KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

96704

RİJİT İKİ DÜZ BLOK ÜZERİNE OTURAN BİLEŞİK TABAKADA SÜREKLİ VE SÜREKSİZ TEMAS PROBLEMİ

İnş. Yük. Müh. Talat Şükrü ÖZŞAHİN

96704

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"Doktor"
Ünvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 17.1.2000
Tezin Savunma Tarihi : 3.4.2000

Tez Danışmanı : Prof. Dr. A. Osman ÇAKIROĞLU

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Ragıp ERDÖL

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Hasan ENGİN

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Asım KADIOĞLU

Trabzon 2000

ÖNSÖZ

Bu çalışma Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalında bir doktora çalışması olarak yapılmıştır.

İki rijit düz blok üzerine oturan bileşik tabakada sürekli ve süreksiz temasın incelendiği bu çalışmayı bana önererek yoğun işlerine rağmen çalışmamın her aşamasında yakın ilgisini esirgeyemeyen, bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım değerli yönetici hocam Sayın Prof. Dr. A. Osman Çakıroğlu' na şükran ve minnetlerimi sunmayı zevkli bir görev sayarım.

Bütün öğrenim hayatım boyunca bana emeği geçen bütün hocalarımı saygıyla anar, kendilerine teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarımın başından sonuna kadar her konuda yakın ilgi ve yardımlarını gördüğüm Sayın Prof. Dr. Ragıp Erdöl' e, Sayın Doç. Dr. Ümit Uzman' a, Sayın Yrd. Doç. Dr. F. Lütfü Çakıroğlu' na, Arş. Gör. Ahmet Birinci ve Arş. Gör. Volkan Kahya' ya teşekkür ederim.

Çalışmalarım süresince beni sabırla destekleyen ailemin tüm fertlerine müteşekkir olduğumu belirtir, çalışmamın ülkemize yaralı olmasını içtenlikle temenni ederim.

Talat Şükrü ÖZŞAHİN

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu çalışmada, rijit iki düz blok üzerine oturan, h_1 ve h_2 gibi değişik sabit yükseklikte ve farklı malzeme özelliklerine sahip homojen, izotrop iki tabakadan oluşan bileşik tabakada sürekli ve süreksiz temas problemi elastisite teorisine göre çözülmüştür. Bileşik tabaka üst yüzeyinden 2a genişliğinde düzgün yayılı yükün etkisinde bırakılmıştır.

Birinci bölümde temas problemlerinin tarihsel gelişiminden bahsedilmiş, temas konusu üzerine yapılan bazı çalışmalar özetlenmiştir. Elastisitenin temel denklemleri kullanılarak integral dönüşüm teknikleri yardımıyla bu denklemlerden gerilme ve yerdeğiştirmelere ait genel integral ifadeler elde edilmiştir.

İkinci bölümde, önce sürekli temas durumu incelenmiştir. Sürekli temasta probleme ait sınır şartlarına, gerilme ve yerdeğiştirme ifadeleri uygulanmış, problem temas gerilmesinin bilinmeyen olduğu tekil integral denkleme indirgenmiştir. Tekil integral denklemin çözümü ise Gauss-Chebyshev integrasyon formülleriyle yapılmıştır. Daha sonra iki elastik tabakaya ait ara yüzeyde ilk ayrılmayı meydana getirecek yük ve ilk ayrılmanın meydana geleceği uzaklık araştırılmıştır. Sürekli temasın ardından süreksiz temas incelenmiştir. Öncelikle bileşik tabaka ile rijit düz bloklar arasındaki ayrılma ele alınmıştır. Ardından da iki elastik tabakaya ait ara yüzeyde ayrılma olması durumunda yazılan sınır şartlarına uygulanan gerilme ve yerdeğiştirme denklemleri ile problem temas gerilmesi ve iki elastik tabakaya ait ara yüzeyde meydana gelen ayrılmanın eğiminin bilinmeyenler olduğu iki integral denkleme indirgenmiş ve integral denklem takımı yine Gauss-Chebyshev integrasyon formülleriyle çözülmüştür. Sürekli temas ve bileşik tabaka ile rijit düz bloklar arasında ayrılma bulunması hallerinde, iki elastik tabakaya ait ara yüzey boyunca sürtünme bulunması ve bulunmaması durumları ayrı ayrı ele alınmıştır.

İntegral denklemlerin çözülmesiyle temas gerilmesi, tabakalara ait ara yüzeydeki ayrılmalar ile bileşik tabakanın herhangi bir noktasındaki σ_x, σ_y ve τ_{xy} gerilme bileşenleri kolayca belirlenebilir hale gelmiştir. Üçüncü bölümde mesnet açıklığı, mesnet genişliği, yük genişliği ve malzeme özellikleri gibi değişik boyutsuz büyüklüklerin farklı değerleri için gerilme ve yerdeğiştirmere ait sonuçlar grafikler halinde sunulmuştur. Tabakalara ait ara yüzeyde sürtünme bulunması ve bulunmaması durumlarında tabakalar arasında ayrılma meydana gelmemesi halinde gerilmelerdeki farklar grafikler üzerinde gösterilmiş ve grafiklerin irdelenmesi yapılmıştır.

Dördüncü bölümde ise yapılan çalışmalardan çıkarılan sonuçlar sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Elastisite Teorisi, Sürekli Temas, Süreksiz Temas, Temas Gerilmesi, İlk Ayrılma Yükü, İlk Ayrılma Uzaklığı, Ayrılma, İntegral Dönüşüm Tekniği, İntegral Denklem.

SUMMARY

Continuous and Discontinuous Contact Problem of Layered Composite Resting on Two Rigid Flat Supports

In this study, the continuous and discontinuous contact problem of a layered composite which consists of two materials with different elastic constants and heights h_1 and h_2 resting on two rigid flat supports with sharp edges is considered according to the theory of elasticity. Layered composite is subjected to a uniform clamping pressure over a finite portion of width 2a on its top surface. It is assumed that there is no friction between the supports and the layered composite.

In the first chapter, the historical development of contact problems are mentioned and some studies which are done on contact problems are summarised. Also stress and displacement integral expressions are obtained using the integral transforms technique from the fundamental equations of elasticity.

In the second chapter, continuous contact is examined first. Stress and displacement expressions are substituted into the continuous contact boundary conditions and the problem is reduced to a singular integral equation, where the contact pressure is the unknown function. The solution of singular integral equation is done using the Gauss-Chebyshev integration formulas. Then the first separation load and the first separation distance at the interface of two elastic layers are investigated. Discontinuous contact problem is divided into two parts. Separation between layered composite and rigid flat supports is examined first. Afterwards stress and displacement expressions are substituted into the boundary conditions which are written for the separation between the two elastic layers and the problem is reduced to solution of two singular integral equations where the contact pressure and the slope of separation at the interface of two elastic layers are the unknown functions. Singular integral equation system is also solved using Gauss-Chebyshev integration formulas. In the continuous contact problem and discontinuous contact problem between layered composite and rigid flat supports mentioned above are considered with and without friction at the interface of elastic layers separately.

With solving the integral equations, contact pressure, separation between two elastic layers and σ_x, σ_y and τ_{xy} stress components at every point of layered composite can be determined. In the third chapter, the stress and displacement results which are obtained for different values of various dimensionless quantities such as support width, load width and material properties are presented in graphical forms. When there is no separation between two elastic layers, the effect of friction between two elastic layers on stresses are shown in graphics and the graphics are discussed.

In the fourth chapter, the conclusions obtained from this study is given.

Key Words: Theory of Elasticity, Continuous Contact , Discontinuous Contact, Contact Pressure, Initial Separation Load, Initial Separation Distance, Separation, Integral Transforms Technique, Integral Equation.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

SEMBOLLER DİZİNİ

a	Yayılı yük genişliği
A_i	Sürekli temasta, tabakalar arasında sürtünme bulunması durumunda bilinmeyen katsayı
A_i^*	Sürekli temasta, tabakalar arasında sürtünme bulunmaması durumunda bilinmeyen katsayı
A_i^{**}	Süreksiz temasta, bilinmeyen katsayı
b	Mesnet açıklığı
β	Yük faktörü
β_{cr}	Kritik yük faktörü
B_i	Sürekli temasta, tabakalar arasında sürtünme bulunması durumunda bilinmeyen katsayı
B_i^*	Sürekli temasta, tabakalar arasında sürtünme bulunmaması durumunda bilinmeyen katsayı
B_i^{**}	Süreksiz temasta, bilinmeyen katsayı
c	Rijit blok dış kenarının simetri eksenine olan uzaklığı
C_i	Sürekli temasta, tabakalar arasında sürtünme bulunması durumunda bilinmeyen katsayı
C_i^*	Sürekli temasta, tabakalar arasında sürtünme bulunmaması durumunda bilinmeyen katsayı
C_i^{**}	Süreksiz temasta, bilinmeyen katsayı
d	Bileşik tabakanın rijit bloklardan ayrıldığı noktanın simetri eksenine uzaklığı
Δ	Tabakalar arasında sürtünme bulunması durumunda katsayılar matrisinin determinantı
Δ^*	Tabakalar arasında sürtünme bulunmaması durumunda katsayılar matrisinin determinantı
∂	Türev operatörü

D_i	Sürekli temasta, tabakalar arasında sürtünme bulunması durumunda bilinmeyen katsayı
D_i^*	Sürekli temasta, tabakalar arasında sürtünme bulunmaması durumunda bilinmeyen katsayı
D_i^{**}	Süreksiz temasta, bilinmeyen katsayı
e	Elastik tabakalar arasındaki ayrılmanın başlangıç noktası
E	Elastisite modülü
ε_x, ε_y	x, y doğrultularındaki yerdeğiştirme bileşenleri
f	Elastik tabakalar arasındaki ayrılmanın bitiş noktası
ϕ, ψ	Ters Fourier dönüşüm fonksiyonları
$\varphi(x)$	Tabakalar arasındaki ayrılmanın eğimini veren fonksiyon
g	Yerçekimi ivmesi
γ_{xy}	Kayma şekildeğiştirme bileşeni
h	Bileşik tabaka kalınlığı
h_1	1 nolu tabaka kalınlığı
h_2	2 nolu tabaka kalınlığı
i	Tabaka numarasını gösteren indis
k(x,t), k(x)	İntegral denklemlerdeki çekirdekler
κ	Malzeme sabiti
λ	Lame sabiti
m	2 nolu tabakanın kayma modülünün, 1 nolu tabakanın kayma modülüne oranı
n	Temas gerilmesi ve ayrılmanın eğiminin belirlendiği nokta sayısı
∇	Laplace operatörü
ν	Poisson oranı
p_o	Yayılı yükün şiddeti
q(x)	Temas gerilmesini veren fonksiyon
ρ	Yoğunluk
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Normal gerilme bileşenleri

$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Kayma gerilmesi bileşenleri
u,v,w	Kartezyen koordinat doğrultularındaki yerdeğiştirmeler
X,Y,Z	Kütle kuvvetleri
x,y,z	Kartezyen koordinatlar
X_{cr}	İlk ayrılma uzaklığı

Not : Bu listede verilmeyen bazı semboller metin içerisinde ilgili oldukları yerlerde tanımlanmışlardır.

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Temas problemleri pratik öneme sahip mühendislik yapılarında geniş uygulama alanları bulmuşlardır. Temeller, karayolları, demiryolları, havaalanı pistleri, tahıl siloları, akaryakıt tankları, silindirik miller, küresel veya silindirik bilyeler temas konusunun uygulama alanlarından bazılarını oluşturmaktadır [1].

Mühendislik yapılarında temas konusunda gerilme ve şekildeğiştirme problemlerinin çözümünde çoğu zaman elemanter teori yetersiz kalmakta, elastisitenin karışık ve uzun ifadelerine ihtiyaç duyulmaktadır. Elastisite teorisi, dış kuvvetlerin etkisi altında bulunan bir elastik cisimde gerilme, şekildeğiştirme ve yerdeğiştirmenin sistematik incelenmesiyle uğraşır ve bir yük sisteminin etkisindeki cisimde iç kuvvet dağılımını, cismin davranışını yani boyutlarındaki değişim veya bazı hallerde sonuç olarak ortaya çıkan mukavemetin sona ermesini inceler [2]. Belirli bir diferansiyel denklemden hareket edilerek çözüme gidilen elastisitede, temas problemlerinde, cisimdeki herhangi bir noktada gerilme ve şekildeğiştirmelere ait kapalı formda ifadelerin elde edilmesinde, en basit problemlerin çözümünde dahi zorluklarla karşılaşılabilmektedir. Klasik teorinin karşılaştığı bu zorlukları yenmek için daha gelişmiş analitik metotların ortaya konulması gerekmiştir. Bu metotlardan biride, serilerin toplanması, sınır değer problemlerinin çözümü, belirli integrallerin hesaplanması yanı sıra diferansiyel denklemlerin integro diferansiyel denklem sistemlerinin çözümünde kullanılan integral dönüşüm teknikleridir. Problemlerde bağımsız değişkenler üzerine yapılan dönüşümler, diferansiyel denklemlerin mertebesini azaltmakta böylece problemlerin çözümünü kolaylaştırmaktadır [3]. Ayrıca integral dönüşüm teknikleri, tabakaların söz konusu olduğu temas problemlerinin çözümü için daha uygun bir metot olarak ortaya çıkmaktadır [4].

1.2. Çalışmanın Önemi ve Amacı

Bileşik çubuk veya tabaka yapmak suretiyle daha az mukavemetli çubukları veya tabakaları takviye ederek daha fazla yük taşıyan, ekonomik ve estetik yönden daha uygun yapı elemanları elde edilmektedir. Bileşik yapı tarzı karayolu köprülerinde, çatı makaslarında, kirişlerde fazlaca uygulama alanı bulabilmekte beton-çelik, ahşap-çelik vs. şeklinde inşa edilmektedir [5]. Bileşik yapı tarzına uygulamalı bir örnek oluşturan çalışmamızda, rijit iki düz blok üzerine oturan, elastik sabitleri farklı iki tabakadan meydana gelen bileşik tabakada temas problemi elastisite teorisi ve integral dönüşüm teknikleri kullanılarak çözülmüştür.

Temas gerilmeleri, temas bölgesi yakınında yoğunlaşıp büyük değerler alır ve temas bölgesinden uzaklaştıkça gerilme yoğunluğu hızla azalır [6]. Bu yüzden temas problemlerindeki yoğun gerilme bölgeleri malzemenin boyutlandırılması ve dayanımı açısından önemlidir. Mühendislik yapılarının boyutlandırılmasında en önemli adımlardan birisi yapının belirli yükler ve çevre şartları altında görevini yerine getirmesi için en son şekline ve ölçülerine karar vermektir. Bu en son şeklin tayini için kritik bir yük faktörü ile malzemeyi karakterize eden bir parametre mukayese edilir [7]. Ele alınan problemde sürekli ve süreksiz temas durumlarında, yapının boyutlandırılmasında kullanılacak temas yüzeylerindeki gerilme dağılışları belirlenmiştir. Bileşik tabakada ayrılmaya sebebiyet verecek kritik yük faktörleri ve ayrılmanın meydana geleceği uzaklıklar araştırılmış, ayrılma ve temas bölgelerinin büyüklükleri incelenmiştir. Mesnet genişliği, mesnet açıklığı, yük genişliği gibi parametrelerin farklı değerler alması halinde araştırılan büyüklüklerin nasıl değiştikleri incelenmiştir.

1.3. Temas Problemlerinin Tarihsel Gelişimi

Temas mekaniği konusunun, Hertz' in 1882 yılında yazdığı ' Elastik Cisimlerin Teması' adlı makalesi ile başladığı söylenebilir. Hertz' in tam elastik cisimler ve sürtünmesiz yüzeyler için ortaya koyduğu teoriye göre, temas eden yüzeyler süreklidir, şekildeğiştirmeler küçüktür ve her cisim elastik yarım düzlem olarak kabul edilebilir [6]. Ne var ki, teoriyi esas alan çalışmalar, teknolojik önemine rağmen mühendislikteki gelişmelerin teşviki gerçekleşinceye kadar bu yüzyılın başlarına değin teknik literatürde görülmemiştir. Yirminci yüzyılın başlarında Kolosoff tarafından kompleks değişkenler metodunun ortaya konulmasıyla yapılan çalışmalarda bir artış gözlenmiştir. Sneddon' un integral dönüşüm teknikleri üzerine yaptığı çalışmaların 1930' larda Muskhelishvili tarafından elastisite teorisinde kullanılmasıyla temas konusu üzerine yapılan çalışmalara katılım artmıştır [4]. Boussinesq tarafından geliştirilen Hertz temas problemi pek çok araştırmacı tarafından önemli uygulamalara özelleştirilmiş, bilgisayar teknolojisindeki ve sayısal çözüm metotlarındaki gelişmelere paralel olarak temas problemleri üzerine çalışan bilim adamlarının sayısı artmıştır. Değme problemleri üzerine 1950' li yıllara kadar yapılan araştırmalara ait teknik literatür ve çözüm metotları Galin' in eserinde bulunabilir [8]. İntegral dönüşümlerin değme problemlerinin çözümünde uygulanma metotları ise Ufliand' ın eserinde verilmiştir [9].

1.4. Temas Problemleri ile İlgili Yapılmış Çalışmalar

Bu başlık altında, statik yük etkisindeki sürekli ve süreksiz temas problemleri üzerine ağırlıklı olarak elastisite teorisi ve integral dönüşüm teknikleri kullanılarak yapılmış çalışmalar verilmiş, yükün hareketli olması durumunda yapılan bazı çalışmalar da özetlenmiştir. Ayrıca temas problemlerinde, değişik çözüm metotlarının kullanıldığı ve mekanik modellendirmelerin ortaya konulduğu çalışmalar da sunulmuştur.

1.4.1. Sürekli Temas Problemleri ile İlgili Yapılmış Çalışmalar

Elastik mesnede veya zemine oturan tabakalarla ilgili çalışmalar ilk olarak Winkler tarafından 1867 yılında yapılmıştır. Winkler' e göre tabakanın üzerine oturduğu elastik mesnet veya zeminden görmüş olduğu reaksiyon çökmelerle orantılıdır. Winkler temeli tarafından mesnetlenmiş tabakaların jeofizik, geoteknik ve buz mühendisliğinde özel uygulama alanları vardır [10]. Winkler temeli tarafından mesnetlenmiş bazı çalışmalar aşağıda verilmiştir.

Dempsey, Zhao ve Minetyan, Winkler temeli tarafından mesnetlenmiş, elastik tabakaya ait asimetrik temas problemini incelemişlerdir. Elastik tabakaya etkiyen rasgele bir yüzey yükü için temel çözümleri elde ettikten sonra elastik tabakayı değişik profil şekillerine sahip rijit blokların etkisinde bırakmışlardır. Yapılan çalışma sonunda temas gerilmesi, temas alanının çapı ve yerdeğiştirmeler ile ilgili sonuçlar ortaya koymuşlardır [11]. Yine aynı araştırmacılar, Winkler temeli tarafından mesnetlenmiş tabakaya, rijit bir silindir tarafından baskı uygulanması durumunu ele almışlar, kiriş ve çarpılma teorilerini kullanarak temas gerilmesi dağılımını elde etmişlerdir [12]. Elastik mesnetlere oturan elastik sabitleri ve yükseklikleri farklı iki malzemeden yapılmış tabakaların yapıştırılması ile elde edilen bileşik tabakanın iki boyutlu elastisite teorisine göre çözümü ise Birinci ve Erdöl tarafından incelenmiştir. Araştırmacılar bileşik tabakada herhangi bir noktada meydana gelen gerilme ve yerdeğiştirme bileşenlerini veren ifadeleri, integral dönüşüm tekniğini kullanarak elde etmişlerdir [13]. Birinci, Kahya ve Erdöl ise Winkler temeli tarafından mesnetlenmiş bileşik tabakada sürekli temas problemini incelemişlerdir. Tabakanın üzerine uygulanan dış yükten dolayı, tabakalar arasında ayrılmanın başladığı ilk noktayı ve ilk ayrılma yükünü bulmuşlar ve temas gerilmesi dağılımını elde etmişlerdir [14]. Dairesel bir mesnet üzerine oturan tabakanın elastostatik temas problemi Geçit ve Gökpınar tarafından ele alınmıştır [15]. Çalışmada araştırmacılar problemi temas gerilmelerinin bilinmeyen olduğu tekil integral denkleme indirgemişler ve integral denklemin çözümünden temas gerilmesi, temas alanı ve eksenel gerilmelere ait sayısal sonuçlar ortaya koymuşlardır.

Daha fazla yük taşıyan, ekonomik ve estetik yönden daha uygun olan bileşik yapı tarzı karayolu köprülerinde, çatı makaslarında, kirişlerde fazlaca uygulama alanı bulabilmektedir. [5]. Bu konuda yapılmış bazı çalışmalar aşağıda özetlenmiştir. Çakıroğlu ve Erdöl elastik sabitleri farklı olan iki çubuğun yapıştırılmasıyla meydana getirilen ve iki basit mesnete oturan bileşik tabakada temas problemini ele almışlar, elastisite teorisi ve integral dönüşüm tekniğini kullanarak simetri kesitinde meydana gelen normal gerilmeleri incelemişlerdir. Elastisite teorisinden ve elemanter teoriden elde edilen sonuçları karşılaştırmışlardır [16]. Elastik sabitleri ve yükseklikleri farklı, belirli noktalarından tutturulmuş iki tabakadan oluşan ve üst yüzeyinden sınırlı bir bölgede yayılı basınç yükünün etkisinde bırakılmış, basit mesnetlere oturan bileşik tabakanın ele alındığı temas problemi Çepni, Birinci ve Çakıroğlu tarafından incelenmiştir [17]. Birinci ve Erdöl ise üzerinde rijit dikdörtgen bir blok bulunan, iki noktadan mesnetlenmiş bileşik tabaka problemini çözmüşlerdir [18]. Her iki çalışmada problemler tekil integral denklemlere indirgenmiş ve uygun Gauss-Chebyshev integrasyon formülleri kullanılarak çözümleri yapılmıştır.

Zemin mekaniği ve temel mühendisliğindeki uygulanabilirliği nedeniyle, temas problemleri üzerine yapılan çalışmalarda, elastik tabakaya veya elastik yarı sonsuz bir ortama yük aktaran blok problemleri önemli yer tutar. Rijit blok ile elastik tabaka ya da rijit blok ile yarı sonsuz ortam arasındaki sürekli teması ele alan bazı çalışmalar aşağıda sunulmuştur.

Elastik bir temel üzerine oturan ve rijit bir blok ile yük aktarılan elastik tabakada temas problemi, Dhaliwal tarafından çalışılmıştır. Problem ikinci nevi tekil integral denkleme indirgenerek çözülmüştür [19]. Nowell ve Hill, ince bir şerit ile simetrik silindirler arasındaki düzlem elastik temas problemini incelemişler, değişik yükleme durumlarında yüzey gerilmelerini belirlemişler, yapışma ve kayma bölgelerinin belirlenmesi için analizler yapmışlardır [20]. İki dairesel bloğun etkidiği elastik tabakada temas bölgesinde meydana gelecek normal ve teğetsel şekil değiştirmeler [21]' de incelenmiştir. [22]' de elastik bir temel üzerine oturan elastik bir tabaka için asimetrik Boussinesq problemi ele alınmıştır. Araştırmacılar değişik blok profilleri için özel çözümler türetmişler ve rijit blok altındaki temas gerilmesi dağılımını belirlemişlerdir. Üst yüzeyinden sürtünmesiz rijit silindirik bir blok aracılığıyla yüklenmiş ve rijit bir düzleme oturan elastik tabakanın yüzey deformasyonları Chebyshev polinomları yardımıyla Jaffar tarafından belirlenmiştir [23].

Bakırtaş, rijit bir blok ile yarı sonsuz düzlem arsındaki karışık sınır değer problemini Fourier dönüşüm tekniğini kullanarak tekil integral denkleme indirgemiş ve blok altındaki nonhomojenliğin gerilme dağılımına etkisini araştırmıştır [24]. Üst yüzeyine rijit bir blok aracılığıyla yük aktarılan ve enine doğrultuda gerilme etkisinde bırakılmış ortotropik yarım düzlem problemi ise Bjarnehed tarafından çözülmüştür. Problem temas gerilmelerinin bilinmeyen olduğu tekil integral denkleme indirgenmiş ve rijit blok ile yarı sonsuz düzlem arasındaki gerilmenin dağılımına sürtünmenin etkisi araştırılmıştır [25]. [26]' da asimetrik bir blok ile yarı sonsuz düzlem arsındaki temas probleminin çözümü, rijit bloğun kendi ekseni etrafında döndürülmesi durumunda ikinci derece elastisite teorisine göre yapılmış, sonuçlar klasik elastisite de elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Simetri ekseninin herhangi bir noktasına tekil yük etkiyen enine doğrultuda izotropik yarı sonsuz ortama rijit bir blok ile yük aktarılması durumunda, yarı sonsuz ortam ile rijit blok arasındaki etkileşimde [27]' de belirlenmiştir. Geçit, yarı sonuz ortama, yarı sonsuz bir silindir aracılığıyla yük aktarılan temas problemini incelemiştir. İkinci nevi tekil integral denkleme indirgediği problemin sayısal çözümünden temas gerilmesi dağılımını elde etmiştir [28]. Yükün yarı sonsuz bir silindir yerine yarı sonsuz elastik tabaka aracılığıyla aktarıldığı çalışma ise Adams ve Bogy tarafından yapılmıştır [29]. Yarı sonsuz düzleme, düz halka biçimli rijit bir blok tarafından baskı uygulanan temas problemi de Shibuya, Kolzimu ve Nakahara tarafından çözülmüş, çalışmada yarım düzlemdeki gerilme ve yerdeğiştirme dağılımlarına ait sayısal sonuçlar verilmiştir [30]. Asimetrik rijit blok ile tabakalı elastik yarım düzlem arasındaki temas ise

[31]' de incelenmiştir. Problem temas gerilmelerinin bilinmeyen olduğu tekil integral denkleme indirgenmiş ve çözüm ortogonal polinomların açılımı ile elde edilmiştir. Değişik yükleme durumlarında, elastik kama için temas ve çatlak problemi ise Erdoğan ve Gupta tarafından çözülmüştür [32]. Pindera ve Lane, izotrop, ortotrop veya monokilinik tabakaların herhangi bir sırada düzenlendiği çok tabakalı yarım düzlemde sürtünmesiz temas problemi için bir çözüm metodu geliştirmişler ve bununla ilgili bazı sayısal örnekler sunmuşlardır [33,34]. Rijit iki temel tarafından tutulmuş, sürtünmesiz olarak kayabilen ,iki elastik tabaka tarafından sıkıştırılan rijit silindirin düzlem şekil değiştirmesi [35]' de incelenmiştir. Problemin çözümünde Chebyshev polinomlarından faydalanılmıştır. Elastik izotrop yarı sonsuz bir düzleme silindirik, dörtgen ve üçgen bloklar vasıtasıyla yük aktarılması ise [36]' da araştırılmıştır. Gao, Chiu ve Lee çok tabakalı elastik yarım düzleme silindirik bir blok ile baskı uygulanmasını incelemişlerdir [37]. Rijit bir blok ile elastik ortam arasında sürtünme bulunması halinde ele alınan bir başka temas problemi de Klarbring, Mikelic ve Shillor tarafından çözülmüştür [38]. Fan ve Keer' da anizotropik elastik ortamda iki boyutlu temas problemini araştırmışlardır [39].

1.4.2. Süreksiz Temas Problemleri ile İlgili Yapılmış Çalışmalar

Çekme gerilmesinin bulunmadığı durumlarda elastik tabaka ile elastik veya rijit bir düzlem arasında ayrılma istenilen bir durum değildir, dolayısıyla temas problemlerinde, temas eden yüzeylerde ilk ayrılmayı meydana getirecek yük ve ilk ayrılmanın meydana geleceği uzaklık büyük öneme sahiptir [40]. Süreksiz temas problemleri ile ilgili yapılan çalışmalardan bazıları aşağıda sunulmuştur.

Geçit, elastik bir tabakaya, yarı sonsuz bir elastik silindir tarafından baskı uygulanması durumunu incelemiştir. Yüklemeden sonra elastik tabaka ile yarı sonsuz ortam ara yüzeyi, yarı çapının bilinmeyen olduğu dairesel bir alana çekilmiştir. Geçit ikinci nevi tekil integral denkleme indirgediği problemi sayısal olarak çözmüş, temas gerilmeleri, temas alanı büyüklüğü ve silindir kenarındaki gerilme şiddeti faktörlerini hesaplamıştır [41]. Tekil bir yük etkisiyle elastik bir tabaka ile yarı sonsuz ortam arasında meydana gelecek ayrılma ve kayma bölgeleri Schumueser, Comninou ve Dundurs tarafından iki benzer problemde ele alınmıştır [42,43]. Geçit bir başka çalışmasında yarı sonsuz düzlem üzerine oturan, sonsuz uzunluktaki elastik tabakaya ait temas problemini incelemiştir. Araştırmacı önce sürekli temas durumunu çözmüş ve ayrılmaya sebebiyet verecek kritik yükü belirlemiştir. Daha sonra süreksiz temas durumunu tekil integral denklem olarak formüle etmiştir [44]. Yine Geçit, yarı sonsuz düzlem üzerine oturan elastik tabakada bu defa asimetrik yüklü temas problemini çözmüş, değişik malzeme durumlarında temas gerilmesi dağılımına ait sayısal sonuçlar elde etmiştir [45]. Civelek ve Erdoğan rijit bir düzlem ile tekil yük etkisindeki elastik tabakanın ayrılmasını incelemişler, problemi elastisite teorisi ve integral dönüşüm tekniklerini kullanarak çözmüşlerdir. Çalışmada temas gerilmelerine ve ayrılma bölgesindeki kabarmalara ait sayısal sonuçlar sunulmuştur [46]. Elastik tabakanın, rijit bir düzlem üzerine oturduğu ve asimetrik çizgisel yük etkisinde bırakıldığı sürtünmesiz temas problemi ise Geçit ve Erdoğan tarafından ele alınmış, ayrılma bölgesinin büyüklüğü ve temas gerilmesinin dağılımına ait sonuçlar verilmiştir [47]. Çakıroğlu ve Çakıroğlu, yarı sonsuz düzlem ve elastik tabaka arasındaki sürekli ve süreksiz temas durumlarını incelemişlerdir. Elastik tabakayı üst yüzeyinden sınırlı bir bölgede yayılı basınç yükünün etkisinde bırakmışlar, temas yüzeyinde ilk ayrılmayı meydana getirecek yük ve bu yükten büyük yükler için gerilme dağılımlarını belirlemişlerdir. Çözümde elastisite teorisi ve integral dönüşüm tekniklerini kullanmışlardır [48]. Dış yükün elastik tabakaya bir blok vasıtasıyla uygulandığı ve elastik tabakanın rijit bir düzlem üzerine oturduğu sürtünmesiz temas problemi de Civelek, Erdoğan ve Çakıroğlu tarafından incelenmiştir [49]. Civelek ve Erdoğan ise kütle kuvvetlerinin ve düzgün basınç gerilmelerinin etkidiği sürtünmesiz düzlem temas problemini ele almışlar,sürekli ve süreksiz temas durumlarını çözmüşlerdir [50]. Erdoğan ve Ratwani ise, iki çeyrek düzlem ile mesnetlenmiş bir tabakada süreksiz temas problemini çözmüşlerdir. Problemi temas gerilmelerinin bilinmeyen olduğu tekil integral denkleme indirgemişler ve integral denklemin sayısal çözümünden temas gerilmesi ve temas alanına ait sayısal sonuçlar ortaya koymuşlardır [51]. Erdoğan ve Ratwani tarafindan yapılan bu çalışma, Aksoğan, Akavcı ve Becker tarafindan integral dönüşüm tekniğine ek olarak sonlu elemanlar ve sınır elemanlar metotları kullanılarak yeniden çözülmüş, üç yöntemin sonuçları karşılaştırılmıştır [52]. Keskin kenarlı rijit düz bloklarla mesnetlenmiş bir tabakaya ait temas problemi de Geçit ve Yapıcı tarafindan incelenmiştir. Araştırmacılar çalışmada, temas gerilmesi, eksenel gerilme ve ayrılma alanını belirleyen uzaklıklar için sayısal sonuçlar vermişlerdir [53]. Yarı sonsuz düzlem üzerine oturan, elastik tabakaya rijit bir blok ile yük aktarılan asimetrik çift temas problemi de Civelek ve Erdoğan tarafindan çözülmüştür. Problem tekil integral denklem takımına indirgenmiş, problemine ait sayısal sonuçlar, bloğun üç değişik geometrisi için verilmiştir [1].

1.4.3. Hareketli Yük Etkisindeki Temas Problemleri

Hareketli yüklere elastik cisimlerin gösterdiği direnç, yapı dinamiği ve sismolojideki uygulanabilirliği nedeniyle ilgi çekicidir. Dinamik temas problemleri, karayolları titreşim analizleri, hızlı trenlerin gelişimiyle demiryolu raylarındaki ve bunların oturtulduğu zeminlerdeki dalga hareketlerinin incelenmesi açısından da büyük öneme sahiptir [54,55]. Temas problemlerinde hareketli yük olması durumunda yapılan çalışmalardan bazıları aşağıda verilmiştir.

Adams, yarı sonsuz düzlem üzerine oturan elastik tabakanın hareketli tekil yük etkisinde kalması durumunu incelemiştir. Problemin çözümünü elastisite teorisinden faydalanıp, integral denklemlere indirgeyerek yapmıştır. Çeşitli malzeme özellikleri ve hız büyükleri için temas bölgesinin yeri ve büyüklüğünün yanı sıra temas gerilmelerini de belirlemiştir [56]. Hareketli yüzey dalgası ve rijit bir şerit arasındaki yapışma temasını Zharii ele almış, elastodinamik sınır değer problemini tekil integral denkleme indirgemiş ve bu denklemin kapalı formda kesin çözümünü yapmıştır. Temas alanının boyutlarının değişimini, gerilme dağılımını belirlemiş, yapışma ve kayma durumlarını karşılaştırmıştır [57]. Zharii ve Ulitko ise bu defa, hareketli Rayleigh dalgası ile rijit bir şerit arasındaki sürtünmesiz temas problemi incelemişler, elastodinamikte bir sınır değer problemi olan çalışmayı trigonometrik çift fonksiyonlar içeren bir denklem takımına indirgemişlerdir. Yerdeğiştirmeler, gerilmeler ve yüzey hızları için analitik ifadeler türetip, kapalı çözümlerini elde etmişlerdir [58]. Westergaard temeli üzerine oturan ve sabit hızla hareket eden bir basınç yükünün etkisinde bırakılmış karayolunun titreşim analizi ise Houedec tarafından gerçekleştirilmiştir [54]. Saito ve Terasawa , Pasternak tipi temel tarafından mesnetlenmiş ve hareketli yük etkisindeki sonsuz kirişin titreşimini araştırmışlardır. Hareket denklemlerini elastisite teorisi üzerine kurmuşlar ve çözümü üstel Fourier dönüşümünü kullanarak yapmışlardır. Elde ettikleri sonuçları, Timoshenko ve Bernoulli-Euler kiriş teoremlerinden elde edilen sonuçlarla karşılaştırmışlardır [59]. Hareketli yüzey yüklerinin etkisinde bırakılmış, elastik yarım düzlemdeki dalga hareketi ise Freund tarafından incelenmiştir. Freund hızlanma ve yavaşlama şeklinde değişen malzemeye bağlı hız karakterlerini en genel halde ortaya koymuştur [55]. Dieterman ve Metrikine de, elastik bir tabaka boyunca düzgün bir şekilde hareket eden ve harmonik olarak değişen tekil yükün kritik hızlarını incelemişlerdir. Kritik hızları yük frekansının bir fonksiyonu olarak alırlarken, tabakanın derinliğini de yük hızının fonksiyonu olarak belirlemişlerdir [60]. Elastik bir bloğun, yarı sonsuz elastik bir cisim yüzeyinde sabit hızla hareket ettiği bir diğer çalışmada Adams ve Zeid tarafından yapılmıştır. Araştırmacılar problemi elastisite teorisine göre çözmüşler ve yüzeylerde doğan gerilme dağılışlarını belirlemişlerdir [61]. Dowson ve Fisher, hareketli yük etkisinde olan ve rijit bir silindire sıkı sıkıya bağlı tabakanın minimum ve ortalama kalınlığının belirlenmesinde kullanılan analitik formül türetmişlerdir [62].

1.4.4. Temas Problemleri ile İlgili Yapılmış Diğer Çalışmalar

Sonlu elemanlar metodu, sınır elemanlar metodu ve sonlu farklar metodu gibi bilinen metotların yanı sıra yeni mekanik modellendirmelerin yapıldığı ve çözüm metotlarının geliştirildiği temas problemleri üzerine yapılmış çalışmalardan bazıları aşağıda verilmiştir.

Ioakimidis ve Anastasselos, düzlem elastisite problemlerinin çözümünde kullanılan Muskhelishvili' nin klasik kompleks değişkenler metodunu tekrar gözden geçirmişler, Mathematica programlama dili yardımıyla kompleks değişkenler metodunda kullanılan fonksiyonel denklemler için yaklaşık bir çözüm yolu ortaya koymuşlardır [63]. Ezawa ve Okamota, hibrit metodunu kullanarak, sonlu elemanlar ve sınır elemanlar metotlarını birleştirmişler iki ve üç boyutlu temas gerilmesi analizlerinde faydalanılabilecek bir program geliştirmişlerdir [64]. Noor ve Tirmizi ise bir grup temas probleminin çözümünü variasyonel eşitsizlikler yardımıyla gerçekleştirmişlerdir [65]. Lekhnitski gerilme fonksiyonu metodu kullanılarak, asimetrik radyal yükleme etkisinde bırakılan uzun enine doğrultuda izotropik çok tabakalı silindirik kabuk için elastisite çözümü de [66]' da verilmiştir. [67]' de temas yüzeylerinde sürtünme dolayısıyla yapışma bulunmayan düzlem temas problemlerinin çözümü Chebyshev polinomlarının seriye açılması yoluyla gerçekleştirilmiştir. Farklı elastik malzemelerden yapılmış, farklı genişlikteki şeritler arasındaki temas problemi ise Adams ve Bogy tarafından incelenmiş, elde edilen sonuçlar daha önce yapılan çalışmalardan elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır [68]. Üç temas bölgesinin bulunduğu problemde elde edilen Hilbert integral denkleminin çözümü ise Chebyshev polinomları yardımıyla Gladwell tarafından yapılmıştır [69]. Choi ve Thangjitham, lineer düzlem elastisite sınırları içerisinde kalarak, yüzey gerilmesi etkisinde olan anizotropik ortamın gerilme analizini yapmışlar, rijitlik matrisi yaklaşımıyla Fourier dönüşüm tekniğine dayalı çözümler elde etmişlerdir [70]. Tabakalı anizotropik ortam probleminin sınır elemanlar metoduna göre formülasyonu ise [71]' de verilmiştir. [72]' de elastik bir temele oturan ve eliptik rijit bir blok tarafından baskı uygulanan ince şerit problemi için mekanik bir model oluşturulmuş, yarı analitik bir çözüm metodu geliştirilmiştir. Kikuchi ve Song' da çalışmalarında sıkıştırılamayan lineer elastik cisimlere, kuvvetlerin ve momentlerin bir grup rijit blok vasıtasıyla aktarılması halinde, rijit blok ile elastik cisim arasındaki temas problemini variasyonel eşitsizlikler teoremi ile incelemişlerdir [73]. Analizin teorik temellerini variasyonel ilkelerin oluşturduğu, sonlu elemanlar metoduyla yapılmış bir diğer çalışma [74]' de verilmiştir. Ihara, Shaw ve Bushhan, rijit düzlem üzerine oturan ve rijit bir küre tarafından baskı uygulanan ince elastik tabaka problemini sonlu elemanlar metodunu kullanarak, hem yalnız eksenel yük uygulanması hem de eksenel ve yatay yükün beraber uygulanması durumları için ayrı ayrı çözmüşlerdir [75,76]. Çok tabakalı elastik bir cismin rijit bir yüzeye bastırılması durumunda ortaya çıkacak elastik temas problemi de sonlu elemanlar metoduyla Komopoulos tarafından çözülmüş, çeşitli tabaka kalınlıkları için alt yüzeydeki gerilme ve deformasyon alanları belirlenmiştir [77]. Kompozit kirişlerin sonlu eleman analizini ortaya koyan bir başka çalışma ise [78]' de verilmiştir. İki parametreli elastik temel üzerine oturan kirişlerin sonlu eleman analizinde kullanılacak uygun eleman çeşitleri ise Ghani, Razaqpur ve Shah tarafından geliştirilmiştir [79]. Elastik temeller üzerine oturan kirişlerin ele alındığı ve özel bir çözüm metodunun ortaya konulduğu çalışma ise [80]' de sunulmuştur. Neumeister, yapmış olduğu çalışmada düzlem şekildeğiştirme ve düzlem gerilme altında değişik lineer bileşenlerden oluşan kompozit cisimde gerilme alanını belirleyebilmek için gerekli minimum elastik sabit sayısını araştırmıştır [81]. Yarı sonsuz şeritte elde edilen Cauchy tipi çekirdeğe sahip tekil integral denklemin çözümü için basit bir dönüşüm tekniği de Fariborz tarafından ortaya konulmuştur [82].

1.5. Çalışmanın Kapsamı

Çalışmamızda, rijit iki düz blok üzerine oturan, değişik elastik sabitlere ve yüksekliklere sahip homojen, izotrop iki elastik tabakaya ait temas probleminin çözümünde, elastisitenin temel denklemleri olan denge denklemleri, bünye denklemleri, yerdeğiştirme ve şekildeğiştirme bağıntıları ile bunlara bağlı olarak bulunan Navier denklemleri kullanılmış, integral dönüşüm teknikleri yardımıyla bu denklemlerden gerilmelere ve yerdeğiştirmelere ait integral ifadeler elde edilmiştir. Gerilme ve yerdeğiştirme ifadelerinde karşılaşılan tekil integral denklemlerin çözümünde ise Gauss-Chebyshev integrasyon formüllerinden faydalanılmıştır. Teorik çalışma sonucu elde edilen gerilme ve yerdeğiştirmelere ait integral denklemler ile Gauss-Chebyshev integrasyon formüllerinden bulunan ifadelerin çözümü ise FORTRAN dilinde yazılan bilgisayar programları yardımıyla yapılmıştır. Bileşik tabaka üst yüzeyinden sınırlı bölgede yayılı basınç yükünün etkisinde bırakılmıştır. Bileşik tabaka ile rijit düz bloklar arasında sürtünmenin bulunmadığı kabul edilmiştir.

Problem sürekli ve süreksiz temas olmak üzere iki kısımdan oluşmaktadır. Sürekli temasta hiçbir şekilde ayrılma olmazken, süreksiz temasta iki farklı durum incelenmiştir. Bunlardan birincisi bileşik tabaka ile rijit düz bloklar arasındaki ayrılma diğeri ise bileşik tabakayı oluşturan iki elastik tabakaya ait ara yüzeydeki ayrılmadır. Sürekli temas ve bileşik tabaka ile rijit düz bloklar arasında ayrılma bulunması durumlarında, iki elastik tabakaya ait ara yüzey boyunca sürtünme bulunması ve bulunmaması halleri de ayrı ayrı ele alınıp çözümleri yapılmıştır.

Birinci bölümde, temas problemlerinin tarihsel gelişiminden bahsedilmiş, temas konusu üzerine yapılan bazı çalışmalar özetlenmiştir. Problemde kullanılan çözüm metodu hakkında kısa bilgi verildikten sonra, elastisite teorisine ait denklemler ve integral dönüşüm tekniklerinden faydalanılarak düzlem haldeki genel gerilme ve yerdeğiştirme ifadeleri elde edilmiştir.

İkinci bölümde, problemin tanımı yapılmış ve önce sürekli temas durumu incelenmiştir. İki elastik tabakaya ait ara yüzeyde sürtünme bulunması ve bulunmaması durumunda bileşik tabakaya ait sınır şartlarına, birinci bölümde bulunan genel gerilme ve yerdeğiştirme ifadeleri uygulanmış ve sekiz bilinmeyenli, sekiz denklem takımı iki durum için ayrı ayrı elde edilmiştir. Bu denklem takımlarının çözümüyle bulunan katsayılardaki bilinmeyen temas gerilmeleri ise rijit bloğun düşey yerdeğiştirmesinden faydalanılarak elde edilen tekil integral denklemlerden belirlenmiştir. Tekil integral denklemlerin çözümü ise Gauss-Chebyshev integrasyon formülleriyle yapılmıştır. Daha sonra iki elastik tabakaya ait ara yüzeyde ilk ayrılmayı meydana getirecek yük ve ilk ayrılmanın meydana geleceği uzaklık araştırılmıştır. Sürekli temasın ardından süreksiz temas incelenmiş, öncelikle bileşik tabaka ile rijit düz bloklar arasındaki ayrılma ele alınmıştır. Ardından da iki elastik tabakaya ait ara yüzeyde ayrılma olması durumunda yazılan sınır şartlarına uygulanan gerilme ve yerdeğiştirme denklemlerinden sekiz bilinmeyenli, sekiz denklem takımı elde edilmiştir. Denklem takımının çözümünden bulunan katsayılar, rijit blok üzerindeki temas gerilmesi ve ara yüzeyde oluşan ayrılmaların eğimini ifade eden bilinmeyen fonksiyonlara bağlı olarak bulunmuştur. Rijit bloğun düşey yerdeğiştirmesi ve ayrılmanın meydana geldiği bölgedeki düşey gerilme ifadelerinden faydalanılarak iki integral denklem yazılmış ve integral denklem takımı Gauss-Chebyshev integrasyon formülleri yardımıyla çözülmüştür. Böylece temas gerilmeleri ve ara yüzeydeki ayrılmaların eğimleri dolayısıyla katsayılar elde edilmiştir. Eğimlerin integralleri alınarak ara yüzeydeki ayrılma ifadeleri bulunmuştur. Çözümde karşılaşılan tekil terimler ve bunların kapalı integralleri ile integral denklemlerde ortaya çıkan çekirdeklerde bu bölümde verilmiştir. Elastik tabakalar arasındaki ayrılma incelenirken elastik tabakalara ait ara yüzey boyunca sürtünmenin bulunmadığı kabul edilmiştir. Temas gerilmesi ve iki elastik tabakaya ait ara yüzeydeki ayrılmaya ek olarak, sürekli ve süreksiz temasta katsayıların belirlenmesiyle, bileşik tabakanın herhangi bir noktasındaki $\sigma_x(x,y)$, $\sigma_y(x,y)$ ve $\tau_{xy}(x,y)$ gerilme bileşenleri kolayca belirlenebilir hale gelmiştir.

Üçüncü bölümde, mesnet açıklığı, mesnet genişliği, tabaka yükseklikleri ve yayılı yük genişliği gibi çeşitli boyutsuz büyüklüklerin farklı değerleri için, rijit blok üstündeki temas gerilmesi dağılımı, iki elastik tabakaya ait ara yüzeydeki ayrılmalar ve düşey gerilme yayılışı ile y-simetri ekseni boyunca ortaya çıkan normal gerilmeler ve y simetri ekseni yakınında ortaya çıkan kayma gerilmesi dağılımlarına ait sonuçlar grafikler halinde sunulmuştur. Tabakalara ait ara yüzeyde sürtünme bulunması ve bulunmaması durumlarında, tabakalar arasında ayrılma meydana gelmemesi halinde gerilme dağılışları grafikler üzerinde gösterilmiş, ayrıca bu bölümde çeşitli boyutsuz büyüklükler için çizilen grafiklerin irdelenmesi yapılmıştır.

Dördüncü bölümde ise yapılan çalışmalardan çıkarılan sonuçlar sunulmuştur. Bu bölümü çalışmada faydalanılan kaynaklar ve özgeçmiş izlemektedir.

1.6. Genel Denklemlerin Elde Edilmesi

İki rijit düz blok üzerine oturan değişik elastik sabitlere ve yüksekliklere sahip homojen izotrop iki elastik tabakaya ait temas probleminin, elastisite teorisine göre çözümünde kullanılacak yerdeğiştirme ve gerilmelere ait genel ifadeler aşağıda elde edilecektir.

1.6.1. Kütle Kuvvetlerinin Bulunmaması Durumunda Genel Denklemlerin Elde Edilmesi

X, Y ve Z kütle kuvvetlerini, σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz} ve τ_{yz} gerilme bileşenlerini göstermek üzere, dengede olan bir cisim için, gerilmelerin noktadan noktaya değişim tarzını gösteren denge denklemleri aşağıdaki gibi verilmiştir [83].

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+X=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+Y=0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+Z=0 \tag{3}$$

Bu denklemlerde geçen gerilme bileşenleri ise, bünye denklemleri ve yerdeğiştirme-şekildeğiştirme bağıntıları kullanılarak aşağıdaki gibi tanımlanabilmektedir [83].

$$\sigma_x=\lambda e+2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{4}$$

$$\sigma_y=\lambda e+2\mu\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{5}$$

$$\sigma_z=\lambda e+2\mu\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) \tag{6}$$

$$\tau_{xy}=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{7}$$

$$\tau_{yz} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \qquad (8)$$

$$\tau_{zx} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \qquad (9)$$

Yukarıdaki eşitliklerde geçen u, v ve w sırasıyla x, y ve z doğrultularındaki yerdeğiştirmeleri göstermektedir. e hacim değiştirme oranı, λ ve μ ise Láme sabitlerini göstermekte olup aşağıdaki gibi tanımlanmaktadırlar [83].

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \qquad (10)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad (11)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad (12)$$

(11) ve (12) nolu denklemlerdeki E ve ν sırasıyla elastisite modülü ve Poisson oranını göstermektedir. Ayrıca $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ ve $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ olduğu bilinmektedir [83]. (4)-(9) nolu denklemler ile verilen bünye denklemlerinin gerekli türevleri alınıp denge denklemlerinde yerlerine yazılırlarsa Navier denklemleri olarak adlandırılan aşağıdaki eşitlikler elde edilir [83].

