

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**p-YÖNTEMİNE DAYALI**

**ÜÇ BOYUTLU SONLU ELEMANLAR İLE**

**YAPILARIN ELASTOSTATİK VE ELASTODİNAMİK ANALİZİ**

**DOKTORA TEZİ**

**İnş. Yük. Müh. Serkan BEKİROĞLU**

**MART 2010  
TRABZON**

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**p-YÖNTEMİNE DAYALI  
ÜÇ BOYUTLU SONLU ELEMANLAR İLE  
YAPILARIN ELASTOSTATİK VE ELASTODİNAMİK ANALİZİ**

**İnş. Yük. Müh. Serkan BEKİROĞLU**

**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde  
“Doktor (İnşaat Mühendisliği)”  
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 30.12.2009  
Tezin Savunma Tarihi : 22.03.2010**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Yusuf AYVAZ  
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Ayşe DALOĞLU  
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Hasan SOFUOĞLU  
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Metin HÜSEM  
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Yusuf CALAYIR**

**Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Salih TERZİOĞLU**

**Trabzon 2010**

## ÖNSÖZ

Bu çalışma Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Doktora Tezi olarak gerçekleştirilmiştir.

Yüksek Lisans ve doktora çalışmalarım süresince desteklerini ve yardımlarını esirgemeyen hocam Sayın Prof. Dr. Yusuf AYVAZ'a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Değerli zamanlarını ayırarak tezimi değerlendiren hocalarım Sayın Prof. Dr. Ayşe DALOĞLU'na, Sayın Prof. Dr. Hasan SOFUOĞLU'na, Sayın Prof. Dr. Metin HÜSEM'e ve Sayın Prof. Dr. Yusuf CALAYIR'a teşekkür ederim.

Eğitim-Öğretim süresince bana emeği geçen tüm hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

Doktora çalışmam süresince her türlü konuda yardımlarını esirgemeyen araştırma görevlisi arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Doktora çalışmam esnasında bana burs vererek beni destekleyen TÜBİTAK yetkililerine teşekkür ederim.

Bugünlere gelmemde büyük emeği olan, annem Gülten'e, babam Haydar'a sonsuz sevgi, saygı ve şükranlarımı sunarım. Ayrıca kardeşlerim Yasemin'e ve Samet Salih'e verdikleri destekten dolayı müteşekkir olduğumu belirtmek isterim.

Serkan BEKİROĞLU  
Trabzon 2010

## İÇİNDEKİLER

	<b><u>Sayfa No</u></b>
ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET .....	VI
SUMMARY .....	VII
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	VIII
TABLolar DİZİNİ.....	XVIII
SEMBOLLER DİZİNİ .....	XIX
1. GENEL BİLGİLER .....	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Sonlu Elemanlar Yöntemi.....	2
1.2.1. Virtüel İş Prensibi .....	3
1.2.2. Elastostatik Problemdede Hacim Eleman Tanımlaması.....	5
1.2.3. Sonlu Elemanlar Yönteminde Ayrıklaştırma.....	7
1.2.4. Şekil Fonksiyonlarının Seçimi.....	8
1.3. Yerdeğiştirmeye Dayalı Sonlu Eleman Formül Yapısında Yerdeğiştirmelerin Temsilinin İrdelenmesi .....	9
1.4. Yüksek Mertebeli Sonlu Elemanlar Yöntemi Konusunda Literatürde Yapılan Bazı Çalışmalar.....	10
1.5. Yüksek Mertebeli Sonlu Elemanlar Yöntemi ve Yerdeğiştirmenin Enterpolasyonu.....	17
1.5.1. Yüksek Mertebeli Sonlu Elemanlar Yönteminde (p-Yöntemi) Enterpolasyon Fonksiyonları .....	18
1.5.1.1. Lagrange Polinomu Tabanlı Şekil Fonksiyonlarının Kurulumu.....	19
1.5.1.2. Serendipity Yaklaşımı ile Lagrange Polinomu Tabanlı Şekil Fonksiyonu Kurulumu.....	20
1.5.1.3. Hiyerarşik Düzendede Şekil Fonksiyonu Kurulumu .....	22
1.6. Yüksek Dereceli Polinomlarla Yerdeğiştirmelerin Temsilinin İrdelenmesi .....	35
1.6.1. Bir Boyutlu Alanda Lagrange ve Hiyerarşik Yaklaşımlara Göre Şekil Fonksiyonlarının İrdelenmesi .....	35
1.6.2. İki Boyutlu Alanda Lagrange, Serendipity ve Hiyerarşik Yaklaşımına Göre Şekil Fonksiyonlarının İrdelenmesi .....	39

1.7.	p-Yöntemine Göre Geometrik Alanda Sürekli Ortamın Ayrıklaştırılması .....	44
1.7.1.	Fonksiyon İçerilme Yöntemi Konusunda Literatürde Yapılan Bazı Çalışmalar .....	45
1.7.2.	Fonksiyon İçerilme (Blending Function) Yöntemi .....	47
1.7.2.1.	İki Boyutlu Ortamda Fonksiyon İçerilme Yöntemi .....	48
1.7.2.2.	Üç Boyutlu Ortamda Fonksiyon İçerilme Yöntemi .....	51
1.8.	Çözümleyiciler .....	56
1.8.1.	Sonlu Elemanlar Yönteminde Çözümleyiciler .....	57
1.8.2.	Önceleyen Çözümleyici (Frontal Solver) .....	58
1.9.	Dinamik Analiz .....	60
1.9.1.	Serbest Titreşim Analizi .....	60
1.9.2.	Zorlanmış Titreşim Analizi .....	61
1.10.	Newmark- $\beta$ Yöntemi .....	61
1.11.	Çalışmanın Amaç ve Kapsamı .....	64
2.	YAPILAN ÇALIŞMALAR .....	66
2.1.	p-Yöntemine Göre Eleman Rijitlik Matrisinin Kurulumu .....	68
2.2.	Mevcut Bir Ağda Sonlu Elemanın Serbestlik Derecelerinin p-Yöntemine Göre Artırılması ve Numaralandırılması .....	71
2.3.	Fonksiyon İçerilme Yöntemi ile Dairesel Kenar ve/veya Yüzeylerin Temsili .....	74
2.4.	p-Yöntemine Göre Eleman Kütle Matrisinin Kurulumu .....	76
2.5.	p-Yöntemine Göre Eleman Yayılı Yük Vektörünün Kurulumu .....	77
2.6.	Doğrusal Olmayan Yayılı Yük Durumu .....	80
3.	BULGULAR VE İRDELEME .....	85
3.1.	Statik Analiz .....	85
3.1.1.	Konsol Eleman (Eleman İçi ve Elemanlar Arası Süreklilik Testi) .....	86
3.1.2.	Çeyrek Tüp (Kartezyen Koordinatlarda Eğrisel Yüzeyde Düzgün Yayılı Yükleme) .....	91
3.1.3.	Kartezyen Koordinatlarda ve Eğrisel Yüzeyde Düzgün Yayılı Yük Etkisindeki Sanayi Bacası .....	98
3.1.3.1.	ANSYS Programı ile Düzgün Yayılı Yük Etkisindeki Sanayi Bacasının Statik Analizi .....	99
3.1.3.2.	Geliştirilen Program ile Düzgün Yayılı Yük Etkisindeki Sanayi Bacasının Statik Analizi .....	112

3.1.4.	Kartezyen Koordinatlarda ve Eğrisel Yüzeyde Doğrusal Olmayan Yayılı Yük Etkisindeki Sanayi Bacası .....	125
3.1.4.1.	Geliştirilen Program ile prEN 1991-1-4'e Göre Elde Edilen Doğrusal Olmayan Yayılı Yük Etkisindeki Sanayi Bacasının Statik Analizi.....	127
3.1.4.2.	Geliştirilen Program ile TS 498'e Göre Elde Edilen Doğrusal Olmayan Yayılı Yük Etkisindeki Sanayi Bacasının Statik Analizi .....	139
3.2.	Dinamik Analiz .....	157
3.2.1.	Kartezyen Koordinatlarda ve Eğrisel Yüzeyle Sanayi Bacasının Serbest Titreşim Analizi.....	158
3.2.2.	Kartezyen Koordinatlarda ve Eğrisel Yüzeyle Sanayi Bacasının Zorlanmış Titreşim Analizi .....	160
3.2.2.1.	ANSYS Programı ile Sanayi Bacasının Zorlanmış Titreşim Analizi .....	162
3.2.2.2.	Geliştirilen Program ile Sanayi Bacasının Zorlanmış Titreşim Analizi .....	168
4.	SONUÇLAR VE ÖNERİLER .....	187
5.	KAYNAKLAR .....	191
6.	EKLER .....	196

ÖZGEÇMİŞ

## ÖZET

Bu çalışmanın amacı, p-yöntemine dayalı ve Karma Fonksiyon Yöntemi ile zenginleştirilmiş, sürekli veya süreksiz her çeşit doğrusal olmayan yüklemenin dikkate alınabildiği, elastostatik ve elastodinamik analizlerin içerildiği üçboyutlu problemlerde uygulanabilen, her üç ekseninde doğrusal yerdeğiştirmelerin serbestlik derecesi olarak tanımlandığı, eğrisel kenar ve/veya yüzeyli olabilen dörtgen prizma şeklindeki bir eleman için sonlu elemanlar programının geliştirilmesidir. Bu amaç doğrultusunda farklı enterpolasyonlara sahip; Lagrange eleman, Lagrange polinomu tabanlı hiyerarşik eleman, Legendre polinomu tabanlı hiyerarşik eleman, Lagrange polinomu tabanlı serendipity eleman, serendipity şeklinde hiyerarşik Lagrange eleman, serendipity şeklinde hiyerarşik Legendre eleman ve kütle serbestlik dereceleri indirgenmiş Lagrange elemanlar dikkate alınmıştır. Son üç sonlu eleman tipi, bu tez kapsamında serbestlik derecesi sayısını azaltmak için geliştirilmiştir.

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde sonlu elemanlar yöntemi ve yüksek dereceli sonlu elemanlar yöntemi konusunda literatürde yapılan çalışmalar verildikten sonra oluşturan enterpolasyon fonksiyonlarının çeşitleri ve genel yapıları verilmektedir. Yerdeğiştirme alanında tanımlanan enterpolasyon fonksiyonları ile grafiksel inceleme yapıldıktan sonra Karma Fonksiyon Yöntemi konusunda literatür araştırması ve genel yapısı belirtilmekte ve bölüm sonunda çalışmanın amaç ve kapsamı sunulmaktadır. İkinci bölümde p-yöntemine göre eleman kütle ve rijtlik matrisi ile yayılı yük vektörünün kurulumu, mevcut ağda polinom derecesi artımıyla serbestlik derecesi numarlandırması, dairesel kenar ve/veya yüzeylerin Karma Fonksiyon Yöntemi ile temsili, doğrusal olmayan yükleme durumu sunulmaktadır. Üçüncü bölümde mekanik örnekler üzerinde statik analiz kapsamında hem programın doğrulanması hem de genel izlenimlerin kazanımı yapıldıktan sonra 17 Ağustos 1999 depreminde yıkılan bir sanayi bacası üzerinde TS 498'e göre düzgün yayılı ve TS 498 ve prEN 1991-1-4'e göre doğrusal olmayan yayılı rüzgâr yüklemeleri altında statik analiz ve ayrıca dinamik analiz yapılmaktadır. Dördüncü bölümde ise bu çalışmadan çıkarılan sonuçlar sunulmakta ve bunlara bağlı olarak bazı öneriler verilmektedir. Bu bölümü kaynaklar listesi ve ekler izlemektedir.

Sonuç olarak geliştirilen programın statik ve dinamik analizde güvenilir sonuçlar verdiği, çalışmada sunulan sonlu eleman tiplerinin genel olarak etkin bir şekilde kullanılabilirliği görülmüştür.

**Anahtar Kelimeler:** p-yöntemi, sonlu elemanlar, karma fonksiyon yöntemi, doğrusal olmayan yayılı yükleme, elastostatik analiz, elastodinamik analiz, Lagrange eleman, hiyerarşik Lagrange eleman, hiyerarşik Legendre eleman, serendipity eleman, serendipity hiyerarşik Lagrange eleman, serendipity hiyerarşik Legendre eleman, kütle serbestlik dereceleri indirgenmiş Lagrange eleman

## SUMMARY

### **Elastostatic and Elastodynamic Analysis of Structures with p-Version Finite Elements**

The purpose of this study is to develop p-version finite element program (pFEM) augmented by blending function method with which application of continuous or discontinuous nonlinear load, elastostatic and elastodynamic analysis, exactly representation of curved edge and/or surface boundary are performed with degree of freedoms (DOFs) through translations in orthogonal three direction. For this purpose, Lagrange, Lagrange polynomial based hierarchic, Legendre polynomial based hierarchic, Lagrange polynomial based serendipity, serendipity formed hierarchic Lagrange, serendipity formed hierarchic Legendre, body DOFs reduced Lagrange finite element that have different interpolation property are taken into consideration. The last three finite elements are introduced to reduce the number of DOFs in the concept of this thesis.

This study consists of four chapters. In the first chapter, after a brief literature review about finite element method and high order finite element method types, general forms of the constructed interpolation functions are given. After graphical examination of displacement field is conducted, literature review about blending function and its general form is prescribed, and then the purpose and scope of this study are presented. In the second chapter, construction of mass, stiffness and load matrices according to pFEM, numbering of DOFs in the existing mesh occurred because of increasing polynomial degree, representation of circle-curved edge and/or surface within blending function method, nonlinear loading is presented. In the third chapter, after verification of the developed program on mechanical examples at the elastostatic analysis and getting general impression, elastostatic and elastodynamic analysis are performed in industrial chimney collapsed on August 17, 1999 under uniformly distributed load according to TS 498 and under nonlinear distributed load according to TS 498 and prEN 1991-1-4. In the fourth chapter, the conclusions drawn from the results are presented and recommendations are made. This chapter is followed by a list of references.

It is concluded that the developed p-version finite element program gives reliable result and the given types of finite element in this study can be effectively used.

**Key Words:** p-method, finite elements, blending function method, nonlinear distributed loading, elastostatic analysis, elastodynamic analysis, Lagrange element, hierarchic Lagrange element, hierarchic Legendre element, serendipity element, serendipity hierarchic Lagrange element, serendipity hierarchic Legendre element, body DOFs reduced Lagrange element



## ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1.1.	İki boyutlu bir problem tanım alanı için Lagrange polinomu ve serendipity yaklaşımı ile üretilen polinoma ait polinom terimlerinin Pascal üçgeninde gösterimi..... 21
Şekil 1.2.	Lagrange polinomu ve serendipity yaklaşımına göre bir, iki ve üç boyutlu sonlu elemanlar için nokta düzeni gösterimi ..... 22
Şekil 1.3.	İki boyutlu hiyerarşik düzende dörtgen enterpolasyon alanı ..... 24
Şekil 1.4.	Üç boyutlu hiyerarşik düzende dörtgen prizma enterpolasyon hacmi..... 24
Şekil 1.5.	Bir p-elman ve sekiz h-elman ile ayrıklaştırılmış bir elastik çubuk..... 28
Şekil 1.6.	Polinom derecesi birden sekize kadar, p-elman ile yapılan modelleme sonucu elde edilen yerdeğişirmenin çubuk boyunca değişimi..... 30
Şekil 1.7.	Birden sekize kadar ve 80, h-elman ile yapılan modelleme sonucu elde edilen yerdeğişirmenin çubuk boyunca değişimi ..... 30
Şekil 1.8.	Farklı sayıda h-elman ve farklı polinom derecesinde p-elman ile yapılan modelleme sonucu elde edilen yerdeğişirmenin çubuk boyunca değişimi ..... 31
Şekil 1.9.	Rijitlik matrislerinin kararlılık durumları ..... 32
Şekil 1.10.	Polinom derecesi birden sekize kadar, p-elman ile yapılan modelleme sonucu elde edilen normal gerilmenin çubuk boyunca değişimi..... 33
Şekil 1.11.	Birden sekize kadar ve 80 h-elman ile yapılan modelleme sonucu elde edilen normal gerilmenin çubuk boyunca değişimi ..... 34
Şekil 1.12.	Farklı sayıda h-elman ve p-elman ile yapılan modelleme sonucu elde edilen normal gerilmenin çubuk boyunca değişimi ..... 34
Şekil 1.13.	Lagrange polinomuna göre polinom derecesi 1. dereceden 8. dereceye kadar olan bir boyutlu elemanın şekil fonksiyonları ..... 36
Şekil 1.14.	Bir boyutlu ve birinci dereceden bir elemanın Lagrange yaklaşımına göre açılmış 8. dereceden hiyerarşik şekil fonksiyonları..... 36
Şekil 1.15.	Bir boyutlu ve ikinci dereceden bir elemanın Lagrange yaklaşımına göre açılmış 8. dereceden hiyerarşik şekil fonksiyonları..... 37
Şekil 1.16.	Lagrange polinomuna göre polinom derecesi 1. dereceden 8. dereceye kadar olan bir boyutlu elemanın şekil fonksiyonlarının türevleri..... 38

Şekil 1.17.	Bir boyutlu ve birinci dereceden bir elemanın Lagrange yaklaşımına göre açılmış 8. dereceden hiyerarşik şekil fonksiyonlarının türevleri .....	38
Şekil 1.18.	Bir boyutlu ve ikinci dereceden bir elemanın Lagrange yaklaşımına göre açılmış 8. dereceden hiyerarşik şekil fonksiyonlarının türevleri .....	39
Şekil 1.19.	4 düğüm noktalı dörtgen elemanın şekil fonksiyonları.....	40
Şekil 1.20.	8 düğüm noktalı (serendipity tipinde) dörtgen elemanın şekil fonksiyonları .....	40
Şekil 1.21.	Lagrange polinomuna göre 2. dereceden bir dörtgen elemanın şekil fonksiyonları .....	41
Şekil 1.22.	4 düğüm noktalı dörtgen elemanın 4. dereceden Lagrange yaklaşımına göre açılmış hiyerarşik şekil fonksiyonları.....	42
Şekil 1.23.	Lagrange polinomuna göre 2. dereceden bir dörtgen elemanın şekil fonksiyonlarının türevleri.....	42
Şekil 1.24.	4 düğüm noktalı dörtgen elemanın 4. dereceden Lagrange yaklaşımına göre açılmış hiyerarşik şekil fonksiyonlarının türevleri .....	43
Şekil 1.25.	Dört kenarı doğrusal olmayan sonlu elemanın Karma Fonksiyon Yöntemi ile geometrik enterpolasyon fonksiyonunun kurulumu .....	48
Şekil 1.26.	Bir kenarı doğrusal olmayan sonlu elemanın geometrik enterpolasyon fonksiyonunun kurulumu.....	51
Şekil 1.27.	Doğal koordinatlarda hacim sonlu eleman ile tüm yüzeyleri ve kenarları doğrusal olmayan sonlu elemanın geometrik enterpolasyon fonksiyonunun kurulumu .....	55
Şekil 2.1.	Mevcut ağda polinom derecesinin artırılması durumunda doğacak serbestlik derecelerine yeni numara verilmesine ait algoritma.....	73
Şekil 2.2.	Karma Fonksiyon Yöntemi algoritması.....	74
Şekil 2.3.	Dairesel eğriliğe ait enterpolasyon fonksiyonunun kurulumu .....	75
Şekil 2.4.	a) Dairesel eğriliğin yerel eksen takımının oluşturulması ve bu eksen takımında enterpolasyon fonksiyonunun kurulması, b) Silindirik bir sonlu elemanın görünüşü ve dairesel eğriselliğe sahip kenar ve yüzeylerinin tanımlanması .....	76
Şekil 2.5.	Yüzeye yayılı fonksiyon yüklemesine ait yük vektörünü oluşturulmasına ait algoritma.....	81
Şekil 2.6.	Yüzeyenin bir doğrultusunda tanımlanan bir boyutlu yayılı fonksiyon yüklemesinden kaynaklanan yüzeye yayılı fonksiyon yüklemesinin oluşturulması ve ona ait yük vektörünün oluşturulmasına ait algoritma .....	82
Şekil 2.7.	Bir yüzeyinin komşu olmayan iki kenarındaki farklı bir boyutlu yüklemelere maruz dörtgen prizma eleman .....	83

Şekil 3.1.	Konsol elemanın sonlu eleman modeli ile geometri ve malzeme özellikleri .....	87
Şekil 3.2.	Düzgün yayılı yük etkisindeki konsol elemanın 35 nolu noktasının yerdeğiştirmeleri .....	88
Şekil 3.3.	Düzgün yayılı yük etkisindeki konsol elemanın 35 nolu noktasının normal gerilmeleri.....	88
Şekil 3.4.	Moment oluşturan doğrusal yayılı yük etkisindeki konsol elemanın 35 nolu noktasının yerdeğiştirmeleri .....	89
Şekil 3.5.	Moment oluşturan doğrusal yayılı yük etkisindeki konsol elemanın 35 nolu noktasının normal gerilmeleri.....	89
Şekil 3.6.	Kurgulanan altı farklı sonlu eleman tipine ve ANSYS programına ait serbestlik derecesi sayıları .....	90
Şekil 3.7.	Çeyrek tüpün a) üç dörtgen prizma elemanlı, b) bir dörtgen prizma elemanı tahrif edilmiş sonlu eleman ağı .....	92
Şekil 3.8.	İç çepherinden radyal doğrultuda düzgün yayılı yük etkisindeki çeyrek tüpün birinci ağ için 1 noktasının yerdeğiştirmeleri.....	93
Şekil 3.9.	İç çepherinden radyal doğrultuda düzgün yayılı yük etkisindeki çeyrek tüpün birinci ağ için 1 noktasının radyal gerilmeleri .....	93
Şekil 3.10.	İç çepherinden radyal doğrultuda düzgün yayılı yük etkisindeki çeyrek tüpün birinci ağ için 1 noktasının çevresel gerilmeleri .....	94
Şekil 3.11.	Çeyrek tüpün birinci ağ için farklı sonlu eleman tiplerine göre serbestlik derecesi sayıları .....	94
Şekil 3.12.	İç çepherinden radyal doğrultuda düzgün yayılı yük etkisindeki çeyrek tüpün ikinci ağ için 1 noktasının yerdeğiştirme diyagramı .....	95
Şekil 3.13.	İç çepherinden radyal doğrultuda düzgün yayılı yük etkisindeki çeyrek tüpün ikinci ağ için 1 noktasının radyal gerilmeleri.....	96
Şekil 3.14.	İç çepherinden radyal doğrultuda düzgün yayılı yük etkisindeki çeyrek tüpün ikinci ağ için 1 noktasının çevresel gerilmeleri.....	96
Şekil 3.15.	Çeyrek tüpün ikinci ağ için farklı sonlu eleman tiplerine göre serbestlik derecesi sayıları .....	97
Şekil 3.16.	Sanayi Bacasının a) gerçek ( Danış ve Görgün, 2005), b) fiziksel ve c) simetrik kısmının yükseklik boyunca beş, yatay kesit boyunca altı ve kalınlık boyunca bir parçaya bölündüğü matematiksel modeli.....	99
Şekil 3.17.	İlk üç ağ için sanayi bacasının 52 nolu noktasının ANSYS programından elde edilen yerdeğiştirmeleri .....	101
Şekil 3.18.	İlk üç ağ için sanayi bacasının 52 nolu noktasının ANSYS programından elde edilen maksimum asal gerilmeleri .....	101
Şekil 3.19.	İlk üç ağ için sanayi bacasının 52 nolu noktasının ANSYS programından elde edilen minimum asal gerilmeleri .....	102

Şekil 3.20.	İlk üç ağ için sanayi bacasının 52 nolu noktasının ANSYS programından elde edilen von Mises gerilmeleri.....	102
Şekil 3.21.	İlk üç ağ için sanayi bacasının serbestlik derecesi sayılarına göre 52 nolu noktasının ANSYS programından elde edilen yerdeğiştirmeleri .....	103
Şekil 3.22.	İlk üç ağ için sanayi bacasının serbestlik derecesi sayılarına göre 52 nolu noktasının ANSYS programından elde edilen von Mises gerilmeleri .....	104
Şekil 3.23.	Son altı ağ için sanayi bacasının 52 nolu noktasının ANSYS programından elde edilen yerdeğiştirmeleri .....	105
Şekil 3.24.	Son altı ağ için sanayi bacasının 52 nolu noktasının ANSYS programından elde edilen maksimum asal gerilmeleri .....	105
Şekil 3.25.	Son altı ağ için sanayi bacasının 52 nolu noktasının ANSYS programından elde edilen minimum asal gerilmeleri .....	106
Şekil 3.26.	Son altı ağ için sanayi bacasının 52 nolu noktasının ANSYS programından elde edilen von Mises gerilmeleri.....	106
Şekil 3.27.	ANSYS programı için sanayi bacasının yarısının serbestlik derecesi sayıları.....	107
Şekil 3.28.	Sanayi bacasının 52 nolu noktasının p- ve h- yöntemine göre ANSYS programından elde edilen yerdeğiştirmeleri .....	108
Şekil 3.29.	Sanayi bacasının 52 nolu noktasının p- ve h- yöntemine göre ANSYS programından elde edilen von Mises gerilmeleri.....	109
Şekil 3.30.	Sanayi bacasının 52 nolu noktasının h- ve hp- yöntemine göre ANSYS programından elde edilen yerdeğiştirmeleri .....	110
Şekil 3.31.	Sanayi bacasının 52 nolu noktasının h- ve hp- yöntemine göre ANSYS programından elde edilen maksimum asal gerilmeleri .....	110
Şekil 3.32.	Sanayi bacasının 52 nolu noktasının h- ve hp- yöntemine göre ANSYS programından elde edilen minimum asal gerilmeleri .....	111
Şekil 3.33.	Sanayi bacasının 52 nolu noktasının h- ve hp- yöntemine göre ANSYS programından elde edilen von Mises gerilmeleri .....	111
Şekil 3.34.	Sanayi bacasının 52 nolu noktasının geliştirilen program yardımıyla belirlenen yerdeğiştirmesi.....	113
Şekil 3.35.	Sanayi bacasının 52 nolu noktasının geliştirilen program yardımıyla belirlenen maksimum asal gerilmesi.....	114
Şekil 3.36.	Sanayi bacasının 52 nolu noktasının geliştirilen program yardımıyla belirlenen von Mises gerilmesi .....	115
Şekil 3.37.	Sanayi bacasının 52 nolu noktasının geliştirilen program yardımıyla belirlenen yerdeğiştirmesi.....	118
Şekil 3.38.	Sanayi bacasının 52 nolu noktasının geliştirilen program yardımıyla belirlenen maksimum asal gerilmesi.....	119

Şekil 3.39.	Sanayi bacasının 52 nolu noktasının geliştirilen program yardımıyla belirlenen von Mises gerilmesi .....	120
Şekil 3.40.	Sanayi bacasının 52 nolu noktasının hp-yöntemine göre geliştirilen program yardımıyla belirlenen yerdeğiştirmesi .....	122
Şekil 3.41.	Sanayi bacasının 52 nolu noktasının hp-yöntemine göre geliştirilen program yardımıyla belirlenen maksimum asal gerilmesi.....	123
Şekil 3.42.	Sanayi bacasının 52 nolu noktasının hp-yöntemine göre geliştirilen program yardımıyla belirlenen minimum asal gerilmesi .....	123
Şekil 3.43.	Sanayi bacasının 52 nolu noktasının hp-yöntemine göre geliştirilen program yardımıyla belirlenen von Mises gerilmesi .....	124
Şekil 3.44.	prEN 1991-1-4'e göre belirlenen rüzgâr yükünün sanayi bacasının yarı simetrik kısmında bulunan eleman yüzeylerinde gösterilimi .....	126
Şekil 3.45.	prEN 1991-1-4'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yatay kesit boyunca ağ sıklaştırması sonucu 115 m kotundaki yatay kesitine ait yerdeğiştirmeler .....	127
Şekil 3.46.	prEN 1991-1-4'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yatay kesit boyunca ağ sıklaştırması sonucu 115 m kotundaki yatay kesitine ait maksimum asal gerilmeler .....	128
Şekil 3.47.	prEN 1991-1-4'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yatay kesit boyunca ağ sıklaştırması sonucu 115 m kotundaki yatay kesitine ait minimum asal gerilmeler .....	128
Şekil 3.48.	prEN 1991-1-4'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yatay kesit boyunca ağ sıklaştırması sonucu 115 m kotundaki yatay kesitine ait von Mises gerilmeleri .....	129
Şekil 3.49.	prEN 1991-1-4'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yatay kesit boyunca ağ sıklaştırması sonucu yükseklik boyunca y-koordinatının 3.3 m olduğu noktalardaki yerdeğiştirmeler.....	130
Şekil 3.50.	prEN 1991-1-4'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yatay kesit boyunca ağ sıklaştırması sonucu yükseklik boyunca y-koordinatının 3.3 m olduğu noktalardaki maksimum asal gerilmeler .....	131
Şekil 3.51.	prEN 1991-1-4'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yatay kesit boyunca ağ sıklaştırması sonucu yükseklik boyunca y-koordinatının 3.3 m olduğu noktalardaki minimum asal gerilmeler .....	131
Şekil 3.52.	prEN 1991-1-4'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yatay kesit boyunca ağ sıklaştırması sonucu yükseklik boyunca y-koordinatının 3.3 m olduğu noktalardaki von Mises gerilmeleri .....	132

Şekil 3.53.	prEN 1991-1-4'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yükseklik boyunca ağ sıklaştırması sonucu 115 m kotundaki yatay kesitine ait yerdeğiştirmeler .....	134
Şekil 3.54.	prEN 1991-1-4'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yükseklik boyunca ağ sıklaştırması sonucu 115 m kotundaki yatay kesitine ait maksimum asal gerilmeler .....	134
Şekil 3.55.	prEN 1991-1-4'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yükseklik boyunca ağ sıklaştırması sonucu 115 m kotundaki yatay kesitine ait minimum asal gerilmeler .....	135
Şekil 3.56.	prEN 1991-1-4'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yükseklik boyunca ağ sıklaştırması sonucu 115 m kotundaki yatay kesitine ait von Mises gerilmeleri .....	135
Şekil 3.57.	prEN 1991-1-4'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yükseklik boyunca ağ sıklaştırması sonucu yükseklik boyunca y-koordinatının 3.3 m olduğu noktalardaki yerdeğiştirmeler.....	136
Şekil 3.58.	prEN 1991-1-4'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yükseklik boyunca ağ sıklaştırması sonucu yükseklik boyunca y-koordinatının 3.3 m olduğu noktalardaki maksimum asal gerilmeler .....	136
Şekil 3.59.	prEN 1991-1-4'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yükseklik boyunca ağ sıklaştırması sonucu yükseklik boyunca y-koordinatının 3.3 m olduğu noktalardaki minimum asal gerilmeler .....	137
Şekil 3.60.	prEN 1991-1-4'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yükseklik boyunca ağ sıklaştırması sonucu yükseklik boyunca y-koordinatının 3.3 m olduğu noktalardaki von Mises gerilmeleri.....	137
Şekil 3.61.	TS 498'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yatay kesit boyunca ağ sıklaştırması sonucu 115 m kotundaki yatay kesite ait yerdeğiştirmeler .....	140
Şekil 3.62.	TS 498'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yatay kesit boyunca ağ sıklaştırması sonucu 115 m kotundaki yatay kesite ait maksimum asal gerilmeler.....	140
Şekil 3.63.	TS 498'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yatay kesit boyunca ağ sıklaştırması sonucu 115 m kotundaki yatay kesite ait minimum asal gerilmeler .....	141
Şekil 3.64.	TS 498'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yatay kesit boyunca ağ sıklaştırması sonucu 115 m kotundaki yatay kesite ait von Mises gerilmeleri .....	141
Şekil 3.65.	TS 498'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yatay kesit boyunca ağ sıklaştırması sonucu yükseklik boyunca y-koordinatının 3.3 m olduğu noktalara ait yerdeğiştirmeler.....	142

Şekil 3.66.	TS 498'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yatay kesit boyunca ağ sıklaştırması sonucu yükseklik boyunca y-koordinatının 3.3 m olduğu noktalara ait maksimum asal gerilmeler .....	142
Şekil 3.67.	TS 498'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yatay kesit boyunca ağ sıklaştırması sonucu yükseklik boyunca y-koordinatının 3.3 m olduğu noktalara ait minimum asal gerilmeler.....	143
Şekil 3.68.	TS 498'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yatay kesit boyunca ağ sıklaştırması sonucu yükseklik boyunca y-koordinatının 3.3 m olduğu noktalara ait von Mises gerilmeleri.....	143
Şekil 3.69.	TS 498'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yükseklik boyunca ağ sıklaştırması sonucu 115 m kotundaki yatay kesitine ait yerdeğiştirmeler .....	146
Şekil 3.70.	TS 498'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yükseklik boyunca ağ sıklaştırması sonucu 115 m kotundaki yatay kesitine ait maksimum asal gerilmeler.....	146
Şekil 3.71.	TS 498'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yükseklik boyunca ağ sıklaştırması sonucu 115 m kotundaki yatay kesitine ait minimum asal gerilmeler .....	147
Şekil 3.72.	TS 498'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yükseklik boyunca ağ sıklaştırması sonucu 115 m kotundaki yatay kesitine ait von Mises gerilmeleri .....	147
Şekil 3.73.	TS 498'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yükseklik boyunca ağ sıklaştırması sonucu yükseklik boyunca y-koordinatının 3.3 m olduğu noktalara ait yerdeğiştirmeler.....	148
Şekil 3.74.	TS 498'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yükseklik boyunca ağ sıklaştırması sonucu yükseklik boyunca y-koordinatının 3.3 m olduğu noktalara ait maksimum asal gerilmeler .....	148
Şekil 3.75.	TS 498'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yükseklik boyunca ağ sıklaştırması sonucu yükseklik boyunca y-koordinatının 3.3 m olduğu noktalara ait minimum asal gerilmeler.....	149
Şekil 3.76.	TS 498'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yükseklik boyunca ağ sıklaştırması sonucu yükseklik boyunca y-koordinatının 3.3 m olduğu noktalara ait von Mises gerilmeleri.....	149
Şekil 3.77.	prEN 1991 1-1-4'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının 52 nolu noktasının hp-yöntemine göre belirlenen yerdeğiştirmeleri .....	152
Şekil 3.78.	prEN 1991 1-1-4'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının 55 nolu noktasının hp-yöntemine göre belirlenen maksimum asal gerilmeleri .....	153
Şekil 3.79.	prEN 1991 1-1-4'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının 55 nolu noktasının hp-yöntemine göre belirlenen minimum asal gerilmeleri.....	153

Şekil 3.80.	prEN 1991 1-1-4'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının 55 nolu noktasının hp-yöntemine göre belirlenen von Mises gerilmeleri .....	154
Şekil 3.81.	TS 498'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının 52 nolu noktasının hp-yöntemine göre belirlenen yerdeğiştirmeleri .....	154
Şekil 3.82.	TS 498'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının 55 nolu noktasının hp-yöntemine göre belirlenen maksimum asal gerilmeleri .....	155
Şekil 3.83.	TS 498'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının 55 nolu noktasının hp-yöntemine göre belirlenen minimum asal gerilmeleri .....	155
Şekil 3.84.	TS 498'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının 55 nolu noktasının hp-yöntemine göre belirlenen von Mises gerilmeleri .....	156
Şekil 3.85.	Yarımcı yatay deprem ivme kaydı (YPT330 bileşeni).....	161
Şekil 3.86.	5. sn ile 10. sn'ler arasında Yarımcı yatay deprem ivme kaydı .....	162
Şekil 3.87.	ANSYS programıyla h-yöntem için yapılan zorlanmış titreşim analizi sonucu elde edilen yerdeğiştirmenin zamanla değişimi.....	163
Şekil 3.88.	ANSYS programıyla h-yöntem için yapılan zorlanmış titreşim analizi sonucu elde edilen maksimum asal gerilmenin zamanla değişimi .....	164
Şekil 3.89.	ANSYS programıyla h-yöntem için yapılan zorlanmış titreşim analizi sonucu elde edilen minimum asal gerilmenin zamanla değişimi.....	164
Şekil 3.90.	ANSYS programıyla h-yöntem için yapılan zorlanmış titreşim analizi sonucu elde edilen von Mises gerilmesinin zamanla değişimi .....	165
Şekil 3.91.	ANSYS programıyla h-yöntem için yapılan zorlanmış titreşim analizi sonucu elde edilen yerdeğiştirmenin zamanla değişimi.....	166
Şekil 3.92.	ANSYS programıyla h-yöntem için yapılan zorlanmış titreşim analizi sonucu elde edilen maksimum asal gerilmenin zamanla değişimi .....	166
Şekil 3.93.	ANSYS programıyla h-yöntem için yapılan zorlanmış titreşim analizi sonucu elde edilen minimum asal gerilmenin zamanla değişimi.....	167
Şekil 3.94.	ANSYS programıyla h-yöntem için yapılan zorlanmış titreşim analizi sonucu elde edilen von Mises gerilmesinin zamanla değişimi .....	167
Şekil 3.95.	Kurgulanan sonlu elemanda yatay kesit boyunca sıklaştırmanın yapıldığı 20. ağa ve ANSYS programının 29. ağına ait yerdeğiştirmenin zamanla değişimi .....	169
Şekil 3.96.	Kurgulanan sonlu elemanda yatay kesit boyunca sıklaştırmanın yapıldığı 21. ağa ve ANSYS programının 29. ağına ait yerdeğiştirmenin zamanla değişimi .....	169



Şekil 3.97.	Kurgulanan sonlu elemanda yatay kesit boyunca sıklaştırmanın yapıldığı 22. ağa ve ANSYS programının 29. ağına ait yerdeğiştirmenin zamanla değişimi .....	170
Şekil 3.98.	Kurgulanan sonlu elemanı için yatay kesit boyunca sıklaştırmanın yapıldığı ağlara ve ANSYS programı için 29. ağına ait yerdeğiştirmenin zamanla değişimi .....	171
Şekil 3.99.	Kurgulanan sonlu elemanı için yatay kesit boyunca sıklaştırmanın yapıldığı ağlara ve ANSYS programı için 29. ağına ait maksimum asal gerilmenin zamanla değişimi .....	171
Şekil 3.100.	Kurgulanan sonlu elemanı için yatay kesit boyunca sıklaştırmanın yapıldığı ağlara ve ANSYS programı için 29. ağına ait minimum asal gerilmenin zamanla değişimi .....	172
Şekil 3.101.	Kurgulanan sonlu elemanı için yatay kesit boyunca sıklaştırmanın yapıldığı ağlara ve ANSYS programı için 29. ağına ait von Mises gerilmesinin zamanla değişimi .....	172
Şekil 3.102.	Kurgulanan sonlu elemanda yükseklik boyunca sıklaştırmanın yapıldığı 21. ağına ve ANSYS programının 29. ağına ait yerdeğiştirmenin zamanla değişimi .....	174
Şekil 3.103.	Kurgulanan sonlu elemanda yükseklik boyunca sıklaştırmanın yapıldığı 23. ağına ve ANSYS programının 29. ağına ait yerdeğiştirmenin zamanla değişimi .....	174
Şekil 3.104.	Kurgulanan sonlu elemanda yükseklik boyunca sıklaştırmanın yapıldığı 24. ağına ve ANSYS programının 29. ağına ait yerdeğiştirmenin zamanla değişimi .....	175
Şekil 3.105.	Kurgulanan sonlu eleman için yükseklik boyunca sıklaştırmanın yapıldığı ağlara ve ANSYS programı için 29. ağına ait yerdeğiştirmenin zamanla değişimi .....	176
Şekil 3.106.	Kurgulanan sonlu eleman için yükseklik boyunca sıklaştırmanın yapıldığı ağlara ve ANSYS programı için 29. ağına ait maksimum asal gerilmenin zamanla değişimi .....	176
Şekil 3.107.	Kurgulanan sonlu eleman için yükseklik boyunca sıklaştırmanın yapıldığı ağlara ve ANSYS programı için 29. ağına ait minimum asal gerilmenin zamanla değişimi .....	177
Şekil 3.108.	Kurgulanan sonlu eleman için yükseklik boyunca sıklaştırmanın yapıldığı ağlara ve ANSYS programı için 29. ağına ait von Mises gerilmesinin zamanla değişimi .....	177
Şekil 3.109.	Kurgulanan sonlu eleman için yerdeğiştirmenin zamanla değişimi .....	179
Şekil 3.110.	Kurgulanan sonlu eleman için maksimum asal gerilmenin zamanla değişimi.....	179
Şekil 3.111.	Kurgulanan sonlu eleman için minimum asal gerilmenin zamanla değişimi.....	180

Şekil 3.112.	Kurgulanan sonlu eleman için von Mises gerilmesinin zamanla değişimi.....	180
Şekil 3.113.	Kurgulanan sonlu eleman için yerdeğiştirmenin zamanla değişimi .....	181
Şekil 3.114.	Kurgulanan sonlu eleman için maksimum asal gerilmenin zamanla değişimi.....	182
Şekil 3.115.	Kurgulanan sonlu eleman için minimum asal gerilmenin zamanla değişimi.....	182
Şekil 3.116.	Kurgulanan sonlu eleman için von Mises gerilmesinin zamanla değişimi.....	183
Şekil 3.117.	Kurgulanan sonlu eleman için yerdeğiştirmenin zamanla değişimi .....	184
Şekil 3.118.	Kurgulanan sonlu eleman için maksimum asal gerilmenin zamanla değişimi.....	184
Şekil 3.119.	Kurgulanan sonlu eleman için minimum asal gerilmenin zamanla değişimi.....	185
Şekil 3.120.	Kurgulanan sonlu eleman için von Mises gerilmesinin zamanla değişimi.....	185
Şekil 3.121.	17 Ağustos 1999 Kocaeli depreminde yıkılan sanayi bacasına ait fotoğraflar (Huang ve Gould, 2007 ) .....	186
Ek Şekil 1.1.	Türkiye Rüzgâr Haritası (URL-1).....	196
Ek Şekil 1.2.	pr EN 1991-1-4 ve TS 498'e göre sanayi bacasının 115 m kotunda yatay kesitindeki simetrik kısmında elde edilen yükleme ve onların entropolasyon yapılan eşdeğerleri.....	197
Ek Şekil 1.3.	pr EN 1991-1-4 ve TS 498'e göre sanayi bacasının yükseklik boyunca 5 eleman kullanıldığında ağın her elemanın bulunduğu kotta yatay kesitindeki simetrik kısmında elde edilen yükleme ve onların entropolasyon yapılan eşdeğerleri .....	198
Ek Şekil 1.4.	a) pr EN 1991-1-4'e, b) pr EN 1991-1-4 de simetrik kısma, c) TS 498'e, d) TS 498'de simetrik kısma karşı gelen dairesel kesitteki yükleme şekilleri.....	199
Ek Şekil 1.5.	pr EN 1991-1-4 ve TS 498'e göre sanayi bacasının yükseklik boyunca 5 eleman kullanıldığında ağın her elemanın kottunda yatay kesitindeki simetrik kısmında altı eleman olması sonucundaki yükleme ve onların entropolasyon yapılan eşdeğerleri.....	200
Ek Şekil 1.6.	TS 498'e göre belirlenen düzgün yayılı rüzgâr yükünün sanayi bacasının yarı simetrik kısmında bulunan eleman yüzeylerinde gösterilimi .....	200

## TABLolar DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 3.1. Düzgün yayılı yük etkisindeki sanayi bacasının yarı simetrik kısmında ANSYS programında dikkate alınan farklı ağ yapıları.....	100
Tablo 3.2. Düzgün yayılı yük etkisindeki sanayi bacasında ANSYS programı için hp-yöntemine göre ağ yapıları, polinom derecesi ve serbestlik derecesi sayıları.....	108
Tablo 3.3. Sanayi bacasının yarı simetrik kısmında, geliştirilen program için, yatay kesit boyunca çeşitlendirilen ağ yapıları.....	112
Tablo 3.4. Düzgün yayılı yük etkisindeki sanayi bacasının yarı simetrik kısmında geliştirilen program için yükseklik boyunca çeşitlendirilen ağ yapıları.....	117
Tablo 3.5. Düzgün yayılı yüklü yarı simetrik sanayi bacasında geliştirilen program için hp-yöntemine göre ağ yapısı, polinom derecesi ve serbestlik derecesi sayıları .....	122
Tablo 3.6. Sanayi bacasının yarısı için kurgulanan Lagrange tabanlı Hiyerarşik sonlu eleman için yatay kesit boyunca çeşitlendirilen ağ yapıları.....	125
Tablo 3.7. Sanayi bacasının yarısı için kurgulanan Lagrange tabanlı hiyerarşik sonlu eleman için yükseklik boyunca çeşitlendirilen ağ yapıları .....	133
Tablo 3.8. Sanayi bacasının yarısında kurgulanan Lagrange tabanlı hiyerarşik sonlu eleman için prEN 1991 1-1-4 ve TS 498'e göre tanımlanan doğrusal olmayan yük etkisi için hp-yöntemine göre ağ yapısı, polinom derecesi ve serbestlik derecesi sayıları .....	152
Tablo 3.9. Sanayi bacasında kurgulanan Lagrange tabanlı hiyerarşik sonlu eleman için yatay kesit boyunca çeşitlendirilen ağ yapıları.....	158
Tablo 3.10. Sanayi bacasında kurgulanan Lagrange tabanlı hiyerarşik sonlu eleman için yükseklik boyunca çeşitlendirilen ağ yapıları.....	159
Tablo 3.11. Sanayi bacasında ANSYS programı için çeşitlendirilen ağ yapıları .....	159
Tablo 3.12. Periyot değerleri.....	159
Tablo 3.13. Sanayi bacasında ANSYS programı için çeşitlendirilen ağ yapıları .....	163
Tablo 3.14. Sanayi bacasında kurgulanan Lagrange tabanlı hiyerarşik sonlu eleman için yatay kesit boyunca çeşitlendirilen ağ yapıları.....	168
Tablo 3.15. Sanayi bacasında kurgulanan Lagrange tabanlı hiyerarşik sonlu eleman için yükseklik boyunca çeşitlendirilen ağ yapıları.....	168

## SEMBOLLER DİZİNİ

<b>B</b>	D operatörünün doğal koordinatlar cinsinden açılımı
<b>C</b>	Sistem sönüm matrisi
<b>CAD</b>	Bilgisayar destekli tasarım (Computer Aided Design)
<b>D</b>	Diferensiyel operator
<b>dA</b>	Fiziksel koordinatlarda sonsuz küçük yüzey alanı
<b>E</b>	Green Lagrange şekildeğiştirme tensörü
<b>F</b>	Enterpolasyon fonksiyonu
<b>f</b>	Frekans
<b>f<sup>e</sup></b>	Enterpolasyon için tanım alanındaki nokta değerleri
<b>f<sub>1</sub>(x), f<sub>2</sub>(x)</b>	Bir boyutlu yük fonksiyonları
<b>g</b>	Kütle kuvvetini doğuran yerçekimi ivmesi
<b>K</b>	Sistem rijitlik matrisi
<b>k<sup>e</sup></b>	Eleman rijitlik matrisi
<b>M</b>	Sistem kütle matrisi
<b>N<sub>ij</sub><sup>int</sup></b>	Yüzey elemanda yüzey şekil fonksiyonu
<b>N<sub>ijk</sub><sup>int</sup></b>	Hacim elemanda hacim şekil fonksiyonu
<b>N<sub>i</sub><sup>Ej</sup></b>	Kenarların şekil fonksiyonu
<b>N<sub>km</sub><sup>Fj</sup></b>	Hacim elemanda yüzeylerin şekil fonksiyonu
<b>N<sup>N<sub>i</sub></sup></b>	Köşe noktalarının şekil fonksiyonu
<b>N<sub>yüzey</sub></b>	Hacim elemanın bir yüzeyinde tanımlanan enterpolasyon fonksiyonu
<b>n, <math>\bar{n}</math></b>	Yüzey normal, normal vektörü
<b>p</b>	Polinomun derecesi
<b>R</b>	Hata payı
<b><math>\bar{r}_{11}, \bar{r}_{12}</math></b>	Yarıçap konum vektörleri
<b>SEY</b>	Sonlu elemanlar yöntemi
<b>T</b>	Periyot
<b>t</b>	Zaman
<b>t<sub>yüzey</sub></b>	Hacim elemanın bir yüzeyinde enterpolasyon noktaları yük değerleri

$\mathbf{t}^*$	Etki yüzeyindeki dış kuvvet
$\mathbf{U}(\mathbf{X}), \mathbf{u}$	Yerdeğiştirme
$\mathbf{u}^e$	Elemandaki yerdeğiştirme
$\dot{\mathbf{u}}$	Hız
$\ddot{\mathbf{u}}$	İvme
$\ddot{\mathbf{u}}_g$	Depremden kaynaklanan yer ivmesi
$\mathbf{X}$	Ortogonal koordinat eksen takımı
$\mathbf{X}_m^{E_i}$	Doğrusal olmayan kenarların enterpolasyon fonksiyonu
$\mathbf{X}_m^{F_i}$	Doğrusal olmayan yüzeylerin enterpolasyon fonksiyonu
$\mathbf{X}_m^{V_i}$	Köşe noktalarının enterpolasyon fonksiyonu
$\delta \mathbf{u}^e$	Elemandaki sanal yerdeğiştirme
$\delta W_{\text{dyn}}$	İç kuvvetlerin virtüel işini
$\delta W_{\text{ext}}$	Dış kuvvetlerin yaptığı virtüel iş
$\delta W_{\text{int}}$	İçsel virtüel iş
$\delta \boldsymbol{\varepsilon}, \nabla^{\text{sym}} \mathbf{u}$	Yerdeğiştirmenin gradiyentinin simetrik kısmı
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Şekildeğiştirme tensörü
$\Delta t$	Zaman artımı
$\phi$	Bir boyutlu yüksek dereceli türev fonksiyonu
$\varphi_i$	Doğal koordinatlarda doğrusal olmayan geometri fonksiyonu
$\varphi(x,y,z)$	Fiziksel koordinatlarda doğrusal olmayan geometri fonksiyonu
$\rho$	Birim kütle
$\boldsymbol{\sigma}$	Cauchy gerilme tensörü
$\kappa$	Durum sayısı
$\lambda_{\text{max}}$	En büyük özdeğer
$\lambda_{\text{min}}$	En küçük özdeğer
$\boldsymbol{\xi}$	Doğal koordinatlar
$d\xi$	Doğal koordinatlardaki aksinel doğrultudaki koordinat artımı
$dA_\xi$	Doğal koordinatlarda sonsuz küçük yüzey alanı
$d\mathbf{X}_{\xi_i} d\xi_i$	Hacim elemanın bir yüzeyindeki tanjant vektörü
$\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi})$	Jakobi matrisi

$L_i(\xi)$	Legendre polinomu
$N^i(\xi)$	Şekil fonksiyonu
$\Omega$	Sürekli ortam
$\nabla \mathbf{u}$	Yerdeğiştirmenin gradiyenti
$\Gamma_\sigma$	Ortamın statik sınır yüzeyi

## 1. GENEL BİLGİLER

### 1.1. Giriş

Yapılar insanlık tarihi ile paralel biçimde gelişimlerini sürdürmüşlerdir. Yapıların davranışları, süreç içerisinde kullanım amaçları, büyüklükleri ve inşaa malzemeleri çeşitlendikçe analiz ve tasarımda belirleyici olmuşlardır.

Etkin yapı davranışının bulunması, analizde doğru temsil modelinin kurulması ile mümkün olmaktadır. Modelleme esnasında yapılan kabuller analizden sonra geçilen yapı tasarımında ilgili kabullerin uygulanmasını zorunlu kılmaktadır. Bu durumda model davranışı, gerçek yapı davranışına, yapılan kabuller ölçüsünde uzak kalmaktadır. Öte yandan, yapı analiz ve tasarım sürecinin birbirine böylesine bir bağla bağlı kalmasından başka bir yol da yoktur.

Analiz süreci, fiziksel problemlerden matematik modellere geçişte problemin tanımı ve kapsamına göre daha gerçekçi modelleme isteği nedeniyle modellemedeki tanımlamaların artması veya irdelenenlere göre problem hacminin genişlemesi sebebiyle güç bir hal almaktadır. Özellikle, analitik yöntemlerin kullanılması imkansız hale gelmektedir. Bu noktada kesin çözüme mühendislik açısından kabul edilebilir sınırlarda yaklaşık çözümlerin sunulabildiği yöntemler Sayısal analiz yöntemleri olarak adlandırılır. Mühendislik alanında uygulanan Sonlu Farklar Yöntemi, Sınır Elemanları Yöntemi, Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY), Sonlu Hacim Yöntemi, vb. bir çok sayısal analiz yöntemi mevcuttur. Bunlar içerisinde problemin kapsamına bağlı olarak en çok tercih edilenlerinden bir tanesi SEY'dir.

Son kırk yılı aşkın zamandır fiziksel sistemlerin matematiksel modellenmesinde SEY'nin kullanımı oldukça geniş kabul görmüştür. SEY, akışkanlar mekaniği, yapısal mekanik, elektromagnetik, ısı (termal) ve kimya mekaniğinin araştırılması gibi bir çok mühendislik alanında uygulama alanı bulmuştur. SEY'nde problem ortamının parçalara bölünmesi, parçalar üzerinde bütünde kurulan denklemlerin kurulup bütünün parçalardan oluşturularak elde edilmesi yolu izlenmektedir.

## 1.2. Sonlu Elemanlar Yöntemi

Sonlu Elemanlar Yöntemi sürekli ortamlar mekaniği ve yapısal analiz için sayısal bir çözümleme sürecidir (Cook vd., 1989). SEY gereği, ortam, süreklilik yerine daha basit olan göreceli olarak küçük parçalar halinde dikkate alınır. Bütündeki koşullar basit parçalar üzerinde oluşturulur ve sonrasında basit parçalardan bütünün temsiline ulaşılır.

SEY en genel kapsamda çok yönlü problemlerin (ısı iletimi, sıvı akışları vb.) bir arada dikkate alınabileceği enerji boyutunda yazılmaktadır. Enerji denklemleri Rayleigh-Ritz yöntemi, ağırlıklı kalıntı yöntemleri (Galerkin Yöntemi vb.) ile oluşturulabildiği gibi Virtüel İş Prensipli (VİP) gibi yöntemler ile de oluşturulabilmektedir. Enerji boyutunda ana denklem kurulurken herhangi bir malzemeye uygulanabilir ve programlamaya daha uygun olması nedeniyle (Kuhl ve Meschke, 2004) VİP'nin kullanılması tercih edilmektedir.

Diferensiyel denklemlerin sınır şartlarını sağlatılarak çözülmesi, ilgili problem için, mutlak çözüme ulaştırmaktadır. Ancak karmaşık diferensiyel ifadelerin çözümü, bazen mümkün olmamakla birlikte bazende aşırı zaman gereksiniminden dolayı tercih edilmemektedir. Bu gibi durumlarda ilgili diferensiyel denklemi tam temsil eden fonksiyoneller kullanılmaktadır. Fonksiyoneller, integral ifadeler olduğundan yapısal analizde de enerji ifadelerine denk gelmektedir. İntegral ifadeler, tüm şartları ilgili diferensiyel ifadesinde olduğu gibi ortamın her noktasında karşılamak yerine ortalama olarak karşılamaktadır. Diğer bir deyişle integral ifadelerle problem diferensiyel ifadesinde olduğu gibi mesnet şartları tam olarak sağlatılırken denge denklemleri ve statik şartları ortalama olarak sağlatılmaktadır. Böylelikle problem sınır şartları altında bir diferensiyel denklemin kesin çözümünü aramak yerine, sınır şartlarını sağlayan ancak yaklaşık çözümlerin sunulabileceği bir hale getirilebilmektedir. Çünkü burada önemli olan integral ifadelerin ilgili sınır şartlarını sağlaması olup integralin içi yaklaşık çözümler üretebilecek şekilde bir nebze keyfileştirilmektedir. Bu anlamda diferensiyel ifadeler güçlü bağıntılar, integral ifadeler ise zayıf bağıntılar olarak adlandırılmaktadır. VİP'de bu tanımlamadan hareketle zayıf bağıntı olarak nitelendirilmektedir (Hughes, 2000; Zienkiewicz, 1989).



### 1.2.1. Virtüel İş Prensibi

Yapısal açıdan bir sürekli ortamın virtüel işi; diferensiyel bir bağıntı olan denge denkleminin ve statik koşulların, tasarlanan keyfi bir fonksiyon ile çarpılması ile bu çarpımların ilgili sürekli ortamda integralinin alınması şeklinde belirlenmektedir. Burada tasarlanan keyfi fonksiyonun keyfi bir yerdeğiştirme olduğu ve

- geometrik sınır (mesnet şartlarını) koşullarını sağladığı,
- sonsuz küçük olduğu,
- türevlenebilir olduğu ve gradiyentinin simetrik kısmının şekil fonksiyonunu verdiği,

kabul edilmektedir. Denge denklemi ve statik şartların ifadesi sırasıyla,

$$\mathbf{0}, \mathbf{0} = \rho \ddot{\mathbf{u}} - \text{div} \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{g} \quad (1.1)$$

$$\mathbf{0}, \mathbf{0} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{t}^* \quad (1.2)$$

denklemleri ile verilmektedir. Burada,  $\rho$ , birim kütleyi;  $\boldsymbol{\sigma}$ , Cauchy gerilme tensörünü;  $\mathbf{g}$ , kütle kuvvetini doğuran yerçekimi ivmesini;  $\ddot{\mathbf{u}}$ , ivmeyi;  $\mathbf{n}$ , yüzey normalini;  $\mathbf{t}^*$ , etki yüzeyindeki dış kuvveti göstermektedir. Denklem (1.1) ve (1.2)'nin ayrı ayrı keyfi yerdeğiştirme fonksiyonu olan  $\delta \mathbf{u}$  ile skalar çarpımlarının, sırasıyla, sürekli ortamda ve o ortamın yüzeyinde integralleri alınarak toplanmasıyla

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot (\rho \ddot{\mathbf{u}} - \rho \mathbf{g}) dV - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \text{div} \boldsymbol{\sigma} dV + \int_{\Gamma_{\sigma}} \delta \mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - \mathbf{t}^*) dA = 0, 0 \quad (1.3)$$

şeklinde virtüel iş denkleminin ilk hali elde edilir. Burada,  $\Omega$ , sürekli ortamı;  $\Gamma_{\sigma}$ , ortamın statik sınır yüzeyini göstermektedir. Denklem (1.3), diverjans ile ilgili olan ifade üzerinde çarpım kuralı ve gauss teoremi uygulandıktan ve gerekli sadeleştirmeler yapıldıktan sonra

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot (\rho \ddot{\mathbf{u}} - \rho \mathbf{g}) dV + \int_{\Omega} \delta \nabla \mathbf{u} : \boldsymbol{\sigma} dV - \int_{\Gamma_{\sigma}} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}^* dA = 0, 0 \quad (1.4)$$

şeklinde yeniden elde edilir. Keyfi yerdeğiştirme fonksiyonunun gradientinin gerilme tensörü ile tensörel olarak skalar çarpımı incelenecek olursa yer değiştirmenin

gradiyentinin simetrik ve ters simetrik kısımlara ayrılabilceği ve ters simetrik kısmın gerilme tensörünün simetrik olması nedeni ile dikkate alınmamasının bu çarpım için alınması durumu ile aynı ifadeyi vereceği farkedilmektedir. Ayrıca yerdeğiştirme fonksiyonunun gradiyentinin simetrik kısmının

$$\mathbf{E} = \nabla^{\text{sym}} \mathbf{u} + \frac{1}{2} \nabla^T \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (1.5)$$

şeklinde verilen Green Lagrange şekildeğiştirme tensörünün doğrusal kısmı olduğu görülmektedir. Burada,  $\nabla^{\text{sym}} \mathbf{u} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})$  dir. Yukarıdaki denklemde  $\nabla \mathbf{u}$ , yerdeğiştirmenin gradiyenti ve  $\nabla^{\text{sym}} \mathbf{u}$ , gradiyentin simetrik kısmını göstermektedir. Yukarıda ifade edilen basitleştirmelerden sonra virtüel iş denklemi

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \ddot{\mathbf{u}} \rho dV + \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} dV = \int_{\Gamma_{\sigma}} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}^* dA + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} \rho dV \quad (1.6)$$

şeklini almaktadır. Burada,  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ , gradiyentin simetrik kısmına denk olmaktadır. Denklem (1.6),

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{ext}} &= \delta W_{\text{dyn}} + \delta W_{\text{int}} \\ \delta W_{\text{dyn}} &= \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \ddot{\mathbf{u}} \rho dV \\ \delta W_{\text{int}} &= \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} dV \\ \delta W_{\text{ext}} &= \int_{\Gamma_{\sigma}} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}^* dA + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} \rho dV \end{aligned} \quad (1.7)$$

şeklinde kısımlara ayrılarak adlandırılabilir. Burada,  $\delta W_{\text{dyn}}$ , iç kuvvetlerin virtüel işini;  $\delta W_{\text{int}}$ , içsel virtüel işi;  $\delta W_{\text{ext}}$ , dış kuvvetlerin yaptığı virtüel işi göstermektedir. Statik durumda dinamik kısım dikkate alınmayacaktır. Ayrıca kütle kuvvetleri de ihmal edilecektir. Böylelikle virtüel iş denklemi

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} dV = \int_{\Gamma_{\sigma}} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}^* dA \quad (1.8)$$

şeklini almaktadır. Bu denklemde şekildeğiştirme ve gerilme tensörleri vektör olarak yazıldığında tensörel skalar çarpım skalar çarpıma dönüşerek, içsel virtüel iş

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma} dV \quad (1.9)$$

şeklinde yazılabilmektedir.

### 1.2.2. Elastostatik Problemde Hacim Eleman Tanımlaması

Sürekli ortam ayrıklaştırılarak elemanlar bazında incelenmektedir. Elemanlar problemin tanımına göre bir boyutlu (çubuk), iki boyutlu (düzlem) veya üç boyutlu (hacim) elemanlar olarak sınıflandırılabilir. Çubuk ve düzlem elemanlar tanımları gereği, sınır koşullarında ve uygunluk bağıntılarında ek kabuller yapılmasını gerektirirken, hacim elemanlar için ek kabullerin yapılması gerekmemektedir. Bu bağlamda hacim elemanların geometrik tanımı için

$$\mathbf{X} = [X_1 \quad X_2 \quad X_3]^T \quad (1.10)$$

şeklinde ortogonal üç koordinat eksenini kullanılmaktadır. Hacimsel gerilme ve şekildeğiştirme durumları bağımsız altı bileşen ile ifade edilmekte ve

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{13}]^T \quad (1.11)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad 2\varepsilon_{12} \quad 2\varepsilon_{23} \quad 2\varepsilon_{13}]^T$$

Şeklinde verilmektedir. Gerilme ve şekildeğiştirme arasındaki ilişkiyi modellerken malzemenin doğrusal, elastik ve izotrop olduğu kabul edilmektedir. Buna göre malzeme modeli matris formunda

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon},$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & & & \\ & 1-\nu & \nu & & & \\ & & 1-\nu & & & \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & & \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

olarak dikkate alınmaktadır. Sürekli ortamın şekildeğiştirilmiş durumunu ifade etmek için koordinat eksenleri boyunca bileşenleri olan bir yerdeğiştirme hacimsel elemanın koordinatlarına bağlı olarak

$$\mathbf{U}(X_1, X_2, X_3) = \mathbf{U}(\mathbf{X}) = [U_1(X_1, X_2, X_3) \quad U_2(X_1, X_2, X_3) \quad U_3(X_1, X_2, X_3)]^T \quad (1.13)$$

şeklinde yazılmaktadır. Şekildeğiştirme matrisi, yerdeğiştirme ve şekildeğiştirme arasındaki ilişki Green Lagrange şekildeğiştirme tensörünün matris şeklinde yazılmasıyla

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \nabla^{\text{sym}} \mathbf{u}, \\ \nabla^{\text{sym}} \mathbf{u} &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) \end{aligned} \right\}, \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \mathbf{u},$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial X_3} \\ \frac{\partial}{\partial X_2} & \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial X_3} & \frac{\partial}{\partial X_2} \\ \frac{\partial}{\partial X_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial X_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Burada,  $\mathbf{D}$ , diferensiyel operator olarak adlandırılmaktadır. Yukarıda belirtilen tüm tanımlamalar Denklem (1.9)'da yerine yazılırsa içsel virtüel iş

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{D}^T \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{u} dV \quad (1.15)$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

### 1.2.3. Sonlu Elemanlar Yönteminde Ayrıklaştırma

Görüldüğü gibi virtüel iş denklemleri integrallerden oluşmaktadır. İntegral sınırlarının parçalanabilmesi, integralin sürekli ortamın bütününde yazılabildiği gibi parçalara ayrılmış ortamlarda da yazılabilmesine olanak tanımaktadır. İntegral sınırları, ayrık parçalar yani elemanlar üzerinde yazılmaktadır. Böylelikle sürekli ortamın bütünü üzerinde düşünmektense eleman bazında işlemler yapılabilir. Bu noktadan hareketle bütün üzerinde tanımlı koordinat, yerdeğiştirme, şekildeğiştirme ve gerilme fonksiyonları eleman üzerinde tanımlı olabilmektedir. Ayrıca tanımlanan bu ifadelerin gerçek fonksiyonları bilinmemektedir. Çözümü ulaşabilmek için gerçek fonksiyonlar yerine başka fonksiyonlar kabul edilmektedir. Bu fonksiyonlar elemanın geometrisine bağlı ve enterpolasyon özelliği olan şekil fonksiyonlarıdır. Şekil fonksiyonları fiziksel ortamdaki eleman üzerinde yazılabildiği gibi doğal koordinatlardaki eleman üzerinde de yazılabilmektedir. Süreci daha sade hale getirmek amacıyla ikinci tanımlama kullanılmaktadır.

Eleman üzerinde tanımlı integral sınırları sürekli ortamı oluşturan elemanların farklı konumlarından ve geometrilerinden ötürü değişmektedir. Bu noktada bir basitleştirme yapılarak her elemanın aynı geometriye sahip elemanlar üzerine bölge dönüşümleri ile eşleşmesi yapılır. Böylelikle her eleman için integral sınırları aynı  $(-1, 1)$  olmaktadır ve yeni koordinat sistemi, doğal koordinatlar olarak adlandırılmaktadır.

Yukarıdaki açıklamaların ışığında içsel virtüel iş denklemleri doğal koordinatlardaki eleman üzerinde yazıldığında

$$\delta W_{\text{int}}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \delta \mathbf{u}^e \cdot \mathbf{B}^T(\xi) \mathbf{C} \mathbf{B}(\xi) \mathbf{u}^e |J(\xi)| d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (1.16)$$

denklemine dönüşmektedir. Burada,  $\mathbf{B}$ , diferensiyel operatör olan  $\mathbf{D}$  operatörü içindeki fiziksel koordinatların doğal koordinatlar cinsinden açılmasıyla ve bölge dönüşümlerinin uygulanmasıyla oluşan operatör olarak adlandırılmaktadır.  $\delta \mathbf{u}^e$  ve  $\mathbf{u}^e$ , elemanın geometrisini temsil eden noktadaki yerdeğiştirme değerlerinden oluşan vektörlerdir. Denklem (1.16), bu vektörlerin integral değişkenlerinden bağımsız olmalarından dolayı integral dışına çıkarılması ile

$$\delta W_{\text{int}}^e = \delta \mathbf{u}^e \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T(\xi) \mathbf{C} \mathbf{B}(\xi) |J(\xi)| d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \mathbf{u}^e = \delta \mathbf{u}^e \cdot \mathbf{k}^e \mathbf{u}^e \quad (1.17)$$

denklemine dönüşmektedir. Burada integral ifade eleman rijitlik matrisi,  $\mathbf{k}^e$ , olarak adlandırılmaktadır.

#### 1.2.4. Şekil Fonksiyonlarının Seçimi

Şekil fonksiyonları, yerdeğiştirme, şekildeğiştirme, koordinat ve gerilme gibi değerlere ait gerçek fakat bilinmeyen fonksiyonların yerine kullanılan fonksiyonlar olmaları nedeni ile SEY'nde başka bir kabuldür. Bu fonksiyonlar elde edilecek çözümleri etkilemektedir. Şekil fonksiyonlarının sağlaması gereken şartlar şöyle sıralanabilir:

1. Sürekli olmalıdırlar.
2. Rijit cisim hareketinde şekildeğiştirmenin katkısı olmayabilir.
3. En azından sabit şekildeğiştirme oluşturabilmelidirler.

Yukarıda sıralanan ilk madde şekil fonksiyonlarının taşıması gerektiği gereklilik şartıdır. Yani olmazsa olmazdır. Bu şart sağlanmaz ise bir noktada aynı serbeslik yönünde iki farklı yerdeğiştirmenin oluşacağı anlamı çıkmaktadır ki bu istenmeyen bir durumdur. Bu şart aynı zamanda da düğüm noktalarındaki kuvvet ve momentlerin dengede olması durumuna karşılık gelmektedir (Cook vd., 1989).

İkinci maddede, yerdeğiştirmelerin yaklaşık olarak temsilinde şekil fonksiyonları kullanılırken rijit cisim hareketinin çözüm içerisinde barındırılmasının gerek şart olduğu ve rijit cisim hareketinin şekildeğiştirmeden kaynaklanmamasının içsel enerji oluşturmayacağı ifade edilmektedir (Kuhl ve Meschke, 2004).

Üçüncü şart ise birincil bilinmeyenlerin yerdeğiştirmeler olduğu ancak bazı

şekildeğiştirme ve gerilme gibi onlara bağılı ikincil bilinmeyenlerde de arzu edilen çözümlerin elde edilebilmesi için sağlanması gereken bir durumdur. Bu şart sağlanmazsa bulunan yerdeğiştirmeler için şekildeğiştirmeler, test fonksiyonu kaynaklı şekildeğiştirmeler ve de bunlardan dolayı virtüel işin sıfır olması durumu söz konusu olmamaktadır (Kuhl ve Meschke, 2004).

### **1.3. Yerdeğiştirmeye Dayalı Sonlu Eleman Formül Yapısında Yerdeğiştirmelerin Temsilinin İrdelenmesi**

SEY başlığı altında da belirtildiği üzere Geleneksel SEY'nin birincil sonuçlarının yerdeğiştirme olacağı ve şekildeğiştirme ile gerilme gibi ikincil sonuçların yerdeğiştirmelerin türevleri ile elde edileceği düşünölmektedir. Böylelikle elde edilen sonuçların daha doğru olabilmesi için kullanılabilir tek yol, sonlu elemanlar ağının sıklaştırılması olarak görölmektedir. İfade edildiği gibi geleneksel olarak kullanılan sonlu elemanlar yönteminde birincil sonuçlar yerdeğiştirmeler olup genelde, birinci dereceden polinomlardan elde edilen şekil fonksiyonlarının ilgili sonlu elemanlar ağındaki ayrıık noktaların ve onlara ait tekil yerdeğiştirme değerlerinin bir araya getirilmesi yoluyla temsil edilmektedirler. Böylelikle gerçek çözümlü tek bir fonksiyon olan yerdeğiştirmeler sonlu eleman noktaları ile bir nevi ayrııklaştırılmaktadır. Yerdeğiştirmelerin temsilinde yerdeğiştirmelerin türevleri olan şekildeğiştirme ve gerilmeler sabitlerle ifade edilebilmektedir. Bu da ilgili ağdaki elemanların ortak noktalarında süreksizlikler yaratmaktadır. Süreksizliklerin istenen seviyede kalması ancak sonlu elemanlar ağının sıklaştırılması ve elde edilen şekildeğiştirme ve gerilme gibi ikincil sonuçlardaki yakınsama derecesine bağılıdır. Bu anlamda sonlu elemanlar yönteminin sayısal bir analiz yöntemi olması neticesinde farklı sıklıklarda ağ kullanılması ve elde edilen sonuçların yakınsaklığı gerekli bir koşuldur.

Yerdeğiştirmeye dayalı sonlu elemanlarda; birincil sonuçların ikincil sonuçların olduğunca doğru olabilmesini sağlatacak nitelikte olmasının genel yolu yerdeğiştirmelerin birinci derecede polinomlar ile temsil edilmesidir. İkinci bir yol ise temsilde kullanılan polinomun derecesini artırmaktır. Birinci yol literatürde "h-yöntemi" olarak atfedilirken ikinci yol "p-yöntemi" olarak atfedilmektedir. Üçüncü bir yol olarak ise iki yöntemin bir arada kullanılması gösterilmektedir ve "hp-yöntemi" olarak bilinmektedir.

#### 1.4. Yüksek Mertebeli Sonlu Elemanlar Yöntemi Konusunda Literatürde Yapılan Bazı Çalışmalar

Yüksek mertebeli sonlu elemanlar konusunda, literatürde sayıca yeterince yayın bulunmaktadır. p-yöntemi ve hp-yöntemin; plaklar, kabuklar, levhalar, hacim elemanlar gibi sonlu eleman çeşitleri için literatürde üretilmiş örnekleri mevcuttur. Ancak çoğunun kullanım açısından polinom dereceleri belli dereceye kadar sınırlandırılmıştır. Malzeme ile geometrik bakımdan doğrusal olmayan analiz, dinamik analiz ve burkulma analizi alanlarında bu yöntemlerin uygulamaları literatürde mevcuttur. Ancak p-yöntemi ile burkulma ve dinamik analizde, genelde, plak ve kabuk elemanlarda belli polinom dereceleri için literatür oluşmuştur. Ayrıca, p- ve hp- yöntemleri için sonlu elemanlar ile yürütülen sayısal analiz sürecinin kabul edilebilir sayısal modelin elde edilmesi noktasına kadar eriştirilmesi anlamında çeşitli hata ölçütleri (error norms) literatürde verilmektedir. Çözümleyiciler olarak da p-yöntemi ile etkin çalışan çözümleyiciler yine literatürde mevcuttur. Tüm literatür ışığında p-yönteme dayalı geliştirilen çoğunlukla hacim sonlu elemanlara ait ve p-yöntemin gelişim sürecini de literatürden aktaracak şekilde örneklendirmeler yapılacaktır.

Mühendisler tarafından 1950'lerde geliştirilen SEY ilk otuz yıl h-yönteme dayalı olarak düşünülmüştür. Öyleki, enterpolasyonda birinci veya ikinci dereceden olan düşük dereceli polinomlar ile kesin çözüme yakın yaklaşık çözümler elde etmek için ağ yapıları sıklaştırılmıştır. 1981 yılında Babuška vd. (1981) tarafından p-yönteminin teorik tabanı kurularak ortaya atılmış ve ağ yapısı sabitlendikten sonra sadece polinom derecesini artırarak yaklaşık çözümdeki hata payını azaltmaya çalışmışlardır. Aynı yıl Babuška ve Dorr (1981) p- ve h- yöntemlerini bir araya getirmeyi denemişler ve hp-yöntemi ortaya koymuşlardır. hp-yönteminde hata payını azaltmak için hem ağ sıklaştırması hem de polinom derecesi artımı yapılmaktadır. Nerede polinom derecesinin artırılacağı, hangi sonlu elemanlarda sıklaştırma yapılacağı bir hata tahmin etme (error estimator) algoritması ile yapılmıştır. Serbestlik derecesi sayısı bakımından h-yöntemi ve p-yöntemi tek başlarına polinom cinsinden bir yakınsama oranına sahip iken hp-yönteminin eksponansiyel bir yakınsama oranına sahip olduğu görülmüştür (Hermann, 1994).

Babuška ve Suri (1987) çalışmalarında, düzgün ağ üzerinde p-yöntemin yakınsama hızının h-yönteme göre iki kat daha hızlı olduğunu söylemektedirler. Çalışmalarında iki boyutlu ortamda homojen ve homojen olmayan sınırlara sahip ortamlarda tekilliğin



(singularity) içerildiği ve içerilmediği durumlarda p-yöntemin optimum yakınsaklık derecesini araştırmışlardır.

Deuffhard vd. (1988) iki boyutlu doğrusal ikinci derece eliptik problemler için uyarlanabilir sonlu eleman programı oluşturmuşlardır. Programda ayrıca paralel hesaplamada yapılabilmektedir.

Hiyerarşik şekil fonksiyonlarının p-yöntemi üzerine uygulamaları Rabinson (1986) ve Babuška vd. (1989) tarafından çalışmaları yapılmıştır.

Szabó (1990) p-yöntemin yakınsama hızında tekilliklerin (singularities) olduğu durumlarda da h-yöntemine göre yüksek olduğuna işaret etmiştir.

Szabó, B.A., ve Babuška (1991) hiyerarşik şekil fonksiyonlarının kurulumunu dörtgen ve üçgen elemanlar için göstermiş olup hiyerarşik kısmı Legendre polinomu yardımıyla üretmişlerdir.

Gupta vd. (1991) delikli plak problemini p-yöntemi ve h-yöntemi ile analiz etmişlerdir. Her iki yöntem ile elde ettikleri çözümler birbirine yakın doğrulukta olup kabaca aynı zaman diliminde elde edilmişlerdir. p-yönteminde sekizinci polinom derecesinden onuncu polinom derecesine kadar olan çözümler bir birine oldukça yakın çıkmışlardır. Ayrıca, h-yönteminde de sekiz noktalı sonlu elemanlar kullanıldığında 30 eleman ile 42 eleman dikkate alınmasıyla elde edilen sonuçlar bir birine yakın çıkmıştır. Ancak p-yönteminde polinom derecesi sekiz ile on arasında çözüm zamanı %200 artarken, h-yönteminde 30 elemanlı ile 42 elemanlı arasındaki çözüm zamanı %40 artmıştır. Bunun nedeni olarak da p-yönteminde her iki elemandaki kenarlardan birinin eğrisel olması, bundan dolayı rijitlik matrisinin kapalı formda değerlendirilemediği ve rijitlik matrisinde çok zaman harcandığı belirtilmektedir.

Carnevali vd. (1993) düzgün dört yüzlü (terahedron) elemanlar için yeni bir tip hiyerarşik fonksiyon grubu ve p-yönteminde kullanılan hızlı bir çözümleyici sunmuşlardır.

Zumbusch (1993), uyarlanabilir sayısal bir yöntem olan hp-yöntemine dayalı sonlu elemanlar yönteminde, şekil fonksiyonlarının simetrik, hiyerarşik ve yönsüzleşme (simple coupling) gibi özelliklere sahip olmasının kurgulanacak sistem matrislerinin durum sayısı için önemli olduğunu belirtmiştir. Bunun üzerine, standart polinom vektör uzayında yukarıda ifade edilen özelliklerin aynı anda olmadığını göstermiş ve bu uzayın genişletilmesi için yeni çeşit polinom tabanlı şekil fonksiyonları üretmiştir. Literatürde genişçe yer alan şekil fonksiyonları ile karşılaştırma yapmıştır.

Babuška ve Suri (1994) çalışmalarında, p- ve hp- yönteminin karakteristiklerinden,

ve h-yöntemine göre olan farklılıklarından bahsetmişlerdir. Örneğin h-yönteminde görülen kilitleme etkisinin (locking effect) p- ve hp-yöntemlerinde görülmediğini diğer taraftan p-yönteminde tekillikten kaynaklanan çözümdeki kirliliğin (pollution) hp-yönteminde görülmediğini ifade etmektedirler. Buradaki kirlilik, gerilme ve şekildeğiştirme diyagramlarında elemanlar arasındaki değer farklılıklarını işaret etmektedir (Szabó ve Actis, 2005). Buradaki tekillik, yükten veya keskin geometrik değişimlerden kaynaklanıyorsa A tipi kirlilik (A-pollution) olarak adlandırılırken elemanların kenar ve/veya yüzeylerinin yok edilerek şekillerinin değiştirilmesinden kaynaklanıyorsa B tipi kirlilik (B-pollution) olarak ifade edilmektedir.

Issa vd. (1994) geliştirdikleri bir yakınsama şekliyle beraber oluşturdukları hp-yöntem ile dinamik analiz gerçekleştirmişlerdir.

Dey (1997), üç boyutlu karmaşık geometrili problem tanım alanında çalışan hp-yöntemine dayalı, geometride bilgisayar destekli (CAD) bilgi alışveriş etkileşiminin ve Karma Fonksiyon Yöntemi (Blending Function Method) ile geometrinin tam temsiliyetinin yapılabildiği, çözüm alanında otomatik ağ yapısının kurulabildiği bir sonlu eleman analiz programı geliştirmiştir. Programda CAD ortamında oluşturulan geometrilerdeki çizim hataları da ağ yapısı kullanılırken dikkate alınmaktadır. Dey vd. (1997) sonlu elemanların optimal yakınsama oranında geometrideki açısız içerilmenin (rotational blend) önemini örneklendirmişlerdir.

Chilton ve Suri (1997), h-yöntemine ve p-yöntemine dayalı çeşitli sonlu eleman yapıları ile elastik problemlerin analizinde güvenilir (robust) eleman tasarımı üzerine çalışma yapmışlardır. Amaçları hemen hemen sıkıştırılmayan malzemelerde hem h-yöntemine hem de p-yöntemine dayalı kilitleme etkisinin görülmediği, yani, hem yerdeğiştirme hem de gerilmede optimum yakınsamanın sağlanabildiği bir eleman oluşturmak olmuştur. Geleneksel sıkıştırılmayan malzemeye yakın bir malzeme için sonlu elemanlarda gerilme alanında p-yöntemi ile dahi kilitleme etkisi gözükmemektedir. Bundan dolayı yazarlar karma formül yapısını tavsiye etmişlerdir. Çalışmada birkaç karma sonlu eleman yöntemi test edilmiş olup, hem h-yöntemi hem de p-yöntemi için optimum sonlu eleman yöntemi sunulmuştur. Örneklemeler, düzlem şekil değiştirme problemi üzerinde yapılmıştır.

Promwungkwa (1998) polinom derecesinin sekize kadar dikkate alındığı iki boyutlu ve üç boyutlu elastostatik sonlu elemanlar için her doğrultuda farklı polinom dereceleri ile (non-uniform p-analysis) bir sıkılaştırma (p-refinement) yöntemi ortaya koymuştur. Ayrıca

bir gerilme hata tahmini (stress error estimate) şekli sunmuştur. Ortaya koyduğu sıklaştırma yöntemi ve gerilme hata tahmin etme şekli ile hem hesap zamanı hem de serbestlik derecesi sayısında kazanım sağlandığını ifade etmiştir.

Bertóti ve Szabó (1998) sabit ağ yapısında optimum polinom derecesi dağılımını bulmaya çalışmışlardır. Bu amaçla p-yöntemi ve hp-yöntemi için yerdeğistirmeye bağlı tasarlanmış bir hata tahmini algoritması kullanmışlardır.

Park ve Kapania (1998) çalışmalarında sonlu elemanlarda şekil fonksiyonlarının temel alınarak oluşturulduğu dört farklı ortogonal polinomu, ikinci mertebe türev denklemlerinden oluşan başlangıç değer problemlerinin çözümünde karşılaştırmışlardır. Bu polinomlar; Legendre, Chebyshev, Hermite ve integrali alınmış (integrated) Legendre'dir. Çalışmada polinom derecesi artırılarak sistem matrisinin durum sayısı ve harcanan zaman miktarları değerlendirilmiştir. İntegrali alınmış Legendre polinomu, en iyi durum sayısını veren polinom olurken Hermite polinomu en kötü olduğu; İntegrali alınmış Legendre polinomu en çok zaman tüketen olurken Chebyshev polinomunun en az zaman tüketen polinom olduğu gösterilmiştir.

Liu (1998) tezinde iki ve üç boyutlu gerilme analizi için p-yöntemine dayalı tek olarak yerdeğistirmeye dayalı olmayan karma (hybrid/mixed) formül yapısına sahip bir sonlu eleman programı geliştirmiştir. Karma formül yapısına dayalı olmayan sonlu elemanlarda çoğunlukla Hu-Washizu prensibi kullanıldığını ve bu prensipte gerilme, şekildeğistirme ve yerdeğistirmenin bağımız bilinmeyenler olduğu belirtmiştir. Yerdeğistirme alanı, p-yöntemi için hiyerarşik tipte şekil fonksiyonları ile enterpole edilirken gerilme ve şekildeğistirme alanları normalleştirilmiş Legendre polinomu ile enterpole edilmektedir. Çözümlerde üç boyutlu problemlerde, sadece yerdeğistirmeye dayalı p-yöntemine göre karma formül yapısındaki p-yöntemin daha az hesap zamanı harcadığı ifade edilmektedir. Ayrıca çalışmada eğrisel sınırların eşlenmesinde Karma Fonksiyon Yöntemi yardımıyla Lagrange tabanlı hiyerarşik şekil fonksiyonları ile geometrik eşleme geliştirilmiştir. Bir boyutlu alanda polinom derecesi ikiye kadar olan Lagrange tabanlı (A novel Lagrange Approach) hiyerarşik şekil fonksiyonları kurgulanmış ve bunlarla iki ve üç boyutlu şekil fonksiyonları da oluşturulmuştur.

Gabbert ve Weinberg (1999), p-yönteminin, kontak veya çatlak gibi h-yönteminin mutlaka kullanılarak tekillik etkisinin giderilmesi gerektiği durumlarda da kullanılabilmesi için yeni bir yöntem tipi olan p<sub>Nh</sub>-yöntemini ortaya koymuşlardır. Bu eleman tipinde bir ağda p-yöntemine göre sonlu elemanlar kullanıldığında o ağın belli bir kısmında inceltme

gerekiyorsa; o kısmın p-yöntemine dayalı sonlu elemanlar ile olan komşuluklarına pNh eleman koyularak, inceltilecek kısımda h-yöntemine dayalı sonlu elemanlarla sıklaştırma yapılabilmektedir. pNh-yönteminin, hem iki boyutlu hem de üç boyutlu elastik problemlerdeki uygulamaları çalışmada yapılmakta olup, gerçek mühendislik problemlerinde, mutlaka yerel ağ sıklaştırmasının ihtiyaç duyulduğu durumlarda büyük katkı sağlayacağı vurgulanmaktadır.

Hoffman ve Busby (2000) çalışmalarında, sonlu elemanlar yöntemi ile kurulan modellerin doğruluğunun belirlenmesinin önemli olduğunu belirtmişlerdir. Doğrusal elastik problemler için modelin doğruluğuna, elde edilen çözümün yakınsak olup olmadığı ile karar verilebildiğini, bunun için genelde, sistemin şekildeğiştirme enerjisine bağlı hata ölçütlerinin (error norm) kullanıldığını ifade etmişlerdir. Ancak tekil yüklemeler ve büyük gerilme eğilimlerinin olduğu problemlerde şekildeğiştirme enerjisine bağlı hata ölçütlerinin etkili olmadığını vurgulamışlardır. Bundan dolayı çalışmalarında, eleman seviyesinde  $L_2$  tipinde bir soncul hata ölçütünün (posteriori  $L_2$  error norm), p-yöntemine dayalı sonlu elemanlarla kurulan modelin doğruluğunu tanzim etme sürecindeki etkinliğini incelemişlerdir. Bu hata ölçüt çeşitinin şekil değiştirme enerjisine dayalı öncül hata ölçütü (priori error measure) ile karşılaştırması üç boyutlu alanda modellenen iki örnek üzerinde yapılmıştır. Öncül hata ölçütünün; birinci sebep olarak, problemin yerdeğiştirme sınır koşullarını içermemesi, ikinci olarak, tekil yüklemelerin ve büyük gerilme eğilimlerinin olduğu bölgelerde sadece şekil değiştirme enerjisinin etkisiz olması, tek başına kullanımını yetersiz kılmaktadır. Çalışmada iki hata ölçütünün beraber kullanılmasının faydalı olduğu; öncül hata ölçütün gelecek çözüm için bilgi almada, soncul hata ölçütünün mevcut çözüm hakkında bilgi almada kullanılması gerektiği; iki ölçütün sunduğu sonuçlarda uyumsuzluk olması halinde soncul hata ölçütüne güvenilerek işlem yapılması gerektiği belirtilmiştir.

Duarte vd. (2000) çalışmalarında, genelleştirilmiş sonlu elemanlar yöntemini özetlemişler ve üç boyutlu karmaşık mekanik problemlerde geleneksel sonlu elemanlar yöntemi üzerine olan artılarını göstermişlerdir. Genelleştirilmiş sonlu elemanlar yönteminin p-yöntemine dayalı sonlu elemanlardan farkının, eleman seviyesinde yapılan enterpolasyonlarının sistem seviyesinde enterpolasyon özelliğini sağlayacak şekle getirilmeleri olarak ifade etmişlerdir. Elastik problem üzerinde her iki yöntemle göre rijitlik matrislerinin yapısı ve başarımları çalışmada karşılaştırılmıştır. Düzgün dört yüzlülerle oluşturulan ağ yapısında ortotropik polinom derecesi artırma tekniği de ayrıca verilmiştir. Strouboulis vd. (2001) geleneksel sonlu elemanlar yöntemi ile çözülmesi pratik olarak

imkânsız olan karmaşık bir problem alanı üzerinde genelleştirilmiş sonlu elemanlar yöntemiyle pilot bir uygulama yapmışlardır.

Düster (2001), ince ve kalın cidarlı malzemece doğrusal olmayan yapılar için üç boyutlu sonlu eleman formül yapısı sunmuştur. Malzeme modelleri olarak, şekil değiştirme teorisini (deformation theory) ve akış teorisini (flow theory) dikkate almıştır. Çalışmada üç boyutlu sonlu elemanlarda yerdeğiştirme alanındaki her üç ekseninde farklı polinom derecelerinin kullanılabileceği izotrop olmayan (anisotropic) şekil fonksiyonu oluşturabilmektedir. Eş olmayan şekil fonksiyonu yapısı ile üç boyutlu plak ve kabuk benzeri eleman kurgulanabilmektedir. Örnekler üzerinde p-yöntemi ve h-yöntemi karşılaştırılmaktadır. Düster vd. (2001) çalışmalarında ayrıntılı olarak p-yöntemine dayalı sonlu eleman programı ile bilgisayar destekli tasarım (CAD) programının nasıl bir bilgi alış verişinde bulunduğunu göstermiş ve üç boyutlu ile iki boyutlu elemanlarla sayısal örnekler üzerinde statik analiz yapmıştır.

Rank vd. (2001) p-yönteminin her açıdan h-yöntemine olan artılarının altını çizmek için doğrusal olan ve olmayan analizler ile paralel olarak statik analiz gerçekleştirmişlerdir.

Ainsworth ve Coyle (2002) hiyerarşik tabanlı düzgün dört yüzlü sonlu eleman kurgulamışlardır. Düzgün olmayan ağ yapısında elemanlar arasında sürekliliği sağlamak amacıyla bir yaklaşım belirtmişlerdir.

Sert (2003), sıkıştırılamayan Navier-Stokes ve ısı iletimi denklem çözümleri için klasik Galerkin yöntemine dayalı sürekli formül yapısından hareketle sürekli olmayan formül yapısında Spektral Eleman algoritması geliştirmiştir. h- ve p-yöntem tipinde sürekli olmayan formül yapısındaki elemanların ortak çalışmaları için Sınırlandırılmış Yaklaşım yöntemini (Constrained Approximation Method, CAM) ve Karma Eleman yöntemini (Mortar Element Method, MEM) kullanmıştır. Bu çalışmanın odak noktası olarak h- ve p-tipinde elemanlar için sürekli olmayan yüzeylerde nasıl işlem yapıldığının anlatılması vurgulanmıştır. Çalışmada, Spektral Eleman yöntemi ile p-yönteme dayalı sonlu eleman yönteminin farkı da belirtilmiştir. p-yöntemine dayalı sonlu elemanlarda eşit aralıklı ayrıklaştırma üzerine kurulmuş hiyerarşik şekil fonksiyonları kullanılırken Spektral Eleman yönteminde Gauss-Lobatto integral noktalarında kurgulanan Lagrange polinomu tabanlı şekil fonksiyonları kullanılmaktadır.

Houmat (2004), eş yarıçaplı ve tek eğrilikli dairesel yüzeylere sahip hiyerarşik sonlu elemanların serbest titreşim analizini gerçekleştirmiştir. Yerdeğiştirme alanında belli bir

derecedeki değiştirilmiş Legendre polinomu tabanlı hiyerarşik şekil fonksiyonları ile enterpolasyon yapılmıştır.

Szabó ve Actis (2005), ayırıklaştırma ve modellemedeki basitleştirme hataları için kontrol etme mekanizması sayesinde uyarlanabilir şekilde geri dönük besleme yapmayı, modelin doğrulanması ve geğerlilik kazanması sürecini tartışmışlardır. Bu süreçte sonlu elemanlar uzayının ardışık kurgulanmasını sağlayan hiyerarşik yapının algoritması verilmiş ve örnekler sunulmuştur.

Rank vd. (2005), ince cidarlı yapıları p-yöntemine dayalı sonlu elemanlar yöntemi ile analiz etmişlerdir. Hiyerarşik tipte bir kabuk eleman ile bir doğrultuda şekli inceltilmiş kabuk benzeri bir hacim eleman geliştirmişlerdir. Eğriyel geometrili ince cidarlı yapılar üzerinde geliştirdikleri elemanları irdelemişler ve her iki sonlu eleman tipinin kullanışlı olduklarını göstermişlerdir.

Rank vd. (2006), p-yöntemine dayalı sonlu elemanlar ile otomotiv sanayisinde çok kullanılan bir üretim şekli olan metale şekil verme işleminin analizini gerçekleştirmiştir. Bu işlemi üç boyutlu izotrop olmayan sonlu elemanlar ile geometrik doğrusal olmayan analiz ile gerçekleştirmişlerdir.

Rachowicz vd. (2006), tam otomatik uyarlanabilir hp dayalı ağ inceltme stratejisinin üç boyutlu uygulamasını yapmışlardır. Bu stratejinin ana teması sabit serbestlik derecesi düzeniyle enterpolasyon hatasını en aza indirmekten geçmektedir. Önce kaba bir ağ üzerinde h-yöntemine göre düzgün bir ağ inceltmesi ve p-yöntemine göre de uygun bir polinom derecesine kadar artım yapılarak iyi bir ağ kurulmaktadır. Sonra, çalışmada dikkate alınan özümleyicide, iyi ve kaba ağdan faydalanılarak kurulan hata tahmin yapısıyla kaba ağ, iyi olan ağa eşdeğer olana kadar işlem silsilesi devam ettirilmiştir. Elde edilen nihai ağ yapısı en uygun ağ yapısı olarak elde edilmiş olmaktadır.

Tews ve Rachowicz (2009), kiriş ve ince cidarlı yapıları otomatik uyarlanabilir hp-yöntemine dayalı üç boyutlu sonlu elemanlar ile çözmeyi denemişlerdir. Kullanılan sonlu elemanlar yöntemi, ağdaki serbestlik derecesi sayısını değiştirmeden enterpolasyondaki hatayı en aza indirmek için spektral polinom derecesini ve düzgün olmayan ağ yapısını (h-yöntem) ayarlama silsilesinden oluşmaktadır. Çalışmada enerji tabanlı ve amaç öngörölü uyarlanabilir hp-yöntemi de incelenmiş olup bir çok mühendisliğe ait örnek üzerinde uygulamalar yapılmıştır.

Szabó ve Actis (2009) modellemenin adımlarının neler olduğu ile p-yönteminin sonlu elemanlar ile modellemedeki önemi ve rolü üzerine bir çalışma yapmıştır. Çalışmada

hiyerarşik özellikteki p-yöntemin, kullanıcı müdahalesi olmadan analiz kapsamında istenilen analiz argümanlarının (en büyük gerilme, en büyük yerdeğiştirme, vb.) serbestlik derecesinden büyük oranda bağımsız şekilde elde edilmesini mümkün kıldığı ifade edilmiştir.

### **1.5. Yüksek Mertebeli Sonlu Elemanlar Yöntemi ve Yerdeğiştirmenin Enterpolasyonu**

Yerdeğiştirmelerin bilinmeyen olduğu sonlu elemanlar yönteminin kullanıldığı bir süreçte, elde edilen sonuçların doğruluk payının artımı (yakınsama derecesi); geleneksel olarak, problem tanım alanındaki eleman sayısının artırılmasıyla yoluyla gerçekleştirilmektedir. İzlenen bu yöntem beraberinde hesap yükünün artmasının yanı sıra problem tanım alanının her defasında yeniden tanımlanmasına (ağ sıklaştırılması), dolayısıyla, analiz öncesi hazırlık sürecinin uzamasına neden olmaktadır.

