

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**KUTUP YERLEŞTİRME YÖNTEMİNİN FARKLI ALGORİTMALARLA
İNCELENMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Elektrik Elektronik Müh. Selda GÜNEY

**TEMMUZ 2007
TRABZON**

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ELEKTRİK ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**KUTUP YERLEŞTİRME YÖNTEMİNİN
FARKLI ALGORİTMALARLA İNCELENMESİ**

Elektrik Elektronik Müh. Selda GÜNEY

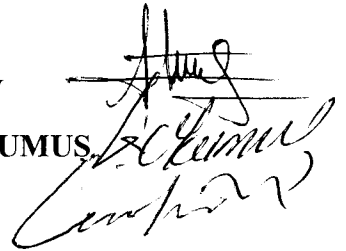
**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
"Elektronik Yüksek Mühendisi"
Unvanı Verilmesi İçin kabul Edilen Tezdir.**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 08.06.2007
Tezin Savunma Tarihi : 10.07.2007**

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Ayten ATASOY

Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. H. İbrahim OKUMUS

Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. Cemal KÖSE



Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Emin Zeki BAŞKENT

Trabzon 2007

ÖNSÖZ

Kontrol sistemleri, insanlığın ve uygarlığın gelişme ve ilerlemesinde çok önemli rol oynamaktadır. Bu çalışmada kontrol sistemlerinin bir parçası olan kontrol yöntemlerinden kutup yerleştirme problemi incelenmiştir.

Bu tezin hazırlanmasında kutup yerleştirme ile kontrolün bir çok alanda kullanılması ve hala eksikliklerinin olmasından yola çıkılmıştır. Gelecekte bu yöntemin tüm sınırlamalardan arındırılmış olarak sistemlere uygulanmasıyla daha kararlı sistemlerin elde edileceğini temenni ederim.

Konu seçiminde, çalışmaların yürütülmesinde ve gerek ders gerek hayatta karşılaştığım tüm sorunlarda gösterdiği destek ve yardım için saygı değer danışmanım Yrd. Doç. Dr. Ayten ATASOY'a teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca çalışmam süresince sabırla, ilgisiyle ve pozitif enerjisiyle bana destek veren hayatımın en güzel rengi eşim Göksel GÜNEY'e teşekkürlerimi sunarım. Son olarak bu yaşa gelmemde büyük emeği geçen sevgilerini ve güvenlerini hiç eksik etmeyen, maddi ve manevi gösterdikleri tüm destek için anneme, babama ve kardeşime çok teşekkür ederim.

Selda GÜNEY

Trabzon 2007

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET.....	VI
SUMMARY.....	VII
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	VIII
TABLolar DİZİNİ.....	X
SEMBOLLER DİZİNİ.....	XI
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Kutup Yerleştirme.....	2
1.2.1. Durum Geribeslemeli Kutup Yerleştirme.....	2
1.2.2. Sabit Çıkış Geribeslemeli Kutup Yerleştirme.....	3
1.3. Kutup Yerleştirme Probleminin Tanımı	5
1.3.1. Transfer Fonksiyonu	5
1.3.2. Karakteristik Denklem.....	7
1.3.3. Özdeğer ve Özvektörler.....	8
1.3.4. Benzerlik Dönüşümü	10
1.3.5. Kontrol edilebilirlik ve Gözlenebilirlik	11
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR	14
2.1. TGTÇ Sistemler İçin İncelenen Durum Geribeslemeli Kutup Yerleştirme Yöntemleri	14
2.1.1. Ackermann Formülü	14
2.1.2. Haritalama Yaklaşımı.....	17
2.2. ÇGÇÇ Sistemler İçin İncelenen Durum Geribeslemeli Kutup Yerleştirme Yöntemleri	19
2.2.1. Genelleştirilmiş Haritalama Yöntemi.....	20
2.2.2. Sylvester ve Lyapunov Denklemleri ile Kutup Yerleştirme	21
2.2.3. Sylvester Denklemi Kullanılarak Kutup Yerleştirme	23

2.2.4.	Özvektörlerden Yararlanarak Kutup Yerleştirme	26
2.3.	ÇGÇÇ Sistemler İçin İncelenen Çıkış Geribeslemeli Kutup Yerleştirme Yöntemi	29
2.3.1.	Genelleştirilmiş Matris Tersi Yaklaşımı	29
2.3.1.1.	Genelleştirilmiş Haritalama Yöntemiyle Çıkış Geribesleme.....	32
2.4.	Geliştirilen Algoritmalar	33
2.4.1.	Genelleştirilmiş Ackermann Yaklaşımı	33
2.4.2.	Genelleştirilmiş Ackermann Yöntemiyle Çıkış Geribesleme	34
2.4.3.	Sylvester ve Lyapunov Denklemleri ile Çıkış Geribeslemeli Kutup Yerleştirme	35
2.4.4.	Sylvester Denklemi Kullanarak Çıkış Geribeslemeli Kutup Yerleştirme	36
3.	BULGULAR VE İRDELEME.....	38
3.1	TGTC Sistemler İçin İncelenen Durum Geribeslemeli Kutup Yerleştirme Yöntemleri	38
3.1.1.	Ackermann Formülü ile Elde Edilen Sonuçlar	38
3.1.2.	Haritalama Yaklaşımı ile Elde Edilen Sonuçlar	42
3.2.	ÇGÇÇ Sistemler İçin İncelenen Durum Geribeslemeli Kutup Yerleştirme Yöntemleri	44
3.2.1.	Genelleştirilmiş Haritalama Yöntemi ile Elde Edilen Sonuçlar	44
3.2.2.	Sylvester ve Lyapunov Denklemleri ile Durum Geribeslemeli Kutup Yerleştirmede Elde Edilen Sonuçlar	49
3.2.3.	Sylvester Denklemi Kullanarak Kutup Yerleştirme ile Elde Edilen Sonuçlar ...	54
3.2.4.	Özvektörlerden Yararlanarak Kutup Yerleştirme ile Elde Edilen Sonuçlar	58
3.3.	ÇGÇÇ Sistemler İçin İncelenen Çıkış Geribeslemeli Kutup Yerleştirme Yöntemi.....	61
3.3.1	Genelleştirilmiş Haritalama Yöntemiyle Kutup Yerleştirmede Elde Edilen Sonuçlar.....	61
3.4.	Geliştirilen Algoritmalar ile Elde Edilen Sonuçlar.....	67
3.4.1.	Genelleştirilmiş Ackermann Yaklaşımı ile Durum Geribeslemeli Kutup Yerleştirmede Elde Edilen Sonuçlar.....	67
3.4.2.	Genelleştirilmiş Ackermann Yöntemiyle Çıkış Geribeslemeli Kutup Yerleştirmede Elde Edilen Sonuçlar.....	70
3.4.3.	Sylvester ve Lyapunov Denklemleri Yardımıyla Çıkış Geribeslemede Elde Edilen Sonuçlar.....	74
3.4.4.	Sylvester Denklemi Kullanarak Kutup Yerleştirme ile Elde Edilen Sonuçlar...	79
4.	SONUÇLAR.....	84
5.	ÖNERİLER.....	89
6.	KAYNAKLAR.....	90

7. EKLER.....	93
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

Kutup yerleştirme yöntemleri farklı kontrol sistemlerinin dizaynında kullanılmaktadır. Örneğin helikopterlerin, uçakların, füzelerin, gerilim regülatörlerinin ve mekanik sistemlerin kontrolünde kullanılır.

Kutup yerleştirme için verilen yöntemler geribesleme türüne göre iki temel kategoriye ayrılmaktadır. Bunlar durum geribesleme ve çıkış geribeslemedir.

Bu çalışmada, kutup yerleştirme yöntemleri zamanla değişmeyen, doğrusal sürekli sistemler ve tek girişli-tek çıkışlı ve çok girişli-çok çıkışlı sistemler için araştırıldı.

Tek girişli-tek çıkışlı sistemler için yaygın olarak bilinen Ackermann formülü ve haritalama yaklaşımı incelenmiştir. Çok girişli-çok çıkışlı sistemlerde ise farklı algoritmalar denenmiştir. Bunlar tek girişli-tek çıkışlı sistemler için verilen algoritmalar geliştirilerek, özvektörlerden yararlanarak ve Sylvester denklemleri çözümünü kullanarak elde edilen algoritmalar.

Çıkış geribesleme diğer bir geribesleme türüdür. Çıkış geribeslemeli kutup yerleştirme yöntemleri, durum geribeslemeli kutup yerleştirmeden yararlanılarak geliştirildi. İki farklı geribesleme türü arasında geçiş sağlayan genelleştirilmiş matris tersi yaklaşımı bu çalışmadaki çıkış geribeslemede kullanılan algoritmaların temelini oluşturmaktadır. Bu yaklaşımla çıkış geribeslemeye geçiş sadece durum geribeslemeli algoritmalarından biri olan haritalama yaklaşımından sağlanmıştır. Bu çalışmada farklı algoritmalar için bu yöntem denenmiş ve başarılı sonuçlara ulaşılmıştır.

Bu tezde, üzerinde çalışılan algoritmaların avantaj ve dezavantajlarından bahsedilmiştir. Yöntemlerin performansı farklı kutuplar için değişik sistemlerde denendi. Sonuçlar önerilen algoritmaların doğruluğunu ve geçerliliğini göstermektedir.

Anahtar kelimeler : Kutup Yerleştirme, Durum Geribesleme, Çıkış Geribesleme, Doğrusal Zamanla Değişmeyen Sistemler

SUMMARY

Analysis of Pole Placement Method with Different Algorithms

Pole placement methods are used in the design of different control systems. For example; the controlling of helicopters, aircrafts, missiles, generator voltage regulators and mechanical systems.

Methods which are given for pole placement are divided into two main categories according to feedback. These are state feedback and output feedback methods.

In this study, pole placement methods was researched in time-invariant, linear, continuous systems and for single input-single output and multi input-multi output systems.

Ackermann formula which is the most famous methods and mapping approach was examined for single input-single output systems. The different algorithms were tested for multi input-multi output systems. These are algorithms which are found by improving from algorithms given for single input-single output systems, utilizing from eigenvectors, and using solution of Sylvester's equation.

Output feedback is the other feedback type. Pole placement methods with output feedback were improved by utilizing from pole placement with state feedback. Generalised matrix inverse approach which is provided transition between two different kind of feedback is built fundamental of algorithms which are used in output feedback in this thesis. Transition to output feedback with this approach was only provided from mapping approach which is one of the state feedback methods. In this work, this method was examined for different algorithms and was achieved to efficient results.

In this thesis, advantages and disadvantages were mentioned for algorithms which were used. The performance of the methods were tested on various systems for different poles.

Results illustrates the accuracy and validity of the proposed methods.

Key words : Pole Placement (Pole Assignment), State Feedback, Output Feedback, Linear Time Invariant Systems

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1. Durum geribeslemeli kutup yerleştirme	3
Şekil 2. Çıkış geribeslemeli kutup yerleştirme	4
Şekil 3. TGTC sistemler için Ackermann formülü ile elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi	40
Şekil 4. TGTC sistemler için Ackermann formülü ile elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi	41
Şekil 5. TGTC sistemler için haritalama yaklaşımı ile elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi	43
Şekil 6. TGTC sistemler için haritalama yaklaşımı ile elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi	44
Şekil 7. ÇGÇÇ sistemler için geliştirilmiş haritalama yaklaşımı ile elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi.....	46
Şekil 8. ÇGÇÇ sistemler için geliştirilmiş haritalama yaklaşımı ile elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi.....	48
Şekil 9. ÇGÇÇ sistemlerde Sylvester ve Lyapunov denklemlerini kullanarak elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi.....	51
Şekil 10. ÇGÇÇ sistemlerde Sylvester ve Lyapunov denklemlerini kullanarak elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi.....	54
Şekil 11. ÇGÇÇ sistemlerde Sylvester denklemlerini kullanarak elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi	55
Şekil 12. ÇGÇÇ sistemlerde Sylvester denklemlerini kullanarak elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi	58
Şekil 13. ÇGÇÇ sistemlerde özvektörlerden yararlanarak elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi	59
Şekil 14. ÇGÇÇ sistemlerde özvektörlerden yararlanarak elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi	61
Şekil 15. ÇGÇÇ sistemlerde geliştirilmiş haritalama yaklaşımı ile çıkış geribeslemeli elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi.....	64
Şekil 16. ÇGÇÇ sistemlerde geliştirilmiş haritalama yaklaşımı ile çıkış geribeslemeli elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi.....	66
Şekil 17. ÇGÇÇ sistemler için geliştirilmiş Ackermann formülü ile durum geribeslemeli elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi.....	68
Şekil 18. ÇGÇÇ sistemler için geliştirilmiş Ackermann formülü ile durum geribeslemeli elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi.....	70

Şekil 19. ÇGÇÇ sistemlerde genelleştirilmiş Ackermann formülü ile çıkış geribeslemeli elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi.....	71
Şekil 20. ÇGÇÇ sistemlerde genelleştirilmiş Ackermann formülü ile çıkış geribeslemeli elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi.....	73
Şekil 21. ÇGÇÇ sistemlerde Sylvester ve Lyapunov denklemleri kullanılmasıyla çıkış geribeslemeli elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi.....	76
Şekil 22. ÇGÇÇ sistemlerde Sylvester ve Lyapunov denklemleri kullanılmasıyla çıkış geribeslemeli elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi.....	79
Şekil 23. ÇGÇÇ sistemlerde Sylvester denklemleri kullanılmasıyla çıkış geribeslemeli elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi	81
Şekil 24. ÇGÇÇ sistemlerde Sylvester denklemleri kullanılmasıyla çıkış geribeslemeli elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi.	83
Şekil 25. ÇGÇÇ sistemlerde durum geribeslemeli kutup yerleştirme için incelenen tüm algoritmaların 1. girişten tüm çıkışlara zaman yanıtı	85
Şekil 26. ÇGÇÇ sistemlerde durum geribeslemeli kutup yerleştirme için incelenen tüm algoritmaların 2. girişten tüm çıkışlara zaman yanıtı	86
Şekil 27. ÇGÇÇ sistemlerde çıkış geribeslemeli kutup yerleştirme için incelenen tüm algoritmaların 1. girişten tüm çıkışlara doğru zaman yanıtı.....	87
Şekil 28. ÇGÇÇ sistemlerde çıkış geribeslemeli kutup yerleştirme için incelenen tüm algoritmaların 2. girişten tüm çıkışlara doğru zaman yanıtı.....	88

TABLULAR DİZİNİ

Sayfa No

Tablo 1. ÇGÇG sistemlerde durum geribeslemeli kutup yerleştirme algoritmalarının durum sayısına göre hız değerleri.....	84
Tablo 2. Çıkış geribeslemeli kutup yerleştirme algoritmalarının hız değerleri.....	86

SEMBOLLER DİZİNİ

A	: $n \times n$ açık çevrim durum matrisi
B	: $n \times l$ giriş matrisi
C	: $m \times n$ çıkış matrisi
ÇGÇÇ	: Çok girişli çok çıkışlı
l	: Giriş sayısı
m	: Çıkış sayısı
n	: Durum sayısı
S	: Kontrol edilebilirlik matrisi
TGTÇ	: Tek girişli tek çıkışlı
$Adj(A)$: A matrisinin adjointi
$A \otimes B$: İki matrisin iç (kronecker) çarpımı
$[A, B]$: A ve B matrisleri tanımlı sistem ($D = 0, C = I_n$)
$[A, B, C]$: A, B ve C matrisleri tanımlı sistem ($D = 0$)
A'	: A matrisinin transpozesi
$ A $: A matrisinin determinanı
A^{-1}	: A matrisinin tersi
A^+	: A matrisinin genelleştirilmiş tersi
A_k	: $n \times n$ kapalı çevrim durum matrisi
\tilde{A}	: Kontrol edilebilir kanonik forma dönüştürülmüş açık çevrim durum matrisi
\tilde{A}_k	: Kontrol edilebilir kanonik forma dönüştürülmüş kapalı çevrim durum matrisi
a_i	: Açık çevrim sistemine ait karakteristik polinom katsayıları
$H(s)$: Açık çevrim transfer matrisi
$H_k(s)$: Kapalı çevrim transfer matrisi
I_n	: $n \times n$ boyutunda birim matris
$r(A)$: A matrisinin rankı

u_i	: Açık çevrim özdeğerlerine ait özvektörler
v_i	: Kapalı çevrim özdeğerlerine ait özvektörler
\tilde{X}	: Benzerlik dönüşümü uygulanmış matris
\mathcal{C}	: Kompleks sayılar kümesi
\mathfrak{R}	: Reel sayılar kümesi
$\phi(s)$: Açık çevrim karakteristik denklem
$\phi_k(s)$: Kapalı çevrim karakteristik denklem
α_i	: Kapalı çevrim sistemine ait karakteristik polinom katsayıları
Λ	: Kapalı çevrim sistemi kutupları kümesi
Γ_i	: Açık çevrim kutupları
λ_i	: Kapalı çevrim kutupları

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Bu çalışma yaklaşık 40 yıldır gelişimi devam eden kontrol sistemlerinin tasarımında kullanılan metotlardan biri olan kutup yerleştirme yöntemini içermektedir.

Sistem, birbiriyle etkileşen veya ilişkili olan, bir bütün oluşturan cisim veya varlıkların bileşkesidir. Birbiriyle madde, enerji veya bilgi alışverişinde bulunan elemanlar veya bunların parçaları anlamına da gelebilir. Bu durumda; elemanlarını ve bunların eylemlerini kapsayan matematiksel ve mantıksal bir sistem oluşturulabilir.

Kontrol, fiziksel sistemin matematiksel olarak kurulması, matematik dünyasında çözümlendikten sonra fiziksel uygulamada kullanılmasını sağlar. Matematiksel modelleme ise kontrol edilecek sistemin tüm davranışlarının matematiksel formüle dönüştürülmesidir. Aynı fiziksel sistemin birden fazla matematiksel modeli kurulabilir. Tüm modeller varsayımlar üzerine kurulduğu için hiçbir model fiziksel sistemin tam karşılığı olamaz. Birbirinin eşdeğeri olduğu halde farklı modeller de oluşturulabilir. Bir sistemin türevsel denklem modeli ile durum denklem takımı modeli, birbirinin eşdeğeri ama farklı biçimdeki modelleridir. Bu çalışmada verilen kutup yerleştirme algoritmaları durum denklem takımı modeli kullanılarak geliştirilmişlerdir.

Son yıllarda kutup yerleştirme değişik türde çok değişkenli sistemlerin tasarımında kullanılmaktadır. Helikopterlerde, uçaklarda, füzelerde, gerilim regülatörlerinde ve benzeri mekanik sistemlerde bu yöntemle kontrol edilen çalışmalar yapılmıştır.

Kutup yerleştirme; kararlılığın sağlanmasında, sistemin basitleştirilmesinde ve tepki kontrol girişine bağlaşımını kesmede iç çevrim kontrol yasalarının tasarımında kullanılır. Apkarian [1] helikopterin kontrol tasarımında kutup yerleştirme kullanıldığında dayanıklılığın geliştiğini göstermiştir. Andry [2] ise L-1011 uçaklarının yanal dinamikleri için sistemin kararlılığını artırmada çıkış geribeslemeli kutup yerleştirmeyi kullanmıştır. Sobel ve Shapiro [3,4,5] gelişmiş savaş uçaklarının uçuş kontrol tasarımında kutup yerleştirmeyi uygulamışlardır. Yine Sobel ve Cloutier [6] füze teknolojisinde otomatik pilot tasarımında bu yöntemi kullanmışlardır. Bu çalışmada; doğrusal, zamanla değişmeyen sistemlerde kutup yerleştirme yöntemi uygulanmıştır. Zamanla değişen doğrusal sistemler üzerine de birçok çalışma mevcuttur. Bu çalışmada verilen çıkış geribeslemeli kutup

yerleştirme algoritmalarının bir sonraki adımı dinamik çıkış geribeslemeli kutup yerleştirmedir.

1.2. Kutup Yerleştirme

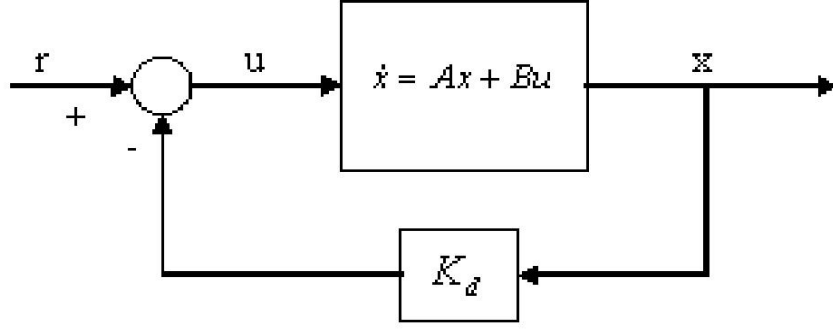
Kutup yerleştirme, istenen doğrusal sistem kapalı çevrim kutuplarının çıkış geribeslemeli veya durum geribeslemeli olarak yerleştirildiği tasarım tekniğidir. Wonham [7] doğrusal zamanla değişmeyen çok değişkenli kontroledilebilir sistemlerde durum geribeslemeli kutup yerleştirmenin ilk önemli sonuçlarından birini sunmuştur.

Doğrusal sistemlerde kutupların; kararlılık, sistem yanıtı, geçici yanıt ve bant genişliği özellikleri üzerinde önemli etkileri vardır. Eğer kapalı çevrim kutupları isteğe göre belirlenirse sistemin kararlılığı, sistem yanıtı gibi konularda istenilen doğrultuda hareket edilmiş olunur. Böylece kutup yerleştirme ile sistemin olması istendiği durumdaki kutupları yerleştirilerek sistem kontrol edilir. Çalışmalar göstermektedir ki bazı koşullar altında sistemin kutupları keyfi atanabilir. Genel olarak kutup yerleştirmeyi, geribesleme türüne göre durum veya çıkış geribeslemeli olmak üzere ikiye ayırabiliriz.

1.2.1. Durum Geribeslemeli Kutup Yerleştirme

Modern kontrol sistemlerindeki tasarım tekniklerinin büyük bir kısmı durum geribesleme kavramına dayanır. Bu tasarım yönteminde denetleyicinin işlevi durum değişkenlerini sabit kazançlarla geri beslemektir. Bu durum şekil 1' de gösterilmektedir.

Young ve Willems [8] TGTÇ (tek girişli tek çıkışlı) sistemler için geliştirilen haritalama yaklaşımını (mapping approach), ÇGÇÇ (çok girişli çok çıkışlı) sistemler için genelleştirmişlerdir. Haritalama yaklaşımına eş zamanlı olarak Ackermann [9] TGTÇ sistemler için ünlü formülünü yayınlamıştır. Mayne ve Murdoch [10] spektral yaklaşım adı verilen TGTÇ sistemler için kutup yerleştirme yöntemi geliştirmişlerdir. TGTÇ sistemler için bahsedilen yaklaşımlar ikili (dyadic) yaklaşım kullanılarak ÇGÇÇ sistemlere uygulanmaya başlandı. İkili yaklaşımda ÇGÇÇ sistemin TGTÇ sisteme çevrilmesiyle elde edilen çözümler temel alınmaktadır. Bu yaklaşımın verimli olmadığına anlaşılması üzerine tam ranklı yaklaşıma yönelmişlerdir. Tam ranklı durum geribeslemeli kutup yerleştirme için Bhattacharyya ve De Sousa [11] sylvester denklem çözümlerini içeren bir algoritma sunmuşlardır.



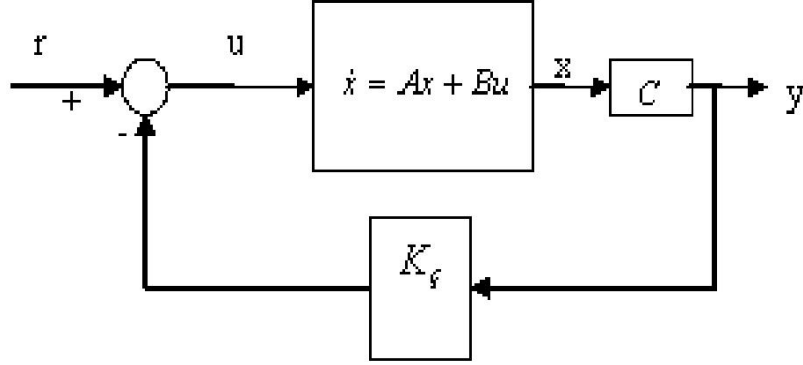
Şekil 1. Durum geribeslemeli kutup yerleştirme

Gourishankar ve Ramar [12] özdeğer hassasiyetini ölçmek isterken, durum geribesleme matrisinin ilk satırını diğer satırlardan yararlanarak bulmuşlardır. Söylemez ve Munro [13] bu yöntemi yeniden tersine çevirerek belirsiz sistemlerdeki kutup yerleştirmede kullanmışlardır. Söylemez [14] bu sonuçlardan yola çıkarak birçok ikili (dyadic) yöntemini birleştirmiştir. Bu yöntemlerin hepsinin aynı kontroledilebilir standart formula ilişkili olan formülden geldiğini de göstermiştir.

1.2.2. Sabit Çıkış Geribeslemeli Kutup Yerleştirme

Kapalı çevrimli sistem bir kez tasarlandıktan sonra durum değişkenlerinin nasıl geribesleneceği gibi gerçeklemeye yönelik iki sorunla karşı karşıya kalınır. İlk durum değişkenlerinin sayısı çok fazla olabilir ve geribeslemek için bu değişkenlerin ölçülmesi yüksek masraf nedeniyle tasarımı engeller. İkinci sorun tüm durum değişkenlerinin fiziksel erişilemez olmasından kaynaklanır. Bundan dolayı çıkış geribeslemeli kutup yerleştirme pratikte daha çok tercih edilmektedir. Şekil 2' de çıkış geribeslemeli kutup yerleştirme gösterilmektedir.

Jameson [15] n durum sayısı, m çıkış sayısı olmak üzere tek girişli sistem için bazı varsayımlar altında m adet birbirinden bağımsız kapalı çevrim kutbunun keyfi atanabileceğini sunmuştur.



Şekil 2. Çıkış geribeslemeli kutup yerleştirme

Davison [16] ÇGÇÇ sistemler için çıkış sayısı (m) kadar kutbun keyfi atanabileceğini savunmuştur. Bu çalışmanın geliştirilmesiyle Davison ve Chatterjee [17], Sridhor ve Lindorff [18] l giriş sayısı olmak üzere $\max(m, l)$ kadar kutbun keyfi atanabileceğini göstermişlerdir. Kimura [19] $n \leq m + l - 1$ koşulu sağlanıyorsa tüm kutupların keyfi yerleştirileceğini sunarken, eş zamanlı olarak Davison ve Wang [20] $\min(n, m + l - 1)$ kadar kapalı çevrim sistemi kutbunun keyfi atanabileceğini sunmuşlardır. Kimura [21] çalışmasını geliştirerek kontroledilebilirlik indeksi v , gözlenebilirlik indeksi μ olmak üzere keyfi atanacak kutup sayısının koşul ($n < l + m + v - 1, m > \mu, l \geq v$) sınırını genişletmiştir.

Munro ve Vardulakis [22], Munro [23], Vardulakis [24]-[25] genelleştirilmiş ters alma yöntemini kullanarak durum geribeslemeli sistemden çıkış geribeslemeli sisteme geçiş yapmışlardır. Tarokh [26] doğrusal olmayan denklemleri önce doğrusallaştırmış sonra iteratif bir yöntemle çözen bir algoritma sunmuş, keyfi atanabilecek kutup sayısını da $E = C.A^i.B, i=0,1,\dots,n-1$ olmak üzere $\text{rank}(E) = n$ ise $\min(n, ml)$ ile sınırlandırmıştır. Duan [27] çalışmasında dayanıklı kutup yerleştirme için yeni bir algoritma göstermiştir. Lee, Wang ve Koh [28] ise $ml \geq n$ olduğu durumlarda tüm kutupların keyfi atanabileceğini gösteren bir algoritmayı sunmuşlardır. Alexandridis ve Paraskevopoulos [29] istenen kapalı çevrim kutuplarının oluşturduğu uzaydan yararlanarak önce m adet kutbun atandığı, daha sonra kalan $n - m$ adet kutbun atandığı bir algoritma sunmuşlardır. Söylemez ve Munro [30] eğer $\max(m, l) > 3$ ve $\min(m, l) > 1$ olursa $m + l - 1$ den daha fazla kutbun atanabileceğini kanıtlayan bir algoritma sunmuşlardır. $ml > n$ koşulunu veren Wang Newton yöntemine dayalı olan optimizasyon yöntemiyle bazı parametreleri ayarlamakta zorlandı. Fu da [31]

bunun sebebini çıkış geribeslemeli kutup yerleştirme probleminin çokdeğişkenli zamanda çözülemediği (NP-hard) şeklinde kanıtlamıştır. Bachelier, Bosche ve Mehdi [32], Symros ve Lewis'in [33] çalışmasıyla ilişkili olarak bir kutup yerleştirme tekniği sunmuşlardır.

1.3. Kutup Yerleştirme Probleminin Tanımı

Kutup Yerleştirme tekniğinin uygulandığı sistemin durum uzay modeli

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2)$$

şeklinde verilsin. (1) ve (2) denkleminde x , u ve y sırasıyla durum değişkenleri, giriş ve çıkış vektörlerini ifade etmektedir. Bu vektörlerin boyutları $x \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$, $u \in \mathfrak{R}^{l \times 1}$ ve $y \in \mathfrak{R}^{m \times 1}$ şeklinde olsun. Bu boyutlara uygun A , B ve C matrisleri ise sırasıyla durum değişkenleri parametre matrisi, giriş parametre matrisi ve çıkış parametre matrisi olarak adlandırılmaktadır.

Denklem (1) ve (2)'deki gibi verilen bir sistemin kararlılığı transfer fonksiyonun paydası olan karakteristik fonksiyondan saptanabilir.

