

22164

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ PROGRAMI

ÇOK GİRİŞLİ-ÇOK ÇIKIŞLI DİZGELERİN İNDİRGENMESİ

Elektronik Müh. Ayten ATASOY

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
"Elektronik Yüksek Mühendisi"
Unvanının Verilmesi için Kabul Edilen Tezdir

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 29.5.1992

Tezin Sözlü Savunma Tarihi : 20.7.1992

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Osman TONYALI

Jüri Üyesi : Doç. Dr. Güven ÜNBİLGİN

Jüri Üyesi : Yrd.Doç.Dr. Rifat YAZICI

Enstitü Müdürü : Doç. Dr. Temel SAVASKAN

Mayıs-1992

TRABZON

Y.C. YÜSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

0NS0Z

Bu tez çalışması, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elektrik-Elektronik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programında yapılmıştır.

Hazırlanan çalışmada, yüksek boyutlu bir dizgenin, indirgenmiş modelini elde etmek için durum modeli kullanan bir yöntem geliştirildi. Yöntemin FORTRAN 77 dilindeki yazılımı hazırlandı ve birçok örneklere uygulandı. Bu çalışma, bazı denetleyiciler ve gözlemleyicilerin, her türlü elektronik ve mekanik dizgelerin tasarımlarının yapılmasında kullanılabilir. İlgilenen meslektaşlarıma, bu tez çalışmasının yararlı olmasını diler, çalışmalarımı yönlendiren Sayın Doç. Dr. Osman Tonyalı'ya teşekkür ederim.

Mayıs 1992

Ayten Atasoy

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	II
TÜRKÇE ÖZET	V
İNGİLİZCE ÖZET	VI
BÖLÜM 1	
1.1. Giriş	1
BÖLÜM 2- TEMEL KAVRAMLAR	
2.1. Giriş	6
2.2. İndirgenmiş Modelin \tilde{A} Durum Matrisinin Elde Edilişi	16
2.3. İndirgenmiş Modelin Denetleme Matrisi \tilde{B} 'ın Belirtilmesi	22
2.4. İndirgenmiş Çıkış Matrisinin Hesabı	24
2.5. Özgün ve İndirgenmiş Model Arasındaki İlinti	25
BÖLÜM 3- YÖNTEMİN BİLGİSAYAR UYGULAMASI	
3.1. Giriş	30
3.2. Algoritmanın Temel Aşamaları	30
3.2.1. İndirgenecek Dizge İçin En Uygun Boyutun Belirtilmesi	30
3.2.2. Özdenklemin Katsayılarının Bulunması	35
3.2.3. Özköklerin Bulunması ve Sıralanması	36
3.2.4. Özvektörlerin Bulunması	37
3.2.5. Özvektörlerin Normalize Edilmesi	39
3.3. İndirgenmiş Modelin Bulunması	39
3.3.1. Baskın Köklerin Belirlenmesi	39
3.3.2. İndirgenmiş Modelin Özvektörlerinin Belirlenmesi	40
3.3.3. İndirgenmiş Modelin \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{C} Matrislerinin Belirlenmesi	40
3.4. Özgün Model ile İndirgenmiş Modelin Çıkışlarının Karşılaştırılması	41
3.5. Yanılgı Ölçütünün Hesabı	42

BÖLÜM 4- UYGULAMA	
4.1. Giriş	44
BÖLÜM 5- SONUÇLAR VE ÖNERİLER	64
KAYNAKÇA	66
BÖLÜM 6	
EK-1: BİLGİSAYAR YAZILIMI	
6.1. Giriş	68
6.2. Özgün Dizgenin İndirgenmiş Modelinin Elde Edilmesi İçin Hazırlanan yazılım Çizelgesinin Açıklaması	68
EK-2: BİLGİSAYAR YAZILIMININ LİSTESİ	72
ÖZGEÇMİŞ	89

ÖZET

Bu tezde, zamanla değişmeyen, doğrusal, değişmez katsayılı, çok değişkenli dizge modellerinin indirgenmesi durum modellerinden yararlanarak gerçekleştirildi. Model indirgeme için kullanılan algoritmanın temeli, baskın (egemen) özdeğerleri indirgenmiş modelde tutulup baskın olmayan özdeğerlerinin dizgeden atılmasına dayanır. Böylece indirgenmiş dizge boyutu, baskın özdeğerlerin sayısına düşürülmüş olur. Optimal (en iyi) indirgemeyi sağlamak için Hankel matrisinin rank özelliğinden yararlanıldı.

Burada sunulan algoritmanın Fortran 77 dilinde bilgisayar yazılımı geliştirildi. Bu model indirgeme yöntemi, geliştirilen bilgisayar yazılımı aracılığı ile bir çok ilginç örneklere uygulandı. Elde edilen sonuçlar, diğer birkaç benzer yöntemlerle elde edilen sonuçlarla karşılaştırıldı.

ABSTRACT

The reduction of the multi-variable, linear, time-invariant system models with constant coefficient are realized by using the state models in this dissertation. The used model reduction technique is based on retaining the dominant eigenvalues in the reduced models and rejecting the nondominant ones from the original models. Thus, the order of the simplified system model is decreased to the number of dominant eigenvalues. In order to assign the model order to be decreased optimally it is also included the rank determination technique of Hankel Matrices, to the model reduction algorithm presented.

A computer programme for this improved algorithm is implemented in Fortran 77 language and applied to various specific examples. The results are compared to the ones achieved by some other similar techniques.

BÖLÜM 1

1.1 GİRİŞ

Yüksek boyutlu dizgelerin analizi ve tasarımı karmaşık ve zor hesaplamalar gerektirdiği gibi parasal açıdan da büyük harcamalar ister. Bu güçlükleri yenmenin önemli bir yolu da yüksek dereceli bir dizgenin daha alçak dereceden bir modelini bulmaktır. Bu işlem yapılırken indirgenmiş model çıkış tepkesinin yaklaşık olarak belirli bir tolerans (hoşgörü) içinde özgün dizge çıkış tepkesine eşit olmasına çalışılır. Bunu yapmakla, indirgenmiş modelin özgününe göre daha kolay hesaplanması, analitik biçimde daha yalın incelenmesi ve daha ucuza mal edilmesi sağlanmış olur. Model indirgeme konusunda özellikle son kırk elli yıldır çok çok inceleme ve araştırmalar yapılmıştır ve henüz bu gayretler hızlanarak sürmektedir. Çağdaş büyük bellekli ve hızlı bilgisayarların geliştirilmeleri sayesinde çok yüksek boyuttan dizgelerin alçak boyutta modellerinin elde edilmesine büyük katkıları olmaktadır.

Model indirgeme konusundaki inceleme ve araştırmalar bir çok farklı yolda sürdürülmektedirler. Bunlardan biri zaman bölgesinde (karmaşık-frekans bölgesinde) diğeri de sürekli durumda saf açısal frekans bölgesinde yapılmaktadır. Zaman bölgesindeki tasarımın, dizgenin başlangıç (ilk) çalışmalarını da hesaba katması nedeni ile özgününe en yakın bir modeli elde etmesi açısından, frekans bölgesi yaklaşımlara göre üstünlükleri vardır. Frekans bölgesi yaklaşımları dizgenin daha çok sürekli durum çalışmalarını göz önüne alır.

Dizge modeli indirgeme ve dizge tanısı için yapılan inceleme ve araştırmalar sürekli zaman ve ayırık zamanda olmak üzere bir başka görüşten de iki ayrı biçimde yapılmaktadır.

Dizgenin dogası açısından da dizge tasarımı ve model indirgeme,

- Zamanla-değişmeyen sabit parametrelili dogrusal dizgeler,
 - Zamanla-değişen dogrusal dizgeler
 - Dagılmış parametrelili dizgeler ve
 - Dogrusal olmayan dizgeler
- üzerinde yapılmaktadır.

Ayrıca dizge tasarımı ve model indirgeme konusunda yapılan inceleme ve araştırmalar dizgelerin uçlarına göre de, bir girişli-bir çıkışlı dizgeler ve çok girişli-çok çıkışlı dizgeler üzerinde yürütülmektedir.

Zamanla-değişmeyen, dogrusal, sabit parametrelili ve bir girişli-bir çıkışlı elektriksel dizgelerin karmaşık frekans bölgesindeki matematik modelleri genellikle dizge işlevleri denilen sabit katsayılı karmaşık frekansın asal rasyonel bir işlevi biçiminde gözönüne alınır. Buradaki asal rasyonel işlevin pay-payda çokterimlilerinin sabitten farklı bir ortak çarpanlarının bulunmadığı anlamına gelir. Böyle rasyonel işlevler için model indirgeme, dizge çıkışları belli bir hoşgörü içinde olmak üzere yüksek mertebeden bir rasyonel işlevden daha alçak mertebeden bir rasyonel işlevin elde edilmesi anlamına gelir. Açıkçası daha alçak mertebeden bir sabit katsayılı rasyonel işlevi, özgün ve indirgenmiş dizge çıkışları istenilen bir tolerans içinde kalacak biçimde elde edilir.

Bu tezde, zamanla-değişmeyen dogrusal sabit parametrelili çok girişli-çok çıkışlı elektriksel dizgelerin indirgenmiş modelleri durum modellerinden yararlanarak elde edilecektir. Ayrıca bu dizgelerin kararlı, bütünü ile denetlenebilir-gözlenebilir oldukları varsayılacaktır.

Model indirgeme sorununu daha genel olarak şu biçimde açıklanabilir. Özgün ve indirgenmiş dizge çıkışları verilen bir hoşgörü (tolerans) içinde kalacak biçimde indirgenmiş modelin elde edilmesi, özgün dizgenin karmaşık düzlemde sanal eksenden en uzakta olan özdeğerlerine (egemen veya baskın olmayanları) karşılık gelen dizge çıkışındaki terimlerin

gözardı edilmesi olarak düşünülebilir. Çünkü zaman bölgesinde böyle terimler, orijinden sağ yana doğru ufak bir uzaklaşma ile hemen ölürlür (sıfıra yaklaşırlar). Optimal bir model indirgeme elde etmek için sanal eksenden uzakta bulunan köklerin saptanması öncelikli sorun olmaktadır. Gerçi birçok kök bulma yöntemleri vardır. Ama çok yüksek dereceli sabit katsayılı çokterimlinin kökleri 10. dereceden sonra bilgisayarların doğruluğunun sınırlı olmaları nedeniyle doğru olarak bulunamamaktadır. Muller algoritması[1] ile gerçi 200. dereceden bir çokterimlinin kökleri çift duyarlıklı CDCN bilgisayarını ile 10^{-7} doğrulukla bulunmuştur. Ancak bugün çok daha yüksek mertebeden dizgeler (Large scale) tasarlanmaktadır.

Bu tezde Davison [2] tarafından önerilen model indirgeme yöntemini temel alan bir algoritma geliştirildi. Bu yeni algoritmanın bilgisayar yazılımını elde edilip birçok örneklere uygulandı. Elde edilen sonuçlar daha öncekiler ile karşılaştırıldı. Hankel [3] matrisinin de optimal model derecesinin seçimi için kullanılması daha doğru sonuçların elde edilmesine neden oldu. Özellikle RC ve RL elektrik devrelerinin tasarımı, tanısı ve model indirgemesi için bu geliştirilen yöntem çok elverişlidir.

Davison [2] yaptığı çalışmada özgün dizgenin, orijinden en uzaktaki özdeğerlerini gözardı ederek, yalnızca baskın özdeğerleri tutan bir indirgenmiş model oluşturmuştur (Özdeğerlerin gerçel kısımlarının negatif olduğu varsayılacaktır). Böylece indirgenmiş durum modelinin zaman sabitleri, özgün modelin baskın zaman sabitleri olacaktır. Açıkcası, indirgenmiş modelin davranışı, özgün modelin davranışını izler biçimde olacaktır. Baskın özdeğerlerin sayısı, özgün dizge ve indirgenmiş dizge çıkışlarının verilen bir hoşgörü (tolerans) içinde olacak biçimde seçilir. Baskın olmayan özdeğerlerin dizgenin tepkesine etkisi, tepkenin başlangıç anında daha fazladır. Bu etki zaman büyüdükçe yok olmakta ve indirgenmiş model ile, özgün dizgenin tepkeleri eşit olmaktadır. Davison'un bu çalışması 2. bölümde daha açık olarak ifade edilecektir.

Lamba ve Vittal Rao [4] da indirgenmiş modelleri kullanarak suboptimal (alt optimal) denetleyicilerin tasarımında bir tümleşik dönüşüm (aggregation) matrislerini elde ederek Davison model indirgeme yöntemi üzerinden gelişme sağlamışlardır. Ayrıca tümleşik dönüşüm matrisinin belirtilmesine ilişkin yeni bir öneride bulunmuşlardır.

Georgakis [5] büyük boyutlu bir dizge yerine, onun indirgenmiş modelini oluşturacak yeni bir algoritma geliştirdi. Onun yöntemi seyrek (sparse) dağılımlı matrisler oluşturularak, bu seyrek dağılımlı matrislerin öğelerinin tamsayı olacak biçimde düzenlenmesine dayanır. Bu yöntem, sıfırda katlı özdeğerleri ve çok karmaşık işlemleri gerektirir. Bu zorluğu düzeltmek için genişletilmiş matrisler kullanılır.

Crockett [6], Lamba ve Vittal Rao'nun [4] çalışması ile Georgakis'in çalışmasını [5] kullanarak genel bir algoritma sunmuştur. Bu yöntem yinelemeli (ardışıl) bilgisayarlar ve programlanabilir hesaplayıcılar için oldukça uygundur.

Tung ve Edgar [7], doğrusal çok değişkenli model için yeni bir indirgeme yöntemi geliştirdiler. Bu yöntem, özgün dizgenin ve indirgenmiş dereceli modelin çıkış tepkeleri arasındaki yanılıgıların, ağırlıklı karelerinin minimize edilmesi düşüncesine dayanmaktadır. İndirgenmiş dereceli model elde edilirken vuruş tepkeleri kullanıldı ve özgün dizge ile indirgenmiş dereceli dizgenin sürekli durum kazanç matrisinin benzer olması gerekliliği öne sürüldü.

Hickin ve Sinha [8], özgün dizgenin aktarma işlevini kullanarak, indirgenmiş model oluşturma düşüncesinden yararlanmışlardır. Özgün dizgenin rasyonel aktarma işlevi için yeni bir benzer model geliştirmişler ve bu modelden yararlanarak indirgenmiş dereceli modeli oluşturmuşlardır.

Çok girişli-çok çıkışlı dizge için bir optimum indirgenmiş dereceli model oluşturan değişik bir algoritma D.A. Wilson [9] tarafından geliştirildi. Özgün dizge ile indirgenmiş model tepkeleri arasında bir karesel amaç işlevi oluşturularak, bu amaç işlevinin indirgenmiş model için minimum koşulları sağlaması düşüncesi öne sürüldü.

S.A.Marshall [10], sıklık (frekans) bölgesinde indirgeme modeli için basit bir algoritma uygulamıştır. Bu yöntem sıfır ve kutupların gözardı edilmesine, dengeleyicilerin kullanılmasına ve saf zaman gecikmelerine (pure-time delays) dayandırılarak geliştirilmiştir.

2.Bölümde; yüksek boyutlu dizgelerde, durum modelinden yararlanarak, daha alçak boyutlu dizgelerin elde edilmesi için bir yöntem geliştirildi.

3.Bölümde; 2.bölümde anlatılan model indirgeme yönteminin, bilgisayar yazılımına uygun sayısal hesapları ayrıntılı biçimde açıklandı.

4.Bölümde ise yazılımı yapılan bu algoritmanın, bazı örnekler üzerindeki sonuçları verildi. Bu sonuçlar, daha önceden geliştirilen başka model indirgeme yöntemleri ile karşılaştırıldı.

Sonuç ve öneriler bölümünde de; model indirgeme konusunda yapılan geliştirmeler, katkılar ve kullanım alanları anlatılmaya çalışıldı.

6.Bölümde; bu tezde incelenen yöntemin, FORTRAN 77 yazılım dilindeki yazılımı geliştirildi. Giriş-çıkış argümanları ve yazılımın kullanılması ayrıntılı olarak anlatıldı.

BÖLÜM-2

TEMEL KAVRAMLAR

2.1. GİRİŞ

Bu çalışmada kullanılan yöntemin kuramsal bilgileri verilecektir. Doğrusal-zamanla değişmeyen bir özgün dizgenin matematiksel modelini

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t) , y(t)=Cx(t) \quad (2.1)$$

biçiminde ele alalım. Burada

A: $n \times n$ boyutundaki skaler öğelerden oluşan durum matrisi,

B: $n \times r$ boyutundaki skaler öğelerden oluşan denetleme matrisi,

C: $m \times n$ boyutundaki skaler öğelerden oluşan çıkış matrisi,

x: $n \times 1$ boyutundaki skaler öğelerden oluşan durum vektörü,

y: $m \times 1$ boyutundaki skaler öğelerden oluşan çıkış vektörü,

u: $r \times 1$ boyutundaki skaler öğelerden oluşan denetleme vektörü,

biçiminde verilmiştir. (2.1) Bağıntısı ile gösterilen bir özgün dizge, büyük boyutlu ise, dizgenin analizi ve sentezi oldukça zor olmaktadır. Bu zorluğu yenmek için burada Davison [2]'un model indirgeme yöntemi kullanılarak büyük boyutlu dizgeden daha alçak boyutlu bir dizge olarak elde edilir. İndirgenmiş modelin matematiksel modeli ise

$$\dot{\tilde{x}}(t)=\tilde{A}\tilde{x}(t)+\tilde{B}u(t) , y=\tilde{C}\tilde{x}(t) \quad (2.2)$$

ile modellenecektir. Burada

\tilde{A} : 1×1 boyutundaki indirgenmiş modelin durum matrisi,

B^* : $l \times r$ boyutundaki indirgenmiş modelin denetleme matrisi,

\check{C} : $m \times l$ boyutundaki indirgenmiş modelin çıkış matrisi,

olarak gösterilir.

Burada l indirgenmiş durumdaki modelin boyutunu gösterir ve $l < n$ olacaktır. $Bu(t)$ ve $\check{B}u(t)$ denetleme işlevleridir.

(2.1) ile verilen durum denkleminin çözümünü elde edelim: (2.1) bağıntısını [11]

$$\dot{x} - Ax(t) = Bu(t)$$

biçiminde düzenledikten sonra eşitliğin her iki yanını, sol taraftan e^{-At} ile çarpılırsa

$$e^{-At} [\dot{x}(t) - Ax(t)] = \frac{d}{dt} [e^{-At} x(t)] = e^{-At} Bu(t)$$

olur. Yukarıdaki eşitliğin tümlevi $0 \leq t < \infty$ zaman aralığında alınır

$$e^{-At} x(t) = x_0 + \int_0^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau$$

veya

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad (2.3)$$

çözümü bulunur. Burada $\phi(t) = e^{At}$ durum geçiş matrisi olarak adlandırılır. Bu gösterim yerleştirilirse (2.1) tümlev denkleminin çözümü

$$x(t) = \phi(t) x_0 + \int_0^t \phi(t-\tau) Bu(\tau) d\tau \quad (2.4)$$

olarak bulunur. İşlemleri basitleştirmek amacıyla x_0 başlangıç koşulları sıfır ve $u(t)$, birim basamak işlevi olarak alınmaktadır. Açıkcası dizgede;

$$Bu(t) = 0 \quad t < 0$$

$$Bu(t) = 1 \quad t \geq 0$$

olduğunu, A matrisinin özdeğerlerinin birbirinden farklı ve

özdeğerlerin gerçel kısımlarının negatif olduğunu varsayalım. Bu durumda;

$$x(t) = \int_0^t \phi(t-\tau) Bu(\tau) d\tau \quad (2.5)$$

Ele alınan özgün dizgeyi Jordan ana köşegen biçime dönüştürelim:

$x=Pz$ dönüşümünden x ile ilişkili olan bir z durum vektörü [11] tanımlanır. Burada, P ($n \times n$) boyutlu nonsingular matristir. Bu dönüşüm (2.1) eşitliğinde yerine yerleştirilerek,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu & y &= Cx \\ P\dot{z} &= APz + Bu & y &= CPz \\ \dot{z} &= P^{-1}APz + P^{-1}Bu & y &= CPz \end{aligned}$$

elde edilir ve

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \Lambda z(t) + \Gamma u(t) \\ y(t) &= Fz(t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

olarak kısaltılabilir. Burada

$$\Lambda = P^{-1}AP, \quad \Gamma = P^{-1}B, \quad F = CP$$

dir.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

(2.1) ile tanımlanan modelin, (2.6) ya dönüştürülen bağıntısı elde edilir. Λ , özdeğerlerden oluşan ana köşegen bir matristir. (2.6) dizgesi için, (2.5) eşitliğinde,

$$\phi(t-\tau) = e^{\Lambda(t-\tau)}$$

yerleştirilir ve böylece

$$z(t) = \int_0^t \phi(t-\tau) \Gamma u(\tau) d\tau = \int_0^t e^{\Lambda(t-\tau)} \Gamma u(\tau) d\tau$$

Jordan ana köşegen biçiminde elde edilen bir dizgenin,

durum denklemlerinin çözümü bu bağıntı ile bulunur. Burada $x=Pz$ dönüşümünde $z=P^{-1}x$ ve $\Gamma=P^{-1}B$ değerleri yerleştirilerek,

$$P^{-1}x(t) = \int_0^t e^{\Lambda(t-\tau)} P^{-1} B u(\tau) d\tau$$

veya

$$x(t) = \int_0^t P e^{\Lambda(t-\tau)} P^{-1} B u(\tau) d\tau \quad (2.8)$$

özgün dizgeye ait durum denklemlerinin çözümü bulunur.

