

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**İKİ ELASTİK ÇEYREK DÜZLEME OTURAN VE RİJİT BİR PANÇ İLE  
BASTIRILAN ELASTİK TABAKA PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ VE  
YAPAY SINIR AĞI UYGULAMASI**

**DOKTORA TEZİ**

**İnş. Yük. Müh. Erdoğan ÇAKIROĞLU**

**OCAK 2011**  
**TRABZON**

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**İKİ ELASTİK ÇEYREK DÜZLEME OTURAN VE RİJİT BİR PANÇ  
İLE BASTIRILAN ELASTİK TABAKA PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ  
VE YAPAY SINIR AĞI UYGULAMASI**

**İnş. Yük. Müh. Erdoğan ÇAKIROĞLU**

**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde  
“Doktor (İnşaat Mühendisliği)”  
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 22.11.2010  
Tezin Savunma Tarihi : 24.01.2011**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ragıp ERDÖL  
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Ümit UZMAN  
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Hasan SOFUOĞLU  
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Mehmet ÜLKER  
Jüri Üyesi : Doç. Dr. Ahmet BİRİNCİ**

**Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ**

**Trabzon 2011**

## ÖNSÖZ

Bu çalışma, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim dalında bir doktora tezi olarak gerçekleştirilmiştir.

İki elastik çeyrek düzleme oturan ve rijit bir panç ile bastırılan elastik tabaka problemini ve bu probleme yapay sinir ağı yöntemini uygulama çalışmasını bana öneren, çalışmamı başından sonuna kadar aralıksız takip edip beni sürekli teşvik eden, tezimin her aşamasında bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ragıp ERDÖL'e minnet ve şükranlarımı sunarım.

Öğrenim hayatım boyunca bana emeği geçen tüm hocalarımı saygıyla anarım. Tez çalışmam boyunca bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım hocalarım Sayın Prof. Dr. Ümit UZMAN'a, Sayın Prof. Dr. Hasan SOFUOĞLU'na, Sayın Doç. Dr. Ahmet BİRİNCİ'ye ve Sayın Doç. Dr. Talat Şükrü ÖZŞAHİN'e teşekkür ederim.

Her türlü yardımlarını esirgemeyen, bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım babam Sayın Prof. Dr. Ali Osman ÇAKIROĞLU'na, amcam Sayın Yrd Doç. Dr. Fevzi Lütfü ÇAKIROĞLU'na ve arkadaşım Sayın Yrd. Doç. Dr. İsa ÇÖMEZ'e özellikle teşekkür ederim.

Çalışmam boyunca beni sabırla destekleyen babam Ali Osman ÇAKIROĞLU'na, annem Sevim ÇAKIROĞLU'na, ablam Elif TÜZÜNER'e ve eniştem Salih Zeki TÜZÜNER'e müteşekkir olduğumu belirtir, çalışmamın ülkemize yararlı olmasını içtenlikle dilerim.

Erdoğan ÇAKIROĞLU

Trabzon 2010

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ .....	I
İÇİNDEKİLER .....	II
ÖZET .....	IV
SUMMARY .....	V
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	VI
TABLolar DİZİNİ .....	VIII
SEMBOLLER DİZİNİ .....	IX
1. TEMAS PROBLEMLERİ İLE İLGİLİ GENEL BİLGİLER .....	1
1.1. Giriş .....	1
1.2. Çalışmanın Amacı .....	2
1.3. Temas Problemleri ile İlgili Daha Önce Yapılmış Çalışmalar .....	2
1.4. Çalışmanın Kapsamı .....	5
1.5. Genel Denklemlerin Elde Edilmesi .....	6
1.5.1. Navier Denklemleri .....	6
1.5.2. Navier Denklemlerinin İki Boyutlu Hale İndirgenmesi .....	8
1.5.3. Yer Değiştirmelerin ve Gerilmelerin Fourier Dönüşümleri Olarak İfadesi .....	9
1.5.4. Çeyrek Düzlem Hali .....	13
1.5.4.1. Gerilme Fonksiyonu ve Gerilme Fonksiyonlarının Mellin Dönüşümleri.....	14
1.5.4.2. Yer Değiştirmeler ile İlgili Bazı Mellin Dönüşümleri .....	17
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR .....	19
2.1. Giriş .....	19
2.2. Problemin Tanımı .....	19
2.2.1. Kullanılacak Denklemler .....	20
2.2.2. Problemin Sınır Şartları .....	21
2.2.3. Katsayıların Belirlenmesi .....	24
2.2.3.1. Tabaka ile İlgili Katsayıların Bulunması .....	24
2.2.3.2. Çeyrek Düzlem ile İlgili Katsayıların Bulunması .....	26

2.3.	İntegral Denklemlerin Elde Edilmesi .....	27
2.3.1.	Birinci İntegral Denklem .....	27
2.3.2.	İkinci İntegral Denklem.....	30
2.4.	İntegral Denklem Sisteminin Boyutsuzlaştırılması .....	37
2.5.	İntegral Denklem Sisteminin Sayısal Çözümü .....	39
2.6.	Yapay Sinir Ağları İle İlgili Genel Bilgiler .....	43
2.6.1.	Biyolojik Sinir Sistemi .....	44
2.6.2.	Yapay Sinir Ağları.....	45
2.6.3.	Aktivasyon Fonksiyonları.....	48
2.6.4.	İşlem Elemanı (Yapay Nöron).....	49
2.6.5.	Yapay Sinir Ağlarının Özellikleri.....	50
2.6.6.	Yapay Sinir Ağlarının Sınıflandırılması.....	51
2.6.6.1.	Yapay Sinir Ağlarının Yapılarına Göre Sınıflandırılması .....	51
2.6.6.2.	Yapay Sinir Ağlarının Öğrenme Algoritmalarına Göre Sınıflandırılması .....	52
2.6.7.	Yapay Sinir Ağlarının Kullanılmasındaki Amaç.....	52
2.6.8.	Yapay Sinir Ağı Yöntemi ve Algoritması .....	53
3.	BULGULAR .....	58
3.1.	Giriş .....	58
3.2.	Temas Mesafeleri ve Temas Gerilmeleri.....	59
3.3.	Panç-Tabaka Temas Mesafesi ve Tabaka-Çeyrek Düzlem Temas Mesafelerinin Yapay Sinir Ağı ile Belirlenmesi .....	72
4.	SONUÇLAR VE ÖNERİLER .....	78
5.	KAYNAKLAR .....	80
ÖZGEÇMİŞ		

## ÖZET

Bu çalışmada, iki elastik çeyrek düzleme oturan ve tekil yükü ileten dairesel rijit bir panç ile bastırılan sürtünmesiz elastik tabaka problemi incelenmiş ve bu probleme yapay sinir ağı yöntemi uygulanmıştır. Problemin çözümünde elastisite teorisi ve integral dönüşüm tekniği kullanılarak yer değiştirme ve gerilme ifadeleri elde edilmiş, değişik yükleme, malzeme ve geometri durumlarında temas mesafeleri ve temas gerilmeleri hesaplanmıştır

Çalışma, beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, temas problemleri ve yapay sinir ağları ile ilgili daha önce yapılmış çalışmalar özetlendikten sonra probleme ilişkin genel ifadeler çıkarılmış ve çalışmanın kapsamından bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, problem tanıtılmış ve kullanılacak genel denklemler ile problemin sınır şartları verilmiştir. Tabaka ve çeyrek düzleme ait karışık sınır şartları sağlatılarak temas gerilmelerinin bilinmeyen olduğu iki singüler integral denklem elde edilmiştir. İntegral denklemlerin sayısal çözümü Gauss-Jacobi integrasyon formülasyonu ile yapılmıştır.

Üçüncü bölümde, problemin dış yük, panç yarıçapı, tabaka yüksekliği, çeyrek düzlemler arası açıklık mesafesi ve malzeme sabitleri oranlarına değişik değerler verilerek sayısal uygulamalar yapılmıştır. Bu değerlere ilişkin temas mesafeleri ve temas gerilmeleri incelenmiş ve bunlara ait sonuçlar tablolar ve grafikler ile gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde, yapay sinir ağı yöntemi açıklanmış ve bu yöntem probleme uygulanarak yapay sinir ağı yeterli sayıda örneklerden oluşan eğitim seti ile eğitilmiştir. Eğitilmiş yapay sinir ağı test edilmiş ve test sonuçları teorik olarak elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma sonucunda çok iyi bir yaklaşım elde edilmiş ve bulunan değerler tablolar ve grafikler halinde gösterilmiştir.

Beşinci bölümde, bu çalışmadan çıkartılan sonuçlar ve öneriler verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler :** Elastisite Teorisi, Temas Mekaniği, İntegral Denklem, Fourier Dönüşümü, Mellin Dönüşümü, Temas Gerilmesi, Temas Mesafesi, Yapay Sinir Ağı

## SUMMARY

### **The solution of an elastic layer resting on two quarter planes and loaded by means of rigid stamp and application of the artificial neural network method**

In this study, a frictionless contact problem for an elastic layer resting on two quarter planes is considered according to linear elasticity theory, and artificial neural network method is applied to the problem. The concentrated force in the vertical direction is applied to the layer by means of rigid cylindrical stamp. Using the theory of elasticity and integral transform technique, the expressions of displacements and stresses are obtained. Contact lengths and contact stresses are calculated in the case of different loading, material properties and geometry.

The study consists of five main chapters.

In the first chapter, the previous studies of contact problems and artificial neural network problems are summarized, fundamental equations related with the problem is obtained and content of the problem is given.

In the second chapter, the problem is introduced and general equations are expressed. Using the mixed boundary conditions, two singular integral equations are obtained where the contact lengths and contact stresses are unknowns. The numerical solutions of the integral equations is carried out by the method of Gauss-Jacobi integration formula.

In the third chapter, the numerical applications of the problem are performed for different numerical values of external load, radius of the rigid stamp, height of the layer, the distance between two quarter planes and material constant ratios. The contact lengths and the contact stresses are examined associated with those values. The solutions are demonstrated by tables and graphics.

In the fourth chapter, the artificial neural network method is expressed and, which has enough numbers of patterns in the training set, is applied to the problem. Trained artificial neural network is tested and the test results are compared with the theoretical results and a very good approximation is obtained. The results are presented in tables and graphics.

In the fifth chapter, the conclusions obtained from this work and offers are given.

**Key Words :** Theory of Elasticity, Contact Mechanics, Integral Equation, Fourier Transform, Mellin Transform, Contact Length, Contact Stress, Artificial Neural Network

## ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1. Yük altındaki elastik çeyrek düzlem .....	13
Şekil 2. Tez çalışması olarak incelenmiş temas problemi .....	19
Şekil 3. Biyolojik nöronun iletim yapısı .....	45
Şekil 4. Yapay sinir ağlarında en çok tercih edilen aktivasyon fonksiyonları.....	48
Şekil 5. İşlem elemanı (yapay nöron) .....	49
Şekil 6. İşlem elemanı ve matematiksel modeli .....	53
Şekil 7. Bir adet saklı katmandan oluşan çok katmanlı yapay sinir ağı yapısı ....	54
Şekil 8. Panç yarıçapına bağlı olarak, dış yüke göre panç-tabaka temas mesafesi ( $c/h = 0.2, \mu_1/\mu_2 = 2, \kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ) .....	61
Şekil 9. Panç yarıçapına bağlı olarak, dış yüke göre tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi ( $c/h = 0.2, \mu_1/\mu_2 = 2, \kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ).....	61
Şekil 10. Dış yüke bağlı olarak, panç yarıçapına göre panç-tabaka temas mesafesi ( $c/h = 0.2, \mu_1/\mu_2 = 2, \kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ) .....	62
Şekil 11. Dış yüke bağlı olarak, panç yarıçapına göre tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi ( $c/h = 0.2, \mu_1/\mu_2 = 2, \kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ).....	62
Şekil 12. Malzeme özelliklerine bağlı olarak, açıklığa göre panç-tabaka temas mesafesi ( $\mu_1/P/h = 500, R/h = 250, \mu_1/\mu_2 = 2$ ) .....	64
Şekil 13. Malzeme özelliklerine bağlı olarak, açıklığa göre tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi ( $\mu_1/P/h = 500, R/h = 250, \mu_1/\mu_2 = 2$ ) .....	64
Şekil 14. Malzeme özelliklerine bağlı olarak, kayma modülleri oranına göre panç-tabaka temas mesafesi ( $\mu_1/(P/h) = 500, R/h = 250, c/h = 0.2$ ) .....	65
Şekil 15. Malzeme özelliklerine bağlı olarak, kayma modülleri oranına göre tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi ( $\mu_1/(P/h) = 500, R/h = 250, c/h = 0.2$ ) .....	65
Şekil 16. Dış yüke bağlı olarak, panç-tabaka temas mesafesi boyunca gerilme dağılımı ( $R/h = 250, c/h = 0.2, \mu_1/\mu_2 = 2, \kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ).....	66
Şekil 17. Dış yüke bağlı olarak, tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi boyunca gerilme dağılımı ( $R/h = 250, c/h = 0.2, \mu_1/\mu_2 = 2, \kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ) .....	66



Şekil 18.	Panç yarıçapına bağlı olarak, panç-tabaka temas mesafesi boyunca gerilme dağılımı ( $\mu_1/P/h = 500, c/h = 0.2, \mu_1/\mu_2 = 2, \kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ) .....	67
Şekil 19.	Panç yarıçapına bağlı olarak, tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi boyunca gerilme dağılımı ( $\mu_1/(P/h) = 500, c/h = 0.2, \mu_1/\mu_2 = 2, \kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ).....	67
Şekil 20.	Açıklığa bağlı olarak, panç-tabaka temas mesafesi boyunca gerilme dağılımı ( $\mu_1/(P/h) = 500, R/h = 250, \mu_1/\mu_2 = 2, \kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ) .....	68
Şekil 21.	Açıklığa bağlı olarak, tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi boyunca gerilme dağılımı ( $\mu_1/(P/h) = 500, R/h = 250, \mu_1/\mu_2 = 2, \kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ) .....	68
Şekil 22.	Kayma modülleri oranına bağlı olarak, panç-tabaka temas mesafesi boyunca gerilme dağılımı ( $\mu_1/(P/h) = 500, R/h = 250, c/h = 2, \kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ).....	69
Şekil 23.	Kayma modülleri oranına bağlı olarak, tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi boyunca gerilme dağılımı ( $\mu_1/(P/h) = 500, R/h = 250, c/h = 0.2, \kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ).....	69
Şekil 24.	$\kappa_1$ değerine bağlı olarak, panç-tabaka temas mesafesi boyunca gerilme dağılımı ( $\mu_1/(P/h) = 500, R/h = 250, c/h = 0.2, \mu_1/\mu_2 = 2, \kappa_2 = 2$ ) .....	70
Şekil 25.	$\kappa_1$ değerine bağlı olarak, tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi boyunca gerilme dağılımı ( $\mu_1/(P/h) = 500, R/h = 250, c/h = 0.2, \mu_1/\mu_2 = 2, \kappa_2 = 2$ ) .....	70
Şekil 26.	$\kappa_2$ değerine bağlı olarak, panç-tabaka temas mesafesi boyunca gerilme dağılımı ( $\mu_1/(P/h) = 500, R/h = 250, c/h = 0.2, \mu_1/\mu_2 = 2, \kappa_1 = 2$ ) .....	71
Şekil 27.	$\kappa_2$ değerine bağlı olarak, tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi boyunca gerilme dağılımı ( $\mu_1/(P/h) = 500, R/h = 250, c/h = 0.2, \mu_1/\mu_2 = 2, \kappa_1 = 2$ ) .....	71
Şekil 28.	Panç-tabaka temas mesafesinin, teorik sonuçlar ve yapay sinir ağı sonuçları ile karşılaştırılması .....	76
Şekil 29.	Tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesinin, teorik sonuçlar ve yapay sinir ağı sonuçları ile karşılaştırılması .....	76

## TABLolar DİZİNİ

	<b><u>Sayfa No</u></b>
Tablo 1. Beyin sinir sistemi ile yapay sinir ağı sisteminin yapısal benzerlikleri..	46
Tablo 2. Panç yarıçapına bağlı olarak, dış yüke göre temas mesafeleri ( $c/h = 0.2$ , $\mu_1/\mu_2 = 2$ , $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ) .....	60
Tablo 3. Dış yüke bağlı olarak, panç yarıçapına göre temas mesafeleri ( $c/h = 0.2$ , $\mu_1/\mu_2 = 2$ , $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ) .....	60
Tablo 4. Malzeme özelliklerine bağlı olarak, açıklığa göre temas mesafeleri ( $\mu_1/(P/h) = 500$ , $R/h = 250$ , $\mu_1/\mu_2 = 2$ ) .....	63
Tablo 5. Malzeme özelliklerine bağlı olarak, kayma modülleri oranına göre temas mesafeleri ( $\mu_1/(P/h) = 500$ , $R/h = 250$ , $c/h = 0.2$ ) .....	63
Tablo 6. Eğitim seti için kullanılan girdi değerleri .....	73
Tablo 7. Teorik sonuçlar ile elde edilen temas mesafelerinin, yapay sinir ağı sonuçları ile karşılaştırılması .....	75
Tablo 8. Çeyrek düzlemler arasındaki açıklığın 0.000001 olması durumunda teorik ve yapay sinir ağı ile elde edilen temas mesafeleri ile açıklığın "0" olması, yani yarım düzlem olması durumunda elde edilmiş temas mesafelerinin karşılaştırılması.....	77

## SEMBOLLER DİZİNİ

$P$	Tekil basınç yükü
$X, Y, Z$	$x, y, z$ doğrultularındaki kütle kuvvetleri
$u, v, w$	$x, y, z$ doğrultularındaki yer değiştirme bileşenleri
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	$x, y, z$ doğrultularındaki şekil değiştirme bileşenleri
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Dik koordinatlarda açısal şekil değiştirme bileşenleri
$e$	Hacim değiştirme oranı
$\lambda$	Lamé sabiti
$\mu$	Kayma modülü
$\nu$	Poisson oranı
$E$	Elastisite modülü
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	$x, y, z$ doğrultularındaki normal gerilme bileşenleri
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Dik koordinatlarda kayma gerilmesi bileşenleri
$\kappa$	Malzeme sabiti
$\Delta$	Laplace operatörü
$\Delta^2$	Biharmonik operatör
$u_r, u_\theta$	Polar koordinatlarda yer değiştirme bileşenleri
$\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$	Polar koordinatlarda gerilme bileşenleri
$h$	Tabaka kalınlığı
$p_1(x)$	Panç-tabaka temas mesafesi boyunca gerilme dağılımı
$p_2(x)$	Tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi boyunca gerilme dağılımı
$F(x)$	Dairesel rijit pançın şekil fonksiyonu
$f(x)$	Dairesel rijit pançın şekil fonksiyonunun türevi
$\phi_1(r_1), \phi_2(r_2)$	Panç-tabaka temas mesafesi ve tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi boyunca boyutsuz gerilme dağılımları
$a/h$	Panç-tabaka temas mesafesinin yarısının, tabaka yüksekliğine oranı
$b/h$	Tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesinin yarısının, tabaka yüksekliğine oranı
$c/h$	Çeyrek düzlemin $y$ simetri eksenine olan mesafesinin yarısının, tabaka yüksekliğine oranı
$\mu_1 / (P/h)$	Dış tekil yük ile tabakanın kayma modülüne bağlı oran
$R/h$	Dairesel rijit panç yarıçapının, tabaka yüksekliğine oranı

$p_1(x) / (P/h)$	Panç-tabaka temas mesafesi boyunca gerilme dağılımının dış tekil yüke oranı
$p_2(x) / (P/h)$	Tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi boyunca gerilme dağılımının dış tekil yüke oranı
$k(c)$	Gerilme şiddet çarpanı
$x_i$	Girdi katmanındaki işlem elemanları
$z_j$	Saklı katmanındaki işlem elemanları
$y_k$	Çıktı katmanındaki işlem elemanları
$net_j$	Her bir işlem elemanının çıkış değeri
$f(y)$	Çıktı katmanının çıkış değeri
$v_{ij}$	Girdi katmanındaki işlem elemanlarından saklı katmanındaki işlem elemanlarına doğru olan ağırlıklar
$bias_y$	Saklı katmanındaki her işlem elemanına ait düzeltme terimi
$w_{jk}$	Saklı katmanındaki işlem elemanlarında çıktı katmanındaki işlem elemanlarına doğru olan ağırlıklar
$bias_z$	Çıktı katmanındaki her işlem elemanına ait düzeltme terimi
$\alpha$	Öğrenme oranı

# 1. TEMAS PROBLEMLERİ İLE İLGİLİ GENEL BİLGİLER

## 1.1. Giriş

Bilimin ve teknolojinin hızla geliştiği günümüz bilgi çağında yeni hesap ve analiz teknikleri ortaya çıkmaktadır. Gerek ihtiyaçların farklılaşması ve gerekse kaynakların az olması nedeniyle karmaşık yapılara ihtiyaç duyulmaktadır. Ancak, karmaşık yapıların hesabında çeşitli zorluklarla karşılaşmaktadır. Bu nedenle, mühendislik çalışmalarının önemi, hem kıt kaynakların optimum kullanılması hem de kompleks sistemlerin hesap işlemleri için gereken zaman bakımından oldukça artmıştır.

Bilgisayar teknolojisindeki gelişmelere paralel olarak, kabul edilebilir yaklaşıklıkla çözümler veren; sonlu elemanlar, sonlu farklar ve sınır elemanlar gibi sayısal yöntemler mühendislik problemlerinin çözümünde kullanılmaktadır. Bu yöntemlerin hepsinde uygulanana gelen programlama teknikleri kullanılmaktadır.

Elastisite teorisi; mühendislik problemlerinin çözümünde temel yöntemlerden biridir. Elastisite teorisi; mühendislik problemlerindeki gerilme, yer değiştirme ve şekil değiştirme problemlerinin çözümünde, mukavemetin elemanlar metodlarının yetersiz kaldığı pek çok durumlarda önemli bir uygulama alanı bulmuştur. Kirişlerde yüklere ve mesnetlere yakın bölgelerdeki gerilmelerin incelenmesinde, ani değişim sonucu ortaya çıkan gerilmelerin araştırılmasında ve özellikle işaret değiştiren gerilmelere maruz yapılarda içe dönük köşelerde oluşan gerilme yığılmaları gibi hallerde elastisite teorisine başvurmak gerekmektedir.

Elemanlar teorisine göre daha kesin sonuç veren elastisite teorisi yardımı ile problemlerin çözümü çalışmaları, bilgisayar teknolojisi ve sayısal çözüm yöntemlerinin gelişmesi ile büyük hız kazanmıştır.

## 1.2. Çalışmanın Amacı

Tabaka problemleri mekanik bilim dalında üzerinde yoğun çalışmaların olduğu bir konudur. Bunun nedeni birçok yapı elemanlarının tabaka geometrisine yakın olması şeklinde özetlenebilir. Son yıllarda bileşik yapı tarzına olan ihtiyacın artması, temas problemlerinin önemini daha da arttırmıştır. Bu amaç doğrultusunda iki çeyrek düzleme oturan ve rijit bir panç ile bastırılan tabakaya ait temas mesafeleri ve temas mesafeleri boyunca gerilme dağılımları incelenmektedir.

## 1.3. Temas Problemleri ile İlgili Daha Önce Yapılmış Çalışmalar

Temas problemleri, mühendislik yapılarında pek çok uygulama alanına sahiptir. Elastik düzlemlere oturan tabakalara rijit blok veya panç yardımıyla uygulanan kuvvetten doğan mühendislik problemleri, temas problemlerine örnek olarak verilebilir. Temas problemleri ile ilgili ilk çalışma Hertz [1] tarafından yapılmıştır. Bu nedenle temas problemleri literatürde “Hertz Değme Problemi” adı ile bilinmektedir [2]. Hertz’in yapmış olduğu çalışma, sürtünmesiz yüzey ve tam elastik cisimler ile sınırlandırılmıştır. 1950’li yıllarda değme mekaniğindeki gelişmeler ile bu sınırlamalar kaldırılmış ve aynı yıllarda lineer viskoelastisite ve plastisite teorisindeki gelişmeler sayesinde, elastik olmayan cisimlerin de temasından oluşan gerilme ve yer değiştirmeler incelenmiştir [3]. Değme problemlerinin; elastisite teorisi ile çözüm yöntemleri Galin [4] ve çözümlerde integral dönüşümlerinin uygulama metotları ise Ufliand [5] tarafından verilmektedir.

Kirişlerdeki eğilme problemini ilk olarak Galilei (1654-1722) çalışmıştır. Ancak, Galilei kirişte çekme ve basınç bölgelerinin bulunduğunu fark etmemiştir. Kuvvet ile şekil değiştirme arasındaki ilk bağıntı Robert Hooke (1635-1703) tarafından kurulmuştur. Eğilmeye çalışan iki çeşit normal gerilme bulunacağını ilk fark edenler Mariotte (1680) ve Leibnitz (1684) sayılabilir. Bernoulli, 1694’te eğrilik ile moment arasında orantılılık olması ve 1705’te kiriş kesitlerinin eğilmede düzlem kalması gibi önemli hipotezleri ortaya koymuştur. Kiriş teorisini geliştiren ve çeşitli mühendislik problemlerinin çözüm metotlarını ise Navier ortaya koymuştur [6].

Elastisite problemlerinde ifadelerin karışık ve hesapların uzun olmasına karşın, bilgisayar teknolojisinin ve sayısal çözüm yöntemlerinin gelişmesiyle bileşik tabaka problemleri ile ilgili çalışmalar yoğunluk kazanmıştır. Bu çalışmalardan bazıları aşağıda verilmektedir.

Erdoğan ve Ratwani [7], iki elastik çeyrek düzlemin üzerine yük ile bastırılan elastik tabakanın sürtünmesiz temas problemini ele almışlardır. Fourier ve Mellin dönüşümleri kullanılarak, tabaka ile çeyrek düzlemin temas ettiği köşelerdeki gerilmelerde meydana gelen tekillikler ve dereceleri bulunarak integral denklem çözülmüş; tekil yük, düzgün yayılı yük ve değişken yayılı yük durumlarında temas gerilmesi dağılımları incelenmiştir.

Civelek ve Erdoğan [8], rijit yarım düzleme oturan ve tekil yük ile kaldırılmaya çalışılan tabakada sürekli ve süreksiz temas problemini incelemiştir. Süreksiz temas halinde ayrılma uzunluğu ve temas gerilmesinin, tabakanın elastik özelliklerinden bağımsız olduğu görülmüştür.

Adams ve Boggy [9], sonsuz uçlarından etki ettirilen tekil yük ile kısa kenarları boyunca birbirlerine bastırılan, farklı genişlikteki yarı sonsuz iki elastik tabaka arasındaki temas problemini ele almışlardır. Tabakaların birbirlerine bağlı olması veya ara yüzeylerin sürtünmesiz olması durumları için temas mesafesindeki gerilme dağılımları incelenmiştir.

Geçit [10], elastik tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki sürekli ve süreksiz temas problemini incelemiştir. Elastik tabaka üst tarafından sürekli düzgün yayılı yüklerle yüklenerek tabakayı kaldırmaya çalışan veya tabakayı bastıran tekil yük durumları için ayrı ayrı ele alınmış, ilk ayrılmayı başlatan kritik yük ile temas gerilmesi dağılımı incelenmiştir.

Geçit [11], yarı sonsuz silindir ve yarım düzlem arasındaki sürtünmesiz temas problemini incelemiştir. Çözüm için süperpozisyon ilkesinden yararlanılmış, değişik malzeme özellikleri için yer değiştirmeler ve temas gerilmeleri belirlenmiştir.

Geçit [12], çekme kuvveti uygulanmış tabakanın temas probleminde, temas bölgesinde normal ve kayma gerilmeleri için iki tekil integralden oluşan sistem elde edilmiştir. Bu integral denklemler sayısal olarak çözülmüş ve çeşitli geometri durumlarında gerilme dağılımları hesaplanmıştır. Aynı sisteme tekil moment etki etmesi halinde, problem benzer şekilde çözülmüştür [13].

Fabricant ve Sankar [14], homojenliği derinliği ile değişen elastik yarım düzlem probleminin kesin çözümünü temas bölgesini dönele simetrik kabul ederek araştırmışlardır. Panç altındaki temas gerilmeleri ve temas bölgesi dışındaki yer değiştirmeler için gerekli ifadeler elde edilmiştir.

Birinci ve Erdöl [15], basit mesnetler üzerine oturan ağırlıksız iki tabakadan oluşan temas problemini incelemiştir. Bileşik tabaka dairesel ve dikdörtgen blok vasıtasıyla mesnetlere bastırılmış ve her iki durumda temas mesafeleri ve temas gerilmeleri hesaplanmıştır.

Birinci ve Erdöl [16], tekil yükün dikdörtgen blok ile bastırılarak basit mesnetlere oturan bileşik tabakalar arasındaki sürekli ve süreksiz temas problemini incelemiştir. Değişik malzeme sabitleri, tabaka kalınlıkları ve mesnet aralığı için düşey yer değiştirmeler ve temas gerilmesi dağılımları elde edilmiştir.

Kahya ve diğerleri [17], rijit yarım düzleme oturan sürtünmesiz ve ağırlığı ihmal edilmiş tabakanın; dairesel, parabolik veya dikdörtgen rijit blok vasıtasıyla tekil yükle yüklenmiş durumlarına göre çözülerek temas mesafeleri ve temas gerilmeleri elde edilmiştir.

Çakıroğlu ve Çakıroğlu [18], yayılı yük ile bastırılan elastik tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki sürekli ve süreksiz temas problemini incelemiştir. Yükün düzgün yayılı veya bir fonksiyona bağlı olması durumlarında, değişik malzeme özellikleri ve tabaka kalınlığı için ilk ayrılma mesafesi ve temas bölgesindeki gerilme dağılımları hesaplanmıştır.

Çakıroğlu ve diğerleri [19], elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan iki elastik tabakanın, sürekli ve süreksiz değme problemini incelemiştir. Sürekli temas probleminde ilk ayrılmayı başlatan kritik yük hesaplanmıştır. Süreksiz temas probleminde, ayrılmanın; yalnızca iki tabaka arasında, alt tabaka ile yarı sonsuz düzlem arasında veya hem tabakalar arasında hem de alt tabaka ile yarı sonsuz düzlem arasında meydana gelmesi durumları incelenmiştir.