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial e}{\partial x} + \mu\nabla^2 u + X = 0 \qquad (13)$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial e}{\partial y} + \mu\nabla^2 v + Y = 0 \qquad (14)$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial e}{\partial z} + \mu\nabla^2 w + Z = 0 \qquad (15)$$

Bu denklemlerde ∇^2 Laplace operatörü olup aşağıdaki gibi tanımlanabilmektedir.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{16}$$

İki boyutlu problemlerde z ile ilgili terimler düşeceğinden Navier denklemleri

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial e}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + X = 0 \tag{17}$$

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial e}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + Y = 0 \tag{18}$$

olarak yazılabilir. Bu eşitliklerdeki hacim değiştirme oranı e ve Laplace operatörü ∇^2' nin iki boyutlu problemlerde

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \tag{19}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{20}$$

şeklini alacağı açıktır. Eğer kütle kuvvetleri ihmal edilecek olursa Navier denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial e}{\partial x} + \mu \nabla^2 u = 0 \tag{21}$$

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial e}{\partial y} + \mu \nabla^2 v = 0 \tag{22}$$

Problemin yük, malzeme ve geometri olarak y eksenine göre simetrik olması durumunda, u ve v yerdeğiştirmeleri aşağıdaki eşitlikleri sağlarlar.

$$u(x,y) = -u(-x,y) \tag{23}$$

$$v(x,y) = v(-x,y) \tag{24}$$

Navier denklemlerinin kısmi türevli diferansiyel denklem takımı oluşturması problemin çözümünü zorlaştırmaktadır. Navier denklemlerini adi diferansiyel denklem takımına dönüştürmek ve çözümü kolaylaştırmak için yerdeğiştirmeler $u(x,y)$ ve $v(x,y)$, bilinmeyen fonksiyonlar $\phi(\alpha,y)$ ve $\Psi(\alpha,y)$' nin Fourier sinüs ve Fourier kosinüs dönüşümleri olarak tanımlanırlarsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$u(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \phi(\alpha,y)\sin(\alpha x)d\alpha \tag{25}$$

$$v(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \Psi(\alpha,y)\cos(\alpha x)d\alpha \tag{26}$$

(25) ve (26) nolu denklemlerin ters dönüşümleri alınacak olursa

$$\phi(\alpha,y) = \int_0^{\infty} u(x,y)\sin(\alpha x)dx \tag{27}$$

$$\Psi(\alpha,y) = \int_0^{\infty} v(x,y)\cos(\alpha x)dx \tag{28}$$

eşitlikleri elde edilir. Bilinmeyen $\phi(\alpha,y)$ ve $\Psi(\alpha,y)$ fonksiyonlarının belirlenebilmesi için (21) nolu denklem $\sin(\alpha x)dx$, (22) nolu denklemde $\cos(\alpha x)dx$ ifadeleri ile çarpılıp $(0,\infty)$ aralığında integre edilirse

$$\int_0^{\infty}\left[\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)\right]\sin(\alpha x)dx=0 \tag{29}$$

$$\int_0^\infty \left[\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\right]\cos(\alpha x)dx=0 \tag{30}$$

ifadeleri elde edilir. (27) ve (28) nolu denklemlerde u ve v' nin gerekli türevleri alınırsa

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin(\alpha x)dx=-\alpha^2\phi \tag{31}$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin(\alpha x)dx=\frac{d^2\phi}{dy^2} \tag{32}$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\sin(\alpha x)dx=-\alpha\ \frac{d\Psi}{dy} \tag{33}$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\cos(\alpha x)dx=-\alpha^2\Psi \tag{34}$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\cos(\alpha x)dx=\frac{d^2\Psi}{dy^2} \tag{35}$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cos(\alpha x)dx=\alpha\ \frac{d\phi}{dy} \tag{36}$$

ifadeleri elde edilir. Kısmi integrasyon uygulanarak elde edilen bu denklemlerde aşağıdaki sınır şartlarından faydalanılmıştır.

$$u(0)=u(\infty)=v(\infty)=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\infty}=\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=\infty}=\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0}=0 \tag{37}$$

(31)-(36) nolu denklemler olarak elde edilen türev ifadeleri (29) ve (30) nolu denklemlerde yerlerine yazılırlarsa

$$-(\lambda+2\mu)\alpha^2\phi+\mu\phi^{II}-(\lambda+\mu)\alpha\Psi^{I}=0 \tag{38}$$

$$(\lambda+2\mu)\Psi^{II}-\alpha^2\mu\Psi+(\lambda+\mu)\alpha\phi^{I}=0 \tag{39}$$

adi diferansiyel denklem takımı elde edilmiş olur. Bu adi diferansiyel denklem takımında üsler y' ye göre türevleri göstermektedir. (38) nolu denklem y' ye göre iki defa (39) nolu denklemde y' ye göre bir defa türetilirse

$$-(\lambda+2\mu)\alpha^2\phi^{II}+\mu\phi^{IV}-(\lambda+\mu)\alpha\Psi^{III}=0 \tag{40}$$

$$(\lambda+2\mu)\Psi^{III}-\alpha^2\mu\Psi^{I}+(\lambda+\mu)\alpha\phi^{II}=0 \tag{41}$$

denklemleri elde edilir.(40) nolu denklemden Ψ^{III} çekilip (41) nolu denklemde yerine konulursa

$$(\lambda+2\mu)\frac{1}{\alpha(\lambda+\mu)}\left[\mu\phi^{IV}-(\lambda+2\mu)\alpha^2\phi^{II}\right]-\alpha^2\mu\Psi^{I}+(\lambda+\mu)\alpha\phi^{II}=0 \tag{42}$$

yazılabilir. Bu denklemden de Ψ^{I} çekilip (38) nolu denklemde yerine yazılır ve düzenlenirse ϕ ' ye göre dördüncü mertebeden sabit katsayılı, lineer homojen diferansiyel denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\phi^{IV}-2\alpha^2\phi^{II}+\alpha^4\phi=0 \tag{43}$$

Bu diferansiyel denklemin çözümü $\phi=e^{sy}$ şeklinde aranır ve bu çözümün gerekli türevleri alınıp (43) nolu denklemde yerine yazılırsa karakteristik denklem

$$s^4-2\alpha^2 s^2+\alpha^4=0 \tag{44}$$

olarak elde edilir. Bu denklemin kökleri ise $s_1=s_2=\alpha$ ve $s_3=s_4=-\alpha$ olarak belirlenebilir. Bu durumda (43) nolu adi diferansiyel denklemin çözümü aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\phi(\alpha,y) = A_1 e^{-\alpha y} + A_2 y e^{-\alpha y} + A_3 e^{\alpha y} + A_4 y e^{\alpha y} \tag{45}$$

$\Psi(\alpha,y)$ bilinmeyen fonksiyonunun çözümü için (38) nolu denklemin y' ye göre bir defa türevi alınıp, elde edilecek denklemden Ψ^{II} ifadesi çekilerek (39) nolu denklemde yerine yazılırsa, $\Psi(\alpha,y)$ bilinmeyen fonksiyonu, $\phi(\alpha,y)$ fonksiyonuna ve türevlerine bağlı olarak bulunur. Buradan gerekli türevler alınır ve yerlerine konulduktan sonra benzer işlemler yapılırsa

$$\Psi(\alpha,y) = \left[A_1 + \left(\frac{\kappa}{\alpha} + y\right)A_2\right]e^{-\alpha y} + \left[-A_3 + \left(\frac{\kappa}{\alpha} - y\right)A_4\right]e^{\alpha y} \tag{46}$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitlikte geçen κ bir malzeme sabiti olup düzlem şekildeğiştirme halinde $\kappa = (3-4\nu)$, düzlem gerilme halinde ise $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ olduğu bilinmektedir [40]. Bu denklemlerde ν Poisson oranını göstermektedir. $\phi(\alpha,y)$ ve $\Psi(\alpha,y)$ fonksiyonları sırasıyla (25) ve (26) nolu denklemlerde yerlerine yazılırlarsa $u(x,y)$, $v(x,y)$ yerdeğiştirme ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$u_h(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[(A_1 + A_2 y)e^{-\alpha y} + (A_3 + A_4 y)e^{\alpha y}\right]\sin(\alpha x)\,d\alpha \tag{47}$$

$$v_h(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[\left[A_1 + \left(\frac{\kappa}{\alpha} + y\right)A_2\right]e^{-\alpha y} + \left[-A_3 + \left(\frac{\kappa}{\alpha} - y\right)A_4\right]e^{\alpha y}\right]\cos(\alpha x)\,d\alpha \tag{48}$$

Bu eşitliklerdeki h indisi, bu denklemlerin kütle kuvvetsiz durumda homojen çözüme ait ifadeleri gösterdiğini belirtmektedir. Yukarıdaki eşitliklerde geçen A_1, A_2, A_3 ve A_4 bilinmeyen sabit katsayılar olup probleme ait sınır şartlarından elde edileceklerdir.

σ_x, σ_y ve τ_{xy} kartezyen gerilme bileşenlerinin bünye denklemleri yardımıyla u ve v yerdeğiştirmeleri cinsinden (4), (5) ve (7) nolu denklemlerin daha açık bir ifadesi olarak aşağıdaki gibi yazılabileceği bilinmektedir [83].

$$\sigma_x = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} \tag{49}$$

$$\sigma_y = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \tag{50}$$

$$\tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{51}$$

u ve v yerdeğiştirme fonksiyonlarının gerekli türevleri alınıp (49), (50) ve (51) nolu denklemler ile verilen gerilme-yerdeğiştirme bağıntılarında yerlerine yazılırlarsa, gerilme bileşenleri

$$\frac{1}{2\mu}\sigma_{x_h}(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[\left[\alpha(A_1 + A_2 y) - \left(\frac{3-\kappa}{2}\right)A_2\right]e^{-\alpha y} + \left[\alpha(A_3 + A_4 y) + \left(\frac{3-\kappa}{2}\right)A_4\right]e^{\alpha y}\right]\cos(\alpha x)\,d\alpha \tag{52}$$

$$\frac{1}{2\mu}\sigma_{y_h}(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[-\left[\alpha(A_1 + A_2 y) + \left(\frac{\kappa+1}{2}\right)A_2\right]e^{-\alpha y} + \left[-\alpha(A_3 + A_4 y) + \left(\frac{\kappa+1}{2}\right)A_4\right]e^{\alpha y}\right]\cos(\alpha x)\,d\alpha \tag{53}$$

$$\frac{1}{2\mu}\tau_{xy_h}(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[-\left[\alpha(A_1 + A_2 y) + \left(\frac{\kappa-1}{2}\right)A_2\right]e^{-\alpha y} + \left[\alpha(A_3 + A_4 y) - \left(\frac{\kappa-1}{2}\right)A_4\right]e^{\alpha y}\right]\sin(\alpha x)\,d\alpha \tag{54}$$

olarak belirlenebilir. h indisi kütle kuvvetsiz durumda homojen çözümden elde edilen gerilme bileşenlerine ait ifadeleri göstermektedir.

1.6.2. Kütle Kuvvetlerinin Bulunması Durumunda Özel Çözümlerin Elde Edilmesi

Kütle kuvvetlerinin hesaba katılması durumunda genel denklemlere ilave edilecek gerilme ve yerdeğiştirmelere ait özel çözümlerin elde edilmesi aşağıda verilmiştir. Kütle kuvvetlerinin $X = 0$ ve $Y = \rho g$ olması durumunda Navier denklemleri

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial e}{\partial x}+\mu\nabla^2 u=0 \tag{55}$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial e}{\partial y}+\mu\nabla^2 v-\rho g=0 \tag{56}$$

olarak yazılabilir. (56) nolu denklemde ρ tabakanın yoğunluğunu, g ise yerçekimi ivmesini göstermektedir. Navier denklemleri daha açık bir şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0 \tag{57}$$

$$(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)=\rho g \tag{58}$$

Yerdeğiştirmelerle şekildeğiştirmeler arasındaki bağıntılar

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x} \tag{59}$$

$$\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y} \tag{60}$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x} \tag{61}$$

olarak bilinmektedir [83]. Bu denklemlerde ε_x, ε_y sırasıyla x ve y eksenleri doğrultularındaki şekildeğiştirme bileşenlerini gösterirken, γ_{xy}' de kayma şekildeğiştirme bileşenini göstermektedir. Şekildeğiştirmelerle gerilmeler arasındaki ilişkiyi ifade eden Hooke kanunları da düzlem gerilme hali için aşağıdaki gibi yazılabilir [83].

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right) \tag{62}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right) \tag{63}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \tag{64}$$

Yerdeğiştirme fonksiyonları $u = u(x)$ ve $v = v(y)$ olarak seçilirse ve gerekli türevleri alınıp (57) ve (58) nolu eşitliklerle verilen Navier denklemlerinde yerlerine yazılırlarsa (57) nolu denklemden

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0 \tag{65}$$

$$\frac{du}{dx} = a \tag{66}$$

$$u = ax + b \tag{67}$$

ve (58) nolu denklemden de

$$(\lambda + 2\mu)\frac{d^2v}{dy^2} = \rho g \tag{68}$$

$$\frac{d^2v}{dy^2} = \frac{\rho g}{(\lambda + 2\mu)} \tag{69}$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{\rho g y}{(\lambda + 2\mu)} + c \tag{70}$$

$$v = \frac{\rho g y^2}{2(\lambda + 2\mu)} + cy + d \tag{71}$$

bulunur. u ve v yerdeğiştirme ifadelerinde geçen bilinmeyen a, b, c ve d katsayılarının belirlenebilmesi için kütle kuvveti ρg ve kalınlığı h olan tek tabaka için x ekseni tabakanın altından geçmek üzere aşağıdaki gibi yazılan sınır şartlarından yararlanılacaktır.

$$u(0) = 0 \tag{72}$$

$$v(h) = 0 \tag{73}$$

$$\sigma_y = \rho g(y - h) \tag{74}$$

$$\sigma_x = \int_0^h \sigma_x dy = 0 \tag{75}$$

Sınır şartlarının (65)-(71) nolu denklemlere uygulanması ile bilinmeyen katsayılar

$$a = \left(\frac{3-\kappa}{8\mu}\right)\left(\frac{\rho g h}{2}\right) \tag{76}$$

$$b = 0 \tag{77}$$

$$c = -\left(\frac{\rho g h}{2\mu}\right)\left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} + \frac{1+\kappa}{8}\right) \tag{78}$$

$$d = 0 \tag{79}$$

olarak bulunur. Bulunan bu eşitlikler (67) ve (71) nolu denklemlerde yerlerine yazılırlarsa kütle kuvveti olması durumunda yerdeğiştirmelere ait özel çözümler aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$u_o = \left(\frac{3-\kappa}{8\mu}\right)\left(\frac{\rho g h}{2}\right)x \tag{80}$$

$$v_o = \frac{\rho g y}{2\mu}\left[\frac{\kappa-1}{\kappa+1}(y-h) - \frac{1+\kappa}{8}h\right] \qquad 0 \le y \le h \tag{81}$$

Yerdeğiştirmelere ait bu denklemlerin gerekli türevleri alınıp (49), (50) ve (51) nolu ifadelerde yerlerine yazılırlarsa, kütle kuvveti olması durumunda gerilmelere ait özel çözümler

$$\sigma_{x_o} = \frac{3-\kappa}{1+\kappa}\rho g\left(y - \frac{h}{2}\right) \tag{82}$$

$$\sigma_{y_o} = \rho g(y-h) \tag{83}$$

$$\tau_{xy} = 0 \tag{84}$$

olarak belirlenir. Burada o indisi kütle kuvveti olması durumunda elde edilen yerdeğiştirme ve gerilme bileşenlerine ait özel çözüm ifadelerini göstermektedir.

Genel yerdeğiştirme ve gerilme ifadeleri homojen çözümden elde edilen ifadelerle özel çözüm sonucu elde edilen ifadelerin toplamı olacaktır. Yani

$$u(x,y) = u_h(x,y) + u_o(x,y) \tag{85}$$

$$v(x,y) = v_h(x,y) + v_o(x,y) \tag{86}$$

$$\sigma_x(x,y) = \sigma_{x_h}(x,y) + \sigma_{x_o}(x,y) \tag{87}$$

$$\sigma_y(x,y)=\sigma_{y_h}(x,y)+\sigma_{y_o}(x,y) \tag{88}$$

$$\tau_{xy}(x,y)=\tau_{xy_h}(x,y)+\tau_{xy_o}(x,y) \tag{89}$$

yazılabilir. İfadelerin açık şekli ise aşağıda verilmiştir.

$$u(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[(A_1+A_2y)e^{-\alpha y}+(A_3+A_4y)e^{\alpha y}\right]\sin(\alpha x)d\alpha+\frac{(3-\kappa)\rho gh}{16\mu}x \tag{90}$$

$$v(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\left[A_1+\left(\frac{\kappa}{\alpha}+y\right)A_2\right]e^{-\alpha y}+\left[-A_3+\left(\frac{\kappa}{\alpha}-y\right)A_4\right]e^{\alpha y}\right]\cos(\alpha x)d\alpha+$$
$$\frac{\rho g}{2\mu}y\left[\frac{\kappa-1}{\kappa+1}(y-h)-\frac{\kappa+1}{8}h\right] \tag{91}$$

$$\frac{1}{2\mu}\sigma_x(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\left[\alpha(A_1+A_2y)-\left(\frac{3-\kappa}{2}\right)A_2\right]e^{-\alpha y}+\right.$$
$$\left.\left[\alpha(A_3+A_4y)+\left(\frac{3-\kappa}{2}\right)A_4\right]e^{\alpha y}\right]\cos(\alpha x)d\alpha+\frac{1}{2\mu}\frac{3-\kappa}{1+\kappa}\rho g\left(y-\frac{h}{2}\right) \tag{92}$$

$$\frac{1}{2\mu}\sigma_y(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[-\left[\alpha(A_1+A_2y)+\left(\frac{\kappa+1}{2}\right)A_2\right]e^{-\alpha y}+\right.$$
$$\left.\left[-\alpha(A_3+A_4y)+\left(\frac{\kappa+1}{2}\right)A_4\right]e^{\alpha y}\right]\cos(\alpha x)d\alpha+\frac{1}{2\mu}\rho g(y-h) \tag{93}$$

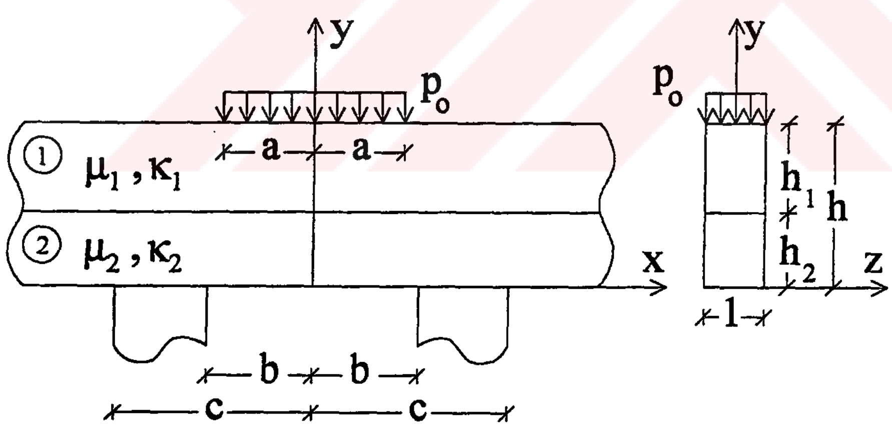
$$\frac{1}{2\mu}\tau_{xy}(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[-\left[\alpha(A_1+A_2y)+\left(\frac{\kappa-1}{2}\right)A_2\right]e^{-\alpha y}+\right.$$
$$\left.\left[\alpha(A_3+A_4y)-\left(\frac{\kappa-1}{2}\right)A_4\right]e^{\alpha y}\right]\sin(\alpha x)d\alpha \tag{94}$$

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Problemin Tanımı

İki rijit düz blok üzerine oturan h_1 ve h_2 gibi sabit yükseklikte, değişik elastik sabitlere sahip homojen izotrop iki elastik tabaka üst yüzeyinden $2a$ genişliğinde düzgün yayılı basınç yükünün etkisinde bırakılmış ve problem elastisite teorisine göre çözülmüştür.

Bileşik tabaka ile rijit düz bloklar arasında sürtünmenin bulunmadığı kabul edilirken, iki elastik tabakaya ait ara yüzeyde sürtünmenin bulunması ve bulunmaması durumları, sürekli temas ve bileşik tabaka ile rijit düz bloklar arasında ayrılma meydana gelmesi hallerinde ayrı ayrı ele alınıp çözümleri yapılmıştır. Bunun yanında süreksiz temas durumunda bileşik tabaka ile rijit düz bloklar arasında ve bileşik tabakayı oluşturan iki elastik tabakaya ait ara yüzeyde ayrılma olması halleri de iki farklı durum olarak incelenmiştir.



Şekil 1. Yayılı basınç yükünün etkisindeki, rijit düz bloklar üzerine oturan, bileşik tabaka

Bileşik tabaka $(-\infty,\infty)$ aralığında uzanmakta olup, problemde y-eksenine göre yüklemede ve geometride simetri olduğundan hesaplar x-ekseni doğrultusunda $[0,\infty)$ aralığında yapılmıştır. İki boyutlu problemimizde z-ekseni doğrultusundaki kalınlık birim olarak alınmıştır.

2.2. Kullanılacak Denklemler

Yüksekliği h_1 olan birinci tabakada, μ_1 ve κ_1 malzeme sabitlerini, yüksekliği h_2 olan ikinci tabakada da μ_2 ve κ_2 malzeme sabitlerini göstermekte olup problemin çözümünde kullanılacak denklemler aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$u_i(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[(A_i+B_i y)e^{-\alpha y}+(C_i+D_i y)e^{\alpha y}\right]\sin(\alpha x)d\alpha \tag{95}$$

$$v_i(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[\left[A_i+\left(\frac{\kappa_i}{\alpha}+y\right)B_i\right]e^{-\alpha y}+\left[-C_i+\left(\frac{\kappa_i}{\alpha}-y\right)D_i\right]e^{\alpha y}\right] \cos(\alpha x)d\alpha \tag{96}$$

$$\frac{1}{2\mu_i}\sigma_{x_i}(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[\left[\alpha(A_i+B_i y)-\left(\frac{3-\kappa_i}{2}\right)B_i\right]e^{-\alpha y}+\left[\alpha(C_i+D_i y)+\left(\frac{3-\kappa_i}{2}\right)D_i\right]e^{\alpha y}\right]\cos(\alpha x)d\alpha \tag{97}$$

$$\frac{1}{2\mu_i}\sigma_{y_i}(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[-\left[\alpha(A_i+B_i y)+\left(\frac{\kappa_i+1}{2}\right)B_i\right]e^{-\alpha y}+\left[-\alpha(C_i+D_i y)+\left(\frac{\kappa_i+1}{2}\right)D_i\right]e^{\alpha y}\right]\cos(\alpha x)d\alpha \tag{98}$$

$$\frac{1}{2\mu_i}\tau_{xy_i}(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[-\left[\alpha(A_i+B_i y)+\left(\frac{\kappa_i-1}{2}\right)B_i\right]e^{-\alpha y}+\left[\alpha(C_i+D_i y)-\left(\frac{\kappa_i-1}{2}\right)D_i\right]e^{\alpha y}\right]\sin(\alpha x)d\alpha \tag{99}$$

i=1,2 olup tabaka numarasını göstermektedir. Yukarıdaki denklemlerde geçen A_i, B_i, C_i ve D_i $(i=1,2)$ bilinmeyen katsayılar olup probleme ait sınır şartlarından belirlenecektir.

2.3. Sürekli Temas

Sürekli temas durumunda iki elastik tabaka arasında sürtünme bulunması ve bulunmaması durumlarının ayrı ayrı çözümleri yapılmıştır. Sürekli temas durumunda tabakalara ait kütle kuvvetleri ise hesaplarda dikkate alınmamıştır.

2.3.1. İki Elastik Tabakaya Ait Ara Yüzeyde Sürtünmenin Bulunması Durumu

2.3.1.1. Sınır Şartları

Bu durumda iki elastik tabakaya ait ara yüzeyde sürtünmenin bulunduğu kabul edilmiştir, dolayısıyla ara yüzeyde iki tabakaya ait yatay yerdeğiştirmeler ile düşey gerilmeler ve kayma gerilmeleri birbirlerine eşit olacaktır. Probleme ait sınır şartları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\tau_{xy_1}(x,h)=0 \qquad 0\leq x<\infty \tag{100}$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{y_1}(x,h)=-p_o \\ \sigma_{y_1}(x,h)=0\end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix}0\leq x<a \\ x>a\end{Bmatrix} \tag{101}$$

$$u_1(x,h_2)=u_2(x,h_2) \qquad 0\leq x<\infty \tag{102}$$

$$\frac{\partial\left[v_1(x,h_2)-v_2(x,h_2)\right]}{\partial x}=0 \qquad 0\leq x<\infty \tag{103}$$

$$\sigma_{y_1}(x,h_2)=\sigma_{y_2}(x,h_2) \qquad 0\leq x<\infty \tag{104}$$

$$\tau_{xy_1}(x,h_2)=\tau_{xy_2}(x,h_2) \qquad 0\leq x<\infty \tag{105}$$

$$\tau_{xy_2}(x,0)=0 \qquad 0\le x<\infty \qquad (106)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{y_2}(x,0)=-q(x) \\ \sigma_{y_2}(x,0)=0 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} b<x<c \\ 0\le x<b,\, c<x<\infty \end{Bmatrix} \qquad (107)$$

$$\frac{\partial v_2(x,0)}{\partial x}=0 \qquad b<x<c \qquad (108)$$

(107) nolu sınır şartında geçen $q(x)$ bilinmeyen, rijit blok üzerindeki, temas gerilmesidir. Probleme ait denge şartı

$$\int_b^c q(x)dx = ap_o \qquad (109)$$

dır.

2.3.1.2. Katsayıların Belirlenmesi

(100)-(107) nolu eşitliklerle verilen sınır şartlarının (95)-(99) ile verilen yerdeğiştirmeler ve gerilmelere ait denklemlerde kullanılması ile A_i, B_i, C_i ve D_i $(i=1,2)$ katsayılarının bilinmeyenler olduğu sekiz tane cebrik denklem elde edilir. Bu denklemler aşağıda verilmiştir.

$$-\alpha e^{-2\alpha h}A_1+\left[-\alpha h-\left(\frac{\kappa_1-1}{2}\right)\right]e^{-2\alpha h}B_1+\alpha C_1+\left[\alpha h-\left(\frac{\kappa_1-1}{2}\right)\right]D_1=0 \qquad (110)$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[-\left[\alpha(A_1+B_1h)+\left(\frac{1+\kappa_1}{2}\right)B_1\right]e^{-\alpha h}-\right.$$
$$\left.\left[\alpha(C_1+D_1h)-\left(\frac{1+\kappa_1}{2}\right)D_1\right]e^{\alpha h}\right]\cos(\alpha x)d\alpha=\frac{-p_0}{2\mu_1}$$

veya (111)

$$-\alpha e^{-2\alpha h}A_1+\left[-\alpha h-\left(\frac{1+\kappa_1}{2}\right)\right]e^{-2\alpha h}B_1-\alpha C_1+\left[-\alpha h+\left(\frac{1+\kappa_1}{2}\right)\right]D_1=$$

$$\frac{-e^{-\alpha h}}{2\mu_1}\int_0^{\infty}p_0\cos(\alpha x)dx=\frac{-e^{-\alpha h}}{2\mu_1}\int_0^{a}p_0\cos(\alpha t)dt$$

$$e^{-2\alpha h_2}A_1+h_2e^{-2\alpha h_2}B_1+C_1+h_2D_1-$$
$$e^{-2\alpha h_2}A_2-h_2e^{-2\alpha h_2}B_2-C_2-h_2D_2=0 \qquad (112)$$

$$e^{-2\alpha h_2}A_1+\left(\frac{\kappa_1}{\alpha}+h_2\right)e^{-2\alpha h_2}B_1-C_1+\left(\frac{\kappa_1}{\alpha}-h_2\right)D_1-$$
$$e^{-2\alpha h_2}A_2+\left(-\frac{\kappa_2}{\alpha}-h_2\right)e^{-2\alpha h_2}B_2+C_2+\left(-\frac{\kappa_2}{\alpha}+h_2\right)D_2=0 \qquad (113)$$

$$-\alpha e^{-2\alpha h_2}A_1+\left[-\alpha h_2-\left(\frac{1+\kappa_1}{2}\right)\right]e^{-2\alpha h_2}B_1-\alpha C_1+\left[-\alpha h_2+\left(\frac{1+\kappa_1}{2}\right)\right]D_1+$$
$$\alpha\frac{\mu_2}{\mu_1}e^{-2\alpha h_2}A_2+\left[\alpha h_2+\left(\frac{1+\kappa_2}{2}\right)\right]\frac{\mu_2}{\mu_1}e^{-2\alpha h_2}B_2+$$
$$\alpha\frac{\mu_2}{\mu_1}C_2+\left[\alpha h_2-\left(\frac{1+\kappa_2}{2}\right)\right]\frac{\mu_2}{\mu_1}D_2=0 \qquad (114)$$

$$-\alpha e^{-2\alpha h_2}A_1+\left[-\alpha h_2-\left(\frac{\kappa_1-1}{2}\right)\right]e^{-2\alpha h_2}B_1+\alpha C_1+\left[\alpha h_2-\left(\frac{\kappa_1-1}{2}\right)\right]D_1+$$
$$\alpha\frac{\mu_2}{\mu_1}e^{-2\alpha h_2}A_2+\left[\alpha h_2+\left(\frac{\kappa_2-1}{2}\right)\right]\frac{\mu_2}{\mu_1}e^{-2\alpha h_2}B_2-$$
$$\alpha\frac{\mu_2}{\mu_1}C_2+\left[-\alpha h_2+\left(\frac{\kappa_2-1}{2}\right)\right]\frac{\mu_2}{\mu_1}D_2=0 \qquad (115)$$

$$-\alpha A_2-\left(\frac{\kappa_2-1}{2}\right)B_2+\alpha C_2-\left(\frac{\kappa_2-1}{2}\right)D_2=0 \qquad (116)$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[-\left[\alpha A_2+\left(\frac{\kappa_2+1}{2}\right)B_2\right]-\left[\alpha C_2-\left(\frac{\kappa_2+1}{2}\right)D_2\right]\right]\cos(\alpha x)d\alpha=\frac{-q(x)}{2\mu_2}$$

veya (117)

$$-\alpha A_2-\left(\frac{\kappa_2+1}{2}\right)B_2-\alpha C_2+\left(\frac{\kappa_2+1}{2}\right)D_2=$$

$$\frac{-1}{2\mu_2}\int_0^\infty q(x)\cos(\alpha x)dx=\frac{-1}{2\mu_2}\int_b^c q(t)\cos(\alpha t)dt$$

Sekiz bilinmeyenli sekiz denklem takımının çözümünden elde edilen katsayılar rijit blok üstündeki bilinmeyen $q(x)$ temas gerilmesine bağlı olarak aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\begin{aligned}\alpha A_{1_P}=&\frac{-P}{2\Delta}[e^{(-3\alpha h+2\alpha h_2)}[(1-m)(1+\kappa_1 m)[(-1+2\alpha(h+2\alpha h_2{}^2(-1+2\alpha h)))+(1+4\alpha^2h_2{}^2)\kappa_1]+\\ &(\kappa_2+m)(\kappa_2-\kappa_1 m)((-1+2\alpha h)+\kappa_1)]+e^{(-\alpha h)}[(1+m(-2+m))4\alpha^2h_2{}^2[(-1+2\alpha(-h+\\ &h_2))\kappa_1+2(1+\alpha h_2(-1+2\alpha(-h+h_2)))]+4\alpha^2h_2{}^2(\kappa_2{}^2+\kappa_1 m(-2\kappa_2+\kappa_1 m))+2\alpha h_2\, m\\ &[(1+2\alpha h)(1-\kappa_2)+\kappa_1{}^2(-\kappa_2-1)]+(1+2\alpha h_2(-1-2\alpha h))(1+\kappa_2{}^2)+(-1+2\alpha(-h+h_2\\ &))(\kappa_1(1+\kappa_2{}^2)+2\kappa_1 m(-1+\kappa_2+m))+m[2\kappa_1(1-\kappa_2+\kappa_1 m)+4\alpha h_2((1+2\alpha h)(1-m)+\\ &\alpha h\kappa_1(1+\kappa_2))]]+(e^{(-\alpha h-2\alpha h_2)}+e^{(-\alpha h+2\alpha h_2)})[(1-m)(\kappa_2+m)(-1+2\alpha(-h+h_2))(2\alpha h_2+\\ &\kappa_1)+(1+\kappa_1 m)(\kappa_2-\kappa_1 m)]+((-1+2\alpha h)+\kappa_1)[e^{(-3\alpha h)}(1+\kappa_1 m)(\kappa_2+m)+(1-m)(\kappa_2-\\ &\kappa_1 m)e^{(-3\alpha h+4\alpha h_2)}]]\end{aligned}\tag{118}$$

$$\begin{aligned}\alpha A_{1_T}=&\frac{-T}{2\Delta}[(1+\kappa_2)[(1-m)[2\alpha h_2(-\kappa_1 m)[e^{(-2\alpha h_2)}+(1+2\alpha(-h+h_2))e^{(-2\alpha h+2\alpha h_2)}]+m[e^{(-2\alpha h_2)}2\\ &\alpha h_2(1-2\alpha h_2)+(1+2\alpha(h_2+2\alpha h(h-h_2+2\alpha h_2(h-h_2))))e^{(-2\alpha h+2\alpha h_2)}]]+m(\kappa_1-\kappa_2)\\ &(e^{(-2\alpha h_2)}+e^{(-2\alpha h+2\alpha h_2)}2\alpha h)]+[m[2\alpha h_2[(1+\kappa_2)m(1-\kappa_1)+(-1+\kappa_2{}^2)]+(1+\kappa_2)(\kappa_1\kappa_2\\ &-1)]]+e^{(-2\alpha h)}m[(-1+2\alpha h_2)\kappa_1(1+\kappa_1 m(\kappa_2+1))+(1+\kappa_2)[(1+4\alpha^2h^2)\kappa_2+(1+4\alpha^2h(\\ &(h-h_2))m+2\alpha[h_2(-1+2\alpha h)\kappa_1 m-h(1-\kappa_1\kappa_2)]]+(1-\kappa_2{}^2)4\alpha^2hh_2-\kappa_1\kappa_2(1+\kappa_2\\ &2\alpha h_2)]+e^{(-2\alpha h+2\alpha h_2)}((1+\kappa_2)\kappa_1 m(\kappa_1 m-\kappa_2))]\end{aligned}\tag{119}$$

$$\alpha A_1=\alpha A_{1_P}+\alpha A_{1_T}\tag{120}$$

$$B_{1_P}=\frac{-P}{\Delta}[e^{(-\alpha h)}[m[2\alpha h_2((2-m)+\kappa_1(1+\kappa_2))+(1+2\alpha h)(-1+\kappa_2+m)]+(1+2\alpha(h-h_2))$$

$$\left[(1+\kappa_2(\kappa_2+m)-m(1-m))+4\alpha^2h_2{}^2(1+m(-2+m))\right]\Big]+e^{(-3\alpha h)}(\kappa_2+m)(-1-\kappa_1 m)+ (1-m)\left[e^{(-3\alpha h+4\alpha h_2)}(\kappa_1 m-\kappa_2)+(e^{(-\alpha h-2\alpha h_2)}+e^{(-\alpha h+2\alpha h_2)})(1+2\alpha(h-h_2))(\kappa_2+m)\right]+\big[(-1 -4\alpha^2h_2{}^2)(1-m)(1+\kappa_1 m)+(\kappa_2+m)(\kappa_1 m-\kappa_2)\big]e^{(-3\alpha h+2\alpha h_2)}\Big] \tag{121}$$

$$B_{1_T}=\frac{-T}{\Delta}\Big[(1-m)m(1+\kappa_2)\big[e^{(-2\alpha h+2\alpha h_2)}2\alpha(-h+h_2(1+2\alpha(-h+h_2)))+e^{(-2\alpha h_2)}(-1+2\alpha h_2)\big]+ e^{(-2\alpha h)}m\big[(1-2\alpha h_2)(1+\kappa_1 m)(1+\kappa_2))+2\alpha(-h+h_2)(m+\kappa_2(\kappa_2+m))\big]+m\big[(1+\kappa_2)(e^{(-2\alpha h+2\alpha h_2)}(\kappa_2-\kappa_1 m)-(\kappa_2+m))+e^{(-2\alpha h)}(1-2\alpha h)\kappa_2\big]\Big] \tag{122}$$

$$B_1=B_{1_P}+B_{1_T} \tag{123}$$

$$\alpha C_{1_P}=\frac{P}{2\Delta}\Big[e^{(-3\alpha h)}\big[(1+m(-2+m))\big[8\alpha^2h_2{}^2(-1+\alpha h_2(-1+2\alpha(h-h_2)))+(1+2\alpha(-h+h_2+ 2\alpha h_2{}^2(1+2\alpha(-h+h_2))))\kappa_1\big]+(-1+2\alpha h_2(-1+2\alpha h))(1+\kappa_2(\kappa_2-\kappa_1 m))+(1+2\alpha(-h +h_2))\kappa_1(\kappa_2(\kappa_2+m)+m^2)+2\alpha h_2(1-2\alpha h)m(2(1-m)+(1-\kappa_2))+(\kappa_2-\kappa_1 m)\big[2(1 +2\alpha^2h_2{}^2)\kappa_1 m+4\alpha^2h_2{}^2(-\kappa_2)\big]+2\kappa_1 m\big[\alpha h_2(-\kappa_1)(1+\kappa_2)-(1+2\alpha^2hh_2)-\alpha h\kappa_2\big]\big]+ e^{(-\alpha h-2\alpha h_2)}\big[(1+\kappa_1 m)(1-m)\big[(1+2\alpha(h+2\alpha h_2{}^2(1+2\alpha h)))+(-1-4\alpha^2h_2{}^2)\kappa_1\big]+(\kappa_2- \kappa_1 m)(\kappa_2+m)((1+2\alpha h)-\kappa_1)\big]+(e^{(-3\alpha h-2\alpha h_2)}+e^{(-3\alpha h+2\alpha h_2)})\big[(1-m)(\kappa_2+m)\big[2\alpha h_2(-1+ 2\alpha(h-h_2))+(1+2\alpha(-h+h_2))\kappa_1\big]+(1+\kappa_1 m)(-\kappa_2+\kappa_1 m)\big]+e^{(-\alpha h)}\big[(\kappa_2+m)(1+\kappa_1 m)((1+2\alpha h)-\kappa_1)\big]+e^{(-\alpha h-4\alpha h_2)}\big[(1-m)(\kappa_2-\kappa_1 m)((1+2\alpha h)-\kappa_1)\big]\Big] \tag{124}$$

$$\alpha C_{1_T}=\frac{T}{2\Delta}\Big[m(1+\kappa_2)\big[(1-m)\big[\big[e^{(-2\alpha h-2\alpha h_2)}(-1+2\alpha(-2\alpha h^2+h_2+2\alpha h_2 h(1+2\alpha(h-h_2))))+ e^{(-4\alpha h+2\alpha h_2)}2\alpha h_2(1+2\alpha h_2)\big]+\big[\kappa_1 2\alpha h_2(e^{(-2\alpha h-2\alpha h_2)}(-1+2\alpha(-h+h_2))-e^{(-4\alpha h+2\alpha h_2)})\big]\big]+ (\kappa_1-\kappa_2)\big[e^{(-2\alpha h-2\alpha h_2)}2\alpha h-e^{(-4\alpha h+2\alpha h_2)}\big]\big]+(1+\kappa_2)m\big[\kappa_1(\kappa_2-\kappa_1 m)e^{(-2\alpha h-2\alpha h_2)}+(1-\kappa_1 \kappa_2)(-e^{(-2\alpha h)}2\alpha h+e^{(-4\alpha h)})\big]+e^{(-2\alpha h)}m\big[(-1+4\alpha^2h(-h+h_2))(m+\kappa_2(\kappa_2+m))-\kappa_2(1+ 4\alpha^2h^2)+2\alpha h_2\big[(-1-2\alpha h)\kappa_1 m(1+\kappa_2)-2\alpha h\big]+\kappa_1\big[(1+\kappa_1 m)(1+\kappa_2)+2\alpha h_2\big[(1+\kappa_1 m)+\kappa_2(-\kappa_2+\kappa_1 m)\big]\big]\big]+e^{(-4\alpha h)}\big[2\alpha h_2 m\big[(1-\kappa_1)m(1+\kappa_2)+(-1+\kappa_2{}^2)\big]\big]\Big] \tag{125}$$

$$\alpha C_1=\alpha C_{1_P}+\alpha C_{1_T} \tag{126}$$

$$D_{1_P}=\frac{-P}{\Delta}\Big[(-1+2\alpha(h-h_2))\big[e^{(-3\alpha h)}(1+\kappa_2(\kappa_2+m)+m(m-1))+(e^{(-3\alpha h-2\alpha h_2)}+e^{(-3\alpha h+2\alpha h_2)})(1-m)(\kappa_2+m)\big]+e^{(-\alpha h-2\alpha h_2)}\big[(1+4\alpha^2 h_2{}^2)(1-m)(1+\kappa_1 m)+(\kappa_2+m)(\kappa_2-\kappa_1 m)\big]+e^{(-3\alpha h)}\big[4\alpha^2 h_2{}^2(-1+2\alpha(h-h_2))(1+m(-2+m))+m\big[(1-2\alpha h)((1-m)-\kappa_2)+2\alpha h_2((2-m)+\kappa_1(1+\kappa_2))\big]\big]+e^{(-\alpha h-4\alpha h_2)}(1-m)(\kappa_2-\kappa_1 m)+e^{(-\alpha h)}(1+\kappa_1 m)(\kappa_2+m)\Big] \tag{127}$$

$$D_{1_T}=\frac{-T}{\Delta}\Big[(1-m)m(1+\kappa_2)\big[e^{(-4\alpha h+2\alpha h_2)}(1+2\alpha h_2)+e^{(-2\alpha h-2\alpha h_2)}2\alpha(-h+h_2(1+2\alpha(h-h_2)))\big]+e^{(-2\alpha h)}\big[m\big[(-1-2\alpha h_2)(1+\kappa_1 m(1+\kappa_2))+(-1-2\alpha h)\kappa_2+2\alpha(-h+h_2)(\kappa_2(\kappa_2+m)+m)\big]\big]+m(1+\kappa_2)\big[e^{(-4\alpha h)}(\kappa_2+m)+e^{(-2\alpha h-2\alpha h_2)}(-\kappa_2+\kappa_1 m)\big]\Big] \tag{128}$$

$$D_1=D_{1_P}+D_{1_T} \tag{129}$$

$$\alpha A_{2_P}=\frac{-P}{2\Delta}\Big[e^{(-3\alpha h)}\big[2\alpha h_2(1+\kappa_1(1+\kappa_1 m))+2\alpha(h-h_2)(\kappa_2(1+\kappa_1)+m)+m((1+\kappa_1)(\kappa_1\kappa_2-1)+2\alpha h\kappa_1)\big]+e^{(-3\alpha h+2\alpha h_2)}\big[(1+\kappa_1)\big[(1-m)\big[(-1+2\alpha(h-h_2))+2\alpha h_2(1+2\alpha(-h+h_2))\kappa_2\big]+\kappa_2(\kappa_2-\kappa_1 m)\big]\big]+e^{(-\alpha h-2\alpha h_2)}\big[(1+\kappa_1)\big[2\alpha h_2(-1+2\alpha(-h+h_2))(1-m)+2\alpha(-h+h_2)\kappa_2+m((1+2\alpha(h-h_2))\kappa_2-\kappa_1)\big]\big]+e^{(-\alpha h)}\big[\kappa_2\big[(-1-2\alpha(h-h_2))(\kappa_2(1+\kappa_1)+m)-2\alpha h_2(1+\kappa_1(1+\kappa_1 m))+(-1-2\alpha h)\kappa_1 m\big]+(1+\kappa_1)(1+\kappa_1 m)\big]\Big] \tag{130}$$

$$\alpha A_{2_T}=\frac{-T}{2\Delta}\Big[e^{(-2\alpha h)}\big[(1+m(-2+m))\,\big[8\alpha^2 h_2(h_2+\alpha(-h^2-h_2{}^2+2h_2(h+\alpha(h(h-2h_2)+h_2{}^2))))+(-1+2\alpha(h_2+2\alpha(-h^2+h_2(-h_2+2h+2\alpha(h(h-2h_2)+h_2{}^2)))))\kappa_2\big]+(-1+2\alpha h_2)(\kappa_2+\kappa_1 m(2\kappa_2+\kappa_1 m(-1+\kappa_2)))+(1+4\alpha^2h^2)(\kappa_2{}^2+m(2\kappa_2+m))+2\alpha\big[m\big[(h-h_2)(-1+\kappa_2{}^2(1+\kappa_1))+(-h-h_2)\kappa_1\big]+2\alpha h_2\big[2h(-\kappa_2{}^2+m(1+\kappa_1-m+\kappa_2(\kappa_1-1)))+h_2(\kappa_2{}^2+\kappa_1 m(-2\kappa_2+\kappa_1 m))\big]+h_2(-2+m(2-m))\big]+\kappa_2(\kappa_2-2\kappa_1 m)\big]+e^{(-2\alpha h+2\alpha h_2)}\big[(1+4\alpha^2(h^2+h_2(-2h+h_2)))\big[(1-\kappa_2)(\kappa_2-m^2)+m(1+\kappa_2{}^2)-2\kappa_2 m\big]+\big[(1-\kappa_2)(\kappa_2-m^2\kappa_1{}^2)+\kappa_1 m(-1+2\kappa_2-\kappa_2{}^2)\big]\big]+(e^{(-2\alpha h_2)}+e^{(-4\alpha h+2\alpha h_2)})\big[(1-2\alpha h_2)(1-m)\big[\kappa_2(1+\kappa_1 m)-2\alpha h_2(-1-\kappa_1 m)\big]+(\kappa_2+m)(\kappa_1 m-\kappa_2)\big]+(1-\kappa_2)\big[e^{(-4\alpha h+4\alpha h_2)}(1-m)(\kappa_1 m-\kappa_2)+((\kappa_2+m)(-1-\kappa_1 m))\big]\Big] \tag{131}$$

$$\alpha A_2 = \alpha A_{2_P} + \alpha A_{2_T} \tag{132}$$

$$B_{2_P} = \frac{P}{\Delta}\Big[(-1+2\alpha(-h+h_2))\big[e^{(-\alpha h-2\alpha h_2)}(1-m)(1+\kappa_1)+e^{(-\alpha h)}(\kappa_2(1+\kappa_1)+m)\big]+(1+\kappa_1)[[2\alpha h_2(1+2\alpha(-h+h_2))(1-m)+(\kappa_2-\kappa_1 m)]e^{(-3\alpha h+2\alpha h_2)}+e^{(-3\alpha h)}(1+\kappa_1 m)\big]+e^{(-\alpha h)}\big[(-2\alpha h_2)(1+\kappa_1(1+\kappa_1 m))+(-1-2\alpha h)\kappa_1 m\big]\Big] \tag{133}$$

$$B_{2_T} = \frac{T}{\Delta}\Big[(1-m)\big[(1-2\alpha h_2)(1+\kappa_1 m)(e^{(-2\alpha h_2)}+e^{(-4\alpha h+2\alpha h_2)})+e^{(-2\alpha h+2\alpha h_2)}(-1+4\alpha^2(h(-h+2h_2)-h_2^{\,2}))(\kappa_2+m)+e^{(-4\alpha h+4\alpha h_2)}(\kappa_2-\kappa_1 m)\big]+(1+\kappa_1 m)\big[e^{(-2\alpha h+2\alpha h_2)}(-\kappa_2+\kappa_1 m)+(\kappa_2+m)\big]+e^{(-2\alpha h)}\big[(1+m(-2+m))[4\alpha^2(-h_2^{\,2}+2h_2(h+\alpha(h^2+h_2(-2h+h_2))))+(-1+2\alpha(-2\alpha h^2+h_2))]+(-1+2\alpha h_2)(1+\kappa_1 m(1+\kappa_1 m))+2\alpha(h-h_2)(m(1+\kappa_2(1+\kappa_1)))+(-1+2\alpha h)\kappa_1 m\big]\Big] \tag{134}$$

$$B_2 = B_{2_P} + B_{2_T} \tag{135}$$

$$\alpha C_{2_P} = \frac{P}{2\Delta}\Big[(1+\kappa_1)\big[(1-m)\big[e^{(-\alpha h-2\alpha h_2)}(1+2\alpha(h-h_2))(1+\kappa_2(2\alpha h_2))+e^{(-3\alpha h+2\alpha h_2)}2\alpha\big[h_2(-1+2\alpha(h-h_2))+\kappa_2(-h+h_2)\big]\big]+e^{(-\alpha h-2\alpha h_2)}\kappa_2(\kappa_1 m-\kappa_2)+e^{(-3\alpha h+2\alpha h_2)}m(\kappa_1-\kappa_2)\big]+e^{(-\alpha h)}\big[2\alpha h_2(1+\kappa_1+m(-1+\kappa_1^{\,2}))+(1+\kappa_1)[2\alpha(h-h_2)\kappa_2+m((1+2\alpha h)-\kappa_1\kappa_2)]\big]+e^{(-3\alpha h)}\big[(1+2\alpha(-h+h_2))\kappa_2(\kappa_2(1+\kappa_1)+m)-2\alpha h_2\kappa_2(1+\kappa_1(1+\kappa_1 m))-(1+\kappa_1)(1+\kappa_1 m)+(1-2\alpha h)\kappa_1\kappa_2 m\big]\Big] \tag{136}$$

$$\alpha C_{2_T} = \frac{T}{2\Delta}\Big[e^{(-2\alpha h)}\big[(1+m(-2+m))\big[8\alpha^2 h_2(-h_2+\alpha(-h^2-h_2^{\,2}+2h_2(h+\alpha(-h^2+h_2(2h-h_2)))))+\kappa_2(1+2\alpha(h_2+2\alpha(h^2+h_2(h_2+2(-h+\alpha(h^2+h_2(-2h+h_2)))))))\big]+(1+2\alpha h_2)(\kappa_2+m^2(-1+\kappa_1^{\,2}\kappa_2))+\kappa_1 m\big[(-1+2\alpha h_2(-1-2\alpha h_2))(\kappa_1 m-2\kappa_2)+2\alpha(-h-h_2)\big]+2\big[\kappa_2[(-1+4\alpha^2 hh_2)(\kappa_2+m(1-\kappa_1))-2\alpha^2\kappa_2(h^2+h_2^{\,2})]+2\alpha h_2[(m-1)+2\alpha hm(-1-\kappa_1+m)]+m[\alpha(h-h_2)(\kappa_2^{\,2}(1+\kappa_1)-1)+2\alpha^2 h^2(-2\kappa_2-m)]\big]\big]+e^{(-2\alpha h-2\alpha h_2)}\big[(1+4\alpha^2(h^2+h_2(-2h+h_2)))[(\kappa_2-1)(\kappa_2-m^2)+m(-1+\kappa_2(2-\kappa_2))]+[(1+\kappa_1 m)(\kappa_2^{\,2}+\kappa_1 m)-\kappa_2(\kappa_1 m(\kappa_1 m+2)+1)]\big]+(1-m)(1+\kappa_1 m)(1+2\alpha h_2)\big[2\alpha h_2(e^{(-2\alpha h_2)}+e^{(-4\alpha h+2\alpha h_2)}$$

$$) - \kappa_2 (e^{(-2\alpha h_2)} + e^{(-4\alpha h + 2\alpha h_2)})\big] + (\kappa_2 - \kappa_1 m)(\kappa_2 + m)(e^{(-2\alpha h_2)} + e^{(-4\alpha h + 2\alpha h_2)}) + (1 - \kappa_2)\big[(1 - m)(\kappa_2 - \kappa_1 m)e^{(-4\alpha h_2)} + (\kappa_2 + m)(1 + \kappa_1 m)e^{(-4\alpha h)}\big]\big] \quad (137)$$

$$\alpha C_2 = \alpha C_{2_P} + \alpha C_{2_T} \quad (138)$$

$$D_{2_P} = \frac{-P}{\Delta}\big[(1+\kappa_1)\big[(1-m)\big[e^{(-3\alpha h + 2\alpha h_2)}(-1 + 2\alpha(h - h_2)) + e^{(-\alpha h - 2\alpha h_2)} 2\alpha h_2 (-1 + 2\alpha(-h + h_2))\big] + e^{(-\alpha h - 2\alpha h_2)}(\kappa_2 - \kappa_1 m) + e^{(-\alpha h)}(1 + \kappa_1 m)\big] + e^{(-3\alpha h)}\big[(-1 + 2\alpha h)\kappa_1 m + (-1 + 2\alpha(h - h_2))(m + \kappa_2(1 + \kappa_1)) + 2\alpha h_2 (1 + \kappa_1(1 + \kappa_1 m))\big]\big] \quad (139)$$

$$D_{2_T} = \frac{-T}{\Delta}\big[(1-m)\big[(1 + 2\alpha h_2)(e^{(-4\alpha h + 2\alpha h_2)} + e^{(-2\alpha h_2)})(1 + \kappa_1 m) + e^{(-4\alpha h_2)}(\kappa_2 - \kappa_1 m)\big] + e^{(-4\alpha h)}(\kappa_2 + m)(1 + \kappa_1 m) + e^{(-2\alpha h)}\big[(-1 - 2\alpha h_2)(2(1-m) + \kappa_1 m(1 + \kappa_1 m) + m^2) + 2\alpha(-h + h_2)(m(1 + \kappa_2(1 + \kappa_1))) - (1 + 2\alpha h)\kappa_1 m\big] + e^{(-2\alpha h - 2\alpha h_2)}\big[(-1 + 4\alpha^2(-h^2 + h_2(2h - h_2)))(\kappa_2 + m)(1 - m) + (1 + \kappa_1 m)(-\kappa_2 + \kappa_1 m)\big] + e^{(-2\alpha h)}\big[(4\alpha^2(-h^2 + h_2(-h_2 + 2(h + \alpha(-h^2 + h_2(2h - h_2))))))(1 + m(-2 + m))\big]\big] \quad (140)$$

$$D_2 = D_{2_P} + D_{2_T} \quad (141)$$

Bu ifadelerde geçen m, Δ, P ve T büyüklükleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$m = \frac{\mu_2}{\mu_1} \quad (142)$$

$$\Delta = (1 + m(-2 + m))\big[e^{(-2\alpha h)} 4\alpha^2 h_2^2 (3 + 4\alpha^2(h^2 + h_2(-2h + h_2)))\big] + (e^{(-4\alpha h + 2\alpha h_2)} + e^{(-2\alpha h_2)})\big[(-1 - 4\alpha^2 h_2^2)(1 - m)(1 + \kappa_1 m) + (\kappa_2 + m)(\kappa_1 m - \kappa_2)\big] + e^{(-2\alpha h)}\big[2(1 + 2\alpha^2 h(h - 2h_2))(1 + \kappa_2(\kappa_2 + m) - m(1 - m)) + \kappa_2^2(4\alpha^2 h_2^2) + m\big[4\alpha^2 h\big[(-h + 4h_2) + m(h - 2h_2)\big] + 2\kappa_1\big[(1 + 4\alpha^2 h h_2) + \kappa_1 m(1 + 2\alpha^2 h_2^2)\big] + 2\kappa_2\big[2\alpha^2 h^2 + \kappa_1(-1 + 4\alpha^2 h_2(h - h_2))\big]\big]\big] + (e^{(-2\alpha h - 2\alpha h_2)} + e^{(-2\alpha h + 2\alpha h_2)})\big[(1 + 4\alpha^2(h^2 + h_2(-2h + h_2)))(\kappa_2 + m)(1 - m) + (1 + \kappa_1 m)(\kappa_2 - \kappa_1 m)\big] + (1 + e^{(-4\alpha h)})((1 + \kappa_1 m)(-\kappa_2 - m)) + (e^{(-4\alpha h_2)} + e^{(-4\alpha h + 4\alpha h_2)})((1 - m)(-\kappa_2 + \kappa_1 m)) \quad (143)$$

$$P=\frac{-1}{2\mu_1}\int_0^a p_0\cos(\alpha t)dt=\frac{-p_0}{2\mu_1\alpha}\sin(\alpha a) \tag{144}$$

$$T=\frac{-1}{2\mu_2}\int_b^c q(t)\cos(\alpha t)dt \tag{145}$$

2.3.1.3. İntegral Denklemin Elde Edilmesi

Yerdeğiştirme ve gerilme ifadelerinde geçen ve sınır şartlarından faydalanılarak belirlenen A_i, B_i, C_i ve D_i $(i=1,2)$ katsayıları, rijit blok üzerinde ortaya çıkan bilinmeyen temas gerilmesi $q(x)$' e bağlı olarak bulunmuştur. $q(x)$ temas gerilmesinin yayılışı ise kullanılmayan (108) nolu sınır şartından elde edilecektir. $\partial v_2(x,y)/\partial x$ oluşturulursa

$$\frac{\partial v_2(x,y)}{\partial x}=\frac{-2}{\pi}\int_0^\infty \Big[\left[\alpha A_2+(\kappa_2+\alpha y)B_2\right]e^{(-\alpha y)}+ \left[-\alpha C_2+(\kappa_2-\alpha y)D_2\right]e^{(\alpha y)}\Big]\sin(\alpha x)d\alpha \tag{146}$$

elde edilir. A_2, B_2, C_2 ve D_2 katsayıları bu denklemde yerlerine yazılırlarsa

