

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

3 BOYUTLU UZAYDA MHD DENKLEMLERİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

DOKTORA TEZİ

MAHİR CEYLAN ERDOĞAN

TRABZON



KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

3 BOYUTLU UZAYDA MHD DENKLEMLERİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

MAHİR CEYLAN ERDOĞAN

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
DOKTORA(MATEMATİK)
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 20 / 05 / 2022

Tezin Savunma Tarihi : 16 / 06 / 2022

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Selçukhan AYDIN

Trabzon 2022

ÖNSÖZ

Lisansüstü eğitim sürecinde bilgi birikimini benimle paylaşan yoluma ışık tutan her an desteğini yanımda hissettiğim tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Selçuk Han AYDIN'a teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Lisans eğitimi tamamladığım Atatürk üniversitesi Matematik bölümündeki öğretim üyelerine, beni lisansüstü eğitim için cesaretlendirip bunun temellerini attıkları için her birine ayrı ayrı minnettarım.

Eğitim ve öğrenim hayatım boyunca en zor günlerimde her zaman yanımda olan, benimle içinde bulunduğum zorlukları paylaşan ve hem maddi hem de manevi destekleri ile arkamda duran aileme sonsuz teşekkür ederim.

Mahir Ceylan ERDOĞAN

Trabzon 2022

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Doktora Tezi olarak sunduğum “3 BOYUTLU UZAYDA MHD DENKLEMLERİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ” başlıklı çalışmamın tamamını tez danışmanım Prof. Dr. Selçuk Han AYDIN’ın sorumluluğunda yürütüp tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 16/06/2022

Mahir Ceylan ERDOĞAN

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	III
TEZ BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET	VII
SUMMARY	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ	IX
TABLolar DİZİNİ.....	XXV
SEMBOLLER DİZİNİ	XXVI
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Laplace Denklemi ve Tarihsel Gelişimi.....	1
1.3. Konveksiyon-Difüzyon Denklemi ve Tarihsel Gelişimi.....	2
1.4. MHD- MagnetoHidroDinamik Denklemleri ve Literatür Taraması.....	2
1.5. Sonlu Elemanlar Yöntemi ve Tarihsel Gelişimi.....	6
1.5.1. Sonlu Elemanlar Yönteminin Avantajları ve Dezavantajları.....	7
1.4.2. Stabilize Edilmiş Sonlu Elemanlar Yöntemleri.....	8
1.5. Sınır Elemanlar Yöntemi ve Tarihsel Gelişimi.....	9
1.5.1 Sınır Elemanlar Yöntemi Avantajları ve Dezavantajları.....	9
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR	10
2.1. Sonlu Elemanlar Yöntemi	10
2.1.1. Ayrıklaştırma.....	10
2.1.2. Elemanlar.....	11
2.1.3. 2-D Elemanlar	11
2.1.4. 3-D Elemanlar	12
2.1.5. Şekil Fonksiyonları.....	13
2.1.6. Üçgen Prizma Eleman Şekil Fonksiyonları.....	13
2.2. Matematiksel Model.....	14
2.3. Laplace Denklemi Sonlu Elemanlar Yöntemi.....	15
2.4. Sınır Elemanlar Yöntemi.....	16
2.4.1. Ayrıklaştırma.....	16

2.5.	Laplace Denklemi İçin Sınır Elemanları Yöntemi	16
2.6.	Konveksiyon-Difüzyon Denklemi	19
2.6.1	Konveksiyon-Difüzyon İçin Stabilizasyon Formülasyonu	19
2.7.	MHD Denklemleri.....	20
2.7.1.	MHD Denklemleri İçin Stabilizasyon Formülasyonu.....	20
2.8.	Manyetik Ortam İçerisinde MHD Denklemleri	22
2.8.1.	Manyetik Ortam İçerisindeki MHD Denklemleri için Stabilizasyon Formülasyonu.....	23
3.	BULGULAR	25
3.1.	Laplace Denklemi'nin BEM ve FEM Yöntem ile Çözümü ve Karşılaştırılması ..	25
3.2.	Konveksiyon Difüzyon Denklemi.....	31
3.3.	MHD Probleminin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Çözümü.....	32
3.3.1.	Küre Bölge İçerisinde MHD Probleminin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Çözümü	32
3.3.2.	Küp Bölge İçerisinde MHD Probleminin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Çözümü	53
3.4.	Manyetik Ortam İçerisinde MHD Probleminin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Çözülmesi.....	72
3.4.1	Manyetik Ortam İçerisindeki Küre Bölgede MHD Probleminin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Çözülmesi	72
3.5.1.	Manyetik Ortam İçerisinde Küp Bölgede MHD Probleminin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Çözülmesi.....	97
4.	SONUÇLAR	113
5.	ÖNERİLER	114
6.	KAYNAKLAR.....	115

ÖZGEÇMİŞ

Doktora Tezi

ÖZET

3 BOYUTLU UZAYDA MHD DENKLEMLERİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Mahir Ceylan ERDOĞAN

Karadeniz Teknik Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Selçuk Han AYDIN

2022, 119 Sayfa

Bu tez de temel amaç olarak üç boyutlu (3-D) MagnetoHidroDinamik (MHD) denklemlerinin sayısal çözümü incelenmiştir. İlk olarak Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY-FEM) ve Sınır Elemanlar Yöntemlerinin (SEY-BEM) 3-Boyutlu uzaydaki formülasyonları Laplace denklemi için ayrıntılı olarak verilmiş, her iki yöntem denklemin çözümleri bulunmuş ve elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Daha sonra konveksiyon ve difüzyon probleminin çözümü Stabilize edilmiş Sonlu Elemanlar Yöntemi ile formüle edilmiş ve konveksiyon baskın durumlar için kararlı çözümler elde edilmiştir. Formülasyonu verilen stabilize yöntem, küp veya küre bölgelerde tanımlanan 3 Boyutlu MHD denklemlerinin çözümüne uygulanmıştır. En son aşamada ise problemin en genel halinin olduğu, sonsuz bölgede manyetik ortam içerisindeki MHD problemin küp veya küre bölgelerde farklı parametre değerleri için çözümleri elde edilmiş ve bulunan sonuçlar yorumlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: 3D, Sonlu Elemanlar Yöntemi, Sınır Elemanlar Yöntemi, Laplace Denklemi, Konveksiyon-Difüzyon Denklemli, MHD denklemleri

PhD. Thesis

SUMMARY

NUMERICAL SOLUTIONS OF 3D MHD EQUATIONS

Mahir Ceylan ERDOĞAN

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences Mathematics Graduate Program
Supervisor: Prof.Dr. Selçuk Han AYDIN
2022, 119 Pages

In this thesis, we analyzed the numerical solutions of the 3D MagnetoHydroDynamic (MHD) equations. Firstly, both the Finite Element Method (FEM) and the Boundary Element Method (BEM) formulations of the Laplace equations are given in detail. Numerical solutions are obtained for the both method and compared. Next, the stabilized finite element method formulation of the convection-diffusion equations is proposed and stable solutions are obtained for the convection dominated case. Later, the proposed stabilized formulation is applied to the numerical solutions of the 3D MHD equations defined on either spherical or cubic domain. Finally, the most general case of the problem which is the 3D MHD equations on spherical or cubic domain defined on the infinite conducting medium is considered. The solutions are obtained for the different problem parameters and the detailed discussions are provided.

Key Words: 3D, Finite Element Method, Boundary Element Method, Laplace Equation, Convection-Diffusion Equation, MHD Equations

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 1.	Ayrıklaştırma.....	11
Şekil 2.	2-D Eleman türleri.....	12
Şekil 3.	İki boyutlu ve üç boyutlu elemanlar.....	13
Şekil 4.	Kesin çözümün $u_e(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$ olduğu birim küp üzerindeki 3 boyutlu çözüm dilimleri	28
Şekil 5.	Kesin çözümün $u_e(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$ olduğu birim küp üzerindeki 3 boyutlu çözüm dilimleri	28
Şekil 6.	Örnek 2'nin 3 boyutlu çözümlerinin dilimleri.....	29
Şekil 7.	Örnek 3'ün 3 Boyutlu çözümlerinin dilimleri	30
Şekil 8.	L shape akış problemi için için $\varepsilon = 0.1$ ve $a = (-z, 0, x)$ değeri için sonuçlar . sağdaki grafikte stabile FEM, solda standart FEM kullanılmıştır.....	31
Şekil 9.	L shape akış problemi için için $\varepsilon = 0.0001$ ve $a = (-z, 0, x)$ değeri için sonuçlar sağdaki grafikte stabile FEM, solda ise standart FEM kullanılmıştır.	32
Şekil 10.	Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri.....	33
Şekil 11.	Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri.....	33
Şekil 12.	Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri.....	34
Şekil 13.	Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri.....	34
Şekil 14.	Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri.....	35

Şekil 15.	Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri.....	35
Şekil 16.	Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 20$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri.....	36
Şekil 17.	Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 20$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri.....	36
Şekil 18.	Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 20$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri.....	37
Şekil 19.	Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 50$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri.....	37
Şekil 20.	Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 50$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri.....	38
Şekil 21.	Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 50$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri.....	38
Şekil 22.	Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = 0$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri.....	39
Şekil 23.	Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = 0$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri.....	39
Şekil 24.	Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = 0$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri.....	40

Şekil 25.	Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri.....	40
Şekil 26.	Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri.....	41
Şekil 27.	Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri.....	41
Şekil 28.	Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = 0$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri.....	42
Şekil 29.	Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = 0$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri.....	42
Şekil 30.	Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = 0$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri.....	43
Şekil 31.	Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri.....	43
Şekil 32.	Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri.....	44
Şekil 33.	Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri.....	44
Şekil 34.	Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri.....	45

Şekil 35.	Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri.....	45
Şekil 36.	Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri.....	46
Şekil 37.	Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = 0$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri.....	46
Şekil 38.	Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = 0$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri.....	47
Şekil 39.	Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = 0$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri.....	47
Şekil 40.	Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = 0$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri.....	48
Şekil 41.	Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = 0$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri.....	48
Şekil 42.	Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = 0$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri.....	49
Şekil 43.	Küre bölge üzerinde MHD probleminin sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 100$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri.....	50
Şekil 44.	Küre bölge üzerinde MHD probleminin sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 100$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri.....	50

Şekil 45.	Küre bölge üzerinde MHD problemini sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 100$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri.....	51
Şekil 46.	Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 100$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri	51
Şekil 47.	Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 100$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri.....	52
Şekil 48.	Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 100$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri.....	52
Şekil 49.	Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri.....	53
Şekil 50.	Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri.....	54
Şekil 51.	Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri.....	54
Şekil 52.	Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri.....	55
Şekil 53.	Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri.....	55
Şekil 54.	Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri.....	56

Şekil 55.	Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 20$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri.....	56
Şekil 56.	Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 20$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri.....	57
Şekil 57.	Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 20$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri.....	57
Şekil 58.	Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 50$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri.....	58
Şekil 59.	Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 50$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri.....	58
Şekil 60.	Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 50$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri.....	59
Şekil 61.	Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri.....	59
Şekil 62.	Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri.....	60
Şekil 63.	Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri.....	60
Şekil 64.	Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = 0$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri.....	61

- Şekil 65. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = 0$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri..... 61
- Şekil 66. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = 0$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri..... 62
- Şekil 67. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri..... 62
- Şekil 68. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri..... 63
- Şekil 69. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri..... 63
- Şekil 70. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = 0$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri..... 64
- Şekil 71. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri..... 64
- Şekil 72. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri..... 65
- Şekil 73. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = 0$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri..... 65
- Şekil 74. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = 0$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri..... 66

- Şekil 75. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = 0$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri..... 66
- Şekil 76. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = 0$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri..... 67
- Şekil 77. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = 0$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri..... 67
- Şekil 78. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = 0$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri..... 68
- Şekil 79. Küp bölge üzerinde MHD probleminin sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 100$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri..... 69
- Şekil 80. Küp bölge üzerinde MHD probleminin sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 100$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri..... 69
- Şekil 81. Küp bölge üzerinde MHD probleminin sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 100$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri..... 70
- Şekil 82. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 100$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri..... 70
- Şekil 83. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 100$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri..... 71
- Şekil 84. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 100$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri..... 71

- Şekil 85. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1$,
 $Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri..... 73
- Şekil 86. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1$,
 $Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri..... 73
- Şekil 87. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1$,
 $Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için z -eksenine göre kesitleri..... 74
- Şekil 88. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 2500$,
 $Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri..... 74
- Şekil 89. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 2500$,
 $Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri..... 75
- Şekil 90. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 2500$,
 $Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için z -eksenine göre kesitleri..... 75
- Şekil 91. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1$,
 $Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri 76
- Şekil 92. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1$,
 $Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri 77
- Şekil 93. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1$,
 $Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için z -eksenine göre kesitleri 77
- Şekil 94. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1$,
 $Rm_f = 20$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri 78

- Şekil 95. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1$,
 $Rm_f = 20$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri 78
- Şekil 96. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1$,
 $Rm_f = 20$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için z -eksenine göre kesitleri 79
- Şekil 97. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 10$,
 $Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri 80
- Şekil 98. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 10$,
 $Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri 80
- Şekil 99. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 10$,
 $Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için z -eksenine göre kesitleri 81
- Şekil 100. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,
 $Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri 81
- Şekil 101. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,
 $Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri 82
- Şekil 102. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,
 $Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için z -eksenine göre kesitleri 82
- Şekil 103. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1000$,
 $Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri 83
- Şekil 104. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1000$,
 $Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri 83

- Şekil 105. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1000$,
 $Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için z -eksenine göre kesitleri 84
- Şekil 106. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,
 $Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri 84
- Şekil 107. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,
 $Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri 85
- Şekil 108. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,
 $Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için z -eksenine göre kesitleri 85
- Şekil 109. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 10$,
 $Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri 86
- Şekil 110. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 10$,
 $Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri 86
- Şekil 111. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 10$,
 $Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için z -eksenine göre kesitleri 87
- Şekil 112. Manyetik ortam içerisinde küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,
 $Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri 87
- Şekil 113. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,
 $Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri 88
- Şekil 114. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,
 $Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için z -eksenine göre kesitleri 88

- Şekil 115. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 10$,
 $Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri 89
- Şekil 116. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,
 $Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri 89
- Şekil 117. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,
 $Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için z -eksenine göre kesitleri 90
- Şekil 118. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,
 $Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri 90
- Şekil 119. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,
 $Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri 91
- Şekil 120. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,
 $Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için z -eksenine göre kesitleri 91
- Şekil 121. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 10$,
 $Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri 92
- Şekil 122. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 10$,
 $Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri 92
- Şekil 123. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 10$,
 $Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için z -eksenine göre kesitleri 93
- Şekil 124. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1$, $Rm_f = 10000$,
 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri 94

- Şekil 125. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1$,
 $Rm_f = 10000$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri.... 94
- Şekil 126. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1$,
 $Rm_f = 10000$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için z -eksenine göre kesitleri.... 95
- Şekil 127. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1$,
 $Rm_f = 10000$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri.... 95
- Şekil 128. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1$,
 $Rm_f = 10000$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri.... 96
- Şekil 129. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1$,
 $Rm_f = 10000$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için z -eksenine göre kesitleri.... 96
- Şekil 130. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1$,
 $Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri..... 97
- Şekil 131. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1$,
 $Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri..... 98
- Şekil 132. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1$,
 $Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için z -eksenine göre kesitleri..... 98
- Şekil 133. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 10000$,
 $Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri..... 99
- Şekil 134. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 10000$,
 $Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri..... 99

- Şekil 135. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 10000$,
 $Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için z -eksenine göre kesitleri 100
- Şekil 136. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1$,
 $Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri 101
- Şekil 137. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1$,
 $Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri 101
- Şekil 138. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1$,
 $Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için z -eksenine göre kesitleri 102
- Şekil 139. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 10$,
 $Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri . 103
- Şekil 141. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 10$,
 $Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için z -eksenine göre kesitleri 104
- Şekil 142. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,
 $Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri 104
- Şekil 143. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,
 $Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri 105
- Şekil 144. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,
 $Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için z -eksenine göre kesitleri 105
- Şekil 145. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1000$,
 $Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri 106

- Şekil 146. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1000$,
 $Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri 106
- Şekil 147. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1000$,
 $Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için z -eksenine göre kesitleri 107
- Şekil 148. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,
 $Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri 107
- Şekil 149. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,
 $Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri 108
- Şekil 150. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,
 $Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için z -eksenine göre kesitleri 108
- Şekil 151. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,
 $Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri 109
- Şekil 152. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,
 $Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri 109
- Şekil 153. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,
 $Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için z -eksenine göre kesitleri 110
- Şekil 154. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,
 $Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri 110
- Şekil 155. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,
 $Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri 111

- Şekil 156. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,
 $Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için z -eksenine göre kesitleri..... 111
- Şekil 157. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 10$,
 $Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri 112



TABLULAR DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 1. Örnek 1 için $\ L_2\ $ normuda farklı sınır koşulları, yöntemler, eleman türleri ve ayrıklaştırmalar için değerler	26
Tablo 2. Farklı alanlar, yöntemler, eleman türleri ve ayrıklaştırmalar için saniye cinsinden hesaplama süreleri.....	27
Tablo 3. Örnek 1 için $\ L_2\ $ normuda farklı sınır koşulları, yöntemler, eleman türleri ve ayrıklaştırmalar için değerler	30



SEMBOLLER DİZİNİ

$a(u, v)$: Bilineer form
$\ell(u, v)$: Lineer form
F	: Büyük (Global) vektör
G	: Büyük (Global) matris
H	: Büyük (Global) matris
$H^1(\Omega)$: $L^2(\Omega)$ uzayının alt uzayı
I	: Bölge üzerindeki integral
J	: Jacobian matrisi
K^e	: Eleman matrisi
K	: Büyük (Global) matris
$L^2(\Omega)$: Ω bölgesindeki ikinci dereceden integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
\vec{n}	: Çözüm bölgesi sınırı üzerindeki birim normal vektör $\vec{n} = (n_x, n_y)$
N_i^e	: Eleman için şekil fonksiyonları
Q^e	: Eleman sınır integral vektörü
Q	: Büyük (Global) sınır integral vektörü
u_h^e	: Bilinmeyen fonksiyonun eleman üzerinde ayrıklaştırılmış çözümü
u^*	: Laplace denklemi için temel çözüm (fundamental solution)
ω	: Ağırlık (test) fonksiyonu
Γ	: Bölge sınırı
ϵ	: Rezidü
Ω	: Problem tanım bölgesi
$\partial\Omega$: Ω bölgesinin sınırı
Δ_i	: Dirac-delta fonksiyonu
∇	: Gradyan $\left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j}\right)$
∇^2	: Laplace $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Bu tezde temel amaç olarak 3-Boyutlu MagnetoHidroDinamik (MHD) denklemlerinin Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY) ile sayısal çözümü irdelenecektir. Bu kapsamda öncelikli olarak sayısal formülasyonlar ifade edilecek ve sonrasında problemlerin farklı parametre değerleri için çözümleri bulunacaktır ve ayrıntılı olarak irdelenecektir.

Aşamalı olarak Laplace denklemi, konveksiyon-difüzyon denklemi, MHD denklemleri ve son olarak manyetik ortam içerisindeki MHD denklemlerinin sayısal çözümleri 3-Boyutlu uzayda incelenecektir.

1.2. Laplace Denklemi ve Tarihsel Gelişimi

3-Boyutlu uzayda Laplace denklemi $u = u(x, y, z)$ olmak üzere

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \nabla^2 u = \Delta u = 0 \quad (1)$$

formlarında tanımlanabilir.

Tarih de ilk defa Laplace kısmi diferensiyel denklemi Pierre-Simon Laplace tarafından ifade edilmiştir. Pierre-Simon Laplace tarafından elde edilen bu kısmi diferensiyel denklem birçok fiziksel ve mühendislik problemin matematiksel modellenmesinde kullanılmaktadır.

Laplace denkleminin sayısal çözümünü elde etmek için birçok yöntem önerilmiştir. Sonlu farklar yöntemi ile Laplace denkleminin çözümünü ilk elde eden Southwell (1946) ve Allen (1959) dir. Sınır Elemanları Yöntemi kullanılarak elde edilen çözüm ise çok daha sonra 1987 yılında R. Rangogni ve R.Occhi tarafından elde edilmiştir(Rangogni ve Occhi, 1987).

Laplace denkleminin çözümleri, elektromanyetizma, astronomi ve akışkanlar dinamiği gibi birçok bilim alanı için önemlidir. Bulunan çözümler elektrik ve yer çekim potansiyeli ile akışkan potansiyelinin davranışını açıklamada önem arz etmektedir. Laplace

denkleminin çözümlerinin genel teorisi aynı zamanda potansiyel teorisi olarak da bilinmektedir.

1.3. Konveksiyon-Difüzyon Denklemi ve Tarihsel Gelişimi

3 Boyutlu uzayda konveksiyon difüzyon denklemi, $\varepsilon > 0$ sabit sayı, $a = (a_x, a_y, a_z)$ vektör ve $u = u(x, y, z)$ olmak üzere

$$-\varepsilon \nabla^2 u + a \cdot \nabla u = f(x, y, z) \quad (2)$$

eşitliği ile tanımlanır.

Konveksiyon difüzyon denklemi birçok fiziksel ve mühendislik probleminde karşımıza çıkan bir denklemdir. Burada difüzyon en basit tanımı ile maddenin çok yoğun ortamdaki daha az yoğun bir ortama geçmesi olayıdır. Örnek olarak, kaynamış suya atılan bir tutam kahvenin zaman içerisinde bütün suya dağılması veya çay demlenmesi en temel difüzyon olaylarıdır.

Difüzyon olayının sebebi, moleküllerin serbestçe kayıp yuvarlanabilmesinden kaynaklanmaktadır. Maddenin hallerinden olan gazlarda da difüzyon olayı benzer şekilde gözlemlenebilir. Gazlar aralarındaki çekim kuvvetinden kurtularak difüze olurlar. Katı halde ki maddeler için ise daha çok titreşim yolu ile gerçekleşen bir difüzyondan bahsedilebilir. Difüzyon olayında sıcaklık hareket ve kinetik enerji ile doğru orantılı olarak gerçekleşir. Yani sıcaklık hareketi artırır, hareket ise difüzyon olayını hızlandırır (Çiftçi, 2012).

Konveksiyon terimi ise en temel anlamda bir akışkanın hareketi anlamında kullanılabilir. Yayılma ve sürüklenme bu hareketin iki bileşenidir. Örnek olarak, hareketli (durgun olmayan) bir suya dökülen mürekkebin hem yayılması hem de sürüklenmesi başka bir ifade ile iki hareketin toplamı konveksiyon-difüzyon olayıdır. Maddelerin konveksiyonuna benzer şekilde ısının konveksiyonundan da bahsedilebilir. Bu durumda ısı bir akışkan içinde hem sürüklenir hem de yayılır.

1.4. MHD- MagnetoHidroDinamik Denklemleri ve Literatür Taraması

MagnetoHidroDinamik (MHD), elektriksel iletken sıvı ve elektromanyetik alanlar arasındaki makroskopik etkileşimlerin teorisidir. Uygulamaları, astronomi ve jeofizikte

olduğu gibi diğer çeşitli mühendislik problemlerinde ortaya çıkar. Nükleer reaktörlerin sıvı metal soğutumu, metallerin elektromanyetik dökümü, MHD güç üretimi ve MHD iyon yürütmesi gibi başlıca alanlarda kullanılır. MHD problemlerinde, elektrik akımı iletimine bağlı yük taşıyan, elektromanyetik alanlarla etkileşimli, viskoz, baskılanamaz bir sıvının akışıyla ilgilenilir. İletken sıvının akışı, elektriksel akımı indükler ve manyetik alan ile etkileşimde bulunur. Bu etkileşim karşılığında, sıvı üzerinde Lorentz kuvveti oluşur ve sıvının davranışı oldukça değişebilir. Böylece MHD akımı Navier-Stokes ve ilkel Maxwell eşitliklerinin Lorentz kuvveti aracılığıyla bağlanmasıyla yönetilir (Shercliff, 1953; Dragos, 1975). Sıvı metallerdeki elektromanyetiğin analizi, bir manyetik tek kutbun var olmayışı için Maxwell eşitliği çözmeyi içerir. Faraday kanunu, ilkel Maxwell Ampere kanunu ve Gauss kanununa göre,

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (4)$$

$$\nabla \times B = \mu_0 J \quad (5)$$

$$\nabla \times D = q \quad (6)$$

eşitlikleri tanımlanır. Eşitliklerde B manyetik indüksiyon, D elektrik yer değiştirme, E elektriksel alan, J elektrik akım yoğunluğu $J \equiv \sigma E$ ve q elektrik yük yoğunluğudur.

Teoride Ampere kanunu, manyetik alan yoğunluğu olan $\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$ ile verilmiştir.

Ancak, yer değiştirme akımının $\frac{\partial D}{\partial t}$ diğer terimlere kıyasla göz ardı edilebilecek

küçüklükte olduğu farz edilmektedir.

Boş alan (manyetize olmayan ya da kutuplaşmayan) elektromanyetik ortalaması için,

$$H = \frac{B}{\mu_0} \text{ tanımlanır ve boş alan manyetik geçirgenliği } \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Hs} / m \text{ ile}$$

$$E = \frac{D}{\epsilon_0} \text{ ve boş alan elektrik yalıtkanlık sabiti } \epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F} / m. J = \sigma(E + u \times B) \text{ dir.}$$

Ohm kanununda σ materyalin elektriksel iletkenliği ve u ise hareket halindeki sıvının hızıdır. Açıkça görüleceği üzere Ohm kanunu, araştırılan iletken sıvının elektrik alan etkisiyle yük taşıma yeteneğini niteler. Ohm kanunundaki tüm terimlere “curl operatör” uygulanır ise

$$\text{curl}(J) = \sigma \text{curl}(E) + \sigma \text{curl}(u \times B) \quad (7)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \text{curl}(\nabla \times B) = -\sigma \frac{\partial B}{\partial t} + \sigma \text{curl}(u \times B) \quad (8)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla(\nabla \cdot B) - \frac{1}{\mu_0} \nabla^2 B = -\sigma \frac{\partial B}{\partial t} + \sigma \nabla \times (u \times B) \quad (9)$$

eşitlikleri elde edilir. $\nabla \times (\nabla \times B) = \nabla(\nabla \cdot B) - \nabla^2 B$ vektör özdeşliği olarak kullanılır. Hidrodinamik ve elektromanyetik alanların arasındaki bağlantıyı açıklayan manyetik indüksiyonun son hali

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \times (u \times B) + \frac{1}{\mu_0} \nabla^2 B \quad (10)$$

olarak yazılır.

Ayrıca, uygulanmış manyetik alan altında, momentum eşitliği boyutsuz olarak sıvı Reynolds sayısı Re , manyetik Reynolds sayısı Rem ve Hartmann sayısı Ha ve de ek olarak Lorentz kuvveti (Kumamaru, Hirano ve Itoh, 2004; Salah, Soulaïmani ve Habashi, 2001; Sheu ve Lin, 2004)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 u + f \frac{Ha^2}{Re Rem} (\nabla \times B) \times B \quad (11)$$

eşitliği ile yazılır. Eşitlikte, $Re = \frac{\rho U_0 L}{\mu}$, $Rem = \mu_0 U_0 L$, $Ha = \sqrt{Re Rem} S$ ile bağlanma

sayısı (coupling) $S = \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho U_0}$ U_0 hız alanında, B_0 manyetik alanda ve uzunluk L

karakteristik değerlerdir. MHD akışının simülasyonu için oluşturulan sayısal şemaların analizi için sonlu farklar metodu (FDM) kullanılması üzerine birçok yayın bulunmaktadır. Dokuzlu nod-grid FD yaklaşımı, hızlıca genişlemiş bölgesi bir kanalın içindeki MHD eşitliklerinin çözülmesinde uygulanmıştır (Krzeminski ve Cala, 1996). Üç adet simültane, eliptik tipli quasilinear eşitlikler sistemi oluşturan iki adet vektör potansiyeli ve vortisite vektörü kullanılarak bir tanım yapılır.

Shue ve Lin tarafından yazılmış makalede, manyetik alan ve hidrodinamik alan eşitliklerinin çözümü için bir primitif değişken yaklaşımı "alternating direction implicit" ADI çözüm algoritmasıyla verilmiştir. Genelleştirilmiş Peaceman ve Rachford ADI şemasına ait bir uzantı de sunulmuştur. Ayrıştırılmış konservasyon eşitlikleri düşük manyetik Reynolds sayısına göre buhar fonksiyonu dönümlülüğü formülasyonu ile çözülür. Dikdörtgen bir kanaldan likit-metal MHD akışının giriş bölgesi üzerine 3 boyutlu sayısal hesaplamalar Kumamaru ve arkadaşları tarafından FDM kullanılarak

gerçekleştirilmiştir(Kumamaru, Kodama, Hirano ve Itoh,2004). MHD eşitliklerinin çoğunun çözümleri doğrusal olmayan eşitliklerde ki avantajından dolayı sonlu elemanlar yöntemi ile yapılır. Hıza ait sınır verilerinde herhangi bir koşul olmayan, devamlı ve diskret(ayrık) MHD problemlerinin ikisine de ait çözümlerin varlığı da türetildi ve Gunzburger ve arkadaşları MHD eşitliklerinin zayıf formülasyonlarının çözümlerinin varlığını ve benzersizliğininin garanti edilebileceğini gösterdi. Meir ve Schmidt(Meir ve Schmidt,1999) ve Schötzau(Schötzau,2004) MHD problemlerine ait kendi sonlu eleman çözümlerinde hata analizleri gerçekleştirdiler ve en optimal hata sınırlarını belirlediler. Ağırlıklı regülarizasyon temelli sıkıştırılmaz MHD problemlerinin karışık FE tahmini Hasler ve arkadaşları tarafından analiz edildi. Bu yaklaşımın iyi tanımlılığını (well-posed) ve de varlık ve benzersizlik sonuçlarıyla, quasi-optimal hata sınırları da sağlandı. Leyton(Layton, 1997) ve arkadaşları sabit MHD eşitliklerinin diskretizasyonu için iki seviyeli FEM kullanarak, algoritmalarının iyi tanımlı olduğunu kanıtladı ve optimal hata sınırları verdi. Çalışmalarında, doğrusal olmayan problemi önce bir kaba mesh üzerinde, sonra doğrusal olanı bir düzgün ağ(mesh) üzerinde çözdüler. MHD kanal akışları üzerine çalışmalar nükleer soğutma sistemleri, MHD akış ölçerleri, MHD mikropompaları ile oldukça ilgilidir. Böyle MHD akışları, akışın tamamen geliştiği varsayılarak çalışıldı.

Verardi(Verardi ve Cardoso, 1998; Verardi ve Cardoso, 2001), Krzeminski(Krzeminski, Smialek ve Wlodarczyk, 2000), Tezer-Sezgin ve Köksal(Tezer-Sezgin ve Koksal, 1989) dikdörtgen kanallarda MHD denklemlerinin sonlu elemanlar yöntemleri ile çözümlerini vermişlerdir. Nesliturk ve Tezer-Sezgin(Nesliturk ve Tezer-Sezgin, 2005; Nesliturk ve Tezer-Sezgin 2006) tarafından kararlı MHD kanal akış problemlerinin çözümü için residual-free bubble (RFB) fonksiyonlarını kullanan stabilize bir FEM önerilmiştir. RFB fonksiyonlarını kullanan FEM, Hartmann sayısının yüksek değerleri için denklemleri çözmeye yeteneğine sahiptir. Küçük hidrodinamik difüzyonun iyi bilinen bazı sayısal kararsızlıkları indükleyebileceği bilinmektedir. Bu nedenle Navier-Stokes denklemleri için bazı dengeleyici tekniklerin kullanılması doğaldır. Manyetik yayılımın yüksek değerlerine rağmen manyetik denklemi stabilize etmek de faydalı olabilir. Tam MHD denklemleri için birkaç stabilize FEM çalışması mevcuttur. Gerbeau, bir yakınsama kanıtı da dahil olmak üzere hız (u), sıvıdaki basınç (p) ve manyetik alan (B) açısından stabilize bir FEM prosedürü gerçekleştirmiştir.

Tüm değişkenlerin tetrahedral elemanları üzerinde eşit sıralı enterpolasyona izin vermek için bir stabilizasyon tekniği Slah ve arkadaşları tarafından kullanılmıştır. Codina

ve Silva, manyetik alanın sayısal yaklaşımı için sapmasız koşulu zorlamak için bilinmeyenler olarak bir manyetik basınç dahil ederek tam MHD denklemleri için kararlı bir FEM sunmuşlardır. Navier-Stokes denklemlerinde olduğu gibi, birleşik formülasyondan kaynaklanan sayısal kararsızlıklar ve MHD denklemlerindeki katsayıların varlığı (Akışkan Reynolds sayısı Re , manyetik Reynolds sayısı Rem ve Hartmann sayısı Ha) kararlı sonlu elemanlar yöntemleri dikkate alınarak ortadan kaldırılır.

1.5. Sonlu Elemanlar Yöntemi ve Tarihsel Gelişimi

Sonlu elemanlar yönteminin (SEY) özellikle fizik ve mühendislik problemlerinde yaygın olarak kullanıldığı bilinmektedir. Sonlu elemanlar yönteminde problem, geometrik anlamda düzgün yapılu alt bölgelere ayrıştırılır daha sonra bu alt bölgelerde elde edilen sonuçlar birleştirilerek problemin sayısal olarak çözümü elde edilir. Bu alt bölgeler "eleman" olarak adlandırılır. Oluşan bu geometride elemanların her bir bağlantı noktası ise "düğüm noktası" olarak adlandırılır.

Sonlu elemanlar yönteminin kullanımının tarihsel gelişimi incelendiğinde, ilk olarak Arşimet'in sonlu elemanlar yöntemini katıların hacmini belirlemede kullandığı görülmektedir. Bu yöntemi ile alanları, uzunlukları hesaplamış ve geometrik objelerin hacimlerini basit parçalara bölerek elde etmeye çalışmıştır. Varyasyonel hesabın oluşturulmasına yol açan çalışmalarında ise Euler, tek boyutlu işlevselliği sonlu aralıklara bölmüş ve lineer bir varyasyonu her biri üzerinden son değerler ile tanımlamıştır. Euler ilk defa süreksiz türevlerde parçalı doğrusal bir fonksiyon kullanmıştır. 1940'ların başında Courant, kısmi diferensiyel denklemlerin varyasyonel işleyişini savunan açıklayıcı bir makale yazmıştır. Bu makalede üçgen bir ağ üzerinde içi boş bir şaftın burulma sertliğini belirleyen SEY stili hesaplamalar vardır. Courant, Rayleigh-Ritz deneme fonksiyonları olarak her üçgen üzerinde parçalı doğrusal enterpolasyon kullanmış ve fikrini 'genelleştirilmiş sonlu farklar' olarak adlandırmıştır. Courant'lara benzer bir varyasyon yaklaşımı Syng'e ve Prager tarafından fonksiyonel analiz bağlamında ve Syng'e'in kitabında 'hiperdaire' metodu olarak gösterilmiştir. 1954 yılında Argyis ve Kelsey tarafından matrislerin yapısal analizi metodu geliştirilmiştir. 1956 yılında Turner ve arkadaşları iki boyutlu elemanlar üzerinde yaptığı çalışmalarda kafes eleman, kiriş eleman, iki boyutlu üçgen ve dikdörtgen elemanlar için eleman matrisini (rijitlik matrisini) oluşturmuşlardır. "Sonlu Elemanlar" terimi ise ilk defa Ray W.Clough tarafından 1960 yılında düzlemsel

gerilme analizinde kullanılmıştır. Ayrıca Sonlu elemanlar yöntemi ile ilgili birçok makale ve kitap mevcuttur. Bunlardan bazıları P.G. Fern'andez-Dalgo and O. Jarrin, Weak suitable solutions for 3D MHD, F. Liu and Y.Z. Wang, Global solutions to three-dimensional generalized MHD equations with large initial data. *Z. Angew. Math. Phys.* 70:69 (2019) (DOI: <https://doi.org/10.1007/s00033-019-1113-3>), M. Tezer-Sezgin and S. Han Aydın, BEM Solution of MHD Flow in a Pipe Coupled with Magnetic Induction of Exterior Region, *Computing* 95(1) (2013) 751–770, S. Han Aydın and M. Tezer-Sezgin, DRBEM Solution of MHD Pipe Flow in a Conducting Medium, *J. Comput. Appl. Math.*, 259(B) (2014) 720–729, M. Tezer-Sezgin and S. Han Aydın, FEM Solution of MHD Flow Equations Coupled on a Pipe Wall in a Conducting Medium, *PAMIR 2014*, S. Han Aydın and H. Selvitopi, Stabilized FEM–BEM coupled solution of MHD pipe flow in an unbounded conducting medium, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 87(2) (2018) 122–132, S. Han Aydın and H. Selvitopi, Stabilized FEM–BEM coupled solution of MHD pipe flow in an unbounded conducting medium, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 87(2) (2018) 122–132, J.N. Reddy, *An Introduction to the Finite Element Method*, McGraw-Hill, New York, 1993, W.T. Ang, *A Beginner's Course in Boundary Element Methods*, Universal Publishers, 2007, C.A. Brebbia and J. Dominguez, *Boundary Elements An Introductory Course*, WIT Press, Computational Mechanics Publications, UK, 1992 bu çalışmlardır.

1.5.1. Sonlu Elemanlar Yönteminin Avantajları ve Dezavantajları

Öncelikli olarak sonlu elemanlar metodunun tanım bölgesi karmaşık veya düzensiz problemler için uygulanabilmesi en önemli avantajlarından birisidir. Buna ek olarak farklı sınır koşullarında uygulama kolaylığı sağlaması bu avantajları arasında yer alır. Problemin tanım bölgesini alt bölgelere ayrılması ve bunun ile beraber probleme ait verinin artması aynı zamanda sistem boyutunun büyümesi en önde gelen dezavantajları arasındadır. Fakat elde edilen sistemin sparse (katsayı matris elemanlarının pek çoğunun sıfır olması) yapıda olması özel bir avantaj sağlayabilir. Ayrıca üzerinde çalışılan problemin tanım kümesi sonsuz ise bu durumda sonlu elemanlar yönteminin kullanılamaması diğer bir dezavantajı olarak görülür. Böyle bir durumda problem çözücünün yapay bir sınır tanımlaması ve bu sınıra uygun sınır koşullarını belirlemesi gerekir.

1.4.2. Stabilize Edilmiş Sonlu Elemanlar Yöntemleri

MagnetoHidroDinamik veya Konveksiyon baskın ve sınır katmanlı bir diferensiyel denklemin standart sayısal yöntemler ile çözümünde salınımlar, kilitleme, tekil matrisler ile karşılaşma gibi pek çok sayısal kararsızlık sorunları ile karşılaşılır. Bu sorunları gidermek için sayısal yöntemde kullanılan ağ üzerinde değişiklik yapılabilir (eleman ve nokta sayısının artırılması, problemin yapısına göre noktaların sayılarının ve yerlerinin değiştirilmesi, vb.) veya sayısal formülasyona ilave terimler eklenerek sayısal çözümün kararlılığı sağlanmaya çalışılır. The Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin (SUPG) yöntemi sonlu elemanlar yönteminde ilk olarak ortaya konulan ve halen daha etkin bir şekilde kullanılan stabilizasyon yöntemidir. SUPG yöntemi ilk olarak Brooks ve Hughes (Çiftçi, 2012) tarafından konveksiyon baskın konveksiyon-difüzyon problemlerinin çözümü için ortaya konulmuş ve daha sonra pek çok probleme uygulaması geliştirilmiştir. SUPG yöntemi, standart sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen sonuçlarda oluşan salınımları ve sayısal kararsızlıkları azaltarak daha yakınsak bir çözüm elde edilmesini sağlar. Yöntemin temel yaklaşımı, standart sonlu elemanlar formülasyonuna akım yönünde ağ bağımlı terimler ekleyerek denklemdaki kararsızlıkları azaltmaktır. Bu terimler sayısal hataları, akış yönünde yapay akışkan gibi davranarak iyileştirir. SUPG yöntemi, Petrov-Galerkin yönteminin geliştirilmesi ile elde edilen bir stabilizasyon türüdür. SUPG haricinde, hemen hemen SUPG ile aynı yapıda olan Galerkin en küçük kareler yöntemi (Galerkin Least Squares – GLS), Douglas-Wang Galerkin yöntemi (Douglas-Wang Galerkin Method – DWG) de özellikle yüksek dereceli cebirsel polinomlar seçildiğinde kullanılan diğer stabilizasyon türleridir. Konveksiyon-difüzyon problemi haricinde, Stokes denklemleri, Navier-Stokes denklemleri, Magnetohidrodinamik denklemleri gibi pek çok doğrusal veya doğrusal olmayan denklemlerin sayısal elemanlar yöntemi ile çözümlerinde aşağıdaki stabilizasyon yöntemleri pek çok çalışmada kullanılmıştır(Çiftçi, 2012).

- İki aşamalı sonlu elemanlar yöntemi (Two-level finite element method - TLFEM)
- Stabilize edilmiş alt grid yöntemi (Stabilized subgrid method – SSM)
- Streamline Diffusion Finite Element Method (SDFEM)
- Residual-Free Bubble Method (RFBM)
- Multiscale Finite Element Method (MFEM)

1.5. Sınır Elemanlar Yöntemi ve Tarihsel Gelişimi

Sayısal yöntemler içerisinde sınır elemanları yöntemi temel olarak sınır değer problemlerinin çözümünde sıklıkla kullanılan bir yöntemdir. Sınır elemanları yöntemi uygulama yönünde şöyle bir temele dayanır; üzerinde çalışılan probleme karşılık gelen integral denklemi elde edilir daha sonra ayrıklaştırma kullanılarak bu integral denklemi çözülür.

Yöntemin mevcut durumu, çok sayıda araştırmacı ve yazılım uzmanının çalışmalarının sonucunda elde edilmiştir. Sınır elemanları yönteminin başlangıç tarihi 1978 olarak bilinir ve yöntemle ilgili ilk konferans Southampton üniversitesinde verilmiştir. Aynı zamanda yöntem üzerine ilk kitap da o zaman yayınlanmıştır.

Banerjee ve Butterfield (1981) tarafından hazırlanan kitap Sınır Elemanlar Yöntemi ile ilgili ilk olarak yöntemin uygulama alanı açısından kapsamlı bir referans olmuştur. Yöntem ile ilgili bir başka temel referans kitap Brebbia, Telles, ve Wrobel (1984) tarafından oluşturulmuştur. Sınır elemanları yönteminin sıklıkla uygulandığı alanlar elektromanyetikler ve manyetik alan etkisi altındaki akışkan problemleri, akışkanlar mekaniği, elastik olmayan problemler, genel potansiyel teori, elastostatik, elastodinamik, süreksiz ısı transferi, akışmaz esneklik, esneklik, su dalgaları, akışmaz akışkan akımı, Navier-Stokes akımı, dalga yayılımı, termoelastik gibi mühendislik problemlerinin çözümünü elde etmek için kullanılır (Selvitopi, 2016).

1.5.1. Sınır Elemanlar Yöntemi Avantajları ve Dezavantajları

Sınır Eleman Yöntemi (BEM) başlıca avantajları; sadece küçük boyutlu doğrusal denklem sisteminin elde edilmesi, hesaplama süresinin kısalığı, problem tanım kümesi yerine sadece bölge sınırının kesikli hale getirilmesine ihtiyaç duymasıdır. BEM'in bir diğer avantajı da sadece iç sınırı olan dış bölge problemlerine uygulanabilmesidir. Bu avantajların yanı sıra, BEM'in uygulanması için diferansiyel operatörün birinci dereceden çözümüne ihtiyaç duyulması, metodun ana dezavantajıdır. Bilindiği üzere, özel diferansiyel operatör tipleri için birinci dereceden çözüm elde etmek mümkündür. Genel bir operatörün çözümünü elde etmek teorik olarak zor veya mümkün değildir. Yöntemin bir başka dezavantajı, formülasyonlarda bazı tekillikler (Singülerlik) bulunmaktadır. Bazı durumlarda, bu tekillikler ortadan kaldırılabilir ve integral değerleri tam olarak

hesaplanabilmektedir. Ancak, bu zorlukları üstesinden gelip hatasız sonuçları elde etmek her zaman mümkün olmayabilir. Ayrıca, problem tanım kümelerinde köşeler(corner) veya tekillikler mevcutsa, BEM ile elde edilen sayısal çözüm yakınsak olmayabilir. Bu tür durumlar için bazı özel işlemlerin uygulanması gereklidir.



2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu bölümde, kullanılacak sayısal yöntemler hakkında bilgi verilecek olup matematiksel modellemede ki diferensiyel denklemler gösterilecektir. Daha sonrasında ise sayısal yöntemlerle diferensiyel denklemin formülasyonu ve çözümü sunulacaktır.

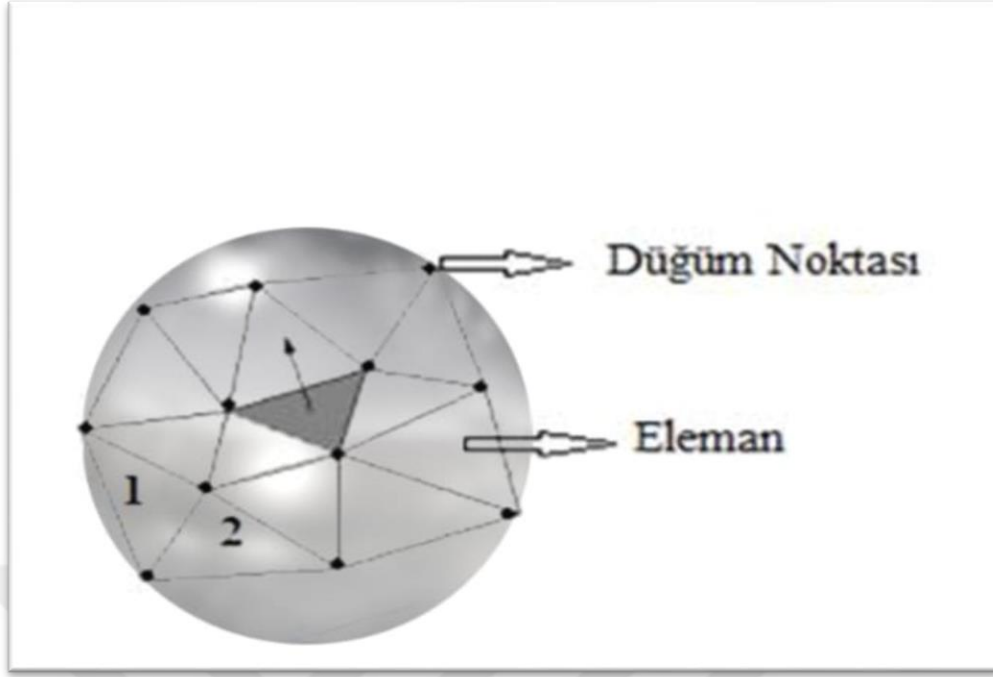
2.1. Sonlu Elemanlar Yöntemi

Sonlu elemanlar yöntemi denklemlere uygulanırken belli adımlar izlenir. Bu adımlar sırasıyla tanım bölgesinin sonlu elemanlara bölünmesi, zayıf ya da ağırlıklı integral formunun çıkarılması, şekil fonksiyonlarının seçilmesi, zayıf formda sonlu elemanların geliştirilmesi, alt eleman matrisi kullanılarak bulunan denklemlerin ana matrisine uygulanması, sınır şartlarının kullanılması son olarak cebirsel denklem sistemini çözümü.

2.1.1. Ayırıklaştırma

Sonlu elemanlar problemin de öncelikli olarak eleman türü belirlenir. Bu iki boyutlu uzaylarda üçgen veya dörtgen eleman olabilir. Üç boyutlu uzayda ise elemanlar üçgen piramit olarak ayırıklaştırılır. Problemin elemanlara ayırma süreci önemli bir süreçtir. Bu ayırıklaştırma çözüm yakınsaklığı, bellek miktarı ve işlem süresini etkiler. Bu ayırıklaştırmayı yaparken iki unsur iyi analiz edilmeli ve buna göre seçimler yapılmalıdır. Birincisi eleman türü ikincisi ise eleman sayısıdır. Eğer bir bölge de ani değişimler söz konusu ise bu bölgeye yoğun eleman atamak çözümün başarısı için daha isabetli olacaktır. Eğer seçilen elemanlar tanım bölgesini iyi temsil ederse yaklaşık çözüm gerçek sonuca yaklaşmış olacaktır. Yakınsaklığı etkileyen diğer bir faktör ise düğüm noktalarının konumları ve numaralarıdır.

Tanım bölgesinin SEY (Sonlu Elemanlar Yöntemi) için elemanlara ayırıklaştırılması üzerinde çalışılan bölgenin daha basit alt bölgelere ayrılmasıdır. Bu sayede her bir basit alt bölgede elde edilen çözümler gerçek sonuca istenilen ölçüde yaklaşmış olacaktır(Erdoğan, 2014).



Şekil 1. Ayırıklaştırma

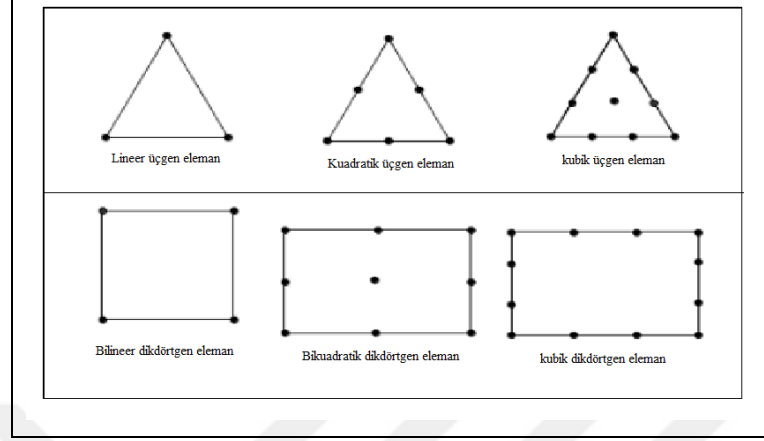
2.1.2. Elemanlar

Sonlu elemanlar yöntemi problemlere uygulanırken tanım bölgesine ayırıklaştırma işlemleri uygulanır. Yani tanım bölgesi daha basit alt bölgelere bölünür. Bu basit bölgelerde ki her bir bölüm eleman olarak adlandırılır. Elemanlar belli noktalarda birbirine bağlanır. Elemanların birbirine bağlandığı noktalar düğüm noktası (node) olarak adlandırılır. Bu düğüm noktaları haricinde eleman üzerinde veya kenarlarında noktalar seçmek mümkündür. Bu seçilecek noktaların tamamı ise ayırıklaştırma noktası olarak adlandırılır.

2.1.3. 2-D Elemanlar

İki boyutlu uzayda SEY de sıklıkla dörtgen veya üçgen türü elemanlar tercih edilmektedir. Düzgün olmayan tanım bölgeleri için en çok tercih edilen elemanlar ise üçgen elemanlardır. Çünkü düzgün olmayan bölgelerde bölgeyi daha düzgün bir biçimde üçgen elemanlar kullanılarak alt bölgelere ayırıklaştırmak daha basittir. Bu ayırıklaştırma da genellikle üç düğümlü üçgen eleman kullanılır. Dörtgen elemanlar ise genellikle problemin

geometrisi bu eleman için uygun ise kullanılan eleman türüdür. Aşağıdaki şekilde 2-D SEY için kullanılan eleman türleri geometrik olarak gösterilmiştir.



