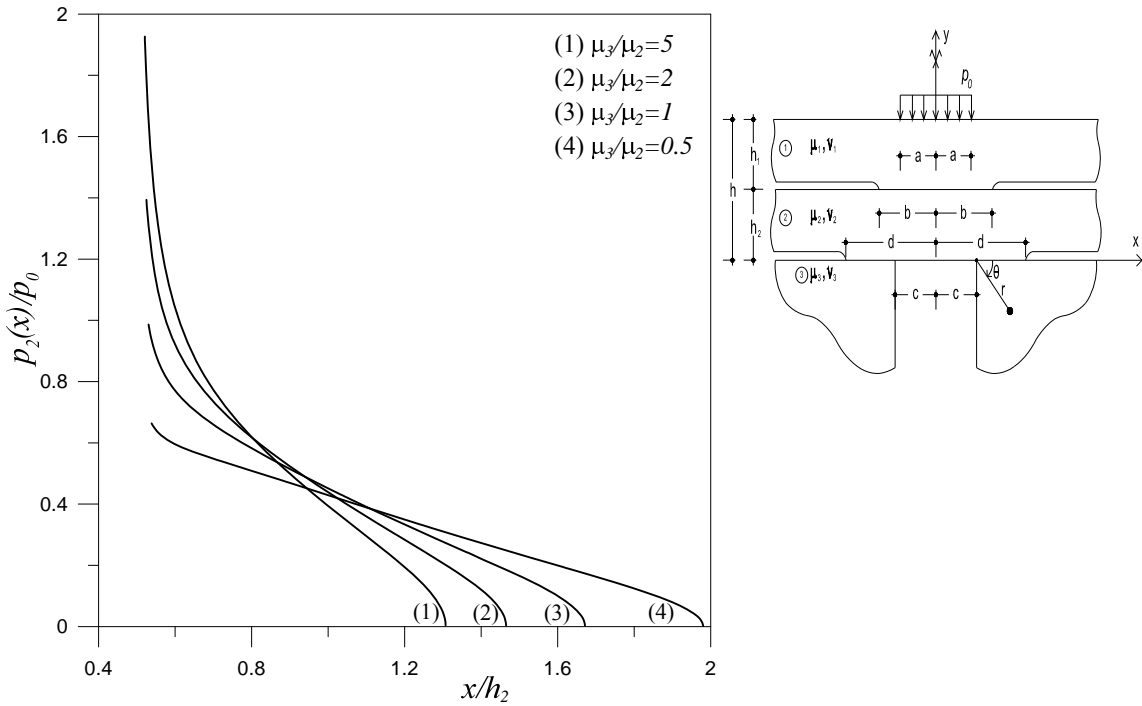
Şekil 28. Tabakaların kayma modüllerinin (μ_2/μ_1) çeşitli oranları için tabakalar arasındaki temas gerilme yayılımı ($a/h_2 = c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_3/\mu_2 = 2$)



Şekil 29. Tabakaların kayma modüllerinin (μ_2/μ_1) çeşitli oranları için 2 nolu tabaka ile çeyrek düzlem arasındaki temas gerilme yayılımı ($a/h_2 = c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_3/\mu_2 = 2$)



Şekil 30. Çeyrek düzlemin ve alttaki tabakanın kayma modüllerinin (μ_3/μ_2) çeşitli oranları için tabakalar arasındaki temas gerilme yayılımı ($a/h_2 = c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = 2$)



Şekil 31. Çeyrek düzlemin ve alttaki tabakanın kayma modüllerinin (μ_3/μ_2) çeşitli oranları için 2 nolu tabaka ile çeyrek düzlem arasındaki temas gerilme yayılımı ($a/h_2 = c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = 2$)

3.2.2. Gerilmelerin İncelenmesi

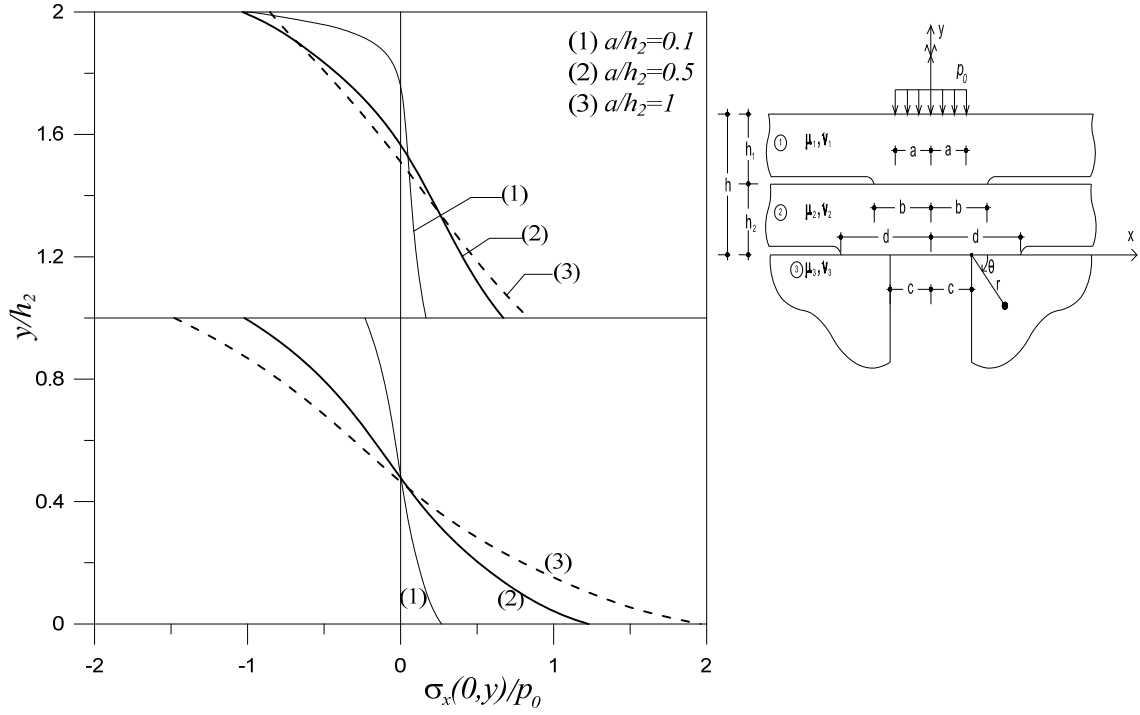
Burada, y simetri eksenini boyunca ($x = 0$), σ_x ve σ_y normal gerilmeleri ile bu eksene yakın bir yerde ($x = 0.05$) τ_{xy} kayma gerilmeleri incelenmiştir. Sayısal uygulamalarda malzeme sabitleri $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 2$ olarak alınmıştır.

3.2.2.1. σ_x Normal Gerilmelerinin İncelenmesi

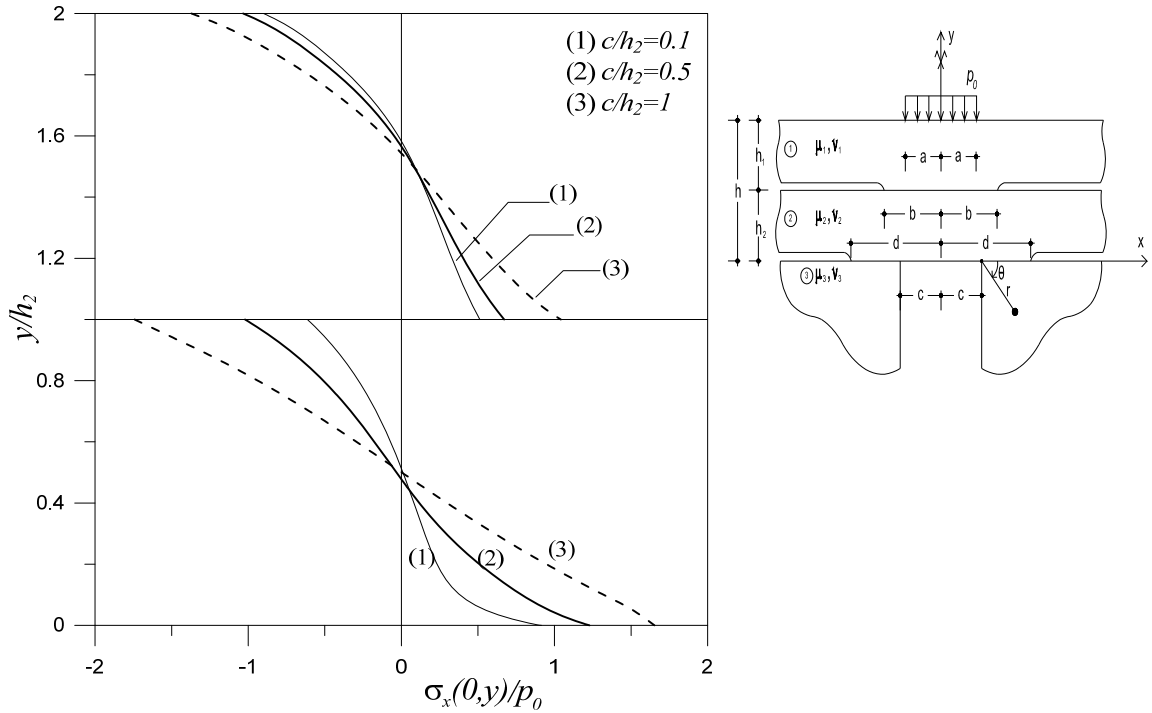
σ_x normal gerilme değerleri y simetri eksenini boyunca ($x = 0$) çeşitli boyutsuz büyüklükler için hesaplanmıştır.

Şekil 32’de σ_x normal gerilmesinin yük genişliği (a/h_2) ile değişimi görülmektedir. Şekilden de görülebileceği gibi yük genişliği arttıkça σ_x normal gerilmeside artmaktadır. Çeyrek düzlem açıklık mesafesinin (c/h_2) σ_x normal gerilmesine etkisi yük genişliğinde olduğu gibidir. Çeyrek düzlem açıklık mesafesi arttıkça σ_x normal gerilme değerleri artmaktadır (Şekil 33). Şekil (34)’da görüleceği gibi 1 nolu tabakanın yüksekliği arttıkça σ_x normal gerilme değerleri azalmaktadır.

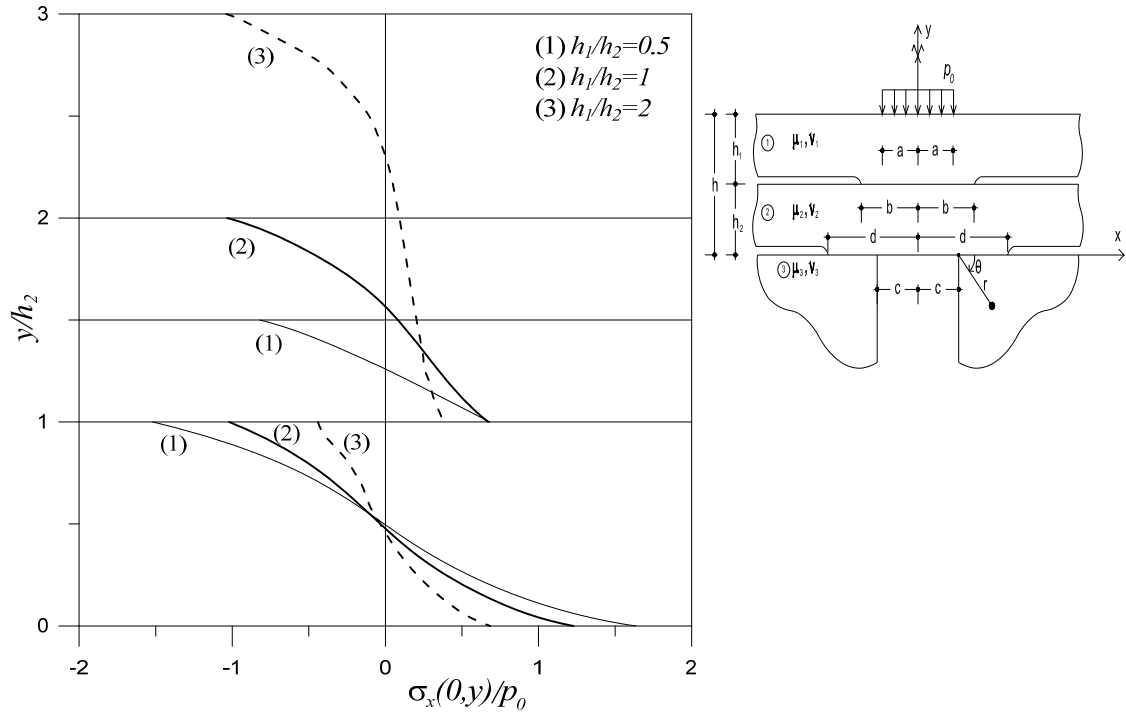
Tabakaların kayma modülleri oranı (μ_2/μ_1) ile σ_x normal gerilmesinin değişimi Şekil 35’de verilmektedir. Şekilden de görüleceği gibi üstteki tabakanın kayma modülünün alttaki tabakanın kayma modülüne oranı (μ_2/μ_1) azaldıkça üstteki tabakada σ_x normal gerilmeleri artmakta, alttaki tabakadaki gerilmeler ise azalmaktadır. Şekil 36’de ise elastik çeyrek düzlemin alt tabakanın kayma modülüne oranı (μ_3/μ_2) ile σ_x normal gerilmesinin değişimi verilmektedir. (μ_3/μ_2) oranı arttıkça σ_x gerilme değerleri azalmaktadır.