Burada P , her bir özdeğer için ayrı ayrı bulunan özvektörlerin oluşturduğu $(n \times n)$ boyutunda

$$P = (X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n) = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

bir modal matristir.

X_i : A 'nın i .ci özdeğerine karşılık gelen i .ci özvektördür. Herbir özdeğer için elde edilen özvektörler normalize olarak elde edilmiştir. Açıkcası $X_i^T X_i = 1$, $i=1,2,\dots,n$ dir.

Durum geçiş matrisinin

$$e^{At} = I + \frac{At}{1!} + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^n t^n}{n!} \quad (2.10)$$

Mac Laurent açılımında At yerine $\Lambda(t-\tau)$ yerleştirilerek

$$\exp[\Lambda(t-\tau)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \frac{(t-\tau)}{1!} + \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^2 \end{bmatrix} \frac{(t-\tau)^2}{2!}$$

$$+ \begin{bmatrix} \lambda_1^3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^3 & & 0 \\ \cdot & & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^3 \end{bmatrix} \frac{(t-\tau)^3}{3!} + \begin{bmatrix} \lambda_1^4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^4 & & 0 \\ \cdot & & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^4 \end{bmatrix} \frac{(t-\tau)^4}{4!} + \dots$$

yazılabilir. Bu eşitlik (2.8)'de yerleştirilerek tümlevi alınır, durum denklemlerinin çözümü:

$$x(t) = \int_0^t \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{nn} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \frac{(t-\tau)}{1!} + \dots \right.$$

$$\left. \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^2 \end{bmatrix} \frac{(t-\tau)^2}{2!} + \begin{bmatrix} \lambda_1^3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^3 \end{bmatrix} \frac{(t-\tau)^3}{3!} + \dots \right.$$

$$\dots \left. \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} d\tau \right.$$

$$= \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{nn} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \frac{t^2}{2!} + \dots \right.$$

$$+ \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^2 \end{bmatrix} \frac{t^3}{3!} + \begin{bmatrix} \lambda_1^3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^3 \end{bmatrix} \frac{t^4}{4!} + \dots$$

$$\dots \left\{ \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \right.$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} [t\lambda_1 + \frac{\lambda_1^2 t^2}{2!} + \frac{\lambda_1^3 t^3}{3!} + \dots] & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} [t\lambda_2 + \frac{\lambda_2^2 t^2}{2!} + \frac{\lambda_2^3 t^3}{3!} + \dots] & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \dots \end{bmatrix}$$

$$\dots \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1 t}{-1+e} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2 t}{-1+e} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\lambda_n t}{-1+e} \end{bmatrix} x$$

$$x \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

biçiminde yazılabilir. Daha kısa olarak durum denkleminin çözümü:

$$x=P \begin{bmatrix} \lambda_1^t & & & & \\ -1+e & & & & \\ \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2^t & & & \\ & -1+e & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ & & \lambda_n^t & & \\ & & -1+e & & \\ & & \lambda_n & & \\ & & & & \end{bmatrix} P^{-1} B \quad (2.12)$$

biçiminde elde edilir. Burada P dönüşüm matrisinin tersi P^{-1} ile gösterilir ve

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \dots & \gamma_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

tanımı ile (2.12) eşitliği açık olarak yazıldığında;

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{\lambda_1^t}{-1+e} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \cdot \\ x_{n1} \end{bmatrix} (\gamma_{11} b_1 + \gamma_{12} b_2 + \dots + \gamma_{1n} b_n)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\lambda_2^t}{\lambda_2} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \cdot \\ x_{n2} \end{bmatrix} (\lambda_{21} b_1 + \lambda_{22} b_2 + \dots + \lambda_{2n} b_n) \\
 & + \dots + \frac{\lambda_n^t}{\lambda_n} \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \cdot \\ x_{nn} \end{bmatrix} (\lambda_{n1} b_1 + \lambda_{n2} b_2 + \dots + \lambda_{nn} b_n) \quad (2.14)
 \end{aligned}$$

elde edilir. İndirgenmiş model için durum denklemlerinin zamana bağlı çözümü yukardaki çözüme benzer olarak elde edilebilir. Böylece:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \check{\lambda}_{11} & \check{\lambda}_{12} & \dots & \check{\lambda}_{1n} \\ \check{\lambda}_{21} & \check{\lambda}_{22} & \dots & \check{\lambda}_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \check{\lambda}_{n1} & \check{\lambda}_{n2} & \dots & \check{\lambda}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1+e}{\lambda_1^*} & 0 & \dots & \dots \\ \lambda_2^* t & \lambda_2^* t & \dots & \dots \\ 0 & \frac{-1+e}{\lambda_2^*} & \dots & \dots \\ \cdot & \lambda_2^* & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \dots \end{bmatrix} \\
 & \dots \dots \dots \begin{bmatrix} \lambda_1^* t \\ \lambda_1^* t \\ \lambda_1^* t \\ \lambda_1^* t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{11}^* & \lambda_{12}^* & \dots & \lambda_{1n}^* \\ \lambda_{21}^* & \lambda_{22}^* & \dots & \lambda_{2n}^* \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{n1}^* & \lambda_{n2}^* & \dots & \lambda_{nn}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ \cdot \\ \cdot \\ b_1^* \end{bmatrix} \\
 & = \frac{-1+e}{\lambda_1^*} \begin{bmatrix} \check{\lambda}_{11} \\ \check{\lambda}_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \check{\lambda}_{n1} \end{bmatrix} (\lambda_{11}^* b_1^* + \lambda_{12}^* b_2^* + \dots + \lambda_{1n}^* b_1^*)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda_2^* t - 1 + e}{\lambda_2^*} \begin{bmatrix} x_{12}^* \\ x_{22}^* \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{12}^* \end{bmatrix} (\psi_{21}^* \bar{b}_1 + \psi_{22}^* \bar{b}_2 + \dots + \psi_{21}^* \bar{b}_1) \\
& + \frac{\lambda_1^* t - 1 + e}{\lambda_1^*} \begin{bmatrix} x_{11}^* \\ x_{21}^* \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{11}^* \end{bmatrix} (\psi_{11}^* \bar{b}_1 + \psi_{12}^* \bar{b}_2 + \dots + \psi_{11}^* \bar{b}_1) \quad (2.15)
\end{aligned}$$

biçiminde yazılır.

Burada λ_i 1 tane baskın özdegerleri, x_i i.ci özdegerine göre elde edilen özvektörü ve ψ_i ise özvektörler matrisinin tersini içeren matrisin i 'ci sütununu gösterir.

Daha öncede belirtildiği gibi, bu sonuçlar özdegerler farklı olduğu durum için geçerlidir. Özdegerler katlı olduğu durum için de, $x(t)$ durum değişkenleri hesaplanabilir. Bu durum için birinci özdegerin üç katlı, diğer özköklerin katsız olduğunu düşünelim. Bu durumda Jordan köşegen biçimi ve güçleri

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \Lambda^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1^2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n^2 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda^3 = \begin{bmatrix} \lambda_1^3 & 3\lambda_1^2 & 3\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1^3 & 3\lambda_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1^3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n^3 \end{bmatrix}, \dots$$

olarak bulunur. Bu bağıntılar (2.10) yerleştirilirse:

$$\hat{e}^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \frac{t}{1!}$$

$$+ \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n^2 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2!} + \begin{bmatrix} \lambda_1^3 & 3\lambda_1^2 & 3\lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1^3 & 3\lambda_1^2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1^3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n^3 \end{bmatrix} \frac{t^3}{3!} + \dots$$

Elde edilen bu $\hat{e}^{\Lambda t}$ üstel teriminde $t=t-\tau$ yerleştirilerek (2.8) tümlevi alınırsa

$$x(t) = P \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \frac{t^2}{2!} + \dots \right.$$

$$\left. \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n^2 \end{bmatrix} \frac{t^3}{3!} + \begin{bmatrix} \lambda_1^3 & 3\lambda_1^2 & 3\lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1^3 & 3\lambda_1^2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1^3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n^3 \end{bmatrix} \frac{t^4}{4!} \right\} P^{-1} B$$

(2.16)

bulunur. Buradaki toplamlar yapılarak ve gerekli kısaltmalar sonucunda:

$$\begin{aligned}
 t & \frac{\lambda_i t^2}{1!} + \frac{\lambda_i^2 t^3}{2!} + \frac{\lambda_i^3 t^4}{3!} + \dots = \frac{\lambda_i t}{-1+e} \\
 t^2 & \frac{2\lambda_i t^3}{2!} + \frac{3\lambda_i^2 t^4}{3!} + \dots = \frac{\lambda_i^2 t}{1+e} = J \\
 t^3 & \frac{3\lambda_i t^4}{3!} + \frac{6\lambda_i^2 t^5}{5!} + \dots = G
 \end{aligned}$$

$x(t)$ durum değişkenleri sütun vektörü

$$x(t) = P \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1 t}{-1+e} & J & G & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_1 & & & & & \\ 0 & \frac{\lambda_1 t}{-1+e} & J & 0 & \dots & 0 \\ & \lambda_1 & & & & \\ & & \frac{\lambda_1 t}{-1+e} & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ \cdot & \cdot & \lambda_1 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \lambda_n t \\ 0 & 0 & 0 & & & -1+e \\ & & & & & \lambda_n \end{bmatrix} P^{-1} B \quad (2.17)$$

olarak bulunurlar.

2.2 İNDRİGENMİŞ MODELİN A DURUM MATRİSİNİN ELDE EDİLMESİ:

Fiziksel gerçekleştirme koşullarından biri de özköklerin yada kutupların sol yarı karmaşık düzlemde katsız olmaları

düşünülerek, burada özgün dizgenin katsız özdegerlere sahip bulunduğu varsayılır. İndirgenmiş dizgede x_1, x_2, \dots, x_n ile gösterilen durum değişkenlerinin

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \tilde{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

türevsel denklemlerinden açıkça görüldüğü gibi, ilk l baskın özdegerleri içeren l durum değişkenlerinin korunması istenir.

Özgün dizgenin özdegerleri en baskından, en az baskına doğru düzenlenir ve bu düzenlemeye göre özgün dizgenin özvektörleri elde edilmiş olsun. İndirgenmiş dizgenin durum matrisi \tilde{A} , özgünün ilk l baskın özdegerlerini içerecektir. Bu duruma göre indirgenmiş modelin özvektörleri, özgün dizgeninkinin ilk l tanesine karşılık geleceği açıktır.

İndirgenmiş durum modeli elde edildiğinde, bunun zamana göre çözümü, özgün dizgenin ilk l özdegerlerine karşı düşecek benzer terimleri içerir. Bu nedenle indirgenmiş modelle özgün modelin zamana göre çıkış tepkeleri birbirine yakın olur. İndirgenmiş durum matrisi, dizgenin genlikçe büyük olan zaman sabitlerinin gözardı edileceği ilkesine dayanarak elde edilir. Böylece aşağıdaki denklemler takımı; (2.14) denkleminin ilk l özdegerlerine karşı düşen terimleri gözönüne alınarak

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{\lambda_1^t}{-1+e^{-\lambda_1 t}} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n1} \end{bmatrix} (z_{11}^{b_1} + z_{12}^{b_2} + \dots + z_{1n}^{b_n}) + \dots$$

$$\dots + \frac{\lambda_1^t}{-1+e^{-\lambda_1 t}} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n1} \end{bmatrix} (z_{11}^{b_1} + z_{12}^{b_2} + \dots + z_{1n}^{b_n}) \quad (2.19)$$

veya

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \xi_1 \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n1} \end{bmatrix} + \xi_2 \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n2} \end{bmatrix} + \dots + \xi_l \begin{bmatrix} x_{1l} \\ x_{2l} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{nl} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

yazılabilir. Burada

$$\xi_i = \frac{\lambda_i^t - 1 + e}{\lambda_i} (z_{i1}b_1 + z_{i2}b_2 + \dots + z_{in}b_n), \quad i=1, \dots, l$$

ile tanımlanır.

(2.20) deki durum değişkenlerinden yalnız l tanesi $x_1, x_2, x_3, \dots, x_l$ alınacaktır.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_l \end{bmatrix} = \xi_1 \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{l1} \end{bmatrix} + \xi_2 \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{l2} \end{bmatrix} + \dots + \xi_l \begin{bmatrix} x_{1l} \\ x_{2l} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{ll} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$= \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1l} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{l1} & x_{l2} & \dots & x_{ll} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_l \end{bmatrix}$$

Buradan

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1l} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2l} \\ x_{31} & x_{32} & \dots & x_{3l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{l1} & x_{l2} & \dots & x_{ll} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ x_l \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

olarak elde edilir. (2.20) de görülen ve (2.21) indirgenmiş durumunda gözardı edilen değişkenler:

$x_{1+1}, x_{1+2}, x_{1+3}, \dots, x_{n-1}, x_n$ dir. Gözardı edilen durum değişkenleri ile indirgenmiş modelin durum değişkenleri aralarındaki bağıntılar (2.20) denklemleri takımından yararlanılarak

$$\begin{bmatrix} x_{1+1} \\ x_{1+2} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{(1+1)1} & X_{(1+1)2} & \dots & X_{(1+1)1} \\ X_{(1+2)1} & X_{(1+2)2} & \dots & X_{(1+2)1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_{(n-1)1} & X_{(n-1)2} & \dots & X_{(n-1)1} \\ X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{n1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_{1-1} \\ \xi_1 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

biçiminde yazılabilir. (2.22) eşitliği (2.23) de yerleştirilirse;

$$\begin{bmatrix} x_{1+1} \\ x_{1+2} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{(1+1)1} & X_{(1+1)2} & \dots & X_{(1+1)1} \\ X_{(1+2)1} & X_{(1+2)2} & \dots & X_{(1+2)1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_{(n-1)1} & X_{(n-1)2} & \dots & X_{(n-1)1} \\ X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{n1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & \dots \\ X_{21} & X_{22} & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_{(1-1)1} & X_{(1-1)2} & \dots & \dots \\ X_{11} & X_{12} & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dots & X_{11} \\ \dots & X_{21} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \dots & X_{(1-1)1} \\ \dots & X_{11} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{1-1} \\ x_1 \end{bmatrix} = \Lambda_1 \bar{\Lambda}_0^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_1 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

elde edilir. Burada

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} X_{(1+1)1} & X_{(1+1)2} & \dots & X_{(1+1)1} \\ X_{(1+2)1} & X_{(1+2)2} & \dots & X_{(1+2)1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{n1} \end{bmatrix}, \quad \bar{\Lambda}_0^{-1} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{11} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{21} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_{11} & X_{12} & \dots & X_{11} \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.25)$$

Λ_1 $(n-1) \times 1$ boyutlu bir matris ve $\bar{\Lambda}_0^{-1}$ 1×1 boyutunda bir matristir.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

(2.26) da tanımlanan özgün dizge durum denklemlerinden $x_1, x_2, x_3, \dots, x_1$ olarak gösterilen 1 tane değişken korunacaktır. Bu durumda indirgenmiş modelin durum denklemleri şöyle yazılabilir. İlk 1 tanesi için

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{31} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{1(1+1)} & a_{1(1+2)} & \cdots \\ a_{2(1+1)} & a_{2(1+2)} & \cdots \\ a_{3(1+1)} & a_{3(1+2)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{1(1+1)} & a_{1(1+2)} & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1+1} \\ x_{1+2} \\ x_{1+3} \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

yazılabilir. (2.24) eşitliği (2.27) eşitliğinde yerleştirilerek;

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{31} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{11} \end{bmatrix} + \Lambda_1 \bar{\Lambda}_0^{-1} \right\} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_1 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

İndirgenmiş modelin durum denklemleri elde edilir.

$$\mathring{A}_0 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{ (1x1) matris (2.29a)}$$

$$\mathring{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{1(1+1)} & a_{1(1+2)} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{2(1+1)} & a_{2(1+2)} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n(1+1)} & a_{n(1+2)} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{ [1x(n-1)] matris}$$

(2.29b)

(2.28) eşitliği kısaltılarak

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix} = [\mathring{A}_0 + \mathring{A}_1 \Lambda_1 \Lambda_0^{-1}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_1 \end{bmatrix} = \mathring{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_1 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

biçiminde yazılabilir. (2.25) ve (2.29) eşitliklerinden indirgenmiş modelin durum matrisi

$$\mathring{A} = \mathring{A}_0 + \mathring{A}_1 \Lambda_1 \Lambda_0^{-1} \quad (2.31)$$

olur.

İlk olarak baskın özdeğerlerin, en baskından en az baskın olana doğru sıralanması ile, x_1, x_2, \dots, x_1 durum değişkenleri indirgenmiş dizge için belirlenmiş olur. Geri kalan durum değişkenleri $(x_{1+1}, x_{1+2}, \dots, x_n)$ indirgenmiş dizge için belirlenen durum değişkenleri cinsinden (2.24) de

oldugu gibi yazılır.

2.3 İNDİRGENMİŞ MODELİN DENETLEME MATRİSİ \tilde{B} 'İN BELİRTİLMESİ :

Katsız özdeğerlere sahip, özgün dizgenin zaman çözümü daha önce anlatıldığı gibi

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^t}{-1+\lambda_i} \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{ni} \end{bmatrix} (\gamma_{i1}b_1 + \gamma_{i2}b_2 + \dots + \gamma_{in}b_n) \quad (2.32)$$

biçiminde yazılır. Burada özvektörler normalize edilmiştir, böylece;

$$\sum_{j=1}^n x_{ji}^2 = 1, \quad i=1,2,\dots,n$$

olmalıdır ve indirgenmiş dizgenin zamana bağlı çözümü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_1 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^t}{-1+\lambda_i} \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{1i} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{11} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{21} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{11} & x_{12} & \dots & x_{11} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \tilde{b}_1 \end{bmatrix} \right\} \quad (2.33)$$

bu çarpımın i.ci sırası

\tilde{B} indirgenmiş denetim matrisi $\tilde{B} = [\tilde{b}_1^* \tilde{b}_2^* \dots \tilde{b}_1^*]^T$ biçimsel olup \tilde{b}_k^* lar ($k=1,2,\dots,1$) \tilde{B} nin satırlarını gösterir.

Çözümler denkleminde ve 1.ci dereceden daha yüksek dereceli, gözardı edilen modlar (özdeğerler) arasında aşağıdaki ilişki elde edilir. Burada

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n^* \end{bmatrix} = (z_{i1} b_1 + z_{i2} b_2 + \dots + z_{in} b_n), \quad i=1,2,\dots,n$$

veya

$$\begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{nn} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} \right\}$$

çarpımının ilk 1 sırası

(2.34)

veya daha kısa olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathring{B} = \mathring{P} [P^{-1}B] \quad (2.35)$$

Burada

$$\mathring{P} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{nn} \end{bmatrix}, \quad (1 \times 1) \text{ boyutlu matris}$$

$$[P^{-1}B] = \left\{ \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} \right\} \text{ 'nin ilklil matrisi}$$

(2.36)

olarak tanımlandı. Ayrıca Bu(t)'nin basamak işlevi olduğu

varsayımıyla bu sonuçlar elde edildi.