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_2(x,y)}{\partial x}=\frac{1}{\mu_2\pi}\int_b^c q(t)dt\int_0^\infty \Big[e^{(-\alpha y)}\left[\alpha A_{2_T}+(\kappa_2+\alpha y)B_{2_T}\right]+e^{(\alpha y)}\big[-\alpha C_{2_T}+\\ (\kappa_2-\alpha y)D_{2_T}\big]\Big]\cos(\alpha t)\sin(\alpha x)d\alpha+\frac{p_0}{\pi\mu_1}\int_0^\infty \Big[e^{(-\alpha y)}\left[\alpha A_{2_P}+(\kappa_2+\alpha y)B_{2_P}\right]+\\ e^{(\alpha y)}\left[-\alpha C_{2_P}+(\kappa_2-\alpha y)D_{2_P}\right]\Big]\sin(\alpha a)\sin(\alpha x)\frac{d\alpha}{\alpha}\end{aligned} \tag{147}$$

elde edilir. (147) nolu denklemde $y\to 0$ limitine geçilirken pay paydaya bölündüğünde, ıraksak, değme gerilmesi dağılımının düzgün bir şekilde elde edilmesini önleyen terimler ortaya çıkmaktadır. Bu terimler aşağıda gösterilmiştir.

$$-\int_0^\infty \left[\left(\frac{1+\kappa_2}{2}\right)+\alpha y\right]e^{(-\alpha y)}\cos(\alpha t)\sin(\alpha x)d\alpha \tag{148}$$

(147) nolu denklemden yakınsamayı bozan bu terimler çıkartılıp, kapalı integalleri ilave edildikten sonra limit işlemine geçmek gerekir.

$$\frac{\partial v_2(x,0)}{\partial x}=\frac{-1}{2\pi\mu_2}\lim_{y\to 0}\int_b^c q(t)dt\int_0^\infty\left[\left(\frac{1+\kappa_2}{2}\right)+\alpha y\right]e^{(-\alpha y)}[\sin\alpha(t+x)-\sin\alpha(t-x)]d\alpha+$$
$$\frac{1}{2\pi\mu_2}\int_b^c q(t)dt\int_0^\infty\left[\left[\alpha A_{2_T}+\kappa_{2_T}B_{2_T}\right]+\left[-\alpha C_{2_T}+\kappa_2 D_{2_T}\right]+\frac{(1+\kappa_2)}{2}\right][\sin\alpha(t+x)-$$
$$\sin\alpha(t-x)]d\alpha+\frac{p_0}{2\pi\mu_1}\int_0^\infty\left[\left[\alpha A_{2_P}+\kappa_2 B_{2_P}\right]+\left[-\alpha C_{2_P}+\kappa_2 D_{2_P}\right]\right][\cos\alpha(a-x)-$$
$$\cos\alpha(a+x)]\frac{d\alpha}{\alpha}=0 \qquad (149)$$

(149) nolu denklemde geçen

$$-\int_0^\infty\left[\left(\frac{1+\kappa_2}{2}\right)+\alpha y\right]e^{(-\alpha y)}[\sin\alpha(t+x)-\sin\alpha(t-x)]d\alpha \qquad (150)$$

integralinin integral dönüşüm tabloları yardımıyla kapalı integrali alınırsa

$$-\int_0^\infty\left[\left(\frac{1+\kappa_2}{2}\right)+\alpha y\right]e^{(-\alpha y)}[\sin\alpha(t+x)-\sin\alpha(t-x)]d\alpha=-\frac{(1+\kappa_2)}{2}$$
$$\left[\frac{(t+x)}{y^2+(t+x)^2}-\frac{(t-x)}{y^2+(t-x)^2}\right]-y\frac{2y(t+x)}{\left(y^2+(t+x)^2\right)^2}+y\frac{2y(t-x)}{\left(y^2+(t-x)^2\right)^2} \qquad (151)$$

eşitliği elde edilir [84]. Bu denklemde y yerine sıfır yazılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa (149) nolu integral denklemin son hali aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\int_b^c\left[\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x}+\frac{2}{(1+\kappa_2)}k_1(x,t)\right]q(t)d(t)=$$
$$-\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{2p_0}{(1+\kappa_2)}k_2(x) \qquad b<x<c \qquad (152)$$

(152) nolu denklemde geçen $k_1(x,t)$ ve $k_2(x)$ çekirdekleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$
\begin{aligned}
k_1(x,t) = \int_0^\infty & [[e^{(-2\alpha h+2\alpha h_2)}[\kappa_2[(1-m)[(-1+4\alpha^2(-{h_2}^2+h(-h+2h_2)))(\kappa_2+m)]+(1+\kappa_1 m)(-\kappa_2 \\
& +\kappa_1 m)]-\frac{1}{2}[\kappa_1(-1+2\kappa_2-{\kappa_2}^2)m+(1-\kappa_2)(\kappa_2-{\kappa_1}^2m^2)+(1+4\alpha^2(h^2+h_2(-2h \\
& +h_2)))(-2\kappa_2 m+(1+{\kappa_2}^2)m+(1-\kappa_2)(\kappa_2-m^2))]]+(-\kappa_2-\frac{(1-\kappa_2)}{2})[(1-m)(\kappa_2 \\
& -\kappa_1 m)(-e^{(-4\alpha h+4\alpha h_2)}+e^{(-4\alpha h_2)})+(1+\kappa_1 m)[e^{(-4\alpha h)}(\kappa_2+m)+(e^{(-2\alpha h_2)}+e^{(-4\alpha h+2\alpha h_2)}) \\
& 4\alpha h_2(1-m)]]+e^{(-2\alpha h-2\alpha h_2)}[-\kappa_2[(-1+4\alpha^2(-h^2+(2h-h_2)h_2))(1-m)(\kappa_2+m)+(\\
& 1+\kappa_1 m)(-\kappa_2+\kappa_1 m)]-\frac{1}{2}[(1+\kappa_1 m)({\kappa_2}^2+\kappa_1 m)-\kappa_2(1+\kappa_1 m(2+\kappa_1 m))+(1+4\alpha^2(\\
& h^2+h_2(-2h+h_2)))[(-1+(2-\kappa_2)\kappa_2)m+(-1+\kappa_2)(\kappa_2-m^2)]]]+e^{(-2\alpha h)}[-(1+(-2 \\
& +m)m)[8\alpha^3h_2(h(-h+2h_2)-{h_2}^2)+\kappa_2[2\alpha h_2(1+4\alpha^2(h(h-2h_2)+{h_2}^2))-4\alpha^2(\\
& h^2+4\alpha h_2(h(h-2h_2)+{h_2}^2))]]+(-1+2\alpha h_2)[\kappa_2(1+\kappa_1 m(1+\kappa_1 m))-0.5(\kappa_2+\kappa_1 m \\
& (2\kappa_2+\kappa_1(-1+\kappa_2)m))]+(1+2\alpha h_2)[\kappa_2[2(1-m)+m(m+\kappa_1(1+\kappa_1 m))]-0.5(\kappa_2+ \\
& (-1+{\kappa_1}^2\kappa_2)m^2)]+2\alpha[(h+h_2)\kappa_1 m-(h-h_2)(-1+(1+\kappa_1){\kappa_2}^2)m+2\kappa_2[(h-h_2)(\\
& 1+(1+\kappa_1)\kappa_2)m+h\kappa_1 m]]+\kappa_2[(-1+2\alpha(-2\alpha h^2+h_2))(1+(-2+m)m)]-\frac{1}{2}[[\kappa_2(\kappa_2 \\
& -2\kappa_1 m)+(1+4\alpha^2h^2)({\kappa_2}^2+m(2\kappa_2+m))+2\alpha[h_2(-2+(2-m)m)+2\alpha h_2[2h(- \\
& {\kappa_2}^2+(1+\kappa_1+(-1+\kappa_1)\kappa_2-m)m)+h_2({\kappa_2}^2+\kappa_1 m(-2\kappa_2+\kappa_1 m))]]]+[\kappa_1 m[(-1+2 \\
& \alpha h_2(-1-2\alpha h_2))(-2\kappa_2+\kappa_1 m)]+2[(2\alpha^2h^2(-2\kappa_2-m))+2\alpha h_2(-1+m+2\alpha hm(-1 \\
& -\kappa_1+m))+\kappa_2[2\alpha^2(-h^2-{h_2}^2)\kappa_2+(-1+4\alpha^2hh_2)(\kappa_2+(1-\kappa_1)m)]]]]]+\frac{(1+\kappa_2)}{2} \\
& (1+\kappa_1 m)(\kappa_2+m)]\frac{1}{\Delta}+0.5(1+\kappa_2)][\sin\alpha(t+x)-\sin\alpha(t-x)]d\alpha \qquad (153)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_2(x) = \int_0^\infty & [(1+\kappa_1)[e^{(-3\alpha h+2\alpha h_2)}[(1-m)[(-1+2\alpha(h-h_2))(-\kappa_2-0.5(2\alpha h_2+1))+\kappa_2\alpha[(1+2\alpha(-h+ \\
& h_2))h_2-(-h+h_2)]]+0.5[(\kappa_2-\kappa_1 m)\kappa_2-(\kappa_1-\kappa_2)m]]+e^{(-\alpha h-2\alpha h_2)}[(1-m)(-1+2\alpha(-h+ \\
& h_2))[\kappa_2(1-2\alpha h_2)-\alpha h_2]+\frac{1}{2}[-(1+2\alpha(h-h_2))[\kappa_2 m+(1+2\alpha h_2\kappa_2)(1-m)]+[\kappa_1 m+\kappa_2 \\
& (-(\kappa_2-\kappa_1 m)+2\alpha(h-h_2))]]]+(1+\kappa_1 m)(0.5+\kappa_2)(e^{(-3\alpha h)}-e^{(-\alpha h)})]+\frac{1}{2}[e^{(-\alpha h)}[-[2 \\
& \alpha h_2(1+\kappa_1+(-1+{\kappa_1}^2)m)+(1+\kappa_1)[2\alpha(h-h_2)\kappa_2+(1+2\alpha h-\kappa_1\kappa_2)m]]+\kappa_2[(-1+
\end{aligned}
$$

$$2\alpha(-h+h_2))((1+\kappa_1)\kappa_2+m)-2\alpha h_2(1+\kappa_1(1+\kappa_1 m))+(-1-2\alpha h)\kappa_1 m]]+e^{(-3\alpha h)}$$
$$[2\alpha h_2(1+\kappa_1(1+\kappa_1 m))(-\kappa_2-1)-[m[2\alpha h\kappa_1+(1+\kappa_1)(-1+\kappa_1\kappa_2)]]+[(1-2\alpha h)$$
$$\kappa_1\kappa_2 m]+((1+\kappa_1)\kappa_2+m)(\kappa_2+2\alpha(h-h_2)(-\kappa_2-1))]]][\cos\alpha(a-x)-\cos\alpha(a+x)]$$
$$\frac{d\alpha}{\Delta\alpha} \tag{154}$$

2.3.1.4. İntegral Denklemin Çözümü

İntegral denklemin sayısal çözümü için $\alpha=\frac{h}{z}$ değişken dönüşümü yapılmış ve aşağıdaki boyutsuz büyüklükler tanımlanmıştır.

$$x=\frac{c-b}{2}r+\frac{c+b}{2} \tag{155}$$

$$t=\frac{c-b}{2}s+\frac{c+b}{2} \tag{156}$$

$$g(s)=\frac{q\left(\frac{c-b}{2}s+\frac{c+b}{2}\right)}{p_0} \tag{157}$$

$$k_1(r,s)=\frac{k_1\left(\frac{c-b}{2}r+\frac{c+b}{2},\frac{c-b}{2}s+\frac{c+b}{2}\right)}{p_0} \tag{158}$$

$$k_2(r)=\frac{k_2\left(\frac{c-b}{2}r+\frac{c+b}{2}\right)}{p_0} \tag{159}$$

Tanımlanan bu boyutsuz büyüklükler (109) nolu denge şartında ve (152) nolu integral denklemde yerlerine yazılırlarsa

$$\int_{-1}^{1} g(s)ds=\frac{2a}{c-b} \tag{160}$$

$$\int_{-1}^{1} g(s)ds\left[\frac{1}{s-r}-\frac{1}{(s+r)+\frac{2(c+b)}{(c-b)}}+\frac{(c-b)}{h}\frac{1}{(1+\kappa_2)}k_1(r,s)\right]=$$

$$-\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{2}{(1+\kappa_2)}k_2(r) \qquad (-1<r<1) \qquad (161)$$

denklemleri elde edilir. Burada g(s) rijit blok üzerinde ortaya çıkan boyutsuz temas gerilmesidir. g(s) $s=\mp 1$' de tekilliğe sahip olduğundan integral denklemin indeksi +1' dir ve çözüm

$$g(s)=\frac{G(s)}{(1-s^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (162)$$

olarak aranabilir [85]. Uygun Gauss-Chebyshev integrasyon formülü kullanılacak olursa (160) ve (161) nolu denklemler

$$\sum_{i=1}^{n} W_i G(s_i)=\frac{2a}{c-b} \qquad (163)$$

$$\sum_{i=1}^{n} W_i\left[\frac{1}{s_i-r_j}-\frac{1}{(s_i+r_j)+\frac{2(c+b)}{(c-b)}}+\frac{(c-b)}{h}\frac{1}{(1+\kappa_2)}k_1(r_j,s_i)\right]G(s_i)$$

$$=-\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{2}{(1+\kappa_2)}k_2(r_j) \qquad (j=1,\ldots..n-1) \qquad (164)$$

şeklini alır [85]. Bu denklemlerde geçen W_i, s_i ve r_j

$$W_1=W_n=\frac{\pi}{2n-2} \qquad W_i=\frac{\pi}{n-1} \qquad (i=2,\ldots.,n-1) \qquad (165)$$

$$s_i=\cos\left(\frac{i-1}{n-1}\pi\right) \qquad (i=1,\ldots..,n) \qquad (166)$$

$$r_j = \cos\left(\frac{2j-1}{2n-2}\pi\right) \qquad (j = 1,\ldots,n-1) \qquad (167)$$

olarak tanımlanmıştır [85]. Böylece (163) ve (164) nolu denklemlerden n bilinmeyenli, n tane denklem elde edilmiş olur ve bilinmeyen temas gerilmesi $q(x)$ ve buna bağlı olarak bulunan A_i, B_i, C_i ve D_i $(i = 1,2)$ katsayıları belirlenebilir.

2.3.2. İki Elastik Tabakaya Ait Ara Yüzeyde Sürtünmenin Bulunmaması Durumu

2.3.2.1. Sınır Şartları

İki elastik tabakaya ait ara yüzeyde sürtünmenin bulunmaması durumunda, ara yüzeyde her iki tabakaya ait kayma gerilmeleri sıfır kabul edilirken, düşey gerilmeler ise birbirlerine eşit olacaktır. Tabakalara ait temas yüzeyinde düşey yerdeğiştirmeler farkı sabit, yani türevi sıfır kabul edilmiştir. Sürtünmenin bulunmaması durumunda sürekli temasta sınır şartları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\tau_{xy_1}(x,h) = 0 \qquad 0 \le x < \infty \qquad (168)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{y_1}(x,h) = -p_o \\ \sigma_{y_1}(x,h) = 0 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} 0 \le x < a \\ x > a \end{Bmatrix} \qquad (169)$$

$$\tau_{xy_1}(x,h_2) = 0 \qquad 0 \le x < \infty \qquad (170)$$

$$\tau_{xy_2}(x,h_2) = 0 \qquad 0 \le x < \infty \qquad (171)$$

$$\frac{\partial\left[v_1(x,h_2) - v_2(x,h_2)\right]}{\partial x} = 0 \qquad 0 \le x < \infty \qquad (172)$$

$$\sigma_{y_1}(x,h_2) = \sigma_{y_2}(x,h_2) \qquad 0 \le x < \infty \qquad (173)$$

$$\tau_{xy_2}(x,0)=0 \qquad 0\le x<\infty \qquad (174)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{y_2}(x,0)=-q(x) \\ \sigma_{y_2}(x,0)=0 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} b<x<c \\ 0\le x<b,\, c<x<\infty \end{Bmatrix} \qquad (175)$$

$$\frac{\partial v_2(x,0)}{\partial x}=0 \qquad b<x<c \qquad (176)$$

(175) nolu sınır şartındaki $q(x)$ rijit blok üzerinde ortaya çıkan bilinmeyen temas gerilmesi olup, probleme ait denge şartı (109) nolu denklemle ifade edilebilir.

2.3.2.2. Katsayıların Belirlenmesi

(95) - (99) nolu denklemlerle verilen, yerdeğiştirme ve gerilmelere ait ifadeler sınır şartlarına uygulanırsa, iki tabakaya ait ara yüzeyde sürtünmenin olmaması durumundaki bilinmeyen katsayılar A_i^*, B_i^*, C_i^* ve D_i^* $(i=1,2)$' nin bulunabilmesi için kullanılacak sekiz cebrik denklem aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$-\alpha e^{-2\alpha h}A_1^*+\left[-\alpha h-\left(\frac{\kappa_1-1}{2}\right)\right]e^{-2\alpha h}B_1^*+\alpha C_1^*+\left[\alpha h-\left(\frac{\kappa_1-1}{2}\right)\right]D_1^*=0 \qquad (177)$$

$$-\alpha e^{-2\alpha h}A_1^*+\left[-\alpha h-\left(\frac{1+\kappa_1}{2}\right)\right]e^{-2\alpha h}B_1^*-\alpha C_1^*+\left[-\alpha h+\left(\frac{1+\kappa_1}{2}\right)\right]D_1^*=$$

$$\frac{-e^{-\alpha h}}{2\mu_1}\int_0^{\infty}p_0\cos(\alpha x)dx=\frac{-e^{-\alpha h}}{2\mu_1}\int_0^{a}p_0\cos(\alpha t)dt \qquad (178)$$

$$-\alpha e^{-2\alpha h_2}A_1^*+\left[-\alpha h_2-\left(\frac{\kappa_1-1}{2}\right)\right]e^{-2\alpha h_2}B_1^*+\alpha C_1^*+\left[\alpha h_2-\left(\frac{\kappa_1-1}{2}\right)\right]D_1^*=0 \qquad (179)$$

$$e^{-2\alpha h_2}A_1^*+\left(\frac{\kappa_1}{\alpha}+h_2\right)e^{-2\alpha h_2}B_1^*-C_1^*+\left(\frac{\kappa_1}{\alpha}-h_2\right)D_1^*-$$

$$e^{-2\alpha h_2}A_2^* + \left(-\frac{\kappa_2}{\alpha} - h_2\right)e^{-2\alpha h_2}B_2^* + C_2^* + \left(-\frac{\kappa_2}{\alpha} + h_2\right)D_2^* = 0 \tag{180}$$

$$\begin{aligned} &-\alpha e^{-2\alpha h_2}A_1^* + \left[-\alpha h_2 - \left(\frac{1+\kappa_1}{2}\right)\right]e^{-2\alpha h_2}B_1^* - \alpha C_1^* + \left[-\alpha h_2 + \left(\frac{1+\kappa_1}{2}\right)\right]D_1^* + \\ &\qquad \alpha\frac{\mu_2}{\mu_1}e^{-2\alpha h_2}A_2^* + \left[\alpha h_2 + \left(\frac{1+\kappa_2}{2}\right)\right]\frac{\mu_2}{\mu_1}e^{-2\alpha h_2}B_2^* + \\ &\qquad\qquad \alpha\frac{\mu_2}{\mu_1}C_2^* + \left[\alpha h_2 - \left(\frac{1+\kappa_2}{2}\right)\right]\frac{\mu_2}{\mu_1}D_2^* = 0 \end{aligned} \tag{181}$$

$$\begin{aligned} &-\alpha e^{-2\alpha h_2}A_2^* + \left[-\alpha h_2 - \left(\frac{\kappa_2 - 1}{2}\right)\right]e^{-2\alpha h_2}B_2^* + \alpha C_2^* + \\ &\qquad \left[\alpha h_2 - \left(\frac{\kappa_2 - 1}{2}\right)\right]D_2^* = 0 \end{aligned} \tag{182}$$

$$-\alpha A_2^* + \left(\frac{1-\kappa_2}{2}\right)B_2^* + \alpha C_2^* + \left(\frac{1-\kappa_2}{2}\right)D_2^* = 0 \tag{183}$$

$$\begin{aligned} &-\alpha A_2^* - \left(\frac{\kappa_2+1}{2}\right)B_2^* - \alpha C_2^* + \left(\frac{\kappa_2+1}{2}\right)D_2^* = \\ &\qquad \frac{-1}{2\mu_2}\int_0^\infty q(x)\cos(\alpha x)dx = \frac{-1}{2\mu_2}\int_b^c q(t)\cos(\alpha t)dt \end{aligned} \tag{184}$$

Bu denklem takımının çözümünden q(x) temas gerilmesine bağlı olarak elde edilen katsayılar aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} \alpha A_{1_p}^* = &\frac{P}{4\Delta^*}[(1+\kappa_2)[[1+2\alpha h_2(-1+2\alpha(-h+h_2))][(e^{(-\alpha h-2\alpha h_2)} - e^{(-\alpha h+2\alpha h_2)}) - 4\alpha h_2 e^{(-\alpha h)}] + (\\ &-1+2\alpha h)[(e^{-3\alpha h} - e^{(-3\alpha h+4\alpha h_2)}) - 4\alpha h_2 e^{(-3\alpha h+2\alpha h_2)}]] + (\kappa_1 + \kappa_1\kappa_2)[(-1+2\alpha(-h+h_2))[\\ &(e^{(-\alpha h-2\alpha h_2)} - e^{(-\alpha h+2\alpha h_2)}) - 4\alpha h_2 e^{(-\alpha h)}] + e^{(-3\alpha h)} - e^{(-3\alpha h+4\alpha h_2)} - 4\alpha h_2 e^{(-3\alpha h+2\alpha h_2)}] + (m - \\ &\kappa_1^2 m)[2(1+2\alpha^2 h_2^2)(e^{(-3\alpha h+2\alpha h_2)} - e^{(-\alpha h)}) + e^{(-\alpha h-2\alpha h_2)} - e^{(-3\alpha h)} - e^{(-3\alpha h+4\alpha h_2)} + e^{(-\alpha h+2\alpha h_2)}] \\ &(m+\kappa_1 m)[2\alpha(h-2h_2)[(e^{(-\alpha h-2\alpha h_2)} + e^{(-\alpha h+2\alpha h_2)}) + 2(-1-2\alpha^2 h_2^2)e^{(-\alpha h)}] + 2\alpha h[(e^{(-3\alpha h)} \\ &+e^{(-3\alpha h+4\alpha h_2)}) + 2(-1-2\alpha^2 h_2^2)e^{(-3\alpha h+2\alpha h_2)}]]] \end{aligned} \tag{185}$$

$$\alpha A^*_{1_T} = \frac{-T}{2\Delta^*}\Big[(1+\kappa_2)m\Big[(-1+\alpha h_2)\big[e^{(-2\alpha h_2)}(-1+2\alpha h_2+\kappa_1)+e^{(-2\alpha h)}\big[1+(-1+2\alpha(h-h_2))(2\alpha h+\kappa_1)\big]\big]+(1+\alpha h_2)\big[(-1+2\alpha h_2+\kappa_1)+e^{(-2\alpha h+2\alpha h_2)}\big[1+(-1+2\alpha(h-h_2))(2\alpha h+\kappa_1)\big]\big]\Big]\Big] \qquad (186)$$

$$\alpha A^*_1 = \alpha A^*_{1_P} + \alpha A^*_{1_T} \qquad (187)$$

$$B^*_{1_P} = \frac{P}{2\Delta^*}\Big[(1+\kappa_2)\big[(1+2\alpha(h-h_2))\big[(e^{(-\alpha h-2\alpha h_2)}-e^{(-\alpha h+2\alpha h_2)})-4\alpha h_2 e^{(-\alpha h)}\big]-e^{(-3\alpha h)}+e^{(-3\alpha h+4\alpha h_2)}+4\alpha h_2 e^{(-3\alpha h+2\alpha h_2)}\big]+(m+\kappa_1 m)\big[(e^{(-3\alpha h+2\alpha h_2)}-e^{(-\alpha h)})2(1+2\alpha^2 h_2{}^2)+e^{(-\alpha h-2\alpha h_2)}-e^{(-3\alpha h)}-e^{(-3\alpha h+4\alpha h_2)}+e^{(-\alpha h+2\alpha h_2)}\big]\Big] \qquad (188)$$

$$B^*_{1_T} = \frac{-T}{\Delta^*}\Big[(1+\kappa_2)m\big[(1-\alpha h_2)\big[e^{(-2\alpha h_2)}+e^{(-2\alpha h)}(-1+2\alpha(h-h_2))\big]+(-1-\alpha h_2)\big[1+e^{(-2\alpha h+2\alpha h_2)}(-1+2\alpha(h-h_2))\big]\big]\Big] \qquad (189)$$

$$B^*_1 = B^*_{1_P} + B^*_{1_T} \qquad (190)$$

$$\alpha C^*_{1_P} = \frac{-P}{4\Delta^*}\Big[(1+\kappa_2)\big[\big[-1+2\alpha h_2(-1+2\alpha(h-h_2))\big]\big[(e^{(-3\alpha h-2\alpha h_2)}-e^{(-3\alpha h+2\alpha h_2)})-4\alpha h_2 e^{(-3\alpha h)}\big]+(1+2\alpha h)\big[(e^{(\alpha h-4\alpha h_2)}-e^{(-\alpha h)})-4\alpha h_2 e^{(-\alpha h-2\alpha h_2)}\big]\big]+(\kappa_1+\kappa_1\kappa_2)\big[(1+2\alpha(-h+h_2))[-4\alpha h_2 e^{(-3\alpha h)}+(e^{(-3\alpha h-2\alpha h_2)}-e^{(-3\alpha h+2\alpha h_2)})]-e^{(-\alpha h-4\alpha h_2)}+e^{(-\alpha h)}+4\alpha h_2 e^{(-\alpha h-2\alpha h_2)}\big]+(m+\kappa_1 m)\big[2\alpha(-h+2h_2)\big[(e^{-3\alpha h-2\alpha h_2}+e^{(-3\alpha h+2\alpha h_2)})+2(-1-2\alpha^2 h_2{}^2)e^{(-3\alpha h)}\big]+2\alpha h\big[e^{(-\alpha h-2\alpha h_2)}2(1+2\alpha^2 h_2{}^2)-(e^{(-\alpha h-4\alpha h_2)}+e^{(-\alpha h)})\big]\big]+m(1-\kappa_1{}^2)\big[(e^{(-3\alpha h)}-e^{(-\alpha h-2\alpha h_2)})2(-1-2\alpha^2 h_2{}^2)-e^{(-\alpha h-4\alpha h_2)}+e^{(-3\alpha h-2\alpha h_2)}+e^{(-3\alpha h+2\alpha h_2)}-e^{(-\alpha h)}\big]\Big] \qquad (191)$$

$$\alpha C^*_{1_T} = \frac{-T}{2\Delta^*}\Big[(1+\kappa_2)m\big[(-1+\alpha h_2)\big[e^{(-2\alpha h-2\alpha h_2)}(1+(1+2\alpha(h-h_2))(2\alpha h-\kappa_1))+e^{(-4\alpha h)}(-1-2\alpha h_2+\kappa_1)\big]+(1+\alpha h_2)\big[e^{(-2\alpha h)}\big[1+(1+2\alpha(h-h_2))(2\alpha h-\kappa_1)\big]+e^{(-4\alpha h+2\alpha h_2)}(-1-2\alpha h_2+\kappa_1)\big]\big]\Big] \qquad (192)$$

$$\alpha C^*_1 = \alpha C^*_{1_P} + \alpha C^*_{1_T} \qquad (193)$$

$$D^*_{1_P} = \frac{P}{2\Delta^*}\Big[(1+\kappa_2)\big[(-1+2\alpha(h-h_2))\big[(e^{(-3\alpha h-2\alpha h_2)} - e^{(-3\alpha h+2\alpha h_2)}) - 4\alpha h_2 e^{(-3\alpha h)}\big] + e^{(-\alpha h-4\alpha h_2)} -$$
$$e^{(-\alpha h)} - 4\alpha h_2 e^{(-\alpha h-2\alpha h_2)}\big] + (m+\kappa_1 m)\big[-e^{(-\alpha h-4\alpha h_2)} + e^{(-3\alpha h-2\alpha h_2)} + e^{(-3\alpha h+2\alpha h_2)} - e^{(-\alpha h)} + 2(-$$
$$1-2\alpha^2 h_2{}^2)(e^{(-3\alpha h)} - e^{(-\alpha h-2\alpha h_2)})\big]\Big] \qquad (194)$$

$$D^*_{1_T} = \frac{-T}{\Delta^*}\Big[(1+\kappa_2)m\big[(-1+\alpha h_2)\big[e^{(-2\alpha h-2\alpha h_2)}(-1-2\alpha h+2\alpha h_2) + e^{(-4\alpha h)}\big] + (1+\alpha h_2)\big[e^{(-2\alpha h)}(-1$$
$$-2\alpha h+2\alpha h_2) + e^{(-4\alpha h+2\alpha h_2)}\big]\big]\Big] \qquad (195)$$

$$D^*_1 = D^*_{1_P} + D^*_{1_T} \qquad (196)$$

$$\alpha A^*_{2_P} = \frac{-P}{2\Delta^*}\Big[(1+\kappa_1)\big[(1-2\alpha h_2-\kappa_2)\big[e^{(-\alpha h-2\alpha h_2)}(-1+\alpha(-h+h_2)) + e^{(-3\alpha h)}(1+\alpha(-h+h_2))\big] + (-1+$$
$$\kappa_2(1+2\alpha h_2))\big[e^{(-\alpha h)}(-1+\alpha(-h+h_2)) + e^{(-3\alpha h+2\alpha h_2)}(1+\alpha(-h+h_2))\big]\big]\Big] \qquad (197)$$

$$\alpha A^*_{2_T} = \frac{-T}{4\Delta^*}\Big[2\big[-1+2\alpha^2(h(-h+2h_2)-h_2{}^2)\big]\big[(e^{(-2\alpha h)} - e^{(-2\alpha h+2\alpha h_2)})(1-\kappa_2{}^2) - 4\alpha h_2(1+\kappa_2)$$
$$e^{(-2\alpha h)}\big] + (e^{(-2\alpha h_2)} + e^{(-4\alpha h+2\alpha h_2)})((1-\kappa_2{}^2) - 4\alpha h_2(1+\kappa_2)) + (1-\kappa_2{}^2)(-1-e^{(-4\alpha h+4\alpha h_2)})$$
$$+(\kappa_2 m+\kappa_1\kappa_2 m)\big[4\alpha(-h+h_2)\big[(e^{(-2\alpha h)} - e^{(-2\alpha h+2\alpha h_2)}) - 2\alpha h_2 e^{(-2\alpha h)}\big] + 1 - e^{(-4\alpha h+4\alpha h_2)} +$$
$$(1-2\alpha h_2)\big[-e^{(-2\alpha h_2)} + e^{(-4\alpha h+2\alpha h_2)}\big]\big] + (m+\kappa_1 m)\big[4\alpha(h-h_2)\big[(e^{(-2\alpha h)} - e^{(-2\alpha h+2\alpha h_2)}) + e^{(-2\alpha h)}$$
$$2\alpha h_2(-1+2\alpha h_2)\big] + \big[-e^{(-2\alpha h_2)} + e^{(-4\alpha h+2\alpha h_2)}\big]2\alpha h_2(1-2\alpha h_2) + e^{(-2\alpha h_2)} - e^{(-4\alpha h+2\alpha h_2)} +$$
$$e^{(-4\alpha h+4\alpha h_2)} - 1\big]\Big] \qquad (198)$$

$$\alpha A^*_2 = \alpha A^*_{2_P} + \alpha A^*_{2_T} \qquad (199)$$

$$B^*_{2_P} = \frac{P}{\Delta^*}\Big[(1+\kappa_1)\big[(1+2\alpha h_2)\big[e^{(-\alpha h)}(-1+\alpha(-h+h_2)) + e^{(-3\alpha h+2\alpha h_2)}(1+\alpha(-h+h_2))\big] - \big[(-1+\alpha$$
$$(-h+h_2))e^{(-\alpha h-2\alpha h_2)} + e^{(-3\alpha h)}(1+\alpha(-h+h_2))\big]\big]\Big] \qquad (200)$$

$$B^*_{2_T} = \frac{T}{2\Delta^*}\Big[(1+\kappa_2)\big[(e^{(-2\alpha h)} - e^{(-2\alpha h+2\alpha h_2)})2\big[1+2\alpha^2(h(h-2h_2)+h_2{}^2)\big] - e^{(-2\alpha h_2)} - e^{(-4\alpha h+2\alpha h_2)}$$
$$+1+e^{(-4\alpha h+4\alpha h_2)}\big] + (m+\kappa_1 m)\big[1-e^{(-4\alpha h+4\alpha h_2)} + 4\alpha(-h+h_2)\big[(e^{(-2\alpha h)} - e^{(-2\alpha h+2\alpha h_2)}) - 2\alpha h_2$$
$$e^{(-2\alpha h)}\big] + (-e^{(-2\alpha h_2)} + e^{(-4\alpha h+2\alpha h_2)})(1-2\alpha h_2)\big]\Big] \qquad (201)$$

$$B_2^* = B_{2_P}^* + B_{2_T}^* \tag{202}$$

$$\alpha C_{2_P}^* = \frac{-P}{2\Delta^*}[(1+\kappa_1)[(-1+\kappa_2(1-2\alpha h_2))[e^{(-\alpha h-2\alpha h_2)}(-1+\alpha(-h+h_2))+e^{(-3\alpha h)}(1+\alpha(-h+h_2))]+(1+2\alpha h_2-\kappa_2)[e^{(-\alpha h)}(-1+\alpha(-h+h_2))+e^{(-3\alpha h+2\alpha h_2)}(1+\alpha(-h+h_2))]]] \tag{203}$$

$$\alpha C_{2_T}^* = \frac{T}{4\Delta^*}[[4\alpha(-h+h_2)[(e^{(-2\alpha h-2\alpha h_2)}-e^{(-2\alpha h)})-2\alpha h_2 e^{(-2\alpha h)}]+(e^{(-4\alpha h+2\alpha h_2)}-e^{(-2\alpha h_2)})(-1-2\alpha h_2)-e^{(-4\alpha h_2)}+e^{(-4\alpha h)}][(\kappa_2 m+\kappa_1\kappa_2 m)-(m+\kappa_1 m)]+(m+\kappa_1 m)4\alpha^2 h_2^{\,2}[e^{(-2\alpha h)}4\alpha(-h+h_2)+(e^{(-4\alpha h+2\alpha h_2)}-e^{(-2\alpha h_2)})]+2[1+2\alpha^2(h(h-2h_2)+h_2^{\,2})][(1-\kappa_2^{\,2})(e^{-2\alpha h-2\alpha h_2}-e^{(-2\alpha h)})-4\alpha h_2(1+\kappa_2)e^{(-2\alpha h)}]+(e^{(-2\alpha h_2)}+e^{(-4\alpha h+2\alpha h_2)})[(1-\kappa_2^{\,2})+4\alpha h_2(1+\kappa_2)]+(1-\kappa_2^{\,2})(-e^{(-4\alpha h_2)}-e^{(-4\alpha h)})] \tag{204}$$

$$C_2^* = C_{2_P}^* + C_{2_T}^* \tag{205}$$

$$D_{2_P}^* = \frac{P}{\Delta^*}[(1+\kappa_1)[(1-2\alpha h_2)[e^{(-\alpha h-2\alpha h_2)}(1+\alpha(h-h_2))+e^{(-3\alpha h)}(-1+\alpha(h-h_2))]-[e^{(-\alpha h)}(1+\alpha(h-h_2))+e^{(-3\alpha h+2\alpha h_2)}(-1+\alpha(h-h_2))]]] \tag{206}$$

$$D_{2_T}^* = \frac{-T}{2\Delta^*}[(1+\kappa_2)[(e^{(-2\alpha h-2\alpha h_2)}-e^{(-2\alpha h)})2[1+2\alpha^2(h(h-2h_2)+h_2^{\,2})]+e^{(-2\alpha h_2)}+e^{(-4\alpha h+2\alpha h_2)}-e^{(-4\alpha h_2)}-e^{(-4\alpha h)}]+(m+\kappa_1 m)[e^{(-4\alpha h_2)}-e^{(-4\alpha h)}+(e^{(-4\alpha h+2\alpha h_2)}-e^{(-2\alpha h_2)})(1+2\alpha h_2)+[-2\alpha h_2 e^{(-2\alpha h)}+(e^{(-2\alpha h-2\alpha h_2)}-e^{(-2\alpha h)})]4\alpha(h-h_2)]] \tag{207}$$

$$D_2^* = D_{2_P}^* + D_{2_T}^* \tag{208}$$

Katsayılara ait eşitliklerde geçen m, P ve T büyüklükleri sırasıyla (142), (144) ve (145) nolu denklemlerle tanımlanırken Δ^* ise aşağıdaki gibi belirlenmiştir.

$$\Delta^* = -\frac{1}{2}[(1+\kappa_2)[2[1+2\alpha^2(h(h-2h_2)+h_2^{\,2})][(e^{(-2\alpha h-2\alpha h_2)}-e^{(-2\alpha h+2\alpha h_2)})-4\alpha h_2 e^{(-2\alpha h)}]+1-e^{(-4\alpha h_2)}-e^{(-4\alpha h)}+e^{(-4\alpha h+4\alpha h_2)}+4\alpha h_2(e^{(-4\alpha h+2\alpha h_2)}+e^{(-2\alpha h_2)})]+(m+\kappa_1 m)[4\alpha(h-h_2)[2(-1-2\alpha^2 h_2^{\,2})e^{(-2\alpha h)}+(e^{(-2\alpha h-2\alpha h_2)}+e^{(-2\alpha h+2\alpha h_2)})]+2(1+2\alpha^2 h_2^{\,2})(e^{(-4\alpha h+2\alpha h_2)}-e^{(-2\alpha h_2)})+1$$

$$+e^{(-4\alpha h_2)} - e^{(-4\alpha h)} - e^{(-4\alpha h + 4\alpha h_2)}]] \tag{209}$$

2.3.2.3. İntegral Denklemin Elde Edilmesi

İki elastik tabakaya ait ara yüzeyde sürtünmenin bulunmaması durumunda elde edilen A_i^*, B_i^*, C_i^* ve D_i^* $(i=1,2)$ katsayıları $q(x)$ bilinmeyen temas gerilmesine bağlı olarak bulunmuşlardır. $q(x)$ temas gerilmesi dağılımının belirlenebilmesi için (176) nolu sınır şartından faydalanılacaktır. Bu amaçla $\partial v_2(x,y)/\partial x$ yeniden oluşturulursa

$$\frac{\partial v_2(x,y)}{\partial x} = \frac{-2}{\pi}\int_0^\infty \Big[\big[\alpha A_2^* + (\kappa_2 + \alpha y)B_2^*\big]e^{(-\alpha y)} +$$

$$\big[-\alpha C_2^* + (\kappa_2 - \alpha y)D_2^*\big]e^{(\alpha y)}\Big]\sin(\alpha x)d\alpha \tag{210}$$

yazılabilir. Sürtünme bulunmaması durumunda elde edilen katsayılar (210) nolu denklemde yerlerine konup $y \to 0$ limitine geçilirken pay paydaya bölündüğünde yakınsamayı bozan tekil terimlerin

$$-\int_0^\infty \left[\left(\frac{1+\kappa_2}{2}\right) + \alpha y\right]e^{(-\alpha y)}\cos(\alpha t)\sin(\alpha x)d\alpha \tag{211}$$

oldukları görülmüştür. Yakınsamayı bozan terimlerin kapalı integraleri alındıktan sonra limit işlemine geçilirse (152) nolu denkleme benzer olarak

$$\int_b^c \left[\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x} + \frac{2}{(1+\kappa_2)}k_3(x,t)\right]q(t)d(t) =$$

$$-\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{2p_0}{(1+\kappa_2)}k_4(x) \qquad b<x<c \tag{212}$$

denklemi elde edilir [84]. Bu eşitlikte geçen $k_3(x,t)$ ve $k_4(x)$ çekirdekleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$k_3(x,t)=\int_0^\infty \Big[\Big[(1+\kappa_2)\big[(1+\kappa_2)\big[2(-1+2\alpha^2(h(-h+2h_2)-h_2{}^2))\big[(e^{(-2\alpha h-2\alpha h_2)}+e^{(-2\alpha h+2\alpha h_2)})$$
$$-2e^{(-2\alpha h)}\big]-2(e^{(-4\alpha h+2\alpha h_2)}+e^{(-2\alpha h_2)})+e^{(-4\alpha h_2)}+e^{(-4\alpha h)}+e^{(-4\alpha h+4\alpha h_2)}+1\big]+(m+\kappa_1$$
$$m)[4\alpha(-h+h_2)[(e^{(-2\alpha h-2\alpha h_2)}-e^{(-2\alpha h+2\alpha h_2)})-4\alpha h_2 e^{(-2\alpha h)}]-4\alpha h_2(e^{(-4\alpha h+2\alpha h_2)}-$$
$$e^{(-2\alpha h_2)})+1-e^{(-4\alpha h_2)}+e^{(-4\alpha h)}-e^{(-4\alpha h+4\alpha h_2)}\Big]\Big]\Big]\frac{1}{4\Delta^*}+\frac{(1+\kappa_2)}{2}\Big][\sin\alpha(t+x)-\sin\alpha(t-x)]$$
$$d\alpha \tag{213}$$

$$k_4(x)=\int_0^\infty (1+\kappa_1)(1+\kappa_2)\big[(-1+\alpha h_2)[e^{(-\alpha h-2\alpha h_2)}(-1+\alpha(-h+h_2))+e^{(-3\alpha h)}(1+\alpha(-h+h_2))]+$$
$$(1+\alpha h_2)[e^{(-\alpha h)}(-1+\alpha(-h+h_2))+e^{(-3\alpha h+2\alpha h_2)}(1+\alpha(-h+h_2))]\big][\cos\alpha(a-x)-\cos\alpha$$
$$(a+x)]\frac{d\alpha}{\Delta^*\alpha} \tag{214}$$

2.3.2.4. İntegral Denklemin Çözümü

İki tabaka arasında sürtünme bulunmaması durumunda elde edilen integral denklemin sayısal çözümü için $\alpha=\dfrac{h}{z}$ dönüşümü yapılmış ve aşağıdaki boyutsuz büyüklükler tanımlanmıştır.

$$x=\frac{c-b}{2}r+\frac{c+b}{2} \tag{215}$$

$$t=\frac{c-b}{2}s+\frac{c+b}{2} \tag{216}$$

$$g(s)=\frac{q\left(\dfrac{c-b}{2}s+\dfrac{c+b}{2}\right)}{p_0} \tag{217}$$

$$k_3(r,s)=\frac{k_3\left(\dfrac{c-b}{2}r+\dfrac{c+b}{2},\dfrac{c-b}{2}s+\dfrac{c+b}{2}\right)}{p_0} \tag{218}$$

$$k_4(r)=\frac{k_4\left(\frac{c-b}{2}r+\frac{c+b}{2}\right)}{p_0} \tag{219}$$

Bu boyutsuz büyüklükler (212) nolu integral denklemde ve (109) nolu denge şartında yerlerine yazılırlarsa

$$\int_{-1}^{1} g(s)ds\left[\frac{1}{s-r}-\frac{1}{(s+r)+\frac{2(c+b)}{(c-b)}}+\frac{(c-b)}{h}\frac{1}{(1+\kappa_2)}k_3(r,s)\right]=$$

$$-\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{2}{(1+\kappa_2)}k_4(r) \qquad (-1<r<1) \tag{220}$$

$$\int_{-1}^{1} g(s)ds=\frac{2a}{c-b} \tag{221}$$

bulunur. Burada g(s) rijit blok üzerinde ortaya çıkan boyutsuz temas gerilmesidir. İntegral denklemin indeksi +1 olup, çözüm

$$g(s)=\frac{G(s)}{(1-s^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{222}$$

olarak aranabilir [85]. Uygun Gauss-Chebyshev integrasyon formülü kullanılacak olursa (220) ve (221) nolu denklemler

$$\sum_{i=1}^{n} W_i\left[\frac{1}{s_i-r_j}-\frac{1}{(s_i+r_j)+\frac{2(c+b)}{(c-b)}}+\frac{(c-b)}{h}\frac{1}{(1+\kappa_2)}k_3(r_j,s_i)\right]G(s_i)$$

$$=-\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{2}{(1+\kappa_2)}k_4(r_j) \qquad (j=1,\ldots..n-1) \tag{223}$$

$$\sum_{i=1}^{n} W_i G(s_i) = \frac{2a}{c-b} \tag{224}$$

şeklinde yazılabilir [85]. Bu denklemlerde geçen W_i, s_i ve r_j sırasıyla (165), (166) ve (167) nolu eşitliklerle tanımlanmışlardır. (223) ve (224) nolu denklemlerden elde edilen n bilinmeyenli n denklem çözüldüğünde q(x) temas gerilmesi ve iki tabaka arasında sürtünme bulunmaması durumunda temas gerilmesine bağlı olarak elde edilen A_i^*, B_i^*, C_i^* ve D_i^* $(i = 1,2)$ katsayıları belirlenebilir.

2.3.3. Gerilmelerin Bulunması

Bileşik tabakada ortaya çıkacak σ_{x_i} ve σ_{y_i} gerilme bileşenleri y simetri ekseni boyunca, τ_{xy_i} gerilmesi de y simetri ekseni yakınında $(i = 1,2)$ incelenmiştir. Tabakalar arasında sürtünme bulunması veya bulunmaması durumunda elde edilen katsayılar (95)-(99) nolu denklemlerde yerlerine yazılıp bu ifadelere ait çekirdekler her iki durum için ayrı ayrı incelendiğinde $y \to 0$ ve $y \to h$ olması hallerinde, gerilmelere ait çekirdekler de yakınsamayı bozan, gerilmeleri sonsuza götüren, terimlerin ortaya çıktığı görülmüştür. Tabakalar arasında sürtünme bulunması veya bulunmaması durumunda yakınsamayı bozan terimler aynı olmaktadır. Bu terimler aşağıda verilmiştir.

$y \to 0$ olması durumunda tekil terimler

$$\sigma_{x_2}(x,y)_s = \frac{-1}{\pi}\int_b^c q(t)\left[\int_0^\infty (1-\alpha y)e^{(-\alpha y)}\left[\cos\alpha(t+x)+\cos\alpha(t-x)\right]d\alpha\right]dt \tag{225}$$

$$\sigma_{y_2}(x,y)_s = \frac{-1}{\pi}\int_b^c q(t)\left[\int_0^\infty (1+\alpha y)e^{(-\alpha y)}\left[\cos\alpha(t+x)+\cos\alpha(t-x)\right]d\alpha\right]dt \tag{226}$$

$$\tau_{xy_2}(x,y)_s = \frac{-1}{\pi}\int_b^c q(t)\left[\int_0^\infty (\alpha y)e^{(-\alpha y)}\left[\sin\alpha(x+t)+\sin\alpha(x-t)\right]d\alpha\right]dt \tag{227}$$

olurken, $y \to h$ olması durumunda ise tekil terimler

$$\sigma_{x_1}(x,y)_s = \frac{-p_0}{\pi}\int_0^{\infty}[1-\alpha(h-y)]e^{[-\alpha(h-y)]}[\sin\alpha(a+x)+\sin\alpha(a-x)]\frac{d\alpha}{\alpha} \qquad (228)$$

$$\sigma_{y_1}(x,y)_s = \frac{-p_0}{\pi}\int_0^{\infty}[1+\alpha(h-y)]e^{[-\alpha(h-y)]}[\sin\alpha(a+x)+\sin\alpha(a-x)]\frac{d\alpha}{\alpha} \qquad (229)$$

$$\tau_{xy_1}(x,y)_s = \frac{-p_0}{\pi}\int_0^{\infty}-(h-y)e^{[-\alpha(h-y)]}[\cos\alpha(a-x)-\cos\alpha(a+x)]d\alpha \qquad (230)$$

olarak ortaya çıkmaktadır. Belirlenen tekil terimlerin kapalı integralleri ise integral dönüşüm tabloları yardımıyla ,

$y \to 0$ olması durumunda

$$\sigma_{x_2}(x,y)_k = \frac{-1}{\pi}\int_b^c q(t)\left[\frac{y}{y^2+(t+x)^2}+\frac{y}{y^2+(t-x)^2}- y\frac{y^2-(t+x)^2}{[y^2+(t+x)^2]^2}-y\frac{y^2-(t-x)^2}{[y^2+(t-x)^2]^2}\right]dt \qquad (231)$$

$$\sigma_{y_2}(x,y)_k = \frac{-1}{\pi}\int_b^c q(t)\left[\frac{y}{y^2+(t+x)^2}+\frac{y}{y^2+(t-x)^2}+ y\frac{y^2-(t+x)^2}{[y^2+(t+x)^2]^2}+y\frac{y^2-(t-x)^2}{[y^2+(t-x)^2]^2}\right]dt \qquad (232)$$

$$\tau_{xy_2}(x,y)_k = \frac{-1}{\pi}\int_b^c q(t)\left[y\frac{2y(x+t)}{[y^2+(x+t)^2]^2}+y\frac{2y(x-t)}{[y^2+(x-t)^2]^2}\right]dt \qquad (233)$$

$y \to h$ olması durumunda da

$$\sigma_{x_1}(x,y)_k = \frac{-p_0}{\pi}\left[\tan^{-1}\left(\frac{a+x}{h-y}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{a-x}{h-y}\right)-\right.$$

$$(h-y)\frac{a+x}{(h-y)^2+(a+x)^2}-(h-y)\frac{a-x}{(h-y)^2+(a-x)^2}\Bigg] \tag{234}$$

$$\sigma_{y_1}(x,y)_k=\frac{-p_0}{\pi}\Bigg[\tan^{-1}\left(\frac{a+x}{h-y}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{a-x}{h-y}\right)+$$

$$(h-y)\frac{a+x}{(h-y)^2+(a+x)^2}+(h-y)\frac{a-x}{(h-y)^2+(a-x)^2}\Bigg] \tag{235}$$

$$\tau_{xy_1}(x,y)_k=\frac{-p_0}{\pi}\Bigg[-(h-y)\frac{h-y}{(h-y)^2+(a-x)^2}+$$

$$(h-y)\frac{h-y}{(h-y)^2+(a+x)^2}\Bigg] \tag{236}$$

olarak elde edilmiştir [84]. Yakınsamayı bozan, (225)-(230) nolu ifadelerle verilen tekil terimler gerilmelere ait eşitliklerden çıkartılıp, bu terimlerin (231)-(236) nolu ifadelerle verilen kapalı integrallerinin gerilme ifadelerine eklenmesi sonucunda yakınsama sağlanmıştır. Böylece boyutsuz gerilme bileşenleri σ_{x_i}/p_o, σ_{y_i}/p_o ve τ_{xy_i}/p_o bileşik tabakanın herhangi bir noktasında

$$\frac{\sigma_{x_i}}{p_o}=\frac{\sigma_{x_i}}{p_o}-\frac{(\sigma_{x_i})_s}{p_o}+\frac{(\sigma_{x_i})_k}{p_o} \tag{237}$$

$$\frac{\sigma_{y_i}}{p_o}=\frac{\sigma_{y_i}}{p_o}-\frac{(\sigma_{y_i})_s}{p_o}+\frac{(\sigma_{y_i})_k}{p_o} \tag{238}$$

$$\frac{\tau_{xy_i}}{p_o}=\frac{\tau_{xy_i}}{p_o}-\frac{(\tau_{xy_i})_s}{p_o}+\frac{(\tau_{xy_i})_k}{p_o} \tag{239}$$

olarak hesaplanmıştır.

