KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

İNVOLUTİF *-ANTİOTOMORFİZM İNVARİANTLI VON NEUMANN EŞ SABİTİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mücahide Nesibe CANSU

HAZİRAN 2006
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

İNVOLUTİF *-ANTİOTOMORFİZM İNVARİANTLI VON NEUMANN EŞ SABİTİ

Mücahide Nesibe CANSU

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"Yüksek Lisans (Matematik)"
Ünvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitü'ye Verildiği Tarih : 08. 06. 2006
Tezin Savunma Tarihi : 30. 06. 2006

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Abdugafur RAKHİMOV

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Hilmi ZENGİN

Enstitü Müdürü: Prof. Dr. Emin Zeki BAŞKENT

Trabzon 2006

ÖNSÖZ

Bilindiği gibi operatör teorisi, kuantum fiziği probleminin matematik modelinin kurulması ile elde edilmiştir. Bu teorinin kuantum fiziği teorisinden kaynaklanması sebebiyle operatör cebirler teorisinden alınan her sonuç kuantum fiziği için de önemlidir.

Operatör cebiri, Hilbert uzayında düzgün veya zayıf topolojilere göre kapalı, lineer ve sınırlı dönüşümler ailesidir. Önceleri kompleks durumu üzerinde durulan bu teori, daha sonraları reel durumuna genişletilerek günümüzdeki yerini almıştır. En sonunda da bu çalışmalar kompleks operatör cebirlerinin tam sınıflandırma invaryantlarını bulmak için indeks kavramının verilmesi şeklinde geliştirilmiştir. Bu şekilde kompleks operatör cebirinin indeksi hesaplanarak, farklı indeksli kompleks cebirlerin izomorf olmadıkları şeklinde önemli ve kullanışlı bir sonuç elde edilmiştir.

Bizim bu çalışmadaki amacımız kompleks durumda tanımlanmış indeks kavramını geliştirerek ve reel operatör cebiri ile kompleks operatör cebirinin involutif *-antiotomorfizmi arasındaki doğal ilişkiyi kullanarak reel operatör cebiri için indeks kavramını involutif *-antiotomorfizm yardımıyla elde etmektir. Bu sebeple çalışmanın ilk kısmında çalışmaya ışık tutacağı düşünülen kavramlar, teoremler ve ispatlara yer verilmiştir. İkinci kısımda ise involutif *-antiotomorfizm invariantlı operatör cebiri için indeks kavramının tanımlanmasının ilk aşaması olan eş sabit kavramı tanımlanmış ve bazı özellikleri incelenmiştir.

Konunun belirlenmesinden, çalışmanın tamamlanıp bu hale getirilmesine kadar geçen süreçte yardımını ve desteğini esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Abdugafur RAKHİMOV' a teşekkür eder saygılarımı sunarım. Bu çalışmanın hazırlanmasındaki katkılarından dolayı Arş. Gör. Yavuz KESİCİOĞLU' na ve Tuncay KÖR' e teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca eğitim hayatımın ilk aşamasından beri hem maddi hem de manevi desteklerini bir an olsun üzerimden eksik etmeyen aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Mücahide Nesibe CANSU
Trabzon, 2006

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Bu çalışmada V. Jones tarafından tanımlanmış olan kompleks operatör cebirin indeksini reel durumda vermek için involutif *-antiotomorfizm invariantlı eş sabit kavramı tanımlanmıştır.

Birinci bölümde Fonksiyonel Analiz ve Operatör Cebirin temel kavram ve sonuçları verilmiştir. İkinci bölümde involutif *-antiotomorfizm invariantlı eş sabit kavramını vermek için involutif *-antiotomorfizm invariantlı L^2 uzayı tanımlanmış ve bunun kompleksleştirilmesi verilmiştir. Daha sonra W^*-faktörünün verilen bir involutif *-antiotomorfizme göre invariant kanonik *-gösterimi elde edilerek bu gösterim için komutant hakkındaki teorem ispat edilmiştir. Böylece daha önce reel durumda tanımlanmamış olan eş sabit kavramı tanımlanmış ve bazı özellikleri ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Von Neumann Cebiri, İnvolutif *-antiotomorfizm, Von Neumann Eş Sabiti, Reel W^* - cebiri

SUMMARY

The Coupling Constant with Involutive *-Antiautomorphism Invariant

In this study, the coupling constant with involutive *-antiautomorphism invariant is defined to make the index defined by Jones specious the index on real operator algebra.

In the first part of the study, basic concepts and results in the operator theory and functional analysis are summarized. In the second part, L^2 space with involutive *-antiautomorphism invariant is defined and it's complexification is given. Then, for given W^*-factor and an involutive *-antiautomorphism the canonical representation of factor with antiautomorphism invariant is obtained and The Commutant' s Theorem is proved. Thus, for real case the coupling constant is defined, which is not known early and some proporties of this are discussed.

Keywords: Von Neumann algebra, Involutive *-antiautomorphism, The coupling constant of Von Neumann, Real W^*-algebra.

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sayfa No</u>

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Operatör cebirler teorisi kuantum fiziği problemlerinin matematik modeli kurulması neticesinde ortaya çıkmıştır. Bu cebirler ilk defa J. Von Neumann [49, 50] ve F. J. Murray' ın [26- 28] çalışmalarında operatörler halkası adıyla tanımlanmış olup, bu cebirlerin ilk sınıflandırması (yani sonlu ve yarı-sonlu hyper-sonlu cebirlerinin sınıflandırılması) da bu matematikçiler tarafından yapılmıştır. Bu teori kuantum fiziği teorisinden kaynaklandığından operatör cebirler teorisinde alınan her sonuç kuantum fiziği için de önemli olup, bu sonucun kuantum fiziğinde bir anlamı ve uygulaması vardır. Operatör (kompleks) cebir, genelde bir Hilbert uzayında düzgün veya zayıf topolojiye göre kapalı lineer sınırlı dönüşümler (yani operatörleri) ailesi olup, J. Von Neumann [49, 50] ve F. J. Murray'nın [26- 28] çalışmalarından sonra yeterli sayıda örnek olmaması sebebiyle uzun zaman (yaklaşık 30 yıl) kimse tarafından incelenmemiştir. Hatta saf sonsuz (III. tipten faktörler) operatör cebirleri için hiçbir örnek yoktu. Bu sebeple saf sonsuz operatör cebirlerinin var olup olmadığı da belli değildi. 1965- 68 yıllarından itibaren bu teoride önemli sayılabilecek gelişmeler sağlandı. Bu gelişmelerin olmasında A. Connes [8- 12], M. Takesaki [44- 46], S. Sakai [36, 37], J. Dixmier [13- 15], v.s.' nin katkıları büyüktür. Bu matematikçilerin çalışmalarında kontinuum (sayılamaz sonsuz) sayıda kendi aralarında izomorf olmayan saf sonsuz operatör cebirler sınıfı bulundu ve bu cebirlerin de ilk sınıflandırma problemi çözüldü. Bazı özel durumlarda (injektif faktörler için) ise tam sınıflandırma yapıldı.