2.4. İNDİRGENMİŞ ÇIKIŞ MATRİSİNİN HESABI

Düzgün dizge için çıkış denklemi

$$y = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n] [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T \quad (2.37)$$

biçiminde yazılabilir. İndirgenmiş modeldeki durum değişkenlerine göre aynı bağıntı yazıldığında

$$y = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + [c_{1+1} \ c_{1+2} \ \dots \ c_n] \begin{bmatrix} x_{1+1} \\ x_{1+2} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

(2.24) bağıntısı (2.38) de yerleştirilirse

$$y = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + [c_{1+1} \ c_{1+2} \ \dots \ c_n] [\Lambda_1 \ \bar{\Lambda}_0^{-1}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_1 \end{bmatrix}$$

$$= \left\{ [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_1] + [c_{1+1} \ c_{1+2} \ \dots \ c_n] [\Lambda_1 \ \bar{\Lambda}_0^{-1}] \right\} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_1 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Buradan görüldüğü gibi indirgenmiş modelin çıkış matrisi:

$$\bar{C} = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_1] + [c_{1+1} \ c_{1+2} \ \dots \ c_n] [\Lambda_1 \ \bar{\Lambda}_0^{-1}] \quad (2.39)$$

olarak elde edilir. İndirgenmiş model için çıkış denklemi

$$y = \tilde{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_1 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

biçiminde ifade edilir.

5.5. ÖZGÜN VE İNDİRGENMİŞ MODEL ARASINDAKİ İLİNTİ

TEOREM : İndirgenmiş modelin özdeğerleri ve özvektörleri ile özgün dizgenin ilk l baskın degerleri ve özvektörleri birbirine eşittir.

KANIT :

(2.31) de gösterilen \tilde{A} durum matrisi özgün dizgenin ilk l özdeğerlerinin ve özvektörlerinin aynı degerlerine sahiptir. Bir özvektörler matrisinin tersi ile çarpımının birim matris oluşturacağı düşüncesinden giderek:

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1l} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2l} \\ x_{31} & x_{32} & \dots & x_{3l} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x_{l1} & x_{l2} & \dots & x_{ll} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ x_{3i} \\ \cdot \\ x_{li} \end{bmatrix} = r, \quad r \text{ bir sütun vektörüdür.}$$

i=1 için $r = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$, 1 boyutlu

i=2 için $r = [0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$, 1 boyutlu

·

i=l için $r = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1]^T$, 1 boyutlu

yazabiliriz. Son denklemler takımının her iki yanını (2.25) eşitliğinde tanımlanan Λ_1 ile birinci taraftan çarpılırsa,

$$\begin{bmatrix} x_{(1+1)1} & x_{(1+1)2} & \cdots & x_{(1+1)1} \\ x_{(1+2)1} & x_{(1+2)2} & \cdots & x_{(1+2)1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{n1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \cdots x_{11} \\ x_{21} & x_{22} \cdots x_{21} \\ x_{31} & x_{32} \cdots x_{31} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{11} & x_{12} \cdots x_{11} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ x_{3i} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{1i} \end{bmatrix} \\
 = \begin{bmatrix} x_{(1+1)i} \\ x_{(1+2)i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{ni} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, 1$$

elde edilir. Yine her iki yanı (2.29) bağıntısında tanımlanan \tilde{A}_1 matrisi ile çarparak

$$\begin{bmatrix} a_{1(1+1)} & a_{1(1+2)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2(1+1)} & a_{2(1+2)} & \cdots & a_{2n} \\ a_{3(1+1)} & a_{3(1+2)} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{1(1+1)} & a_{1(1+2)} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{(1+1)1} & x_{(1+1)2} & \cdots \\ x_{(1+2)1} & x_{(1+2)2} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \cdots & x_{(1+1)1} \\ \cdots & x_{(1+2)1} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdots & x_{n1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \cdots x_{11} \\ x_{21} & x_{22} \cdots x_{21} \\ x_{31} & x_{32} \cdots x_{31} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{11} & x_{12} \cdots x_{11} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ x_{3i} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{1i} \end{bmatrix} \\
 = \begin{bmatrix} a_{1(1+1)} x_{(1+1)i} + a_{1(1+2)} x_{(1+2)i} + \cdots + a_{1n} x_{ni} \\ a_{2(1+1)} x_{(1+1)i} + a_{2(1+2)} x_{(1+2)i} + \cdots + a_{2n} x_{ni} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{1(1+1)} x_{(1+1)i} + a_{1(1+2)} x_{(1+2)i} + \cdots + a_{1n} x_{ni} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

bulunur. Yeniden her iki yanı

$$\tilde{A}_0 \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ x_{3i} \\ \vdots \\ x_{li} \end{bmatrix}$$

ile toplanırrsa, $(\tilde{A}_0, (2.29)$ eşitliğinde tanımlanmıştır.)

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{1(1+1)} & a_{1(1+2)} & \dots & \dots \\ a_{2(1+1)} & a_{2(1+2)} & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{l(1+1)} & a_{l(1+2)} & \dots & \dots \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x_{(1+1)1} & x_{(1+1)2} & \dots & x_{(1+1)l} \\ x_{(1+2)1} & x_{(1+2)2} & \dots & x_{(1+2)l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1l} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{l1} & x_{l2} & \dots & x_{ll} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{li} \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{ni} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, l \quad (2.42) \end{aligned}$$

elde edilir. Burdan görülüyor ki büyük ayrıt içinde oluşan matris, indirgenmiş model için \tilde{A} durum matrisini vermektedir. Sonuçta ;

$$\tilde{A} \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ x_{3i} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{li} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ x_{3i} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{ni} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, l \quad (2.43)$$

bulunur. Özgün A durum matrisinin özvektörleri

$$(A - \lambda_i I) X_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

bağıntılarıyla elde edilir. Açık olarak bu bağıntılar

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{ni} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_i x_{1i} \\ \lambda_i x_{2i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_i x_{ni} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

biçiminde yazılır. (2.42) eşitliğinin sağında bulunan matris vektör çarpımını elde etmek için, yukardaki eşitliğin 1,2,...,l değerlerini alalım.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{ni} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_i x_{1i} \\ \lambda_i x_{2i} \\ \lambda_i x_{3i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_i x_{li} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, l$$

(2.42) de elde ettiğimiz bu eşitliği yerleştirdiğimizde

$$A \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ x_{3i} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{li} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_i x_{1i} \\ \lambda_i x_{2i} \\ \lambda_i x_{3i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_i x_{li} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

veya

$$(A - \lambda_i I) \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ x_{3i} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{li} \end{bmatrix} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, l$$

elde edilir. Burdan da görülür ki, \mathbf{A}^* ın özdegerleri ve özvektörleri özgün dizgenin ilk l özdegerlerinin ve özvektörlerinin aynısıdır.



BÖLÜM 3

YÖNTEMİN BİLGİSAYAR UYGULAMASI

3.1 GİRİŞ

Özellikleri verilen bir dizgenin, indirgenmiş modelinin bulunması için geliştirilen bu algoritma FORTRAN 77 yazılım dilinde kodlanarak hazırlanmıştır. Bütün hesaplamalar karmaşık işlemlerle yapılmıştır.

Algoritma hesaplarının kolayca anlaşılması için her aşama ayrıntılı biçimde bu bölümde sunulacaktır. Bu aşamaların, algoritmanın yazılımına ışık tutacak kaba bir akış çizgesi bu bölümde verilecektir.

3.2 ALGORİTMANIN TEMEL AŞAMALARI

Algoritmanın aşamaları şekil-3.1'de verilen kaba bir akış çizgesi üzerinden açıklanacaktır. Dizgenin durum denklemi ve çıkış denklemi

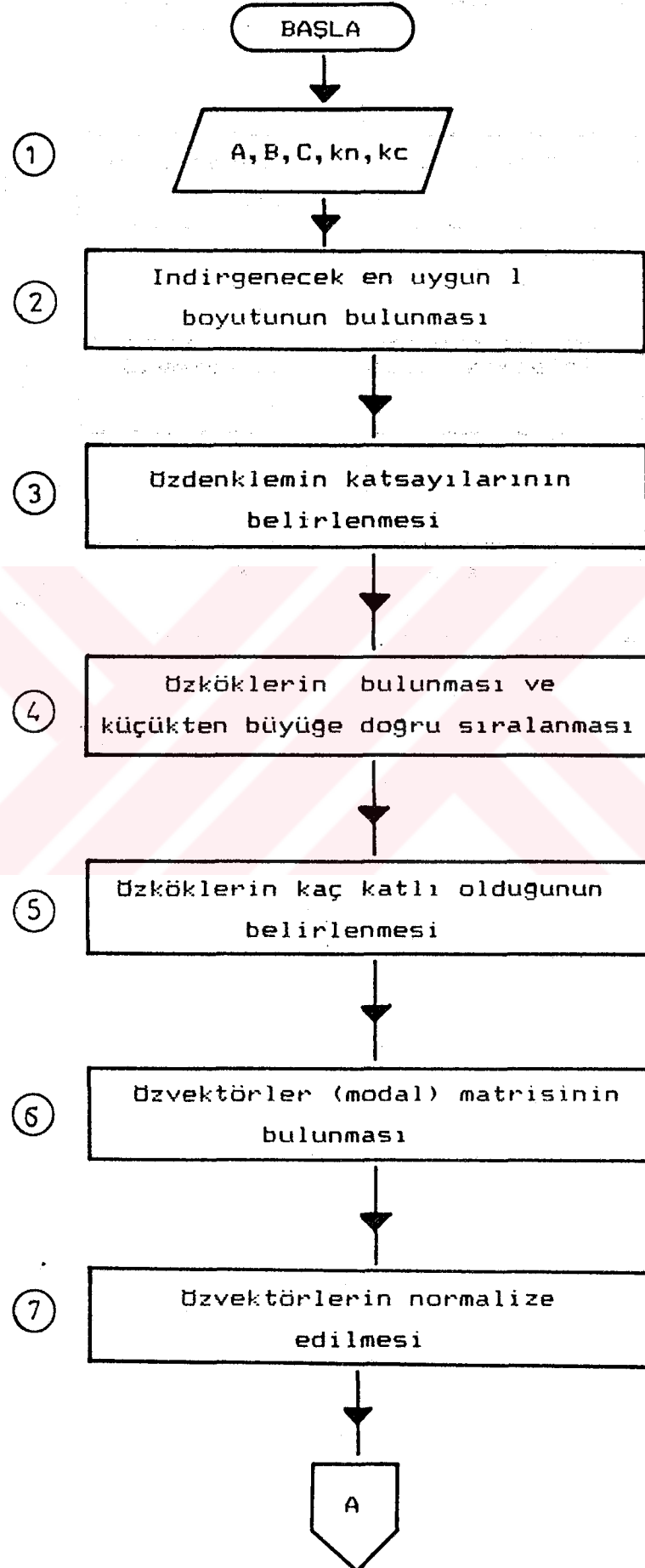
$$\dot{x}=Ax+Bu, \quad y=Cx \quad (3.1)$$

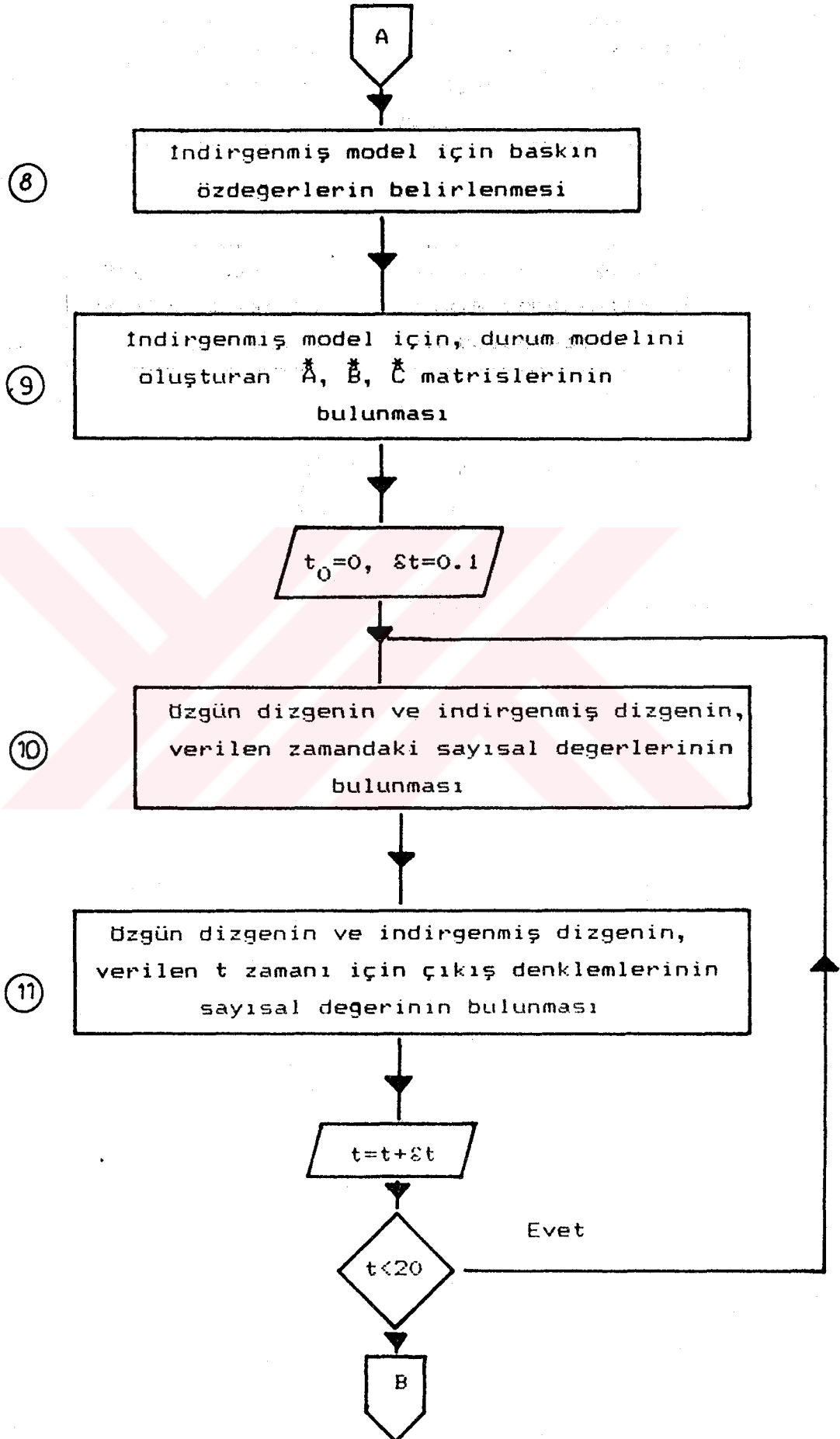
biçiminde tanımlanmış olduğu düşünülür. Burada dizgeyi tanımlayan A,B,C matrisinin öğeleri, dizgenin boyutu, B matrisinin sütun sayısı ve C matrisinin satır sayısı verilmektedir. Bu işlem akış çizgesinde ① ile gösterilmektedir.

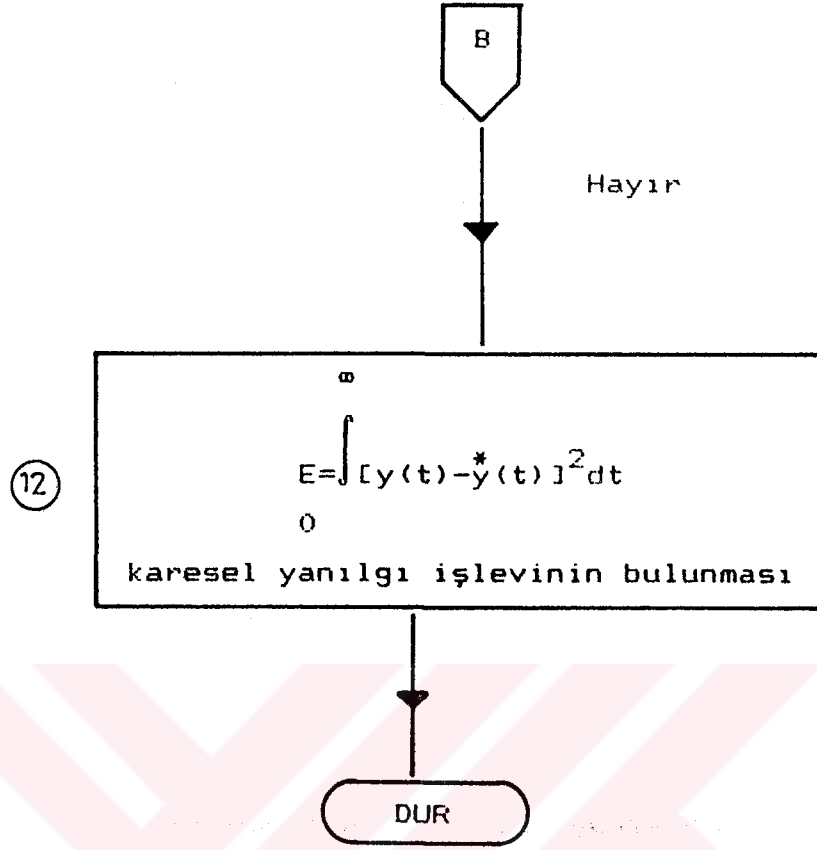
3.2.1 İNDİRGENECEK DİZGE İÇİN EN UYGUN BOYUTUN BELİRTİLMESİ

Özgün dizge için s-bölgesinde matrisel geçiş işlevi [12]

$$H(s)=C(sI-A)^{-1}B=CBs^{-1}+CABs^{-2}+\dots=H_0s^{-1}+H_1s^{-2}+H_2s^{-3}+\dots \quad (3.2)$$







Sekil-3.1. Algoritmanın aşamalarını gösteren akış çizgesi

olarak yazılabilir ve

$$H_i = CA^i B, \quad i=0,1,2,\dots,n \quad (3.3)$$

(Markov parametreleri) biçiminde gösterilir.

Üzgün dizge, bütünüyle denetlenebilir ve gözlenebilir ise o dizge minimal olarak gerçekleştirilebilir. Denetlenebilir ve gözlenebilir n.ci boyuttan dizge (A,B,C) ve indirgenmiş modeli de $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ 1.ci boyuttan olsun. Markov [12] parametrelerinin Hankel matrisi olarak düzenlenmesi

$$H_n = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \dots & h_{n-1} \\ h_1 & h_2 & h_3 & \dots & h_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n-1} & h_n & h_{n+1} & \dots & h_{2n-2} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

biçiminde olmaktadır. (3.3) eşitliği kullanılarak Hankel matrisi

$$H_n = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \quad (3.5)$$

olarak yazılabilir. H_n 'in rankının

$$\text{rank}(H_n) = n$$

olduğu, dizgenin bütünü ile denetlenebilir ve gözlenebilir olduğunu gösterir. Benzer olarak indirgenmiş dizge için de $H_i = \tilde{C}\tilde{A}^i\tilde{B}$,

$$\tilde{H}_n = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \cdot \\ \cdot \\ \tilde{C}\tilde{A}^{n-1} \end{bmatrix} [\tilde{B}, \tilde{A}\tilde{B}, \dots, \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}]$$

yazılabilir ve

$$\text{rank}[(C^*)^T, (CA^*)^T, \dots, (CA^{n-1})^T] \leq 1 \text{ (} \langle n \rangle \text{)}$$

$$\text{rank}[B^*, AB^*, \dots, A^{n-1}B^*] \leq 1 \text{ (} \langle n \rangle \text{)}$$

olduğu düşüncesiyle

$$\text{rank} H_n^* \leq 1 \text{ (} \langle n \rangle \text{)}$$

koşulunu sağlayan bir minimal dizgenin olduğu görülmektedir. Kısacası Hankel matrisinin rankı, verilen dizge için en uygun minimal boyutu göstermektedir.

