KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

REEL W^*-CEBİRLERİ İÇİN VON NEUMANN EŞ SABİTİ

Tuncay KÖR

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"Yüksek Lisans (Matematik)"
Ünvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitü'ye Verildiği Tarih : 06.06.2006
Tezin Savunma Tarihi : 30.06.2006

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Abdugafur RAKHİMOV

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Adnan BAKİ

Enstitü Müdürü: Prof. Dr. Emin Zeki BAŞKENT

Trabzon 2006

ÖNSÖZ

Bilindiği gibi, Operatör Cebirleri Teorisinde (C^* ve W^* cebirleri) genellikle kompleks sayılar cismi ve kompleks Hilbert uzayları üzerinde durulmuştur. Bu nedenle kavramları reel durumda da incelemek şu ilginç problemleri doğal olarak ortaya çıkarmıştır: Kompleks durumdaki hangi sonuçlar reel durumda hala geçerlidir? Hangi sonuçlar reel durumda doğru olamaz? Hangi sonuçlar hangi değişikliklerle reel duruma uyarlanabilir?

Kompleks duruma benzer şekilde reel Hilbert uzayı üzerinde (reel) lineer ve sınırlı operatörler kolleksiyonu $B(H)$'nin $*$-alt cebirleri de reel operatör cebirleri olarak adlandırılırlar. $B(H)$'nin yerel konveks lineer topolojilerine göre bu reel $*$-cebirleri kompleks durumdaki gibi iki sınıfa ayrılabilir: zayıf kapalı (w-kapalı) ve düzgün kapalı (u-kapalı). Bu nedenle, başlıca çalışma alanımız zayıf topolojiye göre kapalı reel operatör cebirleri (reel Von Neumann cebirleri veya reel W^*-cebirleri) ve düzgün topolojiye göre kapalı reel operatör cebirleri (reel C^*-cebirleri) üzerinedir.

Bu çalışmada, Reel W^*-cebirleri için Von Neumann Eş Sabiti kavramı tanımlanıp birkaç önemli özelliği ispatıyla verildi. Daha önce kompleks durumda verilmiş olan bu kavram bu çalışma ile reel durumda da tanımlanmıştır.

Konunun belirlenmesinden, çalışmanın tamamlanıp bu hale getirilmesine kadar yardımını ve desteğini esirgemeyen sayın hocam; Prof. Dr. Abdugafur RAKHİMOV'a teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Bu süre içerisinde desteklerini esirgemeyen hocalarım; Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ ve Prof. Dr. Adnan BAKİ v.d., arkadaşlarım; Mücahide N. CANSUN, Yavuz KESİCİOĞLU, C. Temel KÖSA v.d., ayrıca her daim yanımda olan; sevgili eşim Sevim'e, bu çalışma ile eş zamanlı olarak bizleri çok korkutan mimarım anneme, aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tuncay KÖR

Trabzon, 2006

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ …… II
İÇİNDEKİLER …… III
ÖZET …… VI
SUMMARY …… VII
ŞEKİLLERDİZİNİ…… VIII
1. GENEL BİLGİLER…… 1
1.1. Giriş …… 1
1.2. Normlu Uzay …… 2
1.2.1. Lineer uzay …… 2
1.2.2. Normlu Uzay …… 8
1.2.3. Öklid Uzayı …… 10
1.2.3.1. İç Çarpım …… 10
1.3. Banah ve Hilbert Uzayı …… 13
1.3.1. Tam Uzay …… 13
1.3.1.1. Cauchy Dizisi …… 13
1.3.1.2. Yakınsak Dizi …… 14
1.3.1.3. Tam Uzay …… 14
1.3.2. Banah Uzayı …… 18
1.3.3. Hilbert Uzayı …… 19
1.3.4. Operatörler …… 22
1.3.4.1. Lineer Operatör …… 22
1.3.4.2. Sınırlı Operatör ve Normu …… 22
1.3.5. Reel Hilbert Uzaylarının Tensör Çarpımı …… 25
1.4. Cebirler …… 31
1.4.1. Alt Cebir …… 33
1.4.2. Direkt Toplam …… 33
1.4.3. Normlu Cebir …… 34

1.4.4. Banah Cebiri 35
1.4.4.1. Alt Banah Cebiri 37
1.4.5. Banah * - Cebirleri 37
1.4.5.1. Involusyon 37
1.4.5.2. Banah * - Cebiri 38
1.5. Reel C^* ve W^*-Cebirleri 39
1.5.1. Reel C^*-Cebirleri 39
1.5.2. Dual Operatör 40
1.5.3. Reel Banah Uzayının Kompleksleştirmesi 44
1.5.4. Kompleks W^*-Cebirleri 48
1.5.5. Cebirlerin * - Gösterimi 52
1.5.5.1. C^* - Cebirlerinin * - Gösterimi 52
1.5.5.1.1 *- Morfizm 52
1.5.5.1.2 *- İzomorfizm 53
1.5.6. $B(H)$' de Yerel Konveks (Operatör) Topolojiler 54
1.5.7. Reel C^* ve W^* - Cebirleri 57
1.5.7.1. Reel C^* - Cebirlerinin * - Gösterimi 57
1.5.7.2. Reel W^* - Cebirleri 61
1.5.8. Reel W^* Cebirlerinin Sınıflandırılması 64
1.5.8.1. İzdüşümler 64
1.5.8.2. Reel W^* -Cebirlerinin İzi 68
1.5.8.3. Reel Faktörlerin Sınıflandırılması 72
1.5.9. Reel W^* - Cebirlerinin Tensör Çarpımı 73
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR BULGULAR VE İRDELEMELER........ 77
2.1. Reel W^*-Cebirleri İçin Von Neumann Eş Sabiti 77
2.1.1. Sonlu Reel Faktörün Sdandart Gösterimi 77
2.1.2. Kanonik *-Gösterimi İçin Komutant Teoremi 83
2.1.3. Gösterim Teoremileri 85
2.1.4. Reel Faktörler İçin Von Neumann Eş Sabiti Kavramı 88

2.1.5. Reel Von Neumann Eş Sabitinin Özellikleri ………..……………………………. 91
3. SONUÇLAR ………………………………………………………………………. 101
4. ÖNERİLER ……………………………………………………………….......... 102
5. KAYNAKLAR ……………………………………………………………......... 103
ÖZGEÇMİŞ ……………………………………………………………………………….. 107

ÖZET

Bilindiği gibi, Operatör Cebirleri Teorisinde (C^* ve W^* cebirleri) genellikle kompleks Hilbert uzayları üzerinde durulmuştur ve bu teori sınıflandırma açısından derinlemesine incelenmiştir. Son zamanlarda, bu teoriye paralel şekilde reel Hilbert uzayındaki operatör cebirleri teorisinde de derinlemesine bir ilerleme sağlanmıştır. Biz de çalışmamızda, reel operatör cebirlerinin sınıflandırılmasında önemli yer tutan indeks kavramı için ilk adımı attık. Şöyle ki, çalışmada bir sonlu reel W^*-faktörün kanonik *-gösterimi elde edildi. Sonra, kanonik *-gösterim için komutant hakkındaki teorem ispatlanarak, Reel Von Neumann eş-sabit kavramı tanımlanmıştır. Çalışma sonunda eş-sabitin bazı önemli özellikleri ispatlanmıştır ve reel matris cebirleri için eş sabit hesaplanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Reel faktörler, Von Neumann Eş sabiti

SUMMARY

Von Neumann Coupling Constant of Real W^*-Algebras

As it is known, the Theory of Operator Algebras (C^* and W^*- Algebras) is generally considered over the Complex Hilbert spaces and it is studied in deep in terms of classification. Recently, it is obtained in the literature that there is a substantial development in the theory of operator algebras on real Hilbert spaces as the theory of operator algebras on Complex Hilbert spaces. In this study, as a first step we studied the concept of index which has an important role the classification of real W^*-algebras. Therefore, the canonical *-representation of finite real W^*-algebras is obtained in this study. Then, Real Von Neumann Coupling Constant concept was defined by proving the theorem about canonical *-representation. At the end of the study, some important properties of the coupling constant were proved and coupling constant was calculated for real matrix algebras.

Keywords: Real factors, Von Neuman Coupling Constant.

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sayfa No</u>

Şekil 1. M’ nin bir * - gösterimi... 54

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Operatör cebiri, genelde bir Hilbert uzayında düzgün (u) veya zayıf (w) topolojiye göre kapalı; lineer, sınırlı dönüşümler (yani operatörler) ailesidir. Bu teorinin temel problemi sınıflandırma problemidir. Şöyle ki, verilen iki operatör cebirini, kendi aralarında *-izomorf yapan koşulları bulmaktır. Bu problemin çözümünün temeli, J.Von Neumann [46, 47] ve F.J.Murray'ın [23, 24, 25] klasik çalışmalarında yer almıştır. Sonlu, yarı-sonlu ve hiper-sonlu operatör cebirlerinin ilk sınıflandırması da bu matematikçiler tarafından yapılmıştır. Diğer durumlarda ki sınıflandırma ise daha sonra, A.Connes [9, 10, 11], M.Takesaki [42, 43], S.Sakai [35], J.Dixmier [13, 14], v.s. çalışmalarında yapılmıştır. J.Von Neumann ve F.J.Murray'ın klasik çalışmalarından görüldüğü gibi operatör cebirler teorisi; kuantum fiziğinin problemlerinin matematik modeli kurulması neticesinde ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla bu teoride alınan her sonuç kuantum fiziği için de önemli olup, bu sonucun kuantum fiziğinde bir anlamı ve uygulaması vardır.

Kompleks durumun genişletilmesi olan (çünkü; cisim daraldıkça bu cisim üzerindeki cebir genişler) reel C^* ve W^*-Cebirleri teorisi de son 20 yıl içinde iyice ilerledi. Bu gelişmelerde E.Stormer [38, 39, 40, 41], Ş.Ayupov [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8], P.Stacey [36, 37], T.Giordano [15, 16, 17, 18], A.Rakhimov [27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34] ve Ş.Usmanov [44, 45]'ların büyük katkıları bulunmaktadır. Reel faktörlerin tiplere göre sınıflandırma problemi tam çözülmüş olup, bazı grupların bu faktörlerdeki hareketi de sınıflandırılmıştır.

Son zamanlarda operatör cebirlerinin tam sınıflandırma invaryantlarını bulmak amacıyla Fransız matematikçi V.Jones [48, 49, 50] tarafından kompleks cebirin indeks kavramı tanımlanmış olup, indeksin hesaplanma formülünü de bulmuştur. Böylece bu formül yardımıyla, verilen bir kompleks operatör cebirinin indeksi hesaplanarak, farklı indeksli kompleks cebirlerin kendi aralarında izomorf olmadığı kesin olarak söylenebilmiştir. İndeks kavramının kompleks cebirler için incelenmesi saf sonsuz faktörler için halen devam etmektedir. Bu güne kadar Jones'in çalışmaları reel operatör cebirleri için genişletilmemiş olup, bu kavramın reel faktörlerde ilginç sonuçlar verebileceği tahmin edilmektedir. Bundan dolayı bu çalışmamızda biz reel indeks kavramı için birinci adımı attık. Şöyle ki, çalışmada; bir sonlu reel W^*-faktörün kanonik *-gösterimi elde edilip bu gösterim için komutant hakkındaki teorem de ispatlanarak, J.Von Neumann'ın eş-sabit kavramı tanımlanmıştır. Çalışma sonunda ise bu eş-sabitin bazı önemli özellikleri ispatlanmıştır. Bu kavram, Operatör Cebirler Teorisinin konusu olup bu çalışmada farklı olarak Reel Operatör Cebirleri için ele alındı. Böylece, daha önce reel durumda tanımlanmamış olan bu kavram bu çalışma ile reel durumda da tanımlanmış oldu.

Operatör Cebirleri Teorisinde, genellikle kompleks sayılar cismi ve kompleks Hilbert uzayları üzerinde durulmuştur. Bu nedenle kavramları reel durumda incelemek şu ilginç problemleri doğal olarak ortaya çıkarmıştır: Kompleks durumdaki hangi sonuçlar reel durumda da hala geçerlidir? Hangi sonuçlar reel durumda geçerli olmaz? Hangi sonuçlar hangi değişikliklerle reel duruma uyarlanabilir?

Bu Çalışmada elde edilen sonuçlar reel operatör cebirleri için indeks kavramının tanımlanmasına imkan verir. Dolayısıyla, bundan sonra reel indeks kavramı tanımlanarak reel operatör cebirlerinin sınıflandırma probleminde büyük bir ilerleme sağlanabilir.

1.2. NORMLU UZAY

1.2.1. Lineer uzay

L boş olmayan bir küme ve $(F,\oplus,*)$ bir cisim olmak üzere L'de toplama adı verilen ve $+: L\times L\to L$, $(x,y)\xrightarrow{+}x+y$ ile gösterilen bir işlem ile skalerle çarpma adı verilen ve "•" : $F\times L\to L$, $(\alpha,x)\xrightarrow{\cdot}\alpha.x$ ile gösterilen bir işlem aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bu L kümesine F cismi üzerinde bir lineer uzay denir ve (L,F), $(L,+,\cdot)$ veya L ile gösterilir.

A) L, "+" işlemine göre değişmeli gruptur. Yani ;

G1) Her $x,y,z\in L$ için $x+(y+z)=(x+y)+z$ dir.

G2) Her $x\in L$ için $x+\theta=\theta+x=x$ olacak şekilde $\theta\in L$ vardır.

G3) Her $x\in L$ için $x+(-x)=(-x)+x=\theta$ olacak şekilde $(-x)\in L$ vardır.

G4) Her $x,y\in L$ için $x+y = y+x$ dir.

B) $x,y\in L$ ve $\alpha,\beta\in F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanacaktır.

L1) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$ dir.

L2) $(\alpha \oplus \beta)x=\alpha x+\beta x$ dir.

L3) $(\alpha * \beta)x=\alpha(\beta x)$ dir.

L4) $1x=x$ 'dir. (Burada 1, F ' nin birimidir.)

Burada L3'ün birinci tarafındaki "$\oplus$" işareti F 'deki toplamayı; ikinci tarafındaki "+" işareti ise L 'deki toplamayı belirtmektedir. Aynı şekilde **L4)** eşitliğinde de iki tane çarpmanın olduğuna dikkat edilmelidir.

Lineer uzayın tanımında geçen F cismine (lineer uzayın) skaler cismi, F 'nin elemanlarına ise skaler denir. Lineer uzay deyimi yerine vektör uzayı deyimi de kullanılır. Bu halde L 'nin elemanlarına genellikle vektör denir. θ özdeş elemanı bazen 0 ile de gösterilir. Ancak bu gösteriş genellikle $L=\mathbb{R}$ veya $L=\mathbb{C}$ olması halinde tercih edilir. Bu θ elemanına orijin veya sıfır denir.

$F=\mathbb{R}$ olması halinde L 'ye reel; $F=\mathbb{C}$ olması halinde ise L ' ye kompleks vektör uzay denir.

(L,F) bir vektör uzayı ve $A\subset L$ olsun. Eğer $A+A\subset A$ ve $F\cdot A\subset A$ ise, A 'ya L 'nin bir alt vektör uzayı denir.

Örnek 1.

$(F,\oplus,*)$ bir cisim, $n\in\mathbb{N}$ ve $L=F^n:=\{\ x=(\ \alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\,|\ \alpha_i\in F\ \}$ olsun. $x,y\in L$ ve $\alpha\in F$ olmak üzere lineer uzay işlemleri;

$x+y=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)+(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n):=(\alpha_1\oplus\beta_1,\alpha_2\oplus\beta_2,...,\alpha_n\oplus\beta_n)$ ve

$\alpha x=\alpha(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n):=(\alpha*\alpha_1,\alpha*\alpha_2,...,\alpha*\alpha_n)$

olarak tanımlanırsa, $L:=F^n$ 'in F cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. Buradaki işlemlere bileşen bileşen toplama ve skalerle çarpma denir. Gerçekten lineer uzay şartlarının sağlandığı kolayca gösterilebilir:

G1) $x,y\in L$ ve $x=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n), y=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)$ olsun.

$x+y=(\alpha_1\oplus\beta_1,\alpha_2\oplus\beta_2,...,\alpha_n\oplus\beta_n)$ ve $\alpha_i\oplus\beta_i\in F$ olduğundan (çünkü F cisimdir)

$x+y\in L$ 'dir.

G2) $z=(\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n)\in L$ olsun.

$$x+(y+z)=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)+((\beta_1\oplus\gamma_1),(\beta_2\oplus\gamma_2),...,(\beta_n\oplus\gamma_n))$$
$$=(\alpha_1\oplus(\beta_1\oplus\gamma_1),\alpha_2\oplus(\beta_2\oplus\gamma_2),...,\alpha_n\oplus(\beta_n\oplus\gamma_n))$$
$$=((\alpha_1\oplus\beta_1)\oplus\gamma_1,(\alpha_2\oplus\beta_2)\oplus\gamma_2,...,(\alpha_n\oplus\beta_n)\oplus\gamma_n)$$
$$=(\alpha_1\oplus\beta_1,\alpha_2\oplus\beta_2,...,\alpha_n\oplus\beta_n)+(\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n)$$
$$=(x+y)+z$$

$\Rightarrow x+(y+z)=(x+y)+z$ 'dir.

G3) $\theta=(0,0,...,0)$ olarak alınırsa, her $x\in L$ için $x+\theta=\theta+x=x$ 'dir. Burada 0, F ' nin sıfır elemanıdır.

G4) F bir cisim olduğundan $\forall\alpha\in F$ için $\exists(-\alpha)\in F:\alpha\oplus(-\alpha)=0$ 'dır. Buradan $-x=(-\alpha_1,-\alpha_2,...,-\alpha_n)$ olarak alınırsa,

$$x+(-x)=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)+(-\alpha_1,-\alpha_2,...,-\alpha_n)=(0,0,...,0)=\theta \text{ olur.}$$

G5) F cismi toplamaya göre değişmeli olduğunda $x+y=y+x$ 'dir. Gerçekten ;

$$x+y=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)+(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)$$
$$=(\alpha_1\oplus\beta_1,\alpha_2\oplus\beta_2,...,\alpha_n\oplus\beta_n)=(\beta_1\oplus\alpha_1,\beta_2\oplus\alpha_2,...,\beta_n\oplus\alpha_n)$$
$$=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)+(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$$
$$=y+x.$$

Şimdi de, skaler çarpımla ilgili şartların sağlandığını gösterelim:

L1) $\alpha\in F$ için $\alpha x=\alpha(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=(\alpha*\alpha_1,\alpha*\alpha_2,...,\alpha*\alpha_n)$ ve $\alpha*\alpha_i\in F$ olduğu için $\alpha x\in L$ 'dir $(1\le i\le n)$.

L2) $\alpha(x+y)=\alpha(\alpha_1\oplus\beta_1,\alpha_2\oplus\beta_2,...,\alpha_n\oplus\beta_n)$

$$=(\alpha*(\alpha_1\oplus\beta_1),\alpha*(\alpha_2\oplus\beta_2),...,\alpha*(\alpha_n\oplus\beta_n))$$
$$=(\alpha*\alpha_1\oplus\alpha*\beta_1,\alpha*\alpha_2\oplus\alpha*\beta_2,...,\alpha*\alpha_n\oplus\alpha*\beta_n)$$
$$=(\alpha*\alpha_1,\alpha*\alpha_2,...,\alpha*\alpha_n)+(\alpha*\beta_1,\alpha*\beta_2,...,\alpha*\beta_n)$$
$$=\alpha x+\alpha y$$

$$\Rightarrow \alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y \text{ 'dir.}$$

L3) $(\alpha \oplus \beta)x = (\alpha \oplus \beta)(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$

$$= ((\alpha \oplus \beta) * \alpha_1, (\alpha \oplus \beta) * \alpha_2, ..., (\alpha \oplus \beta) * \alpha_n)$$

$$= (\alpha * \alpha_1 \oplus \beta * \alpha_1, \alpha * \alpha_2 \oplus \beta * \alpha_1, ..., \alpha * \alpha_n \oplus \beta * \alpha_1)$$

$$= (\alpha * \alpha_1, \alpha * \alpha_2, ..., \alpha * \alpha_n) + (\beta * \alpha_1, \beta * \alpha_2, ..., \beta * \alpha_n)$$

$$= \alpha x + \beta y$$

$$\Rightarrow (\alpha \oplus \beta)x = \alpha x + \beta y \text{ 'dir.}$$

L4) $(\alpha * \beta)x = ((\alpha * \beta) * \alpha_1, (\alpha * \beta) * \alpha_2, ..., (\alpha * \beta) * \alpha_n)$

$$= (\alpha * (\beta * \alpha_1), \alpha * (\beta * \alpha_2), ..., \alpha * (\beta * \alpha_n))$$

$$= \alpha(\beta * \alpha_1, \beta * \alpha_2, ..., \beta * \alpha_n)$$

$$= \alpha(\beta x)$$

L5) $1x = x$ olduğu açıktır.

O halde $(L, +, \cdot)$ vektör uzaydır. Örnek 1'den $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, ...$ *ve* $\mathbb{C}, \mathbb{C}^2, ...$ uzayları sırasıyla $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ cismi üzerinde vektör uzayıdır. Ayrıca $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}$ üzerinde de bir vektör uzayı olup $\mathbb{R}^n$ ise $\mathbb{C}$ üzerinde bir vektör uzayı değildir. Çünkü; $\mathbb{C} \cdot \mathbb{R} \not\subset \mathbb{R}$ 'dir.

Örnek 2.

Determinantı 1 olan kompleks (veya reel) matrisler kümesi bir vektör uzayı değildir. Çünkü; bu matrisleri bir λ sayısı ile çarparsak $\det \neq 1$ 'dir.

Örnek 3.

A bir topolojik uzay ve A'da tanımlı reel (veya kompleks) değerli sürekli fonksiyonların $C(A) := \{ f \mid f : A \to K \text{ sürekli} \}$ kümesini göz önüne alalım. Burada ($K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$) ve $f, g \in C(A)$ ve $\alpha \in K$ olmak üzere, $+ : C(A) \times C(A) \to C(A)$ ve $\bullet : K \times C(A) \to C(A)$ dönüşümlerini $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$, $(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$ olarak tanımlayalım. Bu işlemlere göre $C(A)$ kümesi bir vektör uzayıdır. Gerçekten ;

Her $f, g \in C(A)$ ve $\alpha \in K$ için $f+g$ ve αf ' nin sürekli olduğu analizden bilindiği için $f+g, \alpha f \in C(A)$ ' dır.

Şimdi vektör uzayla ilgili diğer koşulların sağlandığını gösterelim.

1) Her $f, g, h \in C(A)$ ve her $x \in A$ için

$[f+(g+h)](x) = f(x)+(g+h)(x) = f(x)+[g(x)+h(x)] = [f(x)+g(x)]+h(x)$
$= (f+g)(x)+h(x) = [(f+g)+h](x)$'dir. O halde;

$$f+(g+h) = (f+g)+h \text{'dir.}$$

2) $\theta : A \to K$, $x \to \theta(x) := 0$ olarak alınırsa, $\forall f \in C(A)$ ve $\forall x \in A$ için

$(f+\theta)(x) = f(x)+\theta(x) = f(x)+0 = f(x)$'dir. O halde;

$$f+\theta = f \text{'dir.}$$

3) Her $f \in C(A)$ için $f+(-f) = \theta$ olacak şekilde $f \in C(A)$'nın "+" işlemine göre tersi olan $-f \in C(A)$'nın bulunabileceğini gösterelim. $\forall x \in A$ için,

$[f+(-f)](x) = f(x)+(-f)(x) = f(x)-f(x) = 0$'dir. O halde;

$$f+(-f) = \theta \text{'dir.}$$

4) Her $f, g \in C(A)$ ve her $x \in A$ için,

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = g(x)+f(x) = (g+f)(x) \text{'dir. O halde;}$$

$$f+g = g+f \text{'dir.}$$

5) Her $f, g \in C(A)$, $\alpha \in K$ ve $\forall x \in A$ için,

$[\alpha(f+g)](x) = \alpha(f+g)(x) = \alpha(f(x)+g(x)) = \alpha f(x)+\alpha g(x) = (\alpha f+\alpha g)(x)$
dir. O halde;

$$\alpha(f+g) = \alpha f+\alpha g \text{'dir.}$$

6) Her $\alpha, \beta \in K$, $f \in C(A)$ ve $\forall x \in A$ için

$[(\alpha+\beta)f](x) = (\alpha+\beta)f(x) = \alpha f(x)+\beta f(x) = (\alpha f)(x)+(\beta f)(x) = (\alpha f+\beta f)(x)$
'dir. O halde;

$$(\alpha+\beta)f = \alpha f+\beta f \text{'dir.}$$

7) Her $\alpha, \beta \in K$, $f \in C(A)$ ve $\forall x \in A$ için

$\left[(\alpha\beta)f\right](x)=(\alpha\beta)f(x)=\alpha\left(\beta f(x)\right)=\alpha\left(\beta f\right)(x)=\left[\alpha\left(\beta f\right)\right](x)$'dir. O halde;

$$(\alpha\beta)f=\alpha\left(\beta f\right)\text{'dir.}$$

8) Her $f\in C(A)$ ve $\forall x\in A$ için $(1\cdot f)(x)=1\cdot f(x)=f(x)$'dir. O halde;

$$1\cdot f=f\text{'dir.}$$

Sonuç olarak $C(A)$ bir vektör uzayıdır.

$C(A)$ kümesi bazen $C(A,K)$ ile de gösterilir. Buradaki A kümesi yerine özel olarak $[\mathrm{a,b}]$ kapalı aralığını alırsak $C([\mathrm{a,b}])$ yerine kolaylık olması için $C[a,b]$ yazabiliriz.

L, F cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $x_1,x_2,...,x_n\in L$ olsun. $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}\subset F$ olmak üzere, $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i=0$ olması her i için $\alpha_i=0$ olmasını gerektiriyorsa, $x_1,x_2,...,x_n$ vektörlerine (F üzerinde) lineer bağımsızdır denir. Lineer bağımsız olmayan vektörlere de lineer bağımlı denir. Eğer bir $A\subset L$ alt kümesinin her sonlu sayıda elemanları lineer bağımsız ise, A'ya lineer bağımsızdır denir.

X bir vektör uzayı olmak üzere $A\subset X$ için A lineer bağımsız ve $\forall x\in X$ elemanı A' nın sonlu sayıda elemanlarının lineer kombinasyonu (toplamı) şeklinde yazılabiliyorsa yani, $\forall x\in X$ için $x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i, \alpha_i\in F, a_i\in A$ ise, A'ya X uzayının bir Hamel Tabanı denir. A'nın eleman sayısı olan $n\in\mathbb{N}$ sayısına; $\left(n=|A|\right)$, X vektör uzayının boyutu denir ve $\dim_F(X):=n$ (veya $Boy_F(X):=n$) ile gösterilir. Eğer; $\left(n=|A|=\infty\right)$ ise X uzayına sonsuz boyutludur denir. Yani, bir uzaydaki lineer bağımsız elemanların maksimal sayısına bu uzayın boyutu denir.

Açıkça, eğer A lineer bağımsız ise, $\theta\notin A$ dır. Dolayısıyla uzayın kendisi ve herhangi alt vektör uzayı bu uzay için bir Hamel tabanı olamaz.

$\forall x \in X$ ve $x \neq \theta$ için $A = \{x\}$ kümesi her zaman lineer bağımsızdır, çünkü $\lambda x = \theta \overset{x\neq\theta}{\Leftrightarrow} \lambda = 0$ dır. Dolayısıyla $X \neq \{\theta\}$ uzayı için $\dim_F X \geq 1$'dir.

Not 1: (X,F) bir vektör uzayı ve $\theta \neq x \in X$ olsun. $\{\lambda \cdot x | \ \lambda \in F\}$ kümesi X'in bir alt vektör uzayı olup bu uzaya, x'in lineer zarfı denir ve $[x]$ şeklinde gösterilir. Ayrıca; $Boy([x])$ = 1'dir [26].

Bir vektör uzayının boyutu için $n < \infty$ ise,bu vektör uzayına sonlu boyutlu, aksi takdirde sonsuz boyutlu denir.

Örnek 4.

$B = \{1\}$ kümesi $\mathbb{R}$'nin, $B_1 = \{(1,0), (0,1)\}$ kümesi de $\mathbb{R}^2$'nin bir Hamel tabanı olduğundan, $\dim(\mathbb{R}) = 1$ ve $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$'dir. Daha genel olarak $e_1 = (1,0,0,...,0)$, $e_2 = (0,1,0,...,0),...,e_n = (0,0,0,...,1)$ vektörlerinin kümesi $\mathbb{R}^n$'nin bir Hamel tabanı olduğundan $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = n$'dir. Aynı düşünce ile $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2,\ \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$ olur.

1.2.2. Normlu Uzay

N, bir reel (veya kompleks) vektör uzay olsun. $\|.\| : N \to \mathbb{R}$ bir fonksiyonunun $x \in N$ deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon için;

N1) $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ ($\forall x \in N$) "pozitif tanımlılık ve aşikarlık"

N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ ($\forall x \in N$, $\alpha \in \mathbb{R}$ veya $\alpha \in \mathbb{C}$) "homojenlik" ve

N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ($\forall x, y \in N$) "Üçgen Eşitsizliği"

şartları sağlanıyorsa $\|.\|$ fonksiyonuna N de (veya N üzerinde) bir norm denir. Normlu uzaylar genellikle $(N, \|.\|)$ ile gösterilir.

Örnek 5.

$\|\,.\,\|:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \|\vec{x}\| = |x|+|y|,\ \vec{x}=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ şeklinde tanımlanan $\|\,.\,\|$ bir normdur. Bunu gösterelim: $\forall\,\vec{x}=(x,y), \vec{y}=(x',y')\in\mathbb{R}^2$ ve $\lambda\in\mathbb{R}$ alınsın,

i) $\|\vec{x}\| = |x|+|y|$ olup $|x|\geq 0,\ |y|\geq 0$ olduğundan $\|\vec{x}\|\geq 0$ dır.

ii) $\|\vec{x}\|=0 \Leftrightarrow |x|+|y|=0 \Leftrightarrow |x|=0$ ve $|y|=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ve $y=0 \Leftrightarrow \vec{x}=\theta=(0,0)$

iii) $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda x|+|\lambda y| = \lambda(|x|+|y|) = \lambda\|\vec{x}\|$

iv) $\|\vec{x}+\vec{y}\| = \|(x,y)+(x',y')\| = \|(x+x',y+y')\| = |x+x'|+|y+y'|$

$\leq (|x|+|y|)+(|x'|+|y'|) = \|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|$

$\Rightarrow \|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|$

elde edilir.

Örnek 6.

Örnek 3'de $C[a,b]$' nin bir vektör uzayı olduğunu gördük. Şimdi $C[a,b]$ uzayında tanımlanan $\|f\| := \sup\limits_{a\leq x\leq b}|f(x)|$ ($[a,b]\subset\mathbb{R}$ kompakt olduğundan infimum ve supremum özellikleri mevcuttur.) dönüşümünün bir norm olduğunu gösterelim;

1) $\forall\, f\in C[a,b]$ için, $\|f\| = \sup\limits_{a\leq x\leq b}|f(x)|\geq 0$ olduğu açıktır.

2) $\forall\, f\in C[a,b]$ için, $\|f\|=0 \Leftrightarrow \sup\limits_{a\leq x\leq b}|f(x)|=0 \Leftrightarrow \forall x\in[a,b]$ için $|f(x)|=0$

$\Leftrightarrow \forall x\in[a,b]$ için $f(x)=0 \quad \Leftrightarrow f=\theta$

3) $\forall\, f\in C[a,b]$ ve $\forall\, a\in\mathbb{R}$ için,

$$\|\alpha f\| = \sup_{a\leq x\leq b}|(\alpha f)(x)| = \sup_{a\leq x\leq b}|\alpha f(x)| = \sup_{a\leq x\leq b}|\alpha||f(x)| = |\alpha|\sup_{a\leq x\leq b}|f(x)| = |\alpha|\|f\|$$

4) $\forall\, f,g\in C[a,b]$ için, $\|f+g\| = \sup\limits_{a\leq x\leq b}|(f+g)(x)| = \sup\limits_{a\leq x\leq b}|f(x)+g(x)|$

$$\leq \sup_{a\leq x\leq b}\left|f\left(x\right)\right|+\sup_{a\leq x\leq b}\left|g\left(x\right)\right| = \|f\|+\|g\|$$

Dolayısıyla, $C\left[a,b\right]$ bu norma göre bir normlu uzaydır.

Bir normlu uzayda norm fonksiyonu için $\|x-y\|=\|y-x\|$'dir. Gerçekten; $\alpha=-1$ alınırsa N2)'den dolayı $\|-x\|=\|x\|$ ve özellikle $\|x-y\|=\|y-x\|$'dir.

1.2.3. Öklid Uzayı

1.2.3.1. İç Çarpım

X, $F=\mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer bir $\langle .,.\rangle :\ X\times X\to F$ fonksiyonu, $\forall\, x,y,z\in X$ için;

i) $\langle x,x\rangle\geq 0,\ \langle x,x\rangle=0\Leftrightarrow x=\theta$

ii) $\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$

iii) $\langle\alpha x,y\rangle=\alpha\langle x,y\rangle\ \ (\alpha\in F)$

iv) $\langle x,y\rangle=\langle\overline{y,x}\rangle$

şartlarını sağlıyorsa, bu fonksiyona X uzayında bir iç çarpım (veya iç çarpım fonksiyonu) denir. Üzerinde iç çarpım fonksiyonunun tanımlandığı vektör uzayına Öklid uzayı (veya iç çarpım uzayı) denir. İç çarpım uzayını, $\left(X,\langle .,.\rangle\right)$ veya kısaca X ile göstereceğiz.

Örnek 7.

$x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right), y=\left(y_1,y_2,...,y_n\right)\in\mathbb{R}^n\ \ \left(n\in\mathbb{N}\right)$ olmak üzere $\langle .,.\rangle:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $\langle x,y\rangle=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n$ olarak tanımlanırsa, $\mathbb{R}^n$ bir iç çarpım uzayıdır. Gerçekten iç çarpım aksiyomlarının sağlandığını aşağıdaki gibi gösterebiliriz:

i) $\forall x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\in\mathbb{R}^n$ için $\langle x,x\rangle=x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+...+x_n^{\ 2}\geq 0$ ve

$x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+...+x_n^{\ 2}=0\Leftrightarrow x_i=0$

ii) $\forall x=(x_1,x_2,...,x_n),\, y=(y_1,y_2,...,y_n),\, z=(z_1,z_2,\dots,z_n)\in\mathbb{R}^n$ için,

$$\langle x+y,z\rangle=(x_1+y_1)z_1+(x_2+y_2)z_2+...+(x_n+y_n)z_n$$
$$=x_1z_1+y_1z_1+x_2z_2+y_2z_2+...+x_nz_n+y_nz_n$$
$$=x_1z_1+x_2z_2+...+x_nz_n+y_1z_1+y_2z_2+...+y_nz_n=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$$

iii) $\forall x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$ ve $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ için,

$$\langle \alpha x,y\rangle=(\alpha x_1)y_1+(\alpha x_2)y_2+...+(\alpha x_n)y_n\;=\alpha(x_1y_1)+\alpha(x_2y_2)+...+\alpha(x_ny_n)$$
$$=\alpha\langle x,y\rangle$$

iv) $\forall x=(x_1,x_2,...,x_n),\, y=(y_1,y_2,...,y_n)\in\mathbb{R}^n$ için,

$$\langle x,y\rangle=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n=y_1x_1+y_2x_2+...+y_nx_n=\langle y,x\rangle$$

olduğundan $\langle .,.\rangle$ iç çarpım dönüşümüdür. Dolayısıyla $\left(\mathbb{R}^n,\langle .,.\rangle\right)$ bir öklid uzayıdır. Aynı düşünce ile $\mathbb{C}^n$ uzayı $\langle z,z'\rangle:=\sum_{i=1}^{n} z_i\overline{z_i'}$ ye göre bir kompleks öklid uzayıdır. Burada $\overline{z}=\overline{x+iy}=x-iy\in\mathbb{C}$, z'nin bilinen kompleks eşleniğidir. Şimdi, aşağıdaki teoremde iç çarpımın bazı özelliklerini ispatlayacağız.

Teorem 1.