1980- 82 yıllarından itibaren kompleks operatör cebirler teorisine paralel şekilde reel operatör cebirleri teorisi de ortaya çıkmıştı. Aslında bu teorinin de kökü de kuantum fiziği teorisinden kaynaklanmış olup, kompleks durumun bir genişletilmesi (çünkü cisim dar oldukça bu cisim üzerindeki cebir geniş olur) olarak görünmektedir. Kompleks ve reel operatör cebirleri arasında doğal bir ilişki vardır. Şöyle ki, bir reel cebir'in kompleksleştirilmesi kompleks cebir olup, tersine bir kompleks cebirde her involutif *-antiotomorfizm bir reel cebir tanımlamaktadır. Böylece bir reel operatör cebire bir kompleks operatör cebiri ve onun bir involutif *-antiotomorfizminden oluşan ikili karşı karşı koyulmaktadır. Bu ikilinin incelenmesinde ve özellikle reel operatörler teorisinin ilerlemesinde E. Stormer [40- 43], Ş. Ayupov [1- 6], P. Stacey [38, 39], T. Giordano [16- 19], A. Rakhimov [30- 35] ve Ş.Usmanov [47, 48] gibi matematikçilerin büyük katkıları bulunmaktadır. Bu matematikçilerin çalışmalarında, bu cebirlerin tiplere sınıflandırma problemi tam çözülmüş olup, bazı grupların bu faktörlerdeki hareketi de sınıflandırılmıştır.

Son zamanlarda operatör cebirlerinin tam sınıflandırma invaryantlarını bulmak amacıyla Fransız matematikçisi V. Jones [20- 22] tarafından kompleks cebirin indeks kavramı tanımlanmış olup, indeksin hesaplama formülü bulunmuştur. Böylece bu formül yardımıyla verilen bir kompleks operatör cebirin indeksi hesaplanarak, farklı indeksli kompleks cebirlerinin kendi aralarında izomorf olmadığı kesin olarak söylenebilir. İndeks kavramının kompleks cebirleri için incelenmesi saf sonsuz faktörler için hala devam etmektedir. Açıkça görülür ki eğer Jones indeksi bir involutif *-antiotomorfizme göre invaryant ise, bu kavram bu antiotomorfizmle tanımlanan reel operatör cebirine kısıtlanır. Böylece bu şekilde indeks kavramı reel duruma genişletilebilir. Bundan dolayı bu çalışmamızda biz reel indeks kavramı için birinci adım attık. Şöyle ki, çalışmada bir sonlu kompleks W^*-faktörün verilen bir involutif *-antiotomorfizme göre invaryant kanonik *-gösterimi elde edilerek ve bu gösterim için komutant hakkındaki teorem de ispatlanarak, involutif *-antiotomorfizme göre invaryant J. Von Neuman eş-sabit kavramı tanımlanmıştır. Çalışma sonunda ise bu eş-sabit'in bazı önemli özellikleri ispatlanmıştır. Çalışmada elde edilen bu sonuçlar kompleks operatör cebirinde involutif *-antiotomorfizme göre invaryant indeks kavramını tanımlanışına imkan verir. Dolayısıyla, bundan sonra bu kavram tanımlanarak reel operatör cebirlerinin sınıflandırma probleminde büyük bir ilerleme sağlanabilir.

1.2. Topolojik Vektör Uzay

1.2.1. Reel ve Kompleks Vektör Uzay

Tanım:

L boş olmayan bir küme ve $(F, \oplus, *)$ bir cisim olmak üzere L de toplama adı verilen ve $+: L \times L \to L$, $(x, y) \xrightarrow{+} x + y$ ile gösterilen bir işlem ile skalerle çarpma adı verilen ve $\cdot: F \times L \to L$, $(\alpha, x) \xrightarrow{\cdot} \alpha \cdot x$ ile gösterilen bir işlem aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bu L kümesine F cismi üzerinde bir lineer uzay denir ve (L,F), $(L,+,\cdot)$ veya L ile gösterilir.

A) L, + işlemine göre değişmeli gruptur. Yani ;

G1) Her $x,y,z\in L$ için $x+(y+z)=(x+y)+z$ dir.

G2) Her $x\in L$ için $x+\theta=\theta+x=x$ olacak şekilde $\theta\in L$ vardır.

G3) Her $x\in L$ için $x+(-x)=(-x)+x=\theta$ olacak şekilde $(-x)\in L$ vardır.

G4) Her $x,y\in L$ için $x+y=y+x$ dir.

B) $x,y\in L$ ve $\alpha,\beta\in F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanacaktır.

L1) $\alpha\cdot(x+y)=\alpha\cdot x+\alpha\cdot y$ dir.

L2) $(\alpha\oplus\beta)\cdot x=\alpha\cdot x+\beta\cdot x$ dir.

L3) $(\alpha*\beta)\cdot x=\alpha\cdot(\beta\cdot x)$ dir.

L4) $1\cdot x=x$ dir. (Burada 1, F ’ nin birimidir.)

Burada L2’ nin birinci tarafındaki $\oplus$ işareti F ’ deki toplamayı; ikinci tarafındaki + işareti ise L ’ deki toplamayı belirtmektedir. Aynı şekilde L3 eşitliğinde de iki tane çarpmanın olduğuna dikkat edilmelidir.

Lineer uzayın tanımında geçen F cismine (lineer uzayın) skaler cismi, F ’ nin elemanlarına ise skaler denir. Lineer uzay kavramı yerine vektör uzayı da kullanılmaktadır. Bu halde L ’ nin elemanlarına genellikle vektör denir. θ özdeş elemanı bazen 0 ile de gösterilir. Ancak bu gösteriş genellikle $L=\mathbb{R}$ veya $L=\mathbb{C}$ olması halinde tercih edilir. Bu θ elemanına orjin veya sıfır denir.

$F=\mathbb{R}$ olması halinde L ’ ye reel; $F=\mathbb{C}$ olması halinde ise L ’ ye kompleks vektör uzay denir.

(L,F) bir vektör uzayı ve $A\subset L$ olsun. Eğer $A+A\subset A$ ve $F.A\subset A$ ise, A ’ ya L ’ nin bir alt vektör uzayı denir.

Örnek 1.

$(F,\oplus,*)$ bir cisim, $n\in\mathbb{N}$ ve $L=F^n=\{\,x=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n):\alpha_i\in F\,\}$ olsun. $x,y\in L$ ve $\alpha\in F$ olmak üzere lineer uzay işlemleri;

$$x+y=\left(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\right)+\left(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n\right):=\left(\alpha_1\oplus\beta_1,\alpha_2\oplus\beta_2,...,\alpha_n\oplus\beta_n\right) \quad \text{ve}$$

$$\alpha x=\alpha\left(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\right):=\left(\alpha*\alpha_1,\alpha*\alpha_2,...,\alpha*\alpha_n\right)$$

olarak tanımlanırsa kolaylıkla görülebilir ki $L=F^n$, F cismi üzerinde bir vektör uzaydır. Buradaki işlemlere bileşen toplama ve skalerle çarpma denir. Gerçekten lineer uzay şartlarının sağlandığı kolayca gösterilebilir.

G1) $x,y\in L$ ve $x=\left(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\right)$, $y=\left(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n\right)$ olsun.

$x+y=\left(\alpha_1\oplus\beta_1,\alpha_2\oplus\beta_2,...,\alpha_n\oplus\beta_n\right)$ ve $\alpha_i\oplus\beta_i\in F$ olduğundan (çünkü F cisimdir) $x,y\in L$ ’ dir.