Kullanılan sonlu elemanlar yöntemiyle elde edilen sonuçların doğruluk payının artımı, sadece yukarıda ifade edilen ve h-yöntemi olarak adlandırılan yöntemin yanı sıra farklı yaklaşımlara dayalı yöntemlerle de yapılmaktadır. Bu yöntemlerden biri, problem tanım alanının yeniden tanımlanmasına ihtiyaç duymayan; onun yerine, temsilde eleman tabanlı enterpolasyon yapmak amacıyla kullanılan şekil fonksiyonlarının polinom derecelerinin artırılmasını prensibinin kullanıldığı “p-yöntemi”dir. Bu yöntem gereği, elde edilecek çözümün doğruluk payının artımı, sadece başlangıçta tanımlanan problem tanım alanındaki (sonlu elemanlar ağındaki) elemanlara ait şekil fonksiyonlarının polinom derecesinin yükseltilmesi ile ilişkilidir. Dolayısıyla problem tanım alanının yeniden tanımlanmasına ihtiyaç yoktur.

Bazı problemlerin karakteristiğine bağlı olarak h-yöntemini veya p-yöntemini kullanmak, istenen hassasiyette sonuç vermeyebilir. Bu durumda bir diğer yöntem olarak her iki yöntemin bir araya geldiği hp-yöntem kullanılabilir. Bu yöntem de ise başlangıçtaki problem tanım alanında bir dereceye kadar polinom derecesi yükseltilmektedir. Eğer memnun edici sonuç alınmaz ise problem tanım alanı yeniden tanımlanarak tekrar polinom derecesi yükseltme yoluna gidilerek çözüm aranmaktadır.

Polinom derecesinin yükseltilmesine (p-yöntemi) dayalı sonlu elemanlar yöntemleri “yüksek mertebeli sonlu elemanlar yöntem”leri olarak da adlandırılmaktadır. Bu yöntemler de kendi aralarında kullanılan polinomların özelliklerine ve bu polinomların kullanım

şekillerine göre çeşitlendirilmektedir. Bu polinomlara örnek olarak Lagrange polinomu verilebilir. Bu polinom yapısı gereği, ilgili polinom derecesine kadar Pascal üçgeninde tüm terimleri içermektedir ve bundan ötürü kararlı (stabil) çözümler sunan sonlu eleman kurulmasını sağlamaktadır. Diğer taraftan Pascal üçgenindeki terimlerden belli bir kısmı kullanılarak da polinomlar üretilebilir. Buna örnek olarak da serendipity yaklaşımı verilebilir. Bu yaklaşımda Lagrange polinomunun yüksek dereceli terimleri atılmaktadır.

Yüksek mertebeli sonlu elemanlar yöntemlerinde yinelendiği gibi, çözümün doğruluk payının artırılması polinom derecesinin artırılmasını gerektirmektedir. Bu anlamda her polinom derecesinin artırılmasında şekil fonksiyonlarının yeniden kurulması gerekmektedir. Bu durum polinomların hiyerarşik şekilde düzenlenmesi durumunda söz konusu olmamaktadır. Hiyerarşik düzen, polinom derecesi artırıldıkça her zaman bir önceki kurulumu muhafaza eder şekilde şekil fonksiyonlarını kurmayı sağlamaktadır.

Problemde ağ yapısının veya polinom derecesinin mertebesinin sistem düzeyinde veya eleman düzeyinde hata tahmin çalışmaları yapılarak kontrol mekanizmalarının olduğu, ağ sıklaştırması veya polinom derecesi artımında kullanıcı müdahalesinin olmadığı sonlu elemanlar yöntemleri, “uyarlanabilir sonlu elemanlar yöntem”leri olarak adlandırılmaktadır.

Yukarıdaki bilgiler ışığında elde edilen sonucun doğruluk payının artırılmasında birçok yöntemin kullanıldığı ve bu yöntemlerin bu esnada bir kademe hesap yükünü azalttığı görülmektedir.

### **1.5.1. Yüksek Mertebeli Sonlu Elemanlar Yönteminde (p-Yöntemi) Enterpolasyon Fonksiyonları**

p-yöntemi, problem tanım alanında elemanlar üzerinden yapılan enterpolasyon işleminde daha etkili bir enterpolasyon fonksiyonu kurulumunun polinom derecesinin artırılması ile yapıldığı bir yakınsatma yöntemi olarak tanımlanabilir. Kullanılan polinomlara (Lagrange, serendipity, vb.) ve polinomların kullanılma şekillerine (hiyerarşik düzenleme) göre çeşitlenebilir. p-yöntemine göre yakınsamanın sağlatılmaya çalışılacağı düzlem ve hacim sonlu elemanları için Lagrange, serendipity tabanlı şekil fonksiyonları ile Lagrange ve Legendre polinomlarına dayalı hiyerarşik şekil fonksiyonlarının kurulumu ilgili alt başlıklarda anlatılmaktadır.



### 1.5.1.1. Lagrange Polinomu Tabanlı Şekil Fonksiyonlarının Kurulumu

Şekil fonksiyonlarının üretiminde çeşitli polinomlar (Zienkiewicz, 1989; Bathe, 1996) kullanılmaktadır. Bunlardan birisi de Lagrange polinomudur. Lagrange polinomu belli bilinen değerlere göre enterpolasyon özelliğini de barındıracak şekilde üç boyutlu elemanlar için

$$N^i(\xi) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p+1} \frac{\xi^k - \xi}{\xi^k - \xi^i}, \quad N^i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \left( \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p+1} \frac{\xi_1^k - \xi_1}{\xi_1^k - \xi_1^i} \right) \left( \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^{p+1} \frac{\xi_2^m - \xi_2}{\xi_2^m - \xi_2^i} \right) \left( \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^{p+1} \frac{\xi_3^n - \xi_3}{\xi_3^n - \xi_3^i} \right),$$

$$[\xi_1, \xi_2, \xi_3] \in (-1, 1) \quad (1.18)$$

şeklinde yeniden düzenlenerek şekil fonksiyonuna dönüştürülür. İki boyutlu elemanlar için şekil fonksiyonu Denklem (1.18)'de üçüncü eksene ait ifadeler kaldırılarak

$$N^i(\xi_1, \xi_2) = \left( \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p+1} \frac{\xi_1^k - \xi_1}{\xi_1^k - \xi_1^i} \right) \left( \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^{p+1} \frac{\xi_2^m - \xi_2}{\xi_2^m - \xi_2^i} \right), \quad [\xi_1, \xi_2] \in (-1, 1) \quad (1.19)$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde bir boyutlu elemanlar için de şekil fonksiyonu Denklem (1.18)'de hem üçüncü hem de ikinci eksene ait ifadeler kaldırılarak

$$N^i(\xi_1) = \left( \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p+1} \frac{\xi_1^k - \xi_1}{\xi_1^k - \xi_1^i} \right), \quad [\xi_1] \in (-1, 1) \quad (1.20)$$

şeklinde elde edilir. Burada, p, polinomun derecesini;  $\xi$ , doğal koordinatlardaki aksene göre koordinatları göstermektedir. Lagrange tabanlı şekil fonksiyonları ile enterpolasyon fonksiyonu

$$F(\xi) = \sum_{i=1}^{p+1} N_i f_i^e \quad (1.21)$$

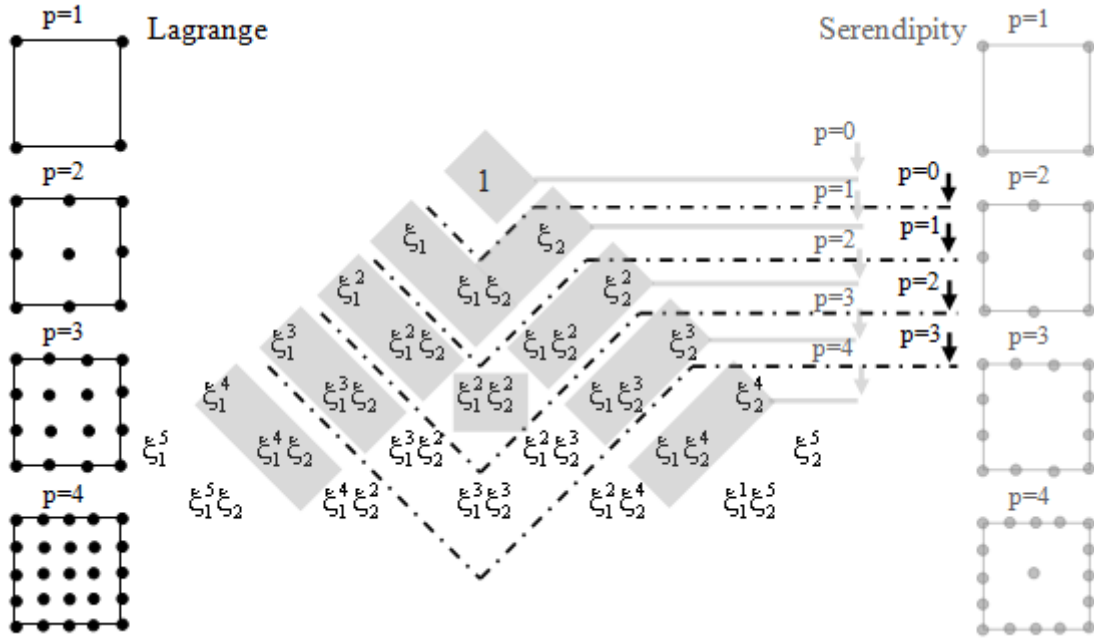
şeklinde tanımlanmaktadır. Burada, F, enterpolasyon fonksiyonu;  $f^e$ , problem tanım

alanında tanımlanacak enterpolasyon için gerekli noktadaki değerlerdir. Programda dikkate alınan şekil fonksiyonu Lagrange yaklaşımına göre üretilmiş  $p+1$ 'inci dereceden bir polinomdur. Bu enterpolasyon fonksiyonu, geometri ve yerdeğiştirme tanım alanının enterpolasyonunda kullanılabilir. Öyle ki; ilgili fonksiyonun, yerdeğiştirme tanım alanının enterpolasyonunda kullanılırken yakınsama şartlarının sağlandığına dikkat edilebilir. Çünkü ilgili fonksiyon hem rijit ötelenmeye karşılık gelen sabitler içerirken hem de şekildeğiştirmenin de yerdeğiştirme doğurabilmesi için en azından gereken doğrusal terimleri içermektedir. Böylelikle enterpolasyon alanındaki her noktaya ait tek değer elde edilebilir. Ayrıca yerdeğiştirmenin enterpolasyonunda nokta değerlerinin sadece noktasal yerdeğiştirme değerleri olduğu düşünülürse, ilgili enterpolasyon fonksiyonu geçerli olduğu tanım alanına komşu diğer alanlarla olan sınırlarında  $C^0$  süreklilik (elemanlar arası uyumluluk) şartını sağlayabileceği öngörülebilir.

#### **1.5.1.2. Serendipity Yaklaşımı ile Lagrange Polinomu Tabanlı Şekil Fonksiyonu Kurulumu**

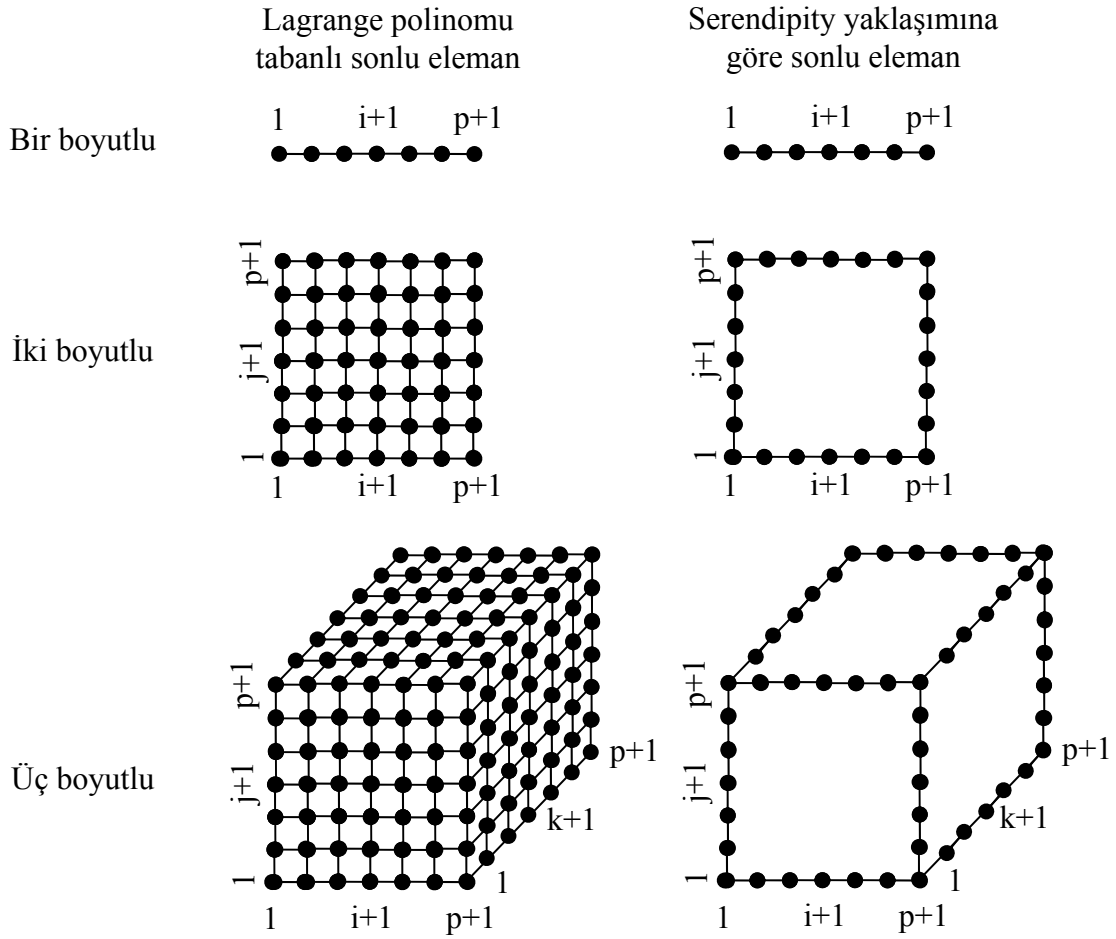
Lagrange polinomu yapısı gereği, ilgili polinom derecesine kadar Pascal üçgenindeki tüm terimleri Şekil 1.1'de görüldüğü gibi içermektedir. Bu terimler arasında ilgili polinom derecesine göre Pascal üçgeninde bazı terimler ihmal edilerek polinomlar üretilebilir. Buna örnek olarak serendipity yaklaşımı verilebilir. Bu yaklaşımda Lagrange polinomunun yüksek dereceli terimleri kullanılmamaktadır.

Serendipity yaklaşımına göre istenilen polinom derecesi için (bkz. Şekil 1.1) ilgili polinom terimleri seçilir ve her bir polinom terimine de bir bilinmeyen katsayı atanarak toplamı alınır. Elde edilen polinomun katsayılarını bulmak için enterpolasyon işleminin gerçekleştirileceği her noktanın konum bilgisinden hareketle katsayıların bilinmeyen olduğu bir denklem takımı kurulur. Daha sonra bu denklem takımı her bir şekil fonksiyonu için çözümlenerek her noktanın kendisine ait şekil fonksiyonu kurulur. Bu enterpolasyon fonksiyonu da yukarıda dile getirilen yakınsama şartını sağlayabilecek durumda olduğundan kendisi ile kurulacak sonlu eleman  $C^0$  süreklilik şartını yerine getirebilir.



Şekil 1.1. İki boyutlu bir problem tanım alanı için Lagrange polinomu ve serendipity yaklaşımı ile üretilen polinoma ait polinom terimlerinin Pascal üçgeninde gösterimi

Tez kapsamında dikkate alınan serendipity yaklaşımında; orta noktaların üretimi, istenilen polinom derecesine göre üretilebilecek şekilde genel bir algoritma kurulamadığından yapılmamaktadır. Yani polinom derecesi arttıkça sadece kenar noktalarda üretim olmaktadır. Orta nokta üretilmemesi elde edilecek çözümler için yakınsama açısından bir yavaşlamaya neden olabilmektedir. Ancak diğer şekil fonksiyonları ile üretilen sonlu eleman modellerine göre serbestlik sayısının polinom derecesine göre artım hızı düşük olduğundan bu yaklaşım kullanılabilir olarak kabul edilebilir. Şekil 1.2’de Lagrange tabanlı polinom ve serendipity yaklaşımına göre elde edilen şekil fonksiyonlarının üretildiği elemanların nokta düzeni, bir, iki ve üç boyutlu elemanlar için gösterilmektedir.



Şekil 1.2. Lagrange polinomu ve serendipity yaklaşımına göre bir, iki ve üç boyutlu sonlu elemanlar için nokta düzeni gösterimi

### 1.5.1.3. Hiyerarşik Düzendeki Şekil Fonksiyonu Kurulumu

Polinom derecesi artırılarak yakınsama sağlanması amaçlandığında her polinom derecesi artımında yeni kurulacak şekil fonksiyonları kurulurken mevcut olan şekil fonksiyonları değiştirilmek zorunda kalınmaktadır. Ancak hiyerarşik düzende şekil fonksiyonları kurulduğunda, polinom derecesi artırıldıkça her zaman bir önceki kurulum muhafaza edileceğinden sadece yeni şekil fonksiyonlarının kurulumu yapılacaktır. Tez kapsamında iki tür hiyerarşik düzende sahip şekil fonksiyonu (hiyerarşik şekil fonksiyonu) üretilecektir. Birincisi Lagrange polinomu; ikincisi ise Legendre polinomu tabanlı olacaktır.

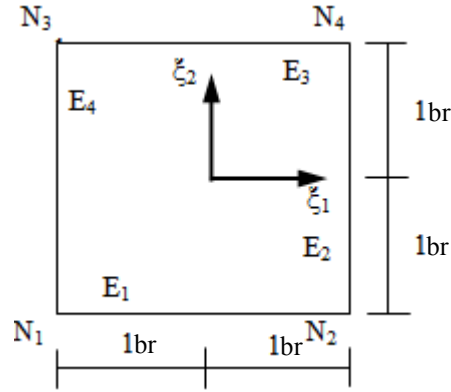
Hiyerarşik şekil fonksiyonları, enterpolasyon özelliğini tam olarak sağlayacak biçimde taban olarak ifade edilen şekil fonksiyonları üzerine kurulmaktadır. Öyle ki, iki

boyutlu alanda taban şekil fonksiyonları dört köşe noktalı bir dörtgen tanım alanına ait Lagrange polinomu tabanlı şekil fonksiyonları olabilir. Taban şekil fonksiyonları nokta değerler üzerinden tam enterpolasyon özelliğini sağlayacak şekilde kurulmuştur. Bu fonksiyonlar üzerine kurulacak olan hiyerarşik düzendeki şekil fonksiyonları, nokta değerler yerine kenar değerlerin tanım alanı üzerine enterpolasyonunu yapan fonksiyonlardır. Kenar değerlerden kasıt, kenarların eğriliğini artıracak yüksek mertebeli türev bilgileridir. Ayrıca polinom derecesinin dört ve dördün üstünde olması durumunda polinom bütünlüğünü tamamlamak amacıyla yüzey değerler de tanımlanır. Yüzey değerler de kenar değerlere benzer olarak yüzeyin eğrilik yeteneğini artıracak yüksek mertebeli türev bilgileridir.

Genel olarak hiyerarşik düzen, her iki boyutta -1'den +1'e kadar olan bir tanım alanı üzerinde dört köşe noktadan oluşan iki boyutlu bir dörtgen enterpolasyon alanı için Denklem (1.22) ve Şekil 1.3 yardımıyla aşağıda ifade edilmektedir.

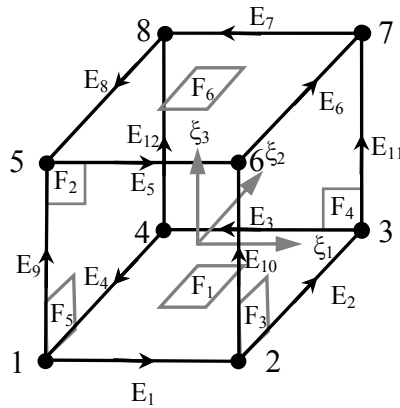
$$\left. \begin{aligned}
 (p=1) \Rightarrow N^{N_i} &= \frac{1}{4}(1+\xi_1^j \xi_1)(1+\xi_2^k \xi_2), \left[ \begin{array}{c} i \\ j \\ k \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right] \\
 (p \geq 2) \Rightarrow N_i^{E_j} &= \frac{1}{2}(1+\xi_m^k \xi_m) \phi_i(\xi_n), \left[ \begin{array}{c} j \\ k \\ m \\ n \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right], \left. \begin{array}{l} \{2 \leq i \leq p\}, \\ \xi^t = (-1)^t, t=1,2, \\ [\xi_1, \xi_2] \in (-1,1) \end{array} \right\} (1.22) \\
 (p \geq 4) \Rightarrow N_{ij}^{int} &= \phi_i(\xi_1) \phi_j(\xi_2), \left\{ \begin{array}{l} 2 \leq i \leq p-2 \\ 2 \leq j \leq p-i \end{array} \right.
 \end{aligned} \right\}$$

Burada,  $N^{N_i}$ , taban şekil fonksiyonlarına ait dört köşe noktanın şekil fonksiyonlarını;  $N_i^{E_j}$ , kenarların yüksek mertebeli türev bilgilerine karşılık gelen şekil fonksiyonlarını;  $N_{ij}^{int}$ , yüzeylerin yüksek mertebeli türev bilgilerine karşılık gelen şekil fonksiyonlarını;  $\phi$ , yüksek mertebeli türev bilgilerine karşılık gelen bir boyutlu fonksiyonu ifade etmektedir.



Şekil 1.3. İki boyutlu hiyerarşik düzende dörtgen enterpolasyon alanı

İki boyutlu alanda hiyerarşik şekil fonksiyonlarının özetle nasıl elde edileceği bu şekilde özetlenebilir. Bu noktadan sonra iki boyutlu tanım alanında hiyerarşik şekil fonksiyonlarını kurmak için bir boyutlu tanım alanında hiyerarşik şekil fonksiyonlarının kurulması ve yukarıdaki eşitlik ile iki boyutlu uzaydaki temsile geçilmesi gerekmektedir. İki boyutluya benzer olarak üç boyutlu uzayda da hiyerarşik düzen örneklenebilir. Bu durum her üç boyutta -1'den +1'e kadar olan bir tanım alanı üzerinde sekiz köşe noktasından oluşan üç boyutlu bir dörtgen prizma enterpolasyon hacmi için Şekil 1.4 ve Denklem (1.23) yardımıyla aşağıda ifade edilmektedir.



Şekil 1.4. Üç boyutlu hiyerarşik düzende dörtgen prizma enterpolasyon hacmi

$$(p=1) \Rightarrow N^{Ni} = \frac{1}{8}(1 + \xi_1^j \xi_1)(1 + \xi_2^k \xi_2)(1 + \xi_3^m \xi_3),$$

$$\begin{bmatrix} i \\ j \\ k \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(p \geq 2) \Rightarrow N_i^{Ej} = \frac{1}{4}(1 + \xi_x^y \xi_x)(1 + \xi_v^z \xi_v) \phi_i(\xi_x),$$

$$\begin{bmatrix} j \\ x \\ y \\ v \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \{2 \leq i \leq p\},$$

$$\xi^t = (-1)^t, t=1,2, \\ [\xi_1, \xi_2, \xi_3] \in (-1,1) \quad (1.23)$$

$$(p \geq 4) \Rightarrow N_{km}^{Fj} = \frac{1}{2}(1 + \xi_x^p \xi_x) \phi_k(\xi_y) \phi_m(\xi_z),$$

$$\begin{bmatrix} j \\ p \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{cases} 2 \leq k \leq p-2 \\ 2 \leq m \leq p-k \end{cases}$$

$$(p \geq 6) \Rightarrow N_{ijk}^{int} = \phi_i(\xi_1) \phi_j(\xi_2) \phi_k(\xi_3), \begin{cases} 2 \leq i \leq p-4 \\ 2 \leq j \leq p-2-i \\ 2 \leq k \leq p-i-j \end{cases}$$

Burada,  $N^{Ni}$ , taban şekil fonksiyonlarına ait dört köşe noktanın şekil fonksiyonlarını;  $N_i^{Ej}$ , kenarların yüksek mertebeli türev bilgilerine karşılık gelen şekil fonksiyonlarını;  $N_{km}^{Fj}$ , yüzeylerin yüksek mertebeli türev bilgilerine karşılık gelen şekil fonksiyonlarını;  $N_{ijk}^{int}$ , hacimin yüksek mertebeli türev bilgilerine karşılık gelen şekil fonksiyonlarını;  $\phi$ , yüksek mertebeli türev bilgilerine karşılık gelen bir boyutlu şekil fonksiyonunu ifade etmektedir.

a) Lagrange Polinomu Tabanlı Hiyerarşik Düzende Şekil Fonksiyonu Kurulumu

Lagrange polinomu kullanılarak hiyerarşik düzende şekil fonksiyonlarının üretiminde Karma Fonksiyon (Blending Function) Yöntemi ve Taylor serisi açılımından faydalanılmaktadır. Bu durumda

$$F(\xi) = \left(\frac{1-\xi}{2}\right)f_1^e + \left(\frac{1+\xi}{2}\right)f_2^e + \sum_{i=2}^p \phi_i f^{e(i)} = N_1(\xi)f_1^e + N_2(\xi)f_2^e + \sum_{i=2}^p N_{i+1} f^{e(i)} \quad (1.24)$$

şeklinde Lagrange polinomu tabanlı hiyerarşik açılıma sahip bir enterpolasyon fonksiyonu elde edilmektedir. Burada, hiyerarşik kısım

$$N_{i+1}(\xi) = \left[ \frac{\xi^i - N_1(-1)^i - N_2(1)^i}{i!} \right], \quad \xi \in (-1, 1), \quad i=2,3,\dots \quad (1.25)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Denklem (1.24)'deki enterpolasyon fonksiyonu bir boyutlu tanım alanında birinci dereceden Lagrange polinomuna dayalı taban şekil fonksiyonları üzerine hiyerarşik kısmın eklendiği bir fonksiyon gibi görünmektedir. Öyle ki, bir boyutlu hiyerarşik şekil fonksiyonunu ifade eden Denklem (1.25), Denklem (1.22)'deki  $\phi$  fonksiyonu olarak alınarak iki ve üç boyutlu tanım alanlarında Lagrange polinomu tabanlı hiyerarşik şekil fonksiyonlarının elde edilmesinde kullanılmaktadır.

b) Legendre Polinomu Tabanlı Hiyerarşik Düzende Şekil Fonksiyonu Kurulumu

Legendre polinomu Legendre diferansiyel denkleminin çözümü olup ortogonallik özeliğine sahiptir. Ortogonallik özelliği de hiyerarşik açılıma olanak vermekte olup hiyerarşinin olması ortogonallik özelliğinin olacağını veya ortogonallik özelliğinin olması hiyerarşikliğin olacağını garanti etmemektedir. Mevcut taban şekil fonksiyonlarını değiştirmeden Legendre polinomunun doğrudan şekil fonksiyonu olarak kullanılması mümkün olamamaktadır. Bundan dolayı enterpolasyon şartları sağlatılacak şekilde Legendre polinomundan uygun hiyerarşik şekil fonksiyonu



$$\phi_i(\xi) = \sqrt{\frac{2i-1}{2}} \int_{-1}^{\xi} L_{i-1}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{4i-2}} (L_i(\xi) - L_{i-2}(\xi)), \quad \xi \in (-1, 1), \quad i=2,3,\dots \quad (1.26)$$

şeklinde elde edilmektedir. Burada, Legendre polinomu

$$L_i(\xi) = \frac{1}{2^i i!} \frac{d^i}{d\xi^i} (\xi^2 - 1)^i, \quad (1.27)$$

ile türetilmektedir. Denklem (1.26)'da verilen bir boyutlu tanım alanındaki hiyerarşik kısmı Denklem (1.24)'deki enterpolasyon fonksiyonunun hiyerarşik kısmı yerine kullanılabilir.

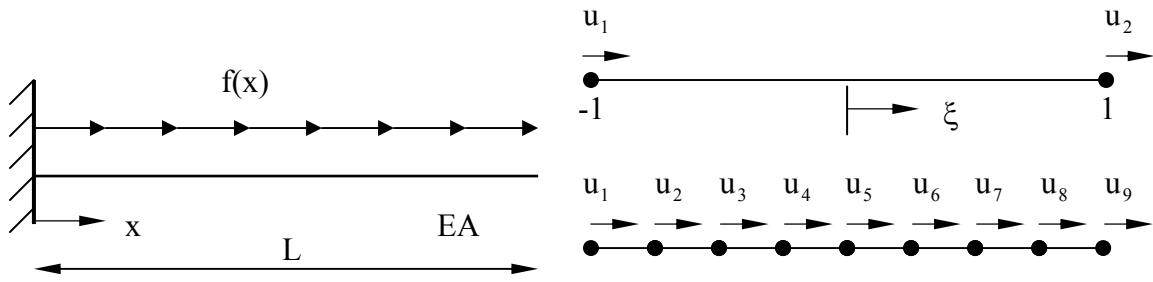
Legendre polinomunda bulunan ortogonallik özelliği, sadece hiyerarşik düzenlemeye olanak sağlayıp kazanım sağlamamakta; ayrıca, matrislerin içerisindeki terimlerin dağılımındaki payı daraltıp sıfır yapmaktadır. Yani neredeyse tüm terimleri sıfırdan farklı olan bir matris; köşegen matris haline getirilmektedir. Bu durum rijitlik matrisi ve şekil fonksiyonları arasındaki ilişki düşünülerek de yorumlanabilir. Şekil fonksiyonları, eleman rijitlik matrislerini dolayısıyla sistem rijitlik matrislerini şekillendiren temel öğelerden biridir. Öyle ki; her bir şekil fonksiyonu rijitlik matrisindeki bir serbestliğin katkısını ortaya koyduğundan, özde onların birebir çarpımları rijitlik matrisini oluşturmaktadır. Dolayısıyla rijitlik matrisinin sıfırdan farklı terimlerinin dağılımı şekil fonksiyonlarının ortogonallik özelliğine bağlıdır. Eğer şekil fonksiyonları ortogonal olursa rijitlik matrisi köşegen olacaktır.

Ortogonallik özelliğinin matrisleri diyagonalleştirmesinin en büyük faydası, daha sonra o matrislerle yapılacak olan matris işlemlerde görülmektedir. Örneğin, rijitlik matrisi kurulduktan sonra bilinmeyenlerin bulunması için yük vektörü ile tersinin çarpılması gerekmektedir. Matris tersini alma işleminin sağlıklı ve tekillik oluşturulmadan yapılabilmesi, matrisin homojenliği, yani, tekil çözüm verebilme yeteneği ile ilgilidir. Ortogonal özelliğe sahip şekil fonksiyonları ile oldukça diyagonal bir eleman rijitlik matrisi, dolayısıyla, sistem rijitlik matrisi elde edilebileceğinden daha sonra bilinmeyenler elde edilirken tekillik ile karşılaşma olasılığı o denli az olacaktır. Bu anlatım ışığında ortogonallik özelliğinin sağladığı yararlar bir boyutlu bir örnek üzerinde gösterilecektir.

Bir matrisin durumu o matrisi oluşturan değerlerin matematiksel olarak işlem görme gücünü gösterir. Bu bağlamda durum sayısı,  $\kappa$ , o matrisin en büyük özdeğerinin,  $\lambda_{\max}$ , en

küçük özdeğerine,  $\lambda_{\min}$ , bölümü ile belirlenmektedir. Durum sayısı en iyi durumda “1”e eşit olurken matrise bağlı olarak daha büyük değerler de alabilmektedir. Rijitlik matrisinin durum sayısı, şekil fonksiyonlarına dayalı kurulan rijitlik matrisinin terim düzenine ait başarıma dair bir ölçüt olarak düşünülebilir.

Her noktasında doğrultusu boyunca serbestliği olan ve yine doğrultusu boyunca düzgün yayılı yüke maruz kalan bir çubuğun tanımı (Düster, 2001) Şekil 1.5’de gösterilmektedir.



$$EA=L=1, f(x)=-\sin(8x)$$

Şekil 1.5. Bir p-elman ve sekiz h-eleman ile ayrıklaştırılmış bir elastik çubuk

Bu problemin kesin çözümü

$$U_{\text{kesin}}(x) = -\frac{1}{64}\sin(8x) + \frac{1}{8}\cos(8)x \quad (1.28)$$

şeklindedir (Düster, 2001). Sonlu elemanlar yöntemi ile çözülürken yerdeğiştirme tanım alanı

$$U_{\text{SE}}(\xi) = N_1(\xi)u_1^e + N_2(\xi)u_2^e + \sum_{i=2}^p N_{i+1}a_{i+1} \quad (1.29)$$

bağıntısı ile ayrıklaştırılırken geometrik tanım alanı

$$x = Q^e(\xi) = N_1(\xi)x_1 + N_2(\xi)x_2 \quad (1.30)$$

bağıntısı ile ayrıklaştırılınsın. Burada;  $x_1=0$ ,  $x_2=L$  dir. Buna göre eleman rijitlik matrisi,

p-elemanların kullanılması ve sistemin tek elemana sahip olmasından ötürü sistem rijitlik matrisi olarak

$$\mathbf{K}^e = \frac{2}{L} \int_{-1}^1 EA \frac{d\mathbf{N}_i(\xi)}{d\xi} \frac{d\mathbf{N}_j(\xi)}{d\xi} d\xi = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

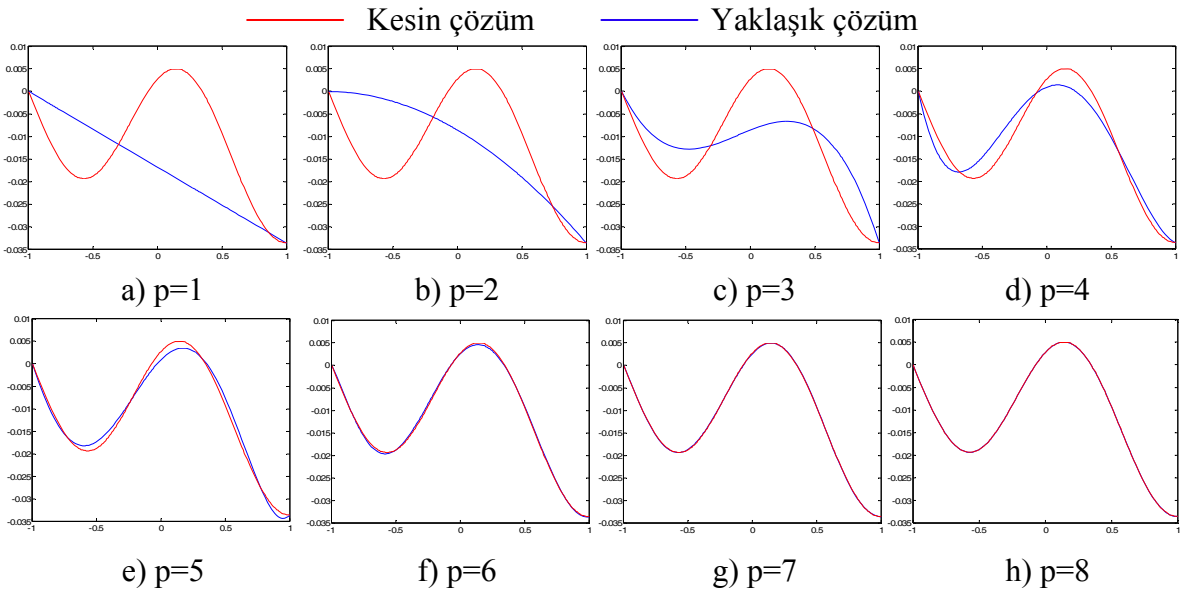
şeklinde elde edilmektedir. Dış yük vektörü ise

$$\mathbf{Y}^e = \frac{L}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{N}_i(\xi) f(x(\xi)) d\xi \quad (1.32)$$

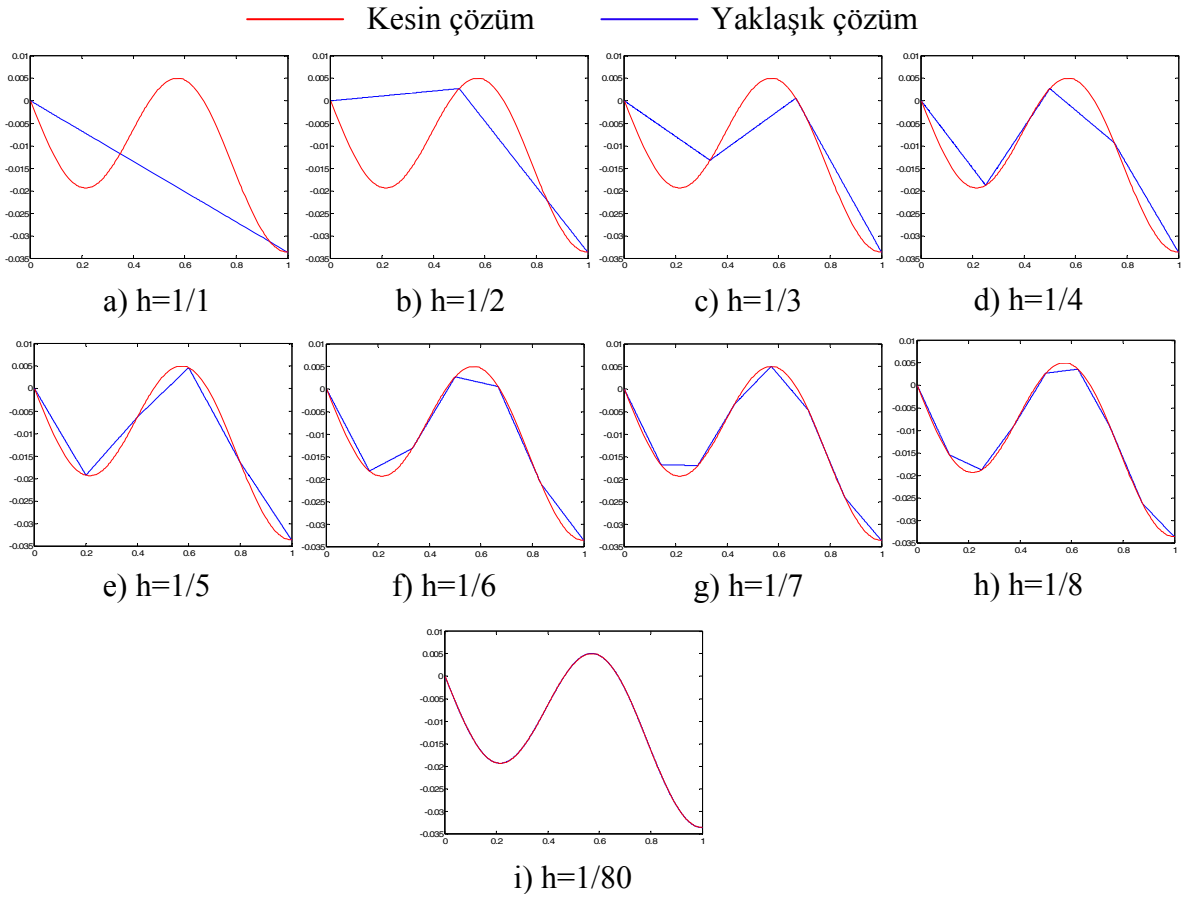
$$= [-0,1095 \ -0,0336 \ -0,0269 \ -0,0714 \ 0,0811 \ 0,0433 \ -0,0230 \ -0,0073 \ 0,0026]^T$$

olarak bulunmaktadır. Sınır koşullarında,  $U(0) = U_{SE}(0) = u_1 = 0$  şeklindedir (bkz. Şekil 1.5). Bu koşullar altında sekize kadar her polinom derecesi için elde edilen sayısal çözüm ile kesin çözüm Şekil 1.6'da verilmektedir. Ayrıca polinom derecesinin artırılmasının yanı sıra geleneksel şekilde elemanlara bölünmesiyle (h-yöntemi) de elde edilen çözüm Şekil 1.7'de sunulmaktadır.

Şekil 1.6'da problemin sadece bir eleman ile modellendiği durumda serbestlik derecesi sayısının sadece polinom derecesinin artırılması ile arttığı (p-yöntemi) ve polinom derecesi sekiz olduğunda çubuk boyunca sayısal olarak elde edilen yerdeğiştirmenin kesin çözüme tam olarak yakınsadığı görülmektedir. h-yöntemi ile beraber aynı sayıda serbestlik sayısının kullanılmasına rağmen kesin çözüme yakınsama hızı Şekil 1.6'da p-yönteminin kullanıldığı duruma göre çok daha yavaş olmaktadır (bkz. Şekil 1.6 ve Şekil 1.7). Kesin çözüme yakınsama, p-yönteminde sekiz serbestlik derecesi ile elde edilirken h-yönteminde seksenbir serbestlik derecesi (seksen eleman) kullanıldığında ancak elde edilebilmektedir.

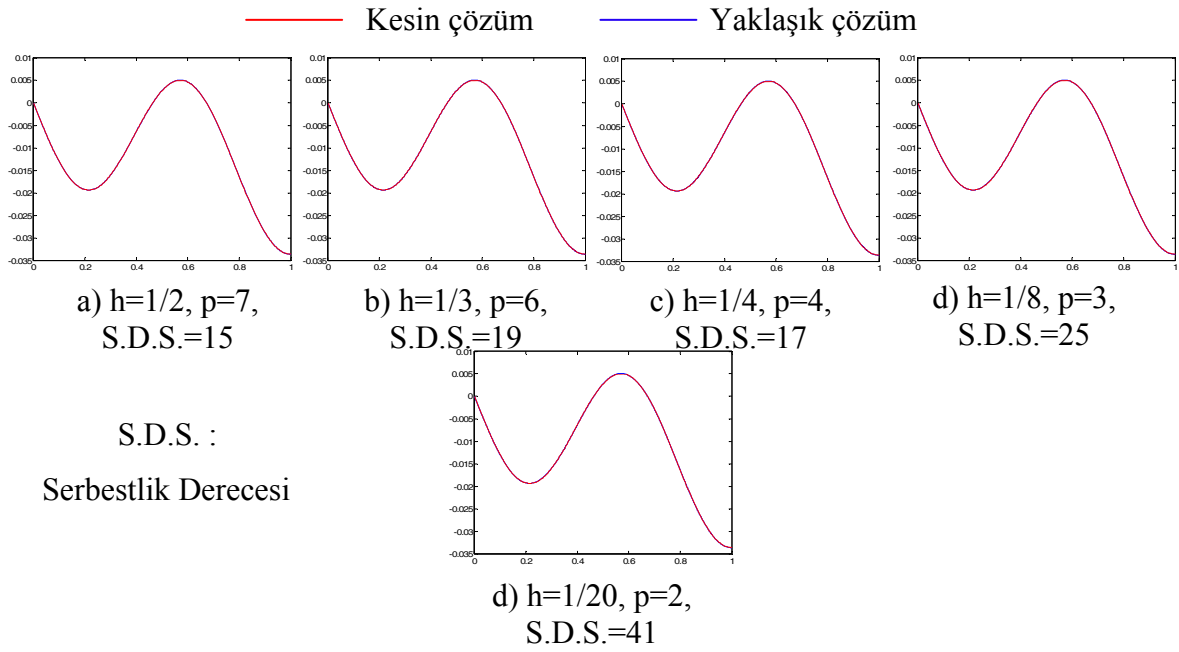


Şekil 1.6. Polinom derecesi birden sekize kadar,  $p$ -eleman ile yapılan modelleme sonucu elde edilen yerdeğişirmenin çubuk boyunca değişimi



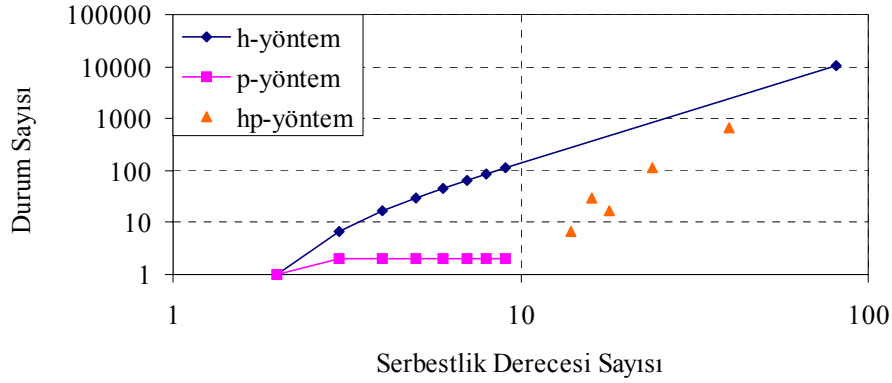
Şekil 1.7. Birden sekize kadar ve 80,  $h$ -eleman ile yapılan modelleme sonucu elde edilen yerdeğişirmenin çubuk boyunca değişimi

Her iki yöntemin bir arada kullanılabilirdiği hp-yönteminde ise hem eleman sayısı hem de polinom derecesi artırılabilir. Bu durum Şekil 1.8’de sunulmaktadır.



Şekil 1.8. Farklı sayıda h-eleman ve farklı polinom derecesinde p-eleman ile yapılan modelleme sonucu elde edilen yerdeğişirmenin çubuk boyunca değişimi

Bu şekilde uygun polinom derecesi ve eleman sayısı çiftlerini bulmak için gerçekleştirilen analiz serilerinin kesin çözüm ile tamamen eşleştirdiği ilk andaki sonuçlar verilmektedir. Buna göre elde edilen çözümün kalitesi değişmeyecek şekilde eleman sayısı artırıldıkça ihtiyaç duyulan polinom derecesi azalmakta ve bunun terside doğru olmaktadır. O ilişki, her ne kadar doğrusala yakın gözükse de “doğrusaldır” demek serbestlik derecesi sayısı açısından mümkün değildir. Eşdeğer sonucu daha sık eleman ağı ve daha düşük polinom derecesi ile bulma yolu (yani h-yönteme yaklaştıkça) gittikçe ivmelenen bir şekilde serbestlik derecesi sayısını artırmaktadır. Ayrıca uygulanacak farklı yük durumları bu ilişkinin yapısını etkileyecektir. Diğer taraftan beş modelden hangisinin daha ideal olduğu sorulursa iki elemanlı ve polinom derecesi yedi olan model, serbestlik derecesi sayısı en az olduğundan, cevap olacaktır. Kullanılan her üç yöntem için elde edilen rijitlik matrislerinin kararlılık yönünden durumları Şekil 1.9’da verilmektedir.

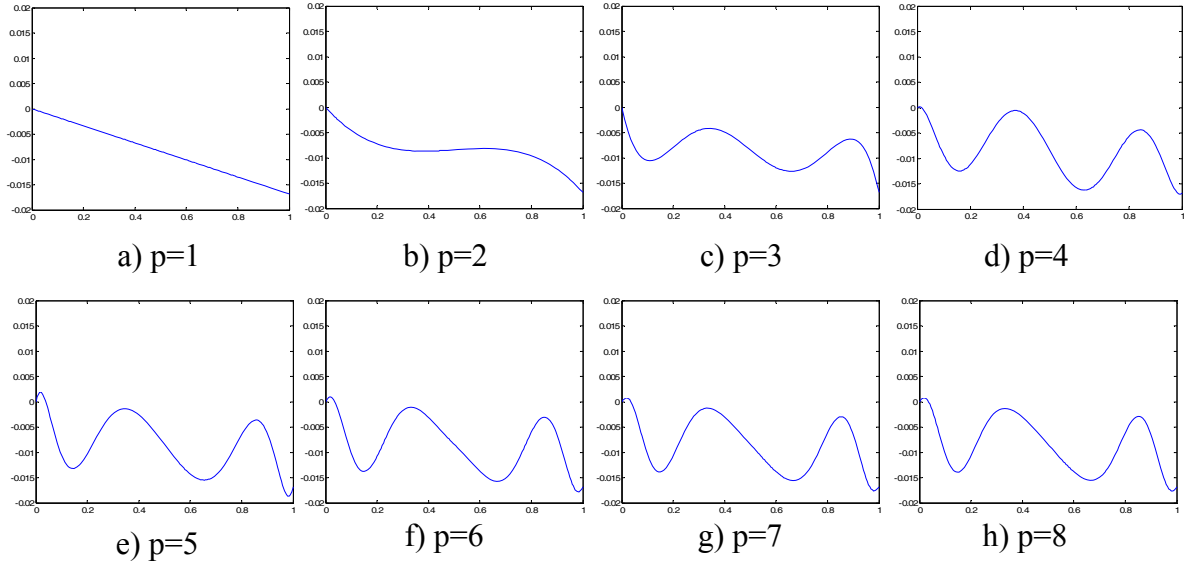


Şekil 1.9. Rijitlik matrislerinin kararlılık durumları

Şekil 1.9'dan görüldüğü gibi p-yönteminin kullanılması durumunda serbestlik derecesi ne kadar artarsa artırsın durum sayısı sabit kalmaktadır. h-yönteminde ise durum sayısı artış hızı serbestlik derecesi sayısının artmasıyla artmaktadır. hp-yönteminde yakınsamanın gözlenmesi, hem eleman sayısının (h parametresi) hem de polinom derecesinin (p parametresi) kademeli olarak artırıldığı bir süreçtir. Bu süreçte yakınsamanın sağlandığının gösterilmesi iki parametrenin de değişken olması nedeni ile zor olmaktadır. Dolayısıyla yakınsamanın tek parametre ile gözlenmesi, her bir eleman sayısı için polinom derecesinin artırılması ile veya her bir polinom derecesi için eleman sayısının artırılması ile gerçekleştirilebilir. Her iki yol ile de yakınsama süreci elde edilebileceğinden olası olan ve yakınsama sonucu bulunan çözümlerden sadece beş tanesi bu yöntem için noktasal olarak verilmektedir. Sunulan sonuçlar yakınsama sürecini tamamlamış ve kesin çözüm ile tamamen örtüşmektedir. Her ne kadar yakınsama süreci beş çözüm için birer eğri ile de sunulmadıysa, elde edilen yakınsamış sonuçlara bakılarak durum sayısının serbestlik sayısı ile değişiminin, kullanılan eleman sayısına veya polinom derecesine göre h-yöntemi ve p-yöntemi ile elde edilen eğriler arasında kaldığı görülmektedir.

Denklem (1.31)'deki rijitlik matrisine ve p-yöntemine (bkz. Şekil 1.9) ait durum sayısı eğrisine bakıldığında rijitlik matrisinin durumunu gösteren durum sayısının polinom derecesi bir için bir olduğu ve diğer polinom dereceleri için iki olduğu görülebilir. Polinom derecesi ne kadar artarsa artsın matrisin durumunun değişmediği dolayısı ile her zaman sabit bir durum sayısı ile kararlı sonuçlar alınabileceği görülmektedir. Öte yandan durum sayısı, serbestlik derecesinin artması ile şekildeğiştirme ve yerdeğiştirme arasındaki bağıntının değişmesinden dolayı polinom derecesi arttıkça sabit kalmayabilir. Ancak durum sayısının artma hızı, ortogonal olmayan şekil fonksiyonlarının kullanımına göre çok az olmaktadır. Dikkate alınan üç yöntemin de çubuk boyunca yerdeğiştirme eğrisinin

incelenmesinin yanı sıra normal gerilme dağılımına göre de irdelemesi yapılabilir. h-yöntemi, p-yöntemi ve hp-yöntemi sonucu elde edilen çubuk boyunca normal gerilme değişim diyagramları sırasıyla Şekil 1.10, Şekil 1.11 ve Şekil 1.12’de verilmektedir.

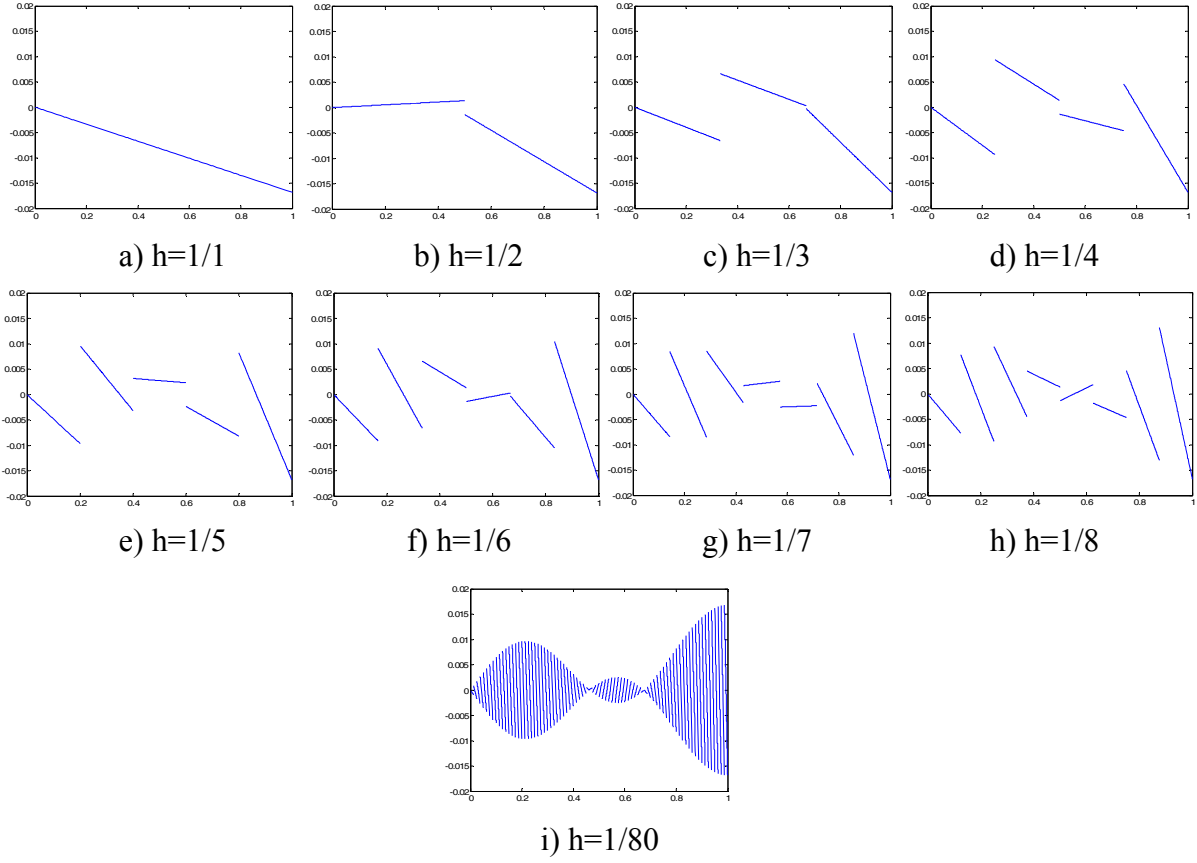


Şekil 1.10. Polinom derecesi birden sekize kadar, p-eleman ile yapılan modelleme sonucu elde edilen normal gerilmenin çubuk boyunca değişimi

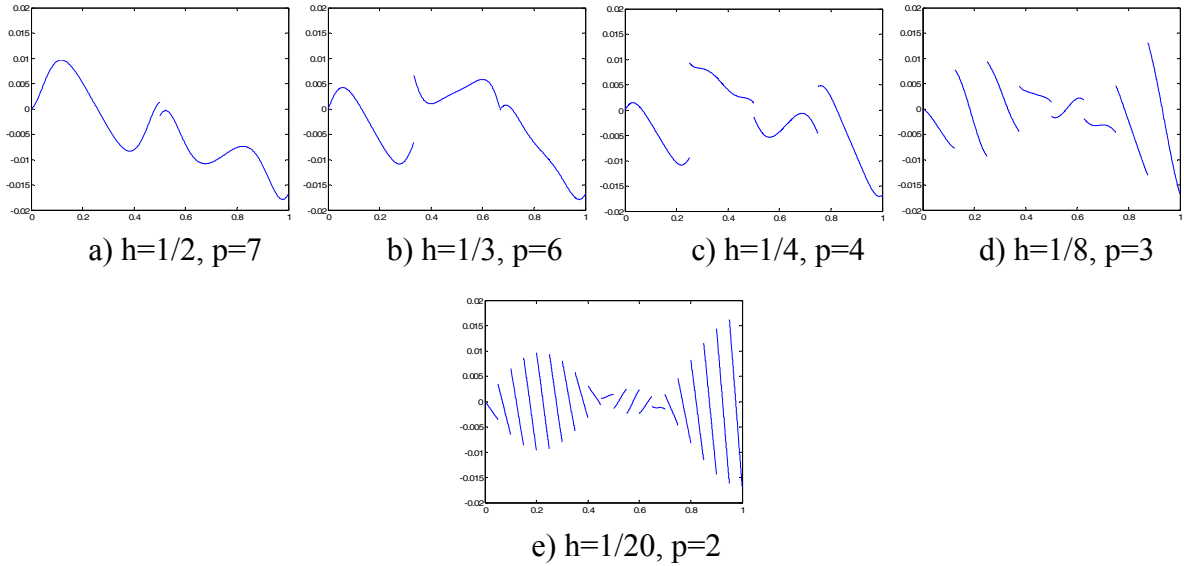
Şekil 1.10’den görüldüğü gibi gerilme diyagramları uygulanan kuvvet negatif değerli olduğundan negatif bölgede salınmakta ve polinom derecesi beşten itibaren yakınsama sağlanmaktadır. Ayrıca yakınsama sağlanan gerilme grafikleri de salınım yapmaktadır.

Şekil 1.11’den görüldüğü gibi gerilme diyagramlarında birden fazla eleman kullanıldığı için kırıklılıkların ve süreksizliklerin oluştuğu görülmekle birlikte gerilme değerleri yerdeğiştirme fonksiyonunun türevi şeklinde tanımlandığından pozitif değerlerde görülmektedir.

Şekil 1.12’den görüldüğü gibi eleman sayısı arttıkça Şekil 1.10’da görülen salınım azalmaktadır. Bu şekilde Şekil 1.11’den farklı olarak her elemandaki gerilme değişimi doğrusal olmamakta, onun yerine polinom derecesi kadar eğri olmaktadır. Ancak eleman sayısı artırıldıkça elemanlardaki eğrisel değişim doğrusallaşmaktadır.



Şekil 1.11. Birden sekize kadar ve 80 h-eleman ile yapılan modelleme sonucu elde edilen normal gerilmenin çubuk boyunca değişimi



Şekil 1.12. Farklı sayıda h-eleman ve p-eleman ile yapılan modelleme sonucu elde edilen normal gerilmenin çubuk boyunca değişimi



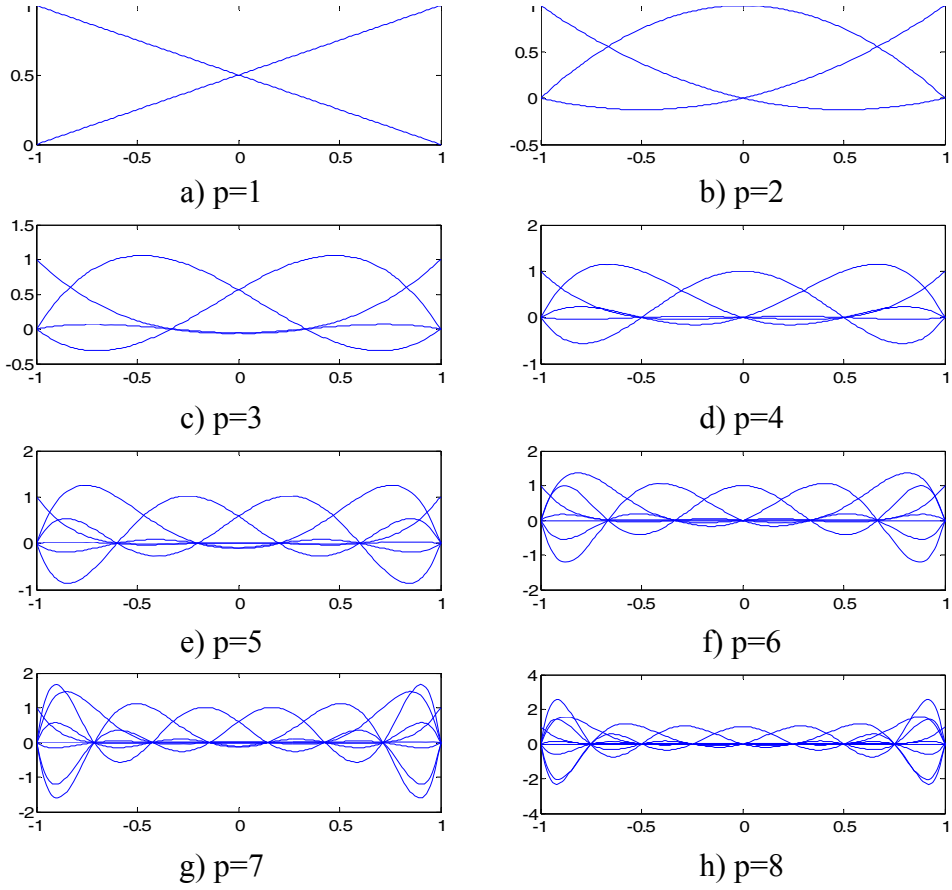
## 1.6. Yüksek Dereceli Polinomlarla Yerdeğiştirmelerin Temsilinin İrdelenmesi

Yerdeğiştirmeler, gerçek çözümle elde edilecek eğrilikleri bilinmediğinden daha sonradan bulunacak değerler üzerinden değişik fonksiyonlar yardımıyla oranlama yapılmaktadır. Oranlamada kullanılacak fonksiyonların eğrilikleri, elde edilen yerdeğiştirme fonksiyonu ve bundan türetilecek olan gerilme fonksiyonu açısından önemli olmaktadır. Örneğın, bir problemde üzerinde kurulan ağda konumu belli olan noktalarda kabul edilebilir yerdeğiştirme değerini veren iki farklı türden enterpolasyon fonksiyonu, o noktalarda farklı türev bilgilerine sahip olabileceğinden onların dışındaki noktalarda aynı yerdeğiştirme değerlerini vermeyebilirler. Ayrıca farklı türev bilgileri, onların türevlerine ait türev fonksiyonlarında farklı olabileceğı anlamında gelir. Yani belli noktalarda aynı değerleri veren yerdeğiştirme fonksiyonlarının türevleri olan gerilme fonksiyonları farklı olabilir.

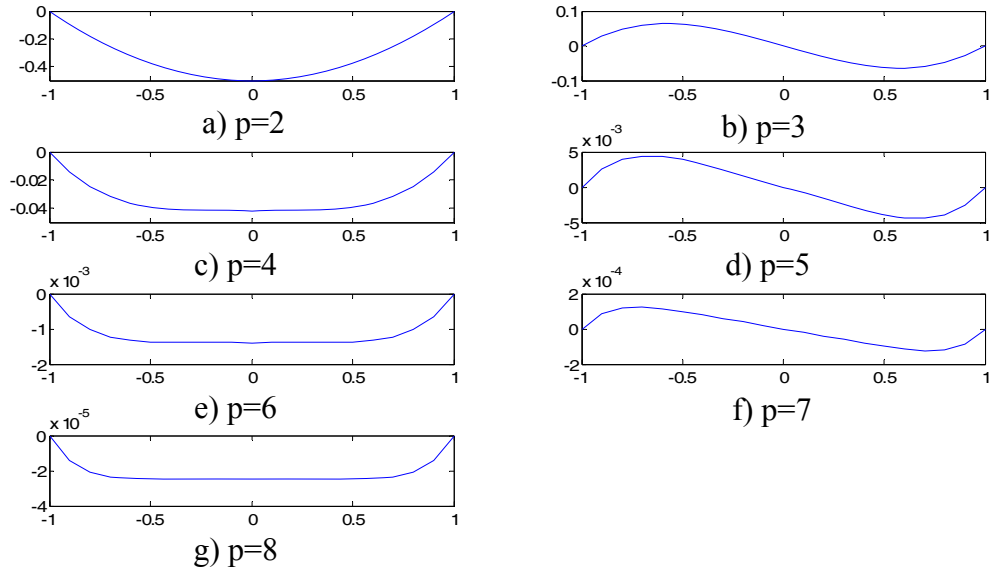
Yukarıda belirtildiğı gibi enterpolasyon fonksiyonlarının eğriliklerinin ne denli önemli olduğu anlaşılmaktadır. Bu sebeble bir boyutlu ve iki boyutlu alanda p-yöntemine göre oluşturulan elemanların şekil fonksiyonları için eğrilikleri grafiksel olarak sunulacak ve incelenecektir.

### 1.6.1. Bir Boyutlu Alanda Lagrange ve Hiyerarşik Yaklaşımlara Göre Şekil Fonksiyonlarının İrdelenmesi

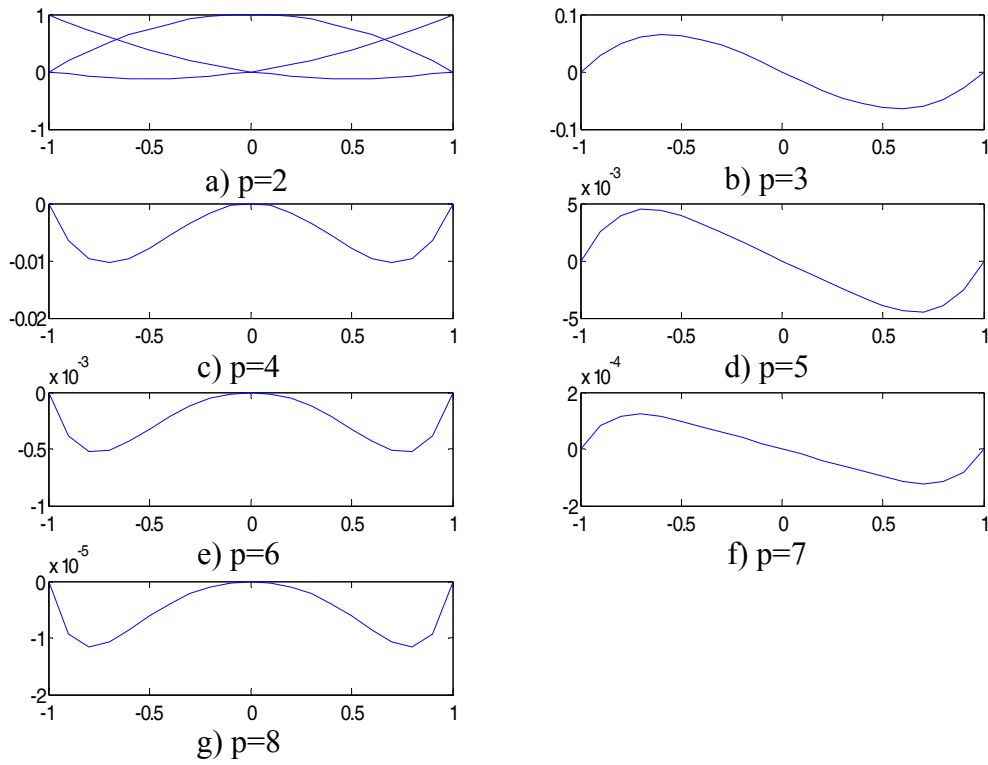
Bir boyutlu alanda şekil fonksiyonları incelenirken fonksiyonların eğrilikleri hakkında bilgi edinilmeye çalışılacaktır. Bunun için, Lagrange polinomuna göre birinci dereceden sekizinci dereceye kadar tüm derece artımlarından kaynaklanan noktalardaki şekil fonksiyonları Şekil 1.13’de gösterilmektedir. Ayrıca Lagrange polinomu ve Karma Fonksiyon Yöntemi dikkate alınarak iki farklı tipte hiyerarşik şekil fonksiyonu üretilmiştir. Bunlardan birincisi iki noktaya dayalı olarak geliştirilirken diğeri üç noktaya dayalı olarak geliştirilmiştir. Her iki tipteki hiyerarşik şekil fonksiyonu da polinom derecesi ikiden sekize kadar değiştirilmek üzere sırasıyla Şekil 1.14 ve Şekil 1.15’de gösterilmektedir.



Şekil 1.13. Lagrange polinomuna göre polinom derecesi 1. dereceden 8. dereceye kadar olan bir boyutlu elemanın şekil fonksiyonları



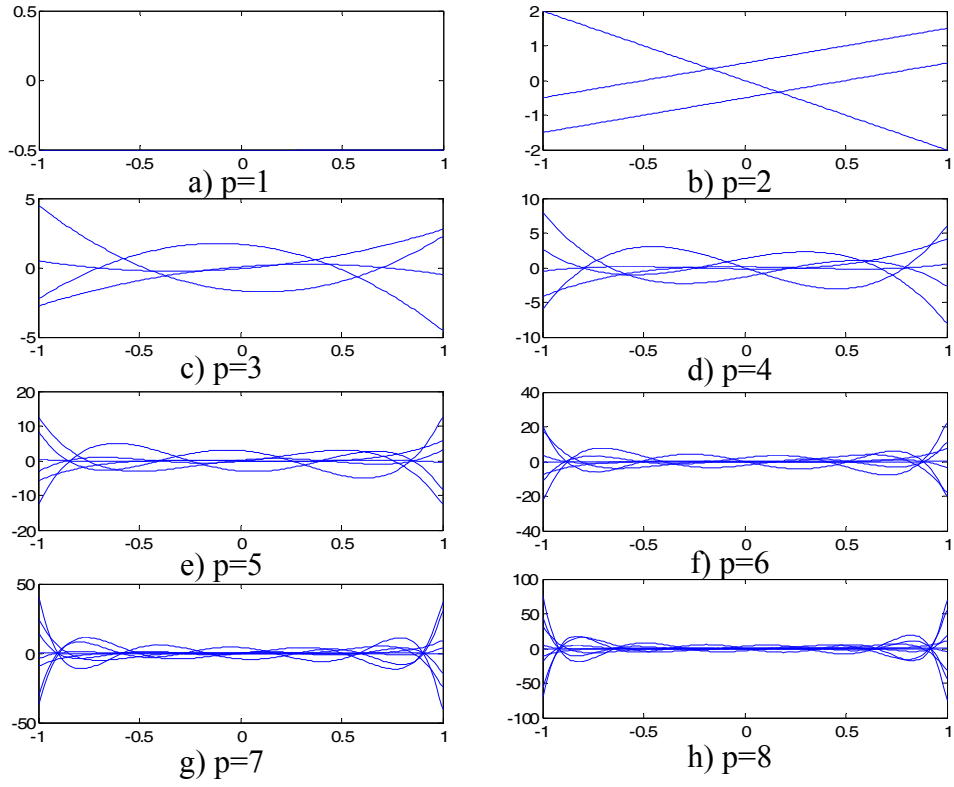
Şekil 1.14. Bir boyutlu ve birinci dereceden bir elemanın Lagrange yaklaşımına göre açılmış 8. dereceden hiyerarşik şekil fonksiyonları



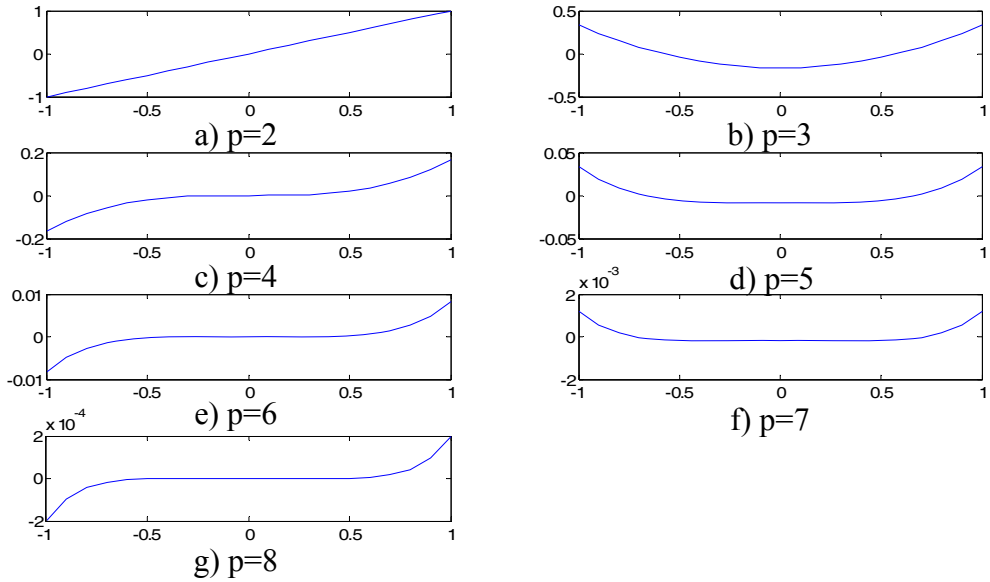
Şekil 1.15. Bir boyutlu ve ikinci dereceden bir elemanın Lagrange yaklaşımına göre açılmış 8. dereceden hiyerarşik şekil fonksiyonları

Şekil 1.13'den görüldüğü gibi Lagrange polinomuna göre üretilen şekil fonksiyonlarında polinom derecesi artırıldıkça şekil fonksiyonlarının eğriliklerindeki dalgalanmalar artmakta dolayısıyla şekil fonksiyonlarının eğrilikleri daha sert geçişler içermektedir.

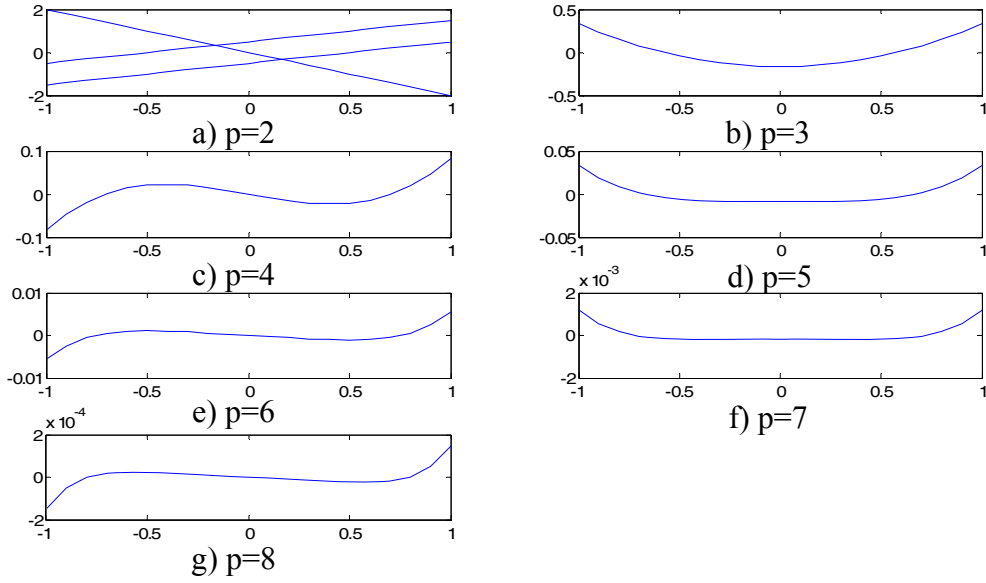
Şekil 1.14 ve Şekil 1.15' den görüldüğü gibi hiyerarşik tipte olan şekil fonksiyonlarının polinom derecesinin artması durumunda şekil fonksiyonlarının eğriliklerindeki dalgalanma değişmemekte sadece eğriliklerin mertebeleri değerce değişmektedir. Hiyerarşik tipte olan şekil fonksiyonları ve Lagrange polinomuna göre elde edilenlerle kıyaslandığında hiyerarşik tipte olanların eğriliklerinin polinom derecesi artsa da daha yumuşak geçişler içerdiği görülmektedir. Ayrıca sunulan üç farklı tip şekil fonksiyonunun birinci türevlerine ilişkin grafikler Şekil 1.16, Şekil 1.17 ve Şekil 1.18'de sunulmaktadır.



Şekil 1.16. Lagrange polinomuna göre polinom derecesi 1. dereceden 8. dereceye kadar olan bir boyutlu elemanın şekil fonksiyonlarının türevleri



Şekil 1.17. Bir boyutlu ve birinci dereceden bir elemanın Lagrange yaklaşımına göre açılmış 8. dereceden hiyerarşik şekil fonksiyonlarının türevleri

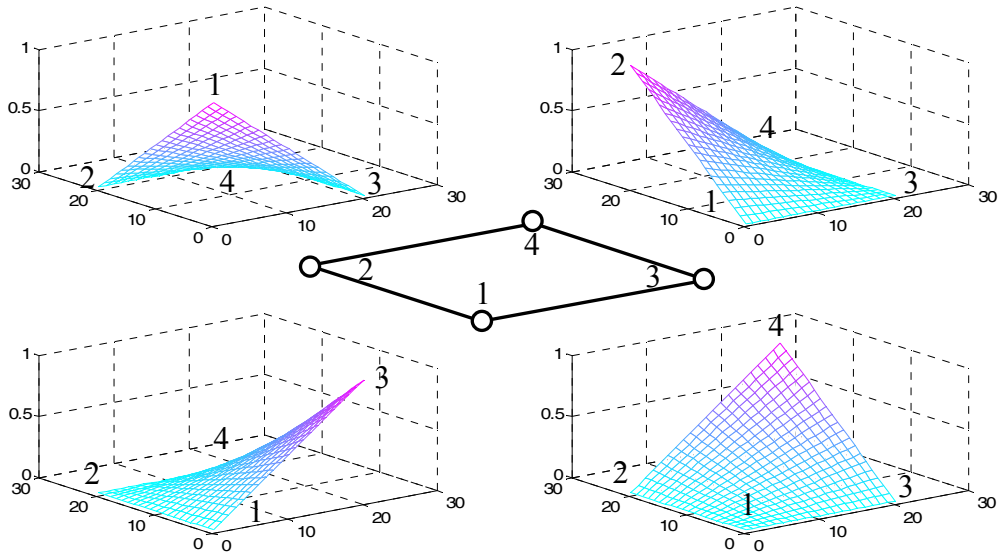


Şekil 1.18. Bir boyutlu ve ikinci dereceden bir elemanın Lagrange yaklaşımına göre açılmış 8. dereceden hiyerarşik şekil fonksiyonlarının türevleri

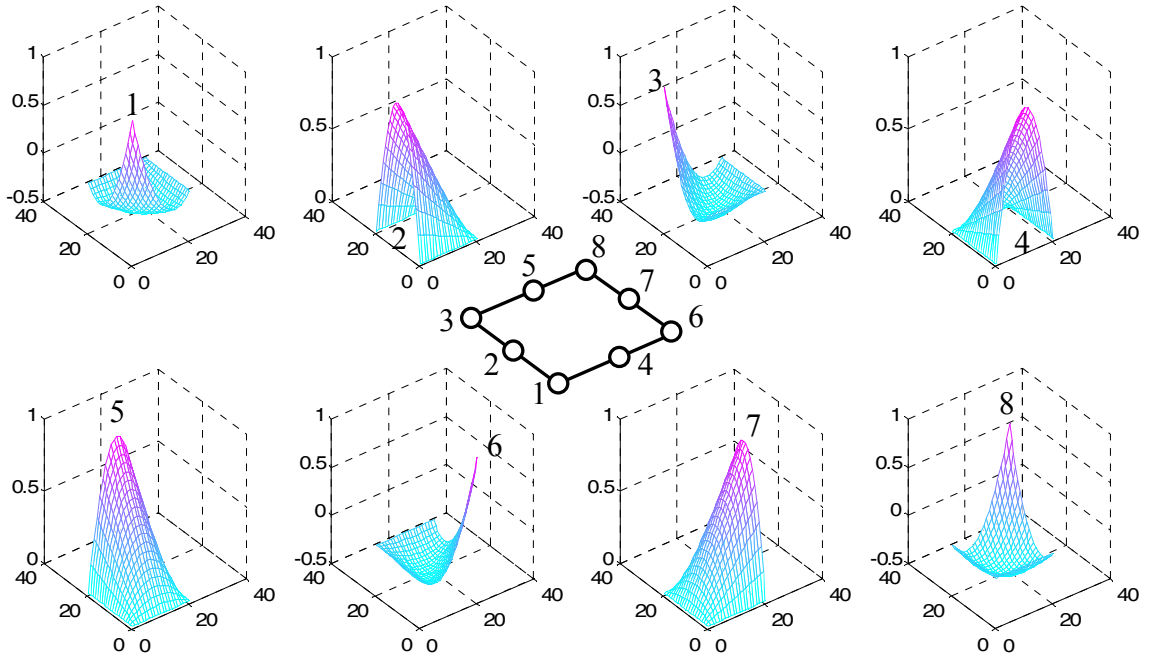
Şekil 1.16, Şekil 1.17 ve Şekil. 1.18' den görüldüğü gibi türevlenmemiş şekil fonksiyonları hakkında Lagrange polinomuna göre hiyerarşik yaklaşıma göre yapılan çıkarımların türev alanında da geçerli olduğu görülmektedir. Hatta Şekil 1.16'da Lagrange polinomuna göre elde edilen şekil fonksiyonlarının türevlerinin polinom derecesi arttıkça uç kısımlarda büyük sıçrayışlar da yaptığı görülmektedir.

### 1.6.2. İki Boyutlu Alanda Lagrange, Serendipity ve Hiyerarşik Yaklaşımına Göre Şekil Fonksiyonlarının İrdelenmesi

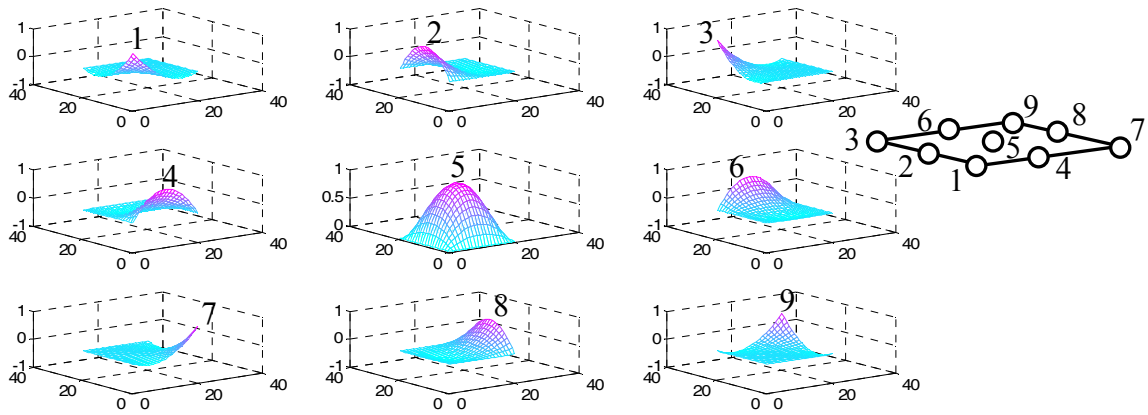
Bir boyutlu alanda örnek olarak incelenen şekil fonksiyonlarının eğrilikleri hakkında genel bilgiler edinildikten sonra iki boyutlu alanda şekil fonksiyonlarının kendilerinin ve her hangi bir eksene göre türevlerinin grafiksel görünümü aşağıdaki şekillerde sunulacaktır. Bir dörtgen eleman için üretilen şekil fonksiyonları, birinci dereceden polinom için Şekil 1.19'da; polinom derecesi iki için serendipity yaklaşımına göre Şekil 1.20'de, Lagrange yaklaşımına göre de Şekil 1.21'de sunulmaktadır.



Şekil 1.19. 4 düğüm noktalı dörtgen elemanın şekil fonksiyonları



Şekil 1.20. 8 düğüm noktalı (serendipity tipinde) dörtgen elemanın şekil fonksiyonları



Şekil 1.21. Lagrange polinomuna göre 2. dereceden bir dörtgen elemanın şekil fonksiyonları

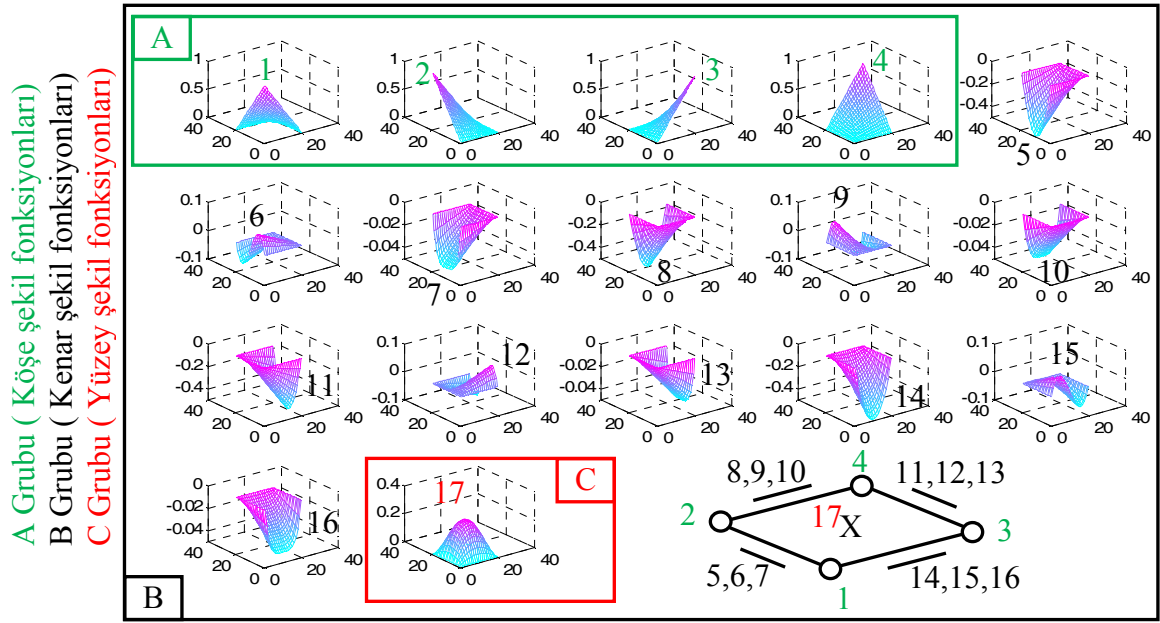
Şekil 1.19'dan görüldüğü gibi Lagrange polinomuna göre dört noktalı dörtgen eleman için türetilen şekil fonksiyonlarının enterpolasyon özelliğini sağladıkları ve doğrusal oldukları görünmektedir.

Şekil 1.20' den görüldüğü gibi polinom derecesi 2 için serendipity formunda üretilen şekil fonksiyonlarının, enterpolasyon özelliğini sağlayarak nokta konumuna bağlı olarak köşelerde ve kenar boyunca yüzeysel dalgalanma yaptıkları görünmektedir.

Şekil 1.21' den görüldüğü gibi polinom derecesi 2 için Lagrange polinomuna göre üretilen şekil fonksiyonlarının serendipity formuna göre üretilenlere çok benzedikleri, sadece bir fazla olarak orta nokta içinde şekil fonksiyonu diyagramı olduğu görünmektedir. Bu şekil fonksiyonları da enterpolasyon özelliğini sağlamaktadırlar.

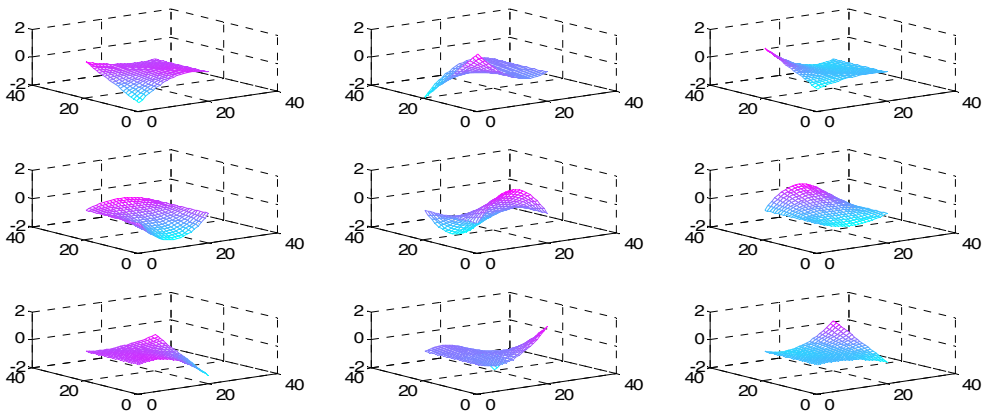
Dört noktalı dörtgen elemanın polinom derecesi dörde kadar olan Lagrange polinomu ve Karma Fonksiyon Yöntemi ile hiyerarşik düzende kurulan şekil fonksiyonları Şekil 1.22'de sunulmaktadır.

Şekil 1.22'den görüldüğü gibi dört köşe noktasına ait şekil fonksiyonlarının enterpolasyon özelliğini sağladığı, hiyerarşik kısım olan kenar ve yüzey şekil fonksiyonlarının enterpolasyon özelliğini sağlamadıkları görünmektedir. Ayrıca kenar ve yüzey şekil fonksiyonları, her hangi bir nokta tanımlamasına ve onun konum bilgisine ihtiyaç duymadan, sadece kenar ve yüzeylerin ortasındaki eğrilikleri tanımlayan türev bilgilerinin enterpolasyonunu yapan ayrı ayrı şekil fonksiyonları olmaktadır. Böylece köşe, kenar ve yüzey şekil fonksiyonlarının farklı mertebelerde nicelikleri oranladıkları anlaşılmaktadır. Hiyerarşik kısma karşılık gelen şekil fonksiyonları polinom derecesi ikiden itibaren başlayanlar olmaktadır.



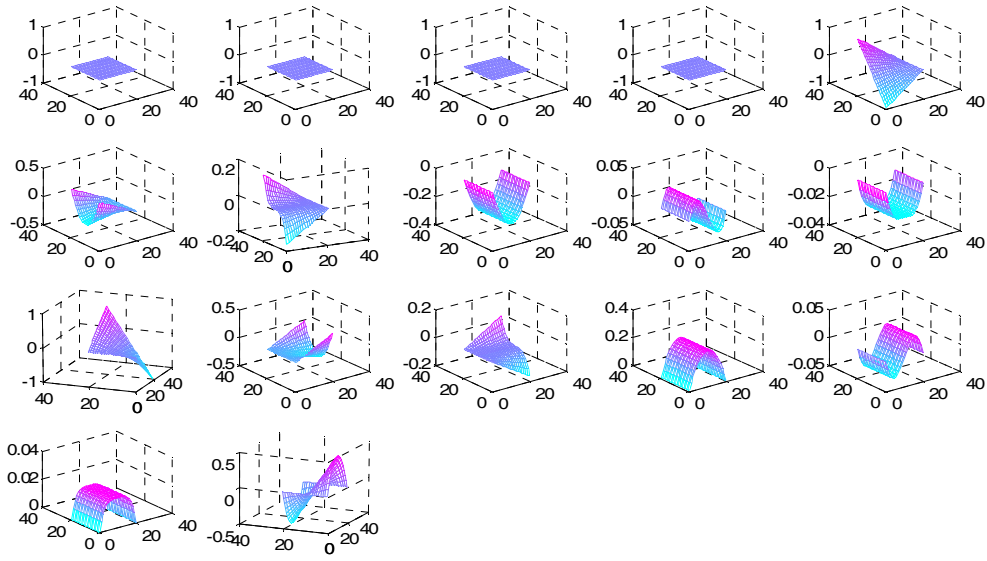
Şekil 1.22. 4 düğüm noktalı dörtgen elemanın 4. dereceden Lagrange yaklaşımına göre açılmış hiyerarşik şekil fonksiyonları

Yukarıda üretilen şekil fonksiyonlarının türevlerinin diyagramları ise sırasıyla ikinci derece Lagrange polinomuna göre üretilenler için Şekil 1.23'de; birinci derece Lagrange polinomuna göre üretilen şekil fonksiyonları üzerine Lagrange ve Karma Fonksiyon Yöntemine göre hiyerarşik kısmı açılanlar için Şekil 1.24'de verilmektedir.



Şekil 1.23. Lagrange polinomuna göre 2. dereceden bir dörtgen elemanın şekil fonksiyonlarının türevleri





Şekil 1.24. 4 düğüm noktalı dörtgen elemanın 4. dereceden Lagrange yaklaşımına göre açılmış hiyerarşik şekil fonksiyonlarının türevleri

Şekil 1.23'den görüldüğü gibi ikinci derece Lagrange polinomuna göre üretilen dörtgen elemana ait şekil fonksiyonlarının türevleri şekil fonksiyonlarının simetrik görünümlerinin aksine asimetriklerdir.

Şekil 1.24'den görüldüğü gibi köşe noktalarına ait doğrusal şekildeğişirmelerin türevlerinin yatay düzlem çıktığı, hiyerarşik kısma karşılık gelen türevlerin bazılarının simetrik veya antisimetrik, bazılarının da asimetrik. Hiyerarşik kısma karşı gelen şekil fonksiyonları zaten kenar veya yüzeylerin eğriliklerinin türevlerini oranlayan şekil fonksiyonları olduklarından onların türevleri de türevin türevi olacağından çok fazla yorum getirilebilecek diyagramlar olamamaktadırlar.

Örnek olarak üretilen şekil fonksiyonlarına bakıldığında, şekil fonksiyonlarının kendilerinin ve türevlerinin farklı eğriliklere sahip olduğu görülmektedir. Lagrange polinomuna göre üretilen şekil fonksiyonlarının nokta konumuna bağlı olarak bir dalgalanma eğiliminde oldukları görülmektedir. Ancak Lagrange polinomu tabanlı hiyerarşik şekil fonksiyonlarında kenar ve yüzey eğrilikleri, noktalarla değil de kenar ve/veya yüzeyin polinom derecesine bağlı olarak artan eğrilik derecesini veren türev bilgileriyle elde edildikleri, dolayısıyla, eğriliğin türev bilgisinde kontrol edilebilmesinden dolayı dalgalanma etkisinin oldukça azaltılabileceği anlaşılmaktadır. Ayrıca yerdeğiştirme alanında yukarıda örneklenen şekil fonksiyonları ile elde edilen enterpolasyon fonksiyonları, gerilme ve şekildeğiştirmelerin, yerdeğiştirmelerin türevi ile

elde edilmesi nedeniyle birinci derece polinom ile üretilen şekil fonksiyonlarından kaynaklanacak süreksizliklerden kaçınılabileceği görünmektedir.

### 1.7. p-Yöntemine Göre Geometrik Alanda Sürekli Ortamın Ayırıklaştırılması

Sonlu elemanlar yönteminde, sürekli ortam sonlu elemanlara parçalanmaktadır. Ayırıklaştırma yapılırken genelde tüm ayırıklaştırılacak fonksiyonlar için aynı enterpolasyon fonksiyonu kullanılmaktadır. Bu tarza, izoparametrik (isoparametric) kullanım denir. Bunun gereği olarak sonlu elemanlar yöntemi ile sonuçların doğruluk derecesi artırılmak istendiğinde ilgili her fonksiyon aynı ölçüde küçük parçacıklara ayrılmak zorunda kalmaktadır. Bu fonksiyonlar içinde geometriyi tanımlayan hariç geri kalanların tümü bilinmeyenleri tanımlayan fonksiyonlardır.

Yakınsayan sonuç elde etmek için küçük parçalara ayırmak (h-yöntem) yerine enterpolasyon fonksiyonunun polinom derecesi de artırılabilir (p-yöntem). Bu durumda model kurulurken yapılan ilk ayırıklaştırmada elde edilen sonlu elemanlarda enterpolasyon fonksiyonunun polinom derecesi artırılmaktadır. Ancak geometrik açıdan kurulan enterpolasyon önceki ayırıklaştırmadan elde edilen veriler üzerine konduğundan yeni veri girişi sağlanamamakta ve bundan dolayı bir önceki ayırıklaştırmada elde edilen geometrik temsil gerçeğine yaklaşılamamaktadır. Enterpolasyonda polinom derecesini artırmak ile her ne kadar bilinmeyenleri tanımlayan fonksiyonları daha iyi temsil eden yaklaşık fonksiyonlar elde edilmiş olsa da geometrik temsildeki hata oranının küçültülememesinden dolayı yakınsayan sonuç elde etmek çok zorlaşmaktadır.

Geometrik temsilde oluşan hatalar, doğrusal olmayan sınırlara sahip ortamlarda meydana gelmektedir. Dolayısı ile h-yönteminde doğrusal olmayan sınırlarda ortam daha da sık ayırıklaştırılarak gerçeğine benzetilmeye çalışılmakta ve doğruluk derecesi artırılmaktadır. Ancak p-yönteminde daha sık ayırıklaştırma uygulanamadığından geometrik temsilde hata payı küçültülememekte ve bundan dolayı doğruluk derecesi yeteri ölçüde artırılmamaktadır.