Civelek ve diğerleri [20], rijit yarım düzlem üzerine, rijit dikdörtgen blokla bastırılan elastik tabakada sürekli ve süreksiz temas problemini incelemiştir. Sürtünme ihmal edilmiş, ağırlık dikkate alınmıştır. Sürekli ve süreksiz temas durumlarında; ilk ayrılma yükleri, temas gerilmesi dağılımı ve süreksizlik olan bölgede düşey yer değiştirmeler hesaplanmıştır.

Rijit dairesel bir panç ile bastırılan elastik bir tabaka ve yarım düzlemin birbirine tam yapışık ve ayrılmalı değme problemleri, değme yüzeylerindeki sürtünme etkileri dikkate alınarak elastisite teorisine göre [21,22]'de çözülmüştür. Panç yarıçapı, tekil yük değeri, malzeme özellikleri ve sürtünme katsayısının değişik değerleri için temas mesafeleri ve temas gerilmesi dağılımları elde edilmiştir.

Çeyrek düzlem ve kama tipi problemlerin çözüm yöntemi ve temas mesafelerinde oluşan gerilmeler [23,24]'de incelenmiştir. Köşe noktalarda oluşan gerilme değerleri için gerekli ifadeler elde edilmiştir.



Keer ve diğeri [25], elastik çeyrek düzlem ile rijit blok arasındaki temas problemini incelemiştir. Problemin çözümü için; tahmini temas bölgesi, dikdörtgenel bölgelere ayrılarak her bir bölgedeki gerilmenin sabit olduğu kabul edilmiştir. Bu durumda integral denklem, lineer denklem sistemine dönüştürülerek temas bölgesi ve temas bölgesindeki gerilme dağılımı elde edilmiştir.

İki elastik çeyrek düzleme oturan elastik tabakanın simetrik ve simetrik olmayan temas problemi [26-28]'de incelenmiştir. Tabaka için Fourier dönüşümleri, çeyrek düzlem için Mellin dönüşümü kullanılarak sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca Sonlu Elemanlar Yöntemini ve Sınır Elemanlar Yöntemini kullanan paket programlar ile de çözümler yapılmıştır. Elastik tabakaya; simetrik tekil yük, düzgün yayılı yük ve simetrik olmayan düzgün yayılı yük etki ettirilmesi durumlarında her üç yönetime göre temas gerilmesi dağılımları karşılaştırılmıştır.

#### **1.4. Çalışmanın Kapsamı**

[28] nolu kaynaktaki çalışmada iki elastik çeyrek düzleme oturan elastik tabakaya ait çözüm yapılmıştır. Problemin çözümü tek integral denkleme indirgenmiştir. Bu tez kapsamında ele alınan problemde önceki çalışmalardan farklı olarak, iki elastik çeyrek düzleme oturan elastik tabakaya rijit bir panç vasıtasıyla  $P$  tekil yükü uygulanmıştır. Bu durumda problemin çözümü temas bölgelerindeki gerilmelerin bilinmeyen olduğu iki integral denklemden oluşan bir integral denklem sistemine indirgenmiştir. Bu çalışmada, iki elastik çeyrek düzleme oturan ve rijit bir panç ile bastırılan elastik tabaka probleminde temas mesafeleri ve temas mesafeleri boyunca gerilme dağılımları incelenmiştir. Problem ilk olarak elastisite teorisi ve integral dönüşüm tekniği kullanılarak teorik olarak çözülmüş daha sonra farklı dış yük, malzeme ve geometri verilerine göre sayısal uygulamaları yapılmıştır. Ayrıca temas mesafeleri, yapay sınır ağı yöntemi ile de elde edilmiştir.

## 1.5. Genel Denklemlerin Elde Edilmesi

Bu kısımda; temas probleminin, elastisite teorisine göre çözümünde kullanılacak gerilme ve yer değiştirmelere ait genel ifadeler elde edilmektedir.

### 1.5.1. Navier Denklemleri

Üç boyutlu, dengede olan bir cisim için;  $X$ ,  $Y$  ve  $Z$  kütle kuvvetlerini,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  ve  $\tau_{yz}$  gerilme bileşenlerini göstermek üzere, gerilmelerin noktadan noktaya değişimini gösteren denge denklemleri aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \quad (3)$$

Denge denklemlerini yer değiştirmeler cinsinden yazabilmek için, yer değiştirme bileşenleri ile Şekil değiştirme bileşenleri arasındaki yer değiştirme - Şekil değiştirme bağıntılarını;

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (5)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (6)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (7)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (8)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (9)$$

ile gerilme - şekil değiştirme bağıntılarının (Hooke Kanunları) kullanılması gerekmektedir. Bu bağıntılardaki  $u$ ,  $v$  ve  $w$  sırasıyla  $x$ ,  $y$  ve  $z$  doğrultularındaki yer değiştirme bileşenlerini,  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\epsilon_z$ ,  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$  ve  $\gamma_{yz}$  ise, yer değiştirme-şekil değiştirme bağıntılarını göstermektedir.

Bünye denklemlerinde, şekil değiştirmeler, (4-9) bağıntularından yararlanarak yer değiştirmeler cinsinden yerlerine yazılırsa; gerilme bileşenleri aşağıdaki gibi olur.

$$\sigma_x = \lambda e + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (10)$$

$$\sigma_y = \lambda e + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (11)$$

$$\sigma_z = \lambda e + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \quad (12)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (13)$$

$$\tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (14)$$

$$\tau_{yz} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (15)$$

Burada;  $e$  hacim değiştirme oranını,  $\lambda$  Lamé sabitini ve  $\mu$  kayma modülünü göstermekte olup;

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (16)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (17)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (18)$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada;  $E$  elastisite modülünü ve  $\nu$  Poisson oranını belirtmektedir.

Yer değiştirmeler cinsinden yazılan (10-15) nolu gerilme bileşenleri (1-3) nolu denge denklemlerinde yerine yazılırsa; Navier denklemleri aşağıdaki gibi

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x} + \mu \Delta u + X = 0 \quad (19)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial y} + \mu \Delta v + Y = 0 \quad (20)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial z} + \mu \Delta w + Z = 0 \quad (21)$$

elde edilmiş olur. Burada;  $\Delta$  Laplace operatörü olup aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (22)$$

### 1.5.2. Navier Denklemlerinin İki Boyutlu Hale İndirgenmesi

Çözülecek problemin iki boyutlu olması sebebiyle (19-21) denklemlerinde verilmiş olan üç boyutlu hale ait Navier denklemlerinin, iki boyutlu hale indirgenmesi gerekir. Düzlem şekil değiştirme halinde Navier denklemleri aşağıdaki şekli alırlar.

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x} + \mu \Delta u + X = 0 \quad (23)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial y} + \mu \Delta v + Y = 0 \quad (24)$$

Düzlem şekil değiştirme halinde,  $e$  ve  $\Delta$  aşağıdaki gibi olacaktır.

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (25)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (26)$$

Eğer kütle kuvvetleri ihmal edilecek olursa, Navier denklemleri;

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x} + \mu \Delta u = 0 \quad (27)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial y} + \mu \Delta v = 0 \quad (28)$$

olarak yazılabilir.

### 1.5.3. Yer Değiştirmelerin ve Gerilmelerin Fourier Dönüşümleri Olarak İfadesi

Problemin  $y$  eksenine göre simetrik olması nedeniyle  $u$  ve  $v$  yer değiştirme bileşenleri aşağıdaki eşitlikleri sağlarlar.

$$u(x, y) = -u(-x, y) \quad (29)$$

$$v(x, y) = v(-x, y) \quad (30)$$

Navier denklemlerinin kısmi türevli diferansiyel denklem takımından oluşması, problemin çözümünü zorlaştırmaktadır. Çözümü kolaylaştırmak için, Navier denklemlerini adi diferansiyel denklem takımına dönüştürmek gerekmektedir. Bunun için integral dönüşüm teknikleri kullanılır.  $u(x, y)$  ve  $v(x, y)$  yer değiştirmeleri;  $\phi(\alpha, y)$  ve  $\psi(\alpha, y)$  fonksiyonlarının Fourier sinüs ve Fourier kosinüs dönüşümleri olarak tanımlanırsa, tabaka için yer değiştirme ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \phi(\alpha, y) \sin(\alpha x) d\alpha \quad (31)$$

$$v(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \psi(\alpha, y) \cos(\alpha x) d\alpha \quad (32)$$

(31) ve (32) nolu denklemlerin ters dönüşümleri alınacak olursa;

$$\phi(\alpha, y) = \int_0^{\infty} u(x, y) \sin(\alpha x) dx \quad (33)$$

$$\psi(\alpha, y) = \int_0^{\infty} v(x, y) \cos(\alpha x) dx \quad (34)$$

denklemleri elde edilir.  $\phi(\alpha, y)$  ve  $\psi(\alpha, y)$  bilinmeyen fonksiyonlarının belirlenebilmesi için, (27) nolu denklem  $\sin(\alpha x) dx$  ve (28) nolu denklem ise  $\cos(\alpha x) dx$  ifadeleri ile çarpılıp  $(0, \infty)$  aralığında integrali alınırsa;

$$\int_0^{\infty} \left[ (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] \sin(\alpha x) dx = 0 \quad (35)$$

$$\int_0^{\infty} \left[ (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] \cos(\alpha x) dx = 0 \quad (36)$$

eşitlikleri elde edilir. (33) ve (34) nolu denklemlerde  $u$  ve  $v$ 'nin gerekli türevleri alınırsa;

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin(\alpha x) dx = -\alpha^2 \phi \quad (37)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sin(\alpha x) dx = \frac{d^2 \phi}{dy^2} \quad (38)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \sin(\alpha x) dx = -\alpha \frac{d\psi}{dy} \quad (39)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cos(\alpha x) dx = -\alpha^2 \psi \quad (40)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \cos(\alpha x) dx = \frac{d^2 \psi}{dy^2} \quad (41)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cos(\alpha x) dx = \alpha \frac{d\phi}{dy} \quad (42)$$

ifadeleri yazılabilir. Bu ifadeler elde edilirken kısmi integrasyon uygulanmış ve

$$u(0) = u(\infty) = v(\infty) = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\infty} = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=\infty} = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \text{ sınır şartlarından yararlanılmıştır.}$$

(37-42) nolu denklemler, (35) ve (36) nolu denklemlerde yerlerine yazılırsa;

$$-(\lambda + 2\mu)\alpha^2 \phi + \mu \frac{d^2 \phi}{dy^2} - (\lambda + \mu)\alpha \frac{d\psi}{dy} = 0 \quad (43)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{d^2 \psi}{dy^2} - \mu \alpha^2 \psi + (\lambda + \mu)\alpha \frac{d\phi}{dy} = 0 \quad (44)$$

adi diferansiyel denklem takımı elde edilmiş olur. (43) nolu denklemin  $y$ 'ye göre iki defa ve (44) nolu denklemin ise  $y$ 'ye göre bir defa türevi alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa, aşağıdaki;  $\phi$ 'ye göre dördüncü mertebeden sabit katsayılı, lineer ve homojen bir adi diferansiyel denklem elde edilir.

$$\frac{d^4 \phi}{dy^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2 \phi}{dy^2} + \alpha^4 \phi = 0 \quad (45)$$

Bu diferansiyel denklemin çözümü,  $\phi(\alpha, y) = e^{my}$  şeklinde aranır ve gerekli türevler alınır;

$$m^4 - 2\alpha^2 m^2 + \alpha^4 = 0 \quad (46)$$

karakteristik denklemi elde edilir. Bu karakteristik denklemin kökleri ise  $m_1 = m_3 = \alpha$  ve  $m_2 = m_4 = -\alpha$  olarak bulunur. Bu durumda (45) nolu adi diferansiyel denklemin çözümü aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\phi(\alpha, y) = (A_1 + A_2 y)e^{-\alpha y} + (A_3 + A_4 y)e^{\alpha y} \quad (47)$$

(44) nolu denkleme de (43) nolu denkleme uygulanan benzer işlemler uygulanırsa  $\psi(\alpha, y)$  ifadesi aşağıdaki gibi

$$\psi(\alpha, y) = \left[ A_1 + \left( \frac{\kappa}{\alpha} + y \right) A_2 \right] e^{-\alpha y} + \left[ -A_3 + \left( \frac{\kappa}{\alpha} - y \right) A_4 \right] e^{\alpha y} \quad (48)$$

elde edilir. Bu ifadedeki  $\kappa$  bir malzeme sabiti olup düzlem şekil değiştirme halinde  $\kappa = 3 - 4\nu$  ve düzlem gerilme halinde ise;  $\kappa = (3 - 4\nu)/(1 + \nu)$  olduğu bilinmektedir.  $\phi(\alpha, y)$  ve  $\psi(\alpha, y)$  fonksiyonları sırasıyla (31) ve (32) nolu denklemlerde yerlerine yazılırsa,  $u(x, y)$  ve  $v(x, y)$  yer değiştirme bileşenleri;

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ (A_1 + A_2 y)e^{-\alpha y} + (A_3 + A_4 y)e^{\alpha y} \right] \sin(\alpha x) d\alpha \quad (49)$$

$$v(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \left[ A_1 + \left( \frac{\kappa}{\alpha} + y \right) A_2 \right] e^{-\alpha y} + \left[ -A_3 + \left( \frac{\kappa}{\alpha} - y \right) A_4 \right] e^{\alpha y} \right] \cos(\alpha x) d\alpha \quad (50)$$

şeklinde elde edilir. Yukarıdaki denklemlerdeki  $A_1, A_2, A_3$  ve  $A_4$  bilinmeyen sabit katsayılar olup probleme ait sınır şartlarından bulunacaklardır.

(49) ve (50) nolu yer değiştirme bileşenlerinin gerekli türevleri alınıp gerilme-yer değiştirme bağıntılarında yerlerine yazılırlarsa, gerilme bileşenleri aşağıdaki gibi belirlenir.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu} \sigma_x(x, y) = & \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \left[ \alpha (A_1 + A_2 y) - \left( \frac{3 - \kappa}{2} \right) A_2 \right] e^{-\alpha y} + \right. \\ & \left. \left[ \alpha (A_3 + A_4 y) + \left( \frac{3 - \kappa}{2} \right) A_4 \right] e^{\alpha y} \right] \cos(\alpha x) d\alpha \end{aligned} \quad (51)$$

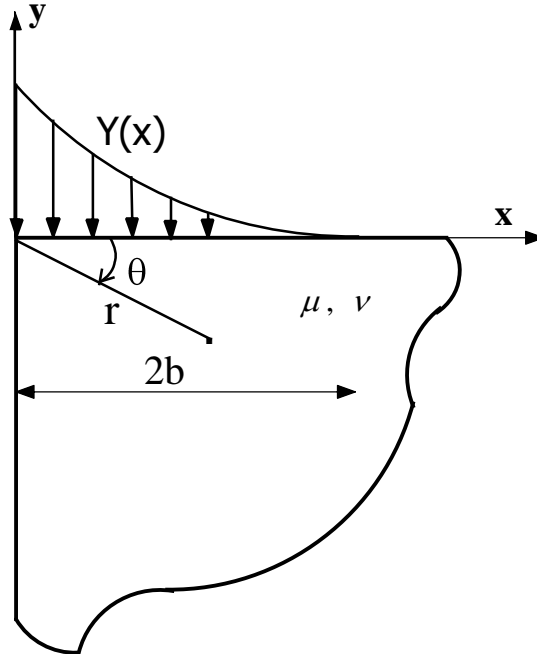


$$\frac{1}{2\mu}\sigma_y(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ -\left[ \alpha(A_1 + A_2 y) + \left(\frac{\kappa+1}{2}\right)A_2 \right] e^{-\alpha y} + \left[ -\alpha(A_3 + A_4 y) + \left(\frac{\kappa+1}{2}\right)A_4 \right] e^{\alpha y} \right] \cos(\alpha x) d\alpha \quad (52)$$

$$\frac{1}{2\mu}\tau_{xy}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ -\left[ \alpha(A_1 + A_2 y) + \left(\frac{\kappa-1}{2}\right)A_2 \right] e^{-\alpha y} + \left[ \alpha(A_3 + A_4 y) - \left(\frac{\kappa-1}{2}\right)A_4 \right] e^{\alpha y} \right] \sin(\alpha x) d\alpha \quad (53)$$

#### 1.5.4. Çeyrek Düzlem Hali

Şekil (1)'de görülen yük altındaki elastik çeyrek düzlem, üzerinde çalışılan problemin bir parçasını oluşturmaktadır. Bu bölümde elastik, homojen ve izotrop kabul edilen çeyrek düzlemle ilgili denklemler elde edilecektir.



Şekil 1. Yük altındaki elastik çeyrek düzlem

### 1.5.4.1 Gerilme Fonksiyonu ve Gerilme Fonksiyonlarının Mellin Dönüşümleri

Düzlem elastisite problemlerinin çözümünde Airy gerilme fonksiyonunu kullanmak büyük kolaylık sağlar. Bu yöntemle göre, bir  $\phi = \phi(x, y)$  fonksiyonu için aşağıdaki gerilme bileşenleri

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad (54)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (55)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (56)$$

tanımlanırsa denge denklemleri, kütle kuvvetlerinin ihmal edilmesi durumunda özdeş olarak sağlanmış olur. Bu durumda problemin çözümü, aşağıdaki biharmonik denklemin çözümü olan  $\phi$  fonksiyonunun bulunmasına dönüşür.

$$\Delta^2 \phi(r, \theta) = 0 \quad (57)$$

Burada  $\Delta^2$  biharmonik operatör aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (58)$$

Elastisite, temas ve sınır değer problemlerinin çözümünde, özellikle kamalar ve aksenal simetrik koniler gibi bazı özel geometrik durumlarda, problemin çözümünde Mellin dönüşümleri kolaylık sağlamaktadır.

Bu çalışmada Mellin dönüşümü,  $r$  radyal koordinatına göre alınmıştır. Bu şekilde problem kompleks Mellin uzayına taşınmış olur [29].

Polar koordinatlarda tanımlı bir  $f(r)$  fonksiyonunun Mellin dönüşümü;

$$f^M = \int_0^{\infty} f(r) r^{s-1} dr \quad (59)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $s$  dönüşüm parametresidir. (59) nolu denklemin ters Mellin dönüşümü alınırsa,

$$f(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f^M r^{-s} ds \quad 0 \leq r < \infty \quad (60)$$

olarak ifade edilir. Burada,  $f(r)$ ,  $(0, \infty)$  aralığında integrali alınabilen bir fonksiyondur.  $n$  dereceye kadar türevleri var olan bir  $f(r)$  fonksiyonu için,

$$\left( r^{s+m} \frac{d^m f(r)}{dr^m} \right) \rightarrow 0 \quad 0 \leq r < \infty \quad m = 1, \dots, n-1 \quad (61)$$

olmak üzere

$$(f^n)^M = \int_0^{\infty} r^n \frac{d^n f(r)}{dr^n} r^{s+1} dr = (-1)^n \frac{\Gamma(s+n)}{\Gamma(s)} f^M \quad (62)$$

ifadesi geçerlidir [29]. Polar koordinatlarda,

$$\sigma_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (63)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \quad (64)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \quad (65)$$

ve uygunluk şartı aşağıdaki gibidir.

$$\left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right) = 0 \quad (66)$$

(66) nolu uygunluk şartına Mellin dönüşümü uygulanırsa,

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + s^2 \right) \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + (s+2)^2 \right] \phi^M = 0 \quad (67)$$

ifadesi elde edilir.  $\phi^M(s, \theta)$  fonksiyonunun genel çözümü aşağıdaki gibidir.

$$\phi^M(s, \theta) = B_1 e^{is\theta} + B_2 e^{-is\theta} + B_3 e^{i(s+2)\theta} + B_4 e^{-i(s+2)\theta} \quad (68)$$

Burada  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ , ve  $B_4$  karmaşık integrasyon katsayıları olup  $s$  nin fonksiyonudurlar.

Polar koordinatlarda gerilme bileşenlerinin  $r^2$  ile çarpılmış olarak Mellin dönüşümleri aşağıdaki gibi bulunurlar.

$$(r^2 \sigma_r)^M = \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - s \right) \phi^M \quad (69)$$

$$(r^2 \sigma_\theta)^M = s(s+1) \phi^M \quad (70)$$

$$(r^2 \tau_{r\theta})^M = (s+1) \frac{\partial}{\partial \theta} \phi^M \quad (71)$$

### 1.5.4.2. Yer Değiştirmeler ile İlgili Bazı Mellin Dönüşümleri

İki boyutlu elastisitede polar koordinatlarda  $u_r$  ve  $u_\theta$  yer değiştirmeleri

$$2\mu u_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} + (1-\nu)r\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \quad (72)$$

$$2\mu u_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + (1-\nu)r^2\frac{\partial\psi}{\partial r} \quad (73)$$

şeklindedir. Burada  $\psi$  fonksiyonu,

$$\Delta\psi = 0 \quad (74)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) = \Delta\phi \quad (75)$$

şartlarını sağlar. (73) nolu denklemin  $r$  değişkenine göre türevi alınır,

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial r} = \frac{1}{2\mu}\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial\theta} + (1-\nu)\left[2r\frac{\partial\psi}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\right]\right\} \quad (76)$$

elde edilir. (76) nolu denkleme  $r^2$  ile çarpılmış olarak Mellin dönüşümü uygulanırsa,

$$2\mu\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}r^2\right)^M = (s+1)\frac{\partial\phi^M}{\partial\theta} + (1-\nu)[(s+1)(s+2)]\psi^M(s+2,\theta) \quad (77)$$

denkleme dönüşür. Bu denklemde,

$$\psi^M(s+2,\theta) = \frac{1}{(s+1)(s+2)^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + s^2\right]\frac{\partial\phi^M}{\partial\theta} \quad (78)$$

ifadesi (77) nolu denklemde yerine yazılırsa,

$$2\mu\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} r^2\right)^M = \frac{\partial \phi^M}{\partial \theta} \left[ (s+1) + \frac{(1-\nu)}{(s+2)} s^2 \right] + \frac{(1-\nu)}{(s+2)} \frac{\partial^3 \phi^M}{\partial \theta^3} \quad (79)$$

denklemleri elde edilir. (68) nolu gerilme fonksiyonunun  $\theta$  değişkenine göre 1., 2. ve 3. türevleri alınır ve gerekli işlemler yapılırsa, aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\frac{\partial \phi^M}{\partial \theta} = B_1 i s e^{is\theta} - B_2 i s e^{-is\theta} + B_3 i (s+2) e^{i(s+2)\theta} - B_4 i (s+2) e^{-i(s+2)\theta} \quad (80)$$

$$\frac{\partial^2 \phi^M}{\partial \theta^2} = -B_1 s^2 e^{is\theta} - B_2 s^2 e^{-is\theta} - B_3 (s+2)^2 e^{i(s+2)\theta} - B_4 (s+2)^2 e^{-i(s+2)\theta} \quad (81)$$

$$\frac{\partial^3 \phi^M}{\partial \theta^3} = -B_1 i s^3 e^{is\theta} + B_2 i s^3 e^{-is\theta} - B_3 i (s+2)^3 e^{i(s+2)\theta} + B_4 i (s+2)^3 e^{-i(s+2)\theta} \quad (82)$$

Bu türev ifadeleri (79) nolu denklemlerde yerlerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa, polar koordinatlarda yer değiştirmenin  $r$  değişkenine göre türevinin Mellin dönüşümü aşağıdaki gibi elde edilir [29].

$$2\mu\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} r^2\right)^M = i s (s+1) [B_1 e^{is\theta} + B_2 e^{-is\theta}] + i [(s+1)(s+2) + (1-\nu)(-4s-4)] [B_3 e^{i(s+2)\theta} - B_4 e^{-i(s+2)\theta}] \quad (83)$$

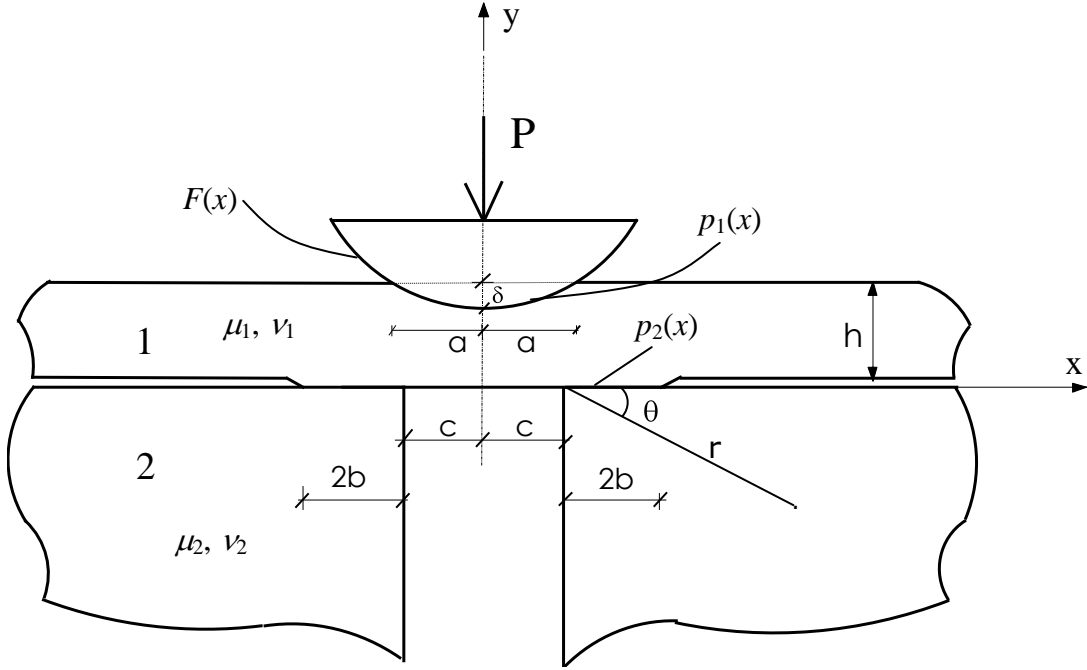
## 2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

### 2.1. Giriş

Bu bölümde, dairesel rijit panç ile uygulanan  $P$  tekil yükü etkisinde bırakılmış iki çeyrek düzleme oturan elastik tabaka problemi, elastisite teorisi ve integral dönüşüm tekniği kullanılarak çözülmüş; farklı dış yük, malzeme ve geometri değerlerine göre oluşan temas mesafeleri ve temas gerilmeleri bulunmuştur. Ayrıca, elde edilen bu analitik çözüm verilerinden yararlanarak temas mesafeleri yapay sinir ağı yöntemi ile elde edilmiştir.

### 2.2. Problemin Tanımı

Tez çalışması olarak Şekil (2)'de verilen temas probleminde, panç-tabaka temas mesafeleri ve tabaka-çeyrek düzlem temas mesafeleri ile bu mesafeler boyunca gerilme dağılımları incelenmiştir.



Şekil 2. Tez çalışması olarak incelenmiş temas problemi

Çeyrek düzlemler ve tabaka  $(-\infty, +\infty)$  aralığında olup  $y$  eksenine göre simetri olduğundan, hesaplar  $0 \leq x < \infty$  aralığında yapılmıştır. Problem düzlem hal için incelendiğinden,  $z$  eksenini doğrultusunda kalınlıklar birim olarak alınmıştır ve sürtünmeler ihmal edilmiştir.

### 2.2.1 Kullanılacak Denklemler

Kalınlığı  $h$  olan tabakanın elastik sabitleri  $\mu_1$  ve  $\nu_1$ , çeyrek düzlemin elastik sabitleri  $\mu_2$  ve  $\nu_2$  dir. Panç ile tabaka arasındaki yer değiştirme ve gerilme ifadelerinin hesaplanması için Fourier dönüşümü, tabaka ile çeyrek düzlemler arasındaki yer değiştirme ve gerilme ifadelerinin hesaplanması için Mellin dönüşümü kullanılmıştır. Burada verilmiş olan elastik sabitlere göre yer değiştirme ve gerilme denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

Tabaka için oluşan yer değiştirme ve gerilme ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$u_1(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ (A_1 + A_2 y) e^{-\alpha y} + (A_3 + A_4 y) e^{\alpha y} \right] \sin(\alpha x) d\alpha \quad (84)$$

$$v_1(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \left[ A_1 + \left( \frac{\kappa_1}{\alpha} + y \right) A_2 \right] e^{-\alpha y} + \left[ -A_3 + \left( \frac{\kappa_1}{\alpha} - y \right) A_4 \right] e^{\alpha y} \right] \cos(\alpha x) d\alpha \quad (85)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu_1} \sigma_{x_1}(x, y) = & \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \left[ \alpha(A_1 + A_2 y) - \frac{3-\kappa_2}{2} A_2 \right] e^{-\alpha y} + \right. \\ & \left. \left[ \alpha(A_3 + A_4 y) - \frac{3-\kappa_2}{2} A_4 \right] e^{\alpha y} \right] \cos(\alpha x) d\alpha \end{aligned} \quad (86)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu_1} \sigma_{y_1}(x, y) = & \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ - \left[ \alpha(A_1 + A_2 y) + \frac{\kappa_2 + 1}{2} A_2 \right] e^{-\alpha y} + \right. \\ & \left. \left[ \alpha(A_3 + A_4 y) - \frac{\kappa_1 + 1}{2} A_4 \right] e^{\alpha y} \right] \cos(\alpha x) d\alpha \end{aligned} \quad (87)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu_1} \tau_{xy_1}(x, y) = & \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ - \left[ \alpha(A_1 + A_2 y) + \frac{\kappa_2 - 1}{2} A_2 \right] e^{-\alpha y} + \right. \\ & \left. \left[ \alpha(A_3 + A_4 y) - \frac{\kappa_2 - 1}{2} A_4 \right] e^{\alpha y} \right] \sin(\alpha x) d\alpha \end{aligned} \quad (88)$$



Çeyrek düzlemde, polar koordinatlarda gerilme ve yer değiştirme bileşenlerinin  $r^2$  ile çarpımlarının Mellin dönüşümleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\sigma_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{d\theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} , \quad (r^2 \sigma_r)^M = \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - s \right) \phi^M \quad (89)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} , \quad (r^2 \sigma_\theta)^M = s(s+1) \phi^M \quad (90)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) , \quad (r^2 \tau_{r\theta})^M = (s+1) \frac{\partial}{\partial \theta} \phi^M \quad (91)$$

$$\phi^M = \int_0^\infty \phi(r, \theta) r^{s-1} dr \quad (92)$$

$$\phi^M = B_1 e^{is\theta} + B_2 e^{-is\theta} + B_3 e^{i(s+2)\theta} + B_4 e^{-i(s+2)\theta} \quad (93)$$

$$2\mu \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} r^2 \right)^M = is(s+1) [e^{is\theta} B_1 - e^{-is\theta} B_2] \\ + i[(s+1)(s+2) - (\kappa+1)(s+1)] [e^{i(s+2)\theta} B_3 - e^{-i(s+2)\theta} B_4] \quad (94)$$

Yukarıdaki denklemlerdeki  $A_1, A_2, A_3$  ve  $A_4$  ile  $B_1, B_2, B_3,$  ve  $B_4$  katsayıları, rijit panç ile tabaka ve tabaka ile çeyrek düzlemler arasındaki temas yüzeylerindeki sınır şartları sağlatılarak bulunacaktır.