G2) $z=\left(\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n\right)\in L$ olsun.

$$\begin{aligned}x+\left(y+z\right)&=\left(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\right)+\left(\left(\beta_1\oplus\gamma_1\right),\left(\beta_2\oplus\gamma_2\right),...,\left(\beta_n\oplus\gamma_n\right)\right)\\&=\left(\alpha_1\oplus\left(\beta_1\oplus\gamma_1\right),\alpha_2\oplus\left(\beta_2\oplus\gamma_2\right),...,\alpha_n\oplus\left(\beta_n\oplus\gamma_n\right)\right)\\&=\left(\left(\alpha_1\oplus\beta_1\right)\oplus\gamma_1,\left(\alpha_2\oplus\beta_2\right)\oplus\gamma_2,...,\left(\alpha_n\oplus\beta_n\right)\oplus\gamma_n\right)\\&=\left(\alpha_1\oplus\beta_1,\alpha_2\oplus\beta_2,...,\alpha_n\oplus\beta_n\right)+\left(\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n\right)\\&=\left(x+y\right)+z\end{aligned}$$

$\Rightarrow x+\left(y+z\right)=\left(x+y\right)+z$ ’ dir.

G3) $\theta=\left(0,0,...,0\right)$ olarak alınırsa, her $x\in L$ için $x+\theta=\theta+x=x$ dir. Burada 0, F ’ nin sıfır elemanıdır.

G4) F bir cisim olduğundan $\forall\,\alpha\in F$ için $\exists\left(-\alpha\right)\in F:\alpha\oplus\left(-\alpha\right)=0$ dır. Buradan $-x=\left(-\alpha_1,-\alpha_2,...,-\alpha_n\right)$ olarak alınırsa,

$x+\left(-x\right)=\left(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\right)+\left(-\alpha_1,-\alpha_2,...,-\alpha_n\right)=\left(0,0,...,0\right)=\theta$ olur.

G5) F cismi toplamaya göre değişmeli olduğunda $x+y=y+x$ dir. Gerçekten;

$$\begin{aligned}x+y&=\left(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\right)+\left(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n\right)\\&=\left(\alpha_1\oplus\beta_1,\alpha_2\oplus\beta_2,...,\alpha_n\oplus\beta_n\right)=\left(\beta_1\oplus\alpha_1,\beta_2\oplus\alpha_2,...,\beta_n\oplus\alpha_n\right)\\&=\left(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n\right)+\left(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\right)\\&=y+x.\end{aligned}$$

Skaler çarpmayla ilgili özelliklerin de sağlandığı kolayca gösterilebilir. Gerçekten;

L1) $\alpha \in F$ için $\alpha x = \alpha(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = (\alpha * \alpha_1, \alpha * \alpha_2, ..., \alpha * \alpha_n)$ ve $\alpha * \alpha_i \in F$ olduğu için $\alpha x \in L$ dir. $(1 \le i \le n)$

L2) $\alpha(x+y) = \alpha(\alpha_1 \oplus \beta_1, \alpha_2 \oplus \beta_2, ..., \alpha_n \oplus \beta_n)$

$$= (\alpha * (\alpha_1 \oplus \beta_1), \alpha * (\alpha_2 \oplus \beta_2), ..., \alpha * (\alpha_n \oplus \beta_n))$$

$$= (\alpha * \alpha_1 \oplus \alpha * \beta_1, \alpha * \alpha_2 \oplus \alpha * \beta_2, ..., \alpha * \alpha_n \oplus \alpha * \beta_n)$$

$$= (\alpha * \alpha_1, \alpha * \alpha_2, ..., \alpha * \alpha_n) + (\alpha * \beta_1, \alpha * \beta_2, ..., \alpha * \beta_n)$$

$$= \alpha x + \alpha y$$

$\Rightarrow \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$ dir.

L3) $(\alpha \oplus \beta)x = (\alpha \oplus \beta)(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$

$$= ((\alpha \oplus \beta) * \alpha_1, (\alpha \oplus \beta) * \alpha_2, ..., (\alpha \oplus \beta) * \alpha_n)$$

$$= (\alpha * \alpha_1 \oplus \beta * \alpha_1, \alpha * \alpha_2 \oplus \beta * \alpha_1, ..., \alpha * \alpha_n \oplus \beta * \alpha_1)$$

$$= (\alpha * \alpha_1, \alpha * \alpha_2, ..., \alpha * \alpha_n) + (\beta * \alpha_1, \beta * \alpha_2, ..., \beta * \alpha_n)$$

$$= \alpha x + \beta y$$

$\Rightarrow (\alpha \oplus \beta)x = \alpha x + \beta y$ dir.

L4) $(\alpha * \beta)x = ((\alpha * \beta) * \alpha_1, (\alpha * \beta) * \alpha_2, ..., (\alpha * \beta) * \alpha_n)$

$$= (\alpha * (\beta * \alpha_1), \alpha * (\beta * \alpha_2), ..., \alpha * (\beta * \alpha_n))$$

$$= \alpha(\beta * \alpha_1, \beta * \alpha_2, ..., \beta * \alpha_n)$$

$$= \alpha(\beta x)$$

L5) $1x = x$ olduğu açıktır.

O halde (L, +, .) vektör uzaydır. Örnek 1' den $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, ... ve\ \mathbb{C}, \mathbb{C}^2, ...$ uzayları sırasıyla $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ cismi üzerinde vektör uzayıdır. Ayrıca $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}$ üzerinde de bir vektör uzayıdır. Ancak $\mathbb{C}.\mathbb{R} \not\subset \mathbb{R}$ olduğundan $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$ üzerinde bir vektör uzayı değildir.

Örnek 2.

Determinantı 1 olan kompleks ve reel matrisler kümesi bir vektör uzayı değildir. Çünkü bu matrisler bir λ skaleri ile çarpılırsa $\det \neq 1$ olur.

Örnek 3.

A bir topolojik uzay ve A da tanımlı reel (veya kompleks) değerli sürekli fonksiyonların $C(A) := \{ f \mid f : A \to K \text{ sürekli} \}$ kümesini göz önüne alalım, burada $K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$ ve $f, g \in C(A)$ ve $\alpha \in K$ olmak üzere, $+ : C(A) \times C(A) \to C(A)$ ve $\cdot : K \times C(A) \to C(A)$ dönüşümlerini $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$, $(\alpha \cdot f)(x) := \alpha f(x)$ olarak tanımlayalım. Bu işlemlere göre $C(A)$ kümesi bir vektör uzayıdır. Gerçekten;

Her $f, g \in C(A)$ ve $\alpha \in K$ için $f+g$ ve $\alpha \cdot f$ nin sürekli olduğu analizden bilindiği için $f+g, \alpha \cdot f \in C(A)$ dır.

Şimdi diğer koşulların sağlandığını gösterelim.

1) Her $f, g, h \in C(A)$ ve her $x \in A$ için

$$[f + (g+h)](x) = f(x) + (g+h)(x) = f(x) + [g(x) + h(x)] = [f(x) + g(x)] + h(x)$$
$$= (f+g)(x) + h(x) = [(f+g) + h](x) \text{' dir.}$$

O halde $f + (g+h) = (f+g) + h$ dir.

2) $\theta : A \to K$, $x \to \theta(x) := 0$ olarak alınırsa $\forall f \in C(A)$ ve $\forall x \in A$ için $(f+\theta)(x) = f(x) + \theta(x) = f(x) + 0 = f(x)$' dir.

O halde $f + \theta = f$ dir.

3) Her $f \in C(A)$ için $-f \in C(A)$ olduğunu gösterelim. $\forall x \in A$ için $[f + (-f)](x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) - f(x) = \theta$' dir.