Bilinmeyenler ile geometriyi tanımlayan fonksiyonların enterpolasyon fonksiyonlarının farklı seçilebilir olması onların sınıflandırılmalarına neden olmaktadır. Örneğin geometriyi temsil etmek için seçilen enterpolasyon fonksiyonu bilinmeyenleri temsil edenden daha yüksek dereceden olursa “üstparametrik (superparametric)”;

bilinmeyenleri temsil eden enterpolasyon fonksiyonu geometriyi temsil edenden daha yüksek dereceden olursa da “altparametrik (subparametric)” geometrik temsil olmaktadır. Bu sınıflandırmanın sağladığı serbestlik gereği geometrik temsilde doğrusal olmayan sınırı temsil etmek için istendiği kadar veri kullanma ve kullanılacak temsil eğrisinin eğrilik derecesini ayarlayabilme mümkün olmaktadır. Ancak bu imkan geometrik temsilde ek veri girilmesini veya yapılacak ayırıklaştırmanın bu durumu gözetmesini gerektirmektedir. Buna rağmen yine de temsilde hata payının sıfırlanmama durumunun olması, geometrik temsilde eğriliğe sahip enterpolasyon fonksiyonlarının kullanılmasının da p-yönteminin etkinliğini istenen ölçüde artırmadığını göstermektedir.

p-yöntemi kullanıldığında doğrusal olmayan sınırlara sahip ortamlarda elde edilecek sonuçların yakınsamasını garanti etmek için geometrik temsilin tam yapılması gerekmektedir. Bunun için “Karma Fonksiyon (Blending Function) Yöntemi” kullanılmaktadır. Bu yöntem geometriyi tanımlayan fonksiyonların enterpolasyonunda tam temsilin sağlanmasını ve böylece p-yöntemin az sayıda sonlu elemanlar ile yakınsayan sonuç elde etmesini mümkün kılmaktadır. Bu konu ile literatür araştırması alt başlıkta verilmektedir.

### **1.7.1. Karma Fonksiyon Yöntemi Konusunda Literatürde Yapılan Bazı Çalışmalar**

Karma Fonksiyon Yöntemi, ilk defa Coons tarafından yüzeylerin enterpolasyonu-nun bilgisayar destekli tasarımında kullanılması amacıyla 1963 yılında ortaya atılmıştır (Gordon, 1971). Gordon (1971), Karma Fonksiyon Yönteminin iki ve üç eksenli fonksiyonların temsilinde, bu yöntemin kullanımı için temel bağıntılar sunmaktadır. Gordon ve Hall (1973a), iki eksenli eğrisel koordinat sisteminde Karma Fonksiyon Yöntemi ile enterpolasyonun sonlu elemanlarda kullanılan ağ oluşturmaya nasıl uyarlanacağını göstermektedirler. Gordon ve Hall (1973b), sonlu elemanlar yöntemi için iki boyutlu ortamda kare bir yüzeyin, Karma Fonksiyon Yöntemi ile nasıl eğrisel sınırlı bir düzlemsel yüzeye eşlendiğini sunmaktadır. Watkins (1974), Karma Fonksiyon Yöntemi ile enterpolasyonun sonlu elemanlar yönteminde uygulaması üzerine detaylı bir çalışma yapmıştır. Cavendish ve Wixom (1975) kabuk ve düzlemler için sonlu eleman ağ üretiminde Karma Fonksiyon Yöntemini kullanmışlardır.

Marshall ve Mitchell (1978), Ritz-Galerkin yöntemine göre kurulan bir sonlu elemanda dikdörtgen elemanın geometrik eşleşmesinde Karma Fonksiyon Yöntemi ile gerçek sınır geometrisini dikkate almıştır. Test problemi üzerinde geometrinin eşleşmesinden kaynaklanan hata düzeyinde, genelde benimsenen diğer eşleme yöntemlerine göre önemli ölçüde azalma olduğunu ifade etmiştir.

Cavendish ve Hall (1984) bilgisayar destekli tasarımda (CAD) geometrik olarak karmaşık sistemlerin; küp, silindir ve küre gibi basit şekillerle ve bunların farklı birleşimleri ile oluşturulabilmesinin sistem analizi ve tasarımının bir arada kullanılmasında önemli bir adım olduğunu ifade etmişlerdir. Sonlu elemanlarda kullanıcı kontrollü olan ağ yapısı kurma işlemi bilgisayar destekli geometrik tasarım yardımıyla yapılmasının sonlu elemanların analiz yeteneğini oldukça geliştireceğini belirtmişlerdir. Bu amaçla, sonlu elemanların ağ kurma ve yerel ağ sıklaştırması yükünü oldukça azaltacak olan İçerilmiş sonlu elemanın (transitional blended finite element) yeni bir çeşitini ortaya koymuşlardır. Çalışmada elde edilen tecrübelerin bu sonlu elemanların kullanılmasıyla sayısal hatanın oldukça azaltıldığını göstermektedir.

Alfeld (1985), Karma Fonksiyon Yöntemini kullanarak keyfi boyuttaki (bir, iki veya üç boyutlu) bir ortamda, keyfi derecede eğriliğe sahip bir yüzeyin enterpolasyonunu yapabilen bir algoritma sunmuştur.

Királyfalvi ve Szabó (1997), p-yöntemine dayalı sonlu elemanlar yönteminde eşdeğer bölge eşleşmesi üzerinde durmuşlardır. Çalışmalarında, p-yöntemi gereği, kullanılan ağ yapısının değiştirilememesinden elemanların geometrilerinin serbestlik derecesi sayısından bağımsız olarak sabit kalmakta olduğunu işaret etmişlerdir. Dolayısıyla, problem tanım alanını sınırlayan eğriler ve yüzeylerin temsiliyetlerindeki hata payının önemli derecede giderilmesinin büyük önem taşıdığını ifade etmişlerdir. Ayrıca sürekli eğrilerin ve yüzeylerin ya Karma Fonksiyon Yöntemi ile doğrudan temsilinin ya da yeterli doğrulukta bir ayrıklaştırma hatası ile ağ yapısı ve polinom derecesi ile temsilinin yapılması gerekliliği vurgulanmıştır. Bu anlatımların ışığında çalışmalarında, eğrilerin ve yüzeylerin temsili için parçalı polinomları kullanan bir temsil yaklaşımı sunmuşlardır. Bu yaklaşımda, elemanlar arası sürekliliğin en iyi şekilde sağlanması amacıyla özel tanzim noktaları (collocation points) belirlenmiştir.

Liu (1998), p-yöntemine dayalı sonlu elemanlarda Karma Fonksiyon Yönteminin, dört ve sekiz noktalı dörtgen elemanların eşleşmelerinde ve sekiz noktalı dörtgen prizma elemanların eşleşmesinde nasıl kurgulanacağını göstererek mekanik örnekler üzerinde

uygulamalarını yapmıştır. Düster (2001) hem mekanik hem de daha karmaşık problemler için, p-yöntemine dayalı sonlu elemanlarda Karma Fonksiyon Yönteminin, dört noktalı dörtgen elemanın ve sekiz noktalı dörtgen prizma elemanın eşlenmesi üzerine uygulamalarını yapmıştır.

Mikipelto (2005), iki boyutlu ortamda tam geometrik temsil için bir yaklaşım sunmuştur. Bu yaklaşımın ana içeriğini, düzgün olmayan oransal B-spline (non-uniform rational B-spline (NURBS)) eğrileri oluşturmaktadır. Bu eğriler yardımıyla problemin geometrisi belirlenmektedir. Öyleki, elemanların düz kenarları açısız Bezier eğrileri ile temsil edilirken eğri olan kenarları Karma Fonksiyon Yöntemi ile gerçek geometriden aynen alınmaktadır. Ayrıca, bu yaklaşım ile beraber iki boyutlu alanın geometrik eşlenmesi, p-yönteme dayalı sonlu elemanlar yöntemi içerisinde yerine koyularak çalışmada şekil optimizasyonu yapılmaktadır. Çalışmada birde p-yöntemin h-yöntem üzerine artı bir özelliği olarak, ağ yapısında çok fazla çarpımların olduğu durumlarda, p-yönteminde ağ geometrisi sabit kaldığından bu çarpımlara daha az duyarlı olduğu da vurgulanmaktadır.

### 1.7.2. Karma Fonksiyon (Blending Function) Yöntemi

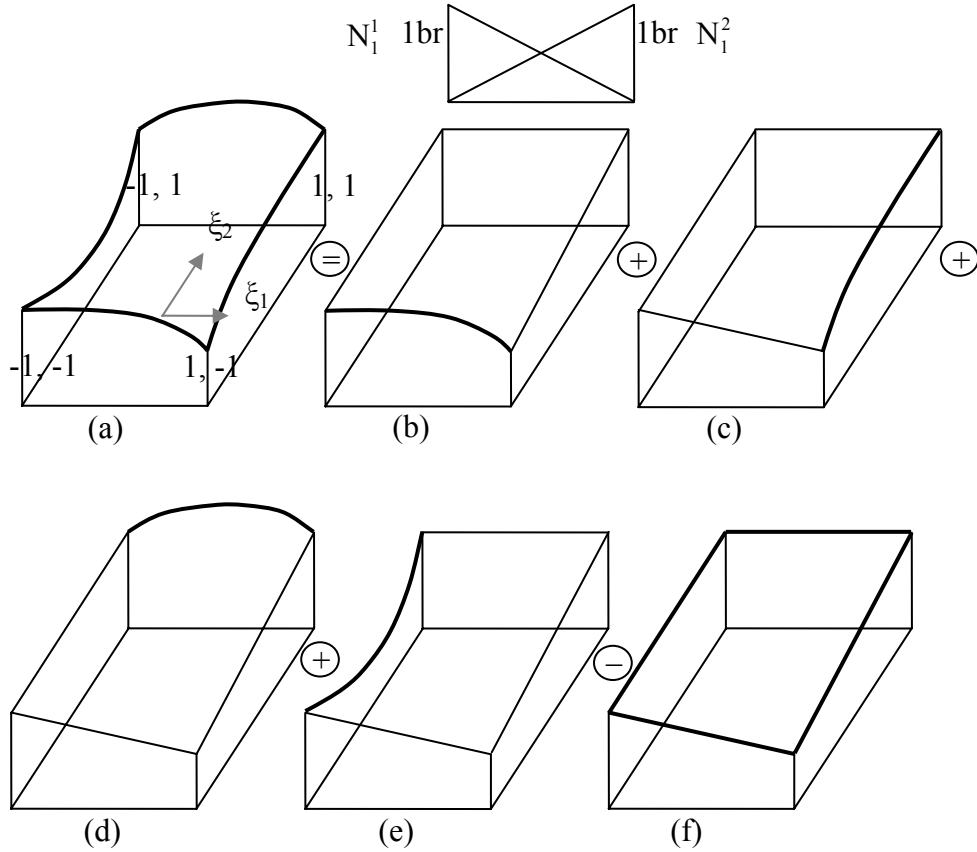
Karma Fonksiyon (Blending Function) Yöntemi, geometrik temsilde kullanılacak enterpolasyon fonksiyonunda gerçek geometride bulunan doğrusal olmayan sınırın aynen enterpolasyonun o sınıra komşu olan kısmında benimsenmesine, içerilmesine olanak sağlamaktadır.

Sürekli ortam üzerinde kurulan SEY'ne ait integral denklemleri, ayrıklaştırılmadan sonra sürekli ortamın geometrisinden dolayı farklı integral sınırlara sahip sonlu elemanlar üzerinde kurulacak integral denklemlere parçalanmaktadır. Tüm sonlu elemanlar için aynı integral sınırlarını kullanmak için bölge dönüşümleri kullanılmaktadır. İntegral sınırları genelde  $[-1, 1]$  olarak seçilmektedir. Enterpolasyon fonksiyonları da bu sınırlar içinde enterpolasyon yapacak şeklide kurulmaktadırlar. Doğrusal olmayan sınırlar ise şekil bakımından aynen alınmakta yalnızca sınırları  $[-1, 1]$  olarak değiştirilmektedir.

Bu bağlamda, iki ve üç boyutlu sürekli ortamlar için Karma Fonksiyon Yöntemi ile geometrik enterpolasyon fonksiyonu aşağıda ayrı başlıklar altında kurulmaktadır.

### 1.7.2.1. İki Boyutlu Ortamda Karma Fonksiyon Yöntemi

Dört kenarı doğrusal olmayan eğri ile sınırlanmış dörtgen elemana ait dört noktalı enterpolasyon fonksiyonu kurulumu doğal koordinatlarda Şekil 1.25’de verilmektedir.



Şekil 1.25. Dört kenarı doğrusal olmayan sonlu elemanın Karma Fonksiyon Yöntemi ile geometrik enterpolasyon fonksiyonunun kurulumu

Şekil 1.25 (a)’da oluşturulacak olan enterpolasyon fonksiyonunun kurulum adımları Şekil 1.25 (b), (c), (d), (e) ve (f) ile verilmektedir. Burada doğrusal olmayan kenarların fonksiyonları diğer doğrultuda ayrı ayrı enterpole edilmektedir. Şekil 1.25 (f)’de ise her bir doğrusal kenarın enterpolasyonu esnasında köşe noktalarının enterpolasyonu bir kez daha yapıldığından ek köşe noktaları enterpolasyonları çıkartılmak üzere yeniden kurulmaktadır. Şekil 1.25 (a), Şekil 1.25 (f) dışındaki şekillerin toplamından Şekil 1.25 (f)’nin çıkarılması ile elde edilmektedir. Şekil 1.25’de grafiksel anlatımı yapılan Karma Fonksiyon Yönteminin bağıntıları aşağıda verilmektedir.

Doğrusal olmayan kenarlara ait geometrik fonksiyon doğal koordinatlara indirgenerek her iki koordinat ekseninde de

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1(\xi_1, \xi_2) \\ \varphi_2(\xi_1, \xi_2) \end{bmatrix} (\xi_1, \xi_2) \in [-1, 1] \quad (1.33)$$

şeklinde ifade edilebilir.  $\varphi_i, i = 1, 2$  fonksiyonu en genel durumda dört kenar fonksiyonunda doğrusal olmadığı ve dörtgen elemanın doğal koordinatlarda yeniden tanımlandığı geometri fonksiyonudur. Bu fonksiyon Karma Fonksiyon Yöntemi ile dörtgen elemanın enterpolasyon fonksiyonuna katılacaktır. Bu şekilde enterpolasyon fonksiyonunun kurulumu üç adımda yapılır. İlk önce dörtgen elemanın dört noktalı enterpolasyonu için

$$N^{Vi} = \frac{1}{4} (1 + \xi_1^j \xi_1) (1 + \xi_2^k \xi_2), \begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \xi^t = (-1)^t, t = 1, 2, [\xi_1, \xi_2] \in (-1, 1) \quad (1.34)$$

şeklinde tanımlanan şekil fonksiyonları kurulur. Doğrusal olmayan kenarların enterpolasyonunda kullanılacak olan bir boyutlu (1B) şekil fonksiyonları

$$N_1^{1B} = 1/2(1 - \xi), N_2^{1B} = 1/2(1 + \xi), \xi \in [-1, 1] \quad (1.35)$$

şeklinde tanımlanarak ikinci olarak doğrusal olmayan kenarlara ait enterpolasyon fonksiyonları

$$X_m^{Ei} = N_j^{1B}(\gamma) \varphi_m(\alpha, \beta), \begin{bmatrix} i \\ j \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ \xi_1 & \xi_1^2 & \xi_1 & \xi_1^1 \\ \xi_2^1 & \xi_2 & \xi_2^2 & \xi_2 \\ \xi_2 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_1 \end{bmatrix}, \xi^t = (-1)^t, t = 1, 2, m = 1, 2 \quad (1.36)$$

şeklinde tanımlanır. Üçüncü olarak köşe noktalarında kenar enterpolasyonları yapıldıktan sonra ek olarak oluşan köşelerin enterpolasyon fonksiyonları

$$X_m^{V_i} = N_j^{1B}(\xi_1)N_k^{1B}(\xi_2)\varphi_m((-1)^j, (-1)^k), \begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, m=1,2 \quad (1.37)$$

şeklinde kurulduktan sonra

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \left( \sum_{i=1}^4 N^{V_i} \begin{bmatrix} X_1^i \\ X_2^i \end{bmatrix} \right) + \sum_{j=1}^a \left( \begin{bmatrix} X_1^{E_{n(j)}} \\ X_2^{E_{n(j)}} \end{bmatrix} - \sum_{k=1}^2 \begin{cases} m(k) \text{ ilk defa işleniyorsa} \Rightarrow \begin{bmatrix} X_1^{V_{m(k)}} \\ X_2^{V_{m(k)}} \end{bmatrix} \\ \text{aksi taktirde} \\ 0 \end{cases} \right),$$

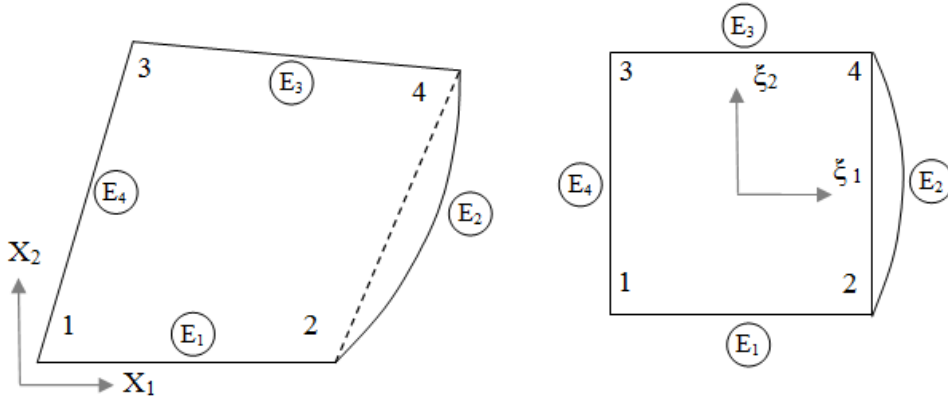
$n = [\dots]$ , doğrusal olmayan kenar numaralarının listesi  
 $a =$  doğrusal olmayan kenar sayısı (1.38)

$$\begin{bmatrix} n(\dots) \\ m(1) \\ m(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde geometrik enterpolasyon fonksiyonu elde edilir. Burada  $X_m^{E_i}$  doğrusal olmayan kenarlardaki koordinatların enterpolasyon fonksiyonunu,  $X_m^{V_i}$  ise köşe noktalarının enterpolasyon fonksiyonunu göstermektedir. Kenarlar, kesiştikleri noktalarda ortak köşe noktalarına sahip olduklarından birden fazla doğrusal olmayan kenar olması durumunda Denklem (1.38)'de doğrusal olmayan kenarlara ait enterpolasyon fonksiyonları eklenirken ortak köşe noktalarına ait ek enterpolasyonları yok etmek amacıyla sadece bir kenar için çıkartma yapılır, bir köşe noktası için birden fazla çıkartma yapılmaz. İki boyutlu fonksiyon içerilme yönteminin uygulamasına örnek olarak bir kenarı doğrusal olmayan bir dörtgen eleman (Szabó ve Babuška, 1991) Şekil 1.26'daki gibi tanımlanmış olsun.

Şekil 1.26'dan görüldüğü gibi dörtgen eleman her iki eksen doğrultusunda bölgesel dönüşüm ile birlikte  $[-1, 1]$  aralığında dört nokta yardımı ile enterpole edilmektedir. Bu enterpolasyonda doğrusal olmayan kenar, bölgesel dönüşümde de aynı kalarak enterpolasyon fonksiyonuna aşağıdaki gibi katılmaktadır. Bu arada doğrusal olmayan kenarlar,  $[-1, 1]$  aralığının sınır değerleri için köşe noktalarının koordinatlarına sahip olmaktadır. Bu anlatıma ait denklemler aşağıda verilmektedir.





Şekil 1.26. Bir kenarı doğrusal olmayan sonlu elamanın geometrik enterpolasyon fonksiyonunun kurulumu

$$\begin{aligned}
 X_m^{E_2} &= N_1^{IB}(\xi_1) \varphi_m(\xi_1^2, \xi_2), \\
 X_m^{V_1} &= N_1^{IB}(\xi_1) N_1^{IB}(\xi_2) \varphi_m(-1, -1), & X_m^{V_2} &= N_2^{IB}(\xi_1) N_1^{IB}(\xi_2) \varphi_m(1, -1), \\
 X_m^{V_3} &= N_1^{IB}(\xi_1) N_2^{IB}(\xi_2) \varphi_m(-1, 1), & X_m^{V_4} &= N_2^{IB}(\xi_1) N_2^{IB}(\xi_2) \varphi_m(1, 1), \\
 X_m^1 &= \varphi_m(-1, -1), & X_m^2 &= \varphi_m(1, -1), & X_m^3 &= \varphi_m(-1, 1), & X_m^4 &= \varphi_m(1, 1), \\
 m &= 1, 2,
 \end{aligned} \tag{1.39}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^4 N^{V_i} \begin{bmatrix} X_1^i \\ X_2^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1^{E_2} \\ X_2^{E_2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_1^{V_2} \\ X_2^{V_2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_1^{V_4} \\ X_2^{V_4} \end{bmatrix}$$

### 1.7.2.2. Üç Boyutlu Ortamda Karma Fonksiyon Yöntemi

İki boyutlu duruma benzer olarak üç boyutlu durum için denklemler elde edilecektir. Doğrusal olmayan kenarlara ait geometrik fonksiyon, doğal koordinatlara indirgenerek her üç koordinat ekseninde de

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ \varphi_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ \varphi_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \end{bmatrix}, (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in [-1, 1] \tag{1.40}$$

şeklinde ifade edilebilir.  $\varphi_i, i = 1, \dots, 3$  fonksiyonu en genel durumda on iki kenar ve altı yüzey fonksiyonunun da doğrusal olmadığı ve hacim elemanın doğal koordinatlarda yeniden tanımlandığı geometri fonksiyonudur. Karma Fonksiyon Yöntemi ile bu fonksiyon

hacim elemanının enterpolasyon fonksiyonuna katılacaktır. Bu şekilde enterpolasyon fonksiyonunun kurulumu beş adımda yapılır. İlk önce hacim elemanın sekiz noktalı enterpolasyonu için

$$N^{Vi} = \frac{1}{8} (1 + \xi_1^j \xi_1) (1 + \xi_2^k \xi_2) (1 + \xi_3^m \xi_3),$$

$$\begin{bmatrix} i \\ j \\ k \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \xi^t = (-1)^t, t=1,2, \\ [\xi_1, \xi_2, \xi_3] \in (-1,1) \end{matrix} \quad (1.41)$$

şeklinde tanımlanan şekil fonksiyonları kurulur. Doğrusal olmayan kenarların enterpolasyonunda kullanılacak olan bir boyutlu ve iki boyutlu (2B) enterpolasyon fonksiyonları

$$N_1^{1B} = 1/2(1 - \xi), N_2^{1B} = 1/2(1 + \xi), \xi \in [-1,1] \quad (1.42)$$

$$N_i^{2B} = \frac{1}{4} (1 + \xi_m^j \xi_m) (1 + \xi_n^k \xi_n),$$

$$\begin{bmatrix} i \\ j \\ k \\ m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \xi^t = (-1)^t, t=1,2, \\ [\xi_1, \xi_2, \xi_3] \in (-1,1) \end{matrix} \quad (1.43)$$

şeklinde tanımlanarak ikinci olarak doğrusal olmayan kenarlara ait enterpolasyon fonksiyonları

$$X_m^{Ei} = N_i^{2B} \varphi_m(\alpha, \beta, \gamma),$$

$$\begin{bmatrix} i \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \xi_1 & \xi_1^2 & \xi_1 & \xi_1^1 & \xi_1 & \xi_1^2 & \xi_1 & \xi_1^1 & \xi_1 & \xi_1^2 & \xi_1^2 & \xi_1^1 \\ \xi_2^1 & \xi_2 & \xi_2^2 & \xi_2 & \xi_2^1 & \xi_2 & \xi_2^2 & \xi_2 & \xi_2^1 & \xi_2 & \xi_2^2 & \xi_2^2 \\ \xi_3^1 & \xi_3^1 & \xi_3^1 & \xi_3^1 & \xi_3^2 & \xi_3^2 & \xi_3^2 & \xi_3^2 & \xi_3 & \xi_3 & \xi_3 & \xi_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \xi^t = (-1)^t, \\ t=1,2, \\ m=1,2 \end{matrix} \quad (1.44)$$

şeklinde tanımlanır. Dördüncü olarak doğrusal olmayan yüzeylere ait enterpolasyon fonksiyonları

$$X_m^{F_i} = N_j^{1B}(\lambda) \varphi_m(\alpha, \beta, \gamma),$$

$$\begin{bmatrix} i \\ j \\ \lambda \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ \xi_3 & \xi_2 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_1 & \xi_3 \\ \xi_1 & \xi_1 & \xi_1^2 & \xi_1 & \xi_1 & \xi_1 \\ \xi_2 & \xi_2^1 & \xi_2 & \xi_2^1 & \xi_2 & \xi_2 \\ \xi_3^1 & \xi_3 & \xi_3 & \xi_3 & \xi_3 & \xi_3^2 \end{bmatrix}, \begin{matrix} \xi^t = (-1)^t \\ t = 1, 2 \end{matrix}, m = 1, 2 \quad (1.45)$$

şeklinde tanımlanır. Beşinci olarak, köşe noktalarında kenar enterpolasyonları yapıldıktan sonra ek olarak oluşan köşe enterpolasyonları

$$X_m^{V_i} = N_j^{1B}(\xi_1) N_k^{1B}(\xi_2) N_n^{1B}(\xi_3) \varphi_m((-1)^j, (-1)^k, (-1)^n),$$

$$\begin{bmatrix} i \\ j \\ k \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, m = 1, 2 \quad (1.46)$$

şeklinde kurulduktan sonra Denklem (1.47)'de geometrik enterpolasyon fonksiyonu elde edilir. Burada  $X_m^{F_i}$  doğrusal olmayan yüzeylerdeki koordinatların enterpolasyon fonksiyonunu göstermektedir. Yüzeyler, kesiştikleri kenarlarda ortak kenara sahip olduklarından birden fazla doğrusal olmayan yüzey olması durumunda Denklem (1.47)'de doğrusal olmayan yüzeylere ait enterpolasyon fonksiyonları eklenirken ortak kenarlara ait ek enterpolasyonları yok etmek amacıyla sadece bir yüzey için çıkartma yapılır, bir kenar için birden fazla çıkartma yapılmaz. Üç boyutlu Karma Fonksiyon Yönteminin uygulamasına örnek olarak tüm yüzeyleri ve kenarları doğrusal olmayan bir hacim eleman Şekil 1.27'deki gibi tanımlanmış olsun.

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \left( \sum_{i=1}^8 N^{V_i} \begin{bmatrix} X_1^i \\ X_2^i \end{bmatrix} \right) + \sum_{k=1}^b \begin{bmatrix} X_1^{F_s(k)} \\ X_2^{F_s(k)} \end{bmatrix} -$$

$$\sum_{j=1}^a \begin{cases} n(k) \text{ ilk defa işleniyorsa} \Rightarrow \begin{bmatrix} X_1^{E_n(j)} \\ X_2^{E_n(j)} \end{bmatrix} - \\ \text{aksi taktirde} \quad \quad \quad 0 \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^2 \begin{cases} m(k) \text{ ilk defa işleniyorsa} \Rightarrow \begin{bmatrix} X_1^{V_m(k)} \\ X_2^{V_m(k)} \end{bmatrix}, \\ \text{aksi taktirde} \quad \quad \quad 0 \end{cases}$$

$s = [\dots]$ , doğrusal olmayan yüzey numaralarının listesi

$b =$  doğrusal olmayan yüzey sayısı

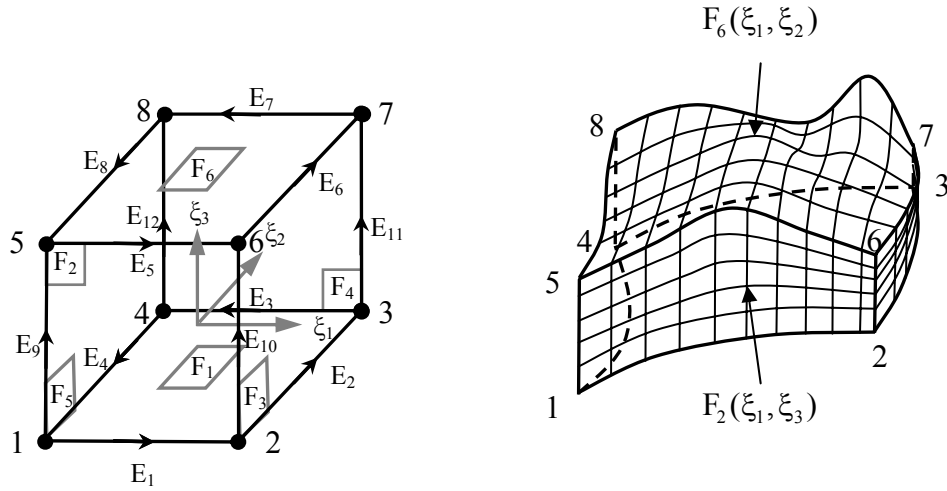
(1.47)

$$\begin{bmatrix} s(\dots) \\ n(\dots) \\ n(\dots) \\ n(\dots) \\ n(\dots) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 8 & 8 \\ 4 & 6 & 7 & 8 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$n = [\dots]$ , komşu yüzeylerin ortak olan doğrusal olmayan kenar numaralarının listesi

$a =$  komşu yüzeylerin ortak olan doğrusal olmayan kenar numaralarının sayısı

$$\begin{bmatrix} n(\dots) \\ m(1) \\ m(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix},$$



Şekil 1.27. Doğal koordinatlarda hacim sonlu eleman ile tüm yüzeyleri ve kenarları doğrusal olmayan sonlu elmanın geometrik enterpolasyon fonksiyonunun kurulumu

Şekil 1.27'de hacim eleman her üç eksen doğrultusunda bölgesel dönüşüm ile birlikte  $[-1, 1]$  aralığında sekiz nokta yardımı ile enterpole edilmektedir. Bu enterpolasyonda doğrusal olmayan kenarlar ve yüzeyler bölgesel dönüşümde de aynı kalarak enterpolasyon fonksiyonuna aşağıdaki gibi katılmaktadır. Bu arada doğrusal olmayan kenarlar,  $[-1, 1]$  aralığının sınır değerleri için köşe noktalarının koordinatlarına; doğrusal olmayan yüzeyler, sınır kenarları için kenar fonksiyonlarına, sınır köşeleri için ise köşe noktalarının koordinatlarına sahip olmaktadır. Bu anlatıma ait denklemler aşağıda verilmektedir.

$$\begin{aligned}
X_m^{F_1} &= N_1^{1B}(\xi_3) \varphi_m(\xi_1, \xi_2, \xi_3^1), & X_m^{F_2} &= N_1^{1B}(\xi_2) \varphi_m(\xi_1, \xi_2^1, \xi_3), \\
X_m^{F_3} &= N_2^{1B}(\xi_1) \varphi_m(\xi_1^2, \xi_2, \xi_3), & X_m^{F_4} &= N_1^{1B}(\xi_2) \varphi_m(\xi_1, \xi_2^1, \xi_3), \\
X_m^{F_5} &= N_1^{1B}(\xi_1) \varphi_m(\xi_1^1, \xi_2, \xi_3), & X_m^{F_6} &= N_2^{1B}(\xi_3) \varphi_m(\xi_1, \xi_2, \xi_3^2), \\
X_m^{E_1} &= N_1^{2B} \varphi_m(\xi_1, \xi_2^1, \xi_3^1), & X_m^{E_2} &= N_2^{2B} \varphi_m(\xi_1^2, \xi_2, \xi_3^1), \\
X_m^{E_3} &= N_3^{2B} \varphi_m(\xi_1, \xi_2^2, \xi_3^1), & X_m^{E_4} &= N_4^{2B} \varphi_m(\xi_1^2, \xi_2, \xi_3^1), \\
X_m^{E_5} &= N_5^{2B} \varphi_m(\xi_2, \xi_2^1, \xi_3^2), & X_m^{E_6} &= N_6^{2B} \varphi_m(\xi_1^2, \xi_2, \xi_3^2), \\
X_m^{E_7} &= N_7^{2B} \varphi_m(\xi_1, \xi_2^2, \xi_3^2), & X_m^{E_8} &= N_8^{2B} \varphi_m(\xi_1^1, \xi_2, \xi_3^2), \\
X_m^{E_9} &= N_9^{2B} \varphi_m(\xi_1^1, \xi_2^1, \xi_3), & X_m^{E_{10}} &= N_{10}^{2B} \varphi_m(\xi_1^2, \xi_2^1, \xi_3), \\
X_m^{E_{11}} &= N_{11}^{2B} \varphi_m(\xi_1^2, \xi_2^2, \xi_3), & X_m^{E_{12}} &= N_{12}^{2B} \varphi_m(\xi_1^1, \xi_2^2, \xi_3), \\
X_m^{V_1} &= N_1^{1B}(\xi_1) N_1^{1B}(\xi_2) N_1^{1B}(\xi_3) \varphi_m(-1, -1, -1), \\
X_m^{V_2} &= N_2^{1B}(\xi_1) N_1^{1B}(\xi_2) N_1^{1B}(\xi_3) \varphi_m(1, -1, -1), \\
X_m^{V_3} &= N_1^{1B}(\xi_1) N_2^{1B}(\xi_2) N_1^{1B}(\xi_3) \varphi_m(1, 1, -1), \\
X_m^{V_4} &= N_2^{1B}(\xi_1) N_2^{1B}(\xi_2) N_1^{1B}(\xi_3) \varphi_m(-1, 1, -1), \\
X_m^{V_5} &= N_1^{1B}(\xi_1) N_1^{1B}(\xi_2) N_2^{1B}(\xi_3) \varphi_m(-1, -1, 1), \\
X_m^{V_6} &= N_2^{1B}(\xi_1) N_1^{1B}(\xi_2) N_2^{1B}(\xi_3) \varphi_m(1, -1, 1), \\
X_m^{V_7} &= N_1^{1B}(\xi_1) N_2^{1B}(\xi_2) N_2^{1B}(\xi_3) \varphi_m(1, 1, 1), \\
X_m^{V_8} &= N_2^{1B}(\xi_1) N_2^{1B}(\xi_2) N_2^{1B}(\xi_3) \varphi_m(-1, 1, 1), \\
X_m^1 &= \varphi_m(-1, -1, -1), X_m^2 = \varphi_m(1, -1, -1), \\
X_m^3 &= \varphi_m(1, 1, -1), X_m^4 = \varphi_m(-1, 1, -1), \\
X_m^5 &= \varphi_m(-1, -1, 1), X_m^6 = \varphi_m(1, -1, 1), \\
X_m^7 &= \varphi_m(1, 1, 1), X_m^8 = \varphi_m(-1, 1, 1), \\
m &= 1, 2,
\end{aligned} \tag{1.48}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \left( \sum_{i=1}^8 N^{V_i} \begin{bmatrix} X_1^i \\ X_2^i \end{bmatrix} \right) + \sum_{k=1}^6 \begin{bmatrix} X_1^{F_k} \\ X_2^{F_k} \end{bmatrix} - \sum_{j=1}^{12} \begin{bmatrix} X_1^{E_j} \\ X_2^{E_j} \end{bmatrix} - \sum_{r=1}^8 \begin{bmatrix} X_1^{V_r} \\ X_2^{V_r} \end{bmatrix}$$

## 1.8. Çözümleyiciler

Çözümleyiciler sonlu eleman programlarının başarımını doğrudan etkileyen unsurlardır. Genel olarak iterasyona dayalı olan ve olmayan çözümleyiciler olarak ikiye ayrılmaktadırlar. İterasyona dayalı çözümleyiciye PCG yöntemi (Preconditioned conjugate gradient method), iterasyona dayalı olmayan çözümleyiciye ise Gauss yoketme yöntemi örnek olarak verilebilir.

Sonlu elemanlar yönteminin yapısı gereği problemin tamamı için oluşturulan denklem takımının katsayılar matrisinde sıfır olmayan terimlerin matris içindeki dağılımları, dağınıklığı (Sparseness), serbestlik derecesi sayısı arttıkça artmaktadır. Dağınıklığın artması da iterasyona dayalı olmayan çözümleyicilerin çözümleme zamanlarını artırmaktadır. Dağınıklığın bu olumsuz etkisini azaltmak için yeniden adresleme (reordering) algoritmaları kullanılarak işlem hacmi azaltılmaktadır. Öte yandan, iterasyona dayalı çözümleyiciler, katsayılar matrisinin dağınıklığı ile çözümleme zamanını ilişkilendirmeyen bir yapıya sahiptirler. Bundan dolayı serbestlik derecesi sayısının çok fazla olduğu durumlarda iterasyona dayalı olmayan çözümleyicilere göre daha az zamanda çözümleme yapmaktadırlar. İterasyona dayalı çözümleyicilerin etkinlikleri, katsayılar matrisinin homojenliği, yani, tekil çözüm verebilme yeteneği (durum-condition) ile ilgilidir. Durum sayısı ne kadar küçük ise iterasyona dayalı çözümü o denli hızlı çözümleme yapmaktadır. Genelde katsayılar matrisinin durum sayısını küçültmek için ön homejenleştirme işlemleri (precondition) yapılır. p-yöntemde ortagonal özelliğe sahip şekil fonksiyonları ile enterpolasyon yapılması, katsayılar matrisinin durum sayısının küçük olmasını yani homojenliğinin iyi olmasını sağlamaktadır. Dolayısıyla, p-yöntemde PCG çözümleyiciler en iyi nitelikte olan bir çözümleyicidir. Ancak yeterli hafıza yok ise PCG ve Gauss yoketme gibi yöntemler yerine çok serbestlikli sistemlerin çözümünde, katsayılar matrisinde sıfır olmayan terimlerin matris içindeki dağılımlarından etkilenmeyen Önceleyen çözümleyicisi (Frontal Solver) tercih edilmektedir (Irons, 1970; Irons ve Ahmad , 1980).

### **1.8.1. Sonlu Elemanlar Yönteminde Çözümleyiciler**

Çözümleyicilerin kalitesi bilinmeyenleri ne kadar az zamanda buldukları ile doğru orantılıdır. Bu yolda onların kalitesini etkileyen en büyük etmenlerin başında bilinmeyenlerin katsayılar matrisinin depolanma şekli gelmektedir. Etkin depolama şekli çözümleyicinin işlem hacminde kazanım sağlamakta ve dolaylı olarak çözüm zamanını azaltmaktadır. Bunun yanı sıra ihtiyaç duyulan depolama alanını küçültmekte ve böylece daha büyük problemlerin hızlı biçimde çözülebilmelerine olanak tanımaktadır. Depolama şeklinin genelde nasıl yapıldığı ve bazı çeşitleri aşağıda verilmektedir.

Sürekli ortamlar, SEY ile sonlu parçalara bölünür. Her bir parça tek bir ortammış gibi üzerlerinde, serbestliklerin bilinmeyen ve o serbestliklere karşı gelen rijitliklerin katsayı olduğu denklem sistemleri kurulur. Bu parçalar üzerinde denklem sistemleri kurulurken komşu oldukları sınırlardaki bilinmeyenlerin aynı olması sağlanır. Parçalar yani elemanlar üzerinde kurulan denklem sistemlerinin ana ortamı temsil etmeleri için birleştirilir ve o ortamın ana denklem sistemi oluşturulur. Birleştirme yöntemi kurulacak olan çözümleyicilerin yükünü (işlem sayısını ve çözümüleme zamanını) belirlemektedir. Genelde birleştirme yöntemi olarak sistemin tümünde tanımlı olan bilinmeyenler sıralanır daha sonra yine sıra ile her dikkate alınan denklem sistemindeki bilinmeyenler bu sıralı bilinmeyenlerle eşleştirilerek katsayıları toplanır. Bu aslında ortak sınırlara sahip olan elemanların ortak bilinmeyenlere sahip olmasından dolayı bu bilinmeyenlerin katsayılarının toplanmasını ve ortak olmayan bilinmeyenlerinde kendi katsayıları ile ana denklem sisteminde yer almalarını sağlamaktadır. Bu şekilde kurulan ana denklem sisteminin katsayılar matrisinde sıfırdan farklı olan katsayıların matris içinde bir yerde yoğunlaşmasından ziyade matris içinde dağınık olması o matrisin katsayılarının ekonomik olmayan bir şekilde depolandığının göstergesidir. Dağınıklığın (Sparseness) sebebi ise düğüm noktası numaralandırmasıdır. Eğer çok iyi bir numaralandırma yapılırsa sıfırdan farklı olan katsayılar, katsayılar matrisinin köşegeni etrafında belli bir bant genişliğinde yoğunlaşır. Bu bant içinde yine sıfır olan katsayılar olabilir ama düğüm noktası numaralandırmasının kalitesine göre sayıları azalır. Sadece bu bant içindeki alanın depolanacağı şekilde bir birleştirme yöntemi seçilirse, depolamada, öncesine göre kazanım sağlanmaktadır. Ancak ekonomik depolama açısından bu yöntemden daha iyi yöntemler de mevcuttur. Bu yöntemlerin kalitesi, en az sıfır katsayı depolama kapasitelerine göre derecelendirilir.

### **1.8.2. Önceleyen Çözümleyici (Frontal Solver)**

Depolama şekli veya birleştirme şekli olarak önerilen bir diğer yöntem ise Önceleyen (Frontal) yöntemidir. Önceleyen çözümleyisi Irons (1970) tarafından geliştirilmiştir. Önceleyen yöntem yukarıdaki alt başlıkta ifade edilmeye çalışılan birleştirme yöntemlerinden biraz farklıdır. Bu yöntemde ana denklem sistemindeki tüm denklemlerin kurulması beklenmeden denklemler kurulmaya başlanır ve ilgili denklem tamamlandıktan



sonra o ana kadar kurulmuş olan denklem sisteminden çıkartılır ve bir yerde depolanır. Böylelikle tamamlanan denklemlerde sıfır katsayılı hiçbir terimin oluşmasına izin verilmez. Çıkartma işlemi ile aslında o bilinmeyen sanki hiç olmamış gibi onun sağladığı rijitlik ve o bilinmeyen yönünde sıfırdan farklı rijitliğe sahip olan diğer bilinmeyenlerin sağladığı rijitlikler ana denklem sisteminden yok edilir. Çünkü o bilinmeyene ait denklem de o bilinmeyen yönünde bu rijitlikler tam olarak kurulduğundan diğer denklemlerden bu tam denklem çıkartılması, o bilinmeyen diğer denklemlerdeki katkısı yok etmiş olur. Bu şekilde bilinmeyen sayısı kadar denklem kurulmakta ancak bu kurulan denklemler ters sıra ile çözüldüklerinde her denklemde bir bilinmeyen bulunmaktadır. Dolayısıyla “n” bilinmeyenli “n” denklem yerine bu depolama şekli ile her defasında “1” bilinmeyenli “n” denklem çözülmüş olunur. Yani çözümlenirken, Gauss yoketmenin üst veya alt üçgen kurma kısmı değil de (forward reduction), bilinmeyenlerin bulunduğu geri besleme (backsubstitution) kısmı kullanılmaktadır.

Ana denklem sistemi oluşturulurken çağrılan her bir eleman belli sayıda bilinmeyen ve o bilinmeyenlere ait denklemler ile gelmektedir. Bu bilinmeyenlere ait denklemlerin tam olup olmadığı o serbestliğin başka bir elemanda da bilinmeyen olup olmadığı ile ilgilidir. Eğer ilgili serbestlik başka bir elemanda da bilinmeyen ise o elemanda da bir denkleme sahiptir. Dolayısıyla bir serbestlik kaç elemanın komşuluğunda ise o sayıda denkleme sahiptir. İşte o serbestliğe ait tam olan denklem o denklemlerin toplamıdır. Toplama işlemi esnasında aynı olan bilinmeyenlerin katsayıları toplanır; olmayanlar ise kendi katsayıları ile tam olan denklemde yerlerini aynen alır. Bu anlatımda dolaylı olarak tam denklem adlandırmasının tanımı açıklanmış olmaktadır. Tam denklem, ilgili serbestlikle ilişkili olan tüm serbestliklerin olduğu denklemdir. O zaman bir serbestlik için tam denklemin kurulma anı, onun olduğu tüm elemanların çağrıldığı andır. Bu da elemanların numaralandırılması ile ilgilidir. Dolayısı ile bulunacak serbestliklerin yani bilinmeyenlerin sırası, tamamlanma sırasının tersi olup doğrudan eleman numaralandırması ile ilgilidir.

Ana denklem sistemi tam kurulmadan tam denklemler elde edilmesi Önceleyen yöntemin düğüm numaralandırmasına bağlı bir birleştirme yöntemi olmamasından ileri gelmektedir. Düğüm numaralandırmasına bağlı birleştirme şekli ile sıfır değerli katsayıların oluşmamasını sağlamak çok zordur. Ancak Önceleyen yöntemde bunlar hiç oluşmaz. Önceleyen yöntemde göre birleştirme şeklinin (denklem kurma şeklinin) belirleyicisi, düğüm numaralandırması değil eleman numaralandırmasıdır.

Yukarıda frontal çözümleyicinin önemi, kullanılmasının sağladığı yararlar anlatılmaktadır. Geliştirilen bilgisayar programında bu çözümleme yöntemi de kullanılmaktadır.

## 1.9. Dinamik Analiz

### 1.9.1. Serbest Titreşim Analizi

Serbest titreşime maruz sönümsüz bir sistemin genel hareket denklemi;

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (1.49)$$

ifadesiyle verilmektedir. Denklem (1.49)'da

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} \sin \omega t \quad (1.50)$$

ifadesi gerekli türevler alınarak yerine yazılırsa,

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}]\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (1.51)$$

bağıntısı elde edilmektedir. Bilindiği gibi bu bağıntı bir özdeğer analizi denklemidir. Daha sonra belirlenecek olan kütle matrisi köşegen olmadığından bu problem genelleştirilmiş bir özdeğer problemi olmaktadır. Görüldüğü gibi bu ifadenin çözümünden elde edilen özdeğerler açısal frekansın karesine karşılık gelmektedir. Periyot, açısal frekans ile arasındaki  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  bağıntıdan; açısal frekans, doğal frekans ile arasındaki  $\omega = 2\pi f$  bağıntısından belirlenebilmektedir.

### 1.9.2. Zorlanmış Titreşim Analizi

Dinamik yük olan deprem etkisindeki üç boyutlu sürekli ortamın hareket denklemi

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_g \quad (1.52)$$

şeklinindedir. Burada  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{C}$  ve  $\mathbf{M}$  sırasıyla rijitlik, sönüm ve kütle matrislerini;  $\mathbf{u}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}$  ve  $\ddot{\mathbf{u}}$  de sırasıyla üç eksenel doğrultudaki yerdeğiştirme, hız ve ivmeyi;  $\ddot{\mathbf{u}}_g$  de depremden kaynaklanan yer ivmesini göstermektedir. Bu denklemin zamana göre integrasyonunda sayısal çözüm yöntemlerinden biri olan Newmark- $\beta$  yöntemi kullanılmakta olup, bu yöntem, aşağıda verilmektedir.

### 1.10. Newmark- $\beta$ Yöntemi

Newmark- $\beta$  yöntemi, tepkilerin belirlenmesinde, tepki parametreleri olan yerdeğiştirme, hız ve ivmeyi, verilen bir zamanda ve bu zamandan bir önceki zamandaki kendi değerleri ile ilişkilendirerek çözen ifadeler kullanmaktadır. Bu tür bir ifadeye ait genel denklem,  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  sabitleri ve  $R$  hata payımı göstermek üzere (Ayvaz, 1992)

$$\mathbf{u}_{n+1} = \sum_{l=n-k}^n A_l \mathbf{u}_l + \sum_{l=n-k}^{n+1} B_l \dot{\mathbf{u}}_l + \sum_{l=n-k}^{n+1} C_l \ddot{\mathbf{u}}_l + R \quad (1.53)$$

şeklinde verilmektedir. Genel hız denklemi

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = a_1 \dot{\mathbf{u}}_n + a_2 \ddot{\mathbf{u}}_n + a_3 \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \quad (1.54)$$

şeklinde verilmektedir (Humar, 1990).  $u$  yerine  $1$ ,  $t$  ve  $t^2$  zaman değişkenleri konularak yapılan çözümlemede Denklem (1.54)'deki üç bilinmeyen olan  $a_1$ ,  $a_2$ , ve  $a_3$  sabitleri,  $\Delta t$  zaman artımı,  $\gamma$  bir sayıyı göstermek üzere (Ayvaz, 1992)

$$a_1=1, a_2=(1-\gamma) \Delta t, a_3=\gamma \Delta t \quad (1.55)$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Denklem (1.55)'in, Denklem (1.54)'de yerine yazılmasıyla hız denklemi (Ayvaz, 1992)

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_n + (1-\gamma)\Delta t\ddot{\mathbf{u}}_n + \gamma\Delta t\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \quad (1.56)$$

şeklini almaktadır. Bu yöntemle yerdeğiştirme ifadesi de  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  ve  $b_4$  sabitler olmak üzere

$$\mathbf{u}_{n+1} = b_1\mathbf{u}_n + b_2\dot{\mathbf{u}}_n + b_3\ddot{\mathbf{u}}_n + b_4\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \quad (1.57)$$

şeklinde verilmektedir (Humar, 1990). Hız ifadesindeki sabitlerin belirlenmesindeki yol izlenirse bu sabitler,  $\beta$  bir sayıyı göstermek üzere (Ayvaz, 1992)

$$b_1=1, b_2=\Delta t, b_3=\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\Delta t^2, b_4=\beta\Delta t^2 \quad (1.58)$$

şeklinde bulunur. Denklem (1.58)'in Denklem (1.57)'de yerine yazılmasıyla yerdeğiştirme denklemi

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t\dot{\mathbf{u}}_n + \left(\frac{1}{2}-\beta\right)\Delta t^2\ddot{\mathbf{u}}_n + \beta\Delta t^2\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \quad (1.59)$$

şeklinde yeniden düzenlenir. Denklem (1.59)'da,  $\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}$  yalnız bırakılırsa

$$\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = \frac{1}{\beta\Delta t^2} \left[ \mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n - \Delta t\dot{\mathbf{u}}_n - \left(\frac{1}{2}-\beta\right)\Delta t^2\ddot{\mathbf{u}}_n \right] \quad (1.60)$$

Denklemini elde edilir. Denklem (1.60), Denklem (1.56)'da yerine yazıldığında Denklem (1.56),

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t^2} [\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n] + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\dot{\mathbf{u}}_n + \left[(1-\gamma)\Delta t - \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\Delta t^2\right]\ddot{\mathbf{u}}_n \quad (1.61)$$

şeklinde olur. Denklem (1.60) ve Denklem (1.61), Denklem (1.52)'nin n+1 zamanındaki durumu olan

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{n+1} = -\mathbf{M}(\ddot{\mathbf{u}}_g)_{n+1} \quad (1.62)$$

denkleminde yerine yazıldığında (Ayvaz, 1992)

$$\mathbf{u}_{n+1} = \left( \begin{array}{c} \mathbf{M} \frac{1}{\beta \Delta t^2} + \\ \mathbf{C} \frac{\gamma}{\beta \Delta t} + \\ \mathbf{K} \end{array} \right)^{-1} \left( \begin{array}{c} -\mathbf{M}(\ddot{\mathbf{u}}_g)_{n+1} + \\ \mathbf{C} \left( \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{u}_n - \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \dot{\mathbf{u}}_n - \right. \\ \left. \left( (1-\gamma) \Delta t - \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \right) \ddot{\mathbf{u}}_n \right) + \\ \mathbf{M} \frac{1}{\beta \Delta t^2} \left( \mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_n \right) \end{array} \right) \quad (1.63)$$

denklemini elde edilmektedir.

Zaman alanında analiz yapıp yerdeğiştirmeyi belirleyebilmek için denklem (1.60), (1.61) ve (1.63) her zaman adımı için çözülür. Bu çalışmada sönüm dikkate alınmamıştır, bu nedenle denklemlerdeki sönüm terimleri kullanılmamaktadır. Belirtilen bu üç denklemin çözümü için  $\gamma$  ve  $\beta$  sabitlerinin bilinmesi gerekmektedir. Çözümde ortalama ivme yöntemi kullanıldığında  $\gamma = \frac{1}{2}$  ve  $\beta = \frac{1}{4}$ , doğrusal ivme yöntemi kullanıldığında ise  $\gamma = \frac{1}{2}$  ve  $\beta = \frac{1}{6}$  olarak verilmektedir. Ortalama ivme yönteminde çözümlemede sonuca ulaşabilmek amacıyla  $\Delta t$  için herhangi bir şart bulunmamaktadır. Ancak doğrusal ivme yönteminde ise çözümlemede sonuca ulaşabilmek için  $\Delta t$ 'nin (Ayvaz, 1992)

$$\frac{\Delta t}{T} < \frac{\sqrt{3}}{\pi} \quad (1.64)$$

koşulunu sağlaması gerekmektedir. Burada T, dikkate alınacak sistem modlarına ait en küçük periyottur. Çok serbestlik dereceli sistemlerde en küçük periyodun çok küçük

değerler alması olası olduğundan zaman adımının Denklem (1.64)'e göre yeteri küçüklükte olması gerekmektedir. Bu durum çok fazla hesap adımı doğuracaktır. Bu nedenle bu çalışmada çok serbestlik dereceli bir sistemin dinamik analizi gerçekleştirileceğinden çözümlenmede koşulsuz olan ortalama ivme yöntemi kullanılacaktır.

### 1.11. Çalışmanın Amaç ve Kapsamı

Son otuz yılda, daha az serbestlik derecesiyle nasıl daha doğru matematik model bulunabilirin cevabını elde etmek için çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalar süresince, sonlu elemanlar yönteminde alışla gelmiş ağ sıklaştırmasının yapıldığı h-yönteminin yanı sıra p- ve hp- yöntemleri geliştirilmiştir. Ayrıca, sonlu elemanlar yönteminin p-yönteme dayalı olarak gelişimi; karmaşık geometrilere p-yönteminin etkinliğinin sürdürülebilmesine olanak veren Karma Fonksiyon Yönteminin, geometrik temsildeki hata payını oldukça düşürmesi veya tamamen yok etmesiyle pekişmiştir. Sonlu elemanlar yöntemindeki bu gelişmeler, bu çalışmayı amacına yönlendirmiştir. Öyle ki, bu çalışmada, p-yönteme dayalı ve Karma Fonksiyon Yöntemi ile zenginleştirilmiş, sürekli veya süreksiz her çeşit doğrusal olmayan yüklemenin dikkate alınabildiği, elastostatik ve elastodinamik analizlerin içerildiği üçboyutlu problemlerde uygulanabilen, her üç ekseninde doğrusal yerdeğiştirmelerin serbestlik derecesi olarak tanımlandığı, eğrisel kenar ve/veya yüzeyli olabilen dörtgen prizma şeklindeki bir eleman için sonlu elemanlar programının geliştirilmesi amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda geliştirilen program için aşağıda maddelenen kapsam oluşturulmuştur.

1. a) Literatürde örnekleri bulunan Lagrange eleman, Lagrange polinomu tabanlı hiyerarşik eleman ve Legendre polinomu tabanlı hiyerarşik eleman b) literatürde üç boyutlu elemanlar için çoğunlukla polinom derecesi iki olması durumunda örneği bulunan Lagrange polinomu tabanlı serendipity eleman, c) bu çalışma kapsamında sunulan serendipity şeklinde hiyerarşik Lagrange eleman, serendipity şeklinde hiyerarşik Legendre eleman ve Kütle serbestlik dereceleri indirgenmiş Lagrange elemanlar dikkate alınacaktır. Grup b)'de bulunan serendipity eleman literatürde p-yönteminde yüksek polinom dereceleri için örneği çok azdır.

2. Dörtgen prizma şekline sahip yukarıdaki sonlu eleman tipleri; nokta, kenar ve/veya yüzey indirgenmesi ile üçgen prizma veya piramit gibi şekle sahip elemanlara indirgenebilmesi sağlanmaya çalışılacaktır.
3. Geliştirilen programda, polinom derecesinin artırılmasında her hangi bir sınır bulunmamasına çalışılacaktır.
4. Eğrisel kenarlı ve/veya yüzeyli geometriye sahip sistemlerin matematik modellerinde geometrik açıdan tam temsilinin yapılabilmesi amacıyla Karma Fonksiyon Yöntemi kullanılarak kurgulanan elemanların ilgili geometrik şekli kazanması sağlanacaktır. Böylelikle, kartezyen eksen takımına hiçbir dönüşüm yapmadan, yani, kutupsal veya polar koordinat eksen takımlarına ihtiyaç duymadan, doğrudan kartezyen eksen takımında modelleme yapılabilecektir. Tek yönlü dairesel kenar ve/veya yüzeylerin temsilinin sağlanması, örnek durum olarak dikkate alınacaktır.
5. Geliştirilen programda statik yükleme, üç boyutlu sonlu elemanların yüzeylerinin normali doğrultusunda düzgün yayılı ve doğrusal olmayan yayılı olarak uygulanacak ve ayrıca köşe noktalarına serbestlikler doğrultusunda tekil yükleme olarak yapılmasının sağlanmasına çalışılacaktır.
6. Geliştirilen programda p-yöntemine dayalı sonlu elemanlar ile serbest ve zorlanmış titreşim analizlerini içeren dinamik analiz yapılacaktır.

## 2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu çalışma kapsamında p-yöntemine göre yerdeğiştirmeye dayalı denklem takımlarının oluşturulduğu dörtgen prizma şeklindeki üç boyutlu sonlu elemanlarla birlikte bir sonlu elemanlar programı geliştirilmiştir. Dörtgen prizma şeklindeki üç boyutlu sonlu elemanlar, bir birine dik üç eksen doğrultusunda aksenal yerdeğiştirme serbestliklerine sahiptir. Geliştirilen programda dörtgen prizma şekline sahip birkaç tip sonlu eleman kurgulanmış olup bu elemanlar, nokta, kenar ve/veya yüzey indirgenmesi ile üçgen prizma veya piramit gibi şekle sahip elemanlara indirgenebilmektedirler.

Geliştirilen programda, polinom derecesinin artırılmasında her hangi bir sınır bulunmamaktadır. Bu durum eleman için denklem takımının tamamını fonksiyonlar üzerinden kurulması ile sağlanmakta olup belli polinom dereceleri için elde edilmiş hazır durumlar kullanılmamaktadır. Hazır kurgulanmış ifadelerde değer yerine koyarak denklem takımı oluşturma, yüksek polinom dereceleri için zaman açısından verimli olmamaktadır. Ayrıca p-yöntemini içeren ticari programlarda, genelde, polinom dereceleri sınırlandırılmaktadır. Ancak bu sınırlandırma yapılırken, en genel halde, eğrisel geometri problemlerde polinom derecesini artırmaktansa geometrik temsilden gelen hatayı azaltmak için ağ sıklaştırılması yapılmasının daha etkili sonuçlara ulaştıracağı gibi sebeplerin düşünülmesi oldukça muhtemeldir.

p-yöntemine göre istenilen polinom derecesi için eleman rijitlik matrisinin nasıl kurulduğu 2.1 nolu alt başlık altında gösterilmektedir.

p-yönteminde, temel ağ olarak kullanılacak bir ağ yapısı üzerinde, polinom derecesinin artırılması esnasında ilgili şekil fonksiyonu yapısına göre sonlu eleman üzerinde konum bilgisine bağlı olarak veya olmayarak serbestlik derecelerinin tanımlanması sağlanmalıdır. Öyleki, her polinom derecesi artırılması esnasında serbestlik derecesi oluşturma işlemi, serbestlik derecelerinin temel ağ yapısına bağlı olarak komşu elemanlar arasında köşe, kenar veya yüzey komşuluğunda ortak numaralara sahip kalmalarının sağlatılmasını gerektirmektedir. Bu şekilde, p-yöntemi için ağ üzerinde serbestlik derecesi tanımlama algoritması, 2.2 nolu alt başlıkta verilmektedir.

Kurgulanan sonlu elemanlar farklı tipte şekil fonksiyonlarının oluşturulması ile meydana getirilmektedir. Bunlar, Lagrange eleman, Lagrange polinomu tabanlı Lagrange eleman; Lagrange polinomu tabanlı hiyerarşik eleman; Legendre polinomu tabanlı



hierarchy eleman; Lagrange polinomu tabanlı serendipity eleman; serendipity şeklinde hierarchy Lagrange eleman; serendipity şeklinde hierarchy Legendre eleman; Kütle serbestlik dereceleri indirgenmiş Lagrange eleman olarak sıralanabilir. Son üç yaklaşım, bu tez kapsamında sunulan elemanlardır. Serendipity şeklindeki hierarchy elemanların hierarchy elemanlardan farkı, yüzey ve kütle serbestlik derecelerinin olmamasıdır. Ayrıca Lagrange elemanın sistem matrisindeki matris boyutunu küçültmek amacıyla kütle serbestlik derecelerinin ağlarda hiçbir komşuluğu olmayacağından ilk çözümlemede dikkate alınmaması ile elde edilen Kütle serbestlik dereceleri indirgenmiş Lagrange eleman tanımlanmaktadır. Bu üç eleman serbestlik derecesi sayısının nasıl azaltılabilir sorusunun cevabı olarak oluşturulmuştur. Ayrıca Lagrange polinomu tabanlı serendipity elemanın literatürde yüksek polinom dereceleri için uygulaması yerine genelde polinom derecesinin iki olduğu durumdaki uygulamaları vardır. Bu tez kapsamında dikkate alınan tüm şekil fonksiyonlarının nasıl üretildiği 1.5.1 nolu alt başlıkta ve onun alt başlıklarında verilmektedir.

Eğrisel kenarlı ve/veya yüzeyli geometriye sahip sistemlerin matematik modellerinde geometrik olarak tam temsilinin yapılabilmesi amacıyla Karma Fonksiyon Yöntemi kullanılarak kurgulanan elemanların ilgili geometrik şekli kazanması sağlanmaktadır. Böylelikle, kartezyen eksen takımına hiçbir dönüşüm yapmadan, yani, kutupsal veya polar koordinat eksen takımlarına ihtiyaç duymadan, doğrudan kartezyen eksen takımında modelleme yapılabilmektedir. Bu çalışma kapsamında dairesel kenar ve/veya yüzeylerin temsilinin sağlanması, örnek durum olarak dikkate alınmıştır. Geliştirilen programda, genel olarak, herhangi bir eğrisellik durumunun kullanılabilmesi amacıyla düzenleme yapılmıştır. Ancak eğrisel kenar ve/veya yüzeyler üzerinde koordinat bilgisinin yanı sıra türev bilgilerinin de sağlanması amacıyla ek geometrik bilgilerin elde edilebileceği aracı bir CAD (Computer Aided Design) programa ihtiyaç duyulduğundan en genel durum örneklendirilememektedir. Bu çalışma kapsamında dikkate alınan ve 1.7.2 alt başlığında verilen Karma Fonksiyon Yönteminin üç boyutlu elemanlardaki geometrik temsilde nasıl üretildiği 1.7.2.2 alt başlığı altında gösterilmektedir. Örnek durum olarak dairesel tek yönlü yüzeylerin geometrik enterpolasyonunun nasıl yapıldığı 2.3 alt başlığında verilmektedir.

Geliştirilen programda statik yükleme, üç boyutlu sonlu elemanların yüzeylerinin normal doğrultusunda düzgün yayılı ve doğrusal olmayan yayılı olarak uygulanabilmekte ve ayrıca köşe noktalarına serbestlikler doğrultusunda tekil yükleme olarak yapılabilmektedir. Düzgün yayılı yüke ve doğrusal olmayan yayılı yüke ait yük

vektörlerinin nasıl elde edileceği, 2.5 alt başlığı altında gösterilmektedir. Karma Fonksiyon Yöntemi sayesinde eğrisel yüzeylerde de yayılı yüklemeye yapılabilmektedir.

Yayılı yüklemeler birçok fiziki problemde düzgün olmayıp mühendislik açısından düzgün yayılı hale getirilmektedirler. Bunun için ya doğrudan kabul yapılmakta veya ağ yapısı sıklaştırılarak yükün farklı değerlerde düzgün yayılı yük olarak uygulanabilmesi sağlanmaktadır. Geliştirilen programda yardımcı bir program yardımıyla doğrusal olmayan, hatta, sürekli olmayan yüzeye yayılı yükler, eşdeğer kabul edilebilecek düzeyde yüksek dereceden polinomlarla yeniden tanımlanabilmekte ve ister eğrisel ister düzlemsel yüzeylere yüklenebilmektedir. Bu yüklemeye şeklinin nasıl tanımlandığı 2.6 alt başlığında verilmektedir.

Birçok durumda ağ yapısının sıklaştırılmasında üç temel neden bulunmaktadır. Bunlar, yüklemenin ve/veya geometrinin daha gerçekçi tanımlanabilmesi, bir de yerdeğiştirmenin doğruluk derecesinin (yakınsama derecesinin) kabul edilebilir oranda olabilmesi şeklinde sıralanabilir. Doğrusal olmayan yüklemenin yapılabilmesi ve eğrisel geometrinin tam olarak bir defada tanımlanabilmesi, bu anlamda, ağ sıklaştırmasının yapılmasını zorunluluk halinden çıkarmaktadır.

p-yöntemi ile ticari programlarda genelde statik analiz yapılmakta, dinamik analiz yapılmamaktadır. Bunun sebebi olarak polinom derecesi artırıldıkça kütlelerin sonlu eleman içerisinde şekil fonksiyonlarından dolayı düzgün olarak dağıtılamaması ve bundan dolayı statik analizde kabul edilebilir sonuçlar alınabilmesine rağmen atalet kuvvetlerinden dolayı dinamik analizde istenilen sonuçların alınamaması gösterilebilir. Bununla beraber literatürde örnek durum olarak, plakların yüksek, ancak, belli derecede polinomlarla yapılmış dinamik analizleri gösterilebilir (Özdemir, 2007). 2.4 alt başlığı altında eleman kütle matrislerinin nasıl elde edildiği gösterilmektedir.

## 2.1. p-Yöntemine Göre Eleman Rijitlik Matrisinin Kurulumu

Denklem (1.17)'de bulunan,  $\mathbf{k}^e$ , eleman rijitlik matrisi

$$\mathbf{k}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T(\xi) \mathbf{C} \mathbf{B}(\xi) |\mathbf{J}(\xi)| d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (2.1)$$

bağıntısı ile belirtilmektedir. Denklem (1.14)'deki türevlerin, fiziksel (gerçek geometrik) koordinatlara göre değil de doğal koordinatlara göre türevinin alınması gerekmektedir. Bu dönüşüm, aşağıdaki gibi yapılmaktadır.

Doğal koordinatlara göre kısmi türevin zincir kuralı ile fiziksel koordinatlar cinsinden elde edilmesi

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} = \frac{\partial}{\partial X_j} \frac{\partial X_j}{\partial \xi_i} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi} = \mathbf{J}(\xi) \frac{\partial}{\partial X} \quad (2.2)$$

şeklinde olmaktadır. Burada  $\mathbf{J}(\xi)$ , doğal koordinatlara göre türevleme ile fiziksel koordinatlara göre türevleme arasında dönüşümü sağlayan Jacobi matrisi olup bu matris

$$\mathbf{J}(\xi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial X_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial X_3}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial X_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial X_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial X_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial X_1}{\partial \xi_3} & \frac{\partial X_2}{\partial \xi_3} & \frac{\partial X_3}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

bağıntısıyla verilmektedir. Fiziksel koordinatlara göre kısmi türevin, zincir kuralı ile, doğal koordinatlar cinsinden elde edilmesi

$$\frac{\partial}{\partial X_j} = \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial X_j} \quad (2.4)$$

şeklinde olmaktadır. Denklem (2.2) aynı zamanda

$$\frac{\partial}{\partial X} = \mathbf{J}^{-1}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (2.5)$$

şeklinde yazılabileceğinden Denklem (2.4) ve Denklem (2.5)'in eşitlenmesiyle, doğal koordinatların fiziksel koordinatlara göre türevinin,  $\frac{\partial \xi_i}{\partial X_j}$ , fiziksel koordinatların doğal

koordinatlara göre türevi,  $\frac{\partial X_j}{\partial \xi_i}$ , cinsinden

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \xi_1}{\partial X_1} |J(\xi)| &= \frac{\partial X_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial X_3}{\partial \xi_3} - \frac{\partial X_3}{\partial \xi_2} \frac{\partial X_2}{\partial \xi_3}, \\
\frac{\partial \xi_2}{\partial X_1} |J(\xi)| &= -\frac{\partial X_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial X_3}{\partial \xi_3} + \frac{\partial X_3}{\partial \xi_1} \frac{\partial X_2}{\partial \xi_3}, \\
\frac{\partial \xi_3}{\partial X_1} |J(\xi)| &= \frac{\partial X_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial X_3}{\partial \xi_2} - \frac{\partial X_3}{\partial \xi_1} \frac{\partial X_2}{\partial \xi_2}, \\
\frac{\partial \xi_1}{\partial X_2} |J(\xi)| &= -\frac{\partial X_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial X_3}{\partial \xi_3} + \frac{\partial X_3}{\partial \xi_2} \frac{\partial X_1}{\partial \xi_3}, \\
\frac{\partial \xi_2}{\partial X_2} |J(\xi)| &= \frac{\partial X_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial X_3}{\partial \xi_3} - \frac{\partial X_3}{\partial \xi_1} \frac{\partial X_1}{\partial \xi_3}, \\
\frac{\partial \xi_3}{\partial X_2} |J(\xi)| &= -\frac{\partial X_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial X_3}{\partial \xi_2} + \frac{\partial X_3}{\partial \xi_1} \frac{\partial X_1}{\partial \xi_2}, \\
\frac{\partial \xi_1}{\partial X_3} |J(\xi)| &= \frac{\partial X_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial X_2}{\partial \xi_3} - \frac{\partial X_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial X_1}{\partial \xi_3}, \\
\frac{\partial \xi_2}{\partial X_3} |J(\xi)| &= -\frac{\partial X_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial X_2}{\partial \xi_3} + \frac{\partial X_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial X_1}{\partial \xi_3}, \\
\frac{\partial \xi_3}{\partial X_3} |J(\xi)| &= \frac{\partial X_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial X_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial X_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial X_1}{\partial \xi_2}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

şeklinde elde edilmektedir. Buna göre, Denklem (1.14)'deki **D** operatöründe, Denklem (2.6)'daki eşitlikler yerine konulduğunda, Denklem (1.16)'da tanımlanan **B** operatörü aşağıda Denklem (2.7)'deki gibi elde edilmektedir. Bu operatörde,  $N(\xi)$ , şekil fonksiyonu yerine dikkate alınan eleman tipine göre karşılığı yazıldığında, ilgili sonlu eleman tipi için kurgulama yapılmış olmaktadır. Örneğin, Lagrange tipi sonlu eleman için  $N(\xi)$  yerine Lagrange polinomuna göre oluşturulan şekil fonksiyonları konulmaktadır.

Herhangi bir sonlu eleman tipinde polinom derecesi artırıldıkça şekil fonksiyonu sayısı da ona göre artacaktır. Buna göre Denklem (2.7)'deki **B** operatörüne bakıldığında artan şekil fonksiyonu sayısınınca operatörün boyutunun büyüyeceği, dolayısıyla, Denklem (2.1)'deki eleman rijitlik matrisinin boyutunun da o denli büyüyeceği görülmektedir.

$$\mathbf{B}^i(\xi) = \mathbf{D}(\xi) \mathbf{N}^i(\xi) = \frac{1}{|\mathbf{J}(\xi)|} \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_j}{\partial X_1} N_{,j}^i(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \xi_j}{\partial X_2} N_{,j}^i(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \xi_j}{\partial X_3} N_{,j}^i(\xi) \\ \frac{\partial \xi_j}{\partial X_2} N_{,j}^i(\xi) & \frac{\partial \xi_j}{\partial X_1} N_{,j}^i(\xi) & 0 \\ 0 & \frac{\partial \xi_j}{\partial X_3} N_{,j}^i(\xi) & \frac{\partial \xi_j}{\partial X_2} N_{,j}^i(\xi) \\ \frac{\partial \xi_j}{\partial X_3} N_{,j}^i(\xi) & 0 & \frac{\partial \xi_j}{\partial X_1} N_{,j}^i(\xi) \end{bmatrix},$$

$i = 1, n$   
 $n = \text{şekil fonksiyonu sayısı}$

(2.7)

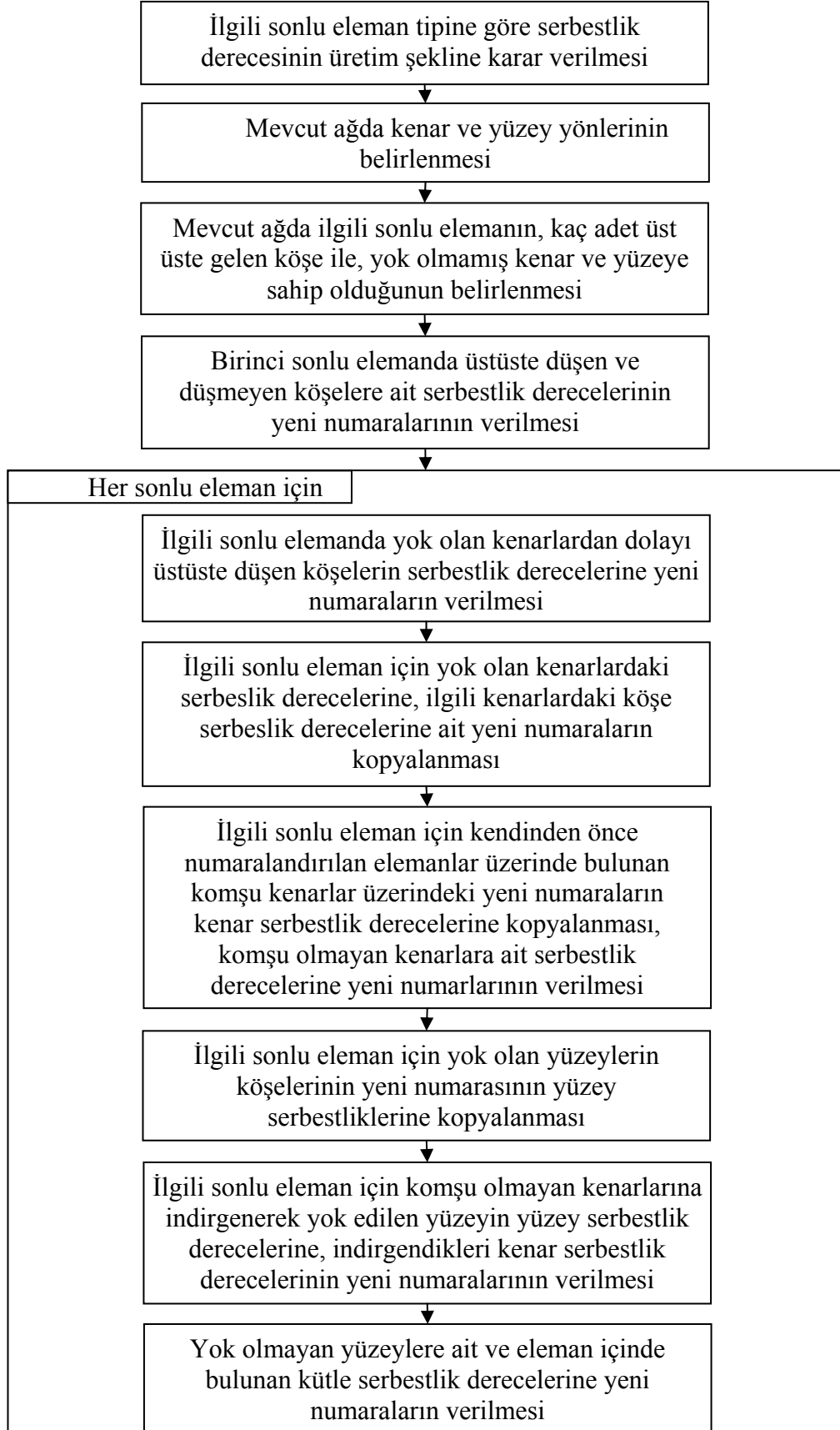
## 2.2. Mevcut Bir Ağda Sonlu Elemanın Serbestlik Derecelerinin p-Yöntemine Göre Artırılması ve Numaralandırılması

p-yönteminde sonlu elemanların polinom derecelerinin artırılabilmesine göre yeni serbestlik derecelerinin mevcut ağ yapısında yerini almasının sağlanması, h-yönteminde mevcut ağ yapısının yakınsama düzeyini artırmak için ağ yapısının daha fazla elemana bölünmesi ile benzer bir işlem olarak görülebilir. Bu nedenle, bu özellik, p-yöntemi tabanlı bir sonlu elemanlar programında vazgeçilmez olmaktadır.

Mevcut bir ağ yapısında çalışırken ağ yapısının mevcut sonlu elemanlarının komşulukları, her sonlu elemanın yapısındaki yeni oluşturulacak serbestlik derecelerinin bu komşuluk durumlarını dikkate alarak numaralandırmasını gerektirmektedir. İki sonlu elemanın komşuluk durumları köşe-köşeye, kenar-kenara, yüzey-yüzeye komşulukları şeklinde sıralanabilir. Ancak birde mevcut ağ yapısına bağlı olarak sonlu elemanların kurgulandıkları köşe, kenar veya yüzey sayısının değiştiği bir biçimdeki geometrik bir pozisyonda kalmalarının zorunlu hale gelebileceğinin de düşünülmesi gerekmektedir. Bu durumda sadece elemanlar arası komşuluk değil, eleman içindeki köşe, kenar veya yüzeylerin üst üste düşmeleri veya yok olmaları durumlarının da dikkate alınması manasına gelmektedir. Öyleki, sonlu elemanın kurgulanmasında temel alınan geometri yanı sıra, yer alması gerektiği geometrik duruma göre, örnek olarak piramit, üçgen prizma,

düzgün dört yüzlü gibi şekilleri alması hangi köşe, kenar veya yüzeylerin üst üste bineceği veya yok olması gerekeceğinin birçok olası durumu ortaya çıkaracağı görülmektedir. Ayrıca oluşturulacak serbestlik derecelerinin hangi eleman tipinde olacağı -örneğin, Lagrange veya hiyerarşik eleman- dikkate alınmalıdır. Çünkü eleman tipine göre oluşturulacak serbestlik derecelerinin eleman konumuna göre kenar ve/veya yüzey üzerindeki tanımlanma yönleri önemli olmaktadır. Örneğin, hiyerarşik elemanlarda serbestlik dereceleri köşe, kenar, yüzey ve kütle olmak üzere dört farklı yapıda olduğundan ve köşelere ait serbestlik dereceleri hariç diğer serbestlik dereceleri konum bilgisine bağlı olmadığından eleman üzerinde bu serbestlik derecelerinin komşulukları ile ortak adreste buluşmalarının sağlanması ancak tanımlanma yönleri ile olmaktadır. Geliştirilen program için tüm bu durumları içeren bir algoritma Şekil 2.1’de verilmektedir.

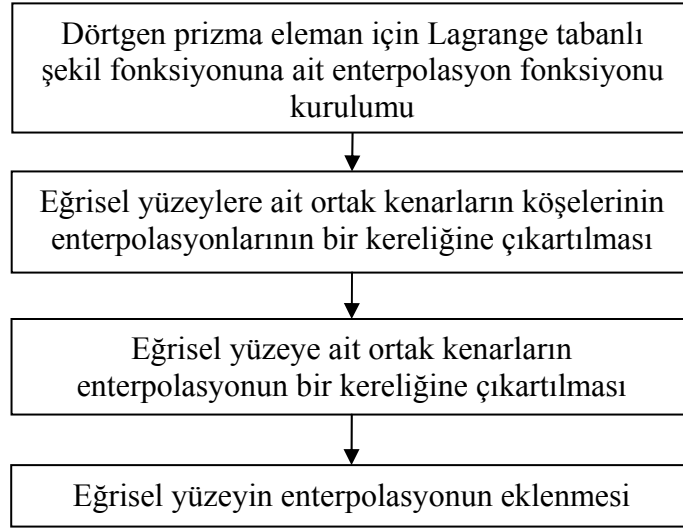
Şekil 2.1’den görülebildiği gibi kurgulanan sonlu elemanların ağ yapısına bağlı olarak indirgenmiş kenar ve/veya yüzeyli durumlar olan üçgen prizma, pramit veya düzgün dörtyüzlü gibi şekillere sokulmaları durumunda dörtgen prizma için kurulan, örneğin hiyerarşik tipteki, şekil fonksiyonlarının kullanımı mümkün olmamaktadır. Çünkü hiyerarşik tipteki şekil fonksiyonları köşe, kenar, yüzey ve hacim gibi farklı türden fonksiyonları içermektedir. Bundan ötürü örneğin kenarın köşelere indirgenmesi durumunda farklı türden fonksiyonların adreslerine aynı serbestlik derecesinin verilmesi farklı mertebelerin bir araya getirilmesine neden olacağından doğru olmamaktadır. Bu durumda, hiyerarşik tip için yeni geometrik şekle uygun şekil fonksiyonu kurulumu yapılmalıdır. Geliştirilen programda hazırlanan algoritmaya (bkz. Şekil 2.1) göre hiyerarşik tip dışındaki Lagrange, serendipity tipindeki sonlu eleman kurulumları için dörtgen prizma şeklindeki hacim elemanların kenar veya yüzeylerinin indirgenmesi durumları dikkate alınabilmektedir.



Şekil 2.1. Mevcut ağda polinom derecesinin artırılması durumunda doğacak serbestlik derecelerine yeni numara verilmesine ait algoritma

### 2.3. Karma Fonksiyon Yöntemi ile Dairesel Kenar ve/veya Yüzeylerin Temsili

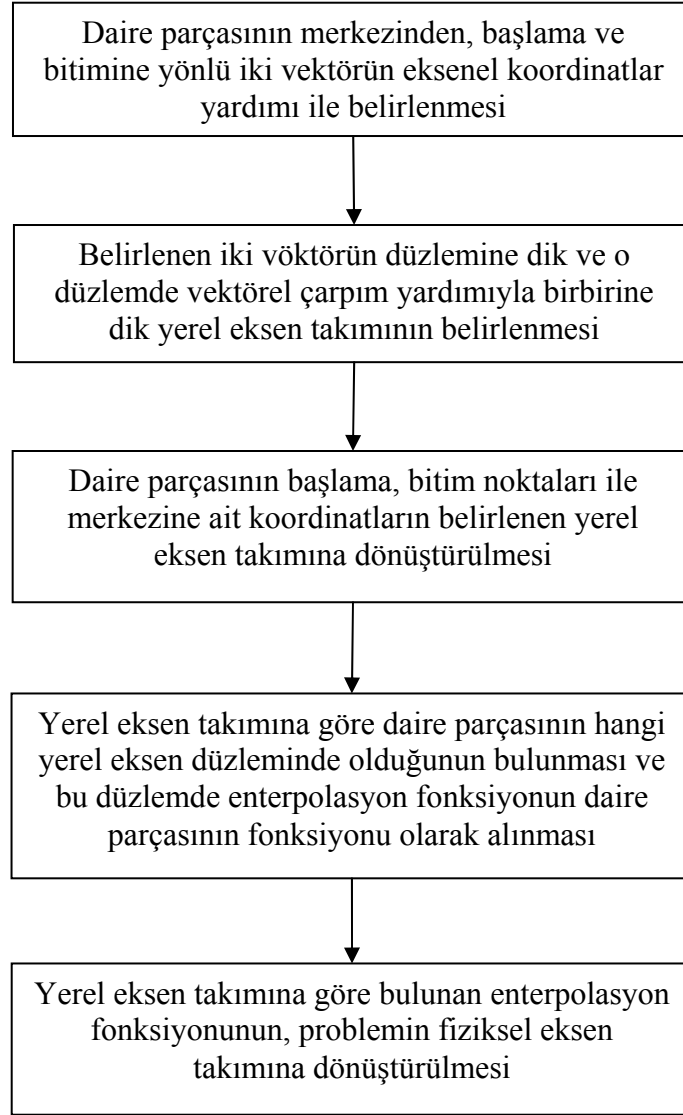
Geliştirilen programda dairesel kenar ve yüzeylere ait eğrisel geometrinin Karma Fonksiyon Yöntemi ile geometrinin enterpolasyonuna katılması Şekil 2.2 ve Şekil 2.3’de verilen algoritmalar ile sağlanmaktadır. Şekil 2.2’de, genel bilgilerde ayrıntılı olarak verilen Karma Fonksiyon Yönteminin özet anlatımı algoritma halinde verilmektedir.



Şekil 2.2. Karma Fonksiyon Yöntemi algoritması

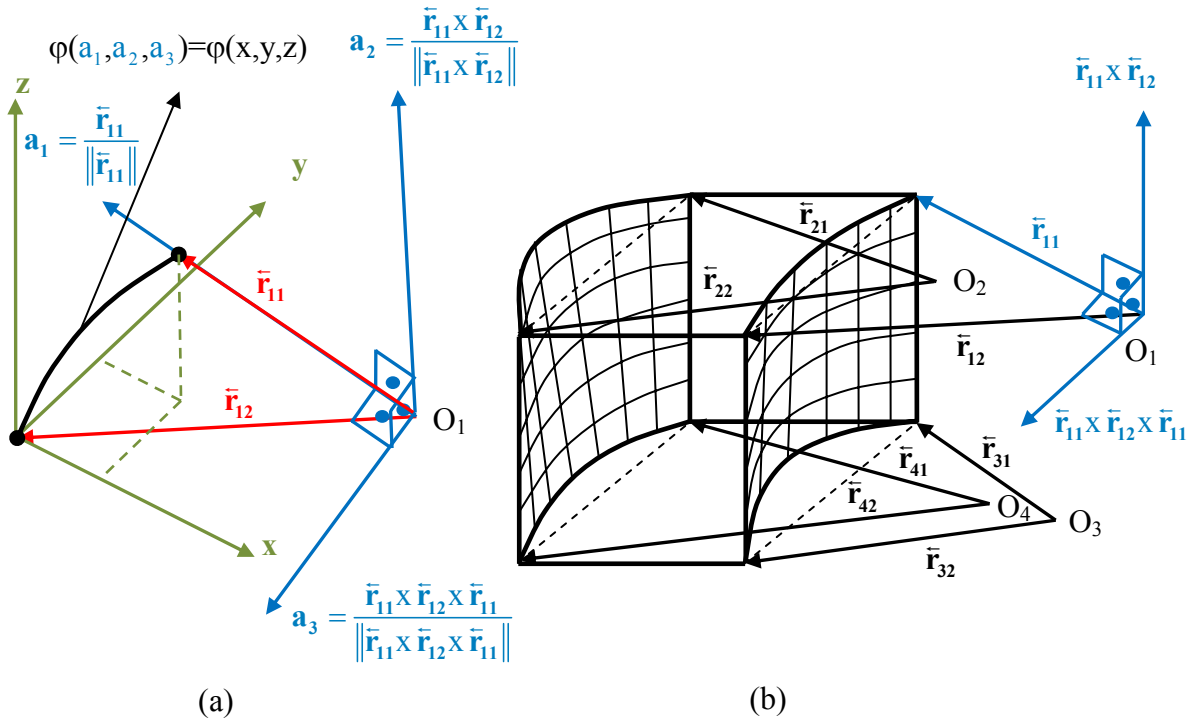
Şekil 2.3’de üç boyutlu bir dairesel eğriliğin iki boyutlu bir eğrilik haline getirildiği bir yerel eksen takımında enterpolasyonunun tanımlanıp tekrar koordinat dönüşümü uygulayarak üç boyutlu daireselliğin tanımlandığı eksen takımına çevrilmesi, algoritma ile gösterilmektedir. Şekil 2.4’de de bu anlatım grafiksel olarak gösterilmektedir.





Şekil 2.3. Dairesel eğriliğe ait enterpolasyon fonksiyonunun kurulumu

Şekil 2.4 (a)'da, üç boyutlu  $\varphi(x,y,z)$  fonksiyonu ile gösterilen dairesel bir eğriliğin, başlangıç ve bitiş noktalarını  $O_1$  gibi bir eğrisellik merkezine göre işaretleyen  $\bar{\mathbf{r}}_{11}$  ve  $\bar{\mathbf{r}}_{12}$  vektörleri ile tanımlanan  $(a_1, a_2, a_3)$  yerel eksen takımına göre oluşturulan  $\varphi(a_1, a_2, a_3)$  enterpolasyon fonksiyonu, Şekil 2.4 (b)'de ise Şekil 2.4 (a)'da tanımlanan dört farklı dairesel eğrisellikten oluşan dört kenar ve bunların olduğu iki yüzeyin bulunduğu bir sonlu elmanın şekli gösterilmektedir. Bu sonlu elemanın dairesel tek yönlü bir eğriliğe sahip bir sürekli ortamda, örneğin bir sanayi bacasında tanımlı olduğu düşünülebilir.



Şekil 2.4. a) Dairesel eğriliğin yerel eksen takımının oluşturulması ve bu eksen takımında enterpolasyon fonksiyonunun kurulması, b) Silindirik bir sonlu elemanın görünüşü ve dairesel eğriselliğe sahip kenar ve yüzeylerinin tanımlanması

#### 2.4. p-Yöntemine Göre Eleman Kütle Matrisinin Kurulumu

Denklem (1.7)'de iç kuvvetlerin işi olan  $\delta W_{\text{dyn}}$ 'nin

$$\delta W_{\text{dyn}} = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}} \rho dV \quad (2.8)$$

şeklinde olduğu görünmektedir. Burada 1.2.3 alt başlığı altında belirtildiği gibi ayrıklaştırma yapıldığında, doğal koordinatlardaki içsel virtüel iş denklemi eleman üzerinde

$$\delta W_{\text{dyn}}^e = \delta \mathbf{u}^e \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T(\xi) \mathbf{N}(\xi) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \mathbf{u}^e = \delta \mathbf{u}^e \cdot \mathbf{m}^e \mathbf{u}^e \quad (2.9)$$

bağıntısıyla elde edilmektedir. Buna göre eleman kütle matrisi

$$\mathbf{m}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T(\xi) \mathbf{N}(\xi) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (2.10)$$

bağıntısıyla belirtilmektedir. Burada

$$\mathbf{N}(\xi) = \begin{bmatrix} N^i(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & N^i(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & N^i(\xi) \end{bmatrix}, i = 1, n \quad (2.11)$$

n = şekil fonksiyonu sayısı

şeklinde olup polinom derecesi sayısı arttıkça şekil fonksiyonu sayısı artacak ve kütle matrisinin boyutu da ona göre büyüyecektir.

## 2.5. p-Yöntemine Göre Eleman Yayılı Yük Vektörünün Kurulumu

Denklem (1.7)'de dış kuvvetlerin yaptığı iş olan  $\delta W_{\text{ext}}$ 'nin, kütle kuvvetini doğuran yerçekiminin yaptığı işin ve etki yüzeyindeki dış kuvvetlerin yaptığı işin toplamı şeklinde olduğu görülmektedir. Burada sadece etki yüzeyindeki kuvvetler düşünülecektir. Buna göre Denklem (1.7)

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_{\Gamma_\sigma} \delta \mathbf{u} \mathbf{t}^* dA \quad (2.12)$$

şeklini alacaktır. Dış kuvvetlerin etki yüzeyi, dörtgen prizma elemanda altı farklı yüzeyden biri, birkaçı veya tamamı olacaktır. Öyleki, Denklem (2.12)'deki integral, ilgili eleman yüzeyi sınırları içerisinde, yüzey normali doğrultusundaki  $\mathbf{t}^*$  yayılı yükü altında alınacaktır. Buna göre dörtgen elemanın her yüzeyinde yükleme yapılabileceği düşünülerek yüzeylerin normali bulunmalı ve bu normal doğrultusunda yüzey sınırları içerisinde değişken veya düzgün yayılı yükün uygulanabileceği düşünülmelidir.