### 2.2.2 Problemin Sınır Şartları

Kütle kuvvetleri ihmal edilen problemde, rijit panç ile tabaka ve tabaka ile çeyrek düzlemler arasındaki temas yüzeyleri boyunca sınır şartları aşağıdaki gibi yazılabilir.

Tabakaya ait sınır şartları aşağıda verilmektedir.

$$\sigma_{y_1}(x, h) = -p_1(x) , \quad (0 \leq x \leq a) \quad (95)$$

$$\tau_{xy_1}(x, h) = 0, \quad (0 \leq x < \infty) \quad (96)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{y_1}(x, 0) &= -p_2(x) & (c \leq x \leq c + 2b) \\ \sigma_{y_1}(x, 0) &= 0 & (0 \leq x < c, \quad x > c + 2b) \end{aligned} \quad (97)$$

$$\tau_{xy_1}(x, 0) = 0, \quad (0 \leq x < \infty) \quad (98)$$

$$\frac{\partial v_1(x, h)}{\partial x} = f(x), \quad (0 \leq x \leq a) \quad (99)$$

Çeyrek düzleme ait sınır şartları aşağıda verilmektedir.

$$\sigma_\theta(r, 0) = -p_2(r), \quad (c \leq r \leq c + 2b) \quad (100)$$

$$\tau_{r\theta}(r, 0) = 0, \quad (0 \leq r < \infty) \quad (101)$$

$$\sigma_\theta(r, \pi/2) = 0, \quad (0 \leq r < \infty) \quad (102)$$

$$\tau_{r\theta}(r, \pi/2) = 0, \quad (0 \leq r < \infty) \quad (103)$$

$$\frac{\partial v_1(x, 0)}{\partial x} - \frac{\partial v_2(x, 0)}{\partial x} = 0, \quad (c \leq x \leq c + 2b) \quad (104)$$

Yukarıdaki sınır şartlarında;  $P$  dış tekil yükü,  $F(x)$  dairesel pançın şekil fonksiyonunu,  $h$  tabaka kalınlığını,  $\mu_1$  ve  $\nu_1$  tabakanın elastik sabitlerini,  $\mu_2$  ve  $\nu_2$  çeyrek düzlemin elastik sabitlerini,  $a$  panç-tabaka temas mesafesinin yarısını,  $b$  tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesinin yarısını,  $c$  çeyrek düzlemin  $y$  simetri eksenine olan mesafesini,  $p_1(x)$ ; panç-tabaka temas mesafesi boyunca gerilme dağılımını ve  $p_2(x)$ ; tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi boyunca gerilme dağılımını göstermektedir.

$f(x)$  ise; panç şekil fonksiyonunun türevini tanımlamaktadır. Dairesel panç durumunda pançın şekil fonksiyonu ve türevi aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$F(x) = \delta - \left[ (R^2 - x^2)^{1/2} - R \right] \quad (105)$$

$$f(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x} = \frac{x}{(R^2 - x^2)^{1/2}} \quad (106)$$

Burada  $R$  pançın yarıçapını,  $\delta$  ise tabakada oluşan en büyük yer değiştirme değerini göstermektedir (Şekil 2).

$R$  panç yarıçapının  $x$  'e göre çok büyük olmasından dolayı (108) nolu  $f(x)$  panç şekil fonksiyonunun türevi yaklaşık olarak  $\frac{x}{R}$  alınmıştır.

Probleme ait düşey denge şartları aşağıdaki gibidir.

$$\int_{-a}^a p_1(x) dx = P \quad (107)$$

$$\int_c^{c+2b} p_2(x) dx = \frac{P}{2} \quad (108)$$

Fourier integral dönüşümü ve Mellin integral dönüşümü kullanılarak  $A_1, A_2, A_3, A_4$  ile  $B_1, B_2, B_3, B_4$  katsayıları; temas gerilmelerine bağlı olarak bulunur. Bu katsayılar (99) ve (104) nolu sınır şartlarında yerlerine yazılarak iki integral denklem elde edilir.

### 2.2.3. Katsayıların Belirlenmesi

#### 2.2.3.1. Tabaka ile İlgili Katsayıların Bulunması

(95-98) denklemleri ile verilmiş olan sınır şartlarının ters Fourier dönüşümleri alınması ile aşağıdaki gibi dört bilinmeyenli dört denklem elde edilir.

$$2\alpha A_1 e^{-\alpha h} + (2\alpha h + \kappa_1 + 1)A_2 e^{-\alpha h} + 2\alpha A_3 e^{\alpha h} + (2\alpha h - \kappa_1 - 1)A_4 e^{\alpha h} = \frac{p_1(\alpha)}{\mu_1} \quad (109)$$

$$-2\alpha A_1 e^{-\alpha h} - (2\alpha h + \kappa_1 - 1)A_2 e^{-\alpha h} + 2\alpha A_3 e^{\alpha h} + (2\alpha h - \kappa_1 + 1)A_4 e^{\alpha h} = 0 \quad (110)$$

$$2\alpha A_1 + (\kappa_1 + 1)A_2 + 2\alpha A_3 - (\kappa_1 + 1)A_4 = \frac{p_2(\alpha)}{\mu_1} \quad (111)$$

$$2\alpha A_1 + (\kappa_1 - 1)A_2 - 2\alpha A_3 + (\kappa_1 - 1)A_4 = 0 \quad (112)$$

Denklemlerde geçen  $p_1(\alpha)$  ve  $p_2(\alpha)$  aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$p_1(\alpha) = \int_0^{\infty} p_1(x) \cos(\alpha x) dx \quad (113)$$

$$p_2(\alpha) = \int_0^{\infty} p_2(x) \cos(\alpha x) dx \quad (114)$$

Elde edilen bu dört denklem ile  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  ve  $A_4$  katsayıları, panç-tabaka temas mesafesi ile tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi boyunca temas gerilmesi dağılımları cinsinden yazılabilir.  $p_1(\alpha)$  ve  $p_2(\alpha)$  henüz bilinmeyenler olup yazılacak uygun iki integral denklem yardımı ile sonraki aşamalarda bulunacaktır.

$A_1, A_2, A_3$  ve  $A_4$  katsayıları;

$$A_1 = \frac{1}{4\alpha\mu_1\Delta_A} [p_1(\alpha)A_{11} + p_2(\alpha)A_{12}] \quad (115)$$

$$A_{11} = -(\kappa_1 - 1 + 2\alpha h)e^{-3\alpha h} + (\kappa_1 - 1 + 2\alpha h\kappa_1)e^{-\alpha h} \quad (116)$$

$$A_{12} = (\kappa_1 - 1)(-1 + (1 - 2\alpha h)e^{-2\alpha h}) - 4\alpha^2 h^2 e^{-2\alpha h} \quad (117)$$

$$A_2 = \frac{1}{2\mu_1\Delta_A} [p_1(\alpha)A_{21} + p_2(\alpha)A_{22}] \quad (118)$$

$$A_{21} = e^{-3\alpha h} - (1 + 2\alpha h)e^{-\alpha h} \quad (119)$$

$$A_{22} = 1 - (1 - 2\alpha h)e^{-2\alpha h} \quad (120)$$

$$A_3 = \frac{1}{4\alpha\mu_1\Delta_A} [p_1(\alpha)A_{31} + p_2(\alpha)A_{32}] \quad (121)$$

$$A_{31} = (\kappa_1 - 1 - 2\alpha h\kappa_1)e^{-3\alpha h} - (\kappa_1 - 1 - 2\alpha h)e^{-\alpha h} \quad (122)$$

$$A_{32} = (\kappa_1 - 1)(-e^{-4\alpha h} + (1 + 2\alpha h)e^{-2\alpha h}) - 4\alpha^2 h^2 e^{-2\alpha h} \quad (123)$$

$$A_4 = \frac{1}{2\mu_1\Delta_A} [p_1(\alpha)A_{41} + p_2(\alpha)A_{42}] \quad (124)$$

$$A_{41} = -e^{-\alpha h} + (1 - 2\alpha h)e^{-3\alpha h} \quad (125)$$

$$A_{42} = -e^{-4\alpha h} + (1 + 2\alpha h)e^{-2\alpha h} \quad (126)$$

olarak,  $p_1(\alpha)$  ve  $p_2(\alpha)$  cinsinden bulunur. İfadelerde geçen  $\Delta_A$  ;

$$\Delta_A = e^{-4\alpha h} - 2(1 + 2\alpha^2 h^2)e^{-2\alpha h} + 1 \quad (127)$$

şeklindedir.

### 2.2.3.2. Çeyrek Düzlem ile İlgili Katsayıların Bulunması

(100-103) denklemleri ile verilmiş olan sınır şartlarının ters Mellin dönüşümleri alınması ile aşağıdaki gibi dört bilinmeyenli dört denklem elde edilir.

$$s(s+1)B_1 + s(s+1)B_2 + s(s+1)B_3 + s(s+1)B_4 = -p_2(s) \quad (128)$$

$$sB_1 - sB_2 + (s+2)B_3 - (s+2)B_4 = 0 \quad (129)$$

$$e^{\frac{\pi}{2}is} B_1 + e^{-\frac{\pi}{2}is} B_2 + e^{\frac{\pi}{2}i(s+2)} B_3 + e^{-\frac{\pi}{2}i(s+2)} = 0 \quad (130)$$

$$s e^{\frac{\pi}{2}is} B_1 - s e^{-\frac{\pi}{2}is} B_2 + (s+2)e^{\frac{\pi}{2}i(s+2)} B_3 - (s+2)e^{-\frac{\pi}{2}i(s+2)} = 0 \quad (131)$$

Denklemlerde geçen  $p_2(s)$  aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$p_2(s) = p_2(\alpha) = \int_0^{\infty} p_2(r) r^{s+1} dr \quad (132)$$

Elde edilen bu dört denklem ile  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ , ve  $B_4$  katsayıları, tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi boyunca değme gerilmesi,  $p_2(s)$ , cinsinden yazılabilir.  $p_2(s)$  henüz bilinmeyen olup yazılacak uygun iki integral denklem yardımı ile sonraki aşamalarda bulunacaktır.

$B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ , ve  $B_4$  katsayıları;

$$B_1 = \frac{1}{\Delta_B} p_2(s) (s+2) \left[ (s+1)e^{\pi i} - s - e^{-\pi i(s+1)} \right] \quad (133)$$

$$B_2 = \frac{1}{\Delta_B} p_2(s) (s+2) \left[ (s+1)e^{-\pi i} - s - e^{\pi i(s+1)} \right] \quad (134)$$

$$B_3 = \frac{1}{\Delta_B} p_2(s) s \left[ (s+1)e^{-\pi i} - (s+2) - e^{-\pi i(s+1)} \right] \quad (135)$$

$$B_4 = \frac{1}{\Delta_B} p_2(s) s \left[ (s+1)e^{\pi i} - (s+2) - e^{\pi i(s+1)} \right] \quad (136)$$

olarak,  $p_2(s)$  cinsinden bulunur. İfadelerde geçen  $\bar{\Delta}_B$  ;

$$\bar{\Delta}_B = 2s(s+1) \left[ -(s+1)^2 (e^{\pi i} + e^{-\pi i}) + 2s(s+2) + e^{\pi i(s+1)} + e^{-\pi i(s+1)} \right] \quad (137)$$

olarak tanımlıdır.

### 2.3. İntegral Denklemlerin Elde Edilmesi

$p_1(x)$  ve  $p_2(x)$  temas gerilmelerin bilinmeyenler olduğu daha önce belirtilmişti. Bu gerilmelerin dağılımını elde edebilmek için katsayıların belirlenmesinde kullanılmayan (99) ve (104) nolu karışık sınır şartlarından faydalanılacaktır. Bu sınır şartlarından iki tane integral denklem elde edilecektir.

#### 2.3.1. Birinci İntegral Denklem

Birinci integral denklem (99) nolu sınır şartından çıkarılacaktır. Bu sınır şartının sol tarafı (50) nolu denkleme göre düzenlenirse;

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, y)] = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \alpha \left\{ \left[ \alpha A_1 + (\kappa_1 + \alpha y) A_2 \right] e^{-\alpha y} \right. \\ \left. \left[ -\alpha A_3 + (\kappa_1 - \alpha y) A_4 \right] e^{\alpha y} \right\} \sin(\alpha x) d\alpha \quad (138)$$

şeklini alır. (138) nolu denklemde  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  ve  $A_4$  katsayılarında geçen  $p_1(\alpha)$  ve  $p_2(\alpha)$  ifadeleri yerine  $p_1(t_1)$  ve  $p_2(t_2)$  ile  $x$  yerine  $x_1$  değişken dönüşümleri yapıлып denklem düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, y)] = & -\frac{1}{2\pi\mu_1} \int_0^a p_1(t_1) N_{11}(x_1, t_1) dt_1 \\ & -\frac{1}{2\pi\mu_1} \int_c^{c+2b} p_2(t_2) N_{12}(x_1, t_2) dt_2 \end{aligned} \quad (139)$$

haline dönüşür. Bu ifadede;

$$\begin{aligned} N_{11}(x_1, t_1) = & \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_A} \{ [A_{11} + 2(\kappa_1 + \alpha y)A_{21}]e^{-\alpha y} + [-A_{31} + 2(\kappa_1 - \alpha y)A_{41}]e^{\alpha y} \} \\ & \sin(\alpha x_1) \cos(\alpha t_1) d\alpha \end{aligned} \quad (140)$$

$$\begin{aligned} N_{12}(x_1, t_2) = & \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_A} \{ [A_{12} + 2(\kappa_1 + \alpha y)A_{22}]e^{-\alpha y} + [-A_{32} + 2(\kappa_1 - \alpha y)A_{42}]e^{\alpha y} \} \\ & \sin(\alpha x_1) \cos(\alpha t_2) d\alpha \end{aligned} \quad (141)$$

olarak gösterilmektedir.

$y \rightarrow h$  limitine geçildiğinde (140) nolu denklemde yer alan  $N_{11}$  integralinin çekirdeğinin yakınsaması bozulmaktadır. Diğer bir deyişle  $\alpha$ 'nın çok büyük değerlerinde integralin çekirdeğini oluşturan fonksiyon sifıra yakınsamayıp  $\alpha$ 'nın belirli bir değerinden sonra sıfırdan farklı sabit bir değerde kalmaktadır. Çekirdeğin içindeki yakınsamayı bozan bu terim aşağıdaki gibi hesaplanmıştır. Bu terime aynı zamanda singüler terim denir.

$$\int_0^\infty [-(\kappa_1 + 1) + 2\alpha(y - h)] e^{\alpha(y-h)} \sin(\alpha x_1) \cos(\alpha t_1) d\alpha \quad (142)$$

Yakınsamayı bozan singüler terim, çekirdek içinden çıkarılıp ayrı olarak kapalı integrali alındıktan sonra  $y \rightarrow h$  limitine geçilir ve değeri (139) nolu denkleme eklenirse, (139) nolu denklem aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, y)] = & -\frac{1}{2\pi\mu_1} \int_0^a p_1(t_1) N_{11}^*(x_1, t_1) dt_1 - \frac{1}{2\pi\mu_1} \int_c^{c+2b} p_2(t_2) N_{12}(x_1, t_2) dt_2 \\ & + \frac{1}{2\pi\mu_1} \lim_{y \rightarrow h} \int_0^a p_1(t_1) dt_1 \int_0^\infty [-(\kappa_1 + 1) + 2\alpha(y - h)] e^{\alpha(y-h)} \sin(\alpha x_1) \cos(\alpha t_1) d\alpha \end{aligned} \quad (143)$$



Singüler terim çıkarıldığında  $N_{11}(x_1, t_1)$ ;  $N^*_{11}(x_1, t_1)$  olarak değişir.

$$N^*_{11}(x_1, t_1) = \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{\Delta_A} \left\{ [A_{11} + 2(\kappa_1 + \alpha y)A_{21}]e^{-\alpha y} + [-A_{31} + 2(\kappa_1 - \alpha y)A_{41}]e^{\alpha y} \right\} \right. \\ \left. + [-(\kappa_1 + 1) + 2\alpha(y-h)]e^{\alpha(y-h)} \right\} \sin(\alpha x_1) \cos(\alpha t_1) d\alpha \quad (144)$$

İntegral dönüşüm tabloları yardımı ile [30], (142) nolu denklemin kapalı integrali;

$$\left[ \frac{\kappa_1 + 1}{2} \right] \left[ \frac{1}{t_1 - x_1} - \frac{1}{t_1 + x_1} \right] \quad (145)$$

olarak hesaplanır. (143) nolu denklemde  $y \rightarrow h$  limiti alınıp yerine yazılır ve gerekli işlemler yapıldıktan sonra (99) nolu sınır şartı, aşağıdaki duruma dönüşür.

$$\frac{4\mu_1}{\kappa_1 + 1} \frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, h)] = -\frac{1}{\pi} \int_0^a p_1(t_1) \left[ \frac{1}{t_1 - x_1} - \frac{1}{t_1 + x_1} + N^*_{11}(x_1, t_1) \right] dt_1 \\ - \frac{1}{\pi} \int_c^{c+2b} p_2(t_2) N_{12}(x_1, t_2) dt_2 \quad (146)$$

(146) nolu denklemdeki  $[0, a]$  aralığını  $[-a, a]$  aralığına getirmek mümkündür.  $p_1(t_1)$  ve  $p_2(t_2)$  temas gerilme fonksiyonlarının çift fonksiyon oldukları göz önüne alınıp gerekli işlemler yapılmıca birinci integral denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{4\mu_1}{\kappa_1 + 1} f(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a p_1(t_1) \left[ \frac{1}{t_1 - x_1} + M_{11}(x_1, t_1) \right] dt_1 \\ - \frac{1}{\pi} \int_c^{c+2b} p_2(t_2) M_{12}(x_1, t_2) dt_2 \quad (147)$$

$$M_{11}(x_1, t_1) = -\int_0^\infty \frac{1}{\Delta_A} \left\{ [e^{-4\alpha h} - 4\alpha h e^{-2\alpha h} - 1] + 1 \right\} \sin(t_1 - x_1) d\alpha \quad (148)$$

$$M_{12}(x_1, t_2) = 4 \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_A} [(\alpha h - 1)e^{-3\alpha h} + (\alpha h + 1)e^{-\alpha h}] \sin(\alpha x_1) \cos(\alpha t_2) d\alpha \quad (149)$$

### 2.3.2 İkinci İntegral Denklem

İkinci integral denklem (104) nolu sınır şartından çıkarılır. İlk olarak bu sınır şartının birinci terimi olan,  $\frac{\partial v_1(x,0)}{\partial x}$ , ifadesi aşağıdaki gibi elde edilecektir.

(139-141) bağıntılarında  $x$  yerine  $x_2$  değişken dönüşümü yapılarak,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, y)] = & -\frac{1}{2\pi\mu_1} \int_0^a p_1(t_1) N_{21}(x_2, t_1) dt_1 \\ & -\frac{1}{2\pi\mu_1} \int_c^{c+2b} p_2(t_2) N_{22}(x_2, t_2) dt_2 \end{aligned} \quad (150)$$

bulunur. Bu ifadede;

$$\begin{aligned} N_{21}(x_2, t_1) = & \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_A} \{ [A_{11} + 2(\kappa_1 + \alpha y)A_{21}] e^{-\alpha y} + [-A_{31} + 2(\kappa_1 - \alpha y)A_{41}] e^{\alpha y} \} \\ & \sin(\alpha x_2) \cos(\alpha t_1) d\alpha \end{aligned} \quad (151)$$

$$\begin{aligned} N_{22}(x_2, t_2) = & \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_A} \{ [A_{12} + 2(\kappa_1 + \alpha y)A_{22}] e^{-\alpha y} + [-A_{32} + 2(\kappa_1 - \alpha y)A_{42}] e^{\alpha y} \} \\ & \sin(\alpha x_2) \cos(\alpha t_2) d\alpha \end{aligned} \quad (152)$$

olarak gösterilmektedir.

$y \rightarrow 0$  limitine geçildiğinde (152) nolu denklemde yer alan  $N_{22}$  integralinin çekirdeğinin yakınsaması bozulmaktadır. Çekirdeğin içindeki yakınsamayı bozan singüler terim aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$\int_0^\infty [(\kappa_1 + 1) + 2\alpha y] e^{\alpha y} \sin(\alpha x_2) \cos(\alpha t_2) d\alpha \quad (153)$$

Yakınsamayı bozan singüler terim, çekirdek içinden çıkarılıp ayrı olarak kapalı integrali alındıktan sonra  $y \rightarrow 0$  limitine geçilir ve değeri (150) nolu denkleme eklenirse, (150) nolu denklem aşağıdaki şekli alır.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, y)] &= -\frac{1}{2\pi\mu_1} \int_0^a p_1(t_1) N_{21}(x_2, t_1) dt_1 - \frac{1}{2\pi\mu_1} \int_c^{c+2b} p_2(t_2) N^*_{22}(x_2, t_2) dt_2 \\ &+ \frac{1}{2\pi\mu_1} \lim_{y \rightarrow 0} \int_0^a p_1(t_1) dt_1 \int_0^\infty [(\kappa_1 + 1) + 2\alpha y] e^{\alpha y} \sin(\alpha x_2) \cos(\alpha t_2) d\alpha \end{aligned} \quad (154)$$

Singüler terim çıkarıldığında  $N_{22}(x_2, t_2)$ ;  $N^*_{22}(x_2, t_2)$  olarak değişir.

$$\begin{aligned} N^*_{22}(x_2, t_2) &= \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{\Delta_A} \left\{ [A_{11} + 2(\kappa_1 + \alpha y)A_{21}] e^{-\alpha y} + [-A_{31} + 2(\kappa_1 - \alpha y)A_{41}] e^{\alpha y} \right\} \right. \\ &\quad \left. [(\kappa_1 + 1) + 2\alpha y] e^{\alpha y} \right\} \sin(\alpha x_2) \cos(\alpha t_2) d\alpha \end{aligned} \quad (155)$$

(153) nolu terimin kapalı integrali, integral dönüşüm tabloları yardımı ile aşağıdaki gibi bulunur [30].

$$-\left[ \frac{\kappa_1 + 1}{2} \right] \left[ \frac{1}{t_2 - x_2} - \frac{1}{t_2 + x_2} \right] \quad (156)$$

$y \rightarrow 0$  limitine geçilip gerekli işlemler yapılırsa (154) nolu denklem aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned} \frac{4\mu_1}{\kappa_1 + 1} \frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, 0)] &= -\frac{1}{\pi} \int_0^a p_1(t_1) N_{21}(x_2, t_1) dt_1 \\ &- \frac{1}{\pi} \int_c^{c+2b} p_2(t_2) \left[ -\frac{1}{t_2 - x_2} + \frac{1}{t_2 + x_2} + N_{22}(x_2, t_2) \right] dt_2 \end{aligned} \quad (157)$$

(157) nolu denklemdeki  $[0, a]$  aralığını  $[-a, a]$  aralığına getirmek mümkündür.  $p_1(t_1)$  ve  $p_2(t_2)$  temas gerilme fonksiyonlarının çift fonksiyon oldukları göz önüne alınıp gerekli işlemler yapılınc (104) nolu sınır şartının birinci terimi aşağıdaki hale dönüşür.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, 0)] &= \frac{\kappa_1 + 1}{4\mu_1} \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a p_1(t_1) M_{21}(x_2, t_1) dt_1 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\pi} \int_c^{c+2b} p_2(t_2) \left[ -\frac{1}{t_2 - x_2} + M_{22}(x_2, t_2) \right] dt_2 \right\} \end{aligned} \quad (158)$$

$$M_{21}(x_2, t_1) = 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta_A} [(\alpha h - 1)e^{-3\alpha h} + (\alpha h + 1)e^{-\alpha h}] \sin(t_1 - x_1) d\alpha \quad (159)$$

$$M_{22}(x_1, t_1) = \frac{1}{t_2 + x_2} + \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta_A} \left\{ [-e^{-4\alpha h} + 4\alpha h e^{-2\alpha h} + 1] - 1 \right\} \sin(\alpha x_2) \cos(\alpha t_2) d\alpha \quad (160)$$

(104) nolu sınır şartının ikinci terimi olan,  $\frac{\partial v_2(x, 0)}{\partial x}$ , ifadesi Mellin dönüşümü yardımıyla elde edilmektedir.

$$2\mu_2 \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} r^2 \right)^M = i s(s+1) [e^{is\theta} B_1 - e^{-is\theta} B_2] + i [(s+1)(s+2) - (\kappa_2 + 1)(s+1)] [e^{i(s+2)\theta} B_3 - e^{-i(s+2)\theta} B_4] \quad (161)$$

$B_1, B_2, B_3,$  ve  $B_4$  katsayıları  $\frac{\partial u_\theta}{\partial r}$  denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$2\mu_2 \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} r^2 \right)^M = i s(s+1) p_2(s) \frac{1}{\Delta_B} [(s+2)\bar{R}_1(s, \theta) + (s+1-\kappa_2)\bar{R}_2(s, \theta)] \quad (162)$$

$$\bar{R}_1(s, \theta) = e^{is\theta} [-s + (s+1)e^{\pi i} + e^{-\pi i(s+1)}] + e^{-is\theta} [-(s+1)e^{-\pi i} + s + e^{\pi i(s+1)}] \quad (163)$$

$$\bar{R}_2(s, \theta) = e^{i(s+2)\theta} [-(s+2) + (s+1)e^{-\pi i} - e^{-\pi i(s+1)}] + e^{-i(s+2)\theta} [(s+2) - (s+1)e^{\pi i} - e^{\pi i(s+1)}] \quad (164)$$

$$\bar{\Delta}_B = 2s(s+2) - (s+1)^2 (e^{\pi i} - e^{-\pi i}) + e^{\pi i(s+1)} + e^{-\pi i(s+1)} \quad (165)$$

olarak elde edilir. Bu problemdeki  $x$  eksenini, polar koordinatlarda  $\theta = 0$  durumuna denk gelmektedir. Bu denklemlerde  $\theta = 0$  yazıldığında,  $\bar{R}_2(s, 0) = -\bar{R}_1(s, 0)$  olarak elde edilir. Gerekli işlemler yapıldığında (162) nolu denklem aşağıdaki duruma dönüşür.

$$4\mu \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} r^2 \right)^M = i p_2(s) \frac{1}{\Delta_B} \bar{R}_1(s,0) \quad (166)$$

$\bar{R}_1(s,0)$  ve  $\bar{\Delta}_B$  trigonometrik fonksiyon cinsinden yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa (166) nolu denklem;

$$-4\mu_2 \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} r^2 \right)^M = p_2(r) \frac{1}{\Delta_B^*} R_1(s,0) \quad (167)$$

$$R_1(s,0) = \sin[\pi(s+1)] \quad (168)$$

$$\Delta_B^* = s(s+2) + (s+1)^2 + \cos[\pi(s+1)] \quad (169)$$

şekline dönüşür. (165) nolu denklemin ters Mellin dönüşümü alınır;

$$-\frac{4\mu_2}{\kappa_2+1} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} r^2 \right) r^{-s} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left( p_2(r) dr \frac{1}{\Delta_B^*} R_1(s,0) \right) r^{-s} ds \quad (170)$$

(132) nolu denklemde tanımlanan  $p_2(s)$  değeri (167) nolu denklemde yerine yazılırsa (170) nolu denklem,

$$-\frac{4\mu_2}{\kappa_2+1} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} r \right) = \int_0^{2b} p_2(\tau) d\tau \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} K^*(r, \tau, s) ds \quad (171)$$

$$K^*(r, \tau, s) = \left( \frac{\tau}{r} \right)^{s+1} \frac{1}{\Delta_B^*} R_1(s,0) \quad (172)$$

şekline dönüşür.  $s = -1 + iy$  ve  $ds = i dy$  dönüşümleri yapılırsa aşağıdaki  $R_1^*(y,0)$  ve  $\Delta_B$  ifadeleri elde edilir.

$$R_1^*(y,0) = i \sinh(\pi y) \quad (173)$$

$$\Delta_B = -2y^2 - 1 + \cosh(\pi y) \quad (174)$$

$$\left(\frac{\tau}{r}\right)^{s+1} = \left(\frac{\tau}{r}\right)^{iy} = \cos(\rho y) + i \sin(\rho y) \quad (175)$$

$$\rho = \log\left(\frac{\tau}{r}\right) \quad (176)$$

Bu durumda (171) nolu denklem aşağıdaki gibi olur.

$$-\frac{4\mu_2}{\kappa_2+1} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} r = \int_0^{2b} p_2(\tau) d\tau \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} K^{**}(r, \tau, y) i dy \quad (177)$$

$$K^{**}(r, \tau, y) = [\cos(\rho y) + i \sin(\rho y)] \frac{1}{\Delta_B^{**}} R_1(y, 0) \quad (178)$$

İntegrali  $i$  teriminden kurtarabilmek için Rezidü Teoreminden yararlanılır. Bu durumda, (177) nolu denklem aşağıdaki gibi olur.

$$-\frac{4\mu_2}{\kappa_2+1} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} r = \int_0^{2b} p_2(\tau) d\tau \left\{ \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i \sin(\pi y)}{-2y^2 - 1 + \cos(\pi y)} (\cos(\rho y) + i \sin(\rho y)) dy - \frac{1}{2} \text{rezidü}[K^{**}(r, \tau, y)] \right] \right\} \quad (179)$$

(179) nolu denklemde, içteki integral  $[0, \infty)$  aralığına getirilir ve gerekli işlemler yapılırsa

$$-\frac{4\mu_2}{\kappa_2+1} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} r = \int_0^{2b} p_2(\tau) d\tau \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{i \sin(\pi y)}{-2y^2 - 1 + \cos(\pi y)} \sin(\rho y) dy - \frac{1}{2} \text{rezidü}[K^{**}(r, \tau, y)] \right\} \quad (180)$$

halini alır. Sadeleştirme işlemi ile (173) nolu  $R_1^*(y, 0)$  ifadesi aşağıdaki  $R_1(y, 0)$  durumuna dönüşür.

$$R_1(y, 0) = -\sinh(\pi y) \quad (181)$$

(180) nolu denklemdeki rezidü ifadesi, MATHEMATICA [31] programından aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\text{rezidü} [K^*(r, \tau, y)] = -\frac{2\pi}{-(\pi^2 - 4)} \quad (182)$$

(172) ve (179) nolu denklemlerdeki  $R_1(y, 0)$  ve  $\Delta_B$  terimleri (178) nolu denklemde yerlerine yazılırsa,

$$-\frac{4\mu_2}{\kappa_2 + 1} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} r = \int_0^{2b} p_2(\tau) d\tau \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^\infty \frac{-\sinh(\pi y)}{-2y^2 - 1 + \cosh(\pi y)} \sin(\rho y) dy + \frac{\pi^2}{(\pi^2 - 4)} \right] \quad (183)$$

elde edilir. (183) nolu ifadeyi daha sade bir şekilde yazarsak aşağıdaki duruma dönüşür.