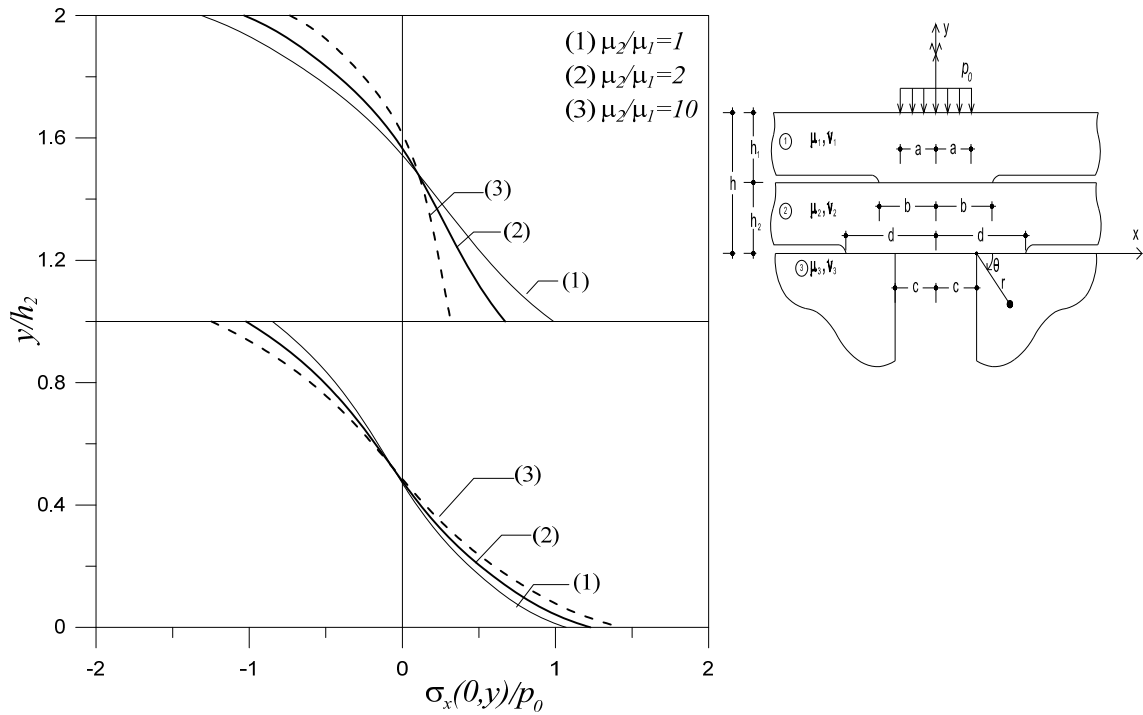
Şekil 32. $\sigma_x(0,y)/p_0$ normal gerilmesinin yük genişliği (a/h_2) ile değişimi ($c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)



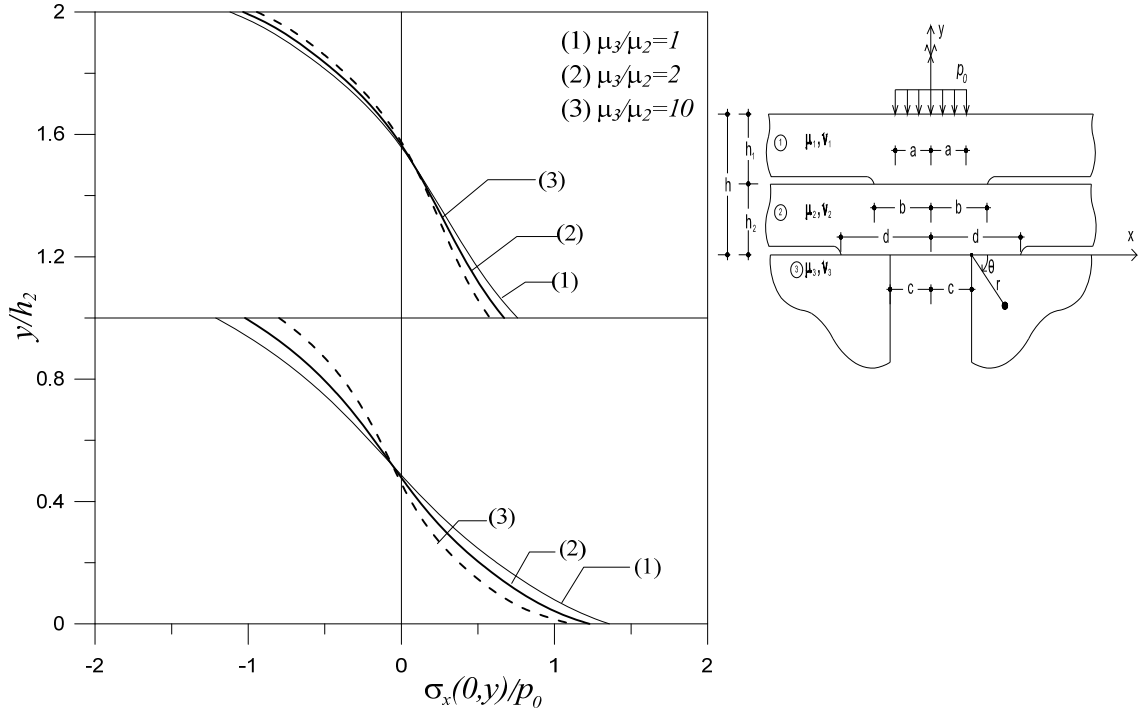
Şekil 33. $\sigma_x(0,y)/p_0$ normal gerilmesinin çeyrek düzlem açıklık mesafesi (c/h_2) ile değişimi ($a/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)



Şekil 34. $\sigma_x(0,y)/p_0$ normal gerilmesinin (h_1/h_2) oranı ile değişimi ($a/h_2 = c/h_2 = 0.5$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)



Şekil 35. $\sigma_x(0,y)/p_0$ normal gerilmesinin (μ_2/μ_1) oranı ile değişimi ($a/h_2 = c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_3/\mu_2 = 2$)



Şekil 36. $\sigma_x(0,y)/p_0$ normal gerilmesinin (μ_3/μ_2) oranı ile değişimi ($a/h_2 = c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = 2$)

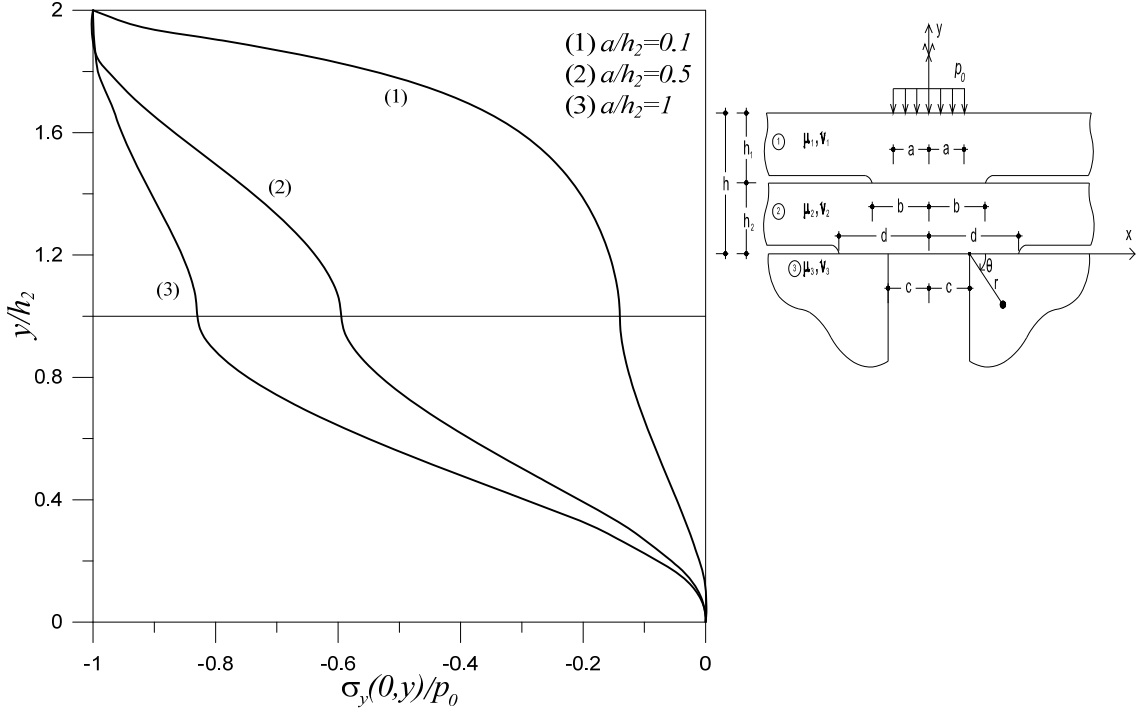
Genel olarak σ_x normal gerilme yayılışı diyagramlarına bakıldığında üst tabakada tabakanın üst bölgesinde basınç gerilmeleri oluşmakta, tabakanın alt kısımlarına doğru inildikçe değeri azalarak sıfır olmakta daha sonra işaret değiştirerek çekme gerilmesi olarak değeri artmaktadır. Alt tabakada da benzer durum söz konusu olmaktadır.

3.2.2.2. σ_y Normal Gerilmelerinin İncelenmesi

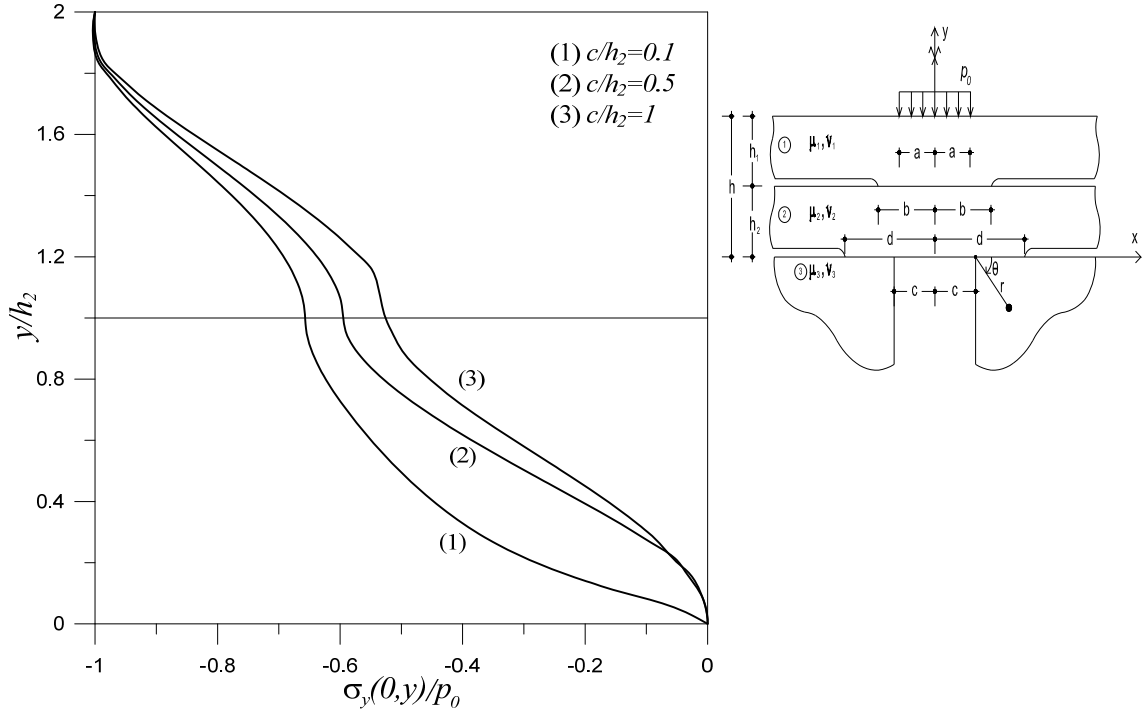
σ_y normal gerilme yayılışları y simetri eksenini boyunca ($x = 0$) çeşitli boyutsuz büyüklükler için aşağıda incelenmiştir.

σ_y normal gerilmesinin yük genişliği (a/h_2) ile değişimi Şekil 37'de verilmektedir. Şekilden de görüleceği gibi yük genişliği (a/h_2) arttıkça σ_y normal gerilme değerleri artmaktadır. Şekil 38'de σ_y normal gerilme yayılışlarının çeyrek düzlem açıklık mesafesi (c/h_2) ile değişimi görülmektedir. Çeyrek düzlem açıklık mesafesi (c/h_2) arttıkça σ_y normal gerilme değerleri azalmaktadır. (h_1/h_2) oranının σ_y normal gerilmelerine etkisi Şekil (39)'de verilmektedir. Burada (h_1/h_2) oranı arttıkça σ_y normal gerilme değerlerinin azaldığı görülmektedir.

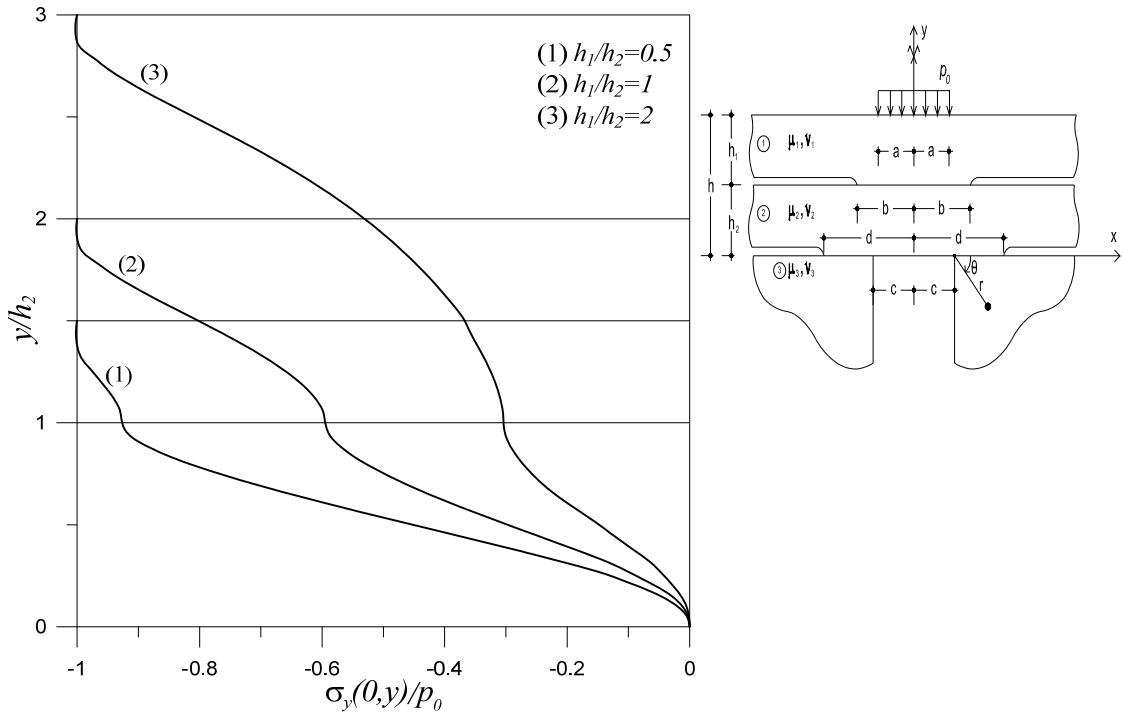
Tabakalar ve çeyrek düzlem ile alt tabakanın kayma modülleri oranları (μ_3/μ_2 , ve μ_2/μ_1) ile σ_y normal gerilmesinin değişimi Şekil 40 ve Şekil 41’de verilmektedir. Şekil 40’den de görüleceği gibi üst tabakanın alt tabakaya göre rijitliği azaldıkça σ_y normal gerilme değerleri artmaktadır. Çeyrek düzlemin rijitliği alt tabakaya göre artıkça σ_y normal gerilmelerinde ise artış görülmektedir (Şekil 41).



