

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**ELASTİK YARIM DÜZLEME OTURAN SİMETRİK YÜKLÜ YAPIŞIK ÇİFT
TABAKADA DEĞME VE ÇATLAK PROBLEMİ**

DOKTORA TEZİ

İnş. Yük. Müh. Handan ADIBELLİ

**EKİM 2010
TRABZON**

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**ELASTİK YARIM DÜZLEME OTURAN SİMETRİK YÜKLÜ YAPIŞIK ÇİFT
TABAKADA DEĞME VE ÇATLAK PROBLEMİ**

İnş. Yük. Müh. Handan ADIBELLİ

**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
“Doktor (İnşaat Mühendisliği)”
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 20.09.2010
Tezin Savunma Tarihi : 21.10.2010**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ragıp ERDÖL
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Mehmet ÜLKER
Jüri Üyesi : Prof. Dr. A. Osman ÇAKIROĞLU
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Hasan SOFUOĞLU
Jüri Üyesi : Doç. Dr. Ahmet BİRİNCİ**

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Salih TERZİOĞLU

Trabzon 2010

ÖNSÖZ

Bu çalışma Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat mühendisliği Anabilim Dalında bir doktora tezi olarak gerçekleştirilmiştir.

Tez konumu bana öneren, tezimin her aşamasında daima pozitif düşünmeyi, başarıya inancı aşılayan, bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, öğrencisi olmaktan ve kendisi ile çalışmaktan onur duyduğum danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Ragıp ERDÖL'e sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Tez çalışmam süresince değerli görüşlerinden faydalandığım tez izleme jüri üyeleri hocalarım Sayın Prof. Dr. A. Osman Çakıroğlu'na ve Sayın Prof. Dr. Hasan Sofuoğlu'na , tez savunma sınavı jüri başkanı Sayın Prof. Dr. Mehmet ÜLKER'e, çalışmalarım sırasında bilgi ve birikimlerinden faydalandığım tez savunma sınavı jüri üyesi Sayın Doç. Dr. Ahmet Birinci'ye ve tezim ile ilgili bir çok konuda yardım ve değerli fikirlerini esirgemeyen Sayın Yrd. Doç. Dr. İsa Çömez'e teşekkür ederim.

Akademik kariyerime başlarken yol gösteren, ilerlememde engin bilgi ve tavsiyelerinden daima yararlandığım Sayın Prof. Dr. Cemal EYYUBOV'a teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Bu çalışmam ve tüm yaşamım boyunca benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen babam İnş. Müh. Sayın Muhlis Adıbelli, annem Em. Öğr. Sayın Hayriye Adıbelli ve ağabeyim Sayın Dr. Barış Adıbelli'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Handan ADIBELLİ
Trabzon 2010

ÖZET

Bu çalışmada simetrik yüklü, rijit pançla elastik yarım düzlem üzerine bastırılan yapışık çift tabakaya ait değme problemi ve aynı problemin alt tabakasında çatlak olması hali Elastisite Teorisi ve İntegral dönüşüm tekniği kullanılarak çözülmüştür.

Birinci bölümde, değme problemleri ve çatlak problemleri ile ilgili literatürdeki çalışmalar sunulmuş, Elastisite teorisinin temel denklemlerine Fourier integral dönüşümü uygulanıp, çatlak ihtiva etmesi ve etmemesi durumlarında düzlem halde tabaka ve yarım düzlemin gerilme ve yer değiştirme ifadeleri elde edilmiştir.

İkinci bölümde, bu tezde ele alınan problemlerin tanımı yapılmış ve incelenmiştir. İlk olarak çatlaksız değme durumu incelenmiş, sınır koşulları sağlatılarak problem panç altındaki ve alt tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki değme gerilmelerinin bilinmeyen olduğu iki tekil integral denkleme indirgenmiştir. Bu integral denklem sisteminin Gauss-Chebyshev formülasyonu ile çözümü sonucu değme gerilmeleri elde edilmiş, bunlara bağlı olarak da normal gerilmeler belirlenmiştir. İkinci olarak ise aynı problemin alt tabakasında iç ve kenar çatlak olması durumu incelenmiş ve çatlağa ait gerilme şiddet faktörleri hesaplanmıştır.

Üçüncü bölümde probleme ilişkin sayısal uygulamalar yapılmıştır. Farklı yük, malzeme ve geometrik verilere göre değme uzunlukları, değme gerilmeleri, gerilme ve yer değiştirme bileşenleri ile gerilme şiddet faktörleri sayısal olarak elde edilmiş, sonuçlar tablolar ve grafiklerle gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde bu çalışmadan elde edilen sonuçlar literatürdeki değme ve çatlak problemleri ile karşılaştırılmıştır.

Beşinci bölümde sonuçlar yazılmış, altıncı bölümde ise öneriler verilmiştir.

Anahtar kelimeler : Tabaka , Elastik Yarım Düzlem, İntegral Dönüşüm Tekniği, Değme Mekaniği, Kırılma Mekaniği, Gerime Şiddet faktörü

SUMMARY

Contact and Crack Problems at The Bonded Double Layers resting on An Elastic Half Plane

In this paper, the symmetric contact problem of two bonded layers resting on an elastic half plane with a rigid punch and the same problem in the case of having a vertical crack at the bottom layer are solved with using the Theory of Elasticity and the Integral Transformation technique.

In the first chapter, the literature studies on contact and crack problems are presented. By utilizing the Fourier Integral Transformation techniques to fundamental equations of theory of elasticity, general equations of stresses and displacements of layers and elastic half plane are obtained for both uncracked and cracked situation.

In the second chapter, the considered problems are introduced and investigated. Firstly, the case of contact without a crack is investigated. The problem is reduced two singular integral equations where the contact stresses are the unknown functions under the punch and between the bottom layer and an elastic half plane after the boundary conditions are satisfied. Solving this integral equations by Gauss-Chebyshev integration formulation, the contact stresses are obtained. Depending on the contact stresses, the normal stresses are determined. Secondly, the same problem is investigated for having the internal or edge crack and the stresses intensity factors belonging to crack are calculated.

In the third chapter, numerical implementations are performed. The contact lengths, stress and displacement components and the stress intensity factors are obtained according to different parameters of load, material and geometry. The Results are presented in tables and graphics.

In the fourth chapter the results of this study is compared with related contact and crack problems in literature.

In the fifth chapter the conclusions are written. The recommendations are given in the sixth chapter.

Key Words : Layers, Elastic Half Plane, Integral Transform Technique, Contact Stresses, Internal Crack , Edge Crack, Stress Intensity Factor

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET.....	VI
SUMMARY.....	VII
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	VIII
TABLolar DİZİNİ.....	XI
SEMBOLLER DİZİNİ.....	XII
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Değme Problemleri.....	1
1.2.1. Elastik veya Rijit Pançın Elastik Tabaka veya Yarım Düzlem ile Değme Durumunu İnceleyen Çalışmalar.....	2
1.2.2. Elastik Tabakanın Elastik Tabaka, Yarım Düzlem veya Rijit Temel ile Değme Durumunu İnceleyen Çalışmalar.....	4
1.2.3. Değme Problemleri ile İlgili Yapılmış Diğer Çalışmalar.....	9
1.3. Çatlak Problemleri.....	11
1.3.1. Çatlak Problemleri ile İlgili Literatür Taraması.....	12
1.4. Çalışmanın Kapsamı.....	14
1.5. Genel Denklemlerin Elde Edilmesi.....	15
1.5.1. Üç Boyutlu Halde Elastisite Teorisinin Genel Denklemleri.....	15
1.5.2. Navier Denklemlerinin İki Boyutlu Hale İndirgenmesi.....	18
1.5.3. Gerilme ve Yer Değiştirmelere Ait Genel İfadelerin Çıkarılması.....	20
1.5.3.1. Çatlak Bulunmayan Tabakada Gerilme ve Yer Değiştirme İfadeleri.....	20
1.5.3.2. y Ekseninde Simetrik İki Çatlağı Bulunan Sonsuz Düzlem Problemlerinin Çözümü İçin Genel Denklemlerin Elde Edilmesi.....	25
1.5.3.3. Çatlaksız Tabaka ve Sonsuz Düzlem Hallerinin Süperpozisyonu.....	29
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	31
2.1. Değme Problemi.....	33
2.1.1. Değme Probleminin Tanımı.....	33
2.1.2. Kullanılacak Denklemler.....	33

2.1.3	Değme Probleminin Sınır Şartları.....	36
2.1.4	Katsayıların Belirlenmesi.....	37
2.1.5	İntegral Denklemlerin Elde Edilmesi	43
2.1.5.1.	Birinci İntegral Denklem.....	44
2.1.5.2.	İkinci İntegral Denklem.....	48
2.1.6.	İntegral Denklem Sisteminin Çözümü.....	52
2.2.	Dairesel Panç Profili.....	54
2.3.	Gerilmelerin Bulunması.....	54
2.4.	Çatlak Problemi.....	57
2.4.1.	Çatlaklı Yapışık Tabaka Probleminin Tanımı.....	57
2.4.2.	Kullanılacak Denklemler.....	58
2.4.3.	Çatlak Probleminin Sınır Şartları.....	60
2.4.4.	Katsayıların Belirlenmesi.....	62
2.4.5.	İntegral Denklemin Elde Edilmesi ve Boyutsuzlaştırma.....	76
2.4.6.	İntegral Denklemin Sayısal Çözümü.....	83
2.4.6.1.	İç Çatlak Halinde İntegral Denklemin Sayısal Çözümü.....	83
2.4.6.2.	Kenar Çatlak Halinde İntegral Denklemin Sayısal Çözümü.....	85
2.4.7.	Çatlak Uçlarındaki Gerilme Şiddet Faktörleri.....	87
2.4.7.1.	İç Çatlak Halinde Gerilme Şiddet Faktörleri.....	87
2.4.7.2.	Kenar Çatlak Halinde Gerilme Şiddet Faktörleri.....	88
3.	BULGULAR	90
3.1.	Giriş.....	90
3.2.	Değme Yüzeyleri ve Değme Gerilmeleri.....	90
3.3.	Gerilmelerin İncelenmesi.....	102
3.3.1.	σ_x Normal Gerilmelerinin Bulunması.....	102
3.3.2.	σ_y Normal Gerilmelerinin Bulunması.....	105
3.3.3.	τ_{xy} Kayma Gerilmelerinin Bulunması.....	108
3.4.	Çatlak Uçlarındaki Gerilme Şiddet Faktörleri.....	111
3.4.1.	İç Çatlak Halinde Gerilme Şiddet Faktörleri.....	111
3.4.2.	Kenar Çatlak Halinde Gerilme Şiddet Faktörleri.....	115
4.	TARTIŞMALAR.....	118
5.	SONUÇLAR.....	121
6.	ÖNERİLER.....	123

7.	KAYNAKLAR.....	124
	ÖZGEÇMİŞ	

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1. Çatlaklı ve çatlaksız halin süperpozisyonu.....	32
Şekil 2. Rijit panç aracılığıyla yüklenen ve elastik yarım düzleme oturan ağırlıksız çift tabaka	33
Şekil 3. Elastik yarım düzlem üzerine oturan ve alt tabakasında çatlak bulunan çift tabaka.....	57
Şekil 4. Panç ile üst tabaka arasındaki değme yüzeyinin yük değerine bağlı olarak yarıçap ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$, $m=2$, $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$).....	93
Şekil 5. Alt tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme yüzeyinin yük değerine bağlı olarak yarıçap ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$, $m=2$, $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$).....	93
Şekil 6. Pançın yarıçapına bağlı olarak, panç ile üst tabaka arasındaki değme yüzeyinin yük ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$, $m=2$, $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$).....	94
Şekil 7. Pançın yarıçapına bağlı olarak, alt tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme yüzeyinin yük ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$, $m=2$, $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$).....	94
Şekil 8. Tabakaların kayma modülleri oranlarına bağlı olarak panç değme yüzeyinin yarım düzlem-alt tabaka kayma modülü oranları ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $R/h_1=500$, $G/(P/h_1)=100$).....	95
Şekil 9. Tabakaların kayma modülleri oranlarına bağlı olarak yarım düzlem ve alt tabaka arasındaki değme yüzeyinin yarım düzlem ve alt tabakanın kayma modülü oranları ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $R/h_1=500$, $G/(P/h_1)=100$).....	95
Şekil 10. Yarım düzlem ile alt tabakanın kayma modülü oranlarına bağlı olarak panç değme yüzeyinin tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $R/h_1=500$, $G/(P/h_1)=100$).....	96
Şekil 11. Yarım düzlem ile alt tabakanın kayma modülü oranlarına bağlı olarak değme yüzeyinin tabakaların kayma modülü oranları ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $R/h_1=500$, $G/(P/h_1)=100$).....	96
Şekil 12. Çeşitli yarıçap değerleri için $y=0$ da değme gerilmesi yayılımı ($h_2/h_1 = 2$, $m=2$, $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $G/(P/h_1)=100$).....	97
Şekil 13. Çeşitli yarıçap değerleri için $y=-h$ da değme gerilmesi yayılımı ($h_2/h_1 = 2$, $m=2$, $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $G/(P/h_1)=100$).....	97
Şekil 14. Çeşitli yük değerleri için $y=0$ da değme gerilmesi yayılımı ($h_2/h_1 = 2$, $m=2$, $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $R/h_1=500$).....	98

Şekil 15. Çeşitli yük değerleri için $y=-h$ da değme gerilmesi yayılışı ($h_2/h_1 = 2$, $m=2$, $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $R/h_1=500$).....	98
Şekil 16. Tabakaların kayma modülü oranlarına bağlı olarak $y=0$ da değme gerilmesi yayılışı ($h_2/h_1 = 2$, $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $R/h_1=500$, $G/(P/h_1)=100$).....	99
Şekil 17. Tabakaların kayma modülü oranlarına bağlı olarak $y=-h$ da değme gerilmesi yayılışı ($h_2/h_1 = 2$, $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $R/h_1=500$, $G/(P/h_1)=100$).....	99
Şekil 18. Yarım düzlem ile alt tabakanın kayma modülü oranlarına bağlı olarak $y=0$ da değme gerilmesi yayılışı ($h_2/h_1 = 2$, $m=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $R/h_1=500$, $G/(P/h_1)=100$).....	100
Şekil 19. Alt tabaka ile elastik yarım düzlemin kayma modülü oranlarına bağlı olarak $y=-h$ da değme gerilmesi yayılışı ($h_2/h_1 = 2$, $m=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $R/h_1=500$, $G/(P/h_1)=100$).....	100
Şekil 20. Tabakaların yükseklikleri oranlarına bağlı olarak $y=0$ da değme gerilmesi yayılışı ($m=2$, $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $R/h_1=500$, $G/(P/h_1)=100$).....	101
Şekil 21. Tabakaların yükseklikleri oranlarına bağlı olarak $y=-h$ da değme gerilmesi yayılışı ($m=2$, $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $R/h_1=500$, $G/(P/h_1)=100$).....	101
Şekil 22. $\sigma_x/(P/h_1)$ normal gerilmesinin yük ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$, $m=2$, $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $R/h_1=500$).....	103
Şekil 23. $\sigma_x/(P/h_1)$ normal gerilmesinin yarıçap ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$, $m=2$, $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $G/(P/h_1)=100$).....	103
Şekil 24. $\sigma_x/(P/h_1)$ normal gerilmesinin tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$, $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $R/h_1=500$, $G/(P/h_1)=100$).....	104
Şekil 25. $\sigma_x/(P/h_1)$ normal gerilmesinin alt tabaka ile yarım düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$, $m=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $G/(P/h_1)=100$, $R/h_1=500$).....	104
Şekil 26. $\sigma_y/(P/h_1)$ normal gerilmesinin yük ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$, $m=2$, $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $R/h_1=500$).....	106
Şekil 27. $\sigma_y/(P/h_1)$ normal gerilmesinin yarıçap ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$, $m=2$, $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $G/(P/h_1)=100$).....	106
Şekil 28. $\sigma_y/(P/h_1)$ normal gerilmesinin tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$, $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $R/h_1=500$, $G/(P/h_1)=100$).....	107
Şekil 29. $\sigma_y/(P/h_1)$ normal gerilmesinin alt tabaka ile yarım düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$, $m=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $R/h_1=500$, $G/(P/h_1)=100$).....	107

Şekil 30. $\tau_{xy} / (P/h_1)$ kayma gerilmesinin yük ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$, $m=2$, $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $R/h_1=500$).....	109
Şekil 31. $\tau_{xy} / (P/h_1)$ kayma gerilmesinin yarıçap ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$, $m=2$, $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $G/(P/h_1)=100$).....	109
Şekil 32. $\tau_{xy} / (P/h_1)$ kayma gerilmesinin tabakaların kayma modülleri oranları ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$, $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $R/h_1=500$).....	110
Şekil 33. $\tau_{xy} / (P/h_1)$ kayma gerilmesinin alt tabaka ile yarım düzlemin kayma modülleri oranları ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$, $m=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $R/h_1=500$).....	110
Şekil 34. İç çatlağın c ve d uçlarındaki gerilme şiddet faktörlerinin d/h_1 ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$, $m=0.5$, $n=0.5$, $c/h_1=0.05$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$).....	112
Şekil 35. İç çatlağın c ve d uçlarındaki gerilme şiddet faktörlerinin c/h_1 ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$, $m=0.5$, $n=0.5$, $c/h_1=0.05$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$).....	112
Şekil 36. Çeşitli c/h_1 oranları için iç çatlağın d ucundaki gerilme şiddet faktörlerinin d/h_1 ile değişimi($h_2/h_1 = 2$, $m=0.5$, $n=0.5$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$).....	113
Şekil 37. Çeşitli c/h_1 oranları için iç çatlağın c ucundaki gerilme şiddet faktörlerinin d/h_1 ile değişimi($h_2/h_1 = 2$, $m=0.5$, $n=0.5$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$).....	113
Şekil 38. Yarım düzlem ile alt tabakanın kayma modülü oranlarına bağlı olarak iç çatlağın c ve d uçlarındaki gerilme şiddet faktörlerinin d/h_1 ile değişimi. ($h_2/h_1 = 2$, $m=0.5$, $c/h_1=0.05$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $R/h_1=500$).....	114
Şekil 39. Tabakaların kayma modülü oranlarına bağlı olarak kenar çatlağın d ucundaki gerilme şiddet faktörünün çatlak uzunluğu ile değişimi ($R/h_1=500$, $G/(P/h_1)=100$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$).....	117
Şekil 40. Alt tabaka ile elastik yarım düzlemin kayma modülü oranlarına bağlı olarak kenar çatlağın d undaki gerilme şiddet faktörünün çatlak uzunluğu ile değişimi ($R/h_1=500$, $G/(P/h_1)=100$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$).....	117
Şekil 41. Panç ile tabaka arasındaki değme gerilmesinin kayma modülleri oranı ile değişimi ($R/h_1=250$, $G/(P/h_1)=250$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$).....	119
Şekil 42. Tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme gerilmesinin kayma modülleri oranı ile değişimi ($R/h_1=250$, $G/(P/h_1)=250$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$).....	119

TABLULAR DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo2. Dairesel panç yarıçapına bağlı olarak yükün değişimine göre değme uzunlukları.....	92
Tablo2. Tabakaların kayma modülleri oranına bağlı olarak tabaka ile yarım düzlemin kayma modülü oranının değişimine göre değme yüzeyleri ($h_2/h_1=2$, $m=2$, $n=2$)	92
Tablo 3. Tabakaların kayma modülleri oranlarının farklı değerleri için iç çatlak durumunda c ve d uçlarındaki gerilme şiddet faktörlerinin d/h_1 ile değişimi ($h_2/h_1=2$, $ch_1=0.05$, $n=0.5$).....	115
Tablo 4. Tabakaların kayma modülleri oranlarının farklı değerleri için iç çatlak durumunda c ve d uçlarındaki gerilme şiddet faktörlerinin d/h_1 ile değişimi ($h_2/h_1=2$, $ch_1=0.05$, $n=0.5$).....	116
Tablo5. Yarıçap değişimine göre değme uzunluklarının literatürle karşılaştırılması ($G/(P/h_1)=125$, $m=1$, $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$).....	118
Tablo6. Kayma modülü oranlarının değişimine göre değme uzunluklarının literatürle karşılaştırılması ($G/(P/h_1)=125$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$).....	118

SEMBOLLER DİZİNİ

a	:Rijit blok ile tabaka arasındaki yarı değme uzunluğu
b	:Elastik tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki yarı değme uzunluğu
e	:Hacim değıştırme oranı
E	:Elastisite modülü
F(x)	:Rijit blok profilini tanımlayan fonksiyon
f(x)	:F(x) fonksiyonun türevi
G	:Kayma modülü
h_1	:Üst tabakanın yüksekliği
h_2	:Alt tabakanın yüksekliği
h	:Tabakaların toplam yüksekliği
k(c)	:Çatlağın c ucundaki gerilme şiddet faktörü
k(d)	:Çatlağın d ucundaki gerilme şiddet faktörü
m	:Tabakaların kayma modülleri oranı
n	:Elastik yarım düzlem ile alt tabakanın kayma modülleri oranı
N	:Gauss-Chebyshev integrasyonunda alınan nokta sayısı
P	:Rijit bloğa uygulanan tekil kuvvet
$p_1(x)$:Rijit blok altındaki değme gerilmesi
$p_2(x)$:Alt tabaka ile yarım düzlemin birbirine değdiği yüzeydeki değme gerilmesi
R	:Dairesel pançın yarıçapı
S,T	:Çatlak haline ait ters Fourier dönüşüm fonksiyonları
u	:x doğrultusundaki yer değıştırme bileşeni
v	:y doğrultusundaki yer değıştırme bileşeni
w	:z doğrultusundaki yer değıştırme bileşeni
x,y,z,	:Kartezyen koordinatlar
X, Y, Z,	:x, y, z, eksenleri doğrultusundaki kütle kuvveti bileşenleri
α	:Çatlaksız hale ait Fourier dönüşüm değışkeni
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$:x,y,z doğrultularındaki birim uzamalar
Φ, Ψ	:Çatlaksız hale ait ters Fourier dönüşüm fonksiyonları
ζ	:Çatlaklı hale ait Fourier dönüşüm değışkeni
κ	:Elastik sabit
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$:Kayma şekil değıştırme bileşenleri

λ	:Lame sabiti
ν	:Poisson oranı
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$:Sırasıyla x,y,z doğrultularındaki normal gerilme bileşenleri
$\sigma_x^*, \sigma_y^*, \sigma_z^*$:Alt tabakada çatlak olması durumunda sırasıyla x,y,z doğrultularındaki normal gerilme bileşenleri
σ_0	:Çatlaksız tabakada simetri ekseninde $y=0$ noktasındaki normal gerilme
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$:Sırasıyla x, y, z doğrultularındaki kayma gerilmesi bileşenleri
$\tau_{xy}^*, \tau_{xz}^*, \tau_{yz}^*$:Alt tabakada çatlak olması durumunda sırasıyla x, y, z doğrultularındaki kayma gerilmesi bileşenleri

Not: Bu tabloda verilmeyen bazı semboller metin içerisinde kullanıldıkları yerlerde tanımlanmıştır.

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

İnşaat mühendisliğinde mühendisin amacı, farklı malzeme ve metotlar kullanarak, belirli yükler altında kullanım şartlarını temin eden, emniyetli ve ekonomik yapı elemanlarını üretebilmektir. Mühendislik yapılarındaki yapı elemanlarının boyutlandırılmasında gerekli olan gerilme, yer ve şekil değiştirme değerlerinin belirlenmesinde ise Elastisite Teorisini temel alan hesaplamalar kullanılmaktadır.

Günümüzde bilgi, beceri, bilim ve teknoloji bakımından ileri gidilmesi ile malzeme özellikleri, bilgisayar programları ve hesap yöntemlerinin gelişimi sağlanmış böylece karışık ve uzun ifadeler içeren elastisite problemlerinin çözümleri ile ilgili çalışmalar birçok alanda gelişme ve hız kazanmıştır.

Bu çalışmada; rijit bir panç vasıtasıyla tekil yük uygulanan elastik yarım düzleme oturmuş farklı yükseklik ve elastik sabitlere sahip yapışık iki tabakanın değme problemi ve aynı problemin alt tabakasinda çatlak olması hali incelenmiştir.

1.2. Değme Problemleri

İki cisim arasında bir noktada, bir uzunluk yada yüzey boyunca olabileceği gibi bunun tamamını da içerebilen değme durumu ile ilgili çalışmalar 1882 yılında yazdığı “On the contact of elastic solids” adlı yayını ile Heinrich Hertz tarafından başlatılmıştır (Keer 1972, Johnson,1985). Sürtünmesiz yüzeyler ve tam elastik cisimleri çalışmalarında konu edinen Hertz, iki elastik cismin birbirine değmesi durumunda değme bölgesinin eliptik olduğunu kabul etmiş, şekil değiştirme ve değme gerilmelerini incelemiş, bulduğu sonuçları rijit düzleme oturan farklı geometrilere sahip problemlere uygulamıştır. Yirminci yüz yılın başlarında ise Kolosoff tarafından kompleks değişkenler yöntemi uygulanmaya başlanmış olup 1930’larda Muskhelishvili (1958) ve özellikle Sneddon’un Elastisite Teorisi üzerinde integral dönüşüm tekniklerinin kullanması ile daha da geliştirilebilmiştir (Geçit, 1986). 1950’ li yıllarda değme mekaniğindeki gelişmelerle birlikte elastik olmayan cisimlerin birbirleriyle temasından doğan gerilme ve yer değiştirmeler incelenmiştir (Johnson, 1985). Hertz ile başlayan değme mekaniğinin gelişimi Uffiland (1965) ve Galin

(1961)' in çalışmaları ile hız kazanmış, bilgisayar ve sayısal çözüm yöntemlerindeki gelişmelerle bu alandaki çalışmalar daha da yaygınlaşmıştır.

Değme problemleri temeller, karayolları, demiryolları, hava alanı pistleri, akaryakıt tankları, silindirik bilyeler ve miller başta olmak üzere mühendisliğin çeşitli uygulama alanlarında incelenmiş olup Elastisite Teorisinin kullanımı ile çözüme kavuşturulmuştur.

1.2.1. Elastik veya Rijit Pançın Elastik Tabaka veya Yarım Düzlemle Değme Durumunu İnceleyen Çalışmalar

Değme problemlerinde yük, elastik tabaka veya yarım düzleme doğrudan uygulanabileceği gibi rijit veya elastik bir cisim aracılığı ile de uygulanabilir. Yükün doğrudan uygulanması durumunda değme problemi ve dolayısı ile bilinmeyen değme gerilmesi oluşmayacaktır. Yükün elastik cisimle iletilmesi durumunda temas yüzeyinde eşit yer değiştirme şartı kullanılacak ve çözüm için değen cismin elastik analizi yapılacaktır. Rijit bir cisim vasıtası ile yükün uygulanması durumunda ise değme bölgesinde düşey yer değiştirmeler rijit cismin profili ile aynı olacaktır (Bakioğlu, 1977).

Dhaliwal ve Rau (1970, 1972), elastik yarım düzlemin serbest yüzeyine rijit bir panç ile bastırıldığında gerilme ve yer değiştirme dağılımını belirleyen Boussinesq problemini çözmüşlerdir. Keyfi biçimli pançın etki derinliği ve pança uygulanması gereken toplam yük için basit bir formül çıkarılmıştır. Ayrıca pançın altında şekil değiştiren yüzey için de ifadeler çıkarılmış sonuçlar silindir, koni, küre parabol ve elipsoid biçimli pançlar için ayrı ayrı elde edilmiştir.

Civelek (1978), rijit dikdörtgen bir blok aracılığıyla dış yükün uygulandığı elastik tabakada sürtünmesiz değme problemini incelemiştir.

Bakırtaş (1984), ortotropik ve homojen olmayan malzemeden oluşan elastik yarım düzlem üzerinde rijit bir panç problemini incelemiştir. Ortotropi eksenleri kartezyen koordinat sisteminde olup, eksenlerden biri yarım düzlemin kenarına paralel ve diğeri düşeydir. Fourier dönüşüm teknikleri kullanılarak karışık sınır değer problemleri sayısal olarak çözülebilen tekil integral denklemlere indirgenmiştir.

Keer ve arkadaşları (1984), elastik çeyrek düzlem ile rijit blok arasındaki değme problemini integral dönüşüm tekniklerini kullanarak çözmüşlerdir .

Geçit ve Gökpinar (1985), rijit dairesel bir mesnete oturan elastik bir tabakanın değme problemini incelemiştir. Tabaka ile mesnet arasında sürtünme olmadığı ve

değme yüzeyleri boyunca sadece basınç gerilmelerinin aktarıldığı varsayılmıştır. Tabakaların üst yüzüne üniform bir basınç uygulanmış, farklı blok şekilleri için değme yüzeyindeki gerilme yayılımı, değme uzunluğu ve normal gerilmeler hesaplanmıştır.

Geçit (1986), elastik yarı sonsuz dairesel silindir vasıtası ile bir elastik yarım düzleme bastırılan tabaka için aksenal simetrik değme problemini çözmüştür. Sürtünme olmadığı ve çekme gerilmelerinin değme yüzeyi boyunca aktarılmadığı kabul edilmiştir. Yer değiştirme ve gerilmeler integral dönüşüm teknikleri kullanılarak elde edilmiştir. Sayısal çözümler yapılmış değişik malzeme özellikleri ve boyutları için değme uzunlukları, değme gerilmesi dağılımları bulunarak grafiklerle sunulmuştur.

Nowell ve Hills (1988), sonsuz uzunluğa sahip elastik tabakanın iki panç ile bastırılması halinde sürtünmeli ve sürtünmesiz değme problemini incelemişlerdir.

Pindera ve Lane (1993, 1993) rijit parabolik bir pançla bastırılan izotropik, ortotropik ve monoklinik tabakaların oluşturduğu çok tabakalı yarım düzlemlerde sürtünmesiz değme problemini incelemişlerdir. Her bir tabaka için yerel rijitlik matrisi bulunmuş daha sonra değme yüzeyleri boyunca süreklilik koşullarının uygulanması ile yerel rijitlik matrisleri toplanarak genel rijitlik matrisleri elde edilmiştir.

Binienda ve Pindera (1994), metal-matriks ve polimer-matriks kompozit yarım düzlemlere, rijit parabolik bir pançla bastırıldığında gösterdikleri davranışın benzerliklerini ve farklılıklarını araştırmışlardır. Değme bölgesinde normal gerilme dağılımı ve değme uzunluğunun yük ile değişimini incelemişler, ayrıca malzeme özelliklerinin etkilerini izotropik, ortotropik, monoklinik tabakalardan oluşturulan yarım düzlemlerin sürtünmesiz değme problemleri için geliştirilen bir metotla analiz etmişlerdir. Sonuçlar değme uzunluğu boyunca homojen metal-matrix kompozit yarım düzlemin polimer- matrix kompozit yarım düzlemden daha rijit olduğunu göstermiştir.

Urquart ve Pindera (1994), rijit düz bir panç ile bastırılan anizotrop tabakalara sahip elastik yarım düzlemde sürtünmesiz değme problemini incelemişlerdir. Tabakaların izotrop olması hali için de üst tabaka ve en alttaki yarım düzlemin elastisite modülleri oranı ve panç ile tabaka arasındaki değme durumları belirtilmiştir.

Özşahin ve Çakıroğlu (1998), iki elastik blok yardımı ile yüklenmiş elastik tabakada temas problemini Elastisite Teorisi ve integral dönüşüm tekniğini kullanarak çözmüşlerdir. Problem temas gerilmelerinin bilinmeyen olduğu tekil integral denklem takımına indirgenmiş ve sayısal çözüm Gauss-Chebyshev integrasyon formülü yardımıyla yapılmıştır. Temas uzunlukları ve temas gerilmeleri için elde edilen sonuçların yük

faktörü, malzeme sabitleri, blok yarıçapları gibi boyutsuz büyüklüklerle değişimleri grafikler halinde sunulmuştur.

Stevanovic ve diğerleri (2001), elastik tabaka ve panç arasında değme durumunun bilinmeyenlerinin çözümü için yaklaşık bir mekanik model geliştirmişlerdir.

1.2.2. Elastik Tabakanın Elastik Tabaka, Yarım Düzlem veya Rijit Temel İle Değme Durumunu İnceleyen Çalışmalar

Weitsman (1969), elastik yarım düzlem ve plak arasında değme bölgesinin uzunluğu ile ilgili bilgi sağlamak amacıyla sonsuz elastik plak ve yarı sonsuz elastik düzlem arasındaki sürekli değmeyi incelemiştir. Yarım düzleme oturan plak ağırlıksız kabul edilip, sınırlama olmaksızın elastik düzleme merkezi bir yük ile bastırılmıştır. Sınırlama olmadığından çekme gerilmeleri plak ve elastik mesnet arasında ara yüzeylerde aktarılmamıştır.

Chen ve Engel (1972), elastik yarım düzlemle sınırlandırılmış çok tabakalı düzlemin gerilme analizini farklı panç profilleri ve tabaka kalınlıklarının farklı değerleri için incelemiştir.

Keer ve Chantaramungskorn (1972), elastik düzlem ile elastik tabaka arasında sürtünmesiz değme problemini incelemiştir. Tabakanın belirli bir uzunluğu dışında tüm yüzeyi üniform yayılı yük ile yüklenmiş olup tabaka ile düzlem arasında yayılı yükün etki etmediği mesafeden daha küçük bir ayrılma bölgesi meydana geleceği kabul edilerek problem Papkovich-Neuber potansiyelleri kullanılarak çözülmüştür.

Geçit (1981), elastik yarım düzlem üzerine oturan sonsuz bir elastik tabaka için düzlem değme problemini incelemiştir. Tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme sürtünmesizdir ve sadece basınç gerilmelerinin aktarılmasına izin verilmiştir. Eğer P değeri $P < P_{cr}$ ise ara yüzey boyunca değme sürekli. $P > P_{cr}$ ise ayrılma vardır. Problem öncelikle sürekli değme durumu için çözülmüş ve P_{cr} elde edilmiştir. Sonra süreksiz değme problemi tekil integral denklem vasıtasıyla formüle edilmiştir. Basınç ve çekme olmak üzere her iki yükleme koşulu göz önüne alınıp, P_{cr} için sayısal sonuçlar, değme gerilme dağılımları ve ayrılma bölgeleri değişik malzeme kombinasyonları için verilmiştir.

Geçit ve Erdoğan (1978), elastik bir tabakanın rijit bir düzlem üzerine oturduğu ve eksenel simetrik yük etkisinde olduğu sürtünmesiz temas problemini inceleyerek ayrılma bölgesinin büyüklüğü ve temas gerilmesinin dağılımı ile ilgili sonuçları vermişlerdir.

Erdoğan ve Ratwani (1974), iki elastik çeyrek düzlemle mesnetlenen elastik tabaka için sürtünmesiz değme problemini çözmüşlerdir. Mesnetlerle tabaka arasında değme sürtünmesiz olup değme alanı boyunca sadece basınç normal gerilmeleri aktarılabilmiştir. Elastik çeyrek düzlemlerle mesnetlenen kiriş veya plak gibi iki boyutlu elastisite problemlerinin çözümü için genel bir metot geliştirilmeye çalışılmıştır. Tabaka-yarım düzlem problemi olarak görülebilen bu problem temas gerilmelerinin bilinmeyen olduğu tekil integral denklemlere indirgenmiş ve integral denklemin sayısal çözümünden değme gerilmesi elde edilerek değişik geometriler için değme basıncı, değme alanı, değme gerilmeleri, dış yükler ve malzeme özellikleri sunulmuştur.

Adams ve Bogy (1977), farklı elastik özelliklere ve kalınlıklara sahip yarım düzlem ile yarı sonsuz tabaka arasındaki değme problemini incelemişlerdir. İntegral denklemler çıkarılmış ve sonuçlar çeşitli kalınlık oranları için verilmiştir. Değme gerilmeleri hesaplanarak grafiklerle sunulmuştur.

Loboda ve Tauchert (1985), ortotropik sonsuz tabaka ile mesnetlenen, ucundan simetrik yüklü yarısonsuz ortotropik tabakanın gerilme durumunu incelemişlerdir. Fourier dönüşümleri kullanılarak problem tekil integral denklemden oluşan bir sisteme indirgenmiş, değme gerilmeleri için farklı yük ve malzeme özelliklerine bağlı olarak değişen sayısal sonuçlar sunulmuştur.

Geçit (1987), rijit temele oturan elastik bir tabakanın düzlem gerilme problemini çözmüştür. Sonlu kalınlıklı rijit tabaka boyunca tabakanın üst yüzeyine çekme kuvveti uygulanmış, değme bölgesinde normal ve kayma gerilmeleri için 2 tekil integral denklemden oluşan bir sistem alınmış, bu integral denklemler sayısal olarak çözülmüş ve gerilme dağılımları çeşitli geometriler için hesaplanmıştır.

Blaibel ve Geçit (1989), serbest kenarları kısa uç boyunca moment etkisindeki sonsuz tabaka ile sınırlı yarı sonsuz tabakanın eğilme problemini ele almışlardır. Sonsuz tabaka alt bölgesinden rijit mesnetle sınırlandırılmış olup her iki malzeme de izotropiktir. Problem integral dönüşüm tekniği yardımı ile çözülmüştür.

Shield ve Bogy (1988), elastik yarım düzleme rijit panç ile bastırılan tabakanın değme problemini incelemişleridir. Tek tabakanın olduğu durumda değme bölgelerinin sayısı, elastik sabitler ve tabaka kalınlığına bağlı olarak bulunmuştur.

Çakıroğlu ve Erdöl (1989), çalışmalarında elastik zemine oturan malzeme sabitleri ve kalınlıkları farklı iki tabakanın birbiri üstüne oturtulmasından meydana gelen bileşik tabaka problemini çözmüşlerdir. Bütün yüzeylerin sürtünmesiz olduğu, elastik zemine ait

kütle kuvvetinin olmadığı kabul edilmiştir. Ayrıca tabakalar üstten düzgün yayılı yük ve tekil yük ile kendi ağırlığı etkisi altında bulunmakta olup gerilmeler, yer değiştirmeler, ilk ayrılma noktaları ve bu ilk ayrılmayı meydana getiren dış yüklere ait nümerik sonuçlar elde edilmiştir.

Dempsey ve diğerleri (1990), Winkler temeline oturan elastik, homojen, izotropik sonsuz uzunluğa ve belirli bir derinliğe sahip tabakanın değme problemini ele almışlardır. Tabakanın üst kısmından rijit bir blokla tekil veya üniform yayılı yük etki etmesi durumları incelenmiş, kiriş teorisi kullanılarak çözümler yapılmıştır. Dempsey ve diğerleri (1991), diğer bir çalışmada Winkler temeline oturan elastik tabakanın aksel simetrik değme problemini rijit pançın konik, parabolik, eliptik şekilli olması durumları için incelemiştir.

Çakıroğlu ve Çakıroğlu (1991), yarı sonsuz düzlem ve tabaka arasında sürekli ve süreksiz değme problemini çözmüşlerdir. Uygulanan yük ilk ayrılmayı sağlamış, değme yüzeyinde gerilme dağılımları uzunluğun genişliğe oranının farklı değerleri ve malzeme özellikleri için grafiklerle ifade edilmiştir. Süreksiz değme durumu için tekil integral deklemler elde edilmiş ve Gauss-Chebyshev integral yöntemiyle sayısal olarak çözülmüştür. Ayrılmanın olduğu değme problemleri süreksiz, ayrılmanın olmadığı değme problemleri sürekli değme problemleri olarak adlandırılmaktadır. Ayrılmanın olduğu bu çalışmada tabakaya simetrik yayılı yük uygulanmış ve tabakanın elastik yarım düzlemden ilk ayrılması, yükleme, tabaka kalınlığı ve elastik sabitler göz önüne alınarak incelenmiştir.

Çakıroğlu ve Erdöl (1993,2001), üst yüzeyinden düzgün yayılı yük etkileyen ve elastik yarı sonsuz düzleme oturan bileşik tabaka problemini Elastisite Teorisine göre çözmüşlerdir. Tabakalar farklı malzeme ve farklı yüksekliklere sahip olup kendi ağırlıklarının etkisindedir. Bütün yüzeyler sürtünmesiz kabul edilmiş, gerilme ve yer değiştirme bileşenleri integral dönüşüm tekniği kullanılarak elde edilmiştir. Malzeme özellikleri, tabakanın kalınlıkları ve uygulanan yükün şiddetinin ayrılma uzaklığı ve değme gerilmeleri üzerinde önemli bir rol oynadığı bulunmuştur. Yazarlar süreksiz değme durumu ile ilgili üç durum için sınır koşullarını yazmışlardır. Birinci durum; iki tabaka arasında değme süreksizdir ve alt tabaka ile yarım düzlem arasında değme süreklidir. İkinci durum; iki tabaka arasında değme süreklidir ve alt tabaka ile yarım düzlem arasında değme süreksizdir. Üçüncü durum ise iki tabaka arasında ve alt tabaka ile yarım düzlem arasında değme süreksizdir. Sınır şartları üç durum için yazılmasına rağmen uygun sayısal sonuçlar birinci ve üçüncü durumlar için sağlanmıştır. Birinci ve üçüncü durumlar için iki

tabaka arasında ayrılma oluşmuştur. Dış yük ayrılma için gerekli olan yükten daha büyük olduğu zaman iki tabaka arasında ayrılma meydana gelmiştir.

Aksoğan ve diğerleri (1996, 1997), iki elastik çeyrek düzlem üzerine oturan elastik bir tabakanın iki boyutlu elastisite problemini sırasıyla integral dönüşüm tekniği, sonlu elemanlar ve sınır elemanlar yöntemlerini kullanarak çözüp sonuçları karşılaştırmışlardır. Tabakalarda kartezyen koordinatlar çeyrek düzlemde ise polar koordinatlar kullanılmıştır. Tabaka ile çeyrek düzlem arasında değme sürtünmesiz kabul edilip değme bölgesinde yalnız normal basınç gerilmeleri bulunmaktadır. Elastik tabakaya üstten simetrik tekil yük, simetrik üniform yayılı yük ve simetrik olmayan üniform yayılı yük etki ettirilmesi durumlarında değme gerilmeleri incelenmiş, çözümde Fourier ve Mellin dönüşümleri kullanılmıştır. Her üç durum için de yakın sonuçlar elde edilmiştir.

Birinci ve diğerleri (1997), elastik mesnete oturan, elastik sabitleri ve yükseklikleri farklı sonsuz uzunlukta iki tabaka arasındaki sürekli değme problemini Elastisite Teorisi ve Fourier dönüşüm tekniği yardımıyla incelemişlerdir. Bileşik tabakanın üzerine uygulanan dış yüklerden dolayı, tabakaların arasında ayrılmanın başladığı ilk nokta ile ilk ayrılma yükü bulunarak, ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma yükünden küçük yükler için değme yüzeyindeki gerilme dağılımları elde edilmiştir. Çözümde, kütle kuvvetlerinin etkisi göz önüne alınmıştır.

Birinci ve Erdöl (1999), farklı elastik sabitlere ve yüksekliklere sahip bileşik tabaka ile değme bölgesi dairesel veya düz olan birer rijit blok arasındaki sürtünmesiz değme problemini incelemişlerdir. Değme bölgesi dairesel olan bloğun değme basıncına ilaveten değme uzunluğu da bilinmeyen olup değme uzunluğu, değme basınç dağılımı ve tabakaların elastik karakteristikleri değme bölgesine uygulanan yüke bağlıdır. Bileşik tabakaya rijit blok vasıtasıyla $2P$ şiddetinde yük uygulanmış olup kütle kuvvetleri etkisi ihmal edilmiştir. Değme gerilmelerine bağlı gerilme ve şekil değiştirmeler Fourier dönüşüm teknikleri kullanılarak belirlenmiş, tekil integral denkleme indirgenen problem Gauss-Chebyshev integrasyon formülasyonu yardımıyla çözülmüş ve elde edilen sayısal sonuçları grafiklerle ifade edilmiştir.

Elsharkawy (1999), iki elastik tabaka ile kaplı yarım düzlemin rijit eğrisel bir pançla bastırılması durumunda farklı sürtünme katsayıları için gerilme dağılımlarını incelemiştir.

Birinci ve diğerleri (2000), iki noktadan mesnetlenmiş olan elastik sabitleri ve yükseklikleri farklı iki tabakadan oluşan ve rijit bir dikdörtgen blok aracılığı ile yüklenen bileşik tabakadaki süreksiz temas problemini incelemişlerdir. Blokla bileşik tabaka

arasında sürekli temas durumu oluşmuştur. Bütün yüzeyler sürtünmesiz kabul edilmiş olup süreksiz temas; bileşik tabakaya uygulanan dış yükün şiddeti, tabakaların yükseklikleri, malzeme özellikleri ve rijit blok genişliğine bağlı olarak incelenmiştir.

Kahya ve diğerleri (2001), dairesel, parabolik, ve dikdörtgen olarak alınan farklı panç profilleri için rijit bir temele oturan elastik tabakanın değme problemini kütle kuvvetleri ve sürtünmeyi ihmal ederek çözmüşlerdir. Bir başka çalışmada da dairesel rijit panç aracılığı ile yük uygulanan, elastik yarım düzleme oturan tabakanın değme durumu incelenmiştir (Kahya ve diğerleri2007).

Wozniak ve diğerleri(2002), rijit bir küre veya silindirle Winkler tipi temele bastırılan elastik tabakanın eksenel simetrik değme problemini çözmüşlerdir.

Birinci ve diğerleri (2002), elastik temele oturan farklı elastik sabitlere ve yüksekliklere sahip iki malzemedden yapılmış tabakalı bir bileşik tabaka problemini Elastisite Teorisine göre incelemiştir. Gerilme ve yer değiştirme bileşenleri integral dönüşüm teknikleri kullanılarak elde edilmiş, bileşik tabakanın herhangi bir noktasında gerilme ve yer değiştirme değerleri araştırılarak grafikleri çizilmiştir.

Özşahin ve Çakıroğlu(2003), rijit yarım daire şeklinde iki mesnet üzerine oturan değişik elastik sabitlere ve yüksekliklere sahip iki elastik tabakaya ait temas problemini Elastisite Teorisine göre çözmüşlerdir. Kütle kuvvetlerinin etkisi ihmal edilmiştir. Tabakalar arasındaki sürtünme dikkate alınırken bileşik tabaka ile mesnetler arasında sürtünmenin olmadığı dolayısı ile ara yüzey boyunca sadece basınç gerilmesi aktarımının olacağı kabul edilmiştir. Bileşik tabaka üst yüzeyinden sınırlı bir bölgede basınç gerilmesinin etkisinde bırakılmıştır. Bileşik tabaka ile mesnetler arasındaki temas bölgesinin büyüklüğünün rijit bloğun profiline, bileşik tabakaya uygulanan yayılı yükün genişliğine ve şiddetine de bağlı olduğu belirtilmiştir.

Çömez ve diğerleri (2003, 2004), alt tarafından rijit olarak mesnetlenmiş yapışık olmayan iki elastik tabakanın ve rijit pançın sürtünmesiz değme problemini Elastisite Teorisine göre çözmüşlerdir

El Borgi ve diğerleri (2006), homojen yarım düzlem ile dereceli elastik tabaka arasında değme problemini incelemiştir. Dereceli tabaka izotropik. homojen bir ortam olarak modellenmiştir. Tabaka ile düzlem arasında sürtünme olmadığı kabul edilmiştir. Bundan dolayı sadece basınç gerilmelerinin aktarımına izin verilmiştir. Çözüm için integral dönüşümleri kullanılmış. değme basıncı ve değme uzunluğunun bilinmeyen olduğu bir integral denkleme indirgenerek çözüm yapılmıştır.

Kahya ve diğeri (2007), rijit bir pançla anizotrop elastik yarım düzleme bastırılan anizotrop elastik tabakanın değme durumunu incelemişlerdir. Problem değme uzunluğunun ve değme gerilmelerinin bilinmeyen olduğu tekil integral denkleme indirgeyerek çözümlerini yapmışlardır.

Özşahin ve diğeri (2007), rijit iki düz blok üzerine oturan değişik elastik sabitlere ve yüksekliklere sahip tabakalardan oluşan sistemin sürtünmesiz temas problemini Elastisite Teorisine göre çözmüşlerdir. Bileşik tabaka üst yüzeyinden sınırlı bir bölgede yayılı basınç yükünün etkisinde bırakılmış, bileşik tabaka ile rijit düz bloklar arasında sürtünmenin bulunmadığı kabul edilirken, tabakalar arasındaki sürtünme dikkate alınmıştır. Problem değme gerilmelerinin bilinmeyen olduğu tekil integral denkleme indirgenmiş, sayısal olarak çözümlerle sonuçları grafiklerle sunulmuştur.

Adıbelli ve diğeri (2009) elastik yarım düzleme oturan çift tabakada sürtünmesiz değme problemini araştırmışlardır. Malzeme sabitlerinin, yükün ve yarıçapın farklı değerleri için değme yüzeyleri ve değme gerilmelerini grafiklerle ifade etmişlerdir.

1.2.3. Değme Problemleri İle İlgili Yapılmış Diğer Çalışmalar

Elastisite problemlerinin çözümünde uygulamada ve matematiksel çözümlerdeki zorluklar nedeni ile ortam genellikle homojen kabul edilir. Bununla birlikte bazı problemlerde özellikle zemin mekaniği problemlerinde homojenlik kabulü çok yeterli değildir. Zemin ile ilgili yapılmış olan deneyler zeminin elastik özelliklerinin koordinatlarla değiştiğini göstermiştir. Zemin ortamının rijitliğinin derinlikle artması buna bir örnektir. Zeminin homojen olmadığı göz önüne alınırsa genel olarak Poisson oranı sabit ve elastisite modülünün derinlikle üstel olarak değiştiği varsayılır (Çömez, 2004).

Bakırtaş (1980), rijit panç ile bastırılan homojen olmayan yarım düzlemde değme problemini incelemiştir. Yarı sonsuz düzlemde homojenliğin derinlikle değiştiğini kabul etmiş, elde edilen karışık sınır değer problemini Fourier dönüşüm tekniğini kullanarak sayısal olarak çözümlenecek tekil integral denkleme indirgemıştır. İntegral denklemin çözümü ile temas gerilmeleri elde edilmiş, panç altındaki gerilme dağılımı ve Poisson oranının sonuçlar üzerindeki etkisi incelenmiştir.

Fabricant ve Sancar (1984), Homojen olmayan yarım düzlemde asimetric değme problemini incelemişlerdir. Değme bölgesini dairesel kabul ederek, panç altındaki değme

gerilmelerini ifade edip, değme bölgesi dışındaki yer değiştirmeler için gerekli ifadeyi değme bölgesi içindeki yer değiştirme ifadelerinden türetmişlerdir.

Sassi ve diğerleri (1998), iki elastik tabaka arasındaki doğru değme yüzeyini, değme basınç dağılımını belirleyebilmek için farklı geometriler göz önüne alarak bir bilgisayar programını kullanmışlardır. Üç eksenli sürtünmesiz değmenin incelendiği problemde analitik ve sayısal teknikler kullanılmış ve karşılaştırılmıştır

Panah ve Fener (1998), sürtünmesiz değme probleminin 3 eksenli gerilme analizi için sınır eleman metodunu kullanarak bir çözüm sunmuşlardır.

Solberg ve l'apadopoulos (1998), sürtünmesiz değme problemlerinin çözümünü sonlu elemanlar metodunu kullanarak gerçekleştirmişlerdir.

Jaflar (2002), rijit bir temele rijit bir pañçla bastırılan elastik tabakanın eksenel simetrik sürtünmesiz değme problemini incelemiştir. Temelle tabaka arasında yapışma olduğu ve olmadığı durumlar için inceleme yapılmıştır. İnce tabakalarda değme basınçları için asimptotik çözümler elde edilmiştir.

Moro ve diğerleri (2002), sürtünmesiz değme problemlerini sonlu elemanlar metodu ile çözmüşlerdir. İki gövde arasında değmenin niteliğini etkileyebilen faktörler; yapının rijit olup olmaması, yüklemenin statik veya dinamik olması, değme yüzeylerinin kompleks olup olmaması, sürtünmenin varlığı ya da yokluğu gibi faktörler olup, değme davranışı genelde lineer değildir. Bu hesaplamaların yapılması için birkaç sayısal metot mevcut olup sonlu elemanlar metodu bunlardan biridir.