X, bir iç çarpım uzayı $x,y,z\in X$ ve $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ olsun. Bu takdirde,

1) $\langle \alpha x+\beta y,z\rangle=\alpha\langle x,z\rangle+\beta\langle y,z\rangle$

2) $\langle x,\alpha y\rangle=\overline{\alpha}\langle x,y\rangle$

3) $\langle x,\alpha y+\beta z\rangle=\overline{\alpha}\langle x,y\rangle+\overline{\beta}\langle y,z\rangle$

4) $\langle x,\theta\rangle=\langle \theta,y\rangle=0$**'dır.**

İspat:

Teoremi ispat etmek için iç çarpımın özelliklerini kullanmak yeterlidir.

1) $\langle \alpha x+\beta y,z\rangle=\langle \alpha x,z\rangle+\langle \beta y,z\rangle=\alpha\langle x,z\rangle+\beta\langle y,z\rangle$

2) $\langle x,\alpha y\rangle=\overline{\langle \alpha y,x\rangle}=\overline{\alpha\langle y,x\rangle}=\overline{\alpha}\;\overline{\langle y,x\rangle}=\overline{\alpha}\;\langle x,y\rangle$

3) $\langle x,\alpha y+\beta z\rangle=\overline{\langle \alpha y+\beta z,x\rangle}=\overline{\langle \alpha y,x\rangle}+\overline{\langle \beta z,x\rangle}=\overline{\alpha}\langle x,y\rangle+\overline{\beta}\langle x,z\rangle$

4) $\langle x,\theta\rangle=\langle x,\theta+\theta\rangle=\langle x,\theta\rangle+\langle x,\theta\rangle\Rightarrow\langle x,\theta\rangle=0$

$\langle \theta,y\rangle=\langle \theta+\theta,y\rangle=\langle \theta,y\rangle+\langle \theta,y\rangle\Rightarrow\langle \theta,y\rangle=0$

olduğu görülür. ■

İç çarpım ile norm arasında ki önemli ilişkiyi bir teoremle verelim.

Teorem 2.

Bir öklid uzayı normlu uzaydır.

İspat:

$\|.\|:X\to\mathbb{R},\ \|x\|:=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ olarak tanımlanan $\|.\|$ dönüşümünü ele alalım.

i) $\forall x\in X$ için, $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}\geq 0$ olduğu açıktır.

ii) $\forall x\in X$, $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}=0\Leftrightarrow\langle x,x\rangle=0\Leftrightarrow x=\theta$ 'dır.

iii) $\forall x\in X$ ve $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ için;

$\|\alpha x\|=\sqrt{\langle \alpha x,\alpha x\rangle}=\sqrt{\alpha\overline{\alpha}\langle x,x\rangle}=\sqrt{|\alpha|^2\langle x,x\rangle}=|\alpha|\sqrt{\langle x,x\rangle}=|\alpha|\|x\|$

iv) $\forall x,y\in X$ için, $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ olduğunu gösterelim.

$\|x+y\|^2=\langle x+y,x+y\rangle=\|x\|^2+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\|y\|^2=\|x\|^2+\langle x,y\rangle+\overline{\langle x,y\rangle}+\|y\|^2$

yazılır. $z+\overline{z}=2\cdot\mathrm{Re}(z)$ eşitliği ve $\mathrm{Re}(z)\leq|z|$ eşitsizliği göz önüne alınırsa,

$\|x+y\|^2=\|x\|^2+2\cdot\mathrm{Re}(\langle x,y\rangle)+\|y\|^2\leq\|x\|^2+2|\langle x,y\rangle|+\|y\|^2\overset{schwarz}{\leq}\|x\|^2+2\|x\|\|y\|+\|y\|^2$

$=(\|x\|+\|y\|)^2$ elde edilir. Buradan $\|x+y\|^2\leq(\|x\|+\|y\|)^2$ olup $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ bulunur. ■

Uyarı 1: Teorem 2' nin tersi, genelde doğru değildir. Buna, örnek 17 (s. 20)' de örnek verilecektir.

Örnek 8.

Örnek 7'de ki $\mathbb{R}^n$ uzayı $\langle x,y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$ 'e göre bir öklid uzayıdır. Teorem 2'ye göre bu uzay $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$ 'ye göre bir normlu uzaydır.

1.3. Banach ve Hilbert Uzayı

1.3.1. Tam Uzay

$(X,\|.\|)$ bir normlu uzay olsun. Bazen bir X normlu uzayında verilen bir dizi bu uzayda yakınsak olmayabilir. Örneğin $(0,1) \subset \mathbb{R}$ uzayında; $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ dizisinin limiti mevcut değildir Bu taktirde bu uzay belli bir anlamda tam değildir. Bu yüzden aşağıdaki alt paragraflarda uzayın tamlığı ile ilgili kavramları tanımlayacağız.

1.3.1.1. Cauchy Dizisi

$(X,\|.\|)$ bir normlu uzay ve $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ bir dizi olmak üzere, $\forall \varepsilon > 0$ *için* $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n,m \geq N$ *için* $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ ise, (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Örnek 9.

$X = (0,1)$ kümesinde $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ dizisi bir cauchy dizisidir. Gerçekten ; $m,n \to \infty$ iken $\|x_n - x_m\| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$ olduğundan (x_n) dizisi bir cauchy dizisidir.

Örnek 10.

Açıkça, $(x_n) = (n)$ dizisi bir cauchy dizisi değildir. Çünkü, örneğin $m = n+1$, $n \to \infty$ için $\|x_n - x_m\| = \|n - m\| = |n - n - 1| = 1 \not\to 0$ dır.

1.3.1.2. Yakınsak Dizi

$(X, \|.\|)$ bir normlu uzay ve $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ bir dizi olmak üzere, eğer $\forall \varepsilon > 0$ *için* $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N$ *için* $\|x_n - x\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $x \in X$ noktası mevcut ise (x_n) dizisine yakınsak dizi ve $x \in X$ (x_n) dizisinin limiti denir. Bu durum; $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$ ile gösterilir. Bu ifade $n \to \infty$ iken, $\|x_n - x\| \to 0$ olmasına denktir.

Örnek 11.

Örnek 9'daki (x_n) dizisi $\mathbb{R}$'de 0 noktasına yakınsaktır. Gerçekten ; $n \to \infty$ iken $\| x_n - 0 \| = \left| \dfrac{1}{n} - 0 \right| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ olduğundan (x_n) dizisi 0 noktasına yakınsaktır.

1.3.1.3. Tam Uzay

Tam uzay tanımına geçmeden önce bir teorem verelim.

Teorem 3.

Her yakınsak dizi bir cauchy dizisidir.

İspat :

(x_n) dizisi x ' e yakınsak olsun. O halde tanımdan, $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists N \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n \geq \mathbb{N}$ için $\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$ dir.

Buradan $\forall n,m \geq N$ için $\|x_n - x_m\| = \|x_n - x + x - x_m\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ elde edilir. Yani, (x_n) bir cauchy dizisidir. Bu teoremin tersi doğru değildir. Yani her cauchy dizisi yakınsak değilidir. Aşağıdaki örnek bununla ilgilidir. ■

Örnek 12.

$(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right) \subset X = (0,1) \subset \mathbb{R}$ dizini ele alalım. Örnek 9' dan bu dizi bir cauchy dizisidir. Fakat, $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ dizisi $X = (0,1)$ kümesinde yakınsak bir dizi değildir. Gerçekten; Varsayalım ki; $\exists x_0 \in (0,1)$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = x_0$ 'dir. Bu durumda, $\frac{x_0}{4} > 0$ için $\exists N\left(\frac{x_0}{4}\right) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N\left(\frac{x_0}{4}\right)$ için $\left|x_0 - \frac{1}{n}\right| < \frac{x_0}{4}$ 'dir. m doğal sayısı $\frac{1}{m} < \frac{x_0}{4}$ ve $m > N\left(\frac{x_0}{4}\right)$ olacak şekilde seçilirse;

$$\begin{aligned}
0 < x_0 = |\, x_0\,| &= \left|x_0 - \frac{1}{m} + \frac{1}{m}\right| \\
&\leq \left|x_0 - \frac{1}{m}\right| + \left|\frac{1}{m}\right| \\
&< \frac{x_0}{4} + \frac{x_0}{4} \\
&< \frac{x_0}{2}
\end{aligned}$$

olur ki, $x_0 < \frac{x_0}{2}$ olması bir çelişkidir.

Tanım 1: Eğer bir normlu uzayın, her cauchy dizisi bu uzayda yakınsak ise, bu uzaya bir tam normlu lineer uzay denir.

Örnek 13.

Analizden bilindiği gibi $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ uzayları tamdır. Genel olarak $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$'nin tam olduğunu kullanarak $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\left(\mathbb{R}^n, \|.\|\right)$ ve $\left(\mathbb{C}^n, \|.\|\right)$ uzaylarının da tam olduğu gösterilebilir.

Örnek 14.

Örnek 6'da $C[a,b]$ uzayında $\|f\| = \sup\limits_{a \le x \le b} |f(x)|$ dönüşümünün bir norm olduğunu gördük. Şimdi $C[a,b]$ uzayının bu norma göre tam olduğunu gösterelim.

$(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset C[a,b]$ bir cauchy dizisi olsun. O halde, $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ öyle ki, $\forall n,m > N(\varepsilon)$ için $\|f_n - f_m\| < \frac{\varepsilon}{5}$'dir. Buradan, supremum tanımı gereği $\forall n,m > N(\varepsilon)$ ve $\forall x \in [a,b]$ için $|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{5}$ (*) olur. O halde, $\forall x \in [a,b]$ için $\left(f_n(x)\right) \subset \mathbb{R}$ dizileri birer Cauchy dizisidir. $\mathbb{R}$ tam olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ mevcuttur. $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x \in [a,b]$ için $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ şeklinde tanımlansın. Şimdi göstermeliyiz ki, $f \in C[a,b]$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} \| f_n - f\| = 0$'dir.

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ olduğundan, $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists N\left(x, \frac{\varepsilon}{5}\right) \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > N\left(x, \frac{\varepsilon}{5}\right)$ için $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{5}$'dir. (**)

$x_0 \in [a,b]$ keyfi bir nokta olsun $f_{N(\varepsilon)} \in C[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$'de sürekli olduğundan, $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta := \delta\left(x_0, \frac{\varepsilon}{5}\right) > 0$ öyle ki, $|x - x_0| < \delta$ olan $\forall x \in [a,b]$ için

$\left|f_{N(\varepsilon)}(x)-f_{N(\varepsilon)}(x_0)\right|<\dfrac{\varepsilon}{5}$'dir (***). O halde, $|x-x_0|<\delta$ olan $\forall x\in[a,b]$ için $n_x, n_{x_0}\in\mathbb{N}$ sayıları;

$$n_x, n_{x_0}\geq\max\left\{N\left(x,\frac{\varepsilon}{5}\right),N(\varepsilon),N\left(x_0,\frac{\varepsilon}{5}\right)\right\}$$

olacak şekilde seşilirse; (*), (**), (***) kullanılarak; $|x-x_0|<\delta$ olan $\forall x\in[a,b]$ için,

$$\begin{aligned}\left|f(x)-f(x_0)\right| &\leq \left|f(x)-f_{n_x}(x)\right|+\left|f_n(x)-f_{N(\varepsilon)}(x)\right|+\left|f_{N(\varepsilon)}(x)-f_{N(\varepsilon)}(x_0)\right|\\ &+\left|f_{N(\varepsilon)}(x_0)-f_{n_{(x_0)}}(x_0)\right|+\left|f_{n_{(x_0)}}(x_0)-f(x)\right|\\ &<\frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}=\varepsilon \text{ elde edilir.}\end{aligned}$$

O halde; f, $x_0\in[a,b]$'de süreklidir ve $x_0\in[a,b]$ keyfi olduğundan, $f\in C[a,b]$ 'dir.

$\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f_m\| = 0$ olduğunu gösterelim. $\forall\varepsilon>0$ verildiğinde; $\forall x\in[a,b]$ için $n_x\in\mathbb{N}$ sayısı $n_x\geq\max\left\{N\left(x,\frac{\varepsilon}{5}\right),N(\varepsilon)\right\}$ olacak şekilde seçilirse (*), (**) göz önüne alındığında; $\forall n\geq N(\varepsilon)$ ve $\forall x\in[a,b]$ için,

$$\begin{aligned}\left|f_n(x)-f(x)\right| &= \left|f_n(x)-f_{n_x}(x)+f_{n_x}(x)-f(x)\right|\\ &\leq \left|f_n(x)-f_{n_x}(x)\right|+\left|f_{n_x}(x)-f(x)\right|\\ &< \frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}<\frac{\varepsilon}{2} \text{ elde edilir, O halde,}\end{aligned}$$

$\forall n\geq N(\varepsilon)$ için $\sup\limits_{a\leq x\leq b}\left|f_n(x)-f(x)\right|\leq\dfrac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$ olup; $\forall n\geq N(\varepsilon)$ için

$\|f_n-f\|<\varepsilon$ dolayısıyla, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ 'dir.

Buradan; $C[a,b]$ uzayı tamdır.

1.3.2. Banach Uzayı

N normlu vektör uzay olsun. Eğer bu uzay tam ise, N ' ye Banach Uzayı denir. N ' nin reel veya kompleks vektör uzay oluşuna göre Banach uzayına, reel veya kompleks Banach uzayı denir.

Örnek 14'e göre; $C[a,b]$ uzayı bir Banach uzayıdır.

Aşağıda bir başka örneği inceleyelim.

Örnek 15.

p , $1 \le p < \infty$ olmak üzere;

$l_p = \left\{ (x_n) = (x_1, x_2, ...) \middle| x_i \in F \ ve \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \right\}$, $(F = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C})$

kümesinde bileşen bileşen toplama ve skalerle çarpma işlemlerini ele alalım. Bu işlemlere göre l_p ' nin bir vektör uzayı olduğu gösterilebilir. Bu uzayın $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}$ normuna göre Banach Uzayı olduğunu gösterelim.

$(x_m) = (x_1^m, x_2^m, ...)$ olmak üzere (x_m), l_p ' de keyfi bir cauchy dizisi olsun. Bu taktirde her $\varepsilon > 0$ için $m, n > m_0$ olduğunda

$$\|x_m - x_n\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^m - x_i^n|^p \right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

olacak şekilde m_0 sayısı vardır. Buradan anlaşılır ki $i = 1, 2, ...$ için;

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^m - x_i^n|^p < \frac{\varepsilon^p}{2^p} \Rightarrow |x_i^m - x_i^n| < \varepsilon \text{ ; } m, n > m_0 \text{'dir.}$$

Demek ki; keyfi fakat sabit her bir i için $(x_i^n) = (x_i^1, x_i^2, ...)$ dizisi F 'de (yani $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ ' de) bir cauchy dizisidir. F tam olduğundan bu cauchy dizisi yakınsaktır. $\lim_{n \to \infty} x_i^n = x_i$ olsun. Her i için bu limitler yardımıyla teşkil ettiğimiz diziyi x ile gösterelim. Yani $x = (x_1, x_2, ...)$ olsun;

Şimdi $k=1,2,...$ için (1)' den $\sum_{i=1}^{k}\left|x_i^m - x_i^n\right|^p < \frac{\varepsilon^p}{2^p}$ yazılabilir. $n \to \infty$ için;

$$\sum_{i=1}^{k}\left|x_i^m - x_i\right|^p < \frac{\varepsilon^p}{2^p} \ ; \ m > m_0$$

yazılabilir. $k \to \infty$ için; $\sum_{i=1}^{\infty}\left|x_i^m - x_i\right|^p < \frac{\varepsilon^p}{2^p}$ (2)

elde edilir. Bu gösteriyor ki;

$$(x_m - x) = (x_1^m - x_1, x_2^m - x_2, ...) \in l_p \text{'dir.}$$

$(x_m) \in l_p$ olduğundan $x = x_m + (x - x_m) \in l_p$ olur. (1)' e dikkat edilirse (2)' nin sol tarafı $\left\|x_m - x\right\|_p^p$ olur. Buradan $x_m \to x$ dir. Yani l_p içindeki (x_m) cauchy dizisi bir $x \in l_p$ noktasına yakınsadığından l_p tamdır. O halde l_p bir Banach uzayıdır.

1.3.3. Hilbert Uzayı

X bir Öklid uzayı olsun. Teorem 2'ye göre X bir normlu uzaydır. Eğer bu uzay tam ise, X 'e bir Hilbert Uzayı denir. X 'in reel veya kompleks vektör uzayı oluşuna göre, X Öklid uzayına reel veya kompleks Hilbert uzay denir.

Örnek 16.

Örnek 7'de $\langle .,. \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$ olarak tanımlanan iç çarpıma göre; $\mathbb{R}^n$ ' nin bir öklid uzayı olduğunu gösterildi. Şimdi, $\mathbb{R}^n$ ' in tam olduğunu gösterelim. İç çarpım normunun tanımından, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right)^{1/2}$ yazılabilir ve böylece $\|x - y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y \rangle} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$ normunu elde ederiz. $\mathbb{R}^n$ ' nin $\|x - y\| = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$ normuna göre tam olduğunu gösterelim.

$x_m = (x_1^m, x_2^m, ..., x_n^m)$ olmak üzere $\mathbb{R}^n$ 'de (x_m) cauchy dizisini alalım. (Burada x_i^m deki m üst indis olarak alınmıştır.) O halde; $\varepsilon > 0$ için $m, r > n_0$ olduğunda

$$\|x_m - x_r\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(x_i^m - x_i^r \right)^2 \right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3}$$

olacak şekilde bir n_0 tamsayısı vardır. Buradan; $i = 1, 2, ..., n$ için;

$$\left| x_i^m - x_i^r \right|^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow \left| x_i^m - x_i^r \right| < \varepsilon$$

elde edilir. Bu ifade her bir i için $\left(x_i^r \right) = \left(x_i^1, x_i^2, ... \right)$'nin reel sayıların bir cauchy dizisi olduğunu gösterir. $\mathbb{R}$ tam olduğundan bu dizi yakınsaktır. $r \to \infty$ için $x_i^r \to x_i$ olduğunu kabul edelim. $i = 1, 2, ..., n$ için bu limitler yardımıyla (n tane limit) x noktasını $x = \left(x_1, x_2, .., x_n \right)$ olarak tanımlayalım. Açıkça, $x \in \mathbb{R}^n$'dir. $r \to \infty$ için (3)' den $\|x_m - x\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ elde edilir. Bu, $\left(x_m \right)$'nin limitinin x olduğunu gösterir. $\left(x_m \right)$ keyfi olduğundan ispat tamamlanmış olur.

Sonuç olarak $\mathbb{R}^n$ bir Hilbert Uzayıdır.

Bir öklid uzayı bir normlu uzay olduğundan (bakınız Teorem 2) aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 4 [19].

Bir Hilbert uzayı bir Banach uzayıdır.

Uyarı 2: Bunun tersi genelde doğru değildir.

Buna bir örnek vermeden önce aşağıdaki teoremi ifade edelim.

Teorem 5 (Paralel kenar kanunu) [19].

Bir $\left(X, \|.\| \right)$ normlu uzayda $\|.\|$ normunun bir iç çarpımla tanımlanabilmesi için gerekli ve yeterli koşul her $x, y \in X$ için;

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 \right)$$

olmasıdır.

İspat :

$(\Rightarrow)$ açıktır.

$(\Leftarrow)$ $\langle x,y\rangle := \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right)$. $\langle x,y\rangle$ bir iç çarpım olup, $\langle x,x\rangle=\|x\|^2$. ■

Not 2: Teoremden anlaşılacağı gibi, eğer bir norm paralel kenar kanununu sağlamıyorsa bu norm iç çarpım normu olamaz. Dolayısıyla her normlu uzay bir Öklid Uzayı (iç çarpım uzayı) değildir. Şimdi bunu bir örnekle gösterelim:

Örnek 17.

Örnek 6'dan $\left(C[a,b],\|\bullet\|\right)$ uzayının bir normlu uzay olduğunu biliyoruz. Buna göre $C\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ve $\|f\|=\max\limits_{0\le x\le\frac{\pi}{2}}|f(x)|$ olmak üzere $\left(C\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\|\bullet\|\right)$ uzayı bir normlu uzaydır. Bu uzayda paralel kenar kanununun sağlanmadığını gösterelim.

$f(x):=cosx$, $g(x):=sinx$ fonksiyonları için $f,g\in C\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ olup;

$$\|f+g\| = \max_{0\le x\le\frac{\pi}{2}}|f(x)+g(x)| = \max_{0\le x\le\frac{\pi}{2}}|cosx+sinx| \overset{x=\frac{\pi}{4}}{=} \left|cos\frac{\pi}{4}+sin\frac{\pi}{4}\right|$$

$$=\left|\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \sqrt{2}$$

$$\|f-g\| = \max_{0\le x\le\frac{\pi}{2}}|cosx-sinx| = |1-0| = 1,\quad \|f\|=\max_{0\le x\le\frac{\pi}{2}}|cosx|=1,\ \|g\|=\max_{0\le x\le\frac{\pi}{2}}|sinx|=1$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c}\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=\left(\sqrt{2}\right)^2+1^2=3\\ 2\left(\|f\|^2+\|g\|^2\right)=2(1+1)=4\end{array}\right\}\Rightarrow 3\ne 4$$

$$\Rightarrow \|x+y\|^2+\|x-y\|^2\ne 2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$$

$\Rightarrow$ Teorem 5'e göre; $C\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ normlu uzayı bir öklid uzayı değildir.

1.3.4. Operatörler

İki uzay arasındaki dönüşümlere operatör adı verilir.

1.3.4.1. Lineer Operatör

X ve Y aynı bir F cismi üzerinde iki vektör uzayı olsun. $A: X \to Y$ operatörü $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in F$ için; **i)** $A(x+y) = A(x) + A(y)$ **ii)** $A(\alpha x) = \alpha A(x)$ şartlarını sağlıyorsa, A' ya bir lineer operatör denir. Bu iki şart, $\forall x, y \in A$ ve $\forall \alpha, \beta \in F$ olmak üzere $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$ şartına denktir.

Örnek 18.

X bir F cismi üzerinde bir vektör uzayı $\lambda \in F$ bir sabit olsun. $A: X \to X$ dönüşümü, $\forall\, x \in X$ için $A(x) := \lambda\, x$ şeklinde tanımlanırsa, A dönüşümü lineerdir.

Örnek 19.

$n > 1$ olmak üzere; $A_1, A_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $A_1(x_1, ..., x_n) := \sum_{i=1}^{n} x_i$,

$A_2(x_1, ..., x_n) := x_1.x_2...x_n = \prod_{i=1}^{n} x_i$ iki dönüşüm olsun. Açıkça, A_1 lineer, fakat A_2 lineer değildir.

1.3.4.2. Sınırlı Operatör ve Normu

$(X, \|.\|_X)$ ve $(Y, \|.\|_Y)$ iki normlu uzay ve $A: X \to Y$ bir operatör olsun. Öyle bir $K > 0$ sayısı varsa ki her $x \in X$ için $\|A(x)\|_Y \le K \|x\|_X$ ise, A' ya bir sınırlı operatör denir.

Örnek 20.

$A: X \to Y$ dönüşümü, $\forall x \in X$ için $A(x) := \theta_Y$ şeklinde tanımlanırsa, A dönüşümü sınırlıdır.

Örnek 21.

$A: X \to X$ ve $A = id$ ise, $\forall x \in X$ için $K = 1$ alınırsa $\|A(x)\|_Y = \|x\|_X$ olup, A sınırlıdır.

Şimdi; lineer ve sınırlı bir operatörün normunu tanımlayalım:

$$A: \left(X, \|\bullet\|_X\right) \to \left(Y, \|\bullet\|_Y\right)$$

lineer ve sınırlı bir operatör olsun. Bu taktirde;

$$\|A\| := \inf\left\{c > 0 \ : \ \|A(x)\|_Y \le c\|x\|_X, \quad \forall x \in X\right\}$$

fonksiyonunun $B(X, Y) := \{A \mid A: X \to Y$ lineer ve sınırlı bir operatör$\}$ uzayında bir norm olduğu kolayca gösterilebilir. $\|A\|$' ya $A \in B(X, Y)$ operatörünün normu denir.

Teorem 6.

$\left(X, \|\bullet\|_X\right)$ ve $\left(Y, \|\bullet\|_Y\right)$ iki normlu uzay ve $A: \left(X, \|\bullet\|_X\right) \to \left(Y, \|\bullet\|_Y\right)$ bir lineer sınırlı operatör olsun. Bu takdirde; $\| A \| = \sup\limits_{\|x\| \le 1} \| A(x) \|_Y = \sup\limits_{x \ne \theta} \dfrac{\| A(x) \|_Y}{\|x\|_X}$ 'dir.

İspat :

$$\alpha := \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\|_Y \overset{x \to \frac{x}{\|x\|_X}, x \ne \theta}{=} \sup_{x \ne \theta} \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right) \right\|_Y = \sup_{x \ne \theta} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \Rightarrow \alpha = \sup_{x \ne \theta} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$$

$\Rightarrow \|Ax\|_Y \le \alpha \|x\|_X \Rightarrow \|A\| \le \alpha$ 'dır.

$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists x_0 \in X : \alpha - \varepsilon \le \dfrac{\|Ax_0\|_Y}{\|x_0\|_X} \Rightarrow (\alpha - \varepsilon)\|x_0\|_X \le \|Ax_0\|_Y \le \alpha \|x_0\|_X$

$$\Rightarrow(\alpha-\varepsilon)\cancel{\|x_0\|_X}\le\|Ax_0\|_Y\le\alpha\cancel{\|x_0\|_X}\Rightarrow(\alpha-\varepsilon)\le\|A\|\overset{\forall\varepsilon}{\Rightarrow}\alpha\le\|A\|\Rightarrow\|A\|=\alpha\ .\ \blacksquare$$

Ayrıca, $\left(X,\|\bullet\|_X\right)$ ve $\left(Y,\|\bullet\|_Y\right)$ iki normlu uzay ve $A:\left(X,\|\bullet\|_X\right)\to\left(Y,\|\bullet\|_Y\right)$ bir lineer sınırlı operatör ise; $\|A(x)\|_Y\le\|A\|\cdot\|x\|_X$ olduğu gösterilir.

Teorem 7.

X ve Y normlu uzaylar ve $A:X\to Y$ bir lineer operatör olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler denktir.

i) A süreklidir. **ii)** $\left\{\ \|A(x)\|_Y\ :\ \|x\|_X\le 1\right\}$ sınırlıdır.

İspat :

$(i\Rightarrow ii)$ A, $\theta\in X$ noktasında sürekli olsun. Bu taktirde $\left\{\|A(x)\|_Y:\|x\|_X\le 1\right\}$ kümesinin sınırlı olduğunu gösterelim. A'nın $\theta\in X$ de sürekliliğini kabul edip $\left\{\|A(x)\|_Y:\|x\|_X\le 1\right\}$ kümesinin sınırlı olmadığını gösterelim. Bu taktirde $\|x_n\|_X\le 1$ için $\|A(x_n)\|\ge n$ olacak şekilde bir $x_n\in N$ vardır. $y_n=\dfrac{1}{n}x_n$ denirse; $\|y_n\|_X=\left\|\dfrac{1}{n}x_n\right\|_X=\dfrac{1}{n}\|x_n\|_X\le\dfrac{1}{n}$ olacağından $n\to\infty$ için $\|y_n\|_X\to 0$ olup $y_n\to\theta$ dır. T, $\theta\in X$'de sürekli olduğundan $A(y_n)\to\theta'$ olmalıdır. Fakat

$$\|A(y_n)\|_Y=\left\|A\left(\frac{1}{n}x_n\right)\right\|_Y'=\frac{1}{n}\|A(x_n)\|_Y\ge\frac{1}{n}n=1$$

olduğundan $\|A(y_n)\|_Y\ge 1$ elde edilir. Bu ise $A(y_n)\to\theta'$ olmasıyla çelişir. Bu çelişki $\|A(x_n)\|_Y\ge n$ kabulümüzden kaynaklandı. O halde $\left\{\ \|A(x)\|_Y'\ :\ \|x\|_X\le 1\right\}$ kümesi sınırlıdır.

$(ii\Rightarrow i)$ A sınırlı ise A nın sürekli olduğunu gösterelim. $x\in X$ keyfi ve $x_n\to x$ olsun. Bu taktirde A nin lineer ve sınırlı olduğu göz önüne alınırsa

$$\|A(x_n)-A(x)\|_Y \overset{A\,lineer}{=} \|A(x_n-x)\|_Y \overset{A\,sınırlı}{\leq} \|A\|\cdot\|x_n-x\|_Y \to 0$$

elde edilir. O halde $A(x_n)\to A(x)$ olup A, $x\in X$ de süreklidir. $x\in X$ keyfi olduğundan A, X de süreklidir. ■

Sonuç 1.

A süreklidir $\Leftrightarrow$ A sınırlıdır.

1.3.5. Reel Hilbert Uzaylarının Tensör Çarpımı

Bu çalışma; reel cebirler ile ilgili olduğundan kompleks Hilbert uzaylarından ziyade reel Hilber uzaylarının özellikleri verilecektir. Bu nedenle, tensör çarpımları reel Hilbert uzayları için vereceğiz.

$\left(H_1,\langle .,.\rangle_1\right)$ ve $\left(H_2,\langle .,.\rangle_2\right)$ iki reel Hilbert uzayı ve $B(H_2,H_1):=\{T:H_2\to H_1 : T \text{ lineer, sınırlıdır}\}$ olsun. $\xi\in H_1$ ve $\eta,\eta'\in H_2$ için $x:=\xi\otimes\eta$ 'yi şöyle tanımlayalım:

$$x\eta':=(\xi\otimes\eta)\eta':=\langle\eta',\eta\rangle_2\cdot\xi$$

Açıkça, her $\eta'\in H_2$ için $x\eta':=(\xi\otimes\eta)\eta'\in H_1$ ve $\xi\otimes\eta : H_2\to H_1$ lineer sınırlı olup;

$$x=\xi\otimes\eta\in B(H_2,H_1)\text{'dir.}$$

$H_1\odot H_2=\left\{u=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\otimes\eta_i \mid n\in\mathbb{N},\xi_i\in H_1,\eta_i\in H_2, i=1,2,\ldots,n\right\}$ olsun.

Bu $H_1\odot H_2$ uzayın bir öklid uzayı olduğu;

$\forall u=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\otimes\eta_i$ ve $v=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\otimes\beta_j\in H_1\odot H_2$ olmak üzere,

1) $u=\theta :\Leftrightarrow \forall\xi\in H_1$ ve $\forall\eta\in H_2$ için $\sum_{i=1}^{n}\langle\xi_i,\xi\rangle_1.\langle\eta_i,\eta\rangle_2=0$ "sıfır operatörü"

2) $\langle u,v\rangle:=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\langle\xi_i,\alpha_j\rangle_1.\langle\eta_i,\beta_j\rangle_2$ "iç çarpım" ile temin edilirse; $\left(H_1 \odot H_2, \langle .,. \rangle\right)$ bir iç çarpım uzayıdır [20]. Böylece, $H_1 \odot H_2$, $\|u\| := \langle u,u \rangle^{1/2}$ normuna göre bir normlu lineer uzaydır. Dolayısıyla bu uzay, $d(u,v) := \| u-v \|$ metriğine göre bir metrik uzaydır. Genelde, $\left(H_1 \odot H_2, \|.\|\right)$ uzayı $d(u,v) := \| u-v \|$ metriğine göre tam değildir.

Tanım 2: $H_1 \odot H_2$ uzayının tamlaştırılmasına H_1 ve H_2 reel Hilbert uzaylarının bir tensör çarpımı denir ve $H_1 \otimes H_2$ ile gösterilir. Yani; $H_1 \otimes H_2 := \overline{H_1 \odot H_2}$ 'dir [20].

Uyarı 3: Reel duruma benzer şekilde iki komples Hilbert uzayının da tensör çarpımı tanımlanır.

Tanım 3: X reel Banach (veya Hilbert) uzayı ve $X_c := X + i\,X$ olsun. $\left(X_c, \| . \|_c\right)$ kompleks Banach (veya Hilbert) uzayı üzerinde bir $\| . \|_c$ $\left(\langle .,. \rangle_c\right)$ normu (iç çarpımı) bulunabilir öyle ki; $\forall x, y \in X$ için $\|x+iy\|_c = \|x-iy\|_c$ ve $\| \cdot \|_c \big|_X = \| \cdot \|$ (yani; $\|\xi + i0\| = \|\xi\|$, $\forall \xi \in X$) ise $\left(X_c, \| . \|_c\right)$'ye X 'in bir kompleksleştirilmesi denir.

Lemma 1 [21].

H_1 ve H_2 iki reel Hilbert uzayı olmak üzere $\left(H_1\right)_c := H_1 + i\ H_1$ ve $\left(H_2\right)_c := H_2 + i\ H_2$ kompleks Hilbert uzayları, sırasıyla; H_1 ve H_2 reel Hilbert uzaylarının bir kompleksleştirmesi olsunlar. Bu durumda; $\left(H_1 \otimes H_2\right)_c = \left(H_1\right)_c \otimes \left(H_2\right)_c$ 'dir. Yani;

$$\left(H_1 \otimes H_2\right) + i\left(H_1 \otimes H_2\right) = \left(H_1 + iH_1\right) \otimes \left(H_2 + iH_2\right) \text{'dir.}$$

Teorem 8 [20, 21].

$\left(H, \langle .,. \rangle_1\right)$ ve $\left(K, \langle .,. \rangle_2\right)$ iki reel Hilbert uzayı ve $x \in B(H)$, $y \in B(K)$ olsun. O halde, $\exists!\, x \otimes y \in B(H \otimes K)$ öyle ki, $\forall \xi \in H$ ve $\forall \eta \in K$ için;

$$\left(x\otimes y\right)\left(\xi\otimes\eta\right) = x\,\xi\otimes y\eta \text{ ve } \left\|x\otimes y\right\|_{1\times 2} = \left\|x\right\|_1 \cdot \left\|y\right\|_2 \text{'dir.}$$

(1.4.2)'de ayrıntılı olarak ele alınacak olan direkt toplam kavramını kullanarak $\left(H_1\otimes H_2\right)$ uzayını araştıralım. $|\Lambda| := \dim\left(H_2\right)$ olmak üzere, $\left(e_\lambda\right)_{\lambda\in\Lambda}$ ailesi, H_2 reel Hilbert uzayının bir normal ortogonal (Hamel) tabanı olsun. Her λ için, $H_\lambda := \left\{\,\xi\otimes e_\lambda \mid \xi\in H_1\right\}$ olsun. O halde, H_λ, $H_1\otimes H_2$ uzayının bir alt vektör uzayıdır ve $H_\lambda \cong H_1$'dir. Bununla birlikte; $H_1\otimes H_2 = \underset{\lambda}{\oplus} H_\lambda$'dır.

Şimdi, $u_\lambda : H_1 \to H_1\otimes H_2$ dönüşümünü, $u_\lambda\,\xi := \xi\otimes e_\lambda$ olarak tanımlayalım. Bu durumda aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 9.

$u_\lambda\, H_1 = H_\lambda$'dır ve u_λ bir izometridir.

İspat:

u_λ' nın tanımına göre $u_\lambda H_1 = H_\lambda$ olduğu açıktır. Teorem 6'ya göre, $\|\,\xi\otimes e_\lambda\,\| = \|\,\xi\,\|.\|\,e_\lambda\,\|$ olduğundan;

$$\left\|u_\lambda\xi\right\| = \left\|\xi\otimes e_\lambda\right\| = \left\|\xi\right\|.\left\|e_\lambda\right\| = \left\|\xi\right\|.1 = \left\|\xi\right\| \text{' dir.}$$

Böylece u_λ bir izometridir. ■

Teorem 10.

$\xi,\xi' \in H_1$ ve $\eta\in H_2$ için; $\left\langle u_\lambda\xi',\xi\otimes\eta\right\rangle := \left\langle \xi',u_\lambda^*\left(\xi\otimes\eta\right)\right\rangle$ şeklinde tanımlanan $u_\lambda^* : H_1\otimes H_2 \to H_1$ dönüşümü lineerdir ve $u_\lambda^*\, H_\lambda \cong H_1$ bir izometriktir. Ayrıca, her $\mu\neq\lambda$ için $u_\lambda^*\, H_\mu = \left\{\theta\right\}$'dir.