2.4. İki Elastik Tabakanın Ara Yüzeyinde İlk Ayrılma Yükleri ve Uzaklıkları

Temas problemlerinde temas yüzeylerinde meydana gelecek gerilme dağılışları yanında temas eden yüzeylerde ilk ayrılmayı meydana getirecek yük ve ilk ayrılmanın meydana geleceği uzaklık da büyük öneme sahiptir. Bu durum dikkate alınarak problemde iki elastik tabakaya ait ara yüzeyde ilk ayrılmayı meydana getirecek yükler ve ilk ayrılmanın meydana geleceği uzaklıklar bulunacaktır.

Tabakalar arasında ilk ayrılmayı meydana getirecek yükün ve ilk ayrılma uzaklığının bulunabilmesi için iki tabakaya ait temas yüzeyi boyunca birbirlerine eşit $\sigma_{y_1}(x,h_2)$ veya $\sigma_{y_2}(x,h_2)$ düşey gerilmelerinden herhangi birinin incelenmesi gerekir. Tabakalara ait kütle kuvveti hesaplarda dikkate alınacaktır.

2.4.1. Tabakalar Arasında Sürtünme Bulunması Durumu

İki tabakaya ait ara yüzeyde sürtünme bulunması durumunda (132), (135), (138) ve (141) nolu eşitlikler olarak elde edilen A_2, B_2, C_2 ve D_2 katsayıları (98) nolu $\sigma_{y_1}(x,h_2)$ ifadesinde yerlerine yazılırlarsa, dış yükler nedeniyle ortaya çıkacak düşey gerilme bileşeni $\sigma_{y_2}(x,h_2)$ aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{\sigma_{y_2}(x,h_2)}{p_0} = -\frac{1}{\pi}\int_b^c \frac{q(t)}{p_0} k_5(x,t)dt - \frac{1}{\pi}\frac{\mu_2}{\mu_1} k_6(x) \tag{240}$$

Bu eşitlikde geçen $k_5(x,t)$ ve $k_6(x)$ çekirdekleri aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} k_5(x,t) = \int_0^\infty & \Big[(1+\kappa_2)\Big[\big[(1+\kappa_2)(-e^{(-3\alpha h_2)} - e^{(-4\alpha h+\alpha h_2)} - e^{(-\alpha h_2)} - e^{(-4\alpha h+3\alpha h_2)}) + \big[2\big[(1+\kappa_2)(1+2\alpha^2 \\ & (h(h-2h_2)+h_2^2)) + (1+\kappa_1)m2\alpha^2 h_2(h-h_2)\big]\big](e^{(-2\alpha h-\alpha h_2)} + e^{(-2\alpha h+\alpha h_2)})\big] + \big[m(1+ \\ & \kappa_1)(e^{(-3\alpha h_2)} - e^{(-4\alpha h+\alpha h_2)} - e^{(-\alpha h_2)} + e^{(-4\alpha h+3\alpha h_2)}) + 2\alpha\big[h_2(e^{(-3\alpha h_2)} + e^{(-4\alpha h+\alpha h_2)} - e^{(-\alpha h_2)} - \\ & e^{(-4\alpha h+3\alpha h_2)}) + (e^{(-2\alpha h-\alpha h_2)} - e^{(-2\alpha h+\alpha h_2)})\big[2h_2(-1+2\alpha^2(h(-h+2h_2)-h_2^2))(1-m) + \\ & m(1+\kappa_1)(h_2-2h)\big]\big]\big] + 2\alpha h_2 m\big[-(e^{(-3\alpha h_2)} + \kappa_1 e^{(-\alpha h_2)}) + (\kappa_1 e^{(-4\alpha h+\alpha h_2)} + e^{(-4\alpha h+3\alpha h_2)})\big]\Big]\Big] \\ & \big[\cos\alpha(t+x) + \cos\alpha(t-x)\big]\frac{d\alpha}{2\Delta} \end{aligned} \tag{241}$$

$$
\begin{aligned}
k_6(x) = \int_0^\infty & \Big[-(1+\kappa_1)\big[(1+\kappa_2)\big[e^{(-3\alpha h-\alpha h_2)} - e^{(-\alpha h-3\alpha h_2)} - e^{(-3\alpha h+3\alpha h_2)} + e^{(-\alpha h+\alpha h_2)}\big] + m\big[(e^{(-3\alpha h-\alpha h_2)} + \\
& e^{(-\alpha h-3\alpha h_2)} + e^{(-3\alpha h+3\alpha h_2)} + e^{(-\alpha h+\alpha h_2)})(1+\kappa_1) + 2\alpha\big[h(e^{(-\alpha h-3\alpha h_2)} - e^{(-3\alpha h-\alpha h_2)} + e^{(-\alpha h+\alpha h_2)} - \\
& e^{(-3\alpha h+3\alpha h_2)}) + h_2(e^{(-3\alpha h-\alpha h_2)} + e^{(-3\alpha h+3\alpha h_2)})\big]\big] + 2\alpha h\big[(-e^{(-\alpha h-3\alpha h_2)} - e^{(-3\alpha h+\alpha h_2)} + e^{(-\alpha h-\alpha h_2)} + \\
& + e^{(-3\alpha h+3\alpha h_2)}) - \kappa_2(e^{(-3\alpha h-\alpha h_2)} + e^{(-\alpha h-\alpha h_2)} - e^{(-3\alpha h+\alpha h_2)} - e^{(-\alpha h+\alpha h_2)})\big] + 2\alpha h_2\kappa_2\big[e^{(-3\alpha h-\alpha h_2)} - \\
& e^{(-\alpha h-\alpha h_2)} + e^{(-3\alpha h+\alpha h_2)} - e^{(-\alpha h+\alpha h_2)}\big] + (e^{(-3\alpha h+\alpha h_2)} + e^{(-\alpha h-\alpha h_2)})2\big[(1+\kappa_1)m(-1-2\alpha^2 h_2{}^2) + \\
& (1+\kappa_2)2\alpha^2 h_2(h_2-h)\big] + (e^{(-3\alpha h+\alpha h_2)} - e^{(-\alpha h-\alpha h_2)})2\alpha\big[2h_2(-1+2\alpha^2 h_2(h-h_2))(m-1) \\
& + (2hm+h_2)\big] + 2\alpha h_2\big[e^{(-\alpha h-3\alpha h_2)}(1-m) - e^{(-3\alpha h+3\alpha h_2)} - me^{(-\alpha h+\alpha h_2)}\big]\big]\Big]\big[\sin\alpha(a+x) + \\
& \sin\alpha(a-x)\big]\frac{d\alpha}{2\alpha\Delta}
\end{aligned}
\tag{242}
$$

Temas yüzeyinde ortaya çıkacak toplam gerilme ise dış yüklerden doğacak düşey gerilmenin kütle kuvvetlerinden doğacak düşey gerilme ile toplamı olan

$$
\frac{\sigma'_{y_2}(x,h_2)}{p_0} = -\frac{\rho_1 g h_1}{p_0} + \frac{\sigma_{y_2}(x,h_2)}{p_0} \tag{243}
$$

(243) nolu denklem olarak yazılabilir. ρ_1 birinci tabakaya ait malzeme yoğunluğu, g ise yerçekimi ivmesini göstermektedir.

$$
\beta = \frac{p_0}{\rho_1 g h_1} \tag{244}
$$

(244) ifadesi yük faktörü olarak tanımlanırsa (243) nolu denklem

$$
\frac{\sigma'_{y_2}(x,h_2)}{p_0} = -\frac{1}{\pi}\int_b^c \frac{q(t)}{p_0} k_5(x,t)dt - \frac{1}{\pi}\frac{\mu_2}{\mu_1} k_6(x) - \frac{1}{\beta} \tag{245}
$$

olarak yeniden düzenlenebilir. Sürekli temasa ait sınır şartlarının geçerli kalabilmesi diğer bir deyişle tabakaların ayrılmaması için (245) nolu denklemin her zaman sıfırdan küçük yani basınç değerleri alması gerekir.

$$\frac{\sigma'_{y_2}(x,h_2)}{p_0}=-\frac{1}{\pi}\int_b^c\frac{q(t)}{p_0}k_5(x,t)dt-\frac{1}{\pi}\frac{\mu_2}{\mu_1}k_6(x)-\frac{1}{\beta}=0 \qquad (246)$$

$\sigma'_{y_2}(x,h_2)$ ifadesini sıfır yapan β değeri kritik yük faktörü (β_{cr}), (246) nolu ifadenin sıfır olduğu yerde kritik ayrılma uzaklığı (x_{cr}) olarak adlandırılmıştır. Tabakalar arasında temasın sürekli olabilmesi için $\beta < \beta_{cr}$ olması gerekir.

$\sigma'_{y_2}(x,h_2)$ ifadesinde geçen q(t) daha önceden belirlenmiş olan rijit blok üstündeki temas gerilmesidir.

2.4.2. Tabakalar Arasında Sürtünme Bulunmaması Durumu

İki tabakaya ait ara yüzeyde sürtünme bulunması durumunda yukarıda yapılan işlemlerin benzeri, ara yüzeyde sürtünme bulunmaması durumunda da yapılmıştır.

A_2^*, B_2^*, C_2^* ve D_2^* katsayıları $\sigma'_{y_2}(x,h_2)$ ifadesinde yerlerine yazılıp dış yükler nedeniyle ortaya çıkacak düşey gerilme bileşeni elde edilmiş, bu gerilmeye de kütle kuvvetlerinden doğacak düşey gerilme eklenerek (246) nolu denkleme benzer

$$\frac{\sigma'_{y_2}(x,h_2)}{p_0}=-\frac{1}{\pi}\int_b^c\frac{q(t)}{p_0}k_7(x,t)dt-\frac{1}{\pi}\frac{\mu_2}{\mu_1}k_8(x)-\frac{1}{\beta}=0 \qquad (247)$$

(247) nolu denklem elde edilmiştir. Bu ifadede geçen $k_7(x,t)$ ve $k_8(x)$

$$k_7(x,t)=\int_0^\infty\Big[(1+\kappa_2)\big[(-1+\alpha h_2)\big[e^{(-2\alpha h-\alpha h_2)}(4\alpha^2(-h+h_2)(-h+h_2)+2)-e^{(-3\alpha h_2)}-e^{(-4\alpha h+\alpha h_2)}\big]$$
$$+(1+\alpha h_2)\big[e^{(-2\alpha h+\alpha h_2)}(4\alpha^2(-h+h_2)(-h+h_2)+2)-e^{(-\alpha h_2)}-e^{(-4\alpha h+3\alpha h_2)}\big]\big]\Big]\big[\cos\alpha(t+x)$$
$$+\cos\alpha(t-x)\big]\frac{d\alpha}{\Delta^*} \qquad (248)$$

$$k_8(x)=\int_0^\infty\Big[-(1+\kappa_1)\big[(-1+\alpha(-h+h_2))\big[e^{(-\alpha h-\alpha h_2)}(4\alpha^2h_2{}^2+2)-e^{(-\alpha h+\alpha h_2)}-e^{(-\alpha h-3\alpha h_2)}\big]+(1+\alpha($$

$$-h+h_2))\left[e^{(-3\alpha h+\alpha h_2)}(4\alpha^2 h_2^{\,2}+2)-e^{(-3\alpha h+3\alpha h_2)}-e^{(-3\alpha h-\alpha h_2)}\right]\Big]\Big][\sin\alpha(a+x)+\sin\alpha(a-x)]$$
$$\frac{d\alpha}{\alpha\Delta^*} \qquad (249)$$

olarak belirlenmiştir. $q(t)$ daha önceden belirlenmiş temas gerilmesidir.

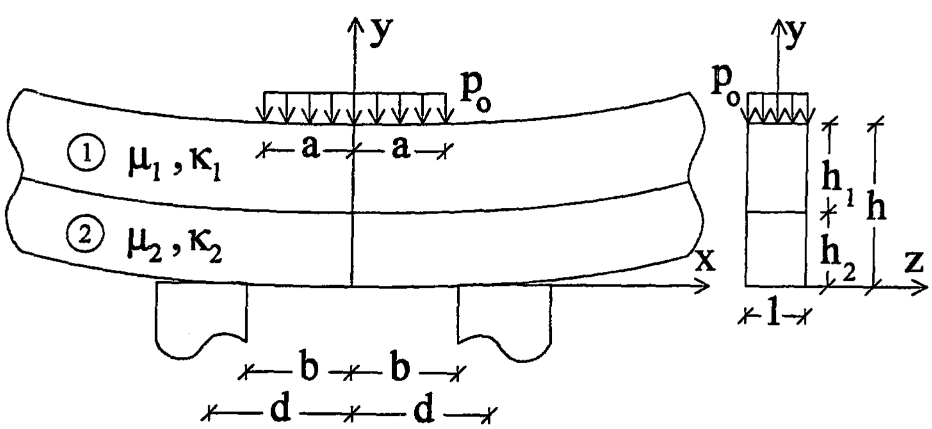
Bundan sonra β yük faktörü yerine yük, ilk ayrılmayı meydana getiren kritik yük faktörü β_{cr} yerine de kritik yük deyimleri kullanılacaktır.

2.5. Süreksiz Temas

Rijit düz bloklar üzerine oturan bileşik tabakada süreksiz temas problemi iki durum için ayrı ayrı incelenmiştir. Bunlardan birincisi bileşik tabaka ile rijit düz bloklar arasındaki süreksizlik, ikincisi ise iki elastik tabakaya ait ara yüzeyde meydana gelecek süreksizliktir.

2.5.1. Bileşik Tabaka ile Rijit Düz Bloklar Arasındaki Süreksizlik

Yük genişliği yanında mesnet açıklığı yeterince büyük olduğunda veya mesnet açıklığı yanında yük genişliği yeterince küçük olduğunda, bileşik tabaka ile rijit düz blokların dış kenarları arasında ayrılma meydana gelmektedir.



Şekil 2. Yayılı basınç yükü etkisindeki bileşik tabaka ile rijit düz bloklar arasındaki süreksizlik durumu

Bu durumda rijit düz bloklar üzerinde meydana gelecek temas gerilmesi dağılımının ve simetri ekseni y boyunca ortaya çıkacak diğer gerilme bileşenlerinin belirlenebilmesi için (107), (108), (175) ve (176) nolu eşitlikler ile verilen sınır şartlarındaki $b < x < c$ aralığı $b < x < d$ olarak değiştirilirse

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{y_2}(x,0) = -q(x) \\ \sigma_{y_2}(x,0) = 0 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} b<x<d \\ 0 \le x < b, d < x < \infty \end{Bmatrix} \tag{250}$$

$$\frac{\partial v_2(x,0)}{\partial x} = 0 \qquad b<x<d \tag{251}$$

yazılabilir. Bu iki denklem ile sürekli temas durumunda verilen diğer sınır şartları problemin çözümünde aynen kullanılabilir. d bileşik tabakanın rijit düz bloklardan ayrıldığı noktanın y ekseninden uzaklığını göstermektedir. Böylece sürekli temasta iki elastik tabakaya ait ara yüzeyde sürtünme bulunması durumunda elde edilen A_i, B_i, C_i ve D_i $(i = 1,2)$ katsayıları ile, sürtünmenin bulunmaması durumunda elde edilen A_i^*, B_i^*, C_i^* ve D_i^* $(i = 1,2)$ katsayıları burada da kullanılabilecektir.

2.5.1.2. İntegral Denklemin Elde Edilmesi ve Çözümü

Bileşik tabaka ile rijit düz bloklar arasında ayrılma olması durumunda, tabakalar arasında sürtünme bulunması ve bulunmaması halleri için integral denklemlerin elde edilmesinde izlenecek yol ve kullanılan katsayılar (152) ve (212) nolu integral denklemlerin elde edilmesinde izlenen yolun ve kullanılan katsayıların aynısıdır. (251) nolu sınır şartı kullanılacak olursa integral denklem

$$\int_b^d \left[\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x} + \frac{2}{(1+\kappa_2)} k^*(x,t)\right] q(t)d(t) =$$

$$-\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{2p_0}{(1+\kappa_2)} k^{**}(x) \qquad b < x < d \tag{252}$$

denge şartı ise

$$\int_{b}^{d} q(x)dx = ap_o \qquad (253)$$

olarak yazılabilir. (252) nolu integral denklemde $k^{*}(x,t)$ ve $k^{**}(x)$ çekirdekleri sırasıyla tabakalar arasında sürtünme bulunması durumunda $k_1(x,t)$ ve $k_2(x)$, tabakalar arasında sürtünme bulunmaması durumunda ise $k_3(x,t)$ ve $k_4(x)$ olarak alınmıştır. Bu çekirdekler daha önce tanımlanmışlardır.

İntegral denklemin sayısal çözümü için $\alpha = h/z$ değişken dönüşümü yapılıp, (155)-(159) ve (215)-(219) nolu eşitlikler ile daha önceden tanımlanan boyutsuz büyüklüklerde c yerine d konulup, (252) nolu integral denklemde ve (253) nolu denge şartında yerlerine yazılırlarsa

$$\int_{-1}^{1} g(s)ds\left[\frac{1}{s-r}-\frac{1}{(s+r)+\dfrac{2(d+b)}{(d-b)}}+\frac{(d-b)}{h}\frac{1}{(1+\kappa_2)}k^{*}(r,s)\right]=$$
$$-\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{2}{(1+\kappa_2)}k^{**}(r) \qquad (-1<r<1) \qquad (254)$$

$$\int_{-1}^{1} g(s)ds = \frac{2a}{d-b} \qquad (255)$$

eşitlikleri elde edilir. (254) ve (255) nolu ifadelerde geçen g(s) rijit blok üzerinde ortaya çıkan boyutsuz temas gerilmesidir. Rijit bloğun bileşik tabakadan ayrıldığı noktada temas gerilmesi 0 dır. Rijit bloğun iç kenarında ise temas gerilmesi sonsuza gideceğinden integral denklemin indeksi 0 olur [85]. İntegral denklemin indeksinin sıfır olması durumunda denklemin çözümü

$$g(s) = G(s)(1-s)^{\frac{1}{2}}(1+s)^{-\frac{1}{2}} \qquad (256)$$

şeklinde aranır ve uygun Gauss-Chebyshev integrasyon formülü kullanılacak olursa (254) ve (255) nolu denklemler

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{2\pi(1-s_i)}{(2n+1)}\left[\frac{1}{s_i-r_j}-\frac{1}{(s_i+r_j)+\dfrac{2(d+b)}{(d-b)}}+\frac{(d-b)}{h}\frac{1}{(1+\kappa_2)}k^{*}(r_j,s_i)\right]G(s_i)$$

$$=-\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{2}{(1+\kappa_2)}k^{**}(r_j) \qquad (j=1,.....n) \qquad (257)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{2\pi(1-s_i)}{(2n+1)}G(s_i)=\frac{2a}{d-b}, \qquad (258)$$

şeklinde yazılabilir [85]. (257) ve (258) nolu denklemlerde geçen s_i ve r_j aşağıdaki gibi tanımlanmıştır [85].

$$s_i=\cos\left(\frac{2i}{2n+1}\pi\right) \qquad (i=1,.....,n) \qquad (259)$$

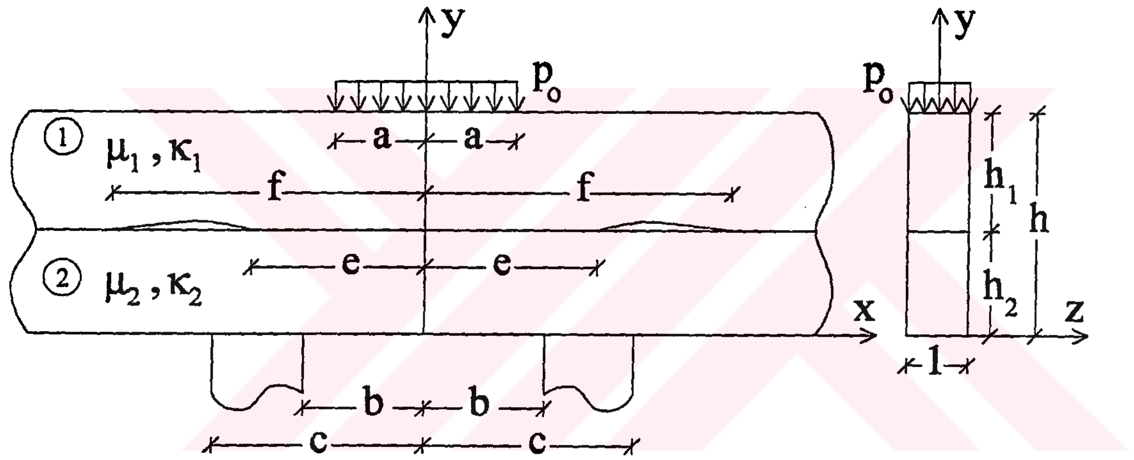
$$r_j=\cos\left(\frac{2j-1}{2n+1}\pi\right) \qquad (j=1,.....,n) \qquad (260)$$

Böylece bilinmeyen temas gerilmeleri ile (d-b) temas bölgesinin belirlenebilmesi için (n+1) bilinmeyenli (n+1) lineer cebrik denklem takımı elde edilmiş olur. Temas gerilmeleri ve bileşik tabaka ile rijit düz bloğun temas ettiği son nokta olan d' nin bulunabilmesi için şu yol izlenir. Önce seçilen bir d değeri için (257) nolu denklemden temas gerilmeleri hesaplanır, bulunan temas gerilmeleri (258) nolu denklemde yerlerine yazılarak denklemin sağlanıp sağlanmadığı kontrol edilir. Denklem sağlanmıyorsa d değerine artımlar verilerek (258) nolu denklem sağlanıncaya kadar işleme devam edilir.

Tabakalar arasında sürtünme bulunmaması durumunda q(x) temas gerilmesi dağılımı elde edildiğinde A_i, B_i, C_i ve D_i $(i=1,2)$ katsayıları, sürtünme bulunması durumunda temas gerilmesi dağılımı elde edildiğinde de A_i^*, B_i^*, C_i^* ve D_i^* $(i=1,2)$ katsayıları belirlenmiş olur. Dolayısıyla her iki durum için bileşik tabakanın herhangi bir noktasındaki σ_{x_i}, σ_{y_i} ve τ_{xy_i} gerilme bileşenleri hesaplanabilir.

2.5.2. İki Elastik Tabakaya Ait Ara Yüzeyde Meydana Gelecek Süreksizlik

İki elastik tabakaya ait ara yüzeyin herhangi bir yerinde ayrılma olduğunda ara yüzey boyunca tabakalar arasındaki $\sigma'_{y_i}(x,h_2)$ gerilme bileşeni ayrılma bölgesinde sıfır olmakta, düşey yerdeğiştirmeler farkı da artık birbirine eşit olmamaktadır. Bu durumda ise, sürekli temas probleminin çözümü için kullanılan sınır şartları artık geçerli olmayacaktır. İki elastik tabakaya ait ara yüzeydeki süreksizlik incelenirken, tabakalar arasında sürtünmenin bulunmadığı kabul edilmiştir. Tabakalara ait kütle kuvvetleri ise hesaplarda dikkate alınmıştır.



Şekil 3. Elastik tabakalara ait ara yüzeyde süreksizliği bulunan düzgün yayılı yüklü bileşik tabaka

2.5.2.1. Sınır Şartları

Tabakalara ait ara yüzeyde ayrılma meydana gelebilmesi için yükün, ilk ayrılmayı meydana getirecek yükten daha büyük değerler alması gerekir. Eğer $\beta > \beta_{cr}$ ise bu durumda sürekli temasta koşulan (103) nolu sınır şartı

$$\frac{\partial[v_1(x,h_2) - v_2(x,h_2)]}{\partial x} = 0$$

artık geçerli olmayacaktır. Bu durumda tabakaların birbirlerinden ayrıldıkları (e, f) aralığında düşey yerdeğiştirmeler farkının türevi $\varphi(x)$ gibi bilinmeyen bir fonksiyona eşit alınmıştır. Bu fonksiyonun integrali ise (e, f) aralığında tabakalar arasındaki ayrılmayı verecektir. İki elastik tabakaya ait ara yüzeyde süreksizlik bulunması halinde, tabakalar arasında sürtünme de yoksa kullanılacak sınır şartları aşağıda verilmiştir.

$$\tau_{xy_1}(x,h) = 0 \qquad 0 \le x < \infty \qquad (261)$$

$$\sigma_{y_1}(x,h) = -p_o \qquad 0 \le x < a \qquad (262)$$

$$\tau_{xy_1}(x,h_2) = 0 \qquad 0 \le x < \infty \qquad (263)$$

$$\tau_{xy_2}(x,h_2) = 0 \qquad 0 \le x < \infty \qquad (264)$$

$$\frac{\partial[v_1(x,h_2) - v_2(x,h_2)]}{\partial x} = \varphi(x) \qquad e < x < f \qquad (265)$$

$$\sigma'_{y_1}(x,h_2) = \sigma'_{y_2}(x,h_2) \qquad 0 \le x < \infty \qquad (266)$$

$$\tau_{xy_2}(x,0) = 0 \qquad 0 \le x < \infty \qquad (267)$$

$$\sigma_{y_2}(x,0) = -q(x) \qquad b < x < c \qquad (268)$$

$$\frac{\partial v_2(x,0)}{\partial x} = 0 \qquad b < x < c \qquad (269)$$

$$\sigma'_{y_1}(x,h_2) = \sigma'_{y_2}(x,h_2) = 0 \qquad e < x < f \qquad (270)$$

Probleme ait denge şartı

$$\int_b^c q(x)dx = ap_o \tag{271}$$

iken tek değerlilik şartı ise

$$\int_e^f \varphi(x)dx = 0 \tag{272}$$

olarak yazılabilir.

2.5.2.2. Katsayıların Belirlenmesi

Süreksiz temasla ilgili olarak (261)-(268) nolu eşitliklerle verilen sınır şartlarında gerilme ve yerdeğiştirme ifadelerinin uygulanması sonucu 8 tane cebrik denklem takımı elde edilmiştir. Bu denklem takımında bilinmeyenler A_i^{**}, B_i^{**}, C_i^{**} ve D_i^{**} $(i=1,2)$ katsayılarıdır.

$$-\alpha e^{-2\alpha h}A_1^{**}+\left[-\alpha h-\left(\frac{\kappa_1-1}{2}\right)\right]e^{-2\alpha h}B_1^{**}+\alpha C_1^{**}+\left[\alpha h-\left(\frac{\kappa_1-1}{2}\right)\right]D_1^{**}=0 \tag{273}$$

$$-\alpha e^{-2\alpha h}A_1^{**}+\left[-\alpha h-\left(\frac{1+\kappa_1}{2}\right)\right]e^{-2\alpha h}B_1^{**}-\alpha C_1^{**}+\left[-\alpha h+\left(\frac{1+\kappa_1}{2}\right)\right]D_1^{**}=$$

$$\frac{-e^{-\alpha h}}{2\mu_1}\int_0^\infty p_0\cos(\alpha x)dx=\frac{-e^{-\alpha h}}{2\mu_1}\int_0^a p_0\cos(\alpha t)dt \tag{274}$$

$$-\alpha e^{-2\alpha h_2}A_1^{**}+\left[-\alpha h_2-\left(\frac{\kappa_1-1}{2}\right)\right]e^{-2\alpha h_2}B_1^{**}+\alpha C_1^{**}+$$

$$\left[\alpha h_2-\left(\frac{\kappa_1-1}{2}\right)\right]D_1^{**}=0 \tag{275}$$

$$e^{-2\alpha h_2}A_1^{**}+\left(\frac{\kappa_1}{\alpha}+h_2\right)e^{-2\alpha h_2}B_1^{**}-C_1^{**}+\left(\frac{\kappa_1}{\alpha}-h_2\right)D_1^{**}-$$

$$e^{-2\alpha h_2}A_2^{**}+\left(-\frac{\kappa_2}{\alpha}-h_2\right)e^{-2\alpha h_2}B_2^{**}+C_2^{**}+\left(-\frac{\kappa_2}{\alpha}+h_2\right)D_2^{**}=$$

$$-\frac{e^{(-\alpha h_2)}}{\alpha}\int_0^{\infty}\varphi(x)\sin(\alpha x)dx=-\frac{e^{(-\alpha h_2)}}{\alpha}\int_e^{f}\varphi(t)\sin(\alpha t)dt \qquad (276)$$

$$-\alpha e^{-2\alpha h_2}A_1^{**}+\left[-\alpha h_2-\left(\frac{1+\kappa_1}{2}\right)\right]e^{-2\alpha h_2}B_1^{**}-\alpha C_1^{**}+\left[-\alpha h_2+\left(\frac{1+\kappa_1}{2}\right)\right]D_1^{**}+$$

$$\alpha\frac{\mu_2}{\mu_1}e^{-2\alpha h_2}A_2^{**}+\left[\alpha h_2+\left(\frac{1+\kappa_2}{2}\right)\right]\frac{\mu_2}{\mu_1}e^{-2\alpha h_2}B_2^{**}+$$

$$\alpha\frac{\mu_2}{\mu_1}C_2^{**}+\left[\alpha h_2-\left(\frac{1+\kappa_2}{2}\right)\right]\frac{\mu_2}{\mu_1}D_2^{**}=0 \qquad (277)$$

$$-\alpha e^{-2\alpha h_2}A_2^{**}+\left[-\alpha h_2-\left(\frac{\kappa_2-1}{2}\right)\right]e^{-2\alpha h_2}B_2^{**}+\alpha C_2^{**}+$$

$$\left[\alpha h_2-\left(\frac{\kappa_2-1}{2}\right)\right]D_2^{**}=0 \qquad (278)$$

$$-\alpha A_2^{**}+\left(\frac{1-\kappa_2}{2}\right)B_2^{**}+\alpha C_2^{**}+\left(\frac{1-\kappa_2}{2}\right)D_2^{**}=0 \qquad (279)$$

$$-\alpha A_2^{**}-\left(\frac{\kappa_2+1}{2}\right)B_2^{**}-\alpha C_2^{**}+\left(\frac{\kappa_2+1}{2}\right)D_2^{**}=$$

$$\frac{-1}{2\mu_2}\int_0^{\infty}q(x)\cos(\alpha x)dx=\frac{-1}{2\mu_2}\int_b^{c}q(t)\cos(\alpha t)dt \qquad (280)$$

Bu denklem sisteminin çözümünden elde edilen A_i^{**}, B_i^{**}, C_i^{**} ve D_i^{**} $(i=1,2)$ katsayıları, temas gerilmesi q(x)' e ve tabakalar arasındaki açılmanın eğimini veren fonksiyon φ(x)' e bağlı olarak aşağıdaki gibi belirlenmiştir.

$$\alpha A_{1_L}^{*}=\frac{L\alpha m}{2\Delta^{*}}\left[(1-2\alpha h_2-\kappa_1)\right]\left[e^{(-\alpha h_2)}(2+4\alpha^2h_2^{\,2})-e^{(\alpha h_2)}-e^{(-3\alpha h_2)}\right]+\left[(1+2\alpha(-h+h_2))(2\alpha h+\right.$$

$$\left.\kappa_1)-1\right]\left[e^{(-2\alpha h+\alpha h_2)}(2+4\alpha^2h_2^{\,2})-e^{(-2\alpha h+3\alpha h_2)}-e^{(-2\alpha h-\alpha h_2)}\right]\Big] \qquad (281)$$

$$\alpha A_1^{**} = \alpha A_{1_P}^{*} + \alpha A_{1_T}^{*} + \alpha A_{1_L}^{*} \tag{282}$$

$$B_{1_L}^{*} = -\frac{L\alpha m}{\Delta^*}\Big[(1+2\alpha(-h+h_2))\big[e^{(-2\alpha h+\alpha h_2)}(2+4\alpha^2 h_2{}^2) - e^{(-2\alpha h+3\alpha h_2)} - e^{(-2\alpha h-\alpha h_2)}\big] - \big[e^{(-\alpha h_2)}(2+4\alpha^2 h_2{}^2) - e^{(\alpha h_2)} - e^{(-3\alpha h_2)}\big]\Big] \tag{283}$$

$$B_1^{**} = B_{1_P}^{*} + B_{1_T}^{*} + B_{1_L}^{*} \tag{284}$$

$$\alpha C_{1_L}^{*} = \frac{L\alpha m}{2\Delta^*}\Big[(1+2\alpha h_2 - \kappa_1)\big[e^{(-4\alpha h+\alpha h_2)}(2+4\alpha^2 h_2{}^2) - e^{(-4\alpha h-\alpha h_2)} - e^{(-4\alpha h+3\alpha h_2)}\big] + \big[-1+2\alpha h(-1-2\alpha h+\kappa_1) + 2\alpha h_2(2\alpha h-\kappa_1)+\kappa_1\big]\big[e^{(-2\alpha h-\alpha h_2)}(2+4\alpha^2 h_2{}^2) - e^{(-2\alpha h-3\alpha h_2)} - e^{(-2\alpha h+\alpha h_2)}\big]\Big] \tag{285}$$

$$\alpha C_1^{**} = \alpha C_{1_P}^{*} + \alpha C_{1_T}^{*} + \alpha C_{1_L}^{*} \tag{286}$$

$$D_{1_L}^{*} = -\frac{L\alpha m}{\Delta^*}\Big[(-1+2\alpha(-h+h_2))\big[-e^{(-2\alpha h-3\alpha h_2)} + e^{(-2\alpha h-\alpha h_2)}(2+4\alpha^2 h_2{}^2) - e^{(-2\alpha h+\alpha h_2)}\big] + \big[e^{(-4\alpha h+\alpha h_2)}(2+4\alpha^2 h_2{}^2) - e^{(-4\alpha h-\alpha h_2)} - e^{(-4\alpha h+3\alpha h_2)}\big]\Big] \tag{287}$$

$$D_1^{**} = D_{1_P}^{*} + D_{1_T}^{*} + D_{1_L}^{*} \tag{288}$$

$$\alpha A_{2_L}^{*} = \frac{L\alpha}{2\Delta^*}\Big[(1-2\alpha h_2-\kappa_2)\big[e^{(-2\alpha h-\alpha h_2)}\big[4\alpha^2(-h+h_2)(-h+h_2)+2\big] - e^{(-3\alpha h_2)} - e^{(-4\alpha h+\alpha h_2)}\big] + (-1+\kappa_2(1+2\alpha h_2))\big[e^{(-2\alpha h+\alpha h_2)}\big[4\alpha^2(-h+h_2)(-h+h_2)+2\big] - e^{(-\alpha h_2)} - e^{(-4\alpha h+3\alpha h_2)}\big]\Big] \tag{289}$$

$$\alpha A_2^{**} = \alpha A_{2_P}^{*} + \alpha A_{2_T}^{*} + \alpha A_{2_L}^{*} \tag{290}$$

$$B_{2_L}^{*} = -\frac{L\alpha}{\Delta^*}\Big[(1+2\alpha h_2)\big[e^{(-2\alpha h+\alpha h_2)}\big[4\alpha^2(-h+h_2)(-h+h_2)+2\big] - e^{(-\alpha h_2)} - e^{(-4\alpha h+3\alpha h_2)}\big] - \big[e^{(-2\alpha h-\alpha h_2)}(4\alpha^2(-h+h_2)(-h+h_2)+2) - e^{(-3\alpha h_2)} - e^{(-4\alpha h+\alpha h_2)}\big]\Big] \tag{291}$$

$$B_2^{**} = B_{2_P}^{*} + B_{2_T}^{*} + B_{2_L}^{*} \tag{292}$$

$$\alpha C_{2_L}^{*} = \frac{L\alpha}{2\Delta^*}\Big[(-1+\kappa_2(1-2\alpha h_2))\big[e^{(-2\alpha h-\alpha h_2)}\big[4\alpha^2(-h+h_2)(-h+h_2)+2\big]-e^{(-3\alpha h_2)}-e^{(-4\alpha h+\alpha h_2)}\big]+(1-\kappa_2+2\alpha h_2)\big[e^{(-2\alpha h+\alpha h_2)}\big[4\alpha^2(-h+h_2)(-h+h_2)+2\big]-e^{(-\alpha h_2)}-e^{(-4\alpha h+3\alpha h_2)}\big]\Big] \tag{293}$$

$$\alpha C_2^{**} = \alpha C_{2_P}^{*} + \alpha C_{2_T}^{*} + \alpha C_{2_L}^{*} \tag{294}$$

$$D_{2_L}^{*} = -\frac{L\alpha}{\Delta^*}\Big[(-1+2\alpha h_2)\big[\big[4\alpha^2(-h+h_2)(-h+h_2)+2\big]e^{(-2\alpha h-\alpha h_2)} - e^{(-3\alpha h_2)} - e^{(-4\alpha h+\alpha h_2)}\big]+\big[\big[4\alpha^2(-h+h_2)(-h+h_2)+2\big]e^{(-2\alpha h+\alpha h_2)} - e^{(-\alpha h_2)} - e^{(-4\alpha h+3\alpha h_2)}\big]\Big] \tag{295}$$

$$D_2^{**} = D_{2_P}^{*} + D_{2_T}^{*} + D_{2_L}^{*} \tag{296}$$

Bu denklemlerde geçen Δ^*, $A_{i_P}^*$, $A_{i_T}^*$, $B_{i_P}^*$, $B_{i_T}^*$, $C_{i_P}^*$, $C_{i_T}^*$, $D_{i_P}^*$ ve $D_{i_T}^*$ $(i = 1,2)$ katsayı bileşenleri bölüm 2.3.2.2.' de verilmiştir. Yukarıdaki ifadelerde bulunan L büyüklüğü ise

$$L = -\frac{1}{\alpha}\int_e^f \varphi(t)\sin(\alpha t)dt \tag{297}$$

olarak tanımlanmıştır.

2.5.2.3. İntegral Denklemlerin Elde Edilmesi

İki elastik tabakaya ait ara yüzeyde ayrılma meydana gelmesi durumunda, sınır şartlarından elde edilen A_i^{**}, B_i^{**}, C_i^{**} ve D_i^{**} $(i = 1,2)$ katsayıları $q(x)$ ve $\varphi(x)$ gibi bilinmeyen iki fonksiyona bağlı olarak belirlenmiştir. Bu iki fonksiyonun bulunabilmesi için kullanılmayan (269) ve (270) nolu

$$\frac{\partial v_2(x,0)}{\partial x} = 0 \quad (b<x<c) \quad \text{ve} \quad \sigma'_{y_2}(x,h_2)=0 \quad (e<x<f)$$

sınır şartlarından faydalanılacaktır. A_2^{**}, B_2^{**}, C_2^{**} ve D_2^{**} katsayıları $\partial v_2(x,y)/\partial x'$ de yerlerine yazılırlarsa

$$\frac{\partial v_2(x,y)}{\partial x}=\frac{1}{\mu_2\pi}\int_b^c q(t)dt\int_0^\infty\Big[e^{(-\alpha y)}\big[\alpha A_{2_T}^{*}+(\kappa_2+\alpha y)B_{2_T}^{*}\big]+e^{(\alpha y)}\big[-\alpha C_{2_T}^{*}+(\kappa_2-\alpha y)D_{2_T}^{*}\big]\Big]$$

$$\cos(\alpha t)\sin(\alpha x)d\alpha+\frac{2}{\pi}\int_e^f \varphi(t)dt\int_0^\infty\Big[e^{(-\alpha y)}\big[\alpha A_{2_L}^{*}+(\kappa_2+\alpha y)B_{2_L}^{*}\big]+e^{(\alpha y)}\big[-\alpha C_{2_L}^{*}+(\kappa_2-\alpha y)$$

$$D_{2_L}^{*}\big]\Big]\sin(\alpha t)\sin(\alpha x)\frac{d\alpha}{\alpha}+\frac{p_o}{\pi\mu_1}\int_0^\infty\Big[e^{(-\alpha y)}\big[\alpha A_{2_P}^{*}+(\kappa_2+\alpha y)B_{2_P}^{*}\big]+e^{(\alpha y)}\big[-\alpha C_{2_L}^{*}+(\kappa_2-\alpha$$

$$y)D_{2_P}^{*}\big]\Big]\sin(\alpha a)\sin(\alpha x)\frac{d\alpha}{\alpha} \tag{298}$$

elde edilir. (298) nolu denklemde $y\to 0$ limitine geçilirken pay paydaya bölündüğünde, ortaya çıkan ıraksak, integral denklemin yakınsamasını bozan singüler terimler aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$-\int_0^\infty\left[\left(\frac{1+\kappa_2}{2}\right)+\alpha y\right]e^{(-\alpha y)}\cos(\alpha t)\sin(\alpha x)d\alpha \tag{299}$$

Daha önceden de bahsedildiği gibi (298) nolu integral denklemden yakınsamayı bozan bu tekil terimler çıkartılmalı, bu terimlerin kapalı integralleri alındıktan sonra limit işlemine geçilmelidir.

$$\frac{\partial v_2(x,0)}{\partial x}=\frac{-1}{2\pi\mu_2}\lim_{y\to 0}\int_b^c q(t)dt\int_0^\infty\left[\left(\frac{1+\kappa_2}{2}\right)+\alpha y\right]e^{(-\alpha y)}\left[\sin\alpha(t+x)-\sin\alpha(t-x)\right]d\alpha+$$

$$\frac{1}{2\pi\mu_2}\int_b^c q(t)dt\int_0^\infty\left[\left[\alpha A_{2_T}^{*}+\kappa_2 B_{2_T}^{*}\right]+\left[-\alpha C_{2_T}^{*}+\kappa_2 D_{2_T}^{*}\right]+\frac{(1+\kappa_2)}{2}\right]\left[\sin\alpha(t+x)-\sin\alpha(t-x)\right]$$

$$d\alpha+\frac{1}{\pi}\int_e^f \varphi(t)\,dt\int_0^\infty\left[\left[\alpha A_{2_L}^{*}+\kappa_2 B_{2_L}^{*}\right]+\left[-\alpha C_{2_L}^{*}+\kappa_2 D_{2_L}^{*}\right]\right]\left[\cos\alpha(t-x)-\cos\alpha(t+x)\right]\frac{d\alpha}{\alpha}+\frac{p_0}{2\pi\mu_1}$$

$$\int_0^\infty\left[\left[\alpha A_{2_P}^{*}+\kappa_2 B_{2_P}^{*}\right]+\left[-\alpha C_{2_P}^{*}+\kappa_2 D_{2_P}^{*}\right]\right]\left[\cos\alpha(a-x)-\cos\alpha(a+x)\right]\frac{d\alpha}{\alpha}=0 \tag{300}$$

(300) nolu denklemdeki

$$-\int_0^\infty \left[\left(\frac{1+\kappa_2}{2}\right)+\alpha y\right]e^{(-\alpha y)}[\sin\alpha(t+x)-\sin\alpha(t-x)]d\alpha \qquad (301)$$

integralinin, kapalı integrali interal dönüşüm tabloları yardımıyla alınırsa

$$-\int_0^\infty \left[\left(\frac{1+\kappa_2}{2}\right)+\alpha y\right]e^{(-\alpha y)}[\sin\alpha(t+x)-\sin\alpha(t-x)]d\alpha=-\frac{(1+\kappa_2)}{2}$$
$$\left[\frac{(t+x)}{y^2+(t+x)^2}-\frac{(t-x)}{y^2+(t-x)^2}\right]-y\frac{2y(t+x)}{\left(y^2+(t+x)^2\right)^2}+y\frac{2y(t-x)}{\left(y^2+(t-x)^2\right)^2} \qquad (302)$$

elde edilir [84]. Bu denklemde $y \to 0$ limitine geçilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa (300) nolu integral denklem aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$\int_b^c\left[\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x}+\frac{2}{(1+\kappa_2)}k_3(x,t)\right]q(t)d(t)+\frac{2}{(1+\kappa_2)}2\mu_2\int_e^f k_9(x,t)\varphi(t)dt=$$
$$-\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{2p_o}{(1+\kappa_2)}k_4(x) \qquad (b<x<c) \qquad (303)$$

İntegral denklemde geçen $k_3(x,t)$ ve $k_4(x)$ çekirdekleri sırasıyla (213) ve (214) nolu eşitliklerle tanımlanmıştır. $k_9(x,t)$ çekirdeği ise aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$k_9(x,t)=\int_0^\infty -(1+\kappa_2)\big[(-1+\alpha h_2)\big[e^{(-2\alpha h-\alpha h_2)}\big[4\alpha^2(-h+h_2)(-h+h_2)+2\big]-e^{(-3\alpha h_2)}-e^{(-4\alpha h+\alpha h_2)}\big]+($$
$$1+\alpha h_2)\big[e^{(-2\alpha h+\alpha h_2)}\big[4\alpha^2(-h+h_2)(-h+h_2)+2\big]-e^{(-\alpha h_2)}-e^{(-4\alpha h+3\alpha h_2)}\big]\big]\big[\cos\alpha(t-x)-$$
$$\cos\alpha(t+x)\big]\frac{d\alpha}{\Delta^*} \qquad (304)$$

Bilinmeyen fonksiyonlar $q(x)$ ve $\varphi(x)$' in belirlenmesinde kullanılacak ikinci denklem ise

$$\sigma'_{y_2}(x,h_2)=0 \qquad (e<x<f) \qquad (305)$$

(305) nolu eşitliktir. A_2^{**}, B_2^{**}, C_2^{**} ve D_2^{**} katsayıları kütle kuvvetlerinin dikkate alınmadığı durumda ortaya çıkacak $\sigma_{y_2}(x,y)$ düşey gerilme ifadesinde yerlerine yazılırlarsa

$$\sigma_{y_2}(x,y)=-\frac{2}{\pi}\int_b^c q(t)dt\int_0^\infty \Big[e^{(-\alpha y)}\big[-\alpha A^*_{2_T}-[\alpha y+0.5(1+\kappa_2)]B^*_{2_T}\big]-e^{(\alpha y)}\big[\alpha C^*_{2_T}+[\alpha y-0.5(1+\kappa_2$$

$$)]D^*_{2_T}\big]\Big]\cos(\alpha t)\cos(\alpha x)d\alpha-\frac{4\mu_2}{\pi}\int_e^f \varphi(t)dt\int_0^\infty\Big[e^{(-\alpha y)}\big[-\alpha A^*_{2_L}-[\alpha y+0.5(1+\kappa_2)]B^*_{2_L}\big]-e^{(\alpha y)}$$

$$\big[\alpha C^*_{2_L}+[\alpha y-0.5(1+\kappa_2)]D^*_{2_L}\big]\Big]\sin(\alpha t)\cos(\alpha x)\frac{d\alpha}{\alpha}-\frac{2}{\pi}\frac{\mu_2}{\mu_1}p_o\int_0^\infty\Big[e^{(-\alpha y)}\big[-\alpha A^*_{2_P}-[\alpha y+0.5(1$$

$$+\kappa_2)]B^*_{2_P}\big]-e^{(\alpha y)}\big[\alpha C^*_{2_P}+[\alpha y-0.5(1+\kappa_2)]D^*_{2_P}\big]\Big]\sin(\alpha a)\cos(\alpha x)\frac{d\alpha}{\alpha} \qquad (306)$$

elde edilir. (306) nolu denklemde $y \to h_2$ limitine geçilirken, pay paydaya bölündüğünde integral denklemde ortaya çıkan tekil terimler ise

$$\int_0^\infty e^{-\alpha(h_2-y)}\left[-\frac{2}{(\kappa_2+m)+(1+\kappa_1 m)}\right][1+\alpha(h_2-y)]\sin(\alpha t)\cos(\alpha x)d\alpha \qquad (307)$$

olarak belirlenmiştir. Yakınsamayı bozan bu terimler (306) nolu integral denklemden çıkartılmalı (307) nolu eşitliğin kapalı integrali alındıktan sonra $y \to h_2$ limitine geçilmelidir.

$$\sigma_{y_2}(x,h_2)=\frac{2\mu_2}{\pi}\lim_{y\to h_2}\int_e^f\varphi(t)dt\int_0^\infty\left[\frac{2}{(\kappa_2+m)+(1+\kappa_1 m)}[1+\alpha(h_2-y)]\right]e^{-\alpha(h_2-y)}[\sin\alpha$$

$$(t+x)+\sin\alpha(t-x)]d\alpha-\frac{1}{\pi}\int_b^c q(t)dt\int_0^\infty\Big[e^{(-\alpha h_2)}\big[-\alpha A^*_{2_T}-[\alpha h_2+0.5(1+\kappa_2)]B^*_{2_T}\big]-e^{(\alpha h_2)}$$

$$\big[\alpha C^*_{2_T}+[\alpha h_2-0.5(1+\kappa_2)]D^*_{2_T}\big]\Big][\cos\alpha(t+x)+\cos\alpha(t-x)]d\alpha-\frac{2\mu_2}{\pi}\int_e^f\varphi(t)dt\int_0^\infty\Big[\frac{e^{(-\alpha h_2)}}{\alpha}$$

$$\big[-\alpha A^*_{2_L}-[\alpha h_2+0.5(1+\kappa_2)]B^*_{2_L}\big]-\frac{e^{(\alpha h_2)}}{\alpha}\big[\alpha C^*_{2_L}+[\alpha h_2-0.5(1+\kappa_2)]D^*_{2_L}\big]+$$

$$\frac{2}{(\kappa_2+m)+(1+\kappa_1 m)}\Big][\sin\alpha(t+x)+\sin\alpha(t-x)]d\alpha-\frac{1}{\pi}\frac{\mu_2}{\mu_1}p_o\int_0^\infty\Big[e^{(-\alpha h_2)}\big[-\alpha A^*_{2_P}-$$

$$[\alpha h_2+0.5(1+\kappa_2)]B^*_{2_p}\big]-e^{(\alpha h_2)}\big[\alpha C^*_{2_p}+[\alpha h_2-0.5(1+\kappa_2)]D^*_{2_p}\big]\big][\sin\alpha(a+x)-\sin\alpha$$

$$(a-x)]\frac{d\alpha}{\alpha} \qquad (308)$$

(308) nolu denklemde geçen

$$\int_0^\infty e^{-\alpha(h_2-y)}\left[\frac{2}{(\kappa_2+m)+(1+\kappa_1 m)}[1+\alpha(h_2-y)]\right][\sin\alpha(t+x)+\sin\alpha(t-x)]d\alpha \quad (309)$$

(309) nolu eşitlik ile ifade edilen integralin, tablolar yardımıyla kapalı integrali alınırsa

$$\int_0^\infty e^{-\alpha(h_2-y)}\left[\frac{2}{(\kappa_2+m)+(1+\kappa_1 m)}\right][1+\alpha(h_2-y)][\sin\alpha(t+x)+\sin\alpha(t-x)]d\alpha=$$

$$\left[\frac{2}{(\kappa_2+m)+(1+\kappa_1 m)}\right]\left[\left[\frac{t+x}{(h_2-y)^2+(t+x)^2}+\frac{t-x}{(h_2-y)^2+(t-x)^2}\right]+(h_2-y)\right.$$

$$\left.\left[\frac{2(h_2-y)(t+x)}{[(h_2-y)^2+(t+x)^2]^2}+\frac{2(h_2-y)(t-x)}{[(h_2-y)^2+(t-x)^2]^2}\right]\right] \qquad (310)$$

yazılabilir [84]. Elde edilen kapalı integralde y yerine h_2 yazılıp, sadeleştirmeler gerçekleştirildiğinde (308) nolu integral denklem aşağıdaki formda yazılabilir.