Dörtgen prizmanın yüzeylerinin normalleri ilgili yüzeydeki tanjant değişim vektörlerinin vektörel çarpımı ile bulunabilir. Tanjant değişim vektörleri, fiziksel koordinatlar ve doğal koordinatlar arasındaki değişim ilişkisinden elde edilir. Fiziksel

koordinatlar

$$\mathbf{X} = [X_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad X_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad X_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3)]^T \quad (2.13)$$

şeklinde doğal koordinatların birer fonksiyonu olarak ifade edilebilir. Öyleki doğal koordinatlarda dörtgen prizma elemanın bir yüzeyindeki bir nokta işaretlenmiş olsun. Örnek olarak ilgili yüzey,  $\xi_3=1$  yüzeyi olsun. Bu yüzeydeki işaretlenmiş noktadan, örneğin,  $\xi_1$  ekseninin pozitif yönünde  $d\xi_1$  kadar hareket edildiğinde fiziksel koordinatlarda o yüzeydeki o noktadan

$$d\mathbf{X}_{\xi_1} d\xi_1 = \left[ \frac{\partial X_1(\xi_1, \xi_2, 1)}{\partial \xi_1} d\xi_1 \quad \frac{\partial X_2(\xi_1, \xi_2, 1)}{\partial \xi_1} d\xi_1 \quad \frac{\partial X_3(\xi_1, \xi_2, 1)}{\partial \xi_1} d\xi_1 \right] \quad (2.14)$$

bağıntısıyla belirtilen kadar bir sapma olur. Benzer şekilde, ilgili noktadan  $\xi_2$  ekseninin pozitif yönünde  $d\xi_2$  kadar hareket edildiğinde fiziksel koordinatlarda o yüzeydeki o noktadan

$$d\mathbf{X}_{\xi_2} d\xi_2 = \left[ \frac{\partial X_1(\xi_1, \xi_2, 1)}{\partial \xi_2} d\xi_2 \quad \frac{\partial X_2(\xi_1, \xi_2, 1)}{\partial \xi_2} d\xi_2 \quad \frac{\partial X_3(\xi_1, \xi_2, 1)}{\partial \xi_2} d\xi_2 \right] \quad (2.15)$$

bağıntısıyla belirtilen kadar bir sapma olur. İlk noktadan sapma yapılarak varılan iki noktaya, bu konum sapma vektörleri doğrultusunda varılmakta olup bu iki sapma vektörü de fiziksel koordinatlarda ilgili yüzeyde olup o yüzeyin tanjant vektörü olmaktadır. Bu yüzeyin normal vektörü de, bu tanjant vektörlerinin

$$\vec{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial X_1}{\partial \xi_1} d\xi_1 & \frac{\partial X_2}{\partial \xi_1} d\xi_1 & \frac{\partial X_3}{\partial \xi_1} d\xi_1 \\ \frac{\partial X_1}{\partial \xi_2} d\xi_2 & \frac{\partial X_2}{\partial \xi_2} d\xi_2 & \frac{\partial X_3}{\partial \xi_2} d\xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial X_3}{\partial \xi_2} - \frac{\partial X_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial X_3}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial X_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial X_3}{\partial \xi_1} - \frac{\partial X_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial X_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial X_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial X_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial X_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial X_2}{\partial \xi_1} \end{bmatrix} d\xi_1 d\xi_2 \quad (2.16)$$

$$\vec{\mathbf{n}} = \frac{\vec{\mathbf{M}}}{\|\vec{\mathbf{M}}\|}$$

şeklindeki vektörel çarpımının normalleştirilmiş halidir. Buradan hareketle, doğal koordinatlarda ilgili yüzeydeki alan  $dA_{\xi}=d\xi_1 d\xi_2$  olurken fiziksel koordinatlardaki ise  $dA=\|\vec{\mathbf{M}}\|$  olur.  $\mathbf{t}^*$ , yüzey normalinde etki eden bir vektör olduğundan,

$$\bar{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{t}^*}{\|\mathbf{t}^*\|} \quad (2.17)$$

denklemleri ile  $\mathbf{t}^* = \bar{\mathbf{n}} \|\mathbf{t}^*\|$  olur. Buna göre

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^* dA &= \bar{\mathbf{n}} \|\mathbf{t}^*\| \|\vec{\mathbf{M}}\| \Rightarrow \\ \mathbf{t}^* dA &= \|\mathbf{t}^*\| \vec{\mathbf{M}} \\ \mathbf{t}^* dA &= \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial X_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial X_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial X_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial X_3}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial X_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial X_2}{\partial \xi_2} \end{array} \right] \|\mathbf{t}^*\| d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \quad (2.18)$$

olmaktadır. Denklem (2.18), Denklem (2.12)'de yerine yazılıp 1.2.3 alt başlığı altında belirtildiği gibi ayrıklaştırma yapıldığında, dörtgen prizma elemanın  $\xi_3=1$  yüzeyindeki dış kuvvetlerin yaptığı iş

$$\delta W_{\text{ext}}^e = \delta \mathbf{u}^e \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T(\xi) \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial X_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial X_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial X_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial X_3}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial X_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial X_2}{\partial \xi_2} \end{array} \right] \|\mathbf{t}^*\| d\xi_1 d\xi_2 = \delta \mathbf{u}^e \cdot \mathbf{t}^e \quad (2.19)$$

olmaktadır. Buna göre  $\xi_3=1$  yüzeyindeki dış kuvvet, yani, yük vektörü

$$\mathbf{t}_{\xi_3=1}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T(\xi) \begin{bmatrix} \frac{\partial X_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial X_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial X_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial X_3}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial X_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial X_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial X_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial X_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial X_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial X_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial X_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial X_2}{\partial \xi_1} \end{bmatrix} \|\mathbf{t}^*\| d\xi_1 d\xi_2 \quad (2.20)$$

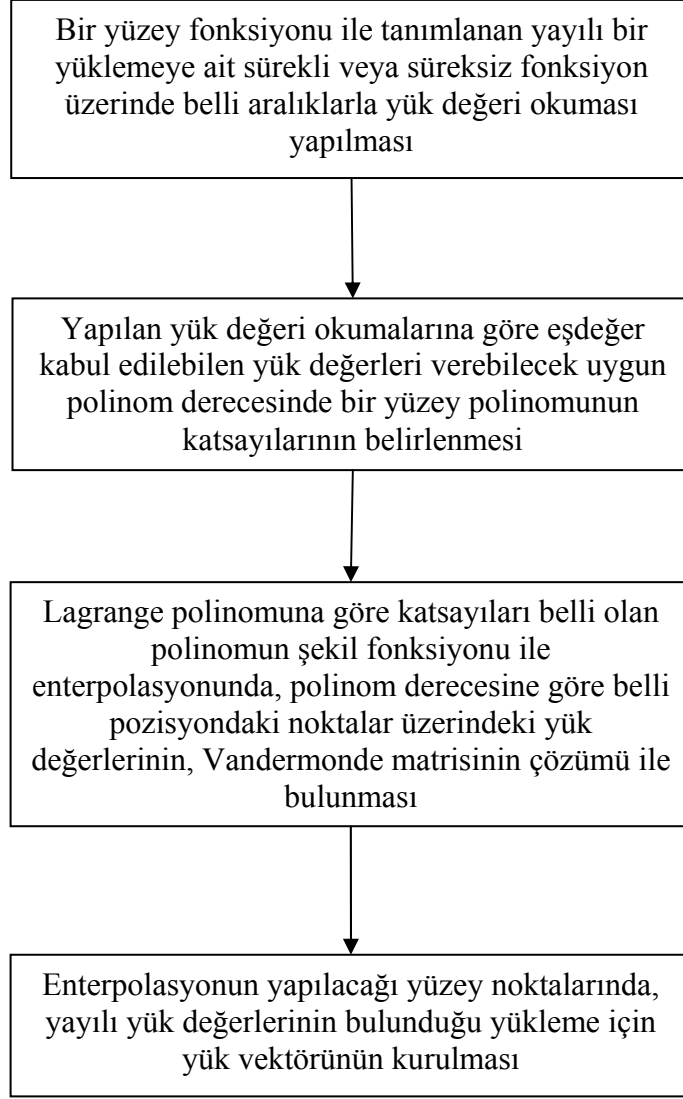
bağıntısıyla elde edilmektedir. Burada  $\mathbf{N}^T(\xi)$ , Denklem (2.11)'in transpozesi olup sonlu elemandaki yerdeğiştirmeyi enterpole eden şekil fonksiyonlarıdır. Denklem (2.20)'de  $\|\mathbf{t}^*\|$ , dış yükün değeri olup düzgün yayılı yükte doğrudan uygulanacak olan yükün değerine eşit olan bir sabittir. Öte yandan, yüzeyde doğrusal olmayan bir fonksiyon yüklemesi olduğunda o yüzeydeki doğal koordinatlara bağlı bir yüzey fonksiyonu olmaktadır. Bu fonksiyon, yüzeyde belli noktalardaki yük değerlerini enterpole eden bir interpolasyon fonksiyonu haline dönüştürülerek

$$\mathbf{t}_{\xi_3=1}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T(\xi) \begin{bmatrix} \frac{\partial X_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial X_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial X_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial X_3}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial X_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial X_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial X_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial X_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial X_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial X_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial X_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial X_2}{\partial \xi_1} \end{bmatrix} \left( \mathbf{N}_{\text{yüzey}}(\xi_1, \xi_2) \cdot \mathbf{t}_{\text{yüzey}} \right) d\xi_1 d\xi_2 \quad (2.21)$$

şeklinde yüzeyde fonksiyon yüklemesi için yük vektörü elde edilmektedir. Burada  $\mathbf{N}_{\text{yüzey}}$ , yüzeyde tanımlanan enterpolasyona ait şekil fonksiyonlarını;  $\mathbf{t}_{\text{yüzey}}$ , bu şekil fonksiyonlarının tanımlandığı noktalardaki yüzeydeki yük değerlerini ifade etmektedir. Yüzeyde doğrusal olmayan yüklemeye alt başlıkta da ayrıca anlatılmaktadır.

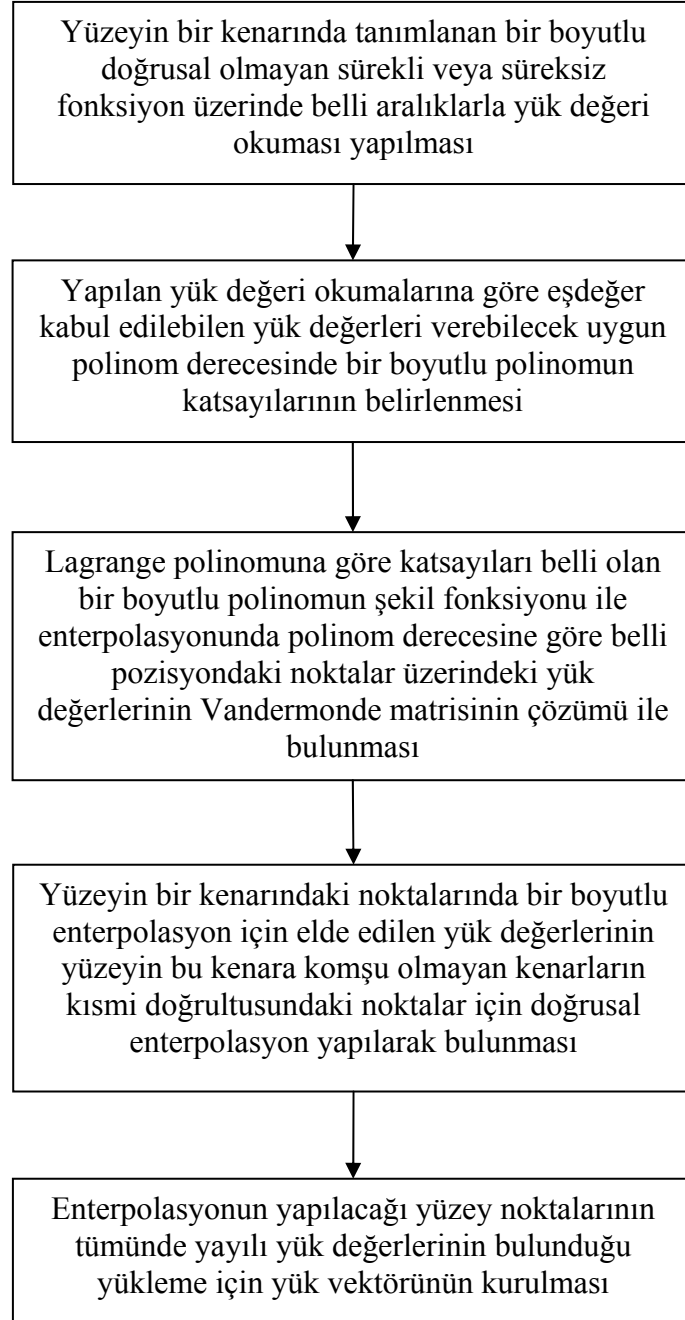
## 2.6. Doğrusal Olmayan Yayılı Yük Durumu

Doğrusal olmayan yayılı yükler birkaç şekilde oluşturulabilir. Birinci olarak, yüklenmenin doğrudan bir yüzeye, yüzey fonksiyonu olarak etkitilmesi ile yapılabilir. Bu durumda, yüzey yük fonksiyonuna ait polinom bilinir ve Şekil 2.5'de verilen algoritmaya göre yüzeye ait yük vektörü oluşturulabilir.



Şekil 2.5. Yüzeye yayılı fonksiyon yüklemesine ait yük vektörünü oluşturulmasına ait algoritma

Bir çok yönetmelikte verilen, tek boyutlu bir fonksiyon aracılığıyla yüzey yüklemesinin oluşturulmasına ait algoritma Şekil 2.6'da verilmektedir.

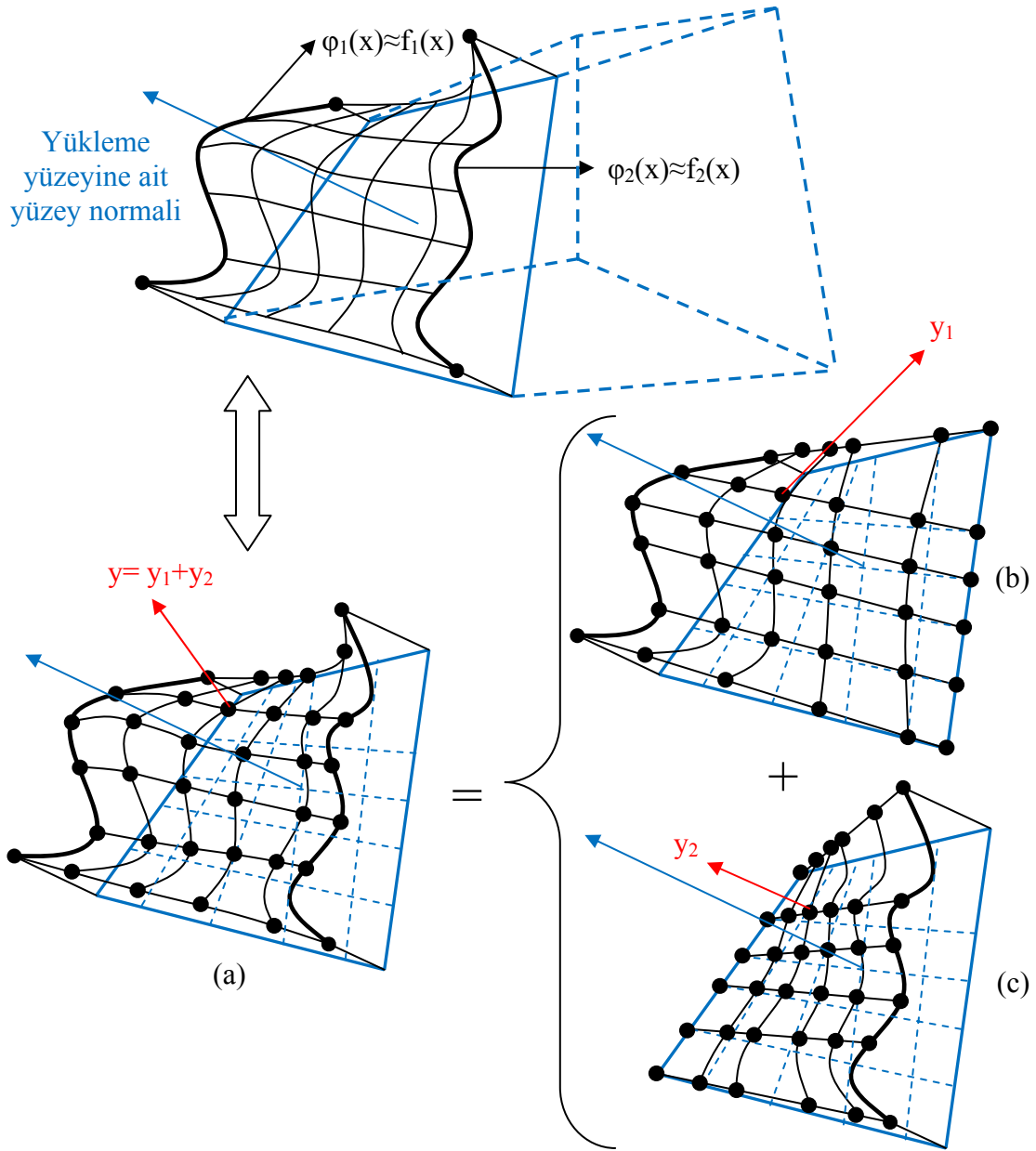


Şekil 2.6. Yüzeyin bir doğrultusunda tanımlanan bir boyutlu yayılı fonksiyon yüklemesinden kaynaklanan yüzeye yayılı fonksiyon yüklemesinin oluşturulması ve ona ait yük vektörünün oluşturulmasına ait algoritma

Eğer yüzeyin kenarlarının tümünde veya birkaçında farklı yükleme fonksiyonları tanımlı ise yukarıdaki algoritma yüzeyin ilgili o kenarları için ayrı ayrı yüzeyin tümü için enterpole edilir ve toplanır. Bu durum, yüzeyin komşu olmayan kenarlarında birer yükleme fonksiyonu olması durumu için düzlemsel yüzeylere sahip dörtgen prizmanın bir yüzeyinde



örneklendirilerek Şekil 2.7’de verilmektedir.



Şekil 2.7. Bir yüzeyin komşu olmayan iki kenarındaki farklı bir boyutlu yüklemelere maruz dörtgen prizma eleman

Şekil 2.7’den görüldüğü gibi  $f_1(x)$  ve  $f_2(x)$ , komşu olmayan kenarlardaki bir boyutlu bir yükleme fonksiyonlarını göstermektedir. Bu fonksiyonların sürekli bir polinom olduğu düşünüldüğünde onların uygun polinom derecesinde enterpolasyonu yapıldığında elde edilecek  $\varphi_1(x)$  ve  $\varphi_2(x)$  enterpolasyon fonksiyonları oldukça asıllarına yakın olacaktır. Bu durumda bir kenar üzerinde bulunan yükleme değerlerini veren  $\varphi_1(x)$  ve  $\varphi_2(x)$  bir boyutlu

enterpolasyon fonksiyonları ayrı ayrı kendilerine komşu olmayan kenarların kısmi doğrultusundaki noktalarda yükleme değerleri elde edilecek şekilde doğrusal olarak bir kez daha enterpole edilmektedirler (bkz. Şekil 2.7 (b) ve (c)). Daha sonra yüzey üzerindeki toplam yükdeğerlerini elde etmek için yüzey üzerinde tanımlanan her noktadaki yük değerleri toplanıp Şekil 2.7 (a)'daki nihai yük değerleri elde edilmektedir. Burada dikkat edilmesi gereken bir husus;  $\varphi_1(x)$  ve  $\varphi_2(x)$  enterpolasyon fonksiyonlarının polinom dereceleri, bu iki fonksiyonunda aynı yüzey üzerinde yükleme oluşturacağından aynı olması zorunluluğudur. Hatta bu fonksiyonların kısmi diğer doğrultuda doğrusal enterpolasyonun yapıldığı nokta sayısı da ilgili polinom derecesi ile uyumlu olmalıdır. Örneğin  $f_1(x)$  fonksiyonu üçüncü derece,  $f_2(x)$  fonksiyonunda beşinci derece olsun. Buna göre bu iki fonksiyonun enterpolasyon fonksiyonları en az beşinci derece olmalıdır. Bu fonksiyonların oldukları kenarlar üzerinde altı adet nokta olduğu anlaşılmakta olup Lagrange tabanlı şekil fonksiyonu ile enterpole edileceklerdir. Bundan dolayı, bu enterpolasyon fonksiyonlarının kısmi diğer doğrultusunda enterpolasyonu da altı nokta üzerine yapılacak demektir. Nihai olarak, yükleme yapılacak yüzey üzerinde otuzaltı noktada yük değeri elde edilecektir. Bu noktalarda her bir yükleme kenarının yüzey enterpolasyonundan gelen yük değerleri toplanmaktadır.

### 3. BULGULAR VE İRDELEME

Aşağıda, bu çalışmada p-yöntemine dayalı geliştirilen üç boyutlu sonlu elemanlar programının statik, serbest titreşim ve zorlanmış titreşim ile ilgili yapılan uygulamalardan elde edilen bilgiler ilgili başlıklar altında sunulmakta ve irdelenmektedir. Ayrıca p-yöntemi ile h-yöntemi ve birçok ağ yapısında p-yöntemi ile çalışma yapılacağından hp-yöntemiyle karşılaştırma yapılacaktır. ANSYS (2008) programı ile de p-yöntemine ve h-yöntemine ait elde edilen bilgiler sunularak karşılaştırmalar yapılmaktadır.

#### 3.1. Statik Analiz

Geliştirilen sonlu elemanlar programında öncelikle çalışma kapsamında kurgulanan sonlu elemanların güvenilirliği test edilmektedir. Güvenilirlik, iki kısımdan oluşmaktadır. Birincisi eleman içindeki sürekliliğin sağlanıp sağlanılmadığının kontrolüdürki eleman içinde üst üste çakışan, atlamalar yapan, değer sunulamayan açıklıkların bulunduğu durumların yani süreksizliklerin olması istenmez. İkincisi ise elemanlar arasındaki sürekliliktir. Burada da ağ yapısında elemanlar arasında ortak olan noktadaki serbestlik derecelerinin aynı olması beklenmektedir. Bu durum ağ yapısında ortak noktaya sahip elemanların o nokta için ortak adrese sahip olması ile çözümlenmektedir. Bu gereklilik tek başına yeterli olmamaktadır. Ayrıca yerdeğiştirme fonksiyonu tam olmalıdır. Yerdeğiştirme fonksiyonunun tam olması, sabit bir yakınsama hızının varolmasını garanti etmektedir (Desai ve Kundu, 2001). Tam olmaktan kasıt, yerdeğiştirme fonksiyonunun rijit harekete ve sabit şekilde değiştirmeye izin vermesidir (Desai ve Kundu, 2001). Yerdeğiştirme fonksiyonunda sabit terimin olması rijit hareketin olmasına imkân vermektedir. Ayrıca, bu çalışmada kurgulanan sonlu elemanlarda serbestlik derecelerinin sadece aksel ötelenmeler olması ve şekildeğiştirmelerin de bunların birinci mertebe türevleri ile ilişkili olması, yerdeğiştirme fonksiyonunun en az birinci dereceden değişken içermesini gerektirmektedir. Dolayısıyla, bu çalışmada, birinci dereceden değişkene kadar polinom terimlerini içeren ( $C^0$  continuous element) bir yerdeğiştirme fonksiyonu tam olma şartını sağlamış olacaktır. Diğer taraftan yüksek bir yakınsama hız oranı isteniyorsa daha yüksek dereceden değişkenlerin olduğu bir yerdeğiştirme fonksiyonu seçilmelidir. Buraya kadar

anlatılan şartların kolayca test edilebileceği bir örnek, düzgün olmayan geometrili bir ağ yapısında elemanların en az bir ortak nokta paylaşacak şekilde eleman komşuluğunun olduğu, her bir gerilme durumunu yalın olarak ortaya çıkaracak yüklemeler altında sabit gerilmelerin elde edileceği problemler grubu olarak tanımlanabilir. Ancak bu çalışma kapsamında başka bir programla da sonuçlar karşılaştırılacağından tüm gerilme durumlarını yalın olarak dikkate alan bir grup yükleme durumu düşünülmeyecektir.

İlk iki örnekte yukarıda belirtilen güvenilirlik şartlarının içerilip içerilmediğini görmek amacıyla güvenilirlik testi yapılacaktır. Birinci örnek konsol eleman ucunda sabit gerilme doğuracak düzgün yayılı aksenal bir yükleme ile yine kiriş ucunda eğilme etkisi doğuracak doğrusal bir yükleme altında dikkate alınacaktır. İkinci örnek iç cephesinden düzgün yayılı yük ile yüklenen çeyrek tüp olacaktır. Bölgesel dönüşüm açısından ikinci örnekte tahrif edilmiş bir ağ yapısı da ayrıca kullanılacak, hatta, bir elemanda bir yüzey tamamen bir kenara indirgenecektir.

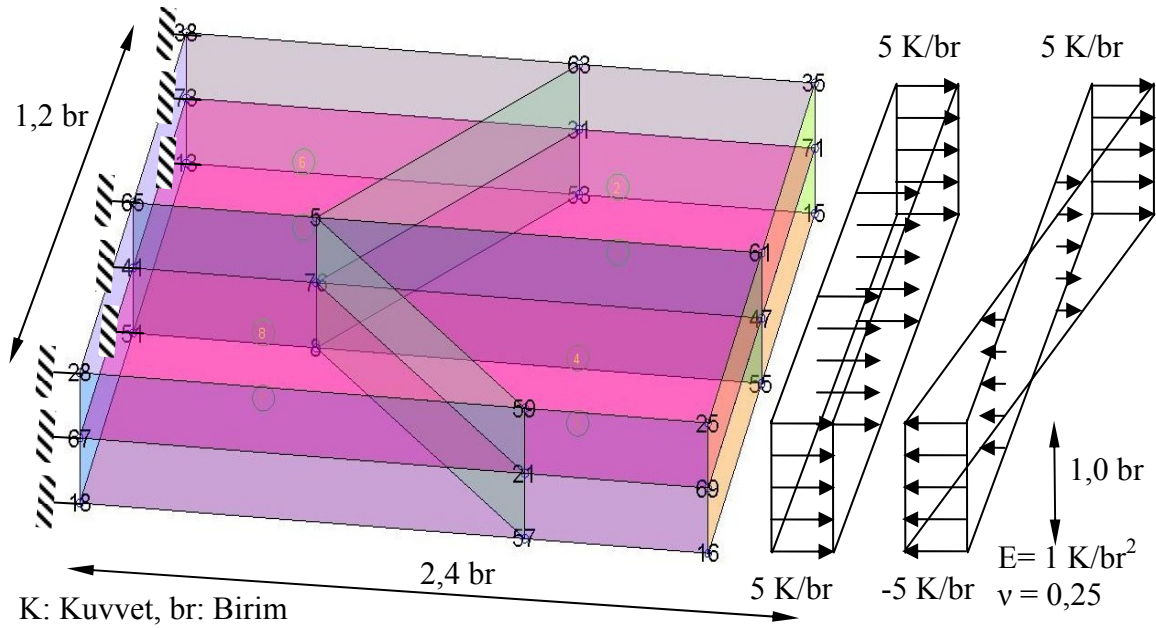
Yukarıda dikkate alınan mekanik örnekler dışında yapısal bir uygulama olarak kartezyen koordinatlarda tanımlanan dairesel yüzeyli değişken kalınlıklı bir sanayi bacası hem düzgün yayılı yük altında hem de iki farklı doğrusal olmayan yayılı yük altında ayrı ayrı incelenecektir.

Dikkate alınan örnekler ayrıca ANSYS sonlu elemanlar programı ile ağ yapısı ve sonlu eleman yöntemi açısından doğrudan veya dolaylı olarak karşılaştırılacaktır. ANSYS programında polinom derecesi sekize kadar yükseltilebilmektedir.

### **3.1.1. Konsol Eleman (Eleman İçi ve Elemanlar Arası Süreklilik Testi)**

Elastostatik bir konsol eleman problemi, dörtgen prizma şeklindeki elemanlarla oldukça seyrek bir ağ ile ayrıklaştırılmaktadır. Konsol elemanın ucunda iki farklı yükleme durumu düşünülmektedir. Birinci durum, kiriş boyunca düzgün çekme gerilmesi doğurması beklenen düzgün yayılı yüklemedir. İkinci durum ise moment oluşturan eğrisel yükleme durumudur. Problemin geometrik özellikleri malzeme özellikleri ve yükleme durumu birimsiz olup Şekil 3.1’de verilmektedir. Her bir yükleme durumuna bağlı olarak polinom derecesi 10’a kadar yükseltilecek bu çalışma kapsamında kurgulanan altı farklı sonlu eleman tipi ve ANSYS programı dikkate alınacaktır. Düzgün yayılı yükleme için Şekil 3.1’de gösterilen 35 noktasına ait yatay yerdeğiştirme değerleri Şekil 3.2’de ve

normal gerilme değerleri Şekil 3.3’de verilmektedir.

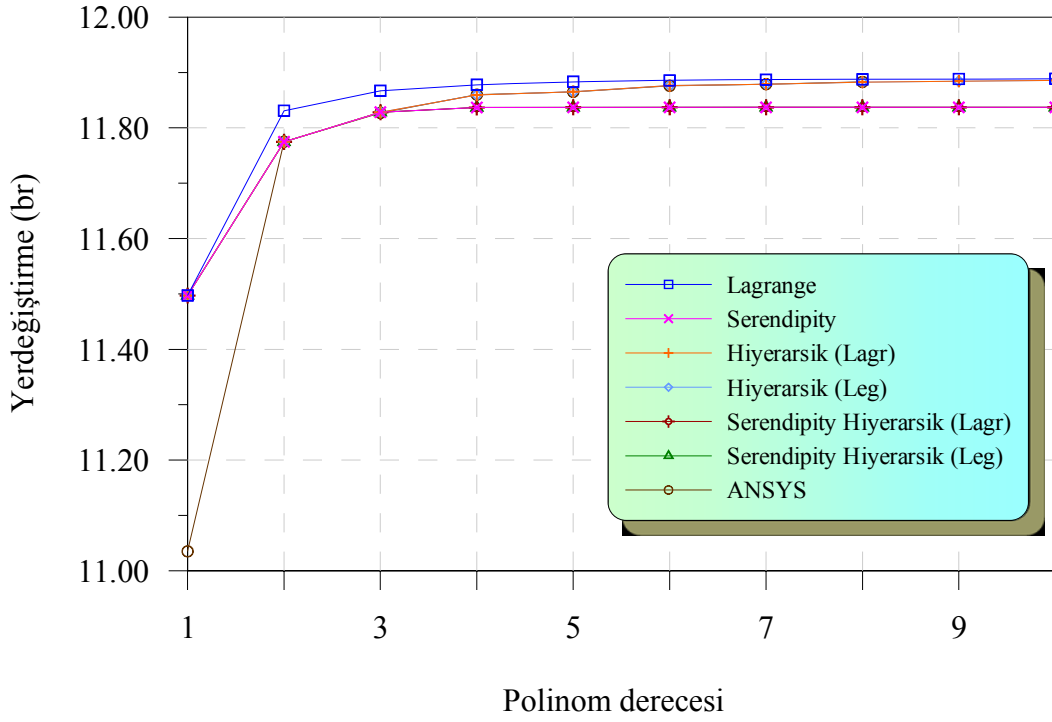


Şekil 3.1. Konsol elemanın sonlu eleman modeli ile geometri ve malzeme özellikleri

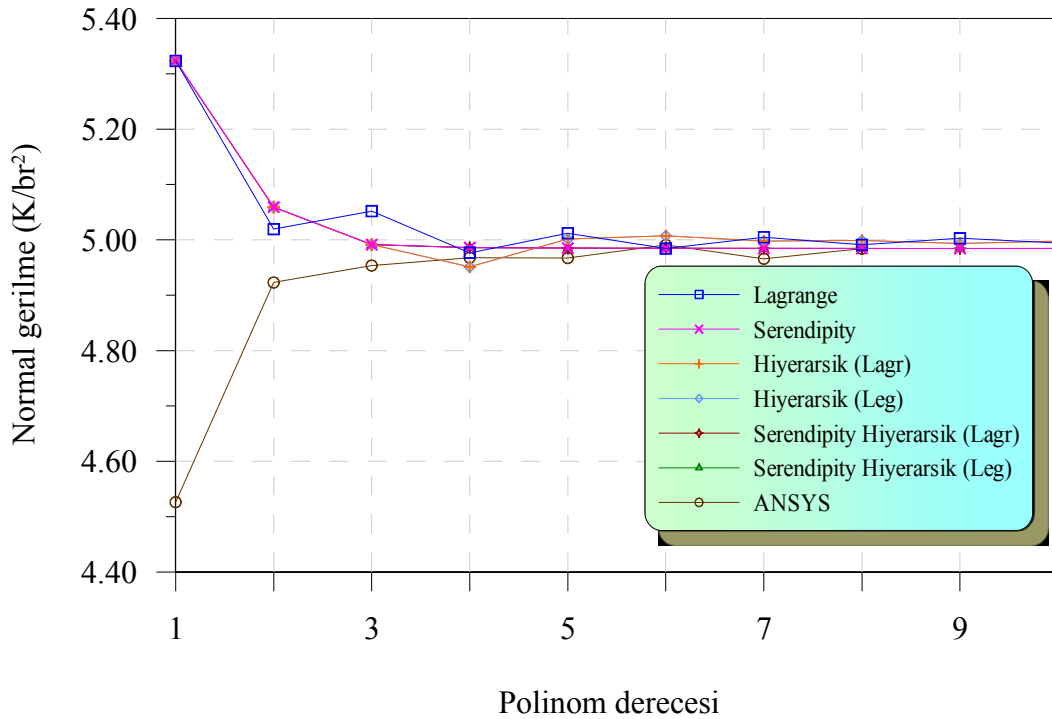
Şekil 3.2’den görüldüğü gibi, düzgün yayılı yük altında elde edilen konsol elemanın normal eksenine doğrultusundaki yerdeğiştirme değerleri genel olarak aynı değer üzerine yakınsamaktadırlar. Bununla beraber ANSYS, hiyerarşik Lagrange ve hiyerarşik Legendre elemanlarına ait değerler çakışarak yüksek polinom dereceleri için Lagrange elemanın değerlerine yaklaşmaktadır. Serendipity, serendipity hiyerarşik Lagrange ve serendipity hiyerarşik Legendre elemanlarına ait değerler ise yine çakışarak yüksek polinom dereceleri için yakınsama göstermektedir.

Şekil 3.3’den görüldüğü gibi, düzgün yayılı yük altında elde edilen normal gerilme değerleri, polinom derecesinin artırılması ile uygulanan yayılı yük değeri olan 5 K/br değeri üzerinde oldukça düşük genlikli bir dalgalanma ile yakınsamaktadır. Ancak kurgulanan elemanların yakınsama davranışı ile ANSYS değerlerinin yakınsama davranışı farklı olmaktadır. Kurgulanan elemanların değerleri polinom derecesi arttıkça azalarak yakınsarken ANSYS değerleri artarak yakınsamaktadır.

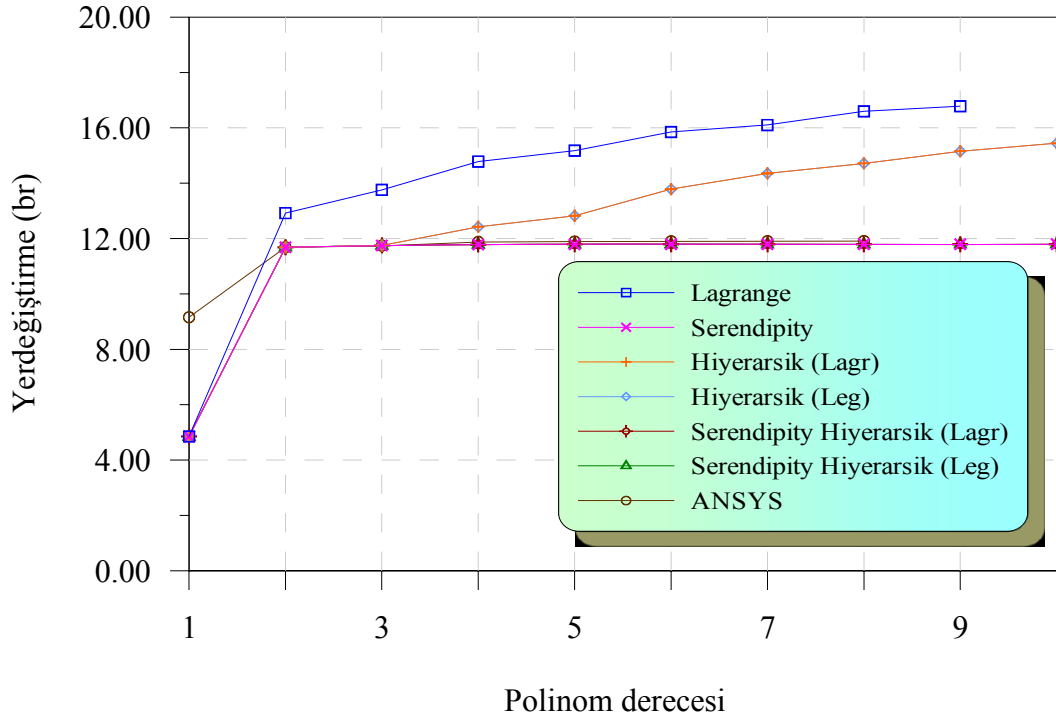
Moment oluşturan doğrusal yayılı yükleme için 35 noktasına ait yatay yerdeğiştirme değerleri Şekil 3.4’de ve normal gerilme değerleri Şekil 3.5’de verilmektedir.



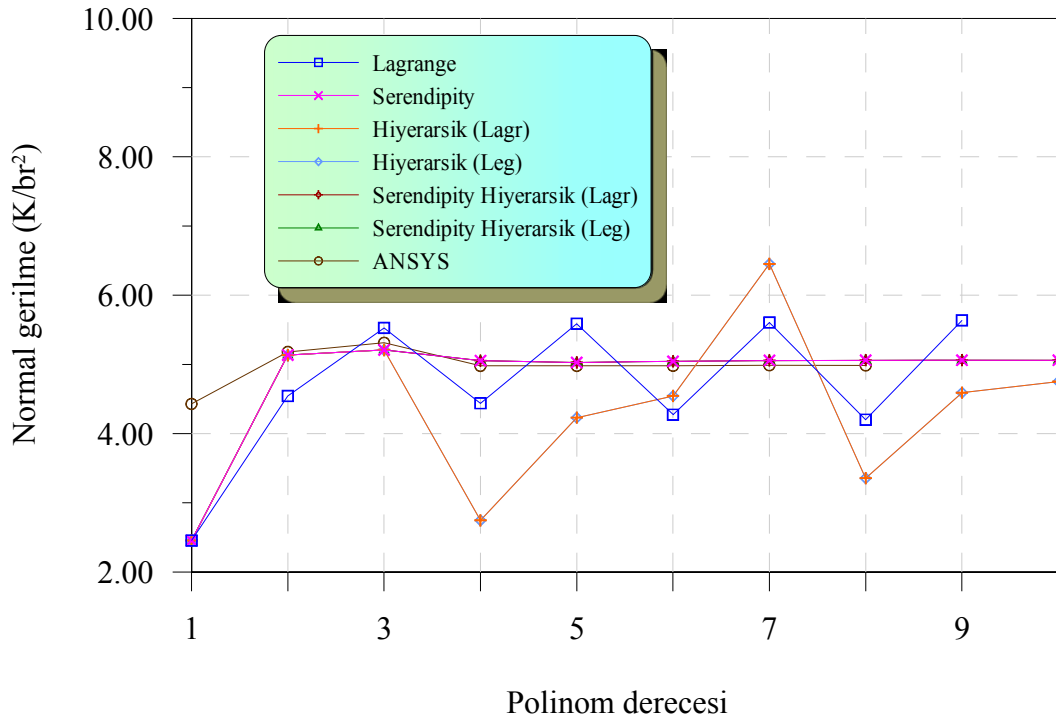
Şekil 3.2. Düzgün yayılı yük etkisindeki konsol elemanın 35 nolu noktasının yerdeğiştirmeleri



Şekil 3.3. Düzgün yayılı yük etkisindeki konsol elemanın 35 nolu noktasının normal gerilmeleri



Şekil 3.4. Moment oluşturan doğrusal yayılı yük etkisindeki konsol elemanın 35 nolu noktasının yerdeğiştirmeleri

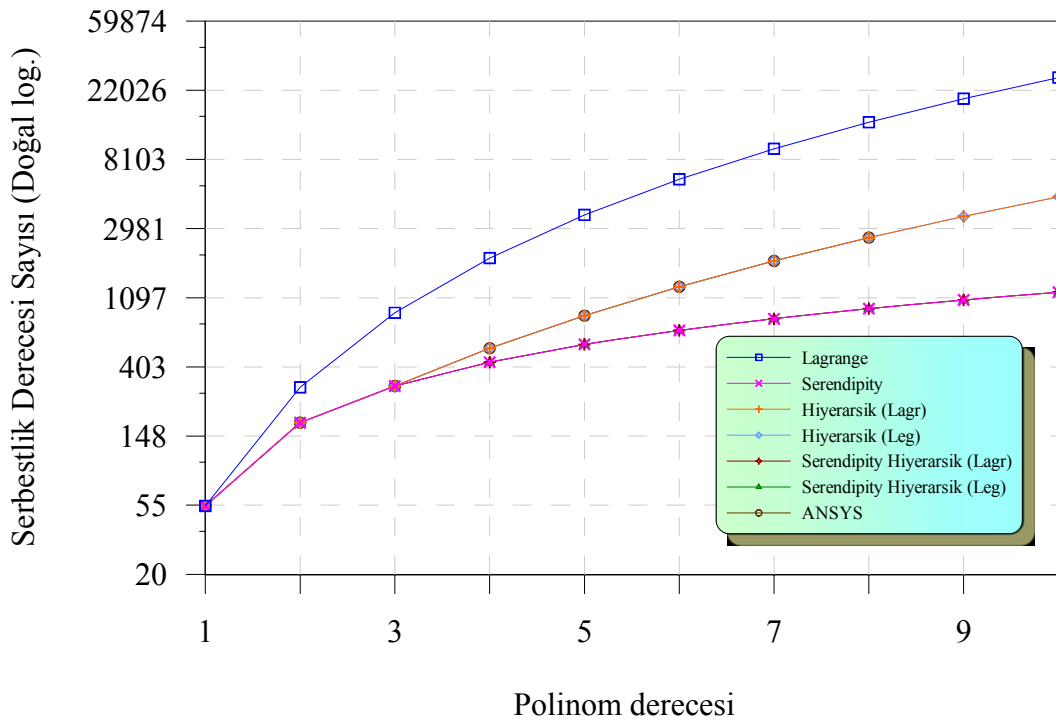


Şekil 3.5. Moment oluşturan doğrusal yayılı yük etkisindeki konsol elemanın 35 nolu noktasının normal gerilmeleri

Şekil 3.4'den görüldüğü gibi, moment oluşturan doğrusal yayılı yük altında konsol elemanın normal eksenine doğrultusundaki Lagrange, Hiyerarşik Lagrange ve hiyerarşik Legendre elemanlarına ait yerdeğiştirme değerleri polinom derecesiyle sürekli artmakta, ancak artım hızı yüksek polinom dereceleri için düşmektedir. Serendipity, serendipity hiyerarşik Lagrange ve serendipity hiyerarşik Legendre elemanlarına ait değerler ise yaklaşık 12 br değerinin üzerinde yakınsamaktadır. Ayrıca ANSYS programından elde edilen değerlerin de bu eleman değerleri ile oldukça benzer olduğu görülmektedir.

Şekil 3.5'den görüldüğü gibi, moment oluşturan doğrusal yayılı yük altında Lagrange elemanına ait normal gerilme değerleri  $5 \text{ K/br}^2$  değeri etrafında düzgün bir salınım yaparken hiyerarşik Lagrange ve hiyerarşik Legendre elemanlarına ait değerler düzgün olmayan bir salınım yapmaktadır. Diğer taraftan serendipity, serendipity hiyerarşik Lagrange ve serendipity hiyerarşik Legendre elemanlarına ait değerler ANSYS programından elde edilen değerler ile oldukça benzer bir davranış ile  $5 \text{ K/br}^2$  değerine yakınsamaktadır.

Kurgulanan sonlu eleman tipleri ve ANSYS programı için serbestlik derecesi sayıları Şekil 3.6'da verilmektedir.



Şekil 3.6. Kurgulanan altı farklı sonlu eleman tipine ve ANSYS programına ait serbestlik derecesi sayıları

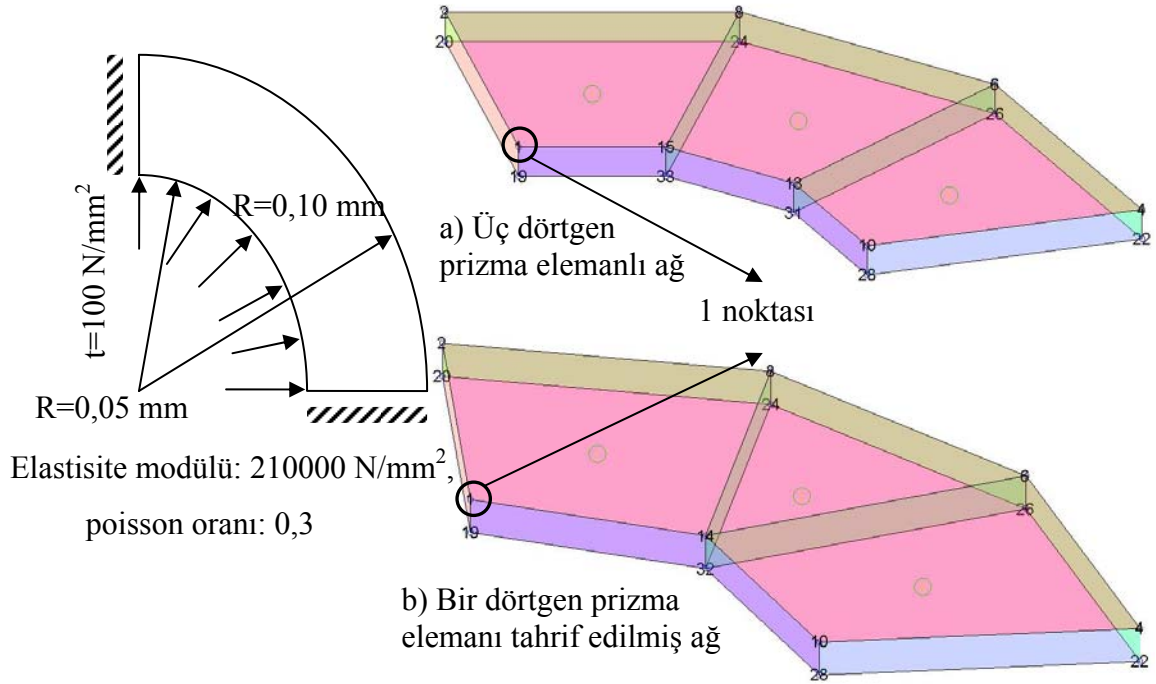


Şekil 3.6'dan görüldüğü gibi, serbestlik derecesi sayısı, sabit bir polinom derecesi için en fazla Lagrange elemanda oluşmaktadır. Daha sonra sırası ile hiyerarşik Lagrange, hiyerarşik Legendre ve ANSYS programında oluşmaktadır. En az ise serendipity, serendipity hiyerarşik Lagrange ve serendipity hiyerarşik Legendre elemanlarında oluşmaktadır. Serbestlik sayısının polinom derecesi ile artım hızı yüksek hızdan düşük hıza doğru yine aynı sırada oluşmaktadır. Lagrange elemanın serbestlik derecesi açısından kullanım maliyeti, yüksek polinom dereceleri için oldukça fazla olmaktadır.

Konsol eleman örneğinde dikkate alınan yükleme durumları ve elde edilen yerdeğiştirme ve normal gerilme değerleri ışığında kurgulanan elemanların güvenilir sonuçlar verdiği görülmektedir. Bu test ile birlikte, polinom derecesi artırıldıkça yeni serbestlik derecelerinin oluşması ile, problemdeki mevcut ağ üzerinde komşu olan elemanların sürekliliğinin, komşu yüzeylerde, kenarlarda ve köşe noktalarında devam ettiği, yani, elemanlar arası sürekliliğin bozulmadığı anlaşılmaktadır. Ayrıca moment etkisi yaratan doğrusal yayılı yüke karşı çok az elemanlı bir ağda kayma kilitlenmesinin (Cook, 1989) polinom derecesi artırılması ile ortadan kaybolduğu görülmektedir. Normalde bu etki doğrusal enterpolasyon fonksiyonuna sahip sonlu elemanlarda görülmektedir.

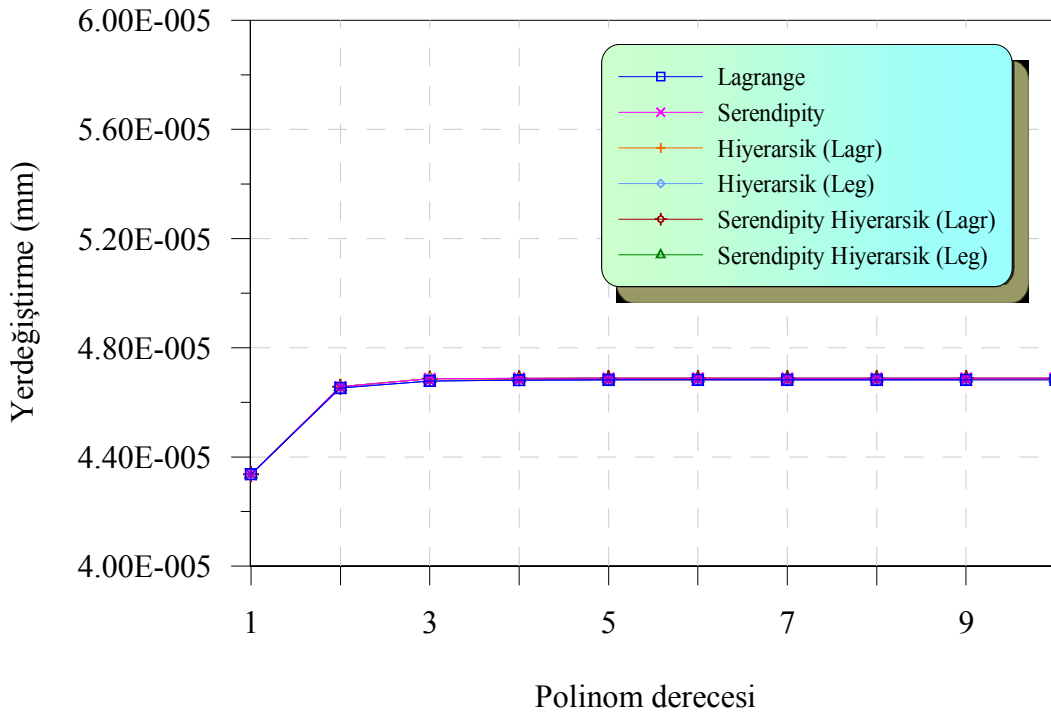
### **3.1.2. Çeyrek Tüp (Kartezyen Koordinatlarda Eğrisel Yüzeyde Düzgün Yayılı Yükleme)**

Radyal doğrultuda düzgün yayılı yüke maruz bir tüp örneği, yükleme ve geometrik simetriden dolayı çeyrek tüp olarak dikkate alınacaktır. Simetriye uygun olarak sınır koşulları Şekil 3.7'de gösterildiği gibi düzenlenmektedir. Örnek iki farklı ağ ile ayrılaştırılmaktadır. İkinci ağ düzeninde bir dörtgen prizma elemanın bir yüzeyi yok edilmiştir.

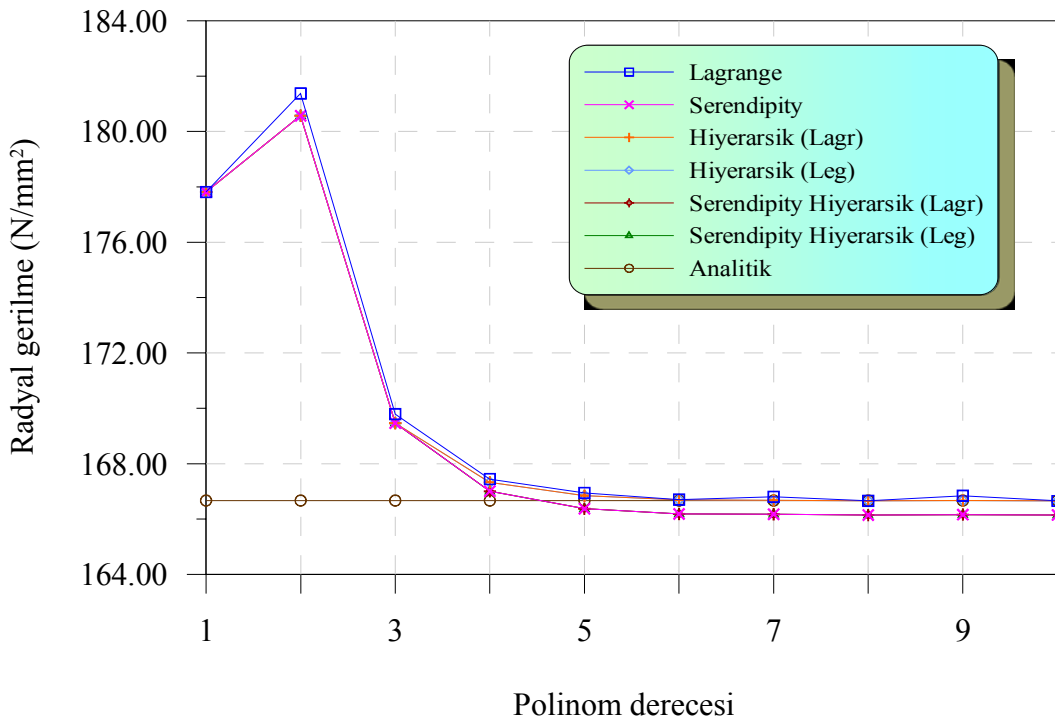


Şekil 3.7. Çeyrek tüpün a) üç dörtgen prizma elemanlı, b) bir dörtgen prizma elemanı tahrif edilmiş sonlu eleman ağı

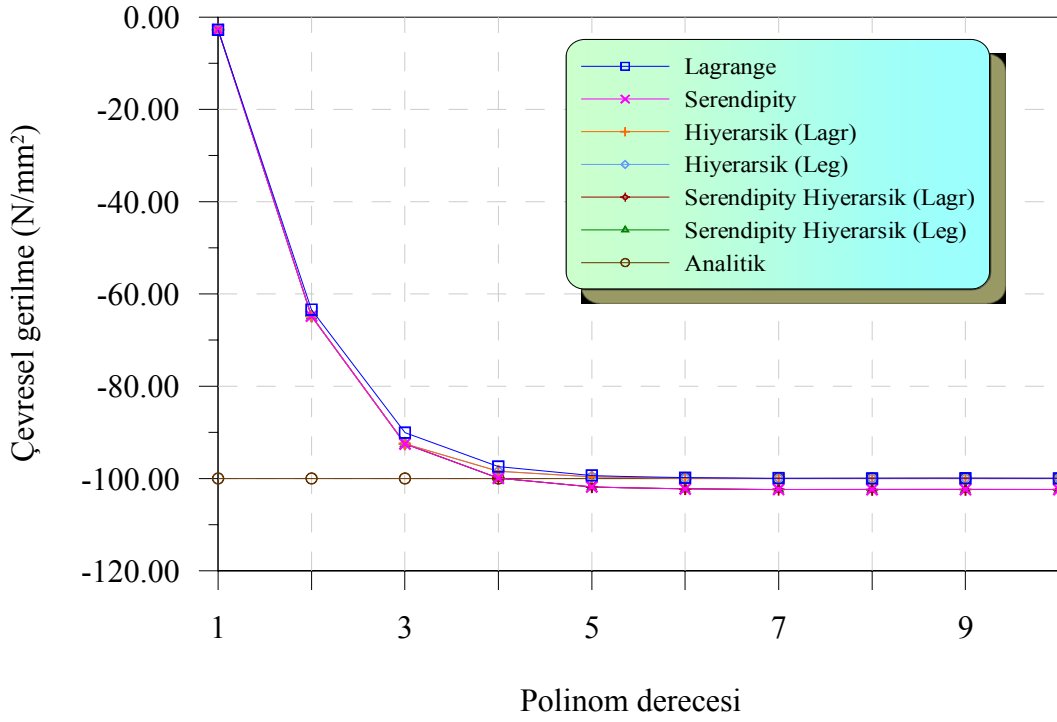
Şekil 3.7’de gösterilen her iki ağ yapısında da yüklemenin yapıldığı tüpün iç çepheri ve yüklemenin olmadığı dış çepheri gerçek geometrisine uygun olacak şekilde Karma Fonksiyon Yöntemi ile dikkate alınmaktadır. Böylelikle, modellerde, gerçek geometrinin temsiliyetinden kaynaklanan hataları azaltmak amacıyla eleman artırılmasına gerek duyulmamakta ve kutupsal koordinatlar kullanılmadan da radyal yükleme yapılabilmektedir. Birinci ağda polinom derecesi ona kadar yükseltilecek altı farklı kurulumdaki şekil fonksiyonuna, ikinci ağda ise üç farklı kurulumdaki şekil fonksiyonuna sahip sonlu eleman tipleri dikkate alınmaktadır. Radyal ve çevresel gerilme değerleri ile radyal doğrultudaki yerdeğiştirme değerleri ve serbestlik derecesi sayıları, Şekil 3.7’de gösterilen 1 noktası için sırası ile, birinci ağ (bkz. Şekil 3.7 (a)) için Şekil 3.8, Şekil 3.9, Şekil 3.10 ve Şekil 3.11’de; ikinci ağ (bkz. Şekil 3.7 (b)) için Şekil 3.11, Şekil 3.12, Şekil 3.13 ve Şekil 3.14’de verilmektedir. Problemin analitik çözümü de ayrıca gerilme diyagramlarında karşılaştırma amacıyla sunulmaktadır.



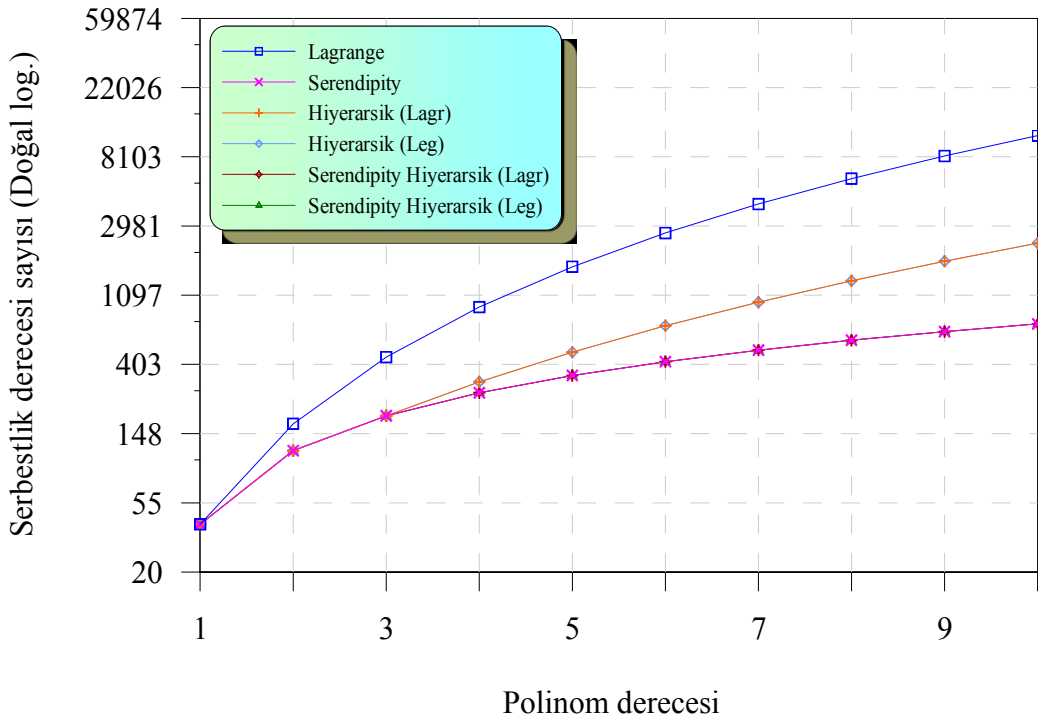
Şekil 3.8. İç çepherinden radyal doğrultuda düzgün yayılı yük etkisindeki çeyrek tüpün birinci ağ için 1 noktasının yerdeğiştirmeleri



Şekil 3.9. İç çepherinden radyal doğrultuda düzgün yayılı yük etkisindeki çeyrek tüpün birinci ağ için 1 noktasının radyal gerilmeleri



Şekil 3.10. İç çepherinden radyal doğrultuda düzgün yayılı yük etkisindeki çeyrek tütün birinci ağ için 1 noktasının çevresel gerilmeleri

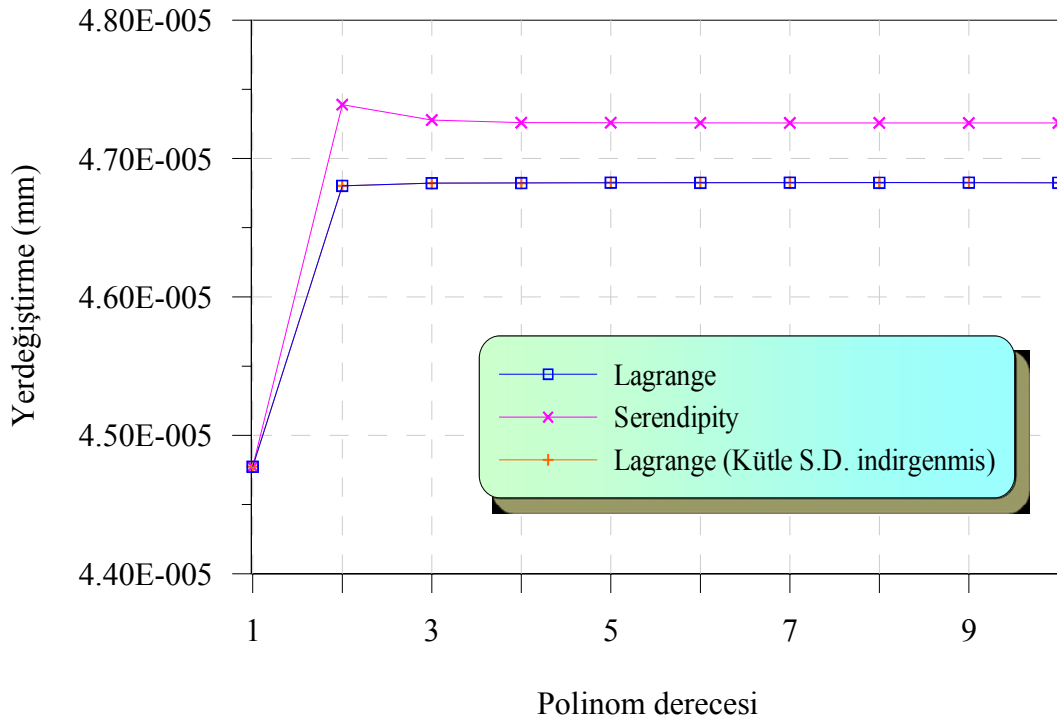


Şekil 3.11. Çeyrek tütün birinci ağ için farklı sonlu eleman tiplerine göre serbestlik derecesi sayıları

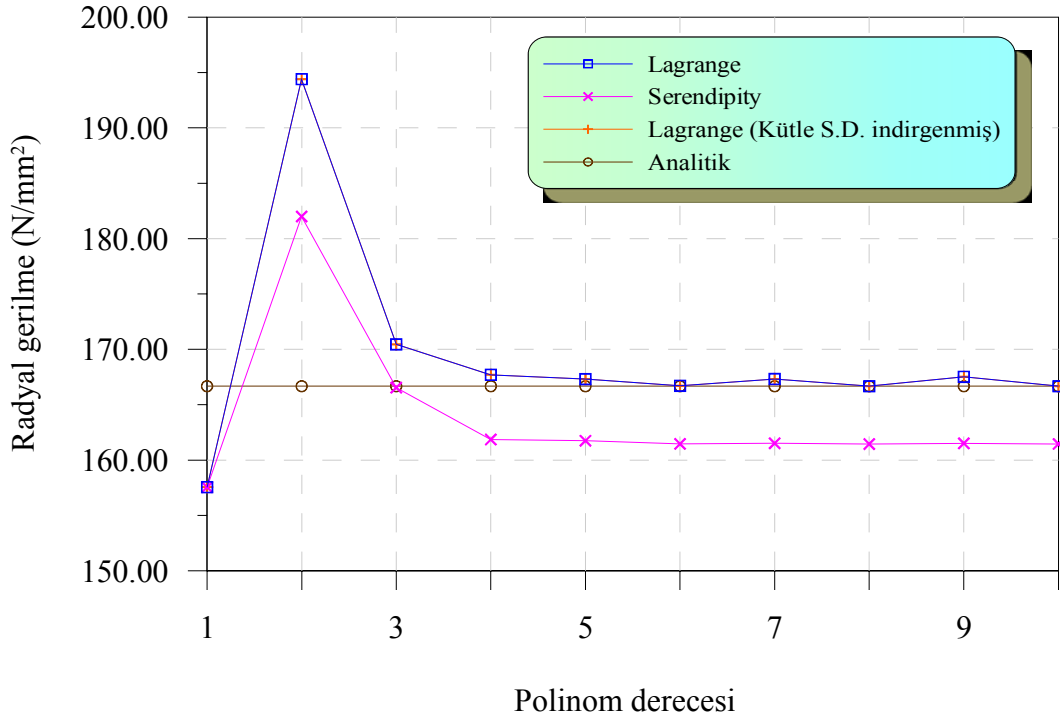
Şekil 3.8'den görüldüğü gibi, radyal yükleme altında elde edilen mesnet bölgesindeki radyal yerdeğiştirme değerleri dikkate alınan her eleman için üst üste örtüşmekte ve hemen yakınsama göstermektedir.

Şekil 3.9'daki radyal gerilme ve Şekil 3.10'daki çevresel gerilme değerleri polinom derecesi 5 itibariyle genel olarak yakınsamaktadırlar. Serendipity, serendipity hiyerarşik Lagrange ve serendipity hiyerarşik Legendre elemanlar analitik değerden az hissedilir bir derece küçük değerler sunmaktadır.

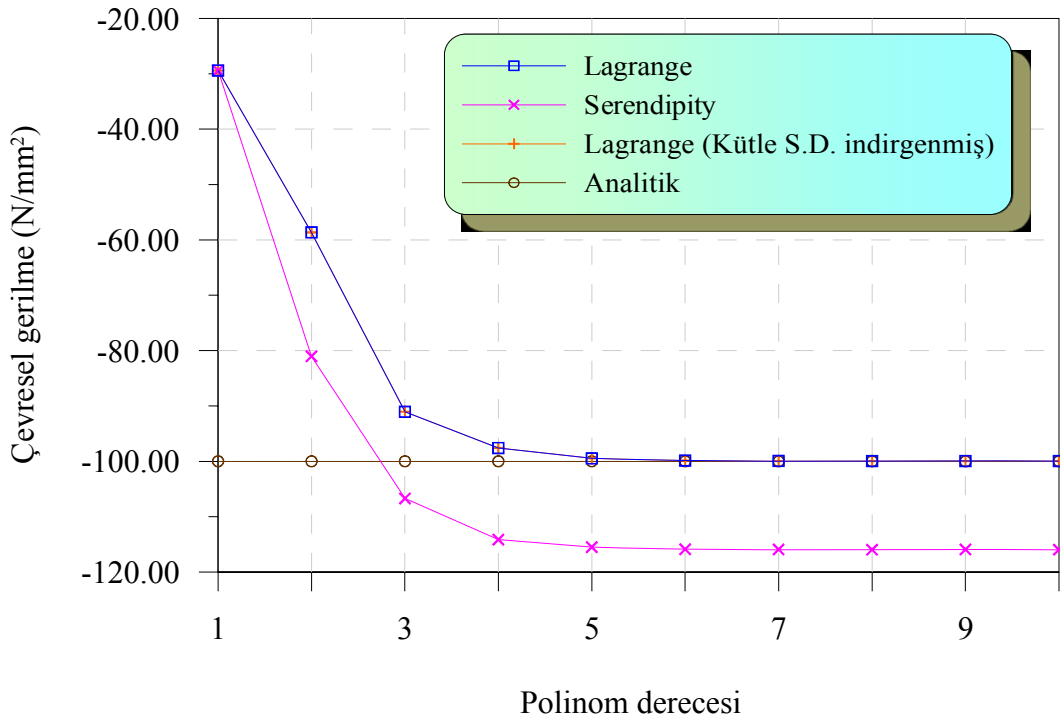
Şekil 3.11'den görüldüğü gibi, serbestlik derecesi sayısı polinom derecesi ile yine en fazla Lagrange elemanda olurken en az serendipity, serendipity hiyerarşik Lagrange ve serendipity hiyerarşik Legendre elemanlarında olmaktadır. Bir önceki problemde edinilen izlenim burada da aynen gerçekleşmektedir.



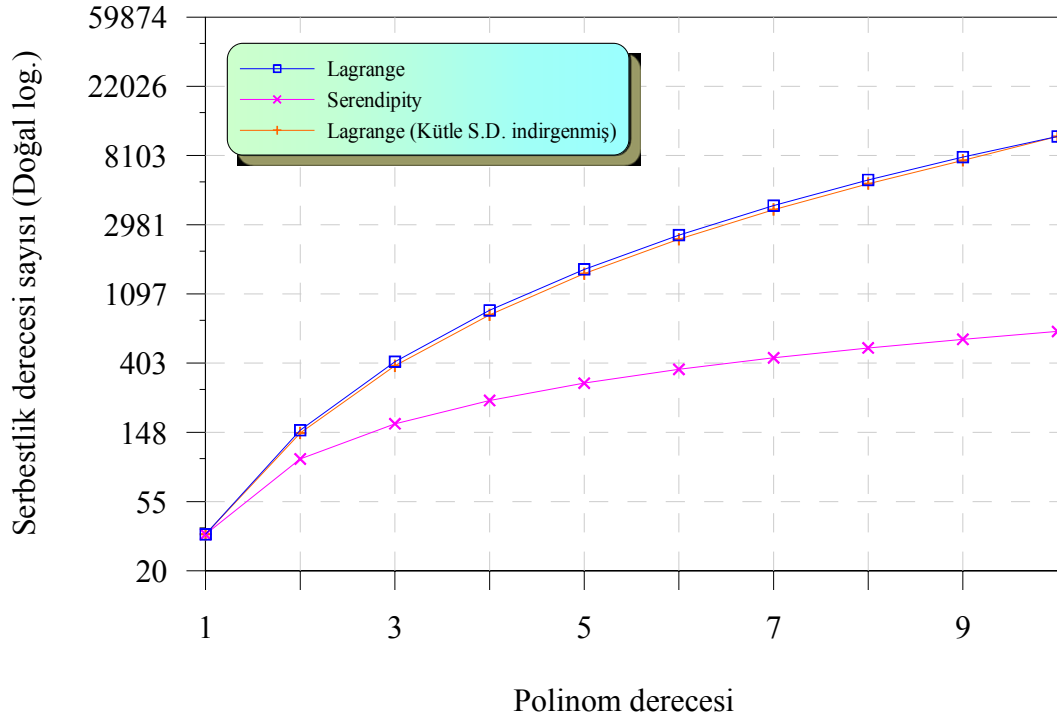
Şekil 3.12. İç çepherinden radyal doğrultuda düzgün yayılı yük etkisindeki çeyrek tüpün ikinci ağ için 1 noktasının yerdeğiştirme diyagramı



Şekil 3.13. İç çepherinden radyal doğrultuda düzgün yayılı yük etkisindeki çeyrek tütün ikinci ağ için 1 noktasının radyal gerilmeleri



Şekil 3.14. İç çepherinden radyal doğrultuda düzgün yayılı yük etkisindeki çeyrek tütün ikinci ağ için 1 noktasının çevresel gerilmeleri



Şekil 3.15. Çeyrek tüpün ikinci ağ için farklı sonlu eleman tiplerine göre serbestlik derecesi sayıları

Şekil 3.12'den görüldüğü gibi, ikinci ağ için radyal yerdeğiştirme değerleri genel itibariyle uyum içinde olup birinci ağdan elde edilen değerlerle de örtüşmektedir.

Şekil 3.13'den görüldüğü gibi, ikinci ağa ait radyal gerilme değerleri genel olarak yakınsamaktadır. Birinci ağda olduğu gibi serendipity elemanı daha düşük değerler vermektedir.

Şekil 3.14'den görüldüğü gibi, ikinci ağa ait çevresel gerilme değerleri analitik değerle polinom derecesi 6'dan itibaren tam olarak uyuşmakla beraber serendipity elemana ait değerler yaklaşık %10 farklı olmaktadır.

Şekil 3.15'den görüldüğü gibi, önceki problemlerde elde edilen izlenimler geçerli olmakla birlikte, bu problemde ilk defa kullanılan kütle serbestlik dereceleri indirgenmiş Lagrange elemanın Lagrange elemana göre bir miktar daha az serbestlik derecesi kullanılmaktadır. Kütle noktalarının eleman içinde olmasından dolayı komşuluğu olan elemanlarda bir ortaklığı yoktur. Dolayısı ile indirgenmeleri durumunda ilgili ağdaki süreklilik bozulmayacağından indirgenmemesi durumundakilerle aynı sonuçlar bulunacaktır. İkinci ağ için elde edilen diyagramlara bakıldığında zaten Lagrange elemanla kütle serbestlik dereceleri indirgenmiş Lagrange elemanın aynı değerleri verdiği görülebilmektedir.

Dikkate alınan bu problemde eğri yüzey veya kenarlara sahip ortamların tam bir geometrik tanımlama ile temsil edilebildiği ve elde edilen çözümler de geometrik hatadan arındırıldığından ağlarda, bu anlamda, eleman artımına gitmenin bir zorunluluk olmadığı görülmektedir. Ayrıca bu eğri yüzeylerde eğriliğin normali doğrultusunda yükleme yapılabilmekte ve bunun vasıtasıyla da gerçek yükleme durumunu yansıtmak için eleman artımına gerek kalmamakta ve kutupsal koordinatların kullanımı gerekliliği de ortadan kalkmaktadır.

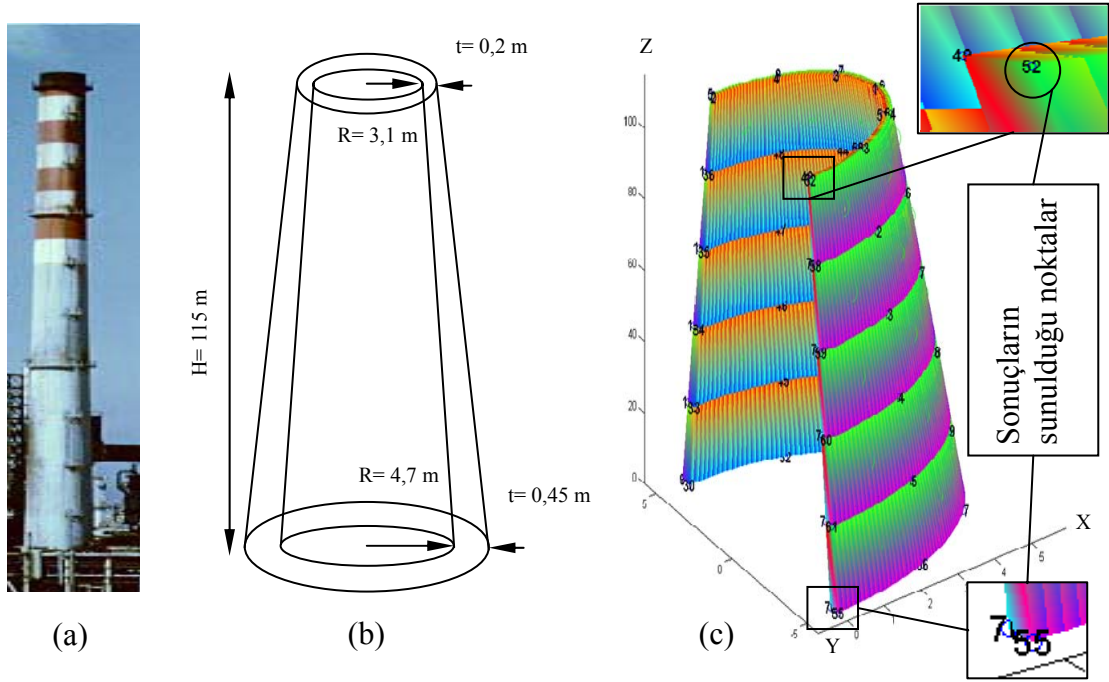
Birinci ağda kullanılan bazı eleman çeşitleri ikinci ağda kullanılmamıştır. Bunlar hiyerarşik tabanlı olan elemanlardır. Bu elemanlarda üç farklı türden şekil fonksiyonu kurgusunun olması onların tahrif edilmiş dörtgen prizma eleman olarak kullanılmalarına engel olmaktadır. Bu anlamda, az serbestlik dereceli eleman olarak sadece serendipity elemanın kalması indirgenmiş serbestlik dereceli elemanların kullanılması durumunu ortaya koymuştur. İndirgeme durumu bu problemde sadece kütle serbestlik dereceleri seviyesinde yapıldıysa da daha da ileri gidilerek yüzey serbestlik dereceleri seviyesinde de yapılabilir. Ancak bu durumda ağdaki eleman komşuluklarında serbestlik derecelerinde süreksizlikler üretilmiş olur ki bu elemanlar indirgenen komşuluklarda süreksiz (incompatible or non-conform) elemanlar olarak düşünülebilir.

### **3.1.3. Kartezyen Koordinatlarda ve Eğrisel Yüzeyde Düzgün Yayılı Yük Etkisindeki Sanayi Bacası**

17 Ağustos 1999 yılında meydana gelen Kocaeli depremi sırasında yıkılan Tüpraş bacalarından biri, örnek olarak dikkate alınmaktadır. Bacanın yüksekliği 115m olup; yarıçapı yüksekliği boyunca doğrusal azalan dairesel halka şeklinde bir yatay kesite aittir ve Şekil 3.16'da verilmektedir. Elastisite Modülü  $3,0 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ , poisson oranı 0,2 dir. TS 498'e göre belirlenen düzgün yayılı rüzgâr yüklemesi dikkate alınacaktır (bkz. Ek Şekil 1.6). Yükleme ve geometri simetrik olduğundan bacanın matematiksel modeli Şekil 3.16'da görüldüğü gibi bacanın yarısı üzerinde kurulmaktadır. Düzgün yayılı yükleme altında bacanın simetrik kısmının sonuçlarının hem ANSYS programından elde edilen sonuçlarla karşılaştırması yapılacak hem de kurgulanan sonlu elemanlar için yakınsamanın sağlandığı ağ yapısına karar verilecektir. Elde edilecek olan bu ağ yapısı bir sonraki örnek olan; n. dereceden doğrusal olmayan yayılı yüklemeye örnek bir yayılı yükleme altındaki sanayi bacasının simetrik kısmının yakınsamış ağ yapısını belirlemede temel ağ yapısı



olacaktır.



Şekil 3.16. Sanayi Bacasının a) gerçek ( Danış ve Görgün, 2005), b) fiziksel ve c) simetrik kısmının yükseklik boyunca beş, yatay kesit boyunca altı ve kalınlık boyunca bir parçaya bölüdüğü matematiksel modeli

### 3.1.3.1. ANSYS Programı ile Düzgün Yayılı Yük Etkisindeki Sanayi Bacasının Statik Analizi

Bu çalışmada geliştirilen sonlu elemanlar programı ile ANSYS programı farklı ağ yapıları ile çözüme ulaştığından her biri için ayrı bir süreç dikkate alınmıştır. Bu nedenle, önce, ön bir çalışmayla belirlenen ve Tablo 3.1’de verilen sekiz farklı ağ yapısı için ANSYS programı ile irdeleme yapılacaktır.

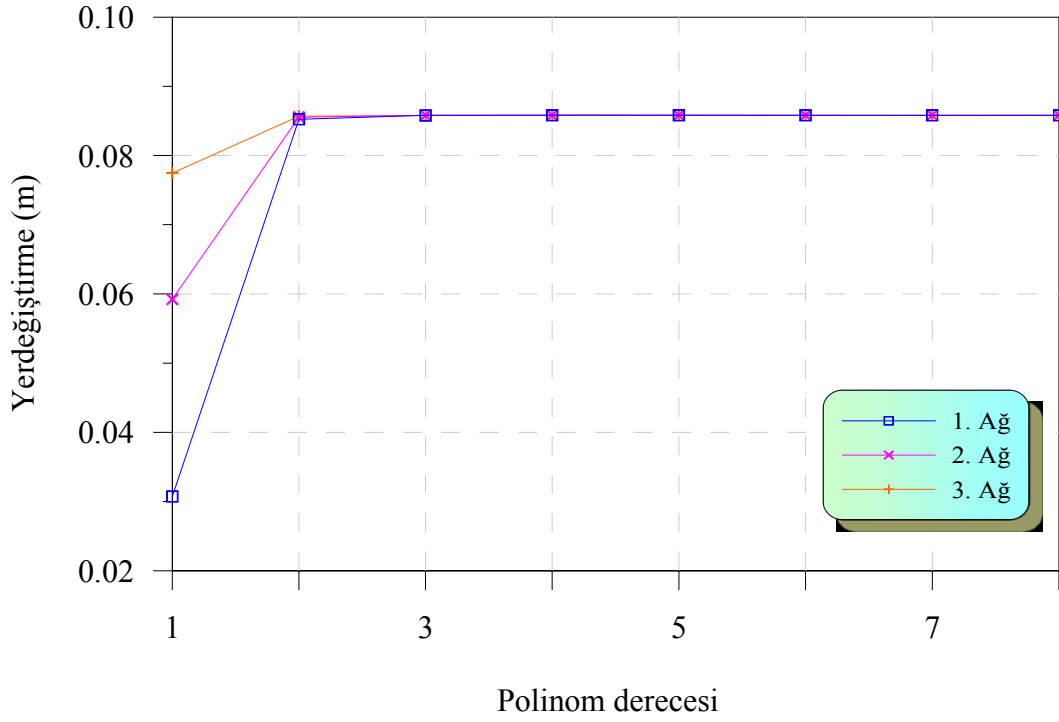
Tablo 3.1’den görüldüğü gibi, ağ yapıları, hem yatay kesitte hem de düşeyde mümkün olduğunca minimum eleman sayısı oluşturulacak şekilde belirlenmeye çalışılmıştır. Yatay kesit boyunca her ağ türünde 40 elemana bölümlenimin, geometrik temsilin mümkün olduğunca en iyi ve en asgari sonlu eleman sayısına ihtiyaç doğuracak şekilde yeterli olduğu yapılan ön çalışmalarda görülmüştür. Yatay kesit boyuncaki eleman sayısının belli bir eşik değerinden az olmasının, yükseklik boyunca eleman sayısı artırılrsa bile, gerilme değerlerindeki yakınsama hızında doğru değere ulaşamayacak düzeyde yavaşlamaya neden olduğu görülmüştür.

Tablo 3.1. Düzgün yayılı yük etkisindeki sanayi bacasının yarı simetrik kısmında ANSYS programında dikkate alınan farklı ağ yapıları

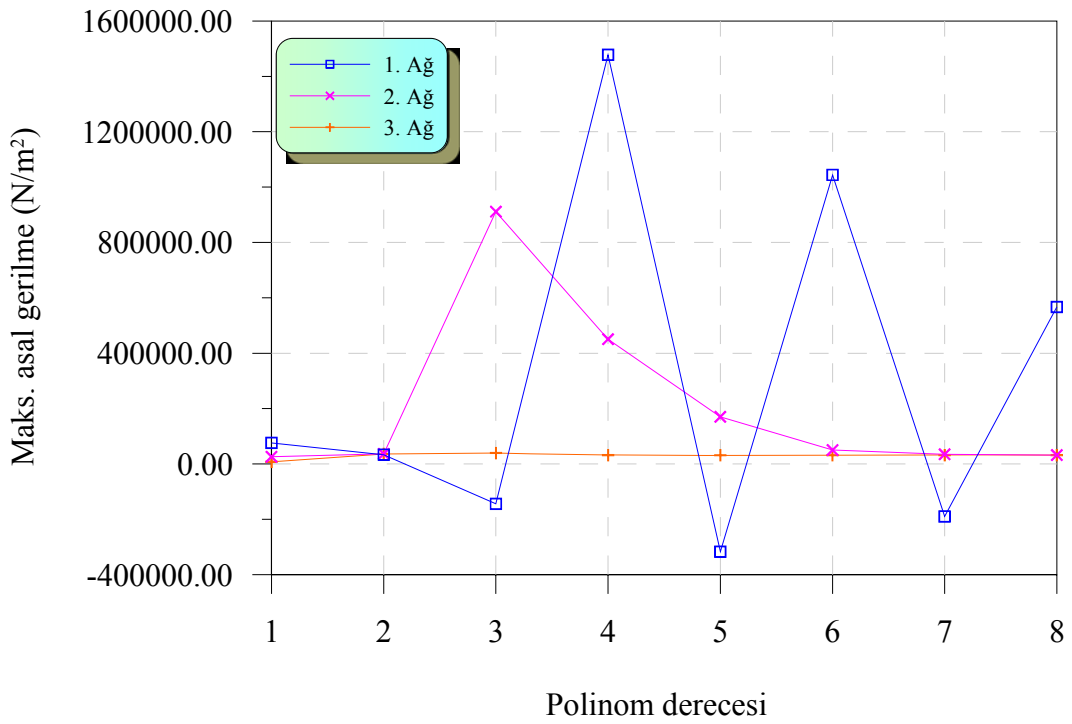
Ağ türü	Eleman sayısı			Ağdaki toplam	Polinom derecesi	Maksimum S.D.S.
	Yatay kesit boyunca	Yükseklik boyunca	Kalınlık boyunca			
1	20	5	1	100	1-8	32290
2	20	10	1	200	1-8	64580
3	20	20	1	400	1-8	129160
4	20	40	1	800	1-8	258320
5	20	60	1	1200	1-8	387480
6	20	100	1	2000	1-8	645800
7	20	200	1	4000	1-7	918000
8	20	400	1	8000	1-5	822800

Tablo 3.1'deki ağ türlerinde kalınlık boyunca bir eleman kullanılmasının nedeni, kullanılan sonlu eleman tipinin kalınlık boyuncaki değişimi bir eleman ile temsil edilebileceğidir.

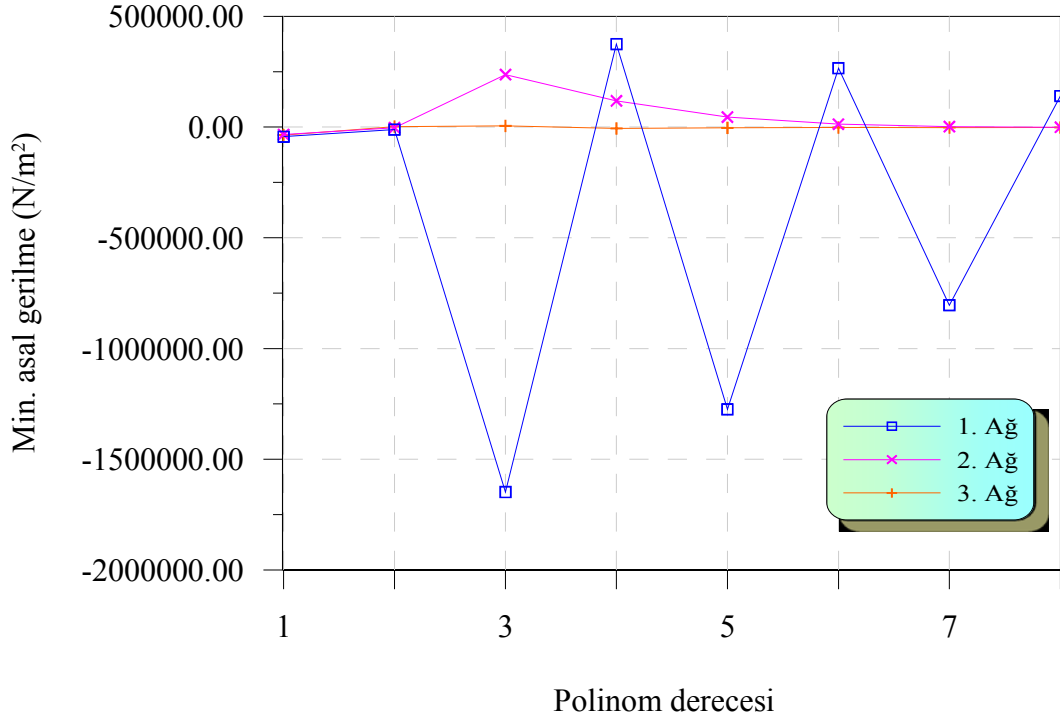
Tablo 3.1'de verilen sekiz farklı ağ türünün her birinin kendisine karşılık gelen polinom derecesine kadar artım yapılarak elde edilen von Mises, maksimum asal ve minimum asal gerilme değerleri ile radyal doğrultudaki yerdeğiştirme değerleri, Şekil 3.16'da gösterilen 52 nolu nokta için sunulacaktır. İlk üç ağ türü için sonuçlar, Şekil 3.17, Şekil 3.18, Şekil 3.19 ve Şekil 3.20'de verilmektedir.



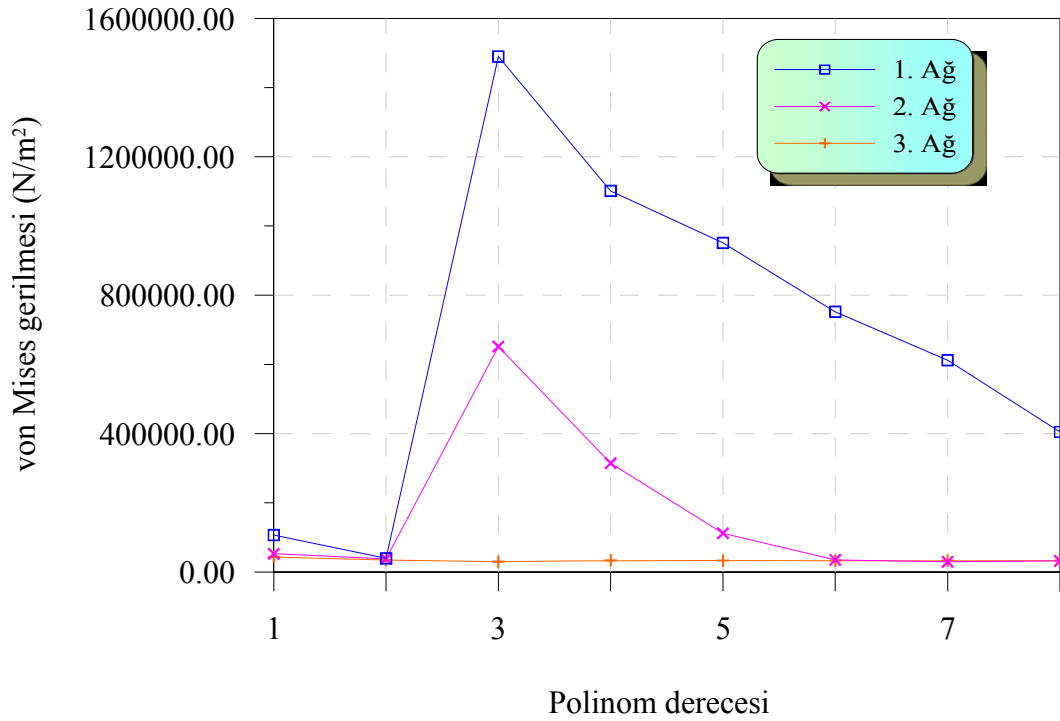
Şekil 3.17. İlk üç ağ için sanayi bacasının 52 nolu noktasının ANSYS programından elde edilen yerdeğiştirmeleri



Şekil 3.18. İlk üç ağ için sanayi bacasının 52 nolu noktasının ANSYS programından elde edilen maksimum asal gerilmeleri



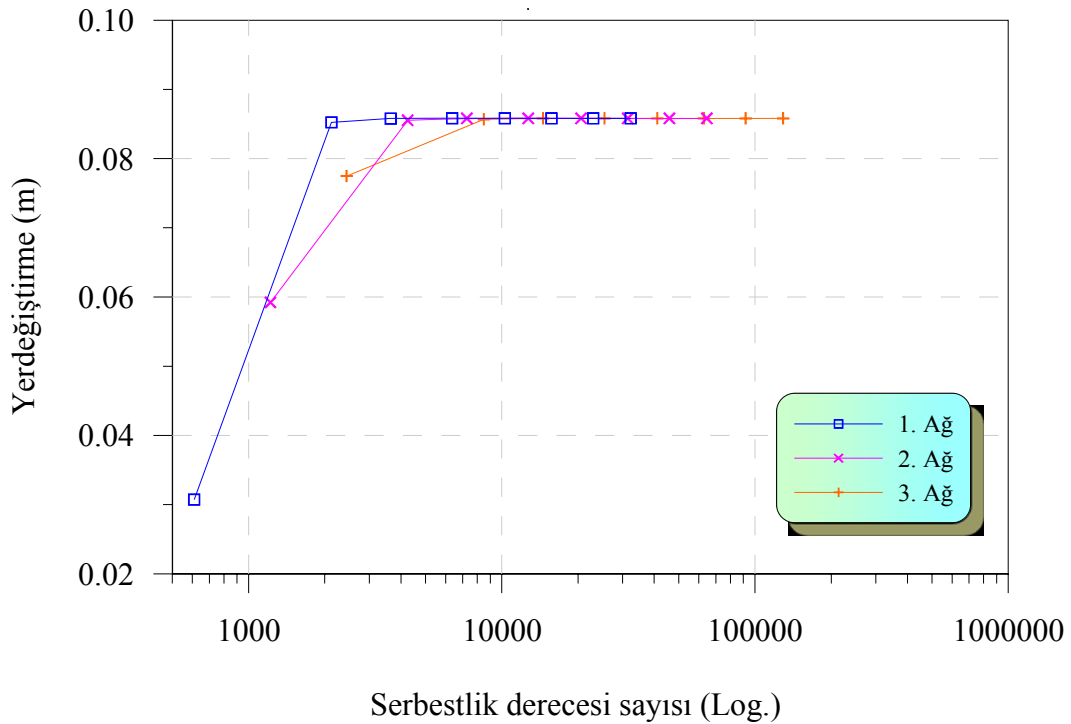
Şekil 3.19. İlk üç ağ için sanayi bacasının 52 nolu noktasının ANSYS programından elde edilen minimum asal gerilmeleri



Şekil 3.20. İlk üç ağ için sanayi bacasının 52 nolu noktasının ANSYS programından elde edilen von Mises gerilmeleri

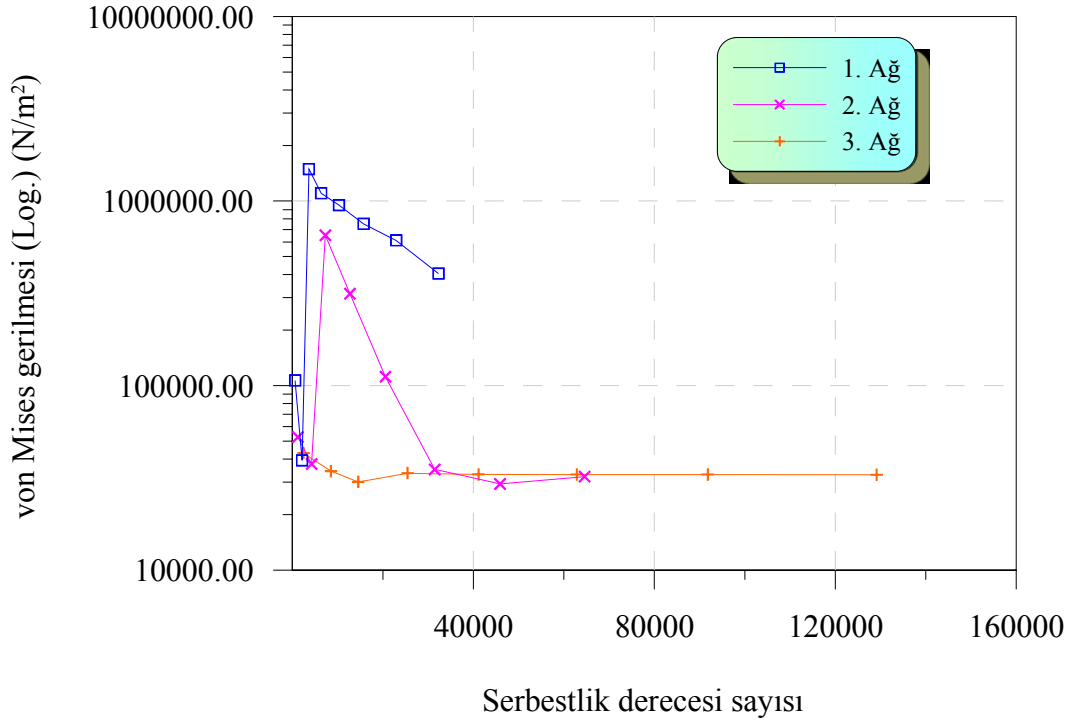
Şekil 3.17'den görüldüğü gibi, yerdeğiştirme değerleri ağ yapısının inceltilmesi ve/veya polinom derecesinin artırılması ile yakınsamaktadır. Şekil 3.18, Şekil 3.19 ve Şekil 3.20'den görüldüğü gibi ağ inceltilmesi ile polinom derecesi altıdan sonra elde edilen değerler birbiriyle çakışmaktadır. Gerilme sonuçlarının yakınsamasında, dikkate alınan bu üç ağ yapısına bakıldığında, ağ inceltmesinin polinom derecesi artırılmasına göre yakınsama hızında daha etkin olduğu görülmektedir. Bu durum, sonraki ağ yapılarında elde edilen sonuçlara bakıldığında anlaşılabilir gibi, bir eşik ağ sıklaştırmasından sonra sonuçlarda yakınsama hızının polinom derecesi artırılması ile arttığı görülmektedir.

Şekil 3.17'de gösterilen ilk üç ağa ait yerdeğiştirme değerleri, serbestlik derecesi sayısına bağlı olarak Şekil 3.21'de verilmektedir.



Şekil 3.21. İlk üç ağ için sanayi bacasının serbestlik derecesi sayılarına göre 52 nolu noktasının ANSYS programından elde edilen yerdeğiştirmeleri

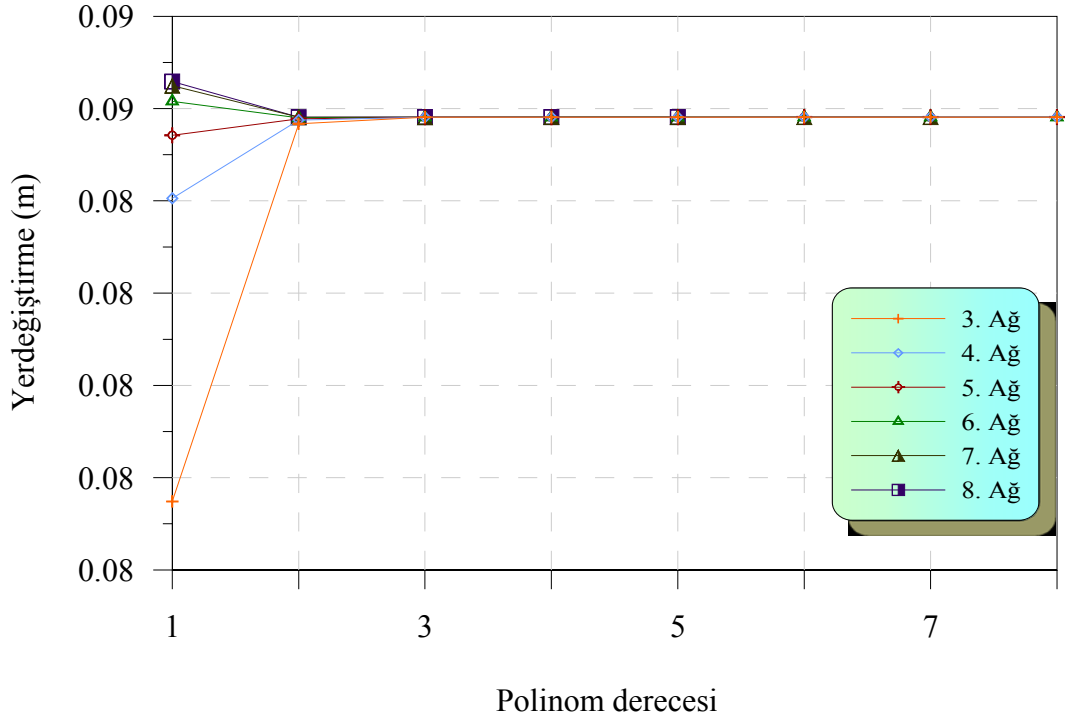
Şekil 3.21'den görüldüğü gibi, yakınsamış olduğu görülen yaklaşık 0.086 m yerdeğiştirme değeri, ağ yapısı ve polinom derecesi değiştirilerek bir çok kez elde edilebilmektedir. Bu değer ilk olarak 2. Ağ yapısında polinom derecesi üç iken elde edilmektedir. Böylelikle daha az serbestlik derecesi veren bir ağ yapısı ve polinom derecesi ile istenilen sonuca ulaşılabilen olduğu anlaşılmaktadır. Şekil 3.20'de gösterilen ilk üç ağa ait von Mises gerilmeleri serbestlik derecesi sayısına göre Şekil 3.22'de verilmektedir.