İspat:

u_λ^* dönüşümünün lineer olduğu açıktır. $\forall \xi \in H_1$ ve $\forall \eta \in H_\mu$ için $\left\langle \xi, u_\lambda^* \eta \right\rangle = 0$ olduğunu gösterelim. $\eta \in H_\mu$ olduğundan $\exists \xi' \in H_1 : \eta = \xi' \otimes e_\mu$'dir. O halde,

$$\left\langle \xi, u_\lambda^* \eta \right\rangle = \left\langle u_\lambda \xi, \eta \right\rangle = \left\langle \xi \otimes e_\lambda, \xi' \otimes e_\mu \right\rangle = \left\langle \xi, \xi' \right\rangle \cdot \left\langle e_\lambda, e_\mu \right\rangle \overset{\lambda \neq \mu}{=} \left\langle \xi, \xi' \right\rangle \cdot 0 = 0\text{'dir.}$$

η keyfi olduğundan, $u_\lambda^* \, \eta = \theta$'dir. Buradan, $u_\lambda^* \, H_\mu = \{\theta\}$ elde edilir.

Şimdi, $u_\lambda^* \, H_\lambda \cong H_1$ olduğunu gösterelim.

$\forall \left(\xi \otimes e_\lambda \right) \in H_\lambda$ alalım. $\forall \xi' \in H_1$ için,

$$\left\langle \xi', u_\lambda^* \left(\xi \otimes e_\lambda \right) \right\rangle = \left\langle u_\lambda \xi', \xi \otimes e_\lambda \right\rangle = \left\langle \xi' \otimes e_\lambda, \xi \otimes e_\lambda \right\rangle = \left\langle \xi, \xi' \right\rangle \cdot \underbrace{\left\langle e_\lambda, e_\lambda \right\rangle}_{1} = \left\langle \xi, \xi' \right\rangle\text{'dir.}$$

ξ keyfi olduğundan,

$$u_\lambda^* \left(\xi \otimes \eta \right) = \xi\text{'dir.} \tag{4}$$

(4)'e göre;

$$\left\| u_\lambda^* \left(\xi \otimes e_\lambda \right) \right\|^2 = \left\langle u_\lambda^* \left(\xi \otimes \eta \right), u_\lambda^* \left(\xi \otimes \eta \right) \right\rangle \overset{(4)}{=} \left\langle u_\lambda^* \left(\xi \otimes \eta \right), \xi \right\rangle \overset{(4)}{=} \left\langle \xi, \xi \right\rangle = \left\| \xi \right\|^2\text{'dir.}$$

Buradan, $\left\| u_\lambda^* \left(\xi \otimes e_\lambda \right) \right\| = \left\| \xi \right\|$'dir. Dolayısıyla, $u_\lambda^* \, H_\lambda \cong H_1$ bir izometriktir. ■

Teorem 11.

$u_\lambda^* \, u_\lambda$, H_1 uzayında bir özdeşlik dönüşümdür, yani; $\xi \in H_1$ için, $u_\lambda^* \, u_\lambda \, \xi = \xi$'dir. ($u_\lambda^* \, u_\lambda = \mathbb{1}_1$)

İspat:

$\forall \xi, \eta \in H_1$ için, $\left\langle u_\lambda^* u_\lambda \xi, \eta \right\rangle = \left\langle u_\lambda \xi, u_\lambda \eta \right\rangle = \left\langle \xi \otimes e_\lambda, \eta \otimes e_\lambda \right\rangle = \left\langle \xi, \eta \right\rangle$ olup, η keyfi olduğundan $u_\lambda^* \, u_\lambda \, \xi = \xi$'dir. ■

$B\left(H_1 \otimes H_2 \right) := \left\{ x \,|\, x : H_1 \otimes H_2 \to H_1 \otimes H_2 \,|\, x, \text{ lineer ve sınırlı.} \right\}$'nin matris gösterimini bulmak için gerekli olacak aşağıdaki teoremi ispatsız olarak verelim.

Teorem 12 [21].

$u_\lambda\, u_\lambda^* := p_\lambda \;:\; H_1 \otimes H_2 \to H_\lambda$ bir izdüşümdür ve $\sum_\lambda p_\lambda = \mathbb{1}_{1\times 2}$ ’dir.

Şimdi $B\left(H_1 \otimes H_2\right)$’nin matris gösterimini vereceğiz. Kolaylık açısından, λ ve μ indisleri yerine sırası ile i ve j indislerini kullanacağız. $\forall x \in B\left(H_1 \otimes H_2\right)$ için, $x_{ij} :=$ $u_i^* x u_j$ olsun. O halde,

$$x_{ij} \;:\; H_1 \xrightarrow{u_j} H_1 \otimes H_2 \xrightarrow{x} H_1 \otimes H_2 \xrightarrow{u_i^*} H_1$$

olduğundan $x_{ij} \in B\left(H_1\right)$’dir.

$\forall \gamma \in H_1 \otimes H_2 = \bigoplus_i H_i$ için $x\gamma = \sum_i \left(\xi_i \otimes e_i\right)$ olduğundan, (4)’e göre;

$u_i^*\, x\gamma = \sum u_i^* \left(\xi_j \otimes e_j\right) = u_i^* \left(\xi_i \otimes \eta_i\right) = \xi_i$, yani; $u_i^*\, x\gamma = \xi_i$ ’dir. Buradan,

$$x\gamma = \sum_i \left(\xi_i \otimes e_i\right) = \sum_i \left(u_i^* x\gamma \otimes e_i\right),$$

yani; $x\gamma = \sum_i \left(u_i^* x\gamma \otimes e_i\right) \otimes e_i = \sum_i \left(\sum_j x_{ij}\xi_j^{/}\right) \otimes e_i$ ’dir. Burada, $\xi_j^{/} := u_i^*\, x\gamma \in H_1$ ’dir.

Sonuç olarak, $\forall \gamma \in H_1 \otimes H_2$ için $x\gamma = \sum_i \left(\sum_j x_{ij}\xi_j^{/}\right) \otimes e_i$, $\xi_j \in H_1$ ’dir.

Her i için $H_i \cong H_1$ olduğundan $\sum_j x_{ij}\xi_j^{/} \otimes e_i \in H_1$ ’dir. Dolayısıyla, $x \in B\left(H_1 \otimes H_2\right)$ elemanı aşağıdaki matris formunda yazılabilir;

$x = \left(x_{ij}\right)_{i,j\in\Lambda}$, böylece ispat biter. ■

Teorem 13.

$x = \left(x_{ij}\right)_{i,j\in\Lambda}$, $y = \left(x_{ij}\right)_{i,j\in\Lambda} \in B\left(H_1 \otimes H_2\right)$ için, $x \cdot y = \left(\sum_k x_{ik} y_{kj}\right)_{i,j\in\Lambda}$ ’dir.

İspat:

$\sum_k u_k u_k^* = \mathbb{1}$, $x_{ik} = u_i^* x u_k$ ve $y_{kj} = u_k^* y u_j$ olduğundan $u_i^* x y u_j \;=\; u_i^* x \left(\sum_k u_k u_k^* \right) y u_j^*$

$= \sum_k x_{ik} . y_{kj}$ ’ dir. Buradan; $(xy)_{ij} = u_i^* (xy) u_j = \sum_k x_{ik} . y_{kj}$ ’ dir. Dolayısıyla;

$$xy = \left((xy)_{ij} \right)_{i,\, j \in \Lambda} = \left(\sum_k x_{ik} y_{kj} \right)_{i,\, j \in \Lambda} \text{ ’ dır. } \blacksquare$$

Sonuç 2.

$\mathbb{1}_{1\times 2} = \left(\delta_{ij} \mathbb{1}_1 \right)_{i,j \in \Lambda}$ ve $x \cdot \mathbb{1}_{1\times 2} = \left(x_{ij} \right)_{i,j \in \Lambda}$ ’dir.

Teorem 14 .

$x \in B(H_1)$ ve $y \in B(H_2)$ olsun. $\left(e_j \right)_{j \in \Lambda}$, H_2’nin bir Hamel Tabanı, $\left(a_{ij} \right) \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, y ’nin Hamel Tabanındaki matrisi; $y\; e_j = \sum_i a_{ij} e_i$ olsun. O halde;

$x \otimes y = \left(a_{ij} x \right)_{i,j \in \Lambda}$ ’dir. Özel durumda, $x \otimes \mathbb{1}_2 = \left(\delta_{ij} x \right)_{i,j \in \Lambda}$ olur.

Sonuç 3.

$x \in B(H_1)$ ve $y \in B(H_2)$ olsun. Eğer, $\dim(H_2) = n < \infty$ ise, $x \otimes y \in M_n\left(B(H_1) \right)$ ’dir. Özel durumda,

$$x \otimes \mathbb{1}_2 = \begin{pmatrix} x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x \end{pmatrix} \text{’dir.}$$

1.4. Cebirler

C , F cismi üzerinde bir vektör uzay ve $\bullet : C \times C \to C$ bir dönüşüm olsun. Eğer bu $\bullet : C \times C \to C$ dönüşümü her $x, y, z \in C$ ve her $\alpha \in F$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa C' ye (F üzerinde) bir *cebir* denir.

C1) $\alpha(x \bullet y) = (\alpha x) \bullet y = x \bullet (\alpha y)$

C2) $x \bullet (y + z) = x \bullet y + x \bullet z$ ve $(x + y) \bullet z = x \bullet z + y \bullet z$

C3) $(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$

Cebirin tanımında geçen F cisminin $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olması halinde C' ye sırası ile reel veya kompleks cebir denir. Şayet C bir cebir ve her $x, y \in C$ için $x \bullet y = y \bullet x$ ise C' ye değişmeli veya komütatif cebir denir. C' nin çarpma işlemine göre etkisiz elemanı varsa, yani her $x \in C$ için $x \bullet e = e \bullet x = x$ olacak şekilde $e \in C$ varsa C' ye birim elemanlı cebir ve e' ye de birim eleman denir. Bu birim eleman; 1 veya 1_C ile de gösterilir.

Örnek 22.

X bir Banach uzayı ve $B(X)$, X den X 'e tanımlı tüm lineer sınırlı dönüşümler kümesi olsun. Yani; $B(X) := \{A \mid A : X \to X : A \text{ bir sınırlı lineer operatördür}\}$ dir. $B(X)$ uzayının aşağıdaki işlemlere göre bir vektör uzayı olduğu kolayca gösterilebilir, $\forall A, B \in B(X)$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) için, $A + B$, λA , $A \bullet B$ işlemleri; $\forall x \in X$ için

$$(A + B)(x) := A(x) + B(x), \ (\lambda A)(x) := \lambda A(x), \ (A \bullet B)(x) := A(B(x))$$

şeklinde tanımlanırsa; $A + B$, λA, $A \bullet B \in B(X)$ olduğu; cebir için gerekli diğer aksiyomlarında gerçeklendiği kolaylıkla görülür. Bu nedenle; $B(X)$ $\mathbb{C}$ $(\text{veya } \mathbb{R})$ üzerinde bir cebirdir.

Örnek 23.

Örnek 3'de $C(X, \mathbb{R})$' nin bir vektör uzay olduğunu gördük. Ayrıca $(f \bullet g)(x) := f(x) g(x)$ olarak tanımlanan $f \bullet g$ çarpımı da reel sürekli bir fonksiyon olduğundan $f \bullet g \in C(X,\mathbb{R})$ dir. Demek ki tanımlanan bu işlemlere göre $C(X,\mathbb{R})$ kapalıdır. $C(X,\mathbb{R})$' nin cebirle ilgili diğer şartları sağladığını da gösterebiliriz. Gerçekten;

$\forall f,g,h \in C(X,\mathbb{R})$ için , $\left[\alpha(f \bullet g)\right](x) = \alpha(f \bullet g)(x) = \alpha\left[f(x)g(x)\right]$

$$= \left[\alpha f(x)\right]g(x) = (\alpha f)(x)\cdot g(x)$$

$= \left[(\alpha f)\bullet g\right](x)$ olduğundan,

$\alpha(f \bullet g) = (\alpha f)\bullet g$ 'dir.

$\left[\alpha(f \bullet g)\right](x) = \alpha(f \bullet g)(x) = \alpha\left[f(x)g(x)\right] = \left[\alpha f(x)g(x)\right] = \left[f(x)\alpha g(x)\right]$

$= f(x)\left[\alpha g(x)\right] = \left[f \bullet(\alpha g)\right](x)$ olduğundan, $\alpha(f \bullet g) = f \bullet(\alpha g)$ dir.

Yani;

$\alpha(f \bullet g) = (\alpha f)\bullet g = f \bullet(\alpha g)$' dir.

$\left[f \bullet(g+h)\right](x) = f(x)\left[g(x)+h(x)\right] = f(x)g(x) + f(x)h(x)$

$= \left[f \bullet g + f \bullet h\right](x)$ olduğu için,

$f \bullet(g+h) = f \bullet g + f \bullet h$ 'dir.

$\left[(f+g)\bullet h\right](x) = \left[f(x)+g(x)\right]\cdot h(x) = f(x)h(x) + g(x)h(x)$

$= \left[f \bullet h + g \bullet h\right](x)$ olduğu için,

$(f+g)\bullet h = f \bullet h + g \bullet h$ ' dır.

$\left[f \bullet(g \bullet h)\right](x) = f(x)\left[g \bullet h\right](x) = f(x)g(x)h(x) = \left[f.g\right](x)h(x) = \left[(f.g).h\right](x)$

olduğundan,

$f \bullet(g \bullet h) = (f \bullet g)\bullet h$ 'dır.

Sonuç olarak $C(X,\mathbb{R})$ reel cebirdir. Aynı zamanda $e : X \to \mathbb{R}$, $\mathrm{e}(x) = 1$ olarak tanımlanırsa her $f \in C(X,\mathbb{R})$ için $e \bullet f = f \bullet e = f$ ve

$(f \bullet g)(x) = f(x)g(x) = g(x)f(x) = (g \bullet f)(x) \Rightarrow f \bullet g = g \bullet f$

olduğundan $C(X,\mathbb{R})$ birim elemanlı ve değişmeli bir cebirdir.

1.4.1. Alt Cebir

C bir cebir ve A, C' nin boş olmayan alt kümesi olsun. C' deki işlemlere göre A bir cebir ise A' ya C' nin alt cebiri denir. Kısaca C' nin boş olmayan bir A alt kümesinin alt cebir olması için gerek ve yeter şart,

1) A' nın lineer alt uzay ve **2)** Her $x, y \in A$ için $x \cdot y \in A$

olmasıdır.

Açıkça, $\mathbb{R}$ (reel sayılar) cebiri, $\mathbb{C}$ (kompleks sayılar) cebirinin bir reel alt cebiri olup, bir kompleks alt cebir değildir.

1.4.2. Direkt Toplam

Y_1 ve Y_2, X vektör uzayının iki alt vektör uzayı olsun. Eğer $\forall x \in X$ elemanı için $y_1 \in Y_1$ ve $y_2 \in Y_2$ olmak üzere $x = y_1 + y_2$ olacak şekilde bir tek $y_1 \in Y_1$ ve $y_2 \in Y_2$ varsa veya denk bir ifade ile $Y_1 \cap Y_2 = \{\theta\}$ ise, X vektör uzayı Y_1 ve Y_2 uzaylarının direkt toplamıdır denir ve $X = Y_1 \oplus Y_2$ şeklinde yazılır.

Tersine, A ve B bir F cismi üzerinde iki vektör uzayları olsun. Bu uzayların $A \times B := \{(a,b) : a \in A,\ b \in B\}$ kümesi üzerinde $\forall x = (a,b),\ y = (c,d) \in A \times B$ ve $\lambda \in F$ için $x + y$ toplamı ve λx skaler ile çarpımı; aşağıdaki gibi tanımlandığında,

i) $x + y = (a+c, b+d)$ **ii)** $\lambda x = (\lambda a\ ,\ \lambda b)$, $A \times B$ kümesi F üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu uzayın sıfır elemanı $\theta = (\theta_A, \theta_B)$'dir. Ayrıca, $X := \{(a, \theta_B) : a \in A\}$ ve $Y := \{(\theta_A, b) : b \in B\}$ alındığında; $X, Y \subset A \times B$ birer alt uzay olup; $A \times B = X \oplus Y$'dir. Diğer taraftan $X \cong A\, ve\, Y \cong B$'dir. Bu nedenle izomorfik yapılara özdeş olarak bakıldığında, $A \times B$ yerine $A \oplus B$ sembolü kullanılır.

Örnek 24.

$\mathbb{R}^2$ reel lineer uzayının $X = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ ve $Y = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$ alt uzaylarını göz önüne alalım. $X + Y = \{x + y : x \in X,\ y \in Y\} = \{(x,y) :\ x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$ olup $\mathbb{R}^2 = X + Y$'dir. $X \cap Y = (\theta)$ olduğundan $\mathbb{R}^2 = X \oplus Y$'dir.

Örnek 25.

$\mathbb{R}^3$'ün iki alt uzayı $U=\{(a,b,c,):a=b=c\}$, $W=\{(0,b,c,):b,c\in\mathbb{R}\}$ olsun. $\mathbb{R}^3=U\oplus W$ mıdır? $U+W=\{u+w:u\in U,w\in W\}=\{(a,b,c):a,b,c\in R\}=\mathbb{R}^3$ olup $\mathbb{R}^3=U+W$ olur. $U\cap W=\{\theta\}$ olduğundan $\mathbb{R}^3=U\oplus W$ dır.

Örnek 26.

$V=\mathbb{R}^3$ olmak üzere $U=\{(a,b,0,):a,b\in\mathbb{R}\}$, $W=\{(0,b,c,):b,c\in\mathbb{R}\}$ alt uzaylarını göz önüne alalım. $V=U\oplus W$ midır?

V vektör uzayı, U ve W alt vektör uzaylarının bir direkt toplamı değildir. Çünkü $U+W=\{u+w:u\in U,w\in W\}$ olup; $V=U+W=(a,b,0)+(0,b,c)=(a,2b,c)$ yazılır. Bu yazılış tek değildir. Gerçekten, örneğin $(-5,6,3)=(-5,2,0)+(0,4,3)=(-5,5,0)+(0,1,3)$ olur.

Şimdi cebirler için direkt toplam kavramını ele alalım. X bir cebir ise **i)** ve **ii)** şıklarına ilave olarak, bu uzayda keyfi iki $x=(a,b)$ ve $y=(c,d)$ elemanları için çarpma işlemini $x\bullet y=(ac,bd)$ şeklinde tanımlarsak; X ve Y gibi iki cebirin direkt çarpımı da yine cebirdir.

1.4.3. Normlu Cebir

C bir cebir ve C' de bir $\|.\|$ normu tanımlanmış olsun. Yani kısaca $(C,\|.\|)$ bir normlu uzay ve aynı zamanda cebir olsun. Bu norm her $x,y\in C$ için $\|xy\|\leq\|x\|\|y\|$ şartını sağlıyorsa ve C' nin birim elemanlı olması halinde de $\|e\|=1$ ise C' ye normlu cebir denir.

Örnek 27.

Örnek 23'de $C[a,b]$'nin cebir olduğunu gördük. $C[a,b]$' nin Banach Cebiri olduğunu gösterelim. Örnek 6'dan $\|f\| = \sup_{a\le x\le b}|f(x)|$'nin bir norm olduğunu biliyoruz. Şimdi $\|f\,g\| \le \|f\|\cdot\|g\|$ olduğunu gösterelim:

$$\sup\{|a|.|b|\} \le \sup|a|.\sup|b| \Rightarrow \|f.g\| = \sup\left(|f(x)|.|g(x)|\right)$$

$$\le \sup|f(x)|.\sup|g(x)| = \|f\|.\|g\|$$

$\Rightarrow \left(C[a,b],\|\bullet\|\right)$ bir normlu cebirdir.

1.4.4. Banach Cebiri

$\left(C,\|.\|\right)$ normlu cebiri tam uzay ise, bu normlu cebire Banach Cebiri adı verilir. Bu tanıma göre $\left(C,\|.\|\right)$ Banach cebiri ise C' nin birim elemanlı olması gerekmez. Fakat C birim elemanlı ise Banach cebiri olabilmesi için , şartlardan biri $\|e\| = 1$ olmasıdır.

Örnek 28.

Örnek 14'e göre $C[a,b]$ bir Banach uzayıdır. Örnek 23'e göre ise bu uzay bir cebirdir. Dolayısıyla $\left(C[a,b]\,,\,\|.\|\right)$ bir Banach Cebiridir.

Örnek 29.

Örnek 22'de; $B(X)$'nin cebir olduğunu gördük. Ayrıca $A\in B(X)$ için $\|A\| := \inf\left\{c : c>0 \ ve\ \forall x\in X \text{ için } \|A(x)\|_X \le c\|x\|_X\right\}$ ise $\|\bullet\| : B(X)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $B(X)$ üzerinde bir norm ve $\forall x\in X$ için $\|A(x)\|_X \le \|A\|\|x\|_X$ idi. $I = I_x \in B(X)$ birim lineer sınırlı operatörü için $\|I\| = \sup_{x\neq\theta}\frac{\|I(x)\|_X}{\|x\|_X} = \sup_{x\neq\theta}\frac{\|x\|_X}{\|x\|_X} = 1$'dir. Ve ayrıca her

$A,B\in B(X)$ ve $\forall x\in X$ için $\left\|(AB)(x)\right\|_X=\left\|\left(A\left(B(x)\right)\right)\right\|_X\le\|A\|\|B(x)\|_X\le\|A\|\|B\|\|x\|_X$ olduğundan $\|AB\|\le\|A\|\|B\|$ olur. O halde; $\left(B(X),\|.\|\right)$ bir normlu cebirdir.

Ayrıca $B(X)$ uzayı bu norma göre tamdır, yani $\left(B(X),\|.\|\right)$ bir Banach cebiridir. Gösterelim ; $\left(A_n\right)_{n=1}^{\infty}\subset B(X)$ bir cauchy dizisi olsun. O halde, $m,n\to\infty$ iken $\|A_n-A_m\|\to 0$ dır. Buradan $\forall x\in X$ için $\left\|(A_n-A_m)(x)\right\|\to 0$ yani;

$\left\|A_n(x)-A_m(x)\right\|\to 0$ 'dir. (5)

$\forall x\in X$ bir sabit ve $x_n:=A_n(x)$ olsun. O halde $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$, X de bir dizidir. (5) den $m,n\to\infty$ iken $\|x_n-x_m\|\to 0$ dır. Bu yüzden $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$, X de bir cauchy dizisidir. X bir Banach uzayı yani tam olduğundan bu dizi X ' in bir elemanına yakınsar. Bu elemanı a_x ile gösterelim. Bu durumda $n\to\infty$ iken $x_n\to a_x$ yani $n\to\infty$ iken

$\|x_n-a_x\|\to 0$ (6)

dir. Burada a_x elemanı x 'e bağımlıdır. $A:X\to X$ operatörünü $\forall x\in X$ için $A(x):=a_x$ şeklinde tanımlayalım. $A\in B(X)$ olduğunu yani A ' nın lineer, sınırlı olduğunu gösterelim. . $\forall x,y\in X$ ve $\lambda\in\mathbb{C}$ için $A(\lambda x)=a_{\lambda x}$ ve $A(x+y)=A_x+A_y$ olduğu gösterilmelidir. A_n lineer olduğundan $A_n(\lambda x)=\lambda A_n(x)=\lambda x_n$ buradan $(\lambda x_n)=\lambda(x_n)$ dir. Benzer şekilde $A_n(x+y)=A_n(x)+A_n(y)=x_n+y_n$ buradan $(x+y)_n=x_n+y_n$ dir. O halde (6)' dan $\left\|(\lambda x)_n-a_{\lambda x}\right\|\to 0,\left\|(x+y)_n-a_{x+y}\right\|\to 0$ olup, $a_{\lambda x}=\lambda a_x$ ve $a_{x+y}=a_x+a_y$ olduğunu görmek zor değildir. Buradan $A(\lambda x)=a_{\lambda x}=\lambda a_x=\lambda A(x)$, $A(x+y)=a_{x+y}=a_x+a_y=A(x)+A(y)$ dir. Yani A lineerdir. Şimdi A ' nın sınırlı olduğunu gösterelim. A ' nın sınırsız olduğunu varsayalım. O halde $k\to\infty$ iken $\left\|A(y_k)\right\|\to\infty$ olacak şekilde bir $\left(y_k\right)_{k=1}^{\infty}\subset X$ dizisi vardır. Bu yüzden $k\to\infty$ iken $\left\|a_{y_k}\right\|\to\infty$ dır. Buradan n sabit ve $k\to\infty$ iken $\left\|(y_k)_n-a_{y_k}\right\|\to\infty$ olup bu (6) ile çelişir. Bu yüzden A sınırlıdır. O halde $A\in B(X)$ dir. Üstelik (6)' dan $\forall x\in X$ ve $n\to\infty$ iken $\|x_n-a_x\|=\left\|A_n(x)-A(x)\right\|=\left\|(A_n-A)(x)\right\|\to 0$ dir. Buradan

$\|A_n - A\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|(A_n - A)(x)\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$ olduğundan $\|A_n - A\| \to 0$ yani $A_n \to A$ dır. Böylece $B(X)$ uzayındaki keyfi bir cauchy dizisi yine $B(X)$ uzayında bir elemana yakınsamaktadır. Bu yüzden $\left(B(X), \|.\|\right)$ tamdır yani $B(X)$ bir Banach uzayıdır.

1.4.4.1. Alt Banach Cebiri

C bir cebir ve A, C nin boş olmayan bir altkümesi olsun. Şayet, C deki işlemlere göre A nın kendisi bir Banach Cebiri ise A ' ya C ' nin Alt Banach Cebiri denir.

Örnek 30.

$X = (\mathbb{C}, \mathbb{R})$ ve $A := (\mathbb{R}, \mathbb{R})$ olmak üzere $A \subset X$ bir alt reel Banach cebiridir.

1.4.5. Banach * - Cebirleri

1.4.5.1. Involusyon

X bir cebir olsun. $* : X \to X$ dönüşümü için $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{C}$ *veya* $\mathbb{R}$ olmak üzere

1) $\left(x^*\right)^* = x$ (involitiflik)

2) $(x + y)^* = x^* + y^*$ (tam toplamsallık)

3) $(x \bullet y)^* = y^* \bullet x^*$ (ters homomorfiklik)

4) $(\lambda x)^* = \overline{\lambda}\, x^*$ (eş-lineerlik)

koşulları sağlanıyorsa, * - dönüşümüne $(X, \bullet)$ cebiri üzerinde bir involusyon denir.

Örnek 31.

$X = \mathbb{C}$ için $z \in \mathbb{C}$ elemanının eşleniğini $z^* := \overline{z}$ olarak tanımlarsak yukarıdaki 4 koşulun sağlandığı açıktır.

Örnek 32.

$X = M_2(\mathbb{C}) = \left\{ A = (a_{ij})_{i,j=1}^{2} : a_{ij} \in \mathbb{C} \right\}$ 2×2 tipli matrisler uzayında $A \in X$ için $A^* := \overline{A^t}$ alalım, burada $\overline{A^t}$, A matrisinin transpozunun eşleniği anlamındadır. $\left(A^*\right)^* = \overline{\left(\overline{A^t}\right)} = A$, $(A+B)^* = \overline{(A+B)^t} = \overline{A^t} + \overline{B^t} = A^* + B^*$, $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$ olduğu açıktır. $(AB)^* = B^* \cdot A^*$ olduğunu gösterelim.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ olsun. Bu taktirde, $A^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} \end{pmatrix}$, $B^* = \begin{pmatrix} \overline{b_{11}} & \overline{b_{21}} \\ \overline{b_{12}} & \overline{b_{22}} \end{pmatrix}$,

dır.

$$(A\cdot B)^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}}\,\overline{b_{11}} + \overline{a_{12}}\,\overline{b_{21}} & \overline{a_{21}}\,\overline{b_{11}} + \overline{a_{22}}\,\overline{b_{21}} \\ \overline{a_{11}}\,\overline{b_{12}} + \overline{a_{12}}\,\overline{b_{22}} & \overline{a_{21}}\,\overline{b_{12}} + \overline{a_{22}}\,\overline{b_{22}} \end{pmatrix} \text{ ve } B^* \cdot A^* = \begin{pmatrix} \overline{b_{11}}\,\overline{a_{11}} + \overline{b_{21}}\,\overline{a_{12}} & \overline{b_{11}}\,\overline{a_{21}} + \overline{b_{21}}\,\overline{a_{22}} \\ \overline{b_{12}}\,\overline{a_{11}} + \overline{b_{22}}\,\overline{a_{12}} & \overline{b_{12}}\,\overline{a_{21}} + \overline{b_{22}}\,\overline{a_{22}} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow (A.B)^* = B^*.A^* \quad \Rightarrow \quad * : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C}), A^* := \overline{A^t}$ dönüşümü involusyondur.

Bu örnek $M_n(\mathbb{C})$ uzayınada $A^* := \overline{A^t}$ olarak genişletilebilir.

1.4.5.2. Banach *-Cebiri

C cebirinde * - involusyon tanımlı ise, X ' e * - Cebiri denir. Eğer X Banach cebiri olup, bu uzayda bir * - involusyon tanımlı ise, bu uzaya Banach * - Cebiri denir.

Örnek 33.

$M_n(\mathbb{C}) := \left\{ A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} : a_{ij} \in \mathbb{C} \right\}$ $(n \in \mathbb{N})$ $n \times n$ tipli matrisler uzayını göz önüne alalım. Açıkça her $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrisi $\mathbb{C}^n$ uzayında bir lineer, sınırlı operatördür: $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Tersine, $B(\mathbb{C}^n)$' nin keyfi elemanının matrissel gösteriminin var olduğu kolayca gösterilebilir. Dolayısıyla $M_n(\mathbb{C}) = B(\mathbb{C}^n)$'dir. Örnek 29' a göre $B(\mathbb{C}^n)$ bir Banach cebiridir. O halde $M_n(\mathbb{C}) = B(\mathbb{C}^n)$ cebiri $A^* = \overline{A}^t$ $(A \in M_n(\mathbb{C}))$' ye göre bir Banach * - cebiridir.

Örnek 34.

Örnek 28'e göre $\left(C[a,b], \|.\|\right)$ bir Banach cebiridir. Bu cebirde $f^*(x) := \overline{f(x)}$ olarak tanımlanan $* : C[a,b] \to C[a,b]$ dönüşümü bir involusyon olup, bu involusyona göre $C[a,b]$ bir Banach *-cebiridir.

1.5. Reel C^* ve W^* -Cebirleri

M bir Banach *-cebiri olsun. Eğer $\forall x \in M$ için $\|x^* x\| = \|x\|^2$ koşulu sağlanıyorsa, M uzayına bir kompleks C^*-Cebiri denir.

1.5.1. Reel C^* - Cebirleri

Örnek 35.

H bir kompleks Hilbert uzayı olmak üzere, $\forall a \in B(H)$ için;

$\| a \|^2 = \sup\limits_{\|\xi\| \le 1} \langle a\xi | a\xi \rangle = \sup\limits_{\|\xi\| \le 1} \langle \xi | a^* a\xi \rangle \le \sup\limits_{\substack{\|\xi\| \le 1 \\ \|\eta\| \le 1}} \langle \xi | (a^* a)\eta \rangle = \| a^* a \| \Rightarrow \| a \|^2 \le \| a^* a \|$ ve $B(H)$ bir Banach *-cebiri olduğundan;

$\| a^* a \| \le \| a^* \| \cdot \| a \| = \| a \| \cdot \| a \| = \| a \|^2 \Rightarrow \| a^* a \| \le \| a \|^2$ elde edilir. Böylece; $\| a^* a \| = \| a \|^2$ olup $B(H)$ bir kompleks C^* - cebiridir.

Sonuç 4.

$M_n(\mathbb{C}) = B(\mathbb{C}^n)$ bir kompleks C^* - cebiridir.

Örnek 36.

$C[a,b]$ uzayını ele alalım. Örnek 34'e göre bu uzay bir Banach * - cebiridir. $\forall f \in C[a,b]$ için

$$\| f^* f \| = \max_{a\le x\le b} \left| \left(f^* f \right)(x) \right| = \max_{a\le x\le b} \left| f^*(x) \cdot f(x) \right| = \max_{a\le x\le b} \left| f^*(x) \right| \cdot \left| f(x) \right|$$

$$= \max_{a\le x\le b} \left| \overline{f(x)} \right| \cdot \left| f(x) \right| \overset{|\bar{z}|=|z|}{=} \max_{a\le x\le b} \left| f(x) \right|^2 = \| f \|^2$$

olduğundan $C[a,b]$ bir C^* - cebiridir.

Bu örnek aşağıdaki gibi genişletilebilir:

X bir yerel kompakt uzay olmak üzere $C_0(X) := \{ f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ sürekli ve } f(\infty) = 0 \}$ uzayını ele alalım. Burada $f(\infty) = 0$ eşitliği şu anlamdadır:

$$f(\infty) = 0 :\Leftrightarrow \forall f \in C_0(X), \forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists K \subset X, K \text{ kompakt} : \left| f(x) \right| < \varepsilon, \ \forall x \in X \setminus K.$$

$C_0(X)$' de cebirsel işlemleri şöyle tanımlayalım:

$$(\alpha f)(x) := \alpha f(x), (f+g)(x) := f(x) + g(x), (fg)(x) := f(x) g(x), f^*(x) := \overline{f(x)}.$$

Normu ise, $\|f\| := \sup_{x\in X} \left| f(x) \right|$ olarak tanımlayalım. O halde $C_0(X)$ uzayı bir C^* - cebiridir.

1.5.2. Dual Operatör

İki Banach uzayı arasındaki bir operatörün duali Banach uzaylarının duali yardımıyla tanımlanır. Burada Hilbert uzayları için bir başka tanımı vereceğiz.

Hilbert uzayları için şu teoremden yararlanalım.

Teorem 15.[22]

H ve H' iki reel (veya kompleks) Hilbert uzayı olmak üzere $A : H \to H'$ bir lineer sürekli operatör olsun. Bu taktirde keyfi $\mu \in H'$ ve $\xi \in H$ için $\langle B\mu, \xi \rangle_1 = \langle \mu, A\xi \rangle_2$ olacak şekilde; $B : H' \to H$ lineer sürekli operatörü vardır.

Tanım 4: $(H,\langle . \rangle)$ bir Hilbert uzayı ve $A: H \to H$ bir operatör olsun. Teorem 15'deki $B: H \to H$ operatörüne A operatörünün duali denir ve $B := A^*$ ile gösterilir. Şu halde; $\forall x, y \in H$ için $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$'dir.

Dual operatörüne bir örnek verelim.

Örnek 37.

$H = \mathbb{C}^2$ olsun. $M_2(\mathbb{C}) = B(\mathbb{C}^2)$ olduğundan $A = (a_{ij})_{i,j=1}^2 \in M_2(\mathbb{C})$ matrisi $A: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ olarak bir lineer, sürekli operatördür. $\forall x \in \mathbb{C}^2 \Rightarrow x = (x_1, x_2), x_i \in \mathbb{C}$, $Ax = y = (y_1, y_2), y_i \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda;

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow y = Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

$\mathbb{C}^n$ de $\langle x, y \rangle = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \ldots + x_n \overline{y_n}$ olduğu göz önüne alınırsa;

$\langle Ax, y \rangle = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)\overline{y_1} + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)\overline{y_2}$ dir.

$A^* = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ olsun. Bu taktirde $A^* y = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 \end{pmatrix}$ dir.

Buradan;

$\langle x, A^* y \rangle = x_1 \left(\overline{b_{11} y_1} + \overline{b_{12} y_2} \right) + x_2 \left(\overline{b_{21} y_1} + \overline{b_{22} y_2} \right)$ bulunur. Buna göre;

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle \overset{\forall x,y}{\Rightarrow} a_{11} = \overline{b_{11}}, a_{12} = \overline{b_{21}}, a_{21} = \overline{b_{12}}, a_{22} = \overline{b_{22}} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \overline{A}^t$$

' dir.

Sonuç olarak; $M_2(\mathbb{C}) = B(\mathbb{C}^2)$ cebirinde bir A operatörünün duali $\overline{A^t}$ ' ye eşittir, yani A operatörünün duali, transpozunun eşleniğidir.

Benzer şekilde $B(\mathbb{R}^n)$ veya $B(\mathbb{C}^n)$ uzaylarında bir A operatörünün dualinin $A^* = \overline{A}^t$ olduğu gösterilebilir.