1.3.1. Transfer Fonksiyonu

Kontrol kuramında “transfer fonksiyonları” olarak isimlendirilen fonksiyonlar çoğunlukla doğrusal sistemlerin giriş-çıkış bağıntılarını karakterize etmek için kullanılırlar. Doğrusal zamanla değişmeyen bir sistemin transfer fonksiyonu, başlangıç koşullarının sıfır olması halinde sisteme uygulanan impuls yanıtının veya giriş çıkış ilişkisinin Laplace dönüşümü olarak tanımlanır.

İstenilen kutupların (1) ve (2) denklemleriyle verilen sisteme yerleştirilebilmesi için ya durum geribeslemeyle ya da çıkış geribeslemeyle sistem denetlenir. Her iki durumda da sisteme geribesleme uygulanır. Bu tür sistemlere kapalı çevrim kontrol sistemleri denir. Geribeslemesi olmayan, yani girişin çıkıştan veya durumlardan bağımsız olduğu sistemlere de açık çevrim kontrol sistemleri denir.

(1) ve (2) denklemi ile verilen sisteme herhangi bir geribesleme uygulanmadan transfer fonksiyonunu elde etmek için Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$sX(s) - X(t=0) = AX(s) + BU(s) \quad (3)$$

$$Y(s) = CX(s) \quad (4)$$

elde edilir. (3) ve (4) denklemleri yeniden düzenlenirse

$$X(s) = [sI_n - A]^{-1} BU(s) \quad (5)$$

$$Y(s) = C[sI_n - A]^{-1} BU(s) \quad (6)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{C \text{adj}[sI_n - A] B}{|sI_n - A|} \quad (7)$$

açık çevrim transfer fonksiyonu elde edilmiş olur. (1) ve (2) ile belirtilen sistemde C çıkış matrisi birim matris alınırsa durum geribesleme matrisi olan K_d ile sistemin istenilen kutupları takip etmesi istenir.

$$u = -K_d x(t) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) - BK_d x(t) \\ &= (A - BK_d)x(t) \end{aligned} \quad (9)$$

denklemleri elde edilir. (8) ve (9) ile elde edilen sistemin transfer fonksiyonu

$$H_k(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{H(s)}{1 + K_d H(s)} \quad (10)$$

şeklinde ifade edilir. (1) ve (2)'deki sisteme çıkış geribesleme matrisi olan K_ζ ile sistemin istenilen kutupları yerleştirilmesi istenirse

$$u = -K_\zeta y(t) \quad (11)$$

$$u = -K_\zeta Cx(t) \quad (12)$$

$$\dot{x}(t) = (A - BK_\zeta C)x(t) \quad (13)$$

elde edilir.(11) ve (13) ile elde edilen sistemin yani kapalı çevrim sistemi transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$H_k(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{H(s)}{1 + K_\zeta H(s)} \quad (14)$$

Kutuplar ve sıfırlar transfer fonksiyonu kavramlarıdır. Polinomun payını sıfır yapan değerler sıfırlar diye adlandırılırken, paydasını sıfır yapan değerlere kutuplar denir.

Bu çalışmada Γ_i $i=1,2,\dots,n$ olmak üzere açık çevrim kutupları (7)'de verilen açık çevrim transfer fonksiyonunun paydasını sıfır yapan değerler olarak verilmektedir. (10) ve (14) ile verilen kapalı çevrim transfer fonksiyonlarının paydasını sıfır yapan değerlerde λ_i $i=1,2,\dots,n$ olmak üzere kapalı çevrim transfer fonksiyonu olarak gösterilmektedir.

Doğrusal kontrol sistemlerinin tasarımı, sistemde öngörülen belirli koşullar yerine gelecek şekilde sistem transfer fonksiyonunda kutup ve sıfırları yerleştirme anlamına da gelir. Tasarımda kullanılan pek çok kriter arasında en önemli koşul sistemin kararlı olmasıdır. Kararsız bir sistem genelde kullanılamaz kabul edilir. Kararlılığı belirleyen ise sistemin kutupları yani karakteristik denklemin kökleri başka bir deyişle durum matrisinin özdeğerleridir. Kutuplar kararlılık ve geçici durum yanıtını doğrudan etkilerken sıfırlarda yükselme zamanını ve en büyük aşımı doğrudan etkiler.

Kutup yerleştirmede amaç geribeslemenin türüne göre K_d veya K_ζ matrislerini ayarlayarak kapalı çevrim kutuplarına istenen değeri atamaktır. Böylece sistemin kararlılığı yerleştirilen kutuplar sayesinde önceden belirlenebilir. Bazı algoritmalar bu kutupları atarken sınırlamalar getirirken bazıları sınırlamasız kutup yerleştirmeye izin vermektedir. Bunlar detaylı bir şekilde yapılan çalışmalar kısmında incelenmiştir.

1.3.2. Karakteristik Denklem

Transfer fonksiyonun paydasına *karakteristik fonksiyon* adı verilir. Karakteristik fonksiyon sıfıra eşitlenerek *karakteristik denklem* elde edilir. Sistemin geçiş durum davranışı doğrudan doğruya karakteristik denklemin sıfırlarından elde edilir.

(1) ve (2) denklemleri ile verilen sistemin açık çevrim karakteristik denklemi (7) denklemi ile verilen transfer fonksiyonunun paydasının sıfıra eşitlenmesiyle elde edilir.

$$\begin{aligned}
\phi(s) &= |sI_n - A| = 0 \\
&= (s - \Gamma_1)(s - \Gamma_2) \dots (s - \Gamma_n) = 0 \\
&= a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0
\end{aligned} \tag{15}$$

Γ_i $i=1,2,\dots,n$ ve a_j $j=0,1,\dots,n$ olmak üzere sırasıyla açık çevrim karakteristik denkleminin kökleri yani kutupları ve katsayılarıdır. (10) ile belirtilen kapalı çevrim transfer fonksiyonuna ait karakteristik denklem

$$\begin{aligned}
\phi_k(s) &= |sI_n - A + BK_d| = 0 \\
&= (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n) = 0 \\
&= \alpha_0 s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0
\end{aligned} \tag{16}$$

şeklinde ifade edilir. λ_i $i=1,2,\dots,n$ ve α_j $j=0,1,\dots,n$ olmak üzere sırasıyla kapalı çevrim karakteristik denklemin kutupları ve katsayılarıdır. Benzer şekilde çıkış geribeslemeli sistemde kapalı çevrim karakteristik denklem (14) ile verilen transfer fonksiyonunun payda polinomundan elde edilir.

$$\begin{aligned}
\phi_k(s) &= |sI_n - A + BK_\zeta C| = 0 \\
&= (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n) = 0 \\
&= \alpha_0 s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0
\end{aligned} \tag{17}$$

1.3.3. Özdeğer ve Özvektörler

Modern kontrolün pek çok alanında özdeğer ve özvektörlerden yararlanır. Bu çalışmada da sıkça kullanılmışlardır.

(1) ve (2)'de verilen sisteme herhangi bir geribesleme uygulanmasıyla elde edilen sistemin açık çevrim karakteristik denklemin kökleri genellikle A matrisinin özdeğeri olarak adlandırılır.

Özdeğerlerin önemli özellikleri şunlardır:

1. Eğer A 'nın katsayıları gerçel ise özdeğerleri de gerçektir yada karmaşık eşlenik çiftlerden oluşur.
2. Eğer Γ_i , $i=1,2,\dots,n$ için A 'nın bir özdeğeri ise A' 'nın da bir özdeğeri.

3. Eğer $i=1,2,\dots,n$ için Γ_i 'ler tekil olmayan A 'nın özdeğerleri ise $i=1,2,\dots,n$ için $1/\Gamma_i$ 'ler A^{-1} 'nin özdeğerleridir.

(1) ve (2) ile belirtilen sisteme K_d durum geribesleme matrisiyle geribesleme yapıldığında C birim matris alındığından aşağıdaki gibi elde edilir.

$$A_k = A - BK_d \quad (18)$$

Yine aynı sisteme K_c çıkış geribesleme matrisi yoluyla geribesleme yapıldığında yani C çıkış matrisi hesaba katıldığında

$$A_k = A - BK_c C \quad (19)$$

elde edilir. Kapalı çevrim karakteristik denkleminin kökleri de (18) ve (19) denklemleri verilen A_k matrisinin özdeğerleridir. (1) denkleminde verilen A 'nın özdeğerleri Γ_i $i=1,2,\dots,n$ olmak üzere

$$(\Gamma_i I - A)u_i = 0 \quad (20)$$

matris denklemini sağlayan her sıfır olmayan u_i vektörüne, A 'nın Γ_i özdeğeri ile ilişkili özvektörü denir. Aynı tanım (18) ve (19) denklemleri ile verilen A_k için yapılırsa, λ_i $i=1,2,\dots,n$ için A_k 'nin özdeğeri olmak üzere

$$(\lambda_i I - A_k)u_{ki} = 0 \quad (21)$$

matris denklemini sağlayan her sıfır olmayan u_{ki} vektörüne A_k 'nin λ_i özdeğeri ile ilişkili özvektörü denir.

Eğer özdeğerler katlı ise özvektörlerin tümü (21) denkleminde elde edilmez. Birbirinden farklı özdeğer sayısı q , toplam özdeğer sayısı n olmak üzere r adet katlı özdeğer varsa bunlara ait özvektörlere genelleştirilmiş özvektör adı verilir.

$$\begin{aligned}
(\Gamma_i I - A_k)u_{n-q+1} &= 0 \\
(\Gamma_i I - A_k)u_{n-q+2} &= -u_{n-q+1} \\
&\vdots \\
(\Gamma_i I - A_k)u_{n-q+r} &= -u_{n-q+r-1}
\end{aligned} \tag{22}$$

1.3.4. Benzerlik Dönüşümü

Durum uzayında tasarım yapıldığında denklemleri özel bir şekle dönüştürmek genellikle kolaylık sağlar. Bu çalışmada verilen kutup yerleştirme algoritmalarında benzerlik dönüşümü sıkça kullanılmaktadır.

Tek giriş tek çıkışlı bir sistem

$$\dot{x} = Ax + bu \tag{23}$$

$$y = cx \tag{24}$$

şeklinde verilsin. P tekil olmayan $P \in R^{n \times n}$ olmak üzere

$$x = P\bar{x} \tag{25}$$

dönüşümü ile aynı boyutta başka bir denklem takımına dönüştürülür. Dönüştürülmüş denklem takımı

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{b}u \tag{26}$$

$$\bar{y} = \bar{c}\bar{x} \tag{27}$$

olsun. (25) denkleminde \bar{x} çekilip türevi alınıp (26)'de yerine konulursa

$$\dot{\bar{x}} = P^{-1}\dot{x} = P^{-1}Ax + P^{-1}bu \tag{28}$$

elde edilir. (28) denkleminde (25) yerine koyulursa

$$\dot{\bar{x}} = P^{-1}AP\bar{x} + P^{-1}bu \tag{29}$$

ifadesine ulaşılır. (26) denklemleri ile (29) karşılaştırılırsa

$$\bar{A} = P^{-1}AP \quad (30)$$

$$\bar{b} = P^{-1}b \quad (31)$$

elde edilir. (25)'den yararlanılırsa (27) denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\bar{y} = cP\bar{x} \quad (32)$$

$$\bar{c} = cP \quad (33)$$

(30), (31) ve (33) ile verilen benzerlik dönüşümlerinde, karakteristik denklem, özdeğerler, özvektörler ve transfer fonksiyonu gibi sistem özellikleri dönüşümle etkilenmez. Çeşitli sebeplerden ötürü denklemleri daha kolay çözebilmek için sistem özelliklerini değiştirmeyen benzerlik dönüşümüne başvurulur.

1.3.5. Kontrol edilebilirlik ve Gözlenebilirlik

Bir sistemin analiz ve tasarımına geçmeden önce bu sistemin, bütün durumlarının kontrol edilip edilmediğine ve bütün durumların gözlenip gözlenemediğine bakmak zorunludur. Eğer bir sistemin bütün durumlarının kontrol edilmesi istenirse bu kontrol işleminin yapılma olanağının bulunup bulunmadığını saptamak gerekir.

Davison [16], Heymann [34] ve Wonham [7] tarafından eğer (1) denklemleri verilen açık çevrim sistemi (A,B) eğer kontrol edilebilirse istenen kapalı çevrim kutuplarının sabit durum geribesleme matrisi K_d tarafından yerleştirileceği kanıtlanmıştır.

Bir kontrol sisteminin herhangi bir $x(0)$ başlangıç durumu sonlu bir t_s zaman süresince, $x(t_s)$ durumuna bir $u(t)$ kontrol vektörü yardımı ile iletilebilirse bu kontrol sistemi kontrol edilebilir denir.

Eğer kontrol sisteminin bütün x durum değişkeni vektörü bileşenleri kontrol edilebiliyorsa sistemin tümü kontrol edilebilir denir.

(1) dinamik denklemini (25) dönüşümünden yararlanarak (26) yapısında kontrol edilebilir kanonik biçime dönüştürmek için dönüşüm matrisi

$$P = SW \quad (34)$$

$$S = [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B] \quad (35)$$

$$W = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

şeklinde olur. Kontrol edilebilir kanonik biçime dönüştürülmüş sistem aşağıdaki gibi verilir.

$$\tilde{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$\tilde{b} = P^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

Kontrol edilebilir kanonik biçimin verilebilmesi P^{-1} matrisinin varlığına bağlıdır. W matrisinin determinantı sıfırdan farklı olduğundan tersi mevcuttur. P^{-1} tersinin alınabilmesi S matrisine bağlı olduğundan bu matris kontrol edilebilirlik matrisi olarak tanımlanır.

(1) denklemi ile verilen sistemin tam durum kontrol edilebilir olması için gerek ve yeter koşul $S \in R^{n \times n}$ boyutlu kontrol edilebilirlik matrisinin rankının n olması gerekir.

Burada ana fikir, girişin tüm durumlara erişebilmesi için (35) denkleminin sağlanması gerektiğidir.

Gözlenebilirlik ise her durum değişkenin bazı çıkışlara etki etmesine dayanır. Çıkış ölçümlerinden eğer bir durum gözlenemiyor ise sistem gözlenemezdir.

(1) ve (2) denklemi ile verilen sistemin tamamen gözlenebilir olması için gerek ve yeter koşul $V \in R^{n \times m}$ boyutlu gözlenebilirlik matrisi rankının n olması gerekir.

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (39)$$

Bir sistem kontroledilebilir ve gözlenebilir ise benzerlik dönüşümüyle dönüştürülen sistemde bu özellikleri taşır.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Kontrol sistemleri kök eğrilerinden yararlanarak tasarlandığında bu yaklaşım kutup yerleştirme olarak adlandırılabilir. Burada söz konusu kutuplar kapalı çevrim transfer fonksiyonuna ilişkindir. Bunlar aynı zamanda karakteristik denklemin kökleridir. Kutuplar belirlendiğinde kontrol sistemi de etkin şekilde tasarlanmış olur.

Kutup yerleştirme geribesleme türüne göre çıkış ve durum geribesleme olmak üzere iki şekilde yapılabilir. Bu çalışmada ilk olarak TGTÇ ve ÇGÇÇ sistemler için durum geribeslemeli kutup yerleştirme yöntemleri incelendi. Daha sonra ÇGÇÇ sistemler için çıkış geribeslemeli kutup yerleştirme yöntemine geçildi. Son olarak da incelenen bu çalışmalar ışığında ÇGÇÇ sistemler için durum ve çıkış geribeslemeli yöntemler düzenlendi.

2.1. TGTÇ Sistemler İçin İncelenen Durum Geribeslemeli Kutup Yerleştirme Yöntemleri

Tek girişli sistemlerde kutup yerleştirme algoritmasının çözümü çok girişli sistemlere göre daha kolaydır. Giriş sayısı arttıkça matris boyutlarındaki değişimlerden dolayı geribesleme matrisini elde etmek daha zorlaşır. Genellikle tek giriş için üretilmiş yöntemler genişletilerek çok girişli sistemlere uyarlanmıştır.

2.1.1. Ackermann Formülü

Ackermann [9]' da yayınladığı ünlü formülüne göre sistem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bu \\ u &= -kx\end{aligned}\tag{40}$$

şeklinde verilsin. Kapalı çevrim sistemi aşağıdaki gibi (40) denklemlerinden elde edilir.

$$\dot{x} = (A - bk)x\tag{41}$$

$$|sI - A + bk| = |sI - A_k| = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n) = 0 \quad (42)$$

$$\phi_k(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0$$

Kapalı çevrim karakteristik denklemi (42)' deki gibi elde edilir. Cayley-Hamilton teoremine göre A_k kendi karakteristik denklemini sağlar.

$$\phi_k(A_k) = A_k^n + \alpha_1 A_k^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} A_k + \alpha_n = 0 \quad (43)$$

$n=3$ için durum aşağıda incelenmiştir. 3 durum için (43) denkleminde görüldüğü gibi kapalı çevrim matrisinin 3. dereceden üssüne kadar alınması gerekir.

$$A_k = A - bk \quad (44)$$

$$\begin{aligned} A_k^2 &= (A - bk)^2 = A^2 - Abk - Abk + b^2 k^2 \\ &= A^2 - Abk - bk(A - bk) \\ &= A^2 - Abk - bkA_k \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} A_k^3 &= (A - bk)^3 = (A^2 - Abk - bkA_k)(A - bk) \\ &= A^3 - A^2 bk - AbkA_k - A^2 bk + Ab^2 k^2 + b^2 k^2 A_k \\ &= A^3 - A^2 bk - AbkA_k - bkA_k^2 \end{aligned} \quad (46)$$

(44), (45) ve (46), (43) denkleminde yerlerine konulur.

$$\begin{aligned} \phi_k(A_k) &= A_k^3 + \alpha_1 A_k^2 + \alpha_2 A_k + \alpha_3 I \\ &= A^3 - A^2 bk - AbkA_k - bkA_k^2 + \alpha_1 (A^2 - Abk - bkA_k) + \alpha_2 (A - bk) \\ &\quad + \alpha_3 I \\ &= A^3 + \alpha_1 A^2 + \alpha_2 A + \alpha_3 I - \alpha_2 bk - \alpha_1 bkA_k - \alpha_1 Abk - bkA_k^2 - AbkA_k \\ &\quad - A^2 bk = 0 \\ &= \phi_k(A) - \alpha_2 bk - \alpha_1 bkA_k - \alpha_1 Abk - bkA_k^2 - AbkA_k - A^2 bk = 0 \end{aligned} \quad (47)$$

$\phi_k(A)$ (47) denkleminde çekilip matrisel forma getirilir.

$$\phi_k(A) = \alpha_2 bk + \alpha_1 bkA_k + \alpha_1 Abk + bkA_k^2 + AbkA_k + A^2 bk \quad (48)$$

$$\phi_k(A) = \begin{bmatrix} b & Ab & Ab^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 k + \alpha_1 k A_k + k A_k^2 \\ \alpha_1 k + k A_k \\ k \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$\begin{bmatrix} b & Ab & A^2 b \end{bmatrix}^{-1} \phi_k(A) = \begin{bmatrix} \alpha_2 k + \alpha_1 k A_k + k A_k^2 \\ \alpha_1 k + k A_k \\ k \end{bmatrix} \quad (50)$$

(50) denkleminin her iki tarafı son sütunu 1 olan satır vektörle çarpılır.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & Ab & A^2 b \end{bmatrix}^{-1} \phi_k(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 k + \alpha_1 k A_k + k A_k^2 \\ \alpha_1 k + k A_k \\ k \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & Ab & A^2 b \end{bmatrix}^{-1} \phi_k(A) \quad (52)$$

(52) ile verilen formülün genelleştirilmesiyle tüm durum sayıları için geribesleme matrisi elde edilir.

$$k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1} b \end{bmatrix}^{-1} \phi_k(A) \quad (53)$$

e_n : nxn boyutlu birim matrisin n. Satırı

S : kontroledilebilirlik matrisi

$\phi_k(A)$: kapalı çevrim karakteristik denklemine açık çevrim matrisinin yerleştirilmesi olmak üzere k durum geribesleme matrisi elde edilir.

$$k = e_n \cdot S^{-1} \phi_k(A) \quad (54)$$

Elde edilen k geribesleme matrisi sayesinde kapalı çevrim sistemi istenilen kutuplara sahip olur. Yani A_k matrisinin özdeğerleri yerleştirmek istenilen kutuplar olmuş olur. Bu algoritma oldukça ünlü olduğundan birçok kitapta karşılaşılmaktadır. Düşük dereceli problemlerde çok verimli çalışan bir algoritmadır.

2.1.2. Haritalama Yaklaşımı

Kutup yerleştirme için gerekli durum geribesleme matrisini bulmaya yarayan bu yöntem ilk olarak tek girişli sistemler için ortaya konmuştur.

(40) denklemi kontroledilebilir kanonik forma dönüştüren dönüşüm matrisi (34) denklemiyle dönüştürülür ve yeni dinamik denklemler elde edilir.

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= P^{-1}AP \\ \tilde{b} &= P^{-1}b \\ \tilde{k}' &= k'P\end{aligned}\tag{55}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \tilde{A}x + \tilde{b}u \\ u &= -\tilde{k}'x \\ \dot{x} &= (\tilde{A} - \tilde{b}\tilde{k}')x\end{aligned}\tag{56}$$

Kapalı çevrim matrisi incelenecek olursa

$$\tilde{A}_k = \tilde{A} - \tilde{b}\tilde{k}'\tag{57}$$

$$\tilde{A}_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 & \tilde{k}_2 & \cdots & \tilde{k}_{n-1} & \tilde{k}_n \end{bmatrix}\tag{58}$$

$$\tilde{A}_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 - \tilde{k}_1 & -a_1 - \tilde{k}_2 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} - \tilde{k}_n \end{bmatrix}\tag{59}$$

şeklinde elde edilir. Kapalı çevrim karakteristik denkleminin katsayıları \tilde{A}_k matrisinin son satırını oluşturmaktadır.

$$\alpha_i = a_i + \tilde{k}_{i+1} \quad i=0,1,\dots,n-1 \quad (60)$$

dönüştürülmüş k durum geribesleme matrisi d sembolüyle tanımlanır. Durum geribesleme matrisi k buradan çekilir.

$$\tilde{k}' = d' \quad (61)$$

$$d_{i+1} = \alpha_i - a_i \quad (62)$$

$$k' = d'P^{-1} \quad (63)$$

P^{-1} matrisi yerine (34) denklemi yerleştirilir ve denklem düzenlenir.

$$k' = d'(SW)^{-1} \quad (64)$$

$$k = [S']^{-1}[W']^{-1}[d] \quad (65)$$

$$W' = W \quad (66)$$

(36) denklemi ile verilen matrisin tersi alındığında matris elemanları aşağıdaki gibi bulunur.

$$W^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & p_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & p_{n-3} & p_{n-2} \\ 1 & p_1 & \cdots & p_{n-2} & p_{n-1} \end{bmatrix} \quad (67)$$

$$\begin{aligned} p_1 &= -a_{n-1} \\ p_2 &= -a_{n-2} - a_{n-1}p_1 \\ &\vdots \\ p_i &= -a_{n-i} - a_{n-i+1}p_1 - \cdots - a_{n-2}p_{i-2} - a_{n-1}p_{i-1} \end{aligned} \quad (68)$$

(65) denkleminde (67) yerleştirilir ve açık çevrim karakteristik denklem katsayılarını içerecek şekilde düzenlenir. d sütun vektörünün ters çevrilmesiyle δ sütun vektörü elde edilir ve yerine yerleştirilir.

$$W^{-1}d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ p_1 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{n-2} & p_{n-3} & \cdots & \cdots & 0 \\ p_{n-1} & p_{n-2} & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \alpha_{n-2} - a_{n-2} \\ \vdots \\ \alpha_0 - a_0 \end{bmatrix}}_{\delta} \quad (69)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ p_1 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{n-2} & p_{n-3} & \cdots & \cdots & 0 \\ p_{n-1} & p_{n-2} & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-2} & 0 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \quad (70)$$

(65) denkleminde (69) ve (70) yerleştirilirse durum geribesleme matrisi elde edilir.

$$k = [S']^{-1} X^{-1} \delta \quad (71)$$

S : kontroledilebilirlik matrisi

X : Açık çevrim karakteristik denklem katsayılarından oluşan alt üçgen toeplitz matris

δ : Kapalı çevrim karakteristik denklem katsayıları ile açık çevrim karakteristik denklem katsayıları arasındaki farktan oluşan sütun vektör

2.2. ÇGÇÇ Sistemler İçin İncelenen Durum Geribeslemeli Kutup Yerleştirme Yöntemleri

Tek girişli sistemlerde durum geribesleme matrisi tektir ve bunu elde etmek oldukça basittir. Çok girişli sistemleri tek girişliye çevirip durum geribesleme matrisini hesaplamak da yöntemlerden biridir. Bu tür yöntemlerin avantajları olduğu gibi dezavantajları da vardır. Tek girişliden çok girişli sisteme çevrilen algoritmalarda sınırlamalar artmakta yani istenilen kutbu yerleştirme serbestliği ortadan kalkmaktadır. Ayrıca bu yöntemlerde açık çevrim sisteminin periyodik olması gerekmektedir. Gerçel sistemlerde bu varsayım sağlanamayabilir. Bu yüzden tüm girişlerin kullanıldığı algoritmalar tercih edilmektedir. Bu algoritmaların zorluğu n adet doğrusal olmayan denklem takımının çözümünün $n \times l$

adet katsayıdan oluşan durum geribesleme matrisiyle sağlanıp kutup yerleştirmeyi başarmasıdır.

Burada yukarıda bahsedilen algoritmalarından dördü incelenmiştir. C çıkış matrisinin birim matris alındığı varsayılarak dinamik denklemler tekrar yazılır.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ u &= -K_d x\end{aligned}\tag{72}$$

2.2.1. Genelleştirilmiş Haritalama Yöntemi

Durum geribeslemeli kutup yerleştirme probleminde durum geribesleme matrisine bütün olarak bakıldığında problemin çözümü için doğrusal olmayan denklem takımının çözümü gerekir. Durum geribesleme matrisi, her satırı için ayrı değerlendirildiğinde denklemleri doğrusaldır. Bu yöntemde de denklemlerin ayrı ayrı doğrusal olmasından yararlanılmıştır.

Durum geribesleme matrisi K_d , $l \times l$ boyutlu birim matrisin i . satırı e_i , K_d 'nin i . satırı k_i' olmak üzere

$$K_d = \sum_{i=1}^l e_i k_i'\tag{73}$$

şeklinde yazılabilir. Herhangi j . giriş seçilerek (73) yeniden yazılacak olursa

$$K_d = \sum_{i \neq j} e_i k_i' + e_j k_j'\tag{74}$$

$$= \bar{K}_j + e_j k_j'\tag{75}$$

elde edilir. Burada \bar{K}_j , durum geribesleme matrisinin j . satırı sıfır olan matrisi ifade ediyor. Kutup yerleştirme problemi yeniden ifade edilirse

$$\Lambda = Eig(A - BK_d)\tag{76}$$

$$= \text{Eig}(A - B\bar{K}_j - Be_j k_j') \quad (77)$$

$$\beta_j = Be_j \quad (B \text{ matrisinin } j. \text{ sütunu}) \quad (78)$$

$$A_j = A - B\bar{K}_j \quad (79)$$

olmak üzere

$$\Lambda = \text{Eig}(A_j - \beta_j k_j') \quad (80)$$

şekline dönüştürülebilir. Böylece k_j Ackermann formülü veya haritalama yöntemi kullanılarak elde edilip, K_d ' ye geçiş yapılır. Söylemez [14] haritalama yöntemini kullanarak bu yönteme örnek göstermiştir. Burada k_j ' yi bulmak için haritalama yaklaşımı kullanılırsa

$$k_j = \left[S_j' \right]^{-1} X_j^{-1} \delta_j \quad (81)$$

elde edilir. (81) denklemini (75)'de yerine yerleştirilirse durum geribesleme matrisi elde edilebilir.

$$K_d = \bar{K}_j + e_j \left(\left[S_j' \right]^{-1} X_j^{-1} \delta_j \right)' \quad (82)$$

2.2.2. Sylvester ve Lyapunov Denklemleri ile Kutup Yerleştirme

Bu yöntemde temel fikir A_k kapalı çevrim matrisinin benzerlik dönüşümüyle istenen bir şekle dönüştürülebilmesine dayanır.

$$P\tilde{A}_k P^{-1} = A_k = A - BK_d \quad (83)$$

$$P\tilde{A}_k - AP = -BM \quad (84)$$

$$M = K_d P \quad (85)$$

$$K_d = MP^{-1} \quad (86)$$

(84) denklemi ile verilen matris denklemi Sylvester denklemi olarak adlandırılır. Bhattacharya ve De Sousa [11] yöntemin en önemli özelliği olan tekil olmayan herhangi bir parametre matrisi M'nin seçilip (84) denkleminin çözülmesiyle P'nin elde edilebileceğini göstermişlerdir. Böylece parametre matrisi M seçilip, P elde edildikten sonra durum geribesleme matrisi (86) denkleminde bulunur. (84) denklemi Lyapunov denklemine çevrilir.

$$P\tilde{A}_k - AP = G \quad (87)$$

$$G = -BM \quad (88)$$

Lyapunov denklemini çözmenin en kolay yolu ise denklemi doğrusal matris denklemine dönüştürerek çözmektir.

$$X_A p = g \quad (89)$$

$$p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} \quad (90)$$

p_i ve g_i sırasıyla P ve G matrisinin i. sütununu ifade etmektedir.

$$X_A = (-A \otimes I_n) + (I_n \otimes \tilde{A}_k') \quad (91)$$

Kronecker çarpımı ' \otimes ' simgesiyle ifade edilmektedir. Böylece dönüşüm matrisi P (89) denkleminin çözülmesiyle elde edilir.

$$p = X_A^{-1} g \quad (92)$$

Son olarak da K_d durum geribesleme matrisi P' in (86) denkleminde yerleştirilmesiyle bulunur.