Porter ve Hills (2002), rijit pañç ile elastik yarım düzleme bastırılan tabakanın sürtünmesiz değme problemini incelemişlerdir. Pañç ile tabaka, tabaka ile yarım düzlem arası sürtünmesiz veya yapışık alınmıştır.

Shull (2002), yumuşak cisimlerde yapışma ve değmeyi incelemiştir. Değme davranışının sistemin geometrisi, uygulanan yükler, yapışma kuvvetleri ve malzeme özellikleri ile belirlendiğini ve malzemenin rijitliğinin azalması ile değme davranışını belirlemede yapışma karakterinin etkisinin arttığını ifade etmiştir

1.3. Çatlak Problemleri

İnsanoğlu yeryüzünde yaşamaya başladığı andan itibaren çeşitli malzemeleri kendisi için fayda sağlayacak biçimde kullanmayı başarabilmiş, bilgi, beceri ve merakı arttıkça da bu malzemelerin dayanım gibi temel mekanik özelliklerini dikkate alarak farklı formlarda birleştirip daha kapsamlı ve geniş kullanım alanına hitap eden malzemeler elde etmişlerdir.

Bir yapı ya da yapı elemanı yapılırken tasarım, malzeme seçimi gibi aşamalarla birlikte en önemli aşama, boyutlandırmanın yapılması ve son şeklin tayin edilmesidir.

Bu son şeklin tayini için ise malzemeyi karakterize eden bir parametre ile uygulanan yükler ve cismin geometrisini ifade eden kritik yük faktörü karşılaştırılır. Bunu yapabilmek için cismin mukavemetinin aşılma şekillerini bilmek gerekir (Civelek, 1978).

Bunlar;

1. Malzemelerin mekanik davranışı
2. Dış yükün karakteri (çarpışma, periodik yükleme, zaman bağılılıkları)
3. Cismin geometrisi
4. Çevre şartları (sıcaklık, rutubet oranı, radyasyon, kimyasal ortam vs.)

Yukarıdaki bu etkilerle akma, sünme, büzülme, burkulma, yorulma, kırılma, korozyon meydana gelmesiyle yapı mukavemetini kaybedebilir. Bunlardan gevrek veya sünek olabilen kırılma gerilmeler altında cismin iki veya daha çok parçaya ayrılmasıyla meydana gelir. Gevrek kırılmada çatlak hızla ilerleyip kırılma aniden olduğundan bu tür kırılma, çatlakların daha yavaş büyüdüğü sünek kırılmaya göre daha tehlikelidir.

Malzemeler mikroskobik boyutlarda çatlak içerirler ve bunlar malzeme kullanıldıkça birbirleriyle birleşerek görülebilir hale gelirler. Bu durumun hangi koşullarda olacağını, ne zaman ilerleyeceğinin ve çatlağın kritik boyutlara ulaşacağını bilmesi gerekir. Leonardo Da Vinci'nin çelik halatlar üzerinde yaptığı, halat uzunluğu arttıkça iç kusurların da artmasıyla mukavemetin düştüğünü gördüğü çalışması kırılma mekaniği ile ilgili ilk çalışmadır. İkinci dünya savaşında savaş gemilerindeki hasarlar dolayısıyla önem kazanan bu konuda 1920 de ideal gevrek bir cisim için Griffit tarafından bazı kriterler ortaya konmuştur. Cisimlerin küçük çatlaklar içerdiğini ve bunların büyümesi için yeni yüzeyler yaratılması gerektiğini, gereken enerjinin ise çatlağın büyümesi ile serbest kalan elastik enerji tarafından sağlandığını söyleyen Griffit' in teorisi cam gibi ideal gevrek cisme yakın

malzemeler için gerçeğe yakın değerler vermiştir. Bu teoriden yola çıkan Irwin şekil değiştirme enerjisinin serbest bırakılma oranını çatlak ucundaki gerilme dağılımından faydalanarak hesaplayıp gerilme şiddeti faktörü cinsinden ifade etmiştir. (Civelek, 1978)

1.3.1.Çatlak Problemleri İle İlgili Litartür Taraması

Erdoğan, Biricikoğlu (1973), bir yarım düzlemden diğerine devam eden çatlak problemini Cauchy tekil integral denklemlerini kullanarak çözmüşler, gerilme şiddet faktörleri ve çatlak yüzey yer değiştirmelerini bulmuşlardır.

Krenk (1973, 1975), elastik tabakada eğik çatlak problemini ele almışlardır. Problem tekil integral denkleme indirgenmiş ve bu denklem çözülerek gerilme şiddet faktörleri belirlenmiştir. Diğer çalışmasında da elastik bir tabakada iç çatlak problemini ele almış, çatlaksız ve çatlaklı tabakaların çözümüne ilişkin bir metot sunmuştur.

İki simetrik çatlak içeren sonsuz tabakada iç ve kenar çatlak durumu Gupta ve Erdoğan, (1974) tarafından incelenerek gerilme şiddet faktörleri belirlenmiştir. Diğer bir çalışmada ise Gupta (1974), iki elastik yarım düzlemle sınırlandırılmış tabakada çatlak problemini incelemiştir. Problem tekil integral denklem haline getirilmiş ve sayısal olarak çözülerek malzeme özelliklerinin gerilme şiddet faktörleri üzerindeki etkisi belirlenmiştir.

Ratwani ve Gupta (1974) her bir tabakasında bir veya iki çatlağı bulunan çok tabakalı kompozitin çatlak problemini incelemişlerdir. Problem tekil integral denklemlere indirgenerek çözümlenmiş ve gerilme şiddet faktörleri belirlenmiştir.

Erdöl ve Erdoğan (1976), çatlak ihtiva eden, eğilme etkisindeki tabaka için gerilme şiddet faktörlerini belirlemişlerdir.

Theocaris ve Ioakimidis (1980), düzlem izotropik çatlak probleminin çözümü için kompleks potansiyel yaklaşımını temel alan genel bir metot sunmuşlardır. Problem çatlak boyunca kompleks bir tekil integral denkleme indirgenip bu denklemin sayısal çözümü ile gerilme şiddet faktörü belirlenmiştir.

Adams (1980), yüzeye paralel olan birbirinden farklı çatlaklar içeren izotropik homojen elastik bir tabakada çatlak problemini inceleyerek gerilme şiddet faktörlerini hesaplamıştır.

Erdöl (1984), kenarlarına dik iç ve kenar çatlak içeren bir tabaka problemini inceleyerek tabakanın çatlaksız haldeki çözümünü ve bu çözümden elde edilen gerilmelere zıt yönde ancak aynı şiddet ve doğrultuda yüklenmesi halindeki çözümünün

süperpozisyonu ile çatlaklı tabakanın çözümünü yapmış ve gerilme şiddet faktörlerini elde etmiştir.

Delale ve Erdoğan (1983), homojen olmayan bir düzlemde $y=0$ da yerleşmiş bir çatlak problemini çözmüşlerdir. Ortamın Poisson oranı sabit varsayılırken Elastisite modülünün çatlağın koordinatlarına bağlı olarak üstel olarak değiştiğini göstermişlerdir. Yapılan çalışma sonucunda homojen olmayan ortamda çatlak yüzey yer değiştirmesi homojen ortamdaki daha küçük çıkmıştır.

Delale ve Erdoğan (1988), yapışık homojen veya homojen olmayan iki yarım düzlem arasındaki ara yüzey çatlağını incelemişlerdir. Problem farklı parametreler için araştırılmış, gerilme şiddet faktörleri belirlenmiştir

Suo ve Hutchinson (1990), ara yüzeyinde çatlak bulunan iki izotropik elastik tabaka problemini analitik olarak çözmüşlerdir

Yuan, ve diğerleri (1995) yarım düzlemde sıcağın ve büzülmeden oluşan makro çatlakları incelemişlerdir. Lineer elastik çatlak davranışı incelenen problem tekil integral denkleme indirgenerek sayısal olarak çözülmüştür. Bulunan sayısal sonuçlar örneğin cam için deneysel sonuçlarla karşılaştırılmış ve birbirine uygun oldukları görülmüştür.

Birinci ve diğerleri (1998), Birinci (1998), çalışmalarında farklı yükseklik ve elastik özelliklere sahip, alt tabakasında çatlak bulunan iki tabakadan oluşan bileşik tabaka problemini inceleyerek iç ve kenar çatlak durumları için gerilme şiddet faktörlerini belirlemişlerdir.

Shbeeb and Binienda (1999) iki tabakalı bir kompozitin ara yüzey çatlağını incelemişlerdir. Cauchy çekirdekleri kullanılarak singüler integral denklemler elde edilmiş bunlar çözümlenerek her bir tabakada farklı kalınlıklar ve çeşitli değişkenlerin oranları için çözüm yapılmış ve bazı sayısal örnekler sunulmuştur.

Ueda ve Mukai (2002), tabakalı elastik yarı sonsuz ortamda çatlak problemini incelemişlerdir. Yüzeye en yakın olan tabaka çatlak içermektedir. Sonuçlar tabakalı ortamın malzeme ve geometrik parametrelerinin bir fonksiyonu olarak farklı değerler alan gerilme şiddet faktörleri ile sunulmuştur.

Veljkovic ve Nikolic (2003), yük ve moment uygulanan ince iki tabakanın ara yüzeyinde çatlak problemini lineer elastik çatlak mekaniğine göre inceleyerek gerilme şiddet faktörünü malzemenin geometri ve elastik şekillerine bağlı olarak belirlemiştir.

Matysiak ve Pauk (2003), Winkler temeline oturan ve çatlak içeren elastik tabakanın gerilme analizini incelemişlerdir. Plak-zemin etkileşimlerinde, kaya mekaniğinde,

jeofizikte ve daha bir çok alanda araştırma ve uygulama alanı bulan bu problem, Fourier dönüşüm tekniği ve Fredholm integral denklemleri kullanılarak çözümlenmiştir.

Birinci ve Çakıroğlu (2003), sonsuz elastik düzlemde kısmen kapanan bir çatlak incelemiştir. Çatlakın kapanan kısmının uzunluğu ve gerilme şiddet faktörleri gibi bilinmeyenlerin değerleri belirlenmiştir.

Dong ve Cheung (2004), izotrop, anizotrop ve ortotrop çatlaklar içeren izotrop elastik yarım düzlemi üç farklı metot kullanarak incelemiştir. Bunlar sırasıyla

1. Sınır Eleman metodu
2. Yer değiştirme hakim olduğu integral denklem yaklaşımı
3. Şekil değiştirme hakim olduğu integral denklem yaklaşımı olarak verilebilir.

Birinci ve diğerleri (2006), elastik sabitleri ve yükseklikleri farklı iki tabakadan oluşan ve alt tabakasında simetri eksenine göre dikey bir çatlak bulunan bileşik tabakada iç ve kenar çatlak problemini incelemiştir. Çeşitli boyutsuz büyüklükler için elde edilen sonuçlar grafiklerle sunulmuştur.

1.4. Çalışmanın Kapsamı

Bu çalışmada elastik yarım düzlem üzerine 2P yükü ile yüklü rijit bir panç vasıtası ile bastırılan yapışık iki tabakanın değme problemi ve aynı problemde alt tabakada çatlak olması durumu incelenmiştir. Üst tabaka ile panç ve alt tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki değme yüzeyleri sürtünmesiz kabul edilmiştir. Kütle kuvvetleri ihmal edilmiş olup çözümde integral dönüşüm tekniklerinden faydalanılmıştır.

Çalışmanın amacı, söz konusu değme probleminde rijit panç ile üst tabaka arasında ve alt tabaka ile elastik yarım düzlem arasında değme uzunluklarını, değme bölgesinde oluşacak değme gerilmesi dağılımlarını, tabakalar ve yarım düzlemin herhangi bir noktasında normal ve kayma gerilmelerini elde etmek, iç ve kenar çatlak olması durumunda da gerilme şiddet faktörlerini tayin etmektir.

Değme ve çatlak problemlerinin çözümü için ilk olarak Elastisite Teorisinden denge denklemleri, bünye denklemleri, yer değiştirme ve şekil değiştirme bağıntıları yardımıyla Navier denklemleri elde edilmiştir. Denge denklemlerinin yer değiştirmeler cinsinden ifadesi olan kısmi türevli Navier denklemlerine Fourier İntegral dönüşüm tekniği uygulanarak gerilme ve yer değiştirme ifadeleri bilinmeyen katsayılarla bağlı olarak ifade edilmiştir. Sınır şartlarının yazılması ve Fourier dönüşümlerinin uygulanmasıyla değme

gerilmesi fonksiyonları bunlara bağılı olarak da gerilme ve yer değiştirme ifadeleri bulunmuştur. İntegral denklemlerin sayısal çözümlünde Gauss-Chebyshev integrasyon yöntemi kullanılmıştır. Denge ve uygunluk şartları sağlatılacak şekilde integral denklemlerin sayısal çözümleri yapılmış, değme uzunlukları, değme gerilmeleri, normal ve kayma gerilmeleri, çatlak bulunması durumunda iç veya kenar çatlak olması hallerine göre gerilme şiddet faktörleri hesaplanarak sonuçlar tablo ve şekillerle sunulmuştur.

1.5. Genel Denklemlerin Elde Edilmesi

Gerilme ve yer değiştirme bileşenlerinin genel ifadeleri Elastisite Teorisinden yararlanılarak elde edilecektir. Bunun için öncelikle bünye denklemleri ve yer değiştirme-şekil değiştirme bağıntıları kullanılarak denge denklemleri, yer değiştirmeler cinsinden yazılacak ve Navier denklemleri elde edilecektir. Yer değiştirme bileşenlerinin gerekli türevleri Navier denklemlerinde yerine yazılarak elde edilecek adi diferansiyel denklem takımının çözümleri sonucunda da yer değiştirme bileşenlerinin genel ifadeleri bulunacaktır. Bu ifadelerin bünye denklemlerinde yerine yazılması ile de gerilme bileşenlerinin genel ifadeleri elde edilecektir.

1.5.1. Üç Boyutlu Halde Elastisite Teorisinin Genel Denklemleri

Üç boyutlu halde u , v yer değiştirme ve σ_x , σ_y , τ_{xy} gerilme ifadeleri bulunacaktır.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \quad (3)$$

Burada X,Y,Z, üç boyutlu halde kütle kuvvetlerini ifade etmektedir. Yukarıdaki denklemleri yer değiştirme cinsinden yazabilmek için, şekil değiştirme bileşenleri ile yer değiştirme bileşenleri arasındaki türev bağıntıları;

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (5)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (6)$$

şeklinde yazılır ve kayma şekil değiştirme bileşenleri de aşağıdaki gibi ifade edilebilirler.

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (7)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (8)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (9)$$

Bünye denklemleri yer değiştirme-şekil değiştirme bağıntıları yardımıyla gerilme bileşenleri yer değiştirmeler cinsinden,

$$\sigma_x = \lambda e + 2G \frac{\partial u}{\partial x} \quad (10)$$

$$\sigma_y = \lambda e + 2G \frac{\partial v}{\partial y} \quad (11)$$

$$\sigma_z = \lambda e + 2G \frac{\partial w}{\partial z} \quad (12)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad (13)$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} = G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad (14)$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} = G\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \quad (15)$$

ifadeleri ile elde edilir. Bu ifadelerde geçen G kayma modülü olup;

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (16)$$

eşitliği ile gösterilmiştir. Burada E malzemenin elastisite modülüdür.

e ise hacim değiştirme oranı olup

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (17)$$

eşitliği ile ifade edilir. (10-12) denklemlerinde geçen λ ise Lam'e sabiti olup

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (18)$$

eşitliği ile ifade edilir. Bu ifade de ν Poisson oranıdır.

Yer değiştirmeler cinsinden yazılan gerilme bileşenleri (1-3) denge denklemlerinde yerine yazılırsa,

$$(\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial x} + G\nabla^2 u + X = 0 \quad (19)$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial y} + G \nabla^2 v + Y = 0 \quad (20)$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial z} + G \nabla^2 w + Z = 0 \quad (21)$$

İfadeleri ile belirtilen Navier denklemleri elde edilir. Bu denklemlerde geçen ∇^2 Laplace operatörü olup aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (22)$$

1.5.2. Navier Denklemlerinin İki Boyutlu Hale İndirgenmesi

Elastik yarım düzleme rijit panç ile bastırılan yapışık çift tabaka probleminde, z boyutunun ihmal edilmesi ve iki boyutlu olması nedeniyle üç boyutlu hale ait verilmiş olan Navier denklemleri iki boyutlu hale indirgenirse düzlem şekil değiştirme halinde (23-24) ile gösterilen denklemler elde edilirler.

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G \nabla^2 u + X = 0 \quad (23)$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial y} + G \nabla^2 v + Y = 0 \quad (24)$$

Düzlem gerilme halinde ise düzlem şekil değiştirme haline ait ifadelerde $\nu = \frac{\nu}{\nu + 1}$ ve

$E = \frac{E(1 + 2\nu)}{(\nu^2 + 1)}$ yazmakla Navier denklemleri;

$$\frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial e}{\partial x} + G \nabla^2 u + X = 0 \quad (25)$$

$$\frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial e}{\partial y} + G\nabla^2 u + Y = 0 \quad (26)$$

halini alırlar. Hacim değiştirme oranı e ve Laplace operatörü ∇^2 ise sırasıyla;

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (27)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (28)$$

olarak verilebilir.

İncelenecek problemde kütle kuvvetleri de ihmal edileceğinden Navier denklemlerinin son hali (29-32) denklemlerindeki değerleri ile ifade edilirler.

Düzlem Şekil değiştirme halinde

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G\nabla^2 u = 0 \quad (29)$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial y} + G\nabla^2 v = 0 \quad (30)$$

Düzlem gerilme halinde ise;

$$\frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial e}{\partial x} + G\nabla^2 u = 0 \quad (31)$$

$$\frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial e}{\partial y} + G\nabla^2 v = 0 \quad (32)$$

Düzlem gerilme ve düzlem Şekil değiştirme için elde edilen bu iki diferansiyel denklem sistemi Şekil itibari ile birbirlerine benzediklerinden bir ϖ sabiti yardımıyla aşağıdaki gibi yazılabilirler.

$$(1+\varpi)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varpi\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} = 0 \quad (33)$$

$$(1+\varpi)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varpi\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = 0 \quad (34)$$

Düzlem şekil değiştirme halinde $\varpi = \frac{\lambda + G}{G}$ ve düzlem gerilme halinde ise $\varpi = \frac{E}{2G(1-\nu)}$

alınır. Bu tezde yapılacak çözümler belirli bir sabitin değerini değiştirmekle her iki hal için de geçerli olacaktır.

1.5.3. Gerilme ve Yer Değiştirmelere Ait Genel İfadelerin Çıkarılması

1.5.3.1. Çatlak Bulunmayan Tabakada Gerilme ve Yer Değiştirme İfadeleri

Kütle kuvvetlerinin ihmal edilmesi ve problemin yük, malzeme ve geometri olarak y eksenine göre simetrik olması nedeniyle yatay ve düşey yer değiştirmeler aşağıdaki eşitlikleri sağlarlar.

$$u(x,y) = -u(-x, y) \quad (35)$$

$$v(x,y) = v(-x, y) \quad (36)$$

$u(x,y)$ ve $v(x,y)$ yer değiştirmeleri bilinmeyen fonksiyonlar $\Phi(\alpha,y)$ ve $\psi(\alpha, y)$ ' nin Fourier sinüs ve Fourier kosinüs dönüşümleri olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilirler.

$$u(x,y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \phi(\alpha, y) \sin(\alpha x) d\alpha \quad (37)$$

$$v(x,y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \psi(\alpha, y) \cos(\alpha x) d\alpha \quad (38)$$

Bu yer değiştirme ifadelerinin ters dönüşümleri alındığında,

$$\phi(\alpha, y) = \int_0^{\infty} u(x, y) \sin(\alpha x) dx \quad (39)$$

$$\psi(\alpha, y) = \int_0^{\infty} v(x, y) \cos(\alpha x) dx \quad (40)$$

eşitlikleri elde edilir.

Bilinmeyen $\Phi(\alpha, y)$ ve $\psi(\alpha, y)$ fonksiyonlarının belirlenebilmesi için (33) nolu denklemin $\sin(\alpha x) dx$, (34) nolu denklem ise $\cos(\alpha x) dx$ ile çarpılıp $(0, \infty)$ aralığında integre edilirse bu denklemler (41) ve (42) de belirtilen şekilde ifade edilirler.

$$\int_0^{\infty} \left[(1 + \varpi) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varpi \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right] \sin(\alpha x) dx = 0 \quad (41)$$

$$\int_0^{\infty} \left[(1 + \varpi) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right] \cos(\alpha x) dx = 0 \quad (42)$$

Yukarıdaki denklemlerde geçen u ve v 'nin x ve y 'ye göre türevleri (43-48) deki gibi elde edilir.

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \sin(\alpha x) dx = -\alpha^2 \phi(\alpha, y) \quad (43)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \sin(\alpha x) dx = \frac{d^2 \phi(\alpha, y)}{dy^2} \quad (44)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y} \sin(\alpha x) dx = -\alpha \frac{d\psi(\alpha, y)}{dy} \quad (45)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} \cos(\alpha x) dx = -\alpha^2 \psi(x, y) \quad (46)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \cos(\alpha x) dx = \frac{d^2 \psi(\alpha, y)}{dy^2} \quad (47)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} \cos(\alpha x) dx = \alpha \frac{d\phi(\alpha, y)}{dy} \quad (48)$$

Kısmi integrasyon uygulanarak elde edilen bu ifadelerde (49) nolu ifade ile verilen sınır şartlarının varlığı kabul edilmiştir.

$$u(0) = u(\infty) = v(\infty) = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\infty} = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=\infty} = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (49)$$

(43-48) nolu denklemlerde geçen ifadeler (41) ve (42) nolu denklemlerde yazılırsa;

$$-(1 + \varpi) \alpha^2 \phi(\alpha, y) + \frac{d^2 \phi(\alpha, y)}{dy^2} - \varpi \alpha \frac{d\psi(\alpha, y)}{dy} = 0 \quad (50)$$

$$(1 + \varpi) \frac{d^2 \psi(\alpha, y)}{dy^2} - \alpha^2 \psi(\alpha, y) + (1 + \varpi) \alpha \frac{d\phi(\alpha, y)}{dy} = 0 \quad (51)$$

adi diferansiyel denklem takımı elde edilmiş olur. $\phi(\alpha, y)$ ' i bulmak için aşağıdaki işlem sırası izlenir. (50) ifadesi y ' ye göre iki defa (51) ifadesi ise y ' ye göre bir defa türetilirse ve gerekli düzenlemeler yapılırsa dördüncü mertebeden sabit katsayılı, lineer homojen bir diferansiyel denklem elde edilir.

$$\frac{d^4 \phi(\alpha, y)}{dy^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2 \phi(\alpha, y)}{dy^2} + \alpha^4 \phi(\alpha, y) = 0 \quad (52)$$

Sabit katsayılı lineer homojen diferansiyel denklemin çözümü için $\phi(\alpha, y) = e^{sy}$ olarak ifade edilir ve bu çözümün gerekli türevleri alınıp (52) nolu denklemde yerine yazılırsa karakteristik denklem;

$$s^4 - 2\alpha^2 s^2 + \alpha^4 = 0 \quad (53)$$

olarak bulunur. Bu denklem çözüldüğünde denklemin kökleri $s_1 = s_2 = \alpha$, $s_3 = s_4 = -\alpha$ olarak bulunur. Adi diferansiyel denkleminin çözümü ise;

$$\phi(\alpha, y) = Ae^{-\alpha y} + Be^{e^{-\alpha y}} + Ce^{\alpha y} + De^{\alpha y} \quad (54)$$

olarak elde edilir. Bu ifadenin gerekli türevleri alınıp (50) denkleminde yerine yazılması ve gerekli işlemlerin yapılması sonucunda da $\psi(\alpha, y)$ bilinmeyen fonksiyonu,

$$\psi(\alpha, y) = Ae^{-\alpha y} + B\left(\frac{\kappa}{\alpha} + y\right)e^{-\alpha y} - Ce^{\alpha y} + D\left(\frac{\kappa}{\alpha} - y\right)e^{\alpha y} \quad (55)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadelerde geçen κ , düzlem şekil değiştirme halinde $\kappa = (3-4\nu)$, düzlem gerilme halinde ise $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ değerine sahip olan malzeme sabiti, ν ise Poisson oranıdır. Bu ifadelerdeki A, B, C, D katsayıları problemin sınır şartlarından belirlenecek olan sabitlerdir.

(54) ve (55) nolu denklemlerin (37) ve (38) nolu denklemlerde yerlerine yazılması ile

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ [A + By]e^{-\alpha y} + [C + Dy]e^{\alpha y} \right\} \sin(\alpha x) d\alpha \quad (56)$$

$$v(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[A + B\left(\frac{\kappa}{\alpha} + y\right) \right] e^{-\alpha y} + \left[-C + D\left(\frac{\kappa}{\alpha} - y\right) \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (57)$$

denklemleri elde edilir.

Bulunan $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ ifadelerinin gerekli türevleri (58-60) alınıp gerilme ifadelerinde (61-64) yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa gerilme ifadeleri katsayılar cinsinden (65-67) de olduğu gibi elde edilir.

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \alpha \{ [A + By] e^{-\alpha y} + [C + Dy] e^{\alpha y} \} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (58)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \alpha \{ [B - \alpha(A + By)] e^{-\alpha y} + [D + \alpha(C + Dy)] e^{\alpha y} \} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (59)$$

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[A + B \left(\frac{\kappa}{\alpha} + y \right) \right] e^{-\alpha y} + \left[-C + D \left(\frac{\kappa}{\alpha} - y \right) \right] e^{\alpha y} \right\} \sin(\alpha x) d\alpha \quad (60)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} & \left[B - \alpha \left(A + B \left(\frac{\kappa}{\alpha} + y \right) \right) \right] e^{-\alpha y} + \\ & \left[-D + \alpha \left(-C + D \left(\frac{\kappa}{\alpha} - y \right) \left(\frac{\kappa}{\alpha} + y \right) \right) \right] e^{\alpha y} \right\} \sin(\alpha x) dx \end{aligned} \quad (61)$$

$$\sigma_x(x, y) = (\lambda + 2G) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \quad (62)$$

$$\sigma_y(x, y) = (\lambda + 2G) \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \quad (63)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = G \left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right) \quad (64)$$

Gerilme bileşenleri;

$$\frac{1}{2G} \sigma_x(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[\alpha(A + By) - \left(\frac{3-\kappa}{2} \right) B \right] e^{-\alpha y} + \right.$$

$$\left[\alpha(C + Dy) + \left(\frac{3-\kappa}{2}\right)D \right] e^{\alpha y} \} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (65)$$

$$\frac{1}{2G} \sigma_y(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ - \left[\alpha(A + By) + \left(\frac{\kappa+1}{2}\right)B \right] e^{-\alpha y} + \left[-\alpha(C + Dy) + \left(\frac{\kappa+1}{2}\right)D \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (66)$$

$$\frac{1}{2G} \tau_{xy}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ - \left[\alpha(A + By) + \left(\frac{\kappa-1}{2}\right)B \right] e^{-\alpha y} + \left[\alpha(C + Dy) - \left(\frac{\kappa-1}{2}\right)D \right] e^{\alpha y} \right\} \sin(\alpha x) d\alpha \quad (67)$$

1.5.3.2 y Ekseninde Simetrik İki Çatlağı Bulunan Sonsuz Düzlemin Çözümü için Genel Denklemlerin Elde Edilmesi

y ekseninde x eksenine göre simetrik iki çatlağı bulunan sonsuz bir düzlem ele alınırsa bunun yer değiştirme bileşenleri,

$$u^*(x, y) = u^*(x, -y) \quad (68)$$

$$v^*(x, y) = -v^*(x, -y) \quad (69)$$

olarak yazılabilirler. $u^*(x, y)$ ve $v^*(x, y)$ yer değiştirmeleri bilinmeyen fonksiyonlar $S(x, \xi)$ ve $T(x, \xi)$ 'nin Fourier sinüs ve Fourier kosinüs dönüşümleri olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilirler.

$$u^*(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} S(x, \xi) \cos(\xi y) d\xi \quad (70)$$

$$v^*(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} T(x, \xi) \sin(\xi y) d\xi \quad (71)$$

Bunların ters Fourier dönüşümleri ise ;

$$S(x, \xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} u^*(x, y) \cos(\xi y) dy \quad (72)$$

$$T(x, \xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} v^*(x, y) \sin(\xi y) dy \quad (73)$$

olarak yazılır. Bu ifadelerde ξ dönüşüm değişkeni olup $S(x, \xi)$ ve $T(x, \xi)$ fonksiyonlarının bulunabilmesi için (33) nolu denklem $\cos(\xi y) dy$, (34) nolu denklem $\sin(\xi y) dy$ ile çarpılıp $(0, +\infty)$ aralığında integre edilirse

$$\int_0^{\infty} \left[(1 + \varpi) \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} + \varpi \frac{\partial^2 v^*}{\partial x \partial y} \right] \cos(\xi y) dy = 0 \quad (74)$$

$$\int_0^{\infty} \left[(1 + \varpi) \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} + \varpi \frac{\partial^2 u^*}{\partial x \partial y} \right] \sin(\xi y) dy = 0 \quad (75)$$

eşitlikleri elde edilmiş olur. Bu ifadelerde $u^* = u^*(x, y)$ ve $v^* = v^*(x, y)$ olduğu bilinmektedir. $u^*(x, y)$ ve $v^*(x, y)$ yer değiştirme bileşenlerinin (74) ve (75) ifadelerinde kullanılacak gerekli türevleri;

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u^*(x, y)}{\partial x^2} \cos(\xi y) d\xi = \frac{d}{dx^2} [S(x, \xi)] \quad (76)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u^*(x, y)}{\partial y^2} \cos(\xi y) d\xi = -\xi^2 S(x, \xi) \quad (77)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 v^*(x, y)}{\partial x \partial y} \cos(\xi y) d\xi = \xi \frac{d}{dx} [T(x, \xi)] \quad (78)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 v^*(x, y)}{\partial x^2} \sin(\xi y) dy = \frac{d^2}{dx^2} [T(x, \xi)] \quad (79)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u^2(x, y)}{\partial y^2} \sin(\xi y) dy = -\xi^2 T(x, \xi) \quad (80)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u^2(x, y)}{\partial x \partial y} \sin(\xi y) dy = -\xi \frac{d}{dx} [S(x, \xi)] \quad (81)$$

olarak yazılabilir. Bu türev ifadeleri (74) ve (75) denklemlerde yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa aşağıdaki adi diferansiyel denklem takımı bulunur.

$$(1 + \varpi) \frac{d^2 S(x, \xi)}{dx^2} - \xi^2 S(x, \xi) + \varpi \xi \frac{d}{dx} T(x, \xi) = 0 \quad (82)$$

$$-(1 + \varpi) \xi^2 T(x, \xi) + \frac{d^2 T(x, \xi)}{dx^2} - \varpi \xi \frac{d}{dx} S(x, \xi) = 0 \quad (83)$$

Bu diferansiyel denklemleri daha basit hale getirmek için (82) ifadesi x' e göre bir defa (83) ifadesi x' e göre iki defa türetilirse ve gerekli düzenlemeler yapılırsa $T(x, \xi)$ ' ye göre dördüncü mertebeden sabit katsayılı, lineer homojen bir diferansiyel denklem elde edilir.

$$\frac{d^4}{dx^4} [T(x, \xi)] - 2\xi^2 \frac{d^2}{dx^2} [T(x, \xi)] + \xi^4 T(x, \xi) = 0 \quad (84)$$

Bu diferansiyel denklemin çözümü, daha önce yapıldığı gibi $T(x, \xi) = e^{nx}$ şeklinde aranır ve gerekli işlemler yapılırsa;

$$n^4 - 2\xi^2 n^2 + \xi^4 = 0 \quad (85)$$

karakteristik denklemi elde edilir. Bu denklemin karakteristk kökleri $n_1 = n_3 = \xi$ ve $n_2 = n_4 = -\xi$ olarak bulunmuş olur. Diferansiyel denklemin çözümü ise,

$$T(x, \xi) = (A_1^* + B_1^* x) e^{-\xi x} + (C_1^* + D_1^* x) e^{\xi x} \quad (86)$$

şeklinde bulunabilir.

Gerilme ve yer değiştirmelerin sonsuzda sıfır olacakları düşünülürse, $C_1^* = D_1^* = 0$ olur.

Bu durumda,

$$T(x, \xi) = (A_1^* + B_1^* x)e^{-\xi x} \quad (87)$$

olur. $T(x, \xi)$ 'nin gerekli türevleri (84) ifadesinde yerlerine yazılır ve aynı ifade x 'e göre integre edilirse $S(x, \xi)$ fonksiyonu da

$$S(x, \xi) = [A_1 + \frac{(2 + \varpi)}{\varpi \xi} B_1 + x B_1] e^{-\xi x} \quad (88)$$

şeklinde elde edilmiş olur. Bulunan bu çözümler simetri nedeniyle $x=0$ ve $y=0$ eksenleri üzerinde kayma gerilmesi bulunmaması şartını ($\tau_{xy}^*(0, y) = 0$) sağlamalıdır. $S(x, \xi)$ ve $T(x, \xi)$ ifadeleri yer değiştirme ifadelerinde yerine konur ve y ekseninde kayma gerilmesinin sıfır olması şartı yazılırsa, $A_1^* = -\frac{B_1}{\varpi \xi}$ olarak elde edilmiş olur. Bu ifade (87)

ve (88) denklemlerinde yerine yazılır ve $\varpi = \frac{2}{\kappa - 1}$ olduğu düşünülürse;

$$T(x, \xi) = \frac{B_1^*}{\xi} \left(\frac{1 - \kappa}{2} + \xi x \right) e^{-\xi x} \quad (89)$$

$$S(x, \xi) = \frac{B_1^*}{\xi} \left(\frac{1 + \kappa}{2} + \xi x \right) e^{-\xi x} \quad (90)$$

ifadeleri elde edilmiş olur. Bu ifadeler (70) ve (71) denklemlerinde yerlerine yazılır ve

$B_1^* = \phi(\xi)$ dönüşümü yapılırsa yer değiştirme ifadeleri aşağıdaki gibi olur.

$$u^*(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\phi(\xi)}{\xi} \left(\frac{\kappa + 1}{2} + \xi x \right) e^{-\xi x} \cos(\xi y) d\xi \quad (91)$$

$$v^*(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\phi(\xi)}{\xi} \left(\frac{\kappa-1}{2} - \xi x \right) e^{-\xi x} \sin(\xi y) d\xi \quad (92)$$

Yer değiştirme ifadelerinin gerekli turevleri alınıp bünye denklemlerinde yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa gerilme ifadeleri

$$\frac{1}{2G} \sigma_x^*(x, y) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \phi(\xi) (1 + \xi x) e^{-\xi x} \cos(\xi y) d\xi \quad (93)$$

$$\frac{1}{2G} \sigma_y^*(x, y) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \phi(\xi) (1 - \xi x) e^{-\xi x} \cos(\xi y) d\xi \quad (94)$$

$$\frac{1}{2G} \tau_{xy}^*(x, y) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \xi x \phi(\xi) e^{-\xi x} \sin(\xi y) d\xi \quad (95)$$

şeklinde bulunurlar.

1.5.3.3. atlaksız Tabaka ve atlaklı Sonsuz Düzlem Hallerinin Süperpozisyonu

atlaklı tabakada gerilme ve yer değiştirme ifadeleri, çatlaksız tabaka için ve y eksenini üzerinde simetrik iki çatlaklı bulunan sonsuz düzlem için yazılmış olan yer değiştirme ve gerilme ifadelerinin süperpozisyonu ile

$$u(x, y) = u(x, y) + u^*(x, y) \quad (96)$$

$$v(x, y) = v(x, y) + v^*(x, y) \quad (97)$$

$$\sigma_x(x, y) = \sigma_x(x, y) + \sigma_x^*(x, y) \quad (98)$$

$$\sigma_y(x, y) = \sigma_y(x, y) + \sigma_y^*(x, y) \quad (99)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \tau_{xy}(x, y) + \tau_{xy}^*(x, y) \quad (100)$$

olarak yazılabilir. Çatlaklı tabakadaki yer değiştirme, normal ve kayma gerilme bileşenlerinin açık ifadeleri aşağıdaki gibidir. Bu ifadeler κ 'nın verilen değerlerine göre hem düzlem gerilme ve hem de düzlem şekil değiştirme halleri için kullanılabilirler.

$$u^*(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ [A^* + B^* y] e^{-\alpha y} + [C^* + D^* y] e^{\alpha y} \right\} \sin(\alpha x) d\alpha + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\phi(\xi)}{\xi} \left(\frac{\kappa+1}{2} + \xi x \right) e^{-\xi x} \cos(\xi y) d\xi \quad (101)$$

$$v^*(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[A^* + B^* \left(\frac{\kappa}{\alpha} + y \right) \right] e^{-\alpha y} + \left[-C^* + D^* \left(\frac{\kappa}{\alpha} - y \right) \right] e^{\alpha y} \right\} \sin(\alpha x) d\alpha + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\phi(\xi)}{\xi} \left(\frac{\kappa-1}{2} - \xi x \right) e^{-\xi x} \sin(\xi y) d\xi \quad (102)$$

$$\frac{1}{2G} \sigma_x(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[\alpha(A^* + B^* y) - \left(\frac{3-\kappa}{2} \right) B^* \right] e^{-\alpha y} + \left[\alpha(C^* + D^* y) + \left(\frac{3-\kappa}{2} \right) D^* \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \phi(\xi) (1 + \xi x) e^{-\xi x} \cos(\xi y) d\xi \quad (103)$$

$$\frac{1}{2G} \sigma_y(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ - \left[\alpha(A^* + B^* y) + \left(\frac{\kappa+1}{2} \right) B^* \right] e^{-\alpha y} + \left[\alpha(C^* + D^* y) + \left(\frac{\kappa-1}{2} \right) D^* \right] e^{\alpha y} \right\} \sin(\alpha x) d\alpha - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \phi(\xi) (1 - \xi x) e^{-\xi x} \cos(\xi y) d\xi \quad (104)$$

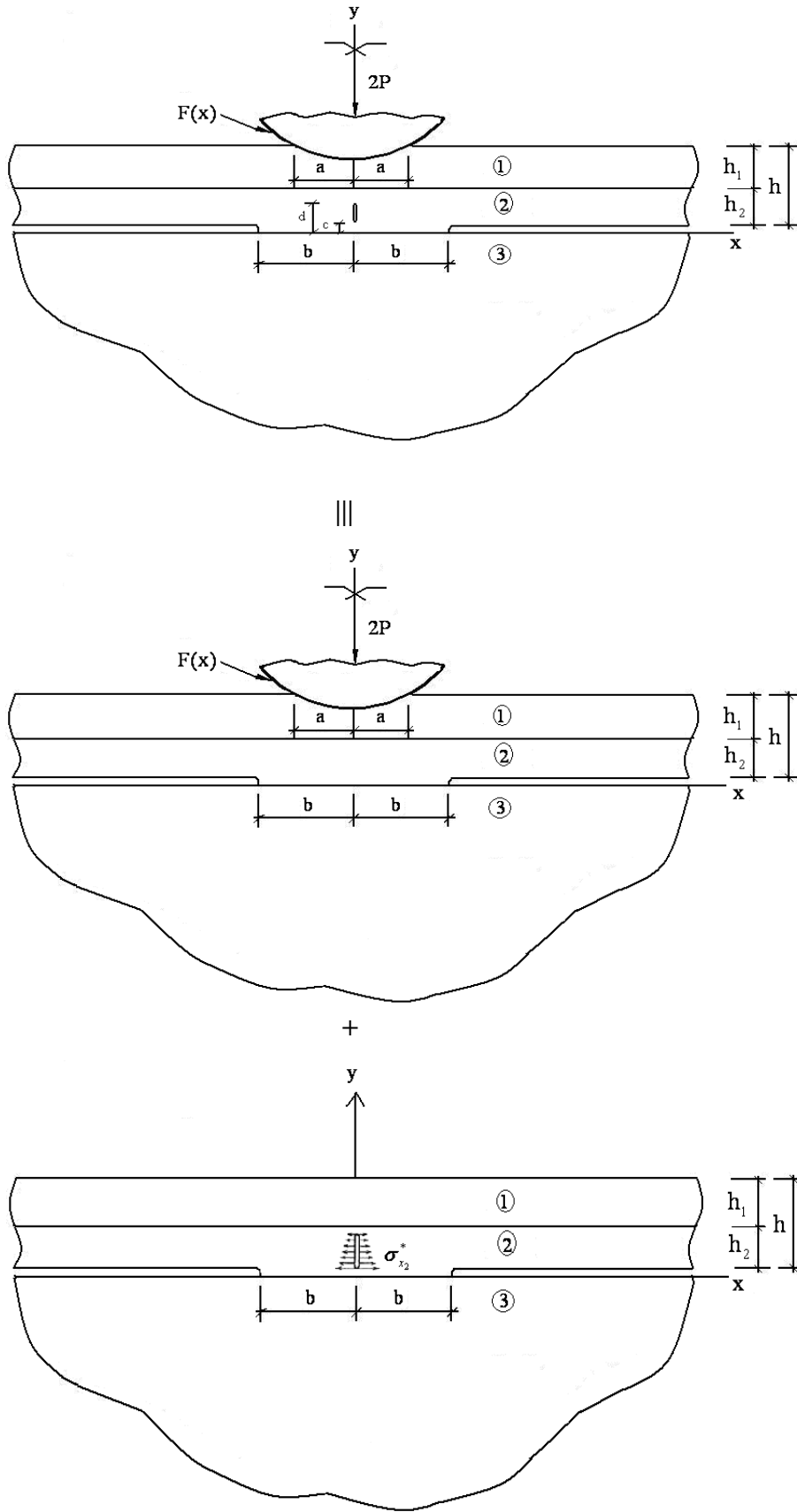
$$\frac{1}{2G} \tau_{xy}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ - \left[\alpha(A^* + B^* y) + \left(\frac{\kappa-1}{2} \right) B^* \right] e^{-\alpha y} + \left[\alpha(C^* + D^* y) + \left(\frac{\kappa+1}{2} \right) D^* \right] e^{\alpha y} \right\} \sin(\alpha x) d\alpha - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \xi x \phi(\xi) e^{-\xi x} \sin(\xi y) d\xi \quad (105)$$

2.YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu bölümde elastik yarım düzleme oturan rijit bir blok vasıtasıyla 2P şiddetinde tekil bir yükü simetrik yüklenmiş yapışık çift tabaka problemi iki boyutlu Elastisite Teorisine göre incelenmektedir. Üst tabakanın kalınlığı h_1 olup değme yüzeyi $2a$ genişliğinde olan bir rijit blokla değme durumundadır. Alttaki tabakanın kalınlığı h_2 olup toplam tabaka yükseklği h dir. Problemdede bütün yüzeyler sürtünmesiz kabul edilmekte ve tabakalar x eksenini boyunca $(-\infty, +\infty)$ aralığında uzanmaktadır.

Problem çatlak içermediği ve çatlak içerdiği durumlar için incelenmiş, Fourier dönüşüm tekniklerinin yazılan sınır koşullarına uygulanmasıyla elde edilen integral denklemler Gauss-Chebyshev integrasyon yöntemi ile çözülerek probleme ait bilinmeyenler hesap edilmiştir. Bu problemler ve çözüm aşamaları sırasıyla incelenmiştir.

Söz konusu problem çatlaksız ve çatlak içerdiği iki halin süperpozisyonu şeklinde ifade edilirse çatlaksız durum için çözüm yapılacak, daha sora çatlak olması durumunda, çatlak yüzeyinin çatlaksız çözümden elde edilen gerilmelere zıt yönde aynı şiddet ve aynı doğrultuda yüklenmesi halinde incelenecektir..Bu durumda dış yükleme yoktur.. Bu iki hal süperpoze edilirse söz konusu dış yükleme altında serbest çatlak yüzeyi hasıl olacaktır (Şekil 1).

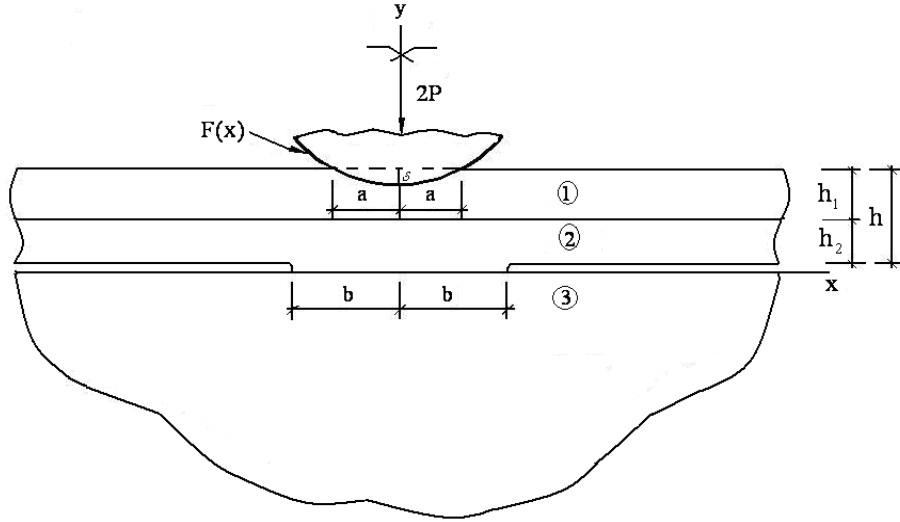


Şekil 1. Çatlaklı ve çatlaksız halin süperpozisyonu

2.1. Değme Problemi

2.1.1 Değme Probleminin Tanımı

Bu kısımda elastik yarım düzleme oturan, rijit panç ile bastırılmış ağırlıksız çift tabakanın değme durumu incelenecektir. Tabakalar birbirlerine tam bağlıdır ve her bir tabakanın yüksekliği farklı olup şekil üzerinde h_1 ve h_2 olarak gösterilmiştir. Ayrıca üst tabakanın üst yüzeyine rijit panç vasıtasıyla tekil yük uygulanmıştır. Panç ile değdiği tabaka arasında ve alt tabaka ile yarım düzlem arasında sürtünme meydana gelmediği kabulü yapılmış ve tabakaların kütle kuvvetleri ihmal edilmiştir.



Şekil 2. Rijit panç aracılığıyla yüklenen ve elastik yarım düzleme oturan ağırlıksız çift tabaka

2.1.2 Kullanılacak Denklemler

Yüksekliği h_1 malzeme sabitleri G_1 ve κ_1 olan üstteki elastik tabaka 1 numara ile yüksekliği h_2 malzeme sabitleri G_2 ve κ_2 olan alttaki tabaka 2 numara ile ve malzeme sabitleri G_3 ve κ_3 olan yarım düzlem 3 numara ile gösterilmiştir. İki elastik tabakanın toplam yüksekliği h olarak verilmiştir.

Daha önceden çıkartıldığı üzere tabakalara ve yarım düzleme ait yer değıştirme ve gerilme ifadeleri aşağıdaki şekilde yazılabilir.

I Nolu tabaka için

$$u_1(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \{ [A_1 + B_1 y] e^{-\alpha y} + [C_1 + D_1 y] e^{\alpha y} \} \sin(\alpha x) d\alpha \quad (106)$$

$$v_1(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[A_1 + B_1 \left(\frac{\kappa_1}{\alpha} + y \right) \right] e^{-\alpha y} + \left[-C_1 + D_1 \left(\frac{\kappa_1}{\alpha} - y \right) \right] e^{\alpha y} \right\} \sin(\alpha x) d\alpha \quad (107)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G_1} \sigma_{x1}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[\alpha(A_1 + B_1 y) - \left(\frac{3 - \kappa_1}{2} \right) B_1 \right] e^{-\alpha y} + \right. \\ \left. \left[\alpha(C_1 + D_1 y) + \left(\frac{3 - \kappa_1}{2} \right) D_1 \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha \end{aligned} \quad (108)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G_1} \sigma_{y1}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ - \left[\alpha(A_1 + B_1 y) + \left(\frac{\kappa_1 + 1}{2} \right) B_1 \right] e^{-\alpha y} + \right. \\ \left. \left[-\alpha(C_1 + D_1 y) + \left(\frac{\kappa_1 + 1}{2} \right) D_1 \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha \end{aligned} \quad (109)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G_1} \tau_{xy1}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ - \left[\alpha(A_1 + B_1 y) + \left(\frac{\kappa_1 - 1}{2} \right) B_1 \right] e^{-\alpha y} + \right. \\ \left. \left[\alpha(C_1 + D_1 y) - \left(\frac{\kappa_1 - 1}{2} \right) D_1 \right] e^{\alpha y} \right\} \sin(\alpha x) d\alpha \end{aligned} \quad (110)$$

II Nolu tabaka için

$$u_2(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \{ [A_2 + B_2 y] e^{-\alpha y} + [C_2 + D_2 y] e^{\alpha y} \} \sin(\alpha x) d\alpha \quad (111)$$

$$v_2(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[A_2 + B_2 \left(\frac{\kappa_2}{\alpha} + y \right) \right] e^{-\alpha y} + \left[-C_2 + D_2 \left(\frac{\kappa_2}{\alpha} - y \right) \right] e^{\alpha y} \right\} \sin(\alpha x) d\alpha \quad (112)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G_2} \sigma_{x2}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[\alpha(A_2 + B_2 y) - \left(\frac{3-\kappa_2}{2}\right) B_2 \right] e^{-\alpha y} + \right. \\ \left. \left[\alpha(C_2 + D_2 y) + \left(\frac{3-\kappa_2}{2}\right) D_2 \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha \end{aligned} \quad (113)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G_2} \sigma_{y2}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ - \left[\alpha(A_2 + B_2 y) + \left(\frac{\kappa_2+1}{2}\right) B_2 \right] e^{-\alpha y} + \right. \\ \left. \left[-\alpha(C_2 + D_2 y) + \left(\frac{\kappa_2+1}{2}\right) D_2 \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha \end{aligned} \quad (114)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G_2} \tau_{xy2}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ - \left[\alpha(A_2 + B_2 y) + \left(\frac{\kappa_2-1}{2}\right) B_2 \right] e^{-\alpha y} + \right. \\ \left. \left[\alpha(C_2 + D_2 y) - \left(\frac{\kappa_2-1}{2}\right) D_2 \right] e^{\alpha y} \right\} \sin(\alpha x) d\alpha \end{aligned} \quad (115)$$

Elastik yarım düzlem için

$$u_3(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ [C_3 + D_3 y] e^{\alpha y} \right\} \sin(\alpha x) d\alpha \quad (116)$$

$$v_3(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[-C_3 + D_3 \left(\frac{\kappa_3}{\alpha} - y\right) \right] e^{\alpha y} \right\} \sin(\alpha x) d\alpha \quad (117)$$

$$\frac{1}{2G_3} \sigma_{x3}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[\alpha(C_3 + D_3 y) - \left(\frac{3-\kappa_3}{2}\right) D_3 \right] e^{-\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (118)$$

$$\frac{1}{2G_3} \sigma_{y3}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[-\alpha(C_3 + D_3 y) + \left(\frac{\kappa_3+1}{2}\right) D_3 \right] e^{-\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (119)$$

$$\frac{1}{2G_2} \tau_{x2}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[\alpha(C_3 + D_3 y) - \left(\frac{\kappa_3-1}{2}\right) D_3 \right] e^{-\alpha y} \right\} \sin(\alpha x) d\alpha \quad (120)$$

2.1.3. Değme Probleminin Sınır Şartları

Rijit panç vasıtasıyla yük uygulanan ve elastik yarım düzleme oturan iki tabakanın üst tabakası ile pançın değme yüzeyinde oluşacak düşey yer değiştirmelerin rijit cismin profiline eşit olması ve de tabakalar arasında yapışma olmasından dolayı, tabakalar arasında yatay ve düşey yer değiştirmelerin de eşit olması göz önüne alınarak, $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ yer değiştirmeleri σ_x , σ_y , τ_{xy} ise gerilmeleri göstermek üzere probleme ait sınır şartları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\sigma_{y_1}(x, 0) = \begin{cases} -p_1(x) & 0 \leq x < a \\ 0 & a \leq x < \infty \end{cases} \quad (121)$$

$$\tau_{xy_1}(x, 0) = 0 \quad 0 \leq x < \infty \quad (122)$$

$$\sigma_{y_1}(x, -h_1) = \sigma_{y_2}(x, -h_1) \quad 0 \leq x < \infty \quad (123)$$

$$\tau_{xy_1}(x, -h_1) = \tau_{xy_2}(x, -h_1) \quad 0 \leq x < \infty \quad (124)$$

$$u_1(x - h_1) = u_2(x - h_1) \quad 0 \leq x < \infty \quad (125)$$

$$v_1(x - h_1) = v_2(x - h_1) \quad 0 \leq x < \infty \quad (126)$$

$$\sigma_{y_2}(x, -h) = \begin{cases} -p_2(x) & 0 \leq x < b \\ 0 & b \leq x < \infty \end{cases} \quad (127)$$

$$\tau_{xy_2}(x, -h) = 0 \quad 0 \leq x < \infty \quad (128)$$

$$\tau_{xy_3}(x, -h) = 0 \quad 0 \leq x < \infty \quad (129)$$

$$\sigma_{y_2}(x, -h) = \sigma_{y_3}(x, -h) \quad 0 \leq x < \infty \quad (130)$$

$$v_1(x, 0) = F(x) \quad 0 < x < a \quad (131)$$

$$v_2(x, -h) = v_3(x, -h) \quad 0 < x < b \quad (132)$$

Probleme ait denge şartları ise aşağıda belirtilmiştir.

$$\int_{-a}^a p_1(x) dx = 2P \quad (133)$$

$$\int_{-b}^b p_2(x) dx = 2P \quad (134)$$

Denge şartlarında geçen $p_1(x)$; rijit panç ile üst tabaka arasındaki, $p_2(x)$; alt tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme gerilmelerini ifade eden bilinmeyenlerdir. $F(x)$ rijit pançın profilini tanımlamaktadır. P rijit panç vasıtasıyla tabakalara etki ettirilen tekil yük a ve b sırasıyla; dairesel pançın üst tabakayla değme yarı uzunluğu ve alt tabakanın elastik yarım düzlemle değme yarı uzunluğu olup bulunması gereken bilinmeyenlerdir.

