

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**RİJİT DAİRESEL BİR PANÇLA BASTIRILAN ELASTİK TABAKA VE YARIM
DÜZLEMİN SÜRTÜNMELİ DEĞME PROBLEMİ**

DOKTORA TEZİ

İnş. Yük. Müh. İsa ÇÖMEZ

EYLÜL 2009
TRABZON

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**RIJİT DAİRESEL BİR PANÇLA BASTIRILAN ELASTİK TABAKA VE YARIM
DÜZLEMİN SÜRTÜNMELİ DEĞME PROBLEMİ**

İnş. Yük. Müh. İsa ÇÖMEZ

**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
“Doktor (İnşaat Mühendisliği)”
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 26.08.2009
Tezin Savunma Tarihi : 25.09.2009**

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ragıp ERDÖL

Jüri Üyesi : Prof. Dr. A. Osman ÇAKIROĞLU

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Hasan SOFUOĞLU

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Ümit UZMAN

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Mehmet BAKIOĞLU

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Salih TERZİOĞLU

Trabzon 2009

ÖNSÖZ

Bu çalışma Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalında yapılan bir doktora tezidir.

Birlikte çalışmaktan gurur duyduğum ve büyük bir zevk aldığım, bilgi ve tecrübeleri ile daima bana ışık tutan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ragıp ERDÖL'e doktora tezimde, bilim adamı olma yolunda ve hatta günlük hayatta karşılaşmış olduğum problemlerin çözümünde göstermiş olduğu yakın ilgi, tavsiye ve yardımlarından dolayı şükranlarımı sunmak isterim.

Doktora tez izleme komitesi ve aynı zamanda jüri üyesi kıymetli hocalarım Sayın Prof. Dr. A. Osman ÇAKIROĞLU ve Sayın Prof. Dr. Hasan SOFUOĞLU'na eleştiri ve önerilerinden dolayı teşekkür ederim. Tez savunma sınavı jüri üyeliğini kabul eden değerli hocalarım jüri başkanı Sayın Prof. Dr. Mehmet BAKİOĞLU ve Sayın Prof. Dr. Ümit UZMAN'a tezle ilgili yapmış oldukları değerlendirmelerinden dolayı teşekkür ederim.

Tez çalışmamın gelişimi ve ilerleyişi yönünde tartışma imkanı bulduğum çok defa bilgi ve düşüncelerinden yararlandığım Sayın Doç. Dr. Ahmet BİRİNCİ, Sayın Yrd. Doç. Dr. Fevzi L. ÇAKIROĞLU, Sayın Doç. Dr. Talat Ş. ÖZŞAHİN ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Volkan KAHYA'ya, KTÜ KOSGEP Müdürü Sayın Dr. Mehmet TURHAL'a ve isimlerini burada tek tek sayamadığım arkadaşlarıma ve hocalarıma teşekkür ederim.

Daima yanımda olan, sevgi ve sabırla beni destekleyen ve bana duydukları güveni boşa çıkarmamak için çabaladığım aileme bu vesileyle de teşekkür etmek istiyorum.

İsa ÇÖMEZ
Trabzon 2009

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET.....	V
SUMMARY.....	VI
ŞEKİLLER DİZİNİ	VII
TABLolar DİZİNİ.....	XI
SEMBOLLER DİZİNİ.....	XII
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Literatür Araştırması	1
1.1.1. Elastisite Teorisi ve İntegral Dönüşüm Teknikleri ile İncelenen Sürtünmesiz Değme Problemleri.....	2
1.1.2. Sürtülmeli Değme Problemleri.....	12
1.1.3. Sayısal Çözüm Yöntemleri ile İncelenen Değme Problemleri.....	14
1.2. Çalışmanın Amacı ve Kapsamı	17
1.3. Genel Denklemlerin Elde Edilmesi	18
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	26
2.1. Giriş.....	26
2.2. Kullanılacak Denklemler	26
2.3. Sürekli Değme Problemi	28
2.3.1. Sınır Şartları.....	28
2.3.2. Katsayıların Belirlenmesi	30
2.3.3. İntegral Denklemin Elde Edilmesi	34
2.3.4. Dairesel Panç Durumu.....	38
2.3.5. İntegral Denklemin Sayısal Çözümü.....	39
2.3.5.1. İntegral Denklemin Jacobi Polinomlarıyla Sayısal Çözümü	39
2.3.5.2. İntegral Denklemin Gauss-Jacobi İntegrasyon Formülasyonu ile Sayısal Çözümü.....	42
2.3.6. Gerilmelerin Bulunması	44
2.4. Ayrılmalı Değme Problemi	46
2.4.1. Problemin Sınır Şartları.....	47

2.4.2.	Katsayıların Belirlenmesi	48
2.5.	İntegral Denklemlerin Elde Edilmesi	52
2.5.1.	I. İntegral Denklem.....	52
2.5.2.	II. İntegral Denklem	57
2.6.	İntegral Denklemin Boyutsuzlaştırılması	61
2.7.	İntegral Denklem Sisteminin Sayısal Çözümü.....	63
2.8.	Gerilmelerin Bulunması	66
3.	BULGULAR	71
3.1.	Sürekli Değme Problemine Ait Bulgular	71
3.1.1.	Değme Uzunlukları ve Değme Gerilmeleri.....	71
3.1.2.	Gerilmelerin İncelenmesi	81
3.1.2.1.	σ_x Normal Gerilmelerinin İncelenmesi.....	81
3.1.2.2.	σ_y Normal Gerilmelerinin İncelenmesi.....	85
3.1.2.3.	τ_{xy} Kayma Gerilmelerinin İncelenmesi	89
3.2.	Ayrılmalı Değme Problemine Ait Bulgular	93
3.2.1.	Değme Uzunlukları ve Değme Gerilmeleri.....	93
3.2.2.	Gerilmelerin İncelenmesi	107
3.2.2.1.	σ_x Normal Gerilmelerinin İncelenmesi.....	107
3.2.2.2.	σ_y Normal Gerilmelerinin İncelenmesi.....	110
3.2.2.3.	τ_{xy} Kayma Gerilmelerinin İncelenmesi	112
3.3.	Bu Çalışmada Elde Edilen Bulguların Literatürdeki Çalışmalardan Elde Edilen Bulgularla Karşılaştırılması	114
4.	SONUÇLAR.....	118
5.	KAYNAKLAR.....	121
ÖZGEÇMİŞ		

ÖZET

Bu çalışmada rijit dairesel bir pañç ile bastırılan elastik bir tabaka ve yarım düzlemin birbirine tam yapışık ve ayrılmalı değme problemleri değme yüzeylerindeki sürtünme etkileri dikkate alınarak elastisite teorisine göre çözülmüştür. Düşey ve yatay tekil yükleri ileten rijit pañç, h yüksekliğindeki homojen ve izotrop tabakanın üst yüzeyinden etki ettirilmiştir. Çözümlerde ağırlık etkileri ihmal edilmiştir.

Birinci bölümde değme problemleri üzerine günümüze kadar yapılmış olan bazı çalışmalardan bahsedilmiş, literatür özeti verilmiştir. Problemin çözümünde kullanılacak gerilme ve yer değiştirme ifadeleri, elastisitenin temel denklemleri ile integral dönüşüm tekniklerinden yararlanılarak çıkarılmıştır.

İkinci bölümde ilk olarak tabaka ve yarım düzlemin birbirine tam yapışık olduğu sürekli değme problemi ele alınarak sınır şartları belirlenmiştir. Gerilme ve yer değiştirme ifadeleri sınır şartlarına uygulanarak pañçın altındaki değme gerilmesinin bilinmeyen olduğu ikinci tür bir tekil integral denklem elde edilmiştir. Tekil integral denklemin sayısal çözümü Gauss-Jacobi integrasyon formülasyonu ve Jacobi Polinomları yöntemi ile ayrı ayrı yapılmıştır. Daha sonra tabakanın yarım düzleme yapışık olmadan oturduğu ayrılmalı değme problemi ele alınmıştır. Sınır şartları uygulanarak pañçın altındaki değme gerilmesinin yanı sıra tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme gerilmesinin de bilinmeyen olduğu, iki tane integral denklemden oluşan bir integral denklem sistemi elde edilmiştir. İntegral denklem sisteminin sayısal çözümünü gerçekleştirmek üzere Gauss-Jacobi integrasyon formülasyonu kullanılmıştır.

Üçüncü bölümde pañç yarıçapını, tekil yük değerini, malzeme özelliklerini ifade eden boyutsuz büyüklüklerin ve sürtünme katsayısının değişik değerleri için değme bölgelerinde oluşan değme uzunlukları ve değme gerilmesi dağılımları şekil ve tablolar halinde verilmiştir. Bulguların doğruluğu ve geçerliliği literatürde var olan çalışmalarla karşılaştırılarak gösterilmiştir. Aynı zamanda y eksenini boyunca tabaka ve yarım düzlemde oluşacak olan σ_x , σ_y normal gerilmeleri ile τ_{xy} kayma gerilmesi dağılımları da incelenmiştir. Dördüncü son bölümde çalışmada ortaya çıkan sonuçlar sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Sürtünmeli Değme, Ayrılmalı Değme, Sürekli Değme, İntegral Dönüşüm Teknikleri, Elastisite Teorisi, Rijit Pañç, Sürtünme.

SUMMARY

Frictional Contact Problem for an Elastic Layer and a Half Plane Indented by a Rigid Cylindrical Punch

In this study, the frictional contact problem for an elastic layer and a half plane indented by a rigid cylindrical stamp is considered according to the theory of elasticity. The rigid stamp subjected to concentrated vertical and tangential forces is applied to the top surface of isotropic and homogeneous layer with the height of h .

In the first chapter, some studies on the contact problems investigated until now are mentioned and the summary of literature is given. General equations of stresses and displacements which are required for the solution of the problem are obtained by using the theory of elasticity and the integral transform techniques.

In the second chapter, firstly, the contact problem of the layer bonded to the half plane is examined and its boundary conditions are determined. Applying the expressions of stresses and displacements to the boundary conditions, a singular integral equation is obtained, where the contact pressure under the stamp is unknown. The solution of the integral equation is obtained using both with the Gauss-Jacobi integration formula and the Jacobi polynomials. Secondly, the receding contact problem of the layer lying on the half plane is considered. With the boundary conditions of the problem an integral equation system which consists of two integral equations is obtained, where the contact pressure between the layer and the half plane is also unknown, besides the contact pressure under the stamp. To carry out the solution of the system of integral equation Gauss-Jacobi integration formula is performed.

In the third chapter, the numerical results for the contact widths and the contact pressures which are obtained for different values of various dimensionless quantities such as material properties, concentrated loads and radius of stamp are given in graphical forms and tables, each of the bonded contact and the receding contact problems. The accuracy and the validity of the results has been verified with existing solutions. Furthermore, σ_x , σ_y and τ_{xy} stress components for the layer and the half plane are determined along the y axis. The conclusions obtained from the study are mentioned in the last chapter.

Key Words: Frictional Contact, Receding Contact, Continuous Contact, Integral Transform Techniques, Theory of Elasticity, Rigid Stamp, Friction.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 1.	Sürekli değme probleminin geometrisi.....	28
Şekil 2.	Ayrılmalı değme probleminin geometrisi.....	47
Şekil 3.	Değme uzunluklarının sürtünme katsayısı ile değişimi ($G_2/G_1 = 0.5, R/h = 500, G_1/(P/h) = 100, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2$).....	73
Şekil 4.	Toplam değme uzunluklarının yük, panç yarıçapı ve sürtünme katsayısı ile değişimi ($G_2/G_1 = 0.5, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2$).....	74
Şekil 5.	Toplam değme uzunluklarının $G_2/G_1, \kappa_1, \kappa_2$ ve sürtünme katsayısı ile değişimi ($R/h = 250, G_1/(P/h) = 250$).....	75
Şekil 6.	Panç ile tabaka arasında oluşan değme gerilmesinin sürtünme katsayısıyla değişimi ($G_2/G_1 = 2, R/h = 100, G_1/(P/h) = 500, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2$).....	77
Şekil 7.	Değme gerilmesinin integral denklemin sayısal çözüm yöntemi ve η ile değişimi ($G_2/G_1 = 0.5, R/h = 500, G_1/(P/h) = 100, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2$).....	78
Şekil 8.	Panç ile tabaka arasında oluşan değme gerilmesinin panç yarıçapı ve η ile değişimi ($G_2/G_1 = 2, G_1/(P/h) = 250, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2$).....	78
Şekil 9.	Panç ile tabaka arasında oluşan değme gerilmesinin yük ve sürtünme katsayısıyla değişimi ($G_2/G_1 = 2, R/h = 250, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2$).....	79
Şekil 10.	Panç ile tabaka arasında oluşan değme gerilmesinin kayma modülleri oranı ve η ile değişimi ($R/h = 250, G_1/(P/h) = 250, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2$).....	79
Şekil 11.	Panç ile tabaka arasında oluşan değme gerilmesinin κ_1, κ_2 ve sürtünme katsayısıyla değişimi ($G_2/G_1 = 2, R/h = 250, G_1/(P/h) = 250$).....	80
Şekil 12.	$\sigma_x(0, y)$ normal gerilmesinin sürtünme katsayısıyla değişimi ($G_2/G_1 = 0.5, R/h = 500, G_1/(P/h) = 100, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2$).....	82
Şekil 13.	$\sigma_x(0, y)$ normal gerilmesinin panç yarıçapı ve sürtünme katsayısıyla değişimi ($G_2/G_1 = 2, G_1/(P/h) = 250, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2$).....	83
Şekil 14.	$\sigma_x(0, y)$ normal gerilmesinin yük ve sürtünme katsayısıyla değişimi ($G_2/G_1 = 2, R/h = 250, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2$).....	83
Şekil 15.	$\sigma_x(0, y)$ normal gerilmesinin kayma modülleri oranı ve sürtünme katsayısıyla değişimi ($R/h = 250, G_1/(P/h) = 250, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2$).....	84

Şekil 16.	$\sigma_x(0, y)$ normal gerilmesinin κ_1 , κ_2 ve sürtünme katsayısıyla değişimi ($G_2/G_1 = 2$, $R/h = 250$, $G_1/(P/h) = 250$)	84
Şekil 17.	$\sigma_y(0, y)$ normal gerilmesinin sürtünme katsayısıyla değişimi ($G_2/G_1 = 0.5$, $R/h = 500$, $G_1/(P/h) = 100$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$).....	86
Şekil 18.	$\sigma_y(0, y)$ normal gerilmesinin panç yarıçapı ve sürtünme katsayısıyla değişimi ($G_2/G_1 = 2$, $G_1/(P/h) = 250$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)	86
Şekil 19.	$\sigma_y(0, y)$ normal gerilmesinin yük ve sürtünme katsayısıyla değişimi ($G_2/G_1 = 2$, $R/h = 250$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)	87
Şekil 20.	$\sigma_y(0, y)$ normal gerilmesinin kayma modülleri oranı ve sürtünme katsayısıyla değişimi ($R/h = 250$, $G_1/(P/h) = 250$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$).....	87
Şekil 21.	$\sigma_y(0, y)$ normal gerilmesinin κ_1 , κ_2 ve sürtünme katsayısıyla değişimi ($G_2/G_1 = 2$, $R/h = 250$, $G_1/(P/h) = 250$).....	88
Şekil 22.	$\tau_{xy}(0, y)$ normal gerilmesinin sürtünme katsayısıyla değişimi ($G_2/G_1 = 0.5$, $R/h = 500$, $G_1/(P/h) = 100$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$).....	90
Şekil 23.	$\tau_{xy}(0, y)$ normal gerilmesinin panç yarıçapı ve sürtünme katsayısıyla değişimi ($G_2/G_1 = 2$, $G_1/(P/h) = 250$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)	90
Şekil 24.	$\tau_{xy}(0, y)$ normal gerilmesinin yük ve sürtünme katsayısıyla değişimi ($G_2/G_1 = 2$, $R/h = 250$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$).....	91
Şekil 25.	$\tau_{xy}(0, y)$ normal gerilmesinin kayma modülleri oranı ve sürtünme katsayısıyla değişimi ($R/h = 250$, $G_1/(P/h) = 250$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$).....	91
Şekil 26.	$\tau_{xy}(0, y)$ normal gerilmesinin κ_1 , κ_2 ve sürtünme katsayısıyla değişimi ($G_2/G_1 = 2$, $R/h = 250$, $G_1/(P/h) = 250$)	92
Şekil 27.	Panç ile tabaka arasındaki değme uzunluklarının sürtünme ile değişimi ($G_2/G_1 = 2$, $R/h = 100$, $G_1/(P/h) = 500$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)	95
Şekil 28.	Tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme uzunluklarının sürtünme ile değişimi ($G_2/G_1 = 2$, $R/h = 100$, $G_1/(P/h) = 500$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)	95
Şekil 29.	Panç ile tabaka arasındaki toplam değme uzunluğunun panç yarıçapı, yük ve sürtünme ile değişimi ($G_2/G_1 = 2$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)	96
Şekil 30.	Tabaka ile yarım düzlem arasındaki toplam değme uzunluğunun panç yarıçapı, yük ve sürtünme ile değişimi ($G_2/G_1 = 2$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$).....	96
Şekil 31.	Panç ile tabaka arasındaki toplam değme uzunluğunun malzeme özellikleri ile değişimi ($R/h = 250$, $G_1/(P/h) = 250$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)	98
Şekil 32.	Panç ile tabaka arasındaki toplam değme uzunluğunun malzeme özellikleri ile değişimi ($R/h = 250$, $G_1/(P/h) = 250$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$).....	98

Şekil 33.	Panç ile tabaka arasındaki değme gerilmesinin sürtünme ile değişimi ($G_2/G_1 = 10, R/h = 100, G_1/(P/h) = 500, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2$).....	101
Şekil 34.	Tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme gerilmesinin sürtünme ile değişimi ($G_2/G_1 = 10, R/h = 100, G_1/(P/h) = 500, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2$).....	101
Şekil 35.	Panç ile tabaka arasındaki değme gerilmesinin sürtünme ile değişimi ($G_2/G_1 = 0.1, R/h = 100, G_1/(P/h) = 500, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2$).....	102
Şekil 36.	Tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme gerilmesinin sürtünme ile değişimi ($G_2/G_1 = 0.1, R/h = 100, G_1/(P/h) = 500, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2$).....	102
Şekil 37.	Panç ile tabaka arasındaki değme gerilmesinin panç yarıçapı ve sürtünme ile değişimi ($G_2/G_1 = 2, G_1/(P/h) = 250, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2$).....	103
Şekil 38.	Tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme gerilmesinin panç yarıçapı ve sürtünme ile değişimi ($G_2/G_1 = 2, G_1/(P/h) = 250, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2$).....	103
Şekil 39.	Panç ile tabaka arasındaki değme gerilmesinin yük ve sürtünme ile değişimi ($G_2/G_1 = 2, R/h = 250, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2$).....	104
Şekil 40.	Tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme gerilmesinin yük ve sürtünme ile değişimi ($G_2/G_1 = 2, R/h = 250, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2$).....	104
Şekil 41.	Panç ile tabaka arasındaki değme gerilmesinin kayma modülleri oranı ve sürtünme ile değişimi ($R/h = 250, G_1/(P/h) = 250, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2$).....	105
Şekil 42.	Tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme gerilmesinin kayma modülleri oranı ve sürtünme ile değişimi ($R/h = 250, G_1/(P/h) = 250, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2$).....	105
Şekil 43.	Panç ile tabaka arasındaki değme gerilmesinin κ_1, κ_2 ve sürtünme ile değişimi ($G_2/G_1 = 0.5, R/h = 250, G_1/(P/h) = 250$).....	106
Şekil 44.	Tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme gerilmesinin κ_1, κ_2 ve sürtünme ile değişimi ($G_2/G_1 = 0.5, R/h = 250, G_1/(P/h) = 250$).....	106
Şekil 45.	$\sigma_x(0, y)$ normal gerilmesinin sürtünme katsayısıyla değişimi ($G_2/G_1 = 2, R/h = 500, G_1/(P/h) = 100, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2$).....	108
Şekil 46.	$\sigma_x(0, y)$ normal gerilmesinin yük ve sürtünme katsayısıyla değişimi ($G_2/G_1 = 2, R/h = 500, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2$).....	109
Şekil 47.	$\sigma_x(0, y)$ normal gerilmesinin kayma modülleri oranı ve sürtünme ile değişimi ($R/h = 500, G_1/(P/h) = 100, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2$).....	109
Şekil 48.	$\sigma_y(0, y)$ normal gerilmesinin sürtünme katsayısıyla değişimi ($G_2/G_1 = 2, R/h = 500, G_1/(P/h) = 100, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2$).....	110
Şekil 49.	$\sigma_y(0, y)$ normal gerilmesinin yük ve sürtünme katsayısıyla değişimi ($G_2/G_1 = 2, R/h = 500, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2$).....	111

Şekil 50.	$\sigma_y(0, y)$ normal gerilmesinin kayma modülleri oranı ve sürtünme katsayısıyla değişimi ($R/h = 500, G_1/(P/h) = 100, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2$).....	111
Şekil 51.	$\tau_{xy}(x, y)$ kayma gerilmesinin sürtünme katsayısıyla değişimi ($G_2/G_1 = 2, R/h = 500, G_1/(P/h) = 100, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2$).....	112
Şekil 52.	$\tau_{xy}(x, y)$ kayma gerilmesinin yük ve sürtünme katsayısıyla değişimi ($G_2/G_1 = 2, R/h = 500, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2$).....	113
Şekil 53.	$\tau_{xy}(x, y)$ kayma gerilmesinin kayma modülleri oranı ve sürtünme katsayısıyla değişimi ($R/h = 500, G_1/(P/h) = 100, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2$).....	113
Şekil 54.	Sürekli değme probleminin çözümünden elde edilen değme gerilmesi dağılımının Erdoğan vd., (1973) ile karşılaştırması ($G_2/G_1 = 1, R/h = 250, G_1/(P/h) = 250, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2$)	116
Şekil 55.	Ayrılmalı değme probleminde bulunan değme uzunluklarının Erdoğan vd., (1973) ile bulunan değme uzunlukları ile karşılaştırılması ($G_2/G_1 = 1, R/h = 10, G_1/(P/h) = 1000, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2$).....	117

TABLolar DİZİNİ

Sayfa No

Tablo 1.	Değme uzunluklarının sürtünme katsayısı ile değişimi ($G_2/G_1 = 2, R/h = 100, G_1/(P/h) = 500, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2$).....	72
Tablo 2.	Değme uzunluklarının sürtünme katsayısı ile değişimi ve bu değişimin integral denklemin farklı iki sayısal çözüm yöntemi ile bulunması ($G_2/G_1 = 0.5, R/h = 500, G_1/(P/h) = 100, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2$).....	73
Tablo 3.	Değme uzunluklarının panç yarıçapı ve sürtünme katsayısı ile değişimi ($G_2/G_1 = 0.5, G_1/(P/h) = 100, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2$).....	74
Tablo 4.	Değme uzunluklarının kayma modülleri oranı ve sürtünme katsayısı ile değişimi ($R/h = 250, G_1/(P/h) = 250, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2$)	75
Tablo 5.	Değme uzunluklarının sürtünme katsayısı ile değişimi ($G_2/G_1 = 2, R/h = 100, G_1/(P/h) = 500, \kappa_1 = \kappa_2 = 2$).....	94
Tablo 6.	Değme uzunluklarının panç yarıçapı ve sürtünme katsayısı ile değişimi ($G_2/G_1 = 2, G_1/(P/h) = 125, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2$).....	97
Tablo 7.	Değme uzunluklarının malzeme özellikleri ($G_2/G_1, \kappa_1, \kappa_2$) ile değişimi ($R/h = 250, G_1/(P/h) = 250, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2$).....	97
Tablo 8.	Sürekli değme probleminin çözümünden elde edilen değme uzunluklarının Erdogan vd., (1973) ile karşılaştırması ($G_2/G_1 = 1, R/h = 250, G_1/(P/h) = 250, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2$)	115
Tablo 9.	Ayrılmalı değme probleminde bulunan değme uzunluklarının Erdogan vd., (1973) ile bulunan değme uzunlukları ile karşılaştırılması ($G_2/G_1 = 1, R/h = 10, G_1/(P/h) = 1000, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2$).....	117

SEMBOLLER DİZİNİ

a, b	Panç altındaki değme uzunlukları
c, d	Tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme uzunlukları
e	Hacim değiştirme oranı
G_j	Kayma modülü
j	1 için tabakayı, 2 için yarım düzlemi ifade eden indis
h	Tabakanın yüksekliği
l	Düşey tekil yükün y eksenine uzaklığı
m	Tabaka ile yarım düzlemin kayma modülleri oranı
$p(x)$	Sürekli değme probleminde panç altındaki değme gerilmesi fonksiyonu
$p_1(x)$	Ayrılmalı değmede panç altındaki değme gerilmesi fonksiyonu
$p_2(x)$	Ayrılmalı değmede tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme gerilmesi fonksiyonu
P	Düşey tekil yük
$P_N^{(\alpha, \beta)}(x)$	Jacobi polinomu
R	Dairesel pançın yarıçapı
r_i, s_k	İlgili Jacobi polinomunun kökleri
x, y, z	Kartezyen koordinatlar
X, Y, Z	x, y, z eksenleri doğrultusundaki kütle kuvvetleri bileşenleri
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	x, y, z doğrultularındaki Şekil değiştirme bileşenleri
ϕ	Boyutsuz değme gerilmesi fonksiyonu
Φ, ψ	Fourier ters dönüşüm fonksiyonları
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Kayma Şekil değiştirme bileşenleri
η	Sürtünme katsayısı
Γ	Gamma fonksiyonu
κ_j	Malzeme sabiti
λ	Lamé sabiti
ν	Poisson oranı

Q	Yatay tekil yük
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Normal gerilme bileşenleri
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Kayma gerilmesi bileşenleri
u, v, w	x, y, z doğrultularındaki yer değiştirme bileşenleri
W_i^N	İlgili Jacobi polinomunun ağırlıkları

Not: Bu listede verilmeyen bazı semboller metin içerisinde kullanıldıkları yerlerde tanımlanmıştır.

1. GENEL BİLGİLER

Çoğu yapıların ve mekanik sistemlerin elemanları birbirleri ile değme halindedir. Bu değmenin karakteri, cisimlerin gerilmeleri birbirlerine iletişim şekilleri, değme halindeki cisimlerde meydana gelen şekil değiştirmeler, değme uzunlukları ve değme bölgesindeki değme gerilmesi dağılımı yapının davranışında önemli rol oynamaktadır. Yol ve havaalanı üst yapıları, demiryolları, temeller, tahıl siloları, akaryakıt tankları, silindirik miller ve bilyeler değmenin söz konusu olduğu mühendislik uygulamalarından bazılarıdır. Taşıt çarpışmalarının simülasyonu, insan eklemlerinin davranışı gibi konular da değme probleminin uygulama sahasına girmektedir.

1.1. Literatür Araştırması

Değme mekaniği konusunun, Heinrich Hertz tarafından 1882 yılında yazılan “On the contact of elastic solids” adlı makaleyle başladığı söylenebilir (Johnson, 1985). Hertz değme halindeki iki elastik cismin dengesini, değme bölgesinin eliptik olduğunu kabul ederek incelemiş, değme gerilmesi ve şekil değiştirmeler için formülasyon geliştirmiştir. Bu sonuçlar rijit düzleme oturan silindir veya küre gibi problemlere uygulanmış ve bu tip problemler Hertz değme problemi olarak adlandırılmıştır.

Değme problemleri üzerine yapılan çalışmalar, kompleks değişkenler yönteminin Muskhelishvili tarafından geliştirilmesi (Muskhelishvili, 1953) ve özellikle Sneddon’un integral dönüşüm tekniklerini elastisite teorisinde kullanmasıyla (Sneddon, 1951) artmaya başlamıştır. Değme problemi ile ilgili çalışmaların 1950’li yıllara kadar olan literatürü ve çözüm yöntemleri Galin’in eserinde belirtilmiştir (Galın, 1961). İntegral Dönüşüm Tekniklerinin bu probleme uygulanma yöntemleri ise Uffliand’ın eserinde verilmiştir (Uffliand, 1965).

Değme mekaniği, çok sayıda araştırmacının yaptığı değişik çalışmalar ve bilgisayar teknolojisinin sunduğu yeni imkanlar sayesinde, cisimlerin davranışının gerçeğe daha uygun modellerle ifade edilebilir olması yönünde gelişme kaydetmiştir. Bu konuda yapılmış olan bazı çalışmalar çözüm yöntemlerine ve sürtünmenin dikkate alınıp alınmamasına göre sınıflandırılarak aşağıda özetlenmiştir

1.1.1. Elastisite Teorisi ve İntegral Dönüşüm Teknikleri ile İncelenen Sürtünmesiz Değme Problemleri

Uygulamada rastlanabilecek değme problemlerinin analitik çözümünü, bazı kabullerle basitleştirdikten sonra, elastisite teorisi ve integral dönüşüm teknikleri yardımıyla yapmak mümkündür. İntegral dönüşüm teknikleri, denge denklemlerinin yer değiştirmeler cinsinden ifadeleri olan Navier denklemlerine uygulanarak, diferansiyel denklemlerdeki değişken sayısı azaltılmakta ve çözüm kolaylaştırılmaktadır.

Cisimler birbirlerine yapışık olmadan değme halindeyken, değme bölgesi ve bu değme bölgesinde meydana gelen değme gerilmesi bilinmeyendir. Değme bölgesinde cisimler arasında aktarılan normal gerilme yalnızca basınç olmakta ve çekme gerilmeleri bir cisimden diğerine iletilmemektedir. Basınç gerilmeleri etkisini kaybettiğinde iki cisim arasında ayrılma meydana gelir ve ağırlık etkileri ihmal edildiğinde bu ayrılma sonsuz kalır. Yük etki ettirildikten sonraki değme bölgesi, yüklemmeden önceki değme bölgesinin içinde ve sonlu bir bölgede kalan, ağırlık etkilerinin ihmal edildiği bu tip problemler ayrılmalı değme (receding contact) olarak adlandırılır. Bu konuda yapılan bazı çalışmalar aşağıda verilmiştir:

Weitsman (1969), elastik yarım düzlem ve üzerine tekil yük ile bastırılan plak için değme problemini incelemiştir. Plak teorisi ile plağın ve elastik düzlemin rijitlikleri oranı için değme uzunlukları bulunmuştur. Pu ve Hussain (1970) bulunan çözümde, elastik düzlemin rijitliğinin sonsuza götürülmesi durumunda (rijit mesnet), değme uzunluğunun sıfır olduğunu ve bunun fiziksel olarak mümkün olamayacağını belirtmişlerdir. Bu problemin yaklaşık çözümünü bulmak için varyasyonel yöntem kullanarak bir önceki çalışmadan farklı sonuçlar elde etmişlerdir.

Keer vd. (1972) yayılı yük ile elastik yarım düzlem üzerine bastırılan, sonsuz uzunluklu elastik tabakada değme problemini ele almışlardır. Gerilme ve yer değiştirmeler Papkovich-Neuber potansiyelleri cinsinden yazılmış, integral dönüşüm teknikleri kullanılarak, düzlem gerilme problemi ve dönel simetrik problem olarak çözümler bulunmuştur. Tabakaya tekil yük etki etmesi özel halinde, daha önce yaklaşık çözümlerle yapılmış Weitsman (1969), Pu ve Hussain (1970) çalışmalarından bulunan sonuçlardan biraz farklı sonuçlar elde edilmiştir. Weitsman (1969)' da bulunan sonuçların, bu çalışmada bulunan kesin sonuca daha yakın olduğu sadece alt tabakanın üst tabakaya göre

rijitliğinin fazla olduğu durumlarda Weitsman (1969)'in çözümünün Pu ve Hussain (1970)'deki çözüme göre buradaki kesin çözümden uzaklaştığı görülmüştür.

Borgi ve Keer (2006), Keer vd. (1972) tarafından yapılan çalışmayı tabakanın fonksiyonel derecelendirilmiş malzemedan olması halinde ele almışlardır. Homojen olmayan elastik tabakanın kayma modülünün derinliği boyunca üstel olarak değiştiği kabul edilmiştir. Problem integral dönüşüm teknikleri ile bir tekil integral denkleme dönüştürülerek tabakanın malzeme özelliklerinin değme uzunlukları ve değme gerilmelerine etkisi incelenmiştir.

Keer ve Chantaramungskorn (1972), elastik yarım düzlem üzerine yayılı yük ile bastırılan elastik tabakanın sürtünmesiz değme problemini incelemişlerdir. Yayılı yük tabaka üzerine bir bölge hariç etki ettirilmiş ve tabaka ile düzlem arasında yayılı yükün etki etmediği mesafeden daha küçük bir ayrılma bölgesi meydana geleceği kabul edilerek problem Papkovich-Neuber potansiyelleri kullanılarak çözülmüştür.

Değişik profillerdeki panç ile bastırılan ve elastik yarım düzleme oturan tabakanın sürtünmesiz düzlemsel değme problemi Ratwani ve Erdoğan (1973) tarafından incelenmiştir. İntegral dönüşüm teknikleri kullanılarak panç ile tabaka arasında ve tabaka ile düzlem arasındaki değme uzunlukları ve gerilme dağılımının bilinmeyen olduğu integral denklem sistemi elde edilmiştir. Tekil yükün elastik tabakaya doğrudan ya da eğrisel veya dikdörtgensel bir panç ile etki ettirilmesi durumları için integral denklem sistemi çözülmüş, tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme uzunlukları ve değme gerilmesi dağılımları bulunmuştur. Civelek ve Erdoğan (1974) aynı problemi dönele simetrik olarak ele alarak incelemiştir. Kahya vd., (2007) ise tabakanın anizotrop olması halinde rijit dairesel bir pançla bastırılan ve elastik yarım düzleme oturan tabaka problemini çözmüşlerdir. Anizotrop tabakanın değişik malzeme özellikleri için pançın altında ve tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme uzunlukları ve değme gerilmesi dağılımları elde edilmiştir.

Geçit (1986), yarı sonsuz silindir ile elastik yarım düzleme bastırılan tabakanın değme problemini incelemiştir. İntegral dönüşüm tekniği kullanılarak her üç eleman için yer değiştirme ve gerilmeler Bessel fonksiyonları cinsinden elde edilmiştir. Oluşan integral denklemler sayısal olarak çözümlenerek elemanların değişik malzeme özellikleri ve boyutları için yarı sonsuz silindir ile tabaka arasındaki değme gerilmesi dağılımı, tabaka ile düzlem arasındaki değme gerilmesi dağılımları ve değme uzunlukları bulunmuştur.

Çömez (2003), Çömez vd. (2003; 2004), alt tarafından rijit mesnetli, birbirine yapışık olmayan iki elastik tabakanın ve tekil yükü bu tabakaları bastıran rijit, dairesel veya parabolik pançın değme problemini incelemişlerdir. Tabakalar arasındaki ve panç ile tabaka arasındaki değme uzunlukları ve bu iki değme bölgesindeki değme gerilmesi dağılımı değişik malzeme özellikleri ve geometrileri ile yük değerleri için elde edilmiştir.

Erdoğan ve Ratwani (1974), iki elastik çeyrek düzlem üzerine yük ile bastırılan elastik tabakanın sürtünmesiz değme problemini ele almışlardır. Fourier ve Mellin dönüşümleri kullanılmış, çeyrek düzlemle tabakanın değdiği kenarlardaki gerilmelerde meydana gelen tekillikler ve dereceleri bulunarak integral denklem çözülmüş, tekil yük, düzgün yayılı yük ve bir fonksiyonla değişen yayılı yük durumları için değme gerilmesi dağılımları elde edilmiştir.

Keer vd. (1984), elastik çeyrek düzlem ve bu düzlemin üzerine bastırılan rijit bloğun sürtünmesiz değme problemini incelemişlerdir. Problemin sayısal çözümleri için tahmini bir değme bölgesi tayin edilmiş ve değme bölgesi dikdörtgensel bölgelere ayrılarak her bir bölgedeki gerilmenin sabit olduğu düşünölmüştür. Bu şekilde integral denklem lineer denklem sistemine dönüştürölerek iterasyonlar sonucunda gerçek değme bölgesi ve değme bölgesindeki gerilme dağılımı elde edilmiştir. Boyutları bilinen dairesel kesitli rijit bir bloğun tekil yükü bastırılması durumunda verilen malzeme özellikleri ve yük değeri için değme bölgeleri ve değme gerilmesi dağılımı Poisson oranının değişik değerleri için elde edilmiştir.

Aksoğan vd. (1996; 1997), iki elastik çeyrek düzlem üzerine oturan elastik tabakanın simetrik ve simetrik olmayan değme problemini incelemişlerdir. İntegral dönüşüm teknikleri ile yapılan çözümlerde tabaka için Fourier, çeyrek düzlem için Mellin dönüşümü kullanılmıştır. Paket programlar yardımıyla Sonlu Elemanlar Yöntemi (FEM) ve Sınır Elemanlar Yöntemi (SEM) ile de çözümler yapılmıştır. Elastik tabakaya üstten simetrik tekil yük, simetrik düzgün yayılı yük ve simetrik olmayan düzgün yayılı yük etki ettirilmesi durumunda değme gerilmelerinin yayılışı incelenmiş ve her üç yöntemde de birbirine çok yakın sonuçlar ortaya çıkmıştır.

Fiziksel olarak lokal yüklü elastik tabaka probleminde değme bölgesinin sonlu kalması yalnızca ağırlık etkilerinin ihmal edilmesiyle mümkündür. Sonsuz uzunluklu düşey elastik tabakada yerel olarak etki ettirilen çekme veya basınç kuvvetlerinin etkisi yükleme bölgesinden uzaklarda kaybolur ve ağırlıktan dolayı meydana gelen kütle kuvvetleri ne kadar az olursa olsun tabaka ile zemin arasındaki temas devam eder (Civelek

vd., 1978). Ağırlığın dikkate alındığı bu tip problemlerde dış yük kritik bir değeri aştığında tabakalar arasında veya tabaka ile zemin arasında sonlu bir ayrılma meydana gelir ve problem “süreksiz değme problemi” olarak adlandırılır. Dış yük bu değerden küçükse ayrılma söz konusu olmaz ve bu problem “sürekli değme problemi” olarak adlandırılır. Sürekli ve süreksiz değme problemi ile ilgili yapılan çalışmalar aşağıda verilmiştir.

Civelek ve Erdogan (1975), rijit yarım düzlem üzerine oturan ve tekil yük ile kaldırılmaya çalışılan tabakada sürekli ve süreksiz değme problemini incelemiştir. Problemden ağırlık göz önüne alınırken sürtünme kuvveti dikkate alınmamıştır. Süreksiz değme halinde incelenen problem için ayrılma uzunluğu ve değme gerilmelerinin tabakanın elastik özelliklerinden bağımsız olduğu görülmüştür.

Civelek ve diğerleri (1978), rijit dikdörtgen bir blokla rijit yarım düzlem üzerine bastırılan elastik sonsuz uzunluklu tabakada sürekli ve süreksiz değme problemini ele almışlardır. Ağırlık etkisi göz önüne alınmış sürtünme kuvvetleri ihmal edilmiştir. Sürekli ve süreksiz değme durumlarında, farklı yük genişlikleri için değme gerilmesi yayılımı ilk ayrılma yükleri ve süreksizlik olan bölgede düşey yer değiştirmeler bulunmuştur.

Geçit ve Erdogan, 1978 tarafından yapılan çalışmada, birbirlerinden belli aralıklı iki tekil yükü kaldırılan veya rijit düzleme bastırılan elastik tabakada sürekli ve süreksiz dönel simetrik değme problemi çözülerek değme gerilmesi dağılımı ile ayrılmayı başlatan kritik yük değerleri bulunmuştur. Tabakanın tekil yüklerle kaldırılması halinde Plak Teorisine göre de çözüm yapılmış, bulunan sonuçların elastisite teorisinden bulunan sonuçlara çok yakın olmadığı ve tabakanın fiziksel davranışını yansıtmadığı görülmüştür.

Geçit (1980), elastik tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki sürekli ve süreksiz değme problemini incelemiştir. Elastik tabaka üst tarafından sürekli düzgün yayılı yük ile yüklenmiş ve bu yüke ilaveten tabakayı kaldırmaya çalışan veya tabakayı bastırarak tekil yük etkisi ettirilmesi durumları için ayrı ayrı çözümler yapılarak ilk ayrılmayı başlatan kritik yük ve tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme gerilmesi yayılımı elde edilmiştir.

Çakıroğlu ve Çakıroğlu (1991), elastik yarım düzlem ve üzerine etki ettirilmiş yayılı yük ile bastırılan elastik tabaka arasındaki sürekli ve süreksiz değme problemini incelemiştir. Etki ettirilen yükün düzgün yayılı veya bir fonksiyona bağılı olması durumlarında, değişik malzeme özellikleri ve tabaka kalınlığı için ilk ayrılma uzaklığı ve değme bölgesindeki gerilme yayılımı elde edilmiştir.

Özşahin (2000), rijit iki düz blok üzerine oturan, sonlu bir bölgede etki ettirilen yayılı yük ile bastırılan iki elastik tabakalı bileşik tabakada sürekli ve süreksiz değme problemini

ele almıştır. Sürekli değmede iki elastik tabaka arasında sürtünme bulunması ve bulunmaması hallerinde ilk ayrılmayı meydana getiren kritik yük bulunmuştur. Süreksiz değme probleminde sürtünme dikkate alınmamış, ayrılmanın iki elastik tabaka arasında veya bileşik tabaka ile rijit düz bloklar arasında meydana gelmesi durumları için problem çözülmüştür.

Çakıroğlu vd. (2001), elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan iki elastik tabakanın, sürtünmesiz, sürekli ve süreksiz değme problemini incelemiştir. Sürekli değme probleminde ilk ayrılmayı meydana getiren kritik yük bulunmuştur. Süreksiz değme problemi, ayrılmanın yalnızca iki tabaka arasında, alt tabaka ile yarı sonsuz düzlem arasında veya aynı anda hem tabakalar arasında hem de alt tabaka ile yarı sonsuz düzlem arasında meydana gelmesi durumlarında ayrı ayrı incelenmiştir.

Birinci ve Erdöl (2001), tekil yükü bastırđı tabakalara ileten dikdörtgen blok ile basit mesnetlere oturan bileşik tabakalar arasındaki sürekli ve süreksiz değme problemini ele almışlardır. Sürekli değme halinde bileşik tabakalar arasında ilk ayrılmayı başlatan kritik yük ve ilk ayrılma uzaklığı bulunmuştur. Süreksiz değme, süreksizliğin rijit blok ile üstteki tabaka arasında veya bileşik tabakalar arasında olması durumları için ayrı ayrı incelenmiştir. Değişik malzeme sabitleri tabaka kalınlıkları ve mesnet aralığı için değme gerilmesi yayılışı ve düşey yer değistirmeler elde edilmiştir.

Kahya (2003), rijit, düz bir temel üzerine yapıştırılmış, üst tarafından sonlu yayılı yükü bastırılan iki ortotrop, elastik ve sonsuz uzunluklu tabakadan meydana gelen bileşik tabakada sürekli ve süreksiz değme problemini incelemiştir. Tabakalar arasında ilk ayrılmayı başlatan kritik yük değeri, ilk ayrılma uzaklığı, kritik yükün aşılması durumunda tabakalar arasında meydana gelen ayrılma bölgesinin büyüklüğü, açılma miktarı ve her iki problem için tabakaların ara yüzeyindeki değme gerilmesi yayılışı elde edilmiştir.

Ke ve Wang (2006) fonksiyonel derecelendirilmiş elastik bir tabaka ile kaplı elastik yarım düzlemin sürekli değme problemini transfer matris yöntemi ve integral dönüşüm teknikleri ile incelemiştir. Yükü ileten pançın profilinin dikdörtgen, daire ve üçgen olması halinde problem çözülmüştür.

Rijit düz blokla elastik tabaka arasındaki tam yapışık değme problemleri Geçit (1987; 1990) tarafından incelenmiştir. Geçit (1987), üst tarafından tekil yükün iletildiği rijit bir blok tarafından kaldırılmaya çalışılan ve alt tarafından rijit zemine tam bağlı, elastik sonsuz uzunluklu tabakanın değme problemini ele almıştır. Tabaka ile rijit blok birbirlerine değme bölgesinde tam bağlı kabul edilmiş, integral dönüşüm teknikleri kullanılarak,

değme bölgesindeki normal ve kayma gerilmelerinin bilinmeyen olduğu 1. tür integral denklem sistemi elde edilmiştir. İntegral denklem sistemin sayısal çözümü yapılarak değme uzunluğu, tabaka kalınlığı oranı için değme bölgesindeki normal ve kayma gerilmesi dağılımı ile gerilme şiddet faktörleri elde edilmiştir. Aynı sisteme rijit dikdörtgen blok vasıtasıyla tekil moment etki etmesi halinde problem benzer şekilde çözülmüştür (Geçit , 1990).

Panç ile bastırılan yarı sonsuz düzlem problemi, “Panç Problemi” veya “Boussinesq Problemi” olarak adlandırılır. Dhaliwal (1970), problemi pançın yalnızca dairesel profilde olması durumunda incelemiştir. Karışık sınır değer problemi ikinci tip Fredholm integral denkleme indirgenmiş, kuvvet serileriyle ve sayısal yöntemlerle integral denklem çözülmüştür. Rijit pançın silindirik, konik, küresel parabolik ve eliptik olması durumları için çözüm genişletilmiş; her bir panç profili için pançın elastik tabakada meydana getireceği çökmeyi sağlayabilecek kuvvetin değeri, bu çökmenin miktarı, serbest yüzeydeki yer değiştirmenin değişimi ve değme gerilmesini veren ifadeler elde edilmiştir (Dhaliwal ve Rau, 1970). Elde edilen ifadelerden faydalanarak, sayısal çözümler grafiklerle verilmiştir (Rau ve Dhaliwal, 1972).

Geçit ve Gökpınar (1985) tarafından, sonlu düzgün yayılı yük ile eğrisel rijit bir mesnede bastırılan elastik tabakanın değme problemi incelenmiştir. Tabakanın ağırlığı ve sürtünme etkisi ihmal edilmiş, parabolik ve dairesel mesnet profilleri ve değişik malzeme özellikleri için değme uzunluğu ve normal gerilme değerleri bulunmuştur.

Kahya ve diğerleri (2001), rijit yarım düzlem üzerine oturan elastik tabakanın sürtünmesiz değme problemini incelemiştir. Ağırlığı ihmal edilen tabaka üst tarafından eğrisel (dairesel, parabolik) veya dikdörtgen rijit blok vasıtasıyla simetrik tekil yüklerle yüklenmiş ve her üç panç profili için problem çözümlerle değme uzunlukları ve gerilmeler elde edilmiştir.

Homojen olmayan elastik düzleme bastırılan panç problemleri ise Bakırtaş (1980), Bakırtaş (1984), Fabrikant ve Sancar (1984) tarafından incelenmiştir. Bakırtaş (1980), rijit panç ile bastırılan, homojenliği derinliği ile değişen elastik yarım düzlemde değme problemini ele almıştır. Elastisite modülü derinliğiyle birlikte üstel olarak artan elastik yarım düzlemin; rijit parabolik ve dikdörtgen pançlar vasıtasıyla tekil yük veya tekil moment ile yüklenmesi durumları için çözümler yapılmıştır. Homojenliğin değişimini belirleyen katsayının ve Poisson oranının değişik değerleri için panç altındaki gerilme ve moment dağılışı ile dikdörtgen blok durumunda gerilme yoğunluğu faktörünün değişimi

bulunmuştur. Aynı problem homojen olmayan ortotrop özellikteki zemin halinde, rijit dikdörtgen blok vasıtasıyla tekil yükü bastırılmış yarı sonsuz düzlem için çözülmüştür. Zeminin izotrop özellikte olması durumu incelenen problemin özel hali olarak çıkarılmıştır (Bakırtaş, 1984).