2.2.3. Sylvester Denklemi Kullanılarak Kutup Yerleştirme

Tsui [35]' de Sylvester denkleminin çözümünü ve uygulamalarını sunmuştur. Bunun üzerine Duan [36] bu yöntemi içeren durum geribeslemeyle kutup yerleştirmenin uygulandığı iki yeni algoritma bulmuştur. (72) ile verilen sistem için Sylvester denklemi yazılır.

$$AV + BW = V\tilde{A}_k \quad (93)$$

$[A, B]$ bilinen kontroledilebilir sistemin matrislerini ifade etmektedir. \tilde{A}_k istenen özdeğerlerden oluşan Jordan kanonik formundadır. Yerleşmesi istenen kutuplardan oluşan küme Λ simgesiyle ifade edilir.

$$\Lambda = \{\lambda_i, \lambda_i \in C, i = 1, 2, \dots, n', 1 \leq n' \leq n\} \quad (94)$$

Kapalı çevrim sistemi

$$\dot{x} = A_k x \quad (95)$$

$$A_k = A - BK_d \quad (96)$$

denklemleri ile ifade edilir. λ_i kutuplarının q_i geometrik çokluğunu, p_i cebirsel çokluğunu ifade ediyor.

$$p_{i1} + p_{i2} + \dots + p_{iq_i} = m_i \quad (97)$$

$$m_1 + m_2 + \dots + m_{n'} = n \quad (98)$$

Tekrar A_k için özvektör ve genelleştirilmiş özvektörler gösterilirse

$$(A - BK_d - \lambda_i I)v_{ij}^k = v_{ij}^{k-1} \quad v_{ij}^0 = 0 \quad (99)$$

$$k = 1, 2, \dots, p_{ij} \quad j = 1, 2, \dots, q_i \quad i = 1, 2, \dots, n'$$

elde edilir. Herhangi bir $X = [x_{ij}^k]$ matrisinin denklemlerini

$$X = [X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_{n'}] \quad (100)$$

$$X_i = [X_{i1} \quad X_{i2} \quad \dots \quad X_{iq_i}] \quad (101)$$

$$X_{ij} = [x_{ij}^1 \quad x_{ij}^2 \quad \dots \quad x_{ij}^{p_{ij}}] \quad (102)$$

bu denklemler oluşturur. (99) denklemiyle verilen K_d ve V matrislerinin kümesi verilsin.

$$E = \left\{ (V, K_d) \mid V = [v_{ij}^k] \in C^{n \times n} \quad , K \in \mathfrak{R}^{n \times n}, \det(V) \neq 0 \right\} \quad (103)$$

(99) denklemini matris formunda yazılacak olursa

$$AV - BK_d V = V\tilde{A}_k \quad (104)$$

$$W = -K_d V \quad (105)$$

$$K_d = -WV^{-1} \quad (106)$$

elde edilir. (106) ile verilen K_d matrisinin gerçekliği iki koşulla sınırlandırılmıştır.

$$k.1) \det(V) \neq 0$$

$$k.2) v_{ij}^k = \bar{v}_{ij}^k$$

K_d matrisi (105) denkleminde elde edilir.

$$E = \left\{ (V, K_d) \mid K_d = -WV^{-1}, \quad (V, W) \in U \right\} \quad (107)$$

$$U = \left\{ (V, W) \mid (55)'i \text{ ve } k.1 \text{ ile } k.2' \text{ yi } \text{saglayan matrislerdir} \right\} \quad (108)$$

(72) ile verilen sistemin transfer fonksiyonu pay ve payda olmak üzere denklem tekrar düzenlenir.

$$(sI - A)^{-1} B = N(s)D^{-1}(s) \quad (109)$$

$[A, B]$ kontroledilebilirse (93) denkleminin çözümü

$$\begin{bmatrix} v_{ij}^k \\ w_{ij}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N(\lambda_i) \\ D(\lambda_i) \end{bmatrix} f_{ij}^k + \dots + \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} \begin{bmatrix} N(\lambda_i) \\ D(\lambda_i) \end{bmatrix} f_{ij}^1 \quad (110)$$

$$k = 1, 2, \dots, p_{ij} \quad j = 1, 2, \dots, q_i \quad i = 1, 2, \dots, n'$$

şeklinde elde edilir. (110) denkleminin doğruluğunu kanıtlamak için ilk olarak (109) denklemini tekrar düzenlenir.

$$(A - sI)N(s) + BD(s) = 0 \quad (111)$$

(111) denkleminin her iki tarafında l . dereceden türevi alınır.

$$(A - sI) \frac{d^l}{ds^l} N(s) + B \frac{d^l}{ds^l} D(s) = l \frac{d^{l-1}}{ds^{l-1}} N(s) \quad l = 0, 1, 2, \dots, k-1 \quad (112)$$

(112) denkleminde s yerine istenen kutuplar olan λ_i konarak denklemin iki tarafında $(1/l!)f_{ij}^{k-1}$ ile çarpılır.

$$(A - \lambda_i I) \frac{1}{l!} \frac{d^l}{ds^l} N(\lambda_i) f_{ij}^{k-1} + B \frac{1}{l!} \frac{d^l}{ds^l} D(\lambda_i) f_{ij}^{k-1} = \frac{1}{(l-1)!} \frac{d^{l-1}}{ds^{l-1}} N(\lambda_i) f_{ij}^{k-1} \quad (113)$$

$$k = 1, 2, \dots, p_{ij} \quad j = 1, 2, \dots, q_i \quad i = 1, 2, \dots, n' \quad l = 0, 1, 2, \dots, k-1$$

(113) denklemlerinin tümü (110) kullanılarak toplanır.

$$(A - \lambda_i I)v_{ij}^k + Bw_{ij}^k = v_{ij}^{k-1}, \quad v_{ij}^0 = 0 \quad (114)$$

$$k = 1, 2, \dots, p_{ij} \quad j = 1, 2, \dots, q_i \quad i = 1, 2, \dots, n'$$

$[f_{ij}^k]$ serbest parametre vektörleri keyfi seçilerek (110) denklemi sağlanarak istenilen çözüm elde edilir. (110) denklemi basitçe gösterilecek olursa

$$\begin{bmatrix} v_{ij}^1 \\ w_{ij}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N(\lambda_i) \\ D(\lambda_i) \end{bmatrix} f_{ij}^1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (115)$$

elde edilir. (111) denklemini sağlayan $N(s)$ ve $D(s)$ için (111) ile verilen V ve W matrislerinin (93) denkleminin çözümü olduğu açıkça görülmektedir.

2.2.4. Özvektörlerden Yararlanarak Kutup Yerleştirme

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ u &= -K_d x \end{aligned} \quad (116)$$

(116) denklemi ile verilen durum geribeslemeli kapalı çevrim karakteristik denklemi

$$\phi_k(\lambda) = |\lambda I_n - A + BK_d| = 0 \quad (117)$$

şeklinde ifade edilir. (117) denklemi n adet $\lambda_i \in \Lambda$ lerin her biri için sağlanır. (117) yeniden düzenlenirse

$$\phi_k(\lambda) = |(\lambda I_n - A)[I_n + (\lambda I_n - A)^{-1} BK_d]| \quad (118)$$

$$= |\lambda I_n - A| |I_n + (\lambda I_n - A)^{-1} BK_d| \quad (119)$$

elde edilir. Açık çevrim karakteristik denklemi

$$\phi(\lambda) = |\lambda I_n - A| \quad (120)$$

şeklinde ifade edilir. $\Delta(\lambda)$ ise

$$\Delta(\lambda) = (\lambda I_n - A)^{-1} \quad (121)$$

(121) denklemi ile verilmiş olsun. (120) ve (121) ,(119)' da yerine koyulursa

$$\phi_k(\lambda) = \phi(\lambda) |I_n + \Delta(\lambda)BK_d| \quad (122)$$

$$= \phi(\lambda) |I_l + K_d\Delta(\lambda)B| \quad (123)$$

elde edilir. Burada artık her λ_i değeri için (123) denklemini sıfır yapan K_d değeri bulunur. Eğer herhangi λ_i değeri için açık çevrim karakteristik denklemi (120) sıfır olursa aşağıdaki prosedür geçerlidir. $I_l + K_d\Delta(\lambda)B$ 'nin determinantının sıfır olması için matrisin ya herhangi bir satırın sıfır ya da herhangi bir sütununun sıfır olması gerekir. Burada sütunların sıfır olması sağlanmaya çalışılmıştır. I_l 'nin i. sütunu e_j olmak üzere $\psi(\lambda_i)$

$$\psi(\lambda_i) = \Delta(\lambda_i)B \quad (124)$$

$$\psi_{ji}(\lambda_i) = \psi(\lambda_i)e_j \quad (125)$$

şeklinde tanımlanır Burada ψ_j , $\psi(\lambda_i)$ 'nin j. sütunudur. Böylelikle doğru K_d durum geribesleme matrisi seçilerek j. sütunu sıfır yapılabilir ve

$$e_j + K_d\psi_j(\lambda_i) = 0 \quad (126)$$

$$\psi_{ji}(\lambda_i) = \psi(\lambda_i)e_j \quad (127)$$

denklemi elde edilir. (126) denklemi tekrar düzenlenirse

$$K_d\psi_j(\lambda_i) = -e_j \quad (128)$$

$$K_d[\psi_{j1}(\lambda_1) \quad \psi_{j2}(\lambda_2) \quad \cdots \quad \psi_{jn}(\lambda_n)] = -[e_{j1} \quad e_{j2} \quad \cdots \quad e_{jn}] \quad (129)$$

sonucuna varılır. $\psi_j(\lambda_i)$ ' in tersinin alınabilmesi için her λ_i için elde edilen denklemin birbirinden bağımsız olması gerekir. Eğer tüm kutuplar birbirinden bağımsızsa K_d durum geribesleme matrisini bulmak her zaman mümkündür.

$$K_d = -[e_{j_1} \ e_{j_2} \ \dots \ e_{j_n}] [\psi_{j_1}(\lambda_1) \ \psi_{j_2}(\lambda_2) \ \dots \ \psi_{j_n}(\lambda_n)]^{-1} \quad (130)$$

Eğer yerleştirmek istenen kutuplar aynı ise (130) denklemini sonuç vermeyebilir. Bu durumu ortadan kaldırmak için düzenleme yapılır. r_i istenen kutupların cebirsel çokluğunu gösterir. $v=1,2,\dots,r_i-1$ için

$$\left. \frac{d^v \phi_k(\lambda)}{d\lambda^v} \right|_{\lambda=\lambda_i} = 0 \quad (131)$$

denklem sağlanır.

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_k(\lambda)}{d\lambda} &= \left\{ \frac{d\phi(\lambda)}{d\lambda} \right\} \cdot |I_r + K\Delta(\lambda)B| + \left| K \frac{d\psi_1}{d\lambda} \ e_2 + K\psi_2 \ \dots \ e_i + K\psi_i \right| \phi(\lambda) \\ &+ \left| e_1 + K\psi_1 \ K \frac{d\psi_2}{d\lambda} \ \dots \ e_i + K\psi_i \right| \phi(\lambda) + \dots \\ &+ \left| e_1 + K\psi_1 \ e_2 + K\psi_2 \ \dots \ K \frac{d\psi_r}{d\lambda} \right| \phi(\lambda) \end{aligned} \quad (132)$$

(132) denkleminin $K d\psi_i/d\lambda$ hariç her teriminde bir sıfır sütunu mevcuttur. $\phi_k(\lambda_i) = 0$ olması için

$$K \left. \frac{d\psi_i}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_i} = 0 \quad (133)$$

denkleminin sağlanması gerekir. Buradan yola çıkılarak K_d rahatlıkla elde edilir.

2.3. ÇGÇÇ Sistemler İçin İncelenen Çıkış Geribeslemeli Kutup Yerleştirme Yöntemi

Çıkış geribeslemeli kutup yerleştirme, durum geribeslemeliye göre daha zor olmasına rağmen, son yıllarda bununla ilgili birçok yöntem geliştirilmiştir. Bunlar içinde ilk olarak Munro ve Vardulakis' in [22] bahsettiği genelleştirilmiş matris ters alma yöntemi burada irdelenmiştir. Ele alınacak denklemin dinamik denklemleri

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (134)$$

şeklinde olsun. Çıkış geribesleme ve sisteme uygulanmasıyla elde edilen kapalı çevrim sistemi aşağıda verildiği gibidir.

$$u = -K_{\zeta} y \quad (135)$$

$$\dot{x} = (A - BK_{\zeta} C)x \quad (136)$$

2.3.1. Genelleştirilmiş Matris Ters Yaklaşımı

Bu yaklaşım kare veya kare olmayan B giriş ve C çıkış matrislerinin tersini alarak durum geribesleme matrisinden çıkış geribesleme matrisine geçmeyi amaçlamaktadır.

(134) denklem takımıyla ifade edilen sistemin kutuplarını çıkış geribeslemeyle atadığımızda istenen özdeğerler

$$\Lambda = eig(A - BK_{\zeta} C) \quad (137)$$

denklemleriyle elde edilirken yine aynı özdeğerler durum geribeslemeyle elde edilecek olurlarsa

$$\Lambda = eig(A - BK_d) \quad (138)$$

denklemleriyle elde edilir. (137) ve (138) denklemleri eşitlenecek olursa

$$BK_{\zeta}C = BK_d \quad (139)$$

bağıntısı elde edilir. (139) denkleminde B ve C matrislerinin sahte tersi alınıp K_{ζ} denklemden çekilirse

$$B^+BK_{\zeta}CC^+ = B^+BK_dC^+ \quad (140)$$

$$K_{\zeta} = K_dC^+ \quad (141)$$

elde edilir. Sahte ters alma işleminin özellikleri ve detayları geniş olarak Ek 12' de verilmektedir. Bu yöntemde C matrisi C_1 ve C_2 olmak üzere ikiye parçalanır.

$$C = [C_1 \quad C_2] \quad (142)$$

$C_1 \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ ve $C_2 \in \mathfrak{R}^{m \times (n-m)}$ şeklinde C matrisi ayrılır. Patel [37] tarafından önerilen benzerlik dönüşümü ile tüm sistem dönüşür. Patel dönüşümü olarak adlandırılan bu benzerlik dönüşüm matrisi

$$T = \begin{bmatrix} C_1^{-1} & -C_1^{-1}C_2 \\ 0 & I_{n-m} \end{bmatrix} \quad (143)$$

şeklindedir. Tüm sistem bu benzerlik dönüşüm matrisi ile dönüştürülürse

$$\tilde{A} = T^{-1}AT \quad (144)$$

$$\tilde{B} = T^{-1}B \quad (145)$$

$$\tilde{C} = CT \quad (146)$$

elde edilir. (142) ve (143), (146) denkleminde yerine koyulursa

$$\tilde{C} = [C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} C_1^{-1} & -C_1^{-1}C_2 \\ 0 & I_{n-m} \end{bmatrix} \quad (147)$$

$$= [I_m \quad 0] \quad (148)$$

elde edilir. Sahte ters alma işleminin doğru sonuçlar verip vermediğinin irdelenmesi için aşağıdaki gibi Z matrisi tanımlanır.

$$Z = BK_d = [Z_1 \quad Z_2] \quad (149)$$

Kare olmama ihtimali yüksek olan C matrisinin ters alma işleminin tamamen doğru sonuç verebilmesi için Z matrisinin nasıl olması gerektiği irdelenmek için (149) denklemi C matrisinin kendisi ve sahte tersiyle çarpılır. Sonuç olarak yine Z matrisini vermesi gerekir.

$$ZC^+C = Z \quad (150)$$

$$[Z_1 \quad Z_2] \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix} [I_m \quad 0] = [Z_1 \quad Z_2] \quad (151)$$

(151) denkleminde $Z_2=0$ sonucuna ulaşılır. Böylece

$$BK_d \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-m} \end{bmatrix} = 0 \quad (152)$$

elde edilir. B matrisinin tam ranklı olması gerektiğine göre (152) denkleminin sağlanması için K_d durum geribesleme matrisinin son $(n-m)$ sütunlarının 0 olması gerekir.

$$K_d \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-m} \end{bmatrix} = 0 \quad (153)$$

$$K_\zeta = K_d \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix} \quad (154)$$

$$K_\zeta = K_d \tilde{C}^+ \quad (155)$$

(153) ve (154) denklemlerinden çıkarılan sonuç K_d durum geribesleme matrisinin son $(n-m)$ sütunlarının sıfıra eşit olması gerekir. Bu da durum geribesleme matrisinin oluşumu esnasında müdahale etmeyi gerektirir. Her durum geribesleme matrisini bulan algoritmada bu mümkün olmaz. Ancak özgür parametre seçiminin yapılabildiği

algoritmelerde mümkündür. Durum geribesleme matrisinden çıkış geribeslemeye geçiş yapılabilecek algoritmalar incelenmiştir.

2.3.1.1. Genelleştirilmiş Haritalama Yöntemiyle Çıkış Geribesleme

Söylemez ve Munro [13] genelleştirilmiş haritalama yaklaşımıyla bulunan durum geribesleme matrisinden çıkış geribeslemeye geçiş yapılabileceğini göstermişlerdir. Genelleştirilmiş haritalama yaklaşımında durum geribesleme matrisi

$$K_d = \bar{K}_j + e_j k_j' \quad (156)$$

şeklinde ifade edilir. \bar{K}_j özgür parametrelerden oluşur. Bu özelliğinden faydalanarak \bar{K}_j 'nin $(n-m)$ sütunu sıfır seçilir. X_j , S_j ve δ_j (70), (35) ve (69) bağıntılarından A yerine A_j , b matrisi yerine de β_j konularak hesaplanır. Bulunan matrisler k_j ' de yerlerine yerleştirilir.

$$k_j' = [S_j']^{-1} X_j^{-1} \delta_j \quad (157)$$

\bar{K}_j gibi k_j 'nin de (153) denklemini sağlaması gerekir.

$$k_j' \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-m} \end{bmatrix} = 0 \quad (158)$$

Bu koşullar sağlandıktan sonra geriye $(n-m)$ adet doğrusal olmayan bilinmeyen sembolik değişkenlerden oluşan denklem takımını çözmek kalır. K_d durum geribesleme matrisi elde edildikten sonra (141) denkleminde çıkış geribesleme matrisi K_c elde edilir. Küçük sistemlerde bu denklemler rahatlıkla çözülebilirken, sistem büyüdükçe denklemleri çözmek zorlaşır.

2.4. Geliştirilen Algoritmalar

Bu çalışmada bir tanesi durum geribeslemeli üç tanesi çıkış geribeslemeli olmak üzere dört farklı algoritma düzenlenmiştir. Durum geribesleme için düzenlenen algoritmada geliştirilmiş haritalama yaklaşımından yararlanılmıştır. Çıkış geribesleme için düzenlenen algoritmaların ortak özelliği ise geliştirilmiş matris tersi alma yönteminden yararlanılmasıdır.

2.4.1. Genelleştirilmiş Ackermann Yaklaşımı

Bu yöntem geliştirilmiş haritalama yaklaşımından yola çıkılarak Ackermann formülüne uygulanmıştır. C matrisi birim matris olarak alınmıştır.

(72) ile ifade edilen sisteme uygulanan (75)'deki K_d durum geribesleme matrisi elde etmek için k_j matrisi (54)' den hesaplanır . Hatırlanacak olursa durum geribesleme matrisi

$$K_d = \bar{K}_j + e_j k_j' \quad (159)$$

denkleminde bulunuyordu. \bar{K}_j burada j. satırı sıfır olan durum geribesleme matrisini ifade ederken $e_j k_j'$ ise sadece j. satırında değer olan diğer satırları 0 olan durum geribesleme matrisini ifade etmektedir. \bar{K}_j parametrelerinin seçimi keyfi yapılabilir. B giriş matrisinin j. girişi β_j (78) ile \bar{K}_j durum geribesleme matrisinin (72) ile belirtilen sisteme uygulanmasıyla elde edilen A_j (79)' un oluşturduğu yeni tek girişli sistem ile k_j Ackermann yönteminden bulunur.

$$k_j = \tilde{e}_n [S_j]^{-1} \phi(A_j) \quad (160)$$

$$\tilde{e}_n = [0 \ 0 \ \dots \ 1]_{n \times n} \quad (161)$$

$$S_j = [\beta_j \ A_j \beta_j \ \dots \ A_j^{n-1} \beta_j] \quad (162)$$

$$\phi_k(A_j) = A_j^n + \alpha_1 A_j^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} A_j + \alpha_n I \quad (163)$$

(160) denklemi (75)'de yerleştirilicek olursa durum geribesleme matrisi elde edilir.

$$K_d = \bar{K}_j + e_j (\tilde{e}_n [S_j]^{-1} \phi_k(A_j))' \quad (164)$$

2.4.2. Genelleştirilmiş Ackermann Yöntemiyle Çıkış Geribesleme

Bu yöntemin amacı genelleştirilmiş Ackermann yönteminden durum geribesleme matrisinin elde edilip, çıkış geribesleme matrisini genelleştirilmiş ters alma yöntemi kullanılarak durum geribesleme matrisinden elde edilmesini sağlamaktır. (156) denklemdeki k_j ' yi bulmak için Ackermann yöntemi kullanılır.

$$k_j = \tilde{e}_n [S_j]^{-1} \phi(A_j) \quad (165)$$

Daha önceden de belirtilen (165) denklemi, (156)' de yerine konur ve (141) denklemi elde edilir. Bu durum geribesleme matrisinden çıkış geribesleme matrisinin elde edilebilmesi için (141) denkleminin (153) denklemini sağlaması gerekir.

\bar{K}_j 'nin j. satırı hariç diğer satırları keyfi belirlenmesinden yararlanarak, sondan (n-m) adet sütunları 0 olarak önceden belirlenir. k_j Ackermann yöntemiyle hesaplanırken sembolik değişkenler kullanılır ve bu sembolik değişkenlerin değerleri uygun seçilerek k_j 'nin son (n-m) satırları 0 olarak ayarlanır. Böylelikle (153) denklemini sağlayan K_d matrisiyle \tilde{C} matrisinin sahte tersinin çarpılması K_c çıkış geribesleme matrisinin elde edilmesini sağlar.

$$K_c = K_d \tilde{C}^+ \quad (166)$$

Burada \tilde{C} matrisinin

$$\tilde{C} = [I_m \quad 0] \quad (167)$$

olması koşulu vardır.

2.4.3. Sylvester ve Lyapunov Denklemleri ile Çıkış Geribeslemeli Kutup Yerleştirme

Munro ve Vardulakis [22], ilk kez ortaya atılan çalışmadan yararlanarak, Bhattacharya ve De Sousa [11] tarafından yöntemin en önemli özelliği verilen Sylvester denkleminin genelleştirilmesi irdelenmiştir.

Bu yöntemin amacı Sylvester denkleminin Lyapunov denklemine dönüştürülmesiyle elde edilen durum geribesleme matrisinden genelleştirilmiş matris tersi yöntemi kullanılarak çıkış geribeslemeyle geçiş yapılmasıdır.

İlk olarak (153) denkleminin sağlanabilmesi için (134) ve (135) denklemi ile verilen sistem (143) benzerlik dönüşüm matrisi ile dönüştürülür. Dönüştürülmüş sistem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \tilde{A}x + \tilde{B}u \\ y &= \tilde{C}x\end{aligned}\tag{168}$$

şeklinde ifade edilir. (87) denklemini (168) 'de verilen sisteme uygulanacak olursa

$$P\tilde{A}_k P^{-1} = A_k = \tilde{A} - \tilde{B}K_d\tag{169}$$

$$P\tilde{A}_k - \tilde{A}P = -\tilde{B}M\tag{170}$$

elde edilir.

$$M = K_d P\tag{171}$$

$$G = -\tilde{B}M\tag{172}$$

$$P\tilde{A}_k - \tilde{A}P = G\tag{173}$$

(170) denklemini Lyapunov denklemine dönüştürülüp doğrusallaştırılır. Bu doğrusallaştırmadan yararlanarak P benzerlik dönüşüm matrisi elde edilir.

$$X_A = (-\tilde{A} \otimes I_n) + (I_n \otimes \tilde{A}'_k)\tag{174}$$

$$p = X_A^{-1} g\tag{175}$$

(175) denklemi ile verilen p vektörü aslında sırasıyla P matrisinin sütunlarını oluşturur. Böylece durum geribesleme matrisi hesaplanabilir. Durum geribesleme matrisinden de çıkış geribesleme matrisine geçiş yapılır.

$$K_d = MP^{-1} \quad (176)$$

$$K_\zeta = K_d \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix} \quad (177)$$

2.4.4. Sylvester Denklemi Kullanarak Çıkış Geribeslemeli Kutup Yerleştirme

Bu yöntem daha önceden verilen Sylvester denklemi kullanarak durum geribeslemeli kutup yerleştirmeden çıkış geribeslemeye genelleştirilmiş ters alma yönteminden geçmeyi amaçlamaktadır.

C çıkış matrisinin (154) denklemini sağlaması için \tilde{C} matrisine dönüştürülmesi gerekmektedir. (143) ile verilen T benzerlik dönüşümü ile C matrisi \tilde{C} matrisine dönüştürülür. Tüm sistem bu matrisle dönüştürülerek (144), (145) ve (146) tanımlarında belirtilen matrisler hesaplanır. Yeni elde edilen sistemin transfer fonksiyonu (109) ile belirtildiği gibi pay ve payda fonksiyonu olarak ayrılır.

$$(sI - \tilde{A})^{-1} \tilde{B} = N(s)D^{-1}(s) \quad (178)$$

(115) denkleminde geçen serbest parametre matrisi bu algorithmada giriş, çıkış ve durum matrisi boyutlarına göre değişen sembolik değişkenlerle birlikte kalanının keyfi atandığı parametrelerden oluşturulur. (110) denklemleriyle V ve W matrisleri elde edilir. K_d durum geribesleme matrisi de (107) denkleminde elde edilir.

$$K_d = -WV^{-1} \quad (179)$$

Sembolik değişkenlerle elde edilen K_d durum geribesleme matrisinin (153) denklemini sağlaması için gerekli koşullardan yararlanarak sembolik değişkenlerin değeri elde edilir

ve (179) denkleminde yerine yerleştirilerek durum geribesleme matrisi hesaplanır. Bu aşamadan sonra (155) denkleminde

$$K_{\zeta} = K_d \tilde{C}^+ \quad (180)$$

bağıntısıyla çıkış geribesleme matrisi hesaplanır.

3. BULGULAR VE İRDELEME

Bu çalışmada sonuçların elde edilmesi ve grafiklerin çizilmesi Matlab 7.0 yazılım programıyla gerçekleştirilmiştir. Önceki bölümlerde durum geribeslemeli ve çıkış geribeslemeli kutup yerleştirmenin nasıl yapılacağı ile ilgili çeşitli hesaplama yöntemlerinden bahsedilmiştir. Bu bölümde ise verilen hesaplama yöntemlerinin hepsi örnek sistemlere uygulanmıştır. Tüm sistemlerde referans işareti sıfır olarak alınmıştır.

3.1. TGTÇ Sistemler İçin İncelenen Durum Geribeslemeli Kutup Yerleştirme Yöntemleri

Durum geribesleme de dahil olmak üzere tüm geribesleme türlerine ait örneklerde kullanılacak olan durum uzayı gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (181)$$

ÇGÇÇ sistemlerde durum geribeslemeli kontrolde tüm durumlardan yararlanıldığı için C matrisi birim matris olarak alındı. Böylece tüm durumlar çıkışa aktarılmış oldu. TGTÇ sistemlerde ise durumlardan biri alınarak çıkışa aktarıldı.

3.1.1. Ackermann Formülü ile Elde Edilen Sonuçlar

Örnek 1) Kıyak ve Kahvecioğlu' nun [38]' de verilen bir helikopterin yanal hareket denklemleri kullanıldı. Bu dinamik denklemlere göre durum değişkenleri β yana kayış açısı, p yatış hızı, r sapma hızı ve ϕ yatış açısından oluşmaktadır. Giriş olarak δ_a yanal periyodik yunuslama değişimi alındı. Durum katsayı matrisi A ve giriş katsayı matrisi B aşağıdaki gibi alındı ve (54) bağıntısıyla verilen Ackermann formülünden yararlanarak k durum geribesleme matrisi hesaplandı. Bu yöntemin algoritması Ek.1'de verilmektedir.

$$A = \begin{bmatrix} -0.502 & -52.201 & 0.01 & 0 \\ -0.002 & -26.201 & -0.01 & 0 \\ 0.715 & 43.7 & -2.5 & 45 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (182)$$

$$b = [1 \ 8 \ -1 \ 10]' \quad (183)$$

Sistem TGTC olarak alındığından bu algoritma hesaplanırken çıkış, durum değişkenlerinden biri olarak seçilebilir. Burada son durum değişkeni çıkış olarak alındığından c çıkış katsayı matrisi aşağıdaki gibidir.

$$c = [0 \ 0 \ 0 \ 1] \quad (184)$$

Çıkış katsayı matrisi (184)'de belirtilen c matrisi alındığından çıkış ϕ yatış açısı olarak kabul edildi. İstenen kutuplar $\Lambda = \{-1, -2, -3, -4\}$ olmak üzere k matrisi hesaplandı.

$$e_4 = [0 \ 0 \ 0 \ 1] \quad (185)$$

$$S = 1.0e + 005 * \begin{bmatrix} 0 & -0.0042 & 0.1116 & -2.9201 \\ 0.0001 & -0.0021 & 0.0548 & -1.4361 \\ 0 & 0.008 & -0.1111 & 2.6598 \\ 0.0001 & 0.0001 & -0.0021 & 0.0548 \end{bmatrix} \quad (186)$$

$$\phi_k(A) = 1.0e + 005 * \begin{bmatrix} 0.0005 & 6.3752 & 0.0027 & -0.0045 \\ 0.0002 & 3.1358 & 0.0013 & -0.0023 \\ -0.0004 & -5.7501 & -0.0024 & 0.0084 \\ 0 & -0.1197 & -0.0001 & 0.0003 \end{bmatrix} \quad (187)$$

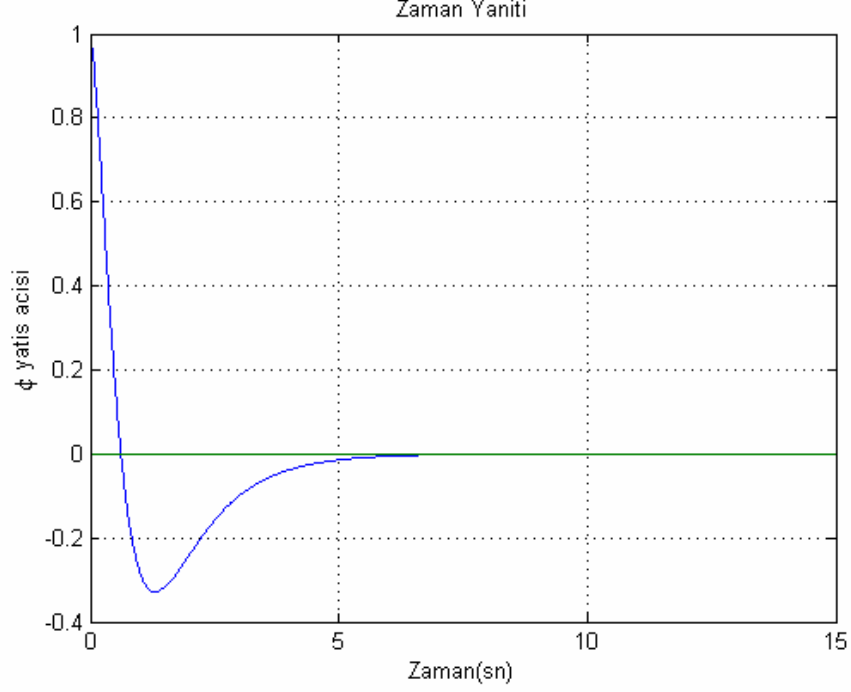
$$k = e_n \cdot S^{-1} \phi_k(A) \quad (188)$$

(185), (186) ve (187) denklemleri (188)'de yerlerine yerleştirilerek k durum geribesleme matrisi aşağıdaki gibi elde edildi.

$$k = [0.0091 \ -2.479 \ -0.0009 \ 0.0619] \quad (189)$$

(189) denkleminde bulunan k durum geribesleme matrisi, bu örnekte verilen sisteme

uygulandığında kapalı çevrim sistemi elde edildi. Elde edilen bu kapalı çevrim sisteminin referans işareti olarak sıfır uygulandığında çıkışın tepkisi Şekil 3’ de görülmektedir.