2.1.4. Katsayıların Belirlenmesi

(121-130) sınır şartlarında, gerilme ve yer değiştirme ifadelerinin (106-120) yerine konulup ters Fourier dönüşümleri alınması sonucu katsayılara ait cebrik denklemler aşağıdaki gibi elde edilebilirler.

$$p_1(\alpha) = -\alpha A_1 - \frac{\kappa_1 + 1}{2} B_1 - \alpha C_1 + \frac{\kappa_1 + 1}{2} D_1 \quad (135)$$

$$0 = -\alpha A_1 + \frac{1 - \kappa_1}{2} B_1 + \alpha C_1 + \frac{1 - \kappa_1}{2} D_1 \quad (136)$$

$$-\alpha A_1 e^{\alpha h_1} + B_1 \left(\alpha h_1 - \frac{\kappa_1 + 1}{2} \right) e^{\alpha h_1} - \alpha C_1 e^{-\alpha h_1} + D_1 \left(\alpha h_1 + \frac{\kappa_1 + 1}{2} \right) e^{-\alpha h_1} = m \left[-\alpha A_2 e^{\alpha h_1} + \right.$$

$$B_2(\alpha h_1 - \frac{\kappa_2 + 1}{2})e^{\alpha h_1} - \alpha C_2 e^{-\alpha h_1} + D_2(\alpha h_1 + \frac{\kappa_2 + 1}{2})e^{-\alpha h_1} \quad (137)$$

$$-\alpha A_1 e^{\alpha h_1} + B_1(\alpha h_1 - \frac{\kappa_1 - 1}{2})e^{\alpha h_1} + \alpha C_1 e^{-\alpha h_1} + D_1(-\alpha h_1 - \frac{\kappa_1 - 1}{2})e^{-\alpha h_1} = m[-\alpha A_2 e^{\alpha h_1} + B_2(\alpha h_1 - \frac{\kappa_2 - 1}{2})e^{\alpha h_1} + \alpha C_2 e^{-\alpha h_1} + D_2(-\alpha h_1 - \frac{\kappa_2 - 1}{2})e^{-\alpha h_1}] \quad (138)$$

$$(A_1 + -B_1 h_1)e^{\alpha h_1} + (C_1 - D_1 h_1)e^{-\alpha h_1} = (A_2 - B_2 h_1)e^{\alpha h_1} + (C_2 - D_2 h_2)e^{-\alpha h_1} \quad (139)$$

$$(A_1 + (\frac{\kappa_1}{\alpha} - h_1)B_1)e^{\alpha h_1} + (-C_1 + (\frac{\kappa_1}{\alpha} + h_1)D_1)e^{-\alpha h_1} = (A_2 + (\frac{\kappa_2}{\alpha} - h_1)B_2)e^{\alpha h_1} + (-C_2 + (\frac{\kappa_2}{\alpha} + h_1)D_2)e^{-\alpha h_1} \quad (140)$$

$$p_2(\alpha) = -\alpha A_2 e^{\alpha h} + B_2(\alpha h - \frac{\kappa_2 + 1}{2})e^{\alpha h} - \alpha C_2 e^{-\alpha h} + D_2(\alpha h + \frac{\kappa_2 + 1}{2})e^{-\alpha h} \quad (141)$$

$$0 = -\alpha A_2 e^{\alpha h} + B_2(\alpha h - \frac{\kappa_2 - 1}{2})e^{\alpha h} + \alpha C_2 e^{-\alpha h} + D_2(-\alpha h - \frac{\kappa_2 - 1}{2})e^{-\alpha h} \quad (142)$$

$$0 = \alpha C_3 e^{-\alpha h} + D_3(-\alpha h - \frac{\kappa_2 - 1}{2})e^{-\alpha h} \quad (143)$$

$$-\alpha A_2 e^{\alpha h} + B_2(\alpha h - \frac{\kappa_2 + 1}{2})e^{\alpha h} - \alpha C_2 e^{-\alpha h} + D_2(\alpha h + \frac{\kappa_2 - 1}{2})e^{-\alpha h} = n[-\alpha C_3 e^{\alpha h} + D_3(\alpha h + \frac{\kappa_3 + 1}{2})e^{-\alpha h}] \quad (144)$$

Denklemlerde geçen $p_1(\alpha)$ panç ile üst tabaka arasındaki değme gerilmesini $p_2(\alpha)$ ise tabakalar arasındaki değme gerilmesini ifade eder. Bunlar aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$p_1(\alpha) = -\frac{1}{2G_1} \int_0^a p_1(t_1) \cos(\alpha t_1) dt_1 \quad (145)$$

$$p_2(\alpha) = -\frac{1}{2G_2} \int_0^b p_2(t_1) \cos(\alpha t_1) dt_1 \quad (146)$$

(135-144) denklemleri çözülerek A_i , B_i , C_j , D_j katsayıları elde edilmiş ve aşağıdaki gibi verilmiştir. Burada $i=1, 2$ ve $j=1,2,3$ değerlerini alır.

$$A_1 = \frac{A_{11}p_1(\alpha) + A_{12}p_2(\alpha)}{\Delta} \quad (147)$$

$$\begin{aligned} A_{11} = & (-1 + \kappa_1) \{ (e^{-4\alpha h_1 - 4\alpha h_2})(\kappa_2 + m) + e^{-4\alpha h_1}(-1 + m)(-\kappa_2 + \kappa_1 m) - e^{-4\alpha h_1 - 2\alpha h_2}(-1 + m)(1 + \kappa_1 m) \\ & (1 + 4\alpha^2 h_2^2) + (\kappa_2 + m)(\kappa_1 m - \kappa_2) \} + (e^{-2\alpha h_1}(1 + e^{-4\alpha h_2}))(\kappa_2 + m)(2\alpha h_1(-1 + m)(-2\alpha h_1 \\ & + (-1 + \kappa_1))) + (1 - \kappa_1)(\kappa_1 m^2 + \kappa_2) - 2\kappa_1 m(\kappa_2 - 1) + e^{-2\alpha h_1 - 2\alpha h_2}((1 - \kappa_1)(1 + \kappa_2^2 - 2\kappa_1 m^2) + \\ & 8\alpha^3 h_1 h_2^2(-1 + m^2)(2\alpha h_1 - (-1 + \kappa_1)) + 4\kappa_1 m(1 - \kappa_2) + 8\alpha^2 h_1 h_2 - 2\alpha(-1 + \kappa_1)h_2(1 + \kappa_1) \\ & (1 + \kappa_2)m + ((\kappa_2 + m)^2 + (m - 1)^2)(4\alpha^2 h_1^2 - 2\alpha(-1 + \kappa_1)h_1) + 4\alpha^2 h_1^2 h_2^2((\kappa_1 - 1) \\ & (\kappa_1 m^2 - 1) + 4m\kappa_1) \} \end{aligned} \quad (148)$$

$$\begin{aligned} A_{12} = & -(1 + \kappa_2)m \{ e^{-\alpha h_1 - 3\alpha h_2}(-\kappa_1 + \kappa_2 + 2\alpha(-1 + m)(2\alpha h_1 h_2 - h_1 - h_2 \kappa_1)) + e^{-3\alpha h_1 - \alpha h_2}((-1 + m) \\ & (1 + 2\alpha(h_1 + h_2 \kappa_1(1 + 2\alpha h_1)) + \kappa_1(\kappa_2 - \kappa_1 m) + e^{-\alpha h_1 - \alpha h_2}(1 - \kappa_1 \kappa_2 + 2\alpha((1 + \kappa_1 m)h_2 + \\ & h_1(\kappa_2 + m)))) + e^{-3\alpha h_1 - 3\alpha h_2}(\kappa_2 + m)(-1 - 2\alpha h_1 \kappa_1) + (1 - 2\alpha h_2)\kappa_1(\kappa_1 m + 1) \} \end{aligned} \quad (149)$$

$$B_1 = \frac{B_{11}p_1(\alpha) + B_{12}p_2(\alpha)}{\Delta} \quad (150)$$

$$\begin{aligned} B_{11} = & e^{2\alpha h_1}(e^{-4\alpha h_2} + 1)(-1 + 2\alpha h_1)(-1 + m)(\kappa_2 + m) + e^{-4\alpha h_1}(-1 + m)(\kappa_2 - \kappa_1 m) - e^{-4\alpha h_1 - 4\alpha h_2} \\ & (\kappa_2 + m)(1 + \kappa_1 m) + e^{-4\alpha h_1 - 2\alpha h_2}((-1 + m)(1 + \kappa_1 m)(1 + 4\alpha^2 h_2^2) + (\kappa_2 + m) \\ & (\kappa_1 m - \kappa_2)) + e^{-2\alpha h_1 - 2\alpha h_2}(4\alpha^2 h_2^2(-1 + m^2)(1 + 2\alpha h_1) + 2\alpha(h_2(1 + \kappa_1)(1 + \kappa_2)m) + \\ & ((\kappa_2 + m)^2 + (m - 1)^2)(1 + 2\alpha h_1)) \end{aligned} \quad (151)$$

$$\begin{aligned} B_{12} = & -(1 + \kappa_2)m \{ -e^{-\alpha h_1 - 3\alpha h_2}(1 - 2\alpha h_2)(-1 + m) + e^{-\alpha h_1 - \alpha h_2}(\kappa_2 + m) + e^{-3\alpha h_1 - \alpha h_2}(-\kappa_2 + \kappa_1 m - \\ & 2\alpha h_1(-1 + m)(1 + 2\alpha h_2)) + e^{-3\alpha h_1 - 3\alpha h_2}((1 + \kappa_1 m)(-1 + 2\alpha h_2) + 2\alpha h_1(\kappa_2 + m)) \} \end{aligned} \quad (152)$$

$$C_1 = \frac{C_{11}p_1(\alpha) + C_{12}p_2(\alpha)}{\Delta} \quad (153)$$

$$\begin{aligned} C_{11} = & (-1 + \kappa_1) \{ (\kappa_2 + m) + e^{-4\alpha h_2} (-1 + m) (-\kappa_2 + \kappa_1 m) - e^{-2\alpha h_2} (-1 + m) (1 + \kappa_1 m) \\ & (1 + 4\alpha^2 h_2^2) + (\kappa_2 + m) (\kappa_1 m - \kappa_2) \} + (e^{-2\alpha h_1} (1 + e^{-4\alpha h_2})) (\kappa_2 + m) (-2\alpha h_1 (-1 + m) (2\alpha h_1 \\ & + (-1 + \kappa_1))) + (1 - \kappa_1) (\kappa_1 m^2 + \kappa_2) - 2\kappa_1 m (\kappa_2 - 1) + e^{-2\alpha h_1 - 2\alpha h_2} ((1 - \kappa_1) (1 + \kappa_2^2 - 2\kappa_1 m^2) + \\ & 8\alpha^3 h_1 h_2^2 (-1 + m^2) (2\alpha h_1 + (-1 + \kappa_1)) + 4\kappa_1 m (1 - \kappa_2) + 8\alpha^2 h_1 h_2 + 2\alpha (-1 + \kappa_1) h_2 (1 + \kappa_1) \\ & (1 + \kappa_2) m + ((\kappa_2 + m)^2 + (m - 1)^2) (4\alpha^2 h_1^2 + 2\alpha (-1 + \kappa_1) h_1) + 4\alpha^2 h_1^2 h_2^2 ((\kappa_1 - 1) \\ & (\kappa_1 m^2 - 1) + 4m\kappa_1) \end{aligned} \quad (154)$$

$$\begin{aligned} C_{12} = & (1 + \kappa_2) m \{ e^{-3\alpha h_1 - \alpha h_2} (\kappa_1 - \kappa_2 + 2\alpha (-1 + m) (-2\alpha h_1 h_2 - h_1 - h_2 \kappa_1) + e^{-\alpha h_1 - 3\alpha h_2} ((-1 + m) \\ & (-1 + 2\alpha (h_2 + h_1 \kappa_1 (1 - 2\alpha h_2)) + \kappa_1 (-\kappa_2 + \kappa_1 m) + e^{-3\alpha h_1 - 3\alpha h_2} (-1 + \kappa_1 \kappa_2 + 2\alpha ((1 + \kappa_1 m) h_2 \\ & + h_1 (\kappa_2 + m)))) + e^{-\alpha h_1 - \alpha h_2} (\kappa_2 + m) (1 - 2\alpha h_1 \kappa_1) + (1 + 2\alpha h_2) \kappa_1 (k_1 m - 1) \} \end{aligned} \quad (155)$$

$$D_1 = \frac{D_{11}p_1(\alpha) + D_{12}p_2(\alpha)}{\Delta} \quad (156)$$

$$\begin{aligned} D_{11} = & e^{2\alpha h_1} (e^{-4\alpha h_2} + 1) (-1 + 2\alpha h_1) (-1 + m) (\kappa_2 + m) + e^{-4\alpha h_2} (-1 + m) (-\kappa_2 + \kappa_1 m) + (\kappa_2 + m) \\ & (1 + \kappa_1 m) + e^{-2\alpha h_2} ((-1 + m) (1 + \kappa_1 m) (-1 - 4\alpha^2 h_2^2) + (\kappa_2 + m) (-\kappa_1 m + \kappa_2)) + \\ & e^{-2\alpha h_1 - 2\alpha h_2} (4\alpha^2 h_2^2 (-1 + m)^2 (1 + 2\alpha h_1) + 2\alpha h_2 (1 + \kappa_1) (1 + \kappa_2) m + ((\kappa_2 + m)^2 + \\ & (m - 1)^2) (-1 + 2\alpha h_1)) \end{aligned} \quad (157)$$

$$\begin{aligned} D_{12} = & (1 + \kappa_2) m \{ -e^{-3\alpha h_1 - \alpha h_2} (1 + 2\alpha h_2) (-1 + m) - e^{-3\alpha h_1 - 3\alpha h_2} (\kappa_2 + m) + e^{-\alpha h_1 - 3\alpha h_2} (\kappa_2 - \kappa_1 m + \\ & 2\alpha h_1 (-1 + m) (-1 + 2\alpha h_2)) + e^{-\alpha h_1 - \alpha h_2} ((1 + \kappa_1 m) (1 + 2\alpha h_2) + 2\alpha h_1 (\kappa_2 + m)) \} \end{aligned} \quad (158)$$

$$A_2 = \frac{A_{21}p_1(\alpha) + A_{22}p_2(\alpha)}{\Delta} \quad (159)$$

$$\begin{aligned} A_{21} = & (1 + \kappa_1) (e^{-\alpha h_1 - 3\alpha h_2} (2\alpha h_1 (-1 + m) (-1 + \kappa_2 - 2\alpha h_1) + (-\kappa_1 + \kappa_2) m) + e^{-3\alpha h_1 - 3\alpha h_2} \\ & ((-1 + \kappa_1 \kappa_2) m + 2\alpha h_1 (-1 + \kappa_2 + m (1 - \kappa_1))) + e^{-3\alpha h_1 - \alpha h_2} (-1 + \kappa_2^2 + m - \kappa_1 \kappa_2 m + \\ & 2\alpha (h_1 (-1 + \kappa_2) (-1 + m) + (h_1 + h_2) (k_1 - k_2) m + 4\alpha^2 h_2 (-1 + m) ((-2\alpha h_1 + 1) (h_1 + h_2) + \end{aligned}$$

$$(h_1 k_2)) + e^{-\alpha h_1 - \alpha h_2} (2\alpha((h_1 + h_2) (2\alpha(h_1 + h_2)(1 + \kappa_1 m) - (-1 + \kappa_1 \kappa_2 m)) + (-1 + \kappa_2 + m(1 - \kappa_1)) (4\alpha^2(h_1 + h_2)h_1 - 2\alpha h_1 \kappa_2 + (1 - \kappa_2^2 + (\kappa_1 - \kappa_2)m) \quad (160)$$

$$\begin{aligned} A_{22} = & e^{-2\alpha h_1 - 2\alpha h_2} (-16\alpha^4 h_1^3 h_2 (-1 + m)^2 - e^{-4\alpha h_1} (-1 + \kappa_2)(-1 + m)(-\kappa_1 m + \kappa_2) + (-1 + \kappa_2) \\ & (\kappa_2 + m)(1 + \kappa_1 m) - 8\alpha^3 h_1^2 (-1 + m)(e^{-2\alpha h_1 - 2\alpha h_2} (-h_1 - h_2 \kappa_2)(-1 + m) + e^{-2\alpha h_1}) + \\ & (h_1 + h_2)(\kappa_2 + m) (e^{-2\alpha h_2} (1 + e^{-2\alpha h_1}) (-\kappa_2^2 + \kappa_1 m^2 (1 - \kappa_2) + \kappa_2 (1 + 2(-1 + \kappa_1)m) + \\ & e^{-2\alpha h_1} (\kappa_2^2 (-2 - (-1 + \kappa_1) m(\kappa_2 - 1)^2 + (1 + \kappa_1^2)m(1 + \kappa_2 m) + 2\kappa_2 e^{-2\alpha h_1 - 2\alpha h_2} ((1 + \kappa_1^2)m^2 + \\ & (1 - \kappa_2) + 2\kappa_2^2 - \kappa_2(2 + 4(-1 + \kappa_1)m)) - 2\alpha(e^{-2\alpha h_2} (1 + e^{-2\alpha h_1}) (-h_1 - h_2 \kappa_2)(-1 + m) \\ & (h_1 + h_2) \kappa_2 + m)(1 + \kappa_1 m) (+ e^{-6\alpha h_1} (h_1 + h_2)(-\kappa_2 + \kappa_1 m) - e^{-2\alpha h_1} (h_1 + h_2)(-1 + \kappa_1) \\ & (\kappa_2 - 1)m + 2\kappa_2 - m^2(1 + \kappa_1^2) + (h_1 + h_2)(-\kappa_2 + \kappa_1 m) - e^{-2\alpha h_1} (h_1 + h_2)(-1 + \kappa_1)(\kappa_2 - 1)m + \\ & 2\kappa_2 - m^2(1 + \kappa_1^2) + e^{-2\alpha h_1 - 2\alpha h_2} (-(h_1 + h_2)\kappa_2(2 + 2(-1 + \kappa_1)m + (1 + \kappa_1^2)m^2) + \\ & h_1(-1 + \kappa_2)(2 - (3 + \kappa_1(-1 + \kappa_2) + \kappa_2)m + (1 + \kappa_1^2)m^2))) + 4\alpha^2 h_1 (e^{-2\alpha h_1} h_1 \\ & (-1 + \kappa_2)(-1 + m)(\kappa_2 + m) + e^{-4\alpha h_1 - 2\alpha h_2} h_2(-1 + \kappa_2)(1 + \kappa_1 m) + (e^{-2\alpha h_2} h_2(-1 + m) \\ & (1 + \kappa_1 m) + e^{-2\alpha h_1 - 2\alpha h_2} (-(h_1 + h_2)(2 - (3 + \kappa_1(-1 + \kappa_2) + \kappa_2)m + h_1(2 + \kappa_2^2 - 4m + \\ & (2 + \kappa_1^2)m^2 - \kappa_2(1 + 2(-1 + \kappa_1)m + m_2)))))) \quad (161) \end{aligned}$$

$$B_2 = \frac{B_{21}p_1(\alpha) + B_{22}p_2(\alpha)}{\Delta} \quad (162)$$

$$\begin{aligned} B_{21} = & (1 + \kappa_1) \{ e^{-\alpha h_1 - 3\alpha h_2} (-(1 + 2\alpha h_1)(-1 + m) + e^{-3\alpha h_1 - \alpha h_2} (\kappa_2 - \kappa_1 m - 2\alpha h_2(-1 + m)(1 - 2\alpha h_1)) + \\ & e^{-3\alpha h_1 - 3\alpha h_2} (1 + \kappa_1 m) - e^{-\alpha h_1 - \alpha h_2} ((\kappa_2 + m)(1 + 2\alpha h_1) + 2\alpha h_2(1 + \kappa_1 m)) \} \quad (163) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{22} = & e^{-4\alpha h_1} (-1 + m)(\kappa_2 - \kappa_1 m) + e^{-2\alpha h_2} (e^{-4\alpha h_1} + 1)(1 + 2\alpha h_2)(-1 + m)(1 + \kappa_1 m) (\kappa_2 + m) \\ & (1 + \kappa_1 m) - e^{-2\alpha h_1} 4\alpha^2 h_1^2 (-1 + m)(\kappa_2 + m) + (-1 + \kappa_1)m(1 - \kappa_2) + e^{-2\alpha h_1 - 2\alpha h_2} \\ & (2 + 4\alpha^2 h_1^2 (-1 + m)^2 + (1 + 2\alpha h_2) + 2(-1 + \kappa_1)m + (1 + \kappa_1^2)m^2 + 2\alpha((h_1 + h_2)(2 + \\ & 2(-1 + \kappa_1)m + (1 + \kappa_1^2)m^2 - h_1(2 - (3 + \kappa_1)(-1 + \kappa_2) + \kappa_2)m \\ & + (1 + \kappa_1^2)m^2)) \quad (164) \end{aligned}$$

$$C_2 = \frac{C_{21}p_1(\alpha) + C_{22}p_2(\alpha)}{\Delta} \quad (165)$$

$$\begin{aligned} C_{21} = & -(1 + \kappa_1) \left\{ e^{-3\alpha h_1 - \alpha h_2} (2\alpha h_1(-1 + m)(-1 + \kappa_2 + 2\alpha h_1) + (\kappa_1 - \kappa_2)m) + e^{-\alpha h_1 - \alpha h_2} \right. \\ & ((1 - \kappa_1 \kappa_2)m + 2\alpha h_1(-1 + \kappa_2 + m(1 - \kappa_1))) + e^{-\alpha h_1 - 3\alpha h_2} (1 - \kappa_2^2 - m + \kappa_1 \kappa_2 m + \\ & 2\alpha(h_1(-1 + \kappa_2)(-1 + m) + (h_1 + h_2)(\kappa_1 - \kappa_2)m - 4\alpha^2 h_2(-1 + m)((2\alpha h_1 + 1)(h_1 + h_2) + \\ & (h_1(1 + \kappa_2) + h_2))) + e^{-3\alpha h_1 - 3\alpha h_2} (2\alpha(h_1 + h_2)(-2\alpha(h_1 + h_2)(1 + \kappa_1 m) - (-1 + \kappa_1 \kappa_2 m)) + \\ & \left. (-1 + \kappa_2 + m(1 - \kappa_1))(-2\alpha h_1 \kappa_2 - 4\alpha^2(h_1 + h_2)h_1 - 1 + \kappa_2^2 - m(\kappa_1 - \kappa_2)) \right\} \quad (166) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{22} = & e^{-2\alpha h_1 - 2\alpha h_2} (-16\alpha^4 h_1^3 h_2(-1 + m)^2 - e^{-4\alpha h_2} (-1 + \kappa_2)(-1 + m)(-\kappa_1 m + \kappa_2) + e^{-4\alpha h_1 - 4\alpha h_2} \\ & (-1 + \kappa_2)(\kappa_2 + m)(1 + \kappa_1 m) - 8\alpha^3 h_1^2(-1 + m)(e^{-2\alpha h_1 - 2\alpha h_2} (-h_1 - h_2 \kappa_2)(-1 + m) + e^{-2\alpha h_1 - 4\alpha h_2} \\ & (h_1 + h_2)(\kappa_2 + m)) + (e^{-2\alpha h_2} (1 + e^{-4\alpha h_1}) (-\kappa_2^2 + \kappa_1 m^2 (1 - \kappa_2) + \kappa_2 (1 + 2(-1 + \kappa_1)m) + \\ & e^{-2\alpha h_1} (\kappa_2^2 (-2 - (-1 + \kappa_1)m(\kappa_2 - 1))^2 + (1 + \kappa_1^2)m(1 + \kappa_2 m) + 2\kappa_2 e^{-2\alpha h_1 - 2\alpha h_2} ((1 + \kappa_1^2)m^2 \\ & + (1 - \kappa_2) + 2\kappa_2^2 - \kappa_2(2 + 4(-1 + \kappa_1)m)) - 2\alpha(e^{-2\alpha h_2} (1 + e^{-2\alpha h_1}) (-h_1 - h_2 \kappa_2)(-1 + m) + \\ & e^{-4\alpha h_1 - 4\alpha h_2} (h_1 + h_2)(\kappa_2 + m)(1 + \kappa_1 m) + e^{-4\alpha h_2} (h_1 + h_2)(-\kappa_2 + \kappa_1 m)(-1 + m) \\ & + e^{-2\alpha h_1 - 4\alpha h_2} ((h_1 + h_2)(-1 + \kappa_1)(\kappa_2 - 1)m + 2\kappa_2 - m^2(1 + \kappa_1^2))) + e^{-2\alpha h_1 - 2\alpha h_2} (-(h_1 + h_2)\kappa_2 \\ & (2 + 2(-1 + \kappa_1)m + (1 + \kappa_1^2)m^2) + h_1(-1 + \kappa_2)(2 - (3 + \kappa_1(-1 + \kappa_2) + \kappa_2)m + (1 + \kappa_1^2) \\ & m^2))) + 4\alpha^2 h_1 (e^{-2\alpha h_1 - 4\alpha h_2} h_1(-1 + \kappa_2)(-1 + m)(\kappa_2 + m) - e^{-4\alpha h_1 - 2\alpha h_2} h_2(-1 + m)(1 + \kappa_1 m) - \\ & (e^{-2\alpha h_2} h_2(-1 + m)(1 + \kappa_1 m) + e^{-2\alpha h_1 - 2\alpha h_2} (-(h_1 + h_2)(2 - (3 + \kappa_1(-1 + \kappa_2) + \kappa_2)m + \\ & h_1(2 + \kappa_2^2 - 4m + (2 + \kappa_1^2)m^2 - \kappa_2(1 + 2(-1 + \kappa_1)m + m_2)))))) \quad (167) \end{aligned}$$

$$D_2 = \frac{D_{21}p_1(\alpha) + D_{22}p_2(\alpha)}{\Delta} \quad (168)$$

$$\begin{aligned} D_{21} = & (1 + \kappa_1) \left(-e^{-3\alpha h_1 - \alpha h_2} (-1 + 2\alpha h_1)(-1 + m) + e^{-\alpha h_1 - 3\alpha h_2} (\kappa_2 - \kappa_1 m + 2\alpha h_2(-1 + m)(1 + 2\alpha h_1)) \right. \\ & \left. + e^{-\alpha h_1 - \alpha h_2} (1 + \kappa_1 m) + e^{-3\alpha h_1 - 3\alpha h_2} ((\kappa_2 + m)(-1 + 2\alpha h_1) + 2\alpha h_2(1 + \kappa_1 m)) \right) \quad (169) \end{aligned}$$

$$D_{22} = e^{-4\alpha h_2} (-1 + m)(-\kappa_2 + \kappa_1 m) + e^{-4\alpha h_1 - 4\alpha h_2} (\kappa_2 + m)(1 + \kappa_1 m) + e^{-2\alpha h_1 - 2\alpha h_2}$$

$$\begin{aligned}
& (2 + 4\alpha^2 h_1^2 (-1 + m)^2 + (1 + 2\alpha h_2) + 2(-1 + \kappa_1)m + (1 + \kappa_1^2)m^2 + 2\alpha((h_1 + h_2) \\
& (2 + 2(-1 + \kappa_1)m + (1 + \kappa_1^2)m^2 - h_1(2 - (3 + \kappa_1)(-1 + \kappa_2) + \kappa_2)m + (1 + \kappa_1^2) \\
& m^2)) + e^{-2\alpha h_1 - 4\alpha h_2} 4\alpha^2 h_1^2 (-1 + m)(\kappa_2 + m) + (-1 + \kappa_1)m(1 - \kappa_2) - e^{-2\alpha h_2} (e^{-4\alpha h_1} + 1) \\
& ((1 + 2\alpha h_2)(-1 + m)(1 + \kappa_1 m))
\end{aligned} \tag{170}$$

$$C_{32} = -\frac{1}{2\alpha}(-1 + 2\alpha h + \kappa_3)p_2(\alpha) \tag{171}$$

$$D_{32} = p_2(\alpha) \tag{172}$$

olarak tanımlanmışlardır.

İfadelerde geçen delta ise

$$\begin{aligned}
\Delta = & ((\kappa_2 + m)(1 + m\kappa_1)(e^{-4\alpha h_1 - 4\alpha h_2} + 1) + (-1 + m)(-\kappa_2 + m\kappa_1)(e^{-4\alpha h_1} + e^{-4\alpha h_2}) + e^{-2\alpha h_2} \\
& (1 + e^{-4\alpha h_1})(1 + \kappa_2^2 - m + m(\kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_1\kappa_2 - 2\kappa_1 m) - 4\alpha^2 h_2^2 (-1 + m)(1 + m\kappa_1)) + \\
& e^{-2\alpha h_1} (1 + e^{-4\alpha h_2}) (\kappa_2(-2 + 4\alpha^2 h_1^2 (-1 + m) + m(1 - \kappa_1)) + m(-1 + \kappa_1 + 4\alpha^2 h_1^2 (-1 + m) + \\
& m(1 + \kappa_1^2)) - 2e^{-2\alpha h_1 - 2\alpha h_2} (1 + \kappa_2^2 + 8\alpha^4 h_1^2 h_2^2 (-1 + m)^2 - m(1 - \kappa_1 - \kappa_2 - \kappa_1\kappa_2) + m^2(1 + \kappa_1^2) \\
& + 2\alpha^2((h_1 + h_2)^2 (2 + 2(-1 + \kappa_1)m + (1 + \kappa_1^2)m^2) - 2h_1(h_1 + h_2) (2 - (3 + \kappa_1)(-1 + \kappa_2) + \kappa_2)m + \\
& (1 + \kappa_1^2)m^2) + h_1^2(3 + \kappa_2^2 - 6m - 2m\kappa_1\kappa_2 + (3 + \kappa_1^2)m^2)))n
\end{aligned} \tag{173}$$

eşitliği ile verilmektedir.

2.1.5. İntegral Denklemlerin Elde Edilmesi

Panç ile üst tabaka arasındaki ve alt tabaka ile yarım düzlem arasındaki bilinmeyen değme gerilme yayılışını elde edebilmek için (131) ve (132) numaralı sınır şartından faydalanılacaktır. Katsayıları ve katsayılarla bağlı olan gerilme değerlerini bulmak için bu ifadelerde geçen p_1 ve p_2 değme gerilmeleri bulunmalıdır. Bu gerilme değerleri (131) ve

(132) ile verilen sınır şartları kullanılarak elde edilerek iki integral denklemin çözümü ile bulunabilir.

2.1.5.1 Birinci İntegral Denklem

Birinci integral denklemin bulunması için (131) numaralı sınır şartı kullanılacaktır.

Bu ifadenin birinci türevi alınırsa

$$\frac{\partial v_1(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial F(x)}{\partial x} \quad (174)$$

İfadesi elde edilir. Bu ifade gerekli katsayılar cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{\partial v_1(x, y)}{\partial x} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ [\alpha A_1 + (\kappa + \alpha y) B_1] e^{-\alpha y} + [-C_1 + (\kappa_1 - \alpha y) D_1] e^{\alpha y} \right\} \sin(\alpha x) d\alpha \quad (175)$$

Burada A_1, B_1, C_1, D_1 katsayılarında bulunan $P_1(\alpha)$ ve $P_2(\alpha)$ $p_1(t_1)$ ve $p_2(t_2)$ cinsinden yazılıp düzenlendiğinde denklem,

$$\frac{\partial v_1(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{\pi G_1} \int_0^a p_1(t_1) dt_1 M_1(x, t_1) + \frac{1}{\pi G_2} \int_0^b p_2(t_2) dt_2 M_2(x, t_2) \quad (176)$$

ile ifade edilir. Bu denklemde;

$$M_1(x, t_1) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta} \left\{ \left[\frac{1}{2} A_{11} + (\kappa_1 + \alpha y) B_{11} \right] e^{-\alpha y} + \left[\frac{1}{2} C_{11} + (\kappa_1 - \alpha y) D_{11} \right] e^{-\alpha y} \right\} \sin(\alpha x) \cos(\alpha t_1) d\alpha \quad (177)$$

$$M_2(x, t_1) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta} \left\{ \left[\frac{1}{2} A_{12} + (\kappa_1 + \alpha y) B_{12} \right] e^{-\alpha y} + \left[\frac{1}{2} C_{12} + (\kappa_1 - \alpha y) D_{12} \right] e^{-\alpha y} \right\} \sin(\alpha x) \cos(\alpha t_1) d\alpha \quad (178)$$

olarak verilmektedir.

$y \rightarrow 0$ limitine geçildiğinde (177) nolu denklemde yer alan $M_1(x, t_1)$ integralinin çekirdeğinin yakınsaması bozulmaktadır. α nın büyük değerlerinde integrallerin çekirdeğini oluşturan fonksiyon sıfıra yaklaşmamaktadır. Çekirdeğin içinde yakınsamayı bozan terimler aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$\int_0^{\infty} \left[\frac{1+\kappa_1}{2} - \alpha y \right] e^{-\alpha y} \sin(\alpha x) \cos(\alpha t_1) d\alpha \quad (179)$$

Yakınsamayı bozan bu terim çekirdeğin içerisinde çıkarılıp ayrı olarak kapalı integrali alındıktan sonra limit işlemine geçilir ve değeri (176) denklemine eklenir ve bu şekilde çekirdeklerin yakınsaması sağlanır. Bu işlemden sonra (176) nolu ifade aşağıdaki şekli alır.

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1(x, y)}{\partial x} = & \frac{1}{\pi G_1} \int_0^a p_1(t_1) dt_1 M_1^*(x, t_1) + \frac{1}{\pi G_2} \int_0^b p_2(t_2) dt_2 M_2(x, t_2) + \\ & \frac{1}{\pi G_1} \lim_{y \rightarrow 0} \int_0^a p_1(t_1) dt_1 \int_0^{\infty} \left[\frac{1+\kappa_1}{2} - \alpha y \right] e^{-\alpha y} \sin(\alpha x) \cos(\alpha t_1) d\alpha \end{aligned} \quad (180)$$

(176) ifadesinden singüler terim çıkarıldığında yeni değeri M_1^* aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} M_1^*(x, t_1) = & \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\Delta} \left\{ \left[\frac{1}{2} A_{11} + (\kappa_1 + \alpha y) B_{11} \right] e^{-\alpha y} + \right. \right. \\ & \left. \left. \left[\frac{1}{2} C_{11} + (\kappa_1 - \alpha y) D_{11} \right] e^{-\alpha y} \right\} - \int_0^{\infty} \left[\frac{1+\kappa_1}{2} - \alpha y \right] e^{-\alpha y} \right) \sin(\alpha x) \cos(\alpha t_1) d\alpha \end{aligned} \quad (181)$$

integral dönüşüm tabloları kullanılarak (179) ifadesinin kapalı integrali aşağıdaki gibi bulunur.

$$\frac{1+\kappa_1}{2} \left[\frac{t_1+x_1}{(-y)^2+(t_1+x_1)^2} - \frac{t_1-x_1}{(-y)^2+(t_1-x_1)^2} \right] \quad (182)$$

(181) bağıntısında $y \rightarrow 0$ limitine geçilip (180) bağıntısında yerine konur ve x yerine x_1 yazılırsa (131) nolu sınır şartı aşağıdaki şekli alır. Yeni durumda çekirdekler $K_1(x_1, t_1)$ ve $K_2(x_1, t_2)$ olarak ifade edilirler.

$$\int_0^a p_1(t_1) dt_1 \left[\frac{1}{t_1+x_1} - \frac{1}{t_1-x_1} + 2K_1(x_1, t_1) \right] dt_1 + 2 \int_0^b p_2(t_2) K_2(x_1, t_2) dt_2 = \frac{\partial F(x)}{\partial x} \quad (183)$$

Yukarıdaki denklemde yeralan $K_1(x_1, t_1)$ ve $K_2(x_1, t_2)$ çekirdekleri;

$$\begin{aligned} K_1(x_1, t_1) = & \frac{1}{1+\kappa_1} \int_0^\infty \frac{1}{\Delta} (1+k_1) \{ -4\alpha h_1 (-1+m)(\kappa_2+m) e^{-2\alpha h_1} [e^{-4\alpha h_2} + 1] + (1+\kappa_1 m) \\ & (\kappa_2+m) (1+e^{-4\alpha h_1-4\alpha h_2}) + (-1+m)(-\kappa_2+m\kappa_1)(e^{-4\alpha h_2} - e^{-4\alpha h_1}) + (-1+m) \\ & (1+\kappa_1 m)(4\alpha^2 h_2^2 + 1) + (\kappa_2 - \kappa_1 m)(\kappa_2 + m) (e^{-2\alpha h_2} - e^{-4\alpha h_1-2\alpha h_2}) \\ & + (4\alpha h_2(4\alpha^3 h_1 h_2 (-1+m)^2 + (1+\kappa_1)(1+\kappa_2)m) + 4\alpha h_1((\kappa_2+m)^2 + \\ & (1-m)^2)) (e^{-2\alpha h_1-2\alpha h_2}) - [1+\kappa_1] \} \sin(\alpha x_1) \cos(\alpha t_1) d\alpha \end{aligned} \quad (184)$$

$$\begin{aligned} K_2(x_1, t_2) = & \frac{1}{1+\kappa_1} \int_0^\infty \frac{G_1}{G_2 \Delta} e^{-5\alpha h_1-3\alpha h_2} (1+\kappa_1)(1+\kappa_2)m \{ e^{-4\alpha h_1} (+1+\kappa_2 + (-2\alpha(h_1-h_2) + \\ & 4a^2 h_1 h_2) - m(1+\kappa_1) e^{2\alpha(h_1+h_2)} (-1-\kappa_2 - 2\alpha(-1+m) ((h_1-h_2) + 2ah_1h) + \\ & m(1+\kappa_1)) e^{2\alpha h_1} ((1+\kappa_1 m)(-1+2ah_2) + (\kappa_2+m) (-1+2ah_1)) + e^{2\alpha(2h_1+h_2)} \\ & ((1+k_1 m)(1+2ah_2) + (\kappa_2+m)(1+2ah_1)) \} \sin(\alpha x_2) \cos(\alpha t_2) d\alpha \end{aligned} \quad (185)$$

şeklinde ifade edilirler. $p_1(t_1)$ ve $p_2(t_2)$ değme gerilme fonksiyonlarının $p_1(t_1)=p_1(-t_1)$ ve $p_2(t_2)=p_2(-t_2)$ şeklinde çift fonksiyon oldukları göz önünde tutulursa,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a p_1(t_1) \left[\frac{1}{t_1-x_1} + K_1(x_1, t_1) \right] dt_1 +$$

$$\frac{1}{\pi} \frac{G_1}{G_2} \int_{-b}^b p_2(t_2) [K_2(x_1, t_2)] dt_2 = f(x_1) \quad \begin{cases} -a < t_1 < a \\ -b < t_2 < b \end{cases} \quad (186)$$

şeklinde elde edilir.

İntegral denklemin sayısal çözümü için değişken dönüşümü ve boyutsuzlaştırma yapılmış ve aşağıdaki boyutsuz büyüklükler tanımlanmıştır

$$t_1 = a s_1, \quad t_2 = b s_2, \quad x_1 = a w_1, \quad x_2 = b w_2 \quad (187)$$

$$g(s_1) = \frac{p_1(s_1)}{P/h_1} \quad g(s_2) = \frac{p_2(s_2)}{P/h_1} \quad (188)$$

Yukarıdaki bu boyutsuz büyüklükler (186) nolu integral denklemde yerlerine yazılırsa

$$\int_{-1}^1 g s_1 \left[\frac{1}{(s_1 - w_1)} + \frac{a}{h_1} K_1^*(w_1, s_1) \right] ds_1 + \frac{b}{h_1} \int_{-1}^1 g s_2 K_2^*(w_1, s_2) ds_2 = \frac{f(s_1)}{P/h_1} \quad (189)$$

İfadesi elde edilir. Denge şartı ise;

$$\frac{a}{h_1} \int_{-1}^1 g(s_1) ds_1 = 1 \quad -1 < s_1 < 1 \quad (190)$$

olarak ifade edilebilir.

Yukarıdaki denklemlerde $g(s_1)$ ve $g(s_2)$ sırasıyla panç ve temas ettiği tabaka arasındaki ve iki tabaka arasındaki yüzeylerde meydana gelen boyutsuz değme gerilmeleridir.

2.1.5.2 İkinci İntegral Denklem

Elastik yarım düzlem ve alttaki ikinci tabaka arasında (132) nolu sınır şartının kullanılmasıyla ikinci bir integral denklem aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [v_2(x, y) - v_3(x, y)] = & -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \{ [\alpha A_2 + (\kappa_2 + \alpha y) B_2] e^{-\alpha(h+y)} + \\ & [-\alpha C_2 + (\kappa_2 - \alpha y) D_2] e^{-\alpha(h-y)} \} \sin(\alpha x) d\alpha \\ & -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [-\alpha C_3 + (\kappa_2 - \alpha y) D_3] e^{-\alpha(y-h)} \} \sin(\alpha x) d\alpha = 0 \end{aligned} \quad (191)$$

şeklini alır. Bu ifade de yer alan katsayılarında bulunan $p_1(\alpha)$ ve $p_2(\alpha)$

$p_1(t_1)$ ve $p_2(t_2)$ cinsinden yazılıp düzenlendiğinde

$$\frac{1}{\pi G_1} \int_0^a p_1(t_1) [Y_1(x_2, t_1)] dt_1 + \frac{1}{\pi G_2} \int_0^b p_2(t_2) [Y_2(x_2, t_2) + Y_3(x_2, t_2)] dt_2 = 0 \quad (192)$$

halini alır. Burada

$$\begin{aligned} Y_1(x_2, t_1) = & \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta} \left\{ \left[\frac{1}{2} A_{21} + (\kappa_2 + \alpha y) B_{21} \right] e^{-\alpha(h+y)} + \right. \\ & \left. \left[-\frac{1}{2} C_{21} + D_{21} (\kappa_2 - \alpha y) \right] e^{-\alpha(h-y)} \right\} \sin(\alpha x) \cos(\alpha t_2) d\alpha \end{aligned} \quad (193)$$

$$\begin{aligned} Y_2(x_2, t_2) = & \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta} \left\{ \left[\frac{1}{2} A_{22} + (\kappa_2 + \alpha y) B_{22} \right] e^{-\alpha(h+y)} + \right. \\ & \left. \left[-\frac{1}{2} C_{22} + D_{22} (\kappa_2 - \alpha y) \right] e^{-\alpha(h-y)} \right\} \sin(\alpha x) \cos(\alpha t_2) d\alpha \end{aligned} \quad (194)$$

$$Y_3(x_2, t_2) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta} \left\{ \left[\frac{1}{2} C_{32} + (\kappa_3 - \alpha y) D_{32} \right] \right\} e^{-\alpha(h-y)} \sin(\alpha x) \cos(\alpha t_2) d\alpha \quad (195)$$

olarak verilmiştir.

$y \rightarrow -h$ limitine geçildiğinde (193) ve (194) nolu denklemlerde yer alan $Y_2(x_2, t_2)$ ve $Y_3(x_2, t_2)$ integrallerinin çekirdeklerinin yakınsaması bozulmaktadır. Yani α nın büyük değerlerinde integrallerin çekirdeğini oluşturan fonksiyon sıfıra yaklaşmamaktadır. Çekirdeklerin içinde yakınsamayı bozan bu singüler terimler aşağıda gösterilmiştir.

$$\int_0^{\infty} \left[\frac{1+\kappa_2}{2} + \alpha(h+y) \right] e^{-\alpha(h+y)} \sin(\alpha x) \cos(\alpha t_1) d\alpha \quad (196)$$

$$\int_0^{\infty} \left[\frac{1+\kappa_3}{2n} - \alpha(h+y) \right] e^{\alpha(h+y)} \sin(\alpha x) \cos(\alpha t_1) d\alpha \quad (197)$$

Singüler terimleri veren (196) ve (197) ifadeleri (192) denkleminde bulunan sırasıyla Y_2 , Y_3 ifadelerinden çıkarılıp diğer taraftan kapalı integralleri alınarak aynı denkleme eklenirse

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [v_2(x, y) - v_3(x, y)] &= \frac{1}{\pi G_1} \int_0^a p_1(t_1) [Y_1] dt_1 + \frac{1}{\pi G_2} \int_0^b p_2(t_2) [Y_2^* + Y_3^*] dt_2 - \\ &\frac{1}{\pi G_2} \lim_{y \rightarrow -h} \int_0^{\infty} \left[\frac{1+\kappa_2}{2} + \alpha(h+y) \right] e^{-\alpha(h+y)} \sin(\alpha x) \cos(\alpha t_2) d\alpha + \\ &\frac{1}{\pi G_3} \int_0^{\infty} \left[\frac{1+\kappa_3}{2n} - \alpha(h+y) \right] e^{\alpha(h+y)} \sin(\alpha x) \cos(\alpha t_2) d\alpha \quad (198) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Burada $Y_2^*(x_2, t_2)$ ve $Y_3^*(x_2, t_2)$ sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanmışlardır.

$$\begin{aligned} Y_2^*(x, t_2) &= \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{\Delta} \left\{ \left[\frac{1}{2} A_{22} + (\kappa_2 + \alpha y) B_{22} \right] e^{-\alpha(h+y)} + \right. \right. \\ &\left. \left. \left[-\frac{1}{2} C_{22} + D_{22}(\kappa_2 - \alpha y) \right] e^{-\alpha(h-y)} \right\} + \frac{1+\kappa_2}{2} \right] \sin(\alpha x) \cos(\alpha t_2) d\alpha \quad (199) \end{aligned}$$

$$Y_3^*(x, t_2) = \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{1}{2} C_{32} + (\kappa_3 - \alpha y) D_{32} \right\} e^{-\alpha(h-y)} - \frac{1+\kappa_3}{2n} \right] \sin(\alpha x) \cos(\alpha t_2) d\alpha \quad (200)$$

İntegral dönüşüm tabloları kullanılarak (196) ve (197) ifadelerinin kapalı integrali aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$\frac{1}{2} \frac{1+\kappa_2}{2} \left[\frac{t_2+x_2}{(h+y)^2+(t_2+x_2)^2} - \frac{t_2-x_2}{(h+y)^2+(t_2-x_2)^2} \right] \quad (201)$$

$$\frac{1}{2} \frac{1+\kappa_3}{2} \left[\frac{t_2+x_2}{(-h-y)^2+(t_2+x_2)^2} - \frac{t_2-x_2}{(-h-y)^2+(t_2-x_2)^2} \right] \quad (202)$$

(199) ve (200) denklemlerinde $y \rightarrow -h$ limitine geçilip (198) denkleminde yerine yazılırsa ve gerekli ara işlemler yapılırsa 132 nolu sınır şartı aşağıdaki şekli alır.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [v_2(x, y) - v_3(x, y)] = & 2 \int_0^a p_1(t_1) K_3(x_2, t_1) dt_1 + \\ & \int_0^b p_2(t_2) [2K_4(x_2, t_2) + \left[\frac{1}{t_2+x_2} - \frac{1}{t_2-x_2} \right]] dt_2 = 0 \end{aligned} \quad (203)$$

Bu ifade de geçen $K_3(x_2, t_1)$ ve $K_4(x_2, t_2)$ değerleri sırasıyla

$$\begin{aligned} K_3(x_2, t_1) = & \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{\Delta} \frac{n}{n(1+\kappa_2)+1+\kappa_3} m \left\{ e^{-5\alpha h_1-3\alpha h_2} (1+\kappa_1)(1+\kappa_2) (e^{2\alpha(h_1+h_2)} (1+\kappa_2) \right. \right. \\ & + 2\alpha(-1+m) (h_1-h_2+2\alpha h_1 h_2) - m(1+\kappa_1)) + e^{4\alpha h_1} (-1-\kappa_2+m(1+\kappa_1)) + \\ & 2\alpha(-1+m) (h_1-h_2-2\alpha h_1 h_2) + e^{2\alpha h_1} ((\kappa_2+m)(1-2\alpha h_1) \\ & + (1+\kappa_1 m)(1-2\alpha h_2)) - e^{2\alpha(2h_1+h_2)} ((1+\kappa_1 m)(1+2\alpha h_2)) \left. \right\} \\ & + (\kappa_2+m)(1+2\alpha h_1) \left. \right\} \sin(\alpha x) \cos(\alpha t_1) d\alpha \end{aligned} \quad (204)$$

$$\begin{aligned} K_4(x_2, t_2) = & - \int_0^\infty \frac{n}{n(1+\kappa_2)+1+\kappa_3} \left(\frac{1}{\Delta} \left\{ e^{-4\alpha h_1-4\alpha h_2} (1+\kappa_2) (16\alpha^3 h_1^2 h_2 (-1+m^2) (e^{2\alpha h_1+2\alpha h_2}) + \right. \right. \\ & 4a^2 h_1^2 (-1+m)(\kappa_2+m) (-1+e^{-4\alpha h_2}) e^{2\alpha h_1} + -1+e^{2\alpha h_1} \kappa_2 (1+(e^{2\alpha h_1} + e^{4\alpha h_2}) \\ & (-1+m) + \kappa_1 m + e^{2\alpha(h_1+2h_2)} (1+\kappa_1 m)) - m(\kappa_1(-1+m)(e^{4\alpha h_1} - e^{4h_2}) + \\ & (1-e^{4\alpha(h_1+h_2)})(1+\kappa_1 m) + (-1+\kappa_1+m(1+\kappa_1^2)) e^{2\alpha h_1} (1-e^{4\alpha h_2}) + \\ & \left. \left. 4\alpha e^{2\alpha h_2} (e^{2\alpha h_1} h_1 (1+\kappa_1)(1+\kappa_2)m + h_2(1+e^{4\alpha h_1})(-1+m) + (1+\kappa_1 m) \right. \right. \end{aligned}$$

$$e^{2\alpha h_1} (2 + 2m(-1 + \kappa_1) + m(1 + \kappa_1^2)) \} + (1 + \kappa_2)) \sin(\alpha x) \cos(\alpha t_2) d\alpha \quad (205)$$

olarak verilmişlerdir.