Bir H Hilbert uzayında A^*, A' nın duali olmak üzere $*: H \to H$ dönüşümü bir involusyondur. Gerçekten; burada $\langle T\xi, \mu \rangle \overset{\forall \xi,\mu}{=} \langle P\xi, \mu \rangle \Leftrightarrow T = P$ olduğunu kullanacağız.

i) $\left\langle \left(A^*\right)^* \xi, \mu \right\rangle = \left\langle \xi, A^* \mu \right\rangle = \left\langle A\xi, \mu \right\rangle \Leftrightarrow \left(A^*\right)^* = A$

ii) $\left\langle (\lambda A)^* \xi, \mu \right\rangle = \left\langle \xi, \lambda A \mu \right\rangle = \overline{\lambda} \left\langle \xi, A\mu \right\rangle = \overline{\lambda} \left\langle A^* \xi, \mu \right\rangle = \left\langle \overline{\lambda} A^* \xi, \mu \right\rangle \Leftrightarrow (\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$

iii) $\left\langle (A+B)^* \xi, \mu \right\rangle = \left\langle \xi, (A+B)\mu \right\rangle = \left\langle \xi, A\mu + B\mu \right\rangle$

$$= \left\langle \xi, A\mu \right\rangle + \left\langle \xi, B\mu \right\rangle$$

$$= \left\langle A^*\xi, \mu \right\rangle + \left\langle B^*\xi, \mu \right\rangle$$

$$= \left\langle \left(A^* + B^*\right)\xi, \mu \right\rangle$$

$$\Leftrightarrow (A+B)^* = A^* + B^*$$

iv) $\left\langle (AB)^* \xi, \mu \right\rangle = \left\langle \xi, AB\mu \right\rangle = \left\langle \xi, A\underbrace{(B\mu)}_{\mu'} \right\rangle = \left\langle \underbrace{A^*\xi}_{\xi'}, B\mu \right\rangle = \left\langle B^* A^* \xi, \mu \right\rangle$

$\Leftrightarrow (AB)^* = B^* A^*$

Yani; A ’ nın A^* duali; *-involusyon koşullarını sağlıyor.

Şimdi dual operatörü kullanarak C^* - cebirine iki örnek daha verelim.

Örnek 38.

$M_n(\mathbb{C}) = B\left(\mathbb{C}^n\right)$ cebirini ele alalım. Örnek 33’ e göre bu cebir $A^* := \overline{A^t}$ ’ ye göre bir Banach * - cebiridir. Örnek 37’ye göre bu, $* : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dönüşümü, operatörün dualine eşittir. Dolayısıyla $B\left(\mathbb{C}^n\right)$ dual involusyona göre de bir Banach * - cebiridir. Bu cebir için genel durumda, $\left\|A^*A\right\| = \|A\|^2$ koşulunun sağlandığı aşağıdaki örnekte gösterilmektedir.

Burada norm şöyle tanımlanmıştır:

$\forall A \in M_n(\mathbb{C}) = B\left(\mathbb{C}^n\right)$ için, $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ olduğundan, $x \in \mathbb{C}^n$ ve $\|x\|_n = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$ olmak üzere $\|A\| := \sup_{\|x\| \le 1} \|A(x)\|_n$ bir normdur.

Dolayısıyla $M_n(\mathbb{C}) = B\left(\mathbb{C}^n\right)$ bir C^* - cebiridir.

Örnek 39.

Örnek 29’da ki $B(X)$ Banach cebirini $X = H$ için ele alalım. Yani bir H Hilbert uzayı olmak üzere $B(H) := \{A \mid A : H \to H, \text{lineer sınırlı}\}$ olsun. Bu uzayda involusyon A ’ nın duali olarak tanımlanırsa, $B(H)$ bir C^* - cebiridir. Gösterelim:

$\|A^* A\| = \|A\|^2$ olduğunu gösterelim;

$$\|A\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, Ax \rangle = \sup_{\|x\|=1} \langle x, A^* Ax \rangle \qquad (7)$$

$$\langle x, A^* Ax \rangle^2 \overset{\substack{cauchy \\ eşts.}}{\leq} \langle x, x \rangle . \langle A^* Ax, A^* Ax \rangle = \|x\|^2 . \|A^* A\|^2 \qquad \begin{pmatrix} \langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle . \langle y, y \rangle \\ |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| . \|y\| \end{pmatrix}$$

(7)’ ye göre;

$$\|A\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \langle x, A^* Ax \rangle \leq \sup_{\|x\|=1} \left(\|x\| . \|A^* Ax\| \right) = \sup_{\|x\|=1} \|A^* Ax\| = \|A^* A\| \text{ Yani; } \|A\|^2 \leq \|A^* A\| \text{ dir.}$$

$B(H)$ Banach * - cebiri olduğundan $\|AB\| \leq \|A\| . \|B\|$ dir.

$\Rightarrow \|A\|^2 \leq \|A^* A\| \leq \|A^*\| \cdot \|A\| = \|A\| \cdot \|A\| = \|A\|^2 \Rightarrow \|A^* A\| = \|A\|^2$ olur.

Tanım 5: $\mathfrak{R}$ bir reel Banach * - cebiri ve $M = \mathfrak{R} + i\mathfrak{R}$, uzayı $\mathfrak{R}$ ’nin Teorem 10’ daki bir kompleksleştirilmesi olsun. Eğer, M bir kompleks C^* - Cebiri ise, $\mathfrak{R}$ ’ ye bir reel C^* - Cebiri denir.

Reel C^* cebirinin daha farklı bir şekilde tanımlanabilmesi için aşğıdaki bazı kavramları verelim.

Tanım 6: $\mathfrak{R}$ bir reel C^* - cebiri ve $M = \mathfrak{R} + i\mathfrak{R}$ olsun. $\forall x \in M$ için,

$$\sigma_M(x) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \nexists \left(x - \lambda \mathbb{1} \right)^{-1} \right\}$$

kümesine x ’ in spektrumu denir.

$\forall x \in \mathfrak{R}$ için $\sigma(x) := \sigma_M(x)$ olsun .Eğer $\forall x \in \mathfrak{R}$, $x = x^*$ için $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$ ise, $\mathfrak{R}$ ’ ye Hermit denir.

$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_S + \mathfrak{R}_K$, $\mathfrak{R}_S = \left\{ x \in \mathfrak{R} : x^* = x \right\}$, $\mathfrak{R}_K = \left\{ x \in R : x^* = -x \right\}$ için

$\Re$, Hermittir $\Leftrightarrow \sigma(\Re_S) \subset \mathbb{R}$ 'dir.

Teorem 16 [21].

$\Re$ bir reel Banach * - cebiri olsun. Bu taktirde, $\Re$ bir reel C^* - cebiridir $\Leftrightarrow$ $\Re$ Hermittir ve $\forall x \in \Re$ için $\|x^*x\| = \|x\|^2$ 'dir.

Uyarı 3: Teorem 16'da ki, $\Re$ ' nin Hermit olması çok önemlidir.

Örnek 40.

$\forall n$ için $M_n(\mathbb{R}) = B(\mathbb{R}^n)$ uzayı bir reel C^* - cebiridir. Çünkü; $M_n(\mathbb{R}) + iM_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{C})$ olup, $M_n(\mathbb{C}) = B(\mathbb{C}^n)$ uzayı $B(\mathbb{R}^n)$ nin bir kompleksleştirilmesidir ve $B(\mathbb{R}^n)$ bir reel C^* - cebiridir.

Sonuç olarak bir kompleks C^* - cebiri bir reel C^* - cebiridir. Bunun tersi doğru değildir, örneğin $\mathbb{R}$ uzayı bir reel C^* - cebiri olup, $\mathbb{R}$ bir kompleks C^* - cebiri değildir. Çünkü; $i\mathbb{R} \not\subset \mathbb{R}$ 'dir.

1.5.3. Reel Banach Uzayının Kompleksleştirmesi

X bir reel Banach uzayı ve $X_c := X + iX$ olsun. Eğer X_c de bu uzayı bir kompleks Banach uzayı yapan ve $\|\cdot\|_c\big|_X = \|\cdot\|$, $\|\xi + i\mu\|_c = \|\xi - i\mu\|_c$ şartlarını sağlayan bir $\|\cdot\|_c$ normu varsa, $(X, \|\cdot\|_c)$ uzayına X ' in bir kompleksleştirilmesi denir, burada $\|\cdot\|_c\big|_X$, normun X 'e kısıtlanışıdır.

X_c uzayında $p \geq 1$ olmak üzere

$$|\xi + i\mu|_p := \left(\|\xi\|^p + \|\mu\|^p\right)^{1/p} \text{ ve } |\xi + i\mu|_\infty := \max\{\|\xi\|, \|\mu\|\}$$

dönüşümlerini ele alalım. X uzayı $\left|\cdot\right|_p$ ve $\left|\cdot\right|_\infty$ ' lere göre bir reel Banach uzayı olup, genelde kompleks normlu uzay değildir. Çünkü bu dönüşümler kompleks lineer değildir. Dolayısıyla X_c uzayı bu normlara göre X ' in bir kompleksleştirilmesi değildir.

X ' in kompleksleştirilmesini aşağıdaki örnekte ele alalım.

Örnek 41.

$X_c := X + iX$ uzayında, $1 \leq p \leq +\infty$ için;

$$\left\|\xi + i\mu\right\|_p := c_p^{-1} \underset{\theta\in\mathbb{R}}{Sup}\left|e^{i\theta}\left(\xi + i\mu\right)\right|_p \ , \ \forall \xi, \mu \in X$$

normunu ele alalım. Burada $c_p := \underset{\theta\in\mathbb{R}}{Sup}\left(\left|Cos\theta\right|^p + \left|Sin\theta\right|^p\right)^{1/p}$ dir. Buna göre X_c, X 'in bir kompleksleştirmesidir. Bunu göstermek için aşağıdaki maddeleri gösterelim:

1) $\left(X_c, \|\cdot\|_p\right)$ bir kompleks Banach uzayıdır.

2) $\|\cdot\|_p\Big|_X = \|\cdot\|$ dir. Yani $\|\xi + i\theta\| = \|\xi\|$

3) $\|\xi + i\mu\|_p = \|\xi - i\mu\|_p$

1) i) $\|\cdot\|_p$ için $\|\xi + i\mu\|_p = 0 \Leftrightarrow \xi = \mu = \theta$ olduğu açıktır.

ii) $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ için $\left\|\alpha\left(\xi + i\mu\right)\right\|_p = \left|\alpha\right|\left\|\xi + i\mu\right\|_p$ olduğunu gösterelim. $\alpha := \lambda + i\eta$ olsun. O halde;

$$\begin{aligned}\left\|\left(\lambda + i\eta\right)\left(\xi + i\mu\right)\right\|_p &= c_p^{-1} \underset{\theta\in\mathbb{R}}{Sup}\left|e^{i\theta}\left(\lambda + i\eta\right)\left(\xi + i\mu\right)\right|_p \\ &= c_p^{-1} \underset{\theta\in\mathbb{R}}{Sup}\left|\left(Cos\theta + iSin\theta\right)\left(\lambda + i\eta\right)\left(\xi + i\mu\right)\right|_p \\ &= c_p^{-1} \underset{\theta\in\mathbb{R}}{Sup}\left|\left(\left(\lambda Cos\theta - \eta Sin\theta\right) + \left(\lambda Sin\theta + \eta Cos\theta\right)\right)\left(\xi + i\mu\right)\right|_p\end{aligned}$$

$$= \sqrt{\lambda^2 + \eta^2}\, c_p^{-1} \underset{\theta\in\mathbb{R}}{Sup}\left|\left(\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\eta^2}}Cos\theta - \frac{\eta}{\sqrt{\lambda^2+\eta^2}}Sin\theta\right) + \left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\eta^2}}Sin\theta + \frac{\eta}{\sqrt{\lambda^2+\eta^2}}Cos\theta\right)\right)\left(\xi + i\mu\right)\right|_p \quad (8)$$

Trigonometriden bildiğimiz gibi $-1 \leq a, b \leq 1$ ve $a^2 + b^2 = 1$ için $\exists \varphi \in \mathbb{R} : \dfrac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \eta^2}} = Cos\varphi$

ve $\dfrac{\eta}{\sqrt{\lambda^2 + \eta^2}} = Sin\varphi$ ' dir. (8)' e göre;

$$\left\|(\lambda+i\eta)(\xi+i\mu)\right\|_p=\sqrt{\lambda^2+\eta^2}\,c_p^{-1}\underset{\theta\in\mathbb{R}}{Sup}\left|\left(Cos(\varphi+\theta)+iSin(\varphi+\theta)\right)(\xi+i\mu)\right|_p$$

$$=\left|\lambda+i\eta\right|c_p^{-1}\underset{\theta\in\mathbb{R}}{Sup}\left|\left(Cos\theta^{'}+iSin\theta^{'}\right)(\xi+i\mu)\right|_p$$

$$=\left|\lambda+i\eta\right|c_p^{-1}\underset{\theta\in\mathbb{R}}{Sup}\left|e^{i\theta^{'}}(\xi+i\mu)\right|_p$$

$$=\left|\lambda+i\eta\right|\left\|\xi+i\mu\right\|_p$$

iii) $\left\|(\xi_1+i\mu_1)+(\xi_2+i\mu_2)\right\|_p\le\left\|\xi_1+i\mu_1\right\|_p+\left\|\xi_2+i\mu_2\right\|_p$ olduğunu gösterelim. Bunun için $\left|e^{i\theta}(\xi_1+i\mu_1)+e^{i\theta}(\xi_2+i\mu_2)\right|_p\le\left|e^{i\theta}(\xi_1+i\mu_1)\right|_p+\left|e^{i\theta}(\xi_2+i\mu_2)\right|_p$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\left|e^{i\theta}(\xi_1+i\mu_1)+e^{i\theta}(\xi_2+i\mu_2)\right|_p=\left|(Cos\theta+iSin\theta)(\xi_1+i\mu_1)+(Cos\theta+iSin\theta)(\xi_2+i\mu_2)\right|_p$$

$$=\left|\underbrace{(\xi_1Cos\theta-\mu_1Sin\theta)}_{\xi_3}+i\underbrace{(\xi_1Sin\theta+\mu_1Cos\theta)}_{\mu_3}+\underbrace{(\xi_2Cos\theta-\mu_2Sin\theta)}_{\xi_4}+i\underbrace{(\xi_2Sin\theta+\mu_2Cos\theta)}_{\mu_4}\right|_p$$

$$=\left|(\xi_3+i\mu_3)+(\xi_4+i\mu_4)\right|_p\le\left|\xi_3+i\mu_3\right|_p+\left|\xi_4+i\mu_4\right|_p$$

$$=\left|(\xi_1Cos\theta-\mu_1Sin\theta)+i(\xi_1Sin\theta+\mu_1Cos\theta)\right|_p+\left|(\xi_2Cos\theta-\mu_2Sin\theta)+i(\xi_2Sin\theta+\mu_2Cos\theta)\right|_p$$

$=\left|e^{i\theta}(\xi_1+i\mu_1)\right|_p+\left|e^{i\theta}(\xi_2+i\mu_2)\right|_p$ ’dir. Yani $\|\cdot\|_p$ bir normdur.

X_c uzayının $\|\cdot\|_p$ normuna göre tam olduğu direkt gösterilebilir. Dolayısıyla $\left(X_c,\|\cdot\|_p\right)$ uzayı bir kompleks Banach uzayıdır.

2) $\|\cdot\|_p\big|_X=\|\cdot\|$ olduğunu gösterelim. $\mu=\theta$ için;

$$\left\|\xi+i\mu\right\|_p=\left\|\xi\right\|_p=c_p^{-1}\underset{\theta\in\mathbb{R}}{Sup}\left|e^{i\theta}\xi\right|_p$$

$$=c_p^{-1}\underset{\theta\in\mathbb{R}}{Sup}\left|\xi Cos\theta+i\xi Sin\theta\right|_p\left(\left|\xi+i\mu\right|_p=\left(\|\xi\|^p+\|\mu\|^p\right)^{1/p}\right)$$

$$=c_p^{-1}\underset{\theta\in\mathbb{R}}{Sup}\left(\|\xi Cos\theta\|^p+\|\mu Sin\theta\|^p\right)^{1/p}=c_p^{-1}\underset{\theta\in\mathbb{R}}{Sup}\left(\|\xi\|^p\left(|Cos|^p+|Sin\theta|^p\right)\right)^{1/p}$$

$$=\|\xi\|c_p^{-1}\underset{\theta\in\mathbb{R}}{Sup}\left(|Cos|^p+|Sin\theta|^p\right)^{1/p}=\|\xi\|\ \Rightarrow\|\xi\|=\|\xi\|_p$$

3) $\left\|\xi+i\mu\right\|_p=\left\|\xi-i\mu\right\|_p$ olduğunu gösterelim.

$$\left\|\xi+i\mu\right\|_p=c_p^{-1}\underset{\theta\in\mathbb{R}}{Sup}\left|\left(Cos\theta+iSin\theta\right)\left(\xi+i\mu\right)\right|_p$$

$$=c_p^{-1}\underset{\theta\in\mathbb{R}}{Sup}\left(\left\|\xi Cos\theta-\mu Sin\theta\right\|^P+\left\|\xi Sin\theta+\mu Cos\theta\right\|^p\right)^{1/p}$$

$$=c_p^{-1}\underset{\theta\in\mathbb{R}}{Sup}\left(\left\|\xi Sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta^{'}\right)+\mu Cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta^{'}\right)\right\|^P+\left\|\xi Cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta^{'}\right)-\mu Sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta^{'}\right)\theta\right\|^p\right)^{1/p}$$

$$=c_p^{-1}\underset{\theta\in\mathbb{R}}{Sup}\left(\left\|\xi Cos\theta^{'}+\mu Sin\theta^{'}\right\|^P+\left\|\xi Sin\theta^{'}-\mu Cos\theta^{'}\right\|^p\right)^{1/p}$$

$$=c_p^{-1}\underset{\theta\in\mathbb{R}}{Sup}\left|\left(\xi Cos\theta^{'}+\mu Sin\theta^{'}\right)+i\left(\xi Sin\theta^{'}-\mu Cos\theta^{'}\right)\right|_p$$

$$=c_p^{-1}\underset{\theta\in\mathbb{R}}{Sup}\left|e^{i\theta^{'}}\left(\xi-i\mu\right)\right|_p=\left\|\xi-i\mu\right\|_p$$

Sonuç olarak X_c, X ’ in bir kompleksleştirmesidir.

Teorem 16 [21].

X bir reel Banach uzayı ise, X ’ in bir kompleksleştirilmesi izometrik altında tektir.

Şimdi $\left(\Re,\left\|\cdot\right\|\right)$ bir reel Banach *-cebiri olsun. Örnek 42’ye göre $M=\Re+i\Re$, $\left\|\cdot\right\|_p$ normuna göre $\Re$ ’nin Banach uzayı anlamında bir kompleksleştirilmesidir. Fakat, M Banach *-cebiri anlamında bir kompleksleştirilmesi değildir. Çünkü, $\forall x,y\in M$ için genelde $\left\|xy\right\|_p\not\leq\left\|x\right\|_p\left\|y\right\|_p$ dir. Bundan dolayı aşağıdaki normu tanımlayalım. $\forall x=a+ib\in M$ olmak üzere,

$$\left\|x\right\|_p^{'}:=\underset{\substack{\left\|c+id\right\|_p\leq 1\\ c,d\in R}}{Sup}\left\|\left(a+ib\right)\left(c+id\right)\right\|_p$$

olsun.

Teorem 17 [21].

$\left(M, \|\cdot\|_p^{'}\right)$ bir kompleks Banach *-cebiri olup; M, $\Re$' nin bir kompleksleştirilmesidir.

1.5.4. Kompleks W^*-Cebirleri

H bir Hilbert uzayı ve $B(H) := \{T : H \to H, T\ lineer, sınırlı\}$ olsun. $M \subset B(H)$ bir *-altcebiri, yani M bir alt cebir olup $\forall x \in M$ için $x^* \in M$ olsun.

$M^{/} := \left\{x \in B(H) : xy = yx, \forall y \in M\right\}$

alt kümesine M 'nin komutantı (komutatörü) denir. $M^{//}, M^{/}$ 'nün komutantı (komutatörü) olsun. Açıkça; $M \subset M^{//} = M^{/V} = \dots$ ve $M^{/} = M^{///} = M^{\mathrm{V}} = \dots$ 'dir.

Tanım 7: Eğer $M = M^{//}$ ise, M 'ye W^* - cebir veya bir Von Neumann Cebiri denir. Von Neumann Cebirleri, kısaca; VNC ile gösterilir.

Örnek 42.

H bir Hilbert uzayı, $B(H)$ bir W^* - cebiridir, yani bir VNC' dir. $B(H) = B(H)^{//}$ olduğunu gösterelim. Gerçekten ;

$\forall A \in B(H)^{//}$ alalım. O halde $AP = PA$, $\forall P \in B(H)^{/}$ dir. Yani,

$\forall A \in B(H)^{//} = \left\{A \in B(H) : AP = PA, \forall P \in B(H)^{/}\right\} \subset B(H)$ dir. $M \subset M^{//}$ olduğundan $B(H) \subset B(H)^{//}$ dir. O halde $B(H) = B(H)^{//}$ dir. Sonuç olarak, $B(H)$ bir VNC' dir.

Tanım 8: $M \subset B(H)$ bir VNC olsun. $Z(M) := M \cap M^{/}$' ye M 'nin merkezi denir. Eğer $Z(M)$ trivial ise, yani $Z(M) = \mathbb{1} \cdot \mathbb{C}$ (veya $\mathbb{1} \cdot \mathbb{R}$) ise, M 'ye bir kompleks (veya reel) faktör veya $B(H)$ nin alt faktörü denir.

Örnek 43.

Örnek 42'de ki, $B(H)$'nin bir faktör olduğunu gösterelim. Yani; $B(H)\cap B(H)^{/}=\mathbb{1}\cdot\mathbb{C}$ $\left(\mathbb{1}\cdot(\xi)=\xi\right)$ olduğunu gösterelim:

$B(H)^{/}=\{A\in B(H): AP=PA, \forall P\in B(H)\}, \forall\xi\in H$ için;

$(AP)(\xi)=(PA)(\xi)\Leftrightarrow A\left(P(\xi)\right)=P\left(A(\xi)\right)\overset{A-sabit,\forall P}{\Leftrightarrow} A=\lambda\cdot\mathbb{1}\ (\lambda\in\mathbb{C})$ dir. Gerçekten;

$\lambda\cdot\mathbb{1}\left(P(\xi)\right)=\lambda P(\xi),\ P\left(\lambda\cdot\left(\mathbb{1}(\xi)\right)\right)\overset{P-lineer}{=}\lambda\cdot P\left(\mathbb{1}\cdot(\xi)\right))=\lambda\cdot P(\xi)$ dir.

$\Rightarrow\left[A\in B(H)^{/}\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{C}: A=\lambda\cdot\mathbb{1},\ \mathbb{1}(\xi)=\xi\right]$

$\Rightarrow B(H)^{/}=\mathbb{1}\cdot\mathbb{C}:=\{\lambda\cdot\mathbb{1}:\ \lambda\in\mathbb{C}\}\subset B(H)$

$\Rightarrow Z\left(B(H)\right)=B(H)\cap B(H)^{/}=B(H)^{/}=\lambda\cdot\mathbb{C}$ dir.

Sonuç olarak $B(H)$ bir faktördür.

Örnek 44.

$M_n(\mathbb{C})$, $n\times n$ tipli matrisler cebiri olsun. $M_n(\mathbb{C})=B(\mathbb{C}^n)$ olduğundan ve $\mathbb{C}^n$ bir Hilbert uzayı olduğundan örnek 43'e göre $M_n(\mathbb{C})$ bir faktördür.

Bu örnek aşağıdaki gibi genişletilebilir.

Teorem 17 (Von Neumann).

N, $M_n(\mathbb{C})$' nin birim matrisi içeren bir involutif * - alt cebiri olsun. O halde, $N^{//}=N$ yani N bir VNC' dir.

İspat.

$H := \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n \oplus ... \oplus \mathbb{C}^n$ olsun ve $(H,\pi), M_n(\mathbb{C})$' nin kanonik köşegen gösterimi, yani keyfi $a = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C}) : \pi(a) := \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix}$ olsun. $\pi(a) \subset B(H)$ olduğu yani $\pi(a) : H \to H$ lineer, sınırlı olduğu açıktır.

$V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix} \in H$ olmak üzere, $\mathbb{C}^n$'de $(V_1, V_2, ..., V_n)$ ortogonal tabanını ele alalım.

$p : H \to \pi(N)V$ bir ortogonal izdüşüm olsun. O halde $H = (\pi(N)V) \oplus (\pi(N)V)^{\perp}$ dir.

1) O halde $p \in \pi(N)^{/}$ dür. Gerçekten: $\forall \xi \in H$ olsun. $\pi(N)' = \{x \in B(H) : x\pi(a) = \pi(a)x, \forall a \in N\}$. $\forall a \in N$ için $p\pi(a) = \pi(a)p$ olduğunu gösterelim. Eğer $\xi \in \pi(N)V$ ise, $p\xi = \xi$ dir. Bu yüzden $\pi(a)\xi \in \pi(N)V$ olduğundan $\pi(a)p\xi = \pi(a)\xi$ ve $p\pi(a)\xi = \pi(a)\xi$. Buradan keyfi $\xi \in \pi(N)V$ için $\pi(a)p\xi = p\pi(a)\xi$ dir.

Şimdi $\xi \in (\pi(N)V)^{\perp}$ olsun. O halde $p\xi = \theta$ dir. Keyfi $\pi(b)V \in \pi(N)V$ için

$\langle \pi(a)\xi, \pi(b)V \rangle = \left\langle \xi, \underbrace{\pi(a)^* \pi(b)}_{\pi(c)} V \right\rangle = \langle \xi, \pi(c)V \rangle = 0 \Rightarrow \pi(a)\xi = \theta$ dir. Burada $\pi(a)^* \pi(b) = \pi(c)$ dir. Çünkü;

$$\pi(a)^* \pi(b) = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix}^* \cdot \begin{pmatrix} b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a^* & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^*b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a^*b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a^*b \end{pmatrix} = \pi(c)$$

Burada; N involutif *-alt cebir olduğundan $c := a^*b \in N$'dir. Buradan $p\pi(a)\xi = p(\theta) = \theta$ ve $\pi(a)p\xi = \pi(a)\theta = \theta$, yani keyfi $\xi \in (\pi(N)V)^{\perp}$ için $p\pi(a)\xi = \pi(a)p\xi$ dir. Bu yüzden keyfi $\xi \in H$ için $\pi(a)p\xi = p\pi(a)\xi$ olup $\pi(a)p = p\pi(a)$ dir. Sonuç olarak $p \in \pi(N)'$ dir.

$B(H) = M_n(\mathbb{C})$ olduğundan $B(H)$' nin keyfi elemanları, $M_n(\mathbb{C})$' nin elemanları ile $n \times n$ tipli matris olarak yazılabilir. Yani $B(H)$, $M_n(M_n(\mathbb{C}))$ ile özdeştir. Buradan $B(H) \cong M_n(M_n(\mathbb{C}))$.

2) O halde, $\pi(N)' = M_n(N')$ dir. Burada

$$\pi(N)' = \{x \in B(H) : x\pi(a) = \pi(a)x, \forall a \in N\},\ N' = \{b \in B(\mathbb{C}^n) : ab = ba, \forall a \in N\}$$

dir. $\forall x \in B(H)$ olsun. $B(H) = M_n(M_n(\mathbb{C}))$ olduğundan $x = (x_{ij})$ ve $x_{ij} \in M_n(\mathbb{C})$ olacak şekilde bir $x_{ij} \in M_n(M_n(\mathbb{C}))$ matrisi vardır. O halde, $\forall a \in N$ için:

$$\pi(a)x = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_{11} & ax_{12} & \dots & ax_{1n} \\ ax_{21} & ax_{22} & \dots & ax_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ax_{n1} & ax_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11}a & x_{12}a & \dots & x_{1n}a \\ x_{21}a & x_{22}a & \dots & x_{2n}a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}a & x_{n2}a & \dots & x_{nn}a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix} = x\pi(a)$$

$$\Leftrightarrow \forall i, j : x_{ij}a = ax_{ij} \Leftrightarrow x_{ij} \in N'$$

Bu yüzden $\pi(a)x = x\pi(a) \Leftrightarrow x = (x_{ij}) : x_{ij} \in N' \Leftrightarrow x \in M_n(N')$ dir. Buradan $x \in \pi(N)' \Leftrightarrow x \in M_n(N')$ olup $\pi(N)' = M_n(N')$.

Benzer şekilde $\pi(N'') \subset M_n(N')'$ elde edilir. Böylece keyfi $b \in N''$ için $\pi(b) \in \pi(N'') \subset M_n(N')' \overset{2)}{=} \pi(N)'' \Rightarrow \pi(b) \in \pi(N)''$ bulunur. $p \in \pi(N)'$ olduğundan $p\pi(b) = \pi(b)p \Rightarrow \pi(b)p = p\pi(b)p$ dir. O halde keyfi $\pi(a)V = \pi(N)V$ için $(\pi(b)p)(\pi(a)V) = (p\pi(b)p)(\pi(a)V) = p\pi(b)p(\pi(a)V) = p\pi(b)\pi(a)V$ dir. Diğer taraftan, $\left(\pi(b)p\right)\left(\pi(a)V\right)=\pi(b)p\pi(a)V=\pi(b)\pi(a)V$ 'dir. Buradan $p\pi(b)\pi(a)V=\pi(b)\pi(a)V$ elde edilir. $a=\mathbb{1}$ için

$$p\pi(b)\pi(\mathbb{1})V=\pi(b)\pi(\mathbb{1})V=\begin{pmatrix} b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbb{1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbb{1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} bV_1 \\ bV_2 \\ \vdots \\ bV_n \end{pmatrix},\ b\in N''.$$

$$\Rightarrow p\pi(b)\pi(\mathbb{1})V=\begin{pmatrix} bV_1 \\ bV_2 \\ \vdots \\ bV_n \end{pmatrix}\in\pi(N)V \Rightarrow \begin{pmatrix} bV_1 \\ bV_2 \\ \vdots \\ bV_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix}\in\pi(N)V$$

Dolayısıyla b, her $V_1,V_2,\dots,V_n$ vektöründe N ' nin bir operatörü olarak çalışıyor. Yani, $b\in N$ olup; $N^{//}\subset N$ 'dir.

Sonuç olarak, $N^{//}=N$ olup N bir VNC ' dir. ■

Not 3: Yukarıda ki Von Neumann Teoreminde; benzer şekilde N yerine $M_n(\mathbb{R})$ reel matrisler cebirinin birim matrisi içeren involutif *-alt cebiri olan R 'yi, alırsak, $R^{//}=R$ yani, R bir reel VNC olur.

1.5.5. Cebirlerin * - Gösterimi

Bu paragrafta bir C^* (veya W^*) – cebirinin bir $B(H)$ uzayındaki gösterimi ele alınacaktır.

1.5.5.1. C^* - Cebirlerinin * - Gösterimi

1.5.5.1.1. *- Morfizmi

X ve Y iki reel (veya kompleks) * - cebiri olsun. Eğer $\pi:X\to Y$ için;

1) $\pi(\alpha x+\beta y)=\alpha\pi(x)+\beta\pi(y)$

2) $\pi(xy)=\pi(x)\pi(y)$

3) $\pi\left(x^{*}\right)=\pi\left(x\right)^{*}$

koşulları sağlanıyorsa, π ye bir *-morfizmi denir.

Teorem 18 [35].

$\pi : X \to Y$ bir * - morfizm olmak üzere;

1. π pozitiftir (Yani; $x \geq 0 \Rightarrow \pi\left(x\right) \geq 0$ 'dir).

2. π süreklidir ve $\left\|\pi\left(x\right)\right\|_{Y} \leq \left\|x\right\|_{X}$ 'dir.

1.5.5.1.2. *-İzomorfizm

$\pi : X \to Y$ bir *-morfizm olsun. Eğer π, bire bir ve örten ise π 'ye *-izomorfizm denir. Bu durumda π *–izomorfizm :⇔ $\ker\left(\pi\right)=\left\{x \in X : \pi\left(x\right)=\theta_{y}\right\}=\left\{\theta_{x}\right\}$ dir.

M bir C^{*} - cebiri olsun. Eğer $\exists H$ Hilbert (kompleks) uzayı ve $\exists \pi$ * - morfizm için $\pi : M \to B\left(H\right)$ ise, $\left\{\pi, H\right\}$ ikilisine M ' nin bir * - gösterimi denir.

Eğer $\pi : M \to \pi\left(M\right)$ olarak bir *-izomorfizm ise, yani $\ker\left(\pi\right)=\left\{\theta_{x}\right\}$ ise, $\left\{\pi, H\right\}$ gösterimine M ' nin aşikar gösterim denir.

Örnek 45.

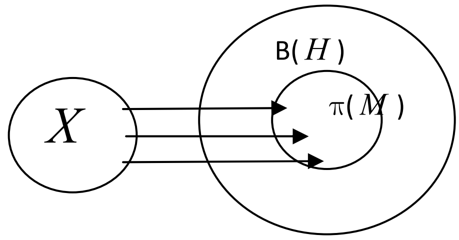
Örnek 36' da ki; $C_{0}\left(X\right)$, C^{*}-cebirini ele alalım, burada X bir yerel kompakt uzaydır. m, X ' de bir ölçü olmak üzere $H := L_{2}\left(X, m\right)$ olsun. Her $f_{0} \in C_{0}\left(X\right)$ için $\overline{f_{0}} : H \to H$ dönüşümünü şöyle tanımlayalım:

$\overline{f_{0}}\left(f_{0}\right) := f_{0} f$, $\forall f \in H$

O halde, $\overline{f_{0}} \in B\left(H\right)$ dir. Açıkça,

$\pi : C_{0}\left(X\right) \to B\left(H\right) : \pi\left(f_{0}\right) := \overline{f_{0}}$

dönüşümü bir * - morfizm olup, $\pi\left(C_0\left(X\right)\right) \subset B\left(H\right)$ dir. Dolayısıyla $\left\{\pi, H\right\}$, $C_0\left(X\right)$' in bir *-gösterimidir.



Şekil 1. M ' nin bir * - gösterimi

1.5.6. $B\left(H\right)$'de Yerel Konveks (Operatör) Topolojiler

H bir reel (veya kompleks) Hilbert uzayı olsun. $B\left(H\right)$' de aşağıdaki yakınsaklıklarla üretilen *yerel konveks* topolojileri ele alalım.

1. w**, zayıf (operatör) topolojisi:**

$x_\alpha \to \theta :\Leftrightarrow \left\langle x_\alpha \xi, \eta \right\rangle \to 0$, $\forall \xi, \eta \in H$

2. w_α**,** σ **- zayıf (operatör) topolojisi** $\left(\sigma B\left(H\right), B\left(H\right)_*\right)$**:**

$x_\alpha \to \theta :\Leftrightarrow \sum_n \left\langle x_\alpha \xi_n, \eta_n \right\rangle \to 0$, $\forall \sum_n \left(\left\|\xi_n\right\|^2 + \left\|\eta_n\right\|^2\right) < \infty$

3. s**, güçlü (operatör) topolojisi:**

$x_\alpha \to \theta :\Leftrightarrow \left\|x_\alpha \xi\right\| \to 0$, $\forall \xi \in H$

4. s^***, güçlü (operatör) * - topolojisi:**

$x_\alpha \to \theta :\Leftrightarrow \left\|x_\alpha \xi\right\| + \left\|x_\alpha^* \xi\right\| \to 0$, $\forall \xi \in H$

5. s_σ**,** σ **- güçlü (operatör) topolojisi:**

$x_\alpha \to \theta :\Leftrightarrow \sum_n \left\|x_\alpha \xi_n\right\|^2 \to 0$, $\forall \sum_n \left\|\xi_n\right\|^2 < \infty$

6. s_{σ}^{*}**,** σ **- güçlü (operatör) * - topolojisi:**

$$x_{\alpha} \to \theta :\Leftrightarrow \sum_{n} \left(\left\| x_{\alpha} \xi_n \right\|^2 + \left\| x_{\alpha}^{*} \xi_n \right\|^2 \right) \to 0, \ \forall \sum_{n} \left\| \xi_n \right\|^2 < \infty$$

7. u**, düzgün (operatör) topolojisi:**

$$x_{\alpha} \to \theta :\Leftrightarrow \left\| x_{\alpha} \right\| \to 0$$

Teorem 19 [20, 21].