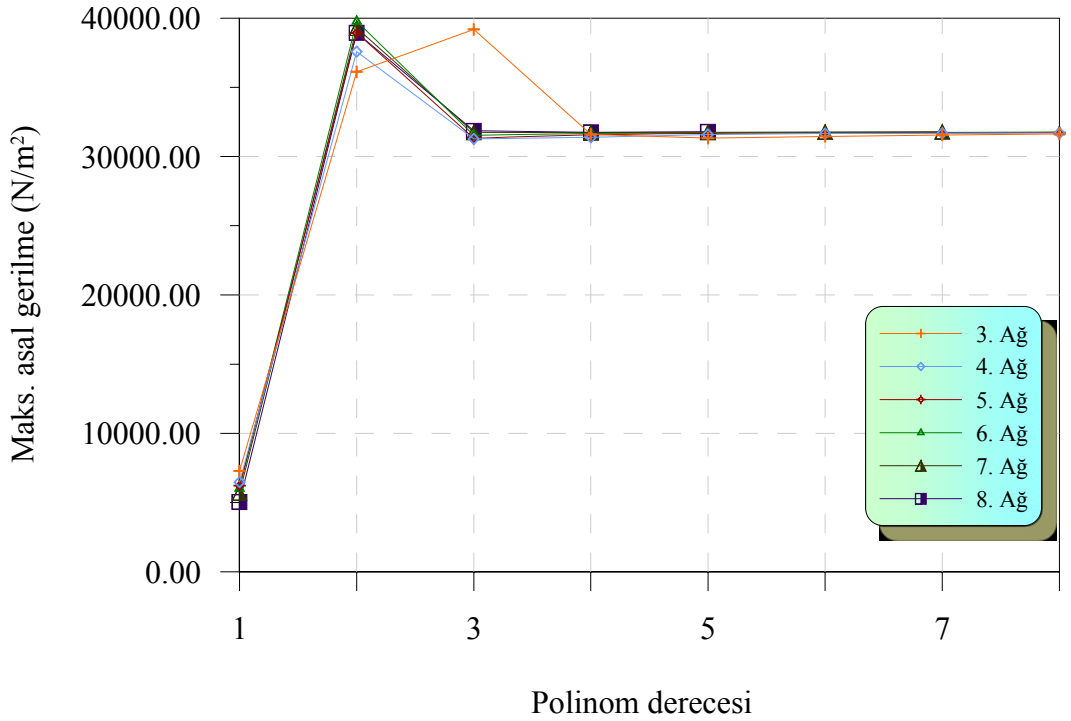
Şekil 3.22. İlk üç ağ için sanayi bacasının serbestlik derecesi sayılarına göre 52 nolu noktasının ANSYS programından elde edilen von Mises gerilmeleri

Şekil 3.22'den görüldüğü gibi, elde edilen sonuçların sadece yaklaşık olarak 3. Ağ -  $p=6$  ve 2. Ağ -  $p=8$  durumunda örtüşmesi nedeniyle, yerdeğıştırmelerde gözlemlenen durum, burada söz konusu olmamaktadır. Şekil 3.22'den yine görüldüğü gibi, 2. Ağ -  $p=2$  ve 1. Ağ -  $p=3$ , 3. Ağ -  $p=3$  ve 1. Ağ -  $p=6$ , 2. Ağ -  $p=6$  ve 1. Ağ -  $p=8$  durumlarına karşılık gelen serbestlik derecesi sayıları kendi içlerinde aynı olurken, farklı von Mises gerilmesi değerlerine sahip olmaktadır. Serbestlik derecesi sayısının aynı olmasına rağmen elde edilen sonuçların aynı olmaması yakınsama hızını göstermektedir. Yakınsama hızına, hem ağ yapısının ve hem de polinom derecesinin etki ettiğine işaret edilmektedir. 3. Ağ -  $p=6$  ve 2. Ağ -  $p=8$  durumunda serbestlik derecesi sayıları bir birine yakın sayılabilir olduğu düşünülürse von Mises gerilmesinin oldukça örtüştüğü görülmektedir. Örtüşmenin sağlandığı her iki durum yakınsamanın sağlanabileceği ağ yapısı ve polinom derecesine örnek oluşturmaktadır.

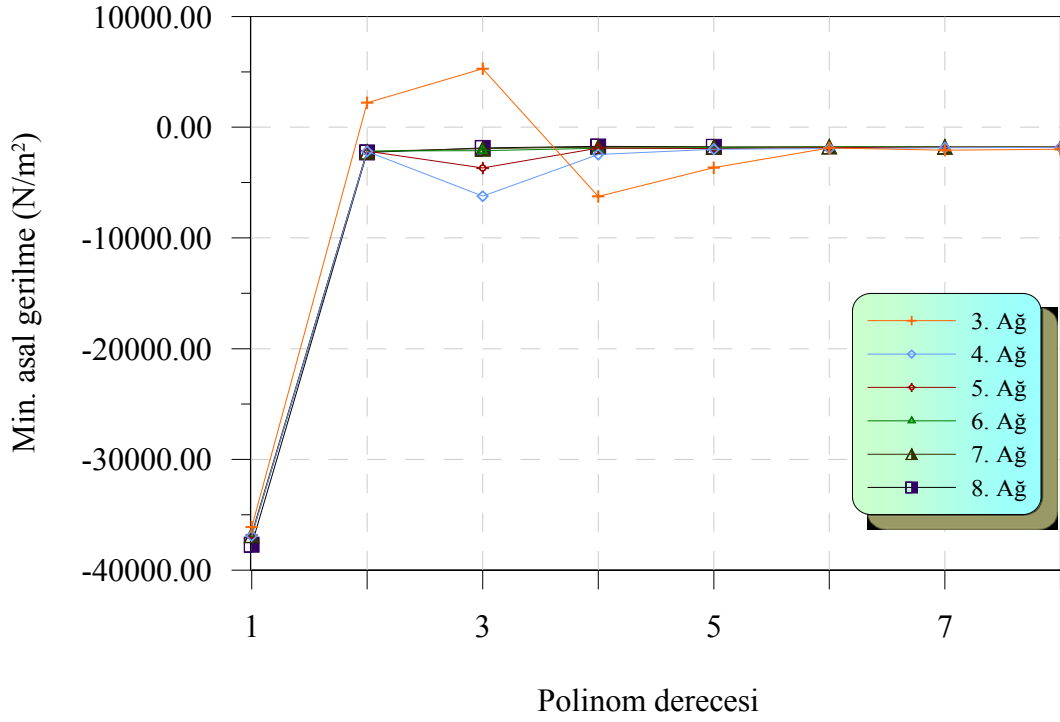
İlk üç ağ yapısında yapılan irdelermelerde eşik ağ yapısı olarak 3. Ağ yapısından başlanması gerektiği anlaşılmaktadır. Bundan dolayı 3. Ağ'dan 8. Ağ'a kadar olan ağ yapılarında yakınsama durumları bundan sonra irdelenecektir. Bu son altı ağ yapısı için yerdeğıştirme, maksimum asal gerilme, minimum asal gerilme ve von Mises gerilmesi sonuçları, sırasıyla, Şekil 3.23, Şekil 3.24, Şekil 3.25 ve Şekil 3.26'de verilmektedir.



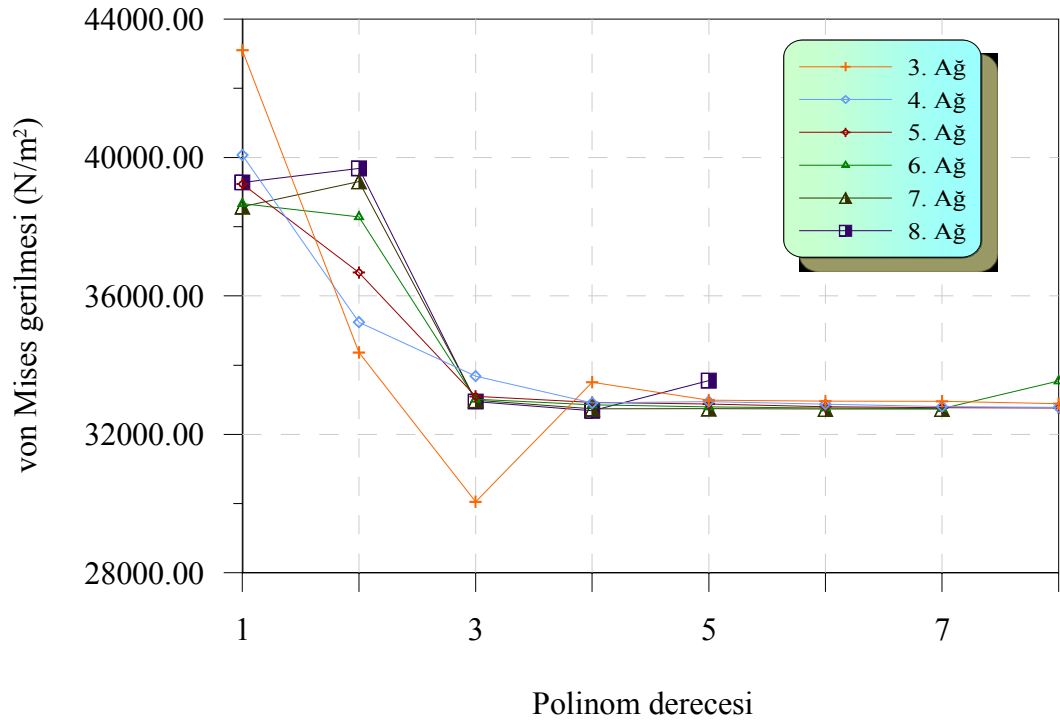
Şekil 3.23. Son altı ağ için sanayi bacasının 52 nolu noktasının ANSYS programından elde edilen yerdeğiştirmeleri



Şekil 3.24. Son altı ağ için sanayi bacasının 52 nolu noktasının ANSYS programından elde edilen maksimum asal gerilmeleri



Şekil 3.25. Son altı ağ için sanayi bacasının 52 nolu noktasının ANSYS programından elde edilen minimum asal gerilmeleri

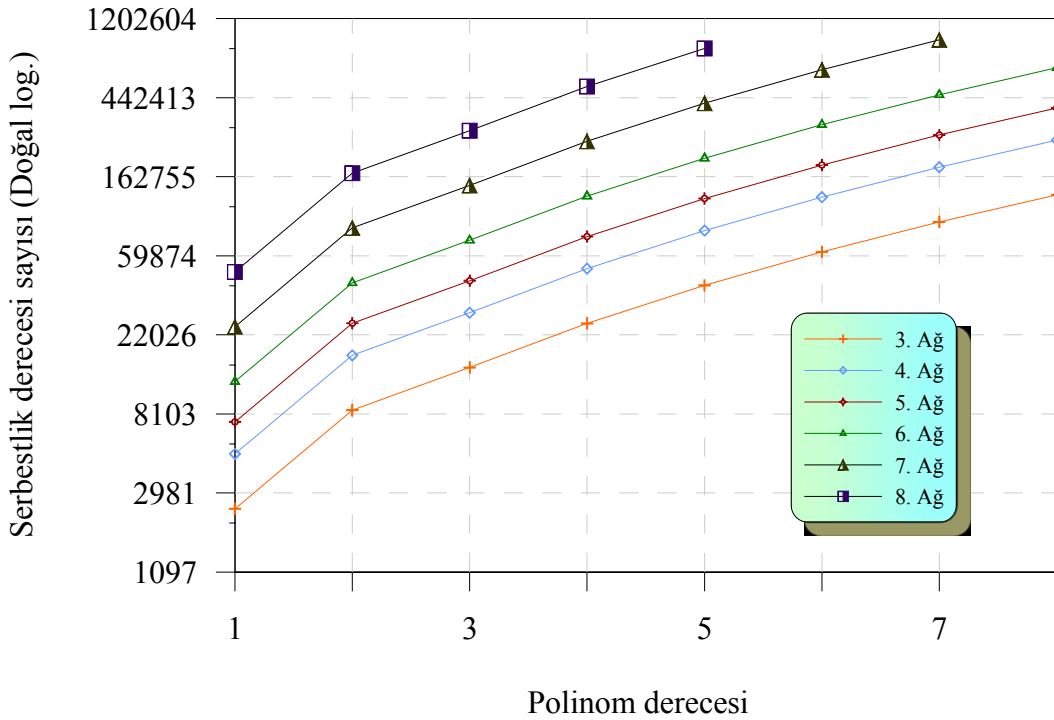


Şekil 3.26. Son altı ağ için sanayi bacasının 52 nolu noktasının ANSYS programından elde edilen von Mises gerilmeleri



Şekil 3.23'den görüldüğü gibi, polinom derecesi iki değerinden sonra her ağ yapısı için yakınsama elde edilmektedir.

Şekil 3.24, Şekil 3.25 ve Şekil 3.26'den görüldüğü gibi, tüm ağ yapılarında, sırasıyla, maksimum asal gerilmede polinom derecesi dört; minimum asal gerilmede polinom derecesi altı; von Mises gerilmesinde ise 5. Ağ'dan itibaren polinom derecesi 3 değerinden sonra yakınsama sağlanmaktadır. Dikkate alınan sekiz ağ yapısı için kullanılan serbestlik derecesi sayıları Şekil 3.27'de verilmektedir.

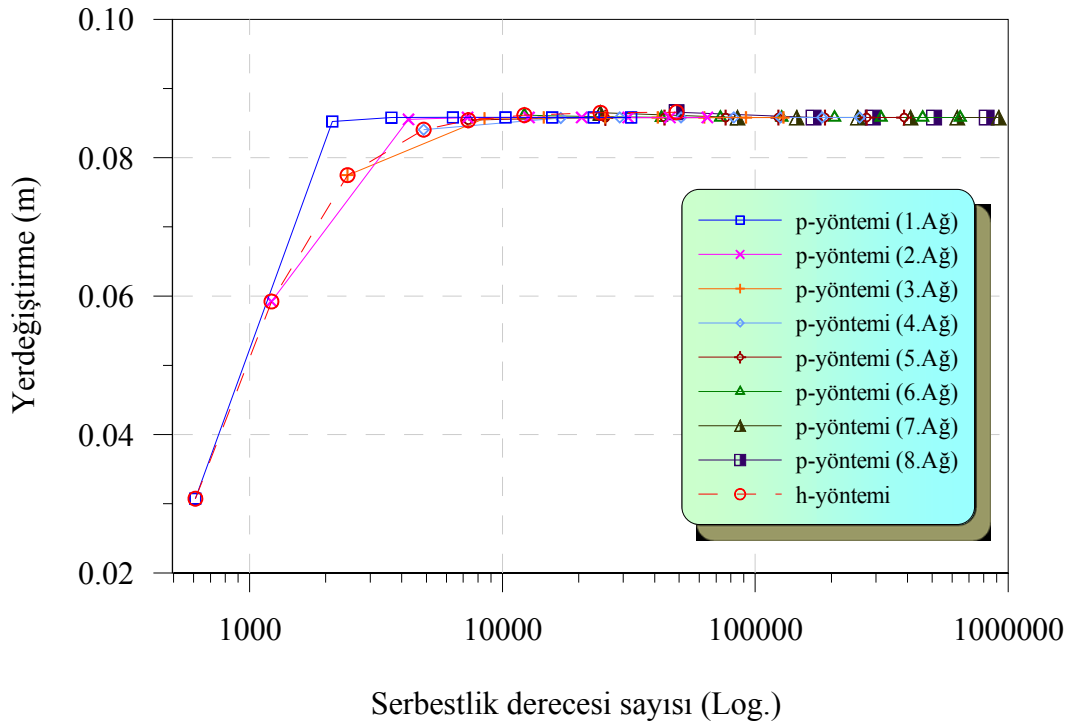


Şekil 3.27. ANSYS programı için sanayi bacasının yarısının serbestlik derecesi sayıları

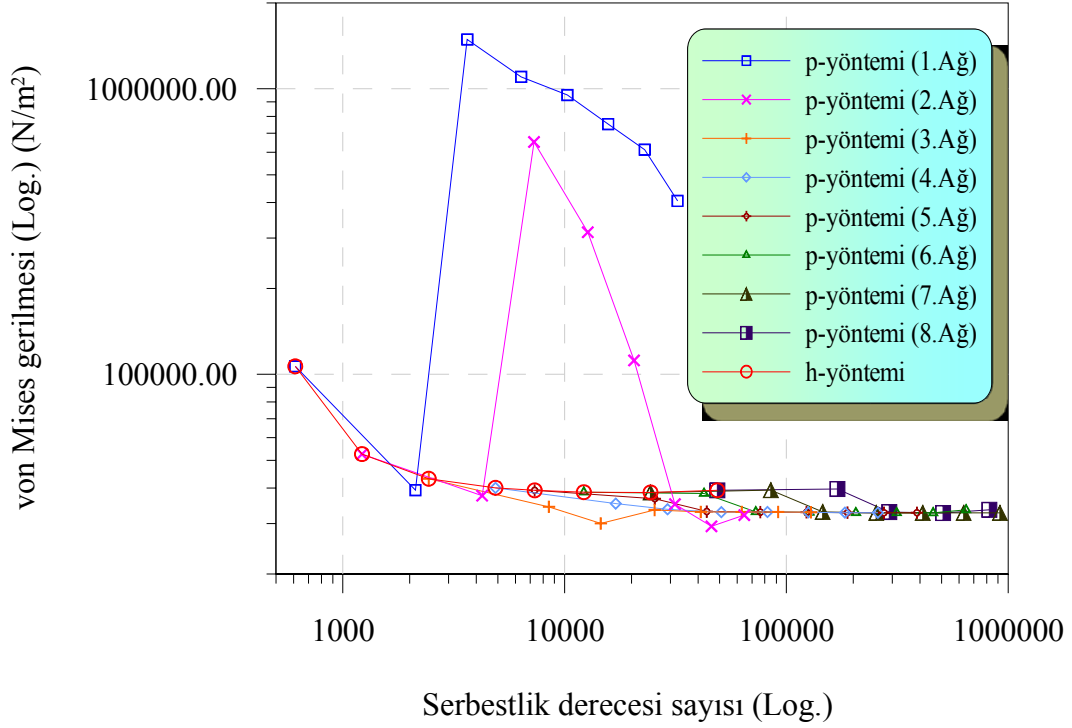
Şekil 3.27'den görüldüğü gibi, serbestlik dereceleri sayıları her ne kadar azalan bir ivme ile artış sergiliyor gibi gözükse de düşey eksen doğal logaritmik olduğundan artan bir ivme ile artış bulunmaktadır. Bu bağlamda en büyük serbestlik derecesi sayısı 918000 olmaktadır. Sadece ağ iyileştirmesi (h-yöntemi) ve sadece polinom derecesi artırılarak (p-yöntemi) elde edilen veriler Tablo 3.2'de sunulmakta olup elde edilen yerdeğiştirme sonuçları Şekil 3.28'de ve gerilme sonuçları Şekil 3.29'da verilmektedir.

Tablo 3.2. Düzgün yayılı yük etkisindeki sanayi bacasında ANSYS programı için hp-yöntemine göre ağ yapıları, polinom derecesi ve serbestlik derecesi sayıları

hp-yöntem			hp-yöntem (1. durum)			hp-yöntem (2. durum)			hp-yöntem (3. durum)			hp-yöntem (4. durum)		
h	p	S.D.S.	h	p	S.D.S.	h	p	S.D.S.	h	p	S.D.S.	h	p	S.D.S.
3. Ağ	4	25440	3. Ağ	4	25440	5. Ağ	4	76320	3. Ağ	8	129160	4. Ağ	8	258320
4. Ağ	3	29120	4. Ağ	3	29120	6. Ağ	3	72800	4. Ağ	6	125720	5. Ağ	7	275400
5. Ağ	3	43680							5. Ağ	5	123420	8. Ağ	3	291200
6. Ağ	3	72800							6. Ağ	4	127200			
7. Ağ	3	145600												
8. Ağ	3	291200												



Şekil 3.28. Sanayi bacasının 52 nolu noktasının p- ve h- yöntemine göre ANSYS programından elde edilen yerdeğiştirmeleri

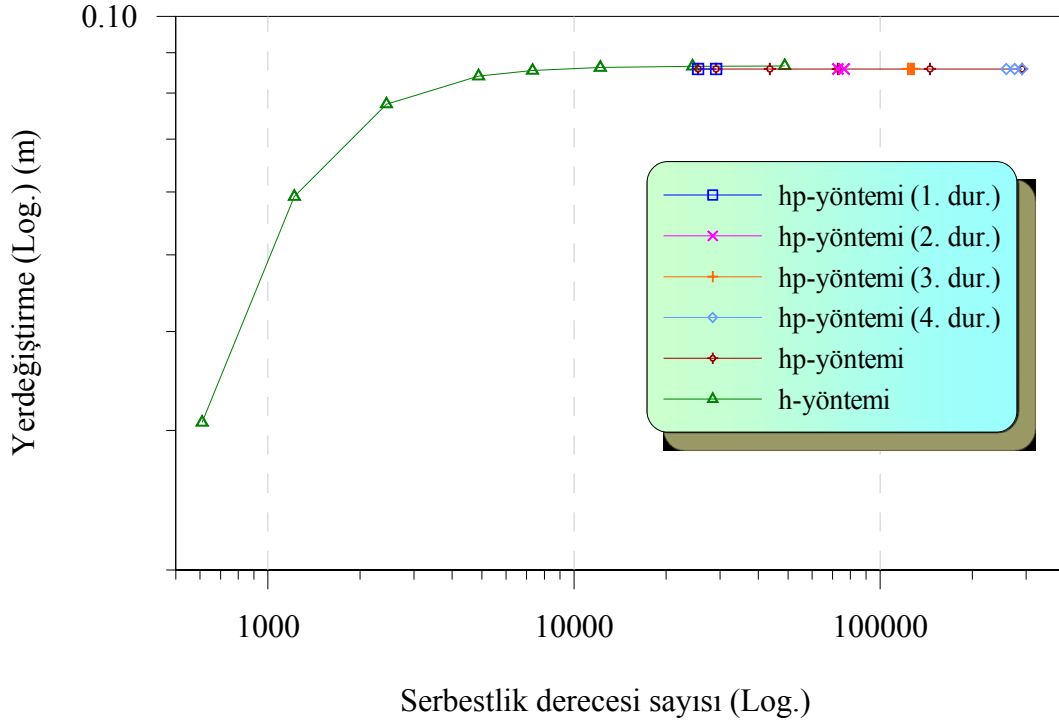


Şekil 3.29. Sanayi bacasının 52 nolu noktasının p- ve h- yöntemine göre ANSYS programından elde edilen von Mises gerilmeleri

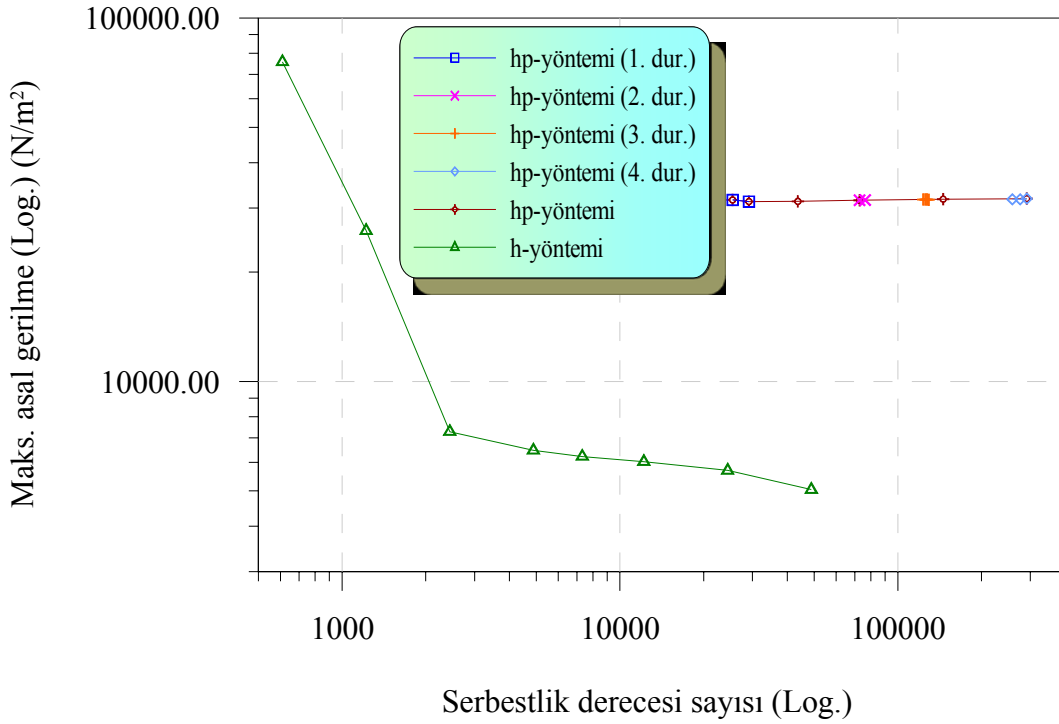
Şekil 3.28'de h-yöntemi ile p-yöntemi arasında yakınsama hızı karşılaştırıldığında aynı serbestlik derecesinde p-yöntemi ile elde edilen sonuçların h-yöntemi ile elde edilenlere göre daha kesin yakınsama yaptığı görülmektedir. Ayrıca serbestlik derecesi sayısı düşünüldüğünde p-yönteminin, h-yöntemine göre daha erken yakınsadığı görülmektedir.

Şekil 3.29'dan görüldüğü gibi, erken yakınsamanın sağlandığı von Mises gerilmesi h-yöntemine göre yaklaşık 39000 N/m<sup>2</sup> olurken, p-yönteminde ise yaklaşık 33000 N/m<sup>2</sup> olmaktadır. Dikkate alınan ağ yapılarında en fazla ulaşılan yaklaşık 49000 serbestlik derecesi sayısı ile h-yönteminin, p-yöntemine göre yaklaşık %15 daha kötü bir gerilme sonucu verdiği görülmektedir. Yerdeğiştirme sonuçlarında her iki yöntemde aynı yakınsamış değere yaklaşılabilirken gerilme sonuçlarında aynı serbestlik derecesinde dahi h-yönteminde daha kötü sonuç elde edilmektedir.

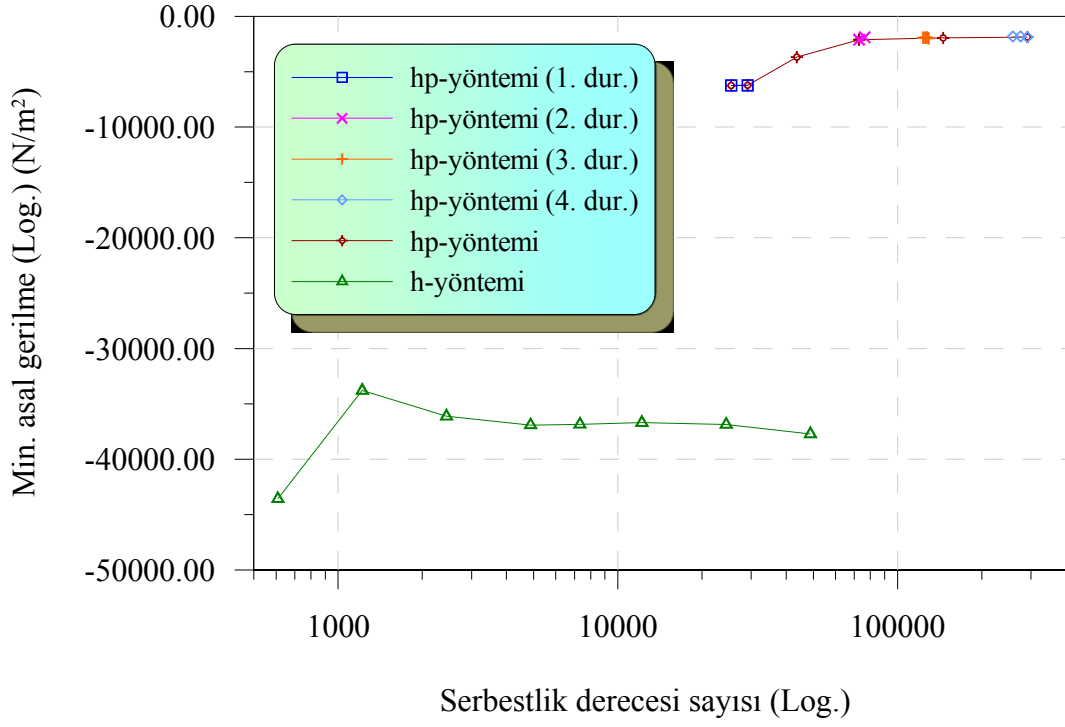
h-yöntemi ve hp-yöntemi elde edilen yerdeğiştirme ile maksimum asal, minimum asal ve von Mises gerilmesi diyagramları sırasıyla Şekil 3.30, Şekil 3.31, Şekil 3.32 ve Şekil 3.33'de verilmektedir. hp-yöntemi adına en az serbestlik derecesi sayısı ile elde edilen yakınsamış sonuçların elde edildiği ağ yapıları ve polinom dereceleri, serbestlik dereceleri sayılarına göre gruplandırılmış ve gruplandırılmamış şekilde Tablo 3.2'de verilmektedir. Bu tabloda oluşturulan gruplar Şekil 3.30, Şekil 3.31, Şekil 3.32 ve Şekil 3.33'de "hp-yöntemi (i. durum) (i=1, ..., 4) olarak adlandırılmaktadır.



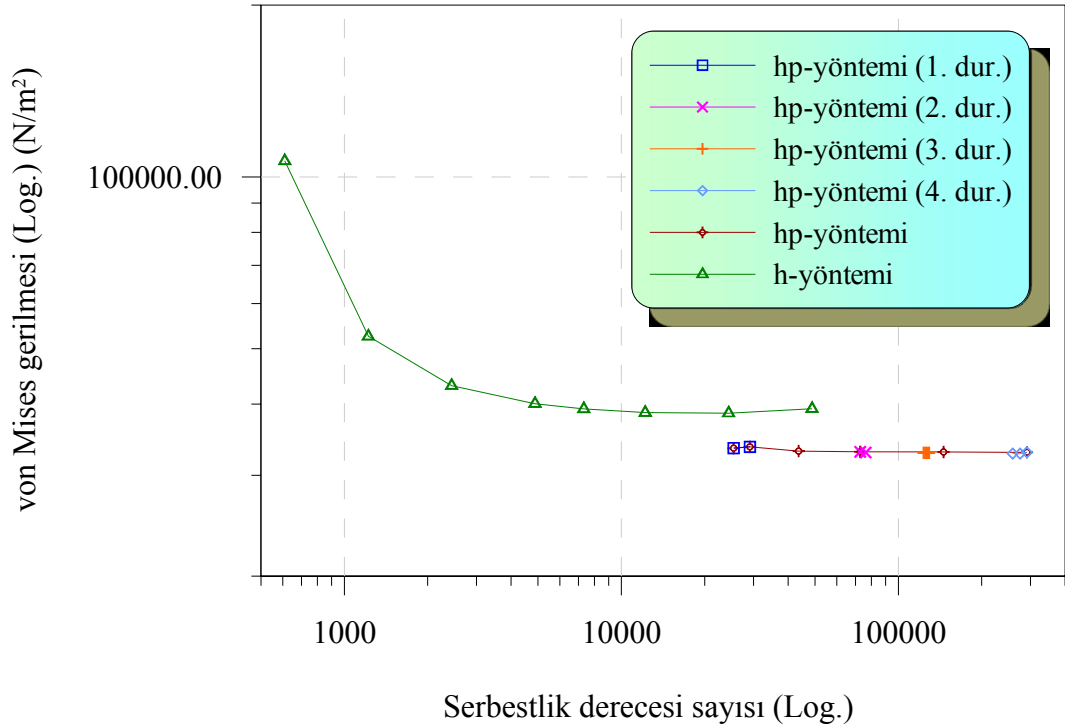
Şekil 3.30. Sanayi bacasının 52 nolu noktasının h- ve hp- yöntemine göre ANSYS programından elde edilen yerdeğiştirmeleri



Şekil 3.31. Sanayi bacasının 52 nolu noktasının h- ve hp- yöntemine göre ANSYS programından elde edilen maksimum asal gerilmeleri



Şekil 3.32. Sanayi bacasının 52 nolu noktasının h- ve hp- yöntemine göre ANSYS programından elde edilen minimum asal gerilmeleri



Şekil 3.33. Sanayi bacasının 52 nolu noktasının h- ve hp- yöntemine göre ANSYS programından elde edilen von Mises gerilmeleri

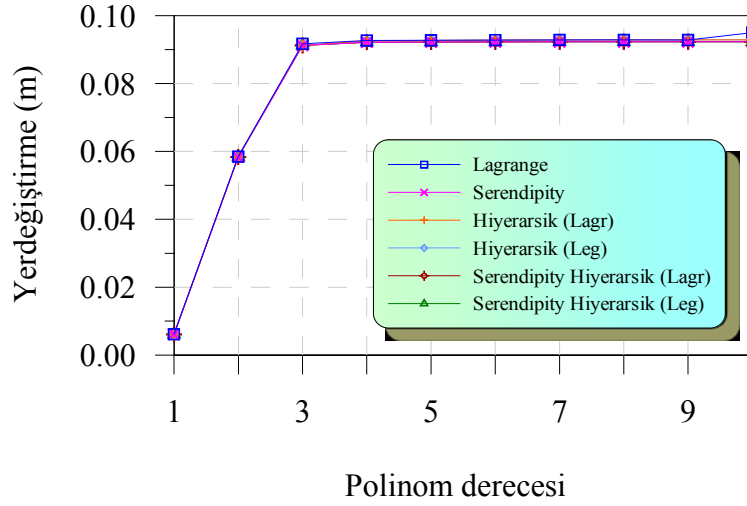
Tablo 3.2’de hem ağ sıklaştırmasının hem de polinom derecesinin artırılması durumuna göre elde edilen yakınsamış sonuçların birkaç farklı ağ yapısı polinom derecesi durumu ile elde edilebildiği gösterilmektedir. Şekil 3.30’dan Şekil 3.33’e kadar olan yerdeğiştirme ve gerilme diyagramlarına bakıldığında; yakınsama durumu açısından hp-yöntemi sonuçlarının h-yöntemi ile elde edilenlere göre daha iyi olduğu görülmektedir. Ayrıca hp-yönteminde yerdeğiştirme, maksimum asal gerilme ve von Mises gerilmesi değerleri için ilk kez yakınsamış sonuca ulaşılmış serbestlik derecesi sayısı Tablo 3.2’de de görülebildiği gibi 25440’dır.

### 3.1.3.2. Geliştirilen Program ile Düzgün Yayılı Yük Etkisindeki Sanayi Bacasının Statik Analizi

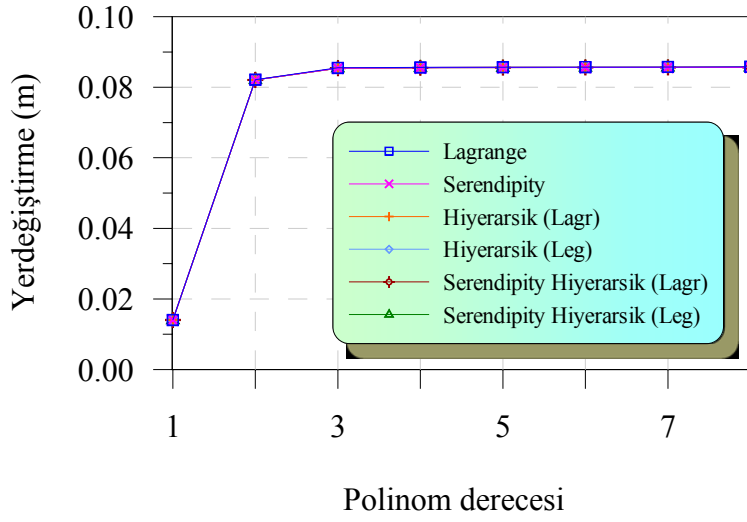
ANSYS programı yardımıyla dikkate alınan yükleme altında yakınsamış yerdeğiştirme ve gerilme değerleri, en az serbestlik derecesi ile belirtilmeye çalışılmıştır. Bu çalışmada geliştirilen sonlu elemanlar programında, elemanların gerçek geometrik durumu dikkate alınabildiğinden ANSYS sonuçları ile doğrudan bir karşılaştırma yerine dolaylı bir karşılaştırma yoluna gidilmektedir. Bu amaçla, kurgulanan sonlu elemanlar için iki aşamalı ağ sıklaştırması yapılacaktır. Birinci aşamada yarı simetrik sanayi bacasının yatay kesit boyunca ihtiyaç duyulan en az eleman sayısı belirlenmeye çalışılacaktır. Öyleki, geometrinin tam olarak Karma Fonksiyon Yöntemi ile tanımlanmasına rağmen yerdeğiştirme ve gerilme alanında ihtiyaç duyulan eleman sayısının belirlenmesi amacıyla yatay kesitte ağ sıklaştırması yapılacaktır. Örnek durum olarak yatay kesit boyunca sırasıyla iki, dört ve altı eleman dikkate alınırken yükseklik boyunca beş eleman ve kalınlık boyunca bir eleman dikkate alınacaktır. Bu duruma karşılık gelen ağ yapıları Tablo 3.3’de verilmekte olup elde edilen yerdeğiştirme ve gerilme değerleri Şekil 3.34, Şekil 3.35 ve Şekil 3.36’da verilmektedir. İkinci aşamada sanayi bacasının simetrik kısmının yükseklik boyunca ihtiyaç duyulan en az eleman sayısı belirlenmeye çalışılacaktır. Bu duruma ait ağ sıklaştırma durumu ise birinci aşamadan sonra belirlenecektir.

Tablo 3.3. Sanayi bacasının yarı simetrik kısmında, geliştirilen program için, yatay kesit boyunca çeşitlendirilen ağ yapıları

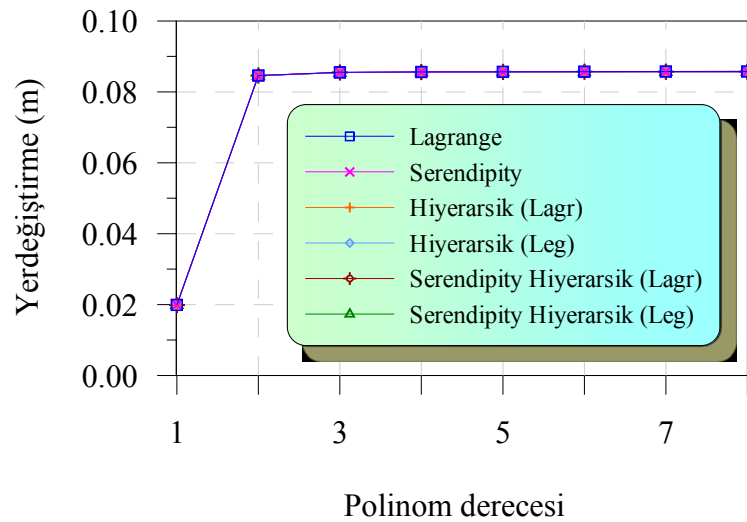
Ağ türü	Eleman sayısı			Ağdaki toplam	Polinom derecesi	Maksimum S.D.S.
	Yatay kesit boyunca	Yükseklik boyunca	Kalınlık boyunca			
9	2	5	1	10	1-10	33550
10	4	5	1	20	1-8	34920
11	6	5	1	30	1-8	52200



a) Kesit boyunca iki parça olması durumu (9. Ağ)

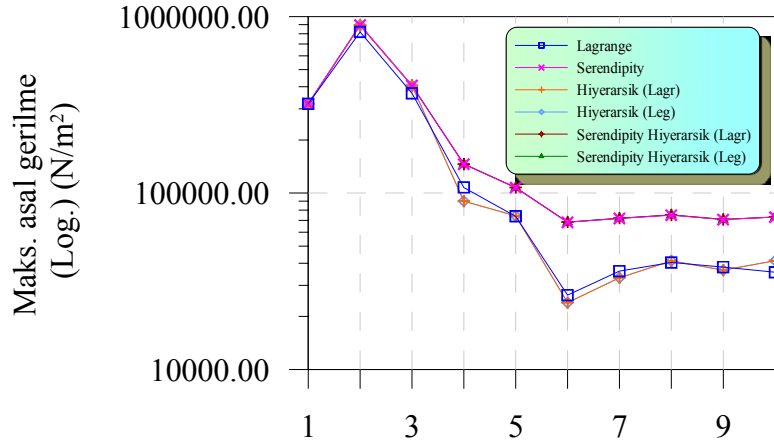


b) Kesit boyunca dört eleman olması durumu (10. Ağ)



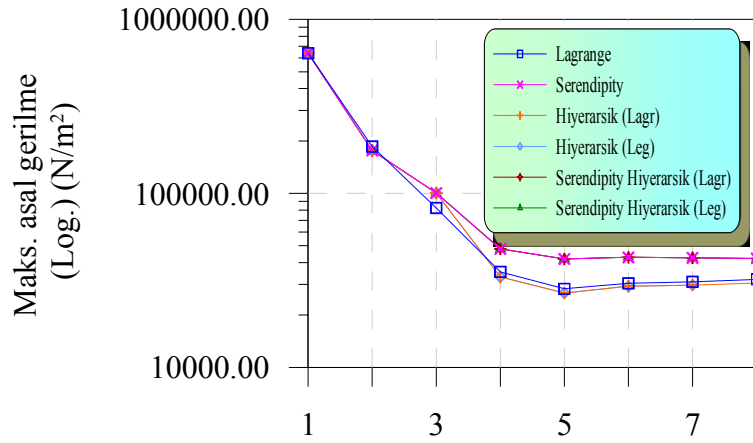
c) Kesit boyunca altı eleman olması durumu (11. Ağ)

Şekil 3.34. Sanayi bacasının 52 nolu noktasının geliştirilen program yardımıyla belirlenen yerdeğiştirmesi



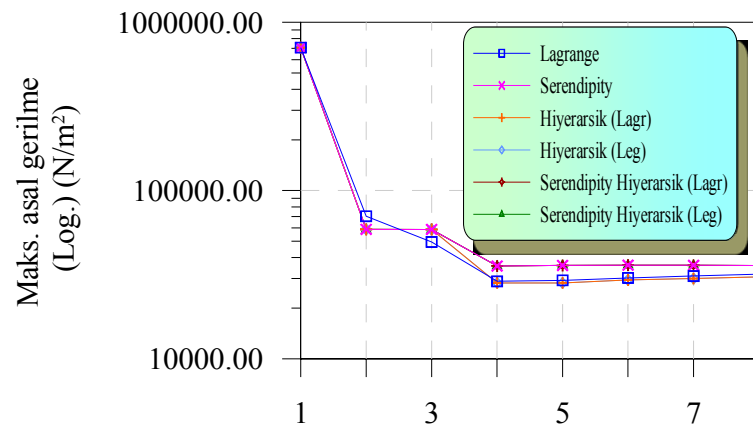
Polinom derecesi

a) Kesit boyunca iki eleman olması durumu (9. Ağ)



Polinom derecesi

b) Kesit boyunca dört eleman olması durumu (10. Ağ)

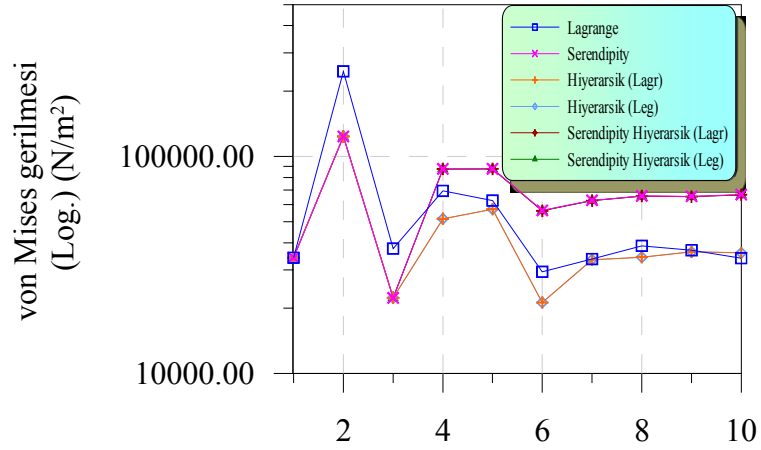


Polinom derecesi

c) Kesit boyunca altı eleman olması durumu (11. Ağ)

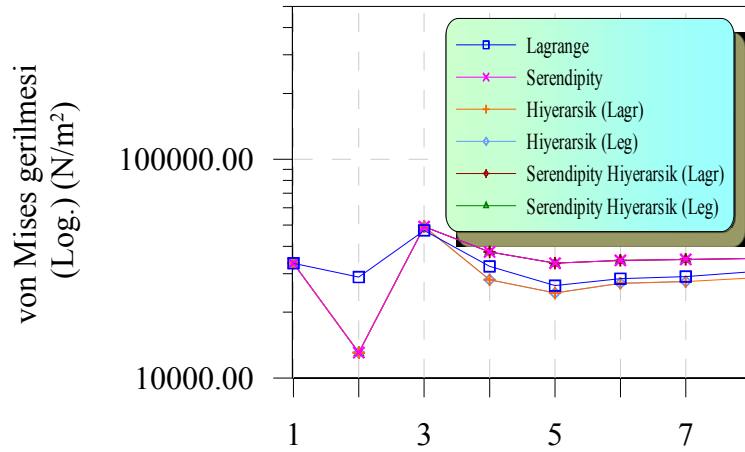
Şekil 3.35. Sanayi bacasının 52 nolu noktasının geliştirilen program yardımıyla belirlenen maksimum asal gerilmesi





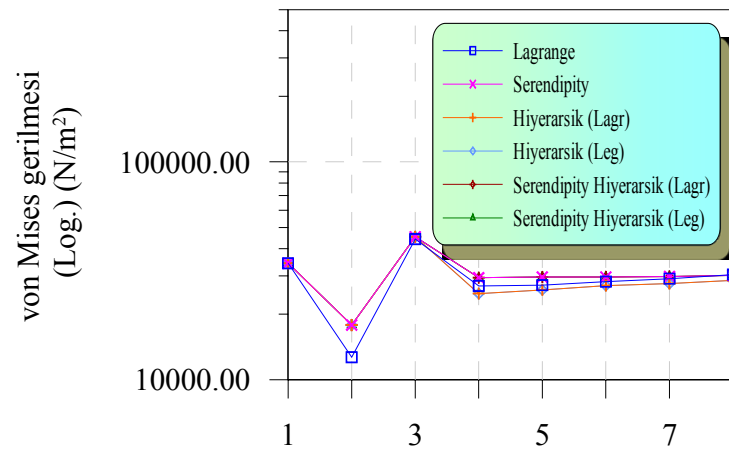
Polinom derecesi

a) Kesit boyunca iki eleman olması durumu (9. Ağ)



Polinom derecesi

b) Kesit boyunca dört eleman olması durumu (10. Ağ)



Polinom derecesi

c) Kesit boyunca altı eleman olması durumu (11. Ağ)

Şekil 3.36. Sanayi bacasının 52 nolu noktasının geliştirilen program yardımıyla belirlenen von Mises gerilmesi

Şekil 3.34'den görüldüğü gibi, yerdeğiştirme değerleri yatay kesit boyunca iki eleman bulunurken polinom derecesinin dört; dört eleman bulunurken polinom derecesinin üç; altı eleman bulunurken polinom derecesinin iki olmasından itibaren yakınsamaktadır. Yerdeğiştirme bakımından yatay kesit boyunca eleman sayısının artması sadece yakınsama hızını arttırmakta olup her üç ağ durumunda da yakınsanan değer aynı olmaktadır.

Şekil 3.35'den görüldüğü gibi, maksimum asal gerilme yatay kesit boyunca iki eleman bulunurken yaklaşık  $38000 \text{ N/m}^2$ ; dört veya altı eleman bulunurken yaklaşık  $31000 \text{ N/m}^2$  değerine yakınsamaktadır. Yatay kesit boyunca eleman sayısı dört ve altı iken yakınsanan gerilme değerinin hemen hemen değişmediği ve bu değer en son belirlenen yatay kesitteki eleman sayısına Şekil 3.31'deki ANSYS programı sonucu ile karşılaştırıldığında oldukça örtüşme olduğu görülmektedir.

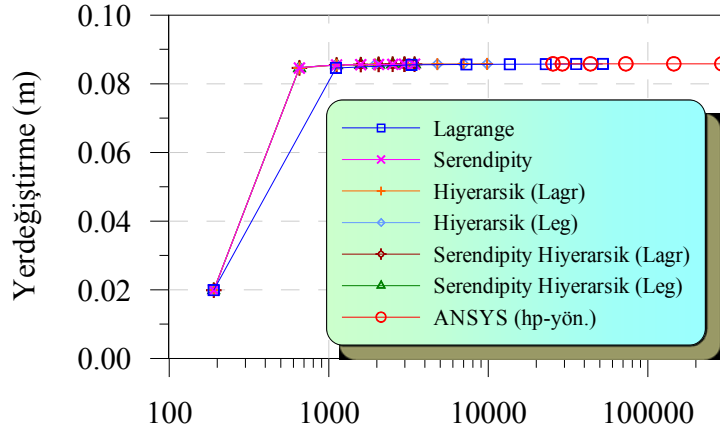
Şekil 3.36'dan görüldüğü gibi, von Mises gerilmesi yatay kesit boyunca iki eleman bulunurken yaklaşık  $33000 \text{ N/m}^2$ ; dört veya altı eleman bulunurken yaklaşık  $29000 \text{ N/m}^2$  değerine yakınsamaktadır. Yatay kesit boyunca eleman sayısı dört ve altı iken yakınsanan gerilme değerinin hemen hemen değişmediği görülmektedir. Elde edilen yakınsamış gerilme değerinin en son belirlenen yatay kesitteki eleman sayısına Şekil 3.32'deki ANSYS sonucu ile karşılaştırıldığında yaklaşık %10 civarında fark olduğu görülmektedir. Sadece yatay kesitte ağ sıklaştırmasının yapıldığı bu durumda % 10'luk farkın yataydaki ağ bölümlenme sayısı için kabul edilebilir olduğu düşünülmektedir. Hem maksimum asal gerilme diyagramında hem de von Mises gerilmesi diyagramında yatay kesit boyunca eleman sayısı arttıkça kurgulanan sonlu elemanların sonuçların bir birine yakınsamaktadır.

Yapılan karşılaştırmalar ışığında yatay kesit boyunca dört elemanın yeterli olduğu ve altı elemanın oldukça iyi sonuçlar vereceği anlaşılmaktadır. Öyleki, yatay kesit boyunca iki elemanın yani doksan derecelik yay parçası ile geometrinin belirlendiği elemanlar yerine kırkbeş derecelik (dört eleman) veya daha az derecelik yay parçasına sahip geometrinin olduğu elemanların gerilme açısından mertebeye uygun yakınsamış sonuçlar vermektedir.

Yatay kesit boyunca yakınsama durumu belirlendikten sonra yükseklik boyunca olan durumun belirlenmesi amacıyla, yatay kesit boyunca eleman sayısı altı; kalınlık boyunca bir; yükseklik boyunca eleman sayısı sırası ile beş, on ve yirmi olarak dikkate alınacaktır. Bu duruma karşılık gelen ağ yapıları Tablo 3.4'de verilmekte olup bu ağ yapıları ile elde edilen yerdeğiştirme, maksimum asal gerilme ve von Mises gerilmesi değerleri ANSYS programı yardımıyla hp-yöntemine göre elde edilen sonuçlar ile birlikte sırasıyla Şekil 3.37, Şekil 3.38 ve Şekil 3.39'da verilmektedir.

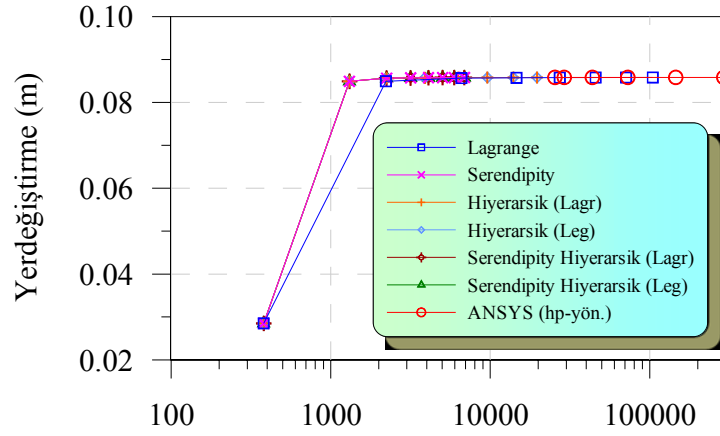
Tablo 3.4. Düzgün yayılı yük etkisindeki sanayi bacasının yarı simetrik kısmında geliştirilen program için yükseklik boyunca çeşitlendirilen ağ yapıları

Ağ türü	Eleman sayısı			Ağdaki toplam	Polinom derecesi	Maksimum S.D.S.
	Yatay kesit boyunca	Yükseklik boyunca	Kalınlık boyunca			
11	6	5	1	30	1-8	52200
12	6	10	1	60	1-8	104400
13	6	20	1	120	1-8	208800



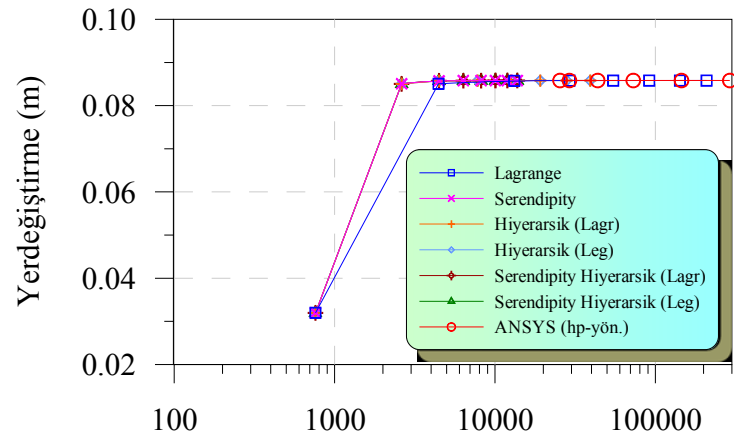
Serbestlik derecesi sayısı (Log.)

a) Yükseklik boyunca beş eleman olması durumu (11. Ağ)



Serbestlik derecesi sayısı (Log.)

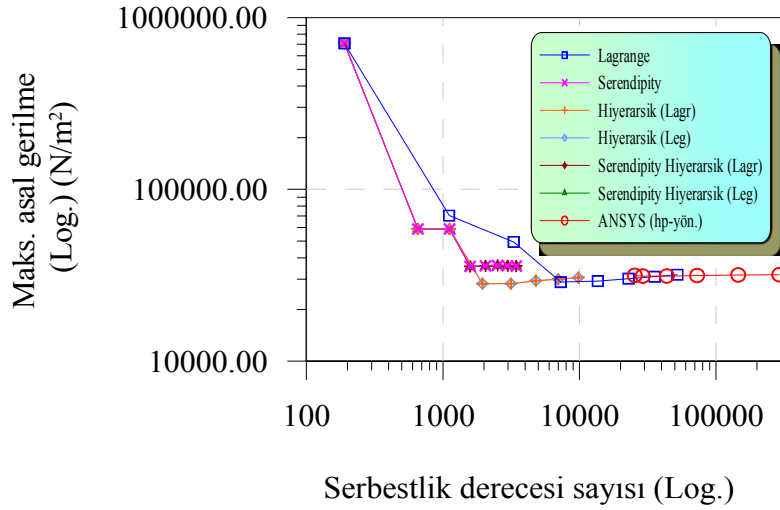
b) Yükseklik boyunca on eleman olması durumu (12. Ağ)



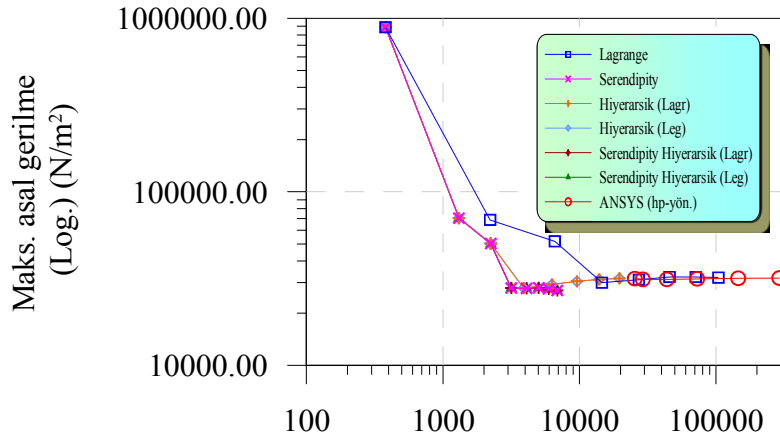
Serbestlik derecesi sayısı (Log.)

c) Yükseklik boyunca yirmi eleman olması durumu (13. Ağ)

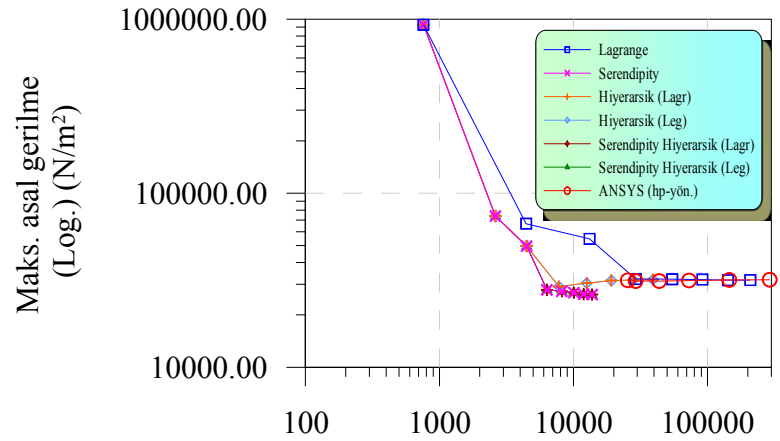
Şekil 3.37. Sanayi bacasının 52 nolu noktasının geliştirilen program yardımıyla belirlenen yerdeğiştirmesi



a) Yükseklik boyunca beş eleman olması durumu (11. Ağ)

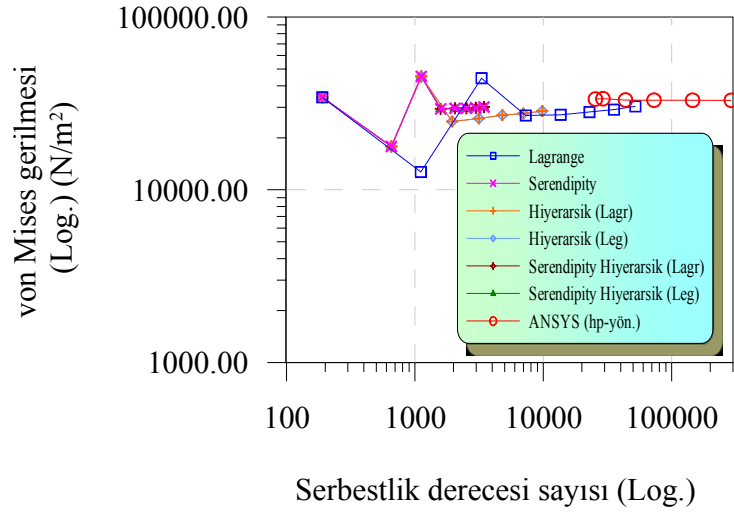


b) Yükseklik boyunca on eleman olması durumu (12. Ağ)

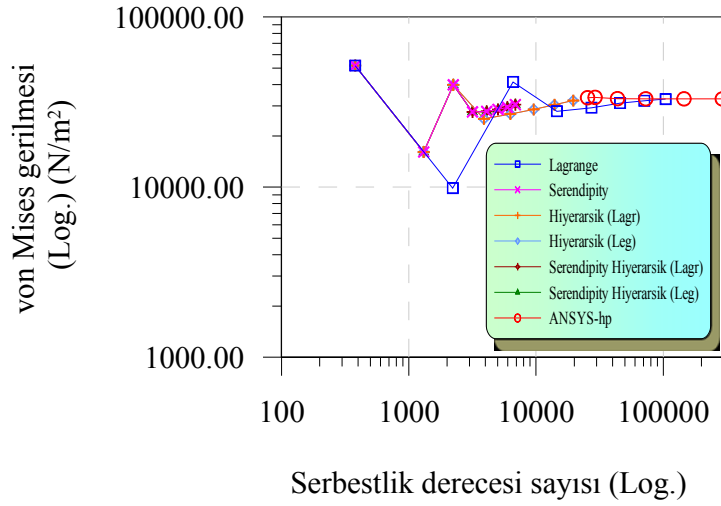


c) Yükseklik boyunca yirmi eleman olması durumu (13. Ağ)

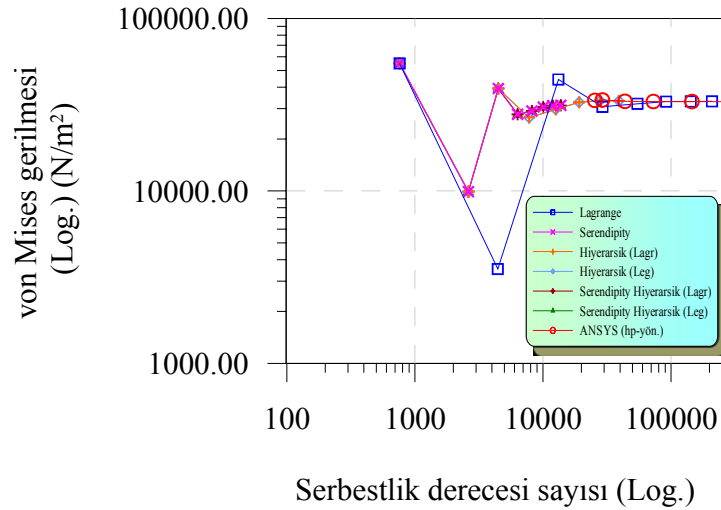
Şekil 3.38. Sanayi bacasının 52 nolu noktasının geliştirilen program yardımıyla belirlenen maksimum asal gerilmesi



a) Yükseklik boyunca beş eleman olması durumu (11. Ağ)



b) Yükseklik boyunca on eleman olması durumu (12. Ağ)



c) Yükseklik boyunca yirmi eleman olması durumu (13. Ağ)

Şekil 3.39. Sanayi bacasının 52 nolu noktasının geliştirilen program yardımıyla belirlenen von Mises gerilmesi

Şekil 3.37'den görüldüğü gibi, yükseklik boyunca eleman sayısı değişen her üç ağ yapısı için elde edilen yerdeğiştirme değerleri ANSYS programı ile elde edilen değerlere yakınsamaktadır.

Şekil 3.38'den görüldüğü gibi, maksimum asal gerilme sonuçları genel itibariyle ANSYS programı ile elde edilen değerlere yakınsamaktadır. Yükseklik boyunca eleman sayısı on ve yirmi alındığında kurgulanan sonlu elemanlarla elde edilen sonuçlar büyük oranda örtüşmektedir. ANSYS programı ile elde edilen sonuçlara, önce, Lagrange, hiyerarşik Lagrange ve hiyerarşik Legendre elemanları sonra serendipity, serendipity hiyerarşik Lagrange ve serendipity hiyerarşik Legendre elemanları ile elde edilen sonuçlar yakınsama göstermektedir. Bu yakınsama sırası, birinci test örneğinde düzgün yayılı yük etkisinde de gözlemlenmiştir.

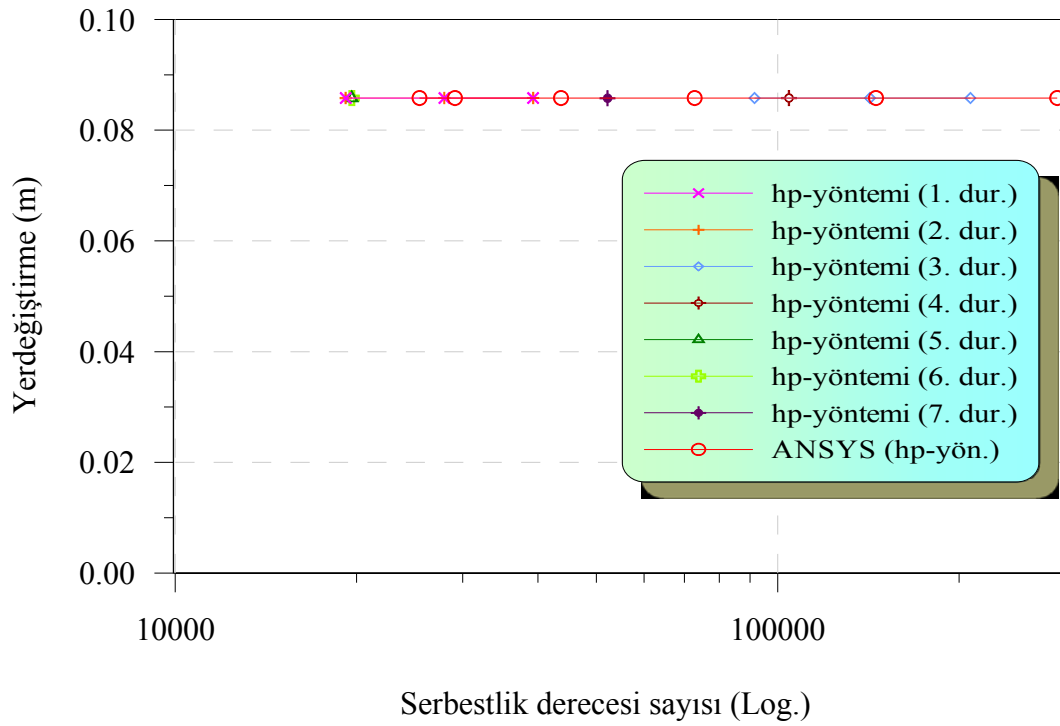
Şekil 3.39'dan görüldüğü gibi, von Mises gerilme sonuçları maksimum asal gerilmeye göre yakınsama esnasında daha fazla dalgalanmaktadır. Özellikle, Lagrange elemanı için üçüncü polinom derecesine kadar yükseklik boyunca eleman sayısı arttıkça dalgalanma artmaktadır. Maksimum asal gerilmede olduğu gibi yükseklik boyunca on ve yirmi eleman kullanıldığında ANSYS programı yardımıyla belirlen sonuçlarla oldukça örtüşme gözlemlenmektedir.

12. ve 13. ağ yapılarında p-yöntemi ile elde edilen sonuçların yakınsama hızları oldukça yakın olmaktadır. Öyleki, bu ağ yapılarından 12.'nin yeterli olduğu, 13.'nün ise oldukça iyi sonuçlar verdiği görülmektedir.

Kurgulanan sonlu elemanlar ve ANSYS programının sonuçlarının yakınsadıkları değerlere en az hangi serbestlik derecesi sayısı ile ulaştıkları karşılaştırılacaktır. Bu anlamda, hem ağ iyileştirmesi hem de polinom derecesinin artırılması (hp-yöntemi) yoluyla elde edilen çeşitler Tablo 3.5'de verilmektedir. Tablo 3.5'de görüleceği gibi 208800 serbestlik derecesi sayısına kadar da çözüm yapılabilinmektedir. Farklı ağ yapılarında p-yöntem ile elde edilen sonuçlar arasından en az serbestlik derecesi ile edinilenlere ait yerdeğiştirme, maksimum asal gerilme, minimum asal gerilme ve von Mises gerilmesi sonuçları ANSYS programı yardımıyla belirlen sonuçlar ile karşılaştırmalı olarak sırasıyla Şekil 3.40, Şekil 3.41, Şekil 3.42 ve Şekil 3.43'de verilmektedir.

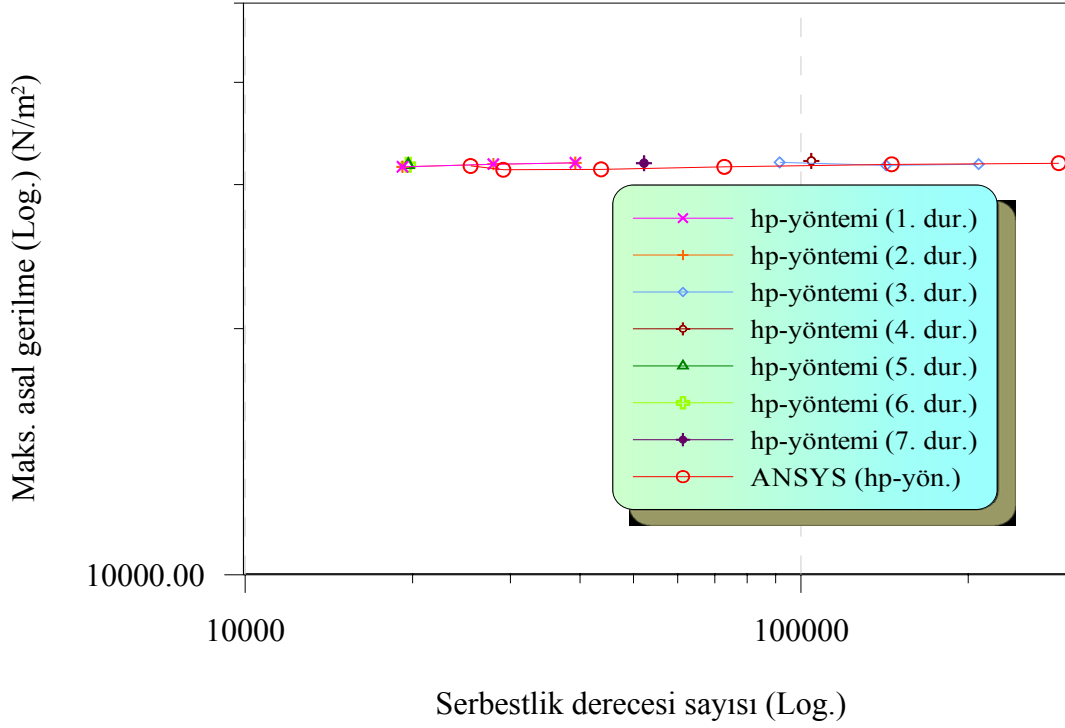
Tablo 3.5. Düzgün yaylı yüklü yarı simetrik sanayi bacasında geliştirilen program için hp-yöntemine göre ağ yapısı, polinom derecesi ve serbestlik derecesi sayıları

Yöntem ve çeşitin adı	Ağ çeşiti	Polinom derecesi	Sonlu eleman tipi	S.D.S.
hp-yöntemi (1. durum)	13	6, 7, 8	hiyerarşik (Leg.)	19180, 27960, 39280
hp-yöntemi (2. durum)	13	6, 7, 8	hiyerarşik (Lagr.)	19180, 27960, 39280
hp-yöntemi (3. durum)	13	6, 7, 8	Lagrange	91560, 142240, 208800
hp-yöntemi (4. durum)	12	8	Lagrange	104400
hp-yöntemi (5. durum)	12	8	hiyerarşik (Lagr.)	19640
hp-yöntemi (6. durum)	12	8	hiyerarşik (Leg.)	19640
hp-yöntemi (7. durum)	11	8	Lagrange	52200

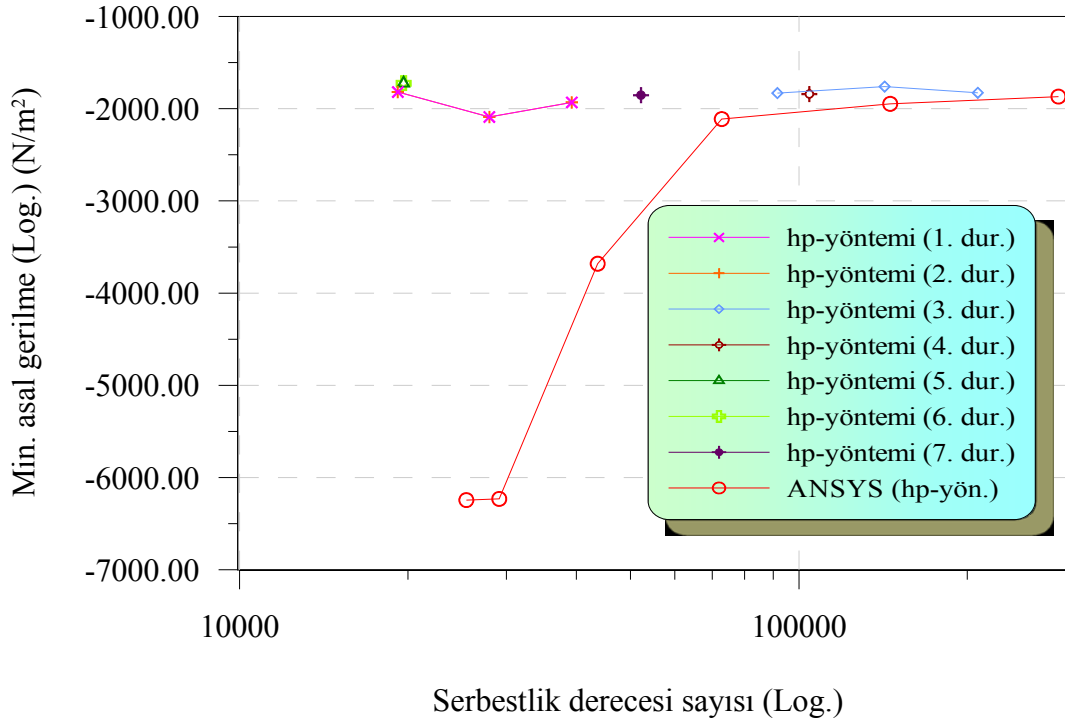


Şekil 3.40. Sanayi bacasının 52 nolu noktasının hp-yöntemine göre geliştirilen program yardımıyla belirlenen yerdeğiştirmesi

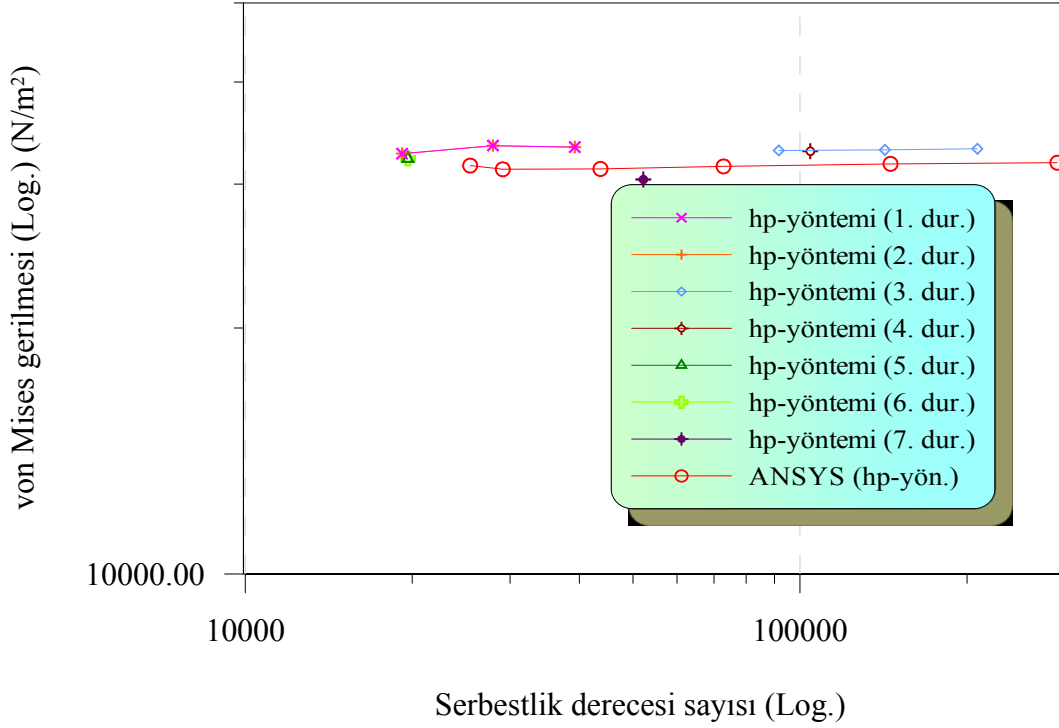




Şekil 3.41. Sanayi bacasının 52 nolu noktasının hp-yöntemine göre geliştirilen program yardımıyla belirlenen maksimum asal gerilmesi



Şekil 3.42. Sanayi bacasının 52 nolu noktasının hp-yöntemine göre geliştirilen program yardımıyla belirlenen minimum asal gerilmesi



Şekil 3.43. Sanayi bacasının 52 nolu noktasının hp-yöntemine göre geliştirilen program yardımıyla belirlenen von Mises gerilmesi

Şekil 3.40'den görüldüğü gibi, yerdeğiştirme değeri hp-yöntemi 1., 2., 5., ve 6. durumlarında 19640 serbestlik derecesi sayısı ile ANSYS programı değeriyle çakışmaktadır.

Şekil 3.41'den görüldüğü gibi, yine 19640 serbestlik derecesi sayısı ile maksimum asal gerilme değeri yakınsamaktadır.

Şekil 3.42'den görüldüğü gibi, minimum asal gerilme değeri genel anlamda ANSYS programından elde edilen değer ile uyumlu olmakta ve ondan daha erken yakınsamaktadır.

Şekil 3.43'den görüldüğü gibi, von Mises gerilmesi ise yine 19640 serbestlik derecesi sayısında yaklaşık 32500 N/m<sup>2</sup> değerine ulaşılırken ANSYS programından elde edilen değer yaklaşık 31500 N/m<sup>2</sup> civarında olup %3'lük fark minimum asal gerilme ve diğer gerilme bileşeni olan yükseklik boyunca gerilmeden kaynaklanmaktadır.

Karma Fonksiyon Yöntemi ile geometrinin tam olarak tanımlanabilmesinin de yardımıyla, ANSYS programının 25440 serbestlik derecesi sayısı ile verdiği sonuçlara oldukça yakın sonuçlar, kurgulanan sonlu eleman tipleri ile 19640 serbestlik derecesi sayısıyla %23 tasarruf sağlayarak elde edilebilmektedir. 19640 serbestlik derecesi sayısı; yükseklik boyunca eleman sayısının yeterli olduğu 12. ağ yapısı ile elde edilmektedir.

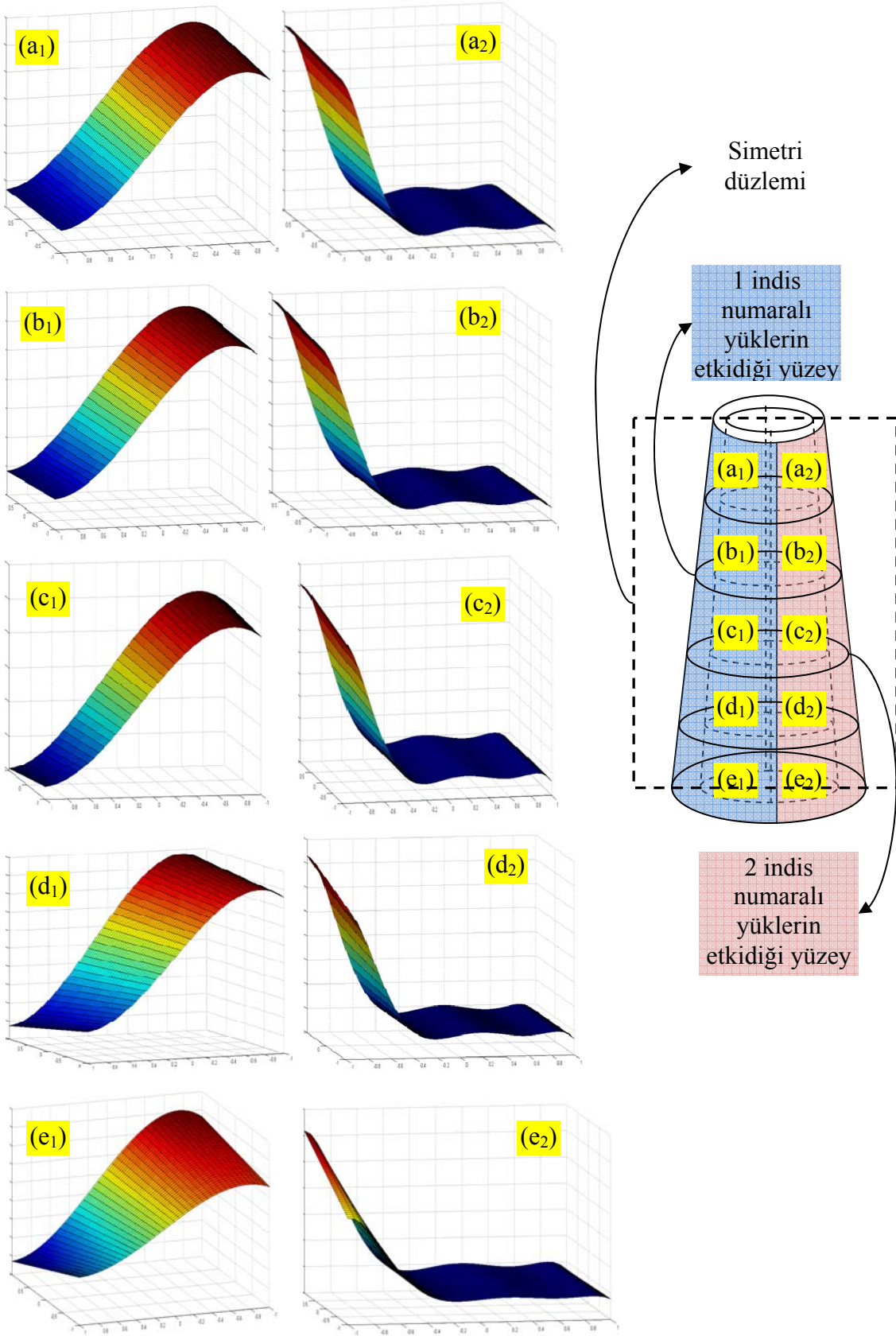
Düzgün yayılı yük etkisinde ANSYS programı ile yapılan karşılaştırmalardan kurgulanan sonlu eleman tipleri için yatay kesit boyunca dört, yükseklik boyunca on elemanın; hem yerdeğiştirme hem de gerilme alanında yakınsayan sonuç üretebilecek asgari ağ yapısını oluşturduğu anlaşılmaktadır. Ayrıca düzgün yayılı yük etkisindeki bu karşılaştırma ile birlikte bir sonraki örnek kapsamında dikkate alınacak olan doğrusal olmayan yük etkisindeki ağ yapısı hakkında da ön bilgi alınmış olmaktadır.

### 3.1.4. Kartezyen Koordinatlarda ve Eğrisel Yüzeyde Doğrusal Olmayan Yayılı Yük Etkisindeki Sanayi Bacası

Yukarıda düzgün yayılı yük etkisinde dikkate alınan sanayi bacası, burada hem TS 498 hem de prEN 1991-1-4'e göre belirlenen doğrusal olmayan rüzgâr yükleri etkisi altında dikkate alınacaktır. Bu yüklemelerin nasıl belirlendiği Ek 1'de verilmektedir. Her iki standarda göre de belirlenen rüzgâr yükü de simetrik olduğundan bir önceki başlıkta olduğu gibi matematiksel model sanayi bacasının yarısı üzerinde kurulmaktadır. Burada hem doğrusal olmayan yüklemeler için yakınsamanın sağlandığı ağ belirlenecek, hem de her iki standarda göre elde edilecek sonuçlar karşılaştırılacaktır. Bir önceki örnekte yakınsayan sonuca en az serbestlik derecesi sayısı ile ulaşılabilen sonlu elemanlardan biri olan Lagrange tabanlı hiyerarşik sonlu eleman tipi burada tek tip olarak dikkate alınacaktır. Yatay kesitteki ağ çalışması için, Tablo 3.6'da verilen 14., 15., 16. ve 17. ağ yapıları kullanılacaktır. İlk olarak prEN 1991-1-4 sonra TS 498'e göre sonuçlar sunulacaktır. Örnek yükleme durumu olarak prEN 1991-1-4'e göre belirlenen rüzgâr yüklemesi, burada kullanılmayacak ancak gösterimi kolay olan 9. ağ yapısı için Şekil 3.44'de verilmektedir.

Tablo 3.6. Sanayi bacasının yarısı için kurgulanan Lagrange tabanlı hiyerarşik sonlu eleman için yatay kesit boyunca çeşitlendirilen ağ yapıları

Ağ türü	Eleman sayısı			Ağdaki toplam	Polinom derecesi	Maksimum S.D.S.
	Yatay kesit boyunca	Yükseklik boyunca	Kalınlık Boyunca			
14	8	5	1	40	1-10	23565
15	10	5	1	50	1-10	29385
16	12	5	1	60	1-10	35205
17	14	5	1	70	1-10	41025

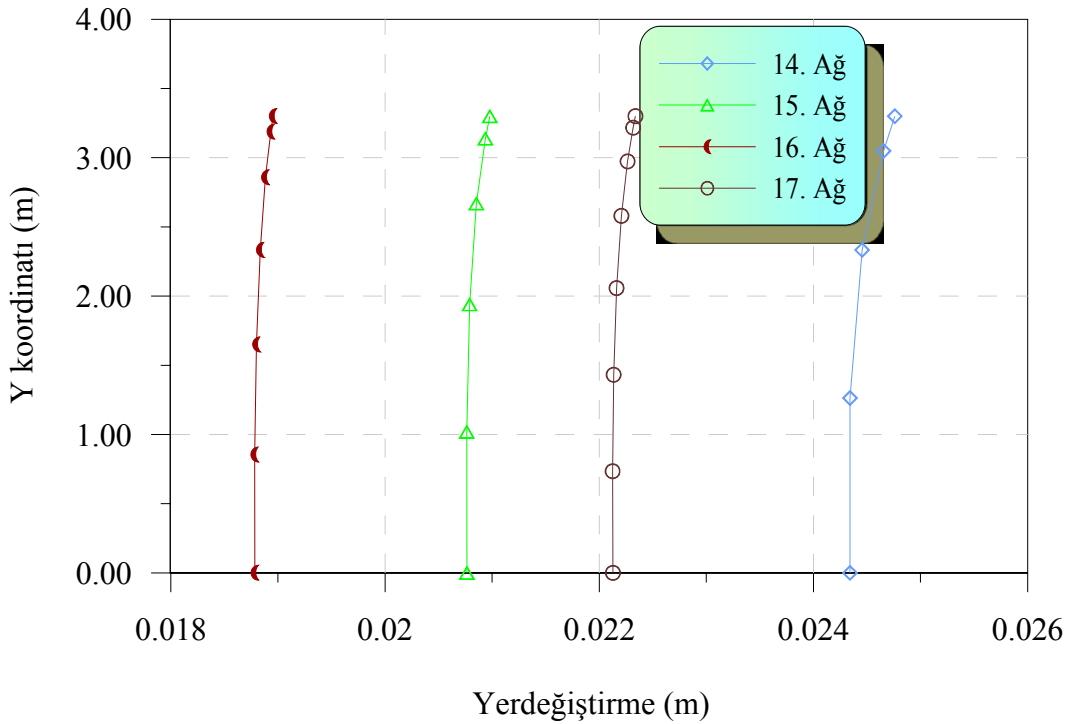


Şekil 3.44. prEN 1991-1-4'e göre belirlenen rüzgâr yükünün sanayi bacasının yarı simetrik kısmında bulunan eleman yüzeylerinde gösterilimi

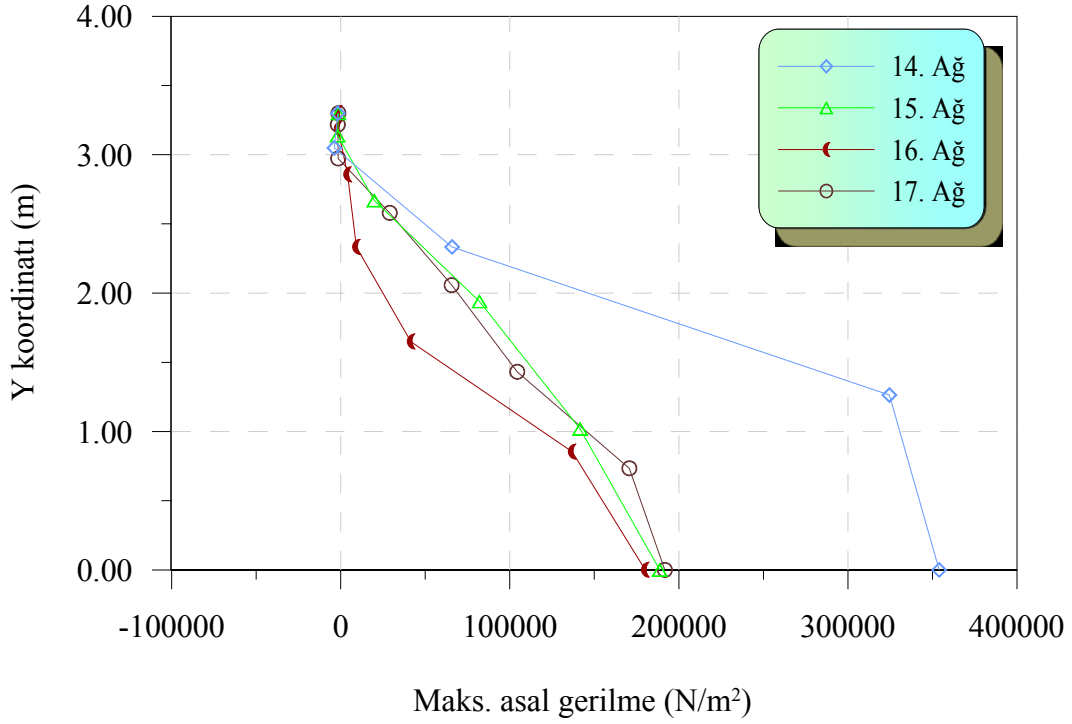
Şekil 3.44’de görüldüğü gibi, prEN 1991-1-4’e göre sanayi bacası yüzeyinde elde edilen yükleme yüzeye yayılı olup eğriliği iki parçalı olarak, tek doğrultuda standartın sunduğu eğriliğe eşdeğer poliom tabanlı sekizinci ve altıncı dereceden eğriliklere sahip olacaktır (Ek Şekil 1.4).

### 3.1.4.1. Geliştirilen Program ile prEN 1991-1-4’e Göre Elde Edilen Doğrusal Olmayan Yayılı Yük Etkisindeki Sanayi Bacasının Statik Analizi

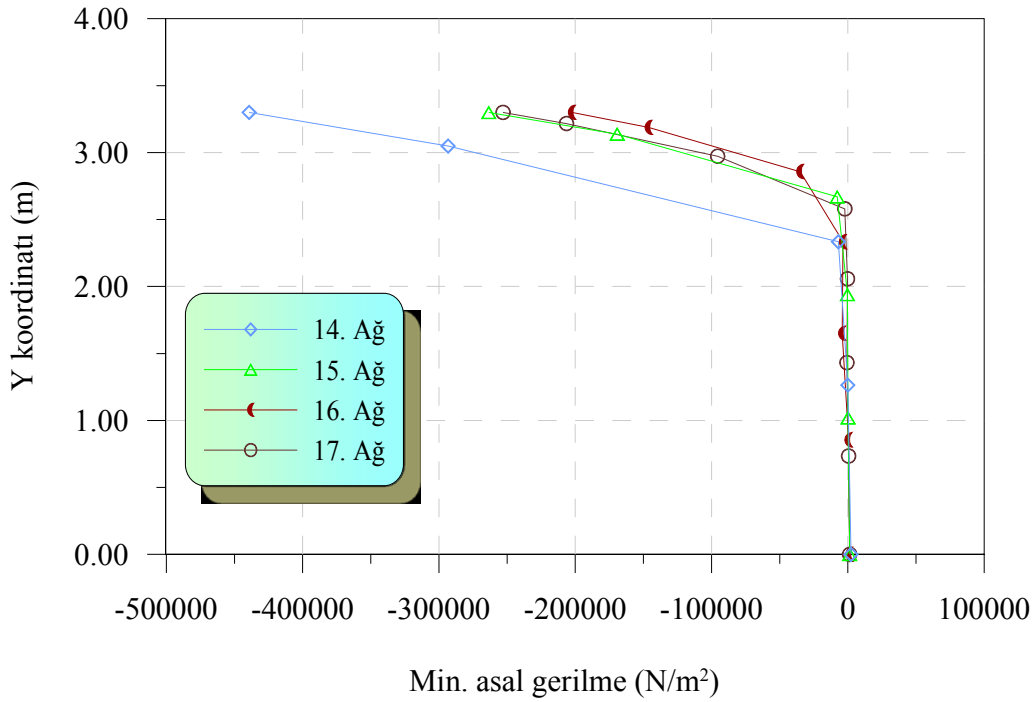
prEN 1991-1-4’e göre yatay kesit boyunca ağ sıklaştırması sonucu elde edilen yatay kesitteki yerdeğiştirme ve gerilme sonuçları 115 m kotundaki yatay kesit boyunca yarı simetrik sanayi bacasının y-kordinatlarıyla Şekil 3.45, Şekil 3.46, Şekil 3.47 ve Şekil 3.48’de yükseklik boyunca y-koordinatının 3.3 m olduğu noktalardaki bulgular ise Şekil 3.49, Şekil 3.50, Şekil 3.51 ve Şekil 3.52’de verilmektedir.