Fabrikant ve Sancar (1984), homojenliği derinliğiyle değişen elastik yarım düzlem probleminin kesin çözümünü dönele simetrik problem olarak araştırmışlardır. Panç problemi verilen çözüm yöntemiyle ele alınmış ve panç altındaki değme gerilmesini veren ifadeler elde edilmiştir.

Elastik mesnede oturan tabakalarla ilgili ilk çalışmalar Winkler tarafından yapılmıştır. Winkler, tabakanın üzerine oturduğu elastik mesnetten veya zeminden görmüş olduğu reaksiyonun, meydana gelen çökmelerle orantılı olduğunu ileri sürmüştür. Winkler Hipotezi olarak bilinen bu görüş; çok eleştirilmiş olmasına rağmen, pek çok mühendislik probleminde yeterli derecede yaklaşık çözüm getirdiği için halen kullanılmaktadır (Birinci, 1994).

Dempsey vd. (1990), Winkler temeline oturan sonsuz uzunluktaki elastik tabakanın değişik yüklemeler altındaki değme problemini ele almışlardır. Tabakaya üst kısmından tekil yük veya düzgün yayılı yük etki etmesi, tekil yükün eğrisel bir blok veya dikdörtgen blok aracılığıyla tabakaya iletilmesi durumları, elastisite teorisi ve kiriş teorisine göre ayrı ayrı çözülmüş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır. Tabakanın karakteristik uzunluğunun yüksekliğine oranı (bağıl rijitlik oranı) sekiz veya daha büyük değerlerde olduğunda her iki çözümün birbirine yakın sonuçlar verdiği görülmüştür.

Elastik zemine oturan elastik tabakanın değme problemi Dempsey vd., 1991 tarafından ele alınmıştır. Ağırlığı ihmal edilen tabakaya düzgün yayılı yük veya konik, parabolik, eliptik pançlar vasıtasıyla tekil yük etki ettirilmiştir. Problem tabaka yüksekliği sonsuz büyük alınarak, pançla bastırılan elastik yarım düzlem ve elastik zeminin rijitlik katsayısı sonsuz büyük alınarak rijit yarım düzleme oturan tabaka problemine dönüştürülerek özel çözümler elde edilmiştir. Konik ve eliptik panç profilleri için tabaka teorisinden bulunan çözümler, ince plak teorisi ile bulunan çözümlerle karşılaştırılmış, pançın değme uzunluğu ve tabakanın karakteristik uzunluğunun yüksekliğine oranı büyük değerler aldıkça iki çözümün birbirine yakın sonuçlar verdiği görülmüştür.

Elastik zemine oturan, malzeme özellikleri ve yükseklikleri farklı birbirine tam bağlı iki tabakadan oluşan bileşik tabakada sürekli değme problemi incelenmiştir (Birinci vd., 1997). Üst tarafından simetrik yayılı yük etki ettirilen bileşik tabakanın ağırlığı dikkate

alınarak problem çözülmüş, tabakalar arasında ayrılmanın başladığı ilk nokta ile ilk ayrılma yükleri bulunarak, ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma yükünden küçük yükler için değme yüzeyindeki gerilme dağılımları elde edilmiştir. Birinci vd. (2002) aynı problemi bileşik tabakanın ağırlığını ihmal ederek incelemişlerdir.

Wozniak vd., (2002), silindirik boşluklu a uzunluğundaki kısmi Winkler tipi malzeme ile doldurulmuş rijit yarım düzlem üzerine oturan tabakanın değme problemini incelemişlerdir. Tabakanın üst tarafından yayılı yüklerle yüklenmesi, eğrisel veya dikdörtgensel blok vasıtasıyla yüklenmesi durumlarında gerilme ve yer değiştirmeler elde edilmiş, $a \rightarrow 0$ (rijit yarım düzlem), $a \rightarrow \infty$ (Winkler temeli) özel durumları için de çözümlere ulaşılmıştır.

Tabakalı ortamlar son yıllarda yüksek teknolojik uygulamalarda geniş kullanıma sahiptir. Bilim ve mühendislikte özellikle hava ve uzay araçları yapılarında tabakalı ortamlarla ilgili değme problemleri büyük ilgi görmektedir. Yüzey malzemesinin ana yapıdan farklı olması gereken durumlarda da tabakalı ortamlara ihtiyaç vardır (Bai, 2002).

Bufler (1971), çok tabakalı elastik, izotrop ortamlardaki gerilme ve yer değiştirmeler için kartezyen koordinatlarda matris analizine ve integral dönüşüm tekniklerine dayanan bir yöntem geliştirmiştir. Transfer matris yöntemi ve esneklik matrisi yöntemleri ile tabakaların birbirlerine tamamen yapışık oldukları veya birbirlerine bağlı olmadıkları durumlarda çözüm yapılmıştır.

Chen ve Engel (1972), elastik yarım düzleme rijit pançla bastırılan bir veya iki tabakadan oluşan tabakalı ortamın değme problemini incelemiştir. Rijit pançın, parabolik ve dikdörtgen olması durumları için problem yaklaşık bir yöntemle çözülmüş, panç altında değme gerilmesi dağılımı ve çökmeler elde edilmiştir. Aynı zamanda problemin darbe yükü etkisi altında çözümü sayısal olarak ve deneysel yöntemle yapılmış değme süresinin her iki yöntemle de birbirine yakın değerde bulunduğu görülmüştür.

Shield ve Bogy (1989), dikdörtgensel rijit düz bir pançla bastırılan çok tabakalı elastik yarım düzlemin değme problemini ele almışlardır. Bütün tabakaların birbirlerine tam bağlı oldukları, en altta elastik yarım düzleme oturdukları ve izotrop oldukları kabul edilmiş, pançın altındaki tabakanın elastisite modülü ve yüksekliğine göre panç ile altındaki tabaka arasında üç ayrı değme bölgesi oluşabileceğini ilk olarak göstermişlerdir. Her bir değme bölgesi durumu için değme uzunlukları ve değme gerilmesi yayılışlarını veren formüller transfer matris yöntemi de kullanılarak çıkartılmış, sayısal sonuçlar verilmiştir.

Choi ve Thangjitham (1991), yüzeysel yüklerle bastırılan tabakalandırılmış anizotrop elastik yarım düzlemde oluşacak gerilme dağılımlarını düzlemsel elastisite çerçevesinde incelemiştir. Çözüm için rijitlik matrisi ve integral dönüşüm tekniği beraberce kullanılarak monoklinik, ortotropik ve enine izotrop malzeme için normal gerilmeler ve kayma gerilmesi dağılımları elde edilmiştir.

Pindera ve Lane (1993a; 1993b), değişik sayı ve sıralanışa sahip izotrop, ortotrop veya monoklinik tabakalardan oluşan çok tabakalı yarım düzlemde sürtünmesiz değme problemini incelenmişlerdir. Araştırmacılar lokal/global rijitlik matrisi yaklaşımından yola çıkarak bir yöntem geliştirmişler integral denklemi singüler ve regular kısımlara ayırdıktan sonra sayısal kollokasyon tekniği ile çözmüşlerdir. (1993b)'de bulunan sayısal sonuçlar verilmiştir.

Urquart ve Pindera (1994) tarafından, dikdörtgen panç ile bastırılan ve anizotropik tabakalardan oluşan çok katmanlı elastik yarım düzlemde değme problemi incelenmiştir. Problemin çözümünü, Shield ve Bogy (1989)' dan farklı olarak, tabakaların anizotrop olması halini de içeren genel bir formülasyonla lokal-global rijitlik matrisi yönteminden de yararlanarak çıkarmışlar, elastik yarım düzleme oturan izotrop tabaka halinde üst tabaka ve en alttaki elastik yarım düzlemin elastisite modülleri oranı ve panç uzunluğu için, panç ile tabaka arasında oluşabilecek değme durumlarını veren bölgeler ve diğer bulgular verilmiştir.

Rijit parabolik bir pançla bastırılan metal-matris ve polimer-matris kompozit yarım düzlemlerin değme problemi incelenmiştir (Binienda ve Pindera, 1994). Homojen, izotropik veya anizotropik özellikte olan yarım düzlem, izotropik, ortotropik veya monoklinik özellikte olan tabakalarla kaplanmış çözüm için lokal/global rijitlik matris formülasyonu kullanılarak problem tekil integral denkleme dönüştürülmüştür. İntegral denklemin sayısal çözümü yapılmış, değişik malzemeler için pançın değme uzunlukları değme gerilmesi dağılımı elde edilmiştir.

Birinci ve Erdöl (1999), basit mesnetler üzerine oturan ağırlıksız iki tabakadan oluşan bileşik tabakanın sürtünmesiz değme problemini incelemiştir. Bileşik tabaka dairesel veya dikdörtgen blok aracılığıyla mesnetlere bastırılmış, her iki blok profili için problem çözülmüş değme uzunlukları, değme gerilmeleri elde edilmiştir.

Yarı sonsuz tabakaların uç problemi (end problem) Saint-Venant'ın yaptığı çalışmasıyla birlikte bilim adamları ve mühendislerin dikkatini çekmiştir. Bu problemlerde

yarı sonsuz tabakanın yanal yüzlerinde gerilme olmaz, sonlu uç ise gerilme ve yer değiştirmelerin uygun kombinasyonu ile belirlenir (Bogy, 1975).

Benthem ve Minderhoud (1972), sonlu ucu rijit zemine yayılı yük ile bastırılan yarı sonsuz silindirin dönel simetrik problemine özdeğer tekniğini başarıyla uygulamışlardır. Gerilmelerdeki tekillikler belirlenmiştir. Sayısal bir örnekle değme bölgesindeki normal ve kayma gerilmelerinin dağılımı elde edilmiştir.

Boggy (1975), sonsuzdaki ucundan değişik tip yüklerle yüklenen yarı sonsuz şerit problemini, sonsuz uzunluklu şerite ve elastik yarım düzleme ait çözümlerin süperpozisyonunu alarak incelemiştir. Şeritin sonlu kenarından rijit bağlı olması halinde sonsuz uçtan tekil kuvvetle çekilmesi ve eğilmesi problemi çözülmüştür. Aynı zamanda şeritin yapışık olmadığı rijit zemine tekil kuvvetle bastırılması problemi de incelenmiş normal ve kayma gerilmesi dağılımı bulunmuştur.

Sonsuz uçlarından etki ettirilen tekil yük ile kısa kenarları boyunca birbirlerine bastırılan, genişlikleri birbirinden farklı yarı sonsuz iki elastik tabaka arasındaki değme problemi Adams ve Boggy (1977) tarafından ele alınmıştır. Tabakaların birbirine bağlı olması veya ara yüzeylerinde sürtünmenin olmaması durumları için ayrı ayrı çözümler yapılmış ve değme bölgesindeki gerilme yayılımı bulunmuştur.

Agarwal (1978), sonlu uçlarıyla birbirlerine birleştirilmiş ve bu uçlardan uzakta etki ettirilen yayılı yük ile çekilmeye çalışan yarı sonsuz silindirlerin dönel simetrik değme problemini ele almışlardır. İntegral dönüşüm teknikleri ile sonsuz uzunluklu silindir ve yarım düzlem çözümlerinin süperpozisyonundan yararlanılarak problem lineer denklem takımına indirgenerek çözülmüştür. Değişik malzeme özellikleri için silindirlerin ara yüzlerindeki normal ve kayma gerilmesi dağılımları elde edilmiştir.

Lobodo ve Tauchert (1985), alttan tam bağlı, sonsuz uzunluklu ortotropik tabakaya sonlu ucuyla oturan yarı sonsuz ortotropik tabakanın, yapışık ve yapışık olmayan değme problemini incelemiştir. Değme bölgesinden sonlu bir mesafede yarı sonsuz tabakayı boyuna veya enine çekmeye çalışan simetrik tekil kuvvetler etkisinde ara yüzdeki normal ve kayma gerilmelerinin dağılımı elde edilmiştir.

Geçit (1986) tarafından yarı sonsuz silindir ve üzerine bastırıldığı yarım düzlem arasındaki sürtünmesiz değme problemi incelenmiştir. Problemin çözümünde süperpozisyon ilkesinden faydalanılmış, değişik malzeme özellikleri için değme gerilmeleri ve ara yüzdeki yer değiştirmeler belirlenmiştir.

Blaibel ve Geçit (1989), sonsuz uzunluklu elastik tabakaya oturan, yarı sonsuz elastik tabakanın eğilme problemini ele almışlardır. Eğilme momenti uygulanan yarı sonsuz tabaka alttaki sonsuz tabakaya kısa kenarıyla bağlanmış ve sonsuz uzunluklu tabakanın alttan tam olarak bağlı olduğu düşünülerek problem süperpozisyon ilkesi ve integral dönüşüm tekniği yardımıyla çözülmüştür.

Eğrisel bir panç ile kenarlarından basit veya ankastre mesnetlere bastırılan dairesel plağın değme problemi Keer ve Miller (1983) tarafından incelenmiştir. Pançın plağa temas uzunluğu bilinen olarak alınmış, elastik sonsuz tabakanın elastisite teorisi çözümü ile mesnet tepkilerini karşılayabilmek için basit eğilme etkisindeki plağın Plak Teorisine göre çözümünün süperpozisyonu alınarak yaklaşık bir çözüm geliştirilmiştir. Bulunan değme gerilmesi değerleri Hertz Teorisi ve Plak Teorisi ile karşılaştırılmış ve yöntemlerden elde edilen sonuçlar arasında çok yakın değerler elde edilmediği görülmüştür.

1.1.2. Sürtünmeli Değme Problemleri

Değme problemi ile ilgili yapılan çalışmaların çoğunda çözümü kolaylaştırmak için değme bölgelerinde meydana gelecek olan sürtünmenin etkisi dikkate alınmamıştır. Oysa birbirleriyle değen yüzeylerde mutlaka bir sürtünme söz konusudur ve gerçeğe daha yakın çözümler için sürtünmenin etkisi dikkate alınmalıdır. Değme problemlerinde sürtünme dikkate alınarak yapılan bazı çalışmalara aşağıda yer verilmiştir:

Conway (1971), iki sabit silindir arasında bastırılan ve silindirler arasından bir kuvvetle yatay olarak çekilen tabakanın sürtünmeli değme problemini incelemişlerdir. Sürtünmenin normal değme gerilmesine etkisi incelenmiş ve bu etkinin çok az miktarlarda olduğu görülmüştür.

Spence (1975), dikdörtgen veya eğrisel profillerdeki dönel simetrik pançla bastırılan elastik yarım düzlemin sürtünmeli değmesinin, Coulomb'un sürtünme kanununa göre karışık sınır değer problemi olarak formülasyonunu yapmıştır.

Boduroğlu ve Delale (1977; 1980), elastik yarım düzlem ile üzerine serbestçe oturan elastik tabakanın sürtünmeli değme problemini ele almışlardır. Sonsuz uzunluktaki tabaka üst tarafından üzerinden bir fonksiyona bağlı yük ile yüklenmiş, tabaka ile elastik yarım düzlem ve yük ile tabaka arasındaki sürtünmeler dikkate alınırken, kütle kuvvetleri ihmal edilmiştir. Tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme bölgesi ve bu bölgedeki değme

gerilmesi yayılışı elde edilmiş, sürtünme dikkate alındığında değme bölgesinin genişlediği ve ayrılmanın zorlaşacağı gösterilmiştir.

Comninou vd. (1980), yarı sonsuz düzlemlerle aynı malzeme özelliklerine sahip elastik sonsuz tabakanın sürtünmeli değme problemini incelemişlerdir. Düzgün yayılı yük ile düzleme bastırılırken tekil yüklerle kaldırılan tabakanın, düzlemlerle yapışık kaldığı ve kaydığı bölgeler bulunarak sürtünmenin normal gerilme ve kayma gerilmelerine etkisi incelenmiştir.

King ve O'Sullivan (1987), rijit dairesel pançla bastırılan, tabakalı elastik yarım düzlemin sürtünmeli değme problemini ele almışlardır. Tek bir tabaka ve elastik yarım düzlemin değme problemi düzlem şekil değiştirme hali için detaylı olarak incelenmiş ara yüzdeki gerilme dağılımları incelenmiştir. Tabakanın membran yaklaşık çözümü de bulunmuş ve diğer sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Nowell ve Hills (1988), iki eğrisel pançla bastırılan elastik tabakada sürtünmeli ve sürtünmesiz değme problemini ele almışlardır. Sürtünmeden dolayı oluşan malzeme dayanım kaybına, tabaka kalınlığının etkisi Bentall ve Johnson (1968) tarafından geliştirilen hibrit yöntemle incelenmiştir. Hertz tarafından bulunan çözümle karşılaştırma yapılmış ve tabaka yüksekliğiyle değme yarım uzunluğunun oranı 5 den küçük olduğunda iki çözüm arasında büyük farklılıklar olduğu gösterilmiştir.

Jaffar (1991), rijit silindirik pançla elastik tabaka arasındaki tam kaymalı değme (sliding/ full slip) problemini ele almıştır. Dönmesi önlenen panç vasıtasıyla tabakaya normal kuvvet ile sürtünme katsayısına bağlı yatay kuvvet etki ettirilmiştir. Tabakanın alttan rijit zemine tam bağlı ve bağlı olmadığı durumlar için problem çözülmüş değme bölgesindeki gerilme dağılımları elde edilmiştir.

Elsharkawy (1999), değişik sayıda ince elastik tabakalarla kaplanmış elastik yarım düzlemlerde sürtünmeli değme problemini ele almıştır. İki elastik tabaka ile kaplı elastik yarım düzlemin rijit eğrisel bir pançla bastırılması durumunda gerilme dağılımları çeşitli sürtünme katsayısı değerleri için bulunmuş, yüzey kaplamasının değme gerilmesine etkisi belirlenmiştir. Ayrıca rijit dikdörtgen pançla rijit düzleme bastırılan tabaka durumunda, tabaka ile düzlemin tam bağlı veya bağlı olmadığı durumlar için değme gerilmesi dağılışı sürtünme katsayısının değişik değerleri için bulunmuştur.

Ma ve Korsunsky (2004; 2006), ince bir tabakayla kaplanmış elastik yarım düzleme, elastik pançla tekil kuvvet ve buna dik doğrultuda sürtünme kuvvetleri etki etmesi durumunda oluşan değme problemi için genel bir çözüm yöntemi Airy gerilme

fonksiyonları yardımıyla geliştirmişlerdir. Bu genel çözümden pançın rijit olması, kaplamanın ve sürtünmenin olmaması gibi özel çözümler elde edilmiştir. Bir sayısal örnekle değme gerilmesi dağılımı sürtünme katsayısının değişik değerleri için elde edilmiştir.

Guler ve Erdogan (2004; 2007), fonksiyonel derecelendirilmiş özellikteki tabaka ile kaplı olan elastik yarım düzlemin sürtünmeli değme problemini incelemişlerdir. Kayma modülü derinliği boyunca üstel olarak değişen tabakaya, düşey ve yatay kuvvetler dikdörtgen ve eğrisel profillerde olan değişik şekillerdeki pançların aracılığıyla etki ettirilmiştir. Problem integral dönüşüm tekniği kullanılarak bir tekil integral denkleme dönüştürülerek gerilme dağılımları elde edilmiştir.

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemedan oluşan tabaka ile kaplı elastik yarım düzlemin sürtünmeli değme problemi ile ilgili benzer bir çalışma Ke ve Wang (2007) tarafından transfer matris yöntemi ve integral dönüşüm teknikleri beraber kullanılarak yapılmıştır. Kayma modülünün derinlik boyunca değişiminde üstel değişim sınırlaması olmayan bu çalışmada elde edilen sonuçlar Guler ve Erdogan (2004)'daki sonuçlarla örtüşmüştür.

Barik ve diğerleri (2008), tekil yük ile rijit yarım düzleme bastırılan fonksiyonel derecelendirilmiş özellikteki elastik pançın termo-elastik değme problemini ele almışlardır.

1.1.3. Sayısal Çözüm Yöntemleri ile İncelenen Değme Problemleri

Değme gerilmelerinin kesin sonuçlarla bulunabilmesi, idealize edilmiş sistemlerin oldukça karmaşık matematiksel analizlerinin yapılmasını gerektirir. Bu çözümler, problemin gerçek geometrisinin ve yükleme durumunun matematiksel modellemeye ne kadar yakın olduğuna bağlı olarak az veya çok başarılı olarak bir çok probleme uygulanabilir. Çoğu durumda kesin çözümün mümkün olduğu uygun model şekli bulunamaz ve değme gerilmelerini belirlemek için sayısal yöntemlere ihtiyaç duyulur (Chan ve Tuba, 1971). Bu ihtiyaçtan dolayı bir çok araştırmacı tarafından değme problemlerinin Sonlu Elemanlar Yöntemi (FEM) ve Sınır Elemanlar Yöntemi (BEM) gibi yaklaşık yöntemlerle çözümleri araştırılmıştır.

Chan ve Tuba (1971), elastik cisimlerin düzlem değme problemine sonlu elemanlar yönteminden yola çıkarak bir çözüm yolu geliştirmişlerdir. Elastik cisimler üçgen elemanlar ile modellenerek, yöntemin Hertz problemi ve ortasında disk bulunan levha

problemi için değme gerilmesi dağılımlarında kesin sonuçlara yakın değerler verdiği gösterilmiştir.

Hung ve Saxce (1980) tarafından, düzlem hal için elastik cisimlerin sürtünmesiz değme problemi şekil değiştirmelerin küçük olduğu düşünülerek matematiksel programlama tekniğiyle incelenmiştir. Hertz problemi ve piston çubuk problemi belirtilen formülasyona göre sonlu elemanlar algoritmasıyla modellenmiş, değme bölgelerindeki gerilme dağılımları elde edilmiştir.

Sachdeva ve Ramakrishnan (1981), elastik cisimlerin sürtünmeli düzlem değme problemini esneklik matrisi yöntemi ile incelemişler, deneme-yanılma yöntemiyle (trial-error) değme bölgesinde yer değiştiren veya değmeye devam eden noktaları belirlemişlerdir. Diğer araştırmacılar tarafından çözümü yapılan bazı mühendislik uygulamaları belirtilen yöntemle çözülerek doğruluğu ve uygulanabilirliği test edilmiştir.

Chaudhary ve Bathe (1986), iki/üç boyutlu sürtünmeli değme probleminin statik ve dinamik analizini, Lagrange Çarpanları Yöntemini kullanarak yapmışlardır. Geliştirilen yöntem Hertz problemine ADINA sonlu elemanlar paket programı kullanılarak uygulanmış ve analitik çözüme yakın sonuçlar elde edilmiştir.

Chen ve Tsai (1986), sürtünmeli elasto-dinamik değme problemini Lagrange Çarpanları Yöntemi ve Matematiksel Programlama Yöntemini kullanarak incelemişlerdir. İlk bahsedilen yöntemle şekil değiştirmeden sonraki değme bölgesi belirlenmiş, sonraki yöntemle de sürtünmeden dolayı değme bölgesinde oluşan gerilme yayılımı elde edilmiştir. Çözüm yönteminin doğruluğunu ve kullanılabilirliğini göstermek üzere tekil yükü bastırılan iki plağın statik değme problemi ele alınmış ve Sachdeva ve Ramakrishnan (1981) tarafından esneklik matrisi yöntemiyle bulunan sonuca yakın değerler elde edildiği görülmüştür. Ayrıca incelen dinamik problemlerde de kesin çözümlere uygun sonuçlar elde edilmiştir.

Klarbring (1986) tarafından üç boyutlu sürtünmeli değme problemi sonlu elemanlar yöntemine bağlı doğrudan çözüm yöntemi olan matematiksel programlama tekniği ile incelenmiştir. Geliştirilen yöntem elastik yarım düzleme bastırılan elastik kare panç problemine uygulanmış, değme bölgesinde bulunan normal gerilme ve kayma gerilmesi dağılımlarının daha önceki araştırmacılar tarafından bulunmuş çözüme yakın değerlerde olduğu gösterilmiştir.

Heyliger ve Reddy (1987a; 1987b) tarafından rijit ve dairesel cisimler ile herhangi bir şekil ve malzeme özelliğine sahip cisimlerin sürtünmeli değme problemlerinin çözümü için iki ayrı algoritma hibrit yöntemle dayalı sonlu elemanlar modeli ile geliştirilmiş ve sayısal sonuçlar verilmiştir.

Zhong ve Sun (1989), sürtünmeli elastik değme problemini, matematiksel programlama yöntemlerinden parametrik kuadratik programlama yöntemi ile incelemiştir. Hertz değme problemi, tekil yükü bastırılan iki plağın değme problemi verilen yöntemin ışığında DDS-W sonlu elemanlar koduyla modellenmiş ve yöntemin doğruluğu kontrol edilmiştir.

Shyu ve diğerleri (1989), değme halindeki yüzeylerde sürtünmenin etkisinin göz önüne alındığı değme problemlerini hibrit yöntemle incelemiştir. Elastik cisimler 4 ve 6 nodlu değme elemanları ile modellenmiş, yer değiştirmeler ve gerilmeler için birbirlerinden bağımsız şekil fonksiyonları kullanılmıştır. Yöntem dört ayrı probleme uygulanmış ve değme gerilmeleri, değme uzunlukları bulunmuştur.

Garrido ve diğerleri (1991), ayrılmalı değme problemini, sürtünmeyi dikkate alarak, BEM ile incelemiştir. Rijit zeminden çekilen tabaka, elastik yarım düzleme bastırılan tabaka gibi problemlere çözüm yöntemi uygulanarak değme uzunlukları ve gerilmeler elde edilmiştir.

Anderson ve Collins (1995), eğrisel bir pançla bastırılan, tabaka ile kaplı elastik yarım düzlemin sürtünmeli değme problemini FEM ile incelemiştir.

Bahattin (1997) tarafından iki boyutlu değme problemleri, Lagrange tabanlı bir yaklaşım ve Pascal üçgeni ile türetilen geçiş elemanları kullanılarak, FEM ile incelenmiştir. ANSYS programına uyarlanan, geçiş elemanları türetmekte kullanılan, iki ayrı yöntemden Pascal üçgeninin daha az çözüm zamanı ile daha hassas doğrulukta sonuçlar verdiği gösterilmiştir.

Garrido ve Lorenza (1998), elastik yarım düzleme oturan tabakanın sürtünmesiz ayrılmalı değme probleminin büyük şekil değiştirmeleri de içeren çözümünü BEM ile incelemiştir. Şekil değiştirmelerin küçük olması durumunda, analitik yöntemlerle örtüşen sonuçlar elde edilmiştir.

Hasebe ve Qian (1999), dairesel rijit panç ile bastırılan elastik yarım düzlemin sürtünmeli değme problemini BEM ile incelemiştir.

Değme problemleri örneklerden öğrenmeye dayalı bir yöntem olan yapay sinir ağı (YSA) yaklaşımı ile de incelenmiştir. Özşahin ve diğerleri (2004), geri yayım modeli ile

iki elastik pançla bastırılan elastik tabakanın değme problemini incelemişlerdir. Problem ilk olarak elastisite teorisi ve integral dönüşüm teknikleri ile çözülmüş panlarla tabaka arasındaki değme uzunlukları bulunmuştur. Buradan elde edilen veriler seçilen YSA'nın eğitilmesinde kullanılmış ve pançla tabaka arasındaki değme uzunlukları bu yöntemle tahmin edilmeye çalışılmıştır. YSA ile bulunan sonuçların elastisite teorisi ile bulunan sonuçlara yakın olduğu görülmüştür. Cakıroğlu ve diğerleri (2005), rijit bir pançla bastırılan ve alttan tam bağlı iki tabakanın değme problemini YSA yaklaşımı ile incelemişlerdir. Analitik yöntemle elde edilen sonuçlardan yararlanarak aę eğitildikten sonra değme bölgelerinde oluşan YSA ile elde edilen en büyük değme gerilmesi değerleri, analitik sonuçlara yakın değerlerde, elde edilmiştir.

1.2. Çalışmanın Amacı ve Kapsamı

Bu çalışmada rijit dairesel bir panç ile bastırılan homojen, izotrop, elastik bir tabaka ve yarım düzlemin sürtünmeli değme probleminin analitik çözümü elastisite teorisi ve integral dönüşüm teknikleri kullanılarak incelenmiştir.

Sürtünmeli değme problemi, elastik tabaka ve yarım düzlemin birbirlerine değme şekillerine göre iki ayrı problem olarak ele alınarak, problemlerin sınır şartları belirlenmiştir. İncelenen ilk problemde elastik tabaka ve yarım düzlemin birbirine tam yapışık olduğu herhangi bir şekilde ayrılmanın söz konusu olmadığı sürekli değme durumu incelenmiştir. İkinci olarak elastik tabaka ve yarım düzlemin birbirine yapışık olmadığı, değmenin sonlu bir bölgede kaldığı, ayrılmalı değme (receding contact) problemi ele alınmıştır. Her iki problemde de değme bölgelerinde meydana gelecek sürtünmenin etkisi dikkate alınmıştır. Kütle kuvvetleri ise ihmal edilmiştir.

Çalışmanın amacı, rijit dairesel bir pançla bastırılan tabaka ve yarım düzlemin sürekli ve ayrılmalı değme probleminde değme uzunluklarını, değme bölgesinde oluşacak değme gerilmesi dağılımlarını, tabaka ve yarım düzlemin herhangi bir noktasında normal gerilme ve kayma gerilmesi değerlerini elde etmek ve sürtünmenin bunlara etkisini bulmaktır.

Problemlerin çözümü için ilk olarak elastisite teorisinden denge denklemleri, bünye denklemleri, yer değiştirme ve şekil değiştirme bağıntıları yardımıyla Navier denklemleri elde edilmiştir. Yer değiştirmeler arasındaki bağıntıyı veren, kısmi türevli Navier denklemlerine Fourier integral dönüşüm tekniği uygulanarak gerilme ve yer değiştirme ifadeleri bilinmeyen sabitlere bağlı olarak elde edilmiştir. İncelenen her bir problem için

sınır şartları yazılarak elde edilen lineer denklem takımının çözümünden, gerilme ve yer değiştirmeler değme bölgesinde oluşacak değme gerilmesi fonksiyonlarına bağlı bulunmuştur. Daha sonra integral denklemler için yazılan sınır şartları sayesinde ikinci tür tekil integral denklemler elde edilmiştir. İntegral denklemlerin sayısal çözümü için Gauss-Jacobi integrasyon formülasyonu ve Jacobi polinomları yöntemi kullanılmıştır. Probleme ait denge ve uygunluk şartları sağlatılacak şekilde integral denklemlerin sayısal çözümleri bahsedilen yöntemlerle gerçekleştirilmiş; sürtülmeli ve sürtünmesiz durumda, değme uzunlukları ve değme gerilmesi dağılımları elde edilmiştir. Buradan tabaka ve yarım düzlem için normal gerilme ve kayma gerilmesi ifadelerine geçilerek, y eksenini boyunca gerilme dağılımları bulunmuştur. Elde edilen sayısal veriler tablo ve şekiller halinde sunulmuş ve bulgular üzerinde irdeleme yapılmıştır. Çalışmanın son bölümünde ise varılan sonuçlardan bahsedilmiştir.

1. 3. Genel Denklemlerin Elde Edilmesi

Dengede olan bir cisim için, x , y , z dik koordinat takımında, X , Y ve Z kütle kuvvetlerini, σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} gerilme bileşenlerini göstermek üzere, gerilmelerin herhangi bir nokta civarındaki değişimlerine ait denge denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0$$

Bünye denklemleri ile, E elastisite modülünü ve ν Poisson oranını göstermek üzere, şekil değiştirmeler gerilmeler cinsinden yazılabilir:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \quad \gamma_{xy} = \tau_{xy} / G$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], \quad \gamma_{xz} = \tau_{xz} / G \quad (2)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \quad \gamma_{yz} = \tau_{yz} / G$$

Şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntıları ise,

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

şeklinde yazılabilir. (2) no'lu bünye denklemleri ve (3) no'lu yer değiştirme-şekil değiştirme bağıntıları yardımıyla gerilmeleri yer değiştirmeler cinsinden yazmak mümkündür:

$$\sigma_x = \lambda e + 2G \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4)$$

$$\sigma_y = \lambda e + 2G \frac{\partial v}{\partial y} \quad (5)$$

$$\sigma_z = \lambda e + 2G \frac{\partial w}{\partial z} \quad (6)$$

$$\tau_{xy} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (7)$$

$$\tau_{xz} = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (8)$$

$$\tau_{yz} = G\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \quad (9)$$

Yukarıdaki eşitliklerde geçen ε_x , ε_y ve ε_z sırasıyla x, y, z doğrultularındaki şekil değiştirme bileşenlerini; u, v ve w ise sırasıyla x, y, z doğrultularındaki yer değiştirme bileşenlerini ifade etmektedir. e hacim değiştirme oranını, λ Lamé sabitini, G ise kayma modülünü göstermekte olup aşağıdaki gibi tanımlıdır :

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (10)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (11)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (12)$$

Denklemlerde geçen kayma gerilmeleri arasında $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ eşitlikleri olduğu bilinmektedir. (4)-(9) denklemlerinde gerekli türevler alınıp (1) no'lu denge denklemlerinde yerlerine yazılırsa Navier denklemleri olarak adlandırılan aşağıdaki bağıntılara ulaşılır.

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G \nabla^2 u + X = 0 \quad (13)$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial y} + G \nabla^2 v + Y = 0 \quad (14)$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial z} + G \nabla^2 w + Z = 0 \quad (15)$$

Bu denklemlerde geçen ∇^2 Laplace operatörü olup aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (16)$$

Kütle kuvveti ihmal edildiğinde, iki boyutlu halde Navier denklemleri:

$$(\lambda + G) \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] + G \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (17)$$

$$(\lambda + G) \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + G \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (18)$$

Burada, iki tane bilinmeyen olan ve bulunmak istenen $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ yer değiştirme bileşeni fonksiyonları için, iki denklemden oluşan bir kısmi türevli diferansiyel denklem takımı elde edilmiştir. Problem bu kısmi türevli diferansiyel denklem takımının çözümünden yani $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ 'nin bulunmasından ibarettir. $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ yer değiştirme bileşenleri bulunduktan sonra gerilmeler bunlar cinsinden elde edilecektir.

Navier denklemlerinin, kısmi türevli diferansiyel denklem takımı oluşturması problemin çözümünü zorlaştırmaktadır. Navier denklemlerini, adi diferansiyel denklem takımına dönüştürmek ve çözümü kolaylaştırmak için integral dönüşüm tekniklerinden yararlanılmaktadır. İlk olarak $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ yer değiştirmeleri bilinmeyen fonksiyonlar $\Phi(\alpha, y)$ ve $\psi(\alpha, y)$ 'nin üstel Fourier dönüşümleri olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\alpha, y) e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (19)$$

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\alpha, y) e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (20)$$

Bu ifadelerin ters dönüşümleri alındığında;

$$\Phi(\alpha, y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{i\alpha x} dx \quad (21)$$

$$\psi(\alpha, y) = \int_{-\infty}^{\infty} v(x, y) e^{i\alpha x} dx \quad (22)$$

elde edilir. Bilinmeyen $\Phi(\alpha, y)$ ve $\psi(\alpha, y)$ fonksiyonlarının belirlenebilmesi için (17) ve (18) denklemleri $e^{i\alpha x}$ ile çarpılıp $(-\infty, \infty)$ aralığında integre edilirse:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[(\lambda + G) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] e^{i\alpha x} dx = 0 \quad (23)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[(\lambda + G) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + G \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] e^{i\alpha x} dx = 0 \quad (24)$$

elde edilir. Bu denklemlerde geçen u ve v 'nin gerekli türevleri (19) ve (20)'den alınır

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{i\alpha x} dx = -\alpha^2 \Phi \quad (25)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} e^{i\alpha x} dx = \frac{d^2 \Phi}{dy^2} \quad (26)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} e^{i\alpha x} dx = -i\alpha \frac{d\Phi}{dy} \quad (27)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} e^{i\alpha x} dx = -\alpha^2 \psi \quad (28)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} e^{i\alpha x} dx = \frac{d^2 \psi}{dy^2} \quad (29)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} e^{i\alpha x} dx = -i\alpha \frac{d\psi}{dy} \quad (30)$$

ve (23) ve (24) denklemlerinde yerlerine konursa:

$$-(\kappa+1)\alpha^2\Phi + (\kappa-1)\frac{d^2\Phi}{dy^2} - 2i\alpha\frac{d\psi}{dy} = 0 \quad (31)$$

$$-(\kappa-1)\alpha^2\psi + (\kappa+1)\frac{d^2\psi}{dy^2} - 2i\alpha\frac{d\Phi}{dy} = 0 \quad (32)$$

adi diferansiyel denklem takımı elde edilmiş olur. Burada κ bir malzeme sabiti olup, düzlem şekil değiştirme halinde $\kappa = 3 - 4\nu$, düzlem gerilme halinde $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ olarak bilinmektedir. ν Poisson oranını ifade etmektedir.

$\Phi(\alpha, y)$ 'i bulmak için aşağıdaki işlem adımları izlenir:

i) İlk olarak (32) ifadesinin y 'e göre bir defa türevi alınır.

$$-(\kappa-1)\alpha^2\frac{d\psi}{dy} + (\kappa+1)\frac{d^3\psi}{dy^3} - 2i\alpha\frac{d^2\Phi}{dy^2} = 0 \quad (33)$$

ii) (31) ifadesinden $\frac{d\psi}{dy}$ çekilir ve y 'e göre türevleri alınır.

$$\frac{d\psi}{dy} = -\frac{(\kappa+1)\alpha}{2i}\Phi + \frac{(\kappa-1)}{2i\alpha}\frac{d^2\Phi}{dy^2} \quad (34)$$

$$\frac{d^3\psi}{dy^3} = -\frac{(\kappa+1)\alpha}{2i}\frac{d^2\Phi}{dy^2} + \frac{(\kappa-1)}{2i\alpha}\frac{d^4\Phi}{dy^4} \quad (35)$$

iii) (34) ve (35), (33) ifadesinde yazılıp düzenlendiğinde

$$\frac{d^4\Phi}{dy^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2\Phi}{dy^2} + \alpha^4\Phi = 0 \quad (36)$$

ϕ 'e göre dördüncü mertebeden, sabit katsayılı, lineer homojen diferansiyel denklem elde edilir. Bu diferansiyel denklemin çözümü $\Phi = e^{wy}$ olarak kabul edilir ve bu çözümün gerekli türevleri alınıp (36)'da yazılırsa karakteristik denklem

$$w^4 - 2\alpha^2 w^2 + \alpha^4 = 0 \quad (37)$$

olarak oluşur. Bu denklemin kökleri $w_1 = w_2 = \alpha$ ve $w_3 = w_4 = -\alpha$ olarak bulunur. Buradan (37) denkleminin çözümü A, B, C ve D bilinmeyen sabitler olmak üzere

$$\Phi(\alpha, y) = A e^{-\alpha y} + B y e^{-\alpha y} + C e^{\alpha y} + D y e^{\alpha y} \quad (38)$$

olarak elde edilir. (38)'nin yardımıyla $\psi(\alpha, y)$ de bulunabilir. Bunun için (31)'in y'e göre bir defa türevi alınır. Buradan $d^2\psi/dy^2$ ifadesi çekilip, (32)'de yazılır. Ayrıca (38) ile verilen $\phi(\alpha, y)$ 'nin gerekli türevleri de alınıp denklemde yerlerine konursa $\psi(\alpha, y)$

$$\psi(\alpha, y) = -i \left[\left[A + \left(\frac{\kappa}{\alpha} + y \right) B \right] e^{-\alpha y} + \left[-C + \left(\frac{\kappa}{\alpha} - y \right) D \right] e^{\alpha y} \right] \quad (39)$$

şeklinde elde edilir. $\Phi(\alpha, y)$ ve $\psi(\alpha, y)$, (19) ve (20)'de yazıldığında $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ yer değiştirme ifadeleri aşağıdaki şekli alırlar:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(A + B y) e^{-\alpha y} + (C + D y) e^{\alpha y} \right] e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (40)$$

$$v(x, y) = -\frac{1}{2\pi} i \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left[A + \left(\frac{\kappa}{\alpha} + y \right) B \right] e^{-\alpha y} + \left[-C + \left(\frac{\kappa}{\alpha} - y \right) D \right] e^{\alpha y} \right] e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (41)$$

$u(x, y)$ ve $v(x, y)$ ifadelerinin gerekli türevleri alındıktan sonra (4), (5) ve (7) nolu denklemlerdeki gerilme ifadelerinde yazılırsa düzlem hal için gerilmeler:

$$\frac{\sigma_x(x, y)}{2G} = -\frac{1}{2\pi} i \int_{-\infty}^{\infty} \alpha \left[A e^{-\alpha y} + \left(\frac{\kappa-3}{2\alpha} + y \right) B e^{-\alpha y} + C e^{\alpha y} + \left(y - \frac{\kappa-1}{2\alpha} \right) D e^{\alpha y} \right] e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (42)$$

$$\frac{\sigma_y(x, y)}{2G} = \frac{1}{2\pi} i \int_{-\infty}^{\infty} \alpha \left[A e^{-\alpha y} + \left(\frac{\kappa+1}{2\alpha} + y \right) B e^{-\alpha y} + C e^{\alpha y} + \left(y - \frac{\kappa+1}{2\alpha} \right) D e^{\alpha y} \right] e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (43)$$

$$\frac{\tau_{xy}(x, y)}{2G} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha \left[A e^{-\alpha y} + \left(\frac{\kappa-1}{2\alpha} + y \right) B e^{-\alpha y} - C e^{\alpha y} - \left(y - \frac{\kappa-1}{2\alpha} \right) D e^{\alpha y} \right] e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (44)$$

şeklinde bulunmuş olur.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Giriş

Bu çalışmada rijit dairesel bir pança bastırılan h yüksekliğindeki elastik tabaka ile elastik yarım düzlemin sürekli ve ayrılmalı değme problemi sürtünmenin varlığında ele alınmıştır. Rijit dairesel panç düşeyde P tekil yükü ile bastırılırken, pança yatayda da, sürtünme katsayısı η ile değişen, ηP değerinde bir Q yükü etki ettirilmiştir. Tabaka x eksenini boyunca $(-\infty, +\infty)$ aralığında uzanmaktadır. Problem düzlem hal için inceleneceğinden z eksenini doğrultusundaki kalınlık birim alınacaktır. Çözümde ağırlık etkisi ihmal edilirken değme bölgelerinde sürtünmenin etkisi dikkate alınmıştır.

2.2. Kullanılacak Denklemler

Sürekli ve ayrılmalı değme probleminin çözümünde kullanılacak gerilme ve yer değiştirme ifadeleri tabaka ve elastik yarım düzlem için (40)-(44) no'lu denklemlerden yararlanılarak çıkartılabilir.

Tabakaya ait ifadelerde "1" alt indisi kullanılarak gerilme ve şekil değiştirme ifadeleri tabaka için aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$u_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(A_1 + B_1 y) e^{-\alpha y} + (C_1 + D_1 y) e^{\alpha y} \right] e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (45)$$

$$v_1(x, y) = -\frac{1}{2\pi} i \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left[A_1 + \left(\frac{\kappa_1}{\alpha} + y \right) B_1 \right] e^{-\alpha y} + \left[-C_1 + \left(\frac{\kappa_1}{\alpha} - y \right) D_1 \right] e^{\alpha y} \right] e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (46)$$

$$\frac{\sigma_{x1}(x, y)}{2G_1} = -\frac{1}{2\pi} i \int_{-\infty}^{\infty} \left[\alpha A_1 e^{-\alpha y} + \left(\frac{\kappa_1 - 3}{2} + \alpha y \right) B_1 e^{-\alpha y} + \alpha C_1 e^{\alpha y} + \left(\alpha y - \frac{\kappa_1 - 3}{2} \right) D_1 e^{\alpha y} \right] e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (47)$$

$$\frac{\sigma_{y1}(x, y)}{2G_1} = \frac{1}{2\pi} i \int_{-\infty}^{\infty} \left[\alpha A_1 e^{-\alpha y} + \left(\frac{\kappa_1 + 1}{2} + \alpha y \right) B_1 e^{-\alpha y} + \alpha C_1 e^{\alpha y} + \left(\alpha y - \frac{\kappa_1 + 1}{2} \right) D_1 e^{\alpha y} \right] e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (48)$$

$$\frac{\tau_{xy1}(x, y)}{2G_1} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\alpha A_1 e^{-\alpha y} + \left(\frac{\kappa_1 - 1}{2} + \alpha y \right) B_1 e^{-\alpha y} - \alpha C_1 e^{\alpha y} + \left(\alpha y - \frac{\kappa_1 - 1}{2} \right) D_1 e^{\alpha y} \right] e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (49)$$

Elastik yarım düzlemde $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$ iken $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \rightarrow 0$ olacağından gerilme ve yer değiştirme ifadelerinde sıfıra gitmeyen terimler düşer. Elastik yarım düzleme ait ifadeler için “2” alt indisi kullanılmıştır. Bu durumda gerilme ve yer değiştirmeler elastik yarım düzlem için

$$u_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(C_2 + D_2 y) e^{|\alpha|y} \right] e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (50)$$

$$v_2(x, y) = -\frac{1}{2\pi} i \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{|\alpha|}{\alpha} \left[-C_2 + \left(\frac{\kappa_2}{|\alpha|} - y \right) D_2 \right] e^{|\alpha|y} \right] e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (51)$$

$$\frac{\sigma_{x2}(x, y)}{2G_2} = -\frac{1}{2\pi} i \int_{-\infty}^{\infty} \alpha \left[C_2 e^{|\alpha|y} + \left(y - \frac{\kappa_2 - 3}{2|\alpha|} \right) D_2 e^{|\alpha|y} \right] e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (52)$$

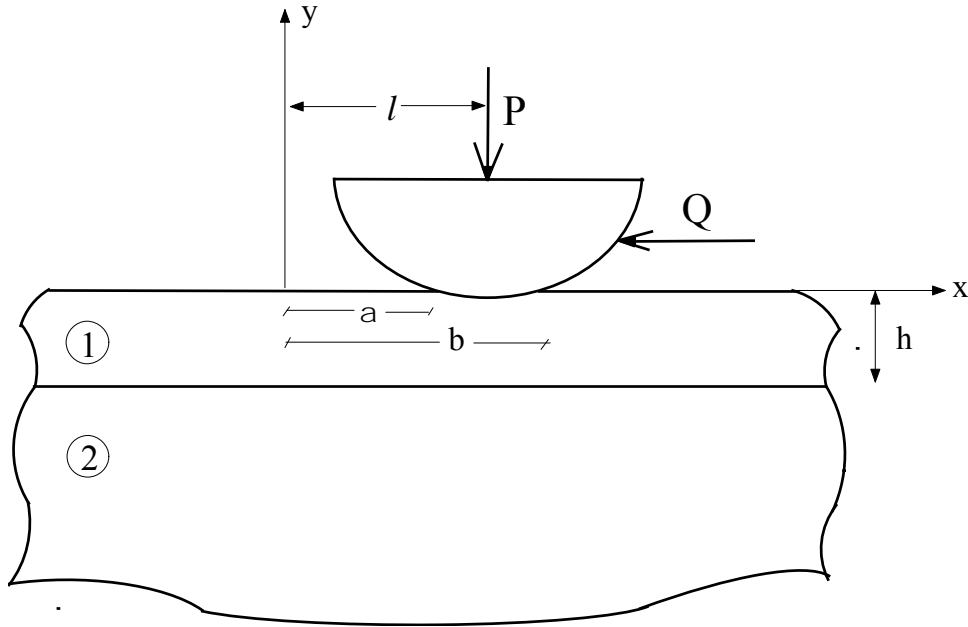
$$\frac{\sigma_{y2}(x, y)}{2G_2} = \frac{1}{2\pi} i \int_{-\infty}^{\infty} \alpha \left[C_2 e^{|\alpha|y} + \left(y - \frac{\kappa_2 + 1}{2|\alpha|} \right) D_2 e^{|\alpha|y} \right] e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (53)$$

$$\frac{\tau_{xy2}(x, y)}{2G_2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\alpha| \left[C_2 e^{|\alpha|y} + \left(y - \frac{\kappa_2 - 1}{2|\alpha|} \right) D_2 e^{\alpha y} \right] e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (54)$$

olarak yazılabilir.