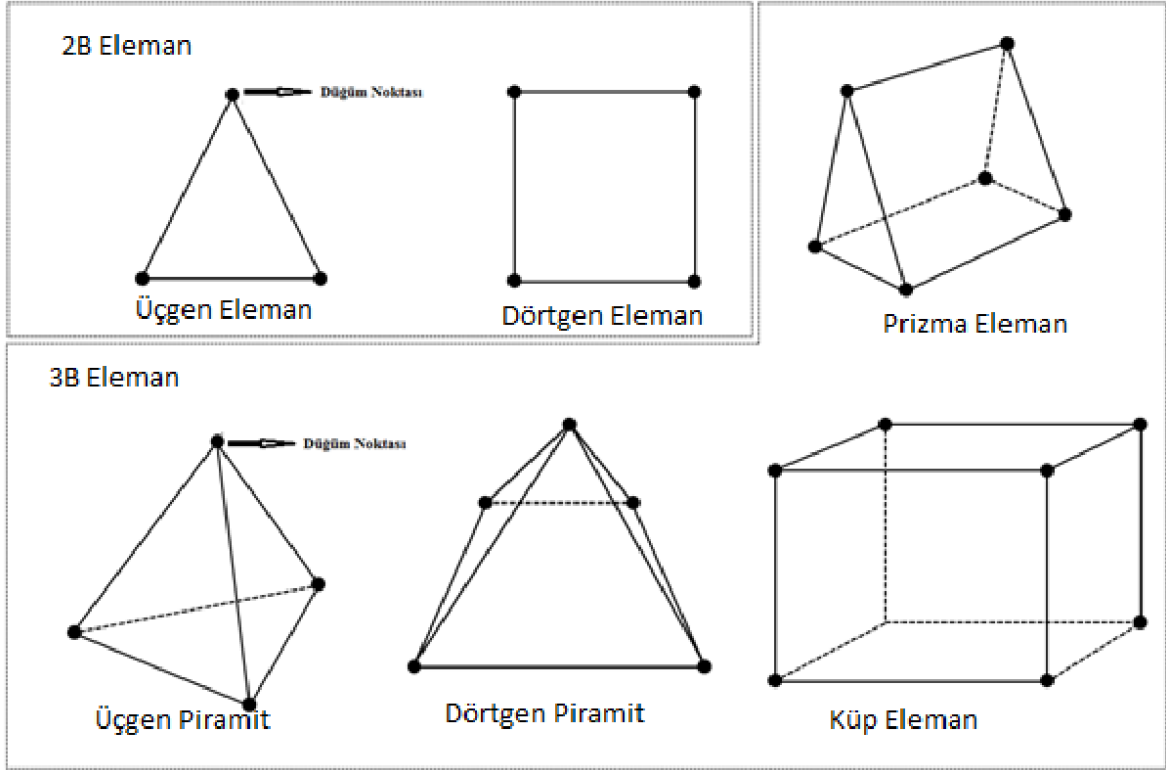
Şekil 2. 2-D Eleman türleri

Şekilde görüldüğü üzere üçgen üzerinde üç, altı, dokuz veya daha fazla nokta seçmek mümkündür. Seçilecek şekil fonksiyonunun derecesine göre ayrıklaştırma nokta sayısı belirlenir.

2.1.4. 3-D Elemanlar

Üç boyutlu uzaylarda farklı tipe elemanlar seçilebilir. Bunların en yaygın olanı üçgen prizma ve dörtgen prizmalardır. Üçgen prizmalarda grubun temel elemanı dört düğümlü üçgen prizmalardır. Üçgen prizmalar üzerinde sekiz, on iki gibi ayrıştırma noktaları seçmek mümkündür. Burada seçilecek ayrıştırma nokta sayısı, kullanılacak şekil fonksiyonu derecesine göre belirlenir. Üzerinde çalışılan tanım bölgesi düzgün olmasa dahi alt bölgelere ayrıldığında şekilsel olarak daha düzgün alt bölgelere ayrıştırılabilir. Bundan dolayı ayrıştırma yapılırken daha çok üçgen prizmalar tercih edilir. Eğer ayrıştırma noktaları üçgen prizmanın yalnızca köşe noktalarında seçilmiş ise bu tür elemanlara doğrusal (lineer) eleman, ayrıklaştırma noktaları üçgen prizmanın köşelerinde ve her bir ayrıtım orta noktasında seçilirse kuadratik (quadratic) eleman olarak isimlendirilir.

Dörtgen prizmanın kullanımı problemin tanım bölgesine göre belirlenebilir. Şayet problem düzgün yapıda ise dörtgen prizma seçilebilir(Selvitopi, 2016).



Şekil 3. İki boyutlu ve üç boyutlu elemanlar

2.1.5. Şekil Fonksiyonları

Sonlu elemanlar yönteminde bilinmeyen fonksiyon, bölgenin ayrıklaştırılması ile elde edilen eleman üzerinde seçilen ayrıklaştırma noktalarında tanımlanan şekil fonksiyonlarının (N_i) doğrusal (linear) kombinasyonu olarak; Bilinmeyen fonksiyon $u(x)$ e elemanı üzerinde yaklaşık olarak $u_h^e(x)$ olarak düğüm noktalarındaki u_i^e değerleri kullanılarak

$$u(x) = u_h^e(x) = \sum_{i=1}^n u_i^e N_i^e(x) \quad (12)$$

formunda tanımlanır. Üç boyutlu uzayda şekil fonksiyonlarının özellikleri, seçimi ve bu çalışmada kullanılan şekil fonksiyonları aşağıda tanıtılmıştır(Erdoğan, 2014).

2.1.6. Üçgen Prizma Eleman Şekil Fonksiyonları

Üçgen prizma elemanlarla modelleme öncelikle, tanım bölgesi üçgen prizma elemanlara ayrıklaştırılır. Bu işlem sırasında bazı hususlara özellikle dikkat edilmelidir

bunlar; ayrıklaştırılan bölgede hiç boşluk kalmaması ve üçgen prizmalar iç içe geçmeyecek şekilde seçilmesi gerekir. Ayrıklaştırmalarda üçgen prizmalar birbirlerine köşeden bağlı olarak seçilmeli, bir üçgen prizmanın köşesi diğer bir üçgen prizmanın ayrıntına gelmemelidir. Bu şartlar sayısal çözümün analitik çözüme yakınsaklığını etkiler. Bunların dışında çözümü etkileyen başka faktörler de vardır. Bunlar üçgen prizma eş üçgen prizmaya yakın olursa çözümün yakınsak olmasını sağlar.

Üçgen prizmaların köşe noktaları yazılırken bütün üçgen prizmalar için aynı dönüş yönü kullanılmalıdır. Bu dönüş yönü ya saat yönünde veya saat yönünün tersi yönde olmalıdır. Herhangi bir üçgen prizmanın köşe noktası için istenilen köşeden başlanabilir. Burada önemli husus başlanılan köşenin diğer iki noktanın dönüş yönüne göre seçilmesidir. Bu şartlar altında bölge üçgen prizmalara ayrıklaştırılır. Kullanılacak şekil fonksiyonları her bir üçgen prizma üzerinde kullanılacak noktalara göre belirlenir.

Bu bilgiler doğrultusunda doğrusal üçgen prizma için ξ, η, ζ boyutsuz uzayında şekil fonksiyonları

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta, \zeta) &= 1 - \xi - \eta - \zeta \\ N_2(\xi, \eta, \zeta) &= \xi \\ N_3(\xi, \eta, \zeta) &= \eta \\ N_4(\xi, \eta, \zeta) &= \zeta \end{aligned} \quad (13)$$

eşitlikleri ile tanımlanabilir(Erdoğan, 2014).

2.2. Matematiksel Model

Fransız matematikçi Pierre-Simon Laplace tarafından türetilen Laplace denklemi, uygulamalı matematik, fizik ve mühendislik uygulamalarının kilometre taşlarından biridir. Bu nedenle Laplace denkleminin çözümünü elde etmek bu uygulamalar açısından önem arz etmektedir. 3 boyutlu uzayda $u = u(x, y, z)$ bilinmeyen u değişkeni için Laplace denklemi şu şekilde gösterilebilir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \nabla^2 u = \Delta u = 0 \quad (14)$$

Laplace denklemi için sınır koşulları;

1. Temel sınır koşulları sınırın bir bölgesi olan Γ_1 için $u = \bar{u}$ biçiminde tanımlanabilir. Bu tür sınır koşulu Dirichlet türü sınır koşulu olarak adlandırılır.

2. Doğal sınır koşulları sınırın bir bölgesi olan Γ_2 için $\frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q}$ biçiminde tanımlanabilir. Bu tür sınır koşulu Neuman türü sınır koşulu olarak adlandırılır.
3. Sınır koşullarını karışık biçimde $\frac{\partial u}{\partial n} + c_1 u = \bar{v}$ tanımlamak da mümkündür. Bu tür sınır koşulu Robin türü sınır koşulu olarak adlandırılır (Erdoğan ve Aydın 2021).

2.3. Laplace Denklemi Sonlu Elemanlar Yöntemi

3 boyutlu Laplace denklemi ve sınır koşullarına Sonlu Elemanlar Yöntemini uygulamak için Green özdeşliği (14) denkleminde uygulanırsa

$$\int_{\Omega} v \nabla^2 u d\Omega = \int_{\Gamma_2} v \frac{\partial u}{\partial n} d\Omega - \int_{\Omega} \nabla v \nabla u d\Omega. \quad (15)$$

elde edilir.

Sayısal hesaplamalara geçmeden önce, aşağıdaki fonksiyon uzaylarını tanımlayalım.

- $C^0(\bar{\Omega})$, kapalı Ω üzerinde sürekli fonksiyonların uzayı,
- $L^2(\Omega)$, Ω bölgesindeki ikinci dereceden integrallenebilir fonksiyonlar uzayı,
- $L_0^2(\Omega)$, Ω üzerinde $L^2(\Omega)$ uzayının sıfır ortalamalarının uzayı
- $H^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ nin Sobolev alt uzayı,
- $H_0^1(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ nın Sobolev alt uzayı,

Zayıf hal formülasyonunda Sonlu elemanlar yönteminin standart Galerkin yöntemi kullanılarak doğrusal fonksiyonların uzayı $L = (H_0^1(\Omega))^2$ için $u \in L$ şöyle bulunabilir:

$$a(\nabla u, \nabla v) - l\left(\frac{\partial u}{\partial n}, v\right) = 0, \quad \forall v \in L \quad (16)$$

Burada

$$a(\nabla u, \nabla v) = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) d\Omega \quad \text{ve} \quad l\left(\frac{\partial u}{\partial n}, v\right) = \int_{\Gamma_2} \left(\frac{\partial u}{\partial n} v \right) d\Omega$$

dir.

Ω tanım bölgesinin ayrıklaştırılmasıyla tanımlanan doğrusal üçgen piramit elemanları, $L_h \subset L$ nin son boyutlu alt uzayı için varyasyonel formülasyonu şu şekilde yazılabilir;

$$a(\nabla u_h, \nabla v_h) - l\left(\frac{\partial u_h}{\partial n}, v_h\right) = 0, \quad \forall v_h \in L_h \quad (17)$$

Bu formülasyon, kesikli bir sistem olarak ayrıklaştırma noktalarındaki u_h nin bilinmeyen değerler için bir lineer denklem sistemi verir (Erdoğan ve Aydın 2021).

2.4. Sınır Elemanlar Yöntemi

Bu bölümde Sınır Elemanlar Yönteminin 3-Boyutlu uzaydaki formülasyonu verilecektir.

2.4.1. Ayrıklaştırma

3-Boyutlu uzayda bölgelerin sınırları yüzeyler olacağından dolayı, sınır ayrıklaştırması yüzey ayrıklaştırmasına karşılık gelecektir. Yüzeyler de 2-Boyutlu Sonlu Elemanlar Yöntemine benzer şekilde üçgenler veya dörtgenler olarak ayrıştırılabilir. Bu tezde doğrusal üçgen elemanlar kullanılacaktır.

Üç boyutlu uzayda, üzerinde çalışılan problemin çözüm bölgesinin sınırı N tane elemana bölünür. Burada düğüm noktası (node) sınırlarda ki değeri bilinmeyen noktaldır. Bu düğüm noktalarının seçilme durumuna göre elemanlar adlandırılır. Eğer 3 boyutlu uzayda üçgen eleman üzerinde düğüm noktası üçgenin ağırlık merkezi olarak seçilirse sabit (constant) eleman, düğüm noktaları üçgenin köşeleri seçilirse doğrusal (linear) eleman, üçgenin hem köşe noktaları hem de kenarlarının orta noktası seçilir kuadratik (quadratic) eleman olarak adlandırılır. Bu tezde üçgen eleman üzerinde sabit ve doğrusal eleman kullanılarak çözümler elde edilmiştir (Selvitopi, 2016).

2.5. Laplace Denklemi İçin Sınır Elemanları Yöntemi

3 Boyutlu Laplace denklemini sınır elemanları yöntemini kullanarak çözmek için temel çözüme ihtiyaç vardır. Küre koordinatları kullanarak r , θ ve φ için burada

$x = r \sin \varphi \cos \theta$, $y = r \sin \varphi \sin \theta$ ve $z = r \cos \varphi$ olarak tanımlanırsa Laplace denklemi şu şekilde yazılabilir;

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right) = 0 \quad (18)$$

Daha sonra $\nabla^2 u^* + \Delta_i = 0$ (burada Δ_i Dirac delta fonksiyonu) kullanılarak

$$\Phi_{3D}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{4\pi \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} \quad (19)$$

temel çözüm elde edilir. Burada boyutsuz uzay koordinat sistem (ξ, η, ζ) kaynak (source) noktası ve (x, y, z) ise değişken (variable) noktalarıdır.

Laplace denklemi için sınır koşulları şu şekilde verilmiş olsun:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0, \Omega \text{ içinde} \\ u &= \bar{u}, \Gamma_1 \text{ üzerinde} \\ q &= \bar{q}, \Gamma_2 \text{ üzerinde} \end{aligned} \quad (20)$$

Hata fonksiyonları ise şu şekilde tanımlanabilir

$$\begin{aligned} \epsilon_\Omega &= \nabla^2 u \neq 0, \Omega \text{ üzerinde} \\ \epsilon_1 &= u - \bar{u} \neq 0, \Gamma_1 \text{ üzerinde} \\ \epsilon_2 &= q - \bar{q} \neq 0, \Gamma_2 \text{ üzerinde} \end{aligned} \quad (21)$$

Burada hatayı minimize etmek için ağırlık fonksiyonu u^* ve onun normal türevi $q^* = \partial u^* / \partial n$ ile bunlar çarpılır ise şu şekilde yazabiliriz

$$\int_\Omega \epsilon_\Omega u^* d\Omega + \int_{\Gamma_1} \epsilon_1 q^* d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_2} \epsilon_2 u^* d\Gamma_2 = 0 \quad (22)$$

ya da özdeşi olarak

$$\int_\Omega \nabla^2 u u^* d\Omega + \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) q^* d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) u^* d\Gamma_2 = 0 \quad (23)$$

yazılabilir.

Φ ve ψ fonksiyonları için Green özdeşliği kullanılarak

$$\int_\Omega \Phi \nabla^2 \psi d\Omega = \int_{\partial\Omega} \nabla \Phi \nabla \psi d\Omega - \int_\Omega \nabla \Phi \nabla \psi d\Omega \quad (24)$$

Eğer bu özdeşliği (23) denkleminde uygularsak

$$\int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n} u^* d\Gamma - \int_\Omega \nabla u \nabla u^* d\Omega + \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) q^* d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) u^* d\Gamma_2 = 0 \quad (25)$$

elde edilir. Daha sonra ikinci integral terimi için aynı özdeşliği ikinci kez uygularsak

$$\int_{\Gamma_1+\Gamma_2} qu^* d\Gamma + \int_{\Omega} u \nabla^2 u^* d\Omega - \int_{\Gamma_1+\Gamma_2} uq^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u})q^* d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q})u^* d\Gamma_2 = 0 \quad (26)$$

elde edilir.

$$\int_{\Omega} u \nabla^2 u^* d\Omega = -cu$$

Burada

$$u^* = \Phi_{3D}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) \quad \text{ve} \quad q^* = \frac{\partial}{\partial n} [\Phi_{3D}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)]$$

olup

$$\begin{aligned} & c(\xi, \eta, \zeta)u(\xi, \eta, \zeta) - \int_{\Gamma_1} \{q(x, y, z)\Phi_{3D}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) - \bar{u}(x, y, z) \frac{\partial}{\partial n} [\Phi_{3D}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)]\} d\Gamma_1 \\ & - \int_{\Gamma_2} \{\bar{q}(x, y, z)\Phi_{3D}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) - u(x, y, z) \frac{\partial}{\partial n} [\Phi_{3D}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)]\} d\Gamma_2 = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

denklemini elde edilir.

$$\text{Burada } c(\xi, \eta, \zeta) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (\xi, \eta, \zeta) \in \Gamma \\ 1 & (\xi, \eta, \zeta) \in \Omega \end{cases}$$

olarak alınıp N tane ayrıklaştırma noktası için

$$\frac{1}{2}u_i + \sum_{j=1}^N H_{ij}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)u_j = \sum_{j=1}^N G_{ij}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)q_j \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (28)$$

denklemini elde edilir. Burada

$$H_{ij}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) = \int_{\Gamma_j(x, y, z)} \frac{\partial}{\partial n} [\Phi_{3D}(x, y, z, \xi_i, \eta_i, \zeta_i)] d\Gamma_j(x, y, z) \quad (29)$$

ve

$$G_{ij}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) = \int_{\Gamma_j(x, y, z)} \Phi_{3D}(x, y, z, \xi_i, \eta_i, \zeta_i) d\Gamma_j(x, y, z) \quad (30)$$

dır. 3 boyutlu tanım bölgesi için sınır elemanlarının ayrıklaştırmak için doğrusal üçgen elemanlar kullanırsak, hem H_{ij} hemde G_{ij} nin her terimi için üç bileşen elde edilir. Assembly işlemi uygulandıktan sonra, verilen sınır koşullarına bağlı olarak fonksiyon veya normal türev değerlerinin bilinmeyen olarak tanımlandığı doğrusal denklem sistemi elde edilir. Sınırın üzerindeki tüm u_j ve q_j değerleri elde edildikten sonra, tanım bölgesinin herhangi bir noktası için denklem (27) ve $c(\xi, \eta, \zeta)$ kullanılarak $u(\xi, \eta, \zeta)$ hesaplanabilir (Brebbia, 1981; Brebbia ve Dominguez, 1998; Erdoğan ve Aydın, 2021).

2.6. Konveksiyon-Difüzyon Denklemi

Konveksiyon difüzyon denklemi

$$-\varepsilon \nabla^2 u + a \cdot \nabla u = f(x, y, z) \quad (31)$$

eşitliği ile yazılabilir. Burada $\varepsilon > 0$ ve $a = (a_x, a_y, a_z)$ ile $u = u_b$, problem tanım bölgesinin sınırı $\partial\Omega$ üzerinde Dirichle tipi sınır koşullarıdır.

Standart Galerkin sonlu elemanlar yöntemi için zayıf formu

$$\varepsilon a(\nabla u, \nabla v) + b(a \cdot \nabla u, v) = b(f, v) \quad (32)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$b(u, v) = \iiint_{\Omega} uv d\Omega \quad (33)$$

şeklinde gösterilebilir.

Varyasyonel hal ise

$$\varepsilon a(\nabla u^h, \nabla v^h) + b(a \cdot \nabla u^h, v^h) = b(f, v^h) \quad (34)$$

formülasyonu ile gösterilebilir[6, 7].

2.6.1 Konveksiyon-Difüzyon İçin Stabilizasyon Formülasyonu

Konveksiyon-Difüzyon denklemi için SUPG stabilizasyon formülasyonu şu şekilde yazılabilir:

$$\varepsilon a(\nabla u^h, \nabla v^h) + b(a \cdot \nabla u^h, v^h) + \tau \kappa \iiint_{\Omega} (a \cdot \nabla u^h - f)(a \cdot \nabla v^h) d\Omega = b(f, v^h) \quad (35)$$

Burada satabilizasyon parametresi

$$\tau_k = \begin{cases} \frac{h_k}{2a_k} & P_k \geq 1 \\ \frac{h_k^2}{12\varepsilon} & P_k < 1 \end{cases} \quad (36)$$

şeklinde alınır. Burada h_k tanım bölgesinde ki k . piramidin en uzun ayrıtı ε difüzyon katsayısı a konveksiyon teriminin katsayısı ve P_k Pecklet sayısı

$$P_k = \frac{a_k \cdot h_k}{6\varepsilon} \quad (37)$$

olarak tanımlanır[50].

2.7. MHD Denklemleri

3 boyutlu uzayda, $\Omega = \{-1 \leq x, y, z \leq 1\}$ küp veya $\Omega = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ küre bölgesinde MHD denklemlerinin yalıtkan sınır koşulları altında, dışardan uygulanan manyetik alanın yoğunluğunun B_0 , α dışardan uygulanan manyetik alan vektörünün z - eksenine ve β ise x - eksenine ile yaptığı açı olmak üzere

$$\nabla^2 V + \left[M_x \frac{\partial B}{\partial x} + M_y \frac{\partial B}{\partial y} + M_z \frac{\partial B}{\partial z} \right] = -1 \quad (38)$$

$$\Delta^2 B + \left[M_x \frac{\partial V}{\partial x} + M_y \frac{\partial V}{\partial y} + M_z \frac{\partial V}{\partial z} \right] = 0 \quad (39)$$

eşitlikleri ile tanımlanabilir. Yalıtkan sınır koşullarından dolayı $\partial\Omega$ üzerinde $V(x, y, z) = B(x, y, z) = 0$ şeklindedir. Denklemlerde $M_x = Ha \sin \alpha \cos \beta$, $M_y = Ha \sin \alpha \sin \beta$ ve $M_z = Ha \cos \alpha$ dir. $V = V(x, y, z)$ akışkan hızı, $B = B(x, y, z)$ indüklenen manyetik alan ve Ha Hartmann sayısı olup $Ha = B_0 a \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}$ olarak tanımlanır. Burada a karakteristik uzunluk, σ elektrik iletkenliği η vizkozite katsayısıdır.

2.7.1. MHD Denklemleri İçin Stabilizasyon Formülasyonu

İlişkilendirilmiş haldeki MHD denklemlerine SUPG stabilizasyonu uygulamak için (38-39), denklemler ayrıştırılmış haldeki konveksiyon-difüzyon türü denklemlere dönüştürülmelidir. Denklemleri ayırmak için, $U_1 = (x, y, z)$ ve $U_2 = (x, y, z)$ yeni değişkenler olmak üzere

$$\begin{aligned} U_1 &= V + B \\ U_2 &= V - B \end{aligned} \quad (40)$$

olarak alınırsa denklemler

$$\begin{aligned} \nabla^2 U_1 + M \cdot \nabla U_1 &= -1 \\ \nabla^2 U_2 - M \cdot \nabla U_2 &= -1 \end{aligned} \quad (41)$$

haline dönüşür. Burada $M = (M_x, M_y, M_z)$ ve $\partial\Omega$ üzerindeki sınır koşulları ise $U_1 = U_2 = 0$ dir.

Standart Galerkin Sonlu Elemanlar Yöntemi için zayıf hal $\{U_1, U_2\} \in \{L \times L\}$ olmak üzere

$$a(\nabla U_1, \nabla v_1) - b(M \nabla U_1, v_1) + a(\nabla U_2, \nabla v_2) + b(M \nabla U_2, v_2) = b(1, v_1) + b(1, v_2) \quad (42)$$

olarak yazılabilir.

Varyasyonel halde ise $L^h \subset L$ alt kümesi ve $\{U_1^h, U_2^h\} \in \{L^h \times L^h\}$ olmak üzere

$$a(\nabla U_1^h, \nabla v_1^h) - b(M \nabla U_1^h, v_1^h) + a(\nabla U_2^h, \nabla v_2^h) + b(M \nabla U_2^h, v_2^h) = b(1, v_1^h) + b(1, v_2^h) \quad (43)$$

olarak yazılır.

SUPG stabilizasyon parametresi için $\{U_1^h, U_2^h\} \in \{L^h \times L^h\}$ için doğrusal pramit elemanı kullanılarak

$$a(\nabla U_1^h, \nabla v_1^h) - b(M \nabla U_1^h, v_1^h) + \tau_K b(-M \nabla U_1^h - 1, -M v_1^h) + a(\nabla U_2^h, \nabla v_2^h) + b(M \nabla U_2^h, v_2^h) + \tau_K b(-M \nabla U_2^h - 1, -M v_2^h) = b(1, v_1^h) + b(1, v_2^h) \quad (44)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\forall \{v_1^h, v_2^h\} \in \{L^h \times L^h\}$ için stabilizasyon parametresi

$$\tau_k = \begin{cases} \frac{h_k}{2Ha} & P_k \geq 1 \\ \frac{h_k^2}{12} & P_k < 1 \end{cases} \quad (45)$$

olarak yazılıp h_k pramidin en uzun ayrıtı ve $P_k = \frac{h_k Ha}{6}$ Peclet sayısıdır.

Son olarak ters dönüşüm yapılarak yani $V^h = \frac{U_1^h + U_2^h}{2}$ ve $B^h = \frac{U_1^h - U_2^h}{2}$ uygulanıp

$\{V^h, B^h\} \in \{L^h \times L^h\}$ için

$$a(\nabla V^h, \nabla w_1^h) - b(M \nabla B^h, w_1^h) + \tau_K b(M \nabla V^h, M w_1^h) + a(\nabla B^h, \nabla w_2^h) - b(M \nabla V^h, w_2^h) + \tau_K b(M \nabla B^h, M w_2^h) = b(1, w_1^h) + b(1, M w_2^h) \quad (46)$$

$\{w_1^h, w_2^h\} \in \{L^h \times L^h\}$ olmak üzere denklem sistemi yukarıdaki gibi verilebilir.

2.8. Manyetik Ortam İçerisinde MHD Denklemleri

3 boyutlu uzayda, $\Omega = \{-1 \leq x, y, z \leq 1\}$ küp veya $\Omega = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ küre bölgesinde MHD denklemleri manyetik ortamda B_0 dışardan uygulanan manyetik alanın yoğunluğu, α dışardan uygulanan manyetik alan vektörünün z -ekseni ve β ise x -ekseni ile yaptığı açı olmak üzere, $V^f = V^f(x, y, z)$ akışkan hızı, $B^f = B^f(x, y, z)$ indüklenen manyetik alan, Re , Rh , Rm_f , Rm_m sırasıyla, Reynolds sayısı, manyetik basınç (Rayleigh sayısı), akışkanın manyetik Reynolds sayısı ve ortamın manyetik Reynolds sayıları olmak üzere denklemler

$$\nabla^2 V^f + Re Rh \left[\sin \alpha \cos \beta \frac{\partial B^f}{\partial x} + \sin \alpha \sin \beta \frac{\partial B^f}{\partial y} + \cos \alpha \frac{\partial B^f}{\partial z} \right] = -1 \quad (47)$$

$$\nabla^2 B^f + Rm_f \left[\sin \alpha \cos \beta \frac{\partial V^f}{\partial x} + \sin \alpha \sin \beta \frac{\partial V^f}{\partial y} + \cos \alpha \frac{\partial V^f}{\partial z} \right] = 0 \quad (48)$$

$$\nabla^2 B^m = 0$$

eşitlikleri ile tanımlanabilir. Manyetik dış ortamdan dolayı bir önceki bölümde tanımlanan denklemlere Laplace denklemi ilave edilmiştir. Ayrıca bir önceki bölümünde akışkan hızı için tanımlanan homojen sınır koşulu $V(x, y, z) = 0$ denklemlerin bu hali için halen daha geçerli olmasına rağmen indüklenen manyetik alan için bölge sınırlarında aşağıdaki sınır koşulları tanımlanır.

$$B^f = B^m$$

$$\frac{1}{Rm_f} \frac{\partial B^f}{\partial n} = \frac{1}{Rm_m} \frac{\partial B^m}{\partial n}$$

Denklemlerde, Ha Hartmann sayısı $Ha = \sqrt{Re Rh Rm_f}$ olarak tanımlanır ise $V = V^f$ ve

$$B = \frac{Re Rh B^f}{Ha} \text{ de\u0131\u015fen d\u00f6n\u00fc\u015fm\u00fcleri sonrasında } M_x = Ha \sin \alpha \cos \beta, M_y = Ha \sin \alpha \sin \beta$$

ve $M_z = Ha \cos \alpha$ de\u011ferleri i\u00e7in

$$\nabla^2 V + \left[M_x \frac{\partial B}{\partial x} + M_y \frac{\partial B}{\partial y} + M_z \frac{\partial B}{\partial z} \right] = -1 \quad (49)$$

$$\Delta^2 B + \left[M_x \frac{\partial V}{\partial x} + M_y \frac{\partial V}{\partial y} + M_z \frac{\partial V}{\partial z} \right] = 0 \quad (50)$$

$$\nabla^2 B^m = 0$$

Sonlu elemanlar yöntemi uygulayabilmek için manyetik ortamın dış sınırlarında Saint-Venant özelliği gereği $B^m(x, y, z) = 0$ şeklindedir (Sutevski ve Smolentsev, 2011; Yea ve Zhang, 2017; Caoa ve Wu, 2010; Fern'andez-Dalgo ve Jarrin, 2020).

2.8.1. Manyetik Ortam İçerisindeki MHD Denklemleri için Stabilizasyon Formülasyonu

Birleştirilmiş MHD denklemlerine SUPG stabilizasyonu uygulamak için (49-50), denklemler ayrıştırılmış konveksiyon-difüzyon tipi denklemleri şeklinde olmalıdır. Denklemleri ayırmak için, $U_1 = (x, y, z)$ ve $U_2 = (x, y, z)$ yeni değişkenler olmak üzere

$$\begin{aligned} U_1 &= V + B \\ U_2 &= V - B \end{aligned} \quad (51)$$

olarak alınırsa denklemler

$$\begin{aligned} \nabla^2 U_1 + M \cdot \nabla U_1 &= -1 \\ \nabla^2 U_2 - M \cdot \nabla U_2 &= -1 \end{aligned} \quad (52)$$

haline dönüşür. Burada $M = (M_x, M_y, M_z)$ ve $\partial\Omega$ üzerindeki sınır koşulları ise $U_1 = U_2 = 0$ dır.

Standart Galerkin Sonlu Elemanlar Yöntemi için zayıf hal $\{U_1, U_2, B^m\} \in \{L \times L \times L\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} a(\nabla U_1, \nabla v_1) - b(M \cdot \nabla U_1, v_1) + a(\nabla U_2, \nabla v_2) + b(M \cdot \nabla U_2, v_2) + a(\nabla B^m, \nabla v_3) \\ = b(1, v_1) + b(1, v_2) \end{aligned} \quad (53)$$

olarak yazılabilir.

Varyasyonel halde ise $L^h \subset L$ alt kümesi ve $\{U_1^h, U_2^h\} \in \{L^h \times L^h\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} a(\nabla U_1^h, \nabla v_1^h) - b(M \cdot \nabla U_1^h, v_1^h) + a(\nabla U_2^h, \nabla v_2^h) + b(M \cdot \nabla U_2^h, v_2^h) + a(\nabla B^{m^h}, \nabla v_3^h) \\ = b(1, v_1^h) + b(1, v_2^h) \end{aligned} \quad (43)$$

olarak yazılır.

SUPG stabilizasyon parametresi için $\{U_1^h, U_2^h\} \in \{L^h \times L^h\}$ için lineer tetrahedron elemanı kullanılarak

c(44)

şeklinde yazılabilir. Burada $\forall \{v_1^h, v_2^h\} \in \{L^h \times L^h\}$ için stabilizasyon parametresi

$$\tau_k = \begin{cases} \frac{h_k}{2Ha} & P_k \geq 1 \\ \frac{h_k^2}{12\varepsilon} & P_k < 1 \end{cases} \quad (54)$$

olarak yazılıp h_k tetrahedronun en uzun ayrıtı ve $P_k = \frac{h_k Ha}{6}$ Peclet sayısıdır.

Son olarak ters dönüşüm yapıp yani $V^h = \frac{U_1^h + U_2^h}{2}$ ve $B^h = \frac{U_1^h - U_2^h}{2}$ uygulanıp

$\{V^h, B^h, B^{m^h}\} \in \{L^h \times L^h \times L^h\}$ için

$$\begin{aligned} & a(\nabla V^h, \nabla w_1^h) - b(M \nabla B^h, w_1^h) + \tau_k b(M \nabla V^h, M w_1^h) + a(\nabla B^h, \nabla^h w_2^h) \\ & - b(M \nabla V^h, w_2^h) + \tau_k b(M \nabla B^h, M w_2^h) + a(\nabla B^{m^h}, \nabla^h w_3^h) = b(1, w_1^h) + b(1, M w_2^h) \end{aligned} \quad (55)$$

$\{w_1^h, w_2^h, w_3^h\} \in \{L^h \times L^h \times L^h\}$ olmak üzere denklem sistemi yukarıdaki gibi

verilebilir (Erdoğan ve Aydın, 2020).

3.BULGULAR

Bulgular bölümünde, daha önce matematiksel modelleri verilen kısmi diferensiyel denklemlerin sayısal çözümleri sunulacaktır. Analitik çözümün olduğu durumlarda elde edilen sayısal çözüm ile sayısal çözümün karşılaştırması da yapılacaktır.

2.5. Laplace Denklemine BEM ve FEM Yöntem ile Çözümü ve Karşılaştırılması

Manyetik ortamda MHD kanal akım probleminin modellenmesinde, dış ortamda, manyetik alanca iletken cisim üzerinde ve MHD denklemlerinde Laplace denklemi bulunmaktadır. Bundan dolayı, Laplace denkleminin BEM ve FEM ile elde edilen çözümlerin karşılaştırması için bazı test sonuçlarını sunulacaktır. BEM formülasyonunda hem sabit hem de doğrusal eleman türleri ve FEM formülasyonu için ise doğrusal eleman türü kullanılacaktır. Sonuçların karşılaştırmasında L_2 normu

$$\|L_2\| = \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^N (u_e(x_i) - u_n(x_i))^2 \right]^{1/2}$$

eşitliği ile tanımlanır. Eşitlikte N ayrıklaştırma nokta sayısı, $x = (x, y, z)$ ayrıklaştırma noktasının koordinat vektörü, $u_n(x_i)$ ve $u_e(x_i)$ sırasıyla gerçek ve sayısal çözümlerdir. Ayrıca elde edilen sonuçlar, 3-boyutlu çözümün 2 boyutlu kesitleri alınarak grafikler ile de gösterilecektir.

Örnek 1.

İlk örnek olarak, problem tanım bölgesini birim küp veya birim küre olarak seçeceğiz. Dirichlet tipi sınır koşulları, Laplace denkleminin iki farklı çözümü için incelenecektir. Birinci tip çözümler polinom formunda (56), ikincisi (57) ise üstel ve trigonometrik fonksiyonların birleşimi olarak alınacaktır.

$$u_e(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2 \quad (56)$$

$$u_e(x, y, z) = e^{(x+y)} \sin(\sqrt{2}z) \quad (57)$$

Tablo 1. Örnek 1 için $\|L_2\|$ normuda farklı sınır koşulları, yöntemler, eleman türleri ve karşılaştırmalar için değerler

Problem	Mesh	BEM Sabit eleman		BEM Lineer eleman		FEM Lineer eleman
		$q_{\ L_2\ }$	$u_{\ L_2\ }$	$q_{\ L_2\ }$	$u_{\ L_2\ }$	$u_{\ L_2\ }$
$u_e(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$						
Küre	N=1459 E=7079	4.61×10^{-4}	2.12×10^{-5}	7.56×10^{-4}	2.52×10^{-5}	9.17×10^{-5}
	N=12728 E=69752	6.47×10^{-5}	2.38×10^{-6}	1.26×10^{-4}	2.24×10^{-6}	7.62×10^{-6}
	N=96494 E=547860	1.01×10^{-5}	2.44×10^{-7}	2.20×10^{-5}	2.12×10^{-7}	7.46×10^{-7}
Küp	N=1665 E=7855	3.29×10^{-3}	2.73×10^{-6}	1.02×10^{-2}	8.14×10^{-6}	3.03×10^{-5}
	N=12000 E=64044	1.17×10^{-3}	3.74×10^{-7}	3.60×10^{-3}	9.66×10^{-7}	2.70×10^{-6}
	N=99364 E=566393	4.13×10^{-4}	3.73×10^{-8}	1.25×10^{-3}	9.14×10^{-8}	2.28×10^{-7}
$u_e(x, y, z) = e^{(x+y)} \sin(\sqrt{2}z)$						
Küre	N=1459 E=7079	5.53×10^{-4}	2.39×10^{-5}	7.50×10^{-4}	2.02×10^{-5}	8.47×10^{-5}
	N=12728 E=69752	7.55×10^{-5}	2.65×10^{-6}	1.08×10^{-4}	1.94×10^{-6}	8.06×10^{-6}
	N=95364 E=547860	1.18×10^{-5}	2.70×10^{-7}	1.81×10^{-5}	1.89×10^{-7}	7.41×10^{-7}
Küp	N=1665 E=7855	4.25×10^{-3}	5.19×10^{-6}	1.84×10^{-2}	9.56×10^{-6}	5.61×10^{-5}
	N=12000 E=64044	1.49×10^{-3}	6.04×10^{-7}	6.39×10^{-3}	1.12×10^{-6}	5.24×10^{-6}
	N=99364 E=566393	5.18×10^{-4}	6.08×10^{-8}	2.21×10^{-3}	1.04×10^{-7}	4.36×10^{-7}

Tablo 1'den şu sonuçları çıkarabiliriz:

- $\|L_2\|$ normu düşünüldüğünde ağ(mesh) incelidikçe sonuçların yakınsadığı gözlemlenmektedir.
- Köşe tekillikleri nedeniyle, küp alandaki sonuçlar küre olana kıyasla daha az iyi gelmektedir. BEM için doğrusal eleman kullanımının sabit elemana göre sonuçlarda çok fazla iyileştirme yapmadığı da gözlemlenmektedir.
- Her iki formdaki çözümler için tüm sayısal yöntemlerde hemen hemen aynı mertebeden çözümler elde edilmiştir.
- FEM çözümlerinin BEM çözümlerine oranla daha yakınsak olduğu gözlemlenmektedir.

Tablo 2. Farklı alanlar, yöntemler, eleman türleri ve ayrıklaştırmalar için saniye cinsinden hesaplama süreleri

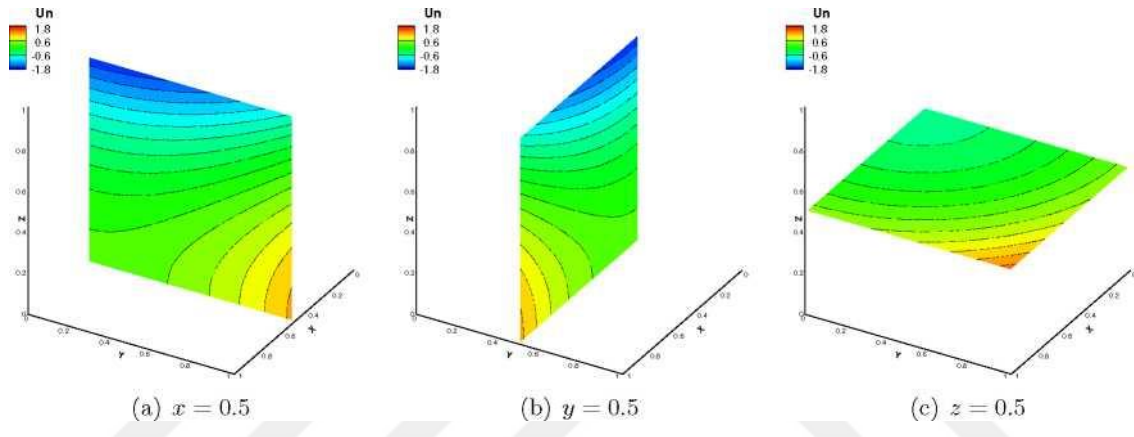
Problem	Mesh	BEM Sabit Eleman	BEM Lineer Eleman	FEM Lineer eleman
Küre	N=12728 E=69752	191	362	1
	N=95494 E=547860	2251	3357	53
Küp	N=12000 E=64044	169	349	1
	N=99364 E=566393	3080	3932	48

Ayrıca Tablo 2'den şunu söyleyebiliriz;

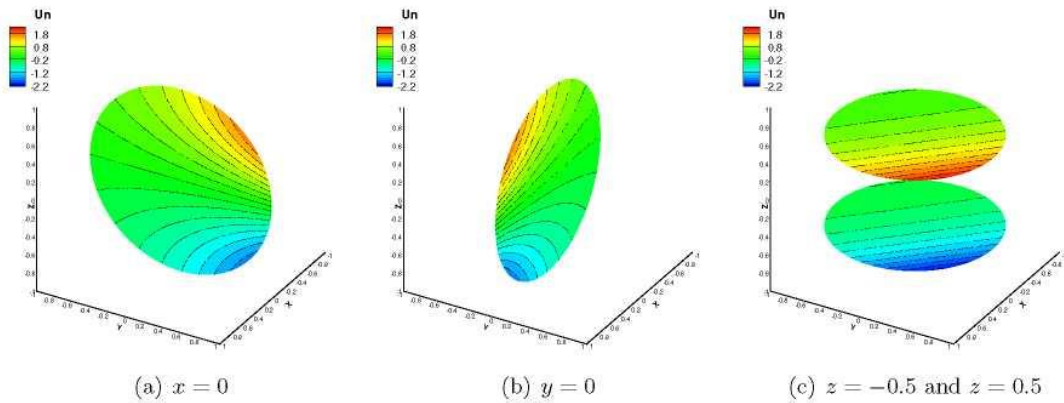
- Hesaplanan terim sayısı nedeniyle, BEM'deki doğrusal elemanlardaki hesaplama süresi, sabit elemanlara göre daha fazladır. Bu fark, ağ incelendikçe daha açık bir şekilde görülmüştür.
- Hesaplama süresi açısından FEM'in BEM'e göre daha verimli olduğu çok açık bir şekilde görülmektedir. FEM integrallerinin polinom cinsinden olduğu ve kesin değerlerinin daha az Gauss quadrature noktası ile sayısal olarak kolayca değerlendirilebileceği bilinmektedir. Ancak BEM integrallerini sayısal olarak hesaplamak FEM e göre çok daha zordur.

- Hem sabit hem de doğrusal eleman durumlarında tekillikler mevcuttur. Ayrıca değişken elemana çok yakın olan kaynak (source) noktaları için integrallerin hesaplanmasında bazı sayısal zorluklar görülmüştür. Bu nedenle, hesaplama zamanında bir artışa neden olan çok sayıda Gauss quadrature noktası kullanmamız gerekmektedir.

Bulunan sonuçların grafiksel olarak gösteriminde, tüm sayısal sonuçlar hemen hemen aynı olduğu için şekillerden sadece biri verilmiştir.



Şekil 4. Kesin çözümün $u_e(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$ olduğu birim küp üzerindeki 3 boyutlu çözüm dilimleri



Şekil 5. Kesin çözümün $u_e(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$ olduğu birim küp üzerindeki 3 boyutlu çözüm dilimleri

Örnek 2.

Bu örnekte Neumann türü sınır koşulunun etkisini görmek için farklı sınır koşul türlerini ele alacağız. Bu nedenle, bu örnekte, Laplace denklemi, aşağıdaki Dirichlet ve Neumann tipi sınır koşulları ile birim küp üzerinde şu şekilde tanımlanmıştır.

$$u(x, y, 0) = 0, u(x, y, 1) = 1$$

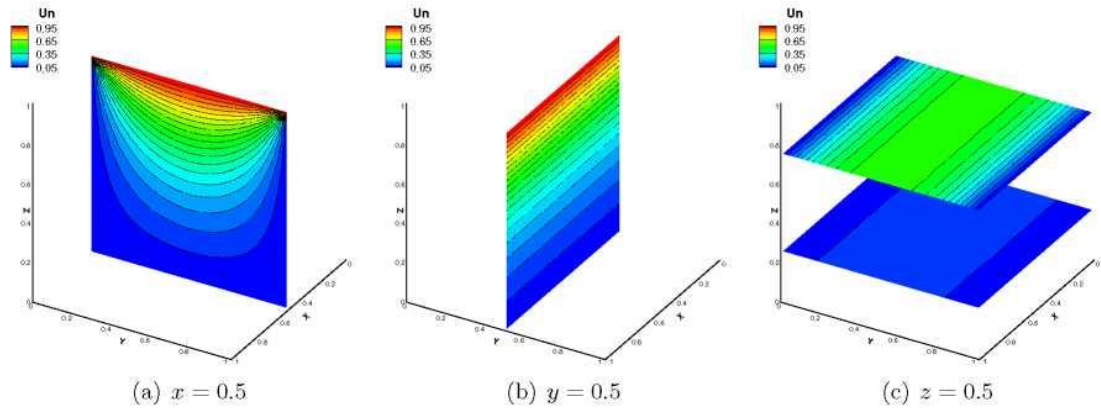
$$u(x, 0, z) = 0, u(x, 1, 0) = 0$$

$$q(0, y, z) = 0, q(1, y, z) = 0$$

Bu sınır koşulları için Laplace denkleminin analitik çözümünün, değişkenlerin ayrıştırılması yöntemi kullanılarak (58) ile verilen formül de elde edilmiştir.

$$u(x, y, z) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \left[\frac{e^{(2n-1)\pi z} - e^{-(2n-1)\pi z}}{e^{(2n-1)\pi} - e^{-(2n-1)\pi}} \right] \sin[(2n-1)\pi y] \quad (58)$$

Çözümüm her iki taraftaki Neumann türü sınır koşullarından dolayı x'ten bağımsız olduğu görülmektedir. Bu davranış Şekil 3-b'de açıkça görülmektedir. Ayrıca sınır koşullarının uyumlu olduğu Şekil 3-a ve Şekil 3-c'de gösterilmektedir.



Şekil 6. Örnek 2'nin 3 boyutlu çözümlerinin dilimleri

Örnek 3.

Önceki örneğe benzer şekilde, bu örnekte, Laplace denklemi, aşağıdaki Dirichlet ve Neumann türü sınır koşulları ile birim küp üzerinde tekrar tanımlanmıştır.

$$u(x, y, 0) = 0, u(x, y, 1) = 1$$

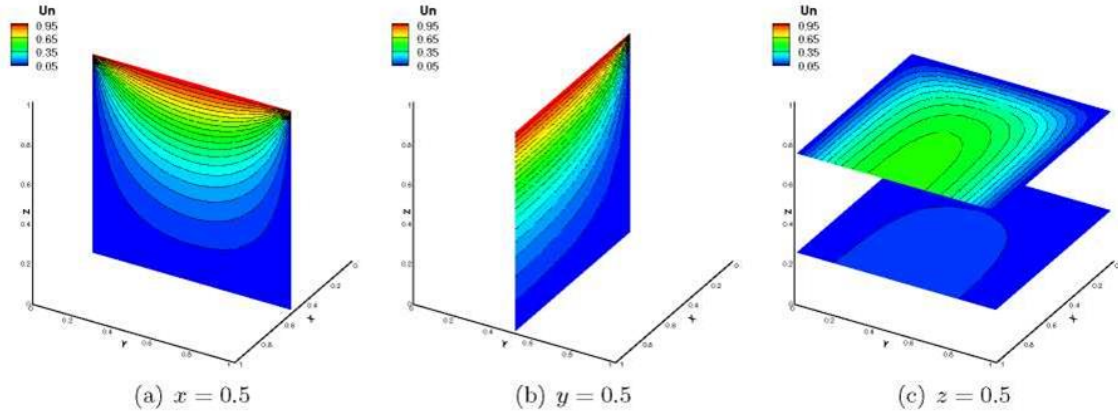
$$u(x, 0, z) = 0, u(x, 1, 0) = 0$$

$$u(x, 0, z) = 0, q(1, y, z) = 0$$

Yine bu sınır koşulları için Laplace denkleminin analitik çözümü, değişkenlerin ayrıştırılması yöntemi kullanılarak (59) ile verilen formül de elde edilmiştir.

$$u(x, y, z) = \frac{16}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)(2n-1)} \left[\frac{e^{c\pi z} - e^{-c\pi z}}{e^{c\pi} - e^{-c\pi}} \right] \sin[(2n-1)\pi y] \sin \left[\frac{(2m-1)\pi}{2} x \right] \quad (59)$$

olup burada $c = \sqrt{(2n-1)^2 + \left(\frac{2m-1}{2}\right)^2}$ dir.



Şekil 7. Örnek 3'ün 3 Boyutlu çözümlerinin dilimleri

Önceki örnekten farklı olarak çözüm, x değişkenine de bağlıdır ve bu, Şekil 4-b'den gözlemlenebilir. Şekil 3 ve Şekil 4'ü karşılaştırırsak, x değişkeninin sabit kabul edildiği y-z değişkenlerine göre sonuçların hemen hemen aynı olduğu (bkz. Şekil 3-a ve Şekil 4-a) fakat diğer iki değişkenin sabit tutulduğu durumların (bkz. Şekil 3-b ve Şekil 4-b ve Şekil 3-c ve Şekil 4-c) ise farklılıklar olduğu gözlemlenmektedir.

Tablo 3. Örnek 2 ve 3 için $\|L_2\|$ normuda farklı sınır koşulları, yöntemler, eleman türleri ve ayrıklaştırmalar için değerler

Problem	Mesh	BEM Linner Eleman		FEM Lineer Eleman
		$q_{\ L_2\ }$	$u_{\ L_2\ }$	$u_{\ L_2\ }$
Örnek 2	N=12000 E=64044	8.68×10^{-2}	2.70×10^{-5}	2.17×10^{-5}
	N=99364 E=566393	5.98×10^{-2}	4.36×10^{-6}	3.50×10^{-6}
Örnek 3	N=12000 E=64044	1.03×10^{-1}	3.01×10^{-5}	2.24×10^{-5}
	N=99364 E=566393	7.20×10^{-2}	5.99×10^{-6}	4.72×10^{-6}

Son olarak Tablo 3'ten Neumann tipi sınır koşuluna sahip sınır koşulları sayısı arttıkça sayısal sonuçların doğruluğunun azaldığı görülmektedir. Ayrıca bu tip sınır koşulları için FEM'in BEM'e kıyasla önemli ölçüde verimli olduğunu söyleyebiliriz.

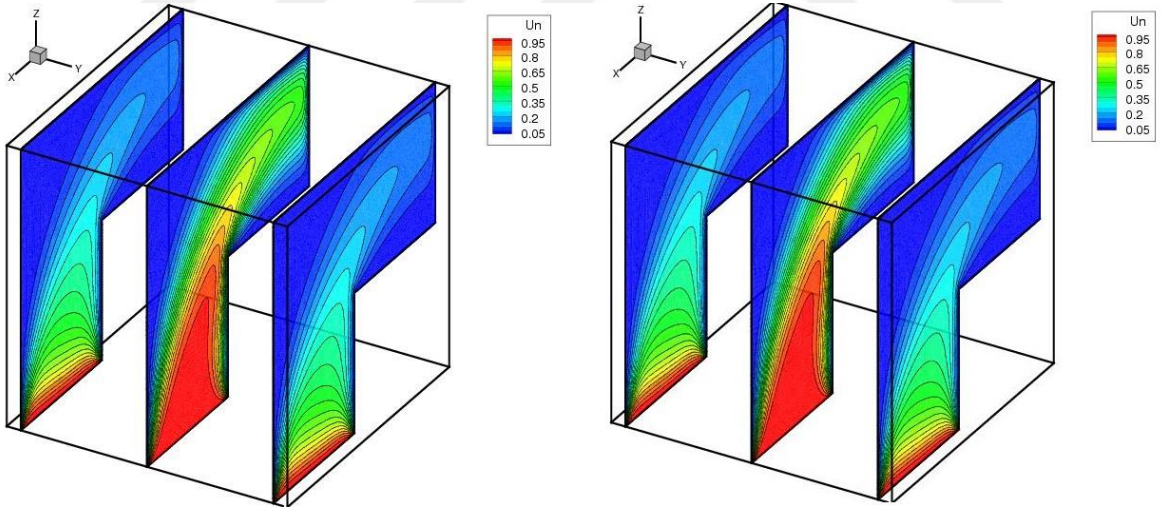
3.2. Konveksiyon Difüzyon Denklemi

3 Boyutlu konveksiyon difüzyon denkleminin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile çözümünü ele alınacaktır. Sonrasında sonlu elmanlar yöntemine stabilizasyon terimi eklenerek bulunan sonuçlar karşılaştırılacaktır.

$$-\varepsilon \nabla^2 u + a \cdot \nabla u = f(x, y, z)$$

eşitliği ile verilen konveksiyon difüzyon denklemi $a = (-z, 0, x)$, $f(x, y, z) = 0$ ve farklı ε değerleri için de bu sonuçlar elde edilecek ve grafikler üzerinde karşılaştırmalı olarak gösterilecektir.