$p_1(t_1)$ ve $p_2(t_2)$ değme gerilme fonksiyonlarının $p_1(t_1)=p_1(-t_1)$ ve $p_2(t_2)=p_2(-t_2)$ şeklinde çift fonksiyon oldukları göz önünde tutulursa (209) integral denklemi (212) denklemi haline gelir.

$$\int_{-a}^a p_1(t_1) K_3 dt_1 + \int_{-b}^b p_2(t_2) \left[K_4 + \frac{1}{t_2 - x_2} \right] dt_2 = 0 \quad \begin{cases} -a < t_1 < a \\ -b < t_2 < b \end{cases} \quad (206)$$

İntegral denklemin sayısal çözümü için bu denklemde $\alpha=z/h_1$ değişken dönüşümü yapılır (187-188) ifadeleri kullanılırsa (206) denklemi aşağıdaki halini alır.

$$\frac{a}{h_1} \int_{-1}^1 g s_1 K_3^*(a w_1, a s_1) ds_1 + \int_{-1}^1 g s_2 \left[\frac{1}{s_2 - w_2} + \frac{b}{h_1} K_4^*(a w_2, a s_2) \right] ds_2 = 0 \quad \begin{cases} -1 < s_1 < 1 \\ -1 < s_2 < 1 \end{cases} \quad (207)$$

Denge şartı ise,

$$\frac{b}{h_1} \int_{-1}^1 g(s_1) ds_1 = 1 \quad (208)$$

şekline gelir.

$g(s_{\bar{i}}=\pm 1)=0$ olduğundan integral denkleminin indisi (-1) olacaktır (Erdoğan ve diğerleri, 1973).

2.1.6. İntegral Denkleminin Çözümü

İntegral denklemin sayısal çözümü aşağıdaki gibi aranabilir.

$$g(s_{ri})=G(s_{ri})(1-s_{ri}^2)^{1/2} \quad (-1 < s_{ri} < 1) \quad (209)$$

Burada $G(s_{ri})$ ($-1 \leq s_{ri} \leq 1$) kapalı aralığında sınırlıdır.

(-1) indis için Gauss-Chebyshev integrasyon formülü kullanılırsa ve birinci ve ikinci integral denklemler beraber göz önüne alınırsa iki tane integral denklemden oluşan denklem takımı aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\sum_1^N (1-s_{1i}^2) \left[\frac{1}{s_{1i}-w_{1j}} + \frac{a}{h_1} K_1^*(w_{1j}, s_{1i}) \right] G(s_{1i}) + \frac{b}{h_1} \sum_{i=1}^N (1-s_{2i}^2) K_2^*(w_{1j}, s_{2i}) G(s_{2i}) = \frac{f(w_{1j})}{p/h_1} = f^*(w_{1j}) \quad (210)$$

$$\frac{a}{h_1} \sum_1^N (1-s_{1i}^2) K_3^*(w_{2j}, s_{2i}) G(s_{1i}) + \sum_1^N (1-s_{2i}^2) \left[\frac{1}{s_{2i}-w_{2j}} + \frac{b}{h_1} K_4^*(w_{2j}, s_{2i}) \right] G(s_{2i}) = 0 \quad (211)$$

Burada denge denklemleri de

$$\frac{a}{h_1} \sum_{i=1}^N (1-s_{1i}^2) G(s_{1i}) = \frac{N+1}{\pi} \quad (212)$$

$$\frac{b}{h_1} \sum_{i=1}^n (1-s_{2i}^2) G(s_{2i}) = -\frac{2(N+1)}{\pi} \quad (213)$$

Bu ifadelerde;

$$s_{ri} = \cos\left(\frac{i\pi}{N+1}\right) \quad i=1, \dots, N \quad (214)$$

$$w_{ij} = \cos \left[\pi \left(\frac{2j-1}{2N+2} \right) \right] \quad j=1, \dots, N+1 \quad (215)$$

İntegral denklem sistemi matris formunda yazılırsa

$$\begin{bmatrix} [KS_{1ij}]_{n \times n} & [KS_{2ij}]_{N \times N} \\ [KS_{3ij}]_{n \times n} & [KS_{4ij}]_{N \times N} \end{bmatrix}_{2N \times 2N} \chi \begin{bmatrix} [G(s_{1i})]_{N \times 1} \\ [G(s_{2i})]_{N \times 1} \end{bmatrix}_{2N \times 1} = \begin{bmatrix} [f^*(w_{1j})]_{N \times 1} \\ [0]_{N \times 1} \end{bmatrix}_{2N \times 1} \quad (216)$$

$$KS_{1ij} = (1 - s_{1i}^2) \left[\frac{1}{s_{1i} - w_{1j}} + \frac{a}{h_1} K_1^*(w_{1j}, s_{1i}) \right] \quad (217)$$

$$KS_{2ij} = \frac{b}{h_1} (1 - s_{2i}^2) K_2^*(w_{1j}, s_{2i}) \quad (218)$$

$$KS_{3ij} = \frac{a}{h_1} (1 - s_{1i}^2) K_3^*(w_{2j}, s_{1i}) \quad (219)$$

$$KS_{4ij} = (1 - s_{2i}^2) \left[\frac{1}{s_{2i} - w_{2j}} + \frac{b}{h_1} K_4^*(w_{2j}, s_{2i}) \right] \quad (220)$$

Burada bilinmeyenler $G(s_{1i})$ ve $G(s_{2i})$ değerleridir. Bu bilinmeyenler var olan denklemler yardımı ile bulunabilir.

Denklemlerde geçen tabaka yükseklikleri, malzeme sabitleri, pañç yarıçapı, ve dış tekil yük sırasıyla $h_1, h_2, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, G_1, G_2, G_3, R, P$ şeklinde gösterilebilirler.

$f^*(w)$ ise pañçın geometrik şekline bağlıdır ve aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$f^*(w_{1j}) = \frac{N+1}{\pi} \frac{f(w_{1j})}{P/h_1} \quad (221)$$

Yukarıda bahsedilen integral denklemlerde geçen a ve b büyüklükleri değme uzunlukları olup yük, malzeme özellikleri ve problemin geometrisine göre değişecektir. Bu büyüklüklere başlangıçta tahmini bir değer verilerek, bu değerlerin denge şartlarını sağlayıp sağlamadıklarına bakılır. Sağlatılana kadar iterasyona devam edilip, sağlayan değerler gerçek gerilme yayılışlarını verirler.

2.2. Pañç Profili

Dairesel pañç durumunda pañçın şekil fonksiyonu

$$F(x_1) = \delta - \left[(R^2 - x_1^2)^{1/2} - R \right] \quad (222)$$

olmaktadır. Burada R daireysel pañçın yarıçapı, δ ise bir sabit olup pañçın altında tabakada meydana gelen en büyük yer değiştirmedir.

$$f(x_1) = \frac{\partial F(x_1)}{\partial x} = -\frac{x_1}{(R^2 - x_1^2)^{1/2}} \quad (223)$$

$f(x_1)$ pañçın şekil fonksiyonun türevini ifade etmektedir.

2.3. Gerilmelerin Bulunması

Dairesel rijit pañç vasıtası ile sisteme uygulanan 2P şiddetindeki tekil yük etkisinden meydana gelecek olan σ_x ve σ_y gerilme bileşenleri gerilmenin maksimum olacağı y simetri ekseni boyunca ($x=0$), τ_x gerilmesi ise yine bu eksenin çok yakınında incelenmiştir. Katsayılarının değerleri gerilme ifadelerinde yerine konulduğunda, gerilme çekirdeklerinde $y \rightarrow 0$ ve $y \rightarrow -h$ için yakınsamayı bozan terimler meydana gelir.

$y \rightarrow 0$ durumunda singüler terimler

$$\sigma_{x_1s} = -\frac{1}{\pi} \int_0^a P_1(t_1) dt_1 \int_0^\infty [1 + \alpha y] e^{-\alpha(-y)} [\cos \alpha(t_1 + x) + \cos \alpha(t_1 - x)] d\alpha \quad (224)$$

$$\sigma_{y_1s}(x, y) = -\frac{1}{\pi} \int_0^a P_1(t_1) dt_1 \int_0^\infty [1 - \alpha y] e^{-\alpha(-y)} [\cos \alpha(t_1 + x) + \cos \alpha(t_1 - x)] d\alpha \quad (225)$$

$$\tau_{xy_1s}(x, y) = -\frac{1}{\pi} \int_0^a P_1(t_1) dt_1 \int_0^\infty [1 - \alpha y] e^{-\alpha(-y)} [\cos \alpha(t_1 + x) + \cos \alpha(t_1 - x)] d\alpha \quad (226)$$

$y \rightarrow -h$ durumunda singüler terimler

$$\sigma_{x_2s} = -\frac{1}{\pi} \int_0^b P_2(t_2) dt_2 \int_0^\infty [1 + \alpha y] e^{-\alpha(-y)} [\cos \alpha(t_2 + x) + \cos \alpha(t_2 - x)] d\alpha \quad (227)$$

$$\sigma_{y_2s}(x, y) = -\frac{1}{\pi} \int_0^b P_2(t_2) dt_2 \int_0^\infty [1 - \alpha y] e^{-\alpha(-y)} [\cos \alpha(t_2 + x) + \cos \alpha(t_2 - x)] d\alpha \quad (228)$$

$$\tau_{xy_2s}(x, y) = -\frac{1}{\pi} \int_0^b P_2(t_2) dt_2 \int_0^\infty [1 - \alpha y] e^{-\alpha(-y)} [\cos \alpha(t_2 + x) + \cos \alpha(t_2 - x)] d\alpha \quad (229)$$

Yukarıdaki gibi ifade edilmiş olan singüler terimlerin kapalı integralleri integral dönüşüm tabloları yardımı ile aşağıdaki gibi bulunur.

$y \rightarrow 0$

$$\sigma_{x_k} = 2y \left[\frac{(t_1 + x)^2}{[y^2 + (t_1 + x)^2]^2} + \frac{(t_1 - x)^2}{[y^2 + (t_1 - x)^2]^2} \right] \quad (230)$$

$$\sigma_{y_1k} = 2y^3 \left[\frac{1}{[y^2 + (t_1 + x)^2]^2} - \frac{1}{[y^2 + (t_1 - x)^2]^2} \right] \quad (231)$$

$$\tau_{xy_1k} = -2y^3 \left[\frac{(t_1 + x)^2}{[y^2 + (t_1 + x)^2]^2} - \frac{(t_1 - x)^2}{[y^2 + (t_1 - x)^2]^2} \right] \quad (232)$$

$y \rightarrow -h$

$$\sigma_{x_2k} = -2 \left[\frac{(h+y)(t_2+x)^2}{[(h+y)^2 + (t_2+x)^2]^2} + \frac{(h+y)(t_2-x)^2}{[(h+y)^2 + (t_2-x)^2]^2} \right] \quad (233)$$

$$\sigma_{y_2k} = -2 \left[\frac{(h+y)^3}{[(h+y)^2 + (t_2+x)^2]^2} + \frac{(h+y)^3}{[(h+y)^2 + (t_2-x)^2]^2} \right] \quad (234)$$

$$\tau_{xy_2k} = \left[\frac{(h+y)^2(t_2+x)}{[(h+y)^2 + (t_2+x)^2]^2} - \frac{(h+y)^2(t_2-x)}{[(h+y)^2 + (t_2-x)^2]^2} \right] \quad (235)$$

Singüler terimlerin gerilme ifadelerinden çıkartılıp yerlerine kapalı terimlerinin eklenmesiyle gerilme bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\sigma_{x_1}^*(x, y) = \sigma_{x_1}(x, y) - \sigma_{x_1s}(x, y) + \sigma_{x_1k}(x, y) \quad (236)$$

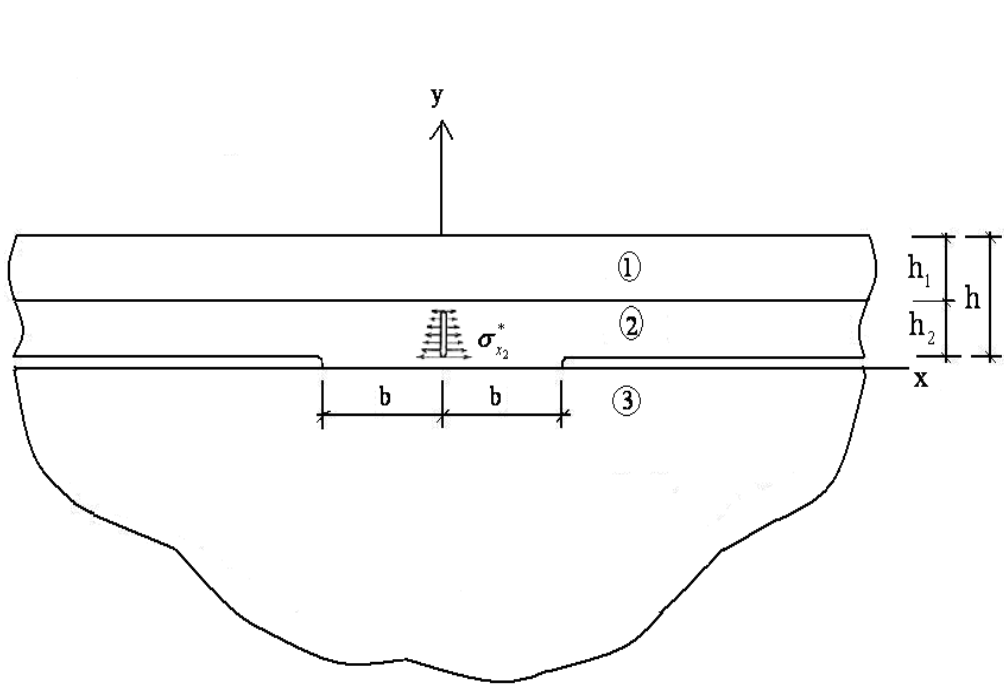
$$\sigma_{y_1}^*(x, y) = \sigma_{y_1}(x, y) - \sigma_{y_1s}(x, y) + \sigma_{y_1k}(x, y) \quad (237)$$

$$\tau_{xy_1}^*(x, y) = \tau_{xy_1}(x, y) - \tau_{xy_1s}(x, y) + \tau_{xy_1k}(x, y) \quad (238)$$

2.4. Çatlak Problemi

2.4.1. Çatlaklı Yapışık Tabaka Probleminin Tanımı

Bu kısımda elastik yarım düzlem üzerine oturan alt tabakasında y simetri ekseninde düşey bir çatlağı olan yapışık iki tabakanın iç çatlak problemi Elastisite teorisine göre incelenmektedir.



Şekil 3. Elastik yarım düzlem üzerine oturan ve alt tabakasında çatlak bulunan çift tabaka

Çatlak olan durumun çözümü için çatlak yüzeyine daha önce çatlaksız çözümden elde edilen gerilmelerle aynı şiddet ve aynı doğrultuda gerilmelerin zıt yönde yüklenmesinden meydana gelecek etkiler göz önüne alınmış ve çatlak uçlarında gerilme şiddet faktörleri incelenmiştir. Çatlak sırasıyla iç ve kanar çatlak olduğu durumlar için incelenerek gerekli hesaplamalar yapılmış ve grafikler elde edilmiştir.

2.4.2. Kullanılacak Denklemler

Çatlaklı ve çatlaksız tabakalar için gerilme ve yer değiştirme ifadeleri ayrı ayrı yazılacaktır. Sadece 2. tabaka çatlak ihtiva etmekte olup 1. tabaka ve elastik yarım düzlemde çatlak bulunmamaktadır.

I Nolu tabaka için

$$u_1^*(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ [A_1^* + B_1^* y] e^{-\alpha y} + [C_1^* + D_1^* y] e^{\alpha y} \right\} \sin(\alpha x) d\alpha \quad (239)$$

$$v_1^*(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[A_1^* + B_1^* \left(\frac{\kappa_1}{\alpha} + y \right) \right] e^{-\alpha y} + \left[-C_1^* + D_1^* \left(\frac{\kappa_1}{\alpha} - y \right) \right] e^{\alpha y} \right\} \sin(\alpha x) d\alpha \quad (240)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G_1} \sigma_{x1}^*(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[\alpha (A_1^* + B_1^* y) - \left(\frac{3 - \kappa_1}{2} \right) B_1^* \right] e^{-\alpha y} + \right. \\ \left. \left[\alpha (C_1^* + D_1^* y) + \left(\frac{3 - \kappa_1}{2} \right) D_1^* \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha \end{aligned} \quad (241)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G_1} \sigma_{y1}^*(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ - \left[\alpha (A_1^* + B_1^* y) + \left(\frac{\kappa_1 + 1}{2} \right) B_1^* \right] e^{-\alpha y} + \right. \\ \left. \left[-\alpha (C_1^* + D_1^* y) + \left(\frac{\kappa_1 + 1}{2} \right) D_1^* \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha \end{aligned} \quad (242)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G_1} \tau_{xy1}^*(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ - \left[\alpha (A_1^* + B_1^* y) + \left(\frac{\kappa_1 - 1}{2} \right) B_1^* \right] e^{-\alpha y} + \right. \\ \left. \left[\alpha (C_1^* + D_1^* y) - \left(\frac{\kappa_1 - 1}{2} \right) D_1^* \right] e^{\alpha y} \right\} \sin(\alpha x) d\alpha \end{aligned} \quad (243)$$

II Nolu tabaka için

$$\begin{aligned}
u_2^*(x, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ [A_2^* + B_2^* y] e^{-\alpha y} + [C_2^* + D_2^* y] e^{\alpha y} \right\} \sin(\alpha x) d\alpha \\
&+ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\phi(\xi)}{\xi} \left(\frac{\kappa_2 + 1}{2} + \xi x \right) e^{-\xi x} \cos(\xi y) d\xi
\end{aligned} \tag{244}$$

$$\begin{aligned}
v_2^*(x, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \left[A_2^* + B_2^* \left(\frac{\kappa_2}{\alpha} + y \right) \right] e^{-\alpha y} + \left[-C_2^* + D_2^* \left(\frac{\kappa_2}{\alpha} - y \right) \right] e^{\alpha y} \right\} \sin(\alpha x) d\alpha \\
&- \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\phi(\xi)}{\xi} \left(\frac{\kappa_2 - 1}{2} - \xi x \right) e^{-\xi x} \cos(\xi y) d\xi
\end{aligned} \tag{245}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2G_2} \sigma_{x_2}^*(x, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \left[\alpha(A_2^* + B_2^* y) - \left(\frac{3 - \kappa_2}{2} \right) B_2^* \right] e^{-\alpha y} + \right. \\
&\left. \left[\alpha(C_2^* + D_2^* y) + \left(\frac{3 - \kappa_2}{2} \right) D_2^* \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha \\
&- \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \phi(\xi) (1 + \xi x) e^{-\xi x} \cos(\xi y) d\xi
\end{aligned} \tag{246}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2G_2} \sigma_{y_2}^*(x, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ - \left[\alpha(A_2^* + B_2^* y) + \left(\frac{\kappa_2 + 1}{2} \right) B_2^* \right] e^{-\alpha y} + \right. \\
&\left. \left[-\alpha(C_2^* + D_2^* y) + \left(\frac{\kappa_2 + 1}{2} \right) D_2^* \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha \\
&- \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \phi(\xi) (1 - \xi x) e^{-\xi x} \cos(\xi y) d\xi
\end{aligned} \tag{247}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2G_2} \tau_{xy_2}^*(x, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ - \left[\alpha(A_2^* + B_2^* y) + \left(\frac{\kappa_2 - 1}{2} \right) B_2^* \right] e^{-\alpha y} + \right. \\
&\left. \left[\alpha(C_2^* + D_2^* y) - \left(\frac{\kappa_2 - 1}{2} \right) D_2^* \right] e^{\alpha y} \right\} \sin(\alpha x) d\alpha \\
&- \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \xi x \phi(\xi) e^{-\xi x} \sin(\xi y) d\xi
\end{aligned} \tag{248}$$

III Nolu yarım düzlem için

$$\frac{1}{2G_3} \sigma_{x3}^*(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[-\alpha(C_3^* + D_3^*y) + \left(\frac{3-\kappa_3}{2}\right)D_3^* \right] e^{\alpha y} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (249)$$

$$\frac{1}{2G_3} \sigma_{y3}^*(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[-\alpha(C_3^* + D_3^*y) + \left(\frac{\kappa_3+1}{2}\right)D_3^* \right] e^{\alpha y} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (250)$$

$$\frac{1}{2G_3} \tau_{xy3}^*(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\alpha(C_3^* + D_3^*y) - \left(\frac{\kappa_3-1}{2}\right)D_3^* \right] e^{\alpha y} \sin(\alpha x) d\alpha \quad (251)$$

Yukarıdaki ifadelerde geçen $\phi(\xi)$, A_i^* , B_i^* , C_j^* , D_j^* , ($i=1,2, j=1,2,3$) bilinmeyen fonksiyonları çatlaklı bileşik tabaka ve elastik yarım düzleme ait sınır şartları sağlatılarak elde edilecektir.

2.4.3. Çatlak Problemi Sınır Şartları

$u(x, y)$ ve $v(x, y)$ yer değiştirmeleri $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ise gerilmeleri göstermek üzere probleme ait sınır şartları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\sigma_{y_1}(x, h) = 0 \quad 0 \leq x < \infty \quad (252)$$

$$\tau_{xy_1}(x, h) = 0 \quad 0 \leq x < \infty \quad (253)$$

$$\sigma_{y_1}(x, h_2) = \sigma_{y_2}(x, h_2) \quad 0 \leq x < \infty \quad (254)$$

$$\tau_{xy_1}(x, h_2) = \tau_{xy_2}(x, h_2) \quad 0 \leq x < \infty \quad (255)$$

$$u_1(x, h_2) = u_2(x, h_2) \quad 0 \leq x < \infty \quad (256)$$

$$v_1(x, h_2) = v_2(x, h_2) \quad 0 \leq x < \infty \quad (257)$$

$$\sigma_{y_2}(x, 0) = 0 \quad 0 \leq x < \infty \quad (258)$$

$$\tau_{xy_2}(x, 0) = 0 \quad 0 \leq x < \infty \quad (259)$$

$$\sigma_{y_3}(x, 0) = 0 \quad 0 \leq x < \infty \quad (260)$$

$$\tau_{xy_3}(x, 0) = 0 \quad 0 \leq x < \infty \quad (261)$$

$$\sigma_{x_2}(0, y) = -\sigma_{x_2}^*(0, y) \quad c < y < d \quad (262)$$

$$u_2(0, y) = 0 \quad y \leq c, \quad d \leq y \quad (263)$$

şeklinde yazılabilir. Yukarıda yazılan $\sigma_{x_2}^*(0, y)$ ifadesi 2 nolu tabakaya ait çatlaksız çözümden elde edilen gerilme değerleri olup c ve d sırasıyla düşey çatlağın başlangıç ve bitiş noktalarını göstermektedir. $u_2(0, y) = 0$ ifadesiyle belirtilen karışık sınır şartı yerine;

$$\frac{\partial u_2(0, y)}{\partial y} dy = 0 = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & ; \quad 0 \leq y < c, \quad d \leq y \leq h_2 \\ G(y) & ; \quad c < y < d \end{array} \right\} \quad (264)$$

olarak yazılabilir. Burada $u_2(0, y)$ yer değiştirme bileşenin tek değerli olması için

$$\int_c^d \frac{\partial u_2(0, y)}{\partial y} dy = 0 \quad (265)$$

olmalıdır.

2.4.4. Katsayılarının Belirlenmesi

$A_i^*, B_i^*, C_j^*, D_j^*$ ($i=1, 2$), ($j=1,2,3$) bilinmeyen katsayılarının belirlenebilmesi için önce 2 nolu tabakaya ait gerilme ve yer değiştirme ifadelerinde geçen $\phi(\xi)$ 'nin bulunması gerekir. $\phi(\xi)$ 'yi bulabilmek için $\partial u_2(0,y)/\partial y$ oluşturulur ve bu ifade (262) ifadesine uygulanırsa;

$$G(y) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{\kappa_1 + 1}{2} \right) \phi(\xi) \sin(\xi y) dt \quad c < y < d \quad (266)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadeye eşitliğin her iki tarafının da ters Fourier dönüşümü alınırsa,

$$\phi(\xi) = -\frac{2}{1 + \kappa_2} \int_c^d G(t) \sin(\xi t) dt \quad c < t < d \quad (267)$$

olarak bulunmuş olur.

$\phi(\xi)$ 'nin belirlenmesinden sonra (239-251) denklemleri ile verilmiş gerilme ve yer değiştirme ifadelerinin (252-261) denklemleri ile verilmiş sınır şartlarında yerlerine yazılması ve ters Fourier dönüşümlerinin alınmasıyla on bilinmeyenli on cebrik denklem elde edilir. Bu cebrik denklem takımı aşağıda verilmiştir.

$$-\alpha A_1^* e^{-\alpha h} - \left(\alpha h + \frac{1 + \kappa_1}{2} \right) B_1^* e^{-\alpha h} - \alpha C_1^* e^{\alpha h} - \left(\alpha h - \frac{1 + \kappa_1}{2} \right) D_1^* e^{\alpha h} = 0 \quad (268)$$

$$-\alpha A_1^* e^{-\alpha h} - \left(\alpha h + \frac{\kappa_1 - 1}{2} \right) B_1^* e^{-\alpha h} + \alpha C_1^* e^{\alpha h} + \left(\alpha h - \frac{\kappa_1 - 1}{2} \right) D_1^* e^{\alpha h} = 0 \quad (269)$$

$$-\alpha A_1^* e^{-\alpha h} - \left(\alpha h_2 + \frac{\kappa_1 + 1}{2} \right) B_1^* e^{-\alpha h} - \alpha C_1^* e^{\alpha h} + \left(\alpha h_2 + \frac{\kappa_1 + 1}{2} \right) D_1^* e^{\alpha h} +$$

$$m\alpha A_2^* e^{-\alpha h_2} + m \left(\alpha h_2 + \frac{\kappa_2 + 1}{2} \right) B_2^* e^{-\alpha h_2} + m\alpha C_2^* e^{\alpha h} + m \left(\alpha h_2 - \frac{\kappa_2 + 1}{2} \right) D_2^* e^{\alpha h} =$$

$$-m \frac{1}{1 + \kappa_2} HN_1(\alpha) \quad (270)$$

$$\begin{aligned}
& -\alpha A_1^* e^{-\alpha h_2} - (\alpha h_2 + \frac{\kappa_1 - 1}{2}) B_1^* e^{-\alpha h_2} + \alpha C_1^* e^{\alpha h_2} + (\alpha h_2 - \frac{\kappa_1 - 1}{2}) D_1^* e^{\alpha h_2} + \\
& m\alpha A_2^* e^{-\alpha h_2} + m(\alpha h_2 + \frac{\kappa_2 - 1}{2}) B_2^* e^{-\alpha h_2} - m\alpha C_2^* e^{\alpha h_2} - m(\alpha h_2 - \frac{\kappa_2 - 1}{2}) D_2^* e^{\alpha h_2} = \\
& -m \frac{1}{1 + \kappa_2} HN_2(\alpha)
\end{aligned} \tag{271}$$

$$\begin{aligned}
& A_1^* e^{-\alpha h_2} + B_1^* h_2 e^{-\alpha h_2} + C_1^* e^{\alpha h_2} + D_1^* h_2 e^{\alpha h_2} - \\
& A_2^* e^{-\alpha h_2} - B_2^* h_2 e^{-\alpha h_2} - C_2^* e^{\alpha h_2} - D_2^* h_2 e^{\alpha h_2} = \frac{1}{1 + \kappa_2} HN_3(\alpha)
\end{aligned} \tag{272}$$

$$\begin{aligned}
& A_1^* e^{-\alpha h_2} + (\frac{\kappa_1}{\alpha} + h_2) B_1^* e^{-\alpha h_2} - C_1^* e^{\alpha h_2} + (\frac{\kappa_1}{\alpha} - h_2) D_1^* e^{\alpha h_2} - \\
& -A_2^* e^{-\alpha h_2} - (\frac{\kappa_2}{\alpha} + h_2) B_2^* e^{-\alpha h_2} + C_2^* e^{\alpha h_2} - (\frac{\kappa_2}{\alpha} - h_2) D_2^* e^{\alpha h_2} = -\frac{1}{1 + \kappa_2} HN_4(\alpha)
\end{aligned} \tag{273}$$

$$-\alpha A_2^* e^{-\alpha h} - \frac{1 + \kappa_2}{2} B_2^* e^{-\alpha h} - \alpha C_2^* e^{\alpha h} + \frac{1 + \kappa_2}{2} D_2^* e^{\alpha h} = \frac{1}{1 + \kappa_2} HN_5(\alpha) \tag{274}$$

$$-\alpha A_2^* e^{-\alpha h_2} - \frac{\kappa_2 - 1}{2} B_2^* e^{-\alpha h_2} + \alpha C_2^* e^{\alpha h_2} - \frac{\kappa_2 - 1}{2} D_2^* e^{\alpha h_2} = \frac{1}{1 + \kappa_2} HN_6(\alpha) \tag{275}$$

$$-\alpha C_3^* e^{\alpha h_2} + \frac{\kappa_3 + 1}{2} D_3^* e^{\alpha h_2} = 0 \tag{276}$$

$$\alpha C_3^* e^{\alpha h_2} - \frac{\kappa_3 - 1}{2} D_3^* e^{\alpha h_2} = 0 \tag{277}$$

Yukarıdaki denklem takımının çözümü ile A_i^* , B_i^* , C_j^* , D_j^* ($i=1,2$), ($j=1, 2, 3$) α ve t 'nin fonksiyonu olarak bulunurlar. Bu katsayılar;

