

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**GELİŞTİRİLMİŞ VLASOV MODELİNİ KULLANARAK ELASTİK ZEMİNE
OTURAN KALIN PLAKLARIN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİYLE ANALİZİ
VE ETKİN ZEMİN DERİNLİĞİNİN BELİRLENMESİ**

DOKTORA TEZİ

İnş. Yük. Müh. Korhan ÖZGAN

**ŞUBAT 2007
TRABZON**

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**GELİŞTİRİLMİŞ VLASOV MODELİNİ KULLANARAK ELASTİK ZEMİNE
OTURAN KALIN PLAKLARIN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİYLE ANALİZİ
VE ETKİN ZEMİN DERİNLİĞİNİN BELİRLENMESİ**

İnş. Yük. Müh. Korhan ÖZGAN

**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
“Doktor”
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 12/01/2007
Tezin Savunma Tarihi : 20/02/2007**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ayşe DALOĞLU
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Yusuf AYVAZ
Jüri Üyesi : Doç. Dr. Hasan SOFUOĞLU
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Ing. Ahmet DURMUS
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Mehmet ÜLKER**

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Emin Zeki BAŞKENT

Trabzon 2007

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı'nda, doktora tezi olarak gerçekleştirilmiştir.

Geliştirilmiş Vlasov Modelini Kullanarak Elastik Zemine Oturan Kalın Plakların Sonlu Elemanlar Yöntemiyle Analizi ve Etkin Zemin Derinliğinin Belirlenmesi konulu bu çalışmayı bana öneren, yakın ilgi, yardım ve desteğini esirgemediği daha iyisini ve daha mükemmeliyi gerçekleştirmek için titizlikle ve sabırla çalışmalarımı takip eden, daha fazla çalışmanın önemi hususundaki tavsiyeleriyle bana cesaret veren, çalışmam süresince bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ayşe DALOĞLU'na müteşekkir olduğumu belirtir, en içten sevgi ve saygılarımı sunarım.

Tez izleme komitesinde yer alıp çalışmamı başından itibaren takip eden, K.T.Ü. Mühendislik Fakültesi öğretim üyeleri, Sayın Prof. Dr. Yusuf AYVAZ'a ve Sayın Doç. Dr. Hasan SOFUOĞLU'na katkılarından dolayı teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmamı değerlendiren ve katkılarını esirgemeyerek çalışmamın çok daha verimli bir şekilde tamamlanmasını sağlayan K.T.Ü. Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü Yapı Anabilim dalı başkanı Sayın Prof. Dr. Ing. Ahmet DURMUS'a ve Fırat Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Mehmet ÜLKER'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Öğrenimim boyunca bana emeği geçen tüm bölüm hocalarıma saygılarımı sunarım.

Özellikle her konuda bana göstermiş oldukları destek, sabır ve anlayıştan ötürü annem İnci ÖZGAN'a, babam Fethi ÖZGAN'a, kardeşim Mehmet ÖZGAN'a ve büyükannem Emine ÖZGAN'a müteşekkir olduğumu belirtir, çalışmamın yararlı olmasını içtenlikle dilerim.

Korhan ÖZGAN

Trabzon, 2007

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET	VI
SUMMARY	VII
ŞEKİLLER DİZİNİ	VIII
TABLolar DİZİNİ.....	XI
SEMBOLLER DİZİNİ	XIII
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Elastik Zemine Oturan Plaklar	1
1.2.1. Zemin-Yapı Etkileşim Modelleri	1
1.2.1.1. Bir Parametrelili Modeller.....	2
1.2.1.2. İki Parametrelili Modeller	4
1.2.1.3. Üç Parametrelili Modeller	6
1.2.2. Konu İle İlgili Yapılan Diğer Bazı Çalışmalar.....	7
1.3. Çalışmanın Amacı ve Kapsamı	12
1.4. Hesap Tekniğinin ve Modelinin Seçilmesi	13
1.5. Geliştirilmiş Vlasov Modeli	13
1.5.1. Zemin-Yapı Sisteminin Toplam Şekildeğiştirme Enerjisi	14
1.5.2. Yerdeğiştirme Bileşenleri ve Yapılan Kabuller	15
1.5.3. Zeminde Şekildeğiştirme Enerjisi İfadelerinin Elde Edilmesi.....	16
1.5.4. Sistemin Potansiyel Enerjisinin Minimiasyonu	17
1.5.5. Zemin Düşey Yerdeğiştirme Fonksiyonunun Belirlenmesi	19
1.5.6. Plak Dışında Kalan Zemin Ortamının Plağa Etkisi.....	20
1.5.7. Zemin Yüzey Parametresinin Hesaplanması.....	21
1.6. Mindlin Plak Teorisi.....	23
1.6.1. Yerdeğiştirme Bileşenleri.....	24
1.6.2. Şekildeğiştirme-Yerdeğiştirme Bağlılıları.....	25

1.6.3.	Gerilme-Şekildeğiştirme Bağlıntıları	25
1.6.4.	Gerilme-Yerdeğiştirme Bağlıntıları.....	26
1.6.5.	Moment ve Kesme Kuvveti Bağlıntıları.....	26
1.6.6.	Plak Denklemleri.....	28
2.	YAPILAN ÇALIŞMALAR	30
2.1.	Problemin Sonlu Elemanlar Yöntemine Göre Formülasyonu.....	30
2.1.1.	Plak Eleman Rijitlik Matrisinin Elde Edilmesi	32
2.1.1.1.	12 Serbestlik Dereceli Dikdörtgen Plak Eleman Rijitlik Matrisi	32
2.1.1.2.	24 Serbestlik Dereceli Dikdörtgen Plak Eleman Rijitlik Matrisi	43
2.1.2.	Yük Vektörünün Elde Edilmesi	57
2.1.2.1.	12 Serbestlik Dereceli Dikdörtgen Plak Elemana İlişkin Yük Vektörü.....	57
2.1.2.2.	24 Serbestlik Dereceli Dikdörtgen Plak Elemana İlişkin Yük Vektörü.....	58
2.1.3.	Elastik Zemine İlişkin Rijitlik Matrislerinin Elde Edilmesi.....	58
2.1.3.1.	12 Serbestlik Dereceli Dikdörtgen Plak Elemana İlişkin Zeminin Eksenel Yerdeğiştirmesini Temsil Eden Rijitlik Matrisi	58
2.1.3.2.	24 Serbestlik Dereceli Dikdörtgen Plak Elemana İlişkin Zeminin Eksenel Yerdeğiştirmesini Temsil Eden Rijitlik Matrisi	60
2.1.3.3.	12 Serbestlik Dereceli Dikdörtgen Plak Elemana İlişkin Zemin Kayma Parametresi Matrisi.....	62
2.1.3.4.	24 Serbestlik Dereceli Dikdörtgen Plak Elemana İlişkin Zemin Kayma Parametresi Matrisi.....	64
2.1.4.	Sistem Rijitlik Matrisinin Belirlenmesi.....	66
2.1.5.	Zemin Elastisite Modülünün Derinlik Boyunca Değişimi	67
2.1.5.1.	Sabit Olması Durumu	67
2.1.5.2.	Lineer Değişmesi Durumu	68
2.1.5.3.	Kuadratik Değişmesi Durumu.....	68
2.1.6.	Sınır Şartları	69
2.1.6.1.	Düşey Tepki Kuvvetleri, k_s	69
2.1.6.2.	Dönme Tepki Kuvvetleri, k_θ	70
2.1.6.3.	Her Bir Düğüm Noktasına Etkiyen Eşdeğer Sınır Kuvvetleri	71
2.1.6.4.	Plak Köşelerine Etki Eden Eşdeğer Tepki Kuvvetleri	73
2.1.7.	Moment ve Kesme Kuvvetlerinin Hesaplanması.....	73
2.2.	Etkin Zemin Derinliğinin Gerilme Dağılımına Bağlı Olarak Belirlenmesi ...	74
2.2.1.	Boussinesq Formülü	75

2.2.2.	Westergaard Formülü	76
3.	BULGULAR VE İRDELEME.....	78
3.1.	Sonlu Eleman Ağının Belirlenmesi.....	78
3.2.	Basit ve Ankastre Mesnetli Kare Plak Örneği.....	81
3.3.	Çeşitli Mesnet Koşullarına Sahip Elastik Zemine Oturan Kare Plak Örneği.	90
3.4.	Elastik Zemine Oturan Plak Örneği	93
3.5.	Radye Temel Örneği	108
3.6.	Zemin Elastisite Modülünün Derinlik Boyunca Değişiminin İrdelenmesi ..	114
3.7.	Etkin Zemin Derinliğinin Belirlenmesi.....	117
4.	SONUÇLAR VE ÖNERİLER	127
5.	KAYNAKLAR.....	130
	ÖZGEÇMİŞ.....	136

ÖZET

Bu çalışmada, kalın plak teorisi kullanılarak kalınlık doğrultusundaki kayma şekildeğiştirmelerinin hesaba katılması ve plağın boyutlarına, yükün şiddetine, yükün dağılımına, elastik zeminin özelliklerine bağlı olarak etkin zemin derinliğini belirlenmesi suretiyle plak-zemin etkileşim modellerinin daha da geliştirilmesi ve daha gerçekçi sonuçlara ulaşılması amaçlanmaktadır.

Bu amaçla kalınlık doğrultusundaki kayma şekildeğiştirmelerini dikkate alan 4 düğüm noktalı 12 serbestlik dereceli (PBQ4) ve 8 düğüm noktalı 24 serbestlik dereceli (PBQ8) Mindlin plak elemanlar kullanılmaktadır. İnce plak çözümlerinde görülen kayma kilitlenmesinin önlenmesi amacıyla rijitlik matrisleri, eğilme ve kayma terimleri için ayrı ayrı elde edilmekte ve integraller kayma terimleri için farklı ağırlıklarla alınmaktadır. Ayrıca etkin zemin derinliğini belirleyen bir ardışık yaklaşım yöntemi önerilmektedir.

Çalışmada kullanılan Geliştirilmiş Vlasov modeli ile Mindlin plak teorisi hakkında genel bilgiler verildikten sonra inceleme konusu olan problemin sonlu elemanlar formülasyonu üzerinde durulmakta, elde edilen plağa ve zemine ilişkin eleman rijitlik matrisleri açık formda sunulmaktadır. Kullanılan elemanların performansı hakkında bilgi vermek amacıyla, öncelikle zeminsiz plak örneği üzerinde kayma kilitlenmesi probleminin nasıl meydana geldiği ve seçilerek azaltılmış integrasyon tekniği ile sorunun nasıl giderildiği gösterilmektedir. Daha sonra; kayma şekildeğiştirmeleri dolayısıyla plak kalınlığı, mesnet şartları, zemin derinliği ve zemin elastisite modülünün derinlik boyunca değişimi gibi farklı parametrelerin elastik zemine oturan plakların davranışı üzerindeki etkileri incelenmektedir. Son olarak belirlenen etkin zemin derinlikleri dikkate alınmak suretiyle çeşitli çözümler yapılarak söz konusu derinliğin güvenilirliği irdelenmektedir.

Çalışmanın sonunda elastik zemine serbest oturan plaklarda kalınlık doğrultusundaki kayma şekildeğiştirmelerinin dikkate alınmasının mesnetli plaklara nazaran sonuçları pek fazla etkilemediği ve zemin derinliğinin yükten etkilenen derinlikten daha büyük alınmasının sonuçları değiştirmediği, daha küçük alınmasının ise gerçekçi olmayan sonuçlara götürdüğü ortaya konmaktadır.

Anahtar Kelimeler : Elastik zemine oturan plak, Geliştirilmiş Vlasov modeli, Sonlu elemanlar yöntemi, Kalın plak teorisi, Kayma kilitlenmesi

SUMMARY

Finite Element Analysis of Thick Plates Resting on Elastic Foundation Using Modified Vlasov Model and Determination of the Effective Depth of the Soil Stratum

The purpose of this study is to improve the plate-subsoil interaction models and to get more realistic results with taking into account the effect of the shear deformation through the plate thickness using thick plate theory and determining the effective depth of the soil stratum depending on dimension of the plate, type of the loading and properties of the subsoil.

A four-noded, 12 degrees of freedom, and an eight-noded, 24 degrees of freedom, quadrilateral finite elements based on Mindlin plate theory that accounts for the effect of shear deformation are used for the purpose. Selective reduced integration technique is used in addition to full integration technique for both of the elements to avoid the shear locking problem, which is faced when Mindlin plate elements are used for the plates with small thicknesses. Furthermore an iterative method is suggested in order to determine the effective subsoil depth considering the stress distribution within the subsoil.

After the details about Modified Vlasov model and Mindlin plate theory are given, the plate element stiffness matrices, the load vectors, the vertical deflection and the shear deformation element stiffness matrices of the foundation for each type of elements are presented in explicit forms using the finite element formulation. To demonstrate the performance of the elements used in this study, the plates without the elastic foundation are considered first and how the shear locking problem occurs and how it is prevented using selective reduced integration rule are explained. Then the effects of various parameters such as transverse shear strain, plate thickness, boundary conditions and changes in the modulus of elasticity of the subsoil from top to the bottom, on the behaviour of thick plates on elastic foundations are investigated. Finally the accuracy and efficiency of effective subsoil depth determined in this study are tested with various examples.

It is concluded that generally the effect of the shear strain on the behaviour of the plate is always quite smaller for free plates compare to supported ones, and using a deeper depth of soil stratum doesn't affect the results much but taking a shallow depth may result with an unrealistic solution if there is not a relatively rigid foundation at a certain depth.

Keywords : Plates on elastic foundation, Modified Vlasov model, Finite element model, Thick plate theory, Shear locking problem

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1. Bir parametrelili zemine oturan bir plak şeması (Winkler Modeli)	3
Şekil 2. Bir parametrelili zemin modeline göre yerdeğiştirme durumları	4
Şekil 3. İki parametrelili zemine oturan bir plak şeması (Pasternak Modeli).....	5
Şekil 4. İki parametrelili zemin modeline göre yerdeğiştirme durumları.....	6
Şekil 5. Elastik zemine oturan bir plak şeması	14
Şekil 6. Plak ve çevre ortamının bölgelere ayrılması	21
Şekil 7. Mindlin plak teorisine göre yerdeğiştirmeler	24
Şekil 8. Plak eksenleri ve yerdeğiştirmeleri	24
Şekil 9. Dış kuvvetler ve momentlerin pozitif yönleri	27
Şekil 10. 12 serbestlik dereceli Mindlin plak eleman (PBQ4)	33
Şekil 11. 24 serbestlik dereceli Mindlin plak eleman (PBQ8)	43
Şekil 12. Zemin elastisite modülünün derinlik boyunca değişmesi	67
Şekil 13. Plak etrafındaki zeminin plağa olan etkisinin eşdeğer tepki kuvveti olarak dikkate alınması.....	72
Şekil 14. İlave yüklerden dolayı zemin içerisindeki gerilme artışları	75
Şekil 15. Düzgün yayılı yük etkisinde ankastre mesnetli kare plağın maksimum yerdeğiştirmelerine göre yakınsama testi	79
Şekil 16. Düzgün yayılı yük etkisinde basit mesnetli kare plağın maksimum yerdeğiştirmelerine göre yakınsama testi	79
Şekil 17. Tekil yük etkisinde ankastre mesnetli kare plağın maksimum yerdeğiştirmelerine göre yakınsama testi	80
Şekil 18. Tekil yük etkisinde basit mesnetli kare plağın maksimum yerdeğiştirmelerine göre yakınsama testi	80
Şekil 19. Yayılı yüke maruz ankastre mesnetli kare plağın ortasındaki yerdeğiştirmelerin çeşitli h/l oranları ile değişimi.....	82
Şekil 20. Yayılı yüke maruz ankastre mesnetli kare plağın ortasındaki eğilme momentlerinin çeşitli h/l oranları ile değişimi	82
Şekil 21. Yayılı yüke maruz basit mesnetli kare plağın ortasındaki yerdeğiştirmelerin çeşitli h/l oranları ile değişimi.....	83
Şekil 22. Yayılı yüke maruz basit mesnetli kare plağın ortasındaki eğilme momentlerinin çeşitli h/l oranları ile değişimi	84

Şekil 23. Tekil yüke maruz ankastre mesnetli kare plağın ortasındaki yerdeğiştirmelerin çeşitli h/l oranları ile değişimi.....	85
Şekil 24. Tekil yüke maruz ankastre mesnetli kare plağın ortasındaki eğilme momentlerinin çeşitli h/l oranları ile değişimi	85
Şekil 25. Tekil yüke maruz basit mesnetli kare plağın ortasındaki yerdeğiştirmelerin çeşitli h/l oranları ile değişimi.....	86
Şekil 26. Tekil yüke maruz basit mesnetli kare plağın ortasındaki eğilme momentlerinin çeşitli h/l oranları ile değişimi	87
Şekil 27. Tekil yükle yüklü ankastre mesnetli kare plağın PBQ4 eleman ile her iki integrasyon tekniği kullanılarak çözümünden elde edilen yerdeğiştirme durumlarının kalınlıkla değişimi	88
Şekil 28. Plak kalınlığının düzgün yayılı yüke maruz ankastre mesnetli bir kare plağın maksimum yerdeğiştirmesi üzerindeki etkisi	89
Şekil 29. Plak kalınlığının düzgün yayılı yüke maruz ankastre mesnetli bir kare plağın ortasındaki eğilme momenti üzerindeki etkisi.....	89
Şekil 30. Çeşitli mesnet koşullarına sahip plak şeması	90
Şekil 31. Çeşitli mesnet şartlarına sahip iki parametrelili elastik zemine oturan düzgün yayılı yükle yüklü bir kare plağın çözümünden elde edilen yerdeğiştirme, moment ve kesme kuvveti değerlerinin plak orta düzleminde x ekseni boyunca değişimi	92
Şekil 32. Elastik zemine oturan dikdörtgen plak	93
Şekil 33. $H=3.048$ m için yayılı yükle yüklü plağın yerdeğiştirme, moment ve kesme kuvveti değerlerinin plak orta düzleminde x ekseni boyunca değişimi	96
Şekil 34. $H=6.096$ m için yayılı yükle yüklü plağın yerdeğiştirme, moment ve kesme kuvveti değerlerinin plak orta düzleminde x ekseni boyunca değişimi	97
Şekil 35. $H=9.144$ m için yayılı yükle yüklü plağın yerdeğiştirme, moment ve kesme kuvveti değerlerinin plak orta düzleminde x ekseni boyunca değişimi	98
Şekil 36. $H=15.240$ m için yayılı yükle yüklü plağın yerdeğiştirme, moment ve kesme kuvveti değerlerinin plak orta düzleminde x ekseni boyunca değişimi	99
Şekil 37. $H=3.048$ m için tekil yükle yüklü plağın yerdeğiştirme, moment ve kesme kuvveti değerlerinin plak orta düzleminde x ekseni boyunca değişimi	100
Şekil 38. $H=6.096$ m için tekil yükle yüklü plağın yerdeğiştirme, moment ve kesme kuvveti değerlerinin plak orta düzleminde x ekseni boyunca değişimi	101

Şekil 39. H=9.144 m için tekil yükle yüklü plağın yerdeğiştirme, moment ve kesme kuvveti değerlerinin plak orta düzleminde x eksenini boyunca değişimi	102
Şekil 40. H=15.240 m için tekil yükle yüklü plağın yerdeğiştirme, moment ve kesme kuvveti değerlerinin plak orta düzleminde x eksenini boyunca değişimi	103
Şekil 41. Tekil yükten yayılı yüke geçişin plak yerdeğiştirmeleri üzerindeki etkisi	107
Şekil 42. Radye temel.....	108
Şekil 43. H=5 m için radye temelin yerdeğiştirme, moment ve kesme kuvveti değerlerinin plak orta düzleminde x eksenini boyunca değişimi.....	110
Şekil 44. H=10 m için radye temelin yerdeğiştirme, moment ve kesme kuvveti değerlerinin plak orta düzleminde x eksenini boyunca değişimi.....	111
Şekil 45. H=15 m için radye temelin yerdeğiştirme, moment ve kesme kuvveti değerlerinin plak orta düzleminde x eksenini boyunca değişimi.....	112
Şekil 46. H=20 m için radye temelin yerdeğiştirme, moment ve kesme kuvveti değerlerinin plak orta düzleminde x eksenini boyunca değişimi.....	113
Şekil 47. Çeşitli E_2/E_1 oranları için yayılı yüke maruz plağın yerdeğiştirme değerlerinin plak orta düzleminde x eksenini boyunca değişimi.....	116
Şekil 48. Çeşitli E_2/E_1 oranları için yayılı yüke maruz plağın eğilme momenti değerlerinin plak orta düzleminde x eksenini boyunca değişimi.....	116
Şekil 49. Çeşitli E_2/E_1 oranları için tekil yüke maruz plağın yerdeğiştirme değerlerinin plak orta düzleminde x eksenini boyunca değişimi.....	117
Şekil 50. Yayılı yükle yüklü plağın Geliştirilmiş Vlasov Modeli ile çözümünden elde edilen yerdeğiştirme, moment ve kesme kuvvetlerinin derinlikle değişimi.....	119
Şekil 51. Yayılı yükle yüklü plağın Winkler Modeli ile çözümünden elde edilen yerdeğiştirmelerin derinlikle değişimi.....	120
Şekil 52. Tekil yükle yüklü plağın Geliştirilmiş Vlasov Modeli ile çözümünden elde edilen yerdeğiştirme, moment ve kesme kuvvetlerinin derinlikle değişimi	122
Şekil 53. Tekil yükle yüklü plağın Winkler Modeli ile çözümünden elde edilen yerdeğiştirme, moment ve kesme kuvvetlerinin derinlikle değişimi	123
Şekil 54. Radye temelin Geliştirilmiş Vlasov Modeli ile çözümünden elde edilen yerdeğiştirme, moment ve kesme kuvvetlerinin derinlikle değişimi	125
Şekil 55. Radye temelin Winkler Modeli ile çözümünden elde edilen yerdeğiştirme, moment ve kesme kuvvetlerinin derinlikle değişimi	126

TABLOLAR DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 1. PBQ4 ve PBQ8 elemanları için noktasal koordinatlar	33
Tablo 2. Bu çalışmada kullanılan integrasyon adımları.....	37
Tablo 3. Gauss Nümerik integrasyon formülü için bu çalışmada kullanılan integrasyon adımlarına ilişkin koordinatlar ve ağırlık katsayıları	37
Tablo 4. Ankastre mesnetli yayılı yüklerle yüklü kare plağın ortasındaki yerdeğiştirme ve eğilme momentleri	81
Tablo 5. Basit mesnetli yayılı yüklerle yüklü kare plağın ortasındaki yerdeğiştirme ve eğilme momentleri	83
Tablo 6. Ankastre mesnetli tekil yüklerle yüklü kare plağın ortasındaki yerdeğiştirme ve eğilme momentleri	84
Tablo 7. Basit mesnetli tekil yüklerle yüklü kare plağın ortasındaki yerdeğiştirme ve eğilme momentleri	86
Tablo 8. Çeşitli mesnet koşulları için iki parametrelilik elastik zemine oturan yayılı yüklerle yüklü kare plağa ilişkin yerdeğiştirme, eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri.....	91
Tablo 9. Elastik zemine oturan yayılı yüklerle yüklü plağın çözümünden elde edilen zemin parametreleri, maksimum yerdeğiştirmeler ve momentler	94
Tablo 10. Elastik zemine oturan tekil yüklerle yüklü plağın çözümünden elde edilen zemin parametreleri, maksimum yerdeğiştirmeler ve momentler	95
Tablo 11. Farklı h/l oranları, mesnet şartları ve zemin derinliğinin, elastik zemine oturan yayılı yüklerle yüklü plağın Geliştirilmiş Vlasov Modeli ile çözümünden elde edilen yerdeğiştirmeler üzerindeki etkisi.....	105
Tablo 12. Farklı h/l oranları, mesnet şartları ve zemin derinliğinin, elastik zemine oturan tekil yüklerle yüklü plağın Geliştirilmiş Vlasov Modeli ile çözümünden elde edilen yerdeğiştirmeler üzerindeki etkisi.....	106
Tablo 13. Elastik zemine oturan radye temelin çözümünden elde edilen zemin parametreleri, maksimum yerdeğiştirmeler ve momentler	109
Tablo 14. Yayılı yük durumunda çeşitli E_2/E_1 oranları için zemin parametreleri	115
Tablo 15. Tekil yük durumunda çeşitli E_2/E_1 oranları için zemin parametreleri.....	115
Tablo 16. Belirlenen etkin zemin derinlikleri	117

Tablo 17.	Elastik zemine oturan yayılı yüklerle yüklü plağın Geliştirilmiş Vlasov Modeli ile çözümünden elde edilen zemin parametreleri, maksimum yerdeğiştirmeler ve momentlerin derinlikle değişimi	118
Tablo 18.	Elastik zemine oturan yayılı yüklerle yüklü plağın Winkler Modeli ile çözümünden elde edilen maksimum yerdeğiştirme ve momentlerin derinlikle değişimi	120
Tablo 19.	Elastik zemine oturan tekil yüklerle yüklü plağın Geliştirilmiş Vlasov Modeli ile çözümünden elde edilen zemin parametreleri, maksimum yerdeğiştirmeler ve momentlerin derinlikle değişimi	121
Tablo 20.	Elastik zemine oturan tekil yüklerle yüklü plağın Winkler Modeli ile çözümünden elde edilen maksimum yerdeğiştirme ve momentlerin derinlikle değişimi	121
Tablo 21.	Elastik zemine oturan radye temel için Geliştirilmiş Vlasov Modeli ile çözümünden elde edilen zemin parametreleri, maksimum yerdeğiştirmeler ve momentlerin derinlikle değişimi	124
Tablo 22.	Elastik zemine oturan radye temel için Winkler Modeli ile çözümünden elde edilen maksimum yerdeğiştirme ve momentlerin derinlikle değişimi	124

SEMBOLLER DİZİNİ

$[B]$: Bağ matrisi
D	: Plağın Eğilme rijitliği
$[D_b]$: Eğilme elastisite matrisi
$[D_s]$: Kayma elastisite matrisi
E	: Elastisite modülü
G	: Kayma modülü
h	: Plak kalınlığı
H	: Zemin derinliği
k	: Zemin yatak katsayısı
$[k^e]$: Eleman rijitlik matrisi
$[k_k^e]$: Zeminin aksenal yerdeğiştirmesini temsil eden rijitlik matrisi
$[k_p^e]$: Plağın eleman rijitlik matrisi
$[k_{2t}^e]$: Zemin kayma parametresi matrisi
$[K]$: Sistem rijitlik matrisi
l_x, l_y	: Plağın x ve y eksenleri doğrultularındaki kenar uzunlukları
M	: Moment
$[N]$: Şekil fonksiyonu vektörü
q	: Yayılı yük
Q	: Kesme kuvveti
u, v, w	: Plağın x, y ve z eksenleri doğrultularındaki yerdeğiştirmeleri
$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$: Zeminin x, y ve z eksenleri doğrultularındaki yerdeğiştirmeleri
$2t$: Zemin kayma parametresi
γ	: Zemin yüzey parametresi
ν	: Poisson oranı
σ	: Normal gerilme
τ	: Kayma gerilmesi
φ_x, φ_y	: Plağın x ve y eksenleri etrafındaki dönmeleri
$\phi(z)$: Zemin düşey yerdeğiştirme fonksiyonu

Not : Bu listede verilmeyen bazı semboller çalışmada ilgili oldukları yerlerde açıklanmıştır.

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Elastik zemine oturan kiriş yada plak problemlerinin çözümü, yapı temelleri, karayolları ve hava alanları gibi bir çok pratik uygulamalara örnek olması nedeniyle, yapı ve geoteknik mühendisleri arasında oldukça geniş bir araştırma alanı bulmaktadır. Bu tür problemlerde zeminin davranışının yapıya olan etkisi önemli olmaktadır. Yapıya etkileyen yükler en kısa yoldan zemine iletilmekte ve bu etkilere karşı zemin-yapı sistemi birlikte karşı koymaktadır. Zira gerek ekonomik gerekse emniyetli bir projelendirme için etkileyen yüke ilave olarak yapının davranışının yanı sıra zeminin davranışını ve aralarındaki ilişkiyi de iyi bilmek gerekmektedir. Bu nedenle zemin-yapı etkileşimini ortaya koyan daha basit ve daha gerçekçi modellere olan ihtiyaç giderek önemini arttırmaktadır.

1.2. Elastik Zemine Oturan Plaklar

Elastik zemine oturan plak problemlerinin çözümü genel olarak üç aşamadan oluşmaktadır. Birinci ve en önemli aşama plağın davranışı ve zeminle ilgili temel kabullerin yapılması, ikinci aşama zemin parametreleri, eleman kesiti ve malzemesi gibi gerekli büyüklüklerin belirlenmesi, üçüncü aşama ise gerçek çözümlere yakın sonuçlar verecek bir sayısal çözümleme tekniğinin seçimi ve kullanımınıdır.

1.2.1. Zemin-Yapı Etkileşim Modelleri

Zemin-yapı etkileşiminin belirlenmesindeki esas amaç, zeminin yapı üzerinde oluşturacağı etkileri ortaya koyarak bu etkileri hesaplarda dikkate almaktır. Bu ilişkiyi belirlemek zemin ortamının karmaşıklığından dolayı oldukça zordur. Bilindiği gibi beton ve çelik yapılar davranışın lineer ve izotrop olduğu kabulü ile yeterli doğrulukta modellenip analiz edilebilirken; zemin, homojen ve izotrop olmayan, dolayısıyla da lineer olmayan davranış gösteren bir katmandır. Ayrıca zemin parçacıklarının şekilsel, boyutsal

ve mekaniksel özellikleri, zeminin nem durumu, suya doygunluğu, permeabilitesi ve zeminin geometrisi gibi değişik faktörler zeminin mekanik ve malzeme özelliklerini belirlemektedir. Diğer taraftan bu parametrelerin de tam olarak belirlenmesi hemen hemen mümkün olamamaktadır. Laboratuvarlar arasındaki teknik farklılıklar dahi bu parametrelerin belirlenmesine etki etmektedir. Bu da problemi daha karmaşık bir hale getirmektedir. Bu konuda bir çok detaylı araştırma yapılmasına rağmen zemin-yapı etkileşimi ve bu etkileşimde zemin davranışının rolü tam olarak ortaya konulamamaktadır.

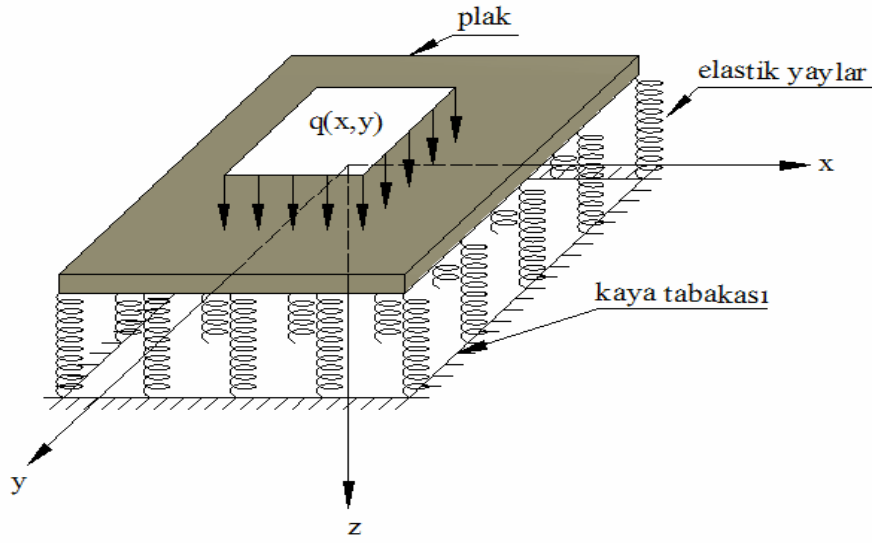
Sonuç olarak elastik zemine oturan kiriş ve plak problemlerinin matematik metotlarla çözümü zeminin oldukça karmaşık bir yapıya sahip olması sebebiyle bir takım idealleştirmeleri gerektirmektedir. Bu idealleştirmeler genellikle zeminin fiziksel ve mekanik davranışları ile ilgili olmaktadır. Zemin-yapı etkileşimini temsil eden modeller kabaca üç ana başlık altında özetlenebilirler. Bunlar sırasıyla bir parametrelili, iki parametrelili ve üç parametrelili modeller olarak adlandırılabilirler.

1.2.1.1. Bir Parametrelili Modeller

Zemin ile yapı arasındaki ilişki ilk olarak 1867 yılında Winkler tarafından modellenmiştir. Winkler modeli adı ile tanınan bu modelde; zeminin birbirine sonsuz yakın, lineer ve elastik yaylardan meydana geldiği ve zeminin düşey yerdeğiştirmesinin (w) sadece o noktaya etki eden taban basıncına (p) ve idealleştirilmiş zemindeki yay sabitine (k) bağlı olduğu kabul edilmektedir (Şekil 1). Bu durumda zemin birbirine sonsuz yakın ve birbirinden bağımsız yaylardan oluşan bir sistem şeklinde düşünülmektedir. Yayların sadece doğrudan doğruya yüklendiklerinde şekil değiştirdikleri ve bir karşı tepki oluşturdukları ancak her yayın komşu yayın yüklenme durumundan etkilenmediği kabul edilmektedir. Bunun sonucunda zemin tamamen süreksiz bir ortam şeklinde dikkate alınmış olmaktadır. Bu modelde taban basıncı,

$$p(x, y) = kw(x, y) \quad (1)$$

ifadesiyle verilmektedir.



Şekil 1. Bir parametrelili zemine oturan bir plak şeması (Winkler modeli)

Burada k elastik yay katsayısı olup uygulamada genellikle "yatak katsayısı" olarak adlandırılmaktadır. Bu parametre, düşey yerdeğiştirme bir birim olduğunda birim genişlikteki birim alana gelen tepki kuvvetini ifade etmektedir.

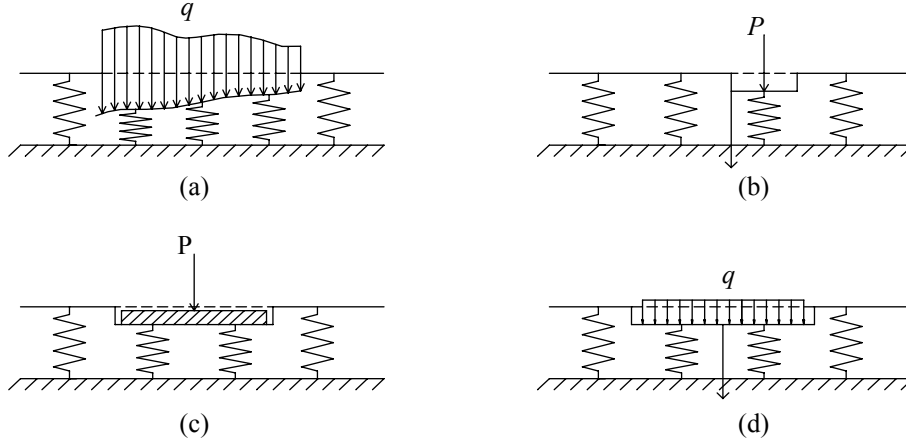
Başlangıçta demiryollarında yerdeğiştirmelerin ve nihai gerilmelerin analizinde kullanılan bu model daha sonraki yıllarda bir çok farklı zemin-yapı etkileşim problemlerinde kullanılmaya başlanmış ve Winkler modeli olarak literatüre girmiştir.

Bu model, karmaşık ifadeler içeren diğer modellere nazaran daha basit olmasından dolayı, bina döşemeleri ve köprü tabliyelerinin karakteristik konstrüksiyonu olan ızgara sistemler, bir ve iki doğrultuda sürekli temeller, gemi kaburgaları, dönel kabuklar, yatay yük etkisindeki düşey kazıklar ve palplanşlar, su tankı ve siloların betonarme temelleri gibi değişik mühendislik problemlerinde kullanılmaktadır.

Winkler modelinin en büyük eksikliği yaylar arasındaki etkileşimi dikkate almaması, yani yükün etkilediği yay bir miktar çökerken diğer yaylarda bir değişiklik olmadığını, zemine etkileyen kuvvetlerin sadece etki ettikleri noktada şekil değişimi yaptığını kabul etmesidir (Şekil 2). Bu durumda elastik zeminin üzerindeki herhangi bir yapı elemanının yapmış olduğu yerdeğiştirmeye yüklü alanın dışındaki zeminin etkisi olmamaktadır. Oysa elastik tabakanın yüzeyindeki bir noktada oluşan yerdeğiştirme sadece o noktaya etki eden kuvvetten değil aynı zamanda diğer noktadaki kuvvetlerden de etkilenmektedir.

Diğer bir sorun zemin yatak katsayısı olarak tanımlanan parametrenin nasıl hesaplanacağı sorusudur. Bu amaçla kullanılan ancak farklı sonuçlar veren çeşitli

bağıntılar mevcuttur. Aynı zamanda model her ne kadar tekil yük durumunda tatminkar sonuçlar verse de düzgün yayılı yük durumunda gerçekçi olmayan sonuçlara götürmektedir. Yaylar arasındaki etkileşimi dikkate almadığından, düzgün yayılı yük durumunda, plağın her noktasındaki yerdeğiştirmeler eşit çıkmakta dolayısıyla dönme ve eğilme momenti oluşmamaktadır (Özgan, 2000).



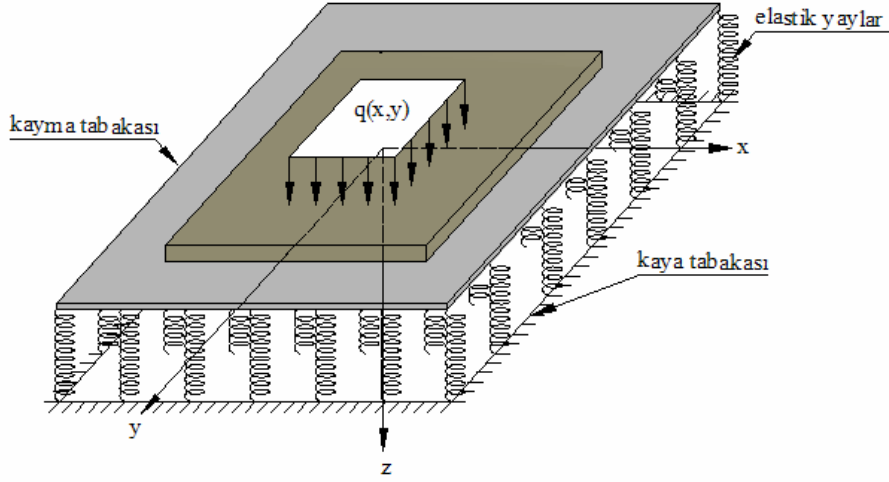
Şekil 2. Bir parametrelili zemin modeline göre yerdeğiştirme durumları

- (a) Düzgün yayılı olmayan yük altında zeminin yerdeğiştirme durumu
- (b) Tekil yük altında zeminin yerdeğiştirme durumu
- (c) Rijit tabaka ile aktarılan yük altında zeminin yerdeğiştirme durumu
- (d) Düzgün yayılı yük altında zeminin yerdeğiştirme durumu

1.2.1.2. İki Parametrelili Modeller

Winkler modelinin zeminin gerçek davranışını yansıtmadığını, bazı idealleştirmelerin gerektiğini, zemin ortamının daha karmaşık matematiksel ifadeler içerdiğini savunan bir çok araştırmacı Winkler modelini geliştirmek üzere yeni modeller sunmuşlardır. Bunlardan bazıları aşağıda sıralanmaktadır (Şekil 3).

1. Filonenko-Borodich Modeli
2. Hetenyi Modeli
3. Pasternak Modeli
4. Vlasov Modeli



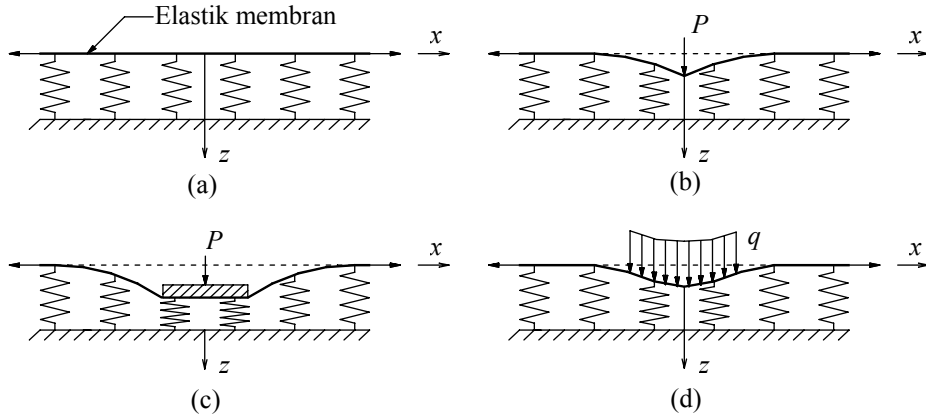
Şekil 3. İki parametrelili zemine oturan bir plak şeması (Pasternak modeli)

Bu modellerin ortak yanı zemin tabakasındaki kayma şekildeğiştirmelerini dikkate almaları ve bu parametreleri zeminin plağın altında oluşturacağı taban basıncı ifadesinde bulundurmalarıdır. Temelde aynı esasa dayanmalarına rağmen, yaylar arasındaki sürekliliği sağlamak için kullandıkları mekanizma bakımından ayrılırlar. Filonenko-Borodich (1940), Winkler modelinde yayların yüzeylerinin sabit bir T gerilmesine sahip elastik bir zar gibi olduğunu, Hetenyi (1946; 1950), Winkler yaylarının üzerinde eğilme rijitliği D olan bir plak olduğunu, Pasternak (1954), yayların üzerinde sıkışmayan, düşey elemanlardan oluşan ve sadece düşey yönde yerdeğiştirme yapabilen, kesme etkisinde şekil değiştiren bir kayma tabakası olduğunu varsayarak yaylar arasındaki sürekliliği sağlamışlardır. Bu modellere ilişkin yerdeğiştirme durumları Şekil 4'te görülmektedir.

Zeminin plağın altında oluşturacağı taban basıncı ifadesi bu modellerin tümünde hemen hemen aynıdır sadece zemin kayma parametresi ifadesinde birbirinden ayrılırlar. Vlasov modeli için taban basıncı ifadesi, $2t$ Winkler modelinde ihmal edilen kayma şekildeğiştirmesini temsil eden zemin kayma parametresini göstermek üzere,

$$p(x, y) = kw(x, y) - 2t\nabla^2 w(x, y) \quad (2)$$

ifadesiyle verilmektedir. Bu ifadede $2t$ sıfıra eşit alındığında Winkler modeline ilişkin taban basıncı ifadesinin elde edildiği görülmektedir (Selvaduari, 1979).



Şekil 4. İki parametrelili zemin modeline göre yerdeğiştirme durumları

- (a) Yüksüz durum
- (b) Tekil yük altında zeminin yerdeğiştirme durumu
- (c) Rijit tabaka ile aktarılan yük altında zeminin yerdeğiştirme durumu
- (d) Yayılı yük altında zeminin yerdeğiştirme durumu

1.2.1.3. Üç Parametrelili Modeller

Literatürde bulunan iki parametrelili modellerin de bazı dezavantajları mevcuttur. Bir parametrelili modellere benzer şekilde zemin içerisindeki değişim dikkate alınmadığı gibi modelde kullanılan parametreler de gerçek olmayan kuramsal ifadelerdir. Bu parametrelerin alabileceği değerlerle zemin özellikleri arasında kesin bir ilişkiyi gösteren ifade yoktur. Oysaki yapı mühendisleri gerek ekonomik gerekse emniyetli projelendirmeler gerçekleştirebilmek için kullanacakları bilgisayar programlarında zemin parametrelerinin ne alınacağı konusunda kesin ve somut bilgilere ihtiyaç duymaktadırlar. Bu eksikliklerin farkında olan araştırmacılar tarafından yapıdaki ve zemindeki kayma etkilerini dikkate alan Vlasov modeli üzerinde zemin parametrelerinin hesabında izlenecek yol ile ilgili çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmaları iki parametrelili modellerden ayıran özellik zemin yatak katsayısı ve zemin kayma parametresi olarak adlandırılan parametrelerin bir veri olarak kabulü yerine zeminin elastik özelliklerinden faydalanarak hesaplanması için bir takım yöntemlerin geliştirilmeye çalışılmasıdır. Bu modellerden en bilineni bu çalışmada da kullanılan ve Geliştirilmiş Vlasov Modeli olarak adlandırılan modeldir. Bu tür modellerde zemin parametrelerinin belirlenmesinde kullanılan üçüncü bir parametre

karşımıza çıkmaktadır. Model hakkında daha detaylı bilgi sayfa 14'te Geliştirilmiş Vlasov Modeli başlığı altında verilmektedir.

1.2.2. Konu İle İlgili Yapılan Diğer Bazı Çalışmalar

Elastik zemine oturan kirişler ve plaklar üzerine yapılan çalışmalar, bu tür problemlerin geniş uygulama alanı bulmaları nedeniyle, oldukça fazladır. Bu bölümde sadece bu tezde faydalanılan bazı çalışmalar gözden geçirilecektir.

Literatürde eğilme şekildeğiştirmelerinin yanında kayma şekildeğiştirmelerinin etkisini de dikkate alan kalın plak sonlu elemanlar ile ilgili çok sayıda çalışmaya rastlanmaktadır.

Crisfield (1984) bazı kayma serbestliklerini tutmak suretiyle köşe noktalarında 3, kenar ortalarında 2 olmak üzere 20 serbestlik derecesine sahip Mindlin plak elemanlarda kayma kilitlenmesi probleminin gözlemlenmediğini belirtmiştir.

Yuan ve Miller (1988), kalın plakların çözümü için eleman köşelerinde üçer, kenarların ortasında ikişer ve elemanın ortasında bir olmak üzere 21 serbestlik dereceli 9 düğüm noktalı dikdörtgen sonlu plak eleman geliştirmişlerdir. Bu eleman kullanıldığı takdirde plak kalınlığının kısa kenar açıklığına oranı 0.0001 veya daha büyük olması durumunda kayma kilitlenmesi ile karşılaşmadığını ifade etmişlerdir.

Petrolito (1989), 4 düğüm noktalı 12 serbestlik dereceli ACM plak sonlu elemanında kalın plaklara uygulanabilecek değişiklikleri yapmıştır. Şekil fonksiyonları olarak Mindlin denklemlerindeki homojen çözümler ve ilave olarak elemana etkiyen yüke bağlı bir özel çözüm kullanılmıştır. Bu sayede ince plak çözümlerine kayma şekildeğiştirmelerinin etkisinin eklenmesi gibi bir hesap yöntemi kullanmaksızın yada integral nokta sayısını azaltmaksızın kayma kilitlenmesi tehlikesini ortadan kaldırdığını ifade etmiştir.

Batoz ve Lardeur (1989) Mindlin plak teorisini kullanarak kayma kilitlenmesi oluşturmayan şekil fonksiyonlarını seçmişler ve 3 düğüm noktalı 8 serbestlik dereceli üçgen plak sonlu elemanlar geliştirmişlerdir.

Briassoulis (1989) Mindlin plak elemanlarda Gauss İntegral nokta sayısının azaltılması, sonlu eleman ağının sıklaştırılması ve eleman serbestlik derecelerinin artırılması gibi faktörlerin kayma kilitlenmesi problemini nasıl etkilediğini araştırmıştır.

Ayvaz (1992) sonlu farklar yöntemi ile deprem yükleri etkisindeki betonarme plakların analizini gerçekleştirdiği çalışmasının bir bölümünde Reissner plak teorisini kullanarak ankastre döşemeleri incelemiştir.

Yuqiu ve Fei (1992) Adini, Clough ve Melosh tarafından geliştirilen 12 serbestlik dereceli dikdörtgen plak sonlu elemanı esas alıp kayma şekildeğiştirmelerini lineer kabul ederek eleman kenarlarındaki uygunluk koşullarından yararlanıp ilave kayma yüzeyi bulmuşlar ve 12 serbestlik dereceli kalın plak sonlu elemanı elde etmişlerdir.