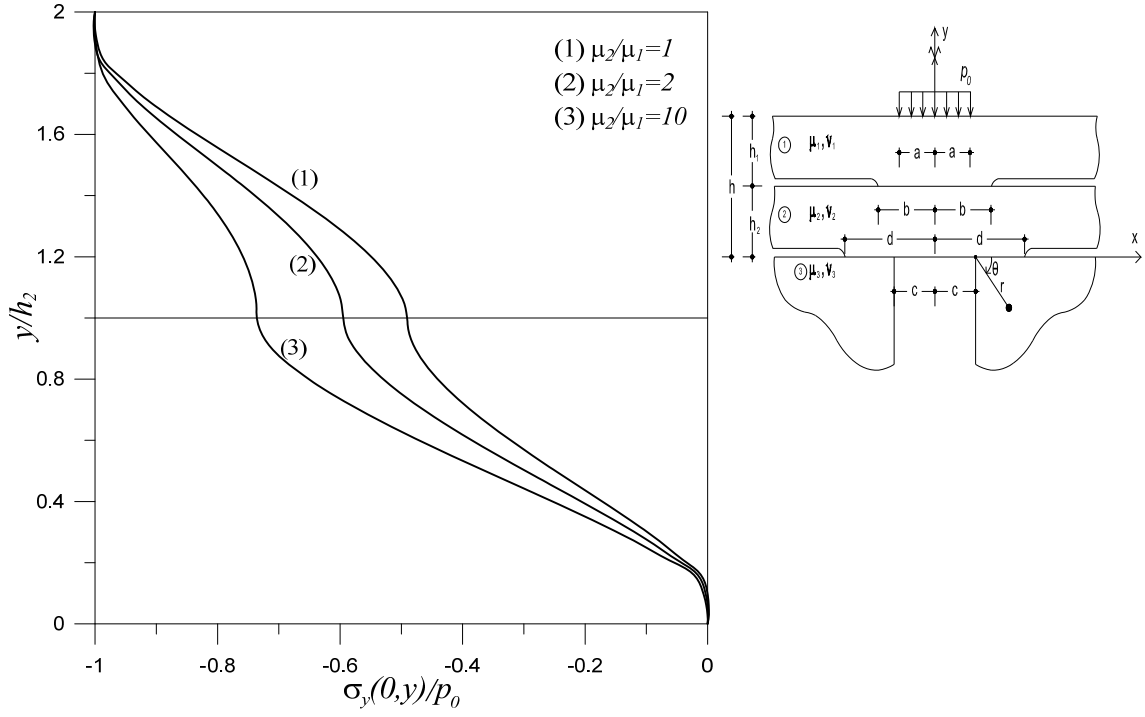
Şekil 37. $\sigma_y(0, y)/p_0$ normal gerilmesinin yük genişliği (a/h_2) ile değişimi ($c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)



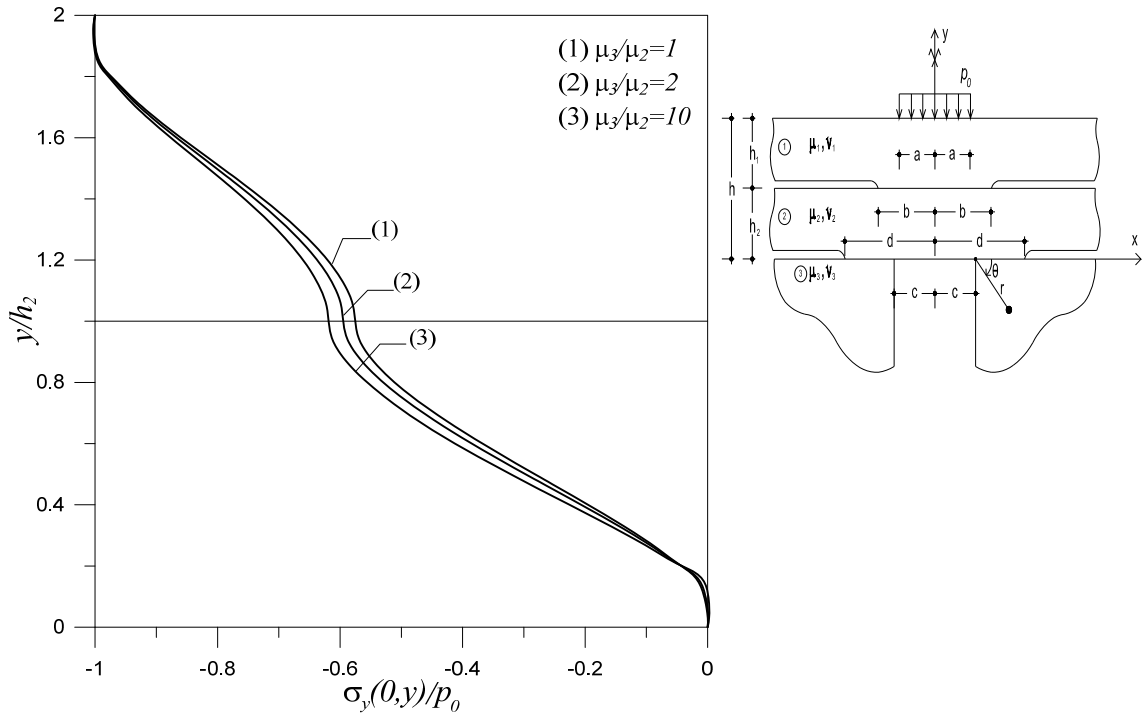
Şekil 38. $\sigma_y(0,y)/p_0$ normal gerilmesinin çeyrek düzlem açıklık mesafesi (c/h_2) ile değişimi ($a/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)



Şekil 39. $\sigma_y(0,y)/p_0$ normal gerilmesinin (h_1/h_2) oranı ile değişimi ($a/h_2 = c/h_2 = 0.5$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)



Şekil 40. $\sigma_y(0, y)/p_0$ normal gerilmesinin (μ_2/μ_1) oranı ile değişimi ($a/h_2 = c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_3/\mu_2 = 2$)



Şekil 41. $\sigma_y(0, y)/p_0$ normal gerilmesinin (μ_3/μ_2) oranı ile değişimi ($a/h_2 = c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = 2$)

σ_y normal gerilme yayılışı grafiklerinden de görülebileceği gibi iki elastik tabaka arasındaki temas yüzeylerinin alt ve üst noktalarında gerilmeler aynı değerleri almakta ve dolayısıyla da (109) nolu sınır şartı sağlanmaktadır. Diğer yandan, temas yüzeylerindeki σ_y normal gerilme değerleri, temas gerilmelerinde incelenen değerlere eşit çıkarak (108) ve (110) nolu sınır şartları da sağlanmaktadır. σ_y normal gerilmeleri en büyük değerlerini yayılı yükün temas yüzeyinde ($y = h$) alırken yayılı yükün şiddetine eşit olmaktadır. σ_y normal gerilme değerleri yayılı yükten uzaklaştıkça azalarak 2 nolu tabakanın alt yüzeyinde ($y = 0$) sıfır değerini almaktadır. Gerilme değerleri her zaman basınç olarak etkisini göstermektedir.

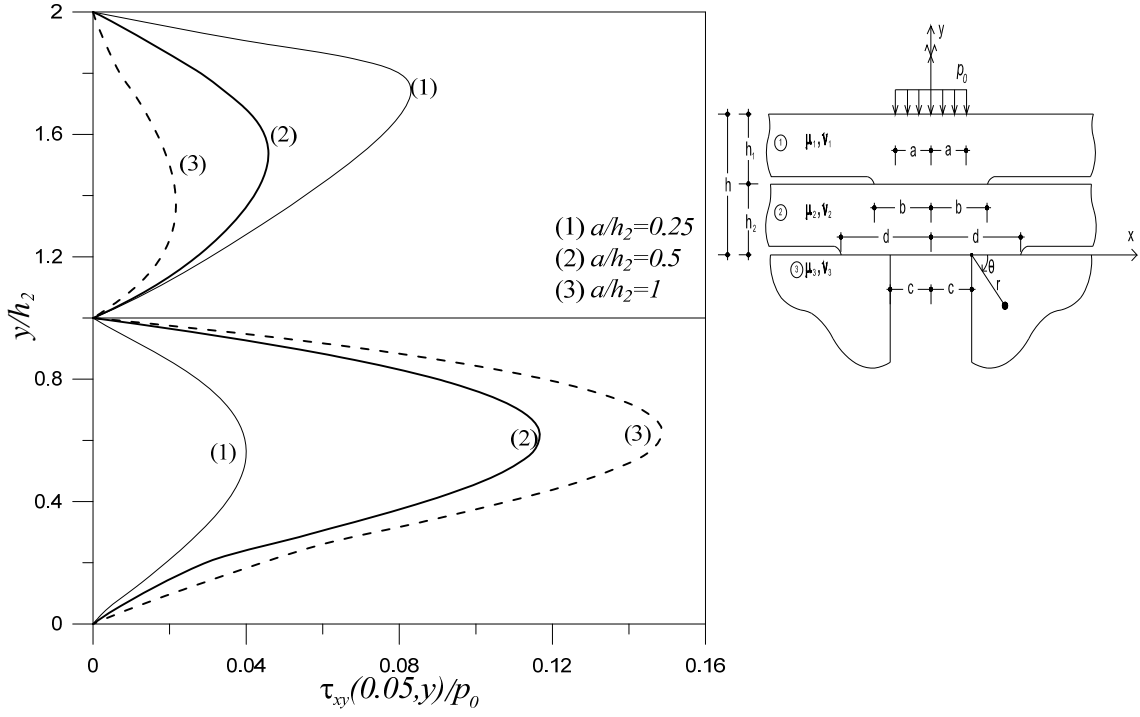
3.2.2.3. τ_{xy} Kayma Gerilmelerinin İncelenmesi

Kayma gerilmeleri y simetri eksenini boyunca sıfırdır. Bu nedenle τ_{xy} kayma gerilmelerinin $x = 0.05$ kesitindeki yayılışı incelenmiş ve çeşitli boyutsuz değerler için elde edilen grafikler aşağıda verilmiştir.

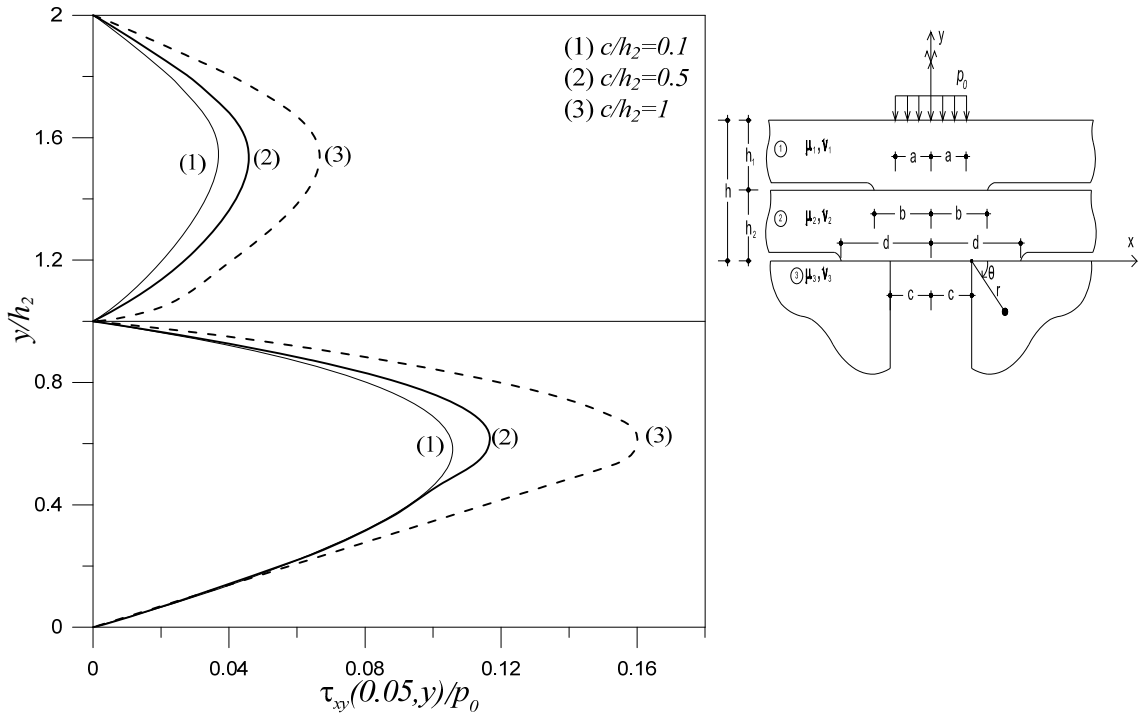
Kayma gerilmeleri $\tau_{xy}(x, 0)$, $\tau_{xy}(x, h_2)$ ve $\tau_{xy}(x, h)$ temas yüzeyleri boyunca sıfır olmakta ve problemin tanımında verilen sınır şartlarının sağlandığı görülmektedir.

Şekil 42'de yük genişliğinin (a/h_2) değişimine bağlı olarak kayma gerilmesi yayılışı görülmektedir. Şekilden de görüleceği gibi yük genişliği arttıkça kayma gerilmeleri üst tabakada azalmakta, alt tabakada ise artmaktadır. Şekil 43'da çeyrek düzlem açıklık mesafesine (c/h_2) bağlı olarak kayma gerilmesi yayılışının değişimi görülmektedir. Çeyrek düzlem açıklık mesafesi arttıkça kayma gerilmeleri de artmaktadır.

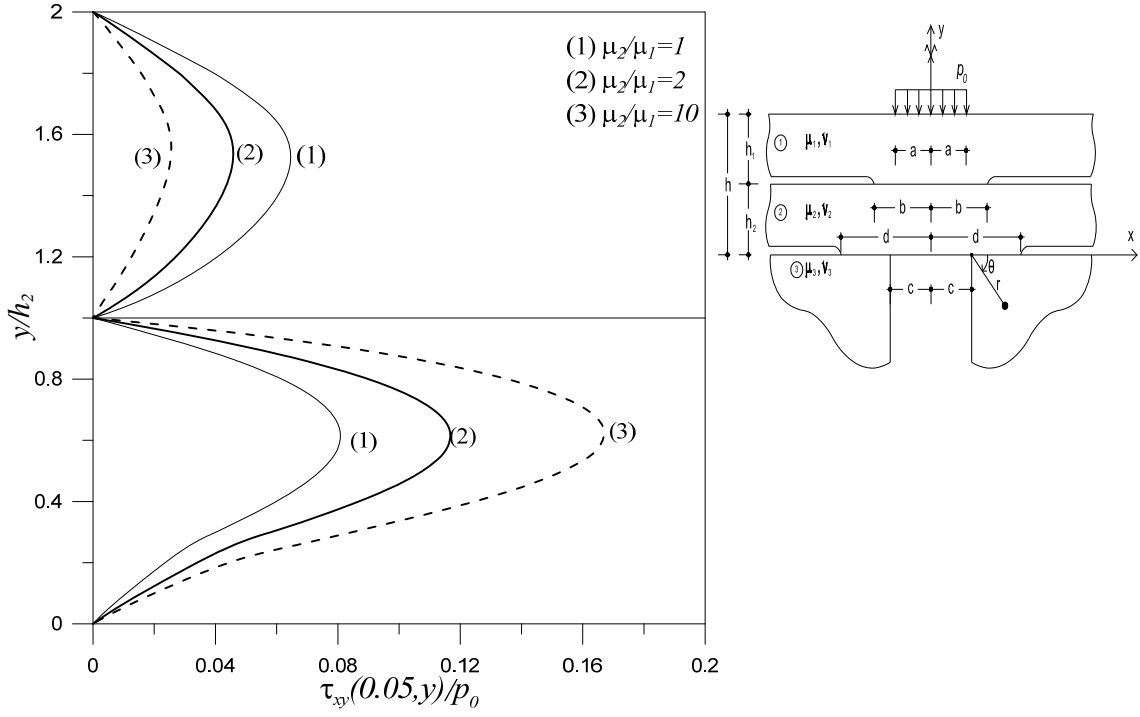
Şekil 44 ve Şekil 45'da kayma gerilmesinin kayma modülleri (μ_3/μ_2 , ve μ_2/μ_1) oranları ile değişimi görülmektedir. Altındaki tabakanın rijitliğinin üstteki tabakaya oranla artması durumunda elde edilen kayma gerilmeleri, üstteki tabakada azaldığı halde alttaki tabakada artmaktadır (Şekil 44). Çeyrek düzlemin rijitliğinin alttaki tabakaya oranla artması durumunda ise elde edilen kayma gerilmeleri azalmaktadır (Şekil 45).