2.3. Sürekli Değme Problemi

Rijit dairesel bir pançla bastırılan elastik tabaka ile yarım düzlemin birbirine tam yapışık olduğu sürekli değme problemi için problemin geometrisi Şekil 1’ de verilmiştir. Panç ile tabaka (a, b) aralığında değme halindedir. Tabaka ile yarım düzlem birbirine tam yapışık olup herhangi bir şekilde ayrılma meydana gelmemektedir. P tekil yükünün ya da panç merkezinin y eksenine uzaklığı “ l ” kadardır. Panç ile tabaka arasında oluşan değme bölgesinde sürtünmenin etkisi dikkate alınmıştır.



Şekil 1. Sürekli değme probleminin geometrisi

2.3.1. Sınır Şartları

Elastik tabaka ile yarım düzlem birbirine tam yapışık olduğunda değme yüzeyinde tabaka ve yarım düzlem için yer değiştirmeler ile σ_y ve τ_{xy} gerilmeleri birbirine eşit olacaktır. Probleme ait sınır şartları $y = 0$ ve $y = -h$ ’de aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\sigma_{y1}(x,0) = \begin{cases} -p(x) & a < x < b \\ 0 & x \leq a, \quad x \geq b \end{cases} \quad (55)$$

$$\tau_{xy1}(x,0) = \begin{cases} -\eta p(x) & a < x < b \\ 0 & x \leq a, \quad x \geq b \end{cases} \quad (56)$$

$$\sigma_{y1}(x,-h) = \sigma_{y2}(x,-h) \quad -\infty < x < \infty \quad (57)$$

$$\tau_{xy1}(x,-h) = \tau_{xy2}(x,-h) \quad -\infty < x < \infty \quad (58)$$

$$u_1(x,-h) = u_2(x,-h) \quad -\infty < x < \infty \quad (59)$$

$$v_1(x,-h) = v_2(x,-h) \quad -\infty < x < \infty \quad (60)$$

$$\frac{\partial v_1(x,0)}{\partial x} = F(x) \quad a < x < b \quad (61)$$

Düsey ve yatay denge şartları ise

$$\int_a^b p(x)dx = P, \quad \eta \int_a^b p(x)dx = Q \quad (62)$$

olmaktadır. Yukarıdaki şartlarda geçen $p(x)$, rijit panç ile tabaka arasındaki değme gerilmesini ifade eden bilinmeyen bir fonksiyondur. a ve b sırasıyla, rijit panç ile tabaka arasındaki değmenin başladığı ve bittiği noktanın y eksenine uzaklığını belirtmektedir. Panç rijit olduğu için, pançın altında tabakada meydana gelen $v_1(x,0)$ yer değiştirmesi panç profiline bağlı olarak değişecektir. Bu sınır şartı her iki tarafın türevleri alınarak (61)'deki gibi yazılabilir ve burada $F(x)$ yükü ileten eğrisel rijit pançın şekil fonksiyonunun türevini ifade etmektedir.

2.3.2. Katsayıların Belirlenmesi

Probleme ait ilk altı sınır şartı (55-60) yazılarak gerilme ve yer değiştirme ifadelerindeki A_1, B_1, C_j, D_j ($j=1,2$) katsayıları değme gerilmesine bağlı olarak bulunacaktır. Sınır şartları gerilme ve yer değiştirme ifadelerinde yazılarak Fourier üstel dönüşümleri alındığında katsayılar için aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$2G_1 i \left[\alpha A_1 + \left(\frac{\kappa_1 + 1}{2} \right) B_1 + \alpha C_1 - \left(\frac{\kappa_1 + 1}{2} \right) D_1 \right] = -p(\alpha) \quad (63)$$

$$-2G_1 \left[\alpha A_1 + \left(\frac{\kappa_1 - 1}{2} \right) B_1 - \alpha C_1 + \left(\frac{\kappa_1 - 1}{2} \right) D_1 \right] = -\eta p(\alpha) \quad (64)$$

$$\left[\alpha A_1 e^{\alpha h} + \left(-\alpha h + \frac{\kappa_1 + 1}{2} \right) B_1 e^{\alpha h} + \alpha C_1 e^{-\alpha h} + \left(-\alpha h - \frac{\kappa_1 + 1}{2} \right) D_1 e^{-\alpha h} \right] - m \frac{|\alpha|^2}{\alpha} C_2 e^{-|\alpha|h} + m \left(\frac{|\alpha| \kappa_2 + 1}{\alpha} + \frac{|\alpha|^2}{\alpha} h \right) D_2 e^{-|\alpha|h} = 0 \quad (65)$$

$$\left[\alpha A_1 e^{\alpha h} + \left(-\alpha h + \frac{\kappa_1 - 1}{2} \right) B_1 e^{\alpha h} - \alpha C_1 e^{-\alpha h} + \left(\alpha h + \frac{\kappa_1 - 1}{2} \right) D_1 e^{-\alpha h} \right] + m |\alpha| C_2 e^{-|\alpha|h} - m \left(\frac{\kappa_2 - 1}{2} + |\alpha|h \right) D_2 e^{-|\alpha|h} = 0 \quad (66)$$

$$A_1 e^{\alpha h} - B_1 e^{\alpha h} + C_1 e^{-\alpha h} + D_1 h e^{-\alpha h} - C_2 e^{-|\alpha|h} + D_2 h e^{-|\alpha|h} = 0 \quad (67)$$

$$A_1 e^{\alpha h} + \left(\frac{\kappa_1}{\alpha} - h \right) B_1 e^{\alpha h} - C_1 e^{-\alpha h} + \left(\frac{\kappa_1}{\alpha} + h \right) D_1 e^{-\alpha h} + \frac{|\alpha|}{\alpha} C_2 e^{-|\alpha|h} - \frac{|\alpha|}{\alpha} \left(\frac{\kappa_2}{|\alpha|} + h \right) D_2 e^{-|\alpha|h} = 0 \quad (68)$$

Denklemlerde geçen $p(\alpha)$ ve m aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$p(\alpha) = \int_a^b p(x)e^{i\alpha x} dx \quad (69)$$

$$m = \frac{G_2}{G_1} \quad (70)$$

Elde edilen bu altı denklem çözümlerse katsayılar

$$A_1 = \frac{1}{4\alpha G_1 \Delta_1} p(\alpha) \left[[i(\kappa_1 - 1) + \eta(\kappa_1 + 1)] T_{1a} e^{-4\alpha h} + 2[iT_2 - \eta T_3] e^{-2\alpha h} \right] \quad (71)$$

$$B_1 = -\frac{1}{2G_1 \Delta_1} p(\alpha) [(i + \eta) T_{1a} e^{-4\alpha h} + (-iT_5 + \eta T_4) e^{-2\alpha h}] \quad (72)$$

$$C_1 = \frac{1}{4G_1 \Delta_1 \alpha} p(\alpha) \left[2[iT_6 - \eta T_7] e^{-2\alpha h} - [(\kappa_1 - 1)i + (\kappa_1 + 1)\eta] T_{8a} \right] \quad (73)$$

$$D_1 = \frac{p(\alpha)}{2G_1 \Delta_1} [-(i + \eta) T_{8a} + (iT_4 - \eta T_5) e^{-2\alpha h}] \quad (74)$$

$$C_2 = -\frac{1}{4G_1 \Delta_1 \alpha} (1 + \kappa_1) \left[e^{h(-3\alpha + |\alpha|)} (iT_9 - \eta T_{10}) + e^{-h(\alpha - |\alpha|)} (iT_{11} + \eta T_{12}) \right] \quad (75)$$

$$D_2 = \frac{1}{2G_1 \Delta_1} (1 + \kappa_1) \left[e^{h(-3\alpha + |\alpha|)} (iT_{13} - \eta T_{14}) + e^{-h(\alpha - |\alpha|)} (iT_{15} - \eta T_{16}) \right] \quad (76)$$

bilinmeyen değme gerilmesi $p(\alpha)$ ' a bağlı olarak bulunur. Burada

$$\Delta_1 = T_{8a} + 2T_0 e^{-2\alpha h} - T_{1a} e^{-4\alpha h} \quad (77)$$

$$T_0 = -(\kappa_1 - 1)(\kappa_2 - 1) + m - 2\frac{\kappa_2}{m} + \kappa_1 m^2 + 4\alpha^2 h^2 (m - 1) \left(\frac{\kappa_2}{m} + 1\right) \quad (78)$$

$$T_{1a} = \frac{|\alpha|}{\alpha}(\kappa_1 + 1)(\kappa_2 + 1) - (\kappa_1 - 1)(\kappa_2 - 1) - 2\frac{\kappa_2}{m} - 2\kappa_1 m \quad (79)$$

$$T_2 = -2\alpha h(\kappa_1 - 1)(m - 1)\left(1 + \frac{\kappa_2}{m}\right) + (\kappa_1 - 1)\left(\kappa_1 m + \frac{\kappa_2}{m}\right) - 2\kappa_1(\kappa_2 - 1) + 4\alpha^2 h^2(m - 1)\left(1 + \frac{\kappa_2}{m}\right) \quad (80)$$

$$T_3 = -2\alpha h(\kappa_1 + 1)(m - 1)\left(1 + \frac{\kappa_2}{m}\right) - (\kappa_1 + 1)\left(-\kappa_1 m + \frac{\kappa_2}{m}\right) + 4\alpha^2 h^2(m - 1)\left(1 + \frac{\kappa_2}{m}\right) \quad (81)$$

$$T_4 = 2(m - 1)\left(\frac{\kappa_2}{m} + 1\right)(2\alpha h - 1) \quad (82)$$

$$T_5 = 2(m - 1)\left(\frac{\kappa_2}{m} + 1\right)(2\alpha h + 1) \quad (83)$$

$$T_6 = 2\alpha h(\kappa_1 - 1)(m - 1)\left(1 + \frac{\kappa_2}{m}\right) + (\kappa_1 - 1)\left(\kappa_1 m + \frac{\kappa_2}{m}\right) + 2\kappa_1(-\kappa_2 + 1) + 4\alpha^2 h^2(m - 1)\left(1 + \frac{\kappa_2}{m}\right) \quad (84)$$

$$T_7 = 2\alpha h(\kappa_1 + 1)(m - 1)\left(1 + \frac{\kappa_2}{m}\right) + (\kappa_1 + 1)\left(\kappa_1 m - \frac{\kappa_2}{m}\right) + 4\alpha^2 h^2(m - 1)\left(1 + \frac{\kappa_2}{m}\right) \quad (85)$$

$$T_{8a} = \frac{|\alpha|}{\alpha}(\kappa_1 + 1)(\kappa_2 + 1) + (\kappa_1 - 1)(\kappa_2 - 1) + 2\frac{\kappa_2}{m} + 2\kappa_1 m \quad (86)$$

$$T_9 = -\frac{|\alpha|}{\alpha}(\kappa_1 - 1)(\kappa_2 + 1) + (\kappa_1 + 1)(\kappa_2 - 1) - 2\alpha h\left[-\frac{|\alpha|}{\alpha}(\kappa_1 - \kappa_2) + (\kappa_1 - 1) + (\kappa_2 - 1)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\right] - 4\alpha^2 h^2\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 + \frac{|\alpha|}{\alpha}\right) \quad (87)$$

$$T_{10} = -\frac{|\alpha|}{\alpha}(\kappa_1 + 1)(\kappa_2 + 1) + (\kappa_1 - 1)(\kappa_2 - 1) + 4\frac{\kappa_2}{m} + 2\alpha h \left[-(\kappa_1 + \kappa_2) + 2\frac{\kappa_2}{m} - \frac{|\alpha|}{\alpha} \left(-\frac{2}{m} + 2 - \kappa_1 + \kappa_2 \right) \right] + 4\alpha^2 h^2 \left(-1 + \frac{1}{m} \right) \left(1 + \frac{|\alpha|}{\alpha} \right) \quad (88)$$

$$T_{11} = \frac{|\alpha|}{\alpha}(\kappa_1 - 1)(\kappa_2 + 1) + (\kappa_1 + 1)(\kappa_2 - 1) + 2\alpha h \left[\frac{|\alpha|}{\alpha}(\kappa_1 - \kappa_2) + (\kappa_1 - 1) + (\kappa_2 - 1) \left(1 - \frac{2}{m} \right) \right] - 4\alpha^2 h^2 \left(1 - \frac{1}{m} \right) \left(1 - \frac{|\alpha|}{\alpha} \right) \quad (89)$$

$$T_{12} = \frac{|\alpha|}{\alpha}(\kappa_1 + 1)(\kappa_2 + 1) + (\kappa_1 - 1)(\kappa_2 - 1) + 4\frac{\kappa_2}{m} + 2\alpha h \left[\kappa_1 + \kappa_2 - 2\frac{\kappa_2}{m} + -\frac{|\alpha|}{\alpha} \left(-\frac{2}{m} + 2 + \kappa_1 - \kappa_2 \right) \right] + 4\alpha^2 h^2 \left(-1 + \frac{1}{m} \right) \left(1 + \frac{|\alpha|}{\alpha} \right) \quad (90)$$

$$T_{13} = -\frac{|\alpha|}{\alpha}(\kappa_1 + 1) - (-\kappa_1 + 1) + \frac{2}{m} + 2\alpha h \left(1 - \frac{1}{m} \right) \left(1 + \frac{|\alpha|}{\alpha} \right) \quad (91)$$

$$T_{14} = -\frac{|\alpha|}{\alpha} \left(\kappa_1 - 1 + \frac{2}{m} \right) + (\kappa_1 + 1) + 2\alpha h \left(1 - \frac{1}{m} \right) \left(1 + \frac{|\alpha|}{\alpha} \right) \quad (92)$$

$$T_{15} = -\frac{|\alpha|}{\alpha}(\kappa_1 + 1) + (-\kappa_1 + 1) - \frac{2}{m} + 2\alpha h \left(1 - \frac{1}{m} \right) \left(1 - \frac{|\alpha|}{\alpha} \right) \quad (93)$$

$$T_{16} = \frac{|\alpha|}{\alpha} \left(\kappa_1 - 1 + \frac{2}{m} \right) + (\kappa_1 + 1) - 2\alpha h \left(1 - \frac{1}{m} \right) \left(1 - \frac{|\alpha|}{\alpha} \right) \quad (94)$$

olarak tanımlıdır.

2.3.3. İntegral Denklemin Elde Edilmesi

Problem için henüz bir bilinmeyen olan değme gerilmesini $p(\alpha)$ elde edebilmek için (61) no'lu sınır şartı kullanılacaktır. (46) denkleminde yararlanarak

$$\frac{\partial v_1(x, y)}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\alpha A_1 + (\kappa_1 + \alpha y) B_1 \right] e^{-\alpha y} + \left[-\alpha C_1 + (\kappa_1 - \alpha y) D_1 \right] e^{\alpha y} \right] e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (95)$$

elde edilir. İlk altı sınır şartından elde edilen A_1, B_1, C_1, D_1 katsayıları (95)'de yazılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\frac{\partial v_1(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{4\pi G_1} \int_a^b p(t) dt [M_1(x, t) + \eta M_2(x, t)] \quad (96)$$

elde edilir. Burada

$$M_1(x, t) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta} \left[[(\kappa_1 - 1)T_1 e^{-4\alpha h} + 2T_2 e^{-2\alpha h}] e^{-\alpha y} - 2(\kappa_1 + \alpha y) [T_1 e^{-4\alpha h} - T_4 e^{-2\alpha h}] e^{-\alpha y} - \right. \\ \left. [2T_6 e^{-2\alpha h} - (\kappa_1 - 1)T_8] e^{\alpha y} + 2(\kappa_1 - \alpha y) [-T_8 + T_5 e^{-2\alpha h}] e^{\alpha y} \right] \sin \alpha(t - x) d\alpha \quad (97)$$

$$M_2(x, t) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta} \left[[(\kappa_1 + 1)T_1 e^{-4\alpha h} - 2T_3 e^{-2\alpha h}] e^{-\alpha y} - 2(\kappa_1 + \alpha y) [T_1 e^{-4\alpha h} + T_5 e^{-2\alpha h}] e^{-\alpha y} - \right. \\ \left. [2T_7 e^{-2\alpha h} + (\kappa_1 + 1)T_8] e^{\alpha y} + 2(\kappa_1 - \alpha y) [T_8 + T_4 e^{-2\alpha h}] e^{\alpha y} \right] \cos \alpha(t - x) d\alpha \quad (98)$$

$$\Delta = T_8 + 2T_0 e^{-2\alpha h} - T_1 e^{-4\alpha h} \quad (99)$$

$$T_1 = 2(\kappa_2 - \kappa_1 m) \left(1 - \frac{1}{m}\right) \quad (100)$$

$$T_8 = 2(1 + \kappa_1 m) \left(1 + \frac{\kappa_2}{m}\right) \quad (101)$$

olarak tanımlıdır.

$y \rightarrow 0$ limitine geçilirken, $M_1(x, t)$ ve $M_2(x, t)$ ifadelerinin çekirdeklerindeki ST_1 ve ST_2 fonksiyonları, α 'nın büyük değerleri için sabit bir değere yakınsamaktadır.

$$ST_1 = (2\alpha y - \kappa_1 - 1)e^{\alpha y} \quad (102)$$

$$ST_2 = (-2\alpha y + \kappa_1 - 1)e^{\alpha y} \quad (103)$$

ST_1 ve ST_2 fonksiyonları, çekirdeklerin sıfıra yakınsamasını sağlamak için, kapalı integralleri alınmak üzere $M_1(x, t)$ ve $M_2(x, t)$ ifadelerinden çıkarılır. (96) ifadesi tekil terimler için düzenlendiğinde

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1(x, y)}{\partial x} = & \frac{1}{4\pi G_1} \int_a^b p(t) dt [M_1^*(x, t) + \eta M_2^*(x, t)] \\ & + \frac{1}{4\pi G_1} \int_a^b p(t) dt [\lim_{y \rightarrow 0} STI_1] + \frac{1}{4\pi G_1} \int_a^b p(t) dt [\lim_{y \rightarrow 0} STI_2] \end{aligned} \quad (104)$$

haline gelir. Burada $M_{1cek}(\alpha)$ ile $N_{1cek}(\alpha)$ sırasıyla $M_1(x, t)$ ile $N_1(x, t)$ integrallerinin çekirdekleri ve STI_1 ile STI_2 çekirdeklerden dışarı alınan tekil terimler olmak üzere

$$M_1^*(x, t) = \int_0^\infty [M_{1cek} - ST_1] \sin \alpha(t - x) dt \quad (105)$$

$$M_2^*(x, t) = \int_0^\infty [M_{2cek} - ST_2] \cos \alpha(t - x) dt \quad (106)$$

$$STI_1 = \int_0^{\infty} (2\alpha y - \kappa_1 - 1)e^{-\alpha(-y)} \sin \alpha(t-x) d\alpha \quad (107)$$

$$STI_2 = \eta \int_0^{\infty} (-2\alpha y + \kappa_1 - 1)e^{-\alpha(-y)} \cos \alpha(t-x) d\alpha \quad (108)$$

olarak yazılabilir. STI_1 ve STI_2 ifadelerinin kapalı integralleri integral dönüşüm tabloları yardımıyla aşağıdaki gibi bulunur (Erdelyi vd., 1954).

$$STI_{k1} = -(t-x) \left[\frac{4y^2 + (\kappa_1 + 1)[y^2 + (t-x)^2]}{[y^2 + (t-x)^2]^2} \right] \quad (109)$$

$$STI_{k2} = -y \left[\frac{2[y^2 - (t-x)^2]}{[y^2 + (t-x)^2]^2} + (\kappa_1 - 1) \frac{1}{y^2 + (t-x)^2} \right] \quad (110)$$

Sınır şartının yazılacağı $y=0$ değeri için STI_2 'nin kapalı integralinin değeri "0" olmaktadır. Bu nedenle (104) no'lu denklemdeki STI_2 'nin olduğu 3. terimde kapalı integral alınmadan önce $y=0$ yazılıp düzenleme yapılır

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi G_1} \int_a^b p(t) dt \left[\lim_{y \rightarrow 0} STI_2 \right] &= \frac{1}{4\pi G_1} \int_a^b p(t) dt \left[\eta \int_0^{\infty} (\kappa_1 - 1) \cos \alpha(t-x) d\alpha \right] \\ &= \eta \frac{1}{4G_1} (\kappa_1 - 1) p(x) \end{aligned} \quad (111)$$

Artık (60) no'lu sınır şartı yazılır ve düzenlenirse:

$$\omega p(x) + \frac{\gamma}{\pi} \int_a^b \frac{p(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_a^b k(x,t) p(t) dt = H(x) \quad (112)$$

şeklinde ikinci tür tekil bir integral denklem elde edilir. Burada

$$\omega = \eta \frac{(\kappa_1 - 1)}{\kappa_1 + 1}, \quad \gamma = -1 \quad (113)$$

$$k(x, t) = K_1(x, t) + \eta K_2(x, t) \quad (114)$$

$$K_1(x, t) = \int_0^\infty \left[\frac{1}{\Delta} \left[-2(1 + \kappa_1 m) \left(1 + \frac{\kappa_2}{m}\right) - 2(\kappa_2 - \kappa_1 m) \left(1 - \frac{1}{m}\right) e^{-4\alpha h} \right. \right. \\ \left. \left. + 8\alpha h(m-1) \left(\frac{\kappa_2}{m} + 1\right) e^{-2\alpha h} \right] + 1 \right] \sin \alpha(t-x) d\alpha \quad (115)$$

$$K_2(x, t) = \frac{\kappa_1 - 1}{\kappa_1 + 1} \int_0^\infty \left[\frac{1}{\Delta} \left[2(1 + \kappa_1 m) \left(1 + \frac{\kappa_2}{m}\right) - 2(\kappa_2 - \kappa_1 m) \left(1 - \frac{1}{m}\right) e^{-4\alpha h} - \right. \right. \\ \left. \left. 4 \left[\left(\kappa_1 m + \frac{\kappa_2}{m}\right) + 2\kappa_1 \frac{1 - \kappa_2}{\kappa_1 - 1} + 4\alpha^2 h^2 \left(\frac{m-1}{\kappa_1 - 1}\right) \left(\frac{\kappa_2}{m} + 1\right) \right] e^{-2\alpha h} \right] - 1 \right] \cos \alpha(t-x) d\alpha \quad (116)$$

$$H(x) = \frac{4G_1}{\kappa_1 + 1} F(x) \quad (117)$$

olarak tanımlıdır. İntegral denklemin sayısal çözümü için boyutsuzlaştırma ve normalizasyon işlemleri yapılır. Bunun için $\alpha = z/h$ ve

$$t = \frac{b-a}{2} r + \frac{b+a}{2}, \quad x = \frac{b-a}{2} s + \frac{b+a}{2} \quad (118)$$

değişken dönüşümleri yapılmış ve

$$\phi(r) = \frac{p(r)}{P/h} \quad (119)$$

boyutsuz büyüklüğü tanımlanmıştır. Böylelikle (112) no'lu integral denklem ve (62) no'lu denge şartı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\omega\phi(x) + \frac{\gamma}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\phi(r)}{r-s} dr + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 k^*(s,r)\phi(r)dr = H^*(s) \quad (120)$$

$$\frac{b-a}{2h} \int_{-1}^1 \phi(r)dr = 1 \quad (121)$$

Burada

$$k^*(s,r) = \left(\frac{b-a}{2h}\right)k(s,r) \quad (122)$$

olarak tanımlıdır.

2.3.4. Dairesel Panç Durumu

Panç profili dairesel olduğunda, R panç yarıçapı olmak üzere, panç profilinin türevi olan $F(x)$ 'i aşağıdaki gibi yazmak mümkündür.

$$F(x) = \frac{x-l}{R} \quad (123)$$

(118)'deki dönüşüm uygulandığında

$$F(s) = \frac{1}{R/h} \left[\frac{(b-a)}{2h} s + \frac{(b+a)}{2h} - \frac{l}{h} \right] \quad (124)$$

olarak elde edilir. (124), (117)'de yazıldığında, dairesel panç durumu için

$$H^*(s) = \frac{4}{\kappa_1 + 1} \frac{G_1}{P/h} \frac{1}{R/h} \left[\frac{(b-a)}{2h} s + \frac{(b+a)}{2h} - \frac{l}{h} \right] \quad (125)$$

olarak elde edilir.

2.3.5. İntegral Denklemin Sayısal Çözümü

İntegral denklem ilk terimin varlığından dolayı ikinci tür bir integral denklemdir. İntegral denklemin sayısal çözümü Jacobi polinomlarıyla çözüm ve Gauss-Jacobi integrasyon formülasyonu olmak üzere iki ayrı yöntemle yapılmıştır.

Değme gerilmeleri değmenin bittiği noktadan itibaren sıfır olduğundan integral denklemin indeksi “-1” dir. Her iki sayısal çözüm yönteminde de problemin çözümü

$$\phi(r) = g(r)w(r) \quad (126)$$

olarak aranır. Burada

$$w(r) = (1-r)^\alpha (1+r)^\beta \quad (127)$$

$$\alpha = \frac{1}{2\pi i} \ln \left[\frac{\omega - i\gamma}{\omega + i\gamma} \right] + N_0 \quad (128)$$

$$\beta = -\frac{1}{2\pi i} \ln \left[\frac{\omega - i\gamma}{\omega + i\gamma} \right] + M_0 \quad (129)$$

$$0 < \text{Re}[\alpha, \beta] < 1 \quad (130)$$

olarak tanımlıdırlar. N_0 ve M_0 tam sabitler olup α ve β pozitif olacak şekilde “1, 0, -1” değerlerinden birini alırlar.

2.3.5.1. İntegral Denklemin Jacobi Polinomlarıyla Sayısal Çözümü

İntegral denklemin Jacobi polinomlarıyla sayısal çözümü Erdogan vd., (1973) tarafından verilen çözüm yöntemiyle gerçekleştirilecektir.

Bu çözüm yönteminde $P_n^{(\alpha, \beta)}$ Jacobi polinomunu, c_n bilinmeyen sabitleri ifade etmek üzere boyutsuz değme gerilmesi

$$g(r) = \sum_0^{\infty} c_n P_n^{(\alpha, \beta)} \quad (131)$$

şeklinde bir seriyle tanımlanır. Problemin çözümü (126)'den yararlanarak

$$\phi(r) = \sum_0^{\infty} c_n P_n^{(\alpha, \beta)} (1-r)^\alpha (1+r)^\beta \quad (132)$$

olarak aranır ve çözüm c_n sabitlerinin bulunmasından ibarettir. (132), (120) no'lu integral denklemde yazılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında “-1” indeks için integral denklem

$$\frac{2}{\sin(\pi\alpha)} \theta_k^{(-\alpha, -\beta)} c_{k-1} + \sum_{n=0}^{M-1} d_{kn} c_n = H_k \quad k = 0, 1, \dots, M \quad (133)$$

şeklinde bir denklem sistemine dönüşür. Burada

$$\theta_k^{(-\alpha, -\beta)} = \frac{2^{-\alpha-\beta+1}}{2k-\alpha-\beta+1} \frac{\Gamma(k-\alpha+1)\Gamma(k-\beta+1)}{k!\Gamma(k-\alpha-\beta+1)} \quad (134)$$

$$d_{kn} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 P_k^{(-\alpha, -\beta)}(s) (1-s)^{-\alpha} (1+s)^{-\beta} \int_{-1}^1 P_n^{(\alpha, \beta)}(r) (1-r)^\alpha (1+r)^\beta k^*(r, s) dr ds \quad (135)$$

$$H_k = \int_{-1}^1 P_k^{(-\alpha, -\beta)}(s) (1-s)^{-\alpha} (1+s)^{-\beta} H^*(s) ds \quad (136)$$

olarak tanımlıdır. Γ Gamma fonksiyonunu simgelemektedir.

“-1” indeks için çözüm denge şartının yanı sıra uygunluk şartını da sağlamalıdır. İntegral denkleme ait uygunluk şartı

$$\int_{-1}^1 \left[H^*(s) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 k^*(r, s) \phi(r) dr \right] \frac{ds}{w(s)} = 0 \quad (137)$$

olarak yazılabilir (Erdogan vd., 1973).

(133) yardımıyla M tane bilinmeyeni $(c_0, c_1, \dots, c_{M-1})$ bulmak için $M+1$ tane denklem elde edilmektedir. (133)'de $k=0$ için yazılan denklemde $c_{-1}=0$ alınır ve bu denklem (137) no'lu uygunluk şartına denk gelmektedir:

$$\sum_{n=0}^{M-1} d_{0n} c_n = H_0 \quad (138)$$

Problemde bilinmeyenler M tane c_n (c_0, c_1, \dots, c_{M-1}) değeri ile a, b değme uzunlukları olmak üzere $M+2$ tanedir. (133)'den elde edilen $M+1$ denklem ve (121) no'lu denge şartıyla birlikte toplam $M+2$ tane olan denklemlerin yardımıyla bu $M+2$ tane bilinmeyeni bulmak mümkündür. Çözüm için a ve b değme uzunluklarına bir başlangıç değeri verilerek, (133)'den elde edilen $k=1, \dots, M$ denklemleri yardımıyla c_0, c_1, \dots, c_{M-1} sabitleri bulunur. Bulunan bu sabitler (138) no'lu uygunluk şartı ve (121) no'lu denge şartında yazılarak denklemlerin sağlanıp sağlanmadığına bakılır. Uygunluk şartı ve denge şartı istenilen bir hassaslık derecesinde sağlanana kadar bu işlemler tekrarlanır.

Denklemlerdeki özellikle d_{kn} sabitlerinin bulunması için kapalı çözümü olmayan integrallerin hesaplanması gerekmektedir. Bunun için Gauss-Jacobi Kuadratik formüllerinden yararlanılmıştır:

$$\int_{-1}^1 H(s)(1-s)^\alpha (1+s)^\beta ds = \sum_{j=1}^N W_j^- H(s_j) \quad (139)$$

$$P_N^{(-\alpha, -\beta)}(s_j) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (140)$$

$$\int_{-1}^1 H(r)(1-r)^\alpha (1+r)^\beta dr = \sum_{i=1}^N W_i^+ H(r_i) \quad (141)$$

$$P_N^{(\alpha, \beta)}(r_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (142)$$

W_i^- , W_i^+ ilgili Jacobi polinomunun ağırlık katsayılarını göstermektedir.

$$W_i^+ = -\frac{2N + \alpha + \beta + 2}{(N+1)!(N + \alpha + \beta - 1)} \frac{\Gamma(N + \alpha + 1)\Gamma(N + \beta + 1)}{\Gamma(N + \alpha + \beta + 1)} \frac{2^{\alpha+\beta}}{P_N^{(\alpha,\beta)}(r_i)P_{N+1}^{(\alpha,\beta)}(r_i)} \quad (143)$$

$$W_j^- = -\frac{2N - \alpha - \beta + 2}{(N+1)!(N - \alpha - \beta - 1)} \frac{\Gamma(N - \alpha + 1)\Gamma(N - \beta + 1)}{\Gamma(N - \alpha - \beta + 1)} \frac{2^{-\alpha-\beta}}{P_N^{(-\alpha,-\beta)}(s_j)P_{N+1}^{(-\alpha,-\beta)}(s_j)} \quad (144)$$

Bu formülasyon sayesinde d_{kn} aşağıdaki şekilde bulunur:

$$d_{kn} = \frac{(b-a)}{2h} [S_1 + \eta S_2] \quad (145)$$

$$S_1 = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N W_j^- W_i^+ P_k^{(-\alpha,-\beta)}(s_j) P_n^{(\alpha,\beta)}(r_i) K_1(r_i, s_j) \quad (146)$$

$$S_2 = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N W_j^- W_i^+ P_k^{(-\alpha,-\beta)}(s_i) P_n^{(\alpha,\beta)}(r_i) K_2(r_i, s_j) \quad (147)$$

2.3.5.2. İntegral Denklemin Gauss-Jacobi İntegrasyon Formülasyonu ile Sayısal Çözümü

İntegral denklemin Gauss-Jacobi integrasyon formülasyonu ile sayısal çözümü (Erdogan vd, 1973) ve (Krenk, 1975) tarafından verilen çözüm yöntemiyle gerçekleştirilecektir. Burada integral denklemin çözümü

$$\phi(r) = g(r)(1-r)^\alpha (1+r)^\beta \quad (148)$$

olarak aranır. (120) no'lu integral denklem, verilen çözüm yöntemiyle, $g(r)$ fonksiyonunun N noktadaki değerleri için aşağıdaki gibi bir lineer denklem takımına indirgenir.

$$\sum_{i=1}^N W_i^N g(r_i) \left[\frac{\gamma}{r_i - s_k} + k^*(r_i, s_k) \right] = H^*(s_k) \quad k = 1, 2, \dots, N+1 \quad (149)$$

Denge şartı ise

$$\frac{b-a}{2h} \sum_{i=1}^N W_i^N g(r_i) = 1/\pi \quad (150)$$

olur. Burada r_i ve s_k lar aşağıda tanımlandığı gibi Jacobi polinomlarının kökleri, W_i^N 'ler ise ağırlık katsayılarıdır.

$$P_N^{(\alpha,\beta)}(r_i) = 0 \quad i = 1,2,\dots,N \quad (151)$$

$$P_{N+1}^{(-\alpha,-\beta)}(s_k) = 0 \quad k = 1,2,\dots,N+1 \quad (152)$$

$$W_i^N = -\frac{1}{\pi} \frac{2N+\alpha+\beta}{(N+1)!} \frac{\Gamma(N+\alpha+1)\Gamma(N+\beta+1)}{\Gamma(N+\alpha+\beta+1)} \frac{2^{(\alpha+\beta)}}{P_N^{(\alpha,\beta)}(r_i) P_{N+1}^{(\alpha,\beta)}(r_i)} \quad (153)$$

Bilinmeyenler N tane $g(r_i)$ değeri ile a/h ve b/h değme uzunlukları olmak üzere toplam $N+2$ tanedir. $N+1$ tane integral denklemden ve 1 tane denge şartından elde edilen toplam $N+2$ denklemlerle, $N+2$ tane bilinmeyeni bulmak mümkündür. (149)'da N tane bilinmeyen $g(r_i)$ değeri için $N+1$ tane denklem olduğu görülmektedir. Bu nedenle (149)'daki herhangi bir denklem dışarı alınarak, denge şartıyla beraber sağlatılmaya çalışılacaktır. Bu sayede “-1” indeks için sağlatılması gereken (137) no'lu uygunluk şartı da sağlanmış olmaktadır.

2.3.6. Gerilmelerin Bulunması

A_1, B_1, C_1, D_1 ve C_2, D_2 katsayıları ile $p(x)$ değme gerilmesi dağılımı bulunduğundan sonra tabakada ve elastik yarım düzlemde istenilen bir noktada σ_x, σ_y normal gerilmeleri ve τ_{xy} kayma gerilmesi değerlerini bulmak mümkündür.

A_1, B_1, C_1, D_1 katsayıları (47)-(49)'da ve C_2, D_2 katsayıları (52)-(54)'de yerlerine konulduğunda, sırasıyla tabaka ve yarım düzleme ait gerilmeler elde edilir.

Tabakaya ait gerilme ifadelerinin çekirdeklerinde $y \rightarrow 0$ için tekil terimler meydana gelmektedir.

$y \rightarrow 0$ için tekil terimler

$$\sigma_{x1}(x, y)_{st1} = \frac{1}{2\pi} \int_a^b p(t) dt \int_0^\infty [-2(\alpha y + 1)e^{\alpha y}] \cos \alpha(t - x) d\alpha \quad (154)$$

$$\sigma_{x1}(x, y)_{st2} = \frac{1}{2\pi} \int_a^b p(t) dt \int_0^\infty \eta [-2(\alpha y + 2)e^{\alpha y}] \sin \alpha(t - x) d\alpha \quad (155)$$

$$\sigma_{y1}(x, y)_{st1} = \frac{1}{2\pi} \int_a^b p(t) dt \int_0^\infty [-2(1 - \alpha y)e^{\alpha y}] \cos \alpha(t - x) d\alpha \quad (156)$$

$$\sigma_{y1}(x, y)_{st2} = \frac{1}{2\pi} \int_a^b p(t) dt \int_0^\infty \eta [2\alpha y e^{\alpha y}] \sin \alpha(t - x) d\alpha \quad (157)$$

$$\tau_{xy1}(x, y)_{st1} = \frac{1}{2\pi} \int_a^b p(t) dt \int_0^\infty [-2\alpha y e^{\alpha y}] \sin \alpha(t - x) d\alpha \quad (158)$$

$$\tau_{xy1}(x, y)_{st2} = \frac{1}{2\pi} \int_a^b p(t) dt \int_0^\infty [2(\alpha y + 1)e^{\alpha y}] \cos \alpha(t - x) d\alpha \quad (159)$$

Belirlenen tekil terimlerin kapalı integralleri integral dönüşüm tabloları yardımıyla bulunur.

$$\sigma_{x1}(x, y)_{kt1} = \frac{1}{2\pi} \int_a^b p(t) dt \left[\frac{4y(t-x)^2}{[y^2 + (t-x)^2]^2} \right] \quad (160)$$

$$\sigma_{x1}(x, y)_{kt2} = \frac{1}{2\pi} \int_a^b p(t) dt \left[\frac{-4\eta(t-x)^3}{[y^2 + (t-x)^2]^2} \right] \quad (161)$$

$$\sigma_{y1}(x, y)_{kt1} = \frac{1}{2\pi} \int_a^b p(t) dt \left[\frac{4y^3}{[y^2 + (t-x)^2]^2} \right] \quad (162)$$

$$\sigma_{y1}(x, y)_{kt2} = \frac{1}{2\pi} \int_a^b p(t) dt \left[\frac{-4\eta y^2(t-x)}{[y^2 + (t-x)^2]^2} \right] \quad (163)$$

$$\tau_{x1}(x, y)_{kt1} = \frac{1}{2\pi} \int_a^b p(t) dt \left[\frac{4y^2(t-x)}{[y^2 + (t-x)^2]^2} \right] \quad (164)$$

$$\tau_{xy1}(x, y)_{kt2} = \frac{1}{2\pi} \int_a^b p(t) dt \left[\frac{-4\eta y(t-x)^2}{[y^2 + (t-x)^2]^2} \right] \quad (165)$$

Yakınsamayı bozan tekil terimler gerilmelere ait eşitliklerden çıkartıldığında gerilme çekirdeklerinde yakınsama sağlanmıştır. Çıkarılan tekil terimlerin aynı zamanda kapalı integrallerinin değerleri gerilme ifadelerine eklenmiştir. Böylelikle boyutsuz gerilme bileşenleri elastik tabakanın herhangi bir noktasında:

$$\frac{\sigma_{x1}(x, y)}{P/h} = \frac{\sigma_{x1}(x, y)}{P/h} - \left[\frac{\sigma_{x1}(x, y)_{st1}}{P/h} + \frac{\sigma_{x1}(x, y)_{st2}}{P/h} \right] + \left[\frac{\sigma_{x1}(x, y)_{kt1}}{P/h} + \frac{\sigma_{x1}(x, y)_{kt2}}{P/h} \right] \quad (166)$$

$$\frac{\sigma_{y1}(x, y)}{P/h} = \frac{\sigma_{y1}(x, y)}{P/h} - \left[\frac{\sigma_{y1}(x, y)_{st1}}{P/h} + \frac{\sigma_{y1}(x, y)_{st2}}{P/h} \right] + \left[\frac{\sigma_{y1}(x, y)_{kt1}}{P/h} + \frac{\sigma_{y1}(x, y)_{kt2}}{P/h} \right] \quad (167)$$

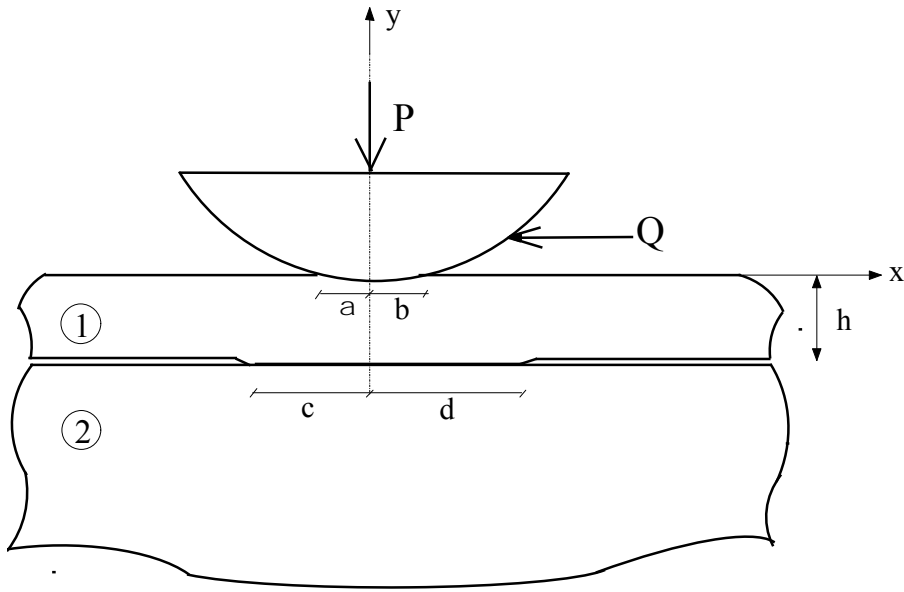
$$\frac{\tau_{xy1}(x, y)}{P/h} = \frac{\tau_{xy1}(x, y)}{P/h} - \left[\frac{\tau_{xy1}(x, y)_{st1}}{P/h} + \frac{\tau_{xy1}(x, y)_{st2}}{P/h} \right] + \left[\frac{\tau_{xy1}(x, y)_{kt1}}{P/h} + \frac{\tau_{xy1}(x, y)_{kt2}}{P/h} \right] \quad (168)$$

denklemleriyle bulunabilir. Elastik yarım düzleme ait gerilme ifadelerinde (σ_{x2}, σ_{y2} ve τ_{xy2}) tekil terimlere rastlanmamıştır.

2.4. Ayrılmalı Değme Problemi

Ağırlığı ihmal edilen elastik tabaka elastik yarım düzleme yapışık olmadan oturduğunda, tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme, gerilmenin sıfır olduğu noktadan itibaren sona erecek dolayısıyla değme sonlu bir bölgede kalacaktır. İncelenen bu ayrılmalı değme probleminin geometrisi Şekil 2' de verilmiştir.

Panç ile tabaka (a, b) aralığında tabaka ile yarım düzlem (c, d) aralığında değme halindedir. Değme bölgelerinde sürtünmenin etkisi dikkate alınmıştır. Rijit dairesel pança düşeyde P tekil yükü yatayda ise $\eta_1 P$ değerinde bir Q yükü etki etmektedir. Sonsuz uzunluktaki elastik tabakanın yüksekliği h olarak alınmış ve ağırlığı ihmal edilmiştir.



Şekil 2. Ayrılmalı değme probleminin geometrisi

2.4.1. Problemin Sınır Şartları

Elastik yarım düzleme oturan ve dairesel rijit panç ile bastırılan tabakanın ayrılmalı ve sürtülmeli değme problemine ait sınır şartları $y=0$ ve $y=-h$ için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\sigma_{y1}(x,0) = \begin{cases} -p_1(x) & -a < x < b \\ 0 & x \leq -a, \quad x \geq b \end{cases} \quad (169)$$

$$\tau_{xy1}(x,0) = \begin{cases} -\eta_1 p_1(x) & -a < x < b \\ 0 & x \leq -a, \quad x \geq b \end{cases} \quad (170)$$

$$\sigma_{y1}(x,-h) = \sigma_{y2}(x,-h) \quad -\infty < x < \infty \quad (171)$$

$$\tau_{xy1}(x,-h) = \tau_{xy2}(x,-h) \quad -\infty < x < \infty \quad (172)$$

$$\sigma_{y2}(x,-h) = \begin{cases} -p_2(x) & -c < x < d \\ 0 & x \leq -c, \quad x \geq d \end{cases} \quad (173)$$

$$\tau_{xy2}(x, -h) = \begin{cases} -\eta_2 p_2(x) & -c < x < d \\ 0 & x \leq -c, \quad x \geq d \end{cases} \quad (174)$$

$$\frac{\partial v_1(x, 0)}{\partial x} = F(x) \quad -a < x < b \quad (175)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, -h) - v_2(x, -h)] = 0 \quad -c < x < d \quad (176)$$

Probleme ait düşey ve yatay denge şartları ise sırasıyla

$$\int_{-a}^b p_1(t) dt = P, \quad \int_{-c}^d p_2(t) dt = P \quad (177a)$$

$$\eta_1 \int_{-a}^b p_1(t) dt = Q, \quad \eta_2 \int_{-c}^d p_2(t) dt = Q \quad (177b)$$

olmaktadır. Yukarıdaki şartlarda geçen $p_1(x)$; rijit panç ile tabaka arasında, $p_2(x)$ ise tabaka ile elastik yarım düzlem arasında oluşan bilinmeyen değme gerilmesi fonksiyonlarıdır. a ve b rijit panç ile tabaka arasındaki, c ve d ise tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki değme uzunluklarıdır. $F(x)$ yükü ileten eğrisel rijit pançın şekil fonksiyonunun türevini ifade etmektedir.