Liu vd. (1995) çalışmalarında 4 düğüm noktalı 16 serbestlik dereceli bir dikdörtgen sonlu eleman sunmuşlardır. Kayma şekildeğiştirmelerini de dikkate alan bu elemanın ince ve kalın plak çözümlerinde oldukça iyi netice verdiğini ifade etmişlerdir.

Soh vd. (2001) kalın ve ince plak çözümlerinde kullanılabilir 12 serbestlik dereceli Reissner-Mindlin plak eleman sunmuşlardır. Elde ettikleri sonuçları kesin çözümlerle kıyaslamışlardır.

Wang vd. (2001) çalışmalarında Reissner ve Mindlin plak teorilerini karşılaştırmışlar ve Reissner teorisi ile elde edilen yerdeğiştirmelerin Mindlin teorisi ile elde edilen yerdeğiştirmelere nazaran küçük olduğunu belirtmişlerdir.

Ozkul ve Ture (2004) Mindlin formülasyonunu esas alarak 4 düğüm noktalı 12 serbestlik dereceli ve 8 düğüm noktalı 24 serbestlik dereceli dikdörtgen plak sonlu elemanlar yardımıyla kalın plakların davranışını incelemiştir. Rijitlik matrislerinin nümerik integrasyonla hesaplanması esnasında farklı şekildeğiştirme bileşenleri için farklı integral noktası sayısının seçilmesi gerektiğini ve bu şekilde elemanın aşırı rijitliğinin önlenebileceğini belirtmişlerdir.

Elastik zemine oturan plak problemlerinde zeminin Winkler modeli kullanılarak temsil edildiği bir çok çalışma bulunmaktadır.

Henwood vd. (1981) Winkler tipi elastik zemine oturan kalın plakların çözümünü sonlu farklar yöntemi kullanarak gerçekleştirmişlerdir. Elde ettiği sonuçları sonlu eleman çözümleri ile kıyaslamıştır.

Yettram vd. (1984) fourier serilerini kullanarak elastik zemine oturan plakların davranışına kalınlığın etkisini incelemiştir. Farklı kalınlıklara ve malzeme özelliklerine sahip plakları gerek kalın plak teorisi gerekse ince plak teorisini kullanarak karşılaştırmalı olarak çözmüşlerdir.

Voyiadjis ve Kattan (1986) Winkler tipi elastik zemine oturan kalın plakları dikkate alarak, zemin parametresinin ve plak kalınlığının artmasının kayma şekildeğiştirmelerinin plağın davranışına etkisini arttırdığını göstermişlerdir.

Celep vd. (1988) çekme gerilmesi almayan Winkler zemine oturan yayılı yük, tekil yük ve moment etkisi altındaki plakların statik ve dinamik davranışını incelemişlerdir.

Celep (1988) benzer bir çalışmayı statik yükler etkisi altındaki dairesel plaklar için yapmıştır.

Al-Khaihat ve West (1990) Winkler tipi elastik zemine oturan dikdörtgen plakların çözümlünü başlangıç değerı metodunu kullanarak gerçekleştirmişler ve çeşitli mesnet durumları için plaktaki yerdeğiştirme, moment ve kesme kuvveti değerlerini hesaplamışlardır.

Mishra ve Chakrabarti (1997) Winkler tipi elastik zemine oturan kalın plakların çözümlünde dokuz düğüm noktalı Mindlin plak elemanını kullanmışlardır. Zemin rijitliğinin artmasıyla mesnet şartlarının ve plak kenar oranlarının sonuçlar üzerindeki etkisinin azaldığını göstermişlerdir.

Eratlı ve Aköz (1997) Winkler elastik zeminine oturan kalın plaklar için karma sonlu eleman geliştirmişler ve çeşitli mesnet şartlarına sahip zeminli ve zeminsiz plakları Gâteaux diferansiyelini kullanarak incelemişlerdir. Çalışmalarında yerdeğiştirmeler, içsel kuvvetler ve sınır şartlarından oluşan sekiz bağımsız değeriken kullanmışlardır. Sonlu eleman ağındaki eleman sayılarının tek veya çift olmasına göre, sayısal sonuçların yakınsama şeklinin üstten veya alttan olabileceğini görmüşlerdir.

Liu (2000) Winkler elastik zeminine oturan kalın plakları çeşitli mesnet koşulları, yükleme durumları, plak kalınlıkları ve zemin parametreleri için inceleyerek söz konusu değeriklenlerin plağın davranışına etkisini gösteren parametrik bir çalışma sunmuştur.

Abdalla ve İbrahim (2006) 3 düğüm noktalı, 9 serbestlik dereceli üçgen Reissner-Mindlin plak eleman kullanarak Winkler tipi elastik zemine oturan plakları analiz etmişlerdir. Elde ettikleri çözümleri diğer ince ve kalın plak çözümleri ile kıyaslamışlar ve plak kalınlığının, yükleme durumunun, zemin parametrelerinin çözüme etkisini incelemişlerdir.

Zeminin elastik karakteristikleri ve yüklü alanın boyutu gibi bir çok etkene bağlı olan, zemin yatak katsayısının ne alınacağı geniş araştırma konusu olmuştur. Bir çok araştırmacı bu parametreyi belirleyen teknik üzerinde çalışmıştır.

Engesser (1893), kiriş genişliği ile zemin yatak katsayısının ters orantılı olduğuna işaret etmiştir. Yani kiriş genişliği artıkça zemin yatak katsayısı azalmaktadır. Hayashi ve Freud, zemin yatak katsayısının taban basıncına bağlı olabileceğini düşünerek, taban basıncı artıkça parametrenin değerinin azalacağı kabulü ile bir çok problem çözmüştür (Doğan, 1993).

Biot (1937), üç boyutlu elastik zemine oturan tekil yüke maruz sonsuz bir kirişi maksimum eğilme momentini de dikkate alarak çözmüş ve zemin yatak katsayısının sadece kiriş genişliğine değil, bir dereceye kadar kirişin eğilme momentine de bağlı olduğunu göstermiştir.

Zimmerman (1942), zemin yatak katsayılarını demiryolu traverslerinin hesabında kullanmış ve kendi özel uygulamaları için bulduğu zemin yatak katsayılarını sunmuştur. Kögler-Scheidig (1930), sonsuz uzunluklu şerit temeller, dairesel ve kare plaklar için çeşitli parametrelere bağlı olarak, zemin yatak katsayısını bulmaya yarayan çeşitli bağıntılar geliştirmiştir. Terzahgi ve Peck (1948), deneysel çalışmalar yaparak, aynı taban basıncı değerleri için çökmelerin kiriş genişliğine bağlı olarak değiştiğini saptamışlar ve bununla ilgili bağıntılar sunmuşlardır (Ortakmaç, 1997).

En kapsamlı çalışmalardan biri Terzahgi (1955) tarafından yapılmıştır. Terzahgi çalışmalarında zemin yatak katsayısının zeminin tepkisi ile hareket eden alanın boyutlarına bağlı olduğunu göstermiştir.

Vesic (1961), farklı rijitliğe sahip aynı özellikteki yapıların aynı yüklemelerinde dahi farklı zemin yatak katsayıları elde ederek bu parametrenin zeminin rijitliği kadar yapının da rijitliğine bağlı olduğunu gösteren çalışmalar yapmıştır.

Daloglu ve Vallabhan (2000) tekil yüke maruz Winkler tipi elastik zemine oturan plak problemlerinde zemin yatak katsayısının belirlenebilmesi için çeşitli grafikler sunmuşlardır. Bu grafikler kullanılarak yapı-zemin özelliklerine ve yükleme durumuna göre hesaplarda kullanılacak zemin yatak katsayısı belirlenebilmektedir.

Zeminin düşey tepkisinin yanında kayma etkisinin de gözönüne alındığı çeşitli iki parametrelili model çalışmaları da bulunmaktadır.

Jianguo vd. (1992) kendi seçtikleri zemin parametrelerini kullanarak iki parametrelili elastik zemine oturan Reissner plakların analizini gerçekleştirmişler. Değişik zemin parametreleri ve plak kalınlıkları için elde ettikleri sonuçları ince plak teorisi çözümleri ile kıyaslamışlardır.

Han ve Liew (1997) değişik sınır şartlarına sahip Reissner/Mindlin plaklarını iki parametrelili zemin dikkate alarak çözmüşlerdir. Çözümde kullandıkları zemin parametrelerini kendileri seçmişlerdir. Farklı mesnet durumları için zemin parametrelerinin ve plak kalınlığının sonuçlar üzerindeki etkilerini araştırmışlardır.

Shen (1999) elastik zemine oturan Reissner-Mindlin plakları incelediği çalışmasında Winkler ve Pasternak modellerini kullanmıştır. Zemin parametrelerinin, kayma şekildeğiştirmelerinin, yükün ve plak kalınlığının plağın davranışına etkisini incelemiştir. Aynı şekilde zemin parametrelerini bir veri olarak seçmiştir.

Teo ve Liew (2002) benzer şekilde Pasternak tipi elastik zemine oturan kalın plakları inceledikleri çalışmalarında zemin parametrelerini belirleme yoluna gitmemişlerdir.

Akavci (2005) tabakalı kompozit plakları incelediği çalışmasında farklı plak teorilerinin davranışa etkisini araştırmıştır. Winkler ve Pasternak zemin modellerini dikkate almış ancak zemin parametrelerini veri olarak seçmiştir.

Teknik literatürde zemin parametrelerinin bir veri olarak kabulü yerine zeminin elastik özellikleri cinsinden elde edilmesi üzerine yapılan çalışmalar da mevcuttur.

Straughan (1990) sonlu farklar metodunu kullanarak elastik zemine oturan ince plakları incelemiştir. k , $2t$ ve γ gibi parametreleri zeminin elastik özelliklerine bağlı olarak iteratif bir metotla hesaplama yoluna gitmiştir.

Turhan(1992) benzer bir çalışmayı sonlu elemanlar metodunu kullanarak gerçekleştirmiştir. Plağın kirişli ve boşluklu olma durumlarını da ayrıca dikkate almıştır.

Çelik ve Saygun (1999) yeni bir sonlu eleman modeli ile kayma şekildeğiştirmelerini de dikkate alarak iki parametrelili zemine oturan plakları analiz etmişlerdir. Geliştirdikleri modelde plak dışında kalan zemin ortamını da sonlu elemanlara bölerek hesaba katmışlardır. Bu yöntemle birbirine yakın iki plak arasındaki etkileşimi de inceleme olanağı bulmuşlardır.

Sadecka (2000) Kujawski plak sonlu elemanını kullanarak tabakalı elastik zemine oturan kalın plakların analizini gerçekleştirmiştir. Çözümünde ampirik formüller yardımıyla belirlediği zemin parametrelerini kullanmıştır.

Buczowski ve Torbacki (2001) elastik zemine oturan kalın plakları 18 düğüm noktalı sıfır kalınlıklı isoparametrik sonlu elemanlar kullanarak çözmüşler ve elde ettikleri zemine ilişkin rijitlik matrislerini açık formda sunmuşlardır.

Çelik ve Omurtag (2005) yaptıkları çalışmada zemin elastisite modülünün derinlikle değişiminin ve zemin cinsinin parametreler üzerindeki etkisini araştırmışlardır.

Elastik zemine oturan plaklar için buraya kadar irdelenen yayınlarda çeşitli zemin derinliklerine göre çözüm yapılmış ancak yükten etkilenen zemin derinliğinin belirlenmesi yoluna gidilmemiştir.

Bu fikir ilk olarak Daloglu ve Ozgan (2004) tarafından ortaya atılmış, plağa etkiyen yüke ve plak boyutlarına bağlı olarak yükten etkilenen derinliğin belirlenmesine çalışılmıştır. Geliştirilmiş Vlasov modeli kullanılarak zemin parametreleri iteratif bir metotla hesaplanmıştır.

Son yıllarda bir veya iki parametrelili zemine oturan kalın plakların çözümü için sınır eleman yönteminin uygulandığı çalışmalara da rastlanmaktadır. Fadhil ve El-Zafrany (1994), Rashed vd. (1998, 1999), Al-Hosani (2001), Xiao (2001), Chucheepsakul ve Chinnaboon (2002, 2003) bu çalışmalardan bazılarıdır.

1.3. Çalışmanın Amacı ve Kapsamı

Daha önce de bahsedildiği gibi, gerek bir parametrelili gerekse iki parametrelili veya üç parametrelili yöntemlerin uygulanabilirliği zemin parametrelerin gerçekçi olarak belirlenebilmesiyle mümkündür. Yapı-zemin etkileşim problemlerinin çözümünde uygulanan tüm yöntemlerde parametrelerin hesaplanması için zemin derinliğini bilmek gerekmekte, bu derinliğe bağlı olarak parametrelerin değeri ve dolayısıyla da elde edilen sonuçlar büyük farklar gösterebilmektedir. Günümüze kadar yapılan araştırmalarda bu derinlik altta bir kaya tabakası olduğu düşünülerek zemin tabakası sonsuz rijit olarak modellenmektedir. Yapının yüklenmesine, boyutlarına ve zemin özelliklerine bağlı olarak belirlenecek olan gerilme alanını elde ederek zemin derinliğini belirleme fikrine literatürde rastlanmamıştır. Zemin derinliğinin gerçekte olduğundan daha küçük alınması gerçekçi olmayan sonuçlara götürebilecektir.

Diğer taraftan bu tür problemlerde klasik Kirchhoff plak teorisi yeterli yaklaşıklıkla sonuçlar verse bile, plak kalınlığının artmasıyla birlikte kalınlık doğrultusundaki kayma şekildeğiştirmelerinin göz önüne alınması zorunlu olmaktadır. Özellikle kalın plak çözümlerinde kalınlık doğrultusundaki kayma şekildeğiştirmelerinin dikkate alınmasıyla daha gerçekçi bir plak davranışı elde etmek mümkün olmaktadır.

Bu çalışmada etkin zemin derinliğinin gerilme alanlarına bağlı olarak belirlenmesi ve kalın plak teorisi kullanılarak kalınlık doğrultusundaki kayma şekildeğiştirmelerinin hesaba katılması suretiyle şu ana kadar yapılmış olan plak-zemin etkileşim modellerinin

daha da geliştirilmesi ve daha gerçekçi sonuçlara ulaşılması hedeflenmektedir. Zeminde etkilenen bölge belirlenebilirse elde edilecek parametreler daha gerçekçi dolayısıyla hesaplanacak olan yerdeğiştirme ve iç kuvvetler de daha güvenilir olacaktır. Bu çalışmanın amacı, yapı-zemin etkileşim probleminin gerçeğe daha yakın modellenmesi için katkıda bulunmak ve mevcut yöntemleri geliştirmeye yardımcı olmaktır.

1.4. Hesap Tekniğinin ve Modelinin Seçilmesi

Son yıllarda meydana gelen bilgisayar teknolojisindeki gelişmelere bağlı olarak karışık mühendislik problemlerinin çözümü sonlu sayıda bilinmeyenli bir lineer denklem takımının çözümüne indirildiğinden, sayısal yöntemlere olan ilgi giderek artmaktadır.

Bu yöntemlerden özellikle sonlu elemanlar yöntemi, sisteme ilişkin bilgileri, mesnet şartlarını, dış etkilerin sürekli veya ani değişimlerini ve sistem sınırlarının düzgün olmaması halini kolaylıkla gözönüne alma olanağını verip sonlu serbestlik dereceli iki veya üç boyutlu elemanlar kullanarak karışık sistemlerin çözümüne imkan vermektedir.

Bu çalışmada dikdörtgen plakların, farklı yükleme durumları ve farklı sınır şartları altında çözümü hedeflendiğinden, sonlu elemanlar yönteminin kullanımı, yukarıda bahsedilen avantajlarından dolayı, tercih edilmektedir.

Seçilen 4 ve 8 düğüm noktalı Mindlin plak sonlu eleman tipleri için birer bilgisayar programı algoritması hazırlanıp Fortran 90 dilinde kodlanmıştır. Hazırlanan bu programlar P4 işlemcili bir bilgisayarda Compaq Visual Fortran Professional 6.1.0 versiyonuyla derlenerek çalıştırılmış ve elde edilen sonuçlar analiz edilerek sunulmuştur.

1.5. Geliştirilmiş Vlasov Modeli

Elastik zemine oturan plaklar karmaşık yapı-zemin etkileşim problemlerinin en önemli uygulamalarından bir tanesidir. Bu tür problemlerde en önemli aşamalardan biri zeminle ilgili temel kabulleri yapmak ve zeminin plak üzerinde oluşturacağı etkileri doğru şekilde belirleyerek hesaplarda dikkate almaktır. Bu başlık altında elastik zemine oturan plak probleminin bu çalışmada kullanılan Geliştirilmiş Vlasov Modeline göre formülasyonu temel adımlarıyla özetlenmektedir.

1.5.1. Zemin-Yapı Sisteminin Toplam Şekildeğiştirme Enerjisi

Şekil 5'te görüldüğü gibi kalınlığı H olan üç boyutlu elastik bir zemin üzerinde $q(x,y)$ dış yük etkisine maruz bir plak dikkate alınacak olursa plak-zemin ortamının toplam potansiyel enerjisi, Π_p plağın potansiyel enerjisini, Π_s zeminin potansiyel enerjisini ve V dış yüklerin oluşturduğu potansiyel enerjiyi göstermek üzere,

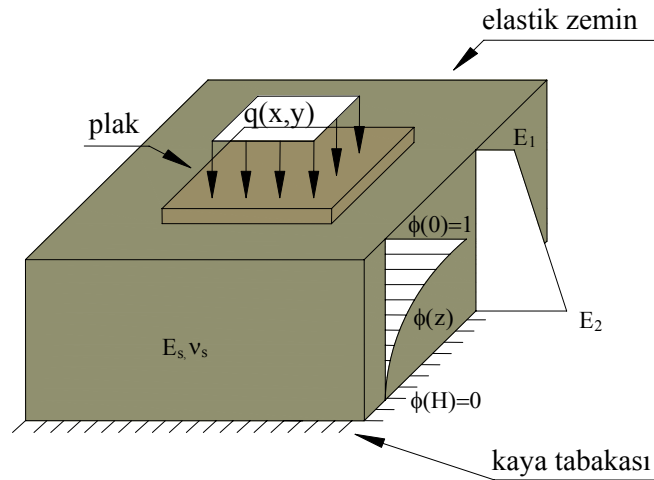
$$\Pi = \Pi_p + \Pi_s + V \quad (3)$$

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) [D] \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^T dx dy \quad (4)$$

$$\Pi_s = \frac{1}{2} \int_0^H \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dx dy dz \quad (5)$$

$$V = - \int_{\Omega} q w dx dy \quad (6)$$

biçiminde verilmektedir (Turhan, 1992).



Şekil 5. Elastik zemine oturan bir plak şeması

1.5.2. Yerdeğiştirme Bileşenleri ve Yapılan Kabuller

Zemin ortamında x ve y doğrultularındaki yatay yerdeğiştirme bileşenleri \bar{u} ve \bar{v} , z doğrultusundaki düşey yerdeğiştirme bileşeni \bar{w} ile kıyaslandığında ihmal edilebilecek düzeydedir.

$$\bar{u}(x, y, z) = 0 \quad (7)$$

$$\bar{v}(x, y, z) = 0 \quad (8)$$

Zemindeki düşey yerdeğiştirme bileşenleri plak düşey yerdeğiştirmeleri cinsinden, Vlasov ve Leont'ev (1966)'in kabullerine göre $\phi(0) = 1$ ve $\phi(H) = 0$ olmak üzere,

$$\bar{w}(x, y, z) = w(x, y)\phi(z) \quad (9)$$

şeklinde ifade edilmektedir. $\phi(z)$ fonksiyonunun derinlikle değişimi Şekil 5'te görülmektedir.

Yukarıdaki varsayımları kullanarak zemindeki şekildeğiştirme ifadeleri,

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0 & \gamma_{xy} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = 0 \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 & \gamma_{yz} &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} \phi(z) \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = w(x, y) \frac{\partial \phi(z)}{\partial z} & \gamma_{xz} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} \phi(z) \end{aligned} \quad (10)$$

şeklinde yazılabilmektedir. Lineer elastik, homojen ve izotrop zeminler için gerilme-şekildeğiştirme ilişkisi, E_s zeminin elastisite modülünü, ν_s zeminin poisson oranını göstermek ve

$$G_s = \frac{E_s}{2(1 + \nu_s)}, \quad \bar{E} = \frac{E_s(1 - \nu_s)}{(1 + \nu_s)(1 - 2\nu_s)} \text{ olmak üzere,}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \bar{E} \left[\varepsilon_x + \frac{\nu_s}{1-\nu_s} (\varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] & \tau_{xy} &= G_s \gamma_{xy} \\
\sigma_y &= \bar{E} \left[\varepsilon_y + \frac{\nu_s}{1-\nu_s} (\varepsilon_x + \varepsilon_z) \right] & \tau_{xz} &= G_s \gamma_{xz} \\
\sigma_z &= \bar{E} \left[\varepsilon_z + \frac{\nu_s}{1-\nu_s} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \right] & \tau_{yz} &= G_s \gamma_{yz}
\end{aligned} \tag{11}$$

şeklindedir. (10) ifadesinin (11) ifadesinde yerine konulması ve gerekli işlemlerin yapılmasıyla,

$$\begin{aligned}
\sigma_z &= \bar{E} \varepsilon_z = \bar{E} w \frac{\partial}{\partial z} \phi(z) \\
\tau_{xz} &= G_s \gamma_{xz} = G_s \frac{\partial w}{\partial x} \phi(z) \\
\tau_{yz} &= G_s \gamma_{yz} = G_s \frac{\partial w}{\partial y} \phi(z)
\end{aligned} \tag{12}$$

ifadeleri elde edilmektedir.

1.5.3. Zeminde Şekildeğiştirme Enerjisi İfadelerinin Elde Edilmesi

(10) ve (12) ifadelerinin (5) ifadesinde kullanılması ve gerekli düzenlemelerin yapılmasıyla zeminin potansiyel enerjisi ifadesi,

$$\Pi_s = \frac{1}{2} \int_0^H \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\bar{E} w^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} \phi(z) \right)^2 + \left(G_s (\nabla w)^2 \phi(z)^2 \right) \right] dx dy dz \tag{13}$$

şekline dönüşmekte ve

$$k = \int_0^H \bar{E} \left(\frac{\partial \phi(z)}{\partial z} \right)^2 dz \tag{14}$$

$$2t = \int_0^H G_s \phi(z)^2 dz \quad (15)$$

kısaltmaları yapılarak,

$$\Pi_s = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (kw^2 + 2t(\nabla w)^2) dx dy \quad (16)$$

halini almaktadır. Bu ifadedeki k Winkler tipi zeminde yatak katsayısı olarak adlandırılan zemin parametresini, $2t$ ise zemindeki kayma şekildeğiştirmelerinin gözönüne alınmasıyla ortaya çıkan zemin kayma parametresini göstermektedir. (14) ve (15)'teki ifadelerden bu değerlerin zeminin elastik özelliklerine, zemin derinliğine ve yalnızca $z=0$ ve $z=H$ daki sınır değerleri tam olarak bilinen $\phi(z)$ fonksiyonuna bağlı olduğu görülmektedir (Turhan, 1992).

1.5.4. Sistemin Potansiyel Enerjisinin Minimizasyonu

Minimum potansiyel enerji ilkesine göre bir sistemin verilen tüm sınırlamalarda tutarlı olarak alabileceği yerdeğiştirme durumları içinde dengeyi sağlayan durum potansiyel enerjiyi minimum kılan durum olmaktadır. Başka bir deyişle üzerindeki yüklerle belirli bir şekildeğiştirme durumunda dengede olan bir elemanın, sonsuz küçük bir yerdeğiştirme değişiminde dış yükler tarafından yapılan iş, elemanın şekildeğiştirme enerjisi değişimine eşittir. Bu da (3) ifadesinin w ve ϕ ye göre varyasyonunun sıfıra eşitlenmesi ile elde edilmektedir. (4), (6) ve (16) ifadelerinin (3) ifadesinde yerine yazılarak bahsi geçen varyasyonların alınması ve ara işlemlerin yapılması sonucunda,

$$m = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \bar{E} w^2 dx dy \quad (17)$$

$$n = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} G_s (\nabla w)^2 dx dy \quad (18)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & \int (D\nabla^4 w - 2t\nabla^2 w + kw - q) \delta w dx dy \\ & + \int_0^H \left(-m \frac{\partial^2 \phi(z)}{\partial z^2} + n\phi(z) \right) \delta \phi dz \\ & + \text{sınır şartları} = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

ifadesi elde edilmektedir. Bu ifadedeki varyasyonlar sıfıra eşit olamayacağından parantez içerisindeki ifadeler sıfıra eşit olacaktır. Buradan iki parametrelili zemine oturan eğilme plağına ilişkin diferansiyel denklemler,

$$D\nabla^4 w - 2t\nabla^2 w + kw = q \quad (20)$$

şeklinde elde edilmektedir. Plak dışında kalan bir noktada ise diferansiyel denklemler,

$$-2t\nabla^2 w + kw = 0 \quad (21)$$

şeklinde olmaktadır. İkinci parantezin içerisindeki ifadenin sıfıra eşitlenmesi ile plak boyutlarının ve yükleme şeklinin etkisini de içerecek şekilde $\phi(z)$ fonksiyonunun değişimini veren sınır şartı diferansiyel denklemler,

$$-m \frac{\partial^2 \phi(z)}{\partial z^2} + n\phi(z) = 0 \quad (22)$$

elde edilmektedir. Buradan görüldüğü gibi elastik zemine oturan plak problemlerinde çözülmesi gereken üç denklem söz konusudur. Bunlardan (20) denkleminin çözülmesi ile plakta oluşan yerdeğiştirmeler, (21) ifadesinin çözülmesiyle plak dışında kalan bölgede zemine ilişkin yerdeğiştirmeler ve (22) ifadesinin çözülmesiyle zemin içerisinde derinlik boyunca oluşan yerdeğiştirmeler elde edilmiş olmaktadır (Turhan, 1992).

1.5.5. Zemin Düşey Yerdeğiştirme Fonksiyonunun Belirlenmesi

Bugüne kadar yapılan çeşitli çalışmalarda $\phi(z)$ fonksiyonunun seçimiyle ilgili farklı kabuller sonucu k ve $2t$ parametreleri için farklı değerler bulunmuştur. $\phi(z)$ fonksiyonunun belirlenmesi için en uygun olanı ilk olarak Vlasov ve Leont'ev (1960) tarafından sunulan ve Vallabhan ve Das (1988) tarafından geliştirilen yaklaşımdır. Bu yaklaşıma göre $\phi(z)$ fonksiyonunun $z=0$ ve $z=H$ daki sınır şartlarını ve (22) homojen diferansiyel denklemini sağlayan çözümü,

$$\gamma^2 = \frac{n}{m} H^2 \quad (23)$$

olmak üzere,

$$\phi(z) = \frac{\sinh \gamma \left(1 - \frac{z}{H}\right)}{\sinh \gamma} \quad (24)$$

şeklinde verilmektedir. Zemin yüzey parametresi diye adlandırılan γ boyutsuz katsayısının daha açık ifadesi Straughan (1990) tarafından,

$$\left(\frac{\gamma}{H}\right)^2 = \frac{(1-2\nu_s) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\nabla w)^2 dx dy}{2(1-\nu_s) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w^2 dx dy} \quad (25)$$

verilmektedir.

(14) ve (15) ifadelerinden görüldüğü gibi k ve $2t$ parametreleri zeminin malzeme özelliklerine, zeminin derinliğine ve $\phi(z)$ fonksiyonuna bağlıdır. $\phi(z)$ fonksiyonu ise zemin derinliğine ve γ parametresine bağlı olarak hesaplanabilmektedir. γ parametresinin değeri ise dış yüklere maruz plağın yerdeğiştirmelerine, zeminin poisson oranına ve zemin derinliğine bağlı olarak değişmektedir. Görülmektedir ki üç parametrelilik elastik zemine oturan plak probleminde $w, k, 2t, H, q$ ve γ değişkenleri arasında son derece karmaşık bir

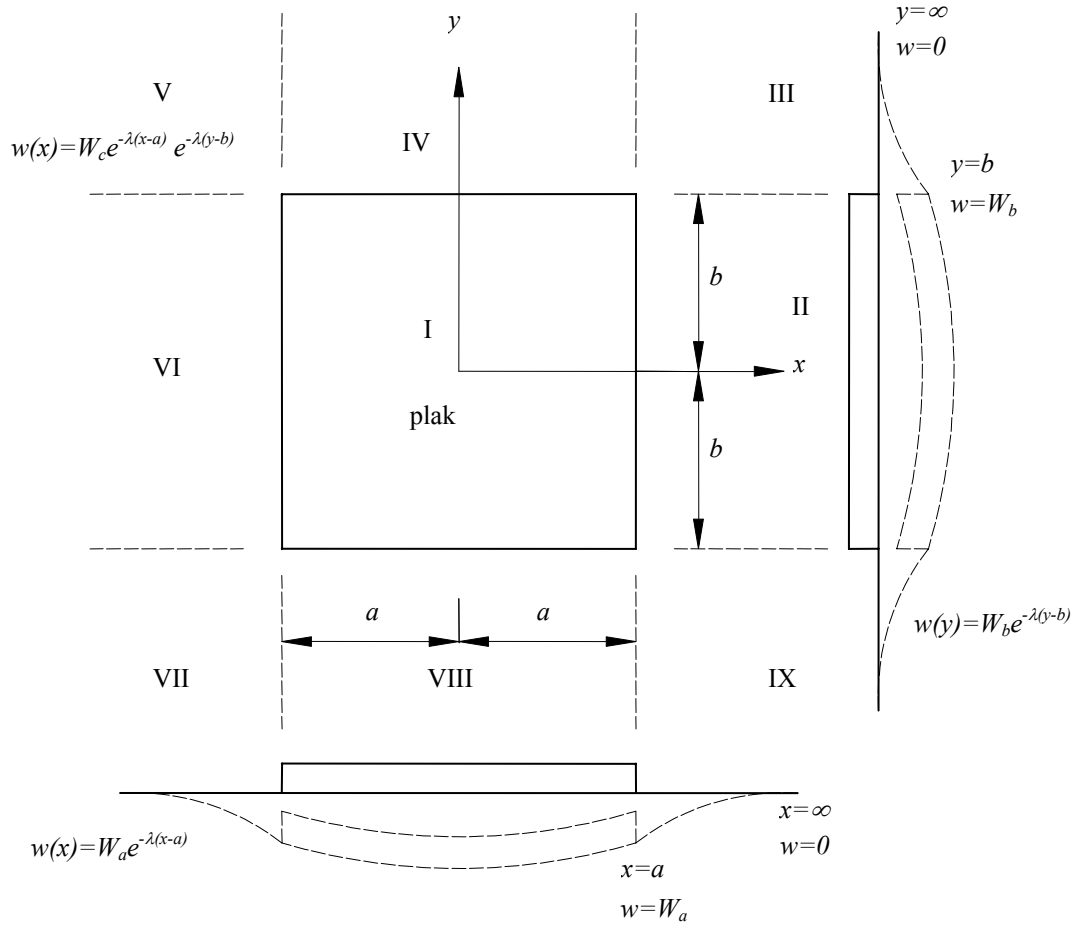
ilişki vardır. Buradan çözüme bir ardışık yaklaşımla ulaşılabileceği anlaşılmaktadır. Bu yaklaşım hakkında detaylı bilgi 1.5.7. başlığı altında verilmektedir.

1.5.6. Plak Dışında Kalan Zemin Ortamının Plağa Etkisi

Plak dışında kalan zemin ortamının plak kenar ve köşelerinde oluşturacağı etkiler, (21) ifadesinin $z=0$ derinliğinde, bazı basitleştirici kabuller yapılarak yaklaşık olarak çözümlenmesiyle belirlenebilmektedir. Bu diferansiyel denklemin çözümü için Vlasov ve Leont'ev (1966) tarafından önerilen yaklaşık bir çözüm yöntemi kullanılmıştır. $2a \times 2b$ boyutlu bir dikdörtgen plağın çevresindeki zemin ortamı 8 bölgeye ayrılmış, II,IV,VI,VIII bölgelerinden plağa gelen etkiler komşu oldukları kenarlardaki çökme fonksiyonuna bağlı kenarlar boyunca yayılı kesme kuvvetleri ile, III,V,VII, IX bölgelerinin etkisi ise köşe noktasındaki çökmeye bağlı köşe kuvvetleri ile gözönüne alınmıştır. $z=0$ derinliğinde çözüm yapılacağı için $\bar{w}(x, y, 0) = w(x, y)$ olacaktır. Şekil 6'daki gibi bir plak için $w(x, y)$ fonksiyonunun şekli, W_a plağın $x = a$ sınırındaki düşey yerdeğiştirmesini, W_b plağın $y = b$ sınırındaki düşey yerdeğiştirmesini ve W_c plağın köşesindeki düşey yerdeğiştirmesini göstermek üzere,

$$\begin{aligned}
 a < x < \infty \text{ ve } -b < y < b \text{ aralığında} & \quad w(x, y) = W_a e^{-\lambda(x-a)} \\
 b < y < \infty \text{ ve } -a < x < a \text{ aralığında} & \quad w(x, y) = W_b e^{-\lambda(y-b)} \\
 \text{köşelerde } a < x < \infty \text{ ve } b < y < \infty & \quad w(x, y) = W_c e^{-\lambda(x-a)} e^{-\lambda(y-b)}
 \end{aligned} \tag{26}$$

şeklindedir (Turhan, 1992). Burada $\lambda = \sqrt{k/2t}$ dir.



Şekil 6. Plak ve çevre ortamının bölgelere ayrılması

1.5.7. Zemin Yüzey Parametresinin Hesaplanması

Zemin yüzey parametresi (γ), (25) ifadesinin tüm plak-zemin sisteminde hesaplanması ile belirlenmektedir. Bunun için yukarıda tanımlanan deplasman fonksiyonu kullanılarak her bölge için pay ve payda ifadeleri,

II. ve VI. bölgelerde,

$$\begin{aligned}
 w(x, y) &= W_a e^{-\lambda(x-a)} \\
 \int_{-b}^{+b} \int_{-a}^{+a} w^2 dx dy &= \frac{1}{2\lambda} \int_{-b}^{+b} W_a^2 dy \\
 \int_{-b}^{+b} \int_{-a}^{+a} (\nabla w)^2 dx dy &= \frac{\lambda}{2} \int_{-b}^{+b} W_a^2 dy
 \end{aligned} \tag{27}$$

IV. ve VIII. bölgelerde,

$$\begin{aligned}
 w(x, y) &= W_b e^{-\lambda(y-b)} \\
 \int_{b-a}^{\infty+a} \int_{b-a}^{\infty+a} w^2 dx dy &= \frac{1}{2\lambda} \int_{-a}^{\infty+a} W_b^2 dx \\
 \int_{b-a}^{\infty+a} \int_{b-a}^{\infty+a} (\nabla w)^2 dx dy &= \frac{\lambda}{2} \int_{-a}^{\infty+a} W_b^2 dx
 \end{aligned} \tag{28}$$

III., V., VII. ve IX. bölgelerde,

$$\begin{aligned}
 w(x, y) &= W_c e^{-\lambda(x-a)} e^{-\lambda(y-b)} \\
 \int_{b-a}^{\infty} \int_{a-a}^{\infty} w^2 dx dy &= \frac{W_c^2}{4\lambda^2} \\
 \int_{b-a}^{\infty} \int_{a-a}^{\infty} (\nabla w)^2 dx dy &= W_c^2
 \end{aligned} \tag{29}$$

I. bölgede,

$$\begin{aligned}
 \int_{-b-a}^{+b+a} \int_{-b-a}^{+b+a} w^2 dx dy \\
 \int_{-b-a}^{+b+a} \int_{-b-a}^{+b+a} (\nabla w)^2 dx dy
 \end{aligned} \tag{30}$$

bağıntılarından hesaplanmaktadır (Turhan, 1992).

Daha öncede belirtildiği gibi γ parametresi ardışık yaklaşım yöntemiyle belirlenmektedir. Bu yöntemde göre başlangıçta γ parametresi birim alınarak (24) ifadesinden $\phi(z)$ fonksiyonu belirlenmekte ve (14) ile (15) ifadelerinde yerine konularak k ve $2t$ parametreleri hesaplanmaktadır. Hesaplanan zemin parametreleri kullanılarak plak-zemin sistemi çözülmekte ve yerdeğiştirmeler bulunmaktadır. Elde edilen yerdeğiştirmeler kullanılarak (25) ifadesinden γ parametresi tekrar hesaplanmakta ve son iki γ parametresi arasındaki fark önceden belirlenen bir değerden küçük oluncaya kadar iterasyona devam edilmektedir.

1.6. Mindlin Plak Teorisi

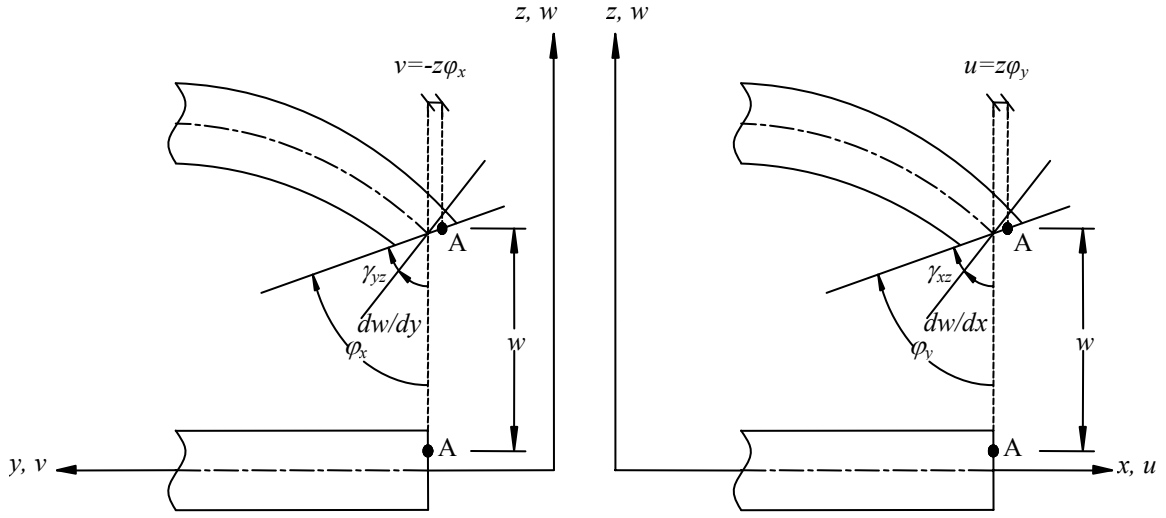
Plaklar, kalınlığı diğer iki boyutu yanında çok küçük olan ve genellikle orta düzlemine dik olarak yüklenen düzlemsel yapı elemanlarıdır. Kullanım amacına ve inşa edileceği yere bağlı olarak çeşitli geometrik şekillere ve çeşitli mesnet koşullarına sahip olabilmektedirler. Plak kalınlığının (h), kısa kenar uzunluğuna (l_x) oranına bağlı olarak ince ve kalın plaklar adı altında iki sınıfa ayrılmaktadırlar. Teknik literatürde (h/l_x) oranı $1/20$ 'den küçük olanlar ince, büyük olanlar ise kalın plaklar olarak adlandırılmaktadırlar.

Üst yapılar, karayolları, konteynırlar, köprüler, bazı makine parçaları, su yapıları, gemiler, füzeler, uçaklar ve uzay araçları gibi çeşitli mühendislik alanlarında geniş ölçüde kullanım alanı bulmaktadırlar.

Yaygın olarak kullanılan plak teorilerinden biri Kirchhoff (1850) tarafından geliştirilmiştir. İnce plakların çözümünde yeterli bir yaklaşıklıkla kullanılan Kirchhoff plak teorisinde düzleme dik kayma şekildeğiştirmelerin etkisi ihmal edilmektedir. Oysa plak kalınlığı arttıkça söz konusu etkinin hesaba katılması zorunlu olmaktadır. Bu yönde geliştirilen teorilerin başında Reissner (1944, 1945, 1947)' in çalışmaları gelmektedir. Bu çalışmada da kullanılan ve araştırmacılar arasında yaygın olarak kabul görmüş bir diğer kalın plak teorisi de Mindlin (1951) tarafından geliştirilmiştir. Bu teoride yapılan başlıca temel kabuller aşağıda verilmektedir.

- 1-) Malzeme homojen, izotrop ve lineer elastiktir.
- 2-) Eğilme esnasında plağın orta yüzeyinde şekildeğiştirme meydana gelmemektedir.
- 3-) Düşey doğrultudaki düşey gerilmeler diğer gerilmeler ile kıyaslandığında çok küçük kalmaktadır. Bu nedenle σ_z gerilmeleri ihmal edilmektedir.
- 4-) Şekil değiştirmeden önce düzlem ve orta yüzeye dik olan kesitler şekil değiştirmeden sonra düzlem kalırlar ancak dik olmazlar (Şekil 7).

Bu kabullerden ilk üçü aynı zamanda Kirchhoff plak teorisinde de kullanılan kabullerdir. Mindlin plak teorisi son kabul ile Kirchhoff plak teorisinden ayrılmaktadır. Bu kabul düzleme dik kayma şekildeğiştirmelerinin etkisini hesaba katmaktadır. Kalınlık arttıkça söz konusu etkinin hesaba katılması zorunlu olmaktadır (Timoshenko, 1964).



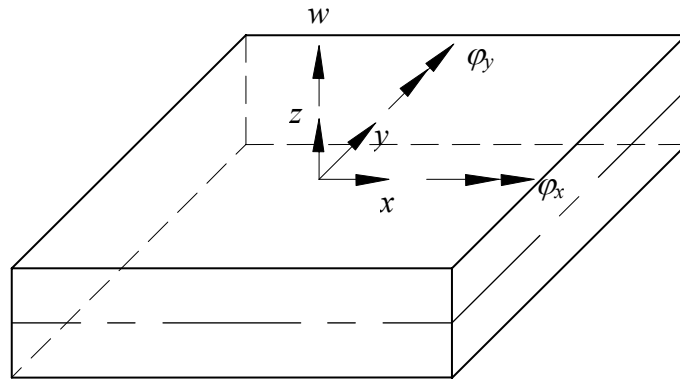
Şekil 7. Mindlin plak teorisine göre yerdeğiştirmeler

1.6.1. Yerdeğiştirme Bileşenleri

Şekil 8'deki plakta u ve v 'nin z ile orantılı w 'nın z 'den bağımsız olduğu kabul edilerek plak yerdeğiştirmeleri, w , ϕ_x ve ϕ_y sırasıyla plağın düşey yerdeğiştirmesini, x eksenini etrafındaki dönmeyi ve y eksenini etrafındaki dönmeyi göstermek üzere,

$$\begin{aligned} u &= z\phi_y(x, y) \\ v &= -z\phi_x(x, y) \\ w &= w(x, y) \end{aligned} \quad (31)$$

şeklinde yazılabilmektedir (Mindlin, 1951).



Şekil 8. Plak eksenleri ve yerdeğiştirmeleri

1.6.2. Şekildeğiştirme-Yerdeğiştirme Bağlılıları

İzotrop bir plakta yerdeğiştirmeler cinsinden normal ve kayma birim şekildeğiştirme bağılılıları, u , v ve w sırasıyla x , y ve z doğrultularındaki yerdeğiştirmeleri göstermek üzere,

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\
 \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}
 \end{aligned} \tag{32}$$

ifadeleriyle verilmektedir (Timoshenko, 1964). Yukarıda yapılan üçüncü kabul dikkate alınarak (31) bağılılısında verilen yerdeğiştirme bileşenlerinin şekildeğiştirme-yerdeğiştirme bağılılılarında yerine konulması ile,

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= z \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \\
 \varepsilon_y &= -z \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \\
 \varepsilon_z &= 0 \\
 \gamma_{xy} &= z \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) \\
 \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_y \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_x
 \end{aligned} \tag{33}$$

ifadeleri elde edilmektedir.

1.6.3. Gerilme-Şekildeğiştirme Bağlılıları

Genelleştirilmiş Hooke yasası gereğince izotrop bir plak elemanda gerilme ifadeleri şekildeğiştirmelere bağılılı olarak, E , G , ν , σ ve τ sırasıyla elastisite modülünü, kayma modülünü, poisson oranını, normal gerilmeleri ve kayma gerilmelerini göstermek üzere,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z) & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x - \nu\sigma_z) & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y) & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}
\end{aligned} \tag{34}$$

şeklinde verilmektedir (Szilard,1974).

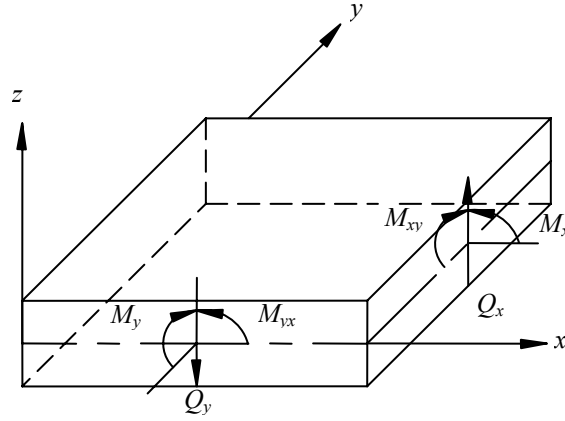
1.6.4. Gerilme-Yerdeğiştirme Bağlılıları

(33) ifadesinde verilen şekildeğiştirme-yerdeğiştirme bağıntılarının yukarıda (34) ifadesiyle verilen gerilme-şekildeğiştirme bağıntılarında kullanılmasıyla gerilme-yerdeğiştirme bağıntıları aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= z \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x} - \nu \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \right) \\
\sigma_y &= z \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\nu \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \right) \\
\tau_{xy} &= zG \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) \\
\tau_{xz} &= G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_y \right) \\
\tau_{yz} &= G \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_x \right)
\end{aligned} \tag{35}$$

1.6.5. Moment ve Kesme Kuvveti Bağlılıları

Pozitif yönleri Şekil 9'da gösterilen, gerilme bağıntılarından elde edilen moment ve kesme kuvvetleri ifadeleri aşağıda verilmektedir (Ugural, 1981).



Şekil 9. Dış kuvvetler ve momentlerin pozitif yönleri

$$\begin{aligned}
 M_x &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z dz & M_y &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y z dz & M_{xy} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} z dz \\
 Q_x &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xz} dz & Q_y &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yz} dz
 \end{aligned} \tag{36}$$

(35) ifadelerinde verilen gerilme-yerdeğiştirme bağıntılarının bu ifadelerde yerlerine yazarak z kalınlığı boyunca integrali alınırsa plağın herhangi bir noktasındaki moment ve kesme kuvvetlerini veren bağıntılar, D plağın eğilme rijitliğini, κ^2 ise kayma düzeltme faktörünü göstermek üzere,

$$\begin{aligned}
 M_x &= D \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x} - \nu \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \right) \\
 M_y &= D \left(-\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \nu \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \\
 M_{xy} &= D \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) \\
 Q_x &= \kappa^2 Gh \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_y \right) \\
 Q_y &= \kappa^2 Gh \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_x \right)
 \end{aligned} \tag{37}$$

şeklinde elde edilmektedir. Bilindiği üzere kalınlık doğrultusundaki kayma gerilmesi dağılımı paraboliktir. Hesaplarda basitleştirme sağlaması bakımından bu gerilme dağılımı düzgün kabul edilmektedir. Bu kabulün sonucu olarak parabolik dağılımın düzgün dağılıma çevrilmesi için bir κ^2 kayma düzeltme katsayısı kullanılmaktadır. Bu çalışmada kayma düzeltme katsayısı Reissner (1945) teorisinde kullanıldığı gibi 5/6 olarak dikkate alınmaktadır. Bu denklemler matris formunda, momentler için,

$$\{M\} = [D_b] \{\chi\} \text{ yada } \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D & \nu D & 0 \\ \nu D & D & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (38)$$

ve kesme kuvvetleri için,

$$\{Q\} = [D_s] \{\phi\} \text{ yada } \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} Gh & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} Gh \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_y \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_x \end{Bmatrix} \quad (39)$$

şeklinde yazılabilmektedir. Bu ifadelerdeki D_b ve D_s sırasıyla eğilme elastisite matrisi ve kayma elastisite matrisi olarak adlandırılmaktadır.