O halde $f + (-f) = \theta$ dir.

4) Her $f, g \in C(A)$ ve her $x \in A$ için $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$' dir.

O halde $f + g = g + f$ dir.

5) Her $f, g \in C(A)$, $\alpha \in K$ ve $\forall x \in A$ için $[\alpha \cdot (f+g)](x) = \alpha (f+g)(x) = \alpha (f(x) + g(x))$

$= \alpha f(x) + \alpha g(x) = (\alpha \cdot f + \alpha \cdot g)(x)$ ' dir. O halde

$\alpha \cdot (f + g) = \alpha \cdot f + \alpha \cdot g$ dir.

6) Her $\alpha, \beta \in K$, $f \in C(A)$ ve $\forall x \in A$ için

$[(\alpha + \beta) \cdot f](x) = (\alpha + \beta) f(x) = \alpha f(x) + \beta f(x)$

$= (\alpha f)(x) + (\beta f)(x) = (\alpha \cdot f + \beta \cdot f)(x)$ 'dir. O halde

$(\alpha + \beta) \cdot f = \alpha \cdot f + \beta \cdot f$ dir.

7) Her $\alpha, \beta \in K$, $f \in C(A)$ ve $\forall x \in A$ için

$[(\alpha\beta) \cdot f](x) = (\alpha\beta) f(x) = \alpha(\beta f(x)) = \alpha(\beta \cdot f)(x) = [\alpha \cdot (\beta \cdot f)](x)$ 'dir. O halde

$(\alpha\beta) \cdot f = \alpha \cdot (\beta \cdot f)$ dir.

8) Her $f \in C(A)$ ve $\forall x \in A$ için

$(1 \cdot f)(x) = 1 f(x) = f(x)$ dir. O halde

$1 \cdot f = f$ dir.

Sonuç olarak $C(A)$ bir vektör uzayıdır.

$C(A)$ kümesi bazen $C(A, K)$ ile de gösterilir. Buradaki A kümesi yerine özel olarak $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ kapalı aralığını alırsak $C([\mathrm{a}, \mathrm{b}])$ yerine kolaylık olması için $\mathrm{C}[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ yazabiliriz.

1.2.1.1. Lineer Bağımsızlık

Tanım:

L, F cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $x_1, x_2, ..., x_n \in L$ olsun. $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n} \in F$ olmak üzere, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$ olması her i için $\alpha_i = 0$ olmasını gerektiriyorsa, $x_1, x_2, ..., x_n$ vektörlerine (F üzerinde) lineer bağımsızdır denir. Lineer bağımsız olmayan vektörlere de lineer bağımlı denir. Eğer bir $A \subset L$ alt kümesinin her sonlu sayıda elemanları lineer bağımsız ise, A ya lineer bağımsızdır denir.

1.2.1.2. Boyut

Tanım:

X bir vektör uzayı olmak üzere $A \subset X$ için A lineer bağımsız olup $\forall x \in X$ elemanı A nın sonlu sayıda elemanlarının lineer kombinasyonu (toplamı) şeklinde yazılabiliyorsa yani, $\forall x \in X$ için $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i,\ \alpha_i \in F,\ a_i \in A$ ise, A ya X ' in bir Hamel Tabanı, A ' nın eleman sayısı olan n sayısına $\left(n = |A|\right)$ ise, X vektör uzayının boyutu denir ve $\dim_F\left(X\right) := n$ (veya $Boy_F\left(X\right) := n$) ile gösterilir. Yani, bir uzaydaki lineer bağımsız elemanların maksimal sayısına bu uzayın boyutu denir.

Açıkça, eğer A lineer bağımsız ise, $\theta \notin A$ dır. Dolayısıyla uzayın kendisi ve herhangi alt vektör uzayı bu uzay için bir Hamel tabanı olamaz.

$\forall x \in X$ ve $x \neq \theta$ için $A = \{x\}$ kümesi her zaman lineer bağımsızdır, çünkü $\lambda x = \theta \overset{x\neq\theta}{\Leftrightarrow} \lambda = 0$ dır. Dolayısıyla $X \neq \{\theta\}$ uzayı için $\dim_F X \geq 1$ dir.

Bir vektör uzayının boyutu için $n < \infty$ ise, bu vektör uzayına sonlu boyutlu, aksi taktirde sonsuz boyutlu denir.

Örnek 4.

$B = \{1\}$ $\mathbb{R}$ nin, $B_1 = \{(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ nin bir Hamel tabanı olduğundan $\dim \mathbb{R} = 1$ ve $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ dir. Daha genel olarak

$e_1 = (1, 0, 0, ..., 0),\ e_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, 0, ..., 1)$

vektörlerinin kümesi $\mathbb{R}^n$ nin bir Hamel tabanı olduğundan $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$ dir.

Aynı düşünce ile $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2, \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ genel olarak $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n$ ' dir.

1.2.1.3. Direkt Toplam

Tanım:

Y_1 ve Y_2, X vektör uzayının iki alt vektör uzayı olsun. Eğer $\forall x \in X$ elemanı için $y_1 \in Y_1$ ve $y_2 \in Y_2$ olmak üzere $x = y_1 + y_2$ olacak şekilde bir tek $y_1 \in Y_1$ ve $y_2 \in Y_2$ varsa veya denk bir ifade ile $Y_1 \cap Y_2 = \{\theta\}$ ise, X vektör uzayı Y_1 ve Y_2 uzaylarının direkt toplamıdır denir ve $X = Y_1 \oplus Y_2$ şeklinde yazılır.

Tersine, A ve B bir F cismi üzerinde iki vektör uzayları olsun. Bu uzayların $X := A \oplus B$ direkt toplamında toplama ve skalerle çarpma işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$\forall x, y \in X \Rightarrow x = (a, b)\ ve\ y = (c, d)$ için;

i) $x + y = (a + c, b + d)$

ii) $\lambda x = (\lambda a, \lambda b),\ \lambda \in F$ dir.

O halde $A \oplus B$ uzayı bu işlemlere göre bir vektör uzayıdır.

Örnek 5.

$\mathbb{R}^2$ reel lineer uzayının $X = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ ve $Y = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ alt uzaylarını göz önüne alalım. $X + Y = \{x + y : x \in X,\ y \in Y\} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$ olup $\mathbb{R}^2 = X + Y$ dir. $X \cap Y = \{\theta\}$ olduğundan $\mathbb{R}^2 = X \oplus Y$ dir.

Örnek 6.

R^3'ün iki alt uzayı $U = \{(a, b, c) : a = b = c\}$, $W = \{(0, b, c) : b, c \in R\}$ olsun. $R^3 = U \oplus W$ mıdır?

$U + W = \{u + w : u \in U,\ w \in W\} = \{(a, b, c) : a, b, c \in R\} = R^3$ olup $R^3 = U + W$ olur. $U \cap W = \{\theta\}$ olduğundan $R^3 = U \oplus W$ dır.

Örnek 7.

$V=\mathbb{R}^3$ olmak üzere $U=\{(a,b,0):a,b\in\mathbb{R}\}$, $W=\{(0,b,c):b,c\in\mathbb{R}\}$ alt uzaylarını göz önüne alalım. $V=U\oplus W$ mıdır?