$$\begin{aligned}
A_1^* = & 8\alpha^2 m e^{-3\alpha h_2} \left\{ -e^{2\alpha h_1 + 3\alpha h_2} (1 + \kappa_2) [HN_5 ((-\kappa_1 + \kappa_2) - 2\alpha h_2 (-1 + \kappa_1) (-1 + m)) + HN_6 \right. \\
& (\kappa_1 (1 - 2m) + \kappa_2 - 2\alpha h_2 (1 + \kappa_1) (-1 + m)) - (HN_5 + HN_6) (4\alpha^2 h_2^2 \\
& (-1 + m)] + e^{2\alpha h_1 + 5\alpha h_2} (1 + \kappa_2) [(\kappa_1 \kappa_2 + 2\alpha h_2 (-1 + \kappa_2 + m - \kappa_1 m)) \\
& (HN_5 - HN_6) - (HN_5 + HN_6)] + e^{2\alpha h_1 + 2\alpha h_2} [(\kappa_2 - \kappa_1 m) (HN_1 + HN_2) \\
& + (-\kappa_1 \kappa_2 + \kappa_1 \kappa_2 m + 2\alpha h_2 \kappa_2 (-1 + m)) (HN_1 - HN_2) + 2\alpha^2 h_2 (-1 + m) \\
& (HN_3 + HN_4) + \alpha ((-\kappa_1 + \kappa_2) HN_4 + (-\kappa_1 - \kappa_2 + 2\kappa_1 m) HN_3)] + e^{3\alpha h_2} \\
& (1 + \kappa_2) [(-\kappa_1 + \kappa_2 + m - \kappa_1^2 m + 2\alpha h_1 (-1 + \kappa_1 \kappa_2)) HN_5 + (\kappa_1 + \kappa_2 + \\
& m + \kappa_1^2 m + 2\alpha h_1 (1 + \kappa_1 \kappa_2 + 2\kappa_1 m)) HN_6 + 4\alpha^2 (h_1 + h_2) (h_2 (1 + \kappa_1 m) + \\
& h_1 (\kappa_2 + m)) (HN_5 + HN_6) + 2\alpha h_2 ((-1 + \kappa_1) HN_5 + (1 + \kappa_1) HN_6) \\
& (1 + \kappa_1 m)] + e^{2\alpha (h_1 + 3h_2)} [\kappa_2 (1 + \kappa_1 m) (HN_1 + HN_2) - (\kappa_1 + 2\alpha h_2) \\
& (\kappa_2 + m) (HN_1 - HN_2) + 2\alpha^2 h_2 (\kappa_2 + m) (HN_3 + HN_4) + \alpha (HN_4 \\
& (-1 + \kappa_1 \kappa_2) + (1 + \kappa_1 (\kappa_2 + 2m)) HN_3)] + e^{2\alpha (h_1 + 2h_2)} [(1 + \kappa_2^2 + 8\alpha^3 h_2^3 \\
& (-1 + m) + 4\alpha^2 h_2^2 (1 - \kappa_1 - m + 2\kappa_1 m - \kappa_2 m) - (2\alpha h_2 - \kappa_1) (1 + \kappa_2^2 - \\
& m + \kappa_2 m) - \kappa_1 (-m + \kappa_2 m)) HN_1 + \alpha (-((1 + \kappa_1) (-1 + \kappa_2) + 4\alpha^2 h_2^2 \\
& (-\kappa_1 + \kappa_2) + 8\alpha^3 h_2^3 (-1 + m) + 2\alpha h_2 (-2 + \kappa_1 + \kappa_1 \kappa_2 + 2m)) HN_4 + \\
& (-1 + \kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_1 \kappa_2 + 2\alpha h_2 (2 + \kappa_1 + \kappa_1 \kappa_2 - 2m) + 4\alpha^2 h_2^2 (\kappa_1 + \kappa_2 - \\
& 2\kappa_1 m) - 4\kappa_1 m - 8\alpha^3 h_2^3 (-1 + m)) HN_3) + ((1 + \kappa_1) (1 + \kappa_2^2) - 8\alpha^3 h_2^3 \\
& (-1 + m) + 4\alpha^2 h_2^2 (1 + \kappa_1 - m - \kappa_2 m) + 2\alpha h_2 (1 + \kappa_2^2 - m - 2\kappa_1 m + \\
& \kappa_2 (m - 2\kappa_1 m)) HN_2)] - e^{5\alpha h_2} (1 + \kappa_2) [(-1 + \kappa_1 \kappa_2 + 8\alpha^3 h_1 h_2 (h_1 + h_2) \\
& (-1 + m) + 4\alpha^2 h_1 (h_1 + h_2 + h_2 \kappa_1) (-1 + m) + m - \kappa_1^2 m - 2\alpha (h_1 (\kappa_1 - \kappa_2) \\
& - h_2 (-1 + \kappa_2 + m - m \kappa_1))] HN_5 + (-1 - \kappa_1 \kappa_2 - 8\alpha^3 h_1 h_2 (h_1 + h_2) \\
& (-1 + m) + 4\alpha^2 h_1 (h_1 + h_2 - h_2 \kappa_1) (-1 + m) + m + \kappa_1^2 m - 2\alpha (h_1 (\kappa_1 + \\
& \kappa_2 - 2\kappa_1 m) - h_2 (-1 + \kappa_2 + m - \kappa_1 m))] HN_6] + e^{6\alpha h_2} [-\kappa_2 (1 - m) \\
& (HN_1 + HN_2) + \kappa_1 (\kappa_2 - \kappa_1 m) (HN_1 - HN_2) + 4\alpha^3 h_1 (h_1 + h_2) (-1 + m) \\
& (HN_3 - HN_4) + 2\alpha^2 (2h_1^2 \kappa_2 (-1 + m) (HN_1 + HN_2) - h_2 (HN_3 + HN_4) \\
& (\kappa_2 - \kappa_1 m) + h_1 (HN_4 (\kappa_1 - \kappa_2) + 2h_2 (HN_1 + HN_2) \kappa_2 (-1 + m) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& HN_3(-\kappa_1 - \kappa_2 + 2\kappa_1 m)) + \alpha(1 - \kappa_1 \kappa_2 - m + \kappa_1^2 m)HN_4 + (-1 - \kappa_1 \kappa_2 + \\
& m + \kappa_1^2 m)HN_3 + 2(h_2(HN_1 - HN_2)(\kappa_2 - \kappa_1 m) + h_1((\kappa_2(-1 + \kappa_1 \\
& (-1 + m)) + \kappa_1 m)HN_2 + (\kappa_2(1 - \kappa_1) - \kappa_1 m(1 - \kappa_2)HN_1))) \\
& + e^{2\alpha h_2} [-\kappa_2(1 - \kappa_1 m)(HN_1 + HN_2) + \kappa_1(\kappa_2 + \kappa_1 m)(HN_1 - HN_2) + \\
& 4\alpha^3 h_1(h_1 + h_2)(\kappa_2 + m)(HN_3 - HN_4) - 2\alpha^2(2h_1^2(\kappa_2 + m)(HN_1 + HN_2) \\
& - h_2(HN_3 + HN_4)(1 + \kappa_1 m) - h_1(HN_4(1 - \kappa_1 \kappa_2) - 2h_2(HN_1 + HN_2) \\
& (\kappa_2 + m) + HN_3(1 + \kappa_1(\kappa_2 + 2m)))) + \alpha(\kappa_1 - \kappa_2 - m + \kappa_1^2 m)HN_4 + \\
& (\kappa_1 + \kappa_2 + m + \kappa_1^2 m)HN_3 + 2(h_2(HN_1 - HN_2)\kappa_2(1 + \kappa_1 m) + h_1((\kappa_2 - \\
& \kappa_1 \kappa_2 - \kappa_1 m + \kappa_1 \kappa_2 m)HN_1 + (\kappa_2 + \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_1 m + \kappa_1 \kappa_2 m)))] + e^{4\alpha h_2} \\
& [(16\alpha^4 h_1 h_2^2 (h_1 + h_2)(-1 + m) + (1 + \kappa_1)(-1 - \kappa_2^2 + m(1 - \kappa_1)(1 - \kappa_2) - \\
& 8\alpha^3 h_2(h_1^2(1 + \kappa_2)m + h_2^2(1 + \kappa_1 m) + h_1 h_2(1 + \kappa_1 + m(1 + \kappa_2)))) - \\
& 2\alpha(h_1(1 + \kappa_1)(1 + \kappa_2^2) + h_2(1 + \kappa_2^2 + (1 + \kappa_1 + \kappa_1^2)m + (1 - \kappa_1 + \kappa_1^2)\kappa_2 m)) \\
& - 4\alpha^2(h_1^2(1 + \kappa_2^2 - m + \kappa_2 m) + h_1 h_2(1 + \kappa_2^2 - m + 2\kappa_1 m + \kappa_2 m(1 + 2\kappa_1)) \\
& + h_2^2(1 - m + \kappa_1^2 m + \kappa_1(1 + m + \kappa_2 m)))]HN_2(-1 - \kappa_2^2 + \kappa_1(1 + \kappa_2^2) + \\
& 16\alpha^4 h_1 h_2^2 (h_1 + h_2)(-1 + m) + m(1 + \kappa_1^2)(1 - \kappa_2) - 8\alpha^3 h_2(h_1^2(1 + \kappa_2)m + \\
& h_2^2(1 + \kappa_1 m) + h_1 h_2(1 - \kappa_1 + m(1 + \kappa_2 + 2\kappa_1))) - 4\alpha^2(h_1^2(1 + \kappa_2^2 - \\
& m + \kappa_2 m) + h_1 h_2(1 + \kappa_2^2 - m + \kappa_2 m) - h_2^2(1 - m + \kappa_1^2 m - \kappa_1(-1 + \\
& m + \kappa_2 m))) - 2\alpha(-h_2(1 + \kappa_2^2 + m(1 + \kappa_1 - \kappa_1^2) - (-1 + \kappa_1 + \kappa_1^2) \\
& \kappa_2 m) + h_1(-1 - \kappa_2^2 + \kappa_1(1 + \kappa_2^2 - 2m(1 + \kappa_2))))HN_1 - \alpha((-2\alpha(h_1(1 + \kappa_1) \\
& (-1 + \kappa_2) + h_2(-2 + \kappa_1(1 + \kappa_2 - 2m))) - 16\alpha^4 h_1 h_2^2 (h_1 + h_2)(-1 + m) + \\
& (1 + \kappa_1)(1 - \kappa_2 + 2(-1 + \kappa_1)m) + 8\alpha^3 h_2(h_1^2(1 + \kappa_2) + h_1 h_2(2 + \kappa_1 + \kappa_2) \\
& + h_2^2(1 + \kappa_1 m)) - 4\alpha^2(h_1^2(-1 + \kappa_2 + 2m) + h_2^2(-\kappa_1 + \kappa_2 + m - \kappa_1^2 m) - \\
& h_1 h_2 \kappa_1(1 + \kappa_2) - 2(\kappa_2 + m)))HN_4 + ((1 + \kappa_2)(1 - \kappa_1) + \\
& 16\alpha^4 h_1 h_2^2 (h_1 + h_2)(-1 + m) + 2(1 + \kappa_1^2)m + 8\alpha^3 h_2(h_1^2(1 + \kappa_2) + h_1 h_2(2 + \\
& \kappa_1(2m - 1) + \kappa_2) + h_2^2(1 + \kappa_1 m)) + 4\alpha^2(h_1^2(-1 + \kappa_2 + 2m) + h_2^2 \\
& (-\kappa_1 + \kappa_2 + m - \kappa_1^2 m) - h_1 h_2(\kappa_1(1 + \kappa_2) - 2(\kappa_2 + m) + h_2^2(\kappa_1(1 + \kappa_1 m)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\kappa_2 + m)) + 2\alpha(h_2(2 + \kappa_1(1 + \kappa_2 + 2m)) + h_1(1 - \kappa_2 + \kappa_1 \\
& (-1 + \kappa_2 + 4m)))\} \quad (278)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_1^* = & -16\alpha^3 m e^{-3\alpha h_2} \left\{ e^{2\alpha h_1 + 3\alpha h_2} \left[((-1 + 2\alpha h_2)HN_5 + (1 + 2\alpha h_2)HN_6)(1 + \kappa_2)(-1 + m) \right] + \right. \\
& e^{2\alpha(h_1 + h_2)} \left[(-1 + m)(\alpha(HN_3 + HN_4) + \kappa_2(HN_1 - HN_2)) \right] - e^{2\alpha(h_1 + 3h_2)} \\
& \left[(\kappa_2 + m)((HN_1 - HN_2) - \alpha(HN_3 - HN_4)) \right] + e^{2\alpha h_1 + 5\alpha h_2} (HN_5 - HN_6) \\
& (1 + \kappa_2)(\kappa_2 + m) - e^{5\alpha h_2} \left[(1 + \kappa_2) \left((4\alpha^2 h_1 h_2 (-1 + m) + \kappa_2 - \kappa_1 m) \right. \right. \\
& \left. \left. (HN_5 - HN_6) + 2\alpha h_1 (-1 + m) (HN_5 + HN_6) \right] + e^{2\alpha h_2} \left[(2\alpha h_1 (\kappa_2 + m) \right. \right. \\
& \left. \left. (\alpha(HN_3 - HN_4) - (HN_1 + HN_2)) + (1 + \kappa_1 m) (\kappa_2 (HN_1 - HN_2) + \right. \right. \\
& \left. \left. \alpha(HN_3 + HN_4)) \right] + e^{2\alpha(h_1 + 2h_2)} \left[(-1 - \kappa_2^2 + 2\alpha h_2 (2\alpha h_2 (-1 + m) - \right. \right. \\
& \left. \left. (1 + \kappa_2)m) + m(1 - \kappa_2))(HN_1 + HN_2) \alpha(1 - \kappa_2 - 4\alpha^2 h_2^2 (-1 + m) \right. \right. \\
& \left. \left. - 2m) (HN_3 - HN_4) + 2\alpha^2 h_2 (1 + \kappa_2)(HN_3 + HN_4) \right] e^{6\alpha h_2} + \left[2\alpha h_1 \right. \right. \\
& \left. \left. (-1 + m) (\alpha(HN_3 - HN_4) - \kappa_2(HN_1 + HN_2)) + (\kappa_2 - \kappa_1 m) \right. \right. \\
& \left. \left. (HN_1 - HN_2) - \alpha (HN_3 + HN_4) \right] + e^{3\alpha h_2} \left[(\kappa_2 + 1) (2\alpha(h_2(1 + \kappa_1 m) + \right. \right. \\
& \left. \left. h_1(\kappa_2 + m)) (HN_5 + HN_6) - (1 + \kappa_1 m) (HN_5 - HN_6) \right] + \right. \\
& e^{4\alpha h_2} \left[(-HN_1 + HN_2) (-1 - \kappa_2^2 - \kappa_1 m(1 - \kappa_2) - 4\alpha^2 h_2 (h_2(1 + \kappa_1 m) + \right. \\
& \left. h_1(1 + \kappa_2)m)) + (HN_1 + HN_2) (8\alpha^3 h_1 h_2^2 (-1 + m) - 2\alpha(h_2 \kappa_1 (1 + \kappa_2)m \right. \\
& \left. + h_1(1 + \kappa_2^2 - (1 - \kappa_2)m)) - (1 - \kappa_2 + 2\kappa_1 m + 4\alpha^2 h_2 (h_1(1 + \kappa_2) + h_2 \right. \\
& \left. (1 + \kappa_1 m)) \alpha (HN_3 + HN_4) + (-8\alpha^3 h_1 h_2^2 (-1 + m) - 2\alpha(h_2(1 + \kappa_2) + \right. \\
& \left. h_1(-1 + \kappa_2 + 2m)) + \alpha (HN_3 - HN_4) \right] \left. \right\} \quad (279)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1^* = & -8\alpha^2 m e^{-2\alpha h_1 - 5\alpha h_2} \left\{ -e^{5\alpha h_2} (1 + \kappa_2) \left[HN_5 (\kappa_1 - \kappa_2) - 2\alpha h_2 (HN_5 (-1 + \kappa_1) - \right. \right. \\
& HN_6 (1 + \kappa_1)) (-1 + m) + HN_6 (\kappa_1 (1 - 2m) + \kappa_2) + 4\alpha^2 h_2^2 \\
& (HN_5 - HN_6) (-1 + m) + e^{6\alpha h_2} \left[(-\kappa_2 + \kappa_1 m) (HN_1 - HN_2) + \right. \\
& (-\kappa_1 \kappa_2 + 2\alpha h_2 \kappa_2 (-1 + m)(HN_1 + HN_2) + 2\alpha^2 h_2 (-1 + m)) \\
& (HN_3 - HN_4) + \alpha ((-\kappa_1 + \kappa_2)HN_4 + (\kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 m) HN_3) \left. \right] + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& e^{3\alpha h_2} (1 + \kappa_2) [(-\kappa_1 \kappa_2 + 2\alpha h_2 (-1 + \kappa_2 + m - \kappa_1 m)) (HN_5 + HN_6) \\
& + HN_5 - HN_6 (1 + 2\kappa_1 m)] - e^{2\alpha h_1 + 5\alpha h_2} (1 + \kappa_2) [-\kappa_1 + \kappa_2 + m - \\
& \kappa_1^2 m + 2\alpha h_1 (-1 + \kappa_1 \kappa_2)] HN_5 + (-\kappa_1 - \kappa_2 - m - \kappa_1^2 m) + 2\alpha h_1 \\
& (1 + \kappa_1 \kappa_2 + 2\kappa_1 m) + 4\alpha^2 (h_1 + h_2) (h_2 (1 + \kappa_1 m) + h_1 (\kappa_2 + m)) \\
& HN_6 + 2\alpha (-h_2 ((-1 + \kappa_1) HN_5 - (1 + \kappa_1) HN_6) (1 + \kappa_1 m)] + e^{2\alpha h_2} \\
& [(-\kappa_2 - \kappa_1 \kappa_2 m) (HN_1 - HN_2) + (\kappa_1 m + \kappa_1 \kappa_2 + 2h_2 \alpha (\kappa_2 + m)) \\
& (HN_1 + HN_2) + 2\alpha^2 h_2 (\kappa_2 + m) (HN_3 - HN_4) + \alpha ((1 - \kappa_1 \kappa_2) \\
& HN_4 + 2\alpha h_2 (1 + \kappa_1 (\kappa_2 + m)) HN_3)] - e^{2\alpha h_1 + 3\alpha h_2} (1 + \kappa_2) [(1 - \kappa_1 \kappa_2 \\
& + 8\alpha^3 h_1 h_2 (h_1 + h_2) (-1 + m) - 4\alpha^2 h_1 (h_1 + h_2 + h_2 \kappa_1) (-1 + m) - \\
& m + \kappa_1^2 m - 2\alpha (h_1 (\kappa_1 - \kappa_2) - h_2 (-1 + \kappa_2 + m - m \kappa_1))] HN_5 + \\
& (-1 - \kappa_1 \kappa_2 + 8\alpha^3 h_1 h_2 (h_1 + h_2) (-1 + m) + 4\alpha^2 h_1 (h_1 + h_2 - h_2 \kappa_1) \\
& (-1 + m) + m + \kappa_1^2 m + 2\alpha (h_1 (\kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 m) + h_2 (-1 + \kappa_2 + \\
& m - \kappa_1 m))] HN_6] + e^{4\alpha h_2} [((1 + \kappa_2^2) (-1 + \kappa_1 - 2\alpha h_2)) + (\kappa_2 - 1) \\
& m (2(\kappa_1 - \alpha h_2))] HN_1 + 4\alpha^2 h_2^2 ((-1 + m) (HN_1 - HN_2) + \\
& (\kappa_1 (1 - 2m) + \kappa_2 m) HN_1 + (\kappa_1 - \kappa_2 m) HN_2 + a((\kappa_1 - \kappa_2) HN_2 - \\
& (\kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 m) HN_3)) + 8\alpha^3 h_2^3 (-1 + m) (HN_1 + HN_2 + \\
& \alpha (HN_3 + HN_4)) + HN_2 ((1 + \kappa_1) (1 + \kappa_2^2) - 2\alpha h_2 (-2(1 + m) \\
& + \kappa_1 (1 + \kappa_2)) + ((1 - \kappa_1) (1 - \kappa_2) + 2\alpha h_2 (2(1 - m) + \kappa_1 (1 + \kappa_2) + \\
& 4\kappa_1 m) HN_3] + e^{2\alpha (h_1 + h_2)} [(1 - m) (\kappa_2 (1 + 2\alpha h_1 (\kappa_1 + 2\alpha (h_1 + h_2))) \\
& (HN_1 - HN_2) + (\kappa_2 - \kappa_1 m) (-\kappa_1 + 2\alpha (h_2 + h_1) (HN_1 + HN_2) + \\
& -2\alpha^2 h_1 (\kappa_1 + (h_1 + h_2) (-1 + m)) + \alpha (1 - m) (HN_3 + HN_4)) + \\
& (-2\alpha^2 \kappa_2 ((h_1 + h_2) + \kappa_1 m a (2\alpha - \kappa_1)) + \alpha \kappa_1 \kappa_2) (HN_3 - HN_4)) - \\
& 2\kappa_1 m HN_3] + e^{2\alpha h_1 + 3\alpha h_2} [(HN_1 - HN_2) ((\kappa_2 + m) 4\alpha^2 h_1 (-h_1 + h_2) - \\
& 1 + 2\alpha h_1 \kappa_1) + (HN_1 + HN_2) (1 + \kappa_1 m) \kappa_2 (\kappa_1 - 2\alpha h_2) - 2\alpha h_2 \\
& (\kappa_2 + \kappa_1 m) + 2\alpha^2 h_1 (2\alpha (h_1 + h_2) (\kappa_2 + m) + \kappa_1 \kappa_2) a (\kappa_2 + m)) \\
& ((HN_3 + HN_4) + 2\alpha^2 (1 + \kappa_1 m) (\kappa_2 + h_1 \kappa_1) (HN_3 + HN_4) + 4h_2 \kappa_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& m + (16\alpha^4 h_1 h_2^2 (h_1 + h_2) (-1 + m) + (1 + \kappa_1)(-1 - \kappa_2^2 + m(1 - \kappa_1) \\
& (1 - \kappa_2) - 8\alpha^3 h_2 (h_1^2 (1 + \kappa_2)m + h_2^2 (1 + \kappa_1)m) + h_1 h_2 (1 + \kappa_1 + \\
& m(1 + \kappa_2))) - 2\alpha (h_1 (1 + \kappa_1)(1 + \kappa_2^2) + h_2 (1 + \kappa_2^2 + (1 + \kappa_1 + \kappa_1^2) m + \\
& (1 - \kappa_1 + \kappa_1^2)\kappa_2 m)) - 4\alpha^2 (h_1^2 (1 + \kappa_2^2 - m + \kappa_2 m) + h_1 h_2 \\
& (1 + \kappa_2^2 - m + 2\kappa_1 m + \kappa_2 m(1 + 2\kappa_1)) + h_2^2 (1 - m + \kappa_1^2 m + \\
& \kappa_1 (1 + m + \kappa_2 m)))HN_2 + (1 + \kappa_2^2)(1 - \kappa_1) - 16\alpha^4 h_1 h_2^2 (h_1 + h_2) \\
& (-1 + m) - m(1 - \kappa_1^2)(1 - \kappa_2) + 8\alpha^3 h_2 (h_1^2 (1 + \kappa_2)m + \\
& h_2^2 (1 + \kappa_1 m) + h_1 h_2 (1 - \kappa_1 + m(1 + \kappa_2 + 2\kappa_1))) + m + \kappa_2 m) + \\
& 4\alpha^2 (h_1^2 (1 + \kappa_2^2 - h_1 h_2 (1 + \kappa_2^2 - m + \kappa_2 m) - h_2^2 (-1 + m + \kappa_1^2 m - \\
& \kappa_1 (-1 + m + \kappa_2 m))) - 2\alpha (-h_2 (1 + \kappa_2^2 + m(1 + \kappa_1 - \kappa_1^2) - (-1 + \kappa_1 \\
& + \kappa_1^2)\kappa_2 m) + h_1 (-1 - \kappa_2^2 + \kappa_1 (1 + \kappa_2^2 - 2m(1 + \kappa_2))))HN_1 + \\
& \alpha (-2\alpha (h_1 (1 + \kappa_1)(-1 + \kappa_2) + h_2 (-2 + \kappa_1 (1 + \kappa_2 - 2m)))) + 16\alpha^4 \\
& h_1 h_2^2 (h_1 + h_2) (-1 + m) - (1 + \kappa_1)(1 - \kappa_2 + 2(-1 + \kappa_1)m) + \\
& 8\alpha^3 h_2 (h_1^2 (1 + \kappa_2) + h_1 h_2 (2 + \kappa_1 + \kappa_2) + h_2^2 (1 + \kappa_1 m)) + \\
& 4\alpha^2 (h_1^2 (-1 + \kappa_2 + 2m) + h_2^2 (-\kappa_1 + \kappa_2 + m - \kappa_1^2 m) - h_1 h_2 \kappa_1 \\
& (1 + \kappa_2) - 2(\kappa_2 + m))))HN_4 + ((-1 + \kappa_2)(1 - \kappa_1) + 16\alpha^4 h_1 h_2^2 \\
& (h_1 + h_2)(-1 + m) + 2(1 + \kappa_1^2)m + 4\alpha^2 (h_1^2 (-1 + \kappa_2 + 2m) + h_2^2 \\
& (\kappa_1 + \kappa_2 + m + \kappa_1^2 m) + h_1 h_2 (\kappa_1 (1 + \kappa_2) + 2(\kappa_2 + m)) - 8\alpha^3 h_2 \\
& (h_1^2 (1 + \kappa_2) + h_1 h_2 (2 + \kappa_1 (2m - 1) + \kappa_2) + h_2^2 (1 + \kappa_1 m)) - 2\alpha \\
& (h_2 (2 + \kappa_1 (1 + \kappa_2 + 2m)) + h_1 (1 - \kappa_2 + \kappa_1 \\
& (-1 + \kappa_2 + 4m))))HN_3 \} \tag{280}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_1^* &= -16\alpha^3 m e^{-3\alpha h_2} \left\{ e^{2\alpha h_1 + 3\alpha h_2} \left[((-1 + 2\alpha h_2)HN_5 + (1 + 2\alpha h_2)HN_6)(1 + \kappa_2)(-1 + m) \right] + \right. \\
& e^{2\alpha(h_1 + h_2)} \left[(-1 + m)(\alpha(HN_3 + HN_4) + \kappa_2(HN_1 - HN_2)) \right] - e^{2\alpha(h_1 + 3h_2)} \\
& \left[(\kappa_2 + m)((HN_1 - HN_2) - \alpha(HN_3 - HN_4)) \right] + e^{2\alpha h_1 + 5\alpha h_2} (HN_5 - HN_6) \\
& \left. (1 + \kappa_2)(\kappa_2 + m) - e^{5\alpha h_2} \left[(1 + \kappa_2) \left((4\alpha^2 h_1 h_2 (-1 + m) + \kappa_2 - \kappa_1 m) \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (HN_5 - HN_6) + 2\alpha h_1(-1+m)(HN_5 + HN_6)] + e^{2\alpha h_2} [(2\alpha h_1(\kappa_2 + m) \\
& (\alpha(HN_3 - HN_4) - (HN_1 + HN_2)) + (1 + \kappa_1 m)(\kappa_2(HN_1 - HN_2) + \\
& \alpha(HN_3 + HN_4))] + e^{2\alpha(h_1+2h_2)} [(-1 - \kappa_2^2 + 2\alpha h_2(2\alpha h_2(-1+m) - \\
& (1 + \kappa_2)m) + m(1 - \kappa_2))(HN_1 + HN_2) \alpha(1 - \kappa_2 - 4\alpha^2 h_2^2(-1+m) \\
& - 2m)(HN_3 - HN_4) + 2\alpha^2 h_2(1 + \kappa_2)(HN_3 + HN_4)] e^{6\alpha h_2} + [2\alpha h_1 \\
& (-1+m)(\alpha(HN_3 - HN_4) - \kappa_2(HN_1 + HN_2) + (\kappa_2 - \kappa_1 m) \\
& e^{3\alpha h_2} [(\kappa_2 + 1)(2\alpha(h_2(1 + \kappa_1 m) + h_1(\kappa_2 + m))(HN_5 + HN_6) - \\
& (1 + \kappa_1 m)(HN_5 - HN_6))] + e^{4\alpha h_2} [(-HN_1 + HN_2)(-1 - \kappa_2^2 - \kappa_1 m \\
& (1 - \kappa_2) - 4\alpha^2 h_2(h_2(1 + \kappa_1 m) + h_1(1 + \kappa_2)m)) + (HN_1 + HN_2) \\
& (8\alpha^3 h_1 h_2^2(-1+m) - 2\alpha(h_2 \kappa_1(1 + \kappa_2)m + h_1(1 + \kappa_2^2 - (1 - \kappa_2)m)) - \\
& (1 - \kappa_2 + 2\kappa_1 m + 4\alpha^2 h_2(h_1(1 + \kappa_2) + h_2(1 + \kappa_1 m))) \alpha(HN_3 + HN_4) \\
& + (-8\alpha^3 h_1 h_2^2(-1+m) - 2\alpha(h_2(1 + \kappa_2) + h_1(-1 + \kappa_2 + 2m)) + \\
& \alpha(HN_3 - HN_4)] \} \tag{281}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2^* = & -8\alpha^2 e^{-2\alpha h_1 - 5\alpha h_2} \left\{ \left(e^{2\alpha(h_1+h_2)} [8\alpha^4 h_1^2 h_2(HN_3 + HN_4 - e^{2\alpha h_2} [\kappa_2(HN_3 - HN_4)]) - 2h_2 \right. \right. \\
& e^{\alpha h_2} [(-1+m)(HN_5 + HN_6)]](-1+m) + e^{7\alpha h_2} [((-1+\kappa_2)HN_5 - \\
& (1+\kappa_2)HN_6)((-1+m)(\kappa_2 - m\kappa_1)] - e^{2\alpha h_1 + 7\alpha h_2} [((-1+\kappa_2)HN_5 - \\
& (1+\kappa_2)HN_6)(e^{2\alpha h_1} [(\kappa_2 + m)(1 + \kappa_1 m) + 2\kappa_2 + (-1 + \kappa_1)m(\kappa_2 - 1) \\
& + m(1 + \kappa_1^2)]) + e^{2\alpha h_1 + 3\alpha h_2} [m(- (1 + \kappa_2)((-1 + \kappa_1)(1 - \kappa_2) + \\
& m(1 + \kappa_1^2)) HN_2 + ((1 + \kappa_2^2)(1 - \kappa_1) + m(-1 + \kappa_2)(1 + \kappa_1^2))HN_1] \\
& - e^{4\alpha h_2} m [(e^{4\alpha h_2} - 1)((\kappa_2(1 - \kappa_1) - m\kappa_1(1 - \kappa_2))HN_1 - \kappa_1 m \\
& (\kappa_2 + 1)HN_2)) + (e^{4\alpha h_2} + 1)\kappa_2(1 + \kappa_1) HN_2] + e^{2\alpha(h_1+2\alpha h_2)} [m(\\
& - (1 + \kappa_1^2)(1 + m\kappa_2) HN_2 + (\kappa_2(-2 + 2\kappa_1) + (\kappa_2 - 1) \\
& m(1 + \kappa_1^2))HN_1] + e^{6\alpha h_2} m \kappa_1(1 - m)(HN_1 + HN_2) - \\
& \left. \left. \kappa_2(\kappa_2 - \kappa_1 m)(HN_1 - HN_2)] + e^{4\alpha h_1 + 6\alpha h_2} m [(-1 + \kappa_1(\kappa_2^2 - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& m(1-\kappa_2)) HN_1 - (1+\kappa_1(\kappa_2^2+m(1+\kappa_2)))HN_2] \\
& + e^{5\alpha h_2}(1+e^{4\alpha h_1})[(1+\kappa_2)(\kappa_2-\kappa_1 m^2)HN_6 + ((\kappa_2+\kappa_1 m^2)(-1+\kappa_2) \\
& + 2m\kappa_2(1-\kappa_1))HN_5] - e^{2\alpha h_1+5\alpha h_2} [(2\kappa_2^2(1+\kappa_1^2)m^2(HN_5+HN_6) - \\
& \kappa_2((2+(1+\kappa_1^2)m^2)(HN_5-HN_6) - 4(-1+\kappa_1)mHN_5) + \alpha(-2e^{5\alpha h_2} \\
& (1+e^{4\alpha h_1})h_2((-1+\kappa_2)HN_5 + (1+\kappa_2)HN_6)(-1+m)(1+m\kappa_1)) \\
& - e^{4\alpha(h_1+h_2)} [(-\kappa_1+\kappa_2)HN_4 + 2h_2(HN_1-HN_2)\kappa_1(-1+m)m + HN_3 \\
& (\kappa_2(-2+m)+m\kappa_1))] + e^{4\alpha h_1+6\alpha h_2} [(1+\kappa_1 m)(2h_2\kappa_2 m(HN_1+HN_2) \\
& - HN_4 + HN_3) + \kappa_2(\kappa_2+m)(HN_4+HN_3)] + e^{6\alpha h_2} [(2h_2\kappa_1\kappa_2 \\
& (-1+m)m(HN_1+HN_2)(1+\kappa_2^2-m-\kappa_1\kappa_2 m)HN_3 + \\
& (-1+\kappa_2^2+m-\kappa_1\kappa_2 m)HN_4] - e^{2\alpha h_1+5\alpha h_2} [(-1+\kappa_2)HN_5 + \\
& (1+\kappa_2)HN_6)(h_1(1+\kappa_1)(1+\kappa_2)m + h_2(2+2(-1+\kappa_1)m + \\
& (1+\kappa_1^2)m^2))] + e^{4\alpha h_2} [m((-1+\kappa_2\kappa_1)HN_4 - 2h_2(1+m\kappa_1) \\
& (HN_1-HN_2)) + HN_3(m+\kappa_2(2+m\kappa_1))] + e^{2\alpha(h_1+2h_2)} [-(m \\
& (1-\kappa_1)+\kappa_2(4+(-1+\kappa_1)m)HN_3 + 4mh_1(\kappa_1+1)\kappa_2HN_2 - \\
& (-1+\kappa_1)(1+\kappa_2)HN_4 - 2h_2(-1+\kappa_1+m(1+\kappa_1^2))(HN_1-HN_2)] + \\
& e^{2\alpha(h_1+3h_2)} [-(1+\kappa_2)(-2(1-\kappa_2)+(-\kappa_1+1)m)HN_4 + (-2(1+\kappa_2^2) \\
& + m(-\kappa_1+1)(1-\kappa_2)HN_3 + 2m(h_1(1+\kappa_1))(-1+\kappa_2^2)HN_1 + (1+\kappa_2^2) \\
& HN_2 + h_2(\kappa_2(-1+\kappa_1+m(1+\kappa_1^2))(HN_1+HN_2) - 4\alpha^3 h_1 \\
& (2e^{2\alpha h_1+5\alpha h_2} h_1 h_2(-1+m)^2((-1+\kappa_2)HN_5 + (1+\kappa_2)HN_6) + \\
& e^{2\alpha(h_1+2h_2)} [(h_2(1+\kappa_1)m(HN_3-HN_4) - h_1((\kappa_2(-2+m)-m) \\
& HN_3 + ((1+\kappa_2)HN_4 - 2h_2(HN_1-HN_2)(-1+m))m))] + e^{2\alpha(h_1+3h_2)} \\
& [(h_2(1+\kappa_1)\kappa_2 m(HN_3-HN_4) + h_1(-2h_2(-1+m)m\kappa_2 \\
& (HN_1+HN_2) + (1+\kappa_2)(-1+\kappa_2+m)HN_4 + (1+\kappa_2^2 - \\
& m(1-\kappa_2))HN_3))] - 2\alpha^2 h_2(-1+m-1-\kappa_1 m)((e^{4\alpha h_2}(1+e^{4\alpha h_1}) \\
& (HN_3+HN_4) - e^{6\alpha h_2}(1-e^{4\alpha h_1})\kappa_2(HN_3-HN_4) + 2e^{2\alpha h_1+7\alpha h_2} h_1^2 \\
& (HN_5(-1+\kappa_2) - HN_6(1+\kappa_2))(-1+m)(\kappa_2+m) + e^{5\alpha h_2} 2h_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1 + e^{4\alpha h_1}) h_2^2 (-1 + m)(1 + m\kappa_1) (HN_5 + HN_6) + e^{2\alpha(h_1+2h_2)} [h_2 (-2h_1 \\
& (1 + \kappa_1) m(HN_1 + HN_2) + (2 + (-1 + \kappa_1)m) (HN_3 + HN_4) + mh_1 \\
& (-1 + \kappa_1)((-1 + \kappa_2)HN_4 - (1 + \kappa_2)HN_3 + 2h_1 (\kappa_2(-2 + m) - m) \\
& HN_1 - (1 + \kappa_2)mHN_2))] - e^{2\alpha(h_1+3h_2)} [h_2 \kappa_2 (2h_1(1 + \kappa_1)m \\
& (HN_1 - HN_2) + (2 + (-1 + \kappa_1)m) (HN_3 - HN_4) + h_1 m((1 + \kappa_1) \\
& (HN_3 + HN_4 + \kappa_2(HN_3 - HN_4)) + 2h_1(-((1 + \kappa_2)(-1 + \kappa_2) + m) \\
& HN_2 + (1 + \kappa_2^2 - m + m\kappa_2)HN_1))] + 2e^{2\alpha h_1 + 5\alpha h_2} [h_1 h_2 (HN_5 + HN_6) \\
& (1 + \kappa_1) (1 + \kappa_2)m + h_2^2 (2 + 2(-1 + \kappa_1)m (1 + \kappa_1^2)m^2)(HN_5 + HN_6) \\
& + h_1^2 (HN_6((\kappa_2 + m^2) (1 + \kappa_2) + ((\kappa_2 - m^2)(-1 + \kappa_2) + \\
& \kappa_2 4m)HN_5))] \} \tag{282}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_2^* = & 16\alpha^3 e^{-2\alpha h_1 - 5\alpha h_2} \{ (-1 + m)(-8\alpha^4 h_2 h_1^2 e^{2\alpha h_1 + 6\alpha h_2} (HN_3 - HN_4) - \kappa_1 m e^{4\alpha(h_1+h_2)} \\
& (HN_1 - HN_2) + e^{7\alpha h_2} (\kappa_2 - \kappa_1 m)(HN_5 - HN_6)) + e^{4\alpha h_1 + 6\alpha h_2} \kappa_1 m \\
& (\kappa_2 + m) (HN_1 - HN_2) + (1 + \kappa_1 m) ((-1 + m) e^{5\alpha h_2} (1 + e^{4\alpha h_1}) \\
& (HN_5 - HN_6) - m e^{4\alpha h_2} (HN_1 - HN_2) - e^{4\alpha h_1 + 7\alpha h_2} (\kappa_2 + m) \\
& (HN_5 - HN_6)) + e^{6\alpha h_2} m(-\kappa_2 + \kappa_1 m) (HN_1 - HN_2) - e^{2\alpha(h_1+2h_2)} m \\
& (-1 + \kappa_1 + m + \kappa_1^2 m)(HN_1 - HN_2) + e^{2\alpha(h_1+3h_2)} m(\kappa_2 - \kappa_1 \kappa_2 + m + \\
& \kappa_1^2 m) (HN_1 - HN_2) + e^{2\alpha h_1 + 5\alpha h_2} (2 + 2(-1 + \kappa_1)m + (1 + \kappa_1^2)m^2) \\
& (HN_5 - HN_6) + e^{2\alpha h_1 + 7\alpha h_2} (\kappa_2(2 + (-1 + \kappa_1)m) - m(-1 + \kappa_1 + \\
& m + m\kappa_1^2)) (HN_5 - HN_6) + (e^{2\alpha(h_1+2h_2)} (HN_3 + HN_4) - 2e^{2\alpha h_1 + 5\alpha h_2} h_1 \\
& (-1 + m) (HN_5 + HN_6)) - e^{2\alpha(h_1+3h_2)} (h_2 m (1 + \kappa_1)(HN_3 + HN_4) + \\
& h_1(-2h_2(-1 + m)m(HN_1 + HN_2) + (\kappa_2 + m)(HN_3 + HN_4))) - \\
& 2\alpha^2 (-e^{6\alpha h_2} h_2(-1 + m) (HN_3 - HN_4) - 2e^{2\alpha h_1 + 5\alpha h_2} h_1^2 (-1 + m)^2 \\
& (HN_5 - HN_6) + e^{2\alpha(h_1+2h_2)} h_1((1 + \kappa_1) (HN_3 - HN_4) + 2h_1(-1 + m)m \\
& (HN_1 - HN_2)) + 2e^{2\alpha h_1 + 7\alpha h_2} h_1^2 (-1 + m)(\kappa_2 + m) (HN_5 - HN_6) + \\
& e^{4\alpha h_1 + 6\alpha h_2} h_2(1 + m\kappa_1)(HN_3 - HN_4) + 2e^{2\alpha(h_1+3h_2)} (h_1 m(1 + \kappa_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (HN_4 - HN_3) - 2h_1(\kappa_2 + m)(HN_1 - HN_2)) + h_2(-2h_1(1 + \kappa_1)m \\
& (HN_1 - HN_2) + HN_4(2 + (-1 + \kappa_1)m) + HN_3(-1 + m - m\kappa_1))) + \\
& \alpha(-e^{4\alpha h_2}((-1 + m)e^{4\alpha h_1} + (1 + m\kappa_1))(HN_3 + HN_4) - e^{5\alpha h_2}2(1 + m) \\
& (1 + m\kappa_1)(h_1 - h_2e^{4\alpha h_1})(HN_5 + HN_6) + e^{4\alpha h_2}(-(-1 + m)e^{4\alpha h_1} + \\
& (1 + m\kappa_1))(HN_3 + HN_4) + e^{6\alpha h_2}2h_2\kappa_1(-1 + m)m(HN_1 + HN_2) + \\
& (\kappa_2 - m\kappa_1)(HN_3 + HN_4) + e^{2\alpha(h_1+2h_2)}2h_1(1 + \kappa_1)m(HN_1 + HN_2) + \\
& (-2 + m - m\kappa_1)(HN_3 + HN_4)) + e^{4\alpha h_1+6\alpha h_2}((\kappa_2 + m) \\
& (HN_3 + HN_4) + 2h_2m(1 + m\kappa_1)(HN_1 + HN_2) - 2e^{2\alpha h_1+5\alpha h_2} \\
& (h_1(1 + \kappa_1)(1 + \kappa_2)m + h_2(2 + 2(-1 + \kappa_1)m + (1 + \kappa_1^2)m^2)) \\
& (HN_5 + HN_6) - e^{2\alpha(h_1+3h_2)}((2\kappa_2 + m - m\kappa_1)(HN_3 + HN_4) + \\
& 2m(h_1(1 + \kappa_1)\kappa_2 + h_2(-1 + \kappa_1 + m + \kappa_1^2m))(HN_1 + HN_2))) \} \quad (283)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2^* = & -8\alpha^2 e^{-2\alpha h_1 - 6\alpha h_2} \left\{ \left(e^{2\alpha h_1 + 5\alpha h_2} \left[-8\alpha^4 h_1^2 h_2 (-HN_3 - HN_4) \kappa_2 + e^{2\alpha h_2} \left[(HN_3 - HN_4) \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. e^{\alpha h_2} \left[(-1 + m)(HN_5 - HN_6) \right] \right] \right) (-1 + m) + e^{4\alpha(h_1+h_2)} \left[(-1 + \kappa_2) \right. \right. \\
& \left. \left. HN_5 + (1 + \kappa_2)HN_6 \right] \right) (-1 + m)(\kappa_2 - m\kappa_1) - e^{4\alpha h_2} \left[(-1 + \kappa_2) \right. \\
& \left. HN_5 + (1 + \kappa_2)HN_6 \right] (e^{2\alpha h_1} \left[(\kappa_2 + m)(1 + \kappa_1 m) + 2\kappa_2 + (-1 + \kappa_1) \right. \\
& \left. \left. m(\kappa_2 - 1) + m(1 + \kappa_1^2) \right] \right) + e^{2\alpha h_1 - 5\alpha h_2} \left[m \left((1 + \kappa_2) \left((-1 + \kappa_1)(1 - \kappa_2) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + m(1 + \kappa_1^2) \right) \right) HN_2 + \left((1 + \kappa_2^2)(1 - \kappa_1) + m(-1 + \kappa_2)(1 + \kappa_1^2) \right) HN_1 \right] - \\
& e^{7\alpha h_2} m \left[(e^{4\alpha h_2} + 1) \left((\kappa_2(1 - \kappa_1) - m\kappa_1(1 - \kappa_2)) HN_1 - \kappa_1 m \right. \right. \\
& \left. \left. (\kappa_2 + 1) HN_2 \right) \right] + (e^{4\alpha h_2} - 1) \kappa_2 (1 + \kappa_1) HN_2 \left. \right] + e^{2\alpha h_1 + 7\alpha h_2} \left[m \left((1 + \kappa_1^2) \right. \right. \\
& \left. \left. (\kappa_2 - 1) m(1 + \kappa_1^2) \right) HN_1 \right] + e^{4\alpha h_1 + 5\alpha h_2} m \left[\kappa_1 (1 - m)(HN_1 - HN_2) - \right. \\
& \left. \kappa_2 (\kappa_2 - \kappa_1 m)(HN_1 + HN_2) \right] + e^{5\alpha h_2} m \left[(-1 + \kappa_1(\kappa_2^2 - m(1 - \kappa_2))) \right. \\
& \left. HN_1 + (1 + \kappa_1(\kappa_2^2 + m(1 + \kappa_2))) HN_2 \right] + e^{6\alpha h_2} (1 + e^{4\alpha h_1}) \\
& \left[- (1 + \kappa_2)(\kappa_2 - \kappa_1 m^2) HN_6 + \left((\kappa_2 - \kappa_1 m^2)(-1 + \kappa_2) + 2m\kappa_2 \right. \right. \\
& \left. \left. (1 - \kappa_1) \right) HN_5 \right] + e^{2\alpha h_1 + 6\alpha h_2} \left[(2\kappa_2^2 (1 + \kappa_1^2) m^2 (HN_5 - HN_6) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \kappa_2((2+(1+\kappa_1^2)m^2)(HN_5+HN_6)+4(-1+\kappa_1)+mHN_5)+ \\
& \alpha(2e^{6\alpha h_2}(1+e^{4\alpha h_1})h_2((-1+\kappa_2)HN_5-(1+\kappa_2)HN_6) \\
& (-1+m)(1+m\kappa_1))-e^{7\alpha h_2}[(\kappa_1-\kappa_2)HN_4-2h_2(HN_1+HN_2)\kappa_1 \\
& (-1+m)m+HN_3(\kappa_2(-2+m)+m\kappa_1)]+e^{5\alpha h_2}[(1+\kappa_1m)(-2h_2\kappa_2 \\
& m(HN_1-HN_2)+HN_4+HN_3)+\kappa_2(\kappa_2+m)(-HN_4+HN_3)]+ \\
& e^{4\alpha h_1+5\alpha h_2}[(-2h_2\kappa_1\kappa_2(-1+m)m(HN_1-HN_2)+(-1+\kappa_2^2+m- \\
& (1+\kappa_2^2-m-\kappa_1\kappa_2m)HN_3-\kappa_1\kappa_2m)HN_4]-2e^{2\alpha h_1+3\alpha h_2}[(-1+\kappa_2) \\
& HN_5-(1+\kappa_2)HN_6)(h_1(1+\kappa_1)(1+\kappa_2)m+h_2(2+2(-1+\kappa_1)m+ \\
& (1+\kappa_1^2)m^2)]+e^{4\alpha h_1+7\alpha h_2}[m((1-\kappa_2\kappa_1)HN_4+2h_2(1+m\kappa_1) \\
& (HN_1-HN_2))+HN_3(m+\kappa_2(2+m\kappa_1))] + e^{2\alpha(h_1+2h_2)}[-(m(1-\kappa_1) \\
& +\kappa_2(4+(-1+\kappa_1)m)HN_3+4mh_1(\kappa_1+1)\kappa_2HN_2+(-1+\kappa_1) \\
& (1+\kappa_2)HN_4+2h_2(-1+\kappa_1+m(1+\kappa_1^2))(HN_1+HN_2)] \\
& +e^{2\alpha h_1+5\alpha h_2}[(1+\kappa_2)(-2(1-\kappa_2)+(-\kappa_1+1)m)HN_4+ \\
& (-2(1+\kappa_2^2)+m(-\kappa_1+1)(1-\kappa_2)HN_3+2m(-h_1(1+\kappa_1) \\
& ((-1+\kappa_2^2)HN_1-(1+\kappa_2^2)HN_2-h_2(\kappa_2(-1+\kappa_1+ \\
& m(1+\kappa_1^2))(HN_1-HN_2)+4\alpha^3h_1(2e^{2\alpha h_1+6\alpha h_2}h_1h_2(-1+m)^2 \\
& ((-1+\kappa_2)HN_5-(1+\kappa_2)HN_6)+e^{2\alpha h_1+7\alpha h_2}[-h_2(1+\kappa_1)m \\
& (HN_3+HN_4)+h_1((\kappa_2(-2+m)-m)HN_3-((1+\kappa_2)HN_4+ \\
& 2h_2(HN_1+HN_2)(-1+m)m))] + e^{2\alpha h_1+5\alpha h_2}[-h_2(1+\kappa_1)\kappa_2m \\
& (HN_3-HN_4)-h_1(2h_2(-1+m)m\kappa_2(HN_1-HN_2)-(1+\kappa_2) \\
& (-1+\kappa_2+m)HN_4+(1+\kappa_2^2-m(1-\kappa_2))HN_3)]-2\alpha^2h_2 \\
& ((-1+m+1+\kappa_1m)((-e^{7\alpha h_2}(1+e^{4\alpha h_1})(HN_3-HN_4)+ \\
& e^{2\alpha h_1+4\alpha h_2}h_1^2((-1+\kappa_2)HN_5-2(1+\kappa_2)HN_6)(-1+m)(\kappa_2+m)+ \\
& e^{6\alpha h_2}2h_2(1+e^{4\alpha h_1})h_2^2(-1+m)(1+m\kappa_1)(HN_5-HN_6)-e^{2\alpha h_1+7\alpha h_2} \\
& [h_2(2h_1(1+\kappa_1)m(HN_1-HN_2)+(2+(-1+\kappa_1)m)(HN_3-HN_4)+
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& mh_1((1+\kappa_1)((-1+\kappa_2)HN_4(1+\kappa_2)HN_3-2h_1((\kappa_2(-2+m)-m) \\
& HN_1(1+\kappa_2)mHN_2)))+e^{2\alpha h_1+5\alpha h_2}[h_2\kappa_2(-2h_1(1+\kappa_1)m \\
& (HN_1+HN_2)+(2+(-1+\kappa_1)m)(HN_3+HN_4)+h_1m((1+\kappa_1) \\
& (HN_3+HN_4+\kappa_2(HN_3-HN_4))-2h_1([2h_1h_2(HN_5-HN_6) \\
& (1+\kappa_1)(1+\kappa_2)m+h_2^2(2+2(-1+\kappa_1)m+(1+\kappa_1^2)m^2) \\
& (HN_5-HN_6)+h_1^2(-HN_6((\kappa_2+m^2)(1+\kappa_2)+((\kappa_2-m^2) \\
& (1+\kappa_2)+\kappa_24m)HN_5)))]\} \tag{284}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2^* = 16\alpha^3 me^{-2\alpha h_1-5\alpha h_2} \{ & -e^{5\alpha h_2} [(1+2\alpha h_2)HN_5+(1-2\alpha h_2)HN_5)(1+\kappa_2)(-1+m)]+ \\
& e^{6\alpha h_2} [(-1+m)(\alpha(HN_3-HN_4)+\kappa_2(HN_1+HN_2))]- \\
& e^{2\alpha h_2} [(\kappa_2+m)(\alpha(-HN_3+HN_4)+(HN_1+HN_2))]+ \\
& e^{3\alpha h_2} [(1+\kappa_2)(\kappa_2+m)]-e^{2\alpha h_1+3\alpha h_2}(1+\kappa_2)[-2\alpha h_1(-1+m) \\
& (HN_5-HN_6)+(4\alpha^2 h_1 h_2(-1+m)+\kappa_2-\kappa_1 m)(HN_5+HN_6) \\
& +e^{4\alpha h_2} [(-1-\kappa_2^2+2\alpha h_2(2\alpha h_2(-1+m)-(1+\kappa_2)m)+ \\
& m(1-\kappa_2))(HN_1+HN_2)\alpha(1-\kappa_2-4\alpha^2 h_2^2(-1+m)-2m) \\
& (HN_4-HN_3)+2\alpha h_2(1+\kappa_2)(HN_3+HN_4)]+e^{2\alpha(h_1+h_2)} [(-2\alpha h_1 \\
& (-1+m)(\alpha(HN_3+HN_4)+\kappa_2(HN_1-HN_2))+(\kappa_2-\kappa_1 m) \\
& (HN_1+HN_2)-\alpha(HN_3-HN_4)]+e^{2\alpha(h_1+3h_2)} [-2\alpha h_1(\kappa_2+m) \\
& (\alpha(HN_3+HN_4)+(HN_1-HN_2))+(1+\kappa_1 m)(\\
& \kappa_2(HN_1+HN_2)+\alpha(HN_3-HN_4)]-e^{2\alpha h_1+5\alpha h_2} [(1+\kappa_2)(\kappa_2+m) \\
& (HN_5+HN_6)-2\alpha(h_2\kappa_1(1+\kappa_2)m+h_1(\kappa_2+m)) \\
& (-HN_5+HN_6)]+e^{2\alpha h_1+4\alpha h_2} [(1+\kappa_2^2+\kappa_1 m(1-\kappa_2))+ \\
& 4\alpha^2 h_2(h_2(1+\kappa_1 m)+h_1(1+\kappa_2 m))(HN_1+HN_2)+ \\
& (8\alpha^3 h_1 h_2^2(-1+m)-2\alpha(h_2\kappa_1(1+\kappa_2)m+h_1(1+\kappa_2^2-(1-\kappa_2)m)) \\
& (-HN_1+HN_2))+(-1+\kappa_2-2\kappa_1 m-4\alpha^2 h_2(h_1(1+\kappa_2)+ \\
& h_2(1+\kappa_1 m))\alpha(HN_3-HN_4)+(8\alpha^3 h_1 h_2^2(-1+m)
\end{aligned}$$

$$(h_2(1 + \kappa_2) + h_1(-1 + \kappa_2 + 2m)) \quad (285)$$

$$C_3^* = 0 \text{ ve } D_3^* = 0 \quad (286)$$

Bu ifadelerde geçen ;

$$\begin{aligned} \Delta = & (\kappa_2 + m)(1 + m\kappa_1)(e^{-4ah_1 - 4ah_2} + 1) + (-1 + m)(-\kappa_2 + m\kappa_1)(e^{-4ah_1} + e^{-4ah_2}) + e^{-2ah_2}(1 + e^{-4ah_1}) \\ & (1 + \kappa_2^2 - m + m(\kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_1\kappa_2 - 2\kappa_1m) - 4\alpha^2 h_2^2(-1 + m)(1 + m\kappa_1)) + e^{-2ah_1}(1 + e^{-4ah_2})(\kappa_2 \\ & (-2 + 4\alpha^2 h_1^2(-1 + m) + m(1 - \kappa_1)) + m(-1 + \kappa_1 + 4\alpha^2 h_1^2(-1 + m) + m(1 + \kappa_1^2)) - \\ & 2e^{-2ah_1 - 2ah_2}(1 + \kappa_2^2 + 8\alpha^4 h_1^2 h_2^2(-1 + m)^2 - m(1 - \kappa_1 - \kappa_2 - \kappa_1\kappa_2) + m^2(1 + \kappa_1^2) + 2\alpha^2((h_1 + h_2)^2 \\ & (2 + 2(-1 + \kappa_1)m + (1 + \kappa_1^2)m^2) - 2h_1(h_1 + h_2)(2 - (3 + \kappa_1(-1 + \kappa_2) + \kappa_2)m + (1 + \kappa_1^2)m^2) + \\ & h_1^2(3 + \kappa_2^2 - 6m - 2m\kappa_1\kappa_2 + (3 + \kappa_1^2)m^2)))n \end{aligned} \quad (287)$$

$$HN_1(\alpha) = \int_c^d [\alpha(h_2 + t)e^{-\alpha(h_2 + t)} - \alpha(h_2 - t)e^{-\alpha(h_2 - t)}]G(t)dt \quad (288)$$

$$HN_2(\alpha) = \int_c^d [(1 - \alpha(h_2 - t))e^{-\alpha(h_2 - t)} - (1 - \alpha(h_2 + t))e^{-\alpha(h_2 + t)}]G(t)dt \quad (289)$$

$$HN_3(\alpha) = \int_c^d [(-\frac{\kappa_2 + 1}{2} + h_2 + t)e^{-\alpha(h_2 - t)} - (\frac{\kappa_2 + 1}{2} + h_2 - t)e^{-\alpha(h_2 + t)}]G(t)dt \quad (290)$$

$$HN_4(\alpha) = \int_c^d [(\frac{\kappa_2 - 1}{2} - h_2 + t)e^{-\alpha(h_2 - t)} - (\frac{\kappa_2 - 1}{2} - h_2 - t)e^{-\alpha(h_2 + t)}]G(t)dt \quad (291)$$

$$HN_5(\alpha) = \int_c^d \alpha t e^{-\alpha t} G(t) dt \quad (292)$$

$$HN_6(\alpha) = 0 \quad (293)$$

olarak tanımlanmışlardır.

2.4.5. İntegral Denklemin Elde Edilmesi ve Boyutsuzlaştırılması

İntegral denklemi elde edebilmek için (262) karışık sınır şartı kullanılacaktır. Bu sınır şartı aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G_2} \sigma_{x_2}(0,y) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[\alpha(A_2^* + B_2^* y) - \left(\frac{3-\kappa_2}{2}\right) B_2^* \right] e^{-\alpha y} + \right. \\ \left. \left[\alpha(C_2^* + D_2^* y) + \left(\frac{3-\kappa_2}{2}\right) D_2^* \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha - \\ - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \phi(\xi)(1 + \xi x) e^{-\xi x} \cos(\xi y) d\xi = -\frac{1}{2\mu_2} \sigma_{x_2}^*(0,y) \end{aligned} \quad (294)$$

Yukarıdaki ifade de bulunan katsayılar A_2^* , B_2^* , C_2^* , D_2^* daha önce hesaplanmıştır. Yukarıdaki denklemde $\phi(\xi)$ ' nin yerine yazılması ve gerekli düzenlemelerin yapılması sonucunda

$$-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \phi(\xi)(1 + \xi x) e^{-\xi x} \cos(\xi y) d\xi = \frac{2}{\pi(1 + \kappa_1)} \int_c^d \left[\frac{1}{t-y} + \frac{1}{t+y} \right] G(t) dt \quad (295)$$

olarak elde edilir.

Gerekli ara işlemlerin sonucunda

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[\alpha(A_2^* + B_2^* y) - \left(\frac{3-\kappa_2}{2}\right) B_2^* \right] e^{-\alpha y} + \left[\alpha(C_2^* + D_2^* y) - \left(\frac{3-\kappa_2}{2}\right) D_2^* \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha \\ = \frac{2}{\pi(1 + \kappa_1)} \int_c^d \int_0^{\infty} K^*(y,t,\alpha) d\alpha \left[G(t) dt \right] \end{aligned} \quad (296)$$

şeklinde bulunmuş olur. Burada;

$$\begin{aligned} K^*(y,t,\alpha) d\alpha = e^{-\alpha y} \left\{ -8\alpha^3 e^{-2a(h_1+3ah_2)} \left(e^{2ah_1+5ah_2} \left[-8\alpha^4 h_1^2 h_2 (e^{2ah_2} (HN_3 - HN_4) - \kappa_2 \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. (HN_3 + HN_4) + e^{ah_2} 2h_2 (-1+m) H N_5 \right] (-1+m) + (-1+\kappa_2) \right] e^{4ah_2} \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (e^{4ah}(-1+m)(\kappa_2 - m\kappa_1) - (1+m\kappa_1)(\kappa_2 + m)HN_5 + e^{2ah} \\
& [(\kappa_2 - 1)(-1 + \kappa_1 m) + 2\kappa_2 - m(1 + \kappa_1^2)]) + e^{2ah_1 + 5ah_2} [m((\kappa_2 + 1) \\
& (-1 + \kappa_1)(1 - \kappa_2) + (1 + \kappa_1^2))HN_2 + ((1 + \kappa_2^2)(1 - \kappa_1) + (-1 + \kappa_2) \\
& m((1 + \kappa_1^2))HN_1] - e^{7ah_2} m [((-\kappa_2(1 - \kappa_1) + m\kappa_1(\kappa_2 + m))HN_2 + \\
& (\kappa_2(1 - \kappa_1) - \kappa_1 m(-\kappa_2 + 1)HN_1))] + e^{6ah_2} [\kappa_2^2 - \kappa_1 m^2(1 - \kappa_2) + \\
& \kappa_2(-1 + 2m(1 - \kappa_1))] (1 + e^{4ah}) + e^{2\alpha(h_1 + 3h_2)} [(-2\kappa_2^2 - (1 + \kappa_1^2)m^2 \\
& (1 - \kappa_2) + \kappa_2(2 + 4(-1 + \kappa_1)m)] - e^{4\alpha h_1 + 7\alpha h_2} m [((-\kappa_1 + 1)\kappa_2 - \kappa_1 m \\
& (1 + \kappa_2))HN_1 + (\kappa_1 m(1 + \kappa_2) + (\kappa_1 + 1)\kappa_2)HN_2] + e^{2\alpha h_1 + 7\alpha h_2} m \\
& [(1 + \kappa_1^2)(1 + \kappa_2)mHN_2 + (1 + \kappa_1^2)m(-1 + \kappa_2) + 2\kappa_2(-1 + \kappa_1) \\
& HN_1] + e^{5ah_2} m(-1 - \kappa_1 m)(HN_1 - HN_2) + \kappa_1 \kappa_2(\kappa_2 + m) \\
& (HN_1 + HN_2) \alpha(2e^{6ah_2} h_2((-1 + \kappa_2)(-1 + m)(1 + \kappa_1 m)(1 + e^{4ah}) - \\
& e^{7ah_2} [(\kappa_1 - \kappa_2)HN_4 - 2h_2(HN_1 + HN_2)\kappa_1(-1 + m) + HN_3(\kappa_2 \\
& (-2 + m) + \kappa_1 m)] + e^{5ah_2} [(1 + \kappa_1 m)(-2h_2 \kappa_2 m(HN_1 - HN_2) - \\
& (-1 + \kappa_2^2 - (\kappa_1 - \kappa_2)m)HN_4 + (1 + \kappa_2^2 + (\kappa_1 + \kappa_2)m)HN_3 + \\
& e^{4ah} [(-2h_2 \kappa_1 \kappa_2(-1 + m)m(HN_1 - HN_2) + (1 - m)(HN_3 + HN_4) \\
& + (\kappa_2^2 - \kappa_1 \kappa_2 m)(HN_3 - HN_4))] + 2e^{2\alpha(h_1 + 3h_2)}(-1 + \kappa_2)(h_1(1 + \kappa_1) \\
& (1 + \kappa_2)m + h_2(2 + 2(-1 + \kappa_1)m + (1 + \kappa_1^2)m^2))] + e^{4\alpha h_1 + 7\alpha h_2} \\
& [m((1 - \kappa_2 \kappa_1)HN_4 + 2h_2(1 + m\kappa_1)(HN_1 + HN_2)) + HN_3(m + \\
& \kappa_2(2 + m\kappa_1))] + e^{2\alpha h_1 + 7\alpha h_2} [-(m(1 - \kappa_1) + \kappa_2(4 + (-1 + \kappa_1)m)HN_3 \\
& + 4mh_1(\kappa_1 + 1)\kappa_2HN_2 + (-1 + \kappa_1)(1 + \kappa_2)HN_4 + 2h_2(-1 + \kappa_1 + \\
& m(1 + \kappa_1^2))(HN_1 + HN_2)] + e^{2\alpha h_1 + 5\alpha h_2} [(1 + \kappa_2)(-2(1 - \kappa_2) + \\
& (-\kappa_1 + 1)m)HN_4 + (-2(1 + \kappa_2^2) + h_2(\kappa_2 m(-\kappa_1 + 1)(1 - \kappa_2)HN_3 \\
& + 2m(-h_1(1 + \kappa_1))(-1 + \kappa_2^2)HN_1 - (-1 + \kappa_1 + (1 + \kappa_2^2))HN_2 - m \\
& (1 + \kappa_1^2))(HN_1 - HN_2) - 4\alpha^3 h_1(2e^{2\alpha(h_1 + 3h_2)} h_1 h_2(-1 + m)^2 \\
& ((-1 + \kappa_2)HN_5 + e^{2\alpha h_1 + 7\alpha h_2} [(-h_2(1 + \kappa_1)m)(HN_3 - HN_4) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& h_1((\kappa_2(-2+m)-m)HN_3 + (-1+\kappa_2)HN_4 + 2h_2(-1+m) \\
& (HN_1 - HN_2)m)) + e^{2\alpha h_1 + 5\alpha h_2} [(-h_2(1+\kappa_1)\kappa_2 m (HN_3 - HN_4) - \\
& h_1(2h_2(-1+m)m\kappa_2 (HN_1 - HN_2) - (1+\kappa_2)(-1+\kappa_2+m)HN_4 + \\
& (1+\kappa_2^2 - m(1-\kappa_2))HN_3))] - 2\alpha^2(h_2(e^{7\alpha h_2} [((-1+m) + e^{4\alpha h_1} \\
& (1+\kappa_1 m))(-HN_3 + HN_4) + h_2\kappa_2 e^{5\alpha h_2} ((-1+m)e^{4\alpha h_1} + (1+\kappa_1 m)) \\
& (HN_3 + HN_4) + 2e^{6\alpha h_2}(1+e^{4\alpha h_1})h_2^2(-1+m)(1+m\kappa_1)HN_5 + \\
& 2e^{2\alpha(h_1+2\alpha h_2)} [h_1^2(-1+\kappa_2)(-1+m)(\kappa_2+m)HN_5] + e^{2\alpha h_1 + 7\alpha h_2} \\
& [h_2(2h_1(1+\kappa_1)m(HN_1 - HN_2) + (2+(-1+\kappa_1)m)(HN_3 - HN_4) \\
& + mh_1((1+\kappa_1)((-1+\kappa_2)HN_4 + (1+\kappa_2)HN_3) - 2h_1(\kappa_2 \\
& (-2+m)-m)HN_1 + (1+\kappa_2)mHN_2))] + 2e^{2\alpha(h_1+3h_2)} [2h_1h_2 \\
& (1+\kappa_1)(1+\kappa_2)mHN_5 + h_2^2(2+2(-1+\kappa_1)m + (1+\kappa_1^2)m^2)HN_5 + \\
& h_1^2((\kappa_2+m^2)(1-\kappa_2) + \kappa_2 4m)HN_5] + 2e^{2\alpha h_1 + 5\alpha h_2} [h_2\kappa_2(-2h_1 \\
& (1+\kappa_1)m(HN_1 + HN_2) + (2+(-1+\kappa_1)m)(HN_3 + HN_4) + h_1m \\
& ((1+\kappa_1)(HN_3(1+\kappa_2) + HN_4(-1+\kappa_2)) - 2h_1(1+\kappa_2)HN_2 \\
& (-1+\kappa_2+m) + HN_1(1+\kappa_2^2 - m(1-\kappa_2)))) + 16\alpha^3 e^{-2\alpha h_1 - 6\alpha h_2} \\
& ((-1+m)(-e^{2\alpha h_1 + 5\alpha h_2} [8\alpha^4 h_2 h_1^2 (HN_3 + HN_4)] + e^{5\alpha h_2} [(\kappa_1 m \\
& (HN_1 + HN_2)((-1+m) + e^{2\alpha h_2}(\kappa_2 + m))] + e^{4\alpha h_1 + 5\alpha h_2} [m \\
& (\kappa_2 - \kappa_1 m) - (1+\kappa_1 m)((-1+m)e^{6\alpha h_2}(1-e^{4\alpha h_1})HN_5] - e^{4\alpha h_2} \\
& [e^{4\alpha h_1 + 3\alpha h_2} m(HN_1 + HN_2) + (\kappa_2 + m)HN_5]) + e^{4\alpha(h_1+h_2)} [(-1+m) \\
& (-\kappa_2 + \kappa_1 m)HN_5] + e^{2\alpha h_1 + 5\alpha h_2} [(HN_1 + HN_2)((-1+\kappa_1 + m \\
& (1+\kappa_1^2))e^{2\alpha h_2} - \kappa_2(1-\kappa_1) - m(1+\kappa_1^2)] - e^{2\alpha h_1 + 5\alpha h_2} m[\kappa_2 - \kappa_1\kappa_2 + \\
& m + \kappa_1^2 m] (HN_1 + HN_2) - HN_5(e^{2\alpha(h_1+2h_2)} [e^{2\alpha h_2} 2 + 2(-1+\kappa_1)m \\
& + (1+\kappa_1^2)m^2 - \kappa_2(2+(-1+\kappa_1)m) + m(-1+\kappa_1 + m + m\kappa_1^2)] - 4\alpha^3 \\
& h_1(e^{2\alpha h_1 + 7\alpha h_2} [(-1+m)(HN_3 - HN_4)] + e^{2\alpha(h_1+3h_2)} [2h_1h_2(-1+m)^2 \\
& HN_5] + e^{2\alpha(h_1+5h_2)} [-h_2m(1+\kappa_1)(HN_3 - HN_4) + h_1(-2h_2(-1+m) \\
& m(HN_1 - HN_2) - (\kappa_2 + m)(-HN_3 + HN_4))] - 2\alpha^2(-e^{4\alpha h_1 + 5\alpha h_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [h_2(-1+m)(HN_3+HN_4)] + e^{2\alpha(h_1+3h_2)} [2h_1^2(-1+m)^2HN_5] - \\
& e^{2\alpha h_1+7\alpha h_2} [h_1(-1+\kappa_1)(HN_3+HN_4) + 2h_1(-1+m)m \\
& (HN_1+HN_2)] - e^{2\alpha(h_1+2h_2)} [2h_1^2(-1+m)(\kappa_2+m)HN_5 + e^{5\alpha h_2} \\
& h_2(1+m\kappa_1)(HN_3+HN_4) - e^{2\alpha h_1+5\alpha h_2} [(h_1m(1+\kappa_1) \\
& (HN_3+HN_4) - 2h_1(\kappa_2+m)(HN_1+HN_2)) + h_2(-2h_1(1+\kappa_1)m \\
& (HN_1+HN_2) + (2+(-1+\kappa_1)m)(HN_3+HN_4))] + \alpha(e^{7\alpha h_2} \\
& [(-1+m) - e^{4\alpha h_1}(1+\kappa_1m)](HN_3-HN_4) - e^{6\alpha h_2} [2h_2(-1+m) \\
& (1+m\kappa_1)](1+e^{4\alpha h_1})(HN_5-HN_6) + e^{2\alpha h_1+7\alpha h_2} [2h_1(1+\kappa_1)m \\
& (HN_1-HN_2) + (2+m(-1+\kappa_1))(HN_3-HN_4)] + e^{5\alpha h_2} \\
& [(\kappa_2+m)(-HN_3+HN_4) + 2h_2m(1+m\kappa_1)(HN_1-HN_2)] + \\
& e^{4\alpha h_1+5\alpha h_2} [h_22\kappa_1(-1+m)m(HN_1-HN_2) + (\kappa_2-\kappa_1m) \\
& (HN_4-HN_3)] - 2e^{2\alpha(h_1+3h_2)} [(HN_5-HN_6)(h_1(1+\kappa_1)(1+\kappa_2)m + \\
& h_2(2+2(-1+\kappa_1)m + (1+\kappa_1^2)m^2))] + e^{2\alpha h_1+5\alpha h_2} [(2\kappa_2+m-m\kappa_1) \\
& (HN_3-HN_4) + 2m(h_1(1+\kappa_1)\kappa_2 + h_2(-1+\kappa_1+m(1+\kappa_1^2))) \\
& (HN_1-HN_2)] \left(\frac{3-\kappa_2}{2} + \alpha y \right) \Big\} + e^{-\alpha y} \left\{ -8\alpha^2 e^{-2\alpha h_1-5\alpha h_2} (e^{2\alpha(h_1+2h_2)} \right. \\
& [8\alpha^4 h_1^2 h_2 (HN_3+HN_4) e^{\alpha h_2} (e^{\alpha h_2} [\kappa_2(HN_3-HN_4)] - 2h_2(-1+m) \\
& HN_5)(-1+m) + e^{7\alpha h_2} (-1+\kappa_2)HN_5((-1+m)(\kappa_2-m\kappa_1) - e^{4\alpha h_1} \\
& (\kappa_2+m)(1+\kappa_1m) + e^{2\alpha h_1} (\kappa_2(2+(-1+\kappa_1)m(\kappa_2-1) + m(1+\kappa_1^2))) + \\
& e^{2\alpha(h_1+3h_2)} [m(-1+\kappa_2)((-1+\kappa_1)(1-\kappa_2) + m(1+\kappa_1^2))HN_2 + \\
& ((1+\kappa_2^2)(1-\kappa_1) + m(-1+\kappa_2)(1+\kappa_1^2))HN_1] + e^{5\alpha h_2} m[(e^{4\alpha h_2} + 1) \\
& ((\kappa_2-\kappa_1m^2)(\kappa_2-1) + 2\kappa_2m(1-\kappa_1))HN_5] - e^{2\alpha h_1+5\alpha h_2} (1+\kappa_1^2)m^2 \\
& (1-\kappa_2) + 2\kappa_2(\kappa_2-1) - 4m\kappa_2(-1+\kappa_1) - e^{4\alpha h_2} [(1+e^{4\alpha h_1}) \\
& (\kappa_2-\kappa_1m)(HN_1+HN_2) + \kappa_2\kappa_1(1-m)(HN_1-HN_2)] - e^{2\alpha(h_1+2h_2)} \\
& [m(-1+\kappa_1^2)((1+\kappa_2)mHN_2 + (-1+\kappa_2)HN_1) + \kappa_2(-2(1-\kappa_1) \\
& HN_1] + e^{6\alpha h_2} [m(\kappa_1(1-m) - \kappa_2(\kappa_2-\kappa_1m))(HN_1-HN_2)] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& e^{4\alpha h_1 + 6\alpha h_2} + \kappa_1 \kappa_2 (\kappa_2 + m)(HN_1 - HN_2) \Big] - 2\alpha e^{5\alpha h_2} (1 + e^{4\alpha h_1}) \\
& h_2(-1 + \kappa_2) (-1 + m)(1 + m\kappa_1)HN_5 \Big] - e^{4\alpha(h_1 + h_2)} \Big[(-\kappa_1 + \kappa_2) \\
& HN_4 + 2h_2 (HN_1 - HN_2)\kappa_1(-1 + m)m + HN_3(\kappa_2(-2 + m) + \\
& m\kappa_1) \Big] + e^{4\alpha h_1 + 6\alpha h_2} \Big[(1 + \kappa_1 m)(2h_2\kappa_2 m(HN_1 + HN_2) - HN_4 + \\
& HN_3) \kappa_2(\kappa_2 + m) (HN_4 + HN_3) \Big] + e^{6\alpha h_2} \Big[2h_2 \kappa_1 \kappa_2(-1 + m) \\
& m(HN_1 + HN_2) (1 + \kappa_2^2 - m - \kappa_1 \kappa_2 m)HN_3 + (-1 + \kappa_2^2 + m - \\
& \kappa_1 \kappa_2 m) \Big] - 2e^{2\alpha h_1 + 5\alpha h_2} \Big[(-1 + \kappa_2)(h_1(1 + \kappa_1) (1 + \kappa_2)m + h_2(2 + 2 \\
& (-1 + \kappa_1) m + (1 + \kappa_1^2)m^2)HN_5 \Big] + e^{4\alpha h_2} \Big[m((-1 + \kappa_2\kappa_1)HN_4 - \\
& 2h_2(1 + m\kappa_1)(HN_1 - HN_2)) + (m + \kappa_2(2 + m\kappa_1))HN_3 \Big] + e^{2\alpha(h_1 + 2h_2)} \\
& \Big[-(m(1 - \kappa_1) + \kappa_2(4 + (-1 + \kappa_1)m)HN_3 + 4mh_1(\kappa_1 + 1)\kappa_2HN_2 - \\
& (-1 + \kappa_1)(1 + \kappa_2)HN_4 - 2h_2(-1 + \kappa_1 + m(1 + \kappa_1^2))(HN_1 - HN_2) \Big] + \\
& e^{2\alpha(h_1 + 3h_2)} \Big[-(1 + \kappa_2) (-2(1 - \kappa_2) + (-\kappa_1 + 1)m)HN_4 + (-2(1 + \kappa_2^2) + \\
& m(-\kappa_1 + 1) (1 - \kappa_2)HN_3 + 2m(h_1(1 + \kappa_1)((-1 + \kappa_2^2)HN_1 + (1 + \kappa_2^2) \\
& HN_2 + h_2(\kappa_2(-1 + \kappa_1 + m(1 + \kappa_1^2)) (HN_1 + HN_2)) \Big] - 4\alpha^3 h_1 \\
& (e^{2\alpha h_1 + 5\alpha h_2} \Big[2h_1 h_2 (-1 + m)^2 (-1 + \kappa_2)HN_5 \Big] + e^{2\alpha(h_1 + 2h_2)} \\
& \Big[-(1 + \kappa_2) (-2(1 - \kappa_2) + (-\kappa_1 + 1)m)HN_4 + (-2(1 + \kappa_2^2) + \\
& m(-\kappa_1 + 1) (1 - \kappa_2)HN_3 + 2m(h_1(1 + \kappa_1)((-1 + \kappa_2^2)HN_1 + (1 + \kappa_2^2) \\
& HN_2 + h_2(\kappa_2(-1 + \kappa_1 + m(1 + \kappa_1^2)) (HN_1 + HN_2)) \Big] - 4\alpha^3 h_1 \\
& (e^{2\alpha h_1 + 5\alpha h_2} \Big[2h_1 h_2 (-1 + m)^2 (-1 + \kappa_2)HN_5 \Big] + e^{2\alpha(h_1 + 2h_2)} \Big[(h_2 \\
& (1 + \kappa_1)m (HN_3 - HN_4) - h_1((\kappa_2(-2 + m) - m)HN_3 + ((1 + \kappa_2) \\
& HN_4 - 2h_2(HN_1 - HN_2) (-1 + m)m)) \Big] + e^{2\alpha(h_1 + 3h_2)} \Big[(h_2(1 + \kappa_1) \\
& \kappa_2 m (HN_3 - HN_4) + h_1(-2h_2(-1 + m)m\kappa_2 (HN_1 + HN_2) + (1 + \kappa_2) \\
& (-1 + \kappa_2 + m)HN_4 + (1 + \kappa_2^2 - m(1 - \kappa_2))HN_3) \Big] - 2\alpha^2 h_2 \\
& (-1 + m - 1 - \kappa_1 m) ((e^{4\alpha h_2} (1 + e^{4\alpha h_1})(HN_3 + HN_4) - e^{6\alpha h_2} (1 - e^{4\alpha h_1}) \\
& \kappa_2 (HN_3 - HN_4) + 2e^{2\alpha h_1 + 7\alpha h_2} \Big[h_1^2 (-1 + \kappa_2) (-1 + m)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\kappa_2 + m)HN_5] + e^{5\alpha h_2} [2(1 + e^{4\alpha h_1})h_2^2(-1 + m)(1 + m\kappa_1)HN_5 + \\
& e^{2\alpha(h_1+2h_2)} [h_2(-2h_1(1 + \kappa_1)m(HN_1 + HN_2) + (2 + (-1 + \kappa_1)m) + \\
& (HN_3 + HN_4) + mh_1(-1 + \kappa_1)((-1 + \kappa_2)HN_4 - (1 + \kappa_2)HN_3 + 2h_1 \\
& ((\kappa_2(-2 + m) - m)HN_1 - (1 + \kappa_2)mHN_2))] - e^{2\alpha(h_1+3h_2)} [h_2\kappa_2 \\
& (2h_1(1 + \kappa_1)m(HN_1 - HN_2) + (2 + (-1 + \kappa_1)m)(HN_3 - HN_4) + \\
& h_1m((1 + \kappa_1)(HN_3 + HN_4 + \kappa_2(HN_3 - HN_4)) + 2h_1(-((1 + \kappa_2) \\
& (-1 + \kappa_2 + m)HN_2 + (1 + \kappa_2^2 - m + m\kappa_2)HN_1))] + 2e^{2\alpha h_1+5\alpha h_2} \\
& [(h_1h_2(1 + \kappa_1)(1 + \kappa_2)m + h_2^2(2 + 2(-1 + \kappa_1)m + (1 + \kappa_1^2)m^2)) \\
& HN_5 + h_1^2((\kappa_2 - m^2)(-1 + \kappa_2) + \kappa_2 4m)HN_5))] + 16\alpha^3 \\
& e^{-2\alpha h_1-5\alpha h_2} ((-1 + m)(-e^{2\alpha h_1+6\alpha h_2} [8\alpha^4 h_2 h_1^2 (HN_3 - HN_4)] - \\
& e^{4\alpha(h_1+h_2)} [\kappa_1 m + e^{7\alpha h_2} (\kappa_2 - \kappa_1 m)HN_5] + e^{4\alpha h_1+6\alpha h_2} [\kappa_1 m(\kappa_2 + m) \\
& (HN_1 - HN_2)] + (1 + \kappa_1 m)(e^{5\alpha h_2} [(1 + e^{4\alpha h_1})(-1 + m)HN_5] - \\
& me^{4\alpha h_2} [HN_1 - HN_2] - e^{4\alpha h_1+7\alpha h_2} [(\kappa_2 + m)HN_5] + (e^{6\alpha h_2} [m \\
& (-\kappa_2 + \kappa_1 m)] - e^{2\alpha(h_1+2h_2)} [m(-1 + \kappa_1 + m + \kappa_1^2 m)] + e^{2\alpha(h_1+3h_2)} \\
& [m(\kappa_2 - \kappa_1 \kappa_2 + m + \kappa_1^2 m)](HN_1 - HN_2)] + e^{2\alpha h_1+5\alpha h_2} [(2 + \\
& 2(-1 + \kappa_1)m + (1 + \kappa_1^2)m^2)HN_5] + e^{2\alpha h_1+7\alpha h_2} [\kappa_2(2 + \\
& (-1 + \kappa_1)m) - m(-1 + \kappa_1 + m + m\kappa_1^2)]HN_5] + 2\alpha^2(-e^{6\alpha h_2} [h_2 \\
& (-1 + m)(HN_3 - HN_4)] - 2e^{2\alpha h_1+5\alpha h_2} [h_1^2(-1 + m)^2HN_5] + \\
& e^{2\alpha(h_1+2h_2)} [h_1((1 + \kappa_1)(HN_3 - HN_4) + 2h_1(-1 + m)m \\
& (HN_1 - HN_2)] + 2e^{2\alpha h_1+7\alpha h_2} [h_1^2(-1 + m)(\kappa_2 + m)HN_5] + e^{4\alpha h_1+6\alpha h_2} \\
& [h_2(1 + m\kappa_1)(HN_3 - HN_4)] + 2e^{2\alpha(h_1+3\alpha h_2)} [h_1m(1 + \kappa_1) \\
& (HN_4 - HN_3) - (2h_1(\kappa_2 + m) - 2h_2h_1(1 + \kappa_1)m)(HN_1 - HN_2) + \\
& (2 + (-1 + \kappa_1)m)(HN_4 - HN_3)] + \alpha(-e^{4\alpha h_2} [(-1 + m)e^{4\alpha h_1} + \\
& (1 + m\kappa_1)](HN_3 + HN_4)] - e^{5\alpha h_2} 2[(-1 + m)(1 + m\kappa_1)h_2(1 + e^{4\alpha h_1}) \\
& HN_5] + e^{4\alpha h_2} [-(-1 + m)e^{4\alpha h_1} + (1 + m\kappa_1)](HN_3 + HN_4)] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + e^{6\alpha h_2} [2h_2 \kappa_1 (-1+m) m(HN_1 + HN_2) + (\kappa_2 - m\kappa_1) \\
& (HN_3 + HN_4)] + e^{2\alpha(h_1+2h_2)} [2h_1(1+\kappa_1)m (HN_1 + HN_2) + \\
& (-2+m(1-\kappa_1)) (HN_3 + HN_4)] + e^{4\alpha h_1+6\alpha h_2} [(\kappa_2 + m) \\
& (HN_3 + HN_4) + 2h_2 m(1+m\kappa_1) (HN_1 + HN_2)] - 2e^{2\alpha h_1+5\alpha h_2} \\
& [h_1(1+\kappa_1)(1+\kappa_2)m + h_2(2+2(-1+\kappa_1)m + (1+\kappa_1^2) m^2)) \\
& (HN_5 + HN_6)] - e^{2\alpha(h_1+3h_2)} [-(2\kappa_2 + m - m\kappa_1)(HN_3 + HN_4) + \\
& 2m(h_1(1+\kappa_1) \kappa_2 + h_2(-1+\kappa_1 + m + \kappa_1^2 m))(HN_1 + HN_2)] \\
& \left. \left(\frac{-3+\kappa_2}{2} + \alpha y \right) \right\} \quad (297)
\end{aligned}$$