$$\sigma_{y_2}(x,h_2)=-\int_b^c k_7(x,t)q(t)dt-2\mu_2\int_e^f\left[\frac{2}{(\kappa_2+m)+(1+\kappa_1 m)}\left[-\frac{1}{t+x}-\frac{1}{t-x}\right]+k_{10}(x,t)\right]$$

$$\varphi(t)dt-\frac{\mu_2}{\mu_1}p_o k_8(x)=0 \qquad (e<x<f) \qquad (311)$$

Tabakalara ait ara yüzeyde ayrılma meydana gelen bölgede gerilmenin

$$\sigma'_{y_2}(x,h_2)=\sigma_{y_2}(x,h_2)-\rho_1 g h_1=0 \qquad (e<x<f) \qquad (312)$$

olduğu hatırlanırsa ikinci integral denklem

$$-\int_b^c k_7(x,t)q(t)dt - 2\mu_2\int_e^f\left[\frac{2}{(\kappa_2+m)+(1+\kappa_1 m)}\left[-\frac{1}{t+x}-\frac{1}{t-x}\right]+k_{10}(x,t)\right]\varphi(t)dt$$

$$=\frac{\mu_2}{\mu_1}p_o k_8(x)+\rho_1 g h_1 \qquad (e<x<f) \qquad (313)$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir. İntegral denklemdeki $k_7(x,t)$ ve $k_8(x)$ çekirdekleri (248) ve (249) nolu eşitliklerle tanımlanmıştır. $k_{10}(x,t)$ çekirdeği ise aşağıdaki gibi belirlenmiştir.

$$k_{10}(x,t)=\int_0^\infty\Big[\big[(4\alpha^2h_2{}^2+2)\big[e^{(-2\alpha h)}\big[4\alpha^2(-h+h_2)(-h+h_2)+2\big]-e^{(-2\alpha h_2)}-e^{(-4\alpha h+2\alpha h_2)}\big]-\big[4\alpha^2($$
$$-h+h_2)(-h+h_2)+2\big]e^{(-2\alpha h+2\alpha h_2)}+1+e^{(-4\alpha h+4\alpha h_2)}-e^{(-2\alpha h-2\alpha h_2)}\big[4\alpha^2(-h+h_2)(-h+$$
$$h_2)+2\big]+e^{(-4\alpha h_2)}+e^{(-4\alpha h)}\big]\frac{1}{\Delta^*}+\frac{2}{(\kappa_2+m)+(1+\kappa_1 m)}\Big]\big[\sin\alpha(t+x)+\sin\alpha(t-x)\big]$$
$$d\alpha \qquad (314)$$

2.5.2.4. Tabakalar Arasındaki Ayrılmanın Belirlenmesi

İki elastik tabakaya ait ara yüzeyde ortaya çıkan ayrılma bölgesinin belirlenebilmesi için (303) ve (313) nolu integral denklemler beraber çözülmüştür. Bu iki integral denklem bir arada aşağıda verilmiştir.

$$\int_b^c\left[\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x}+\frac{2}{(1+\kappa_2)}k_3(x,t)\right]q(t)d(t)+\frac{2}{(1+\kappa_2)}2\mu_2\int_e^f k_9(x,t)\varphi(t)dt=$$

$$-\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{2p_o}{(1+\kappa_2)}k_4(x) \qquad (b<x<c) \qquad (315)$$

$$-\int_b^c k_7(x,t)q(t)dt - 2\mu_2\int_e^f\left[\frac{2}{(\kappa_2+m)+(1+\kappa_1 m)}\left[-\frac{1}{t+x}-\frac{1}{t-x}\right]+k_{10}(x,t)\right]\varphi(t)dt$$

$$=\frac{\mu_2}{\mu_1}p_o k_8(x)+\rho_1 g h_1 \qquad (e<x<f) \qquad (316)$$

İntegral denklem takımının sayısal çözümünde $\alpha = \frac{h}{z}$ dönüşümü yapılmış ve aşağıdaki boyutsuz büyüklükler tanımlanmıştır.

$$\beta = \frac{p_o}{\rho_1 g h_1} \tag{317}$$

$$x_1 = \frac{c-b}{2} r_1 + \frac{c+b}{2} \qquad x_2 = \frac{f-e}{2} r_2 + \frac{f+e}{2} \tag{318}$$

$$t_1 = \frac{c-b}{2} s_1 + \frac{c+b}{2} \qquad t_2 = \frac{f-e}{2} s_2 + \frac{f+e}{2} \tag{319}$$

$$g_1(s_1) = \frac{q\left(\frac{c-b}{2} s_1 + \frac{c+b}{2}\right)}{p_0} \qquad g_2(s_2) = \frac{\varphi\left(\frac{f-e}{2} s_2 + \frac{f+e}{2}\right)}{p_0} \mu_2 \tag{320}$$

$$k_4(r_1) = \frac{k_4\left(\frac{c-b}{2} r_1 + \frac{c+b}{2}\right)}{p_0} \qquad k_8(r_2) = \frac{k_8\left(\frac{f-e}{2} r_2 + \frac{f+e}{2}\right)}{p_0} \tag{321}$$

$$k_3(r_1, s_1) = \frac{k_3\left(\frac{c-b}{2} r_1 + \frac{c+b}{2}, \frac{c-b}{2} s_1 + \frac{c+b}{2}\right)}{p_0} \tag{322}$$

$$k_7(r_2, s_1) = \frac{k_7\left(\frac{f-e}{2} r_2 + \frac{f+e}{2}, \frac{c-b}{2} s_1 + \frac{c+b}{2}\right)}{p_0} \tag{323}$$

$$k_9(r_1, s_2) = \frac{k_9\left(\frac{c-b}{2} r_1 + \frac{c+b}{2}, \frac{f-e}{2} s_2 + \frac{f+e}{2}\right)}{p_0} \tag{324}$$

$$k_{10}(r_2, s_2) = \frac{k_{10}\left(\frac{f-e}{2} r_2 + \frac{f+e}{2}, \frac{f-e}{2} s_2 + \frac{f+e}{2}\right)}{p_0} \tag{325}$$

Bu boyutsuz büyüklükler tekil integral denklem sisteminde yerlerine yazılırlarsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\int_{-1}^{1} g_1(s_1)d(s_1)\left[\frac{1}{s_1-r_1}-\frac{1}{(s_1+r_1)+\dfrac{2(c+b)}{(c-b)}}+\frac{(c-b)}{h}\frac{1}{(1+\kappa_2)}k_3(r_1,s_1)\right]+\frac{2}{(1+\kappa_2)}\frac{(f-e)}{h}$$

$$\int_{-1}^{1} k_9(r_1,s_2)g_2(s_2)ds_2=-\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{2}{(1+\kappa_2)}k_4(r_1) \qquad (-1<r_1<1) \qquad (326)$$

$$-\frac{(c-b)}{2h}\int_{-1}^{1} k_7(r_2,s_1)g_1(s_1)ds_1-\frac{(f-e)}{h}\int_{-1}^{1}\left[\frac{2}{(\kappa_2+m)+(1+\kappa_1 m)}\left[-\frac{1}{\dfrac{(f-e)}{2}(s_2-r_2)}-\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{1}{\dfrac{(f-e)}{2}(s_2+r_2)+(f+e)}\right]+k_{10}(r_2,s_2)\right]g_2(s_2)ds_2=$$

$$\frac{\mu_2}{\mu_1}k_8(r_2)+\frac{1}{\beta} \qquad (-1<r_2<1) \qquad (327)$$

Probleme ait (271) nolu eşitlikle verilen denge ve (272) nolu eşitlikle verilen tek değerlilik şartları ise sırasıyla

$$\int_{-1}^{1} g_1(s_1)ds_1=\frac{2a}{c-b} \qquad (328)$$

$$\int_{-1}^{1} g_2(s_2)ds_2=0 \qquad (329)$$

olarak yazılabilir. $g_1(s_1)$ ve $g_2(s_2)$ sırasıyla boyutsuz temas gerilmesi ve eğim fonksiyonlarıdır. (326) nolu integral denklemin indeksi, $s_1=\mp 1$' de $g_1(s_1)$ tekilliğe sahip olduğundan, +1' dir [85]. (327) nolu integral denklemin indeksi ise $s_2=\mp 1$' de $g_2(s_2)$ sıfır olduğundan, $-1'$ dir, ancak integral denklem takımının beraber çözümü için (327) nolu integral denklemin indeksini de +1 almak daha uygun olmaktadır [85,86,40]. Böylece her iki integral denklem için çözüm

$$g_1(s_1)=\frac{G_1(s_1)}{(1-s_1)^{\frac{1}{2}}} \qquad (-1<s_1<1) \qquad (330)$$

$$g_2(s_2)=\frac{G_2(s_2)}{(1-s_2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (-1<s_2<1) \qquad (331)$$

şeklinde aranabilir [85]. Ayrılma bölgesinin uç noktalarında düz temas elde edilebilmesi için ayrılma gayet yatık olacağından $G_2(s_2)$

$$G_2(-1)=0 \qquad G_2(+1)=0 \qquad (332)$$

koşullarını sağlamalıdır. Uygun Gauss-Chebyshev integrasyon formülleri kullanılacak olursa integral denklemler

$$\sum_{i=1}^{n} W_i G_1(s_{1_i})\left[\frac{(c-b)}{h}\frac{1}{(1+\kappa_2)}k_3(r_{1_j},s_{1_i})+\frac{1}{s_{1_i}-r_{1_j}}-\frac{1}{(s_{1_i}+r_{1_j})+\dfrac{2(c+b)}{(c-b)}}\right]+\frac{2}{(1+\kappa_2)}\frac{(f-e)}{h}$$

$$\sum_{i=1}^{n} W_i G_2(s_{2_i})k_9(r_{1_j},s_{2_i})=-\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{2}{(1+\kappa_2)}k_4(r_{1_j}) \qquad (j=1,\dots\dots n-1) \qquad (333)$$

$$-\frac{(c-b)}{2h}\sum_{i=1}^{n} W_i G_1(s_{1_i})k_7(r_{2_j},s_{1_i})-$$

$$\frac{(f-e)}{h}\sum_{i=1}^{n} W_i G_2(s_{2_i})\left[k_{10}(r_{2_j},s_{2_i})+\frac{2}{(\kappa_2+m)+(1+\kappa_1 m)}\left[-\frac{1}{\dfrac{(f-e)}{2}(s_{2_i}+r_{2_j})+(f+e)}\right.\right.$$

$$-\frac{1}{\frac{(f-e)}{2}(s_{2_i}-r_{2_j})}\Bigg]\Bigg]=\frac{\mu_2}{\mu_1}k_8(r_{2_j})+\frac{1}{\beta} \qquad (j=1,.....n-1) \qquad (334)$$

denge ve tek değerlilik şartları

$$\sum_{i=1}^{n} W_i G_1(s_{1_i})=\frac{2a}{c-b} \qquad (335)$$

$$\sum_{i=1}^{n} W_i G_2(s_{2_i})=0 \qquad (336)$$

olarak yazılabilir [85]. Bu eşitliklerde geçen W_i, s_{1_i}, s_{2_i}, r_{1_j}, r_{2_j} büyüklükleri aşağıdaki gibi tanımlanmışlardır [85].

$$W_1=W_n=\frac{\pi}{2n-2} \qquad W_i=\frac{\pi}{n-1} \qquad (i=2,....,n-1) \qquad (337)$$

$$s_{1_i}=s_{2_i}=\cos\left(\frac{i-1}{n-1}\pi\right) \qquad (i=1,.....,n) \qquad (338)$$

$$r_{1_j}=r_{2_j}=\cos\left(\frac{2j-1}{2n-2}\pi\right) \qquad (j=1,.....,n-1) \qquad (339)$$

Böylece $G_1(s_{1_i})$, $G_2(s_{2_i})$, e ve f için (333), (334), (335) ve (336) nolu eşitliklerle 2n bilinmeyenli 2n denklem takımı elde edilmiş olur. $G_2(-1)=0$ ve $G_2(+1)=0$ olduğu da unutulmamalıdır.

Eğer, $\beta>\beta_{cr}$ olmak şartıyla, alınan bir β değeri için e tahmin edilir ise (336) nolu eşitlikten f değeri bulunabilir. (e,f) aralığı dışındaki $\sigma_{y_2}(x,h_2)$ gerilmesi e,f değerleri bulunduktan sonra (316) ifadesinden elde edilebilir. Yapılan işlemlerin kontrolü ise (335) nolu ifadeden sağlanabilir. Tekil denklem takımının sayısal çözümünde izlenen iterasyon sırası şöyledir. Alınan β değeri için e, ilk ayrılmanın meydana geldiği nokta ile yayılı yük arasında bir yerde olmak üzere tahmin edilir. Ayrılma başlangıç noktasının e mesafesinde olabilmesi için (333) ve (334) nolu denklemlerin bir arada çözümünden bulunan $G_2(s_{2_i})$ değerleri (336) nolu eşitlikte yazılarak denklemin sağlanıp sağlanmadığı kontrol edilir. Denklem sağlanmıyorsa f' ye artımlar verilerek işleme devam edilir. (336) nolu eşitlik sağlandığında (335) nolu eşitlikte sağlanmış olmalıdır. Alınan β değeri ve e değeri ile f değeri bulunduğunda, (e,f) aralığı dışındaki temas yüzeyinde $\sigma_{y_2}(x,h_2)$ gerilme yayılışı elde edilir.

Önemli bir başka büyüklük olan (e,f) ayrılma bölgesinde $v_1(x,h_2)-v_2(x,h_2)$ yerdeğiştirmeler farkı, yani iki elastik tabakaya ait ara yüzeyde meydana gelen ayrılmanın belirlenebilmesi için (264) nolu sınır şartı veya

$$v^*(x,h_2)=v_1(x,h_2)-v_2(x,h_2)=\int_e^x \varphi(t)dt \qquad (e<x<f) \qquad (340)$$

(340) nolu eşitlik kullanılacaktır. Aşağıda tanımlanan

$$x=\frac{f-e}{2}\xi+\frac{f+e}{2} \qquad (341)$$

$$t=\frac{f-e}{2}\eta+\frac{f+e}{2} \qquad (342)$$

$$G_2(\eta)=\frac{\mu_2\varphi(t)}{p_o} \qquad (343)$$

boyutsuz büyüklükleri, (340) nolu denklemde yerlerine yazılırlarsa

$$\frac{\mu_2 v^*(x,h_2)}{p_o}=\frac{(f-e)}{2h}\int_{-1}^{\xi} G_2(\eta)d\eta \qquad (344)$$

elde edilir. (344) nolu integral denklemin indeksi de +1 alınırsa

$$\frac{\mu_2 v^*(x,h_2)}{p_o}=\frac{(f-e)}{2h}\sum_{w=2}^{i-1} W_i G_2(\eta_w) \qquad (i=2,.....,n-1) \qquad (345)$$

yazılabilir [85]. (345) nolu eşitlikte geçen η_w, ξ_i büyüklükleri ise

$$\xi_i=\cos\left(\frac{(2i-1)}{2n-2}\pi\right) \qquad (i=2,.....,n-1) \qquad (346)$$

$$\eta_w=\cos\left(\frac{w-1}{n-1}\pi\right) \qquad (w=2,.....,n-1) \qquad (347)$$

olarak tanımlanmaktadır [85]. Böylece (345) nolu denklemden tabakalara ait ara yüzeyde meydana gelen ayrılma belirlenebilir.

Bütün bu yapılan çalışmalarda gerek katsayıların elde edilmesinde gerekse integral denklemlerin sayısal çözümünde FORTRAN dilinde yazılmış basit bilgisayar programlarından faydalanılmıştır.

3. BULGULAR VE İRDELEME

3.1. Giriş

Bu başlık altında, yük genişliği (a/h), malzeme özellikleri (μ_2/μ_1), mesnet açıklığı (b/h) ve mesnet genişliği $((c-b)/h)$ gibi çeşitli boyutsuz büyüklükler için bölüm 2' de elde edilen ifadeler yardımıyla, rijit blok üzerindeki temas gerilmesi $(q(x)/p_o)$, y simetri ekseninde ortaya çıkan σ_x ve σ_y normal gerilmeleri ile y simetri ekseni yakınında ortaya çıkan τ_{xy} kayma gerilmeleri yanısıra, iki elastik tabaka arasında ilk ayrılmayı meydana getirecek yükler (β_{cr}) ve ilk ayrılma uzaklıkları (x_{cr}) incelenmiştir. İlk ayrılma yükü ve bu yükten büyük yükler (β) için tabakalara ait ara yüzeydeki düşey gerilme dağılışları ve elastik tabakalar arasındaki ayrılma bölgeleri $((f-e)/h)$ araştırılmıştır. Ayrıca bileşik tabaka ile rijit bloklar arasında ayrılma meydana gelmesi durumu da çözülmüş ve gerilme dağılışları belirlenmiştir.

İncelenen bütün bu durumlara ait grafikler bu başlık altında verilirken, sürekli temasta ve rijit düz bloklarla bileşik tabaka arasında ayrılma meydana gelmesi durumunda grafiklerde elastik tabakalara ait ara yüzeyde sürtünme bulunması ve bulunmaması halleri bir arada irdelenmiştir. Bu grafiklerde sürekli çizgi ile iki elastik tabakaya ait ara yüzeyde sürtünme bulunması haline, kesik çizgi ile de tabakalara ait ara yüzeyde sürtünme bulunmaması haline ait değerler verilmiştir.

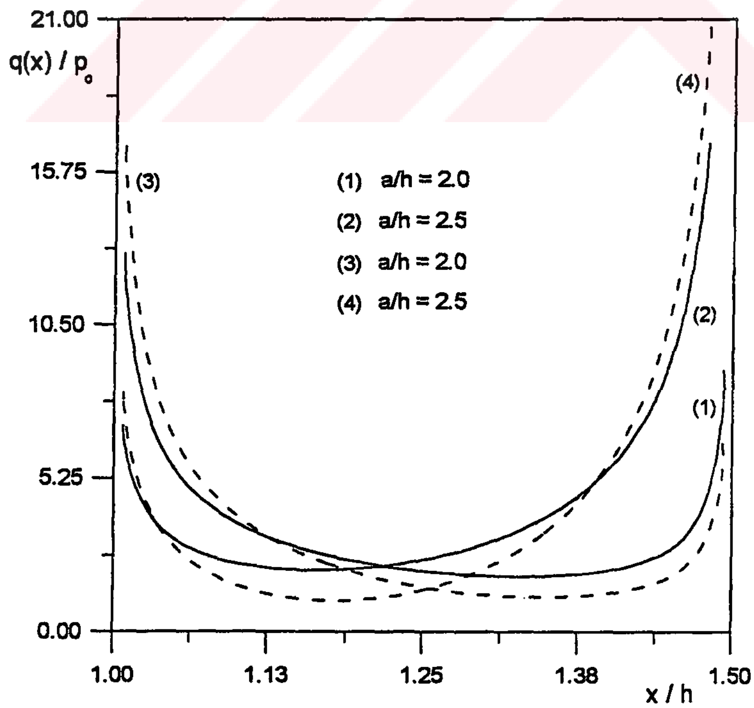
3.2. Rijit Blok Üzerindeki Temas Gerilmelerinin İrdelenmesi

Rijit blok üzerindeki temas gerilmesi iki durumda incelenmiştir. Bunlardan birincisi bileşik tabaka ile rijit bloklar arasında ayrılma bulunmaması, ikincisi ise bileşik tabaka ile rijit düz bloklar arasında ayrılma meydana gelmesi durumlarıdır.

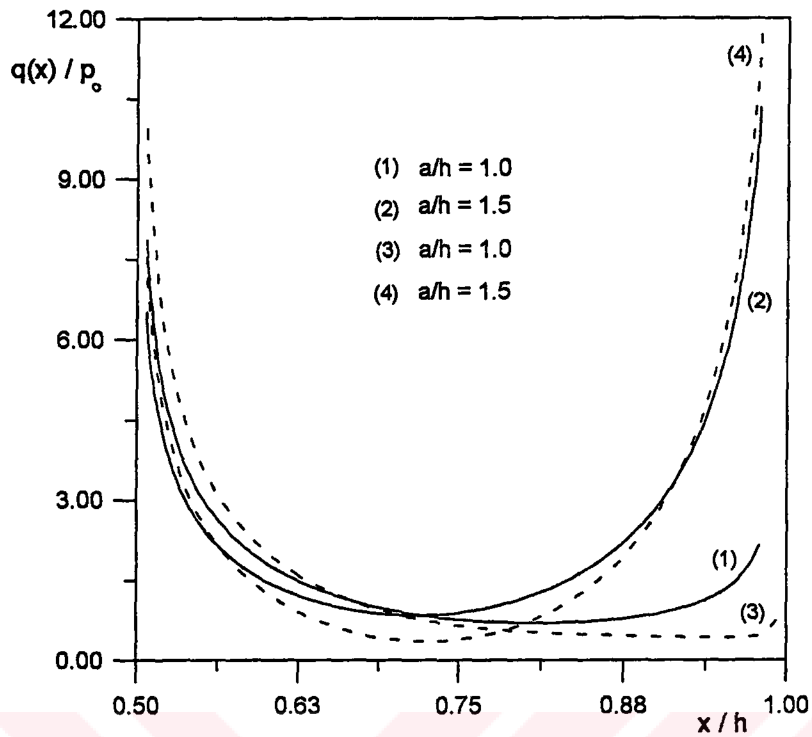
3.2.1. Bileşik Tabaka ile Rijit Bloklar Arasında Sürekli Temas Hali

İki elastik tabakaya ait ara yüzeyde sürtünme bulunması halinde bölüm 2.3.1.3' de, tabakalara ait ara yüzeyde sürtünme bulunmaması halinde ise bölüm 2.3.2.3' de elde edilen integral denklemler, sırasıyla bölüm 2.3.1.4 ve bölüm 2.3.2.4' de verilen Gauss-Chebyshev integrasyon formülleri yardımıyla sayısal olarak ayrı ayrı çözülmüş, rijit blok üzerindeki temas gerilmesi dağılımının, yük genişliği, malzeme özellikleri, mesnet açıklığı ve mesnet genişliği gibi boyutsuz büyüklükler için çizilen grafikleri aşağıda verilmiştir. Grafiklerde sürekli çizgi ile iki elastik tabakaya ait ara yüzeyde sürtünme bulunması, kesik çizgi ile de tabakalara ait ara yüzeyde sürtünme bulunamaması hallerinde elde edilen gerilme dağılımları bir arada verilmiştir.

Şekil 4 ve Şekil 5' de rijit blok üzerindeki temas gerilmesinin a/h yük genişliği ile değişimi görülmektedir. Yük genişliği a/h' nın küçük değerleri için rijit bloğun iç kenarı b/h yakınında ortaya çıkan gerilme değerleri, rijit bloğun dış kenarı c/h yakınında ortaya çıkan gerilme değerlerinden daha büyük, a/h' nın büyük değerleri için ise b/h yakınında ortaya çıkan gerilme değerleri, c/h yakınında ortaya çıkan gerilme değerlerinden daha küçük olmaktadır. Bunun sebebi a/h' nın küçük değerlerinde bileşik tabaka ile rijit bloğun dış kenarında, a/h' nın büyük değerlerinde ise bileşik tabaka ile rijit bloğun iç kenarındaki ayrılma eğilimidir.



Şekil 4. Rijit blok üzerindeki temas gerilmesinin yük genişliği a/h ile değişimi ($b/h=1$, $c/h=1.5$, $\mu_2/\mu_1=2.75$, $h_2/h=0.5$)

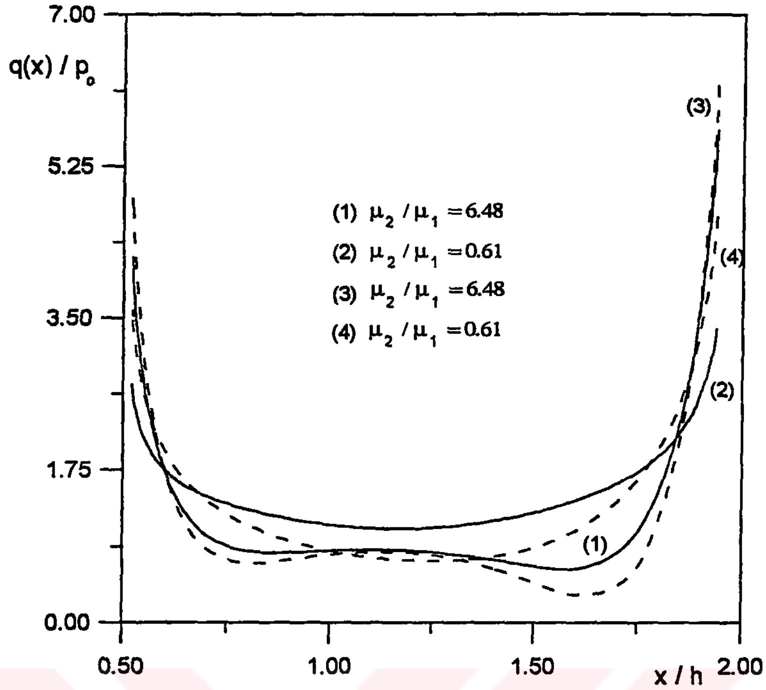


Şekil 5. Rijit blok üzerindeki temas gerilmesinin yük genişliği a/h ile değişimi ($b/h=0.5$, $c/h=1$, $\mu_2/\mu_1=6.48$, $h_2/h=0.3$)

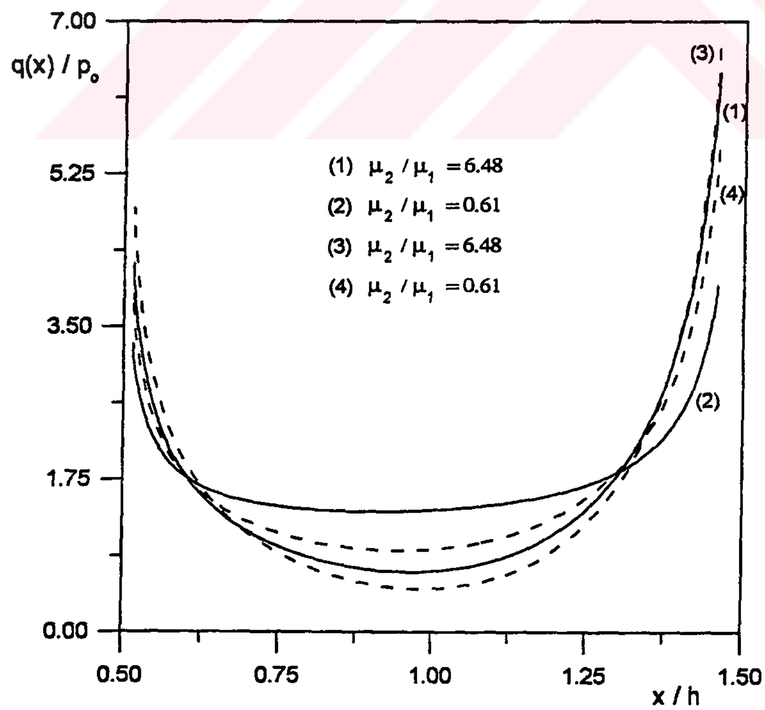
Bu durum hem elastik tabakalar arasında sürtünme bulunması hem de elastik tabakalar arasında sürtünme bulunmaması durumları için aynıdır.

Elastik tabakalar arasında sürtünme yokken, bileşik tabaka ile rijit bloklar arasında ayrılma daha kolay meydana gelmektedir. Örneğin Şekil 5' de yük genişliği $a/h=0.5$ olduğunda, tabakalar arasında sürtünme yokken, rijit bloğun dış kenarında $c/h=0.579$' da, sürtünme varken ise $c/h=0.774$' de ayrılma ortaya çıkmaktadır. Rijit bloğun iç kenarı b/h' da ise, tabakalar arasında sürtünme yokken $a/h=2$, sürtünme varken ise $a/h=2.5$ olduğunda ayrılma gözlenmektedir.

Temas gerilmesi dağılımını etkileyen faktörlerden bir diğeri de malzeme özellikleridir. Rijit blok üzerindeki gerilme yayılışının malzeme özellikleri ile değişimi Şekil 6 ve Şekil 7' de verilmiştir. Şekillerden de görüleceği üzere alttaki tabakanın rijitliğinin üstteki tabakaya oranla giderek arttırılması durumunda, blok kenarlarına yakın bölgede gerilme dağılışlarında, elastik tabakalar arasında sürtünme bulunması ve bulunmaması hallerinde artış meydana gelmektedir.



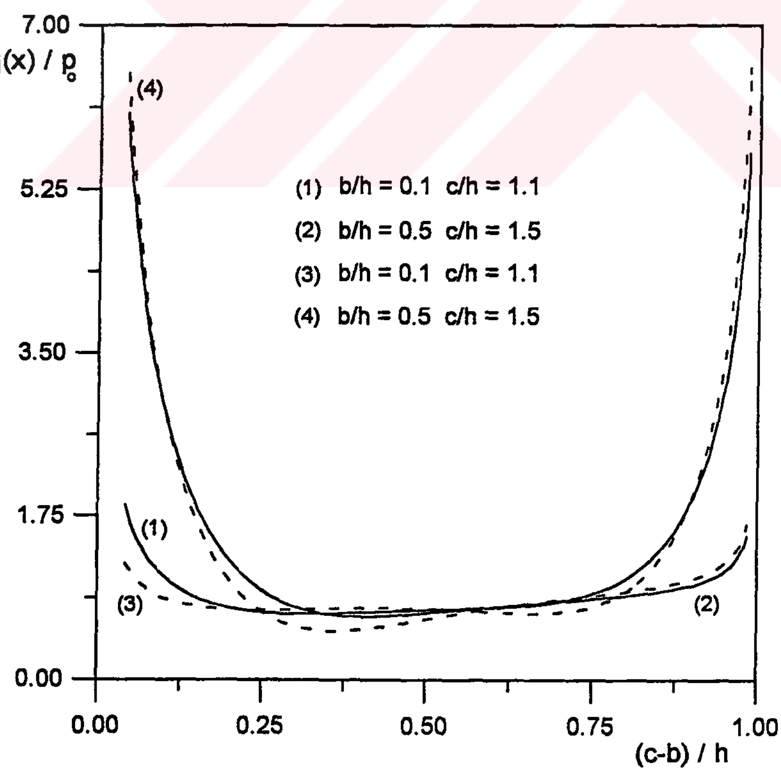
Şekil 6. Rijit blok üzerindeki temas gerilmesinin malzeme sabiti μ_2/μ_1 ile değişimi ($a/h=2.5$, $b/h=0.5$, $c/h=2$, $h_2/h=0.3$)



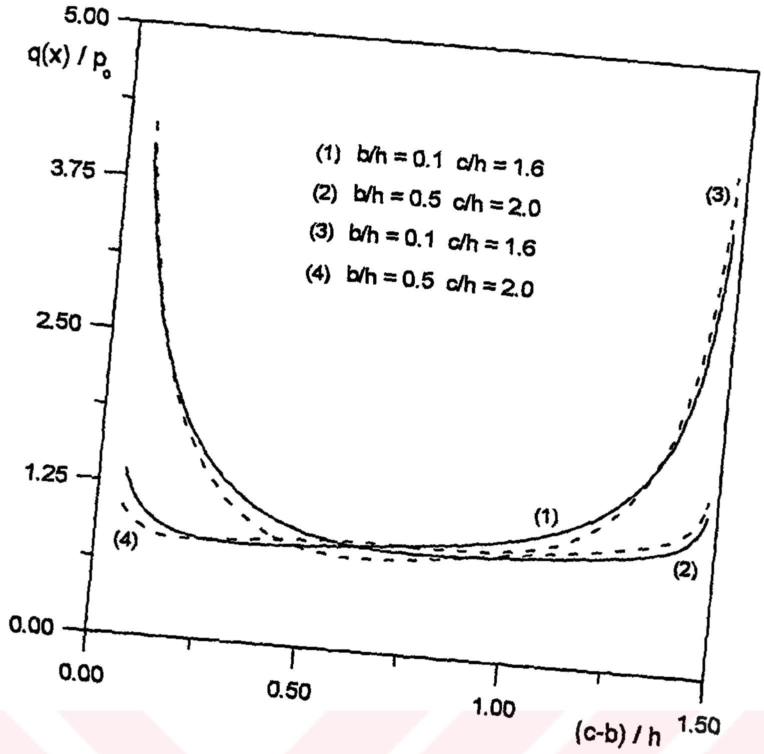
Şekil 7. Rijit blok üzerindeki temas gerilmesinin malzeme sabiti μ_2/μ_1 ile değişimi ($a/h=2$, $b/h=0.5$, $c/h=1.5$, $h_2/h=0.5$)

Mesnet açıklığı giderek büyüdüğünde tabakalar arasında sürtünme bulunması veya bulunmaması durumlarında, temas gerilmesi rijit bloğun dış kenarına doğru giderek azalmakta ve bileşik tabaka ile rijit bloklar arasında, rijit bloğun dış kenarı c/h ' da ayrılma eğilimi gözlenmektedir. Mesnet açıklığı küçük olduğunda ise eğer yük genişliği de yeterince büyük ise ayrılma eğilimi bu kez rijit bloğun iç kenarı b/h ' da ortaya çıkmaktadır (Şekil 8 ve Şekil 9). Tabakalar arasında sürtünme bulunması durumunda, bileşik tabaka ile rijit bloklar arasındaki ayrılma daha zor olmaktadır. Örneğin Şekil 8' de mesnet genişliği $(c-b)/h=1$ olmak üzere, mesnet açıklığı arttırılıp $b/h=1$ yapıldığında, elastik tabakalar arasında sürtünme bulunmazken, bileşik tabaka rijit düz bloklardan $c/h=1.0494$ ' de ayrılırken, tabakalar arasında sürtünme bulunması durumunda ise bileşik tabaka ile rijit düz bloklar arsındaki ayrılma $c/h=1.186$ ' da ortaya çıkmaktadır.

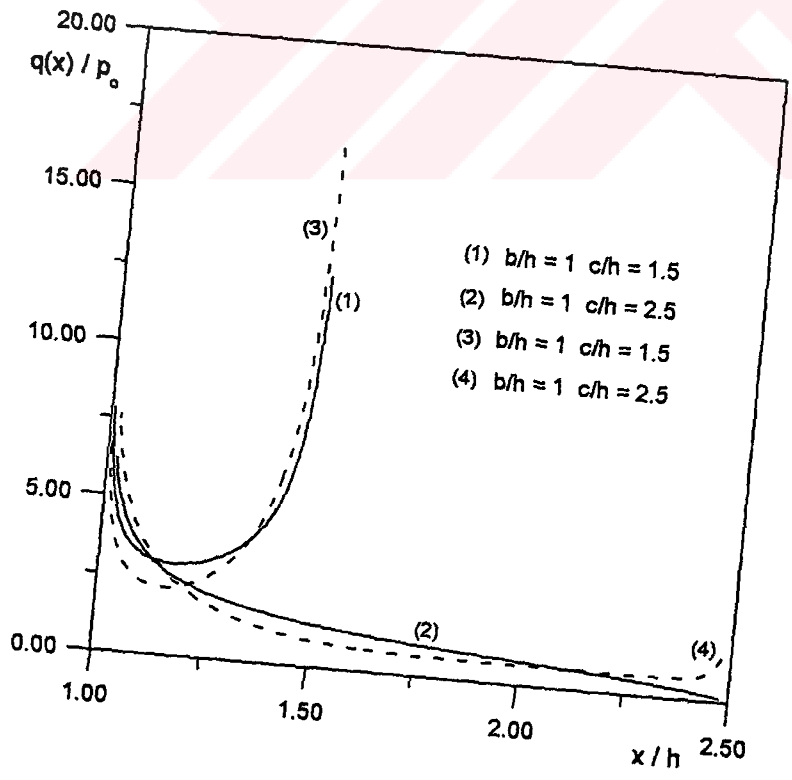
Şekil 10 ve Şekil 11' de ise temas gerilmesi dağılımının mesnet genişliğine bağlı olarak değişimi görülmektedir. Mesnet genişliği artıkça temas gerilmesi rijit düz bloğun dış kenarı c/h yakınında iyice azalmakta ve ayrılma eğilimi gözlenmektedir.



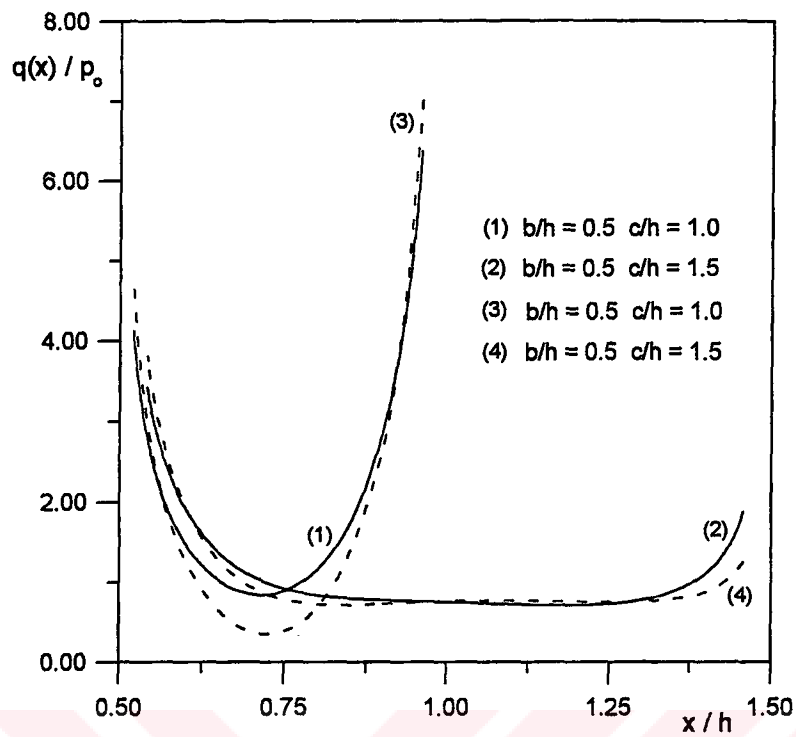
Şekil 8. Rijit blok üzerindeki temas gerilmesinin mesnet açıklığı b/h ile değişimi ($a/h=1.5$, $\mu_2/\mu_1=6.48$, $h_2/h=0.3$)



Şekil 9. Rijit blok üzerindeki temas gerilmesinin mesnet açıklığı b/h ile değişimi ($a/h=2$, $\mu_2/\mu_1=2.75$, $h_2/h=0.5$)



Şekil 10. Rijit blok üzerindeki temas gerilmesinin mesnet genişliği $(c-b)/h$ ile değişimi ($a/h=2.5$, $\mu_2/\mu_1=0.61$, $h_2/h=0.7$)



Şekil 11. Rijit blok üzerindeki temas gerilmesinin mesnet genişliği $(c-b)/h$ ile değişimi $(a/h=1.5,\ \mu_2/\mu_1=6.48,\ h_2/h=0.3)$

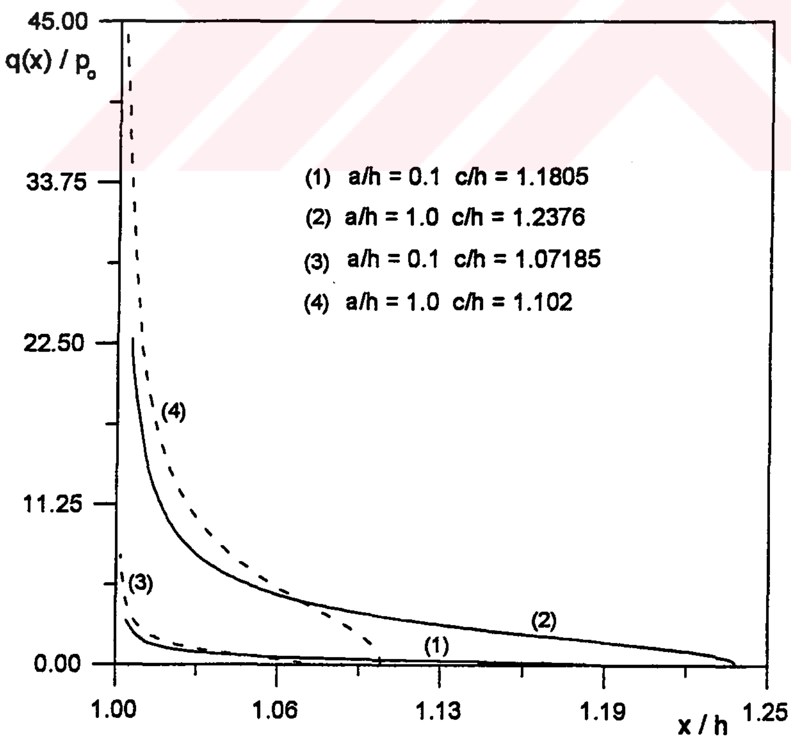
3.2.2. Bileşik Tabaka ile Rijit Bloklar Arasındaki Süreksiz Temas Hali

Mesnet açıklığı yanında yük genişliği yeterince küçük olursa veya yük genişliği yanında mesnet açıklığı yeterince büyük olduğunda, bileşik tabaka ile rijit düz blokların dış kenarları arasında ayrılma meydana gelmektedir.

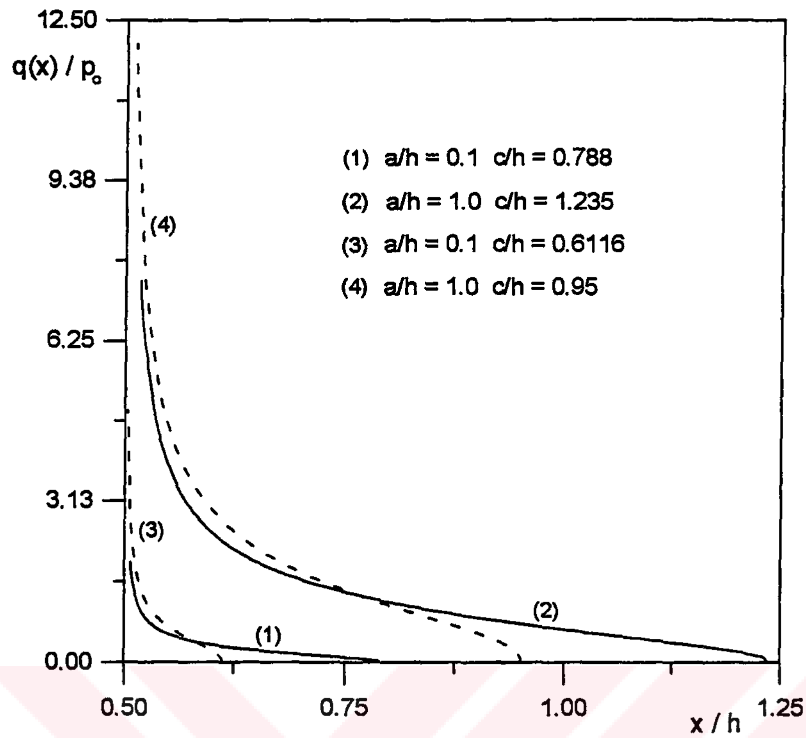
Bileşik tabaka ile rijit düz blokların dış kenarlarında ayrılma olması durumunda, bölüm 2.3' de elde edilen integral denklemlerin, bölüm 2.5.1.2' de sayısal olarak çözülmesi sonucu, rijit blok üstündeki temas gerilmesi dağılımının, yük genişliği, malzeme özellikleri ve mesnet açıklığı gibi boyutsuz büyüklükler için çizilen grafikleri aşağıda verilmiştir.

Temas gerilmelerinin yük genişliği a/h ile değişimi Şekil 12 ve Şekil 13' de incelenmiştir. Yük genişliği arttıkça rijit bloğun iç kenarı b/h yakınında ortaya çıkan gerilme değerleri, iki elastik tabaka arasında sürtünme bulunması veya bulunmaması durumlarında giderek artmaktadır. Yük genişliği daha da arttırıldığında ise b/h kenarı yakınında gerilme değerlerinde azalma gözlenmekte, rijit bloğun dış kenarındaki ayrılma ortadan kalkarken, iç kenarda ayrılma eğilimi ortaya çıkmaktadır. Yük genişliği arttırıldığında bileşik tabaka ile rijit bloklar arasındaki temas alanı büyümektedir. Örneğin Şekil 13' de yük genişliği $a/h = 0.1$ iken elastik tabakalar arasında sürtünme bulunması halinde, bileşik tabaka ile rijit bloklar arasındaki temas alanı $(c-b)/h = 0.288$ olurken, yük genişliği $a/h = 1$ olduğunda, bu değer $(c-b)/h = 0.735$ olmaktadır. Elastik tabakalar arasında sürtünme bulunmazken ise, yük genişliği $a/h = 0.1$ olduğunda temas alanı $(c-b)/h = 0.1116$, yük genişliği arttırılıp $a/h = 1$ olduğunda ise temas alanı $(c-b)/h = 0.45$ olmaktadır. Şekillerden de görüldüğü gibi tabakalar arasında sürtünme bulunmaması durumunda rijit bloğun b/h kenarında elde edilen gerilme değerleri, sürtünme bulunması durumunda elde edilen gerilme değerlerinden, gerilmeler daha küçük bir temas alanına yayıldığından, daha büyük olmaktadır.

Rijit blok üstündeki temas gerilmesi dağılımın malzeme özellikleri ile değişimi Şekil 14 ve Şekil 15' de incelenmiştir. Alttaki tabakanın üstteki tabakaya göre daha sert olması durumunda elde edilen rijit blok üzerindeki temas gerilmesi dağılımı, alttaki tabakanın üstteki tabakaya göre giderek yumuşamasıyla azalmakta, bileşik tabaka ile rijit düz bloklar



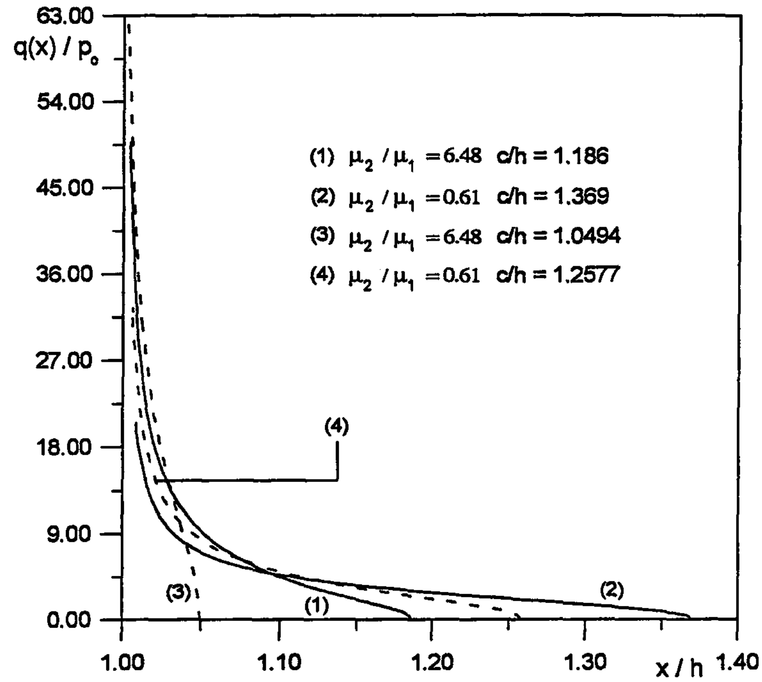
Şekil 12. Bileşik tabakanın rijit bloklardan ayrılması durumunda rijit blok üzerindeki temas gerilmesinin yük genişliği a/h ile değişimi ($b/h=1$, $\mu_2/\mu_1=0.61$, $h_2/h=0.7$)



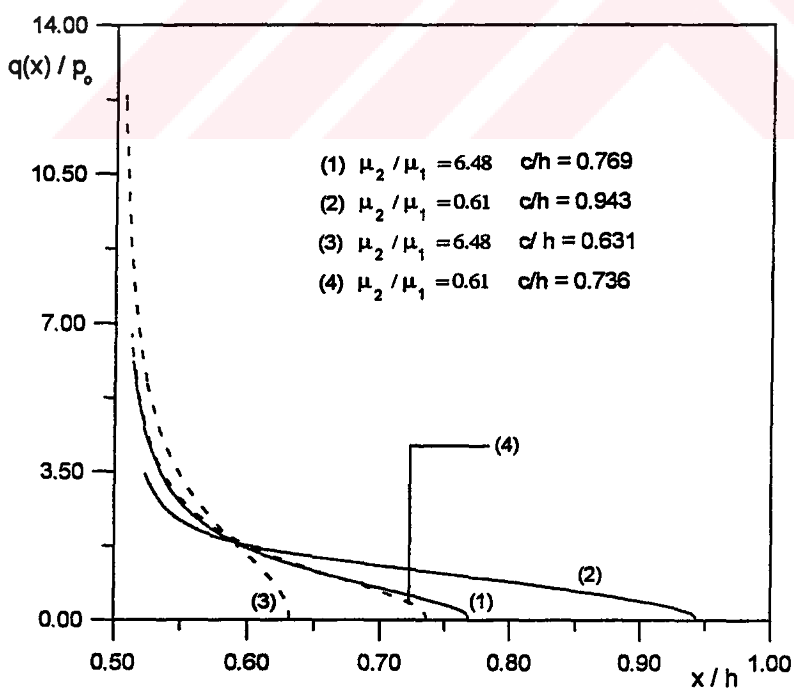
Şekil 13. Bileşik tabakanın rijit bloklardan ayrılması durumunda rijit blok üzerindeki temas gerilmesinin yük genişliği a/h ile değişimi (b/h=0.5, μ_2/μ_1=2.75, h_2/h=0.5)

arasındaki temas alanı ise artmaktadır. Tabakalar arasında sürtünme bulunması ve bulunmaması hallerinde aynı durum gözlenmiştir. Bunun yanında tabakalar arasında sürtünme bulunması durumunda elde edilen $(c-b)/h$ temas alanı, tabakalar arasında sürtünme bulunmaması durumunda elde edilen temas alanından daha büyük olmaktadır. Örneğin Şekil 14' de $\mu_2/\mu_1 = 6.48$ olduğunda, elastik tabakalar arasında sürtünme bulunması durumunda elde edilen temas alanı $(c-b)/h = 0.186$, sürtünme bulunmaması durumunda elde edilen temas alanı da $(c-b)/h$=0.0494 olmaktadır. $\mu_2/\mu_1 = 0.61$ iken de temas alanları tabakalar arasında sürtünme bulunması durumunda $(c-b)/h = 0.369$, sürtünme bulunmaması durumunda da $(c-b)/h = 0.2577$ olarak ortaya çıkmaktadır.

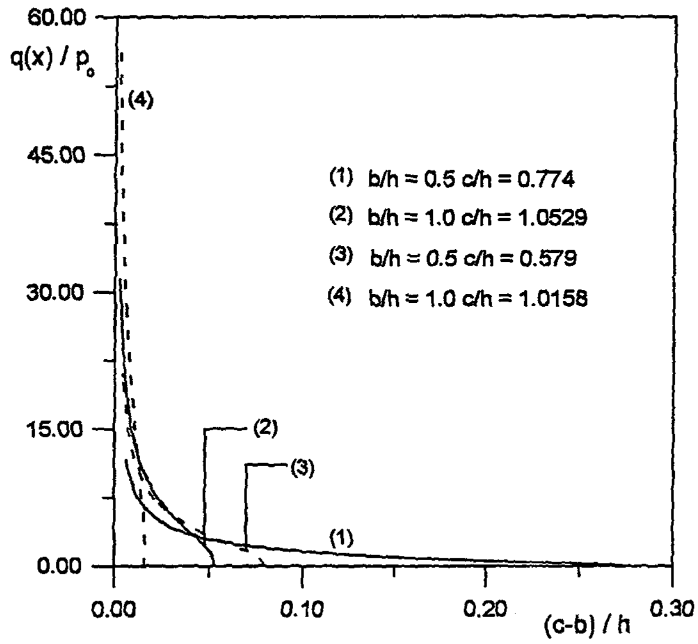
Mesnet açıklığı giderek arttırıldığında, tabakalar arasında sürtünme bulunması veya bulunmaması hallerinde, rijit blok ile bileşik tabaka arasındaki temas alanında azalma meydana gelmekte bunun sonucu olarak temas gerilmeleri daha küçük bir alana yayıldıklarından artmaktadırlar. İki elastik tabaka arasında sürtünme bulunması durumunda,



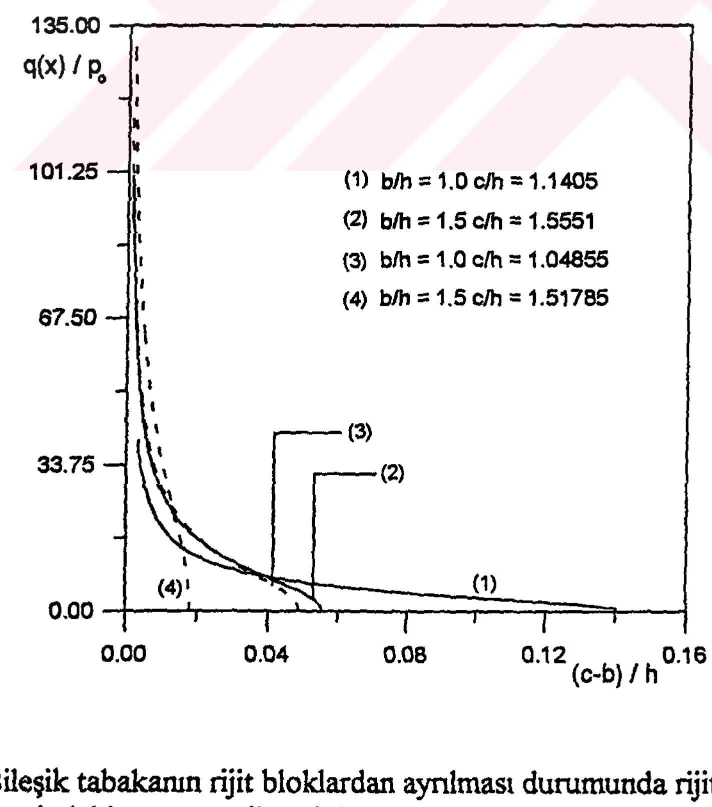
Şekil 14. Bileşik tabakanın rijit bloklardan ayrılması durumunda rijit blok üzerindeki temas gerilmesinin malzeme sabiti μ_2/μ_1 ile değişimi $(a/h=1.5,\ b/h=1,\ h_2/h=0.3)$



Şekil 15. Bileşik tabakanın rijit bloklardan ayrılması durumunda rijit blok üzerindeki temas gerilmesinin malzeme sabiti μ_2/μ_1 ile değişimi $(a/h=0.5,\ b/h=0.5,\ h_2/h=0.5)$



Şekil 16. Bileşik tabakanın rijit bloklardan ayrılması durumunda rijit blok üzerindeki temas gerilmesinin mesnet açıklığı b/h ile değişimi ($a/h=0.5$, $\mu_2/\mu_1=6.48$, $h_2/h=0.3$)



Şekil 17. Bileşik tabakanın rijit bloklardan ayrılması durumunda rijit blok üzerindeki temas gerilmesinin mesnet açıklığı b/h ile değişimi ($a/h=1$, $\mu_2/\mu_1=2.75$, $h_2/h=0.5$)

bileşik tabaka ile rijit düz bloklar arasında elde edilen temas alanı, tabakalar arasında sürtünme bulunmaması durumunda elde edilen temas alanından daha büyük olmaktadır. Örneğin Şekil 16' da mesnet genişliği $b/h = 0.5$ iken, tabakalar arasında sürtünme bulunması durumunda temas alanı $(c-b)/h = 0.274$, sürtünme bulunmaması durumunda da temas alanı $(c-b)/h = 0.079$ olarak elde edilmektedir

3.3. Gerilmelerin İrdelenmesi

Bu başlık altında, bölüm 2.3.3' de verilen ifadeler yardımıyla σ_x ve σ_y normal gerilme bileşenleri y simetri ekseni boyunca, τ_{xy} kayma gerilmesi de y simetri ekseninde sıfır olduğundan, simetri eksenine yakın x=0.05 kesiti boyunca incelenmiştir.