Şekil 3. TGTC sistemler için Ackermann formülü ile elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi

Örnek 2) [39]’ da verilen hem uçak hem de helikoter olarak çalışan Bell-Boing V-22 Osprey Tiltrotorun dinamik denklemlerine ait matrisler aşağıdaki gibidir.

$$A = \begin{bmatrix} -2.15 & -0.61 & -0.16 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.125 & 0 \end{bmatrix} \quad (190)$$

$$b = [0.5 \ 0 \ 0]' \quad (191)$$

Bu örnekte yerleştirmek istenen kutuplar $\Lambda = \{-1, -1, -2\}$ şeklinde katlı olarak seçildi. C çıkış matrisi ise (184) bağıntısındaki gibi alındı. Yine Ek.1’ deki algorithmadan önce e_j , S ve $\phi_k(A)$ matrisleri hesaplandı.

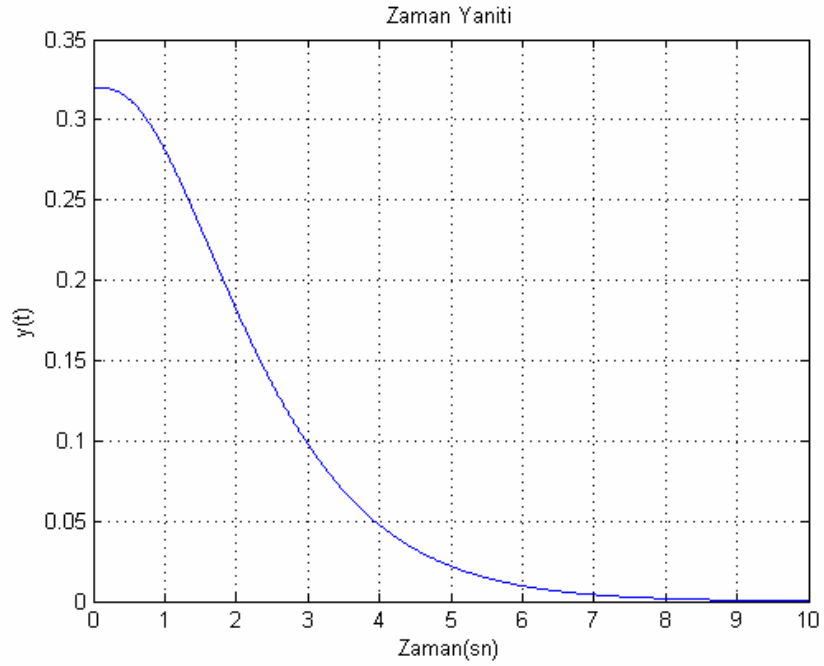
$$e_3 = [0 \ 0 \ 1] \quad (192)$$

$$S = \begin{bmatrix} 0.5 & -1.075 & 2.1587 \\ 0 & 0.25 & -0.5375 \\ 0 & 0 & 0.0313 \end{bmatrix} \quad (193)$$

$$\phi_k(A) = \begin{bmatrix} -0.1169 & -0.4747 & -0.1148 \\ 0.3588 & 1.4257 & -0.148 \\ 0.1156 & 0.5869 & 1.99 \end{bmatrix} \quad (194)$$

Bulunan matrisler (54) denkleminde yerlerine yerleştirilerek k durum geribesleme matrisine ulaşıldı.

$$k = [3.7 \quad 18.78 \quad 63.68] \quad (195)$$



Şekil 4. TGTC sistemler için Ackermann formülü ile elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi

Durum geribesleme matrisi (195) bağıntısıyla verilen k matrisi (190) ve (191) ile verilen sisteme uygulanmasıyla kapalı çevrim sistemi elde edildi. Bu kapalı çevrim sistemine referans giriş olarak sıfır uygulanmasıyla elde edilen çıkış yanıtı Şekil 4' de verilmektedir.

3.1.2. Haritalama Yaklaşımı ile Elde Edilen Sonuçlar

Örnek 3) Burada Örnek.1’ de verilen (182), (183) ve (184) matrisleri (181)’ deki sistemde yerlerine yerleştirilerek. k durum geribesleme matrisi bulundu. Bunu hesaplayan algoritma Ek.2’ de verilmektedir. Burada durum geribesleme matrisini bulmak için (71) denkleminde yararlanıldı. İstenilen kutuplar karşılaştırma yapılabilmesi için Örnek 1’ deki ile aynı alındı. Sistem Örnek 1’ deki sistem olarak alındığından S kontroledilebilirlik matrisi (186)’daki matrise eşit olur.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 29.203 & 1 & 0 & 0 \\ 80.2358 & 29.203 & 1 & 0 \\ 32.7309 & 80.2358 & 29.203 & 1 \end{bmatrix} \quad (196)$$

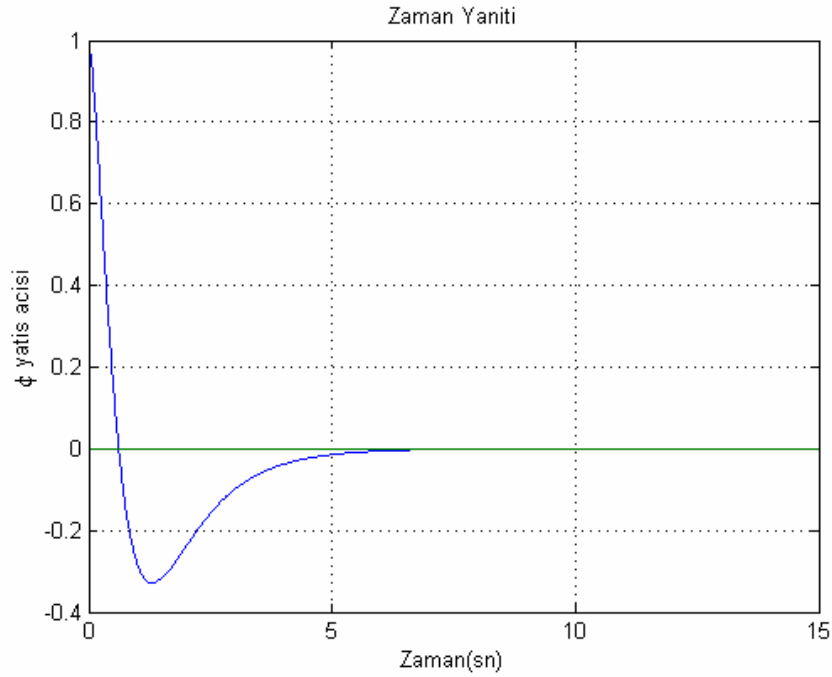
$$\delta = [-19.203 \quad -45.2358 \quad 17.2691 \quad 23.7732]' \quad (197)$$

$$k = [S']^{-1} X^{-1} \delta \quad (198)$$

(198) denkleminde (186), (196) ve (197) denklemleri yerine koyulursa (188) denklemiyle aynı sonuç elde edilir.

$$k = [0.0091 \quad -2.479 \quad -0.0009 \quad 0.0619] \quad (199)$$

Şekil 5’ de Örnek 1’ de verilen sisteme (199) bağıntısıyla verilen durum geribesleme matrisinin uygulanmasıyla elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi verilmektedir. TGTC sistemlerde elde edilecek k geribesleme matrisi tek olacağından her iki yöntemde de bulunan sonuçların aynı olması gerekmektedir. Şekil 3 ile Şekil 5 karşılaştırıldığında aynı olduğu görülmektedir.



Şekil 5. TGTÇ sistemler için haritalama yaklaşımı ile elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi

Örnek 4) Bu algoritmaya ikinci örnek olarak Örnek 2’de verilen (190) ve (191) denklemlerinden oluşan sistem verilsin. Bu defa istenen kutuplar gerçel olmayan eşlenik kutupları da içerdi.

$$\Lambda = \{-1 + 2i, -1 - 2i, -2\} \quad (200)$$

Sistem aynı durum ve giriş katsayı matrislerinden oluştuğu için kontroledilebilirlik matrisi (193) bağıntısına eşit elde edildi.

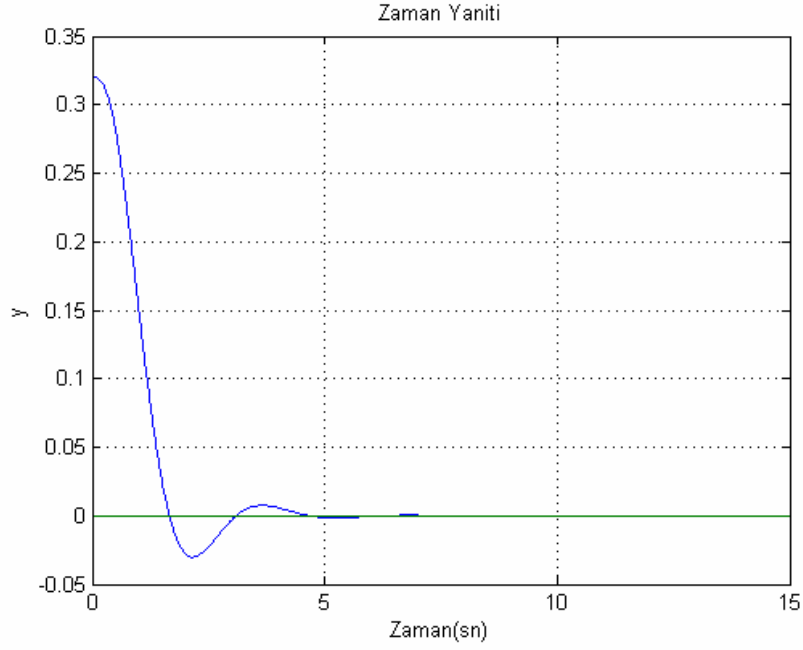
$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2.15 & 1 & 0 \\ 0.305 & 2.15 & 1 \end{bmatrix} \quad (201)$$

$$\delta = [1.85 \quad 8.695 \quad 9.99] \quad (202)$$

Hesaplanan (193), (201) ve (202) matrisleri (198) bağıntısında yerine yerleştirilerek k durum geribesleme matrisi hesaplandı.

$$k = [3.7 \quad 34.78 \quad 319.68] \quad (203)$$

Örnek 2’de verilen sistem (203) matrisiyle durum geribeslemeli olarak kontrol edildi. Bu kapalı çevrim matrisinin girişine referans işareti olarak sıfır uygulanıp Şekil 6’ daki çıkış işareti elde edildi. Kararlı duruma kısa sürede ulaştığı Şekil 6’ dan görülmektedir.



Şekil 6. TGTÇ sistemler için haritalama yaklaşımı ile elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi

3.2. ÇGÇÇ Sistemler İçin İncelenen Durum Geribeslemeli Kutup Yerleştirme Yöntemleri

3.2.1. Genelleştirilmiş Haritalama Yöntemi ile Elde Edilen Sonuçlar

Örnek 5) Örnek 1’deki sistemin A durum katsayı matrisi aynı kalarak b giriş matrisine bir giriş daha eklenmesiyle oluşan sisteme bu yöntem uygulanmıştır. Yöntemin algoritması Ek.3’ de verilmektedir. Sisteme ikinci giriş olarak δ_T kuyruk rotor yunuslama değişimi uygulandı. Sistemin giriş matrisi aşağıdaki gibi alındı.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 8 \\ 0 & -1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} \quad (204)$$

Burada C çıkış katsayı matrisi 4×4 boyutlu birim matris olarak alındı. Yerleştirmek istenen kutuplar $\Lambda = \{-1, -2, -3, -4\}$ şeklinde seçildi. (182) ve (204) bağıntılarıyla verilen matrislerden oluşan sisteme (82) denklemindeki formül uygulanarak K_d durum geribesleme matrisi elde edildi. (75) bağıntısıyla tanımlanan \bar{K}_j matrisinin ilk satır elemanları istenen değerlerde keyfi olarak seçildi.

$$\bar{K}_j = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (205)$$

(78) ve (79) denklemlerinden β_j ve A_j hesaplandı. Sistem artık β_j ve A_j matrislerinden oluştuğu varsayılarak aşağıdaki denklemler sırasıyla elde edildi.

$$S_j = 1.0e + 005 * \begin{bmatrix} 0 & -0.004 & 0.1156 & -3.4495 \\ 0.0001 & -0.0023 & 0.0657 & -1.7584 \\ 0 & 0.008 & -0.1021 & 2.5779 \\ 0.0001 & 0.0005 & -0.014 & 0.1421 \end{bmatrix} \quad (206)$$

$$X_j = 1.0e + 003 * \begin{bmatrix} 0.001 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0292 & 0.001 & 0 & 0 \\ 0.1538 & 0.0292 & 0.001 & 0 \\ 2.4666 & 0.1538 & 0.0292 & 0.001 \end{bmatrix} \quad (207)$$

$$\delta_j = 1.0e + 003 * [-0.0192 \quad -0.1188 \quad -2.4166 \quad -1.1356]' \quad (208)$$

$$e_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (209)$$

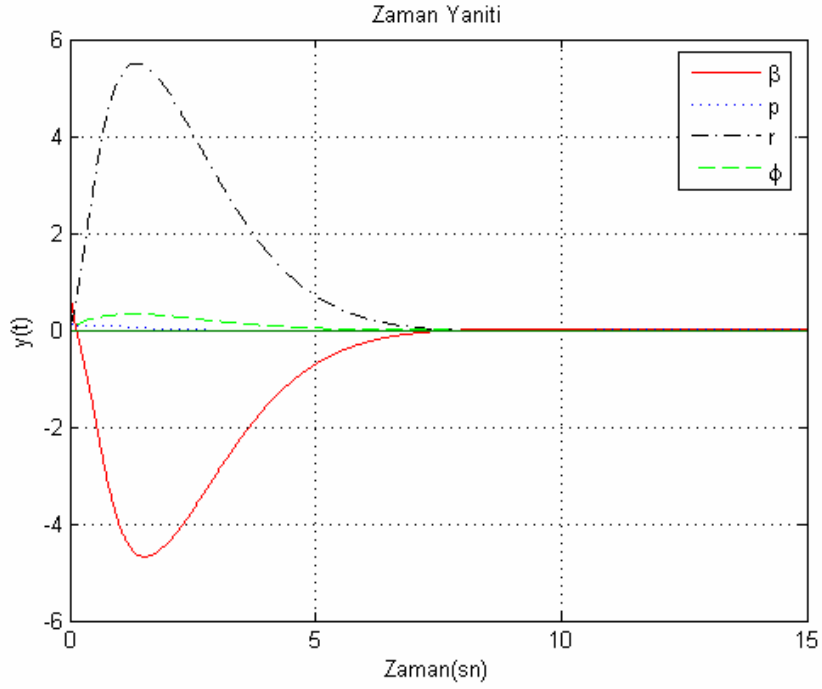
(81) denkleminde (206),(207) ve (208) yerleştirilerek k_j vektör matrisi elde edildi.

$$k_j = [0.0005 \quad -1.9284 \quad 0.0233 \quad -0.3752] \quad (210)$$

(82) denklemine (205), (209) ve (210) denklemleri yerleştirilerek K_d durum geribesleme hesaplandı.

$$K_d = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0.0005 & -1.9284 & 0.0233 & -0.3752 \end{bmatrix} \quad (211)$$

(182) ve (204) bağıntıları ile verilen sisteme (211) denklemiyle durum geribesleme uygulanarak elde edilen kapalı çevrim sistemine sıfır girişi uygulandığında elde edilen durum değişkenleri Şekil 7’de verilmektedir.



Şekil 7. ÇGÇÇ sistemler için genelleştirilmiş haritalama yaklaşımı ile elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi

Örnek 6) [39]' da verilen uçağın düşey havalanma ve iniş (VTOL) dinamik denklemlerine ait durum ve giriş matrisi aşağıda verildiği gibidir.

$$A = \begin{bmatrix} -0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -1.01 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & 0.3681 & -0.707 & 1.42 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (212)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.4422 & 0.1761 \\ 3.5446 & -7.5922 \\ -5.52 & 4.49 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (213)$$

Burada durum değişkenleri olarak x_1 yatay hız, x_2 düşey hız, x_3 yükselme hızı ve x_4 yükselme açısı olarak alındı. Sistemin girişleri ise u_1 düşey hareket ve u_2 yatay hareket olarak alındı. Yerleştirmek istenen kutuplar

$$\Lambda = \{-2 + 2i, -2 - 2i, -3, -3\} \quad (214)$$

şeklinde olsun. \bar{K}_j matrisinin serbest parametreleri olan ilk satır elemanları aşağıdaki gibi seçildi.

$$\bar{K}_j = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (215)$$

(78) ve (79) denklemlerinden A_j ve β_j elde edildi. Bu elde edilen matrislere bağlı olarak S_j ve X_j hesaplandı.

$$S_j = 1.0e + 003 * \begin{bmatrix} 0.0002 & -0.0055 & -0.0423 & -0.3456 \\ -0.0076 & -0.0358 & -0.3079 & -2.4976 \\ 0.0045 & 0.0617 & 0.4565 & 3.6332 \\ 0 & 0.0045 & 0.0617 & 0.4565 \end{bmatrix} \quad (216)$$

$$X_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6.8688 & 1 & 0 & 0 \\ -6.9676 & -6.8688 & 1 & 0 \\ -15.0915 & -6.9676 & -6.8688 & 1 \end{bmatrix} \quad (217)$$

$$\delta_j = [16.8688 \quad 47.9676 \quad 99.0915 \quad 70.2035]' \quad (218)$$

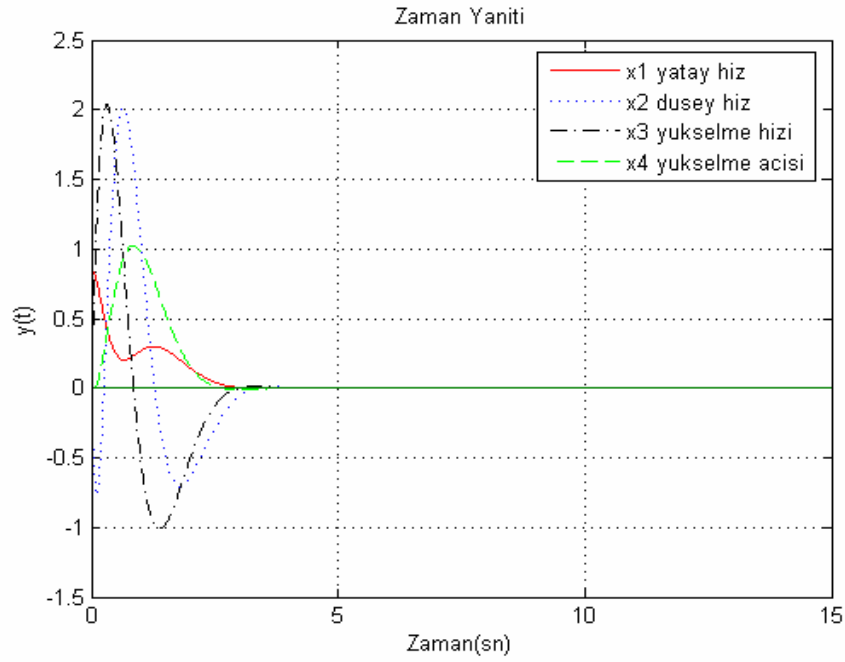
Bulunan (216), (217) ve (218) matrisleri (81) denkleminde yerine yerleştirilerek k_j elde edildi.

$$k_j = [-2.144 \quad -1.3946 \quad 1.4829 \quad 2.3491]' \quad (219)$$

(209), (215) ve (219) matrisleri (82) denkleminde yerlerine yerleştirilerek K_d durum geribesleme matrisi hesaplandı.

$$K_d = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2.144 & -1.3946 & 1.4829 & 2.3491 \end{bmatrix} \quad (220)$$

(212) ve (213) ile verilen sisteme (220) bağıntısında verilen durum geribesleme matrisi uygulandığında elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi şekil 8' de verilmektedir



Şekil 8. ÇGÇÇ sistemler için genelleştirilmiş haritalama yaklaşımı ile elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi

3.2.2. Sylvester ve Lyapunov Denklemleri ile Durum Geribeslemeli Kutup Yerleştirmede Elde Edilen Sonuçlar

Örnek 7) Bu örnekte uygulanan yöntemde kullanılan algoritma Ek.4' de verilmektedir. G sistemlerde durum geribeslemeli kutup yerleştirmede verilen yöntemlerin hepsinin ilk örneğinde karşılaştırma amacıyla aynı sistemler kullanıldı. (182) ve (204) matrislerinden oluşan sistemin ilk olarak istenen kutuplara göre A_k matrisinin jordan kanonik formu oluşturuldu. Yerleştirilmek istenen kutuplar $\Lambda = \{-1, -2, -3, -4\}$ şeklinde olursa A_k matrisinin jordan kanonik formu aşağıdaki gibi olur.

$$\tilde{A}_k = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad (221)$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (222)$$

M serbest parametre matrisi (222) bağıntısındaki gibi seçilirse G matrisi (88) denkleminde hesaplandı.

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -8 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -10 & -2 & -10 \end{bmatrix} \quad (223)$$

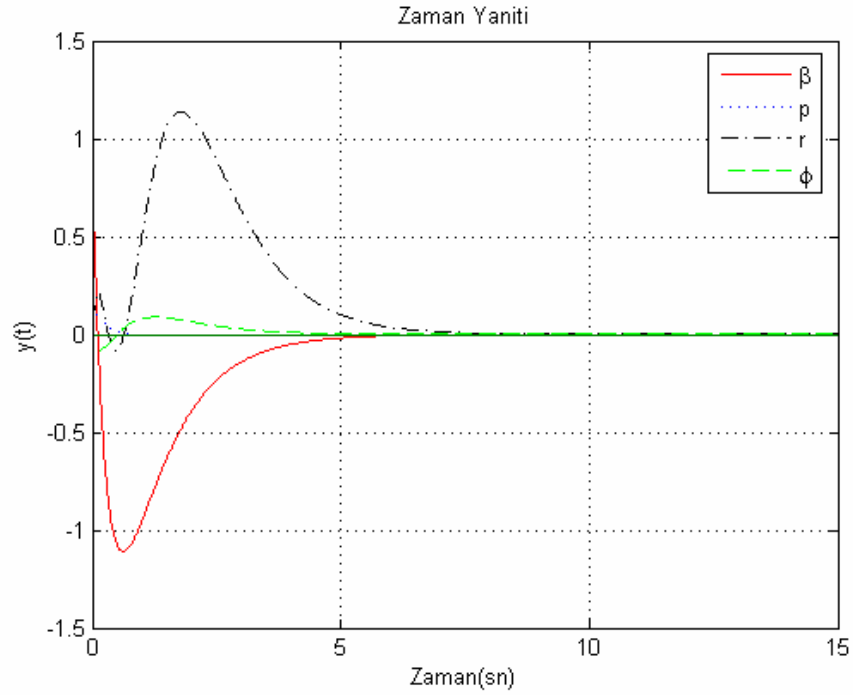
(91) denkleminde iç çarpım yapılarak X_A elde edilir.

(223) matrisi g diye adlandırılan tüm satırların sırayla sütun olarak alt alta yazıldığı matrise dönüştürülüp (92) denkleminde p sütun vektör matrisi elde edildi. p sütun vektörü de $P \in \mathcal{R}^{n \times n}$ dönüşüm matrisine dönüştürüldü. p sütun vektörünün ilk n satırı, P matrisinin birinci satırını oluştururken ikinci n satırı P matrisinin ikinci satırını oluşturmasıyla devam eder ve son n satırı P 'nin n .satırını oluşturarak elde edilir. Bu şekilde oluşturulan P dönüşüm matrisi aşağıdaki gibi hesaplandı.

$$P = \begin{bmatrix} 1.1162 & -3.5011 & 0.2006 & -49.9571 \\ 0.0524 & -0.222 & -0.0039 & -0.4235 \\ -16.6667 & -284.2509 & 90.4534 & -277.2208 \\ 0.4869 & 3.4073 & 0.998 & 10.4235 \end{bmatrix} \quad (225)$$

(222) ve (225) bağıntılarıyla (86) denkleminde K_d durum geribesleme matrisi elde edildi.

$$K_d = \begin{bmatrix} 0.0989 & 9.6303 & 0.0012 & 0.8321 \\ 0.0092 & -1.5511 & -0.0011 & 0.1072 \end{bmatrix} \quad (226)$$



Şekil 9. ÇGÇÇ sistemlerde Sylvester ve Lyapunov denklemlerini kullanarak elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi

(182) ve (204) sistemine (226) denkleminin uygulanmasıyla elde edilen kapalı çevrim sisteminin girişine, diğer algoritmalarla karşılaştırmak üzere referans işaret sıfır olarak uygulandı. Elde edilen sistemin durum değişkenlerinin değişimi Şekil 9' da gözükmektedir.

Örnek 8) Bu algoritma ayrıca [26]' da örnek olarak verilen 5 durumlu 3 girişli sistem üzerinde de denendi.

$$A = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.2 & 0.6 & 0.1 & -0.2 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.5 & -1.25 & 0 \\ 0.25 & 0 & -0.2 & 0.5 & -1 \end{bmatrix} \quad (227)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (228)$$

Yerleştirmek istenen kutuplar $\Lambda = \{-1, -1, -2, -3, -4\}$ şeklinde olsun. Kapalı çevrim durum matrisinin kontroledilebilir kanonik şekli elde edildi.

$$\tilde{A}_k = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (229)$$

Matris elemanlarını istediğimiz gibi seçebildiğimiz M serbest parametre matrisi aşağıdaki gibi seçildi.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (230)$$

(88) bağıntısından G matrisi hesaplandı.

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (231)$$

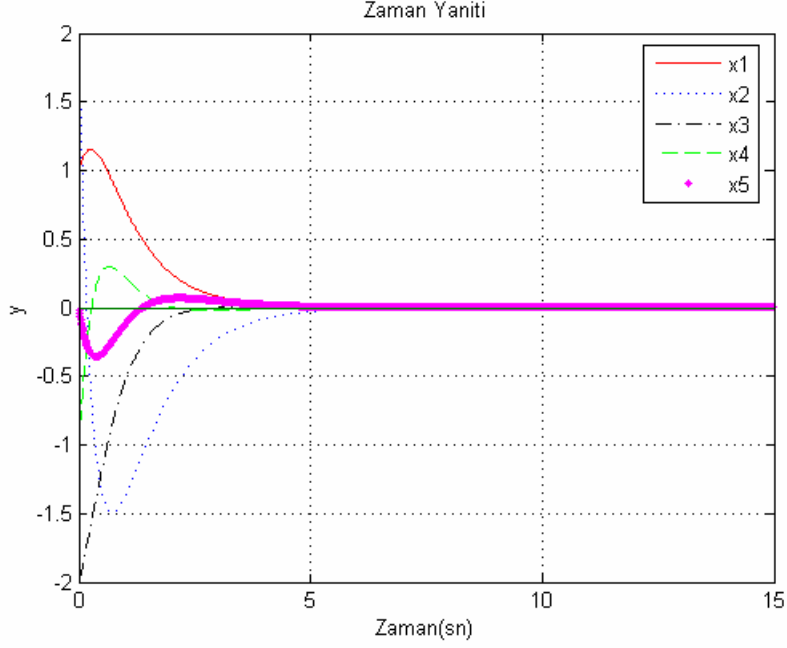
(91) bağıntısı ile verilen iç çarpım yapılarak (231) bağıntısı ile birlikte (92) denkleminde yerlerine yerleştirildiler.

$$P = \begin{bmatrix} 0.2677 & -0.4633 & -1.2308 & -1.8462 & 3.9249 \\ 0.6301 & 0.2445 & -2.6667 & 5.3634 & -15.0232 \\ -0.4487 & 0.8056 & 5.0641 & 0.1592 & 7.7784 \\ 0.7665 & -1.3341 & -5.359 & 0.9867 & 0.7404 \\ -0.5133 & 0.972 & 5 & 0.7958 & 34.6875 \end{bmatrix} \quad (232)$$

(86) bağıntısına (230) ve (232) matrisleri yerleştirilerek K_d durum geribesleme matrisi hesaplandı.

$$K_d = \begin{bmatrix} 3.0916 & 1.2743 & 0.9313 & -0.2782 & -0.0008 \\ 0.983 & 0.7355 & -1.4182 & -1.3872 & 0.5838 \\ -2.1287 & -0.5359 & -2.2974 & -1.1178 & 0.519 \end{bmatrix} \quad (233)$$

(227) ve (228) sistemine (233) denkleminin uygulanmasıyla elde edilen kapalı çevrim sisteminin girişine referans işareti sıfır olarak uygulanmıştır. Elde edilen sistemin durum değişkenleri Şekil 10' da gözükmemektedir.