1.6.6. Plak Denklemleri

Düzgün yayılı yüke maruz plaktan çıkarılan çok küçük bir plak parçası üzerinde moment ve kesme kuvvetlerinin her bir yüzdeki dağılımından faydalanarak denge denklemleri,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0 \\
\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y &= 0 \\
\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q &= 0
\end{aligned} \tag{40}$$

şeklinde verilmektedir (Berktaş, 1992). Bu denklemlerde (37) bağıntısıyla verilen moment ve kesme kuvveti ifadelerinin kullanılmasıyla Mindlin plak teorisine göre kalın plak diferansiyel denklemleri aşağıdaki şekilde elde edilmektedir.

$$\begin{aligned}
D \left(\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} \right) + D \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} \right) - \frac{5Gh}{6} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_y \right) &= 0 \\
D \left(-\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} \right) + D \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} \right) - \frac{5Gh}{6} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_x \right) &= 0 \\
\frac{5Gh}{6} \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{5Gh}{6} \left(-\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + q &= 0
\end{aligned} \tag{41}$$

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Problemin Sonlu Elemanlar Yöntemine Göre Formülasyonu

Bir çok mühendislik problemi için kapalı matematiksel çözüm elde etmek mümkün olamamaktadır. Bu nedenle değişik malzeme özellikleri, sınır şartları ve geometri içeren karmaşık problemler için yaklaşık fakat yeterli sonuçlar veren sayısal çözümlere başvurmak gerekmektedir. Son yıllarda bilgisayar teknolojisindeki gelişmeyle birlikte karışık mühendislik problemlerinin çözümünü sonlu sayıda bilinmeyenli bir lineer denklem takımının çözümüne indirgeyen yöntemler sıkça tercih edilmeye başlanmıştır.

Bu yöntemlerden özellikle sonlu elemanlar yöntemi sisteme ilişkin bilgileri, mesnet şartlarını, dış etkilerinin sürekli veya ani değişimlerini ve düzgün olmayan geometrileri kolaylıkla göz önüne alma olanağı vermektedir. Yöntemde sürekli ortam her birine sonlu eleman adı verilen sonlu sayıda parçalara bölünmekte, her elemanın düğüm noktalarına belirli serbestlik dereceleri tanınarak elemanın davranışı bu serbestlik derecelerini içeren denklem takımı ile ifade edilmektedir. Böylelikle sonsuz serbestlik derecesi olan sürekli ortam, sonlu serbestlik dereceli bir modele dönüştürülmektedir. Her eleman komşu olan elemene sonsuz sayıda nokta ile bağlı olmasına rağmen, bu modelde sadece düğüm noktalarında bağlı olduğu kabul edilmekte ve böylece elemanların sadece bu noktalarda uygunluğunun sağlanması yeterli olmaktadır (Zienkiewicz, 1977; Zienkiewicz, Taylor, 1989).

Bu bölümde 4 düğüm noktalı 12 serbestlik dereceli (PBQ4) ve 8 düğüm noktalı 24 serbestlik dereceli (PBQ8) Mindlin plak elemanların kullanılmasıyla rijitlik matrislerinin ve yük vektörlerinin elde edilmesi üzerinde durulmaktadır. Söz konusu elemanlarda ince plak çözümlerinde rastlanan kayma kilitlenmesi probleminin önlenmesi amacıyla rijitlik matrisleri eğilme ve kayma terimleri için ayrı ayrı elde edilerek integraller kayma terimleri için farklı Gauss noktaları kullanılarak alınmaktadır. Eleman rijitlik matrisleri ve yük vektörlerinin toplanması suretiyle sistem rijitlik matrisi ve sistem yük vektörü oluşturulmaktadır. Son olarak plak düzlemi dışında kalan zemin ortamının plak kenarlarına etkisi eşdeğer sınır kuvvetlerine dönüştürülerek rijitlik matrisinde karşılık gelen terimlere ilave edilmesiyle sınır şartları dikkate alınmış olmaktadır.

Plak ve elastik zemin sisteminin toplam şekildeğiştirme enerjisi,

$$\begin{aligned}
U_e &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]^T [D] \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] dA \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} [w(x, y)]^T k [w(x, y)] dA \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right]^T 2t \left[\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right] dA
\end{aligned} \tag{42}$$

şeklinde verilmektedir. Burada Ω_e sadece eleman yüzeyinde bir yüzeysel integrali göstermektedir. Bu ifadenin birinci kısmının integrali plak eleman rijitlik matrisini, ikinci kısmın integrali zeminin aksenal yerdeğiştirmesini temsil eden eleman rijitlik matrisini ve üçüncü kısmın integrali ise eleman zemin kayma parametresi matrisini vermektedir. Bu şekilde (42) ifadesi yeniden düzenlenecek olursa, $[k_p^e]$, $[k_k^e]$ ve $[k_{2t}^e]$ sırasıyla plak eleman rijitlik matrisini, zeminin aksenal yerdeğiştirmesini temsil eden eleman rijitlik matrisini ve eleman zemin kayma parametresi matrisini göstermek üzere,

$$U_e = \frac{1}{2} \{w_e\}^T \left([k_p^e] + [k_k^e] + [k_{2t}^e] \right) \{w_e\} \tag{43}$$

bağıntısı elde edilmektedir. Buradan plak zemin sisteminin eleman rijitlik matrisi,

$$[k^e] = [k_p^e] + [k_k^e] + [k_{2t}^e] \tag{44}$$

şeklinde elde edilmektedir (Turhan, 1992).

2.1.1. Plak Eleman Rijitlik Matrisinin Elde Edilmesi

2.1.1.1. 12 Serbestlik Dereceli Dikdörtgen Plak Eleman Rijitlik Matrisi

Şekil 10'da görülen $2a \times 2b$ boyutlarındaki 4 düğüm noktalı, 12 serbestlik dereceli dikdörtgen plak elemana ilişkin her bir düğüm noktasında oluşacak yerdeğiştirme ve dönmeler,

$$w_i, \varphi_{x_i} \text{ ve } \varphi_{y_i} \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (45)$$

şeklinde ifade edilerek eleman düğüm noktası yerdeğiştirmeleri vektörü,

$$\{w_e\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \varphi_{x_1} \\ \varphi_{y_1} \\ w_2 \\ \varphi_{x_2} \\ \varphi_{y_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_4 \\ \varphi_{x_4} \\ \varphi_{y_4} \end{Bmatrix} \quad (46)$$

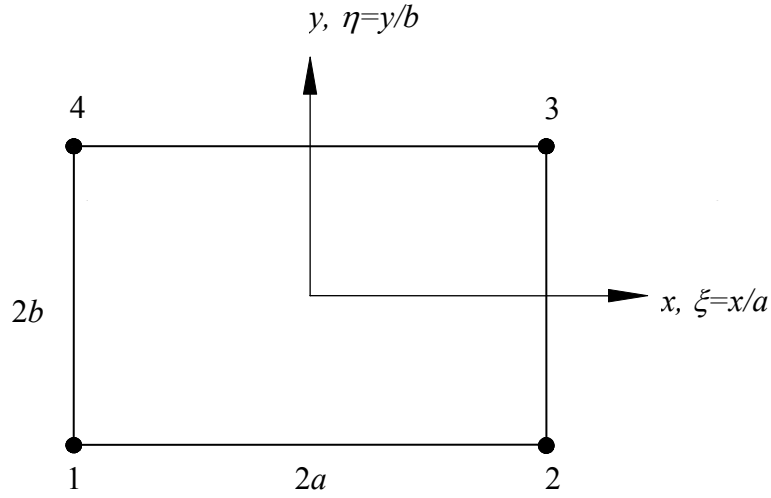
ve eleman şekil fonksiyonu,

$$[N] = [N_1 \quad 0 \quad 0 \quad N_2 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad N_4 \quad 0 \quad 0] \quad (47)$$

olmak üzere eleman yerdeğiştirme fonksiyonu,

$$w = [N]\{w_e\} \quad (48)$$

şeklinde yazılabilmektedir.



Şekil 10. 12 serbestlik dereceli Mindlin plak eleman (PBQ4)

Bu eleman için şekil fonksiyonları $\xi_0 = \xi_i \xi$ ve $\eta_0 = \eta_i \eta$ olmak üzere

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0) \quad (i=1, 2, \dots, 4) \quad (49)$$

şeklinde verilmektedir (Weaver, Johnston, 1984). ξ_0 ve η_0 'ın elemanın köşelerinde alacağı koordinat değerleri Tablo 1'de verilmektedir.

Tablo 1. PBQ4 ve PBQ8 elemanları için noktasal koordinatlar

i	1	2	3	4	5	6	7	8
ξ_i	-1	+1	+1	-1	0	+1	0	-1
η_i	-1	-1	+1	+1	-1	0	+1	0

Bilindiği gibi elastik bir cisimde eğrilikler $\{\chi\}$, yerdeğiştirmelere $\{w\}$ bağlı olarak,

$$\{\chi\} = [\partial]\{w\} \quad (50)$$

şeklinde ifade edilmekte ve yerdeğiştirmeleri şekildeğiştirmelere bağlayan bağ matrisi,

$$[B] = [\partial]\{N\} \quad (51)$$

eşitliği ile verilmektedir (Bathe, 1996). Dolayısıyla birinci ifadeden $[\partial]$ operatör matrisi belirlendiğinde $[B]$ matrisi de ikinci ifadeden hesaplanabilmektedir. (50)'nin bileşenlerinin açık olarak yazılması,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_y \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_x \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_{11} & \partial_{12} & \partial_{13} \\ \partial_{21} & \partial_{22} & \partial_{23} \\ \partial_{31} & \partial_{32} & \partial_{33} \\ \partial_{41} & \partial_{42} & \partial_{43} \\ \partial_{51} & \partial_{52} & \partial_{53} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix} \quad (52)$$

ve $[\partial]\{w\}$ çarpımının yapılması ile aşağıdaki beş denkleme ulaşılmaktadır.

$$\begin{aligned} \partial_{11}w + \partial_{12}\varphi_x + \partial_{13}\varphi_y &= \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \\ \partial_{21}w + \partial_{22}\varphi_x + \partial_{23}\varphi_y &= -\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \\ \partial_{31}w + \partial_{32}\varphi_x + \partial_{33}\varphi_y &= \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \partial_{41}w + \partial_{42}\varphi_x + \partial_{43}\varphi_y &= \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_y \\ \partial_{51}w + \partial_{52}\varphi_x + \partial_{53}\varphi_y &= \frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_x \end{aligned} \quad (53)$$

Bu denklemlerin sağ ve sol taraflarındaki terimler karşılaştırılarak bilinmeyenler belirlenmektedir.

$$\begin{aligned}
\partial_{13} &= \partial_{41} = \frac{\partial}{\partial x} \\
\partial_{22} &= -\frac{\partial}{\partial y} \\
\partial_{33} &= \partial_{51} = \frac{\partial}{\partial y} \\
\partial_{32} &= -\frac{\partial}{\partial x} \\
\partial_{43} &= 1 \\
\partial_{52} &= -1 \\
\partial_{11} &= \partial_{12} = \partial_{21} = \partial_{23} = \partial_{31} = \partial_{42} = \partial_{53} = 0
\end{aligned} \tag{54}$$

Dolayısıyla i . düğüm noktasına ilişkin $[B]_i$ matrisi,

$$[B]_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & N_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & -N_i & 0 \end{bmatrix} \quad (i=1, 2, \dots, n) \tag{55}$$

şeklinde elde edilmektedir (Weaver, Johnston, 1984). Bu matris eğilme ve kayma terimleri için ayrı ayrı,

$$[B_b]_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (i=1, 2, \dots, n) \tag{56}$$

$$[B_s]_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & N_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & -N_i & 0 \end{bmatrix} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (57)$$

şeklinde yazılabilmektedir. Yerdeğiştirmeleri şekildeğiştirmelere bağlayan matrisler, eğilme terimleri için,

$$[B_b] = [[B_b]_1 \quad [B_b]_2 \quad \dots \quad [B_b]_n] \quad (58)$$

kayma terimleri için,

$$[B_s] = [[B_s]_1 \quad [B_s]_2 \quad \dots \quad [B_s]_n] \quad (59)$$

ifadelerinden belirlenmektedir. Burada n indisi eleman düğüm noktası adedini göstermekte olup 12 serbestlik dereceli eleman için 4 değerini almaktadır. Görüldüğü gibi bağ matrisleri şekil fonksiyonlarının genel eksen takımına göre türevlerini içeren terimlerden oluşmaktadır. oysa şekil fonksiyonları yerel eksen takımına göre tanımlıdır. Gerekli olan koordinat dönüşümü Jakobien matrisi kullanılarak yapılmakta ve eleman rijitlik matrisi,

$$[k_p^e] = \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] = ab \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B_b]^T [D_b] [B_b] d\xi d\eta + ab \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B_s]^T [D_s] [B_s] d\xi d\eta \quad (60)$$

ifadesinden hesaplanmaktadır (Weaver, Johnston, 1984).

Bu ifadedeki integrallerin hesaplanmasında Gauss Sayısal İntegrasyon yöntemi kullanılmaktadır. Ancak bilindiği gibi Mindlin plak elemanlarda plak kalınlığı azaldıkça kayma kilitlenmesi problemi ile karşılaşmaktadır. Zira kalınlık azaldıkça eğilme etkilerinin yanında kayma etkileri baskın olmakta ve plak gerçekte olduğundan daha rijit davranmaktadır. Bu problemi ortadan kaldırmak için rijitlik matrisinin hesabında integrasyon nokta adedinin azaltılması önerilmektedir (Zienkiewicz vd, 1971). Bu çalışmada söz konusu sorunla karşılaşmamak için (60) ifadesinin tam integrasyonunun (Tİ) yanında, kayma terimlerinden oluşan rijitlik matrisinin hesabında Gauss İntegral nokta adedinin azaltılması şeklinde uygulanan seçilerek azaltılmış integrasyon (SAİ) tekniği de

kullanılmaktadır. Sonuç olarak bu çalışmada her iki eleman için kullanılan integrasyon adımları Tablo 2’de verilmektedir. Bu integrasyon adımları için kullanılan koordinatlar ve ağırlık katsayıları da Tablo 3’te sunulmaktadır. İntegraller Maple 8.00 paket programı yardımıyla hesaplanmış ve elde edilen matrisler açık formda sunulmuştur.

Tablo 2. Bu çalışmada kullanılan integrasyon adımları

	Tam İntegrasyon (Tİ)		Seçilerek Azaltılmış İntegrasyon (SAİ)	
	$[K_b]^e$	$[K_s]^e$	$[K_b]^e$	$[K_s]^e$
PBQ4	2x2	2x2	2x2	1x1
PBQ8	3x3	3x3	3x3	2x2

Tablo 3. Gauss Nümerik İntegrasyon formülü için bu çalışmada kullanılan integrasyon adımlarına ilişkin koordinatlar ve ağırlık katsayıları

$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_i W_j f(\xi_i, \eta_j)$			
n	i	ξ, η	W
1	1	0.000	2.000
2	1	$1/\sqrt{3}$	1.000
	2	$-1/\sqrt{3}$	1.000
3	1	$\sqrt{0.6}$	5/9
	2	0.000	8/9
	3	$-\sqrt{0.6}$	5/9

(60) nolu ifadede (38), (39), (56) ve (57) bağıntılarıyla hesaplanan D_b , D_s , B_b ve B_s terimlerin yerlerine konulup integrallerin tam integrasyon tekniği ile hesaplanmasıyla, PBQ4 elemanı için,

$$[k_p^e] = \frac{5Eh}{36(1+\nu)} \left([k_{p,1}] + [k_{p,2}] + [k_{p,3}] + [k_{p,4}] \right) \quad (61)$$

ifadesi elde edilmektedir. Burada $[k_{p,i}]$ (60) nolu ifadenin ikinci teriminin integralinden elde edilen kayma terimlerini içeren rijitlik matrisini, diğerleri ise ilk terimin integrali ile elde edilen eğilme terimlerini içeren rijitlik matrislerini göstermektedir. Bu matrisler de kendi içerisinde 4 er alt matrise ayrılarak,

$$[k_{p,1}] = \begin{bmatrix} [k_{p,1}]_{11} & [k_{p,1}]_{12} \\ sim & [k_{p,1}]_{22} \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,2}] = \frac{a}{b} \begin{bmatrix} [k_{p,2}]_{11} & [k_{p,2}]_{12} \\ sim & [k_{p,2}]_{22} \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,3}] = \frac{b}{a} \begin{bmatrix} [k_{p,3}]_{11} & [k_{p,3}]_{12} \\ sim & [k_{p,3}]_{22} \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,4}] = \frac{3h^2}{40(\nu-1)} \begin{bmatrix} [k_{p,4}]_{11} & [k_{p,4}]_{12} \\ sim & [k_{p,4}]_{22} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilmektedir. Alt matrislerin açık şekli aşağıda verilmektedir.

$$[k_{p,1}]_{11} = \begin{bmatrix} \frac{b}{a} + \frac{a}{b} & a & -b & -\frac{b}{a} + \frac{a}{2b} & \frac{a}{2} & -b \\ \frac{4ab}{3} & 0 & \frac{a}{2} & \frac{2ab}{3} & 0 \\ \frac{4ab}{3} & b & 0 & \frac{2ab}{3} \\ \frac{b}{a} + \frac{a}{b} & a & b \\ sim. & \frac{4ab}{3} & 0 \\ \frac{4ab}{3} \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,1}]_{12} = \begin{bmatrix} \frac{b}{2a} - \frac{a}{2b} & \frac{a}{2} & -\frac{b}{2} & \frac{b}{2a} - \frac{a}{2b} & a & -\frac{b}{2} \\ -\frac{a}{2} & \frac{ab}{3} & 0 & -a & \frac{2ab}{3} & 0 \\ \frac{b}{2} & 0 & \frac{ab}{3} & -\frac{b}{2} & 0 & \frac{2ab}{3} \\ \frac{b}{2a} - \frac{a}{2b} & a & \frac{b}{2} & -\frac{b}{2a} - \frac{a}{2b} & \frac{a}{2} & \frac{b}{2} \\ -a & \frac{2ab}{3} & 0 & -\frac{a}{2} & \frac{ab}{3} & 0 \\ \frac{b}{2} & 0 & \frac{2ab}{3} & -\frac{b}{2} & 0 & \frac{ab}{3} \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,1}]_{22} = \begin{bmatrix} \frac{b}{a} + \frac{a}{b} & -a & b & -\frac{b}{a} + \frac{a}{2b} & -\frac{a}{2} & b \\ \frac{4ab}{3} & 0 & \frac{4ab}{3} & -\frac{a}{2} & \frac{2ab}{3} & 0 \\ \frac{4ab}{3} & -b & 0 & \frac{b}{a} + \frac{a}{b} & -a & -b \\ sim. & & & \frac{4ab}{3} & 0 & \frac{4ab}{3} \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,2}]_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{h^2}{5(v-1)} & 0 & 0 & -\frac{h^2}{10(v-1)} & 0 \\ \frac{h^2}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{h^2}{20} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ sim. & & & -\frac{h^2}{5(v-1)} & 0 \\ \frac{h^2}{10} & & & & \frac{h^2}{10} \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,2}]_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{h^2}{10(\nu-1)} & 0 & 0 & \frac{h^2}{5(\nu-1)} & 0 \\ -\frac{h^2}{20} & 0 & 0 & 0 & -\frac{h^2}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sim.} & & & \frac{h^2}{10(\nu-1)} & 0 \\ & & & & -\frac{h^2}{20} \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,2}]_{22} = [k_{p,2}]_{11}$$

$$[k_{p,3}]_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{h^2}{10} & 0 & 0 & -\frac{h^2}{10} & 0 \\ -\frac{h^2}{5(\nu-1)} & 0 & 0 & 0 & \frac{h^2}{5(\nu-1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sim.} & & & \frac{h^2}{10} & 0 \\ & & & & -\frac{h^2}{5(\nu-1)} \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,3}]_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{h^2}{20} & 0 & 0 & \frac{h^2}{20} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{10(\nu-1)} & 0 & 0 & -\frac{h^2}{10(\nu-1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{sim.} & 0 & 0 & -\frac{h^2}{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h^2}{10(\nu-1)} \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,3}]_{22} = [k_{p,3}]_{11}$$

$$[k_{p,4}]_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\nu+1) & 0 & 0 & (1-3\nu) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(1-3\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{sim.} & 0 & 0 & 0 & -(\nu+1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,4}]_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\nu+1) & 0 & 0 & -(1-3\nu) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-3\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{sim.} & 0 & 0 & 0 & (\nu+1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,4}]_{22} = [k_{p,4}]_{11}$$

(60) ifadesindeki kayma terimlerinin seçilerek azaltılmış integrasyon tekniği kullanılarak hesaplanması ile elde edilen rijitlik matrislerinin açık ifadeleri,

$$[k_{p,1}] = \frac{3}{4} \begin{bmatrix} [k_{p,1}]_{11} & [k_{p,1}]_{12} \\ sim. & [k_{p,1}]_{22} \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,1}]_{11} = \begin{bmatrix} \frac{b}{a} + \frac{a}{b} & a & -b & -\frac{b}{a} + \frac{a}{b} & a & -b \\ & ab & 0 & a & ab & 0 \\ & & ab & b & 0 & ab \\ & & & \frac{b}{a} + \frac{a}{b} & a & b \\ & sim. & & & ab & 0 \\ & & & & & ab \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,1}]_{12} = \begin{bmatrix} -\frac{b}{a} - \frac{a}{b} & a & -b & \frac{b}{a} - \frac{a}{b} & a & -b \\ -a & ab & 0 & -a & ab & 0 \\ b & 0 & ab & -b & 0 & ab \\ \frac{b}{a} - \frac{a}{b} & a & b & -\frac{b}{a} - \frac{a}{b} & a & b \\ -a & ab & 0 & -a & ab & 0 \\ b & 0 & ab & -b & 0 & ab \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,1}]_{22} = \begin{bmatrix} \frac{b}{a} + \frac{a}{b} & -a & b & -\frac{b}{a} + \frac{a}{b} & -a & b \\ & ab & 0 & -a & ab & 0 \\ & & ab & -b & 0 & ab \\ & & & \frac{b}{a} + \frac{a}{b} & -a & -b \\ & sim. & & & ab & 0 \\ & & & & & ab \end{bmatrix}$$

şeklinde. Eğilme terimlerinde ise herhangi bir değişiklik yoktur.

2.1.1.2. 24 Serbestlik Dereceli Dikdörtgen Plak Eleman Rijitlik Matrisi

Şekil 11’de görülen $2a \times 2b$ boyutlarındaki 8 düğüm noktalı, 24 serbestlik dereceli dikdörtgen plak eleman için şekil fonksiyonu ifadesi,

$$[N] = [N_1 \ 0 \ 0 \ N_2 \ 0 \ 0 \ \dots \ N_8 \ 0 \ 0] \quad (62)$$

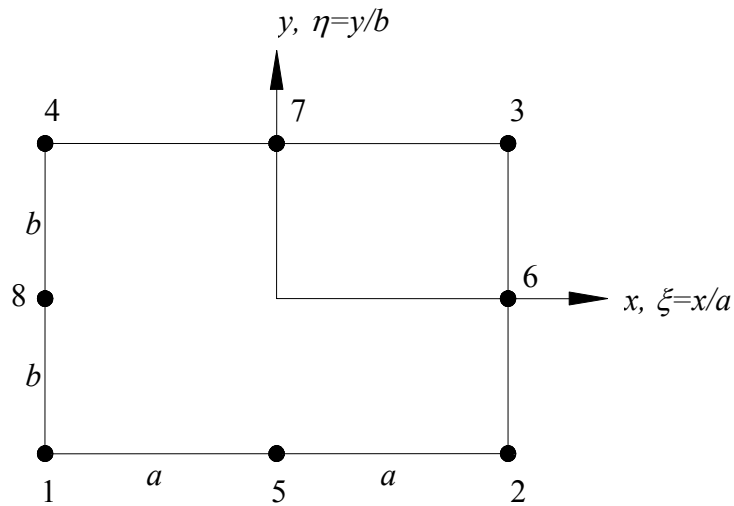
ve bu vektörün oluşturulmasında kullanılan şekil fonksiyonları $\xi_0 = \xi_i \xi$ ve $\eta_0 = \eta_i \eta$ olmak üzere,

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(-1 + \xi_0 + \eta_0) \quad (i=1,2,3,4)$$

$$N_i = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta_0) \quad (i=5,7) \quad (63)$$

$$N_i = \frac{1}{2}(1 + \xi_0)(1 - \eta^2) \quad (i=6,8)$$

şeklinde verilmektedir. ξ_0 ve η_0 ’ın elamanın köşelerinde alacağı koordinat değerleri Tablo 1’de verilmektedir.



Şekil 11. 24 serbestlik dereceli Mindlin plak eleman (PBQ8)

(62) ve (63)'te verilen şekil fonksiyonlarının (56), (57), (58) ve (59) ifadelerinde $n=8$ için kullanılmasıyla oluşturulan $[B_b]$ ve $[B_s]$ matrislerinin (38) ve (39) bağıntılarından hesaplanan $[D_b]$ ve $[D_s]$ matrisleriyle birlikte (60) ifadesinde yerine konularak tam integrasyon tekniği ile elde edilen 24 serbestlik dereceli dikdörtgen plak elemanın rijitlik matrisi,

$$[k_p^e] = \frac{Eh}{(1+\nu)} ([k_{p,1}] + [k_{p,2}] + [k_{p,3}] + [k_{p,4}]) \quad (64)$$

ifadesinden hesaplanmaktadır. Burada $[k_{p,1}]$ (60) nolu ifadenin ikinci teriminin integralinden elde edilen kayma terimlerini içeren rijitlik matrisini, diğerleri ise ilk terimin integrali ile elde edilen eğilme terimlerini içeren rijitlik matrislerini göstermektedir. Bu matrisler 6x6 boyutundaki alt matrislere bölünecek olursa,

$$[k_{p,1}] = \begin{bmatrix} [k_{p,1}]_{11} & [k_{p,1}]_{12} & [k_{p,1}]_{13} & [k_{p,1}]_{14} \\ & [k_{p,1}]_{22} & [k_{p,1}]_{23} & [k_{p,1}]_{24} \\ & & [k_{p,1}]_{33} & [k_{p,1}]_{34} \\ & & & [k_{p,1}]_{44} \end{bmatrix}$$

sim.

$$[k_{p,2}] = \frac{a}{b} \begin{bmatrix} [k_{p,2}]_{11} & [k_{p,2}]_{12} & [k_{p,2}]_{13} & [k_{p,2}]_{14} \\ & [k_{p,2}]_{22} & [k_{p,2}]_{23} & [k_{p,2}]_{24} \\ & & [k_{p,2}]_{33} & [k_{p,2}]_{34} \\ & & & [k_{p,2}]_{44} \end{bmatrix}$$

sim.

$$[k_{p,3}] = \frac{b}{a} \begin{bmatrix} [k_{p,3}]_{11} & [k_{p,3}]_{12} & [k_{p,3}]_{13} & [k_{p,3}]_{14} \\ & [k_{p,3}]_{22} & [k_{p,3}]_{23} & [k_{p,3}]_{24} \\ & & [k_{p,3}]_{33} & [k_{p,3}]_{34} \\ & & & [k_{p,3}]_{44} \end{bmatrix}$$

sim.

$$[k_{p,4}] = \frac{h^2}{(\nu-1)} \begin{bmatrix} [k_{p,4}]_{11} & [k_{p,4}]_{12} & [k_{p,4}]_{13} & [k_{p,4}]_{14} \\ & [k_{p,4}]_{22} & [k_{p,4}]_{23} & [k_{p,4}]_{24} \\ & & [k_{p,4}]_{33} & [k_{p,4}]_{34} \\ & & & [k_{p,4}]_{44} \end{bmatrix}$$

sim.

şeklinde yazılabilir. Alt matrislerin açık ifadeleri aşağıda verilmektedir.

$$[k_{p,1}]_{11} = \begin{bmatrix} \frac{13}{54} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) & \frac{a}{18} & -\frac{b}{18} & \frac{17a}{216b} + \frac{7b}{54a} & -\frac{a}{72} & \frac{b}{27} \\ & \frac{ab}{18} & 0 & -\frac{a}{72} & \frac{ab}{54} & 0 \\ & & \frac{ab}{18} & -\frac{b}{72} & 0 & \frac{ab}{54} \\ & & & \frac{13}{54} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) & \frac{a}{18} & \frac{b}{18} \\ & \text{sim.} & & & \frac{ab}{18} & 0 \\ & & & & & \frac{ab}{18} \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,1}]_{12} = \begin{bmatrix} \frac{23}{216} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) & -\frac{a}{72} & \frac{b}{72} & \frac{7a}{54b} + \frac{17b}{216a} & -\frac{a}{27} & \frac{b}{72} \\ \frac{a}{72} & \frac{ab}{36} & 0 & \frac{a}{27} & \frac{ab}{54} & 0 \\ -\frac{b}{72} & 0 & \frac{ab}{36} & \frac{b}{72} & 0 & \frac{ab}{54} \\ \frac{7a}{54b} + \frac{17b}{216a} & -\frac{a}{27} & -\frac{b}{72} & \frac{23}{216} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) & -\frac{a}{72} & -\frac{b}{72} \\ \frac{a}{27} & \frac{ab}{54} & 0 & \frac{a}{72} & \frac{ab}{36} & 0 \\ -\frac{b}{72} & 0 & \frac{ab}{54} & \frac{b}{72} & 0 & \frac{ab}{36} \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,1}]_{13} = \begin{bmatrix} \frac{a}{36b} - \frac{10b}{27a} & \frac{13a}{108} & -\frac{5b}{54} & -\frac{5a}{27b} - \frac{b}{36a} & 0 & \frac{7b}{108} \\ -\frac{7a}{108} & -\frac{ab}{18} & 0 & 0 & -\frac{2ab}{27} & 0 \\ \frac{5b}{54} & 0 & -\frac{ab}{18} & -\frac{7b}{108} & 0 & -\frac{2ab}{27} \\ \frac{a}{36b} - \frac{10b}{27a} & \frac{13a}{108} & \frac{5b}{54} & -\frac{10a}{27b} + \frac{b}{36a} & \frac{5a}{54} & \frac{13b}{108} \\ -\frac{7a}{108} & -\frac{ab}{18} & 0 & -\frac{5a}{54} & -\frac{ab}{18} & 0 \\ -\frac{5b}{54} & 0 & -\frac{ab}{18} & -\frac{7b}{108} & 0 & -\frac{ab}{18} \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,1}]_{14} = \begin{bmatrix} -\frac{a}{36b} - \frac{5b}{27a} & \frac{7a}{108} & 0 & -\frac{10a}{27b} + \frac{b}{36a} & \frac{5a}{54} & -\frac{13b}{108} \\ \frac{7a}{108} & -\frac{2ab}{27} & 0 & -\frac{5a}{54} & -\frac{ab}{18} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2ab}{27} & \frac{7b}{108} & 0 & -\frac{ab}{18} \\ -\frac{a}{36b} - \frac{5b}{27a} & \frac{7a}{108} & 0 & -\frac{5a}{27b} - \frac{b}{36a} & 0 & -\frac{7b}{108} \\ \frac{7a}{108} & -\frac{2ab}{27} & 0 & 0 & -\frac{2ab}{27} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2ab}{27} & \frac{7b}{108} & 0 & -\frac{2ab}{27} \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,1}]_{22} = \begin{bmatrix} \frac{13}{54} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) & -\frac{a}{18} & \frac{b}{18} & \frac{17a}{256b} + \frac{7b}{54a} & \frac{a}{72} & -\frac{b}{27} \\ & \frac{ab}{18} & 0 & \frac{a}{72} & \frac{ab}{54} & 0 \\ & & \frac{ab}{18} & \frac{b}{27} & 0 & \frac{ab}{54} \\ & & & \frac{13}{54} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) & -\frac{a}{18} & -\frac{b}{18} \\ & \text{sim.} & & & \frac{ab}{18} & 0 \\ & & & & & \frac{ab}{18} \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,1}]_{23} = \begin{bmatrix} -\frac{a}{36b} - \frac{5b}{27a} & \frac{7a}{108} & 0 & -\frac{10a}{27b} + \frac{b}{36a} & -\frac{5a}{54} & \frac{13b}{108} \\ -\frac{7a}{108} & -\frac{2ab}{27} & 0 & \frac{5a}{54} & -\frac{ab}{18} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2ab}{27} & -\frac{7b}{108} & 0 & -\frac{ab}{18} \\ -\frac{a}{36b} - \frac{5b}{27a} & \frac{7a}{108} & 0 & -\frac{5a}{27b} - \frac{b}{36a} & 0 & \frac{7b}{108} \\ -\frac{7a}{108} & -\frac{2ab}{27} & 0 & 0 & -\frac{2ab}{27} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2ab}{27} & -\frac{7b}{108} & 0 & -\frac{2ab}{27} \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,1}]_{24} = \begin{bmatrix} \frac{a}{36b} - \frac{10b}{27a} & -\frac{13a}{108} & \frac{5b}{54} & -\frac{5a}{27b} - \frac{b}{36a} & 0 & -\frac{7b}{108} \\ \frac{7a}{108} & -\frac{ab}{18} & 0 & 0 & -\frac{2ab}{27} & 0 \\ -\frac{5b}{54} & 0 & -\frac{ab}{18} & \frac{7b}{108} & 0 & -\frac{2ab}{27} \\ \frac{a}{36b} - \frac{10b}{27a} & -\frac{13a}{108} & -\frac{5b}{54} & -\frac{10a}{27b} + \frac{b}{36a} & -\frac{5a}{54} & -\frac{13b}{108} \\ \frac{7a}{108} & -\frac{ab}{18} & 0 & \frac{5a}{54} & -\frac{ab}{18} & 0 \\ \frac{5b}{54} & 0 & -\frac{ab}{18} & \frac{7b}{108} & 0 & -\frac{ab}{18} \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,1}]_{33} = \begin{bmatrix} \frac{2a}{9b} + \frac{20b}{27a} & \frac{2a}{9} & 0 & 0 & \frac{5a}{27} & -\frac{5b}{27} \\ & \frac{8ab}{27} & 0 & -\frac{5a}{27} & \frac{5ab}{27} & 0 \\ & & \frac{8ab}{27} & \frac{5b}{27} & 0 & \frac{5ab}{27} \\ & & & \frac{20a}{27b} + \frac{2b}{9a} & 0 & \frac{2b}{9} \\ & \text{sim.} & & & \frac{8ab}{27} & 0 \\ & & & & & \frac{8ab}{27} \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,1}]_{34} = \begin{bmatrix} -\frac{2a}{9b} + \frac{10b}{27a} & \frac{2a}{9} & 0 & 0 & \frac{5a}{27} & \frac{5b}{27} \\ -\frac{2a}{9} & \frac{4ab}{27} & 0 & -\frac{5a}{27} & \frac{5ab}{27} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ab}{36} & -\frac{5b}{27} & 0 & \frac{5ab}{27} \\ 0 & \frac{5a}{27} & \frac{5b}{27} & \frac{10a}{27b} - \frac{2b}{9a} & 0 & \frac{2b}{9} \\ -\frac{5a}{27} & \frac{5ab}{27} & 0 & 0 & \frac{ab}{36} & 0 \\ -\frac{5b}{27} & 0 & \frac{5ab}{27} & -\frac{2b}{9} & 0 & \frac{4ab}{27} \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,1}]_{44} = \begin{bmatrix} \frac{2a}{9b} + \frac{20b}{27a} & -\frac{2a}{9} & 0 & 0 & -\frac{5a}{27} & \frac{5b}{27} \\ & \frac{8ab}{27} & 0 & \frac{5a}{27} & \frac{5ab}{27} & 0 \\ & & \frac{8ab}{27} & -\frac{5b}{27} & 0 & \frac{5ab}{27} \\ & & & \frac{20a}{27b} + \frac{2b}{9a} & 0 & -\frac{2b}{9} \\ & \text{sim.} & & & \frac{8ab}{27} & 0 \\ & & & & & \frac{8ab}{27} \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,2}]_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & -\frac{13h^2}{270(v-1)} & 0 & 0 & -\frac{17h^2}{1080(v-1)} & 0 \\ & & \frac{13h^2}{540} & 0 & 0 & \frac{17h^2}{2160} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & \text{sim.} & & & -\frac{13h^2}{270(v-1)} & 0 \\ & & & & & \frac{13h^2}{540} \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,2}]_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & -\frac{23h^2}{1080(v-1)} & 0 & 0 & -\frac{7h^2}{270(v-1)} & 0 \\ & & \frac{23h^2}{2160} & 0 & 0 & \frac{7h^2}{540} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & \text{sim.} & & & -\frac{23h^2}{1080(v-1)} & 0 \\ & & & & & \frac{23h^2}{2160} \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,2}]_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{h^2}{180(\nu-1)} & 0 & 0 & \frac{h^2}{27(\nu-1)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{360} & 0 & 0 & -\frac{h^2}{54} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{h^2}{180(\nu-1)} & 0 & 0 & \frac{2h^2}{27(\nu-1)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{360} & 0 & 0 & -\frac{h^2}{27} \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,2}]_{14} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^2}{180(\nu-1)} & 0 & 0 & \frac{2h^2}{27(\nu-1)} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{h^2}{360} & 0 & 0 & -\frac{h^2}{27} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^2}{180(\nu-1)} & 0 & 0 & \frac{h^2}{27(\nu-1)} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{h^2}{360} & 0 & 0 & -\frac{h^2}{54} \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,2}]_{22} = [k_{p,2}]_{11} \quad [k_{p,2}]_{23} = [k_{p,2}]_{14} \quad [k_{p,2}]_{24} = [k_{p,2}]_{13}$$

$$[k_{p,2}]_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & -\frac{2h^2}{45(\nu-1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{h^2}{45} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & \text{sim.} & & & -\frac{4h^2}{27(\nu-1)} & 0 \\ & & & & & \frac{2h^2}{27} \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,2}]_{34} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2h^2}{45(\nu-1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{h^2}{45} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sim.} & & & & -\frac{2h^2}{27(\nu-1)} & 0 \\ & & & & & \frac{h^2}{27} \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,2}]_{44} = [k_{p,2}]_{33}$$

$$[k_{p,3}]_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{13h^2}{540} & 0 & 0 & 0 & \frac{7h^2}{540} & 0 \\ -\frac{13h^2}{270(\nu-1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{7h^2}{270(\nu-1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sim.} & & & & \frac{13h^2}{540} & 0 \\ & & & & & -\frac{13h^2}{270(\nu-1)} \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,3}]_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{23h^2}{2160} & 0 & 0 & \frac{17h^2}{2160} & 0 & 0 \\ -\frac{23h^2}{1080(\nu-1)} & 0 & 0 & 0 & -\frac{17h^2}{1080(\nu-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sim.} & & & \frac{23h^2}{2160} & 0 & 0 \\ & & & & & -\frac{23h^2}{1080(\nu-1)} \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,3}]_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{h^2}{27} & 0 & 0 & -\frac{h^2}{360} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2h^2}{27(\nu-1)} & 0 & 0 & \frac{h^2}{180(\nu-1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{h^2}{27} & 0 & 0 & \frac{h^2}{360} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2h^2}{27(\nu-1)} & 0 & 0 & -\frac{h^2}{180(\nu-1)} \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,3}]_{14} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{h^2}{54} & 0 & 0 & \frac{h^2}{360} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{27(\nu-1)} & 0 & 0 & -\frac{h^2}{180(\nu-1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{h^2}{54} & 0 & 0 & -\frac{h^2}{360} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{27(\nu-1)} & 0 & 0 & \frac{h^2}{180(\nu-1)} \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,3}]_{22} = [k_{p,3}]_{11} \quad [k_{p,3}]_{23} = [k_{p,3}]_{14} \quad [k_{p,3}]_{24} = [k_{p,3}]_{13}$$

$$[k_{p,3}]_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{2h^2}{27} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & -\frac{4h^2}{27(\nu-1)} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \frac{h^2}{45} & 0 \\ & & & & & -\frac{2h^2}{45(\nu-1)} \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,3}]_{34} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^2}{27} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2h^2}{27(\nu-1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{sim.} & 0 & 0 & -\frac{h^2}{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2h^2}{45(\nu-1)} \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,3}]_{44} = [k_{p,3}]_{33}$$

$$[k_{p,4}]_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{17}{864}(\nu+1) & 0 & 0 & \frac{3}{864}(3\nu-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{864}(1-3\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{sim.} & 0 & 0 & 0 & -\frac{17}{864}(\nu+1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,4}]_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{864}(\nu+1) & 0 & 0 & \frac{3}{864}(1-3\nu) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{864}(3\nu-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{sim.} & 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{864}(\nu+1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,4}]_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-11\nu+1}{216} & 0 & 0 & -\frac{(\nu+1)}{216} \\ 0 & \frac{7\nu-5}{216} & 0 & 0 & -\frac{(\nu+1)}{216} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11\nu-1}{216} & 0 & 0 & \frac{-7\nu+5}{216} \\ 0 & \frac{-7\nu+5}{216} & 0 & 0 & \frac{11\nu-1}{216} & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,4}]_{14} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu+1}{216} & 0 & 0 & \frac{7\nu-5}{216} \\ 0 & -\frac{\nu+1}{216} & 0 & 0 & \frac{-11\nu+1}{216} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\nu+1}{216} & 0 & 0 & \frac{\nu+1}{216} \\ 0 & \frac{\nu+1}{216} & 0 & 0 & \frac{\nu+1}{216} & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,4}]_{22} = [k_{p,4}]_{11} \quad [k_{p,4}]_{23} = [k_{p,4}]_{14} \quad [k_{p,4}]_{24} = [k_{p,4}]_{13}$$

$$[k_{p,4}]_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\nu+1}{54} \\ & & 0 & 0 & -\frac{\nu+1}{54} & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & \text{sim.} & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,4}]_{34} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\nu+1}{54} \\ & & 0 & 0 & \frac{\nu+1}{54} & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & sim. & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,4}]_{44} = [k_{p,4}]_{33}$$

(60) nolu ifadedeki kayma terimlerinin seçilerek azaltılmış integrasyon tekniği kullanılarak hesaplanması ile elde edilen rijitlik matrislerinin açık ifadeleri,

$$[k_{p,1}] = \begin{bmatrix} [k_{p,1}]_{11} & [k_{p,1}]_{12} & [k_{p,1}]_{13} & [k_{p,1}]_{14} \\ & [k_{p,1}]_{22} & [k_{p,1}]_{23} & [k_{p,1}]_{24} \\ & & [k_{p,1}]_{33} & [k_{p,1}]_{34} \\ sim. & & & [k_{p,1}]_{44} \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,1}]_{11} = \begin{bmatrix} \frac{25}{108} \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) & \frac{5a}{108} & -\frac{5b}{108} & \frac{5}{36} \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{2b} \right) & -\frac{5a}{216} & \frac{5b}{108} \\ & \frac{10ab}{324} & 0 & -\frac{5a}{216} & 0 & 0 \\ & & \frac{10ab}{324} & -\frac{5b}{108} & 0 & 0 \\ & & & \frac{25}{108} \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) & \frac{5a}{108} & \frac{5b}{108} \\ & sim. & & & \frac{10ab}{324} & 0 \\ & & & & & \frac{10ab}{324} \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,1}]_{12} = \begin{bmatrix} \frac{25}{216} \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) & -\frac{5a}{216} & \frac{5b}{216} & \frac{5}{36} \left(\frac{b}{2a} + \frac{a}{b} \right) & -\frac{5a}{108} & \frac{5b}{216} \\ \frac{5a}{216} & \frac{5ab}{324} & 0 & \frac{5a}{108} & 0 & 0 \\ -\frac{5b}{216} & 0 & \frac{5ab}{324} & \frac{5b}{216} & 0 & 0 \\ \frac{5}{36} \left(\frac{b}{2a} + \frac{a}{b} \right) & -\frac{5a}{108} & -\frac{5b}{216} & \frac{25}{216} \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) & -\frac{5a}{216} & -\frac{5b}{216} \\ \frac{5a}{108} & 0 & 0 & \frac{5a}{216} & \frac{5ab}{324} & 0 \\ -\frac{5b}{216} & 0 & 0 & \frac{5b}{216} & 0 & \frac{5ab}{324} \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,1}]_{13} = \begin{bmatrix} -\frac{10b}{27a} + \frac{5a}{108b} & \frac{5a}{36} & -\frac{5b}{54} & -\frac{5b}{108a} - \frac{5a}{27b} & 0 & \frac{5b}{108} \\ -\frac{5a}{108} & -\frac{10ab}{324} & 0 & 0 & -\frac{5ab}{81} & 0 \\ \frac{5b}{54} & 0 & -\frac{10ab}{324} & -\frac{5b}{108} & 0 & -\frac{5ab}{81} \\ -\frac{10b}{27a} + \frac{5a}{108b} & \frac{5a}{36} & \frac{5b}{54} & \frac{5b}{108a} - \frac{10a}{27b} & \frac{5a}{54} & \frac{5b}{36} \\ -\frac{5a}{108} & -\frac{10ab}{324} & 0 & -\frac{5a}{54} & -\frac{5ab}{162} & 0 \\ -\frac{5b}{54} & 0 & -\frac{10ab}{324} & -\frac{5b}{108} & 0 & -\frac{5ab}{162} \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,1}]_{14} = \begin{bmatrix} -\frac{5b}{27a} - \frac{5a}{108b} & -\frac{5a}{108} & 0 & \frac{5b}{108a} - \frac{10a}{27b} & \frac{5a}{54} & -\frac{5b}{36} \\ \frac{5a}{108} & -\frac{5ab}{81} & 0 & -\frac{5a}{54} & -\frac{5ab}{162} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5ab}{81} & \frac{5b}{108} & 0 & -\frac{5ab}{162} \\ -\frac{5b}{27a} - \frac{5a}{108b} & -\frac{5a}{108} & 0 & -\frac{5b}{108a} - \frac{10a}{27b} & 0 & -\frac{5b}{108} \\ \frac{5a}{108} & -\frac{5ab}{81} & 0 & 0 & -\frac{5ab}{81} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5ab}{81} & \frac{5b}{108} & 0 & -\frac{5ab}{81} \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,1}]_{22} = \begin{bmatrix} \frac{25b}{108a} + \frac{25a}{108b} & -\frac{5a}{108} & \frac{5b}{108} & \frac{5b}{36a} + \frac{5a}{72b} & \frac{5a}{216} & -\frac{5b}{108} \\ & \frac{10ab}{324} & 0 & \frac{5a}{216} & 0 & 0 \\ & & \frac{10ab}{324} & \frac{5b}{108} & 0 & 0 \\ & & & \frac{25b}{108a} + \frac{25a}{108b} & -\frac{5a}{108} & -\frac{5b}{108} \\ & \text{sim.} & & & \frac{10ab}{324} & 0 \\ & & & & & \frac{10ab}{324} \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,1}]_{23} = [k_{p,1}]_{14} \quad [k_{p,1}]_{24} = [k_{p,1}]_{13}$$

$$[k_{p,1}]_{33} = \begin{bmatrix} \frac{20b}{27a} + \frac{5a}{27b} & \frac{5a}{27} & 0 & 0 & \frac{5a}{27} & -\frac{5b}{27} \\ & \frac{20ab}{81} & 0 & -\frac{5a}{27} & \frac{5ab}{27} & 0 \\ & & \frac{20ab}{81} & \frac{5b}{27} & 0 & \frac{5ab}{27} \\ & & & \frac{5b}{27a} + \frac{20a}{27b} & 0 & \frac{5b}{27} \\ & \text{sim.} & & & \frac{20ab}{81} & 0 \\ & & & & & \frac{20ab}{81} \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,1}]_{34} = \begin{bmatrix} \frac{10b}{27a} - \frac{5a}{27b} & \frac{5a}{27} & 0 & 0 & \frac{5a}{27} & \frac{5b}{27} \\ -\frac{5a}{27} & \frac{10ab}{81} & 0 & -\frac{5a}{27} & \frac{5ab}{27} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{10ab}{81} & -\frac{5b}{27} & 0 & \frac{5ab}{27} \\ 0 & \frac{5a}{27} & \frac{5b}{27} & -\frac{5b}{27a} + \frac{10a}{27b} & 0 & \frac{5b}{27} \\ -\frac{5a}{27} & \frac{5ab}{27} & 0 & 0 & \frac{10ab}{81} & 0 \\ -\frac{5b}{27} & 0 & \frac{5ab}{27} & -\frac{5b}{27} & 0 & \frac{10ab}{81} \end{bmatrix}$$

$$[k_{p,1}]_{44} = \begin{bmatrix} \frac{20b}{27a} + \frac{5a}{27b} & -\frac{5a}{27} & 0 & 0 & -\frac{5a}{27} & \frac{5b}{27} \\ & \frac{20ab}{81} & 0 & \frac{5a}{27} & \frac{5ab}{27} & 0 \\ & & \frac{20ab}{81} & -\frac{5b}{27} & 0 & \frac{5ab}{27} \\ & & & \frac{5b}{27a} + \frac{20a}{27b} & 0 & -\frac{5b}{27} \\ & sim. & & & \frac{20ab}{81} & 0 \\ & & & & & \frac{20ab}{81} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Eğilme terimlerinde ise herhangi bir değişiklik yoktur.