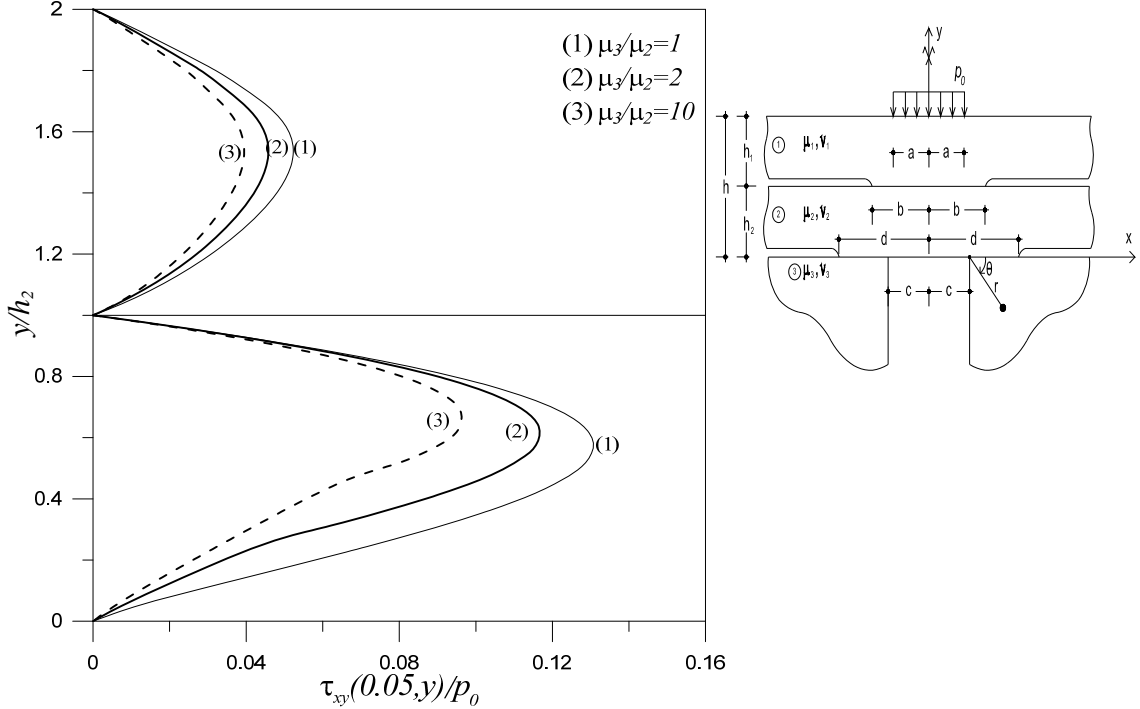
Şekil 42. $\tau_{xy}(0.05, y)/p_0$ kayma gerilmesinin yük genişliği (a/h_2) ile değişimi ($c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)



Şekil 43. $\tau_{xy}(0.05, y)/p_0$ kayma gerilmesinin çeyrek düzlem açıklık mesafesi (c/h_2) ile değişimi ($c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)



Şekil 44. $\tau_{xy}(0.05, y)/p_0$ kayma gerilmesinin (μ_2/μ_1) oranı ile değişimi ($a/h_2 = 0.5$, $c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_3/\mu_2 = 2$)



Şekil 45. $\tau_{xy}(0.05, y)/p_0$ kayma gerilmesinin (μ_3/μ_2) oranı ile değişimi ($a/h_2 = 0.5$, $c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_3/\mu_2 = 2$)

3.3. Sonlu Elemanlar Yöntemi Sonuçları ve Teorik Sonuçlarla Karşılaştırma

Bu kısımda iki elastik çeyrek düzleme oturan iki elastik tabakanın temas probleminin sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal analiz sonuçları irdelenmekte ve sonuçlar teorik sonuçlarla karşılaştırılmaktadır.

Yapılan sayısal analizlerde; yük genişliği (a/h_2), çeyrek düzlem açıklık mesafesi (c/h_2), tabakaların yükseklikleri oranı (h_1/h_2) ve malzeme sabitleri (μ_2/μ_1) gibi boyutsuz büyüklükler için farklı sayısal değerler verilerek temas uzunlukları, temas gerilmeleri ve normal gerilmeler elde edilmiştir. Elde edilen bu sonuçlar tablolar ve grafikler halinde teorik sonuçlarla birlikte karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Bu grafiklerde ve tablolarda malzeme sabitleri $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 2$ olarak alınmıştır. Yük genişliğinin ve malzeme sabitlerinin değişimleri, analizlerde kullanılan eleman sayısını temas eleman sayısını değiştirmedeği halde çeyrek düzlem açıklık mesafesi değişimi ise eleman sayısını ve temas eleman sayısını değiştirmektedir. Tabakaların yükseklikleri oranı değişimi eleman sayısını değiştirmekte fakat temas eleman sayısını değiştirmemektedir (Tablo 4,5).

Tablo 4. Çeşitli (a/h_2) ve (μ_2/μ_1) değerleri için analizlerde kullanılan eleman sayısı ve temas eleman sayısı ($c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_3/\mu_2 = 2$)

PARAMETRELER	$\frac{a}{h_2} = 0.1, \frac{a}{h_2} = 0.5, \frac{a}{h_2} = 1$ $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 1, \frac{\mu_2}{\mu_1} = 2, \frac{\mu_2}{\mu_1} = 10$
ELEMAN SAYISI	85005
TEMAS ELEMAN SAYISI	389

Tablo 5. Çeşitli (c/h_2) ve (h_1/h_2) değerleri için analizlerde kullanılan eleman sayısı ve temas eleman sayısı ($a/h_2 = 0.5$, $\mu_2/\mu_1 = 2$, $\mu_3/\mu_2 = 2$)

PARAMETRELER	$\frac{c}{h_2}$			$\frac{h_1}{h_2}$		
	0.1	0.5	1	0.5	1	2
ELEMAN SAYISI	90776	85005	78201	80233	85005	94181
TEMAS ELEMAN SAYISI	397	389	379	389	389	389

Temas uzunluklarının çeşitli boyutsuz büyüklükler için elde edilen sonlu elemanlar yöntemi sonuçları teorik sonuçlarla birlikte tablolar halinde aşağıda verilmektedir (Tablo 6-9).

Tablo 6. Yük genişliğine (a/h_2) bağlı olarak temas uzunluklarının teorik ve sayısal sonuçlarının karşılaştırılması ($c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)

PARAMETRE	$\frac{a}{h_2} = 0.1$		$\frac{a}{h_2} = 0.5$		$\frac{a}{h_2} = 1$	
	$\frac{b}{h_2}$	$\frac{(d-c)}{h_2}$	$\frac{b}{h_2}$	$\frac{(d-c)}{h_2}$	$\frac{b}{h_2}$	$\frac{(d-c)}{h_2}$
TEORİK	1.3199	0.9078	1.401	0.9652	1.6399	1.1567
ANSYS	1.3	0.9	1.4	0.95	1.65	1.15
Hata Oranı (%)	1.51	0.86	0.07	1.58	0.62	0.58

Tablo 7. Çeyrek düzlem açıklık mesafesine (c/h_2) bağlı olarak temas uzunluklarının teorik ve sayısal sonuçlarının karşılaştırılması ($a/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)

PARAMETRE	$\frac{c}{h_2} = 0.1$		$\frac{c}{h_2} = 0.5$		$\frac{c}{h_2} = 1$	
	$\frac{b}{h_2}$	$\frac{(d-c)}{h_2}$	$\frac{b}{h_2}$	$\frac{(d-c)}{h_2}$	$\frac{b}{h_2}$	$\frac{(d-c)}{h_2}$
TEORİK	1.2996	1.4588	1.401	0.9652	1.7398	0.4965
ANSYS	1.3	1.45	1.4	0.95	1.75	0.5
Hata Oranı (%)	0.03	0.6	0.07	1.58	0.59	0.71

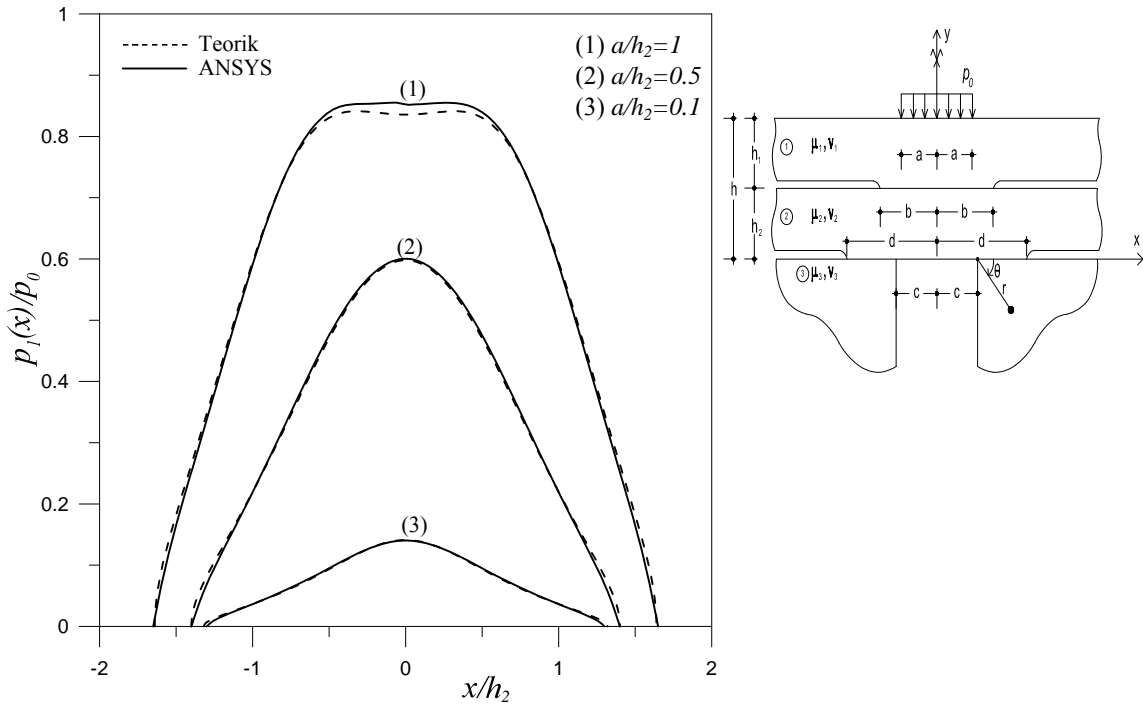
Tablo 8. Tabakaların yükseklikleri oranına (h_1/h_2) bağlı olarak temas uzunluklarının teorik ve sayısal sonuçlarının karşılaştırılması ($a/h_2 = c/h_2 = 0.5$, $\mu_2/\mu_1 = 2$, $\mu_3/\mu_2 = 2$)

PARAMETRE	$\frac{h_1}{h_2} = 0.5$		$\frac{h_1}{h_2} = 1$		$\frac{h_1}{h_2} = 2$	
	$\frac{b}{h_2}$	$\frac{(d-c)}{h_2}$	$\frac{b}{h_2}$	$\frac{(d-c)}{h_2}$	$\frac{b}{h_2}$	$\frac{(d-c)}{h_2}$
TEORİK	0.8564	0.7623	1.401	0.9652	2.461	1.7671
ANSYS	0.85	0.75	1.4	0.95	2.45	1.75
Hata Oranı (%)	0.75	1.61	0.07	1.58	0.45	0.97

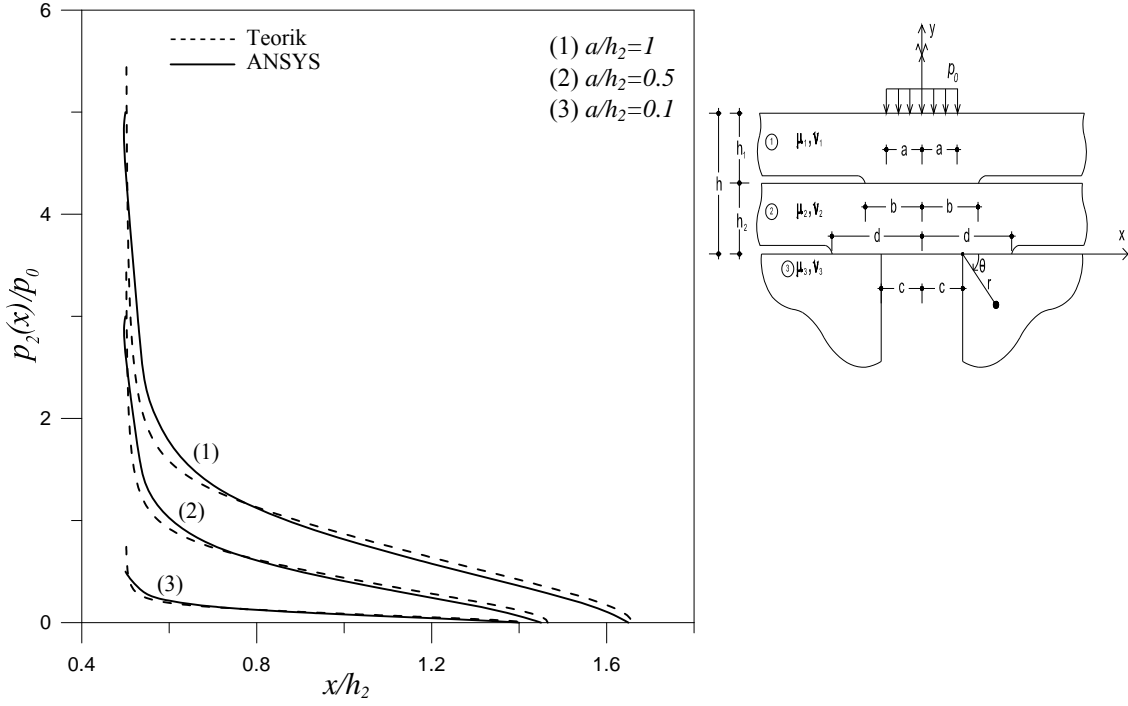
Tablo 9. (μ_2/μ_1) oranına bağlı olarak temas uzunluklarının teorik ve sayısal sonuçlarının karşılaştırılması ($a/h_2 = c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_3/\mu_2 = 2$)

PARAMETRE	$\frac{\mu_2}{\mu_1} = 1$		$\frac{\mu_2}{\mu_1} = 2$		$\frac{\mu_2}{\mu_1} = 10$	
	$\frac{b}{h_2}$	$\frac{(d-c)}{h_2}$	$\frac{b}{h_2}$	$\frac{(d-c)}{h_2}$	$\frac{b}{h_2}$	$\frac{(d-c)}{h_2}$
TEORİK	1.6254	1.0995	1.401	0.9652	1.1048	0.8474
ANSYS	1.6	1.1	1.4	0.95	1.1	0.85
Hata Oranı (%)	1.56	0.04	0.07	1.58	0.43	0.31