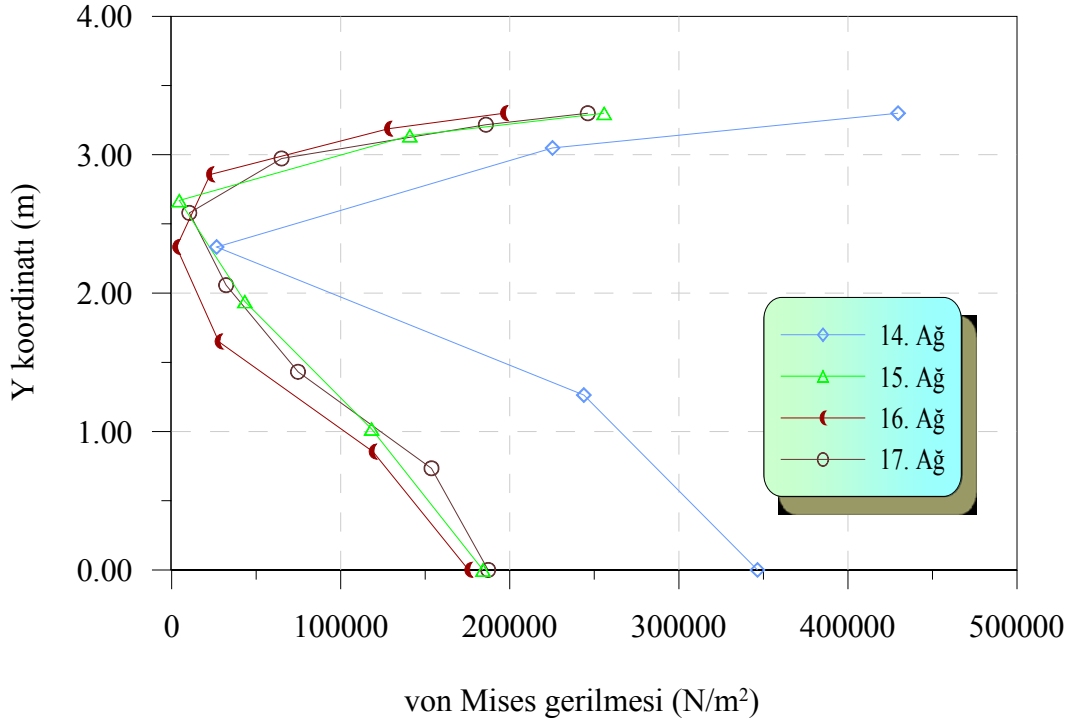
Şekil 3.45. prEN 1991-1-4’e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yatay kesit boyunca ağ sıklaştırması sonucu 115 m kotundaki yatay kesitine ait yerdeğiştirmeler



Şekil 3.46. prEN 1991-1-4'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yatay kesit boyunca ağ sıklaştırması sonucu 115 m kotundaki yatay kesitine ait maksimum asal gerilmeler



Şekil 3.47. prEN 1991-1-4'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yatay kesit boyunca ağ sıklaştırması sonucu 115 m kotundaki yatay kesitine ait minimum asal gerilmeler



Şekil 3.48. prEN 1991-1-4'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yatay kesit boyunca ağ sıklaştırması sonucu 115 m kotundaki yatay kesitine ait von Mises gerilmeleri

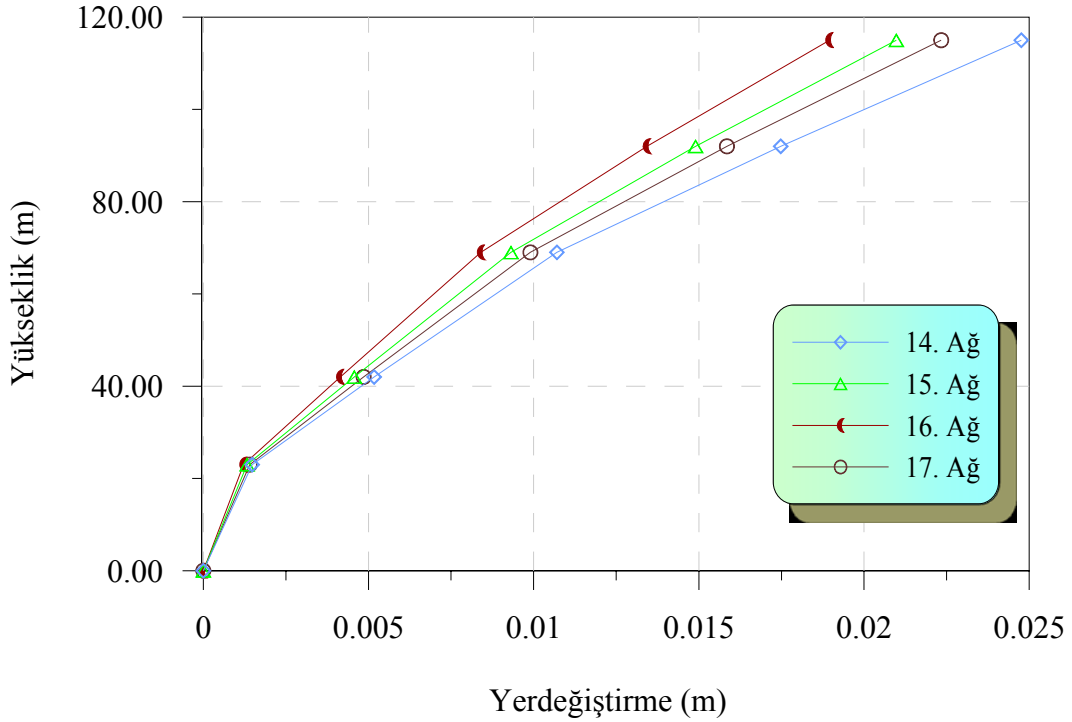
Şekil 3.45'den görüldüğü gibi, yatay kesit boyunca eleman sayısı artırıldıkça, 115 m kotunda bulunan yatay kesitteki y-ekseni doğrultusundaki yerdeğiştirme, ilk üç ağda bir birine göre azalırken; 17. ağdaki değer, y-koordinatının 0,0 m olduğu noktada 15. ağdaki değere yaklaşık % 6 yakınlıkta ve yine yaklaşık 0,021 m değerini vermektedir.

Şekil 3.46'dan görüldüğü gibi, yatay kesit boyunca eleman sayısı artırıldıkça, 115 m kotunda bulunan yatay kesitteki maksimum asal gerilme, yerdeğiştirmede olduğu gibi ilk üç ağda bir birine göre azalmaktadır. Maksimum asal gerilmenin en büyük olduğu ve y-koordinatının 0,0 m olduğu noktada 17. ağdaki değer, 15. ağdaki değere yaklaşık % 2 yakınlıkta olmaktadır. Maksimum asal gerilme, tüm ağlarda y-koordinatının 3,3 m olduğu basınç yüklemesinin en büyük olduğu noktada, sifıra çok yakın değer alırken çekme yüklemesinin olduğu yere, yani, y-koordinatının 0,0 m olduğu noktaya doğru, yakınsamış değer olan yaklaşık 190000 N/m<sup>2</sup> (0,19 MPa) çekme değerini almaktadır.

Şekil 3.47'den görüldüğü gibi, yatay kesit boyunca eleman sayısı artırıldıkça, 115 m kotunda bulunan yatay kesitteki minimum asal gerilme değeri, ilk üç ağda bir birine göre artmaktadır. Minimum asal gerilmenin en büyük olduğu ve y-koordinatının 3,3 m olduğu noktada, 17. ağdaki değer 15. ağdaki değere yaklaşık % 4 yakınlıktadır. Minimum asal

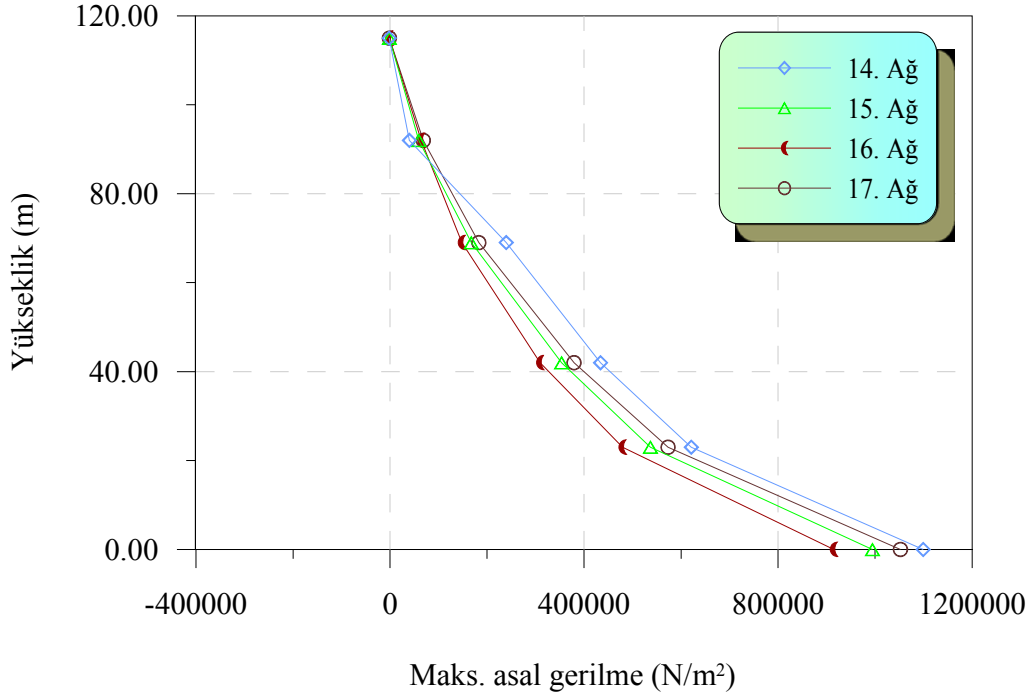
gerilme, tüm ağılarda basınç yüklemesinin en büyük değerini aldığı y-koordinatının 3,3 m olduğu noktada, yaklaşık  $250000 \text{ N/m}^2$  (0,25 MPa) basınç değerini alırken çekmenin olduğu yere, yani, y- koordinatının yaklaşık 2,6 m olduğu noktadan itibaren yaklaşık sıfır değerini almaktadır.

Şekil 3.48'den görüldüğü gibi, von Mises gerilmesi değeri, yerdeğiştirme ve maksimum asal gerilme gözlemlenen yakınsama davranışını sergilemektedir. von Mises gerilmesi y-koordinatının 3,3 m olduğu noktada, minimum asal gerilme değerine eşit olurken 0,0 m olduğu noktada, maksimum asal gerilme değerine eşit olmaktadır. Yerdeğiştirme, maksimum asal gerilme ve minimum asal gerilmelerde olduğu gibi 15. ağ, yakınsamış sonuçları veren minimum ağ olarak gözlenmektedir.

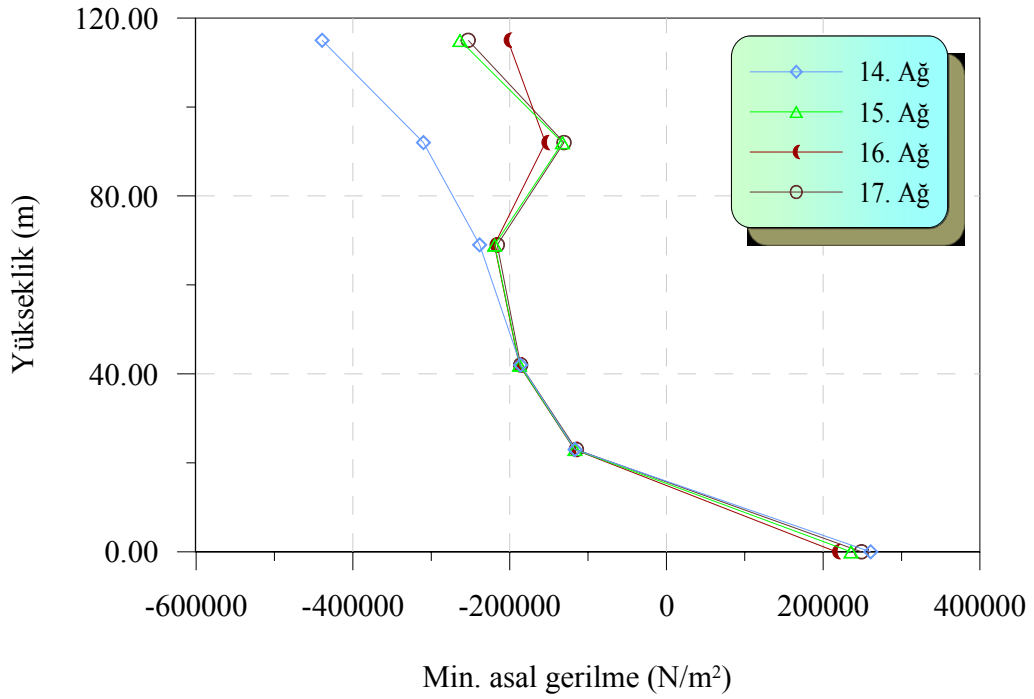


Şekil 3.49. prEN 1991-1-4'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yatay kesit boyunca ağ sıklaştırması sonucu yükseklik boyunca y-koordinatının 3.3 m olduğu noktalardaki yerdeğiştirmeler

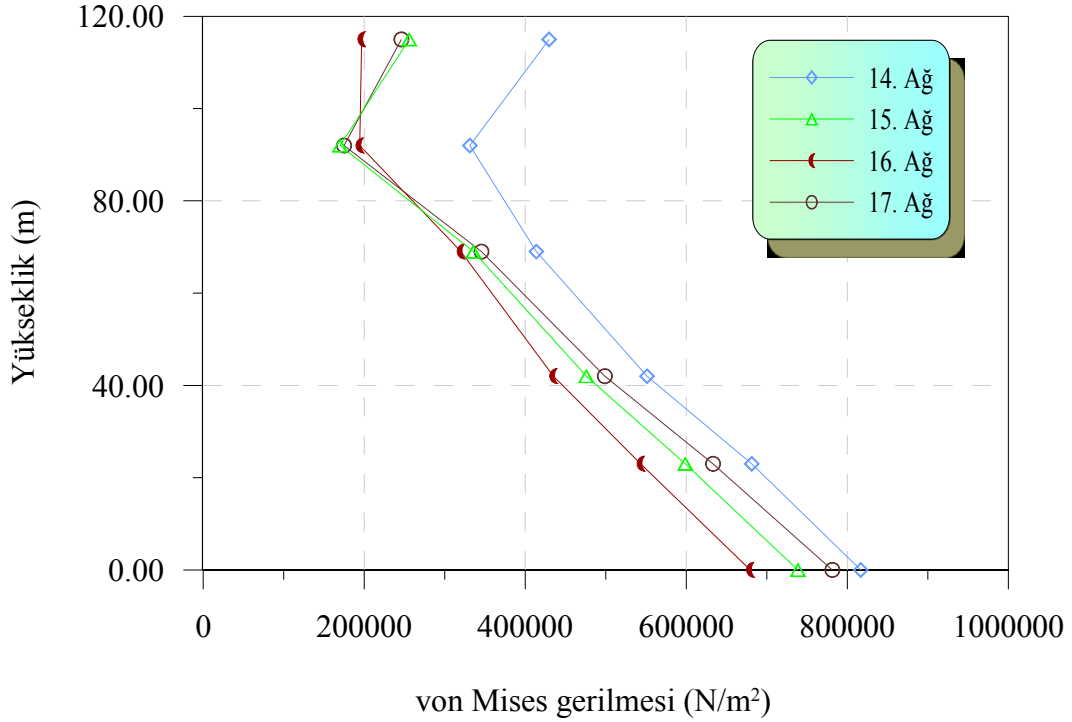




Şekil 3.50. prEN 1991-1-4'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yatay kesit boyunca ağ sıklaştırması sonucu yükseklik boyunca y-koordinatının 3.3 m olduğu noktalardaki maksimum asal gerilmeler



Şekil 3.51. prEN 1991-1-4'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yatay kesit boyunca ağ sıklaştırması sonucu yükseklik boyunca y-koordinatının 3.3 m olduğu noktalardaki minimum asal gerilmeler



Şekil 3.52. prEN 1991-1-4'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yatay kesit boyunca ağ sıklığına sonuca yükseklik boyunca y-koordinatının 3.3 m olduğu noktalardaki von Mises gerilmeleri

Şekil 3.49'dan görüldüğü gibi, yükseklik boyunca y-koordinatının 3,3 m olduğu noktalarda verilen yerdeğiştirme yatay kesitteki yakınsama davranışının aynısını sergilemektedir. En büyük yerdeğiştirmenin görüldüğü 115 m kotunda 15. ağıdaki değerin 17. ağıdaki değere yaklaşık % 5 yakınlıkta olduğu ve yaklaşık 0,022 m olduğu görülmektedir.

Şekil 3.50'den görüldüğü gibi, yükseklik boyunca belirlenen maksimum asal gerilme yatay kesitteki yakınsama davranışının aynısını sergilemektedir. En büyük maksimum asal gerilmenin olduğu 0,0 m kotunda, 15. ağıdaki değerin, 17. ağıdaki değere yaklaşık % 5 yakınlıkta olduğu ve değerinin yaklaşık  $10^6$  N/m<sup>2</sup> (1,0 MPa) olduğu görülmektedir. Yükseklik boyunca y-koordinatının 3,3 m olduğu noktalarda belirlenen maksimum asal gerilmenin, çekme etkisinin etkin görüldüğü baca tabanına doğru arttığı da farkedilmektedir.

Şekil 3.51'den görüldüğü gibi, yükseklik boyunca belirlenen minimum asal gerilme yatay kesitteki yakınsama davranışının aynısını sergilemektedir. En büyük minimum asal gerilmenin 0,0 m kotunda olduğu, ayrıca, 15. ağıdaki değerin, 17. ağıdaki değere yaklaşık % 4 yakınlıkta olduğu ve değerinin yaklaşık 250000 N/m<sup>2</sup> (0,25 MPa) olduğu görülmektedir. Yükseklik boyunca y-koordinatının 3,3 m olduğu noktalarda verilen minimum asal gerilme değerinin, baca ortasından 115 m kotuna doğru yüklemekten kaynaklanan basınç etkisinden

dolayı ve 0,0 m kotuna doğru mesnetlenmeden kaynaklanan çekme etkisinden dolayı arttığı da farkedilmektedir.

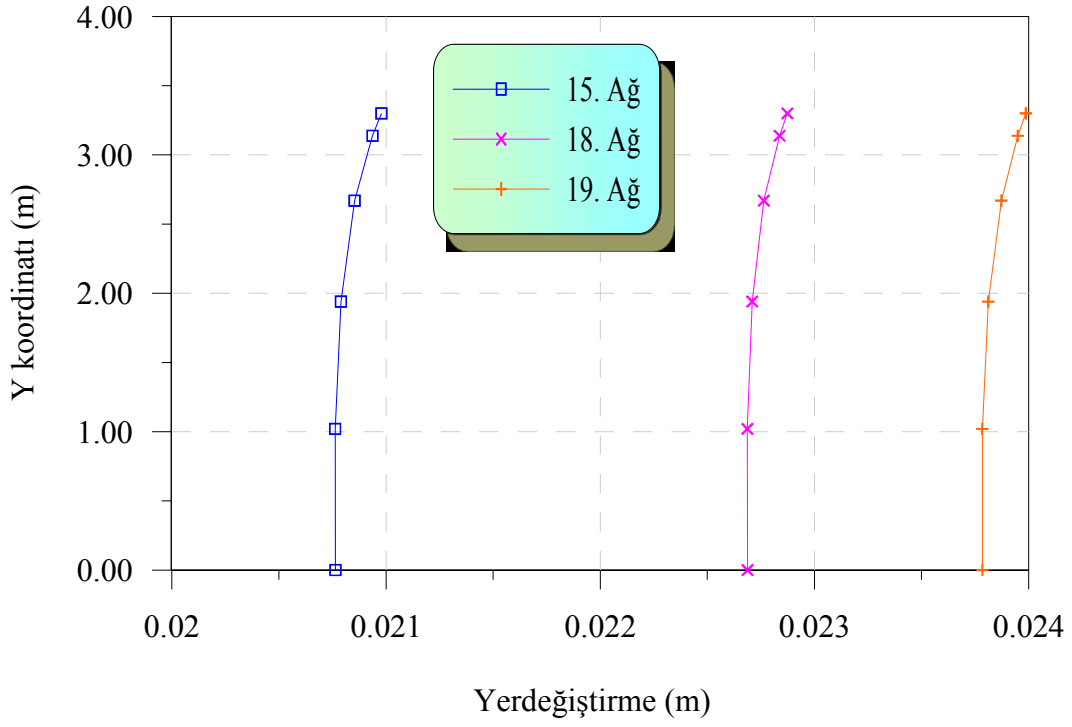
Şekil 3.52'den görüldüğü gibi, yükseklik boyunca belirlenen von Mises gerilmesi yatay kesitteki yakınsama davranışının aynısını sergilemektedir. En büyük von Mises gerilmesinin oluştuğu 0,0 m kotunda, 15. ağıdaki değerin 17. ağıdaki değere yaklaşık % 5 yakınlıkta olduğu ve yaklaşık  $730000 \text{ N/m}^2$  (0,73 MPa) olduğu görülmektedir. Yükseklik boyunca y-koordinatının 3,3 m olduğu noktalarda belirlenen von Mises gerilmesi değerinin, maksimum asal ve minimum asal gerilmenin bileşkesi olarak mesnetlenme bölgesine doğru çekme etkisinin her iki doğrultuda etkinleşmesinden ötürü arttığı da farkedilmektedir.

Yatay kesitte ağ sıklaştırması, hem 115 m kotundaki yatay kesitteki sonuçlarla hem de y-koordinatının 3,3 m olduğu yükseklikteki sonuçlarla değerlendirildiğinde, 15. ağ'ın (yatay kesitte 5 elemanın) yeterli olacağı belirlenmektedir. Dikkate alınan yerdeğiştirme ve gerilme değerleri farklı ağlar için, bir birlerine göre en kaba şekilde % 6 civarında bir fark göstermektedir. Sadece yatay kesit boyunca ağ sıklaştırması ile elde edilen bu farkın istenen düzeyde az bir fark olduğu düşünüldüğünden daha fazla ağ sıklaştırılmasına gerek duyulmamıştır. Yatay kesitte ağ sıklaştırması ile elde edilen bulgulardan gözlemlenen yakınsama davranışı, alışıla gelmiş şekilde sürekli artan veya azalan bir biçimde olmamaktadır. Zira yatay kesitteki eleman sayısına bağlı olarak ağ inceltmesi esnasında azalma eğiliminde iken artma, artma eğiliminde iken azalma olabilmektedir. Bunun nedeni olarak yüklemenin doğrusal olmaması gösterilebilir.

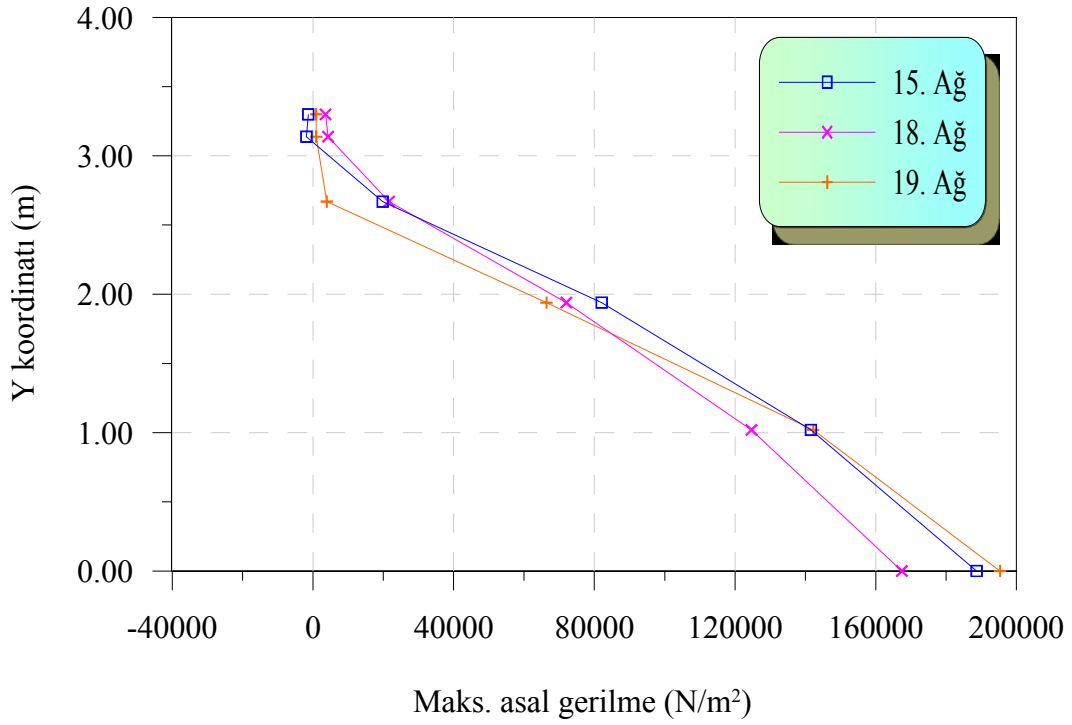
Tablo 3.7'de verilen veriler kullanılarak yükseklik boyunca ağ sıklaştırması sonucu prEN 1991-1-4'e göre elde edilen yatay kesitteki yerdeğiştirme ve gerilme sonuçları, 115 m kotundaki yatay kesit boyunca Şekil 3.53, Şekil 3.54, Şekil 3.55 ve Şekil 3.56'da; yükseklik boyunca y-koordinatının 3,3 m olduğu noktalardaki yerdeğiştirme ve gerilme sonuçları, Şekil 3.57, Şekil 3.58, Şekil 3.59 ve Şekil 3.60'da verilmektedir.

Tablo 3.7. Sanayi bacasının yarısı için kurgulanan Lagrange tabanlı hiyerarşik sonlu eleman için yükseklik boyunca çeşitlendirilen ağ yapıları

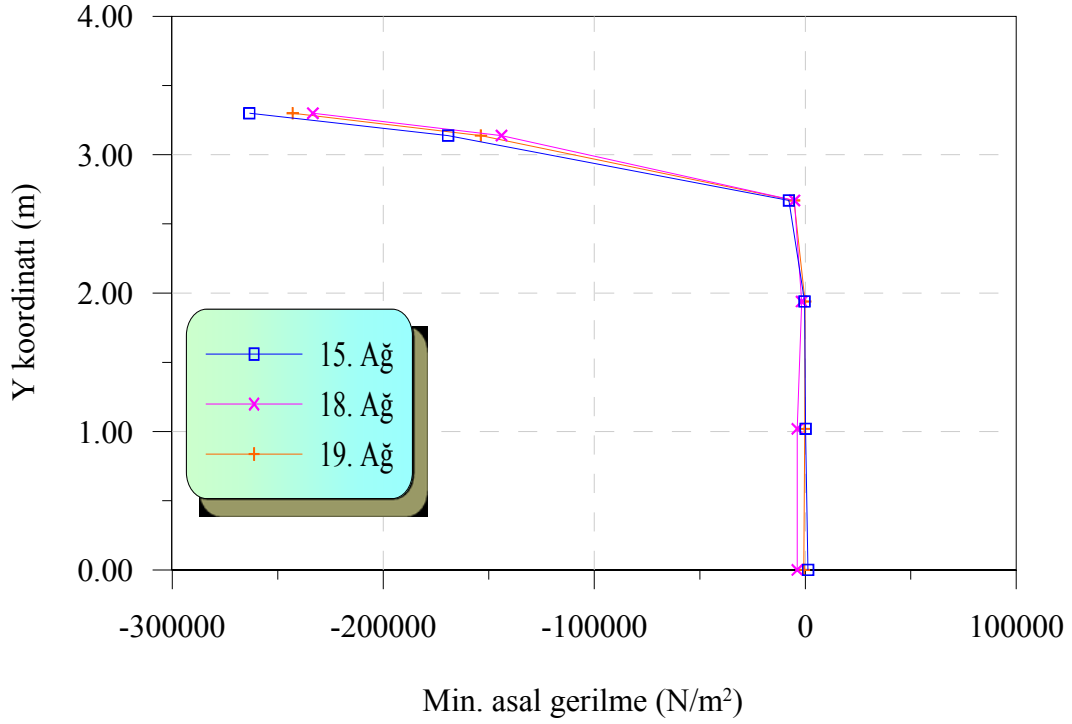
Ağ türü	Eleman sayısı				Polinom derecesi	Maksimum S.D.S.
	Yatay kesit boyunca	Yükseklik boyunca	Kalınlık boyunca	Ağıdaki toplam		
15	10	5	1	50	1-10	29385
18	10	10	1	100	1-10	58770
19	10	20	1	200	1-10	117540



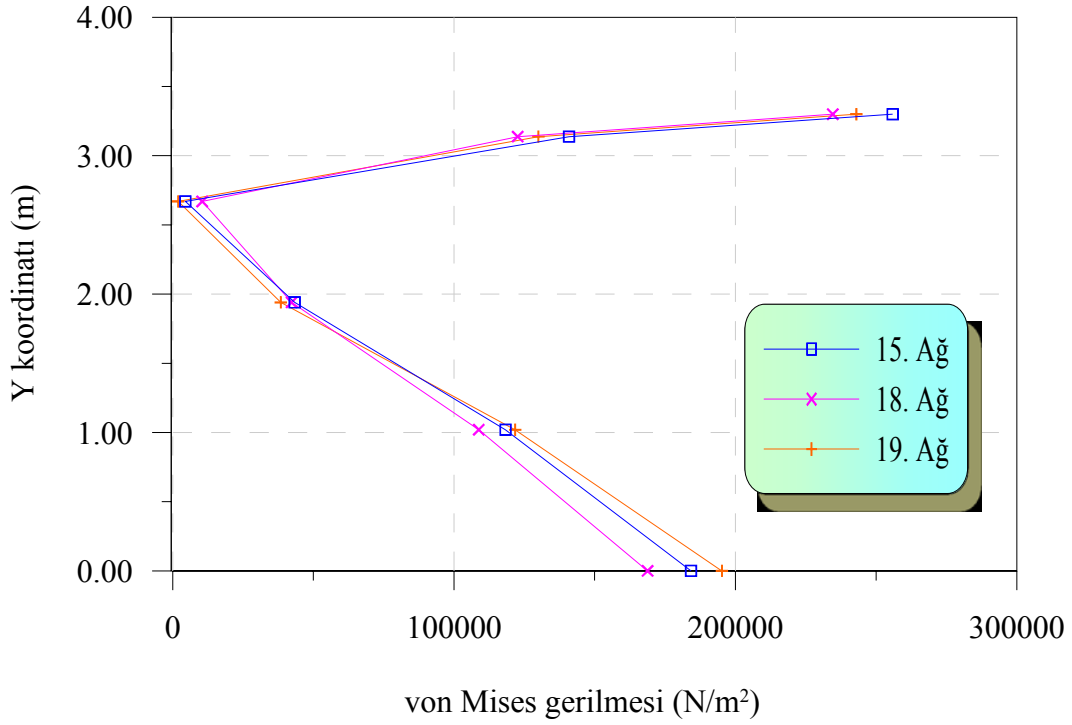
Şekil 3.53. prEN 1991-1-4'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yükseklik boyunca ağ sıklaştırması sonucu 115 m kotundaki yatay kesitine ait yerdeğıştirmeler



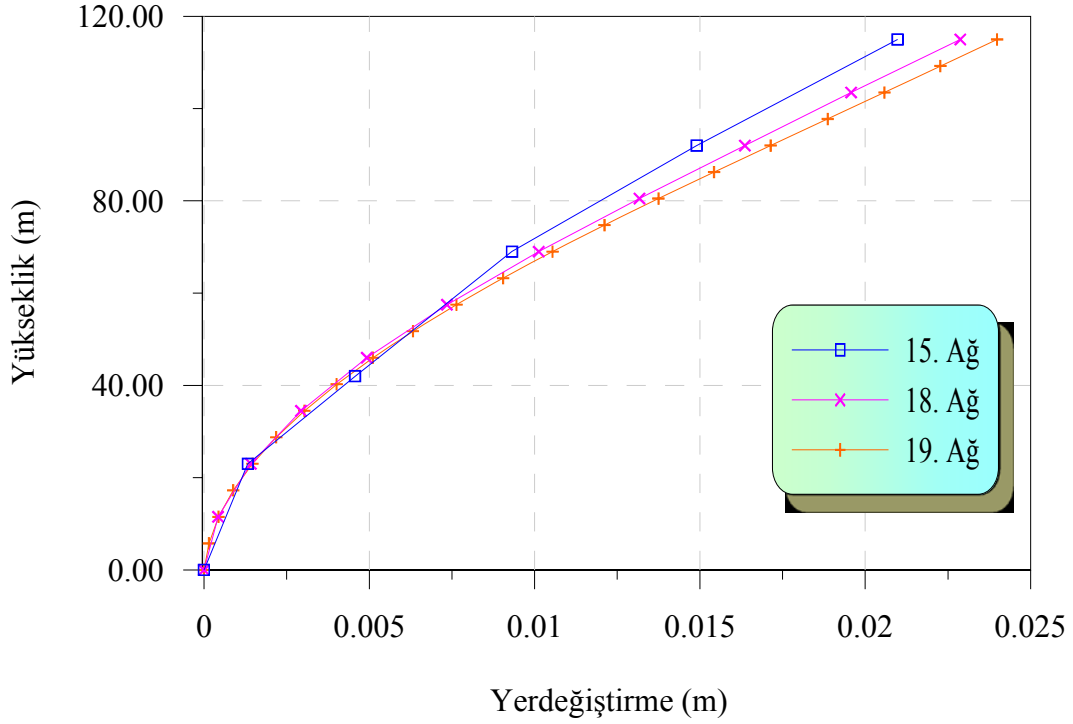
Şekil 3.54. prEN 1991-1-4'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yükseklik boyunca ağ sıklaştırması sonucu 115 m kotundaki yatay kesitine ait maksimum asal gerilmeler



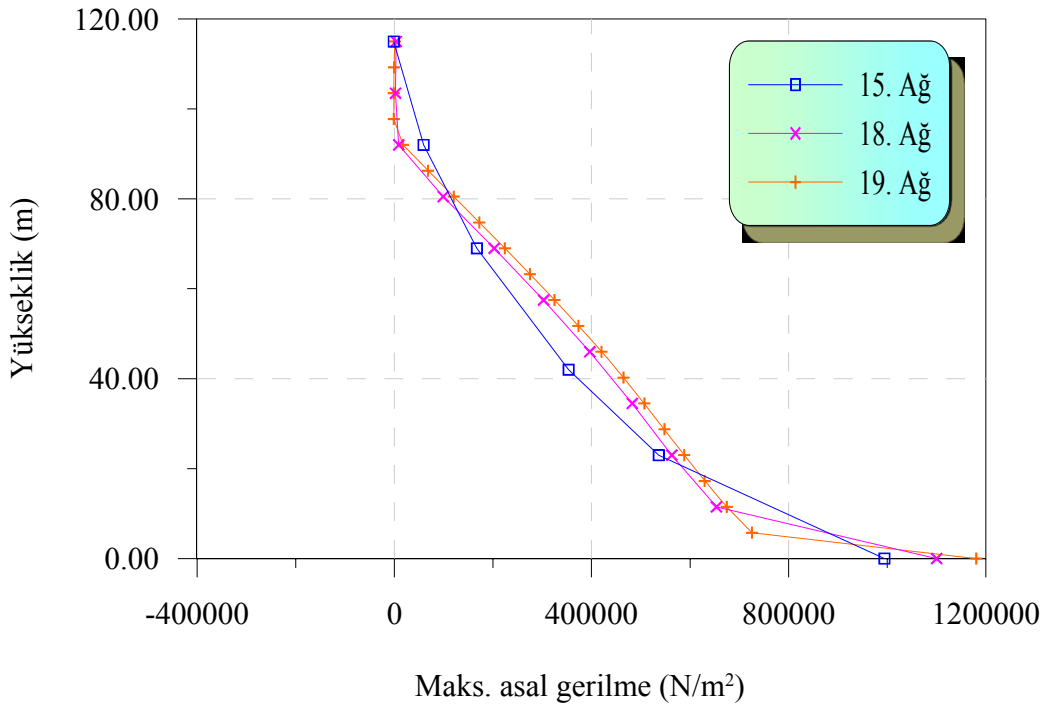
Şekil 3.55. prEN 1991-1-4'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yükseklik boyunca ağ sıklaştırması sonucu 115 m kotundaki yatay kesitine ait minimum asal gerilmeler



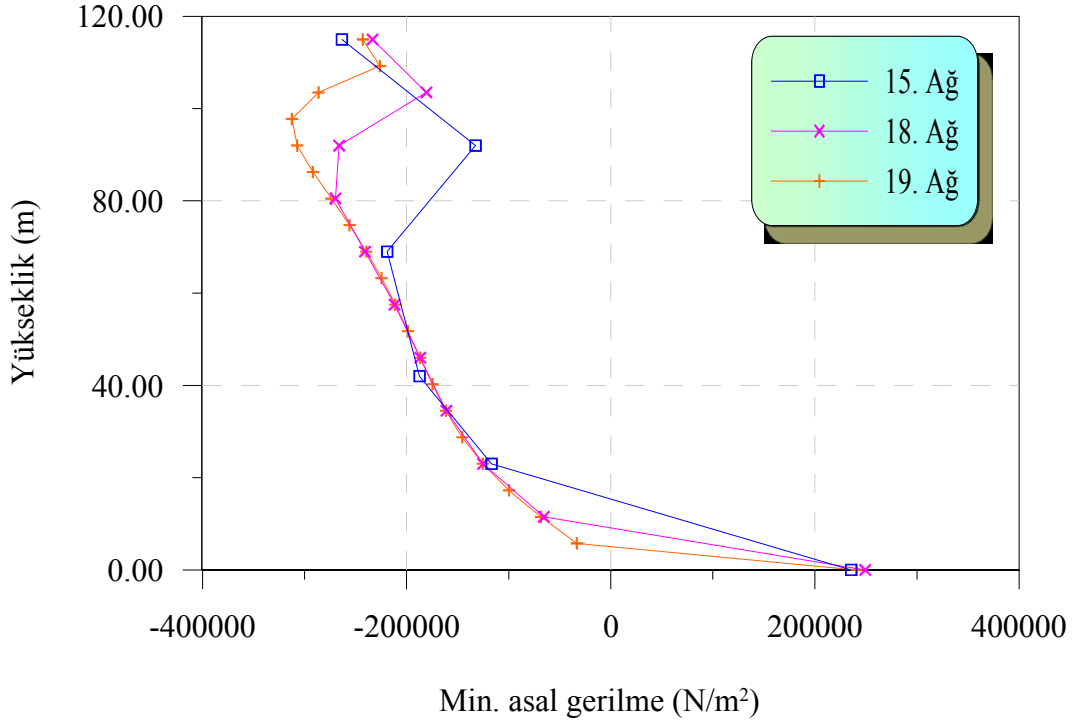
Şekil 3.56. prEN 1991-1-4'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yükseklik boyunca ağ sıklaştırması sonucu 115 m kotundaki yatay kesitine ait von Mises gerilmeleri



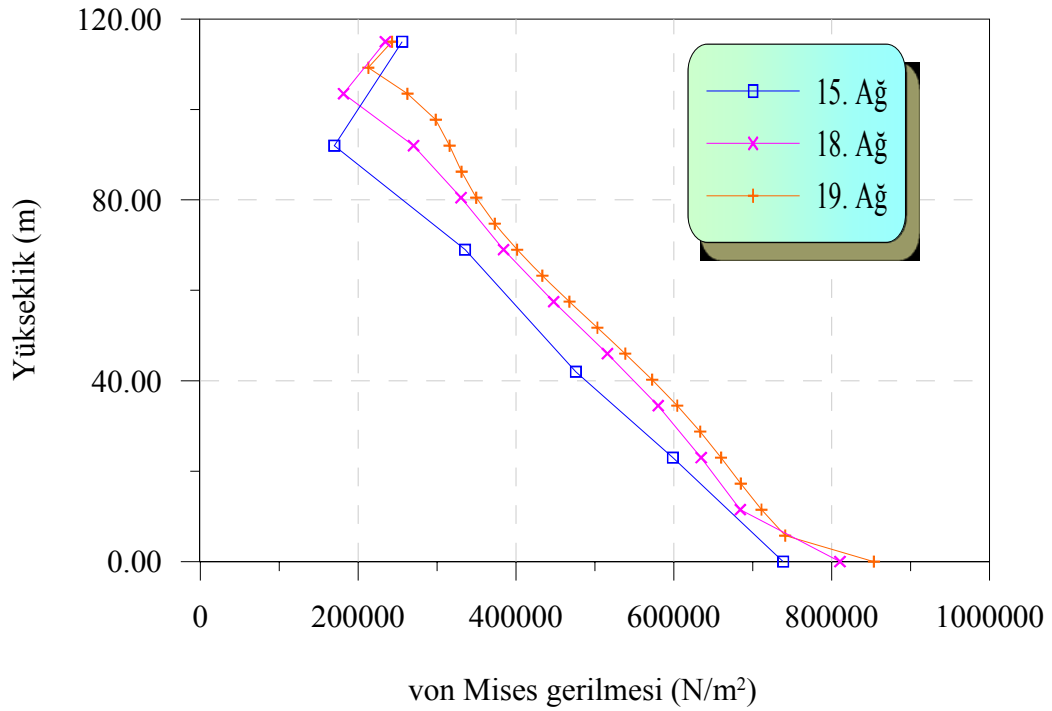
Şekil 3.57. prEN 1991-1-4'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yükseklik boyunca ağ sıklaştırması sonucu yükseklik boyunca y-koordinatının 3.3 m olduğu noktalardaki yerdeğiştirmeler



Şekil 3.58. prEN 1991-1-4'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yükseklik boyunca ağ sıklaştırması sonucu yükseklik boyunca y-koordinatının 3.3 m olduğu noktalardaki maksimum asal gerilmeler



Şekil 3.59. prEN 1991-1-4'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yükseklik boyunca ağ sıklaştırması sonucu yükseklik boyunca y-koordinatının 3.3 m olduğu noktalardaki minimum asal gerilmeler



Şekil 3.60. prEN 1991-1-4'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yükseklik boyunca ağ sıklaştırması sonucu yükseklik boyunca y-koordinatının 3.3 m olduğu noktalardaki von Mises gerilmeleri

Şekil 3.53'den görüldüğü gibi, yükseklik boyunca eleman sayısı artırıldıkça, 115 m kotunda bulunan yatay kesitteki y-ekseni doğrultusundaki yerdeğiştirme artmaktadır. 19. ağıdaki değer, y-koordinatının 0,0 m olduğu noktada 18. ağıdaki değere yaklaşık % 5 yakınlıkta ve yine yaklaşık 0,0238 m'dir.

Şekil 3.54'den görüldüğü gibi yükseklik boyunca eleman sayısı artırıldıkça, 115 m kotunda bulunan yatay kesitteki maksimum asal gerilme tek yönlü artan veya azalan bir eğilim göstermemektedir. y-koordinatının 3,3 m olduğu noktaya doğru önce artan sonra azalan; y-koordinatının 0,0 m olduğu noktaya doğru ise önce azalan sonra artan bir davranış gözlenmektedir. Maksimum asal gerilmenin en büyük olduğu noktada 19. ağıdaki değer, 15. ağıdaki değere yaklaşık % 4 yakınlıkta olmaktadır. Maksimum asal gerilme, tüm ağılarda y-koordinatının 3,3 m olduğu noktada sıfıra çok yakın değer alırken y-koordinatının 0,0 m olduğu noktaya doğru yaklaşık  $196000 \text{ N/m}^2$  (0,196 MPa) değerini almaktadır.

Şekil 3.55'den görüldüğü gibi, yükseklik boyunca eleman sayısı artırıldıkça, 115 m kotunda bulunan yatay kesitteki minimum asal gerilme, üç ağıda bir birine oldukça yakın olmaktadır. Ancak genel eğilim maksimum asal gerilme davranışındaki eğilimin tam tersidir. Minimum asal gerilmenin en büyük olduğu noktada ( $y=3,3 \text{ m}$ ) 19. ağıdaki değer, 15. ağıdaki değere yaklaşık % 8 yakınlıkta olup 18. ağıdaki değere % 4 yakınlıktadır. Minimum asal gerilme, tüm ağılarda y-koordinatının 3,3 m olduğu basınç yüklemesinin en büyük olduğu noktada, yakınsamış değer olan yaklaşık  $245000 \text{ N/m}^2$  (0,245 MPa) basınç değerini alırken çekmenin en büyük olduğu yere yani y-koordinatının 0,0 m olduğu noktaya doğru sıfıra çok yakın değer almaktadır.

Şekil 3.56'dan görüldüğü gibi, von Mises gerilmesi önce azalan sonra artan bir davranış sergilemektedir. von Mises gerilmesi, y-koordinatının 3,3 m olduğu noktada minimum asal gerilme değerine eşit olurken 0,0 m olduğu noktada, maksimum asal gerilme değerine eşit olmaktadır.

Yerdeğiştirme, maksimum asal gerilme, minimum asal gerilme ve von Mises gerilmeleri incelendiğinde yakınsama davranışının tek tip olmadığı görülmektedir. Ancak verilen değerler, bir birlerine en kaba şekilde % 8 oranında yakınsamış durumdadırlar.

Şekil 3.57'den görüldüğü gibi, yükseklik boyunca y-koordinatının 3,3 m olduğu noktalarda belirlenen yerdeğiştirmelerde, yatay kesitteki yakınsama davranışının aynısını sergilemektedir. En büyük yerdeğiştirmenin görüldüğü 115 m kotunda, 19. ağıdaki değer



18. ağıdaki değere yaklaşık % 5 yakınlıkta olduğu ve yaklaşık 0,024 m olduğu görülmektedir.

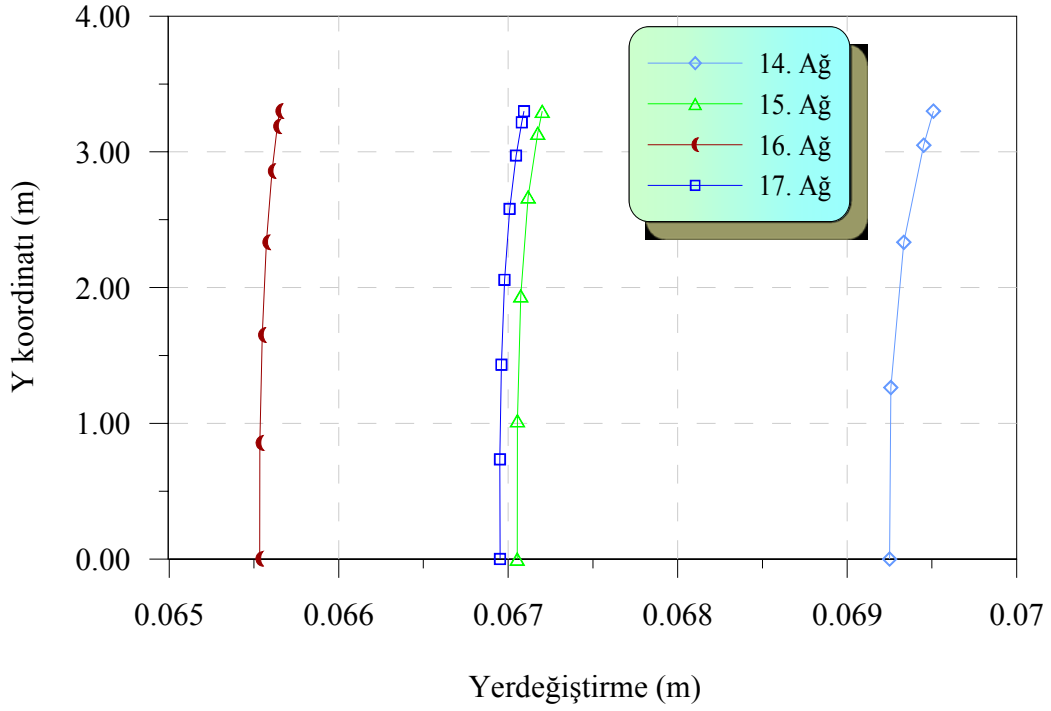
Şekil 3.58'den görüldüğü gibi, yükseklik boyunca belirlenen maksimum asal gerilmeler, yatay kesitteki yakınsama davranışından farklı bir davranış sergilemektedir. En büyük maksimum asal gerilmenin olduğu 0,0 m kotunda, 19. ağıdaki değer 18. ağıdaki değere yaklaşık % 7 yakınlıkta olduğu ve değerinin yaklaşık  $1,18 \times 10^6 \text{ N/m}^2$  (1,18 MPa) olduğu görülmektedir.

Şekil 3.59'dan görüldüğü gibi, yükseklik boyunca belirlenen minimum asal gerilme, yatay kesitteki yakınsama davranışından farklı ve daha karmaşık bir davranış sergilemektedir. En büyük minimum asal gerilmenin, 115 m kotunda ve 0,0 m kotunda, 19. ağıdaki değer 18. ağıdaki değere yaklaşık % 4 yakınlıkta olduğu ve değerinin yaklaşık  $250000 \text{ N/m}^2$  (0,25 MPa) olduğu görülmektedir.

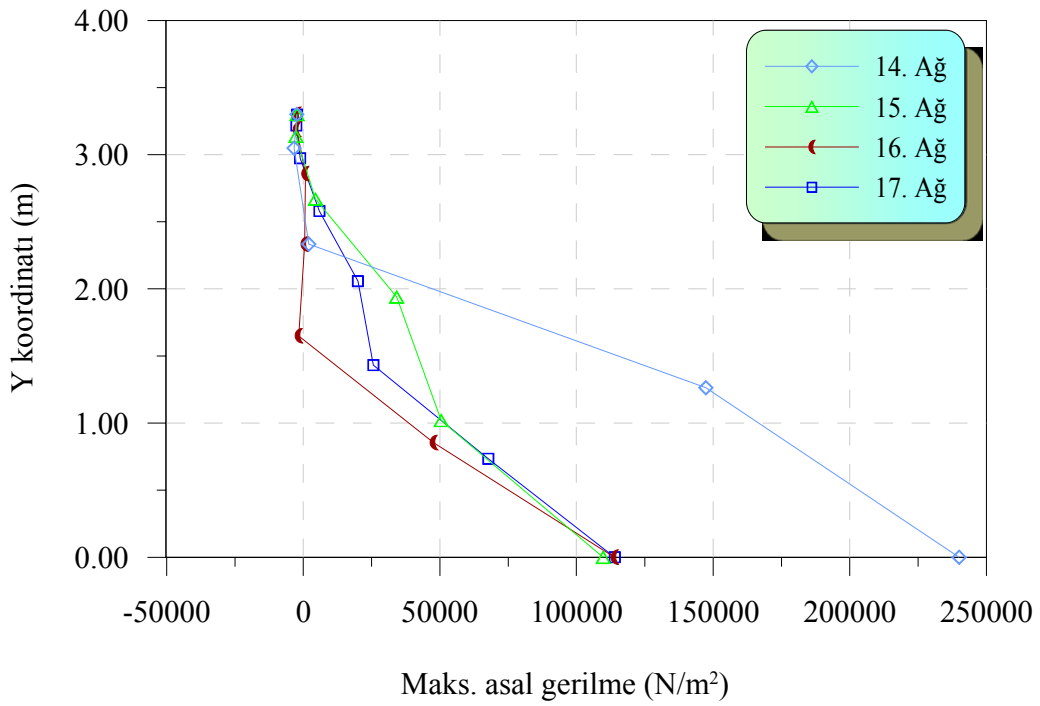
Şekil 3.60'dan görüldüğü gibi, yükseklik boyunca verilen von Mises gerilmesi yatay kesitteki yakınsama davranışından farklı bir davranış sergilemektedir. En büyük von Mises gerilmesinin olduğu 0,0 m kotunda, 19. ağıdaki değer 18. ağıdaki değere yaklaşık % 5 yakınlıkta olduğu ve değerinin yaklaşık  $850000 \text{ N/m}^2$  (0,85 MPa) olduğu görülmektedir.

#### **3.1.4.2. Geliştirilen Program ile TS 498'e Göre Elde Edilen Doğrusal Olmayan Yayılı Yük Etkisindeki Sanayi Bacasının Statik Analizi**

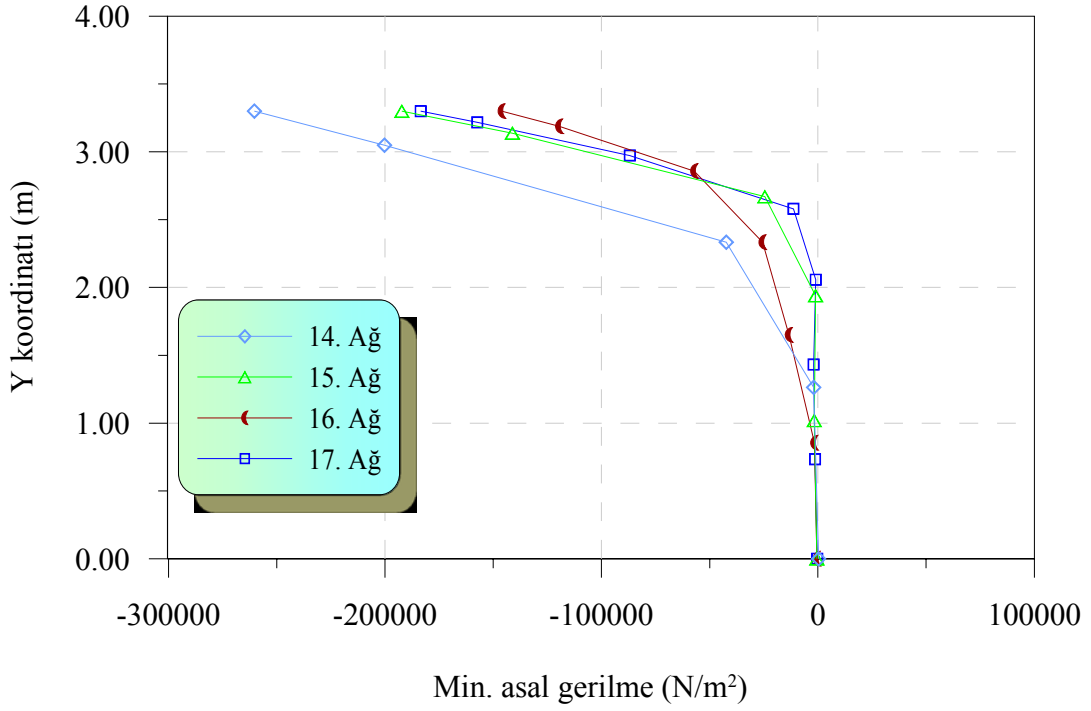
TS 498'e göre sanayi bacası yüzeyinde elde edilen yükleme yüzeye yayılı olup eğrilikleri, tek doğrultuda kosinüs eğriliğine eşdeğer polinom tabanlı üçüncü dereceden bir eğriliğe sahip olacaktır (Ek Şekil 1.4). Tablo 3.6'da verilen değerler kullanıldığında yatay kesit boyunca eleman sayısının artırılması sonucu 115 m kotundaki yatay kesit boyunca elde edilen yatay kesitteki yerdeğiştirme ve gerilme değerleri Şekil 3.61, Şekil 3.62, Şekil 3.63 ve Şekil 3.64'de, yükseklik boyunca y-koordinatının 3,3 m olduğu noktalardaki bulgular ise Şekil 3.65, Şekil 3.66, Şekil 3.67 ve Şekil 3.68'de verilmektedir.



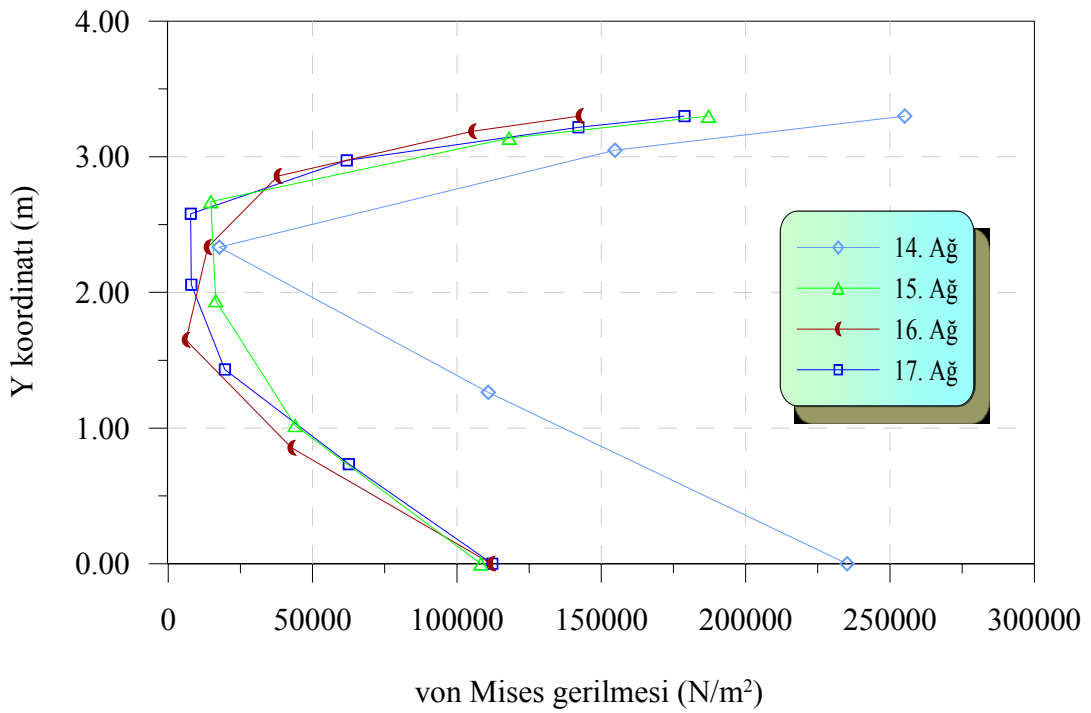
Şekil 3.61. TS 498'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yatay kesit boyunca ağ sıklaştırması sonucu 115 m kotundaki yatay kesite ait yerdeğiştirmeler



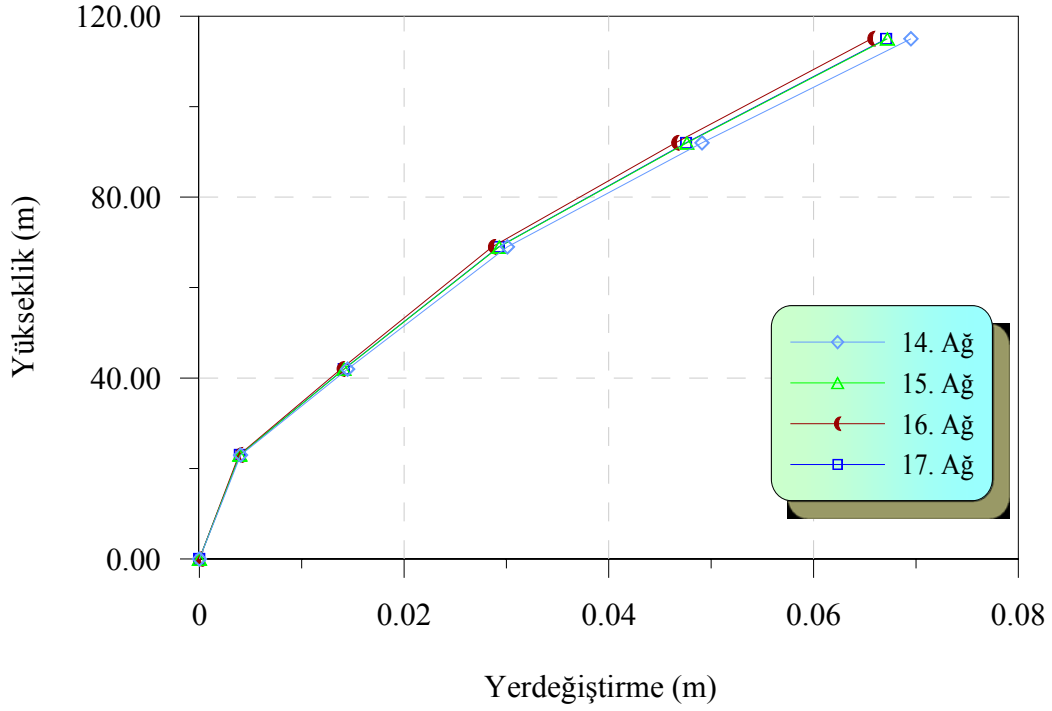
Şekil 3.62. TS 498'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yatay kesit boyunca ağ sıklaştırması sonucu 115 m kotundaki yatay kesite ait maksimum asal gerilmeler



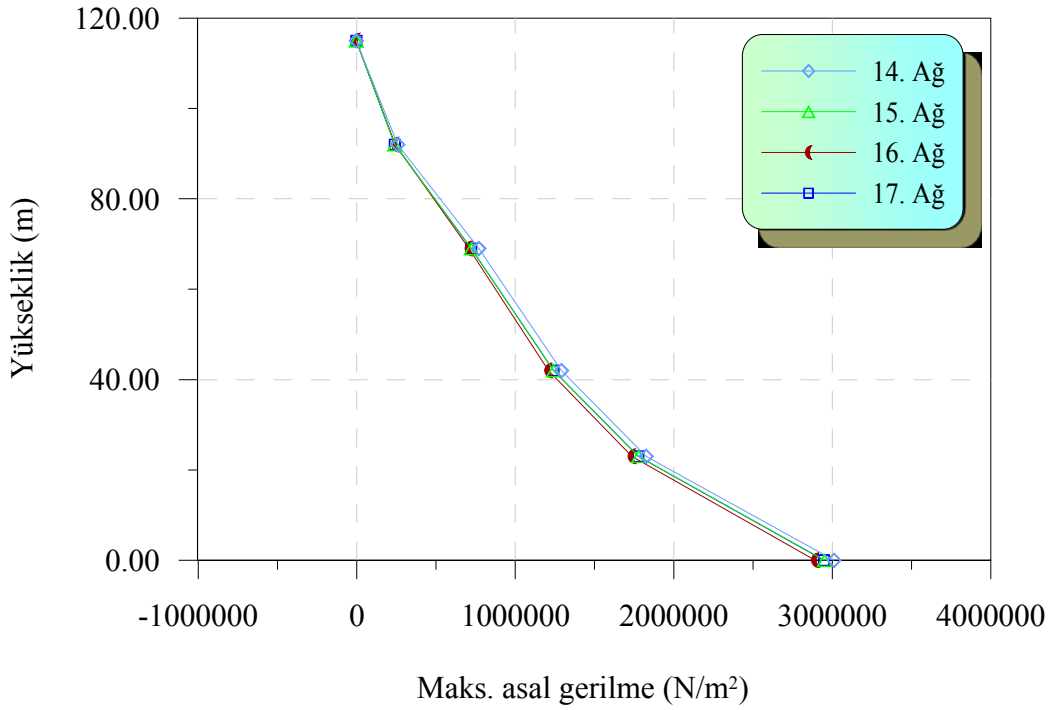
Şekil 3.63. TS 498'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yatay kesit boyunca ağ sıklaştırması sonucu 115 m kotundaki yatay kesite ait minimum asal gerilmeler



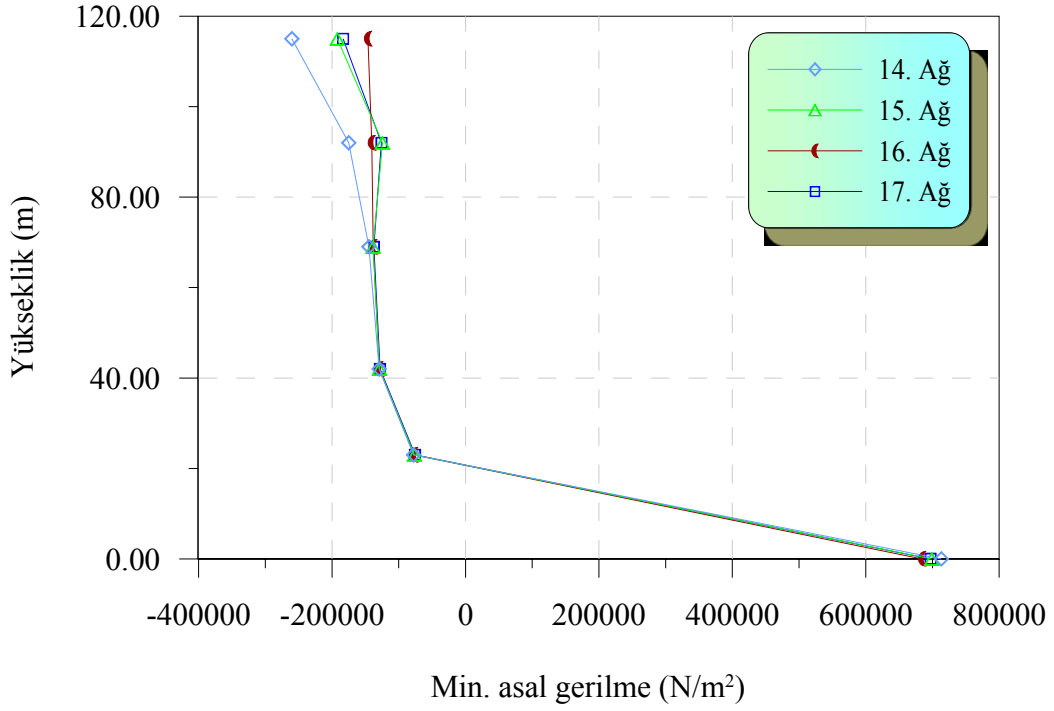
Şekil 3.64. TS 498'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yatay kesit boyunca ağ sıklaştırması sonucu 115 m kotundaki yatay kesite ait von Mises gerilmeleri



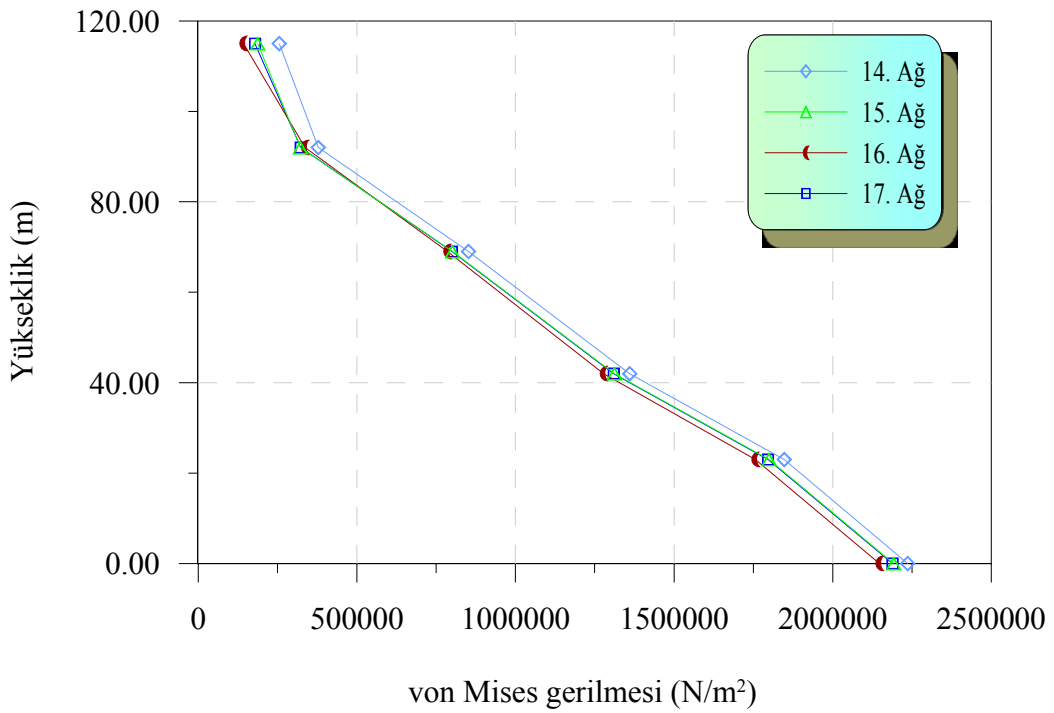
Şekil 3.65. TS 498'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yatay kesit boyunca ağ sıklaştırması sonucu yükseklik boyunca y-koordinatının 3.3 m olduğu noktalara ait yerdeğiştirmeler



Şekil 3.66. TS 498'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yatay kesit boyunca ağ sıklaştırması sonucu yükseklik boyunca y-koordinatının 3.3 m olduğu noktalara ait maksimum asal gerilmeler



Şekil 3.67. TS 498'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yatay kesit boyunca ağ sıklaştırması sonucu yükseklik boyunca y-koordinatının 3.3 m olduğu noktalara ait minimum asal gerilmeler



Şekil 3.68. TS 498'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yatay kesit boyunca ağ sıklaştırması sonucu yükseklik boyunca y-koordinatının 3.3 m olduğu noktalara ait von Mises gerilmeleri

Şekil 3.61'den görüldüğü gibi, yatay kesit boyunca eleman sayısı artırıldıkça, 115 m kotunda bulunan yatay kesitteki y-ekseni doğrultusundaki yerdeğiştirme, 14., 15. ve 16. ağılarda bir birine göre azalırken; 17. ağıdaki değer, y-koordinatının 0,0 m olduğu noktada 15. ağıdaki değere ile aynı olup yaklaşık 0,067 m'dir.

Şekil 3.62'den görüldüğü gibi, yatay kesit boyunca eleman sayısı artırıldıkça, 115 m kotunda bulunan yatay kesitteki maksimum asal gerilme, yerdeğiştirme de olduğu gibi, 14., 15. ve 16. ağılarda bir birine göre azalmaktadır. Maksimum asal gerilmenin en büyük olduğu noktada ( $y= 0,0$  m) 17. ağıdaki değer, 15. ağıdaki değere yaklaşık % 4 yakınlıkta olmaktadır. Maksimum asal gerilme, tüm ağılarda y-koordinatının 3,3 m olduğu basınç yüklemesinin en büyük olduğu noktada sifira çok yakın değer alırken yüklemenin olmadığı yere yani y-koordinatının 0,0 m olduğu noktaya doğru yakınsamış değer olan yaklaşık  $110000 \text{ N/m}^2$  (0,11 MPa) çekme değerini almaktadır.

Şekil 3.63'den görüldüğü gibi, yatay kesit boyunca eleman sayısı artırıldıkça, 115 m kotunda bulunan yatay kesitteki minimum asal gerilme değeri, 14., 15. ve 16. ağılarda bir birine göre artmaktadır. Minimum asal gerilmenin en büyük olduğu noktada ( $y= 3,3$  m) 17. ağıdaki değer, 15. ağıdaki değere yaklaşık % 5 yakınlıktadır. Minimum asal gerilme, tüm ağılarda y-koordinatının 3,3 m olduğu basınç yüklemesinin en büyük olduğu noktada yaklaşık  $190000 \text{ N/m}^2$  (0,19 MPa) basınç değerini alırken yüklemenin olmadığı yere yani y koordinatının yaklaşık 2,6 m olduğu noktadan itibaren 0,0 m olduğu noktaya doğru sifira çok yakın değer almaktadır.

Şekil 3.64'den görüldüğü gibi, von Mises gerilmesi değeri, yerdeğiştirme ve maksimum asal gerilme diyagramlarında gözlemlenen yakınsama davranışını sergilemektedir. von Mises gerilmesi y-koordinatının 3,3 m olduğu noktada minimum asal gerilme değerine eşit olurken 0,0 m olduğu noktada maksimum asal gerilme değerine eşit olmaktadır.

TS 498' göre etkittirilen yüklemelerde çekme etkisi olmamasına rağmen elde edilen sonuçların yakınsama davranışı ile prEN1991 1-1-4'e göre etkittirilen yüklemelerde elde edilen sonuçların yakınsama davranışının aynı olduğu görülmektedir. Ayrıca TS 498'e göre elde edilen yerdeğiştirme, diğerine göre elde edilen yerdeğiştirmenin yaklaşık üç katı olurken; maksimum asal gerilme, yaklaşık % 40 minimum asal gerilme ise yaklaşık % 20 daha az olmaktadır.

Şekil 3.65'den görüldüğü gibi, yükseklik boyunca y-koordinatının 3,3 m olduğu noktalarda belirlenen yerdeğiştirmeler yatay kesitteki yakınsama davranışının aynısını

sergilemektedir. En büyük yerdeğiştirmenin görüldüğü 115 m kotunda 15. ağıdaki değer, 17. ağıdaki değerle aynı olup yaklaşık 0,067 m'dir.

Şekil 3.66'dan görüldüğü gibi, yükseklik boyunca verilen maksimum asal gerilmenin her bir ağıdaki değişimi bir birine oldukça yakın olmaktadır. En büyük maksimum asal gerilmenin oluştuğı 0,0 m kotunda 15. ağıdaki değer, 17. ağıdaki değerle aynı olup yaklaşık  $2,95 \times 10^6 \text{ N/m}^2$  (2,95 MPa) dir.

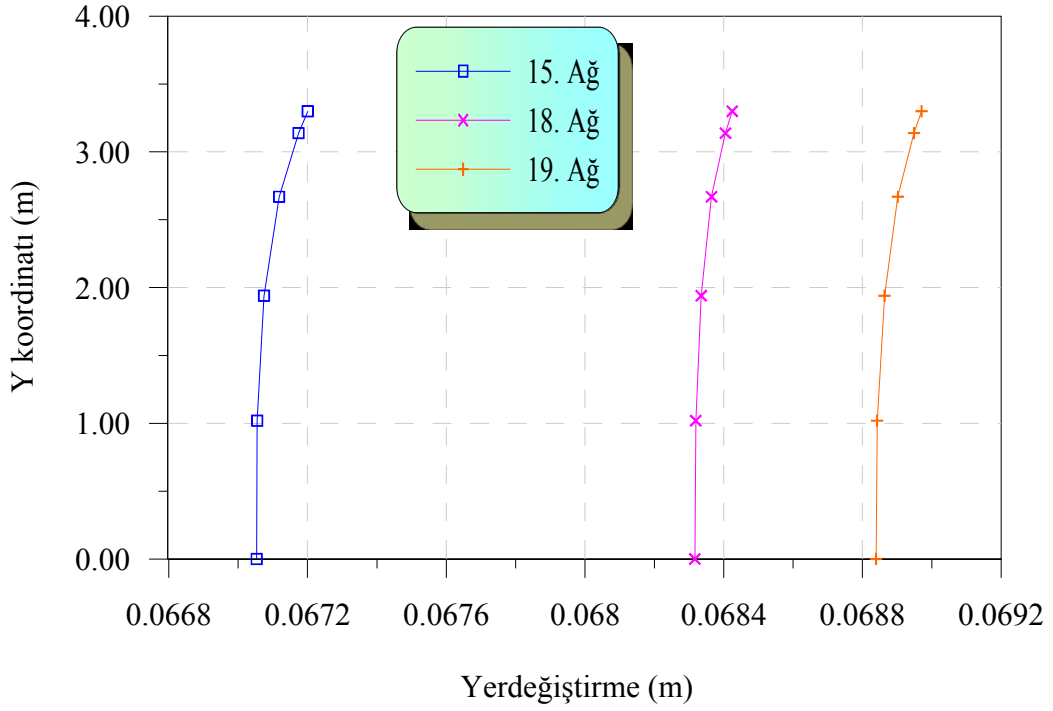
Şekil 3.67'den görüldüğü gibi, yükseklik boyunca belirlenen minimum asal gerilme yatay kesitteki yakınsama davranışının aynısını sergilemektedir. En büyük minimum asal gerilmenin oluştuğı 115 m kotunda ve 0,0 m kotunda 15. ağıdaki değer, 17. ağıdaki değer ile aynı olup yaklaşık  $690000 \text{ N/m}^2$  (0,69 MPa) dir.

Şekil 3.68'den görüldüğü gibi, yükseklik boyunca belirlenen von Mises gerilmesi yatay kesitteki yakınsama davranışının aynısını sergilemektedir. En büyük von Mises gerilmesinin oluştuğı 0.0 m kotunda 15. ağıdaki değer, 17. ağıdaki değer ile aynı olup yaklaşık  $2190000 \text{ N/m}^2$  (2,19 MPa) dir.

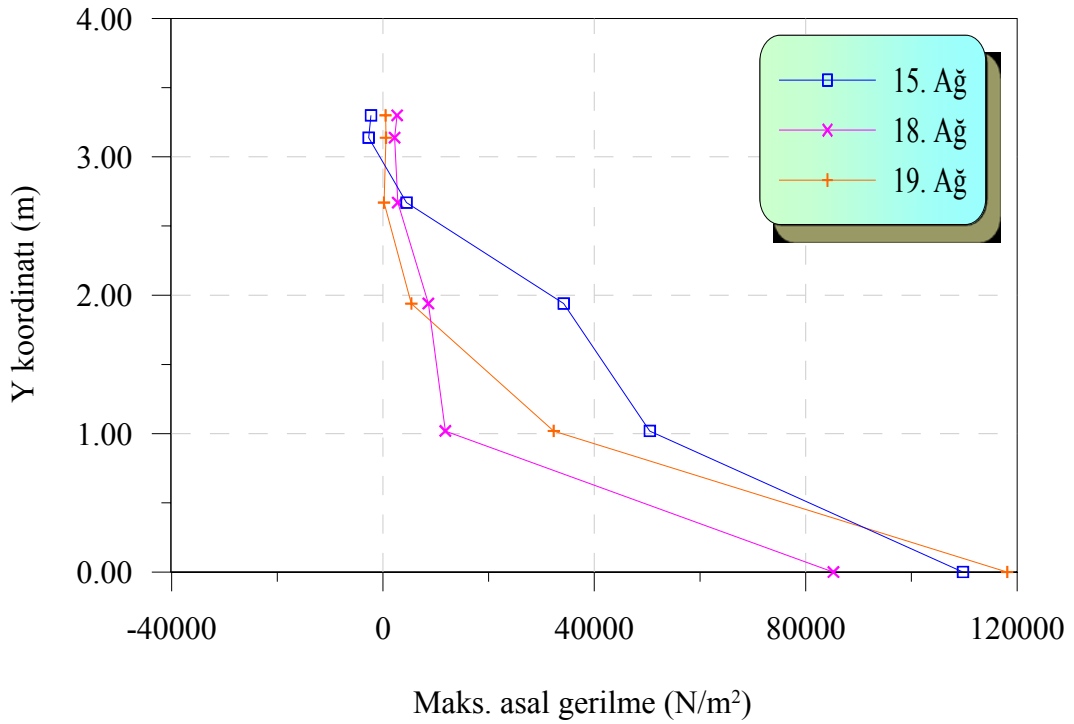
TS 498'e göre elde edilen yerdeğiştirme ve gerilme sonuçları prEN1991 1-1-4'e göre elde edilenlere göre yaklaşık üç kat daha büyük olmaktadır.

Belirlenen yerdeğiştirme ve gerilmeler farklı ağılar kullanılarak bir birlerine göre yatay kesitte en kaba şekilde % 5 civarında bir fark gösterirken yükseklik boyunca aynı olmaktadır. Yatay kesitte eleman sayısının artırılması ile elde edilen bulgulardan gözlemlenen yakınsama davranışı, prEN 1991 1-1-4'e göre belirlenen yük etkisindeki davranış ile aynı olup alışıla gelmiş şekilde sürekli artan veya azalan bir biçimde olmamaktadır.

Tablo 3.7'de verilenler kullanılarak yükseklik boyunca ağı sıklaştırması sonucu TS 498' göre elde edilen yatay kesitteki yerdeğiştirme ve gerilme sonuçları, 115 m kotundaki yatay kesit boyunca Şekil 3.69, Şekil 3.70, Şekil 3.71 ve Şekil 3.72'de; yükseklik boyunca y-koordinatının 3,3 m olduğı noktalardaki yerdeğiştirme ve gerilme sonuçları ise Şekil 3.73, Şekil 3.74, Şekil 3.75 ve Şekil 3.76'da verilmektedir.

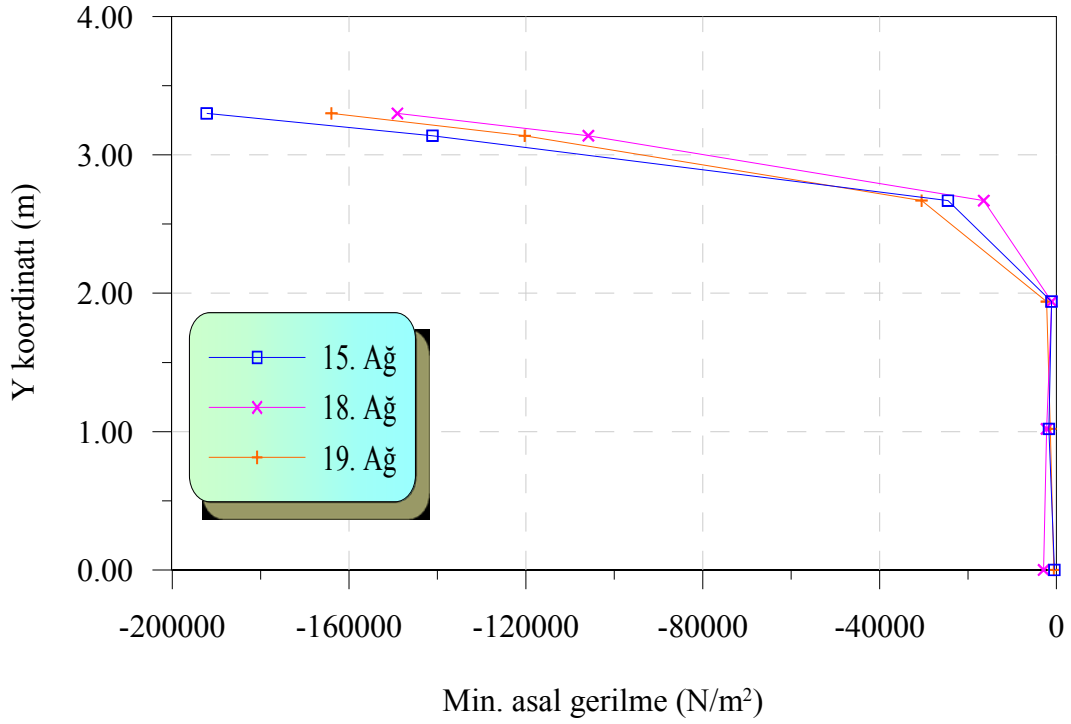


Şekil 3.69. TS 498'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yükseklik boyunca ağı sıklaştırması sonucu 115 m kotundaki yatay kesitine ait yerdeğıştirmeler

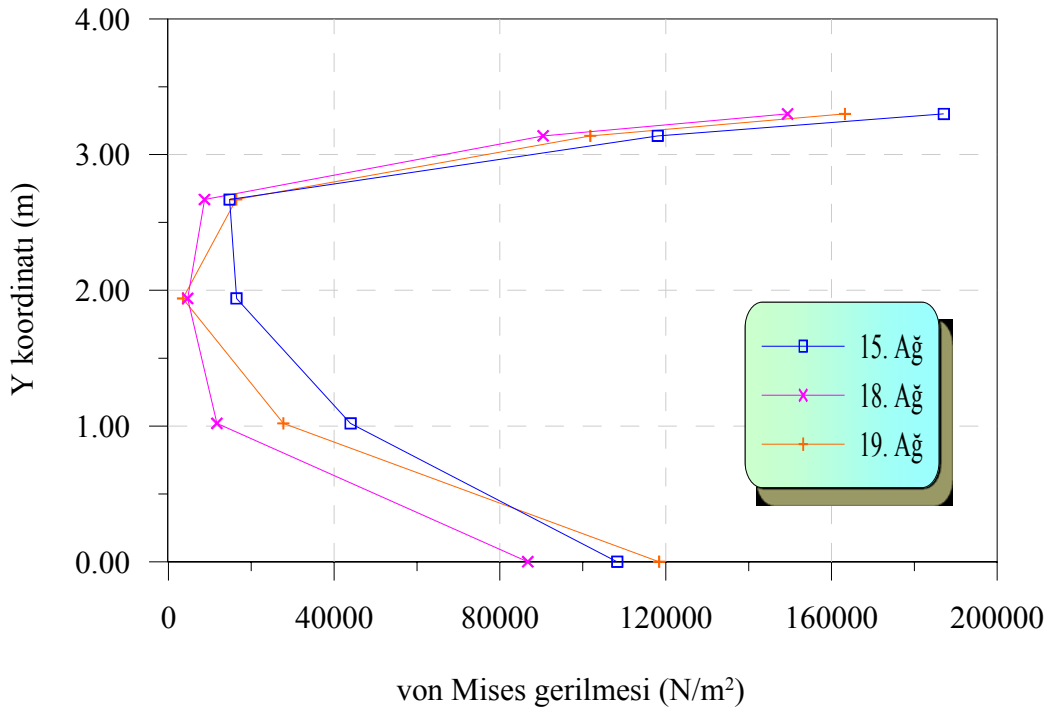


Şekil 3.70. TS 498'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yükseklik boyunca ağı sıklaştırması sonucu 115 m kotundaki yatay kesitine ait maksimum asal gerilmeler

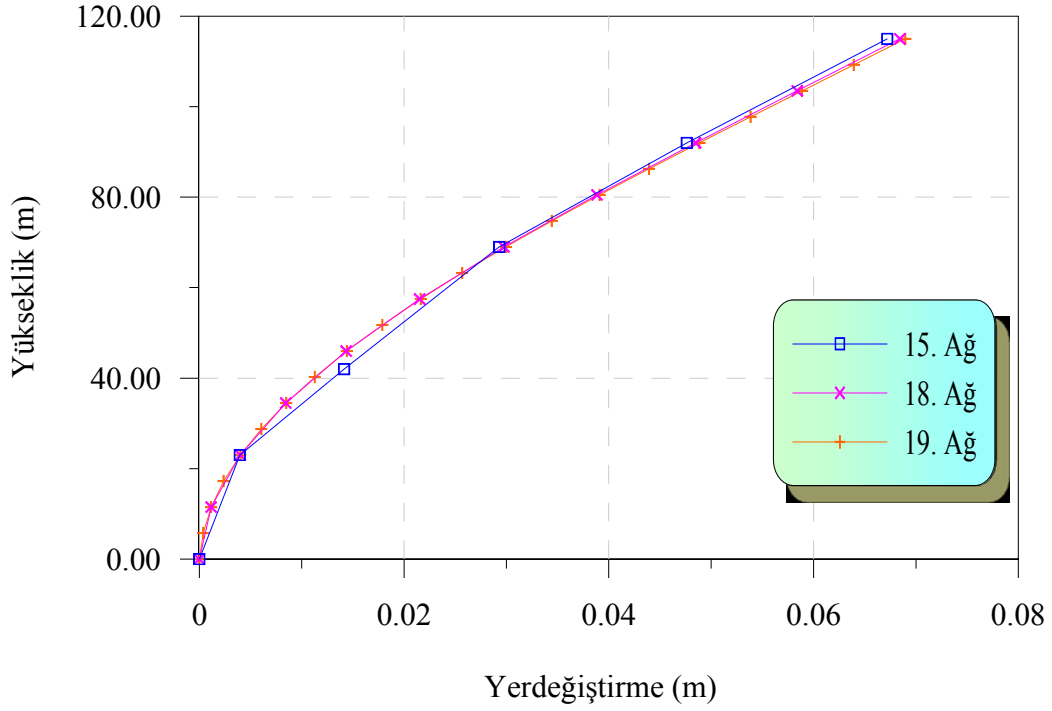




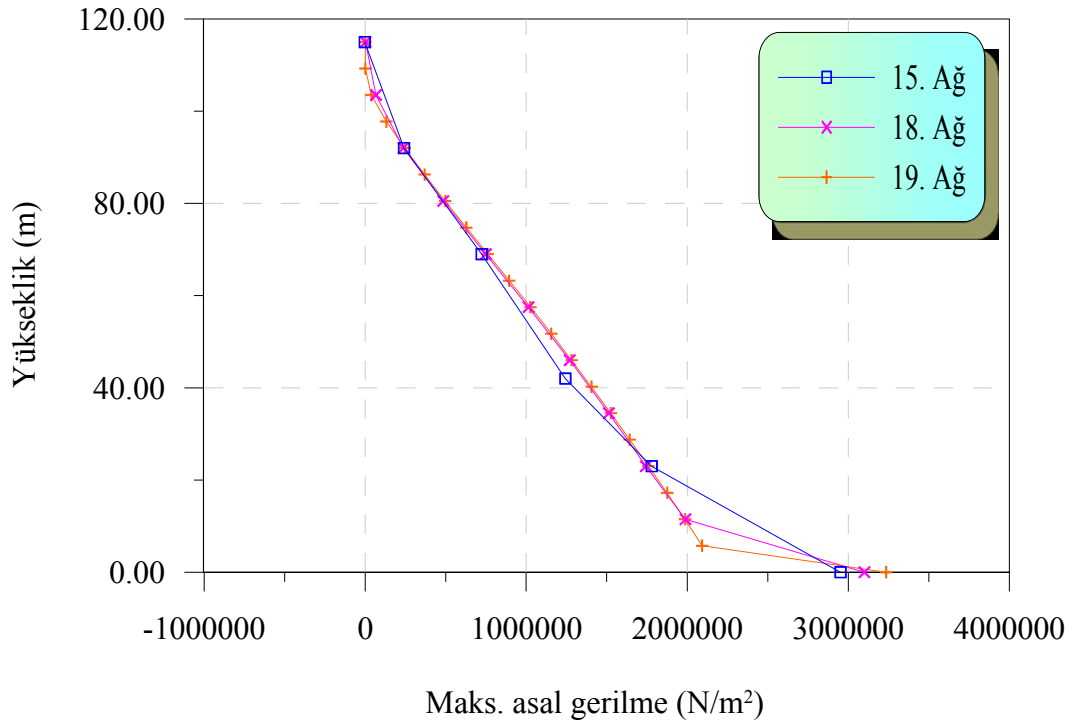
Şekil 3.71. TS 498'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yükseklik boyunca ağ sıklaştırması sonucu 115 m kotundaki yatay kesitine ait minimum asal gerilmeler



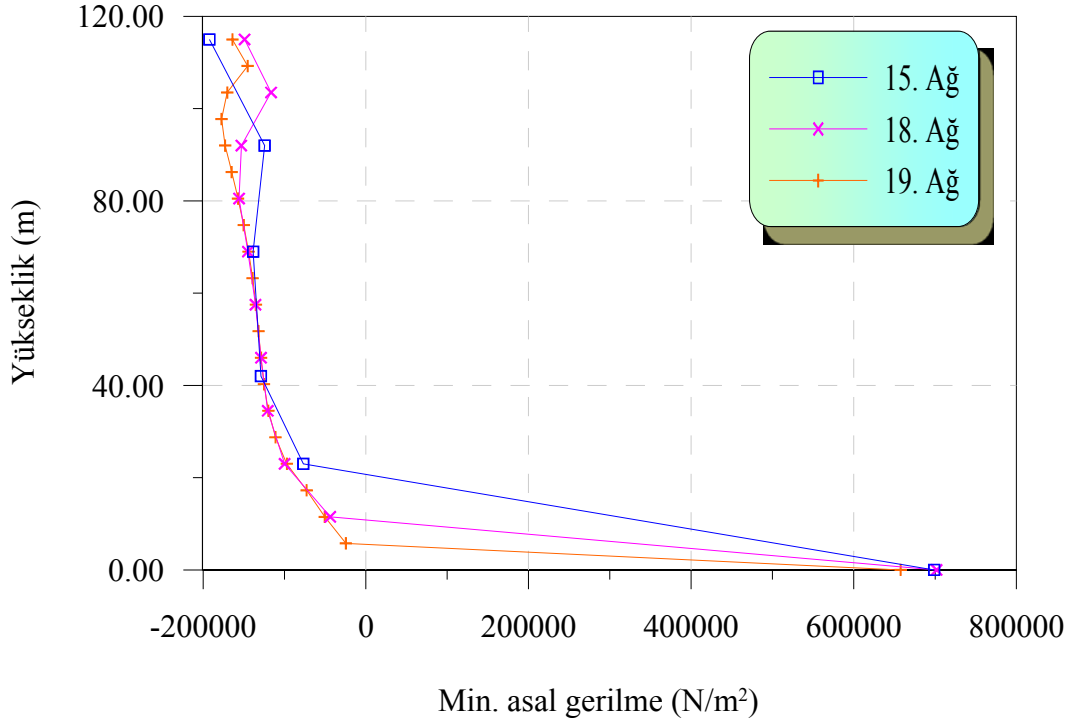
Şekil 3.72. TS 498'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yükseklik boyunca ağ sıklaştırması sonucu 115 m kotundaki yatay kesitine ait von Mises gerilmeleri



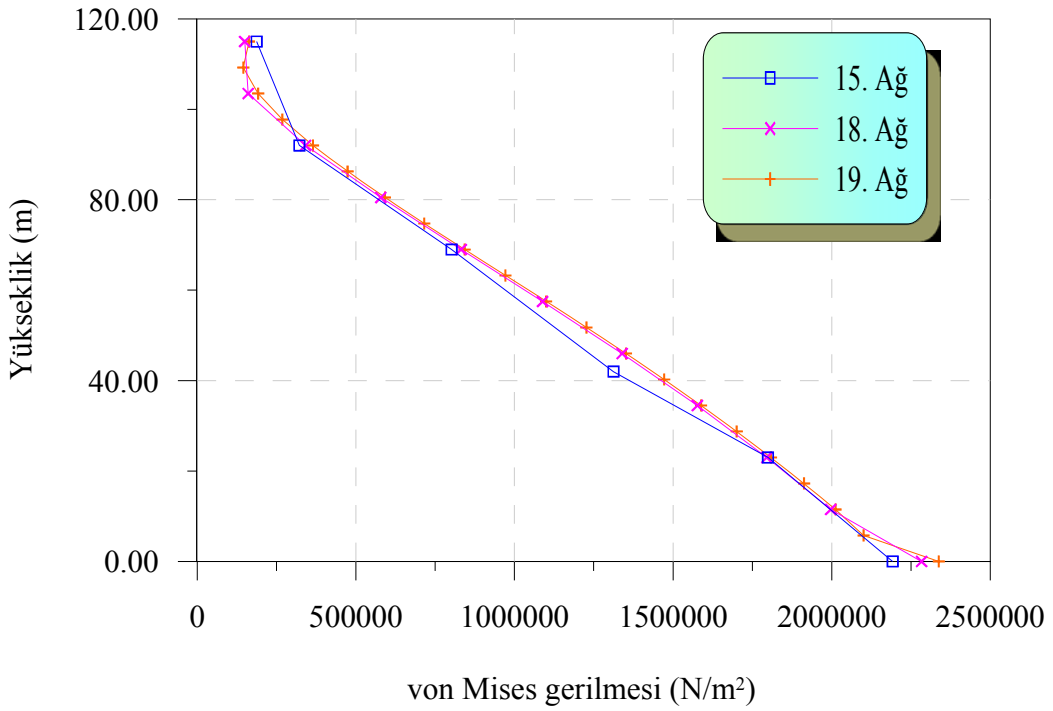
Şekil 3.73. TS 498'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yükseklik boyunca ağ sıklaştırması sonucu yükseklik boyunca y-koordinatının 3.3 m olduğu noktalara ait yerdeğiştirmeler



Şekil 3.74. TS 498'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yükseklik boyunca ağ sıklaştırması sonucu yükseklik boyunca y-koordinatının 3.3 m olduğu noktalara ait maksimum asal gerilmeler



Şekil 3.75. TS 498'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yükseklik boyunca ağ sıklaştırması sonucu yükseklik boyunca y-koordinatının 3.3 m olduğu noktalara ait minimum asal gerilmeler



Şekil 3.76. TS 498'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının yükseklik boyunca ağ sıklaştırması sonucu yükseklik boyunca y-koordinatının 3.3 m olduğu noktalara ait von Mises gerilmeleri

Şekil 3.69'dan görüldüğü gibi, yükseklik boyunca eleman sayısı artırıldıkça, 115 m kotunda bulunan yatay kesitteki y-ekseni doğrultusundaki yerdeğiştirme artmaktadır. 19. ağıdaki değer, y-koordinatının 0,0 m olduğu noktada 18. ağıdaki değere yaklaşık % 0,7 yakınlıkta ve yine yaklaşık 0,0683 m'dir.

Şekil 3.70'den görüldüğü gibi, yükseklik boyunca eleman sayısı artırıldıkça, 115 m kotunda bulunan yatay kesitteki maksimum asal gerilme tek yönlü artan veya azalan bir eğilim göstermemektedir. y-koordinatının 3,3 m olduğu noktaya doğru önce artan sonra azalan; y-koordinatının 0,0 m olduğu noktaya doğru ise önce azalan sonra artan bir davranış sergilemektedir. Maksimum asal gerilmenin en büyük olduğu ve y-koordinatının 0,0 m olduğu noktada 19. ağıdaki değer, 15. ağıdaki değere yaklaşık % 7 yaklaşırken 18. ağıdaki değere yaklaşık % 25 yaklaşmaktadır. Maksimum asal gerilme, tüm ağılarda y-koordinatının 3,3 m olduğu noktada sifıra çok yakın değer alırken y-koordinatının 0,0 m olduğu noktaya doğru 15. ağıda yaklaşık  $109000 \text{ N/m}^2$  (0,109 MPa) dır.

Şekil 3.71'den görüldüğü gibi, yükseklik boyunca eleman sayısı artırıldıkça, 115 m kotunda bulunan yatay kesitteki minimum asal gerilme, y-koordinatının 0,0 m ile 2,7 m olduğu noktalar arasında, üç ağ için bir birine göre oldukça yakın değerler almaktadır. Minimum asal gerilmenin en büyük olduğu noktada ( $y= 3,3 \text{ m}$ ) 19. ağıdaki değer, 15. ağıdaki değere yaklaşık % 20 yakınlıkta olup 18. ağıdaki değere % 10 yakınlıktadır. Minimum asal gerilme, tüm ağılarda y-koordinatının 3,3 m olduğu basınç yüklemesinin en büyük olduğu noktada 15. ağıda ait gerilme yaklaşık  $192000 \text{ N/m}^2$  (0,192 MPa) olurken y-koordinatının 0.0 m olduğu noktaya doğru sifıra çok yakın değer almaktadır.