ile ifade edilmiştir. Böylece integral denklem,

$$\frac{2}{\pi(1+\kappa_1)} \int_c^d \int_0^\infty K^*(y,t,\alpha) d\alpha \left[G(t) dt \right] + \frac{2}{\pi(1+\kappa_1)} \int_c^d \left[\frac{1}{t-y} + \frac{1}{t+y} \right] G(t) dt = \frac{-1}{2G_2} \sigma_{x_2}^* \quad (298)$$

olarak tanımlanabilir.

Bu ifadede;

$$K^{**}(y,t) = \frac{1}{t+y} + \int_0^\infty K^*(y,t,\alpha) d\alpha \quad (299)$$

olarak tanımlanır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa (298) ifadesi aşağıdaki gibi olur.

$$\int_c^d \left[\frac{1}{t-y} + K^{**}(y,t) \right] G(t) dt = -\frac{1+\kappa_2}{4G_2} \pi \sigma_{x_2}^*(0,y) \quad c < y < d \quad (300)$$

Uygunluk şartı ise;

$$\int_c^d G(t) dt = 0 \quad (301)$$

olarak gösterilebilir. $K^{**}(y,t)$ integral denklemin çekirdeği olup $0 < c < d < h_2$ olmak üzere $c \leq (y,t) \leq d$ kapalı aralığında sınırlı ve süreklidir.

Çatlak yüzeyindeki $\sigma_{x_1}^*(0,y)$ normal gerilmeleri bilindiğinden singüler integral denklem verilen uygunluk bağıntısı ile birlikte çözülerek $G(t)$ bilinmeyen bulunabilir. Bundan hareket etmek suretiyle de çatlak uçlarındaki gerilme şiddet faktörleri ve yüzey yer değiştirmeleri hesaplanabilir.

2.4.6. İntegral Denklemin Sayısal Çözümü

Elastik yarım düzlem üzerine oturan alt tabakasında y simetri ekseninde bir çatlağı bulunan iki tabakanın çatlak problemi için yazılan integral denklemin sayısal çözümü iç ve kanar çatlak olması durumlarında ayrı ayrı incelenmektedir.

2.4.6.1. İç Çatlak Halinde İntegral Denklemin Sayısal Çözümü

İç çatlak olması durumunda integral denklemin çekirdeği $c \leq (y,t) \leq d$ kapalı aralığında sonlu kalmaktadır ($0 < c < d < h_2$). Bu durumda integral denklem belli sayısal yöntemlerle çözülebilir. (Erdoğan ve Gupta, 1972, Krenk, 1973). Bu amaçla integral denklemin integral aralığını normalize etmek için $z = \alpha h_1$ değişken dönüşümü ile boyutsuz büyüklükler

$$t = \frac{d-c}{2} \xi + \frac{d+c}{2} \quad \text{ise} \quad dt = \frac{d-c}{2} d\xi \quad (302)$$

$$y = \frac{d-c}{2} \eta + \frac{d+c}{2} \quad (303)$$

$$\phi(\xi) = \frac{G\left(\frac{d-c}{2} \xi + \frac{d+c}{2}\right)}{P/h_1} \frac{4G_2}{1+\kappa_2} \quad (304)$$

şeklinde tanımlanırsa (298) denklemi;

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{1}{(\xi - \eta)} + \frac{1}{(\xi + \eta) + 2 \frac{d+c}{d-c}} - \frac{d-c}{2h_1} H^{**}(\eta, \xi) \right] \Phi(\xi) d\xi = \frac{-h_1}{P} \pi \sigma_{x_1}^* \quad -1 < \eta < 1 \quad (305)$$

olarak elde edilir. Bu ifade de;

$$H^*(\eta, \xi) = \frac{d-c}{2} K^{**} \left(\frac{d-c}{2} \eta + \frac{d+c}{2}, \frac{d-c}{2} \xi + \frac{d+c}{2} \right) \quad (306)$$

$$\Phi(\xi) = G \left[\frac{d-c}{2} \xi + \frac{d+c}{2} \right] \frac{4G_2}{1+\kappa_2} \frac{h_1}{P} \quad (307)$$

olarak tanımlanmaktadır. Aynı değişken dönüşümlerinin kullanılması ile (301) yan şartı,

$$\int_{-1}^1 \Phi(\xi) d\xi = 0 \quad (308)$$

şeklini alır. İntegral denklemin çözümü $-1 < \xi < 1$ aralığında Hölder sürekliliğine haiz bir fonksiyon olmak üzere

$$\Phi(\xi) = g(\xi)(1 - \xi^2)^{-1/2} \quad (309)$$

şeklinde alınabilir. Burada $g(\xi)$ fonksiyonu $-1 \leq \xi \leq 1$ kapalı aralığında sınırlıdır. Uygun Gauss Chebyshev integrasyon formülü uygulanırsa (Erdoğan vd., 1973).

$$\sum_{i=1}^n W_i \left[\frac{1}{\xi_i - \eta_k} + H(\eta_k, \xi_i) \right] g(\xi_i) = -\frac{h}{P} \sigma_{x_2}(0, \pi_k), \quad (k=1, \dots, N-1) \quad (310)$$

$$\pi \sum_{i=1}^n W_i g(\xi_i) = 0 \quad (311)$$

cebirsel denklem takımına indirgenebilir. Burada ,

$$\xi_i = \cos \left[\frac{2i-1}{2N} \pi \right], \quad W_i = \frac{1}{N}, \quad (i=1, \dots, N) \quad (312)$$

$$\eta_k = \cos \left[\frac{k\pi}{N} \right] \quad (k=1, \dots, N-1) \quad (313)$$

olup denklem takımının çözümünden $g(\xi_i)$ ($i=1, \dots, N$) bilinmeyenleri bulunurlar.

2.3.6.2. Kenar Çatlak Halinde İntegral Denklemin Sayısal Çözümü

İç çatlak durumunda çatlağın başlangıç noktası c bitim noktası d ile gösterilmektedir. Çatlak kenara taşındığında $c=0$ olmaktadır. Bu durumda çekirdek singüler kısmı dolayısı ile yakınsamamaktadır. İntegral denklemin çekirdeği incelendiğinde yakınsamayı bozan singüler terim;

$$ST_{catlak}(y, t) = \int_0^{\infty} (-2\alpha t + 2\alpha^2 t) e^{-\alpha(t+y)} d\alpha \quad (314)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu ifadenin kapalı integrali ise ;

$$ST_{catlak}^*(y, t) = \frac{-2}{t+y} + \frac{6y}{(t+y)^2} - \frac{4y^2}{(t+y)^3} \quad (315)$$

ile ifade edilebilir.

Yakınsamayı bozan bu singüler terim çekirdekten çıkarılıp kapalı integrali alınarak tekrar çekirdeğe ilave edilirse yakınsama problemi ortadan kaldırılmış olur.

İntegral denklemin çekirdeği;

$$K^{***}(y, t) = K^{**}(y, t) - ST_{catlak}(y, t) + ST_{catlak}^*(y, t) \quad (316)$$

şeklini alır.

$c=0$ alınarak çatlak kenara taşınır ve çekirdekteki yakınsama problemi yukarıda açıklanan şekilde ortadan kaldırılırsa, (300) nolu integral denklem aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\int_0^d \left[\frac{1}{t-y} + K^{***}(y,t) \right] G(t) dt = -\frac{1+\kappa_2}{4G_2} \pi \sigma_x^*(0,y) \quad (0 \leq y < d) \quad (317)$$

Kenar çatlak probleminin çözümü için integral denklemde bilinmeyen olan $\Phi(\xi)$ ve çekirdeğin singüler kısmı dahil ξ ' nin bir çift fonksiyonu olarak $-1 < \xi < 1$ aralığına uzatılarak yaklaşık bir çözüm elde edilir. Bu için aşağıdaki değişken dönüşümleri yapılırsa

$$t = \xi d \quad y = \eta d \quad (318)$$

ise integral denklemi aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{\xi - \eta} + T(\eta, \xi) \right] \Phi(\xi) d\xi = -\frac{h}{p} \pi \sigma_x^*(0, \eta) \quad 0 < \eta < 1 \quad (319)$$

yukarıdaki ifadede;

$$T(\eta, \xi) = dK^{***} \left(\frac{d-c}{2} \eta + \frac{d+c}{2}, \frac{d-c}{2} \xi + \frac{d+c}{2} \right) \quad (320)$$

şeklinde verilirse ve

$$\Phi(\xi) = g(\xi)(1-\xi^2)^{-1/2} \quad (321)$$

olarak yazılırsa. (320) denklemi aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\sum_{i=1}^n W_i \left[\frac{1}{\xi_i - \eta_k} + T(\eta_k, \xi_i) \right] g(\xi_i) = -\frac{h}{P} \sigma_{x_1}^*(0, \eta_k) \quad (k=1, \dots, N) \quad (322)$$

Burada

$$\xi_i = \cos \left[\frac{2i-1}{4N+2} \pi \right], \quad W_i = \frac{1}{2N+1}, \quad (i=1, \dots, N) \quad (323)$$

$$\eta_k = \cos \left[\frac{k\pi}{2N+1} \right] \quad (k=1, \dots, N) \quad (324)$$

olarak verilmişlerdir.

2.4.7. Çatlak Uçlarındaki Gerilme Şiddet Faktörleri

Çatlağın malzeme içerisinde ilerlemeye başlayıp başlamadığını tesbit etmek için kullanılan kriterlerin en önemlisi gerilme şiddet faktörüdür. Bununla malzeme içindeki çatlağın ilerlemeye başlayacağı kritik yükü bulmak mümkün olmaktadır. Bu kısımda gerilme şiddet faktörleri, problemde iç veya kenar çatlak olması durumlarına göre verilmektedir.

2.4.7.1. İç Çatlak Halinde Gerilme Şiddet Faktörleri

İç çatlak durumunda çatlak uçlarındaki gerilme şiddet faktörleri, çatlağın c ve d ucu için aşağıdaki limit değerlerle ifade edilebilir (Civelek, 1978, Gupta, Erdoğan, 1976).

$$k(c) = \lim_{y \rightarrow c} \sqrt{2(c-y)} \sigma_{x_2}(0, y) = \lim_{y \rightarrow c} \frac{4\mu_2}{1 + \kappa_2} \sqrt{2(y-c)} G(y) \quad (325)$$

$$k(d) = \lim_{y \rightarrow d} \sqrt{2(y-d)} \sigma_{x_2}(0, y) = \lim_{y \rightarrow d} \frac{4\mu_2}{1 + \kappa_2} \sqrt{2(d-y)} G(y) \quad (326)$$

Bu tanımlara göre çatlak uçlarındaki gerilme şiddet faktörlerinin $g(\xi_i)$ 'lerin $(i=1, \dots, N)$ uç noktalarındaki $g(-1)$ ve $g(1)$ değerleri ile orantılı olduğu düşünülürse $k(c)$ ve $k(d)$ ' yi veren ifadeler

$$k(c) = g(-1) \sqrt{\frac{d-c}{2}} \frac{P}{h_1} \quad (327)$$

$$k(d) = -g(1) \sqrt{\frac{d-c}{2}} \frac{P}{h_1} \quad (328)$$

olarak bulunurlar. Uç noktalarındaki $g(-1)$ ve $g(1)$ değerleri de

$$g(1) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\sin \left[\frac{2N-1}{4N} (2j-1)\pi \right]}{\sin \left[\frac{2j-1}{4N} \pi \right]} g(\xi_j) \quad (329)$$

$$g(-1) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^n \frac{\sin \left[\frac{2N-1}{4N} (2j-1)\pi \right]}{\sin \left[\frac{2j-1}{4N} \pi \right]} g(\xi_{N+1-j}) \quad (330)$$

şeklinde hesaplanabilirler (Krenk, 1973). Burada N Gauss-Chebyshev integrasyonunda alınacak nokta sayısını göstermekte olup , iç çatlak olması durumunda N=20 alınmıştır.

2.4.7.2. Kenar Çatlak Halinde Gerilme Şiddet Faktörleri

Elastik yarım düzlem üzerine oturan yapışık iki tabakadan oluşan sistemde alt tabakada $c=0$ durumu ile ortaya çıkan kenar çatlakta gerilme şiddet faktörü daha önce iç çatlak durumu için yazılan (327) ifadesi ile verilebilir. Çatlağın d ucundaki gerilme şiddet faktörü $g(1)$ ile orantılı olup

$$k(d) = -g(1) \sqrt{d} \frac{P}{h_1} \quad (331)$$

şeklinde tanımlanabilir. Çatlak ucundaki gerilme şiddet faktörünün belirlenebilmesi için bilinmesi gerekli olan $g(1)$ değeri $g(\xi_j)$ ($j=1, \dots, N$) değerlerine bağlı olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir (Krenk, 1973).

$$g(1) = \frac{2}{2N+1} \sum_{j=1}^n \cot \left[\frac{2j-1}{4N+2} \pi \right] \sin \left[\frac{N}{2N+1} (2j-1) \pi \right] g(\xi_j) \quad (332)$$

Kenar çatlak durumunda iç çatlak durumu için alınan $N=20$ nokta sayısına göre yakınsama iyi olmamaktadır. Bunun için N nokta sayısını arttırmak gerekmektedir. Nokta sayısının arttırılmasında yakınsama daha iyi olmakta ancak en iyi yakınsama üç nokta extrapolasyonu kullanılarak elde edilmektedir (Krenk, 1973, Erdöl ve Erdoğan 1976).

Üç nokta extrapolasyonunda, çatlağın d ucundaki gerilme şiddet faktörü $1/N$ ' in fonksiyonu olarak düşünülürse;

$$k(d) = A \left(\frac{1}{N} \right)^2 + B \left(\frac{1}{N} \right) + C \quad (333)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade de $N \rightarrow \infty$ olması durumunda

$$k(d) = C \quad (334)$$

olarak elde edilir. Nokta sayısı $N=18, 24, 36$ olarak üç değer alınır ve $k(d)$ (334) ifadesinde yerine yazılırsa üç bilinmeyenli üç denklem elde edilir. Bu denklem takımının çözümü sonucunda,

$$C = 6k_{36} - 8k_{24} + 3k_{18} \quad (335)$$

bulunur. Bu ifade (335) denkleminde yerine yazılırsa çatlağın d ucundaki gerilme şiddet faktörü üç nokta extrapolasyonu yardımı ile aşağıdaki gibi gösterilir.

$$k_{\infty}(d) = 6k_{36} - 8k_{24} + 3k_{18} \quad (336)$$

3. BULGULAR

3.1. Giriş

Elastik yarım düzleme oturan, rijit bir pança bastırılan tabakalardaki değme probleminde tabakaların ve elastik yarım düzlemin malzeme özellikleri, panç yarıçapı, simetrik yük değeri ve tabaka yükseklikleri oranı ile ilgili olan boyutsuz büyüklüklerin farklı değerleri için değme gerilmeleri, değme yüzeyleri, y simetri ekseninde ortaya çıkan, normal gerilmeler ile bu eksen doğrultusunda kayma gerilmeleri ve alt tabakada iç veya kenar çatlak olması durumunda gerilme şiddet faktörleri hesaplanmıştır.

3.2. Değme Yüzeyleri ve Değme Gerilmeleri

Rijit panç vasıtasıyla simetrik yük uygulanan ve elastik yarım düzleme bastırılan yapışık iki tabakanın değme durumları incelenerek değme yüzeyleri ile bu yüzeylerde ortaya çıkan değme gerilmeleri hesaplanmış olup tablo ve grafiklerle sunulmuştur.

Yük ve yarıçap değerlerine göre değme uzunluğu değişimi Tablo 1, Şekil (4-7)' de verilmektedir. Tablodan görülebileceği gibi yarıçapın sabit tutulması durumunda yük değerinin artması ile pançın üst tabakaya değme yüzeyi a, alt tabakanın yarım düzlemle değme yüzeyi b den küçük değerler almaktadır. Yükün sabit alınıp yarıçapın değişiminin incelendiği durumda da yarıçapın artması ile yine a değme yüzeyi b değme yüzeyinden küçük çıkmaktadır. Yükün artmasıyla değme yüzeylerinin değerlerindeki artma yarıçapın en büyük olduğu durumda daha büyük miktarda ortaya çıkmaktadır. Ayrıca alt tabaka ile elastik yarım düzlemin değme yüzeyi yükün ve yarıçapın incelenen her durumu için pançın değme yüzeyinden büyük olmaktadır.

Malzeme sabitleri $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ aynı değerleri aldığıında tabakalar ve elastik yarım düzlemin poisson oranları da aynı değerleri alacak dolayısıyla $m=G_2/G_1$ ve $n=G_3/G_2$ kayma modülü oranlarının değişimi yalnızca elastisite modüllerinin değişimi ile olacaktır. Alt tabaka ile üst tabakanın kayma modülleri oranı m ve elastik yarım düzlemle alt tabakanın kayma modülleri oranı n değerlerinin artmasıyla değme yüzeyleri küçülmekte olup hesaplanan değerler sayısal ve grafik olarak Tablo 2 ve Şekil (8-11) ile ifade edilmektedirler.

Değme gerilmelerinin dağılımını gösteren grafikler Şekil (12-21) incelendiğinde değme yüzeyleri ile değme gerilmelerinin ters orantılı olduğu açıkça görülmektedir. Değme yüzeyleri arttıkça yük daha geniş alana yayılmakta böylece değme gerilmeleri azalmaktadır. Tersisi durumda geçerlidir. Yani değme yüzeyleri azaldıkça değme gerilmeleri artmaktadır.

Değme gerilmeleri en büyük değerlerini $x=0$ simetri ekseninde almakta ve buradan uzaklaştıkça azalarak pançın altında değmenin sona erdiği $x=-a$, $x=a$ ve alt tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki değmenin sona erdiği $x=-b$, $x=b$ değerlerinde sıfır olmaktadır. Panç yarıçapının artması ile değme yüzeyleri de büyümekte ve buna bağlı olarak değme gerilmeleri azalmaktadır. (Şekil 12-13). Yükün artması ile değme yüzeyleri artmakta ve değme gerilmeleri azalmaktadır.(Şekil 14-15)

Değme gerilmeleri tabakalar ve yarım düzlemin kayma modülleri oranlarına bağlı olarak incelendiğinde kayma modülleri oranı arttığında değme gerilmelerinin azaldığı, azaldığında ise değme gerilmelerinin arttığı Şekil (16-19)'da gözlenmiştir

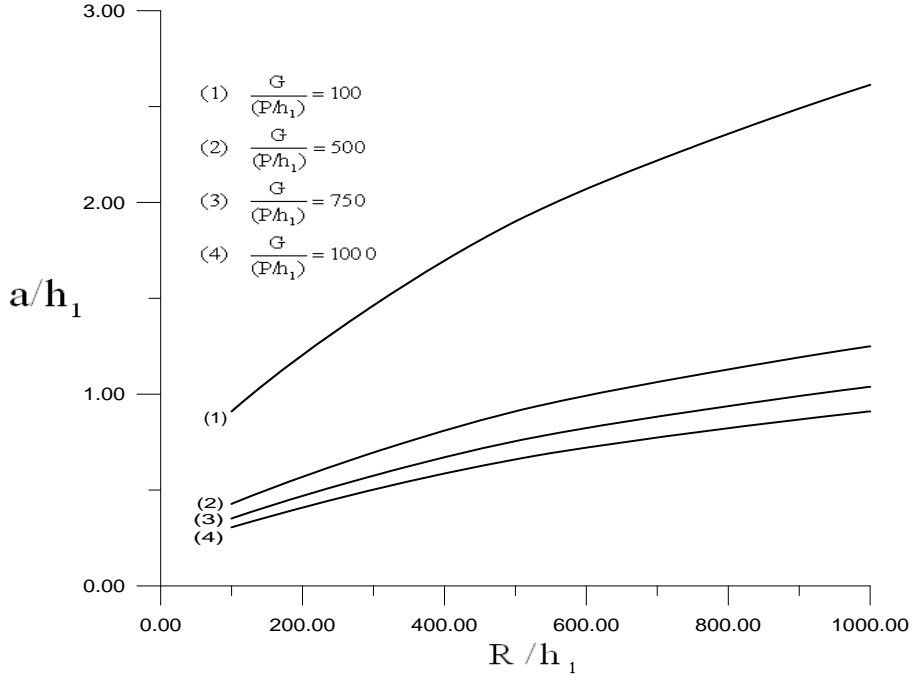
Değme gerilmelerinin tabaka yükseklikleri ile değişimi incelendiğinde alt tabakanın yüksekliğinin üst tabakaya olan yüksekliğine oranı arttıkça değme gerilmelerinin azaldığı görülmüştür. Yüksekliklerin oranı arttıkça özellikle alt tabakada değme yüzeyleri artmaktadır. (Şekil 20-21)

Tablo1.Dairesel panç yarıçapına bağlı olarak yükün değişimine göre değme uzunlukları

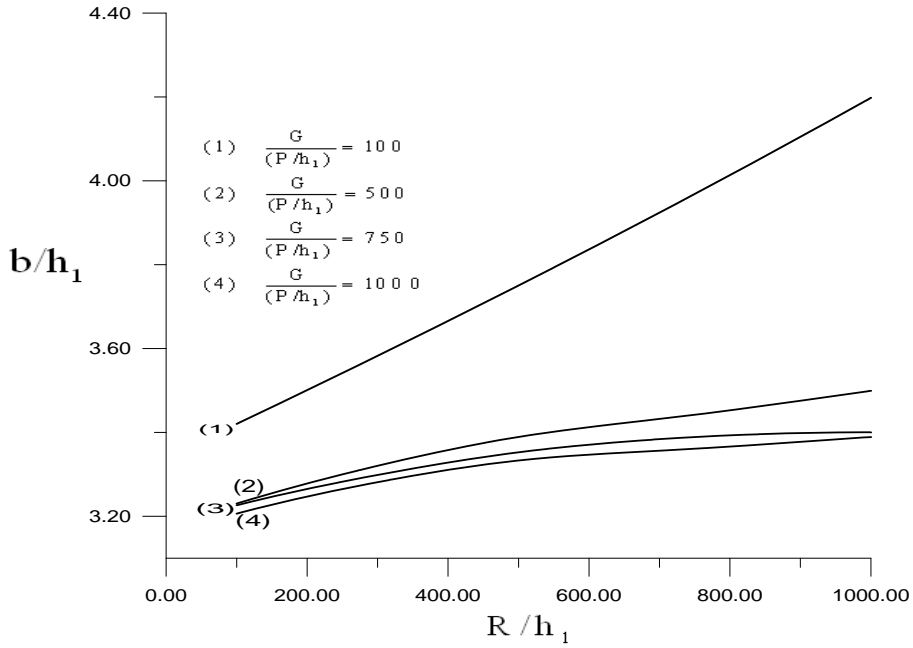
$G_1/(p/h_1)$	$R/h_1=100$		$R/h_1=250$		$R/h_1=500$		$R/h_1=750$		$R/h_1=1000$	
	a/h_1	b/h_1	a/h_1	b/h_1	a/h_1	b/h_1	a/h_1	b/h_1	a/h_1	b/h_1
100	0.9096	3.420	1.3834	3.5380	1.90	3.750	2.2892	3.968	2.6130	4.1980
250	0.5941	3.370	0.9097	3.3890	1.250	3.411	1.5035	3.5846	1.7122	3.8990
500	0.4272	3.230	0.6598	3.3330	0.910	3.313	1.09553	3.4418	1.2493	3.4990
750	0.3511	3.226	0.5451	3.1330	0.7544	3.328	0.90975	3.3888	1.0382	3.4000
1000	0.305227	3.206	0.4754	3.3029	0.6598	3.300	0.79775	3.3607	0.90979	3.3887

Tablo2 Tabakaların kayma modülleri oranına bağlı olarak tabaka ile yarım düzlemin kayma modülü oranının değişimine göre değme yüzeyleri ($h_2/h_1=2$, $G_2/G_1=2$, $G_3/G_2=2$)

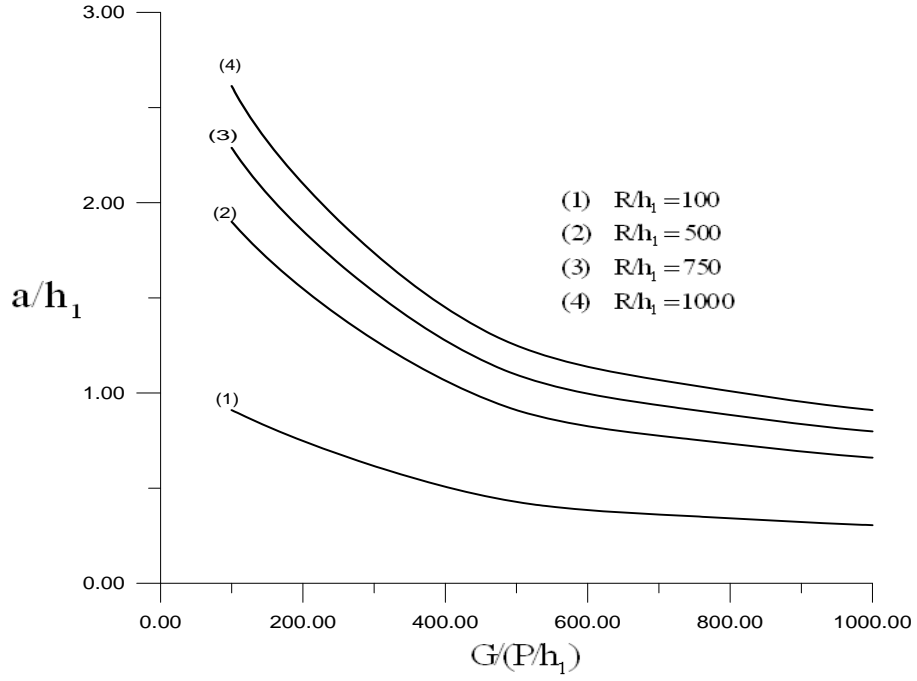
$n=G_3/G_2$	$m=G_2/G_1$									
	0.1		0.5		1		2		4	
	a/h_1	b/h_1	a/h_1	b/h_1	a/h_1	b/h_1	a/h_1	b/h_1	a/h_1	b/h_1
0.1	17.8775	22.6662	7.1110	11.9507	4.6514	9.5227	3.0345	7.9757	2.1946	7.0970
0.5	7.9683	10.4095	3.6175	6.3998	2.6639	5.5434	2.1165	4.9975	1.8346	4.6298
1	5.9502	7.7716	3.008	5.1444	2.3576	4.6043	1.9776	4.2556	1.7718	4.0331
2	4.7756	6.1569	2.6756	4.3446	2.1921	3.9798	1.8998	3.7623	1.7352	3.6369
4	4.1496	5.2470	2.5027	3.8761	2.1045	3.6074	1.8575	3.4614	1.7149	3.3953



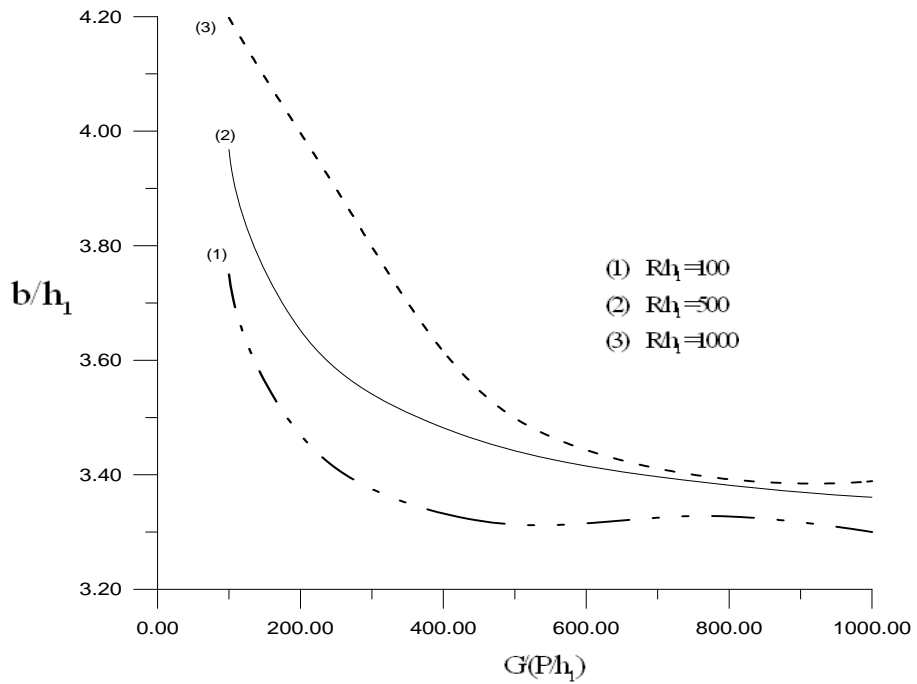
Şekil 4. Panç ile üst tabaka arasındaki değme yüzeyinin yük değerine bağlı olarak yarıçap ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$ $m=2$, $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$)



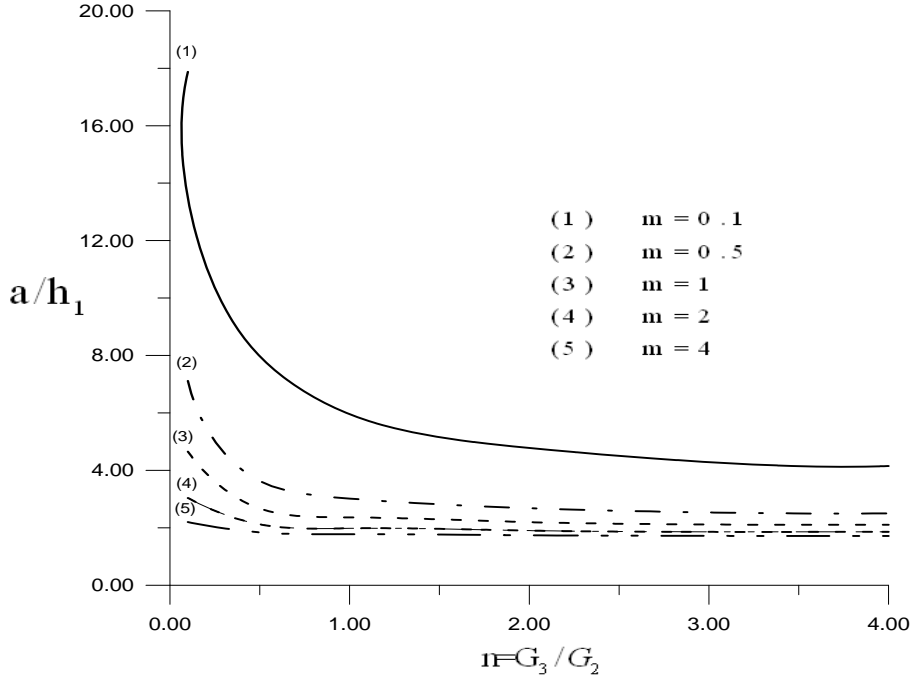
Şekil 5. Alt tabaka ile yarı düzlem arasındaki değme yüzeyinin yük değerine bağlı olarak yarıçap ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$ $m=2$, $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$)



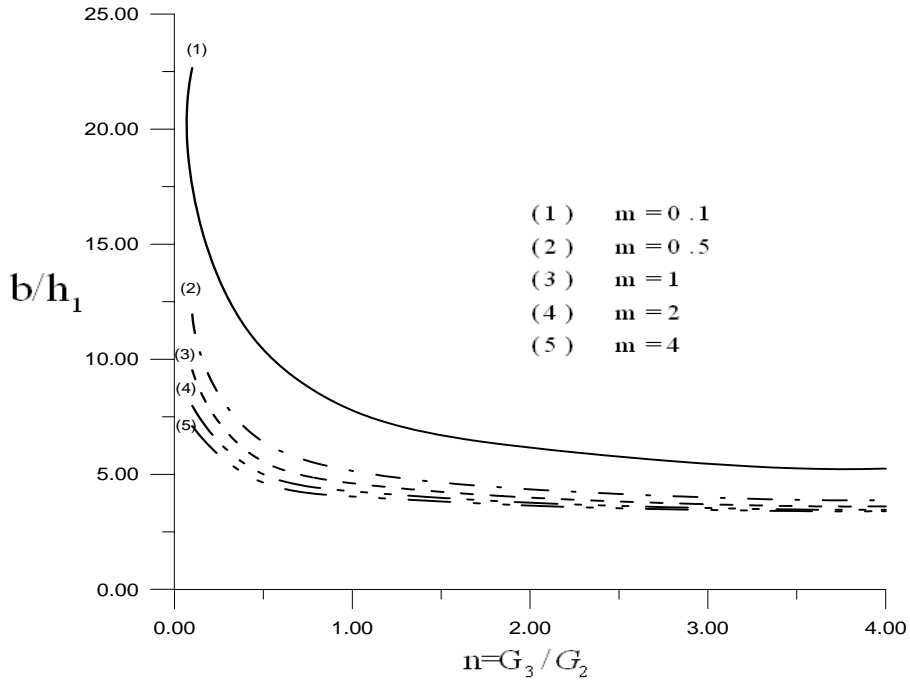
Şekil 6. Pançın yarıçapına bağlı olarak, panç ile üst tabaka arasındaki değme yüzeyinin yük ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$, $m=2$, $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$)



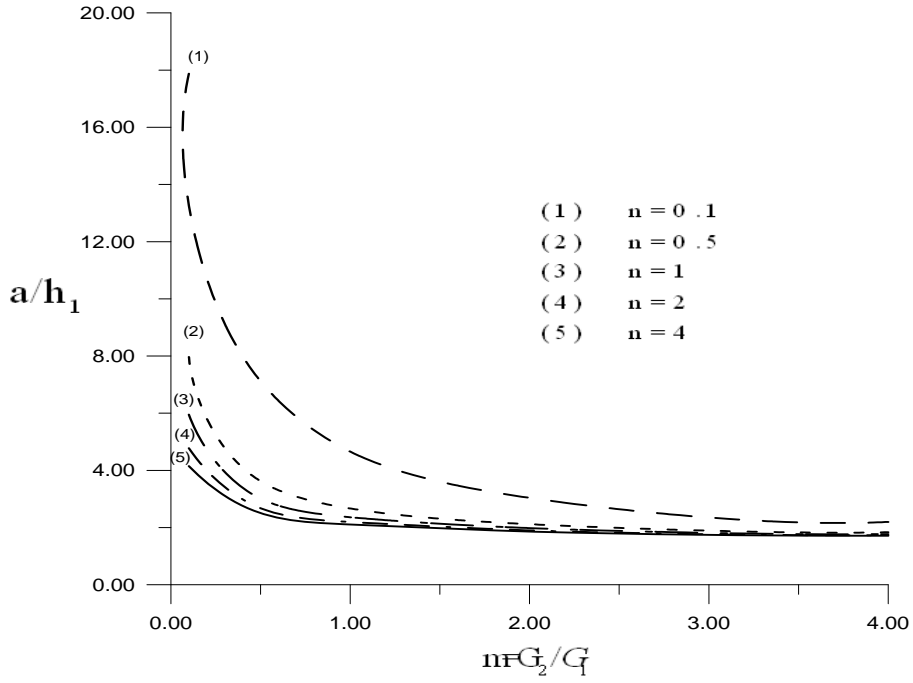
Şekil 7. Pançın yarıçapına bağlı olarak, alt tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme yüzeyinin yük ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$, $m=2$, $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$)



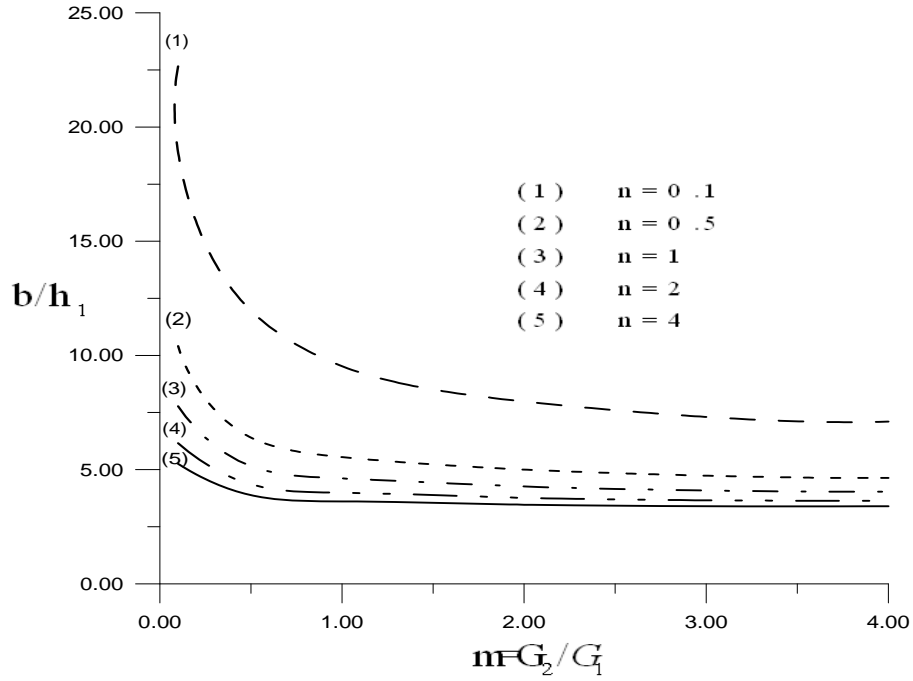
Şekil 8. Tabakaların kayma modülleri oranlarına bağlı olarak panç değme yüzeyinin yarım düzlem-alt tabaka kayma modülü oranları ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 2$, $R/h_1 = 500$, $G/(P/h_1) = 100$)



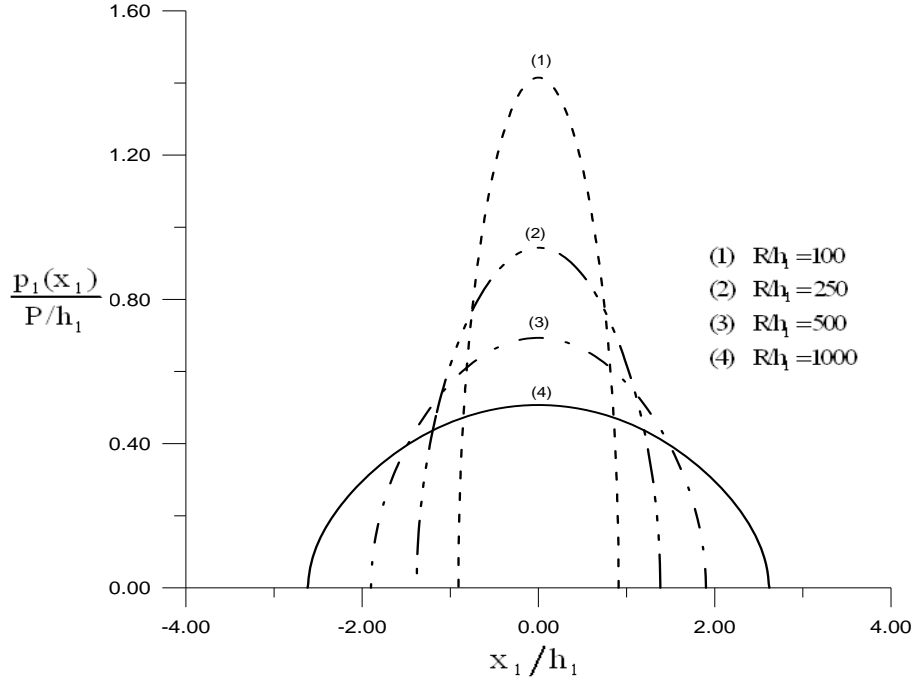
Şekil 9. Tabakaların kayma modülleri oranlarına bağlı olarak yarım düzlem ve alt tabaka arasındaki değme yüzeyinin yarım düzlem ve alt tabakanın kayma modülü oranları ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 2$, $R/h_1 = 500$, $G/(P/h_1) = 100$)



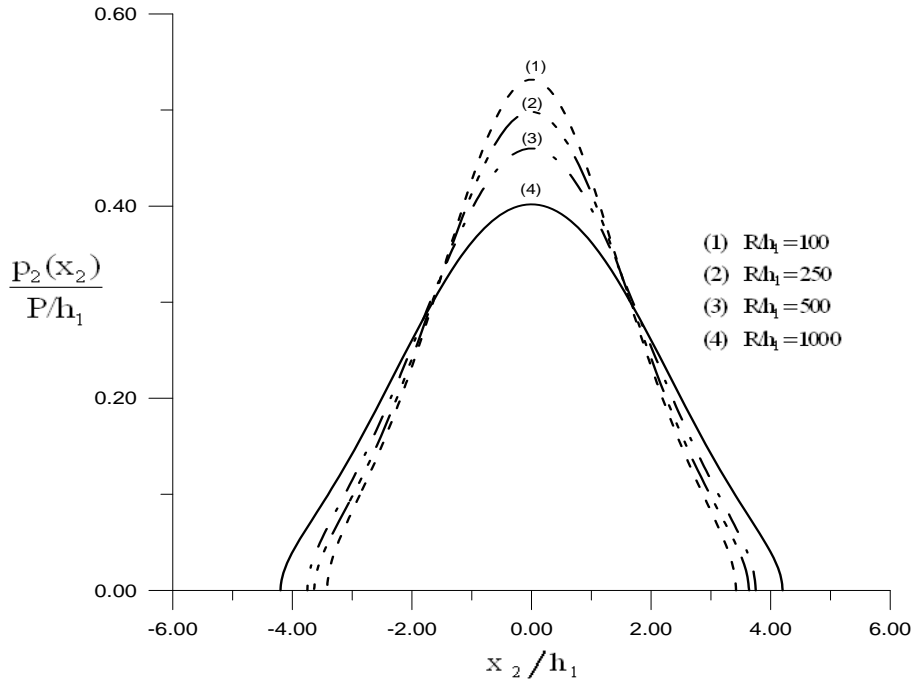
Şekil 10. Yarım düzlem ile alt tabakanın kayma modülü oranlarına bağlı olarak pañç değme yüzeyinin tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$ $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 2$, $R/h_1 = 500$, $G/(P/h_1) = 100$)