V, U ve W alt uzaylarının direkt toplamı değildir. Çünkü $U+W=\{u+w:u\in U,\ w\in W\}$ olup; $V=U+W=(a,b,0)+(0,b,c)=(a,2b,c)$ yazılır. Bu yazılış tek değildir. Gerçekten, örneğin $(-5,6,3)=(-5,2,0)+(0,4,3)=(-5,5,0)+(0,1,3)$ olur.

1.2.2. Topolojik Vektör Uzayı

Tanım:

X bir F cismi üzerinde bir vektör uzayı ve τ ailesi X ' de bir topoloji olsun. Eğer

$$(x,y)\xrightarrow{+}x+y$$

$$(\alpha,x)\xrightarrow{\cdot}\alpha\cdot x$$

dönüşümleri τ ' a göre sürekli ise X uzayına bir topolojik vektör uzayı denir.

Örnek 8.

$C[0,1]$ uzayında $(f,g)\to f+g$ ve

$$(\alpha,f)\to\alpha f$$

dönüşümleri $d(f,g):=\max\limits_{0\le x\le 1}|f(x)-g(x)|$ metriğine göre sürekli olduğundan $(C[0,1],d)$ uzayı bir topolojik vektör uzayıdır. Burada $\forall x\in[0,1]$ için

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \text{ ve}$$

$$(\alpha f)(x)=\alpha f(x)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

(X, d) bir metrik uzay olsun. Bazen bu uzayda verilen bir dizinin limiti uzayın dışında olabilir. Örneğin $(0,1)$ uzayında $\left(x_n = \frac{1}{n}\right)$ dizisinin limiti bu uzayın dışındadır. Bu taktirde bu uzay belli bir anlamda tam olmaz. Bu yüzden aşağıdaki alt paragraflarda uzayın tamlığı ile ilgili kavramlar tanımlanacak.

1.2.2.1. Yakınsak Dizi

Tanım:

(X, d) bir metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N$ için $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ ise (x_n) dizisi x_0 noktasına yakınsaktır denir ve $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ veya $x_n \to x_0$ ile gösterilir.

Örnek 9.

$X = \mathbb{R}$ uzayında $\left(x_n = \frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ dizisi 0 noktasına yakınsaktır. Gerçekten $\forall \varepsilon > 0$ ve $\exists N \in \mathbb{N}$ $d(x_n, 0) = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ olduğundan (x_n) dizisi 0 noktasına yakınsaktır.

1.2.2.2. Cauchy Dizisi

Tanım:

(X, d) bir metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ ise (x_n) dizisine bir cauchy dizisidir denir.

Örnek 10.

$X=(0,1)$ uzayında $\left(x_n=\dfrac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ dizisi bir cauchy dizisidir. Gerçekten

$\forall \varepsilon>0$ ve $\forall n,p\in\mathbb{N}$ olsun.

$$d\left(x_n,x_{n+p}\right)=d\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n+p}\right)=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}\right|<\frac{1}{n}<\varepsilon$$

olduğundan $N:=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$ için $\forall n,m\geq N\Rightarrow d\left(x_n,x_m\right)<\varepsilon$ olup $\left(x_n\right)$ dizisi bu uzayda bir cauchy dizisidir.

Örnek 11.

$\left(x_n=n\right)_{n=1}^{\infty}$ dizisi bir cauchy dizisi değildir. Gerçekten

$\left(x_n=n\right)_{n=1}^{\infty}$ dizisi bir cauchy dizisi olsa $\forall\varepsilon>0$ için $\exists N\in\mathbb{N}$: $\forall n,m\geq N$, $m:=n+1$ için

$$d\left(x_n,x_m\right)=\left|n-(n+1)\right|=\left|-1\right|=1<\varepsilon$$

olması gerekir ki bu eşitsizlik $0<\varepsilon<1$ için doğru değildir. Dolayısıyla bu dizi bir cauchy dizisi değildir.

1.2.2.3. Tam Uzay

Tam uzay tanımına geçmeden önce bir teorem verelim.

Teorem 1.

Her yakınsak dizi bir cauchy dizisidir.

İspat:

(X, d) bir metrik uzay, $x_0 \in X$ ve bir $(x_n) \subset X$ dizisi için $x_n \to x_0$ olsun. O halde $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists N \in \mathbb{N}$: $n \geq N$ için $d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$' dir. Buradan $\forall n, m \geq N$ için

$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_0) + d(x_0, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$' dır.

Böylece (x_n) dizisi bir cauchy dizisidir.

Bu teoremin tersi genelde doğru değildir. Yani her cauchy dizisinin yakınsak olması gerekmez. Bu durumu bir örnekle gösterelim.

Örnek 12.

$\left(x_n = \frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty} \subset X = (0, 1)$ dizini ele alalım. Örnek 10' dan bu dizi bir cauchy dizisidir.

Fakat $\lim\limits_{x \to \infty} x_n = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ olup $0 \notin (0, 1)$ dir. Yani $\left(x_n = \frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ dizisi $X = (0, 1)$ kümesinde yakınsak bir dizi değildir.

Tanım:

Eğer bir metrik uzayın her cauchy dizisi bu uzayda yakınsak ise, bu uzaya tam uzaydır denir.

Örnek 13.

Analizden bilindiği gibi $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ uzayları tamdır. Genel olarak $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ nin tam olduğu kullanılarak $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{C}^n$ uzaylarının da tam olduğu gösterilebilir, burada metrik: $d(x, y) := \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}$' dir.

Örnek 14.

$C[a,b]$ uzayında $d(f,g) := \sup_{a \le x \le b} |f(x) - g(x)|$ dönüşümü bir metrik olup $C[a,b]$ uzayının bu metriğe göre tam olduğunu gösterelim.

$\forall \{f_n\} \subset C[a,b]$ cauchy dizisi olsun. O halde $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists N \in \mathbb{N}$: $n, m \ge N$ için $d(f_n, f_m) = \max_x |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$' dir.

Buradan $\forall x \in [a,b]$ için

$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$' dır.

Dolayısıyla her x için $(f_n(x))$ sayısal dizisi $\mathbb{R}$' de bir cauchy dizisidir. $(\mathbb{R}, |\ |)$ uzayı tam olduğundan bir $a_x \in \mathbb{R}$ için $f_n(x) \to a_x$' dir. Yani

$|f_n(x) - a_x| < \frac{\varepsilon}{2}$' dir.

$f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu $f(x) := a_x$ olarak tanımlayalım. O halde her $x \in [a,b]$ için

$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$' dir.

Buradan $f_n(x) \to f(x)$ olup bu yakınsaklık düzgündür. Her f_n fonksiyonu sürekli olduğundan f fonksiyonu da süreklidir. O halde $f \in C[a,b]$' dir. $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ olduğundan her $x \in [a,b]$ için $\max_x |f_n(x) - f_m(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$' dır. Yani $d(f_n, f) < \varepsilon$' dır. Dolayısıyla $f_n \to f$' dir. Sonuç olarak $(C[a,b], d)$ uzayı tamdır.

1.3. Banach ve Hilbert Uzayları

1.3.1. Normlu Uzay

Tanım:

N, bir reel veya kompleks vektör uzay olsun. $\| \ \|: N \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere x' deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon için

N1) $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$, $\forall x \in N$

N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ $\left(\alpha \in \mathbb{R} \ veya \ \alpha \in \mathbb{C}\right)$ $\forall x \in N$ ve

N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Üçgen Eşitsizliği) $\forall x, y \in N$

şartları sağlanıyorsa $\| \ \|$ fonksiyonuna N' de (veya N üzerinde) norm denir. $\left(N, \| \ \|\right)$ ikilisine de normlu uzay denir.