$B(H)$' nin yerel konveks topolojileri arasında aşağıdaki ilişkiler vardır:

$$\begin{array}{l} w \le w_{\alpha} \le s_{\sigma} \le s_{\sigma}^{*} \le u \\ \cap \\ s \le s^{*} \le s_{\sigma}^{*} \\ \cap \\ s_{\sigma} \end{array}$$

H bir kompleks Hilbert uzayı olmak üzere eğer $A \subset B(H)$ alt cebiri, bir C^{*} - cebiri ise bu uzay bir Banach * - cebiridir. Dolayısıyla A, $d(x,y) := \|x - y\|$ metriğine göre tamdır. Buradan A norm topolojisine göre kapalıdır, yani aşağıdaki önerme doğrudur:

Teorem 20 [20].

Bir C^{*} - cebiri düzgün topolojiye göre kapalıdır.

Teorem 21 [20].

Eğer A bir C^{*} - cebiri ise, öyle bir H Hilbert uzayı vardır ki; A, $B(H)$' nin bir u - kapalı *-altcebirine *-izomorftur.

Teorem 22.

$M \subset B(H)$ olsun. Bu taktirde M bir W^* - cebiridir (yani VNC) $\Rightarrow M$, w - kapalıdır.

İspat:

$x_\alpha \subset M$ ve $x \in B(H)$ için $x_\alpha \xrightarrow{w} x$ olsun. O halde, $\forall \xi, \eta \in H$ için $\langle x_\alpha \xi, \eta \rangle \to \langle x\xi, \eta \rangle$. $\forall x' \in M'$ alalım. $(x_\alpha) \subset M = M''$ olduğundan $x_\alpha x' = x' x_\alpha$ dir. Burada $\langle x_\alpha x' \xi, \eta \rangle = \langle x' x_\alpha \xi, \eta \rangle$ dir. $\langle x_\alpha x' \xi, \eta \rangle \to \langle x x' \xi, \eta \rangle$ ve $\langle x' x_\alpha \xi, \eta \rangle \to \langle x' x \xi, \eta \rangle$ olduğundan $\langle x x' \xi, \eta \rangle = \langle x' x \xi, \eta \rangle$ dir. Dolayısıyla $xx' = x'x$ dir. Buradan $x \in M'' = M$ dir. Sonuç olarak, M, w - kapalıdır. ■

Teorem 23

$M \subset B(H)$ olsun. O halde, M w - kapalıdır $\Rightarrow$ M u - kapalıdır.

İspat:

$x_\alpha \subset M$ ve $x \in B(H)$ için $x_\alpha \xrightarrow{u} x$ olsun. $w \le u$ olduğundan $x_\alpha \xrightarrow{w} x$ dir. M w - kapalı olduğundan $x \in M$ dir. ■

Sonuç 5.

M bir VNC $\Rightarrow$ M bir C^* - cebiridir.

İspat:

M bir VNC ise, teorem 16' ya göre M w - kapalıdır. Teorem 17' ye göre M u - kapalıdır, yani bu cebir norma göre kapalıdır. Dolayısıyla M bir Banach *-cebiridir. Her $x \in M$ için $\|x\| = \|x^*\|$ olduğundan $\|x^* x\| \le \|x^*\|.\|x\| = \|x\|^2$ dir. Öte yandan,

$$\left\|x^* x\right\| = \sup_{\|\xi\|=\|\eta\|=1} \left|\left\langle x^* x\xi, \eta\right\rangle\right| = \sup_{\|\xi\|=\|\eta\|=1} \left|\left\langle x\xi, x\eta\right\rangle\right| \geq \sup_{\|\xi\|=1} \left\langle x\xi, x\xi\right\rangle = \|x\|^2$$

Buradan $\left\|x^* x\right\| = \|x\|^2$ dir. Sonuç olarak, M bir C^* - cebiridir. ■

Sonuç 6.

$M \subset B(H)$ bir * - alt cebir olsun .O halde, M VNC' dir$\Leftrightarrow \overline{M}^{w} = M$ ve $\mathbb{1}_H \in M$ dir.

Sonuç olarak;

1. Bir C^* - cebiri bir $B(H)$' nin düzgün (operatör) kapalı * - altcebiridir.

2. Bir W^* - cebiri (VNC) bir $B(H)$' nin zayıf (operatör) kapalı * - altcebiridir.

1.5.7. Reel C^* ve W^*-Cebirleri

1.4.2. kısımda reel C^* - cebir tanımı verilmiştir. Burada bu cebiri ayrıntılı olarak ele alalım.

1.5.7.1. Reel C^*-Cebirlerinin *-Gösterimi

Kompleks C^*-cebirlerinin *-gösterimi gibi reel C^*-cebirlerinin de *-gösterimi vardır.

Teorem 24.

$\mathfrak{R}$ bir reel Banach *-cebiri olsun. O halde; $\mathfrak{R}$ bir reel C^*-cebiridir $\Leftrightarrow \exists H$ reel Hilbert uzayı öyle ki; $\mathfrak{R}$, $B(H)$' de düzgün kapalıdır.

İspat.

$(\Leftarrow)$ $\Re \subset B(H)$ ve $\overline{\Re}^{u} = \Re$ olsun. $M = \Re + i\Re$ için $M \subset B(H) + iB(H) = B(H_c)$, $H_c := H + iH$ dir. $\overline{M}^{u} = M$ olduğunu gösterelim. $\forall (x_n) \subset M$ ve $x_n \xrightarrow{u} x \in B(H_c)$ olsun. $(x_n) \subset M = \Re + i\Re$ ise $\exists (a_n),(b_n) \subset \Re : x_n = a_n + ib_n$, $x \in B(H_c) = B(H) + iB(H)$ ise $\exists a,b \in B(H) : x = a + ib$ dir. Buradan:

$$a_n + ib_n \xrightarrow{u} a + ib \Rightarrow \left\|(a_n + ib_n) - (a + ib)\right\| \to 0 \Rightarrow \underset{\substack{\|\xi\| \le 1 \\ \xi \in H_c}}{Sup} \left\|\left((a_n + ib_n) - (a + ib)\right)\xi\right\| \to 0$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\|\xi\| \le 1 \\ \xi \in H}}{Sup} \left\|(a_n - a)\xi + i(b_n - b)\xi\right\|^2 \to 0$$

$$\Rightarrow \forall \xi \in H : \|\xi\| \le 1 \text{ için } \left\|(a_n - a)\xi\right\|^2 \to 0,\ \left\|(b_n - b)\xi\right\|^2 \to 0$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\|\xi\| \le 1 \\ \xi \in H}}{Sup} \left\|(a_n - a)\xi\right\| \to 0 \text{ ve } \underset{\substack{\|\xi\| \le 1 \\ \xi \in H}}{Sup} \left\|(b_n - b)\xi\right\| \to 0 \Rightarrow \|a_n - a\| \to 0 \text{ ve } \|b_n - b\| \to 0$$

$\Rightarrow \Re$ ' de $a_n \xrightarrow{u} a$ ve $b_n \xrightarrow{u} b$ 'dir. $\overline{\Re}^{u} = \Re$ olduğundan $a,b \in \Re$ olup $a + ib \in \Re + i\Re = M$ 'dir. $x \in M$ ise $x_n \xrightarrow{u} x \Rightarrow x \in M$ olup $\overline{M}^{u} = M$ dir. Teorem 24' e göre M bir kompleks C^* - cebiridir.

$(\Rightarrow:)$ $\Re$ bir reel C^* - cebiri olsun. O halde $M = \Re + i\Re$ uzayı bir kompleks C^* - cebiridir. Teorem 24'e göre $\exists K$ kompleks Hilbert uzayı için $M \subset B(H)$ ve M düzgün kapalıdır. K' nın iç çarpımını $\langle .,. \rangle$ ile gösterelim. $K_r := (K, \mathbb{R})$,yani $K_r = K$ bir reel vektör uzayıdır. K_r' de bir reel iç çarpımı şöyle tanımlayalım: $\forall \xi, \eta \in K_r$ için $(\xi, \eta) := \mathrm{Re}(\langle \xi, \eta \rangle)$ olsun. O halde $(K_r, \langle .,. \rangle)$ bir reel Hilbert uzayıdır. Bu uzayın tam olduğunu gösterelim. $\forall (\xi_n)_{n=1}^{\infty} \subset K_r$ bir cauchy dizisi olsun. O halde, $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n,m \ge N$ için $\|\xi_n - \xi_m\|_r < \sqrt{\varepsilon}$ dir. O halde $(\xi_n - \xi_m, \xi_n - \xi_m) < \varepsilon \Rightarrow \mathrm{Re}(\langle \xi_n - \xi_m, \xi_n - \xi_m \rangle) < \varepsilon$ dır. $\langle x, x \rangle \ge 0$ olduğundan $\mathrm{Re}(\langle \xi_n - \xi_m, \xi_n - \xi_m \rangle) = \langle \xi_n - \xi_m, \xi_n - \xi_m \rangle \Rightarrow \|\xi_n - \xi_m\| < \sqrt{\varepsilon}$ dir. Buradan $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi K' da bir cauchy dizisidir. K tam olduğundan $\exists \xi \in K : \xi_n \to \xi$ dir, yani $\|\xi_n - \xi\| \to 0 \Rightarrow \langle \xi_n - \xi, \xi_n - \xi \rangle \to 0 \Rightarrow \mathrm{Re}(\langle \xi_n - \xi, \xi_n - \xi \rangle) = \langle \xi_n - \xi, \xi_n - \xi \rangle$ olduğundan

$\mathrm{Re}\left(\left\langle \xi_n-\xi,\xi_n-\xi\right\rangle\right)\to 0 \Rightarrow \left(\xi_n-\xi,\xi_n-\xi\right)\to 0 \Rightarrow \left\|\xi_n-\xi\right\|_r \to 0 \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{K_r} \xi \Rightarrow \left(\xi_n\right)$ dizisi K_r uzayında yakınsaktır. Yani $\left(K_r,\langle .,.\rangle\right)$ tamdır. Sonuç olarak K_r bir reel Hilbert uzayıdır. O halde; $K=K_r+iK_r$ olup K, K_r'nin bir kompleksleştirilmesidir. Buna göre $B(K)=B(K_r)+iB(K_r)$ dir. $M=\Re+i\Re\subset B(K)$ ve $\Re$ reel Banach *-cebiri olduğundan $\Re\subset B(K_r)$'dir. $\overline{M}^u=M \Rightarrow \overline{\Re+i\Re}^u=\Re+i\Re \Rightarrow \overline{\Re}^u+i\overline{\Re}^u=\Re+i\Re \Rightarrow \overline{\Re}^u=\Re$ dir. O halde; $\Re$, $B(K_r)$ uzayında düzün kapalıdır. ■

Örnek 46.

M bir C^* - cebiri olsun. O halde $\exists H$ Hilbert uzayı için $M\subset B(H)$ ve $\overline{M}^u=M$ 'dir. $\Re:=M_r$ bir reel Banach *-cebiri olup $K:=H_r$ için $\Re\subset B(H_r)$ ve $\overline{\Re}^u=\Re$ dir. Buradan $\Re$ bir reel C^* - cebiridir.

Örnek 47.

$\mathbb{H}$ kuaternion sayılar uzayı bir reel C^*-cebiridir. Gösterelim;
$a,b,c,d\in\mathbb{R}$ olmak üzere $\forall q\in\mathbb{H}$, $q=a+ib+cj+dk$, $\varphi:\mathbb{H}\to B(\mathbb{R}^4)=M_n(\mathbb{R})$ dönüşümünü şöyle tanımlayalım:

$$\varphi(q):=\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d\\ b & a & -d & c\\ c & d & a & -b\\ d & -c & b & a\end{pmatrix}\in\Re\subset B(\mathbb{R}^4),\text{burada}\,\Re=\left\{\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d\\ b & a & -d & c\\ c & d & a & -b\\ d & -c & b & a\end{pmatrix}: a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$$

dir. φ'nin bir izometri olduğunu gösterelim;

$$\forall P=\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d\\ b & a & -d & c\\ c & d & a & -b\\ d & -c & b & a\end{pmatrix}\in\Re \text{ alalım. O halde } \forall\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)\in\mathbb{R}^4 \text{ için;}$$

$$\|P\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} \right\|^2 = \underset{\substack{\|\xi\|\le 1 \\ \xi\in\mathbb{R}^4}}{Sup} \left\| \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} \right\|^2 = \underset{\substack{\|\xi\|\le 1 \\ \xi\in\mathbb{R}^4}}{Sup} \left\| \begin{matrix} a\xi_1 - b\xi_2 - c\xi_3 - d\xi_4 = \eta_1 \\ \vdots \qquad \cdots \qquad \vdots \\ d\xi_1 - c\xi_2 + b\xi_3 + a\xi_4 = \eta_4 \end{matrix} \right\|^2$$

$$= \left(\left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{matrix} \right\|^2 = \left(\sqrt{\xi_1^{\,2} + \xi_2^{\,2} + \xi_3^{\,2} + \xi_4^{\,2}} \right)^2 \right) = \underset{\substack{\|\xi\|\le 1 \\ \xi\in\mathbb{R}^4}}{Sup} \left(\left(a\xi_1 - b\xi_2 - c\xi_3 - d\xi_4 \right)^2 + \ldots + \left(d\xi_1 - c\xi_2 + b\xi_3 + a\xi_4 \right)^2 \right)$$

$$= \underset{\substack{\|\xi\|\le 1 \\ \xi\in\mathbb{R}^4}}{Sup} \left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \right) \left(\xi_1^{\,2} + \xi_2^{\,2} + \xi_3^{\,2} + \xi_4^{\,2} \right) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \|q\|^2$$

Yani $\|p\| = \|q\| \Rightarrow \|\varphi(p)\| = \|q\|$ dir. Buradan, φ izometridir.

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Re \text{ ve } \Re \text{ involutiftir, çünkü:}$$

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{-b} & \overline{-c} & \overline{-d} \\ \overline{b} & \overline{a} & \overline{-d} & \overline{c} \\ \overline{c} & \overline{d} & \overline{a} & \overline{-b} \\ \overline{d} & \overline{-c} & \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix} \in R$$

dir. Sonuç olarak, $\Re \subset B\left(\mathbb{R}^4\right)$, $\mathbb{1} \in \Re$ ve $\Re$ involutifitir. O halde $\Re + i\Re \subset B\left(\mathbb{C}^4\right) = B\left(\mathbb{R}^4\right) + iB\left(\mathbb{R}^4\right), \mathbb{1} \in \Re + i\Re$ ve $\Re + i\Re$ involutiftir. Teorem 18'e (Von Neumann teoremi) $\Re + i\Re$ bir kompleks C^* - cebiridir. O halde; $\Re$ reel C^* - cebiridir. $\varphi : \mathbb{H} \to R$ *-izometri olduğundan, $\mathbb{H}$ uzayı da bir reel C^*-cebiridir.

1.5.7.2. Reel W^*-Cebirleri

H bir reel Hilbert uzayı $B(H)$, H' de tanımlı tüm lineer sınırlı operatörler cebiri, yani $B(H) := \{A : H \to H \mid A \text{ lineer, sınırlı}\}$ olsun. O halde; her $A \in B(H)$ için $\exists A^* \in B(H)$ vardır öyle ki $\forall \xi, \eta \in H$ için $\langle A\xi, \eta \rangle = \langle \xi, A^*\eta \rangle$ dir. A^*' a A' nın duali veya eşlenik operatörü denir.

$\Re \subset B(H)$ bir alt cebir olsun. Eğer $\forall a \in \Re$ için $a^* \in \Re$ ise, $\Re$'ye *-alt cebir denir. $\Re' := \{a \in B(H) : ab = ba, \forall b \in \Re\}$ kümesine $\Re$'nin komutantı denir.

Tanım 9: $\Re \subset B(H)$ bir *-alt cebir olsun. Eğer $\Re'' = \Re$ ise, $\Re$' ye bir Reel Von Neumann Cebiri denir. Burada $\Re'' := (\Re')'$ dir.

Teorem 25 [21].

H bir reel Hilbert uzayı ve $H_c := H + iH$ olsun. Eğer $\Re \subset B(H)$ bir reel VNC ise, $M := \Re + i\Re$ cebiri de $B(H_c)$' de bir VNC olup, $M' = \Re' + i\Re'$ ve $M'' = \Re'' + i\Re''$ dir.

Teorem 25'e göre, reel * - alt cebirler için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 7.

H bir reel Hilbert Uzayı ve $\Re \subset B(H)$ olsun. Eğer $\Re$ w - kapalı ise, $\Re$ u - kapalıdır.

Kompleks VNC' e benzer şekilde aşağıdaki teorem ve onun sonuçları ispatlanabilir.

Teorem 26 [21].

H bir reel Hilbert uzayı ve $\Re \subset B(H)$ olsun. Eğer $\Re^{//} = \Re$ ise, $\Re$ w - kapalıdır. Yani, $\Re$ reel VNC ise w - kapalıdır.

Sonuç 8.

H bir reel Hilbert uzayı ve $\Re \subset B(H)$ olsun. O halde $\Re$ bir reel VNC 'dir $\Leftrightarrow$ $\Re$ w - kapalı ve $\mathbb{1} \in \Re$ 'dir.

Sonuç 9.

$\Re \subset M_n(\mathbb{R})$ bir * - alt cebir olup, $\mathbb{1} \in \Re$ ise, $\Re^{//} = \Re$ 'dir. Yani; $\Re$ bir reel VNC 'dir. Burada $\mathbb{1}$, birim matristir.

Reel W^*-cebirlerine ilişkin bazı önemli kavramları verelim. İlk önce reel faktör tanımını vererek reel faktörlerin gösterimine ilişkin kavramları vereceğiz.

Tanım 10: $\Re$ bir reel $W^* - cebiri$ olsun. Eğer, $Z = Z(\Re) = \mathbb{1}_{\Re} \cdot \mathbb{R}$ $(Z \cong \mathbb{R})$ ise, $\Re$ **'**ye bir reel faktör denir. (Burada, $Z = Z(\Re) := \{x \in \Re : xy = yx, \forall y \in \Re\}$ kümesine $\Re$ 'nin merkezidir.)

Tanım 11: $\Re$ bir reel W^*-cebiri olsun**.** Eğer $\pi : \Re \to B(H)$ olacak şekilde bir reel Hilbert uzayı ve bir π *-morfizmi varsa, $\{\pi, H\}$ ikilisine $\Re$ 'nin bir gösterimi denir. Eğer, π, $w-$sürekli (zayıf topolojiye göre sürekli) ise $\{\pi, H\}$ 'ye $\Re$ 'nin reel $W^* -$gösterimi denir.

Tanım 12: $\Re$ bir reel W^*-cebiri ve $\{\pi_1, H_1\}$, $\{\pi_2, H_2\}$ $\Re$'nin iki aşikar reel W^*-gösterimi olsunlar. Eğer, $\exists u : H_1 \to H_2$ üniter operatörü (Eğer, $u \in \Re$ operatörü için $u^* u = uu^* = \mathbb{1}$ ise, u'ya üniter operatör denir.) öyle ki;

$$\pi_1(\Re) = u^* \pi_2(\Re_1) u, \; u^* u = \mathbb{1}_{H_1}, \; u u^* = \mathbb{1}_{H_2}$$

ise, $\{\pi_1, H_1\}$ ve $\{\pi_2, H_2\}$ gösterimleri (üniter) izomorftur denir ve $\{\pi_1, H_1\} \cong \{\pi_2, H_2\}$ ile gösterilir.

Tanım 13: $\Re$ bir reel faktör ve $\{\pi, H\}$, $\Re$'nin aşikar reel $W^* -$gösterimi olmak üzere, $\{\pi(\Re)\xi : \xi \in H\} = H$ ise, π'ye yoz olmayan (nondegenerate) denir.

Örnek 48.

Sonuç 9'a göre keyfi n için $M_n(\mathbb{R})$ bir reel W^* - cebiridir (VNC'dir).

Örnek 49.

$\mathbb{H}$; 4-boyutlu reel vektör uzayı ve $a_1 = 1$, $a_2 = i$, $a_3 = j$, $a_4 = k$ vektörleri bu uzayın tabanı olmak üzere $\mathbb{H}$ de çarpım şöyle tanımlayalım :

$i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $\qquad ij = k = -ji$

$jk = i = -kj$, $\qquad ki = j = -ik$

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

dir. $\forall x, y \in \mathbb{H}$ için;

$$\left.\begin{array}{l} x = \lambda_1 1 + \lambda_2 i + \lambda_3 j + \lambda_4 k \\ y = \alpha_1 1 + \alpha_2 i + \alpha_3 j + \alpha_4 k \end{array}\right\} \Rightarrow xy = \lambda_1\alpha_1 + (\lambda_1\alpha_2 + \lambda_2\alpha_1) i + \ldots \text{'dir.}$$

$\mathbb{H}$ kuaternion sayılar cebiri olmak üzere $\forall x \in \mathbb{H} : x = a + ib + jc + kd$ olsun.

$$\forall x \in \mathbb{H} : x = a + ib + jc + kd = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}) \subset B(\mathbb{R}^4)$$ olup,

$a = 1,\ b = c = d = 0$ için $x = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$ ve $x^* = a - ib - jc + -kd \in \mathbb{H}$

olduğundan $\mathbb{H}$ bir * - alt cebirdir. Sonuç 9'a göre $\mathbb{H}$ bir W^* - cebiridir (VNC ' dir).

1.5.8 Reel W^*-Cebirlerinin Sınıflandırılması

1.5.8.1. İzdüşümler

$\Re \subset B(H)$ bir reel VNC olsun. Eğer $p \in \Re$ için $p^2 = p$ ve $p^* = p$ ise, p ye bir izdüşüm denir. $\Re$ 'nin tüm izdüşümlerinin kümesini $P(\Re)$ ile gösterelim. Yani $P(\Re) := \{p \in \Re \ :\ p \text{ izdüşüm}\}$ dir.

Tanım 14: $p, q \in P(\Re)$ olsun.

1) Eğer $\exists v \in \Re$ için $v^* v = p$ ve $vv^* = q$ ise, p, q 'ya denktir denir ve $p \sim q$ ile gösterilir.

2) Eğer $pq = q$ ise, q, p den büyük değildir denir ve $q \le p$ ile gösterilir.

3) Eğer $\exists h \in P(\Re)$ için $h \le p$ ve $h \sim q$ ise $q \preceq p$ ile gösterilir.

4) Eğer $pq = \theta$ ise, p ve q ortogonal izdüşümler denir ve $p \perp q$ ile gösterilir.

Tanım 15: $\Re \subset B(H)$ bir VNC ve $p \in P(\Re)$ olsun. Eğer $q \in P(\Re)$ için $q \le p \Rightarrow q = 0$ yada $q = p$ ise, p 'ye minimal (atom) denir.

Örnek 50.

$M_2(\mathbb{R})$ ' de $p=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ ve $q=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ matrisleri bir izdüşüm olup her ikisi de minimaldir.

Tanım 16: $\Re$ bir reel VNC ve $p \in P(\Re)$ olsun. Eğer;

1. $\forall\ q \in P(\Re)$, $q \leq p$ ve $q \sim p$ için $q=p$ ise, p 'ye sonlu izdüşüm, aksi halde sonsuz izdüşüm denir.

2. p sıfırdan farklı bir sonlu alt izdüşüm içermezse, p 'ye saf sonsuz izdüşüm denir.

3. $\mathbb{1}$ sonlu (sonsuz, saf sonsuz) ise, $\Re$ 'ye sonlu (sonsuz, saf sonsuz) denir.

Teorem 27.

Bir reel VNC 'nin merkezinin maksimal, sonlu izdüşümü vardır.

İspat:

$z_1 := \sup\{z \in P(\Re) \cap Z : z \text{ sonludur.}\}$ olsun. z_1 'in sonlu olduğunu gösterelim. $\forall\ p \in P(\Re)$ ve $p \leq z_1$, $p \sim z_1$ olsun. Z 'den keyfi ve sabit bir z sonlu izdüşüm alalım. $z \leq z_1$ olduğundan $z = z\ z_1$ 'dir. Buradan $z = z\ z_1 \sim z\ p$ 'dir. $z\ p\ z = z\ z\ p = z\ p \Rightarrow z\ p \leq z$ olduğundan $z = z\ z_1 \sim z\ p \leq z$ 'dir. Yani, $z \leq p$ 'dir. z keyfi olduğundan $p = z_1$ 'dir. Dolayısıyla z_1 sonludur.■

Teorem 28.

$p, q \in P(\Re)$ ve $q \leq p$ olsun. Eğer p sonlu ise, q 'da sonludur.

İspat:

$\forall\ q_1 \in P(\Re)$, $q_1 \le q$ ve $q_1 \sim q$ olsun. O halde $\exists\ v \in \Re$: $v^* v = q$ ve $v v^* = q_1$'dir. $u := v + (p-q)$ ile gösterelim. O halde, $u^* u = p$ ve $u u^* = (p-q) + q_1 \le p$ 'dir. p sonlu olduğundan $(p-q)+q_1 = p$'dir. Dolayısıyla, q sonludur. ■

Teorem 29.

Bir reel VNC nin mrkezinin maksimal, saf sonsuz izdüşümü vardır.

İspat:

$z_3 := \sup\{z \in P(\Re) \cap Z : z \text{ saf sonsuzdur.}\}$ olsun. z_3'ün saf sonsuz olduğunu gösterelim. $\forall\ p \in P(M)$ ve $p \le z_3$, p sonlu olsun. Z'den keyfi ve sabit bir z saf sonsuz izdüşümü seçelim. $p\,(pz) = p\ p\ z = p\ z = (pz)\ p$ olduğundan $p\ z \le p$'dir. Teorem 28'e göre $p\ z$ sonludur. Diğer taraftan, $(pz)\ z = p\ z = z\ (pz)$ olduğundan ise $p\ z \le z$'dir. Buradan, $p\ z = 0$'dir. Dolayısıyla, z_3 saf sonsuzdur. ■

Tanım 17: $\Re$ bir reel VNC ve $p \in P(\Re)$ olsun. Eğer;

1. $z_3 = 0$ ise, $\Re$'ye yarı-sonlu,
2. $z_1 = 0$ ise, $\Re$'ye asıl sonsuz,
3. $\Re_p$ yarı-sonlu (asıl sonsuz) ise, p'ye yarı-sonlu (asıl sonsuz) denir. Burada, $\Re_p = p\Re p := \{pxp : x \in \Re\}$'dir.

Teorem 30.

Bir $\Re$ reel VNC'nin $\Re = \Re_1 \oplus \Re_2 \oplus \Re_3$ biçiminde bir tek açılımı vardır.
(Burada, $\Re_1 = \Re\ z_1$ sonlu, $\Re_3 = \Re\ z_3$ saf sonsuz, $\Re_2 = \Re\ z_2$ yarı-sonlu ve asıl sonsuz olup, $z_1 + z_2 + z_3 = \mathbb{1}$ dir.)

İspat:

z_1 ve z_3 izdüşümleri varolduğundan $\Re$'nin $\Re_1 \oplus \Re_2 \oplus \Re_3$ açılımı mevcuttur. Bu açılımda, $\Re_1 = \Re\, z_1$'in sonlu ve $\Re_3 = \Re\, z_3$'ün ise saf sonsuz olduğu açıktır. $z_1, z_3 \in P(\Re) \cap Z$ ve $z_1\, z_3 = 0$ olduğundan $z_2 \in P(\Re) \cap Z$'dir. Buradan $Z(\Re_2) = \Re_2 \cap Z$ 'dir. O halde $\forall e \in P(\Re_2) \cap Z(\Re_2)$ için $e \in P(\Re) \cap Z$'dir. Dolayısıyla $\Re_2$'de $z_3 = z_1 = 0$ olduğundan e saf sonsuz veya sonlu olamaz. Sonuç olarak $\Re_2$ yarı-sonludur.

Şimdi bu açılımın tek türlü olduğunu gösterelim. Varsayalım ki, $\Re = \Re\, p_1 \oplus \Re\, p_2 \oplus \Re\, p_3$ direkt toplamı aynı şartlar altında $\Re$'nin bir başka açılımı olsun. O halde, $p_1 \le z_1$ ve $p_3 \le z_3$'dir. Bu izdüşümlerin hepsi merkezden olduğundan $i = 2,3$ için $(z_1 - p_1)\, p_i p_1 = p_1 (z_1 - p_1)\, p_i = (z_1 p_1 - p_1^2)\, p_i = (z_1 - p_1)\, p_i$'dir.

Dolayısıyla $(z_1 - p_1)\, p_i \le p_1$'dir. p_1 sonlu olduğundan Teorem 29'a göre $(z_1 - p_1)\, p_2$ ve $(z_1 - p_1)\, p_3$ izdüşümleri de sonludur. Öte yandan, $(z_1 - p_1)\, p_2 \in \Re\, p_2$, $(z_1 - p_1)\, p_3 \in \Re\, p_3$ ve $\Re\, p_2$, $\Re\, p_3$ asıl sonsuz olduğundan $(z_1 - p_1)\, p_2 = 0$ ve $(z_1 - p_1)\, p_3 = 0$'dir. O halde, $p_1\, p_2 + p_1\, p_3 = 0$ ve $\mathbb{1} - p_1 = p_2 + p_3$ olduğundan

$$z_1\, p_1 - p_1\, p_2 = 0,\ z_1\, p_3 - p_1\, p_3 = 0 \Rightarrow z_1\, p_2 + z_1\, p_3 - p_1\, p_2 - p_1\, p_3 = 0$$

$$\Rightarrow z_1\, p_2 + z_1\, p_3 = 0 \Rightarrow z_1 (p_2 + p_3) = 0 \Rightarrow z_1 (\mathbb{1} - p_1) = 0$$

$$\Rightarrow z_1 - z_1\, p_1 = 0 \Rightarrow z_1 = z_1\, p_1 \Rightarrow z_1 \le p_1$$ 'dir. Buradan, $z_1 = p_1$'dir.

Eğer, $(z_3 - p_3)\, p_1 \neq 0$ (veya $(z_3 - p_3)\, p_2 \neq 0$) ise, $(z_3 - p_3)\, p_1$ (veya $(z_3 - p_3)\, p_2$) saf sonsuzdur. Çünkü;

$(z_3 - p_3)\, p_1\, p_3 = p_3 (z_3 - p_3)\, p_1 = (z_3 p_3 - p_3 p_3)\, p_1 = (z_3 - p_3)\, p_1$ olduğundan $(z_3 - p_3)\, p_1 \le p_3$'dir. p_3 saf sonsuz olduğundan her alt izdüşümü de saf sonsuzdur. Öte yandan, $(z_3 - p_3)\, p_1 \in \Re\, p_1$ (veya $(z_3 - p_3)\, p_2\, \Re\, p_2$) dir. Oysa, bu durum $\Re\, p_1$ (veya $\Re\, p_2$) nin saf sonsuz olmamasıyla çelişir. Dolayısıyla, $(z_3 - p_3)\, p_1 = 0$ ve $(z_3 - p_3)\, p_2 = 0$ 'dir. Buradan, $z_3 = p_3$'dir. Sonuç olarak, $z_1 = p_1$, $z_2 = p_2$ ve $z_3 = p_3$ elde edilir. ■

1.5.8.2. Reel W*-Cebirlerinin İzi

Tanım 18: $\mathfrak{R}$ bir reel W^* - cebiri ve $x \in \mathfrak{R}$ olsun. Şayet $\exists\, y \in \mathfrak{R} : y^* = y$ ve $y^2 = x$ ise, x ' e pozitif elemandır denir ve $x \geq 0$ ile gösterilir.

Tanım 19: $\mathfrak{R}$ bir reel W^*-cebiri olsun. $\mathfrak{R}_+ := \left\{ x^* x : \; x \in \mathfrak{R} \right\}$ olmak üzere, $\varphi : \mathfrak{R}_+ \to [0, \infty]$; $(0 \cdot \infty = 0$ olması kaydıyla$)$ bir lineer dönüşüm olsun. Eğer $\forall x \in \mathfrak{R}$ için $\varphi\left(x^* x\right) = \varphi\left(x x^*\right)$ ise, φ dönüşümüne $\mathfrak{R}$ 'de bir iz denir.

Teorem 31.

$\mathfrak{R}$ sonlu reel bir faktör olsun. Bu durumda, $\mathfrak{R}$ 'de bir tek, aşikar, normal, iz durumu mevcuttur.
Yani; $\mathfrak{R}$ 'de bir τ ; bir tek, lineer fonksiyonel mevcuttur öyle ki,

- (iz) $\tau(xy) = \tau(yx)$
- (durum) $\tau\left(x^* x\right) \geq 0$ ve $\tau(\mathbb{1}) = 1$
- (aşikar) $\tau\left(x^* x\right) = 0 \Rightarrow x = 0$
- (normal) τ , $(\sigma -) - zayıf$ süreklidir. Yani;

$x_n \nearrow x_0 \Rightarrow \tau\left(\sup\limits_n x_n\right) = \sup\limits_n \tau\left(x_n\right) = \tau\left(x_0\right)$ 'dir.

Dahası; $e, f \in P(\mathfrak{R})$ için, $e \sim f \Leftrightarrow \tau(e) = \tau(f)$ 'dir.

Örnek 51.

1. $\mathfrak{R}$, sonlu bir reel faktör olsun; $\mathfrak{R} \cong M_n(\mathbb{R})$ olup, $\mathfrak{R}$ 'nin bir tek, aşikar, normal izi vardır ve $\tau\left(\left(x_{ij}\right)\right) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_{ii}$ 'dir. Burada, $\left(x_{ij}\right) \in M_n(\mathbb{R})_+$ 'dir. Genel olarak, $\mathbb{1} \in M_n(\mathbb{R})$ için, $\tau(\mathbb{1}) = 1$ 'dir. Bu durumda, $\left\{\tau(p) : p \in M_n(\mathbb{R})\right\} \subset [0,1]$ (p , izdüşüm olmak üzere) olur.

2. Eğer $\Re$, *asıl sonsuz* reel faktör ise, $\Re$'nin bir tek, aşikar, normal izi vardır ve $Tr\left(\left(x_{ij}\right)\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_{ii}$, $\left(x_{ij}\right)\in M_n\left(\mathbb{R}\right)_+$'dir. Bu durumda, $Tr(\mathbb{1})=\infty$ olur ve

$$\left\{Tr(p):\, p\in P(\Re)\right\}\subset[0,\infty]\text{'dir.}$$

Tanım 20: Eğer, $u\in\Re$ operatörü için $u^*u=uu^*=\mathbb{1}$ ise, u'ya üniter operatör denir. $\Re$'nin tüm üniter elemanlarının kümesi; $\mathfrak{A}(\Re)$ ile gösterilir.

Tanım 21: τ, $\Re$'de bir iz olsun. $\forall x\in\Re_+$ için $\exists y\in\Re_+$**:** $y\le x$ ve $\tau(y)<\infty$ ise τ' ya yarı-sonlu**,** $\tau(\mathbb{1})<\infty$ ise, τ' ya sonlu denir.

Teorem 32.

φ bir iz ise $\forall x\in\Re_+$ ve $\forall u\in\mathfrak{A}(\Re)$ için; $\varphi(x)=\varphi\left(uxu^*\right)$' dir.

İspat:

$\varphi:\Re_+\to[0,\infty]$ $\Re$'de bir iz ve $\forall x\in\Re_+$ olsun. $\forall u\in U(\Re)$ üniter operatör olmak üzere,

$$\varphi(x)=\varphi\left(x^{1/2}u^*ux^{1/2}\right)=\varphi\left(\left(ux^{1/2}\right)^*\left(ux^{1/2}\right)\right)=\varphi\left(\left(ux^{1/2}\right)\left(ux^{1/2}\right)^*\right)$$
$$=\varphi\left(ux^{1/2}x^{1/2}u^*\right)=\varphi\left(uxu^*\right),$$

Yani; $\forall u\in U(\Re)$ için $\varphi(x)=\varphi\left(uxu^*\right)$'dir. Buradan,

$$\varphi(xu)=\varphi\left(uxuu^*\right)=\varphi(ux)\text{'dir.}$$

Dolayısıyla,

$$\varphi(xu)=\varphi(ux)\text{'dir.}\ \blacksquare$$

Teorem 33.

$M:=\Re+i\Re$ olmak üzere φ, M'de bir iz ise $\forall x,y\in M_+$ için $\varphi(xy)=\varphi(yx)$' dir.