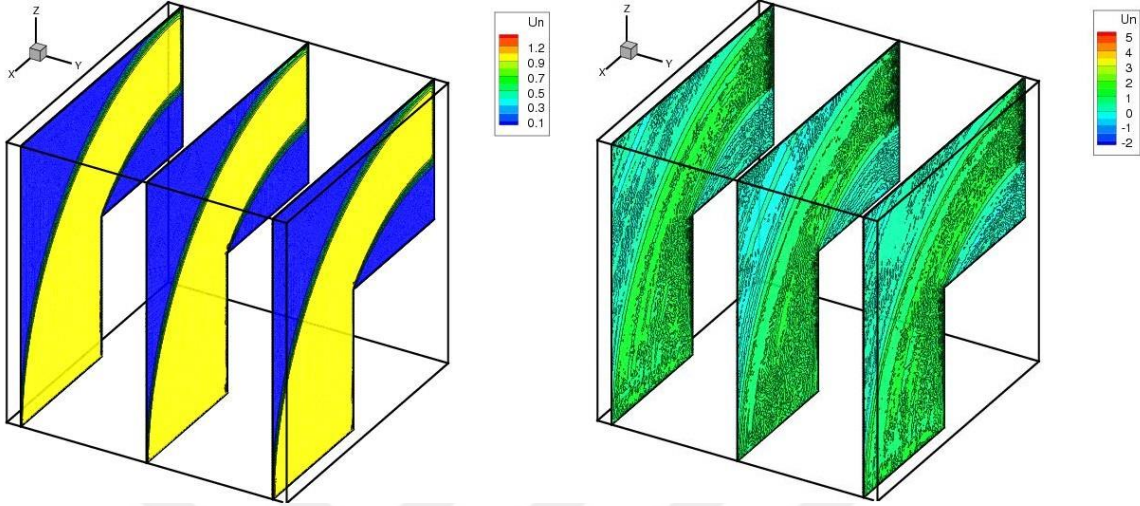
İlk önce $\varepsilon = 0.1$ değeri için olan sonuçları inceleyelim:



Şekil 8. L shape akış problemi için için $\varepsilon = 0.1$ ve $a = (-z, 0, x)$ değeri için sonuçlar sağdaki grafikte stabilize FEM, solda standart FEM kullanılmıştır

Grafikte görüldüğü üzere ε değeri çok küçülmedikçe standart Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Stabilize Sonlu Elemanlar Yöntemi çözümleri arasında bir fark görülmemektedir.

Şimdi de $\varepsilon = 0.0001$ değeri için Stabile FEM ve Standart FEM için elde edilen sonuçları grafikte gösterelim



Şekil 9. L shape akış problemi için için $\varepsilon = 0.0001$ ve $a = (-z, 0, x)$ değeri için sonuçlar sağdaki grafikte stabile FEM, solda ise standart FEM kullanılmıştır.

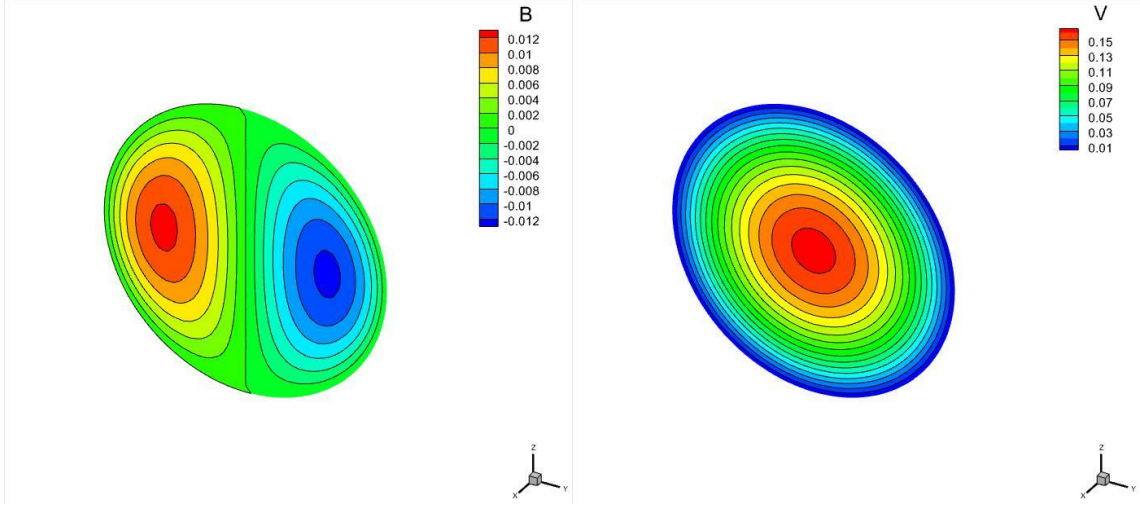
Grafikte görüldüğü üzere epsilon değeri küçüldükçe standart FEM (Sonlu Elemanlar Yöntemi) için sonuçlar bozulduğu görülmektedir. Stabile FEM için ise sonuçlar daha kararlı hale geldiği gözlenmektedir.

3.3. MHD Probleminin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Çözümü

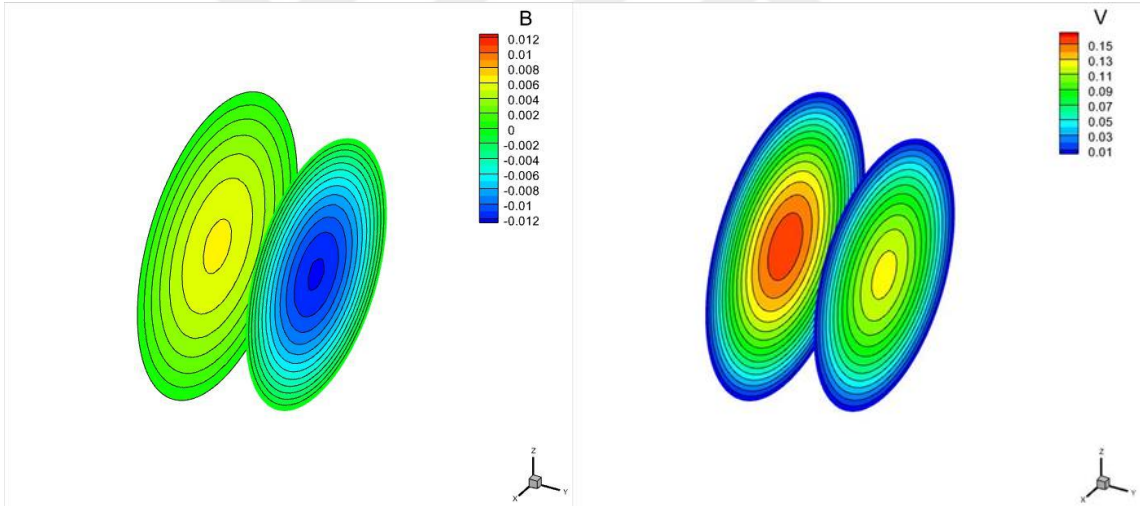
Bu bölümde daha önce (Bölüm 2.7) sonlu elemanlar ve stabilize sonlu elemanlar yöntemleri ile formülasyonu verilen MHD kanal probleminin çözümleri incelenecektir. Problem bölgesi olarak küre ve küp olmak üzere iki farklı durum incelenecektir.

3.3.1. Küre Bölge İçerisinde bölgede MHD Probleminin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Çözümü

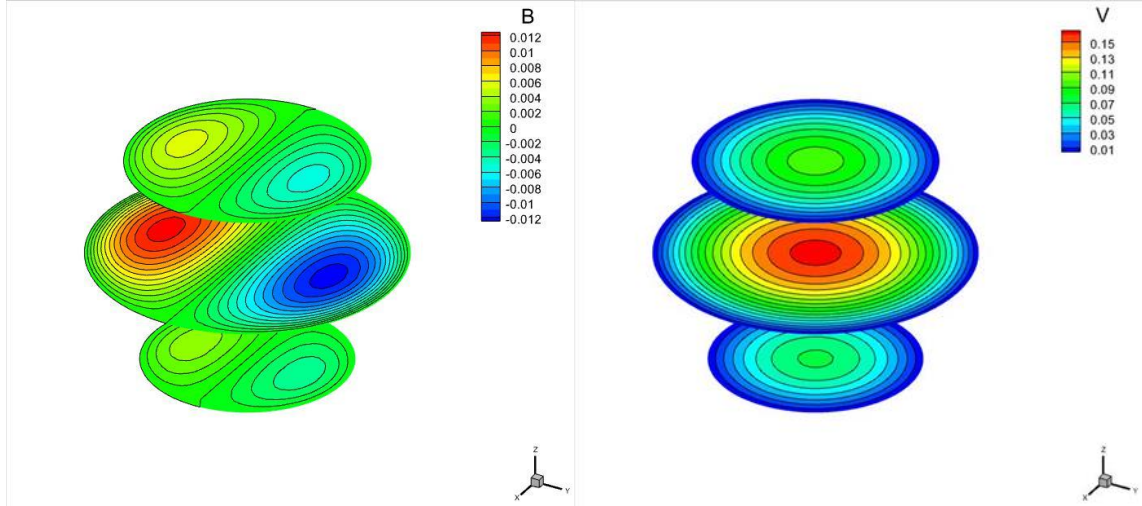
İlk olarak problemin küre bölge içerisindeki çözümü incelenecektir. İlk olarak dışardan uygulanan manyetik alanın uygulama açısının $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ olduğu durum göz önünde bulundurulacak daha sonra ise açının etkisi incelenecektir.



Şekil 10. Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri

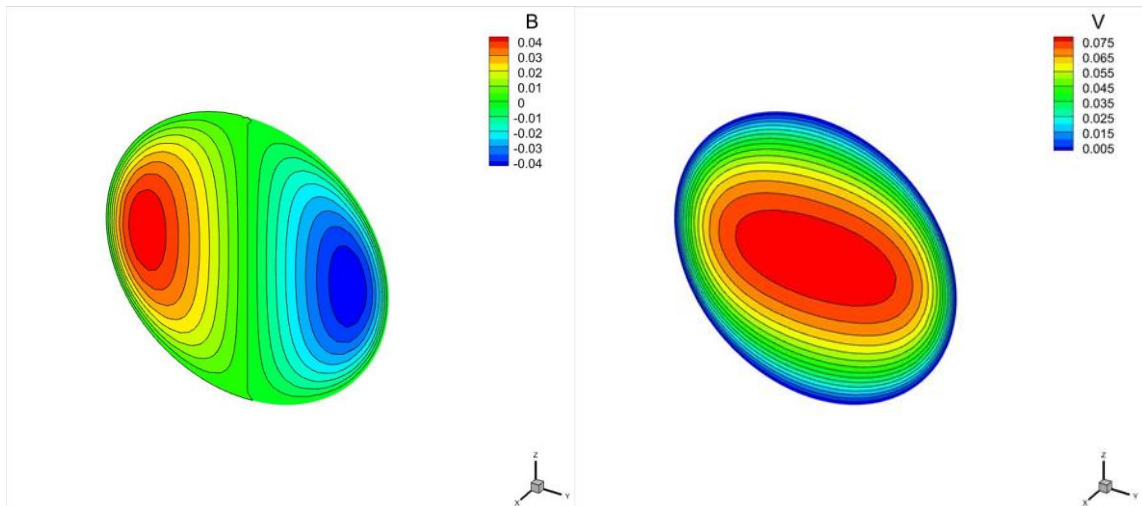


Şekil 11. Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri

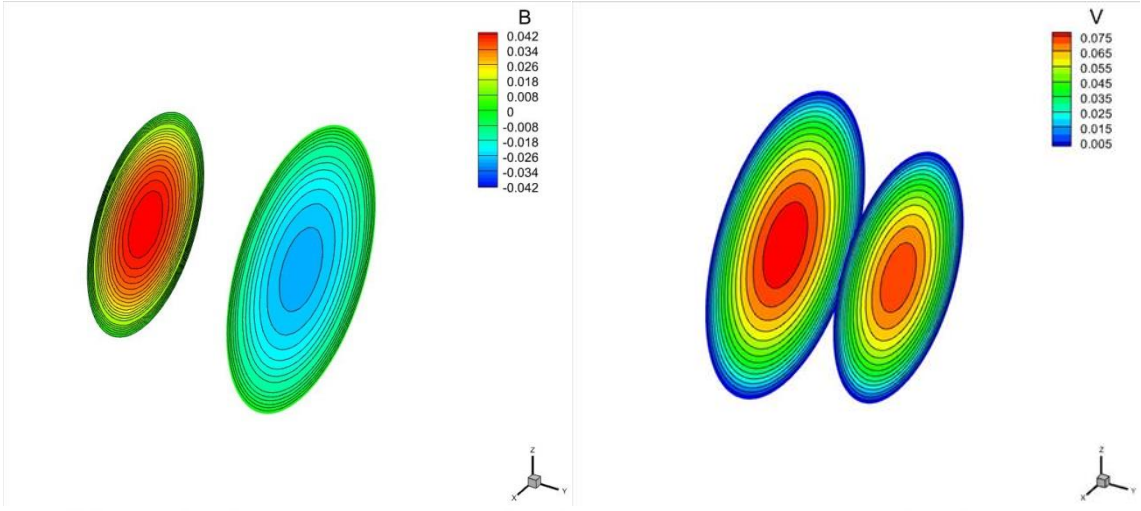


Şekil 12. Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri

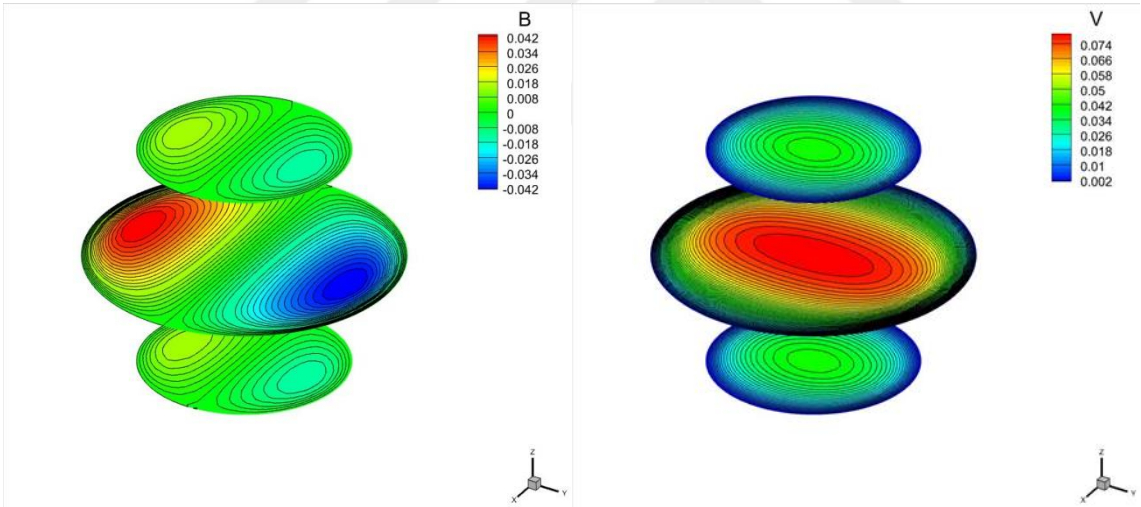
Şekil 10-12'da $Ha=1$ için manyetik alan (B) ve hız (V) çözümlerinin sırası ile x, y ve z eksenlerine göre kesitlerinin grafikleri verilmiştir. Her üç grafikten görüleceği üzere, elde edilen çözümlerin son derece kararlı olduğu, eksenlerin durumlarına göre simetrilerin gözlemlendiği ve sınırlara yaklaştıkça izole sınır koşullarından dolayı her iki çözümün de sıfıra yaklaştığı açık bir şekilde vurgulanmaktadır.



Şekil 13. Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri



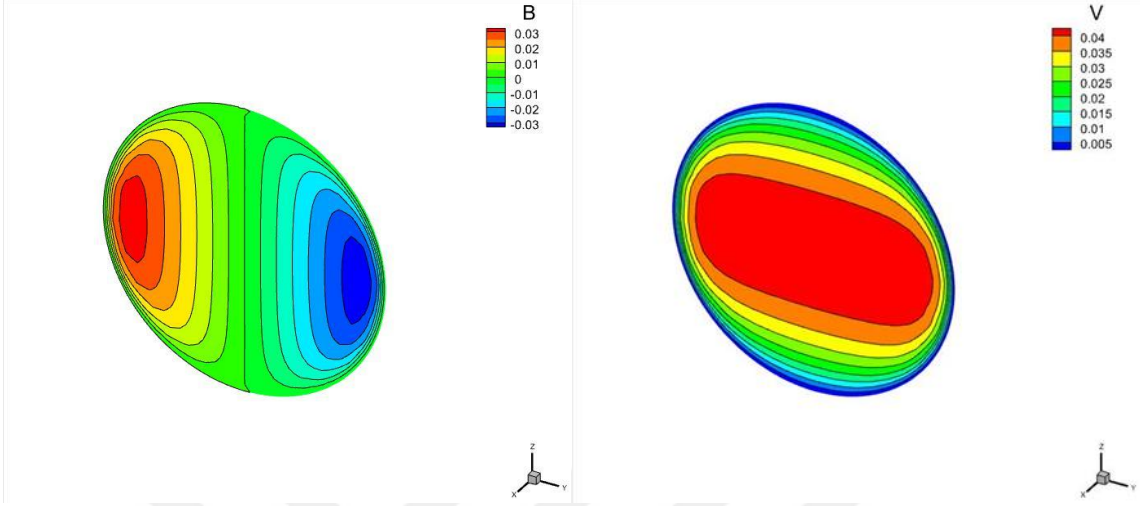
Şekil 14. Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri



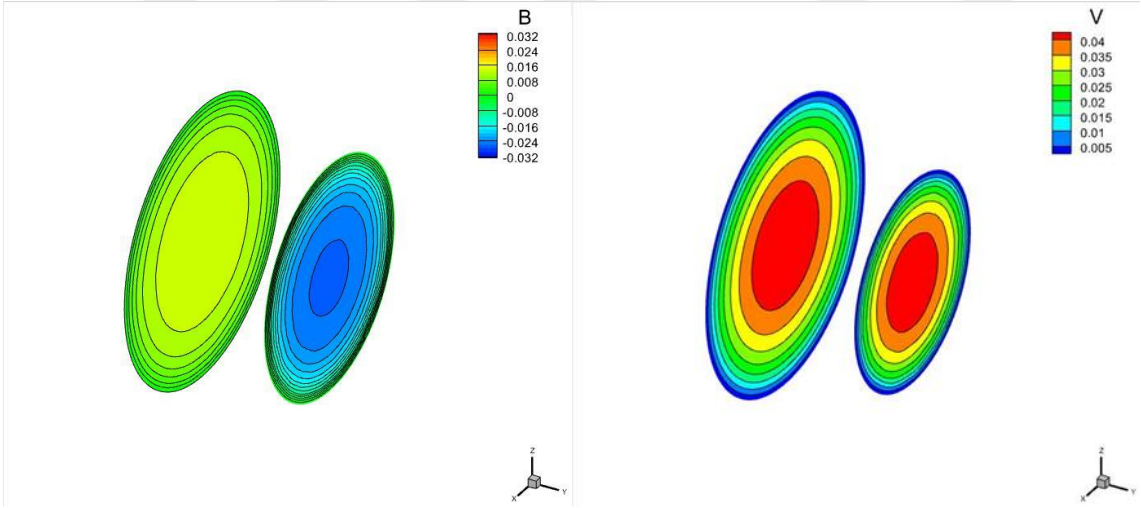
Şekil 15. Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri

Şekil 13-15'de aynı problemin $Ha=10$ için çözümleri elde edilmiştir. Grafiklerden görüleceği üzere, $Ha=1$ durumu ile karşılaştırıldığında en yüksek değer olarak B 'nin arttığı fakat V 'nin azaldığı, B 'nin en yüksek/en düşük değerlerini bölge sınırlarına yakın noktalarda, V 'nin ise bölgenin merkezinde aldığı gözlemlenmektedir.

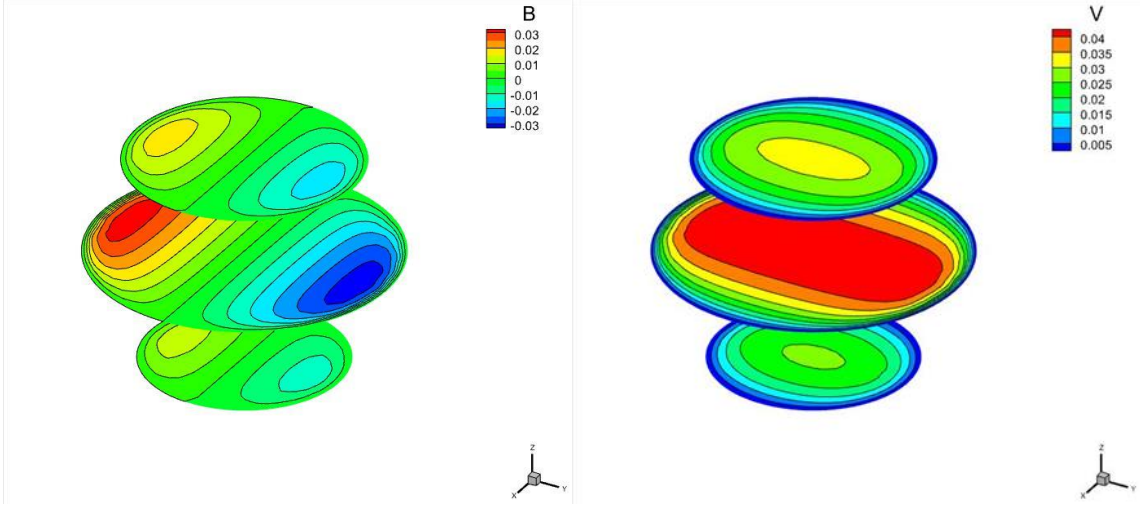
Ha değerinin çok fazla olmamasından dolayı, çözümlerin halen daha kararlı ve çözüm eğrilerinin düzgün yapıda olduğu gözlemlenmektedir.



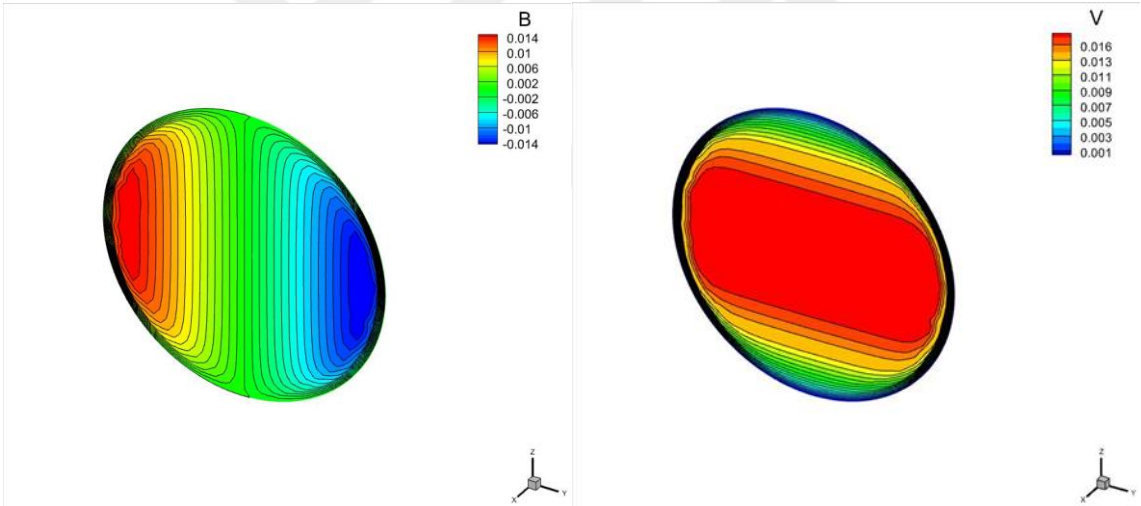
Şekil 16. Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 20$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri



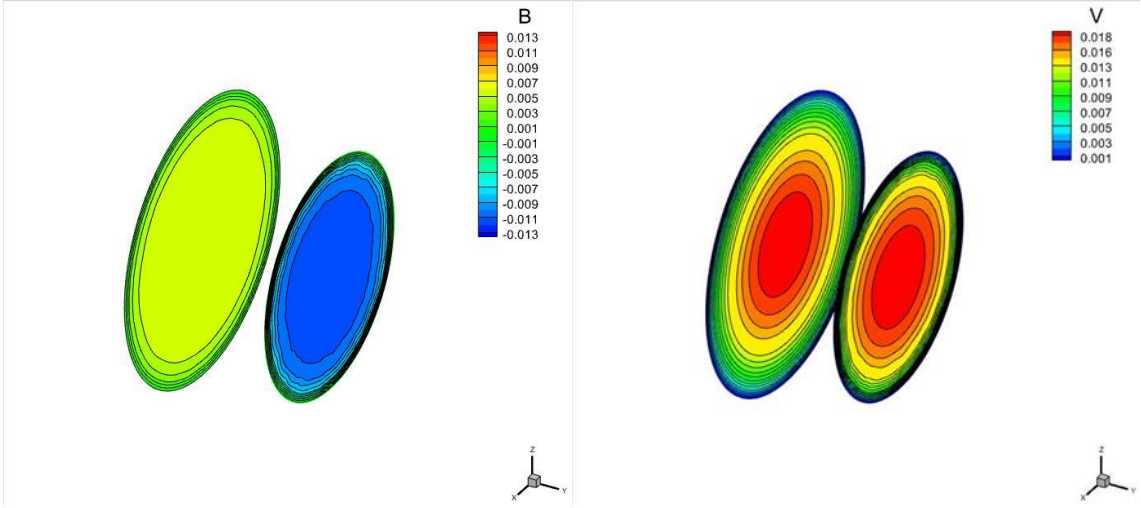
Şekil 17. Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 20$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri



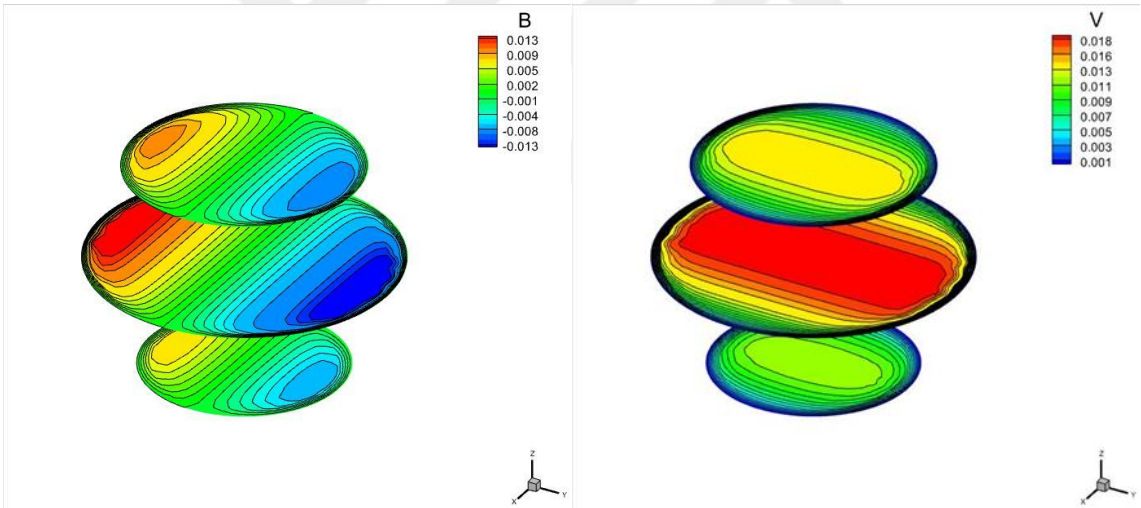
Şekil 18. Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 20$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri



Şekil 19. Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 50$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri



Şekil 20. Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 50$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri

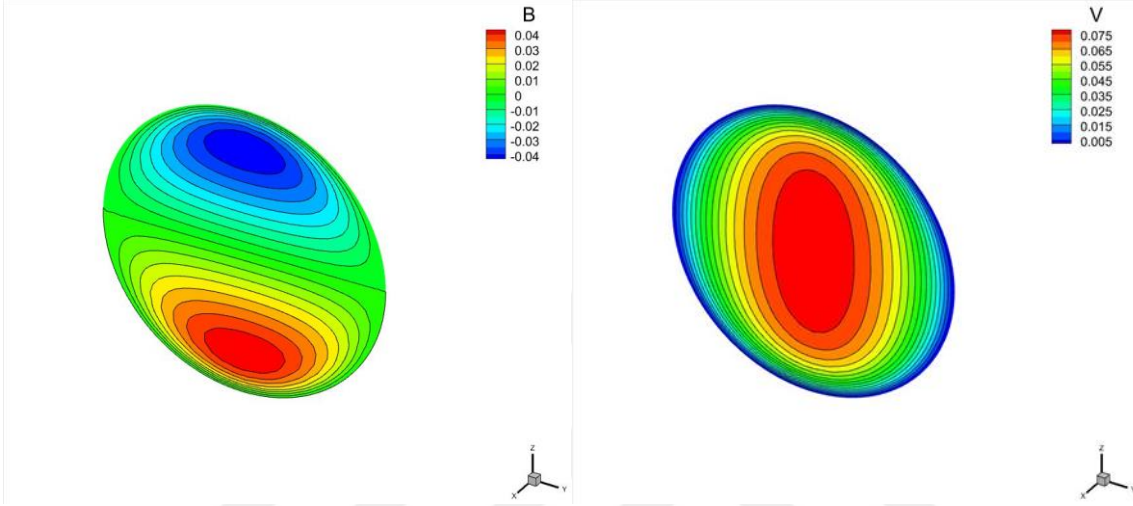


Şekil 21. Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 50$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri

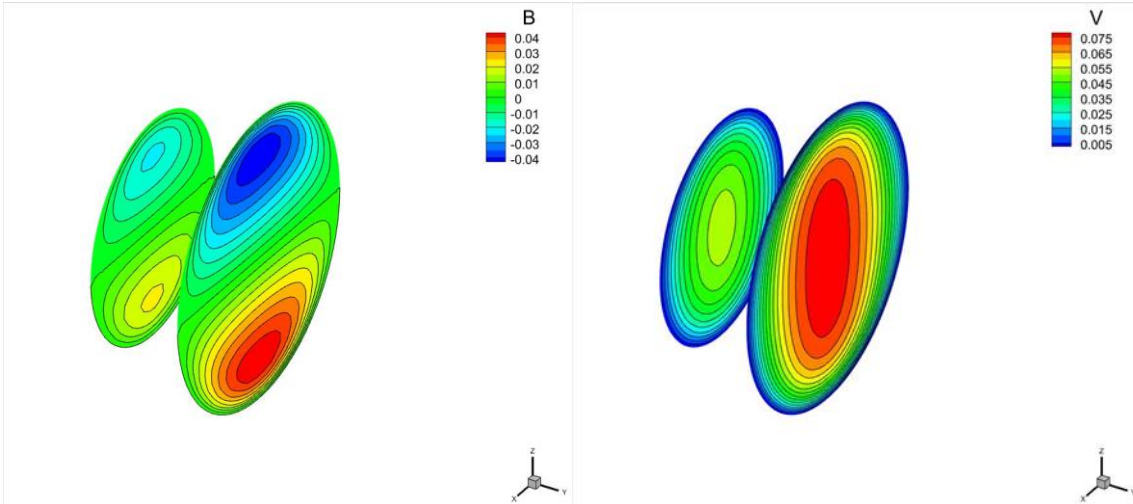
Şekil 16-18'de $Ha=20$ ve Şekil 19-21'de ise $Ha=50$ için çözümler elde edilmiştir. Her ne kadar özellikle sınırlara yakın bölgelerde az da olsa sayısal çözümden kaynaklanan bozukluklar (kararsızlıklar) olduğu gözlemlense dahi, az sayıda eleman kullanılmasına rağmen stabilize formülün avantajı ile bu kararsızlıkların minimize edildiği gözlemlenmektedir. Ayrıca Hartmann sayısının

artması ile MHD problemlerinin karakteristik davranışı olan sınır katmanlarının oluşumu çok açıkça gözlemlenmektedir.

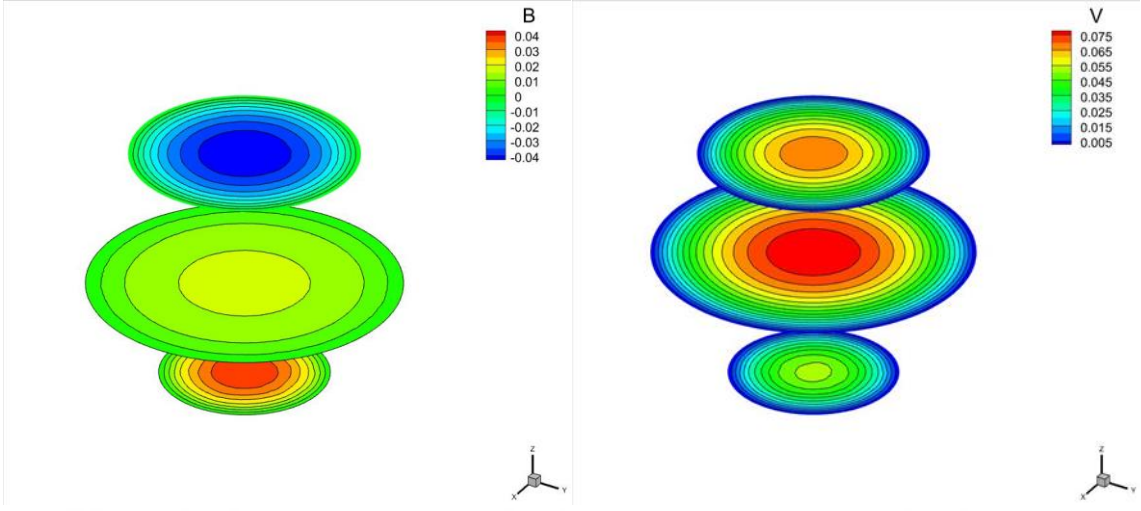
Şekil 22-42 arasındaki grafiklerde Hartmann sayısı $Ha=10$ sabit tutularak, dışardan uygulanan manyetik alanın uygulama açıları α ve β 'nın değişimleri incelenecektir.



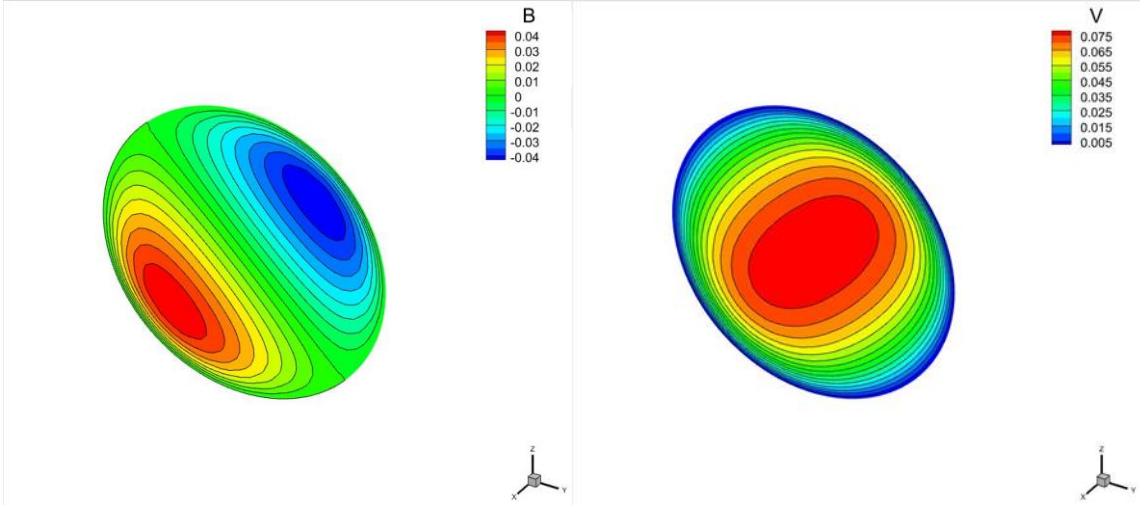
Şekil 22. Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = 0$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri



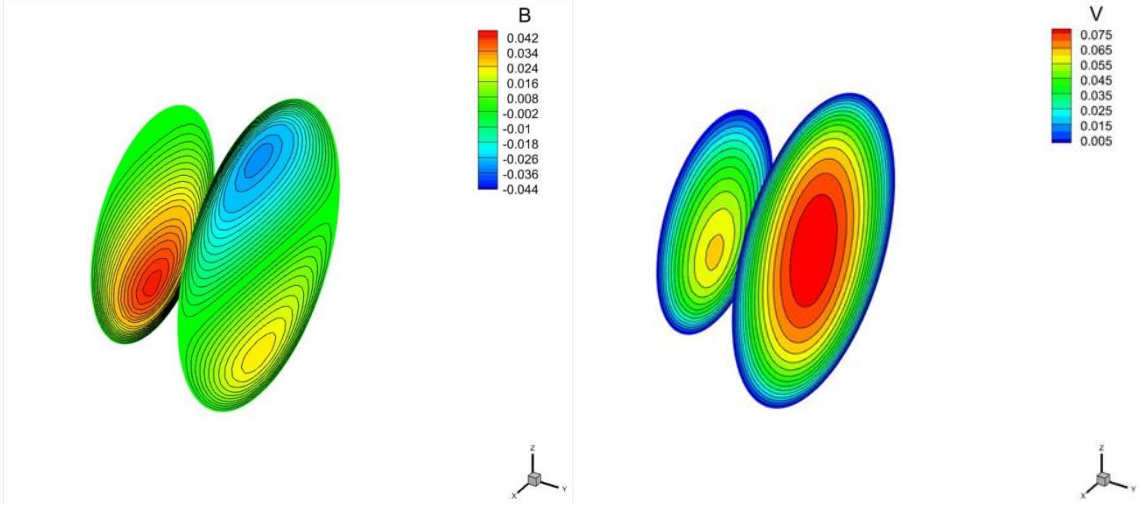
Şekil 23. Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = 0$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri



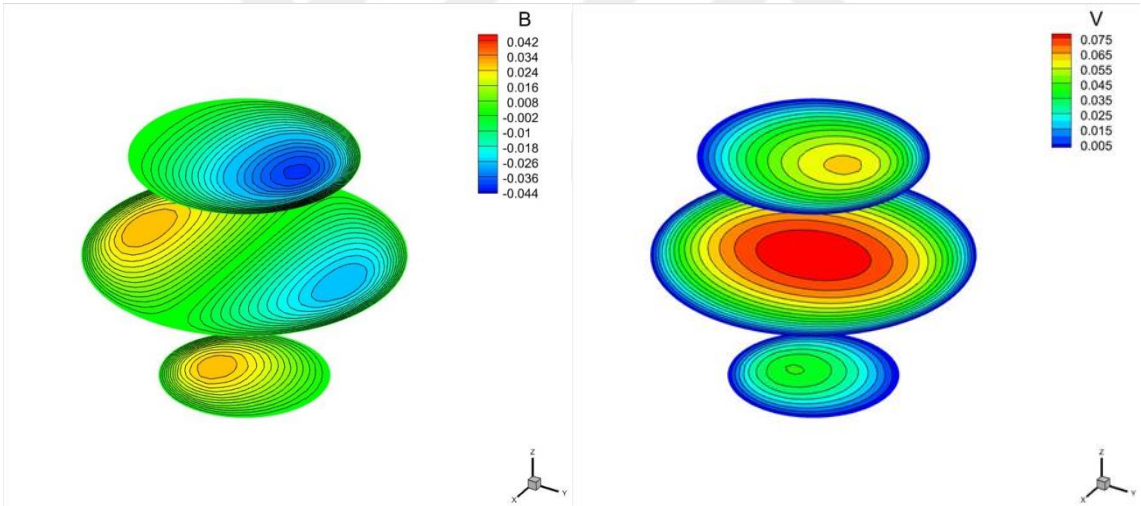
Şekil 24. Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = 0$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri



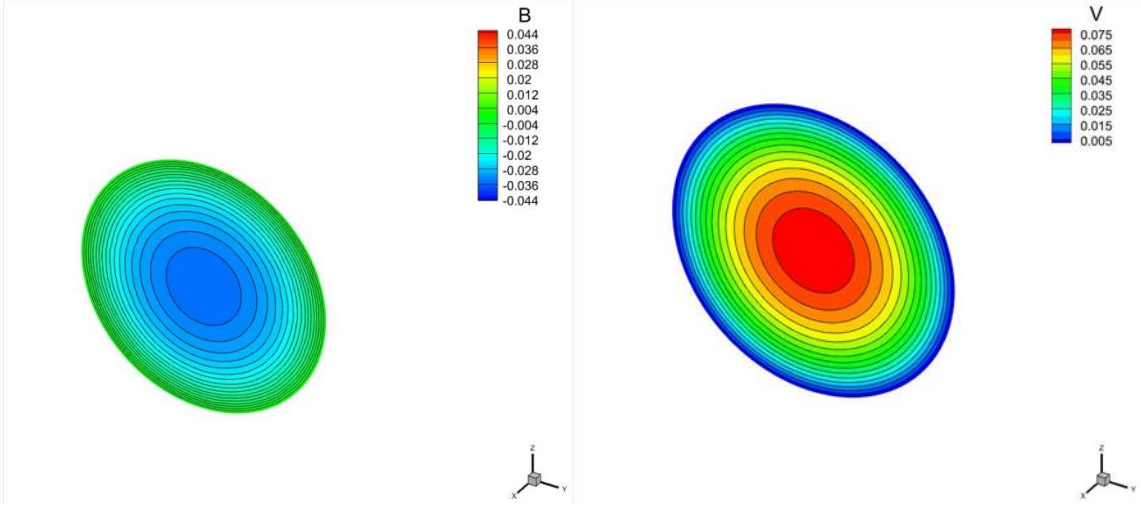
Şekil 25. Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri



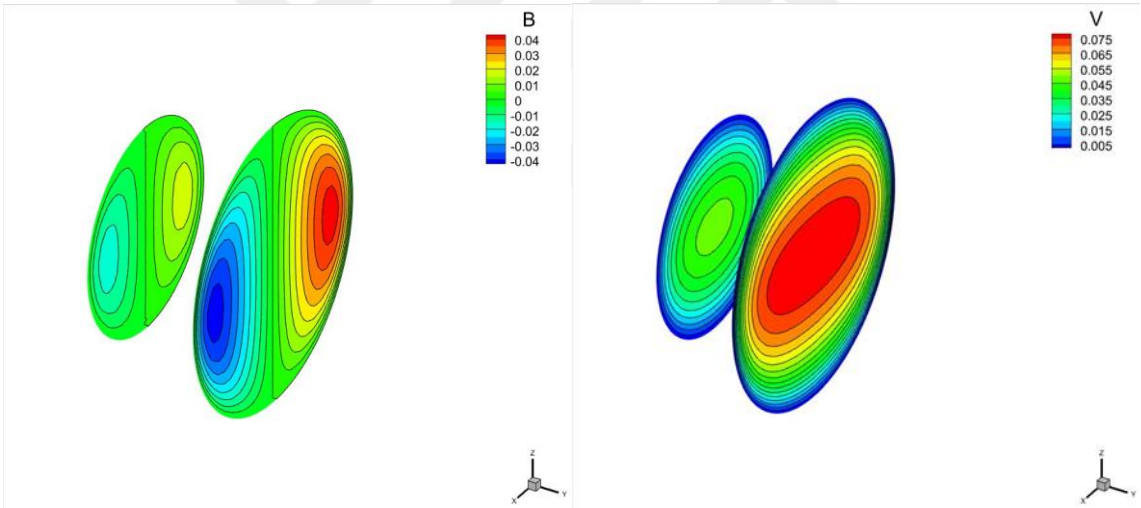
Şekil 26. Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri



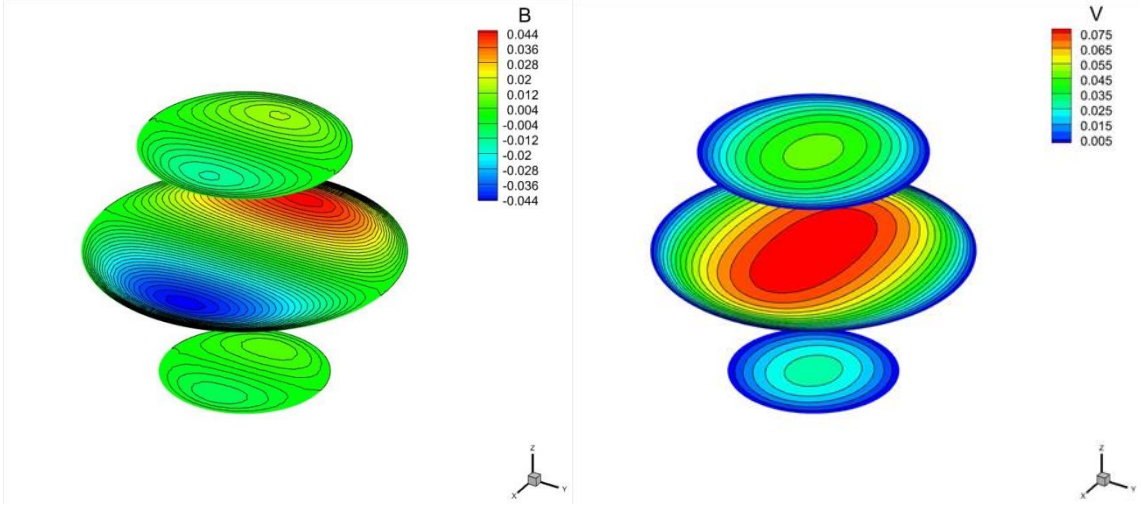
Şekil 27. Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri



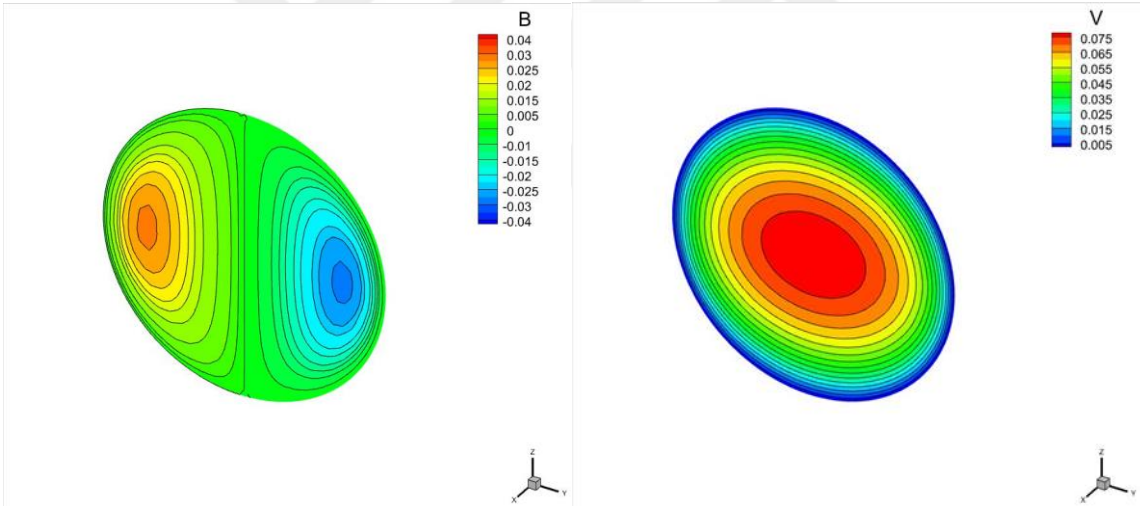
Şekil 28. Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = 0$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri



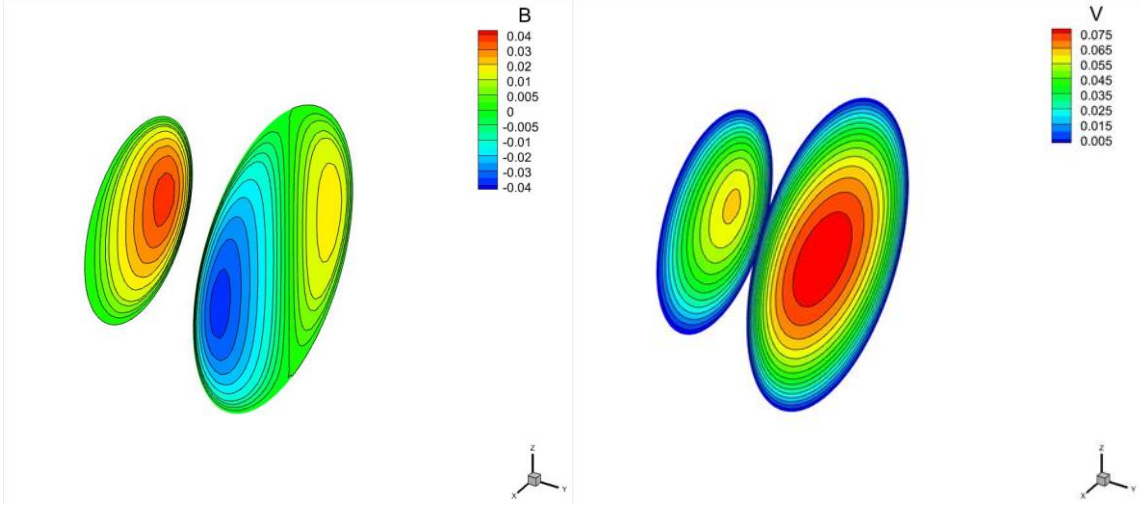
Şekil 29. Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = 0$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri



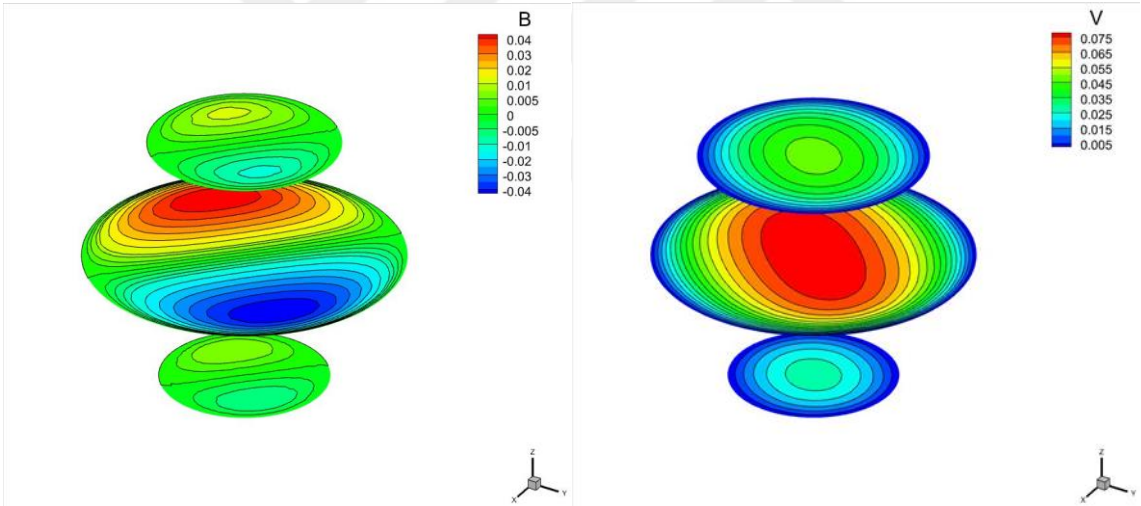
Şekil 30. Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = 0$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri



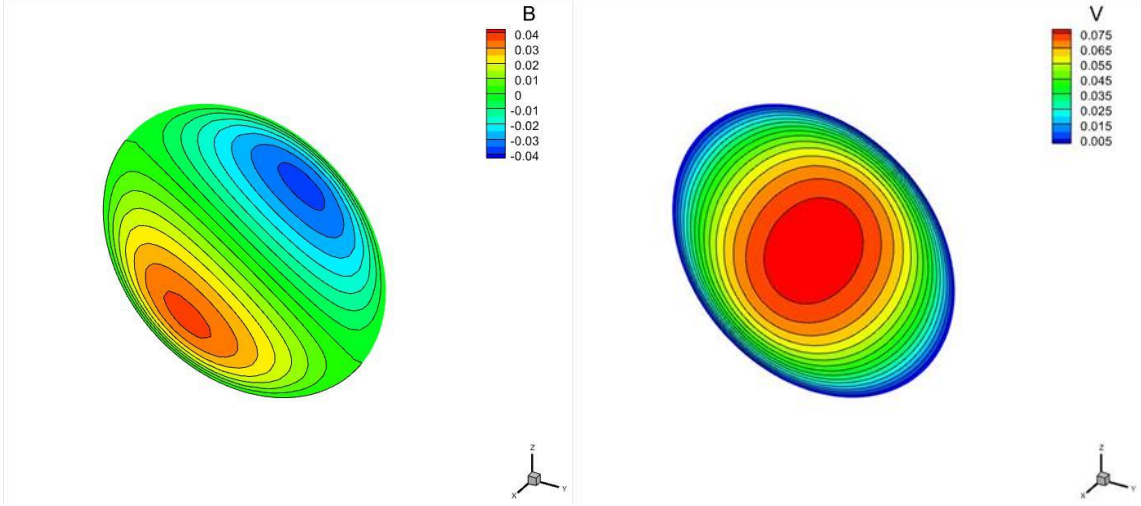
Şekil 31. Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri



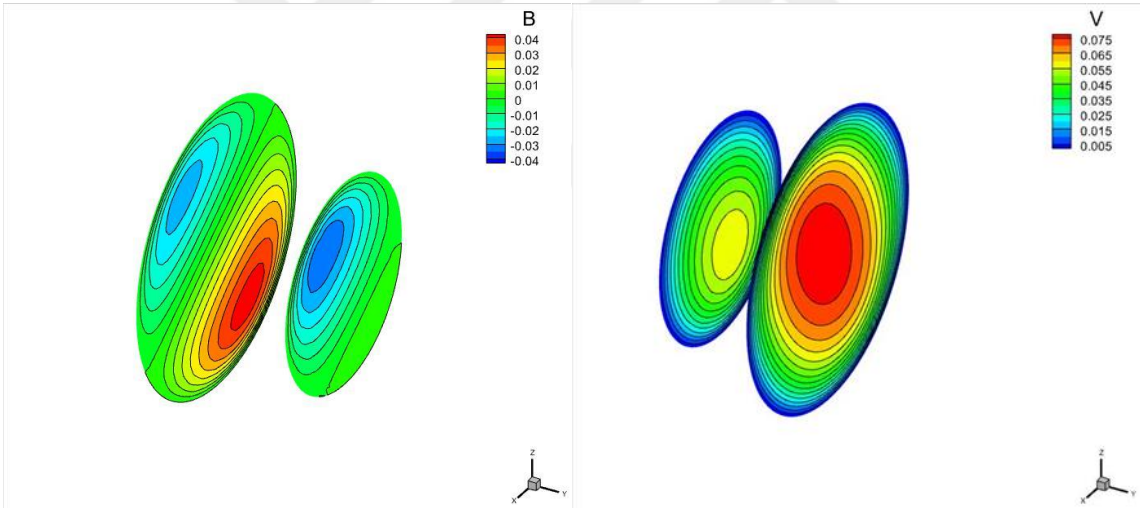
Şekil 32. Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri



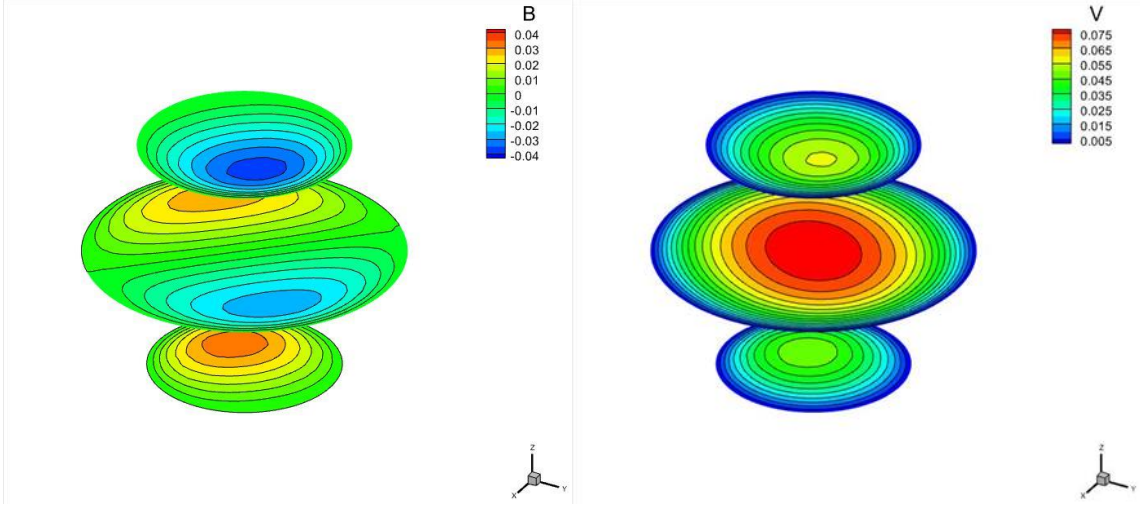
Şekil 33. Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri



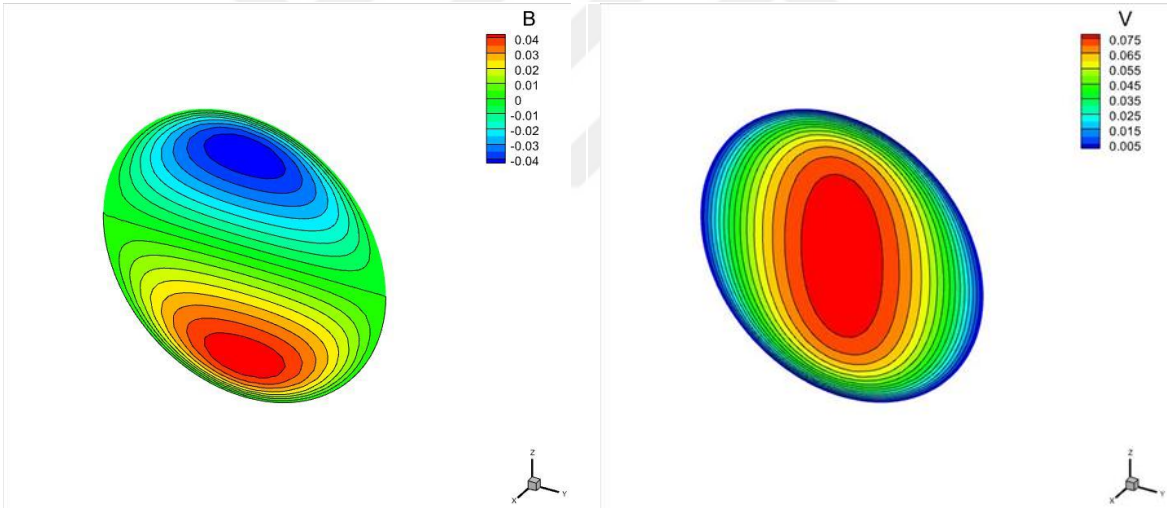
Şekil 34. Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri



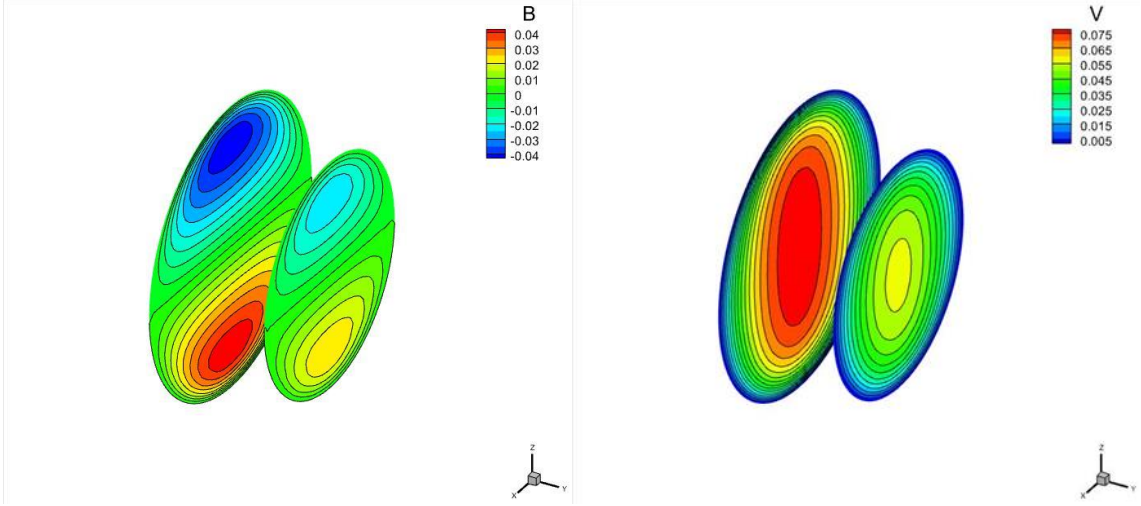
Şekil 35. Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri



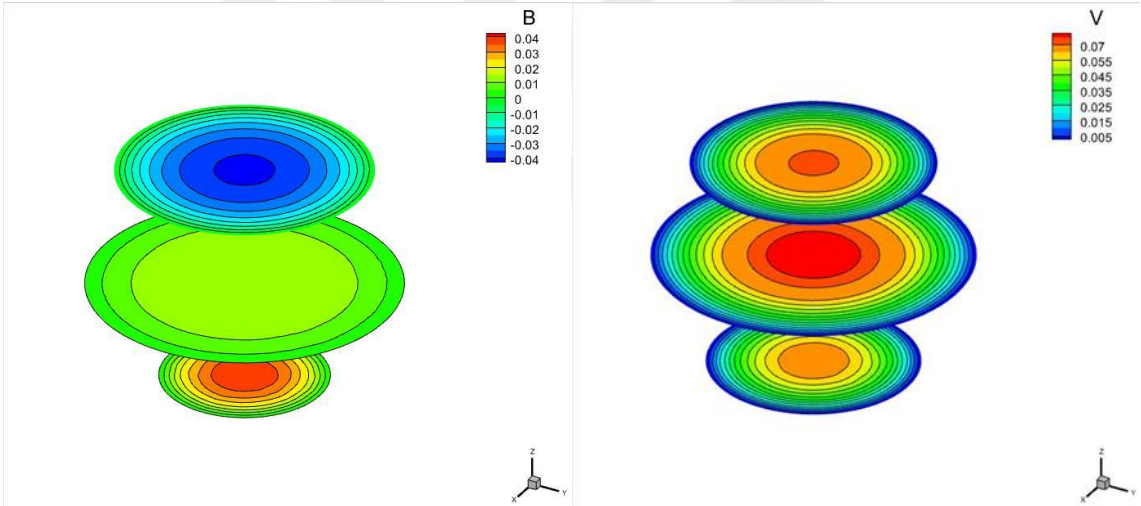
Şekil 36. Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri



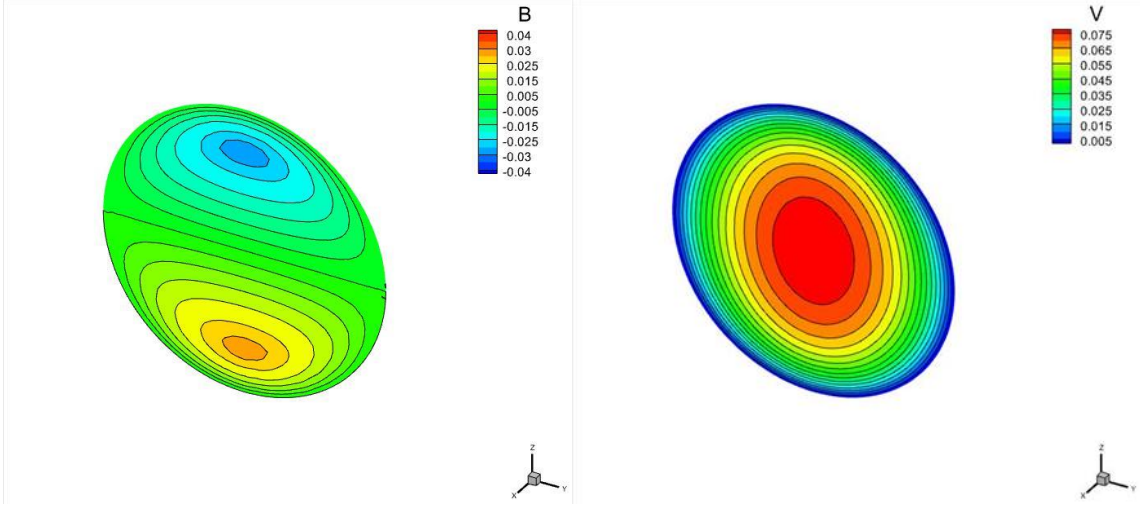
Şekil 37. Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = 0$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri



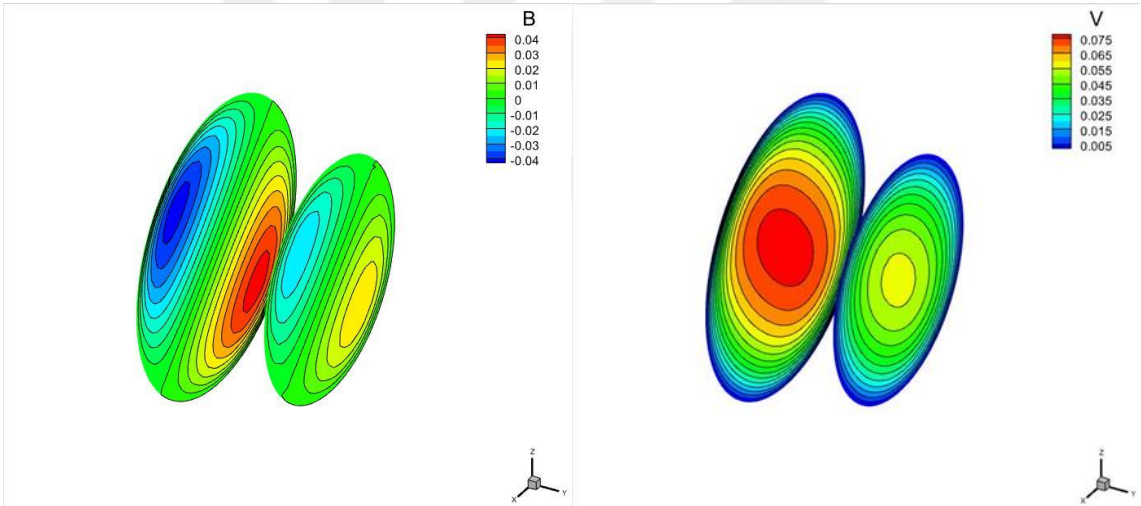
Şekil 38. Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = 0$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri



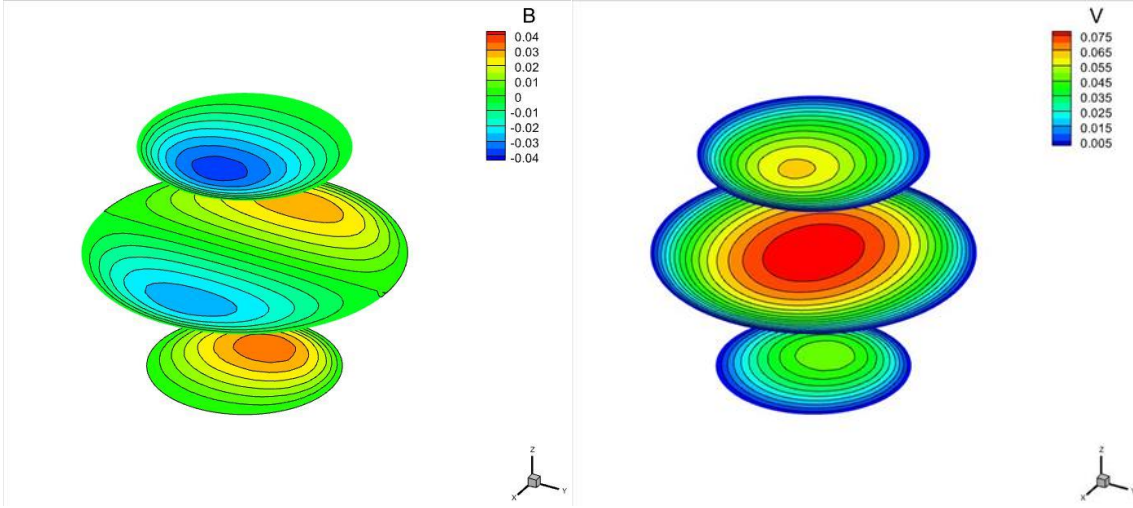
Şekil 39. Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = 0$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri



Şekil 40. Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = 0$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri

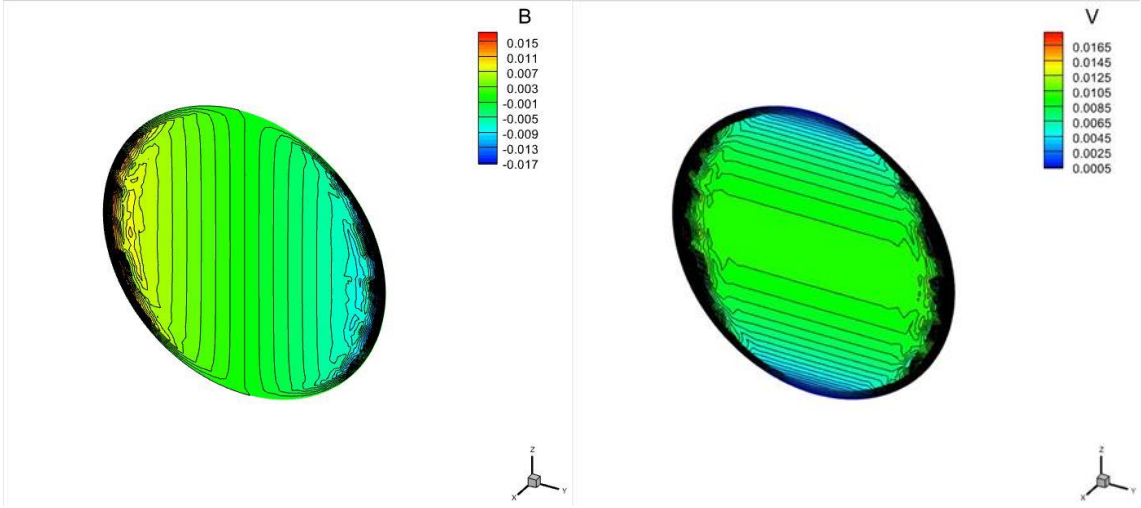


Şekil 41. Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = 0$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri

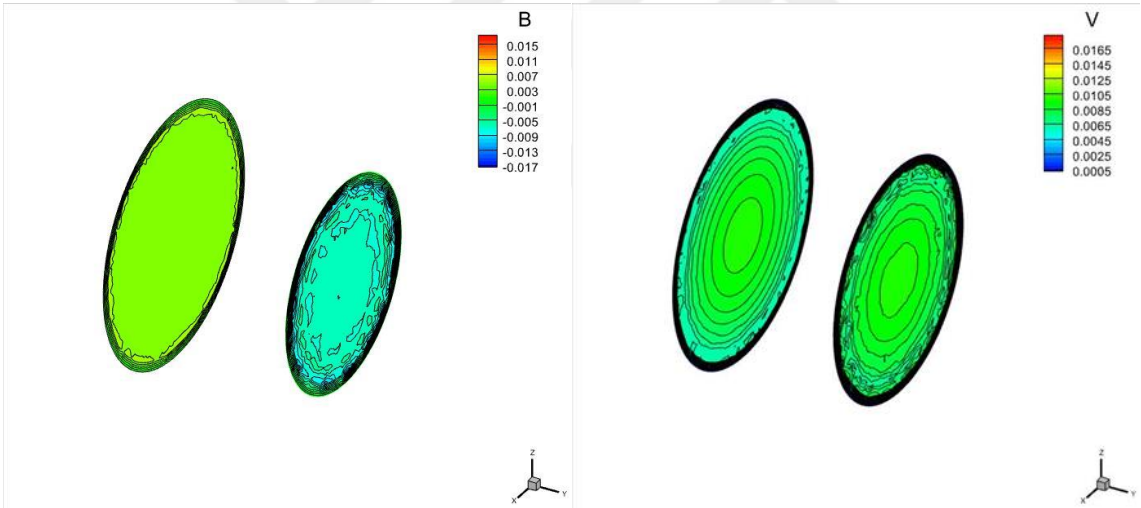


Şekil 42. Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = 0$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri

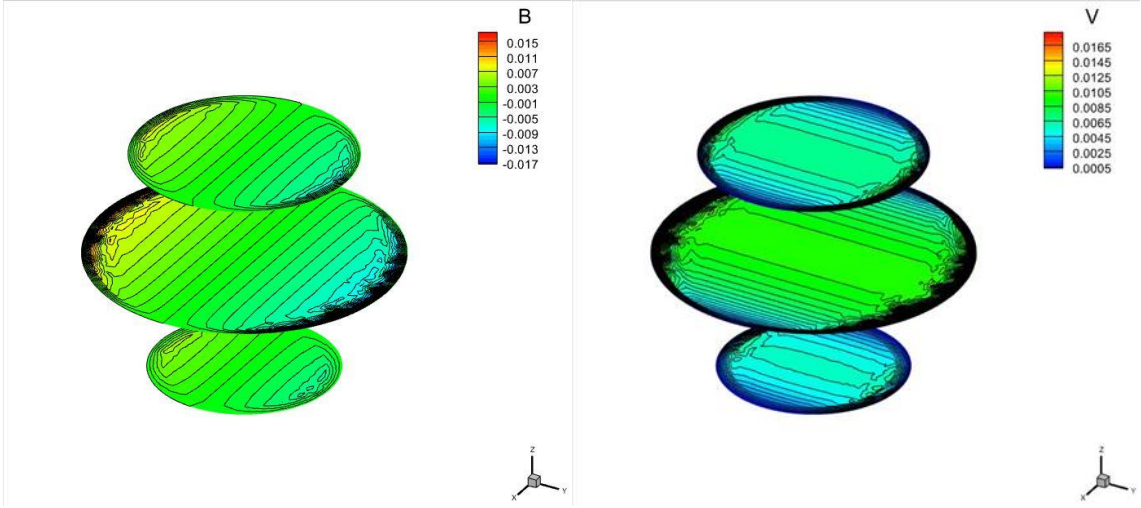
Şekil 22-24 arasında $\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}$, Şekil 25-27 arasında $\alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{\pi}{2}$, Şekil 28-30 arasında $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = 0$, Şekil 21-33 arasında $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \frac{\pi}{4}$, Şekil 34-36 arasında $\alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{\pi}{4}$, Şekil 37-39 arasında $\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{4}$ ve Şekil 40-42 arasında $\alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = 0$ değerleri için çözümler elde edilmiştir. Bütün grafiklerden gözlemleneceği üzere, uygulanan açının doğrultusuna göre simetrik davranışların bozulduğu, sınır katmanlarının oluşumunun dışardan uygulanan manyetik alan açısının yönü ile paralellik gösterdiği fakat en yüksek/en düşük değerler olarak sonuçların çok da değişmediği gözlemlenmektedir.



Şekil 43. Küre bölge üzerinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 100$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri

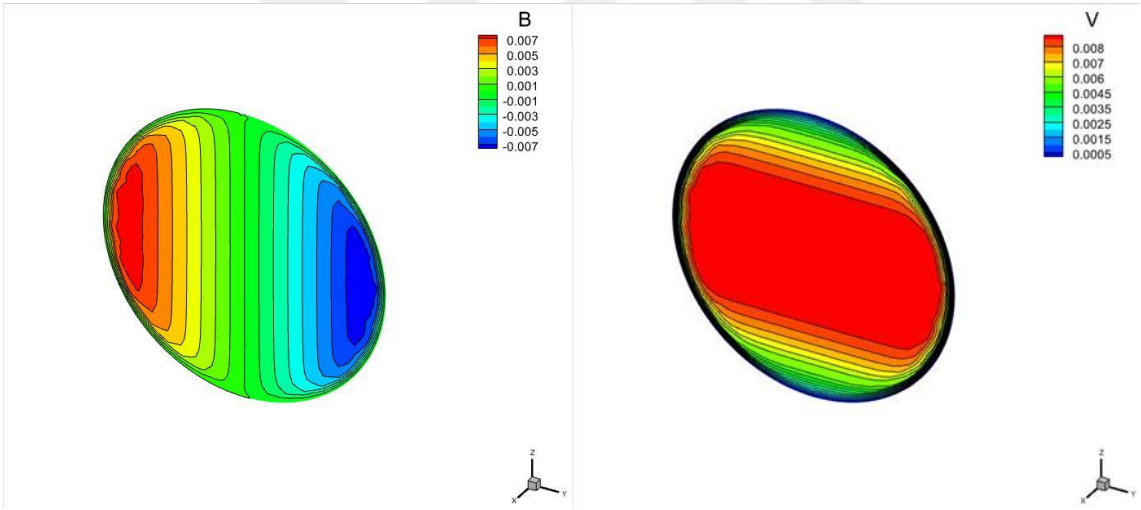


Şekil 44. Küre bölge üzerinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 100$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri



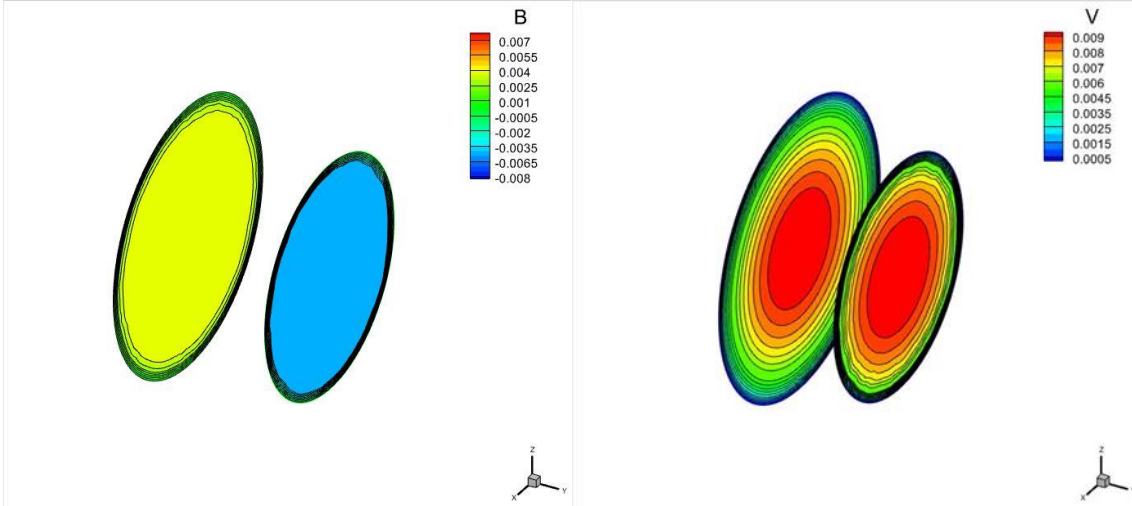
Şekil 45. Küre bölge üzerinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi

kullanılarak $Ha = 100$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri

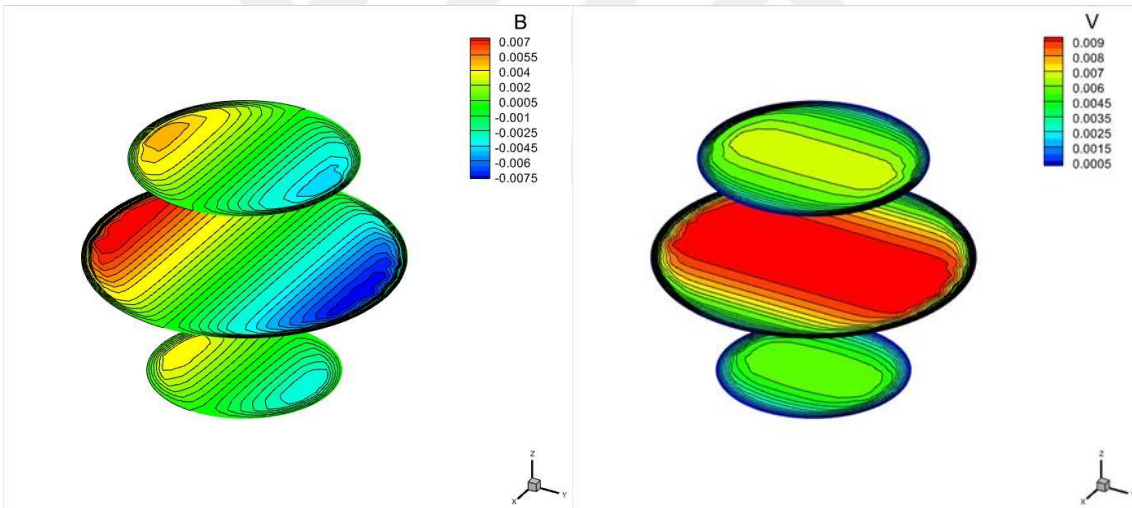


Şekil 46. Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi

kullanılarak $Ha = 100$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri



Şekil 47. Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 100$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri



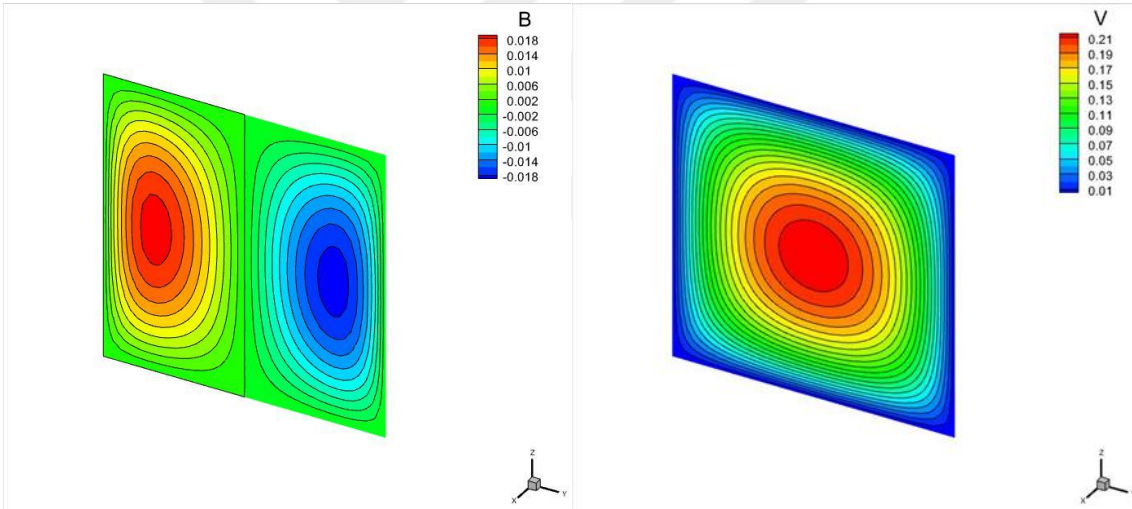
Şekil 48. Küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 100$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri

Son olarak Şekil 43-48 arasındaki grafiklerde yüksek Hartmann sayısı değeri $Ha=100$ için stabilize sonlu elemanlar formülasyonunun etkisi gösterilmiştir. Şekil 43-45 standart sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen sonuçlar, Şekil 46-48 arasında ise stabilize sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen sonuçlar verilmiştir. Stabilizasyonun ne kadar etkin olduğu, her iki yöntemle elde edilen grafiklerin

karşılaştırılmasından açıkça gözlemlenmektedir. Ayrıca, stabilize sonuçlardan yüksek Hartmann sayısı değeri için sınır katman oluşumunun yoğunluğu da gözlemlenmektedir.

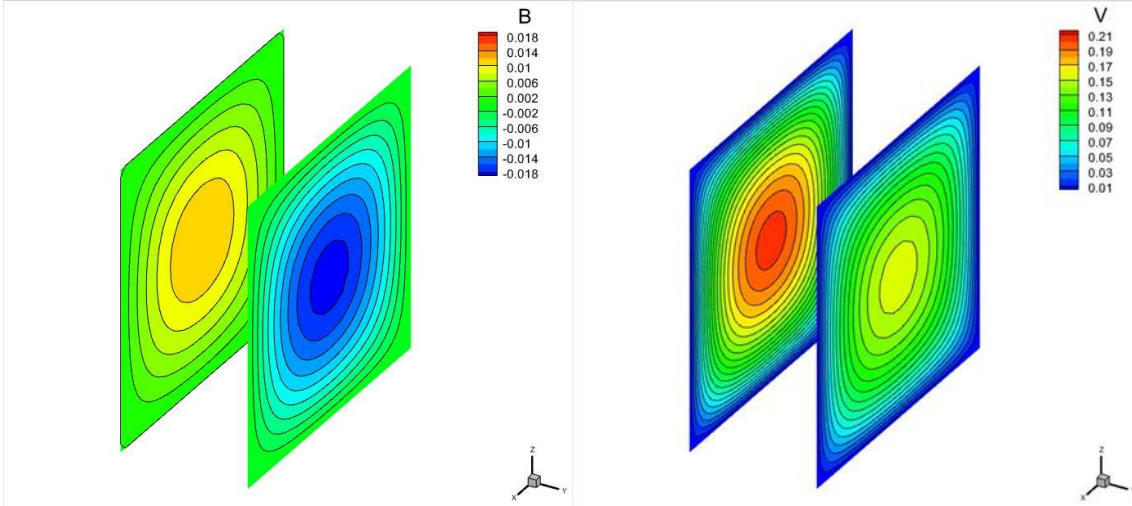
3.3.2. Küp Bölge İçerisinde MHD Probleminin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Çözümü

Bu bölümde, bir önceki bölümde küre bölge üzerinde elde edilen sonuçların küp bölge durumundaki sonuçları ve karşılaştırmaları yapılacaktır. Küre bölgede yapılan sıralamadaki gibi öncelikle Hartmann sayısındaki değişim, daha sonra açıdaki değişim ve son olarak stabilizasyon etkileri incelenecektir. Bu nedenle, Hartmann sayısındaki değişimde açı değerleri $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{2}$ olarak sabit tutulacaktır.

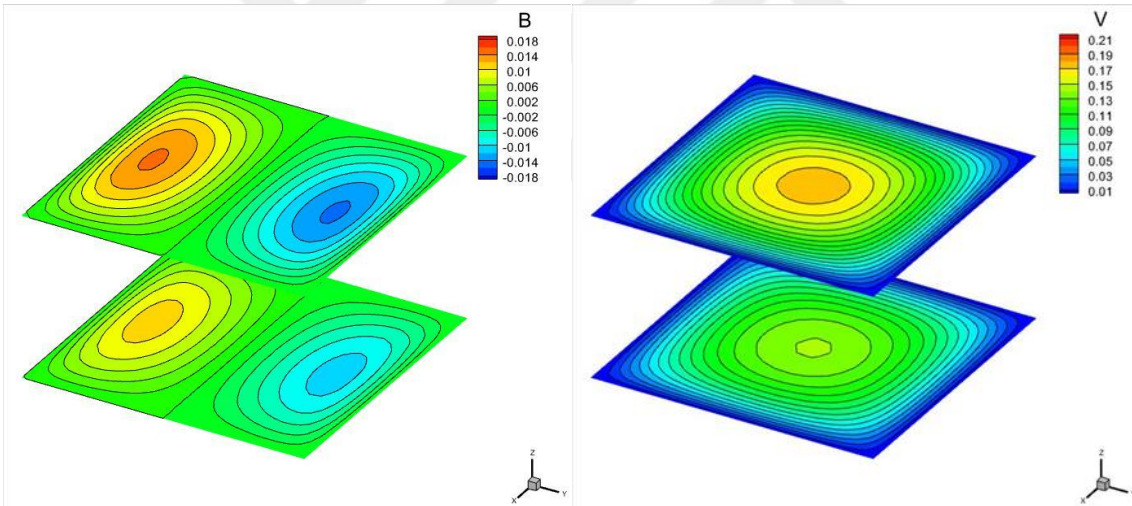


Şekil 49. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi

kullanılarak $Ha = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri

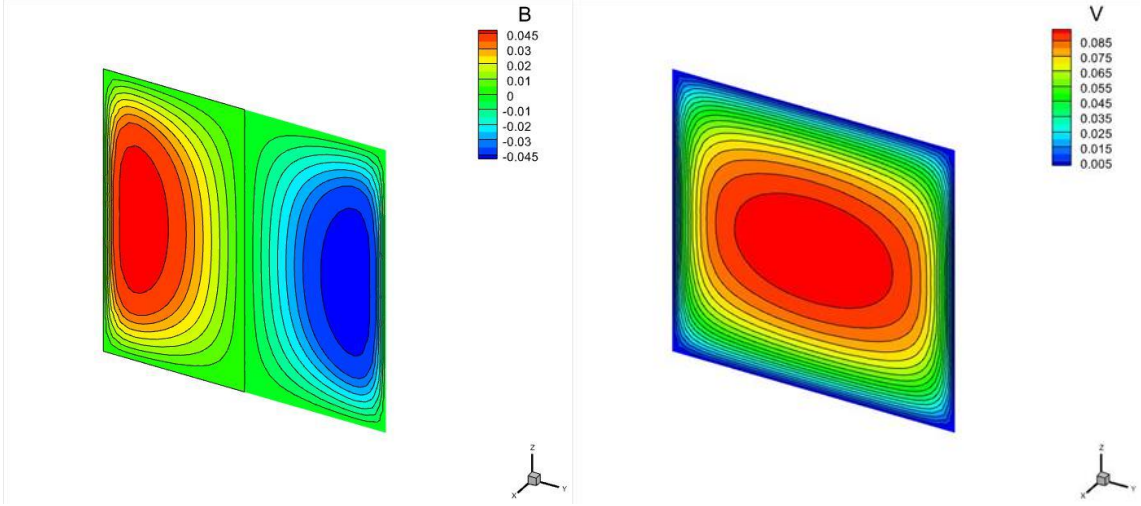


Şekil 50. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri

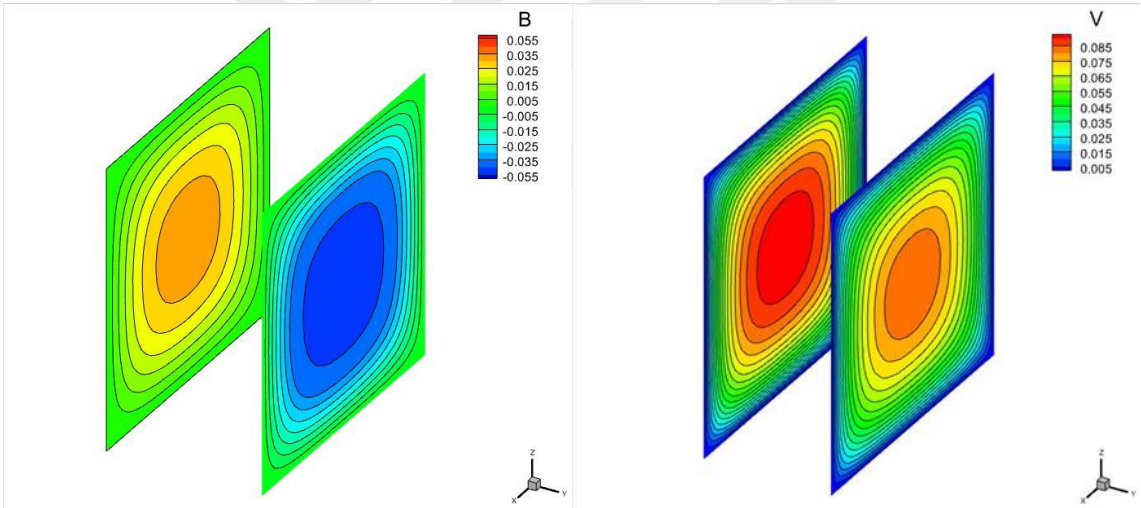


Şekil 51. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri

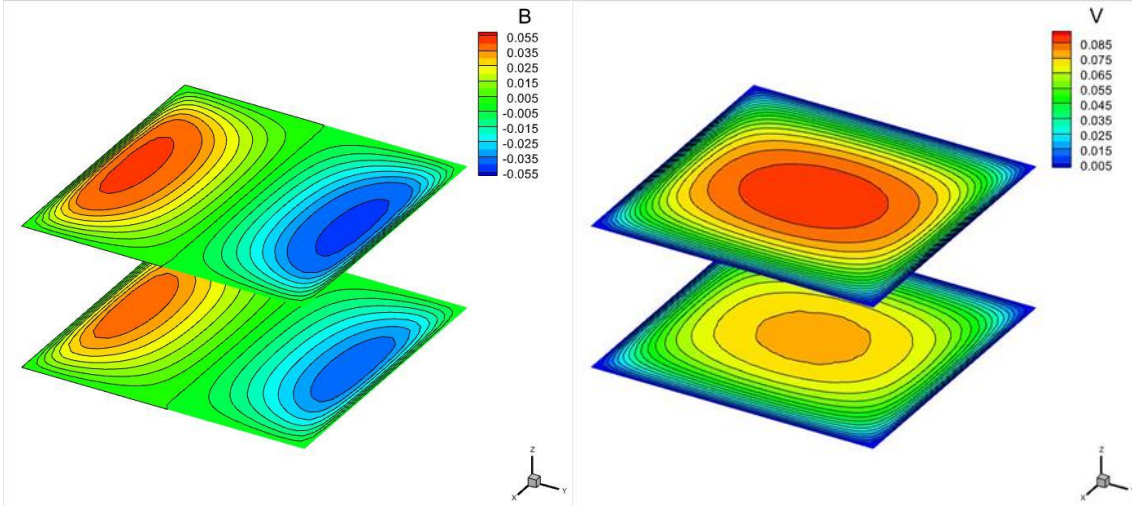
Şekil 49-51 arasındaki grafiklerde $Ha=1$ için sonuçlar elde edilmiştir. Her ne kadar küp bölge yapısından dolayı bölge sınırlarında köşeler olmasına rağmen, Hartman sayısının küçük değerleri için sayısal çözümlerde herhangi bir sorun yaşanmamaktadır. Küre çözümleriyle karşılaştırıldığında ise en yüksek/en düşük değerlerde artışlar olduğu da gözlemlenmektedir.



Şekil 52. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri

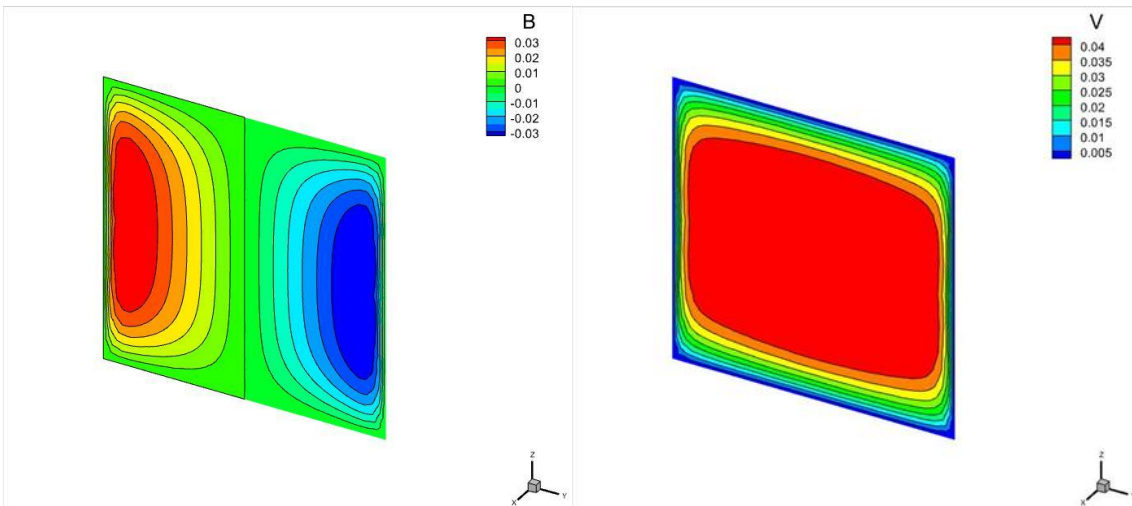


Şekil 53. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri

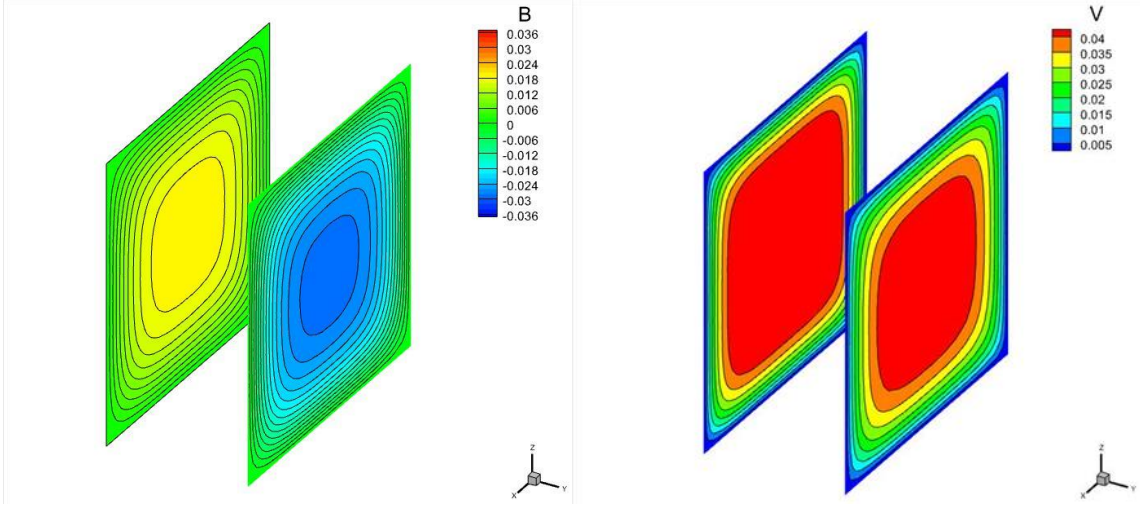


Şekil 54. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri

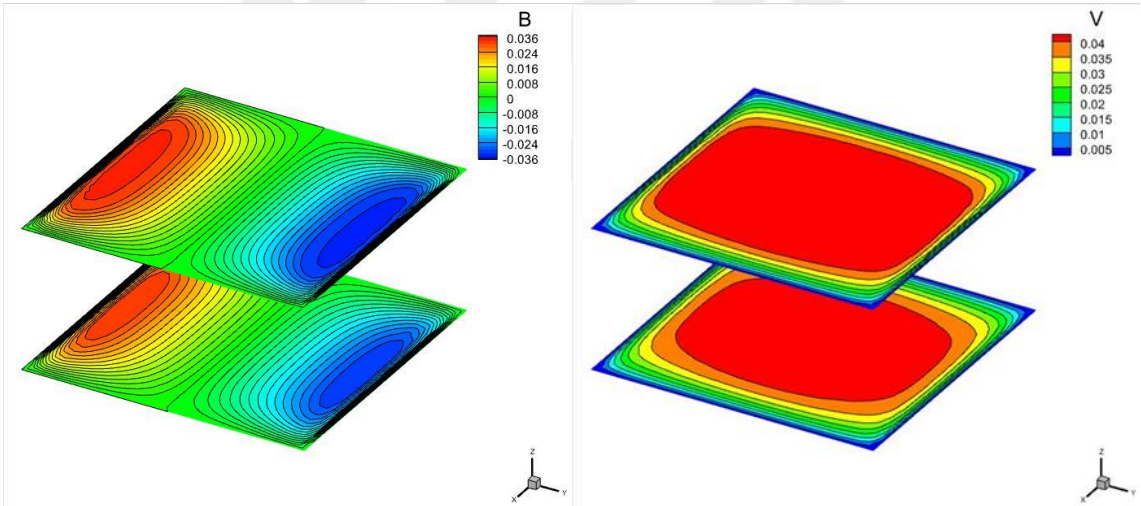
Şekil 52-54 arasındaki grafiklerde aynı problemin $Ha=10$ için çözümleri elde edilmiş ve farklı boyutlardaki kesitleri verilmiştir. Çözüm eğrilerindeki düzgün davranışın devam ettiği, eksenlerin durumuna simetrik davranışların olduğu ve sınırlara yaklaştıkça değerlerin azalarak sıfıra yaklaştığı gözükmemektedir.