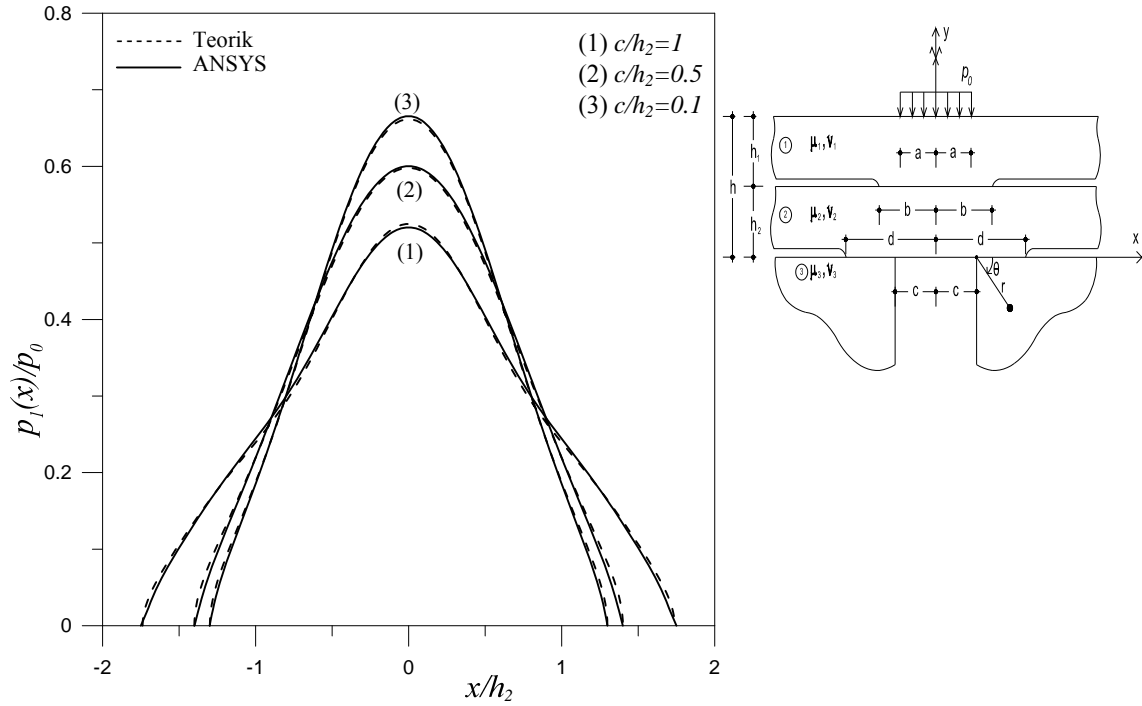
Çeşitli boyutsuz büyüklükler için sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal analizlerden elde edilen temas gerilme yayılışları teorik sonuçlarla birlikte grafikler halinde aşağıda verilmektedir (Şekil 46-53).



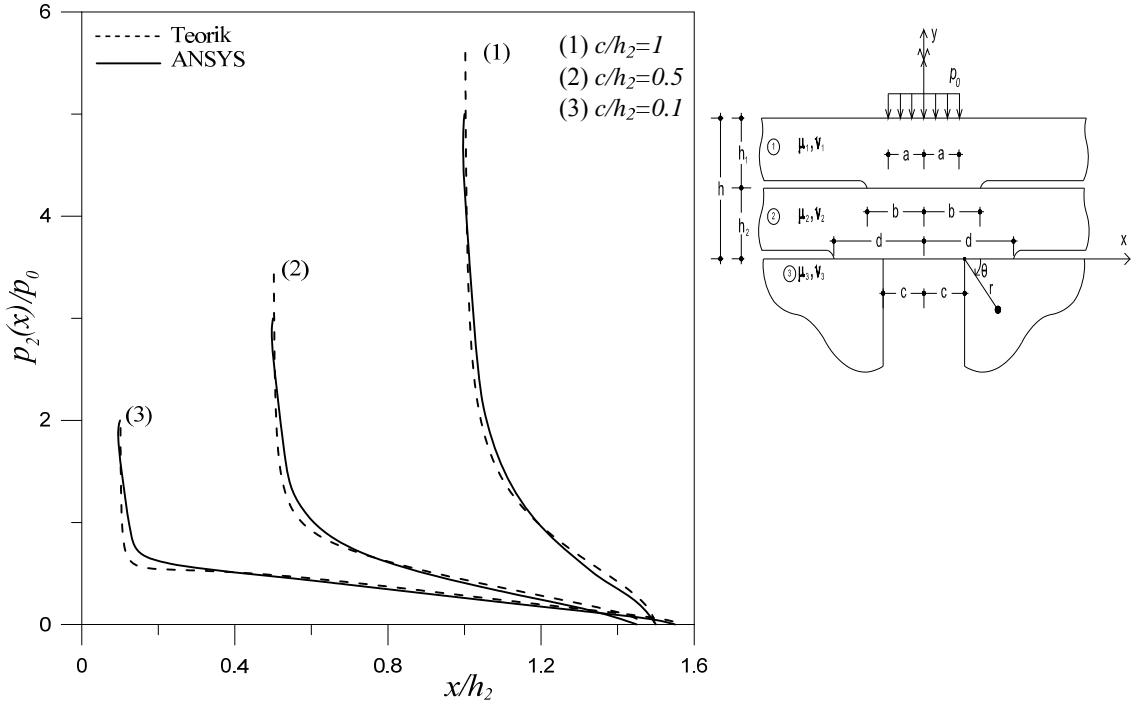
Şekil 46. Tabakalar arasındaki temas gerilmesinin yük genişliği (a/h_2) ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ($c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)



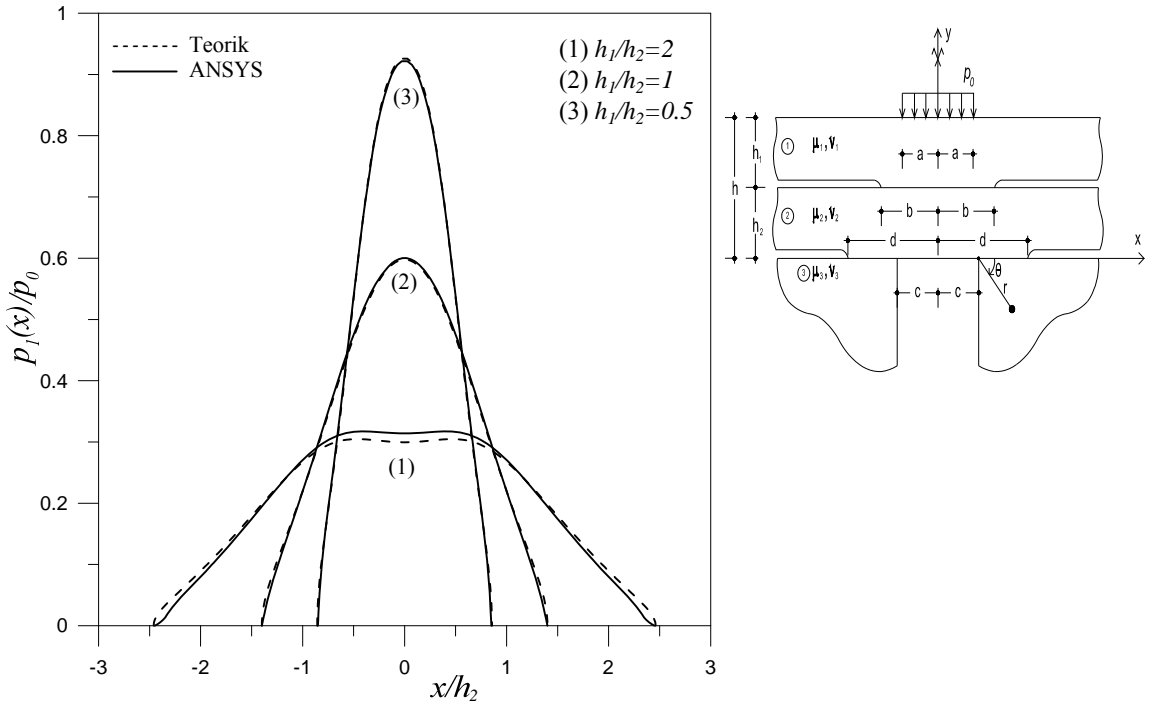
Şekil 47. 2 nolu tabaka ile çeyrek düzlem arasındaki temas gerilmesinin yük genişliği (a/h_2) ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ($c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)



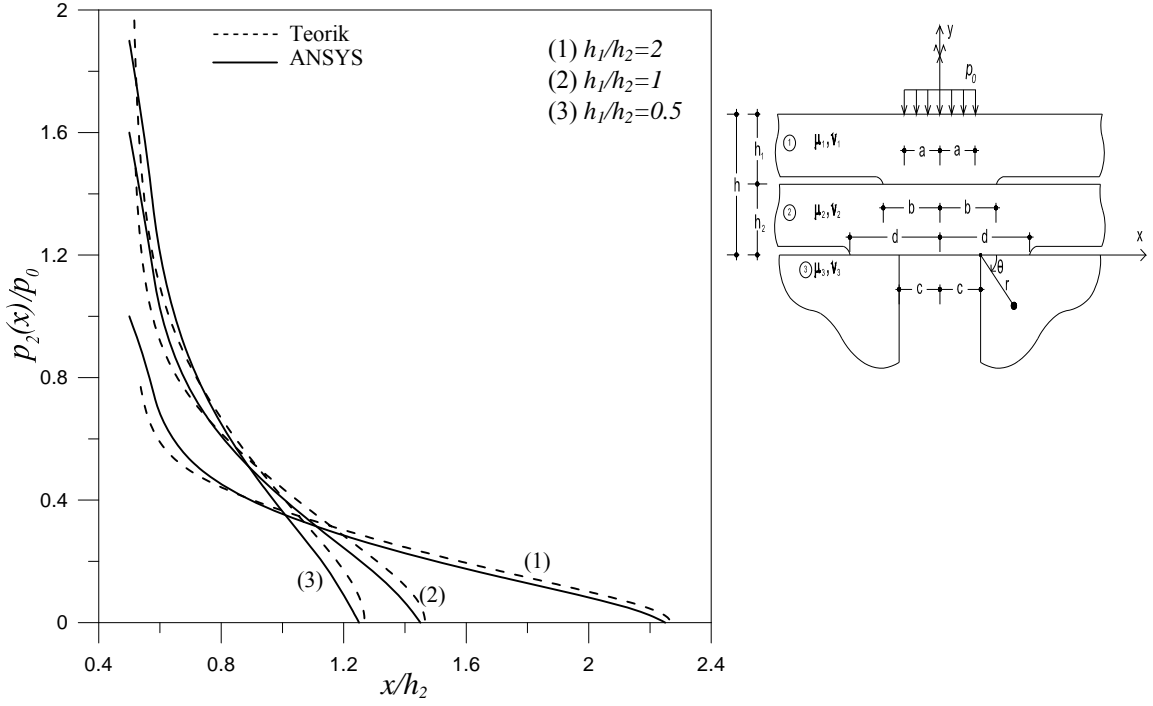
Şekil 48. Tabakalar arasındaki temas gerilmesinin çeyrek düzlem açıklık mesafesi (c/h_2) ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ($a/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = 2$, $\mu_3/\mu_2 = 2$)



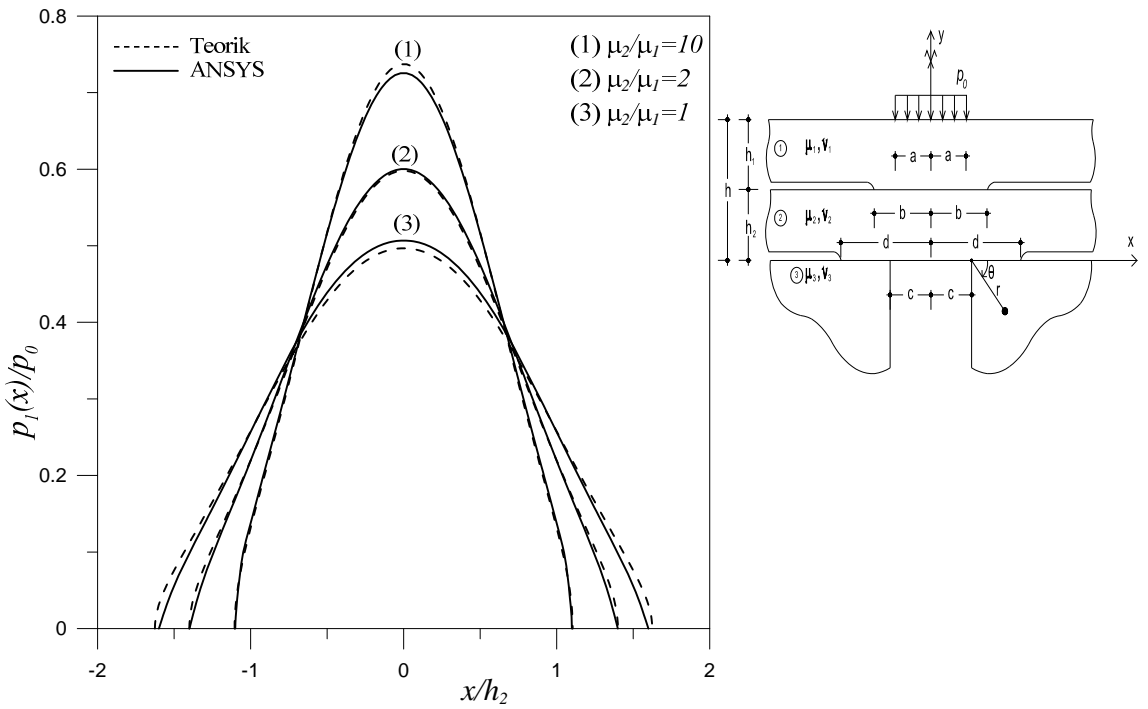
Şekil 49. 2 nolu tabaka ile çeyrek düzlem arasındaki temas gerilmesinin çeyrek düzlem açıklık mesafesi (c/h_2) ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ($a/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)