Yukarıda anlatıldığı biçimde Hankel matrisi bulunarak, indirgenecek dizge için en uygun boyut belirlenir. Yazılımda, indirgenecek boyut istenirse, Hankel matrisinin rankı olarak alınır, bu istenmediği durumda indirgenecek boyutun bildirilmesi gerekmektedir. Bu işlem ② ile akış çizgesinde gösterilmiştir.

3.2.2 ÖZDENKLEMİN KATSAYILARININ BULUNMASI

Bu işlem akış çizgesinde ③ ile belirtilen kesimde yapılmaktadır. Dizgenin özdenklemini $|\lambda I - A| = 0$ determinantının uygun biçimde düzenlenmesiyle

$$D(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} \lambda + \alpha_n = 0 \quad (3.6)$$

elde edilir. Burada bilinmesi gereken α_i katsayıları aşağıdaki algoritma kullanılarak belirlenir [13].

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -T_1 \\ \alpha_2 &= \frac{-1}{2} (\alpha_1 T_1 + T_2) \\ \alpha_3 &= \frac{-1}{3} (\alpha_2 T_1 + \alpha_1 T_2 + T_3) \\ &\vdots \\ \alpha_n &= \frac{-1}{n} (\alpha_{n-1} T_1 + \alpha_{n-2} T_2 + \dots + \alpha_1 T_{n-1} + T_n) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Burada T_k , A^k matrisinin köşegen öğelerinin toplamını ve A^k , A matrisinin k kere kendisiyle çarpımını gösterir. Bu katsayıların bilgisayar aracılığı ile bulunmasını kolaylaştırmak amacıyla Faddeev ve Leverrier [14] aşağıdaki

düzenlemeyi yapmışlardır .

$$D(\lambda) = |\lambda I - A| = (-1)^n (\lambda^n - \beta_1 \lambda^{n-1} - \dots - \beta_n) = 0 \quad (3.8)$$

(3.6) ve (3.8) nin karşılaştırılmasıyla $\alpha_i = -\beta_i$ olduğu görülür. (3.7) ve son (3.8) denklemlerinden

$$\begin{aligned} A_1 &= A, & \beta_1 &= \text{tr} A_1, & B_1 &= A_1 - \beta_1 I \\ A_2 &= AB_1, & \beta_2 &= \text{tr} A_2, & B_2 &= A_2 - \beta_2 I \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ A_n &= AB_{n-1}, & \beta_n &= \text{tr} A_n, & B_n &= A_n - \beta_n I \end{aligned} \quad (3.9)$$

biçiminde tüm β_k , $k=1,2,\dots,n$ katsayıları hesaplanır.

3.2.3 ÖZKÖKLERİN BULUNMASI VE SIRALANMASI

Özdenklemin kökleri Muller [15,16] algoritması kullanılarak hesaplanmıştır. Muller kök bulma yöntemi;

$$D(\lambda) = \alpha_{n+1} \lambda^n + \alpha_n \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_2 \lambda + \alpha_1, \quad \alpha_{n+1} \neq 0$$

biçiminde tanımlanan, yüksek dereceli, explicit, sabit gerçel veya karmaşık katsayılı çok terimlinin köklerini bulmak için kullanılan bir algoritmadır. Burada bulunan kökler gerçel veya karmaşık olabilirler.

Bu yöntemde; herbir kök, ardışıl işlemlerle ve denklemin son üç noktasından geçen bir karesel egrinin köklerini elde etmekle bulunmaktadır. Bu karesel egri, genelde karmaşık katsayılarla ve karmaşık köklere sahip olacaktır. Başlangıçta, λ_k , λ_{k-1} ve λ_{k-2} olarak üç farklı geliş güzel değerler alınır (sözgelimi 0, 1, -1 gibi) ve λ_{k+1} değerleri bu verilen ilk değerlerden yararlanarak,

$$\lambda_{k+1} = \frac{\lambda_k - 2D_k \varepsilon_k (\lambda_k - \lambda_{k-1})}{g_k \pm (g_k^2 - 4D_k \varepsilon_k \wedge (D_{k-2} \wedge_k - D_{k-1} \varepsilon_k + D_k))^{1/2}} \quad (3.10)$$

yinelemeli bağıntısından bulunur. Burada;

$$\begin{aligned}\Lambda_k &= (\lambda_k - \lambda_{k-1}) / (\lambda_{k-1} - \lambda_{k-2}) \\ \delta_k &= 1 + \Lambda_k \\ g_k &= \lambda_{k-2} \Lambda_k^2 - D_{k-1} \delta_k^2 + D(\Lambda_k + \delta_k) \\ D_i &= D(\lambda_i)\end{aligned}$$

olarak tanımlanmıştır. Herbir yinelemede, daha önce belirlenen son üç ardışıl λ_k, λ_{k-1} ve λ_{k-2} değerleri λ_{k+1} kökünü bulmak için kullanılır [16].

Kökler belirlendikten sonra, en baskın olandan en az baskın olana doğru sıralanmıştır. Bu işlem yapılırken, karmaşık düzlemin solundaki köklerin gerçel kısımlarının en küçük olanı en baskın, en büyük olanı en az baskın olarak alınır. Karmaşık kök ile karmaşık eşleniği ard arda gelecek biçimde, bilgisayar yazılımını kolaylaştırmak amacı ile düzenlenir.

Bu işlem akış çizgesinde (4) ile belirtilen bölgede yapılmaktadır. Özdeğerlerin katlı olup olmadığının denetimi (5) ile belirtilen akış çizgesi üzerinde yapılır. Burada özkökler, diğer köklerle karşılaştırılarak, bir özkökün kaç kere bulunduğu bakılır. Bir kök hiç yinelenmezse katsız kök olarak tanımlanır. Eger yinelenir ise kaç kere yinlendiğine bakılarak katlılık derecesi belirlenir.

3.2.4 ÖZVEKTÖRLERİN BULUNMASI

(3.1) Modeli ile tanımlanan bir dizgenin başlangıç değerleri, $x(0)=0$ ve özdeğerlerinin farklı olduğunu göz önüne alarak, bu dizgenin durum denkleminin çözümü üstel terimler içeren aşağıdaki denklemler takımı olacaktır.

$$\begin{aligned}x_1(t) &= P_{11} e^{\lambda_1 t} + P_{12} e^{\lambda_2 t} + \dots + P_{1n} e^{\lambda_n t} \\ x_2(t) &= P_{21} e^{\lambda_1 t} + P_{22} e^{\lambda_2 t} + \dots + P_{2n} e^{\lambda_n t} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ x_n(t) &= P_{n1} e^{\lambda_1 t} + P_{n2} e^{\lambda_2 t} + \dots + P_{nn} e^{\lambda_n t}\end{aligned}$$

Matrisel olarak;

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \cdot \\ \cdot \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir.

$$P_j = [P_{1j} \ P_{2j} \ \dots \ P_{nj}]^T, \quad j=1,2,\dots,n$$

P_j : A'nın özvektörleri [17] olarak adlandırılır. Durum değişkeleri sütun vektörü:

$$x(t) = \sum_{j=1}^n P_j e^{\lambda_j t}$$

olarak yazılabilir. $P_j e^{\lambda_j t}$ 'nin (3.1) denklemler takımının bir çözümü olması durumunda

$$x(t) = P_j e^{\lambda_j t} \quad \text{ve} \quad \dot{x}(t) = \lambda_j P_j e^{\lambda_j t}$$

olacaktır. Bu değerler (3.1) de yerleştirilerek düzenleme yapılırsa

$$AP_j = \lambda_j P_j, \quad J=1,2,\dots,n$$

veya

$$(\lambda_j I - A)P_j = 0 \quad (3.11)$$

olarak yazılabilir. (3.11) eşitliği, bütün λ_j , $j=1,2,\dots,n$ özdeğerleri için çözümlenecek ve elde edilen n adet özvektörlerden özvektör (modal) matrisi oluşturulur. Eğer kökler m katlı ise (3.11) bağıntısı:

$$\begin{aligned} (\lambda_j I - A)P_1 &= 0 \\ (\lambda_j I - A)P_2 &= -P_1 \\ \dots\dots\dots \\ (\lambda_j I - A)P_m &= -P_{m-1} \end{aligned} \quad (3.12)$$

biçiminde olur.

Bu yazılımda özköklerin katlılık durumuna bakılarak, katlı ise (3.12) bağıntısının gerçekleştiği bölüme, katsız ise (3.11) bağıntısının gerçekleştiği bölüme geçiş yapılarak özvektör matrisi oluşturulur. Bu işlemler de (6) ile gösterilen akış çizgesi üzerinde yapılır.

3.2.5 ÖZVEKTÖRLERİN NORMALİZE EDİLMESİ

Bir matrisin özvektörü P_j ise, herhangi bir skaler sayı k için kP_j de, o matrisin bir öz vektörüdür. Özvektörlere bazı sayısal özellikler kazandırmak için normalizasyon yoluna gidilir [14].

Bu yazılımda bulunan özvektörler, normalize edilerek kullanılır. Özvektör matrisinin her bir j .nci sütun vektörü:

$$P_j = [P_{1j} \ P_{2j} \ \dots \ P_{nj}]^T, \quad j=1,2,\dots,n$$

biçimindedir. Bu vektörün normalize olarak elde edilmesi için

$$k_j = \frac{1}{|P_{1j}|}, \quad j=1,2,\dots,n$$

alınır ve normalize edilmiş j .nci özvektör

$$P_{jN} = [k_j P_{1j} \ k_j P_{2j} \ \dots \ k_j P_{nj}]^T, \quad j=1,2,\dots,n$$

biçiminde yazılır. Bu işlem de akış çizgesinde (7) ile gösterilen bölgede yapılmaktadır.

3.3. İNDİRGENMİŞ MODELİN BULUNMASI

3.3.1. BASKIN KÖKLERİN BELİRLENMESİ

Bu çalışmada, indirgenmiş dizgenin özdeğerleri, özgün dizgede baskın olarak belirlenmiş olan özdeğerler olacaktır. Kökler daha önceden baskınlık derecesine göre sıralandığından ilk 1 tanesini baskın olarak alabiliriz. Burada 1, indirgenecek boyutu göstermektedir. Bu işlem yapılırken bir karmaşık kök baskın ise, karmaşık eşleniği de baskın olacağı

göz önüne alınmalıdır. Akış çizgesi üzerinde işlem (8) ile belirlenen kesimde yapılmaktadır.

3.3.2 İNDİRGENMİŞ MODELİN ÖZVEKTÖRLERİNİN BELİRLENMESİ

Akış çizgesi üzerinde (9) ile gösterilen bölgede yapılmaktadır.

İndirgenmiş modelin özvektörleri, özgün dizgenin özvektörlerinden yararlanılarak bulunur. Bunun için özgün modelin özvektör matrisinin

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{11} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{21} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{11} & x_{12} & \dots & x_{11} \end{bmatrix}$$

ilk 1 satırı ve ilk 1 sütunlarını içeren bölümü indirgenmiş modelin özvektörler matrisi veya modal matrisi olarak alınır.

3.3.3. İNDİRGENMİŞ MODELİN \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{C} MATRİSLERİNİN BELİRTİLMESİ:

Özköklerin baskınlık durumuna göre sıraya koyulması ile, bulunan özvektörler de sıralanmış olur. Bunun sonucunda, indirgenmiş modelde elde edilecek durum değişkenleri de sıralanmış oldu. Özgün dizgenin ilk 1 durum değişkenleri, indirgenmiş modelin durum değişkenleri olacaktır. İndirgenmiş model:

$$\dot{x} = \tilde{A}x + \tilde{B}u, \quad y = \tilde{C}x \quad (3.13)$$

olarak ifade edilsin. \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{C} matrislerinin bulunması, sırasıyla (2.31), (2.35) ve (2.39) eşitliklerinden:

$$\tilde{A} = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 \Lambda_1^{-1} \Lambda_0^{-1}$$

$$\tilde{B} = \tilde{B} [P^{-1} B]$$

$$\tilde{C} = [C_1 \ C_2 \ \dots \ C_1] + [C_{1+1} \ C_{1+2} \ \dots \ C_n] [\Lambda_1 \ \Lambda_0^{-1}]$$

olarak elde edilir. Akış çizgesinin (10) ile belirlenen bölümünde bu işlem yapılır.

3.4. ÖZGÜN MODEL İLE İNDİRGENMİŞ MODELİN ÇIKIŞ DENKLEMLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI:

Daha önce anlatıldığı gibi, özgün dizgenin ve indirgenmiş dizgenin özdeğerleri ve özvektörleri belirlenmiştir. Bulunan özvektörler matrisinin, tersi her iki dizge için ayrı ayrı bulunur. (2.12) çözümü özgün dizge için:

$$x(t) = P \begin{bmatrix} \frac{-1+e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{-1+e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \frac{-1+e^{\lambda_n t}}{\lambda_n} & 0 \end{bmatrix} P^{-1} B, \quad y = Cx(t)$$

İndirgenmiş dizge için ;

$$x^*(t) = P^* \begin{bmatrix} \frac{-1+e^{\lambda_1^* t}}{\lambda_1^*} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{-1+e^{\lambda_2^* t}}{\lambda_2^*} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \frac{-1+e^{\lambda_n^* t}}{\lambda_n^*} & 0 \end{bmatrix} P^{*-1} B^*, \quad y = C^* x^*(t)$$

olacaktır. Bu çözüm zamana bağlı olduğundan $t=0$ 'dan başlayarak belli bir δt zaman artımı ile, durumların çözümleri özgün dizge ve indirgenmiş dizge için ayrı ayrı bulunur ve çıkış denkleminde yerleştirilerek, çıkış denklemi $y(t)=C^*x(t)$ den indirgenmiş dizge için, $y(t)=Cx(t)$ den özgün dizge için bulunur.

Bu sonuçlar, özgün dizge ve indirgenmiş dizge için, her t anında yanyana yazılarak karşılaştırılır. (11) ile gösterilen akış çizgesi adımı bu işlemler yapılır.

3.5. YANILGI ÖLÇÜTÜNÜN HESABI

Özgün dizge çıkış denklemi $y(t)$ ile, indirgenmiş dizge çıkış denklemi $\hat{y}(t)$ arasındaki t zamanına bağlı karesel yanılgi işlevi:

$$E = \int_0^{+\infty} [y(t) - \hat{y}(t)]^2 dt = \int_0^{+\infty} e(t) dt \quad (3.14)$$

tümlevinin analitik olarak alınması ile elde edilebilir.

Bu tümlevin gerçek hesabı, Laplace ve ters Laplace'sı alınıp sürekli kesirlere açınımdan yararlanarak yapılabilmektedir [18]. Ancak üst sınırı ∞ varsayacak biçimde seçerek, sayısal olarak da gerçeğine çok yakın biçimde bu yanılgi ölçütünü hesaplayan sayısal algoritmalar da vardır.

Özgün modelin çıkış tepkesi ve indirgenmiş modelin çıkış tepkesinin Laplace dönüşümlerini almak için, çok zor aritmetik işlemler gerektiğinden, burada Değiştirilmiş (Modified) Simpson üç nokta yöntemi [19] kullanıldı.

Yeteri kadar tümlev üst sınırı alındıktan sonra yanılgi; $e(t)=y(t)-\hat{y}(t)$ üzerinden, $t_k=t_{k-1}+k\delta t$ değerleri için hesaplanır. Burada ilk anda $t_{-1}=0$ alınır ve $k=0,1,2,\dots,m$ dir. Tümlevin üst sınırı T ve

$$m = \frac{T-t_0}{\delta t}$$

olacaktır. δt artımının seçimi, hızlı değişen işlevlerde zorluk çıkarır.

Böylece karesel yanılğı ölçütü, Simpson yönteminin yinelemeli biçimde kullanılması ile;

$$E = \int_0^{+\infty} e(t) dt$$

$$= \frac{\delta t}{3} [e(t_0) + 4e(t_1) + e(t_2)] + \frac{\delta t}{3} [e(t_2) + 4e(t_3) + e(t_4)] + \dots$$

$$\dots + \frac{\delta t}{3} [e(t_{m-2}) + 4e(t_{m-1}) + e(t_m)] \quad (3.15)$$

biçiminde elde edilir.

Bu işlemler, akış çizgesinde (12) ile gösterilen kesimde yapılmaktadır.

BÖLÜM 4

UYGULAMA

4.1. GİRİŞ

Bu çalışmada geliştirilen yöntem, giriş işlevi birim basamak olan birçok örnek dizgelerin ve özellikle daha önce benzer diğer yöntemlerde ele alınan dizgelerin indirgenmesine, sonuçları karşılaştırmak amacıyla uygulanmıştır.

Bu bölümde ele alınan, özgün dizgenin ve indirgenmiş modelinin çıkış işlevleri, t-zamanına göre, aynı eksen takımında çizilerek karşılaştırılacaktır. Ayrıca yanılıgısı da bu iki egri arasındaki farkın karesinin, $0 \leq t \leq T$ zaman aralığında tümlevi ile ölçülecektir. Burada sayısal tümlev alınacağı için $t=0$ yerine, özgün ve hesaplanmış dizge tepkelerinin sürekli durumda, üstüste gelebilecekleri bir $t=T$ noktasında, üst sınırı her örnek için ayrı ayrı seçilebilir.

ÖRNEK-1: 4. Dereceden özgün bir dizge

A MATRİSİ

$$\begin{bmatrix} .0 & 1.0 & .0 & .0 \\ .0 & .0 & 1.0 & .0 \\ .0 & .0 & .0 & 1.0 \\ -2525.0 & -3502.7 & -1357.3 & -113.2 \end{bmatrix}$$

B MATRİSİ

$$\begin{bmatrix} .00 \\ .00 \\ .00 \\ 1.00 \end{bmatrix}$$

C MATRİSİ

$$\begin{bmatrix} 1808490.00 & 1133616.00 & 95164.90 & .00 \end{bmatrix}$$

olsun. Özgün modelin özdenklem katsayıları:

$$\begin{aligned}
\beta_4 &= 2524.9410000 \\
\beta_3 &= 3502.7010000 \\
\beta_2 &= 1357.2750000 \\
\beta_1 &= 113.2250000 \\
\beta_0 &= 1.0000000
\end{aligned}$$

olarak bulunur ve özkökleri küçükten büyüğe doğru sıralanmış durumda aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= (-1.3383670, .0000000) , \text{ KATSIZ KÖK} \\
\lambda_2 &= (-1.8865710, .0000000) , \text{ KATSIZ KÖK} \\
\lambda_3 &= (-10.0000700, .0000000) , \text{ KATSIZ KÖK} \\
\lambda_4 &= (-99.9999900, .0000000) , \text{ KATSIZ KÖK}
\end{aligned}$$

3.cü dereceye indirgenmiş modelin kökleri, özgün modelin ilk 3 baskın köklerine eşit olmalıdır.

$$\begin{aligned}
\lambda_1^* &= (-1.3384, .0000) \\
\lambda_2^* &= (-1.8866, .0000) \\
\lambda_3^* &= (-10.0001, .0000)
\end{aligned}$$

Sonuçta indirgenmiş model katsayı matrisleri:

İNDİRGENMİŞ \tilde{A} MATRİSİ

\tilde{B} MATRİSİ

$$\begin{bmatrix} .000 & 1.000 & .000 \\ .000 & .000 & 1.000 \\ -25.25000 & -34.77451 & -13.22501 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} .000001 \\ -.000115 \\ .011478 \end{bmatrix}$$

İNDİRGENMİŞ \tilde{C} MATRİSİ

$$\begin{bmatrix} 1808490.00 & 1133616.00 & 95164.90 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. İndirgenmiş model ile özgün model arasındaki karesel yanılğı:

$$E = 3.0993100$$

değerinde hesaplanır.

Aynı ögün dizgenin 2. dereceden indirgenmiş modelin özdenklemleri, ilk 2 baskın özdeğere sahip olmalıdır.

$$\lambda_1^* = (-1.3384, .000)$$

$$\lambda_2^* = (-1.8860, .000)$$

2.dereceye indirgenmiş modelin katsayı matrisleri:

İNDİRGENMİŞ \hat{A} MATRİSİ

$$\begin{bmatrix} .00000 & 1.00000 \\ -2.52498 & -3.22494 \end{bmatrix}$$

\hat{B} MATRİSİ

$$\begin{bmatrix} -.000157 \\ .001466 \end{bmatrix}$$

İNDİRGENMİŞ \hat{C} MATRİSİ

$$[1568201.000 \quad 826715.000]$$

olur ve sayısal olarak karesel yanılğı:

$$E = 3.214058$$

değerindedir.