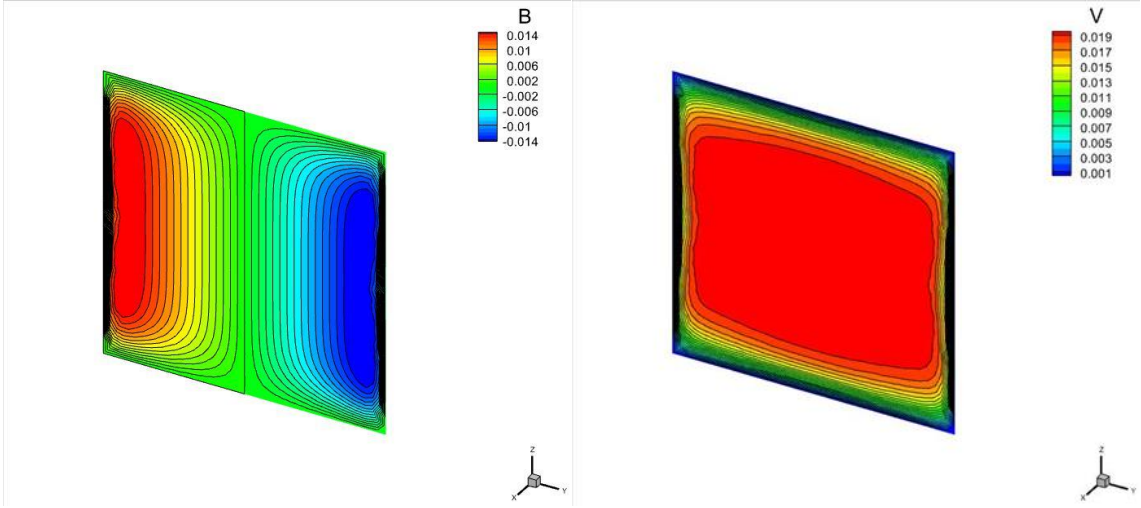
Şekil 55. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 20$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri



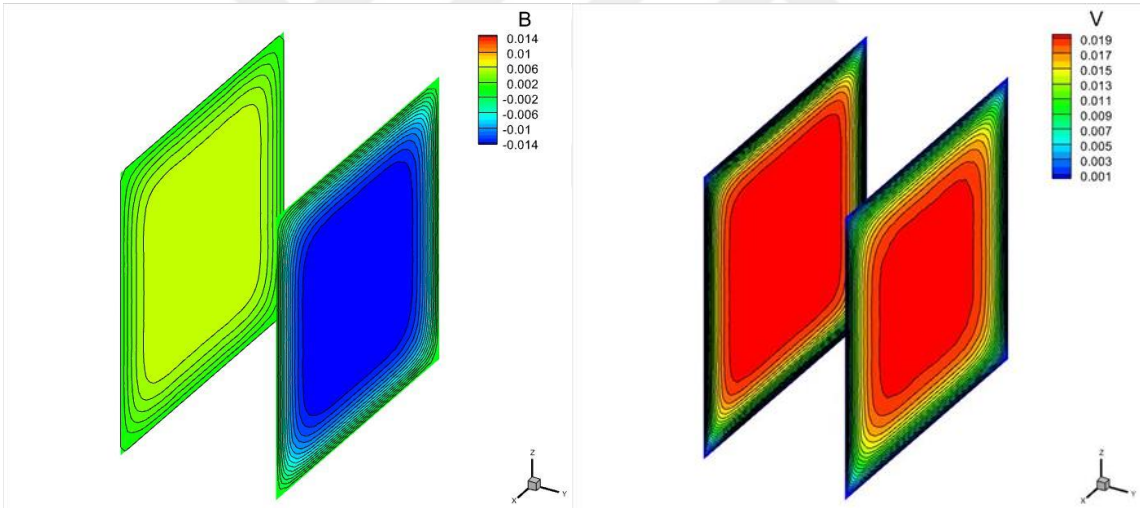
Şekil 56. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 20$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri



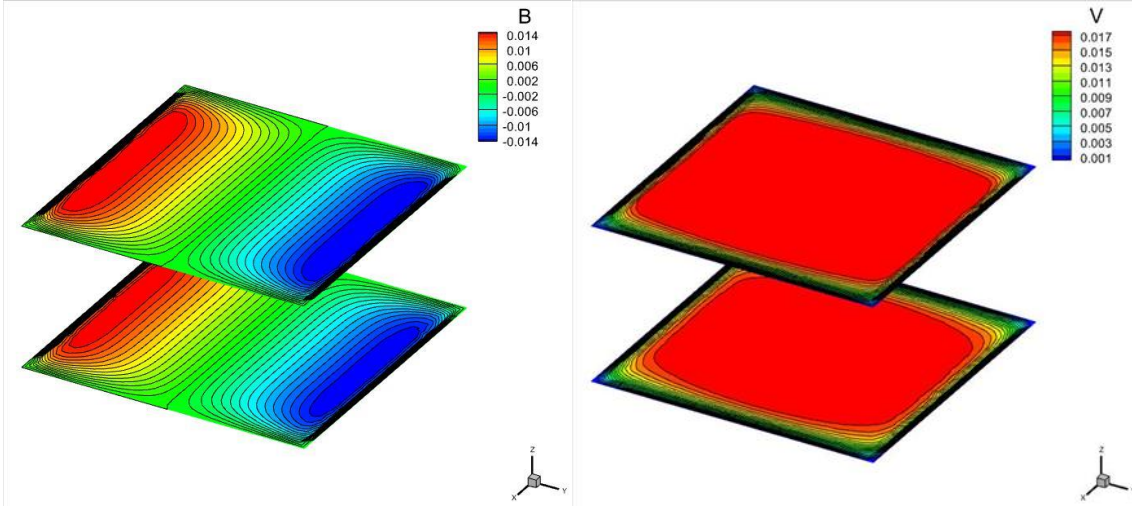
Şekil 57. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 20$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri



Şekil 58. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 50$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri

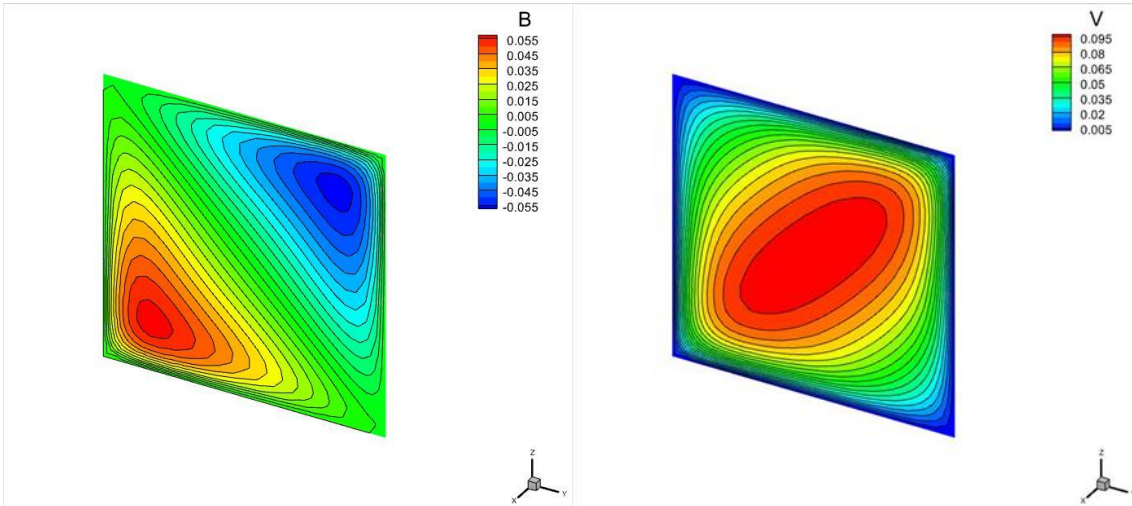


Şekil 59. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 50$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri

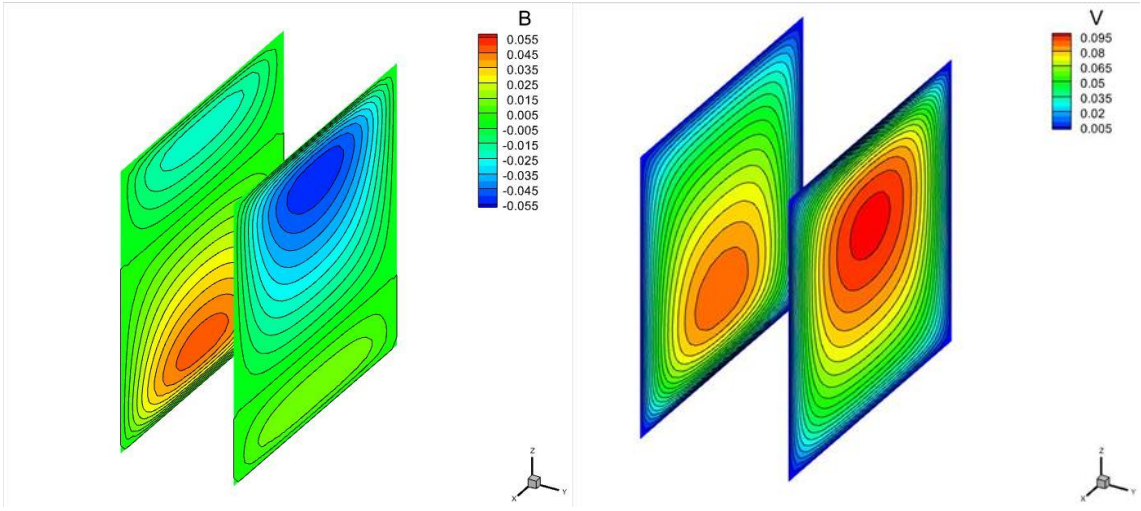


Şekil 60. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 50$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri

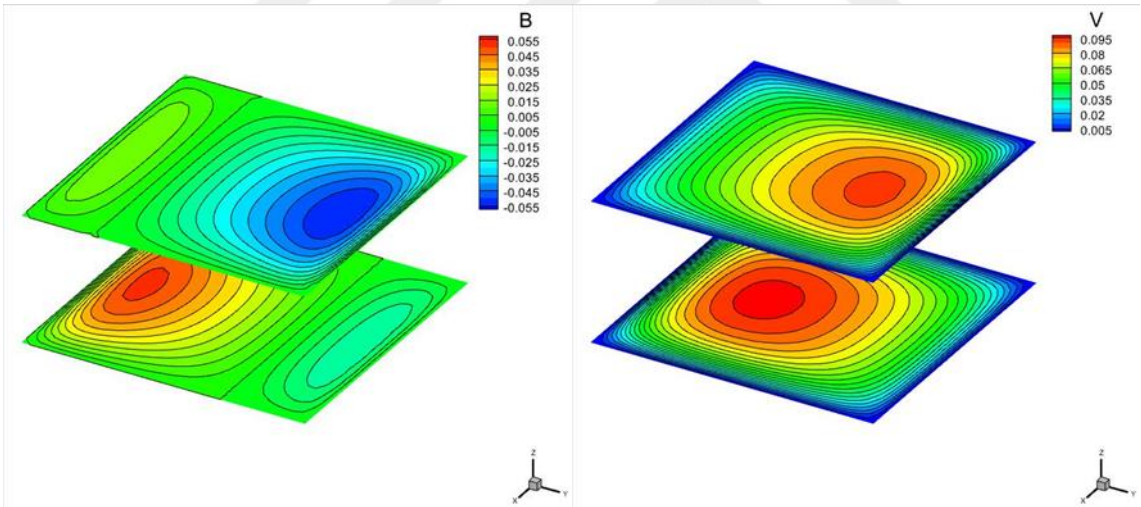
Şekil 55-57 arasındaki grafiklerde $Ha=20$ ve Şekil 58-60 arasındaki grafiklerde ise $Ha=50$ için çözümler elde edilmiştir. Hartman sayısı yükseldikçe özellikle sınırlara ve köşelere yakın bölgelerde sayısal çözümden kaynaklanan küçük kararsızların oluşmaya başladığı görülmektedir. Ayrıca Hartmann sayısı arttıkça sınır katmanlarının oluştuğu da gözlemlenmektedir.



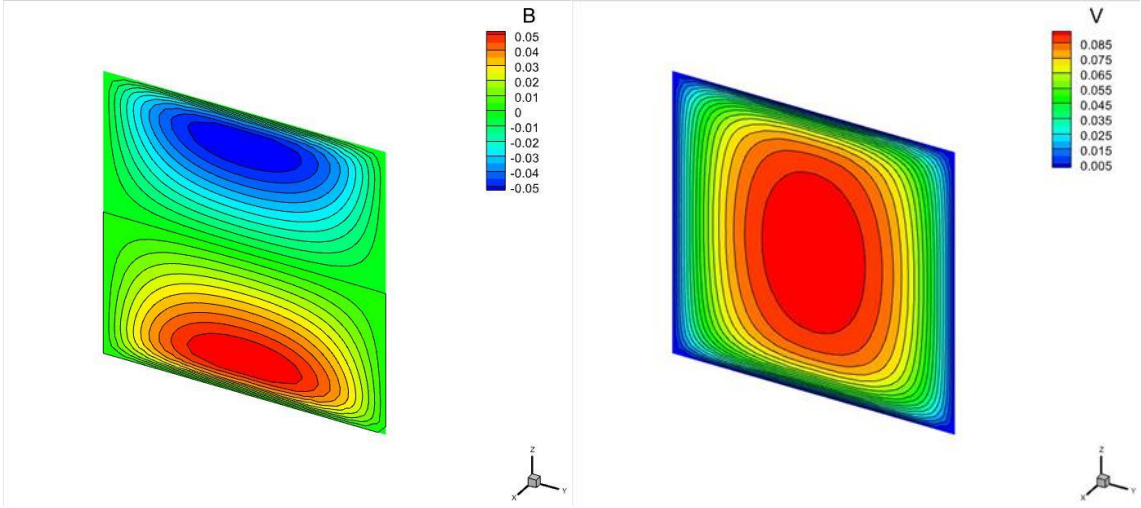
Şekil 61. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri



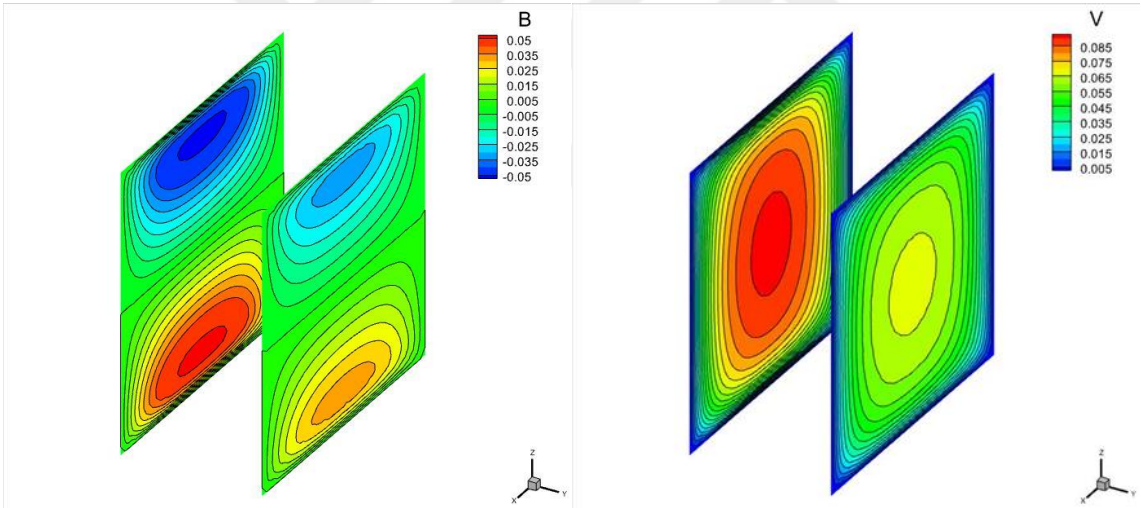
Şekil 62. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri



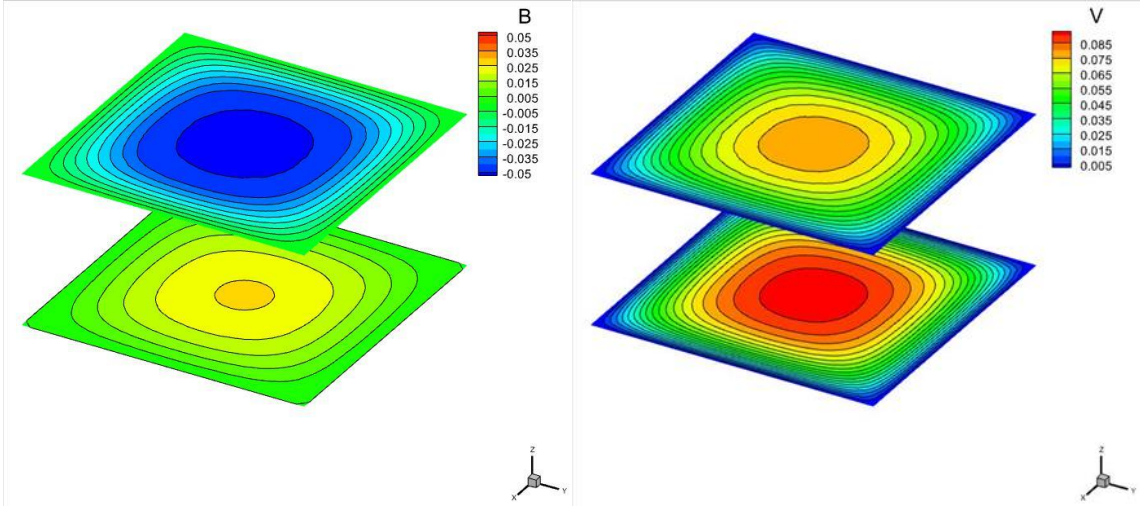
Şekil 63. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri



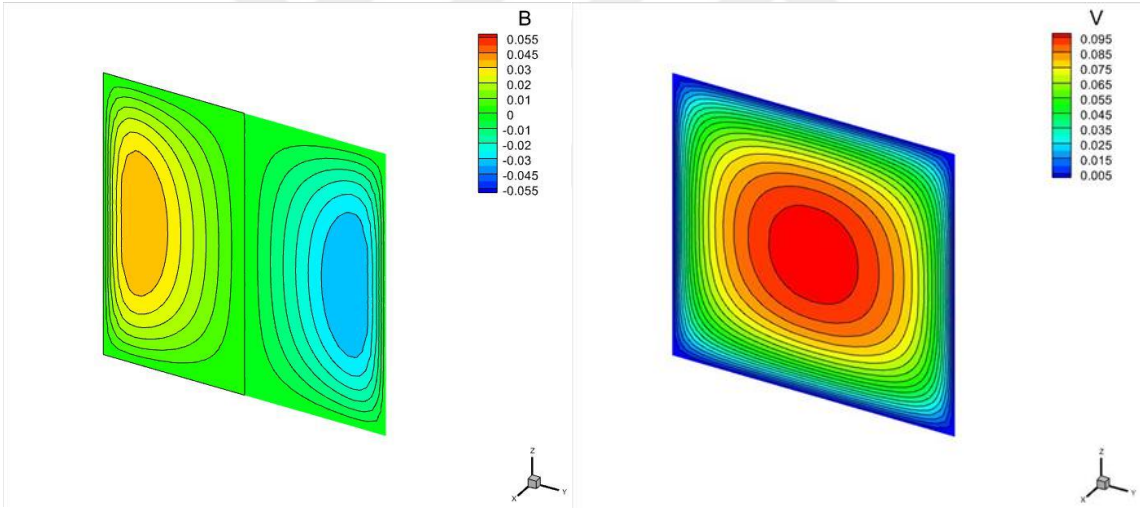
Şekil 64. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = 0$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri



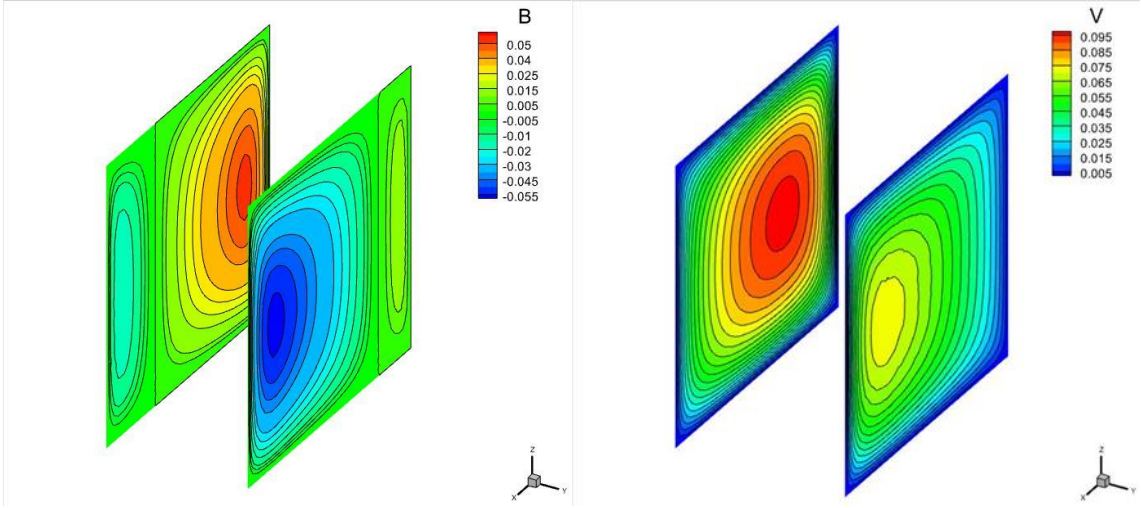
Şekil 65. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = 0$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri



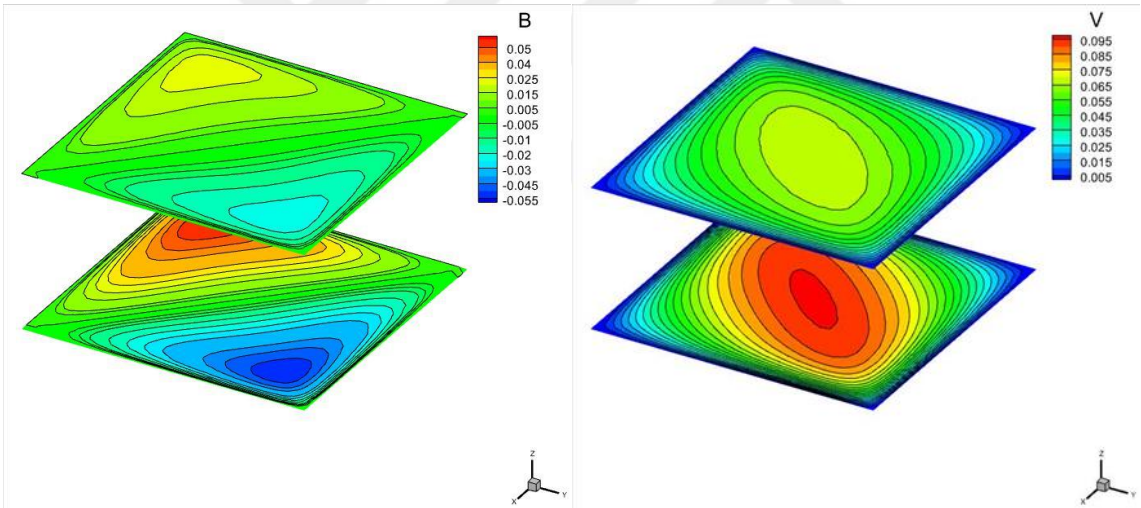
Şekil 66. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = 0$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri



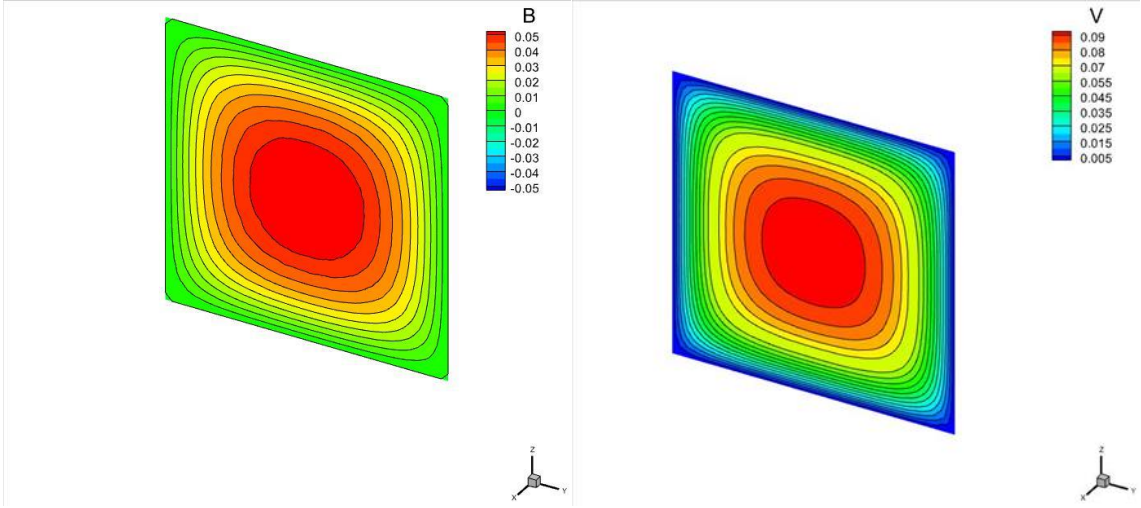
Şekil 67. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri



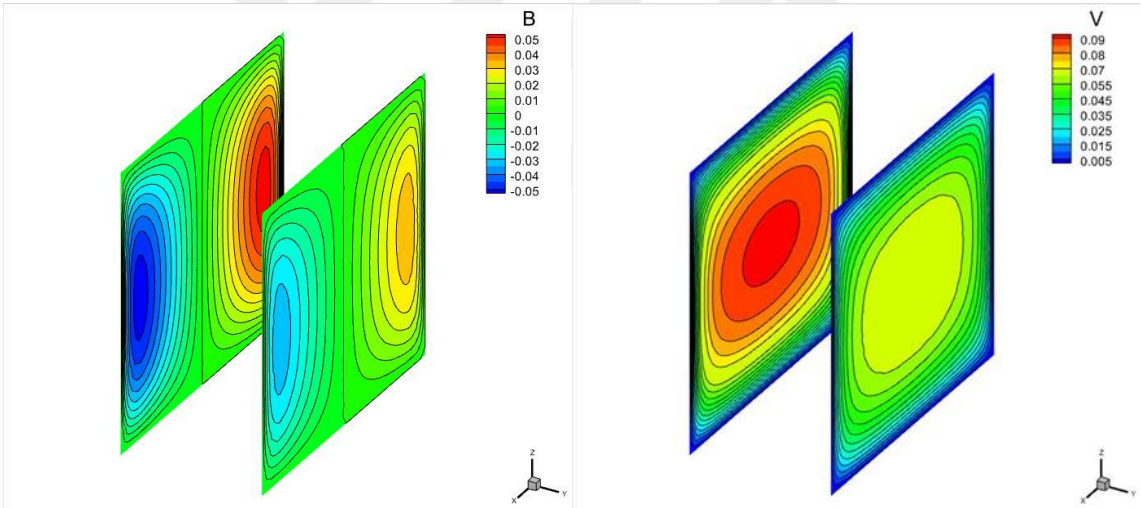
Şekil 68. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri



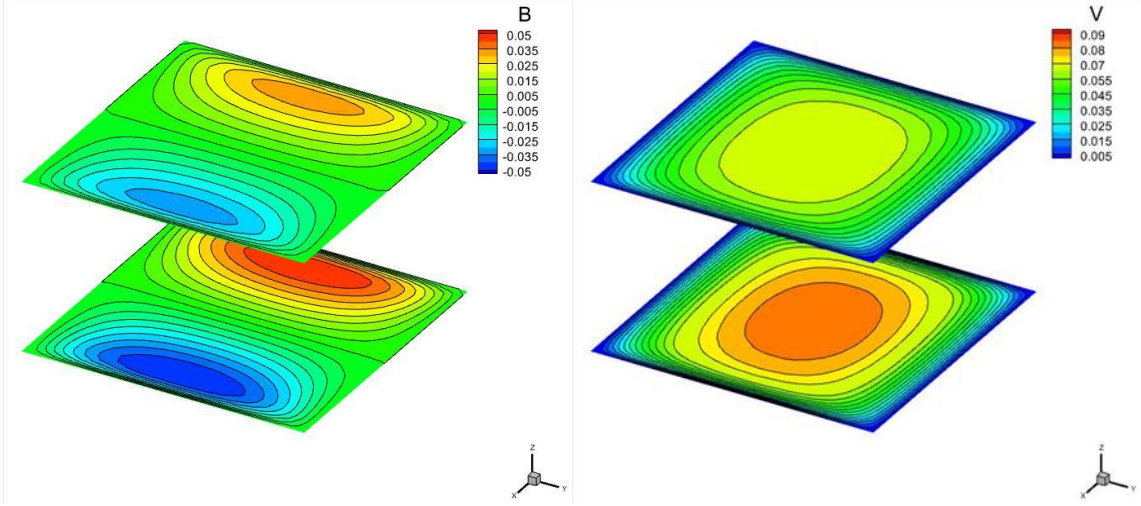
Şekil 69. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri



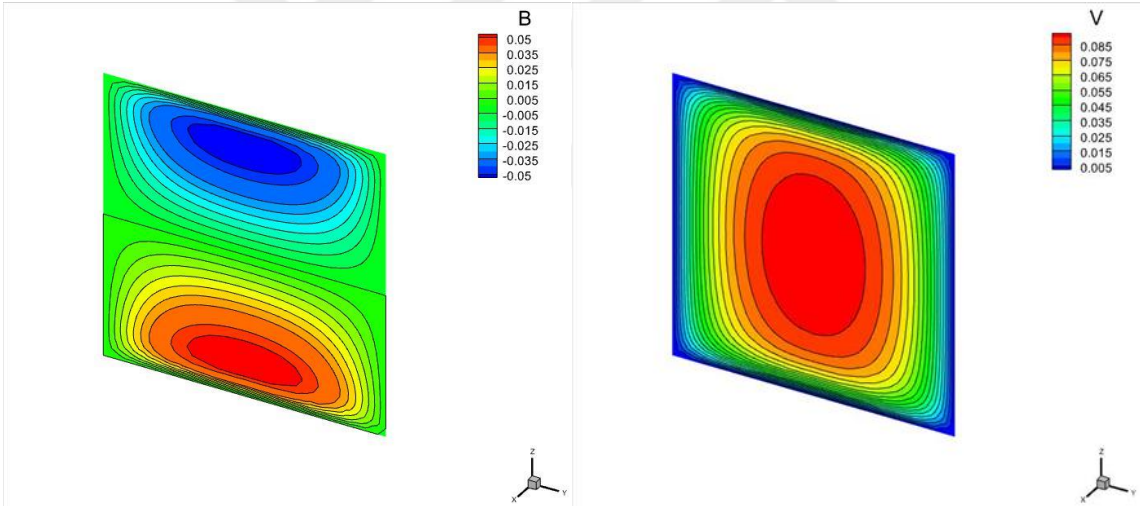
Şekil 70. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri



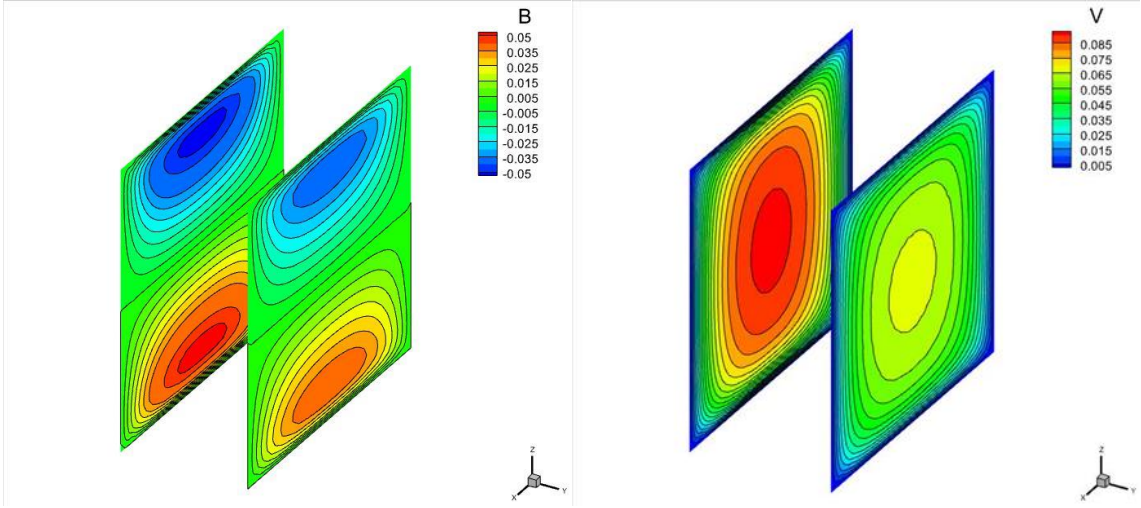
Şekil 71. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri



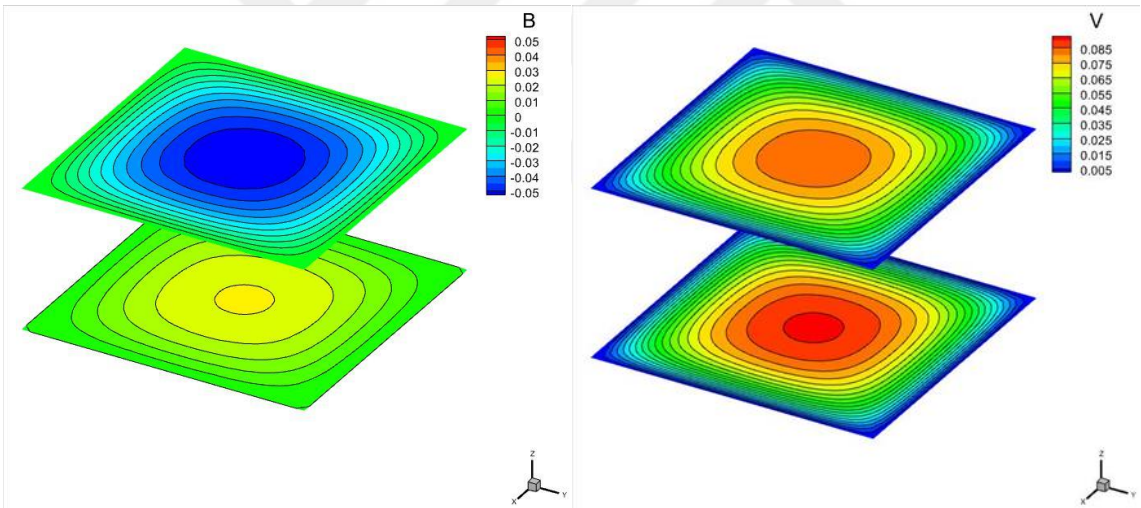
Şekil 72. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri



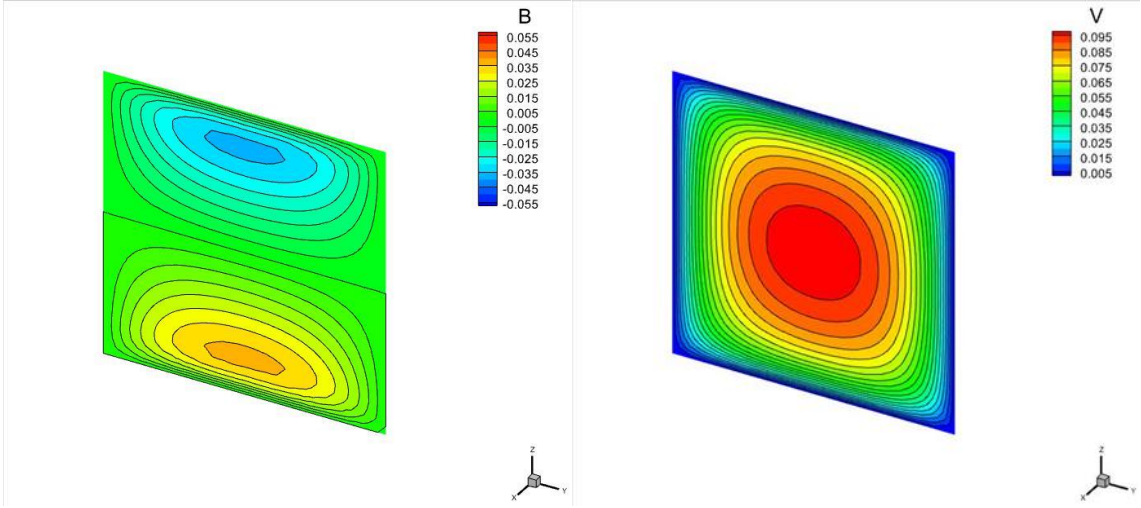
Şekil 73. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = 0$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri



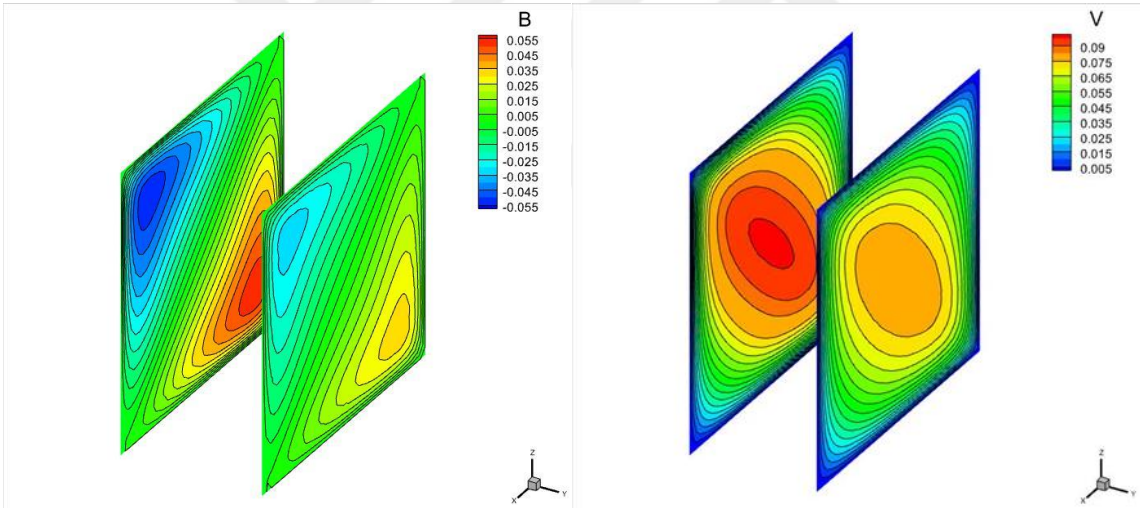
Şekil 74. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = 0$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri



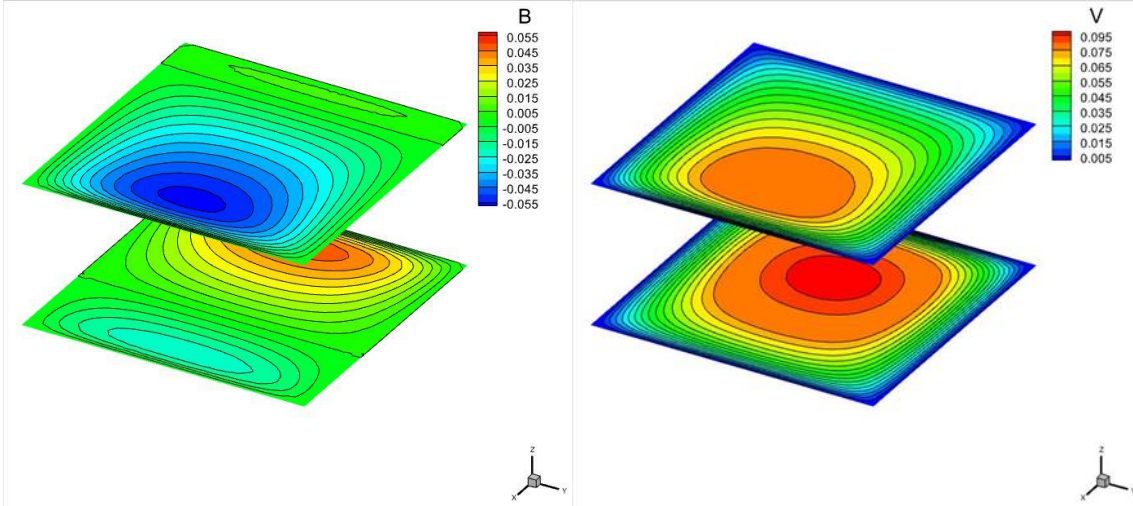
Şekil 75. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = 0$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri



Şekil 76. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = 0$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri

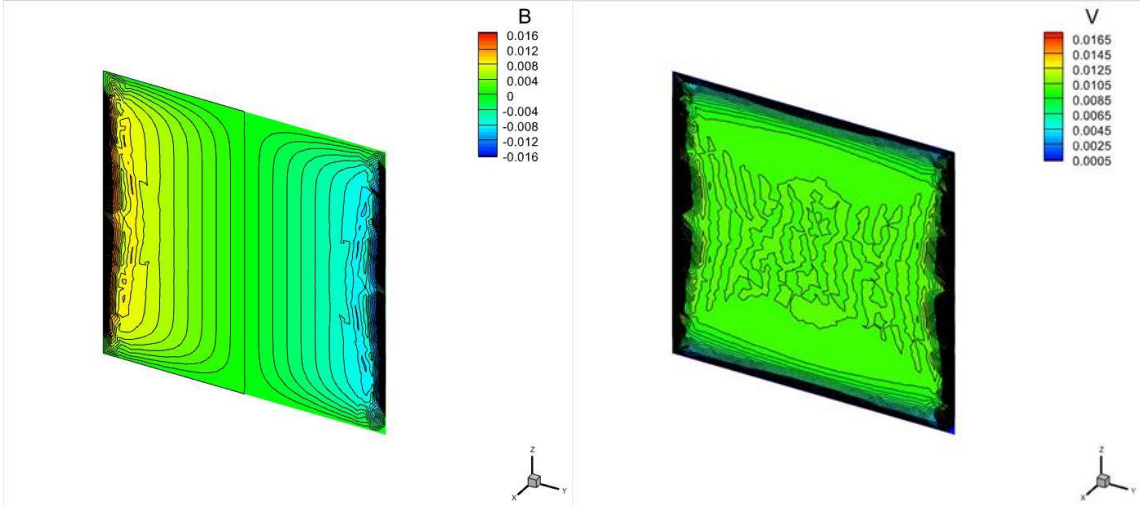


Şekil 77. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = 0$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri

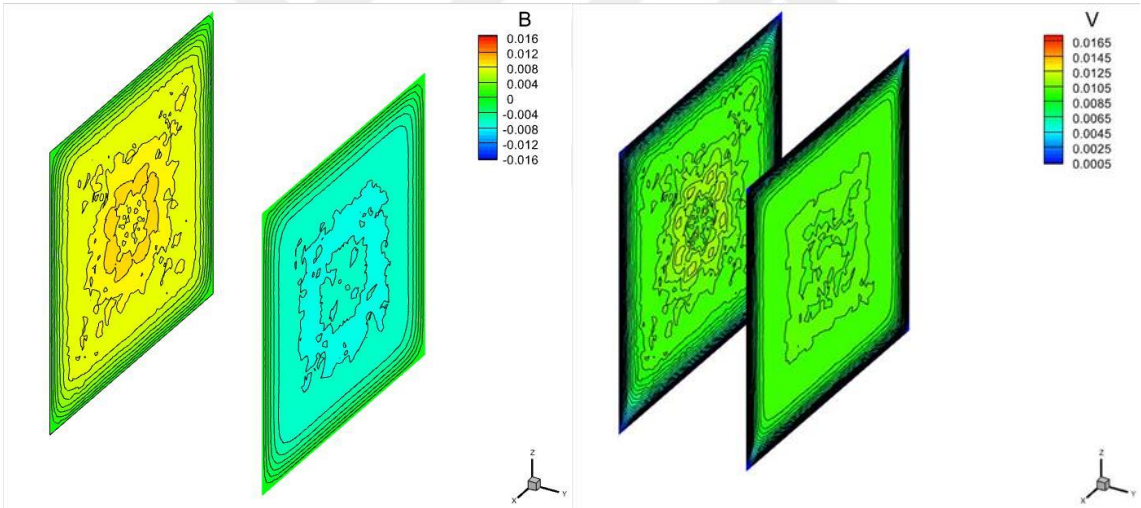


Şekil 78. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = 0$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri

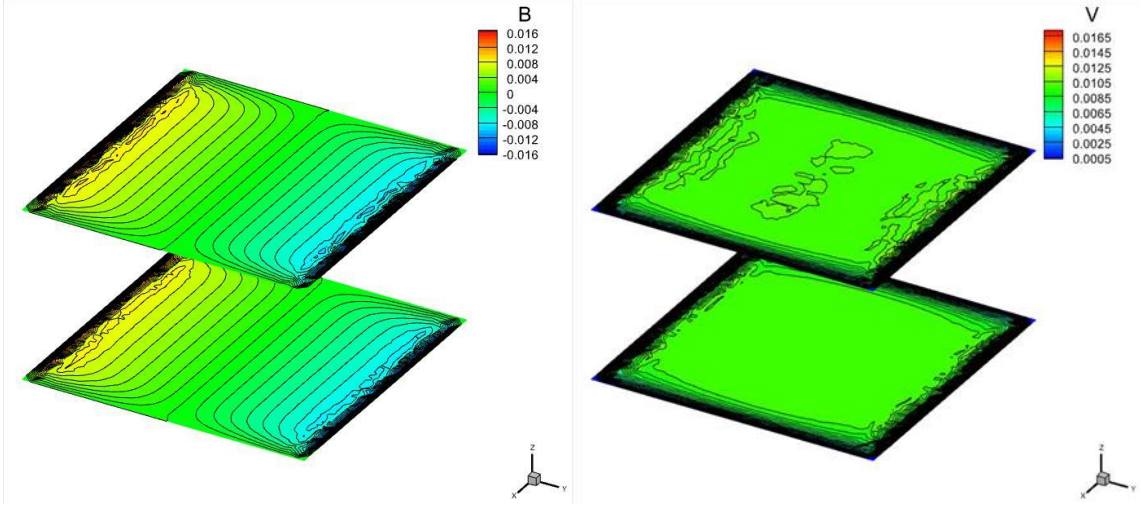
Şekil 61-63 arasında $\alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{\pi}{2}$, Şekil 64-66 arasında $\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}$, Şekil 67-69 arasında $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \frac{\pi}{4}$, Şekil 70-72 arasında $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = 0$, Şekil 73-75 arasında $\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{4}$ ve Şekil 75-78 arasında $\alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = 0$ değerleri için çözümler elde edilmiştir. Küre duruma benzer şekilde bütün grafiklerden, uygulanan açının doğrultusuna göre simetrik davranışların bozulduğu, sınır katmanlarının oluşumunun dışardan uygulanan manyetik alan açısının yönü ile paralellik gösterdiği fakat en yüksek/en düşük değerler olarak sonuçların çok da değişmediği gözlemlenmektedir.



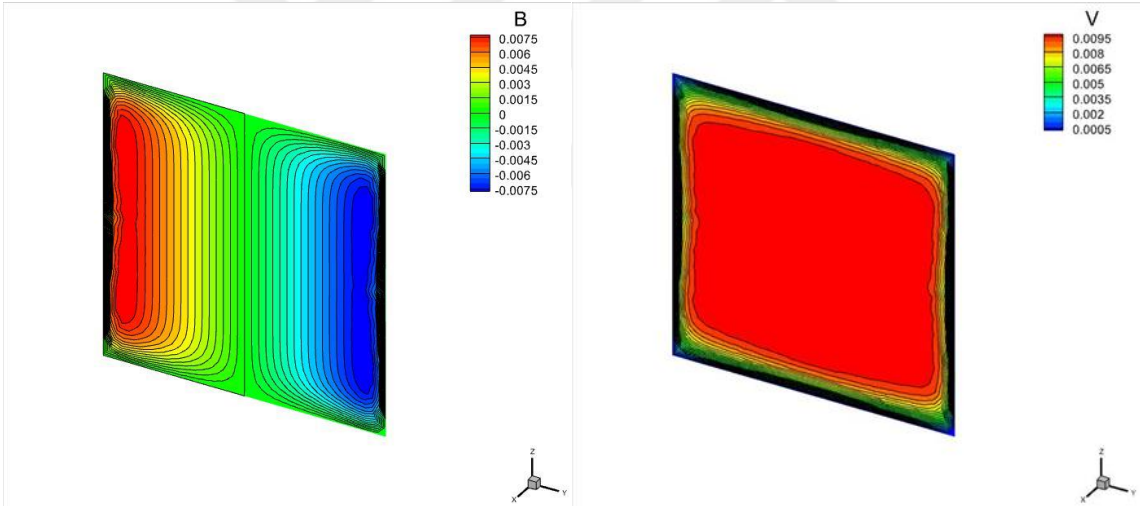
Şekil 79. Küp bölge üzerinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 100$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri



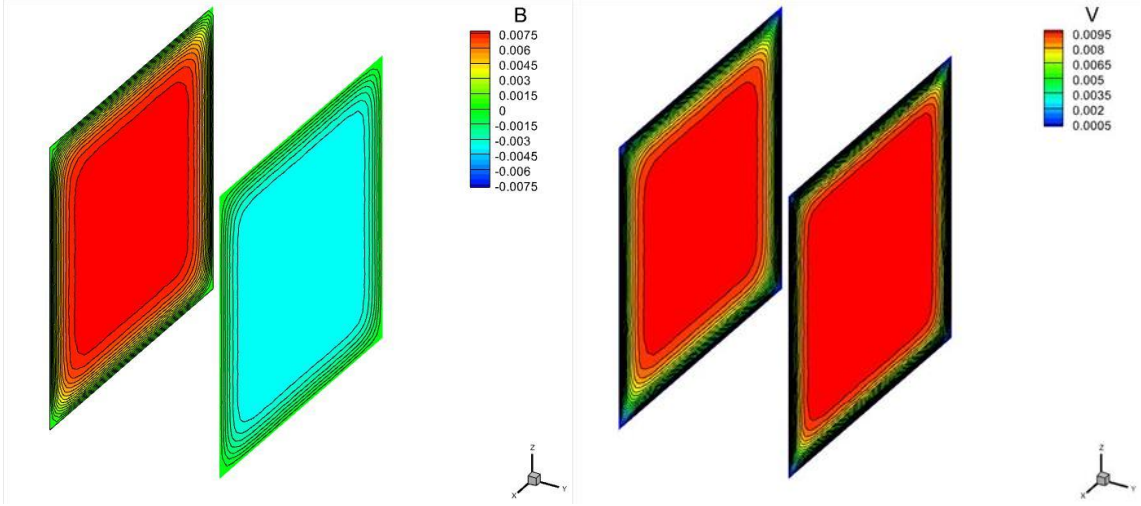
Şekil 80. Küp bölge üzerinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 100$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri



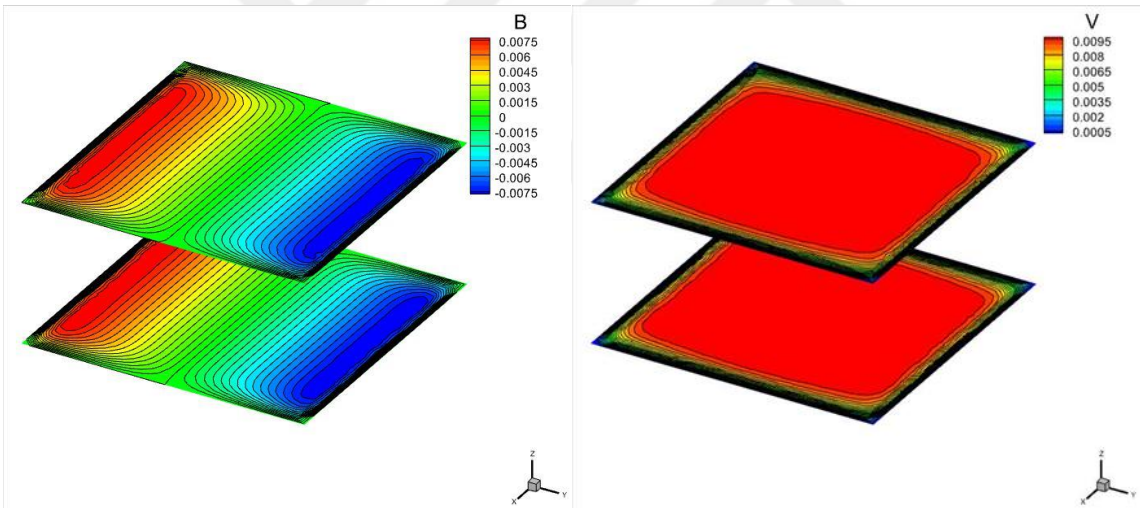
Şekil 81. Küp bölge üzerinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 100$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri



Şekil 82. Küp bölge üzerinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 100$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların x -eksenine göre kesitleri



Şekil 83. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 100$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların y -eksenine göre kesitleri



Şekil 84. Küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak $Ha = 100$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için elde edilen sonuçların z -eksenine göre kesitleri

Son olarak Şekil 79-84 arasındaki grafiklerde yüksek Hartmann sayısı değeri $Ha=100$ için stabilize sonlu elemanlar formülasyonunun küp problem bölgesi için etkisi gösterilmiştir. Küre bölgedeki probleme benzer şekilde yüksek Hartmann sayısı değerleri için stabilizasyonun ne kadar önemli ve etkin olduğu çok açık şekilde gözükmektedir.

3.4. Manyetik Ortam İçerisinde MHD Probleminin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Çözülmesi

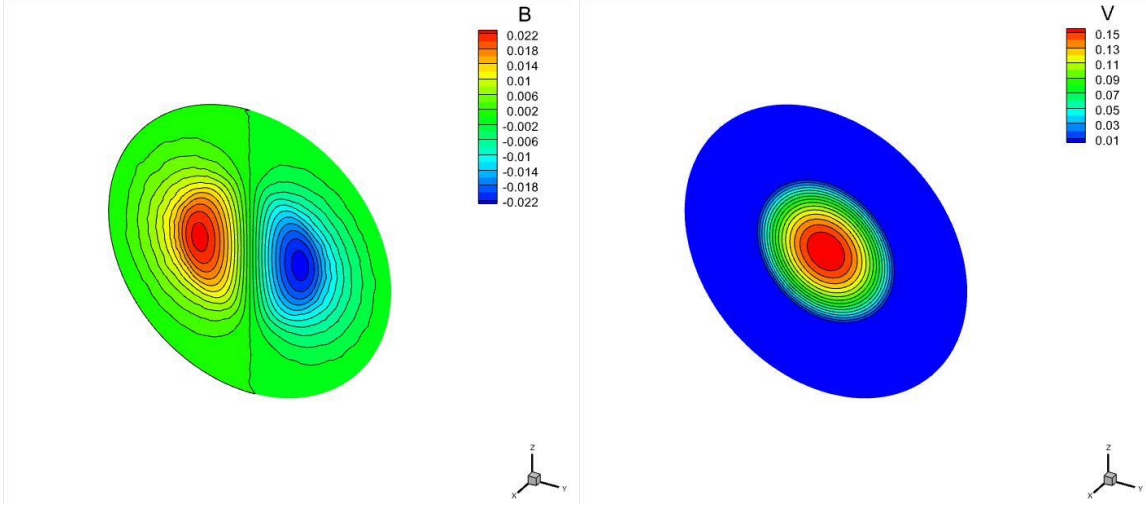
Bu bölümde Sonlu Elemanlar Yöntemi ve Stabilize Sonlu Elemanlar Yöntemi kullanılarak manyetik ortam içerisinde MHD denklemleri sayısal çözümleri elde edilecektir. MHD akımının içteki küre veya küp bölgede olmasına rağmen sonsuz boyutlu manyetik ortamın da küre kesiti alınmaktadır. Sonlu Elemanlar Yöntemini uygulayabilmek için sonsuz bölgenin dışında sanal bir sınır tanımlanmakta ve sınır üzerinde manyetik alanın sıfır olduğu kabul edilmektedir. Denklemlerde V hız, B manyetik alan (B) ve Re , Rh , Rm_f , Rm_m sırasıyla, Reynolds sayısı, manyetik basınç (Rayleigh sayısı), akışkanın manyetik Reynolds sayısı ve ortamın manyetik Reynolds sayılarını göstermektedir. Denklemlerin çözümleri elde edilirken $Rh=1$ ve $Rm_m=1$ değerleri sabit tutulacaktır. Problemin sırasıyla Re , Rm_f / Rm_m ve α, β parametre değerlerinin değişimleri incelenecektir.

3.4.1 Manyetik Ortam İçerisindeki Küre Bölgede MHD Probleminin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Çözülmesi

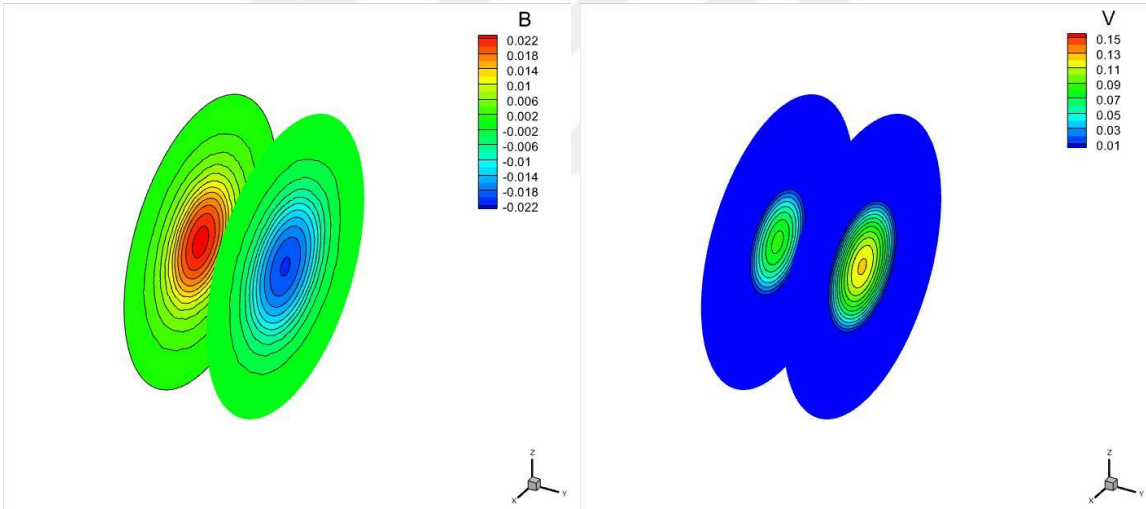
Bu bölümde Sonlu Elemanlar Yöntemi ve Stabilize Sonlu Elemanlar Yöntemi kullanılarak iç içe küre bölgeler içerisinde MHD denklemleri sayısal çözümleri elde edilecektir.