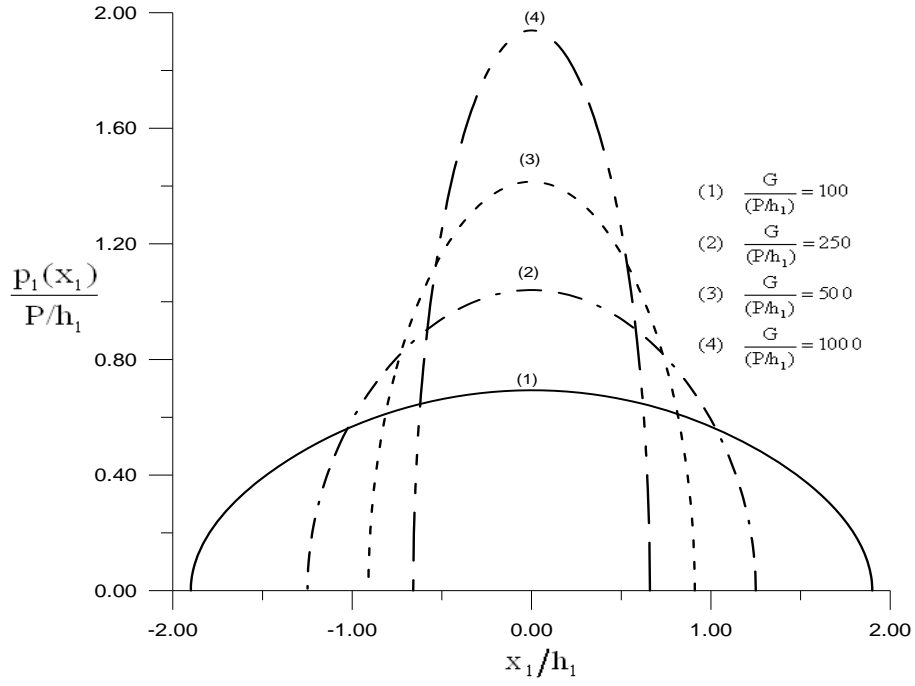
Şekil 11. Yarım düzlem ile alt tabakanın kayma modülü oranlarına bağlı olarak değme yüzeyinin tabakaların kayma modülü oranları ile değişimi ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 2$ $R/h_1 = 500$, $G/(P/h_1) = 100$)



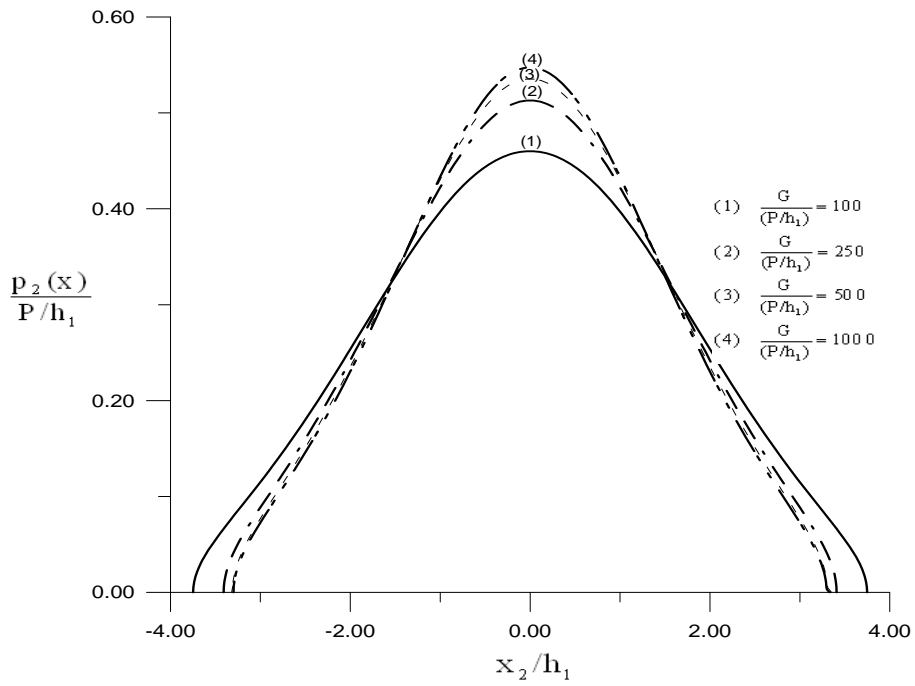
Şekil 12. Çeşitli yarıçap değerleri için $y=0$ da değme gerilmesi yayılışı ($h_2/h_1 = 2$ $m=2$, $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $G/(P/h_1)=100$)



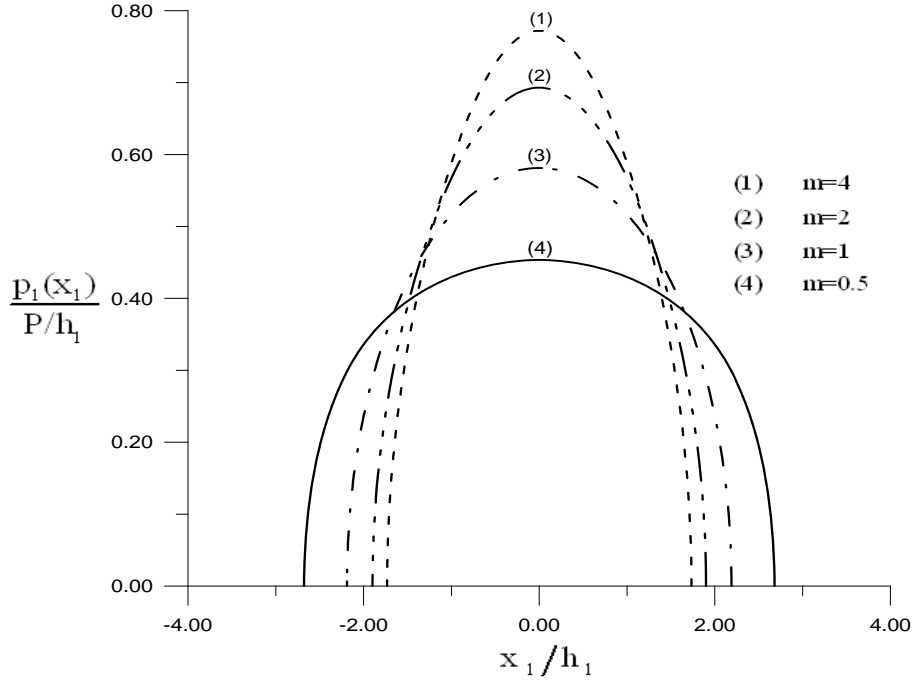
Şekil 13. Çeşitli yarıçap değerleri için $y=-h$ da değme gerilmesi yayılışı ($h_2/h_1 = 2$ $m=2$, $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $G/(P/h_1)=100$)



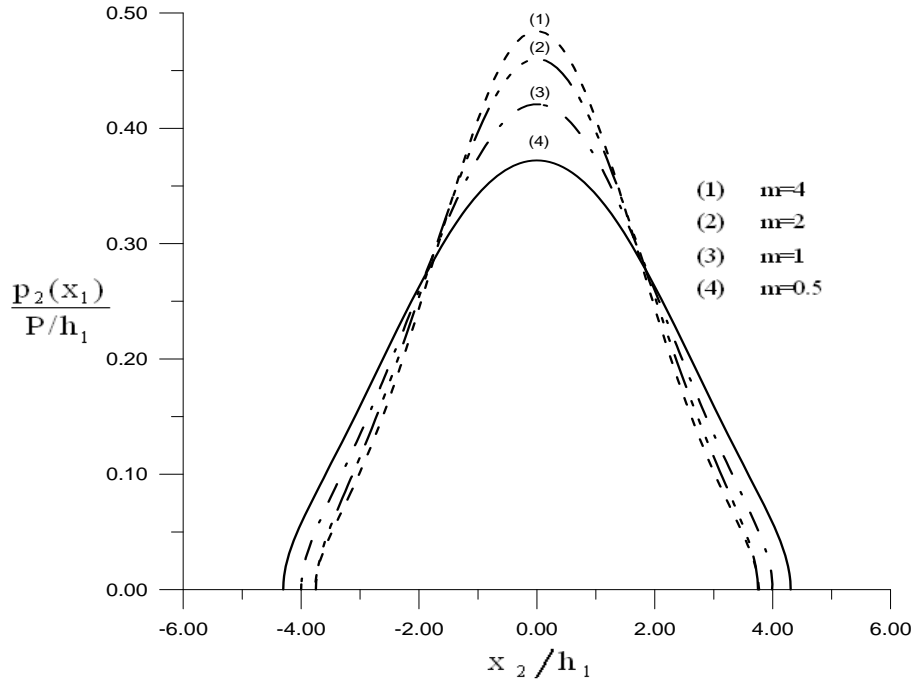
Şekil 14. Çeşitli yük değerleri için $y=0$ da değme gerilmesi yayılışı
 ($h_2/h_1 = 2$ $m=2$, $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $R/h_1=500$)



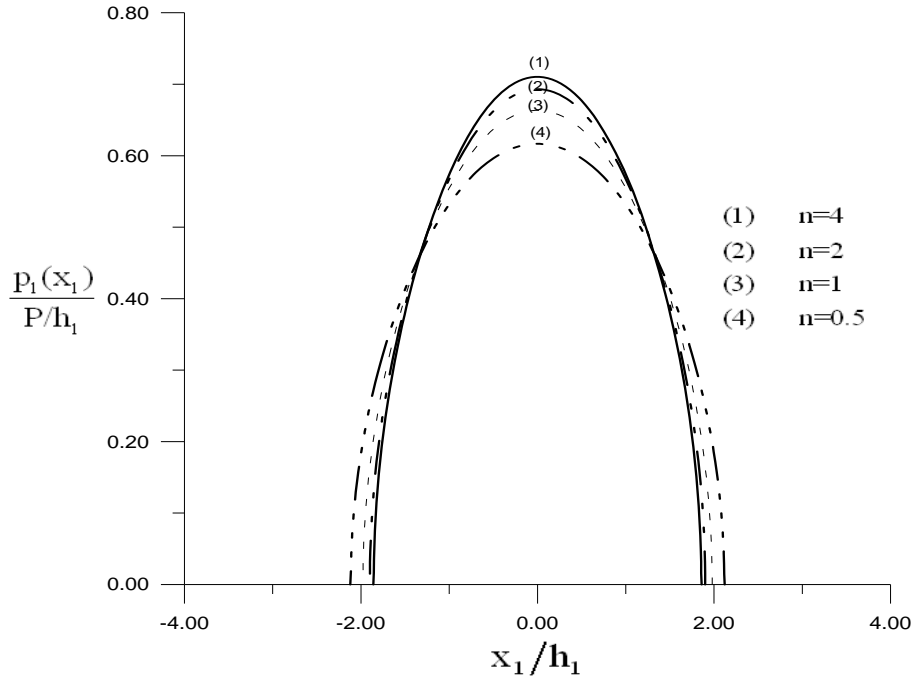
Şekil 15. Çeşitli yük değerleri için $y=-h$ da değme gerilmesi yayılışı
 ($h_2/h_1 = 2$ $m=2$, $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $R/h_1=500$)



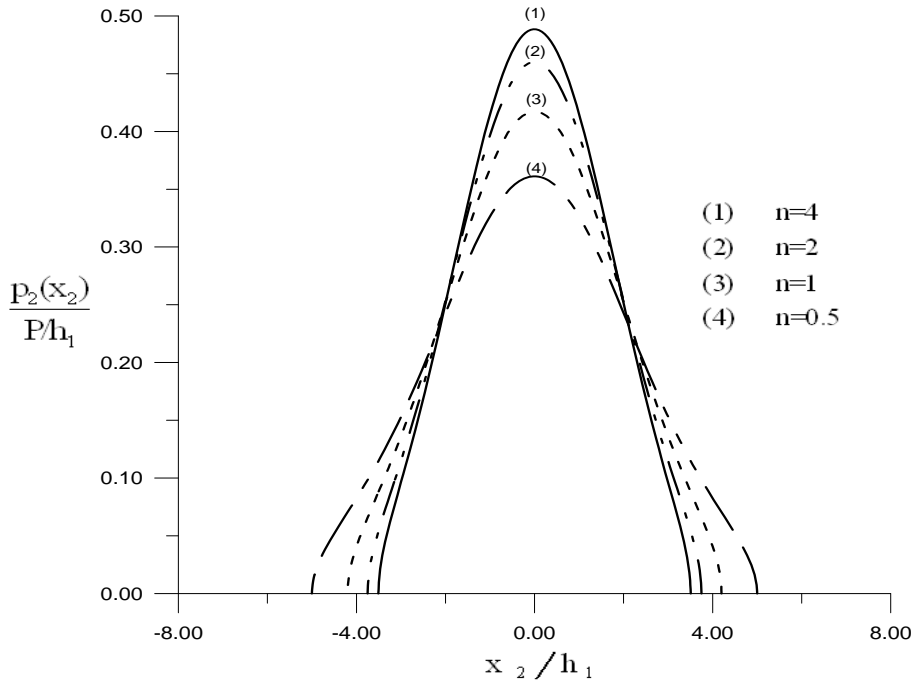
Şekil 16. Tabakaların kayma modülü oranlarına bağlı olarak $y=0$ da değme gerilmesi yayılışı ($h_2/h_1 = 2$ $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $R/h_1=500$, $G/(P/h_1)=100$)



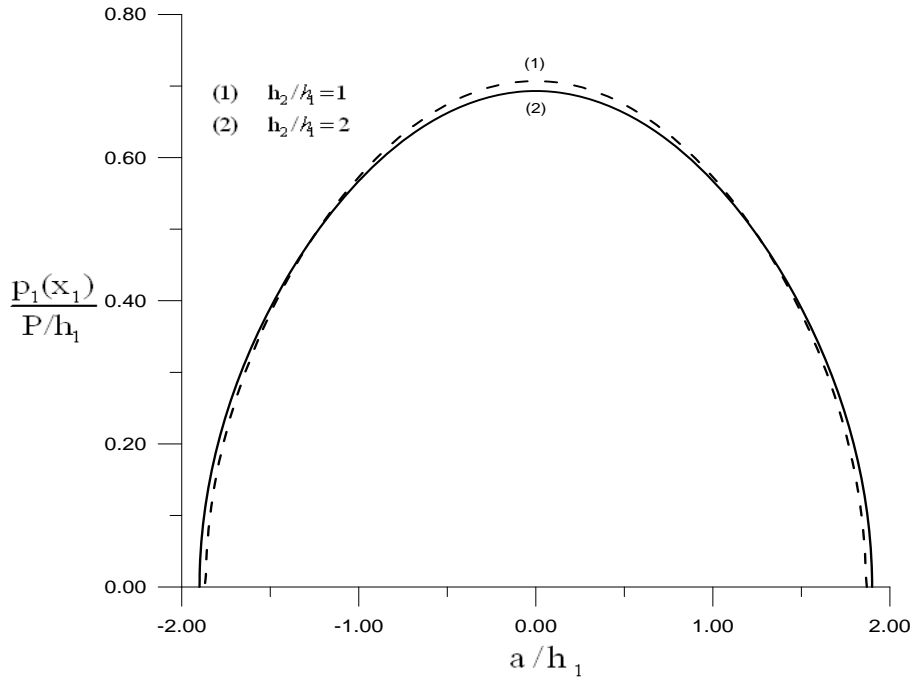
Şekil 17. Tabakaların kayma modülü oranlarına bağlı olarak $y=-h$ da Değme gerilmesi yayılışı ($h_2/h_1 = 2$ $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $R/h_1=500$, $G/(P/h_1)=100$)



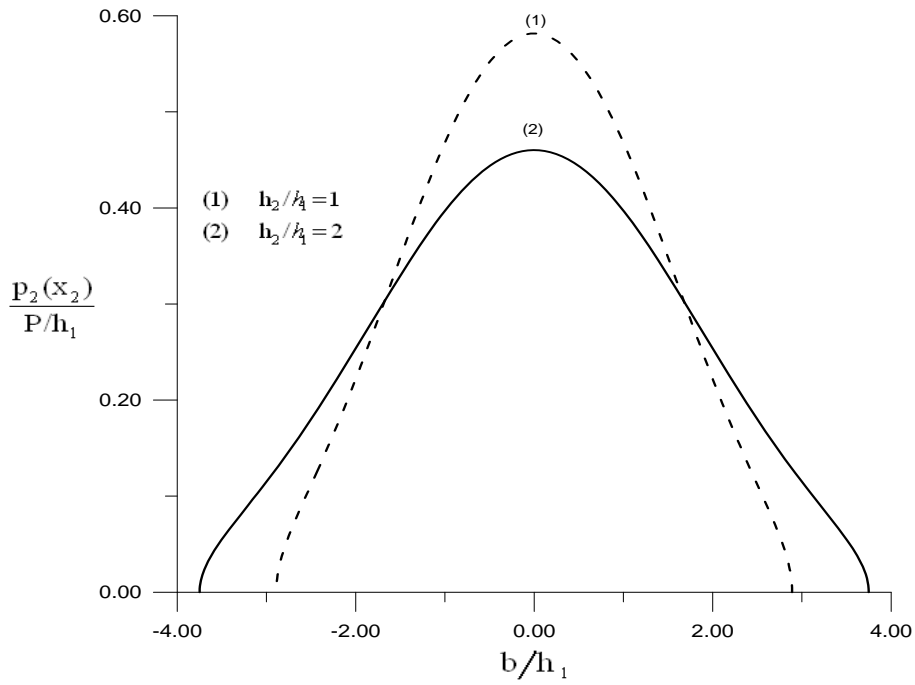
Şekil 18. Yarım düzlem ile alt tabakanın kayma modülü oranlarına bağlı olarak $y=0$ da değme gerilmesi yayılımı ($h_2/h_1 = 2$ $m=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $R/h_1=500$, $G/(P/h_1)=100$)



Şekil 19. Alt tabaka ile elastik yarım düzlemin kayma modülü oranlarına bağlı olarak $y=-h$ da değme gerilmesi yayılımı ($h_2/h_1 = 2$ $m=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $R/h_1=500$, $G/(P/h_1)=100$)



Şekil 20. Tabakaların yükseklikleri oranlarına bağlı olarak $y=0$ da değme Gerilmesi yayılımı ($m=2$, $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $R/h_1=500$, $G/(P/h_1)=100$)



Şekil 21. Tabakaların yükseklikleri oranlarına bağlı olarak $y=-h$ da değme gerilmesi yayılımı ($m=2$, $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $R/h_1=500$, $G/(P/h_1)=100$)

3.3. Gerilmelerin İncelenmesi

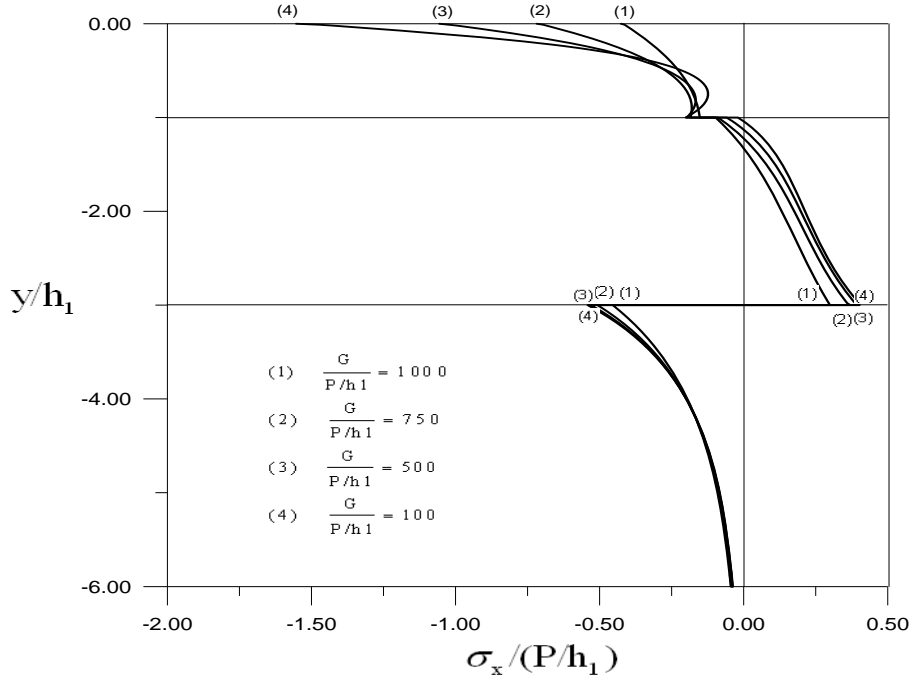
σ_x , σ_y normal gerilme bileşenleri y simetri eksenini boyunca τ_{xy} kayma gerilmesi ise y simetri ekseninde sıfır olduğundan, simetri eksenine yakın $x=0.5$ kesiti boyunca incelenmiştir.

3.3.1. σ_x Normal Gerilmeleri

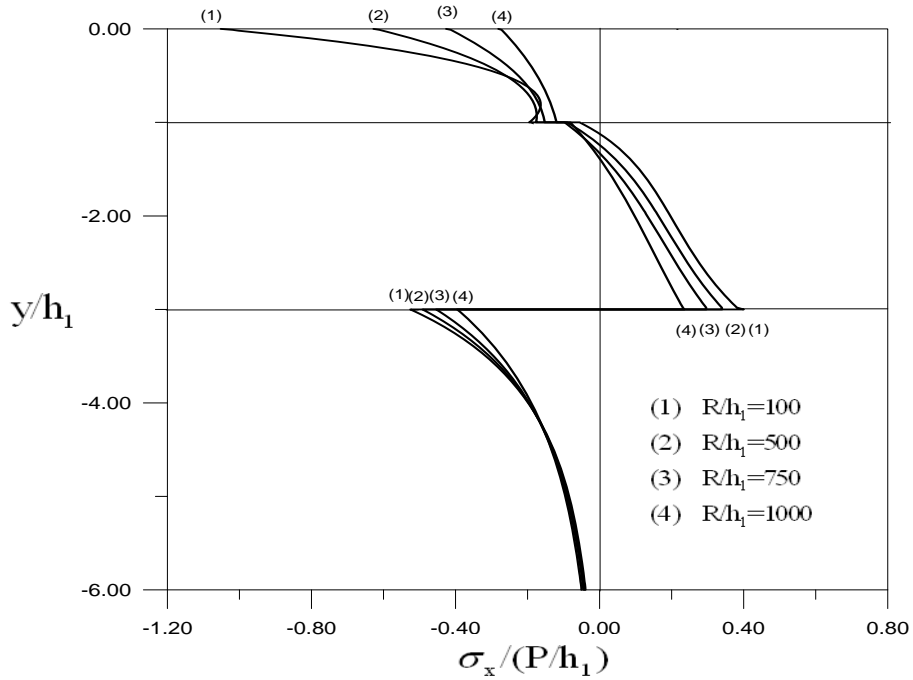
σ_x normal gerilmesinin yük, panç yarıçapı ve tabakalar ile elastik yarım düzlemin kayma modülleri oranı için y simetri eksenini boyunca dağılımı elde edilmiş ve grafik olarak sunulmuştur. Yükün panç ile uygulandığı sistemde ilk olarak normal gerilmenin yük ile değişimi incelenmiş olup Şekil 22’de verilmiştir. Burada birinci tabakanın tamamında basınç gerilmeleri oluşmakta ikinci tabakanın üst kısmında küçük bir bölgede basınç gerilmeleri oluşmakla birlikte değeri azalarak bir y değerinde gerilme sıfır olmakta ve işaret değiştirerek yarım düzleme kadar çekme gerilmesi olarak artmaktadır. Yarım düzlemde ise yük değişiminin bütün değerleri için yalnızca basınç gerilmeleri oluşmakta ve birbirlerine yakın değerler almaktadırlar. Şekilden görüleceği gibi yükün artması durumunda boyutsuz yük değişimi ifadesinin değeri azalmakta buna bağlı olarak da boyutsuz σ_x normal gerilme değeri azalmaktadır.

Normal gerilmenin yarıçap ile değişimi incelendiğinde üst tabaka ve elastik yarım düzlemde basınç, alt tabakanın üst bölgesinde basınç, altta daha büyük bir bölgesinde ise çekme gerilmeleri oluşmakta ve yarıçapın artması ile bu gerilmelerinin azaldığı Şekil 23’de görülmektedir.

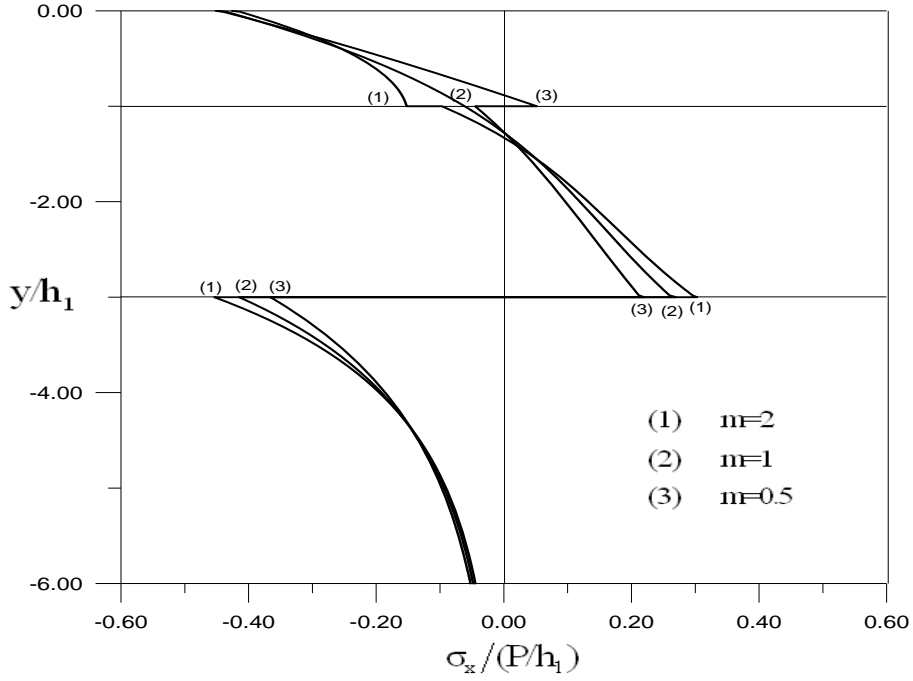
Tabakaların ve elastik yarım düzlem ile alt tabakanın kayma modülleri oranlarına bağlı olarak σ_x normal gerilme değerlerinin değişimi incelenmiştir. Üst tabakada pança yakın bölgede ve de elastik yarım düzlemin alt bölgelerinde her üç m değeri içinde gerilme çok yakın değerler almış m değeri küçüldükçe ilk tabakada basınç gerilmeleri oluşmuştur. İkinci tabakada küçük bir bölgede basınç gerilmeleri oluşmuş onun dışında kalan kısımlarda çekme gerilmeleri artmıştır. Çekme bölgesinde bir değerde üç eğri de kesiştiği görülmüştür. Yarım düzlemde ise tamamen basınç gerilmeleri hakimdir.



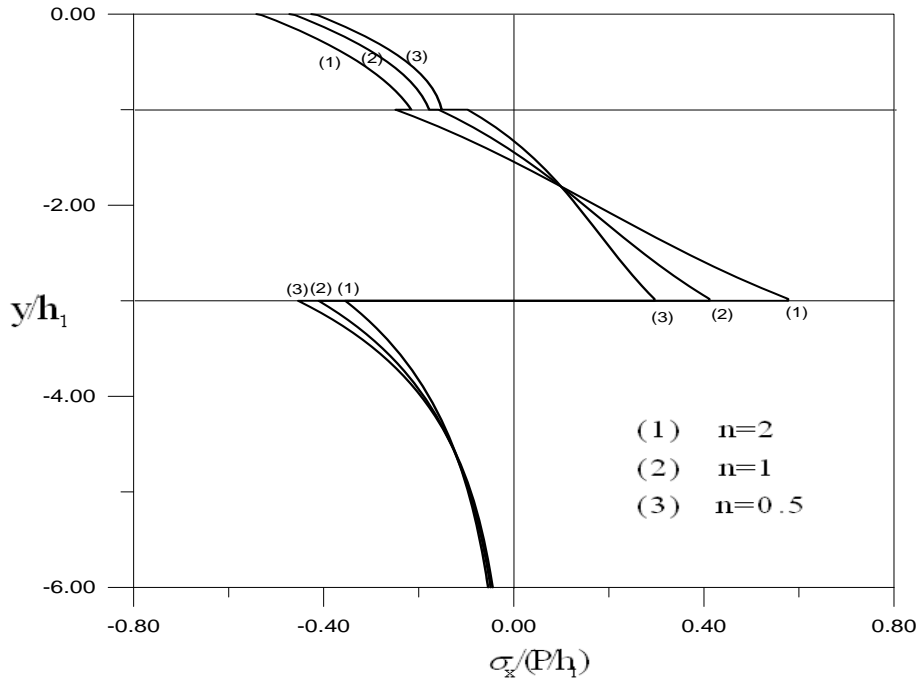
Şekil 22. Dairesel pañç durumunda $\sigma_x/(P/h_1)$ normal gerilmesinin yük ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$ $m=2$, $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $R/h_1=500$)



Şekil 23. Dairesel pañç durumunda $\sigma_x/(P/h_1)$ normal gerilmesinin yarıçap ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$ $m=2$, $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $G/(P/h_1)=100$)



Şekil 24. Dairesel pañç durumunda $\sigma_x / (P/h_1)$ normal gerilmesinin tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$ $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $R/h_1=500$, $G/(P/h_1)=100$)



Şekil 25 Dairesel pañç durumunda $\sigma_x / (P/h_1)$ normal gerilmesinin alt tabaka ile yarım düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$ $m=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $G/(P/h_1)=100$, $R/h_1=500$)

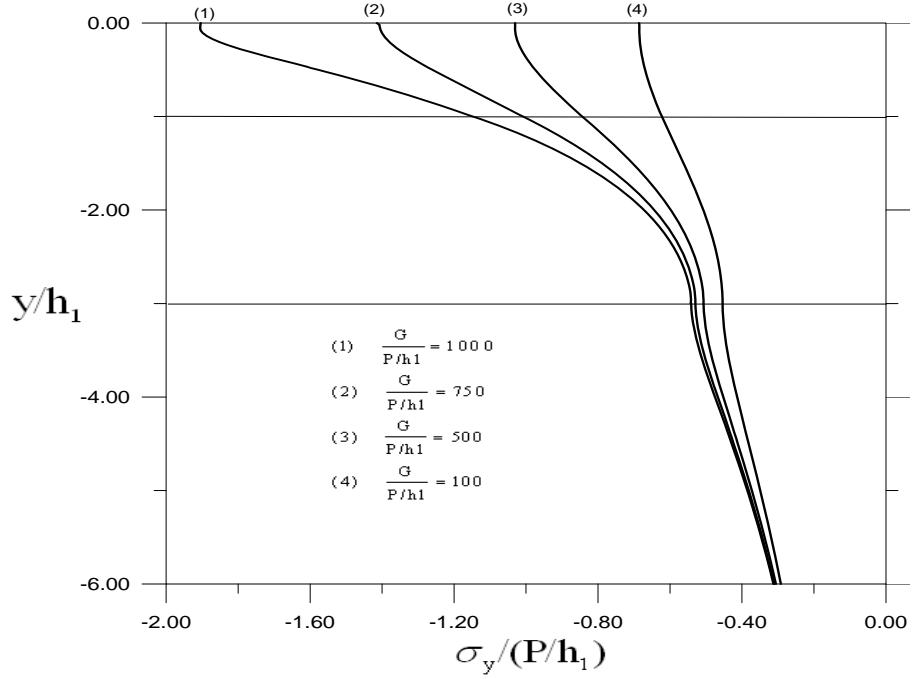
3.3.2. σ_y Normal Gerilmeleri

y simetri eksenini boyunca gerilmelerin yayılışı Şekil (26- 29)'da görülmektedir. σ_y normal gerilmeleri en büyük değerlerini pançın değme yüzeyinde ($y=0$) almakta ve pançtan uzaklaştıkça azalmaktadır.

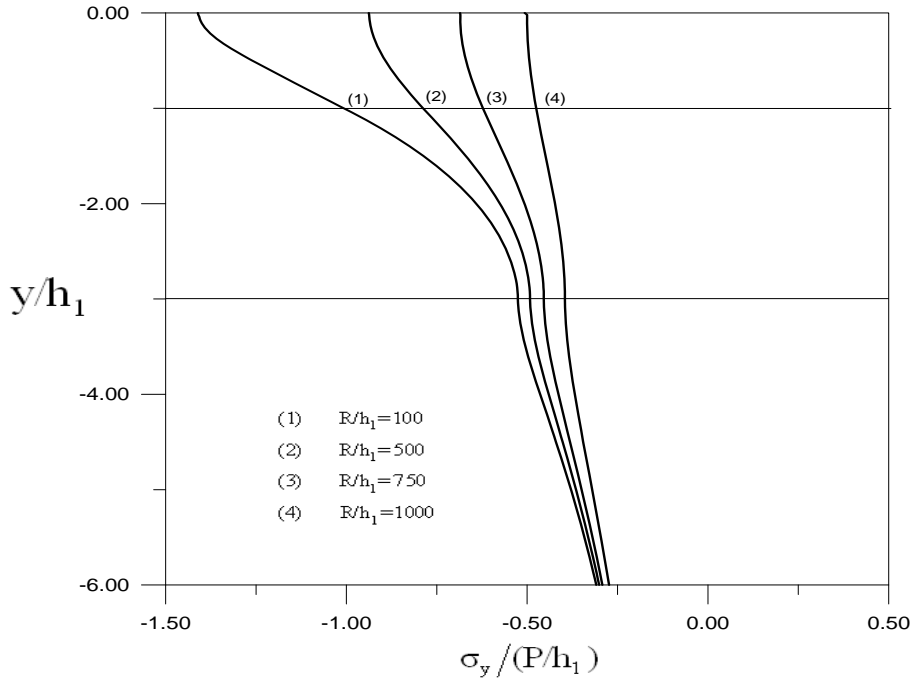
Yükün değişimine göre σ_y gerilmelerinin değişimi ise Şekil 26' da görülmektedir. Yükün değeri arttıkça boyutsuz gerilmelerin değeri artmaktadır. Panç yarıçapı arttıkça σ_y gerilmeleri azalmaktadır. Yarıçap azaldığında ise gerilmeler artmaktadır. Elastisite teorisinden tekil yük altında düşey normal gerilmelerin sonsuza gittiği bilinmektedir. Burada da yarıçapın azalması ile pançın değme yüzeyi azalmakta bunun sonucunda tekil yük haline yaklaşmaktadır. y simetri eksenini boyunca gerilmeler incelendiğinde yarıçapın ve yükün artması ile, σ_y normal gerilme değerlerinin arttığı görülmektedir.

$m=G_2/G_1$ ve $n=G_3/G_2$ kayma modülleri oranlarına göre σ_y gerilmesinin değişimi Şekil (28-29)'da incelenmiştir. Kayma modülleri oranı arttıkça gerilme değerlerinin azaldığı görülmektedir. n ve m grafikleri karşılaştırıldığında özellikle en üst tabakada her iki durum arasında gerilme değerleri arasındaki fark büyükken elastik yarım düzlemin ifade edildiği grafiğin en alt bölgesinde gerilme değerlerinin birbirine oldukça yakın değerler aldığı görülmektedir.

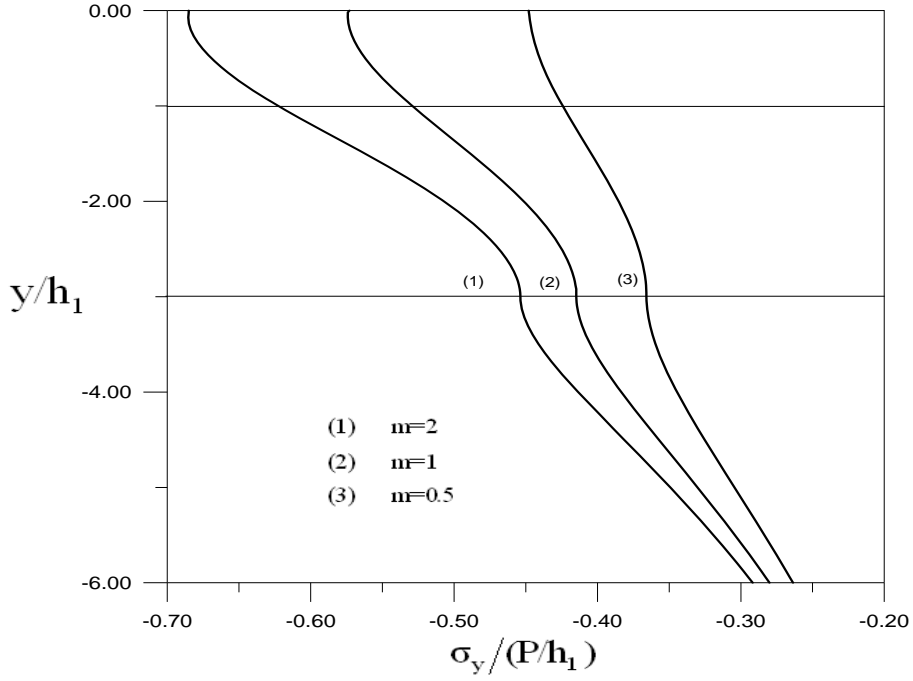
Değme gerilmeleri $y=0$ noktasında en büyük değerlerini alıp, giderek azalarak sıfıra yaklaşmaktadır.



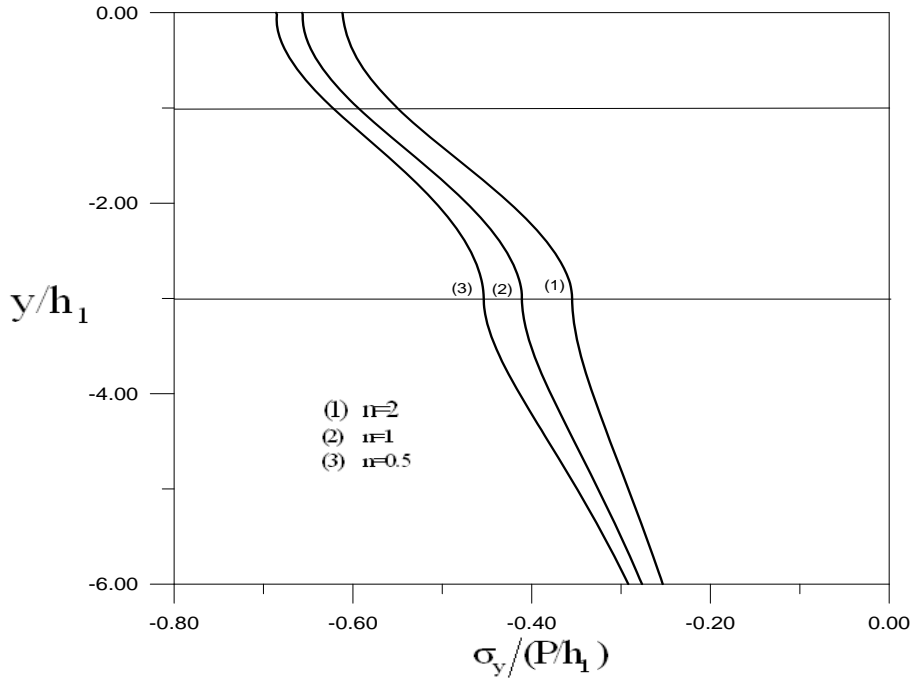
Şekil 26. Dairesel pañç durumunda $\sigma_y/(P/h_1)$ normal gerilmesinin yük ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$ $m=2$, $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $R/h_1=500$)



Şekil 27. Dairesel pañç durumunda $\sigma_y/(P/h_1)$ normal gerilmesinin yarıçap ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$ $m=2$, $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $G/(P/h_1)=100$)



Şekil 28. Dairesel panç durumunda $\sigma_y/(P/h_1)$ normal gerilmesinin Tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$, $m=2$, $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $R/h_1=500$, $G/(P/h_1)=100$)

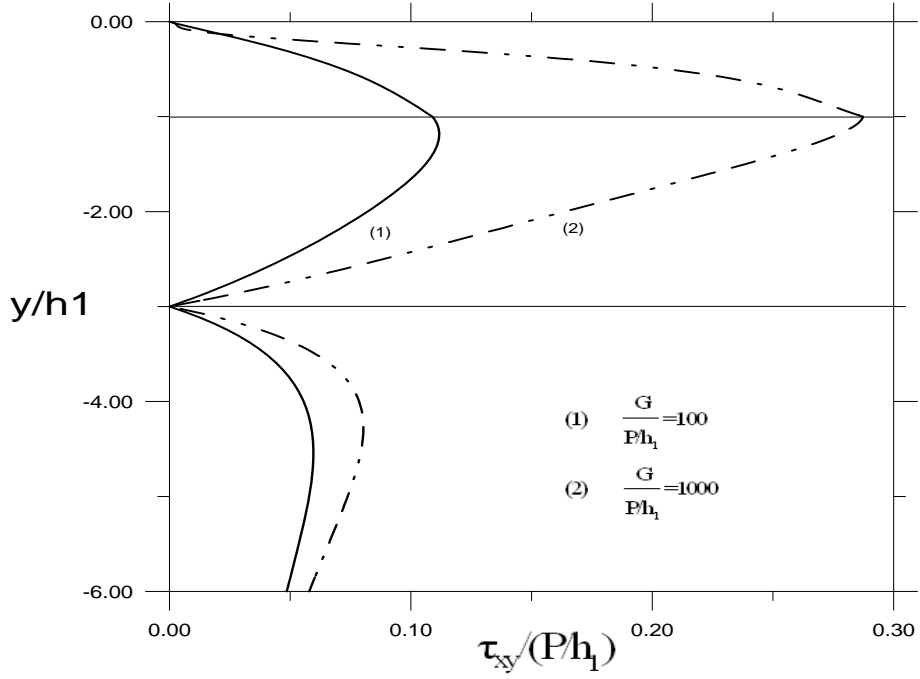


Şekil 29. Dairesel panç durumunda $\sigma_y/(P/h_1)$ normal gerilmesinin alt tabaka ile yarım düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$, $m=2$, $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $R/h_1=500$, $G/(P/h_1)=100$)

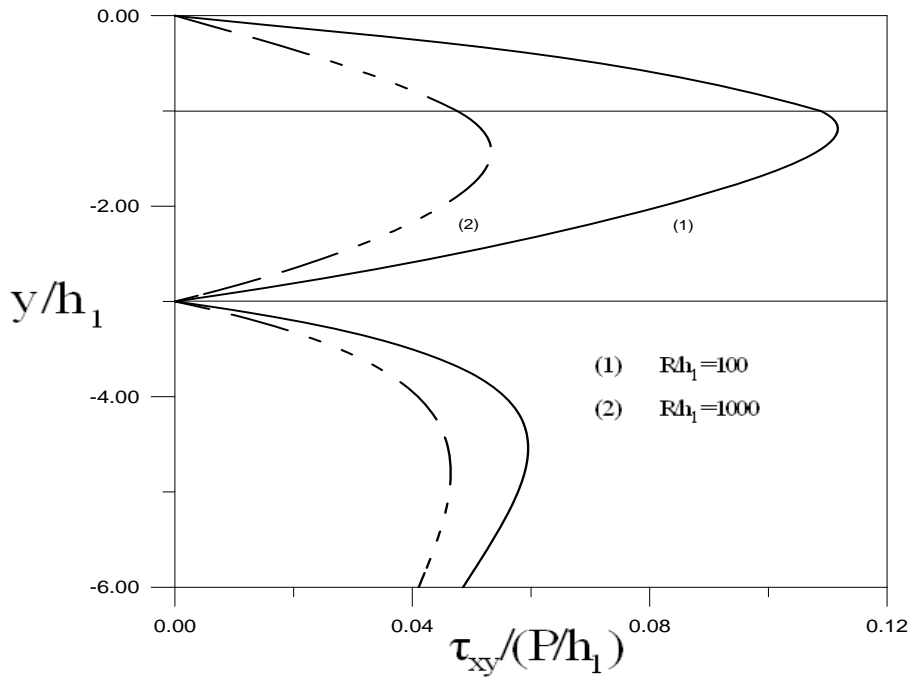
3.3.3 τ_{xy} Kayma Gerilmeleri

Elastik yarım düzlem ve tabakaların simetri kesitinde kayma gerilmeleri sıfırdır. Kayma gerilmelerinin değişimi $x=0.5$ değeri için incelenmiştir. Yükün artması durumunda, panç vasıtasıyla yükün uygulandığı üst tabakadan alt tabakaya doğru kayma gerilmeleri yükün artışı ile artmakta, yarım düzleme kadar olan alt tabaka boyunca kayma gerilmeleri yükün artışı ile azalmakta, yarım düzleme geçildiğinde ise belirli bir değere kadar artarak sabit kalmaktadır. Üst ve alt tabakanın değme yüzeyinde gerilme maksimum değerini almaktadır (Şekil 30). Yarım düzlemde ise kayma gerilmelerinde yükün artması ile meydana gelen artış en üst tabakaya göre daha az olmaktadır. Yarıçapın artması durumunda ise kayma gerilmeleri azalmaktadır (Şekil 31).

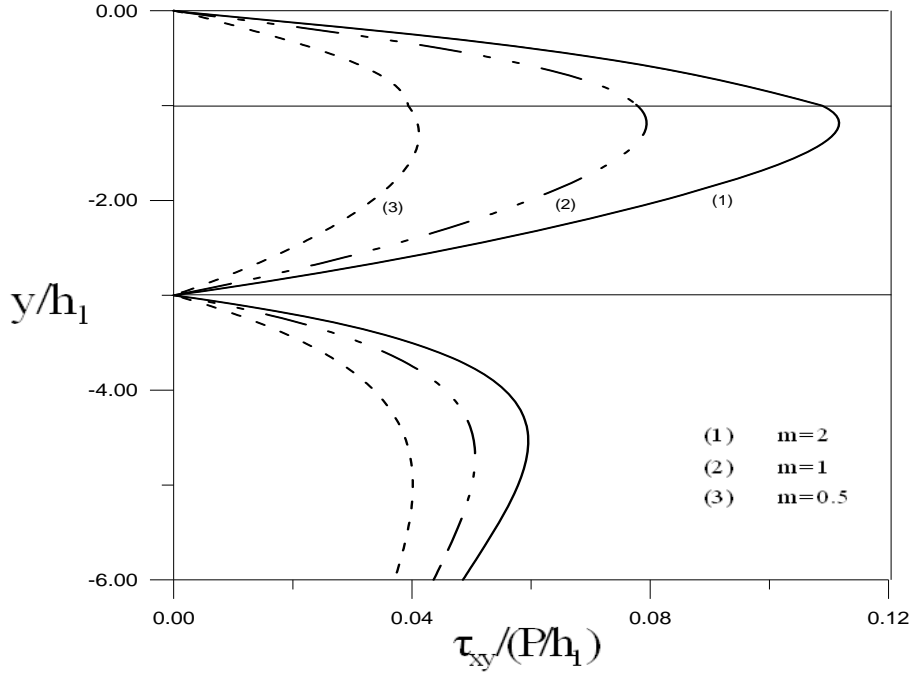
Kayma gerilmeleri üst, alt tabaka ve elastik yarım düzlemin kayma modülleri oranlarının değişimlerine göre de incelenmiş ve Şekil (32-33)'de verilmiştir. Bu şekillerden görüldüğü üzere üst tabaka ile alt tabakanın kayma modülleri oranları arttıkça kayma gerilmeleri üst tabaka ve yarım düzlem için artmakta alt tabaka içinse azalmaktadır. Alt tabaka ile yarım düzlemin kayma modülleri oranı ise kayma gerilmeleri ile ters orantılı olarak değişmektedir. Kayma modülleri oranı arttıkça kayma gerilmeleri azalmaktadır.



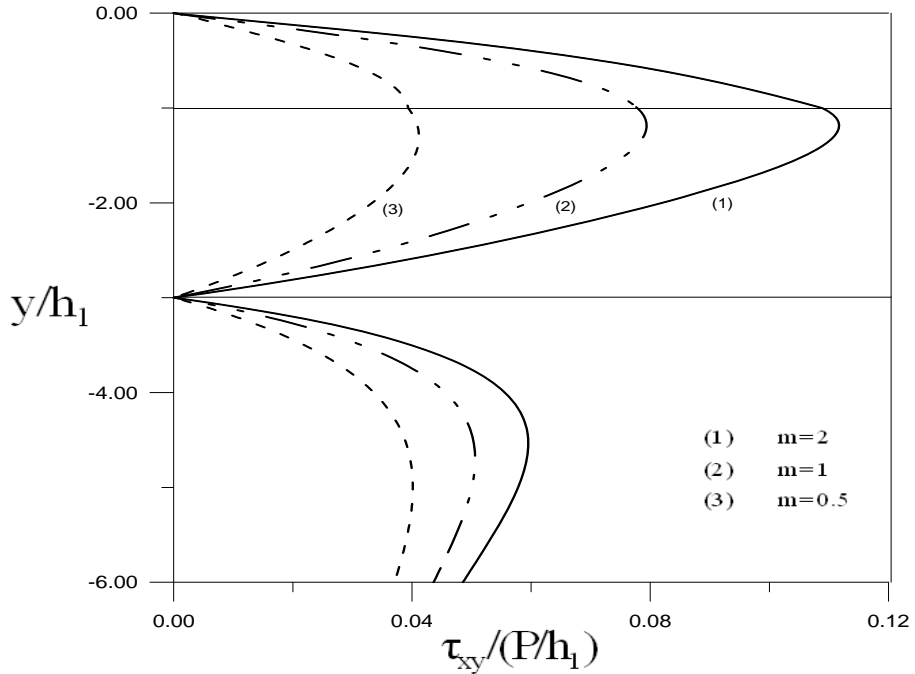
Şekil 30. Dairesel panç durumunda $\tau_{xy} / (P/h_1)$ kayma gerilmesinin yük ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$ $m=2$, $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $R/h_1=500$)



Şekil 31. Dairesel panç durumunda $\tau_{xy} / (P/h_1)$ kayma gerilmesinin yarıçap ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$ $m=2$, $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $R/h_1=500$)



Şekil 32. Dairesel pañç durumunda $\tau_{xy}/(P/h_1)$ kayma gerilmesinin tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$, $m=2$, $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $R/h_1=500$, $G/(P/h_1)=100$)



Şekil 33. Dairesel pañç durumunda $\tau_{xy}/(P/h_1)$ kayma gerilmesinin alt tabaka ile yarım düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$, $m=2$, $n=2$, $R/h_1=500$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $G/(P/h_1)=100$)

3.4. Çatlak Uçlarındaki Gerilme Şiddet Faktörleri

Gerilme şiddet faktörü; çatlak uçlarına yaklaştıkça artan gerilmelerin hesaplanabilmesi için gerekli bir büyüklük olup çatlağın ilerleme durumu ve tehlikesi hakkında bilgi vermektedir.

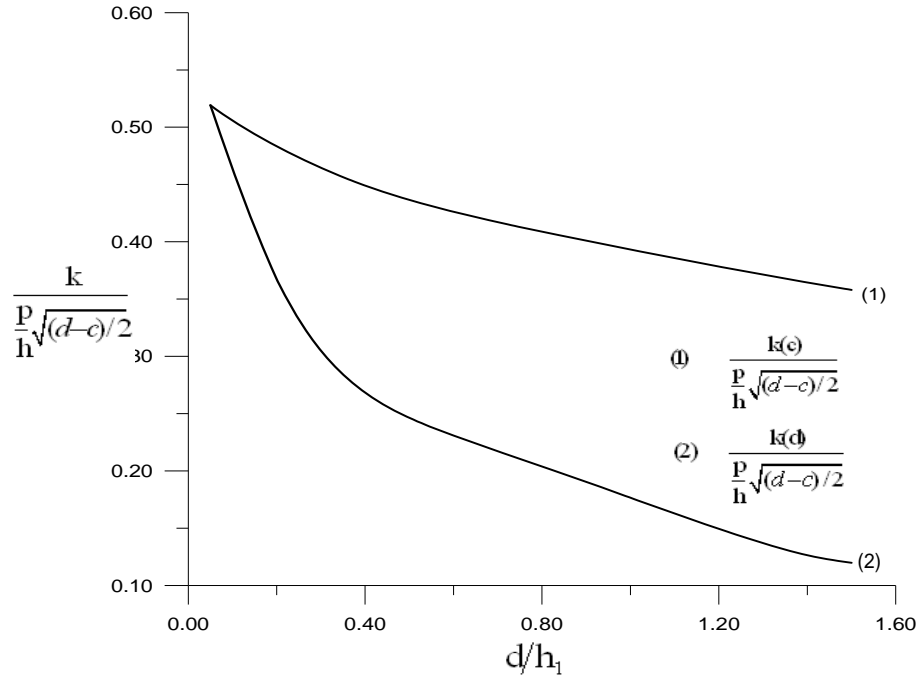
Elastik yarım düzleme oturan ve alt tabakasında düşey bir çatlağı bulunan yapışık iki tabakadan oluşan problemde gerilme şiddet faktörleri iç ve kenar çatlak durumlarına göre incelenmiş ilgili sonuçlar grafiklerle sunulmuştur.