Bu örnek, Chen [19] tarafından da ele alınarak, s- domeninde 2.dereceye indirgenmiş modeli oluşturulmuştur. Şekil-4.1'de bu üç indirgenmiş modelin ve özgün modelin çıkış tepkeleri gösterilmektedir.

ÖRNEK 2: 7.Dereceden bir özgün dizge

A MATRİSİ

$$\begin{bmatrix} 0 & 1.0 & .0 & .0 & .0 & .0 & .0 \\ 0 & .0 & 1.0 & .0 & .0 & .0 & .0 \\ 0 & .0 & .0 & 1.0 & .0 & .0 & .0 \\ 0 & .0 & .0 & .0 & 1.0 & .0 & .0 \\ 0 & .0 & .0 & .0 & .0 & 1.0 & .0 \\ 0 & .0 & .0 & .0 & .0 & .0 & 1.0 \\ -281250.0 & -3310875.0 & -2814271.0 & -853703.0 & -70342.0 & -4097.0 & -83.6 \end{bmatrix}$$

B MATRİSİ

$$\begin{bmatrix} .0 & .00 & .00 & .00 & .00 & .00 & 1.00 \end{bmatrix}^T$$

C MATRİSİ

$$\begin{bmatrix} 31248.50 & 375000.00 & .00 & .00 & .00 & .00 & .00 \end{bmatrix}$$

olsun. Bu dizgenin özdenklemin katsayıları:

$$\beta_0 = 1.0000000$$

$$\beta_1 = 83.6400000$$

$$\beta_2 = 4097.0000000$$

$$\beta_3 = 70342.0000000$$

$$\beta_4 = 853703.0000000$$

$$\beta_5 = 2814270.0000000$$

$$\beta_6 = 3310915.0000000$$

$$\beta_7 = 280363.7000000$$

olarak elde edilir ve özgün modelin özkökleri:

$$\lambda_1 = (-9.1616310E-01, 0.00000000), \quad \text{KATSIZ KÖK}$$

$$\lambda_2 = (-2.0245490, -9.650772E-001), \quad \text{KATSIZ KÖK}$$

$$\lambda_3 = (-2.0245490, 9.650770E-001), \quad \text{KATSIZ KÖK}$$

$$\lambda_4 = (-7.6743750, -13.4461500), \quad \text{KATSIZ KÖK}$$

$$\lambda_5 = (-7.6743750, 13.4461500), \quad \text{KATSIZ KÖK}$$

$$\lambda_6 = (-32.0752600, -38.8492900), \quad \text{KATSIZ KÖK}$$

$$\lambda_7 = (-32.0752700, 38.8492900), \quad \text{KATSIZ KÖK}$$

dır. Özgün dizge 5.boyuta indirgeneceği için, ilk 5 özdeğerler baskın olarak belirlenir.

$$\lambda_1^* = (-0.0916 , 0.0000)$$

$$\lambda_2^* = (-2.0245 , -0.9651)$$

$$\lambda_3^* = (-2.0245 , 0.9651)$$

$$\lambda_4^* = (-7.6744 , -13.4462)$$

$$\lambda_5^* = (-7.6744 , 13.4462)$$

İndirgenmiş modelin katsayı matrisleri:

\tilde{A} MATRİSİ

$$\begin{bmatrix} .00000 & 1.00000 & .00000 & .00000 & .00000 \\ .00000 & .00000 & 1.00000 & .00000 & .00000 \\ .00000 & .00000 & .00000 & 1.00000 & .00000 \\ .00000 & .00000 & .00000 & .00000 & 1.00000 \\ -110.81170 & -1301.68400 & -1075.87100 & -308.65090 & -19.48946 \end{bmatrix}$$

\tilde{B} MATRİSİ

$$[.000000 \quad .000000 \quad .000000 \quad -.000012 \quad .000606]^T$$

\tilde{C} MATRİSİ

$$[31248.50 \quad 375000.00 \quad .00 \quad .00 \quad .00]$$

olarak elde edilir. Özgün dizge ile 5. dereceye indirgenmiş modeli arasındaki karesel yanılğı:

$$E = 5.061303E-011$$

değerinde belirlenir.

Aynı özgün dizgenin 3.dereceye indirgenmiş modelini elde etmek için ilk 3 baskın özdeğerleri

$$\begin{aligned} \lambda_1^* &= (-.0916, \quad .00) \\ \lambda_2^* &= (-2.0245, \quad -.9651) \\ \lambda_3^* &= (-2.0245, \quad .9651) \end{aligned}$$

alalım. Bu özköklere sahip olabilecek indirgenmiş modelin, katsayı matrisleri:

\tilde{A} MATRİSİ

$$\begin{bmatrix} .00 & 1.00 & .00 \\ .00 & .00 & 1.00 \\ -.46 & -5.40 & -4.14 \end{bmatrix}$$

\tilde{B} MATRİSİ

$$\begin{bmatrix} .00 \\ .00 \\ .000002 \end{bmatrix}$$

Ç MATRİSİ

$$\begin{bmatrix} 31248.5 & 375000.0 & .0 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır. 3.Dereceye indirgenmiş model için karesel yanılğı :

$$E=2.488582E-009$$

değerinde olmaktadır.

Bu örnek Sherif A.[20] tarafından geliştirilen çalışmada, s-frekans bölgesinde incelenmiş ve 2. dereceye indirgenmiştir. Bu tez çalışmasındaki yöntemde, karmaşık kökler ve eşleniklerinin de indirgenmiş modelde bulunması gerektiğinden 2. dereceye indirgeme yapılmamıştır.

Şekil-4.7de özgün modelin, 5.dereceye ve 3. dereceye indirgenmiş modellerinin çıkış tepkeleri, aynı eğri üzerinde gösterilmektedir. Elde edilen sonuçlardan görüldüğü gibi, sanal eksenden çok uzakta bulunan özköklerin gözardı edilmesi, çıkış tepkesinde 10^{-9} kadar yanılğı oluşturmaktadır.

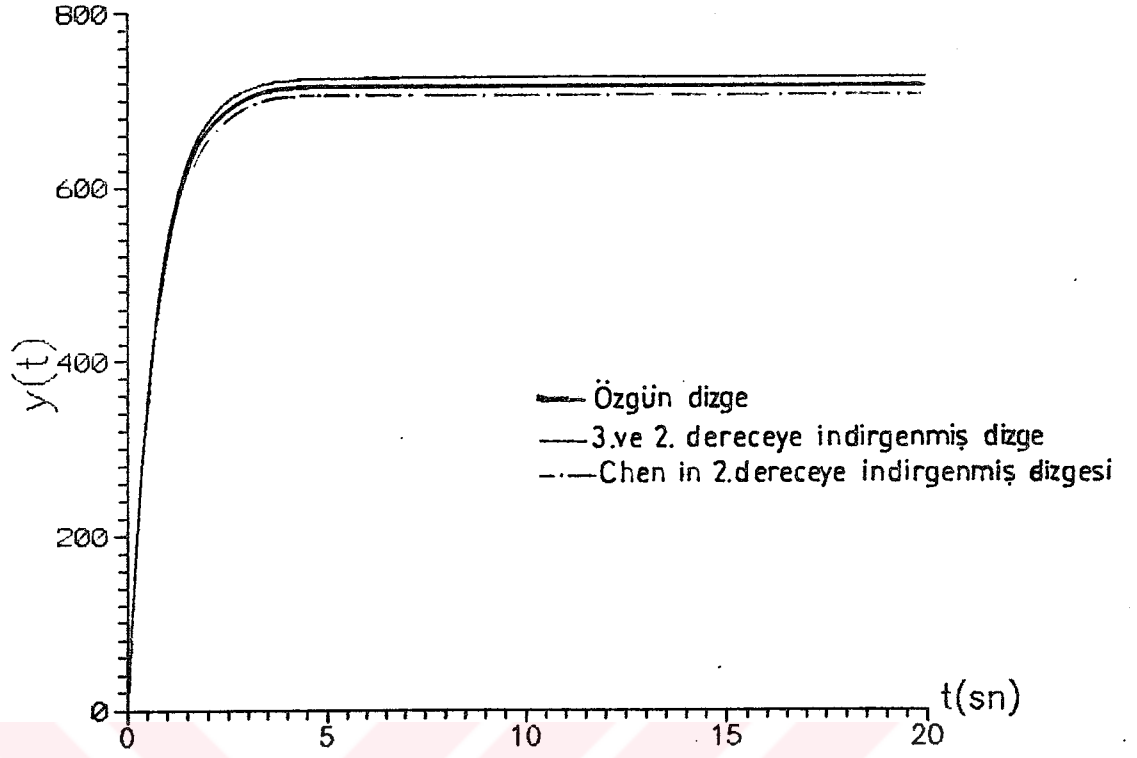
ÖRNEK 3:

A MATRİSİ

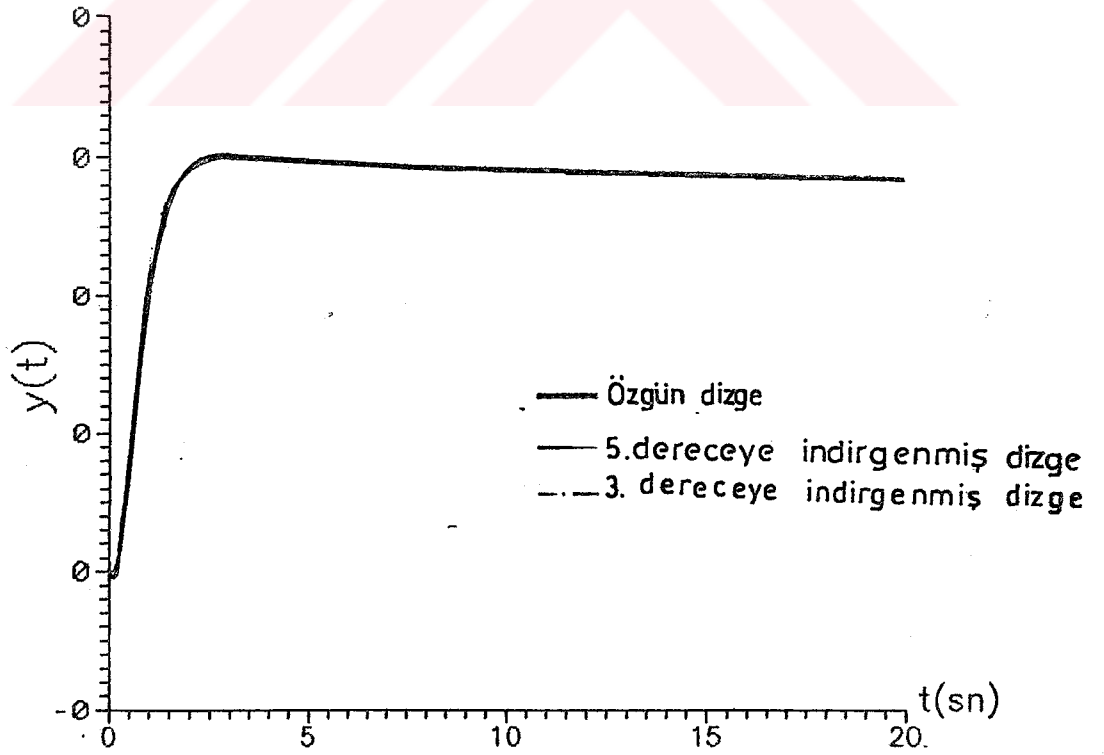
$$\begin{bmatrix} 0 & 1.0 & .0 & .0 & .0 & .0 & .0 & .0 \\ 0 & .0 & 1.0 & .0 & .0 & .0 & .0 & .0 \\ 0 & .0 & .0 & 1.0 & .0 & .0 & .0 & .0 \\ 0 & .0 & .0 & .0 & 1.0 & .0 & .0 & .0 \\ 0 & .0 & .0 & .0 & .0 & 1.0 & .0 & .0 \\ 0 & .0 & .0 & .0 & .0 & .0 & 1.0 & .0 \\ 0 & .0 & .0 & .0 & .0 & .0 & .0 & 1.0 \\ -37752.8 & -149172.2 & -173383.6 & -67557.0 & -18110.6 & -2913.9 & -358.4 & -30.4 \end{bmatrix}$$

B MATRİSİ

$$\begin{bmatrix} .00 & .00 & .00 & .00 & .00 & .00 & .00 & 1.00 \end{bmatrix}^T$$



Şekil-4.1



Şekil -4.2

C MATRİSİ

[42512.51 95380.58 45701.92 12186.92 2299.49 244.39 21.66 1.00]

Biçiminde tanımlanan 8 boyutlu bir dizge ele alalım. Özgün dizgenin öz denkleminin katsayıları:

$$\begin{aligned}
 \beta_0 &= 1.0000000 \\
 \beta_1 &= 30.4100000 \\
 \beta_2 &= 358.4295000 \\
 \beta_3 &= 2913.8640000 \\
 \beta_4 &= 18110.5600000 \\
 \beta_5 &= 67557.0500000 \\
 \beta_6 &= 173382.9000000 \\
 \beta_7 &= 149180.0000000 \\
 \beta_8 &= 37663.8700000
 \end{aligned}$$

olarak bulunur ve bu özdenklemin özkökleri

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= (-3.500124E-001, 6.7999890) \quad \text{KATSIZ KÖK} \\
 \lambda_2 &= (-3.500134E-001, -6.7999880) \quad \text{KATSIZ KÖK} \\
 \lambda_3 &= (-4.564970E-001, .0000000) \quad \text{KATSIZ KÖK} \\
 \lambda_4 &= (-7.540345E-001, .0000000) \quad \text{KATSIZ KÖK} \\
 \lambda_5 &= (-2.1997690, -3.5999830) \quad \text{KATSIZ KÖK} \\
 \lambda_6 &= (-2.1997690, 3.5999820) \quad \text{KATSIZ KÖK} \\
 \lambda_7 &= (-8.4998900, .0000000) \quad \text{KATSIZ KÖK} \\
 \lambda_8 &= (-15.6000100, .0000000) \quad \text{KATSIZ KÖK}
 \end{aligned}$$

dir. Özgün dizgenin 7.dereceye indirgenmiş modelinin özkökleri

$$\begin{aligned}
 \lambda_1^* &= (-.3500, 6.8000) \\
 \lambda_2^* &= (-.3500, -6.8000) \\
 \lambda_3^* &= (-.4565, .0000) \\
 \lambda_4^* &= (-.7540, .0000) \\
 \lambda_5^* &= (-2.1998, -3.6000) \\
 \lambda_6^* &= (-2.1998, 3.6000) \\
 \lambda_7^* &= (-8.4999, .00000)
 \end{aligned}$$

olacaktır. İndirgenmiş durum modelinin katsayı matrisleri

İNDİRGENMİŞ \tilde{A} MATRİSİ

$$\begin{bmatrix} 0 & 1.0 & .0 & .0 & .0 & .0 & .0 \\ 0 & .0 & 1.0 & .0 & .0 & .0 & .0 \\ 0 & .0 & .0 & 1.0 & .0 & .0 & .0 \\ 0 & .0 & .0 & .0 & 1.0 & .0 & .0 \\ 0 & .0 & .0 & .0 & .0 & 1.0 & .0 \\ 0 & .0 & .0 & .0 & .0 & .0 & 1.0 \\ -2420 & -9408.1 & -10511.4 & -3656.83 & -926.531 & -127.394 & -14.81 \end{bmatrix}$$

İNDİRGENMİŞ \tilde{B} MATRİSİ

$$\begin{bmatrix} .00 & .00 & .000003 & -.000044 & .000691 & -.010783 & .168215 \end{bmatrix}^T$$

İNDİRGENMİŞ \tilde{C} MATRİSİ

$$\begin{bmatrix} 40092.28 & 85972.47 & 35190.48 & 8530.08 & 1372.96 & 117.00 & 6.85 \end{bmatrix}$$

olarak belirlenir. Özgün ve indirgenmiş model arasındaki karesel yanılğı

$$E = 2.820769E-005$$

değerinde olur. Aynı özgün dizgenin 4. dereceye indirgenmiş modeli:

İNDİRGENMİŞ \tilde{A} MATRİSİ

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -15.99669 & -56.3616 & -47.5342 & -1.91 \end{bmatrix}$$

\tilde{B} MATRİSİ

$$\begin{bmatrix} -.000005 \\ .000018 \\ -.000011 \\ -.000128 \end{bmatrix}$$

İNDİRGENMİŞ \tilde{C} MATRİSİ

$$\begin{bmatrix} 26514.59 & 36475.9 & -11138.83 & 1581.04 \end{bmatrix}$$

biçiminde olur ve özgün dizge ile 4. dereceden indirgenmiş model arasındaki karesel yanılğı:

$$E = 7.407941E-5$$

olarak elde edilir.

Aynı örnek Marshall [10] tarafından da ele alınarak s-karmaşık frekans bölgesinde 4.cü dereceye indirgenmiştir. Şekil-43 de bu çalışmada elde edilen sonuçlar ve Marshall'ın çalışması gösterildi.

ÖRNEK 4: 4. Dereceden özgün bir dizge

A MATRİSİ

$$\begin{bmatrix} .0 & 1.0 & .0 & .0 \\ .0 & .0 & 1.0 & .0 \\ .0 & .0 & .0 & 1.0 \\ -13999.9 & -11680.0 & -2268.0 & -97.0 \end{bmatrix}$$

B MATRİSİ

$$\begin{bmatrix} .00 \\ .00 \\ -.00 \\ 1.00 \end{bmatrix}$$

C MATRİSİ

$$\begin{bmatrix} 92024.66 & 28566.77 & 1363.38 & 14.70 \end{bmatrix}$$

olsun. Özdenklem katsayıları

$$\begin{aligned} \beta_0 &= 1.0000000 \\ \beta_1 &= 97.0000000 \\ \beta_2 &= 2267.9990000 \\ \beta_3 &= 11679.9800000 \\ \beta_4 &= 13999.8200000 \end{aligned}$$

olarak elde edilir ve bu özdenklem kökleri

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (-1.7489420, .0000000), \text{ KATSIZ KÖK} \\ \lambda_2 &= (-4.8015610, .0000000), \text{ KATSIZ KÖK} \\ \lambda_3 &= (-25.7782400, .0000000), \text{ KATSIZ KÖK} \end{aligned}$$

$$\lambda_4 = (-64.6712600, .0000000), \text{ KATSIZ KOK}$$

ıdır. 3.Dereceye indirgenmiş durum modelinin kökleri de

$$\lambda_1^* = (-1.7489, .0000)$$

$$\lambda_2^* = (-4.8016, .0000)$$

$$\lambda_3^* = (-25.7782, .0000)$$

r. İndirgenmiş modelin katsayı matrisleri

İNDİRGENMİŞ \tilde{A} MATRİSİ

\tilde{B} MATRİSİ

$$\begin{bmatrix} .00000 & 1.00000 & .00000 \\ .00000 & .00000 & 1.00000 \\ 216.47790 & -177.25810 & -32.32875 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} .000007 \\ -.000441 \\ .028546 \end{bmatrix}$$

İNDİRGENMİŞ \tilde{C} MATRİSİ

$$[88842.43 \quad 25961.07 \quad 888.15]$$

ıdır. Özgün dizge ile 3. dereceye indirgenmiş modelinin iş tepkeleri arasındaki karesel yanılğı

$$E = 3.190367E-007$$

erinde olur.