İspat:

$x \geq 0$ olduğundan x' in kökü vardır, yani $x = \left(x^{\frac{1}{2}} \right) \cdot \left(x^{\frac{1}{2}} \right)$' dir.

Buradan,

$$\varphi(x) = \varphi\left(\left(x^{\frac{1}{2}} \right) \left(x^{\frac{1}{2}} \right) \right) = \varphi\left(\left(x^{\frac{1}{2}} \right) u^* u \left(x^{\frac{1}{2}} \right) \right) = \varphi\left(\left(u \left(x^{\frac{1}{2}} \right) \right)^* \left(u \left(x^{\frac{1}{2}} \right) \right) \right)$$

$$= \varphi\left(\left(u \left(x^{\frac{1}{2}} \right) \right) \left(u \left(x^{\frac{1}{2}} \right) \right)^* \right) = \varphi\left(u \left(x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \right) u^* \right) = \varphi\left(uxu^* \right).$$

Yani; $\forall u : u^* u = 1 = uu^*$ için $\varphi(x) = \varphi\left(uxu^* \right)$'dır. (9)

$y \in M_+ := \{ a : a \geq 0 \} = \left\{ a = b^* b \,\middle|\, b \in M \right\}$ olup $y = b^* b$, $b \in M$ olduğundan

$$y^* = \left(b^* b \right)^* = b^* \left(b^* \right)^* = b^* b = y.$$

Yani $y^* = y$' dir.

$y \in M$ olduğundan $y = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i u_i$' dır, burada $u_i \in U(M)$ ve $\lambda_i \in \mathbb{C}$' dır. (10)

(9)'a göre, $\varphi(x) = \varphi\left(uxu^* \right)$ olduğundan

$$\varphi(xu) = \varphi\left(uxu^* u \right) = \varphi(ux1) = \varphi(ux)\text{' dir.}$$

Yani $\varphi(xu) = \varphi(ux)$' dir. O halde (10)' a göre;

$$\varphi(xy) = \varphi\left(x \sum_{i=1}^{4} \lambda_i u_i \right) \overset{\varphi\, lin}{=} \sum_{i=1}^{4} \lambda \varphi(xu_i) = \sum_{i=1}^{4} \lambda \varphi(u_i x)$$

$$\overset{\varphi\, lin}{=} \varphi\left(\sum_{i=1}^{4} \lambda_i u_i x \right) = \varphi(yx) \text{ olur.}$$

Böylece, $\varphi(xy) = \varphi(yx)$ elde edilmiş olur. ■

Teorem 34.

Eğer φ, $\Re$ üzerinde bir iz ise, $\forall x, y \in \Re$ için $\varphi(xy) = \varphi(yx)$'dir.

İspat:

φ'yi $M := \Re + i\Re$'ye

$$\overline{\varphi}\left(x+iy\right) := \varphi(x),\ x+i\,y \in \Re + i\Re \text{ olarak genişletelim.}$$

$\forall\, a,b \in \Re + i\Re$ için Teorem 33'e göre, $\overline{\varphi}\left(ab\right) = \overline{\varphi}\left(ba\right)$'dir. $a := x$ ve $b := y$ seçilirse, $\overline{\varphi}\left(a\,b\right) = \overline{\varphi}\left(\left(x+i0\right)\left(y+i0\right)\right) = \overline{\varphi}\left(x\,y+i0\right) = \varphi\left(x\,y\right)$ olur. Diğer taraftan, $\overline{\varphi}\left(ba\right) = \overline{\varphi}\left(\left(y+i0\right)\left(x+i0\right)\right) = \overline{\varphi}\left(y\,x+i0\right) = \varphi\left(y\,x\right)$'dir. Böylece, $\overline{\varphi}\left(ab\right) = \overline{\varphi}\left(ba\right)$ oluşundan,

$$\forall x, y \in \Re \text{ için } \varphi(xy) = \varphi(yx)$$

elde edilir.■

Teorem 35.

$\varphi : \Re_+ \to \left[0,\infty\right]$ pozitif ve lineer olsun. Eğer bir $c > 0$ ve $\forall\ p,q \in P(\Re)$, $p \sim q$ için $\varphi\left(p\right) \le c \cdot \varphi(q)$ ise, $\forall x \in \Re$ için;

$$\varphi\left(x^* x\right) \le c \cdot \varphi\left(xx^*\right)\text{'dir.}$$

Teorem 36.

$\varphi : \Re \to \mathbb{R}$ lineer ve pozitif olsun. Bu durumda; φ izdir $\Leftrightarrow$ $\forall p,q \in P(\Re)$, $p \sim q$ için $\varphi(p) = \varphi(q)$'dir.

İspat:

"$\Rightarrow$" **:** φ bir iz olsun. $\forall p,q \in P(\Re)$, $p \sim q$ olsun. Bu durumda, $\exists v \in \Re$ öyle ki, $v^* v = p$ ve

$vv^* = q$ olup, φ iz olduğundan $\varphi\left(v^* v\right) = \varphi\left(vv^*\right) \Rightarrow \varphi(p) = \varphi(q)$'dir.

"$\Leftarrow$" **:** $\forall p,q \in P(\Re)$, $p \sim q$ için $\varphi(p) = \varphi(q)$ olsun. O halde, $c = 1$ seçilerek Teorem 35'e göre; $\forall x \in \Re$ için;

$$\varphi\left(x^* x\right) \le \varphi\left(xx^*\right)\text{'dir.}$$

x elemanı x^* elemanı ile yer değiştirilirse,

$$\varphi\left(xx^*\right) \leq \varphi\left(x^*x\right) \text{'dir.}$$

Buradan, $\varphi\left(xx^*\right) = \varphi\left(x^*x\right) \Rightarrow$ iz tanımına göre φ bir izdir.■

Sonuç 10.

Eğer; $\mathfrak{R}$ bir değişmeli reel VNC ise, $\mathfrak{R}$'de tanımlanan her lineer, pozitif fonksiyonel bir iz teşkil eder.

Sonuç 11.

$\tau : \mathfrak{R}_+ \to [0,\infty]$ lineer ise, $\tau\left(x^*x\right)=\tau\left(xx^*\right) \Leftrightarrow \forall x \in \mathfrak{R}_+$ ve $\forall u \in U(\mathfrak{R})$ için, $\tau(ux)=\tau(xu) \Leftrightarrow \forall x, y \in \mathfrak{R}_+$ için, $\tau(xy)=\tau(yx)$'dir.

1.5.8.3. Reel Faktörler ve Reel Faktörlerin Sınıflandırılması

İz yardımıyla reel faktörlerin sınıflandırılmasına ilişkin aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 37 [7].

$\mathfrak{R}$ reel VNC olsun. O halde;

1. $\mathfrak{R}$ sonludur $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{R}$'nin aşikar, sonlu, normal izi mevcuttur.
2. $\mathfrak{R}$ yarı-sonludur $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{R}$'nin aşikar, yarı-sonlu, normal izi mevcuttur.
3. $\mathfrak{R}$ asıl sonsuzdur $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{R}$'nin sıfırdan farklı yarı-sonlu, normal izi mevcut değildir.

1.5.9. Reel W^*-Cebirlerinin Tensör Çarpımı

Daha önce reel Hilbert uzayları için vermiş olduğumuz tensör çarpım kavramını reel W^*-cebiri için verelim. Bunun için, H_1 ve H_2 iki reel Hilbert uzayı olmak üzere aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 38.

$B(H_1 \otimes H_2)$ uzayında, $\{u_i u_j^* : i, j \in \Lambda\}^{/} = \{x \otimes \mathbb{1}_2 : x \in B(H_1)\}$ 'dir.

Sonuç 12.

$\{x \otimes \mathbb{1}_2 : x \in B(H_1)\}$ bir VNC 'dir.

İspat:

Bir $M \subset B(H)$ *-alt cebiri için her zaman $M^{/}$ bir VNC olduğundan ve Teorem 38'e göre, $\{u_i u_j^* : i, j \in \Lambda\}^{/} = \{x \otimes \mathbb{1}_2 : x \in B(H_1)\}$ olduğundan $\{x \otimes \mathbb{1}_2 : x \in B(H_1)\}$ bir VNC 'dir. ■

Tanım 22: $\Re_1 \subset B(H_1)$ ve $\Re_2 \subset B(H_2)$ iki reel VNC olsun. $N := \{x \otimes y : x \in \Re_1, y \in \Re_2\}^{//} \subset B(H_1 \otimes H_2)$ ile tanımlanan N'ye $\Re_1$ ve $\Re_2$ reel VNC 'lerinin tensör çarpımı denir ve $\Re_1 \overline{\otimes} \Re_2$ ile gösterilir, yani;

$$\Re_1 \overline{\otimes} \Re_2 := \{x \otimes y : x \in \Re_1, y \in \Re_2\}^{//} \text{ 'dir.}$$

Bu tanıma göre,

$$B(H_1) \overline{\otimes} \mathbb{R} \cdot \mathbb{1}_2 = \{x \otimes (\gamma \mathbb{1}_2) : x \in B(H_1), \quad \gamma \in \mathbb{R}\}^{//} = \{x \otimes \mathbb{1}_2 : x \in B(H_1)\}^{//} \text{ 'dir.}$$

Sonuç 12'ye göre, $\{x \otimes \mathbb{1}_2 : x \in B(H_1)\}$ bir VNC 'dir. Dolayısıyla, $\{x \otimes \mathbb{1}_2 : x \in B(H_1)\}^{//} = \{x \otimes \mathbb{1}_2 : x \in B(H_1)\}$ 'dir. Sonuç olarak,

$$B(H_1)\overline{\otimes}\mathbb{R}\cdot\mathbb{1}_2 = \{x\otimes\mathbb{1}_2 : x\in B(H_1)\}\text{'dir.}$$

Lemma 2[21].

$\Re_1 \subset B(H_1)$ ve $\Re_2 \subset B(H_2)$ iki reel VNC olmak üzere, $M_1 := \Re_1 + i\Re_1$ ve $M_2 := \Re_2 + i\Re_2$ sırası ile $\Re_1$ ve $\Re_2$ reel VNC'lerinin birer kompleksleştirilmesi olsunlar. Bu durumda,

1 . $(\Re_1 + i\Re_1)\overline{\otimes}(\Re_2 + i\Re_2) = (\Re_1\overline{\otimes}\Re_2) + i(\Re_1\overline{\otimes}\Re_2)$

2. $(\Re_1\overline{\otimes}\Re_2)' + i(\Re_1\overline{\otimes}\Re_2)' = (\Re_1 + i\Re_1)'\overline{\otimes}(\Re_2 + i\Re_2)' = (\Re_1' + i\Re_1')\overline{\otimes}(\Re_2' + i\Re_2')$

$= (\Re_1'\overline{\otimes}\Re_2') + i(\Re_1'\overline{\otimes}\Re_2')$'dir.

Böylece, $(\Re_1\overline{\otimes}\Re_2)' = \Re_1'\overline{\otimes}\Re_2'$'dir.

Teorem 39.

$\Re \subset B(H_1)$ bir reel VNC olsun. O halde,

$$\Re\overline{\otimes}B(H_2) = \left\{x\in B(H_1\otimes H_2) : x = (x_{ij})_{i,j\in\Lambda},\ x_{ij}\in\Re\right\}\text{'dir.}$$

İspat:

$N := \left\{x\in B(H_1\otimes H_2) : x = (x_{ij})_{i,j\in\Lambda},\ x_{ij}\in\Re\right\}$ olsun. Teorem 13'e göre, N bir reel VNC'dir. Teorem 14'e göre, $\forall\ x\otimes y\in\Re\overline{\otimes}B(H_2)$ için $x\otimes y = (a_{ij}x)_{i,j\in\Lambda}$ ve $a_{ij}x\in\Re$ olduğundan $x\otimes y\in N$'dir. Dolayısıyla, $\Re\overline{\otimes}B(H_2)\subset N$'dir.

Tersine, $\forall\ x = (x_{ij})_{i,j\in\Lambda}\in B(H_1\otimes H_2)$: $x_{ij}\in\Re$ olsun. $\forall E,F\subset\Lambda$ için;

$$x_{ij}^{(E,F)} := \begin{cases} x_{ij}, & i\in E,\ j\in F \quad ise, \\ \theta, & i\notin E,\ j\notin F \quad ise, \end{cases}$$

ile tanımlayalım. $x_{E,F} := \left(x_{ij}^{(E,F)}\right)_{i,j\in\Lambda}$ olsun. $E=\{s\}$ ve $F=\{t\}$ için $\left(x_{ij}^{(E,F)}\right)_{i,j\in\Lambda}$ ‘yi $\left(x^{(s,t)}\right)_{i,j\in\Lambda}$ ile gösterelim. O halde,

$$\left(x^{(s,t)}\right)_{i,j\in\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (x_{st}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\delta_{si}\delta_{tj}x_{st}\right)_{i,j\in\Lambda} \text{'dir.}$$

Teorem 14’e göre,

$$\left(\delta_{si}\delta_{tj}x_{st}\right)_{i,j\in\Lambda} = x_{st}\otimes\delta_{si}\delta_{tj}\mathbb{1}_2 \text{'dir.}$$

Buradan,

$$x_{E,F} := \left(x_{ij}^{(E,F)}\right)_{i,j\in\Lambda} = \sum_{\substack{s\in E\\ t\in F}}\left(x^{(s,t)}\right)_{i,j\in\Lambda} = \sum_{\substack{s\in E\\ t\in F}} x_{st}\otimes\delta_{si}\delta_{tj}\mathbb{1}_2$$

ve $x_{st}\otimes\delta_{si}\delta_{tj}\mathbb{1}_2 \in \Re\overline{\otimes}B(H_2)$ olduğundan,

$$x_{E,F} = \sum_{\substack{s\in E\\ t\in F}} x_{st}\otimes\delta_{si}\delta_{tj}\mathbb{1}_2 \in \Re\overline{\otimes}B(H_2)\text{'dir.}$$

$\forall\xi,\eta\in H_1\otimes H_2$ ve $E,F\to\Lambda$ için,

$$\left\langle x_{E,F}\xi,\eta\right\rangle - \left\langle\left(x_{ij}\right)_{i,j\in\Lambda}\xi,\eta\right\rangle \to 0 \text{ olduğundan, } x_{E,F}\xrightarrow{w}\left(x_{ij}\right)_{i,j\in\Lambda} = x\text{'dir.}$$

Dolayısıyla, $x\in\Re\overline{\otimes}B(H_2)$’dir. ■

Teorem 40 [21].

$\Re\subset B(H)$ bir VNC olsun. Eğer, $(p_i)_{i\in\Lambda}\subset P(\Re)$ öyle ki $\sum_{i\in\Lambda}p_i=\mathbb{1}$ ve $p_ip_j=0$, $p_i\sim p_j$, $\forall i\neq j$ ise, $\Re \overset{üniter}{\cong} \Re_p\overline{\otimes}B(K)$’dir. Buırada, $p=p_1$ ve K, $\dim(K)=|\Lambda|$ olan bir Hilbert uzayıdır.

İspat:

Her i için $p_1\sim p_i$ olduğundan $\exists(v_i)_{i\in\Lambda}\subset\Re$ öyle ki; $p:=p_1=v_i^*v_i$ ve $p_i=v_iv_i^*$’dir. $H_i = p_iH$ ve $L:=pH$ olsun. Açıkça,

$$H=\underset{i\in\Lambda}{\oplus}H_i\text{'dir.}$$

$U := \sum_{i\in\Lambda} v_i^*$ olsun. O halde,

$$UU^* = \sum_{i\in\Lambda} v_i^* \sum_{j\in\Lambda} v_j = \sum_i \sum_j v_i^* v_j = \sum_i v_i^* v_i = \sum_i p = \mathbb{1}_H,$$
$$U^*U = \sum_{i\in\Lambda} v_i \sum_{j\in\Lambda} v_j^* = \sum_i \sum_j v_i v_j^* = \sum_i v_i v_i^* = \sum_i p_i = \mathbb{1}$$

olduğundan $U : H \to \widetilde{H}$ bir üniter operatördür, burada $\widetilde{H} = U(H)$'dir. Şimdi $\widetilde{H}$'yi araştıralım.

$$U(H) = \sum_{i\in\Lambda} v_i^* \bigoplus_{j\in\Lambda} p_j H = \bigoplus_{i\in\Lambda} v_i^* p_i H = \bigoplus_{i\in\Lambda} p v_i^* H = \bigoplus_{i\in\Lambda} H^i \text{'dir.}$$

Burada, $H^i := p v_i^* H \cong pH = L$'dir.

$H_1 \otimes H_2 = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda$, $H_\lambda = \{\xi \otimes e_\lambda : \xi \in H_1, (e_\lambda) \subset H_2\}$'e göre;

$$\bigoplus_{i\in\Lambda} H^i = pH \otimes K = L \otimes K \text{'dir.}$$

Burada, K; $\dim(K) = |\Lambda|$ olan bir Hilbert uzayıdır. Dolayısıyla, $U : H \to L \otimes K$ bir üniter operatördür. Burada, $H = L \otimes K$ kabul edilebilir.

$\forall x \in \mathfrak{R}$ ve $\forall i, j \in \Lambda$ için $x_{ij} = v_i^* x v_j \in \mathfrak{R}p$ dir. Teorem 39'a göre;

$$x = (x_{ij})_{i,j\in\Lambda} \in \mathfrak{R}p \overline{\otimes} B(K) \text{'dir.}$$

Buradan, $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}p \overline{\otimes} B(K)$'dir.

Benzer şekilde $\forall x' \in \mathfrak{R}'$ ve $\forall i, j \in \Lambda$ için, $x'_{ij} = v_i^* x' v_j = v_i^* v_j x' = \delta_{ij} x' p \in \mathfrak{R}' p$'dir. Buradan,

$$\mathfrak{R}' \subset \mathfrak{R}' p \overline{\otimes} B(K)' = \mathfrak{R}' p \overline{\otimes} (\mathbb{R} \cdot \mathbb{1}_K) \text{'dir.}$$

Dolayısıyla,

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}'' \supset \left(\mathfrak{R}' p \overline{\otimes} \mathbb{R} \cdot \mathbb{1}_K\right)' = \mathfrak{R}'' p \overline{\otimes} (\mathbb{R} \cdot \mathbb{1}_K)' = \mathfrak{R}p \overline{\otimes} B(K),$$

yani; $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}p \overline{\otimes} B(K)$'dir. ■

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR, BULGULAR VE İRDELEMELER

2.1. Reel W^* -Cebirleri İçin Von Neumann Eş Sabiti

2.1.1. Sonlu Reel Faktörün Kanonik Gösterimi

H bir reel Hilbert uzayı, $B(H) := \{\, x : H \to H \,:\, x \text{ lineer ve sınırlı} \}$ olmak üzere $\Re \subset B(H)$ bir reel, sonlu faktör olsun. Teorem 37'ye göre, $\Re$ 'nin sonlu, aşikar, normal bir τ izi vardır. Şimdi, bu τ izi yardımıyla $\Re$ 'de;

$$\langle x, y\rangle := \tau\left(y^* x\right), \quad \forall\, x, y \in \Re$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlayalım. Bu dönüşümün $\Re$ 'de bir iç çarpım olduğunu aşağıdaki teoremle ispatlayalım.

Teorem 41.

Yukarıda tanımlanan $\langle .,. \rangle$ dönüşümü bir reel iç çarpım olup $\left(\Re, \langle .,. \rangle\right)$ bir reel Öklid uzayıdır.

İspat:

$\langle x, y\rangle := \tau\left(y^* x\right)$, $\forall\, x, y \in \Re$ şeklinde tanımlanan dönüşümün bir reel iç çarpım olduğunu göstermek teoremin iddiasını doğrulamak için yeterli olacaktır. Bunun için iç çarpımın aşağıdaki **(i – 1,2,3,4)** koşulları gerçeklenmelidir.

(i–1) $\forall\, x \in \Re$ için $\langle x, x\rangle = \tau\left(x^* x\right)$ olup $x^* x \in \Re_+$ ve τ iz olduğundan bir pozitif dönüşümdür. Dolayısıyla $\langle x, x\rangle = \tau\left(x^* x\right) \geq 0$ 'dır. τ aşikar bir iz olduğundan,

$$\langle x, x\rangle = 0_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \tau\left(x^* x\right) = 0_{\mathbb{R}} \overset{\tau \text{ aşikar}}{\Longleftrightarrow} x^* x = 0_{\Re} \Leftrightarrow x = 0_{\Re} \text{ 'dır.}$$

(i–2) $\forall\, x, y \in \Re$ olsun. O halde τ bir iz olduğundan,

$$\langle x, y\rangle = \tau\left(y^* x\right) \overset{\tau \text{ iz}}{=} \tau\left(\left(y^* x\right)^*\right) \overset{c^* cebiri}{=} \tau\left(x^* \left(y^*\right)^*\right) \overset{c^* cebiri}{=} \tau\left(x^* y\right) = \langle y, x\rangle \text{, yani;}$$

$$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle,\ \forall x, y \in \Re \text{ 'dir.}$$

(i - 3) $\forall x, y \in \Re$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. O halde τ lineer olduğundan

$$\langle \lambda x, y\rangle \overset{\tau}{=} \tau\left(y^*(\lambda x)\right) = \tau\left(\lambda\left(y^* x\right)\right) \overset{\tau\_lin.}{=} \lambda\tau\left(y^* x\right) = \lambda\langle x, y\rangle, \text{ yani;}$$

$$\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle \text{ 'dir.}$$

(İ - 4) $\forall x, y, z \in \Re$ olsun. O halde τ lineer olduğundan

$$\langle x+y, z\rangle = \tau\left(z^*(x+y)\right) = \tau\left(z^* x + z^* y\right) \overset{\tau\_lin.}{=} \tau\left(z^* x\right) + \tau\left(z^* y\right) = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$$

yani;

$$\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle \text{ 'dir.}$$

Dolayısıyla; $\langle .,.\rangle$ dönüşümü $\Re$ 'de bir reel iç çarpımdır. Sonuç olarak, $\left(\Re, \langle .,.\rangle\right)$ bir reel Öklid uzayıdır. ■

$\Re$ 'nin $\langle .,.\rangle$ 'e göre tamlaştırılmasını $L^2(\Re)$ ile gösterelim. O halde $L^2(\Re)$ bir reel Hilbert uzayı olup $\|x\|_2 = \tau\left(x^* x\right)^{1/2}$ $\left(x \in \Re\right)$ $L^2(\Re)$ 'de bir normdur. Dolayısıyla $\Re \subset L^2(\Re)$ ve $\overline{\Re}^{\|\cdot\|_2} = L^2(\Re)$ olduğu kabul edilebilir.

$L^2(\Re)$ 'de $\|.\|_2$ normuyla üretilen topolojiyi t_0 ile gösterelim. Bu durumda, $\overline{\Re}^{t_0} = L^2(\Re)$ 'dir.

Bilindiği gibi $M := \Re + i\Re$ bir kompleks faktör olup, τ izinin M 'ye bir tek τ_c genişletilmesi vardır [7]. O halde, $\langle a, b\rangle_c = \tau_c\left(b^* a\right)$ $\left(a, b \in M\right)$ olmak üzere $\left(M, \langle .,.\rangle_c\right)$ bir kompleks Hilbert uzayı olup bu uzayın $\| a \|_2^c := \tau_c\left(a^* a\right)^{1/2}$ $\left(a \in M\right)$ normuna göre tamlaştırılması $L_c^2(M)$ ile gösterilir [20]. Bu durumda $\overline{M}^{\|\cdot\|_2^c} = L_c^2(M)$ ‘dir.

Teorem 42.

$L^2(\Re) + i \cdot L^2(\Re) = L_c^{\,2}(M)$ 'dir.

İspat:

$x,y,z,t\in L^2(\Re)$ olsun. O halde τ_c 'nin $\Re$ 'ye kısıtlanışı τ olduğundan,

$$\langle x+iy\ ,\ z+it\rangle_c=\tau_c\left((z+it)^*\cdot(x+iy)\right)=\tau_c\left(\left(z^*-it^*\right)\cdot(x+iy)\right)$$

$$=\tau_c\left(z^*x+iz^*y-it^*x-i^2t^*y\right)=\tau_c\left(z^*x+iz^*y-it^*x+t^*y\right)$$

$$\overset{\tau\_lin.}{=}\tau_c\left(z^*x\right)+\tau_c\left(t^*y\right)+i\cdot\tau_c\left(z^*y\right)-i\cdot\tau_c\left(t^*x\right)$$

$$=\tau\left(z^*x\right)+\tau\left(t^*y\right)+i\cdot\tau\left(z^*y\right)-i\cdot\tau\left(t^*x\right)$$

$$=\langle x,z\rangle+\langle y,t\rangle+i\langle y,z\rangle-i\langle x,t\rangle \text{ 'dir.}$$

O halde, $\left(M,\langle .,.\rangle_c\right)$ uzayı $\left(\Re,\langle .,.\rangle\right)$ 'nin bir kompleksleştirilmesidir [21]. Yani,

$$\left(\Re,\langle .,.\rangle\right)+i\left(\Re,\langle .,.\rangle\right)=\left(M,\langle .,.\rangle_c\right) \text{ 'dir.}$$

Dolayısıyla $L_c^2(M)$ uzayının $\|.\|_2^c$ normu ile üretilen topolojisinin $L^2(\Re)$ 'ye kısıtlanışı t_0 'a eşittir. Bu yüzden, $\|.\|_2^c$ normu ile üretilen topolojiyi de t_0 ile gösterebiliriz. $\forall x,y\in\overline{\Re}^{t_0}=L^2(\Re)$ olmak üzere $a=x+iy$ olsun. U_a kümesi a 'nın keyfi bir t_0-komşuluğu olsun. $x\times y\to x+iy$ dönüşümü sürekli olduğundan $U_x+iU_y\subset U_a$ olacak şekilde x ve y 'nin sırasıyla U_x ve U_y t_0-komşulukları vardır. $x,y\in\overline{\Re}^{t_0}$ olduğundan $\exists\ z,\ s\in\Re$ öyle ki;

$$z\in U_x\cap\Re \text{ ve } s\in U_y\cap\Re \text{ 'dir.}$$

Buradan,

$$z+is\in\left(U_x+iU_y\right)\cap\left(\Re+i\Re\right)\neq\varnothing \text{ 'dir.}$$

O halde, $U_a\cap\left(\Re+i\Re\right)\neq\varnothing$ elde edilir. Yani; $U_a\cap M\neq\varnothing$ 'dir. Dolayısıyla $a\in\overline{M}^{t_0}=L_c^2(M)$ 'dir. Sonuç olarak $\overline{\Re}^{t_0}+i\overline{\Re}^{t_0}\subset L_c^2(M)$ 'dir.

$\overline{\Re}^{t_0}$ ve $i\overline{\Re}^{t_0}$ kümeleri kapalı ve iki kapalı kümenin toplamı da kapalı olup, öte yandan $M=\Re+i\Re\subset\overline{\Re}^{t_0}+i\overline{\Re}^{t_0}$ olduğundan $\overline{M}^{t_0}\subset\overline{\Re}^{t_0}+i\overline{\Re}^{t_0}$ 'dir. Yani; $L_c^2(M)\subset L^2(\Re)+iL^2(\Re)$ 'dir. Böylece topolojik uzay olarak

$L^2(\Re)+i\cdot L^2(\Re)=L_c^{\,2}(M)$ 'dir. Sonuç olarak, Hilbert uzayı anlamında geçerli olan bu eşitlik topolojik uzay anlamında da geçerlidir. ■

Sonuç 13.

$L^2(\Re)$ uzayı ayrılabilirdir.

İspat:

$L_c^2(M)$ uzayı ayrılabilir olduğundan bu uzayın bir N sayılabilir yoğun alt kümesi vardır [20]. O halde $\Re := N\cap L^2(\Re)$ kümesi $L^2(\Re)$ 'nin sayılabilir yoğun alt kümesidir. Dolayısıyla, $L^2(\Re)$ uzayı ayrılabilirdir. ■

Teorem 43.

Her $x\in\Re$ ve $\forall y\in L^2(\Re)$ için $\| x\cdot y\|_2 \le \| x\| \cdot \| y\|_2$ 'dir.

İspat:

$x\in\Re\subset M$ ve $y\in L^2(\Re)\subset L_c^2(M)$ olduğundan,

$$\| x\, y\|_2 = \| x\, y\|_2^c \le \| x\|^c \cdot \| y\|_2^c = \| x\| \cdot \| y\|_2 \text{'dir. } ■$$

$x\in\Re$ olmak üzere, $\lambda_x:\Re\to\Re$ dönüşümünü $\lambda_x(y):=x\cdot y \quad (y\in\Re)$ olarak tanımlayalım. $\forall y,z\in\Re$ ve $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ için,

$$\lambda_x(\alpha\, y+\beta\, z)=x(\alpha\, y+\beta\, z)=x(\alpha\, y)+x(\beta\, z)$$

$$=\alpha(xy)+\beta(xz)=\alpha\,\lambda_x(y)+\beta\,\lambda_x(z)$$ olduğundan λ_x dönüşümü lineerdir. Çarpım işlemi sürekli olduğundan ise λ_x dönüşümü süreklidir, dolayısıyla sınırlıdır.

$y\in L^2(\Re)$ keyfi verilsin. O halde $\exists(y_n)\subset\Re$: $\| y_n - y\|_2 \to 0$ 'dir, yani;

$y := \overset{t_0}{\lim} y_n$ 'dir. Buradan λ_x dönüşümünü $L^2(\Re)$ uzayına şöyle genişletelim:

$$\lambda_x(y) := \overset{t_0}{\lim} \lambda_x(y_n)$$

Bu limit mevcuttur, çünkü;

$$\| \lambda_x(y) - \lambda_x(y_n) \| = \| \lambda_x(y - y_n) \| \leq \| x \| \cdot \| y - y_n \|_2 \to 0 \text{ 'dir.}$$

Sonuç olarak, her $x \in \Re$ için bir $\lambda_x : L^2(\Re) \to L^2(\Re)$ lineer sınırlı dönüşümü vardır. Dolayısıyla $\lambda_x \in B\big(L^2(\Re)\big)$ olup, $\lambda := \{\lambda_x : x \in \Re\}$ için $\lambda : \Re \to B\big(L^2(\Re)\big)$'dir, yani;

$$\lambda(\Re) \subset B\big(L^2(\Re)\big) \text{'dir.}$$

Şimdi, M 'de tanımlanan $\lambda_a^c(b) := a \cdot b \quad (a, b \in M)$ lineer sınırlı dönüşümünün $L_c^2(M)$ uzayına genişletilmesiyle üretilen,

$$\lambda_c := \{\lambda_a^c : a \in M\} : M \to L_c^2(M)$$

dönüşümünü ele alalım [20].

λ_c ve λ dönüşümleri arasında aşağıdaki ilişki vardır.

Teorem 44.

$\lambda(\Re) + i\lambda(\Re) = \lambda_c(\Re + i\Re) = \lambda_c(M)$'dir.

İspat:

$\lambda(\Re) + i\lambda(\Re) = \{\lambda_{x_1} + i\lambda_{x_2} : x_1, x_2 \in \Re\}$ ve

$\lambda_c(\Re + i\Re) = \{\lambda_{z_1 + iz_2} : z_1 + iz_2 \in \Re + i\Re\}$ olduğundan her $y_1 + iy_2 \in \Re + i\Re$ için

$$\begin{aligned}
(\lambda_{x_1} + i\lambda_{x_2})(y_1 + iy_2) &= \lambda_{x_1}(y_1) + i\lambda_{x_1}(y_2) + i\lambda_{x_2}(y_1) - \lambda_{x_2}(y_2) \\
&= x_1 y_1 + i x_1 y_2 + i x_2 y_1 - x_2 y_2 \\
&= (x_1 + ix_2)(y_1 + iy_2) \\
&= \lambda_{x_1 + ix_2}^c (y_1 + iy_2) \text{'dir.}
\end{aligned}$$

Buradan $\lambda(\Re) + i\lambda(\Re) = \lambda_c(\Re + i\Re) = \lambda_c(M)$ elde edilir. ■

Sonuç 14.

λ_c dönüşümünün $\Re$ uzayına kısıtlanışı λ olur. $\left(\lambda = \lambda_c\,|_{\Re}\right)$

$\left\{\lambda_c, L_c^2\left(M\right)\right\}$ ikilisi M 'nin bir aşikar $W^* -$gösterimi [20] ve $B\left(L^2\left(\Re\right)\right) + i\,B\left(L^2\left(\Re\right)\right) = B_c\left(L^2\left(M\right)\right)$ olduğundan Teorem 44, Sonuç14 ve [21]'e göre aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 15.

$\left\{\lambda, L^2\left(\Re\right)\right\}$ ikilisi $\Re$ 'nin bir aşikar, reel W^* - gösterimidir.

2.1.2. Kanonik *-Gösterimi İçin Komutant Teoremi

Şimdi, $J : x \to x^* \ \left(x \in \Re\right)$ lineer dönüşümünü ele alalım.

$$\| x \|_2 = \tau\left(x^* x\right)^{1/2} = \tau\left(x x^*\right)^{1/2} = \left\| x^* \right\|_2$$

olduğundan bu dönüşüm $L^2\left(\Re\right)$ uzayına lineer olarak genişletilebilir. (Bu genişletmeyi yine "J" ile gösterelim.)

Benzer şekilde; $J_c : \Re + i\Re \to \Re + i\Re$ öyle ki, her $x = a + ib \in \Re + i\Re$ için $J_c\left(x\right) = J_c\left(a + ib\right) = a^* - ib^*$ eş-lineer dönüşümü için, $\| x \|_2^c = \left\| x^* \right\|_2^c \ \left(x \in \Re + i\Re = M\right)$ [20] olduğundan, bu dönüşüm $L_c^2\left(\Re + i\Re\right)$ uzayına eş-lineer olarak genişletilebilir. (Bu genişletmeyi yine "J_c" ile gösterelim.)

Açıkça, $J_c\big|_{\Re} = J$ 'dir. Dolayısıyla, $J_c\big|_{L^2(\Re)} = J$ elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 45.

$J_c B\left(L^2(\Re)\right)J_c = J B\left(L^2(\Re)\right)J \subset B\left(L^2(\Re)\right)$'dir.

Şimdi, λ ve J arasındaki ilişkiyi ele alalım.

Teorem 46 (Komutant Teoremi).

$\lambda(\Re)^{/} = J\lambda(\Re)J$ ve $\lambda(\Re) = J\lambda(\Re)^{/} J$'dir.

(Burada, $\lambda(\Re)^{/} := \left\{\lambda_{x^{/}} \in B\left(L^2(\Re)\right) : \lambda_{x^{/}} \circ \lambda_x = \lambda_x \circ \lambda_{x^{/}} \ , \quad \forall \lambda_x \in \lambda(\Re)\right\}$'dir.)

İspat:

İlk önce teoremin ispatı için gerekli olacak bir reel $W^* -$cebirinin komutantı ile ilgili aşağıdaki Lemmayı ispatlayalım.

Lemma 3.

Eğer, $\Re \subset B(H)$ bir reel $W^* -$cebiri ise, $\Re^{/} + i\Re^{/} = (\Re + i\Re)^{/}$'dir.

(Burada, $(\Re + i\Re)^{/} := \left\{a^{/} \in B(H + iH) : a^{/}b = ba^{/}, \quad \forall b \in \Re + i\Re\right\}$'dir.)

İspat (Lemma):

$\forall x^{/} \in \Re^{/}$ için $x^{/} \in B(H) \subset B(H + iH)$ ve $\forall\ y + iz \in \Re + i\Re$ için,

$x^{/}(y + iz) = x^{/}y + ix^{/}z = yx^{/} + izx^{/} = (y + iz)x^{/}$ olduğundan $x^{/} \in (\Re + i\Re)^{/}$ 'dir. Dolayısıyla, $\Re^{/} + i\Re^{/} \subset (\Re + i\Re)^{/}$ 'dir.

Tersine, $a^{/} \in (\Re + i\Re)^{/}$ keyfi verilsin. $a^{/} \in B(H + iH) = B(H) + iB(H)$ [7] olduğundan $\exists x^{/}, y^{/} \in B(H)$ $: a^{/} = x^{/} + iy^{/}$'dir. $\forall b = x + iy \in \Re + i\Re$ için $a^{/}b = ba^{/}$ olduğundan, $x^{/}x - y^{/}y = xx^{/} - yy^{/}$ ve $x^{/}x + y^{/}y = xx^{/} + yy^{/}$'dir. b keyfi olduğundan

$y = 0$ için, $x^{/}x = xx^{/}$ $(\forall x \in \Re)$ ve

$x=0$ için ise, $y^{/}y=yy^{/}$ $(\forall y\in\Re)$ elde edilir.