Şekil 3.72'den görüldüğü gibi, von Mises gerilmesi, önce azalan sonra artan bir davranış sergilemektedir. von Mises gerilmesi, y-koordinatının 3,3 m olduğu noktada minimum asal gerilme değerine eşit olurken 0,0 m olduğu noktada maksimum asal gerilme değerine eşit olmaktadır.

prEn 1991 1-1-4'e göre belirlenen yüklemenin TS 498'e göre belirlenene göre daha yüksek dereceden bir eğri ile temsil edilmesine rağmen prEN 1991 1-1-4'e göre belirlenen yük etkisinde yukarıda ifade edilen durum ile karşılaşılmamıştır. Öyleki yüksek dereceden bir yük etkisinde yakınsama sağlanırken düşük dereceden bir yük etkisinde aynı ağı yine yakınsama sağlatması gerektiği düşünülür.

Şekil 3.73'den görüldüğü gibi, yükseklik boyunca y-koordinatının 3,3 m olduğu noktalarda belirlenen yerdeğiştirmeler, yatay kesitteki yakınsama davranışının aynısını sergilemektedir. En büyük yerdeğiştirmenin görüldüğü 115 m kotunda, 19. ağıdaki değer

18. ağıdaki değer ile aynı olup yaklaşık 0,068 m'dir.

Şekil 3.74'den görüldüğü gibi, yükseklik boyunca belirlenen maksimum asal gerilmeler genel olarak bir birine oldukça yakın olmaktadır. En büyük maksimum asal gerilmenin olduğu 0,0 m kotunda 19. ağıdaki değer, 18. ağıdaki değere yaklaşık % 7 yakınlıkta olup yaklaşık  $3,1 \times 10^6$  N/m<sup>2</sup> (3,1 MPa) dir.

Şekil 3.75'den görüldüğü gibi, yükseklik boyunca belirlenen minimum asal gerilme yatay kesitteki yakınsama davranışından farklı ve daha karmaşık bir davranış sergilemektedir. En büyük minimum asal gerilmenin olduğu 115 m ve 0,0 m kotlarında 19. ağıdaki değer, 18. ağıdaki değere yaklaşık % 4 yakınlıkta olup yaklaşık 700000 N/m<sup>2</sup> (0,70 MPa) dir.

Şekil 3.76'dan görüldüğü gibi, yükseklik boyunca belirlenen von Mises gerilmesi, yatay kesitteki yakınsama davranışından farklı bir davranış sergilemektedir. En büyük von Mises gerilmesinin olduğu 0,0 m kotunda 19. ağıdaki değer, 18. ağıdaki değere yaklaşık % 2 yakınlıkta olup yaklaşık 2300000 N/m<sup>2</sup> (2,3 MPa) dir.

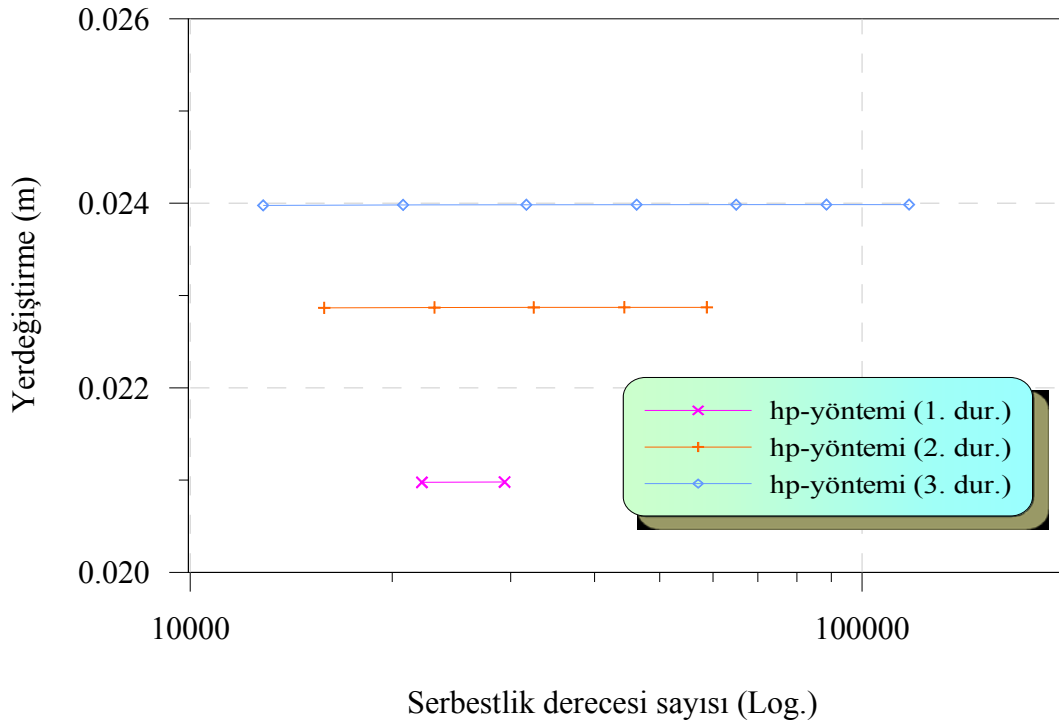
Sanayi bacasında TS 498'e göre en büyük yerdeğiştirme, yaklaşık 0,068 m ve en büyük von Mises gerilmesi, yaklaşık 2300000 N/m<sup>2</sup> (2,3 MPa) dir.

Sanayi bacasının TS 498'e göre düzgün yayılı yük etkisinde 115 m kotunda ve y-koordinatının 3,3 m olduğu noktada yanal yerdeğiştirme yaklaşık 0,082 m, von Mises gerilmesi 32500 N/m<sup>2</sup> iken doğrusal olmayan yük etkisinde 115 m kotunda ve y-koordinatının 3,3 m olduğu noktada yanal yerdeğiştirme yaklaşık 0,068 m, von Mises gerilmesi yaklaşık 192000 N/m<sup>2</sup> olmaktadır. Bu durum TS 498'e belirlenen rüzgâr yükünün, silindirik sanayi bacaları için verilen doğrusal olmayan yük yerine hesapları basitleştirmek amacıyla yükün düzgün yayılı yük olarak uygulanması; yerdeğiştirme ve özellikle gerilme sonuçlarını oldukça değiştirmektedir.

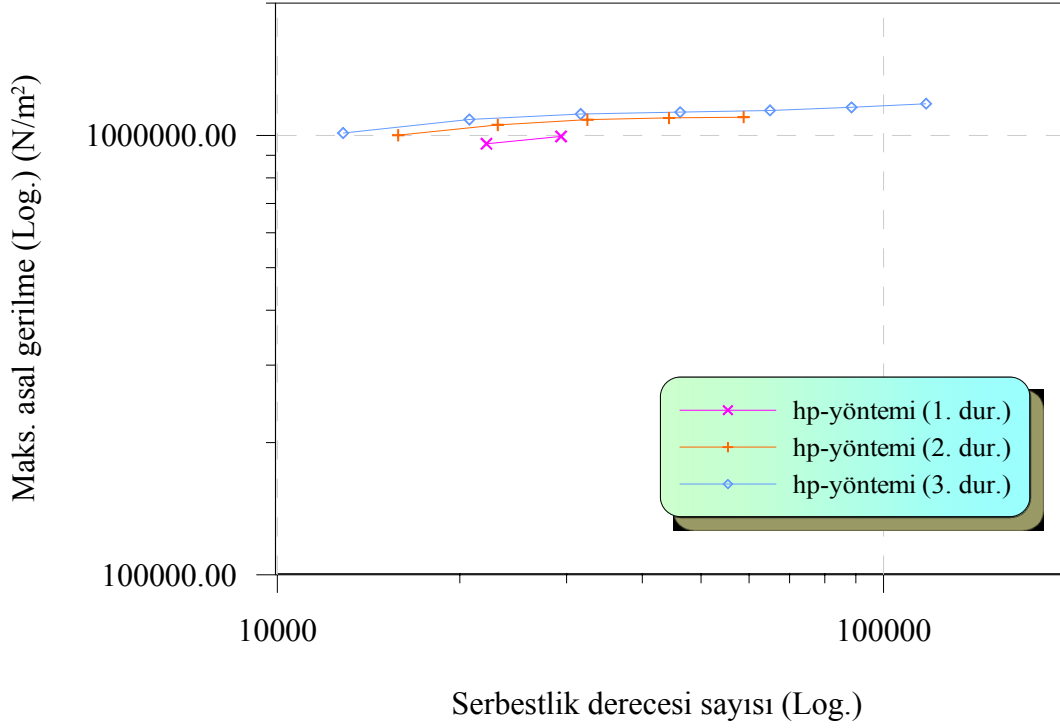
Tablo 3.8'de hp-yöntemi adı altında tür adları ve özellikleri sunulmaktadır. Lagrange tabanlı hiyerarşik sonlu elemana ait bulguların yakınsadıkları değerlere en az hangi serbestlik derecesi ile yakınsadıklarını karşılaştırmak amacıyla hem ağ iyileştirmesi hem de polinom derecesinin artırılması (hp-yöntemi) yoluyla belirlenen bulgular arasından en az serbestlik derecesi ile belirlenenlere ait yerdeğiştirme, maksimum asal gerilme, minimum asal gerilme ve von Mises gerilmesi değerleri prEN 1991 1-1-4'e göre sırasıyla Şekil 3.77, Şekil 3.78, Şekil 3.79 ve Şekil 3.80'de; TS 498'e göre belirlenenler ise sırasıyla Şekil 3.81, Şekil 3.82, Şekil 3.83 ve Şekil 3.84'de verilmektedir.

Tablo 3.8. Sanayi bacasının yarısında kurgulanan Lagrange tabanlı hiyerarşik sonlu eleman için prEN 1991 1-1-4 ve TS 498'e göre tanımlanan doğrusal olmayan yük etkisi için hp-yöntemine göre ağ yapısı, polinom derecesi ve serbestlik derecesi sayıları

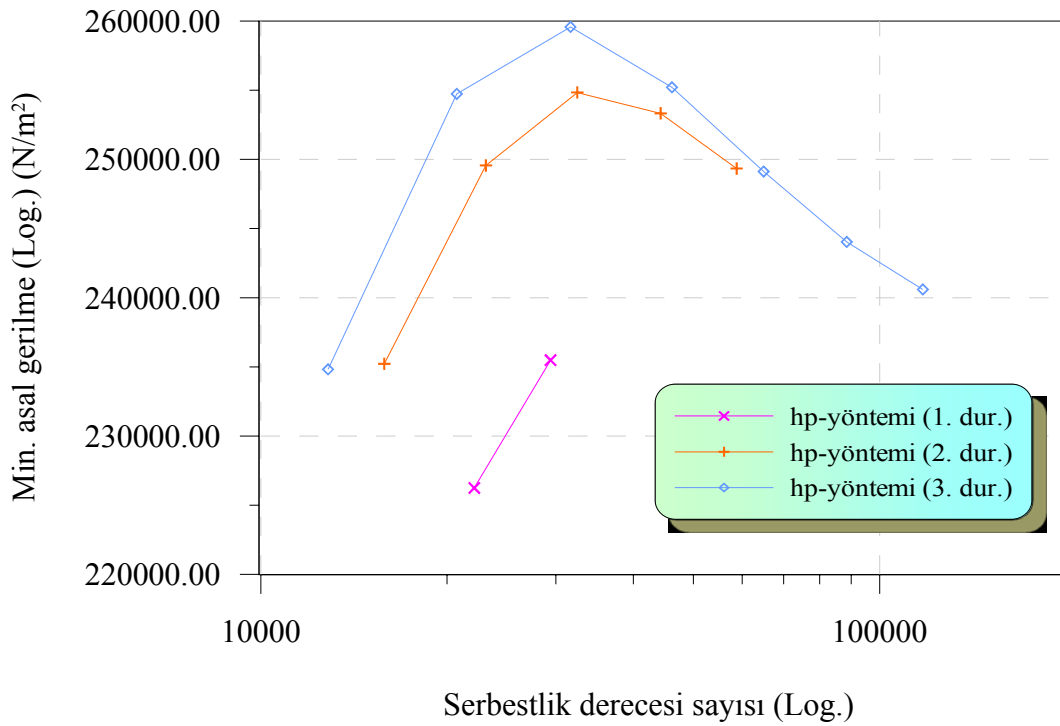
Tür adı	Yükleme çeşiti	Ağ çeşiti	Polinom derecesi	Sonlu eleman tipi	S.D.S.
hp-yöntemi (1. durum)	prEN 1991 1-1-4	15	9,10	hiyerarşik (Lagr.)	22135,29385
hp-yöntemi (2. durum)	prEN 1991 1-1-4	18	6-10	hiyerarşik (Lagr.)	15830, 23100, 32480, 44270, 58770
hp-yöntemi (3. durum)	prEN 1991 1-1-4	19	4-10	hiyerarşik (Lagr.)	12840, 20740, 31660, 46200, 64960, 88540, 117540
hp-yöntemi (4. durum)	TS 498	15	9,10	hiyerarşik (Lagr.)	22135,29385
hp-yöntemi (5. durum)	TS 498	18	7-10	hiyerarşik (Lagr.)	23100, 32480, 44270, 58770
hp-yöntemi (6. durum)	TS 498	19	5-10	hiyerarşik (Lagr.)	20740, 31660, 46200, 64960, 88540, 117540



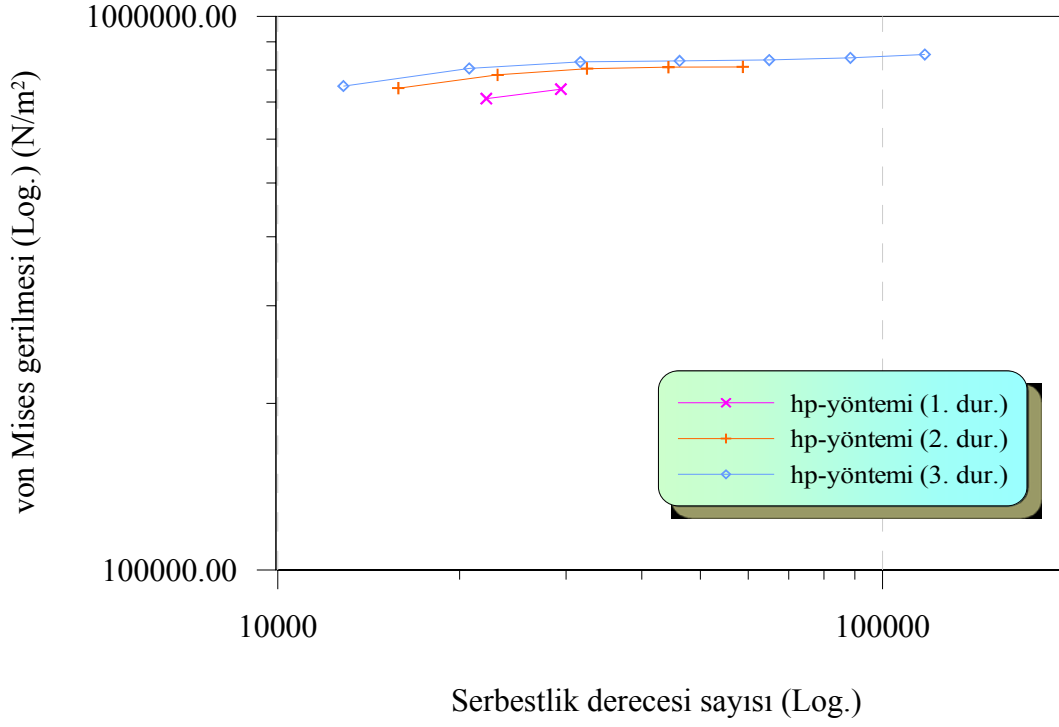
Şekil 3.77. prEN 1991 1-1-4'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının 52 nolu noktasının hp-yöntemine göre belirlenen yerdeğiştirmeleri



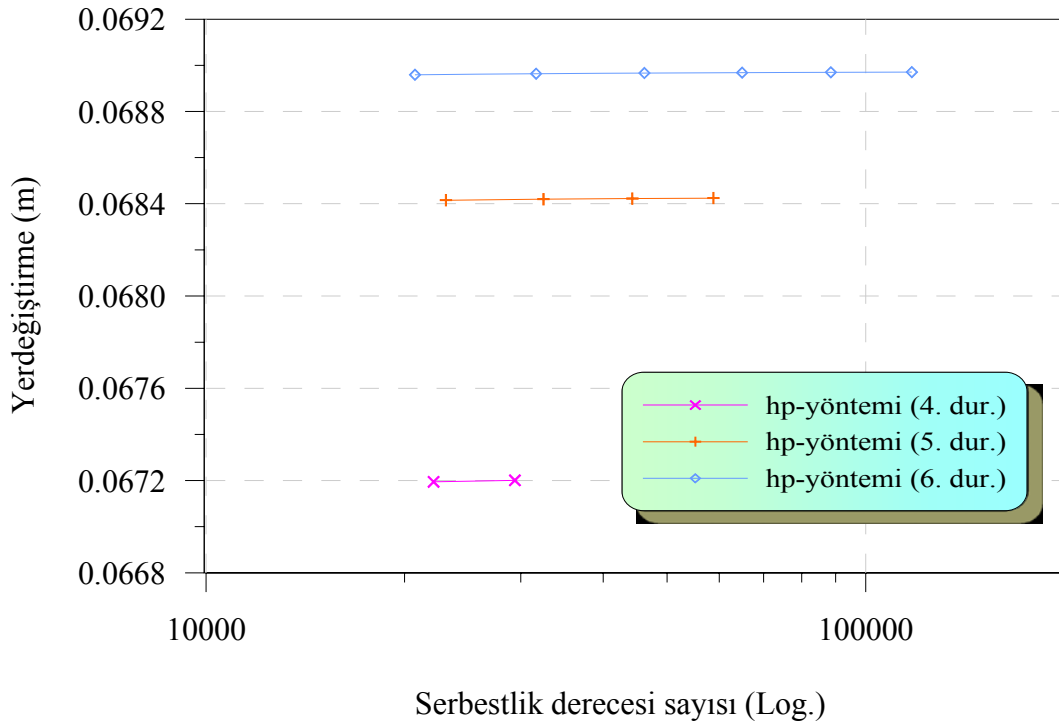
Şekil 3.78. prEN 1991 1-1-4'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının 55 nolu noktasının hp-yöntemine göre belirlenen maksimum asal gerilmeleri



Şekil 3.79. prEN 1991 1-1-4'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının 55 nolu noktasının hp-yöntemine göre belirlenen minimum asal gerilmeleri

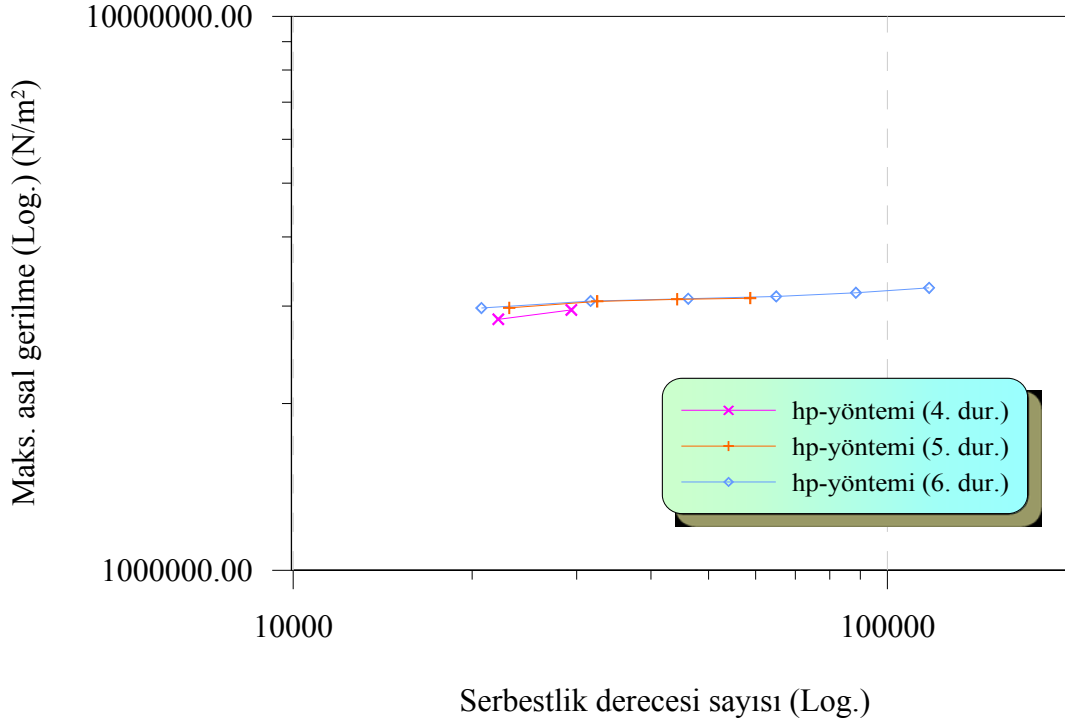


Şekil 3.80. prEN 1991 1-1-4'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının 55 nolu noktasının hp-yöntemine göre belirlenen von Mises gerilmeleri

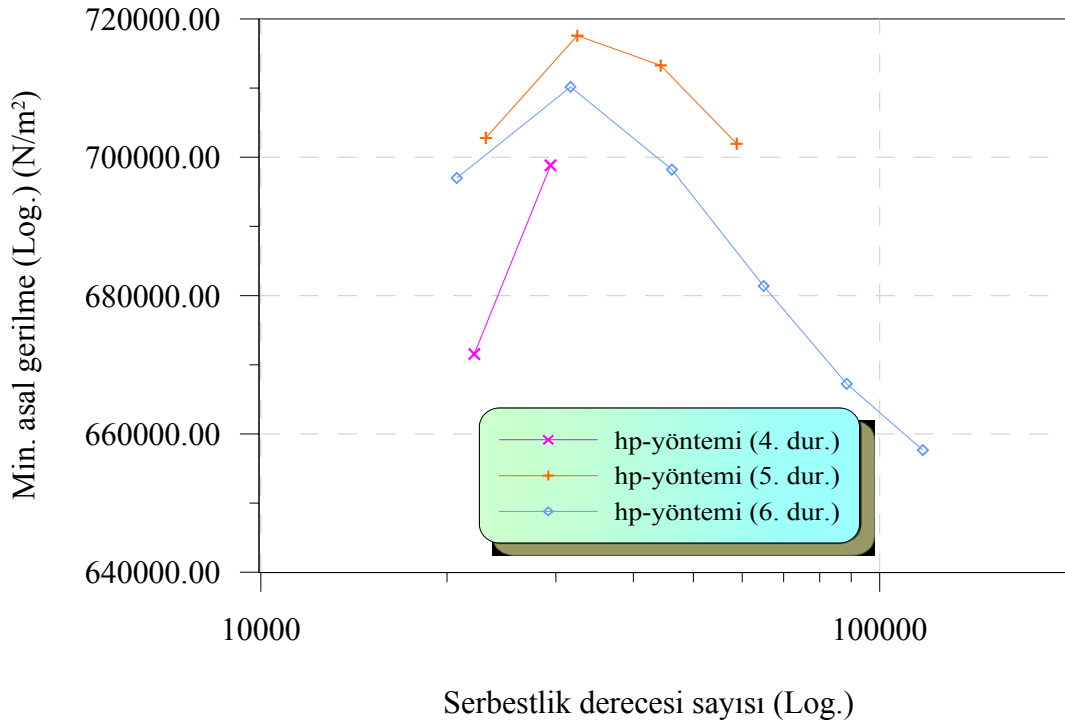


Şekil 3.81. TS 498'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının 52 nolu noktasının hp-yöntemine göre belirlenen yerdeğiştirmeleri

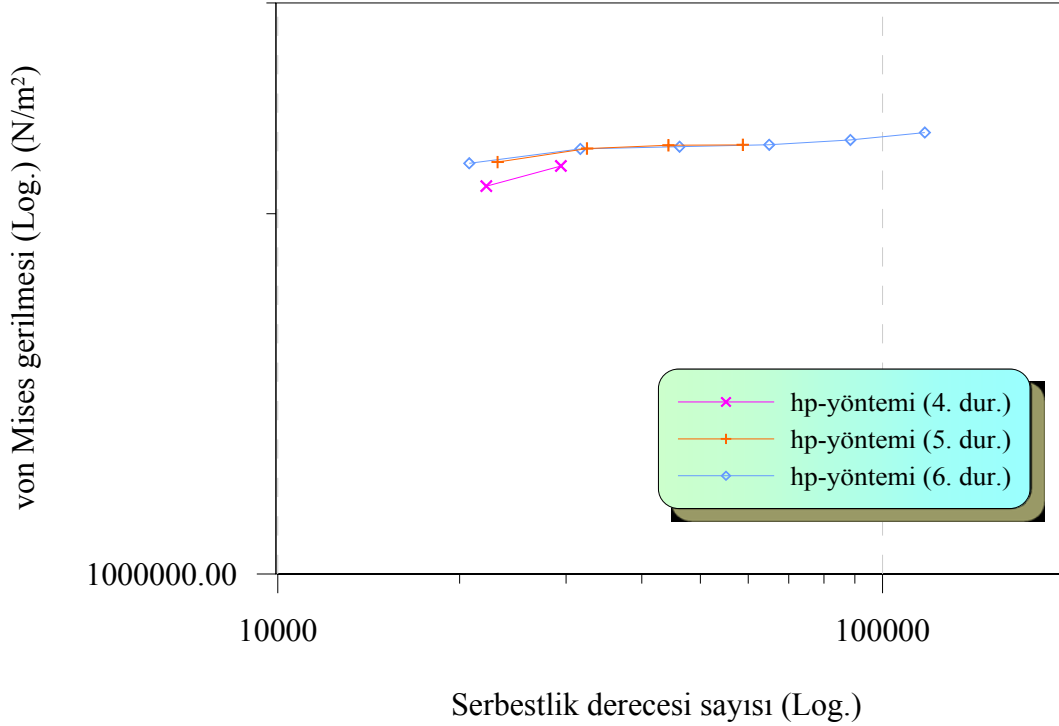




Şekil 3.82. TS 498'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının 55 nolu noktasının hp-yöntemine göre belirlenen maksimum asal gerilmeleri



Şekil 3.83. TS 498'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının 55 nolu noktasının hp-yöntemine göre belirlenen minimum asal gerilmeleri



Şekil 3.84. TS 498'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının 55 nolu noktasının hp-yöntemine göre belirlenen von Mises gerilmeleri

Şekil 3.77'den görüldüğü gibi, 3. duruma ait yerdeğiştirme eğrisi, en az 12840 serbestlik derecesi sayısı ile yakınsanan değer olan 0,024 m değerini vermektedir.

Şekil 3.78'den görüldüğü gibi, 3. duruma ait maksimum asal gerilme eğrisi, en az 31660 serbestlik derecesi sayısı ile yakınsanan değer olan yaklaşık 1180000 N/m<sup>2</sup> (1,18 MPa) değerini vermektedir.

Şekil 3.79'dan görüldüğü gibi, tüm durumlara ait eğrilerde, tam anlamıyla, bir değeri işaret eden yakınsama davranışı gözükme de yakınsanan değer olabileceği düşünülen yaklaşık 250000 N/m<sup>2</sup> (0,25 MPa) değerine en az 20740 serbestlik derecesi sayısı ile ulaşılmaktadır.

Şekil 3.80'den görüldüğü gibi, von Mises gerilmesi eğrisi, en az 31660 serbestlik derecesi sayısı ile yakınsanan değer olan yaklaşık 850000 N/m<sup>2</sup> (0,85 MPa) değerini vermektedir.

prEN 1991 1-1-4'e göre belirlenen yük etkisinde hp-yöntemi ile elde edilen bulgular incelendiğinde genel itibariyle 3. duruma ait eğride en az 31660 serbestlik derecesi sayısı ile tüm yerdeğiştirme ve gerilme sonuçları elde edilebilmektedir.

Şekil 3.81'den görüldüğü gibi, 6. duruma ait yerdeğiştirme eğrisi, en az 20740

serbestlik derecesi sayısı ile yakınsanan değer olan 0,068 m değerini vermektedir.

Şekil 3.82'den görüldüğü gibi, 6. duruma ait maksimum asal gerilme eğrisi, en az 20740 serbestlik derecesi sayısı ile yakınsanan değer olan yaklaşık  $3100000 \text{ N/m}^2$  (3,1 MPa) değerini vermektedir.

Şekil 3.83'den görüldüğü gibi, tüm durumlara ait eğrilerde, tam anlamıyla, bir değeri işaret eden yakınsama davranışı gözükme de yakınsanan değer olabileceği düşünülen yaklaşık  $700000 \text{ N/m}^2$  (0,7 MPa) değerine en az 20740 serbestlik derecesi sayısı ile ulaşılmaktadır.

Şekil 3.84'den görüldüğü gibi, 6. duruma ait eğri, en az 31660 serbestlik derecesi sayısı ile yakınsanan değer olan yaklaşık  $2300000 \text{ N/m}^2$  (2,3 MPa) değerini vermektedir.

TS 498'e göre belirlenen yük etkisinde hp-yöntemi ile elde edilen bulgular incelendiğinde genel itibariyle 6. duruma ait eğride en az 31660 serbestlik derecesi sayısı ile tüm yerdeğiştirme ve gerilme sonuçları elde edilebilmektedir.

### 3.2. Dinamik Analiz

Sanayi bacasının davranışının tam olarak dikkate alınabilmesi için hem serbest titreşim hem de zorlanmış titreşim analizlerinde bacanın tamamı modellenecektir. Kurgulanan sonlu elemanlardan biri olan ve doğrusal olmayan yüklemde de kullanılan Lagrange tabanlı hiyerarşik sonlu eleman bu analizlerde de kullanılacaktır. Diğer kurgulanan sonlu elemanlarda kullanılabilir olup bu tez kapsamında sadece bir sonlu eleman için sonuçlar sunulacaktır. Lagrange tabanlı sonlu eleman için sunulacak bulguların yanında ANSYS programı ile de sonuçlar karşılaştırmalı olarak sunulacaktır. Ancak ANSYS programı h-yöntemi dışında başka bir yöntem olan p-yöntemi ile serbest titreşim ve zorlanmış titreşim analizlerine izin vermemektedir. Bunun sebebi olarak p-yöntemi altındaki elemanlarda kütle matrislerinin, şekil fonksiyonlarından ötürü düzgün olmayan bir dağılıma sahip olmaları gösterilebilir. Diğer taraftan, h-yöntemi altında ikinci dereceden polinom derecesine göre şekil fonksiyonları oluşturulmuş elemanlar mevcuttur. Bu elemanlar, kenar orta noktaları eğrisel yüzeylerin üzerine taşınarak geometrik temsilde ağ yapılarının geometriden kaynaklanan hata oranlarını azaltmak amacıyla kullanılabilir. Bu elemanlarla serbest titreşim ve zorlanmış titreşim analizlerine izin verilmektedir. Bu durumda ANSYS programı ile bu çalışmada elde edilecek sonuçları

doğrulamak ve karşılaştırmak amacıyla sadece h-yöntemi altında doğrusal şekil fonksiyonlu eleman kullanılacaktır. Böylece yatay kesit boyunca geometrinin temsili için h-yönteminde ikinci derece polinoma sahip şekil fonksiyonlu elemanın kullanılması durumundan bir miktar daha fazla eleman kullanılmış olacaktır. Ancak eleman sayısının artışından kaynaklanan serbestlik derecesi sayısı artımı, polinom derecesi ikiden fazla artırılmasına izin verilemediği için farklı ağ kullanımı ve polinom derecesinin artırılabilirdiği durumlarda belirlenecek serbestlik dereceleri sayılarına göre önemli sayılmamaktadır.

### 3.2.1. Kartezyen Koordinatlarda ve Eğrisel Yüzeyle Sanayi Bacasının Serbest Titreşim Analizi

Bu amaçla kurgulanan sonlu eleman ve ANSYS programı için ayrı ayrı ağ yapıları hazırlanmıştır. Kurgulanan sonlu eleman ağı Tablo 3.9 ile Tablo 3.10'da, ANSYS programı için ise Tablo 3.11'de verilmektedir. Bu tablolarda verilen değerlerin kullanılmasıyla elde edilen periyot değerleri yakınsamış değerler olup Tablo 3.12'de verilmektedir.

Tablo 3.9. Sanayi bacasında kurgulanan Lagrange tabanlı hiyerarşik sonlu eleman için yatay kesit boyunca çeşitlendirilen ağ yapıları

Ağ türü	Eleman sayısı			Ağdaki toplam	Polinom derecesi	S.D.S.
	Yatay kesit boyunca	Yükseklik boyunca	Kalınlık boyunca			
20	8	5	1	40	3	1440
21	12	5	1	60	3	2160
22	16	5	1	80	3	2880

Tablo 3.10. Sanayi bacasında kurgulanan Lagrange tabanlı hiyerarşik sonlu eleman için yükseklik boyunca çeşitlendirilen ağ yapıları

Ağ türü	Eleman sayısı				Polinom derecesi	S.D.S.
	Yatay kesit boyunca	Yükseklik boyunca	Kalınlık boyunca	Ağdaki toplam		
21	12	5	1	60	3	6120
23	12	10	1	120	3	4332
24	12	20	1	240	3	8640

Tablo 3.11. Sanayi bacasında ANSYS programı için çeşitlendirilen ağ yapıları

Ağ türü	Eleman sayısı				Polinom derecesi	Maksimum S.D.S.
	Yatay kesit boyunca	Yükseklik boyunca	Kalınlık boyunca	Ağdaki toplam		
29	40	400	1	16000	1	96000

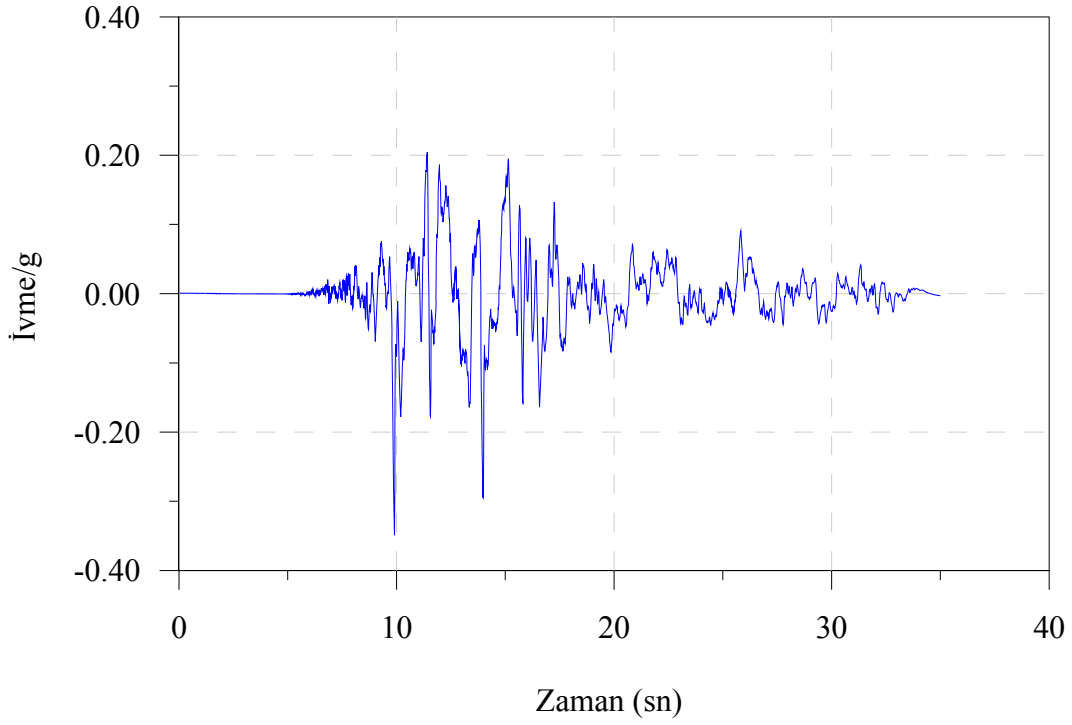
Tablo 3.12. Periyot değerleri

Periyot no	ANSYS	Bu çalışma				
	(29. Ağ) (sn)	(20. Ağ) (sn)	(21. Ağ) (sn)	(22. Ağ) (sn)	(23. Ağ) (sn)	(24. Ağ) (sn)
1	1.4998	1.4926	1.4932	1.4934	1.4743	1.4958
2	1.4998	1.4926	1.4932	1.4934	1.4062	1.4958
3	0.3459	0.3438	0.3441	0.3441	0.3381	0.3450
4	0.3459	0.3438	0.3441	0.3441	0.3249	0.3450
5	0.1452	0.1440	0.1442	0.1443	0.1428	0.1449
6	0.1452	0.1440	0.1442	0.1443	0.1387	0.1449
7	0.1417	0.1412	0.1413	0.1413	0.1376	0.1413
8	0.1054	0.1090	0.1149	0.1159	0.1152	0.1155
9	0.0843	0.1090	0.1149	0.1159	0.1150	0.1155
10	0.0843	0.1068	0.1133	0.1145	0.1143	0.1145
11	0.0825	0.1068	0.1133	0.1145	0.1141	0.1145
12	0.0825	0.1053	0.1053	0.1061	0.1088	0.1103
13	0.0785	0.0948	0.1034	0.1061	0.1082	0.1103
14	0.0784	0.0948	0.1034	0.1053	0.1031	0.1054
15	0.0735	0.0813	0.0871	0.0914	0.0969	0.1006
16	0.0735	0.0813	0.0871	0.0914	0.0957	0.1006
17	0.0694	0.0758	0.0816	0.0817	0.0820	0.0867
18	0.0694	0.0758	0.0816	0.0817	0.0815	0.0867
19	0.0665	0.0639	0.0725	0.0774	0.0795	0.0823
20	0.0665	0.0603	0.0725	0.0774	0.0766	0.0823

Tablo 3.12'den görüldüğü gibi, bu çalışmada kurgulanan sonlu eleman için elde edilen periyot değerleri, ANSYS programından elde edilen periyot değerleri ile yedinci periyot değerine kadar örtüşmekte, bu değerden sonra farklılıklar arz etmektedir. ANSYS programının sonuçları, h-yöntemi ile, bu çalışmada elde edilen sonuçlar p-yöntemi ile elde edildiği için bu farkın kütle matrisinin kurulumunda kullanılan Lagrange tabanlı hiyerarşik sonlu elemanın şekil fonksiyonlarından kaynaklanabileceği düşünülebilir. Ayrıca her ne kadar yükseklik boyunca yapılan eleman sayısındaki artırımda ilk yedi periyot değeri için yakınsanan sonuçlar elde edilse de diğer periyotlar için yükseklik boyunca daha sık ağların denenmesi gerektiği de düşünülebilir. İncelenen sanayi bacası problemi için ilk yedi periyodun yakınsanan değerde bulunması, serbest titreşim analizi için yeterli olduğundan kullanılan ağ ve polinom derecelerinin de yakınsanan değer irdelenmesi açısından yeterli olduğu düşünülmektedir.

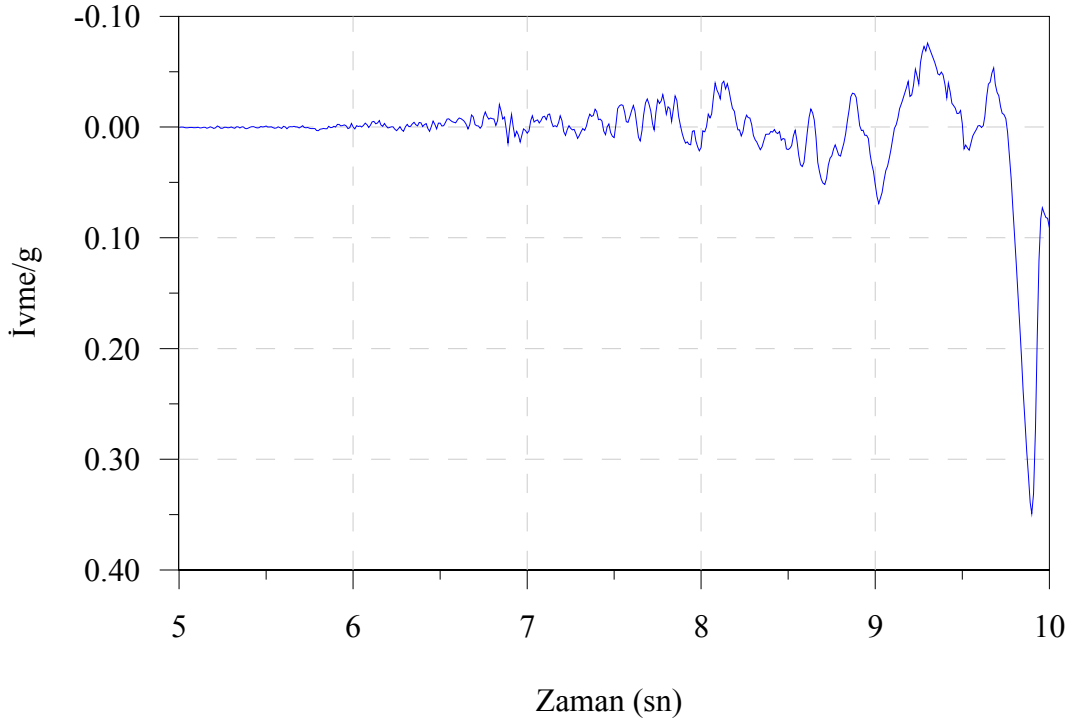
### **3.2.2. Kartezyen Koordinatlarda ve Eğrisel Yüzeyli Sanayi Bacasının Zorlanmış Titreşim Analizi**

Sanayi bacasının 17 Ağustos 1999 depreminde maruz kaldığı ivme kaydının YPT330 yatay bileşeni altında sönümsüz zorlanmış titreşim analizi gerçekleştirilecektir. Sanayi bacasının sönümlü durumu ile sönümsüz durumu karşılaştırıldığında zemin etkileşimi düşünülmendiğinden sonuçların bir birine yakın çıktığı görülmüş ve bundan dolayı sönümsüz durum için zorlanmış titreşim analizi gerçekleştirilmiştir. Statik analizinde olduğu gibi zorlanmış titreşim analizinde de yakınsanan ağ bulma çalışması yapılacaktır. Ayrıca yakınsamış sonuç verecek zaman adımı içinde analiz silsilesi yapılacaktır. Bu anlamda önce ağ sonra zaman adımı çalışılacaktır. Ağ çalışması yapılırken zaman adımı 0,01 sn olarak alınacaktır. YPT330 bileşeni 0,005 zaman adımı ile verilen 35 sn'lik büyük bir kayıt olup Şekil 3.85'de gösterilmektedir.



Şekil 3.85. Yarımca yatay deprem ivme kaydı (YPT330 bileşeni)

Şekil 3.85'den görüldüğü gibi, ilk 5 sn'deki ivme değerleri 0,001 g mertebesinde olduğu, depremin ilk piklerinin 5. sn ve 10. sn arasında olduğu hatta en büyük pikin yaklaşık 9,9. sn'de olduğu gözlenmektedir. Tüm deprem kaydının 7000 zaman adımından oluştuğu ve ağ çalışması ile zaman adımı çalışmaları da düşünüldüğünde sürecin oldukça çok zaman alacağı düşünüldüğünden deprem kaydının 5. sn ve 10. sn'leri arasındaki veriler için ağ ve zaman adımı çalışmaları yapılacak ve daha sonra tüm deprem kaydı için bulunan ağ yapısı ve zaman adımının geçerliliği irdelenecektir. Bu süreler arasındaki deprem ivme kaydı detaylı olarak Şekil 3.86'da verilmektedir.



Şekil 3.86. 5. sn ile 10. sn'ler arasında Yarımca yatay deprem ivme kaydı

Verilen deprem kaydının bu kısmı için bulunan uygun ağ ve zaman adımı ile tüm deprem kaydı altında zorlanmış titreşim analizi gerçekleştirilecektir. Her ne kadar 5. ve 10. sn'ler arasındaki deprem verileri için yapılan yakınsama çalışmalarının tüm deprem verisi için ne kadar geçerli olacağı bir problem olarak düşünülebilirse de yukarıda belirtildiği gibi oldukça çok deprem verisi ile de çalışmanın ne kadar zor olduğu açıktır.

### 3.2.2.1. ANSYS Programı ile Sanayi Bacasının Zorlanmış Titreşim Analizi

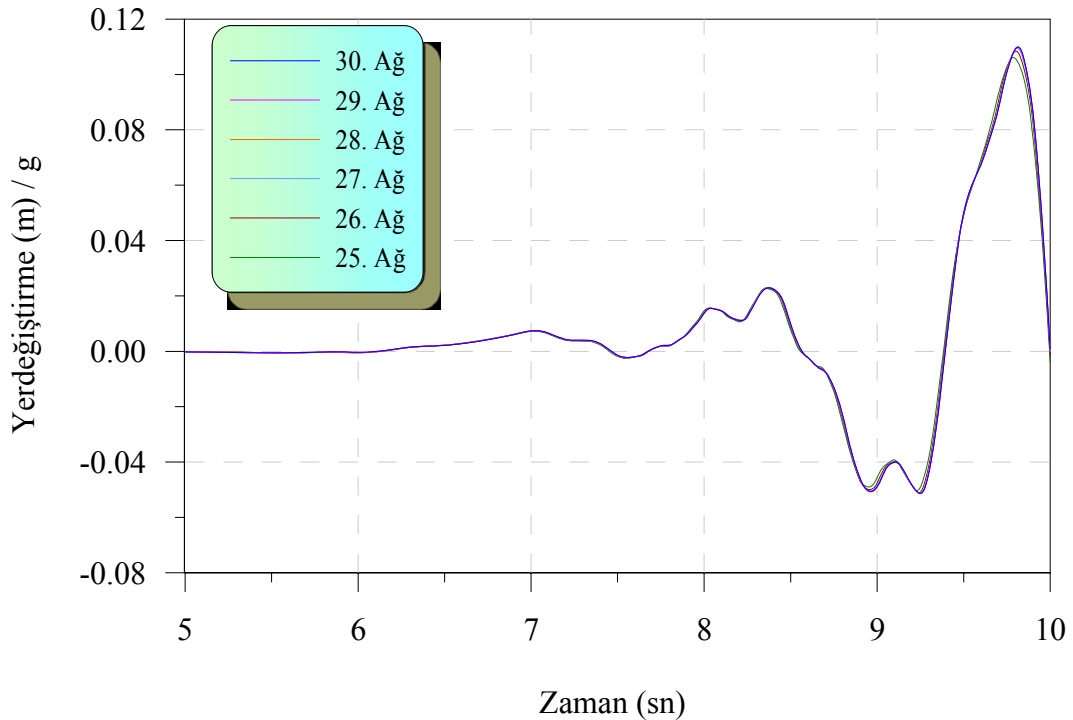
ANSYS programı için h-yöntemine göre ayrı bir ağ ve zaman adımı çalışması yapılacaktır. Bu anlamda ANSYS programı için ağlar Tablo 3.13'de verilmektedir.



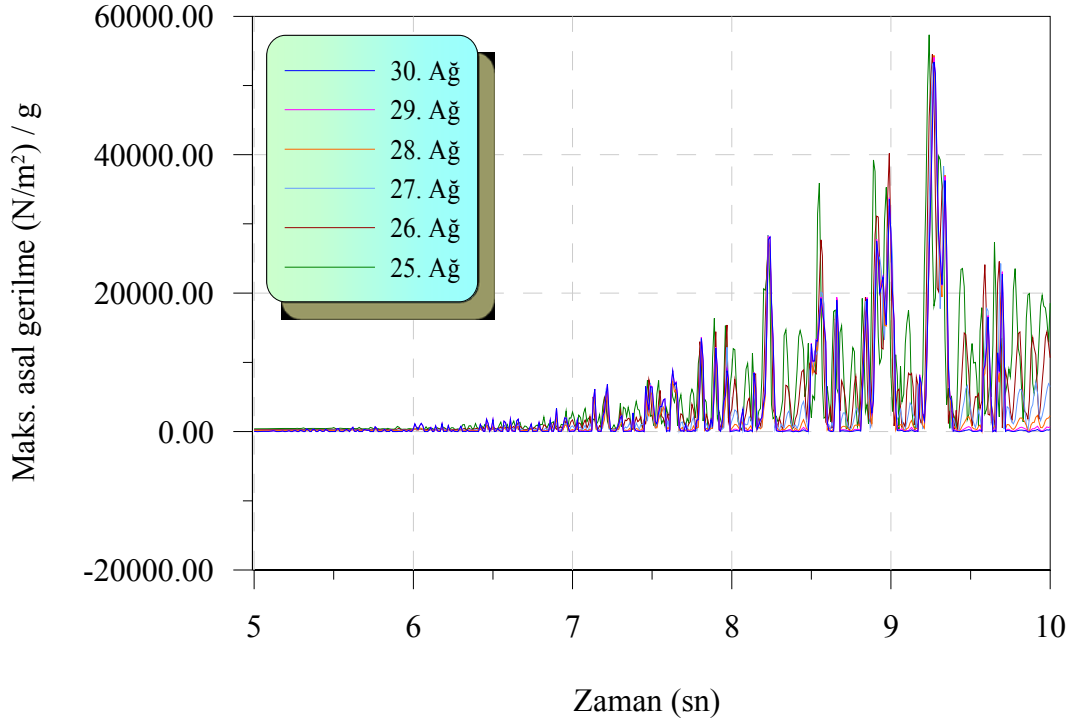
Tablo 3.13. Sanayi bacasında ANSYS programı için çeşitlendirilen ağ yapıları

Ağ türü	Eleman sayısı				Polinom derecesi	Maksimum S.D.S.
	Yatay kesit boyunca	Yükseklik boyunca	Kalınlık boyunca	Ağdaki toplam		
25	40	40	1	1600	1	9600
26	40	60	1	2400	1	14400
27	40	100	1	4000	1	24000
28	40	200	1	8000	1	48000
29	40	400	1	16000	1	96000
30	40	800	1	32000	1	192000

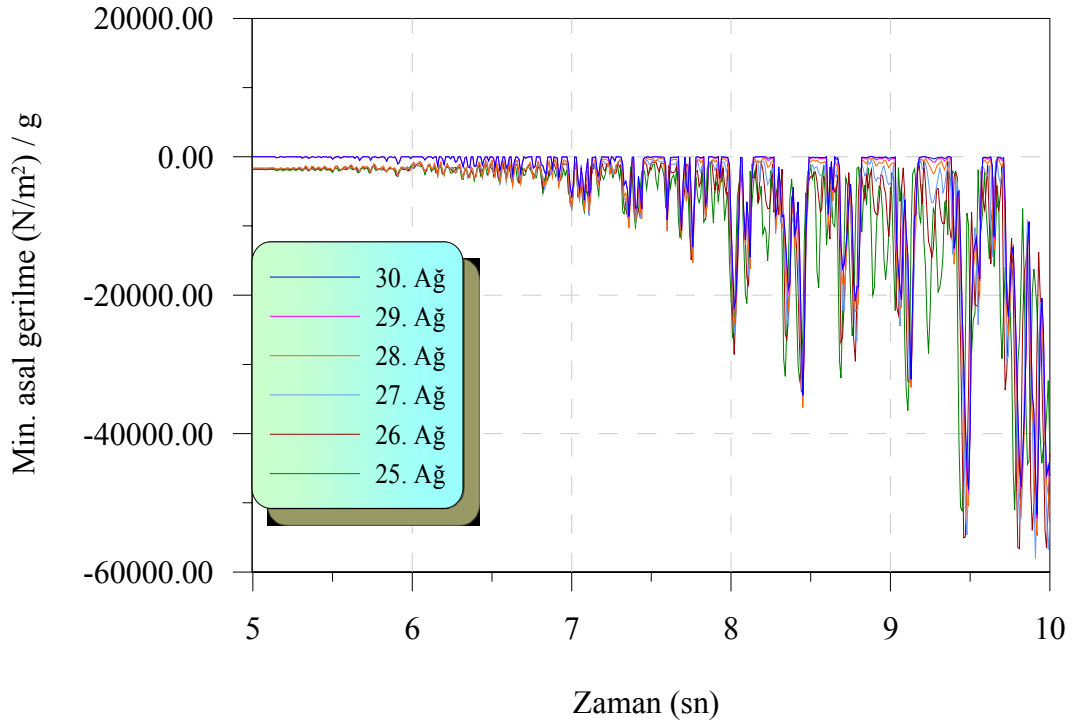
Ağ çalışması yapılırken sanayi bacasının tepe noktasındaki yatay yerdeğiştirme ve temeldeki maksimum asal, minimum asal ve von Mises gerilmelerine bakılacaktır. ANSYS programı için dikkate alınan ağlar için yerdeğiştirme, maksimum asal gerilme, minimum asal gerilme ve von Mises gerilmesi sırasıyla Şekil 3.87, Şekil 3.88, Şekil 3.89 ve Şekil 3.90'da verilmektedir.



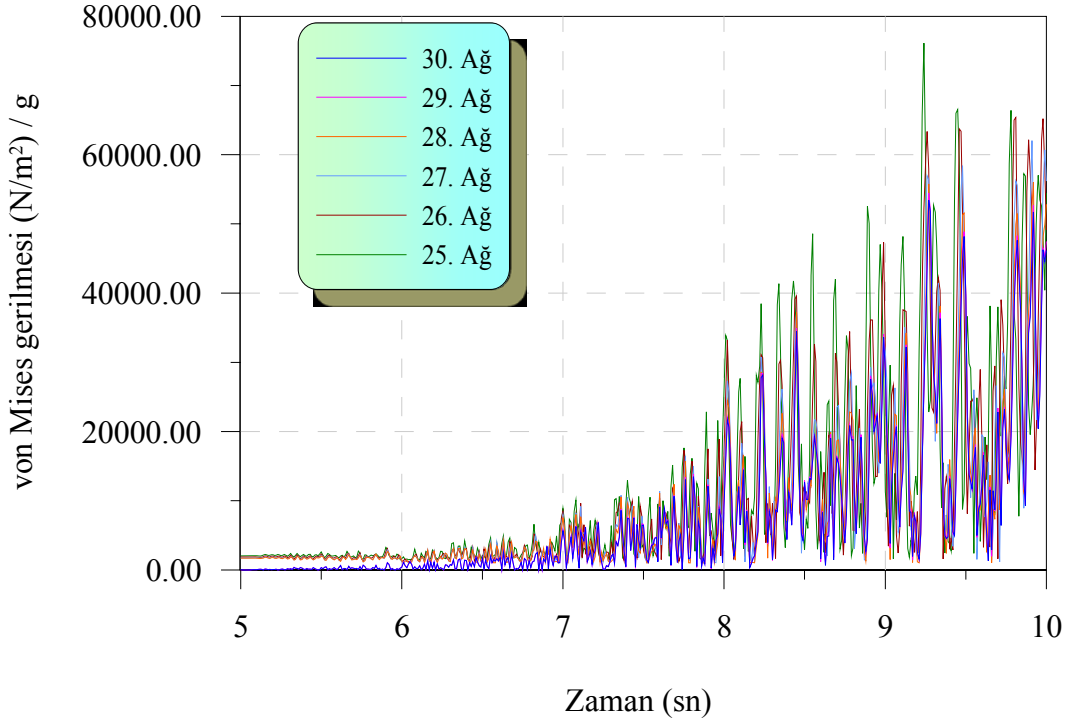
Şekil 3.87. ANSYS programıyla h-yöntem için yapılan zorlanmış titreşim analizi sonucu elde edilen yerdeğiştirmenin zamanla değişimi



Şekil 3.88. ANSYS programıyla h-yöntem için yapılan zorlanmış titreşim analizi sonucu elde edilen maksimum asal gerilmenin zamanla değişimi

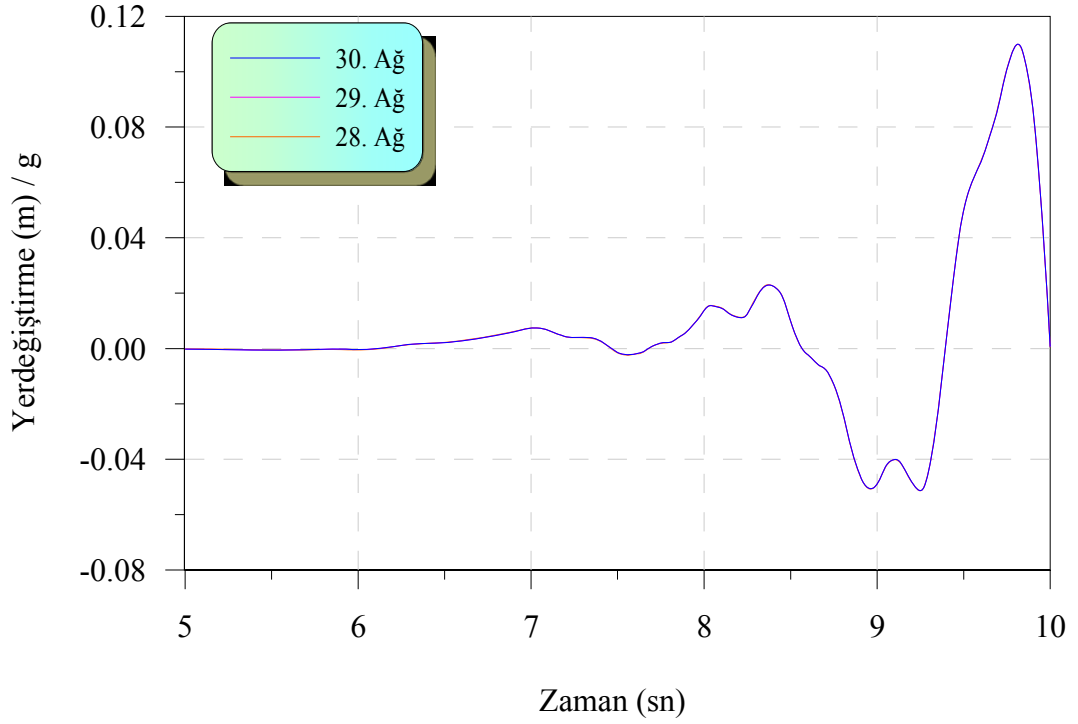


Şekil 3.89. ANSYS programıyla h-yöntem için yapılan zorlanmış titreşim analizi sonucu elde edilen minimum asal gerilmenin zamanla değişimi

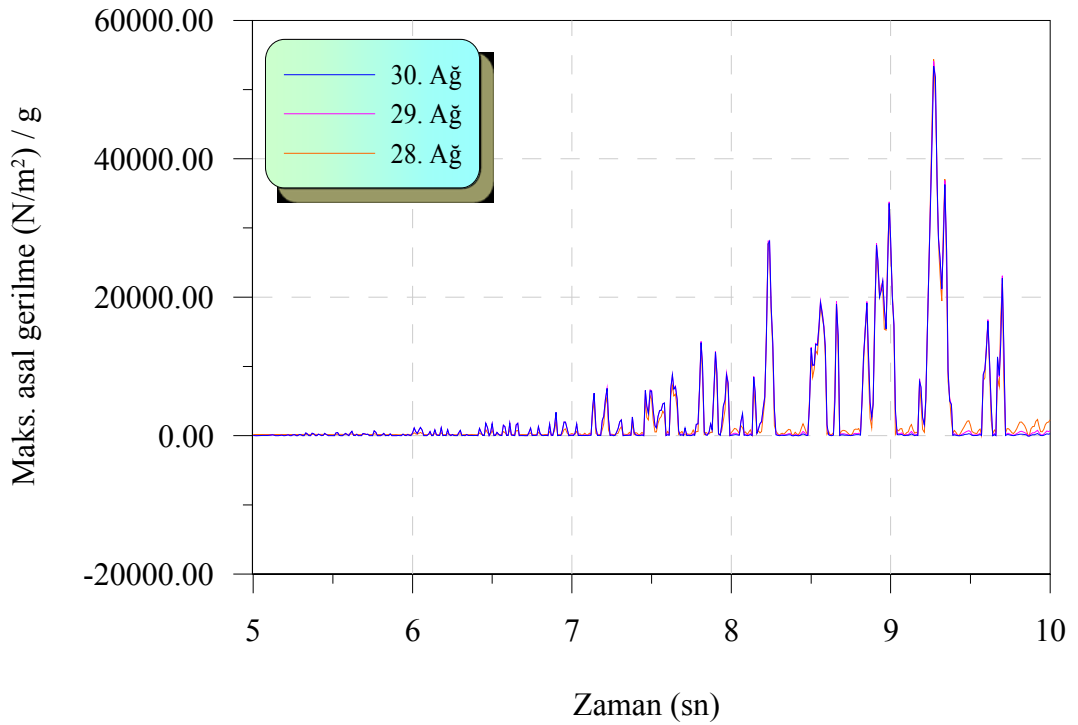


Şekil 3.90. ANSYS programıyla h-yöntem için yapılan zorlanmış titreşim analizi sonucu elde edilen von Mises gerilmesinin zamanla değişimi

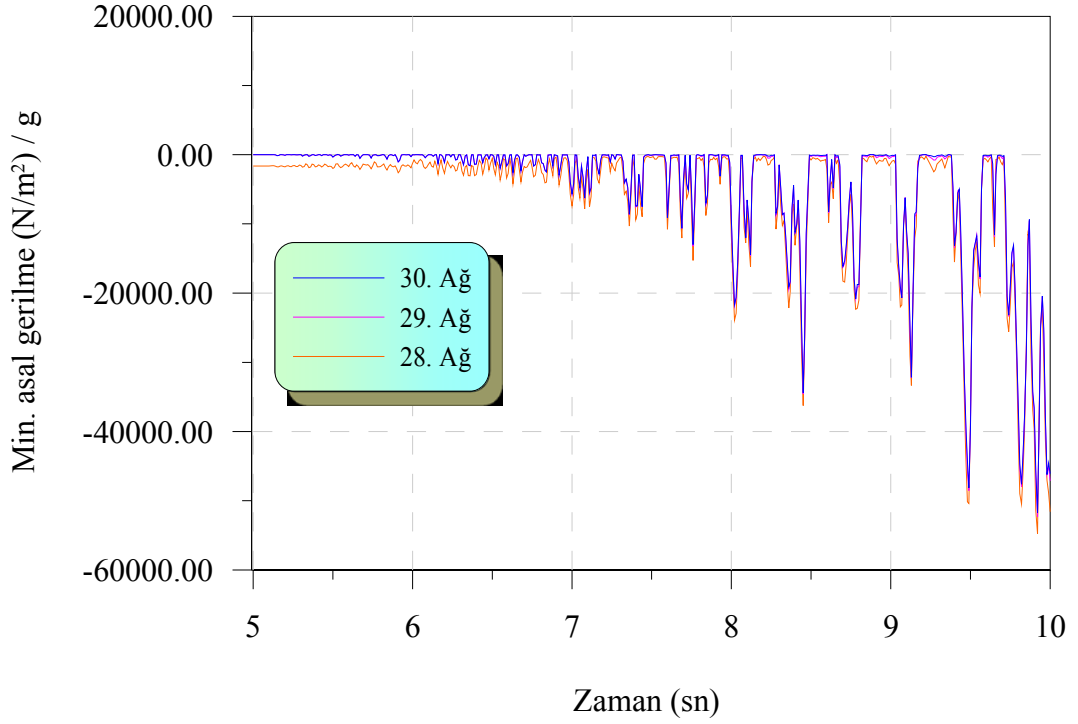
Şekil 3.87'den görüldüğü gibi, dikkate alınan her bir ağ için yerdeğiştirmenin zamanla değişim eğrisi aynı olmaktadır. En büyük yerdeğiştirme değeri yaklaşık 0,11 m/g'dir. Şekil 3.88, Şekil 3.89 ve Şekil 3.90'den görüldüğü gibi, maksimum asal, minimum asal ve von Mises gerilme değerleri 29. ve 30. ağda tamamen örtüşmektedir. Buna göre minimum ağ olarak 29. ağ işaret edilmektedir. Yakınsamanın daha net görülebilmesi için 30., 29. ve 28. ağlar için elde edilen sonuçlar Şekil 3.91, Şekil 3.92, Şekil 3.93 ve Şekil 3.94'de tekrar verilmektedir.



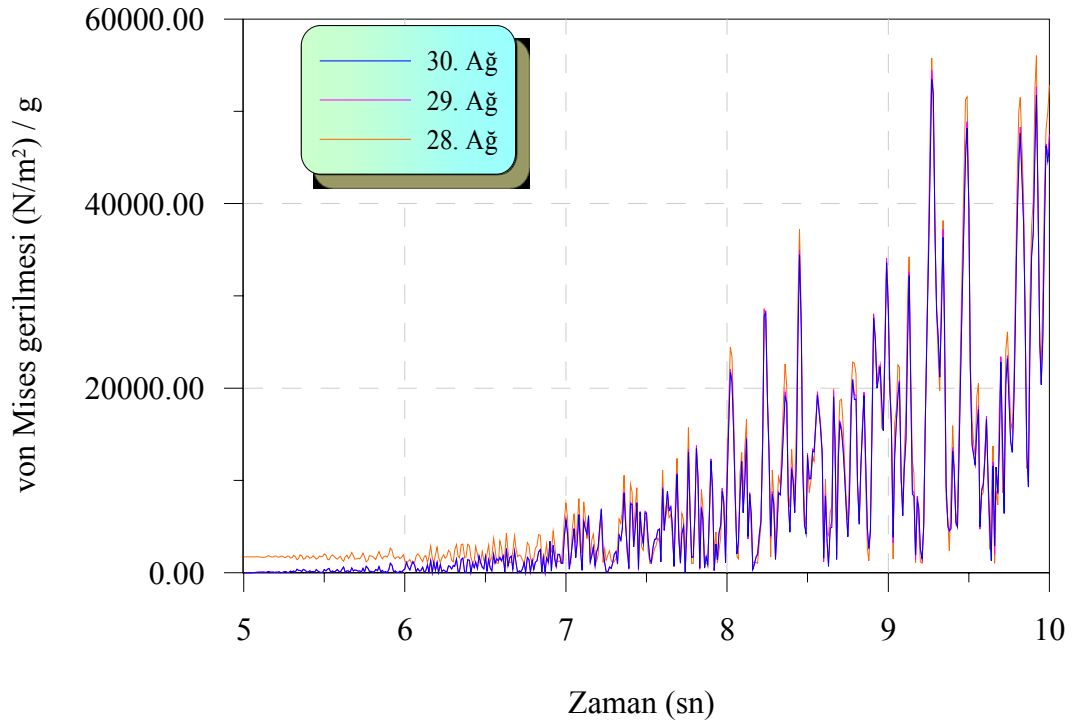
Şekil 3.91. ANSYS programıyla h-yöntem için yapılan zorlanmış titreşim analizi sonucu elde edilen yerdeğiştirmenin zamanla değişimi



Şekil 3.92. ANSYS programıyla h-yöntem için yapılan zorlanmış titreşim analizi sonucu elde edilen maksimum asal gerilmenin zamanla değişimi



Şekil 3.93. ANSYS programıyla h-yöntem için yapılan zorlanmış titreşim analizi sonucu elde edilen minimum asal gerilmenin zamanla değişimi



Şekil 3.94. ANSYS programıyla h-yöntem için yapılan zorlanmış titreşim analizi sonucu elde edilen von Mises gerilmesinin zamanla değişimi

### 3.2.2.2. Geliştirilen Program ile Sanayi Bacasının Zorlanmış Titreşim Analizi

Kurgulanan sonlu eleman için ağ sıklaştırması yatay kesit boyunca Tablo 3.14'de yükseklik boyunca Tablo 3.15'de verilmektedir. Bulguların sunulduğu şekillerin anlaşılır olabilmesi amacıyla her ağ için farklı polinom dereceleri için tüm bulgular yerine yer değiştirme sonuçları verilecektir. Ayrıca her ağın en iyi sonuç veren polinom derecesi için yer değiştirme, maksimum asal gerilme, minimum asal gerilme ve von Mises gerilmesi sonuçları karşılaştırmalı olarak verilecektir. Sunulan şekillerde ANSYS programı için yakınsamış sonucun belirlendiği 29. ağa ait sonuçlarda ayrıca karşılaştırma amaçlı olarak verilmektedir.

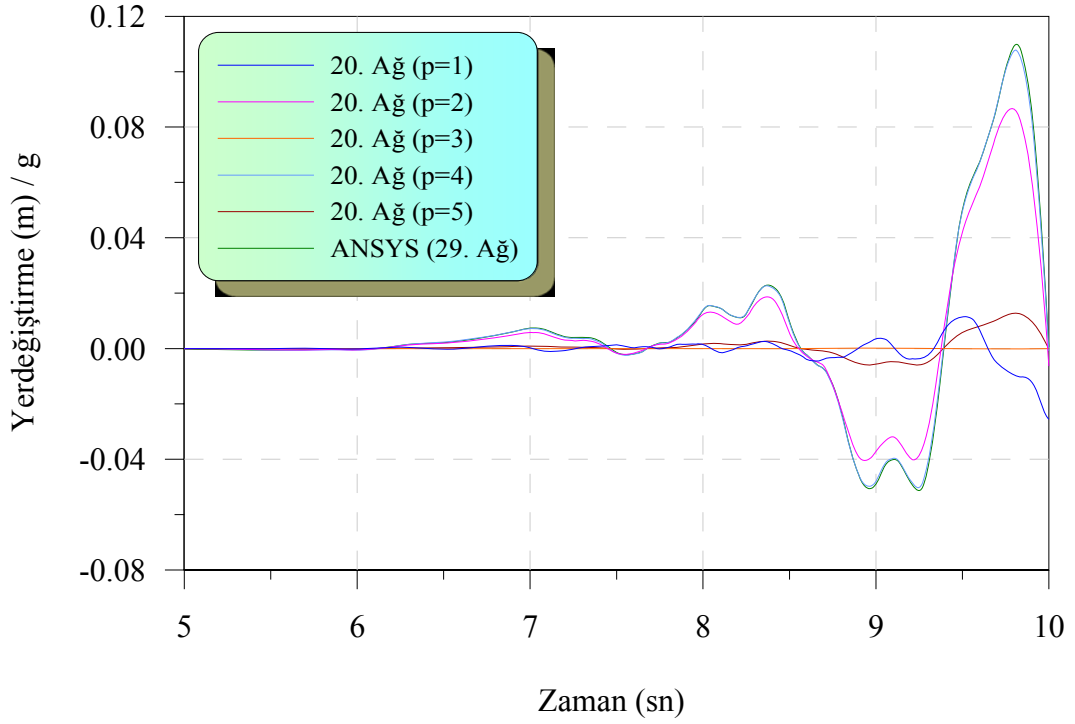
Tablo 3.14. Sanayi bacasında kurgulanan Lagrange tabanlı hiyerarşik sonlu eleman için yatay kesit boyunca çeşitlendirilen ağ yapıları

Ağ türü	Eleman sayısı				Polinom derecesi	Maksimum S.D.S.
	Yatay kesit boyunca	Yükseklik boyunca	Kalınlık boyunca	Ağdaki toplam		
20	8	5	1	40	1-5	4080
21	12	5	1	60	1-5	6120
22	16	5	1	80	1-5	8160

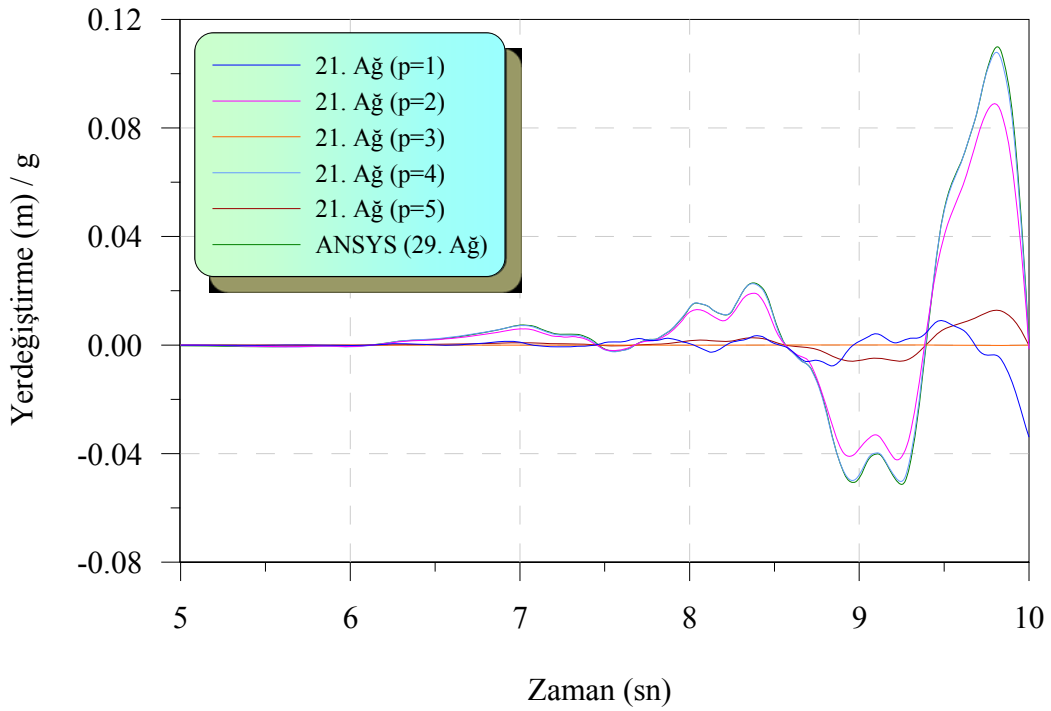
Tablo 3.15. Sanayi bacasında kurgulanan Lagrange tabanlı hiyerarşik sonlu eleman için yükseklik boyunca çeşitlendirilen ağ yapıları

Ağ türü	Eleman sayısı				Polinom derecesi	Maksimum S.D.S.
	Yatay kesit boyunca	Yükseklik boyunca	Kalınlık boyunca	Ağdaki toplam		
21	12	5	1	60	1-5	6120
23	12	10	1	120	1-5	12273
24	12	20	1	240	1-5	24480

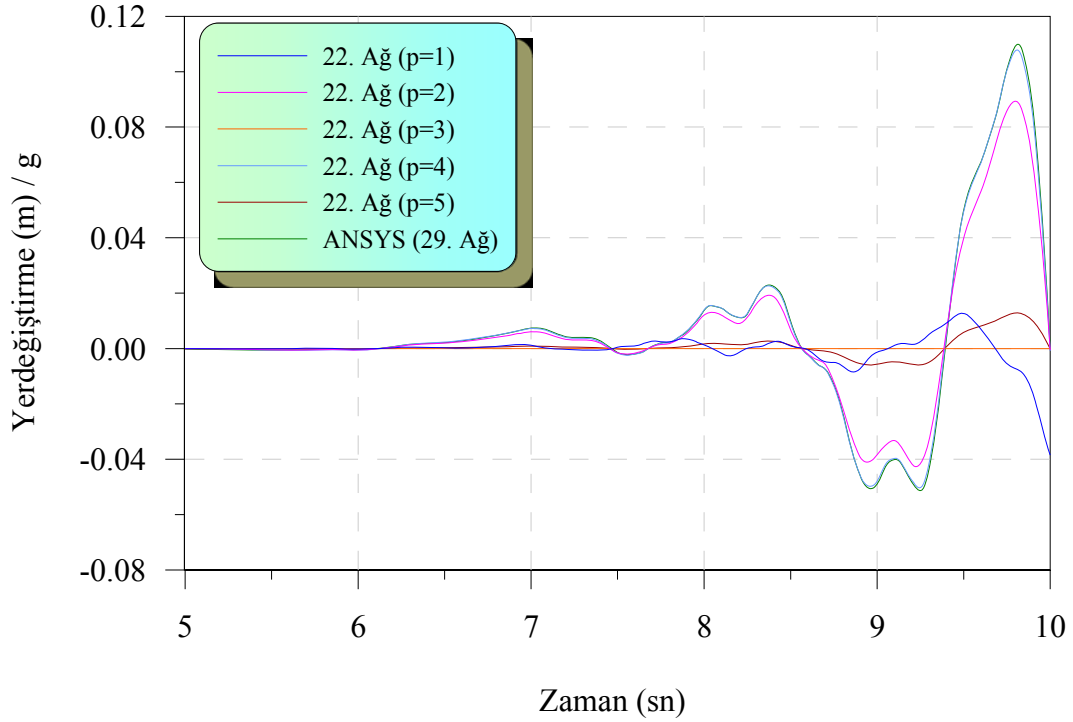
Yatay kesit boyunca eleman sayısının artırılması durumunda farklı ağlar için elde edilen yer değiştirme Şekil 3.95, Şekil 3.96 ve Şekil 3.97'de verilmektedir.



Şekil 3.95. Kurgulanan sonlu elemanda yatay kesit boyunca sıklaştırmanın yapıldığı 20. ağa ve ANSYS programının 29. ağına ait yerdeğiştirmenin zamanla değişimi



Şekil 3.96. Kurgulanan sonlu elemanda yatay kesit boyunca sıklaştırmanın yapıldığı 21. ağa ve ANSYS programının 29. ağına ait yerdeğiştirmenin zamanla değişimi

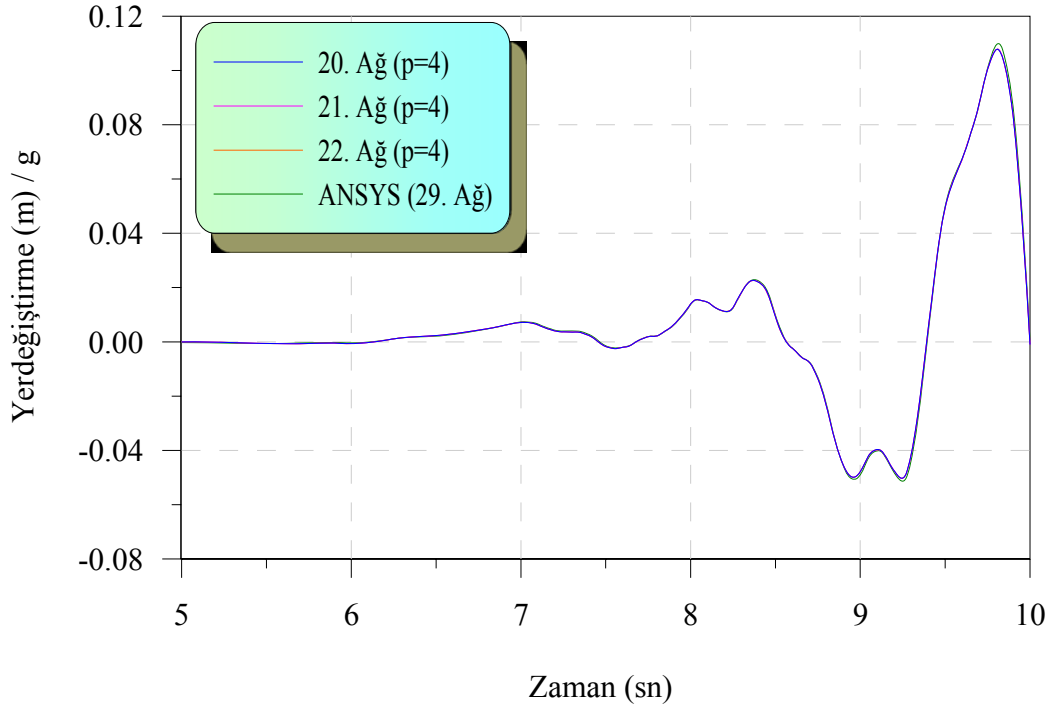


Şekil 3.97. Kurgulanan sonlu elemanda yatay kesit boyunca sıklaştırmanın yapıldığı 22. ağa ve ANSYS programının 29. ağına ait yerdeğiştirme zamanla değişimi

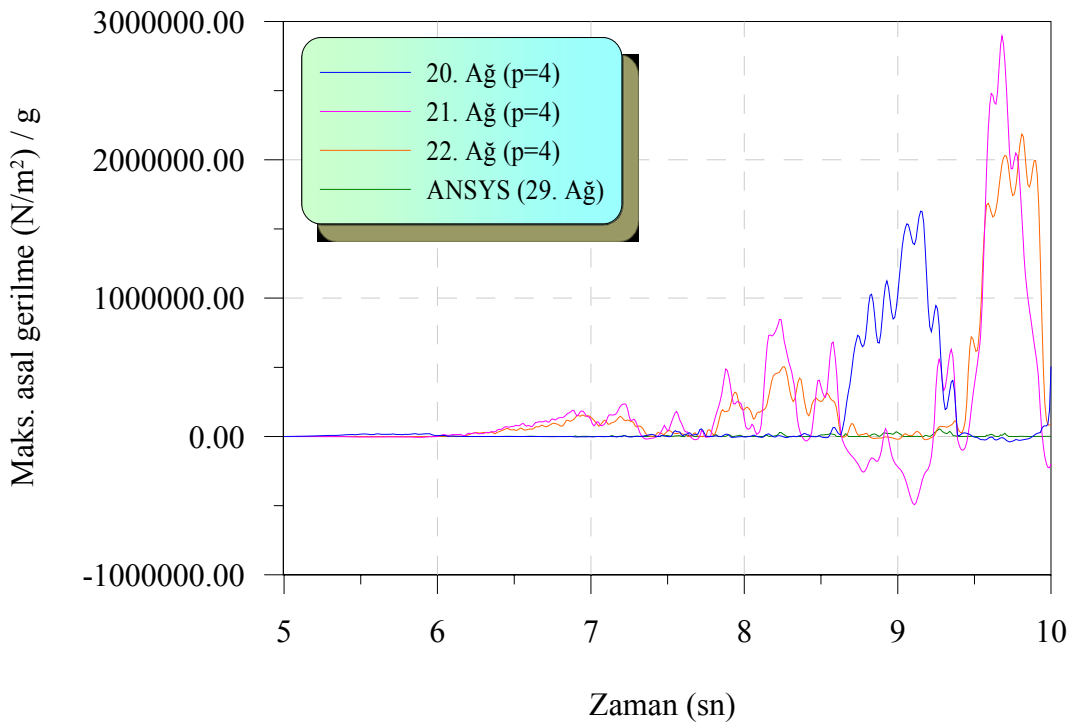
Şekil 3.95, Şekil 3.96 ve Şekil 3.97'den görüldüğü gibi, kurgulanan sonlu eleman için yatay kesit boyunca sıklaştırmanın yapıldığı tüm ağlarda verilen yerdeğiştirme eğrilerinde polinom derecesi dört olduğunda ANSYS programından elde edilen yerdeğiştirme eğrisi ile aynı eğrinin elde edilmekte; polinom derecesi iki olduğunda ise pik değerlerde bir miktar azalma ile benzer davranış elde edilmektedir. Ayrıca yatay kesit boyunca ağ sıklaştırmasında yerdeğiştirme açısından her ağın hemen hemen aynı yakınsama derecesinde sonuç verdiği görülmektedir. Yerdeğiştirme eğrilerinde polinom derecesinin monoton artmasına rağmen, sadece polinom derecesinin çift olması durumunda yakınsama davranışı gösteren eğriliklerin elde edildiği görülmektedir. Dinamik analizlerde yüksek dereceden elemanların kütle matrislerinden kaynaklanabilecek ve analizin sürecini aksi yönde etkileyen bu gibi durumların varlığına işaret edilmektedir (Cook vd., 1989).

Yatay kesit boyunca sıklaştırma ile elde edilen ağlarda polinom derecesi dört olması durumu için yakınsanan sonucun bulunduğu yerdeğiştirme, maksimum asal gerilme, minimum asal gerilme ve von Mises gerilmesi sonuçları karşılaştırmalı olarak sırasıyla Şekil 3.98, Şekil 3.99, Şekil 3.100 ve Şekil 3.101'de verilmektedir.

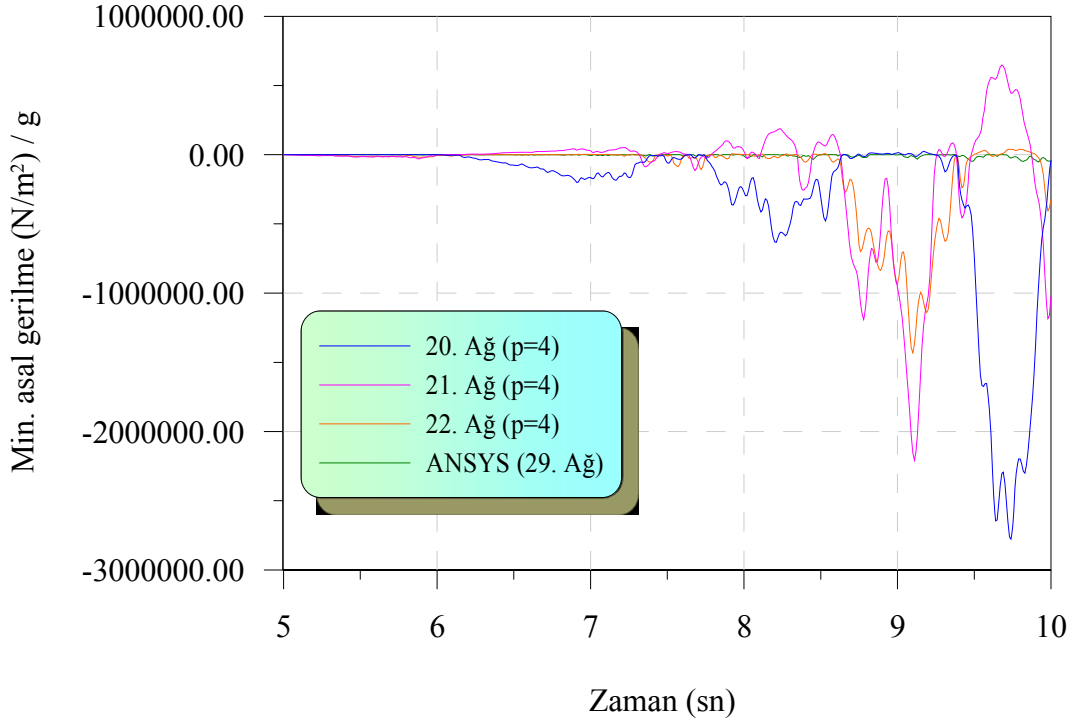




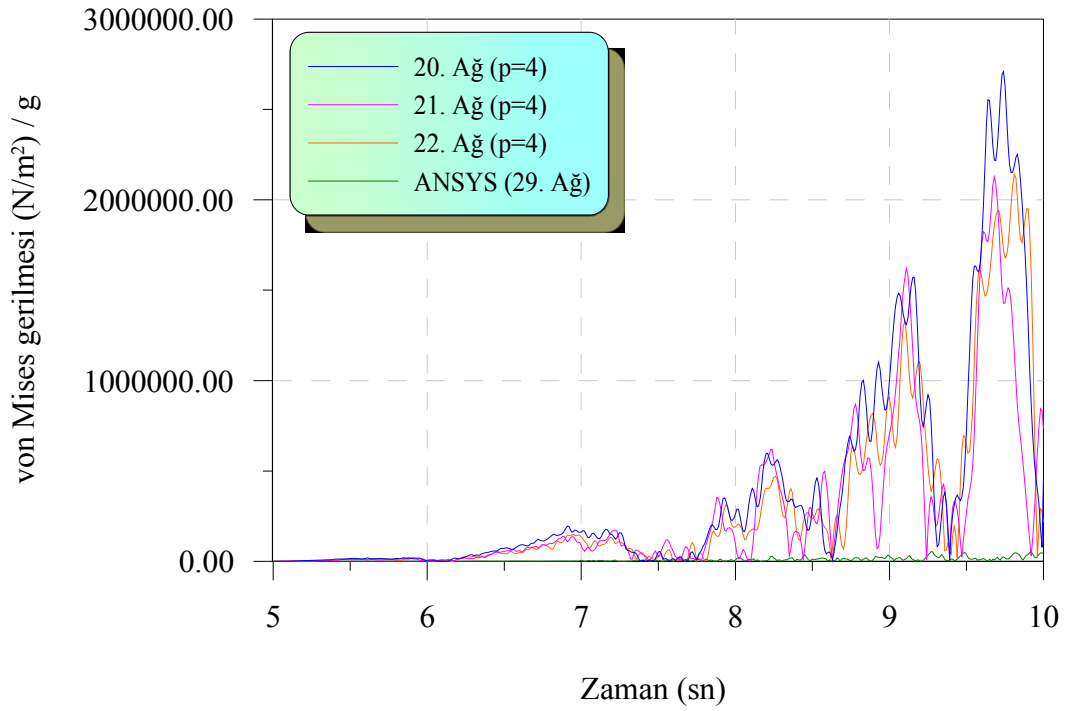
Şekil 3.98. Kurgulanan sonlu elemanı için yatay kesit boyunca sıklaştırmanın yapıldığı ağlara ve ANSYS programı için 29. ağa ait yerdeğiştirme zamanla değişimi



Şekil 3.99. Kurgulanan sonlu elemanı için yatay kesit boyunca sıklaştırmanın yapıldığı ağlara ve ANSYS programı için 29. ağa ait maksimum asal gerilmenin zamanla değişimi



Şekil 3.100. Kurgulanan sonlu elemanı için yatay kesit boyunca sıklaştırmanın yapıldığı ağlara ve ANSYS programı için 29. ağa ait minimum asal gerilmenin zamanla değişimi

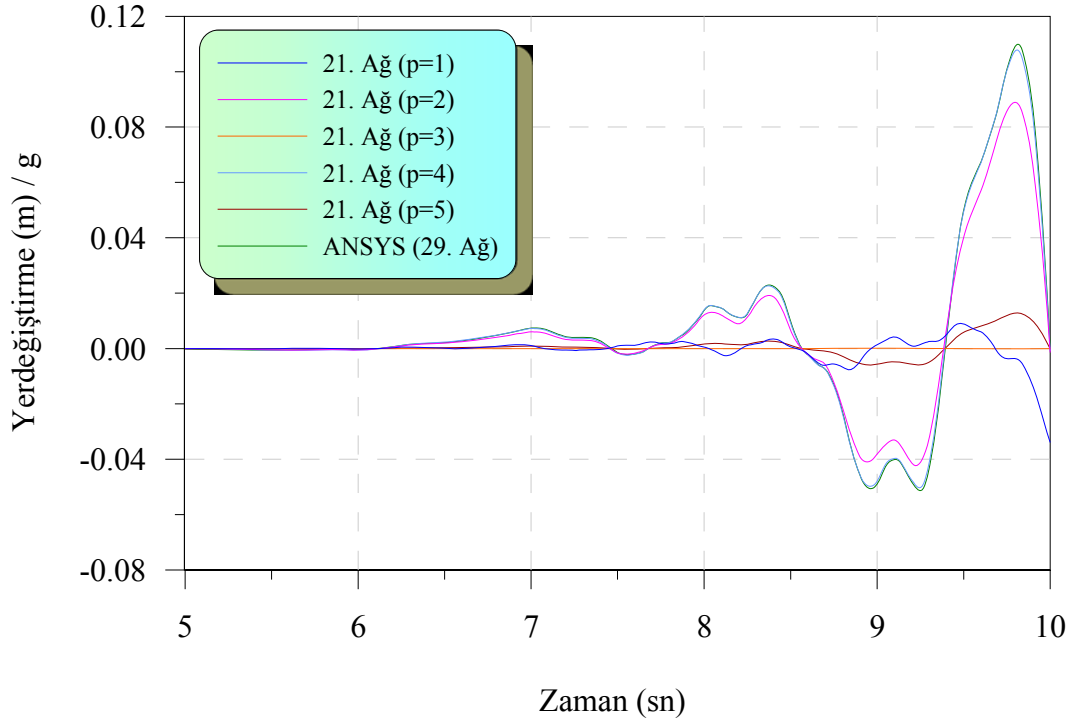


Şekil 3.101. Kurgulanan sonlu elemanı için yatay kesit boyunca sıklaştırmanın yapıldığı ağlara ve ANSYS programı için 29. ağa ait von Mises gerilmesinin zamanla değişimi

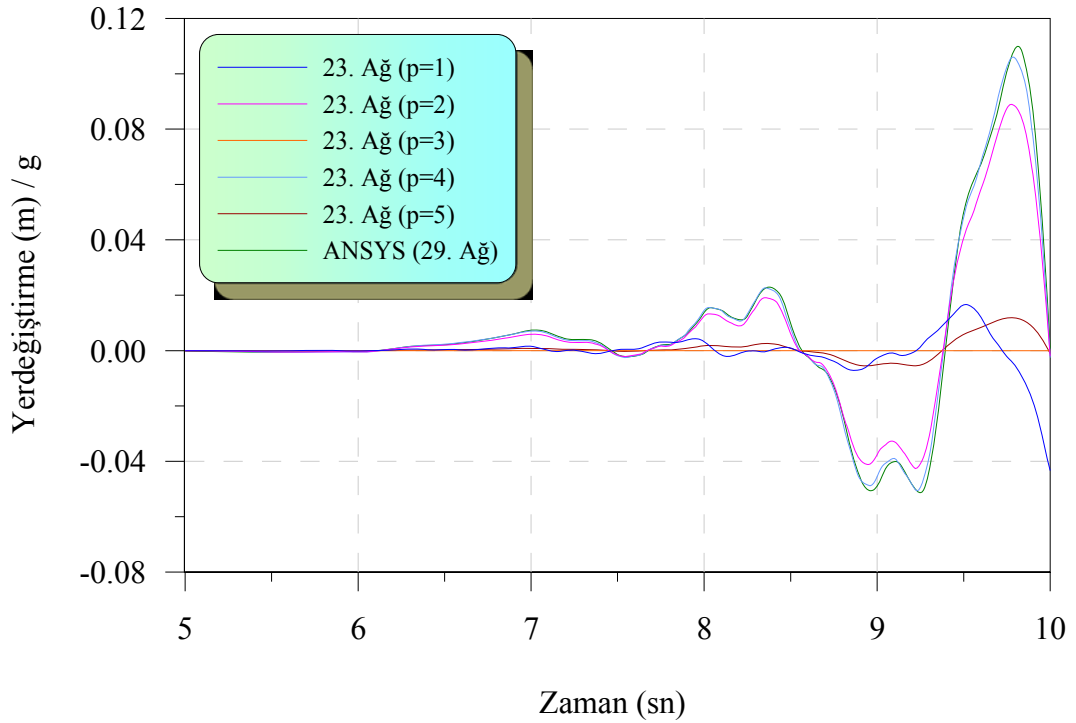
Şekil 3.98'den görüldüğü gibi, kurgulanan sonlu eleman için her ağda polinom derecesinin dört olduğu durumda ANSYS programı ile aynı yerdeğiştirme eğrisi elde edilmektedir. Elde edilen en büyük yerdeğiştirme yaklaşık 0,11 m/g civarındadır.

Şekil 3.99, Şekil 3.100 ve Şekil 3.101'den görüldüğü gibi, 21. ağa ve 22. ağa ait gerilme eğrileri yakınsama eğiliminde, ancak, bu iki ağ tam yakınsamamaktadır. Ayrıca yakınsama davranışının; maksimum asal gerilme, minimum asal gerilme ve von mises gerilmesinde ağ sıklaştıkça azalma eğiliminde olduğu görülmektedir. Buna göre sırasıyla 21. ve 22. ağa ait en büyük maksimum asal gerilmeler yaklaşık  $2900000 \text{ N/m}^2/\text{g}$  (2,9 MPa/g) ve  $2200000 \text{ N/m}^2/\text{g}$  (2,2 MPa/g); en büyük minimum asal gerilmeler yaklaşık  $2300000 \text{ N/m}^2/\text{g}$  (2,3 MPa/g) ve  $1400000 \text{ N/m}^2/\text{g}$  (1,4 MPa/g); en büyük von Mises gerilmeleri yaklaşık  $2200000 \text{ N/m}^2/\text{g}$  (2,2 MPa/g),  $2200000 \text{ N/m}^2/\text{g}$  (2,2 MPa/g) olmaktadır. En büyük gerilme ve yerdeğiştirme değerleri genelde (minimum asal gerilme hariç) yaklaşık 9,8. sn'de, yani, en büyük ivme değerinin olduğu noktada oluşmaktadır. Gerilme sonuçları açısından ANSYS sonuçları ile bir yakınlık görünmemektedir. Zaten ANSYS programı için verilen sonuçların h-yöntemine göre verildiği hatırlanırsa gerilme sonuçlarının mertebeye p-yöntemi sonuçlarına göre ıraksak kalması beklenen bir durum olmaktadır.