Aynı özgün dizgenin, 2. dereceye indirgenmiş modeli:

\tilde{A} MATRİSİ

\tilde{B} MATRİSİ

$$\begin{bmatrix} .00000 & 1.00000 \\ -8.39770 & -6.55050 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -.000044 \\ .000874 \end{bmatrix}$$

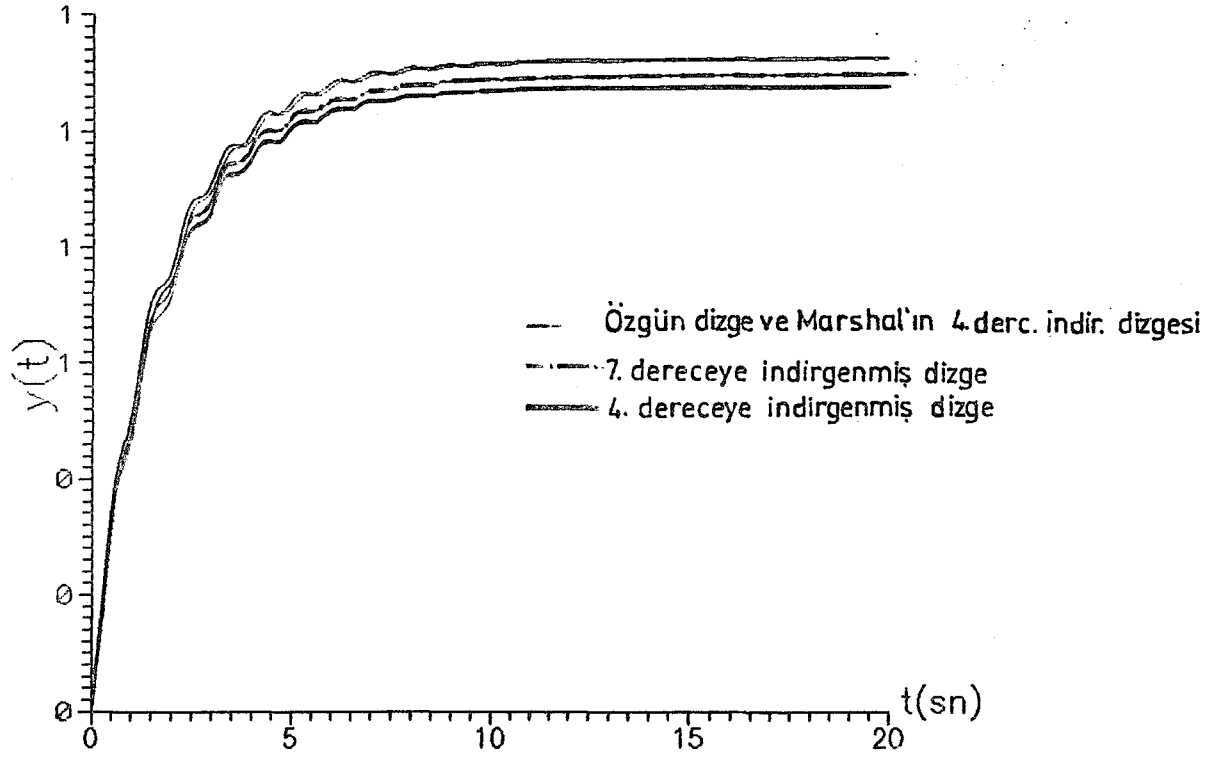
\tilde{C} MATRİSİ

$$[81384.03 \quad 20143.27]$$

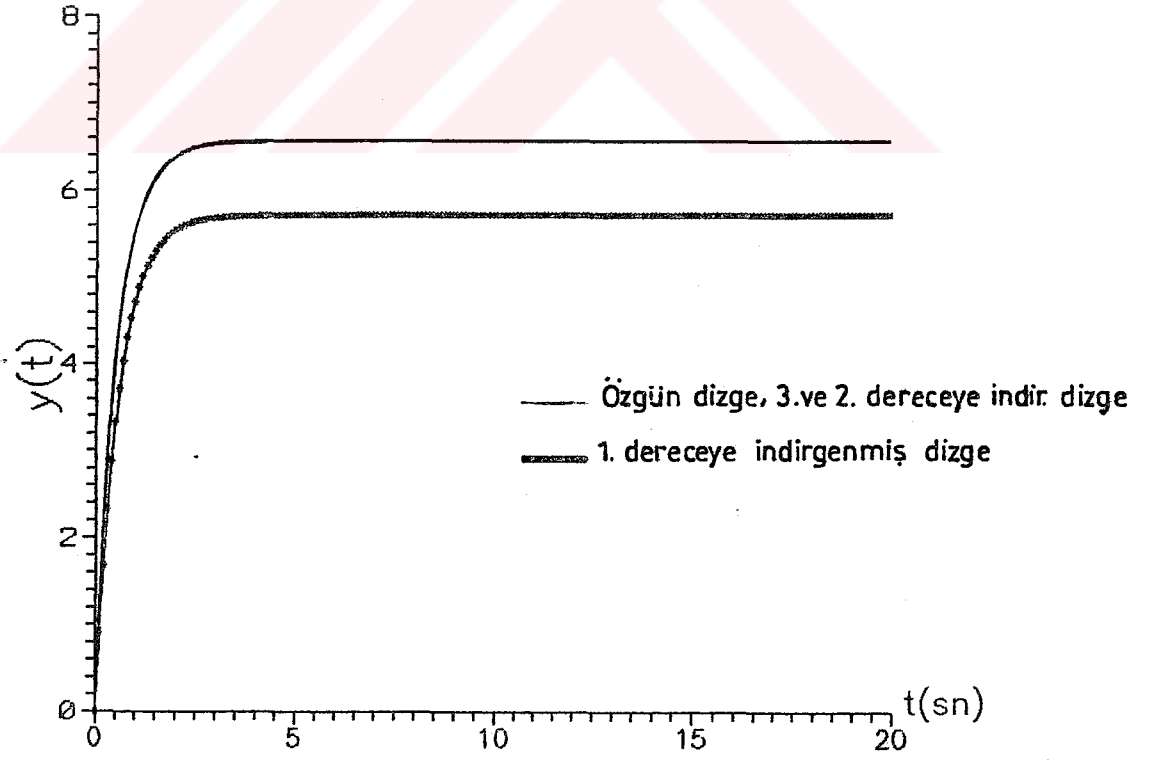
ak elde edilir ve karesel yanılğı

$$E=1.685289E-05$$

. Özgün dizgeyi 1. dereceye indirgendigi durumda



Şekil- 4.3



Şekil- 4.4

* A MATRİSİ * B MATRİSİ * C MATRİSİ

[-1.74895] [.000217] [46154.43]

katsayı matrisleri bulunur. Bu durum için karesel yanılı

E=2.440141E-02

değerinde belirlenir. Özgün dizge, 3. dereceye, 2.dereceye ve 1. dereceye indirgenmiş modellerinin çıkış tepkeleri Şekil-44de gösterilmektedir.

ÖRNEK 5: 5.Dereceden özgün bir dizge

A MATRİSİ

B MATRİSİ

$$\begin{bmatrix} .0 & 1.0 & .0 & .0 & .0 \\ .0 & .0 & 1.0 & .0 & .0 \\ .0 & .0 & .0 & 1.0 & .0 \\ .0 & .0 & .0 & .0 & 1.0 \\ -178.2 & -335.0 & -248.5 & -91.1 & -15.7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} .00 \\ .00 \\ .00 \\ .00 \\ 1.00 \end{bmatrix}$$

C MATRİSİ

[82.61 117.22 62.11 13.51 1.00]

olsun. Özgün modelin özdenklemler katsayıları,

$\beta_0 = 1.0000000$

$\beta_1 = 15.7374000$

$\beta_2 = 91.0507000$

$\beta_3 = 248.5380000$

$\beta_4 = 335.0348000$

$\beta_5 = 178.1921000$

biçiminde elde edilir ve özkökler

$\lambda_1 = (-1.4786220, .0000000)$, KATSIZ KÖK

$$\lambda_2 = (-1.8010950, 1.0938330), \text{ KATSIZ KÖK}$$

$$\lambda_3 = (-1.8010950, -1.0938330), \text{ KATSIZ KÖK}$$

$$\lambda_4 = (-4.2098850, .0000000), \text{ KATSIZ KÖK}$$

$$\lambda_5 = (-6.4467040, .0000000), \text{ KATSIZ KÖK}$$

olarak bulunur. Özgün dizgenin 3. dereceye indirgenmiş modeli için, ilk 3 özdeğer alınır.

$$\lambda_1^* = (-1.4786, .0000)$$

$$\lambda_2^* = (-1.8011, 1.0938)$$

$$\lambda_3^* = (-1.8011, -1.0938)$$

İndirgenmiş modelin katsayı matrisleri

İNDİRGENMİŞ \tilde{A} MATRİSİ

\tilde{B} MATRİSİ

$$\begin{bmatrix} .00000 & 1.00000 & .00000 \\ .00000 & .00000 & 1.00000 \\ -6.56568 & -9.76669 & -5.08081 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} .019437 \\ -.072990 \\ .250314 \end{bmatrix}$$

İNDİRGENMİŞ \tilde{C} MATRİSİ

$$[27.27 \quad 28.33 \quad 9.52]$$

olarak belirlenir ve özgün dizge ve indirgenmiş modelinin çıkış tepkeleri arasındaki yanılıgısı:

$$E = 3.382530E-005$$

olur. Şekil-45'de özgün dizge ile indirgenmiş modeli aynı eksen takımında gösterilmiştir.

ŞEKİL 6:

A MATRİSİ

$$\begin{bmatrix} .0 & 1.0 & .0 & .0 & .0 & .0 \\ .0 & .0 & 1.0 & .0 & .0 & .0 \\ .0 & .0 & .0 & 1.0 & .0 & .0 \\ .0 & .0 & .0 & .0 & 1.0 & .0 \\ .0 & .0 & .0 & .0 & .0 & 1.0 \\ -7200.0 & -15840.0 & -12274.0 & -4275.0 & -685.0 & -45.0 \end{bmatrix}$$

B MATRİSİ

$$[.00 \quad .00 \quad .00 \quad .00 \quad .00 \quad 100.00]^T$$

C MATRİSİ

$$[30.00 \quad 40.00 \quad 10.00 \quad .00 \quad .00 \quad .00]$$

Biçiminde tanımlanan 6.dereceden dizgeyi ele alalım.Bu dizgenin özdenklemler katsayıları,

$$\begin{aligned} \beta_0 &= 1.0000000 \\ \beta_1 &= 45.0000000 \\ \beta_2 &= 685.0000000 \\ \beta_3 &= 4275.0000000 \\ \beta_4 &= 12274.0000000 \\ \beta_5 &= 15840.0000000 \\ \beta_6 &= 7200.0000000 \end{aligned}$$

dır. Bu özdenklemin kökleri

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (-1.0000010, .0000000), \text{ KATSIZ KÖK} \\ \lambda_2 &= (-1.9999950, .0000000) \text{ KATSIZ KÖK} \\ \lambda_3 &= (-3.0000090, .0000000) \text{ KATSIZ KÖK} \\ \lambda_4 &= (-3.9999940, .0000000) \text{ KATSIZ KÖK} \\ \lambda_5 &= (-15.0000000, .0000000) \text{ KATSIZ KÖK} \\ \lambda_6 &= (-20.0000000, .0000000) \text{ KATSIZ KÖK} \end{aligned}$$

olur ve 5.dereceye indirgemek için ilk 5 özdeğer baskın olarak alınır.

$$\begin{aligned} \lambda_1^* &= (-1.0000, .0000) \\ \lambda_2^* &= (-2.0000, .0000) \\ \lambda_3^* &= (-3.0000, .0000) \\ \lambda_4^* &= (-4.0000, .0000) \\ \lambda_5^* &= (-15.0000, .0000) \end{aligned}$$

İndirgenmiş modelin katsayı matrisleri,

İNDİRGENMİŞ \tilde{A} MATRİSİ

$$\begin{bmatrix} .00000 & 1.00000 & .00000 & .00000 & .00000 \\ .00000 & .00000 & 1.00000 & .00000 & .00000 \\ .00000 & .00000 & .00000 & 1.00000 & .00000 \\ .00000 & .00000 & .00000 & .00000 & 1.00000 \\ -360.00260 & -774.00400 & -575.00230 & -185.00050 & -25.00002 \end{bmatrix}$$

İNDİRGENMİŞ \tilde{B} MATRİSİ

$$[.000215 \quad -.004300 \quad .085999 \quad -1.719986 \quad 34.399750]^T$$

İNDİRGENMİŞ \tilde{C} MATRİSİ

$$[30.00 \quad 40.00 \quad 10.00 \quad .00 \quad .00]$$

bulunur ve karesel yanılğı,

$$E = 4.018083E-005$$

değerinde hesaplanır.

Aynı dizgenin 4.dereceden indirgenmiş modelinin katsayı matrisleri,

\tilde{A} MATRİSİ

\tilde{B} MATRİSİ

$$\begin{bmatrix} .00 & 1.00 & .00 & .00 \\ .00 & .00 & 1.00 & .00 \\ .00 & .00 & .00 & 1.00 \\ -24.00015 & -50.00018 & -35.00012 & -10.00002 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -.000618 \\ .008188 \\ -.101314 \\ 1.089705 \end{bmatrix}$$

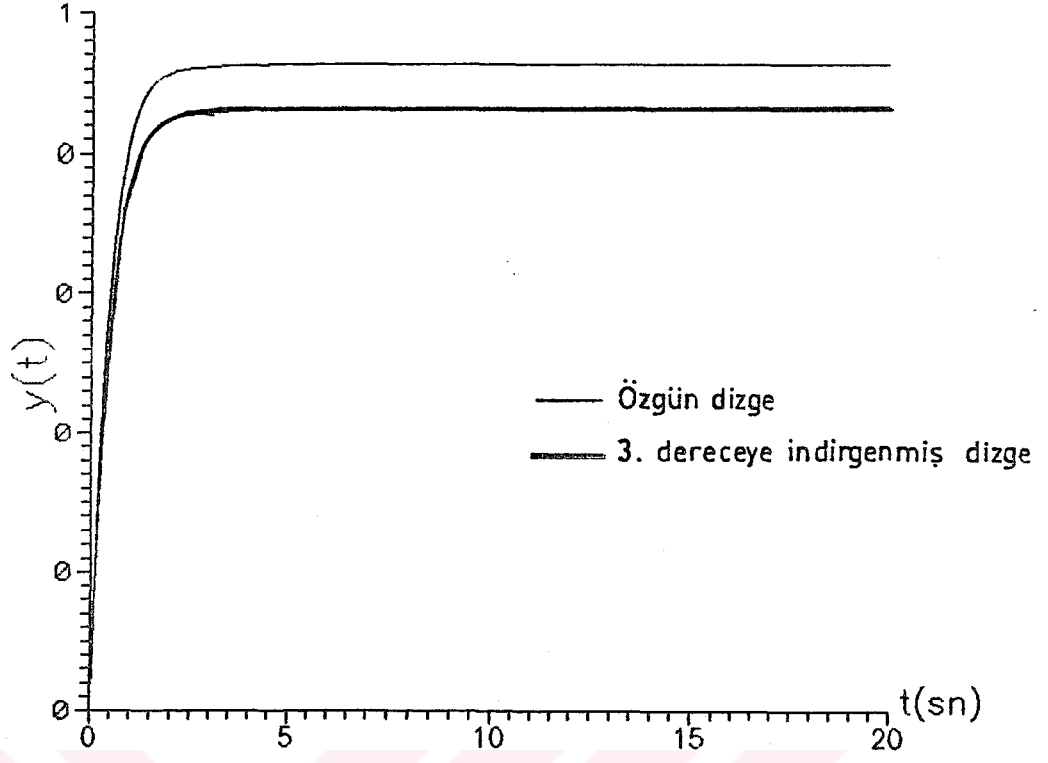
\tilde{C} MATRİSİ

$$[30.00 \quad 40.00 \quad 10.00 \quad 0.00]$$

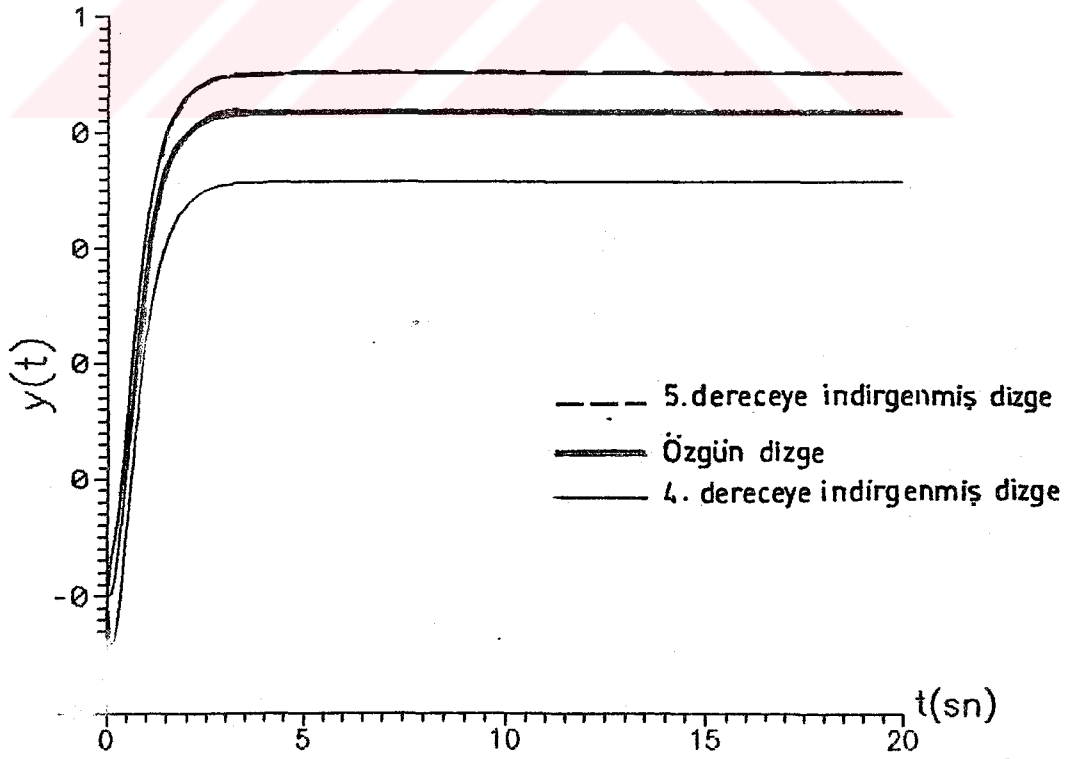
olarak hesaplanır ve karesel yanılğısı,

$$E=1.141550E-004$$

değerinde bulunur. Üzgün ve bu iki indirgenmiş modellerin



Şekil-4-5



Şekil-4-6

çıkış tepkeleri Şekil-46'da gösterilmiştir.