Bileşik tabaka ile rijit düz bloklar arasında ayrılma bulunması veya bulunmaması durumlarında elde edilen normal ve kayma gerilmesi dağılımları benzer özellikler ortaya koyduklarından ve birbirlerini tamamladıklarından, bu iki hal için çizilen grafikler bir arada irdelenmiştir. Grafiklerdeki sürekli çizgiler tabakalar arasında sürtünme bulunması, kesik çizgilerde tabakalar arasında sürtünme bulunmaması hallerinde çizilen gerilme dağılımlarını göstermektedirler.

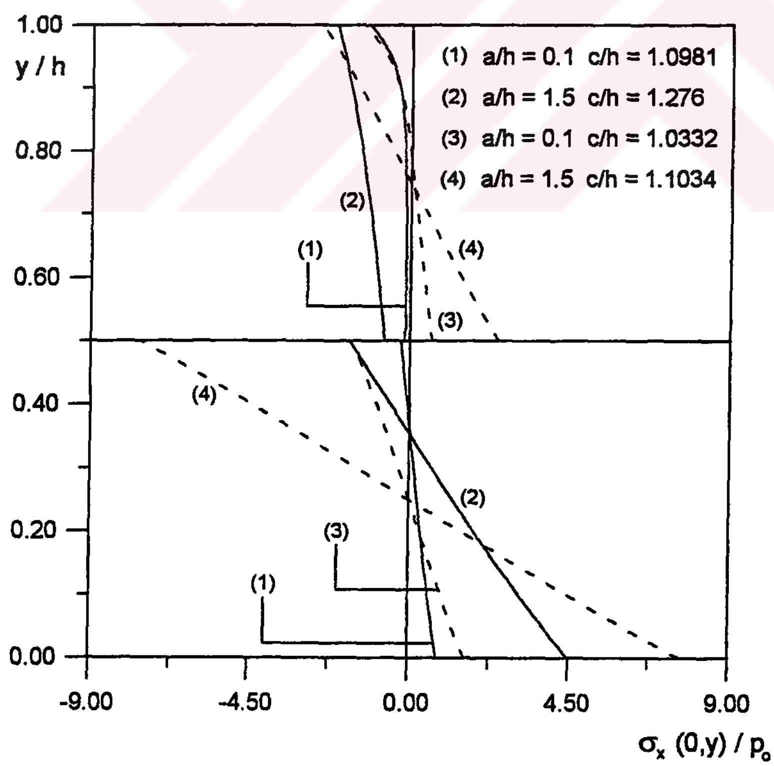
3.3.1. σ_x Normal Gerilmelerinin İrdelenmesi

σ_x normal gerilme bileşeninin, yük genişliği, malzeme özellikleri, mesnet açıklığı ve mesnet genişliği gibi boyutsuz büyüklükler için y simetri ekseni boyunca çizilen grafikleri aşağıda verilmiştir.

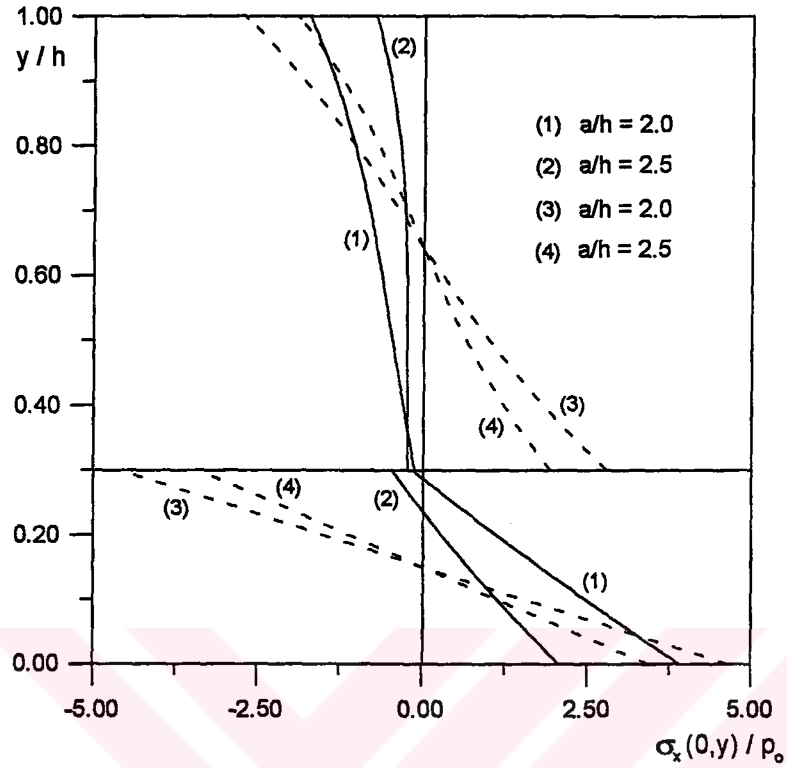
Şekil 18 ve Şekil 19' da σ_x normal gerilmesinin a/h yük genişliği ile değişimi görülmektedir. Şekil 18' de bileşik tabaka ile rijit bloklar arasında ayrılma varken, Şekil 19' da ayrılma yoktur. Tabakalar arasında sürtünme bulunması durumunda tabakalar beraber çalışmakta, bileşik tabakada y simetri ekseni boyunca tek bir çekme ve tek bir basınç bölgesi meydana gelmektedir. Bu iki şekilden de görüleceği üzere bileşik tabaka yayılı yük etkisinde basit bir kiriş gibi davranmakta, bileşik tabakanın alt kısmında çekme üst kısmında ise basınç gerilmeleri ortaya çıkmaktadır. Tabakalar arasında sürtünme yokken ise her iki tabakada ayrı ayrı çekme ve basınç bölgeleri elde edilmekte, dolasıyla tabakalar ayrı ayrı çalışmakta ancak yine basit kiriş gibi davranmaktadırlar.

Yük genişliği a / h ' nın belirli bir değerine kadar tabakalarda ortaya çıkan çekme ve basınç gerilmeleri Şekil 18' de de görüldüğü gibi artmakta, yük genişliği a / h daha da arttırıldığında ise tabakaların alt kısmında ortaya çıkan çekme gerilmeleri ile üst kısmında ortaya çıkan basınç gerilmeleri Şekil 19' da da görüldüğü gibi azalmaktadır. Yük genişliği yeterince arttırıldığında ise tabakaların alt kısımlarında bu kez basınç üst kısımlarında ise çekme gerilmeleri ortaya çıkmaktadır.

σ_x normal gerilmesinin malzeme özellikleri ile değişimi Şekil 20 ve Şekil 21' de verilmiştir. Alttaki tabaka üstteki tabakaya göre daha rijitken, tabakaların beraber çalışması halinde, alttaki tabakada büyük çekme bölgesi, üstteki tabakada ise sadece basınç bölgesi ortaya çıkmaktadır. Üstteki tabakanın alttaki tabakaya göre daha rijit olması durumunda ise, alttaki tabakada sadece çekme bölgesi ortaya çıkmakta, üstteki tabakada ise büyük basınç bölgesi elde edilmektedir. Bileşik tabakada ortaya çıkan bu çekme ve basınç bölgeleri birbirlerini dengelemelidirler.



Şekil 18. $\sigma_x(0,y)/p_o$ eksenel gerilmesinin yük genişliği a / h ile değişimi ($b/h=1$, $\mu_2/\mu_1=2.75$, $h_2/h=0.5$)

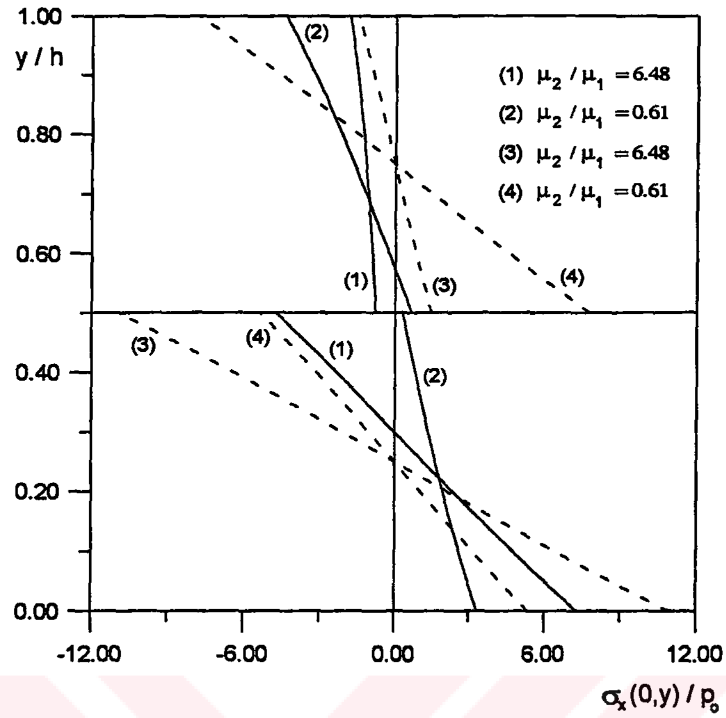


Şekil 19. $\sigma_x(0,y)/p_o$ eksenel gerilmesinin yük genişliği a/h ile değişimi ($b/h=1$, $c/h=1.5$, $\mu_2/\mu_1=2.75$, $h_2/h=0.3$)

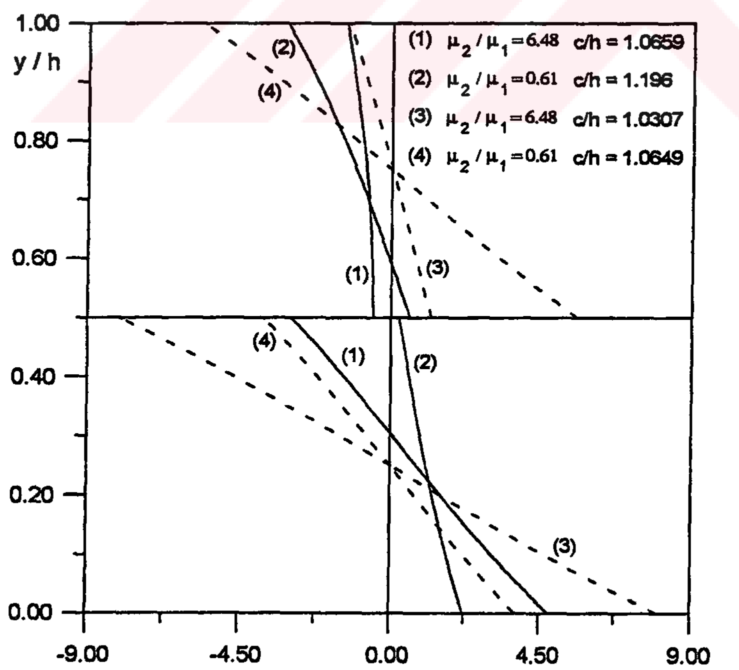
Tabakaların ayrı ayrı çalışmaları durumunda ise her iki tabakada ayrı ayrı çekme ve basınç bölgeleri ortaya çıkmakta, alttaki tabakanın rijitliğinin üstteki tabakaya göre azalmasıyla, alttaki tabakada ortaya çıkan gerilme değerleri azalırken, üstteki tabakada ortaya çıkan gerilme değerleri ise artmaktadır.

Grafiklerde elastik tabakalar arasında sürtünme bulunması durumunda tabakalara ait ara yüzeydeki gerilmelerde meydana gelen süreksizlikler, tabakaların farklı malzeme özelliklerine sahip olmalarından kaynaklanmaktadır. Tabakalar arasında sürtünme bulunmaması durumunda ise, ara yüzeydeki süreksizliklere daha önceden de bahsedildiği gibi tabakaların farklı malzeme özelliklerine sahip olmalarından çok ayrı ayrı çalışmaları neden olmaktadır.

Mesnet açıklığı arttıkça gerilme değerlerinde artış gözlenmektedir (Şekil 22). Eğer mesnet açıklığı yük genişliğinden yeterince küçük olursa, daha önce yük genişliğine bağlı



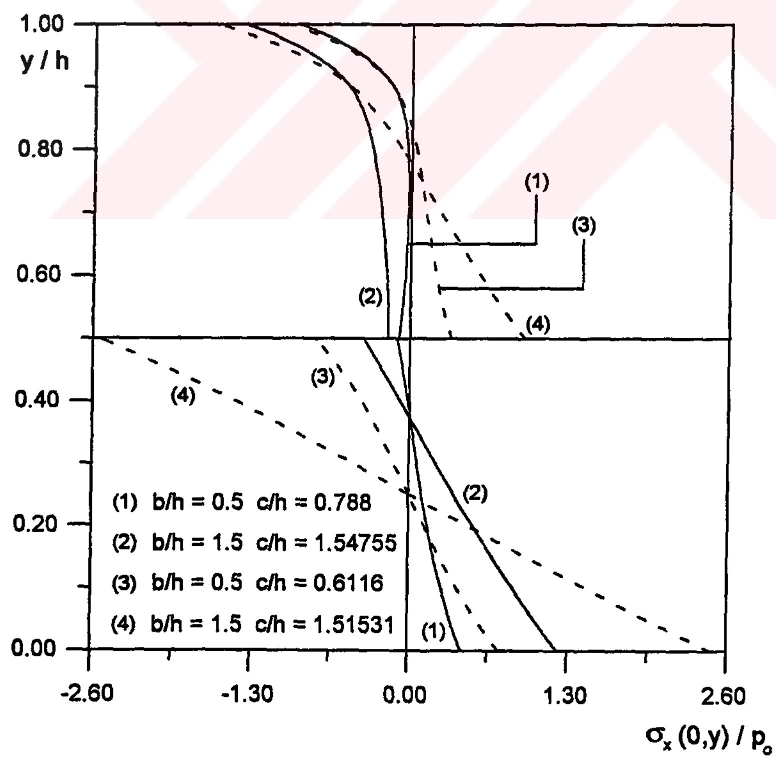
Şekil 20. $\sigma_x(0,y)/p_o$ eksenel gerilmesinin malzeme sabiti μ_2/μ_1 ile değişimi $(a/h=3,\ b/h=1.5,\ c/h=2,\ h_2/h=0.5)$



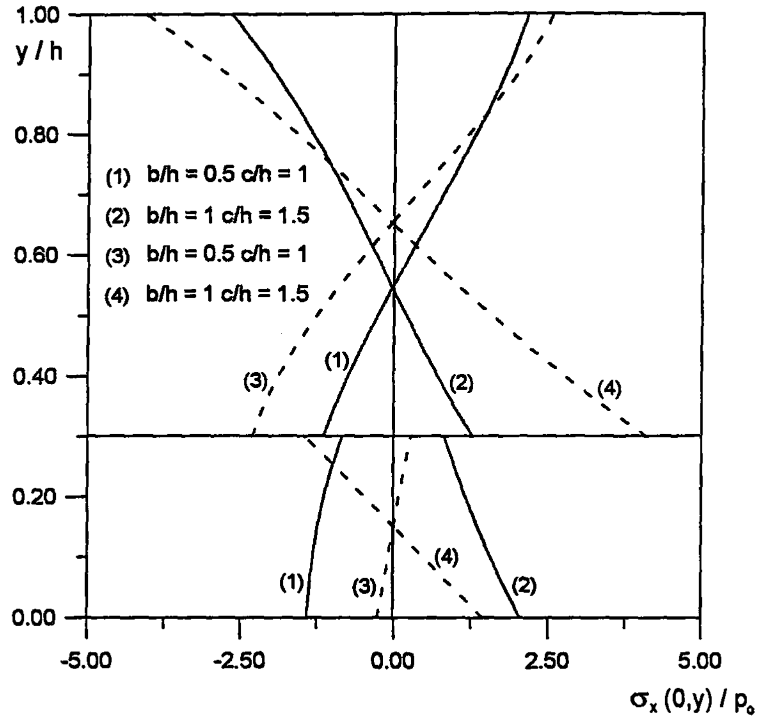
Şekil 21. $\sigma_x(0,y)/p_o$ eksenel gerilmesinin malzeme sabiti μ_2/μ_1 ile değişimi $(a/h=0.5,\ b/h=1,\ h_2/h=0.5)$

olarak σ_x normal gerilmesi dağılımının verildiği grafikler incelenirken de ifade edildiği gibi, Şekil 23' den de görüleceği üzere, bileşik tabakanın alt kısmında basınç, üst kısmında ise çekme gerilmeleri meydana gelmektedir. Şekil 23' de bileşik tabaka ile rijit bloklar arasında ayrılma bulunmamaktadır. Rijit bloklarla bileşik tabaka arasında ayrılma bulunması halinde çizilen Şekil 22' de bileşik tabakanın üst kısmında ortaya çıkan gerilme değerlerindeki ani artış, yük genişliğinin azalarak tekil yüke yaklaşması, dolasıyla yük altında bir tekillik oluşması eğiliminden kaynaklanmaktadır. Eğer a/h yük genişliği küçültülerek tekil yüke daha da yaklaştırılırsa, bu bölgede elde edilen σ_x normal gerilmesi daha büyük değerler almaktadır.

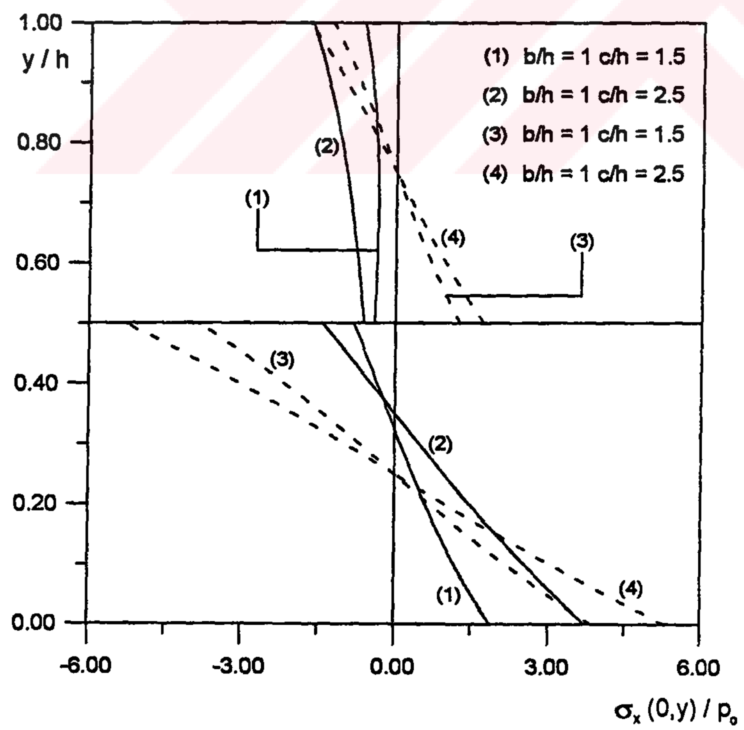
Genel olarak grafiklerde σ_x normal gerilmesine ait dağılımın lineerlikten sapmasının bir başka nedeni ise bileşik tabaka yüksekliği ile mesnet açıklığı arasındaki orana bağlı olarak, bileşik tabakanın yüksek kiriş özelliği göstermesidir.



Şekil 22. $\sigma_x(0,y)/p_o$ eksenel gerilmesinin mesnet açıklığı b/h ile değişimi ($a/h=0.1$, $\mu_2/\mu_1=2.75$, $h_2/h=0.5$)



Şekil 23. $\sigma_x(0,y)/p_o$ eksenel gerilmesinin mesnet açıklığı b/h ile değişimi ($a/h=2$, $\mu_2/\mu_1=0.61$, $h_2/h=0.3$)



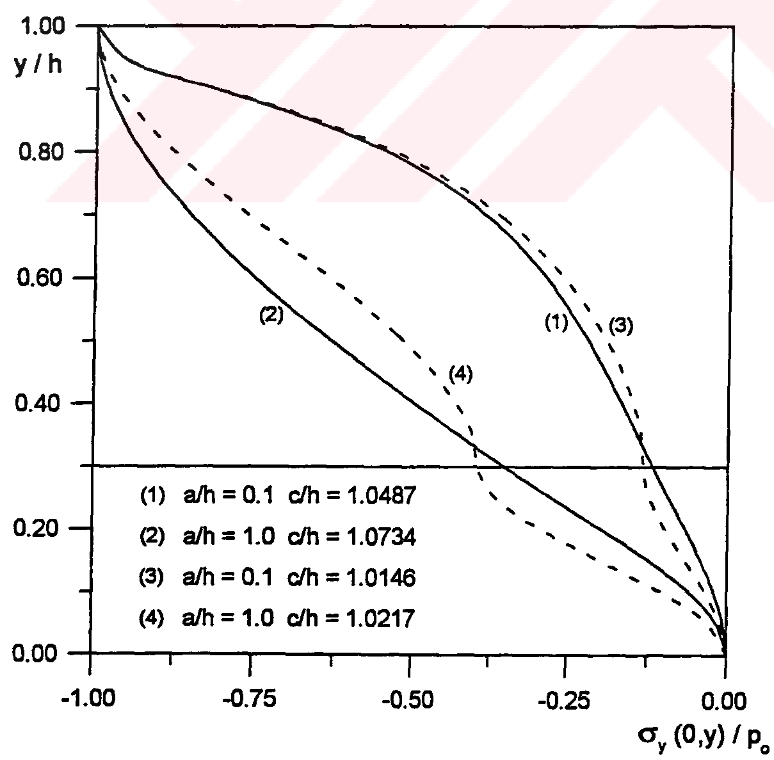
Şekil 24. $\sigma_x(0,y)/p_o$ eksenel gerilmesinin mesnet genişliği $(c-b)/h$ ile değişimi ($a/h=2.5$, $\mu_2/\mu_1=2.75$, $h_2/h=0.5$)

Mesnet genişliği artırıldığında, normal gerilme σ_x ' in dağılımındaki değişim, bileşik tabaka ile rijit bloklar arasında ayrılma bulunmaması halinde çizilen Şekil 24' de incelenmiştir. Mesnet genişliği arttırıldığında bileşik tabakanın çekme ve basınç bölgelerinde ortaya çıkan gerilme değerleri büyümektedir.

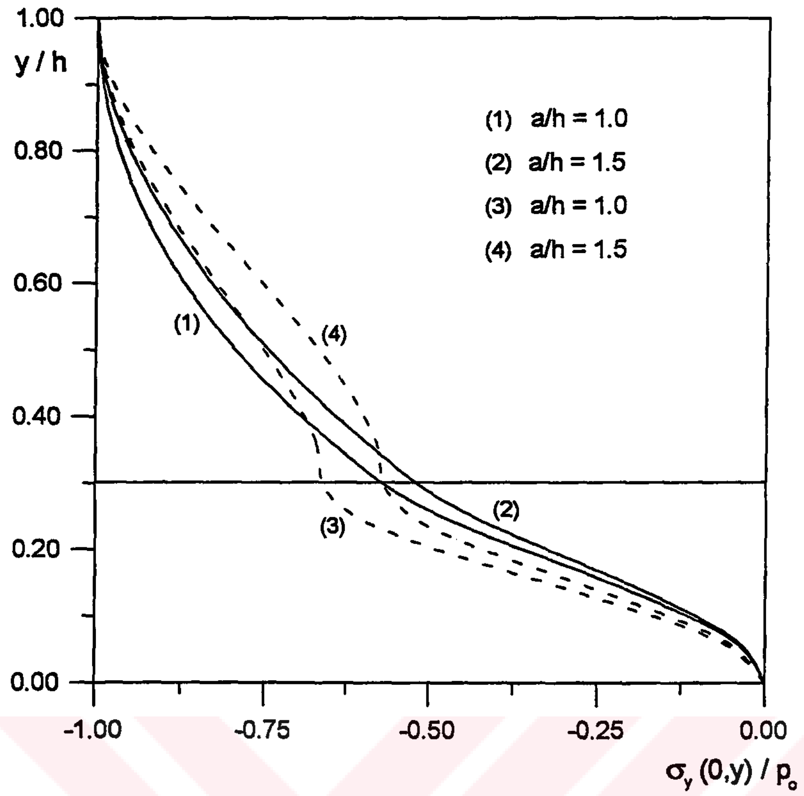
3.3.2. σ_y Normal Gerilmelerinin İrdelenmesi

σ_y normal gerilme dağılımının, yük genişliği, malzeme özellikleri, mesnet açıklığı gibi boyutsuz büyükler için çizilen grafikleri aşağıda incelenmiştir.

σ_y normal gerilmesinin a/h yük genişliği ile değişimi Şekil 25 ve Şekil 26' da verilmiştir. σ_y gerilme değerleri bileşik tabakanın üst kısmında yayılı yükün şiddetine eşit olurken, aşağıya doğru inildikçe azalmakta ve bileşik tabakanın altında ise sıfır olmaktadır. Bu durum sınır şartlarının sağlandığını gösterir. Bileşik tabaka ile rijit düz bloklar



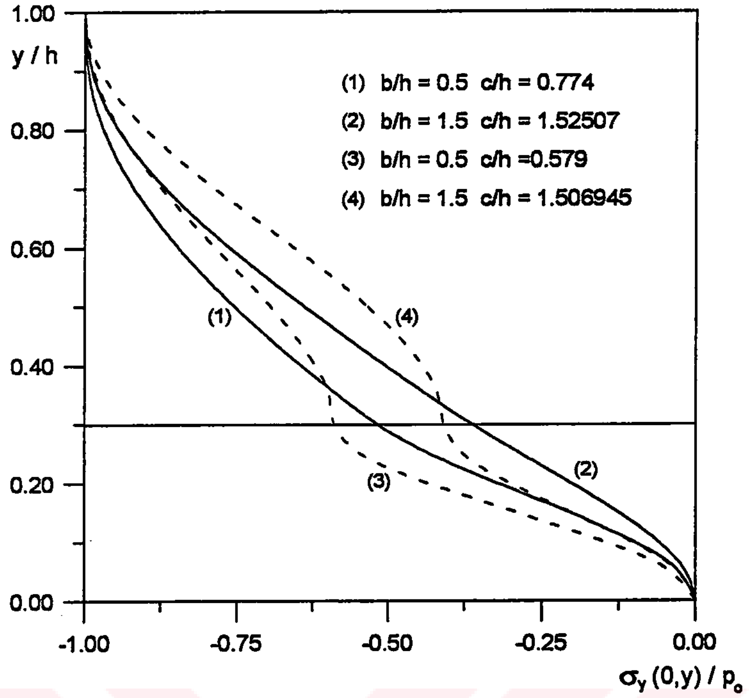
Şekil 25. $\sigma_y(0,y)/p_o$ eksenel gerilmesinin yük genişliği a/h ile değişimi ($b/h=1$, $\mu_2/\mu_1=6.48$, $h_2/h=0.3$)



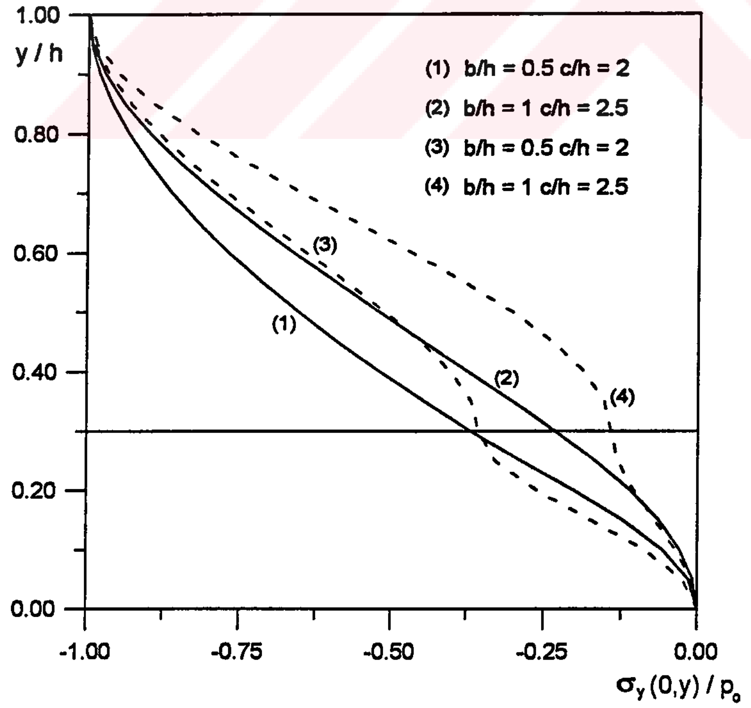
Şekil 26. $\sigma_y(0,y)/p_o$ eksenel gerilmesinin yük genişliği a/h ile değişimi ($b/h=0.5$, $c/h=1$, $\mu_2/\mu_1=6.48$, $h_2/h=0.3$)

arasında ayrılma varken çizilen Şekil 25' den de görülebileceği gibi a/h yük genişliği küçültülerek tekil yüke yaklaştırıldığında, bileşik tabakanın alt kısmındaki σ_y gerilme değerleri ile, bileşik tabakanın üst kısmındaki σ_y gerilme değerleri arasındaki fark büyümektedir. Bunun nedeni de yük altında oluşabilecek tekilliktir. σ_y gerilme dağılımının yük genişliğine bağlı olarak değişimini mesnet açıklığı ve mesnet genişliği önemli ölçüde etkilemektedir.

Şekil 27 ve Şekil 28' de de σ_y normal gerilme dağılımının mesnet açıklığı ile değişimi incelenmiştir. İki elastik tabaka arasında sürtünme bulunması veya bulunmaması hallerinde mesnet açıklığı arttıkça σ_y gerilme değerleri azalmaktadır. Genel olarak σ_y grafiklerine bakıldığında iki elastik tabaka arasındaki sınır şartlarının sağlandığı görülebilir. Tabakalar arasında sürtünme bulunmaması durumunda bu bölgede σ_y gerilme dağılımında meydana gelen eğim değişikliği, tabakaların ayrı ayrı çalıştığını ifade etmektedir.

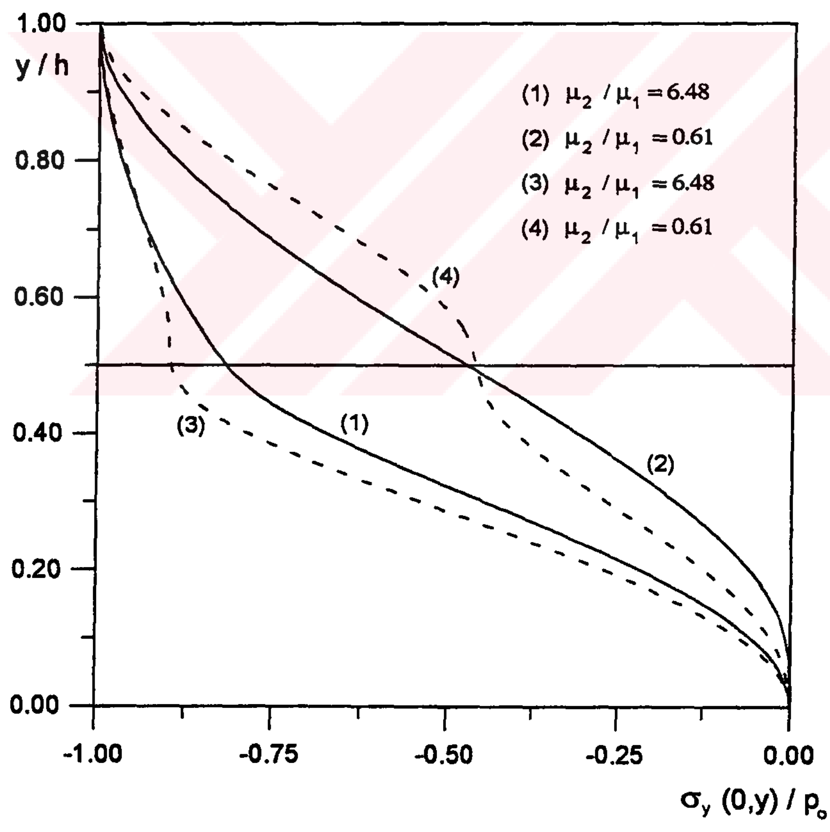


Şekil 27. $\sigma_y(0,y)/p_o$ eksenel gerilmesinin mesnet açıklığı b/h ile değişimi ($a/h=0.5$, $\mu_2/\mu_1=6.48$, $h_2/h=0.3$)

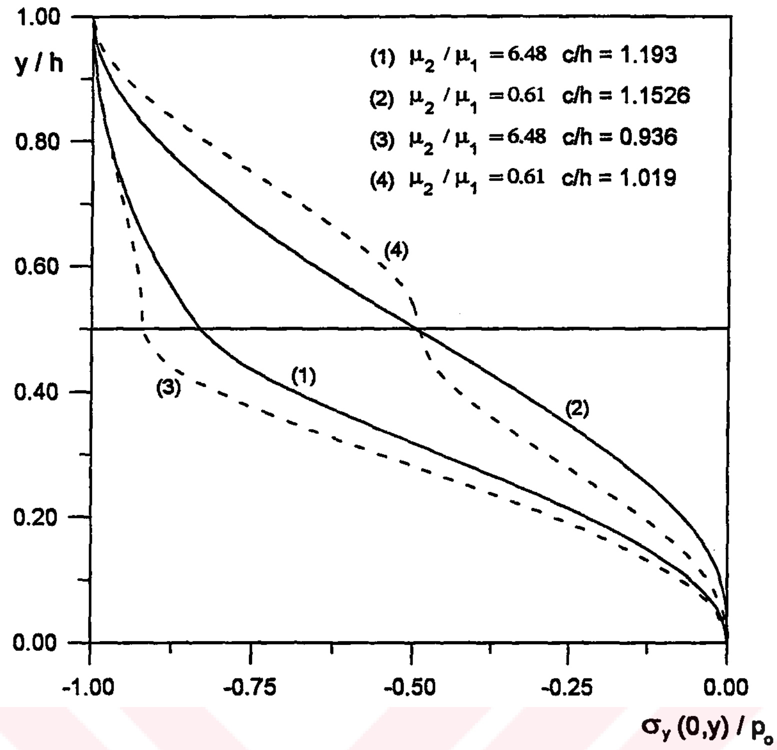


Şekil 28. $\sigma_y(0,y)/p_o$ eksenel gerilmesinin mesnet açıklığı b/h ile değişimi ($a/h=2.5$, $\mu_2/\mu_1=2.75$, $h_2/h=0.3$)

Malzeme özellikleri ile σ_y normal gerilme dağılımının incelenmesi ise Şekil 29 ve Şekil 30' da yapılmıştır. Şekil 29' da bileşik tabaka ile rijit bloklar arasında ayrılma bulunmamakta, Şekil 30' da ise bileşik tabaka ile rijit bloklar arasında ayrılma meydana gelmektedir. Alttaki tabakanın üstteki tabakaya göre rijitliğinin azalması durumunda, σ_y normal gerilme değerlerinde azalma olmaktadır. Bu grafiklerde de σ_y gerilme değerleri bileşik tabakanın üst kısmında yükün şiddetine eşit olurken, bileşik tabakanın alt kısmına doğru azalıp, bileşik tabakanın altında sıfır olmaktadır. Tabakalara ait ara yüzeyde ise tabakalar arasında sürtünme bulunmaması durumunda, gerilme dağılımında eğim değişikliği meydana gelmektedir.



Şekil 29. $\sigma_y(0,y)/p_o$ eksenel gerilmesinin malzeme sabiti μ_2/μ_1 ile değişimi $(a/h=1.5,\ b/h=0.5,\ c/h=1.5,\ h_2/h=0.5)$

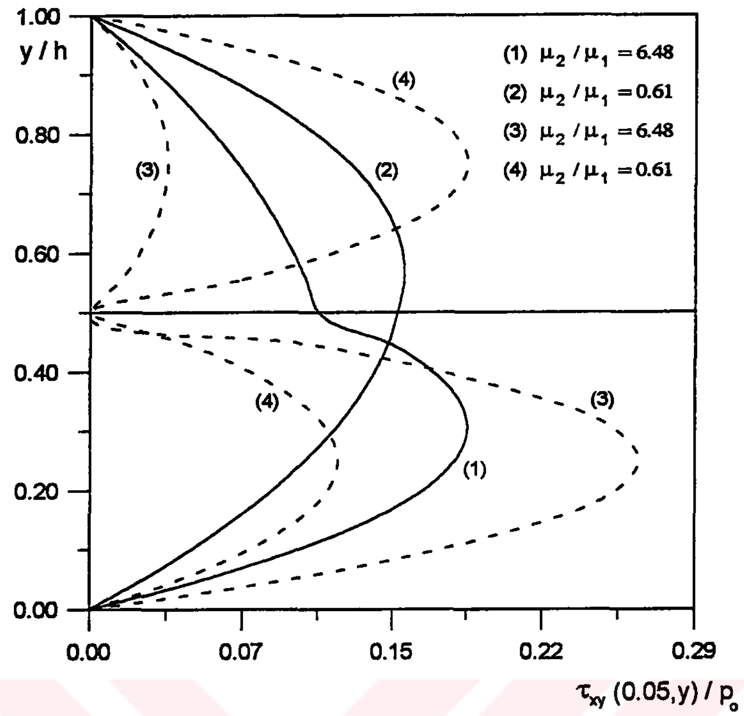


Şekil 30. $\sigma_y(0,y)/p_o$ eksenel gerilmesinin malzeme sabiti μ_2/μ_1 ile değişimi ($a/h=1$, $b/h=0.5$, $h_2/h=0.5$)

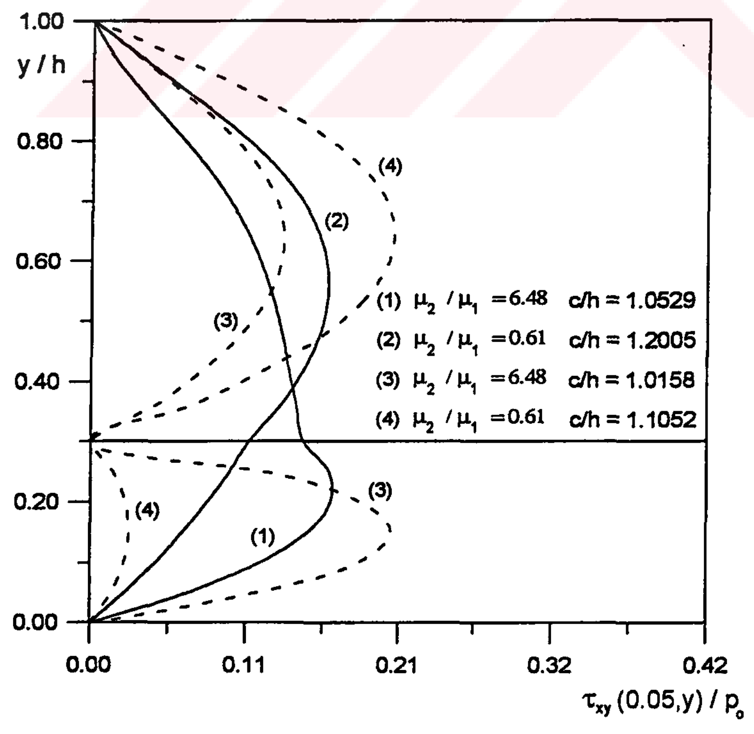
3.3.3. τ_{xy} Kayma Gerilmelerinin İrdelenmesi

Kayma gerilmeleri y simetri ekseni boyunca sıfırdır. Bu yüzden kayma gerilmelerinin $x = 0.05$ kesitindeki dağılımı incelenmiş, yük genişliği, malzeme özellikleri ve mesnet açıklığı gibi boyutsuz büyüklükler için çizilen grafikleri aşağıda verilmiştir.

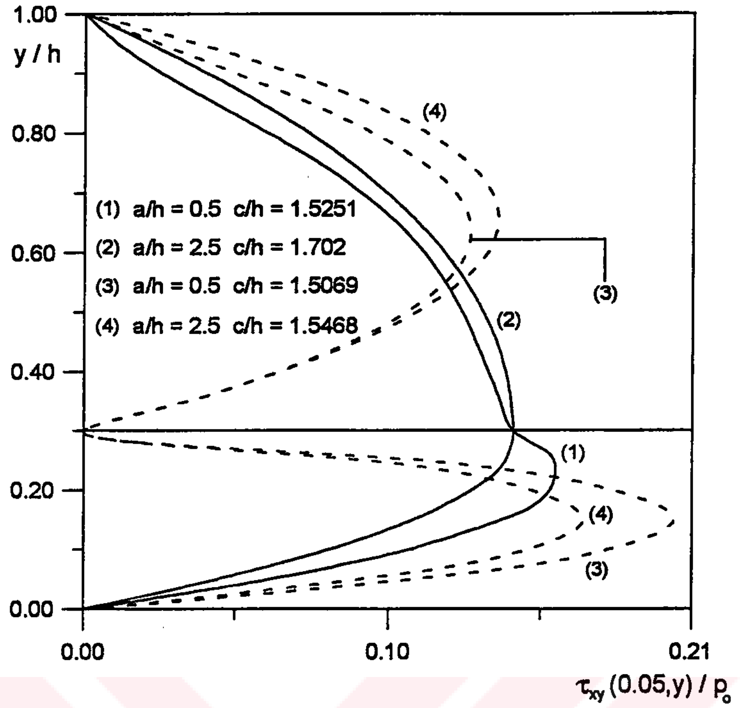
Şekil 31 ve Şekil 32' de kayma gerilmesinin malzeme özellikleri ile değişimi görülmektedir. İki elastik tabaka arasında sürtünme bulunması durumunda, kayma gerilmesi bileşik tabakanın altında ve üstünde sıfır olurken, tabakalar arasında sürtünme bulunmaması durumunda ise kayma gerilmeleri iki elastik tabakaya ait ara yüzeyde de sıfır olmakta ve sınır şartları sağlanmaktadır. Alttaki tabakanın rijitliğinin üstteki tabakanınkinden daha büyük olması durumunda elde edilen kayma gerilmeleri, rijitliğin üstteki tabakada daha küçük olması durumunda elde edilen kayma gerilmelerinden, bileşik tabakanın alt kısmında daha büyük, üst kısmında ise daha küçük olarak elde edilmektedir.



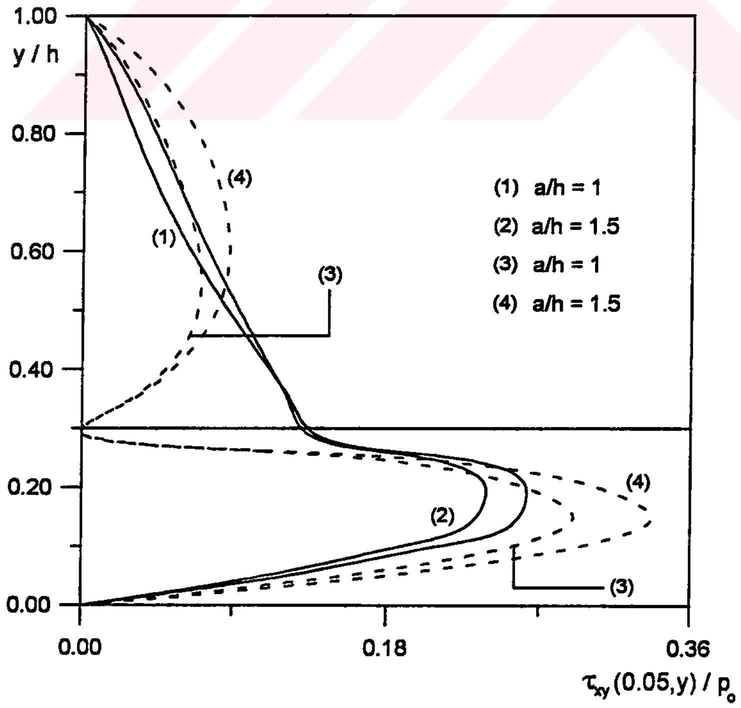
Şekil 31. $\tau_{xy}(0.05,y)/p_o$ kayma gerilmesinin malzeme sabiti μ_2/μ_1 ile değişimi ($a/h=3$, $b/h=1.5$, $c/h=2$, $h_2/h=0.5$)



Şekil 32. $\tau_{xy}(0.05,y)/p_o$ kayma gerilmesinin malzeme sabiti μ_2/μ_1 ile değişimi ($a/h=0.5$, $b/h=1$, $h_2/h=0.3$)



Şekil 33. $\tau_{xy}(0.05,y)/p_o$ kayma gerilmesinin yük genişliği a/h ile değişimi ($b/h=1.5$, $\mu_2/\mu_1=6.48$, $h_2/h=0.3$)

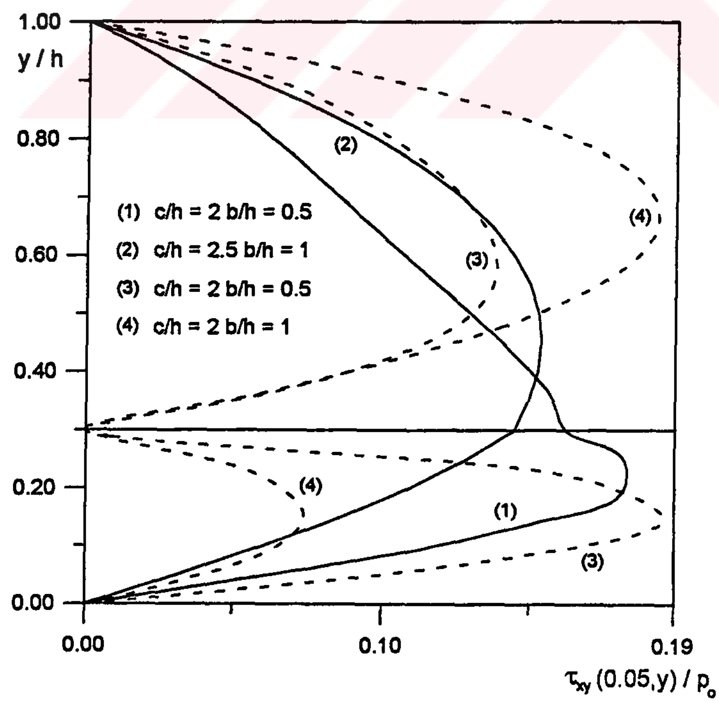


Şekil 34. $\tau_{xy}(0.05,y)/p_o$ kayma gerilmesinin yük genişliği a/h ile değişimi ($b/h=0.5$, $c/h=1$, $\mu_2/\mu_1=6.48$, $h_2/h=0.3$)

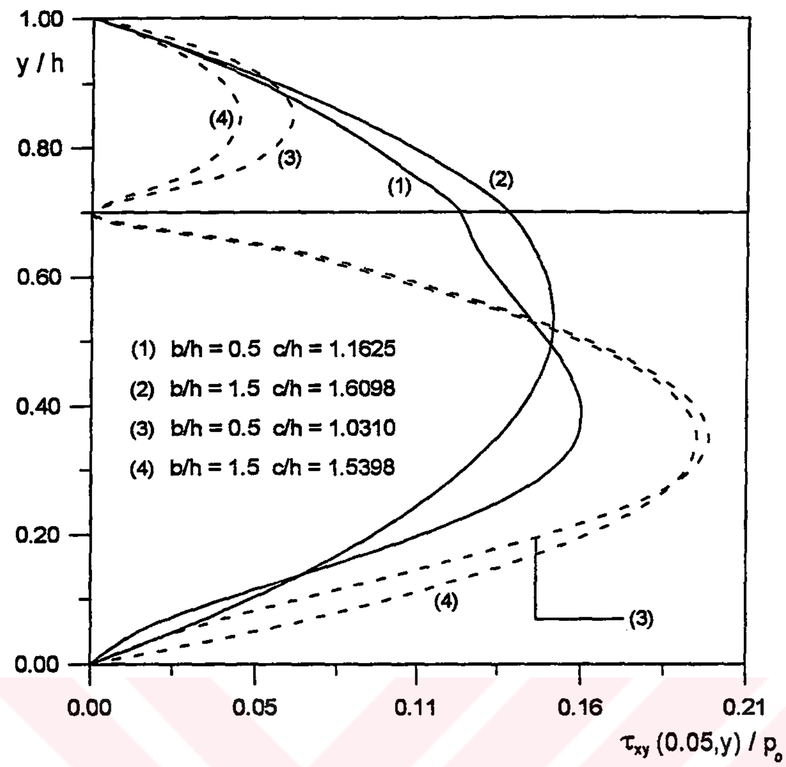
Genel olarak yük genişliğinin küçük değerlerinde elde edilen kayma gerilmeleri, yük genişliği arttırıldığında elde edilen kayma gerilmelerinden bileşik tabakanın alt kısmında daha büyük, üst kısmında ise daha küçük olmaktadır (Şekil 33 ve Şekil 34).

Kayma gerilmelerinin mesnet açıklığına bağlı olarak değişimi incelendiğinde, çoğunlukla mesnet açıklığının küçük değerlerinde elde edilen kayma gerilmeleri, mesnet açıklığının büyük değerlerinde elde edilen kayma gerilmelerinden, bileşik tabakanın alt kısmında daha büyük üst kısmında da daha küçük olarak ortaya çıkmaktadır (Şekil 35). Ancak alttaki tabaka yüksekliği, üstteki tabaka yüksekliğinden büyük olursa yani h_2/h oranı 0.5' i geçerse ve üstteki tabaka alttaki tabakadan daha rijit olursa yani μ_2/μ_1 oranı azalırsa Şekil 36' dan da görülebileceği gibi gerilme dağılımında alttaki tabakada görülen özellikler üstteki tabakada, üstteki tabakada görülen özelliklerde alttaki tabakada ortaya çıkmaya başlamaktadır.

τ_{xy} kayma gerilmesi grafikleri incelendiğinde, iki elastik tabaka arasında sürtünme bulunması durumunda, tabakalara ait ara yüzeyde sınır şartı sağlanmakla birlikte, bu bölgede kayma gerilmesi dağılımında eğim değişikliği görülmektedir. Bu eğim değişikliği tabakaların farklı malzeme özelliklerine sahip olmalarından kaynaklanmaktadır.