Şekil 10. ÇGÇÇ sistemlerde Sylvester ve Lyapunov denklemlerini kullanarak elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi

3.2.3. Sylvester Denklemi Kullanarak Kutup Yerleştirme ile Elde Edilen Sonuçlar

Örnek 9) Bu yöntem karşılaştırılmak üzere durum katsayı matrisi (182), giriş katsayı matrisi de (204) olan sisteme uygulandı. Bu yaklaşımın algoritması Ek.5' de verilmektedir. Yerleştirmek istenen kutuplar tekrar $\Lambda = \{-1, -2, -3, -4\}$ olarak alındı. (109) denklemdeki gibi transfer fonksiyonu pay ve payda polinomu olmak üzere ikiye ayrıldı.

$$N(s) = \begin{bmatrix} 0.01s^2 + 1.234s + 35.281 & -s^3 - 80.902s^2 - 195.554s + 35.28 \\ -0.01s^2 - 0.455s - 0.2268 & s^3 + 3.004s^2 + 0.809s - 0.2268 \\ s^3 + 31.203s^2 + 133.212s + 58.718 & 87.98s^2 + 1212.6s + 609.86 \\ s^3 + 29.203s^2 + 80.225s + 32.275 & s^3 + 30.2s^2 + 83.239s + 33.54 \end{bmatrix} \quad (234)$$

$$D(s) = \begin{bmatrix} s^4 + 29.2s^3 + 80.23s^2 + 32.7s + 0.22 & 0 \\ 0 & s^4 + 29.2s^3 + 80.23s^2 + 32.7s + 0.22 \end{bmatrix} \quad (235)$$

$[f_{ij}^k]$ serbest parametre vektörleri aşağıdaki gibi seçildi.

$$f_{11}^1 = f_{31}^1 = [1 \ 0]' \quad (236)$$

$$f_{21}^1 = f_{41}^1 = [0 \ 1]' \quad (237)$$

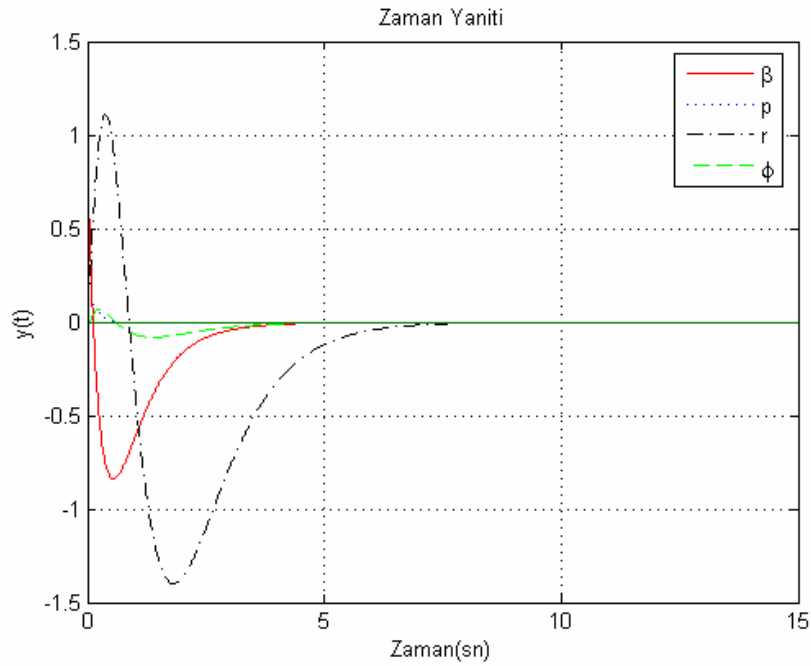
(115) denklemini sağlanıp V ve W matrisleri elde edildi.

$$W = \begin{bmatrix} -459.915 & 0 & 38.084 & 0 \\ 0 & -83.324 & 0 & 19.528 \end{bmatrix} \quad (238)$$

$$V = 1.0e+003 * \begin{bmatrix} 0.0305 & -0.0792 & 0.0329 & 0.1509 \\ 0.0014 & -0.0026 & 0.0006 & 0.001 \\ -3.188 & -2.236 & -1.563 & -0.514 \\ 0.114 & 0.028 & -0.019 & -0.02 \end{bmatrix} \quad (239)$$

(106) denkleminde (238) ve (239) yerine konularak K_d durum geribesleme matrisi hesaplandı.

$$K_d = \begin{bmatrix} -0.0733 & 6.8813 & -0.0037 & 0.6513 \\ -0.0165 & -1.7997 & -0.0017 & 0.0845 \end{bmatrix} \quad (240)$$



Şekil 11. ÇGÇÇ sistemlerde Sylvester denklemlerini kullanarak elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi

(182) ve (204) sistemine (240) denkleminin uygulanmasıyla elde edilen kapalı çevrim sisteminin girişine referans işareti sıfır olarak uygulanmıştır. Elde edilen sistemin durum değişkenleri Şekil 11’ de gözlenmektedir.

Örnek 10) (227) ve (228) ile verilen sistemde bu algoritma uygulanmıştır. Sylvester ve Lyapunov denklemleri ile yapılan kutup yerleştirmede karşılaşılan problem; eğer açık çevrim sistemi ile yerleştirmek istenilen kapalı çevrim sisteminin kutuplarından biri veya daha fazlası aynıysa Xa matrisinin çok seyrek bir matris olmasından dolayı tersi alınamaz. Dolayısıyla sonuca ulaşmak mümkün olmayabilir. Bu dezavantajı ortadan kaldırmak için sadece Sylvester denkleminin çözümünden yararlanılan bu algoritmayla kutup yerleştirme yapılmaktadır. Bu algoritmanın açık çevrim ve kapalı çevrim kutuplarının aynı olması durumunda çalıştığını gösteren bir örnek incelendi. Yukarıda belirtilen sistemin açık çevrim kutuplarından ikisi ‘ $-0.7904+0.147i$, $-0.7904-0.147i$ ’ dir. Yerleştirmek istenen kapalı çevrim kutupları aşağıdaki gibi seçildi ve kutup yerleştirme matrisinin hesaplanabildiği kanıtlandı.

$$\Lambda = \{-1, -1 - 2, -0.7904 + 0.147i, -0.7904 - 0.147i\} \quad (241)$$

Sistemin transfer fonksiyonu pay ve payda olmak üzere (109) bağıntısındaki gibi ikiye ayrıldı.

$$N(s) = \begin{bmatrix} s^4 + 5.15s^3 + 9.64s^2 + 7.73s + 2.22 & -s^4 - 4.55s^3 - 7.05s^2 - 4.2s - 0.7 \\ 2s^4 + 9.3s^3 + 15.14s^2 + 10.182s + 2.474 & s^4 + 4.65s^3 + 7.4s^2 + 4.54s + 0.75 \\ 0.05s^2 + 0.147s + 0.083 & -0.05s^2 - 0.087s - 0.02 \\ 0.4s^3 + 1.46s^2 + 1.641s + 0.5869 & -0.1s^3 - 0.32s^2 - 0.294s - 0.061 \\ 0.25s^3 + 1.245s^2 + 1.91s + 0.84 & -0.25s^3 - 0.94s^2 - 0.98s - 0.2 \\ 0.2s^3 + 0.69s^2 + 0.755s + 0.201 & \\ 0.4s^3 + 0.98s^2 + 0.56s + 0.13 & \\ s^4 + 3.35s^3 + 3.735s^2 + 1.68s + 0.242 & \\ -2s^4 - 7.3s^3 - 8.81s^2 - 4.141s & \\ s^4 + 2.95s^3 + 2.675s^2 + 1.024s + 0.162 & \end{bmatrix} \quad (242)$$

$$D(s) = \begin{bmatrix} s^5 + 5s^4 + 9.8s^3 + 8.6s^2 + 3.4s + 0.4 & 0 \\ 0 & s^5 + 5s^4 + 9.8s^3 + 8.6s^2 + 3.4s + 0.4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ s^5 + 5s^4 + 9.8s^3 + 8.6s^2 + 3.4s + 0.4 \end{bmatrix} \quad (243)$$

$[f_{ij}^k]$ serbest parametre vektörleri aşağıdaki gibi seçildi

$$f_{11}^1 = f_{41}^1 = [1 \ 1 \ -1]' \quad (244)$$

$$f_{11}^2 = [0 \ -1 \ 1]' \quad (245)$$

$$f_{21}^1 = [1 \ 0 \ 1]' \quad (246)$$

$$f_{31}^1 = [-1 \ 0 \ 0]' \quad (247)$$

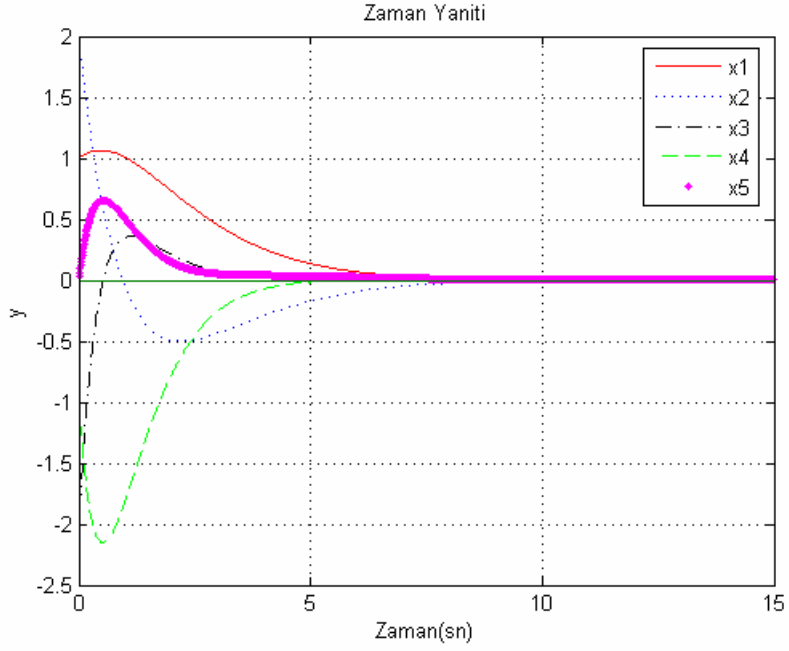
(110) bağıntısında (242), (243) ve (244) ile (247) arasındaki tüm bağıntılar yerleştirilerek V ve W matrisleri hesaplandı.

$$W = \begin{bmatrix} -0.019 & 0.082 & -0.203 & 0 & 0 \\ -0.019 & 0.101 & 0 & 0 & 0 \\ 0.019 & -0.101 & -0.203 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (248)$$

$$V = \begin{bmatrix} 0.03 & 0.15 & -0.048 & 0.046 - 0.02i & 0.084 - 0.078i \\ -0.048 & -0.16 & 0 & -0.061 + 0.049i & -0.1613 + 0.083i \\ 0.059 & -0.277 & 1.003 & 0.003 - 0.01i & 0.024 + 0.002i \\ -0.028 & 0.422 & -1.197 & 0.006 - 0.01i & 0.029 - 0.003i \\ 0.202 & -0.582 & 1.014 & 0.026 - 0.058i & 0.147 - 0.0012i \end{bmatrix} \quad (249)$$

Hesaplanan (248) ve (249) matrisleri (106) bağıntısında yerleştirilerek durum geribesleme matrisi elde edildi.

$$K_d = \begin{bmatrix} 0.202 & 0.1863 & 0.1213 & -0.0155 & 0.0713 \\ 0.1738 & 0.1728 & -0.5574 & -0.2756 & 0.2345 \\ -0.1925 & -0.2025 & 1.0661 & 0.4206 & -0.3677 \end{bmatrix} \quad (250)$$



Şekil 12. ÇGÇÇ sistemlerde Sylvester denklemlerini kullanarak elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi

Örnek 8’de verilen sisteme (250) bağıntısında verilen durum geribesleme matrisi uygulandığında elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi şekil 12’ de verilmektedir.

3.2.4. Özvektörlerden Yararlanarak Kutup Yerleştirme ile Elde Edilen Sonuçlar

Örnek 11) Bu yöntem de (182) ve (204) matrisleri ile verilen sisteme uygulandı. Bu yaklaşımın algoritması Ek.6’da verilmektedir. İlk olarak (127) denklemindeki e_j keyfi olarak yani istenen değerlerde seçilerek $\psi(\lambda_i)$ ’ in hangi sütunlarının işleme katılacağı belirlendi. (127) denkleminde de $\psi_{ji}(\lambda_i)$ ’ ler elde edildi.

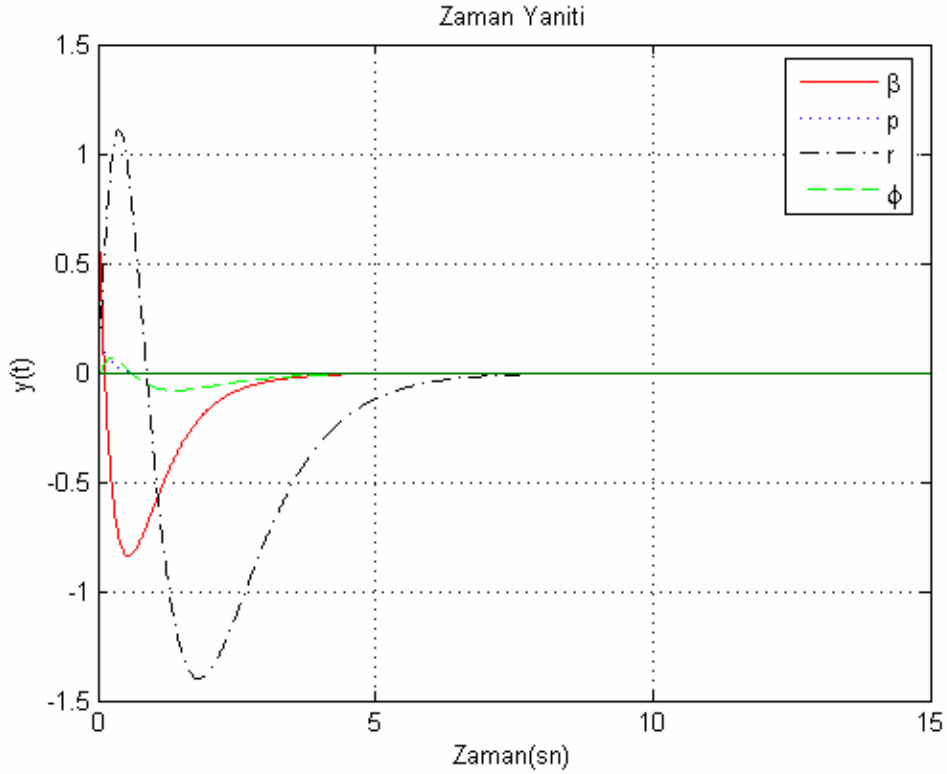
$$e_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (251)$$

$$\psi_j(\lambda_i) = \begin{bmatrix} -2.3781 & 19.944 & -2.1718 & 4.7362 \\ -0.0152 & 0.4952 & -0.0719 & 0.3301 \\ -61.1204 & -402.4826 & 67.2323 & 66.2686 \\ -1.9848 & -5.2476 & -0.6427 & -2.5825 \end{bmatrix} \quad (252)$$

(251) ve (252) matrisleri (130) denkleminde yerlerine yerleştirilerek K_d durum geribesleme matrisi hesaplandı.

$$K_d = \begin{bmatrix} -0.0733 & 6.8813 & -0.0037 & 0.6513 \\ -0.0165 & -1.7997 & -0.0017 & 0.0845 \end{bmatrix} \quad (253)$$

(182) ve (204) denklemleri ile verilen sisteme (253) denklemi ile durum geribeslemeli kutup yerleştirme uygulanarak kapalı çevrim sistemi elde edilir. Elde edilen kapalı çevrim sisteminin girişine referans işaret olarak sıfır uygulanırsa çıkışta elde edilen işaretler diğer bir deyişle durum değişkenleri Şekil 13' de verilmektedir.



Şekil 13. ÇGÇÇ sistemlerde özvektörlerden yararlanarak elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi

Örnek 12) (227) ve (228) matrisleri ile verilen sisteme uygulandı. İstenen kutuplar $\Lambda = \{-1, -1-2, -0.7904 + 0.147i, -0.7904 - 147i\}$ olsun. e_j istenen değerler seçilerek $\psi(\lambda_i)$ ' in hangi sütunlarının işleme katılacağı belirlenir. (127) denkleminde de $\psi_{ji}(\lambda_i)$ ' ler elde edildi.

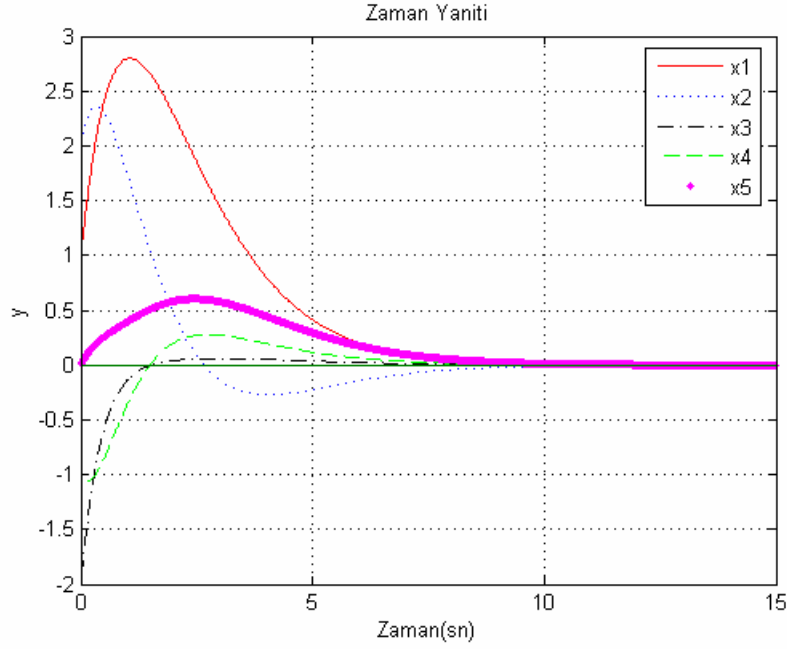
$$e_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (254)$$

$$\psi_j(\lambda_i) = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 0.001 & 0.01 & 0.001 & -6.4 - 6.11i & -0.596 - 1.46i \\ -0.007 & -0.019 & 0.001 & 12.4 + 6.55i & 0.285 + 2.48i \\ 0.001 & 0 & -0.005 & -1.86 + 0.19i & 1.52 - 2.97i \\ 0 & 0.002 & 0.006 & -2.24 - 0.3i & 0.094 - 0.391i \\ 0.004 & 0.003 & -0.005 & 1.141 - 0.2i & 7.05 - 19i \end{bmatrix} \quad (255)$$

(254) ve (255) matrisleri (130) denkleminde yerlerine yerleştirilerek K_d durum geribesleme matrisi hesaplandı.

$$K_d = \begin{bmatrix} 0.105 & 0.088 & 1.22 & 0.773 & -0.314 \\ 0.113 & 0.115 & -0.852 & -0.529 & 0.304 \\ 0.0035 & -0.0064 & 0.342 & 0.0596 & -0.0764 \end{bmatrix} \quad (256)$$

Örnek 8'de verilen sistem (256) matrisiyle durum geribeslemeli olarak kontrol edildi. Bu kapalı çevrim matrisinin girişine referans işareti olarak sıfır uygulanıp Şekil 14'daki çıkış işareti elde edildi.



Şekil 14. ÇGÇÇ sistemlerde özvektörlerden yararlanarak elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi

3.3. ÇGÇÇ Sistemler İçin İncelenen Çıkış Geribeslemeli Kutup Yerleştirme Yöntemi

Burada ele alınacak sistem (181) ile verilen sistem olup geribesleme (135) denklemindeki gibi uygulandı. İncelenen yöntemde geliştirilmiş matris tersi yaklaşımı kullanılarak geliştirilmiş haritalama yöntemiyle bulunan durum geribesleme matrisinden çıkış geribesleme matrisine (141) denklemiyle geçiş yapıldı.

3.3.1. Geliştirilmiş Haritalama Yöntemiyle Kutup Yerleştirmede Elde Edilen Sonuçlar

Örnek 13) Bu yaklaşımın algoritması Ek.7' de verilmektedir. Çıkış geribeslemenin durum geribeslemeden farkı C çıkış matrisinin birim matris olarak alınmamasıdır. Bu yöntem [39]'da verilen uçak dönme kontrolünün parametrelerinden oluşan sisteme uygulandı. Sistemin durum, giriş ve çıkış katsayı matrisleri sırasıyla aşağıda verildiği gibidir.

$$A = \begin{bmatrix} -11.4 & -3.5 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (257)$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (258)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1.425 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (259)$$

Yerleştirmek istenen kutuplar $\Lambda = \{-1, -2, -3\}$ şeklinde seçilsin. Öncelikli olarak (143) denkleminin verilen T dönüşüm matrisi elde edildi.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1.425 \\ 1 & -1 & -1.425 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (260)$$

Bu benzerlik dönüşüm matrisi ile tüm sistem (144), (145) ve (146) ifadelerindeki gibi dönüştürüldü.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -13.475 & 2.075 & 19.2 \\ -18.9 & 3.5 & 26.93 \\ 1 & -1 & -1.425 \end{bmatrix} \quad (261)$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (262)$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (263)$$

(156) denklemindeki \bar{K}_j matrisinin j . satırı ile sondan $(n-m)$ adet sütunu sıfır seçildi. Yine \bar{K}_j matrisinde $(n-m)$ adet bilinmeyen sembolik k değişkenleri yerleştirildikten sonra geriye kalan boşta matris elemanı varsa bu elemanların değeri keyfi olarak atandı. Böylece \bar{K}_j matrisinin tüm elemanları belirlenmiş oldu.

$$\bar{K}_j = \begin{bmatrix} k_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (264)$$

(78) ve (79) denklemlerinden gerekli matrisler yerine dönüştürülmüş sistemin matrisleri konularak β_j ve A_j elde edildi.

$$A_j = \tilde{A} - \tilde{B}\bar{K}_j \quad (265)$$

$$A_j = \begin{bmatrix} -13.475 - 2k_1 & 0.075 & 19.201 \\ -18.9 - 2k_1 & 1.5 & 26.9325 \\ 1 & 1 & -1.425 \end{bmatrix} \quad (266)$$

$$\beta_j = \tilde{B}e_j \quad (267)$$

$$\beta_j = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (268)$$

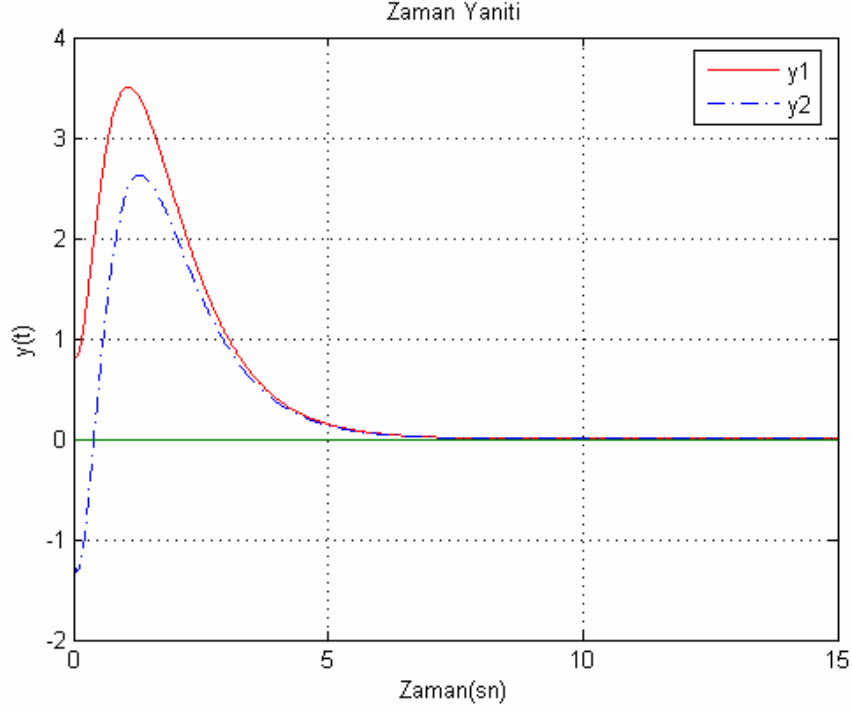
(157) denkleminde k_j elde edildi ve (156) denkleminde yerine koyularak sembolik değişkenlere bağlı olan K_d durum geribesleme matrisi hesaplandı. Bu matrisin (153) denklemini sağlaması için gerekli koşullardan yararlanılıp sembolik değişkenlerin değerleri bulundu. Yine K_d matrisinde bulunan değerler yerlerine yerleştirildiğinde durum geribesleme matrisi elde edilmiş oldu.

$$K_d = \begin{bmatrix} -2.9453 & 1 & 0 \\ -3.6139 & 1.0522 & 0 \end{bmatrix} \quad (269)$$

(269) bağıntısı (155) denkleminde yerine yerleştirilerek çıkış geribesleme matrisi elde edildi.

$$K_\zeta = \begin{bmatrix} -2.9453 & 1 \\ -3.6139 & 1.0522 \end{bmatrix} \quad (270)$$

(257), (258) ve (259) denklemleri ile verilen sisteme (270) matrisi ile çıkış geribesleme uygulandığında kapalı çevrim sistemi elde edildi. Hesaplanan bu sisteme giriş olarak sıfır işareti uygulandığında elde edilen çıkış tepkisi şekil 15’ de görülmektedir.



Şekil 15. ÇGÇÇ sistemlerde genelleştirilmiş haritalama yaklaşımı ile çıkış geribeslemeli elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi

Örnek 14) Bu yöntem ayrıca [39]’ da verilen bir uçağın dinamik durum uzay modeli üzerinde denendi. Durum katsayı matrisi, giriş katsayı matrisi ve çıkış katsayı matrisi (181) denklemindeki sisteme uygulandı.

$$A = \begin{bmatrix} -3.5 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad (271)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (272)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 1.25 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (273)$$

Yerleştirilmek istenen kutuplar $\Lambda = \{-1+i, -1-i, -2\}$ şeklinde verilmiş olsun. (143) denkleminde T dönüşüm matrisi elde edilerek tüm sistem bu matrisle dönüştürüldü

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (274)$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 4.25 \\ 14 & -3.5 & -24.5 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad (275)$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1.75 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (276)$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (277)$$

\bar{K}_j matrisi bir önceki örnekte belirtildiği gibi belirlenerek β_j ve A_j matrisleri hesaplandı.

$$\bar{K}_j = \begin{bmatrix} k_1 & 0.08 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (278)$$

$$A_j = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 4.25 \\ 14 - k_1 & -3.58 & 24.5 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad (279)$$

$$\beta_j = \begin{bmatrix} -1.75 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (280)$$

(279) matrisinin karakteristik denkleminin katsayılarının oluşturduğu alt üçgen toeplitz matris X_j elde edildi. (279) ve (280) matrislerinden kontroledilebilirlik matrisi S_j ve katsayı fark vektörü δ_j hesaplandı. Bunlarla (81) bağıntısı ile verilen k_j hesaplandı ve (82) denkleminde yerleştirildi. K_d durum geribesleme matrisi k_1 değişkenine bağlı olarak hesaplanmış oldu. (153) bağıntısının sağlanması için gerekli koşuldan yararlanarak k_1

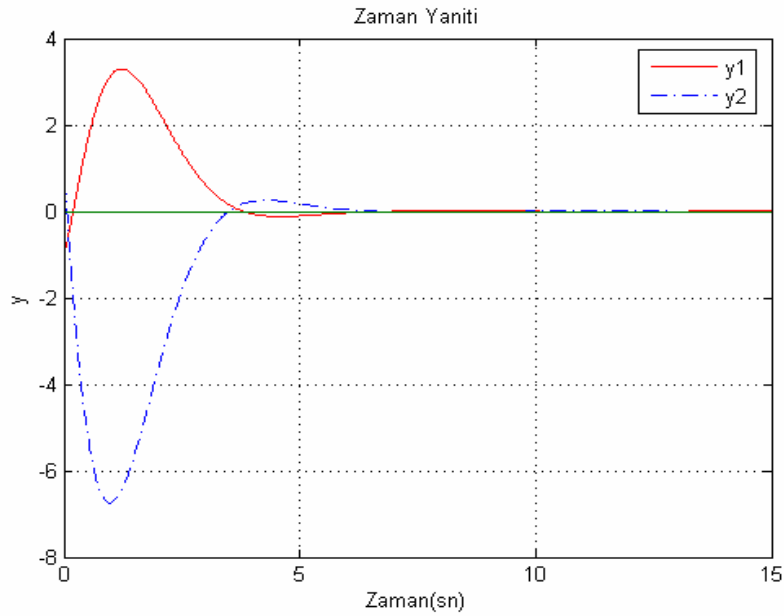
değeri bulundu. K_d matrisinde bulunan değerlerin yerine yerleştirilmesiyle durum geribesleme matrisine ulaşıldı.

$$K_d = \begin{bmatrix} 0.9788 & 0.08 & 0 \\ -0.2732 & -0.029 & 0 \end{bmatrix} \quad (281)$$

Son olarak da (277) ve (281) bağıntılarının (155) denkleminde yerine yerleştirilmesiyle çıkış geribesleme matrisi elde edildi.

$$K_\zeta = \begin{bmatrix} 0.9788 & 0.08 \\ -0.2732 & -0.029 \end{bmatrix} \quad (282)$$

(271), (272) ve (273) bağıntılarıyla verilen sistem (282) matrisiyle çıkış geribeslemeli olarak kontrol edildi. Bu kapalı çevrim matrisinin girişine referans işareti olarak sıfır uygulanıp Şekil 16'daki çıkış işaretleri elde edildi. Sistem iki çıkışlı olduğundan Şekil 16' da iki çıkış gösterildi.