ÖRNEK-7: Özgün dizge katsayı matrisleri

A MATRİSİ

.0	1.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0
.0	.0	1.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0
.0	.0	.0	1.0	.0	.0	.0	.0	.0
.0	.0	.0	.0	1.0	.0	.0	.0	.0
.0	.0	.0	.0	.0	1.0	.0	.0	.0
.0	.0	.0	.0	.0	.0	1.0	.0	.0
.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	1.0	.0
.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	1.0
-9600.0	-28880.0	-37492.0	-27470.0	-11870.0	-3017.0	-437.0	-33.0	1.0

B MATRİSİ

.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	1.00
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

C MATRİSİ

5514.43	13710.55	14554.96	7927.80	2362.41	380.42	31.01	1.00
---------	----------	----------	---------	---------	--------	-------	------

olarak verilsin. Bu özgün dizgenin özdenkleme katsayıları

$$\begin{aligned}
 \beta_0 &= 1.0000000 \\
 \beta_1 &= 33.0000000 \\
 \beta_2 &= 437.0000000 \\
 \beta_3 &= 3017.0000000 \\
 \beta_4 &= 11870.0000000 \\
 \beta_5 &= 27470.0000000 \\
 \beta_6 &= 37492.0000000 \\
 \beta_7 &= 28879.7100000 \\
 \beta_8 &= 9606.0740000
 \end{aligned}$$

bulunur. Bu özdenklemin özkökleri ise aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= (-9.995846E-001, 9.983417E-001) \quad \text{KATSIZ KDK} \\
\lambda_2 &= (-9.995850E-001, -9.983417E-001) \quad \text{KATSIZ KDK} \\
\lambda_3 &= (-1.0042310, .0000000) \quad \text{KATSIZ KDK} \\
\lambda_4 &= (-2.9901100, .0000000) \quad \text{KATSIZ KDK} \\
\lambda_5 &= (-4.0101930, .0000000) \quad \text{KATSIZ KDK} \\
\lambda_6 &= (-4.9960100, .0000000) \quad \text{KATSIZ KDK} \\
\lambda_7 &= (-8.0004430, .0000000) \quad \text{KATSIZ KDK} \\
\lambda_8 &= (-9.9998450, .0000000) \quad \text{KATSIZ KDK}
\end{aligned}$$

Bu özgül dizgenin 6.dereceye indirgenmesi için,

$$\begin{aligned}
\lambda_1^* &= (\quad -.9996, \quad .9983) \\
\lambda_2^* &= (\quad -.9996, \quad -.9983) \\
\lambda_3^* &= (-1.0042, \quad .0000) \\
\lambda_4^* &= (-2.9901, \quad .0000) \\
\lambda_5^* &= (-4.0102, \quad .0000) \\
\lambda_6^* &= (-4.9960, \quad .0000)
\end{aligned}$$

özköklerinin baskın olarak alınması gereklidir. İndirgenmiş model katsayı matrisleri:

İNDİRGENMİŞ \tilde{A} MATRİSİ

$$\begin{bmatrix}
.00000 & 1.00000 & .00000 & .00000 & .00000 & .00000 \\
.00000 & .00000 & 1.00000 & .00000 & .00000 & .00000 \\
.00000 & .00000 & .00000 & 1.00000 & .00000 & .00000 \\
.00000 & .00000 & .00000 & .00000 & 1.00000 & .00000 \\
.00000 & .00000 & .00000 & .00000 & .00000 & 1.00000 \\
-119.995 & -333.969 & -391.989 & -250.991 & -86.997 & -14.999
\end{bmatrix}$$

İNDİRGENMİŞ \tilde{B} MATRİSİ

$$[-.000021 \quad .000158 \quad -.001201 \quad .008960 \quad -.065230 \quad .457344]^T$$

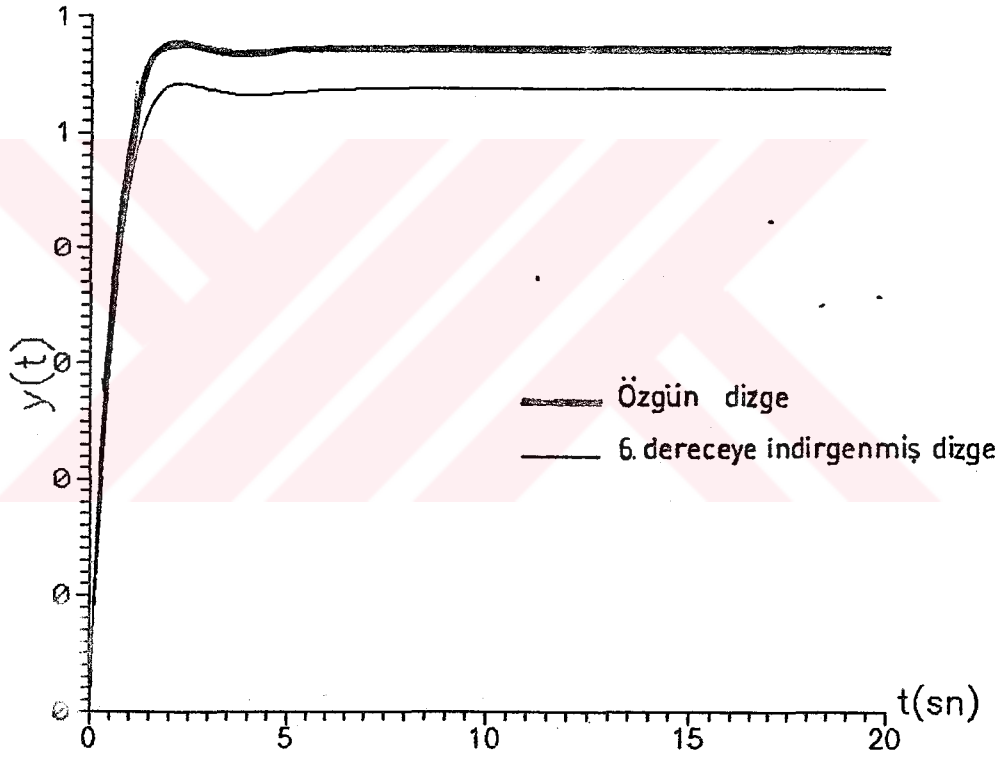
İNDİRGENMİŞ \tilde{C} MATRİSİ

$$[3593.28 \quad 8243.56 \quad 7945.15 \quad 3517.38 \quad 718.56 \quad 53.27]$$

olur ve iki dizge arasındaki karesel yanılışı

$$E = 4.465198E-005$$

değerinde hesaplanır. Özgün dizge ve indirgenmiş modelinin çıkış tepkeleri Şekil-4.7 de gösterilmiştir.



Şekil-4.7

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, zamanla değişmeyen, doğrusal sabit parametrelili, çok girişli çok çıkışlı ve kararlı olan yüksek boyutlu dizgeler ele alındı.

Yüksek boyutlu bir devingen dizgeyi indirgemek için, dizgenin durum modeli bağıntılarından hareket edildi. Daha önce, bu yönde model indirgeme konusunda Davison [2] tarafından önerilen yöntem, yeniden ele alınıp anlaşılır biçime sokuldu. Bir dizi karışık gelişigüzel seçimler düzenli duruma getirildi. Özgün dizgenin özdenklemini kolayca hesaplamak için Faddeev ve Leverrier [14] algoritması kullanıldı. Çok yüksek dereceden gerçel katsayılı explicit bir çokterimlinin özköklerini bilgisayar duyarlığında bir doğrulukla bulabilen Muller kök bulma algoritması [1,15,16] kullanıldı. Muller algoritması ile bulunan özdeğerlerin gerçel bölümleri genlik olarak, en küçükten en büyüğüne doğru, baskın özdeğerleri saptamak için sıralandı. Sanal eksene en uzak özkökleri tanımak için Davison'un önerdiği karmaşık bağıntıların büyük bir bölümünün kullanılması, bu sıralama sayesinde kaldırıldı. Ayrıca dizge çıkış işlevini indirgenemez bir biçime getirmek ve özgün dizgenin indirgenebileceği en küçük dereceyi saptamak için, özgün dizgenin durum modelinden elde edilen Hankel [3,12] matrisinin rankının kolayca bulunması özelliğinden yararlanılması bu tezde sunulan algoritmanın farklı ve bir başka üstünlüğüdür. Özgün ve indirgenmiş dizge çıkışları arasındaki karesel yanılgi hesabı için değiştirilmiş Simpson kuralı [19] kullanıldı.

Bu tezde geliştirilen yöntemin FORTRAN 77 dilinde bilgisayar yazılımı elde edildi. Bu yeni düzenleme ile

algoritma, Davison'unkine göre daha az bilgisayar zamanı ve belleği kullanmakta ve elde edilen sayısal uygulama sonuçları, daha önce önerilen yöntemlerle aynı örnekler için bulunan sonuçlarla karşılaştırıldı.

Bu yöntem, endüstride, uzay araştırmalarında, işaret tanımada, tıbbi elektronik ve tanılarda, v.b. geniş uygulama alanı bulur.

Durum modeli kullanan öteki yöntemler gibi, indirgenmiş model ve özgün model dereceleri arasındaki fark çok büyükse, çıkış tepkeleri geçici ve sürekli durumda birbiri ile çakışmamaktadır. Bu algoritma ailesinin ortak en kötü özürü bu özellikleridir.

Yapılan uygulamalardan, sanal eksene çok uzakta bulunan özköklerin gözardı edilmesi, dizge çıkış tepkesine çok az etki yaptığı görüldü.

Bu yöntemle elde edilen indirgenmiş model, özgün modelin baskın(egemen) özdeğerlerini ve özvektörlerini içerdiklerinden özgün dizge kararlı ise indirgenmişinin de kararlı olacağı açıktır.

ÖNERİ

Yapılan uygulamalardan karmaşık-eşlenik özdeğerlere sahip dizgelerle indirgenmişlerinin çıkış tepkeleri arasındaki yanlışların, dönemli olmayan (Aperiodik) dizgelerin ve indirgenmişlerinin tepkeleri arasındaki yanlışlardan çok daha büyük oldukları görüldü. Bu nedenle, bu çalışmada sunulan model indirgeme algoritmasının, dönemli olmayan, doğrusal, zamanla değişmeyen, devingen dizgelerin indirgenmesinde; sözgelimi, doğrusal, zamanla değişmeyen, sabit RC,RL devrelerinin tasarımı, tanısı ve indirgenmesinde çok başarılı olacağı kanısındayım. Bu yöntem, ayrık zamanda devingen, doğrusal ve zamanla değişmeyen dizge modellerinin indirgenmesine de uygulanabilir.

KAYNAKÇA

- [1] Muller, D.E., A Method for Solving Algebraic Equations Using on Automatic Computer, Math. Tab., Wash.10, 1956, 208-215
- [2] Davison, J. E., A Method for Simplifying Linear Dynamic Systems, IEEE Trans. on Automat. Contr. AC-11, 1966, 93-101.
- [3] Furuta, K., Sano, A. ve Atherton, D., State Variable Methods in Automatic Control, John Wiley & Sons, 1988.
- [4] Lamba, S. S. ve Vittal, R. S., On Suboptimal Control via the Simplified Model of Davison, IEEE Trans. Automat. Contr., AC-19, 1974, 448-450.
- [5] Georgakis, C., A Quasi-Modal Approach to Model Reduction, Proc. 1977 Joint Automat. Contr. Conf., 1977, San Francisco, 639-644.
- [6] Crockett, W. E., Model Reduction by Perturbation, IEEE Joint Automat. Contr., 1979, 207-210.
- [7] Tung, L. S., ve Edgar T. F., Least Squares Reduction of Multiple Input-Multiple Output Linear Systems, IEEE Joint Automat. Contr., 1979, 199-206.
- [8] Hickin, J. ve Sinha, N.K., Reduction of Linear System by Canonical Forms, Elektronics Letters, Cilt:12, No:21, 1976, 551-553.
- [9] Wilson, D. A., Model Reduction for Multivariable Systems, Int. J. Control, Cilt:20, No:1, 1974, 57-64 .

- [10] Marshall, S. A., The Design of Reduced-Order Systems, Int. J. Control, Cilt:31, No:4, 1980, 677-690.
- [11] Ogata, K., State Space Analysis of Control Systems, Prentice-Hall, 1967.
- [12] Kailath, T., Linear Systems, Prentice-Hall, 1980.
- [13] Pipes, L. A. ve Hovanessian, S. A., Matrix Computer Methods in Engineering, John Wiley & Sons, 1969.
- [14] Aktaş, Z., Öncül, H. ve Ural, S., Sayısal Çözümleme, Cilt:1, ODTÜ, 1981.
- [15] Tonyalı, O., Computation of Eigenvalues, Delft University of Electrical Engineering Report no:12, 1973.
- [16] Wilkinson, J. H., The Algebraic Eigenvalue Problem, Oxford University Press, 1965.
- [17] Kuo, B. C., Automatic Control, 3.Baskı, Prentice-Hall, 1975.
- [18] Aström, J. K., Introduction to Stochastic Control Theory, Academic Press, 1970.
- [19] Chen, C. F., Model Reduction of Multivariable Control Systems by Means of Matrix Continued Fractions, Int. J. Control, Cilt:20, No:2, 1974, 225-228.
- [20] Sherif, A., ve Wu, M. Y., Identification and Order Reduction of Dynamics System from Input/Output Data, IEEE Joint Aut. Contr., 1979, 719-724.

BÖLÜM 6

EK-1

BİLGİSAYAR YAZILIMI

6.1. GİRİŞ

Bu çalışmanın üçüncü bölümünde sunulan algoritmanın FORTRAN 77 dilinde yazılmış yazılım çizelgesi ve gerekli bilgiler bu bölümde verilmiştir.

6.2. ÖZGÜN DİZGENİN İNDİRGENMİŞ MODELİNİN ELDE EDİLMESİ İÇİN HAZIRLANAN YAZILIM ÇİZELGESİNİN AÇIKLAMASI :

ANA YAZILIM

AMAC:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

Biçiminde verilen bir dizgenin, baskın özdeğerler ve özvektörleri kullanılarak en iyi (optimal) indirgenmiş modelinin elde edilmesi için gerekli işlemlerin yapılması ve sonuçları alınır.

GİRİŞ VERİLERİ

- A : Özgün dizgenin $[a_{ij}]_{n \times n}$ durum matrisi
B : Özgün dizgenin $[b_{ij}]_{n \times kn}$ denetim matrisi
C : Özgün dizgenin $[c_{ij}]_{kc \times n}$ çıkış matrisi
n : Özgün dizgenin boyutu
kn: B denetim matrisinin sütun sayısı
kc: C çıkış matrisinin satır sayısı
kl: İndirgenmiş dizgenin boyutu

ÇIKIŞ DEĞİŞKENLERİ

- PG : Küçük dereceden büyüğe doğru sıralanmış özdenklemlerin katsayıları (PG(i) i=1,2,...,n+1)
kök : Özdenklemin kökleri (kok(i), i=1,2,...,n)
s(i) : i'nci özkökün kaç katlı olduğunu gösterir (i=1,2,...,n)

PV : Normalize edilmiş $[P_{ij}]_{n \times n}$ özvektörlerden oluşan matris
 PVT : Normalize edilmiş özvektörler matrisinin tersi $[P_{ij}]_{n \times n}$
 x_t : $[x_{ij}]_{n \times kn}$ özgün dizgenin durum denklemi çözüm matrisi
 y_{tt} : $[y_{ij}]_{kc \times kn}$ özgün dizgenin çıkış denklemi çözüm matrisi
 AO : \hat{A}_0 , $(kl \times kl)$ boyutlu (2.29-a) de tanımlanan matris
 A1 : \hat{A}_1 , $[kl \times (n-k)]$ boyutlu (2.29-b) de tanımlanan matris
 w_0 : Λ_0 , $(kl \times kl)$ boyutunda (2.25) de tanımlanan matris
 w_{01} : Λ_0 matrisinin tersini gösterir
 w_1 : Λ_1 , $[(n-k) \times kl]$ boyutunda (2.25) de tanımlanan matris
 AT : İndirgenmiş dizgenin $[\hat{A}_{ij}]_{kl \times kl}$ durum matrisi
 BB : İndirgenmiş dizgenin $[\hat{B}_{ij}]_{kl \times kn}$ denetim matrisi
 CT : İndirgenmiş modelin $[\hat{C}_{ij}]_{kc \times kl}$ çıkış matrisi
 y_{tt} : İndirgenmiş modelin $[x_{ij}]_{kl \times kn}$ durum denklemi çözüm matrisi
 y_{tt1} : İndirgenmiş modelin $[y_{ij}]_{kc \times kn}$ çıkış denkleminin çözüm matrisi
 y_{ts} : Özgün ve indirgenmiş modellerin çıkış matrislerinin farkını gösterir
 hata : İndirgenmiş model ile özgün modelin çıkış denklemlerinin arasındaki yanılğıyı

$$\int_0^{\infty} (y(t) - \hat{y}(t))^2 dt$$

Simpson yöntemine göre ifade eder

KULLANILAN ALT YAZILIMLAR: CARP, MBO1, ROOT, KAT

CARP ALT YAZILIMI

SUBROUTINE CARP (X,Y,Z,n,m,k,l)

AMAC :

Elemanları karmaşık sayı olarak verilmiş olan iki matrisin çarpımının bulunması

ARGÜMANLAR :

X: $[X_{ij}]_{n \times m}$ çarpılacak ilk matris
 Y: $[Y_{ij}]_{k \times l}$ çarpılacak ikinci matris
 Z: $[Z_{ij}]_{n \times l}$ çarpım sonunda oluşan matris
 n: X matrisinin satır sayısı
 m: X matrisinin sütun sayısı

k: Y matrisinin satır sayısı
l: Y matrisinin sütün sayısı

MB01B ALTYAZILIMI

SUBROUTINE MB01B (C1,n)

AMAÇ :

Ögeleri karmaşık olan bir matrisin tersinin bulunması

ARGÜMANLAR :

C1: $[C_{ij}]_{n \times n}$ tersi alınacak olan kare matris ve tersi alındıktan sonra ters matrisi ifade eder
n : Ters alınacak olan matrisin boyutu

AÇIKLAMA:

Tersi alınacak matrisin köşegeni üzerinde sıfır değeri varsa, ters alma işlemi yapılamamaktadır.

ROOT ALTYAZILIMI

SUBROUTINE ROOT (H,n,z)

AMAÇ :

Bir çokterimlinin köklerinin hesaplanması.

KULLANILAN YÖNTEM:

Muller yinelemeli kök bulma yöntemi

ARGÜMANLAR :

H: Kökleri bulunacak çokterimlinin küçük dereceden büyüğe doğru sıralanmış katsayıları $[H(i), i=1,2,\dots,n+1]$
n: Çok terimlinin derecesi
z: Çok terimlinin köklerinin N boyutunda dizisi

KAT ALTYAZILIMI

SUBROUTINE KAT(A,n,ph)

AMAC:

Verilen bir matrisin özdenkleminin katsayılarının bulunması.