2.4.2. Katsayıların Belirlenmesi

Probleme ait sınır şartları, Fourier integral dönüşümleri alınarak, gerilme ve yer değiştirme ifadelerinde yazıldığında aşağıdaki denklemler oluşur:

$$2G_1 i \left[\alpha A_1 + \left(\frac{\kappa_1 + 1}{2} \right) B_1 + \alpha C_1 - \left(\frac{\kappa_1 + 1}{2} \right) D_1 \right] = -p_1(\alpha) \quad (178)$$

$$-2G_1 \left[\alpha A_1 + \left(\frac{\kappa_1 - 1}{2} \right) B_1 - \alpha C_1 + \left(\frac{\kappa_1 - 1}{2} \right) D_1 \right] = -\eta_1 p_1(\alpha) \quad (179)$$

$$\left[\alpha A_1 e^{\alpha h} + \left(-\alpha h + \frac{\kappa_1 + 1}{2} \right) B_1 e^{\alpha h} + \alpha C_1 e^{-\alpha h} + \left(-\alpha h - \frac{\kappa_1 + 1}{2} \right) D_1 e^{-\alpha h} \right] -$$

$$m\alpha C_2 e^{-|\alpha|h} + m \left(\frac{|\alpha| \kappa_2 + 1}{\alpha} + \alpha h \right) D_2 e^{-|\alpha|h} = 0 \quad (180)$$

$$\left[\alpha A_1 e^{\alpha h} + \left(-\alpha h + \frac{\kappa_1 - 1}{2} \right) B_1 e^{\alpha h} - \alpha C_1 e^{-\alpha h} + \left(\alpha h + \frac{\kappa_1 - 1}{2} \right) D_1 e^{-\alpha h} \right] +$$

$$m|\alpha| C_2 e^{-|\alpha|h} - m \left(\frac{\kappa_2 - 1}{2} + |\alpha|h \right) D_2 e^{-|\alpha|h} = 0 \quad (181)$$

$$-2G_2 i \left[-\alpha C_2 e^{-|\alpha|h} + \left[\frac{|\alpha|}{2\alpha} (\kappa_2 + 1) + \alpha h \right] D_2 e^{-|\alpha|h} \right] = -p_2(\alpha) \quad (182)$$

$$2G_2 \left[|\alpha| C_2 e^{-|\alpha|h} + \left(\frac{1 - \kappa_2}{2} - |\alpha|h \right) D_2 e^{-|\alpha|h} \right] = -\eta_2 p_2(\alpha) \quad (183)$$

Denklemlerde geçen $p_1(\alpha)$ ve $p_2(\alpha)$ aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$p_1(\alpha) = \int_{-a}^b p_1(t_1) e^{i\alpha t_1} dt_1 \quad (184)$$

$$p_2(\alpha) = \int_{-c}^d p_2(t_2) e^{i\alpha t_2} dt_2 \quad (185)$$

Sınır şartlarının yazılmasıyla elde edilen bu altı tane denklem yardımıyla, yine altı tane olan A_1 , B_1 , C_j , D_j ($j=1,2$) katsayılarını bilinmeyen değme fonksiyonlarını içeren $p_1(\alpha)$ ve $p_2(\alpha)$ cinsinden yazılabilir.

$$A_1 = \frac{1}{4\alpha G_1 \Delta_1} [(iT_1 + \eta_1 T_3) p_1(\alpha) + m(iT_2 + \eta_2 T_4) p_2(\alpha)] \quad (186)$$

$$B_1 = \frac{1}{2G_1 \Delta_1} [(iT_5 + \eta_1 T_7) p_1(\alpha) + m(iT_6 + \eta_2 T_8) p_2(\alpha)] \quad (187)$$

$$C_1 = \frac{1}{4\alpha G_1 \Delta_1} [(iT_9 + \eta_1 T_{11}) p_1(\alpha) + m(iT_{10} + \eta_2 T_{12}) p_2(\alpha)] \quad (188)$$

$$D_1 = \frac{1}{2G_1 \Delta_1} [(iT_{13} + \eta_1 T_{15}) p_1(\alpha) + m(iT_{14} + \eta_2 T_{16}) p_2(\alpha)] \quad (189)$$

$$C_2 = -\frac{1}{4\alpha G_2} \left[i(-1 + \kappa_2 + 2|\alpha|h) + \eta_2 \frac{|\alpha|}{\alpha} (1 + 2|\alpha|h + \kappa_2) \right] e^{|\alpha|h} p_2(\alpha) \quad (190)$$

$$D_2 = -\frac{1}{2G_2} \left(i \frac{|\alpha|}{\alpha} + \eta_2 \right) e^{|\alpha|h} p_2(\alpha) \quad (191)$$

Burada Δ_1 ve T katsayıları

$$\Delta_1 = -1 - e^{-4\alpha h} + 2(1 + 2\alpha^2 h^2) e^{-2\alpha h} \quad (192)$$

$$T_1 = (\kappa_1 - 1) \left[e^{-4\alpha h} + (-1 - 2\alpha h + \frac{4\alpha^2 h^2}{\kappa_1 - 1}) e^{-2\alpha h} \right] \quad (193)$$

$$T_2 = (\kappa_1 - 1) \left[(-1 + \frac{2\alpha h \kappa_1}{\kappa_1 - 1}) e^{-3\alpha h} + (1 - \frac{2\alpha h}{\kappa_1 - 1}) e^{-\alpha h} \right] \quad (194)$$

$$T_3 = (\kappa_1 + 1) \left[-e^{-4\alpha h} + (1 - 2\alpha h + \frac{4\alpha^2 h^2}{\kappa_1 + 1}) e^{-2\alpha h} \right] \quad (195)$$

$$T_4 = (\kappa_1 + 1) \left[\left(1 + \frac{2\alpha h \kappa_1}{\kappa_1 + 1}\right) e^{-3\alpha h} + \left(-1 + \frac{2\alpha h}{\kappa_1 + 1}\right) e^{-\alpha h} \right] \quad (196)$$

$$T_5 = -e^{-4\alpha h} + (1 + 2\alpha h) e^{-2\alpha h} \quad (197)$$

$$T_6 = (1 - 2\alpha h) e^{-3\alpha h} - e^{-\alpha h} \quad (198)$$

$$T_7 = e^{-4\alpha h} + (-1 + 2\alpha h) e^{-2\alpha h} \quad (199)$$

$$T_8 = -(1 + 2\alpha h) e^{-3\alpha h} + e^{-\alpha h} \quad (200)$$

$$T_9 = (\kappa_1 - 1) \left[1 + \left(-1 + 2\alpha h + \frac{4\alpha^2 h^2}{\kappa_1 - 1}\right) e^{-2\alpha h} \right] \quad (201)$$

$$T_{10} = (\kappa_1 - 1) \left[-\left(1 + \frac{2\alpha h \kappa_1}{\kappa_1 - 1}\right) e^{-\alpha h} + \left(1 + \frac{2\alpha h}{\kappa_1 - 1}\right) e^{-3\alpha h} \right] \quad (202)$$

$$T_{11} = (\kappa_1 + 1) \left[1 - \left(1 + 2\alpha h + \frac{4\alpha^2 h^2}{\kappa_1 + 1}\right) e^{-2\alpha h} \right] \quad (203)$$

$$T_{12} = (\kappa_1 + 1) \left[\left(-1 + \frac{2\alpha h \kappa_1}{\kappa_1 + 1}\right) e^{-\alpha h} + \left(1 + \frac{2\alpha h}{\kappa_1 + 1}\right) e^{-3\alpha h} \right] \quad (204)$$

$$T_{13} = 1 + (-1 + 2\alpha h) e^{-2\alpha h} \quad (205)$$

$$T_{14} = -(1 + 2\alpha h) e^{-\alpha h} - e^{-3\alpha h} \quad (206)$$

$$T_{15} = 1 - (1 + 2\alpha h) e^{-2\alpha h} \quad (207)$$

$$T_{16} = (-1 + 2\alpha h) e^{-\alpha h} + e^{-3\alpha h} \quad (208)$$

olarak tanımlıdır.

2.5. İntegral Denklemlerin Elde Edilmesi

A_1, B_1, C_j, D_j ($j=1,2$) katsayılarında değme gerilmesi fonksiyonları $p_1(t_1)$ ve $p_2(t_2)$ henüz bilinmeyenlerdir. Değme gerilmesi fonksiyonları bulunduğu bu katsayılar dolayısıyla gerilme ve yer değiştirme ifadeleri elde edilebilecektir. Değme gerilmelerini bulmak için (175) ve (176) no'lu sınır şartları kullanılır. Bu sınır şartlarından iki tane integral denklem meydana gelmektedir.

2.5.1. I. İntegral Denklem

(175) no'lu sınır şartı kullanılarak ilk integral denklem elde edilecektir. (46) denkleminde yararlanılarak

$$\frac{\partial v_1(x, y)}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[[\alpha A_1 + (\kappa_1 + \alpha y) B_1] e^{-\alpha y} + [-\alpha C_1 + (\kappa_1 - \alpha y) D_1] e^{\alpha y} \right] e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (209)$$

elde edilir. İlk altı sınır şartından elde edilen A_1, B_1, C_1, D_1 katsayıları (209)'da yazılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1(x, y)}{\partial x} = & -\frac{1}{4\pi G_1} \int_{-a}^b p_1(t_1) \left[M_{11}(x_1, t_1) + \eta_1 N_{11}(x_1, t_1) \right] dt_1 \\ & -\frac{1}{4\pi G_1} \int_{-a}^b p_2(t_2) \left[M_{12}(x_1, t_2) + \eta_2 N_{12}(x_1, t_2) \right] dt_2 \end{aligned} \quad (210)$$

haline gelir. Burada:

$$M_{11}(x_1, t_1) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta_1} \left[[-T_1 - 2(\kappa_1 + \alpha y) T_5] e^{-\alpha y} + [T_9 - 2(\kappa_1 - \alpha y) T_{13}] e^{\alpha y} \right] \sin \alpha (t_1 - x_1) d\alpha$$

$$N_{11}(x_1, t_1) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta_1} \left[[T_3 + 2(\kappa_1 + \alpha y) T_7] e^{-\alpha y} + [-T_{11} + 2(\kappa_1 - \alpha y) T_{15}] e^{\alpha y} \right] \cos \alpha (t_1 - x_1) d\alpha$$

$$M_{12}(x_1, t_2) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta_1} \left[[-T_2 - 2(\kappa_1 + \alpha y)T_6] e^{-\alpha y} + [T_{10} - 2(\kappa_1 - \alpha y)T_{14}] e^{\alpha y} \right] \sin \alpha(t_2 - x_1) d\alpha$$

$$N_{12}(x_1, t_2) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta_1} \left[[T_4 + 2(\kappa_1 + \alpha y)T_8] e^{-\alpha y} + [-T_{12} + 2(\kappa_1 - \alpha y)T_{16}] e^{\alpha y} \right] \cos \alpha(t_2 - x_1) d\alpha$$

(211), (212), (213), (214)

olarak tanımlıdır.

$y \rightarrow 0$ limitine geçilirken, $M_{11}(x_1, t_1)$ ve $N_{11}(x_1, t_1)$ integrallerinin çekirdeklerinin yakınsaması bozulmakta, α 'nın belli bir değerinden sonra çekirdekler sırasıyla ST_{11} ve ST_{12} ' den ibaret olmakta, bunlarda sabit bir değere yaklaşmaktadır. Yakınsamayı bozan bu terimler

$$ST_{11} = (\kappa_1 + 1 - 2\alpha y) e^{\alpha y} \quad (215)$$

$$ST_{12} = (1 - \kappa_1 + 2\alpha y) e^{\alpha y} \quad (216)$$

olarak tanımlıdır. ST_{11} ve ST_{12} , çekirdeklerin sifıra yakınsamasını sağlamak için, $M_{11}(x_1, t_1)$ ve $N_{11}(x_1, t_1)$ ifadelerinin çekirdeklerinden çıkarılır. Diğer taraftan çıkarılan terimlerin kapalı integralleri alınarak (210)'a eklenir. Kapalı integralleri alınmak üzere dışarı alınan ifadeler

$$STI_{11} = \int_0^{\infty} (\kappa_1 + 1 - 2\alpha y) e^{-\alpha(-y)} \sin \alpha(t_1 - x_1) d\alpha \quad (217)$$

$$STI_{12} = \eta_1 \int_0^{\infty} (1 - \kappa_1 + 2\alpha y) e^{-\alpha(-y)} \cos \alpha(t_1 - x_1) d\alpha \quad (218)$$

olarak tanımlıdır. Tekil terimler çıkarıldıktan sonra (210) ifadesi düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_1(x, y)}{\partial x} = & -\frac{1}{4\pi G_1} \int_{-a}^b p_1(t_1) [M_{11}^*(x_1, t_1) + \eta_1 N_{11}^*(x_1, t_1)] dt_1 \\
& -\frac{1}{4\pi G_1} \int_{-c}^d p_2(t_2) [M_{12}(x_1, t_2) + \eta_2 N_{12}(x_1, t_2)] dt_2 \\
& -\frac{1}{4\pi G_1} \int_{-a}^b p_1(t_1) [\lim_{y \rightarrow 0} (STI_{11}) + \lim_{y \rightarrow 0} (STI_{12})] dt_1
\end{aligned} \tag{219}$$

haline gelir. Burada $M_{11cek}(\alpha)$ ve $N_{11cek}(\alpha)$ sırasıyla $M_{11}(x_1, t_1)$ ve $N_{11}(x_1, t_1)$ integrallerinin çekirdekleri olmak üzere $M_{11}^*(x_1, t_1)$ ve $N_{11}^*(x_1, t_1)$

$$M_{11}^*(x_1, t_1) = \int_0^\infty [M_{11cek}(\alpha) - ST_{11}] \sin \alpha (t_1 - x_1) dt_1 \tag{220}$$

$$N_{11}^*(x_1, t_1) = \int_0^\infty [N_{11cek}(\alpha) - ST_{12}] \cos \alpha (t_1 - x_1) dt_1 \tag{221}$$

olarak tanımlıdır. İntegral dönüşüm tabloları yardımıyla (217) ve (218)'in kapalı integralleri sırasıyla

$$STI_{k11} = (\kappa_1 + 1) \left[\frac{t_1 - x_1}{y^2 + (t_1 - x_1)^2} \right] + 4y^2 \frac{t_1 - x_1}{[y^2 + (t_1 - x_1)^2]^2} \tag{222}$$

$$STI_{k12} = \left[2y \frac{[y^2 - (t - x)^2]}{[y^2 + (t - x)^2]^2} - (1 - \kappa_1) \frac{y}{y^2 + (t_1 - x_1)^2} \right] \tag{223}$$

olarak belirlenir. $N_{11}(x_1, t_1)$ integralinin çekirdeğinden sıfırdan farklı bir değer çıkartılmasına karşılık (223) ifadesinin $y = 0$ için sıfır olduğu görülmektedir. Bundan dolayı (223) ifadesinin kapalı integrali alınmadan $y = 0$ için düzenlemek gerekmektedir. Böylelikle (219) ifadesindeki son terim aşağıdaki şekilde olmaktadır.

$$-\frac{1}{4\pi G_1} \int_{-a}^b p_1(t_1) [\lim_{y \rightarrow 0} (STI_{12})] dt_1 = \eta_1 \frac{1}{4G_1} (\kappa_1 - 1) p_1(x) \tag{224}$$

(219) ifadesi $y \rightarrow 0$ limiti için düzenlenip (175) no'lu sınır şartına geçildiğinde

$$\omega_1 p_1(x_1) + \frac{\gamma_1}{\pi} \int_{-a}^b p_1(t_1) \left[\frac{1}{t_1 - x_1} + k_{11}(x_1, t_1) \right] dt_1 - \frac{1}{\pi} \int_{-c}^d k_{12}(x_1, t_2) p_2(t_2) dt_2 = H(x) \quad (225)$$

şeklinde ikinci tür bir tekil integral denklem elde edilir. Burada

$$\omega_1 = \eta_1 \frac{(\kappa_1 - 1)}{\kappa_1 + 1}, \quad \gamma_1 = -1 \quad (226)$$

$$k_{11}(x_1, t_1) = m_{11}(x_1, t_1) + \eta_1 n_{11}(x_1, t_1) \quad (227)$$

$$k_{12}(x_1, t_2) = m_{12}(x_1, t_2) + \eta_1 n_{12}(x_1, t_2) \quad (228)$$

$$m_{11}(x_1, t_1) = \int_0^\infty \left[\frac{1}{\Delta_1} (e^{-4\alpha h} - 4\alpha h e^{-2\alpha h} - 1) - 1 \right] \sin \alpha (t_1 - x_1) d\alpha \quad (229)$$

$$n_{11}(x_1, t_1) = \frac{\kappa_1 - 1}{\kappa_1 + 1} \int_0^\infty \left[\frac{1}{\Delta_1} \left[e^{-4\alpha h} + 2 \left(-1 + \frac{4\alpha^2 h^2}{\kappa_1 - 1} \right) e^{-2\alpha h} + 1 \right] + 1 \right] \cos \alpha (t_1 - x_1) d\alpha \quad (230)$$

$$m_{12}(x_1, t_2) = \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_1} \left[2(-1 + \alpha h) e^{-3\alpha h} + 2(1 + \alpha h) e^{-\alpha h} \right] \sin \alpha (t_2 - x_1) d\alpha \quad (231)$$

$$n_{12}(x_1, t_2) = \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_1} (-2\alpha h e^{-3\alpha h} + 2\alpha h e^{-\alpha h}) \cos \alpha (t_2 - x_1) d\alpha \quad (232)$$

$$H(x) = \frac{4G_1}{\kappa_1 + 1} \frac{x_1}{R} \quad (233)$$

olarak tanımlanmıştır. $k_{11}(x_1, t_1)$ ve $k_{12}(x_1, t_2)$ integrallerinin çekirdekleri $\alpha = 0$ için sonsuza gitmektedir. Bu nedenle $\alpha = 0$ civarında $k_{11}(x_1, t_1)$ ve $k_{12}(x_1, t_2)$ seriye açıldığında sırasıyla

$$\begin{aligned} Serik_{11}(x_1, t_1) = & \int_0^\varepsilon \left[\frac{6(t_1 - x_1)}{\alpha^2 h^3} - \frac{(t_1 - x_1)^3}{h^3} + \frac{6(t_1 - x_1)}{5h} - (t_1 - x_1)\alpha + 0(\alpha^2) \right] \\ & + \eta_1 \int_0^\varepsilon \left[-\frac{3}{\alpha^2 h^2} + \frac{3(t_1 - x_1)^2}{2h^2} + \frac{2}{5} + 0(\alpha^2) \right] d\alpha \end{aligned} \quad (234)$$

$$\begin{aligned} Serik_{12}(x_1, t_1) = & \int_0^\varepsilon \left[-\frac{6(t_2 - x_1)}{\alpha^2 h^3} + \frac{(t_2 - x_1)^3}{h^3} - \frac{6(t_2 - x_1)}{5h} + 0(\alpha^2) \right] \\ & + \eta_2 \int_0^\varepsilon \left[-\frac{3}{\alpha^2 h^2} + \frac{3(t_2 - x_1)^2}{2h^2} - \frac{1}{10} + 0(\alpha^2) \right] d\alpha \end{aligned} \quad (235)$$

olarak bulunur. Burada $\alpha = 0$ civarında seriye açılan ifadelerin ilk terimlerinin de sonsuza gittiği ve integre edilemeyen tekillikler olduğu görülmektedir. Ancak bu ilk terimler, integral denklemin tümü düşünülerek, denge şartları (177) ve aşağıda verilen moment şartı

$$-\eta_1 h \int_{-a}^b p_1(t_1) dt_1 + \int_{-a}^b p_1(t_1) t_1 dt_1 - \int_{-c}^d p_2(t_2) t_2 dt_2 = 0 \quad (236)$$

kullanıldığında birbirlerini götürmektedirler. Seriyeye açılan geri kalan kısmın integral denkleme etkisi ise ihmal edilebilecek mertebededir. Dolayısıyla $m_{11}(x_1, t_1)$, $m_{12}(x_1, t_2)$, $n_{11}(x_1, t_1)$, $n_{12}(x_1, t_2)$ ifadelerini, ε çok küçük bir değer olmak üzere, (ε, ∞) aralığında integre etmek yeterlidir.

2.5.2. II. İntegral Denklem

İkinci integral denklem (176) no'lu sınır şartından yararlanılarak elde edilecektir. Öncelikle sınır şartında geçen $\partial v_1(x, y)/\partial x$ ile $\partial v_2(x, y)/\partial x$ ifadeleri $y \rightarrow -h$ için düzenlenmelidir. $\partial v_1(x, y)/\partial x$ birinci integral denklem yazılırken (210)'daki şekliyle elde edilmişti. (210)'da $y \rightarrow -h$ limitine geçildiğinde (213) ve (214)'de tanımlanan $M_{12}(x_2, t_2)$ ve $N_{12}(x_2, t_2)$ integrallerinin çekirdekleri sırasıyla ST_{21} ve ST_{22} 'ye yakınsamaktadır.

$$ST_{21} = [-\kappa_1 - 1 - 2\alpha(y+h)]e^{-\alpha(y+h)} \quad (237)$$

$$ST_{22} = [1 - \kappa_1 - 2\alpha(y+h)]e^{-\alpha(y+h)} \quad (238)$$

(237) ve (238) sırasıyla $M_{12}(x_2, t_2)$ ve $N_{12}(x_2, t_2)$ integrallerinin çekirdeklerinden çıkarılır. Aynı zamanda dışarı alınan tekil terimlerin kapalı integralleri alınarak (210) ifadesine eklenecektir. Kapalı integralleri alınacak bu ifadeler

$$STI_{21} = \int_0^{\infty} [-\kappa_1 - 1 - 2\alpha(y+h)]e^{-\alpha(y+h)} \sin \alpha(t_2 - x_2) d\alpha \quad (239)$$

$$STI_{22} = \eta_2 \int_0^{\infty} [1 - \kappa_1 - 2\alpha(y+h)]e^{-\alpha(y+h)} \cos \alpha(t_2 - x_2) d\alpha \quad (240)$$

şeklindedir. $y \rightarrow -h$ için tekil terimler çıkarıldıktan sonra (210) ifadesi düzenlendiğinde

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1(x, y)}{\partial x} = & -\frac{1}{4\pi G_1} \int_{-a}^b p_1(t_1) [M_{11}(x_2, t_1) + \eta_1 N_{12}(x_2, t_1)] dt_1 \\ & -\frac{1}{4\pi G_1} \int_{-c}^d p_2(t_2) [M_{12}^*(x_2, t_2) + \eta_2 N_{12}^*(x_2, t_2)] dt_2 \\ & -\frac{1}{4\pi G_1} \int_{-c}^d p_2(t_2) [\lim_{y \rightarrow -h} (STI_{21}) + \lim_{y \rightarrow -h} (STI_{22})] dt_2 \end{aligned} \quad (241)$$

haline gelir. Burada $M_{12cek}(\alpha)$ ve $N_{12cek}(\alpha)$ sırasıyla $M_{12}(x_2, t_1)$ ve $N_{11}(x_2, t_1)$ integrallerinin çekirdekleri olmak üzere $M_{12}^*(x_2, t_1)$ ve $N_{12}^*(x_2, t_1)$

$$M_{12}^*(x_2, t_2) = \int_0^{\infty} [M_{12cek} - ST_{21}] \sin \alpha(t_2 - x_2) dt_2 \quad (242)$$

$$N_{12}^*(x_2, t_2) = \int_0^{\infty} [N_{12cek} - ST_{22}] \cos \alpha(t_2 - x_2) dt_2 \quad (243)$$

olarak tanımlıdır. İntegral dönüşüm tabloları yardımıyla (239) ve (240) ifadelerinin kapalı integralleri alındığında

$$STI_{k21} = -(\kappa_1 + 1) \left[\frac{t_2 - x_2}{(y+h)^2 + (t_2 - x_2)^2} \right] + 4(y+h)^2 \frac{t_2 - x_2}{[(y+h)^2 + (t_2 - x_2)^2]^2} \quad (244)$$

$$STI_{k12} = \left[-2(y+h) \frac{[y^2 - (t_2 - x_2)^2]}{[y^2 + (t_2 - x_2)^2]^2} - (1 - \kappa_1) \frac{(y+h)}{y^2 + (t_2 - x_2)^2} \right] \quad (245)$$

elde edilir. (240) ifadesinin kapalı integrali olan (245) ifadesi $y \rightarrow -h$ için “0” olduğundan (240) kapalı integrali alınmadan $y=0$ için düzenlenip (241) ifadesinde yazılacaktır. Böylelikle (241) ifadesindeki son terim

$$-\frac{1}{4\pi G_1} \int_{-c}^d p_2(t_2) [\lim_{y \rightarrow -h} (STI_{22})] dt_2 = \eta_2 \frac{1}{4G_1} (\kappa_1 - 1) p_2(x) \quad (246)$$

olmaktadır. (246) dikkate alınarak (241) ifadesi $y \rightarrow -h$ limiti için düzenlenirse

$$\begin{aligned} \frac{4G_1}{\kappa_1 + 1} \frac{\partial v_1(x, -h)}{\partial x} &= \eta_2 \frac{\kappa_1 - 1}{\kappa_1 + 1} p_2(x_2) - \frac{1}{\pi} \int_{-c}^d p_2(t_2) \left[-\frac{1}{t_2 - x_2} + K_{22}(x_2, t_2) \right] dt_2 \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_{-a}^b p_1(t_1) K_{21}(x_2, t_1) dt_1 \end{aligned} \quad (247)$$

elde edilir. Burada

$$K_{21}(x_2, t_1) = M_{21}(x_2, t_1) + \eta_1 N_{21}(x_2, t_1) \quad (248)$$

$$K_{22}(x_2, t_2) = M_{22}(x_2, t_2) + \eta_2 N_{22}(x_2, t_2) \quad (249)$$

$$M_{21}(x_2, t_1) = (\kappa_1 + 1) \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_1} \left[2(1 - \alpha h) e^{-3\alpha h} - 2(1 + \alpha h) e^{-\alpha h} \right] \sin \alpha (t_1 - x_2) d\alpha \quad (250)$$

$$N_{21}(x_2, t_1) = (\kappa_1 + 1) \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_1} \left(-2\alpha h e^{-3\alpha h} + 2\alpha h e^{-\alpha h} \right) \cos \alpha (t_1 - x_2) d\alpha \quad (251)$$

$$M_{22}(x_2, t_2) = (\kappa_1 + 1) \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_1} \left(-e^{-4\alpha h} + 1 + 4\alpha h e^{-2\alpha h} \right) + 1 \left] \sin \alpha (t_2 - x_2) d\alpha \quad (252)$$

$$N_{22}(x_2, t_2) = (\kappa_1 - 1) \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_1} \left[e^{-4\alpha h} + 1 + 2 \left(-1 + \frac{4\alpha^2 h^2}{\kappa_1 - 1} \right) e^{-2\alpha h} \right] + 1 \left] \cos \alpha (t_2 - x_2) d\alpha \quad (253)$$

olarak tanımlıdır.

İntegral denklemin yazılabilmesi için gerekli olan $\partial v_2(x, y) / \partial x$ ifadesi ise (51) şartından yararlanarak

$$\frac{\partial v_2(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \left[|\alpha| C_2 e^{|\alpha|y} - (\kappa_2 - |\alpha|y) D_2 e^{|\alpha|y} \right] e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (254)$$

olarak elde edilir. (254) ifadesi $y = -h$ için düzenlenirse

$$\frac{\partial v_2(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{4\pi G_2} \int_{-c}^d p_2(t_2) \left[Z_{21}(x_2, t_2) + \eta_2 Z_{22}(x_2, t_2) \right] dt_2 \quad (255)$$

olmaktadır. Burada

$$Z_{21}(x_2, t_2) = \int_0^{\infty} [-(\kappa_2 + 1) + 2\alpha(y+h)] e^{\alpha(y+h)} \sin \alpha(t_2 - x_2) d\alpha \quad (256)$$

$$Z_{22}(x_2, t_2) = \int_0^{\infty} [(\kappa_2 - 1) - 2\alpha(y+h)] e^{\alpha(y+h)} \cos \alpha(t_2 - x_2) d\alpha \quad (257)$$

olmaktadır. (256) ve (257) ifadeleri sadece tekil terimlerden oluşmaktadır. (256)'nın kapalı integrali alındığında

$$Z_{k21}(x_2, t_2) = -(\kappa_2 + 1) \left[\frac{t_2 - x_2}{(y+h)^2 + (t_2 - x_2)^2} \right] - 4(y+h)^2 \frac{t_2 - x_2}{[(y+h)^2 + (t_2 - x_2)^2]^2} \quad (258)$$

elde edilir. (257) ifadesi ise kapalı integrali alınmadan $y = -h$ için düzenlenir. Böylelikle (255) ifadesi

$$\frac{4G_2}{\kappa_2 + 1} \frac{\partial v_2(x, -h)}{\partial x} = \eta_2 \frac{\kappa_2 - 1}{\kappa_2 + 1} p_2(x_2) - \frac{1}{\pi} \int_{-c}^d \frac{p_2(t_2)}{t_2 - x_2} dt_2 \quad (259)$$

olmaktadır. (247) ve (259) yardımıyla (176) no'lu sınır şartına geçildiğinde aşağıdaki gibi ikinci tür bir tekil integral denklem elde edilir:

$$\omega_2 p_2(x) + \frac{\gamma_2}{\pi} \int_{-c}^d \left[\frac{1}{t_2 - x_2} + k_{22}(x_2, t_2) \right] p_2(t_2) dt_2 - \frac{1}{\pi} \int_{-a}^b p_1(t_1) k_{21}(x_2, t_1) dt_1 = 0 \quad (260)$$

Burada

$$\omega_2 = \eta_2 \frac{(\kappa_2 - 1) - m(\kappa_1 - 1)}{\kappa_2 + 1 + m(\kappa_1 + 1)}, \quad \gamma_2 = -1 \quad (261)$$

$$k_{21}(x_2, t_1) = \varphi [M_{21}(x_2, t_1) + \eta_1 N_{21}(x_2, t_1)] \quad (262)$$

$$k_{22}(x_2, t_2) = \varphi [M_{22}(x_2, t_2) + \eta_2 N_{22}(x_2, t_2)] \quad (263)$$

$$\varphi = \frac{-m}{m(\kappa_1 + 1) + \kappa_2 + 1} \quad (264)$$

olarak tanımlıdırlar. 1. integral denklemde olduğu gibi burada da $k_{21}(x_1, t_1)$ ve $k_{22}(x_1, t_2)$ integrallerinin çekirdekleri $\alpha = 0$ için sonsuza gitmektedir. $\alpha = 0$ civarında $k_{21}(x_1, t_1)$ ve $k_{22}(x_1, t_2)$ seriye açıldığında sırasıyla

$$\begin{aligned} Serik_{21}(x_2, t_1) = \varphi \left(\int_0^\varepsilon \left[\frac{6(t_1 - x_2)}{\alpha^2 h^3} - \frac{(t_1 - x_2)^3}{h^3} + \frac{6(t_1 - x_2)}{5h} + 0(\alpha^2) \right] \right. \\ \left. + \eta_1 \int_0^\varepsilon \left[-\frac{3}{\alpha^2 h^2} + \frac{3(t_1 - x_2)^2}{2h^2} - \frac{1}{10} + 0(\alpha^2) \right] d\alpha \right) \quad (265) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Serik_{22}(x_2, t_2) = \varphi \left(\int_0^\varepsilon \left[-\frac{6(t_2 - x_2)}{\alpha^2 h^3} + \frac{(t_2 - x_2)^3}{h^3} - \frac{6(t_2 - x_2)}{5h} + (t_2 - x_2)\alpha + 0(\alpha^2) \right] \right. \\ \left. + \eta_2 \int_0^\varepsilon \left[-\frac{3}{\alpha^2 h^2} + \frac{3(t_2 - x_2)^2}{2h^2} + \frac{2}{5} + 0(\alpha^2) \right] d\alpha \right) \quad (266) \end{aligned}$$

elde edilir. Seriyeye açılan ifadelerdeki $\alpha = 0$ için sonsuza giden terimler düşey denge şartları (177) ve moment şartı (236) ile beraber integral denklemin bütünü düşünüldüğünde birbirlerini götürmektedirler. Geriye kalan terimler ise ihmal edilebilecek mertebededir. Dolayısıyla burada da $M_{21}(x_2, t_1)$, $M_{22}(x_1, t_2)$, $N_{21}(x_2, t_1)$, $N_{22}(x_2, t_2)$ ifadelerini integral sınırnı (ε, ∞) aralığında alarak integre etmek yeterlidir.

2.6. İntegral Denklemlerin Boyutsuzlaştırılması

İntegral denklemleri sayısal çözüme hazır hale getirebilmek için integral denklemlerde bazı dönüşümlerin yapılması ve boyutsuz büyüklükler tanımlanması gerekmektedir. İntegral denklemlerde $\alpha = z/h$ değişken dönüşümü yapılmış ve normalizasyon için aşağıdaki boyutsuz büyüklükler tanımlanmıştır.

$$t_1 = \frac{a+b}{2}r_1 + \frac{b-a}{2}, \quad x_1 = \frac{a+b}{2}s_1 + \frac{b-a}{2} \quad (267)$$

$$t_2 = \frac{d+c}{2}r_2 + \frac{d-c}{2}, \quad x_2 = \frac{d+c}{2}s_2 + \frac{d-c}{2} \quad (268)$$

Aynı şekilde değme gerilmeleri de

$$\phi_1(s_1) = \frac{p_1(s_1)}{P/h}, \quad \phi_2(s_2) = \frac{p_2(s_2)}{P/h} \quad (269)$$

şeklinde boyutsuzlaştırılmıştır. Değişken değişimleri ve boyutsuzlaştırmalar sonucunda (225) ve (260) no'lu birinci ve ikinci integral denklemler sırasıyla

$$\omega_1 \phi_1(s_1) + \frac{\gamma_1}{\pi} \int_{-1}^1 \phi_1(r_1) \left[\frac{1}{r_1 - s_1} + k_{11}^*(s_1, r_1) \right] dr_1 - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 k_{12}^*(s_1, r_2) \phi_2(r_2) dr_2 = H^*(s_1) \quad (270)$$

$$\omega_2 \phi_2(s_2) + \frac{\gamma_2}{\pi} \int_{-1}^1 \phi_2(r_2) \left[\frac{1}{r_2 - s_2} + k_{22}^*(s_2, r_2) \right] dr_2 - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 k_{21}^*(s_2, r_1) \phi_1(r_1) dr_1 = 0 \quad (271)$$

olarak değişirler. Burada

$$\kappa_{11}^*(s_1, r_1) = \frac{b+a}{2h} k_{11}(s_1, r_1), \quad \kappa_{12}^*(s_1, r_2) = \frac{c+d}{2h} k_{12}(s_1, r_2) \quad (272)$$

$$\kappa_{21}^*(s_2, r_1) = \frac{b+a}{2h} k_{21}(s_2, r_1), \quad \kappa_{22}^*(s_2, r_2) = \frac{c+d}{2h} k_{22}(s_2, r_2) \quad (273)$$

$$H^*(s_1) = \frac{4}{\kappa_1 + 1} \frac{G_1}{P/h} \frac{1}{R/h} \left(\frac{a+b}{2h} s_1 + \frac{b-a}{2h} \right) \quad (274)$$

olarak tanımlıdırlar. (177) no'lu düşey denge şartları ise

$$\frac{b+a}{2h} \int_{-1}^1 \phi_1(r_1) dr_1 = 1, \quad \frac{c+d}{2h} \int_{-1}^1 \phi_2(r_2) dr_2 = 1 \quad (275)$$

olarak değışirler.

2.7. İntegral Denklem Sisteminin Sayısal Çözümü

İntegral denklemler ilk terimlerinin varlığından dolayı ikinci tür tekil integral denklemdirler. İntegral denklemin sayısal çözümü Erdoğan vd., (1973) ve Krenk, (1975) tarafından verilen Gauss-Jacobi integrasyon formülasyonu ile yapılacaktır.

Bu yöntemde bilinmeyen boyutsuz değme gerilmelerinin çözümü

$$\phi_j(r_j) = g_j(r_j)w_j(r_j) \quad j = 1,2 \quad (276)$$

olarak aranır. Değme gerilmeleri değmenin bittiği noktalardan itibaren “0” olduğundan integral denklemlerin indeksi “-1” dir. “-1” indeks için sayısal çözüm yöntemiyle integral denklemler, $g_j(r_j)$ fonksiyonunun N noktadaki değerleri için lineer denklem takımına indirgenirler. (270) ve (271) no’lu integral denklemler sırasıyla

$$\sum_{i=1}^N W_{1i}^N g_1(r_{1i}) \left[\frac{1}{r_{1i} - s_{1k}} + k_{11}^*(s_{1k}, r_{1i}) \right] + \sum_{i=1}^N W_{2i}^N g_2(r_{2i}) k_{12}^*(s_{1k}, r_{2i}) = -H(s_{1k}) \quad k = 1,2 \dots N+1 \quad (277)$$

$$\sum_{i=1}^N W_{1i}^N g_1(r_{1i}) k_{21}^*(s_{2k}, r_{1i}) + \sum_{i=1}^N W_{2i}^N g_2(r_{2i}) \left[\frac{1}{r_{2i} - s_{2k}} + k_{22}^*(s_{2k}, r_{2i}) \right] = 0 \quad k = 1,2 \dots N+1 \quad (278)$$

şeklinde değışir. Denge şartları ise

$$\frac{b+a}{2h} \sum_{i=1}^N W_{1i}^N g_1(r_{1i}) - \frac{1}{\pi} = 0 \quad (279)$$

$$\frac{d+c}{2h} \sum_{i=1}^N W_{2i}^N g_2(r_{2i}) - \frac{1}{\pi} = 0 \quad (280)$$

haline gelir. Burada

$$w_j(r_j) = (1-r_j)^{\alpha_j} (1+r_j)^{\beta_j} \quad (281)$$

$$\phi_j(r_j) = g_j(r_j)(1-r_j)^{\alpha_j} (1+r_j)^{\beta_j} \quad (282)$$

olarak yazılabilir. α_j ve β_j ise aşağıdaki formüllerden bulunur:

$$\alpha_j = \frac{1}{2\pi i} \ln \left[\frac{\omega_j - i\gamma_j}{\omega_j + i\gamma_j} \right] + N_{0j} \quad (283)$$

$$\beta_j = -\frac{1}{2\pi i} \ln \left[\frac{\omega_j - i\gamma_j}{\omega_j + i\gamma_j} \right] + M_{0j} \quad (284)$$

$$0 < \text{Re}[\alpha_j, \beta_j] < 1 \quad (285)$$

(283) ve (284)'de geçen N_{0j} ve M_{0j} değerleri (285) şartını sağlayacak şekilde "0", "1", "-1" değerlerinden birini alırlar. r_{ji} ve s_{jk} ilgili Jacobi polinomunun kökleri, W_{ji}^N ise ağırlık katsayıları olmak üzere

$$P_N^{(\alpha_j, \beta_j)}(r_{ji}) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (286)$$

$$P_{N+1}^{(-\alpha_j, -\beta_j)}(s_{jk}) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, N+1 \quad (287)$$

$$W_{ji}^N = \frac{1}{\pi} \frac{2N + \alpha_j + \beta_j}{(N+1)!} \frac{\Gamma(N + \alpha_j + 1)\Gamma(N + \beta_j + 1)}{\Gamma(N + \alpha_j + \beta_j + 1)} \frac{2^{(\alpha_j + \beta_j)}}{P_N^{(\alpha_j, \beta_j)}(r_{ji}) P_{N+1}^{(\alpha_j, \beta_j)}(r_{ji})} \quad (288)$$

formüllerinden bulunurlar. “-1” indeks için integral denklemlerin çözümü uygunluk şartını da sağlamalıdır. Uygunluk şartı 1. ve 2. integral denklem için sırasıyla

$$\int_{-1}^1 \left[\omega_1 \phi_1(s_1) + \frac{\gamma_1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\phi_1(r_1)}{r_1 - s_1} dr_1 \right] \frac{ds_1}{w_1(s_1)} = 0 \quad (289)$$

$$\int_{-1}^1 \left[\omega_2 \phi_2(s_2) + \frac{\gamma_2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\phi_2(r_2)}{r_2 - s_2} dr_2 \right] \frac{ds_2}{w_2(s_2)} = 0 \quad (290)$$

olarak yazılabilir.

Bilinmeyenler her bir integral denklem için N tane $g_j(r_{ji})$ değerleri ile a/h , b/h , c/h ve d/h değme uzunlukları olmak üzere $2N + 4$ tanedir. Her bir integral denklemden elde edilen $N + 1$ tane lineer denklem ve probleme ait 2 tane denge şartıyla beraber, $2N + 4$ bilinmeyen için, yine $2N + 4$ tane denklem elde edilir. İntegral denklemlerden elde edilen lineer denklemlerde N tane bilinmeyen $g_j(r_{ji})$ değerleri için $N + 1$ tane denklem olduğu görülmektedir. (277) ve (278)' deki lineer denklemlerin her birinden bir denklem dışarı alınarak $g_j(r_{ji})$ değerleri bulunacaktır. Diğer taraftan dışarı alınan bu iki denklem denge şartlarıyla beraber sağlatılmaya çalışılarak a/h , b/h , c/h ve d/h değerlerinin bulunmasında kullanılacaktır. Bu şekilde (277) ve (278) ifadelerindeki tüm denklemler sağlatıldığında (289) ve (290) no'lu uygunluk şartları da sağlatılmış olmaktadır.

Lineer denklem sisteminin çözümü için değme uzunluklarına (a/h , b/h , c/h , d/h) başlangıçta rastgele değerler verilir. Lineer denklem sistemi çözülerek $g_j(r_{ji})$ değerleri bulunur. Bu değerler ve değme uzunlukları denge şartlarında ve lineer denklem sisteminden dışarı alınan iki denklemde yazılarak şartların ve denklemlerin sağlanıp sağlanmadığına bakılır. İstenilen hassaslık sağlanana kadar iterasyonlara devam edilir. İterasyon Newton-Raphson yöntemi çerçevesinde gerçekleştirilmiştir. Gerekli hesaplamalar için MATHEMATICA programı kullanılmıştır.

2.8. Gerilmelerin Bulunması

A_1, B_1, C_j, D_j ($j=1,2$) katsayıları, değme gerilmeleri $p_1(x), p_2(x)$ ve değme uzunlukları ($a/h, b/h, c/h, d/h$) bulunduktan sonra tabaka ve elastik yarım düzlemde istenen herhangi bir noktada σ_x, σ_y normal gerilmeleri ile τ_{xy} kayma gerilmelerini bulmak mümkündür.

A_1, B_1, C_j, D_j katsayıları $\sigma_{xj}, \sigma_{yj}, \tau_{xyj}$ gerilmelerine ait (47)-(49) ifadelerinde yazıldığında tabaka için normal ve kayma gerilmeleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \sigma_{x1}(x, y) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^b p_1(t_1) [GX_{11}(x, t_1) + \eta_1 GX_{12}(x, t_1)] dt_1 \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^d p_2(t_2) [GX_{13}(x, t_2) + \eta_2 GX_{14}(x, t_2)] dt_2 \end{aligned} \quad (291)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{y1}(x, y) = & -\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^b p_1(t_1) [GY_{11}(x, t_1) + \eta_1 GY_{12}(x, t_1)] dt_1 \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^d p_2(t_2) [GY_{13}(x, t_2) + \eta_2 GY_{14}(x, t_2)] dt_2 \end{aligned} \quad (292)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy1}(x, y) = & -\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^b p_1(t_1) [TXY_{11}(x, t_1) + \eta_1 TXY_{12}(x, t_1)] dt_1 \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^d p_2(t_2) [TXY_{13}(x, t_2) + \eta_2 TXY_{14}(x, t_2)] dt_2 \end{aligned} \quad (293)$$

Burada

$$GX_{11}(x_1, t_1) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta_1} \left[[T_1 + (2\alpha y + \kappa_1 - 3)T_5] e^{-\alpha y} + [T_9 + (2\alpha y - \kappa_1 + 3)T_{13}] e^{\alpha y} \right] \cos \alpha(t_1 - x) d\alpha$$

$$GX_{12}(x_1, t_1) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta_1} \left[[T_3 + (2\alpha y + \kappa_1 - 3)T_7] e^{-\alpha y} + [T_{11} + (2\alpha y - \kappa_1 + 3)T_{15}] e^{\alpha y} \right] \sin \alpha(t_1 - x) d\alpha$$

$$\begin{aligned}
GX_{13}(x_1, t_2) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta_1} \left[[T_2 + (2\alpha y + \kappa_1 - 3)T_6]e^{-\alpha y} + [T_{10} + (2\alpha y - \kappa_1 + 3)T_{14}]e^{\alpha y} \right] \cos \alpha(t_2 - x) d\alpha \\
GX_{14}(x_1, t_2) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta_1} \left[[T_4 + (2\alpha y + \kappa_1 - 3)T_8]e^{-\alpha y} + [T_{12} + (2\alpha y - \kappa_1 + 3)T_{16}]e^{\alpha y} \right] \sin \alpha(t_1 - x) d\alpha \\
GY_{11}(x_1, t_1) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta_1} \left[[T_1 + (2\alpha y + \kappa_1 + 1)T_5]e^{-\alpha y} + [T_9 + (2\alpha y - \kappa_1 - 1)T_{13}]e^{\alpha y} \right] \cos \alpha(t_1 - x) d\alpha \\
GY_{12}(x_1, t_1) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta_1} \left[[T_3 + (2\alpha y + \kappa_1 + 1)T_7]e^{-\alpha y} + [T_{11} + (2\alpha y - \kappa_1 - 1)T_{15}]e^{\alpha y} \right] \sin \alpha(t_1 - x) d\alpha \\
GY_{13}(x_1, t_2) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta_1} \left[[T_2 + (2\alpha y + \kappa_1 + 1)T_6]e^{-\alpha y} + [T_{10} + (2\alpha y - \kappa_1 - 1)T_{14}]e^{\alpha y} \right] \cos \alpha(t_2 - x) d\alpha \\
GY_{14}(x_1, t_2) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta_1} \left[[T_4 + (2\alpha y + \kappa_1 + 1)T_8]e^{-\alpha y} + [T_{12} + (2\alpha y - \kappa_1 - 1)T_{16}]e^{\alpha y} \right] \sin \alpha(t_2 - x) d\alpha \\
TXY_{11}(x_1, t_1) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta_1} \left[-[T_1 + (2\alpha y + \kappa_1 - 1)T_5]e^{-\alpha y} + [T_9 + (2\alpha y - \kappa_1 + 1)T_{13}]e^{\alpha y} \right] \sin \alpha(t_1 - x) d\alpha \\
TXY_{12}(x_1, t_1) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta_1} \left[[T_3 + (2\alpha y + \kappa_1 - 1)T_7]e^{-\alpha y} - [T_{11} + (2\alpha y - \kappa_1 + 1)T_{15}]e^{\alpha y} \right] \cos \alpha(t_1 - x) d\alpha \\
TXY_{13}(x_1, t_2) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta_1} \left[-[T_2 + (2\alpha y + \kappa_1 - 1)T_6]e^{-\alpha y} + [T_{10} + (2\alpha y - \kappa_1 + 1)T_{14}]e^{\alpha y} \right] \sin \alpha(t_2 - x) d\alpha \\
TXY_{14}(x_1, t_2) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta_1} \left[[T_4 + (2\alpha y + \kappa_1 - 1)T_8]e^{-\alpha y} - [T_{12} + (2\alpha y - \kappa_1 + 1)T_{16}]e^{\alpha y} \right] \cos \alpha(t_2 - x) d\alpha
\end{aligned}
\tag{294)-(305}$$

olarak tanımlıdır. Elastik yarım düzleme ait normal gerilmeler ve kayma gerilmeleri ise

$$\sigma_{x_2}(x, y) = -\frac{1}{\pi} \int_{-c}^d p_2(t_2) [GX_{21}(x, t_2) + \eta_2 GX_{22}(x, t_2)] dt_2 \quad (306)$$

$$\sigma_{y_2}(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-c}^d p_2(t_2) [GY_{21}(x, t_2) + \eta_2 GY_{22}(x, t_2)] dt_2 \quad (307)$$

$$\tau_{xy_2}(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-c}^d p_2(t_2) [TXY_{21}(x, t_2) + \eta_2 TXY_{22}(x, t_2)] dt_2 \quad (308)$$

olarak elde edilir. Burada

$$GX_{21}(x_2, t_2) = \int_0^{\infty} [1 + \alpha(y + h)] e^{\alpha(y+h)} \cos \alpha(t_2 - x) d\alpha \quad (309)$$

$$GX_{22}(x_2, t_2) = \int_0^{\infty} [2 + \alpha(y + h)] e^{\alpha(y+h)} \sin \alpha(t_2 - x) d\alpha \quad (310)$$

$$GY_{21}(x_2, t_2) = \int_0^{\infty} [-1 + \alpha(y + h)] e^{\alpha(y+h)} \cos \alpha(t_2 - x) d\alpha \quad (311)$$

$$GY_{22}(x_2, t_2) = \int_0^{\infty} [\alpha(y + h)] e^{\alpha(y+h)} \sin \alpha(t_2 - x) d\alpha \quad (312)$$

$$TXY_{21}(x_2, t_2) = \int_0^{\infty} [\alpha(y + h)] e^{\alpha(y+h)} \sin \alpha(t_2 - x) d\alpha \quad (313)$$

$$TXY_{22}(x_2, t_2) = \int_0^{\infty} [-1 - \alpha(y + h)] e^{\alpha(y+h)} \cos \alpha(t_2 - x) d\alpha \quad (314)$$

olarak tanımlanmıştır.

Tabaka ve yarım düzlemdeki gerilmeleri $y \rightarrow 0$ ve $y \rightarrow -h$ haricinde verilen denklemlerle bulmak mümkündür. Ancak $y \rightarrow 0$ ve $y \rightarrow -h$ durumlarında gerilme çekirdeklerinde tekil terimler meydana gelmektedir. İntegral denklemlerde olduğu gibi oluşan tekil terimler çekirdeklerden çıkarılarak kapalı integralleri alındıktan sonra ait oldukları ifadelere eklenecektir.