Örnek 15.

$\|.\| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \left\|\vec{x}\right\| = |x| + |y|, \vec{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ şeklinde tanımlanan $\| \ \|$ bir normdur. Gerçekten;

i) $\left\|\vec{x}\right\| = |x| + |y|$ olup $|x| \geq 0, |y| \geq 0$ olduğundan $\left\|\vec{x}\right\| \geq 0$ dır.

ii) $\left\|\vec{x}\right\| = 0 \Leftrightarrow |x| + |y| = 0 \Leftrightarrow |x| = 0 \ ve \ |y| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ ve \ y = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \theta = (0,0)$

iii) $\left\|\lambda \vec{x}\right\| = |\lambda x| + |\lambda y| = \lambda\left(|x| + |y|\right) = \lambda \left\|\vec{x}\right\|, \ \lambda \in \mathbb{R}$

iv) $\left\|\vec{x} + \vec{y}\right\| = \left\|(x, y) + \left(x^{'}, y^{'}\right)\right\| = \left\|\left(x + x^{'}, y + y^{'}\right)\right\| = \left|x + x^{'}\right| + \left|y + y^{'}\right|$

$$\leq \left(|x| + |y|\right) + \left(\left|x^{'}\right| + \left|y^{'}\right|\right) = \left\|\vec{x}\right\| + \left\|\vec{y}\right\|$$

Buradan $\left\|\vec{x} + \vec{y}\right\| \leq \left\|\vec{x}\right\| + \left\|\vec{y}\right\|$ elde edilir.

Örnek 16.

Örnek 3 de $C[a, b]$' nin bir vektör uzayı olduğunu gördük. Şimdi $C[a, b]$ uzayında tanımlanan $\|f\| := \sup\limits_{a \leq x \leq b} \left|f(x)\right|$ dönüşümünün bir norm olduğunu gösterelim.

1) $\|f\| = \sup\limits_{a\le x\le b} |f(x)| \ge 0$ olduğu açıktır.

2) $\|f\| = 0 \Leftrightarrow \sup\limits_{a\le x\le b} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0$, $\forall x \in [a,b]$ için

$$\Leftrightarrow f(x) = 0,\ \forall x \in [a,b] \text{ için}$$

$$\Leftrightarrow f = 0 .$$

3) $\|\alpha f\| = \sup\limits_{a\le x\le b} |(\alpha f)(x)| = \sup\limits_{a\le x\le b} |\alpha f(x)| = \sup\limits_{a\le x\le b} |\alpha||f(x)|$

$$= |\alpha| \sup_{a\le x\le b} |f(x)| \quad = |\alpha|\|f\|$$

4) $\|f+g\| = \sup\limits_{a\le x\le b} |(f+g)(x)| = \sup\limits_{a\le x\le b} |f(x)+g(x)|$

$$\le \sup_{a\le x\le b} |f(x)| + \sup_{a\le x\le b} |g(x)| = \|f\| + \|g\|$$

Dolayısıyla $C[a,b]$ bu norma göre bir normlu uzaydır.

Bir normlu uzayda norm fonksiyonu için $\|x-y\| = \|y-x\|$ dir. Gerçekten; $\alpha = -1$ alınırsa N2' den dolayı $\|-x\| = \|x\|$ ve özellikle $\|x-y\| = \|y-x\|$ dir.

1.3.2. Banach Uzayı

Tanım:

N normlu uzay olsun. Eğer bu uzay tam ise, N ' ye Banach Uzayı denir. N ' nin normlu reel veya kompleks vektör uzay oluşuna göre Banach uzayına, reel veya kompleks Banach uzayı denir.

Örnek 14' e göre $C[a,b]$ uzayı bir Banach uzayıdır. Aşağıda bir başka örneği inceleyelim.

Örnek 17.

p , $1 \le p < \infty$ olmak üzere;

$$l_p = \left\{ (x_n) = (x_1, x_2, \ldots) \,\middle|\, x_i \in F \ ve \ \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \right\} \quad (F = \mathbb{R} \ veya \ \mathbb{C})$$

kümesinde bileşen toplama ve skalerle çarpma işlemlerini ele alalım. Bu işlemlere göre l_p' nin bir vektör uzayı olduğu gösterilebilir. Bu uzayın $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}$ normuna göre Banach Uzayı olduğunu gösterelim.

$(x_m) = (x_1^m, x_2^m, ...)$ olmak üzere (x_m), l_p' de keyfi bir cauchy dizisi olsun. Bu taktirde her $\varepsilon > 0$ için $m, n > m_0$ olduğunda

$$\|x_m - x_n\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^m - x_i^n|^p \right)^{1/p} < \varepsilon \tag{1}$$

olacak şekilde m_0 sayısı vardır. Buradan anlaşılır ki $i = 1, 2, ...$ için;

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^m - x_i^n|^p < \varepsilon^p \Rightarrow |x_i^m - x_i^n| < \varepsilon \text{ ' dır, } m, n > m_0,\ \forall i$$

Demek ki keyfi fakat sabit her bir i için $(x_i^n) = (x_i^1, x_i^2, ...)$ dizisi F de (yani $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$' de) bir cauchy dizisidir. F tam olduğundan bu cauchy dizisi yakınsaktır. $\lim_{n \to \infty} x_i^n = x_i$ olsun. Her i için bu limitler yardımıyla teşkil ettiğimiz diziyi x ile gösterelim. Yani $x = (x_1, x_2, ...)$ olsun.

Şimdi $k = 1, 2, ...$ için (1)' den $\sum_{i=1}^{k} |x_i^m - x_i^n|^p < \varepsilon^p$ yazılabilir. $n \to \infty$ için;

$$\sum_{i=1}^{k} |x_i^m - x_i|^p < \varepsilon^p \ ; \ m > m_0$$

yazılabilir. $k \to \infty$ için;

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^m - x_i|^p < \varepsilon^p \tag{2}$$

elde edilir. Bu ise

$$(x_m - x) = (x_1^m - x_1, x_2^m - x_2, ...) \in l_p$$

olduğunu gösterir. $(x_m) \in l_p$ olduğundan $x = x_m + (x - x_m) \in l_p$ olur. (1)' e dikkat edilirse (2)' nin sol tarafı $\|x_m - x\|_p$ olur. Buradan $x_m \to x$ dir. Yani l_p içindeki (x_m) cauchy dizisi bir $x \in l_p$ noktasına yakınsadığından l_p tamdır. O halde l_p bir Banach uzayıdır.

1.3.3. Hilbert Uzayı

1.3.3.1. Öklid Uzayı

1.3.3.1.1. İç Çarpım

Tanım:

X, $F=\{\mathbb{R} \text{ veya } \mathbb{C}\}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer bir $\langle , \rangle : X \times X \to F$ fonksiyonu,

i) $\langle x, x \rangle \geq 0,\ \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$, $\forall x \in X$

ii) $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$, $\forall x, y, z \in X$

iii) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ $(\alpha \in F)$, $\forall x, y \in X$

iv) $\langle x, y \rangle = \langle \overline{y, x} \rangle$, $\forall x, y \in X$

şartlarını sağlıyorsa, bu fonksiyona X uzayında bir iç çarpım (veya iç çarpım fonksiyonu) denir. Üzerinde iç çarpım fonksiyonunun tanımlandığı vektör uzayına Öklid uzayı (veya iç çarpım uzayı) denir. İç çarpım uzayını $(X, \langle\ \rangle)$ veya kısaca X ile göstereceğiz.