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\kappa_2 + 1}{4\mu_2} \int_0^{2b} p_2(\tau) d\tau \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^\infty K_{23}^*(r, \tau, y) + \frac{\pi^2}{(\pi^2 - 4)} \right] \quad (184)$$

$$K_{23}^*(r, \tau, y) = \int_0^\infty \frac{-\sinh(\pi y)}{-2y^2 - 1 + \cosh(\pi y)} \sin(\rho y) dy \quad (185)$$

$\theta = 0$  ve  $y \rightarrow \infty$  durumlarında  $K_{23}^*(r, \tau, y)$  çekirdeğinin yakınsamadığı ve +1 değerinde sabit kaldığı görülmüştür. Bu aynı zamanda singüler terimdir.

Yakınsamayı bozan singüler terim, çekirdek içinden çıkarılıp ayrı olarak kapalı integrali alındıktan sonra değeri (184) nolu denkleme eklenir. Bu işlemlerden sonra (184) nolu denklem aşağıdaki gibi olur.

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial r} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2b} p_2(\tau) d\tau \frac{1}{r} \frac{4\mu_2}{(\kappa_2 + 1)} \left[ K_{23}^{**}(r, \tau, y) + \frac{1}{\log\left(\frac{\tau}{r}\right)} + \frac{\pi^2}{(\pi^2 - 4)} \right] \quad (186)$$

$$K_{23}^{**}(r, \tau, y) = \int_0^\infty \left[ \frac{-\sinh(\pi y)}{-2y^2 - 1 + \cosh(\pi y)} - 1 \right] \sin \left[ \log\left(\frac{\tau}{r}\right) y \right] dy \quad (187)$$

Şekil (2)'de görüldüğü üzere, çeyrek düzlem  $y$  simetri ekseninden  $c$  mesafesi kadar uzaklıktadır. Bu yüzden simetri eksenini aşağıdaki dönüşümler yapılarak  $y$  mesafesi kadar ötelenir.

$$r = x_2 - c \rightarrow dr = dx_2 \quad (188)$$

$$\tau = t_2 - c \rightarrow dr = dt_2 \quad (189)$$

(186) nolu denklemin  $y \rightarrow \infty$  limiti alınıp gerekli işlemler yapıldıktan sonra (104) nolu sınır şartının ikinci terimi aşağıdaki gibi olur.

$$\frac{\partial v_2(x_2, 0)}{\partial x_2} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} = -\frac{1}{\pi} \int_c^{c+2b} p_2(t_2) \frac{1}{(x_2 - c)} \frac{\kappa_2 + 1}{4\mu_2} \left[ K_{23}(x_2, t_2) + \frac{1}{\log\left(\frac{x_2 - c}{t_2 - c}\right)} + \frac{\pi^2}{(\pi^2 - 4)} \right] dt_2 \quad (190)$$

$$K_{23}(x_2, t_2) = \int_0^\infty \left[ \frac{-\sinh(\pi y)}{-2y^2 - 1 + \cosh(\pi y)} - 1 \right] \sin \left[ \log\left(\frac{x_2 - c}{t_2 - c}\right) y \right] dy \quad (191)$$

(159) ve (190)'da elde edilen denklemler (104) nolu sınır şartında yerlerine yazılırsa ikinci integral denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a p_1(t_1) M_{21}(x_2, t_1) dt_1 - \frac{1}{\pi} \int_c^{c+2b} p_2(t_2) \left\{ -\frac{1}{t_2 - x_2} + M_{22}(x_2, t_2) \right. \\ & - \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\kappa_2 + 1}{\kappa_1 + 1} \frac{1}{x_2 - c} \int_0^\infty \left\{ \left[ \frac{-\sinh(\pi y)}{-2y^2 - 1 + \cosh(\pi y)} - 1 \right] + \sin \left[ \log\left(\frac{x_2 - c}{t_2 - c}\right) y \right] \right\} dy \\ & \left. + \frac{1}{\log\left(\frac{x_2 - c}{t_2 - c}\right)} + \frac{\pi^2}{(\pi^2 - 4)} \right\} dt_2 = 0 \end{aligned} \quad (192)$$



## 2.4. İntegral Denklem Sisteminin Boyutsuzlaştırılması

Bu integral denklem sisteminin sayısal çözümü için aşağıdaki dönüşümler ve boyutsuz büyüklükler tanımlanmıştır.

$$t_1 = a r_1 \rightarrow dt_1 = a dr_1 \quad x_1 = a s_1 \quad (193)$$

$$t_2 = b r_2 + c + b \rightarrow dt_2 = b dr_2 \quad x_2 = b s_2 + c + b \quad (194)$$

$$\alpha h = z \rightarrow d\alpha = \frac{dz}{h} \quad (195)$$

$$\phi_1(r_1) = \frac{p_1(t_1)}{P/h} \quad (196)$$

$$\phi_2(r_2) = \frac{p_2(t_2)}{P/h} \quad (197)$$

$\phi_1(r_1)$  ve  $\phi_2(r_2)$  sırasıyla, panç-tabaka temas mesafesi ve tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi boyunca oluşan boyutsuz temas gerilmesi değerleridir.

Tanımlanan bu dönüşümler ve boyutsuz büyüklükler yerlerine yazılırsa; birinci ve ikinci integral denklemler aşağıdaki ifadelere dönüşür.

Boyutsuzlaştırma sonucu birinci integral denklem aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \phi_1(r_1) \left[ \frac{1}{r_1 - s_1} + \frac{a}{h} K_{11}(s_1, r_1) \right] dr_1 \\ - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \phi_2(r_2) \frac{b}{h} K_{12}(s_1, r_2) dr_2 = \frac{4}{\kappa_1 + 1} \frac{\mu_1}{(P/h)} \frac{1}{(R/h)} \frac{a}{h} s_1 \end{aligned} \quad (198)$$

(198) nolu denklemdeki  $K_{11}(s_1, r_1)$  ve  $K_{12}(s_1, r_2)$  çekirdekleri aşağıdaki gibidir.

$$K_{11}(s_1, r_1) = - \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta_A} \left\{ \left[ e^{-4z} - 4z e^{-z} - 1 \right] + 1 \right\} \sin \left( \frac{a}{h} r_{1i} - \frac{a}{h} s_{1k} \right) dz \quad (199)$$

$$\begin{aligned} K_{12}(s_1, r_2) = 4 \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta_A} \left[ (z-1)e^{-3z} + (z+1)e^{-z} \right] \\ \sin z \left( \frac{a}{h} s_{1k} \right) \cos z \left( \frac{b}{h} r_{2i} + \frac{c}{h} + \frac{b}{h} \right) dz \end{aligned} \quad (200)$$

$$\Delta_A = 1 + e^{-4z} - 2(1 + 2z^2)e^{-2z} \quad (201)$$

Boyutsuzlaştırma sonucu ikinci integral denklem aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \phi_1(r_1) \frac{a}{h} K_{21}(s_2, r_1) dr_1 - \frac{1}{\pi} \int_c^{c+2b} \phi_2(r_2) \left\{ -\frac{1}{r_2 - s_2} + \frac{b}{h} K_{22}(s_2, r_2) \right. \\ & - \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\kappa_2 + 1}{\kappa_1 + 1} \frac{1}{s_2 + 1} \int_0^\infty \left\{ \left[ \frac{-\sinh(\pi y)}{-2y^2 - 1 + \cosh(\pi y)} - 1 \right] + \sin \left[ \log \left( \frac{r_2 + 1}{s_2 + 1} \right) y \right] \right\} dy \\ & \left. \frac{1}{\log \left( \frac{r_2 + 1}{s_2 + 1} \right)} + \frac{\pi^2}{(\pi^2 - 4)} \right\} dr_2 = 0 \end{aligned} \quad (202)$$

(202) nolu denklemdeki  $K_{21}(s_1, r_1)$  ve  $K_{22}(s_1, r_2)$  çekirdekleri aşağıdaki gibidir.

$$K_{21}(s_2, r_1) = 2 \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_A} \left[ (z-1)e^{-3z} + (z+1)e^{-z} \right] \sin z \left( \frac{a}{h} r_{1i} - \frac{a}{h} s_{1k} \right) dz \quad (203)$$

$$\begin{aligned} K_{22}(s_2, r_2) = & \frac{1}{r_{2i} + s_{2k} + 2 \frac{c/h}{b/h} + 2} + 2 \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_A} \left\{ \left[ -e^{-4z} + 4ze^{-2z} + 1 \right] - 1 \right\} \\ & \sin z \left( \frac{b}{h} s_{2k} + \frac{c}{h} + \frac{b}{h} \right) \cos z \left( \frac{b}{h} r_{2i} + \frac{c}{h} + \frac{b}{h} \right) dz \end{aligned} \quad (204)$$

Düşey denge şartları da boyutsuzlaştırmadan sonra aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\frac{2a}{h} \int_{-1}^1 \phi_1(r_1) dr_1 = 1 \quad (205)$$

$$\frac{2b}{h} \int_{-1}^1 \phi_2(r_2) dr_2 = \frac{1}{2} \quad (206)$$

## 2.5. İntegral Denklem Sisteminin Sayısal Çözümü

Bu çalışmadaki integral denklemler, ilk terimin varlığından dolayı ikinci tür integral denklemlerdir. Birinci ve ikinci integral denklemlerden oluşan bir integral denklem sistemi çözülecektir. İntegral denklem sisteminin sayısal çözümü, Gauss-Jacobi İntegrasyon Formülasyonu ile yapılacaktır [32].

İntegral denklem sisteminin sayısal çözümü,

$$\phi(r) = g(r)w(r) \quad (207)$$

$$w(r) = (1-r)^\alpha (1+r)^\beta \quad (208)$$

şeklinde aranır. İntegral denklemlerin indeksleri birbirinden farklıdır.

Birinci integral denklemin sayısal çözümü aşağıda verilmektedir. Birinci integral denklemin indeksi “-1” dir. “-1” indeks için incelenen problemde  $\alpha_1 = \beta_1 = 0.5$  olmaktadır [33]. Burada (198) nolu birinci integral denklemin çözümü,

$$\phi_1(r_i) = g_1(r_i) w_1(r_i) \quad i = 1, \dots, N \quad (209)$$

$$w_1(r_i) = (1-r_i^2)^{1/2} \quad i = 1, \dots, N \quad (210)$$

olarak aranır.

“-1” indeks için çözüm yöntemi ile birinci integral denklemden,  $g_1(r_i)$  ve  $g_2(r_{2i})$  bilinmeyenlerinin  $N$  noktadaki değerleri için bir lineer denklem takımı elde edilir. Bu denklem aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N g_1(r_i) W_{1i}^N \left[ \frac{1}{r_i - s_{1k}} + \frac{a}{h} K_{11}(s_{1k}, r_i) \right] \\ & + \sum_{i=1}^N g_2(r_{2i}) W_{2i}^N \frac{b}{h} K_{12}(s_{1k}, r_{2i}) dr_2 = \frac{4}{\kappa_1 + 1} \frac{\mu_1}{(P/h)} \frac{1}{(R/h)} \frac{a}{h} s_{1k} \end{aligned} \quad k = 1, \dots, N + 1 \quad (211)$$

$$W_{1i}^N = \frac{1-r_{1i}^2}{N+1} \quad i = 1, \dots, N \quad (212)$$

$$r_{1i} = \cos\left(\frac{i\pi}{N+1}\right) \quad i = 1, \dots, N \quad (213)$$

$$s_{1k} = \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{2k-1}{N+1}\right) \quad k = 1, \dots, N+1 \quad (214)$$

(211) nolu denklemdeki  $r_{2i}$  ve  $W_{2i}^N$  değerleri, ikinci integral denklemin sayısal çözümünde belirtilmiştir.

İkinci integral denklemin sayısal çözümü aşağıda verilmektedir. İkinci integral denklemin indeksi “0” dir. “0” indeks için incelenen problemde  $\alpha_2 = 0.5$  olmaktadır.  $\beta_2$  ise aşağıdaki formüller yardımı ile bulunur [23,24].

$$\frac{\mu_1(\kappa_2+1)}{\mu_2(\kappa_2+1)} [2\lambda^2 - 1 + \cos(\pi\lambda)] \cos(\pi\lambda) - \sin^2(\pi\lambda) = 0 \quad (215)$$

Bu denklemin  $\lambda_1$  pozitif kökü kullanılarak  $\beta_2$  hesaplanır.

$$\beta_2 = \lambda_1 - 1 \quad (216)$$

(202) nolu ikinci integral denklemin çözümü,

$$\phi_2(r_{2i}) = g_2(r_{2i}) w_2(r_{2i}) \quad i = 1, \dots, N \quad (217)$$

$$w_2(r_{2i}) = (1-r_{2i})^{0.5} (1+r_{2i})^{\beta_2} \quad i = 1, \dots, N \quad (218)$$

olarak aranır.

“0” indeks için çözüm yöntemi ile ikinci integral denklemden,  $g_1(r_{1i})$  ve  $g_2(r_{2i})$  bilinmeyenlerinin  $N$  noktadaki değerleri için bir lineer denklem takımı elde edilir. Bu denklem aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N g_1(r_i) W_{1i}^N \frac{a}{h} K_{21}(s_{2k}, r_{i1}) dr_i + \sum_{i=1}^N g_2(r_{2i}) W_{2i}^N \left\{ -\frac{1}{r_{2i} - s_{2k}} + \frac{b}{h} K_{22}(s_{2k}, r_{2i}) \right. \\
& - \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\kappa_2 + 1}{\kappa_1 + 1} \frac{1}{s_{2k} + 1} \int_0^\infty \left\{ \left[ \frac{-\sinh(\pi y)}{-2y^2 - 1 + \cosh(\pi y)} - 1 \right] + \sin \left[ \log \left( \frac{r_{2i} + 1}{s_{2k} + 1} \right) y \right] \right\} dy \\
& \left. + \frac{1}{\log \left( \frac{r_{2i} + 1}{s_{2k} + 1} \right)} + \frac{\pi^2}{(\pi^2 - 4)} \right\} dr_2 = 0 \quad k = 1, \dots, N \quad (219)
\end{aligned}$$

$$W_{2i}^N = -\frac{1}{\pi} \frac{2N + 2 + \alpha_2 + \beta_2}{(N + 1)! (N + 1 + \alpha_2 + \beta_2)} \frac{\Gamma(N + 1 + \alpha_2) \Gamma(N + 1 + \beta_2)}{\Gamma(N + 1 + \alpha_2 + \beta_2)} \frac{2^{\alpha_2 + \beta_2}}{P_N^{(\alpha_2, \beta_2)}(r_{2i}) P_{N+1}^{(\alpha_2 + \beta_2)}(r_{2i})} \quad (220)$$

$r_{2i}$  ve  $s_{2k}$  aşağıdaki formüllerden hesaplanır.

$$P_N^{(\alpha_2, \beta_2)}(r_{2i}) = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (221)$$

$$P_N^{(\alpha_2 - 1, \beta_2 + 1)}(s_{2k}) = 0, \quad k = 1, \dots, N \quad (222)$$

İntegral denklem sistemi, matris formunda aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\begin{bmatrix} [L_{11}(s_{1k}, r_{1i})]_{N+1, N} & [L_{12}(s_{1k}, r_{2i})]_{N+1, N} \\ [L_{21}(s_{2k}, r_{1i})]_{N, N} & [L_{22}(s_{2k}, r_{2i})]_{N, N} \end{bmatrix}_{2N+1, 2N} \times \begin{bmatrix} [g_1(r_{1i})]_{N+1, 1} \\ [g_2(r_{2i})]_{N, 1} \end{bmatrix}_{2N, 1} = \begin{bmatrix} [F_x(s_{1k})]_{N+1, 1} \\ [0]_{N, 1} \end{bmatrix}_{2N+1, 1} \quad (223)$$

$$L_{11}(s_{1k}, r_{1i}) = W_{1i}^N \left[ \frac{1}{r_{1i} - s_{1k}} + \frac{a}{h} K_{11}(s_{1k}, r_{1i}) \right] \quad (224)$$

$$L_{12}(s_{1k}, r_{2i}) = W_{2i}^N \frac{b}{h} K_{12}(s_{1k}, r_{2i}) \quad (225)$$

$$L_{21}(s_{2k}, r_{1i}) = W_{1i}^N \frac{a}{h} K_{21}(s_{2k}, r_{1i}) \quad (226)$$

$$\begin{aligned}
L_{22}(s_{2k}, r_{2i}) = & W_{2i}^N \left\{ -\frac{1}{r_{2i} - s_{2k}} + \frac{b}{h} K_{22}(s_{2k}, r_{2i}) \right. \\
& - \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\kappa_2 + 1}{\kappa_1 + 1} \frac{1}{s_{2k} + 1} \int_0^\infty \left[ \frac{-\sinh(\pi y)}{-2y^2 - 1 + \cosh(\pi y)} - 1 \right] + \sin \left[ \log \left( \frac{r_{2i} + 1}{s_{2k} + 1} \right) y \right] \Bigg\} dy \\
& \left. + \frac{1}{\log \left( \frac{r_{2i} + 1}{s_{2k} + 1} \right)} + \frac{\pi^2}{(\pi^2 - 4)} \right\} dr_2 = 0 \tag{227}
\end{aligned}$$

Burada bilinmeyen  $g_1(r_{1i})$  ve  $g_2(r_{2i})$  değerleri var olan denklemler yardımı ile bulunur. Görüldüğü üzere bilinmeyen sayısından 1 fazla denklem bulunmaktadır. Matrisin çözülebilmesi için  $2N + 1$  tane denklemden 1 tanesinin sistemden çıkarılması gerekir. Bu denklem sisteminde, problem simetrik ve sürtünmesiz olduğundan birinci integral denklemdeki  $(N/2) + 1$  nolu denklem otomatik sağlanmış olur. Bu denklem matristen çıkarılırsa  $2N$  bilinmeyenli  $2N$  denklemden oluşan denklem sistemi elde edilmiş olur.

İntegral denklem sistemindeki  $a/h$  ve  $b/h$  boyutsuz büyüklükler ise dış yük, geometri ve malzemeye bağlı olarak değişecektir. Bu büyüklükler, denge şartlarını sağlamak koşulu ile deneme yanılma yöntemi ile bulunur. İstenilen hassaslıkta sağlanan değerler ile gerilme dağılımları elde edilir.

$x = c$  civarında meydana gelen büyük gerilmeler, malzeme için en tehlikeli gerilmelerdir. Kırılma mekaniği açısından önemli olan bu gerilmeler kırılma gerilmesi olarak adlandırılır ise, bu gerilmeler için gerilme şiddet çarpanı  $k(c)$  ;

$$k(c) = \lim_{y \rightarrow 0} (x - c)^{-\beta_2} p_2(x) \tag{228}$$

olarak elde edilir [24]. Gerekli işlemler yapıldıktan sonra şiddet çarpanı boyutsuz olarak

$$\frac{k(c)(2b)^{\beta_2}}{P} = \frac{2^{\beta_2+1/2}}{2b} \frac{\bar{\phi}(-1)}{\int_{-1}^1 \bar{\phi}(r_2)(1-r_2)^{1/2}(1+r_2)^{\beta_2} dr_2} \tag{229}$$

elde edilir. Burada  $\bar{\phi}(r_2)$  aşağıdaki gibidir.

$$\bar{\phi}(r_2) = g_2(r_2) \frac{1+\kappa_1}{4\pi\mu_1} \frac{b}{h} \quad (230)$$

$k(c)$  gerilme şiddet çarpanının (229) nolu denklemdaki gibi boyutsuz elde edilebilmesi için  $\bar{\phi}(-1)$  değerinin hesaplanması gerekir. Bu değer, aşağıdaki gibi hesaplanabilir [24].

$$\bar{\phi}(\pm 1) \cong \sum_{j=0}^{N-1} E_j P_j^{(0.5,\beta)}(\pm 1) \quad (231)$$

$$E_j = \frac{1}{F_j} \sum_{i=1}^N W_{2i}^N P_j^{(0.5,\beta)}(r_{2i}) \bar{\phi}(r_{2i}) \quad (232)$$

$$F_j = \frac{2^{\beta+1.5}}{2j+\beta+1.5} \frac{\Gamma(j+1.5) \Gamma(j+\beta+1)}{j! \Gamma(j+\beta+1.5)} \quad (233)$$

Bu çalışmada, bu probleme uygun olarak yazılan bir bilgisayar programı kullanılmıştır.

## 2.6. Yapay Sinir Ağları ile İlgili Genel Bilgiler

Yapay sinir ağları, insan beyninin fizyolojisinden yararlanılarak oluşturulan bilgi işleme modelleridir. Yapay sinir ağları, beynin temel birimi olan nöronlara benzer olarak teşkil edilen yapay nöronların (işlem elemanı) farklı topoloji ve ağ modelleriyle birbirine bağlanması ile oluşan karmaşık sistemlerdir [34]. Beynin üstün özellikleri, bilim adamlarını üzerinde çalışmaya zorlamış ve beynin nörofiziksel yapısından esinlenerek matematiksel modeli çıkarılmaya çalışılmıştır.

### 2.6.1. Biyolojik Sinir Sistemi

Biyolojik sinir sistemi; sürekli olarak bilgiyi alan, yorumlayan ve uygun bir karar üreten beynin (merkezi sinir ağı) bulunduğu 3 katmanlı bir sistem olarak açıklanır. Alıcı sinirler (receptor); organizma içerisinde ya da dış ortamlardan algıladıkları uyarıları, beyne bilgi ileten elektriksel sinyallere dönüştürür. Tepki sinirleri (effector) ise; beynin ürettiği elektriksel darbeleri organizma çıktısı olarak uygun tepkilere dönüştürür.

Merkezi sinir ağında bilgiler, alıcı ve tepki sinirleri arasında ileri ve geri besleme yönünde değerlendirilerek uygun tepkiler üretir. Bu yönüyle biyolojik sinir sistemi, kapalı çevrim denetim sisteminin karakteristiklerini taşır. Merkezi sinir sisteminin temel işlem elemanı, sinir hücresidir (nöron) ve insan beyninde yaklaşık  $10^{10}$  (10 milyar) sinir hücresi olduğu tahmin edilmektedir. Sinir hücresi; hücre gövdesi, dendritler ve aksonlar olmak üzere 3 bileşenden meydana gelir. Dendritler, diğer hücrelerden aldığı bilgileri hücre gövdesine bir ağaç yapısı şeklinde ince yollarla iletir. Aksonlar, elektriksel darbeler şeklindeki bilgiyi hücreden dışarı taşıyan daha uzun bir yoldur. Aksonların bitimi ince yollara ayrılabilir ve bu yollar, diğer hücreler için dendritleri oluşturur. Sinapslar ise, akson ile dendrit arasındaki bağlantıyı sağlar [34,35].

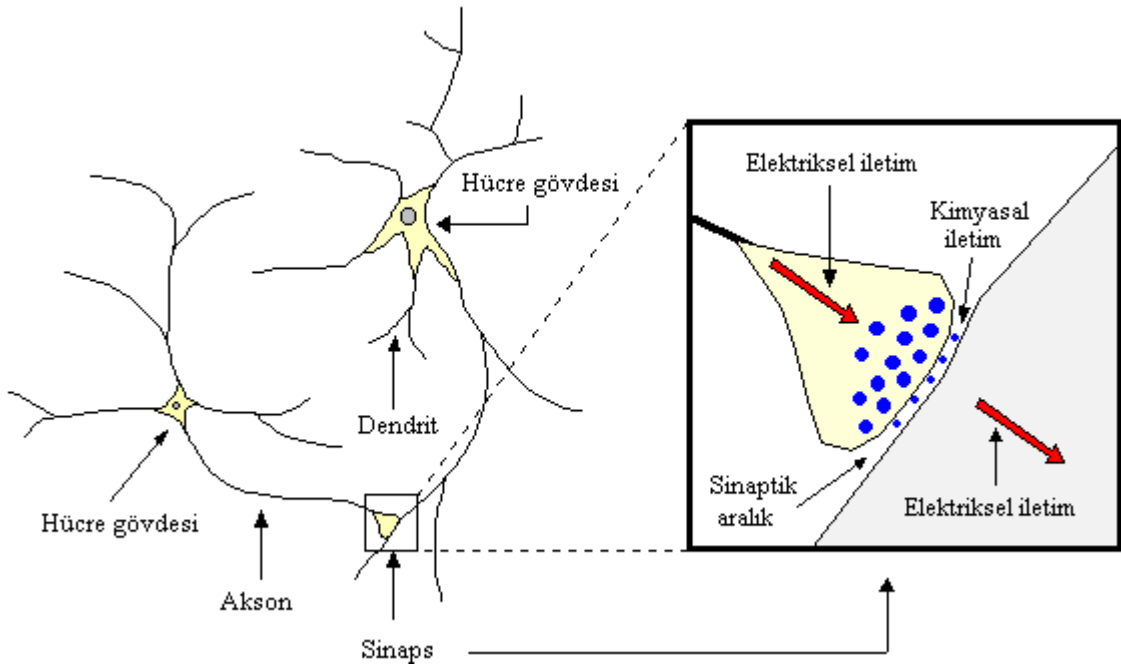
Sinapsa gelen ve dendritler tarafından alınan bilgiler, genellikle elektriksel darbelerdir. Ancak, sinapstaki kimyasal ileticilerden etkilenirler. Belirli bir sürede bir hücreye gelen girişlerin değeri, belirli bir eşik değerine ulaştığında hücre bir tepki üretir. Hücrenin tepkisini artırıcı yöndeki girişler uyarıcı, azaltıcı yöndeki girişler ise önleyici girişler olarak söylenir ve bu etkiyi sinaps belirler [34].

Şekil (3)'de biyolojik nöronun iletim yapısı verilmiştir. Bir nöronun yüzlerce, bazen de binlerce dendrit çıkabilir. Bunların uzunluğu genellikle bir milimetreden daha kısadır. Bazıları ise bir metreden daha uzun olabilir. Dendritler çevre nöronlardan gelen sinyalleri (impulse) alıp, gövdeye ulaştırırlar. Her nöron, dendritler vasıtasıyla diğer birçok nöronlardan gelen işaretleri alan ve birleştiren basit bir mikro işleme birimidir.

İnsan beyninin sıkışık olarak ara bağlantılı yaklaşık  $10^{10}$  (10 milyar) nöronun ve  $6 \times 10^{13}$  (60 trilyon) sinaps bağlantısından oluştuğu düşünülürse son derece karmaşık ve etkin bir yapı olduğu anlaşılır. Her eleman kendi aralarında oldukça çok sayıda nörona (eleman başına yaklaşık olarak  $10^4$  bağlantı) bağlanmıştır. Bir nöronun aksonu (çıkış yolu) ayrıştırılmıştır ve sinaps olarak adlandırılan bir fonksiyon vasıtasıyla diğer nöronların dendritlerine bağlanmıştır. Bu fonksiyon uçlarındaki iletim doğal olarak kimyasaldır ve



işaretin miktarı, akson tarafından serbest bırakılan kimyasalların büyüklüğüne bağlı olarak transfer edilir ve dendritler vasıtasıyla alınır. Bu sinaptik büyüklük, beyin öğrenirken neyin değiştirildiğini belirtir. Bu sinaps, beynin temel hafıza mekanizmasına dayanarak nöron içerisindeki bilginin işlenmesi ile birleştirilir. Diğer taraftan bir nöronun tepki hızı, günümüz bilgisayarlarına göre oldukça yavaş olmakla birlikte duyuşal bilgileri son derecede hızlı değerlendirebilmektedir. Bu nedenle insan beyni; öğrenme, birleştirme, uyarılma ve genelleştirme yetenekleriyle son derece karmaşık, doğrusal olmayan ve paralel dağılmış bir bilgi işleme sistemi olarak tanımlanabilir [34].