$y \rightarrow 0$ durumunda tekil terimler

$$\sigma_{x1}(x, y)_{st0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^b p_1(t_1) dt_1 \left[\int_0^{\infty} [-2(1 + \alpha y)] e^{\alpha y} \cos \alpha (t_1 - x) d\alpha \right. \\ \left. + \eta_1 \int_0^{\infty} [-2(2 + \alpha y)] e^{\alpha y} \sin \alpha (t_1 - x) d\alpha \right] \quad (315)$$

$$\sigma_{y1}(x, y)_{st0} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^b p_1(t_1) dt_1 \left[\int_0^{\infty} [2(1 - \alpha y)] e^{\alpha y} \cos \alpha (t_1 - x) d\alpha \right. \\ \left. + \eta_1 \int_0^{\infty} (-2\alpha y) e^{\alpha y} \sin \alpha (t_1 - x) d\alpha \right] \quad (316)$$

$$\tau_{xy1}(x, y)_{st0} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^b p_1(t_1) dt_1 \left[\int_0^{\infty} -(2\alpha y) e^{\alpha y} \sin \alpha (t_1 - x) d\alpha \right. \\ \left. + \eta_1 \int_0^{\infty} 2(\alpha y + 1) e^{\alpha y} \cos \alpha (t_1 - x) d\alpha \right] \quad (317)$$

$y \rightarrow -h$ durumunda tekil terimler

$$\sigma_{x1}(x, y)_{sth} = \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^d p_2(t_2) dt_2 \left[\int_0^{\infty} -2[1 - \alpha (y + h)] e^{-\alpha(y+h)} \cos \alpha (t_2 - x) d\alpha \right. \\ \left. + \eta_2 \int_0^{\infty} -2[2 - \alpha (y + h)] e^{-\alpha(y+h)} \sin \alpha (t_2 - x) d\alpha \right] \quad (318)$$

$$\sigma_{y1}(x, y)_{sth} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-c}^d p_2(t_2) dt_2 \left[\int_0^{\infty} 2[1 + \alpha (y + h)] e^{-\alpha(y+h)} \cos \alpha (t_2 - x) d\alpha \right.$$

$$+ \eta_2 \int_0^{\infty} -2\alpha (y+h)e^{-\alpha(y+h)} \sin \alpha (t_2 - x) d\alpha \quad \left. \vphantom{\int_0^{\infty}} \right] \quad (319)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy1}(x, y)_{sth} = & -\frac{1}{2\pi} \int_{-c}^d p_2(t_2) dt_2 \left[\int_0^{\infty} -2\alpha (y+h)e^{-\alpha(y+h)} \sin \alpha (t_2 - x) d\alpha \right. \\ & \left. + \eta_2 \int_0^{\infty} 2[1 - \alpha (y+h)]e^{-\alpha(y+h)} \cos \alpha (t_2 - x) d\alpha \right] \quad (320) \end{aligned}$$

(315)-(320) ifadelerinin kapalı integralleri alındıktan sonra $y \rightarrow 0$ ve $y \rightarrow -h$ limitine geçilip düzenlendiğinde gerilme ifadeleri tekil noktalar için aşağıdaki gibi bulunur.

$$\sigma_{x1}(x, 0) = \sigma_{x1}(x, 0) - \sigma_{x1}(x, y)_{st0} - p_1(x) - \frac{2\eta_1}{\pi} \int_{-a}^b p_1(t_1) \frac{dt_1}{t_1 - x_1} \quad (321)$$

$$\sigma_{x1}(x, -h) = \sigma_{x1}(x, -h) - \sigma_{x1}(x, y)_{sth} - p_2(x) - \frac{2\eta_2}{\pi} \int_{-c}^d p_2(t_2) \frac{dt_2}{t_2 - x_2} \quad (322)$$

$$\sigma_{x2}(x, -h) = -p_2(x) - \frac{2\eta_2}{\pi} \int_{-c}^d p_2(t_2) \frac{dt_2}{t_2 - x_2} \quad (323)$$

$y \rightarrow 0$ ve $y \rightarrow -h$ durumunda tabaka ve elastik yarım düzleme ait σ_y ve τ_{xy} ifadeleri tekil terimler için düzenlendiğinde sınır şartlarına eşit çıktıkları görülmüştür

3. BULGULAR

Bu bölümde sürekli değme ve ayrılmalı değme probleminin çözümlerinden elde edilen bulgular tablo ve şekillerle verilmiştir.

3.1. Sürekli Değme Problemine Ait Bulgular

Elastik yarım düzlem ile tabaka birbirine tam yapışık olduğunda panç ile tabaka arasında meydana gelen değme bölgesinde oluşacak olan değme uzunlukları ile değme gerilmesinin dağılımı, panç yarıçapının, yük değerinin, tabaka ile yarım düzlemin malzeme özelliklerinin değişik değerleri için sürtünmeli ve sürtünmesiz durumda incelenmiştir. İntegral denklemin iki ayrı yöntemle çözümlenmesiyle elde edilen değme uzunlukları ve değme gerilmelerinin karşılaştırılması da yapılmıştır. Ayrıca y eksenini boyunca σ_x, σ_y normal gerilmeleri ile τ_{xy} kayma gerilmesinin dağılımları incelenmiştir.

3.1.1. Değme Uzunlukları ve Değme Gerilmeleri

Panç ile tabaka arasında oluşan değme uzunluklarının sürtünme katsayısı ile değişimi incelendiğinde sürtünme katsayısı arttıkça y ekseninin solunda kalan a uzunluğunun azaldığı, y ekseninin sağında kalan b uzunluğunun arttığı görülmektedir (Şekil 3, Tablo1). Panç ile tabaka arasındaki toplam değme uzunluğu ($|a| + b$) ise sürtünme katsayısı arttıkça artmaktadır. Q yatay yükü, sürtünme katsayısına ve P düşey tekil yüküne bağlı olarak değişmektedir. Sürtünme katsayısı ve P tekil yükü arttıkça Q yatay yükü artmakta dolayısıyla tabakanın yüzeyine iletilen sürtünme kuvveti de artmaktadır. Sürtünme katsayısının değme uzunluklarına etkisi P tekil yükünün etkisi gibi olacaktır ki bu ikisi arttıkça panç ile iletilen kuvvet de artmakta ve buna karşılık toplam değme uzunluğu artmaktadır. Sürtünmesiz durumda a ve b uzunlukları birbirine eşit çıkmaktadır.

İntegral denklemin sayısal çözüm yöntemine göre değme uzunluklarının değişimi Tablo 2’de verilmiştir. Kaplamasız durumda ($m = 1$) her iki yöntemle bulunan değme uzunlukları birbirine eşit çıkmaktadır. Elastik tabaka ile yarım düzlemin malzeme özellikleri aynı olmadığında ($m = 0.5$) iki yöntemle bulunan değme uzunlukları

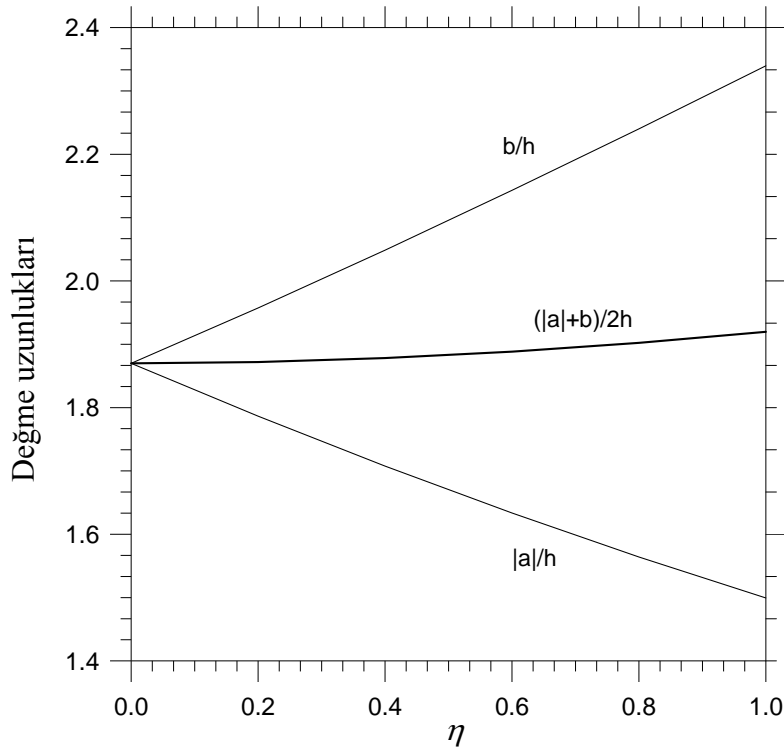
birbirlerinden az da olsa farklılaşmaktadır. Jacobi polinomları yöntemi (JP) ile bulunan değme uzunlukları, değme gerilmesini veren serinin kesildiği M değeri arttıkça Gauss-Jacobi integrasyon formülasyonu (GJ) ile bulunan sonuca yaklaşmaktadır. JP ile değme uzunluklarını bulmak üzere yapılan bir iterasyon için harcanan süre, GJ'e göre çok daha uzamakta ve M değeri arttıkça bu süre oldukça artmaktadır.

Panç yarıçapı R/h ve yük değeri $G_1/(P/h)$ için panç ile tabaka arasında oluşan değme uzunluğunun değişimi Şekil 4 ve Tablo 3' de verilmiştir. Panç yarıçapı arttıkça değme uzunluğu sürtünmeli ve sürtünmesiz durumda artmaktadır. $G_1/(P/h)$ boyutsuz büyüklüğünün değişimi yükün değişimini ifade etmektedir. Yük değeri arttıkça, $G_1/(P/h)$ azalır, değme uzunluğu artmaktadır.

Elastik tabaka ile yarım düzlemin malzeme özellikleri ile değme uzunluklarının değişimi Şekil 5 ve Tablo 4' de verilmiştir. κ_1 ve κ_2 değerleri birbirine eşit alındığında, G_2/G_1 oranının değişimi elastisite modülleri oranının E_2/E_1 değişimi olarak da düşünülebilir. Toplam değme uzunluğu elastik yarım düzlemin elastisite modülü büyüdükçe sürtünmeli ve sürtünmesiz durumun her ikisinde de azalmaktadır. Özellikle elastik yarım düzlemin elastisite modülü tabakaninkinden küçük olduğu durumlarda G_2/G_1 azaldıkça değme uzunluklarında değişim büyüktür. Elastik yarım düzlemin elastisite modülü tabakaninkinden büyük olduğunda ise değme uzunlukları G_2/G_1 artsa da çok fazla değişmektedir. Tabaka ve yarım düzlemin Poisson oranları birbirlerine eşit olarak artırıldığında, κ_1 ve κ_2 azalırken, toplam değme uzunluğu artmaktadır. $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ olduğunda sürtünmenin değme uzunluğuna etkisinin olmadığı görülmektedir.

Tablo 1. Değme uzunluklarının sürtünme katsayısı ile değişimi
($G_2/G_1 = 2$, $R/h = 100$, $G_1/(P/h) = 500$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)

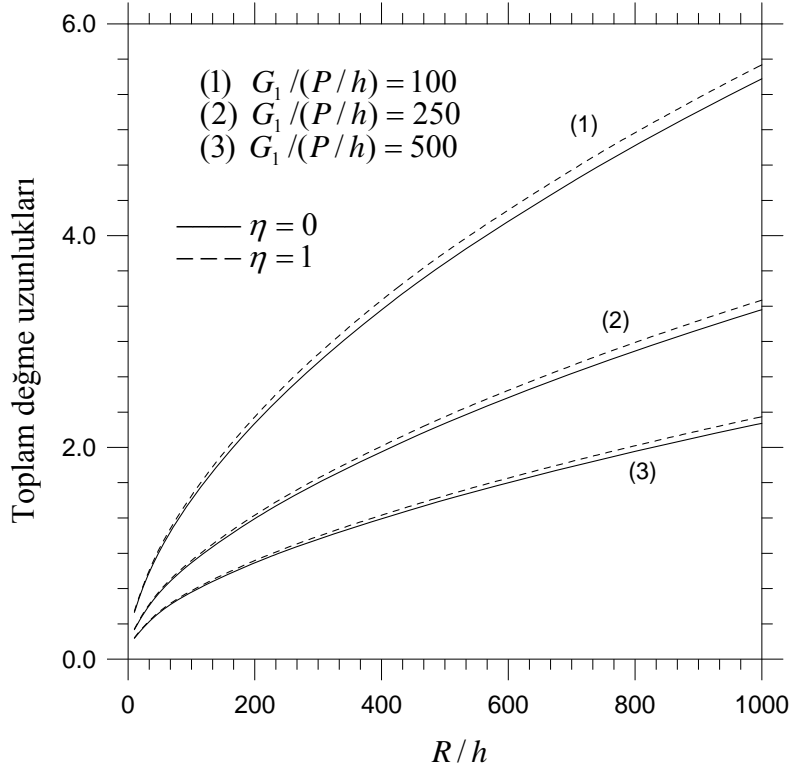
η	α	β	a/h	b/h	$(a + b)/h$
0	0.5	0.5	-0.305057	0.305057	0.610214
0.2	0.47881	0.52119	-0.294421	0.316231	0.610652
0.4	0.45781	0.54219	-0.284362	0.327890	0.612252
0.6	0.43717	0.56283	-0.274904	0.339983	0.614887
0.8	0.41705	0.58295	-0.266060	0.352446	0.618506
1	0.39758	0.60242	-0.257831	0.365217	0.623048



Şekil 3. Değme uzunluklarının sürtünme katsayısı ile değişimi
 $(G_2/G_1 = 0.5, R/h = 500, G_1/(P/h) = 100, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2)$

Tablo 2. Değme uzunluklarının sürtünme katsayısı ve integral denklemin sayısal çözüm yöntemi ile değişimi $(G_2/G_1 = 0.5, R/h = 500, G_1/(P/h) = 100, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2)$

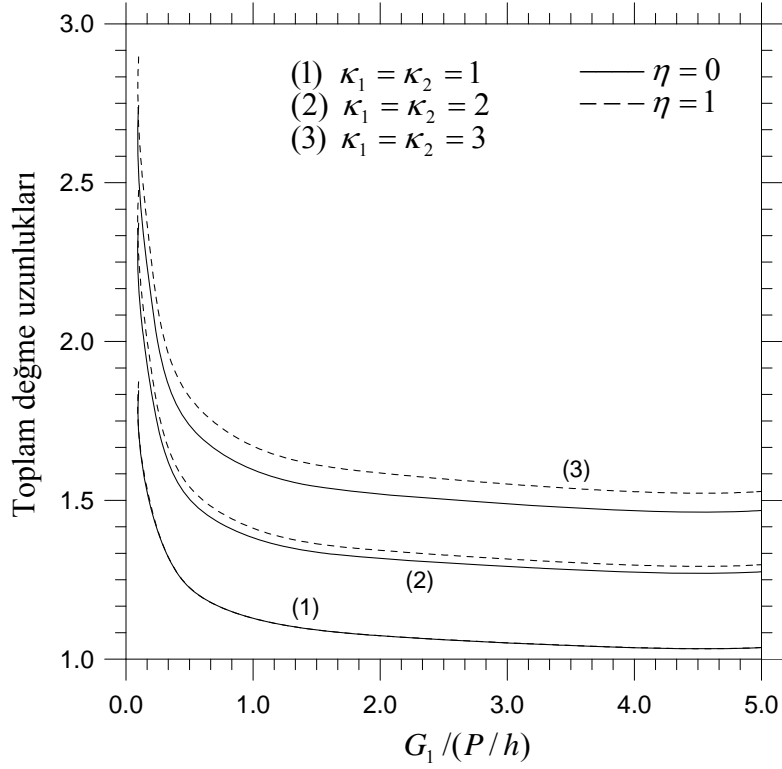
	Gauss Jacobi İntegrasyon Formülasyonu ile Değme Uzunlukları ($N = 20$)		Jacobi Polinomları ile Değme Uzunlukları $N = 20$			
			$M = 2$		$M = 3$	
η	a/h	b/h	a/h	b/h	a/h	b/h
0 ($m=1$)	-1.5450968	1.5450968	-1.5450968	1.5450968	-1.5450968	1.5450968
0	-1.8697416	1.8697416	-1.8755235	1.8755235	-1.8697430	1.8697430
0.5	-1.6699842	2.0953119	-1.6766395	2.100768	-1.6699511	2.0953413
1	-1.4991706	2.3399578	-1.5072606	2.3455309	-1.4990714	2.3400259



Şekil 4. Toplam değme uzunluklarının yük, paç yarımçapı ve sürtünme katsayısı ile değişimi ($G_2/G_1 = 0.5$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)

Tablo 3. Değme uzunluklarının paç yarımçapı ve sürtünme katsayısı ile değişimi ($G_2/G_1 = 0.5$, $G_1/(P/h) = 100$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)

R/h	$\eta = 0$	$\eta = 0.5$		$\eta = 1$	
	$ a/h = b/h$	a/h	b/h	a/h	b/h
10	0.220898	-0.194552	0.249738	-0.171044	0.280445
100	0.751604	-0.656863	0.856383	-0.573922	0.968410
250	1.264310	-1.118650	1.428210	-0.994121	1.605200
500	1.869740	-1.669980	2.095310	-1.499170	2.339960
1000	2.740570	-2.462130	3.053290	-1.890760	3.392170



Şekil 5. Toplam değme uzunluklarının G_2/G_1 , κ_1 , κ_2 ve sürtünme katsayısı ile değişimi ($R/h = 250$, $G_1/(P/h) = 250$)

Tablo 4. Değme uzunluklarının kayma modülleri oranı ve sürtünme katsayısı ile değişimi ($R/h = 250$, $G_1/(P/h) = 250$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)

G_2/G_1	$\eta = 0$	$\eta = 0.5$		$\eta = 1$	
	$ a/h = b/h$	a/h	b/h	a/h	b/h
0.2	0.920439	-0.788688	1.069370	-0.677850	1.230098
0.5	0.751604	-0.656863	0.856383	-0.573922	0.968410
1	0.690988	-0.621784	0.767895	-0.561349	0.850566
2	0.658404	-0.608036	0.715299	-0.564933	0.777204
5	0.637372	-0.602184	0.678354	-0.573325	0.7238687

Panç ile tabaka arasında oluşan değme gerilmesinin sürtünme katsayısıyla değişimi Şekil 6' da görülmektedir. Sürtünmesiz halde değme gerilmesinin dağılımı simetriktir ve değme gerilmesi en büyük değerini $x = 0$ noktasında almaktadır. Sürtünmenin varlığında değme gerilmesi dağılımının simetrisi bozulmaktadır. Sürtünme katsayısı arttıkça değme gerilmesinin en büyük değeri aldığı nokta $x = 0$ 'dan, pança etki ettirilen yatay kuvvetin ters yönüne doğru kaymaktadır.

İntegral denklemin farklı sayısal çözüm yöntemleri, GJ ve JP, ile bulunan değme gerilmelerinin karşılaştırılması Şekil 7'de verilmiştir. Her iki yöntemle bulunan sonuçlar hemen hemen aynıdır. JP ile değme gerilmesinin fonksiyonu elde edilebilmekte istenen herhangi bir noktadaki gerilme değeri bulunabilmektedir. GJ ile ise değme gerilmesinin sadece istenen N noktadaki değeri elde edilebilmektedir.

Pançın değme uzunluğunun küçük olduğu, $R/h = 100$, $G_1/(P/h) = 500$, $G_2/G_1 = 0.5$ durumunda sürtünme katsayısı ile birlikte değme gerilmesinin en büyük değeri azalmaktadır (Şekil 6). Diğer taraftan değme uzunluğunun büyük olduğu $R/h = 500$, $G_1/(P/h) = 100$, $G_2/G_1 = 2$ durumunda ise sürtünme katsayısı arttığında değme gerilmesinin en büyük değeri de çok az bir miktar artmaktadır (Şekil 7).

Tabaka ve elastik yarım düzlemin malzeme özellikleri birbirine eşit alındığında ($\kappa_1 = \kappa_2, m = 1$) problem rijit panç ile bastırılmış elastik yarım düzlem problemine dönüşmektedir. Şekil (7)'den elastik yarım düzlemin kendisinden daha büyük bir elastisite modülüne sahip bir tabaka ile kaplandığı takdirde değme gerilmesinin de azalacağı görülmektedir.

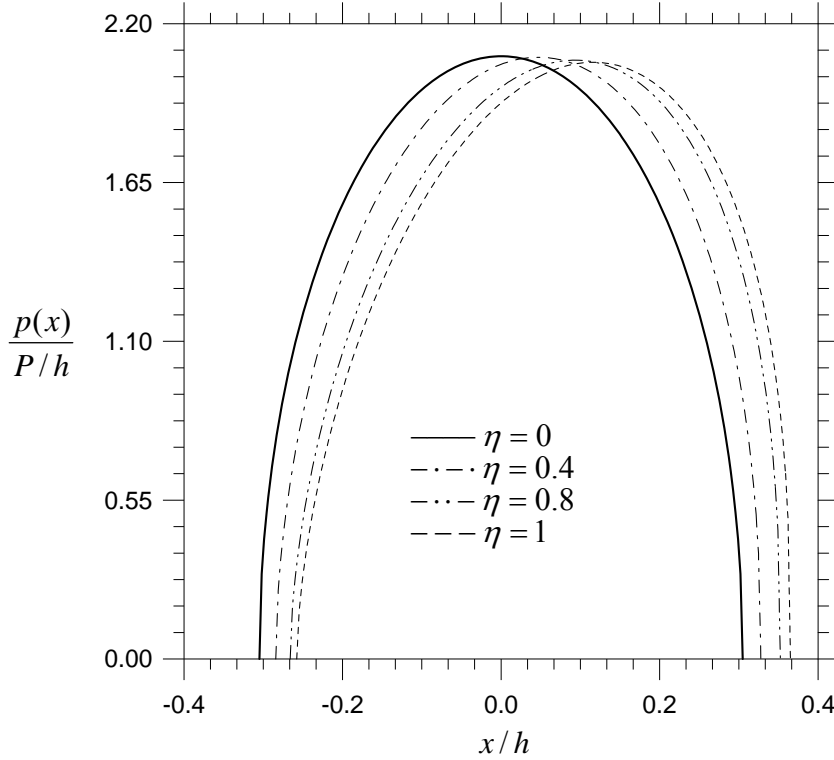
Panç yarıçapı arttıkça sürtünmeli ve sürtünmesiz durumda değme gerilmesi azalmaktadır (Şekil 8). Panç yarıçapı küçüldükçe tekil yük durumuna yaklaşıldığından değme gerilmesi hızla artmaktadır. Panç yarıçapı arttıkça değme gerilmesinin en büyük değeri sağa kaymaktadır. Panç yarıçapı küçüldükçe sürtünmenin değme gerilmesinin en büyük değerini daha fazla azalttığı görülmektedir.

Yükün değişiminin değme gerilmesine etkisi panç yarıçapının değişimindeki gibi olmaktadır (Şekil 9). Sürtünmeli ve sürtünmesiz durumda yük değeri arttıkça, $G_1/(P/h)$ azalır, değme gerilmesi azalmaktadır. Yük değeri azaldıkça panç tabakaya daha az bastırılacağından değme uzunluğu küçülmekte ve gerilme sivriliği oluşmaktadır.

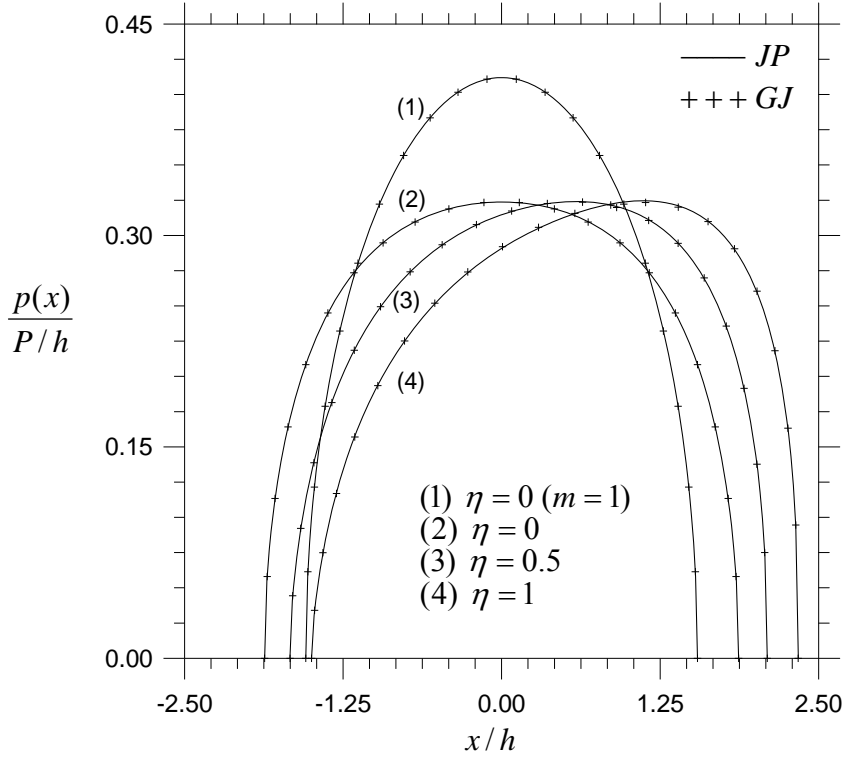
Elastik yarım düzlem ile tabakanın kayma modülleri oranı G_2/G_1 ile değme gerilmesinin değişimi Şekil 10'da görülmektedir. Elastik yarım düzlem ve tabakanın κ

değerleri dolayısıyla Poisson oranları birbirine eşit alındığında, G_2/G_1 oranının değişimi elastisite modülleri oranının (E_2/E_1) değişimi olarak da değerlendirilebilir. Elastik yarım düzlemin elastisite modülü arttıkça değme gerilmesi, sürtülmeli ve sürtünmesiz durumun her ikisinde de, artmaktadır. G_2/G_1 oranı “1” ve “5” olduğunda sürtünmeyle birlikte değme gerilmesinin en büyük değeri azalırken, yarım düzlemin elastisite modülü tabakaya göre çok küçük olduğunda ($G_2/G_1 = 0.2$) sürtünmenin değme gerilmesinin en büyük değerini artıran bir etki yaptığı görülmektedir.

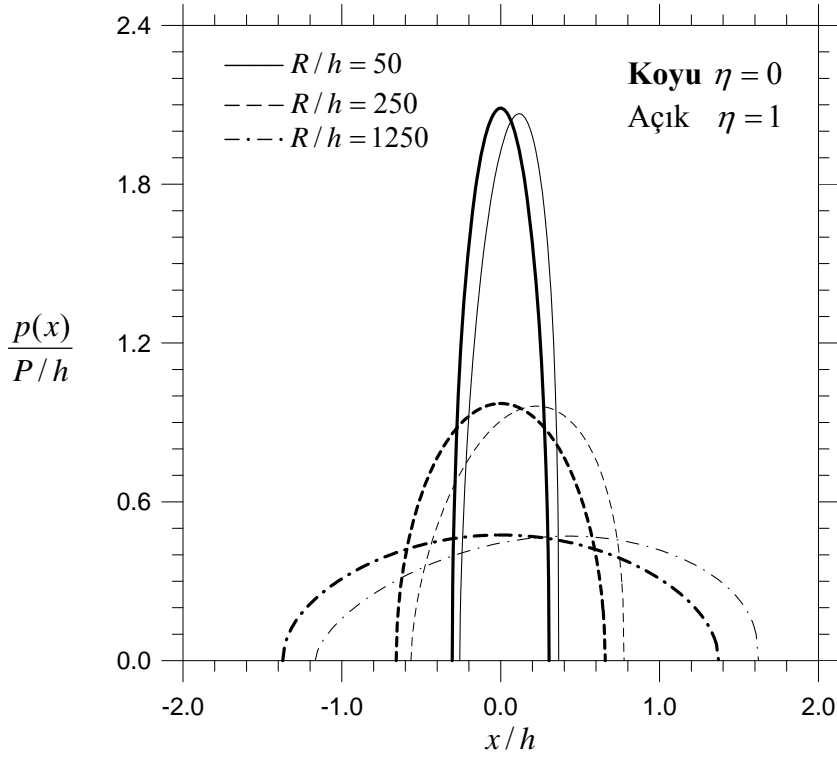
Elastik yarım düzlem ve tabakanın Poisson oranları birbirlerine eşit olarak artırıldığında, κ_1 ve κ_2 azalırken değme gerilmesi hem sürtülmeli ve hem de sürtünmesiz durumda artmaktadır (Şekil 11). Daha önce incelenen durumların hepsinde sürtünmeyle birlikte değme gerilmesinin en büyük değeri sağa kayarken, $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ olduğunda değme gerilmesinin en büyük değeri sola kaymaktadır.



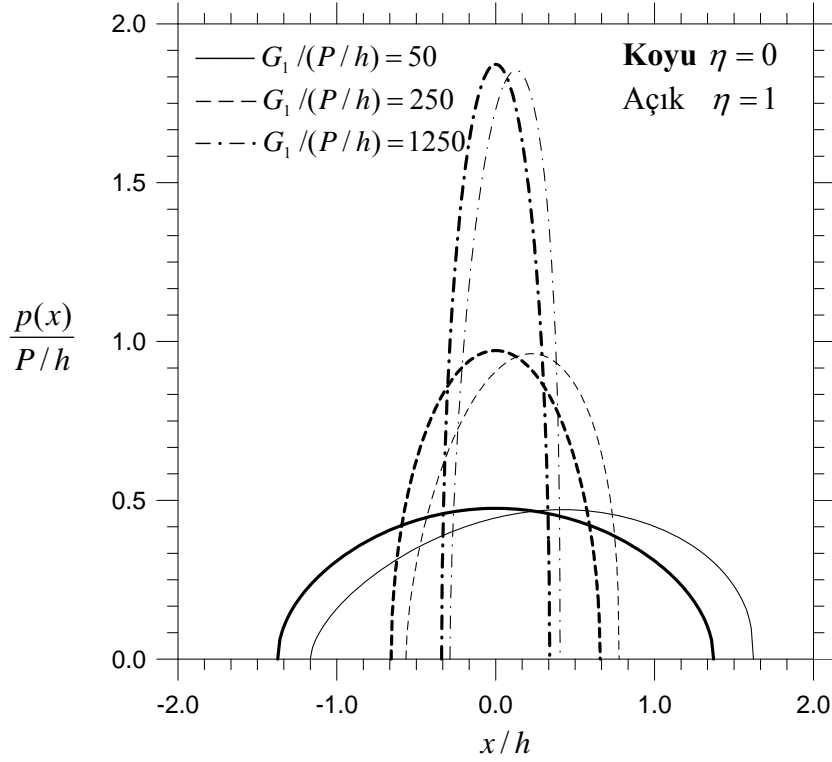
Şekil 6. Panç ile tabaka arasında oluşan değme gerilmesinin sürtünme katsayısıyla değişimi ($G_2/G_1 = 2$, $R/h = 100$, $G_1/(P/h) = 500$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)



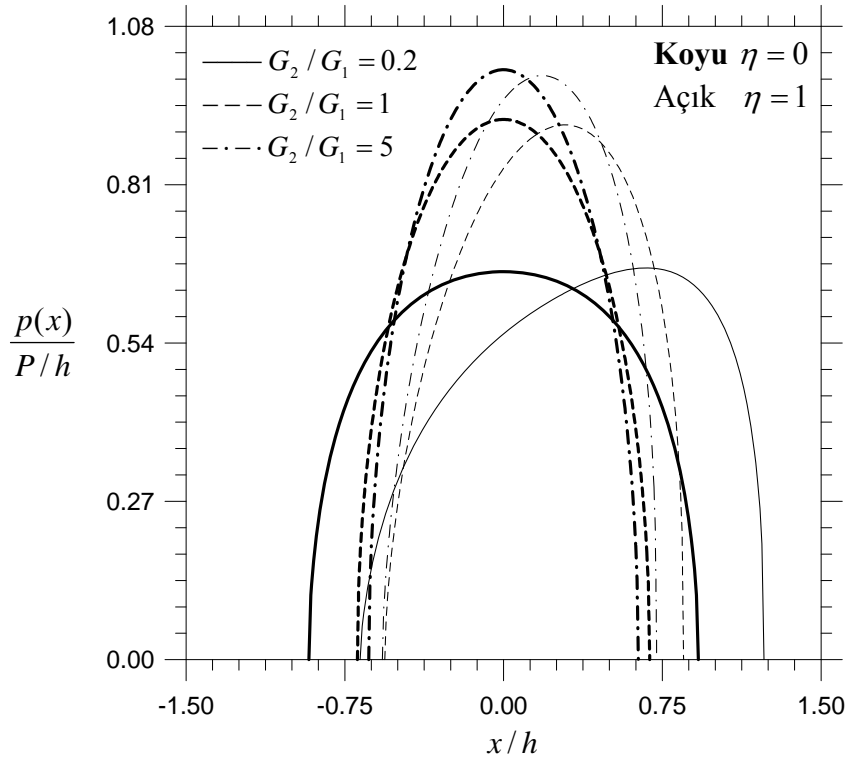
Şekil 7. Değme gerilmesinin integral denklemin sayısal çözüm yöntemi ve η ile değişimi ($G_2/G_1 = 0.5$, $R/h = 500$, $G_1/(P/h) = 100$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)



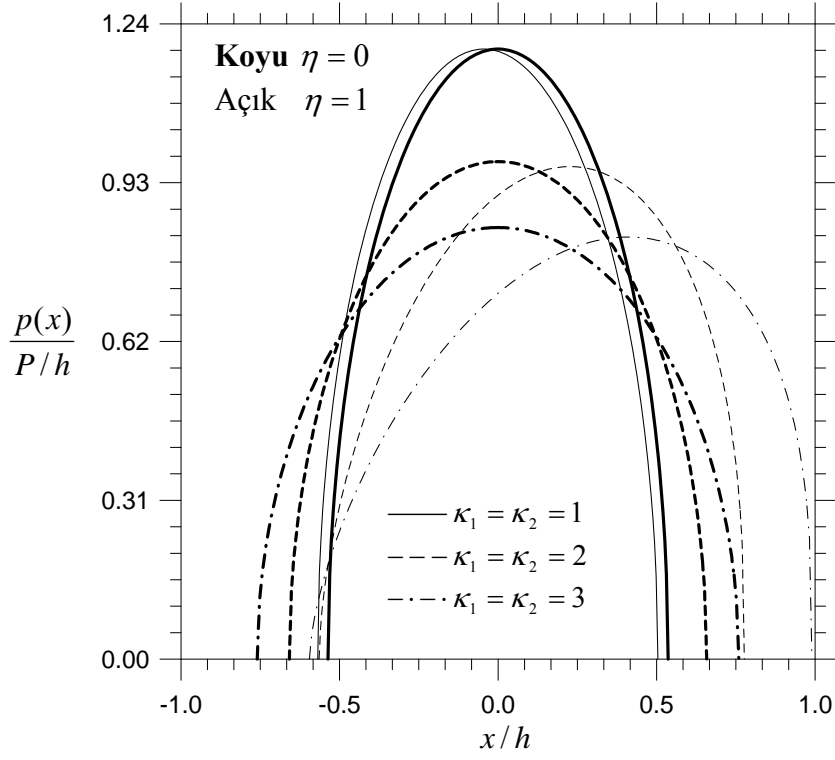
Şekil 8. Panç ile tabaka arasında oluşan değme gerilmesinin panç yarıçapı ve η ile değişimi ($G_2/G_1 = 2$, $G_1/(P/h) = 250$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)



Şekil 9. Panç ile tabaka arasında oluşan değme gerilmesinin yük ve sürtünme katsayısı ile değişimi ($G_2/G_1 = 2$, $R/h = 250$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)



Şekil 10. Panç ile tabaka arasında oluşan değme gerilmesinin kayma modülleri oranı ve η ile değişimi ($R/h = 250$, $G_1/(P/h) = 250$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)



Şekil 11. Panç ile tabaka arasında oluşan değme gerilmesinin κ_1 , κ_2 ve sürtünme katsayısıyla değişimi ($G_2/G_1 = 2$, $R/h = 250$, $G_1/(P/h) = 250$)

3.1.2. Gerilmelerin İncelenmesi

Elastik tabaka ile yarım düzlem birbirine tam yapışık olduğunda, sürtünme katsayısının, yük değerinin ve kayma modülleri oranlarının değişik değerleri için y eksenini boyunca ($x = 0$), σ_x , σ_y normal gerilmeleri ile τ_{xy} kayma gerilmelerinin dağılımı incelenmiştir.

3.1.2.1. σ_x Normal Gerilmelerinin İncelenmesi

Sürtünme katsayısıyla birlikte, tabaka ve yarım düzlemde, σ_x normal gerilmesinin y eksenini boyunca değişimi Şekil 12’de görülmektedir. Sürtünme katsayısı arttıkça gerilme basınç olarak artmaktadır. İncelenen örnekte tabaka ve yarım düzlem boyunca gerilme basınç olarak etkisini göstermektedir. Gerilme en büyük değerini pançın hemen altında almakta ve pançtan uzaklaştıkça azalarak etkisini kaybetmektedir.

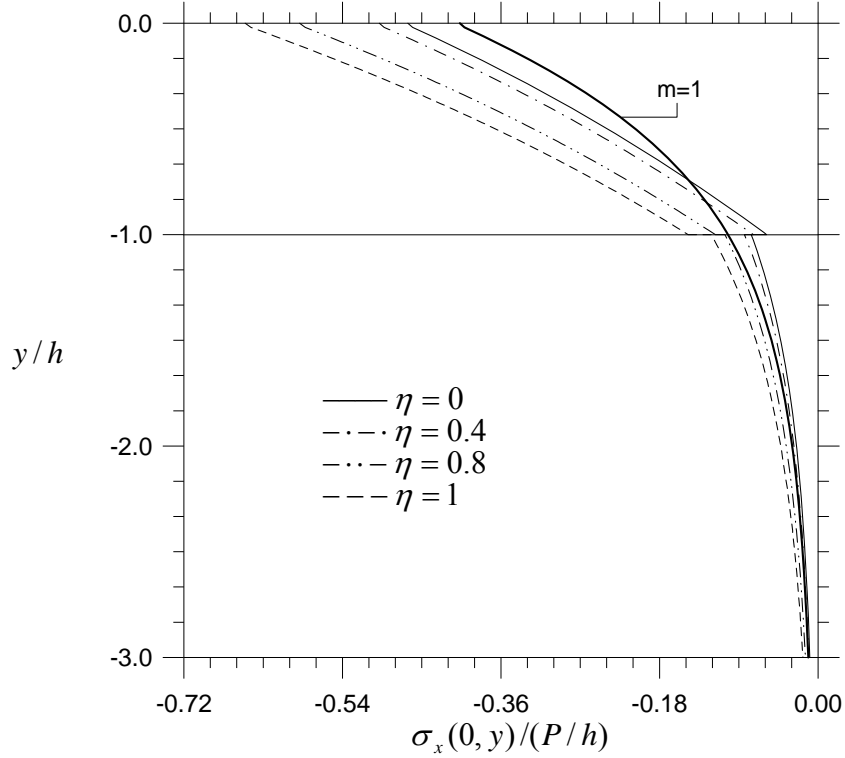
Panç yarıçapı arttıkça, sürtünmeli ve sürtünmesiz durumda, tabakada pançın hemen altında gerilme azalmakta, elastik yarım düzlemde ise bir miktar artmaktadır (Şekil 13). Panç yarıçapının küçük olduğu durumda gerilmenin hızla arttığı görülmektedir. Panç yarıçapı büyüdükçe gerilme dağılımı doğrusallaşmaktadır.

Yükün σ_x normal gerilmesine etkisi panç yarıçapında olduğu gibidir. Yük değeri arttıkça, $G_1/(P/h)$ azalır, tabakada pançın hemen altında gerilme azalmakta, yarım düzlemde ise bir miktar artmaktadır (Şekil 14).

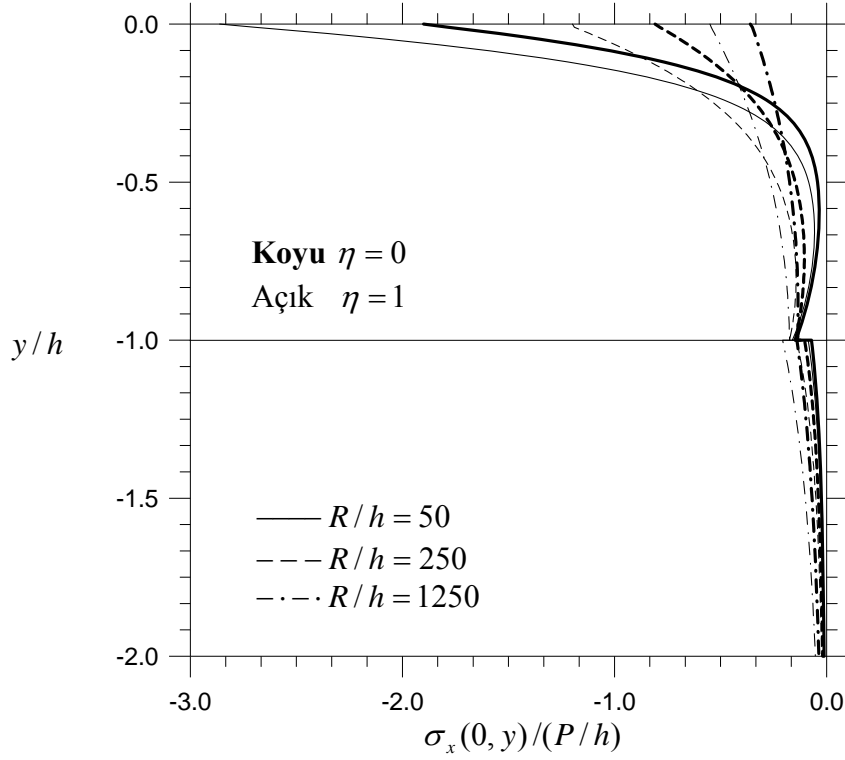
Elastik yarım düzlem ile tabakanın kayma modülleri oranı G_2/G_1 ile gerilmenin değişimi Şekil 15’de verilmiştir. Tabakada gerilme, en büyük değerini aldığı panç ile değdiği noktada, yarım düzlemin elastisite modülü arttıkça (G_2/G_1 artar) azalmaktadır. Elastik yarım düzlemde ise yarım düzlemin elastisite modülü arttıkça gerilme de basınç olarak artmaktadır. Elastik yarım düzlem kendisiyle eşit ya da daha küçük elastisite modülüne sahip bir tabaka ile kaplandığında tabaka ve elastik yarım düzlem boyunca gerilme basınç olarak etki etmektedir. Elastik yarım düzlemin elastisite modülü tabakaninkinden küçük olduğunda ise ($G_2/G_1 = 0.2$) tabakanın üst kısımlarında basınç alt kısımlarında ise çekme gerilmeleri oluşmaktadır. Elastisite modülleri farklı olduğunda

tabaka ile yarım düzlemin değme noktasında gerilmede süreksizlik oluşmakta, tabaka ve yarım düzlemde gerilmeler birbirinden farklı değer almaktadır. Tabaka ile yarım düzlem aynı malzeme özelliklerine sahip olduğunda ise bu süreksizlik ortadan kalkmakta ve tabaka ile yarım düzlemin değdiği noktada gerilmeler birbirine eşit olmaktadır.

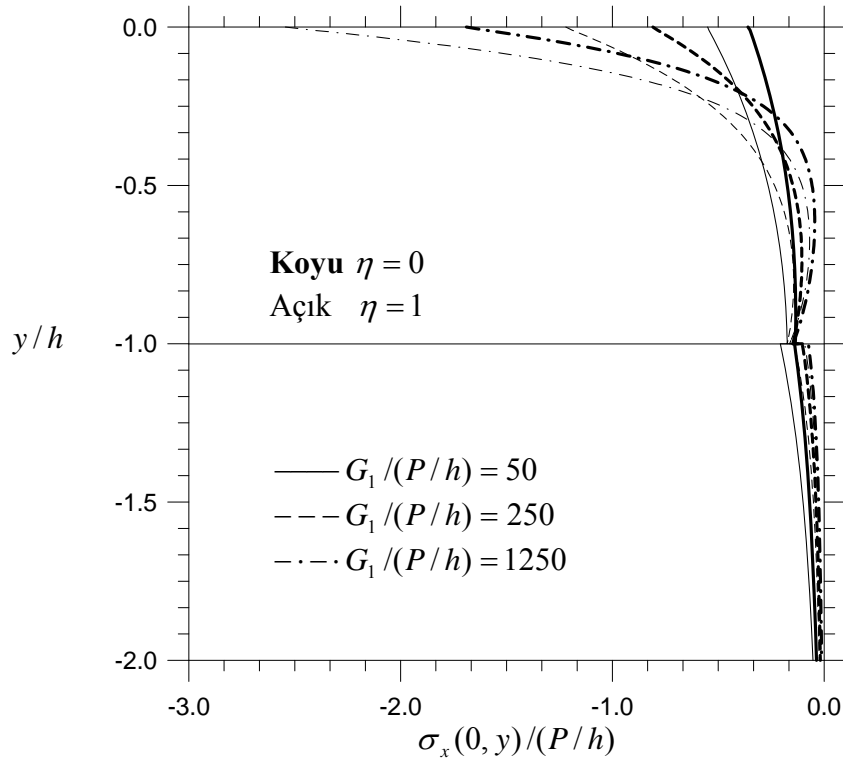
Elastik yarım düzlem ve tabakanın Poisson oranları ile gerilmenin değişimi Şekil 16'da görülmektedir. Sürtünmesiz durumda elastik yarım düzlemin ve tabakanın Poisson oranları birbirine eşit olarak artırıldığında (κ_1 ve κ_2 azaldığında) tabakada gerilme artmakta, yarım düzlemde ise gerilme azalmaktadır. $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ olduğunda yarım düzlemde gerilme hemen hemen "0" olmaktadır.