Şekil 16. ÇGÇÇ sistemlerde genelleştirilmiş haritalama yaklaşımı ile çıkış geribeslemeli elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi

3.4. Geliştirilen Algoritmalar ile Elde Edilen Sonuçlar

3.4.1. Genelleştirilmiş Ackermann Yaklaşımı ile Durum Geribeslemeli Kutup Yerleştirmede Elde Edilen Sonuçlar

Örnek 15) (182) ve (204) bağıntılarıyla verilen matrislerden oluşan sisteme (85) denklemindeki formül uygulanarak K_d durum geribesleme matrisi elde edildi. Yöntemin algoritması Ek.5' de verilmektedir.

Burada C çıkış katsayı matrisi 4x4 boyutlu birim matris olarak alındı. Yerleştirmek istenen kutuplar $\Lambda = \{-1, -2, -3, -4\}$ şeklinde seçildi. (75) bağıntısıyla tanımlanan \bar{K}_j matrisinin ilk satır elemanları istenen değerlerde keyfi olarak seçildi. \bar{K}_j durum geribesleme matrisi yine (205) denklemindeki gibi seçilsin.

(78) ve (79) denklemlerinden β_j ve A_j hesaplandı. Sistem artık β_j ve A_j matrislerinden oluştuğu varsayılarak S_j , \tilde{e}_j ve $\phi_k(A_j)$ elde edildi. \bar{K}_j matrisinin parametreleri bir önceki yöntemle aynı seçildiğinden ikisine de ait (206) bağıntısıyla verilen kontroledilebilirlik matrisi aynıdır.

$$\tilde{e}_4 = [0 \ 0 \ 0 \ 1] \quad (283)$$

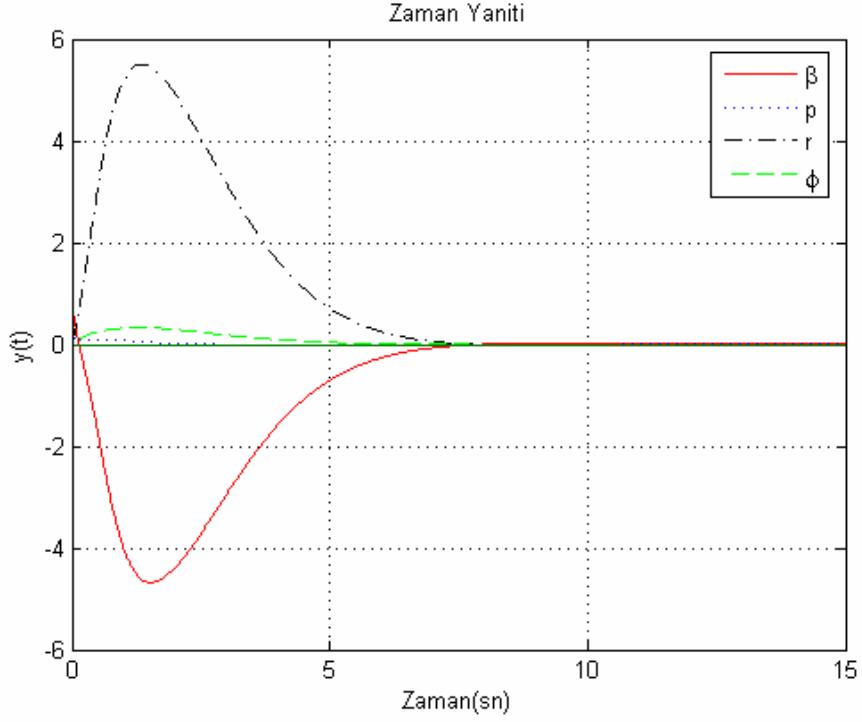
$$\phi_k(A_j) = 1.0e + 005 * \begin{bmatrix} -0.1932 & 6.904 & -0.2204 & 0.67 \\ -0.1094 & 3.5309 & -0.1202 & 0.3033 \\ 0.2374 & -5.9981 & 0.2717 & -0.8495 \\ 0.0237 & -0.309 & 0.0208 & 0.0202 \end{bmatrix} \quad (284)$$

(206), (283) ve (284) matrisleri (160) denkleminde yerleştirilerek k_j hesaplandı.

$$k_j = [0.0005 \ -1.9284 \ 0.0233 \ -0.3752] \quad (285)$$

(164) denkleminde (205), (209) ve (285) denklemleri yerleştirilerek K_d durum geribesleme matrisi hesaplandı.

$$K_d = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0.0005 & -1.9284 & 0.0233 & -0.3752 \end{bmatrix} \quad (286)$$



Şekil 17. ÇGÇÇ sistemler için genelleştirilmiş Ackermann formülü ile durum geribeslemeli elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi

(182) ve (204) ile verilen sistem (286) bağıntısındaki durum geribesleme matrisi ile kontrol edildiğinde elde edilen kapalı çevrim matrisine sıfır girişi uygulanmasıyla oluşan durum değişkenlerinin değişimi Şekil 17’de verilmiştir. Durum geribeslemede çıkış katsayı matrisi C birim matris olarak alındığından çıkışlar durumları takip eder. \bar{K}_j serbest parametre matrisi aynı değerlerden oluşturulduğunda Şekil 7’de verilen sonuçlarla Şekil 17’deki sonuçların aynı olduğu görülür. İki algoritmanın da temelleri TGTCÇ sistemlerde uygulanan algoritmalara dayanmaktadır. TGTCÇ sistemler için incelenen bu iki algoritmaya ait sonuçların tek bir k vektör matrisi bulunduğundan birbirine eşit olduğu daha önceden de belirtilmişti.

Örnek 16) Örnek 6’ da (212) ve (213) bağıntılarıyla verilen sistemin istenilen kutupları değiştirilerek bu algoritmaya uygulandı. İstenen kapalı çevrim kutupları bu örnekte 4 katlı olarak seçildi.

$$\Lambda = \{-3, -3, -3, -3\} \quad (287)$$

$$\bar{K}_j = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (288)$$

\bar{K}_j matrisi (288) bağıntısındaki gibi seçilerek (78) ve (79) denklemlerinden A_j ve β_j elde edildi. Elde edilen matrisler (162) ve (163) bağıntısında yerleştirilerek S_j ve $\phi_k(A_j)$ matrisleri hesaplandı.

$$S_j = 1.0e + 004 * \begin{bmatrix} 0 & -0.0008 & -0.0098 & -0.1311 \\ -0.0008 & -0.0052 & -0.0736 & -0.9837 \\ 0.0004 & 0.0086 & 0.1124 & 1.498 \\ 0 & 0.0004 & 0.0086 & 0.1124 \end{bmatrix} \quad (289)$$

$$\phi_k(A_j) = 1.0e + 004 * \begin{bmatrix} -0.2467 & 0.2223 & -0.489 & -0.1134 \\ -1.9113 & 1.6689 & -3.6732 & -0.8435 \\ 2.923 & -2.5462 & 5.599 & 1.2591 \\ 0.2158 & -0.1889 & 0.4209 & 0.0973 \end{bmatrix} \quad (290)$$

$$e_4 = [0 \ 0 \ 0 \ 1] \quad (291)$$

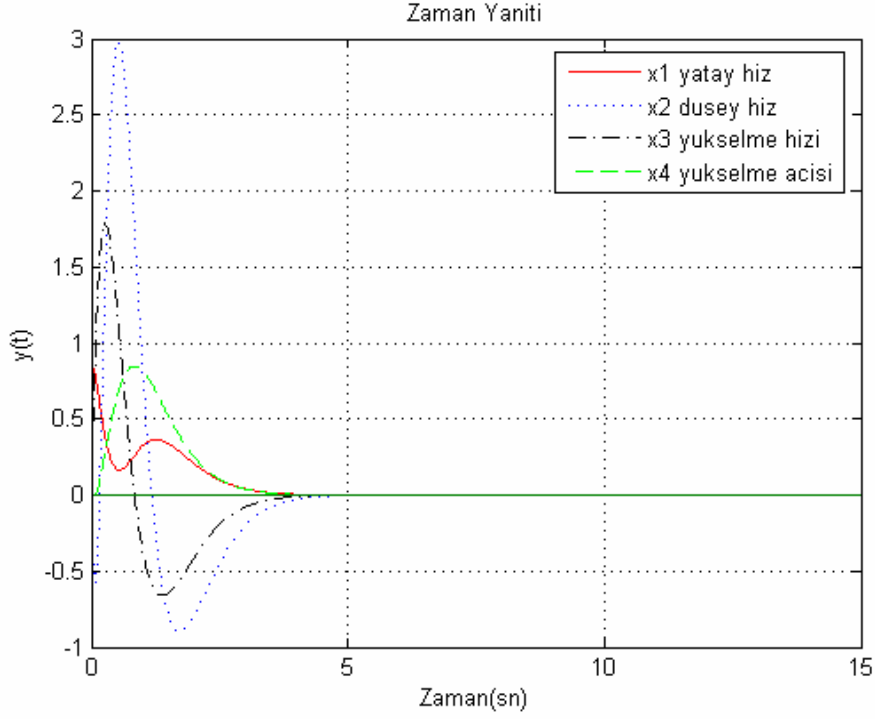
Bulunan (289), (290) ve (291) matrisleri (160) denkleminde yerlerine yerleştirilerek k_j hesaplandı.

$$k_j = [-2.4669 \ -1.5057 \ 2.9825 \ 2.9312] \quad (292)$$

$$e_j = [0 \ 1]' \quad (293)$$

(288), (292) ve (293) matrisleri (164) denkleminde yerleştirilerek K_d durum geribesleme matrisi aşağıdaki gibi elde edildi.

$$K_d = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2.4669 & -1.5057 & 2.9825 & 2.9312 \end{bmatrix} \quad (294)$$



Şekil 18. ÇGÇÇ sistemler için genelleştirilmiş Ackermann formülü ile durum geribeslemeli elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi

(212) ve (213) bağıntılarıyla verilen sisteme (294) denklemindeki durum geribesleme matrisinin uygulanmasıyla kapalı çevrim sistemi elde edildi. Şekil 18’ de bu kapalı çevrim sisteminin girişine sıfır işareti uygulandığında durum değişkenlerinin değişimi gözükmemektedir. Durum değişkenlerinin oturma zamanlarının kısa olmasıyla birlikte kararlılığa kısa sürede ulaşıldığı Şekil 18’den görülmektedir.

3.4.2. Genelleştirilmiş Ackermann Yöntemiyle Çıkış Geribeslemeli Kutup Yerleştirmede Elde Edilen Sonuçlar

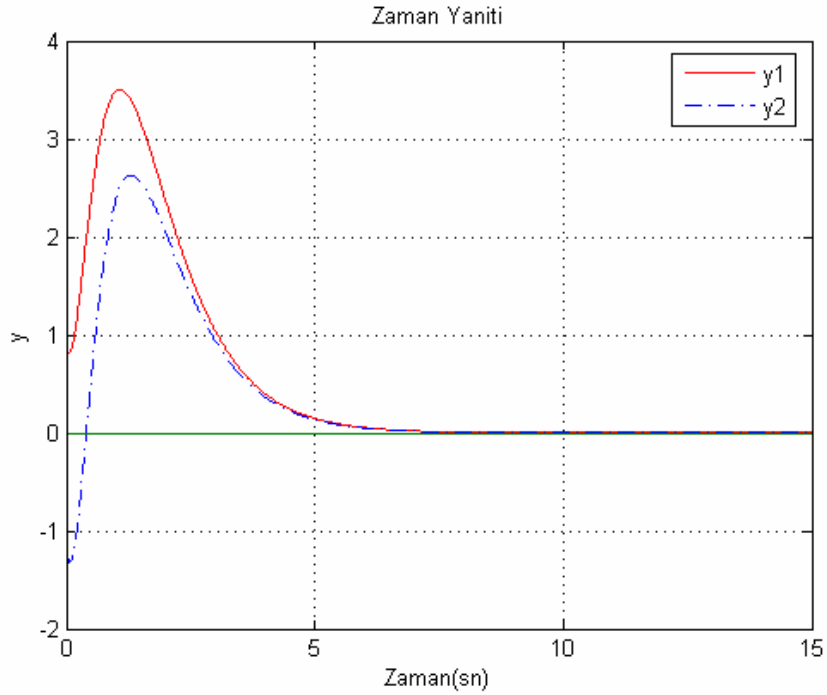
Örnek 17) Bu yaklaşımın algoritması Ek.9’ da verilmektedir. Örnek 13’ deki sistem alınarak bu algoritma denendi. Yerleştirilmek istenen kutuplar yine $\Lambda = \{-1, -2, -3\}$ olarak seçildi. Genelleştirilmiş haritalama yöntemindeki gibi ilk olarak benzerlik dönüşümü ile (261), (262) ve (263) hesaplandı. (264)’ daki \bar{K}_j matrisi seçilip (266) ve (268) elde edildi. Elde edilen matrisler yardımıyla (165) denkleminde k_j hesaplandı. (156) denkleminde hesaplanan k_j yerleştirilerek K_d durum geribesleme matrisi k_1 sembolik değişkenine bağlı olarak elde edildi. (153) bağıntısının sağlanması için gerekli koşullardan yararlanarak

k_1 değeri bulundu. K_d matrisinde bulunan değerlerin yerlerine yerleştirilmesiyle durum geribesleme matrisine ulaşıldı.

$$K_d = \begin{bmatrix} -5.7844 & 1.8497 & 0 & 0 \\ 6.0787 & -1.9556 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (295)$$

(166) denkleminde (263) ve (295) bağıntılarının yerleştirilmesiyle durum geribesleme matrisinden geçiş yapılarak çıkış geribesleme matrisi hesaplandı .

$$K_s = \begin{bmatrix} -5.784 & 1.8497 \\ 6.0787 & -1.9556 \end{bmatrix} \quad (296)$$



Şekil 19. ÇGÇÇ sistemlerde genelleştirilmiş Ackermann formülü ile çıkış geribeslemeli elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi

(257), (258) ve (259) denklemleri ile verilen sisteme (296) matrisi ile çıkış geribesleme uygulanarak kapalı çevrim sistemi elde edildi. Hesaplanan bu sisteme giriş olarak sıfır işareti uygulandığında elde edilen çıkış tepkisi şekil 19’ da görülmektedir. Şekil 15 ve Şekil 19 karşılaştırıldığında aynı olduğu görülmektedir. Serbest parametreler

aynı seçildiği takdirde durum geribesleme matrisinin aynı olduğu açıklanmıştı. Dolayısıyla çıkış geribesleme matrisi de aynı olur.

Örnek 18) Bu algoritma ikinci olarak Örnek 14’de verilen sistemin giriş sayısı bir artırılarak denenmiştir. (271) ve (273) matrisleri aynen alındı. Giriş katsayı matrisi ise

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (297)$$

şeklinde uygulandı. Yerleştirmek istenen kutuplar $\Lambda = \{-1, -1, -2\}$ şeklinde verilsin. İlk olarak benzerlik dönüşümü hesaplandı. Çıkış katsayı matrisi Örnek 14’ de verilen matrisle aynı olduğu için T benzerlik dönüşüm matrisi de (274) bağıntısıyla aynı hesaplandı. Tüm sistem dönüşüm matrisi ile dönüştürüldüğünde (275) ve (277) matrislerinin yanında \tilde{B} matrisi de

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0.75 & -1.75 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (298)$$

şeklinde elde edildi. Serbest parametre matrisi aşağıdaki gibi seçilip A_j ve β_j hesaplandı.

$$\bar{K}_j = \begin{bmatrix} k_1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (299)$$

$$A_j = \begin{bmatrix} -4.25 & -1 & 4.25 \\ 12 - k_1 & -4.5 & -24.5 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad (300)$$

$$\beta_j = \begin{bmatrix} -1.75 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (301)$$

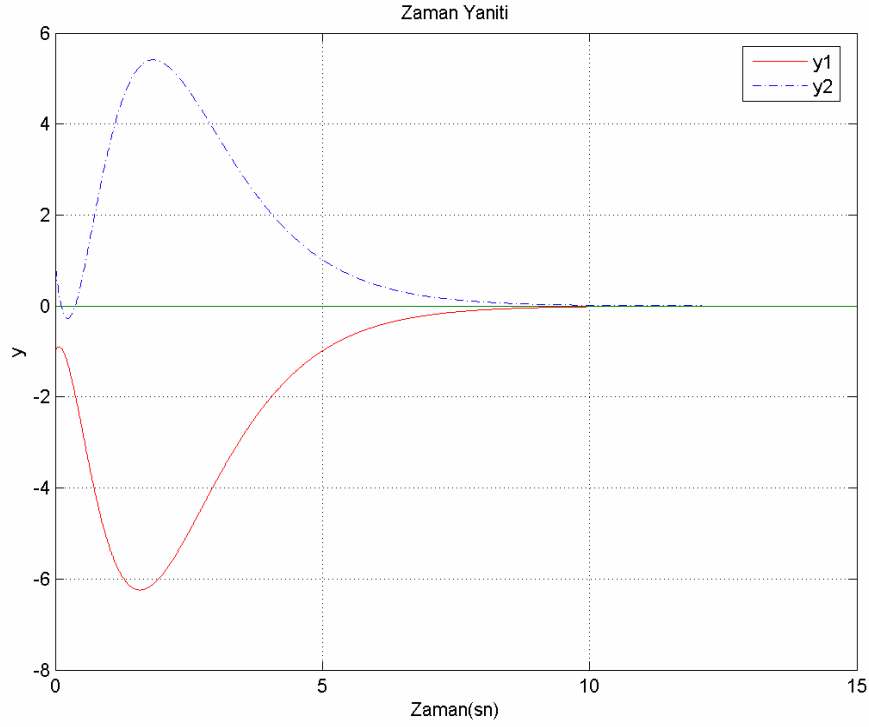
(300) ve (301) matrisleri yardımıyla (165) denklemden k_j hesaplandı. (156) denklemine

hesaplanan k_j yerleştirilerek K_d durum geribesleme matrisi k_1 sembolik değişkenine bağlı olarak elde edildi. (153) bağıntısının sağlanması için gerekli koşullardan yararlanarak k_1 değeri bulundu. K_d matrisinde bulunan k_1 ' in yerine yerleştirilmesiyle durum geribesleme matrisine ulaşıldı.

$$K_d = \begin{bmatrix} 3.3874 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 4.0384 & 4.1586 & 0 \end{bmatrix} \quad (302)$$

(166) denkleminde de çıkış geribesleme matrisine (277) ve (302) bağıntılarıyla geçiş yapılarak çıkış geribesleme matrisi hesaplandı.

$$K_\zeta = \begin{bmatrix} 3.3874 & 1 \\ -1 & 0 \\ 4.0384 & 4.1586 \end{bmatrix} \quad (303)$$



Şekil 20. ÇGÇÇ sistemlerde geliştirilmiş Ackermann formülü ile çıkış geribeslemeli elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi

Örnek 14’de verilen sistem (303) matrisiyle çıkış geribeslemeli olarak kontrol edildi. Bu kapalı çevrim matrisinin girişine referans işareti olarak sıfır uygulanıp Şekil 20’deki çıkış işaretleri elde edildi.

3.4.3. Sylvester ve Lyapunov Denklemleri Yardımıyla Çıkış Geribeslemede Elde Edilen Sonuçlar

Örnek 19) Bu yöntemin algoritması Ek.10’da verildiği gibidir. Bu algoritma örnek 13 ile verilen (257), (258) ve (259) sistemine uygulandı. Yerleştirmek istenen kutuplar $\Lambda = \{-1, -2, -3\}$ şeklinde olsun. (153) denkleminin sağlanabilmesi için gerekli (143) denklemi ile verilen T dönüşüm matrisi (260)’deki gibi bulundu. Tüm sistem dönüştürülerek \tilde{A} , \tilde{B} ve \tilde{C} sırasıyla (261), (262) ve (263) şeklinde elde edildi. M parametre matrisi girilen çıkış matrisinin ve durum matrisinin boyutlarına göre sembolik değişkenler ve keyfi seçilebilen parametrelerden oluşturuldu.

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (304)$$

(172) denklemiyle de G matrisi hesaplanarak sütun vektör olan g matrisine çevrildi.

$$G = \begin{bmatrix} -2m_1 + 1 & -2m_2 - 1 & -1 \\ -2m_1 + 2 & -2m_2 - 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (305)$$

\tilde{A} ve \tilde{A}_k matrisleriyle iç çarpım (174) denklemindeki gibi yapıldı ve (306) ifadesi elde edildi.

$$X_a = \begin{bmatrix} 10.48 & 0 & 0 & -2.08 & 0 & 0 & -19.2 & 0 & 0 \\ 0 & 11.48 & 0 & 0 & -2.08 & 0 & 0 & -19.2 & 0 \\ 0 & 0 & 12.48 & 0 & 0 & -2.08 & 0 & 0 & -19.2 \\ 18.9 & 0 & 0 & -6.5 & 0 & 0 & -26.9 & 0 & 0 \\ 0 & 18.9 & 0 & 0 & -5.5 & 0 & 0 & -26.9 & 0 \\ 0 & 0 & 18.9 & 0 & 1 & -4.5 & 0 & 0 & -26.9 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1.57 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0.57 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0.425 \end{bmatrix} \quad (306)$$

Elde edilen (305) ve (306) matrisleri (175)' de yerleştirilerek p sütun vektörü hesaplandı. P dönüşüm matrisine çevrildi.

$$P = \begin{bmatrix} -0.875m_1 - 0.23 & 1.11 - 2.02m_2 & 6.95 \\ -0.4375 - 1.25m_1 & 1.437 - 2.5m_2 & 5.25 \\ -0.238m_1 - 0.13 & 0.562 - 0.833m_2 & 4 \end{bmatrix} \quad (307)$$

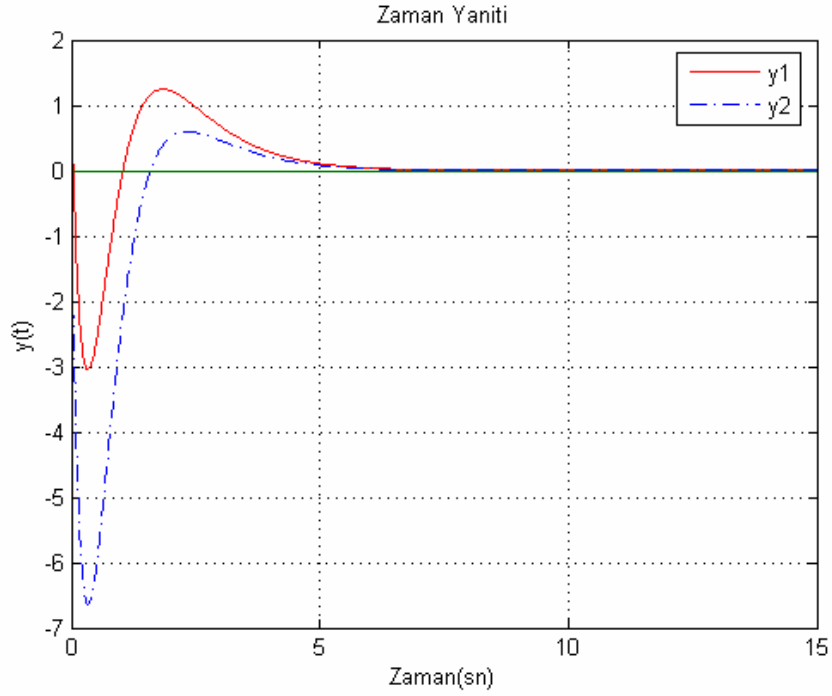
(176) denklemleriyle K_d durum geribesleme matrisi m_1 ve m_2 sembolik değişkenlere bağlı olarak elde edildi. (153) denklemini sağlayacak şekilde sembolik değişkenler hesaplanarak K_d durum geribesleme matrisinde yerlerine yerleştirilir.

$$K_d = \begin{bmatrix} 2.7827 & -3.4933 & 0 \\ 2.1837 & -3.0812 & 0 \end{bmatrix} \quad (308)$$

(177) bağıntısıyla da çıkış geribesleme matrisine geçiş yapılır.

$$K_\xi = \begin{bmatrix} 2.7827 & -3.4933 \\ 2.1837 & -3.0812 \end{bmatrix} \quad (309)$$

(257), (258) ve (259) denklemleri ile verilen sisteme (309) denklemi ile çıkış geribeslemeli kutup yerleştirme uygulandığında referans işareti sıfırken elde edilen kapalı çevrim sisteminin zaman yanıtı Şekil 21' de verilmektedir.



Şekil 21. ÇGÇÇ sistemlerde Sylvester ve Lyapunov denklemleri kullanılmasıyla çıkış geribeslemeli elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi

Örnek 20) Sylvester ve Lyapunov denklemlerinin çözümünden elde edilen bu algoritma [39]' da verilen sisteme de uygulandı ve aşağıdaki sonuçlar elde edildi. İstenen kutuplar $\Lambda = \{-3, -3, -4\}$ olmak üzere (181)' deki sistemin durum, giriş ve çıkış katsayı matrisleri sırasıyla aşağıda verildiği gibidir.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 19.62 & 0 & -8.86 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix} \quad (310)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (311)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (312)$$

Burada da çıkış geribesleme matrisini elde etmek için genelleştirilmiş ters alma yönteminden yararlanıldı. Bu yöntemle göre ilk olarak (153) denkleminin sağlanabilmesi için gerekli (143) denklemi ile verilen T dönüşüm matrisi bulundu.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (313)$$

Sırasıyla (310), (311) ve (312) matrisleri benzerlik dönüşümüyle dönüştürüldü.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -198 \\ 18.62 & 1 & -46.1 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix} \quad (314)$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (315)$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (316)$$

(169) denklemi ile verilen kapalı çevrim matrisinin istenen kutuplar belli olduğundan jordan kanonik forma dönüştürülmüş hali oluşturuldu.

$$\tilde{A}_k = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad (317)$$

M parametre matrisi girilen çıkış matrisinin ve durum matrisinin boyutlarına göre sembolik değişkenler ve keyfi seçilebilen parametrelerden oluşturuldu.

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (318)$$

$$X_a = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 198 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 198 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 198 \\ -18.62 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 46.1 & 0 & 0 \\ 0 & -18.62 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 46.1 & 0 \\ 0 & 0 & -18.62 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 46.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 96 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 97 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 97 \end{bmatrix} \quad (319)$$

\tilde{A} ve \tilde{A}_k matrislerinin iç çarpımı (174) denklemindeki gibi yapıldı ve (319)'daki bağıntı elde edildi. (172) denklemiyle de G matrisi hesaplanarak sütun vektör olan g matrisine çevrildi. Elde edilen bu iki matris (175)'de yerleştirilerek P dönüşüm matrisinin sütun vektörü olan p hesaplandı.

$$G = -\tilde{B}M = \begin{bmatrix} -2m_1 - 1 & -2m_2 + 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -m_1 & -m_2 & -1 \end{bmatrix} \quad (320)$$

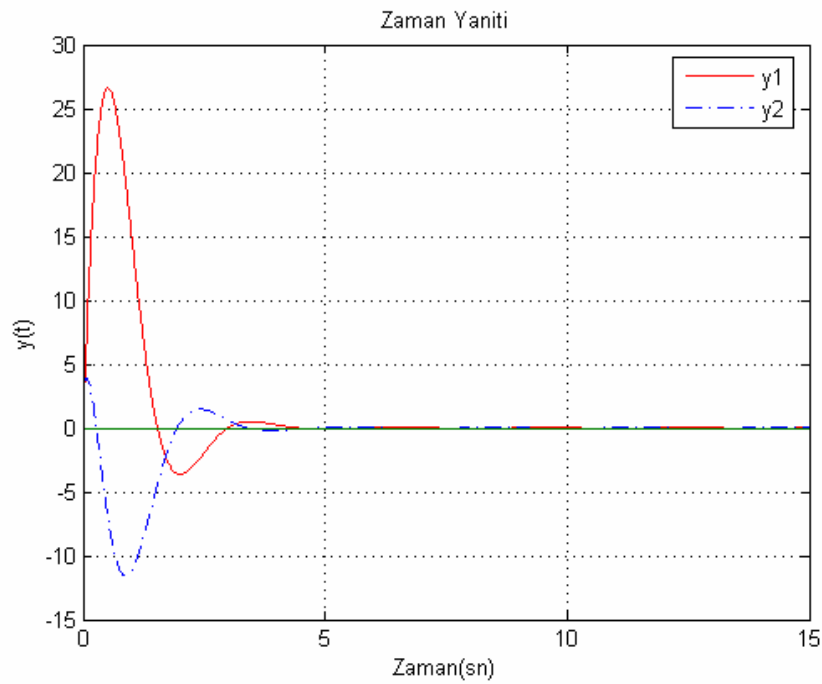
$$g = \begin{bmatrix} -2m_1 - 1 \\ -2m_2 + 1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -m_1 \\ -m_2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (321)$$

(176) denklemiyle K_d durum geribesleme matrisi m_1 ve m_2 sembolik değişkenlere bağlı olarak elde edildi. (153) denklemini sağlayacak şekilde sembolik değişkenler hesaplanarak K_d durum geribesleme matrisinde yerleştirildi. (177) bağıntısıyla da çıkış geribesleme matrisine geçiş yapıldı.

$$K_d = \begin{bmatrix} -44.7401 & -11.3932 & 0 \\ 0.5199 & -0.1689 & 0 \end{bmatrix} \quad (322)$$

$$K_\zeta = \begin{bmatrix} -44.7401 & -11.3932 \\ 0.5199 & -0.1689 \end{bmatrix} \quad (323)$$

(310), (311) ve (312) sistemlerine (323) bağıntısıyla verilen çıkış geribesleme matrisi uygulanarak elde edilen kapalı çevrim sistemine referans işareti olarak sıfır uygulandığındaki zaman yanıtı Şekil 22’de verilmektedir.