Şekil 3. Biyolojik nöronun iletim yapısı

### 2.6.2. Yapay Sinir Ağları

Yapay sinir ağları, insan beyninin temel birimi olan nöronların çalışma mekanizması taklit edilerek geliştirilen ve biyolojik olarak insan beyninin yaptığı temel işlemleri bilgisayar programı ile gerçekleştirmeyi amaçlayan bir mantıksal programlama tekniğidir. Yapay sinir ağları; beyin yaptığı işlemleri yapan, karar veren, sonuç çıkaran, yetersiz veri durumunda var olan mevcut bilgiden yola çıkarak sonuca ulaşan, sürekli veri girişi kabul eden, öğrenen ve hatırlayan bir algoritmadır. Yapay sinir ağları, yapılarında işlem elemanları bulunan bir adet girdi katmanı, bir adet veya daha fazla sayıda saklı katmanı ve

bir adet çıktı katmanı olarak adlandırılan katmanlar ile organize edilir. Yapay sinir ağının eğitiminde kullanılan örnekler, girdi ve çıktı katmanlarındaki işlem elemanlarını oluşturmaktadır ve bu örnekler ağa vektörel olarak yerleştirilir. Öğrenme süreci, arzu edilen amaca ulaşmak için yapay sinir ağındaki ağırlıklarının yenilenmesini sağlayan öğrenme algoritmalarına bağlıdır [34-36].

Yapay sinir ağlarının öğrenme özelliği araştırmacıların dikkatini çeken en önemli özelliklerden birisidir. Çünkü herhangi bir olay hakkında girdiler ve çıktılar arasındaki ilişkiyi, doğrusal olsun veya olmasın, elde bulunan mevcut örneklerden öğrenerek daha önce hiç görmediği olayları, önceki örneklerden çağrışım yaparak ilgili olaya çözümler üretebilme özelliği yapay sinir ağlarındaki zeki davranışın temelini teşkil eder [35].

Yapay sinir ağları, insan beyninin çalışma prensibi örnek alınarak geliştirilmeye çalışılmıştır ve aralarında yapısal olarak bazı benzerlikler vardır. Bu benzerlikler Tablo 1’de verilmektedir [34].

Tablo 1. Beyin sinir sistemi ile yapay sinir ağı sisteminin yapısal benzerlikleri

Beyin Sinir Sistemi	Yapay Sinir Ağı Sistemi
Nöron	İşlem Elemanı
Dendrit	Toplama Fonksiyonu
Hücre Gövdesi	Transfer Fonksiyonu
Aksonlar	Eleman Çıkışı
Sinapslar	Ağırlıklar

Beynin bütün davranışlarını tam olarak modelleyebilmek için fiziksel bileşenlerinin doğru olarak modellenmesi gerektiği düşüncesi ile çeşitli yapay hücre ve ağ modelleri geliştirilmiştir. Literatürde 100’den fazla yapay sinir ağı modeli vardır [34]. Bazı araştırmacılar beynimizin güçlü düşünme, hatırlama ve problem çözme yeteneklerini bilgisayara aktarmaya çalışmışlardır [37]. Böylece yapay sinir ağı adı verilen yeni ve günümüz bilgisayarlarının algoritmik hesaplama yönteminden farklı bir bilim alanı ortaya çıkmıştır. Yapay sinir ağ yapıları, bilgi işleme yöntemindeki farklılıkları ve uygulama alanları nedeniyle çeşitli bilim dallarının da kapsam alanına girmektedir.

1982 yılında moleküller biyolojiden beyin kuramcılığına geçiş yapan bir model Hopfield [38] tarafından sunulmuştur. Kendi adıyla anılan bir ağ yapısı mevcuttur ve birçok alana uygulanmıştır.

Bu yöntem birçok araştırmacının ilgisini çekmiş ve mühendislik problemlerinin analizinde başarıyla uygulanmıştır.

Vanluchene ve Sun [39], mühendislik problemlerine yapay sinir ağı yöntemini uygulamışlardır. Değişik ağ tipleri üzerinde durmuşlar ve geriye yayılma öğrenme algoritması ile 3 ayrı yapı problemi üzerinde çalışmışlardır. Birinci problemde; birim kuvvet uygulanan basit mesnetli bir kirişin moment diyagramından yararlanarak yükün yerini belirlemeye çalışmışlardır. 10-6-6-1 yapısında bir ağ ve eğitim için 4 örnek kullanmışlardır. Girdi katmanındaki işlem elemanları; 9 eşit parçaya bölünmüş kirişte birim kuvvetten oluşan 10 moment değerini, çıktı katmanındaki işlem elemanı ise; kuvvetin uygulandığı mesafeyi göstermektedir. İkinci problemde; ön gerilmeli beton kiriş elemanın boyutlandırılması üzerinde çalışmışlardır. 5-6-6-1 yapısında bir ağ, eğitim için 21 örnek ve test için 10 örnek kullanılmıştır. Girdi katmanındaki işlem elemanları; eğilme momentini, çeliğin ön gerilme dayanımını, betonun ön gerilme dayanımını, ön gerilme oranını ve kirişin genişlik/yükseklik oranını, çıktı katmanındaki işlem elemanı; kirişin genişliğini göstermektedir. Üçüncü problemde ise; birim kuvvet uygulanan sabit mesnetli bir plakta oluşan maksimum eğilme momentinin değerini ve yerini belirlemeye çalışmışlardır. 4-6-6-6 yapısında bir ağ, eğitim için 30 örnek ve test için 12 örnek kullanmışlardır. Girdi katmanındaki işlem elemanları; plağın  $x - y$  doğrultusundaki boyutlarını ve yükün koordinatlarını, çıktı katmanındaki işlem elemanları ise;  $x - y$  doğrultusundaki eğilme momentlerini ve momentlerin koordinatlarını göstermektedir. Her 3 problemde de oldukça iyi sonuçlar almışlardır. Eğitim sürelerinin uzun olmalarına karşın, sinir ağı bir kez eğitildikten sonra sonlu elemanlar yöntemlerine göre daha hızlı sonuçlar verdiğini belirtilmiştir.

Civalek [40], depreme dayanıklı yapı tasarımını, Civalek ve diğerleri [41], çerçeve ve kirişlerin ilk üç frekansını; Civalek [42], ön gerilmeli beton elemanların zamana bağlı hasarlarını yapay sinir ağı ile belirlemeye çalışmışlardır.

Sanad ve Saka [43], ön gerilmeli beton yüksek kirişlerin nihai kayma gerilmelerini, Fonseca ve diğerleri [44], çelik kirişlerdeki kritik burkulma yüklerini; Tashakori ve Adeli [45], çelik uzay kafes yapılarda burulma etkisini dikkate alarak üç ayrı kafes yapının optimizasyonunu yapay sinir ağları ile incelemişlerdir.

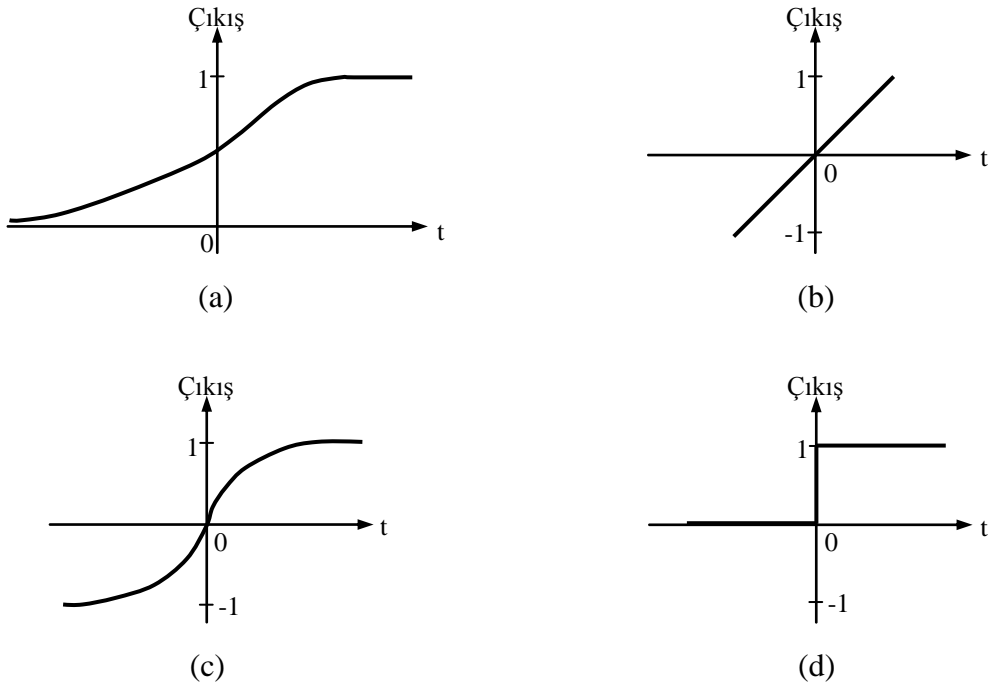
Özşahin ve diğerleri [46], iki elastik pança bastırılan elastik tabakada temas mesafelerini yapay sir ağı yöntemi ile belirlemeye çalışmışlardır

Dairesel rijit bir panç vasıtasıyla tekil yük uygulanan sürtünmesiz ve ağırlıkları ihmal edilmiş tabakalara ait elastisite probleminde oluşan maksimum değme gerilmeleri, yapay sinir ağı yöntemi ile hesaplanmış ve teorik sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Elde edilen yapay sinir ağı sonuçlarının kabul edilebilir hassaslıkta olduğu görülmüştür [47,48].

### 2.6.3. Aktivasyon Fonksiyonları

Kullanılacak olan aktivasyon fonksiyonlarının türevi alınabilir ve süreklilik arz etmesi gerekmektedir. Yapay sinir ağının kullanım amacına uygun olarak tek veya çift yönlü aktivasyon fonksiyonları da kullanılabilir [34,35].

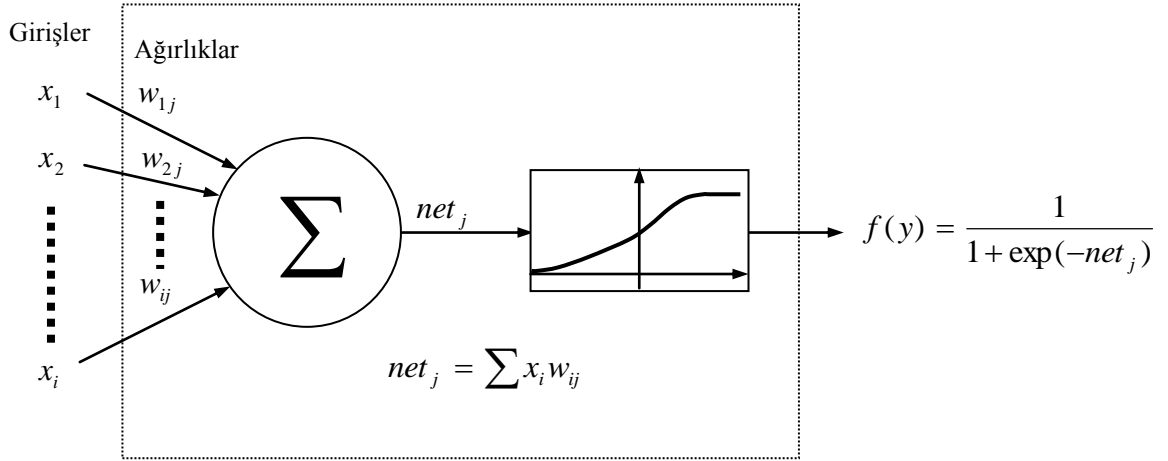
Bir işlem elemanının girdi değerine göre çıktı değerini tanımlayan aktivasyon fonksiyonlarından literatürde en çok tercih edilen 4 tanesi; sigmoid fonksiyonu, doğrusal fonksiyon, hiperbolik tanjant fonksiyonu ve keskin sınırlayıcı fonksiyon Şekil (4)'de gösterilmektedir. [34,35].



Şekil 4. Yapay sinir ağlarında en çok tercih edilen aktivasyon fonksiyonları  
a) Sigmoid, b) Doğrusal, c) Hiperbolik tanjant, d) Keskin sınırlayıcı

### 2.6.4. İşlem Elemanı (Yapay Nöron)

Bir yapay sinir ağı modelinin temel birimi, Şekil (5)'de gösterilen işlem elemanıdır. Burada, girişler dış kaynaklardan veya diğer işlem elemanlarından gelen işaretlerdir. Bu işaretler, kaynağına göre kuvvetli veya zayıf olabileceğinden ağırlık değerleri de farklıdır [35,36].



Şekil 5. İşlem elemanı (yapay nöron)

Yapay sinir ağına girilen giriş değerlerine önce toplama fonksiyonları uygulanır ve her bir işlem elemanının çıkış değeri,  $net_j$  ;

$$net_j = \sum_i x_i w_{ij} \quad (234)$$

olarak bulunur. Burada;  $x_i$ ,  $i$  'inci işlem elemanının girişi,  $w_{ij}$ ,  $i$  'inci işlem elemanından  $j$  'inci işlem elemanına olan ağırlık değerini göstermektedir. Daha sonra bu çıkış değerleri, sigmoid aktivasyon fonksiyonuna, yani öğrenme eğrisine uygulanır. Sigmoid fonksiyonu, monotonik sınırlı bir fonksiyondur ve lineer olmayan çıkışlar üretir [35]. Sonuçta çıkış değeri  $f(y)$  aşağıdaki şekilde bulunur.

$$f(y) = \frac{1}{1 + \exp(-net_j)} \quad (235)$$

Transfer (aktivasyon) fonksiyonları olarak çoğunlukla Şekil (4)'de verilen fonksiyonlardan biri kullanılır. Uygulamalarda en çok sigmoid aktivasyon fonksiyonu kullanılmaktadır. Şekil (5)'de işlem elemanın çıkışında kullanılan sigmoid aktivasyon fonksiyona göre çıkış değerinin hesaplanması gösterilmiştir. Bu işlem elemanın çıkış değeri diğer işlem elemanlarına giriş veya ağırlık çıkış değeri olabilir [34,35].

Sigmoid aktivasyon fonksiyonunun özelliğinden dolayı ağırlık çıkışı  $[0 - 1]$  arasında olmalıdır. Bu sebeple, girdi-çıkış örnek verileri ağırlık eğitilmeden önce normalize edilmesi gerekir. Ancak, girdi-çıkış örnek çiftlerinden oluşan eğitim setinin  $[0.1 - 0.9]$  gibi sigmoid aktivasyon fonksiyonunun içinde kalacak aralıkta normalize edilmesi durumunda istenilen hassasiyetteki eğitim sonuçlarına çok daha hızlı ulaşıldığı yapılan çalışmalarda görülmüştür [35]. Verileri istenilen aralık içinde kalacak şekilde normalize edebilecek birçok formül mevcuttur. Normalizasyon işlemi sonunda, eğitim seti istenilen aralıklarda değişen vektörlerden oluşur.

### 2.6.5 Yapay Sinir Ağlarının Özellikleri

Yapay sinir ağlarının hesaplama özelliklerini; paralel dağılmış yapısından, öğrenme ve genelleme yapabilme yeteneğinden aldığı söylenebilir. Bu özellikleri ile yapay sinir ağları karmaşık ve çözümlenmesi güç problemleri de çözebilme yeteneğine sahiptir. Belirtilen özellikleri sayesinde bu yöntem birçok mühendislik alanındaki problemlerde oldukça başarılı olmuştur.

Aşağıda yapay sinir ağının temel özellikleri verilmektedir [34].

- Doğrusal Olmama: Ağırlık temel işlem elemanı doğrusal değildir. Dolayısıyla işlem elemanlarının birleşmesinden meydana gelen ağırlık da doğrusal değildir ve bu özellik tüm ağa yayılmış durumdadır. Bu özelliği ile yapay sinir ağları, doğrusal olmayan karmaşık problemlere çözüm getirmektedir.
- Öğrenme: Buradaki “öğrenme” teriminin anlamı; ilgili problemdeki girdi-çıkış ilişkisini en güzel tanımlayacak optimum ağırlıkların ve biasların (yakınsamalar) bulunmasıdır. Yapay sinir ağı, örneklerden oluşan eğitim seti ile öğrenmeye çalışır ve öğrendikten sonra farklı problemlere çıkış üretir.
- Genelleme: Ağırlık öğrendikten sonra eğitim sonunda karşılaşmadığı problemler için de belirtilen tepkiyi üretme kabiliyetine sahiptir. Ağırlık hesaplamasında hafızalar birleşiktir. Yani, eğitilmiş ağa girişin sadece bir kısmı verilse bile ağırlık, hafızadan bu girişe en yakını seçerek tam bir giriş verisi alıyormuş gibi kabul eder ve buna uygun bir çıkış değeri üretir.

Veri ağı, eksik, bozuk veya daha önce hiç karşılaşmadığı şekilde verilse bile ağ kabul edilebilir en uygun çıkışı üretecektir.

- Uyarlanabilirlik: Ağırlık ve bias değerleri, uygulanan probleme göre değiştirilir. Yani, belirli bir problemi çözmek amacıyla eğitilen ağ, problemdeki değişimlere göre tekrar eğitilebilir. Değişimler devamlı ise gerçek zamanlı da eğitime devam edilebilir.
- Dağıtılmış Bileşik Hafıza: Yapay sinir ağlarının en önemli özelliklerinden biri de bilgiyi depolamalarıdır. Ağın hesaplamalarında bilgi, ağırlıklar üzerine dağıtılmıştır. Bağlantıların ağırlıkları, yapay sinir ağının hafıza birimidir. Bu ağırlıklar ağın o andaki sahip olduğu bilgiyi veya uygulanan örneklerden öğrenmiş olduğu davranışı verir.
- Hata Toleransı: Ağ, çok sayıda işlem elemanların bağlantısı ile paralel dağılmış bir yapıya sahiptir ve ağın sahip olduğu bilgi, ağdaki tüm bağlantılara dağılmıştır. Giriş verisinde bulunabilecek herhangi bir hata, bütün ağırlıklar üzerine dağıtıldığından dolayı hata etkisi azaltılabilir.
- Paralel İşlem Yapma: Yapay sinir ağları, paralel yapısı sayesinde ağın hızlı bilgi işleme yeteneğini ve denetim gibi gerçek zamanlı uygulamalarda kullanımı artırır.

### **2.6.6. Yapay Sinir Ağlarının Sınıflandırılması**

Yapay sinir ağları, genel olarak birbirleri ile bağlantılı işlem elemanlarından oluşurlar. Her bir işlem elemanı arasındaki bağlantıların yapısı ağın yapısını belirler. İstenilen hedefe ulaşmak için bağlantıların nasıl değiştirileceği öğrenme algoritması tarafından belirlenir. Kullanılan bir öğrenme kuralına göre, hatayı istenilen orana indirecek şekilde, ağın ağırlıkları değiştirilir. Yapay sinir ağları, yapılarına ve öğrenme algoritmalarına göre sınıflandırılırlar.

#### **2.6.6.1. Yapay Sinir Ağlarının Yapılarına Göre Sınıflandırılması**

Yapay sinir ağları yapılarına göre; ileri beslemeli (feedforward) ve geri beslemeli (feedback) ağlar olmak üzere iki şekilde sınıflandırılırlar [34].

- İleri Beslemeli Ağlar : İleri beslemeli bir ağda, işlem elemanları genellikle katmanlara ayrılmışlardır. İşaretler, giriş katmanından çıkış katmanına doğru tek yönlü bağlantılarla iletilir. İşlem elemanları, bir katmandan diğer bir katmana bağlantı kurarlarken, aynı katman içerisinde bağlantıları bulunmaz.

- Geri Beslemeli Ağlar : Geri beslemeli ağda, çıkış ve ara katmanlardaki çıkışların, giriş birimlerine veya önceki ara katmanlara geri beslendiği bir ağ yapısıdır. Böylece, girişler hem ileri yönde hem de geri yönde aktarılmış olur. Bu çeşit sinir ağlarının dinamik hafızaları vardır ve bir andaki çıkış hem o andaki hem de önceki girişleri yansıtır.

#### **2.6.6.2. Yapay Sinir Ağlarının Öğrenme Algoritmalarına Göre Sınıflandırılması**

Öğrenme; gözlem, eğitim ve hareketin doğal yapıda meydana getirdiği davranış değişikliği olarak tanımlanmaktadır. Genel olarak üç öğrenme yönteminden ve bunların uygulandığı değişik öğrenme kurallarından söz edilebilir. Bu öğrenme kuralları aşağıda açıklanmaktadır [34].

- Danışmanlı Öğrenme : Bu öğrenme yönteminde ağa örnek olarak doğru çıkışlar verilir. İstenilen ve gerçek çıktı arasındaki farka (hataya) göre işlem elemanları arasındaki bağlantıların ağırlıkları en uygun çıkışı elde etmek için sonradan düzenlenebilir. Bu nedenle danışmanlı öğrenme algoritmasının bir öğretmene veya danışmana ihtiyacı vardır. Genelleştirilmiş delta kuralı veya geriye yayılım (backpropagation) algoritması danışmanlı öğrenme algoritmalarına örnek olarak verilebilir.
- Danışmansız Öğrenme : Bu öğrenme yönteminde ağa girişte verilen örnekten elde edilen çıkış bilgisine göre, sınıflandırma kurallarını kendi kendine geliştirmektedir. Bu öğrenme algoritmalarında istenilen çıkış değerinin bilinmesine gerek yoktur. Öğrenme süresince sadece giriş bilgileri verilir. Ağ daha sonra bağlantı ağırlıklarını aynı özellikleri gösteren örnekler oluşturmak üzere ayarlar.
- Takviyeli Öğrenme : Bu öğrenme yönteminin özellikleri danışmanlı öğrenme yöntemine yakındır. Hedef çıktıyı vermek için bir öğretmen yerine, burada ağa bir çıkış verilmemekte fakat elde edilen çıkışın verilen girişe karşılık iyiliğini değerlendiren bir kıstas kullanılmaktadır.

#### **2.6.7. Yapay Sinir Ağlarının Kullanılmasındaki Amaç**

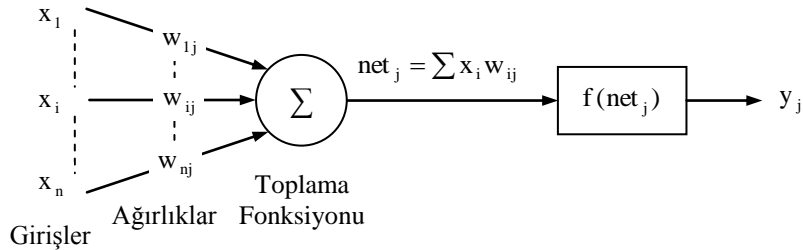
Yapay sinir ağları, pek çok araştırmacının ilgisini çekmiş ve birçok mühendislik problemlerinin çözümünde başarıyla uygulanmıştır. Ağın eğitim süresinin uzun olmasına karşın, ağ bir kez eğitildikten sonra elde edilen test sonuçlarının kullanılan yöntemlere göre daha hızlı çözüme ulaşabiliyor olması, bu yöntemin en önemli özelliğidir. Mevcut birçok



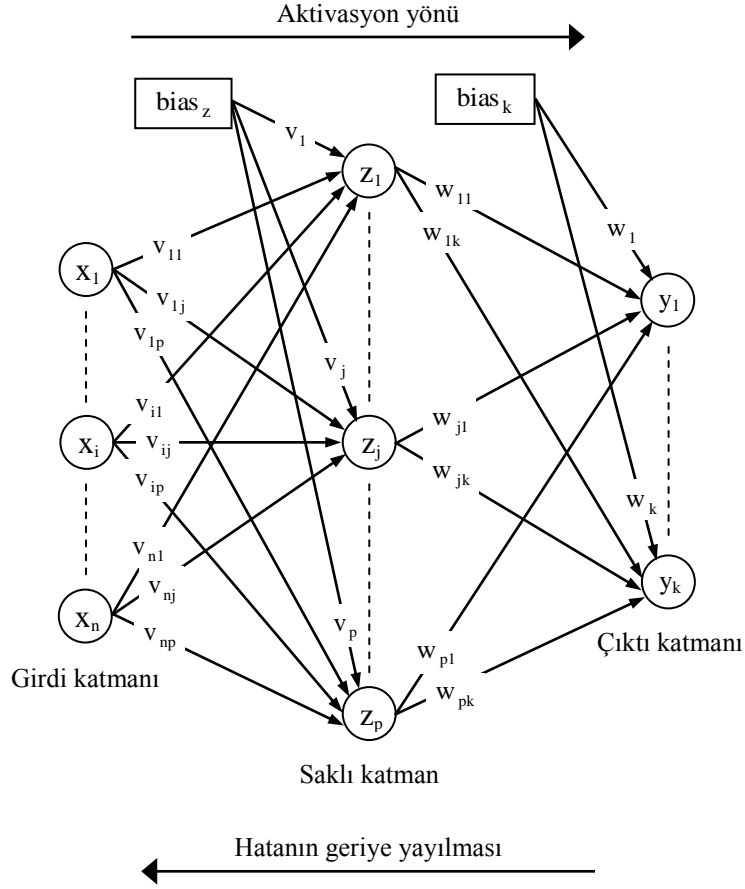
problemin ampirik formülleri; deneysel sonuçlardan ve gözlemlerden yararlanılarak oluşturulmaktadır ve bazı problemlerin ampirik formülleri henüz gerçekçi bir şekilde oluşturulamamaktadır. Deneysel sonuçlar ile eğitilen sinir ağlarının test sonuçlarının; ampirik formüller ile karşılaştırıldıklarında, ampirik formüllere göre daha gerçekçi sonuçlar verdiği birçok çalışmada görülmektedir. Bu tez çalışmasındaki amaç; geriye yayılma öğrenme algoritması kullanılan bir yapay sinir ağı ile iki elastik çeyrek düzleme oturan ve rijit bir panç ile bastırılan elastik tabaka problemini incelemektir. Yapay sinir ağları için değişik bilgisayar programları bulunmaktadır ve bu yöntem uygulanarak elde edilen sonuçlar teorik sonuçlar ile karşılaştırılacaktır. Böylece; yeterli güvenilirlikte sonuçlar verebilen ve zaman açısından tasarruf sağlayan yapay sinir ağları yöntemi ile mühendislik alanında bilime katkı yapmaya çalışılacaktır.

### 2.6.8 Yapay Sinir Ağı Yöntemi ve Algoritması

Yapay sinir ağları, temel olarak beynin sinir sistemindeki nöronların basitleştirilmiş matematiksel modelinin oluşturulmasına dayanmaktadır ve bilgisayar programı olarak yazılırlar. Ağ yapısının temel birimi yapay nöron (işlem elemanı)'dır ve katmanlar içindeki işlem elemanlarının diğer katmanlardaki işlem elemanları ile bağlanmasıyla oluşur. Burada, girişler dışarıdan veya bir önceki katmandaki işlem elemanlarında gelir. Bu giriş değerleri farklı olabileceğinden ağırlıkları da farklıdır. Bir işlem elemanı;  $n$  tane  $x_i$  giriş değerlerinin,  $w_{ij}$  ağırlıkları ile çarpılarak toplanmakta ve bu toplam bir aktivasyon fonksiyonundan geçirilerek  $y_j$  çıkış değerleri hesaplanmaktadır. Şekil (6)'da işlem elemanı ve matematiksel modeli ile Şekil (7)'de bir adet saklı katmandan oluşan çok katmanlı bir yapay sinir ağı yapısı gösterilmektedir [35].



Şekil 6. İşlem elemanı ve matematiksel modeli



Şekil 7. Bir adet saklı katmandan oluşan çok katmanlı yapay sinir ağı yapısı

Katmanlardaki işlem elemanlarının kendi aralarında bir bağlantı yoktur, ancak bir katmandaki her bir işlem elemanı, kendisinden bir ileri katmandaki her bir işlem elemanına ayrı ayrı bağlıdır ve bu katmanın girişini oluşturmaktadır.

Girdi ve çıktı katmanlarındaki işlem elemanı sayısı probleme göre değişir. Saklı katman ise, yapay sinir ağının en önemli kısmıdır ve bütün hesap işlemleri burada yapılır. Bu katmandaki işlem elemanı sayısında kesin bir sınırlama yoktur ve genellikle deneme-yanılma yolu ile bulunur. Saklı katmandaki işlem elemanı sayısının gereğinden az olması durumunda ağ, iyi öğrenemez ve test aşamasında oldukça hatalı sonuçlar verir. Diğer taraftan, işlem elemanı sayısının gereğinden fazla olması durumunda ise eğitim süresinin uzamasının yanında ağ, fazla eğitilmiş olur ve yine test aşamasında hatalı sonuçlar verir. Asıl amaç, test aşamasında en iyi sonuçlar veren en küçük ağ yapısını bulmaktır.

Geriye yayılım öğrenme algoritması ile eğitim 3 safhadan oluşur. Bunlar; eğitim setinin ileri beslenmesi, hatanın geriye yayılması ile ağırlık ve bias değerlerinin ayarlanmasıdır [35,36].

Girdi tabakasındaki her bir işlem elemanı,  $(x_i, i = 1, \dots, n)$ , ağırlıklı çarpımlarını saklı katmandaki her bir işlem elemanına iletir. Saklı katmanındaki her bir işlem elemanı,  $(z_j, j = 1, \dots, s)$ , kendisine gelen ağırlıklı çarpımları toplar ve bu toplam,  $z_{-in_j}$  ;

$$z_{-in_j} = \sum_{i=1}^n x_i v_{is} + bias_z \quad (236)$$

şeklinde hesaplanır. Burada;  $v_{ij}$ , girdi katmanındaki işlem elemanlarından saklı katmanındaki işlem elemanlarına doğru olan ağırlıklar,  $bias_z$  ise saklı katmandaki her bir işlem elemanına ait bias değerleridir. Bias, çarpım katsayısı 1 olan bir ağırlık gibi davranır. Bias, ekstra serbestlik sağlayıp yakınsamaya yardımcı olmaktadır ama her ağda kullanılmak zorunda değildir. Sonra saklı katmandaki her bir işlem elemanına aktivasyon fonksiyonu uygulanarak saklı katmandaki her bir işlem elemanının değeri bulunur.

$$z_j = f(z_{-in_j}) \quad (237)$$

Saklı katmanındaki her bir işlem elemanı, bu  $z_j$  ağırlıklı çarpım değerlerini çıkış katmandaki her bir işlem elemanına iletir. Çıktı katmanındaki her bir işlem elemanı  $(y_k, k = 1, \dots, s)$ , kendisine gelen ağırlıklı çarpımları toplar ve bu toplam,  $y_{-in_k}$  ;

$$y_{-in_k} = \sum_{j=1}^s z_j w_{jk} + bias_k \quad (238)$$

şeklinde hesaplanır. Burada;  $w_{jk}$ , saklı katmanındaki işlem elemanlarından çıktı katmanındaki işlem elemanlarına doğru olan ağırlıklar,  $bias_y$  ise saklı katmandaki her bir işlem elemanına ait bias değerleridir. Bundan sonra çıktı katmanındaki her bir işlem elemanına aktivasyon fonksiyonu uygulanarak çıktı katmanındaki her bir işlem elemanının değeri bulunur. Bu değerler aynı zamanda yapay sinir ağı tarafından hesaplanan çıkış değerleridir.

$$y_k = f(y_{-in_k}) \quad (239)$$

Buraya kadar olan kısım ileri besleme safhasıdır [35,36].