2.1.2. Yük Vektörünün Elde Edilmesi

2.1.2.1. 12 Serbestlik Dereceli Dikdörtgen Plak Elemana İlişkin Yük Vektörü

Yayıllı yüke (q) maruz plaklar için eleman yük vektörü

$$f_i = \int_{\Omega} N_i^T q dA \quad (65)$$

ifadesiyle hesaplanmaktadır. Bu ifade global koordinatlarda

$$f_i = ab \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} N_i^T q d\xi d\eta \quad (66)$$

şeklini almaktadır (Weaver, Johnston, 1984).

12 serbestlik dereceli dikdörtgen plak eleman için (47) ifadesi (66)'da yerine koyularak gerekli işlemlerin yapılmasıyla eleman yük vektörü,

$$\{f^e\} = qab \{1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0\}^T$$

şeklinde elde edilmektedir.

2.1.2.2. 24 Serbestlik Dereceli Dikdörtgen Plak Elemana İlişkin Yük Vektörü

24 serbestlik dereceli dikdörtgen plak eleman için ise (62) ifadesinin (66) ifadesinde yerine konarak ve gerekli işlemlerin yapılmasıyla eleman yük vektörü,

$$\{f^e\} = \frac{qab}{3} \{-1 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 4 \ 0 \ 0 \ 4 \ 0 \ 0 \ 4 \ 0 \ 0 \ 4 \ 0 \ 0\}^T$$

şeklinde elde edilmektedir.

2.1.3. Elastik Zemine İlişkin Rijitlik Matrislerinin Elde Edilmesi

2.1.3.1. 12 Serbestlik Dereceli Dikdörtgen Plak Elemana İlişkin Zeminin Eksenel Yerdeğiştirmesini Temsil Eden Rijitlik Matrisi

Zemindeki eksenel yerdeğiştirmelerin hesaba katılmasıyla toplam şekildeğiştirme enerjisi,

$$(U_k)_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} [w(x, y)]^T k [w(x, y)] dA \quad (67)$$

ifadesindeki gibi verilmektedir. Zeminin eksenel yerdeğiştirmesini temsil eden rijitlik matrisi toplam şekildeğiştirme enerjisinin yerdeğiştirme vektörü bileşenlerine göre minimizasyonu ile elde edilmektedir.

$$[k_k^e] = \frac{\partial^2 (U_k)_e}{\partial w_i \partial w_j} \quad (68)$$

(67) ifadesinin (68) ifadesinde yerine konulması ve doğal koordinatlara göre düzenlenmesiyle,

$$[k_k^e]_{ij} = \frac{1}{2} kab \frac{\partial^2}{\partial w_i \partial w_j} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} w^2 d\xi d\eta \quad (69)$$

ifadesi elde edilmektedir. (48)'de verilen yerdeğiştirme fonksiyonunun bu ifadede yerine yazılması ve gerekli düzenlemelerin yapılmasıyla, zeminin aksenal yerdeğiştirmesini temsil eden eleman rijitlik matrisini veren bağıntı,

$$[k_k^e] = kab \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N]^T [N] d\xi d\eta \quad (70)$$

şeklinde elde edilmiş olmaktadır (Turhan, 1992). Bu bağıntıda (47) ve (49)'da verilen şekil fonksiyonu ifadelerinin kullanılması sonucunda elde edilen zeminin aksenal yerdeğiştirmesini temsil eden eleman rijitlik matrisinin açık formu aşağıda verilmektedir.

$$[k_k^e] = kab \begin{bmatrix} [k_k]_{11} & [k_k]_{12} \\ sim. & [k_k]_{22} \end{bmatrix}$$

$$[k_k]_{11} = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} & 0 & 0 & \frac{2}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sim. & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k_k]_{12} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 & \frac{2}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sim. & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k_k]_{22} = [k_k]_{11}$$

2.1.3.2. 24 Serbestlik Dereceli Dikdörtgen Plak Elemana İlişkin Zeminin Eksenel Yerdeğiştirmesini Temsil Eden Rijitlik Matrisi

12 serbestlik dereceli dikdörtgen plak eleman (PBQ4) için zeminin eksenel yerdeğiştirmesini temsil eden eleman rijitlik matrisi hesabında kullanılan hesap adımlarının takip edilmesi sonucunda (70) ifadesinde (62) ve (63)'te verilen Şekil fonksiyonlarının kullanılmasıyla 24 serbestlik dereceli dikdörtgen plak eleman için elde edilen zeminin eksenel yerdeğiştirmesini temsil eden eleman rijitlik matrisi aşağıda verilmektedir.

$$[k_k^e] = kab \begin{bmatrix} [k_k]_{11} & [k_k]_{12} & [k_k]_{13} & [k_k]_{14} \\ & [k_k]_{22} & [k_k]_{23} & [k_k]_{24} \\ & & [k_k]_{33} & [k_k]_{34} \\ sim. & & & [k_k]_{44} \end{bmatrix}$$

Bu matrislerin açık formları aşağıdaki gibidir.

$$[k_k]_{11} = \begin{bmatrix} \frac{2}{15} & 0 & 0 & \frac{2}{45} & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{2}{15} & 0 & 0 \\ sim. & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k_k]_{12} = \begin{bmatrix} \frac{1}{15} & 0 & 0 & \frac{2}{45} & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{15} & 0 & 0 \\ sim. & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k_k]_{13} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{15} & 0 & 0 & -\frac{8}{45} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{15} & 0 & 0 & -\frac{2}{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k_k]_{14} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{45} & 0 & 0 & -\frac{2}{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{8}{45} & 0 & 0 & -\frac{8}{45} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k_k]_{22} = [k_k]_{11} \quad [k_k]_{23} = [k_k]_{14} \quad [k_k]_{24} = [k_k]_{13}$$

$$[k_k]_{33} = \begin{bmatrix} \frac{32}{45} & 0 & 0 & \frac{4}{9} & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{32}{45} & 0 & 0 \\ & \text{sim.} & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k_k]_{34} = \begin{bmatrix} \frac{16}{45} & 0 & 0 & \frac{4}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{45} & 0 & 0 & 0 \\ \text{sim.} & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k_k]_{44} = [k_k]_{33}$$

2.1.3.3. 12 Serbestlik Dereceli Dikdörtgen Plak Elemana İlişkin Zemin Kayma Parametresi Matrisi

Zemindeki kayma şekildeğiştirmelerinin hesaba katılmasıyla toplam şekildeğiştirme enerjisi,

$$(U_{2t})_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right]^T 2t \left[\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right] dA \quad (71)$$

ifadesiyle verilmektedir. Plak elemanın zemin kayma parametresi matrisi toplam şekildeğiştirme enerjisinin yerdeğiştirme vektörü bileşenlerine göre minimizasyonu ile elde edilmektedir.

$$[k_{2t}^e] = \frac{\partial^2 (U_{2t})_e}{\partial w_i \partial w_j} \quad (72)$$

(71) ifadesinin (72) ifadesinde yerine konulması ve doğal koordinatlara göre düzenlenmesiyle,

$$[k_{2t}^e]_{ij} = \frac{1}{2} (2t) ab \frac{\partial^2}{\partial w_i \partial w_j} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (\nabla w)^2 d\xi d\eta \quad (73)$$

ifadesi elde edilmektedir. (48)'de verilen yerdeğiştirme fonksiyonu ifadesinin bu ifadede yerine yazılması ve gerekli düzenlemelerin yapılmasıyla, plak eleman kayma parametresi matrisini veren bağıntı,

$$[k_{2t}^e] = 2tab \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{1}{a^2} \left[\frac{\partial N}{\partial \xi} \right]^T \left[\frac{\partial N}{\partial \xi} \right] + \frac{1}{b^2} \left[\frac{\partial N}{\partial \eta} \right]^T \left[\frac{\partial N}{\partial \eta} \right] \right) d\xi d\eta \quad (74)$$

şeklinde elde edilmiş olmaktadır. Bu bağıntıda (47) ve (49)'da verilen şekil fonksiyonu ifadelerinin kullanılması sonucunda elde edilen zemin kayma parametresi matrisinin açık formu aşağıda verilmektedir.

$$[k_{2t}^e] = 2t \begin{bmatrix} [k_{2t}]_{11} & [k_{2t}]_{12} \\ sim & [k_{2t}]_{22} \end{bmatrix}$$

$$[k_{2t}]_{11} = \begin{bmatrix} \frac{b}{3a} + \frac{a}{3b} & 0 & 0 & -\frac{b}{3a} + \frac{a}{6b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{b}{3a} + \frac{a}{3b} & 0 & 0 \\ 0 & sim. & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k_{2t}]_{12} = \begin{bmatrix} -\frac{b}{6a} - \frac{a}{6b} & 0 & 0 & \frac{b}{6a} - \frac{a}{3b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{b}{6a} - \frac{a}{6b} & 0 & 0 \\ 0 & sim. & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k_{2t}]_{22} = [k_{2t}]_{11}$$

2.1.3.4. 24 Serbestlik Dereceli Dikdörtgen Plak Elemana İlişkin Zemin Kayma Parametresi Matrisi

12 serbestlik dereceli dikdörtgen plak elemanın (PBQ4) kayma parametresi matrisi hesabında kullanılan hesap adımlarının takip edilmesi sonucunda (62) ve (63)'te verilen şekil fonksiyonlarının kullanılmasıyla 24 serbestlik dereceli plak eleman için elde edilen kayma parametresi matrisi açık formda aşağıda verilmektedir.

$$[k_{2t}^e] = 2t \begin{bmatrix} [k_{2t}]_{11} & [k_{2t}]_{12} & [k_{2t}]_{13} & [k_{2t}]_{14} \\ & [k_{2t}]_{22} & [k_{2t}]_{23} & [k_{2t}]_{24} \\ & & [k_{2t}]_{33} & [k_{2t}]_{34} \\ & & & [k_{2t}]_{44} \end{bmatrix}$$

$$[k_{2t}]_{11} = \begin{bmatrix} \frac{26b}{45a} + \frac{26a}{45b} & 0 & 0 & \frac{14b}{45a} + \frac{17a}{90b} & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{26b}{45a} + \frac{26a}{45b} & 0 & 0 \\ & \text{sim.} & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k_{2t}]_{12} = \begin{bmatrix} \frac{23b}{90a} + \frac{23a}{90b} & 0 & 0 & \frac{17b}{90a} + \frac{14a}{45b} & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{23b}{90a} + \frac{23a}{90b} & 0 & 0 \\ & \text{sim.} & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k_{2t}]_{13} = \begin{bmatrix} -\frac{8b}{9a} + \frac{a}{15b} & 0 & 0 & -\frac{b}{15a} - \frac{4a}{9b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{8b}{9a} + \frac{a}{15b} & 0 & 0 & \frac{b}{15a} - \frac{8a}{9b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k_{2t}]_{14} = \begin{bmatrix} -\frac{4b}{9a} - \frac{a}{15b} & 0 & 0 & \frac{b}{15a} - \frac{8a}{9b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4b}{9a} - \frac{a}{15b} & 0 & 0 & -\frac{b}{15a} - \frac{4a}{9b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k_{2t}]_{22} = [k_{2t}]_{11} \quad [k_{2t}]_{23} = [k_{2t}]_{14} \quad [k_{2t}]_{24} = [k_{2t}]_{13}$$

$$[k_{2t}]_{33} = \begin{bmatrix} \frac{16b}{9a} + \frac{8a}{15b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{8b}{15a} + \frac{16a}{9b} & 0 & 0 \\ & \text{sim.} & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k_{2t}]_{34} = \begin{bmatrix} \frac{8b}{9a} - \frac{8a}{15b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{8b}{15a} + \frac{8a}{9b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k_{2t}]_{44} = [k_{2t}]_{33}$$

2.1.4. Sistem Rijitlik Matrisinin Belirlenmesi

Her elemana ilişkin plak eleman rijitlik matrisi $[k_p^e]$, zeminin eksenele yerdeğıştirmeleri temsil eden rijitlik matrisi $[k_k^e]$ ve zemin kayma parametresi matrisinin $[k_{2t}^e]$ oluşturulmasından sonra standart sonlu elemanlar modelleme işlemlerini takip ederek eleman rijitlik matrislerini toplamak suretiyle sistem rijitlik matrisi elde edilmektedir. $[K]$ sistem rijitlik matrisi,

$$[K] = \sum_{i=1}^n \left([k_p^e] + [k_k^e] + [k_{2t}^e] \right) \quad (75)$$

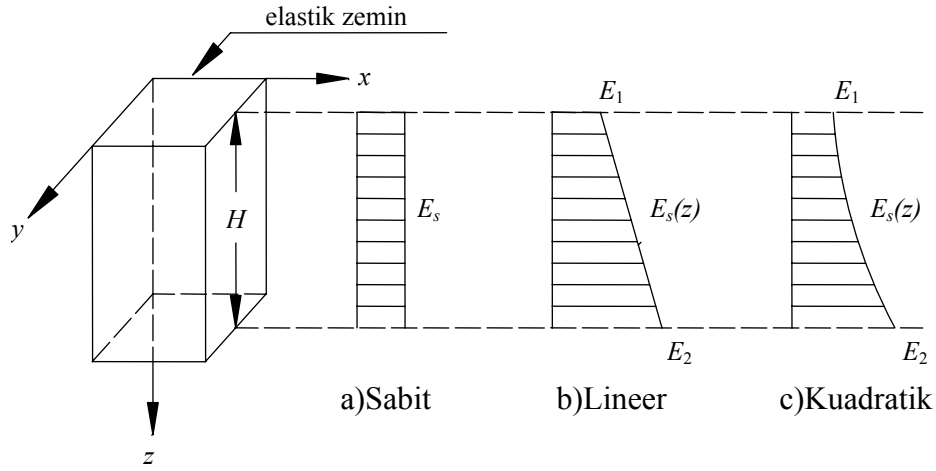
ifadesinden hesaplanmaktadır. Burada n sonlu eleman ağındaki toplam eleman sayısını göstermektedir. Sonuç olarak çözümlenmesi gereken denklem sistemi, $\{W\}$ ve $\{F\}$ sistem yerdeğıştirme ve yük vektörünü göstermek üzere,

$$[K]\{W\} = \{F\} \quad (76)$$

şekline dönüşmüş olmaktadır.

2.1.5. Zemin Elastisite Modülünün Derinlik Boyunca Değişimi

Zemin elastisite modülü derinlik boyunca sabit bir değer alabileceği gibi zemin ortamının homojen bir yapıya sahip olmamasından dolayı değişiklikte gösterebilmektedir. Bugüne kadar yapılmış çalışmalarda zemin elastisite modülünün derinlikle değişimi ile ilgili farklı kabuller sonucu farklı zemin parametreleri ifadeleri elde edilmiştir. Bu çalışmada zemin elastisite modülünün derinlik boyunca sabit olması, doğrusal değişmesi ve kuadratik değişmesi durumları dikkate alınarak karşılaştırmalar yapılmaktadır (Şekil 12).



Şekil 12. Zemin elastisite modülünün derinlik boyunca değişmesi

2.1.5.1. Sabit Olması Durumu

Zemin elastisite modülünün Şekil 12.a'daki gibi derinlik boyunca değişmediği kabulü ile zemin parametreleri, (24) ifadesinin (14) ve (15) ifadelerinde yerlerine konularak integrallerin alınmasıyla,

$$k = \frac{1 - \nu_s}{8H(1 + \nu_s)(1 - 2\nu_s)} \frac{E_s (2\gamma \sinh(2\gamma) + 4\gamma^2)}{\sinh^2(\gamma)} \quad (77)$$

$$2t = \frac{H}{16\gamma^2(1 + \nu_s)} \frac{E_s (2\gamma \sinh(2\gamma) - 4\gamma^2)}{\sinh^2(\gamma)} \quad (78)$$

biçiminde elde edilmektedir.

2.1.5.2. Lineer Değişmesi Durumu

Şekil 12.b'deki gibi zemin elastisite modülü derinlik boyunca doğrusal değişiklik gösteriyorsa; E_1 ve E_2 sırasıyla zeminin üst ve alt yüzeyindeki elastisite modüllerini göstermek üzere, elastisite modülü fonksiyonu,

$$E_s(z) = E_1 + (E_2 - E_1) \frac{z}{H} \quad (79)$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Bu durumda zemin parametreleri, (24) ve (79) ifadelerinin (14) ve (15) ifadelerinde yerlerine yazılarak integrallerinin alınması sonucu,

$$k = \frac{1 - \nu_s}{8H(1 + \nu_s)(1 - 2\nu_s)} \left[\frac{E_1(2\gamma \sinh(2\gamma) + 4\gamma^2) + (E_2 - E_1)(\cosh(2\gamma) - 1 - 2\gamma^2)}{\sinh^2(\gamma)} \right] \quad (80)$$

$$2t = \frac{H}{16\gamma^2(1 + \nu_s)} \left[\frac{E_1(2\gamma \sinh(2\gamma) - 4\gamma^2) + (E_2 - E_1)(\cosh(2\gamma) - 1 - 2\gamma^2)}{\sinh^2(\gamma)} \right] \quad (81)$$

şeklinde elde edilmektedir.

2.1.5.3. Kuadratik Değişmesi Durumu

Şekil 12.c'deki gibi zemin elastisite modülünün derinlik boyunca kuadratik değişim göstermesi hali için elastisite modülü fonksiyonu

$$E_s(z) = E_1 + (E_2 - E_1) \frac{z^2}{H^2} \quad (82)$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Bu durumda zemin parametreleri, (24) ve (82) ifadelerinin (14) ve (15) ifadelerinde yerlerine yazılarak integrallerinin alınması sonucu,

$$k = \frac{1 - \nu_s}{(1 + \nu_s)(1 - 2\nu_s)} \left[\frac{3(E_2 + E_1(2\gamma^2 - 1))\sinh(2\gamma) + (E_2(2\gamma^2 - 3) + E_1(3 + 4\gamma^2))2\gamma}{24H\gamma \sinh^2(\gamma)} \right] \quad (83)$$

$$2t = \frac{H}{(1 + \nu_s)} \left[\frac{3(E_2 + E_1(2\gamma^2 - 1))\sinh(2\gamma) - (E_2(2\gamma^2 + 3) + E_1(-3 + 4\gamma^2))2\gamma}{48\gamma^3 \sinh^2(\gamma)} \right] \quad (84)$$

şeklinde elde edilmektedir.

2.1.6. Sınır Şartları

(76) denkleminin çözümünden önce plak düzlemi dışında kalan zemin ortamının plak kenarlarına olan etkisini de hesaba katmak gerekmektedir. Bu çalışmada plağı çevreleyen zeminin etkisi eşdeğer tepki kuvvetlerine dönüştürülerek plak kenarlarına etkittirilmek suretiyle dikkate alınmaktadır. Burada plak kenarlarına etkiyecek eşdeğer kuvvetleri; düşey tepki kuvvetleri ve dönme tepki kuvvetleri olarak iki kısma ayırmak mümkündür.

2.1.6.1. Düşey Tepki Kuvvetleri, k_s

Plak düzlemi dışında kalan zeminin plak kenarlarına etkisi bu bölgedeki zeminin potansiyel enerjisi ifadesinden elde edilmektedir.

$$(\Pi)_{\bar{\Omega}_i} = \frac{1}{2} \int_{\bar{\Omega}_i}^H (\sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dz dA \quad (85)$$

(10), (12), (14) ve (15) ifadelerinin (85) ifadesinde yerine konulmasıyla potansiyel enerji ifadesi,

$$(\Pi)_{\bar{\Omega}_i} = \frac{1}{2} \int_{\bar{\Omega}_i} \left[kw^2 + 2t \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2t \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dA \quad (86)$$

şeklini almaktadır. Plağın etrafında kalan bölgelerde yerdeğiştirme fonksiyonu (26) ifadeleriyle verilmişti. Bu ifadenin ilk kısmının (86) ifadesinde yerine konulmasıyla plağın

$x=a$ kenarındaki eşdeğer tepki kuvvetleri elde edilebilmektedir. (86) ifadesinin ilk iki terimi plağın $x=a$ kenarında düşey yerdeğiştirmeye son terimi ise dönmeye karşılık gelmektedir. Bu nedenle (86) ifadesinin ilk iki teriminin ayrı yazılması,

$$(\Pi)_{\bar{\Omega}_i} = \frac{1}{2} \int_{\bar{\Omega}_i} \left[kw^2 + 2t \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dA \quad (87)$$

ve x e göre a dan sonsuza kadar integralinin alınması suretiyle şekildeğiştirme enerjisi ifadesi,

$$(\Pi)_{\bar{\Omega}_i} = \frac{1}{2} W_a^2 \sqrt{2kt} \quad (88)$$

şeklini almaktadır. Bu ifadenin minimizasyonu sonucu plağın $x=a$ kenarındaki eşdeğer düşey tepki kuvveti, W_a plağın $x=a$ kenarındaki düşey yerdeğiştirmeleri göstermek üzere,

$$\frac{\partial (\Pi_s)_{\bar{\Omega}_e}}{\partial W_{(a)}} = k_{s|x=a} = \sqrt{2kt} W_{(a)} \quad (89)$$

şeklinde elde edilmektedir. Aynı işlemlerin plağın $y=b$ kenarı boyunca tekrarlanmasıyla,

$$\frac{\partial (\Pi_s)_{\bar{\Omega}_e}}{\partial W_{(b)}} = k_{s|y=b} = \sqrt{2kt} W_{(b)} \quad (90)$$

ifadesi elde edilmektedir.

2.1.6.2. Dönme Tepki Kuvvetleri, k_θ

(26)'da verilen yerdeğiştirme fonksiyonunun ilk terimini kullanarak plağın dışındaki dy kalınlığında sahip bir parça için enerji ifadesi,

$$(\Pi_{\Theta})_{\bar{\Omega}_i} = \frac{1}{2} \int_a^{\infty} 2t \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 e^{-2\lambda(x-a)} dx dy \quad (91)$$

şeklinde yazılabilmektedir. Bu ifadenin x e göre integralinden,

$$(\Pi_{\Theta})_{\bar{\Omega}_i} = \frac{1}{2} 2t \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \frac{1}{2\lambda} dy = \frac{1}{2} 2t (\Theta_x)^2 \frac{1}{2\lambda} dy \quad (92)$$

elde edilmektedir. Burada Θ_x , $x=a$ sınırında bir noktanın dönmesidir. Buradan her bir düğüm noktasına etkiyen dönme tepki kuvvetlerini veren ifade,

$$\frac{\Pi_i}{\partial \Theta_x} = 2t (\Theta_x) \frac{1}{2\lambda} dy \quad (93)$$

yada

$$k_{\Theta|x=a} = \frac{1}{2} 2t \sqrt{\frac{2t}{k}} (\Theta_x) dy \quad (94)$$

şeklinde elde edilmektedir. Benzer işlemler $y=b$ kenarı için tekrarlanırsa aynı denklem,

$$k_{\Theta|y=b} = \frac{1}{2} 2t \sqrt{\frac{2t}{k}} (\Theta_y) dx \quad (95)$$

halini almaktadır. Bu kuvvetler herhangi bir nokta için hesaplandıktan sonra sürekli bir bölgeyi temsil etmek üzere uzaklıkla çarpılarak eşdeğer kuvvetlere dönüştürülebilmektedir.

2.1.6.3. Her Bir Düğüm Noktasına Etkiyen Eşdeğer Sınır Kuvvetleri

Plağın etrafındaki zeminden dolayı plak kenarı boyunca oluşacak düşey ve dönmeye karşı gelen tepki kuvvetlerini sonlu elemanlar yönteminde hesaba katabilmek için eşdeğer sınır kuvvetleri cinsinden ifade etmek gerekmektedir. Bu amaçla Şekil 13'te gösterilen

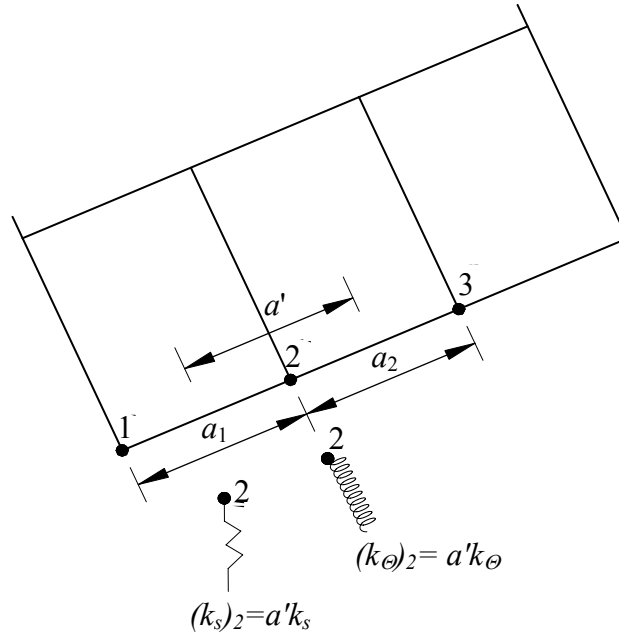
yaklaşım kullanılmaktadır. 2 numaralı düğüm noktasına gelen eşdeğer düşey ve dönmeye karşılık gelen tepki kuvvetleri,

$$a' = \frac{1}{2}(a_1 + a_2) \quad (96)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} R_s &= a'k_s = a'\sqrt{2kt}W_2 \\ R_\Theta &= a'k_\Theta = a'\frac{1}{2}2t\sqrt{\frac{2t}{k}}(\Theta)_2 \end{aligned} \quad (97)$$

bağıntılarından hesaplanmaktadır. Burada W_2 ve $(\Theta_x)_2$ sırasıyla 2 numaralı düğüm noktasındaki düşey yerdeğiştirme ve dönmeyi göstermektedir. Her düğüm noktasına etki eden eşdeğer sınır kuvvetleri o noktanın düşey yerdeğiştirmesi ve dönmelerine bağlı olduğundan bu ifadelerin rijitlik matrisinde karşılık gelen terimlere ilave edilmesiyle sınır şartları dikkate alınmış olmaktadır.



Şekil 13. Plak etrafındaki zeminin plağa olan etkisinin eşdeğer tepki kuvveti olarak dikkate alınması

2.1.6.4. Plak Köşelerine Etki Eden Eşdeğer Tepki Kuvvetleri

Şekil 6'daki (III), (V), (VII) ve (IX) zemin bölgelerinin plak köşesinde oluşturacağı tepki kuvvetleri, bu bölgelerde yazılacak potansiyel enerji ifadesinden elde edilmektedir.

$$\Pi_c = \int_a^\infty \int_b^\infty \left[kw^2 + 2t \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2t \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (98)$$

(26)'da verilen yerdeğiştirme fonksiyonlarının sonucunu (98) ifadesinde yerine konulması ve integralin alınmasıyla potansiyel enerji ifadesi,

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \frac{3}{2} t W_c^2 \quad (99)$$

formunu almaktadır. Bu ifadenin minimize edilmesiyle plak köşe düğüm noktalarına etkiyecek eşdeğer köşe tepki kuvvetleri,

$$R_c = \frac{3}{2} t W_c \quad (100)$$

şeklinde elde edilmektedir. Bu ifadenin rijitlik matrisinde karşılık gelen terimlere eklenmesi ile plağın dışında kalan zeminin plak köşelerine etkisi de dikkate alınmış olmaktadır.

2.1.7. Moment ve Kesme Kuvvetlerinin Hesaplanması

Yukarıda bahsedildiği şekilde oluşturulan sistem rijitlik matrisi ve yük vektörünün (76) ifadesinde kullanılmasıyla her bir düğüm noktasındaki yerdeğiştirmeler ve dönmeler elde edilmektedir. Elde edilen yerdeğiştirmeler ve dönmelerin (101) ifadesinde kullanılmasıyla her bir elemana ilişkin moment ve kesme kuvveti değerleri hesaplanmaktadır.

$$M = [D][B]\{w_e\} \quad (101)$$

Burada elastik zeminin plağın herhangi bir noktasında oluşacak kesme kuvvetine katkısını da dikkate almak gerekmektedir. Böylece toplam kesme kuvveti ifadesi,

$$\begin{aligned} Q_x &= Q_x + 2t \frac{\partial w}{\partial x} \\ Q_y &= Q_y + 2t \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (102)$$

şeklini almaktadır.

2.2. Etkin Zemin Derinliğinin Gerilme Dağılımına Bağlı Olarak Belirlenmesi

Günümüze kadar yapılan çalışmalarda araştırmacılar zemin parametrelerinin, yerdeğiştirmelerin ve iç kuvvetlerin derinlikle değişimini incelemişlerdir. Zemin derinliğinin ne alınacağı konusunda literatürde herhangi bir bilgiye rastlanmamaktadır. Bu çalışmada plağın boyutlarına, yükün şiddetine ve zeminin cinsine bağlı olarak zeminde oluşacak gerilmelerden yararlanılarak etkin zemin derinliğinin belirlenmesine çalışılmaktadır.

Zemin ortamının oldukça karmaşık olmasından dolayı gerilme analizleri yapmak son derece zordur ve bu nedenle aşağıdaki kabuller yapılmaktadır.

1. Zemin elastik olup, gerilme-şekildeğiştirme ilişkisi doğrusaldır.
2. Zemin ortamı homojendir.
3. Zemin izotropdur.
4. Zemin ortamı yarı sonsuzdur.

Zeminin gerçek davranışına ters olan bu basitleştirici kabuller ile pratikte kullanılabilir, makul sonuçlar elde edilmektedir.

Zemin yüzeyine uygulanan herhangi bir yükten dolayı zemin kütlesi içerisindeki noktalarda gerilme artışları meydana geleceği açıktır. Derinlik arttıkça gerilmelerin şiddeti de azalacaktır. Çeşitli yükleme durumları için zemin ortamında oluşan düşey gerilmelerin hesaplanması ile ilgili bir takım çözümler geliştirilmiştir. Bu çözümlerde zeminin kendi

ağırlığından dolayı oluşacak düşey gerilmeler yüzey yüklerinin yanında çok küçük olduğu düşünülmektedir (Uzuner, 1992).

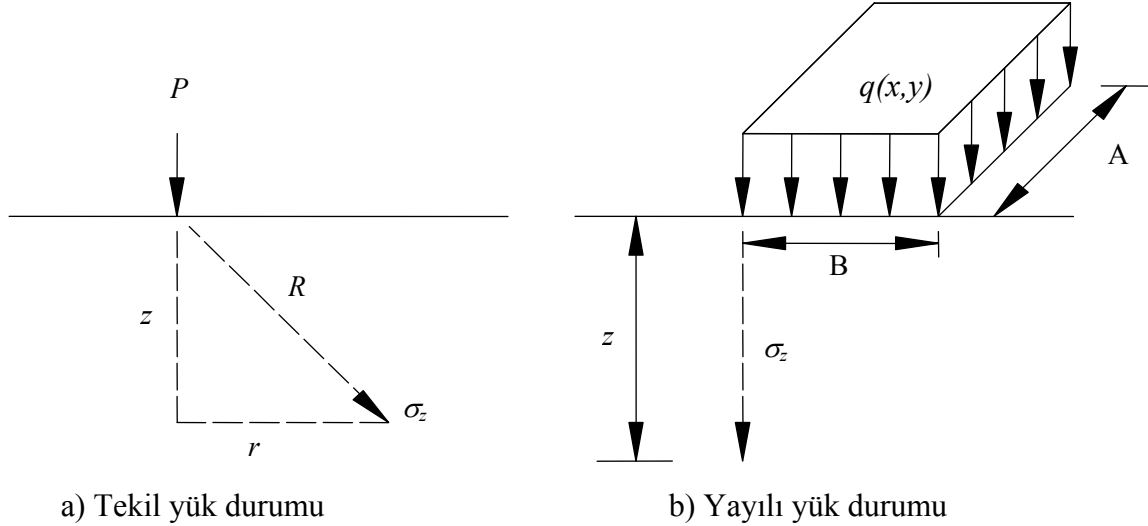
Bu çalışmada dış yüklerden dolayı ilave düşey gerilmelerin hesaplanmasında kullanılan iki farklı formülasyon aşağıda özetlenmektedir.

2.2.1. Boussinesq Formülü

Boussinesq (1883), lineer, elastik, homojen, izotrop yarı sonsuz ortamda yüzeye etkiyen bir tekil yükten dolayı oluşan gerilme problemini çözmüştür (Şekil 14.a). Bu çözüme göre, yüzeye yapılan bir tekil yükleden dolayı zemin içerisindeki herhangi bir noktada meydana gelen ilave düşey gerilmeler,

$$\sigma_z = \frac{P}{z^2} \left\{ \frac{3}{2\pi} \frac{1}{\left[\left(\frac{r}{z} \right)^2 + 1 \right]^{5/2}} \right\} \quad (103)$$

formülünden hesaplanmaktadır.



Şekil 14. İlave yüklerden dolayı zemin içerisindeki gerilme artışları

Bu bağıntının B genişliğinde ve A uzunluğundaki düzgün yayılı yüklerle yüklü dikdörtgen alanlar için integrali alınmış hali,

$$\sigma_z = \frac{q}{4\pi} \left[\frac{2\alpha\beta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 1}}{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha^2\beta^2 + 1} \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 2}{\alpha^2 + \beta^2 + 1} + \left(\tan^{-1} \frac{2\alpha\beta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 1}}{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha^2\beta^2 + 1} \right) \right] \quad (104)$$

şeklindedir (Şekil 14.b). Bu bağıntı dikdörtgen alanın köşesinin altında z derinliğinde meydana gelen gerilme değerini vermektedir. Burada $\alpha = A/z$ ve $\beta = B/z$ dir (Cernica, 1994).

Düzgün yayılı yüklerle yüklü alanın içinde veya dışındaki bir noktanın altında oluşacak gerilme ise süperpozisyon kuralı uygulanarak bulunmaktadır.

2.2.2. Westergaard Formülü

Doğal zemin tabakaları içerisinde, yatay düzlemlerde oluşan sürtünme kuvvetlerinden dolayı, düşey yüklemeler altında yatay şekildeğiştirmeler oldukça sınırlıdır. Westergaard (1938), yatay şekildeğiştirmesi sıfır olan bir elastik ortamdaki gerilme dağılımını veren çözümü elde etmiştir. Buna göre P tekil yükünden dolayı z derinliğindeki bir noktada oluşan düşey gerilme,

$$\sigma_z = \frac{P}{2z^2\pi} \frac{\sqrt{(1-2\nu_s)(2-2\nu_s)}}{\left[\frac{(1-2\nu_s)}{(2-2\nu_s)} + \left(\frac{r}{z} \right)^2 \right]^{3/2}} \quad (105)$$

bağıntısından hesaplanmaktadır. Bu bağıntı düzgün yayılı yük durumu için,

$$\sigma_z = \frac{q}{2\pi} \left[\text{Cot}^{-1} \sqrt{\left(\frac{1-2\nu_s}{2-2\nu_s} \right) \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} \right)} + \left(\frac{1-2\nu_s}{2-2\nu_s} \right)^2 \left(\frac{1}{\alpha^2\beta^2} \right) \right] \quad (106)$$

halini almaktadır. Burada $\alpha = A/z$ ve $\beta = B/z$ dir (Cernica, 1994).

Düzgün yayılı yükle yüklü alanın içinde veya dışındaki bir noktanın altında oluşacak gerilme ise süperpozisyon kuralı uygulanarak bulunmaktadır.

Burada özetlenen Boussinesq ve Westergaard formülleri kullanılarak dış yüklerin altında oluşacak düşey gerilmelerin derinlikle değişimini hesaplayan Fortran 90 dilinde kodlanan bir program yardımıyla önceden belirlenen bir hassasiyetle zeminin etkin derinliği, yükün şiddetine, plağın boyutlarına ve zeminin özelliklerine bağlı olarak belirlenmeye çalışılmaktadır. Zeminde etkilenen bölge doğru olarak belirlenebilirse elde edilecek parametreler daha gerçekçi dolayısıyla hesaplanacak olan yerdeğiştirme ve iç kuvvetler de daha güvenilir olacaktır.

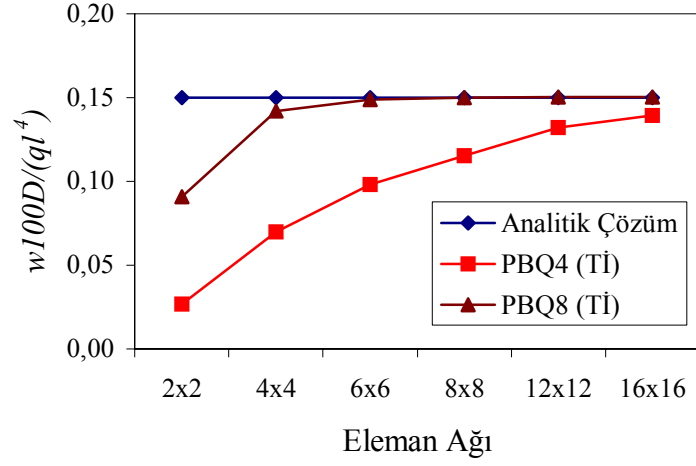
3. BULGULAR VE İRDELEME

3.1. Sonlu Eleman Ağının Belirlenmesi

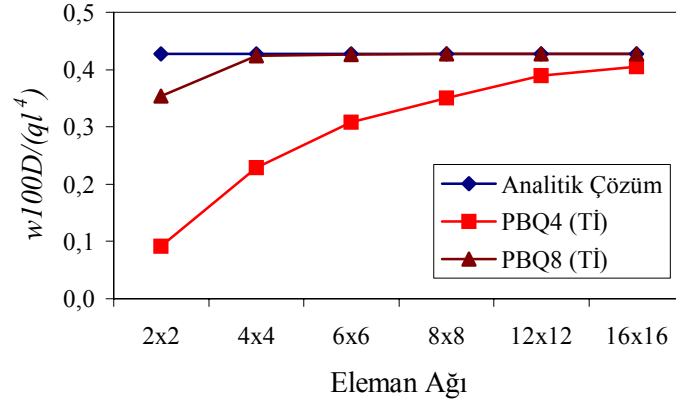
Diğer sayısal yöntemlerde olduğu gibi bu çalışmada kullanılan sonlu elemanlar yöntemiyle elde edilen sonuçlarda da bir hata payı bulunmaktadır. Büyüklüğü, kullanılan sonlu eleman ağına bağlı olan bu hata payının mühendislikte kabul edilebilir olması yanında harcanan bilgisayar zamanının da uygun sınırlar içinde kalması gerekmektedir. Bu nedenle bu bölümde sunulan bulguları elde etmek için herhangi bir sonlu eleman ağının kullanılması yerine kullanılacak sonlu eleman ağını belirlemek amacıyla, yayılı ve tekil yüke maruz basit ve ankastre mesnet şartlarına sahip, poisson oranı 0.3, h/l oranı 0.1 olan zeminsiz kare plak örneği üzerinde farklı sonlu eleman ağları kullanılarak maksimum yerdeğiştirmelerin yakınsaması gözlenmiştir.

Elde edilen sonuçlar Soh vd. (2001)'in çalışmasından alınan analitik çözümlerle kıyaslanmıştır. Şekil 15 ve 16'da yayılı yük durumunda her iki mesnet koşulunda PBQ8 (Tİ) elemanın PBQ4 (Tİ) elemana göre daha hızlı yakınsadığı görülmektedir. Buna karşın Şekil 17'den görüldüğü gibi tekil yükle yüklü ankastre plakta eleman sayısı arttıkça PBQ8 (Tİ) elemanda elde edilen sonucun kesin çözümden uzaklaştığı görülmektedir. Aynı durum Şekil 18'de tekil yükle yüklü basit mesnetli plakta da görülmektedir. Ancak buradaki hata oranı daha düşüktür. Tekil yük için görülen bu durum yükleme durumunun bir özelliği olarak nitelendirilebilir.

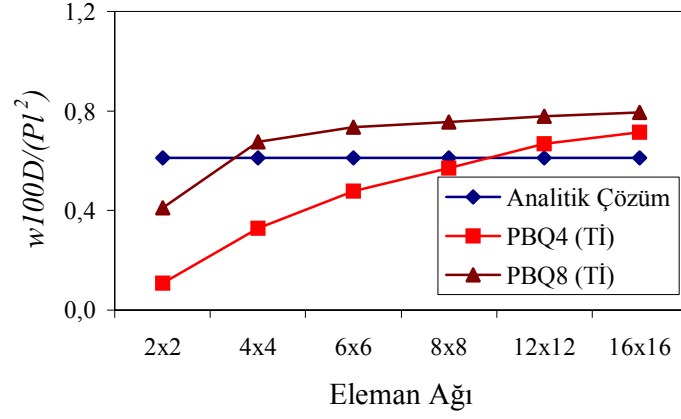
Bu çalışmada farklı malzeme özelliklerine, boyutlara ve yükleme şartlarına sahip plaklar inceleneceğinden, çözülecek her bir örnek için ayrıca yakınsama testinin yapılması daha uygun olacaktır. Bu örnek sadece kullanılan elemanların yakınsama hızları hakkında bize bilgi vermektedir.



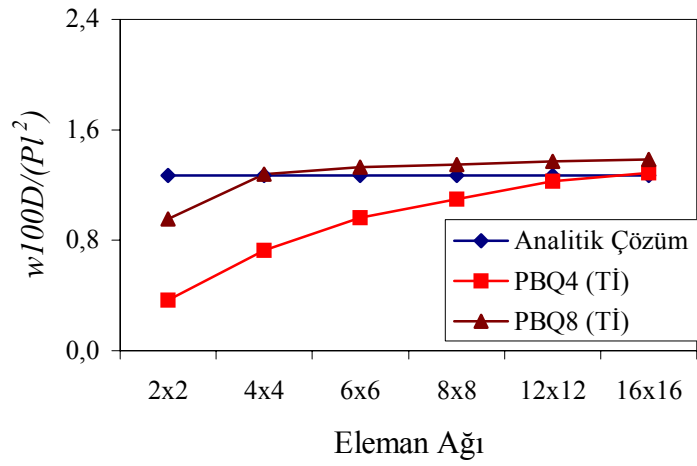
Şekil 15. Düzgün yayılı yük etkisinde ankastre mesnetli kare plağın maksimum yerdeğiştirmelerine göre yakınsama testi



Şekil 16. Düzgün yayılı yük etkisinde basit mesnetli kare plağın maksimum yerdeğiştirmelerine göre yakınsama testi



Şekil 17. Tekil yük etkisinde ankastre mesnetli kare plağın maksimum yerdeğişmelerine göre yakınsama testi



Şekil 18. Tekil yük etkisinde basit mesnetli kare plağın maksimum yerdeğişmelerine göre yakınsama testi

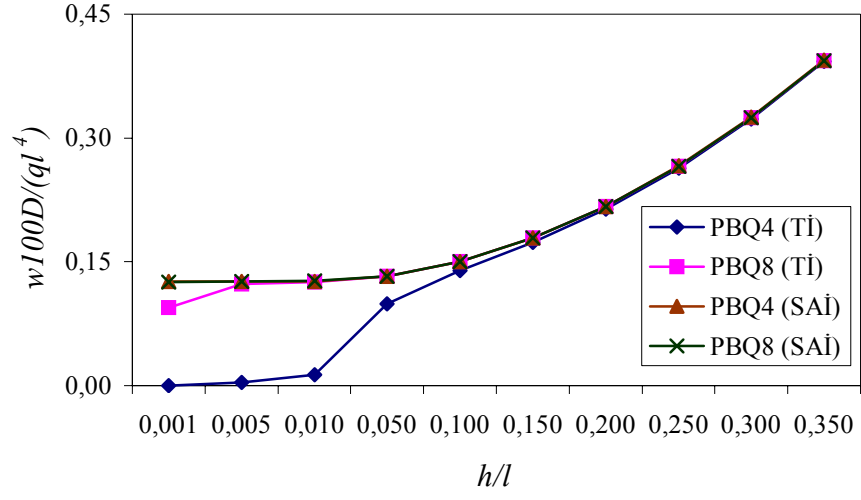
3.2. Basit ve Ankastre Mesnetli Kare Plak Örneği

Kayma kilitlenmesi probleminin meydana gelişini ve integral nokta sayısının azaltılması yoluyla bu sorunun önlenmesini göstermek amacıyla, bir zeminsiz kare plak örneği dikkate alınıp çeşitli h/l (kalınlık/kenar uzunluğu) oranları için poisson oranı 0.3 alınarak 16x16 eleman ağı ile çözülmüş ve elde edilen sonuçlar Soh vd.(2001) ile Yuqiu ve Fei (1988)'nin çalışmalarından alınan bazı analitik çözümlerle karşılaştırılmıştır.

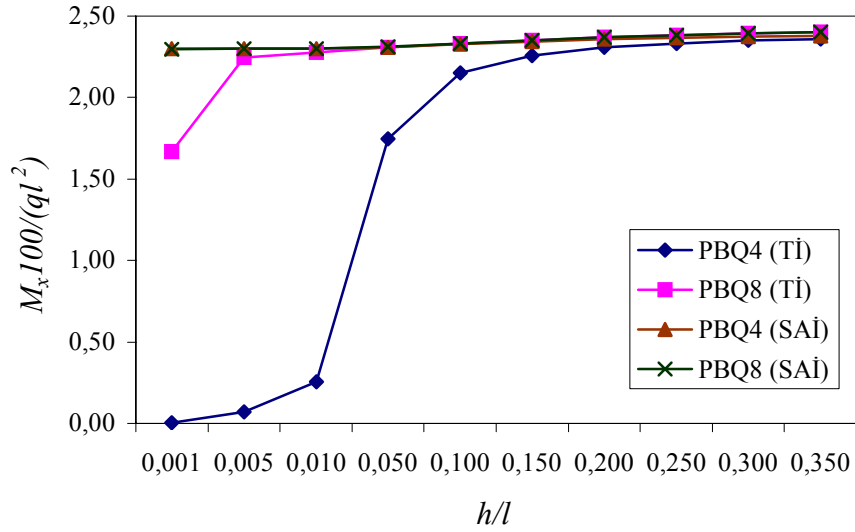
Tablo 4 ve Şekil 19 ile Şekil 20'den görüldüğü gibi ankastre mesnetli yayılı yükle yüklü plak durumunda PBQ4 elemanının tam integrasyonunda yerdeğiştirmeler için $h/l < 0.15$ sınırından, açıklık momenti için ise $h/l < 0.20$ sınırından itibaren kayma kilitlenmesi gözlenmektedir. Sekiz düğüm noktalı PBQ8 elemanı ile kayma kilitlenmesi sorununun önüne nispeten geçilebilse de yerdeğiştirmeler için $h/l < 0.005$, momentler için $h/l < 0.01$ olması halinde aynı problem, fazla belirgin olmamakla birlikte, görülmektedir. Her iki eleman içinde seçilerek azaltılmış integrasyon tekniğinin kullanılması ile küçük kalınlıklarda karşımıza çıkan bu problem tamamen ortadan kalkmakta ve kalınlık arttıkça elde edilen sonuçlar tam integrasyonla elde edilen sonuçlar ile üst üste düşmektedir. Bu durum grafiklerde daha açık bir şekilde görülmektedir.