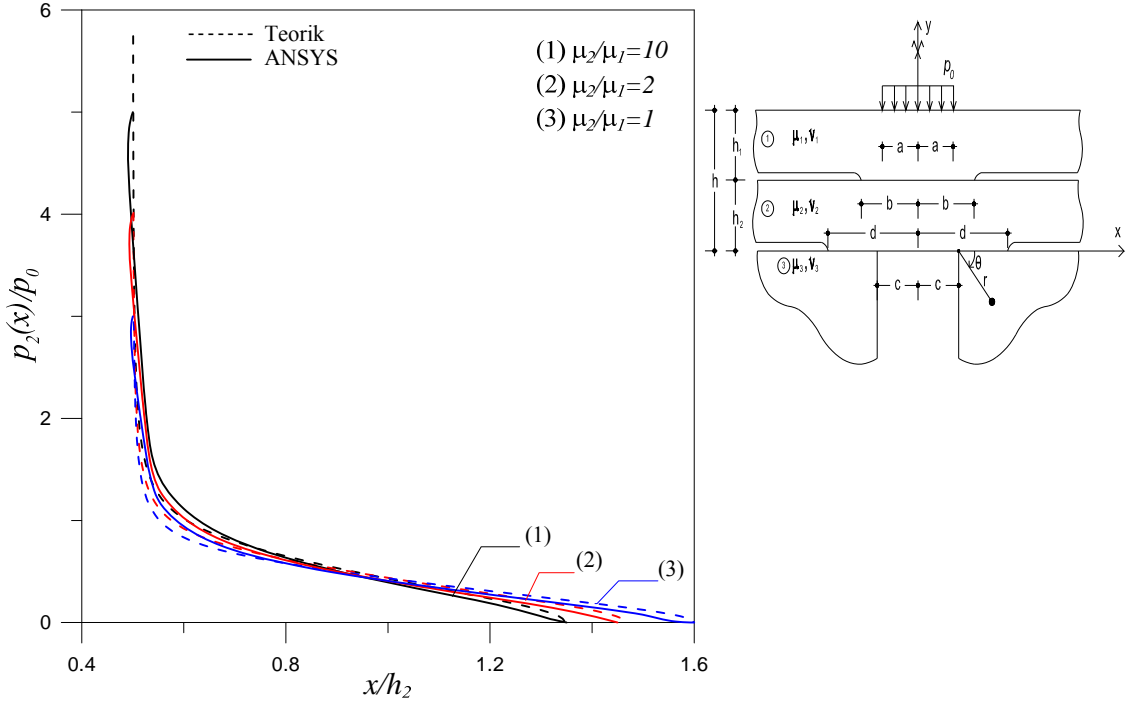
Şekil 50. Tabakalar arasındaki temas gerilmesinin (h_1/h_2) oranı ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ($a/h_2 = c/h_2 = 0.5$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)



Şekil 51. 2 nolu tabaka ile çeyrek düzlem arasındaki temas gerilmesinin (h_1/h_2) oranı ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ($c/h_2 = c/h_2 = 0.5$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)

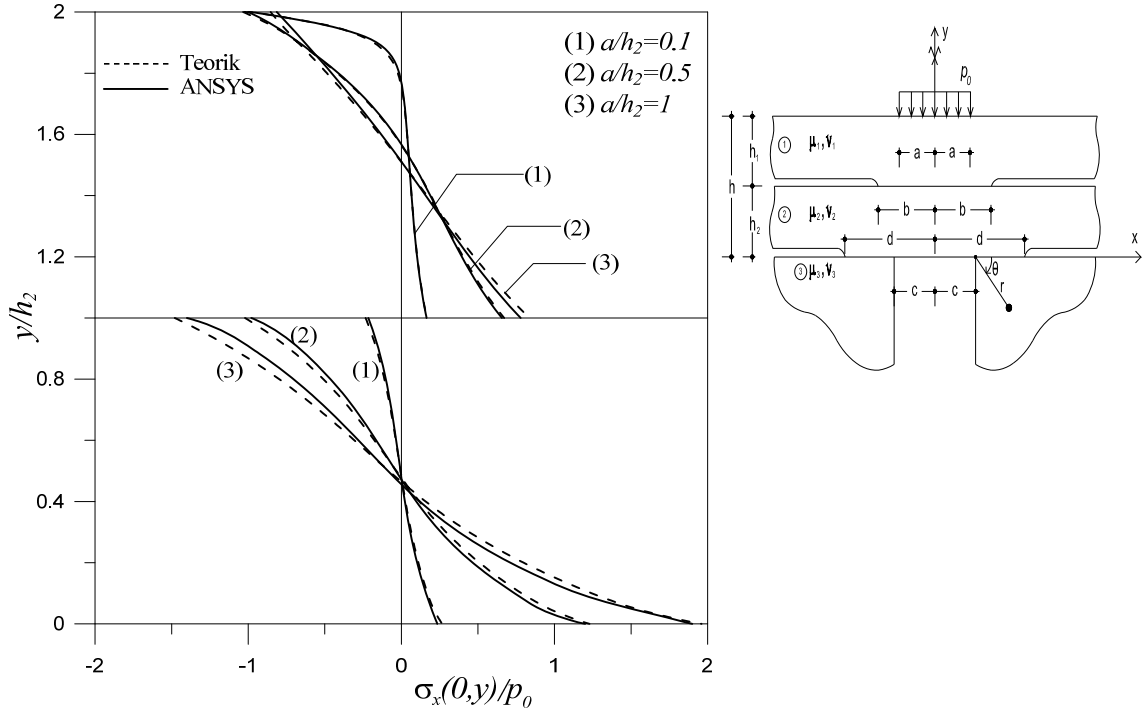


Şekil 52. Tabakalar arasındaki temas gerilmesinin (μ_2/μ_1) oranı ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ($a/h_2 = c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_3/\mu_2 = 2$)

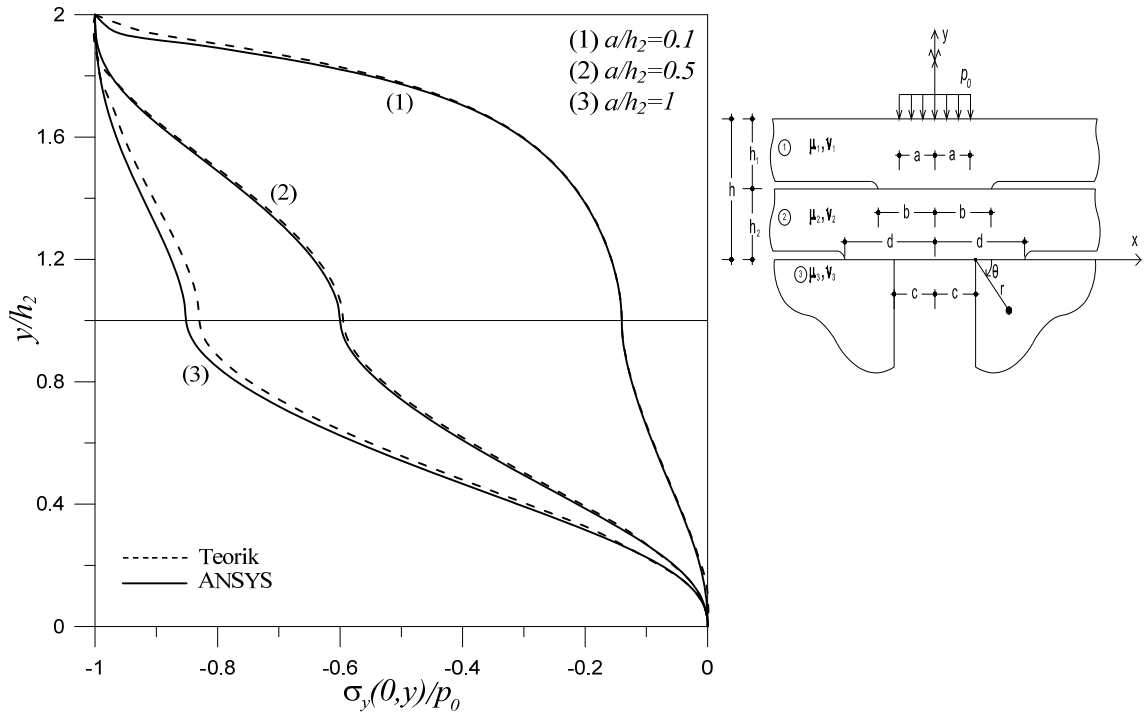


Şekil 53. 2 nolu tabaka ile çeyrek düzlem arasındaki temas gerilmesinin (μ_2/μ_1) oranı ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ($a/h_2 = c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_3/\mu_2 = 2$)

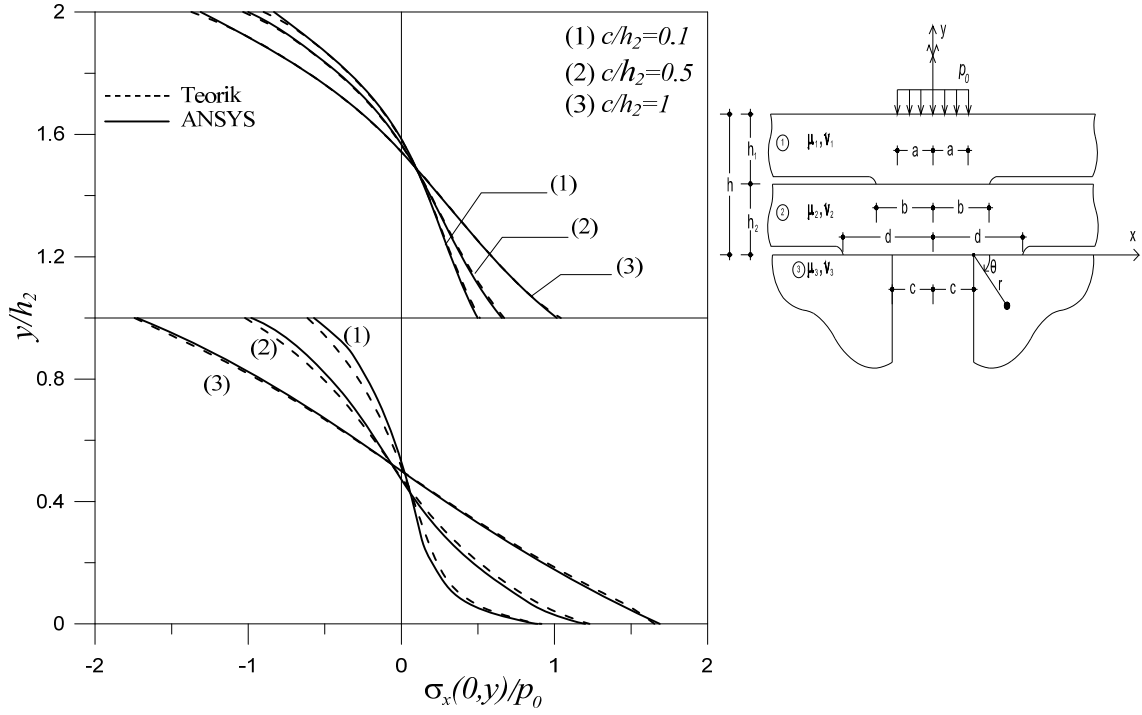
Çeşitli boyutsuz büyüklükler için sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal analizlerden elde edilen normal gerilme yayılışları teorik sonuçlarla birlikte grafikler halinde aşağıda verilmektedir (Şekil 54-61).



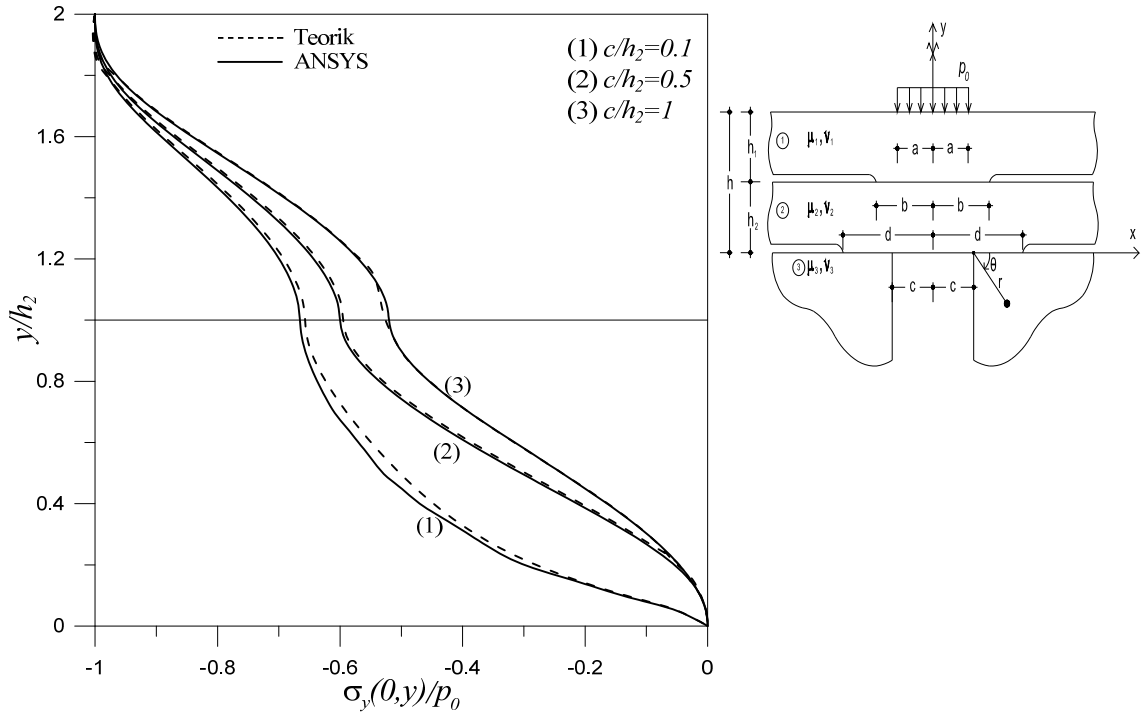
Şekil 54. $\sigma_x(0,y)/p_0$ normal gerilmesinin yük genişliği (a/h_2) ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ($c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)



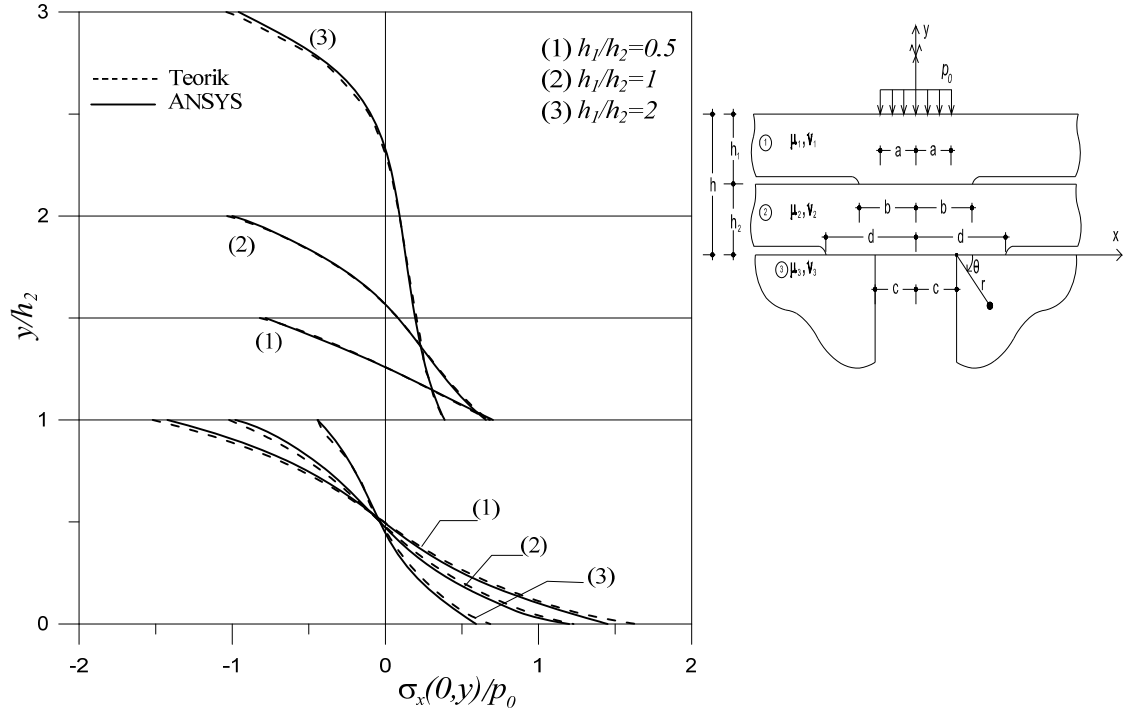
Şekil 55. $\sigma_y(0,y)/p_0$ normal gerilmesinin yük genişliği (a/h_2) ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ($c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)