Ağ tarafından hesaplanan çıkış katmanındaki her bir işlem elemanına  $(y_k, k = 1, \dots, m)$  karşılık gelen gerçek çıktı  $(g_k, k = 1, \dots, m)$  değerleri ile karşılaştırılarak hata hesaplanır. Hata, istenilen değerden büyükse, aktivasyon fonksiyonunun türevi kullanılarak çıktı katmanındaki her bir işlem elemanının hata terimi,  $\delta_k$ ;

$$\delta_k = (g_k - y_k) f'(y_{-in_k}) \quad (240)$$

ifadesi ile hesaplanır.

Çıktı katmanındaki her bir işlem elemanı,  $\delta_k$  hata değerini saklı katmandaki her bir işlem elemanına iletir. Çıktı katmanındaki her bir işlem elemanı, kendisine gelen ağırlıklı hata çarpımlarını toplar ve bu değer,  $\delta_{-in_j}$ ;

$$\delta_{-in_j} = \sum_{k=1}^m \delta_k w_{jk} \quad (241)$$

olarak bulunur. Sonra aktivasyon fonksiyonunun türevi kullanılarak saklı katmanındaki her bir işlem elemanının hata terimi,  $\delta_j$ ;

$$\delta_j = \delta_{-in_j} f'(z_{-in_j}) \quad (242)$$

ifadesi ile hesaplanır.

Buraya kadar olan kısım hatanın geriye yayılması safhasıdır [35,36].

Hatanın geriye yayılması safhasında bir taraftan da yeni ağırlık ve bias değerleri hesaplanır. Saklı katmanındaki işlem elemanları ile çıktı katmanındaki işlem elemanları arasındaki her bir ağırlık, kendi ağırlık düzeltme terimini  $\Delta w_{jk}$  ve çıktı katmanındaki işlem elemanına ait bias değerini  $bias_k$ ,

$$\Delta w_{jk} = \alpha \delta_k z_j \quad (243)$$

$$bias_k = \alpha \delta_k \quad (244)$$

değerleri elde edilir. Bu ifadelerdeki  $\alpha$  öğrenme oranıdır. Öğrenme oranı ağırlıklardaki değişimin oranını belirler ve genellikle  $(0 - 1)$  aralığındadır. Düşük öğrenme oranları ağırlık öğrenme süresini artırırken yüksek öğrenme oranları ağırlıklarda fazla değişimler

yaptığından optimum ağırlık değerleri belirlenemeyebilir. Yapılan çalışmalarda en uygun genelleme yapabilen ağ yapılarında öğrenme oranının 0.5 civarındaki olduğu belirtilmektedir [35].

Benzer şekilde; girdi katmanındaki işlem elemanları ile saklı katmanındaki işlem elemanları arasındaki her bir ağırlık, kendi ağırlık düzeltme terimi  $\Delta v_{jk}$  ve çıktı katmanındaki işlem elemanlarına ait bias değerini  $bias_z$ ,

$$\Delta v_{ij} = \alpha \delta_j x_i \quad (245)$$

$$bias_z = \alpha \delta_j \quad (246)$$

ifadeleri ile elde edilir. Sonuç olarak bir sonraki iterasyonda,  $(t + 1)$ 'inci, kullanılacak ağırlık ve bias değerleri;

$$w_{jk}(t+1) = w_{jk}(t) + \Delta w_{jk} \quad (247)$$

$$w_k(t+1) = w_k(t) + \alpha \delta_k \quad (248)$$

$$v_{ij}(t+1) = v_{ij}(t) + \Delta v_{ij} \quad (249)$$

$$v_j(t+1) = v_j(t) + \alpha \delta_j \quad (250)$$

formülleri ile hesaplanır.

Buraya kadar olan kısım ağırlıkların ve biasların ayarlanması safhasıdır [35,36].

Eğitimi durdurmak için değişik yöntemler kullanılabilir. Bu çalışmada, eğitim setindeki bütün örneklerin her birinin gerçek değerleri ile yapay sinir ağıyla hesaplanan değerlerinin rölatif hatasının kullanıcı tarafından kabul edilebilir seviyenin altına gelinceye kadar eğitim devam etmektedir. Hata oranı;

$$E = \frac{g_k - y_k}{g_k} \quad (251)$$

formülü ile hesaplanmaktadır. Bu ifadedeki  $g_k$  ile  $y_k$  sırasıyla gerçek değer ile yapay sinir ağıyla hesaplanan değerdir.

### 3. BULGULAR

#### 3.1 Giriş

Bu bölümde, bir önceki bölümde teorik olarak çözümü verilmiş olan problemin; değişik dış yük, malzeme ve geometri değerlerine göre oluşan temas mesafeleri ve temas gerilmeleri incelenmiş, sayısal uygulamalardan elde edilen grafiklere ve tablolara ait bulgular tartışılmıştır. Ayrıca yapay sinir ağı yöntemi ile elde edilen panç-tabaka temas mesafeleri ve tabaka-çeyrek düzlem temas mesafelerine ait bulgular tartışılmıştır.

Tablolarda ve grafiklerde geçen bazı ifadeler ve boyutsuz büyüklükler daha önceki bölümlerde ilk geçtikleri yerde tanımlanmış olmakla beraber toplu olarak tekrar aşağıda verilmiştir.

Bu ifadelerde,  $h$  ve  $\mu_1$  değerleri birden fazla değişkeni etkilediğinden sabit tutulmuştur.

$a / h$  : Panç-tabaka temas mesafesinin yarısının, tabaka yüksekliğine oranı (panç-tabaka temas oranı)

$b / h$  : Tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesinin yarısının, tabaka yüksekliğine oranı (tabaka-çeyrek düzlem temas oranı)

$c / h$  : Çeyrek düzlemin  $y$  simetri eksenine mesafesinin, tabaka yüksekliğine oranı (açıklık oranı)

$\mu_1 / (P/h)$  : Dış yük ile tabaka kayma modülüne bağlı oran (yük oranı)

$R / h$  : Dairesel panç yarıçapının, tabaka yüksekliğine oranı (panç yarıçap oranı)

$\mu_1 / \mu_2$  : Tabaka ile çeyrek düzlem kayma modüllerinin oranı (kayma modülleri oranı)

$p_1(x) / (P/h)$  : Panç-tabaka temas mesafesi boyunca gerilme dağılımının, dış yüke bağlı oranı

$p_2(x) / (P/h)$  : Tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi boyunca gerilme dağılımının, dış yüke bağlı oranı

$\kappa_1$  : Tabaka malzeme özelliği

$\kappa_2$  : Çeyrek düzlem malzeme özelliği

### 3.2. Temas Mesafeleri ve Temas Gerilmeleri

Panç-tabaka temas mesafesi ve bu mesafe boyunca gerilme dağılımı ile tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi ve bu mesafe boyunca gerilme dağılımı ayrı ayrı incelenmiştir.

İlk olarak Tablo 2 ile Tablo 3’de sırasıyla çeşitli panç yarıçapı ve dış yük değerleri durumunda, panç-tabaka temas mesafesi ile tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi incelenmiş ve Şekil (8,9) ile Şekil (10,11)’da değişimler grafik olarak verilmiştir. Burada panç yarıçapı arttıkça, panç-tabaka temas mesafesi ve tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi artmaktadır. Yük oranının artması (dış yük değerinin azalması) durumunda da panç-tabaka temas mesafesi ve tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi azalmaktadır.

Tablo 4 ile Tablo 5’de  $\kappa_1$  ve  $\kappa_2$  malzeme özellikleri birbirlerine eşit olarak değiştirilerek sırasıyla çeşitli açıklık mesafesi ve kayma modülleri oranı değerleri durumunda panç-tabaka temas mesafesi ile tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi incelenmiş ve Şekil (12,13) ile Şekil (14,15)’da değişimler grafik olarak verilmiştir. Burada açıklık mesafesi arttıkça panç-tabaka temas mesafesi artmasına rağmen tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi azalmaktadır. Kayma modülleri oranının artması durumunda ise panç-tabaka temas mesafesi ve tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi azalmaktadır.

Şekil (16,17) ile Şekil (18,19)’da sırasıyla çeşitli dış yük ve panç yarıçapı değerleri durumunda, panç-tabaka temas mesafesi ve tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi boyunca gerilme dağılımları incelenmiştir. Yük oranı arttıkça (dış yük değeri azaldıkça) panç-tabaka temas mesafesi ile tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi boyunca gerilmeler artmaktadır. Açıklık mesafesinin artması durumunda ise panç-tabaka temas mesafesi ile tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi boyunca gerilmelerin azaldığı görülmektedir.

Şekil (20,21) ile Şekil (22,23)’de sırasıyla çeşitli açıklık mesafesi ve kayma modülleri oranı değerleri durumunda, panç-tabaka temas mesafesi ve tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi boyunca gerilme dağılımları incelenmiştir. Açıklık mesafesi arttıkça panç-tabaka temas mesafesi boyunca gerilmeler azalıyor iken tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi boyunca gerilmelerin arttığı görülmektedir. Kayma modülleri oranının artması durumunda ise panç-tabaka temas mesafesi ile tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi boyunca gerilmelerin arttığı belirlenmiştir.

Şekil (24,25) ile Şekil (26,27)'de sırasıyla çeşitli  $\kappa_1$  ve  $\kappa_2$  malzeme özelliklerinin değişik değerleri durumunda, pañç-tabaka temas mesafesi ve tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi boyunca gerilme dağılımları incelenmiştir.

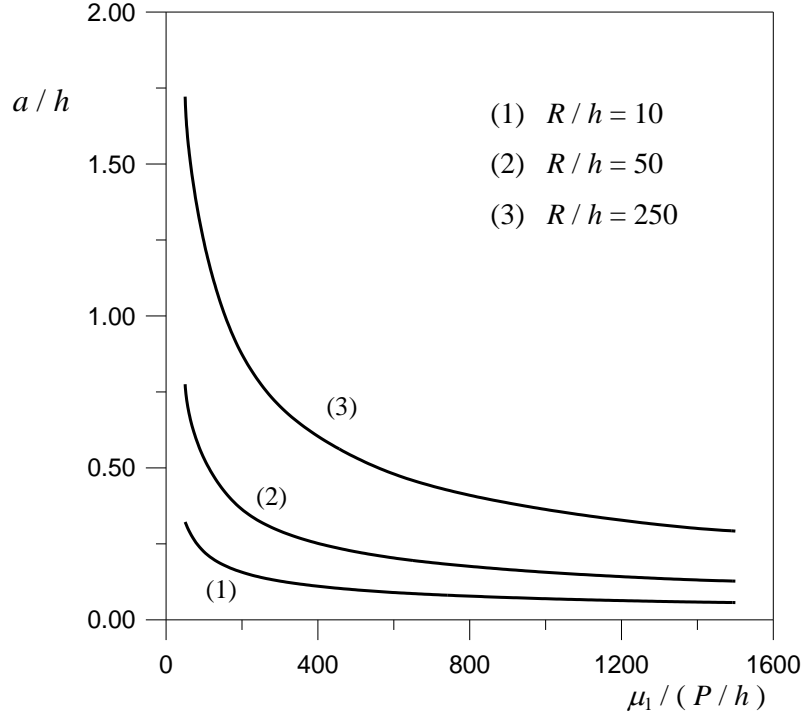
Tablo 2. Pañç yarıçapına bağılı olarak, dış yüke göre temas mesafeleri ( $c/h = 0.2$ ,  $\mu_1/\mu_2 = 2$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ )

$\mu_1 / (P/h)$	$R / h = 10$		$R / h = 50$		$R / h = 250$	
	$a / h$	$b / h$	$a / h$	$b / h$	$a / h$	$b / h$
50	0.321737	1.007224	0.775077	1.154986	1.721993	1.831262
100	0.223263	0.99205	0.530139	1.058554	1.240961	1.441568
200	0.156233	0.984898	0.362747	1.015218	0.872961	1.204706
300	0.127103	0.982582	0.291956	1.002042	0.702163	1.122066
600	0.089543	0.980302	0.203118	0.989632	0.479427	1.043562
1000	0.069256	0.979398	0.156233	0.984898	0.362747	1.015218
1500	0.056505	0.978948	0.127103	0.982582	0.291956	1.002042

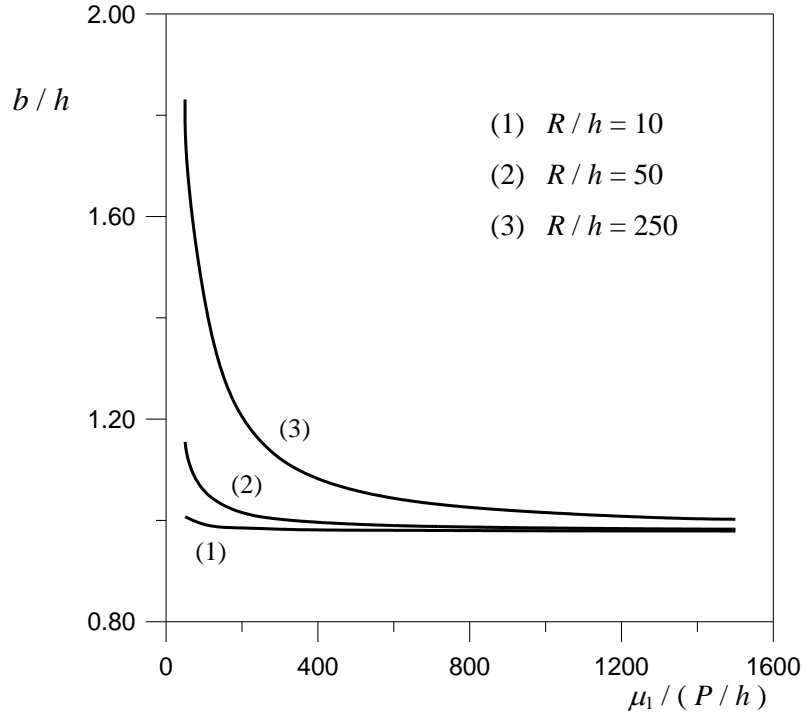
Tablo 3. Dış yüke bağılı olarak, pañç yarıçapına göre temas mesafeleri ( $c/h = 0.2$ ,  $\mu_1/\mu_2 = 2$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ )

$R / h$	$\mu_1 / (P/h) = 100$		$\mu_1 / (P/h) = 250$		$\mu_1 / (P/h) = 500$	
	$a / h$	$b / h$	$a / h$	$b / h$	$a / h$	$b / h$
10	0.223263	0.99205	0.139437	0.983506	0.098163	0.980754
20	0.321737	1.007224	0.198877	0.989154	0.139437	0.983506
50	0.530139	1.058554	0.321737	1.007224	0.223263	0.99205
100	0.775077	1.154986	0.468777	1.040622	0.321737	1.007224
250	1.240961	1.441568	0.775077	1.154986	0.530139	1.058554
500	1.721993	1.831262	1.111449	1.35021	0.775077	1.154986
1000	2.358689	2.40722	1.552739	1.68723	1.111449	1.35021

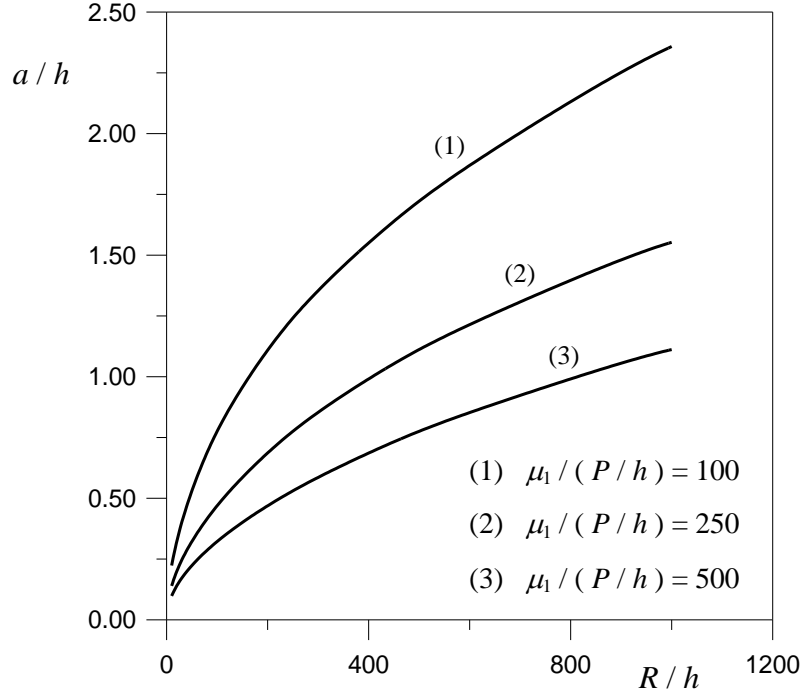




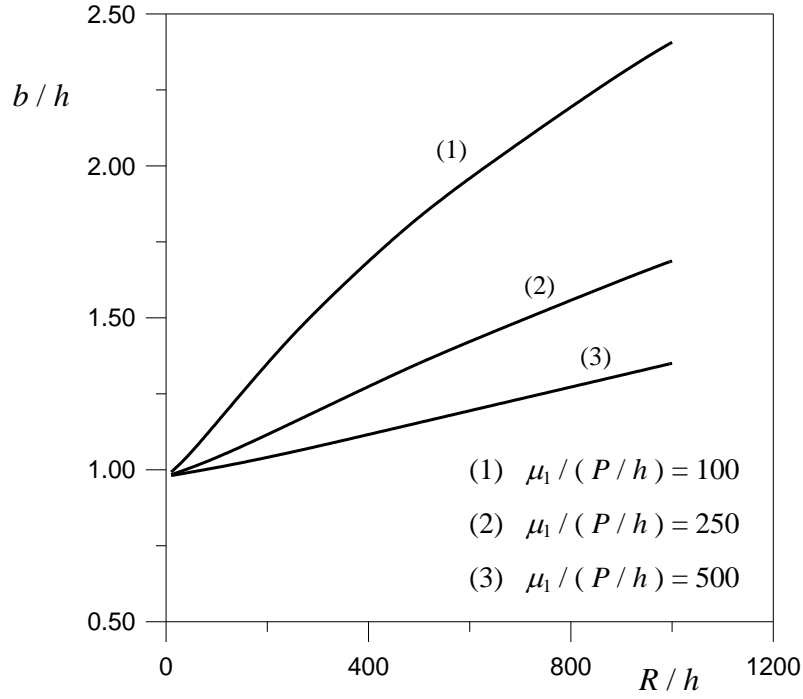
Şekil 8. Panç yarıçapına bağlı olarak, dış yüke göre panç-tabaka temas mesafesi ( $c/h = 0.2$ ,  $\mu_1/\mu_2 = 2$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ )



Şekil 9. Panç yarıçapına bağlı olarak, dış yüke göre tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi ( $c/h = 0.2$ ,  $\mu_1/\mu_2 = 2$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ )



Şekil 10. Dış yüke bağlı olarak, panç yarıçapına göre panç-tabaka temas mesafesi ( $c/h = 0.2$ ,  $\mu_1/\mu_2 = 2$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ )



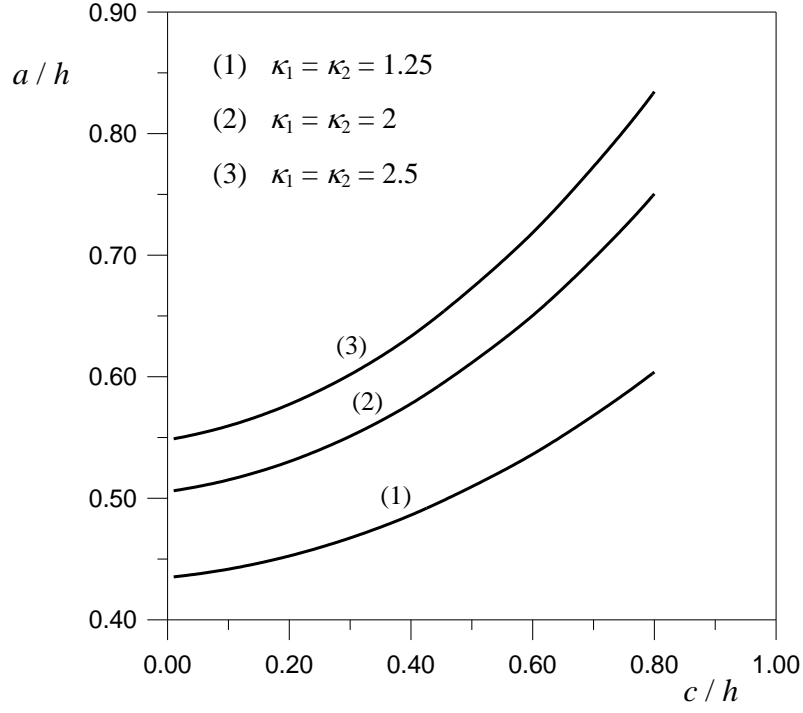
Şekil 11. Dış yüke bağlı olarak, panç yarıçapına göre tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi ( $c/h = 0.2$ ,  $\mu_1/\mu_2 = 2$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ )

Tablo 4. Malzeme özelliklerine bağlı olarak, açıklığa göre temas mesafeleri ( $\mu_1/(P/h)=500$ ,  $R/h=250$ ,  $\mu_1/\mu_2=2$ )

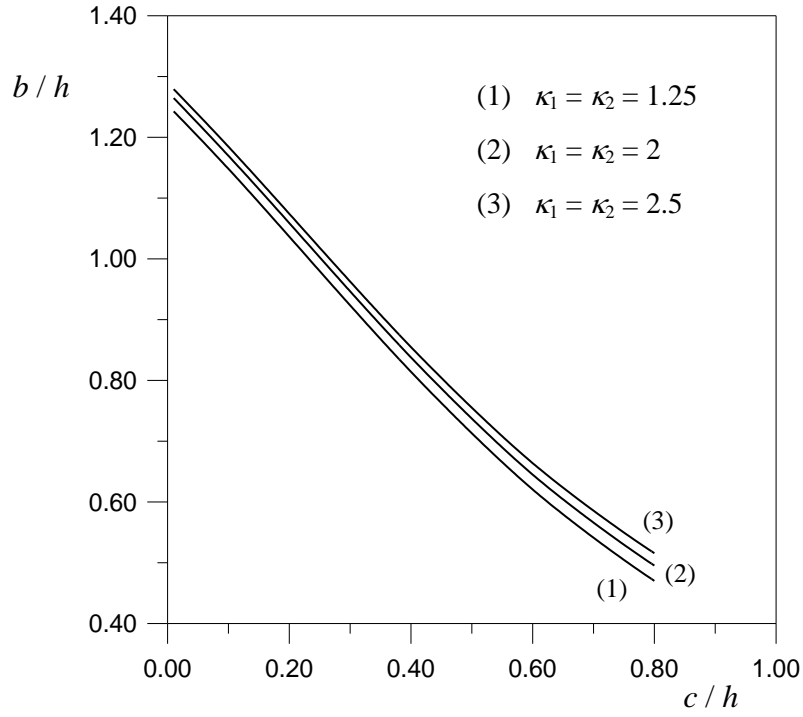
$c/h$	$\kappa_1 = \kappa_2 = 1.25$		$\kappa_1 = \kappa_2 = 2$		$\kappa_1 = \kappa_2 = 2.5$	
	$a/h$	$b/h$	$a/h$	$b/h$	$a/h$	$b/h$
0.01	0.435310	1.242772	0.506125	1.26451	0.548874	1.279178
0.1	0.441652	1.147842	0.515039	1.169654	0.559439	1.18452
0.2	0.452443	1.036254	0.530139	1.058554	0.577235	1.07398
0.3	0.467257	0.92323	0.550960	0.94622	0.601733	0.962428
0.4	0.486111	0.813848	0.577732	0.837508	0.633235	0.854578
0.6	0.536092	0.620398	0.650211	0.64499	0.718404	0.663716
0.8	0.603816	0.47005	0.750341	0.49532	0.834502	0.51552

Tablo 5. Malzeme özelliklerine bağlı olarak, kayma modülleri oranına göre temas mesafeleri ( $\mu_1/(P/h)=500$ ,  $R/h=250$ ,  $c/h=0.2$ )

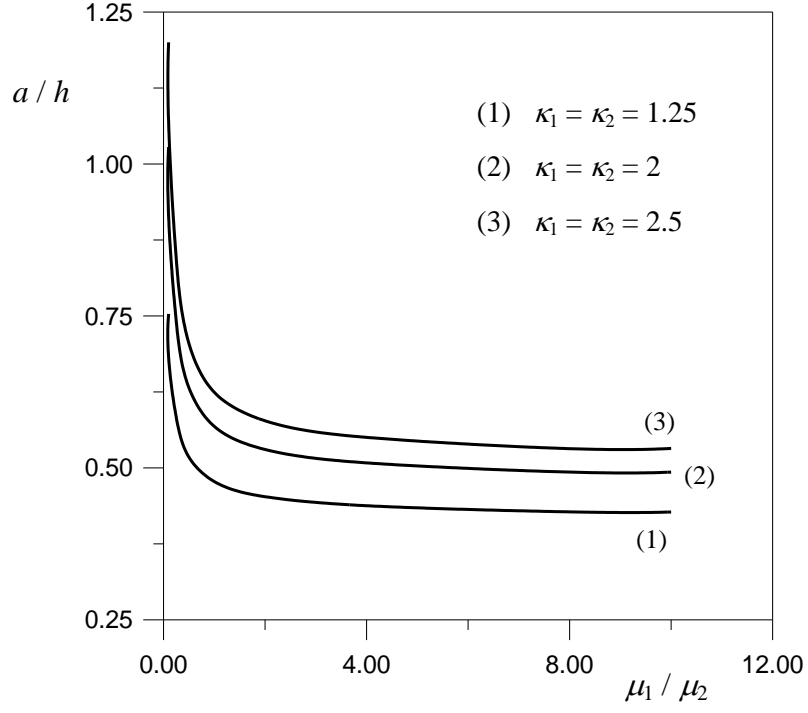
$\mu_1/\mu_2$	$\kappa_1 = \kappa_2 = 1.25$		$\kappa_1 = \kappa_2 = 2$		$\kappa_1 = \kappa_2 = 2.5$	
	$a/h$	$b/h$	$a/h$	$a/h$	$b/h$	$a/h$
0.1	0.753205	2.708426	1.027857	2.782042	1.200307	2.846494
0.25	0.582929	1.969268	0.740392	2.004906	0.843301	2.03457
0.5	0.517318	1.56053	0.631450	1.586788	0.704220	1.606976
1	0.477243	1.253494	0.567944	1.276442	0.624127	1.293012
2	0.452443	1.036254	0.530139	1.058554	0.577235	1.07398
4	0.437562	0.896356	0.508040	0.91875	0.550166	0.93384
10	0.427251	0.796132	0.492978	0.818658	0.531870	0.833576



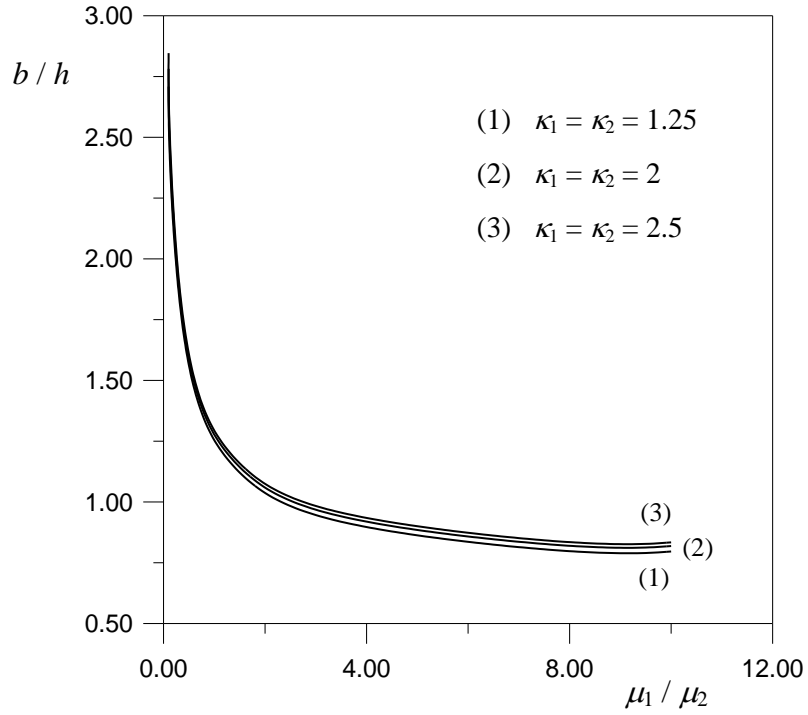
Şekil 12. Malzeme özelliklerine bağlı olarak, açıklığa göre panç-tabaka temas mesafesi ( $\mu_1/P/h = 500$ ,  $R/h = 250$ ,  $\mu_1/\mu_2 = 2$ )