3.4.1.1. Re Değişimi

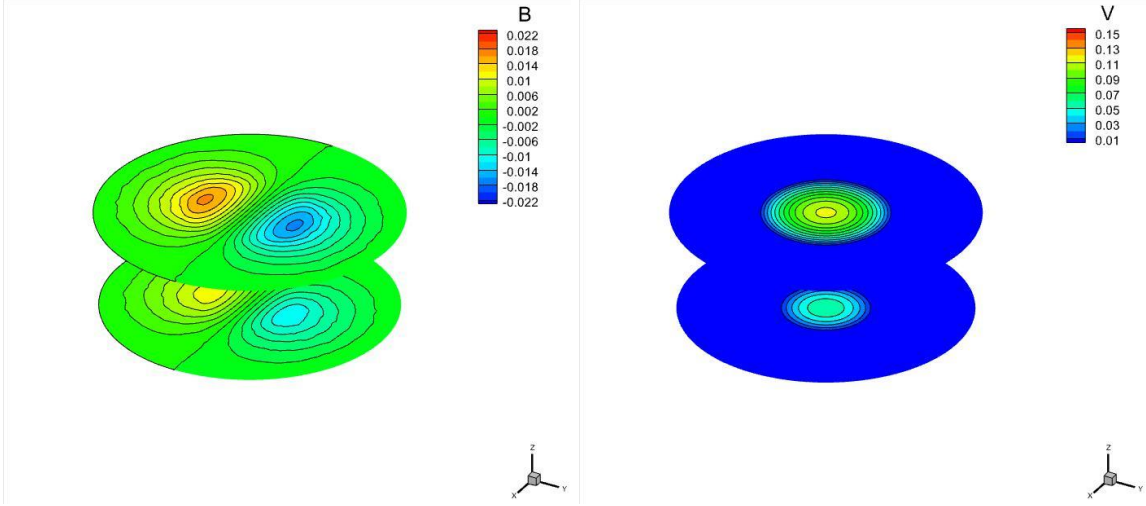
İlk olarak $Rm_m=1$ değeri sabit tutulacaktır. Bu durumda problem Bölüm 3.3.1 deki problem ile aynı yapıda olacaktır. Bu nedenle elde edilen sonuçlar bu bağlamda karşılaştırılıp yorumlanacaktır. Akışkanın manyetik Reynolds sayısının (Rm_f) ve ortamın manyetik Reynolds sayısının (Rm_m) eşit olması, manyetik alan (B) çözümlerinde bölgeler arası geçişlerde sürekliliği sağlayacaktır.



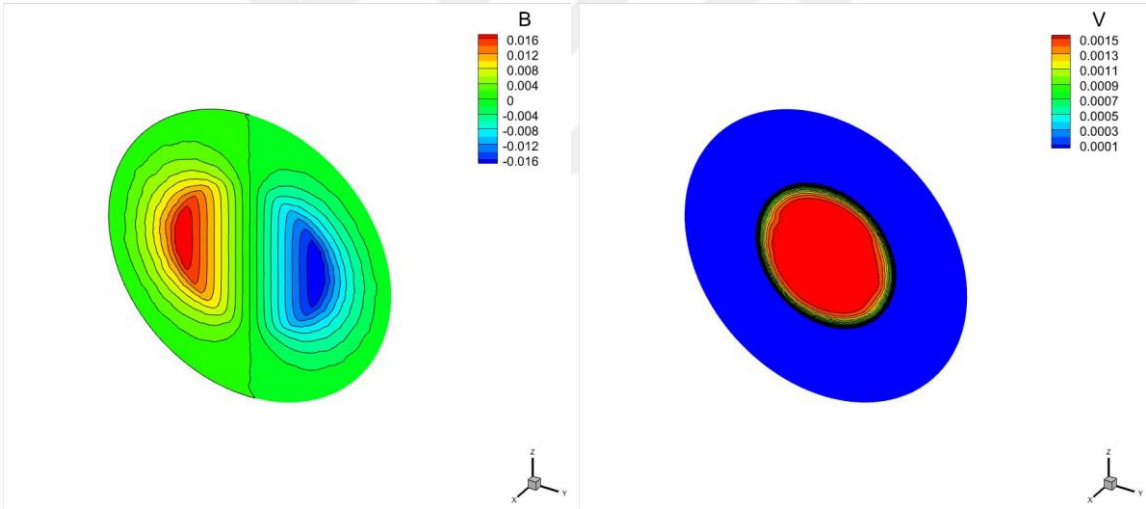
Şekil 85. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1$, $Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri



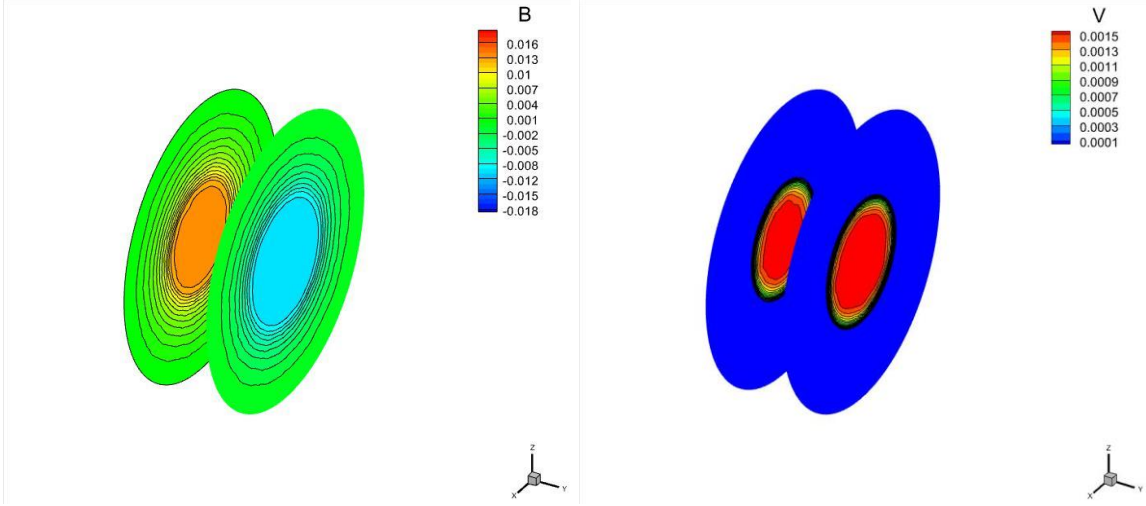
Şekil 86. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1$, $Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri



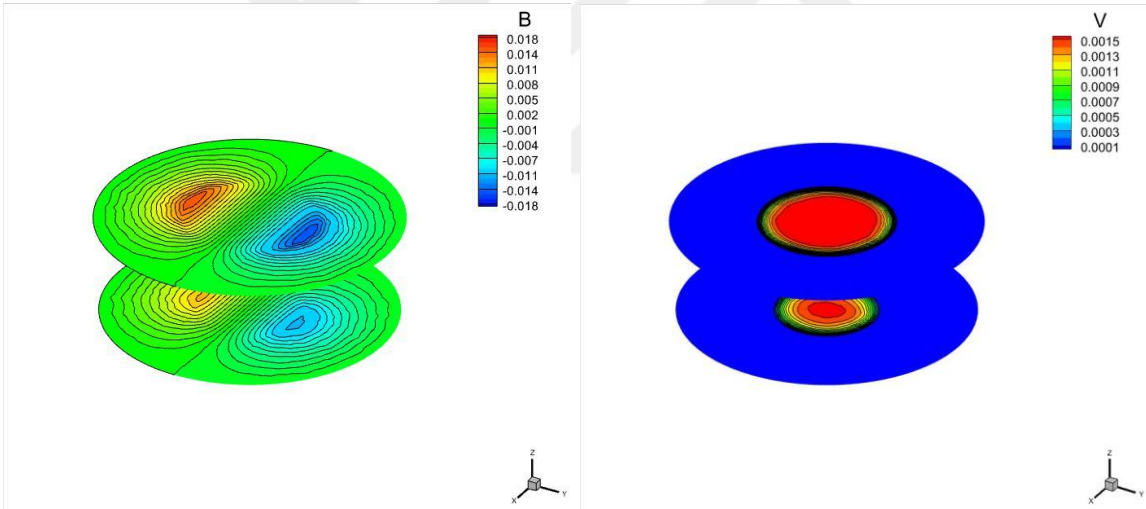
Şekil 87. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1$, $Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için z -eksenine göre kesitleri



Şekil 88. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 2500$, $Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri



Şekil 89. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 2500$, $Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri

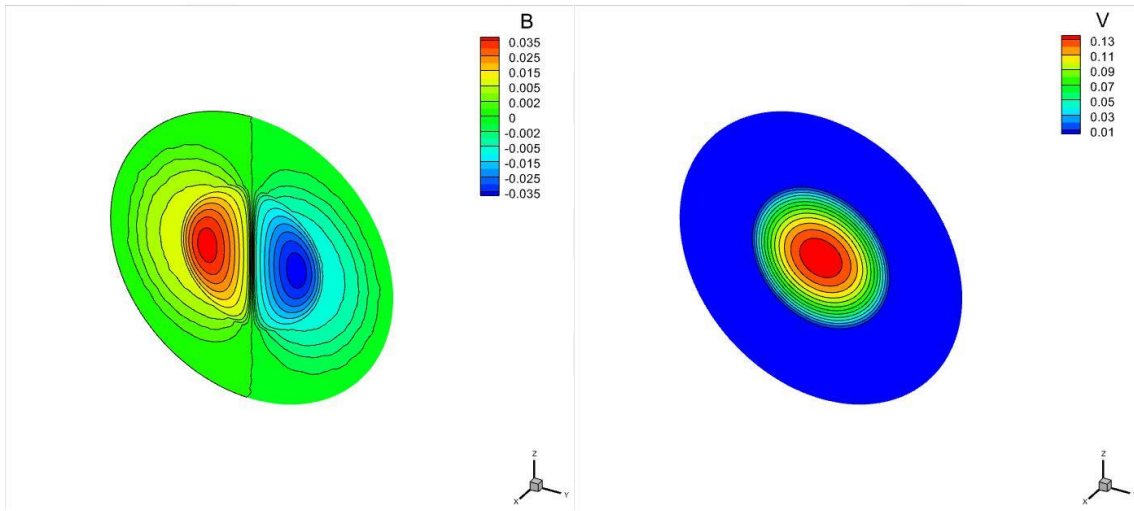


Şekil 90. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 2500$, $Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için z -eksenine göre kesitleri

Şekil 85 ile Şekil 87 arasında parametre değeri olarak Hartmann sayısı (Ha) hesaplandığında $Re = 1$, $Rm_f = 1$ için $Ha = \sqrt{Re Rh Rm_f}$ eşitliğinden $Ha = 1$ değeri elde edilir. Bu durumda elde edilen sonuçlar Şekil 10 ile Şekil 12 arasındaki sonuçlar ile karşılaştırılabilir. Grafiklerden görüleceği üzere yapısal olarak her iki değişkene göre de

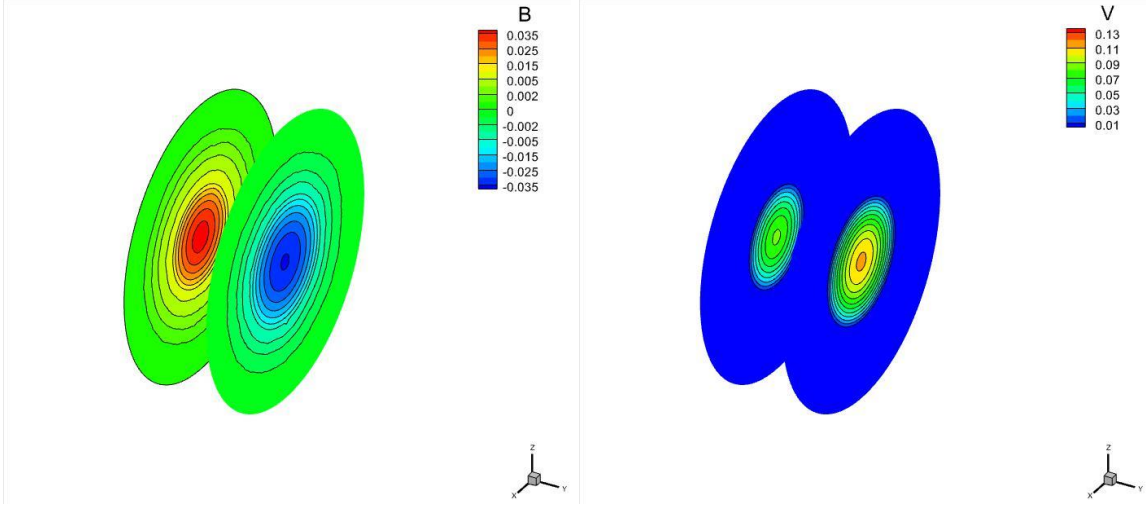
hemen hemen aynı davranış gözleniyor olmasa dahi, hız (V) değerleri incelendiğinde en yüksek değer olarak aynı olduğu gözükmektedir. Manyetik alan (B) değerleri için ise en yüksek/en düşük değerleri arasında hemen 2 kat fark oluşmaktadır. Benzer şekilde Şekil 88 ile Şekil 90 arasındaki grafiklerde ise parametre değerlerinden $Ha = 50$ elde edileceğinden bulunan sonuçlar Şekil 19 ile Şekil 21 de elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılabilir. Sonuçlardan görüleceği üzere hız değerlerinin yine bir birine yakın olmasına rağmen manyetik alan değerlerindeki farklılığın azaldığı gözükmektedir.

3.4.1.2. Rm_f Değişimi

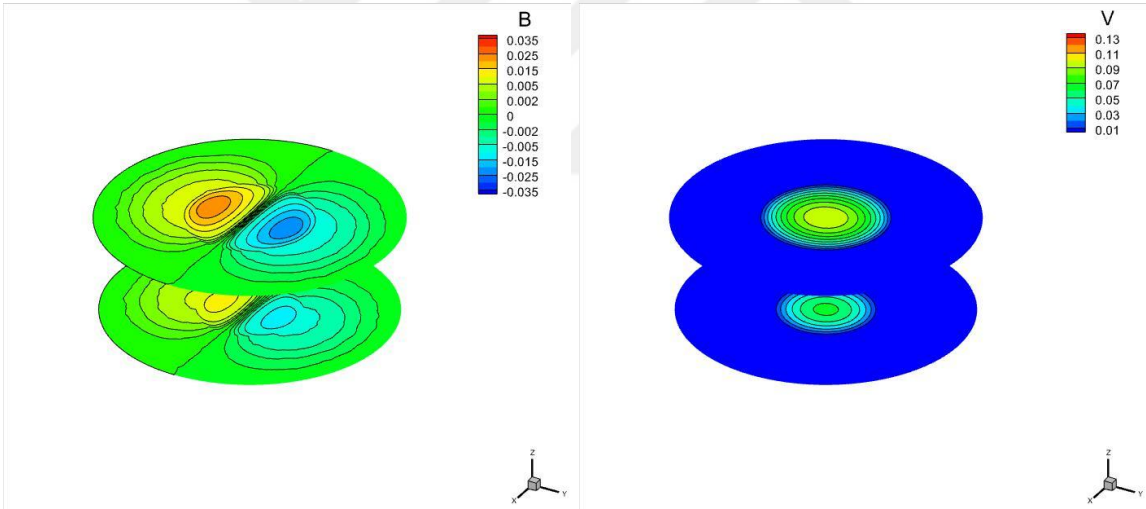


Şekil 91. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1$, $Rm_f = 10$,

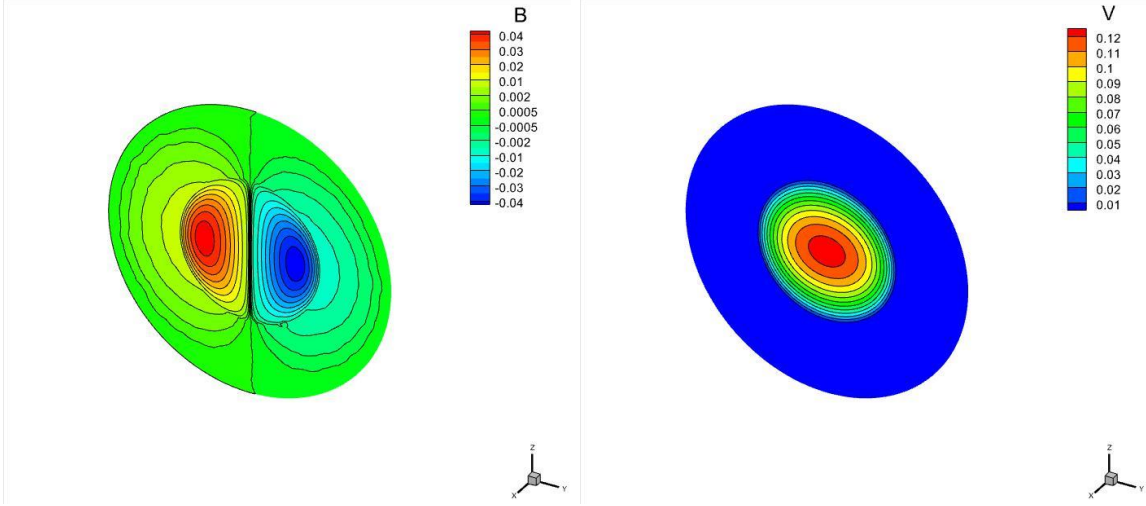
$\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri



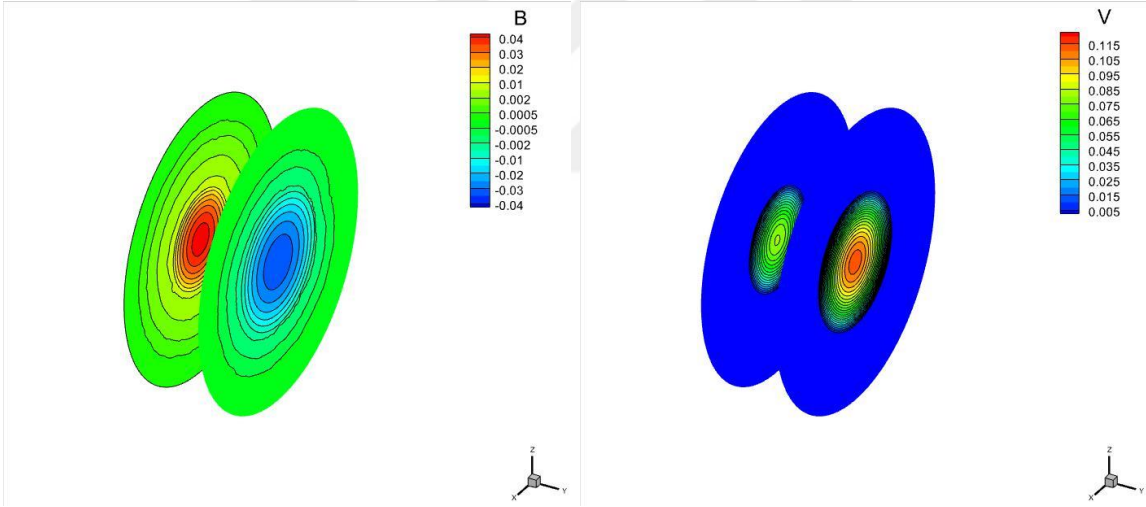
Şekil 92. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re=1$, $Rm_f=10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri



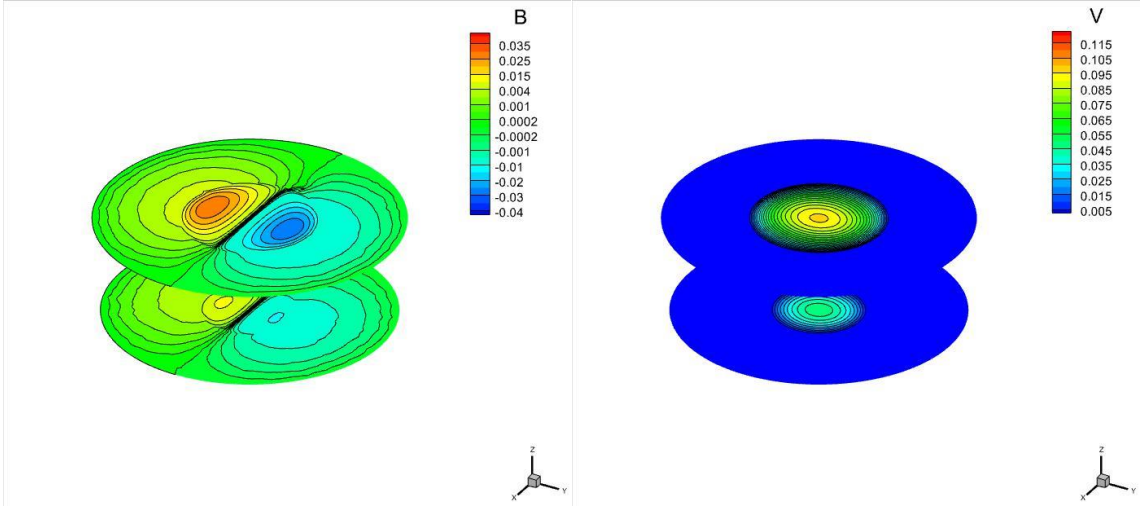
Şekil 93. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re=1$, $Rm_f=10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için z -eksenine göre kesitleri



Şekil 94. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1$, $Rm_f = 20$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri



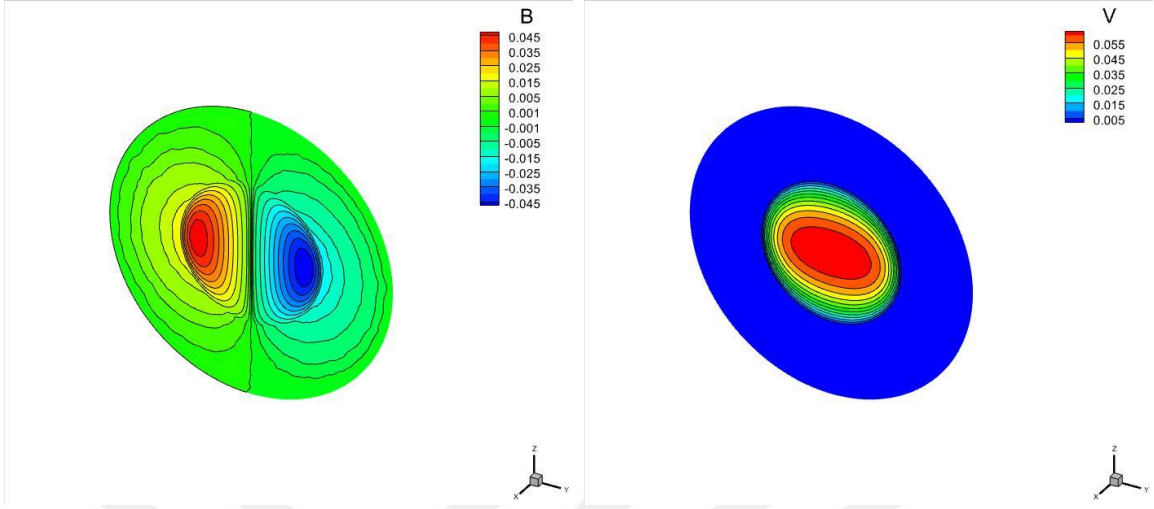
Şekil 95. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1$, $Rm_f = 20$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri



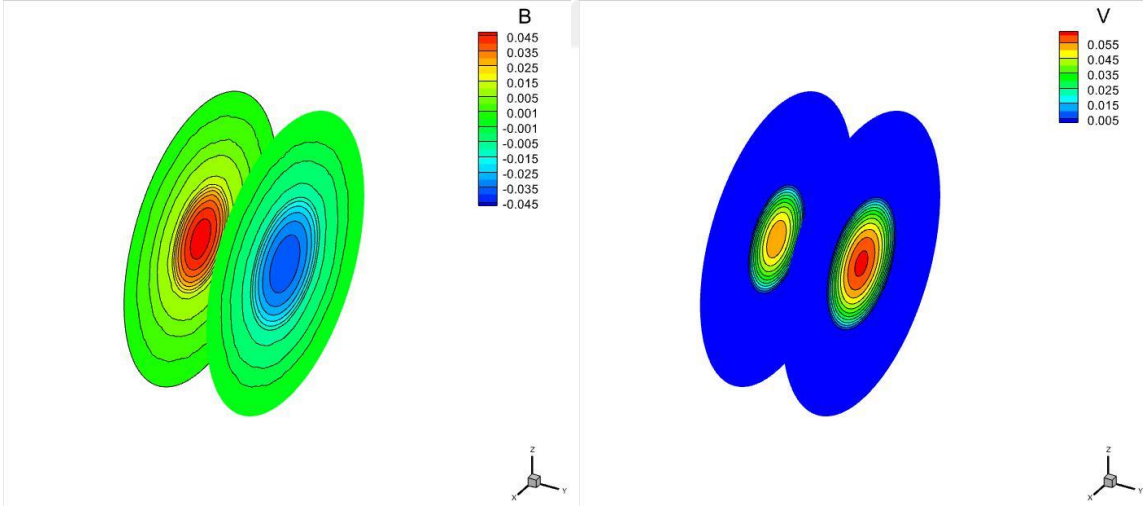
Şekil 96. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1$, $Rm_f = 20$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için z -eksenine göre kesitleri

Şekil 91 ile Şekil 96 arasındaki grafiklerde $Re = 1$ sabit tutularak Rm_f değerinin değişimi incelenmiştir. Sonuçlardan görüleceği üzere, manyetik alan değerleri için Rm_f değeri arttıkça akımın olduğu bölgeden manyetik ortama geçişin olduğu $\partial\Omega$ sınırında çözüm eğrilerindeki kırıklık daha belirginleşmektedir. Bunun nedeni Rm_f / Rm_m oranının artmasından kaynaklanmaktadır. Hız değerlerinde ise Rm_f arttıkça en yüksek değer düşmeye başladığı görülmektedir.

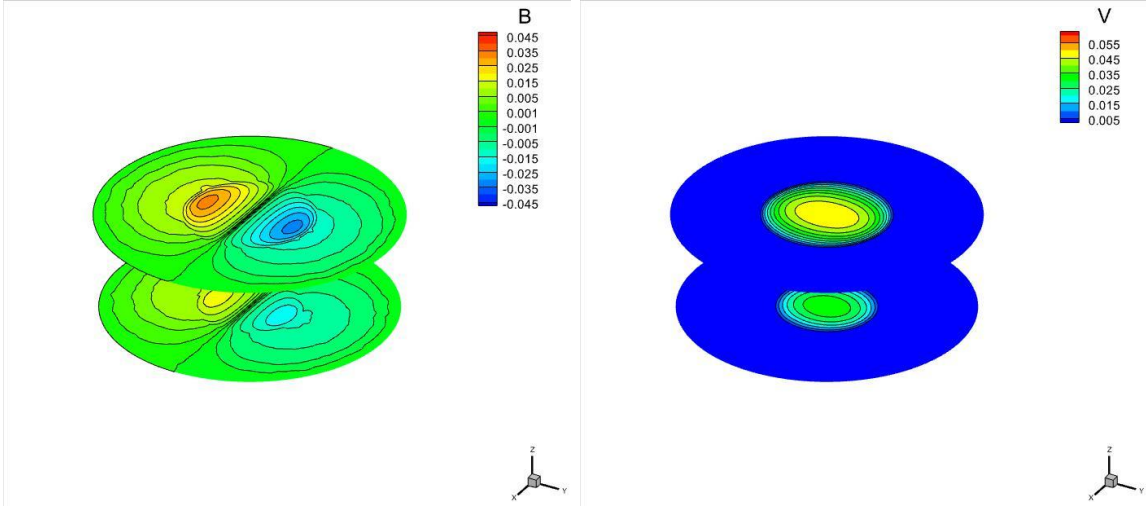
3.4.1.3. Re ve Rm_f Değişimi



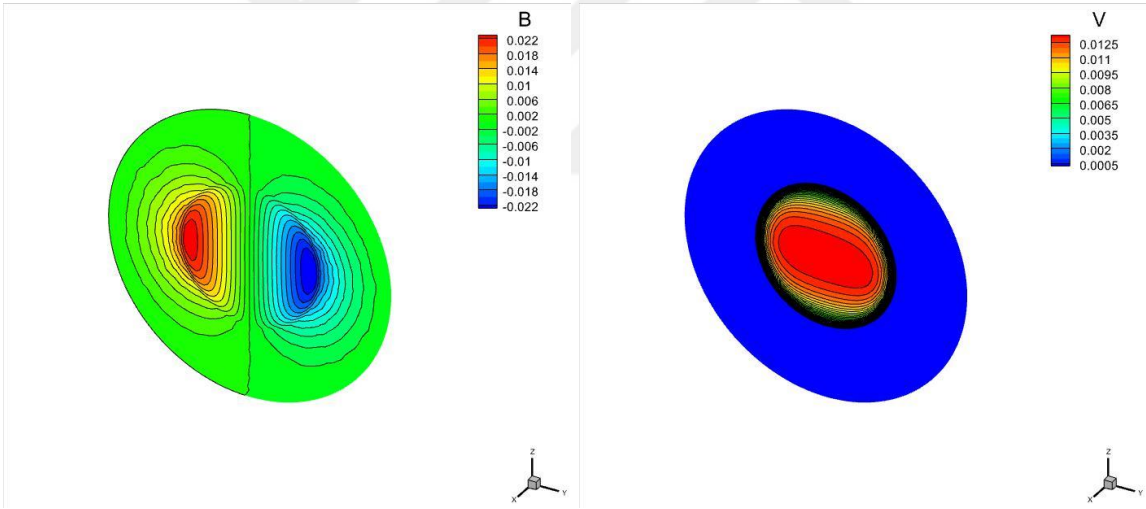
Şekil 97. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 10$, $Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri



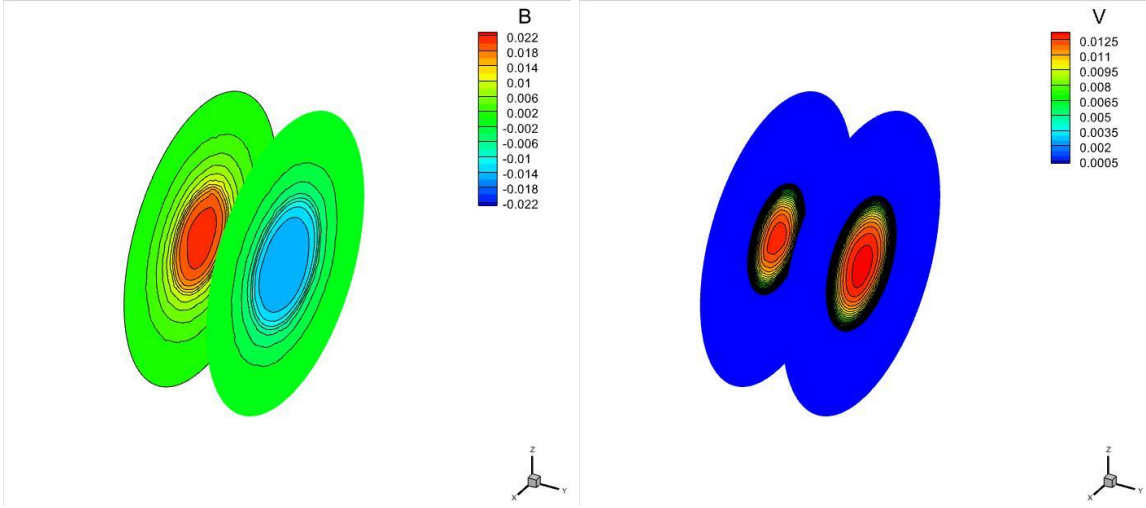
Şekil 98. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 10$, $Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri



Şekil 99. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 10$, $Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için z -eksenine göre kesitleri

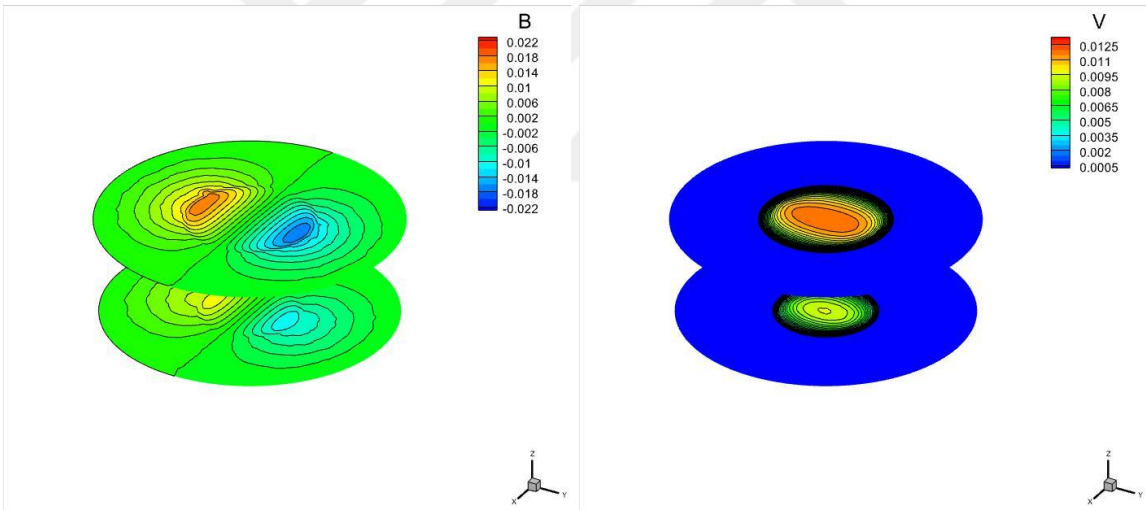


Şekil 100. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$, $Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri



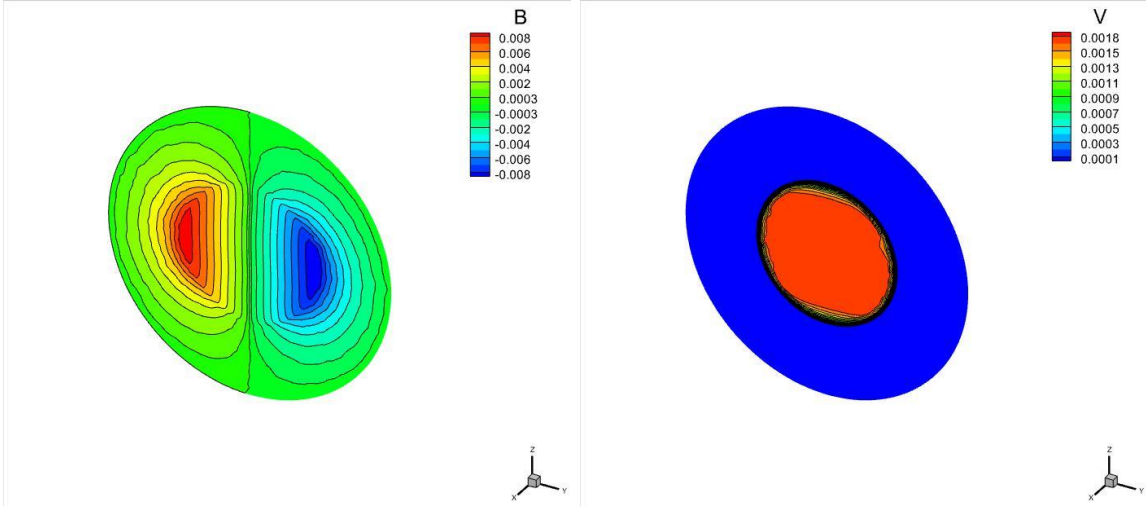
Şekil 101. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,

$Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri



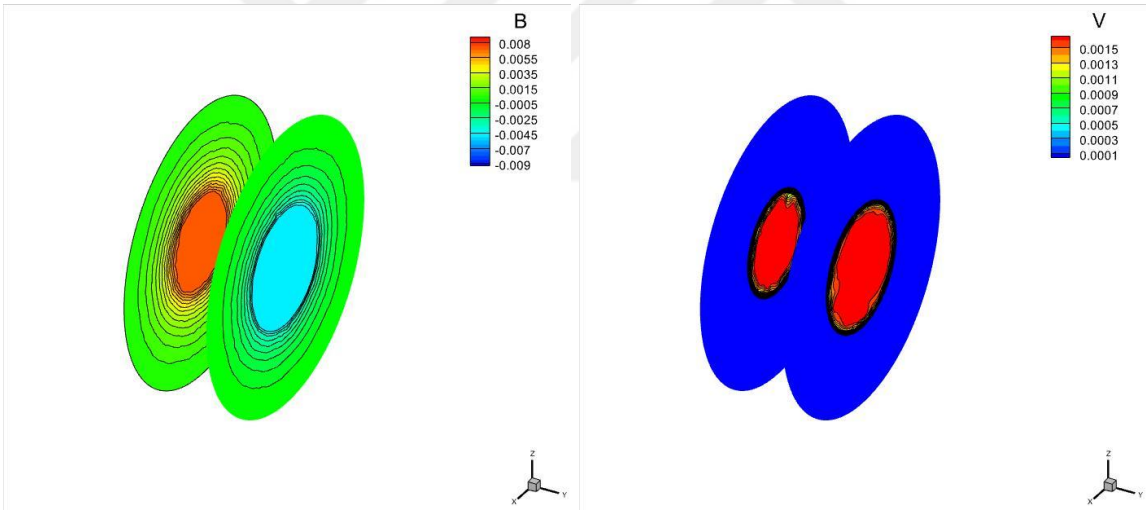
Şekil 102. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,

$Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için z -eksenine göre kesitleri



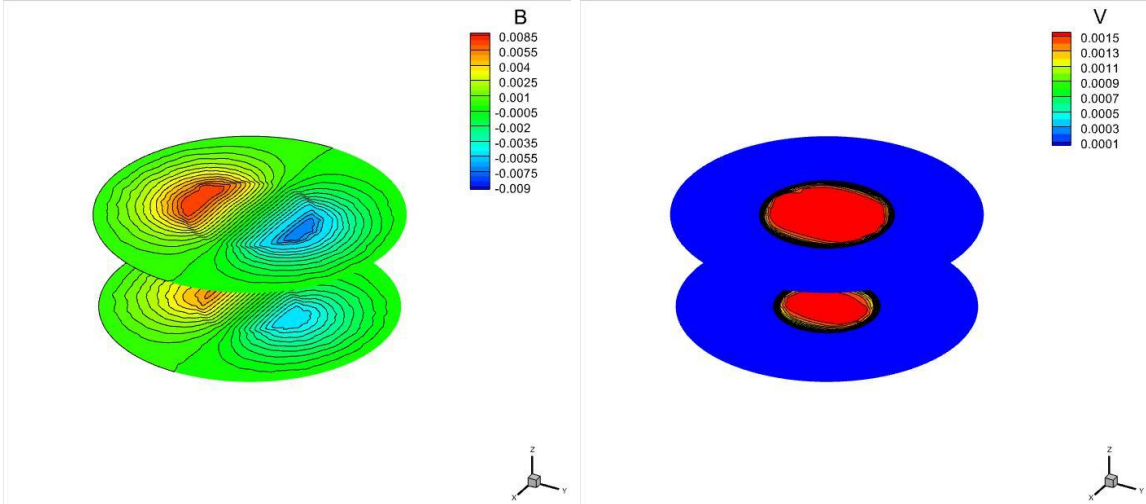
Şekil 103. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1000$,

$Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri



Şekil 104. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1000$,

$Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri

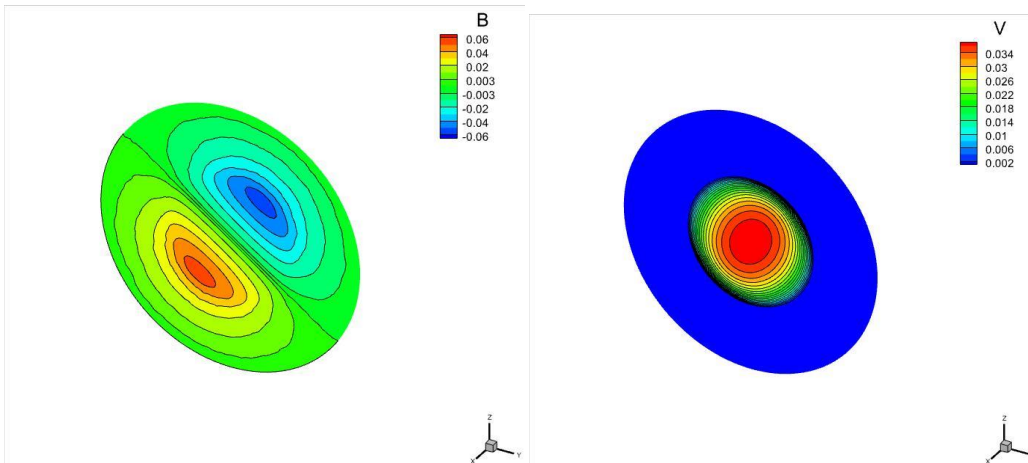


Şekil 105. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1000$,

$$Rm_f = 10, \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ ve } \beta = \frac{\pi}{2} \text{ değerleri için } z\text{-eksenine göre kesitleri}$$

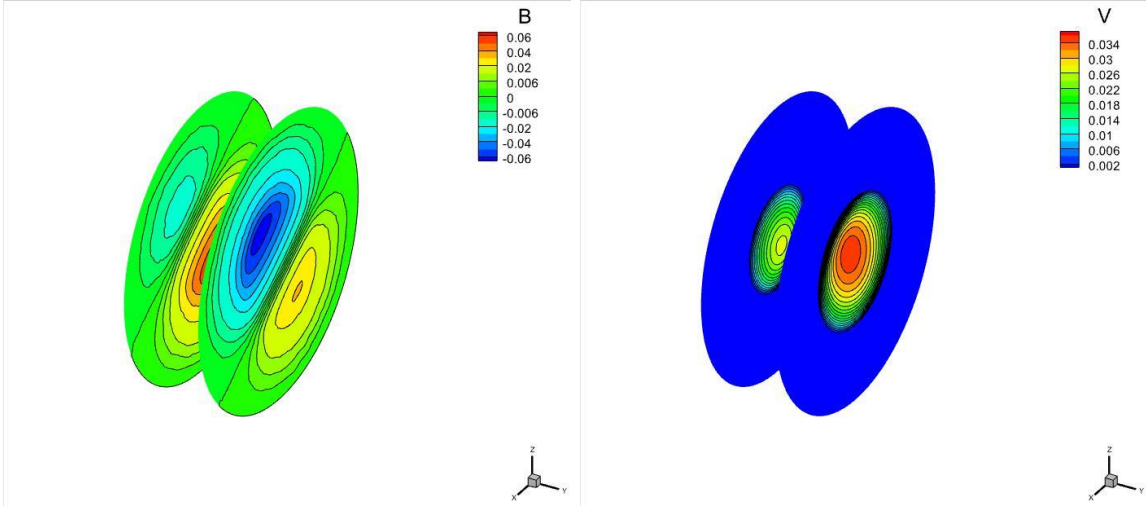
Şekil 97 ile Şekil 105 arasındaki grafiklerde ise hem Re hem de Rm_f değişkeninin değişimleri incelenmektedir. Her iki değişkenin değerlerinin artması ile yüksek Hartmann sayısı elde edileceğinden, çözümlerden MHD akımının bilindik karakteristiği olan sınır katman oluşumu gözlemlenmektedir. Değişkenlerin en yüksek ve en düşük değerleri sınır bölgesine yakın olduğu, Re ve Rm_f değerler arttıkça en yüksek ve en düşük değerlerin azaldığı gözlemlenmektedir.

3.4.1.4. α, β Değişimi



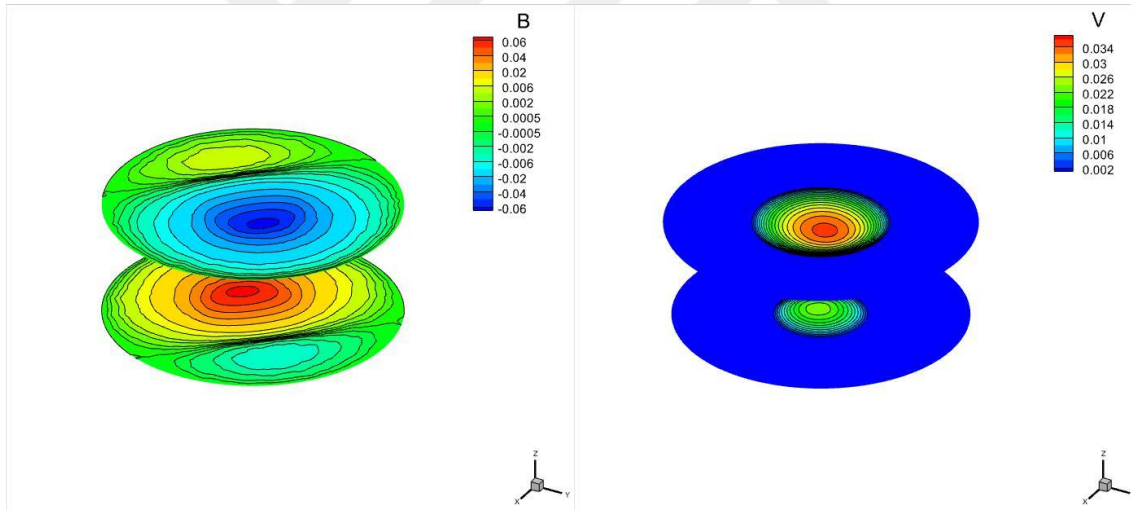
Şekil 106. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$, $Rm_f = 1$,

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \text{ ve } \beta = \frac{\pi}{4} \text{ değerleri için } x\text{-eksenine göre kesitleri}$$



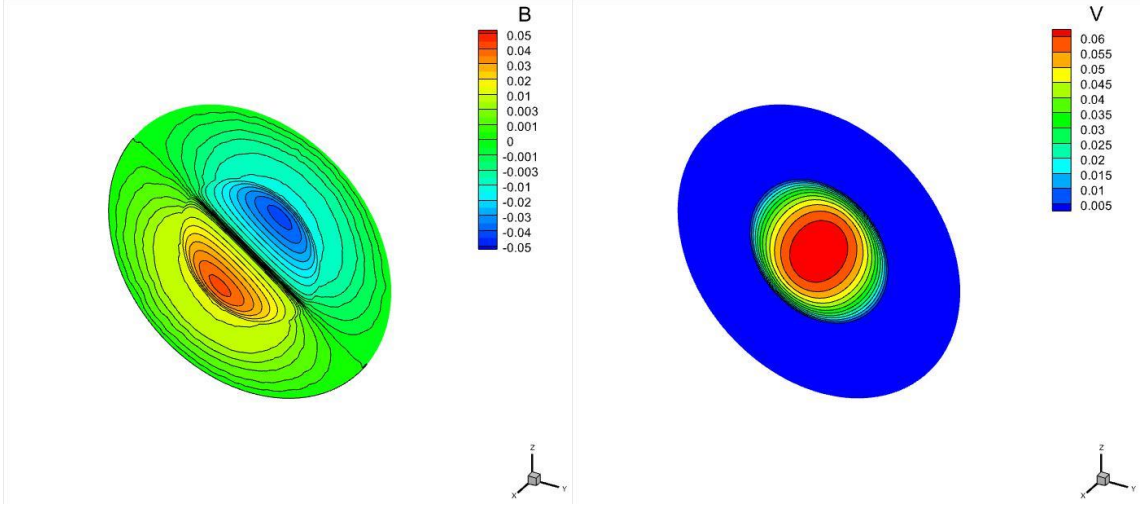
Şekil 107. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,

$Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri



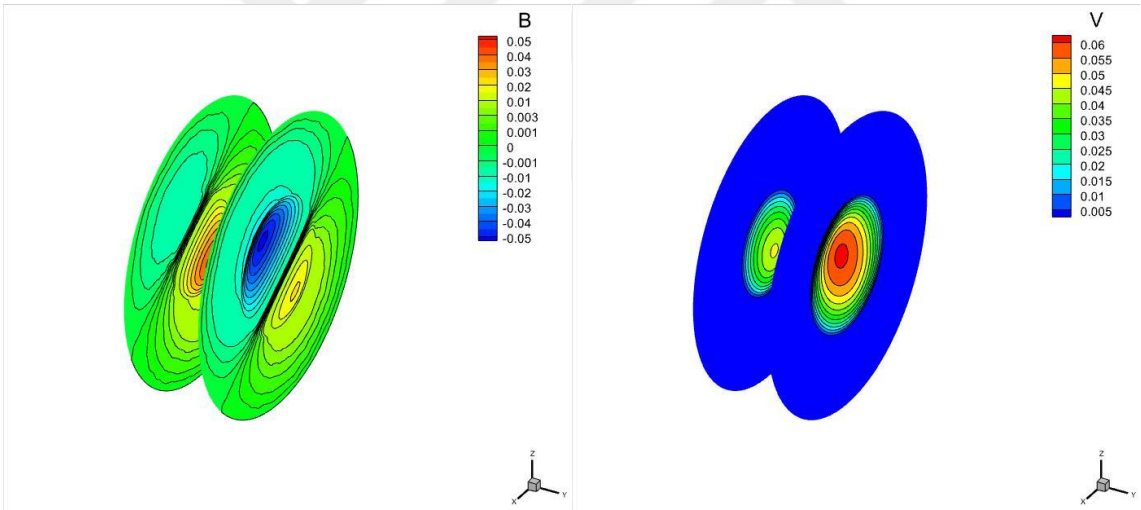
Şekil 108. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,

$Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için z -eksenine göre kesitleri



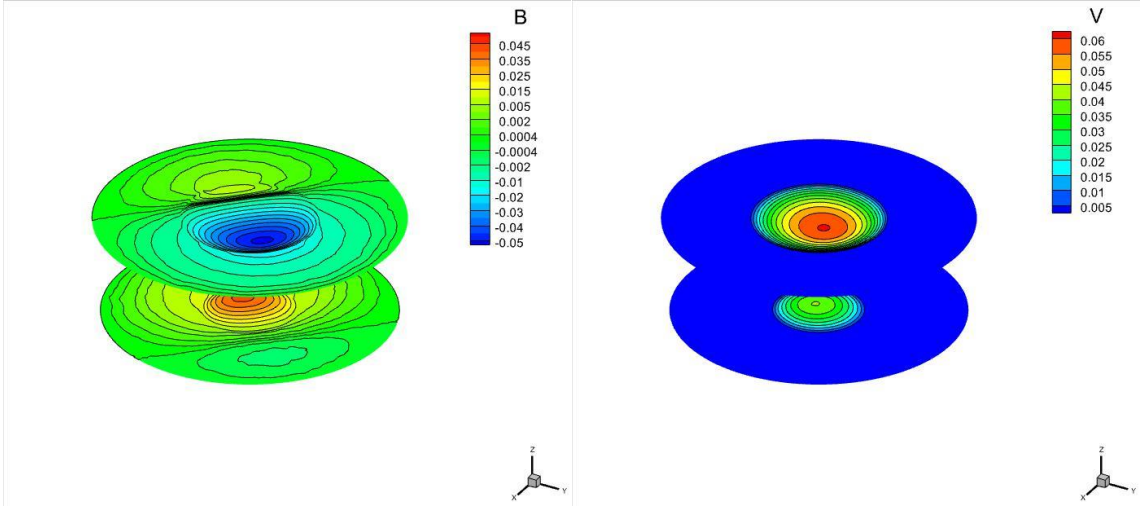
Şekil 109. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 10$,

$Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri



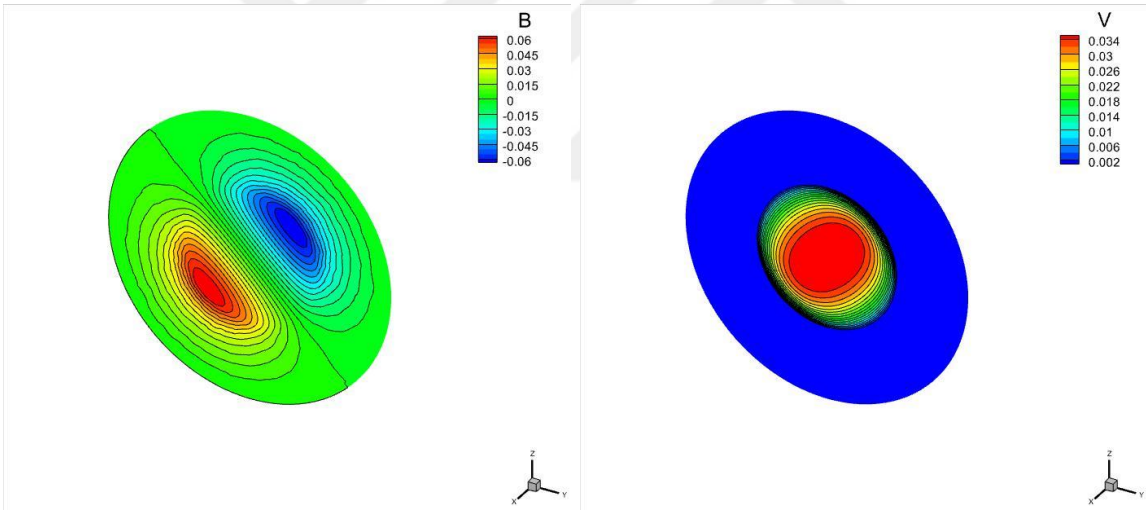
Şekil 110. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 10$,

$Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri



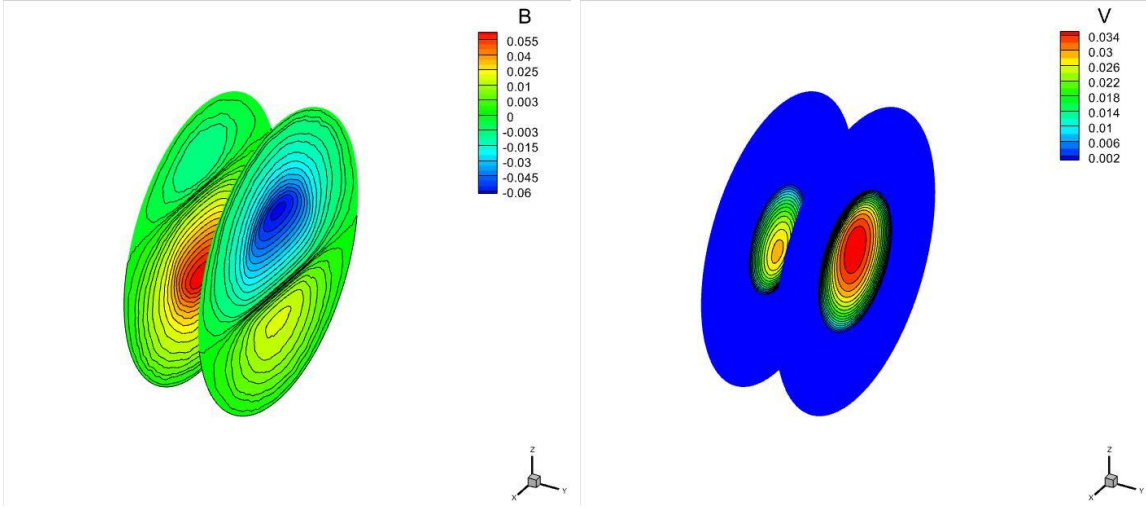
Şekil 111. Manyetik ortam içerisinde küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 10$,

$Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için z -eksenine göre kesitleri



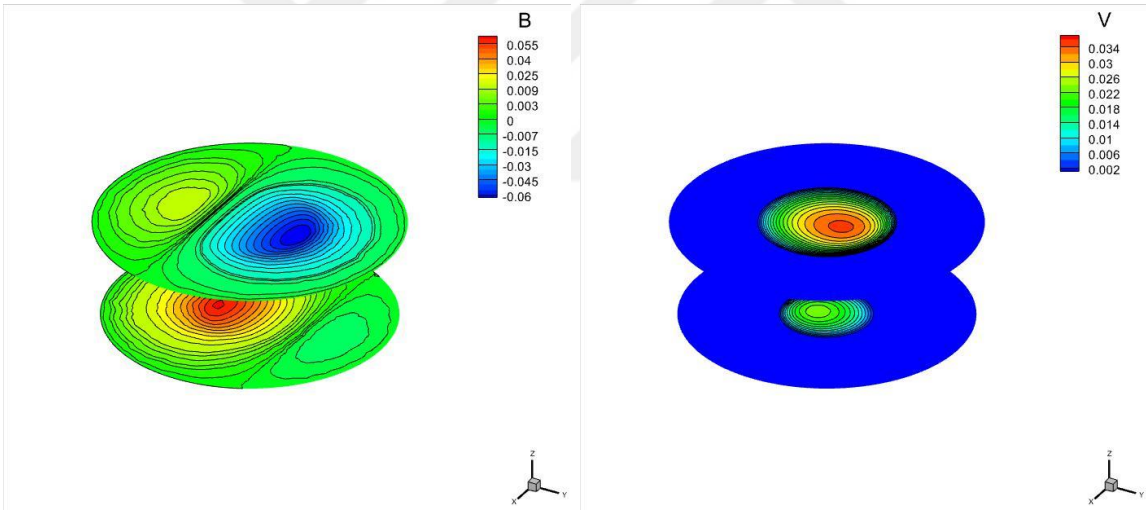
Şekil 112. Manyetik ortam içerisinde küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,

$Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri



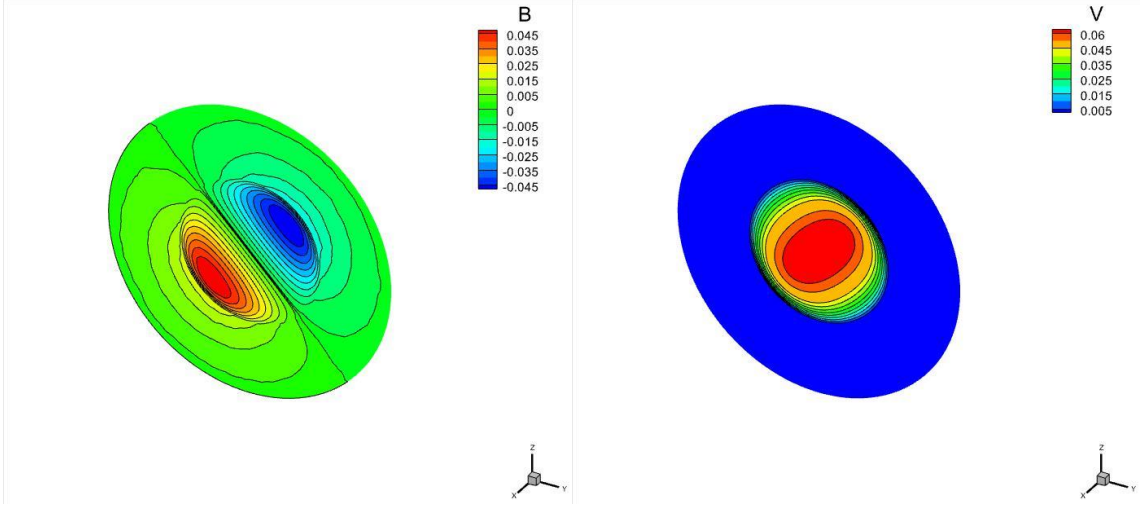
Şekil 113. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,

$Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri



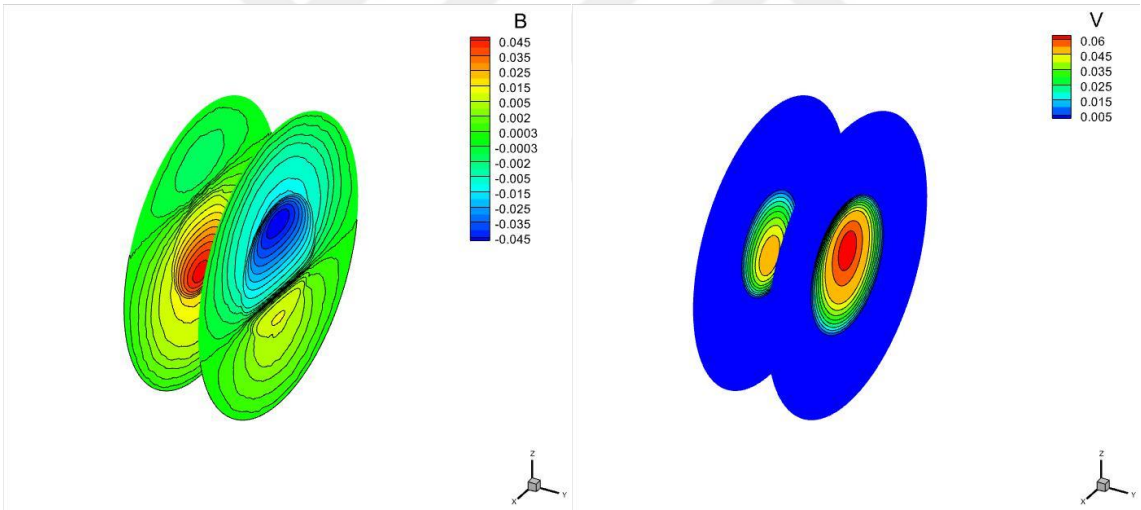
Şekil 114. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,

$Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için z -eksenine göre kesitleri



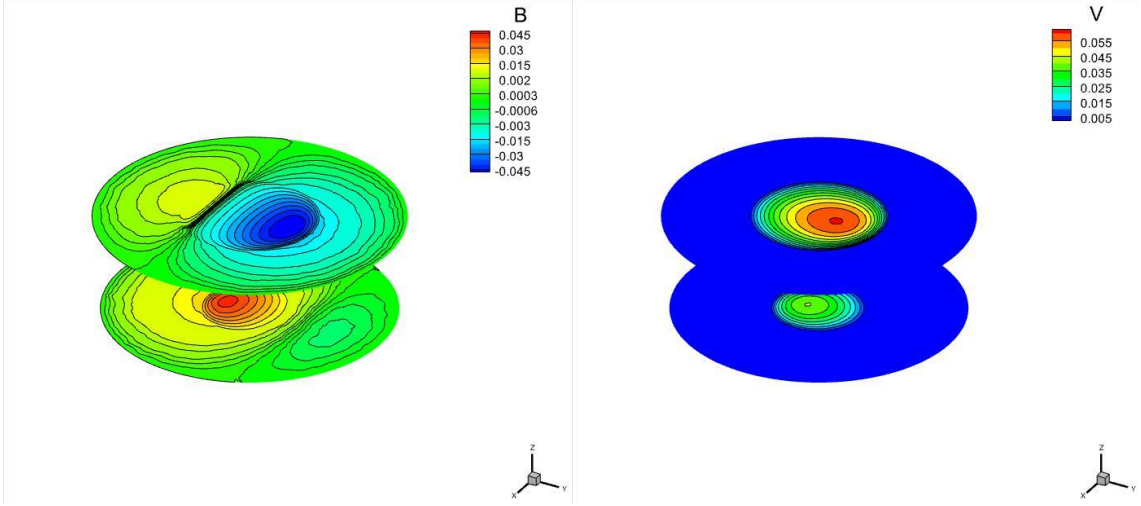
Şekil 115. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 10$,

$Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri



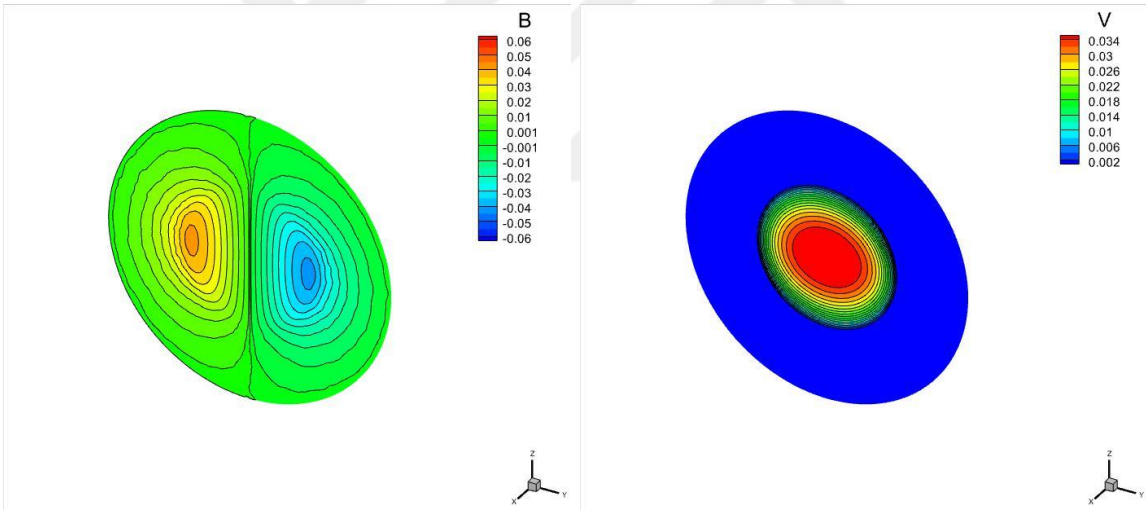
Şekil 116. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,

$Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri



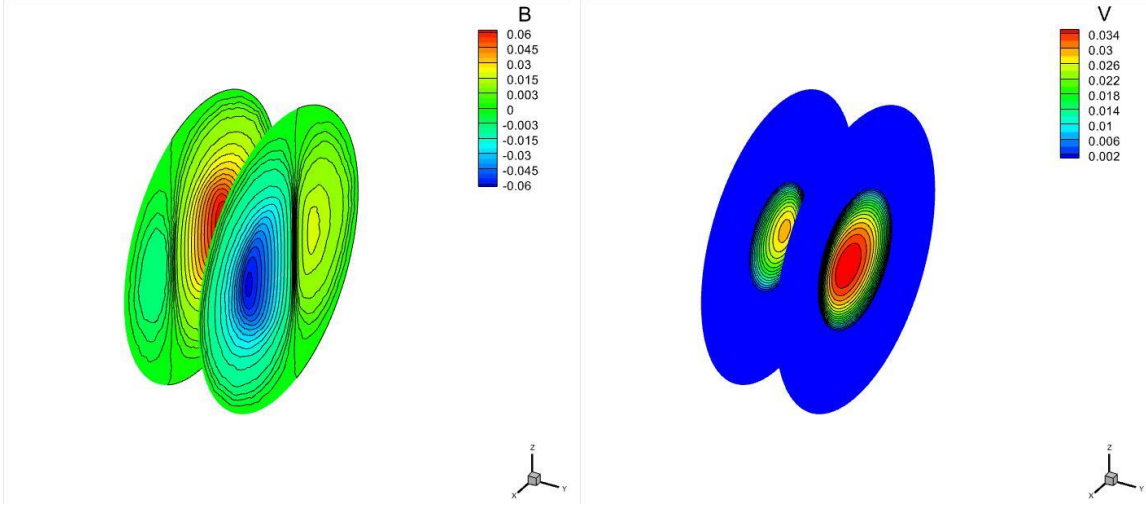
Şekil 117. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,

$Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için z -eksenine göre kesitleri



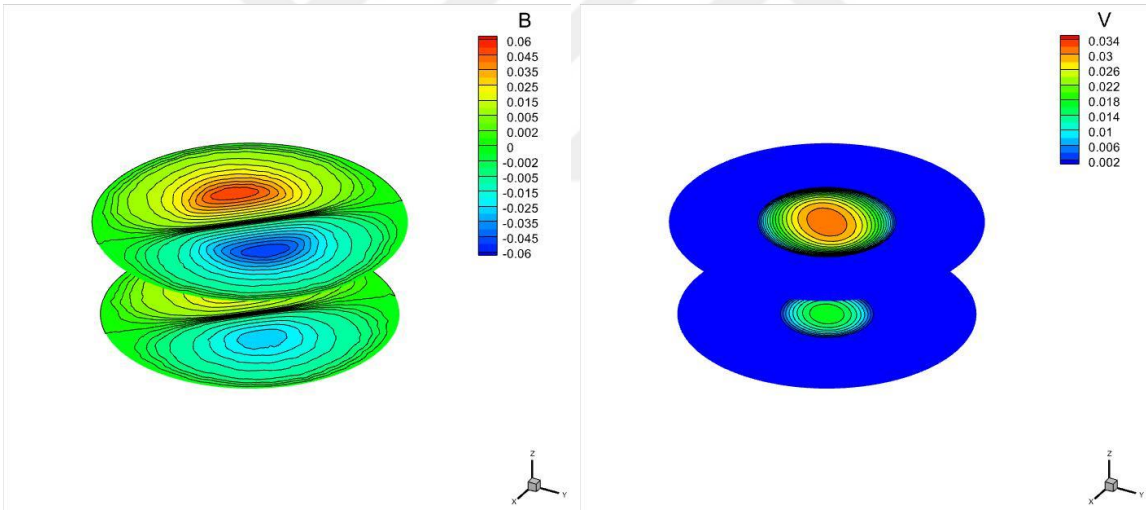
Şekil 118. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,

$Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri



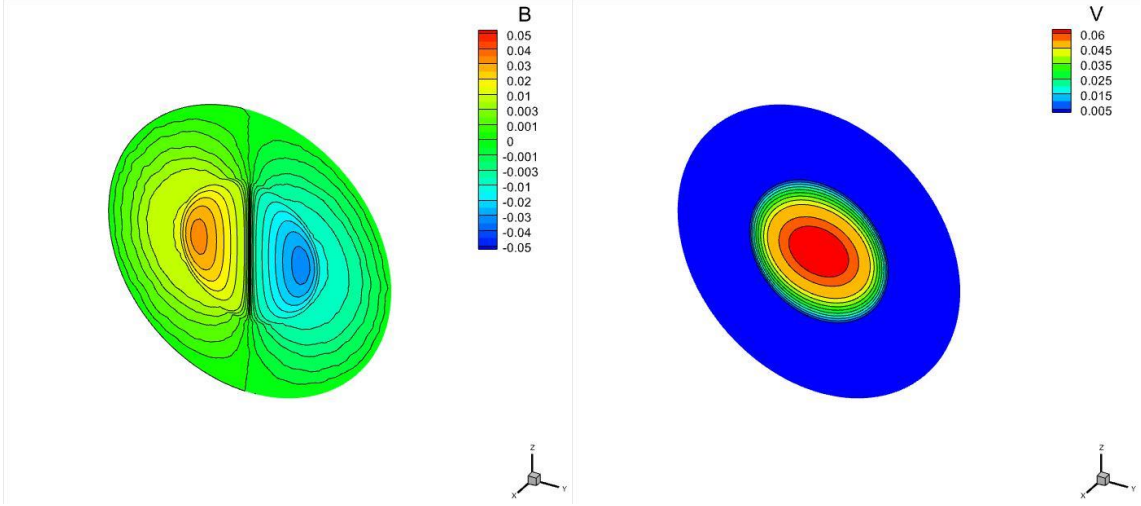
Şekil 119. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,

$Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri



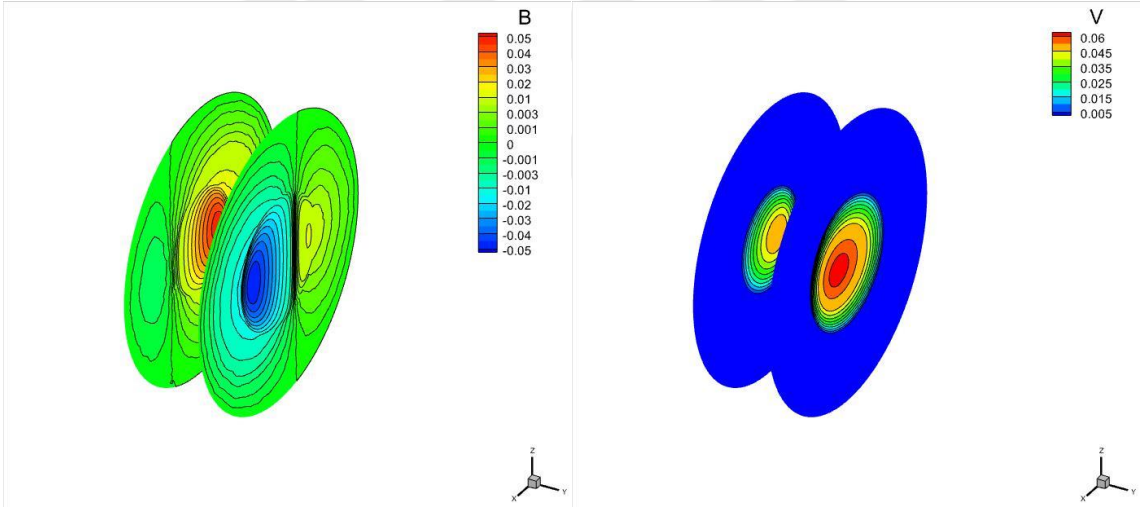
Şekil 120. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,

$Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için z -eksenine göre kesitleri



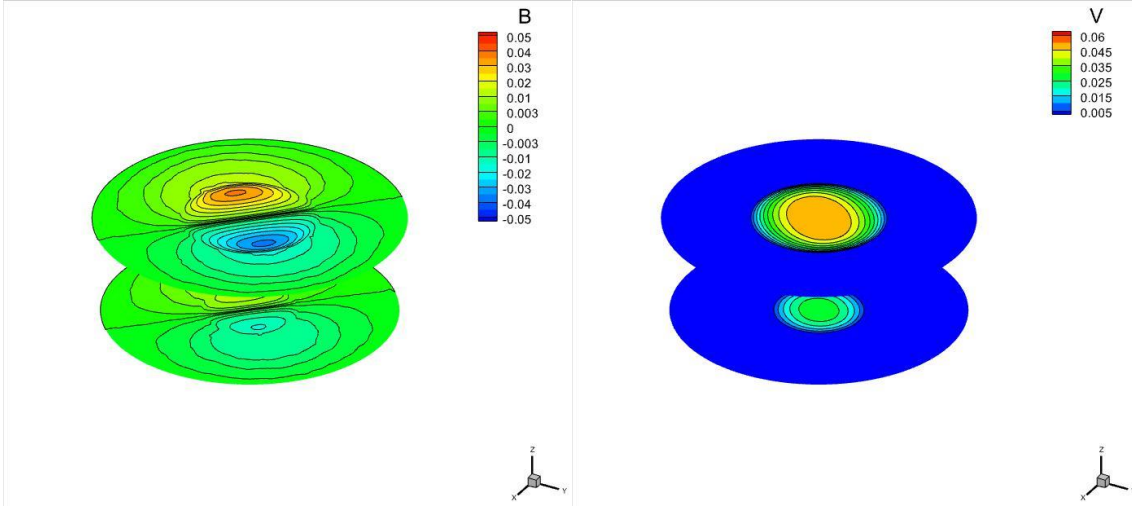
Şekil 121. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 10$,

$Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri



Şekil 122. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 10$,

$Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri

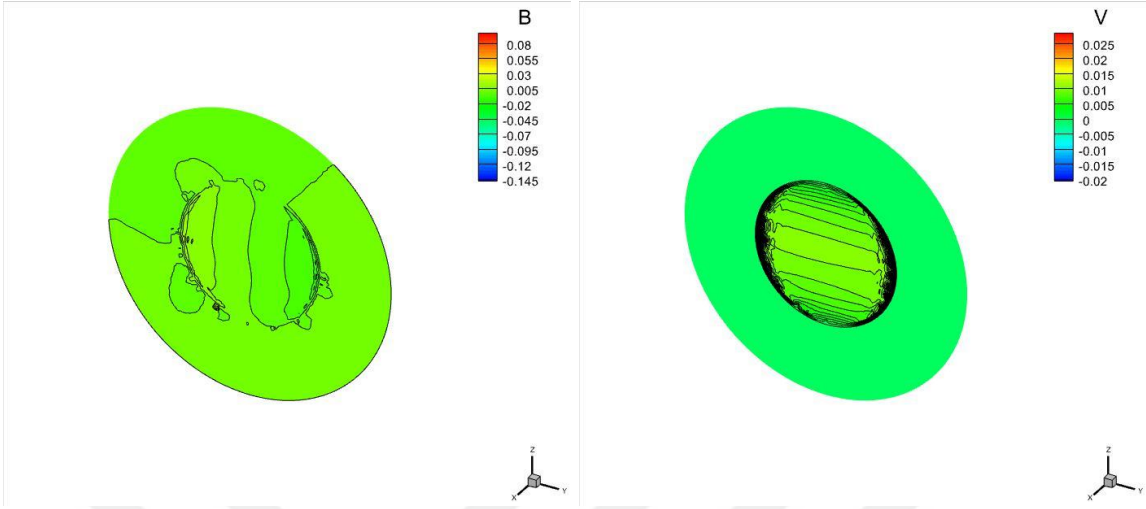


Şekil 123. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 10$,

$Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için z -eksenine göre kesitleri

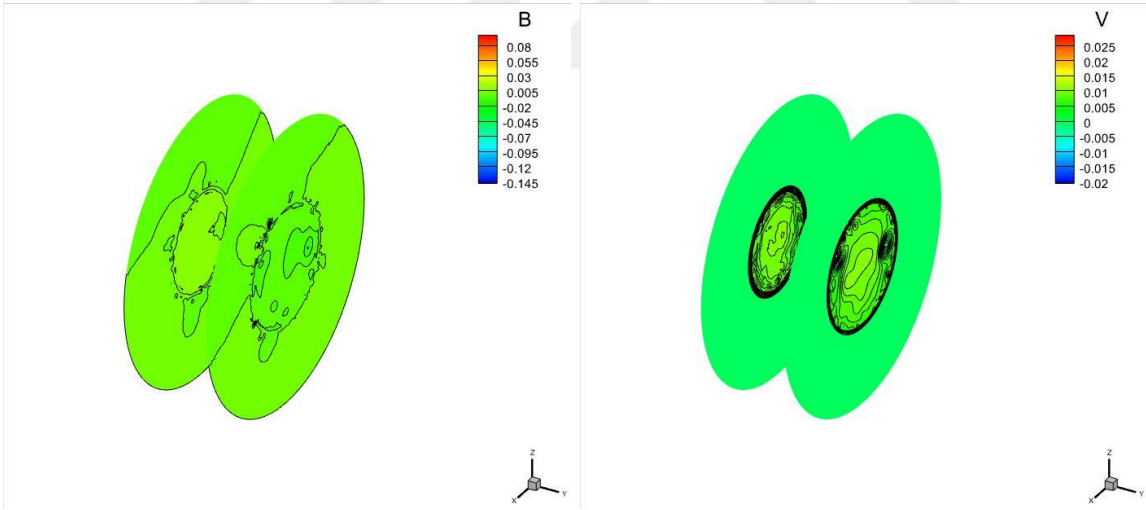
Şekil 106 ile Şekil 123 arasındaki grafiklerde α, β açılarının değişimi $Re = 100$, $Rm_f = 1$ ve $Re = 10$, $Rm_f = 10$ durumları için 3 farklı α, β seçimi ($\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$, ve $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$) ayrı ayrı incelenmiştir. Görüleceği üzere her iki durumda da Hartmann sayısı $Ha = 10$ olmaktadır. Bu nedenle α ve β değerlerinin değişmesiyle, manyetik alan ve hız değişkenlerinin en yüksek/en düşük değerlerinin değişmediği, sadece uygulanan açının yönünde göre konumlarının değiştiği, daha önceki sonuçlarda $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için kesitlere göre gözlemlenen çözüm eğrilerindeki simetrin kaybolduğu açıkça gözlemlenmektedir.

3.4.1.5. Stabilizasyon Etkisi



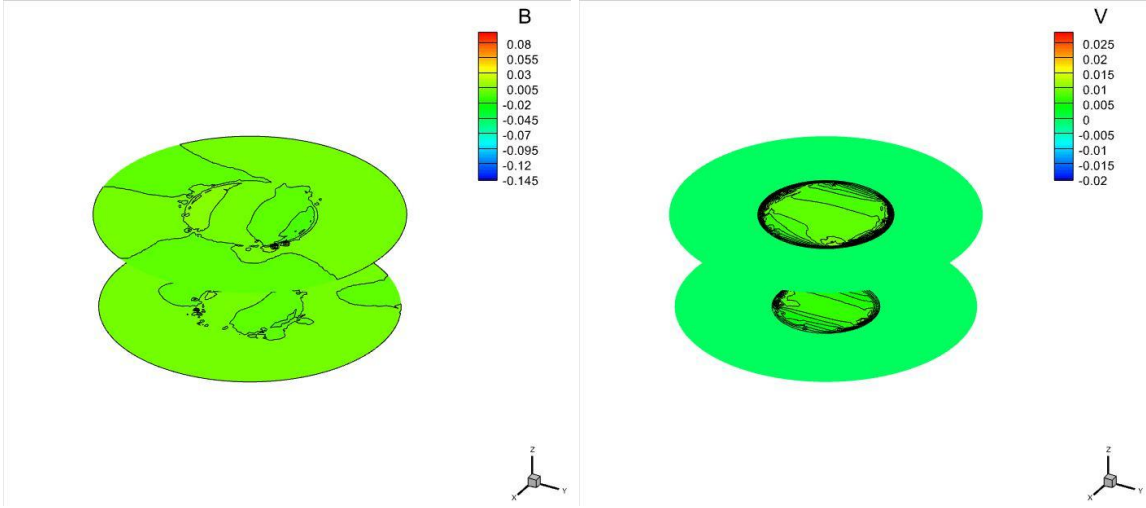
Şekil 124. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1$,

$Rm_f = 10000$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri



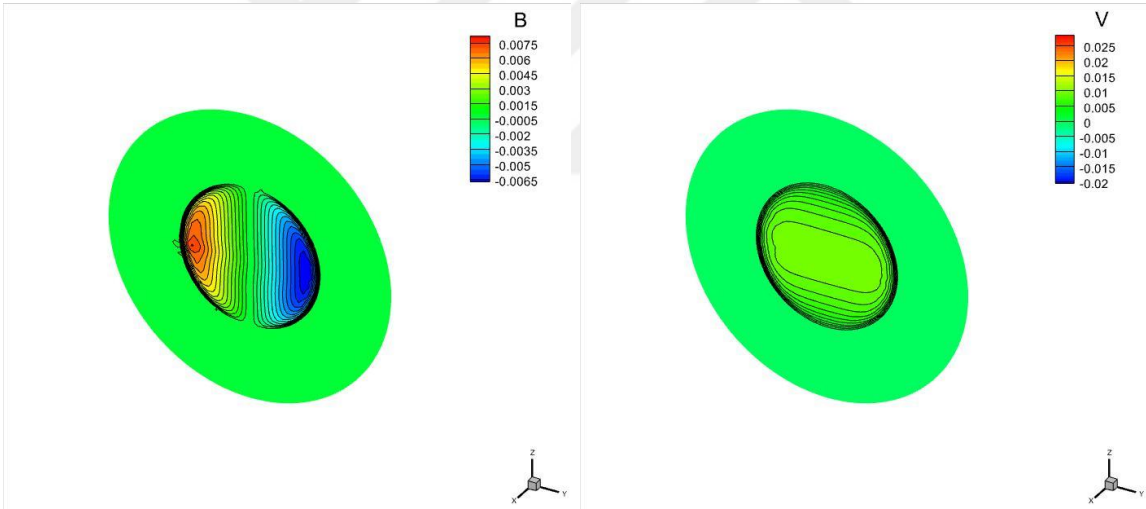
Şekil 125. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1$, $Rm_f = 10000$,

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri



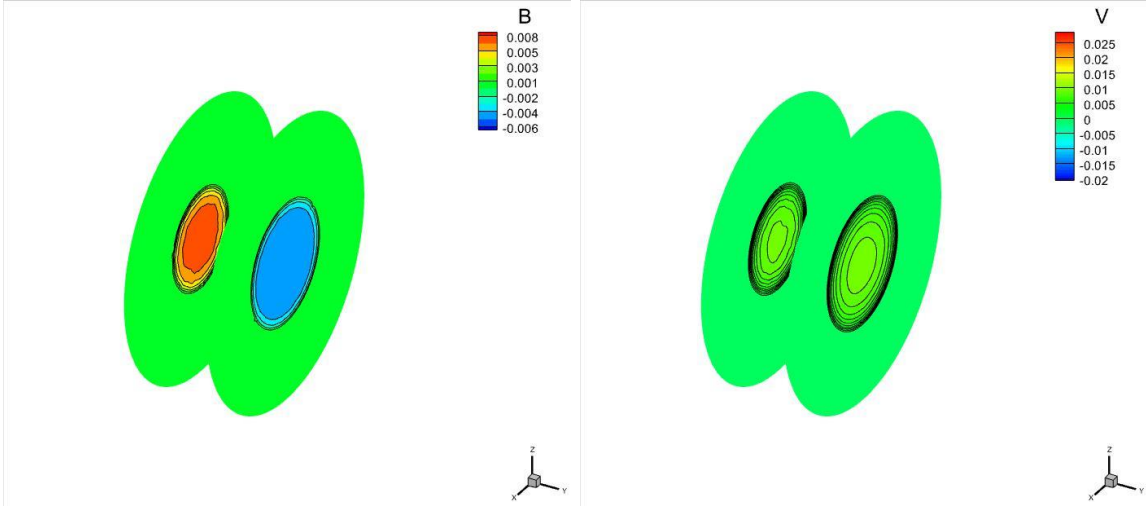
Şekil 126. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1$, $Rm_f = 10000$,

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ ve } \beta = \frac{\pi}{2} \text{ değerleri için } z \text{-eksenine göre kesitleri}$$



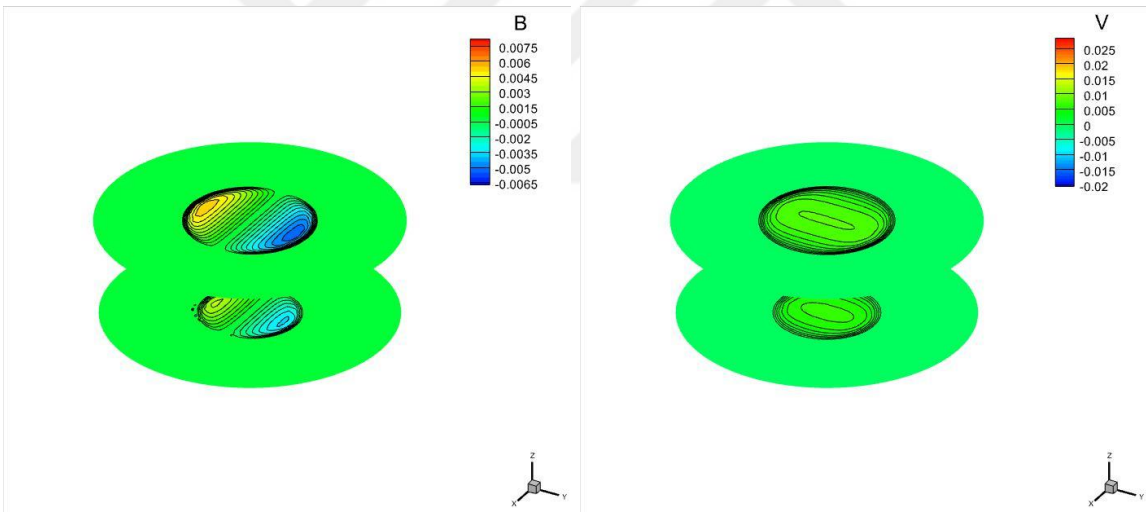
Şekil 127. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1$,

$$Rm_f = 10000, \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ ve } \beta = \frac{\pi}{2} \text{ değerleri için } x \text{-eksenine göre kesitleri}$$



Şekil 128. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1$,

$Rm_f = 10000$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri



Şekil 129. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1$,

$Rm_f = 10000$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için z -eksenine göre kesitleri

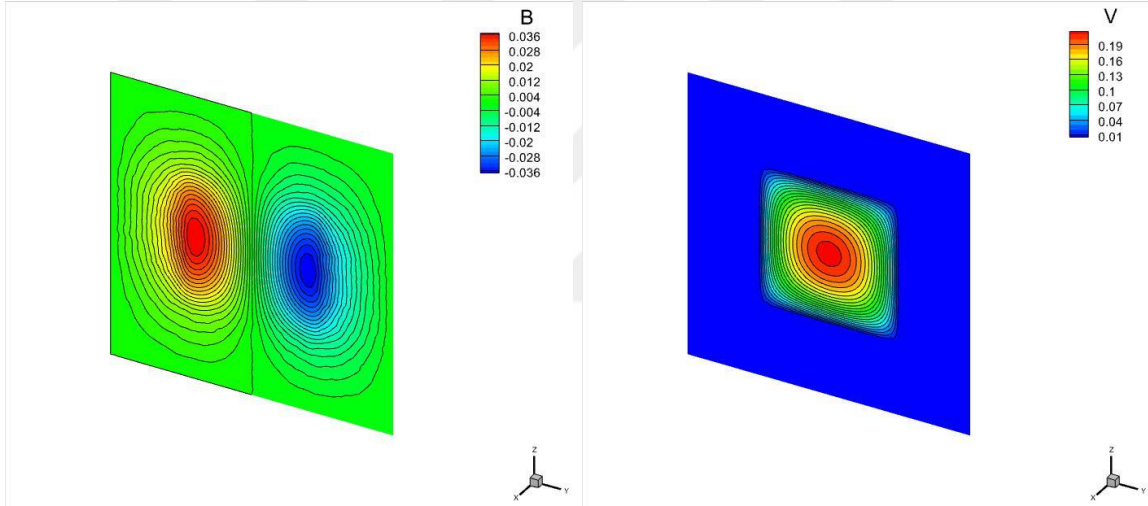
Bu bölümde son olarak Şekil 124 ile Şekil 129 arasındaki grafiklerde kullanılan stabilize sonlu elemanlar yönteminin etkisi çok yüksek Reynolds sayısı ($Re = 10000$) dolayısıyla ile çok yüksek Hartmann sayısı ($Ha = 100$) için incelenmektedir. Sonuçlardan görüleceği üzere, standart sonlu elemanlar yöntemi ile stabilizasyon uygulanmadan elde edilen sonuçlarda belirgin şekilde kararsızlıkların olduğu çözüm eğrilerindeki bozukluklardan

gözlemlenmektedir. Stabilizasyon uygulandığında ise çözüm eğrilerindeki bu bozuklukların ortadan kaybolduğu ve kararlı çözümler elde edilebildiği gözükmektedir.

3.5.1. Manyetik Ortam İçerisinde Küp Bölgede MHD Probleminin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Çözülmesi

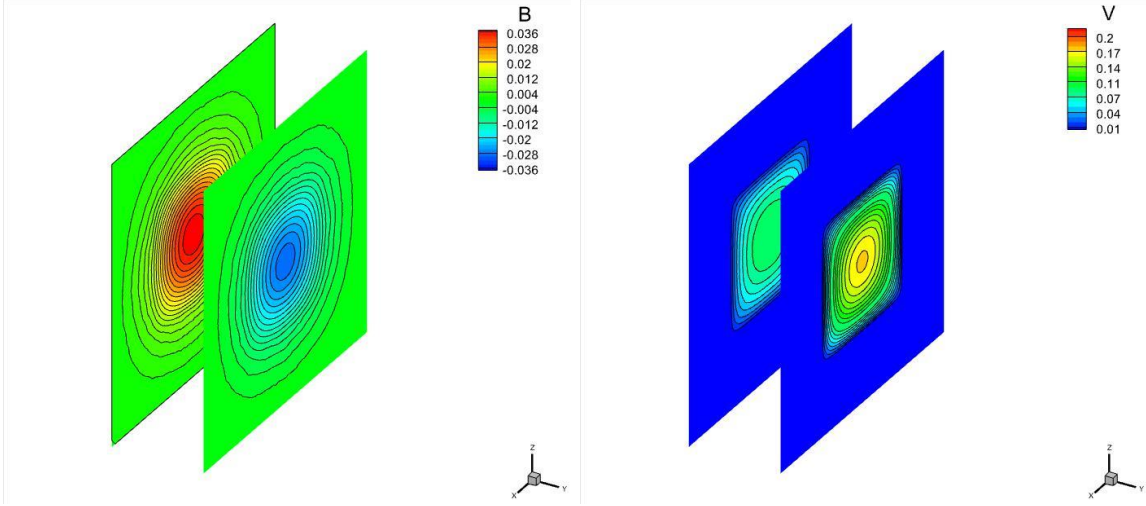
Bu bölümde, daha önce küre bölge üzerinde elde edilen çözümlerin küp bölge üzerindeki durumu incelenecektir. Yine ilk durum olarak $Rm_m = 1$ değeri sabit tutulacaktır. Bu durumda problem Bölüm 3.3.2 deki problem ile aynı yapıda olacaktır.

3.5.1.1. Re Değişimi

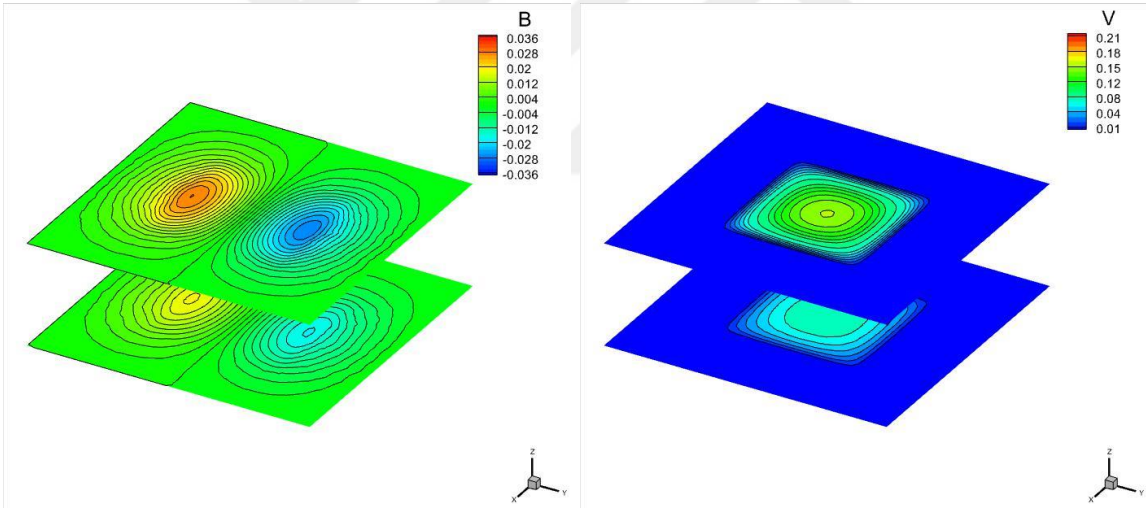


Şekil 130. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1$, $Rm_f = 1$,

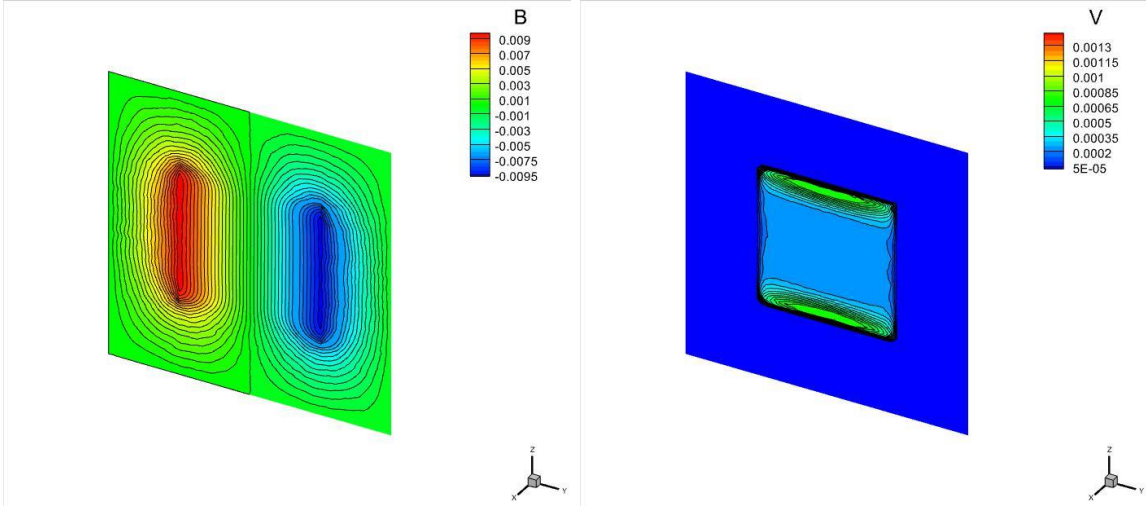
$\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri



Şekil 131. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1$, $Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri

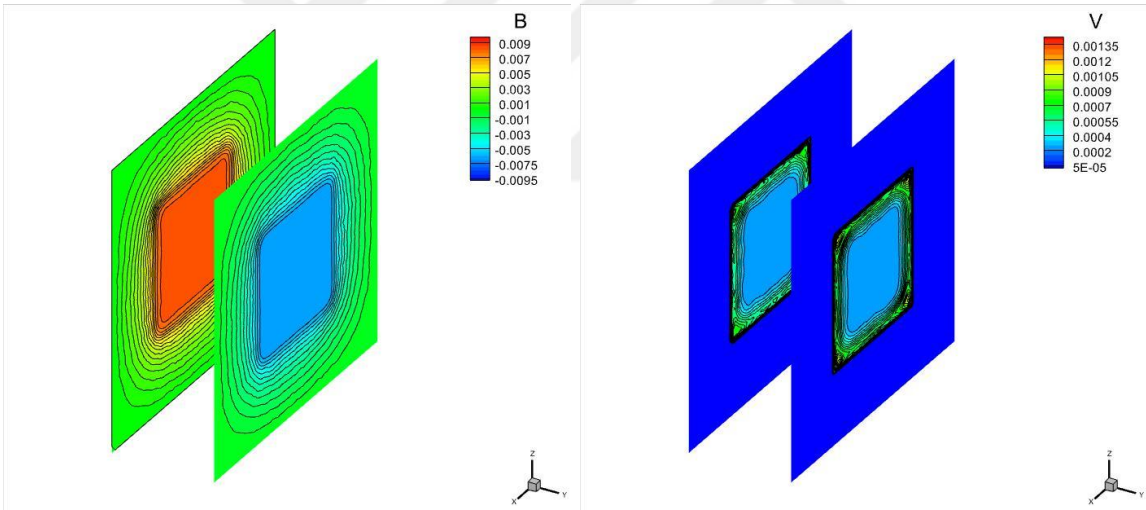


Şekil 132. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1$, $Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için z -eksenine göre kesitleri



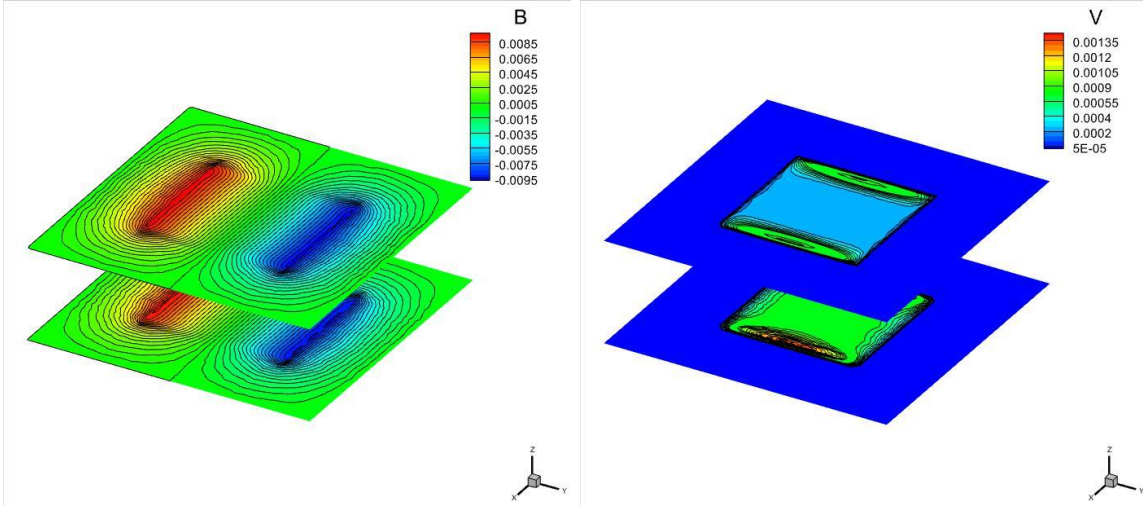
Şekil 133. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize, sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 10000$,

$Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri



Şekil 134. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize, sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 10000$,

$Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri

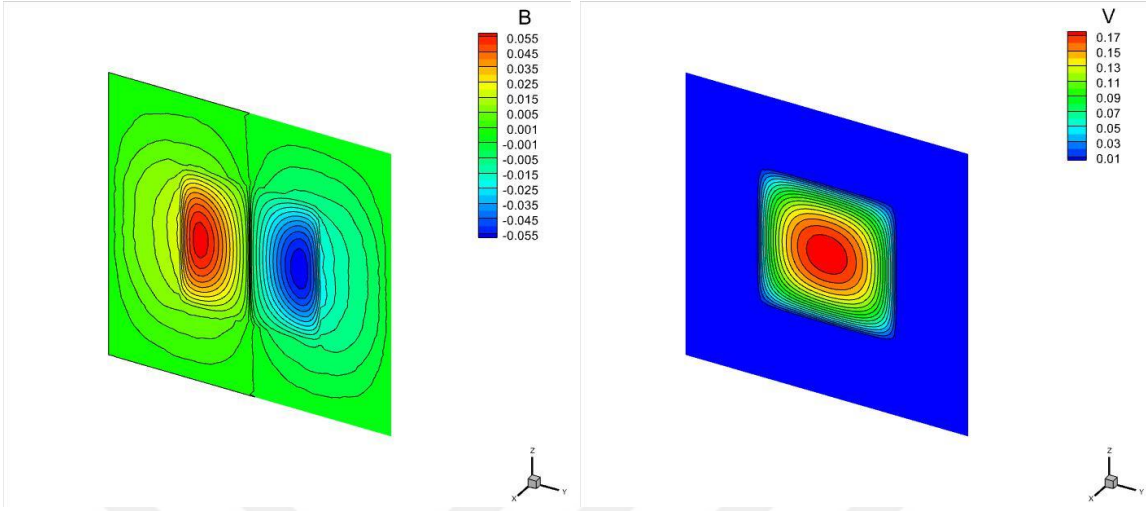


Şekil 135. Manyetik ortam içerisindeki küre bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 10000$,

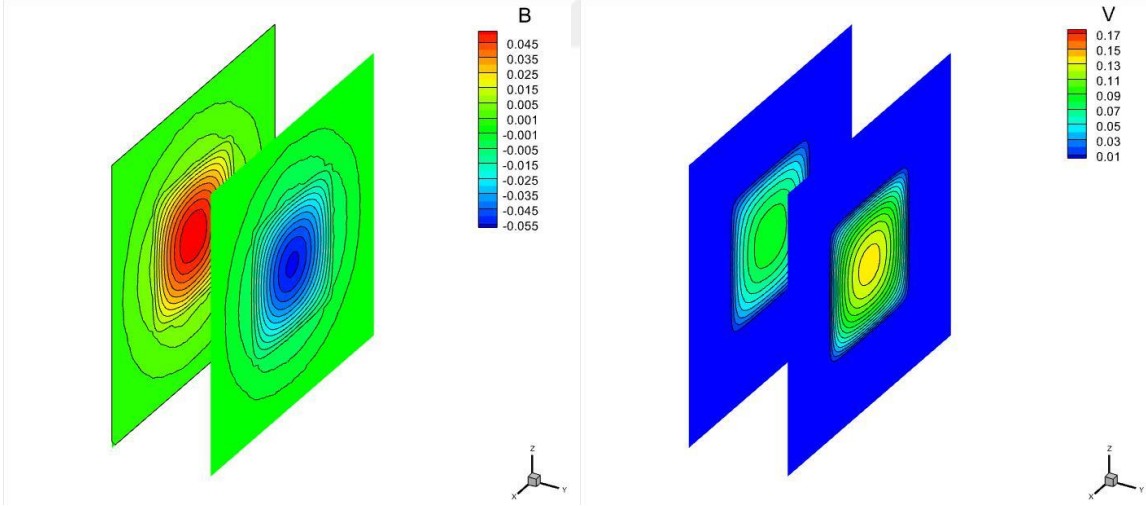
$$Rm_f = 1, \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ ve } \beta = \frac{\pi}{2} \text{ değerleri için } z\text{-eksenine göre kesitleri}$$

Küre bölge problemine benzer şekilde Şekil 130 ile Şekil 135 arasındaki grafiklerde $Rm_f = 1$ sabit tutularak Re sayısının değişimi incelenmektedir. Şekil 127 ile Şekil 129 çözümlerinde $Ha = 1$ olacağından dolayı, elde edilen sonuçlar Şekil 49 ile Şekil 51 arasındaki grafiklerde elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılabilir. Küre bölge problemine benzer şekilde yapısal olarak her iki değişkene göre de hemen hemen aynı davranış gözleniyor olmasa dahi, hız bileşenin en yüksek değerinin hemen hemen aynı olduğu, manyetik alan için ise en yüksek/en düşük değerlerin yine hemen 2 kat değiştiği gözükmektedir. Re sayısı artıkça uygulanan manyetik alanın yönüne göre sınır katmanlarının oluştuğu gözlemlenmektedir.