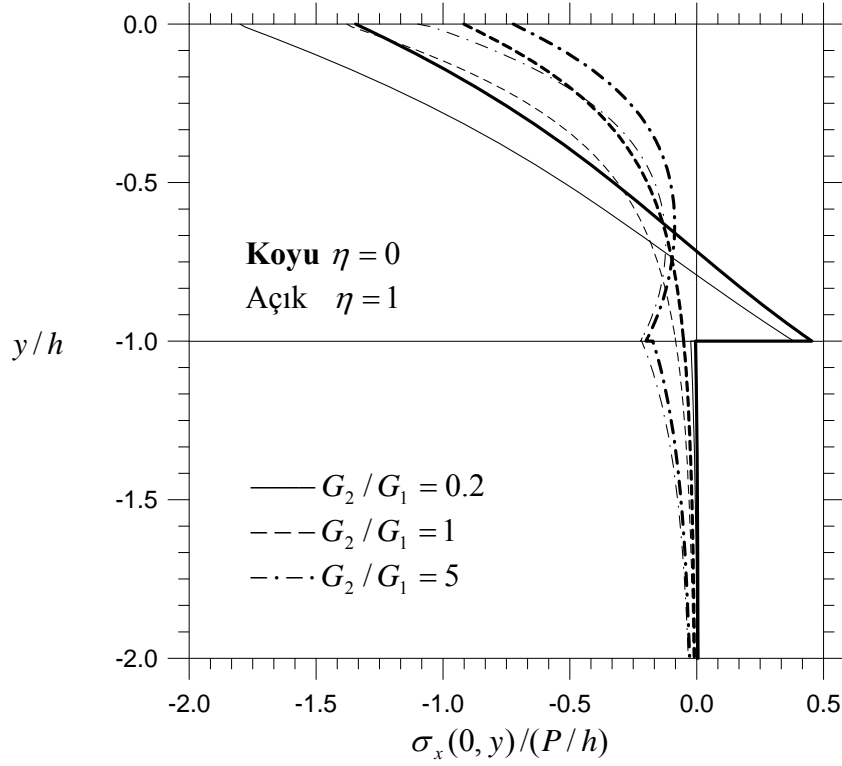
Şekil 12. $\sigma_x(0, y)$ normal gerilmesinin sürtünme katsayısıyla değişimi
($G_2/G_1 = 0.5$, $R/h = 500$, $G_1/(P/h) = 100$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)



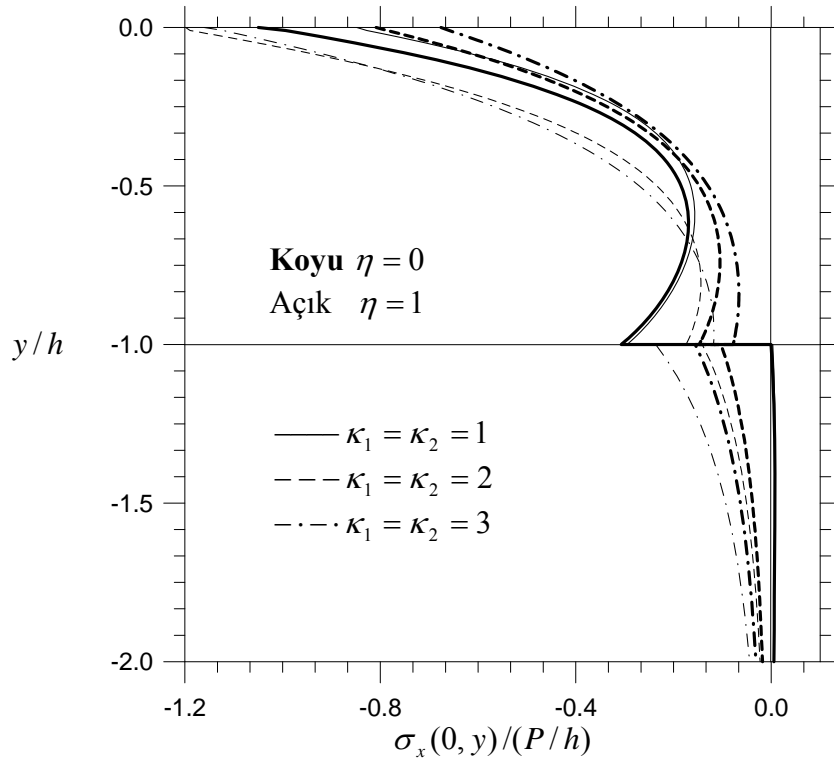
Şekil 13. $\sigma_x(0, y)$ normal gerilmesinin pañç yarıçapı ve sürtünme katsayısıyla değişimi ($G_2/G_1 = 2$, $G_1/(P/h) = 250$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)



Şekil 14. $\sigma_x(0, y)$ normal gerilmesinin yük ve sürtünme katsayısıyla değişimi ($G_2/G_1 = 2$, $R/h = 250$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)



Şekil 15. $\sigma_x(0, y)$ normal gerilmesinin kayma modülleri oranı ve sürtünme katsayısıyla değişimi ($R/h = 250$, $G_1/(P/h) = 250$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)



Şekil 16. $\sigma_x(0, y)$ normal gerilmesinin κ_1 , κ_2 ve sürtünme katsayısıyla değişimi ($G_2/G_1 = 2$, $R/h = 250$, $G_1/(P/h) = 250$)

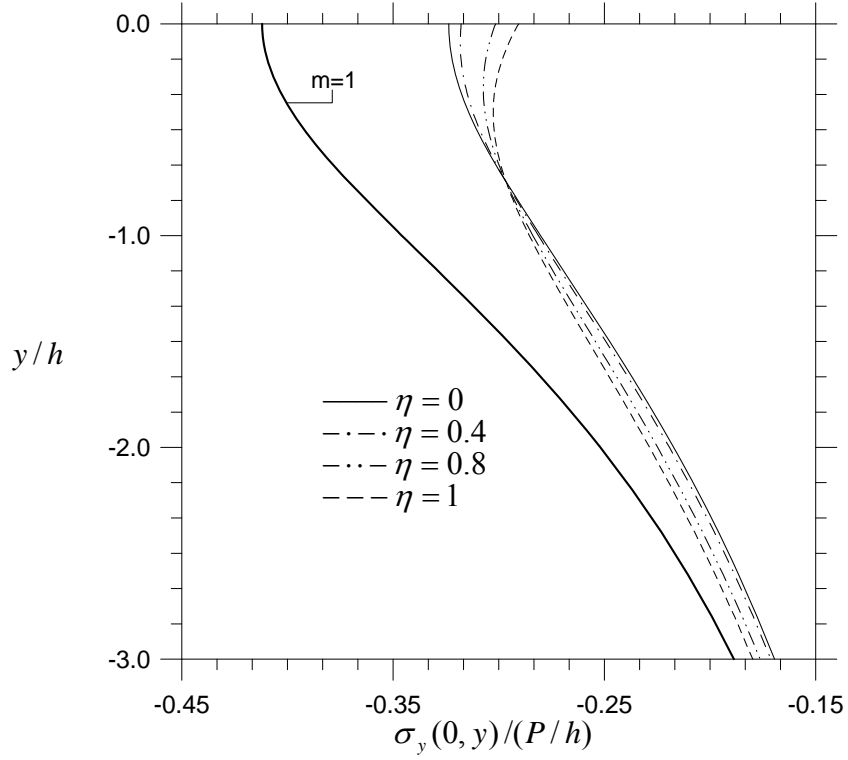
3.1.2.2. σ_y Normal Gerilmelerinin İncelenmesi

σ_y düşey normal gerilmesi, tabaka ve elastik yarım düzlemde, y eksenini boyunca daima basınç olarak etkisini göstermektedir. Sürtünmesiz halde gerilme en büyük değerini pançın değme yüzeyinde almakta ve pançtan uzaklaştıkça azalarak etkisini kaybetmektedir. Sürtünme katsayısı arttıkça gerilmenin en büyük değeri azalmakta ve bu değeri aldığı nokta tabakanın orta kısımlarına doğru kaymaktadır. Tabaka ile yarım düzlemin birbirlerine değdikleri noktada tabaka ve yarım düzlem için gerilme değerleri birbirine eşit çıkarak (57) no'lu sınır şartı sağlanmaktadır. Ayrıca $y = 0$ 'da gerilmenin değeri $\sigma_y(0,0)$, değme gerilmesinin $x = 0$ 'daki $p(0,0)$ değerinin eksi işaretlisine eşit çıkarak (55) no'lu sınır şartı da sağlanmaktadır (Şekil 7, Şekil 17).

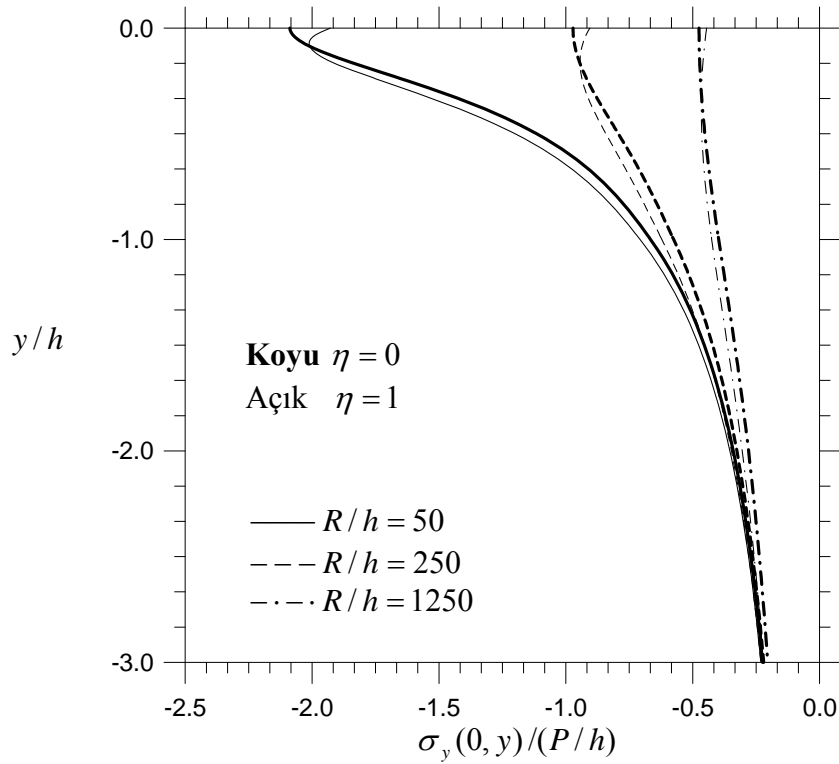
Panç yarıçapı ve yük değeri arttıkça gerilme azalmakta ve gerilme dağılımı doğrusallaşmaktadır. Panç yarıçapı ve yükün küçük değerlerinde ise değme uzunluğu azalacağından gerilme pançın altında hızla artmaktadır (Şekil 18, Şekil 19).

Elastik yarım düzlem ve tabakanın kayma modülleri oranı G_2 / G_1 ile gerilmenin değişimi Şekil 20'de verilmiştir. Elastik yarım düzlemin elastisite modülü arttıkça, G_2 / G_1 artar, gerilme artmaktadır. Malzeme özellikleri farklı olsa dahi birbirlerine değdikleri noktada elastik yarım düzlem ve tabakada gerilme değerlerinin eşit olduğu görülmektedir.

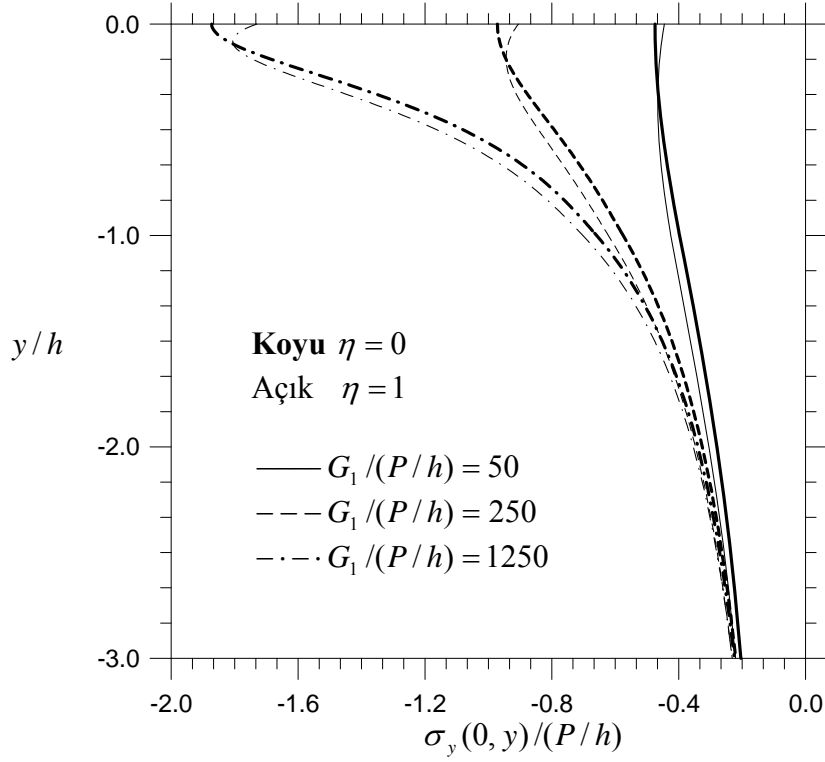
Elastik yarım düzlem ve tabakanın Poisson oranları birbirine eşit olarak artırıldığında σ_y normal gerilmesinin, tabakanın üst yüzeyinde aldığı en büyük değeri de artmaktadır (Şekil 21).



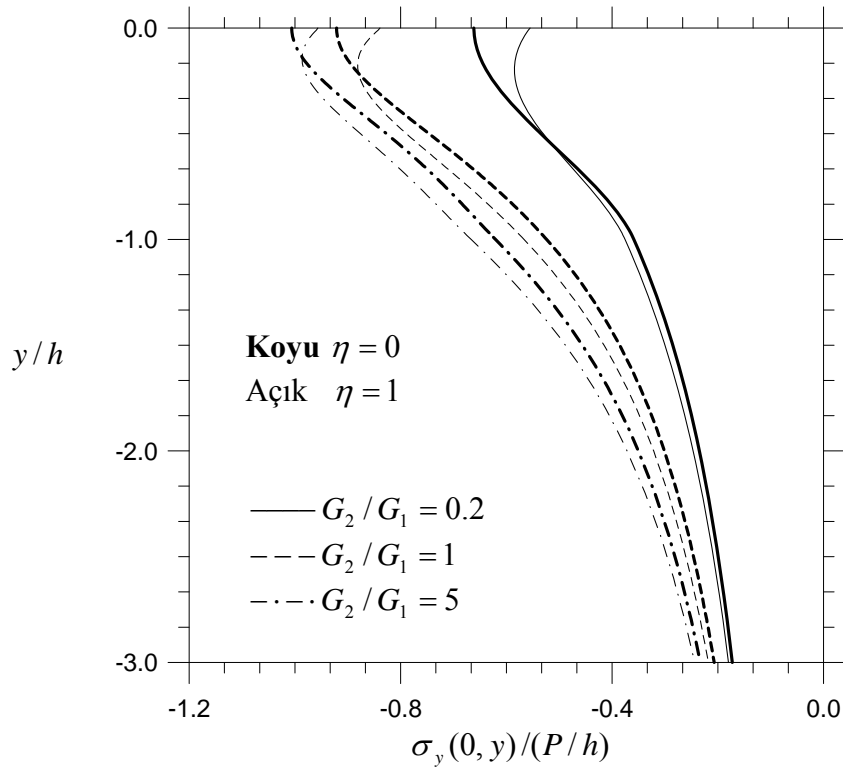
Şekil 17. $\sigma_y(0, y)$ normal gerilmesinin sürtünme katsayısıyla değişimi
($G_2/G_1 = 0.5$, $R/h = 500$, $G_1/(P/h) = 100$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)



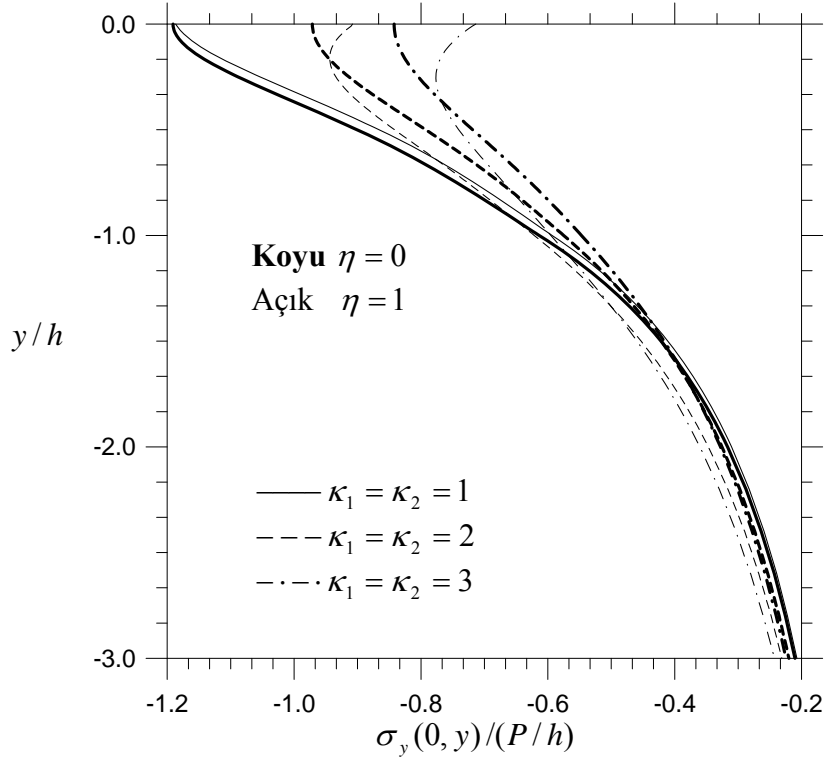
Şekil 18. $\sigma_y(0, y)$ normal gerilmesinin panç yarıçapı ve sürtünme katsayısıyla
değişimi ($G_2/G_1 = 2$, $G_1/(P/h) = 250$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)



Şekil 19. $\sigma_y(0, y)$ normal gerilmesinin yük ve sürtünme katsayısıyla değişimi
 ($G_2/G_1 = 2$, $R/h = 250$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)



Şekil 20. $\sigma_y(0, y)$ normal gerilmesinin kayma modülleri oranı ve sürtünme katsayısıyla değişimi ($R/h = 250$, $G_1/(P/h) = 250$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)



Şekil 21. $\sigma_y(0, y)$ normal gerilmesinin κ_1 , κ_2 ve sürtünme katsayısıyla değişimi
 ($G_2/G_1 = 2$, $R/h = 250$, $G_1/(P/h) = 250$)

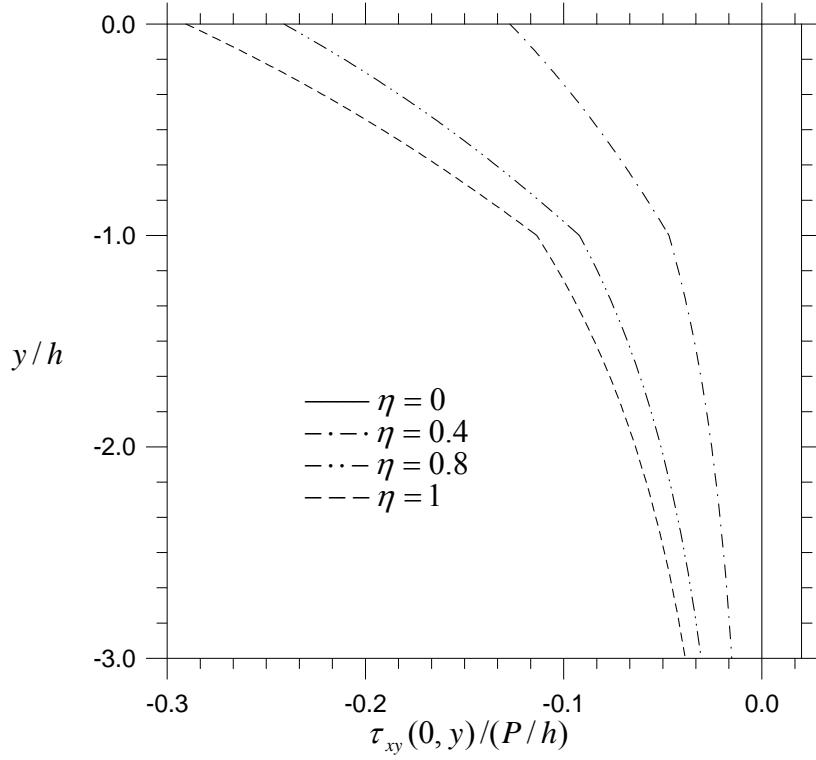
3.1.2.3. τ_{xy} Kayma Gerilmelerinin İncelenmesi

Sürtünmesiz halde y eksenini boyunca simetriden dolayı kayma gerilmesi “0” olmaktadır. Sürtünmenin varlığında gerilme en büyük değerini pançın değdiği noktada almakta ve yükten uzaklaştıkça azalarak etkisini kaybetmektedir. Sürtünme katsayısı arttıkça gerilme de artmaktadır (Şekil 22). Tabaka ile yarım düzlemde birbirleri ile değdikleri noktada gerilme değerleri eşit çıkarak (58) no’lu sınır şartı sağlanmaktadır. Ayrıca $y = 0$ ’da kayma gerilmesi değeri $\tau_{xy}(0,0)$, $-\eta p(0,0)$ değerine eşit çıkarak (56) no’lu sınır şartı da sağlanmaktadır.

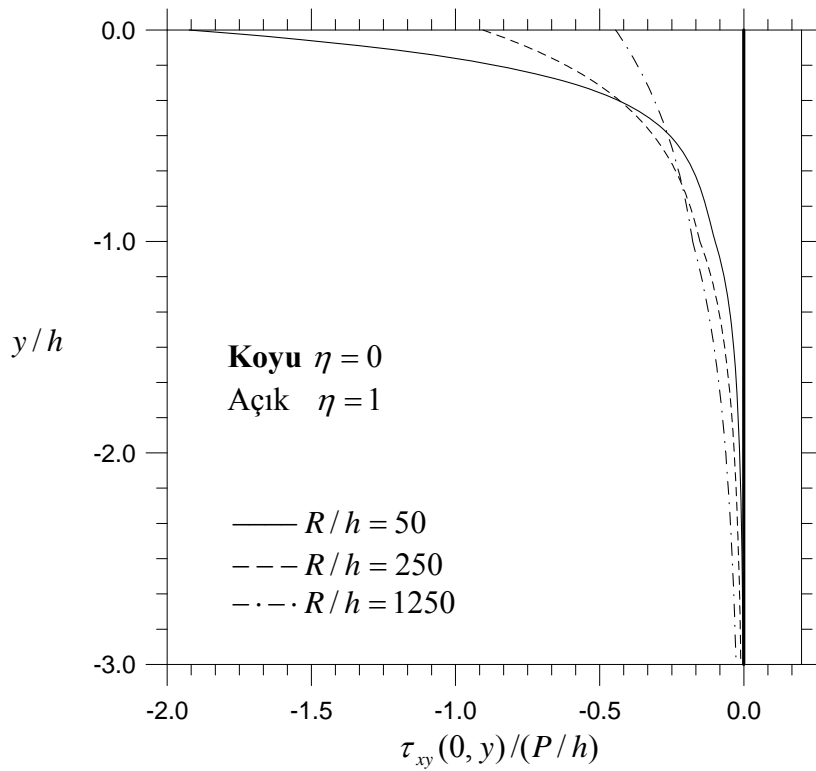
Şekil (23) ve Şekil (24)’de sırasıyla panç yarıçapı ve yük değerinin kayma gerilmesine etkisi verilmiştir. Panç yarıçapı ve yük değerinin değişiminin kayma gerilmesine etkisi aynı şekilde olmaktadır. Sürtünmeli halde panç yarıçapı ve yük değeri arttıkça gerilme azalmaktadır.

Elastik yarım düzlem ve tabakanın kayma modülleri oranı G_2/G_1 ile gerilmenin değişimi Şekil (25)’de verilmiştir. Elastik yarım düzlemin elastisite modülü arttıkça, G_2/G_1 artar, sürtünmeli halde gerilme de artmaktadır. Malzeme özellikleri farklı olduğunda tabaka ile yarım düzlemin değdiği $y = -h$ noktasında gerilmeler birbirine eşit olmakla beraber gerilme fonksiyonunun eğimi bu noktada tabaka ve yarım düzlem için farklı olmakta bir kırılma meydana gelmektedir.

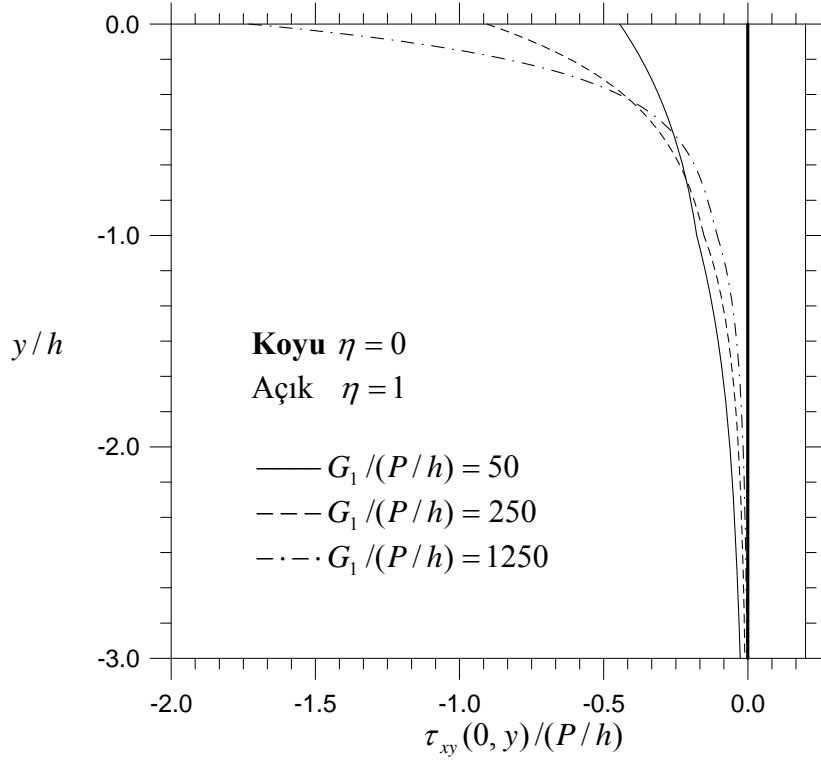
Sürtünmeli halde tabaka ve elastik yarım düzlemin Poisson oranları birbirine eşit olarak artırıldığında, κ_1 ve κ_2 azalırken, gerilme artmaktadır. κ_1 ve κ_2 küçük olduğunda gerilme etkisini daha çabuk kaybetmektedir (Şekil 26).



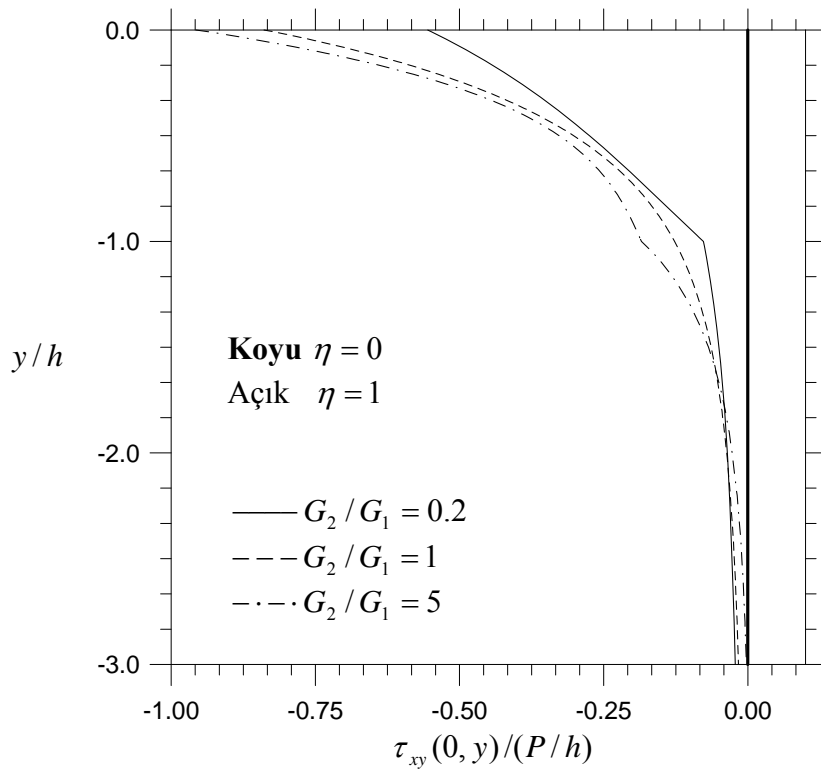
Şekil 22. $\tau_{xy}(0, y)$ normal gerilmesinin sürtünme katsayısıyla değişimi
($G_2/G_1 = 0.5$, $R/h = 500$, $G_1/(P/h) = 100$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)



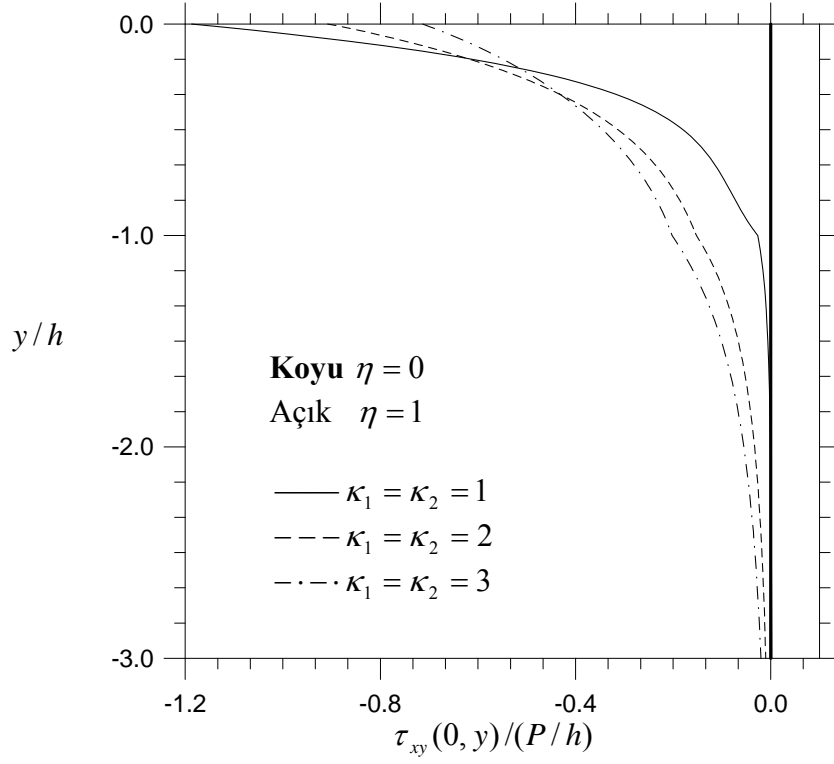
Şekil 23. $\tau_{xy}(0, y)$ normal gerilmesinin panç yarıçapı ve sürtünme katsayısıyla değişimi ($G_2/G_1 = 2$, $G_1/(P/h) = 250$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)



Şekil 24. $\tau_{xy}(0, y)$ normal gerilmesinin yük ve sürtünme katsayısıyla değişimi ($G_2 / G_1 = 2$, $R/h = 250$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)



Şekil 25. $\tau_{xy}(0, y)$ normal gerilmesinin kayma modülleri oranı ve sürtünme katsayısıyla değişimi ($R/h = 250$, $G_1 / (P/h) = 250$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)



Şekil 26. $\tau_{xy}(0, y)$ normal gerilmesinin κ_1, κ_2 ve sürtünme katsayısıyla değişimi
 ($G_2/G_1 = 2, R/h = 250, G_1/(P/h) = 250$)

3.2. Ayrılmalı Değme Problemine Ait Bulgular

Ayrılmalı değme probleminde öncelikle sürtünme katsayısının (η) değme uzunluklarına ve değme gerilmelerine etkisi incelenmiştir. Diğer taraftan sırasıyla panç yarıçapını, panç ile iletilen tekil yükün değerini, elastik yarım düzlem ile elastik tabakanın kayma modülleri oranını ve poisson oranlarını ifade eden boyutsuz büyüklüklerin (R/h , $G_1/(P/h)$, G_2/G_1 , κ_1 ve κ_2) değişik değerleri için panç ile tabaka arasında ve tabaka ile yarım düzlem arasında oluşan değme uzunlukları ve bu değme bölgelerindeki değme gerilmesi dağılımı sürtünmeli ve sürtünmesiz durumda bulunmuştur. Aynı zamanda y simetri eksenini boyunca $\sigma_x(0, y)$ ve $\sigma_y(0, y)$ normal gerilmeleri ile $\tau_{xy}(0, y)$ kayma gerilmesi dağılımları elde edilmiştir.

Ayrılmalı değme probleminde tabakanın ya da sistemin yatay doğrultudaki dengesinin sağlanabilmesi için panç ile tabaka ve tabaka ile yarım düzlem arasındaki sürtünme katsayıları zorunlu olarak birbirine eşit alınmıştır ($\eta_1 = \eta_2 = \eta$).

3.2.1. Değme Uzunlukları ve Değme Gerilmeleri

Rijit dairesel panç ile elastik tabaka ve elastik tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki değme uzunluklarının sürtünme katsayısıyla değişimi Şekil 27, Şekil 28 ve Tablo 5 ile verilmiştir. Sürtünmesiz halde a/h ile b/h ve c/h ile d/h birbirine eşit olmaktadır. Sürtünme katsayısı arttıkça b/h ve c/h artarken a/h ve d/h azalmaktadır. Bununla beraber panç ile tabaka ve tabaka ile yarım düzlem arasındaki toplam değme uzunlukları $(a+b)$ ile $(c+d)$ sürtünme katsayısı arttıkça artış göstermektedir. Panç ile tabaka arasındaki toplam değme uzunluğu tabaka ile yarım düzlem arasındaki toplam değme uzunluğundan daha büyük değerler almaktadır.

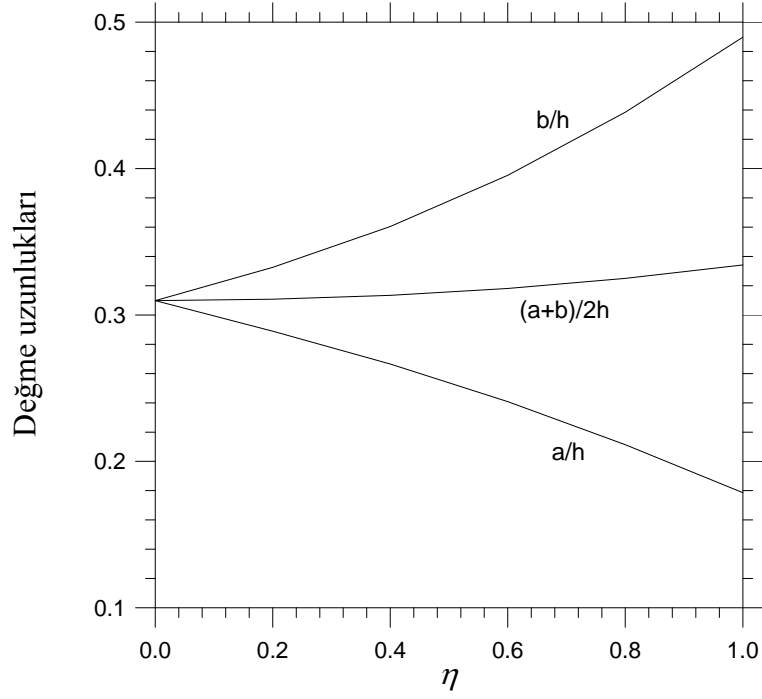
Panç yarıçapı ve tekil yük değeri ile değme uzunluklarının değişimi Şekil 29, Şekil 30 ve Tablo 6'da verilmiştir. Tekil yükün değişimi $G_1/(P/h)$ boyutsuz büyüklüğü ile ifade edilmektedir: Yük arttıkça bu boyutsuz büyüklük azalmakta, yük azaldığında ise artmaktadır. Panç yarıçapı ve yük değeri arttığında panç ile tabaka ve tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme uzunluğu sürtünmeli ve sürtünmesiz durumda artmaktadır. Sürtünmenin değme uzunlukları üzerindeki etkisi panç yarıçapı ve yük değeri arttıkça daha da belirginleşmektedir. Yine sürtünmenin yarım düzlem ile tabaka arasındaki değme

uzunlukları üzerindeki etkisi pançın altındaki değme uzunluğuna göre çok daha büyük olmaktadır.

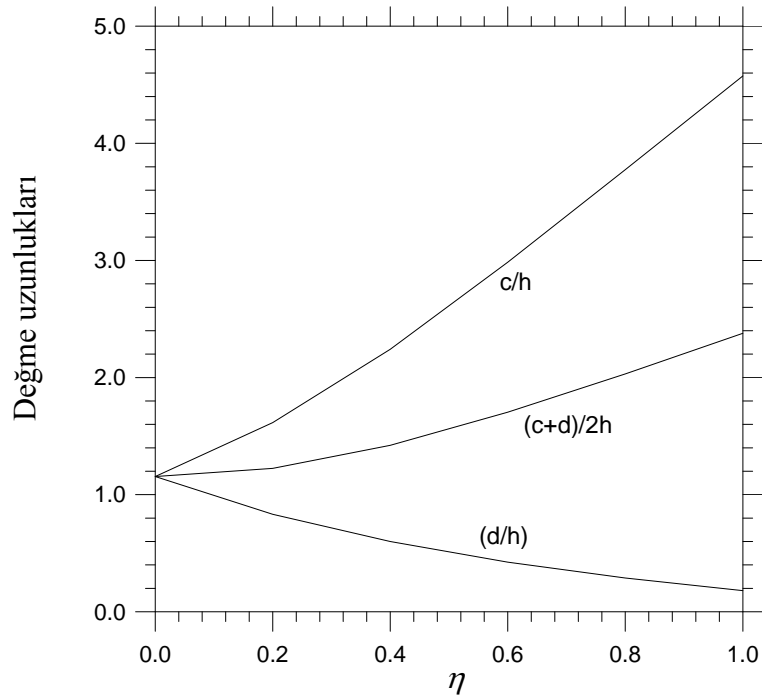
Elastik tabaka ve yarım düzlemin malzeme özelliklerinin değme uzunluklarına etkisi Şekil 31, Şekil 32 ve Tablo 7’de verilmiştir. Tabaka ve yarım düzlemin Poisson oranları birbirine eşit alındığında G_2/G_1 boyutsuz büyüklüğü, elastik yarım düzlemin elastisite modülünün (E_2), tabakanın elastisite modülüne (E_1) oranı olarak da düşünülebilir. Diğer taraftan κ_1, κ_2 Poisson oranlarına (ν_1, ν_2) bağlı bir büyüklüktür ve ν_1, ν_2 arttıkça azalmakta, ν_1, ν_2 azaldıkça artmaktadır. Sürtünmesiz durumda elastik tabaka ve yarım düzlemin poisson oranları birbirine eşit olarak arttığında (κ_1, κ_2 azalır) ve yarım düzlemin elastisite modülü arttığında (G_2/G_1 azalır), pançın altında ve tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme uzunluğu azalmaktadır. Sürtünmeli durumda değme uzunluklarının değişimi düzensiz olduğundan şekillerde verilmemiştir.

Tablo 5. Değme uzunluklarının sürtünme katsayısıyla değişimi
($G_2/G_1 = 2$, $R/h = 100$, $G_1/(P/h) = 500$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)

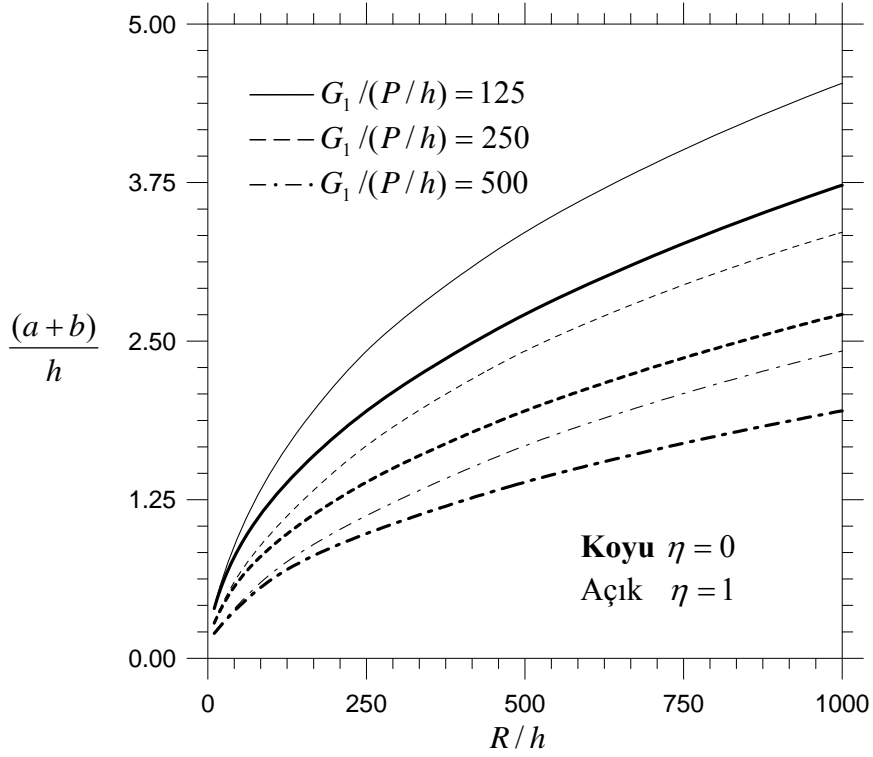
Sürtünme katsayısı, α_j ($\beta_j = 1 - \alpha_j$)			Panç ile tabaka arasındaki değme uzunlukları			Tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme uzunlukları		
η	α_1	α_2	a/h	b/h	$(a+b)/h$	c/h	d/h	$(c+d)/h$
0	0.5	0.5	0.309858	0.309858	0.619717	1.154568	1.154568	2.309137
0.2	0.47881	0.50707	0.288920	0.332576	0.621496	1.614867	0.832302	2.447169
0.4	0.45781	0.51414	0.266485	0.360385	0.626869	2.240747	0.599402	2.840149
0.6	0.43717	0.5212	0.240776	0.395413	0.636189	2.984319	0.423780	3.408119
0.8	0.41705	0.52822	0.211435	0.438495	0.649930	3.775358	0.287731	4.063089
1	0.3976	0.53523	0.178563	0.489735	0.668298	4.575253	0.180487	4.755740



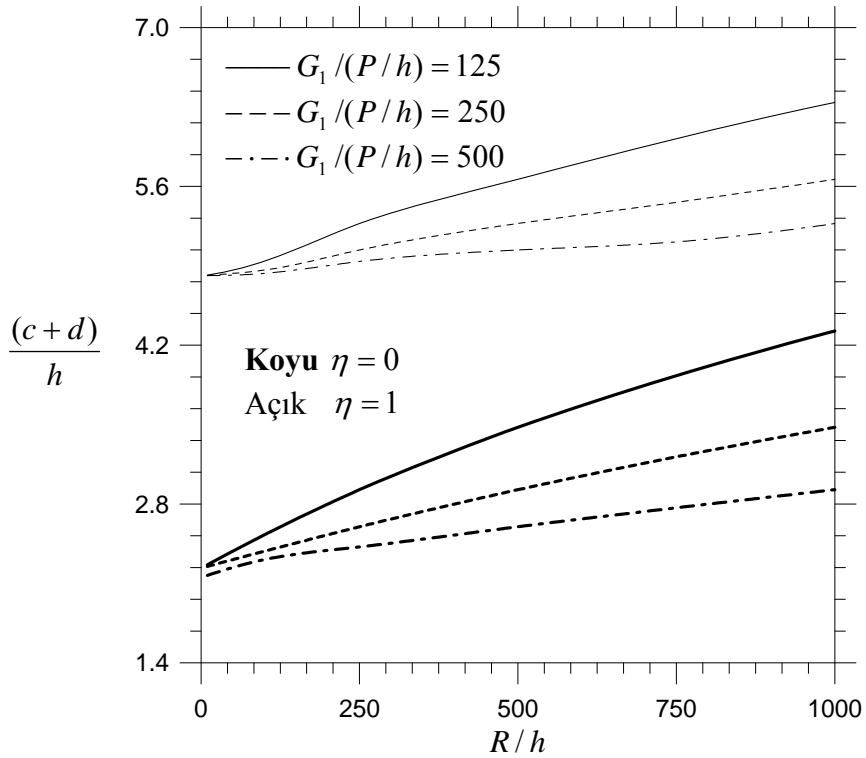
Şekil 27. Panç ile tabaka arasındaki değme uzunluklarının sürtünme ile değişimi ($G_2/G_1 = 2$, $R/h = 100$, $G_1/(P/h) = 500$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)



Şekil 28. Tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme uzunluklarının sürtünme ile değişimi ($G_2/G_1 = 2$, $R/h = 100$, $G_1/(P/h) = 500$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$)



Şekil 29. Panç ile tabaka arasındaki toplam değme uzunluğunun panç yarıçapı, yük ve sürtünme ile değişimi ($G_2/G_1 = 2$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)



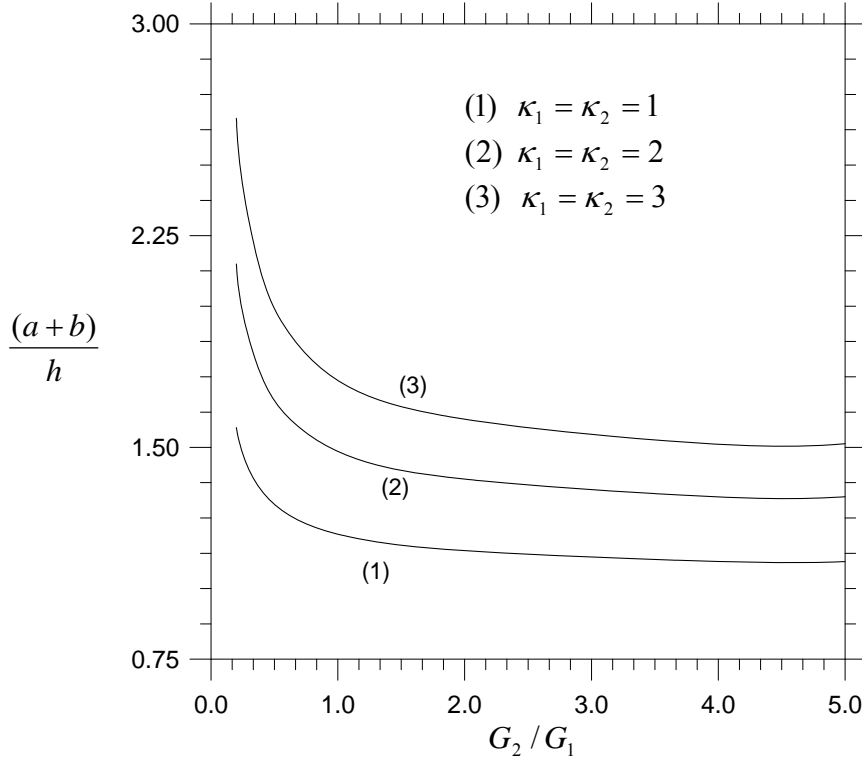
Şekil 30. Tabaka ile yarım düzlem arasındaki toplam değme uzunluğunun panç yarıçapı, yük ve sürtünme ile değişimi ($G_2/G_1 = 2$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)

Tablo 6. Değme uzunluklarının panç yarıçapı ve sürtünme katsayısı ile değişimi
 $(G_2/G_1 = 2, G_1/(P/h) = 125, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2)$

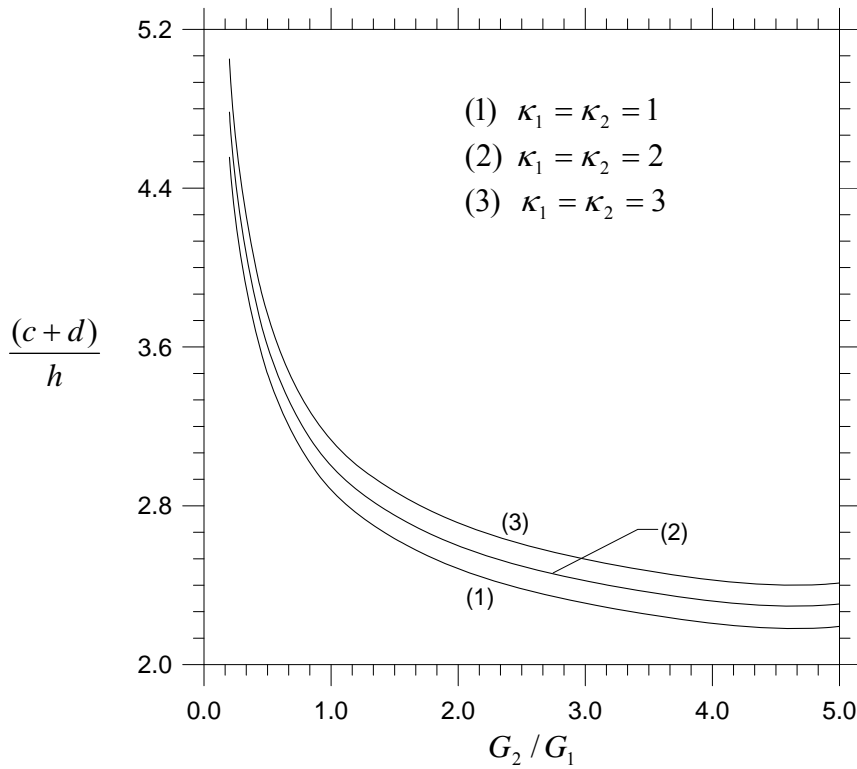
	$\eta = 0$		$\eta = 1$			
R/h	$a/h = b/h$	$c/h = d/h$	a/h	b/h	c/h	d/h
10	0.195688	1.132103	0.124906	0.284223	4.733770	0.084869
100	0.620872	1.264009	0.330910	1.143220	4.419750	0.520272
250	0.974469	1.462890	0.539870	1.881560	4.338920	0.932634
500	1.355004	1.737548	0.779798	2.577890	4.297720	1.364845
1000	1.864268	2.162446	1.124443	3.409266	4.398721	1.941737

Tablo 7. Değme uzunluklarının malzeme özellikleri $(G_2/G_1, \kappa_1, \kappa_2)$ ile değişimi
 $(R/h = 250, G_1/(P/h) = 250, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2)$

	$\eta = 0$		$\eta = 1$			
G_2/G_1	$a/h = b/h$	$c/h = d/h$	a/h	b/h	c/h	d/h
0.2	1.07462	2.39165	0.365833	2.029004	3.786020	1.835970
0.5	0.832467	1.801684	0.295048	1.604881	3.736234	1.125992
1	0.742544	1.500531	0.327968	1.416756	3.947031	0.802567
2	0.693733	1.299064	0.371185	1.302158	4.316464	0.606342
5	0.662497	1.152789	0.412455	1.220934	5.066340	0.471106



Şekil 31. Panç ile tabaka arasındaki toplam değme uzunluğunun malzeme özellikleri ile değişimi ($R/h = 250$, $G_1/(P/h) = 250$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)



Şekil 32. Panç ile tabaka arasındaki toplam değme uzunluğunun malzeme özellikleri ile değişimi ($R/h = 250$, $G_1/(P/h) = 250$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)

Panç ile tabaka arasında ve tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme bölgelerinde oluşan değme gerilmelerinin sürtünme katsayısıyla değişimi Şekil 33-36'da görülmektedir. Sürtünmesiz halde değme gerilmelerinin dağılımı y eksenine göre simetriktir ve en büyük değerleri $x = 0$ noktasında oluşmaktadır.