Örnek 18.

$x=(x_1, x_2, ..., x_n)$, $y=(y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ olmak üzere $\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dönüşümü

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$$

olarak tanımlanırsa, $\mathbb{R}^n$ bir iç çarpım uzayıdır. Gerçekten iç çarpım aksiyomlarının sağlandığını aşağıdaki gibi gösterebiliriz:

i) $\langle x, x \rangle = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \geq 0$ ve $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 0 \Leftrightarrow x_i = 0$

ii) $\langle x+y, z \rangle = (x_1+y_1) z_1 + (x_2+y_2) z_2 + ... + (x_n+y_n) z_n$

$$= x_1 z_1 + y_1 z_1 + x_2 z_2 + y_2 z_2 + ... + x_n z_n + y_n z_n$$

$$= x_1 z_1 + x_2 z_2 + ... + x_n z_n + y_1 z_1 + y_2 z_2 + ... + y_n z_n$$

$$= \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

iii) $\langle \alpha x, y \rangle = (\alpha x_1) y_1 + (\alpha x_2) y_2 + ... + (\alpha x_n) y_n = \alpha (x_1 y_1) + \alpha (x_2 y_2) + ... + \alpha (x_n y_n)$

$$= \alpha \langle x, y \rangle .$$

iv) $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n = y_1 x_1 + y_2 x_2 + ... + y_n x_n = \langle y, x \rangle$

olduğundan $\langle \; \rangle$ iç çarpım dönüşümüdür. Dolayısıyla $(\mathbb{R}^n, \langle \; \rangle)$ bir öklid uzayıdır. Aynı düşünce ile $\mathbb{C}^n$ uzayı $\langle z, z' \rangle := \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{z_i'}$ ye göre bir kompleks öklid uzayıdır.

Aşağıdaki teoremde iç çarpımın bazı özelliklerini ispatlayacağız.

Teorem 2.

X bir iç çarpım uzayı, $x, y, z \in X$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olsun. Bu taktirde

1) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$

2) $\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle$

3) $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle y, z \rangle$

4) $\langle x, \theta \rangle = \langle \theta, y \rangle = 0$ dır.

İspat:

Teoremi ispat etmek için iç çarpımın özelliklerini kullanmak yeterlidir.

1) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \langle \alpha x, z \rangle + \langle \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$

2) $\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\langle \alpha y, x \rangle} = \overline{\alpha \langle y, x \rangle} = \overline{\alpha} \overline{\langle y, x \rangle} = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle$

3) $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\langle \alpha y + \beta z, x \rangle} = \overline{\langle \alpha y, x \rangle} + \overline{\langle \beta z, x \rangle} = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle x, z \rangle$

4) $\langle x, \theta \rangle = \langle x, \theta + \theta \rangle = \langle x, \theta \rangle + \langle x, \theta \rangle \Rightarrow \langle x, \theta \rangle = 0$

$\langle \theta, y \rangle = \langle \theta + \theta, y \rangle = \langle \theta, y \rangle + \langle \theta, y \rangle \Rightarrow \langle \theta, y \rangle = 0$

olduğu görülür.

İç çarpım ile norm arasında aşağıdaki ilişki vardır.

Teorem 3.

Bir öklid uzayı normlu uzaydır.

İspat:

$\|\ \|: X \to \mathbb{R}, \|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ olarak tanımlanan $\|\ \|$ dönüşümünü ele alalım.

i) $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0$ olduğu açıktır.

ii) $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

iii) $\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} = \sqrt{\alpha \overline{\alpha} \langle x, x \rangle} = \sqrt{|\alpha|^2 \langle x, x \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\alpha| \|x\|$

iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ olduğunu gösterelim.

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \|y\|^2$$

yazılır. $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z$ eşitliği göz önüne alınır ve $\operatorname{Re} z \leq |z|$ eşitsizliği kullanılırsa

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\left(\langle x, y \rangle\right) + \|y\|^2$$

$$\leq \|x\|^2 + 2\left|\langle x, y \rangle\right| + \|y\|^2 \overset{schwarz}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = \left(\|x\| + \|y\|\right)^2$$

elde edilir. Buradan

$$\|x + y\|^2 \leq \left(\|x\| + \|y\|\right)^2 \text{ olup } \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

bulunur.

Uyarı 1: Teorem 3' ün tersi genelde doğru değildir (Bakınız Örnek 21).

Örnek 19.

Örnek 18' deki $\mathbb{R}^n$ uzayı $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$' e göre bir öklid uzayıdır. Teorem 2' ye göre bu uzay $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ ye göre bir normlu uzaydır.

Tanım:

X bir Öklid uzayı olsun. Teorem 2' e göre X bir normlu uzaydır. Eğer bu uzay tam ise, X ' e bir Hilbert Uzayı denir.

Örnek 20.

Örnek 18' de $\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$ olarak tanımlanan $\mathbb{R}^n$ ' nin bir öklid uzayı olduğunu gördük. Şimdi $\mathbb{R}^n$ ' in tam olduğunu gösterelim. İç çarpım normunun tanımından $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \right)^{1/2}$ yazılabilir ve böylece $\|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} = \sqrt{\left(x_1 - y_1 \right)^2 + ... + \left(x_n - y_n \right)^2}$ normunu elde ederiz. $\mathbb{R}^n$ ' nin $\|x - y\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}$ normuna göre tam olduğunu gösterelim.

$x_m = \left(x_1^m, x_2^m, ..., x_n^m \right)$ olmak üzere $\mathbb{R}^n$ de $\left(x_m \right)$ cauchy dizisini alalım. (Burada x_i^m deki m üst indis olarak alınmıştır.) O halde $\varepsilon > 0$ için $m, r > n_0$ olduğunda

$$\|x_m - x_r\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \left| x_i^m - x_i^r \right|^2 \right)^{1/2} < \varepsilon \tag{3}$$

olacak şekilde bir n_0 tamsayısı vardır. $i = 1, 2, ..., n$ için buradan

$$\left| x_i^m - x_i^r \right|^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow \left| x_i^m - x_i^r \right| < \varepsilon$$

elde edilir. Bu ifade her bir i için $\left(x_i^r \right) = \left(x_i^1, x_i^2, ... \right)$ nin reel sayıların bir cauchy dizisi olduğunu gösterir. $\mathbb{R}$ tam olduğundan bu dizi yakınsaktır. $r \to \infty$ için $x_i^r \to x_i$ olduğunu kabul edelim. $i = 1, 2, ..., n$ için bu limitler yardımıyla (n tane limit) x noktasını $x = \left(x_1, x_2, .., x_n \right)$ olarak tanımlayalım. Açıkça $x \in \mathbb{R}^n$ dir. $r \to \infty$ için (3)' den $\|x_m - x\|_2 \le \varepsilon$ elde edilir. Bu, $\left(x_m \right)$ nin limitinin x olduğunu gösterir. $\left(x_m \right)$ keyfi olduğundan ispat tamamlanmış olur.

Sonuç olarak $\mathbb{R}^n$ bir Hilbert uzayıdır.

Bir öklid uzayı bir normlu uzay olduğundan (bakınız Teorem 3) aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 4 [23].

Bir Hilbert uzayı bir Banach uzayıdır.

Uyarı 2: Bunun tersi genelde doğru değildir.

Buna bir örnek vermeden önce aşağıdaki teoremi ifade edelim.