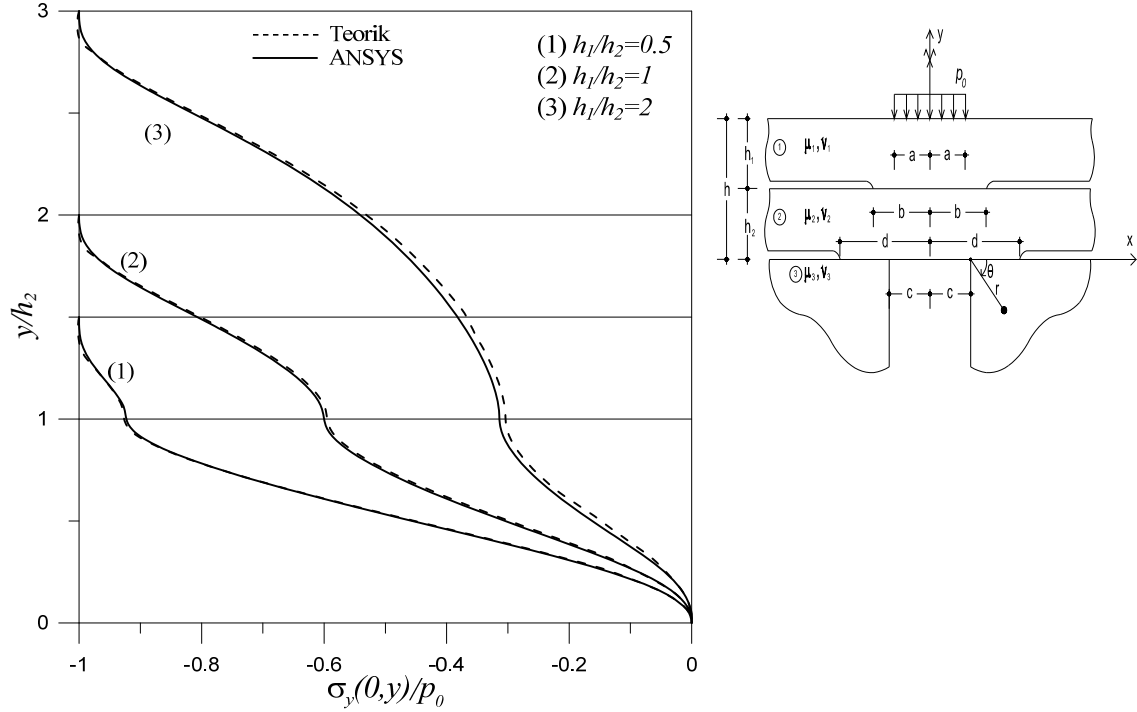
Şekil 56. $\sigma_x(0,y)/p_0$ normal gerilmesinin çeyrek düzlem açıklık mesafesi (c/h_2) ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ($a/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = 2$, $\mu_3/\mu_2 = 2$)



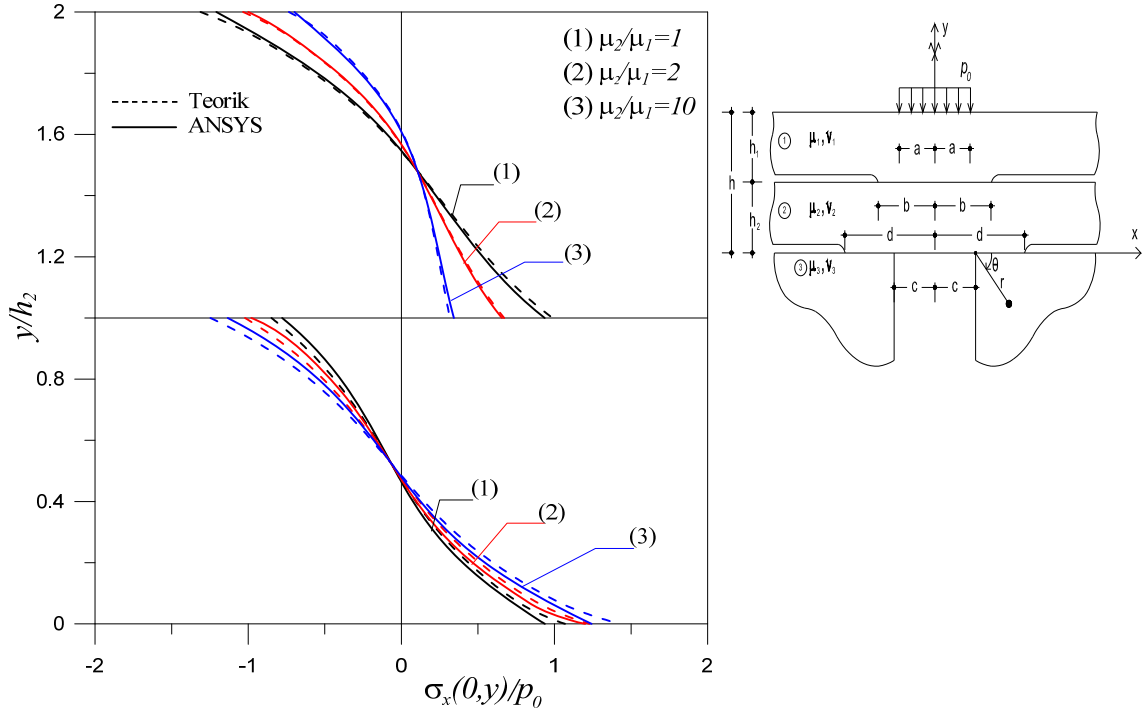
Şekil 57. $\sigma_y(0,y)/p_0$ normal gerilmesinin çeyrek düzlem açıklık mesafesi (c/h_2) ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ($a/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)



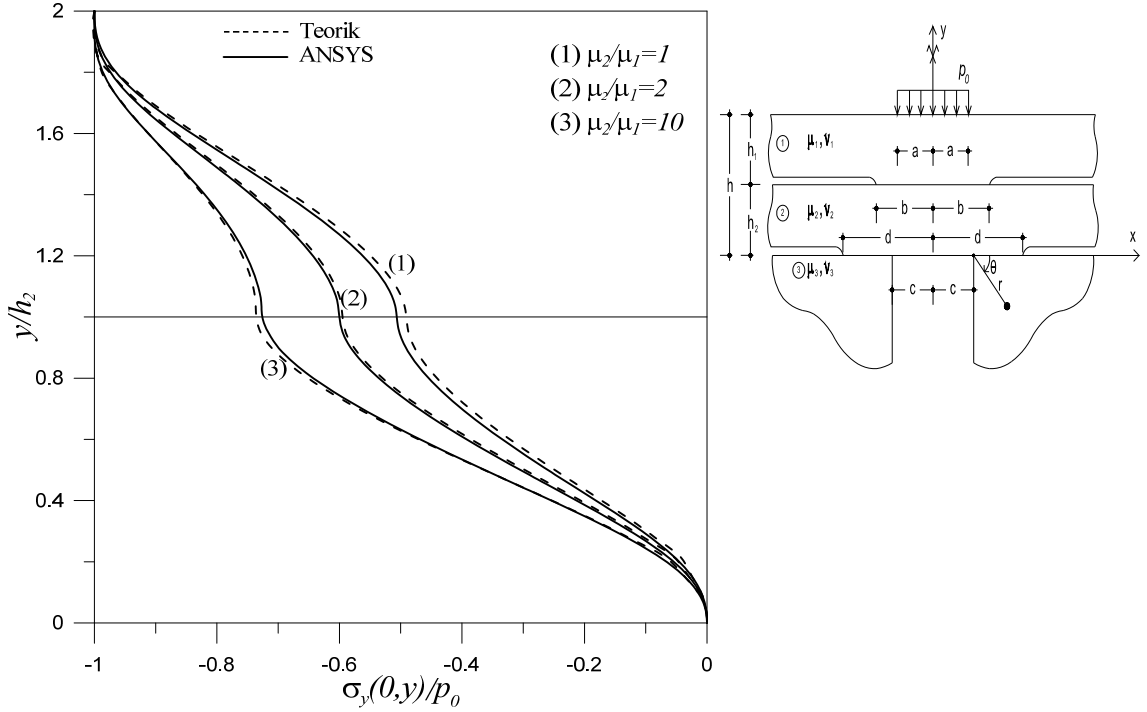
Şekil 58. $\sigma_x(0,y)/p_0$ normal gerilmesinin (h_1/h_2) oranı ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ($a/h_2 = c/h_2 = 0.5$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)



Şekil 59. $\sigma_y(0,y)/p_0$ normal gerilmesinin (h_1/h_2) oranı ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ($a/h_2 = c/h_2 = 0.5$, $\mu_2/\mu_1 = \mu_3/\mu_2 = 2$)



Şekil 60. $\sigma_x(0,y)/p_0$ normal gerilmesinin (μ_2/μ_1) oranı ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ($a/h_2 = c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_3/\mu_2 = 2$)



Şekil 61. $\sigma_y(0,y)/p_0$ normal gerilmesinin (μ_2/μ_1) oranı ile değişiminin teorik ve sayısal sonuçları ($a/h_2 = c/h_2 = 0.5$, $h_1/h_2 = 1$, $\mu_3/\mu_2 = 2$)

Teorik çözümden bulunan sonuçlar ve sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal analizden elde edilen sonuçlar; temas uzunlukları, temas gerilmeleri ve normal gerilmeler için karşılaştırılmıştır. Karşılaştırmalar için Tablo (6-9)'da sunulan temas uzunlukları, Şekil (46-53)'de sunulan temas gerilmeleri ve Şekil (54-61)'de sunulan normal gerilmeler kullanılmıştır.

Sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal analizlerden elde edilen temas uzunlukları ile teorik çözümden elde edilen temas uzunlukları arasındaki hata oranının en büyük değerinin %1.61 olduğu ve temas uzunluklarının ortalama % 0.76 gibi bir hata oranı ile birbirlerine yaklaştığı görülmektedir.

Şekil (46-61)'da görüldüğü gibi sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal analiz sonuçları ile teorik sonuçlar arasında yapılan karşılaştırmalarda, temas gerilmeleri ve normal gerilmelerin uyumlu olduğu görülmektedir.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada; simetrik iki elastik çeyrek düzleme oturan elastik özellikleri ve yükseklikleri farklı iki elastik tabakanın sürtünmesiz temas problemi incelenmiştir. Söz konusu problemin incelenmesinde, öncelikle bilinmeyen temas uzunlukları ve temas gerilmeleri elastisite teorisine göre analitik olarak hesaplanmış, buna bağlı olarak da simetri eksenini üzerindeki normal gerilmeler ve simetri eksenini yakınında ortaya çıkan kayma gerilmeleri hesaplanmıştır. Yine bu çalışmada, sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal analiz yapılarak ele alınan problem çözülmüş ve temas uzunlukları, temas gerilmeleri ve normal gerilmeler elde edilmiştir ve teorik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Sayısal uygulamalardan elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Üstteki tabaka üzerindeki yayılı yükün genişliği arttıkça temas uzunlukları ve temas gerilmeleri artmaktadır. Çeyrek düzlem açıklık mesafesi arttıkça tabakalar arası temas uzunluğu artmasına rağmen alt tabaka ile çeyrek düzlem arasındaki temas uzunluğu azalmakta olup buna bağlı olarak da temas gerilmeleri, tabakalar arasında azalmakta ve alt tabaka ile çeyrek düzlem arasında artmaktadır. Üstteki tabakanın yüksekliğinin alttaki tabakaya oranla artması durumunda temas uzunlukları artmakta, buna bağlı olarak da temas gerilmeleri azalmaktadır. Üstteki tabakanın rijitliğinin alttaki tabakaya göre azalması ve çeyrek düzlem rijitliğinin alttaki tabakaya göre artması durumlarında tabakalar arasındaki ve alt tabaka ile çeyrek düzlem arasındaki temas uzunlukları azalmaktadır. Temas uzunlukları azaldıkça yük daha dar bir alana yayıldığından temas gerilmelerinin şiddeti artmaktadır. Tabakalar arasındaki temas gerilmeleri $x=0$ kesitinde en büyük değerine ulaşmakta, temasın sona erdiği $x = \pm b$ noktalarında sıfır olmaktadır. Çeyrek düzlemlerin alt tabakadan ayrıldığı noktalarda ($x = \pm d$) temas gerilmesi sıfır olmakta ve çeyrek düzlemin iç kenarında ($x = \pm c$) ise temas gerilmeleri teorik olarak sonsuza gitmektedir.

σ_x ve σ_y normal gerilmeleri y simetri eksenini boyunca ($x=0$) araştırılmıştır. Simetri eksenini boyunca σ_x normal gerilme yayılışlarında her iki tabakada ayrı ayrı çekme ve basınç bölgeleri meydana gelmekte, kirişlerin eğilme halinde olduğu gibi tabakaların da üst bölgelerinde basınç, alt bölgelerinde ise çekme gerilmeleri oluşmaktadır. Yük genişliği ve çeyrek düzlem açıklık mesafesi arttıkça σ_x normal gerilmesinin değeri artmaktadır. Üstteki

tabakanın yüksekliği artıkça σ_x normal gerilmeleri azalmaktadır. Üstteki tabakanın rijitliği alttaki tabakaya göre azaldıkça σ_x normal gerilmeleri üstteki tabakada azalmakta, alttaki tabakada ise artmaktadır. Çeyrek düzlemin rijitliği alttaki tabakaya oranla artıkça σ_x normal gerilmeleri üstteki ve alttaki tabakalarda azalmaktadır. σ_x normal gerilme yayılışlarında dikkat çeken bir diğer sonuç ise çekme ve basınç bölgelerindeki gerilme alanlarının birbirine eşit olmasıdır. Bu eşitliğin sağlanması denge koşulu için önemlidir.

σ_y normal gerilmeleri en büyük değerlerini yayılı yükün temas yüzeyinde ($y = h$) alırken yayılı yükün şiddetine eşit olup yayılı yükten uzaklaştıkça (derine inildikçe) azalarak alttaki tabakanın alt yüzeyinde ($y = 0$) sıfır değerini almaktadır. İki elastik tabaka arasındaki temas yüzeylerinin alt ve üst noktalarında gerilmeler aynı değerleri almakta, dolayısıyla da sınır şartlarının sağlandığı görülmektedir. σ_y normal gerilme değerleri her zaman basınç olarak etkisini göstermekte, yük genişliği artıkça artmaktadır. Çeyrek düzlem açıklık mesafesinin artması veya üstteki tabakanın yüksekliğinin artması durumlarında σ_y normal gerilme değerleri azalmaktadır. Üstteki tabakanın rijitliğinin alttaki tabakaya göre azalması veya çeyrek düzlemin rijitliğinin alttaki tabakaya göre artması durumlarında σ_y normal gerilmesi artmaktadır.