Sonuç olarak, $a^{/}=x^{/}+iy^{/}$ için $x^{/},y^{/}\in B(H)$ olup, her $x,y\in\Re$ için, $x^{/}x=xx^{/}$ $(\forall x\in\Re)$ ve $y^{/}y=yy^{/}$ $(\forall y\in\Re)$, yani; $x^{/},y^{/}\in\Re^{/}$'dir. Buradan, $a^{/}\in\Re^{/}+i\Re^{/}$'dir. Sonuç olarak, $\Re^{/}+i\Re^{/}=(\Re+i\Re)^{/}$ olduğu gösterilmiştir. Böylece lemmanın ispatı bitmiş olur.

Şimdi teoremin ispatına devam edelim. $\forall\lambda_{x^{/}}\in\lambda(\Re)^{/}$ olsun. Teorem 44'e göre $\lambda_{x^{/}}\in\lambda(\Re+i\Re)^{/}$'dir. Öte yandan,

$$\lambda(\Re+i\Re)^{/}=J_c\,\lambda(\Re+i\Re)J_c \text{ [20]}$$

olduğundan $\exists\,\lambda_x\in\lambda(\Re+i\Re)^{/}$ öyle ki $\lambda_{x^{/}}=J_c\lambda_xJ_c$'dir. Buradan, $\lambda_x=J_c\lambda_{x^{/}}J_c$'dir. Teorem 45'e göre; $J_cB\left(L^2(\Re)\right)J_c\subset B\left(L^2(\Re)\right)$ olduğundan $J_c\lambda_{x^{/}}J_c\in B\left(L^2(\Re)\right)$'dir, yani; $\lambda_x\in B\left(L^2(\Re)\right)$'dir. $\lambda_x\in\lambda(\Re+i\Re)=\lambda(\Re)+i\lambda(\Re)$ ve $\lambda_x\in B\left(L^2(\Re)\right)$ olduğundan, $\lambda_x\in\lambda(\Re)$'dir. Sonuç olarak bir $\lambda_x\in\lambda(\Re)$ için $\lambda_{x^{/}}=J_c\lambda_xJ_c=\lambda_{x^{/}}=J\lambda_xJ$'dir, yani; $\lambda_{x^{/}}\in J\lambda(\Re)J$'dir.

Dolayısıyla, $\lambda(\Re)^{/}\subset J\lambda(\Re)J$'dir. (11)

Şimdi tersini gösterelim. $J\lambda_xJ\in J\lambda(\Re)J$ keyfi verilsin.

$J\lambda(\Re)J\subset J_c\lambda(\Re+i\Re)J_c$ ve $J_c\lambda(\Re+i\Re)J_c=\lambda(\Re+i\Re)^{/}$ [20] olduğundan $J\lambda_xJ\in B\left(L^2(\Re)\right)+iB\left(L^2(\Re)\right)$ olup $J\lambda_xJ\circ\lambda_a=\lambda_a\circ J\lambda_xJ$'dir $\left(\forall\lambda_a\in\lambda(\Re+i\Re)=\lambda(\Re)+i\lambda(\Re)\right)$. Diğer taraftan, Teorem 45'e göre, $J\lambda_xJ\in B\left(L^2(\Re)\right)$ olup, özel durumda, $\forall\lambda_a\in\lambda(\Re)$ için (çünkü; genelde, $\lambda_a=\lambda_y+i\lambda_z\in\lambda(\Re)+i\lambda(\Re)$'dir.) $J\lambda_xJ\circ\lambda_a=\lambda_a\circ J\lambda_xJ$'dir. Buradan, $J\lambda_xJ\in\lambda(\Re)^{/}$'dir.

Buradan, $J\lambda(\Re)J\subset\lambda(\Re)^{/}$'dir. (12)

Böylece, (11) ve (12)'den $J\lambda(\Re)J=\lambda(\Re)^{/}$ elde edilir. ■

2.1.3. Gösterim Teoremleri

H_1 ve H_2 iki reel Hilbert uzayı olmak üzere bu paragrafta reel W^*-cebirlerinin gösterimine ilişkin kavramları vereceğiz.

Tanım 23: $\Re$ bir reel W^*-cebiri (VNC) ve $\{\pi, H\}$, $\Re$'nin bir W^*-gösterimi olsun. Eğer, bir $\eta \in H$ için $\overline{\pi(\Re)\eta} = H$ ise, η'ye $\pi(\Re)$'nin bir çembersel vektörü ve $\{\pi, H\}$'ye de $\Re$'nin çembersel W^*-gösterimi denir.

Teorem 47.

$\Re_1 \subset B(H_1)$ ve $\Re_2 \subset B(H_2)$ iki reel W^*-cebiri olsun. Eğer, $\Phi : \Re_1 \to \Re_2$ bir normal $*-$homomorfizm ise, $\Phi = \Phi_3 \circ \Phi_2 \circ \Phi_1$ olacak şekilde;

$$\Phi_1 : \Re_1 \to \Re_1 \overline{\otimes} (\mathbb{R} \cdot \mathbb{1}_L) \ , \quad \Phi_2 : \Re_1 \overline{\otimes} (\mathbb{R} \cdot \mathbb{1}_L) \to \left(\Re_1 \overline{\otimes} (\mathbb{R} \cdot \mathbb{1}_L)\right) p' \ ,$$

$$\Phi_3 : \left(\Re_1 \overline{\otimes} (\mathbb{R} \cdot \mathbb{1}_L)\right) p' \to \Re_2$$

dönüşümleri ve bir $p' \in \left(\Re_1 \overline{\otimes} (\mathbb{R} \cdot \mathbb{1}_L)\right)$ izdüşümü vardır.(Burada, L bir reel Hilbert uzayıdır.)

İspat:

Önce $\Re_2$'nin bir η çembersel vektörünün var olduğunu varsayalım. O halde;

$$\varphi(a) := \langle \Phi(a)\eta, \eta \rangle \quad (\forall a \in \Re_1)$$

olarak tanımlanan φ, $\Re_1$'de normal pozitif fonksiyoneldir. Diğer taraftan;

$\varphi(a) = \sum_n \langle a\xi_n, \xi_n \rangle \quad (\forall a \in \Re_1)$ ve $\sum_n \|\xi_n\|^2 < \infty$ olacak şekilde bir $(\xi_n) \subset H_1$ dizisi vardır [21].

$L := \ell_2 := \left\{ (x_n) \subset \mathbb{R} \ : \ \sum_n x_n^{\ 2} < \infty \right\}$, $\xi := (\xi_n) \subset H_1 \otimes L$ ve

$\Phi_1(a) := a \otimes \mathbb{1}_L$, $\quad \forall a \in \Re_1$ olsun.O halde, $\Phi_1 : \Re_1 \to \Re_1 \overline{\otimes} (\mathbb{R} \cdot \mathbb{1}_L)$ ve $\forall a \in \Re_1$ için;

$\langle \Phi_1(a)\xi,\xi\rangle = \langle (a\otimes \mathbb{1}_L)\xi,\xi\rangle = \sum_n \langle a\xi_n,\xi_n\rangle = \varphi(a)$'dır.

Şimdi $p' : H_1 \otimes L \to \overline{\Phi_1(\Re_1)\xi}$ izdüşümünü ele alalım.

$\forall x = a\otimes \mathbb{1}_L \in (\Re_1 \overline{\otimes} \mathbb{R}\cdot \mathbb{1}_L)$ için $\Phi_1(a)\xi \in \Phi_1(\Re_1)\xi \subset \overline{\Phi_1(\Re_1)\xi}$ olduğundan,

$$\begin{aligned}(p'x)\xi &= p'((a\otimes \mathbb{1}_L)\xi) = p'(\Phi_1(a)\xi) = \Phi_1(a)\xi \\ &= (a\otimes \mathbb{1}_L)\xi = x\xi = x((\mathbb{1}\otimes \mathbb{1}_L)\xi) = x(\Phi_1(\mathbb{1})\xi) \\ &= x(p'(\Phi_1(\mathbb{1})\xi)) = x(p'(\xi)) = (xp')\xi \text{'dir.}\end{aligned}$$

Benzer düşünce ile $\forall \gamma \in H_1 \otimes L$ öyle ki $\gamma \neq \xi$ için

$$\begin{aligned}(p'x)\gamma &= p'(\Phi_1(a)\gamma) = 0 = x(0) = x(p'(\Phi_1(\mathbb{1})\gamma)) \\ &= xp'((\mathbb{1}\otimes \mathbb{1}_L)\gamma) = xp'(\gamma)\text{'dir.}\end{aligned}$$

Sonuç olarak, $\forall \gamma \in H_1 \otimes L$ ve $\forall x \in (\Re_1 \overline{\otimes} (\mathbb{R}\cdot \mathbb{1}_L))$ için $(p'x)\gamma = (xp')\gamma$ 'dir.

Yani; $p'x = xp'$ 'dir. Dolayısıyla, $p' \in (\Re_1 \overline{\otimes}(\mathbb{R}\cdot \mathbb{1}_L))'$ 'dir.

Şimdi, $\Phi_2 :\ \Re_1\overline{\otimes}(\mathbb{R}\cdot \mathbb{1}_L) \to (\Re_1\overline{\otimes}(\mathbb{R}\cdot \mathbb{1}_L))p'$ dönüşümünü $\Phi_2(a\otimes \mathbb{1}_L) := (a\otimes \mathbb{1}_L)p'$ $a\in \Re_1$ olarak tanımlayalım. $p'\xi = p'((\mathbb{1}\otimes \mathbb{1}_L)\xi) = p'(\Phi_1(\mathbb{1})\xi) = \Phi_1(\mathbb{1})\xi = \xi$ olduğundan;

$$\begin{aligned}\langle (\Phi_2\circ\Phi_1)(a)\xi,\xi\rangle &= \langle (\Phi_2(a\otimes \mathbb{1}_L))\xi,\xi\rangle = \langle (a\otimes \mathbb{1}_L)p'\xi,\xi\rangle \\ &= \langle (a\otimes \mathbb{1}_L)\xi,\xi\rangle = \langle \Phi_1(a)\xi,\xi\rangle = \varphi(a)\text{'dir. Yani;}\end{aligned}$$

$$\varphi(a) = \langle (\Phi_2\circ\Phi_1)(a)\xi,\xi\rangle \quad (\forall a\in \Re_1)\text{'dir.}$$

Şimdi, $u : \Phi(\Re_1)\eta \to p'(H\otimes L)$ lineer dönüşümünü $u\Phi(a)\eta := (\Phi_2\circ\Phi_1)(a)\xi$ şeklinde tanımlarsak ve öte yandan $\langle \Phi(a)\eta,\eta\rangle = \varphi(a) = \langle (\Phi_2\circ\Phi_1)(a)\xi,\xi\rangle$ olduğundan $\|\Phi(a)\eta\|' = \|u\Phi(a)\eta\|_2$ elde edilir. Yani; u izometriktir. $\Phi(\Re_1)\eta = \Re_2\eta$ ve $(\Phi_2\circ\Phi_1)(\Re_1)\xi = \Phi_1(\Re_1)\xi$ olup $\overline{\Phi(\Re_1)\eta} = \overline{\Re_2\eta} = H_2$ ve $\overline{(\Phi_2\circ\Phi_1)(\Re_1)\xi} = \overline{\Phi_1(\Re_1)\xi}$ $= p'(H_1\otimes L)$ olduğundan u dönüşümü bir $\overline{u} : H_2 \to p'(H_1\otimes L)$ üniter dönüşümüne genişletilebilir. Ayrıca her $a\in\Re_1$ için $\overline{u}\,\Phi(a)(\overline{u})^{-1} = (\Phi_2\circ\Phi_1)(a)$'dir. O halde, $\Phi_3(\bullet) := \overline{u}\,\Phi(\bullet)(\overline{u})^{-1}:\ (\Re_1\overline{\otimes}(\mathbb{R}\cdot \mathbb{1}_L))p' \to \Re_2$ bir *-izomorfizm olmak üzere,

$$\Phi = \Phi_3 \circ \Phi_2 \circ \Phi_1 \text{'dir.}$$

Genel durumda; $\exists\left(H_2^l\right) \subset H_2$ ve $\exists\left(\eta_l\right) \subset H_2$: $H_2 = \oplus_l H_2^l$ ve $H_2^l = \overline{\Re_2 \eta_l}$ $\left(\forall l\right)$'dir. $q_l^{/} : H_2 \to \overline{\Re_2 \eta_l} = H_2^l$ doğal izdüşüm olsun. O halde $q_l^{/} \in \Re_2^{/}$ $\left(\forall l\right)$'dir. Her l için $\Phi_l = q_l^{/} \Phi : \Re_1 \to \Re_2 q_l^{/}$ bir normal *-homomorfizmdir. Birinci duruma benzer şekilde; $\exists\, \Phi_3^{(l)}, \Phi_2^{(l)}, \Phi_1^{(l)}$:

$$\Phi_l = \Phi_3^{(l)} \circ \Phi_2^{(l)} \circ \Phi_1^{(l)} \quad \left(\forall l\right) \text{'dir.}$$

O halde $i = 1,2,3$ için $\Phi_i := \oplus_l \Phi_i^{(l)}$ olmak üzere, $\Phi = \Phi_3 \circ \Phi_2 \circ \Phi_1$ olup, Φ_3, Φ_2, Φ_1 izdüşümleri gerekli şartları sağlıyor. ■

Teorem 48.

$\Re$ bir sonlu reel faktör ve $\left\{\pi, H\right\}$, $\Re$'nin aşikar, yoz olmayan $W^* -$gösterimi olsun. O zaman $\exists\, p^{/} \in P\left(\left(\lambda\left(\Re\right) \overline{\otimes} \left(\mathbb{R} \cdot \mathbb{1}_K\right)\right)^{/}\right)$ izdüşümü ve $\exists u : H \to p^{/}\left(L^2\left(\Re\right) \otimes K\right)$ üniter operatörü öyle ki;

$$u\pi\left(x\right) = \left(\lambda\left(x\right) \otimes \mathbb{1}_K\right) u, \quad \forall x \in \Re,$$

Yani, $\pi\left(\Re\right) \cong \left(\lambda\left(\Re\right) \overline{\otimes} \left(\mathbb{R} \cdot \mathbb{1}_K\right)\right) p^{/}$ yazılabilir ve sonuç olarak, $u\pi\left(\Re\right) u^* = p^{/}\left(\lambda\left(\Re\right) \overline{\otimes} \left(\mathbb{R} \cdot \mathbb{1}_K\right)\right)$ ve $u\pi\left(\Re\right)^{/} u^* = p^{/}\left(\lambda\left(\Re\right) \overline{\otimes} \left(\mathbb{R} \cdot \mathbb{1}_K\right)\right)^{/} p^{/}$'dir.

İspat:

$\Re_1 := \lambda\left(\Re\right)$ ve $\Re_2 := \pi\left(\Re\right)$ olmak üzere, $\Phi\left(\lambda\left(x\right)\right) := \pi\left(x\right)$ olarak tanımlanan $\Phi : \Re_1 \to \Re_2$ dönüşümü bir $* -$izomorfizmdir. Gerçekten;

1. Φ, bir homomorfizmdir.

$\lambda\left(x\right), \lambda\left(y\right) \in \lambda\left(\Re\right)$ olsun. $\Phi\left(\lambda\left(x\right) \cdot \lambda\left(y\right)\right) \overset{\lambda,\text{hom.}}{=} \Phi\left(\lambda\left(x \cdot y\right)\right)$

$\overset{\Phi}{=} \pi\left(x \cdot y\right) \overset{\pi,\text{hom.}}{=} \pi\left(x\right) \pi\left(y\right) \overset{\Phi}{=} \Phi\left(\lambda\left(x\right)\right) \cdot \Phi\left(\lambda\left(y\right)\right) \Rightarrow \Phi$ çarpım işlemini korur.

Öte yandan $m, n \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$\Phi\left(m\lambda(x)+n\lambda(y)\right) \overset{\lambda\_lin.}{=} \Phi\left(\lambda(mx+ny)\right) \overset{\Phi}{=} \pi(mx+ny) \overset{\pi\_lin.}{=} m\pi(x)+n\pi(y) \overset{\Phi}{=}$
$m\cdot\Phi\left(\lambda(x)\right)+n\cdot\Phi\left(\lambda(y)\right) \Rightarrow$ Φ lineerdir. Böylece, sonuç olarak Φ dönüşümü bir homomorfizmdir.

2. Φ, bire-birdir.

$\lambda(x)$, $\lambda(y)\in\lambda(\Re)$ olmak üzere, $\Phi\left(\lambda(x)\right)=\Phi\left(\lambda(y)\right)$ olsun.

$\Phi\left(\lambda(x)\right)=\Phi\left(\lambda(y)\right) \overset{\Phi}{\Rightarrow} \pi(x)=\pi(y) \Rightarrow \pi(x)-\pi(y)=\theta \overset{\pi\_lin.}{\Rightarrow} \pi(x-y)=\theta$ ve π aşikar olduğundan $(x-y)=\theta \Rightarrow x=y$ elde edilir. Öte yandan, λ bire-bir olduğundan $\lambda(x)=\lambda(y)$'dir. Sonuç olarak Φ, bire-birdir.

3. Φ, örtendir;

$\forall a\in\pi(\Re)$ için, π izomorfizm olduğundan $\exists b\in\Re$ öyle ki, $\pi(b)=a$ ve $\lambda(b)\in\lambda(\Re)=\Re_1$ olup, Φ'nin tanımı gereği, $\Phi\left(\lambda(b)\right)=\pi(b)=a$'dır. Buradan, Φ örtendir.

4. Φ, * işlemini koruyandır;

λ,π $*-$izomorfizm olduğundan, $\Phi\left(\lambda(x)^*\right)=\Phi\left(\lambda(x^*)\right) \overset{\Phi}{=} \pi(x^*)=\pi(x)^*$ $\overset{\Phi}{=}\left[\Phi\left(\lambda(x)\right)\right]^*$ elde edilir. Böylece Φ bir $*-$izomorfizmdir.

Sonuç olarak, teoremin iddiası direkt olarak Teorem 47'den elde edilir. ■

2.1.4. Reel Faktörler İçin Von Neumann Eş Sabiti Kavramı

$\Re$ bir sonlu reel faktör ve $\{\pi,H\}$ ikilisi, $\Re$'nin yoz olmayan, aşikar, W^*-gösterimi olsun. $\pi(\Re)'+i\pi(\Re)'=\pi(\Re+i\Re)'$ ve $\pi(\Re+i\Re)'$ yarı-sonlu olduğundan $\pi(\Re)'$ cebiri de yarı-sonludur. Bu durumda, Teorem 37 gereği $\pi(\Re)'_+$ üzerinde aşikar, yarı sonlu, normal izi mevcuttur. Yani; $\exists\tau:\pi(\Re)'_+\to[0,\infty]$ aşikar, yarı sonlu, normal izi.

Şimdi, $\pi(\Re)'_+$ üzerinde Tr'_H doğal izini tanımlayalım. Bu tanımı iki farklı şekilde yapacağız.

1. (Özel Durum) : Eğer, $\{\pi, H\} \overset{u=1}{=} \{\lambda \otimes \mathbb{1}_K, L^2(\Re) \otimes K\}$ (Burada K, sayılabilir sonsuz boyutlu bir reel Hilbert uzayıdır.) ise;

$$\left(\lambda(\Re)\overline{\otimes}(\mathbb{R} \cdot \mathbb{1}_K)\right)^{/} = J\,\lambda(\Re)J \,\overline{\otimes}\, B(K) \text{ sonludur.}$$

K'nın ortogonal, normal bir Hamel tabanı olarak $\{e_i\}$'yi seçelim. Bu durumda, her $t^{/} \in \left(\lambda(\Re)\overline{\otimes}(\mathbb{R} \cdot \mathbb{1}_K)\right)^{/}$ için;

$$t^{/} = \left(J\,\lambda(x_{ij})J\right)_{i,j\in\Lambda}, \; x_{ij} \in \Re, \quad \forall i, j \in \Lambda := \dim(K)$$

şeklinde tek türlü yazabiliriz. Böylece;

$$Tr^{/}_{L^2(\Re)\otimes K}\left(t^{/}\right) := \sum_i \tau(x_{ii}), \quad \forall t^{/} = \left(J\,\lambda(x_{ij})J\right) \in \left(\lambda(\Re)\overline{\otimes}(\mathbb{R} \cdot \mathbb{1}_K)\right)^{/}_{+}$$

doğal izi tanımlanabilir. Burada τ, $\Re$'nin bir tek aşikar, normal izidir. Açıkça, $Tr^{/}_{L^2(\Re)\otimes K}$ izi $\left(\lambda(\Re)\overline{\otimes}(\mathbb{R} \cdot \mathbb{1}_K)\right)^{/}_{+}$ üzerinde aşikar, yarı sonlu, normal izdir. $Tr^{/}_{L^2(\Re)\otimes K}$'nin aşikar olduğunu gösterelim:

$$Tr^{/}_{L^2(\Re)\otimes K}\left(t^{/}\right) = 0 \Leftrightarrow \sum_i \tau(x_{ii}) = 0 \overset{\tau(x_{ii})\geq 0}{\Leftrightarrow} \tau(x_{ii}) = 0, \quad \forall i \text{ için.}$$

$$\overset{\tau\_aşikar}{\Leftrightarrow} \quad x_{ii} = 0, \quad \forall i \text{ olduğundan } Tr^{/}_{L^2(\Re)\otimes K} \text{ izi aşikardır.}$$

Eğer, $\{f_i\}$, K'nin bir başka ortogonal, normal (Hamel) tabanı ve $t^{/} = \left(J\,\lambda(x_{ij})J\right)_{i,j\in\Lambda}$, $t^{/}$'nin $L^2(\Re)\otimes K = \sum_i \oplus \left[L^2(\Re)\otimes f_i\right]$'ye göre matris gösterimi,

$$t^{/} = (t_{ij})\left(J\,\lambda(x_{ij})J\right)(t_{ij})^{*} \text{'dir.}$$

Burada, her i, j için $t_{ij} = \langle e_i, f_j \rangle$'dir. (t_{ij}) üniter olduğundan ve bir iz üniter operatöre göre invaryant kaldığından, yani; $Tr^{/}\left((t_{ij})\cdot(t_{ij})\right) = Tr^{/}(\bullet)$ olduğundan $Tr^{/}_{L^2(\Re)\otimes K}$'nin tanımı, $\{e_i\}$ ailesinin seçiminden bağımsızdır.

2. (Genel Durum) : $\{\pi, H\}$, $\Re$'nin yoz olmayan, aşikar, $W^* -$gösterimi olsun. Teorem 48' e göre;

$$u\pi(x)u^* = p^{/}\left(\lambda(x)\overline{\otimes}\mathbb{1}_K\right), \quad \forall x \in \Re$$

olacak şekilde bir $p^{/} \in P\left(\left(\lambda(\Re)\otimes(\mathbb{R}\cdot\mathbb{1}_K)\right)^{/}\right)$ izdüşümü, $u : H \to p^{/}\left(L^2(\Re)\otimes K\right)$ üniter operatörü ve bir K reel Hilbert uzayı vardır. Bu durumda $Tr_H^{/}$ doğal izini şöyle tanımlayalım;

$$Tr_{L^2(\Re)\otimes K}^{/}\left(t^{/}\right) := Tr_{L^2(\Re)\otimes K}^{/}\left(ut^{/}u^*\right), \quad \forall t^{/} \in \pi(\Re)_+^{/} .$$

Benzer şekilde, bu tanımın; $p^{/}$ izdüşümü ve u operatörünün seçiminden bağımız olduğu gösterilebilir.

$Tr_H^{/}$ izinin; $\pi(\Re)_+^{/}$ üzeinde bir aşikar, normal iz olduğu açıktır. Şimdi, $Tr_H^{/}$ izinin yarı-sonlu olduğunu gösterelim.

Bunun için, $\forall t^{/} \in \pi(\Re)_+^{/}$, $t^{/} \neq 0$ olsun. $Tr_{L^2(\Re)\otimes K}^{/}$ yarı-sonlu olduğundan $\exists a^{/} \in \left(\lambda(\Re)\overline{\otimes}(\mathbb{R}\cdot\mathbb{1}_K)\right)_+^{/}$ öyle ki $a^{/} \neq 0, \quad a^{/} \leq ut^{/}u^*$ ve $Tr_{L^2(\Re)\otimes K}^{/}\left(a^{/}\right) < \infty$'dur. Açıkça,

$$a^{/} \in p^{/}\left(\lambda(\Re)\overline{\otimes}(\mathbb{R}\cdot\mathbb{1}_K)\right)_+^{/} p^{/} = u\pi(\Re)^{/}u^* \text{'dir.}$$

O halde, $s^{/} := u^*a^{/}u$ olarak tanımlanan $s^{/}$ için $s^{/} \in \pi(\Re)_+^{/}$ ve $s^{/} \leq u^*\left(ut^{/}u^*\right)u = t^{/}$ olup $Tr_H^{/}\left(s^{/}\right) := Tr_{L^2(\Re)\otimes K}^{/}\left(a^{/}\right) < \infty$'dir. Buradan, $Tr_H^{/}$ izi yarı-sonludur.

Tanım 24: $\Re$ bir sonlu reel faktör ve $\{\pi, H\}$, $\Re$'nin yoz olmayan, aşikar, $W^* -$gösterimi olmak üzere,

$$\dim_{\Re}(H) := Tr^{/}(\mathbb{1})$$

sayısına $\pi(\Re)$ ve $\pi(\Re)^{/}$ cebirleri arasındaki Reel Von Neumann Eş Sabiti denir.

2.1.5 . Reel Von Neumann Eş Sabitinin Özellikleri

Bu bölümde, $\Re$ bir sonlu reel faktör olmak üzere, Reel Von Neumann Eş Sabitinin; özellikleri ispatlanacaktır.

Lemma 4 [21].

$\{\pi_i, H_i\}_{i=1}^{\infty}$ $\Re$ 'nin aşikar, yoz olmayan W^*-gösterimler ailesi ise, $\left\{ \pi := \underset{i}{\oplus} \pi_i ,\, H := \underset{i}{\oplus} H_i \right\}$ ikilisi de $\Re$'nin aşikar, yoz olmayan W^*-gösterimidir.

Teorem 49 (Toplamsallık).

$\Re$ bir sonlu reel faktör olmak üzere $\{\pi_i, H_i\}_{i=1}^{\infty}$ $\Re$ 'nin aşikar, yoz olmayan W^*-gösterimler ailesi ise

$$\dim_{\Re}\left(\underset{i}{\oplus} H_i\right) = \sum_i \dim_{\Re}\left(H_i\right) \text{'dir.}$$

İspat :

$\pi := \underset{i}{\oplus} \pi_i$ ve $H := \underset{i}{\oplus} H_i$ olsun. Yani, π şöyle tanımlanır;

$$\pi(\Re) \subset B(H) : \forall x \in \Re \text{ için } \pi(x) := \underset{i}{\oplus} \pi_i(x)$$

Teorem 48'e göre; $\exists p' \in P\left(\left(\lambda(\Re)\overline{\otimes}(\mathbb{R}\cdot \mathbb{1}_K)\right)'\right)$ ve $\exists u \; : H \to p'\left(L^2(\Re)\otimes K\right) \; : u^*u = \mathbb{1}$,

$p' = uu^*$ ve $u\pi(x) = \left(\lambda(x)\otimes \mathbb{1}_K\right)u$ 'dir. (13)

Ayrıca, $\dim_{\Re}\left(\underset{i}{\oplus} H_i\right) = \dim_{\Re}(H) = Tr'_H\left(\mathbb{1}_H\right)$

$$= Tr'_{L^2(\Re)\otimes K}\left(uu^*\right) = Tr'_{L^2(\Re)\otimes K}\left(p'\right) \text{ elde edilir.} \quad (14)$$

i keyfi ve sabit olmak üzere, $q_i := H \to H_i$ öyle ki $\forall \xi = \underset{i}{\oplus} \xi_i \in H = \underset{i}{\oplus} H_i$ için

$$q_i(\xi) = \xi_i \text{ doğal izdüşümünü ele alalım.}$$

Açıkça, $i \neq j$ için $q_i q_j = 0$'dir. Çünkü; $\left(q_i q_j\right)(\xi) = q_i\left(q_j \xi\right) = q_i\left(\xi_j\right) = 0$ dir. Öte yandan, $\left(\sum_i q_i\right)(\xi) = \left(\sum_i q_i\right)\left(\underset{i}{\oplus} \xi_i\right) = \underset{i}{\oplus} \xi_i = \xi$ olduğundan $\sum_i q_i = \mathbb{1}$'dir.

Böylece, $q_i \cdot q_j \overset{i\neq j}{=} 0$ ve $\sum_i q_i = \mathbb{1}$ elde edilir. (15)

$u_i := uq_i$ ve $p_i' := u_i u_i^*$ ile gösterelim.

Şimdi, $q_i \in \pi(\Re)^{/}$ olduğunu gösterelim. Bunun için $\forall x \in \Re$ ve $\forall \xi \in \underset{k}{\oplus} \xi_k \in H$ alınsın.

$$q_i \pi(x)\xi = q_i \pi(x)\Big(\underset{k}{\oplus}\xi_k\Big) = \pi_i(x)\xi_i \text{ olup tersine; } \pi(x) q_i \xi = \pi(x) q_i \Big(\underset{k}{\oplus}\xi_k\Big)$$

$$= \underset{k}{\oplus}\pi_k(x) q_i \xi_k = \pi_i(x)\xi_i, \text{ “} q_i \underset{k}{\oplus}\xi_k = \underset{k}{\oplus} q_i \xi_k = \xi_i \text{”}$$

Buradan, $q_i \pi(x)\xi = \pi(x) q_i \xi \overset{\forall\xi,\forall x}{\Rightarrow} q_i \pi(\Re) = \pi(\Re) q_i \Rightarrow q_i \in \pi(\Re)^{/}$ elde edilir.

$$u_i^* u_i = (uq_i)^*(uq_i) = q_i \underbrace{\left(u^* u\right)}_{\mathbb{1}} q_i = q_i \mathbb{1} q_i = q_i q_i = q_i^{\,2} = q_i \Rightarrow q_i \in \pi(\Re)^{/} \text{ ve } q_i = u_i^* u_i \quad (16)$$

Şimdi, $u_i \pi_i(x) = \left(\lambda(x)\overline{\otimes}\mathbb{1}_K\right) u_i$ olduğunu gösterelim. Açıkça, $q_i \pi(x) = q_i \pi_i(x)$'dir.

$$u_i \pi_i(x) \overset{u_i = uq_i}{=} uq_i \pi_i(x) = u\, q_i \pi(x) \overset{(16)}{=} u\, \pi(x) q_i \overset{(13)}{=} \left(\lambda(x)\overline{\otimes}\mathbb{1}_K\right) uq_i = \left(\lambda(x)\overline{\otimes}\mathbb{1}_K\right) u_i$$

$\Rightarrow u_i \pi_i(x) = \left(\lambda(x)\overline{\otimes}\mathbb{1}_K\right) u_i$'dir. (17)

Şimdi, $p_i^{/} \in P\left(\left(\lambda(\Re)\overline{\otimes}\left(\mathbb{R}\cdot\mathbb{1}_K\right)\right)^{/}\right)$ olduğunu gösterelim.

$p_i^{/} p_i^{/} = \left(u_i u_i^*\right)\left(u_i u_i^*\right) = u_i^* u_i\, u_i u_i^* = u_i \;\mathbb{1}\; u_i^* = u_i u_i^* = p_i^{/}$ ve

$\left(p_i^{/}\right)^* = \left(u_i u_i^*\right)^* = u_i u_i^* = p_i^{/}$ olduğundan, $p_i^{/}$ bir izdüşümdür. Öte yandan,

$p_i^{/} = u_i u_i^* \overset{u_i = uq_i}{=} (uq_i)(uq_i)^* = u\, q_i q_i\, u^* = uq_i u^*$ olduğundan;

$$p_i^{/}\left(\lambda(x)\overline{\otimes}\mathbb{1}_K\right) p_i^{/} = uq_i u^*\left(\lambda(x)\overline{\otimes}\mathbb{1}_K\right) uq_i u^* = uq_i \underbrace{\left[u^*\left(\lambda(x)\overline{\otimes}\mathbb{1}_K\right)u\right]}_{\pi(x)} q_i u^*$$

$$\overset{(13)}{=} uq_i\, \pi(x)\, q_i u^* \overset{(16)}{=} u\, \pi(x)\, q_i\, q_i\, u^* = u\, \pi(x)\, q_i\, u^* \overset{(13)}{=} \left(\lambda(x)\overline{\otimes}\mathbb{1}_K\right) uq_i u^*$$

$$= \left(\lambda(x)\overline{\otimes}\mathbb{1}_K\right) p_i^{/} \Rightarrow p_i^{/} \in \left(\lambda(\Re)\overline{\otimes}\left(\mathbb{R}\cdot\mathbb{1}_K\right)\right)^{/} \quad (18)$$

Böylece, (17) ve (18)'den $\exists p^{/} \in P\left(\left(\lambda(\Re)\overline{\otimes}\left(\mathbb{R}\cdot\mathbb{1}_K\right)\right)^{/}\right)$ ve $\exists\, u_i : H_i \to \left(L^2(\Re)\otimes K\right) p_i^{/}$ üniter operatör öyle ki,

$$p_i = u_i u_i^*,\; u_i^*\, u_i = \mathbb{1}_{H_i} \text{ ve } u_i\, \pi_i(x) = \left(\lambda(x)\overline{\otimes}\mathbb{1}_K\right) u_i \text{'dir.}$$

Buradan, $\pi_i(\Re) \overset{u_i}{\cong} \left(\lambda(\Re)\overline{\otimes}\left(\mathbb{R}\cdot\mathbb{1}_K\right)\right)$ elde edilir. Dolayısıyla,

$\dim_R(H_i) = Tr^{/}_{L^2(\mathfrak{R})\otimes K}(u_i u_i^*) = Tr^{/}_{L^2(\mathfrak{R})\otimes K}(p_i^{/})$’dir. (19)

Diğer yandan, $p_i^{/}\, p_j^{/} = uq_iu^*\, uq_ju^* = u\, q_i\, \mathbb{1}\, q_ju^* = u\, q_i\, q_ju^* \overset{(15)}{=} \delta_{ij}\, p_i^{/}$ ‘dir. Ayrıca, $\sum_i p_i^{/} = \sum_i uq_iu^* = u\left(\sum_i q_i\right)u^* \overset{(15)}{=} u\, \mathbb{1}\, u^* = u\, u^* \overset{(13)}{=} p^{/}$ ‘dir. Yani, $i \neq j$ için $p_i^{/} \perp p_j^{/}$ olup $\sum_i p_i^{/} = p^{/}$’dir. (20)

Böylece; (14) , (19) , (20) ve izin toplanabilirlik özelliği (τ bir iz olmak üzere, $e_n \perp e_m, (n \neq m)$ olan $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ izdüşümler ailesi için, $\tau\left(\sum e_n\right) = \sum \tau(e_n)$’dir.) gereği;

$$\sum_i \dim_R(H_i) \overset{(19)}{=} \sum_i Tr^{/}_{L^2(\mathfrak{R})\otimes K}(p_i)^{/} = Tr^{/}_{L^2(\mathfrak{R})\otimes K}\left(\sum_i p_i^{/}\right)$$

$$\overset{(20)}{=} Tr^{/}_{L^2(\mathfrak{R})\otimes K}(p_i^{/}) \overset{(14)}{=} \dim_{\mathfrak{R}}(H) = \dim_{\mathfrak{R}}\left(\bigoplus_i H_i\right)$$ elde edilir ve böylece,

$$\sum_i \dim_R(H_i) = \dim_{\mathfrak{R}}\left(\bigoplus_i H_i\right)\text{’dir.} \blacksquare$$

Teorem 50.