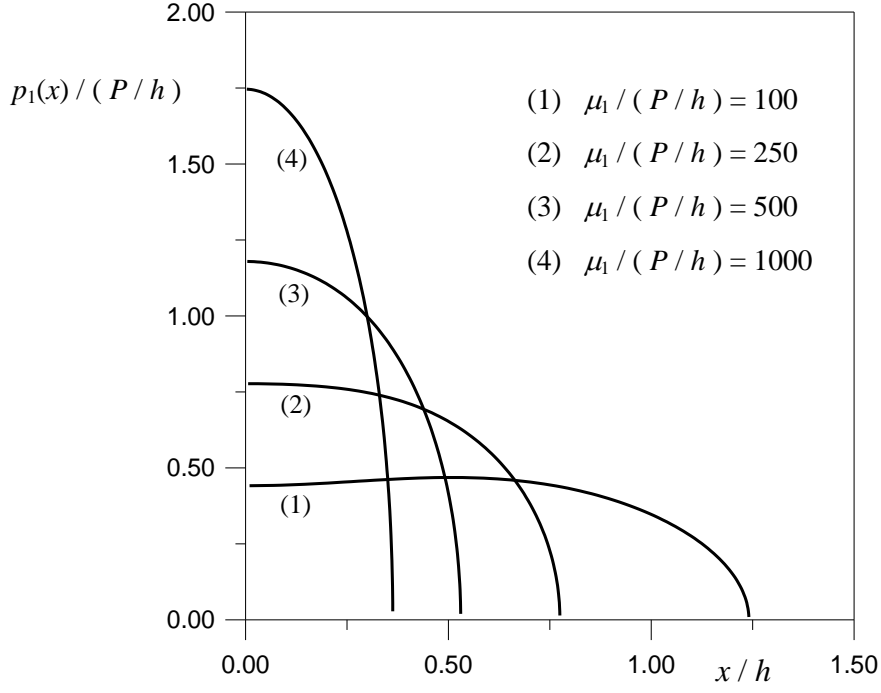
Şekil 13. Malzeme özelliklerine bağlı olarak, açıklığa göre tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi ( $\mu_1/P/h = 500$ ,  $R/h = 250$ ,  $\mu_1/\mu_2 = 2$ )



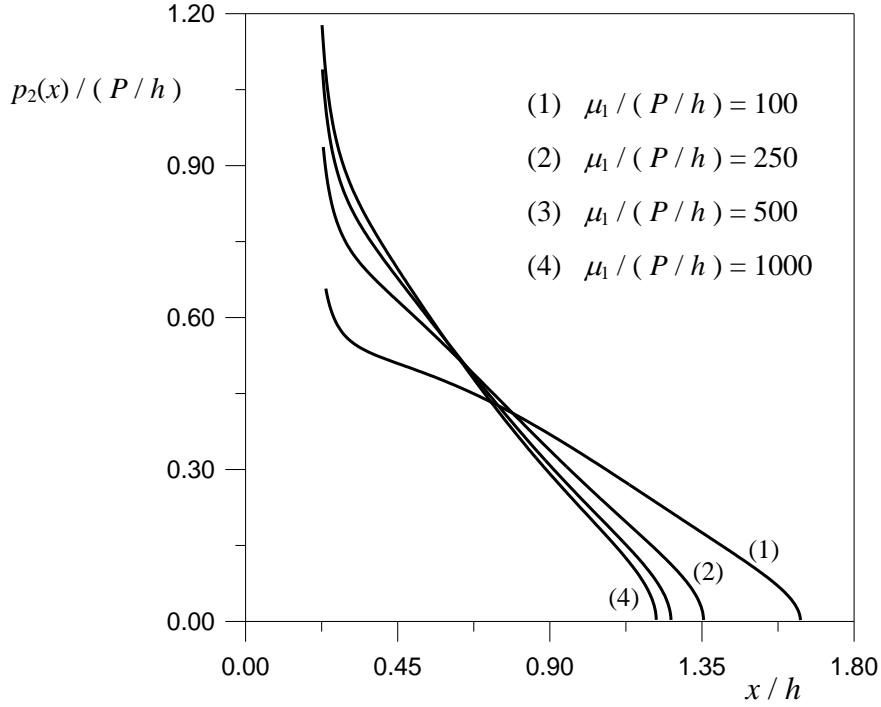
Şekil 14. Malzeme özelliklerine bağlı olarak, kayma modülleri oranına göre panç-tabaka temas mesafesi ( $\mu_1/(P/h) = 500$ ,  $R/h = 250$ ,  $c/h = 0.2$ )



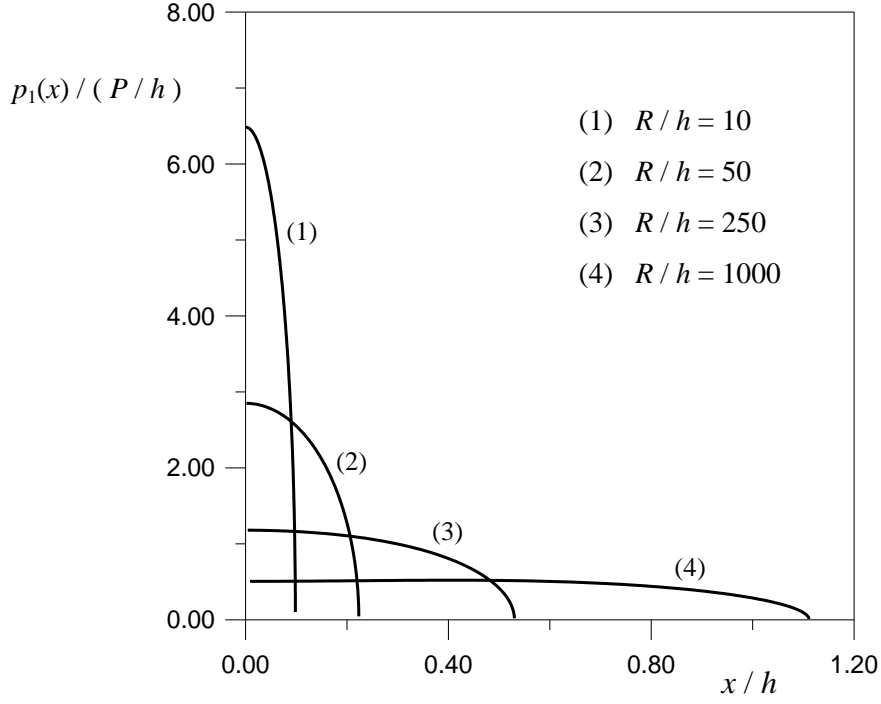
Şekil 15. Malzeme özelliklerine bağlı olarak, kayma modülleri oranına göre tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi ( $\mu_1/(P/h) = 500$ ,  $R/h = 250$ ,  $c/h = 0.2$ )



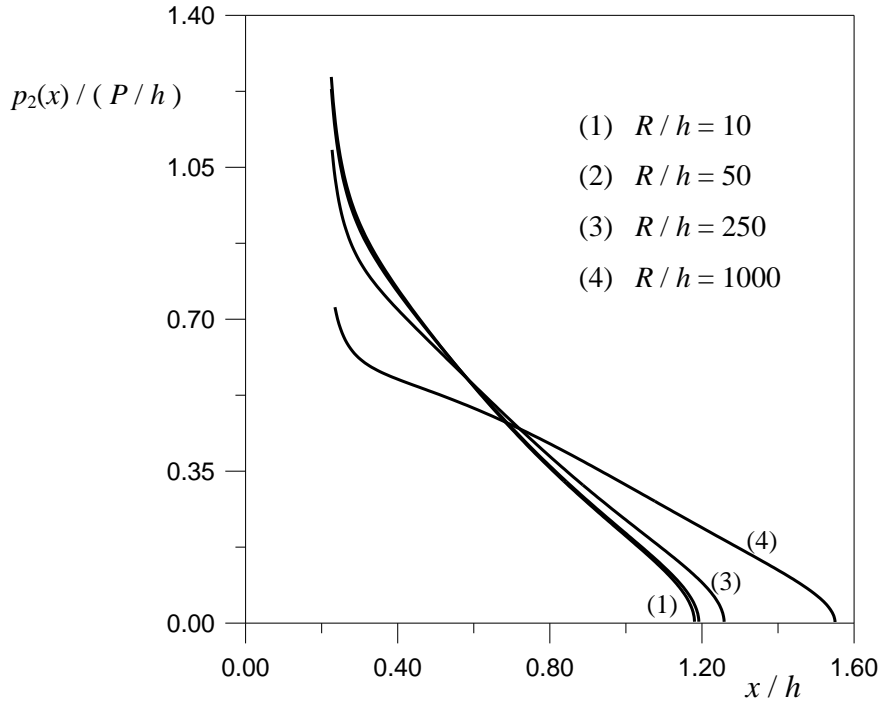
Şekil 16. Dış yüke bağlı olarak, pañç-tabaka temas mesafesi boyunca gerilme dağılımı ( $R/h = 250$ ,  $c/h = 0.2$ ,  $\mu_1/\mu_2 = 2$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ )



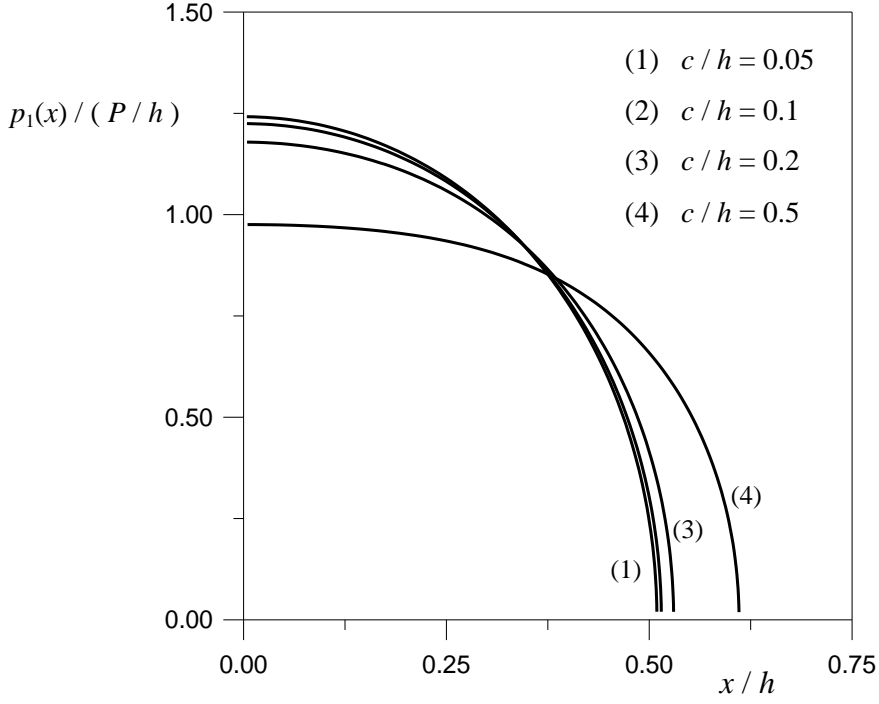
Şekil 17. Dış yüke bağlı olarak, tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi boyunca gerilme dağılımı ( $R/h = 250$ ,  $c/h = 0.2$ ,  $\mu_1/\mu_2 = 2$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ )



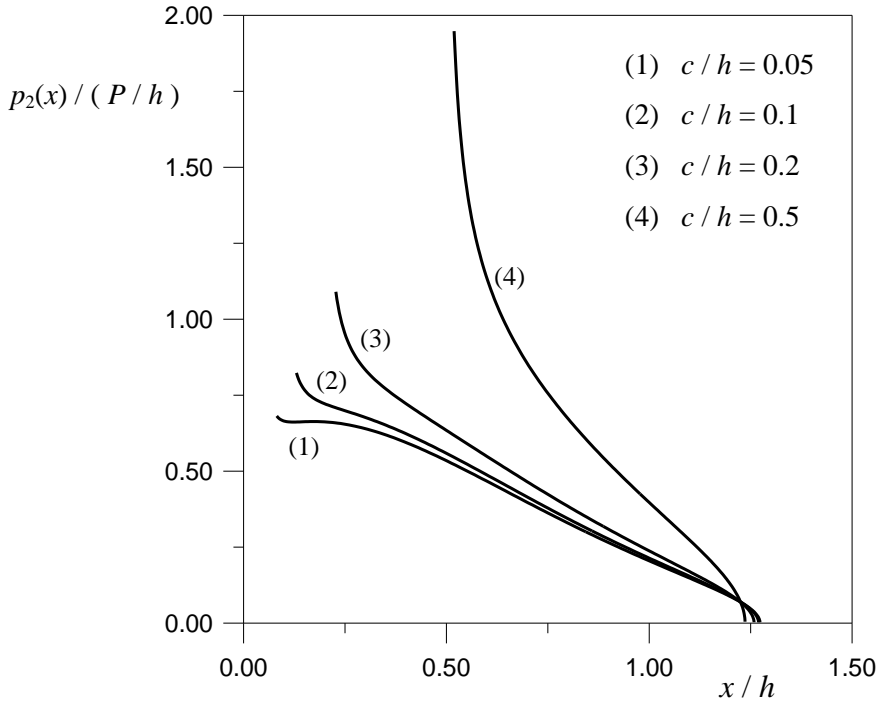
Şekil 18. Panç yarıçapına bağlı olarak, panç-tabaka temas mesafesi boyunca gerilme dağılımı ( $\mu_1/P/h = 500$ ,  $c/h = 0.2$ ,  $\mu_1/\mu_2 = 2$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ )



Şekil 19. Panç yarıçapına bağlı olarak, tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi boyunca gerilme dağılımı ( $\mu_1/(P/h) = 500$ ,  $c/h = 0.2$ ,  $\mu_1/\mu_2 = 2$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ )

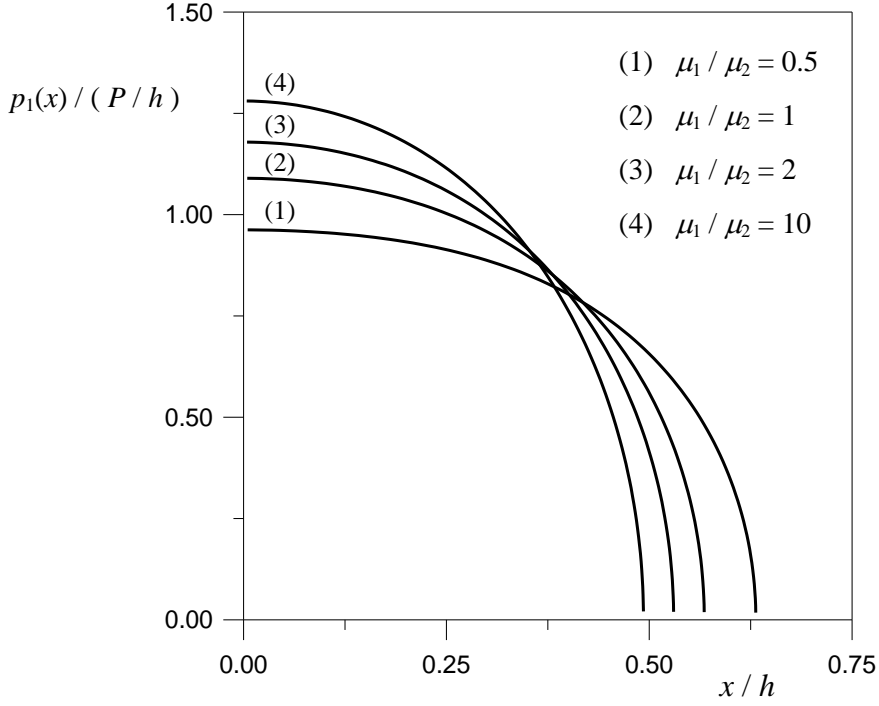


Şekil 20. Açıklığa bağlı olarak, pança-tabaka temas mesafesi boyunca gerilme dağılımı ( $\mu_1/(P/h)=500$ ,  $R/h=250$ ,  $\mu_1/\mu_2=2$ ,  $\kappa_1=\kappa_2=2$ )

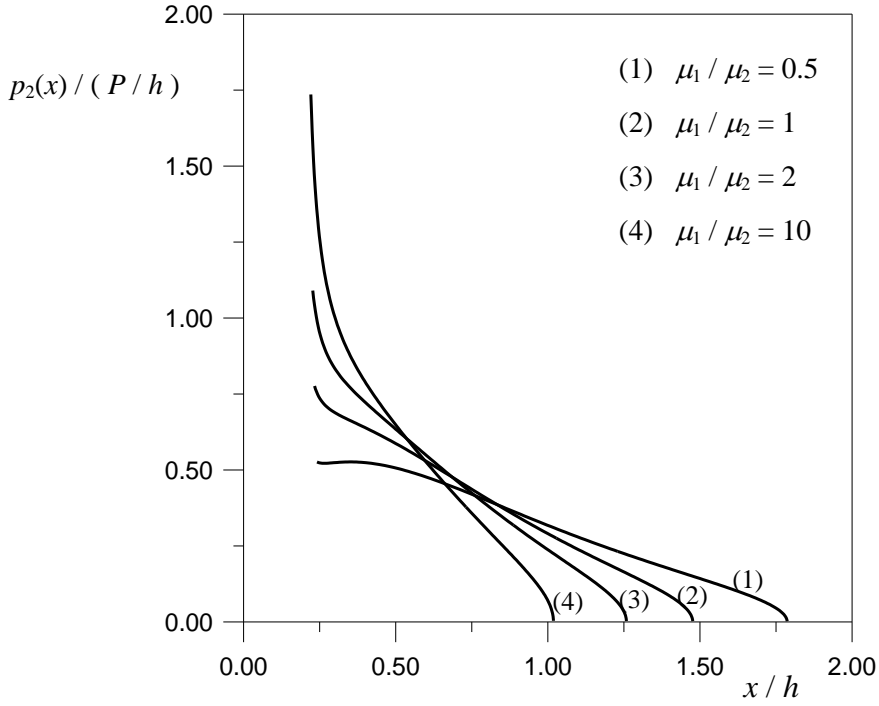


Şekil 21. Açıklığa bağlı olarak, tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi boyunca gerilme dağılımı ( $\mu_1/(P/h)=500$ ,  $R/h=250$ ,  $\mu_1/\mu_2=2$ ,  $\kappa_1=\kappa_2=2$ )

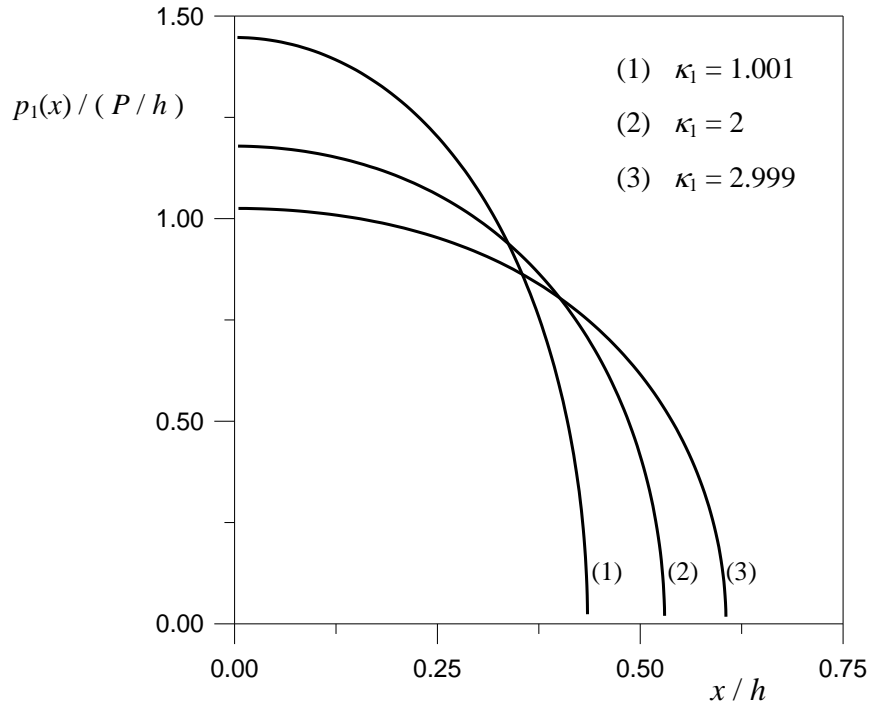




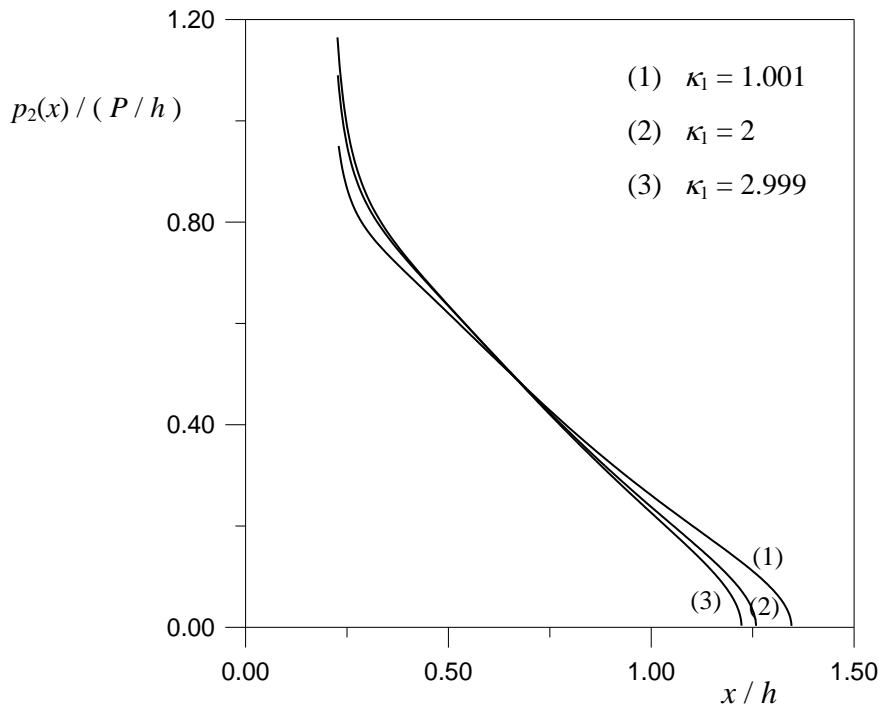
Şekil 22. Kayma modülleri oranına bağlı olarak, pañç-tabaka temas mesafesi boyunca gerilme dağılımı ( $\mu_1/(P/h) = 500$ ,  $R/h = 250$ ,  $c/h = 2$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ )



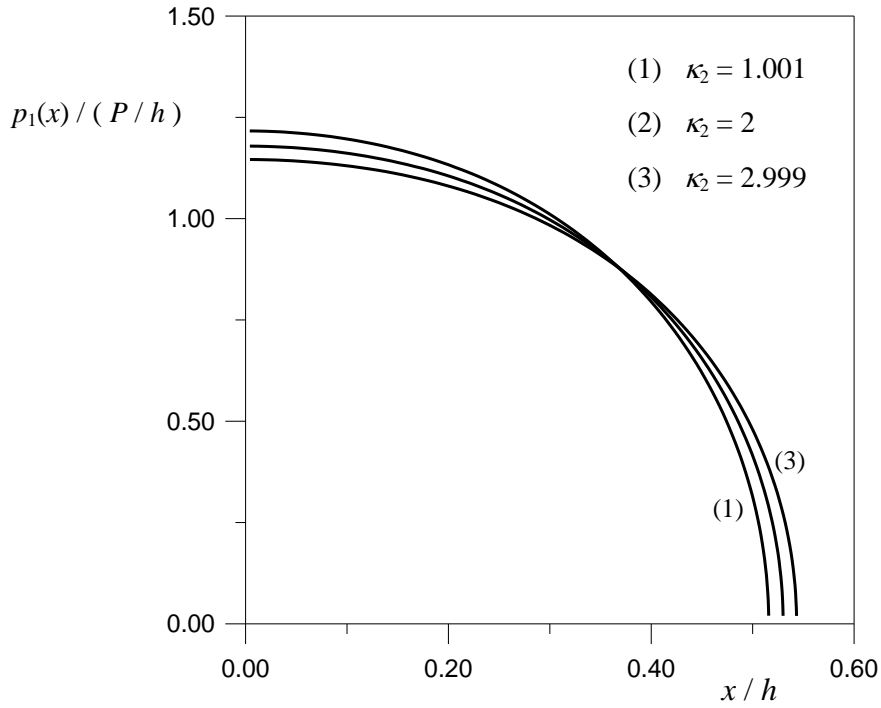
Şekil 23. Kayma modülleri oranına bağlı olarak, tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi boyunca gerilme dağılımı ( $\mu_1/(P/h) = 500$ ,  $R/h = 250$ ,  $c/h = 0.2$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ )



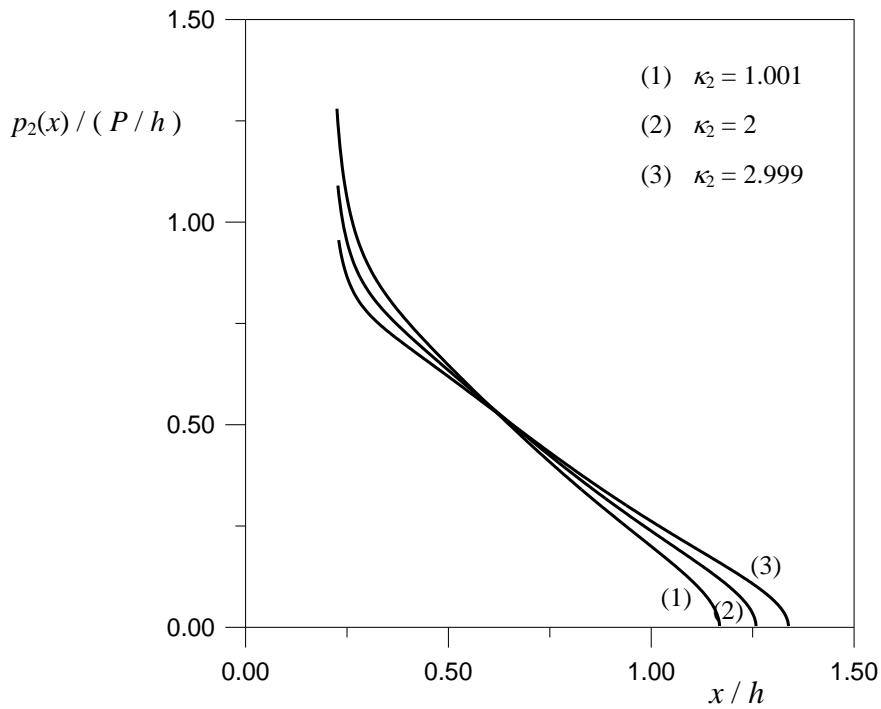
Şekil 24.  $\kappa_1$  değerine bağlı olarak, pañç-tabaka temas mesafesi boyunca gerilme dağılımı ( $\mu_1/(P/h) = 500$ ,  $R/h = 250$ ,  $c/h = 0.2$ ,  $\mu_1/\mu_2 = 2$ ,  $\kappa_2 = 2$ )



Şekil 25.  $\kappa_1$  değerine bağlı olarak, tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi boyunca gerilme dağılımı ( $\mu_1/(P/h) = 500$ ,  $R/h = 250$ ,  $c/h = 0.2$ ,  $\mu_1/\mu_2 = 2$ ,  $\kappa_2 = 2$ )



Şekil 26.  $\kappa_2$  değerine bağlı olarak, pañç-tabaka temas mesafesi boyunca gerilme dağılımı ( $\mu_1/(P/h) = 500$ ,  $R/h = 250$ ,  $c/h = 0.2$ ,  $\mu_1/\mu_2 = 2$ ,  $\kappa_1 = 2$ )



Şekil 27.  $\kappa_2$  değerine bağlı olarak, tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi boyunca gerilme dağılımı ( $\mu_1/(P/h) = 500$ ,  $R/h = 250$ ,  $c/h = 0.2$ ,  $\mu_1/\mu_2 = 2$ ,  $\kappa_1 = 2$ )

### 3.3. Panç-Tabaka Temas Mesafesi ve Tabaka-Çeyrek Düzlem Temas Mesafesinin Yapay Sinir Ağı ile Belirlenmesi

Yapay sinir ağı ile hesaplama yapabilen birçok bilgisayar programı mevcuttur. Burada, panç-tabaka temas mesafesi ve tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesini hesaplamak için C++ dilinde yazılan bir bilgisayar programı kullanılmıştır.

Bu çalışmada, Şekil (7)'deki gibi üç katmanlı ağ yapısı belirlenmiştir. Ağın eğitimi ve testi için kullanılacak örnekler teorik çözümlerden elde edilmiştir. Ağın girdi katmanı için; yük, geometri ve malzeme özelliklerinin kombinasyonundan oluşan 5 farklı işlem elemanı belirlenmiştir. Bu 5 işlem elemanına karşılık gelen 5 değişken aşağıda açıklanmıştır.

$c / h$  : Çeyrek düzlemin  $y$  simetri eksenine mesafesinin, tabaka yüksekliğine oranı (açıklık oranı)

$(\mu_1/(P/h)) / (R/h)$  : Yük oranının, yarıçap oranına oranı (yük yarıçap oranı)

$\mu_1 / \mu_2$  : Tabaka ve çeyrek düzlem kayma modüllerinin oranı (kayma modülleri oranı)

$\kappa_1$  : Tabaka malzeme özelliği

$\kappa_2$  : Çeyrek düzlem malzeme özelliği

Çıktı katmanı ise; panç-tabaka temas mesafesi ile tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesine karşılık gelen 2 farklı işlem elemanından oluşmaktadır. Bu 2 işlem elemanına karşılık gelen 2 değişken aşağıdaki gibidir.

$a / h$  : Panç-tabaka temas mesafesinin yarısının, tabaka yüksekliğine oranı (panç-tabaka temas oranı)

$b / h$  : Tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesinin, yarısının tabaka yüksekliğine oranı (tabaka-çeyrek düzlem temas oranı)

Eğitim setini oluşturan örneklerde kullanılan girdi değerleri, aşağıda Tablo 6'da sunulmaktadır.