Şekil 35. $\tau_{xy}(0.05,y)/p_o$ kayma gerilmesinin mesnet açıklığı b/h ile değişimi ($a/h=2.5$, $\mu_2/\mu_1=2.75$, $h_2/h=0.3$)

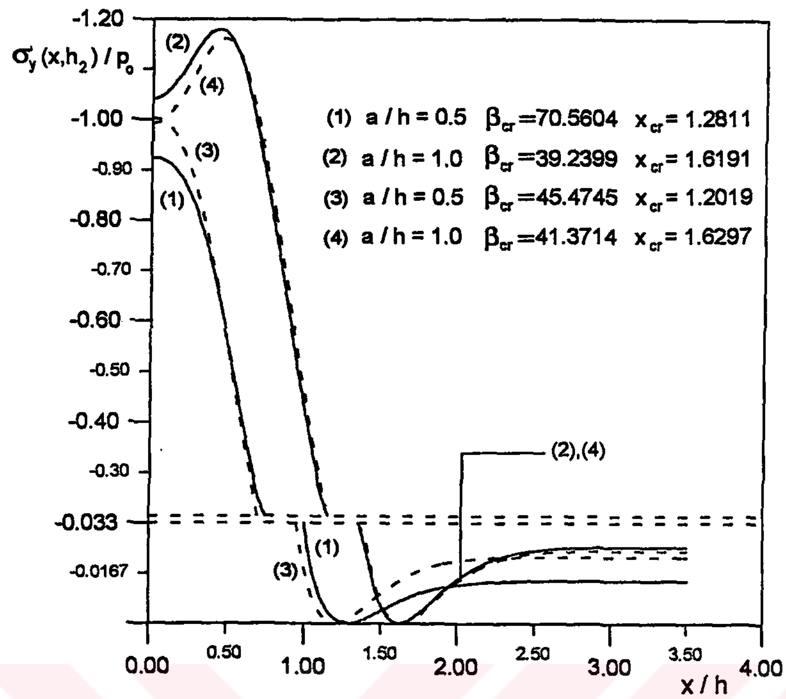


Şekil 36. $\tau_{xy}(0.05,y)/p_0$ kayma gerilmesinin mesnet açıklığı b/h ile değişimi ($a/h=1$, $\mu_2/\mu_1=0.61$, $h_2/h=0.7$)

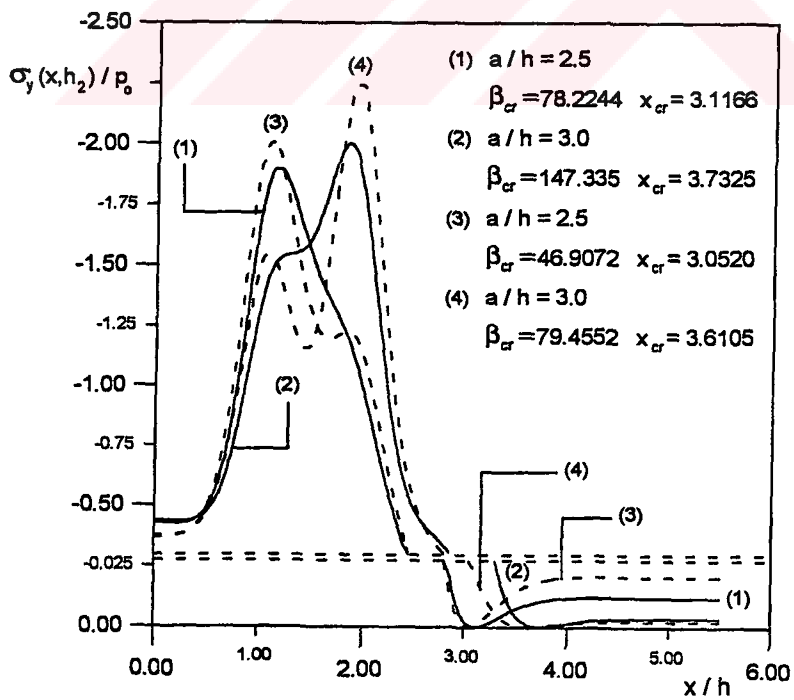
3.4. İlk Ayrılma Yükü ve İlk Ayrılma Uzaklıklarının İrdelenmesi

İki elastik tabaka arasında, ilk ayrılmayı meydana getirecek yükler (β_{cr}) ve ilk ayrılmanın meydana geleceği uzaklıklar (x_{cr}) bölüm 2.4' de verilen formülasyon yardımıyla belirlenmiş ve bu durumda iki elastik tabakaya ait ara yüzeydeki $\sigma_y'(x,h_2)/p_0$ gerilme dağılışının, yük genişliği, malzeme özellikleri, mesnet açıklığı ve mesnet genişliği gibi çeşitli boyutsuz büyükler için çizilen grafikleri aşağıda incelenmiştir.

Yük genişliği arttıkça ilk ayrılma uzaklıkları y simetri ekseninden uzaklaşmaktadır. İlk ayrılma yükleri ise, alttaki tabakanın üstteki tabakadan daha rijit olması durumunda yük genişliği arttıkça azalırken, üstteki tabakanın alttaki tabakadan daha rijit olması durumunda artmaktadır (Şekil 37 ve Şekil 38). Genel olarak iki tabaka arasında sürtünme bulunması durumunda elde edilen ilk ayrılma yükleri, tabakalar arasında sürtünme bulunmaması durumunda elde edilen ilk ayrılma yüklerinden ya oldukça büyük çıkmakta ya da büyük çıkmadığı durumlarda iki değer arasındaki fark çok küçük olmaktadır.



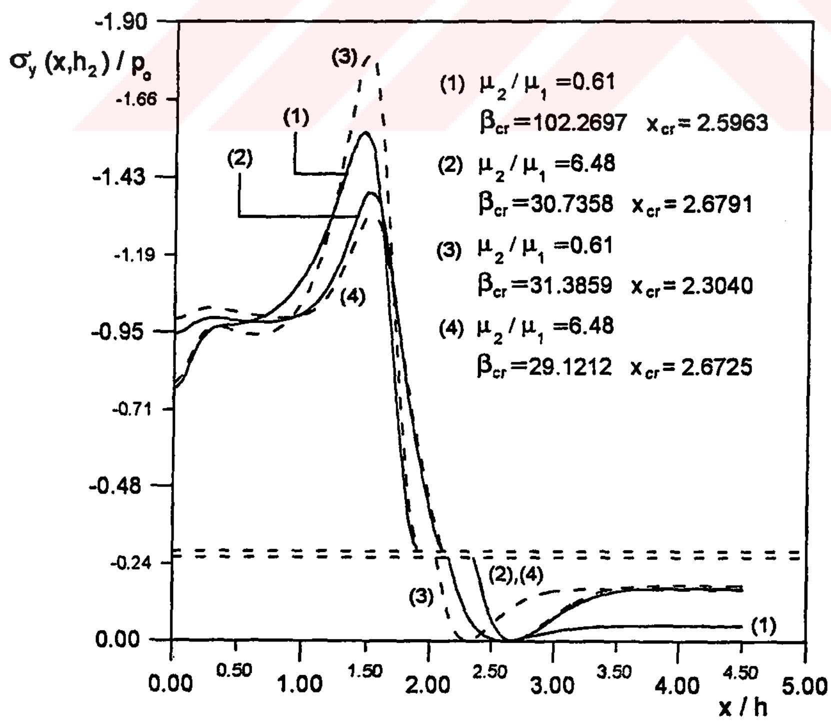
Şekil 37. İki tabaka arasındaki $\sigma_y'(x,h_2)/p_o$ gerilme dağılımının yük genişliği a/h ile değişimi ($b/h=0.1$, $c/h=0.6$, $\mu_2/\mu_1=2.75$, $h_2/h=0.5$)



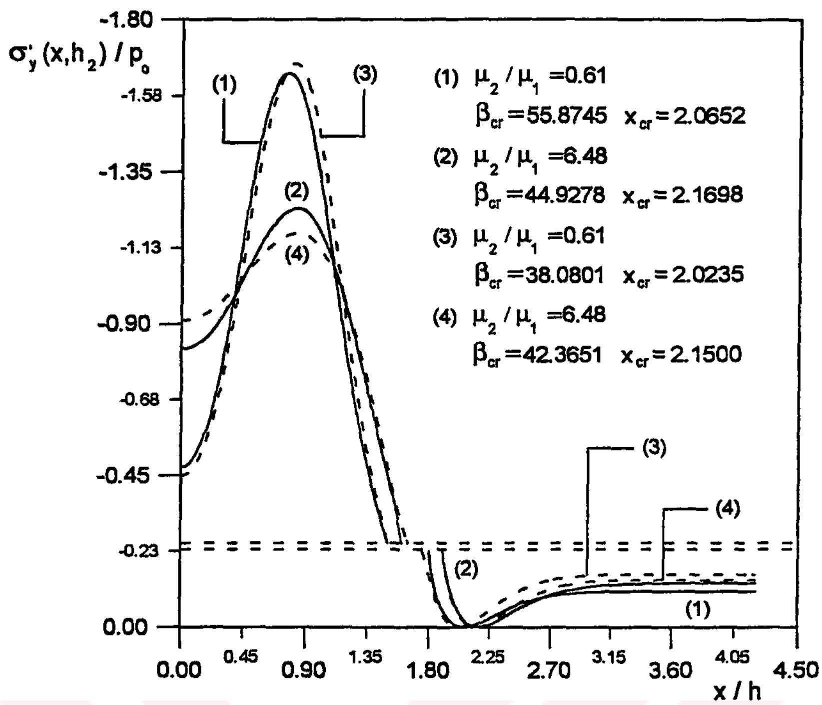
Şekil 38. İki tabaka arasındaki $\sigma_y'(x,h_2)/p_o$ gerilme dağılımının yük genişliği a/h ile değişimi ($b/h=1$, $c/h=2$, $\mu_2/\mu_1=0.61$, $h_2/h=0.5$)

Alttaki tabakanın rijitliği üstteki tabakaya göre giderek arttırıldığında Şekil 39 ve Şekil 40' dan da görüldüğü gibi ilk ayrılma uzaklıkları y simetri ekseninden uzaklaşmaktadır. İki elastik tabaka arasında sürtünme varken, alttaki tabakanın rijitliğinin üstteki tabakaya göre giderek azalması halinde ilk ayrılma yükleri artmaktadır. Tabakalar arasında sürtünme yokken ise alttaki tabakanın rijitliğinin üstteki tabakaya göre azalması halinde ilk ayrılma yüklerinde genelde artış olmakla birlikte azalmanın da olabileceği görülmüştür. Grafiklerde malzeme özelliklerinin değişimine bağlı olarak ilk ayrılma yükleri incelendiğinde, tabakalar arasında sürtünme varken, ilk ayrılmayı meydana getiren yüklerin, tabakalar arasında sürtünme bulunmaması durumunda ilk ayrılmayı meydana getiren yüklerden daha büyük oldukları görülmüştür.

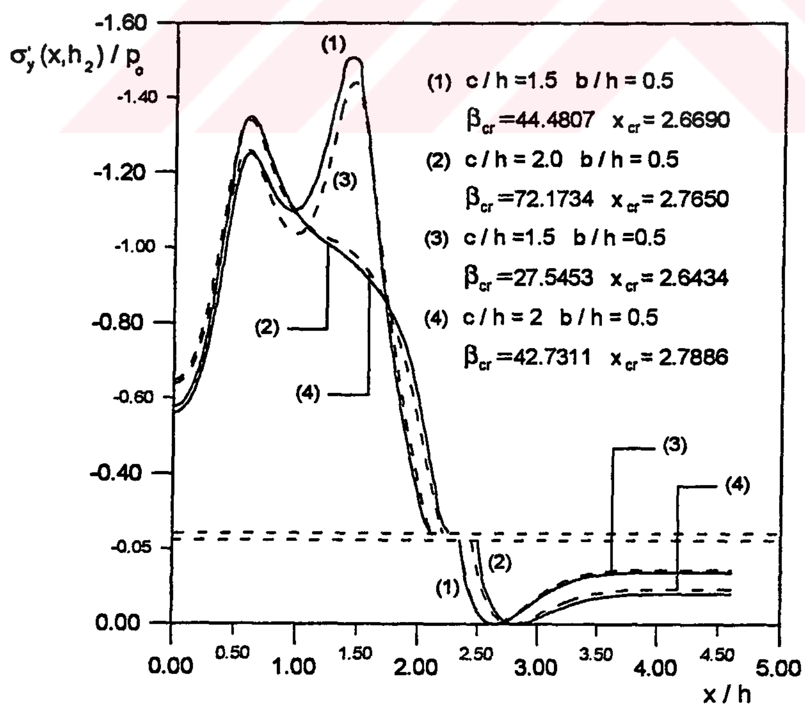
İlk ayrılma uzaklıkları mesnet genişliği arttırıldığında y simetri ekseninden uzaklaşmakta, ilk ayrılma yükleri de büyümektedir. İki elastik tabaka arasında sürtünme bulunması durumunda elde edilen ilk ayrılma yükleri, tabakalar arasında sürtünme bulunmaması durumunda elde edilen ilk ayrılma yüklerinden çoğunlukla daha büyük olmaktadır (Şekil 41 ve Şekil 42).



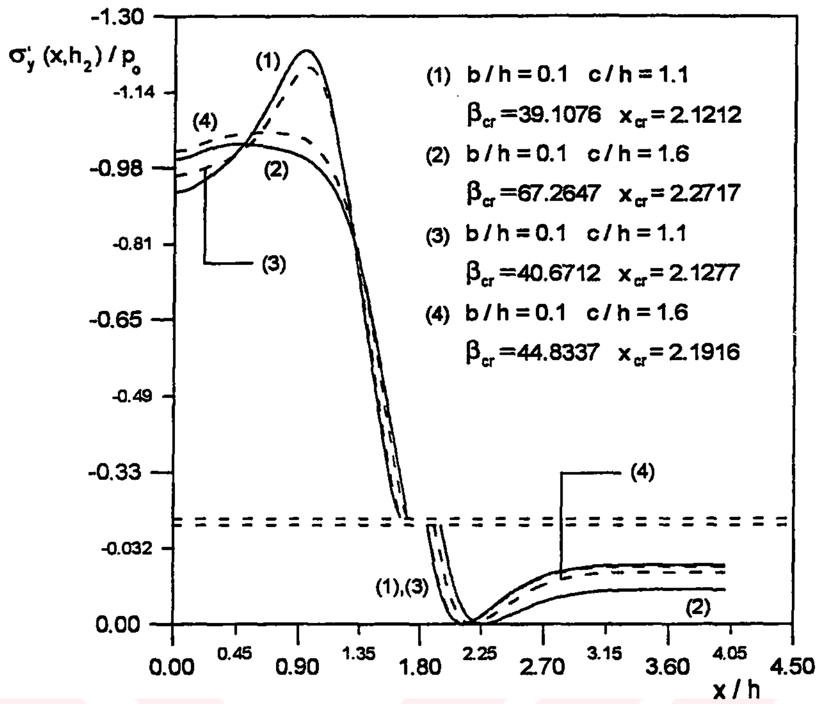
Şekil 39. İki tabaka arasındaki $\sigma_y(x,h_2)/p_o$ gerilme dağılımının malzeme sabiti μ_2/μ_1 ile değişimi ($a/h=2$, $b/h=0.1$, $c/h=1.6$, $h_2/h=0.3$)



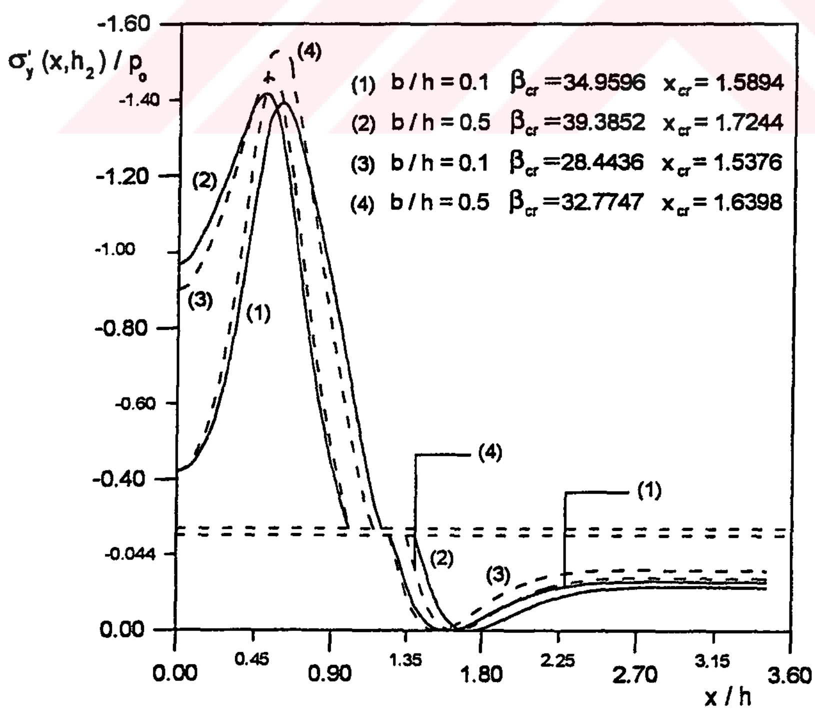
Şekil 40. İki tabaka arasındaki $\sigma'_y(x,h_2)/p_o$ gerilme dağılımının malzeme sabiti μ_2/μ_1 ile değişimi ($a/h=1.5$, $b/h=0.5$, $c/h=1$, $h_2/h=0.5$)



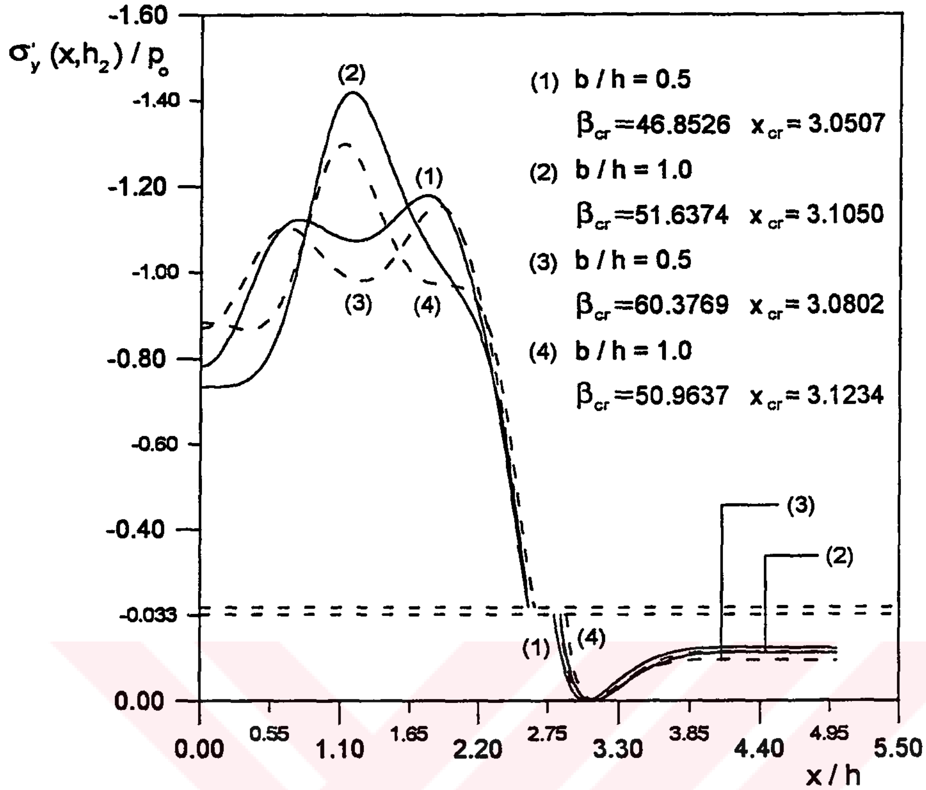
Şekil 41. İki tabaka arasındaki $\sigma'_y(x,h_2)/p_o$ gerilme dağılımının mesnet genişliği $(c-b)/h$ ile değişimi ($a/h=2$, $\mu_2/\mu_1=6.48$, $h_2/h=0.3$)



Şekil 42. İki tabaka arasındaki $\sigma_y'(x,h_2)/p_o$ gerilme dağılımının mesnet genişliği $(c-b)/h$ ile değişimi ($a/h=1.5$, $\mu_2/\mu_1=2.75$, $h_2/h=0.5$)



Şekil 43. İki tabaka arasındaki $\sigma_y'(x,h_2)/p_o$ gerilme dağılımının mesnet açıklığı b/h ile değişimi ($a/h=1$, $(c-b)/h=0.5$, $\mu_2/\mu_1=2.75$, $h_2/h=0.3$)



Şekil 44. İki tabaka arasındaki $\sigma_y^{\prime}(x,h_2)/p_o$ gerilme dağılımının mesnet açıklığı b/h ile değişimi ($a/h=2.5$, $(c-b)/h=1.5$, $\mu_2/\mu_1=0.61$, $h_2/h=0.7$)

Mesnet açıklığı arttıkça ilk ayrılma uzaklığı Şekil 43 ve Şekil 44' de de görüldüğü gibi y simetri ekseninden uzaklaşmaktadır. İlk ayrılmayı meydana getirecek yük ise genelde mesnet açıklığı ile büyümektedir. Ancak Şekil 44' te iki elastik tabaka arasında sürtünme bulunmaması durumunda da görüldüğü gibi ilk ayrılma yüklerinde azalmalar da meydana gelebilmektedir.

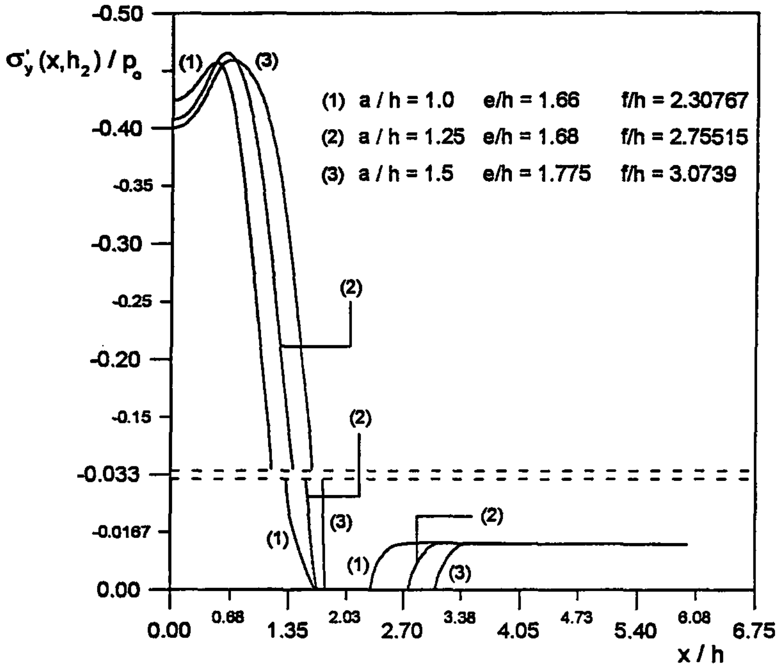
$\sigma_y^{\prime}(x,h_2)/p_o$ gerilme dağılımını veren grafikler incelendiğinde, gerilmelerin y simetri ekseninden itibaren artıp rijit bloğun bulunduğu bölgelerde daha büyük değer aldığı, özellikle rijit blok kenarlarında gerilmelerin en büyük değerlerine ulaştıkları görülmektedir. Daha sonra gerilme değerleri dış yükün etkisinin giderek azalması ve kaybolması ile iyice küçülmekte ve $x/h=x_{cr}/h$ olduğunda sıfır olmaktadır. Bu noktadan sonra $x/h>x_{cr}/h$ olduğu bölgede gerilme değerleri artarak kütle kuvvetlerine eşitlenmektedir.

3.5. Süreksiz Temas Durumunda Tabakalara Ait Ara Yüzeydeki $\sigma_y'(x,h_2)/p_o$ Düşey Gerilme Yayılışı ve Ayrılma Mesafeleri

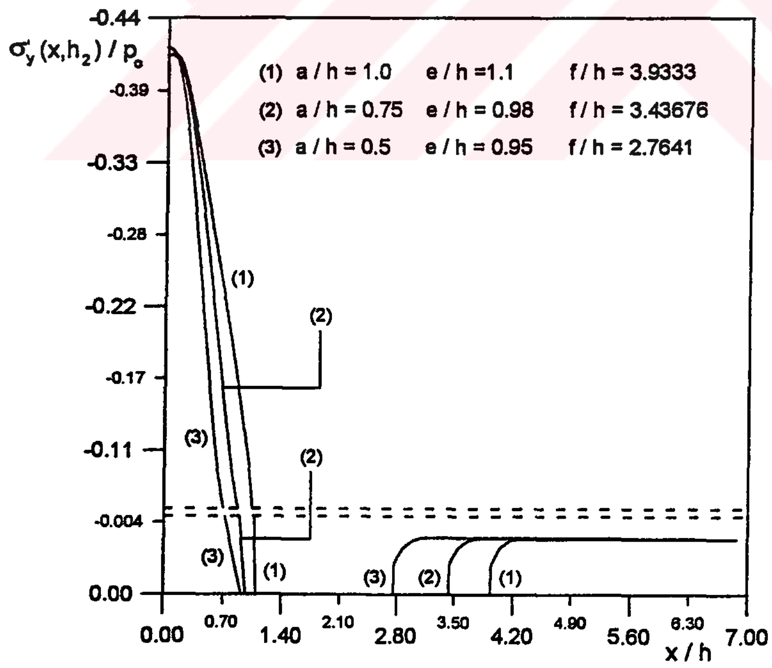
Daha önce verilen grafiklerin çizimi için yapılan çözümlerde, sürekli temas durumunda geçerli olan sınır şartları kullanılmıştır. Yük faktörünün kritik yük faktöründen büyük olduğu ($\beta > \beta_{cr}$) süreksiz temas durumunda ise, bölüm 2.5.2.1' deki sınır şartları kullanılarak elde edilen integral denklem sisteminin çözümü Gauss-Chebyshev integrasyon formülleri yardımıyla yapılmıştır. Bu çözümden elde edilen iki elastik tabakaya ait ara yüzeydeki gerilme dağılışları ve ayrılma mesafeleri, yük genişliği, malzeme özellikleri, mesnet açıklığı ve mesnet genişliği gibi boyutsuz büyüklükler için belirlenmiş ve aşağıda grafikler halinde verilmiştir.

İki elastik tabakaya ait ara yüzeyde $\sigma_y'(x,h_2)/p_o$ gerilme dağılımını veren grafikler incelendiğinde üç bölge ile karşılaşılmaktadır. Bunlardan birincisi yayılı yükün etkili olduğu sürekli temas bölgesi, tabakalar arasında ayrılmanın meydana geldiği süreksiz temas bölgesi ve dış yükün etkisinin kaybolduğu sürekli temas bölgesidir. Dış yükün etkili olduğu bölgede $\sigma_y'(x,h_2)/p_o$ gerilme değerleri y simetri ekseninden itibaren artmakta ve rijit bloğun bulunduğu bölgede ve özellikle rijit blok kenarlarında en büyük değerlerini almaktadır. Daha sonra gerilme değerleri azalarak iki elastik tabakaya ait ara yüzeyde meydana gelen ayrılmanın başlangıç noktası e/h' da sıfır olmakta ve ayrılma bölgesi $(e/h, f/h)$ boyunca sıfır kalmaktadır. Ayrılmanın bittiği nokta f/h' dan sonra ise gerilme değerleri artarak yük faktörü β' ya eşitlenmektedir. Bu bölgede dış yükün etkisi yoktur.

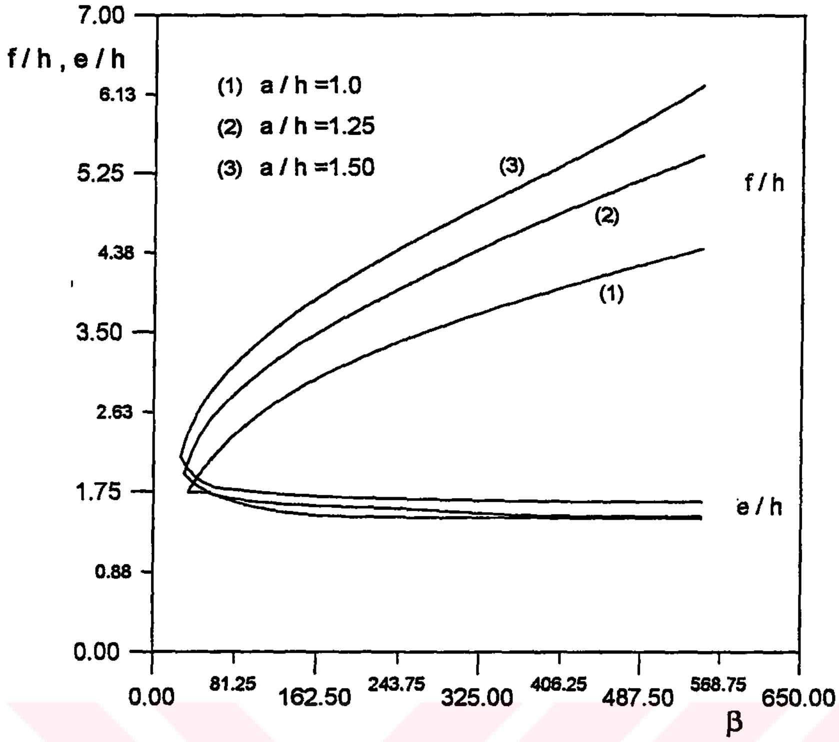
Yük genişliği arttıkça iki elastik tabakaya ait ara yüzeydeki ayrılma bölgesi büyümektedir (Şekil 45 ve Şekil 46). Bu durum ayrılma bölgesinin yük genişliği a/h ve yük faktörü β' ya göre değişiminin gösterildiği Şekil 47' den de görülebilir. Şekil 47' de grafiklerdeki sivri noktalar ilk ayrılma yüklerinin (β_{cr}) değerlerini ve ilk ayrılma uzaklıklarının (x_{cr}) yerlerini göstermektedirler. İlk ayrılma uzaklığı, yük genişliği $a/h = 1$ iken $x_{cr} = 1.741$, yük genişliği $a/h = 1.5$ iken de $x_{cr} = 2.1373$ olmaktadır. Bu durumda ilk ayrılma yükleri ise sırasıyla $\beta_{cr} = 34.234$ ve $\beta_{cr} = 27.053$ olarak belirlenmiştir. Görüldüğü gibi yük genişliği arttırıldığında ilk ayrılma uzaklıkları büyümekte, ilk ayrılma



Şekil 45. Süreksiz temas durumunda tabakalar arasındaki $\sigma'_y(x,h_2)/p_o$ gerilme dağılımının yük genişliği a/h ile değişimi ($b/h=0.5$, $c/h=1$, $\mu_2/\mu_1=6.48$, $\beta=75$, $h_2/h=0.3$)



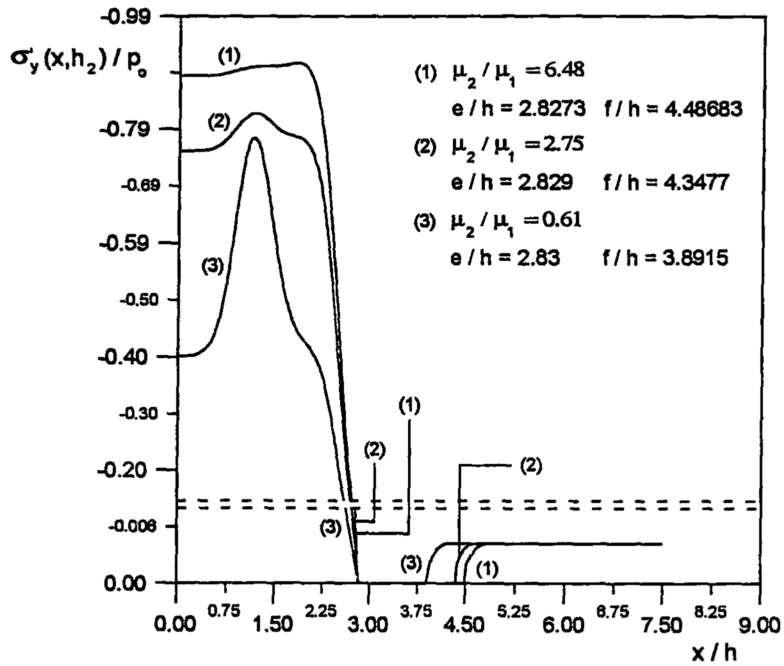
Şekil 46. Süreksiz temas durumunda tabakalar arasındaki $\sigma'_y(x,h_2)/p_o$ gerilme dağılımının yük genişliği a/h ile değişimi ($b/h=0.1$, $c/h=0.6$, $\mu_2/\mu_1=2.75$, $\beta=350$, $h_2/h=0.3$)



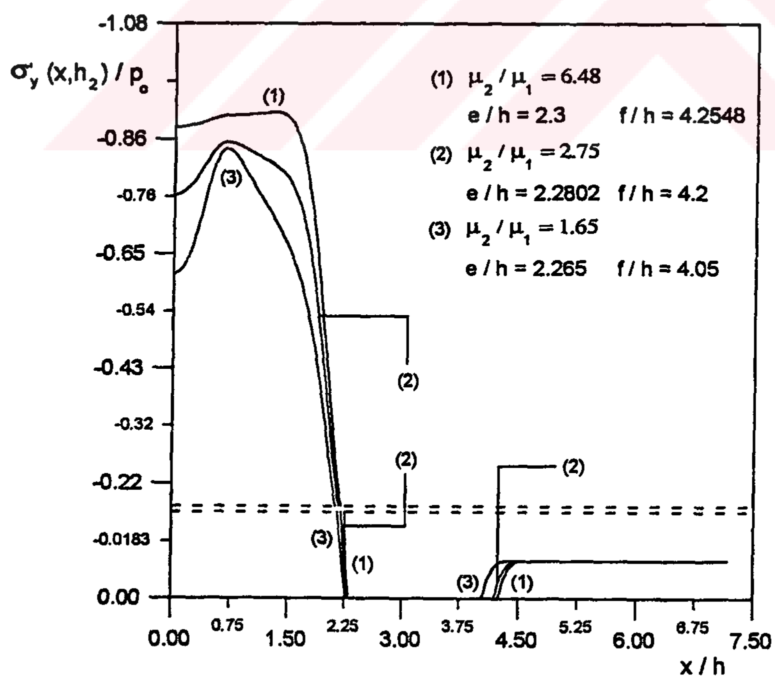
Şekil 47. Değişik a / h yük genişliği değerleri için β yük faktörüne bağlı olarak ayrılma başlangıç ve bitiş noktaları e / h ve f / h' nın değişimi ($b/h=0.5$, $c/h=1$, $\mu_2/\mu_1=6.48$, $h_2/h=0.3$)

yükleri ise bölüm 3.4' de de bahsedildiği gibi, alttaki tabakanın üstteki tabakaya göre daha rijit olması durumunda azalmaktadır. Ayrıca yük faktörü (β) arttırıldığında tabakalar arasındaki ayrılma mesafesinin büyüdüğü Şekil 47' den görülmektedir.

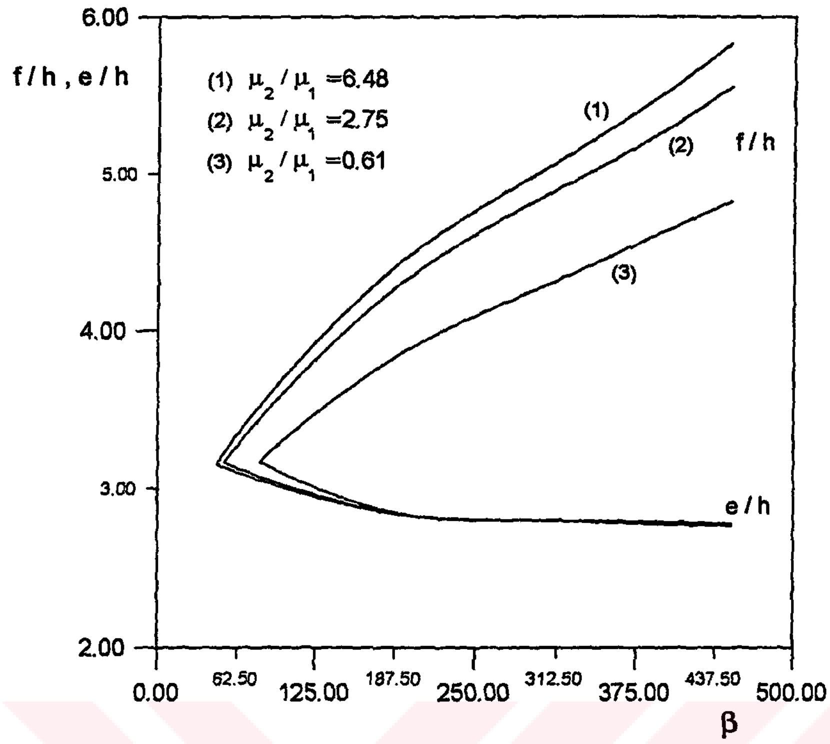
Alttaki tabakanın rijitliği üstteki tabakaya göre arttırıldığında tabakalar arasındaki ayrılma genelde daha kolay meydana gelmekte ve ayrılma bölgesi büyümektedir. Bu durumda tabakalara ait ara yüzeydeki $\sigma_y'(x,h_2)/p_o$ gerilme dağılışları Şekil 48 ve Şekil 49' da verilmiştir. Ayrılma bölgesinin malzeme özelliklerine ve yük faktörüne bağlı olarak değişimi de Şekil 50' de incelenmiştir. Şekil 50' den de görüldüğü gibi alttaki tabakanın rijitliği üstteki tabakadan daha büyük olduğunda, tabakalar arasında meydana gelen ayrılma bölgesi büyümektedir. β yük faktörü arttırıldığında ayrılmanın bitiş noktası f / h büyürken, ayrılmanın başlangıç noktası e / h ' da azalarak sabit bir değere doğru yaklaşmaktadır. İki elastik tabaka arasındaki gerilme dağılışlarının verildiği Şekil 51 ve Şekil 52 incelendiğinde,



Şekil 48. Süreksiz temas durumunda tabakalar arasındaki $\sigma'_y(x,h_2)/p_o$ gerilme dağılımının malzeme sabiti μ_2/μ_1 ile değişimi $(a/h=2.5,\ b/h=1,\ c/h=1.5,\ \beta=200,\ h_2/h=0.5)$

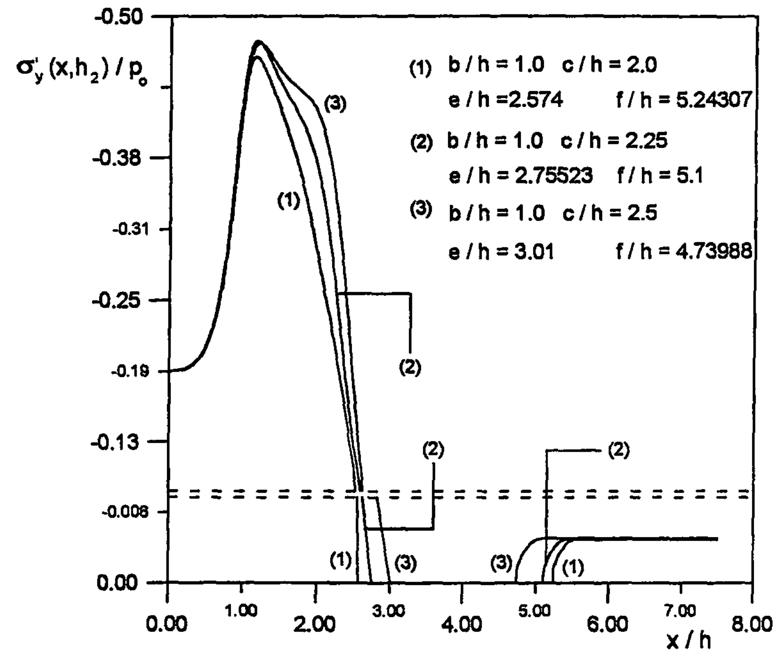


Şekil 49. Süreksiz temas durumunda tabakalar arasındaki $\sigma'_y(x,h_2)/p_o$ gerilme dağılımının malzeme sabiti μ_2/μ_1 ile değişimi $(a/h=2,\ b/h=0.5,\ c/h=1.5,\ \beta=250\ h_2/h=0.5)$

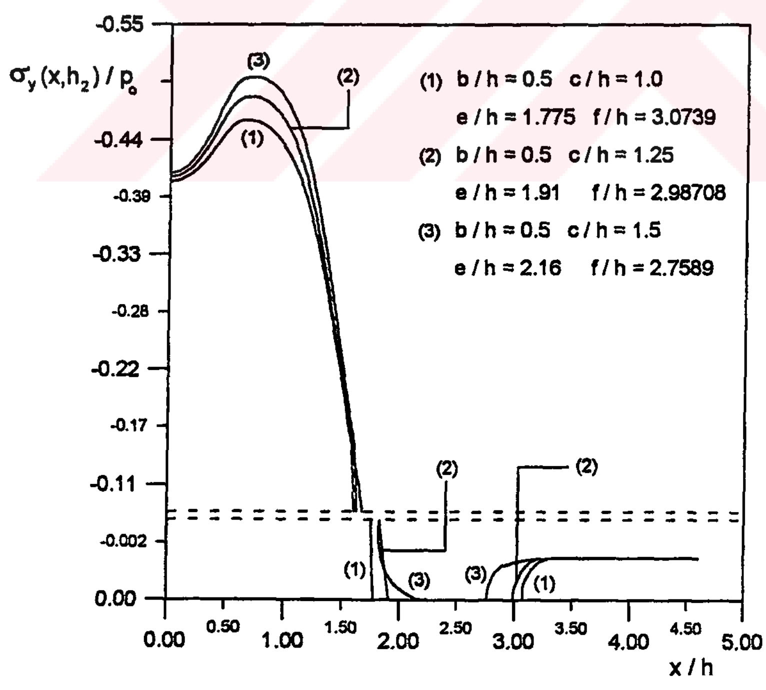


Şekil 50. Değişik μ_2/μ_1 malzeme sabiti değerleri için β yük faktörüne bağlı olarak ayrılma başlangıç ve bitiş noktaları e/h ve f/h' nın değişimi ($a/h=2.5$, $b/h=1$, $c/h=1.5$, $h_2/h=0.5$)

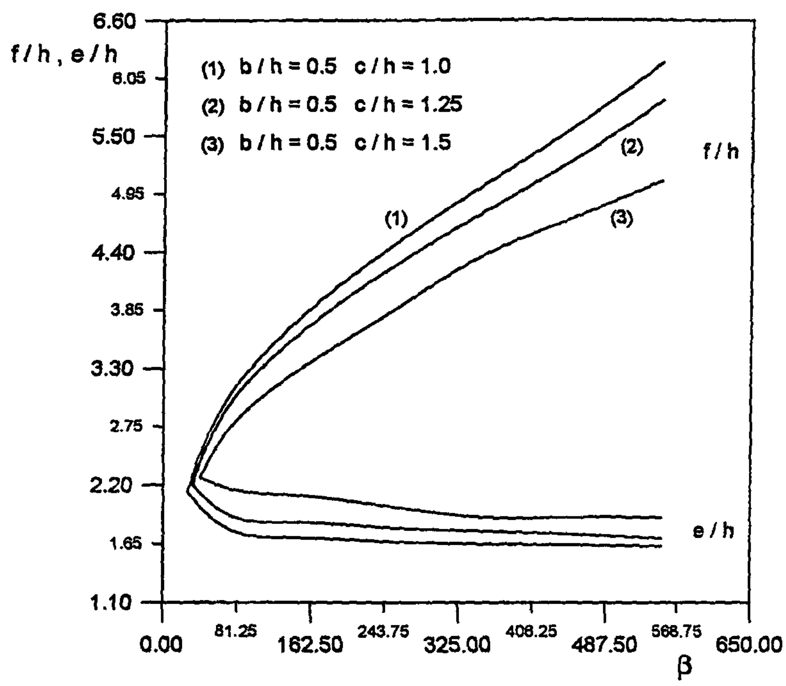
mesnet genişliğinin arttırılması ile tabakalar arasında meydana gelen ayrılma bölgesinin küçüldüğü görülmektedir. Bu durum ayrılma bölgesinin mesnet genişliğine ve yük faktörüne bağlı olarak belirlendiği Şekil 53' de de açık olarak görülmektedir. Şekil 53' de grafiklerdeki sivri noktalar ilk ayrılma yüklerini ve ilk ayrılma uzaklıklarını belirtmektedirler. Mesnet genişliği $(c-b)/h=0.5$ iken, ilk ayrılma yükü $\beta_{cr}=27.053$, ilk ayrılma uzaklığı da $x_{cr}=2.1373$ olmaktadır. Mesnet genişliği $(c-b)/h=1$ olduğunda ise ilk ayrılma yükü $\beta_{cr}=40.789$, ilk ayrılma uzaklığı da $x_{cr}=2.2698$ olarak elde edilmektedir. Daha önce bölüm 3.4' de de bahsedildiği gibi mesnet genişliği arttırıldığında ilk ayrılma yükü ve uzaklığı, bu sonuçlardan da görüldüğü üzere, artmaktadır. Ayrılma bölgesi ise mesnet genişliğinin arttırılması durumunda küçülmektedir. Mesnet genişliği arttırıldığında ayrılma bölgesinin bitiş noktası f/h azalarak y simetri eksenine yaklaşırken, ayrılmanın başlangıç noktası e/h ise büyümekte ve simetri ekseninden uzaklaşmaktadır. Yük faktörünün artması durumunda ise ayrılma bölgesinin büyüdüğü Şekil 53' den görülmektedir.



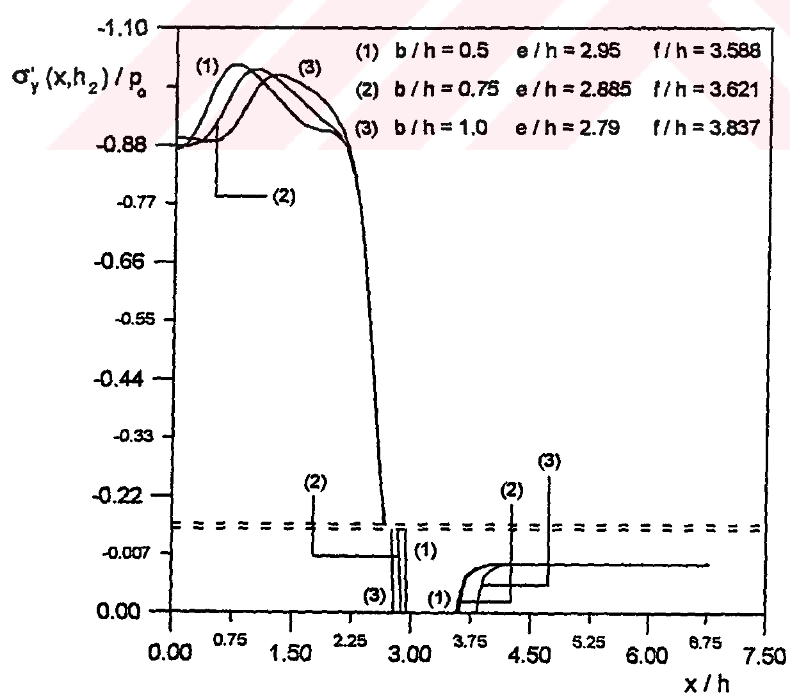
Şekil 51. Süreksiz temas durumunda tabakalar arasındaki $\sigma_y'(x,h_2)/p_o$ gerilme dağılımının mesnet genişliği $(c-b)/h$ ile değişimi $(a/h=2.5,\ \mu_2/\mu_1=2.75,\ \beta=250,\ h_2/h=0.3)$



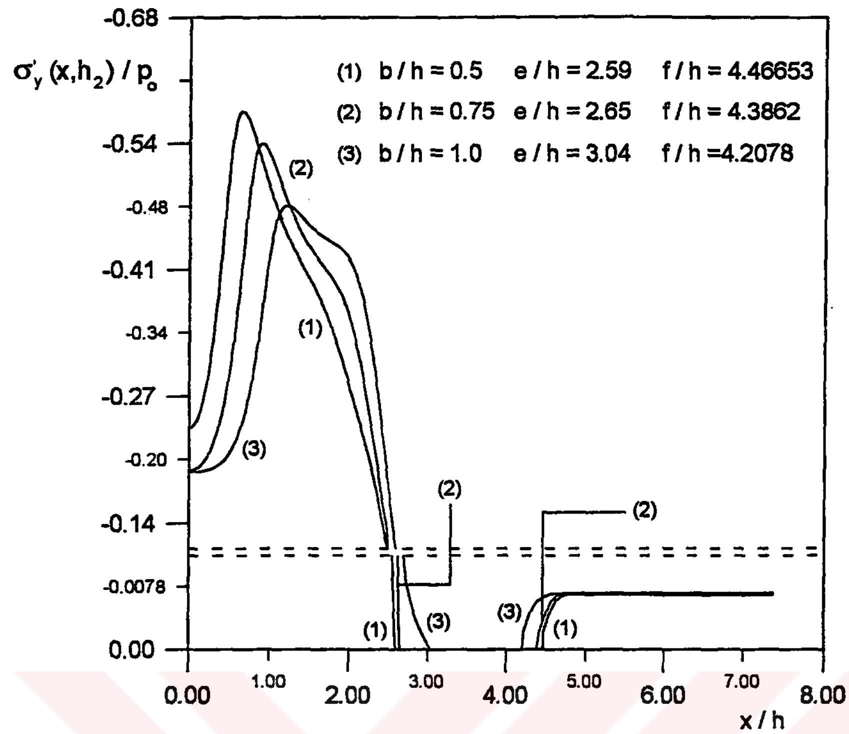
Şekil 52. Süreksiz temas durumunda tabakalar arasındaki $\sigma_y'(x,h_2)/p_o$ gerilme dağılımının mesnet genişliği $(c-b)/h$ ile değişimi $(a/h=1.5,\ \mu_2/\mu_1=6.48,\ \beta=75,\ h_2/h=0.3)$



Şekil 53. Değişik $(c-b)/h$ mesnet genişliği değerleri için β yük faktörüne bağlı olarak ayrılma başlangıç ve bitiş noktaları e/h ve f/h' nın değişimi $(a/h=1.5,\ \mu_2/\mu_1=6.48,\ h_2/h=0.3)$



Şekil 54. Süreksiz temas durumunda tabakalar arasındaki $\sigma'_y(x,h_2)/p_o$ gerilme dağılımının mesnet açıklığı b/h ile değişimi $(a/h=2.5,\ (c-b)/h=1,\ \mu_2/\mu_1=0.61,\ \beta=150,\ h_2/h=0.7)$



Şekil 55. Süreksiz temas durumunda tabakalar arasındaki $\sigma'_y(x,h_2)/p_o$ gerilme dağılımının mesnet açıklığı b/h ile değişimi $(a/h=2.5,\ (c-b)/h=1.5,\ \mu_2/\mu_1=2.75,\ \beta=150, h_2/h=0.3)$

Mesnet açıklığının arttırılması durumunda tabakalar arasında meydana gelen ayrılma bölgesi Şekil 54' te görüldüğü gibi genelde büyümektedir, ancak mesnet açıklığının arttırılmasıyla ayrılma bölgesinin küçüldüğü durumlarla da karşılaşılmıştır (Şekil 55).

3.6. Süreksiz Temas Durumunda Ayrılma Bölgesindeki Düşey Yerdeğiştirmeler Farkının İrdelenmesi

Yükün ilk ayrılma yükünden daha büyük olması durumunda $(\beta > \beta_{cr})$ iki elastik tabakaya ait ara yüzeyde meydana gelen ayrılmalar bölüm 2.5.2.4' deki ifadeler yardımıyla belirlenmiş ve yük genişliği, yük faktörü, malzeme özellikleri, mesnet açıklığı ve mesnet genişliği gibi çeşitli boyutsuz büyüklüklere bağlı olarak değişimi aşağıda grafikler halinde verilmiştir.

Yük genişliği arttıkça daha önce bölüm 3.5' de de incelendiği gibi ayrılma bölgesi büyümekte ve bu bölgede meydana gelen kabarmalar artmaktadır (Şekil 56 ve Şekil 57).