$\mathfrak{R}$ bir sonlu reel faktör olmak üzere, $\{\pi_1, H_1\}$ ve $\{\pi_2, H_2\}$, $\mathfrak{R}$’nin aşikar, yoz olmayan iki W^* – gösterimi olsun. Bu durumda,

$$\dim_{\mathfrak{R}}(H_1) = \dim_{\mathfrak{R}}(H_2) \iff \{\pi_1, H_1\} \cong \{\pi_2, H_2\}\text{’dir.}$$

İspat:

Teorem 48’e göre, $\{\pi_1, H_1\}$ ve $\{\pi_2, H_2\}$ gösterimleri için sırasıyla; $p_1^{/}\ ,\ p_2^{/} \in \left(\lambda(\mathfrak{R})\overline{\otimes}(\mathbb{R}\cdot\mathbb{1}_K)\right)^{/}$ izdüşümleri ve $u_i : H_i \to \left(L^2(\mathfrak{R})\otimes K\right)p_i^{/}$, $(i = 1, 2)$ üniter operatörleri mevcuttur, öyle ki $u_i^*u_i = \mathbb{1}_H$, $u_iu_i^* = p_i^{/} \in \left(\lambda(\mathfrak{R})\overline{\otimes}(\mathbb{R}\cdot\mathbb{1}_K)\right)^{/}$ ve $u_i\, \pi_i(\mathfrak{R})\, u_i^* = p_i^{/}\left(\lambda(\mathfrak{R})\overline{\otimes}(\mathbb{R}\cdot\mathbb{1}_K)\right)$’dir. O halde,

$$\dim_{\mathfrak{R}}(H_1) = \dim_{\mathfrak{R}}(H_2) \iff Tr^{/}_{L^2(\mathfrak{R})\otimes K}(u_1 u_1^*) = Tr^{/}_{L^2(\mathfrak{R})\otimes K}(u_2 u_2^*)$$

$$\iff Tr^{/}_{L^2(\mathfrak{R})\otimes K}(p_1^{/}) = Tr^{/}_{L^2(\mathfrak{R})\otimes K}(p_2^{/})$$

$$\overset{T36}{\Leftrightarrow}\ p_1^{/} \sim \ p_2^{/}\text{'dir.}$$

Teorem 48'e göre,

$$\{\pi_1, H_1\} \cong \left\{ (\lambda \otimes \mathbb{1}_K) p_1^{/},\ p_1^{/}\left(L^2(\mathfrak{R}) \otimes K\right)\right\}$$

ve

$$\{\pi_2, H_2\} \cong \left\{ (\lambda \otimes \mathbb{1}_K) p_2^{/},\ p_2^{/}\left(L^2(\mathfrak{R}) \otimes K\right)\right\}$$

olduğundan,

$$p_1^{/} \sim \ p_2^{/} \ \Leftrightarrow\ \{\pi_1, H_1\} \cong \{\pi_2, H_2\}\text{'dir.} \blacksquare$$

Teorem 51.

$\mathfrak{R}$ bir sonlu reel faktör olmak üzere, $\dim_{\mathfrak{R}}\left(L^2(\mathfrak{R})\right) = 1$'dir. Yani, $\mathfrak{R}$'nin kanonik gösteriminin eş sabiti 1'dir.

İspat:

$\forall a \in L^2(\mathfrak{R}),\ \forall \xi \in K\ :\ \|\xi\| = 1$ olsun. $u\ :\ L^2(\mathfrak{R}) \to\ L^2(\mathfrak{R}) \otimes\ [\xi]$ operatörünü şöyle tanımlayalım; $u(a) := a\ \otimes\ \xi$, " Burada, $[\xi]\ :=\ \{\mu\xi \mid \mu \in \mathbb{R}\}$; ξ yi içeren en dar vektör uzayıdır. Bu da ξ nin reel lineer zarfı demektir."

$u^*:\ L^2(\mathfrak{R}) \otimes\ [\xi]\ \to\ L^2(\mathfrak{R})$ için $u^*(b \otimes \mu\xi)\ =\ \mu \cdot b$ olduğunu gösterelim.

$$\langle\, a \otimes \xi,\, b \otimes \mu\xi\,\rangle_2 = \langle u(a), b \otimes \mu\xi\rangle_2 = \langle a \otimes \xi, b \otimes \mu\xi\rangle_2 = \langle\, a,\, u^*(b \otimes \mu\xi)\,\rangle_1 \text{ ve}$$

$$\langle\, a \otimes \xi,\, b \otimes \mu\xi\,\rangle_2 = \langle a,b\rangle_1 \cdot \langle \xi, \mu\xi\rangle_k = \langle a,b\rangle_1 \cdot \mu \langle \xi, \xi\rangle_k = \langle a,b\rangle_1 \cdot \ \mu\|\xi\|^2$$

$$= \ \mu\ \ \langle a,b\rangle_1 \quad \text{olduğundan} \quad \mu\ \ \langle a,b\rangle_1 \ = \ \langle a, u^*(b \otimes \mu\xi)\rangle_1 \text{'dir.}$$

Buradan, $u^*(b \otimes \mu\xi)\ =\ \mu \cdot b$'dir. Açıkça, $u u^*(b \otimes \mu\xi)\ =\ u(\mu b)\ =\ \mu b \otimes \xi\ =\ b \otimes \mu\xi$ ve $u^* u(a)\ =\ u^*(\, a \otimes \xi\,) = a$'dir. Dolayısıyla, $u^* u\ =\ \mathbb{1}$ ve $u\, u^* =\ p^{/}$'dir. Burada $p^{/}$: $L^2(\mathfrak{R}) \otimes\ K\ \to\ L^2(\mathfrak{R}) \otimes\ [\xi]$ doğal izdüşümdür.

Şimdi, $p^{/} \in\ \left(\lambda(\mathfrak{R}) \overline{\otimes} (\mathbb{R} \cdot \mathbb{1}_K)\right)^{/}$ olduğunu göstermeliyiz. Yani,

$\forall \quad \lambda(x)\otimes \mathbb{1}_K \quad \in \left(\lambda(\Re)\overline{\otimes}(\mathbb{R}\cdot\mathbb{1}_K)\right)$ için $p^{/}\left(\lambda(x)\otimes\mathbb{1}_K\right) = \left(\lambda(x)\otimes\mathbb{1}_K\right)p^{/}$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için, $\forall\eta\in L^2(\Re)$ ve $\forall\eta^{/}\in K$ alınsın. O halde;

$p^{/}\left(\lambda(x)\overline{\otimes}\mathbb{1}_K\right)\left(\eta\otimes\eta^{/}\right) = p^{/}\left(\lambda(x)\eta\otimes\mathbb{1}_K\eta^{/}\right) = p^{/}\left(\lambda(x)\eta\otimes\eta^{/}\right) \overset{p^{/}}{=} \lambda(x)\eta\otimes\mu\cdot\xi$ ve

$\left(\lambda(x)\overline{\otimes}\mathbb{1}_K\right)p^{/}\left(\eta\otimes\eta^{/}\right) \overset{p^{/}}{=} \left(\lambda(x)\overline{\otimes}\mathbb{1}_K\right)\left(\eta\otimes\mu\xi\right) = \lambda(x)\eta\otimes\mathbb{1}_K\mu\xi$ olduğundan

$$p^{/}\in\left(\lambda(\Re)\overline{\otimes}(\mathbb{R}\cdot\mathbb{1}_K)\right)^{/} \text{ elde edilir.}$$

Şimdi, $u\,\lambda(\Re)\,u^* = \left(\lambda(\Re)\overline{\otimes}(\mathbb{R}\cdot\mathbb{1}_K)\right)p^{/}$ olduğunu gösterelim. Bunun için $\forall a\in L^2(\Re)$ ve $\forall\ \mu\xi\in[\xi]$ alınsın.

$$u\,\lambda(x)\,u^*\left(a\otimes\mu\xi\right) = u\,\lambda(x)\left(\mu a\right) = \mu\ u\left(\lambda(x)a\right) = \mu\cdot\left(\lambda(x)a\otimes\xi\right)$$

$$= \lambda(x)a\otimes\mu\xi \text{ ve diğer taraftan}$$

$$\left(\lambda(x)\overline{\otimes}\mathbb{1}_K\right)p^{/}\left(a\otimes\mu\xi\right) = \left(\lambda(x)\overline{\otimes}\mathbb{1}_K\right)\left(a\otimes\mu\xi\right) = \lambda(x)a\otimes\mu\xi \text{ olup, buradan}$$

$u\,\lambda(x)\,u^*\left(a\otimes\mu\xi\right) = \left(\lambda(x)\overline{\otimes}\mathbb{1}_K\right)p^{/}\left(a\otimes\mu\xi\right)$ elde edilir. sonuçta;

$$u\,\lambda(x)\,u^* = \left(\lambda(x)\overline{\otimes}\mathbb{1}_K\right)p^{/}\text{'dir.}$$

Böylece, x keyfi olduğundan, $u\,\lambda(\Re)\,u^* = \left(\lambda(\Re)\overline{\otimes}(\mathbb{R}\cdot\mathbb{1}_K)\right)p^{/}$ elde edilmiş olur.

Sonuç olarak, $u : L^2(\Re)\to L^2(\Re)\otimes[\xi]$, $u(a) := a\otimes\xi$ üniter operatörü ve $p^{/} = u\,u^*$ ile tanımlanan $p^{/}$ izdüşümü için Teorem 48'in iddiası doğrudur. Böylece, $\left\{\lambda, L^2(\Re)\right\}$, $\Re$'nin aşikar, yoz olmayan bir reel W^* gösterimidir. O halde, eş sabiti tanımına göre, $\dim_{\Re}\left(L^2(\Re)\right) := Tr^{/}_{L^2(\Re)\otimes K}\left(p^{/}\right)$ olur.

Diğer taraftan, K bir reel Hilbert uzayı olduğundan, $e_1 := \xi$ olmak üzere $\exists\ e_2$, $e_3\ldots\in K$ vektörler sistemi öyle ki, $\{e_i\}_{i\in\Lambda}$,$\left(\Lambda := \dim(K)\right)$ailesi K için bir Hamel tabanıdır. Bu durumda, $p^{/}$'nün matris gösterimini şöyle elde edebiliriz:

$p^{/}\in\left(\lambda(\Re)\overline{\otimes}(\mathbb{R}\cdot\mathbb{1}_K)\right)^{/} = \lambda(\Re)^{/}\ \overline{\otimes}\ \left(\mathbb{R}\cdot\mathbb{1}_K\right)^{/} = \left(J\,\lambda(\Re)J\right)\overline{\otimes}\,B(K)$

$$\Rightarrow\ p^{/} = \left(J\,\lambda\left(x_{ij}\right)J\right)_{i,j\in\Lambda}\text{'dir.}$$

burada, $u_i\ (a) := a\otimes e_i$ olmak üzere, $x_{ij} = u_i^*\,p^{/}u_j$'dir. Bu durumda;

$$x_{ij}\left(a\right)= u_i^* p^{/} u_j\left(a\right) = u_1^* \; p^{/}\left(a\otimes e_j\right)\text{'dir.}$$

$j\neq 1$ için, $e_j\notin\left[\xi\right]$ olduğundan $p^{/}$'nün tanımına göre $j\neq 1$ için $p^{/}\left(a\otimes e_j\right) = 0$'dır.

$j=1$ için $p^{/}\left(a\otimes e_1\right) = p^{/}\left(a\otimes\xi\right) = a\otimes\xi$ olduğundan,

$$x_{i1}\left(a\right) = u_i^* p^{/} u_1\left(a\right) = u_i^*\left(a\otimes\xi\right)\text{'dir.}$$

Aynı düşünce ile $i\neq 1$ için de, $u_i^*\left(a\otimes\xi\right) = 0$'dır. $i=1$ için ise,

$$u_i^*\left(a\otimes\xi\right) = a\text{'dır.}$$

Dolayısıyla, $x_{11} = \mathbb{1}_{\Re}$, $x_{ij} = 0 \;\left(i,j\right)\neq\left(1,1\right)$'dir. Buradan,

$$p^{/} = \left(J\,x_{ij}\,J\right)_{i,j\in\Lambda} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & & \\ 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} \text{ olup,}$$

$$\dim_{\Re}\left(L^2\left(\Re\right)\right) = Tr^{/}_{L^2(\Re)\otimes K}\left(u\,u^*\right) = Tr^{/}_{L^2(\Re)\otimes K}\left(p^{/}\right) = \sum_{i\in\Lambda}\tau\left(x_{ii}\right)$$

$$= \tau\left(\mathbb{1}\right)+\tau\left(0\right)+\tau\left(0\right)+\dots+\dots = \tau\left(\mathbb{1}\right)=1$$

$$\Rightarrow \dim_{\Re}\left(L^2\left(\Re\right)\right) = 1\text{'dir.} \blacksquare$$

Teorem 52.

$\Re$ bir sonlu reel faktör ve $\left\{\pi,H\right\}$, $\Re$'nin yoz olmayan, aşikar, W^*-gösterimi olmak üzere,

$$\pi\left(\Re\right)^{/} \text{ sonludur} \Leftrightarrow Tr^{/}\left(\bullet\right) \text{ sonludur} \Leftrightarrow \dim_{\Re}\left(H\right) < \infty\text{'dir.}$$

İspat:

$\pi\left(\Re\right)^{/} = \left(\lambda\left(\Re\right)\overline{\otimes}\left(\mathbb{R}\cdot\mathbb{1}_K\right)\right)^{/}$ ve $\mathbb{1}_{\left(\lambda(\Re)\overline{\otimes}(\mathbb{R}\mathbb{1}_K)\right)^{/}} = p^{/} = u\,u^*$ olduğundan $\pi\left(\Re\right)^{/}$ sonludur $\Leftrightarrow$ $p^{/}$ sonludur. Öte yandan, $p^{/}$ sonludur $\Leftrightarrow$ $Tr^{/}_{L^2(\Re)\otimes K}\left(p^{/}\right) < \infty$'dur.

∇ τ bir iz olmak üzere, eğer τ sonlu ise, $\forall\, x\in\Re_+$ için $\tau\left(x\right)<\infty$ olduğundan $\tau\left(\mathbb{1}\right)<\infty$'dur. Tersine, eğer; $\exists\, x\in\Re_+$ öyle ki $\tau\left(x\right) = \infty$ ise, $\mathbb{1}-x\geq 0$, $\tau\left(\mathbb{1}-x\right)\geq 0$ ve τ

lineer olduğundan $0 \leq \tau(\mathbb{1}-x) = \tau(\mathbb{1}) - \tau(x)$'dir. Buradan; $\infty = \tau(x) \leq \tau(\mathbb{1})$, yani; $\tau(\mathbb{1}) = \infty$'dur. Sonuç olarak; τ sonludur $\Leftrightarrow$ $\tau(\mathbb{1}) < \infty$'dur. Δ

Buradan $\dim_{\Re}(H) = Tr^{/}_{L^2(\Re)\otimes K}(p^{/}) < \infty$'dur. ■

Örnek 52.

$\Re = M_n(\mathbb{R}) \subset B(H)$, $\dim(H) = m$ olsun. Bu durumda $\dim_{\Re}(H)$'yi araştıralım.

$\Re = M_n(\mathbb{R})$ reel W^* cebiri (bkz. Not 3) olup $B(H)$'nin alt cebiri olduğundan, $n|m$ 'dir. Bu durumda, $\exists\, p \in \mathbb{N}$ öyle ki $m = p \cdot n$ 'dir. O halde, $H_m := H$, $H_n \cong \mathbb{R}^n$, $H_p \cong \mathbb{R}^p$ olmak üzere,

$$H_m := H_n \otimes H_p \text{'dir.}$$

Gerçekten, $\forall \xi \in H = H_m$ için, $m = p \cdot n$ olduğundan,

$\xi = \overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}} \xi_i$, $(\xi_i \in H_n)$ veya $\xi = \overset{n}{\underset{j=1}{\oplus}} \xi'_j$, $(\xi'_j \in H_p)$'dir. Bu durumda;

$$H = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} H_p = \overset{p}{\underset{j=1}{\oplus}} H_n \text{ elde edilir.} \qquad (21)$$

$\forall\ \xi \otimes \eta \in H_m := H_n \otimes H_p$ olsun. $(e_i)_{i=1}^{p}$ ailesi H_p uzayının bir Hamel tabanı olmak üzere, $\eta = \overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}} \lambda_i e_i$ olduğundan,

$$\xi \otimes \eta = \overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}} (\xi \otimes \lambda e_i) \text{'dir.} \qquad (22)$$

$H^i := \{\xi \otimes e_i : \xi \in H_n\}$ için, $H^i \overset{f}{\cong} H_n$ olduğu açıktır. ($f : \xi \otimes e_i = \xi$ şeklinde tanımlanır.) Böylece, (22)'ye göre;

$$\xi \otimes \eta \in \overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}} H^i \Rightarrow H_m := H_n \otimes H_p \subset \overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}} H^i \text{ elde edilir.} \qquad (23)$$

Tersine; $\forall \gamma \in \bigoplus_{i=1}^{p} H^i \Rightarrow \gamma = \bigoplus_{i=1}^{p}\left(\xi_i \otimes e_i\right) = \left(\xi_1 \otimes e_1\right) \oplus \cdots \oplus \left(\xi_p \otimes e_p\right) \in H_n \otimes H_p$,

çünkü; $\forall \left(\xi_i \otimes e_i\right) \in H_n \otimes H_p$ ve "$\oplus$" işlemi Hilbert uzaylarında kapalı olduğundan $\gamma \in H_n \otimes H_p$'dir. Böylece, $\bigoplus_{i=1}^{p} H^i \subset H_n \otimes H_p$ elde edilir. (24)

Sonuçta, (23) ve (24)'den ;

$$H_n \otimes H_p = \bigoplus_{i=1}^{p} H^i$$

elde edilir. Diğer taraftan, $H^i \overset{f}{\cong} H_n$ olduğundan,

$$H_n \otimes H_p = \bigoplus_{i=1}^{p} H^i \cong \bigoplus_{j=1}^{p} H_n \overset{(21)}{=} H \Rightarrow H_n \otimes H_p \cong H$$

elde edilir.

$\mathfrak{R} \subset B(H) = B\left(H_n \otimes H_p\right) \Rightarrow \mathfrak{R} = B\left(H_n\right) \otimes \mathbb{1}_p$'dir. $\forall \xi (\neq 0) \in H_n$, $\forall \eta (\neq 0) \in H_p$ seçelim. $\forall \gamma = \xi \otimes \eta \in H_n \otimes H_p = H$ olsun.

$e_\gamma = e_{\xi\otimes\eta} : H \to \overline{\mathfrak{R}^{/}\gamma}$ ve $e_\gamma^{/} = e_{\xi\otimes\eta}^{/} : H \to \overline{\mathfrak{R}\gamma}$ olduğundan,

$$e_\gamma = e_{\xi\otimes\eta} : H = H_n \otimes H_p \to \overline{\mathfrak{R}^{/}\left(\xi \otimes \eta\right)} \overset{(23)}{=} \overline{\left(B\left(H_n \otimes \mathbb{1}_p\right)^{/}\left(\xi \otimes \eta\right)\right)}$$

$$= \overline{\left(B\left(H_n\right)^{/} \otimes \left(\mathbb{1}_p\right)^{/}\right)\left(\xi \otimes \eta\right)} = \overline{\left(\mathbb{1}_n \otimes B\left(H_p\right)\right)\left(\xi \otimes \eta\right)}$$

$= \overline{\left(\mathbb{1}_n \xi \otimes B\left(H_p\right)\eta\right)} = \overline{\xi \otimes H_p} = [\xi] \otimes H_p$ elde edilir ve buradan;

$p_\xi : H_n \to [\xi]$ doğal izdüşüm olmak üzere, $e_{\xi\otimes\eta} : H \to [\xi] \otimes H_p \Rightarrow e_{\xi\otimes\eta} = p_\xi \otimes \mathbb{1}_p$ olur.

$$e_\gamma^{/} : H = H_n \otimes H_p \to \overline{\mathfrak{R}\gamma} \overset{(23)}{=} \overline{\left(B\left(H_n\right) \otimes \mathbb{1}_p\right)\left(\xi \otimes \eta\right)} = \overline{H_n \otimes \eta} = H_n \otimes [\eta]$$

$$\Rightarrow e_\gamma^{/} = e_{\xi\otimes\eta}^{/} : H_n \otimes H_p \to H_n \otimes [\eta]$$

$\Rightarrow e_{\xi\otimes\eta}^{/} = \mathbb{1}_n \otimes p_\eta$'dir. $\left(p_n : H_p \to [\eta]\right)$

$\tau\left(e_{\xi\otimes\eta}\right) = \tau\left(p_\xi \otimes \mathbb{1}_p\right) = \tau\left(p_\xi\right) \cdot \tau\left(\mathbb{1}_p\right) = \tau\left(p_\xi\right)$ ve

$\tau^{/}\left(e_{\xi\otimes\eta}^{/}\right) = \tau^{/}\left(\mathbb{1}_n \otimes p_\eta\right) = \tau^{/}\left(\mathbb{1}_n\right) \cdot \tau^{/}\left(p_\eta\right) = \tau^{/}\left(p_\eta\right)$'dir. (25)

$$\mathbb{1}(H) = H, \ \mathbb{1} := \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbb{1}(\xi) = \mathbb{1}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \xi$$

$p_\xi : H_n \to [\xi]$ izdüşümü için $p_\xi \in B(H_n) \cong M_n(\mathbb{R})$ olup, p_ξ izdüşümünün de bir matris gösterimi vardır. Bu matris gösterimi, sadece bir elemanı 1 ve diğer tüm elemanları 0 olan bir köşegen matris şeklindedir. Yani;

$$p_\xi = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}; \ \exists!\, i \in \{1,2,\cdots,n\} \text{ öyle ki, } a_i = 1 \text{ ve } \forall j \neq i \text{ için } a_j = 0\text{'dir.}$$

Bu durumda, $\tau(p_\xi) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tau(p_\xi^{\ ii}) = \frac{1}{n}\cdot\underbrace{(0+\cdots+0+1+0+\cdots0)}_{n\ defa} = \frac{1}{n}$ ve benzer şekilde,

$$\tau^{/}(p_\eta) = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p}\tau^{/}(p_\eta^{\ jj}) = \frac{1}{p}\underbrace{(0+\cdots+0+1+0+\cdots0)}_{p\ defa} = \frac{1}{p} \text{ elde edilir.} \qquad (26)$$

Böylece,

$$\dim_{\Re}(H) = \dim_{\Re}(H) = \dim_{\Re}(H_n \otimes H_p) = \frac{\tau(e_{\xi\otimes\eta})}{\tau^{/}(e^{/}_{\xi\otimes\eta})} \overset{(25)}{=} \frac{\tau(p_\xi)}{\tau^{/}(p_\eta)} \overset{(26)}{=} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{p}} = \frac{p}{n}$$

elde edilir. Yani;

$$\dim_{\Re}(H) = \frac{p}{n}\text{'dir.} \ \blacksquare$$

Örnek 52'nin sonucundan, aşağıdaki gibi irdelemeler yapabiliriz.

- $\dim_{B(\mathbb{R}^3)}(\mathbb{R}^{12}) = \frac{4}{3}$; $B(\mathbb{R}^3) \cong M_3(\mathbb{R}) \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(B(\mathbb{R}^3)) = \dim_{\mathbb{R}}(M_3(\mathbb{R})) = 3$,

  $B(\mathbb{R}^3) \subset B(\mathbb{R}^{12})$ ve $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{12}) = 12$ olduğundan, $m = 12$, $n = 3$, $p := \frac{m}{n} = \frac{12}{3} = 4$.

- $\dim_{B(\mathbb{R}^4)}(\mathbb{R}^{12}) = \frac{3}{4}$; $B(\mathbb{R}^4) \cong M_4(\mathbb{R}) \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(B(\mathbb{R}^4)) = \dim_{\mathbb{R}}(M_4(\mathbb{R})) = 4$,

  $B(\mathbb{R}^4) \subset B(\mathbb{R}^{12})$ ve $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{12}) = 12$ olduğundan, $m = 12$, $n = 4$, $p := \frac{m}{n} = \frac{12}{4} = 3$.

- ❖ $\dim_{B(\mathbb{R})}\left(\mathbb{R}^2\right) = 2$; $B(\mathbb{R}) \cong M(\mathbb{R})$ $\Rightarrow$ $\dim_{\mathbb{R}}\left(B(\mathbb{R})\right) = \dim_{\mathbb{R}}\left(M(\mathbb{R})\right) = 1$,

  $B(\mathbb{R}) \subset B\left(\mathbb{R}^2\right)$ ve $\dim_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^2\right) = 2$ olduğundan, $m = 2$, $n = 1$, $p := \frac{m}{n} = \frac{2}{1} = 2$.

- ❖ $\dim_{B(\mathbb{R})}\left(\mathbb{R}^3\right) = 3$; $B(\mathbb{R}) \cong M(\mathbb{R})$ $\Rightarrow$ $\dim_{\mathbb{R}}\left(B(\mathbb{R})\right) = \dim_{\mathbb{R}}\left(M(\mathbb{R})\right) = 1$,

  $B(\mathbb{R}) \subset B\left(\mathbb{R}^3\right)$ ve $\dim_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^3\right) = 3$ olduğundan, $m = 3$, $n = 1$, $p := \frac{m}{n} = \frac{3}{1} = 3$.

- ❖ Daha genel olarak, $\dim_{B(\mathbb{R})}\left(\mathbb{R}^n\right) = n$ ve $\dim_{B(\mathbb{R})}\left(\mathbb{R}\right) = 1$ elde edilir.

3. SONUÇLAR

Reel W^*-cebirleri için Von Neumann Eş Sabitinin araştırıldığı bu çalışmada; sonlu reel faktörler için elde edilen sonuçları aşağıdaki gibi sıralayabiliriz. Bu sonuçların tamamı ilk olarak bu çalışmada ortaya konulmuştur.

1) Sonlu $\Re$ reel faktörü için, $\left\{\lambda, L^2\left(\Re\right)\right\}$ kanonik gösterimi elde edildi **(Sonuç 15)**.

2) Bir sonlu reel faktörün kanonik gösteriminin kompleksleştirilmesi elde edildi. Yani; $\Re$ sonlu reel faktör ve $M := \Re + i\Re$, $\Re$'nin bir kompleksleştirmesi olmak üzere, $\lambda\left(\Re\right) + i\lambda\left(\Re\right) = \lambda_c\left(\Re + i\Re\right) = \lambda_c\left(M\right)$ eşitliği elde edildi. Burada $\left\{\lambda, L^2\left(\Re\right)\right\}$ ve $\left\{\lambda_c, L^2\left(M\right)\right\}$ sırasıyla $\Re$ ve $M := \Re + i\Re$'nin kanonik gösterimidir **(Teorem 44)**.

3) Kanonik *-gösterimi için komutant teoremi ispatlandı **(Teorem 46)**.

4) Gösterim teoremleri reel durumda ispatlandı **(Teorem 47-48)**.

5) Sonlu reel faktörler için Von Neumann (V.N.) eş sabit kavramı tanımlandı **(Tanım 24)**.

6) Reel Von Neumann eş sabitinin bazı özellikleri ispat edildi. Şöyle ki, eş sabitin tam toplamsal olduğu, kendi aralarında denk olan gösterimler için değişmeyeceği, kanonik gösterimde eş sabit değerinin 1 olduğu gösterildi **(Teorem 49-52)**.

7) Reel matris cebirleri için, V.N. eş sabiti hesaplandı **(Örnek 52)**.

KAYNAKLAR

1. Ayupov Sh.A. Extension of traces and type criterions for Jordan algebras of self-adjoint operators. Mathematische Zeitscrift, (1982) 253-268.

2. Ayupov Sh.A. Types of Jordan algebras of self-adjoint operators and their enveloping von Neumann algebras. Funkt. Anal. i Ego Pril. (1983). 65-66 (russian).

3. Ayupov Sh.A. Classification of injective JW-factors. Funkt. Anal. i Ego Pril. 18 (1984) 67-68. (russian).

4. Ayupov Sh.A. On existence of Jordan algebras of self-adjoint operators of a given type. Sibir. Mat. J., 1984. Vol. 25. N 5. pp. 3-8 (russian). English transl. in Siberian mathematical J. 25. N 1-6 (1984) 689-693

5. Ayupov Sh.A. Traces on JW-algebras and enveloping W*-algebras. Mathematische Zeitscrift, 194 (1987) 15-23

6. Ayupov Sh.A. A new proof of the existence of traces on Jordan operator algebras and real von Neumann algebras. Journal of Functional Analysis, 84. N 2 (1989) 312-321.

7. Ayupov Sh.A., Rakhimov A.A., Usmanov Sh.M. Jordan, Real and Lie Structures in Operator Algebras. Kluwer Academic Publishers 1997.

8. Ayupov Sh.A., Rakhimov A.A., Abduvaitov A. Description of the real von Neumann algebras with abelian self-adjoint path. MATHEMATICAL NOTES. 71 (2002) 473-476

9. Connes A. Une classification des facteurs de type III. Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., 6 (1973) 133-252.

10. Connes A. Classification of injective factors. Ann. Math., 104 (1976) 73-115.

11. Connes A. Periodic automorphisms of the hyperfinite factor of type II_1. Acta Sci. Math. 39 (1977) 39-66 .

12. Connes A., Takesaki M. The flow of weights on factors of type III. Thoku Math. J. Ser. 29,2 (1977) 473-575.

13. Dixmier J. Les algebres d'operateurs dans l'espace Hilbertien. Paris: Gauthier-Villars. 1969, 369 p.

14. Dixmier J. Von Neumann algebras, Universite Paris. 6., France, 1981.

15. Giordano T., Jones V. Antiautomorphismes involutifs du facteur hyperfini de type II_1. C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. A, 290 (1980) 29-31.

16. Giordano T. Antiautomorphismes involutifs des facteurs de von Neumann injectifs. II. Journal of Functional Analysis. 51,3 (1983) 326-360.

17. Giordano T. Antiautomorphismes involutifs des facteurs de von Neumann injectifs. I. J. Operator theory, 10,2 (1983) 252-287.

18. Giordano T. Classification of antiautomorphisms of injective factors of type III_\lambda (\lambda \not= 0). Current topics in operator algebras (1990) 425-431, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1991.

19. Kolmogorov, A.N.ve Fomin, S.V., Functional Analysis, Graylock Pres, N.Y., 1957

20. Li Bing-Ren. Introduction to operator algebras, 1992.

21. Li Bing-Ren. Real operator algebras, 2003.

22. Musayev, B., ve Alp, M., Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları, Ankara, 2000.

23. Murray F., Von Neumann J. On rings of operators. I. Ann. Math., 37 (1936) 116-229.

24. Murray F., Von Neumann J. On rings of operators. II. Trans. Amer. Math. Soc., 41 (1937) 208-248..

25. Murray F., Von Neumann J. On rings of operators. IV. Ann. Math. 44 (1943) 716-808..

26. Rakhimov A.A. Topolojik Uzaylar. Seçkin Kitap Evi. Ankara (2006) 330s.

27. Rakhimov A.A. Action of discrete amenable groups on real W*-algebras. Journal of Operator Theory. (2006).

28. Rakhimov A.A. Classification for actions of compact abelian group on semifinite real W*-algebra. Journal of Siberian Advances in Mathematics, 11,2 (2001) 83-93. (English Translation from "Matematicheskie trudi", Novosibirsk, 3,2 (2000) 171-181)

29. Rakhimov A.A. Actions of finite groups on the hyperfinite real type II_1 factor. Methods of Functional Analysis and Topology, 4,3 (1998) 72-88.

30. Rakhimov A.A. Injective real W*-factors of type III_l, 0<l<1. Functional analysis and its app. 3 (1997) 41-44.

31. Rakhimov A.A., Katz A. and Dadakhodjaev R. The ideal of compact operators in real factors of types I and II. Journal of Siberian Advances in Mathematics, 13,2 (2003) 1-5.(English Translation from "Matematicheskie trudi", Novosibirsk, 5,1 (2002) 129-134.).

32. Rakhimov A.A., Betkhush A.Real structures of the symmitric algebras of operators in the Pontryagin's space of type pi_1. Uzbekish Mathematical Journal, 4 (2000) 65-74.

33. Rakhimov A.A., Usmanov Sh.M. Outer conjugacy classes of automorphisms and antiautomorphisms of real and complex injective factors. JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS, 144 (1997) 475-485.

34. Rakhimov A.A., Usmanov Sh.M. Classification of periodic anti-automorphisms with odd inner semi-period of the hyperfinite factor of type II_1. Doklady mathematics of Akademy Sciences RUz, 8 (1989) 3-4.

35. Sakai S. C*-algebras and W*-algebras. Berlin: Springer, 1971. IX+256 p.

36. Stacey P.J. Real structure in the approximately finite dimensional II_\infty factor. Preprint Melbourne, 1981.

37. Stacey P.J. Real structure in s-finite factors of type III_l, where 0<l< 1. Proc. London Math. Soc. 3,47 (1983) 275-284.

38. Stormer E. On the Jordan structure of C*-algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 120, 12 (1965) 438-447.

39. Stormer E. On anti-automorphisms of von Neumann algebras. Pacific J. Math. 21, 2 (1967) 349-370.

40. Stormer E. Irreducible Jordan algebras of self-adjoint operators. Trans. Am. Math. Soc. 130 (1968) 153-166.

41. Stormer E. Real structure in the hyperfinite factor. Duke Math. J. 47, 1 (1980) 145-153.

42. Takesaki M. Theory of operator algebras, I. Berlin: Springer. 1979. VIII + 415 p.

43. Takesaki M. Structure of factors and automorphism groups. Amer. Math. Soc.1983, 107p.

44. Usmanov Sh.M. Classification of real W*-factors of type III_l, 0<l<1. Preprint 8082-84 deposed at VINITI 1984. (russian).

45. Usmanov Sh.M. Classification of real W*-factors of type III_l, 0\leq l < 1. Funkt. Anal. i Ego Pril. 19, 3 (1985) 94-95.

46. Von Neumann J. Continuous geometry and other topics. Collected works. Vol. IV. Oxford: Pergamon Press, X + 516p. 1962.

47. Von Neumann J. Selected works in functional analysis. “Nauka”. Moscow. Vol. 2. 370 p. (russian). 1987.

48. Jones V., Sunder V.S. Introduction to Subfactors Cambridge University Pres 1997.

49. V.F.R. Jones, Index for subfactors, Invent. Math.,71 (1993) 1-25.

50. V.F.R. Jones, Notes on subfactors and statistical mechanics, pp. 1-25, Braid group, knot theory and statistical mechanics, ed. C.N. Yang and M.-L. Ge, World Scentific, (1989)

4. ÖNERİLER

Bu çalışma ile sonlu reel faktörün Von Neumann Eş Sabit kavramı tanımlandı. Böylece, çalışmada ele edilen bu sonuç reel operatör cebirleri için indeks kavramının tanımlanmasına imkan verir. Dolayısıyla, bundan sonra reel faktörler (reel W^*-cebirleri) için indeks kavramı tanımlanarak reel operatör cebirlerinin sınıflandırma probleminde büyük bir ilerleme sağlanabilir.

Bu çalışmaya paralel şekilde, kompleks bir W^*-cebirinde bir involutif *-anti otomorfizm ile *-anti otomorfizm invaryantlı reel Von Neumann Eş sabiti M. N. Cansun tarafından tanımlanmıştır. Böylece, aynı sonuca iki farklı yöntem kullanılarak varılmıştır. Daha sonra reel indeks kavramının tiplere göre araştırması yapılırken benzer yaklaşımla iki farklı yöntem izlenebilir ve elde edilen sonuçlar ilişkilendirebilir ve genellemeler yapılabilir.

Ayrıca, bu çalışmanın reel faktörler için Von Neumann Eş Sabitinin özellikleri ile ilgili diğer tüm sonuçları değişik durumlarda ele alınabilir.

ÖZGEÇMİŞ

Tuncay KÖR, 1980 Akçaabat doğumlu. İlköğrenimini Çayırbağı İlköğretim Okulunda, Trabzon Merkez Zehra Kitapçıoğlu Ortaokulunda, ortaöğrenimini Trabzon Merkez Affan Kitapçıoğlu Lisesinde tamamladı. 1997 yılında Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümünü kazandı. 1999 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesinin Matematik Öğretmenliği bölümüne yatay geçiş yaptı. 2001 yılında bu bölümden mezun oldu. Aynı yıl Matematik Öğretmeni olarak M.E.B. tarafından İstanbul Gaziosmanpaşa Arman Polat İlköğretim Okuluna atandı. 2002-2003 öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans (Matematik) programına başladı. Daha sonra Trabzon Yomra Özdil İlköğretim Okulunda da bir süre Matematik Öğretmeni olarak çalışmış olup şu anda Maçka Lisesinde Matematik Öğretmenliğine devam etmektedir. Yabancı dili İngilizcedir.