Tablo 6. Eğitim seti için kullanılan girdi değerleri

$c / h$	$(\mu_1/(P/h)) / (R/h)$	$\mu_1 / \mu_2$	$\kappa_1$	$\kappa_2$
0.05 0.1 0.2 0.5	0.1	0.1	1.8	1.8
	0.25	0.25		
	0.5	0.5		
	1	1	2.0	2.0
	2	2	2.2	2.2
	4	4		
	10	10		

Eğitim seti için, Tablo 6’da verilen girdi değerlerinin değişik kombinasyonundan oluşturulan 196 örnek kullanılmıştır. Ayrıca, test seti için Tablo 6’daki değerlerden farklı oluşturulan 38 örnek kullanılmıştır. Eğitim ve test setlerini oluşturan örneklerin girdi ve çıktı değerleri, sigmoid fonksiyonunun (0 – 1) aralığında kalacak şekilde normalize edilmiştir. Literatürde değişik normalizasyon yöntemleri ve formülleri mevcuttur. Bunlar; lineer veya lineer olmayabilir. Kullanıcı, girdi ve çıktı değerlerinin dağılımına göre karar verir. Tablo 6’da görüldüğü üzere, her kolonun sınırları farklı aralıklardadır. Bu nedenle, her kolon değişik formüller ile değişik aralıklarda normalize edilmişlerdir.

Saklı katman yapay sinir ağı yapısının en önemli kısmıdır ve ağın yakınsama ve genelleme özelliği ile iç içedir. Yakınsamayı ve genellemeyi etkileyen en önemli faktörler; başlangıçta seçilen ağırlık ve bias değerleridir. Bu değerlerin aktivasyon fonksiyonunu ve türevini sıfır yapmayacak şekilde seçilmelidir. Bu değerleri, ya program rastgele seçer ya da kullanıcı programa dışarıdan girer. Bunların yanında;  $\alpha$ , öğrenme oranı da etkilidir. Çünkü öğrenme oranı ne kadar büyükse ağırlık ve bias değerleri de o oranda değişir.

En iyi genelleme yapabilen en küçük ağ yapısını bulabilmek için; saklı katman işlem elemanı sayısının, öğrenme oranının, başlangıç ağırlık ve bias değerlerinin farklı kombinasyonlarından oluşan birçok ağ yapıları düzenlenmiştir. Deneme-yanılma sonunda, ağın öğrenme kapasitesi ile öğrenme süresi arasında birebir ilişki olduğu belirlenmiştir. Ağın kapasitesinin artması için örnek sayısının da artması gerekmekte, bu da saklı katmandaki işlem elemanı sayısını arttırmakta ve dolayısıyla da ağ yapısı büyüdüğü için hesap süresini arttırmaktadır.

Bu çalışmada; en iyi ağ yapısı bulunmaya çalışılmış ve hata oranı gerçek değer ile çıktı değerinin her birinin rölatif hata oranına göre belirlenmiştir. Rölatif hata oranı,

$$e_{rel} = \left| \frac{g_k - y_k}{g_k} \right| * 100 \text{ şeklinde hesaplanmaktadır. Bu ifadedeki } g_k \text{ ile } y_k \text{ sırasıyla;}$$

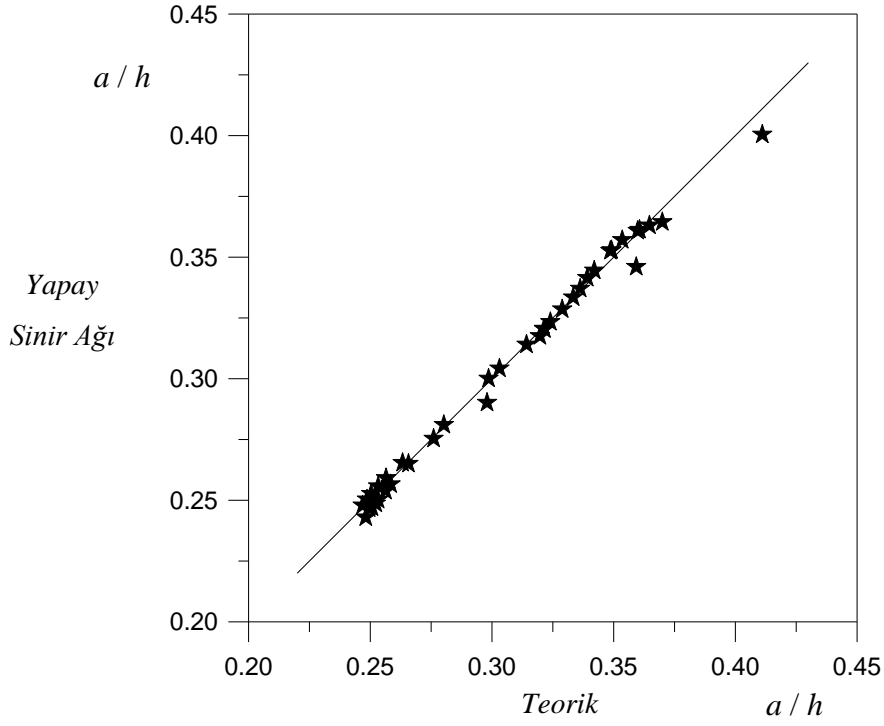
gerçek değer ile ağ çıktı değeridir. Deneme-yanılmalar sonunda; öğrenme oranı 0.5 olan, başlangıç ağırlık ve bias değerleri programa rastgele girilen, 5-20-2 yapısındaki ağın en iyi genelleme yaptığı ve maksimum rölatif hata oranının %1.5 olduğu durumda en iyi sonuçlar verdiği belirlenmiştir. Eğitim setindeki örneklerin tamamının hatalarının ortalama oranı ise %1.0'den daha az hesaplanmıştır. Eğitim süresi kişisel bir bilgisayarda yaklaşık 10 saat olup, test aşamasında ise hesaplama süresi aynı bilgisayarda 1 saniyeden kısa sürmektedir.

Ağın genelleme yapabilme kapasitesini belirlemek için, teorik sonuçlar ile elde edilen temas mesafeleri yapay sinir ağı sonuçları ile karşılaştırılmıştır. 38 örnekli test setinden  $a / h$  ve  $b / h$  değerlerinin karşılaştırmaları Tablo 7 ile Şekil (28-29)'da verilmektedir. Bu şekillerde; yatay eksen teorik değerleri, düşey eksen yapay sinir ağı ile elde edilen değerleri göstermektedir. Teorik ve yapay sinir ağı çözümlerinden elde edilen sonuçların aynı olması durumunda, grafiklerde işaretlenen noktaların 45 derecelik doğru üzerinde bulunacağı açıktır. Dolayısı ile bu doğrudan sapmalar hata durumunu ortaya koyacaktır. Yapay sinir ağı ile elde edilen sonuçlarda maksimum rölatif hata oranları sırasıyla %3.58 ve %2.96 olarak hesaplanmıştır. Hata oranlarının düşük çıkması, ağın iyi genelleme yaparak kabul edilebilir hata oranı sınırlarında hesaplama yapabildiğini göstermektedir.

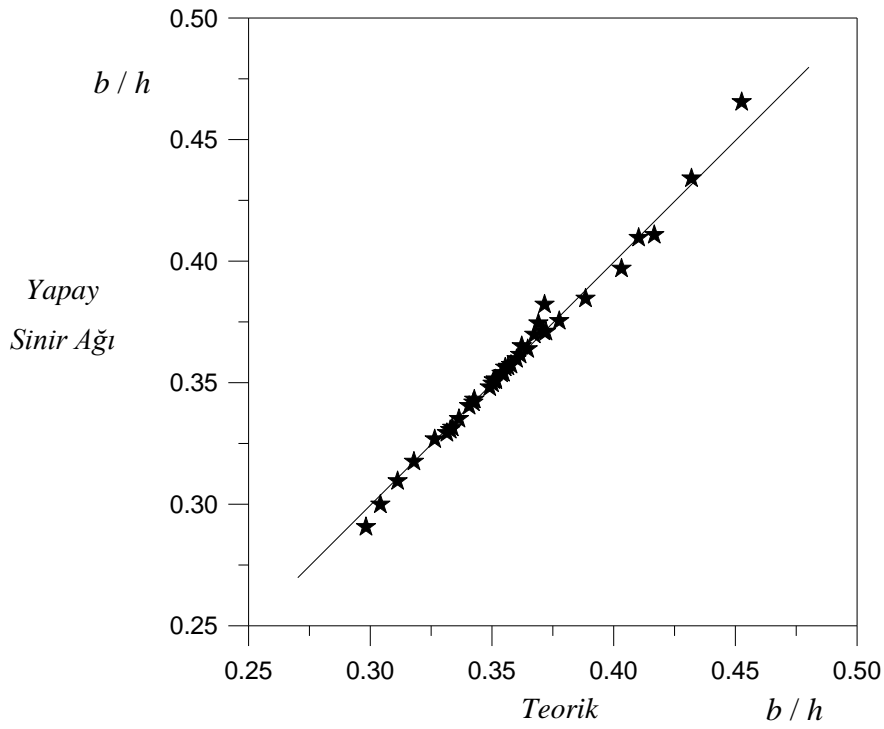
Tablo 8'de çeyrek düzlemler arasındaki açıklığın 0.000001 olması durumunda teorik ve yapay sinir ağı ile elde edilen temas mesafeleri ile açıklığın "0" olması, yani yarım düzlem olması durumunda daha önce yapılmış çalışmalardan [21,22] elde edilmiş temas mesafelerinin karşılaştırılmaktadır. Açıklık mesafesinin 0.000001 olması durumunda teorik sonuçlar ve yapay sinir ağı sonuçlarının birbirine çok yakın olduğu görülmüştür. Çeyrek düzlemler arasındaki açıklığın olmaması, yani yarım düzlem olması durumunda elde edilmiş temas mesafeleri ile karşılaştırıldığında sonuçların farklı olduğu görülmüştür. Bunun nedeninin çeyrek düzlemler arasındaki mesafesinin çok küçük olmasına rağmen yarım düzlem olmamasından ve problemin sınır şartlarının farklı olmasından kaynaklanmaktadır.

Tablo 7. Teorik sonuçlar ile elde edilen temas mesafelerinin, yapay sinir ağı sonuçları ile karşılaştırılması

$c/h$	$\frac{\mu_1}{P/h}$ $R/h$	$\mu_1/\mu_2$	$\kappa_1$	$\kappa_2$	Teorik		Yapay Sinir Ağı	
					$a/h$	$b/h$	$a/h$	$b/h$
0.005	16	0.08	1.77	2.03	0.247895	0.431767	0.243171	0.434262
0.01	13	0.11	1.79	2.05	0.249256	0.416486	0.246878	0.410973
0.02	11	0.15	1.81	2.08	0.250449	0.403016	0.247330	0.397139
0.03	9	0.22	1.84	2.11	0.252018	0.388247	0.248851	0.384792
0.04	8	0.3	1.87	2.13	0.252980	0.377449	0.250414	0.375625
0.06	6	0.35	1.90	2.17	0.256013	0.371994	0.254110	0.371090
0.07	5	0.45	1.94	2.19	0.258088	0.364424	0.256822	0.364007
0.08	3	0.6	1.96	2.21	0.265440	0.357555	0.265220	0.357549
0.09	1.5	0.8	1.98	2.25	0.279966	0.353683	0.281235	0.353946
0.11	0.75	1.2	2.02	2.24	0.298342	0.351325	0.300259	0.351123
0.12	0.6	1.6	2.04	2.22	0.302819	0.348823	0.304426	0.348325
0.14	0.4	2.2	2.06	2.18	0.313928	0.349995	0.314279	0.349837
0.15	0.3	3	2.09	2.16	0.321176	0.351271	0.320815	0.351595
0.16	0.2	4.3	2.12	2.13	0.333125	0.356316	0.333672	0.356804
0.18	0.15	6	2.15	2.10	0.341833	0.359844	0.344725	0.359948
0.22	0.12	9	2.18	2.08	0.348457	0.361311	0.352817	0.361690
0.25	0.09	12	2.19	2.05	0.359635	0.367184	0.361060	0.369968
0.28	0.08	15	2.22	2.04	0.364487	0.368837	0.363258	0.374639
0.3	0.07	20	2.25	2.02	0.369752	0.371381	0.364644	0.382372
0.35	0.09	16	2.21	1.96	0.360410	0.361987	0.361494	0.365273
0.38	0.11	14	2.19	1.94	0.353310	0.355196	0.357255	0.356458
0.41	0.13	11	2.17	1.92	0.348893	0.350480	0.353118	0.351221
0.43	0.18	8	2.14	1.88	0.338953	0.342496	0.341673	0.343287
0.45	0.22	5	2.11	1.85	0.336002	0.340370	0.337272	0.340666
0.48	0.33	2.7	2.08	1.82	0.328633	0.336194	0.328782	0.335303
0.52	0.45	1.8	2.07	1.79	0.323777	0.333452	0.323547	0.331746
0.55	0.54	1.4	2.03	1.78	0.321294	0.332585	0.320583	0.330791
0.6	0.65	1.1	2.01	1.75	0.319487	0.331234	0.317784	0.329530
0.65	0.8	0.07	1.99	1.76	0.410854	0.452408	0.400693	0.465681
0.7	1.2	0.09	1.97	1.79	0.359065	0.410051	0.346222	0.409798
0.75	2.5	0.12	1.93	1.81	0.297710	0.371012	0.290353	0.371248
0.8	3.5	0.16	1.89	1.84	0.275764	0.354486	0.275579	0.354199
0.85	5	0.21	1.85	1.87	0.263015	0.342110	0.265587	0.342077
0.9	7	0.33	1.83	1.89	0.256232	0.326231	0.259336	0.326930
0.95	9	0.43	1.81	1.90	0.252960	0.317697	0.255989	0.317744
1.0	12	0.55	1.78	1.93	0.250116	0.310999	0.252838	0.309720
1.1	15	0.7	1.76	1.96	0.248406	0.303876	0.250560	0.300085
1.2	20	0.9	1.75	1.98	0.246593	0.297984	0.248086	0.290834



Şekil 28. Panç-tabaka temas mesafesinin, teorik sonuçlar ve yapay sinir ağı sonuçları ile karşılaştırılması



Şekil 29. Tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesinin, teorik sonuçlar ve yapay sinir ağı sonuçları ile karşılaştırılması



Tablo 8. Çeyrek düzlemler arasındaki açıklığın 0.000001 olması durumunda teorik ve yapay sinir ağı ile elde edilen temas mesafeleri ile açıklığın “0” olması, yani yarım düzlem olması durumunda elde edilmiş temas mesafelerinin karşılaştırılması

$\frac{\mu_1}{P/h} / R/h$	$\mu_1 / \mu_2$	$\kappa_1$	$\kappa_2$	TEORİK		YAPAY SİNİR AĞI		YARIM DÜZLEM	
				$a / h$	$b / h$	$a / h$	$b / h$	$a / h$	$b / h$
0.2	1.5	1.95	1.85	1.730743	2.100826	1.740781	2.100145	1.559902	1.947149
0.3	4.5	2.05	1.95	1.200108	1.532004	1.210222	1.531630	1.151101	1.483854
0.7	0.9	2.15	1.9	1.028207	1.711116	1.024790	1.704243	0.928294	1.608148
1.5	3.5	1.85	2.05	0.553629	1.189448	0.555925	1.192257	0.540985	1.145441
3	0.6	2.05	2.15	0.452415	1.706938	0.453831	1.705301	0.429865	1.605549
6	0.3	1.9	2.15	0.306920	2.096858	0.310125	2.103474	0.296046	1.974487

#### 4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

İki çeyrek düzleme oturan ve rijit bir panç ile bastırılan tabakaya ait temas mesafeleri ve temas mesafeleri boyunca gerilme dağılımları konusunda yapılan bu çalışmadan elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Bu çalışmada,  $h$  ve  $\mu_1$  değerleri birden fazla değişkeni etkilediğinden sabit tutulmuştur.

Dış yük değeri, kayma modülleri oranı, malzeme sabitleri ve çeyrek düzlemler arası açıklık mesafesi sabit tutulup panç yarıçap değeri arttıkça temas mesafeleri artmaktadır. Panç yarıçap değeri, kayma modülleri oranı, malzeme sabitleri ve çeyrek düzlemler arası açıklık mesafesi sabit tutulup dış yük değeri azaldıkça temas mesafeleri azalmaktadır.

Dış yük değeri, panç yarıçap değeri, kayma modülleri oranı ve çeyrek düzlemler arası açıklık mesafesi sabit tutulup malzeme sabitleri birbirine eşit olarak arttıkça panç-tabaka temas mesafesi artıyorken tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi azalmaktadır. Dış yük değeri, panç yarıçap değeri, kayma modülleri oranı ve malzeme sabitleri sabit tutulup çeyrek düzlemler arası açıklık mesafesi arttıkça panç-tabaka temas mesafesi artıyorken tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi azalmaktadır.

Panç yarıçap değeri, kayma modülleri oranı, malzeme sabitleri ve çeyrek düzlemler arası açıklık mesafesi sabit tutulup dış yük değeri arttıkça en büyük temas gerilme değeri azalmaktadır. Dış yük değeri, panç yarıçap değeri, kayma modülleri oranı, malzeme sabitleri ve çeyrek düzlemler arası açıklık mesafesi sabit tutulup temas mesafeleri arttıkça temas mesafeleri boyunca gerilme değerleri azalmaktadır. Dış yük değeri, kayma modülleri oranı, malzeme sabitleri ve çeyrek düzlemler arası açıklık mesafesi sabit tutulup panç yarıçap değeri arttıkça en büyük temas gerilme değeri azalmaktadır.

Dış yük değeri, panç yarıçap değeri, kayma modülleri oranı ve malzeme sabitleri sabit tutulup çeyrek düzlemler arası açıklık mesafesi arttıkça panç-tabaka temas mesafesi artmakta ancak en büyük gerilme değeri azalmakta, diğer taraftan tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi azalmakta ancak en büyük gerilme değeri artmaktadır.

Dış yük değeri, panç yarıçap değeri, çeyrek düzlemler arası açıklık mesafesi ve malzeme sabitleri sabit tutulup çeyrek düzlemin rijitliği tabakaya göre arttıkça temas mesafeleri azalmakta ancak en büyük temas gerilme değerleri artmaktadır.

$\kappa_2$  çeyrek düzlem malzeme sabiti, dış yük değeri, panç yarıçap değeri, kayma modülleri oranı ve çeyrek düzlemler arası açıklık mesafesi sabit tutulup  $\kappa_1$  tabaka malzeme sabiti arttıkça panç-tabaka temas bölgesinde en büyük temas gerilme değerleri azalırken tabaka-çeyrek düzlem temas bölgelerinde en büyük temas gerilme değerleri artmaktadır.

$\kappa_1$  tabaka malzeme sabiti, dış yük değeri, panç yarıçap değeri, kayma modülleri oranı ve çeyrek düzlemler arası açıklık mesafesi sabit tutulup  $\kappa_2$  çeyrek düzlem malzeme sabiti arttıkça panç-tabaka ve tabaka-çeyrek düzlem temas bölgelerinde en büyük temas gerilme değerleri azalmaktadır.

Teorik sonuçlar ve yapay sinir ağı elde edilen temas mesafelerinin karşılaştırmalarında, maksimum rölatif hatalar kabul edilebilir hassaslıkta olduğu görülmüştür. Bu nedenle yapay sinir ağı yöntemi, bu tür mekanik problemlerin çözümünde güvenilir olarak kullanılabileceği söylenebilir.

Ayrıca, çeyrek düzlemler arası açıklık mesafesinin 0.000001 olması durumunda teorik sonuçlar ve yapay sinir ağı sonuçlarının birbirine çok yakın olduğu görülmüştür. Çeyrek düzlemler arasındaki açıklığın olmaması, yani yarım düzlem olması durumunda elde edilmiş temas mesafeleri ile karşılaştırıldığında sonuçların farklı olduğu görülmüştür. Bunun nedeninin çeyrek düzlemler arasındaki mesafesinin çok küçük olmasına rağmen yarım düzlem olmamasından ve problemin sınır şartlarının farklı olmasından kaynaklanmaktadır.

Panç-tabaka temas bölgesinde en büyük değerler pançın tam ortasında ( $x = 0$ ) 'da oluşmaktadır. Tabaka-çeyrek düzlem temas bölgelerinde ise köşe noktalara doğru yaklaştıkça gerilme değerleri büyük değerlere ulaşmaktadır. Bunun nedeninin köşe noktasında gerilme yığılması olduğu söylenebilir.

Bu sonuçlar ışığında bu konuda çalışmak isteyen araştırmacılara verilebilecek öneriler aşağıdaki gibi sıralanabilir:

Bu çalışma, elastisite teorisi ve integral dönüşüm tekniği yöntemi yerine, sonlu elemanlar yöntemi ve sınır elemanlar yöntemi ile de çözülebilir.

Bu problem; simetrik, sürtünmesiz ve kütle kuvvetleri ihmal edilerek çözülmüştür. Problem simetrik olmayan, sürtüneli ve kütle kuvvetleri dikkate alınarak da çözülebilir.

## 5. KAYNAKLAR

1. Hertz, H., Gesammelte werke von Heinrich Hertz, Volume 1, Leipzig, 1895.
2. İnan, M., Düzlemde Elastisite Teorisi, İ.T.Ü. Yayınları, İstanbul, 1969.
3. Johnson, K. L., Contact Mechanics, First Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
4. Galin, L. A., Contact Problems in the Theory of Elasticity, North Caroline State Collage Articles on the Application Series, Raleigh, N.C., 1961.
5. Ufliand, I. S., Survey of Articles on the Applications of Integral Transforms in the Theory of Elasticity, North Caroline State Collage Articles on the Translation Series, Raleigh, N.C.:, 1965.
6. İnan, M., Cisimlerin Mukavemeti, İkinci Baskı, Ofset Matbaacılık, İstanbul, 1970.
7. Erdoğan F. ve Ratwani, M., The Contact Problem for an Elastic Layer Supported by Two Elastic Quarter Planes, Journal of Applied Mechanics, 41, (1974) 673-678.
8. Civelek, M. B. ve Erdoğan, F., The Frictionless Contact Problem for an Elastic Layer Under Gravity, Journal of Applied Mechanics, 42, (1975) 136-140.
9. Adams, G. G. ve Bogy, D. B., The Plane Symmetric Contact Problem for Dissimilar Elastic Semi-Infinite Strips of Different Widths, Journal of Applied Mechanics, 44, (1977) 604-610.
10. Geçit, M. R., A Tensionless Contact without Friction between an Elastic Layer and Elastic Foundation, International Journal of Solids and Structures, 16, (1980) 387-396.
11. Geçit M. R., The Axisymmetric Double Contact Problem for a Frictionles Elastic Layer Intended by an Elastic Cylinder, International Journal of Engineering Science, 24, (1986) 1571-1584.
12. Geçit M. R., Bonded Contact Problem for an Elastic Layer Under Tension, Arabian Journal for Science and Engineering, 12, (1987) 183-188.
13. Geçit M. R. Antisymmetric Bonded Contact Problem for an Elastic Layer, Arabian Journal for Science and Engineering, 15, (1990) 73-79.
14. Fabrikant, V. I. ve Sankar, T. S., On Contact Problem in an Inhomogeneous Half-Space, International Journal of Solids and Structures, 20, (1984) 159-166.
15. Birinci A. ve Erdöl R., Frictionless Contact Between a Rigid Stamp and an Elastic Layered Composite Resting on Simple Supports, Mathematical and Computational Applications, 4, (1999) 261-272.

16. Birinci A. ve Erdöl R., Continuous and Discontinuous Contact Problem for a Layered Composite Resting on Simple Supports, Structural Engineering and Mechanics, 12, (2001) 17-34.
17. Kahya V., Birinci A. ve Erdöl R., Frictionless Contact Problem between an Elastic Layer Bonded to a Rigid Support and a Rigid Stamp, Mathematical and Computational Applications, 6, (2001) 13-22.
18. Çakıroğlu, A. O., Çakıroğlu, F. L., Continuous and Discontinuous Contact Problems for Strips on an Elastic Semi-Infinite Plane, International Journal of Engineering Science, 29, (1991) 99-111.
19. Çakıroğlu F. L., Çakıroğlu M. ve Erdöl R. Contact Problems for Two Elastic Layers Resting on Elastic Half-Plane, Journal of Engineering Mechanics, 127, (2001) 113-118
20. Civelek M. B., Erdoğan, F. ve Çakıroğlu A. O., Interface Separation for an Elastic Layer Loaded by a Rigid Stamp, International Journal of Engineering Science, 16, (1978) 669-679.
21. Çömez İ., Rijit Dairesel Bir Pançla Bastırılan Elastik Tabaka ve Yarım Düzlemin Sürtünmeli Değme Problemi, Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2009.
22. Çömez, İ., Frictional Contact Problem for a Rigid Cylindrical Stamp and an Elastic Layer Resting on an Half Plane, Solids and Structures, 47, (2010) 1090-1097.
23. Dundurs, J. ve Lee, M. S., Stres Concentration at a Sharp Edge in Contact Problems, Journal of Elasticity, 2, (1972) 109-112.
24. Bakıoğlu, M, Elastik Bir Tabakanın Sürtünmesiz Temas Problemi, Doçentlik Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, 1976.
25. Keer, I. M., Lee L. C ve Mura, T, A Contact Problem for the Elastic Quarter Space, International Journal of Solids and Structures, 20, (1984) 513-524.
26. Aksoğan, O, Akavcı, S. S. ve Becker, A. A., A Comparative Study of the Contact Problem for an Elastic Layer Supported by Two Elastic Quarter Planes, Journal of Faculty of Engineering Architecture, C.U., 11, (1996) 25-31.
27. Aksoğan, O, Akavcı, S. S. ve Becker, A. A., The Solution of the Nonsymmetrical Contact Problem of an Elastic Layer Supported by Two Elastic Quarter Planes Using Three Different Methods, Journal of Faculty of Engineering Architecture, C.U., 12, (1997) 1-14.
28. Akavcı, S. S., İki Elastik Çeyrek Düzlem Üzerine Oturan Elastik Bir Tabakanın Sürtünmesiz Temas Problemi, Doktora Tezi, Çukurova Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 1999.

29. Sneddon, I. N., The Use of Integral Transforms, McGraw-Hill Inc., New York, 1972.
30. Erdelyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F. ve Tricomi, F. G., Tables of Integral Transforms, Vol. 1, Mc Graw-Hill, Inc., New York, 1954.
31. MATHAMETICA 7.0, Wolfram Research Center, 2009.
32. Krenk, S., A Note on the Use of the Interpolation Polynomial for Solutions of Singular Integral Equations, Report IFSM-73-48, Lehigh University, 1973.
33. Erdoğan, F., Gupta G. D. ve Cook, T. S., Numerical Solution of Singular Integral Equation, in Methods of Analysis and Solution of Crack Problems, Noordhoff, Groningen, 1973.
34. Kaynak, O. ve Efe, M. Ö., Yapay Sinir Ağları ve Uygulamaları, Boğaziçi Üniversitesi, İstanbul, 2000.
35. Zurada, J. M., Introduction to Artificial Neural Networks, West Publishing Com., 1992.
36. Fausset, L., Fundamentals of Neural Networks, Prentice-Hall, New Jersey, 1994.
37. McCulloch, W. S., Embodiments of Mind, Cambridge, Massachusetts, MIT Press, 1965.
38. Hopfield, J. J., Neural Networks and Physical Systems with Emergent Collective Computational Abilities, Proceedings of the National Academy of Science, 79, (1982) 2554-2558.
39. Vanluchene, R. D. ve Roufei, S., Neural Networks in Structural Engineering, Microcomputers in Civil Engineering, 5, (1990) 207-215.
40. Civalek, Ö., The Analysis of the Rectangular Plates without Torsion via Hybrid Artificial Intelligent Technique, Proceedings of the Second International Symposium on Mathematical and Computational Applications, September 1999, Azerbaijan.
41. Civalek, Ö., Çatal, H. H. ve Demirdağ, O., Geriye Yayılma Yapay Sinir Ağları ile Düzlem Çerçeve ve Kirişlerin Titreşim Frekanslarının Tahmini, İMO Teknik Dergi, (2002) 2709-2726.
42. Civalek, Ö., The Analysis of Time Dependent Deformation in R.C. Members by Artificial Neural Networks, Journal of Pamukkale University, Engineering Science, 3, (1997) 331-335.
43. Sanad, A. ve Saka, M. P., Prediction of Ultimate Shear Strength of Reinforced Concrete Deep Beams Using Neural Networks, Journal of Structural Engineering, ASCE, 127, (2001) 818-828.

44. Fonseca, E. T., Vellasco, P. C. G. D., de Andrade, S. A. L. ve Vellasco, M. M. B. R., A Patch Load Parametric Analysis Using Neural Networks, Journal of Constructional Steel Research, 59, (2003) 251-267.
45. Tashakori, A. ve Adeli, H., Optimum Design of Cold-Formed Steel Space Structures Using Neural Dynamics Model, Journal of Constructional Steel Research, 58, (2002) 1545-1566.
46. Özşahin T. Ş., Birinci A. ve Çakıroğlu A. O. Prediction of Contact Lengths between an Elastic Layer and Two Elastic Circular Punches with Neural Networks, Structural Engineering and Mechanics, 18, (2004) 441-459.
47. Çakıroğlu, E., Çömez, İ. ve Erdöl R., Değme Probleminin Yapay Sinir Ağı Yaklaşımı ile Analizi, XIV. Ulusal Mekanik Kongresi, Eylül 2005, Antakya.
48. Çakıroğlu, E., Çömez, İ. ve Erdöl R., Application of Artificial Neural Network to a Double Receeding Contact Problem, Structural Engineering and Mechanics, 21, (2005) 205-220.

## **ÖZGEÇMİŞ**

Erdoğan ÇAKIROĞLU, 1974 yılında Trabzon'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Trabzon'da tamamladı. 1997 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Mühendislik - Mimarlık Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü'nden mezun oldu. 2001 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans diplomasını aldı. 1998-2006 yılları arasında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde araştırma görevlisi olarak çalıştı. Orta derecede İngilizce bilmektedir ve serbest mühendis olarak çalışmaktadır.