3.4.1. İç Çatlak Halinde Gerilme Şiddet Faktörleri

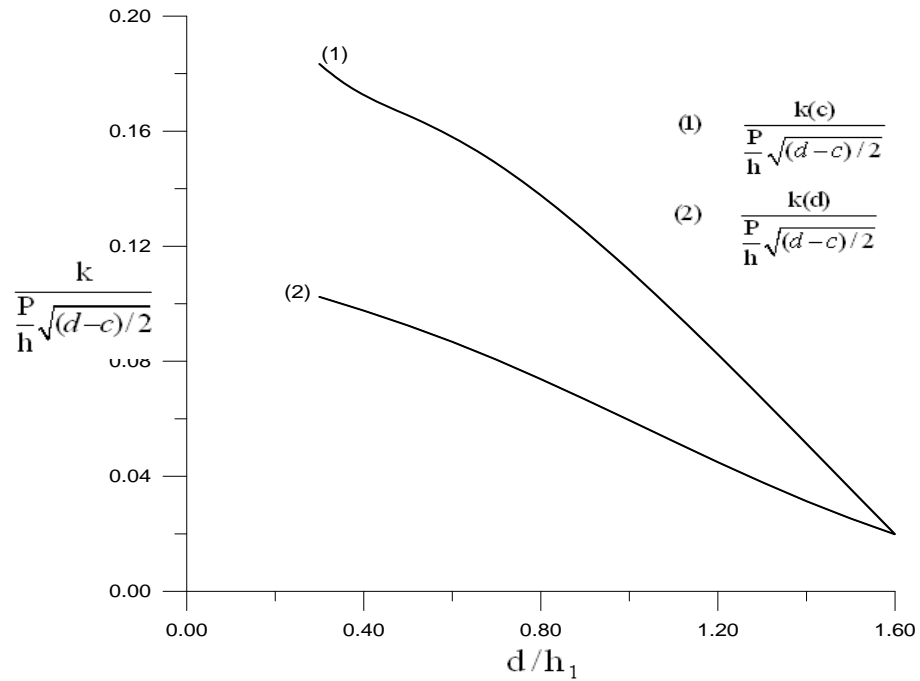
Alt tabakasında düşey bir çatlak bulunan ve elastik yarım düzleme oturan yapışık iki tabaka için yazılan, gerilmeyi ifade eden integral denklemin singüleriteyi ifade etmek için yazılan integral denklem ile birlikte çözülmesi ile çeşitli boyutsuz büyüklükler için $g(\xi)$ değerleri elde edilmiş ve $g(\xi)$ 'nin uç noktalarındaki $g(-1)$, $g(1)$ değerlerine bağlı

olarak da $\frac{k(c)}{\sqrt{\frac{d-c}{2} \frac{P}{h_1}}}$ ve $\frac{k(d)}{\sqrt{\frac{d-c}{2} \frac{P}{h_1}}}$ boyutsuz büyüklükleri hesaplanmıştır.

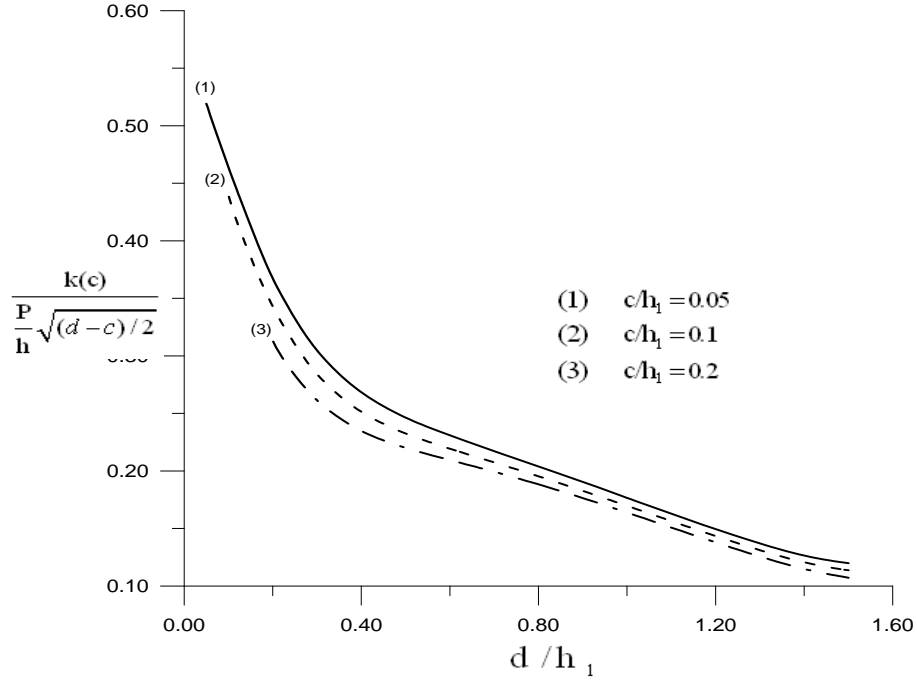
İç çatlak olması halinde gerilme şiddet faktörleri ile ilgili grafikler Şekil (34-38)'de verilmektedir.



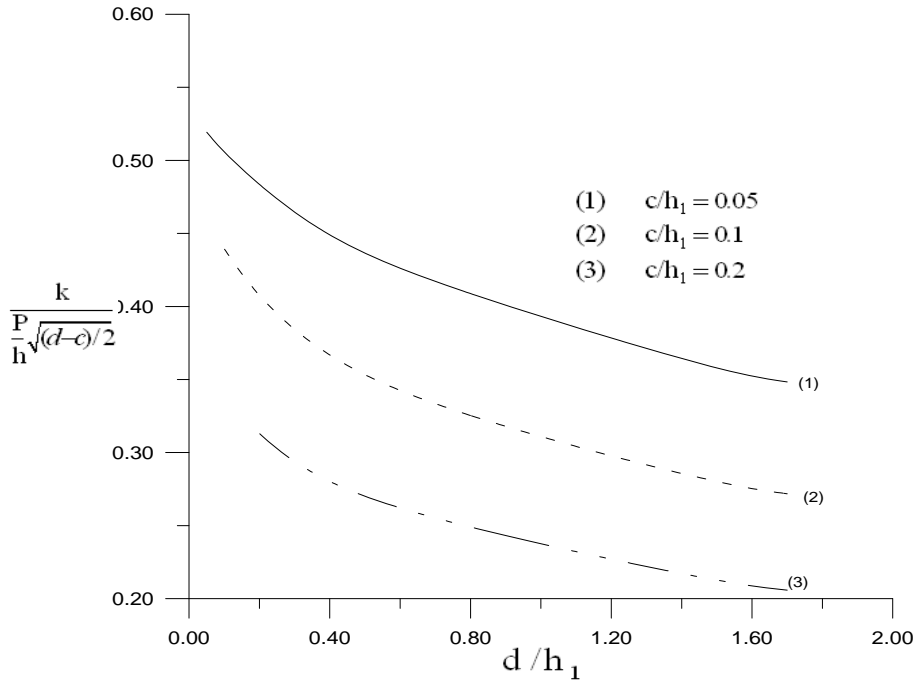
Şekil 34 İç çatlakın c ve d uçlarındaki gerilme şiddet faktörlerinin d/h_1 ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$, $m=0.5$, $n=0.5$, $c/h_1=0.05$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $R/h_1=500$).



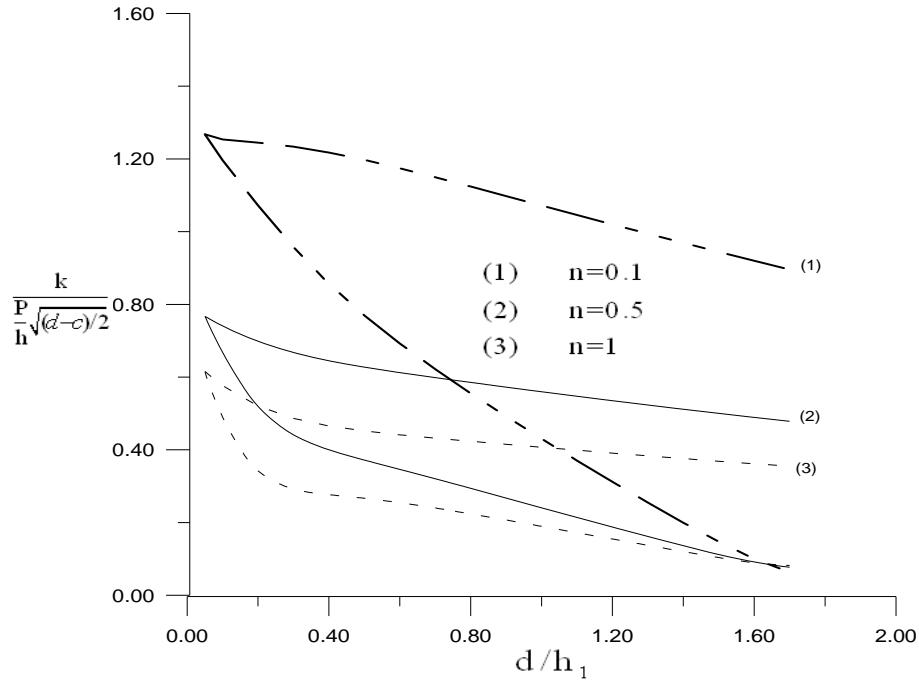
Şekil 35 İç çatlakın c ve d uçlarındaki gerilme şiddet faktörlerinin c/h_1 ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$, $m=0.5$, $n=0.5$, $c/h_1=0.05$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $R/h_1=500$).



Şekil 36. Çeşitli c/h_1 oranları için iç çatlakın d ucundaki gerilme şiddet faktörlerinin d/h_1 ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$, $m=0.5$, $n=0.5$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $R/h_1=500$)



Şekil 37. Çeşitli c/h_1 oranları için iç çatlakın c ucundaki gerilme şiddet faktörlerinin d/h_1 ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$, $m=0.5$, $n=0.5$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $R/h_1=500$)



Şekil 38. Yarı düzlem ile alt tabakanın kayma modülü oranlarına bağlı olarak iç çatlağın c ve d uçlarındaki gerilme şiddet faktörlerinin d/h_1 ile değişimi. ($h_2/h_1 = 2$, $m=0.5$, $c/h_1=0.05$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $R/h_1=500$).

Elastik tabakada iç çatlak olması durumunda önce c değeri sabit tutulup d değeri artırılarak, daha sonrada d değeri sabit tutulup c değeri artırılarak gerilme şiddet faktörlerinin değişim incelenmiştir (Şekil 34-35).

Grafiklerden görülebileceği gibi iç çatlağın d ucundaki gerilme şiddet faktörü $k(d)$ değerleri c ucundaki gerilme şiddet faktörü $k(c)$ değerlerine göre daha hızlı azalmaktadır. Çatlak uçlarındaki gerilme şiddet faktörleri $\sigma_x(0,y)$ normal gerilmelerine bağlı olarak değişmektedir. Bu gerilme değerlerini arttıran nedenler çatlak uçlarındaki gerilme şiddet faktörlerini de arttırmaktadır.

Çatlağın çok küçük olması durumunda c ve d uçlarındaki gerilme şiddet faktörleri birbirine eşit olup çatlağın bulunduğu noktadaki σ_x normal gerilme değeri ile $\sqrt{(d-c)/2}$ 'nin çarpımına eşit olmaktadır. $k(c)=k(d)=\sigma_{x_1}^*(0,0 \leq y \leq h_1) * \sqrt{(d-c)/2}$

Çatlağın c ucunun kenara yaklaşması durumunda ise çatlak boyunun büyümesi ile her iki uca gerilme şiddet faktörü artmaktadır. Çatlak ucunun $k(c)$ ve $k(d)$ gerilme şiddet faktörlerinin c/h ve d/h ile değişimi Şekil (34-35) de verilmiştir.

Altteki tabakanın kayma modülü G_2 'nin üstteki tabakanın kayma modülü G_1 'e göre artmasıyla tabakaların kayma modülü oranı $m = G_2 / G_1$ artıp her iki uçta gerilme şiddet faktörleri artmış ve üç farklı m değeri için Tablo 3 de verilmiştir.

Tablo 3. Tabakaların kayma modülü oranlarının farklı değerleri için iç çatlak durumunda c ve d uçlarındaki gerilme şiddet faktörlerinin d/h ile değişimi ($R_h=500$, $G_{ph}=100$, $ch_1=0.05$, $n=0.5$).

d/h_1	$m=0.5$		$m=1$		$m=2$	
	$k(d)$	$k(c)$	$k(d)$	$k(c)$	$k(d)$	$k(c)$
	$\frac{P}{h_1} \sqrt{\frac{d-c}{2}}$	$\frac{P}{h_1} \sqrt{\frac{d-c}{2}}$	$\frac{P}{h_1} \sqrt{\frac{d-c}{2}}$	$\frac{P}{h_1} \sqrt{\frac{d-c}{2}}$	$\frac{P}{h_1} \sqrt{\frac{d-c}{2}}$	$\frac{P}{h_1} \sqrt{\frac{d-c}{2}}$
0.0501	0.519214	0.519281	0.676849	0.676992	0.767046	0.767177
0.1	0.463705	0.505803	0.459199	0.615607	0.667644	0.740339
0.2	0.367132	0.483481	0.387687	0.589389	0.518823	0.698483
0.3	0.304573	0.464467	0.349433	0.569904	0.440908	0.667557
0.4	0.268168	0.448961	0.325101	0.554846	0.399768	0.644922
0.5	0.246301	0.436463	0.304834	0.542289	0.371459	0.627302
0.6	0.23074	0.426092	0.284498	0.530976	0.345900	0.612245
0.7	0.217192	0.417074	0.264532	0.520245	0.320134	0.598384
0.8	0.203894	0.408739	0.243629	0.509772	0.293782	0.585124
0.9	0.190337	0.400851	0.222528	0.499444	0.267060	0.572182
1	0.176551	0.393199	0.201534	0.489248	0.240404	0.559495
1.1	0.162778	0.385715	0.180941	0.479181	0.213866	0.547070
1.2	0.149391	0.378388	0.161134	0.46937	0.187596	0.534872
1.3	0.13694	0.371256	0.142727	0.459717	0.161706	0.523027
1.4	0.126392	0.364394	0.127079	0.450445	0.136426	0.511407
1.5	0.119779	0.357947	0.120460	0.441695	0.122373	0.500039

3.4.2. Kenar Çatlak Halinde Gerilme Şiddet Faktörleri

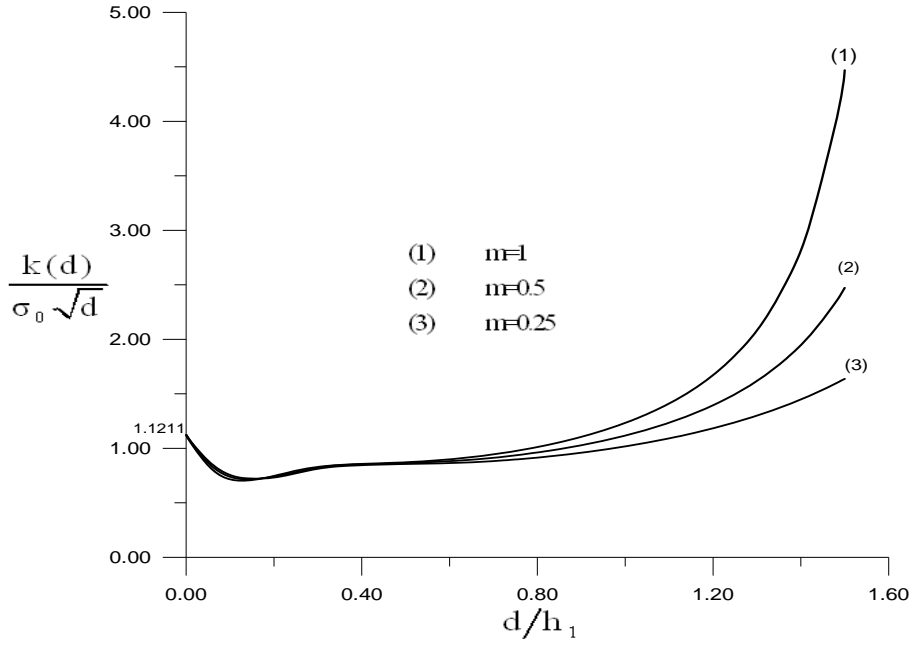
Alt tabakasında çatlak bulunan ve elastik yarım düzlem üzerine oturan çift tabakada kenar çatlak durumu incelendiğinde, kenar çatlak durumunda yakınsama iç çatlaktaki kadar iyi olmamaktadır. Bu durumda N nokta sayısının artırılması yoluna gidilebilir ancak hesaplamalarda üç nokta extrapolasyonunun daha iyi sonuç sağladığı gözlenmiştir. Tablo 4 de kenar çatlak halinde N nokta sayıları 18, 24 ve 36 alınarak üç nokta extrarpolasyonu için gerilme şiddet faktörünün çatlak uzunluğu ile değişimi verilmektedir. çatlağın d

ucundaki gerilme şiddet faktörü çatlak boyunun çok küçük olması halinde 1.1211 limit değerini almaktadır.

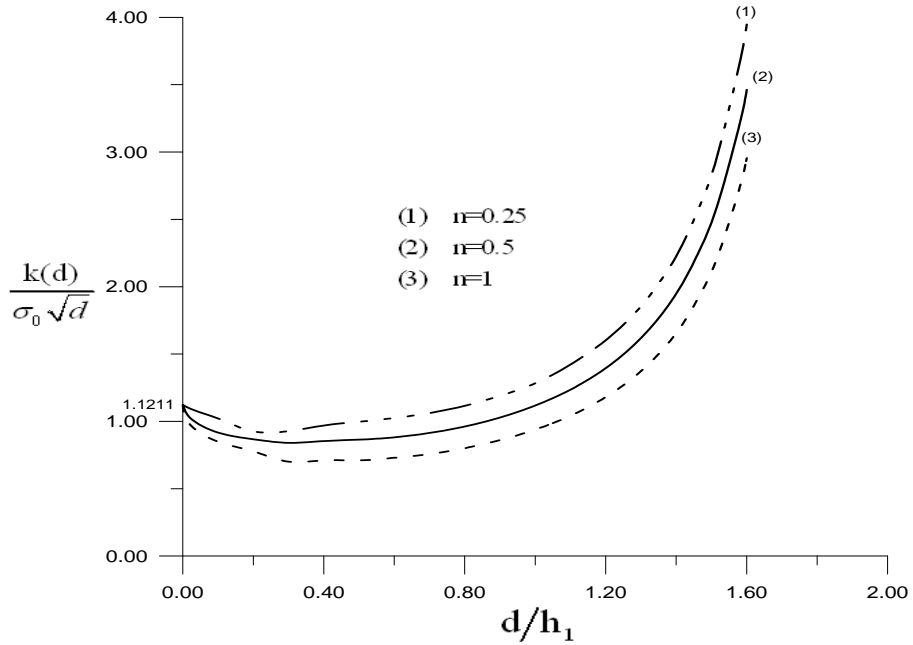
Tablo 4. Gauss-Chebyshev integrasyonunda kullanılan çeşitli N nokta sayıları ve üç nokta extrapolasyonu için kenar çatlak d ucundaki gerilme şiddet faktörünün d/h_1 ile değişimi

d/h_1	$\frac{k(d)}{\sigma_0 \sqrt{d}}$			
	N=18	N=24	N=36	Üç Nokta Extr. $N \rightarrow \infty$
0.0001	1.051350	1.068420	1.085740	1.121130
0.05	1.064600	1.061210	1.073380	1.144400
0.1	1.038960	1.042920	1.028450	0.944220
0.2	0.940775	0.937688	0.927023	0.930000
0.3	0.873526	0.874693	0.883985	0.926944
0.4	0.836413	0.847536	0.873383	0.969249
0.5	0.821821	0.842628	0.878744	0.996903
0.6	0.824210	0.852724	0.895553	1.024156
0.7	0.840398	0.875052	0.923478	1.061646
0.8	0.869351	0.909494	0.963844	1.115165
0.9	0.911835	0.957720	1.019200	1.188945
1	0.970329	1.023900	1.093640	1.281627
1.1	1.049380	1.111220	1.193730	1.420760
1.2	1.156630	1.231380	1.330320	1.600770
1.3	1.305100	1.399600	1.522360	1.852660
1.4	1.518330	1.645820	1.806010	2.224490
1.5	1.843120	2.032630	2.259210	2.823580
1.6	2.387130	2.716330	3.086170	3.947770

Kenar çatlak durumunda tabakaların ve alt tabaka ile elastik yarım düzlemin kayma modülü oranlarına göre kenar çatlak d ucundaki gerilme şiddet faktörlerine ait grafikler Şekil (39-40)'da verilmektedir.



Şekil 39. Tabakaların kayma modülleri oranlarına bağlı olarak kenar çatlağın d ucundaki gerilme şiddet faktörünün çatlak uzunluğu ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$, $m=2$, $n=2$, $R/h_1=500$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $G/(P/h_1)=100$)



Şekil 40 Alt tabaka ile elastik yarım düzlemin kayma modülleri oranlarına bağlı olarak kenar çatlağın d ucundaki gerilme şiddet faktörünün çatlak uzunluğu ile değişimi ($h_2/h_1 = 2$, $m=2$, $n=2$, $R/h_1=500$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$, $G/(P/h_1)=100$)

4. TARTIŞMALAR

Elastik yarım düzleme oturan yapışık çift tabakalı değme probleminde $h_2=0$ ve uygulanan tekil yük $2P$ yerine P olarak alındığında bu çalışma Çömez (2009) tarafından incelenen sürtünmeli ayrılmalı değme problemindeki sürtünme katsayısı $\eta=0$ olması halinde verilmiş sonuçlarla üst üste düşmektedir.

Bu tezdeki değme probleminde farklı yarıçap değerlerine göre bulunan değme uzunluk değerleri ile Çömez (2009) tarafından bulunan değerler Tablo 5’ de karşılaştırılmıştır. Benzer bir karşılaştırmada tabakaların kayma modülleri oranı $m=1$ ve $h_2=0$ alındığında alt tabaka ile elastik yarım düzlemin kayma modülleri oranının değişimine göre değme uzunlukları için yapılmıştır (Tablo 6).

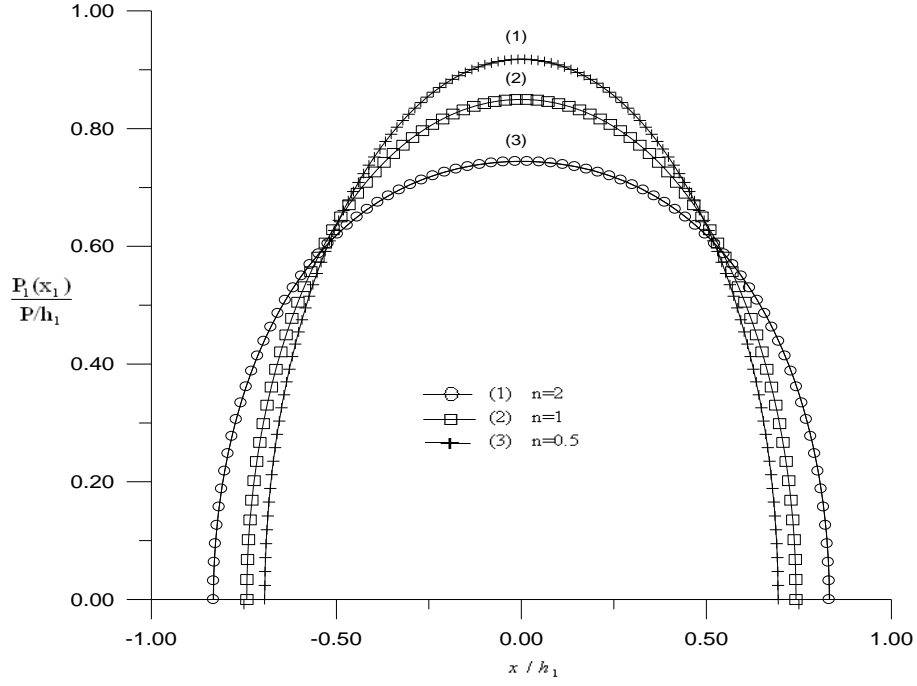
Tablo 5. Yarıçap değişimine göre değme uzunluklarının literatürle karşılaştırılması ($G/(P/h_1)=125$, $m=1$, $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$)

R/h ₁	Bu tezde hesap edilen değme uzunlukları		Çömez (2009)	
	a/h ₁	b/h ₁	a/h ₁	b/h ₁
100	0.620872	1.264009	0.620872	1.264009
250	0.97448254	1.4654589	0.974469	1.462890
500	1.3548646	1.7408524	1.355004	1.737548

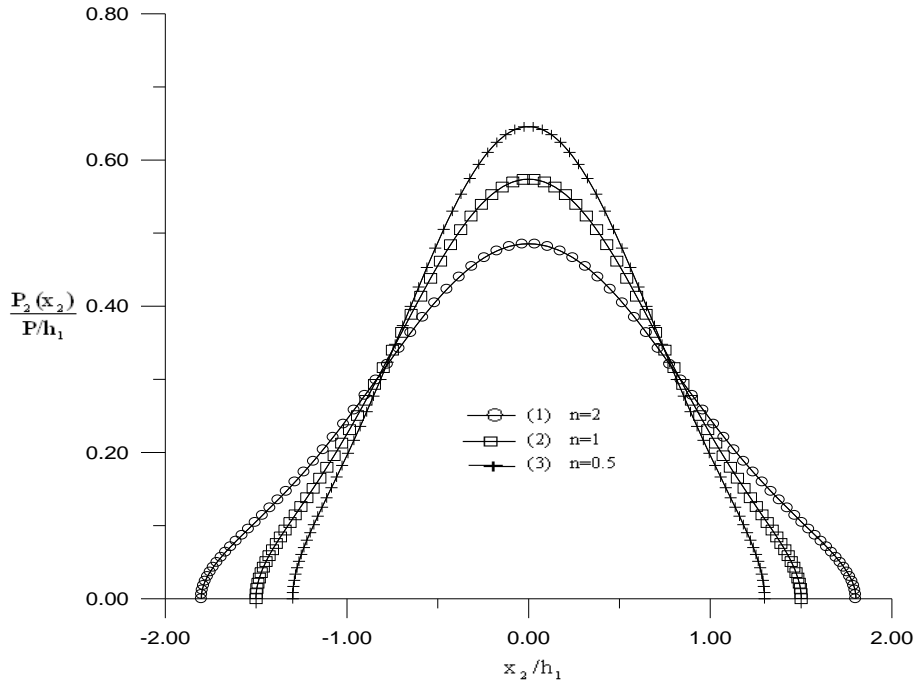
Tablo 6. Kayma modülü oranlarının değişimine göre değme uzunluklarının literatürle karşılaştırılması ($G/(P/h_1)=125$, $m=1$, $n=2$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$)

n	Bu tezde hesap edilen değme uzunlukları		Çömez (2009)	
	a/h ₁	b/h ₁	a/h ₁	b/h ₁
0.5	0.832467	1.802684	0.832467	1.801684
1	0.742544	1.501531	0.742544	1.500531
2	0.693773	1.299064	0.693733	1.299064

Yukarıdaki tablolardan da görülebileceği gibi yarıçapın artmasıyla hem pançın değme uzunluğu hem de tabaka ile elastik yarım düzlemin değme uzunluğu artmaktadır. Kayma modülü oranları incelendiğinde ise değme uzunluklarının azaldığı görülmektedir. Yine iki çalışmanın değme gerilmeleri Şekil (41- 42)’de karşılaştırılmıştır.



Şekil 41. Panç ile tabaka arasındaki değme gerilmesinin kayma modülleri oranı ile değişimi ($R/h_1=250$, $G/(P/h_1)=250$, $m=1$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$).



Şekil 42. Tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme gerilmesinin kayma modülleri oranı ile değişimi ($R/h_1=250$, $G/(P/h_1)=250$, $m=1$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$).

Bu grafiklerde (1), (2) ve(3) ile verilen eğriler bu teze dairesel, kare ve artı işaretli veriler ise Çömez (2010)'e ait olmaktadır. Grafikler incelendiğinde her iki çalışma için bulunan değme gerilme değerlerinin birbiri üzerine düştüğü görölmektedir.

Aynı problemin alt tabakasında iç çatlak olması durumuna ait çatlak uçlarındaki gerilme şiddet faktörleri incelendiğinde d ucundaki gerilme şiddet faktöründeki azalma c ucundakinden daha hızlı olmakta bu da literatürle uyum sağlamaktadır (Birinci, 1998, Matysiak, 2003).

Kenar çatlak durumu incelendiğinde ise çatlağın çok küçük olması halinde literatüre (Erdöl, 1982, Birinci, 1998,) uygun 1.1211 değerini almaktadır.

5. SONUÇLAR

Rijit bir pançla elastik yarım düzleme bastırılan yapışık iki elastik tabakanın değme problemi ve alt tabakasinda çatlak olması haline ait problemin çözümünün yapıldığı bu çalışmada, dairesel panç durumunda değme yüzeyleri, değme gerilmeleri, tabakalarda oluşan σ_x , σ_y , τ_{xy} gerilmeleri ve alt tabakada çatlakın bulunması durumunda da iç ve kenar çatlak olması durumları için gerilme şiddet faktörleri araştırılmıştır.

Dairesel panç durumunda, panç yarıçapı ve yük arttıkça, pançın değme yüzeyi ve alt tabakanın elastik yarım düzleme değme yüzeyi büyümektedir. Alt tabaka ile elastik yarım düzlemin değme yüzeyi pançın üst tabakaya değme yüzeyinden her zaman büyük olmaktadır. Değme yüzeyleri arttıkça gerilme daha büyük alana yayılacağından değme gerilmeleri azalmaktadır.

Elastik sabitler birbirlerine eşit değerler aldığında Poisson oranları aynı olacak böylece üst tabakanın alt tabakaya kayma modülleri oranı m ve elastik yarım düzlemin alt tabakanın kayma modülleri oranı n 'in değişimi yalnızca Elastisite modüllerinin değişimi ile olacaktır. Kayma modülleri oranlarının artmasıyla değme yüzeyleri küçülecek ve değme gerilmeleri artacaktır.

σ_x ve σ_y normal gerilmelerinin yük, panç yarıçapı ve kayma modülü oranları için grafikleri elde edilmiştir. Yük veya yarıçapın artması ile normal gerilmeler artmaktadır. Üst tabaka ile pançın kayma modülleri oranları m ve elastik yarım düzlemler alt tabakanın kayma modülleri oranı n 'in artmasıyla normal gerilmeler artmaktadır.

σ_y gerilmeleri $y=0$ da en büyük değerlerini alıp, giderek azalarak sıfıra yaklaşmaktadırlar.

Elastik yarım düzlem ve tabakaların simetri kesitinde kayma gerilmeleri sıfırdır. Kayma gerilmelerinin değişimi $x=0.5$ değeri için incelenmiştir. Yükün artması durumunda, panç vasıtasıyla yükün uygulandığı üst tabakadan alt tabakaya doğru artmakta, yarım düzleme kadar olan alt tabaka boyunca kayma gerilmeleri yükün artışı ile azalmakta, yarım düzleme geçildiğinde ise belirli bir değere kadar artarak sabit kalmaktadır.

Yarıçapın artması durumunda yükün uygulandığı en üst tabakadan alt tabakaya doğru kayma gerilmeleri yarıçapın artışı ile azalmaktadır. Üst tabakanın alt tabakanın kayma modülüne oranı arttıkça kayma gerilmeleri üst tabaka ve yarım düzlem için artmakta alt tabaka içinse azalmaktadır.

Elastik yarım düzleme oturan yapışık iki tabakanın alt tabakasındaki iç çatlak olması durumunda, problemde d ucundaki gerilme şiddet faktörü $k(d)$ ' nin c ucundaki gerilme şiddet faktörü $k(c)$ den daha hızlı azaldığı görülmektedir. Çatlağın çok küçük olması durumunda c ve d uçlarındaki gerilme şiddet faktörleri birbirine eşit olup çatlağın bulunduğu noktadaki σ_x normal gerilme değeri ile $\sqrt{(d-c)/2}$ ' nin çarpımına eşit olmaktadır. $k(c)=k(d)=\sigma_{x_1}^*(0, 0 \leq y \leq h_1) * \sqrt{(d-c)/2}$. Gerilme şiddet faktörleri alttaki tabakanın üstteki tabakanın kayma modülüne oranı m arttıkça artmıştır.

Alt tabakada kenar çatlak olması durumunda problemin yakınsaması iç çatlak durumuna göre zorlaşmaktadır. Bu durumda yakınsamayı daha iyi sağlayabilmek için üç nokta extrapolasyonu kullanılmıştır. Bu extrapolasyon için $N=18, 24, 36$ olmak üzere üç farklı nokta sayısı alınmıştır. Çatlağın d ucundaki gerilme şiddet faktörü kayma modülleri oranlarına bağlı olarak incelenmiştir. Alt tabaka ile üst tabakanın kayma modülü oranı m değeri arttıkça alt tabakanın rijitliği artmış ve gerilme şiddet faktörü azalmıştır. Elastik yarım düzlemin kayma modülünün alt tabakanın kayma modülüne oranı n değeri arttıkça da gerilme şiddet faktörü azalmıştır.

6. ÖNERİLER

- 1.) Bu problem tabakaların ağırlıkları göz önüne alınarak çözülebilir.
- 2) Malzeme, boyut ve yükler pratikte uygulanabilecek şekilde seçilip bunların sayısal değerleri için gerilme ve değme uzunlukları bulunabilir.
- 3) Aynı problem sonlu eleman programlarından biriyle nümerik olarak da çözülebilir
- 4) Çatlak y eksenine dik olarak alınabilir.
- 5) Çatlak alt tabaka ile elastik yarım düzlemin ara yüzünde alınabilir.

7. KAYNAKLAR

- Adams, G. G. ve Bogy, D. B., 1977. The Plane Symmmetric Contact Problem for Disssimilar Elastic Semi-İnfinite Strips of Different Widths, Journal of Applied Mechanics, Transactions of Asme, December, 604-610.
- Adams, G. G., 1980. Crack Interaction in An Infinite Elastic Strip, International Journal of Engineering Science , 18, 455-462.
- Adıbelli, H., Çömez, İ. ve Erdöl, R., 2009. Elastik Yarım Düzleme Oturan Çift Şeritte Değme Problemi, Ulusal Mekanik Kongresi Bildiriler Kitabı, 71-82.
- Aksogan, O., Akavcı S. ve Becker A.A., 1996. A Comperative Study of The Contact Problem of an Elastic Layer Supported by Two Elastic Quarter Planes, Journal of Faculty of Engineering And Arhitecture of Çukurova Universty, 11, 1 , 25-31.
- Aksogan, O., Akavcı S, ve Becker A.A., 1997. The Solution of The Nonsymmetrical Contact Problem of An Elastic Layer Supported By Two Elastic Quarter Planes Using Three Different Methods, Journal of Faculty of Engineering and Arhitecture of Çukurova Universty 12 1-2 1-14.
- Bakırtaş İ., 1980. The Problem of A Rigid Punch on A Non-Homogeneous Elastic Half Space, International Journal of Engineering Science 22 4 347-359.
- Bakırtaş İ., 1984. The Contact Problem of an Orthotropic Non-Homogeneous Elastic Half Space, International Journal of Engineering Science 22 4 347-359.
- Bakioğlu, M., 1977. Kamalarla Mesnetlendirilmiş Elastik Şeritler İçin Bir Karışık Sınır Değer Problemi, İstanbul.
- Binienda, W.K. ve Pindera, M.J., 1994. Frictionless Contact of Layered Metal Matrix and Polymer Matrix Composite Half Planes Composite Sciences and Technology,50,119-128.
- Birinci, A., Kahya, V. ve Erdöl R., 1997. Elastik Mesnete Oturan Bileşik Tabakalarda Sürekli Değme Problemi TUMTMK, X. Ulusal Mekanik Kongresi İstanbul, Bildiriler Kitabı,165-173.
- Birinci, A., 1998. Alt Tabakasında Düşey Bir Çatlağı Bulunan ve Rijit Bir Blok Aracılığı İle Yüklenen Bileşik Tabaka Problemi, Doktora Tezi, K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Birinci, A. ve Erdöl, R., 1999. Frictionless Contact Between A Rigid Stamp and An Elastic Layered Composite Resting on Simple Supports, Mathematical & Computational Applications, 4, 3, 261-272.

- Birinci, A., 1998. Alt Tabakasında Düşey Bir Çatlağı Bulunan ve Rijit Bir Blok Aracılığıyla Yüklenen Bileşik Tabaka Problemi, Doktora Tezi, K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Birinci A., Özşahin T. Ş. ve Erdöl R., 1999. Rijit Dikdörtgen Bir Blok Aracılığıyla Yüklenen ve Basit Mesnetlere Oturan Bileşik Tabakada Süreksiz Temas Problemi, XI. Ulusal Mekanik Kongresi, 6-10 Eylül Bolu.
- Birinci, A., Çakıroğlu, M. ve Erdöl, R., 2002. Two Strips Problem Resting on An Elastic Foundation, Mathematical & Computational Applications, 7, 3, 275-286.
- Birinci A. ve Cakiroglu, F.L., 2003. Partial Closure of A Crack Located in An Infinite Elastic Layer, European Journal of Mechanics A/Solids, 22, 583-590.
- Birinci, A., Ozsahin, T.S., Erdöl, R., 2006. Axisymmetric Circumferential Internal Crack Problem of A Thick Walled Cylinder With Inner And Outer Claddings, European Journal of Mechanics A/Solids, 25, 764-777.
- Blaibel, A.F. ve Geçit, M.R., 1989. Bending of A Semi Infinite Elastic Strip Bonded to An Infinite Strip, International Journal of Engineering Science, 27, 7, 793-807.
- Chen, W. H. ve Engel, P.A., 1972. Impact And Contact Stress Analysis In Multilayered Media, International Journal Of Solids And Structures, 8, 1257-1281.
- Civelek, M.B., 1978. Simetrik Tekil Kuvvetlerle Yüklü Sonsuz Şeritte Çatlak Problemi, Doçentlik Tezi.
- Comez, İ., Birinci, A., Erdöl, R., 2004. Double Receding Contact Problem for A Rigid Stamp and Two Elastic Layers, European Journal of Mechanics, A/Solids, 23, 301-309.
- Çakıroğlu, F.L. ve Erdöl, R., 1989. Elastik Zemine Oturan Bileşik Şeritlerde Sürekli Değme Problemi 6. Ulusal Mekanik Kongresi, 234-248.
- Çakıroğlu, A.O. ve Çakıroğlu, F.L., 1991. Continuous and Discontinuous Contact Problems for Strips on An Elastic Semi-Infinite Plane, International Journal of Engineering Science, 29, 1, 99-111.
- Çakıroğlu F.L., ve Erdöl, R., 1993. Elastik Yarısız Düzleme Oturan Bileşik Tabakalarda Temas Problemi, VIII. Ulusal Mekanik Kongresi Bildiriler Kitabı, Antalya, 216-226.
- Çakıroğlu, F.L., Çakıroğlu, M., ve Erdöl, R., 2001. Contact Problems for Two Elastic Layers Resting on Elastic Half Plane. Journal of Engineering Mechanics, 127, 2, 113-118.
- Çömez, İ., 2003. Rijit Bir Panç ile Bastırılmış ve Tabanda Tam Olarak Bağlı Ağırlıksız Çift Şerit Problemi, Yüksek Lisans Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

- Çömez, İ., 2009. Rijit Dairesel Bir Pançla Bastırılan Elastik Tabaka ve Yarım Düzlemin Sürtünmeli Değme Problemi, Doktora Tezi, K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon
- Delale, F. ve Erdogan, F., 1998. Interface Crack in A Nonhomogeneous Elastic Medium, International Journal of Engineering Science 26, 6, 559-568.
- Delale, F., ve Erdogan, F., 1983. The Crack Problem For A Nonhomogeneous Plane, Journal of Applied Mechanics, 50, 609-614.
- Dempsey, J.P., Zhao, Z. G., Minnetyan, L., ve Li, H., 1990. Plane Contact of An Elastic Layer Supported By A Winkler Foundation , ASME Journal of Applied Mechanics, 57, 974-980.
- Dempsey, J.P., Zhao, Z. G. ve Li, H., 1991. Axissymmetric Indentation of An Elastic Layer Supported by A Winkler Foundation, International Journal of Solids and Structures, 27, 73-87.
- Dhaliwal, R. S., ve Rau, I., 1970. Axissymmetric Boussinesq Problem For A Thick Elastic Layer Under A Punch of Arbitrary Profile, International Journal of Engineering Science 8, 843-856.
- Dhaliwal, R. S., ve Rau, I., 1972. Further Considerations on The Axisymmetric Boussinesq Problem, International Journal of Engineering Science, 10, 659-663.
- Dong, C.Y., Lo, S.Y. ve Cheung Y.K., 2004. Numerical Solution for Elastic Half Plane Inclusion Problems by Different Integral Equation Approaches, Engineering Analysis With Boundary Elements, 28, 123-130.
- El-Borgi, S.E., Abdelmoula R. ve Keer L., 2006. A Receding Contact Plane Problem Between Functionally Graded Layer And A Homogeneous Substrate International Solid and Structures 43 658-674.
- Elhaskawy A. A., 1999. Effect of Friction on Subsurface Stresses in Sliding Line Contact of Multilayered Elastic Solids. International Journal of Solid and Structures 36, 3903-3915.
- Erdogan, F. ve Gupta, G.D., 1972. On The Numerical Solution of Singular Integral Equations, Quarterly Journal of Applied Mathematics, 29, 525-534.
- Erdogan, F. ve Biricikoglu, 1973, Two Bonded Half Planes With A Crack Going Through The Interface, International Journal of Engineering Science, 11, 745-766.
- Erdogan, F., Gupta, G.D. ve Cook, T.S., 1973. Numerical Solution of Singular Integral Equations, in Methods of Analysis And Solution of Crack Problems, Nordhoof, Groningen.

- Erdogan, F. ve Ratwani, M., 1974. The Contact Problem For An Elastic Layer Supported by Two Elastic Quarter Planes, Journal of Applied Mechanics, Transactions of ASME, 41, 673-677.
- Erdol, R. ve Erdogan, F., 1976. A Note on The Bending of A Craced Strip, The National Report NGR 39-007-011. Leigh University.
- Erdöl, R., 1984. Kenarlarına Dik ve İç Kenar Çatlak Bulunan Sonsuz Şerit Problemi, K.T.Ü. Müh-Mim. Fakültesi İnşaat Mühendisliği Dergisi, Cilt I , 1, 65-74.
- Fabrickant, V.I ve Sankar, T.S., 1984. On Contact Problem in An Inhomogeneous Half Space, International Jornal of Solid and Structures, 20, 2, 159-166.
- Galın, L.A., 1961. Contact Problems in The Theory of Elasticity. İngilizce Çeviri: Moss, H., North Caroline State College Translation Series, Raleigh, North Carolina.
- Geçit, M.R. ve Erdogan, F., 1978. Frictionless Contact Problem for An Elastic Layer Under Axisymmetric Loading, International Journal of Solid and Structures, 14 771-785.
- Geçit, M.R., 1981. Axisymmetric Contact Problem For An Elastic Layer and An Elastic Foundation, Internatioal Journal of Engineering Science, 19, 747-755.
- Geçit, M.R. ve Gökpınar, S., 1985. Frictionless Contact Between An Elastic Layer and A Rigid Rounded Support. The Arabian Journal for Science and Enginnering, 10, 3, 245-251.
- Geçit, M.R., 1986. Axisymmetric Contact Problem for A Semi Infinite Cylinder and A Half Space, International Journal of Engineering Science, 24, 8, 1245-1256.
- Geçit, M.R., 1987. Bonded Contact Problem for An Elastic Layer , Arabian Journal for Science and Engineering, 12, 183-188.
- Gupta, G.D., 1974. A Layered Composite with A Broken Laminate, International Journal of Solids and Structures, 9, 1141-1154.
- Gupta, G.D., ve Erdogan, F., 1974. The problem of Edge Cracks in an Infinite Strip, Journal of Applied Mechanics, 74, 1001-1006.
- Jaffar, M. J., 1974. Frictionless Contact Between An elastic layer on a rigid base and a circular flat-ended punch with rounded edge or conical punch with rounded tip, International Journal of Mechanical Science, 44, 545-560.
- Johnson, K.L., 1985. Contact Mechanics, Cambridge Universty Pres, Cambridge.
- Kahya V., Birinci, A. ve Erdöl R., 2001. Frictionless Contact Problem Between An Elastic Layer Bonded to A Rigid Support and A Rigid Stamp, Mathematical Computational Applications, 6, 1, 13-22.

- Kahya, V., Ozsahin T. S., Birinci A. ve Erdöl R., 2007. A Receding Contact Problem for An Anisotropic Elastic Medium Consisting of A Layer And A Half Plane. International Journal of Solids And Structures 44 5695-5710.
- Keer, L.M., Dundurs, J. ve Tsai, K.C., 1972. Problems Involving A Receding Contact Between An Elastic Layer and Half Space, ASME Journal of Applied Mechanics, 39, 1115-1120.
- Keer, L.M., ve Chantaramungkorn, K., 1972. Loss of Contact Between An Elastic Layer and Half Space, Journal of Elasticity , 2, 3, 191-197.
- Keer, L.M., Lee, J.C., ve Mura, T., 1984. A Contact Problem for The Elastic Quarter Space, International Journal of Solids And Structures, 20, 5, 513-524.
- Krenk, S., 1973. The Problem of An Inclined Crack in An Elastic Strip, Report IFSM, Leigh University.
- Krenk, S., 1975. On The Elastic Strip An Internal Crack, International Journal of Solid And Structures, 11, 693-708.
- Loboda, V. V., ve Tauchert, T. R., 1985. The Elastic Contact Problem for Dissimilar Orthotropic Semi-Infinite and Infinite Strips, International Journal of Engineering Science, 23, 12, 1337-1349.
- Matysiak, S.J., 2003. Edge Crack In An Elastic Layer Resting On Winkler Foundation, Engineering Fracture Mechanics, 70, 17, 2353-2361.
- Moro, T., Hami, A. ve Moudni, A., 2002. Reliability Analysis of A Mechanical Contact Between Deformable Solids, Probabilistic Engineering Mechanics, 17, 227-232.
- Muskhelishvili, N.I., 1958. Singüler Integral Equations, Noordhoff, International Puplics., Leyden, The Netherlands.
- Nowell, D. ve Hills, D. A., 1988. Contact Problems Incorporating Elastic Layers, International Journal of Solids And Structures, 24, 1, 105-111.
- Özşahin T.Ş. ve Çakıroğlu A. O., 1997. Rijit İki Yarım Daire Blok Üzerine Oturan İki Bileşik Tabakada Temas Problemi, X. Ulusal Mekanik Kongresi 13-17 Eylül, İstanbul.
- Özşahin T.Ş. ve Çakıroğlu, 2003. İki Elastik Blok Yardımıyla Yüklenmiş Elastik Tabakada Temas Problemi, XIII. Ulusal Mekanik Kongresi, 8-12 Eylül, Gaziantep.
- Özşahin, T.Ş., Kahya, V., ve Çakıroğlu, A.O., 2007. Contact Problem For An Elastic Layered Composite Resting On Rigid Flat Supports, International Journal of Computational and Mathematical Sciences 1;2, 154-159.

- Panah, A.G. ve Fener, R.T., 1998. General Boundary Element Method Approach to The Solution of Three-Dimensional Frictionless Contact Problems, Engineering Analysis with Boundary Elements, 21, 305-316.
- Pindera, M.J. ve Lane, M.S., 1993, Frictionless Contact of Layered Half Planes, Part I Analysis, ASME Journal of Applied Mechanics, 60, 633-639.
- Pindera, M.J. ve Lane M.S., 1993. Frictionless Contact of Layered Half Planes, Part II: Numerical Results, ASME Journal of Applied Mechanics, 60, 640-645.
- Porter, M. I. ve Hills, D.A., 2002. Note on The Complete Contact Between A Flat Rigid Punch And An Elastic Layer Attached to Dissimilar Substrate, International Journal of Mechanical Sciences, 509-520.
- Ratwani, M. ve Gupta, G.D., 1974. Interaction Between Paralelel Cracks in Layered Composites, International Journal of Solids And Structures, 10, 701-708.
- Sassi, M. ve Desvignes, M., 1998. A Seminumerical Method For Three-Dimensional Frictionless Contact Problems, Mathematically Computer Modelling, 28, 413-425.
- Shbeeb, N.I. ve Binienda, W.K., 1999. Analysis of an Interface Crack for a Functionally Graded Strip Sandwiched Between Two Homogeneous Layers of Finite Thickness, Report Number E-11532, Nasa Center: Gleen Reach Center.
- Shield, T.W. ve Bogy, D.B., 1988. Multiple Region Contact Solutions for A Flat Indenter on A Layered Elastic Half Space: Plane Strain Case, Journal of Applied Mechanics, Transactions Of ASME, 56, 251-262.
- Shull, K.R., 2002. Contact Mechanics And Adhesion Of Soft Solids, Materials Science and Engineering, 1-45.
- Sneddon, I.N., 1951. Fourier Transforms, McGraw-Hill, New York.
- Solberg, J.M. ve L'apadopoulos P., 1998. A Finite Element Method for Contact/Impact, Finite Elements in Analysis and Design, 30, 297-311.
- Stevanovic, M., Yovanovich M.M. ve Culham J.R., 2001. Modeling Contact Between Rigid Sphere And Elastic Layer Bonded To Rigid Substrate. IEEE Transactions On Componenets And Packaging Technologies, 24, 2.
- Suo, Z., ve Hutchinson J.W., 1990. Interface Crack between Two Elastic Layers, International Journal of Fracture 43, 1-18.
- Theocaris, P.S. ve Ioakimidis N., 1980. A Numerical Method for The Solution of Plane Crack Problems In Finite Media, International Journal of Mathematic & Mathematical Science, 3,4, 139-160.

- Ueda, S., ve Mukai, T., 2002. The Surface Crack Problem for A Layered Elastic Medium with A Functionally Graded Nonhomogeneous Interface, 45, 3, 371-378.
- Uffiland, I.S., 1965. Survey of Articles on The Application of Integral Transforms In The Theory of Elasticity, North Carolina State College Translation Series, Raleigh, North Carolina.
- Uruqhuart, E.E. ve Pindera M.J., 1994. Incipient Separation Between A Frictionless Flat Punch and An Anisotropic Multilayered Half Plane, International Journal of Solids and Structures, 31, 18, 2445-2461.
- Veljkovic, M.J. ve Nolic, R.R., 2003. Application of The Interface Crack Concept to Problem of A Crack Between A Thin Layer and A Substrate, *Mechanics, Automatic Control And Robotics* 3, 13, 573-581.
- Weitsman, Y., 1969. On The Unbounded Contact Between Plates and An Elastic Half Space., *ASME Journal of Applied Mechanics*, 36, 198-202.
- Wozniak, M., Hummel A. ve Pauk V. J., 2002. Axisymmetric Contact Problems for An Elastic Layer Resting on A Rigid Base With A Winkler Type Excavation, International Journal of Solids and Structures, 39, 4117-4131.
- Yuan, N. L., Hong, P.A. ve Zdenek, P. B., 1995. Initiation of Paralel Cracks From Surface of Elastic Half Plane, International Journal of Fracture, 69, 357-369.

ÖZGEÇMİŞ

Handan ADIBELLİ 1977 Yılında Yozgat'da doğdu. İlk, orta, lise öğrenimini Yozgatta tamamlayarak 1996 yılında başladığı Erciyes Üniversitesi Yozgat Mühendislik Mimarlık Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümünden 2000 yılında mezun oldu. 2001-2002 güz döneminde Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalında Yüksek lisans öğrenimine başladı . Şubat 2002 de Erciyes Üniversitesi Yozgat Mühendislik Mimarlık fakültesine araştırma görevlisi olarak atandı. 2004 de Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünden İnşaat Yüksek Mühendisi olarak mezun oldu. Eylül 2004 de Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalında doktora eğitimine başladı ve İnşaat Mühendisliği bölümü Mekanik Kürsüsüne araştırma görevlisi olarak atandı. Araş. Gör. Handan ADIBELLİ, iyi derecede İngilizce bilmekte ve halen K.T.Ü. İnşaat Mühendisliği Bölümündeki görevine devam etmektedir.