Tablo 4. Ankastre mesnetli yayılı yükle yüklü kare plağın ortasındaki yerdeğiştirme ve eğilme momentleri

h/l	$w100D/(ql^4)$					$M_x 100/(ql^2)$				
	PBQ4 Tİ	PBQ8 Tİ	PBQ4 SAİ	PBQ8 SAİ	Analitik Çözüm	PBQ4 Tİ	PBQ8 Tİ	PBQ4 SAİ	PBQ8 SAİ	Analitik Çözüm
0.001	0.0001	0.0945	0.1261	0.1256	0.1265	0.0029	1.6677	2.3004	2.2940	-
0.005	0.0036	0.1234	0.1262	0.1266	-	0.0699	2.2460	2.3001	2.3008	-
0.010	0.0132	0.1252	0.1264	0.1268	0.1265	0.2562	2.2753	2.3000	2.3014	-
0.050	0.0993	0.1326	0.1324	0.1327	-	1.7470	2.3081	2.3090	2.3108	-
0.100	0.1395	0.1504	0.1502	0.1505	0.1499	2.1493	2.3306	2.3265	2.3314	-
0.150	0.1733	0.1787	0.1786	0.1788	0.1798	2.2582	2.3523	2.3437	2.3528	-
0.200	0.2139	0.2172	0.2172	0.2172	0.2167	2.3065	2.3702	2.3571	2.3705	-
0.250	0.2636	0.2658	0.2661	0.2658	-	2.3332	2.3837	2.3666	2.3840	-
0.300	0.3231	0.3246	0.3252	0.3246	0.3227	2.3497	2.3938	2.3734	2.3940	-
0.350	0.3927	0.3936	0.3946	0.3937	0.3951	2.3605	2.4012	2.3782	2.4014	-



Şekil 19. Yayıllı yüke maruz ankastre mesnetli kare plağın ortasındaki yerdeğiştirmelerin çeşitli h/l oranları ile değişimi

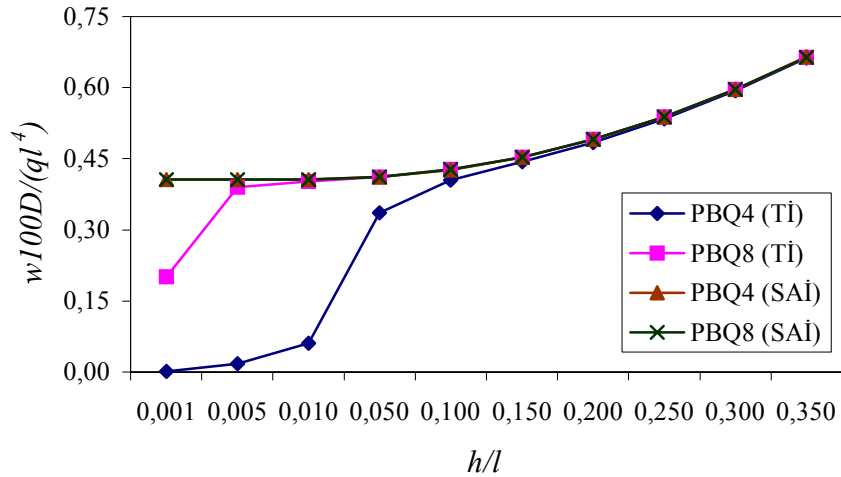


Şekil 20. Yayıllı yüke maruz ankastre mesnetli kare plağın ortasındaki eğilme momentlerinin çeşitli h/l oranları ile değişimi

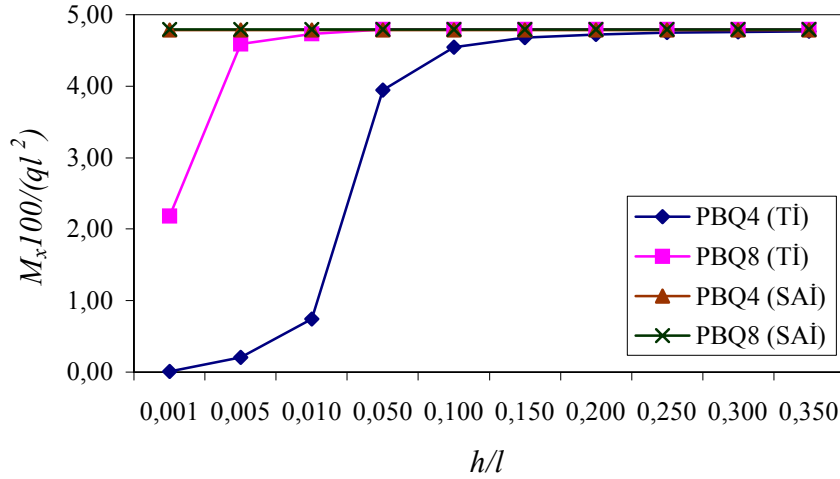
Plağın basit mesnetli ve yayılı yüke maruz olması durumunda da benzer sonuçlarla karşılaşılmaktadır. Elde edilen sonuçlar Tablo 5’te sunulmaktadır. Şekil 21 ve Şekil 22’de tam integrasyon tekniğinin kullanılmasının her iki eleman için de küçük kalınlıklarda kayma kilitlenmesine yol açtığı açıkça görülmektedir. PBQ4 elemanda bu sorun daha belirgindir. Seçilerek azaltılmış integrasyon tekniği yardımıyla bu sorun giderilmekte ve güvenilir sonuçlar elde edilmektedir.

Tablo 5. Basit mesnetli yayılı yükle yüklü kare plağın ortasındaki yerdeğiştirme ve eğilme momentleri

h/l	$w100D/(ql^4)$					$M_x 100/(ql^2)$				
	PBQ4 Tİ	PBQ8 Tİ	PBQ4 SAİ	PBQ8 SAİ	Analitik Çözüm	PBQ4 Tİ	PBQ8 Tİ	PBQ4 SAİ	PBQ8 SAİ	Analitik Çözüm
0.001	0.0007	0.2012	0.4057	0.4062	0.4062	0.0088	2.1845	4.7889	4.7951	-
0.005	0.0173	0.3903	0.4058	0.4063	-	0.2100	4.5859	4.7889	4.7953	-
0.010	0.0613	0.4021	0.4059	0.4064	0.4064	0.7438	4.7356	4.7889	4.7953	-
0.050	0.3365	0.4113	0.4110	0.4115	0.4107	3.9467	4.7921	4.7889	4.7953	-
0.100	0.4053	0.4272	0.4269	0.4273	0.4273	4.5477	4.7944	4.7889	4.7953	4.7890
0.150	0.4433	0.4536	0.4534	0.4536	0.4536	4.6787	4.7949	4.7889	4.7953	-
0.200	0.4846	0.4904	0.4904	0.4905	0.4906	4.7263	4.7950	4.7889	4.7953	-
0.250	0.5341	0.5378	0.5381	0.5378	-	4.7486	4.7951	4.7889	4.7953	-
0.300	0.5932	0.5957	0.5963	0.5957	0.5956	4.7608	4.7951	4.7889	4.7953	-
0.350	0.6625	0.6641	0.6652	0.6641	0.6641	4.7682	4.7952	4.7889	4.7953	-



Şekil 21. Yayılı yüke maruz basit mesnetli kare plağın ortasındaki yerdeğiştirmelerin çeşitli h/l oranları ile değişimi

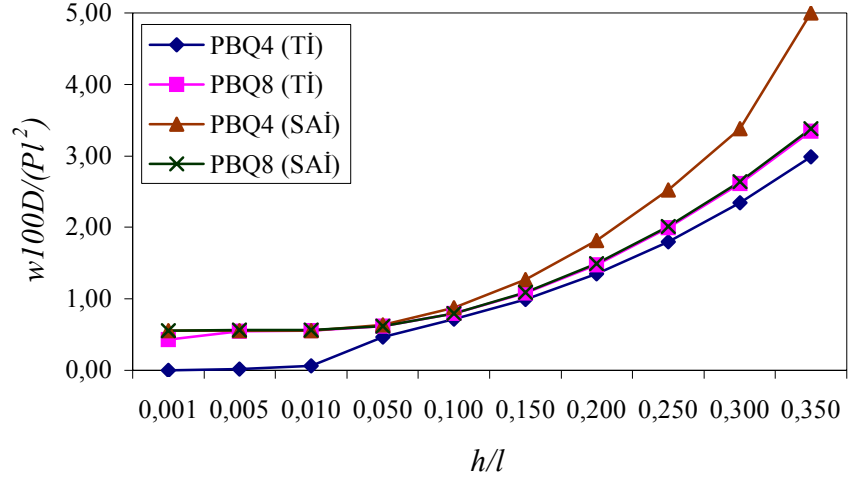


Şekil 22. Yayılı yüke maruz basit mesnetli kare plağın ortasındaki eğilme momentlerinin çeşitli h/l oranları ile değişimi

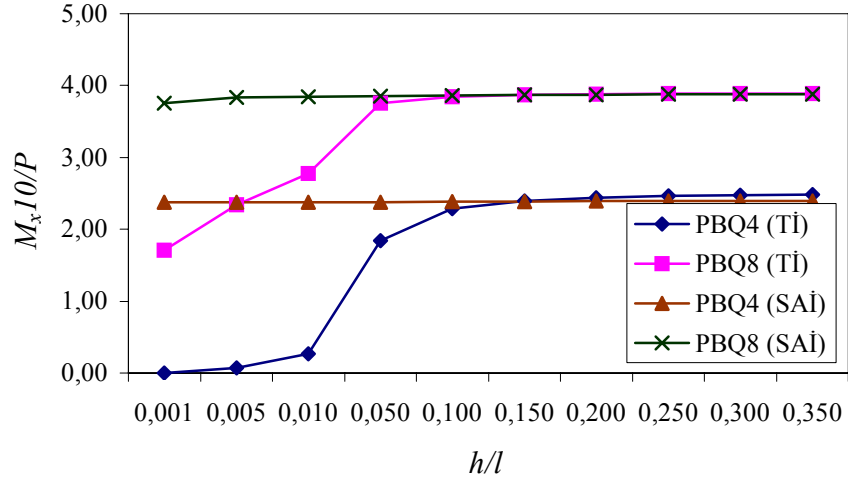
Ankastre mesnetli tekil yükle yüklü plak durumunda elde edilen sonuçlar Tablo 6, Şekil 23 ve Şekil 24'te verilmektedir. Tekil yük durumunda da benzer şekilde seçilerek azaltılmış integrasyon tekniğinin kullanılması ile kayma kilitlemesi önlenmektedir. Ancak PBQ4(SAİ) elemanda $h/l \geq 0.1$ olması halinde yerdeğiştirmeler giderek artmakta ve diğer çözümlerden uzaklaşmaktadır. Her iki integrasyon tekniğinin için PBQ4 elemanla elde edilen eğilme momentleri PBQ8'e nazaran oldukça düşük çıkmaktadır. PBQ4(SAİ) elemanın bu dezavantajlarından dolayı PBQ8(SAİ)'in bu yükleme durumu için daha güvenilir olduğu görülmektedir.

Tablo 6. Ankastre mesnetli tekil yükle yüklü kare plağın ortasındaki yerdeğiştirme ve eğilme momentleri

h/l	$w100D/(Pl^2)$					M_x10/P				
	PBQ4 Tİ	PBQ8 Tİ	PBQ4 SAİ	PBQ8 SAİ	Analitik Çözüm	PBQ4 Tİ	PBQ8 Tİ	PBQ4 SAİ	PBQ8 SAİ	Analitik Çözüm
0.001	0.0007	0.4299	0.5555	0.5551	-	0.0030	1.7040	2.3744	3.7522	-
0.005	0.0164	0.5414	0.5563	0.5607	-	0.0722	2.3403	2.3744	3.8386	-
0.010	0.0604	0.5513	0.5587	0.5628	-	0.2649	2.7756	2.3744	3.8474	-
0.050	0.4646	0.6183	0.6360	0.6202	-	1.8422	3.7528	2.3769	3.8542	-
0.100	0.7150	0.7936	0.8751	0.7969	-	2.2842	3.8444	2.3817	3.8603	-
0.150	0.9896	1.0809	1.2712	1.0879	-	2.3966	3.8674	2.3864	3.8663	-
0.200	1.3467	1.4798	1.8201	1.4921	-	2.4412	3.8784	2.3900	3.8712	-
0.250	1.7965	1.9902	2.5249	2.0094	-	2.4635	3.8849	2.3926	3.8750	-
0.300	2.3418	2.6124	3.3848	2.6400	-	2.4763	3.8893	2.3944	3.8778	-
0.350	2.9838	3.3466	4.9999	3.3841	-	2.4844	3.8922	2.3957	3.8798	-



Şekil 23. Tekil yüke maruz ankastre mesnetli kare plağın ortasındaki yerdeğişmelerin çeşitli h/l oranları ile değişimi

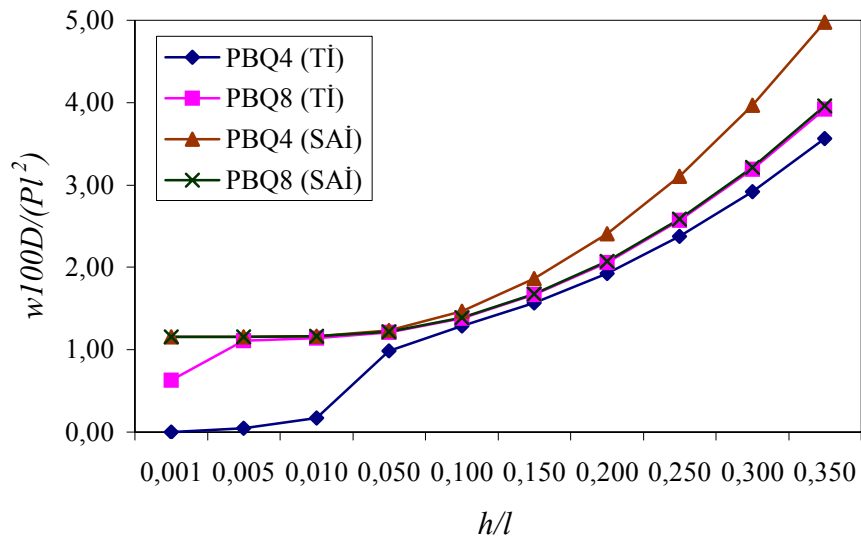


Şekil 24. Tekil yüke maruz ankastre mesnetli kare plağın ortasındaki eğilme momentlerinin çeşitli h/l oranları ile değişimi

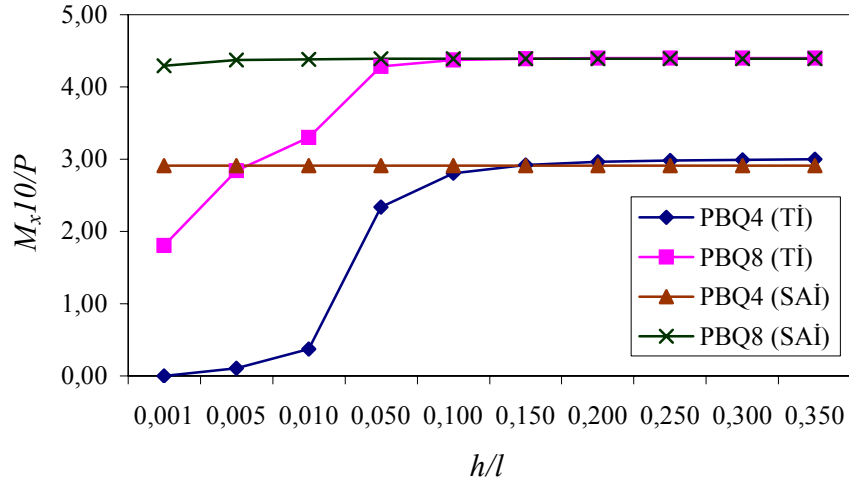
Benzer sonuçlar basit mesnetli tekil yükle yüklü plakta da görülmektedir. Elde edilen sonuçlar Tablo 7, Şekil 25 ve 26'da verilmektedir. Her iki eleman tipinde de seçilerek azaltılmış integrasyon tekniğinin kullanılması ile kayma kilitlenmesi problemi ortadan kalkmaktadır. Ancak PBQ4(SAİ) elemanda artan plak kalınlığı ile birlikte yerdeğiştirmeler giderek diğeri çözümlerden uzaklaşmakta, eğilme momentleri ise oldukça küçük çıkmaktadır. PBQ8(SAİ) elemanın kullanılmasıyla gerek bu olumsuzluklar gerekse kayma kilitlenmesi problemi ortadan kalkmakta ve elde edilen sonuçlar daha güvenilir olmaktadır.

Tablo 7. Basit mesnetli tekil yükle yüklü kare plağın ortasındaki yerdeğiştirme ve eğilme momentleri

h/l	$w100D/(Pl^2)$					M_x10/P				
	PBQ4 Tİ	PBQ8 Tİ	PBQ4 SAİ	PBQ8 SAİ	Analitik Çözüm	PBQ4 Tİ	PBQ8 Tİ	PBQ4 SAİ	PBQ8 SAİ	Analitik Çözüm
0.001	0.0020	0.6308	1.1579	1.1563	-	0.0043	1.8044	2.9118	4.2915	-
0.005	0.0474	1.1094	1.1586	1.1596	-	0.1039	2.8401	2.9118	4.3754	-
0.010	0.1690	1.1431	1.1610	1.1616	-	0.3746	3.3033	2.9118	4.3840	-
0.050	0.9827	1.2145	1.2358	1.2165	-	2.3320	4.2865	2.9118	4.3881	-
0.100	1.2890	1.3845	1.4697	1.3879	-	2.8028	4.3724	2.9118	4.3883	-
0.150	1.5705	1.6664	1.8595	1.6734	-	2.9182	4.3895	2.9118	4.3884	-
0.200	1.9276	2.0608	2.4052	2.0731	-	2.9615	4.3955	2.9118	4.3884	-
0.250	2.3761	2.5679	3.1068	2.5870	-	2.9822	4.3984	2.9118	4.3884	-
0.300	2.9201	3.1876	3.9644	3.2152	-	2.9936	4.3999	2.9118	4.3884	-
0.350	3.5610	3.9200	4.9779	3.9575	-	3.0005	4.4008	2.9118	4.3884	-

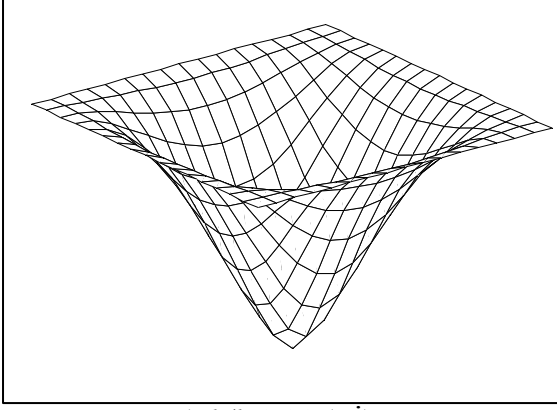
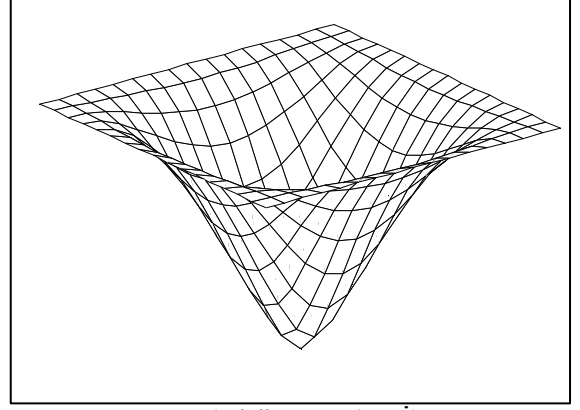
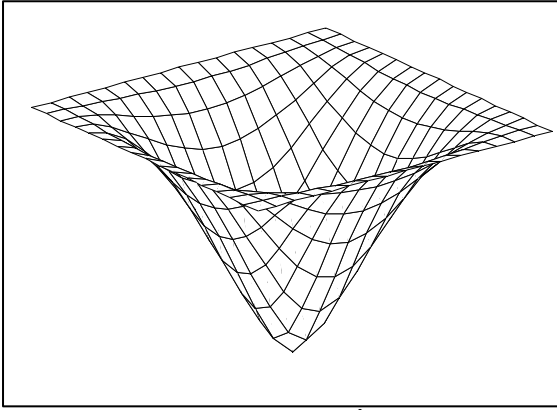
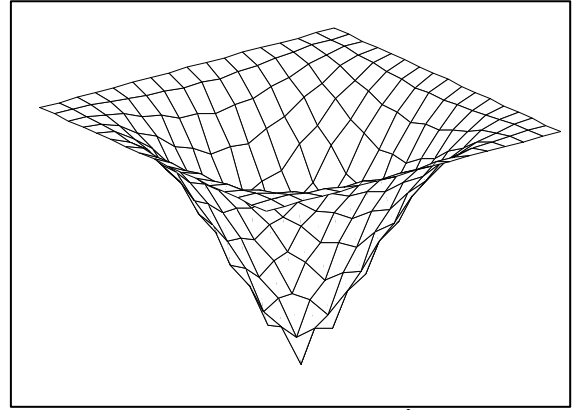
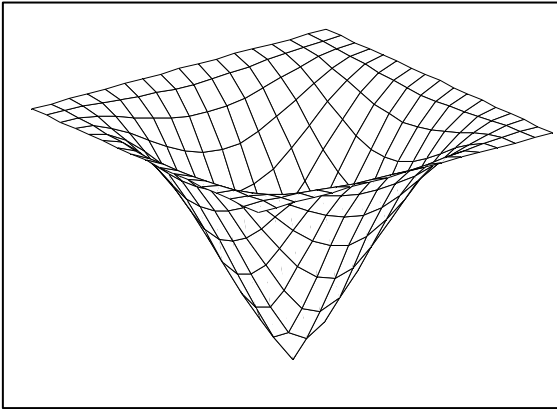
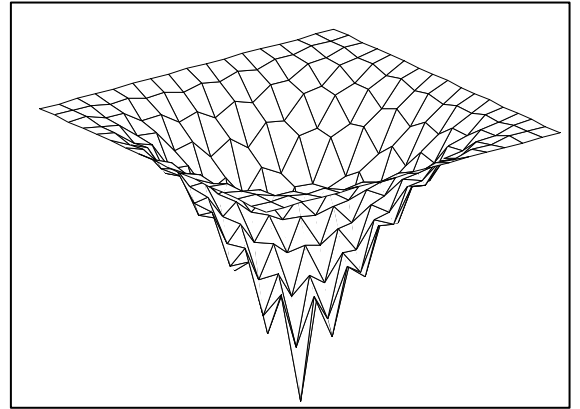


Şekil 25. Tekil yüke maruz basit mesnetli kare plağın ortasındaki yerdeğiştirmelerin çeşitli h/l oranları ile değışimi



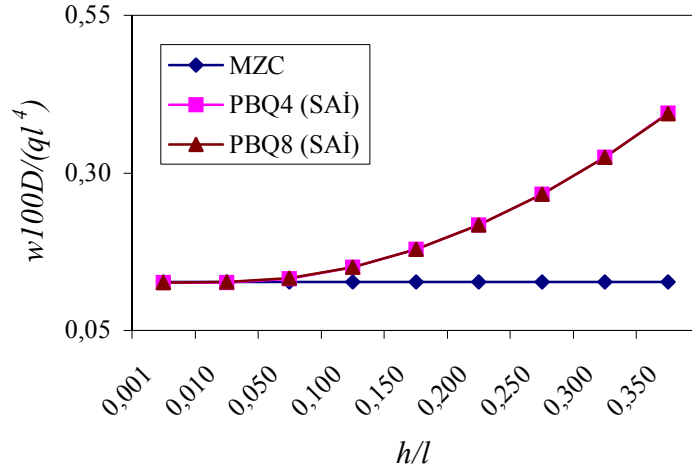
Şekil 26. Tekil yüke maruz basit mesnetli kare plağın ortasındaki eğilme momentlerinin çeşitli h/l oranları ile değişimi

Özetle, rijitlik matrislerinin tam integrasyon (Tİ) tekniği ile türetildiği PBQ4 ve PBQ8 elemanlar kullanılarak yapılan çözümlerde küçük h/l oranlarında kayma kilitlenmesi problemi ile karşılaşmaktadır. Sekiz düğüm noktalı PBQ8 eleman ile kayma kilitlenmesi sorununun önüne nispeten geçilebilse de h/l oranının 0.01 den küçük olması halinde aynı problem, çok belirgin olmamakla birlikte, yinede görülmektedir. Daha öncede belirtildiği gibi bunun nedeni kalınlık azaldıkça eğilme etkilerinin yanında kayma etkilerinin baskın olması ve plağın gerçekte olduğundan daha rijit davranmasıdır. Kayma terimlerinden oluşan eleman rijitlik matrisinin hesabında Gauss nokta sayısının azaltılması (SAİ) bu problemi ortadan kaldırmaktadır. Ancak tekil yük durumunda PBQ4(SAİ) elemanda kalınlık arttıkça beklenenden büyük yerdeğiştirmeler elde edilmekte, eğilme momentleri ise her iki integrasyon tekniğinde de küçük çıkmaktadır. Tekil yük durumunda kalınlık arttıkça seçilerek azaltılmış integrasyon tekniği ile elde edilen yerdeğiştirmelerdeki bozulma Şekil 27’de daha açık bir şekilde görülmektedir. Bütün bu sonuçların ışığında dikkate alınan tüm mesnet şartları ve yükleme durumları için PBQ8(SAİ) elemanın en iyi neticeyi verdiği görülmektedir.

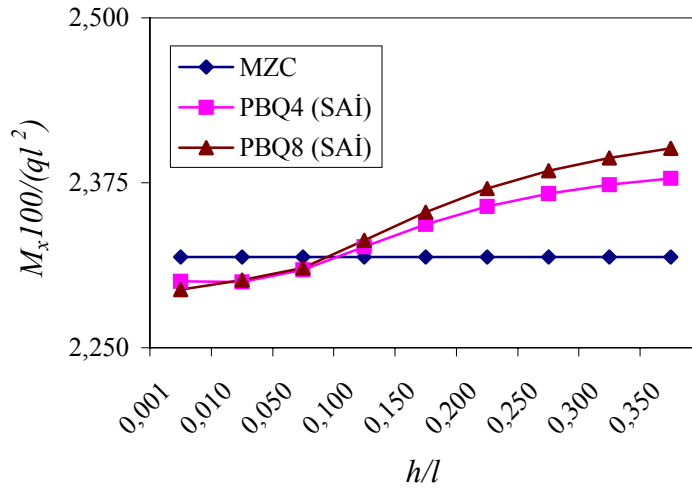
a) $h/l=0.01$ (Tİ)a) $h/l=0.01$ (SAİ)b) $h/l=0.05$ (Tİ)b) $h/l=0.05$ (SAİ)c) $h/l=0.10$ (Tİ)c) $h/l=0.10$ (SAİ)

Şekil 27. Tekil yükle yüklü ankastre mesnetli kare plağın PBQ4 eleman ile her iki integrasyon tekniği kullanılarak çözümünden elde edilen yerdeğiştirme durumlarının kalınlıkla değişimi

Son olarak kalınlık doğrultusundaki kayma şekildeğiştirmelerinin çözüme etkisini göstermek amacıyla, yayılı yük etkisindeki ankastre mesnetli plak için, Şekil 28 ve 29’da ince plak teorisi ve kalın plak teorisi ile yapılan çözümler karşılaştırılmıştır. Bu amaçla Kirchhoff plak teorisi kabulüne göre Melosh (1963), Zienkiewicz ve Cheung (1964) tarafından geliştirilen 4 düğüm noktalı 12 serbestlik dereceli MZC eleman kullanılmıştır (Vallabhan, Daloglu, 1999). MZC elemanda sonuçlar kalınlıktan etkilenmezken PBQ4(SAI) ve PBQ8(SAI) elemanlarda kayma şekildeğiştirmelerinin katkısıyla yerdeğiştirmeler ve momentler artmaktadır. Buradan plak kalınlığı arttıkça kayma şekildeğiştirmelerinin dikkate alınmasının zorunlu olduğu açıkça görölmektedir.



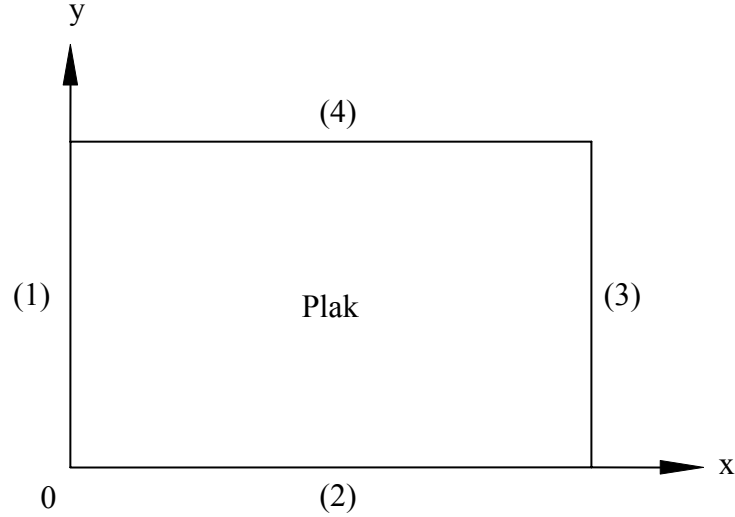
Şekil 28. Plak kalınlığının düzgün yayılı yüke maruz ankastre mesnetli bir kare plağın maksimum yerdeğiştirmesi üzerindeki etkisi



Şekil 29. Plak kalınlığının düzgün yayılı yüke maruz ankastre mesnetli bir kare plağın ortasındaki eğilme momenti üzerindeki etkisi

3.3. Çeşitli Mesnet Koşullarına Sahip Elastik Zemine Oturan Kare Plak Örneği

Daha önce Han ve Liew (1997) tarafından çözülen çeşitli mesnet şartlarına sahip iki parametrelili zemine oturan bir plak örneği dikkate alınmıştır (Şekil 30). Plak karedir ve $h/l=0.10$ alınmıştır. 16×16 sonlu eleman ağı kullanılmıştır. Han ve Liew (1997)'in yaptığı gibi çözümde iki parametrelili zemin modeli kullanılmış, zemin parametreleri programa dışarıdan veri olarak girilerek çözüm gerçekleştirilmiştir. Han ve Liew (1997)'in çalışmasından alınan boyutsuz zemin parametreleri, $K=200$ ($K=l^4k/D$) ve $2T=20$ ($2T=l^22t/D$) dir. Elde edilen yerdeğiştirme, moment ve kesme kuvveti değerleri de boyutsuz olarak Tablo 8'de verilmektedir.



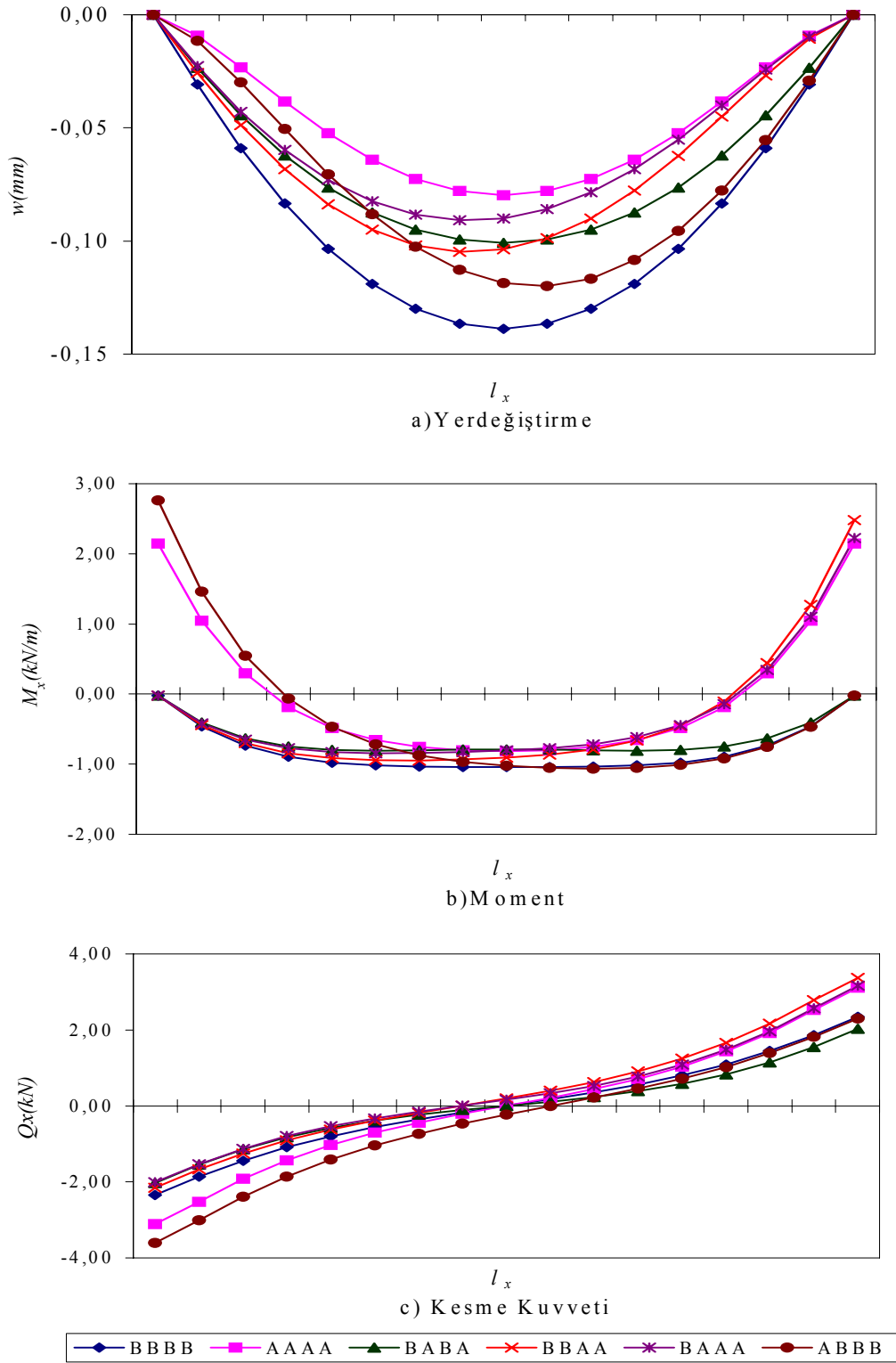
Şekil 30. Çeşitli mesnet koşullarına sahip plak şeması

Elde edilen yerdeğiştirme ve moment değerleri Han ve Liew (1997)'in sunduğu değerler ile oldukça yakındır. Ancak dikkatlice incelendiğinde PBQ4(Tİ) eleman ile elde edilen yerdeğiştirme ve moment değerlerinde fazla belirgin olmamakla birlikte kayma kilitlenmesi etkisi gözlenmektedir. PBQ4(SAİ) elemanda momentler bir miktar büyük çıkmaktadır. Buna karşılık asıl farklılık kesme kuvvetlerinde görülmektedir. Han ve Liew (1997)'in kesme kuvvetleri ile kıyaslandığında ankastre mesnet ortasında 8 düğüm noktalı eleman, basit mesnet durumunda ise 4 düğüm noktalı eleman daha yakın sonuç vermektedir.

Tablo 8. Çeşitli mesnet koşulları için iki parametrelili elastik zemine oturan yayılı yüklerle yüklü kare plağa ilişkin yerdeğiştirme, eğilme momentleri ve kesme kuvveti değerleri

Sınır Şartları		$\frac{wD1000}{ql^4}$	$\frac{M_x 100}{ql^2}$	$\frac{M_y 100}{ql^2}$	$\frac{M_{xy} 100}{ql^2}$	$\frac{Q_x}{ql}$	$\frac{Q_y}{ql}$
		x=0.5 y=0.5	x=0.5 y=0.5	x=0.5 y=0.5	x=0.0 y=0.0	x=0.0 y=0.5	x=0.5 y=0.0
BBBB	Han ve Liew(1997)	1.589	1.629	1.629	1.407	0.167	0.167
	PBQ4(Tİ)	1.565	1.624	1.624	1.323	0.224	0.224
	PBQ8(Tİ)	1.589	1.628	1.628	1.419	0.294	0.294
	PBQ4 (SAİ)	1.594	1.643	1.643	1.361	0.220	0.220
	PBQ8 (SAİ)	1.589	1.628	1.628	1.416	0.294	0.294
AAAA	Han ve Liew(1997)	0.913	1.275	1.275	0.000	0.339	0.339
	PBQ4(Tİ)	0.876	1.236	1.236	0.000	0.589	0.589
	PBQ8(Tİ)	0.913	1.278	1.278	0.000	0.388	0.388
	PBQ4 (SAİ)	0.916	1.292	1.292	0.000	0.609	0.609
	PBQ8 (SAİ)	0.913	1.278	1.278	0.000	0.388	0.388
BABA	Han ve Liew(1997)	1.154	1.236	1.570	0.560	0.156	0.378
	PBQ4(Tİ)	1.117	1.211	1.533	0.382	0.187	0.696
	PBQ8(Tİ)	1.154	1.235	1.574	0.488	0.253	0.435
	PBQ4 (SAİ)	1.157	1.248	1.586	0.415	0.187	0.713
	PBQ8 (SAİ)	1.154	1.235	1.574	0.497	0.253	0.436
BBAA	Han ve Liew(1997)	1.187	1.419	1.419	1.278	0.162	0.162
	PBQ4(Tİ)	1.151	1.391	1.391	1.190	0.235	0.235
	PBQ8(Tİ)	1.186	1.421	1.421	1.290	0.269	0.269
	PBQ4 (SAİ)	1.191	1.434	1.434	1.233	0.198	0.198
	PBQ8 (SAİ)	1.187	1.421	1.421	1.287	0.269	0.269
BAAA	Han ve Liew(1997)	1.030	1.256	1.418	0.550	0.157	0.358
	PBQ4(Tİ)	0.993	1.224	1.380	0.374	0.185	0.641
	PBQ8(Tİ)	1.030	1.257	1.422	0.479	0.252	0.411
	PBQ4 (SAİ)	1.033	1.271	1.434	0.407	0.184	0.660
	PBQ8 (SAİ)	1.030	1.258	1.422	0.488	0.252	0.412
ABBB	Han ve Liew(1997)	1.358	1.598	1.420	0.586	0.392	0.161
	PBQ4(Tİ)	1.326	1.576	1.404	0.403	0.736	0.205
	PBQ8(Tİ)	1.358	1.599	1.420	0.511	0.451	0.272
	PBQ4 (SAİ)	1.363	1.613	1.433	0.436	0.752	0.202
	PBQ8 (SAİ)	1.358	1.600	1.420	0.519	0.451	0.272

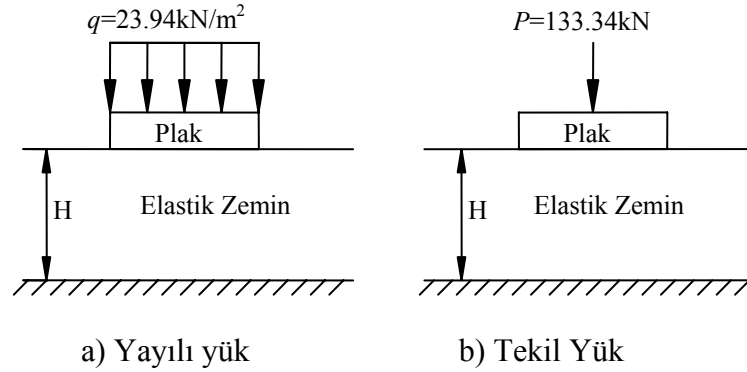
Her bir mesnet durumu için PBQ8(SAİ) eleman ile elde edilen yerdeğiştirme, eğilme momentleri ve kesme kuvveti değerlerinin plağın ortasında x doğrultusu boyunca değişimi karşılaştırmalı olarak sırasıyla Şekil 31'de verilmektedir. Görüldüğü gibi plakta ankastre kenar sayısı arttıkça yerdeğiştirmeler azalmaktadır. Basit mesnetli kenarlarda moment oluşmamakta, ankastre mesnetli kenarlarda kesme kuvveti daha büyük çıkmaktadır.



Şekil 31. Çeşitli mesnet şartlarına sahip iki parametrelili elastik zemine oturan düzgün yayılı yükle yüklü bir kare plağın çözümünden elde edilen yerdeğiştirme, moment ve kesme kuvveti değerlerinin plak orta düzleminde x eksenini boyunca değişimi

3.4. Elastik Zemine Oturan Plak Örneği

Daha önce bir çok araştırmacı tarafından çözülen elastisite modülü 68950 kN/m^2 , poisson oranı 0.25 olan elastik bir zemine oturan $E=20685000 \text{ kN/m}^2$ ve $\nu=0.20$ malzeme özelliklerine sahip $9.144 \text{ m} \times 12.192 \text{ m}$ boyutlarındaki 0.1524 m kalınlığında, 23.94 kN/m^2 şiddetinde yayılı yüke maruz bir plak dikkate alınmıştır. Aynı örnek ortasından 133.34 kN luk tekil yük etkisinde de çözülmüştür (Şekil 32). Vallabhan vd. (1991) sonlu farklar yöntemi ile çözüm yaparken, Çelik ve Saygun (1999) 10×12 eleman ağı ile kendi geliştirdikleri sonlu elemanı, Buczkowski ve Torbacki (2001) 4×4 eleman ağı ile 18 düğüm noktalı sıfır kalınlıklı isoparametrik elemanı, Daloglu ve Ozgan (2004) 6×6 eleman ağı ile MZC elemanı kullanmışlardır. Bu çalışmada ise 10×12 sonlu eleman ağı kullanılmıştır. Yayılı ve tekil yük durumu için, elde edilen zemin parametreleri, maksimum yerdeğıştirmeler ve momentler Tablo 9 ve 10'da verilmektedir.



Şekil 32. Elastik zemine oturan dikdörtgen plak

Çözülen örnek ince plak sınıfına girdiğinden tam integrasyon (Tİ) tekniğinin kullanılması ile elde edilen yerdeğıştirme ve moment değerleri kayma kilitlenmesi nedeniyle literatürdeki sonuçlardan küçük çıkmakta ve bu durum zemin parametrelerinde de hissedilmektedir. Özellikle tekil yük durumunda bu durum daha net görülmektedir. Seçilerek azaltılmış integrasyon (SAİ) tekniği ile elde edilen yerdeğıştirmeler oldukça iyi sonuçlar vermesine rağmen eğilme momentlerinde 8 düğüm noktalı eleman daha iyi netice vermektedir. Yayılı yük durumunda PBQ4(SAİ), PBQ8(Tİ) ve PBQ8(SAİ) eleman ile elde edilen gerek yerdeğıştirmeler gerekse eğilme momentleri birbirlerine ve diğer çalışmalara

yakın çıkmaktadır. Tekil yük durumunda ise PBQ4(Tİ), PBQ8(Tİ) ve PBQ4(SAİ)'den elde edilen açıklık momentleri diğer çalışmalara nazaran oldukça küçük çıkmaktadır. Her iki yükleme durumu dikkate alındığında en iyi sonuç PBQ8(SAİ) eleman ile elde edilmektedir.