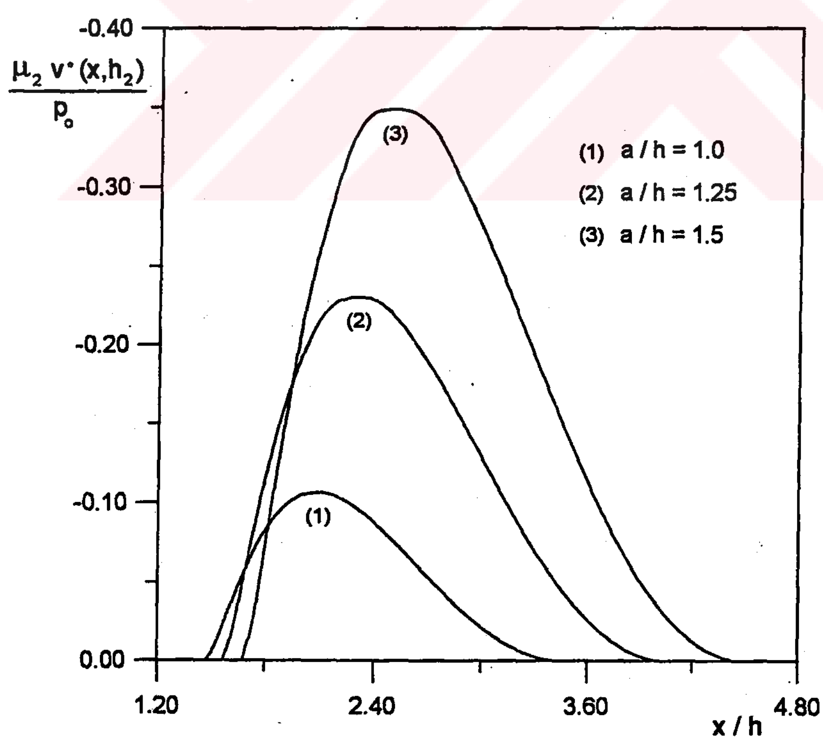
Yük genişliği arttıkça ayrılma bölgesi y simetri ekseninden uzaklaşmaktadır. Tabakalar arasındaki ayrılmanın yükün altındaki bir bölgede meydana geldiği bir durumla karşılaşılmamıştır.

Şekil 58 ve Şekil 59' dan da görüldüğü gibi, yük faktörü β ile birlikte ayrılma bölgesi büyümekte, kabarmalar da artmaktadır.

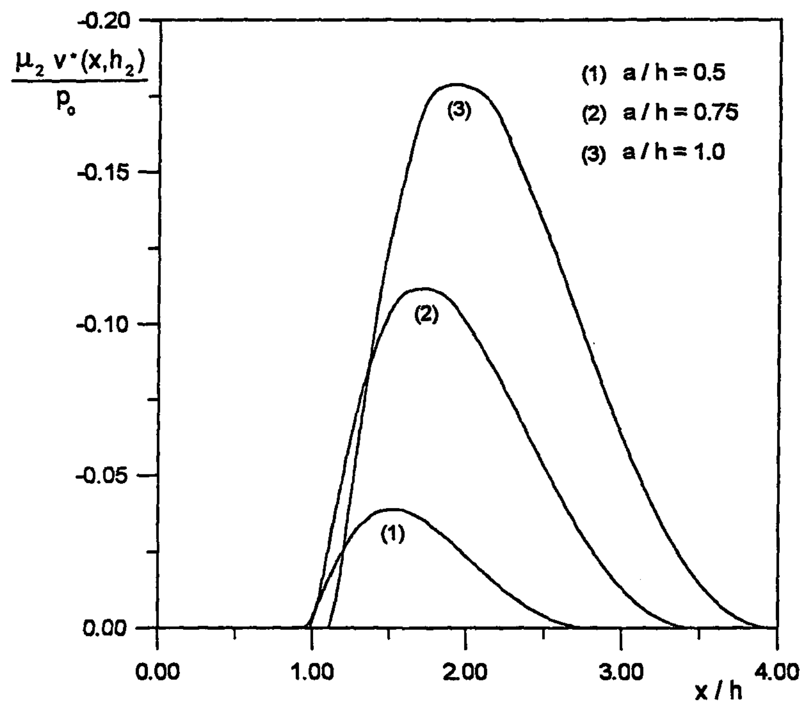
Ayrılma bölgesindeki kabarmaların tabakalara ait malzeme özellikleri ile değişimi de Şekil 60 ve Şekil 61' de verilmiştir. Alttaki tabakanın rijitliği üstteki tabakaya göre giderek arttırıldığında ayrılma bölgesi büyümekte ve daha büyük kabarma değerleri elde edilmektedir.

Mesnet genişliği arttıkça tabakalara ait ara yüzeydeki ayrılma bölgesi küçülmekte ve bu bölgede meydana gelen kabarmalar da azalmaktadır (Şekil 62 ve Şekil 63).

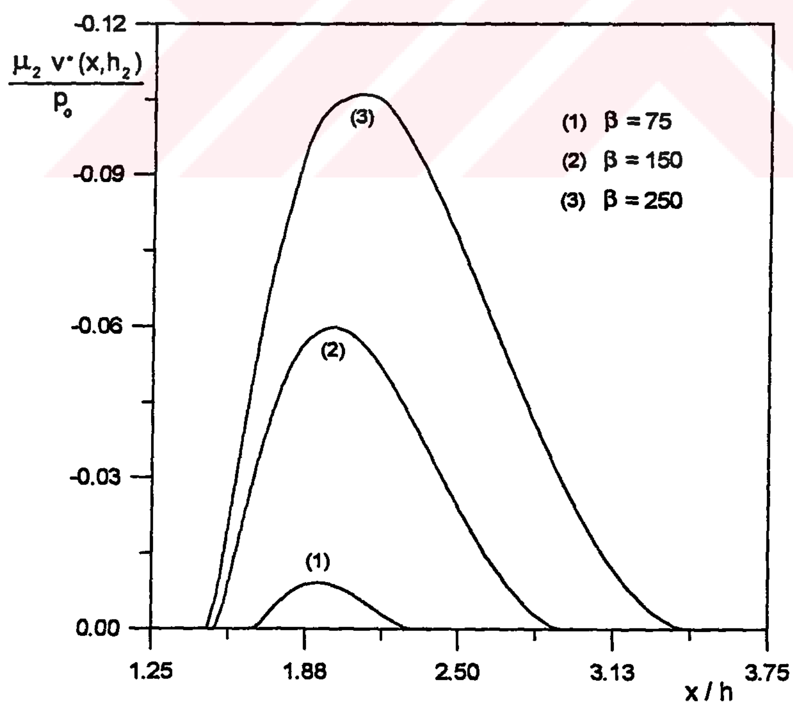
Mesnet açıklığının arttırılması ile bölüm 3.5' de de bahsedildiği gibi ayrılma bölgesi genelde büyümektedir, ancak ayrılma bölgesinin küçüldüğü durumlarla da karşılaşılmaktadır.



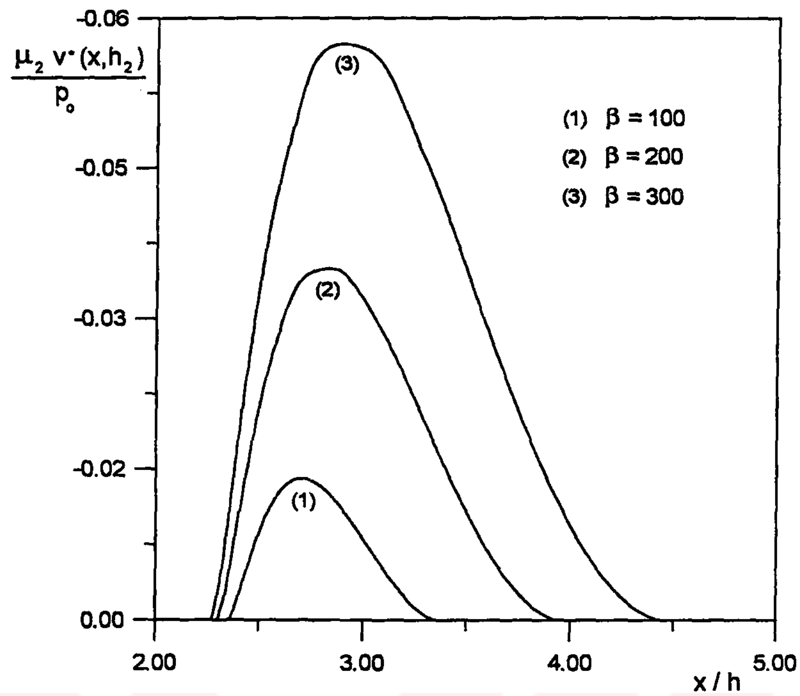
Şekil 56. Elastik tabakalara ait ara yüzeydeki kabarmaların a / h yük genişliği ile değişimi (b / h=0.5, c / h=1, μ_2/μ_1 =6.48, β=250, h_2 / h=0.3)



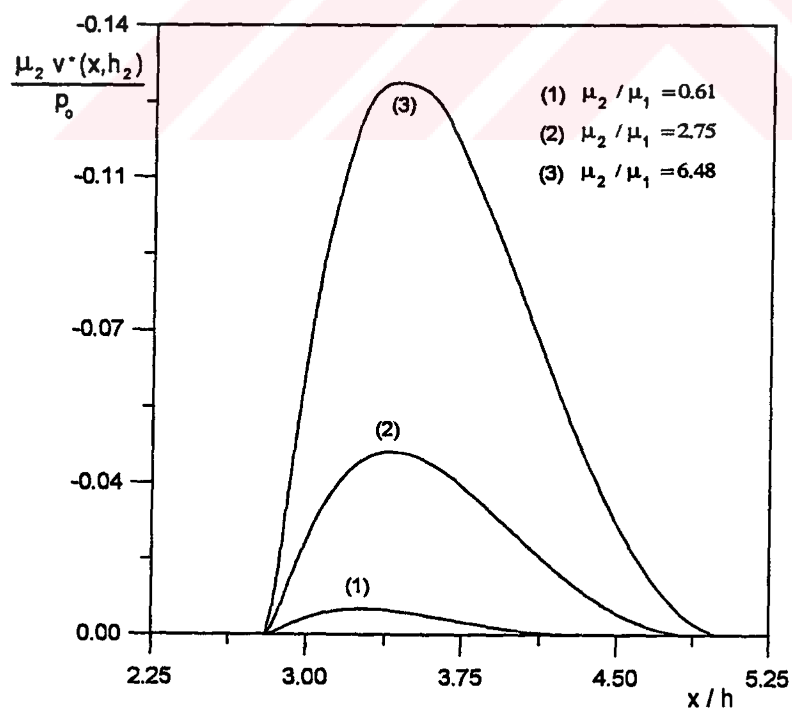
Şekil 57. Elastik tabakalara ait ara yüzeydeki kabarmaların a/h yük genişliği ile değişimi ($b/h=0.1$, $c/h=0.6$, $\mu_2/\mu_1=2.75$, $\beta=350$, $h_2/h=0.3$)



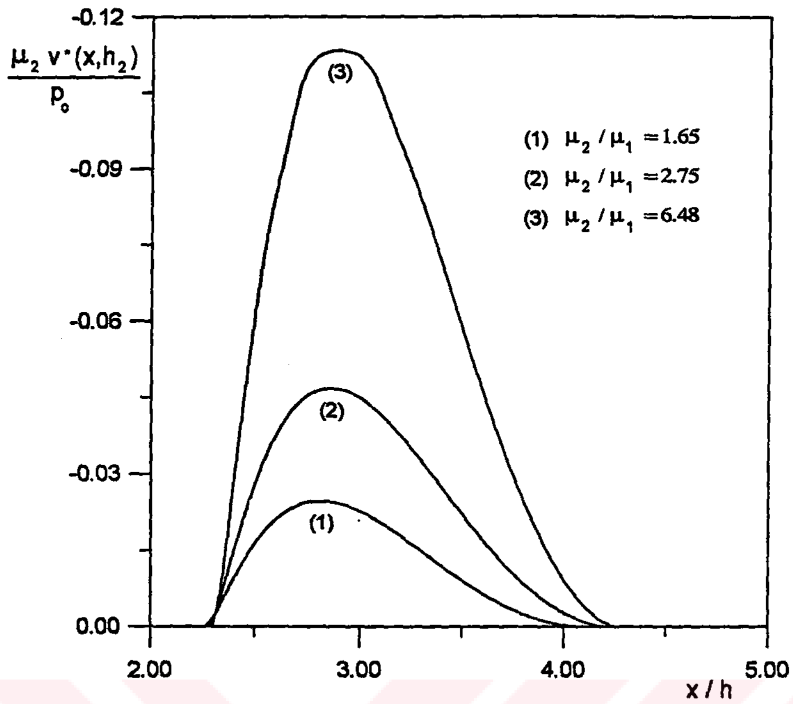
Şekil 58. Elastik tabakalara ait ara yüzeydeki kabarmaların β yük faktörü ile değişimi ($a/h=1$, $b/h=0.5$, $c/h=1$, $\mu_2/\mu_1=6.48$, $h_2/h=0.3$)



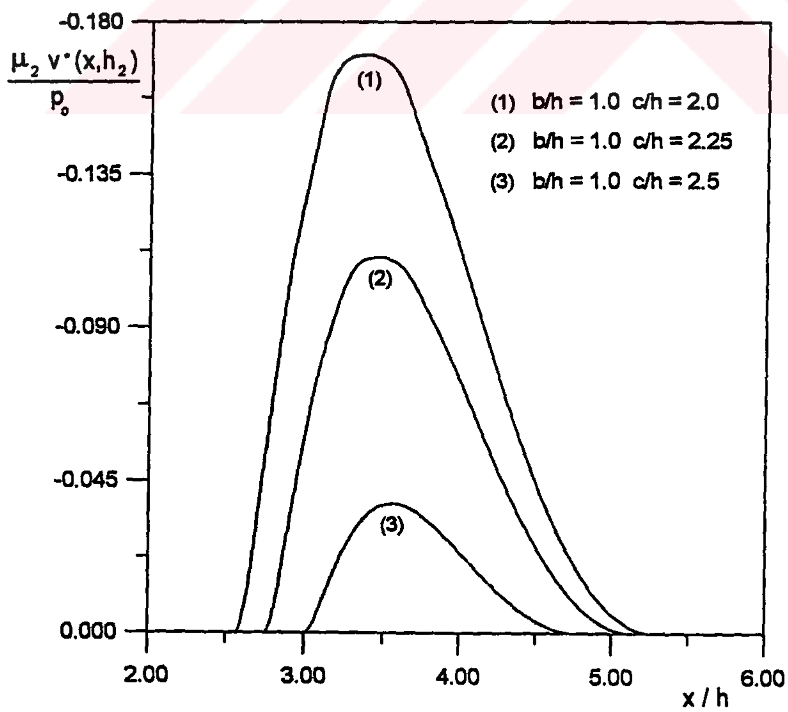
Şekil 59. Elastik tabakalara ait ara yüzeydeki kabarmaların β yük faktörü ile değişimi ($a/h=2$, $b/h=0.1$, $c/h=1.6$, $\mu_2/\mu_1=2.75$, $h_2/h=0.5$)



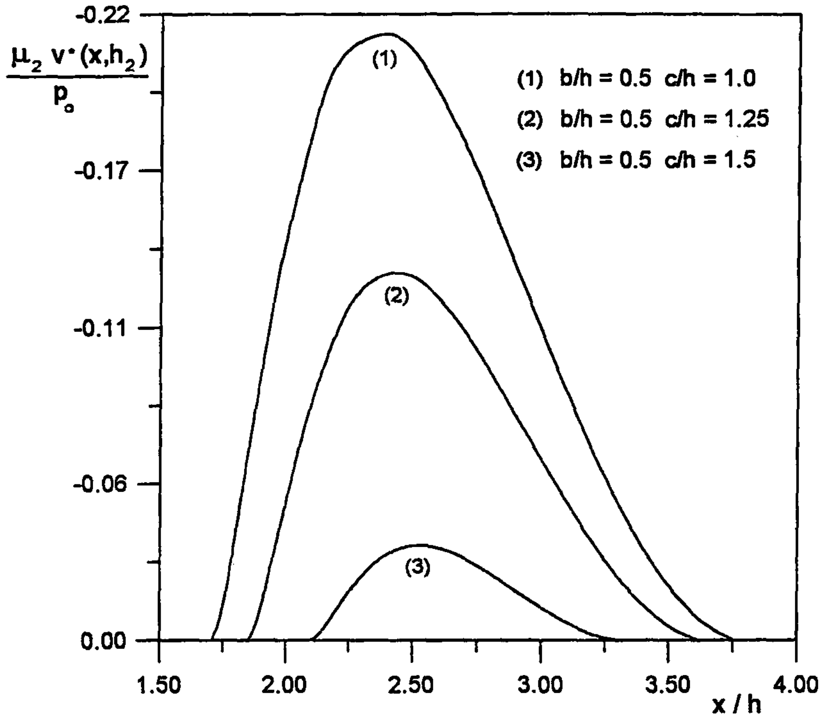
Şekil 60. Elastik tabakalara ait ara yüzeydeki kabarmaların μ_2/μ_1 malzeme sabiti ile değişimi ($a/h=2.5$, $b/h=1$, $c/h=1.5$, $\beta=300$, $h_2/h=0.5$)



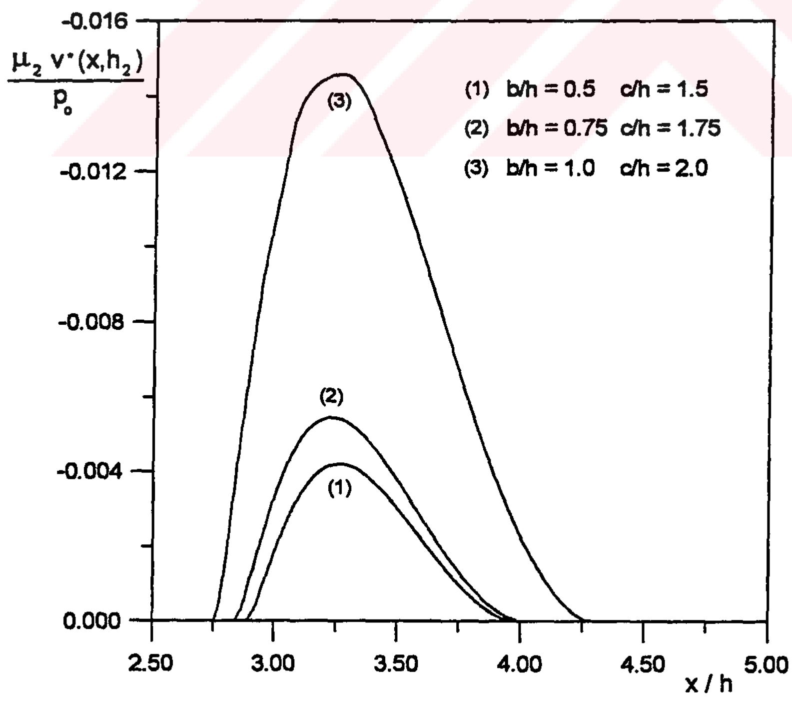
Şekil 61. Elastik tabakalara ait ara yüzeydeki kabarmaların μ_2/μ_1 malzeme sabiti ile değişimi ($a/h=2$, $b/h=0.5$, $c/h=1.5$, $\beta=250$, $h_2/h=0.5$)



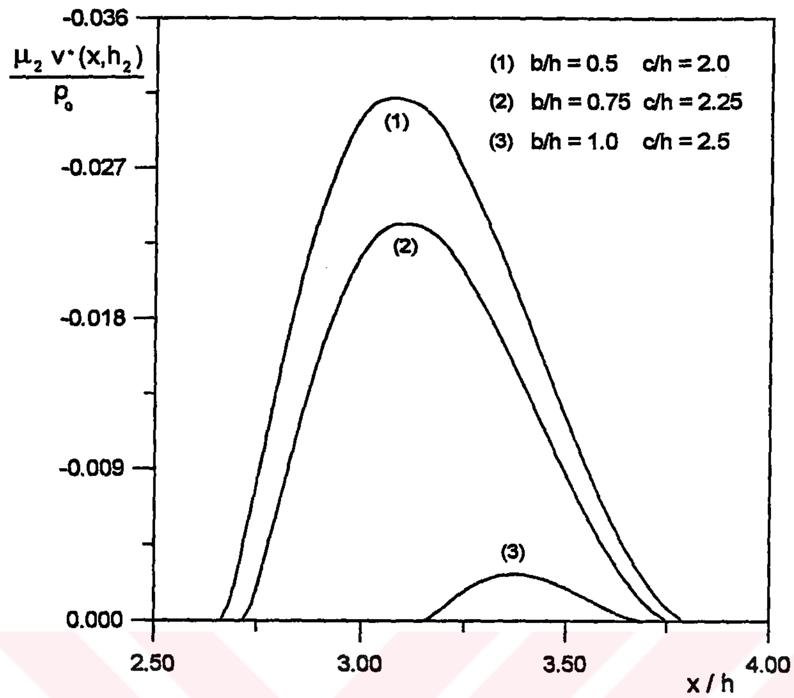
Şekil 62. Elastik tabakalara ait ara yüzeydeki kabarmaların $(c-b)/h$ mesnet genişliği ile değişimi ($a/h=2.5$, $\mu_2/\mu_1=2.75$, $\beta=250$, $h_2/h=0.3$)



Şekil 63. Elastik tabakalara ait ara yüzeydeki kabarmaların $(c-b)/h$ mesnet genişliği ile değişimi $(a/h=1.5,\ \mu_2/\mu_1=6.48,\ \beta=150,\ h_2/h=0.3)$



Şekil 64. Elastik tabakalara ait ara yüzeydeki kabarmaların b/h mesnet açıklığı ile değişimi $(a/h=2.5,\ \mu_2/\mu_1=0.61,\ \beta=250,\ h_2/h=0.7)$.



Şekil 65. Elastik tabakalara ait ara yüzeydeki kabarmaların b/h mesnet açıklığı ile değişimi ($a/h=2.5$, $\mu_2/\mu_1=2.75$, $\beta=75$, $h_2/h=0.3$)

Mesnet açıklığının arttırılmasıyla ayrılma bölgesi büyüdüğünde, bu bölgede meydana gelen kabarmalar büyümekte, ayrılma bölgesi küçüldüğünde ise bu bölgede meydana gelen kabarmalar küçülmektedir (Şekil 64 ve Şekil 65).

4. SONUÇLAR

Rijit iki düz blok üzerine oturan bileşik tabakaya ait temas problemimizde, rijit blok üzerindeki temas gerilmesi, bileşik tabaka ile rijit bloklar arasında ayrılma bulunması ve bulunmaması durumlarında incelenmiştir. İki elastik tabakaya ait ara yüzeydeki gerilme dağılışları ile bu yüzeyde ilk ayrılmayı meydana getirecek yükler ve ilk ayrılmanın meydana geleceği uzaklıklar belirlenmiş, bileşik tabaka ile rijit bloklar arasında ayrılma bulunması ve bulunmaması durumlarında bu yüzeyde y simetri ekseni boyunca normal gerilme dağılışları ve y simetri ekseni yakınında ortaya çıkan kayma gerilmesi dağılışları araştırılmıştır. Ayrıca iki elastik tabakaya ait ara yüzeyde, yükün ilk ayrılma yükünden büyük olması durumunda meydana gelen ayrılmalar ile ayrılma bölgelerindeki kabarmalar da elde edilmiştir. Bütün bu gerilme ve yerdeğiştirme değerlerinin yük genişliği, yük faktörü, malzeme özellikleri, mesnet açıklığı ve mesnet genişliği gibi boyutsuz büyüklüklerle olan değişimlerinin irdelenmesinden elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Bileşik tabaka ile rijit bloklar arasında ayrılma yokken, rijit blok üzerindeki temas gerilmesi rijit blok kenarlarında sonsuza gitmektedir. Bu beklenen bir sonuçtur. Rijit blok üzerindeki temas gerilmesi, yük genişliği küçültüldüğünde veya mesnet açıklığı arttırıldığında rijit bloğun dış kenarı civarında azalırken, dış kenar c/h' da ayrılma eğilimi gözlenmekte, yük genişliği arttırıldığında veya mesnet açıklığı küçültüldüğünde rijit blok üzerindeki temas gerilmesi bu kez rijit bloğun iç kenarı civarında azalmakta ve iç kenar b/h' da ayrılma eğilimi ortaya çıkmaktadır. Alttaki tabakanın rijitliğinin üstteki tabakaya oranla giderek arttırılması durumunda, blok kenarları civarında rijit blok üzerindeki temas gerilmesi dağılışında artış olmaktadır. Mesnet genişliği arttıkça temas gerilmesi rijit bloğun dış kenarı c/h yakınında iyice azalmakta ve ayrılma eğilimi gözlenmektedir. Elastik tabakalar arasında sürtünme yokken, bileşik tabaka ile rijit bloklar arasında ayrılma daha kolay meydana gelmektedir.

Mesnet açıklığı yanında yük genişliği yeterince küçük olursa veya yük genişliği yanında mesnet açıklığı yeterince büyük olduğunda, bileşik tabaka ile rijit düz blokların dış kenarları arasında ayrılma ortaya çıkmaktadır. Bileşik tabaka ile rijit blokların dış kenarı c/h' da ayrılma varken, yük genişliği arttıkça rijit bloğun iç kenarı b/h yakınında ortaya çıkan temas gerilmesi değerleri artmaktadır. Yük genişliği daha da arttırıldığında ise c/h kenarında ayrılma ortadan kalkarken, iç kenar b/h' da ayrılma eğilimi meydana gelmektedir. Yük genişliği arttırıldığında bileşik tabaka ile rijit bloklar arasındaki temas alanı büyümektedir. Alttaki tabakanın üstteki tabakaya göre giderek yumuşamasıyla rijit blok üzerindeki temas gerilmesi azalmakta, bileşik tabaka ile rijit düz bloklar arasındaki temas alanı artmaktadır. Mesnet açıklığının giderek arttırılması durumunda ise rijit blok ile bileşik tabaka arasındaki temas alanında azalma meydana gelmekte bunun sonucu olarak temas gerilmesi daha küçük bir alana yayıldığından artmaktadır. İki elastik tabaka arasında sürtünme bulunması durumunda, bileşik tabaka ile rijit düz bloklar arasında elde edilen temas alanı, tabakalar arasında sürtünme bulunmaması durumunda elde edilen temas alanından daha büyük olmaktadır.

σ_x ve σ_y normal gerilmelerinin dağılımı y simetri ekseni boyunca, τ_{xy} kayma gerilmesinin dağılımı da y simetri ekseni yakınında $x=0.05$ kesiti boyunca, bileşik tabaka ile rijit bloklar arasında ayrılma bulunması ve bulunmaması durumlarında araştırılmıştır.

Tabakalar arasında sürtünme bulunması durumunda, tabakalar beraber çalışmakta ve σ_x gerilme dağılımında bileşik tabakada y simetri ekseni boyunca tek bir çekme ve tek bir basınç bölgesi meydana gelmektedir. Tabakalar arasında sürtünme yokken ise her iki tabakada σ_x gerilme dağılımında ayrı ayrı çekme ve basınç bölgeleri elde edilmekte, dolayısıyla tabakalar ayrı ayrı çalışmaktadırlar. Yük genişliğinin belirli bir değerine kadar bileşik tabaka basit bir kiriş gibi davranmakta, tabakalarda çekme ve basınç olarak ortaya çıkan σ_x gerilmeleri artmaktadır. Yük genişliği a/h daha da arttırıldığında ise tabakaların alt kısımlarında ortaya çıkan çekme gerilmeleri ile üst kısımlarında ortaya çıkan basınç gerilmeleri azalmaktadır. Yük genişliği yeterince arttırıldığında ise tabakaların alt kısımlarında bu kez basınç, üst kısımlarında ise çekme olan σ_x gerilmeleri ortaya çıkmaktadır. Eğer mesnet açıklığı yük genişliğinden yeterince küçük olursa yine bileşik tabakanın alt kısımlarında basınç, üst kısımlarında ise çekme olan σ_x gerilmeleri meydana gelmektedir. Mesnet açıklığı arttıkça σ_x gerilme değerlerinde artış ortaya çıkmaktadır. Tabakaların beraber çalışması durumunda, alttaki tabakanın üstteki tabakaya göre giderek yumuşamasıyla σ_x gerilme değerlerinde bileşik tabakanın altında ortaya çıkan çekme bölgesi büyümektedir. Tabakaların ayrı ayrı çalışması durumunda σ_x gerilmelerinin dağılımında her iki tabakada ayrı ayrı çekme ve basınç bölgeleri ortaya çıkmakta, alttaki tabakanın rijitliğinin üstteki tabakaya oranla azalmasıyla, alttaki tabakada σ_x gerilme değerleri azalırken, üstteki tabakada ortaya çıkan σ_x gerilme değerleri ise artmaktadır. Mesnet genişliği arttırıldığında ise bileşik tabakanın çekme ve basınç bölgelerinde ortaya çıkan σ_x gerilme değerleri büyümektedir.

Elastik tabakalar arasında sürtünme bulunması durumunda tabakalara ait ara yüzeyde σ_x gerilmelerinde meydana gelen süreksizlikler, tabakaların farklı malzeme özelliklerine sahip olmalarından kaynaklanmaktadır. Yük genişliği azalarak tekil yüke yaklaştığında, yük altında σ_x gerilme değerlerinde ani artış olmaktadır ve tekillik oluşumu gözlenmektedir. σ_x normal gerilme dağılımının lineerlikten sapmasının tekillik oluşumundan başka bir diğer nedeni de bileşik tabaka yüksekliği ve mesnet açıklığı arasındaki orana bağlı olarak, bileşik tabakanın yüksek kiriş özelliği göstermesidir.

σ_y gerilme değerleri bileşik tabakanın üst kısmında yayılı yükün şiddetine eşit olurken, aşağıya doğru inildikçe azalmakta ve bileşik tabakanın altında ise sıfır olmaktadır. Bu durum sınır şartlarının sağlandığını gösterir. Yük genişliği küçültülerek tekil yüke yaklaştırıldığında, bileşik tabakanın alt kısmındaki σ_y gerilme değerleri ile, bileşik tabakanın üst kısmındaki σ_y gerilme değerleri arasındaki fark büyümektedir. Bunun nedeni de yük altında oluşabilecek tekilliktir. Mesnet açıklığı arttırıldığında veya alttaki tabakanın rijitliğinin üstteki tabakaya oranla azalması durumunda, σ_y normal gerilme değerleri azalmaktadır. σ_y gerilme değerlerinin dağılımına bakıldığında iki elastik tabaka arasındaki sınır şartlarının sağlandığı görülebilir. Tabakalar arasında sürtünme bulunmaması durumunda iki elastik tabakaya ait ara yüzeyde σ_y gerilme dağılımında meydana gelen eğim değişikliği, tabakaların ayrı ayrı çalıştığını ifade etmektedir.

İki elastik tabaka arasında sürtünme bulunması durumunda, τ_{xy} kayma gerilmesi bileşik tabakanın altında ve üstünde sıfır olurken, tabakalar arasında sürtünme bulunmaması durumunda ise kayma gerilmeleri iki elastik tabakaya ait ara yüzeyde de sıfır olmakta ve sınır şartları sağlanmaktadır. İki elastik tabaka arasında sürtünme bulunması durumunda, tabakalara ait ara yüzeyde τ_{xy} kayma gerilmesi dağılımında eğim değişikliği görülmektedir.

Bu eğim değişikliği tabakaların farklı malzeme özelliklerine sahip olmalarından kaynaklanmaktadır.

Temas problemlerinde temas yüzeylerinde meydana gelen gerilme dağılışları yanında temas eden yüzeylerde ilk ayrılmayı meydana getirecek yük ve ilk ayrılmanın meydana geleceği uzaklık büyük öneme sahiptir.

İlk ayrılma uzaklıkları yük genişliği arttıkça y simetri ekseninden uzaklaşmaktadır. İlk ayrılma yükleri ise, alttaki tabakanın üstteki tabakadan daha rijit olması durumunda, yük genişliği arttıkça azalırken, üstteki tabakanın alttaki tabakadan daha rijit olması durumunda artmaktadır. Mesnet açıklığı arttıkça ilk ayrılma uzaklığı y simetri ekseninden uzaklaşmakta, ilk ayrılmayı meydana getiren yük ise genelde mesnet açıklığı ile büyümektedir, ancak ilk ayrılma yüklerinde mesnet açıklığının arttırılması ile azalmalarda meydana gelebilmektedir. Alttaki tabakanın rijitliği üstteki tabakaya göre giderek arttırıldığında ilk ayrılma uzaklıkları y simetri ekseninden uzaklaşmaktadır. Bu durumda ilk ayrılma yükleri ise genelde artmaktadır. İlk ayrılma uzaklıkları mesnet genişliği arttırıldığında y simetri ekseninden uzaklaşmakta, ilk ayrılma yükleri de büyümektedir.

Genel olarak iki elastik tabaka arasında sürtünme bulunması durumunda elde edilen ilk ayrılma yükleri, tabakalar arasında sürtünme bulunmaması durumunda elde edilen ilk ayrılma yüklerinden ya oldukça büyük çıkmakta yada büyük çıkmadığı durumlarda iki değer arasındaki fark çok küçük olmaktadır.

İki elastik tabakaya ait ara yüzeyde ilk ayrılmayı meydana getirecek yükler ve ilk ayrılma uzaklıkları belirlenirken $\sigma'_y(x,h_2)/p_o$ gerilme dağılımını veren grafikler incelendiğinde iki bölge ile karşılaşılmaktadır. Yayılı yükün etkili olduğu birinci bölgede $\sigma'_y(x,h_2)/p_o$ gerilmesinin y simetri ekseninden itibaren artıp rijit bloğun bulunduğu bölgede daha büyük değerler aldığı, özellikle rijit blok kenarlarında gerilmelerin en büyük değerlerine ulaştıkları görülmektedir. Daha sonra gerilme değerleri dış yükün etkisinin giderek azalması ve kaybolması ile iyice küçülmekte ve $x/h = x_{cr}/h$ olduğunda sıfır olmaktadır. Bu noktadan sonra $x/h > x_{cr}/h$ olduğu ikinci bölgede gerilme değerleri artarak ilk ayrılma yükü β_{cr} ' e eşitlenmektedir. Bu bölgede dış yükün etkisi yoktur.

Yükün (β) ilk ayrılma yükünden (β_{cr}) büyük olması durumunda ise iki elastik tabakaya ait ara yüzeyde ayrılmalar meydana gelmektedir. Bu durumda $\sigma'_y(x,h_2)/p_o$

gerilme dağılımında gerilmenin sıfır olduğu bir üçüncü bölge oluşmaktadır. Birinci bölgede yine $\sigma'_y(x,h_2)/p_o$ gerilme değerleri y simetri ekseninden itibaren artıp rijit blok kenarlarında en büyük değerlerini almakta ve daha sonra dış yükün etkisinin giderek kaybolması ile gerilme değerleri azalmakta ve açılmanın başlangıç noktası e/h' da sıfır olmaktadır. Açılma bölgesi $(e/h, f/h)$ boyunca gerilme değerleri sıfırdır. Açılmanın bittiği f/h noktasından itibaren gerilme değerleri tekrar artmakta ve yük faktörü β' ya eşitlenmektedir. $x/h > f/h$ olduğu bölgede dış yükün etkisi yine yoktur.

Yük genişliği ve yük faktörü arttırıldığında iki elastik tabakaya ait ara yüzeydeki ayrılma bölgesi büyümekte ve bu bölgede meydana gelen kabarmalar da artmaktadır. Yük genişliği arttıkça ayrılma bölgesi y simetri ekseninden uzaklaşmaktadır. Tabakalar arasındaki ayrılma yükün altındaki bir bölgede meydana gelmemektedir. Alttaki tabakanın rijitliği üstteki tabakaya göre arttırıldığında tabakalar arasındaki ayrılma genelde daha kolay meydana gelmekte, ayrılma bölgesi büyümekte ve daha büyük kabarma değerleri elde edilmektedir. Mesnet genişliği arttıkça tabakalara ait ara yüzeydeki ayrılma bölgesi küçülmekte ve bu bölgede meydana gelen kabarmalar azalmaktadır. Mesnet açıklığı arttırıldığında ise ayrılma bölgesi genelde büyümektedir, ancak ayrılma bölgesinin küçüldüğü durumlarla da karşılaşılmaktadır. Mesnet açıklığının arttırılmasıyla ayrılma bölgesi büyüdüğünde, bu bölgede meydana gelen kabarmalar büyümekte, ayrılma bölgesi küçüldüğünde ise ayrılma bölgesinde meydana gelen kabarmalar küçülmektedir.

5. KAYNAKLAR

1. Civelek, M. B., Erdoğan, F., The Axisymmetric Double Contact Problem for a Frictionless Elastic Layer, International Journal of Solids and Structures, 10 (1974) 639- 659.

2. Chou, P. C., Pagano, N. J., Elastisite, Çevirenler: Yaman, N., Erdöl, R., K.T.Ü. Basımevi, Trabzon, 1984.

3. Sneddon, I. N., The Use of Integral Transforms, McGraw-Hill Book Co., New York, 1972.

4. Gladwell , G. M. L., Contact Problems in the Classical Theory of Elasticity, Sijthoff and Noordhoff International Publishers B. V., Alphen ann den Rijn, 1980.

5. Çakıroğlu, F. L., Bileşik Çubukların Eğilme Problemi, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 1984.

6. Johnson, K. L., Contact Mechanics, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

7. Civelek, M. B., Simetrik Tekil Kuvvetlerle Yüklü Sonsuz Şeritte Çatlak Problemi, Doçentlik Tezi, İ.T.Ü., İstanbul, 1978.

8. Galin, L. A., Contact Problems in the Theory of Elasticity, North Carolina State College Translation Series, Raleigh, 1961.

9. Ufliand, I. S., Survey of Articles on the Application of Integral Transforms in the Theory of Elasticity, North Carolina State College Translation Series, Raleigh, 1965.

10. Hetènyi, M., Beams on Elastic Foundation, University of Michigan Press, Michigan, 1946.

11. Dempsey, J. P., Zhao, Z. G., Li, H., Axisymmetric Indentation of an Elastic Layer Supported by a Winkler Foundation, International Journal of Solids and Structures, 27, 1 (1991) 73-87.

12. Dempsey, J. P., Zhao, Z. G., Minnetyan, L., Li, H., Plane Contact of an Elastic Layer Supported by a Winkler Foundation, Journal of Applied Mechanics, 57 (1990) 974-980.

13. Birinci, A., Erdöl, R., Elastik Mesnete Oturan Çift Şerit Problemi, III. Balıkesir Mühendislik-Mimarlık Sempozyumu, Nisan 1995, Balıkesir, Bildiriler Kitabı, 11-19.

14. Birinci, A., Kahya, V., Erdöl, R., Elastik Mesnete Oturan Bileşik Tabakalarda Sürekli Değme Problemi, X. Ulusal Mekanik Kongresi, Eylül 1997, İstanbul, Bildiriler Kitabı, 165-173.

15. Geçit, M. R., Gökpınar, S., Frictionless Contact Between an Elastic Layer and a Rigid Rounded Support, The Arabian Journal for Science and Engineering, 10, 3 (1985) 243-251.

16. Çakıroğlu, F. L., Erdöl, R., Bileşik Çubukların Elastisite Teorisine Göre Çözümü, A. Ü. Isparta Mühendislik Fakültesi Dergisi, 3 (1987) 53-60.

17. Çepni, T., Birinci, A., Çakıroğlu, A. O., Belirli Noktalarından Tutturulmuş Bileşik Çubukların Elastisite Teorisine Göre Çözümü, II. Ulusal Hesaplamalı Mekanik Konferansı, Eylül 1996, Trabzon, Bildiriler Kitabı, 54-64.

18. Birinci, A., Erdöl, R., Üzerinde Rijit Dikdörtgen Bir Blok Bulunan ve Basit Mesnetlere Oturan İki Elastik Tabakanın Sürekli Temas Problemi, X. Ulusal Mekanik Kongresi, Eylül 1997, İstanbul, Bildiriler Kitabı, 151-164.

19. Dhaliwal, R. S., Punch Problem for an Elastic Layer Overlying an Elastic Foundation, International Journal of Engineering Science, 8 (1970) 273-288.

20. Nowell, D., Hills, D. A., Contact Problems Incorporating Elastic Layers, International Journal of Solids and Structures, 24, 1 (1988) 105-115.

21. Lan, Q., Graham, G. A. C., Selvadurai, A. P. S., Certain Two-Punch Problems for an Elastic Layer, International Journal of Solids and Structures, 33, 19 (1996) 2759-2774.

22. Dhaliwal, R. S., Rau, I. S., The Axisymmetric Boussinesq Problem for a Thick Elastic Layer Under a Punch of Arbitrary Profile, International Journal of Engineering Science, 8 (1970) 843-856.

23. Jaffar, M. J., Determination of Surface Deformation of a Bonded Elastic Layer Indented by a Rigid Cylinder Using the Chebyshev Series Method, Wear, 170 (1993) 291-294.

24. Bakırtaş, I., The Problem of a Rigid Punch on a Non-Homogeneous Elastic Half Space, International Journal of Engineering Science, 18 (1980) 597-610.

25. Bjarnehed, H. L., Rigid Punch on Stressed Orthotropic Half-Plane with Partial Slip, Journal of Applied Mechanics, 58 (1991) 128-133.

26. Sabin, G. C. W., Kaloni, P. N., Contact Problem of a Rigid Indentor with Rotational Friction in Second Order Elasticity, International Journal of Engineering Science, 27, 3 (1989) 203-217.

27. Fabrikant, V. I., Sankar, T. S., Concentrated Force Underneath a Punch Bonded to a Transversely Isotropic Half-Space, International Journal of Engineering Science, 24, 1 (1986) 111-117.

28. Geçit, M. R., Axisymmetric Contact Problem for a Semi-Infinite Cylinder and a Half Space, International Journal of Engineering Science, 24, 8 (1986) 1245-1256.

29. Adams, G. G., Bogy, D. B., The Plane Solution for the Elastic Contact Problem of a Semi - Infinite Strip and Half Plane, Journal of Applied Mechanics, 43 (1976) 603-607.

30. Shibuya, T., Koizumi, T., Nakahara, I., An Elastic Contact Problem for a Half-Space Indented by a Flat Annular Rigid Stamp, International Journal of Engineering Science, 12 (1974) 759-771.

31. Shield, T. W., Bogy, D. B., Some Axisymmetric Problems for Layered Elastic Media: Part I - Multiple Region Contact Solutions for Simply - Connected Indenters, Journal of Applied Mechanics, 56 (1989) 798-806.

32. Erdoğan, F., Gupta, G. D., Contact and Crack Problems for an Elastic Wedge, International Journal of Engineering Science, 14 (1976) 155-164.

33. Pindera, M. J., Lane, M. S., Frictionless Contact of Layered Half-Planes, Part I: Analysis, Journal of Applied Mechanics, 60 (1993) 633-639.

34. Pindera, M. J., Lane, M. S., Frictionless Contact of Layered Half-Planes, Part II: Numerical Results, Journal of Applied Mechanics, 60 (1993) 640-645.

35. Gladwell, G. M. L., The Contact Problem for a Rigid Cylinder Pressed Between Two Elastic Layers, Journal of Applied Mechanics, (1977) 36-40.

36. King, R. B., Elastic Analysis of Some Punch Problems for a Layered Medium, International Journal of Solids and Structures, 23, 12 (1987) 1657-1664.

37. Gao, H., Chiu, C., Lee, J., Elastic Contact Versus Indentation Modeling of Multi-Layered Materials, International Journal of Solids and Structures, 29, 20 (1992) 2471-2492.

38. Klarbring, A., Mikelic, A., Shillor, M., The Rigid Punch Problem with Friction, International Journal of Engineering Science, 29, 6 (1991) 751-768.

39. Fan, H., Keer, L. M., Two-Dimensional Contact on an Anisotropic Elastic Half-Space, Journal of Applied Mechanics, 61 (1994) 250-255.

40. Çakıroğlu, A. O., Elastik Yarım Düzleme Oturan Plaklarda Temas Problemi, Doçentlik Tezi, K.T.Ü., Trabzon, 1979.

41. Geçit, M. R., The Axisymmetric Double Contact Problem for a Frictionless Elastic Layer Indented by an Elastic Cylinder, International Journal of Engineering Science, 24, 9 (1986) 1571-1584.

42. Schmueser, D., Comninou, M., Dundurs, J., Separation and Slip Between a Layer and a Substrate Caused by a Tensile Load, International Journal of Engineering Science, 18 (1980) 1149-1155.

43. Comninou, M., Schmueser, D., Dundurs, J., Frictional Slip Between a Layer and a Substrate Caused by a Normal Load, International Journal of Engineering Science, 18 (1980) 131-137.

44. Geçit, M. R., A Tensionless Contact without Friction Between an Elastic Layer and an Elastic Foundation, International Journal of Solids and Structures, 16 (1980) 387-396.

45. Geçit, M. R., Axisymmetric Contact Problem for an Elastic Layer and an Elastic Foundation, International Journal of Engineering Science, 19 (1981) 747-755.

46. Civelek, M. B., Erdoğan, F., Interface Separation in a Frictionless Contact Problem for an Elastic Layer, Journal of Applied Mechanics, 43 (1976) 175-177.

47. Geçit, M. R., Erdoğan, F., Frictionless Contact Problem for an Elastic Layer Under Axisymmetric Loading, International Journal of Solids and Structures, 14 (1978) 771-785.

48. Çakıroğlu, A. O., Çakıroğlu, F. L., Continuous and Discontinuous Contact Problems for Strips on an Elastic Semi-Infinite Plane, International Journal of Engineering Science, 29, 1 (1991) 99-111.

49. Civelek, M. B., Erdoğan, F., Çakıroğlu, A. O., Interface Separation for an Elastic Layer Loaded by a Rigid Stamp, International Journal of Engineering Science, 16 (1978) 669-679.

50. Civelek, M. B., Erdoğan, F., The Frictionless Contact Problem for an Elastic Layer Under Gravity, Journal of Applied Mechanics, 42, 97 (1975) 136-140.

51. Erdoğan, F., Ratwani, M., The Contact Problem for an Elastic Layer Supported by Two Elastic Quarter Planes, Journal of Applied Mechanics, 41, 96 (1974) 673-678.

52. Aksoğan, O., Akavcı, S., Becker, A. A., A Comparative Study of the Contact Problem for an Elastic Layer Supported by Two Elastic Quaerter Planes, Çukurova Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi, 1997.

53. Geçit, M. R., Yapıcı, H., Contact Problem for an Elastic Layer on Rigid Flat Supports, The Arabian Journal for Science and Engineering, 11, 3 (1986) 235-242.

54. Houedec, D. L., Response of a Roadway Lying on an Elastic Foundation to Random Traffic Loads, Journal of Applied Mechanics, 47 (1980) 145-149.

55. Freund, L. B., The Response of an Elastic Solid to Nonuniformly Moving Surface Loads, Journal of Applied Mechanics, (1973) 699-704.

56. Adams, G. G., An Elastic Strip Pressed Against an Elastic Half Plane by a Steadily Moving Force, Journal of Applied Mechanics, 45 (1978) 89-94.

57. Zharii, O. Y., Adhesive Contact Between the Surface Wave and a Rigid Strip, Journal of Applied Mechanics, 62 (1995) 368-372.

58. Zharii, O. Y., Ulitko, A. F., Smooth Contact Between the Running Rayleigh Wave and a Rigid Strip, Journal of Applied Mechanics, 62 (1995) 362-367.

59. Saito, H., Terasawa, T., Steady-State Vibrations of a Beam on a Pasternak Foundation for Moving Loads, Journal of Applied Mechanics, 47 (1980) 879-883.

60. Dieterman, H. A., Metrikine, A., Critical Velocities of a Harmonic Load Moving Uniformly Along an Elastic Layer, Journal of Applied Mechanics, 64 (1997) 596-600.

61. Adams, G. G., Zeid, I., An Elastic Punch Moving Across the Surface of a Semi-Infinite Solid, Journal of Applied Mechanics, 51 (1984) 622-629.

62. Jin, Z. M., Dowson, D., Fisher, J., Minimum and Central Film Thickness Formula for an Elastic Layer Firmly Bonded to a Rigid Cylindrical Substrate Under Entraining Motion, Wear, 170 (1993) 281-284.

63. Ioakimidis, N. I., Anastasselos, G. T., Solution of Plane Elasticity Problems with Mathematica, Computers and Structures, 55, 2 (1995) 229-236.

64. Ezawa, Y., Okamoto, N., Development of Contact Stress Analysis Programs Using the Hybrid Method of FEM and BEM, Computers and Structures, 58, 1 (1996) 13-20.

65. Noor, M. A., Tirmizi, S. I. A., Numerical Methods for a Class of Contact Problems, International Journal of Engineering Science, 29, 4 (1991) 513-521.

66. Chandrashekhara, K., Gopalakrishnan, P., Elasticity Solution for a Multilayered Transversely Isotropic Circular Cylindrical Shell, Journal of Applied Mechanics, 49 (1982) 108-114.

67. Gladwell, G. M. L., On Some Unbonded Contact Problems in Plane Elasticity Theory, Journal of Applied Mechanics, (1976) 263-267.

68. Adams, G. G., Bogy, D. B., The Plane Symmetric Contact Problem for Dissimilar Elastic Semi-Infinite Strips of Different Widths, Journal of Applied Mechanics, (1977) 604-610.

69. Gladwell, G. M. L., A Note on a Three - Part Contact Problem, Chebyshev Polynomials and Elliptic Integrals, International Journal of Engineering Science, 18 (1980) 61-67.

70. Choi, H. J., Thangjitham, S., Stress Analysis of Multilayered Anisotropic Elastic Media, Journal of Applied Mechanics, 58 (1991) 382-387.

71. Gao, Z., Mura, T., Elasticity Problems with Partially Overspecified Boundary Conditions, International Journal of Engineering Science, 29, 6 (1991) 685-692.

72. Zhang, L., Lin, Z., A New Mechanical Model of Stamping a Thin Strip on an Elastic Foundation, International Journal of Solids and Structures, 34, 3 (1997) 327-339.

73. Kikuchi, N., Song, Y. J., Contact Problems Involving Forces and Moments for Incompressible Linearly Elastic Materials, International Journal of Engineering Science, 18 (1980) 357-377.

74. Hung, N. D., Saxcè, G., Frictionless Contact of Elastic Bodies by Finite Element Method and Mathematical Programming Technique, Computers and Structures, 11 (1980) 55-67.

75. Ihara, T., Shaw, M. C., Bhushan, B., A Finite Element Analysis of Contact Stress and Strain in an Elastic Film on a Rigid Substrate - Part I: Zero Friction, Journal of Tribology, 108 (1986) 527-533.

76. Ihara, T., Shaw, M. C., Bhushan, B., A Finite Element Analysis of Contact Stress and Strain in an Elastic Film on a Rigid Substrate - Part II: With Friction, Journal of Tribology, 108 (1986) 534-539.

77. Komvopoulos, K., Finite Element Analysis of a Layered Elastic Solid in Normal Contact with a Rigid Surface, Journal of Tribology, 110 (1988) 477-485.

78. Xie, M., Adams, D. F., Contact Finite Element Modeling of the Short Beam Shear Test for Composite Materials, Computers and Structures, 57, 2 (1995) 183-191.

79. Razaqpur, A. G., Shah, K. R., Exact Analysis of Beams on Two - Parameter Elastic Foundations, International Journal of Solids and Structures, 27, 4 (1991) 435-454.

80. Vallabhan, C. V. G., Das, Y. C., A Refined Model for Beams on Elastic Foundations, International Journal of Solids and Structures, 27, 5 (1991) 629-637.

81. Neumeister, J. M., On the Role of Elastic Constants in Multiphase Contact Problems, Journal of Applied Mechanics, 59 (1992) 328-334.

82. Fariborz, S. J., Singular Integral Equations with Cauchy Kernel on the Half-Line, International Journal of Engineering Science, 25, 1 (1987) 123-126.

83. Timoshenko, S., Goodier, J. N., Elastisite Teorisi, Çevirenler: Kayan, İ., Şuhubi, E., Arı Kitabevi, İstanbul, 1969.

84. Erdèlyi, A., Magnus, W., Oberthettinger, F., Tricomi, F. G., Tables of Integral Transforms, Volume 1, McGraw-Hill Book Co., New York, 1972.

85. Erdoğan, F., Gupta, G. D., On the Numerical Solution of Singular Integral Equations, Quarterly Journal of Applied Mathematics, 29 (1972) 525-534.

86. Erdoğan, F., Gupta, G. D., Cook, T. S., Numerical Solutions of Singular Integral Equations, in Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems, Noordhoff, Leyden, 1973.

6. ÖZGEÇMİŞ

1970 yılında Artvin' de doğdu. İlköğrenimini Sarp Köyü İlkokulu' nda tamamladı. Özel Yükseliş Lisesi orta ve lise kısımlarını bitirdi. Yüksek öğrenimine, 1988 yılında girdiği üniversite sınavlarını kazanarak, Karadeniz Teknik Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü' nde başladı. Bu bölümden 1992 yılında mezun oldu. Aynı yıl açılan sınavı kazanıp Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. 1994 yılında girdiği sınavı başararak, mezun olduğu bölümün Mekanik Anabilim Dalına Araştırma Görevlisi olarak atandı. 1995 yılında yüksek lisans öğrenimini tamamlayarak Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim dalında doktora öğrenimine başladı. Halen araştırma görevliliği ile birlikte lisans üstü çalışmalarına devam etmekte olan Talat Şükrü Özşahin İngilizce bilmektedir.