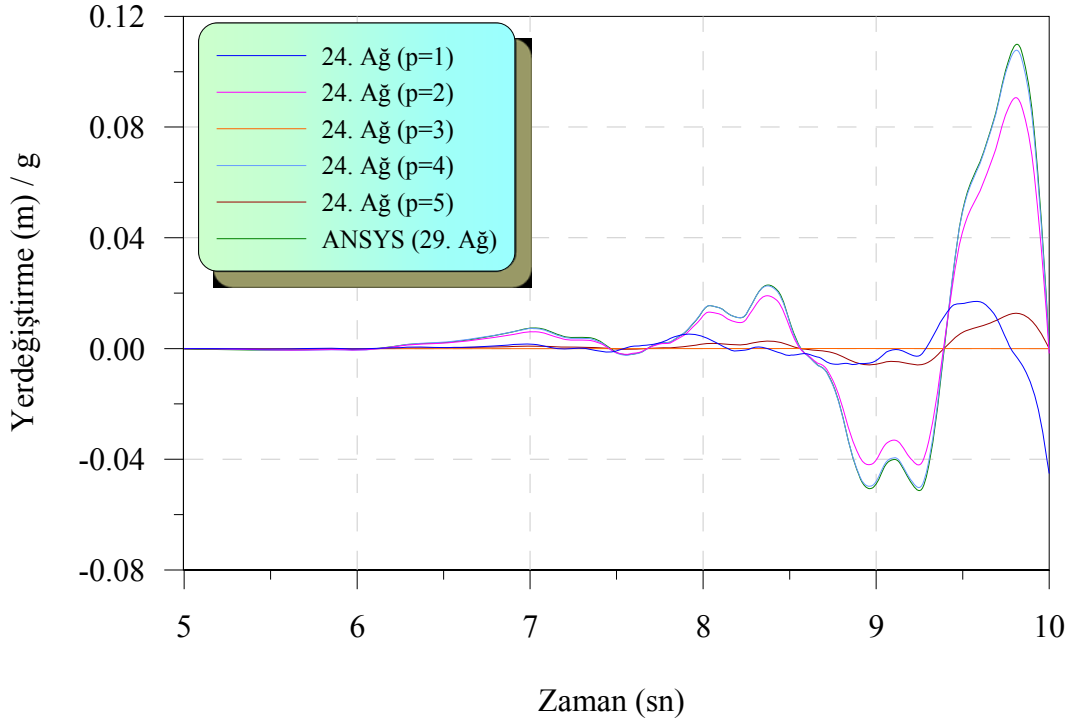
Gerilme diyagramlarında piklerin görüldüğü anlardaki değerlerin bir birine göre ıraksaklığı en fazla yaklaşık, minimum asal gerilme hariç, % 25 olup yerdeğiştirme sonuçlarının da düşünüldüğü en genel durumda 21. ağın dikkate alınan ağlar içinde kabul edilebilir minimum bir ağ olmaktadır. Yükseklik boyunca eleman sayısının artırılmasına karşılık gelen yerdeğiştirmeler farklı ağlar için Şekil 3.102, Şekil 3.103 ve Şekil 3.104'de verilmektedir.



Şekil 3.102. Kurgulanan sonlu elemanda yükseklik boyunca sıklaştırmanın yapıldığı 21. ağa ve ANSYS programının 29. ağına ait yerdeğiştirmenin zamanla değişimi



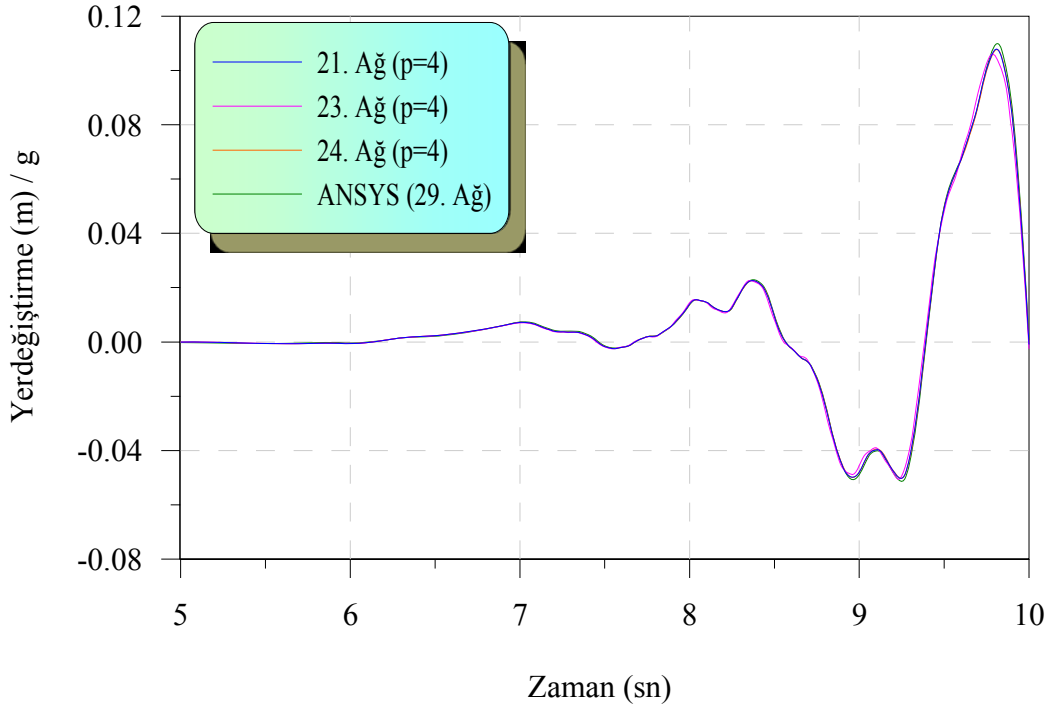
Şekil 3.103. Kurgulanan sonlu elemanda yükseklik boyunca sıklaştırmanın yapıldığı 23. ağa ve ANSYS programının 29. ağına ait yerdeğiştirmenin zamanla değişimi



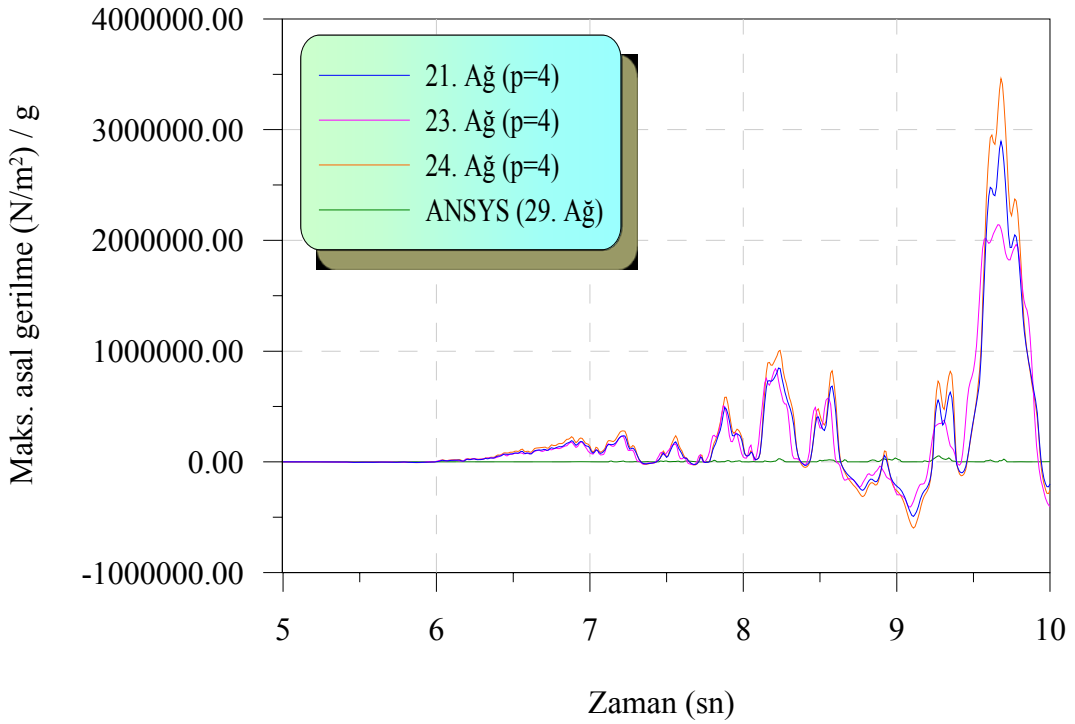
Şekil 3.104. Kurgulanan sonlu elemanda yükseklik boyunca sıklaştırmanın yapıldığı 24. ağa ve ANSYS programının 29. ağına ait yerdeğiştirme zamanla değişimi

Şekil 3.102, Şekil 3.103 ve Şekil 3.104'den görüldüğü gibi, kurgulanan sonlu eleman için yükseklik boyunca eleman sayısının artırıldığı tüm ağlar için belirlenen yerdeğiştirme eğrilerinde polinom derecesi dört olduğunda, ANSYS programından elde edilen yakınsanan yerdeğiştirme eğrisi ile aynı eğrinin elde edilmekte; polinom derecesi iki olduğunda ise pik değerlerde bir miktar azalma ile beraber yine benzer davranış elde edilmektedir.

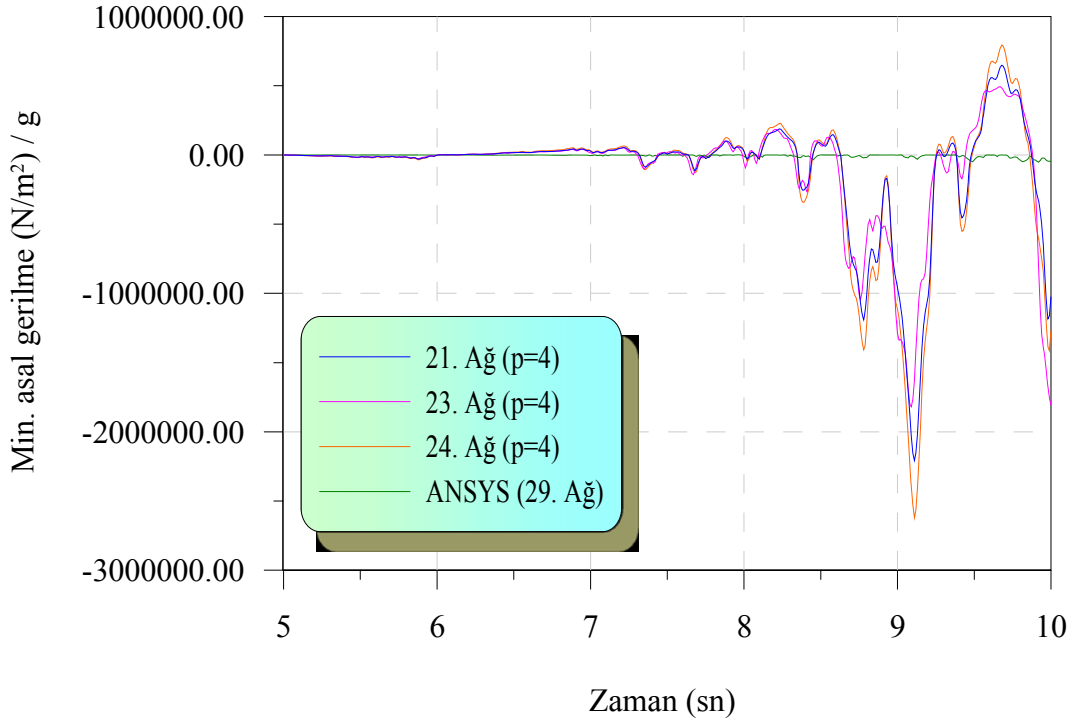
Yükseklik boyunca eleman sayısının artırılması ile elde edilen ağlarda polinom derecesi dört olması durumu için yakınsamış sonucun bulunduğu yerdeğiştirme, maksimum asal gerilme, minimum asal gerilme ve von Mises gerilmesi sonuçları karşılaştırmalı olarak sırasıyla Şekil 3.105, Şekil 3.106, Şekil 3.107 ve Şekil 3.108'de verilmektedir.



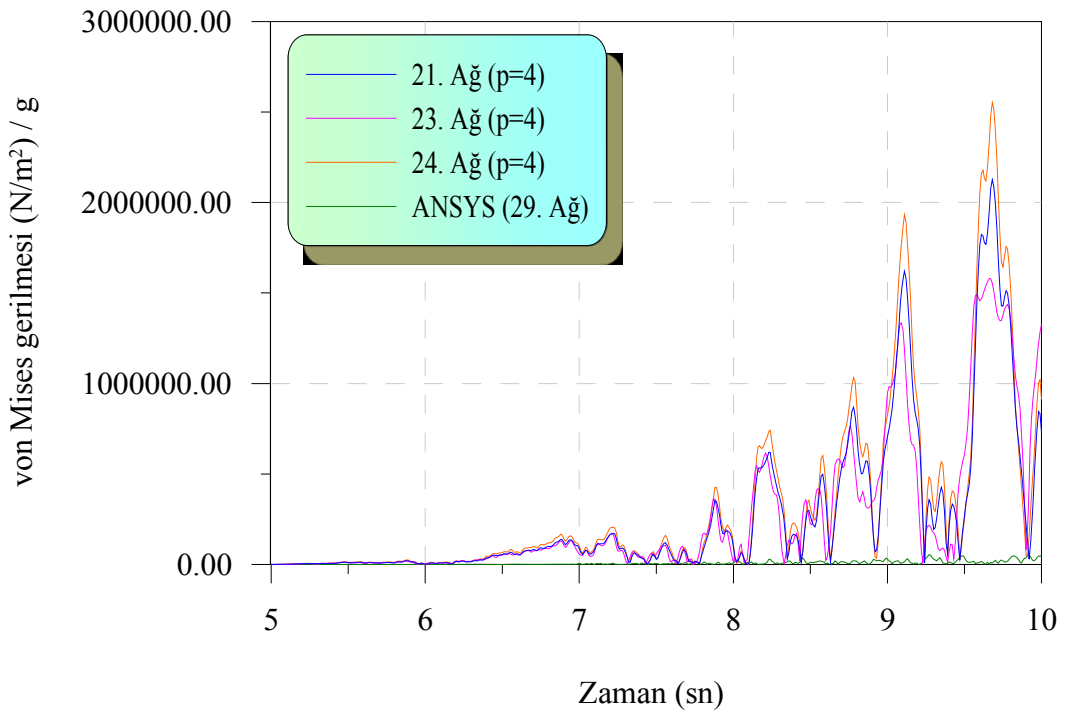
Şekil 3.105. Kurgulanan sonlu eleman için yükseklik boyunca sıklaştırmanın yapıldığı ağlara ve ANSYS programı için 29. ağa ait yerdeğiştirmenin zamanla değişimi



Şekil 3.106. Kurgulanan sonlu eleman için yükseklik boyunca sıklaştırmanın yapıldığı ağlara ve ANSYS programı için 29. ağa ait maksimum asal gerilmenin zamanla değişimi



Şekil 3.107. Kurgulanan sonlu eleman için yükseklik boyunca sıkıştırmanın yapıldığı ağlara ve ANSYS programı için 29. ağa ait minimum asal gerilmenin zamanla değişimi



Şekil 3.108. Kurgulanan sonlu eleman için yükseklik boyunca sıkıştırmanın yapıldığı ağlara ve ANSYS programı için 29. ağa ait von Mises gerilmesinin zamanla değişimi

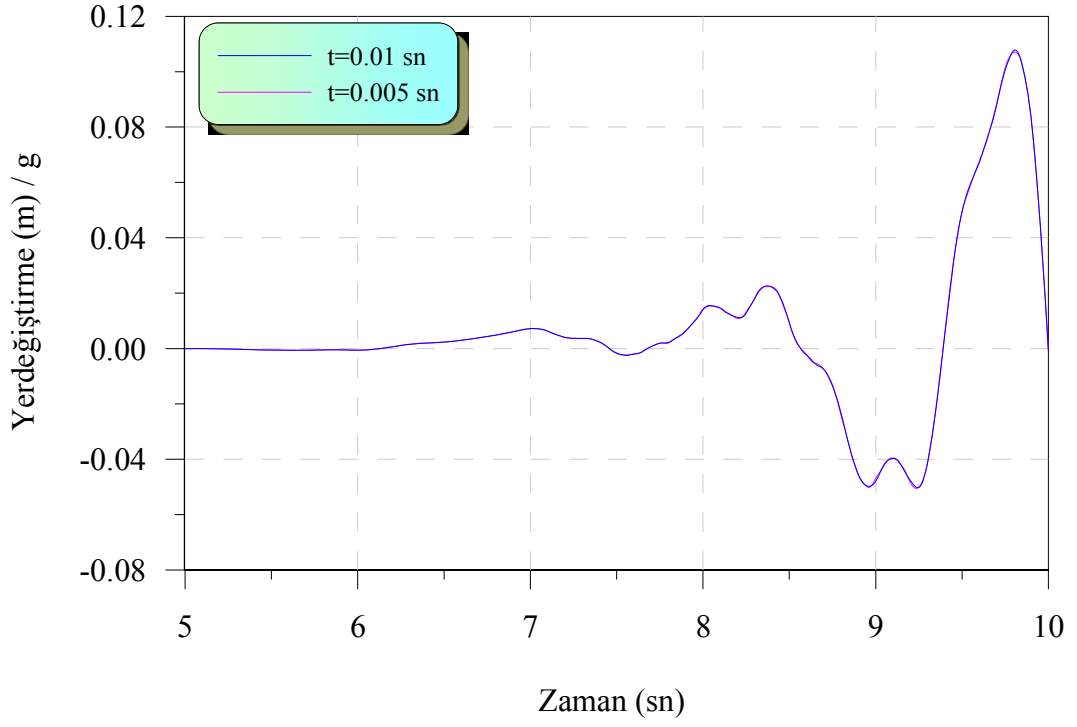
Şekil 3.105'den görüldüğü gibi, kurgulanan sonlu eleman için her ağda polinom derecesinin dört olduğu durumda ANSYS programı ile aynı yerdeğiştirme eğrisi elde edilmektedir. Elde edilen en büyük yerdeğiştirme yaklaşık 0,11 m/g civarındadır.

Şekil 3.106, Şekil 3.107 ve Şekil 3.108'den görüldüğü gibi, genel olarak polinom derecesinin dört olması durumunda yükseklik boyunca eleman sayısının artırıldığı ağlardaki gerilme eğrileri çok benzer davranışlar sergilemektedirler. Ancak yakınsama davranışı açısından maksimum asal gerilme ve von mises gerilmesinde ağ sıklaştıkça bir azalıp bir artan davranış görünürken minimum asal gerilmede tüm eğri boyunca net bir yakınsama davranışı görünmemektedir. 21. ve 24. ağa ait gerilme eğrilerinin pik değerleri 23. ağa ait eğriye göre birbirlerine daha yakın görünmektedir. Buna göre sırasıyla 21. ve 24. ağa ait en büyük maksimum asal gerilmeler yaklaşık  $3000000 \text{ N/m}^2/\text{g}$  (3,0 MPa/g) ve  $3500000 \text{ N/m}^2/\text{g}$  (3,5 MPa/g); en büyük minimum asal gerilmeler yaklaşık  $2300000 \text{ N/m}^2/\text{g}$  (2,3 MPa/g) ve  $2700000 \text{ N/m}^2/\text{g}$  (2,7 MPa/g); en büyük von Mises gerilmeleri yaklaşık  $2200000 \text{ N/m}^2/\text{g}$  (2,2 MPa/g) ve  $2500000 \text{ N/m}^2/\text{g}$  (2,5 MPa/g) olmaktadır. Ayrıca en büyük gerilme ve yerdeğiştirme değerleri genelde (minimum asal gerilme hariç) yaklaşık 9,8. sn'de, yani, en büyük ivme değerinin olduğu noktada oluşmaktadır. ANSYS programıyla belirlenen bulguların h-yöntemine göre elde edildiği hatırlanırsa gerilmelerin mertebeye p-yöntemine göre iraksak kalması beklenen bir durum olmaktadır.

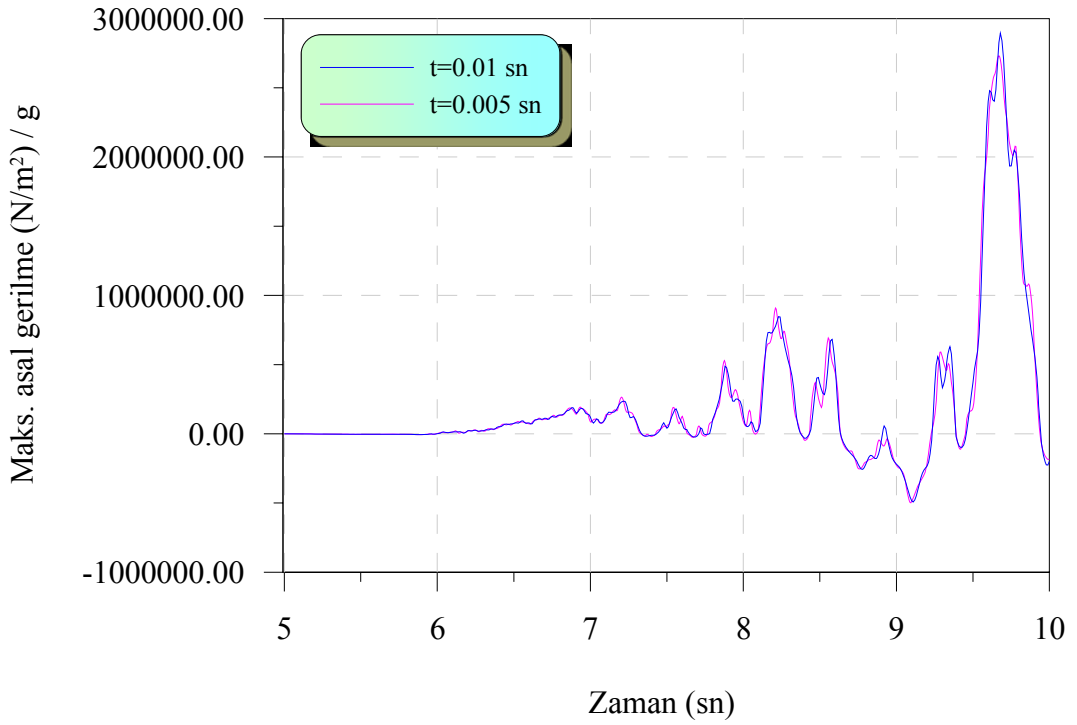
Gerilme eğrilerinde piklerin görüldüğü anlardaki değerlerin bir birine göre iraksaklığı en fazla yaklaşık % 15 olup yerdeğiştirme sonuçlarının da düşünüldüğü en genel durumda 21. ağın dikkate alınan ağlar içinde kabul edilebilir minimum bir ağ olmaktadır. Yerdeğiştirme açısından hem yatay kesit hem de yükseklik boyunca yapılan sıklaştırmalarda dikkate alınan tüm ağların kullanılabilmesi; gerilme açısından ise ayrı ayrı olarak yatay kesit ve yükseklik boyunca sıklaştırmalarda 21. ağın her ne kadar tam yakınsamanın sağlandığı ağ olmasa da yerdeğiştirme sonuçları da düşünüldüğünde çalışılan ağlar içerisinde en iyi ağ olarak kullanılabilmesi sonucuna varılmaktadır. Ayrıca polinom derecesinin dört olması durumunda dikkate alınan ağlarda iyi sonuç alınabildiğinin altı çizilmelidir.

Ağ sıklaştırması yapıldıktan sonra zaman adımında sıklaştırma gerçekleştirilecektir. Bunun için polinom derecesinin dört olduğu durumda 21. ağ üzerinde zaman adımının 0,005 olduğu durum için zorlanmış titreşim analizi yapılacaktır. Zaman adımının 0,01 ve 0,005 olduğu durumlar için yerdeğiştirme, maksimum asal gerilme, minimum asal gerilme ve von Mises gerilmesi değerlerinin zamanla değişimi sırasıyla Şekil 3.109, Şekil 3.110, Şekil 3.111 ve Şekil 3.112'de verilmektedir.

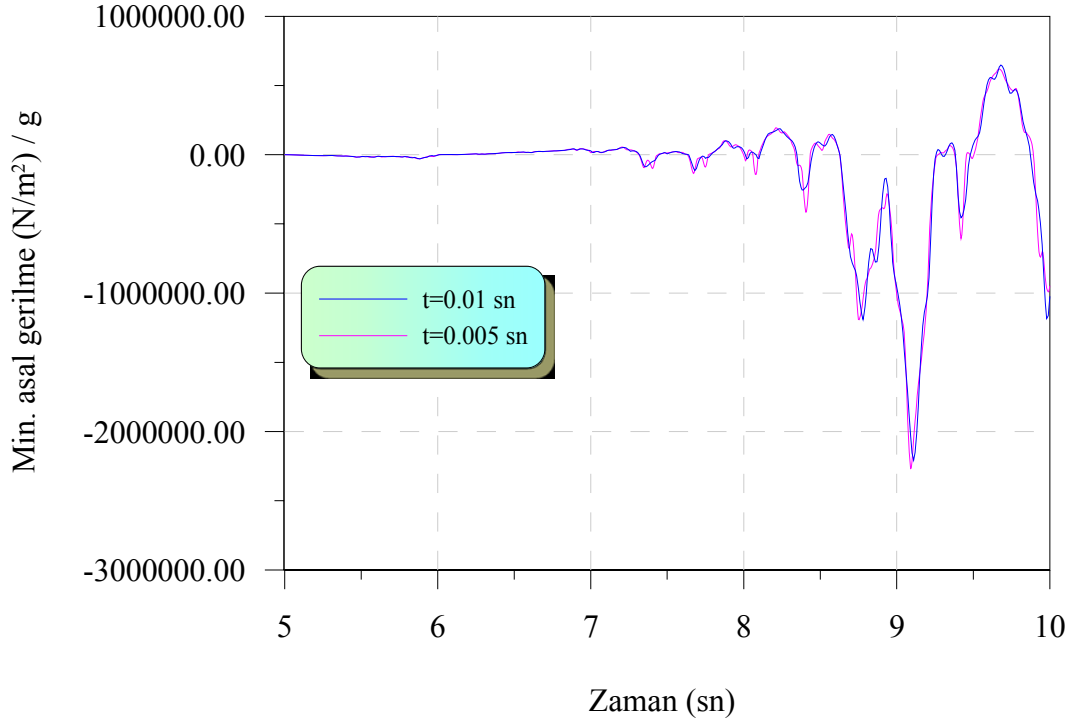




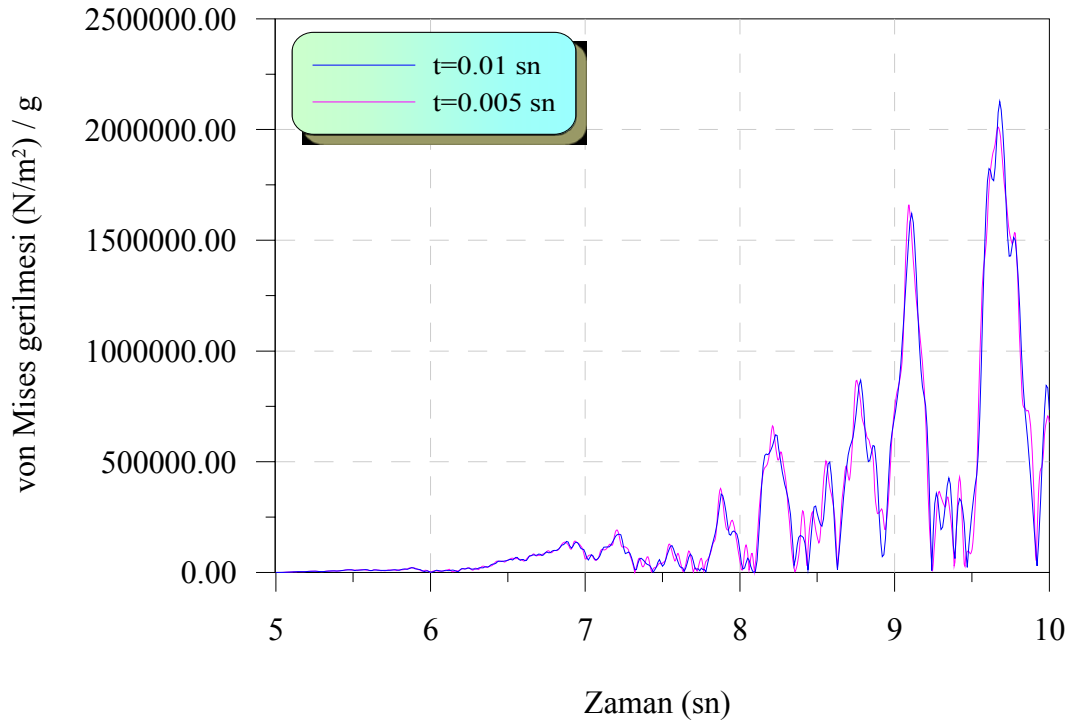
Şekil 3.109. Kurgulanan sonlu eleman için yerdeğiştirmenin zamanla değişimi



Şekil 3.110. Kurgulanan sonlu eleman için maksimum asal gerilmenin zamanla değişimi



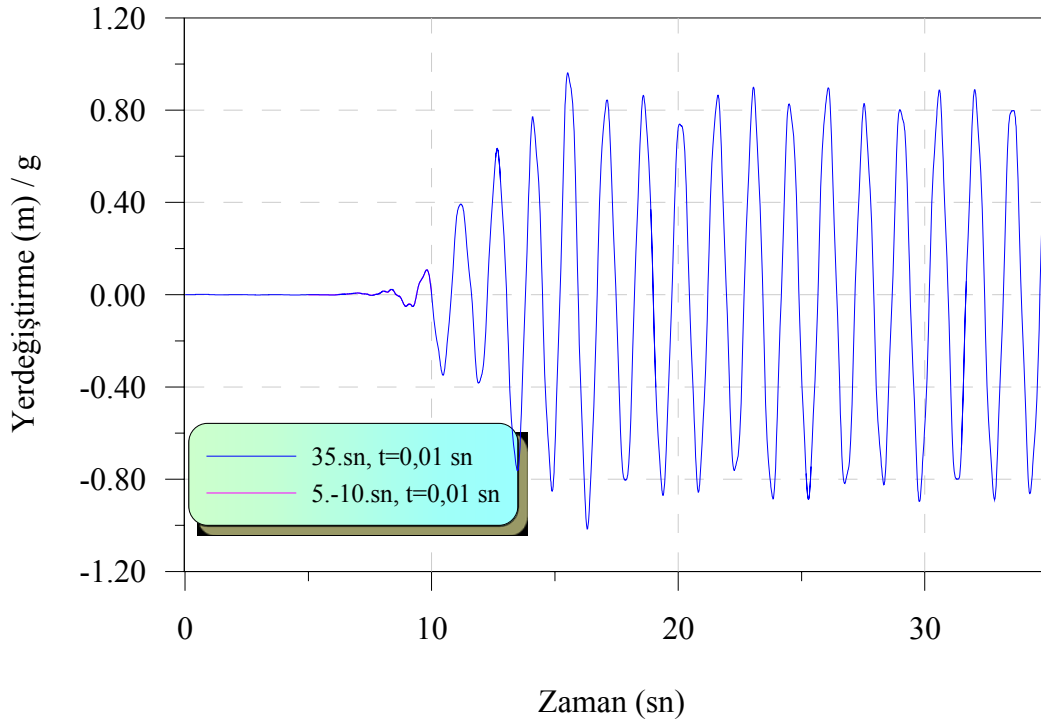
Şekil 3.111. Kurgulanan sonlu eleman için minimum asal gerilmenin zamanla değişimi



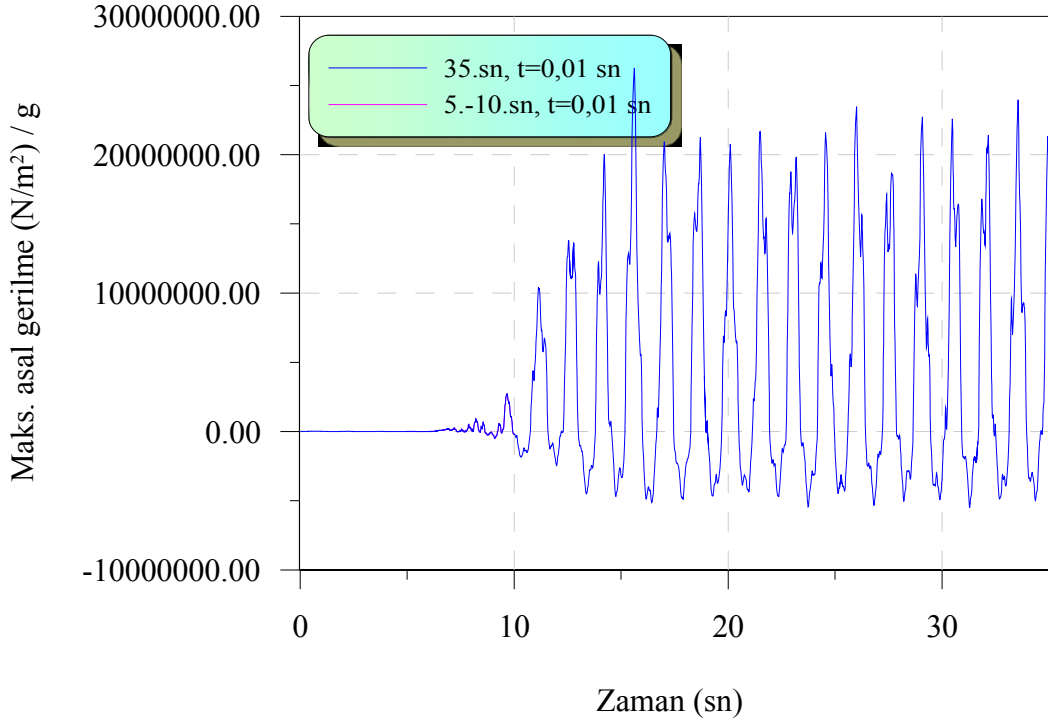
Şekil 3.112. Kurgulanan sonlu eleman için von Mises gerilmesinin zamanla değişimi

Şekil 3.109, Şekil 3.110, Şekil 3.111 ve Şekil 3.112'den görüldüğü gibi, yerdeğiştirme ve gerilme eğrileri her iki zaman adımı için de büyük ölçüde üst üste örtüşmektedir. Bundan dolayı, zaman artımının 0,01 olarak alınması yeterli olmaktadır.

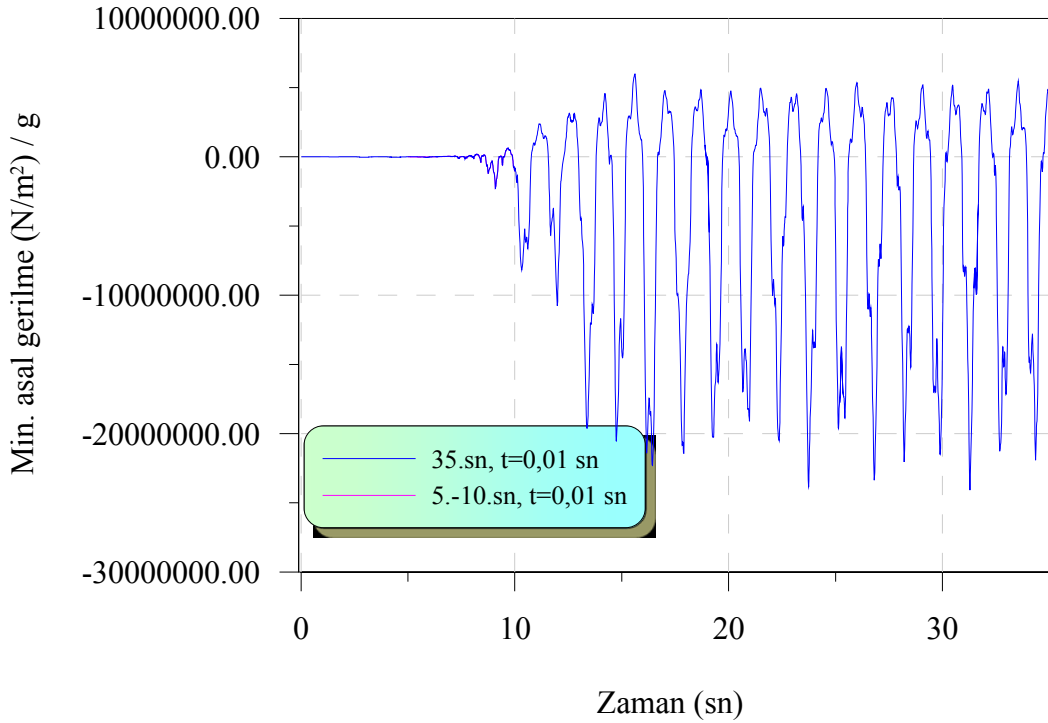
Sanayi bacasının, YPT330 bileşeninin 5.sn ve 10.sn'leri arasındaki deprem kaydı verileriyle yapılan zorlanmış titreşim analizinde ağ ve zaman sıklıkları sırasıyla 21. Ağ ve 0,01sn olarak elde edilmiştir. 21. ağ yapısının ve 0,01sn zaman artımının tüm deprem kaydı için geçerliliği olup olmayacağı yerdeğiştirme, maksimum asal gerilme, minimum asal gerilme ve von Mises gerilmesi değerlerinin zamanla değişimi sırasıyla Şekil 3.113, Şekil 3.114, Şekil 3.115 ve Şekil 3.116'da verilmektedir.



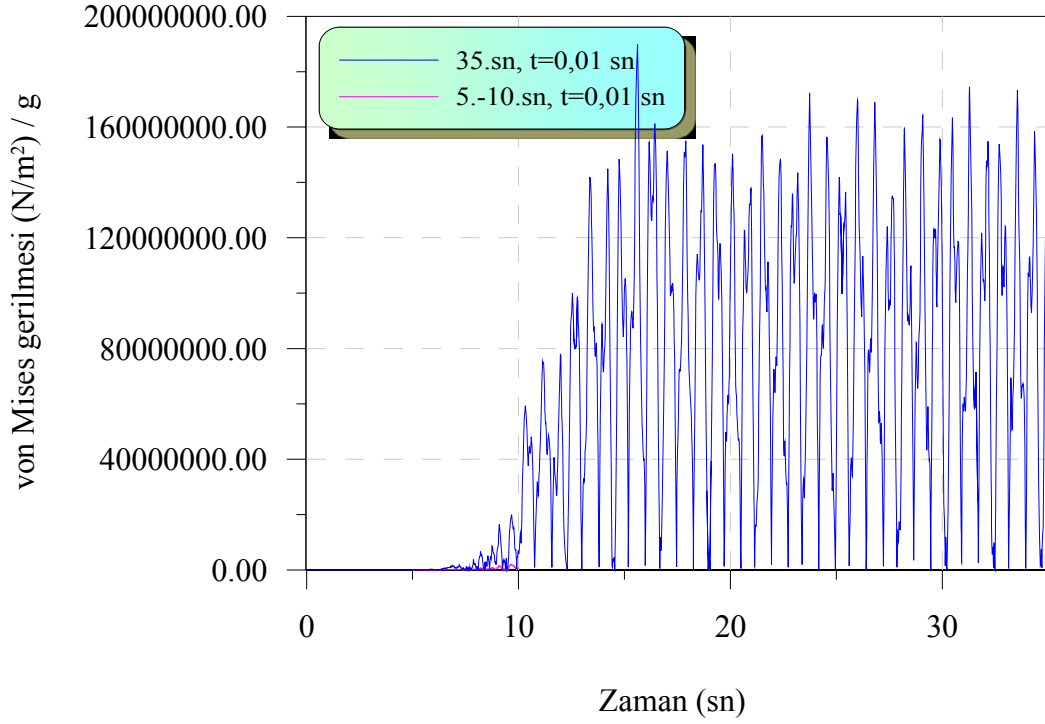
Şekil 3.113. Kurgulanan sonlu eleman için yerdeğiştirmenin zamanla değişimi



Şekil 3.114. Kurgulanan sonlu eleman için maksimum asal gerilmenin zamanla değişimi

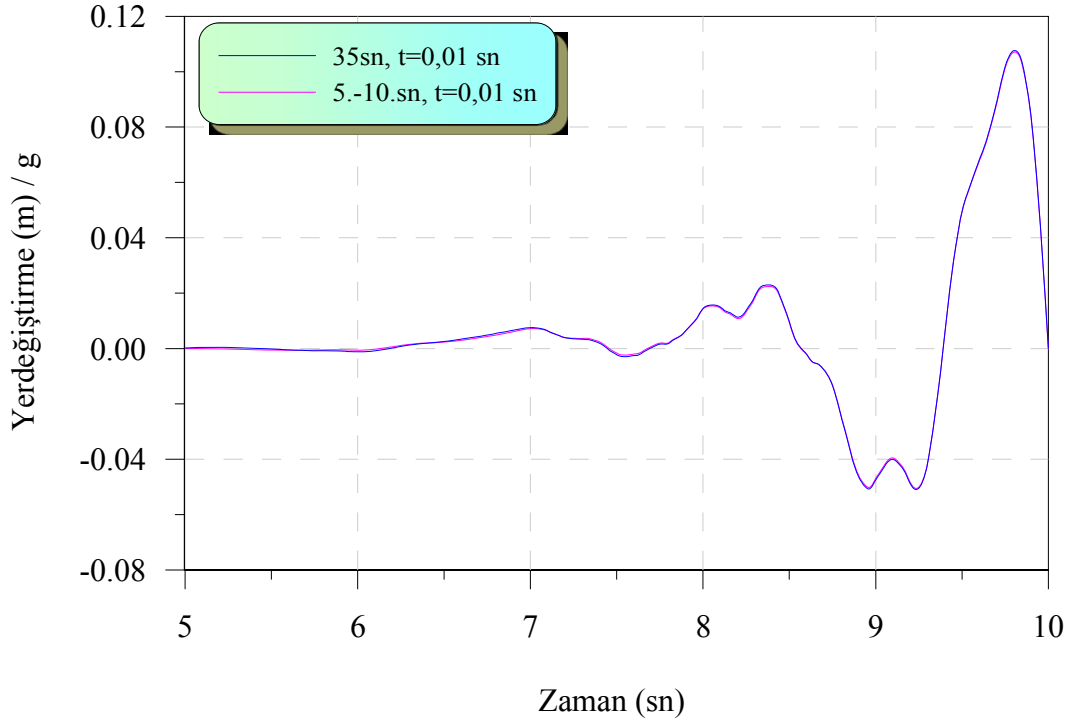


Şekil 3.115. Kurgulanan sonlu eleman için minimum asal gerilmenin zamanla değişimi

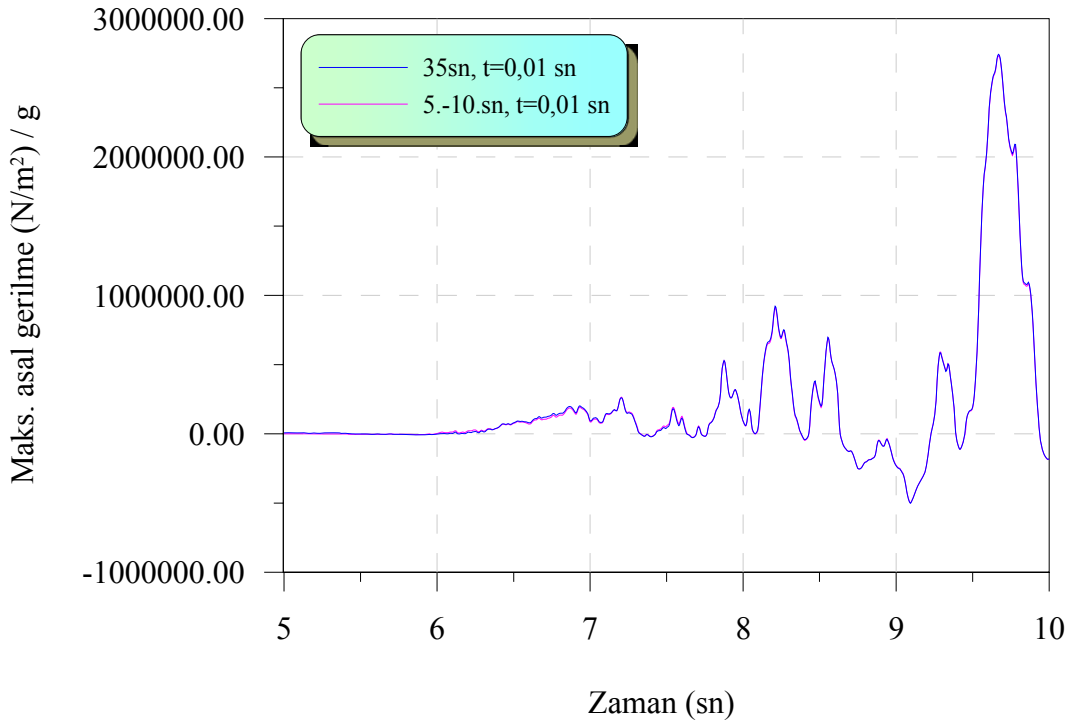


Şekil 3.116. Kurgulanan sonlu eleman için von Mises gerilmesinin zamanla değişimi

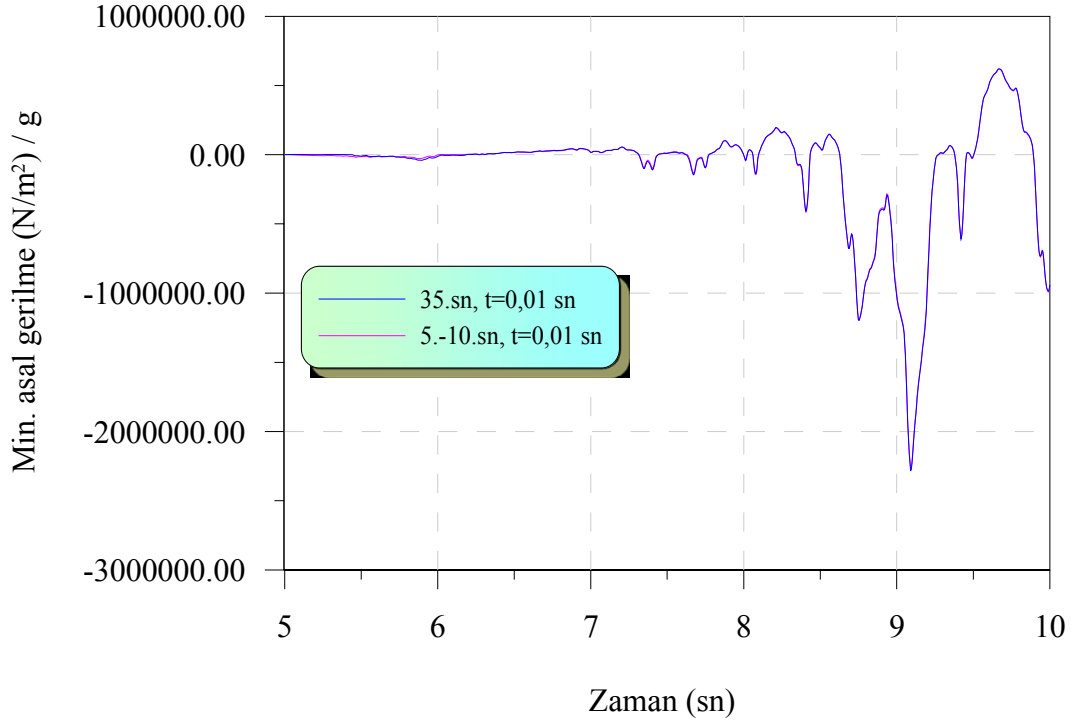
Şekil 3.113, Şekil 3.114, Şekil 3.115 ve Şekil 3.116'den görüldüğü gibi, 5.-10.sn'ler için yapılan ağ ve zaman sıklaştırmasına dair elde edilen eğriler ile bu zaman ve ağ yapısı ile 35 sn için elde edilen eğrilerin, 5. ve 10. sn'ler arasındaki kısmı örtüşmektedir. Uyumluluğun daha iyi gözlemlenmesi için 5. ve 10. sn'ler arasındaki yerdeğiştirme, maksimum asal gerilme, minimum asal gerilme ve von Mises gerilmesi değerlerinin zamanla değişimi sırasıyla Şekil 3.117, Şekil 3.118, Şekil 3.119 ve Şekil 3.120'de verilmektedir.



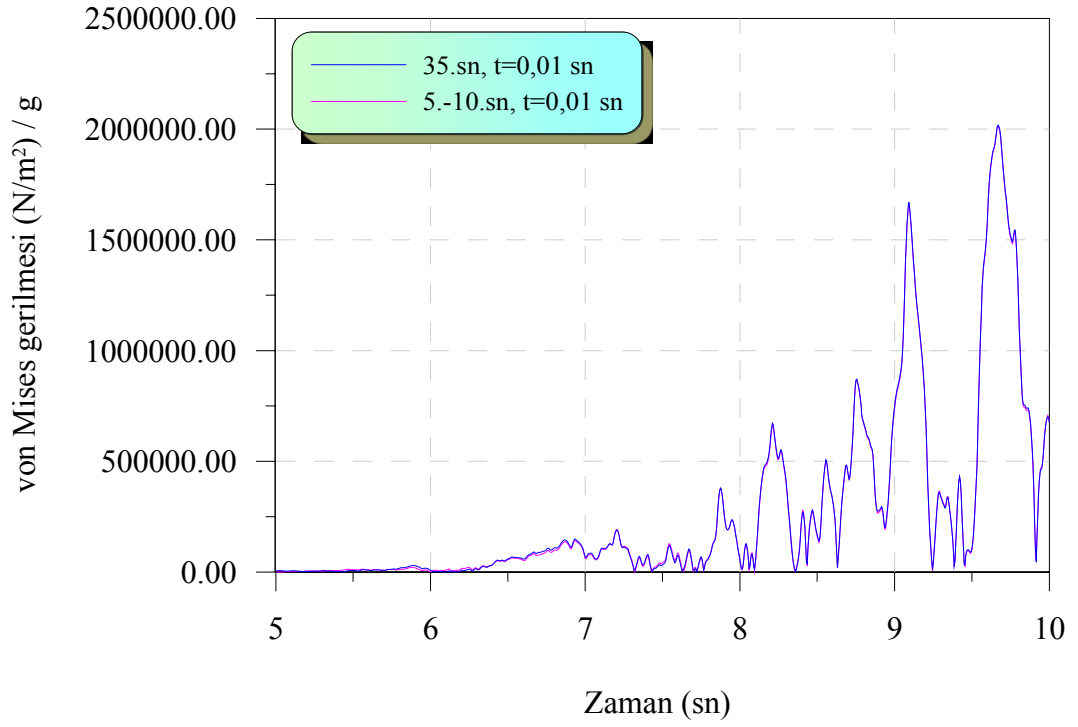
Şekil 3.117. Kurgulanan sonlu eleman için yerdeğiştirmenin zamanla değişimi



Şekil 3.118. Kurgulanan sonlu eleman için maksimum asal gerilmenin zamanla değişimi



Şekil 3.119. Kurgulanan sonlu eleman için minimum asal gerilmenin zamanla değişimi



Şekil 3.120. Kurgulanan sonlu eleman için von Mises gerilmesinin zamanla değişimi

Şekil 3.113, Şekil 3.114, Şekil 3.115, Şekil 3.116, Şekil 3.117, Şekil 3.118, Şekil 3.119 ve Şekil 3.120'den görüldüğü gibi, 5. ve 10. sn'ler arasındaki deprem kayıt verileri için yapılan zaman ve ağ çalışması 35sn için de geçerli olmaktadır. Şekil 3.113, Şekil 3.114, Şekil 3.115 ve Şekil 3.116'den görüldüğü gibi, yaklaşık 10. sn'den itibaren gerilme değerlerinin sanayi bacasının ön görülen gerilme değerlerini aşmakta ve bacanın üst kotundaki yerdeğiştirme çok büyük değerler almaktadır. Bu nedenle bacanın yıkılma sürecine girdiği düşünülebilmektedir. Nitekim 17 Ağustosta 1999 depreminde bu sanayi bacasının yıkılmış olduğu bilinmektedir. Şekil 3.121'de yıkılan bu sanayi bacasının resimleri verilmektedir.



Şekil 3.121. 17 Ağustos 1999 Kocaeli depreminde yıkılan sanayi bacasına ait fotoğraflar (Huang ve Gould, 2007 )



#### 4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmanın amacı, p-yöntemine dayalı ve Karma Fonksiyon Yöntemi ile zenginleştirilmiş, sürekli veya süreksiz her çeşit doğrusal olmayan yüklemenin dikkate alınabildiği, elastostatik ve elastodinamik analizlerin içerildiği üçboyutlu problemlerde uygulanabilen, her üç ekseninde doğrusal yerdeğiştirmelerin serbestlik derecesi olarak tanımlandığı, eğrisel kenar ve/veya yüzeyli olabilen dörtgen prizma şeklindeki bir eleman için sonlu elemanlar programının geliştirilmesidir. Bu amaç doğrultusunda geliştirilen bilgisayar programının özellikleri ile bu program yardımıyla elde edilen bulgulardan çıkarılan sonuçlar ve getirilen öneriler aşağıda verilmektedir.

1. a) Literatürde örnekleri bulunan Lagrange eleman, Lagrange polinomu tabanlı hiyerarşik eleman ve Legendre polinomu tabanlı hiyerarşik eleman b) literatürde üç boyutlu elemanlar için çoğunlukla polinom derecesi iki olması durumunda örneği bulunan Lagrange polinomu tabanlı serendipity eleman, c) bu çalışma kapsamında sunulan serendipity şeklinde hiyerarşik Lagrange eleman, serendipity şeklinde hiyerarşik Legendre eleman ve Kütle serbestlik dereceleri indirgenmiş Lagrange elemanlar dikkate alınmıştır. Grup b)'de bulunan serendipity eleman literatürde p-yönteminde yüksek polinom dereceleri için örneği çok azdır.
2. Dörtgen prizma şekline sahip yukarıdaki sonlu eleman tipleri; nokta, kenar ve/veya yüzey indirgenmesi ile üçgen prizma veya piramit gibi şekle sahip elemanlara indirgenebilmektedirler.
3. Geliştirilen programda, polinom derecesinin artırılmasında her hangibi bir sınır bulunmamaktadır.
4. Eğrisel kenarlı ve/veya yüzeyli geometriye sahip sistemlerin matematik modellerinde geometrik açıdan tam temsilinin yapılabilmesi amacıyla Karma Fonksiyon Yöntemi kullanılarak kurgulanan elemanların ilgili geometrik şekli kazanması sağlanmaktadır. Böylelikle, kartezyen eksen takımına hiçbir dönüşüm yapmadan, yani, kutupsal veya polar koordinat eksen takımlarına ihtiyaç duymadan, doğrudan kartezyen eksen takımında modelleme yapılabilir. Tek yönlü dairesel kenar ve/veya yüzeylerin temsilinin sağlanması, örnek durum olarak dikkate alınmıştır.

5. Geliştirilen programda statik yükleme, üç boyutlu sonlu elemanların yüzeylerinin normali doğrultusunda düzgün yayılı ve doğrusal olmayan yayılı olarak uygulanabilmekte ve ayrıca köşe noktalarına serbestlikler doğrultusunda tekil yükleme olarak yapılabilmektedir. Karma Fonksiyon Yöntemi sayesinde eğrisel yüzeylerde de yayılı yükleme yapılabilmektedir.
6. Geliştirilen programda p-yöntemine dayalı sonlu elemanlar ile serbest ve zorlanmış titreşim analizlerini içeren dinamik analiz yapılmaktadır.
7. Konsol eleman örneğinde dikkate alınan yükleme durumları ve elde edilen yerdeğiştirme ve normal gerilme değerleri ışığında kurgulanan elemanlar güvenilir sonuçlar vermektedir. Ayrıca moment etkisi yaratan doğrusal yayılı yüke karşı çok az elemanlı bir ağda kayma kilitlenmesi polinom derecesinin artırılması ile yok olmaktadır.
8. Çeyrek tüp örneğinde eğri yüzey veya kenarlara sahip ortamların tam bir geometrik tanımlama ile temsil edilebildiği ve elde edilen çözümler de geometrik hatadan arındırıldığından ağlarda, bu anlamda, eleman artımına gitme bir zorunluluk olmamaktadır. Ayrıca bu eğri yüzeylerde eğriliğin normali doğrultusunda yükleme yapılabilmekte ve bunun vasıtasıyla da gerçek yükleme durumunu yansıtmak için eleman artımına gerek kalmamakta ve kutupsal koordinatların kullanımının gerekliliği de ortadan kalkmaktadır.
9. Serbestlik derecesi sayısı, polinom derecesi ile en fazla Lagrange elemanda olmaktadır. Daha sonra sırası ile indirgenmiş Lagrange, hiyerarşik Lagrange, hiyerarşik Legendre ve ANSYS' programında olmaktadır. En az ise serendipity, serendipity hiyerarşik Lagrange ve serendipity hiyerarşik Legendre elemanlarında olmaktadır. Serbestlik sayısının polinom derecesi ile artım hızı yüksek hızdan düşük hıza doğru yine aynı sırada olmaktadır. Lagrange elemanın serbestlik derecesi açısından kullanım maliyeti, yüksek polinom dereceleri için oldukça fazla olmaktadır.
10. Bu çalışmada kurgulanan tüm elemanların genelde iyi sonuçlar verdiği ancak serbestlik derecesi sayısı da düşünüldüğünde en etkin olanları serendipity şeklinde olan üç eleman olmaktadır. Tahripli eleman içeren ağlarda serendipity eleman sonuçları bir miktar hatalı olmaktadır.
11. Sanayi bacası örneğinde TS 498'e göre alınan düzgün yayılı yük altında Karma Fonksiyon Yöntemi ile geometrinin tam olarak tanımlanabilmesinin de

yardımla, ANSYS programının 25440 serbestlik derecesi sayısında vardığı sonuçlara, bu çalışmada kurgulanan sonlu eleman tipleri ile ANSYS programının sonuçlarına oldukça yakın sonuçların 19640 serbestlik derecesi sayısı ile ANSYS programına göre %23 tasarruf ile ulaşılabilmektedir.

12. Sanayi bacası üzerinde düzgün yayılı yük durumunda dikkate alınan tüm sonlu eleman tipleri iyi sonuçlar vermekte, özellikle, Lagrange, hiyerarşik Lagrange ve hiyerarşik Legendre elemanları iyi olmaktadır. Ayrıca tüm eleman tipleri eşik bir ağ yapısından daha kaba ağlarda dalgalanma yapmaktadır. Lagrange eleman özellikle düşük polinom derecelerinde dalgalanmaya daha yatkın olmaktadır.
13. Sanayi bacası üzerinde düzgün yayılı yük durumunda hiyerarşik Lagrange, hiyerarşik Legendre ve Lagrange elemanların serbestlik derecesi sayıları dikkate alındığında en etkin eleman tipleri olmaktadır.
14. Sanayi bacası üzerinde Lagrange tabanlı hiyerarşik sonlu eleman ile hem TS 498 hem de prEN 1991-1-4'e göre uygulanan yükleme altında en az 31660 serbestlik derecesi sayısı ile tüm yerdeğiştirme ve gerilme sonuçları elde edilebilmektedir.
15. TS 498' e göre belirlenen rüzgar yükünün, silindirik sanayi bacaları için verilen doğrusal olmayan yük yerine hesapları basitleştirmek amacıyla yükün düzgün yayılı yük olarak uygulanması; yerdeğiştirme ve özellikle gerilme sonuçlarını oldukça değiştirmektedir.
16. TS 498 ve prEN 1991-1-4'e göre belirlenen doğrusal olmayan rüzgar yükü altında yerdeğiştirme ve gerilme açısından TS 498, prEN 1991-1-4'e göre yaklaşık üç kat daha büyük sonuçlar vermektedir.
17. Sanayi bacasının Lagrange tabanlı hiyerarşik sonlu eleman ile yapılan serbest titreşim analizinde periyot değerlerinin, ANSYS programında h-yöntemi altında elde edilenler ile yedinci periyot değerine kadar örtüşmekte, bu değerden sonra farklılıklar gözükmemektedir.
18. Sanayi bacasının Lagrange tabanlı hiyerarşik sonlu eleman ile yapılan zorlanmış titreşim analizinde polinom derecesinin dört olması durumunda tatmin edici sonuçlar elde edilmekte, polinom derecesinin iki olması durumunda ise davranış tam olarak elde edilememektedir.
19. Karma Fonksiyon Yöntemi ile sanayi bacası üzerinde eğri yüzey veya kenarların tam bir geometrik tanımlama ile temsil edilmesi hem statik analizde hem de serbest titreşim ve zorlanmış titreşim analizinde örneklendirilmiştir.

20. p-yöntemi ile elde edilen sonuçların daha etkin olabilmesi için h-yöntem ile birleştirilmesi faydalı olacaktır. Ayrıca hem p-yöntemi de hem de h-yönteminde uyarlanabilirlik özelliğinin katılabilmesi için hata tahmin algoritmaları içerilmeli ve ağ sıklaştırmada ve polinom derecesi artırmada kullanıcı müdahalesi azaltılabilir. Geliştirilen programa uygun bir ağ üreticisi uyarlanabilir. Böylelikle kendi başına nihai matematik modeli verebilecek bir sonlu eleman programı oluşturulabilir. Bu gelişimle ilgili literatürde az da olsa çalışma mevcuttur, ancak, hiç birinde mutlak başarının elde edilmesinin mümkün olmadığı görülmektedir.
21. Farklı enterpolasyon fonksiyonları ile yeni sonlu eleman tipleri oluşturulmasında fayda vardır.
22. Birçok ağ üreticisinde tahrifli elemanların olduğu ağ üretimi yapıldığından hiyerarşik sonlu elemanların tahrifli elemanların olduğu ağlarda kullanılabilir olmalarının sağlanması faydalı olacaktır.
23. Polinom derecesinin her eksen yönünde aynı derecede artırılmadığı bir algoritma belirlenmeli ve bu artıma hata tahmini tarafından karar verilmelidir. Bununla ilgili literatürde örnekler mevcut olmakla beraber belli bir enterpolasyon şekli için sınırlıdır.
24. Problemin geometrisine ait tanım alanının bilgisayar destekli bir tasarım programı ile tanımlanabilmesi ve gerekli verilerin analiz programına aktarılabilirdiği bir algoritma kurulabilir. Literatürde bu durum birkaç bilgisayar destekli tasarım programı için örneklenmiştir. Ancak kullanılan tasarım programlarının yeteneklerinin nedenli olduğu açık değildir. Ayrıca dikkate alınacak enterpolasyon fonksiyonuna göre tasarım programından istenilecek ihtiyaçlar değişebilmektedir.

## 5. KAYNAKLAR

- Ainsworth, M. ve Coyle, J., 2002. Hierarchic Finite Element Bases on Unstructured Tetrahedral Meshes, AMS subject classifications 78-08, 65N30, Strathclyde University, Glasgow, England.
- Alfeld, P., 1985. Multivariate Perpendicular Interpolation, SIAM Journal on Numerical Analysis, 22, 1, 95-106.
- ANSYS, 2008. Swanson Analysis Systems Inc., Houston PA, USA.
- Ayvaz, Y., 1992. Parametric Analysis of Reinforced Concrete Slabs Subjected to Earthquake Excitation, Doktora Tezi, Graduate School of Texas Tech University, Lubbock, Texas.
- Babuška, I. ve Dorr, M.R., 1981. Error Estimates for The Combined h and p Versions of The Finite Element Method, Numerische Mathematik, 37, 2, 257-277.
- Babuška, I., Griebel M. ve Pitkaranta, J., 1989. The Problem of Selecting the Shape Functions for a p-type Finite Element, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 28, 1891-1908.
- Babuška, I. ve Suri, M., 1987. The Optimal Convergence Rate of The p-Version of The Finite Element Method, SIAM Journal on Numerical Analysis, 27, 4, 750-776.
- Babuška, I. ve Suri, M., 1994. The p and h-p Versions of the Finite Element Method, Basic Principles and Properties, SIAM Review, 36, 4, 578-632.
- Babuška, I., Szaĉ, B.A. ve Katz, I.N., 1981. The p -Version Finite Element Method, SIAM Journal on Numerical Analysis, 18, 515-545.
- Bathe, K.J., 1996. Finite Element Procedures, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1037 s.
- Bertóti, E. ve Szabó, B., 1998. Adaptive Selection of Polynomial Degrees on A Finite Element Mesh, International Journal For Numerical Methods in Engineering, 42, 561-578.
- Carnevali, P., Morris, R.B., Tsuji, Y. ve Taylor, G., 1993. New Basis Functions and Computational Procedures for p-Version Finite Element Analysis, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 36, 3759-3779.
- Cavendish, J.C. ve Hall, C.A., 1984. A New Class of Transitional Blended Finite Elements for The Analysis of Solid Structures, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 20, 2, 241-253.

- Cavendish, J.C. ve Wixom, J.A., 1975. Finite Element Mesh Generation For Planar and Shell Type Structures, General Motors Research Laboratories, Warren, Michigan.
- Chilton, L. ve Suri, M., 1997. On The Selection of A Locking-free hp Element for Elasticity Problems, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 40, 2045-2062.
- Cook, R.D., Malkus, D.S. ve Plesha, M.E., 1989. Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Jhon Wiley & Sons, New York, 630 s.
- Danış, H. ve Görgün, M., 2005. Marmara Depremi ve Tüpraş Yangını, Deprem Sempozyumu, Kocaeli, 1362-1369.
- Desai, C.S. ve Kundu, T., 2001. Inroductory Finite Element Method, CRC Press, NewYork, 496 s.
- Dey, S., 1997. Geometry-Based Three-Dimensional hp-Finite Element Modeling and Computations, Doktora Tezi, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York.
- Dey, S., Shephard, M.S. ve Flaherty, J.E., 1997. Geometry Representantion Issues Associated With p-Version Finite Element Computations, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 150, 39-55.
- Deuflhard, P., Leinen, P. ve Yserentant, 1988. Concepts of An Adaptive Hierarchical Finite Element Code, Technical Report SC-88-5, Konrad-Zuse-Zentrum, Berlin, Germany.
- Duarte, C.A., Babuška, I. ve Oden, J.T., 2000. Generalized Finite Element Methods for Three-Dimensional Structural Mechanic Problems, Computers and Structures, 77, 2, 215-232.
- Düster, A., 2001. High Order Finite Elements For Three-Dimensional, Thin-Walled Nonlinear Continua, Doktora Tezi, Technishe Univesität Münhen, Germany.
- Düster, A., Bröker, H. ve Rank, E., 2001. The p-Version of The Finite Element Method for Three-Dimensional Curved Thin Walled Structures, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 52, 673-703.
- Gabbert, U. ve Weinberg, K., 1999. Adaptive Local-Global Analysis by pNh Transition Elements, Technische Mechanik, 19, 2, 115-126.
- Gordon, W., 1971. Blending-Function Methods of Bivariate and Multivariate Interpolation and Approximation, SIAM Journal on Numerical Analysis, 8, 1, 158-177.
- Gordon, W. ve Hall, C., 1973a. Construction of Curvilinear Co-ordinate Systems and Applications to Mesh Generation, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 7, 4, 461-477.
- Gordon, W. ve Hall, C., 1973b. Transfinite Element Methods: Blending-Function Interpolation over Arbitrary Curved Element Domains, Numerische Mathematik, 21, 109-129.

- Gupta, A.K., Fang, T.H. ve Chen, H., 1991. Computational Efficiency of p- and h- Version Elements, Communications in Applied Numerical Methods, 7, 2, 87-92.
- Hermann, N., 1994. The h-version, p-version and hp-version of The Finite Element Method, Hungarian Journal of Industrial Chemistry, 22, 1, 75-80.
- Hinton, E. ve Owen, D.R.J., 1977. Finite Element Programming, Academic Press, New York, 305 s.
- Hoffman, R.M. ve Busby, H.R., 2000. Stress-based Convergence Analysis for Adaptive Hierarchical Finite Element Analysis, Finite Elements in Analysis and Design, 34, 1, 25-35.
- Houmat, A., 2004. Three-Dimensional Hierarchical Finite Element Free Vibration Analysis of Annular Sector Plates, Journal of Sound and Vibration 276, 181-273.
- Huang, W. ve Gould, P.L., 2007. 3-D Pushover Analysis of A Collapsed Reinforced Concrete Chimney, Finite Elements in Analysis and Design, 43, 879-887.
- Hughes, T.J.R., 2000. The Finite Element Method-Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis, Dover Publications, New York, 682 s.
- Humar, J.L., 1990. Dynamics of Structures, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ.
- Irons, B.M., 1970. A Frontal Solution Program for Finite Element Analysis, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2, 5-32.
- Irons, B. ve Ahmad, S., 1980. Techniques of Finite Elements, Ellis Horwood Limited, Chichester, England, 530 s.
- Issa, C.A., Balasubramaniam, K. ve Srirengan K., 1994. Adaptive hp-finite element for transient analysis, Applied Mathematics and Computation, 65, 1-3, 315-334.
- Királyfalvi, G. ve Szabó, B.A., 1997. Quasi-Regional Mapping For The p-Version of The Finite Element Method, Finite Elements in Analysis and Design, 27, 85-97.
- Kuhl, D. ve Meschke, G., 2004. Finite Element Methods in Linear Structural Mechanics, Ruhr University Bochum, Institute for Structural Mechanics, Ders Notu, Bochum, Germany.
- Liu, Y., 1998. p-Adaptive Hybrid/Mixed Finite Element Method, Doktora Tezi, The Ohio State University, ABD.
- Marshall, J.A. ve Mitchell, A.R., 1978. Blending Interpolants in Finite Element Method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 12, 1, 77-83.
- Mäkipelto, J., 2005. Exact Geometry Description With Unstructured Triangular Meshes For Shape Optimization, 11<sup>th</sup> World Congresses of Structural and Multidisciplinary Optimization, Rio de Janeiro.

- Muthler, A., Düster, A., Volk, W., Wagner, M. ve Rank, E., 2006. High Order Thin Walled Solid Finite Elements Applied to Elastic Spring-Back Computations, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 195, 5377-5389.
- Özdemir, Y., 2007. Deprem Etkisindeki Kalın Plakların Mindlin Teorisi Kullanılarak Parametrik Olarak İncelenmesi, Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Park, S. ve Kapania, R., 1998. Comparison of Various Orthogonal Polynomials in hp-Version Time Finite Element Method, AIAA Journal, 36, 4, 651-655.
- Promwungkwa, A., 1998. Data Structure and Error Estimation For An Adaptive p-Version Finite Element Method in 2-D and 3-D Solids, Doktora Tezi, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia.
- prEn 1991-1-4, 2002.Eurocode 1:Actions On Structures-Part 1-1: General Actions-Densities, Self-Weight, Imposed Loads For Buildings, EN, Brussels.
- Rachowicz, W., Pardo, D. ve Demkowicz, L., 2006. Fully Automatic hp-Adaptivity in Three Dimensions, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 195, 4816-4842.
- Rank, E., Düster, A., Nübel, V., Preusch, K. ve Bruhns, O.T., 2005. High Order Finite Elements For Shells, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 194, 2494-2512.
- Rank, E., Rucker, M., Düster, A. ve Bröker, H., 2001. The Efficiency of The p-Version Finite Element Method in A Distirbuted Computing Environment, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 52, 589-604.
- Robinson, J., 1986. An Introduction to Hierarchical Displacement Elements and the Adaptive Technique, Finite Elements in Analysis and Design, 2, 377-388.
- Sert, C., 2003. Nonconforming Formulations With Spectral Element Methods, Doktora Tezi, Texas A&M University, ABD.
- Strouboulis, T., Copps, K. ve Babuška, I., 2001. The Generalized Finite Element Method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190, 4081-4193.
- Szabó, B.A., 1990. The p- and h-p Versions of the Finite Element Method in Solid Mechanics, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 80, 185-195.
- Szabó, B.A. ve Actis, R.L., 2005. On The Importance and Uses of Feedback Information in FEA, Applied Numerical Mathematics, 52, 219-234.
- Szabó, B.A. ve Actis, R.L., 2009. On The Role of Hiyerarchic Space and Models in Verification and Validation, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 198, 1273-1280.

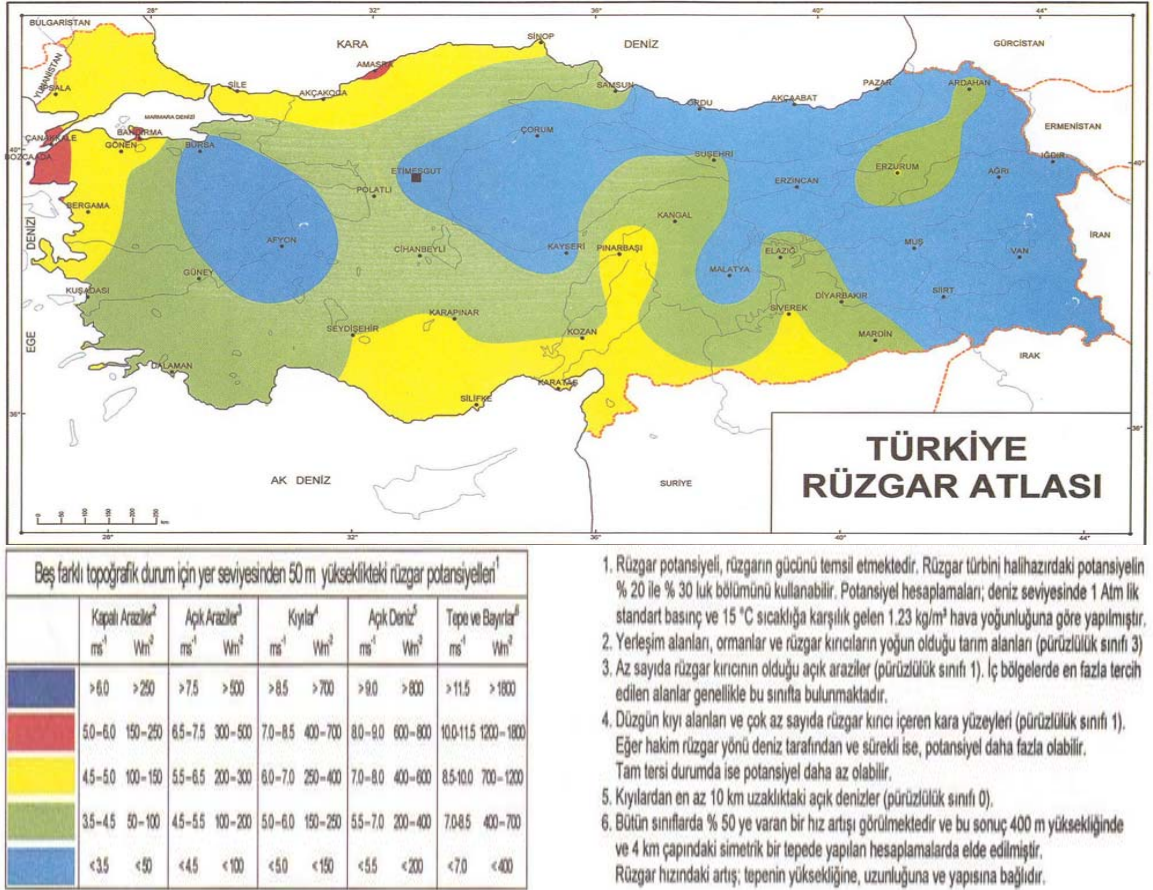


- Szabó, B.A. ve Babuška, I. 1991. Finite Element Analysis, John Wiley & Sons, New York, 368 s.
- Tews, R. ve Rachowicz, W., 2009. Application of An Automatic hp Adaptive Finite Element Method for Thin-Walled Structures, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 198, 1967-1984.
- TS 498, 1997. Yapı Elemanlarının boyutlandırılmasında Alınacak Yüklerin Hesap Değerleri, TSE ICS 91.040, Ankara.
- Watkins, D.S., 1974. Blending Functions and Finite Elements, Doktora Tezi, The University of Calgary, Alberta.
- Zienkiewicz, O.C. ve Taylor, R.L., 1989. The Finite Element Method-Volume 1, McGraw-Hill Book Company, New York, 648 s.
- Zumbusch, G.W., 1993. Symmetric Hierarchical Polynomials for The hp-Version of Finite Elements, Technical Report SC-93-32, Konrad-Zuse-Zentrum, Berlin, Germany.
- URL-1 <http://elektroefor.com/images/Tr%20R%C3%BCzgar%5B1%5D...jpg>, Türkiye Rüzgar Haritası. 19.09.2009.

## 6. EKLER

### Ek 1. TS 498 ve prEN 1991-1-4' e Göre Rüzgâr Yükü Hesabı

Rüzgâr yüklemesi durumu hem pr EN 1991-1-4 (Eurocode, 2002)'a göre hem de TS 498 (1997)'e göre belirlenecektir. Rüzgâr yüklemesi rüzgâr hızına doğrudan bağlı olduğu için Şekil 6.1'de verilen Türkiye Rüzgâr Haritası'ndan sanayi bacasının bulunduğu yerdeki rüzgâr hızı belirlenmektedir.

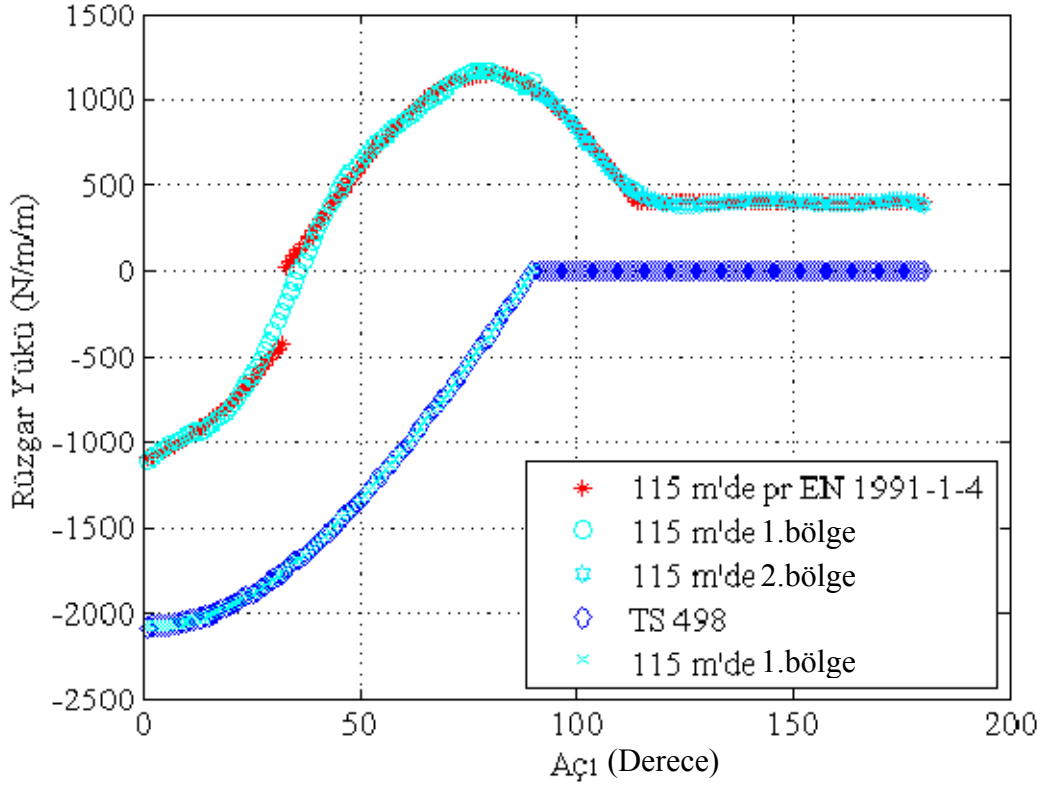


Ek Şekil 1.1. Türkiye Rüzgâr Haritası (URL-1).

Ek Şekil 1.1'e göre sanayi bacasının olduğu yer sarı tonla işaretlenmiş olup burdaki 50 m yüksekliğindeki rüzgâr hızı 7 m/sn olarak görülmektedir. Hem pr EN 1991-1-4'e göre hem de TS 498'e göre yüklemeye önemli bir diğer husus sanayi bacasının yüksekliğidir. Bacanın nihai yüksekliğinin doğrudan dikkate alınması yerine ağ yapısına bağlı olarak yükseklik boyunca her ağ bölümlenmesine göre rüzgâr yükü belirlenecektir. Hem pr EN 1991-1-4'in hem de TS 498'in yatay kesitteki yüklemeye değerlerine örnek ola-

### Ek 1'in devamı

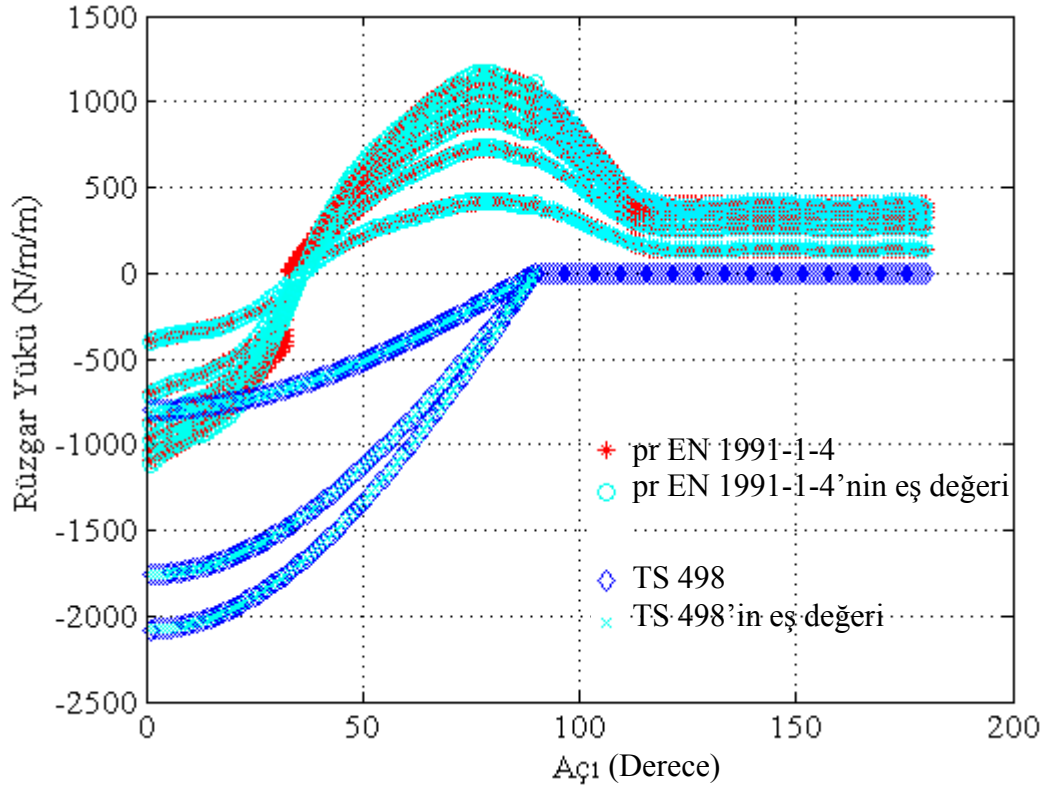
rak yüklemelerin kendileri ve polinom tabanlı eşdeğerleri sanayi bacasının en üst kotundaki yatay kesitteki yükleme durumu Ek Şekil 1.2'de; ağ yapısına bağlı olarak yükseklik boyunca değişen yatay kesitteki yükleme durumu Ek Şekil 1.3'de verilmektedir. Ayrıca dairesel kesitli sanayi bacası için yüklemenin kendisi ve polinom tabanlı eşdeğeri yatay kesit üzerinde her iki yükleme durumuna göre şekli Ek Şekil 1.4'de verilmektedir.



Ek Şekil 1.2. pr EN 1991-1-4 ve TS 498'e göre sanayi bacasının 115 m kotunda yatay kesitindeki simetrik kısmında elde edilen yükleme ve onların entropolasyon yapılan eşdeğerleri

Ek Şekil 1.2'den görüldüğü gibi yüklemeler, simetri dolayısıyla sıfırdan yüz seksen dereceye kadar tanımlanmaktadır. Yüklemelerin ve sanayi bacasının simetrik olması nedeniyle baca problemi yarı simetrik olarak dikkate alınmaktadır. Hem TS 498 hem de pr EN 1991-1-4'de verilen yüklemelerin eğriliklerinin farklı olması ve hatta süreksizlik içermeleri onların doğrudan dikkate alınmaları yerine polinom tabanlı eşdeğerlerinin dikkate alınmalarını neden olmaktadır.

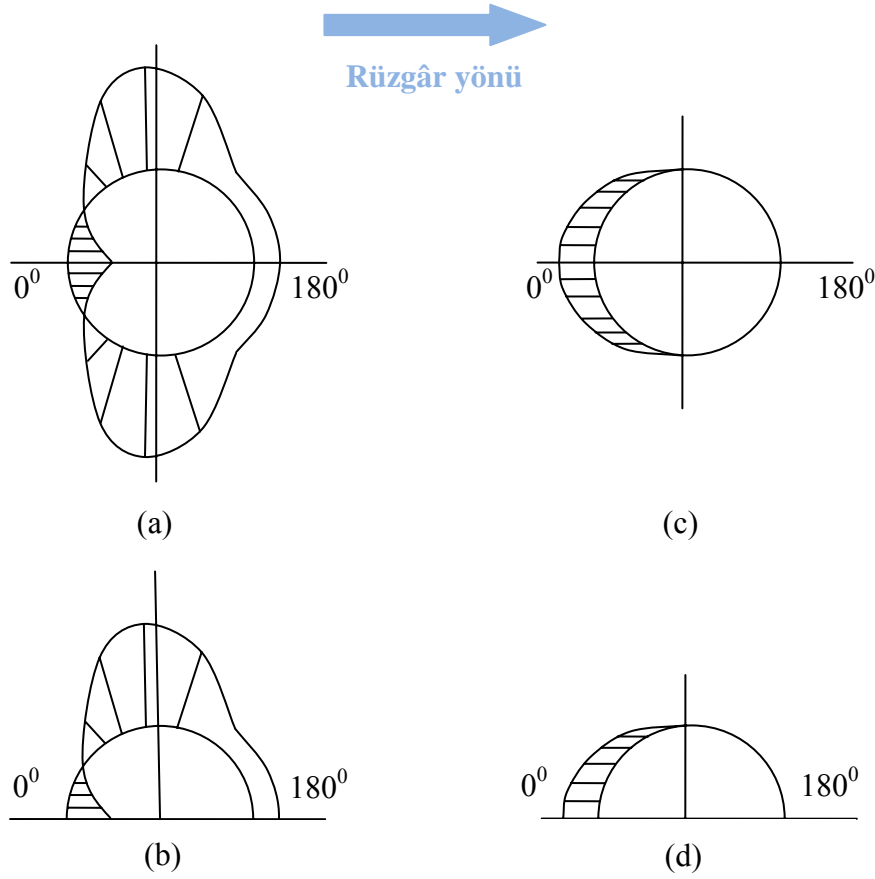
## Ek 1'in devamı



Ek Şekil 1.3. pr EN 1991-1-4 ve TS 498'e göre sanayi bacasının yükseklik boyunca 5 eleman kullanıldığında ağın her elemanın bulunduğu kotta yatay kesitindeki simetrik kısmında elde edilen yükleme ve onların entropolasyon yapılan eşdeğerleri

Ek Şekil 1.3'den görüldüğü gibi yükseklik boyunca beş eleman mevcuttur. TS 498'e göre yüklemde hiç çekme etkisi bulunmamakta ve basınç etkisinde Eurocode'a göre yüksekliğe bağlı olarak yaklaşık %50 ile %100 arasında değişen bir oran ile daha fazla olmaktadır. Eurocode'da çekme etkisinin etki alanı basınç etkisinin etki alanına göre yaklaşık beş kat fazladır. Bundan dolayı iki standart bir birine göre oldukça farklılık arz etmektedir. Eurocode'a göre elde edilen yüklemenin temsilindeki benzeşmeyen küçük bir bölge yataydaki eleman sayısı arttıkça küçülmektedir. Bu durum Ek Şekil 1.5'de yatay kesitte altı eleman olması durumu için örneklenmektedir. Ancak bu küçük bölge yüklem durumunun temsilinde ağ yapısına göre oldukça az değiştiğinden yükseklik boyunca değişim dikkate alındığında ihmal edilebilmektedir.

## Ek 1'in devamı

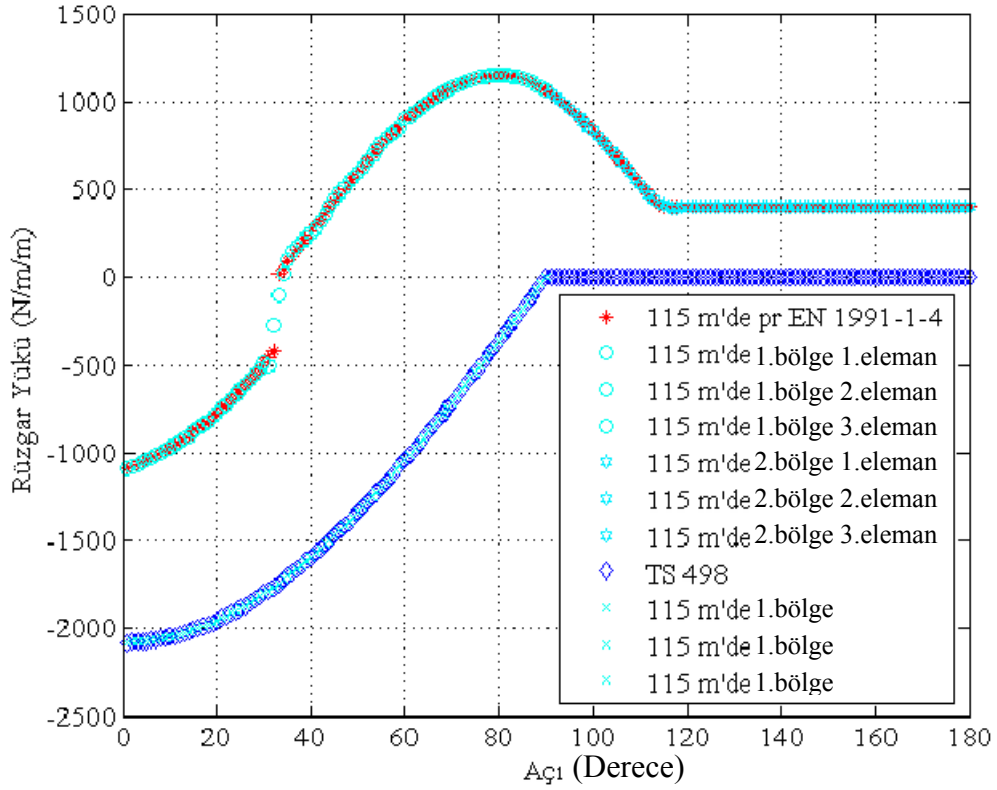


Ek Şekil 1.4. a) pr EN 1991-1-4'e, b) pr EN 1991-1-4 de simetrik kısma, c) TS 498'e, d) TS 498'de simetrik kısma karşı gelen dairesel kesitteki yükleme şekilleri

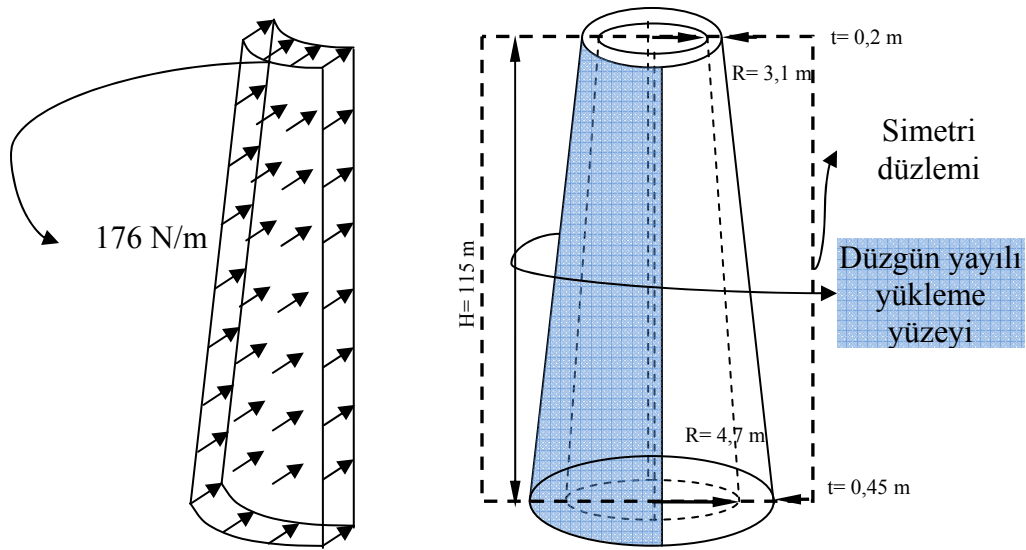
Ek Şekil 1.4'den görüldüğü gibi TS 498'de verilen yükleme durumu sinusoidal olup ilk doksan derecelik kısım (1. bölge) için üçüncü derece bir polinom ile oldukça iyi bir yaklaşıklık ile analizlerde de kullanılacak şekil de temsil edilmektedir. İkinci doksan derecelik kısımda (2. bölge) yükleme TS 498'de belirtilmemektedir. Eurocode'a göre verilen yükleme durumu tek parçalı bir eğri olmayıp ayrıca formuda tek bir eğrilik durumunu içermemektedir. Bundan dolayı TS 498'de olduğu gibi doksan dereceye karşılık gelen tek bir polinom ile temsil edilmesinde tam bir yaklaşıklık olmadığı görünse bile dikkate alınan temsil iki parçalı ayrık iki eğrinin temsilinde oldukça kabul edilebilir olduğu ifade edilebilir. Eurocode'da ilk doksan dereceye karşılık gelen kısım sekizinci dereceden bir polinom ile temsil edilirken ikinci doksan derecelik kısım altıncı dereceden bir polinom ile temsil edilmektedir.

TS 498'e göre rüzgâr yükünün doğrudan uygulanması yerine basitleştirme yapılarak düzgün yayılı yük olarak uygulanması, ağ yapısından bağımsız olmak ve kolaylık sağlamak amacıyla tercih edilebilmektedir. Bu durum bu çalışmada dikkate alınan sanayi bacası için dikkate alınmakta ve düzgün yayılı yükün değeri Ek Şekil 1.6'da verilmektedir.

## Ek 1'in devamı



Ek Şekil 1.5. pr EN 1991-1-4 ve TS 498'e göre sanayi bacasının yükseklik boyunca 5 eleman kullanıldığında ağı her elemanın kottunda yatay kesitindeki simetrik kısmında altı eleman olması sonucundaki yükleme ve onların entropolasyon yapılan eşdeğerleri



Ek Şekil 1.6. TS 498'e göre belirlenen düğü yayılı rüzgâr yükünün sanayi bacasının yarı simetrik kısmında bulunan eleman yüzeylerinde gösterilimi

## ÖZGEÇMİŞ

Serkan BEKİROĞLU 1979 yılında Trabzon'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini 100.Yıl İlköğretim Okulu'nda, lise öğrenimini Trabzon Yomra Fen Lisesi'nde tamamladı. 1996-1997 öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü'nde lisans öğrenimine başladı. Lisans öğrenimi süresinde Fakülte Dekanlığı'ndan onur ve yüksek onur belgeleri aldı. İnşaat Mühendisliği Bölümü'nden 30 Haziran 2000 tarihinde bölüm ikincisi olarak mezun olup aynı yılda bu bölümde yüksek lisans eğitimine başladı. Yüksek lisans programında bir yıl İngilizce eğitimi aldıktan sonra, 30 Kasım 2001 tarihinde Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde araştırma görevlisi olarak atandı. 2003 yılında yüksek lisans eğitimini tamamlayarak aynı yıl doktora eğitimine başladı. Doktora eğitimi süresince bir yıl Almanyada Ruhr Üniversitesinde Erasmus-Socrates Programı kapsamında eğitimine devam etti. 5 Ekim 2007 tarihinde Gümüşhane Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü Yapı Anabilim Dalına Öğretim Görevlisi olarak atandı. Serkan BEKİROĞLU iyi derecede İngilizce bilmekte ve halen Gümüşhane Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümünde Öğretim Görevlisi olarak görevini sürdürmektedir.