Tablo 9. Elastik zemine oturan yayılı yükle yüklü plağın çözümünden elde edilen zemin parametreleri, maksimum yerdeğiştirmeler ve momentler

$H(m)$		$k(kN/m^3)$	$2t(kN/m)$	γ	$w(cm)$	$M_x(kNm)$
3.048	Vallabhan vd (1991)	27206	26904	0.5724	0.0872	0.0529
	Çelik ve Saygun (1999)	27192	26826	0.5766	0.0853	0.0445
	Buczowski ve Tor.(2001)	27207	26852	0.5724	0.0871	-
	Daloglu ve Ozgan (2004)	27206	26858	0.5707	0.0873	0.0344
	PBQ4 (Tİ)	27205	26870	0.5678	0.0915	0.1872
	PBQ8 (Tİ)	27208	26839	0.5758	0.0874	0.0559
	PBQ4 (SAİ)	27208	26841	0.5753	0.0876	0.0465
	PBQ8 (SAİ)	27208	26839	0.5758	0.0874	0.0490
6.096	Vallabhan vd (1991)	13757	50282	0.9297	0.1524	0.3113
	Çelik ve Saygun (1999)	13757	50410	0.9194	0.1526	0.2880
	Buczowski ve Tor.(2001)	13758	50411	0.9194	0.1530	-
	Daloglu ve Ozgan (2004)	13743	50628	0.8993	0.1533	0.2638
	PBQ4 (Tİ)	13735	50751	0.8880	0.1554	0.4022
	PBQ8 (Tİ)	13746	50578	0.9040	0.1532	0.2935
	PBQ4 (SAİ)	13744	50615	0.9007	0.1541	0.2546
	PBQ8 (SAİ)	13744	50620	0.9002	0.1533	0.2794
9.144	Vallabhan vd (1991)	9430	69506	1.2644	0.1890	0.4224
	Çelik ve Saygun (1999)	9377	70586	1.2064	0.1893	0.4109
	Buczowski ve Tor.(2001)	9378	50587	1.2064	0.1896	-
	Daloglu ve Ozgan (2004)	9342	71302	1.1674	0.1909	0.3799
	PBQ4 (Tİ)	9336	71419	1.1610	0.1903	0.4818
	PBQ8 (Tİ)	9347	71192	1.1734	0.1903	0.4113
	PBQ4 (SAİ)	9339	71362	1.1641	0.1917	0.3296
	PBQ8 (SAİ)	9337	71390	1.1625	0.1908	0.3917
15.24	Vallabhan vd (1991)	6366	94732	1.9419	0.2070	0.4892
	Çelik ve Saygun (1999)	5964	104664	1.6193	0.2212	0.4671
	Buczowski ve Tor.(2001)	5964	104664	1.6193	0.2205	-
	Daloglu ve Ozgan (2004)	5948	105134	1.6044	0.2240	0.4253
	PBQ4 (Tİ)	5958	104858	1.6132	0.2197	0.4962
	PBQ8 (Tİ)	5954	104956	1.6100	0.2222	0.4589
	PBQ4 (SAİ)	5928	105747	1.5850	0.2247	0.3228
	PBQ8 (SAİ)	5924	105889	1.5805	0.2238	0.4311

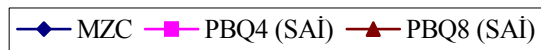
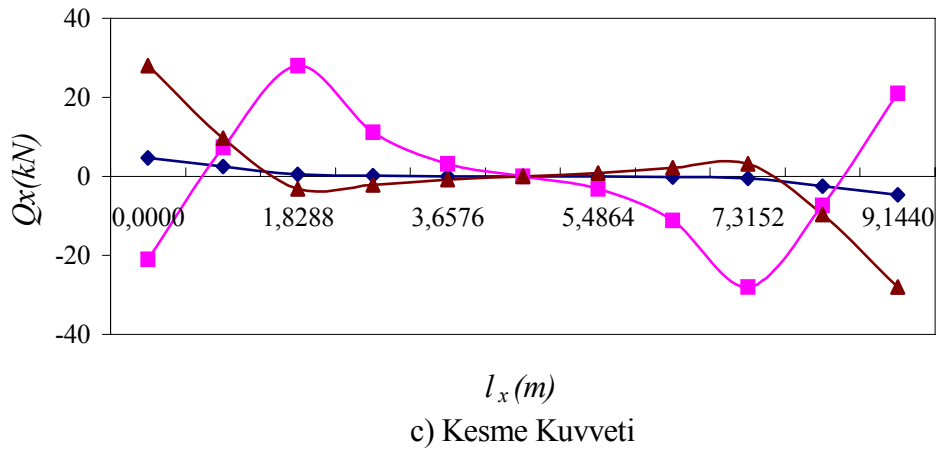
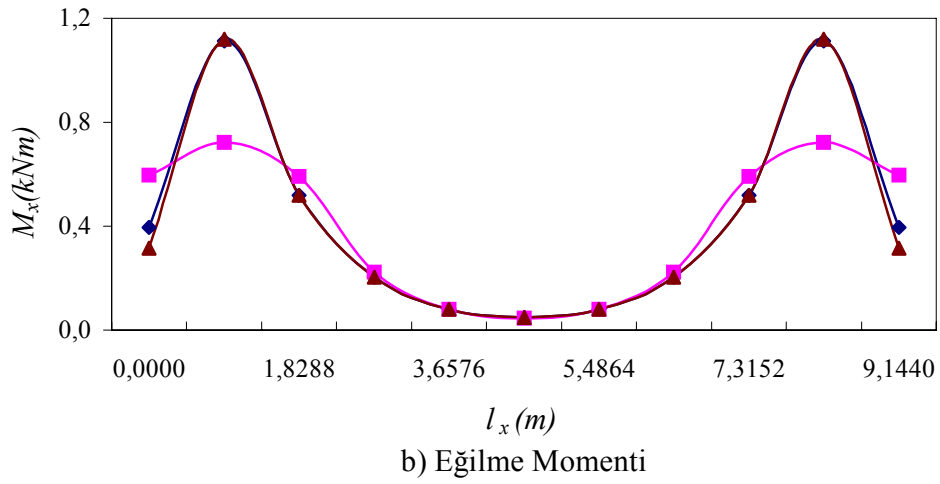
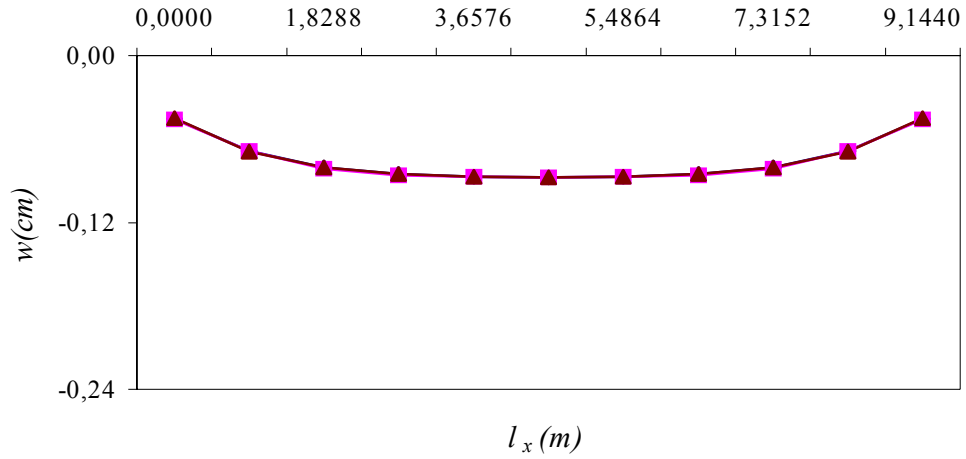
Her iki yükleme durumunda da dikkate alınan zemin derinliklerinin artmasıyla elde edilen yatak katsayıları (k) azalırken, zemin kayma parametresi ($2t$) ve zemin yüzey

parametresi (γ) artmaktadır. Derinlik arttıkça yükten etkilenen bölge büyüdüğünden zemin daha elastik davranmakta, elde edilen yerdeğiştirme ve moment değerleri artmaktadır.

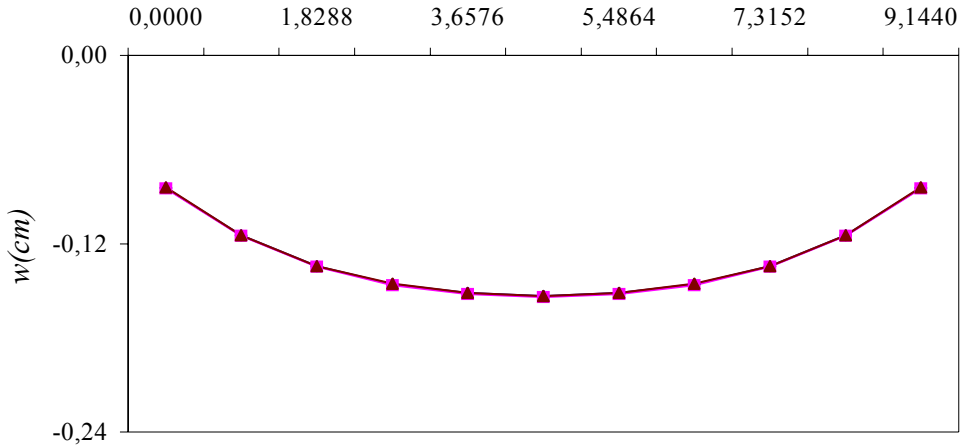
Tablo 10. Elastik zemine oturan tekil yükle yüklü plağın çözümünden elde edilen zemin parametreleri, maksimum yerdeğiştirmeler ve momentler

$H(m)$		$k(kN/m^3)$	$2t(kN/m)$	γ	$w(cm)$	$M_x(kNm)$
3.048	Vallabhan vd (1991)	31610	19130	1.9018	0.0480	12.544
	Çelik ve Saygun (1999)	31898	18912	1.9478	0.0818	15.047
	Buczowski ve Tor.(2001)	31898	18913	1.9478	0.0894	-
	Ozgan ve Daloglu (2005)	32119	9367	1.9778	0.0827	16.318
	PBQ4 (Tİ)	27908	24043	1.1217	0.0358	1.256
	PBQ8 (Tİ)	30597	20089	1.7544	0.0716	8.862
	PBQ4 (SAİ)	31732	19050	1.9249	0.0822	5.560
	PBQ8 (SAİ)	31804	18990	1.9349	0.0857	17.633
6.096	Vallabhan vd (1991)	23918	23918	3.4737	0.0975	12.544
	Çelik ve Saygun (1999)	24256	23596	3.5249	0.0845	14.563
	Buczowski ve Tor.(2001)	24256	23598	3.5249	0.0912	-
	Ozgan ve Daloglu (2005)	24664	11559	3.5896	0.0853	15.816
	PBQ4 (Tİ)	15630	38919	1.8570	0.0409	1.254
	PBQ8 (Tİ)	21741	26432	3.1146	0.0751	8.634
	PBQ4 (SAİ)	23774	24089	3.4481	0.0850	5.446
	PBQ8 (SAİ)	24092	23763	3.4987	0.0884	17.128
9.144	Vallabhan vd (1991)	23376	24386	5.1669	0.0975	12.544
	Çelik ve Saygun (1999)	23737	24034	5.2434	0.0846	14.510
	Buczowski ve Tor.(2001)	23738	24036	5.2434	0.0912	-
	Ozgan ve Daloglu (2005)	24191	11792	5.3441	0.0854	15.767
	PBQ4 (Tİ)	12462	46700	2.5667	0.0421	1.231
	PBQ8 (Tİ)	20847	27377	4.5983	0.0753	8.589
	PBQ4 (SAİ)	23188	24607	5.1211	0.0851	5.428
	PBQ8 (SAİ)	23557	24221	5.2032	0.0885	17.073
15.24	Vallabhan vd (1991)	23350	24410	8.6079	0.0975	12.544
	Çelik ve Saygun (1999)	23710	24060	8.7369	0.0846	14.510
	Buczowski ve Tor.(2001)	23717	24054	8.7369	0.0912	-
	Ozgan ve Daloglu (2005)	24170	11801	8.9038	0.0854	15.765
	PBQ4 (Tİ)	11205	50967	4.1073	0.0425	1.216
	PBQ8 (Tİ)	20777	27457	7.6539	0.0753	8.585
	PBQ4 (SAİ)	23157	24635	8.5307	0.0851	5.427
	PBQ8 (SAİ)	23530	24245	8.6682	0.0885	17.070

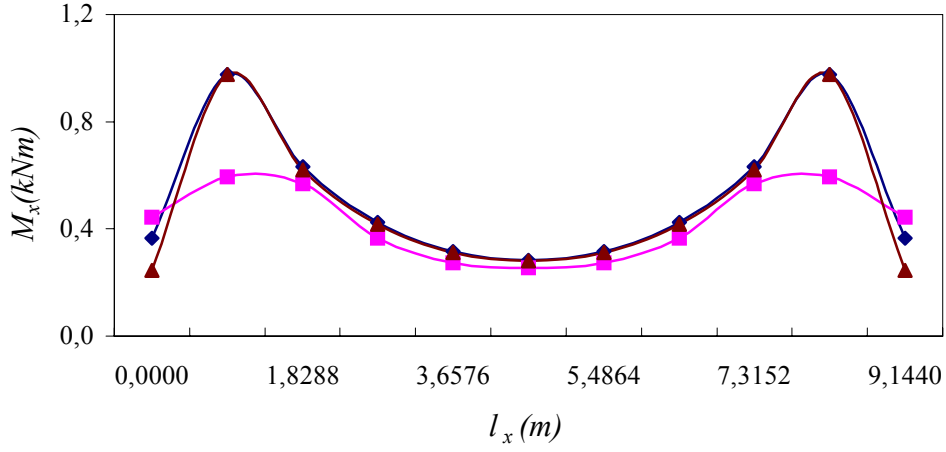
İnce plak ve kalın plak teorilerinin plak davranışı üzerindeki etkisini daha iyi görebilmek için plağın ortasında x eksenini boyunca yerdeğiştirme, eğilme momenti ve kesme kuvveti değişimlerini gösteren grafikler Şekil 33-40'ta verilmektedir.



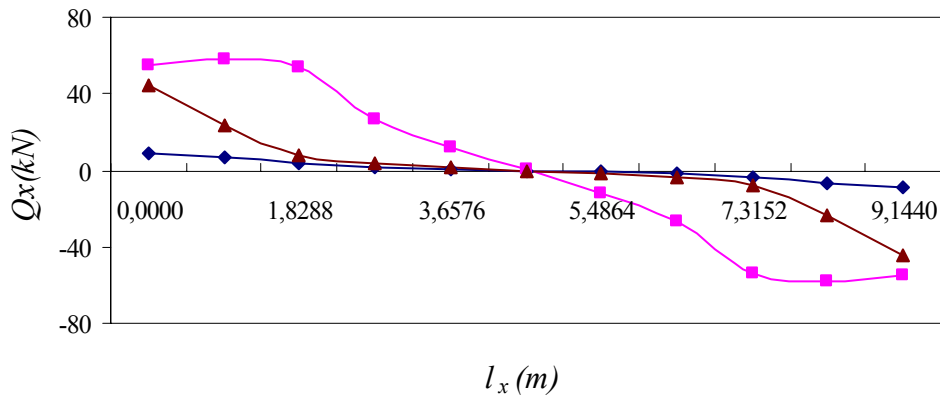
Şekil 33. $H=3.048$ m için yayılı yükle yüklü plağın yerdeğiştirme, moment ve kesme kuvveti değerlerinin plak orta düzleminde x eksenı boyunca değişimi



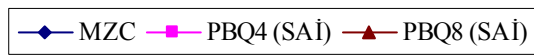
a) Yerdeğiştirme



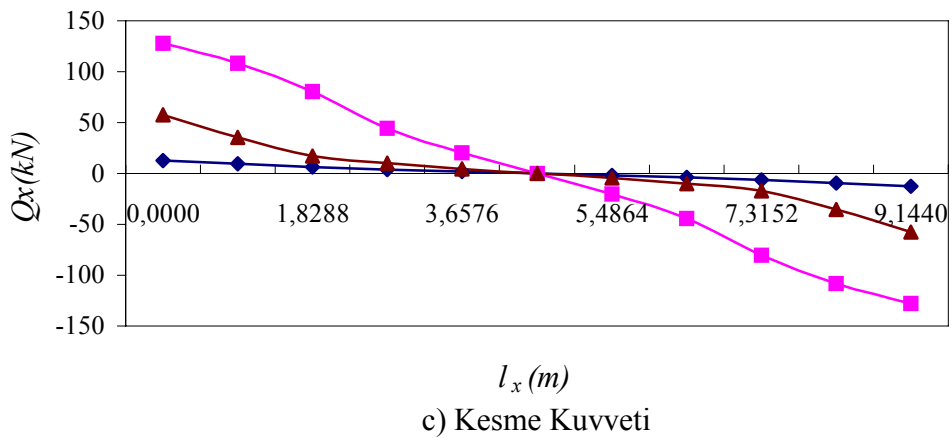
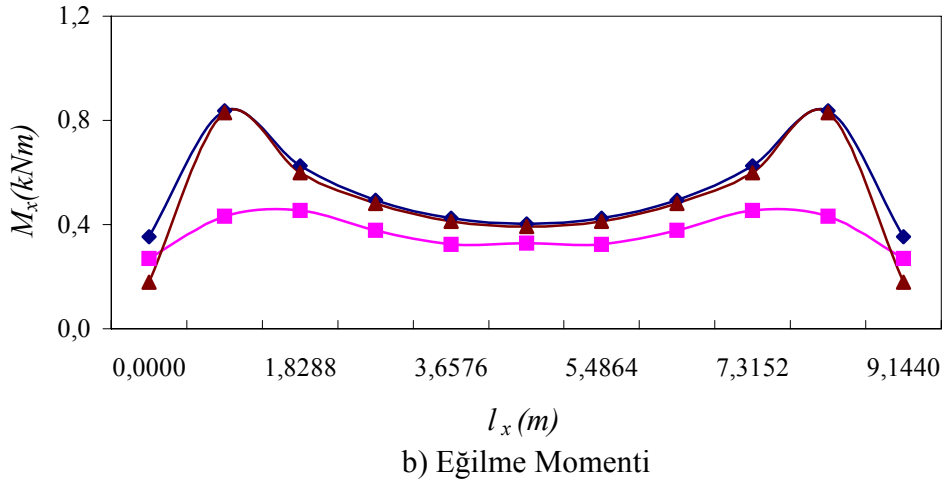
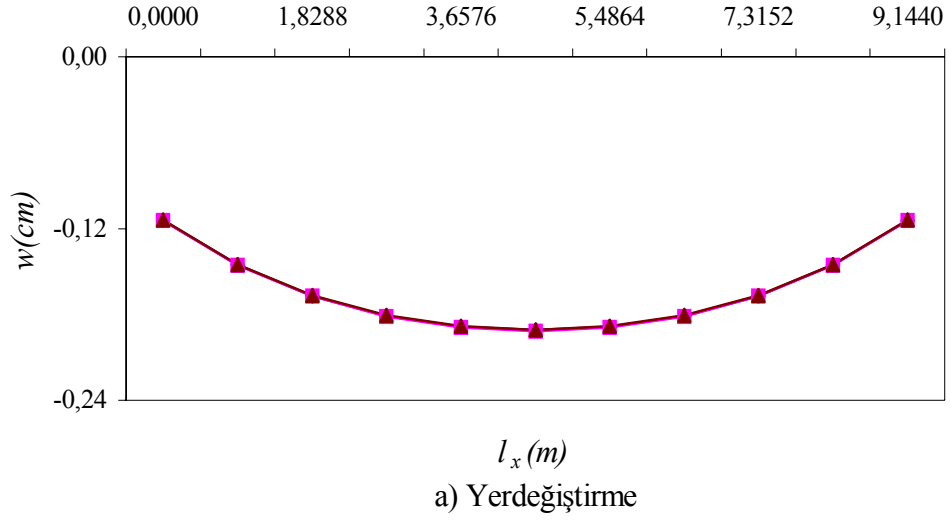
b) Eğilme Momenti



c) Kesme Kuvveti

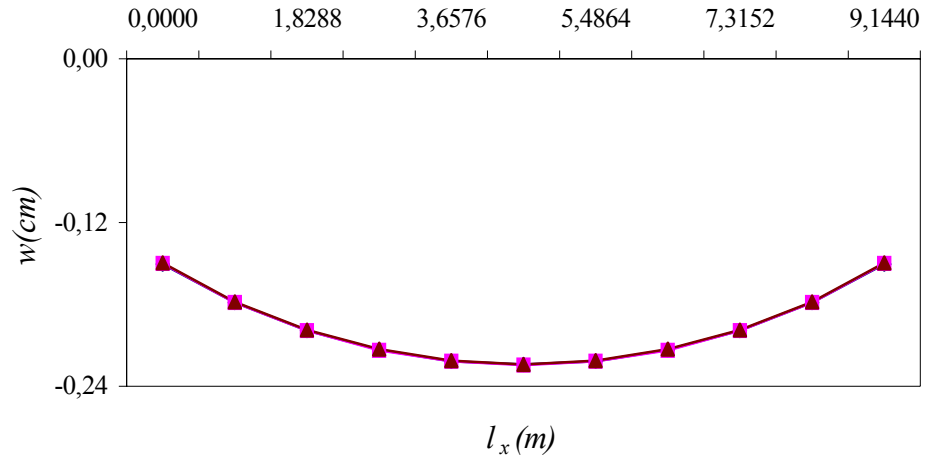


Şekil 34. H=6.096 m için yayılı yükü taşıyan plakta yerdeğiştirme, moment ve kesme kuvveti değerlerinin plak orta düzleminde x eksenini boyunca değişimi

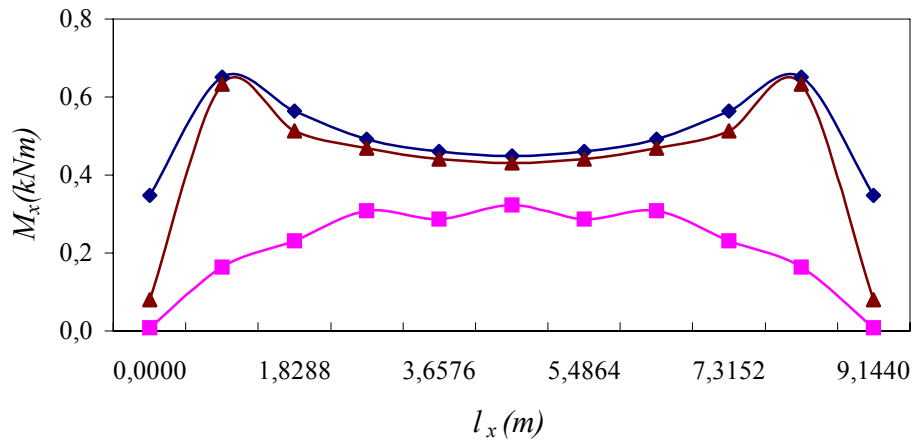


—◆— MZC —■— PBQ4 (SAİ) —▲— PBQ8 (SAİ)

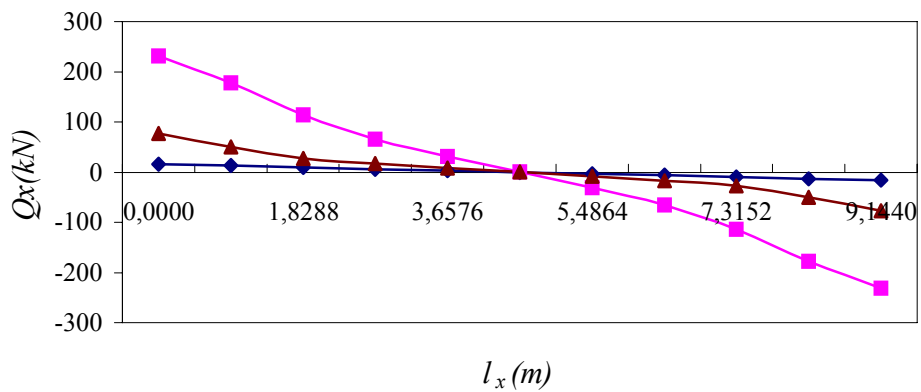
Şekil 35. H=9.144 m için yayılı yükle yüklü plağın yerdeğiştirme, moment ve kesme kuvveti değerlerinin plak orta düzleminde x eksenini boyunca değişimi



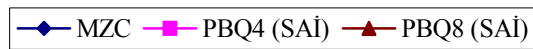
a) Yerdeğiştirme



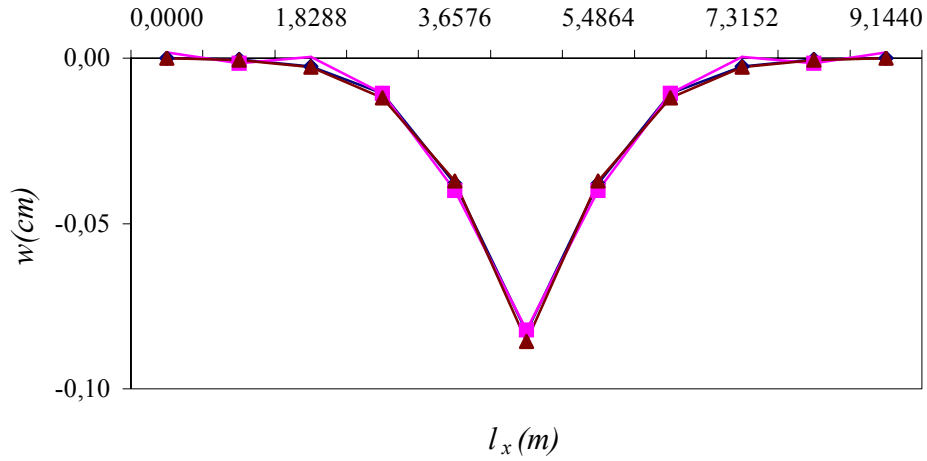
b) Eğilme Momenti



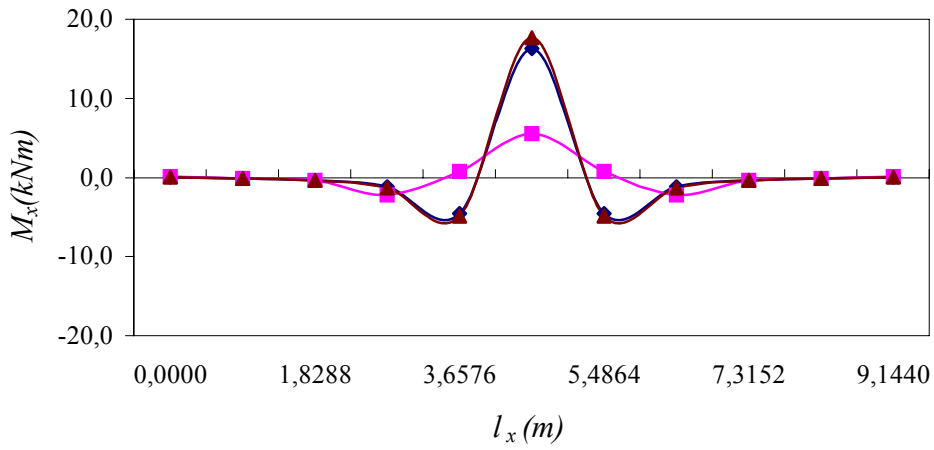
c) Kesme Kuvveti



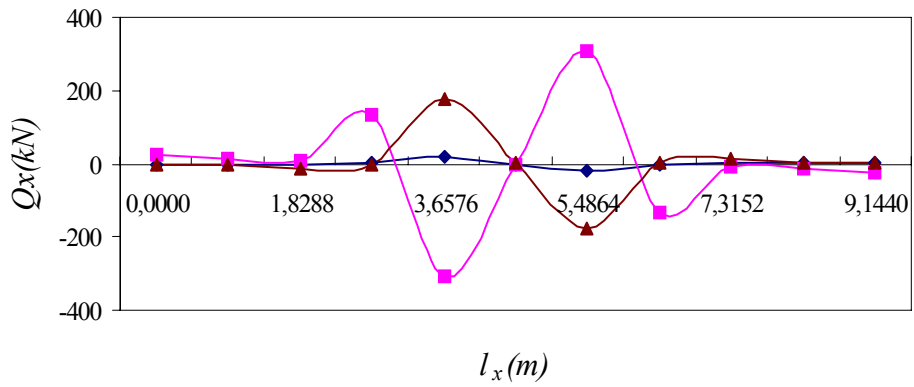
Şekil 36. H=15.240 m için yayılı yükle yüklü plağın yerdeğiştirme, moment ve kesme kuvveti değerlerinin plak orta düzleminde x eksenı boyunca değişimi



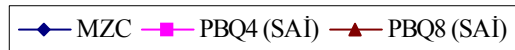
a) Yerdeğiştirme



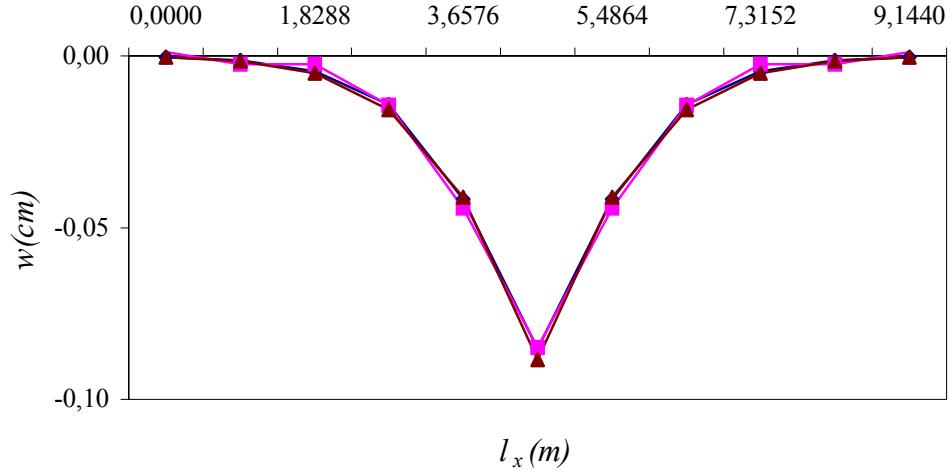
b) Eğilme Momenti



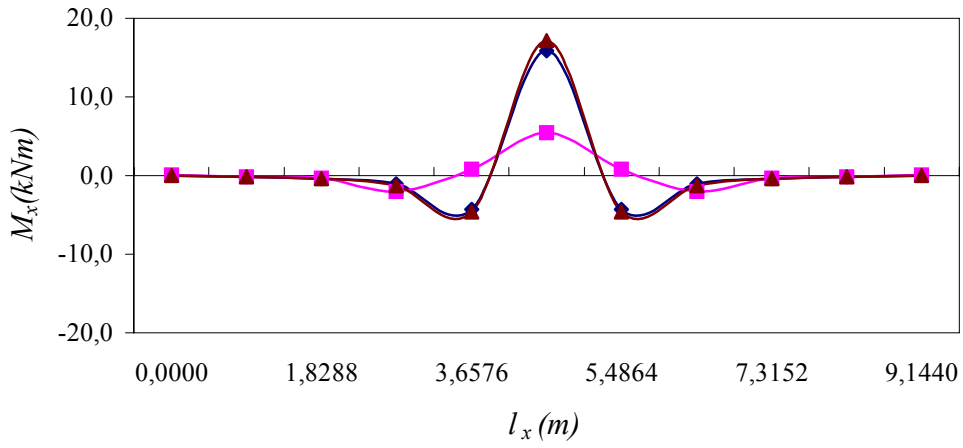
c) Kesme Kuvveti



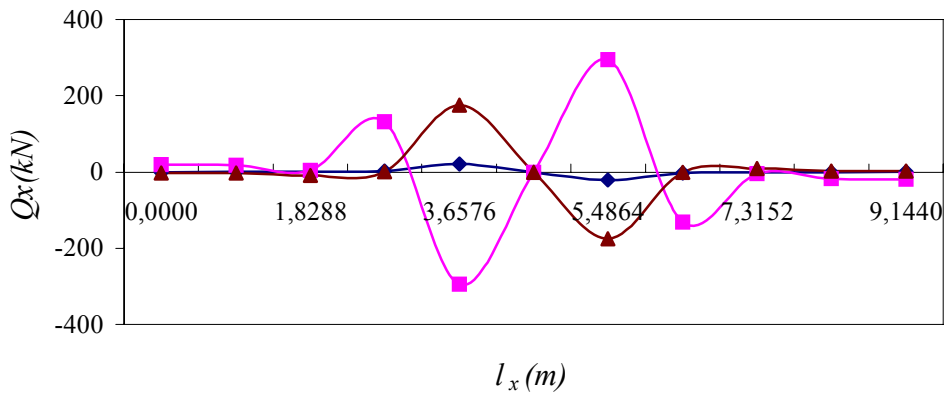
Şekil 37. $H=3.048$ m için tekil yükle yüklü plağın yerdeğiştirme, moment ve kesme kuvveti değerlerinin plak orta düzleminde x eksenini boyunca değişimi



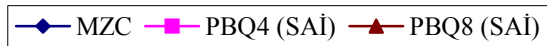
a) Yerdeğiştirme



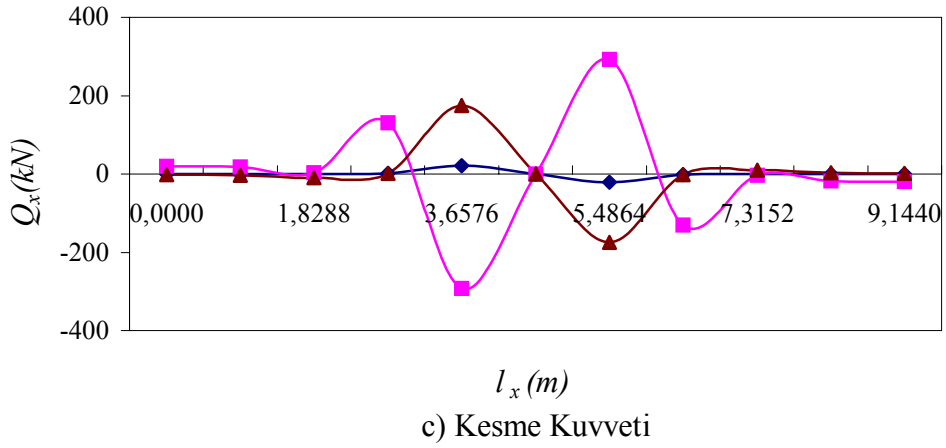
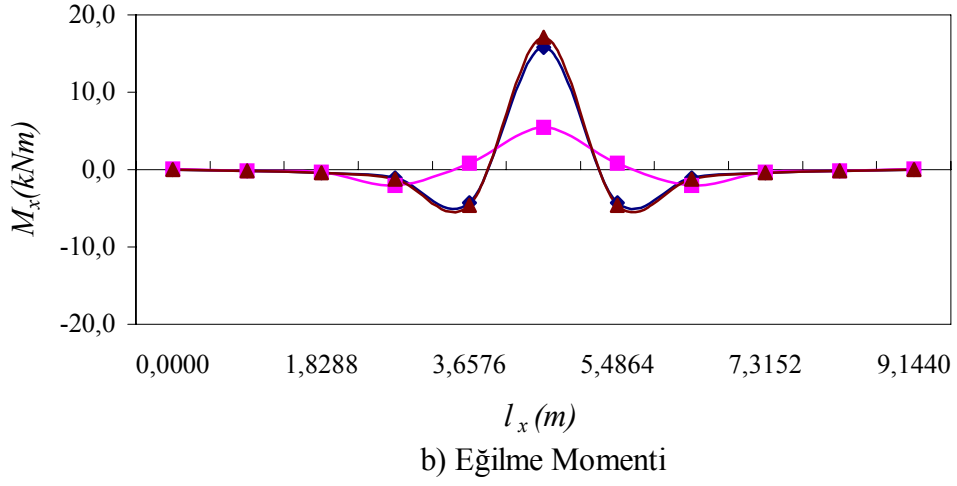
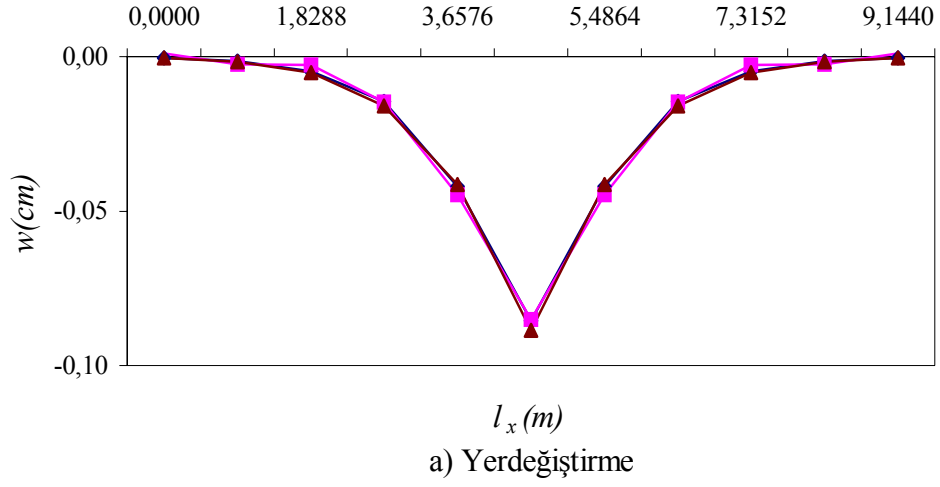
b) Eğilme Momenti



c) Kesme Kuvveti

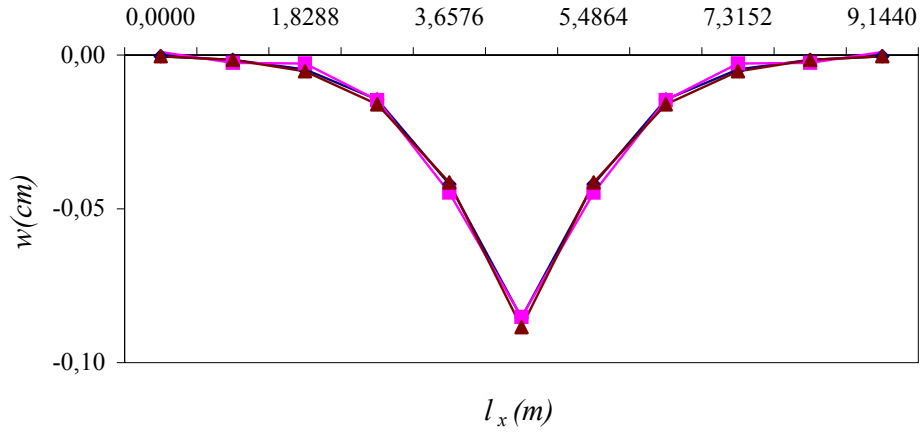


Şekil 38. $H=6.096$ m için tekil yükle yüklü plağın yerdeğiştirme, moment ve kesme kuvveti değerlerinin plak orta düzleminde x eksenini boyunca değişimi

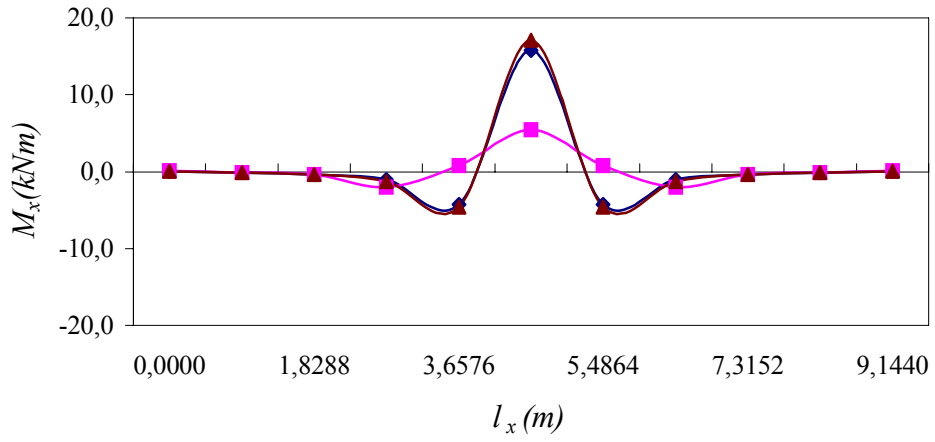


—◆— MZC —■— PBQ4 (SAİ) —▲— PBQ8 (SAİ)

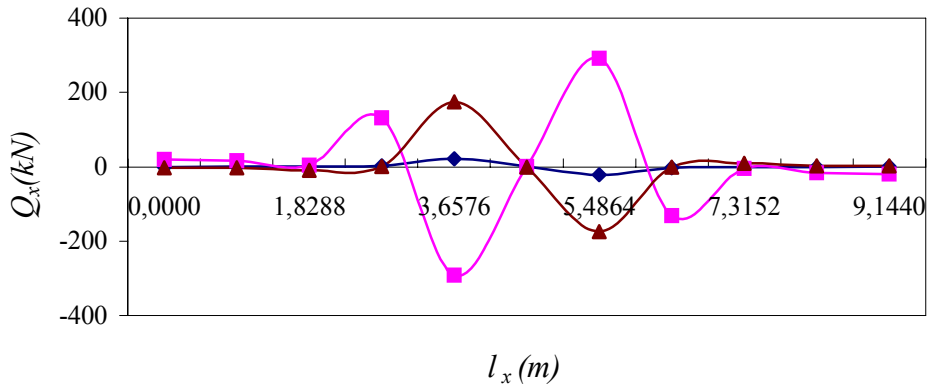
Şekil 39. H=9.144 m için tekil yüklerle yüklü plağın yerdeğiştirme, moment ve kesme kuvveti değerlerinin plak orta düzleminde x eksenini boyunca değişimi



a) Yerdeğiştirme



b) Eğilme Momenti



c) Kesme Kuvveti

—◆— MZC —■— PBQ4 (SAİ) —▲— PBQ8 (SAİ)

Şekil 40. H=15.240 m için tekil yükle yüklü plağın yerdeğiştirme, moment ve kesme kuvveti değerlerinin plak orta düzleminde x eksenı boyunca değişimi

Şekillerden görüldüğü gibi yayılı yük durumunda tüm derinliklerde yerdeğiştirme eğrileri birbirleri ile üst üste düşmektedir. Eğilme momenti eğrileri ise PBQ4(SAİ) elemanda derinlik arttıkça farklılaşmaktadır. Kesme kuvveti diyagramlarında ise PBQ4(SAİ) elemanda başlangıçta ters işaretli olan eğri artan derinlikle birlikte diğer eğrilere benzemektedir. Ancak plak kenarlarındaki değerleri MZC ve PBQ8(SAİ) elemana göre oldukça büyük çıkmaktadır. PBQ4(SAİ) eleman ile elde edilen kenar ortalarındaki kesme kuvvetleri artan derinlikle MZC çözümlerinden uzaklaşırken PBQ8(SAİ) eleman ile elde edilen kesme kuvvetleri yaklaşmaktadır.

Tekil yük durumunda tüm derinliklerde yerdeğiştirmeler uyum halindeyken, PBQ4(SAİ) eleman ile hesaplanan plak ortasındaki eğilme momentleri daha önceki örneklerde de bahsedildiği gibi küçük çıkmaktadır. PBQ8(SAİ) eleman kesme kuvveti eğrilerinde maksimum ve minimum değerler MZC elemana göre daha büyük çıkmaktadır. PBQ4(SAİ) elemanda ise bu değerler diğer elemanlara nazaran hem daha büyük hem de ters işaretlidir.

Kalınlık doğrultusundaki kayma şekildeğiştirmelerinin çözüme etkisini göstermek için aynı örnek farklı h/l oranları için ince (MZC eleman) ve kalın plak teorileri (PBQ8(SAİ) eleman) ile ayrı ayrı çözülmüştür. Elde edilen sonuçlar ve bu sonuçların birbirlerine göre farkları Tablo 11 ve Tablo 12’ de verilmektedir.

Görüldüğü gibi her iki yükleme durumu için basit ve ankastre mesnetli plaklarda artan kalınlıkla birlikte yerdeğiştirmeler arasındaki fark artmaktadır. Ancak plağın serbest olması durumunda belirli bir h/l oranından sonra azalmaktadır. Bu aslında beklenen bir durum değildir. Bu durum serbest plaklarda elastik zemin özelliklerinin çözüm üzerindeki etkisinin kalınlık etkisinden daha önemli bir rol oynadığı şeklinde yorumlanabilir. Yükleme durumu ve mesnet şartı ne olursa olsun kalın plak teorisi ile elde edilen yerdeğiştirmeler daha büyük çıkmaktadır. Bu durum ince plak teorisinde ihmal edilen kalınlık doğrultusundaki kayma şekildeğiştirmelerinin Mindlin plak teorisinde hesaba katılmasının sonucu olarak açıklanabilir. Mesnet şartları açısından incelendiğinde ankastre mesnet durumunda kalınlık doğrultusundaki kayma şekildeğiştirmelerinin etkisi daha fazla olmaktadır. Yükleme durumları dikkate alındığında tüm mesnet şartları için tekil yük durumunda kayma şekildeğiştirmelerinin etkisi daha fazla çıkmaktadır. Sabit bir h/l oranı için yayılı yük durumunda derinlik arttıkça kalınlık doğrultusundaki kayma şekildeğiştirmelerden meydana gelen ilave yerdeğiştirmeler büyümekte iken tekil yük durumunda küçülmektedir.

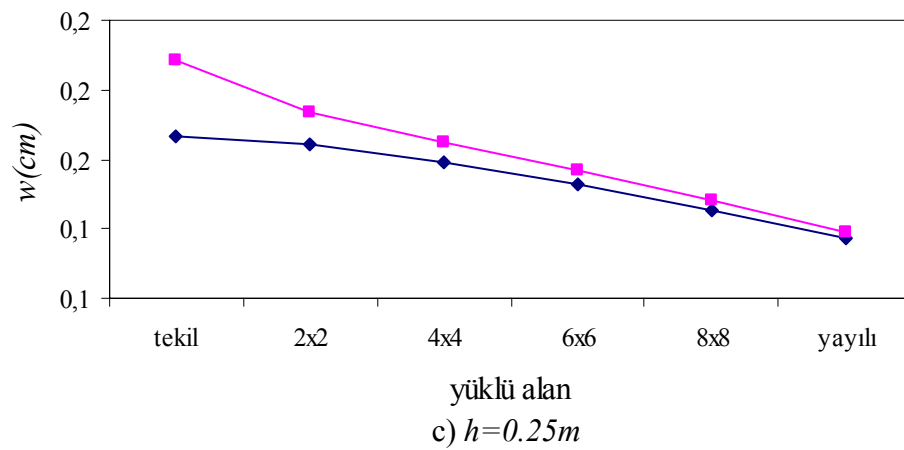
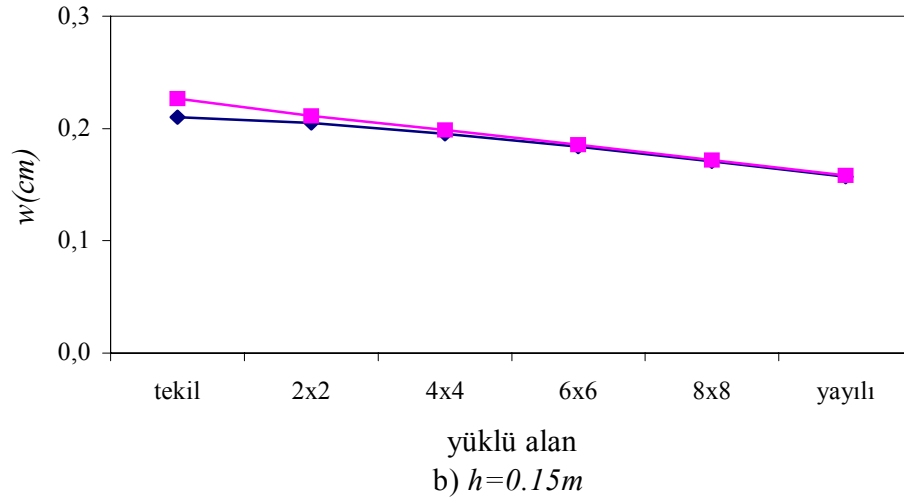
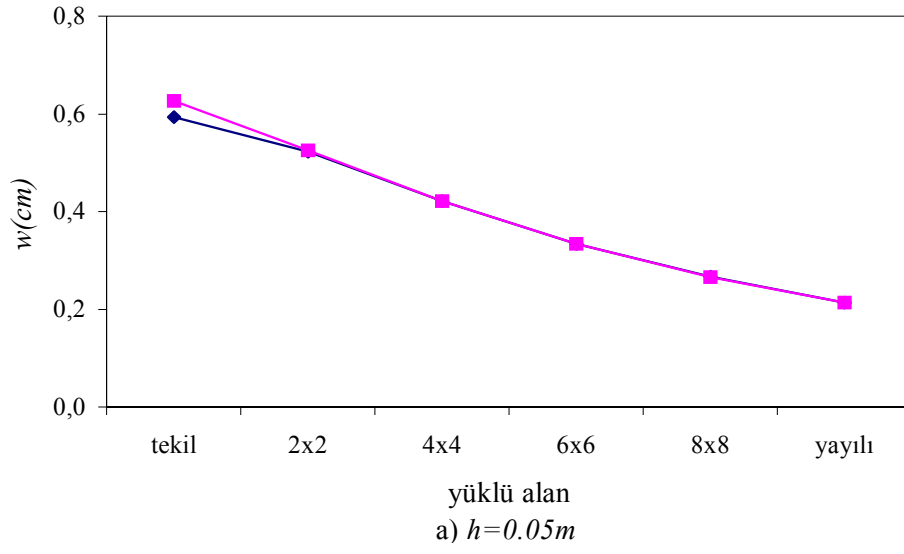
Tablo 11. Farklı h/l oranları, mesnet şartları ve zemin derinliğinin, elastik zemine oturan yayılı yükle yüklü plağın Geliştirilmiş Vlasov modeli ile çözümünden elde edilen yerdeğişmeler üzerindeki etkisi

		$w(cm)$								
$H(m)$	h/l	Ankastre Mesnet			Basit Mesnet			Serbest		
		MZC	PBQ8 (SAİ)	% fark	MZC	PBQ8 (SAİ)	% fark	MZC	PBQ8 (SAİ)	% fark
3.048	0.05	0.06804	0.06835	0.46	0.08991	0.08973	-0.20	0.08989	0.08983	-0.07
	0.10	0.01991	0.02179	9.44	0.04728	0.04788	1.27	0.07885	0.07890	0.06
	0.15	0.00677	0.00851	25.70	0.01992	0.02102	5.52	0.07046	0.07064	0.26
	0.20	0.00296	0.00438	47.97	0.00935	0.01045	11.76	0.06658	0.06679	0.32
	0.25	0.00153	0.00270	76.47	0.00499	0.00597	19.64	0.06480	0.06501	0.32
	0.30	0.00089	0.00187	110.11	0.00294	0.00381	29.59	0.06393	0.06412	0.30
	0.35	0.00056	0.00140	150.00	0.00187	0.00263	40.64	0.06346	0.06363	0.27
6.096	0.05	0.08347	0.08422	0.90	0.12421	0.12405	-0.13	0.15065	0.15046	-0.13
	0.10	0.02094	0.02310	10.32	0.05411	0.05496	1.57	0.12646	0.12660	0.11
	0.15	0.00688	0.00870	26.45	0.02101	0.02226	5.95	0.11008	0.11047	0.35
	0.20	0.00298	0.00443	48.66	0.00958	0.01075	12.21	0.10264	0.10308	0.43
	0.25	0.00154	0.00272	76.62	0.00505	0.00607	20.20	0.09926	0.09968	0.42
	0.30	0.00090	0.00188	108.89	0.00296	0.00384	29.73	0.09761	0.09798	0.38
	0.35	0.00057	0.00141	147.37	0.00188	0.00265	40.96	0.09672	0.09706	0.35
9.144	0.05	0.08652	0.08741	1.03	0.13290	0.13273	-0.13	0.18442	0.18414	-0.15
	0.10	0.02111	0.02330	10.37	0.05550	0.05641	1.64	0.15445	0.15467	0.14
	0.15	0.00690	0.00874	26.67	0.02121	0.02248	5.99	0.13357	0.13416	0.44
	0.20	0.00298	0.00444	48.99	0.00962	0.01080	12.27	0.12368	0.12432	0.52
	0.25	0.00154	0.00272	76.62	0.00506	0.00609	20.36	0.11911	0.11971	0.50
	0.30	0.00090	0.00188	108.89	0.00297	0.00386	29.97	0.11684	0.11739	0.47
	0.35	0.00057	0.00141	147.37	0.00188	0.00266	41.49	0.11562	0.11611	0.42
15.24	0.05	0.08723	0.08817	1.08	0.13538	0.13520	-0.13	0.21337	0.21319	-0.08
	0.10	0.02114	0.02335	10.45	0.05587	0.05680	1.66	0.18117	0.18162	0.25
	0.15	0.00690	0.00874	26.67	0.02127	0.02255	6.02	0.15713	0.15807	0.60
	0.20	0.00298	0.00444	48.99	0.00963	0.01082	12.36	0.14465	0.14566	0.70
	0.25	0.00154	0.00272	76.62	0.00507	0.00610	20.32	0.13857	0.13951	0.68
	0.30	0.00090	0.00188	108.89	0.00297	0.00386	29.97	0.13549	0.13632	0.61
	0.35	0.00057	0.00141	147.37	0.00188	0.00266	41.49	0.13380	0.13454	0.55

Tablo 12. Farklı h/l oranları, mesnet şartları ve zemin derinliğinin, elastik zemine oturan tekil yükle yüklü plağın Geliştirilmiş Vlasov modeli ile çözümünden elde edilen yerdeğişmeler üzerindeki etkisi

$H(m)$	h/l	$w(cm)$								
		Ankastre Mesnet			Basit Mesnet			Serbest		
		MZC	PBQ8 (SAİ)	% fark	MZC	PBQ8 (SAİ)	% fark	MZC	PBQ8 (SAİ)	% fark
3.048	0.05	0.02087	0.02247	7.67	0.02339	0.02397	2.48	0.02248	0.02409	7.16
	0.10	0.00482	0.00608	26.14	0.00761	0.00873	14.72	0.00934	0.01044	11.78
	0.15	0.00159	0.00253	59.12	0.00300	0.00387	29.00	0.00578	0.00659	14.01
	0.20	0.00069	0.00142	105.80	0.00138	0.00208	50.72	0.00442	0.00506	14.48
	0.25	0.00036	0.00095	163.89	0.00073	0.00130	78.08	0.00383	0.00435	13.58
	0.30	0.00021	0.00071	238.10	0.00039	0.00091	133.33	0.00355	0.00399	12.39
	0.35	0.00013	0.00056	330.77	0.00027	0.00069	155.56	0.00340	0.00378	11.18
6.096	0.05	0.02330	0.02492	6.95	0.02650	0.02807	5.92	0.02725	0.02883	5.80
	0.10	0.00499	0.00628	25.85	0.00844	0.00959	13.63	0.01234	0.01345	9.00
	0.15	0.00161	0.00256	59.01	0.00313	0.00402	28.43	0.00801	0.00883	10.24
	0.20	0.00069	0.00143	107.25	0.00141	0.00211	49.65	0.00634	0.00699	10.25
	0.25	0.00036	0.00095	163.89	0.00074	0.00132	78.38	0.00562	0.00615	9.43
	0.30	0.00021	0.00071	238.10	0.00043	0.00092	113.95	0.00527	0.00572	8.54
	0.35	0.00013	0.00056	330.77	0.00027	0.00069	155.56	0.00508	0.00547	7.68
9.144	0.05	0.02369	0.02531	6.84	0.02740	0.02896	5.69	0.02889	0.03043	5.33
	0.10	0.00501	0.00631	25.95	0.00861	0.00976	13.36	0.01387	0.01497	7.93
	0.15	0.00161	0.00257	59.63	0.00316	0.00404	27.85	0.00927	0.01011	9.06
	0.20	0.00069	0.00143	107.25	0.00141	0.00212	50.35	0.00745	0.00811	8.86
	0.25	0.00036	0.00095	163.89	0.00074	0.00132	78.38	0.00664	0.00719	8.28
	0.30	0.00021	0.00071	238.10	0.00040	0.00092	130.00	0.00625	0.00671	7.36
	0.35	0.00013	0.00056	330.77	0.00027	0.00069	155.56	0.00604	0.00644	6.62
15.24	0.05	0.02376	0.02537	6.78	0.02662	0.02917	9.58	0.02967	0.03118	5.09
	0.10	0.00502	0.00632	25.90	0.00865	0.00981	13.41	0.01512	0.01620	7.14
	0.15	0.00161	0.00257	59.63	0.00316	0.00405	28.16	0.01049	0.01133	8.01
	0.20	0.00069	0.00143	107.25	0.00142	0.00212	49.30	0.00855	0.00923	7.95
	0.25	0.00036	0.00095	163.89	0.00074	0.00132	78.38	0.00766	0.00822	7.31
	0.30	0.00021	0.00071	238.10	0.00043	0.00092	113.95	0.00721	0.00769	6.66
	0.35	0.00013	0.00056	330.77	0.00027	0.00069	155.56	0.00697	0.00738	5.88

Tekil yük etkisini daha açık gösterebilmek amacıyla $H=15.240m$ için aynı örnek 23.94 kN/m^2 yayılı yükün tekil yüke kademeli olarak dönüştürülmesi şeklinde dikkate alınmıştır. Plağa etkiyen toplam yük sabit tutularak etki edeceği alan daraltılmış ve sonunda tekil yüke dönüştürülmüştür. Bu örnek için 10×10 eleman ağı kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlar Şekil 41'deki grafikte verilmektedir.