Sürtünmeli halde değme gerilmelerinin dağılımındaki simetri bozulmaktadır. Sürtünme katsayısının değme gerilmelerine etkisi diğer boyutsuz büyüklüklere bağımlı olarak değişmektedir. Elastik yarım düzlemin elastisite modülü tabakaya göre çok büyük olduğu durumda ($G_2 / G_1 = 10$); panç ile tabaka arasında oluşan değme gerilmesinin en büyük değeri $p_1^{\max}(x)/(P/h)$ ve tabaka ile yarım düzlem arasında oluşan değme gerilmesinin en büyük değeri $p_2^{\max}(x)/(P/h)$ sürtünme katsayısı arttıkça belirgin bir miktarda azalmaktadır (Şekil 33-34). Diğer taraftan elastik yarım düzlemin elastisite modülünün tabakaya göre çok küçük olduğu durumda ($G_2 / G_1 = 0.1$); $p_1^{\max}(x)/(P/h)$ sürtünme katsayısı arttıkça çok az azalmakta, $p_2^{\max}(x)/(P/h)$ ise sürtünme katsayısı arttıkça artmaktadır (Şekil 35-36).

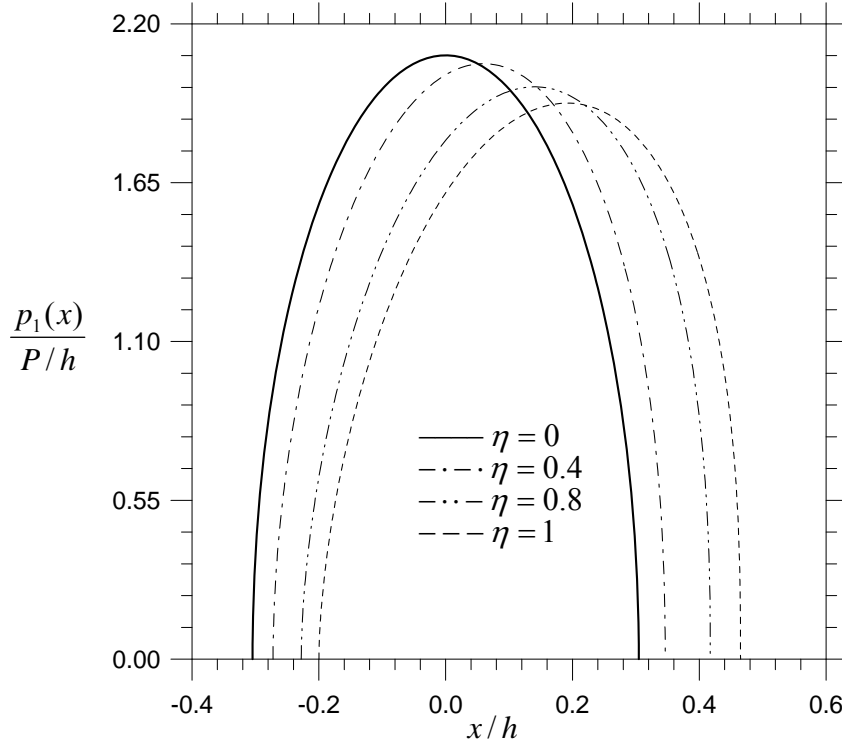
Panç yarıçapı (R/h) arttıkça, sürtünmeli ve sürtünmesiz durumda pançın altında ve tabaka ile yarım düzlem arasında oluşan değme gerilmelerinin değerleri azalmaktadır (Şekil 37-38). Panç yarıçapının küçük değerlerinde ($R/h = 50$) tekil yük durumuna yaklaşıldığından panç altındaki değme gerilmesinin değeri oldukça artmaktadır. Panç yarıçapı arttıkça pançın altında ve tabaka ile yarım düzlem arasında oluşan değme gerilmelerinin en büyük değerleri sağa doğru kaymaktadır. Panç yarıçapının küçük değerinde ($R/h = 50$) sürtünmenin değme gerilmelerinin en büyük değerlerine etkisi daha fazla olmakta; sürtünmeyle birlikte $p_1^{\max}(x)/(P/h)$ ve $p_2^{\max}(x)/(P/h)$ açık bir şekilde azalmaktadır. Panç yarıçapının daha büyük olduğu durumda ($R/h = 1250$) sürtünmeli durumdaki $p_1^{\max}(x)/(P/h)$ ve $p_2^{\max}(x)/(P/h)$ değerlerinin sürtünmesiz durumdaki $p_1^{\max}(x)/(P/h)$ ve $p_2^{\max}(x)/(P/h)$ değerlerine hemen hemen eşit çıktığı görülmektedir.

Rijit panç ile iletilen tekil yük değerinin değme gerilmelerine etkisi Şekil 39 ve Şekil 40 ile verilmiştir. (274) no'lu denklemden görüldüğü üzere panç yarıçapı ile tekil yükün integral denklemlere dolayısıyla değme uzunlukları ve gerilmelere etkisi aynı şekilde olmaktadır. Tekil yük değeri arttıkça, $G_1/(P/h)$ azalır, sürtünmeli ve sürtünmesiz durumda panç ile tabaka arasında ve tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme gerilmelerinin değerleri azalmaktadır. Yine değme gerilmelerinin en büyük değerlerinin

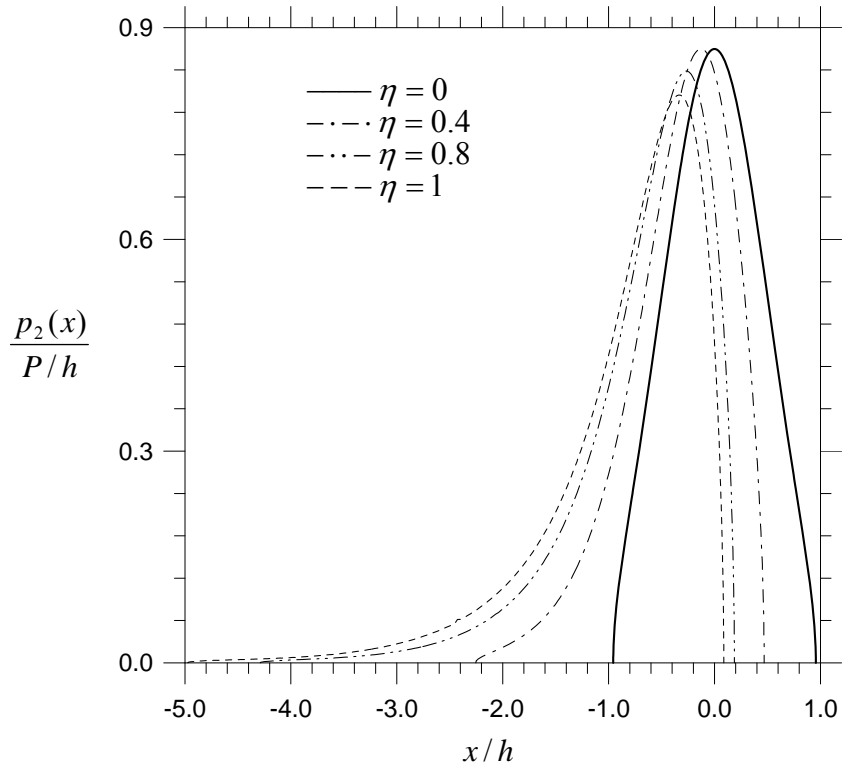
yük ve sürtünme katsayısıyla değişimi, panç yarıçapının değişiminde ifade edilen şekilde olmaktadır.

Elastik yarım düzlemin kayma modülü ile tabakanın kayma modülü oranı olan G_2/G_1 boyutsuz büyüklüğünün değme gerilmelerine etkisi Şekil 41-42’de görülmektedir. Yarım düzlemin elastisite modülü arttıkça (G_2/G_1 artar), sürtülmeli ve sürtünmesiz durumda, panç ile tabaka ve tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme gerilmeleri artmaktadır. Sürtünmesiz durumda $x = 0$ noktasında oluşan değme gerilmelerinin en büyük değerleri ise sürtülmeli durumda yarım düzlemin elastisite modülü azaldıkça sağa doğru kaymaktadır. Elastik yarım düzlemin elastisite modülü tabakanın elastisite modülüne göre küçük olduğunda ($G_2/G_1 = 0.5$), tabaka ile yarım düzlem arasında oluşan değme gerilmesinin en büyük değerinin sürtünme ile birlikte arttığı görülmektedir.

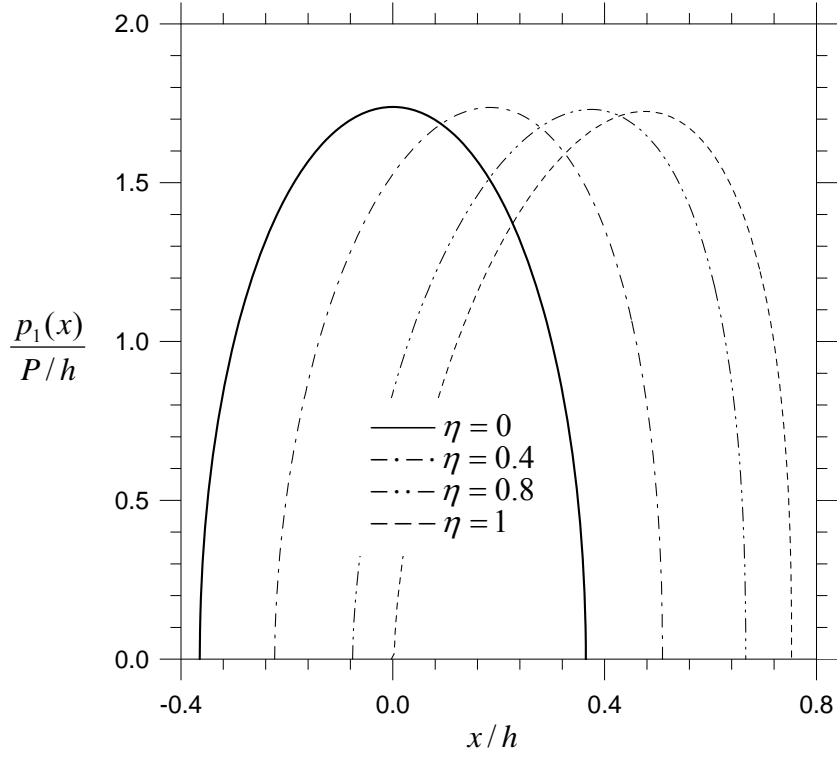
Elastik tabakanın ve yarım düzlemin Poisson oranları birbirine eşit olarak arttığında (κ_1 ve κ_2 azalır), sürtülmeli ve sürtünmesiz durumda, değme gerilmelerinin de arttığı görülmektedir (Şekil 43-44). Panç altındaki değme gerilmesinin en büyük değerinin sürtünmeyle birlikte oldukça azalmaktadır. Tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme gerilmesinin en büyük değeri ise Poisson oranları küçük olduğunda ($\kappa_1 = \kappa_2 = 3$) sürtünme ile birlikte azalmakta diğer durumlarda ise artmaktadır.



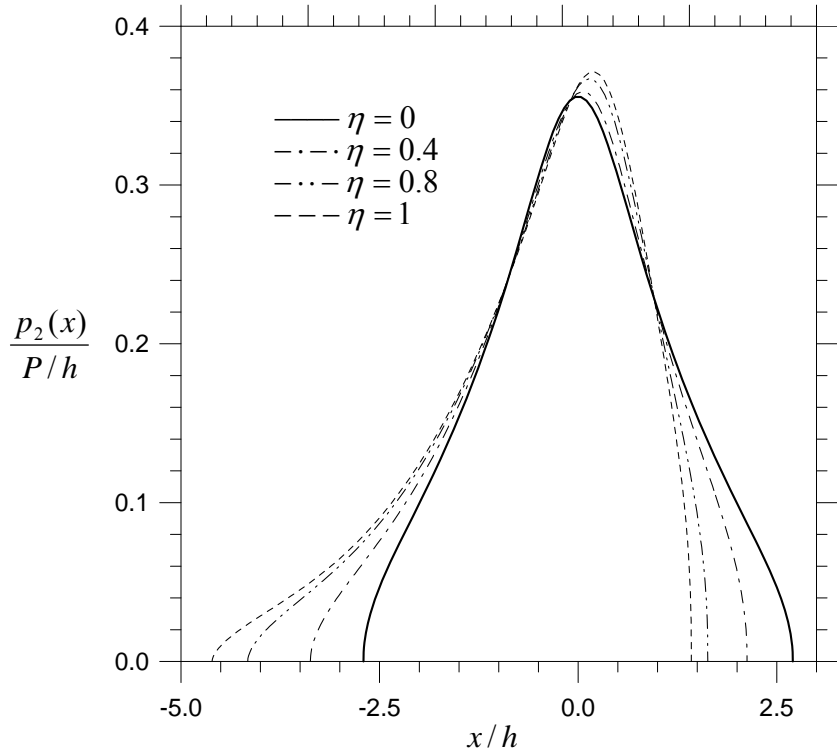
Şekil 33. Paç ile tabaka arasındaki değme gerilmesinin sürtünme ile değişimi ($G_2/G_1 = 10$, $R/h = 100$, $G_1/(P/h) = 500$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)



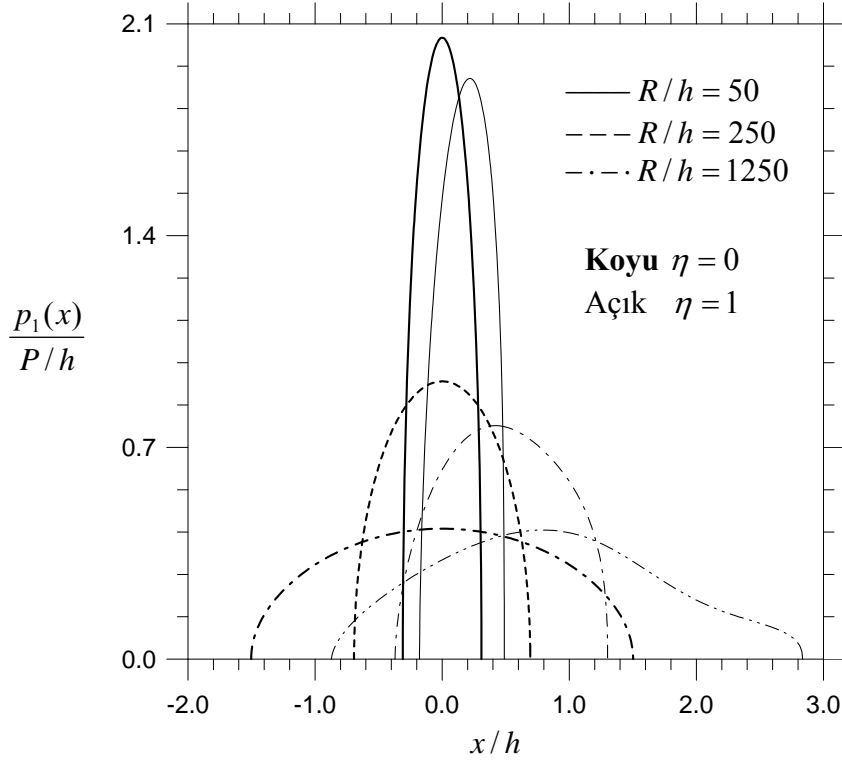
Şekil 34. Tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme gerilmesinin sürtünme ile değişimi ($G_2/G_1 = 10$, $R/h = 100$, $G_1/(P/h) = 500$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)



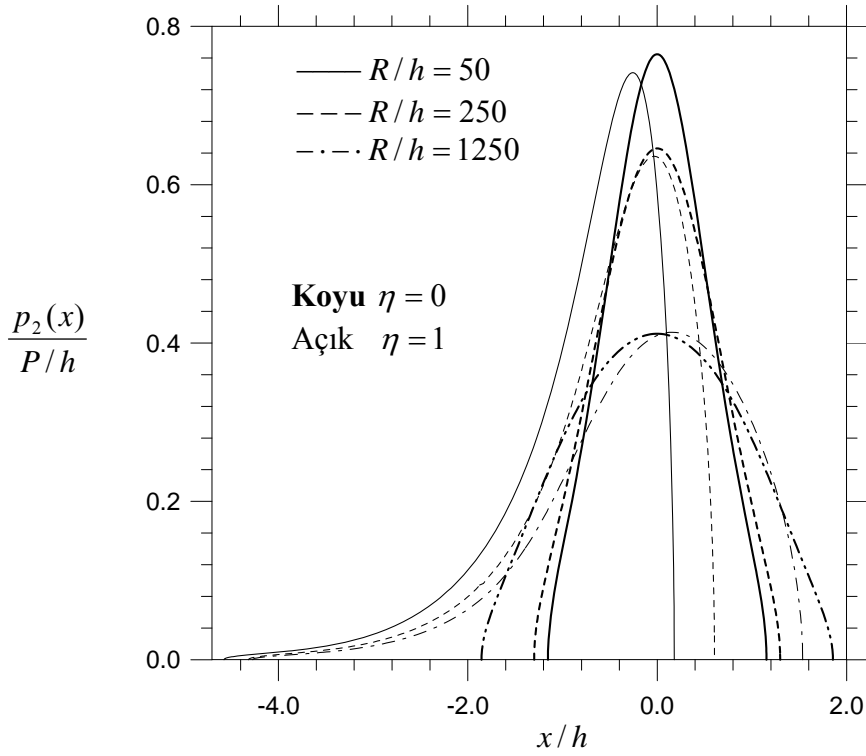
Şekil 35. Panç ile tabaka arasındaki değme gerilmesinin sürtünme ile değişimi ($G_2/G_1 = 0.1$, $R/h = 100$, $G_1/(P/h) = 500$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)



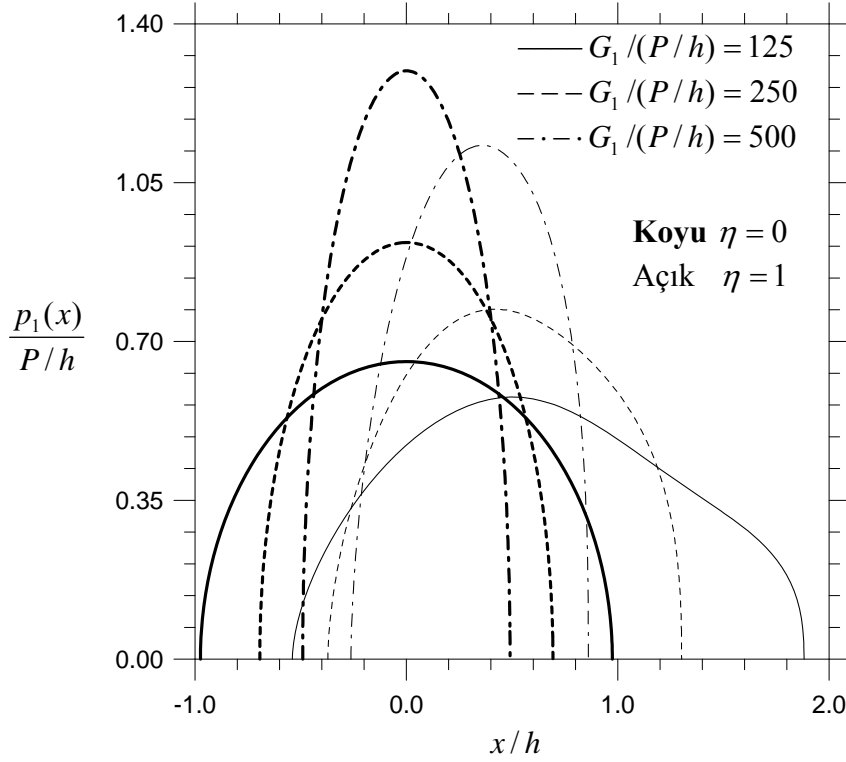
Şekil 36. Tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme gerilmesinin sürtünme ile değişimi ($G_2/G_1 = 0.1$, $R/h = 100$, $G_1/(P/h) = 500$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)



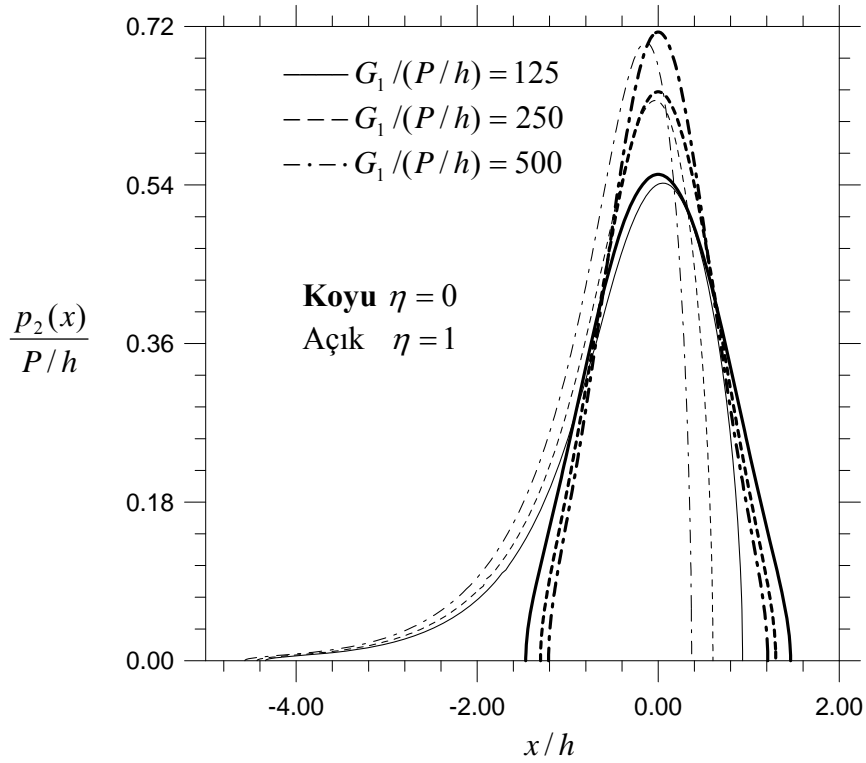
Şekil 37. Panç ile tabaka arasındaki değme gerilmesinin panç yarıçapı ve sürtünme ile değişimi ($G_2/G_1 = 2$, $G_1/(P/h) = 250$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)



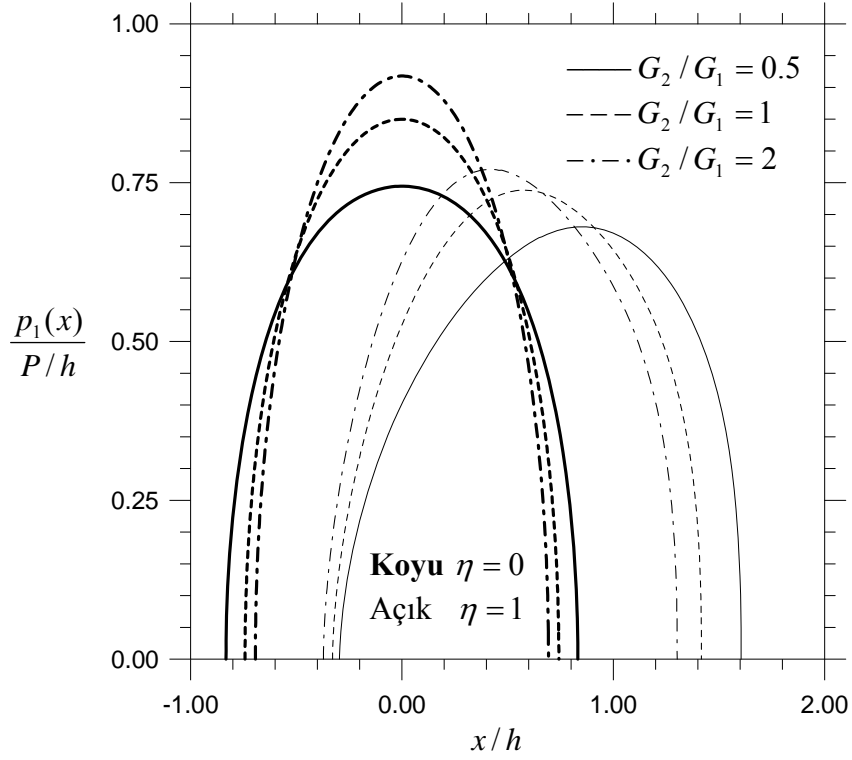
Şekil 38. Tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme gerilmesinin panç yarıçapı ve sürtünme ile değişimi ($G_2/G_1 = 2$, $G_1/(P/h) = 250$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)



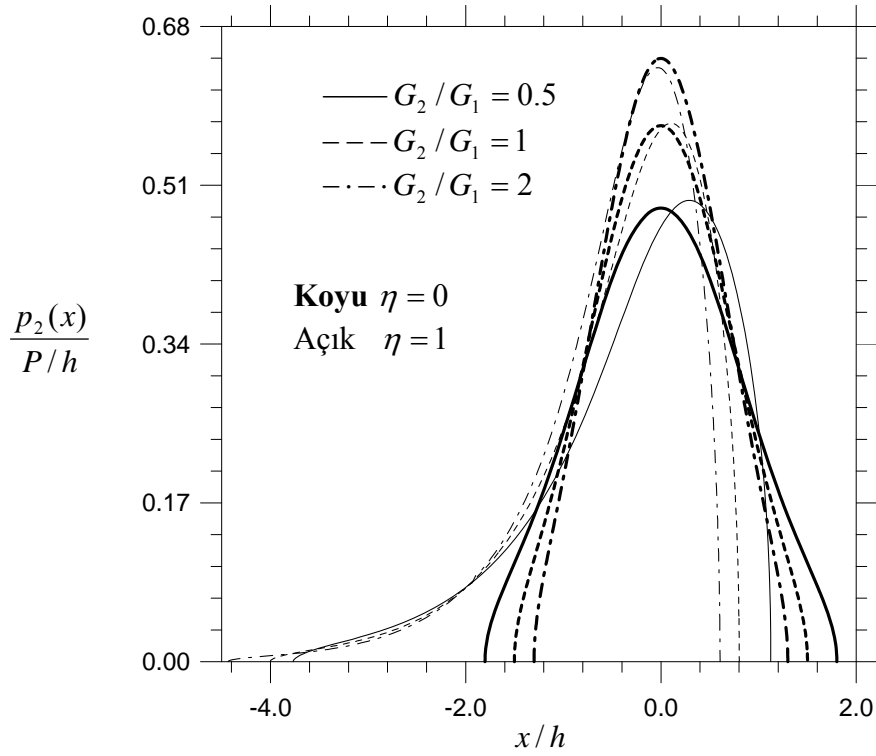
Şekil 39. Panç ile tabaka arasındaki değme gerilmesinin yük ve sürtünme ile değişimi ($G_2/G_1 = 2$, $R/h = 250$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)



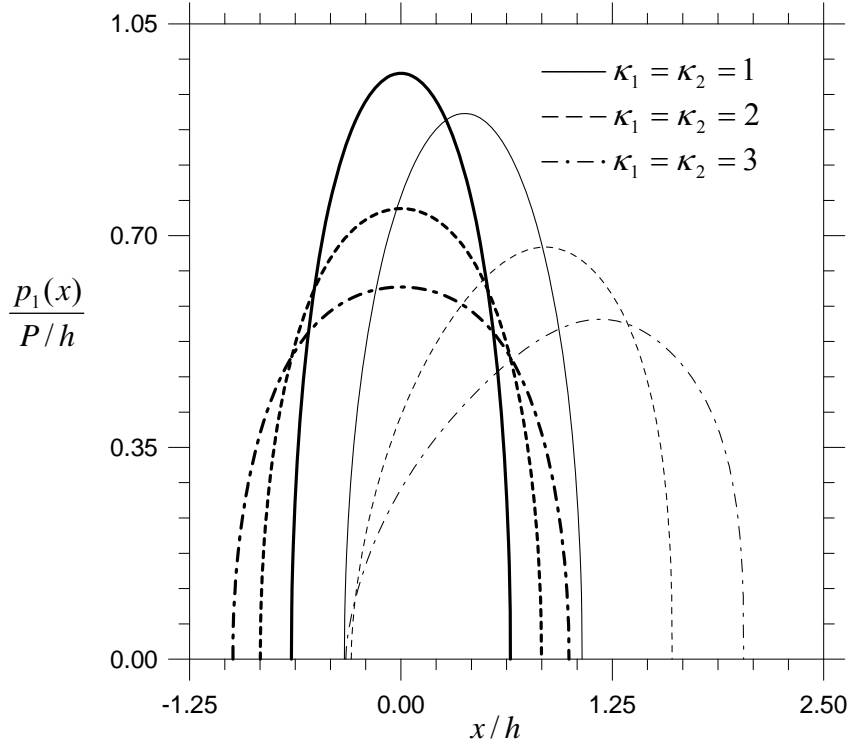
Şekil 40. Tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme gerilmesinin yük ve sürtünme ile değişimi ($G_2/G_1 = 2$, $R/h = 250$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)



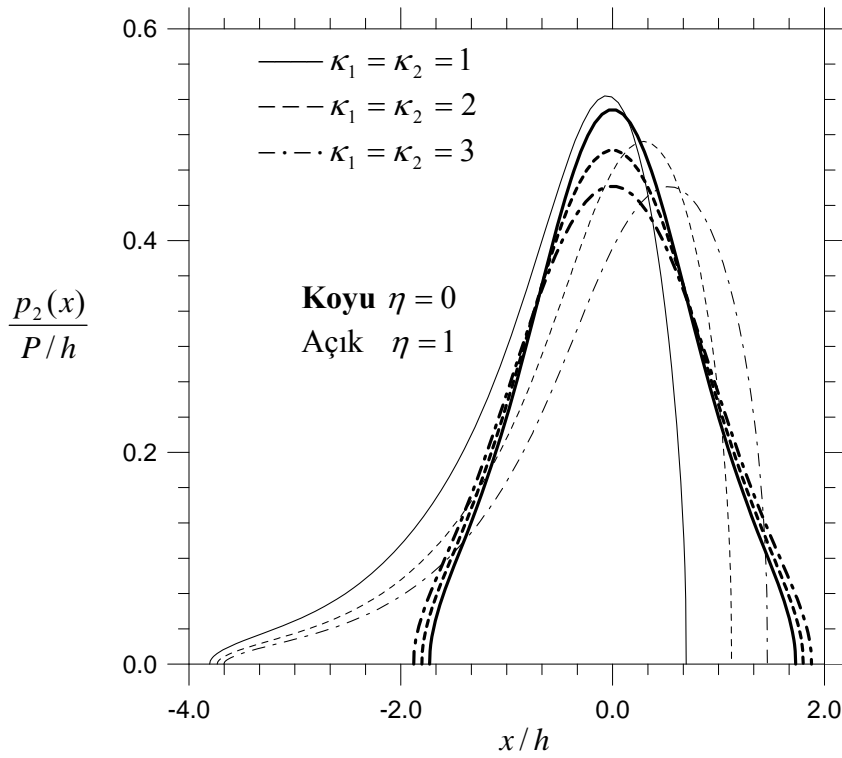
Şekil 41. Panç ile tabaka arasındaki değme gerilmesinin kayma modülleri oranı ve sürtünme ile değişimi ($R/h = 250$, $G_1/(P/h) = 250$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)



Şekil 42. Tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme gerilmesinin kayma modülleri oranı ve sürtünme ile değişimi ($R/h = 250$, $G_1/(P/h) = 250$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)



Şekil 43. Panç ile tabaka arasındaki değme gerilmesinin κ_1, κ_2 ve sürtünme ile değişimi ($G_2/G_1 = 0.5$, $R/h = 250$, $G_1/(P/h) = 250$)



Şekil 44. Tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme gerilmesinin κ_1, κ_2 ve sürtünme ile değişimi ($G_2/G_1 = 0.5$, $R/h = 250$, $G_1/(P/h) = 250$)

3.2.2. Gerilmelerin İncelenmesi

Sürtünme katsayısının, yük değerinin ve kayma modülleri oranlarının değişik değerleri için y eksenini boyunca ($x = 0$), σ_x , σ_y normal gerilmeleri ile τ_{xy} kayma gerilmelerinin dağılımı incelenmiştir. Esasında sürtünmesiz durumda değme gerilmeleri en büyük değerlerini $x = 0$ 'da almasına rağmen sürtünmeyle birlikte bu x değeri hem panç altındaki gerilme için ve hem de tabaka ile yarım düzlem arasındaki gerilme için değişmektedir. Diğer taraftan pançın altındaki değme gerilmesinin $x = 0$ 'daki değeri sürtünmeyle birlikte azalmasına rağmen tabaka ile yarım düzlem arasında oluşan değme gerilmesi için böyle bir genelleme yapmak mümkün değildir. Dolayısıyla y eksenini boyunca ($x = 0$) gerilmelerin değişimi için elde edilen bulgular daha çok sürtünmesiz hal ve tabaka için değerlendirilecektir.

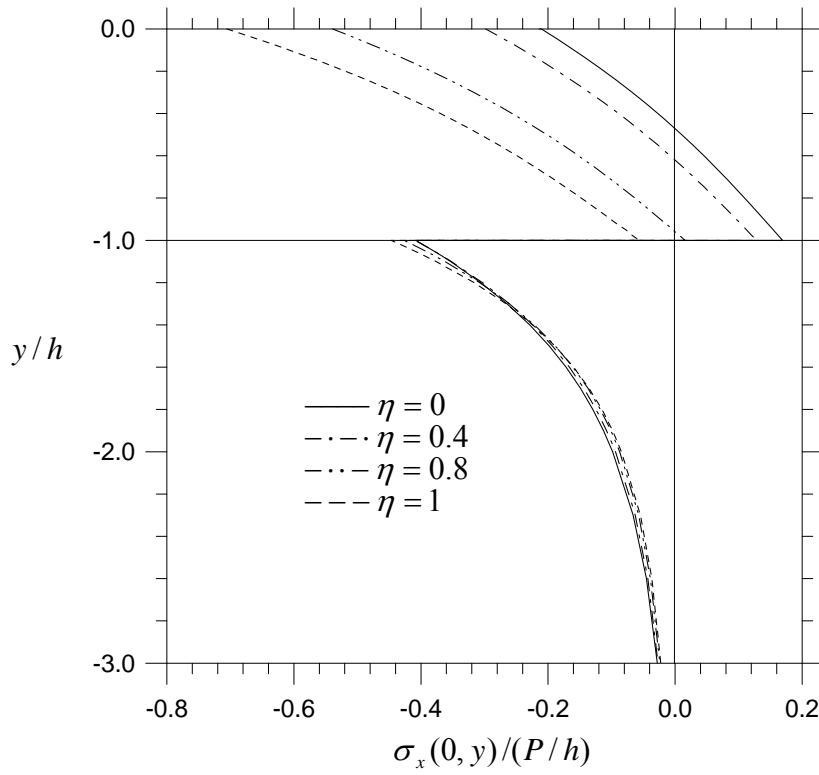
3.2.2.1. σ_x Normal Gerilmelerinin İncelenmesi

$\sigma_x(0, y)$ normal gerilmesi, sürtünmesiz durumda tabakanın üst kısımlarında basınç alt kısımlarında ise çekme gerilmesi olarak etkisini göstermektedir. Basınç gerilmesi en büyük değerini pançın altında aldıktan sonra azalarak tabakanın yaklaşık orta kısmında "0" olmakta ve işaret değiştirerek çekme gerilmesine dönüşmektedir. Çekme gerilmesi ise tabakanın alt kısımlarına doğru artarak en büyük değerini tabakanın yarım düzlem ile değdiği noktada almaktadır. Elastik yarım düzlemde, yarım düzlemin tabaka ile değdiği yüzeyde en büyük değerini alan gerilme alt kısımlarına doğru azalarak etkisini yitirmektedir.

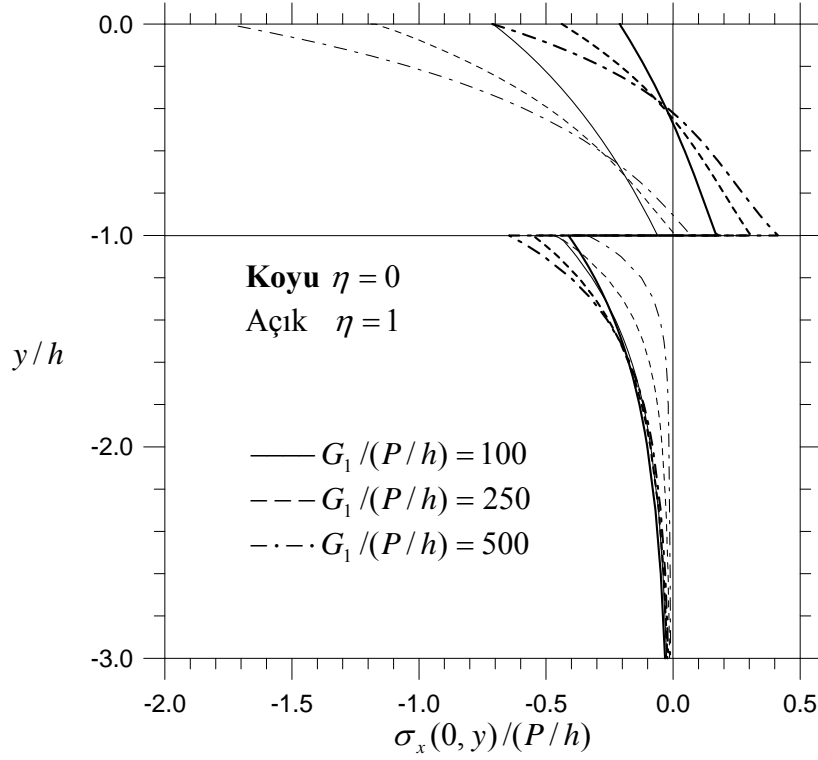
$\sigma_x(0, y)$ normal gerilmesinin sürtünme katsayısıyla değişimi Şekil 45'de görülmektedir. Pançın altındaki çekme gerilmesi sürtünmeyle beraber hızla artmaktadır. Tabakada elastik yarım düzlem ile değdiği bölgede, sürtünmesiz durumda çekme olan gerilme ise sürtünmeyle beraber azalmakta ve sürtünmenin büyük değerlerinde basınç gerilmesine dönüşerek artmaktadır. $\eta = 1$ için tabakada sadece basınç gerilmesi hakimdir.

Sürtünmesiz halde yük değeri arttıkça, $G_1/(P/h)$ azalır, tabakada oluşan gerilme hem basınç ve hem de çekme bölgesinde azalmaktadır (Şekil 46). Tabakada panç ile değdiği yüzeyde sürtünmeli durumda oluşan gerilme de yük değeri arttıkça azalmaktadır.

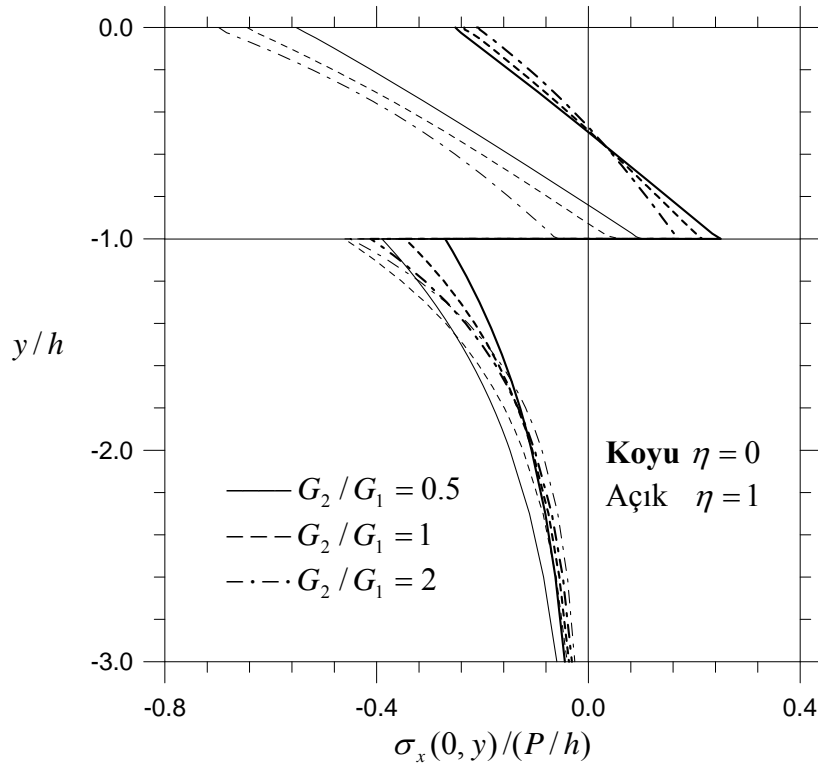
G_2/G_1 oranı arttıkça tabakanın üst kısmında basınç gerilmesi sürtünmesiz halde azalırken sürtülmeli halde artmaktadır. Tabakanın alt kısımlarında oluşan çekme gerilmesi sürtünmesiz halde G_2/G_1 oranı arttıkça azalmaktadır. Elastik yarım düzlemde G_2/G_1 oranı arttıkça, sürtünmesiz durumda, gerilme basınç olarak artmaktadır (Şekil 47).



Şekil 45. $\sigma_x(0, y)$ normal gerilmesinin sürtünme katsayısıyla değişimi
($G_2/G_1 = 2$, $R/h = 500$, $G_1/(P/h) = 100$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)



Şekil 46. $\sigma_x(0, y)$ normal gerilmesinin yük ve sürtünme katsayısıyla değişimi ($G_2/G_1 = 2$, $R/h = 500$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)



Şekil 47. $\sigma_x(0, y)$ normal gerilmesinin kayma modülleri oranı ve sürtünme ile değişimi ($R/h = 500$, $G_1/(P/h) = 100$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)

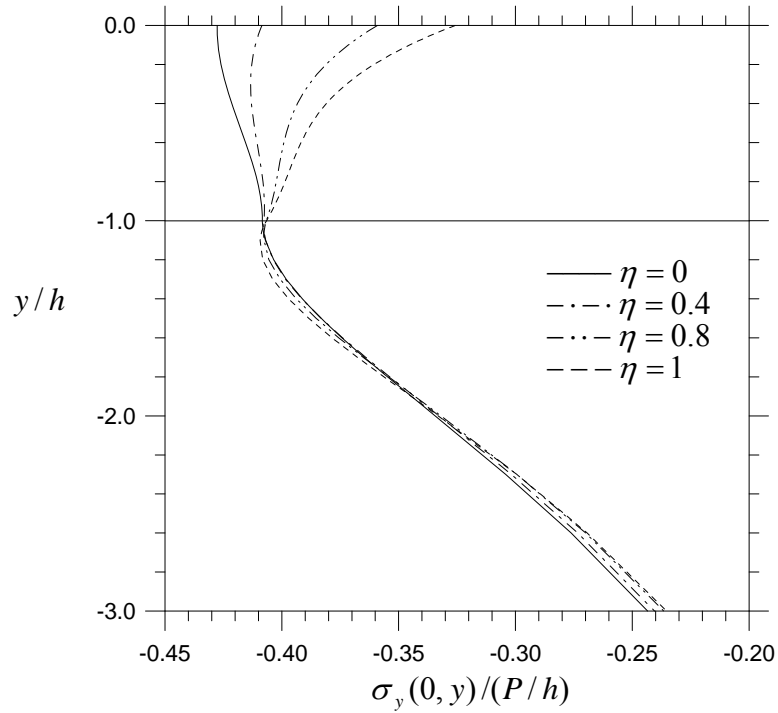
3.2.2.2. σ_y Normal Gerilmelerinin İncelenmesi

σ_y normal gerilmesinin y eksenini boyunca ($x = 0$) yayılışı Şekil 48-50'de görülmektedir. Gerilme tabaka ve elastik yarım düzlem boyunca hem sürtünlü hem de sürtünmesiz durumda daima basınç olarak etkisini göstermektedir. Sürtünmesiz durumda, gerilme en büyük değerini pançın altındaki değme yüzeyinde almakta pançtan uzaklaştıkça azalarak etkisini kaybetmektedir. Tabaka ile yarım düzlemin değdiği yüzeyde, tabaka ve elastik yarım düzlem için gerilme değeri birbirine eşit çıkarak (171) no'lu sınır şartını sağladığı görülmektedir.

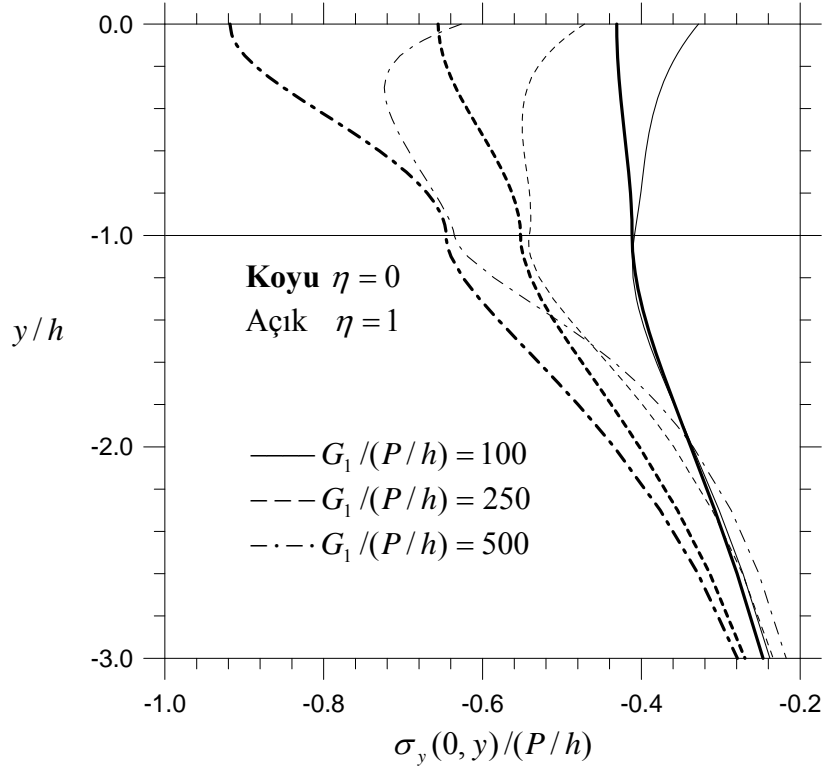
Sürtünme katsayısı arttıkça tabakada gerilme azalmaktadır (Şekil 48). Elastik yarım düzlemde ise sürtünmenin gerilmeye etkisi tabakaya göre çok az olmaktadır.