Şekil 22. ÇGÇÇ sistemlerde Sylvester ve Lyapunov denklemleri kullanılmasıyla çıkış geribeslemeli elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi

3.4.4. Sylvester Denklemi Kullanarak Kutup Yerleştirme ile Elde Edilen Sonuçlar

Örnek 21) Burada kullanılan yöntem örnek 13 ile verilen (257), (258) ve (259) sistemine uygulandı. Bu yaklaşımın algoritması Ek.11’ de verildiği gibidir. Yerleştirmek istenen kutuplar $\Lambda = \{-1, -2, -3\}$ şeklinde olsun. İlk aşamada sistem T dönüşüm matrisi (260) ile (261), (262) ve (263) bağıntılarına dönüştürülerek \tilde{A} \tilde{B} ve \tilde{C} matrisleri

hesaplanır. Elde edilen sistemde ilk olarak durum geribesleme matrisi elde edileceğinden C matrisi birim matris gibi düşünülerek transfer fonksiyonu pay ve payda fonksiyonlarına ayrıldı.

$$N(s) = \begin{bmatrix} 2s^2 + 11.4 & s^2 + 2.075s - 10.545 \\ 2s^2 - 8s & 2s^2 + 10.9s \\ 8 & 7.4 \end{bmatrix} \quad (324)$$

$$D(s) = \begin{bmatrix} s^3 + 11.4s^2 + 14s & 0 \\ 0 & s^3 + 11.4s^2 + 14s \end{bmatrix} \quad (325)$$

Serbest parametre vektörleri aşağıdaki gibi seçilerek W ve V matrisleri elde edildi.

$$f_{11}^1 = [f_1 \quad -1]' \quad (326)$$

$$f_{21}^1 = [f_2 \quad 1]' \quad (327)$$

$$f_{31}^1 = [1 \quad -1]' \quad (328)$$

$$V = \begin{bmatrix} 13.4f_1 + 11.62 & 19.4f_2 - 10.695 & 37.17 \\ 10f_1 + 8.9 & 24f_2 - 13.8 & 56.7 \\ 8f_1 + 6.4 & 8f_2 - 5.4 & 12.4 \end{bmatrix} \quad (329)$$

$$W = \begin{bmatrix} -3.6f_1 & 9.6f_2 & 33.6 \\ 3.6 & 9.6 & -33.6 \end{bmatrix} \quad (330)$$

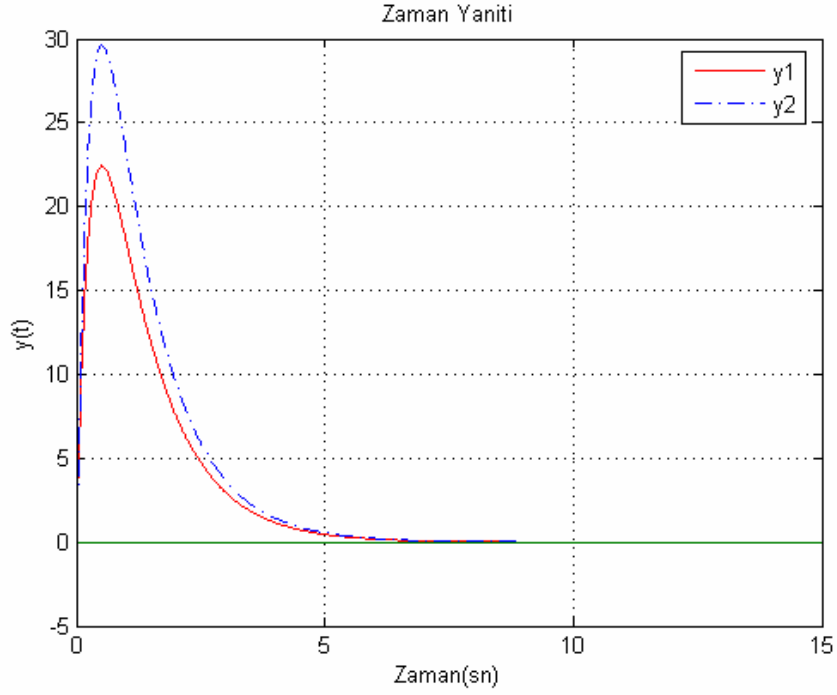
(179) denkleminde K_d durum geribesleme matrisi f_1 ve f_2 sembolik değişkenlerine bağlı olarak elde edildi ve (153) denklemini sağlayacak şekilde sembolik değişkenler hesaplandı. Bulunan sembolik değişkenler, K_d matrisinde yerlerine konularak durum geribesleme matrisi elde edildi.

$$K_d = \begin{bmatrix} -24.4924 & 15.4635 & 0 \\ -36.8761 & 24.7669 & 0 \end{bmatrix} \quad (331)$$

(180) denkleminde (331) ve (263) bağıntıları yerleştirilerek çıkış geribesleme matrisi hesaplandı.

$$K_c = \begin{bmatrix} -24.4924 & 15.4635 \\ -36.8761 & 24.7669 \end{bmatrix} \quad (332)$$

Örnek 13’de verilen sistem (332) matrisiyle çıkış geribeslemeli olarak kontrol edildi. Bu kapalı çevrim matrisinin girişine referans işareti olarak sıfır uygulanıp Şekil 23’deki çıkış işaretleri elde edildi.



Şekil 23. ÇGÇÇ sistemlerde Sylvester denklemleri kullanılmasıyla çıkış geribeslemeli elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi

Örnek 22) Aynı algoritma Örnek 20’ de verilen (310), (311) ve (312) matrislerine uygulandı. Burada yerleştirmek istenen kutuplar $\Lambda = \{-3, -5, -10\}$ şeklinde verilsin. Bu kutuplardan biri olan ‘-10’ açık çevrim sisteminin kutuplarından biridir. Böylece açık çevrim ile kapalı çevrim kutuplarının çakışması sonucunda algoritmanın çalıştığı gösterilmektedir. Transfer fonksiyonu pay ve payda polinomlarından oluşan matrislere ayrıldı.

$$(sI - \tilde{A})^{-1} \tilde{B} = N(s)D^{-1}(s) \quad (333)$$

$$N(s) = \begin{bmatrix} 2s^2 - 48.1 & -s^2 - 99s + 100 \\ -8.86s - 8.86 & -18.62s - 1862 \\ s^2 - 19.62 & 0 \end{bmatrix} \quad (334)$$

$$D(s) = \begin{bmatrix} s^3 + 100s^2 - 19.62s - 1962 & 0 \\ 0 & s^3 + 100s^2 - 19.62s - 1962 \end{bmatrix} \quad (335)$$

(115) denkleminde verilen parametre matrisi sembolik değişkenlerden ve keyfi atanan parametrelerden oluşturuldu. Sembolik değişkenlerin sayısı $(n-m)*l$ adet kadar seçildi. Geri kalan matris elemanları keyfi istenen değerlerde seçildi. Bu parametre vektörleri (326), (327) ve (328) bağıntılarında verildiği gibi alındı. (110) denkleminde parametre vektörleri ile pay ve payda polinomlarından oluşan matrisler yerlerine yerleştirilerek V ve W matrisleri hesaplandı.

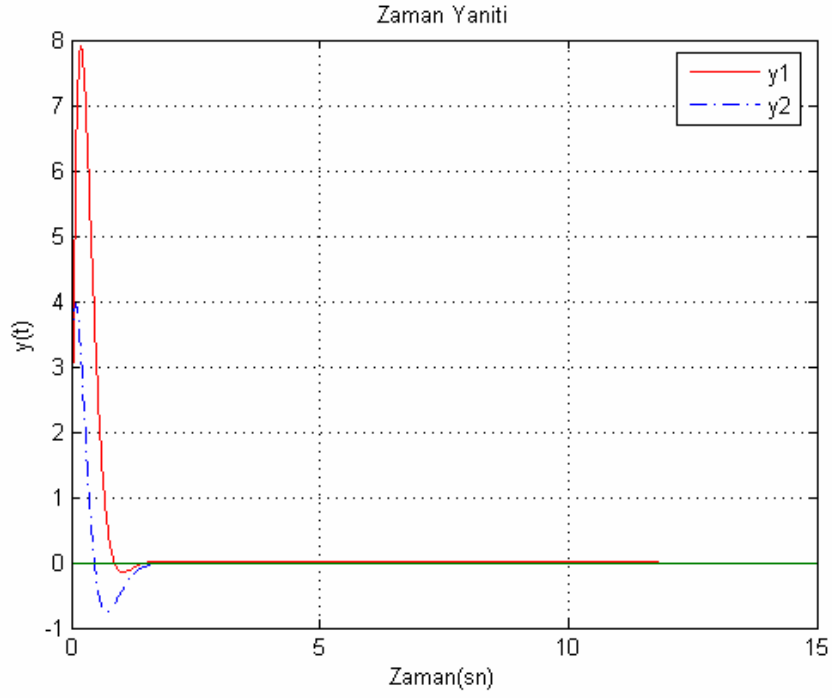
$$V = \begin{bmatrix} 151.9f_1 - 990 & 1.9f_2 + 570 & -418.1 \\ 79.74f_1 + 1675.8 & 35.44f_2 - 1768.9 & 1823.86 \\ 80.38f_1 & 5.38f_2 & -10.62 \end{bmatrix} \quad (336)$$

$$W = \begin{bmatrix} 7234.2f_1 & 511.1f_2 & -1030.14 \\ -7234.2 & 511.1 & 1034.14 \end{bmatrix} \quad (337)$$

(179) denkleminde K_d durum geribesleme matrisi f_1 ve f_2 sembolik değişkenlerine bağlı olarak elde edildi. (153) denklemini sağlayacak şekilde sembolik değişkenler hesaplandı. Bulunan sembolik değişkenler, K_d matrisinde yerlerine konularak durum geribesleme matrisi elde edildi. (180) denkleminde de çıkış geribesleme matrisine geçiş yapıldı.

$$K_d = \begin{bmatrix} -41.1239 & -8.8624 & 0 \\ -0.2477 & -0.6216 & 0 \end{bmatrix} \quad (338)$$

$$K_\xi = \begin{bmatrix} -41.1239 & -8.8624 \\ -0.2477 & -0.6216 \end{bmatrix} \quad (339)$$



Şekil 24. ÇGÇÇ sistemlerde Sylvester denklemleri kullanılmasıyla çıkış geribeslemeli elde edilen kapalı çevrim sisteminin sıfır giriş tepkisi

Örnek 19’da verilen sistem (339) matrisiyle çıkış geribeslemeli olarak kontrol edildi. Bu kapalı çevrim matrisinin girişine referans işareti olarak sıfır uygulanıp Şekil 24’deki çıkış işaretleri elde edildi.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada kontrol yöntemlerinden biri olan kutup yerleştirme problemi incelenmiştir. Besleme türüne göre durum ve çıkış geribesleme olmak üzere iki türe ayrılan kutup yerleştirme için var olan algoritmalar incelenmiş ve bunlara bağlı olarak yeni algoritmalar elde edilmiştir.

Bulgular bölümünde; incelenen tüm algoritmaların analizi yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar; durum geribeslemeli kutup yerleştirme probleminin, çıkış geribeslemeli kutup yerleştirme problemine göre daha az işlem gerektirdiğini ve daha verimli algoritmaların ortaya çıktığını göstermiştir.

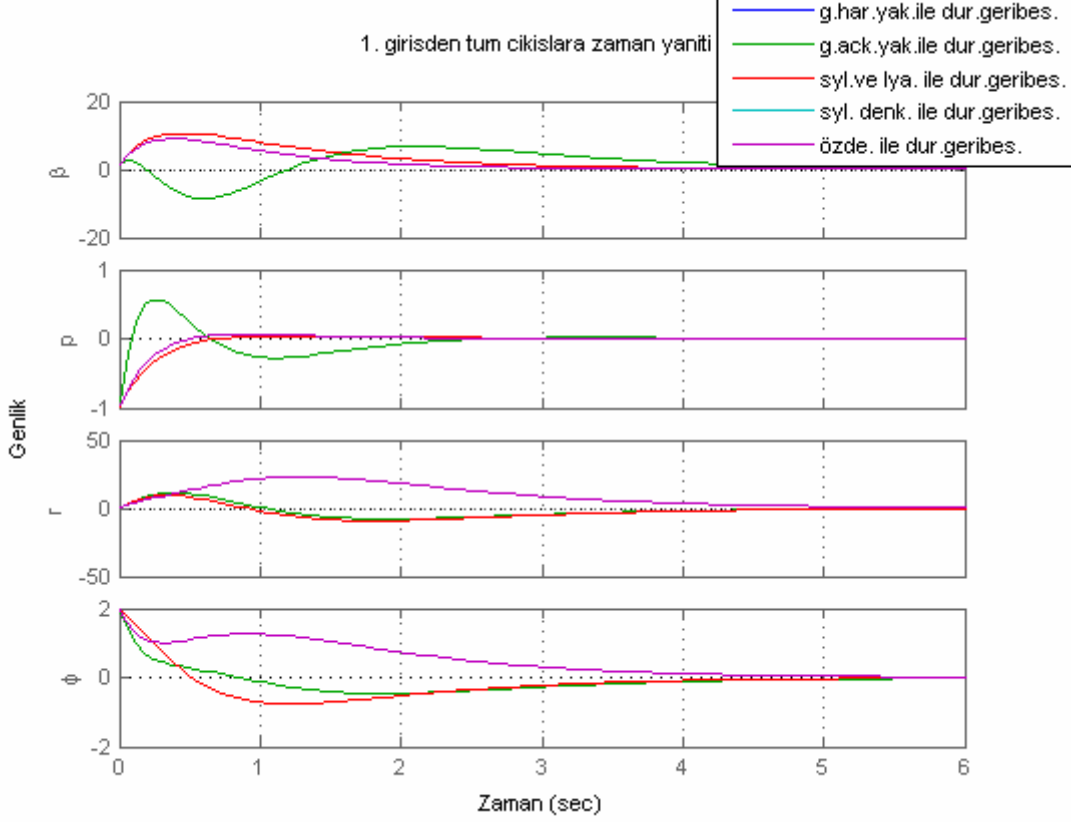
TGTÇ sistemler için incelenen durum geribeslemeli Ackermann formülü ve haritalama yaklaşımı algoritmaları karşılaştırıldığında ikisinin de aynı hızda çalıştığı ve aynı sonucu verdiği gözlenmektedir.

Tablo 1. ÇGÇG sistemlerde durum geribeslemeli kutup yerleştirme algoritmalarının durum sayısına göre hız değerleri

Algor. Durum sayısı	G. Hari. Yaklaş. (saniye)	G. Acke. Yaklaş. (saniye)	Sylv.ve Lya. Denk. (saniye)	Sylv. Denk. Kulla. (saniye)	Özvekt. Yarar. (saniye)
3	0.009	0.006	0.112	0.409	0.005
4	0.0187	0.009	0.187	0.615	0.006
5	0.023	0.01	0.14	0.943	0.009
6	0.078	0.015	0.24	1.593	0.0125

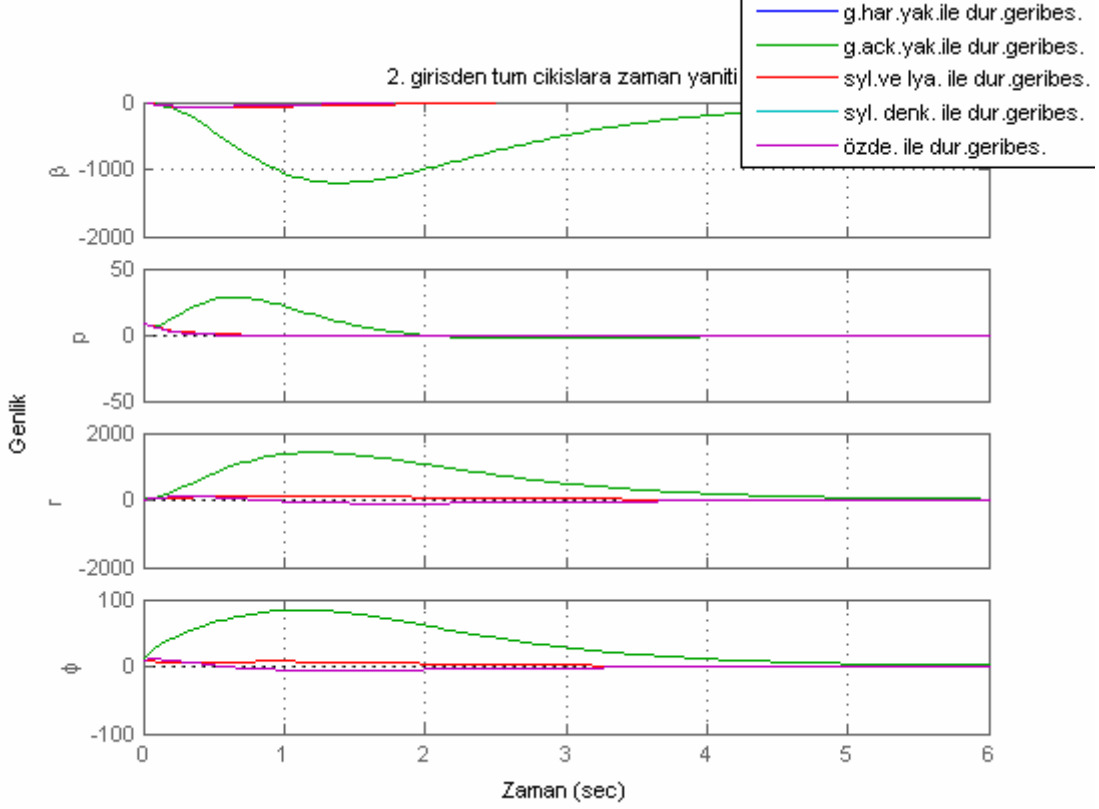
ÇGÇÇ sistemlerde durum geribeslemeli kutup yerleştirme için beş farklı algoritma aynı örnek üzerinde incelenmiştir. Çıkan sonuçlarda ilk dikkati çeken; genelleştirilmiş haritalama yaklaşımı ve Ackerman yaklaşımı algoritmalarından elde edilen sonuçlar tamamen aynıdır. Aynı şekilde; özvektörlerden ve Sylvester denklemlerinin çözümünden yararlanarak uygulanan iki yöntemin sonuçları da birbiriyle aynıdır. Bu algoritmalar arasında çok büyük fark olmamakla birlikte Sylvester denklemlerinden ve özvektörlerden yararlanarak uygulanan kutup yerleştirme algoritmalarının en verimli sonucu verdiği Şekil 25 ve 26' dan görülmektedir. Tablo 1'de ÇGÇÇ sistemler için durum geribeslemeli kutup yerleştirme algoritma hızlarının durum boyutuna göre değişimi verilmektedir. Tablo 1

incelenecek olursa en hızlı algoritmanın özvektörlerden yararlanarak uygulanan kutup yerleştirme algoritması olduğu görülür. Yine bu algoritmalar içinde en yavaş çalışan algoritmanın Sylvester denklemi kullanılarak elde edilen kutup yerleştirme algoritması olduğu görülmektedir.



Şekil 25. ÇGÇÇ sistemlerde durum geribeslemeli kutup yerleştirme için incelenen tüm algoritmaların 1. girişten tüm çıkışlara zaman yanıtı

Şekil 25 ve Şekil 26' da ÇGÇÇ sistemler için incelenen durum geribeslemeli kutup yerleştirme algoritmalarının tümü daha hassas inceleme yapılabilmesi için sırasıyla alınan girişlere göre tüm çıkışlar gösterildi. Bu şekiller (182) ve (204) matrisleri ile verilen sisteme tüm algoritmalarla elde edilen durum geribesleme matrislerinin uygulanmasıyla elde edilen çıkışlardır. İki şekilde de genelleştirilmiş Ackermann ve haritalama yaklaşımları ile elde edilen çıkış eğrileri üst üste bindiğinden ayırt edilememektedir. Yine aynı şekilde Sylvester denklemi kullanılarak ve özvektörlerden yararlanarak elde edilen çıkış eğrileri üst üste bindiğinden ayırt edilememektedir. Bunların sebebinin bu algoritmalarla elde edilen geribesleme matrislerinin aynı olmasından kaynaklanmaktadır.



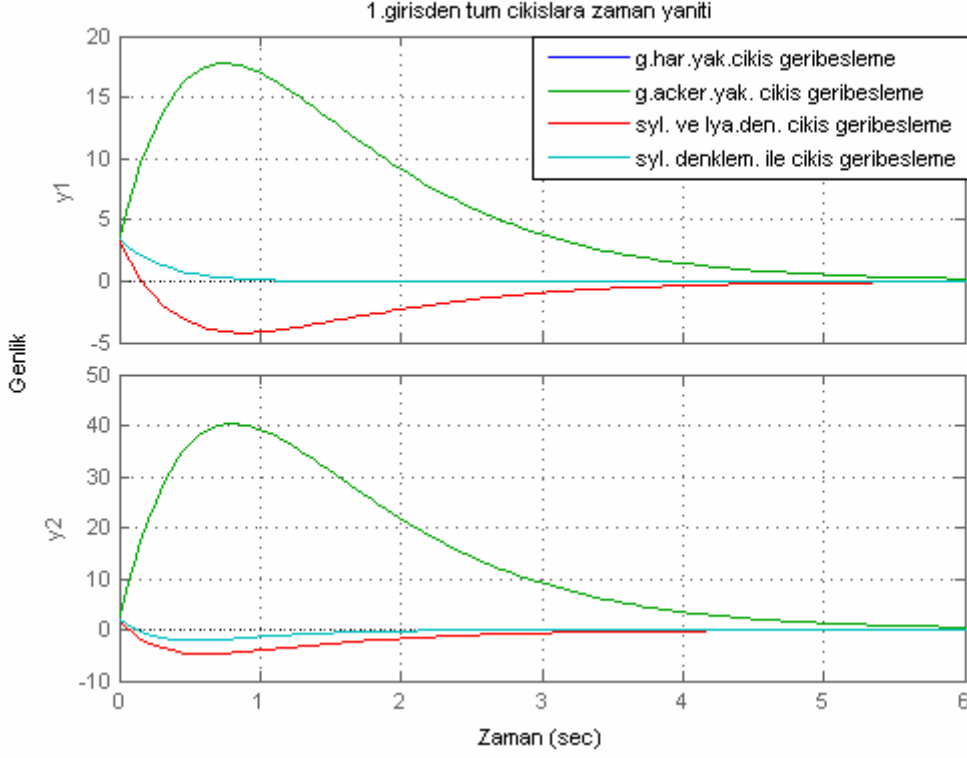
Şekil 26. ÇGÇÇ sistemlerde durum geribeslemeli kutup yerleştirme için incelenen tüm algoritmaların 2. girişten tüm çıkışlara zaman yanıtı

Tablo 2. Çıkış geribeslemeli kutup yerleştirme algoritmalarının hız değerleri

Algoritmalar Durum Sayısı	G. Harita. Yaklaşımı (saniye)	G. Acker. Yaklaşımı (saniye)	Sylvester ve Lya. Denk. (saniye)	Sylvester Denk. Kulla. (saniye)
3	0.6	0.5	1.2	1.5

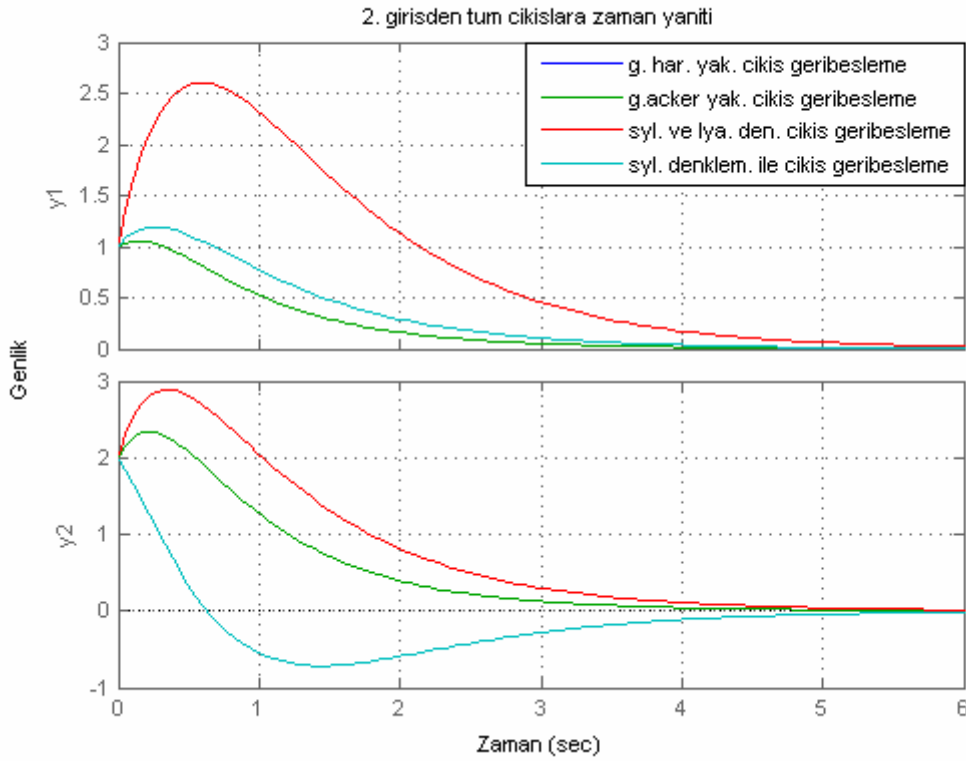
ÇGÇÇ sistemlerde çıkış geribeslemeli kutup yerleştirme algoritmalarından dört tanesi incelenmiştir. Tablo 2’de 3 durumlu bir sistem için bu dört algoritmanın hızları verilmiştir. Bunlardan geliştirilmiş Ackermann ve haritalama yaklaşımı aynı sonucu vermekle birlikte diğer iki algoritmaya göre daha hızlı algoritmalar. Geriye kalan Sylvester ve Lyapunov denklemlerinden yararlanarak elde edilen kutup yerleştirme algoritmasıyla, sadece Sylvester denkleminin çözümünden yararlanarak elde edilen kutup yerleştirme algoritması kendi aralarında karşılaştırıldığında; Sylvester ve Lyapunov denklemlerinden yararlanarak elde edilen algoritmanın daha hızlı olduğu gözlenmektedir. Şekil 27 ve 28’ den görüleceği üzere geliştirilmiş Ackermann ve haritalama yaklaşımı her iki giriş içinde aynı verimi göstermemektedir. Bunun yanında Sylvester ve Lyapunov

denklemleri ve Sylvester denklemleri ile çıkış geribeslemeli kutup yerleştirmede her iki giriş için daha verimli sonuçlar elde edildi. Buradan yola çıkılarak Sylvester denklemlerinden elde edilen algoritmanın en verimli algoritma olduğu söylenebilir.



Şekil 27. ÇGÇÇ sistemlerde çıkış geribeslemeli kutup yerleştirme için incelenen tüm algoritmaların 1. girişten tüm çıkışlara doğru zaman yanıtı

Şekil 27 ve 28’de elde edilen sonuçlar (257), (258) ve (259) matrisleri ile verilen sisteme tüm algoritmalarla elde edilen çıkış geribesleme matrislerinin uygulanmasıyla elde edilen çıkışlardır. Verilen iki şekilde de genelleştirilmiş Ackermann ve haritalama yaklaşımının uygulanmasıyla elde edilen sonuçlar aynı olduğundan çıkış eğrileri üst üste çakışmıştır. Bu nedenle sadece bir eğri gözükmemektedir.



Şekil 28. ÇGÇÇ sistemlerde çıkış geribeslemeli kutup yerleştirme için incelenen tüm algoritmaların 2. girişten tüm çıkışlara doğru zaman yanıtı

Sonuç olarak; durum geribesleme için incelenen algoritmalar hız ve algoritmaların sonuçları değerlendirildiğinde özvektörlerden yararlanarak elde edilen kutup yerleştirme algoritması tercih edilir. Çıkış geribesleme için incelenen algoritmalar ise işlem yükünün az olmasından dolayı geliştirilmiş Ackermann ve geliştirilmiş haritalama yaklaşımı tercih edilirken, alınan sonuçlar değerlendirildiğinde Sylvester denkleminde yararlanarak elde edilen kutup yerleştirme algoritması tercih edilmektedir.

5. ÖNERİLER

Bu çalışmanın amacı uzun yıllardan beri süre gelen kutup yerleştirme problemi ile ilgili daha verimli algoritmalar üretmektir.

Durum geribeslemeli kutup yerleştirmede seçilen parametreler herhangi bir amaç fonksiyonu kullanarak parametrelerin değerlerinin tayin edilmesiyle dayanıklı denetleyici tasarımına gidilebilir.

Statik çıkış geribeslemeli kutup yerleştirmeden dinamik çıkış geribeslemeye burada verilen algoritmalarla geçiş yapılabilir. Böylece sistem girişinin değişmesinin kontrolde önem kazandığı uygulamalarda geribesleme matrisinin dinamik seçilmesiyle daha kararlı sistemler elde edilebilir.

6. KAYNAKLAR

1. Apkarian, P.R., Structured Stability Robustness Improvement by Eigenspace techniques: a Hybrid Methodology, Journal of Guidance, Control and Dynamics, 12, 2 (1989) 162-168.
2. Andry, A. N., Shapiro, E. Y. ve Chung, J. C., Eigenstructure Assignment for Linear Systems, IEEE Transactions Aerospace and Electronic Systems, 19, 5 (1983) 711-729 .
3. Sobel, K.M. ve Shapiro, E.Y., A Design Methodology for Pitch Pointing Flight Control Systems, Journal of Guidance, Control and Dynamics, 8, 2 (1985) 181-187.
4. Sobel, K.M. ve Shapiro, E.Y., Eigenstructure Assignment for Design of Multimode Flight Control Systems, IEEE Control Systems Magazine, 5, 2 (1985) 9-15.
5. Sobel, K.M. ve Shapiro, E.Y., Application of Eigenstructure Assignment to Flight Control Design Some Extensions, Journal of Guidance, Control and Dynamics, 10, 1 (1987) 73-81.
6. Sobel, K.M. ve Cloutier, J.R., Eigenstructure Assignment for the Extended Medium Range Air-to-Air Missile, Journal of Guidance, Control and Dynamics, 15, 2 (1992) 579-531.
7. Wonham, W. M., On pole assignment in multi-input controllable linear systems, IEEE Transactions on Automatic Control, 12, 6 (1967) 660-665.
8. Young, P. C. ve Willems, J. C., An Approach to the Linear Multivariable Servomechanism Problem, International Journal of Control, 15, 5 (1972) 961-979.
9. Ackermann, J., Der Entwurf Linearer Regelungssysteme im Zustandsraum, Regelungstech. Und Prozess-Daten, 7 (1972) 297-300.
10. Mayne, D. Q. ve Murdoch, P., Modal Control of Linear Time Invariant Systems, International Journal of Control, 11, 2 (1970) 223-227.
11. Bhattacharyya, S.P. ve De Sousa, E., Pole Assignmet via Sylvester's Equation, System Control Letter, 1, 4 (1982) 261-263.