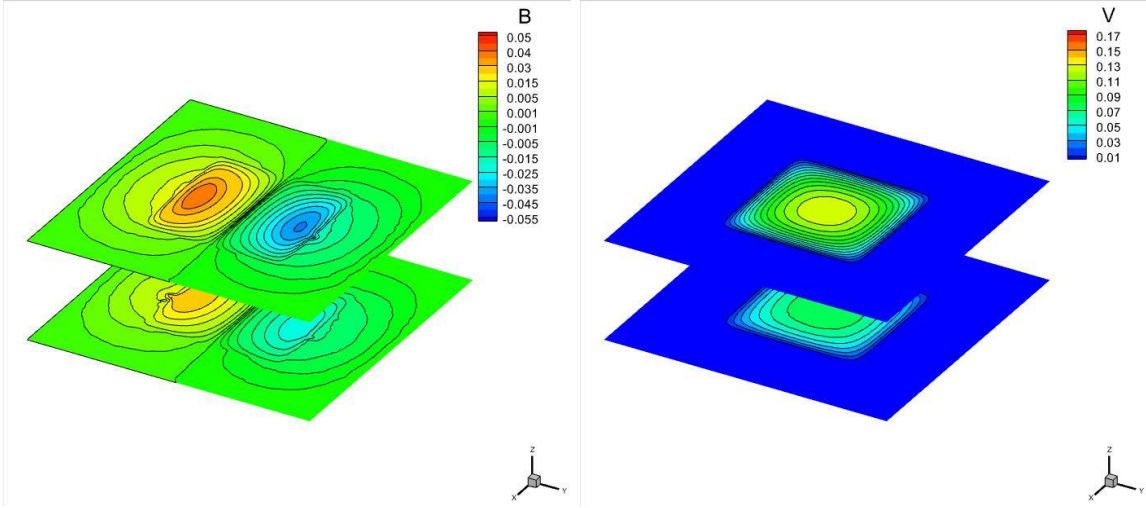
3.5.1.2. Rm_f Değişimi



Şekil 136. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1$, $Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri



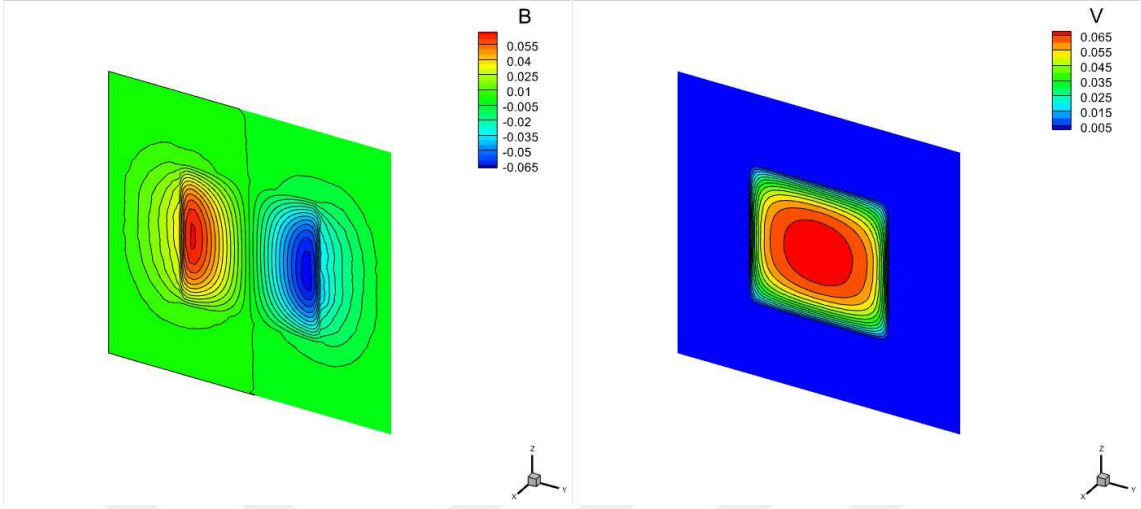
Şekil 137. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1$, $Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri



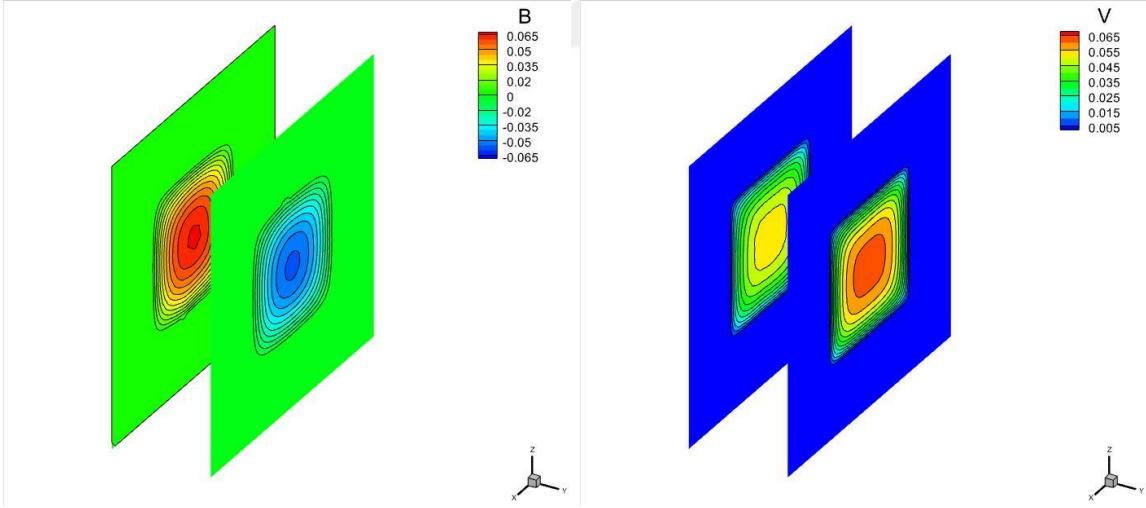
Şekil 138. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1$, $Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için z -eksenine göre kesitleri

Şekil 136 ile Şekil 138 arasındaki grafiklerde, yukarıdaki bölümün tersi şekilde $Re=1$ sabit tutularak Rm_f sayısının değişimi incelenmektedir. Küre bölgenin yapısından dolayı sadece $Rm_f = 10$ değeri için düzgün sonuçlar elde edilmiş, yüksek değerlerde çözümlerde yer alan sorunlardan dolayı grafikleri verilmemiştir. Yine Rm_f / Rm_m oranının artmasından dolayı, manyetik alan çözüm eğrilerinde bölge geçiş sınırında kırıklıkların olduğu görülmektedir. Hız bileşeni için küre bölgeye benzer şekilde en yüksek değer in düştüğü gözlemlenmektedir.

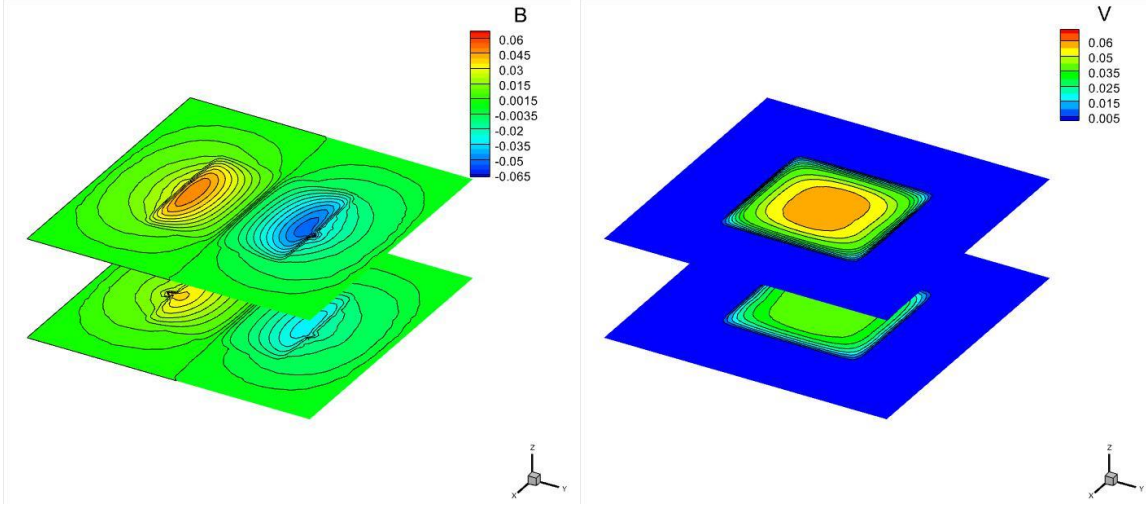
3.5.1.3. Re ve Rm_f Değişimi



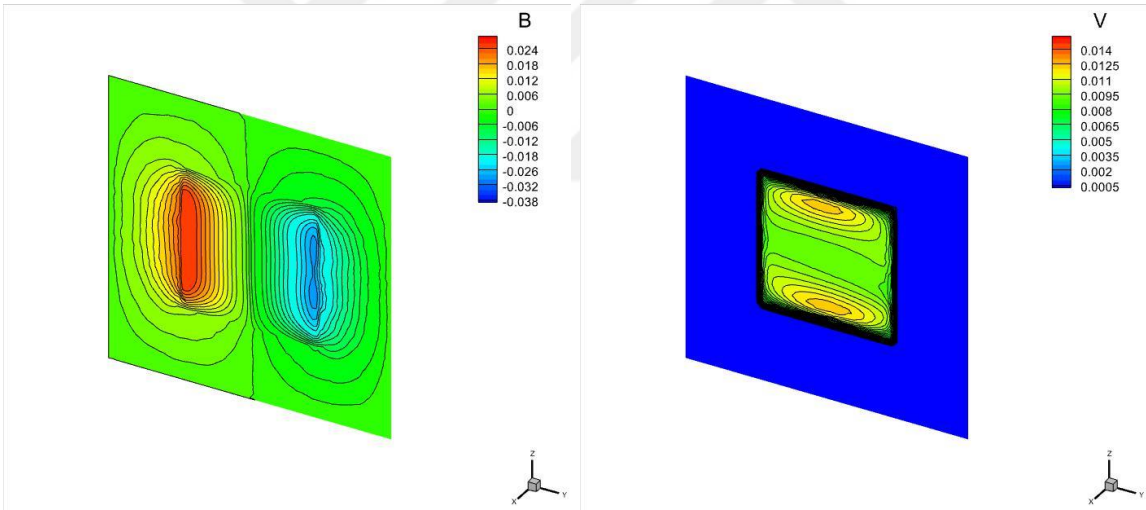
Şekil 139. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 10$, $Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri



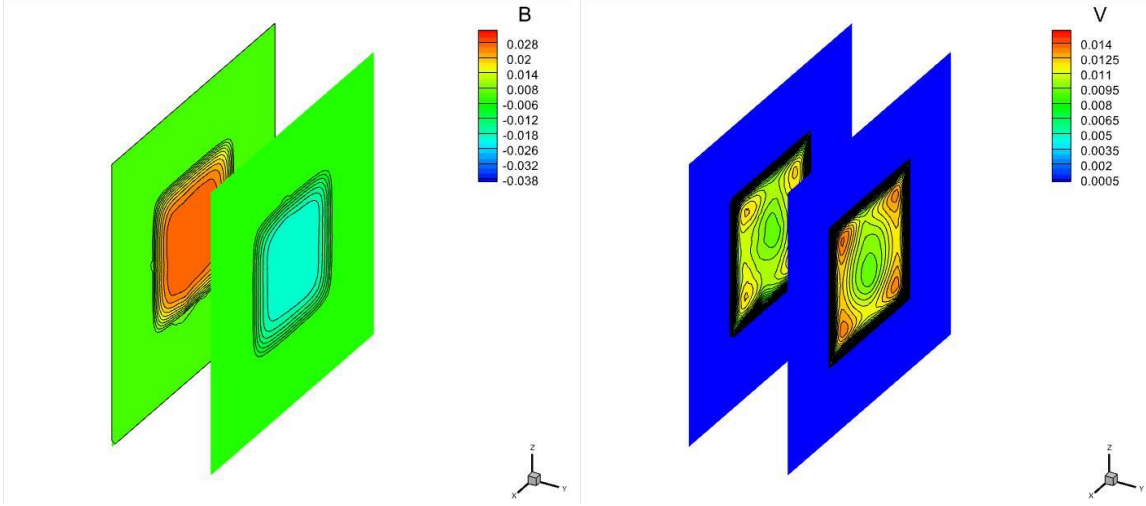
Şekil 140. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 10$, $Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri



Şekil 141. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 10$, $Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için z -eksenine göre kesitleri

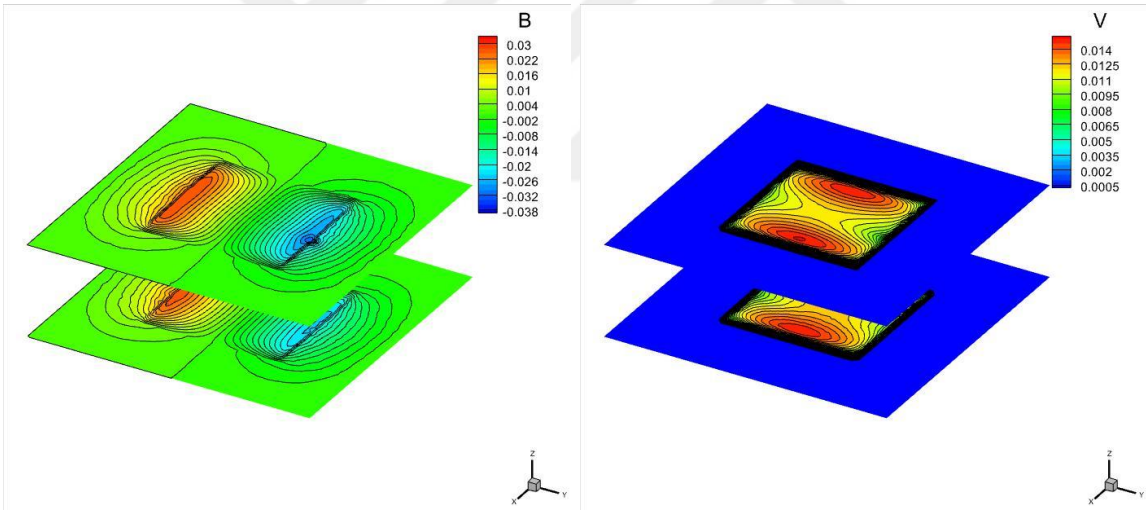


Şekil 142. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$, $Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri



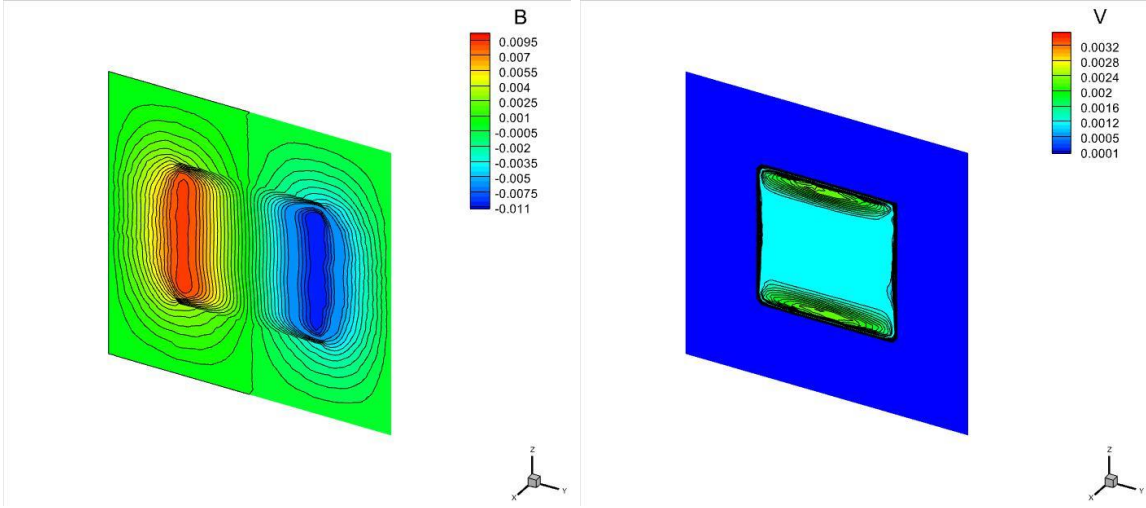
Şekil 143. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,

$Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri



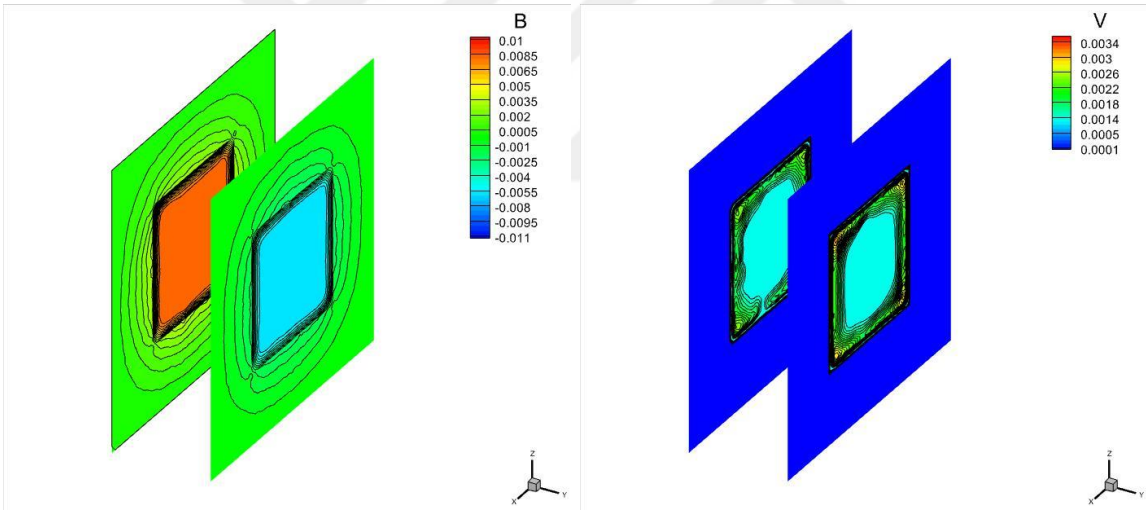
Şekil 144. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,

$Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için z -eksenine göre kesitleri



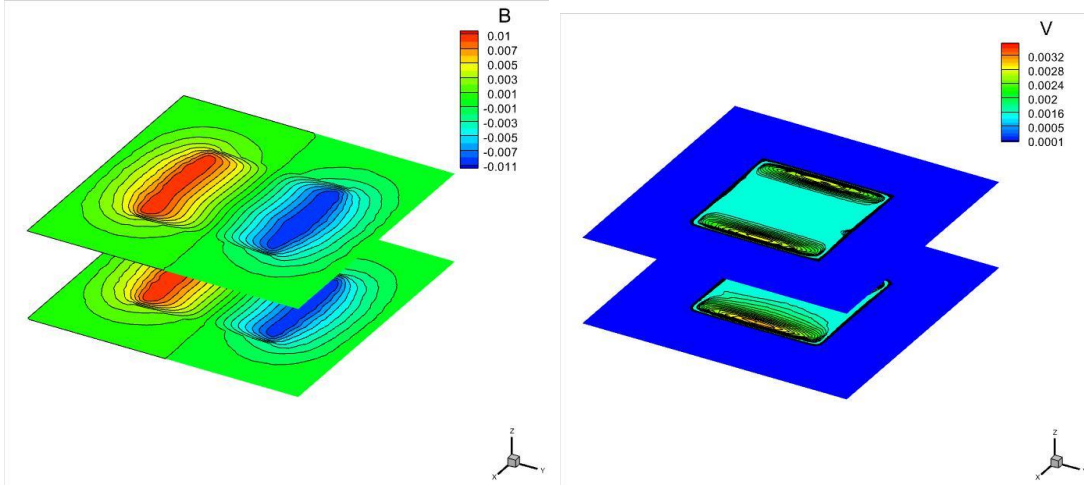
Şekil 145. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1000$,

$Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri



Şekil 146. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1000$,

$Rm_f = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri

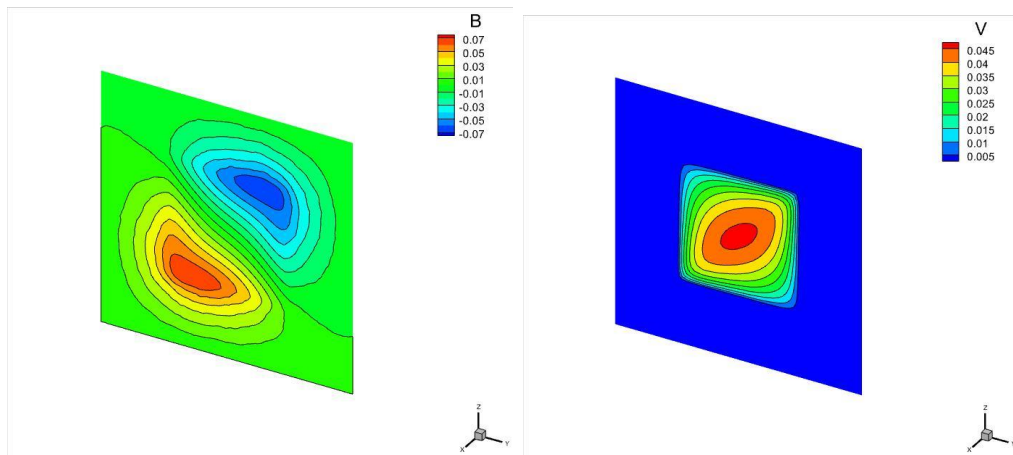


Şekil 147. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 1000$,

$$Rm_f = 10, \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ ve } \beta = \frac{\pi}{2} \text{ değerleri için } z\text{-eksenine göre kesitleri}$$

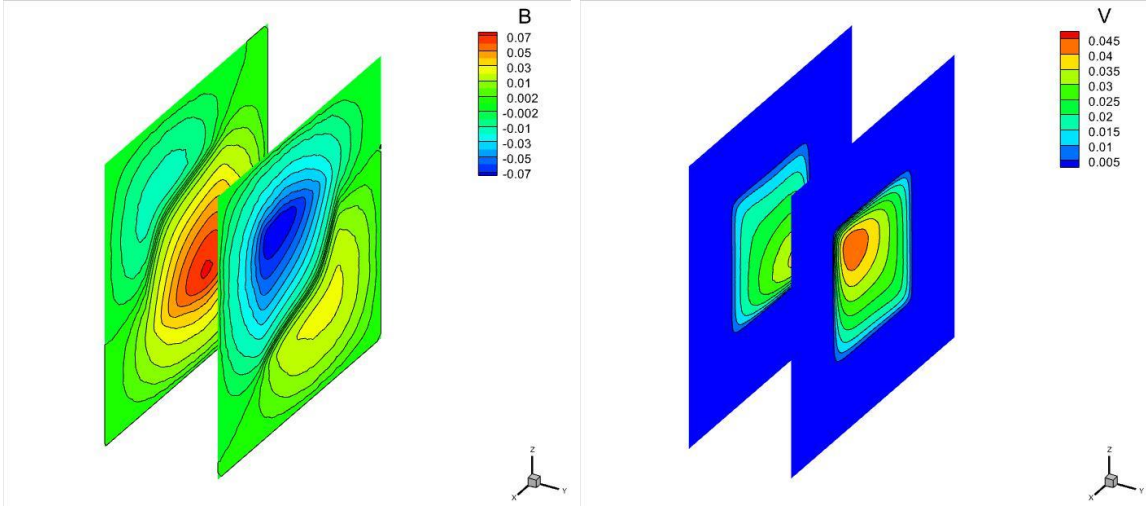
Şekil 139 ile Şekil 147 arasındaki grafiklerde her iki değişkeninin (Re ve Rm_f) değişimleri incelenmektedir. Küre bölge ile karşılaştırıldığında, değişkenlerin yüksek değerleri için her ne kadar stabilize yöntemin etkisi ile nispeten kararlı çözümler elde edilmesine rağmen özellikle köşelere ve bölge sınırlarına yakın yerlerde bazı sorunları olduğu gözlemlenmektedir. Ayrıca değişkenlerin artması ile hız ve manyetik alan bileşenlerinin en yüksek ve en düşük değerlerin azaldığı gözlemlenmektedir

3.5.1.4. α, β Değişimi



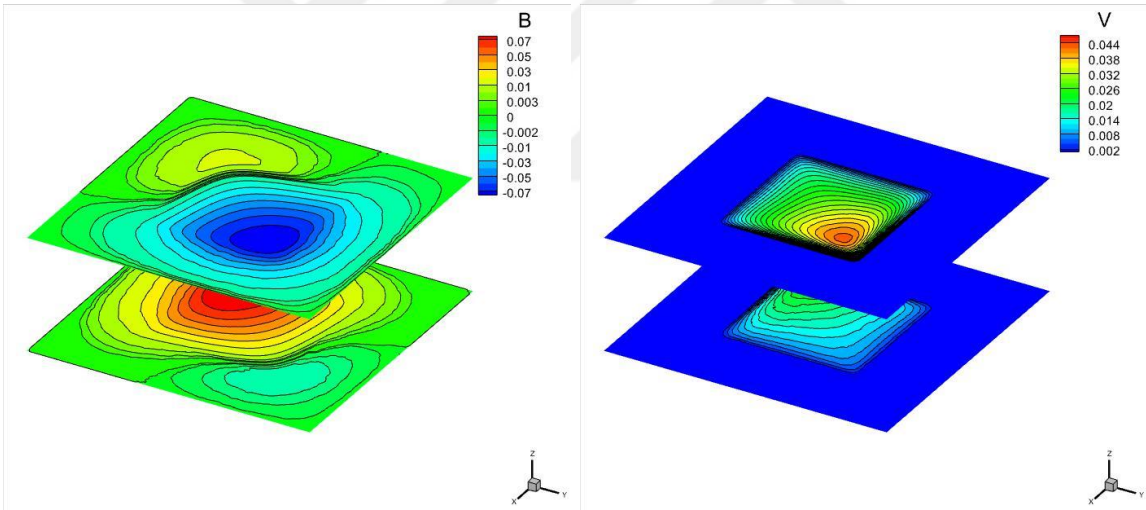
Şekil 148. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$, $Rm_f = 1$,

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \text{ ve } \beta = \frac{\pi}{4} \text{ değerleri için } x\text{-eksenine göre kesitleri}$$



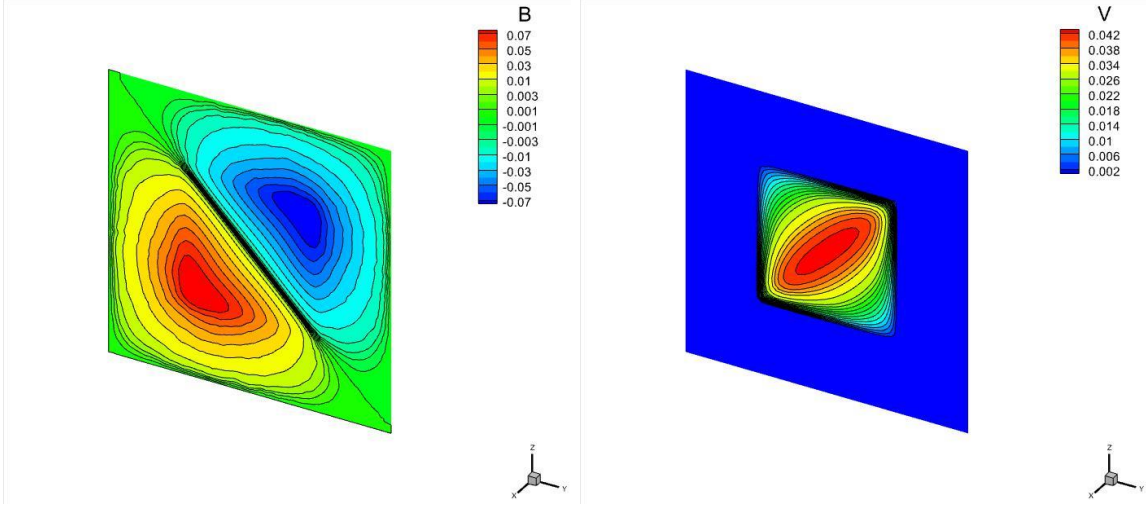
Şekil 149. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,

$Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri



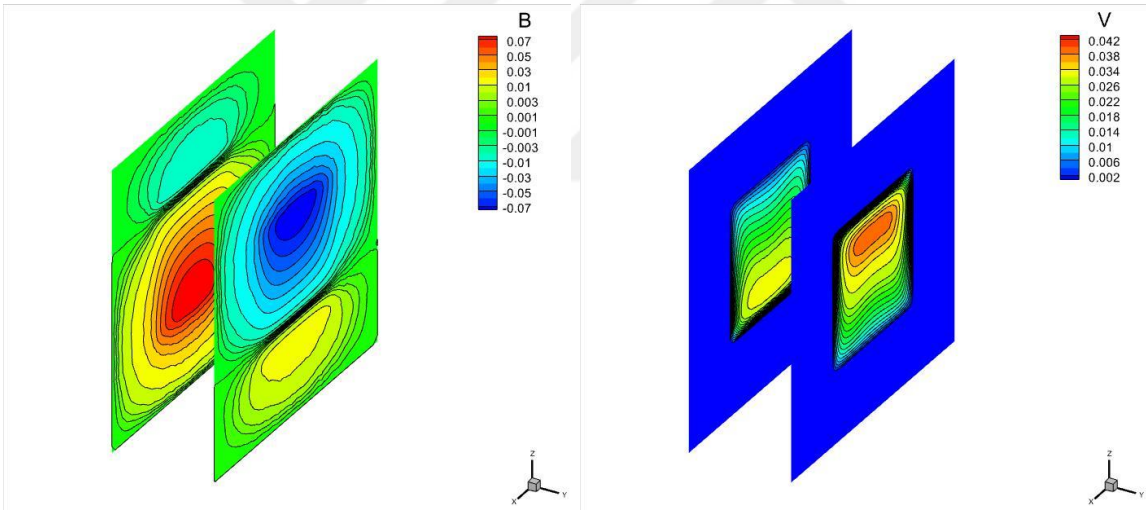
Şekil 150. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,

$Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için z -eksenine göre kesitleri



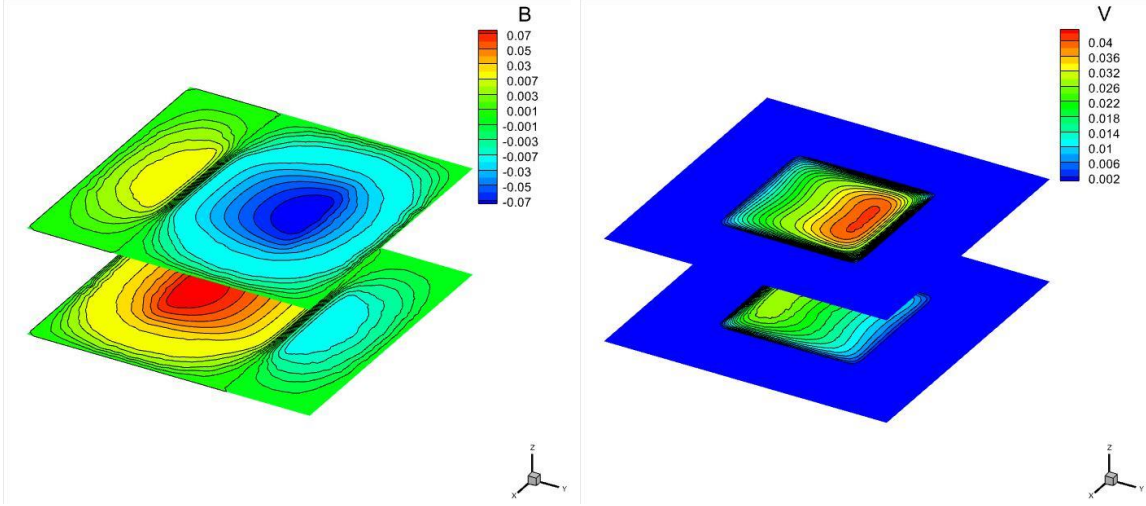
Şekil 151. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,

$Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri



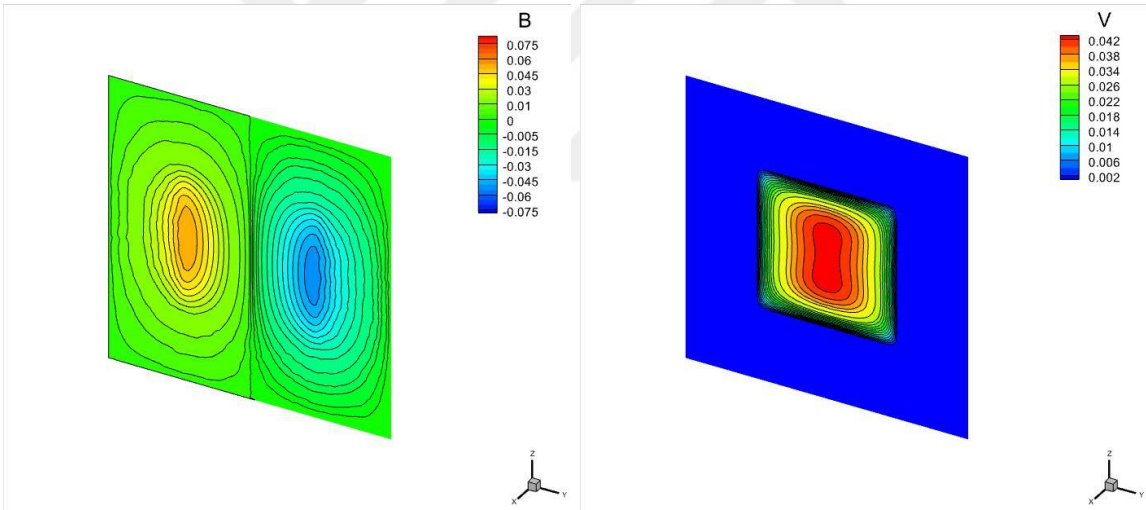
Şekil 152. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,

$Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri



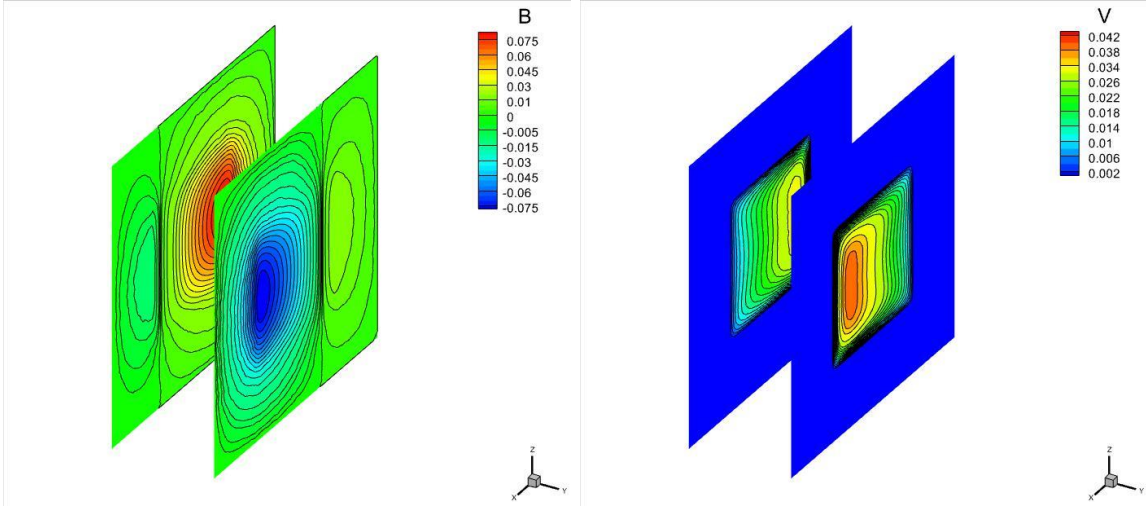
Şekil 153. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,

$Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için z -eksenine göre kesitleri



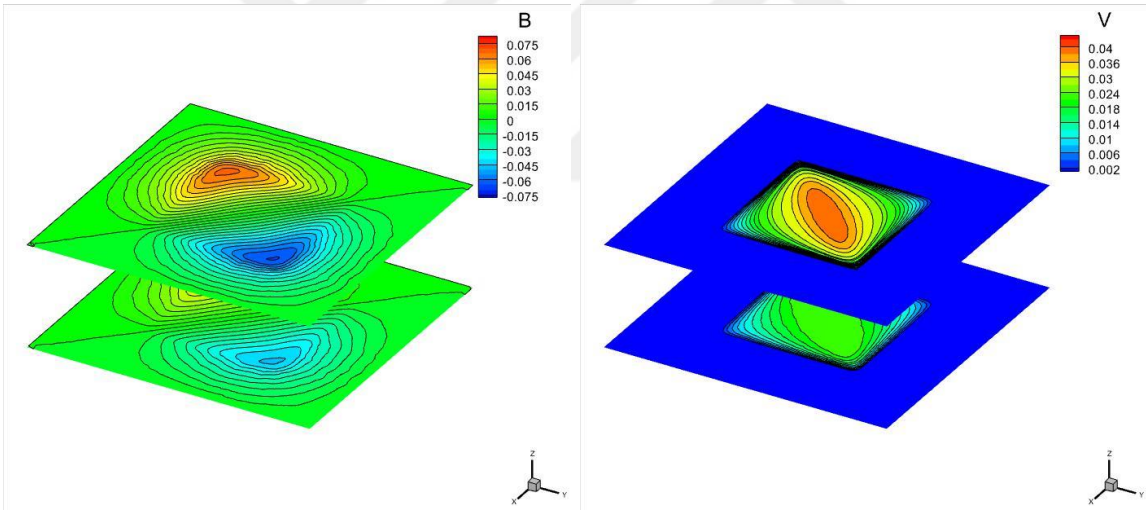
Şekil 154. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,

$Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için x -eksenine göre kesitleri



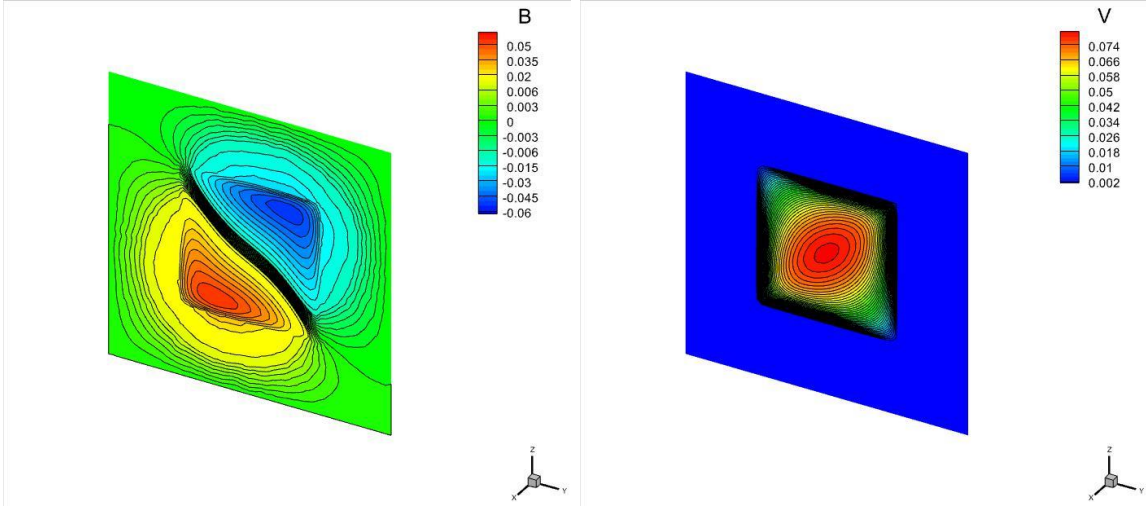
Şekil 155. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,

$Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için y -eksenine göre kesitleri



Şekil 156. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 100$,

$Rm_f = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ değerleri için z -eksenine göre kesitleri



Şekil 157. Manyetik ortam içerisindeki küp bölge üzerinde MHD probleminin stabilize sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $Re = 10$,

$$Rm_f = 10, \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ ve } \beta = \frac{\pi}{4} \text{ değerleri için } x\text{-eksenine göre kesitleri}$$

Son olarak Şekil 148 ile Şekil 157 arasındaki grafiklerde α, β açılarının değişimi küre bölge probleminde olduğu gibi 3 farklı durum için incelenmiştir. Küre bölge problemi ile karşılaştırıldığında açı değişiminin etkisi özellikle manyetik alan çözüm eğrilerinde daha belirgin bir şekilde gözlemlenmektedir. Yine uygulanan açının yönüne göre en yüksek/en düşük değerlerin konumlarının değişmesine rağmen değerlerinin korunduğu ve $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ durumunda gözlemlenen simetrinin kaybolduğu görülmektedir.

4. SONUÇLAR

Bu tezde özellikle 3-Boyutlu problemlerin sayısal çözümleri incelenmiştir. Laplace problemi için Sınır Elemanlar Yöntemi ve Sonlu Elemanlar Yöntemi olmak üzere iki farklı yöntem test edilmiş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır. Yöntemlerin verimliliği ve bilgisayar hesaplama maliyeti karşılaştırıldığında Sonlu Elemanlar Yönteminin sınırlı bölge problemleri için daha uygun olduğu görülmüştür. Bu nedenle tezin geri kalan kısmında sayısal yöntem olarak sadece Sonlu Elemanlar Yöntemi kullanılmıştır.

Bir sonraki aşamada Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Konveksiyon-Difüzyon denklemlerinin formülasyonu elde edilmiştir. Fakat konveksiyon baskın durumlarda standart Galerkin Sonlu Elemanlar Yönteminin yetersiz kaldığı gözlemlenmiştir. Bu nedenle Stabilize Sonlu Elemanlar Yöntemlerinden en bilindik olan Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin (SUPG) yönteminin 3-Boyutlu uyarlaması yapılmıştır. Elde edilen stabilize yöntemle sayısal çözümlerin kararlı olduğu örnek test problemi üzerinde gözlemlenmiştir. Uygulan yöntem, MHD denklemlerine genişletilerek yalıtkan duvar koşullarına sahip sınırlı bölge üzerinde ve manyetik ortam içerisinde olmak üzere iki farklı durumda MHD denklemlerinin yüksek Hartmann sayısı değerleri için çözümleri elde edilmiş, ve bulunan sonuçların yorumları ve literatürdeki sonuçlarla karşılaştırmaları gerçekleştirilmiştir.

5. ÖNERİLER

Bu tezde en temel çalışma olarak 3-Boyutlu problemlerin Stabilize Sonlu Elemanlar Yöntemi ile çözümleri incelenmiştir. Elde edilen sonuçlardan yöntemin verimliliği ve kararlılığı gözlemlenmiştir.

Tezin son bölümünde çözümleri elde edilen manyetik ortamdaki MHD denklemlerinin çözümleri, sonraki aşamalarda uzun vadeli bir çalışma olarak Sınır Elemanlar-Sonlu Elemanlar Yöntemlerinin birleşimi ile tam anlamı ile sonsuz bölge üzerinde daha etkin bir şekilde elde edilebilir. Ayrıca özellikle Hartmann sayı değerine bağlı olarak sınır bölgelerine yakın yerlerde adaptif ağ yaklaşımı ile elde edilecek sonuçların karşılaştırmaları gerçekleştirilebilir.

6. KAYNAKLAR

- Logan , J., D., 2015. Applied Partial Differential Equations, Springer.
- Ang, W., T., A., 2007. Beginner's Course in Boundary Element Methods, Universal Publishers.
- Rao, S., S., 2004. The Finite Element Method in Engineering, Elsevier Science & Technology Books.
- Aydın, H., S., 2000. Dual Reciprocity Boundary Element Method for Poisson's Equation Using Osculatory Radial Basis Functions, Yüksek Lisans Tezi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Çiftçi, C., 2012. Değişken Katsayılı Konveksiyon-Difüzyon Denklemlerinin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Çözümü, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Erdoğan, C., M., 2014. Stabilize sonlu elemanlar yöntemi ile adaptif ağ oluşturma, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Brebbia, C., A., 1981. Boundary Element Methods, Springer Verlag, Berlin.
- Brebbia, C., A. ve Dominguez, J., 1998. Boundary Elements an Introductory Course, 2nd ed., WIT Press/Computational Mechanics Publications, Southampton.
- Rangogni, R. ve Occhi, R., 1987. Numerical Solution of The Generalized Laplace Equation by The Boundary Element Method, Appl. Math. Modelling, 11, 393-396.
- Shercliff J. A. The motion of conducting fluids in pipes under transverse fields. Proceedings of the Cambridge Philosophy Society 1953; 49: 136-144.
- Dragos, L., 1975. Magnetofluid Dynamics. Abacus Press.
- Kumamaru, H., Kodama, S., Hirano, H. ve Itoh K., 2004. Three-dimensional numerical calculations on liquid-metal magnetohydrodynamic flow in magnetic-field inlet-region. J. Nucl. Sci. Technol, 41, 5, 624-631.
- Salah, N., B., Soulaïmani, A. ve Habashi, W., G., 2001. A finite element method for magnetohydrodynamics. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 190, 5867-5892.
- Sheu, T., W., H. ve Lin R., K., 2004. Development of a convection-diffusion-reaction magnetohydrodynamic solver on a non-staggered grids. Int. J. Numer. Meth. Fluids, 45, 1209-1233.
- Krzeminski, S.,K., Cala, A. ve Smialek, M., 2001. Numerical Simulation of 2D MHD Flows Ψ - ξ -A Method. IEEE Trans. Magn, 32, 3, 990-993.

- Meir, A., J. ve Schmidt, P., G., 1999. Analysis and numerical approximation of a stationary MHD flow problem with nonideal boundary. SIAM J. Numer. Anal., 36, 4, 1304–1332.
- Schötzau, D., 2004. Mixed finite element methods for stationary incompressible magnetohydrodynamics. Numer. Math., 96, 771–800.
- Layton, W.,J., Meir, A.,J. ve Schmidt, P., G., 1997. A two-level discretization method for the stationary MHD equations. ETNA, 6, 198–210.
- Verardi, S.,L.,L ve Cardoso, J.,R.,1998. A solution of two-dimensional magnetohydrodynamic flow using the finite element method, IEEE Trans. Magn., 34 ,5, 3134–3137.
- Verardi, S.,L.,L ve Cardoso, J.,R., 2001. Three-dimensional finite element analysis of MHD duct flow by the penalty function formulation, IEEE Trans. Magn., 37, 5, 3384–3387.
- Krzeminski, S.,K., Smialek, M. ve Wlodarczyk, M., 2000. Finite element approximation of biharmonic mathematical model for MHD flow using Ψ -An approach. IEEE Trans. Magn., 36, 4, 1313–1318.
- Tezer-Sezgin, M. ve Koksal, S., 1989. FEM for solving MHD flow in a rectangular duct. Int. J. Numer. Methods Engrg., 28, 445–459.
- Neslitürk AI, Tezer-Sezgin M. The finite element method for MHD flow at high Hartmann numbers, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 2005; 194: 1201–1224.
- Neslitürk, AI. ve Tezer-Sezgin, M., 2006. Finite element method solution of electrically driven magnetohydrodynamic flow, J. Comput. Appl. Math., 192, 339–352.
- Selvitopi, H., 2016. Manyetik ortamda magnetohidrodinamik kanal akım problemlerinin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi ile çözümü, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Aydın, H. S., 2000. Dual Reciprocity Boundary Element Method for Poisson's Equation Using Osculatory Radial Basis Functions, Yüksek Lisans Tezi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Aydın, H. S., 2008. The finite element method over a simple stabilizing grid applied to fluid flow problems, Doktora Tezi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankar.
- Hartmann, J., 1937. Theory of the laminar flow of an electrically conductive liquid in a homogeneous magnetic field, K. Dan. Vidensk. Selsk. Mat. Fys. Medd, 15, 6, 1–28.
- Shercliff, J., A., 1956. Steady motion of conducting fluid in a pipe under transverse magnetic fields, J. Fluid Mech., 1, 6, 644—666.

- Sutevski, D., Smolentsev, S., Morley, N. ve Abdou, M., 2011. 3D Numerical Study of MHD Flow in a Rectangular Duct with a Flow Channel Insert, Fusion Science and Technology, 60, 2, 513-517.
- Huba, J., D. ve Lyon, J., G., 1999. A new 3D MHD algorithm: the distribution function method J. Plasma Physics, 61, 3, 391–405.
- Wu, J., 2002. Bounds and New Approaches for the 3D MHD Equations, J. Nonlinear Sci, 12, 395–413.
- Nia, L., Guob, Z. ve Zhoua, Y., 2012. Some new regularity criteria for the 3D MHD equations, J. Math. Anal. Appl, 396, 108–118.
- Jia, X. ve Zhou, Y., 2012. Regularity criteria for the 3D MHD equations involving partial components, Nonlinear Analysis: Real World Applications, 13, 205, 410–418.
- Yea, Z. ve Zhang, Z., 2017. A remark on regularity criterion for the 3D Hall-MHD equations based on the vorticity, Applied Mathematics and Computation, 301, 70–77.
- Caoa, C. ve Wu, J., 2010. Two regularity criteria for the 3D MHD equations, J. Differential Equations, 248, 2263–2274.
- Tassone, A., Gramiccia, L. ve Caruso, G., 2018. Three-dimensional MHD flow and heat transfer in a channel with internal obstacle. International Journal of Heat and Technology, 36,4, 1367-1377.
- P.G. Fern´andez-Dalgo and O. Jarrin, Weak suitable solutions for 3D MHD 215 equations for intermittent initial data. hal-02490130 (2020)
- Liu, F. ve Wang, Y., Z., 2019. Global solutions to three-dimensional generalized MHD equations with large initial data. Z. Angew. Math. Phys, 70,69.
- Tezer-Sezgin, M. ve Aydın, S., H., 2013. BEM Solution of MHD Flow in a Pipe Coupled with Magnetic Induction of Exterior Region, Computing, 95, 1, 751–770.
- Tezer-Sezgin, M. ve Aydın, S., H., 2014. DRBEM Solution of MHD Pipe Flow in a Conducting Medium, J. Comput. Appl. Math, 259, 720–729.
- Aydın, S., H. ve Selvitopi, H., 2018. Stabilized FEM–BEM coupled solution of MHD pipe flow in an unbounded conducting medium, Engineering Analysis with Boundary Elements, 87, 2, 122–132.
- Brooks, A., N. ve Hughes, T., J., R., 1982. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 32, 199–2592.
- Reddy, J., N., 1993. An Introduction to the Finite Element Method, McGraw-Hill, New York.

Ang, W., T., 2007. A Beginner's Course in Boundary Element Methods, Universal Publishers.

Erdoğan C., M. ve Aydın, H., S., 2020. Stabilized Solution of the 3-D MHD Flow Problem with FEM-BEM Coupling Approach, ICRAPAM20, Balıkesir Üniversitesi.

Erdoğan C.M, Aydın H.S. 2021. BEM and FEM Solutions of 3D Laplace Equation, IOCENS21, Gümüşhane Üniversitesi.



ÖZGEÇMİŞ

İlköğrenimini, Hamidiye İlköğretim Okulu'nda, Ortaöğrenimini ise Ardeşen Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi'nde tamamladı. 2006-2007 Eğitim-Öğretim yılında Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2010 yılında mezun oldu. 2010-2011 yılında başladığı Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2014 yılında mezun oldu. 2017 Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünde Doktora eğitimine başlamış olup halan Doktora eğitimine devam etmektedir. Yabancı dili İngilizcedir.