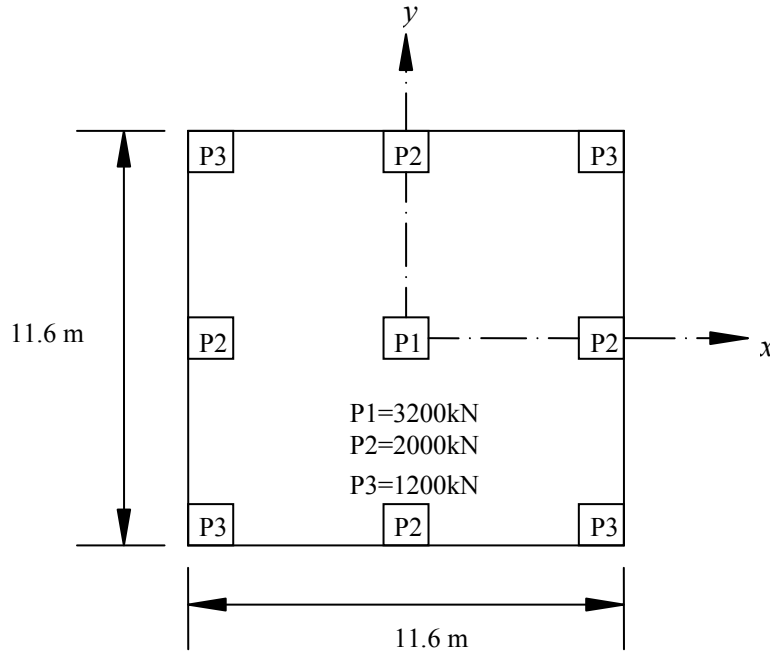
—◆— MZC —■— PBQ8(SAİ)

Şekil 41. Tekil yükten yayılı yüke geçişin plak yerdeğiştirmeleri üzerindeki etkisi

Şekillerden görüldüğü gibi her üç kalınlıkta da iki teori arasındaki fark tekil yük durumunda daha fazladır. Eğriler, plağa etkiyen yük yayılı yüke dönüştükçe birbirine yaklaşmaktadır. Kalınlık arttıkça her yük durumu için iki teori arasındaki fark artmaktadır.

3.5. Radye Temel Örneği

Elastisite modülü 80000 kN/m^2 , poisson oranı 0.25 olan elastik bir zemine oturan $E=20000000 \text{ kN/m}^2$ ve $\nu=0.16$ malzeme özelliklerine sahip $11.60\text{m} \times 11.60\text{m}$ boyutlarındaki 0.6 m kalınlığında, Şekil 42'deki gibi yüklemeye maruz bir radye temel örneği dikkate alınmıştır. Çözümde 10×10 sonlu eleman ağı kullanılmıştır. Örnek Çelik ve Saygun (1999) tarafından da aynı eleman ağı kullanılarak çözülmüş ancak sadece zemin parametreleri veri olarak sunulmuştur. Burada bir karşılaştırma yapabilmek amacıyla daha önce doğruluğu ispatlanmış MZC eleman ile de çözüm gerçekleştirilmiştir. Elde edilen zemin parametreleri, yerdeğiştirmeler ve momentler Tablo 13'te verilmektedir.



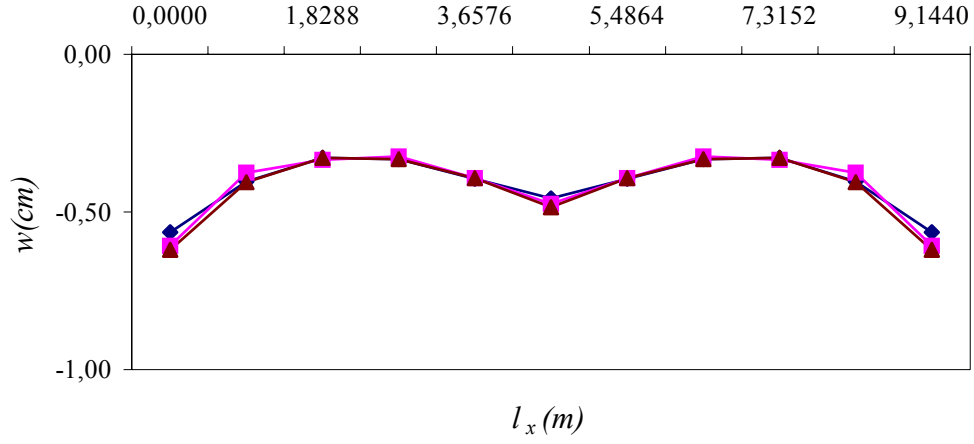
Şekil 42. Radye temel

Beklenildiği gibi PBQ4(Tİ) elamanda kayma kilitlenmesi oluşmaktadır. PBQ8(Tİ), PBQ4(SAİ) ve PBQ8(SAİ) elemanlar yerdeğıştirmeler açısından oldukça iyi sonuçlar vermesine rağmen açıklık momentlerinde PBQ8(SAİ) daha iyi netice vermektedir. Daloglu ve Ozgan (2004)'nın çalışmalarında 6x6 eleman ağını kullandıklarını belirtmek uygun olacaktır. Zira MZC eleman ile gerçekleştirdikleri çalışmalarında elde ettikleri momentlerin nispeten küçük olmasının nedeni eleman ağıının farklı seçilmesidir.

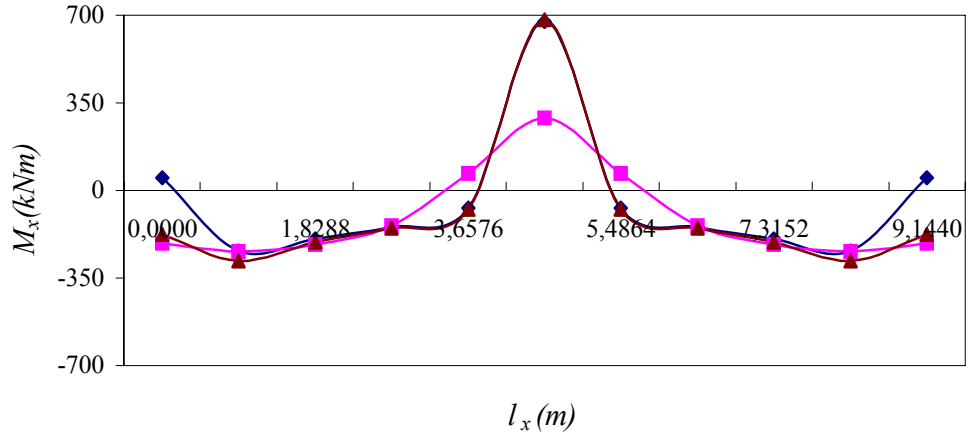
Tablo 13. Elastik zemine oturan radye temelin çözümünden elde edilen zemin parametreleri, maksimum yerdeğıştirmeler ve momentler

$H(m)$		$h=0.6m$				
		γ	$k(kN/m^3)$	$2t(kN/m)$	$w(cm)$	$M_x(kNm)$
5	Çelik ve Saygun(1999)	1.118	19733	45804	-	-
	Daloglu ve Ozgan (2004)	1.316	20147	43487	0.45700	512.230
	MZC	1.344	20217	43154	0.45665	675.950
	PBQ4(Tİ)	1.202	19889	44842	0.41222	146.010
	PBQ8(Tİ)	1.405	20385	42416	0.47946	607.688
	PBQ4(SAİ)	1.359	20257	42974	0.47335	290.672
	PBQ8(SAİ)	1.419	20422	42258	0.48463	681.987
10	Çelik ve Saygun(1999)	1.327	10088	86696	-	-
	Daloglu ve Ozgan (2004)	1.476	10298	83142	0.71270	513.400
	MZC	1.491	10322	82774	0.71320	678.740
	PBQ4(Tİ)	1.428	10224	84298	0.65618	166.296
	PBQ8(Tİ)	1.546	10413	81452	0.73453	611.435
	PBQ4(SAİ)	1.520	10369	82084	0.73114	305.264
	PBQ8(SAİ)	1.559	10437	81128	0.73904	682.914
15	Çelik ve Saygun(1999)	1.607	7016	119948	-	-
	Daloglu ve Ozgan (2004)	1.718	7161	116011	0.83780	504.340
	MZC	1.728	7175	115654	0.83822	670.894
	PBQ4(Tİ)	1.688	7121	117054	0.77816	174.460
	PBQ8(Tİ)	1.780	7251	113808	0.85878	604.382
	PBQ4(SAİ)	1.762	7225	114442	0.85636	307.006
	PBQ8(SAİ)	1.794	7272	113324	0.86308	673.638
20	Çelik ve Saygun(1999)	1.894	5573	146430	-	-
	MZC	1.994	5700	141930	0.89781	660.536
	PBQ4(Tİ)	1.960	5656	143428	0.83883	176.889
	PBQ8(Tİ)	2.046	5771	139606	0.91823	594.689
	PBQ4(SAİ)	2.031	5750	140280	0.91653	303.805
	PBQ8(SAİ)	2.060	5791	138984	0.92264	662.307

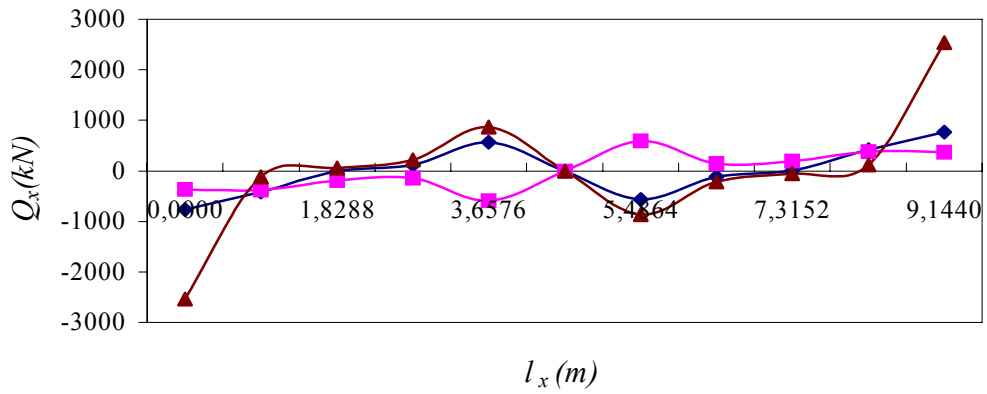
İnce plak ve kalın plak teorilerinin plak davranışı üzerindeki etkisini daha iyi görebilmek için plağın ortasında x eksenini boyunca yerdeğıştirme, eğilme momenti ve kesme kuvveti değıışimlerini gösteren grafikler Şekil 43-46'da verilmektedir.



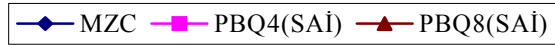
a) Yerdeğiştirme



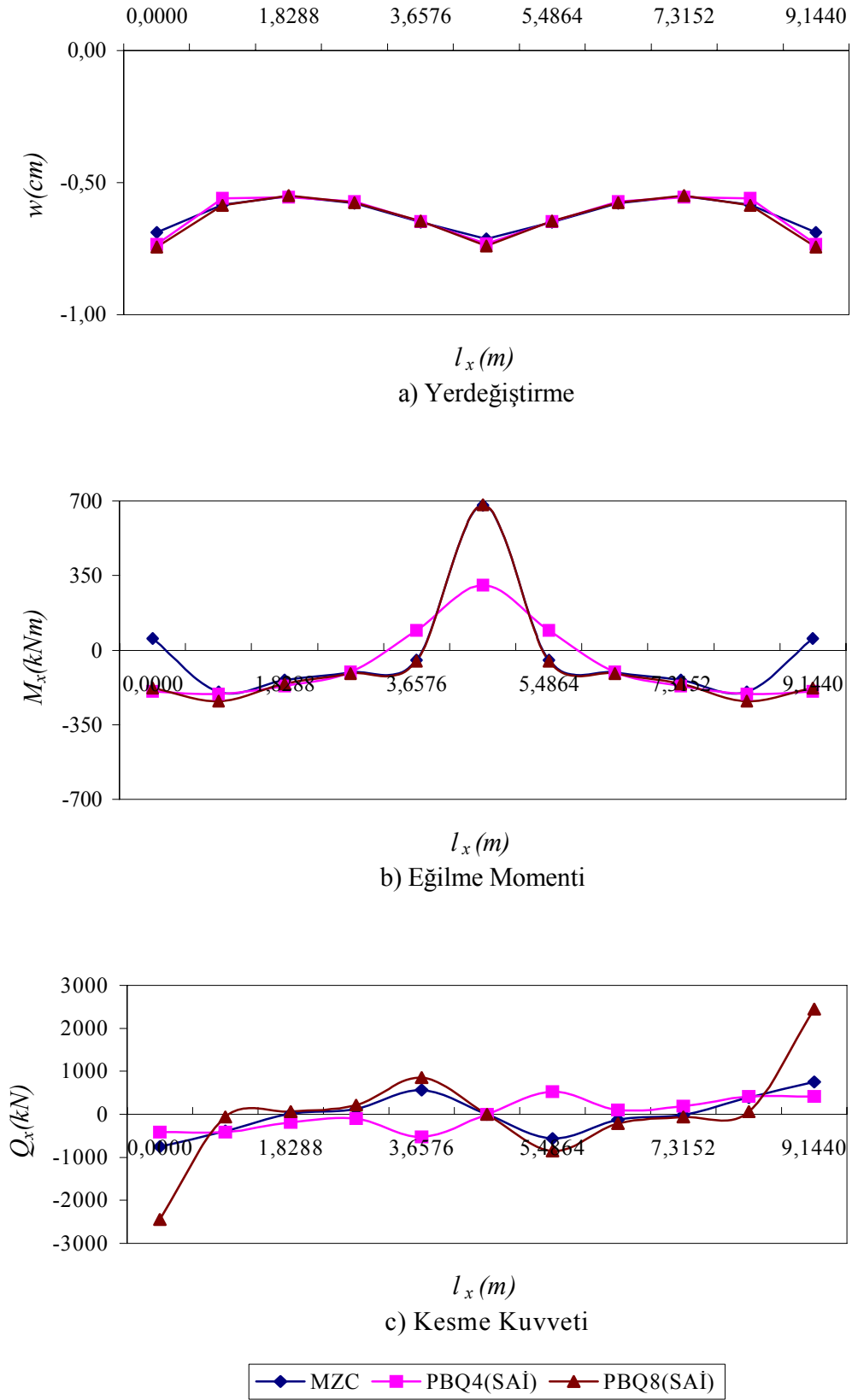
b) Eğilme Momenti



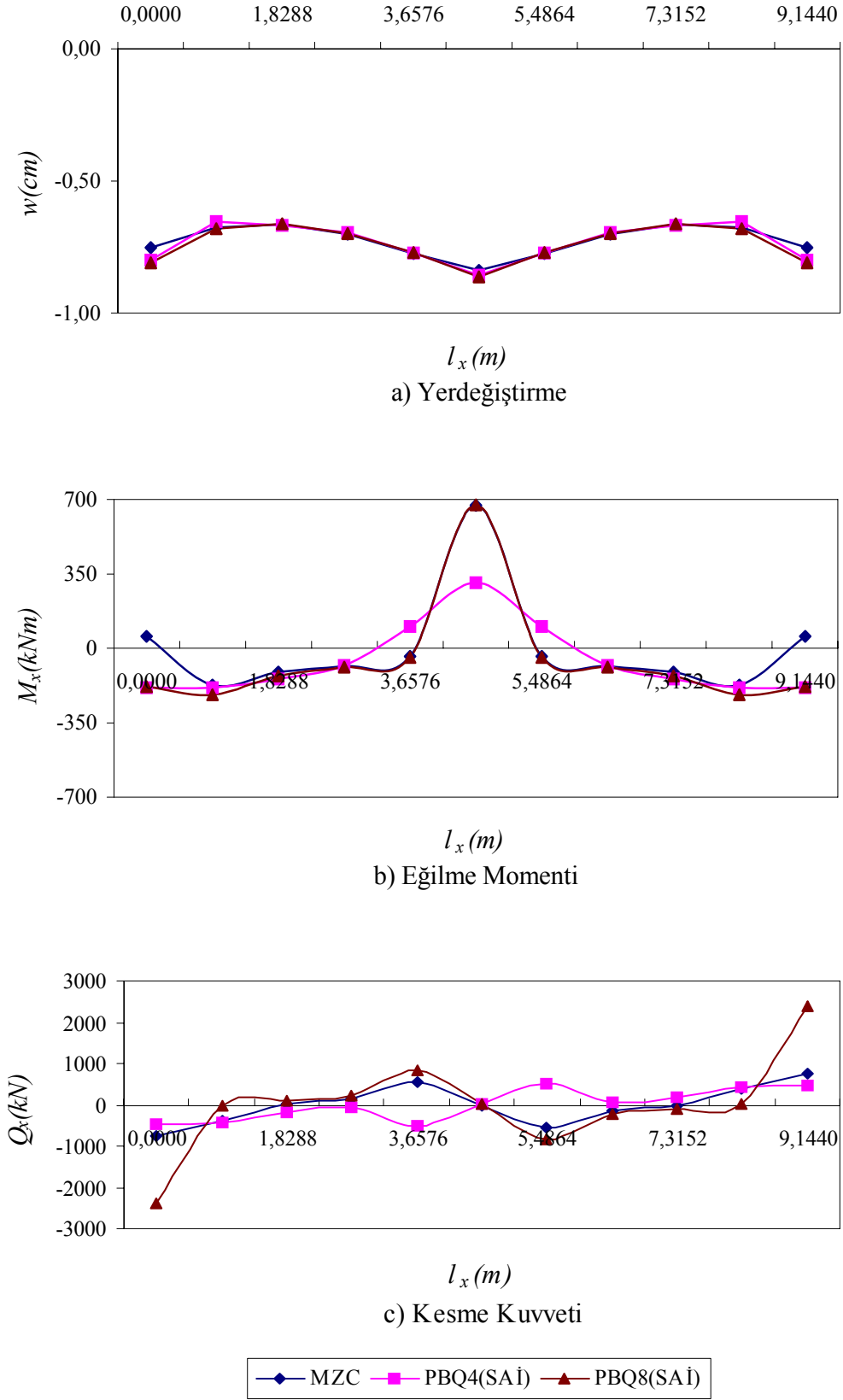
c) Kesme Kuvveti



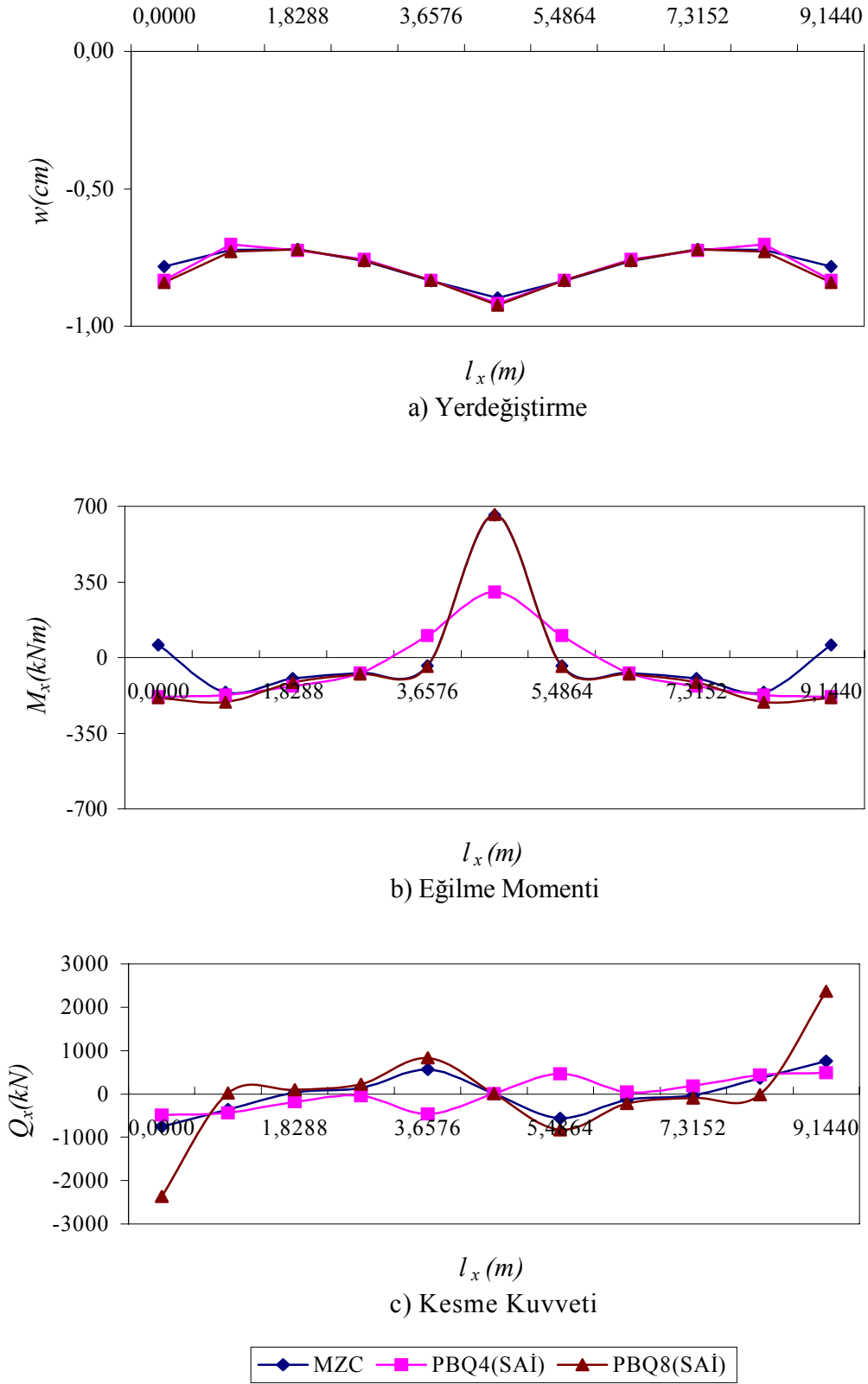
Şekil 43. H=5m için radye temelin yerdeğiştirme, moment ve kesme kuvveti değerlerinin plak orta düzleminde x eksenine boyunca değişimi



Şekil 44. H=10m için radye temel in yerdeğiştirme, moment ve kesme kuvveti değerlerinin plak orta düzleminde x eksen i boyunca değ iş imi



Şekil 45. H=15m için radye temel in yerdeğiştirme, moment ve kesme kuvveti değerlerinin plak orta düzleminde x eksen i boyunca değişimi



Şekil 46. H=20m için radye temelin yerdeğiştirme, moment ve kesme kuvveti değerlerinin plak orta düzleminde x eksenini boyunca değişimi

Bütün derinliklerde PBQ4(SAİ), PBQ8(SAİ) ve MZC eleman için yerdeğiştirme dağılımları üst üste düşmektedir. Eğilme momentleri eğrileri birbirine benzemekle beraber PBQ4(SAİ) elemanda açıklık momenti küçük, MZC elemanda kenar ortasındaki moment daha büyük çıkmaktadır. Tüm derinlikler için kesme kuvveti dağılımları MZC ve PBQ8(SAİ) elemanda birbirine oldukça yakınken PBQ4(SAİ) elemanda ters işaretlidir. Buna rağmen kenar ortalarında MZC ve PBQ4(SAİ) elemanlar kesme kuvvetleri açısından birbirine daha yakınken PBQ8(SAİ) elemanda daha büyük çıkmaktadır.

3.6. Zemin Elastisite Modülünün Derinlik Boyunca Değişiminin İrdelenmesi

Zemin elastisite modülünün derinlik boyunca değişiminin zemin parametreleri, yerdeğiştirmeler ve momentler üzerindeki etkilerini görebilmek amacıyla bir dikdörtgen plak örneği dikkate alınmıştır. Zemin elastisite modülünün derinlik boyuca sabit olduğu, lineer değiştiği ve kuadratik değiştiği kabullerine göre çözümler yapıp elde edilen sonuçlar tablolar ve grafikler halinde karşılaştırmalı olarak sunulmuştur. Bu örnek için plağın boyutları 9.144x12.192m, elastisite modülü 20685000 kN/m², poisson oranı 0.20, plak kalınlığı 0.1524, zeminin poisson oranı 0.25, yayılı yük 1 kN/m², tekil yük 1 kN ve zemin derinliği 9.144 m olarak dikkate alınmıştır. Zeminin elastisite modülü zemin üst yüzeyinde 6912 kN/m² olarak kabul edilip alt yüzeyindeki elastisite modülü $\psi=E_2/E_1=1, 3, 5$ ve 10 oranlarına bağlı olarak hesaplanmıştır.

Çözümünden elde edilen zemin parametreleri yayılı ve tekil yük için sırasıyla Tablo 14 ve Tablo 15’te verilmektedir. Tablolardan görüldüğü gibi her iki yük durumu için zemin parametreleri artan $\psi=E_2/E_1$ oranı ile birlikte artmaktadır. Çeşitli E_2/E_1 oranları için yerdeğiştirme ve eğilme momenti eğrilerinin plak orta düzleminde x eksenini boyunca değişimi grafikler halinde verilmektedir. Grafiklerde düz çizgi zemin elastisite modülünün derinlik boyunca lineer değişimini, kesikli çizgi ise kuadratik değişimini göstermektedir. Şekil 47 ve Şekil 48’de yayılı yük durumunda yerdeğiştirmeler ve eğilme momentlerinin artan $\psi=E_2/E_1$ oranı ile azaldığı görülmektedir ancak kesme kuvvetleri bu derece etkilenmemekte ve çizilen eğriler üst üste düştüğünden dolayı burada verilmemektedir. Benzer şekilde Şekil 49’da tekil yük durumunda yerdeğiştirmeler artan $\psi=E_2/E_1$ oranı ile azalmaktadır ancak eğilme momentleri ve kesme kuvvetleri aynı derecede değişmemekte ve çizilen eğriler üst üste düştüğünden dolayı burada verilmemektedir.

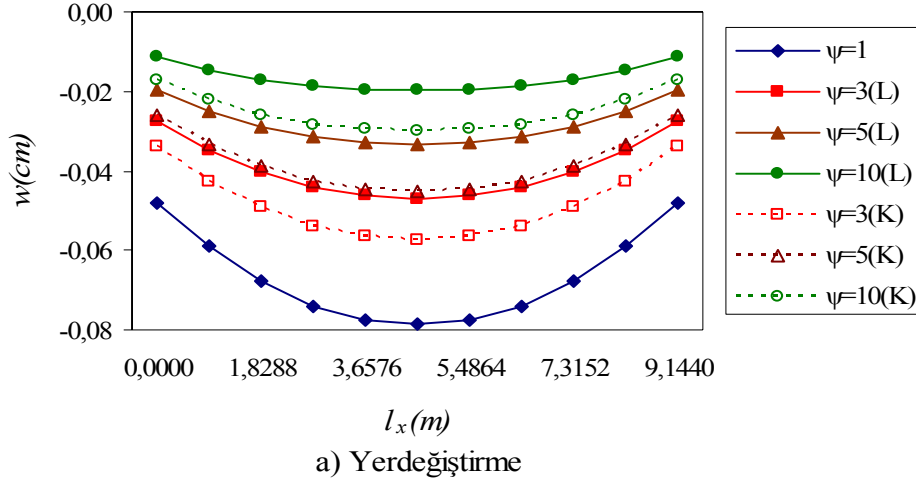
Tablo 14. Yayılı yük durumunda çeşitli E_2/E_1 oranları için zemin parametreleri

E_2/E_1		lineer			kuadratik		
		k (kN/m^3)	$2t$ (kN/m)	γ	k (kN/m^3)	$2t$ (kN/m)	γ
1	Çelik, Omurtag (2005)	937	7128	1.1755	937	7128	1.1755
	Turhan (1992)	938	7148	1.1538	-	-	-
	PBQ8 (SAİ)	936	7165	1.1580	936	7165	1.1580
3	Çelik, Omurtag (2005)	1676	10208	1.2335	1382	8218	1.2365
	Turhan (1992)	1682	10252	1.2105	-	-	-
	PBQ8 (SAİ)	1678	10272	1.2150	1383	8267	1.2180
5	Çelik, Omurtag (2005)	2402	13272	1.2601	1808	9306	1.2729
	Turhan (1992)	2413	13340	1.2364	-	-	-
	PBQ8 (SAİ)	2407	13367	1.2400	1813	9368	1.2540
10	Çelik, Omurtag (2005)	4196	20906	1.2905	2844	12018	1.3233
	Turhan (1992)	4224	21040	1.2658	-	-	-
	PBQ8 (SAİ)	4212	21085	1.2690	2857	12108	1.3050

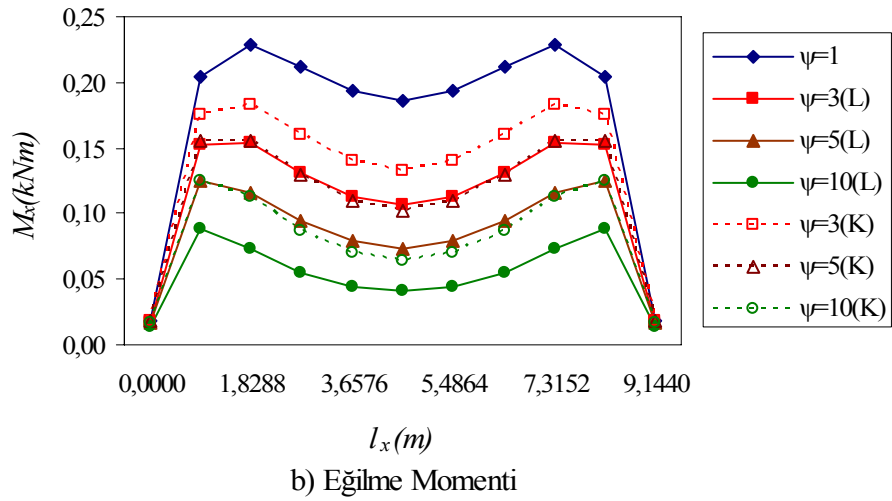
Tablo 15. Tekil yük durumunda çeşitli E_2/E_1 oranları için zemin parametreleri

E_2/E_1		lineer			kuadratik		
		k (kN/m^3)	$2t$ (kN/m)	γ	k (kN/m^3)	$2t$ (kN/m)	γ
1	Çelik, Omurtag (2005)	1248	4686	2.5617	1248	4686	2.5617
	Turhan (1992)	1247	4660	2.5709	-	-	-
	PBQ8 (SAİ)	1233	4750	2.5200	1233	4750	2.5200
3	Çelik, Omurtag (2005)	1845	5746	2.8172	1494	4980	2.6855
	Turhan (1992)	1845	5690	2.8370	-	-	-
	PBQ8 (SAİ)	1832	5832	2.7770	1483	5052	2.6450
5	Çelik, Omurtag (2005)	2398	6656	3.0028	1713	5256	2.7806
	Turhan (1992)	2398	6574	3.0274	-	-	-
	PBQ8 (SAİ)	2385	6769	2.9600	1706	5336	2.7420
10	Çelik, Omurtag (2005)	3700	8550	3.3371	2193	5880	2.9601
	Turhan (1992)	3697	8422	3.3669	-	-	-
	PBQ8 (SAİ)	3687	8723	3.2890	2192	5981	2.9210

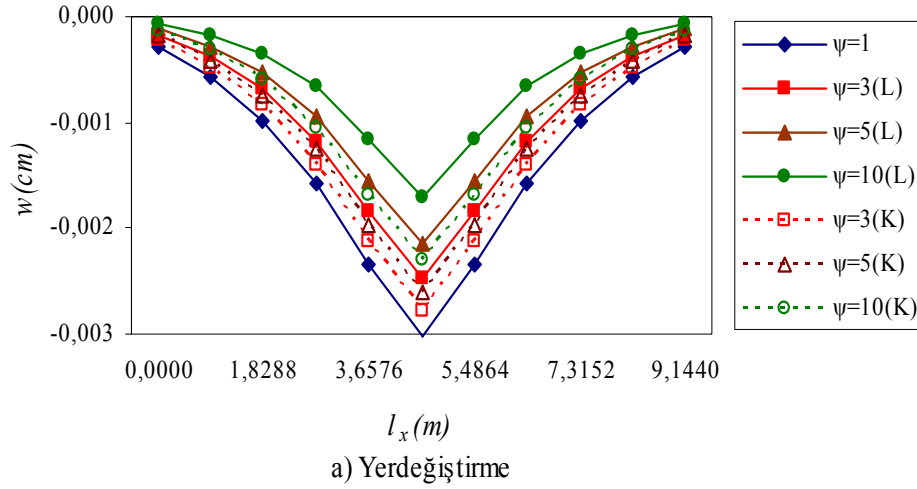
Aynı E_2/E_1 oranı için zemin elastisite modülünün derinlik boyunca lineer değiştiği durumda yerdeğiştirmeler ve momentler kuadratik değiştiği duruma göre daha küçük çıkmaktadır. Zemin, elastisite modülünün derinlik boyunca lineer değiştiği durumda kuadratik değiştiği duruma nazaran daha rijit davranmaktadır.



Şekil 47. Çeşitli $\psi=E_2/E_1$ oranları için yayılı yüke maruz plağın yerdeğiştirme değerlerinin plak orta düzleminde x eksenini boyunca değişimi



Şekil 48. Çeşitli $\psi=E_2/E_1$ oranları için yayılı yüke maruz plağın eğilme momenti değerlerinin plak orta düzleminde x eksenini boyunca değişimi



Şekil 49. Çeşitli $\psi=E_2/E_1$ oranları için tekil yüke maruz plağın yerdeğiştirme değerlerinin plak orta düzleminde x eksenı boyunca değişimi

3.7. Etkin Zemin Derinliğinin Belirlenmesi

Burada 3.4. ve 3.5. başlığı altında çözülen örnekler için 2.2. bölümünde bahsedilen yöntemle belirlenen etkin zemin derinlikleri ile çözümler yapılarak elde edilen zemin parametreleri, yerdeğiştirmeler, eğilme momentleri ve kesme kuvvetlerinin derinlikle değişimi incelenmektedir. Ayrıca, bu çalışmada kullanılan bilgisayar programı belli zemin derinliği artımlarıyla çözümleri tekrarlayan bir döngü içerisine alınıp, son iki yerdeğiştirme arasındaki farkın belli bir değerden küçük olmasına bağlı olarak etkin zemin derinliğinin kontrolü yapılmaya çalışılmıştır. Belirlenen etkin zemin derinliği ile elde edilen veriler daha önce çözülen derinliklerdeki veriler ile kıyaslanmaktadır. Bahsi geçen çözüm bu çalışmada en iyi neticeyi veren PBQ8(SAİ) elaman ile gerçekleştirilmektedir. Belirlenen etkin zemin derinlikleri Tablo 16'da verilmektedir.

Tablo 16. Belirlenen etkin zemin derinlikleri

Yöntem	$H(m)$		
	Yayılı Yük Örneği	Tekil Yük Örneği	Radye Temel Örneği
Boussinesq Formülü	36	8	88
Westergaard Formülü	38	8	87
Ardışık çözüm	41	12	66

Görüldüğü gibi Boussinesq ve Westergaard formülleri ile elde edilen etkin zemin derinlikleri birbirine oldukça yakın çıkmaktadır. Ardışık çözümde, elde edilen sonuçları destekler niteliktedir. Bu çalışmada belirlenecek olan derinliğin zemin özelliklerine de bağlı olması tercih edildiğinden zemin poisson oranını bünyesinde barındıran Westergaard formülü esas alınarak kıyaslamalar yapılmaktadır.

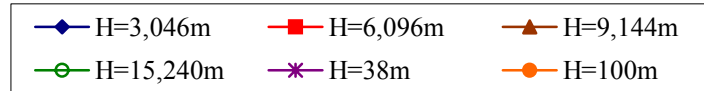
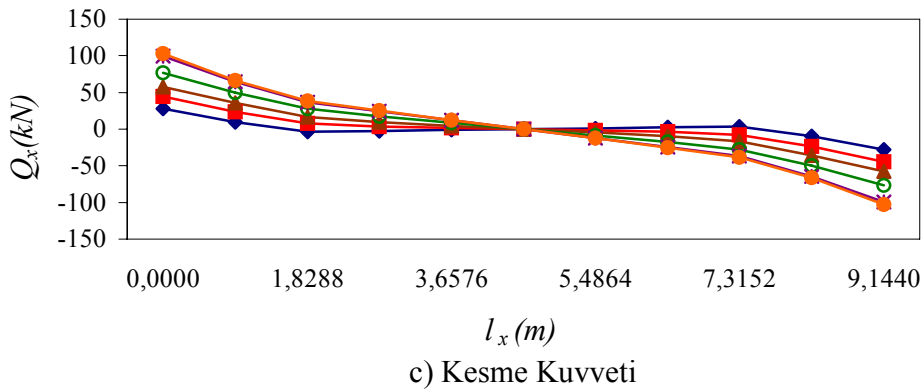
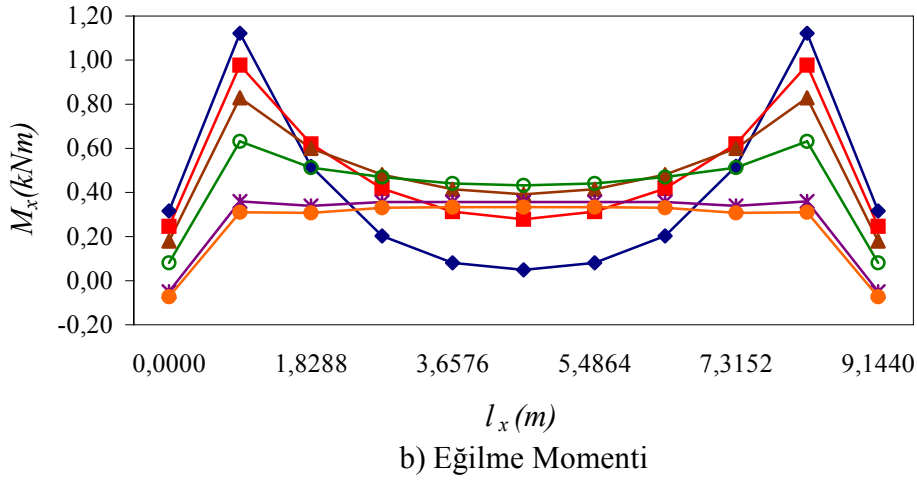
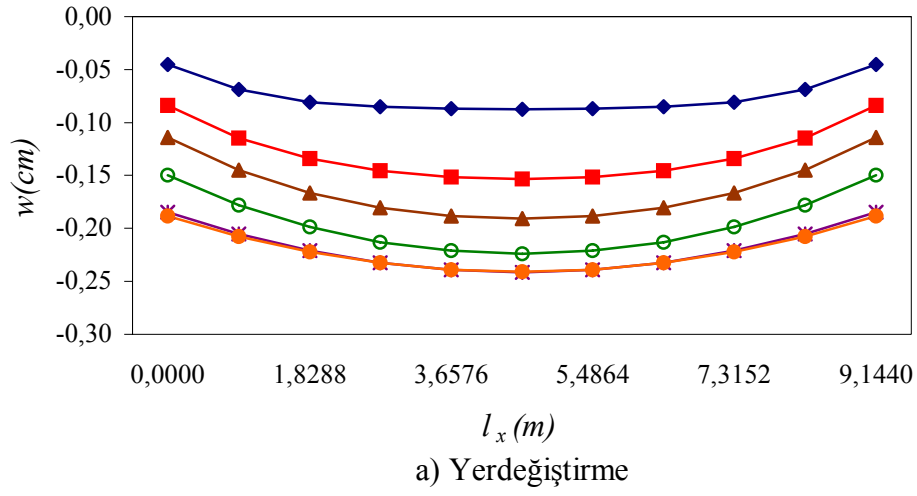
Buna göre 3.4. başlığı altında çözülen yayılı yüke maruz iki parametrelili elastik zemine oturan plak için belirlenen etkin zemin derinliği 38 m dir. Elde edilen sonuçlar Tablo 17 ve Şekil 50’de verilmektedir.

Tablo 17. Elastik zemine oturan yayılı yükle yüklü plağın Geliştirilmiş Vlasov Modeli ile çözümünden elde edilen zemin parametreleri, maksimum yerdeğiştirmeler ve momentlerin derinlikle değişimi

$H(m)$	$k(kN/m^3)$	$2t(kN/m)$	γ	$w(cm)$	$M_x(kNm)$
3.048	27208	26839	0.5760	0.0874	0.0490
6.096	13744	50620	0.9000	0.1533	0.2794
9.144	9337	71390	1.1630	0.1918	0.3917
15.24	5924	105889	1.5800	0.2238	0.4311
38	3242	178096	2.8490	0.2412	0.3560
100	2903	196517	7.0170	0.2408	0.3340

Tablo 17’den görüldüğü gibi etkin zemin derinliğinin altında çözüm yapıldığı takdirde sonuçlar çok farklı çıkabilmekte iken gereğinden büyük derinliklerde hesap yapılması ise sonuçları etkilememektedir. Bu durum Şekil 50’de daha açık bir biçimde görülmektedir. Plağın kısa kenar doğrultusu boyunca çizilen yerdeğiştirme, moment ve kesme kuvveti eğrileri etkin zemin derinliğinden sonra birbirine oldukça yaklaşmaktadır. 38m ve 100m için yerdeğiştirme ve kesme kuvveti eğrileri üst üste düşerek tek çizgi halini almaktadır. Eğilme momenti eğrileri arasındaki fark ise oldukça az ve ihmal edilebilecek düzeydedir.

Derinlik arttıkça yerdeğiştirmeler de artmaktadır. Ayrıca kenar ortası ve açıklık ortası yerdeğiştirmeleri arasındaki fark artan derinlikle birlikte artmaktadır. Momentler kenar ortalarında derinlik arttıkça azalırken açıklık ortalarında 15.240m derinliğe kadar artmakta daha sonra azalmaktadır. Moment eğrileri giderek düzleşmektedir. Kesme kuvveti eğrileri ise kenar ortalarında derinlikle birlikte artmaktadır.