KULLANILAN YÖNTEM:

Faddeev-Laverrier yöntemi

ARGÜMANLAR

A: $[A_{ij}]_{n \times n}$ Özdenkleminin katsayıları bulunacak matris
n: Verilen A matrisinin boyutu
ph(i): Özdenklemin katsayıları, $i=1, \dots, n+1$

EK-2

BİLGİSAYAR YAZILIMININ LİSTESİ

Bu tezde geliştirilen, model indirgeme yönteminin FORTRAN77 yazılım dili ile hazırlanmış yazılım listesi:

```
implicit complex (a-h,o-z)
dimension a(10,10),b(10,10),c(10,10),c3(10,10),c4(10,10)
*,ro(10),pg(10),kok(10),s(10),pv(10,10),xy(10),xs(10,10),
*hhata(10),mct(10,10),pvt(10,10),pvg(10),xsss(10),xss(10,10)
*,pg1(11),kuk(10),yi(10,10),q(10),a0(10,10),a1(10,10),w0(10,
*10),w1(10,10),wt(10,10),wtt(10,10),at(10,10),bb(10,10),pvtt
*(10,10),qq(10),w0t(10,10),w0tt(10,10),w0ttt(10,10),bb1(10,
*10),pv1(10,10),w01(10,10),ab(10,10),ha(10,10),b1(10,10),bln
*(10,10),blt(10,10),xt(10,10),yt(10,10),ct(10,10),bl1(10,10),
*ab1(10,10),bln1(10,10),blt1(10,10),xt1(10,10),mc(10,10),yt1
*(10,10),ci(10,10),ci1(10,10),ci2(10,10),wat(10,10),ytt1
*(10,10),ytt(40,10),bi(10,10),bi1(10,10),mb(10,10),mbt(10
*,10),yts(140,10)
complex kt,kok,ara,ar1,mb,mbt,mc,mct
integer s,q,qq,ar,tara,kn,kl,kc,r,k
real pkokr,pkoki,pk,pt,t,dt,pvc,pvi,pvc1,pvi1,xse,xse1,
*xst,xst1,pkokk,kuk,yts,pg1,pk1,hhata,pg
data s/10*1/
read(2,*) n,kn,kl,kc
write(3,1111) n,kn,kl,kc
1111 format(2x,'CALISMA BOYUTU: ',i2/2x,'B MATRISININ SUTUN
* SAYISI: ',i2,/2x,'INDIRGENECEK BOYUT: ',i2/2x,
*'C MATRISININ BOYUTU: ')
do 101 i=1,n
do 101 j=1,n
101 read(2,*) a(i,j)
```

```

write(3,*) ' A MATRISI '
do 300 i=1,n
300 write(3,1112) (a(i,j),j=1,n)
1112 format(1x,10(' ',f10.1,f10.1) ',,))
write(3,*) ' B MATRISI '
do 102 i=1,n
do 102 j=1,kn
102 read(2,*) b(i,j)
do 301 i=1,n
301 write(3,1113) (b(i,j),j=1,kn)
1113 format(1x,10(' ',f10.2,f10.2) ',,))
write(3,*) ' C MATRISI '
do 1725 i=1,kc
read(2,*) (c(i,j),j=1,n)
1725 write(3,1735) (c(i,j),j=1,n)
1735 format(1x,10(' ',f10.2,f10.2) ',,))

```

C INDIRGENECEK EN UYGUN BOYUTUN BULUNMASI

```

do 1 i=1,n
bi1(i,1)=b(i,1)
do 2 j=1,n
bi(i,j)=cmplx(0,0)
2 if(i.eq.j) bi(i,j)=bi(i,j)+1.
1 continue
do 3 i=1,n
call carp(bi,bi1,mb,n,n,n,kn)
do 4 j=1,n
4 mbt(j,i)=mb(j,1)
do 12 k=1,n
12 bi1(k,1)=mb(k,1)
do 121 k=1,n
do 14 j=1,n
a(k,j)=a(k,j)
14 bi(k,j)=a(k,j)
121 continue
3 continue

```

```

do 216 i=1,n
216 c4(1,i)=c(1,i)
do 16 i=1,n
do 17 j=1,n
c3(i,j)=cmplx(0,0)
17 if(i.eq.j) c3(i,j)=c3(i,j)+1.
16 continue
do 18 i=1,n
call carp(c4,c3,mc,1,n,n,n)
do 19 j=1,n
mc(1,j)=mc(1,j)
19 mct(i,j)=mc(1,j)
do 22 k=1,n
c4(1,k)=mc(1,k)
do 23 j=1,n
23 c3(k,j)=a(k,j)
22 continue
18 continue
call carp(mct,mbt,ha,n,n,n,n)

```

C HANKEL MATRİSİNİN ÖZDEĞERLERİNİN BULUNMASI

```

call kat(ha,n,pg1)
call root(pg1,n,ro)
do 35 i=1,n
35 kuk(i)=sqrt((aimag(ro(i)))**2+(real(ro(i)))**2)
r=0
do 39 i=1,n
39 if(kuk(i).gt.1.0e-6) r=r+1
write(3,*) 'INDIRGENECEK EN UYGUN BOYUT=',r

```

C ÖZDENKLEMİN KATSAYILARININ BULUNMASI

```

call kat(a,n,pg)
write(3,*) 'ÖZDENKLEM KATSAYILARI'
do 305 i=1,n+1
305 write(3,*) 'pg(',i,')=',pg(i)

```


C ÖZDEKLEMİN KÖKLERİNİN BULUNMASI , KÜÇÜKTEN BÜYÜĞE
 C DOĞRU VE KARMAŞIK EŞLENİKLERİN ARD ARDA GELECEK
 C DÜZENDE SIRALANMASI

```

call root(pg,n,kok)
do 1451 i=1,n
do 1452 j=i,n
if(abs(real(kok(i))).lt.abs(real(kok(j)))) go to 1452
ar1=kok(i)
kok(i)=kok(j)
kok(j)=ar1
1452 continue
1451 continue
do 800 i=1,n-1
pkokr=abs(real(kok(i))-real(kok(i+1)))
pkoki=abs(aimag(kok(i))-aimag(kok(i+1)))
pkokk=abs(aimag(kok(i))+aimag(kok(i+1)))
800 if((pkokr.lt.1.0e-3).and.(pkoki.lt.1.0e-03)) kok(i+1)=kok(i)
do 1230 i=1,n
pk=aimag(kok(i))
pt=real(kok(i))
if(abs(pk).lt.1.0e-4) pk=0.
if(abs(pt).lt.1.0e-4) pt=0.
1230 kok(i)=cplx(pt,pk)
k=0
i=0
1221 i=i+1
k=k+1
do 1231 j=i+1,n
pk=aimag(kok(i))
pt=real(kok(i))
if((pt.eq.real(kok(j))).and.(pk.eq.(-(aimag(kok(j))))))
*kok(k)=cplx(pt,-pk)
if((pt.eq.real(kok(j))).and.(pk.eq.(-(aimag(kok(j)))))) k=k+1
if((pt.eq.real(kok(j))).and.(pk.eq.(-(aimag(kok(j)))))) i=i+1
1231 kok(k)=cplx(pt,pk)
if(i.ne.n) go to 1221

```

C KOKLERİN KAÇ KATLI OLDUGUNUN BELİRLENMESİ

```

do 40 i=1,n
  kt=kok(i)
  do 60 j=i+1,n
    if (kt.ne.kok(j)) go to 60
    s(i)=s(i)+1
60 continue
  do 40 j=1,i-1
    if(kt.eq.kok(j)) s(i)=0
40 continue
  write(3,*) 'KOKLERİN KAÇ KATLI OLDUGUNUN BELİRLENMESİ'
  do 798 i=1,n
798 write(3,*) 'S(',i,')=',s(i)
  do 100 i=1,n
    if(s(i).eq.0) go to 130
    if(s(i).eq.1) go to 150
    write(3,*) 'KOK(',i,')',kok(i),' KATLI KOK'
    go to 100
130 write(3,*) 'KOK(',i,')',kok(i),' DAHA ÖNCE KULLANILDI'
    go to 100
150 write(3,*) 'KOK(',i,')',kok(i),' KATSIZ KOK'
100 continue

```

C PV ÖZ VEKTÖR MATRİSİNİN BULUNMASI

```

do 32 i=1,n
  if(s(i).eq.0) go to 32
  do 15 k=2,n
    xy(k-1)=a(k,1)
15 continue
  do 21 m1=2,n
    do 21 m2=2,n
      xs(m1-1,m2-1)=-a(m1,m2)
      xss(m1-1,m2-1)=-a(m1,m2)
      if(m1.ne.m2) go to 21
      xs(m1-1,m2-1)=xs(m1-1,m2-1)+kok(i)

```

```

        xss(m1-1,m2-1)=xs(m1-1,m2-1)
21 continue
        do 801 k=1,n-1
801 pv(k)=cplx(0,0)
        do 31 j=1,s(i)
            do 803 k=2,n
803 xy(k-1)=-pvg(k-1)+a(k,1)
            call mb01b(xs,n-1)
            call carp(xs,xy,xsss,n-1,n-1,n-1,1)
            do 33 m1=1,n-1
                do 33 m2=1,n-1
33 xs(m1,m2)=xss(m1,m2)
                do 804 k=2,n
804 pv(k-1)=xsss(k-1)
                    l=i+j-1
                    do 805 k=2,n
805 pv(k,1)=pvg(k-1)
31 continue
32 continue
            do 36 j=1,n
36 pv(1,j)=1.0
999 do 37 i=1,n
            do 37 j=1,n
37 pv(i,j)=pv(i,j)
            do 306 i=1,n
                do 306 j=1,n
306 pvt(i,j)=pv(i,j)
            call mb01b(pv,n)

```

C BASKIN KOKLERIN BELIRLENMESI

```

        do 95 i=1,k1
95 q(i)=i
        write(3,*) ' BASKIN KOKLER '
        do 98 i=1,k1
98 write(3,1118) i, q(i) , i,kok(i)
1118 format(1x,'q( ',i2,')=',i4,' kok(',i2,')=',f10.4,f10.4)

```

C A0 MATRİSİNİN ELDE EDİLMESİ

```

do 7 i=1,k1
do 8 j=1,k1
8 a0(i,j)=a(q(i),q(j))
7 continue

```

C A1 MATRİSİNİN ELDE EDİLMESİ

```

do 11 i=1,k1
m=0
do 9 j=1,n
do 13 k=1,k1
13 if (j.eq.q(k)) go to 9
m=m+1
a1(i,m)=a(q(i),j)
9 continue
11 continue

```

C W0 MATRİSİNİN ELDE EDİLMESİ

```

do 82 i=1,k1
do 83 j=1,k1
83 w0(i,j)=pvt(q(i),j)
82 continue
call mb01b(w0,k1)
do 93 i=1,k1
do 93 j=1,k1
93 w01(i,j)=w0(i,j)

```

C W1 MATRİSİNİN ELDE EDİLMESİ

```

m=0
do 84 i=1,n
do 85 k=1,k1
85 if(i.eq.q(k)) go to 84
m=m+1

```

```

      do 86 j=1,k1
86  w1(m,j)=pvt(i,j)
84  continue

```

C INDIRGENMIS \tilde{A} MATRISININ BULUNMASI

```

      call carp(w1,w01,wt,n-k1,k1,k1,k1)
      do 1120 i=1,n-k1
      do 1127 j=1,k1
1127 wot(i,j)=wt(i,j)
1120 continue
      call carp(a1,wt,wtt,k1,n-k1,n-k1,k1)
      do 87 i=1,k1
      do 88 j=1,k1
88  at(i,j)=a0(i,j)+wtt(i,j)
87  continue
      write(3,*) ' INDIRGENMIS A MATRISI '
      do 1114 i=1,k1
1114 write(3,1115) (at(i,j),j=1,k1)
1115 format(1x,10('(',f12.5,f12.5,')',))

```

C PV1 MATRISININ ELDE EDİLMESİ

```

      do 1450 i=1,k1
      do 1450 j=1,k1
1450 pv1(i,j)=pvt(q(i),j)

```

C INDIRGENMIS \tilde{B} MATRISININ BULUNMASI

```

      call carp(pv,b,pvtt,n,n,n,kn)
      do 89 i=1,k1
      do 90 j=1,kn
90  bb1(i,j)=pvtt(i,j)
89  continue
      call carp(pv1,bb1,bb,k1,k1,k1,kn)
      write(3,*) ' INDIRGENMIS B '
      do 1116 i=1,k1

```

```

1116 write(3,1117) (bb(i,j),j=1,kn)
1117 format(1x,10('(',f10.6,f10.6,')',))

```

C INDIRGENMİŞ \tilde{C} MATRİSİNİN BULUNMASI

```

do 1720 i=1,kc
do 1720 j=1,k1
1720 ci(i,j)=c(i,q(j))
m=1
do 1721 i=1,n
do 1465 j=1,k1
1465 if(i.eq.q(j)) go to 1721
do 1555 k=1,kc
1555 cil(k,m)=c(k,i)
m=m+1
1721 continue
call carp(cil,wot,ci2,kc,n-k1,n-k1,k1)
do 1722 j=1,kc
do 1722 i=1,k1
1722 ct(j,i)=ci(j,i)+ci2(j,i)
write(3,*) '     INDIRGENMİŞ C MATRİSİ '
do 1777 i=1,kc
1777 write(3,1724) (ct(i,j),j=1,k1)
1724 format(10('(',f10.2,f10.2')'))

```

C DZGÜN MODELİN DURUM DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ VE
C ÇIKIŞ TEPKESİNİN 0-T ARALIGINDA BULUNMASI

```

do 1673 i=1,n
do 1675 j=1,n
1675 xt(i,j)=cplx(0,0)
1673 continue
t=0.0
dt=0.1
1459 do 1460 i=1,n
do 1461 j=1,n
if(i.ne.j) ab(i,j)=cplx(0,0)

```

```

        if(i.eq.j) ab(i,j)=(cplx(-1,0)+cexp(kok(i)*t))/kok(i)
1461 continue
1460 continue
        call carp(pv,b,bl,n,n,n,kn)
        call carp(ab,bl,bln,n,n,n,kn)
        call carp(pvt,bln,blt,n,n,n,kn)
        do 1463 i=1,n
        do 1464 j=1,kn
1464 xt(i,j)=blt(i,j)
1463 continue
        call carp(c,xt,yt,kc,n,n,kn)

C   İNDİRGENMİŞ MODELİN DURUM DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ VE
C   ÇIKIŞ TEPKESİNİN 0-T ARALIGINDA BULUNMASI

        do 1705 i=1,k1
        do 1706 j=1,k1
1706 w0(i,j)=pvt(q(i),j)
1705 continue
        do 1708 i=1,k1
        do 1709 j=1,k1
            if(i.ne.j) ab1(i,j)=cplx(0,0)
            if(i.eq.j) ab1(i,j)=(cplx(-1,0)+cexp(kok(q(i))*t))/kok(q(i))
1709 continue
1708 continue
        call carp(w01,bb,bl1,k1,k1,k1,kn)
        call carp(ab1,bl1,bln1,k1,k1,k1,kn)
        call carp(w0,bln1,blt1,k1,k1,k1,kn)
        do 1712 i=1,k1
        do 1713 j=1,kn
1713 xt1(i,j)=blt1(i,j)
1712 continue
        call carp(ct,xt1,yt1,kc,k1,k1,kn)
        j1=0
        m=0
        do 1770 i=1,kc
        do 1770 j=1,kn

```

```

    j1=j1+1
    yt1(i,j)=yt1(i,j)
1770 yts(m,j1)=real(yt(i,j)-yt1(i,j))
    do 1772 i=1,kc
1772 write(4,1776) t,(real(yt(i,j)),j=1,kn),(real(yt1(i,j)),j=1,kn)
1776 format(f6.2,2x,2(f12.6),2x,2(f12.6))
    t=t+dt
    m=m+1
    if(t.lt.20) go to 1459

```

C SIMPSON YÖNTEMİNE GÖRE KARESEL YANILGI HESABI

```

    m1=200
    k1=kc*kn
    do 1980 i=1,k1
1980 hhata(i)=0.
    do 1914 j1=1,k1
    do 1914 m=0,m1,2
1914 hhata(j1)=yts(m,j1)**2+4*(yts(m+1,j1)**2)+yts(m+2,j1)**2
    *+hhata(j1)
    do 1981 i=1,k1
    hhata(i)=hhata(i)*dt/3
1981 write(3,*) 'KARESEL YANILGI =', hhata(i)
    44 stop
    end

```


NxN Boyutunda bir kare matrisin tersini almak için Fortran 77 dilinde yazılmış alt yazılım:

```

SUBROUTINE MBO1B(c1,n)
  complex c1,tc1,ta,tb
  dimension c1(10,10),tc1(10,10)
  do 20 i=1,n
    do 24 j=1,n
24  tc1(i,j)=cplx(0,0)
20  tc1(i,i)=cplx(1,0)
    do 23 k=1,n
      ta=c1(k,k)
      do 21 j=1,n
        c1(k,j)=c1(k,j)/ta
21  tc1(k,j)=tc1(k,j)/ta
      do 23 l=1,n
        if(l.eq.k) go to 23
        tb=c1(l,k)
        do 22 j=1,n
          c1(l,j)=c1(l,j)-tb*c1(k,j)
22  tc1(l,j)=tc1(l,j)-tb*tc1(k,j)
23  continue
      do 40 i=1,n
        do 40 j=1,n
          c1(i,j)=tc1(i,j)
40  continue
    return
  end

```

Bir çokterimlinin katsayılarını, Laverrier yöntemi kullanarak bulan, Fortran 77 dilinde yazılmış alt yazılım:

```

SUBROUTINE KAT(a,n,ph)
dimension a(10,10),ph(11),y(10,10),z(10,10),birm(10,10),p(11)
complex a,y,z,birm,p,pk1
real ph
do 10 i=1,n
do 10 j=1,n
y(i,j)=cplx(0,0)
10 birm(i,j)=cplx(0,0)
do 5 i=1,n
do 5 j=1,n
if(i.eq.j) y(i,j)=cplx(1,0)
if(i.eq.j) birm(i,j)=birm(i,j)+1
birm(i,j)=birm(i,j)
5 y(i,j)=y(i,j)
do 20 k=1,n
call carp(a,y,z,n,n,n,n)
pk1=cplx(0,0)
z(i,i)=cplx(0,0)
do 25 i=1,n
25 pk1=pk1+z(i,i)
p(k)=pk1/k
do 30 i=1,n
do 30 j= 1,n
30 y(i,j)=z(i,j)-p(k)*birm(i,j)
20 continue
do 6 i=2,n+1
6 ph(i)=-p(i-1)
ph(1)=1.
return
end

```

Muller yöntemini kullanarak, bir çokterimlinin köklerini bulan, Fortran 77 dilinde yazılmış alt yazılım:

```

SUBROUTINE ROOT (a,n,c)
  implicit real (a-h,o-z)
  dimension a(11),c(10)
  complex c,dx,x,x3,y1,y2,y,te1,te2,te3,te4,te5,te6,te7,radius
  n1=n
2   if (n1.eq.1) go to 3
   if(a(n1+1).ne.0.) go to 5
   c(n1)=0.
   n1=n1-1
   go to 2
3   c(1)=-a(2)/a(1)
   go to 120
5   scale=abs(a(n1+1)/a(1))**(1./(float(n1)))
   b=a(1)
   do 6 i=1,n1
   b=b*scale
6   c(i)=a(i+1)/b
   if(n1.eq.2) go to 104
10  assign 20 to 1
   y1=c(1)+1.
   y2=c(1)-1.
   do 11 i=2,n1
   y1=c(i)+y1
11  y2=c(i)-y2
   y=c(n1)
   x=0.
   dx=1.
   te1=-2.
12  te2=y2/y
   te3=(y1-y2)/(y*te1)
   iter=0
80  iter=iter+1

```

```

if(iter.gt.300)goto 18
te4=te2-1.
te5=(te4-te3)/(te1+1.)
te6=(te5+te4)*.5
te7=csqrt(te6*te6+te5)
te1=te6+te7
te7=te6-te7
b=real(te7)**2+aimag(te7)**2
if((real(te1)**2+aimag(te1)**2).gt.b) go to 13
if(b.eq.0.) te7=.9
te1=te7
13 dx=dx/te1
x=dx+x
epsi=(abs(real(x))+abs(aimag(x)))*1.e-9
if(abs(real(dx)).ge.epsi) go to 14
if(abs(aimag(dx)).lt.epsi) go to 18
14 y2=y
assign 15 to m
go to 99
15 b=(abs(real(y2))+abs(aimag(y2)))*10.
if(abs(real(y)).lt.b) go to 16
if(abs(aimag(y)).ge.b) go to 98
16 te2=y2/y
te3=te2/te1*te4
go to 80
18 c(n1)=x*scale
n1=n1-1
c(1)=x+c(1)
do 19 i=2,n1
19 c(i)=c(i-1)*x+c(i)
if(n1.eq.2) go to 104
go to 1,(10,20)
20 if(abs(aimag(x)).lt.1000.*epsi) go to 10
assign 10 to 1
x3=conjg(x)
dx=conjg(dx)
te1=conjg(te1)

```

```
x=x3-dx
assign 21 to m
go to 99
21 y2=y
x=x-dx*te1
assign 22 to m
go to 99
22 y1=y
x=x3
assign 12 to m
go to 99
98 te1=te1+te1
dx=.5*dx
x=x-dx
99 y=x+c(1)
do 100 i=2,n1
100 y=y*x+c(i)
if(real(y).ne.0.) go to 101
if(aimag(y).eq.0.) go to 18
101 go to m, (12,15,21,22)
104 te6=.5*c(1)
c(2)=(csqrt(te6*te6-c(2))-te6)*scale
c(1)=-c(1)*scale-c(2)
120 return
end
```

NxM Boyutunda bir matris ile KxL boyutunda başka bir matrisin çarpımı için, Fortran 77 dilinde hazırlanan alt

```
SUBROUTINE CARP(x,y,z,n,m,k,l)
dimension x(10,10),y(10,10),z(10,10)
complex z,x,y
do 15 i=1,n
do 15 i1=1,l
z(i,i1)=cmplx(0,0)
do 16 j=1,m
16 z(i,i1)=z(i,i1)+x(i,j)*y(j,i1)
15 continue
return
end
```

DZGEÇMİŞ

1965 yılında Trabzon'un Akçaabat ilçesinde doğdu. 1971 yılında girdiği Akçaabat Merkez ilkokulunu 1976 yılında bitirdi. Orta öğrenimini Akçaabat Ortaokulunda okuduktan sonra, lise öğrenimini 1982 yılında Akçaabat Lisesinde tamamladı. Aynı yıl girdiği öğrenci seçme ve yerleştirme sınavları sonucunda, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümünü kazandı. Bölümde Elektronik dalını seçti ve 1987 yılında öğrenimini tamamladı. 1989 yılında girdiği Elektronik Bölümü Yüksek Lisans sınavlarını kazanarak Yüksek Lisans öğrenimine başladı ve halen devam etmektedir.