Kayma gerilmeleri $\tau_{xy}(x, 0)$, $\tau_{xy}(x, h_2)$ ve $\tau_{xy}(x, h)$ temas yüzeyleri boyunca sıfır olmakta ve dolayısıyla da problemin tanımında verilen sınır şartları sağlanmaktadır. Simetri nedeniyle y simetri eksenini boyunca kayma gerilmeleri oluşmamaktadır. Bu nedenle τ_{xy} kayma gerilmesi y simetri eksenine yakın bir yerde ($x=0.05$) incelenmiştir. Alt tabakadaki kayma gerilmesi değerleri üst tabakadakilerden daha büyük olmakta ve maksimum değerini tabakaların ortasına yakın yerde almaktadır. Yük genişliği artıkça kayma gerilmeleri üst tabakada azalmakta, alt tabakada ise artmaktadır. Çeyrek düzlem açıklık mesafesi artıkça kayma gerilmeleri de artmaktadır. Üstteki tabakanın rijitliğinin alt tabakaya oranla azalması durumunda elde edilen kayma gerilmeleri, üstteki tabakada azaldığı halde alttaki tabakada artmaktadır. Çeyrek düzlemin rijitliğinin alttaki tabakaya oranla artması durumunda ise elde edilen kayma gerilmeleri azalmaktadır.

Sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal analizden elde edilen temas uzunlukları, temas gerilmeleri ve normal gerilmeler teorik sonuçlarla oldukça uyumlu olduğu görülmektedir. Sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen normal gerilmeler ve temas gerilmeleri problemin tanımında verilen sınır şartlarını sağlamaktadır. Sonlu elemanlar yöntemi ile yapılan çözümden elde edilen temas uzunlukları ile teorik çözümden elde edilen temas uzunlukları

arasındaki hata oranının en büyük değerinin %1.61 olduğu ve temas uzunluklarının ortalama % 0.76 gibi bir hata oranı ile birbirlerine yaklaştığı görölmektedir.

Öneriler:

Söz konusu problem aşağıdaki durumlar için de incelenebilir.

- Problem sınır elemanlar yöntemi ve başka sonlu elemanlar yöntemine dayanan paket programları ile çözülebilir.
- Tabakaların fonksiyonel derecelendirilmiş malzemedен ve anizotropik olması halinde çözüm yapılabilir.
- Problemin simetrik olmaması, sürtünmenin ve kütle kuvvetlerinin dikkate alınması hali gibi değişik şekillerde çözüm yapılabilir.

5. KAYNAKLAR

- Aksoğan, O., Akavcı S. ve Becker A.A., 1996. A Comparative Study of the Contact Problem of an Elastic Layer Supported by two Elastic Quarter Planes, Journal of Faculty of Engineering and Architecture of Çukurova University, 11, 1, 25-31.
- Aksoğan, O., Akavcı S. ve Becker A.A., 1997. The Solution of the Nonsymmetrical Contact Problem of an Elastic Layer Supported by two Elastic Quarter Planes Using Three Different Methods, Journal of Faculty of Engineering and Architecture of Çukurova University, 12, 1-2, 1-14.
- Akavcı, S.S., 1999. İki Elastik Çeyrek Düzlem Üzerine Oturan Elastik Bir Tabakanın Sürtünmesiz Temas Problemi, Doktora Tezi, Çukurova Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Adana.
- ANSYS 12.0, 2012. Swanson Analysis Systems Inc., Houston PA, USA.
- Bakioğlu, M., 1976. Elastik Bir Tabakanın Sürtünmesiz Temas Problemi, Doçentlik Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi.
- Bathe, K.J., 2004. Finite Element Method in Engineering Analysis. Prentice Hall inc, 1037p, USA.
- Birinci, A., 1998. Alt Tabakasında Düşey Bir Çatlağı Bulunan ve Rijit Bir Blok Aracılığı ile Yüklenen Bileşik Tabaka Problemi, Doktora Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Birinci, A. ve Erdöl, R., 1999. Frictionless Contact Between a Rigid Stamp and an Elastic Layered Composite Resting on Simple Supports, Mathematial and Computational Applications, 4, 3, 261-272.
- Birinci, A. ve Erdöl, R., 2001. Continuous and Discontinuous Contact Proble for a Layered Composite Resting on Simple Supports, Structural Engineering and Mecahnics, 12, 1, 17-34.
- Birinci, A. ve Erdöl, R., 2003. A Frictionless Contact Problem for Two Elastic Layers Supported by a Winkler Foundation, Structural Engineering and Mecahnics, 15, 331-344.
- Boduroğlu, H. ve Delale, F., 1980. Elastik Bir Tabakanın Sürtünmeli Değme Problemi, DOĞA:MAG/ÇAG, 17-26.
- Bussetta, P., Marceau, D. ve Ponthot, J.P. 2012, The Adapted Augmented Lagrangian Method: A New Method for the Resolution of the Mechanical Frictional Contact Problem, Comput. Mech., 49, 259-275.

- Çakıroğlu, A.O. ve Çakıroğlu F.L., 1991. Continuous and Discontinuous Contact Problems for Strips on an Elastic Semi-Infinite Plane, International Journal of Engineering Science, 29, 1, 99-111.
- Çakıroğlu, F.L., Çakıroğlu, M. ve Erdöl, R., 2001. Contact Problems for Two Elastic Layers Resting on Elastic Half-Plane, Journal of Engineering Mechanics, 127, 2, 113-118.
- Çakıroğlu, E., 2011. İki Elastik Çeyrek Düzleme Oturan ve Rijit Bir Panç ile Bastırılan Elastik Tabaka Probleminin Çözümü ve Yapay Sinir Ağı Uygulaması, Doktora Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Chan, S.K. ve Tuba, I.S., 1971. A Finite Element Method for Contact Problems of Solid Bodies—Part I. Theory and Validation, International Journal of Mechanical Sciences, 13, 615-625.
- Chan, S.K. ve Tuba, I.S., 1971. A Finite Element Method for Contact Problems of Solid Bodies—Part II. Application to Turbine Blade Fastenings, International Journal of Mechanical Sciences, 13, 627-639.
- Chaudhary, A.B. ve Bathe, K.J., 1986. A Solution Method for Static and Dynamic Analysis of Three-Dimensional Contact Problems with Friction, Computers and Structures, 24, 6, 855-873.
- Civelek, M.B. ve Erdoğan, F., 1974. The Axisymmetric Double Contact Problem for a Frictionless Elastic Layer, International Journal of Solids and Structures, 10, 639-659.
- Civelek, M.B. ve Erdoğan, F., 1975. The Frictionless Contact Problem for an Elastic Layer Under Gravity, ASME Journal of Applied Mechanics, 42, 97, 136-140.
- Çömez, İ. ve Erdöl, R., 2007. Rijit Dairesel Bir Pançla Bastırılmış, Elastik Yarım Düzleme Tam Yapışık Tabakanın Sürtünmeli Değme Problemi, XV. Ulusal Mekanik Kongresi, Eylül, Isparta, Bildiriler Kitabı 309-320.
- Çömez, İ., 2009. Rijit Dairesel Bir Pançla Bastırılan Elastik Tabaka ve Yarım Düzlemin Sürtünmeli Değme Problemi, Doktora Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Çömez, İ., Birinci, A. ve Erdöl, R., 2004. Double Receding Contact Problem for a Rigid Stamp and Two Elastic Layers, European Journal of Mechanics - A/Solids, 23, 2, 301-309.
- Dempsey, J.P., Zhao, Z.G., Minnetyan, L. ve Li, H., 1990. Plane Contact of an Elastic Layer Supported by a Winkler Foundation, ASME Journal of Applied Mechanics, 57, 974-980.

- Desai, C.S. ve Abel, J.F. 1972. Introduction to the Finite Element Method. Van Nostrand Reinhold Company, 477p, New York.
- Dundurs, J. ve Lee, M.S., 1972, Stres Concentration at a Sharp Edge in Contact Problems, Journal of Elasticity, 2, 109-112.
- Dursun, T., 2006. Cıvata Bağlantılı Tabakalı Kompozit Levhalarda Hasar Analizi, Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Elsharkawy, A.A., 1999. Effect of Friction on Subsurface Stresses in Sliding Line Contact of Multilayered Elastic Solids, International Journal of Solids and Structures, 36, 3903-3915.
- Erdoğan, F. ve Gupta, G.D., 1972. On The Numerical Solution of Singular Integral Equations, Quarterly Journal Of Applied Mathematics , 29, 525-534.
- Erdoğan, F. ve Ratwani, M., 1974. The Contact Problem For An Elastic Layer Supported by Two Elastic Quarter Planes, ASME Journal of Applied Mechanics , 41, 673-677.
- Franke, D. ve Düster, A., 2010, Nübel, V. ve Rank, E., A Comparison Of The H-, P-, Hp-, And Rp Version Of The FEM For The Solution Of The 2D Hertzian Contact Problem, Comput. Mech., 45, 513-522.
- Galın, L.A., 1961. Contact Problems in the Theory of Elasticity, İngilizce Çeviri: Moss, H., North Carolina State College Translation Series, Raleigh, North Carolina.
- Geçit, M.R. ve Erdoğan, F., 1978. Frictionless Contact Problem for an Elastic Layer Under Axisymmetric Loading, International Journal of Solids and Structures, 14, 771-785.
- Geçit, M.R. ve Yapıcı, H., 1986. Contact Problem for an Elastic Layer on Rigid Flat Supports, Arabian Journal for Science and Engineering, 11, 3, 235-242.
- Guler, M.A. ve Erdoğan, F., 2004. Contact Mechanics of Graded Coatings, International Journal of Solids and Structures, 41, 14, 3865-3889.
- Guler, M.A. ve Erdoğan, F., 2007. The Frictional Sliding Contact Problems of Rigid Parabolic and Cylindrical Stamps on Graded Coatings, International Journal of Mechanical Sciences, 49, 2, 161-82.
- Hung, D.N. ve Saxce, G.D., 1980. Frictionless Contact of Elastic Bodies By Finite Element Method Mathematical Programming Technique, Computers and Structures, 11, 55-67.
- Johnson, K.L., 1985. Contact Mechanics, Cambridge University Press, Cambridge.

- Jackson, R.L. ve Green, I., 2005. A Finite Element Study of Elasto-Plastic Hemispherical Contact Against a Rigid Flat, ASME Journal of Applied Mechanics, 127, 343-354.
- Kahya, V., Birinci, A. ve Erdöl, R., 2001. Frictionless Contact Problem Between an Elastic Layer Bonded Two a Rigid Support and Rigid Stamp, Mathematical and Computational Applications, 6, 1, 13-22.
- Kahya, V., 2003. İki Tabakalı Elastik Ortamda Sürekli ve Süreksiz Değme Problemlerinin İncelenmesi, Doktora Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Kahya, V., Birinci, A. ve Erdöl, R., 2007. Frictionless Contact Problem Between Two Orthotropic Elastic Layers, International Journal of Computational Mathematical Sciences, 121-27.
- Kannber, B., 1997. Finite Element Analysis of Contact Problems Using Transition Elements, Yüksek Lisans Tezi, Gaziantep Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Gaziantep.
- Keer, L.M., Dundurs, J. ve Tsai K.C., 1972. Problem Involving a Receding Contact Problem Between a Layer and Half Space, ASME Journal of Applied Mechanics, 39, 1115-1120.
- King, R.B. ve O'Sullivan, T.C., 1987. Sliding Contact Stresses in a Two-Dimensional Layered Elastic Half-Space, International Journal of Solids and Structures, 23, 5, 581-597.
- Klarbring, A., 1986. A Mathematical Programming Approach to Three-Dimensional Contact Problems with Friction, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 58, 2, 175-200.
- Krenk, S., 1975. On Quadrature Formulas For Singular İntegral-Equations of 1st And 2nd Kind, Quarterly Of Applied Mechanics, 33, 3, 225-232.
- Muskhelishvili, N.I., 1953. Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity, Noordhoff, Groningen.
- Öner, E., 2013. Rijit Dairesel Bir Pançla Bastırılan Elastik Tabaka ve Yarım Düzlemin Sürtünmeli Değme Problemi, Yüksek Lisans Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Özşahin, T.Ş., 2000. Rijit İki Blok Üzerine Oturan Bileşik Tabakada Sürekli ve Süreksiz Temas Problemi, Doktora Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Özdemir, A., 2006. Seramik Malzemelerinin Kırılma Tokluğu Değerlerinin Üç Boyutlu Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Teorik Olarak Belirlenmesi, Yüksek Lisans Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

- Pindera, M.J. ve Lane, M.S., 1993. Frictionless Contact of Layered Half-Planes, Part-I: Analysis, Journal of Applied Mechanics, 60, 5633-5639.
- Potts, D. ve Zdravkovic, L. 1999. Finite Element Analysis in Geotechnical Engineering: Volume I- Theory. Telford Publishing, 500p, London.
- Ratwani, M. ve Erdoğan, F., 1973. On The Plane Contact Problem for a Frictionless Elastic Layer, International Journal of Solids and Structures, 9, 921-936.
- Roncevic, B. ve Siminiati, D., 2010. Two Dimensional Receding Contact Problem Analysis with NX-NASTRAN, Advanced Engineering, 4, 1846-5900.
- Selçuk, L., 2009. Zemin Sıvılaşmasına Karşı Optimum Taş Kolon Tasarımının Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Modellenmesi, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Sezer, S., 2005. An Evaluation of ANSYS Contact Elements, Master of Science in Mechanical Engineering, Louisiana State University.
- Sneddon, I.N., 1951. Fourier Transforms, McGraw-Hill, New York.
- Sneddon, I.N., 1974. The Use of Integral Transforms, TMH Edition, New York.
- Tonuç, G., 1999, Boundary Element Analysis of Contact Problems Using Artificial Boundary, A Master Thesis, Mechanical Engineering University of Gaziantep, Gaziantep.
- Uffliand, I.S., 1965. Survey of Articles on the Application of Integral Transforms in the Theory of Elasticity, North Carolina State College Translation Series, Raleigh, North Carolina.
- Uncuoğlu, E., 2009. Kohezyonsuz Zeminlerdeki Kazıkların Yatay Yük ve Moment Yük Etkisi Altındaki Davranışlarının Analizi, Doktora Tezi, Çukurova Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Adana.
- Urquhart, E.E. ve Pindera, M.J., 1994. Incipient Separation Between a Frictionless Flat Punch and an Anisotropic Multilayered Half Plane, International Journal of Solids and Structures, 31,18, 2445-2461.
- Zienkiewicz, O.C. ve Taylor, R.L. 2000. The Finite Element Method, Volume:1, Butterworth Heinemann inc, 689p, London.

ÖZGEÇMİŞ

1982 yılında Rize’de doğdu. İlköğretim ve lise öğrenimini Rize’de tamamladı. 1999 yılında Dumlupınar Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Bölümü’nde lisans öğrenimine başladı. 2003 yılında lisans öğrenimini tamamlayarak, 2004 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı’nda yüksek lisans öğrenimine başladı. 2007 yılında yüksek lisans öğrenimini tamamlayarak, aynı yıl K.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim dalında doktora öğrenimine başladı. Ocak 2006’da Karadeniz Teknik Üniversitesi, Sürmene Deniz Bilimleri Fakültesi kadrosunda Araştırma Görevlisi olarak atandı. Halen bu görevine devam etmekte ve İngilizce bilmektedir.