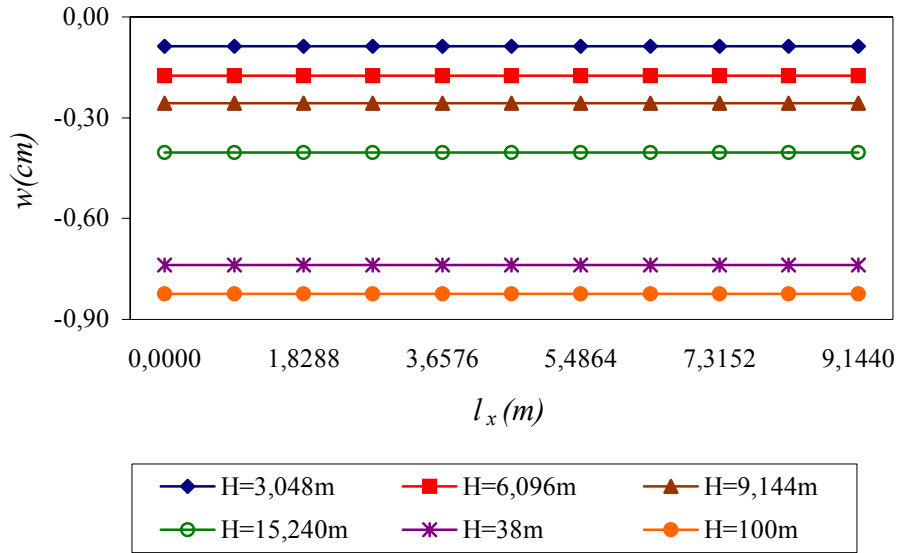


Şekil 50. Yayıllı yükle yüklü plağın Geliştirilmiş Vlasov Modeli ile çözümünden elde edilen yerdeğiştirme, moment ve kesme kuvvetlerinin derinlikle değişimi

Tablo 17'den alınan zemin yatak katsayıları yardımıyla Winkler zemin modeli kullanılarak elde edilen sonuçlar Tablo 18 ve Şekil 51'de verilmektedir.

Tablo 18. Elastik zeminine oturan yayılı yükle yüklü plağın Winkler Modeli ile çözümünden elde edilen maksimum yerdeğiştirme ve momentlerin derinlikle değişimi

$H(m)$	$k(kN/m^3)$	$w(cm)$	$M_x(kNm)$
3.048	27208	0.0880	0.0000
6.096	13744	0.1742	0.0000
9.144	9337	0.2564	0.0000
15.24	5924	0.4041	0.0000
38	3242	0.7384	0.0000
100	2903	0.8247	0.0000



Şekil 51. Yayılı yükle yüklü plağın Winkler Modeli ile çözümünden elde edilen yerdeğiştirmelerin derinlikle değişimi

Görüldüğü gibi zemin içerisindeki kayma etkilerini dikkate almayan Winkler modeli ile çözüm yapıldığında plakta dönme olmamakta ve plak kendi içinde yerdeğiştirme yapmadan zemine gömülmektedir. Bunun neticesinde Tablo 18'de görüldüğü gibi momentler sıfır ve Şekil 51'den görüldüğü gibi yerdeğiştirmeler sabit çıkmaktadır. Belirlenen etkin zemin derinliğinden daha büyük derinlikler için çözüm yapmak sonuçları çok fazla değiştirmemektedir. Ancak burada hata payının Vlasov modeline nazaran daha büyük olduğu görülmektedir.

Aynı örneğin tekil yük durumu için hesaplanan etkin zemin derinliği 8 m dir. Elde edilen sonuçlar Tablo 19 ve Şekil 52’de sunulmaktadır.

Tablo 19. Elastik zemine oturan tekil yükü taşıyan geliştirilmiş Vlasov Modeli ile çözümünden elde edilen zemin parametreleri, maksimum yerdeğiştirmeler ve momentlerin derinlikle değişimi

$H(m)$	$k(kN/m^3)$	$2t(kN/m)$	γ	$w(cm)$	$M_x(kNm)$
3.048	31804	18990	1.9350	0.0857	17.633
6.096	24092	23763	3.4990	0.0884	17.128
8	23616	24168	4.5570	0.0885	17.079
9.144	23557	24221	5.2030	0.0885	17.073
15.24	23530	24245	8.6680	0.0885	17.070
100	23530	24245	56.879	0.0885	17.070

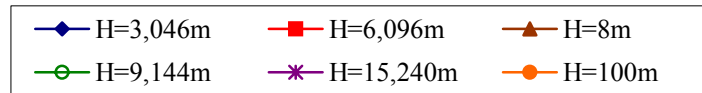
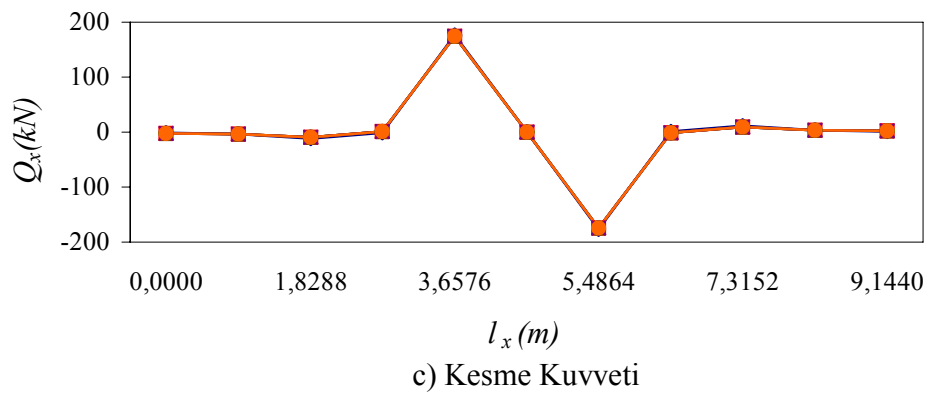
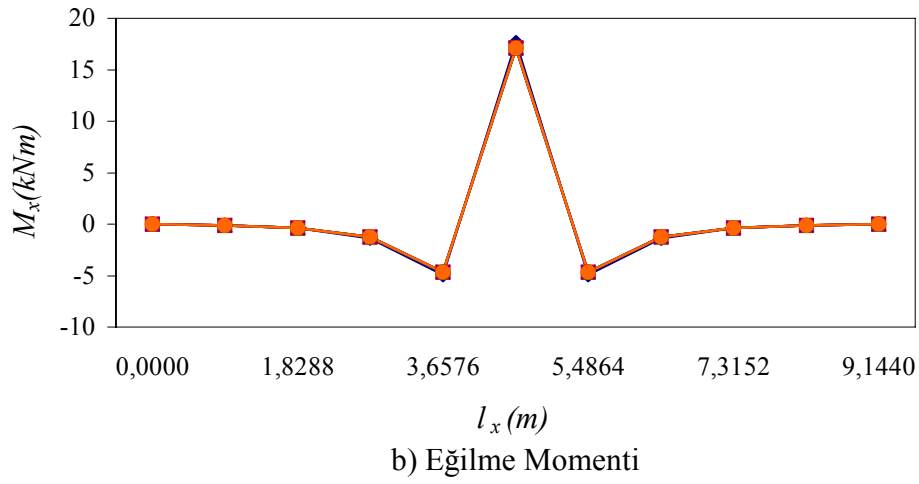
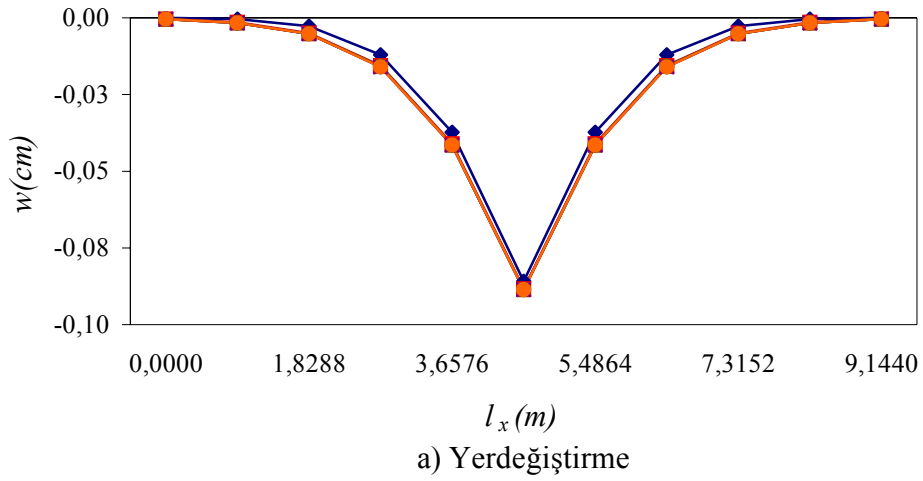
Tablo 19’den görüldüğü gibi 8m den sonra yerdeğiştirmeler artık değişmemektedir. Zemin parametreleri ve eğilme momentindeki değişimde oldukça küçüktür. Etkin zemin derinliğinden daha büyük derinliklerde çözüm yapmak sonuçları etkilememektedir. Sırasıyla Vlasov ve Winkler modeli çözümleri için çizilen Şekil 51 ve Şekil 52’de maksimum ve minimum değerler arasındaki fark oldukça büyük olduğundan dolayı verilen ölçekte bu durum yayılı yük örneğindeki kadar belirgin olarak görülememektedir.

Tablo 19’den alınan zemin yatak katsayıları yardımıyla Winkler zemin modeli kullanılarak elde edilen sonuçlar Tablo 20 ve Şekil 53’te verilmektedir.

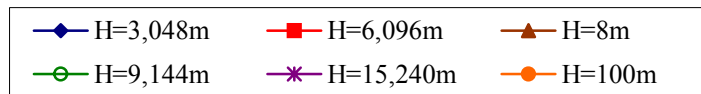
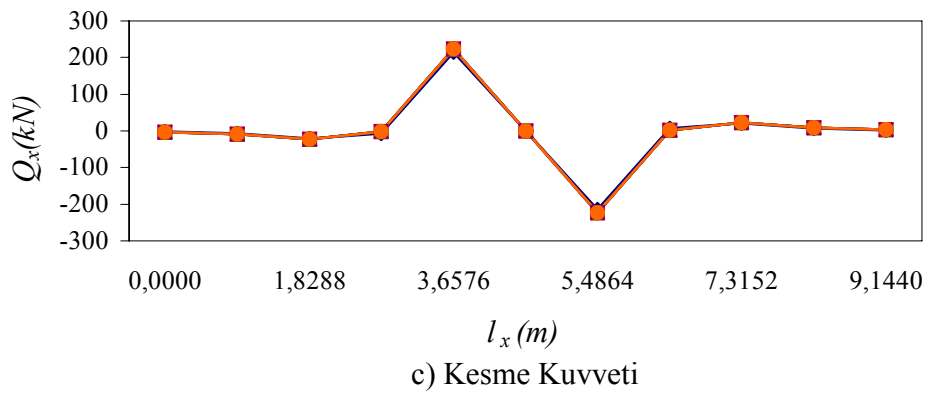
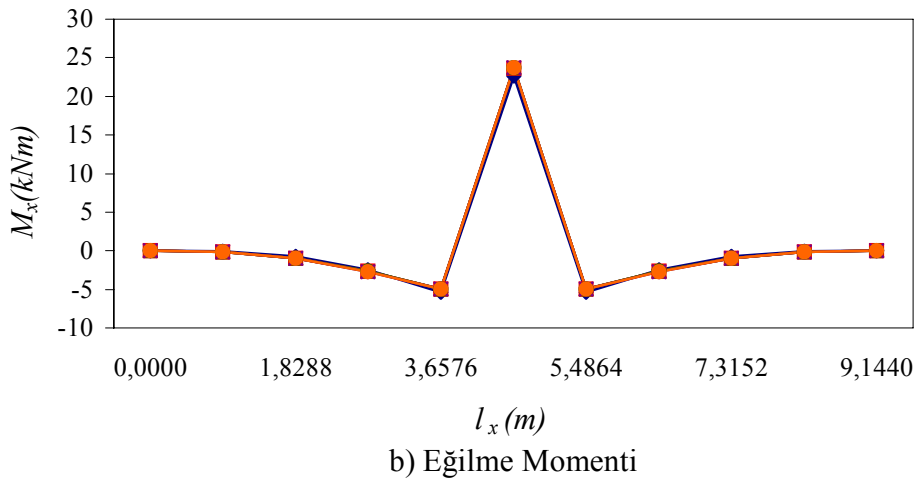
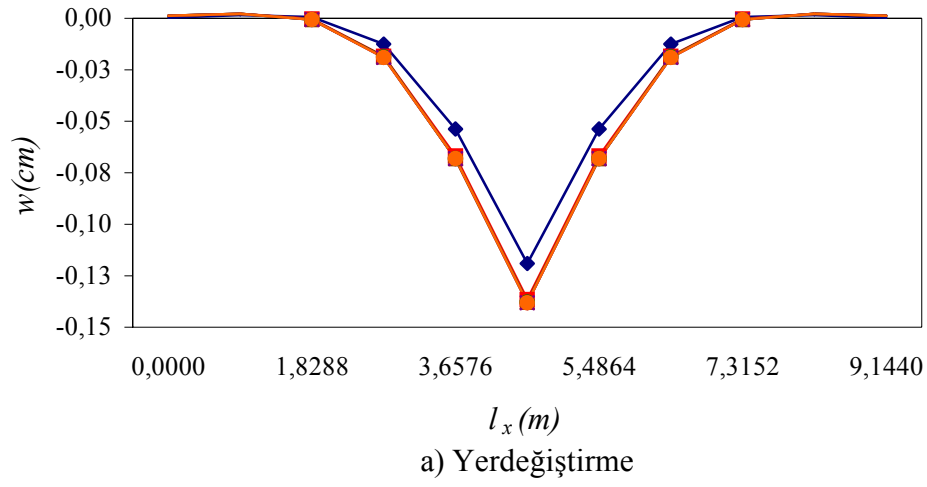
Tablo 20. Elastik zeminine oturan tekil yükü taşıyan Winkler Modeli ile çözümünden elde edilen maksimum yerdeğiştirme ve momentlerin derinlikle değişimi

$H(m)$	$k(kN/m^3)$	$w(cm)$	$M_x(kNm)$
3.048	31804	0.1189	22.661
6.096	24092	0.1364	23.622
8	23616	0.1378	23.690
9.144	23557	0.1379	23.699
15.24	23530	0.1380	23.703
100	23530	0.1380	23.703

Belirlenen etkin derinlikten daha büyük derinlikler için çözüm yapmak yerdeğiştirme ve moment değerlerini çok fazla etkilemediği Tablo 20’de görülmektedir.



Şekil 52. Tekil yükle yüklü plağın Geliştirilmiş Vlasov Modeli ile çözümünden elde edilen yerdeğiştirme, moment ve kesme kuvvetlerinin derinlikle değişimi



Şekil 53. Tekil yükle yüklü plağın Winkler Modeli ile çözümünden elde edilen yerdeğiştirme, moment ve kesme kuvvetlerinin derinlikle değişimi

3.5. başlığı altında çözülen radye temel örneği için etkin zemin derinliği 87 m olarak hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar Tablo 21 ve Şekil 54'te verilmektedir.

Tablo 21. Elastik zemine oturan radye temelin Geliştirilmiş Vlasov Modeli ile çözümünden elde edilen zemin parametreleri, maksimum yerdeğiştirmeler ve momentlerin derinlikle değişimi

$H(m)$	$k(kN/m^3)$	$2t(kN/m)$	γ	$w(cm)$	$M_x(kNm)$
5	20422	42258	1.4190	0.4846	681.987
10	10437	81128	1.5590	0.7390	682.914
15	7272	113324	1.7940	0.8631	673.638
20	5791	138984	2.0600	0.9226	662.307
87	3832	200426	6.9450	0.9796	630.059
250	3832	200435	19.9570	0.9796	630.054

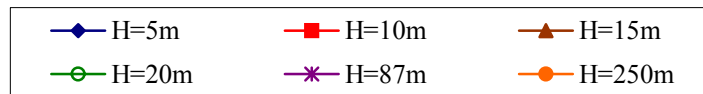
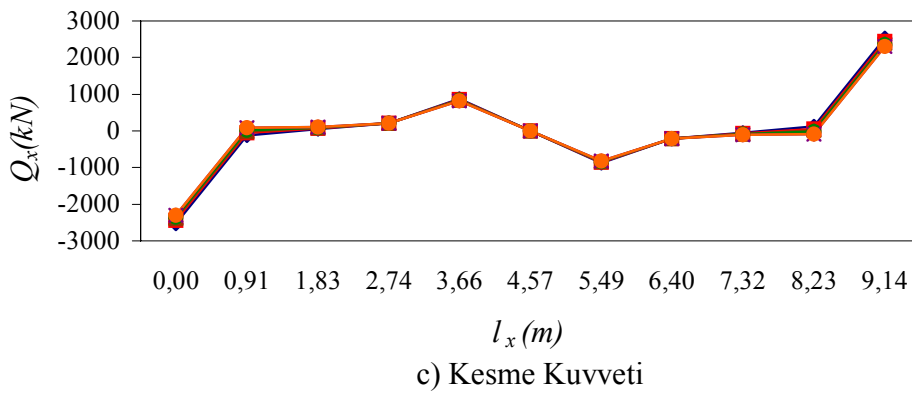
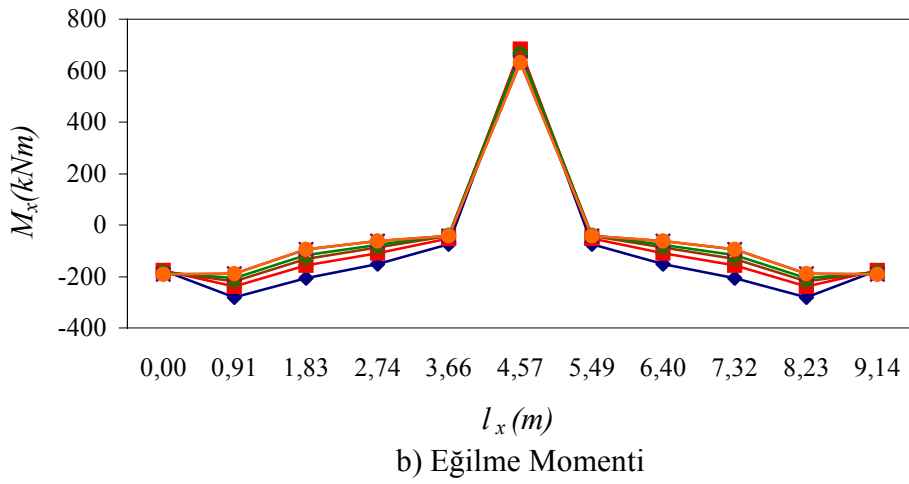
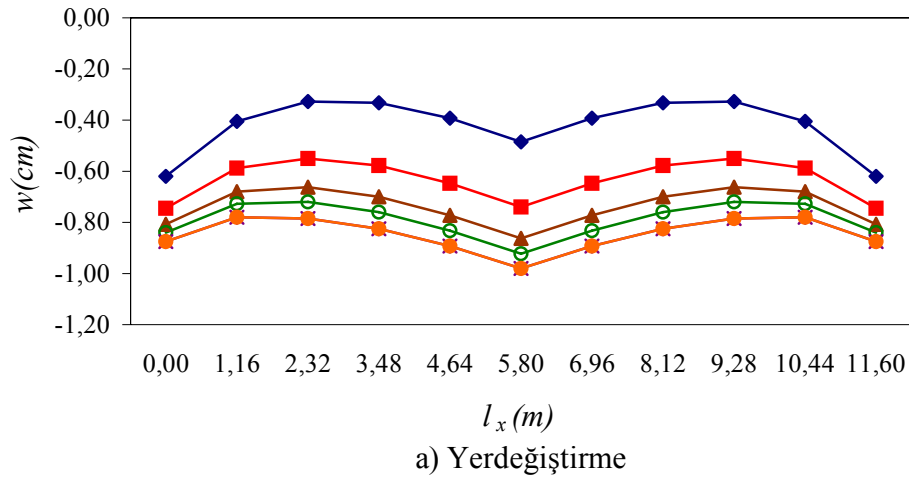
Tablo ve şekilden görüldüğü gibi zemin derinliğinin 87 m alınması güvenilir sonuçlar için yeterli olmaktadır. Derinliğin daha büyük alınması sonuçları değiştirmemekte daha küçük alınması ise doğru olmayan sonuçlara götürebilmektedir. Şekil 54'ten görüldüğü gibi 87 m den sonra yerdeğiştirme, moment ve kesme kuvvetini gösteren eğriler üst üste düşmektedir.

Tablo 21'den alınan zemin yatak katsayıları yardımıyla Winkler zemin modeli kullanılarak elde edilen sonuçlar Tablo 22 ve Şekil 55'te verilmektedir.

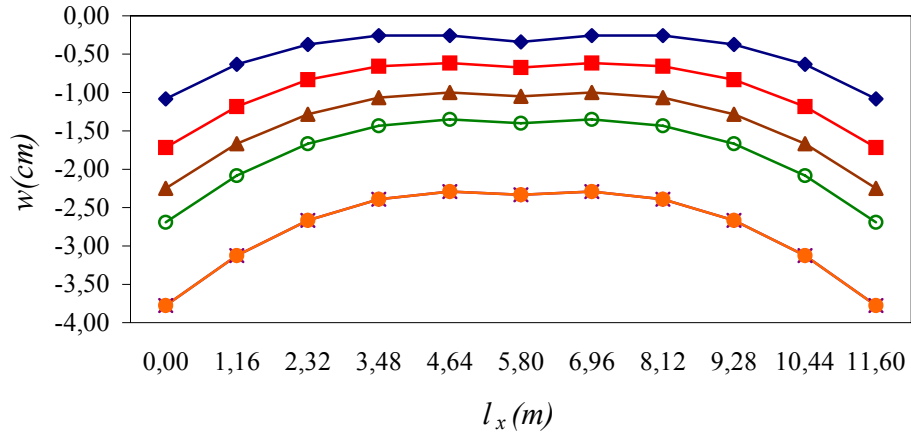
Tablo 22. Elastik zeminine oturan radye temelin Winkler Modeli ile çözümünden elde edilen maksimum yerdeğiştirme ve momentlerin derinlikle değişimi

$H(m)$	$k(kN/m^3)$	$w(cm)$	$M_x(kNm)$
5	20422	0.3383	590.200
10	10437	0.6766	496.188
15	7272	1.0522	442.369
20	5791	1.3985	409.760
87	3832	2.3309	356.139
250	3832	2.3309	356.139

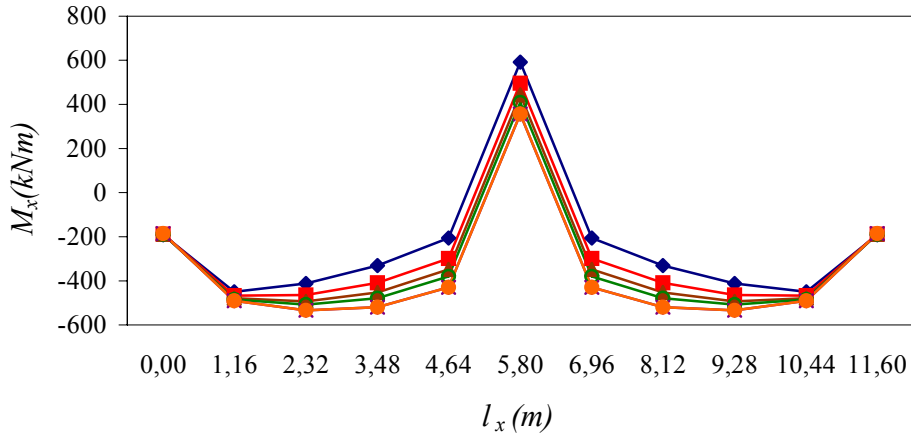
Winkler modeli kullanılması durumunda da etkin zemin derinliği yeterli sonuçlar vermektedir. Ayrıca her iki zemin modelinde de zemin derinliği arttıkça yerdeğiştirmeler artarken eğilme momentleri azalmaktadır.



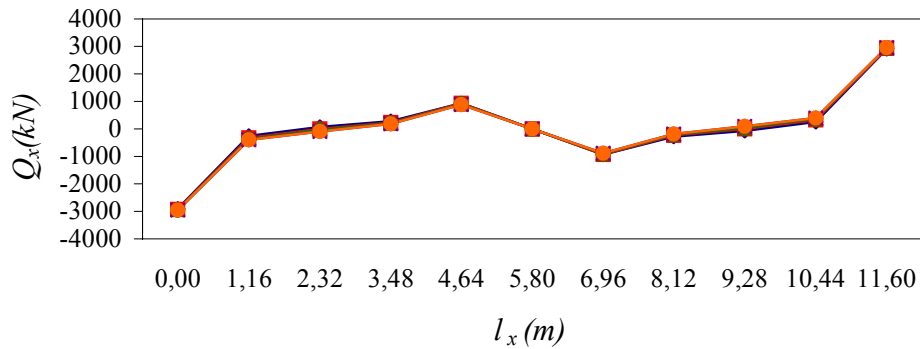
Şekil 54. Radye temelın Geliştirilmiş Vlasov Modeli ile çözümünden elde edilen yerdeğiştirme, moment ve kesme kuvvetlerinin derinlikle değişimi



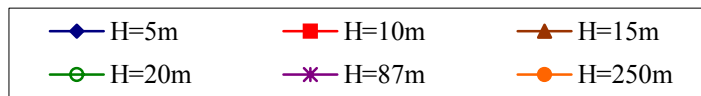
a) Yerdeğiştirme



b) Eğilme Momenti



c) Kesme Kuvveti



Şekil 55. Radye temelin Winkler Modeli ile çözümünden elde edilen yerdeğiştirme, moment ve kesme kuvvetlerinin derinlikle değişimi

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada elastik zemine oturan plakların çözümü için kalınlık doğrultusundaki kayma şekildeğiştirmelerini de dikkate alan 4 düğüm noktalı 12 serbestlik dereceli ve 8 düğüm noktalı 24 serbestlik dereceli iki tip sonlu plak eleman formüle edilmiş ve geliştirilen bilgisayar programı yardımıyla çözümler yapılmıştır. Söz konusu elemanlarda ince plak uygulamalarında karşılaşılan kayma kilitlenmesinin önlenmesi amacıyla eleman rijitlik matrisleri eğilme ve kayma terimleri için ayrı ayrı formüle edilerek Gauss integrasyon yöntemi farklı ağırlıklarla uygulanmıştır. Diğer taraftan yükten etkilenen zemin derinliğinin belirlenmesi amacıyla plağın yükleme durumuna, boyutlarına ve zeminin özelliklerine bağı olan iteratif bir yöntem geliştirilmiştir. Etkin zemin derinliğinin belirlenmesi ve plak kalınlığı doğrultusundaki kayma şekildeğiştirmelerinin dikkate alınmasıyla mevcut plak-zemin etkileşim yöntemlerinin daha da geliştirilmesine yardımcı olmak amaçlanmıştır. Gerçekleştirilen bu çalışmadan elde edilen bulgulara bağı olarak çıkartılabilecek başlıca sonuç ve öneriler aşağıda özetlenmektedir.

Kalınlık doğrultusundaki kayma şekildeğiştirmelerinin etkisini de hesaba katmak için bu çalışmada tercih edilen 4 düğüm noktalı 12 serbestlik dereceli ve 8 düğüm noktalı 24 serbestlik dereceli plak elemanlarda düşey yerdeğiştirme sürekliliğinin sağlanması yeterli olmakta, dönmeler için süreklilik şartı aranmamaktadır. Dönmeler düşey yerdeğiştirmelerin türevi olarak tanımlanmamakta, bağımsız değışkenler olarak dikkate alınmaktadır. Bu anlamda Mindlin plak elemanlar Kirchhoff plak elemanlara nazaran oluşturulması ve hesaplanması daha kolay elemanlardır. Basitliğinin yanı sıra oldukça iyi yakınsama vermektedirler.

Bu çalışmada kullanılan elemanlar ile kalın plak çözümlerinde mühendislik açısından tatmin edici sonuçlar elde edilirken, dönmelerin düşey yerdeğiştirmeler cinsinden ifade edilmemiş olmasından dolayı ince plak çözümlerinde kayma kilitlenmesi adı verilen stabilite bozukluğu ortaya çıkmaktadır. Genel olarak 4 düğüm noktalı 12 serbestlik dereceli elemanda bu stabilite bozukluğu daha büyük kalınlıklarda ve daha belirgin olarak görülmektedir. 8 düğüm noktalı 24 serbestlik dereceli eleman ile bu sorun daha ince kalınlıklara indirgenerek kısmen önenebilmektedir. Ayrıca açıklık momentleri bakımından kıyaslandığında 8 düğüm noktalı 24 serbestlik dereceli eleman daha iyi netice vermektedir.

Her iki sonlu eleman için de rijitlik matrislerinin seçilerek azaltılmış integrasyon tekniği kullanılarak elde edilmesi durumunda kayma kilitlemesi problemi söz konusu olmadığı gibi kalın plaktan ince plağa geçiş de mümkün olmaktadır. Ancak 4 düğüm noktalı 12 serbestlik dereceli sonlu elemanda kalınlık arttıkça elde edilen yerdeğiştirmeler tam integrasyon tekniği ile elde edilen yerdeğiştirmelerden uzaklaşmaktadır. Tüm yükleme durumları ve mesnet şartları dikkate alındığında en iyi sonuç PBQ8(SAI) eleman ile elde edilmektedir.

Zeminsiz plak durumunda ince plak teorisi kullanılarak elde edilen sonuçlar kalınlıktan etkilenmezken kalın plak teorisinin kullanılması durumunda yerdeğiştirmeler ve momentler kalınlık doğrultusundaki kayma şekildeğiştirmelerinin katkısıyla artan kalınlıkla birlikte artmaktadır.

Elastik zemine oturan plaklarda ise durum biraz farklı olmaktadır. Ankastre ve basit mesnet durumunda artan kalınlıkla birlikte ince ve kalın plak teorilerinden elde edilen sonuçlar arasındaki fark artarken plağın uçlarının serbest olması durumunda belli bir kalınlığa kadar artmakta daha sonra azalmaktadır. Ayrıca serbest uçlu plaklarda iki teori arasındaki fark mesnetli plaklara nazaran oldukça küçük çıkmaktadır. Başka bir deyişle kalınlık doğrultusundaki kayma şekildeğiştirmelerinin dikkate alınması serbest uçlu plaklarda sonuçları, beklenenden aksine, pek fazla etkilememektedir. Bu durum serbest uçlu plaklarda plağın davranışına elastik zeminin etkisinin daha fazla olduğu şeklinde yorumlanabilir.

Mesnet şartları bakımından incelendiğinde ankastre mesnet durumunda kalınlık doğrultusundaki kayma şekildeğiştirmelerin plağın davranışına etkisi daha fazla olmaktadır. Yükleme durumları dikkate alındığında ise tekil yük durumunda kayma şekildeğiştirmelerin plağın davranışına etkisi daha fazladır.

Zemin parametreleri, zeminin malzeme özelliklerine, zemin derinliğine ve yükleme durumuna bağılı olarak değışmektedir. Zemin derinliği arttıkça zemin yatak katsayısının azaldığı, zemin kayma parametresinin arttığı ve yerdeğiştirmelerin arttığı görülmektedir. Hesaplar elastik zeminin rijit bir kaya tabakası ile son bulunduğu kabulüne göre yapıldığından artan derinlikle beraber zeminin daha elastik davranması beklenen bir durumdur.

Zemin elastisite modülünün derinlik boyunca değışmesi durumunda artan E_2/E_1 oranı ile birlikte zemin parametreleri artarken, yerdeğiştirmeler ve momentler azalmaktadır.

Elastisite modülünün lineer değişmesi durumunda kuadratik değiştiiği duruma nazaran zemin parametreleri daha büyük, yerdeğiştirme ve momentler daha küçük çıkmaktadır.

Çalışmanın son bölümünde plağın yüklenmesine, boyutlarına ve zemin özelliklerine bağlı olarak gerilme alanının elde edilmesi suretiyle etkin zemin derinliğinin belirlenmesine çalışılmıştır. Zemin derinliğinin gerçekte olduğundan daha küçük alınması gerçekçi olmayan sonuçlara götürmekte, daha büyük alınması ise sonuçları etkilememektedir. Bu nedenle zeminde etkilenen bölge doğru olarak belirlendiğinde elde edilen zemin parametreleri daha gerçekçi dolayısıyla yerdeğiştirme ve iç kuvvetlerde daha güvenilir olmaktadır. Bu çalışmada geliştirilen yöntem ile belirlenen etkin zemin derinlikleri ile çözüm yapmak güvenilir sonuçlar elde etmek için yeterli olmaktadır.

Benzer bir çalışmanın düzensiz geometrili veya boşluklu plakların analizi için yapılmasının yararlı olacağı düşünölmektedir.

Bu çalışmada sunulan eleman matrisleri yardımıyla kalın plakların dinamik dış yükler etkisi altında çözümünün yapılması ve mevcut çözümlerle kıyaslanmasında fayda bulunmaktadır.

Elastik zemine oturan plaklar hakkında günümüze kadar yapılan teorik çalışmalarla karşılaştırılması bakımından bu konuda deneysel bir çalışmanın yararlı olacağı düşünölmektedir.

Viskoelastik zemin modeli dikkate alınarak zemin ortamındaki zamana bağlı oturmaların hesaba katılması ileriki çalışmalar için düşünölebilir.

5. KAYNAKLAR

- Abdalla, J. A. ve Ibrahim, A. M., 2006. Development of a Discrete Reissner-Mindlin Element on Winkler Foundation, Finite Elements in Analysis and Design, 42, 740-748.
- Akavci, S. S., 2005. Analysis of Thick Laminated Composite Plates on an Elastic Foundation with The Use of Various Plate Theories, Mechanics of Composite Materials, 41, 5, 445-460.
- Al-Hosani, K., 2001. A Non-singular Fundamental Solution for Boundary Element Analysis of Thick Plates on Winkler Foundation under Generalized Loading, Computers and Structures, 79, 2767-2780.
- Al-Khaiat, H. ve West, H. H., 1990. Analysis of Plates on an Elastic Foundation by The Initial Value Method, Mech. Struct. & Mach., 18, 1, 1-15.
- Ayvaz, Y., 1992. Parametric Analysis of Reinforced Concrete Slabs Subjected to Earthquake Excitation, Ph. D. Thesis, The Graduate School of Texas Tech. University, Lubbock, Texas.
- Bathe, K. J., 1996. Finite Elements Procedures, Prentice-Hall, New Jersey.
- Batoz, J. L. ve Lardeur, P., 1989. A Discrete Shear Triangular Nine D.O.F. Element for The Analysis of Thick to Very Thin Plates, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 28, 533-560.
- Berktaş, İ., 1992. Plak Teorisi ve Uygulamaları: Küçük Sehimli İnce Plaklar, Yıldız Üniversitesi, İstanbul.
- Biot, M. A., 1937. Bending of an Infinite Beam on an Elastic Foundation, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, 59, A1-A7.
- Briassoulis, D., 1989. On The Basics of The Shear Locking Problem of C^0 Isoparametric Plate Elements, Computers&Structures, 33, 1, 169-185.
- Buczkowski, R. ve Torbacki, W., 2001. Finite Element Modeling of Thick Plates on Two-Parameter Elastic Foundation, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 25, 1409-1427.
- Celep, Z., 1988. Circular Plate on Tensionless Winkler Foundation, Journal of Engineering Mechanics, 114, 10, 1723-1734.
- Celep, Z., 1988. Rectangular Plates Resting on Tensionless Elastic Foundation, Journal of Engineering Mechanics, 114, 12, 2083-2092.

- Cernica, J. N., 1995. Geotechnical Engineering: Soil Mechanics, John Wiley & Sons, Inc.
- Chucheepsakul, S. ve Chinnaboon, B., 2002. An Alternative Domain/Boundary Element Technique for Analyzing Plates on Two Parameter Elastic Foundations, Engineering Analysis with Boundary Elements, 26, 547-555.
- Chucheepsakul, S. ve Chinnaboon, B., 2003. Plates on Two Parameter Elastic Foundations with Nonlinear Boundary Conditions by The Boundary Element Method, Computers&Structures, 81, 2739-2748.
- Crisfield, M. A., 1984. A Quadratic Mindlin Element Using Shear Constraints, Computers&Structures, 18, 5, 833-852.
- Çelik, M. ve Saygun, A., 1999. A Method for The Analysis of Plates on a Two-Parameter Foundation, International Journal of Solids and Structures, 36, 2891-2915.
- Çelik, M. ve Omurtag, M. H., 2005. Determination of The Vlasov Foundation Parameters –quadratic variation of elasticity modulus- Using FE Analysis, Structural Engineering and Mechanics, 19, 6, 619-637.
- Daloglu, A. T. ve Vallabhan, C. V., 2000. Values of k for Slab on Winkler Foundation, Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 126, 5, 463-471.
- Daloglu, A. T. ve Ozgan, K., 2004. The Effective Depth of Soil Stratum for Plates Resting on Elastic Foundation, Structural Engineering and Mechanics, 18, 2, 263-276.
- Doğan, O., 1993. Elastik Zemin Üzerine Oturan Kirişler, Yüksek Lisans Tezi, İ.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Engesser, F., 1893. Zur Theorie des Baugrundes, Zentralblatt der bauverwaltung.
- Eratli, N. ve Aköz, A. Y., 1997. The Mixed Finite Element Formulation for The Thick Plates on Elastic Foundations, Computers & Structures, 65, 4, 515-529.
- Fadhil, S. ve El-Zafrany, A., 1994. Boundary Element Analysis of Thick Reissner Plates on Two Parameter Foundation, Int. J. Solids Structures, 31, 21, 2901-2917.
- Filenenko-Borodich, M. M., 1940. Some Approximate theories of Elastic Foundation, Uchenyie Zapiski Moskovskogo Gosudarstvennogo Universiteta Mekhanika, 46, 3-18.
- Han, J. B. ve Liew, K. M., 1997. Numerical Differential Quadrature Method for Reissner/Mindlin Plates on Two Parameter Foundations, Int. J. Mech. Sci., 39, 9, 977-989.
- Henwood, D. J., Whiteman, J. R. ve Yettram, A. L., 1981. Finite Difference Solution of a System First Order Partial Differential Equations, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 17, 1385-1395.

- Hetenyi, M., 1946. Beams on Elastic Foundations, The University of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan.
- Hetenyi, M., 1950. A General Solution for The Bending on an Elastic Foundation of Arbitrary Continuity, Journal of Applied Physics, 21, 55-58.
- Jianguo, W., Xiuxi, W. ve Maokuang, H., 1992. Fundamental Solutions and Boundary Integral Equations for Reissner's Plates on Two Parameter Foundations, Int. J. Solids Structures, 29, 10, 1233-1239.
- Kirchhoff, G., 1850. Uber Das Gleichgewicht and Die Bewegung Einer Elastischen Scheibe, J. Fuer Reine und Angewandte Mathematik, 40, 51-88.
- Kögler-Scheidig, 1938. Baugrund und Bauwerk, Ernst&Sohn, Berlin.
- Liu, I. W., Kerh, T. ve Lin, C. C., 1995. A Conforming Quadrilateral Plate Bending Element with Shear Deformation, Computers&Structures, 56, 1, 93-100.
- Liu, F. L., 2000. Rectangular Thick Plates on Winkler Foundation: Differential Quadrature Element Solution, International Journal of Solids and Structures, 37, 1743-1763.
- Melosh, R. J., 1963. Basis of Derivation of Matrices for the Direct Stiffness Method, AIAA Jour, 1, 7, 1631-1637.
- Mindlin, R. D., 1951. Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates, Journal of Applied Mechanics, 18, 1, 31-38.
- Misra, R. C. ve Chakrabarti, S. K., 1997. Shear and Attachment Effects on The Behavior of Rectangular Plates Resting on Tensionless Elastic Foundation, Engineering Structures, 19, 7, 551-567.
- Ortakmaç, E., 1997. Elastik Zemine Oturan Kirişler, Yüksek Lisans Tezi, İ.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Ozgan, K. ve Daloglu, A. T., 2005. Elastik Zemine Oturan Plaklar İçin Etkili Zemin Derinliği, Antalya Yöresinin İnşaat Mühendisliği Sorunları Kongresi, Cilt-I, 635-647.
- Ozkul, T. A. ve Ture, U., 2004. The Transition from Thin Plates to Moderately Thick Plates by Using Finite Element Analysis and Shear Locking Problem, Thin-Walled Structures, 42, 1405-1430.
- Özgan, K., 2000. Değiştirilmiş Vlasov Modelini Kullanarak Elastik Zemine Oturan Kirişlerin Serbest Titreşim Analizi, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

- Pasternak, P.,L., 1954. On a New Method of Analysis of an Elastic Foundations by means of Two Foundation Constants, Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstvu i Arkhitekture, Moskov, Russia.
- Petrolito, J., 1989. A Modified ACM Element for Thick Plate Analysis, Computers&Structures, 32, 1303-1309.
- Rashed, Y. F., Aliabadi, M. H. ve Brebbia, C.A., 1998. The Boundary Element Method for Thick Plates on a Winkler Foundation, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 41, 1435-1462.
- Rashed, Y. F., Aliabadi, M. H. ve Brebbia, C.A., 1999. A Boundary Element Formulation for a Reissner Plate on a Pasternak Foundation, Computers&Structures, 70, 515-532.
- Reissner, E., 1944. On The Theory of Bending of Elastic Plates, J. Math. Phys., 23, 184-191.
- Reissner, E., 1945. The Effect of Transverse Shear Deformation on The Bending of Elastic Plates, Journal of Applied Mechanics, 67, 69-77.
- Reissner, E., 1947. On Bending of Elastic Plates, Quarterly of Applied Mathematics, 5, 55-68.
- Sadecka, L., 2000. A Finite/infinite Element Analysis of Thick Plate on a Layered Foundation, Computers&Structures, 76, 603-610.
- Selvaduari, A. P. S., 1979. Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam.
- Shen, H. S., 1999. Nonlinear Bending of Reissner-Mindlin Plates with Free Edges under Transverse and in-plane Loads and resting on Elastic Foundations, International Journal of Mechanical Sciences, 41, 845-864.
- Slizard, R., 1974. Theory and Analysis of Plates, Prentice-Hall, Inc.
- Soh, A. K., Cen, S., Long, Y. Q. ve Long, Z. F., 2001. A New Twelve DOF Quadrilateral Element for Analysis of Thick and Thin Plates, Eur. J. Mec. A/Solids, 20, 299-326.
- Straughan, W. T., 1990. Analysis of Plates on Elastic Foundation, Ph. D. Thesis, The Graduate School of Texas Tech. University, Lubbock, Texas.
- Teo, T. M. ve Liew, K. M., 2002. Differential Cubature Method for Analysis of Shear Deformable Rectangular Plates on Pasternak Foundations, International Journal of Mechanical Sciences, 44, 1179-1194.
- Terzahgi, K., 1955. Evaluation of Coefficients of Subgrade Reaction, Geotechnique, 5, 297-326.

- Terzahgi, H. ve Peck, R. B., 1948. Soil Mechanics in Engineering Practice, J.Wiley, New York.
- Timoshenko, S., İnan, M, Sönmez F.(çeviren), 1964. Plak ve Kabuklar Teorisi, İstanbul Teknik Üniversitesi.
- Turhan, A., 1992. A Consistent Vlasov Model for Analysis of Plates on Elastic Foundations Using The Finite Element Method, Ph. D. Thesis, The Graduate School of Texas Tech. University, Lubbock, Texas.
- Ugural, A. C., 1981. Stresses in Plates and Shells, McGraw-Hall, Inc.
- Uzuner, B. A., 1992. Çözümlü Problemlerle Temel Zemin Mekaniği, Teknik Yayınevi, Trabzon.
- Vallabhan, C. V. G. ve Das, Y. C., 1988. Parametric Study of Beams on Elastic Foundations, Journal of Engineering Mechanics, 114, 12, 2072-2082.
- Vallabhan, C. V. G., Straughan, W. T. ve Das, Y. C., 1991. Refined Model for Analysis of Plates on Elastic Foundation, Journal of Engineering Mechanics, 117, 12, 2830-2844.
- Vallabhan, C. V. G. ve Daloglu, A. T., 1999. Consistent FEM-Vlasov Model for Plates Layered Soil, Journal of Structural Engineering, 125, 1, 108-113.
- Vesic, A. S., 1961. Bending of Beams Resting on Isotropic Elastic Solid, Proceedings of The American Society of Civil Engineers, Journal of Engineering Mechanics Division, 87, 35-51.
- Vlasov, V. Z. ve Leont'ev, N. N., 1966. Beams, Plates and Shells on Elastic Foundations, Translated from Russian, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem.
- Voyiadjis, G. Z. ve Kattan, P. I., 1986. Thick Rectangular Plates on an Elastic Foundation, Journal of Engineering Mechanics, 112, 11, 1218-1240.
- Wang, C. M., Lim, G. T., Reddy, J. N. ve Lee, K. H., 2001. Relationships Between Bending Solutions of Reissner and Mindlin Plate Theories, Engineering Structures, 23, 838-849.
- Weaver, W. ve Jonhston, P. R., 1984. Finite Elements for Structural Analysis, Prentice-Hall, New Jersey.
- Winkler, E., 1867. Die Lehre von der Elustizitat und Festigkeit, Dominicus, Prague.
- Xiao, J. R., 2001. Boundary Element Analysis of Unilateral Supported Reissner Plates on Elastic Foundations, Computational Mechanics, 27, 1-10.
- Yettram, A. L., Whiteman, J. R. ve Henwood, D. J., 1984. Effects of Thickness on The Behaviour of Plates on Foundations, Computers&Structures, 19, 4, 501-509.

- Yuan, F. G. ve Miller, R. E., 1988. A Rectangular Finite Element for Moderately Thick Flat Plates, Computers&Structures, 30, 6, 1375-1387.
- Yuqiu, L. ve Fei, X. I., 1992. A Universal Method for Including Shear Deformation in Thin Plates Elements, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 34, 171-177.
- Zienkiewicz, O. C. ve Cheung, Y. K., 1964. Finite Element Method for Analysis of Elastic Isotropic and Orthotropic Slabs, Proc. Inst. Civ. Eng., 28, 471-488.
- Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. C. ve Too, J. M., 1971. Reduced Integration Techniques in General Analysis of Plates and Shells, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 3, 275-290.
- Zienkiewicz, O. C., 1977. The Finite Element Method, McGraw-Hill, London.
- Zienkiewicz, O. C. ve Taylor, R. L., 1989. The Finite Element Method: Basic Formulation and Linear Problems, McGraw-Hill, London.
- Zimmermann, K., 1942. Die Berechnung Söldruckverteilung Unter Grundungskörpern, Der Bauingenieur.

ÖZGEÇMİŞ

Korhan ÖZGAN 1975 yılında Trabzon da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Beşikdüzü'nde, Lise öğrenimini Of 'ta tamamlayarak 1993-1994 öğretim yılında Dumlupınar Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümüne girdi. 1994-1995 öğretim yılında K.T.Ü.' nün aynı bölümüne yatay geçiş yaptı. 1996-1997 öğretim yılında bu bölümden mezun oldu. Aynı yıl mezun olduğu bölümde Yüksek Lisans öğrenimine başlayarak bir yıllık İngilizce hazırlık sınıfını bitirdikten sonra, 1998 de mezun olduğu bölümün Yapı Anabilim Dalı'na Araştırma Görevlisi olarak atandı. Yüksek Lisans öğrenimini 1999-2000 öğretim yılında tamamladı. Aynı yıl mezun olduğu bölümde Doktora öğrenimine başlayan ve öğrenimi boyunca sırasıyla Hasal İnş. Ltd. Şti., ERS İnş. San. Tic. A.Ş., Prokon-Beşer Ortak Girişimi firmalarında çalışan ÖZGAN İngilizce bilmekte ve halen Yüksel Proje Uluslararası A.Ş. bünyesinde meslek hayatına devam etmektedir.