Yükün σ_y normal gerilmesine etkisi Şekil 49'da görülmektedir. Yük değeri arttıkça sürtünmesiz durumda gerilme tabaka ve yarım düzlemde azalmaktadır. Sürtünlü halde de tabakada gerilme yük değeri arttıkça azalmaktadır.

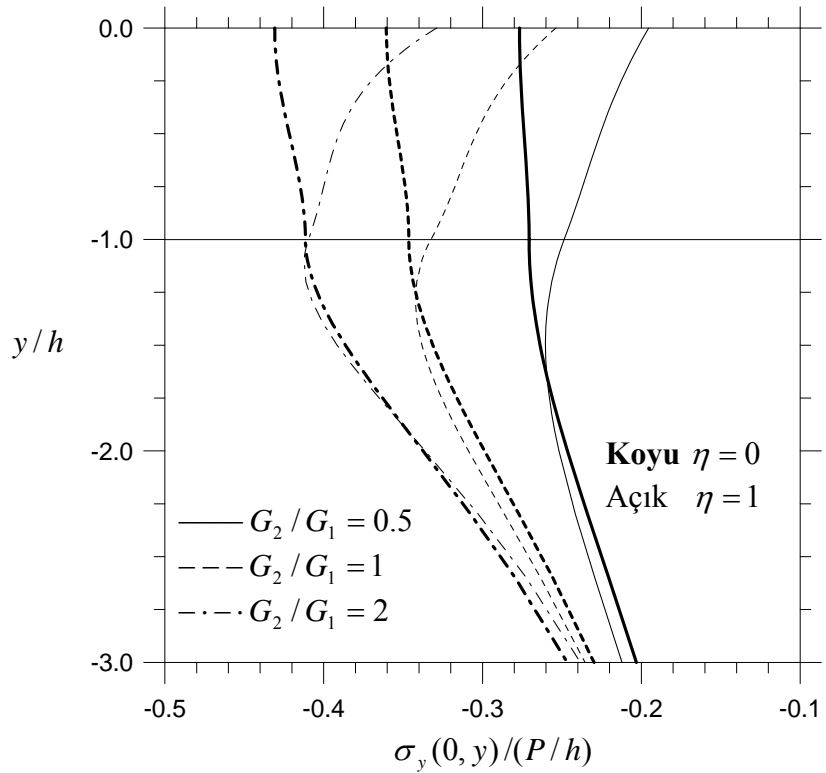
Yarım düzlemin elastisite modülü tabakaya göre arttıkça sürtünlü ve sürtünmesiz durumda gerilme artmaktadır (Şekil 50).



Şekil 48. $\sigma_y(0, y)$ normal gerilmesinin sürtünme katsayısıyla değişimi
($G_2/G_1 = 2$, $R/h = 500$, $G_1/(P/h) = 100$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)



Şekil 49. $\sigma_y(0, y)$ normal gerilmesinin yük ve sürtünme katsayısıyla değişimi ($G_2/G_1 = 2$, $R/h = 500$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)



Şekil 50. $\sigma_y(0, y)$ normal gerilmesinin kayma modülleri oranı ve sürtünme katsayısıyla değişimi ($R/h = 500$, $G_1/(P/h) = 100$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)

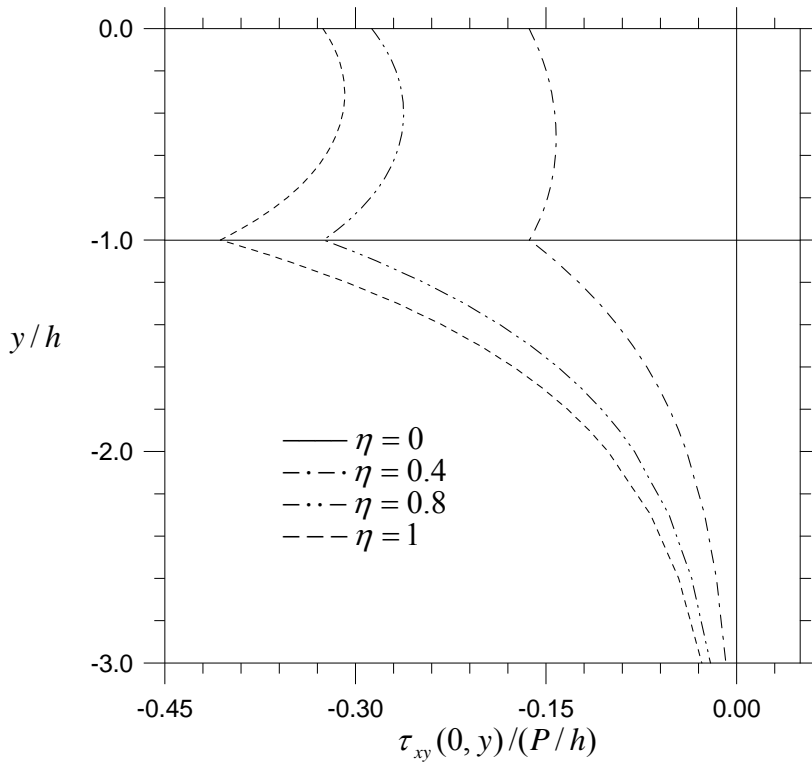
3.2.2.3. τ_{xy} Kayma Gerilmelerinin İncelenmesi

τ_{xy} kayma gerilmesinin y eksenini boyunca ($x = 0$) değişimi Şekil 51-53'de verilmiştir. Sürtünmesiz halde simetriden dolayı kayma gerilmeleri y eksenini boyunca "0" olmaktadır. Gerilmeler tabaka ile yarım düzlemin değme yüzeyinde tabaka ile yarım düzlemde aynı değerleri alarak (172) no'lu sınır şartını sağlamaktadırlar.

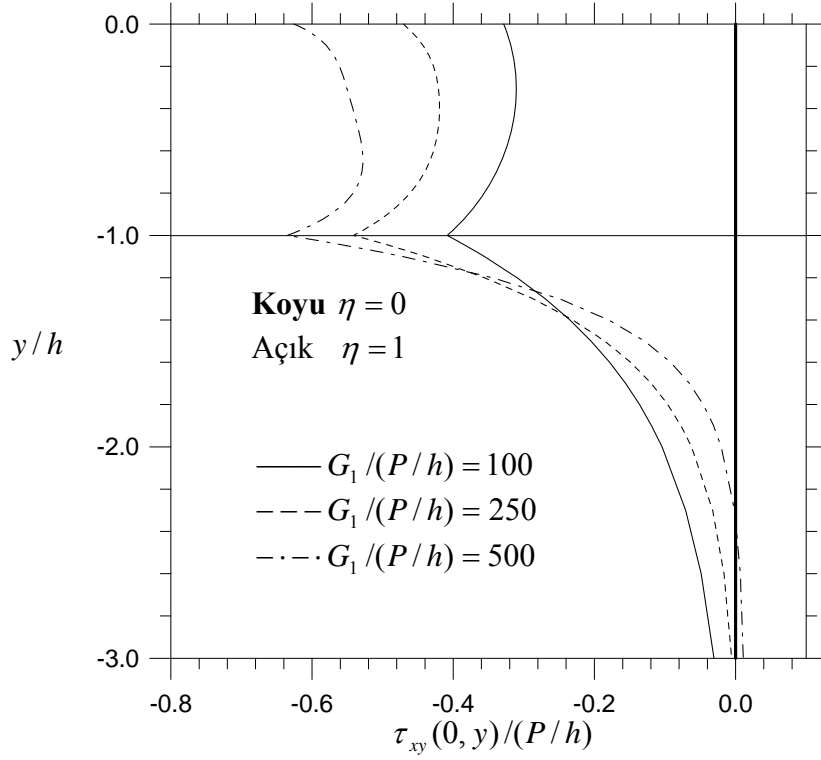
Sürtünme kayma gerilmesini artıran bir etki yapmaktadır (Şekil 51). Sürtülmeli durumda kayma gerilmeleri en büyük değerlerini tabaka ile elastik yarım düzlemin değme yüzeyinde almakta ve elastik yarım düzlem boyunca azalarak etkilerini kaybetmektedirler.

Yükün değeri arttıkça sürtülmeli durumda tabakada gerilme azalmaktadır (Şekil 52). Elastik yarım düzlemde de gerilmenin en büyük değerinin sürtülmeli durumda yük arttıkça azaldığı görülmektedir.

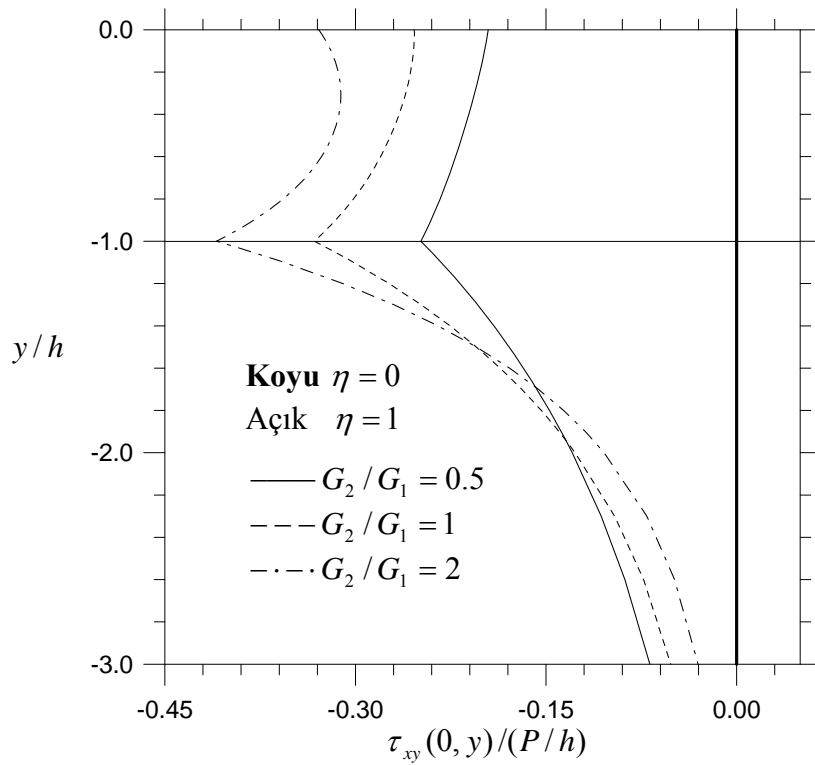
Kayma modülleri oranı G_2/G_1 'in kayma gerilmelerine etkisi Şekil (53)' de görülmektedir. G_2/G_1 arttıkça tabakada kayma gerilmesi sürtülmeli durumda artmaktadır.



Şekil 51. $\tau_{xy}(x, y)$ kayma gerilmesinin sürtünme katsayısıyla değişimi
($G_2/G_1 = 2$, $R/h = 500$, $G_1/(P/h) = 100$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)



Şekil 52. $\tau_{xy}(x, y)$ kayma gerilmesinin yük ve sürtünme katsayısıyla değişimi ($G_2/G_1 = 2$, $R/h = 500$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)



Şekil 53. $\tau_{xy}(x, y)$ kayma gerilmesinin kayma modülleri oranı ve sürtünme katsayısıyla değişimi ($R/h = 500$, $G_1/(P/h) = 100$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)

3.3. Bu Çalışmada Elde Edilen Bulguların Literatürdeki Çalışmalardan Elde Edilen Bulgularla Karşılaştırılması

Rijit dairesel bir panç ile bastırılan elastik yarım düzlemin sürtülmeli değme problemi Erdogan vd. (1973) tarafından incelenmiş ve pançın altındaki değme gerilmesi fonksiyonu

$$p(t) = \frac{4G_1}{1 + \kappa_1} \frac{\sin(\pi\alpha)}{R} (b-t)^\alpha (a+t)^\beta \quad (324)$$

olarak bulunmuştur. Boyutsuz büyüklükler için değme gerilmesi fonksiyonu düzenlendiğinde

$$\phi(t) = \frac{p(t)}{P/h} = \frac{4}{1 + \kappa_1} \frac{G_1}{P/h} \frac{\sin(\pi\alpha)}{R/h} (b/h - t/h)^\alpha (a/h + t/h)^\beta \quad (325)$$

elde edilir. Değme gerilmesi fonksiyonu aşağıda sırasıyla verilen uygunluk ve denge şartlarını sağlamalıdır (Erdogan vd., 1973):

$$b/h - a/h - (1 - 2\alpha)(a/h + b/h) = 0 \quad (326a)$$

$$\int_{-a}^b p(t) dt - P = 0 \quad (326b)$$

Aynı zamanda rijit dairesel panç ile elastik yarım düzlemin sürtünmesiz değme problemi için panç altındaki değme uzunluğunu Hertz formülü

$$\frac{a+b}{h} = 2 \sqrt{\frac{\kappa_1 + 1}{2\pi} \frac{R/h}{G_1/(P/h)}} \quad (327)$$

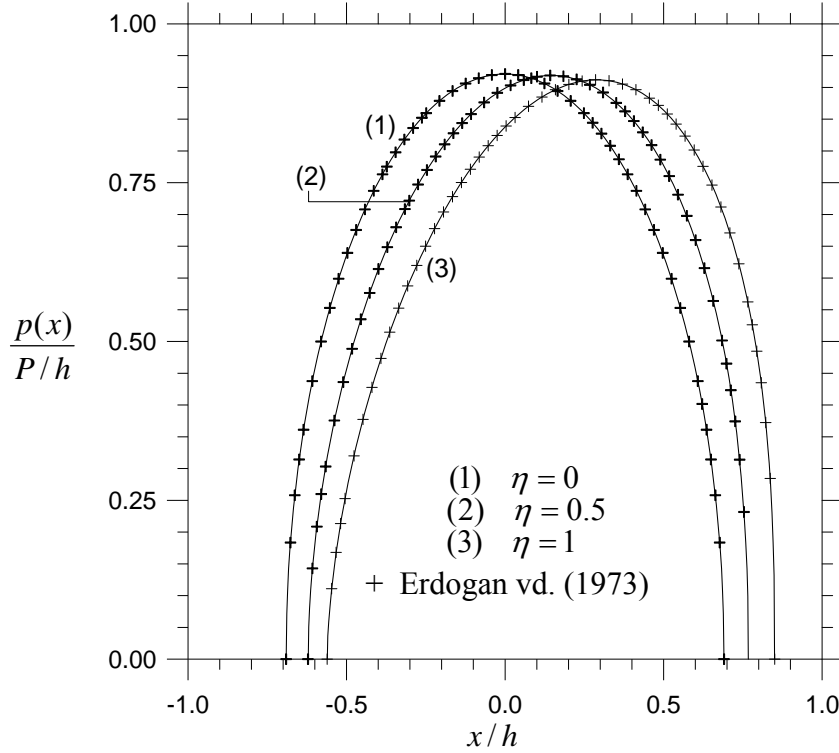
ile de hesaplamak mümkündür.

Sürekli değme probleminde tabaka ile yarım düzlemin malzeme özellikleri birbirine eşit olarak alındığında rijit dairesel bir pañç ile bastırılan elastik yarım düzlemin sürtünmeli değme problemi özel hali oluşur. Bu özel hal için elde edilen değme uzunlukları, Erdogan vd., (1973)'deki (326 a,b) no'lu şartlara konulduğunda bu şartları oldukça yüksek bir hassaslıkta sağladığı görülmüştür (Tablo 8). Sürtünmesiz halde elde edilen yarım değme uzunluğu ile Hertz formülü ile elde edilen yarım değme uzunluğu birbirine eşit çıkmaktadır ($(a + b)/2h = 0.690988$).

Sürekli değme probleminde özel hal için pañç altında oluşan değme gerilmesi dağılımı, Erdogan vd., (1973) ile verilen değme gerilmesi formülü (325) ile karşılaştırıldığında elde edilen bulguların üst üste düştüğü görülmektedir (Şekil 54).

Tablo 8. Sürekli değme probleminin çözümünden elde edilen değme uzunluklarının Erdogan vd., (1973) ile karşılaştırması
($G_2 / G_1 = 1$, $R / h = 250$, $G_1 / (P / h) = 250$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)

Sürtünme Katsayısı	Ayrılmalı Değme Probleminden Elde Edilen Değme Uzunlukları		Erdogan vd., (1973)'deki Şartlar	
	$ a/h $	b/h	(326a) No'lu Şart	(326b) No'lu Şart
$\eta = 0$	0.690988	0.690988	0.0	-8.6×10^{-7}
$\eta = 0.5$	0.621784	0.767895	1.5×10^{-7}	1.3×10^{-8}
$\eta = 1$	0.561349	0.850566	3.3×10^{-7}	-8.5×10^{-7}



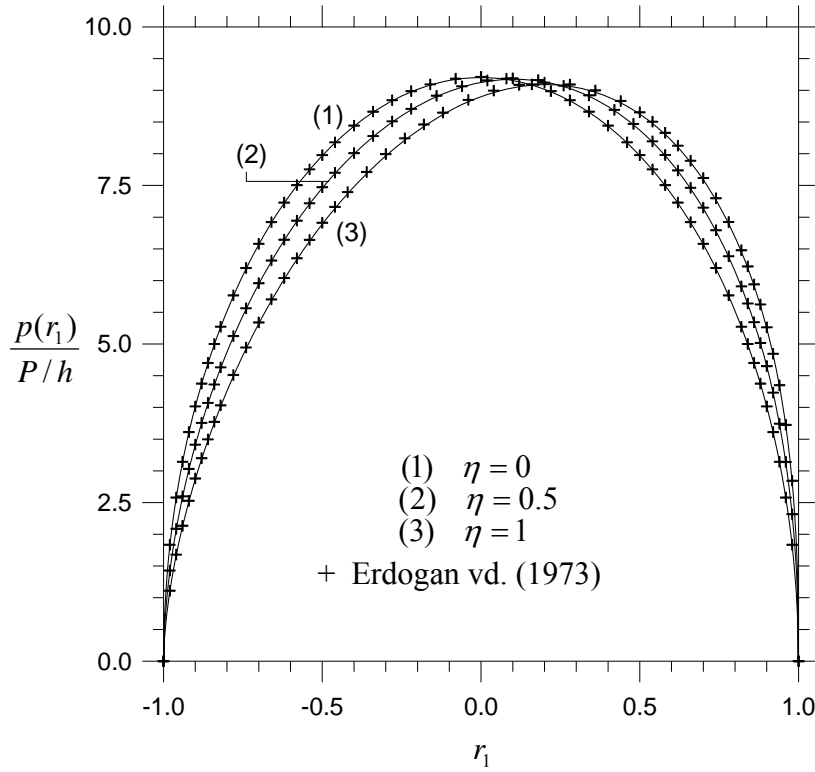
Şekil 54. Sürekli değme probleminin çözümünden elde edilen değme gerilmesi dağılımının Erdogan vd., (1973) ile karşılaştırması
 $(G_2 / G_1 = 1, R/h = 250, G_1 / (P/h) = 250, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2)$

Ayrılmalı değme probleminde, pańç ile tabaka arasındaki değme uzunluğunun tabakanın yüksekliğine oranı, $(a + b)/h$, çok küçük olduğunda tabakayı yarım düzlem gibi düşünmek mümkün olabilecektir. Pańç yarıçapı ve yük çok küçük seçilerek bu duruma yaklaşılmış, değme uzunlukları ve değme gerilmeleri için elde edilen sonuçlar sırasıyla Tablo 9 ve Şekil 55 ile verilmiştir.

Sürtünmesiz halde Hertz formülü ile bulunan değme uzunluğu Erdogan vd., (1973) ile bulunan değme uzunluğuna eşit çıkmaktadır. Bu çalışmadan elde edilen değme uzunlukları ise Erdogan vd., (1973) ile bulunan değme uzunluklarına eşit olmamakla beraber oldukça yakın değerler almaktadır. Bu çalışmadan elde edilen toplam değme uzunluğu daima daha büyük olmaktadır.

Tablo 9. Ayrılmalı değme probleminde bulunan değme uzunluklarının Erdogan vd., (1973) ile bulunan değme uzunlukları ile karşılaştırılması
($G_2/G_1 = 1$, $R/h = 10$, $G_1/(P/h) = 1000$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)

		Panç ile tabaka arasındaki değme uzunlukları		
Sürtünme katsayısı		a/h	b/h	$(a+b)/h$
$\eta = 0$	Bu çalışma	0.0691747	0.0691747	0.138940
	Erdogan vd.,1973	0.0690988	0.0690988	0.138198
$\eta = 0.5$	Bu çalışma	0.0600614	0.0791139	0.139175
	Erdogan vd.,1973	0.0621810	0.0767870	0.138968
$\eta = 1$	Bu çalışma	0.0501571	0.0914926	0.141650
	Erdogan vd.,1973	0.0561380	0.0850540	0.141192



Şekil 55. Ayrılmalı değme probleminde bulunan değme uzunluklarının Erdogan vd., (1973) ile bulunan değme uzunlukları ile karşılaştırılması
($G_2/G_1 = 1$, $R/h = 10$, $G_1/(P/h) = 1000$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)

4. SONUÇLAR

Rijit dairesel bir panç ile bastırılan elastik bir tabaka ve yarım düzlemin birbirlerine tam yapışık oldukları sürekli değme probleminin ve ikisi arasındaki değmenin sonlu bir bölgede kaldığı ayrılmalı değme probleminin çözümlerinden ortaya çıkan sonuçlar aşağıda verilmiştir. İlk olarak sürekli değme problemine ait sonuçlar verilmiştir.

Sürtünmesiz halde panç ile tabaka arasındaki değme uzunluğunun y ekseninin sağ ve sol tarafında kalan kısımları birbirine eşit olurken, sürtünme ile birlikte değme bölgesi panç ile iletilen yatay yükün tersi yönde kaymakta ve değme uzunluğu artmaktadır.

Panç yarıçapı ve tekil yük değeri arttıkça sürtünmeli ve sürtünmesiz durumda değme uzunluğu artmaktadır. Malzeme özelliklerini belirleyen sabitlerden, yarım düzlemin elastisite modülü büyüdüğünde ve hem tabaka ve hem de yarım düzlemin Poisson oranları arttırıldığında değme uzunluğu azalmaktadır.

Sürtünmesiz durumda pançın altında oluşan değme gerilmesi simetrik bir dağılım göstermekte ve en büyük değerini $x = 0$ noktasında almaktadır. Sürtünmenin varlığında değme gerilmesi dağılımının simetrisi bozulmakta, gerilmenin en büyük değerini aldığı nokta yatay kuvvetin tersi yönde kaymaktadır. Panç ile tabaka arasındaki değme uzunluğunun küçük olduğu durumlarda, değme gerilmesinin en büyük değeri sürtünme ile birlikte bariz bir şekilde azalmaktadır. Değme uzunluğunun büyük olduğu durumlarda ise sürtünme ile birlikte, değme gerilmesinin en büyük değeri çok az bir miktarda artmaktadır.

σ_x normal gerilmesi, y eksenini boyunca, en büyük değerini pançın altında almaktadır ve bu değer sürtünme katsayısı arttığında büyümektedir. Genel olarak σ_x normal gerilmesi tabaka ve yarım düzlemde basınç olarak etkisini göstermektedir. Elastik yarım düzlemin elastisite modülü tabakaya göre oldukça küçük olduğunda ($E_2 / E_1 = 0.2$) tabakanın alt kısımlarında bir çekme bölgesi oluşmaktadır. Malzeme özellikleri aynı olduğunda, tabaka ile yarım düzlemin değdikleri noktadaki σ_x normal gerilme değerleri, beklenen şekilde, birbirine eşit olmaktadır.

y eksenini boyunca tabaka ve yarım düzlemde, σ_y normal gerilmesi daima basınç olarak etkisini göstermektedir. τ_{xy} kayma gerilmesi sürtünmesiz halde y eksenini boyunca sıfır olmaktadır. Sürtünmeli halde en büyük değerini pançın altında $x = 0$ noktasında almakta ve sürtünme katsayısı arttıkça bu değer de artmaktadır.

Ayrılmalı değme problemine ait sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Ayrılmalı değme probleminde pańç ile tabaka ve tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme uzunluklarının her ikisi de sürtünme ile birlikte artmaktadır. Sürtünmenin tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme uzunluğuna etkisi pańçın altındaki değme uzunluğuna göre çok daha fazla olmaktadır. Pańçın değme bölgesi sürtünme ile birlikte, sürekli değme probleminde olduğu gibi, pańç ile iletilen yatay yükün tersi yönde kaymaktadır. Tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme bölgesi ise yatay yük yönünde kaymaktadır. Tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme uzunluğu pańçın altındaki değme uzunluğundan daima büyük olmaktadır. Her iki değme bölgesinde oluşan değme uzunlukları pańç yarıçapı ve tekil yük değeri ile artmakta, yarım düzlemin elastisite modülü ve tabaka ile yarım düzlemin Poisson oranları arttıkça azalmaktadır.

Sürtünmenin değme gerilmesi üzerindeki etkisi malzeme özelliklerine göre farklılık göstermektedir. Yarım düzlemin elastisite modülü tabakaya göre çok büyük olduğunda ($E_2/E_1 = 10$), pańçın altındaki değme gerilmesinin en büyük değeri sürtünme ile birlikte açık bir şekilde azalmakta ve bu en büyük değeri aldığı nokta yatay yükün tersi yönde kaymaktadır. $E_2/E_1 = 10$ olduğunda tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme gerilmesinin en büyük değeri de sürtünme katsayısı arttığında azalmakta ve bu en büyük değeri aldığı nokta yatay yük yönünde kaymaktadır. Yarım düzlemin elastisite modülü tabakaya göre çok küçük olduğunda ($E_2/E_1 = 0.1$), pańç ile tabaka arasındaki değme gerilmesinin en büyük değeri, sürtünme katsayısı artsa dahi hemen hemen aynı kalmakta, tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme gerilmesinin en büyük değeri ise çok az bir miktar artmaktadır.

σ_x normal gerilmesi, y eksenini boyunca, tabakanın üst kısımlarında basınç alt kısımlarında çekme, yarım düzlemde ise daima basınç olarak etkisini göstermektedir. Sürtünme ile birlikte tabakanın üst yüzeyinde basınç olan gerilme değeri artmakta, alt kısımlarındaki sürtünmesiz halde çekme olan gerilmeler de basınca dönüşmektedir. y eksenini boyunca tabaka ve elastik yarım düzlemde σ_y normal gerilmesi daima basınç olarak etki etmekte pańçtan uzaklaştıkça azalarak etkisini yitirmektedir. τ_{xy} kayma gerilmesinin en büyük değeri sürtünme ile birlikte artmaktadır. Deędikleri noktada tabaka ve yarım düzlemde oluşan τ_{xy} kayma gerilmesi değerleri birbirine eřit çıkmakla beraber gerilme dağılımında eğimler farklı olmaktadır.

Yapılan çözümlerin doğruluğunu test etmek için, bu çalışmanın özel halinden elde edilen bulgular, literatürde daha önceden yapılmış olan çalışmalardaki (Hertz Problemi, Erdogan vd.,1973) bulgular ile karşılaştırılmış ve oldukça uyumlu sonuçlar elde edilmiştir.

Bu çalışma:

- i) Tabakanın ağırlığı hesaba katılarak tabaka ile yarım düzlem arasındaki sürekli ve süreksiz değme problemi
- ii) Tabakanın fonksiyonel derecelendirilmiş malzemedен olması hali
- iii) Sürtünme katsayılarının farklı olması ve hareketin göz önüne alınması hali vb. gibi değişik problemler için geliştirilebilir.

5. KAYNAKLAR

- Adams, G. G. ve Bogy, D. B., 1977. The Plane Symmetric Contact Problem for Dissimilar Elastic Semi-Infinite Strips of Different Widths, ASME Journal of Applied Mechanics, 44, 4, 604-610.
- Agarwal, V.K., 1978. Axisymmetric Solution of the End-Problem for a Semi-Infinite Elastic Circular Cylinder and its Application to Joined Dissimilar Cylinders under Uniform Tension, International Journal of Engineering Science, 16, 985-998.
- Aksogan, O., Akavcı S. ve Becker A.A., 1996. A Comparative Study of the Contact Problem of an Elastic Layer Supported by two Elastic Quarter Planes, Journal of Faculty of Engineering and Architecture of Çukurova University, 11, 1, 25-31.
- Aksogan, O., Akavcı S. ve Becker A.A., 1997. The Solution of the Nonsymmetrical Contact Problem of an Elastic Layer Supported by two Elastic Quarter Planes Using Three Different Methods, Journal of Faculty of Engineering and Architecture of Çukurova University, 12, 1-2, 1-14.
- Anderson, I.A. ve Collins, I.F., 1995. Plane Strain Stress Distributions in Discrete and Blended Coated Solids Under Normal and Sliding Contact, Wear, 185, 23-33.
- Barik, S.P., Kanoria, M. ve Chaudhuri, P.K., 2008. Steady State Thermoelastic Contact Problem in a Functionally Graded Material, International Journal of Engineering Science, 46, 775-789.
- Bai, J., 2002. Contact Problems between a Rigid Punch and a Layered Elastic Solid, Doktora Tezi, Michigan State University, Michigan.
- Bakırtaş, İ., 1980. The Problem of a Rigid Punch on a Non-Homogeneous Elastic Half Space, International Journal of Engineering Science, 18, 597-610.
- Bakırtaş, İ., 1984. The Contact Problem of an Orthotropic non-Homogeneous Half Space, International Journal of Engineering Science, 22, 4, 347-359.
- Bentall, R. H. ve Johnson, K.L., 1968. An Elastic Strip in Plane Rolling Contact, International Journal of Mechanical Science, 10, 637-663.
- Bentham, J. P. ve Minderhoud, P., 1972. The Problem of the Solid Cylinder Compressed between Rough Rigid Stamps, International Journal of Solids and Structures, 8, 1027-1042.

- Binienda, W. K., and Pindera, M.J., 1994. Frictionless Contact of Layered Metal-Matrix and Polymer-Matrix Composite Half Planes, Composite Science and Technology, 50, 119-128.
- Birinci, A., 1994. Elastik Mesnete Oturan Çift Şerit Problemi, Yüksek Lisans Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Birinci, A. ve Erdöl R., 2001. Continuous and Discontinuous Contact Problem for a Layered Composite Resting on Simple Supports, Structural Engineering and Mechanics, 12, 1, 17-34.
- Birinci, A., Çakıroğlu, M. ve Erdöl, R., 2002. Two Strips Problem Resting on an Elastic Foundation, Mathematical & Computational Applications, 7, 3, 275-286.
- Birinci, A., Kahya V. ve Erdöl, R., 1997. Elastik Mesnete Oturan Bileşik Tabakalarda Sürekli Değme Problemi, TUMTMK, X. Ulusal Mekanik Kongresi, Eylül, İstanbul, Bildiriler Kitabı, 165-173.
- Birinci, E. ve Erdöl, R., 1999. Frictionless Contact between a Rigid Stamp and an Elastic Layered Composite Resting on Simple Supports, Mathematical & Computational Applications, 4, 3, 261-272.
- Blaibel, A.F. ve Geçit, M.R., 1989. Bending of a Semi-Infinite Elastic Strip Bonded to an Infinite Strip, International Journal of Engineering Science, 27, 7, 793-807.
- Boduroğlu, H. ve Delale F., 1977. Elastik bir Yarım Düzlem Üzerine Serbestçe Oturan Elastik Bir Tabakanın Sürtünmeli Değme Problemi, TÜBİTAK Mühendislik Araştırma Grubu, Proje no.: 457, Aralık, İstanbul.
- Boduroğlu, H. ve Delale F., 1980. Elastik bir Tabakanın Sürtünmeli Değme Problemi, DOĞA: MAG/ÇAG, 17-26.
- Boggy, D. B., 1975. Solution of the End Problem for a Semi-Infinite Elastic Strip, Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP), 26, 749-769.
- Bufler, H., 1971. Theory of Elasticity of a Multilayered Medium, Journal of Elasticity, 1, 125-143.
- Chan S. K. ve Tuba, I. S., 1971. A Finite Element Method for Contact Problems of Solid Bodies-Part I. Theory and Validation, International Journal of Mechanical Science, 13, 615-639.
- Chaudhary, A. B. ve Bathe, K. J., 1986. A Solution Method for Static and Dynamic Analysis of Three Dimensional Contact Problems with Friction, Computers and Structures, 24, 6, 855-873.

- Chen, W. H. ve Tsai, P., 1986. Finite Element Analysis of Elastodynamic Sliding Contact Problems with Friction, Computers and Structures, 22, 6, 925-938.
- Chen, W. T. ve Engel, P. A., 1972. Impact and Contact Stress Analysis in Multilayered Media, International Journal of Solids and Structures, 8, 1257-1281.
- Choi, H.J. ve Thangjitham, S., 1991. Stres Analysis of Multilayered Anisotropic Elastic Media, ASME Journal of Applied Mechanics, 58,382-387.
- Comninou, M., Schmueser, D. ve Dundurs, J., 1980. Frictional Slip between a Layer and a Substrate caused by a Normal Load, International Journal of Engineering Science, 18, 131-137.
- Civelek, M.B. ve Erdogan, F., 1974. The Axisymmetric Double Contact Problem for a Frictionless Elastic Layer, International Journal of Solids and Structures, 10, 639-659.
- Civelek, M.B. ve Erdogan, F., 1975. The Frictionless Contact Problem for an Elastic Layer Under Gravity, ASME Journal of Applied Mechanics, 42, 97, 136-140.
- Civelek, M.B., Erdogan, F. ve Cakiroglu, A.O., 1978. Interface Separation for an Elastic Layer Loaded by a Rigid Stamp, International Journal of Engineering Science, 16, 669-679.
- Comez, I., Birinci, A. ve Erdol, R., 2004. Double Receding Contact Problem for a Rigid Stamp and two Elastic Layers, European Journal of Mechanics, A/Solids, 23, 301-309.
- Comninou, M., Schmueser, D. ve Dundurs, J., 1980. Frictional Slip Between a Layer and a Substrate Caused by a Normal Load, International Journal of Engineering Science, 18, 131-137.
- Conway, H. D., 1971. The Effect of Friction on Normal Contact Stresses, ASME Journal of Applied Mechanics, 38, 1094-1095.
- Çakiroğlu, A. O. ve Çakiroğlu, F. L., 1991. Continuous and Discontinuous Contact Problems for Strips on an Elastic Semi-Infinite Plane, International Journal of Engineering Science, 29, 1, 99-111.
- Çakiroğlu, F.L., Çakiroğlu, M. ve Erdöl, R., 2001. Contact Problems for two Elastic Layers Resting on Elastic Half-Plane, Journal of Engineering Mechanics, 127, 2, 113-118.
- Çömez, İ., 2003. Rijit Bir Panç ile Bastırılmış ve Tabanda Tam Olarak Bağlı Ağırksız Çift Şerit Problemi, Yüksek Lisans Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

- Çömez, İ., Birinci, A. ve Erdöl, R., 2003. Rijit Bir Panç Aracılığıyla Bastırılmış ve Alttan Tam Bağlı Ağırksız Çift Şeritte Değme Problemi, TUMTMK, XIII. Ulusal Mekanik Kongresi, Eylül, Gaziantep, Bildiriler Kitabı, 321-332.
- Dempsey, J.P., Zhao, Z.G., Minnetyan, L. ve Li, H., 1990. Plane Contact of an Elastic Layer Supported by a Winkler Foundation, ASME Journal of Applied Mechanics, 57, 974-980.
- Dempsey, J. P., Zhao, Z.G ve Li,H., 1991. Axisymmetric Indentation of an Elastic Layer Supported by a Winkler Foundation, International Journal of Solids and Structures, 27, 73-87.
- Dhaliwal, R. S. ve Rau,I., 1970. Axisymmetric Boussinesq Problem for a Thick Elastic Layer under a Punch of Arbitrary Profile, International Journal of Engineering Science, 8, 843-856.
- Dhaliwal, R. S., 1970. Punch Problem for an Elastic Layer Overlying Elastic Foundations, International Journal of Engineering Science, 8, 273-288.
- Dhaliwal, R. S. ve Rau,I., 1972. Further Considerations on The Axisymmetric Boussinesq Problem, International Journal of Engineering Science, 10, 659-663.
- El-Borgi, S., Abdelmoula, R. ve Keer, L., 2006. A Receding Contact Plane Problem Between a Functionally Graded Layer and a Homogeneous Substrate, International Journal of Solids and Structures, 43, 3-4, 658-674.
- Elsharkawy A. A., 1999. Effect of Friction on Subsurface Stresses in Sliding Line Contact of Multilayered Elastic Layers, International Journal of Solids and Structures, 36, 3903-3915.
- Erdelyi, A., Magnus, W., Oberthettinger, F. ve Tricomi, F.G., 1954. Tables of Integral Transforms, vol 1, Mc Graw-Hill, Inc., New York.
- Erdogan, F., Gupta, G.D. ve Cook, T.S., 1973. Numerical Solution of Singular Integral Equations, in Methods of Analysis and Solution of Crack Problems, Noordhoff, Groningen.
- Erdoğan, F. ve Ratwani, M., 1974. The Contact Problem for an Elastic Layer Supported by two Elastic Quarter Planes, ASME Journal of Applied Mechanics, 41, 673-677.
- Fabrikant, V.I. ve Sankar, T.S., 1984. On Contact Problems in an inhomogeneous Half-Space, International Journal of Solids and Structures, 20, 2, 159-166.
- Galin, L.A., 1961. Contact Problems in the Theory of Elasticity, İngilizce Çeviri: Moss, H., North Carolina State College Translation Series, Raleigh, North Carolina.

- Garrido, J.A. ve Lorenzana, A., 1998. Receding Contact Problem Involving Large Displacements using the BEM, Engineering Analysis with Boundary Elements, 21, 295-303.
- Garrido, J.A., Foces, A. ve Paris, F., 1991. B.E.M. Applied to Receding Contact Problems with Friction, International Journal for Mathematical and Computers Modelling, 15, 143-153.
- Gecit, M.R., 1986. Axisymmetric Contact Problem for a Semi-Infinite Cylinder and a Half Space, International Journal of Engineering Science, 24, 8, 1245-1256.
- Geçit, M.R. ve Erdoğan, F., 1978. Frictionless Contact Problem for an Elastic Layer Under Axisymmetric Loading, International Journal of Solids and Structures, 14, 771-785.
- Geçit, M.R., 1980. A Tensionless Contact without Friction between an Elastic Layer and an Elastic Foundation, International Journal of Solids and Structures, 16, 387-396.
- Geçit, M.R. ve Gökpinar, S., 1985. Frictionless Contact between an Elastic Layer and a Rigid Rounded Support, The Arabian Journal for Science and Engineering, 10, 3, 245-251.
- Geçit, M.R., 1986. The Axisymmetric Double Contact Problem for a Frictionless Elastic Layer Indented by an Elastic Cylinder, International Journal of Engineering Science, 24, 1571-1584.
- Geçit, M.R., 1987. Bonded Contact Problem for an Elastic Layer Under Tension, Arabian Journal for Science and Engineering, 12, 183-188.
- Geçit, M.R., 1990. Antisymmetric Bonded Contact Problem for an Elastic Layer, Arabian Journal for Science and Engineering, 15, 73-79.
- Guler, M.A. ve Erdogan, F., 2004. Contact Mechanics of Graded Coatings, International Journal of Solids and Structures, 41, 14, 3865-3889.
- Guler, M.A. ve Erdogan, F., 2007. The Frictional Sliding Contact Problems of Rigid Parabolic and Cylindrical Stamps on Graded Coatings, International Journal of Mechanical Sciences, 49, 2, 161-182.
- Hasebe, N. ve Qian, J., 1999. Fundamental Solution of a Circular Rigid Punch Problem for a Half Plane, Engineering Analysis with Boundary Elements, 23, 841-846.
- Heyliger, P.R. ve Reddy, J.N., 1987a. A Mixed Computational Algorithm for Plane Elastic Contact Problems –I. Formulation, Computers and Structures, 26, 621-634.

- Heyliger, P.R. ve Reddy, J.N., 1987b. A Mixed Computational Algorithm for Plane Elastic Contact Problems–II. Numerical Examples, Computers and Structures, 26, 635-653.
- Hung, D.N. ve Saxce, G. D., 1980. Frictionless Contact of Elastic Bodies by Finite Element Method and Mathematical Programming Technique, Computers and Structures, 11, 55-67.
- Jaffar, M. J., 1991. Elastic Strips in Sliding Contact, Journal of Strain Analysis, 26,3,193-199.
- Johnson, K. L., 1985. Contact Mechanics, Cambridge University Pres, Cambridge.
- Kahya, V., 2003. İki Tabakalı Elastik Ortamda Sürekli ve Süreksiz Değme Problemlerinin İncelenmesi, Doktora Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Kahya, V., Ozsahin, T.S., Birinci, A. ve Erdol, R., 2007. A Receding Contact Problem for an Anisotropic Elastic Medium Consisting of a Layer and a Half Plane, International Journal of Solids and Structures, 44, 5695-5710.
- Kahya, V., Birinci, A. ve Erdöl, R., 2001. Frictionless Contact Problem between an Elastic Layer Bonded to a Rigid Support and a Rigid Stamp, Mathematical& Computational Applications, 6, 1, 13-22.
- Kanber, B., 1997. Finite Element Analysis of Contact Problems Using Transition Elements, Yüksek Lisans Tezi, Gaziantep Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Gaziantep.
- Ke, L.L. ve Wang Y.S., 2006. Two-dimensional Contact Mechanics of Functionally Graded Materials with Arbitrary Spatial Variations of Material Properties, International Journal of Solids and Structures, 43, 5779-5798.
- Ke, L.L. ve Wang, Y.S., 2007. Two-dimensional sliding frictional contact of functionally graded materials, European Journal of Mechanics, A/Solid, 26, 171-188.
- Keer, L. M. ve Miller, G. R., 1983. Contact Between an Elastically Supported Circular Plate and Rigid Indenter, International Journal of Engineering Science, 21, 681-690.
- Keer, L.M., Dundurs, J. ve Tsai, K.C., 1972. Problems Involving a Receding Contact Between a Layer and a Half Space, ASME Journal of Applied Mechanics, 39, 1115-1120.
- Keer, L.M., Lee, J.C. ve Mura, T., 1984. A Contact Problem for the Elastic Quarter Space, International Journal of Solids and Structures, 20, 5, 513-524.

- Keer, L.M. ve Chantaramungkorn, K., 1972. Loss of Contact between an Elastic Layer and Half-Space, Journal of Elasticity, 2, 3, 191-197.
- King, R. B. ve O'Sullivan, T. C., 1987. Sliding Contact Stresses in a Two-Dimensional Layered Elastic Half-Space, International Journal of Solids and Structures, 23, 5, 581-597.
- Klarbring, A., 1986. A Mathematical Programming Approach to Three-Dimensional Contact Problems with Friction, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 58, 2, 175-200.
- Krenk, S., 1975. On quadrature formulas for singular integral-equations of 1st and 2nd kind, Quarterly of Applied Mechanics, 33, 3, 225-232.
- Loboda, V.V. ve Tauchert, T. R., 1985. The Elastic Contact Problem for Dissimilar Orthotropic Semi-Infinite and Infinite Strips, International Journal of Engineering Science, 23, 12, 1337-1349.
- Ratwani, M. ve Erdogan, F., 1973. On the Plane Contact Problem for a Frictionless Elastic Layer, International Journal of Solids and Structures, 9, 921-936.
- Ma, L. F. ve Korsunsky, A. M., 2004. Fundamental Formulation for Frictional Contact Problems of Coated Systems, International Journal of Solids and Structures, 41, 11-12, 2837-2854.
- Ma, L. F. ve Korsunsky, A. M. ve Sun, K., 2006. Contact of Coated Systems under Sliding Conditions, ASME Journal of Tribology, 128, 886-890.
- Muskhelishvili, N.I., 1953. Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity, Noordhoff, Groningen.
- Nowell, D. ve Hills, D. A., 1988. Contact Problems Incorporating Elastic Layers, International Journal of Solids and Structures, 24, 1, 105-111.
- Özşahin, T. Ş., Birinci, A. ve Çakıroğlu, A.O., 2004. Prediction of Contact Lengths Between an Elastic Layer and two Elastic Circular Punches with Neural Networks, Structural Engineering and Mechanics an International Journal, 18, 4, 441-459.
- Özşahin, T.Ş., 2000. Rijit iki Blok Üzerine Oturan Bileşik Tabakada Sürekli ve Süreksiz Temas Problemi, Doktora Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Pindera, M. J. ve Lane, M. S., 1993a. Frictionless Contact of Layered Half-Planes, Part I: Analysis, ASME Journal of Applied Mechanics, 60, 633-639.
- Pindera, M. J. ve Lane, M. S., 1993b. Frictionless Contact of Layered Half-Planes, Part II: Numerical Results, ASME Journal of Applied Mechanics, 60, 640-645.

- Pu, S.L. ve Hussain, M.A., 1970. Note on the Unbonded Contact between Plates and an Elastic Half Space, ASME Journal of Applied Mechanics, 37, 859-861.
- Rau, I. ve Dhaliwal, R.S., 1972. Further Considerations on the Axisymmetric Boussinesq Problem, International Journal of Engineering Science, 10, 659-663.
- Sachdeva, T. D. ve Ramakrishnan, C. V., 1981. A Finite Element Solution for the Two-Dimensional Elastic Contact Problems with Friction, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 17, 1250-1271.
- Shield, T.W. ve Bogy, D.B., 1988. Multiple Region Contact Solutions for a Flat Indenter on a Layered Elastic Half Space: Plane Strain Case, Journal of Applied Mechanics, Transactions of ASME, 56, 251-262.
- Shyu, S.C., Chang, T.Y. ve Saleeb, A.F., 1989. Friction-Contact Analysis Using a Mixed Finite Element Method, Computers and Structures, 32, 1, 223-242.
- Sneddon I.N., 1951. Fourier Transforms, McGraw-Hill, New York.
- Spence, D.A., 1975. The Hertz Contact Problem with Finite Friction, Journal of Elasticity, 5, 297-319.
- Ufliand, I. S., 1965. Survey of Articles on the Application of Integral Transforms in the Theory of Elasticity, North Carolina State College Translation Series, Raleigh, North Carolina.
- Urquhart, E.E. ve Pindera, M.J., 1994. Incipient Separation Between a Frictionless Flat Punch and an Anisotropic Multilayered Half Plane, International Journal of Solids and Structures, 31, 18, 2445-2461.
- Weitsman, Y., 1969. On the Unbonded Contact Between Plates and an Elastic Half Space, ASME Journal of Applied Mechanics, 36, 198-202.
- Wozniak, M., Hummel, A. ve Pauk, V.J., 2002. Axisymmetric Contact Problems for an Elastic Layer Resting on a Rigid Base with a Winkler Type Excavitation, International Journal of Solids and Structures, 39, 4117-4131.
- Zhong, W. X. ve Sun, S. M., 1989. A Parametric Quadratic Programming Approach to Elastic Contact Problems with Friction, Computers and Structures, 32, 37-43.

ÖZGEÇMİŞ

İsa ÇÖMEZ, 1978 yılında Giresun'da doğdu. İlköğrenimini Giresun Kemaliye Köyü İlköğretim Okulu'nda, lise öğrenimini Gümüşhane M.Ç. Anadolu Öğretmen Lisesi'nde tamamladı. 1996 yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümünü kazandı ve 2000 yılında lisansını tamamladı. Aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Anabilim dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. Ekim 2002' de K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü araştırma görevlisi kadrosuna atandı. Eylül 2003'de K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim dalında doktora öğrenimine başladı. Halen araştırma görevliliği ile birlikte lisansüstü çalışmalarına devam etmektedir. Yabancı dil olarak iyi derecede İngilizce bilmektedir.