12. Gourishankar, V. ve Ramar, K., Pole Assignment with Minimum Eigenvalue Sensitivity to Plant Parameter Variations, International Journal of Control, 23, 4 (1976) 493-504.
13. Söylemez, M. T. ve Munro, N., A Note on Pole Assignment in Uncertain Systems, International Journal of Control, 66, 4 (1997) 487-498.
14. Söylemez, M.T., Pole Assignment for Uncertain Systems, Research Studies Press Ltd., Hetfordshire, 1999.
15. Jameson, A., Design of a Single-Input System for Specified Roots Using Output Feedback, IEEE Transactions on Automatic Control, 15, 3 (1970) 345-348.
16. Davison, E. J., On Pole Assignment in Linear Systems with Incomplete State Feedback, IEEE Transactions on Automatic Control, 15 (1970) 348-351.
17. Davison, E. J. ve Chatterjee, R., A Note on Pole Assignment in Linear Systems with Incomplete State Feedback, IEEE Transactions on Automatic Control, 16 (1971) 98-99.
18. Sridhar, B. ve Lindorff, D.P., A Note on Pole Assignment, IEEE Transactions on Automatic Control, 18, 5 (1972) 822-823.
19. Kimura, H., Pole Assignment by Gain Output Feedback, IEEE Transactions on Automatic Control, 20 (1975) 509-516.
20. Davison, E.J. ve Wang, S.H., On Pole Assignment in Linear Multivariable Systems Using Output Feedback, IEEE Transactions on Automatic Control, 15 (1975) 516-518.
21. Kimura, H., A Further Result on the Problem of Pole Assignment by Output Feedback, IEEE Transactions on Automatic Control, 22 (1977) 458-463.
22. Munro, N. ve Vardulakis, A., Pole-shifting Using Output Feedback, International Journal of Control, 18, 6 (1973) 1267-1273.
23. Munro, N., Further Results on Pole-shifting Using Output Feedback, International Journal of Control, 20, 5 (1974) 775-786.
24. Vardulakis, A. I., A Sufficient Condition for n Specified Eigenvalues to be Assigned Under Constant Output Feedback, IEEE Transactions on Automatic Control, 20 (1975) 428-429.
25. Vardulakis, A. I., Generalized Root Locus Assignment of All the Poles of a Multivariable System by Output Feedback, International Journal of Control, 23, 1 (1976) 39-47.

26. Tarokh, M., Approach to Pole Assignment by Centralised and Decentralised Output Feedback, IEE Proceedings, 136, 2 (1989) 89-97.
27. Duan, G.R., Simple Algorithm for Robust Pole Assignment In Linear Output Feedback, IEE Proceedings-D, 139, 5 (1992) 465-469.
28. Lee, T. H., Wang, G. ve Koh, E.K., An Iterative Algorithm for Pole Placement by Output Feedback, IEEE Transactions on Automatic Control, 39, 3 (1994) 565-568.
29. Alexandridis, A. T. ve Paraskevopoulos, P. N., A New Approach to the Eigenstructure Assignment By Output Feedback, IEEE Transactions on Automatic Control, 41, 7 (1996) 1046-1050.
30. Söylemez, M. T. ve Munro, N. , A New Technique for Partial Pole Placement Using Constant Output-Feedback, IEEE Conference on Decision and Control, Florida, 1998.
31. Fu, M., Pole Placement via Static Output Feedback is NP-Hard, IEEE Transactions on Automatic Control, 49, 5 (2004) 855-857.
32. Bachelier, O., Bosche, J. ve Mehdi, D., On Pole Placement via Eigenstructure Assignment Approach, IEEE Transactions on Automatic Control, 51, 9 (2006) 1554-1558.
33. Symros, V.L. ve Lewis, F.L., A Bilinear Formulation for the Output Feedback Problem in Linear Systems, IEEE Transactions on Automatic Control, 39, 2 (1994) 410-414.
34. Heymann, M., Comments 'On Pole Assignment in Multi-Input Controllable Linear Systems', IEEE Transactions on Automatic Control, 12 (1968) 748-749.
35. Tsui, C.C., A Complete Analytical Solution to the Equation $TA-FT=LC$ and its Applications, IEEE Transactions on Automatic Control, 32 (1987) 742-744.
36. Duan, G. R., Solutions of the Equation $AV+BW=VF$ and Their Application to Eigenstructure Assignment in Linear Systems, IEEE Transactions on Automatic Control, 38, 2 (1993) 276-280.
37. Patel, R.V., On Output Feedback Pole Assignability, International Journal of Control, 20, 6 (1974) 955-959.
38. Kıyak, E. ve Kahvecioğlu, A., Uçuş Kontrol Sisteminde Gözleyici Kullanarak Arıza Tespiti, Havacılık ve Uzay Teknolojileri Dergisi, 2, 4 (2006) 15-22.
39. Dorf, R. C. ve Bishop, R.H., Modern Control Systems, Ninth Edition, Prentice-Hall, New Jersey, 2001.

7. EKLER

Ek 1. Ackermann Formülünü Kullanarak k Durum Geribesleme Matrisini Bulan Program

```
function [k]=akt(A,b,p)
%kontrol edilebilirlik matrisini hesaplayıp, ej vektör matrisi ile çarpımını yapıyor
C_0=C0(A,b);
alfa=poly(p);
Fik=0;
n=length(A);
l=n+1;
for i=0:n
    Fik=(A^i)*alfa(l)+Fik;
    l=l-1;
end
k=C_0*Fik;
```

Ek 2. Haritalama Yaklaşımı ile k Durum Geribesleme Matrisini Bulan Program

```

function [K]=mapdgsiso(A,b,p)
n=length(A);
boyb=length(b);
if(n~=boyb)
    disp('Girilen matris boyutlarına dikkat ediniz!!!!');

else
% X in elde edilmesi
    a=poly(A);
    x=pbul(a);
%S kontrol edilebilirlik matrisinin elde edilmesi
    k=0;
    for i=1:n
        S(:,i)=(A^k)*b;
        k=k+1;
    end
% açık ve kapalı çevrim katsayıları arasındaki fark vektörü d'nin elde edilmesi
    alfa=poly(p);
    d=alfa-a;
    l=1;
    for i=2:n+1
        ds(l,:)=d(:,i);
        l=l+1;
    end
end
K=(inv((S)')*inv(x)*ds)';

```

Ek 3. Genelleştirilmiş Haritalama Yaklaşımı ile K Durum Geribesleme Matrisini Bulan Program

```

function [K]=mapdg(A,B,p)
n=length(A);
boyB=size(B);l=boyB(2);
% serbest parametre seçimi yapılarak Kj elde ediliyor
Kj=zeros(l,n);
for i=1:l-1
    for j=1:n
        Kj(i,j)=input('durum geribesleme matrisinin rastgele katsayılarını giriniz:');
    end
end
% Sistemin bir girişi alınarak haritalama yaklaşımıyla kj elde ediliyor
Aj=A-B*Kj;
bj=B(:,l);
a=poly(Aj);
x=pbul(a)
k=0;
for i=1:n
    S(:,i)=(Aj^k)*bj;
    k=k+1;
end
alfa=poly(p);
d=alfa-a;
k=1;
for i=2:n+1
    ds(k,:)=d(:,i);
    k=k+1;
end

k=inv((S)')*inv(x)*ds;
ej=zeros(l,1);
ej(1,1)=1;
K=Kj+ej*(k);

```

Ek 4. Sylvester ve Lyapunov Denklemleri ile K Durum Geribesleme Matrisini Bulan Program

```

function [K]=slvdg(A,B,p)
n=length(A);
boyB=size(B);l=boyB(2);
% jordan kanonik forma dönüştürme
for i=1:n
    r(i)=imag(p(i));
end
oo=zeros(1,n);
if r==oo
    Akc=joca(p);
else
    for i=1:n
        for j=1:n
            Akc(i,j)=input('Akc matris eleman degerlerini gir:');
        end
    end
end
%Kronecker carpma
I=eye(n);
Xa=kron(-A,I)+kron(I,Akc');
%M matrisi oluşturuluyor
for i=1:l
    for j=1:n
        M(i,j)=input('M matrisini olusturunuz:');
    end
end
G=-B*M;
k=1;
for i=1:n
    for j=1:n
        g(k,1)=G(i,j);
    end
end
t=inv(Xa)*g;
k=1;
for i=1:n
    for j=1:n
        T(i,j)=t(k,1);
        k=k+1;
    end
end
K=M*inv(T);

```

Ek 5. Sylvester Denklemi Kullanılarak K Durum Geribesleme Matrisini Bulan Program

```

function [K]=slvyyydg(A,B,p)
n=length(A);
boyB=size(B);l=boyB(2);
I=eye(n);
Ii=eye(l);
% serbest parametre seçimi yapılarak F elde ediliyor
for i=1:l
    for j=1:n
        F(i,j)=input('parametre matrisinin rastgele katsayılarını giriniz:');
    end
end
% pay ve payda polinom matrisleri elde ediliyor
s=sym('s','real');
N=inv(s*I-A)*det(s*I-A)*B;
N=simple(N);
D=det(s*I-A)*Ii;
D=simple(D);
W=zeros(l,n);
V=zeros(n);
for i=1:n
    s=sym('s','real');
    N=inv(s*I-A)*det(s*I-A)*B;
    D=det(s*I-A)*Ii;
    N=subs(N,s,p(i));
    D=subs(D,s,p(i));
    W(:,i)=D*F(:,i);
    V(:,i)=N*F(:,i);
end
W=double(W);
V=double(V);
K=-W*inv(V);

```

Ek 6. Özvektörlerden Yararlanarak K Durum Geribesleme Matrisini Bulan Program

```

function [K]=katli_dgky(A,B,p)
n=length(A);
boyB=size(B);l=boyB(2);
m=1;d=1;
fib=zeros(n,n);
ej=zeros(1,n);
I=eye(n,n);
% ej nin elde edilmesi
for j=1:n
    for i=1:l
        ej(i,j)=0;
        ej(d,j)=1;
    end
    d=d+1;
    if d==l+1
        d=1;
    end
end
ej
g=1; k=0; s=1; u=0;y=1;o=n;
% katlı kök olup olmadığının kontrolü
while n>0
    for j=y:o
        if p(g)==p(j)
            k=k+1;
        end
    end
    t(s)=k;
    g=g+k;
    s=s+1;
    y=y+k;
    k=0;
end
% fib matrisinin elde edilmesi
f=1;c=0;m=0;r=0;h=0
for i=1:s-1
    r=t(i)-1;h=h+1;
    for w=1:h
        c=t(w)+c;
    end
    f=c-t(i)+1;
    u=r;
    for j=u+1:-1:1
        m=r;
    end
end

```

Ek 6' in devamı

```
for d=1:r+1
    fib(:,c)=((-1)^m)*((p(f)*I-A)^-(m+1))*B*ej(:,f)+fib(:,c);
    m=m-1 ;
    f=f+1;
end
r=r-1;
c=c-1;
f=c-r;
end
c=0;
end
K=-ej*inv(fib);
```


Ek 7. Genelleştirilmiş Haritalama Yaklaşımından Yararlanarak K Çıkış Geribesleme Matrisini Bulan Program

```

function [K]=mapcg(A,B,C,p)
n=length(A);
boyB=size(B);l=boyB(2);
boyC=size(C);m=boyC(1);
% T donusum matrisi elde edilmesi
C1=zeros(m,m);
C2=zeros(m,l-m);
for i=1:m
    for j=1:m
        C1(i,j)=C(i,j);
    end
end
for i=1:m
    for j=1:n-m
        C2(i,j)=C(i,j+m);
    end
end
II=eye(n-m);
o=zeros(n-m,m);
T=[inv(C1) -inv(C1)*C2;o II];
% benzerlik dönüşümü ile sistemin dönüştürülmesi
Ad=inv(T)*A*T;
Bd=inv(T)*B;
Cd=C*T;
Cdt=Cd'*inv(Cd*Cd');
%Kj durum geribesleme matrisi oluşturuluyor.
f=n-m;
for i=1:n-m
    Kj(1,i)=sym(['k' num2str(i)],'real');
    k(i)=sym(['k' num2str(i)],'real');
end
for i=n-m+1:m
    Kj(1,i)=input('durum geribesleme matrisinin rastgele katsayılarını giriniz:');
end
for i=m+1:n
    Kj(1,i)=0;
end
for i=2:l-1
    for j=1:m
        Kj(i,j)=input('durum geribesleme matrisinin rastgele katsayılarını giriniz:');
    end
end
for i=1:n
    Kj(l,i)=0;
end

```

Ek 7'in devamı

```

% sistem bir girişi seçilerek kj elde ediliyor
Aj=Ad-Bd*Kj
d=poly(Aj);
bj=Bd(:,1);
zz=0;
for i=1:n
    fi(:,i)=(Aj^zz)*bj;
    zz=zz+1;
end
fi=simple(fi);
pjs=poly(p);
pjss=pjs-d;
r=1;
for i=2:n+1
    ds(r,:)=pjss(:,i);
    r=r+1;
end
ds=simple(ds);
%alt üçgen toeplitz matris olan x oluşturuluyor
x=simple(pbul2(d));
%kj alt satır vektörü bulunuyor
kj=(simple(inv((fi')))*inv(x)*ds)'
% Kd durum geribesleme matrisi elde ediliyor
ej=zeros(1,1);
j=1;
ej(1,1)=1
Kd=Kj+ej*(kj);
% sembolik değişkenlerin değeri hesaplanıyor
r=n-f+1;
for i=1:f
    h(i)=simple(Kd(1,r));
    r=r+1;
end
h=simple(h);
if f==1
for i=1:f
    s(i)=sym(['s' num2str(i)],'real');
end
d=solve(h(1),k(1));
s(1)=d(1);
for i=1:f
    Kd=subs(Kd,k(i),s(i));
end
Kd;
else
for i=1:f
s(i)=sym(['s' num2str(i)],'real');

```

Ek 7'in devamı

```
end
d=solve(h(1),k(1));
s(1)=d(1);
for i=2:f
    h(i)=subs(h(i),k(i-1),s(i-1));
    h=simple(h);
    d=solve(h(i),k(i));
    s(i)=d(1);
end
for i=f-1:1
    h(i)=subs(h(i),k(i+1),s(i+1));
    h=simple(h);
    d=solve(h(i),k(i));
    s(i)=d(1);
end
s=double(s);
for i=1:f
    Kd=subs(Kd,k(i),s(i));
end
end
Kd=double(Kd);
% Kd durum geribesleme matrisinden Kç çıkış geribesleme matrisine geçiliyor
K=Kd*Cdt;
```

Ek 8. Genelleştirilmiş Ackermann Yaklaşımı ile K_d Durum Geribesleme Matrisini Bulan Program

```

function [K]=geacdu(A,B,p)
n=length(A);
boyB=size(B);l=boyB(2);
% serbest parametre seçimi yapılarak Kj elde ediliyor
Kj=zeros(l,n);
for i=1:l-1
    for j=1:n
        Kj(i,j)=input('durum geribesleme matrisinin rastgele katsayılarını giriniz:');
    end
end
% Sistemin bir girişi alınarak ackermann yaklaşımıyla kj elde ediliyor
Aj=A-B*Kj;
bj=B(:,l);
boyutAj=length(Aj);
boyutbj=length(bj);
if(boyutAj~=boyutbj)
    disp('Girilen matris boyutlarına dikkat ediniz!!!!');
else
    for i=1:n
        if(i==1)
            Sj(:,i)=bj;
            continue;
        end
        Sj(:,i)=Aj^(i-1)*bj;
    end
end
end
for i=1:n
    if(i~=n)
        en(1,i)=0;
    else
        en(1,i)=1;
    end
end
end
alfa=poly(p);
Fik=0;
k=n+1;
for i=0:n
    Fik=(Aj^i)*alfa(k)+Fik;
    k=k-1;
end
kj=en*inv(Sj)*Fik
ej=zeros(l,1);
ej(1,1)=1;
K=Kj+ej*(kj);

```

Ek 9. Genelleştirilmiş Ackermann Yaklaşımından Yararlanarak K_ç Çıkış Geribesleme Matrisinin Bulan Program

```

function [K]=akcgy(A,B,C,p)
n=length(A);
boyB=size(B);l=boyB(2);
boyC=size(C);m=boyC(1);
% T donusum matrisi elde edilmesi
C1=zeros(m,m);
C2=zeros(m,n-m);
for i=1:m
    for j=1:m
        C1(i,j)=C(i,j);
    end
end
for i=1:m
    for j=1:n-m
        C2(i,j)=C(i,j+m);
    end
end
II=eye(n-m);
o=zeros(n-m,m);
Tt=[inv(C1) -inv(C1)*C2;o II];
% benzerlik dönüşümü ile sistemin dönüştürülmesi
Ad=inv(Tt)*A*Tt;
Bd=inv(Tt)*B;
Cd=C*Tt;
Cdt=Cd'*inv(Cd*Cd');
%Kj durum geribesleme matrisi oluşturuluyor
f=n-m;
for i=1:f
    Kj(1,i)=sym(['k' num2str(i)],'real');
    k(i)=sym(['k' num2str(i)],'real');
end
for i=f+1:m
    Kj(1,i)=input('durum geribesleme matrisinin rastgele katsayılarını giriniz:');
end
for i=m+1:n
    Kj(1,i)=0;
end
for i=2:l-1
    for j=1:m
        Kj(i,j)=input('durum geribesleme matrisinin rastgele katsayılarını giriniz:');
    end
end
for i=1:n
    Kj(l,i)=0;
end
% sistem bir girişi seçilerek kj elde ediliyor

```

Ek 9' un devamı

```

Aj=Ad-Bd*Kj;
bj=Bd(:,l)
C_0=col(Aj,bj);
a=poly(p);
F=0
zz=n+1;
for i=0:n
    F=(Aj^i)*a(zz)+F;
    zz=zz-1;
end
kj=C_0*F;
% Kd durum geribesleme matrisi elde ediliyor
ej=zeros(1,1);
ej(1,1)=1;
Kd=Kj+ej*(kj);
% sembolik degiskenlerin degeri hesaplanıyor
zz=n-f+1;
for i=1:f
    h(i)=simple(Kd(1,zz));
    zz=zz+1;
end
h=simple(h);
if f==1
for i=1:f
    s(i)=sym(['s' num2str(i)],'real');
end
d=solve(h(1),k(1));
s(1)=d(1);
for i=1:f
    Kd=subs(Kd,k(i),s(i));
end
Kd;
else
    for i=1:f
        s(i)=sym(['s' num2str(i)],'real');
    end
    d=solve(h(1),k(1));
    s(1)=d(1);
    for i=2:f
        h(i)=subs(h(i),k(i-1),s(i-1));
        h=simple(h);
        d=solve(h(i),k(i));
        s(i)=d(1);
    end
    for i=f-1:1
        h(i)=subs(h(i),k(i+1),s(i+1));
        h=simple(h);
    end

```

Ek 9'un devamı

```
d=solve(h(i),k(i));
s(i)=d(1);
end
s=double(s);
for i=1:f
    Kd=subs(Kd,k(i),s(i));
end
end
Kd=double(Kd);
% Kd durum geribesleme matrisinden Kç çıkış geribesleme matrisine geçiliyor
K=Kd*Cdt;
```

Ek 10. Sylvester ve Lyapunov Denklemlerinden Yararlanarak K_c Çıkış Geribesleme Matrisini Bulan Program

```

function [K]=slvcgy(A,B,C,p)
n=length(A);
boyB=size(B);l=boyB(2);
boyC=size(C);m=boyC(1);
% Tt dönüşüm matrisinin elde edilmesi
C1=zeros(m,m);
C2=zeros(m,n-m);
for i=1:m
    for j=1:m
        C1(i,j)=C(i,j);
    end
end
for i=1:m
    for j=1:n-m
        C2(i,j)=C(i,j+m);
    end
end
II=eye(n-m);
o=zeros(n-m,m);
Tt=[inv(C1) -inv(C1)*C2;o II]
Ad=inv(Tt)*A*Tt;
Bd=inv(Tt)*B;
Cd=C*Tt;
% jordan kanonik forma dönüştürme
for i=1:n
    q(i)=imag(p(i));
end
oo=zeros(1,n);
if q==oo
    Ac=joca(p);

else
    for i=1:n
        for j=1:n
            Ac(i,j)=input('Ac matris eleman degerlerini gir:');
        end
    end
end
Ac;
%M matrisi oluşturuluyor
f=(n-m)*1;
d=ceil(f/n);
for i=1:f
    r(i)=sym(['r' num2str(i)],'real');
end
end

```


Ek 10' un devamı

```

zz=1;
for j=1:d-1
    for i=1:n
        M(j,i)=r(zz);
        zz=zz+1;
    end
end
for j=d:d
    for i=1:(f-((d-1)*n))
        M(j,i)=r(zz);
        zz=zz+1;
    end
end
for j=d:d
    for i=(f-((d-1)*n))+1:n
        M(j,i)=input('M matrisinin rastgele katsayilarini giriniz:');
    end
end
for i=d+1:l
    for j=1:n
        M(i,j)=input('M matrisinin rastgele katsayilarini giriniz:');
    end
end
M;
%G matrisi elde ediliyor
G=-Bd*M;
zz=1;
for i=1:n
    for j=1:n
        g(zz,1)=G(i,j);
        zz=zz+1;
    end
end
g=simple(g)
%kronecker çarpımla Xa elde ediliyor
I=eye(n);
Xa=kron(-Ad,I)+kron(I,Ac');
Xat=inv(Xa);
%T matrisi elde ediliyor
t=inv(Xa)*g;
zz=1;
for i=1:n
    for j=1:n
        T(i,j)=t(zz,1);
        zz=zz+1;
    end
end
end

```

Ek 10' un devamı

```

Cdt=Cd'*inv(Cd*Cd');
%Ks matrisinin bilinmeyenleri elde ediliyor
Ks=M*inv(T);
Ks=simple(Ks)
for i=1:3
Ks=simple(Ks);
end
Ks
zz=1;
for j=1:l
    for i=m+1:n
        h(zz)=simple(Ks(j,i));
        zz=zz+1;
    end
end
h=simple(h);
for i=1:f
    s(i)=sym(['s' num2str(i)],'real');
end
d=solve(h(1),r(1));
s(1)=d(1);
for i=2:f
    h(i)=subs(h(i),r(i-1),s(i-1));
    h=simple(h);
    d=solve(h(i),r(i));
    s(i)=d(1);
end
s(f)=double(s(f));
for i=f-1:1
    h(i)=subs(h(i),r(i+1),s(i+1));
    h=simple(h);
    d=solve(h(i),r(i));
    s(i)=d(1);
end
s=double(s);
for i=1:f
    Ks=subs(Ks,r(i),s(i));
end
Ks=double(Ks);
K=Ks*Cdt;

```

Ek 11. Sylvester Denkleminde Yararlanarak K_{∞} Çıkış Geribesleme Matrisini Bulan Program

```

function [K]=slycg(A,B,C,p)
n=length(A);
boyB=size(B);l=boyB(2);
boyC=size(C);m=boyC(1);
I=eye(n);
% F matrisinin elde edilmesi
zz=(n-m)*1;
d=ceil(zz/n);
for i=1:zz
    f(i)=sym(['f' num2str(i)],'real');
end
nn=1;
for j=1:d-1
    for i=1:n
        F(j,i)=f(nn);
        nn=nn+1;
    end
end
for j=d:d
    for i=1:(zz-((d-1)*n))
        F(j,i)=f(nn);
        nn=nn+1;
    end
end
for j=d:d
    for i=(zz-((d-1)*n))+1:n
        F(j,i)=input('F matrisinin rastgele katsayılarını giriniz:');
    end
end
for i=d+1:l
    for j=1:n
        F(i,j)=input('F matrisinin rastgele katsayılarını giriniz:');
    end
end
F
% Benzerlik dönüşüm matrisi ile sistemin dönüştürülmesi
C1=zeros(m,m);
C2=zeros(m,n-m);

for i=1:m
    for j=1:m
        C1(i,j)=C(i,j);
    end
end
for i=1:m
    for j=1:n-m

```

Ek 11'in devamı

```

    C2(i,j)=C(i,j+m);
end
end
II=eye(n-m);
o=zeros(n-m,m);
Tt=[inv(C1) -inv(C1)*C2;o II];
Ad=inv(Tt)*A*Tt;
Bd=inv(Tt)*B;
Cd=C*Tt;
% pay ve payda polinomunun hesabı
Ii=eye(l);
for i=1:n
    s=sym('s','real');
    N=inv(s*I-Ad)*det(s*I-Ad)*Bd;
    N=simple(N)
    D=det(s*I-Ad)*Ii;
    D=simple(D)
    N=subs(N,s,p(i));
    D=subs(D,s,p(i));
    W(:,i)=D\F(:,i);
    V(:,i)=N\F(:,i);
End
W=simple(W)
V=simple(V)
% Kd durum geribesleme matrisinin elde edilmesi
Kd=-W*inv(V);
Kd=simple(Kd);
Cdt=Cd*inv(Cd*Cd');
qq=1;
for j=1:l
    for i=m+1:n
        h(qq)=simple(Kd(j,i));
        qq=qq+1;
    end
end
h=simple(h)
for i=1:zz
    s(i)=sym(['s' num2str(i)],'real');
end
d=solve(h(1),f(1));
s(1)=d(1);
for i=2:zz
    h(i)=subs(h(i),f(i-1),s(i-1));
    h=simple(h);
    d=solve(h(i),f(i));
    s(i)=d(1);
end
end

```

Ek 11'in devamı

```
s(zz)=double(s(zz));
for i=m-1:1
    h(i)=subs(h(i),f(i+1),s(i+1));
    h=simple(h);
    d=solve(h(i),f(i));
    s(i)=d(1);
end
s=double(s);
for i=1:zz
    Kd=subs(Kd,f(i),s(i));
end
Kd=double(Kd);
% durum geribesleme matrisinden çıkış geribesleme matrisine geçiş
K=Kd*Cdt;
```

Ek 12. Moore-Penrose Genelleştirilmiş Ters Alma Yöntemi

Sahte ters alma (pseudo inverse) yöntemi olarak da adlandırılan ters alma işlemi kare olmayan matrislerin tersini almakta kullanılır. A matrisinin sahte tersi olarak gösterilen A^+ aşağıdaki kriterleri sağlamak zorundadır:

$$AA^+A = A \quad (\text{E.1})$$

$$A^+AA^+ = A^+ \quad (\text{E.2})$$

$$(AA^+)^* = AA^+ \quad (\text{E.3})$$

$$(A^+A)^* = A^+A \quad (\text{E.4})$$

A^+ 'nin özellikleri ise

1. $(A^+)^+ = A$
2. Sahte ters A^+ transpoze eşlenik ve eşlenik transpozuyla işlem sırasına göre yerdeğiştirebilir.
3. $(A^*)^+ = (A^+)^*$
4. α skaler bir büyüklük olmak üzere
5. $(\alpha A)^+ = \alpha^{-1}A^+$ ($\alpha \neq 0$ olmak koşuluyla)

şeklinde olur.

Eğer A 'nın sütunları lineer bağımsızsa A^*A 'nın tersi alınabilir. Bu durumda formül

$$A^+ = (A^*A)^{-1}A^* \quad (\text{E.5})$$

olur. A 'nın sol tersi A^+ olduğuna göre

$$A^+A = I \quad (\text{E.6})$$

elde edilir. Şayet A 'nın satırları lineer bağımsızsa AA^* 'nin tersi alınabilir. Bu durumda formül

$$A^+ = A^*(AA^*)^{-1} \quad (\text{E.7})$$

şeklinde olur. A 'nın sağ tersi A^+ olduğuna göre

$$AA^+ = I \quad (\text{E.8})$$

elde edilir. Vektörlerin de sahte tersleri alınabilir. Eğer x vektör ise

$$x^+ = \begin{cases} 0^T, & x = 0 \\ \frac{x^*}{x^*x}, & x \neq 0 \end{cases} \quad (\text{E.9})$$

bağıntısıyla tersi alınabilir.

ÖZGEÇMİŞ

Selda GÜNEY, 1982 yılında Erzurum' da doğdu. İlk ve Orta Öğrenimini Samsun'a bağlı Çarşamba ilçesinde Yeşilirmak İlkokulu ve Çarşamba Anadolu Lisesinde tamamladı. 1999 yılında Manisa'ya bağlı Salihli ilçesinde Sekine Evren Anadolu Lisesinden mezun oldu. 1999 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümünü kazandı. 2004 yılında aynı bölümü Elektrik-Elektronik Mühendisi ünvanıyla beşinci olarak tamamladı.

2004 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektronik ana bilim dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı. 2004'te 5 ay özel bir fabrikada elektrik-elektronik mühendisi olarak çalıştıktan sonra Ankara'da özel bir firmada ar-ge mühendisi olarak 1 yıl kadar çalıştı. 2005 Aralık ayından itibaren Karadeniz Teknik Üniversitesi Elektrik-Elektronik Mühendisliğinde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı ve halen görevini burada sürdürmektedir. Kontrol yöntemleri ve sistem modelleme üzerine araştırmalar yapmaktadır. Yabancı dil olarak İngilizce bilmektedir.