Teorem 5 (Paralel kenar kanunu) [23].

Bir $\left(X, \|\ \|\right)$ normlu uzayda $\|\ \|$ normunun bir iç çarpımla tanımlanabilmesi için gerekli ve yeterli koşul her $x, y \in X$ için;

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

olmasıdır.

İspat :

$(\Rightarrow)$ açıktır.

$(\Leftarrow)$ $\langle x, y\rangle := \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$. $\langle x, y\rangle$ bir iç çarpım olup, $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$.

Not 1: Teoremden anlaşılacağı gibi, eğer bir norm paralel kenar kanununu sağlamıyorsa bu norm iç çarpım normu olamaz. Dolayısıyla her normlu uzay bir Öklid Uzayı (iç çarpım uzayı) değildir. Şimdi bunu bir örnekle gösterelim:

Örnek 21.

Örnek 16' dan $\left(C[a,b],\|\ \|\right)$ uzayının bir normlu uzay olduğunu biliyoruz. Buna göre $C\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ve $\|f\|=\max\limits_{0\le x\le\frac{\pi}{2}}|f(x)|$ olmak üzere $\left(C\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\|\ \|\right)$ uzayı bir normlu uzaydır. Bu uzayda paralel kenar kanununun sağlanmadığını gösterelim.

$f(x):=Cosx$, $g(x):=Sinx$ fonksiyonları için $f,g\in C\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ olup;

$$\|f+g\|=\max_{0\le x\le\frac{\pi}{2}}|f(x)+g(x)|=\max_{0\le x\le\frac{\pi}{2}}|Cosx+Sinx| \overset{x=\frac{\pi}{4}}{=} Cos\frac{\pi}{4}+Sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

$$\|f-g\|=\max_{0\le x\le\frac{\pi}{2}}|Cosx-Sinx|=1-0=1,\ \|f\|=\max_{0\le x\le\frac{\pi}{2}}|Cosx|=1,\ \|g\|=\max_{0\le x\le\frac{\pi}{2}}|Sinx|=1$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=\left(\sqrt{2}\right)^2+1^2=3\\ 2\left(\|f\|^2+\|g\|^2\right)=2(1+1)=4\end{array}\right\}\Rightarrow 3\neq 4\Rightarrow \|x+y\|^2+\|x-y\|^2\neq 2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$$

$\Rightarrow$ Teorem 5' e göre $C\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ normlu uzayı bir öklid uzayı değildir.

1.4. Banach * - Cebirleri

1.4.1. Cebir

Tanım:

C , F cismi üzerinde bir vektör uzay ve $\cdot : C\times C\to C$ bir dönüşüm olsun. Eğer bu $\cdot : C\times C\to C$ dönüşümü her $x,y,z\in C$ ve her $\alpha\in F$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa C' e (F üzerinde) cebir denir.

C1) $\alpha(x\cdot y)=(\alpha x)\cdot y=x\cdot(\alpha y)$

C2) $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$ ve $(x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z$

C3) $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$

Cebirin tanımında geçen F cisminin $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olması halinde C' ye sırası ile reel veya kompleks cebir denir. Şayet C bir cebir ve her $x, y \in C$ için $x \cdot y = y \cdot x$ ise C' ye değişmeli veya komütatif cebir denir. C' nin çarpma işlemine göre etkisiz elemanı varsa, yani her $x \in C$ için $x \cdot e = e \cdot x = x$ olacak şekilde $e \in C$ varsa C' ye birim elemanlı cebir ve e' e de birim eleman denir. Bu birim eleman bazen 1 veya 1_C ile de gösterilir.

Örnek 22.

Örnek 3' de $C(X, \mathbb{R})$ nin bir vektör uzay olduğunu gördük. Ayrıca $(f \cdot g)(x) := f(x)g(x)$ olarak tanımlanan $f \cdot g$ çarpımı da reel sürekli bir fonksiyon olduğundan $f \cdot g \in C(X, \mathbb{R})$ dir. Demek ki tanımlanan bu işlemlere göre $C(X, \mathbb{R})$ kapalıdır. $C(X, \mathbb{R})$' nin cebirle ilgili diğer şartları sağladığını da gösterebiliriz. Gerçekten; $\forall f, g, h \in C(X, \mathbb{R})$ için , $\left[\alpha(f \cdot g)\right](x) = \alpha(f \cdot g)(x) = \alpha\left[f(x)g(x)\right]$

$$= \left[\alpha f(x)\right]g(x) = (\alpha f)(x)g(x)$$

$$= \left[(\alpha f) \cdot g\right](x)$$

olduğundan $\alpha(f \cdot g) = (\alpha f) \cdot g$ dir.

$$\left[\alpha(f \cdot g)\right](x) = \alpha(f \cdot g)(x) = \alpha\left[f(x)g(x)\right] = \left[\alpha f(x)g(x)\right] = \left[f(x)\alpha g(x)\right]$$

$$= f(x)\left[\alpha g(x)\right] = f(x)\left[(\alpha g)(x)\right] = \left[f \cdot (\alpha g)\right](x)$$

olduğundan $\alpha(f \cdot g) = f \cdot (\alpha g)$ dir. Yani $\alpha(f \cdot g) = (\alpha f) \cdot g = f \cdot (\alpha g)$ dir.

$$\left[f \cdot (g + h)\right](x) = f(x)\left[g(x) + h(x)\right] = f(x)g(x) + f(x)h(x)$$

$$= [f \cdot g + f \cdot h](x)$$

olduğu için $f \cdot (g + h) = f \cdot g + f \cdot h$ dir.

$$\left[(f + g) \cdot h\right](x) = \left[f(x) + g(x)\right] \cdot h(x) = f(x)h(x) + g(x)h(x)$$

$$= [f \cdot h + g \cdot h](x)$$

olduğu için $(f + g) \cdot h = f \cdot h + g \cdot h$ dır.

$$\left[f \cdot (g \cdot h)\right](x) = f(x)[g \cdot h](x) = f(x)g(x)h(x)$$

$$=[f\cdot g](x)h(x) \;=\big[(f\cdot g)\cdot h\big](x)$$

olduğundan $f\cdot(g\cdot h)=(f\cdot g)\cdot h$ dır.

Sonuç olarak $C(X,\mathbb{R})$ reel cebirdir. Aynı zamanda $e:X\to\mathbb{R}$, $\mathrm{e}(x)=1$ olarak tanımlanırsa her $f\in C(X,\mathbb{R})$ için $e\cdot f=f\cdot e=f$ ve

$$(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)=g(x)f(x)=(g\cdot f)(x)\Rightarrow f\cdot g=g\cdot f$$

olduğundan $C(X,\mathbb{R})$ birim elemanlı ve değişmeli bir cebirdir.

1.4.1.1. Alt Cebir

Tanım:

C bir cebir ve A, C' nin boş olmayan alt kümesi olsun. C' deki işlemlere göre A bir cebir ise A' ya C' nin alt cebiri denir. Kısaca C' nin boş olmayan bir A alt kümesinin alt cebir olması için gerek ve yeter şart,

1) A' nın lineer alt uzay ve

2) Her $x,y\in A$ için $xy\in A$

olmasıdır.

Açıkça $\mathbb{R}$ uzayı kompleks sayılar cebirinin bir reel alt cebiri olup, bir kompleks alt cebiri değildir.

1.4.1.2. Cebirler için Direkt Toplam

Tanım:

1.2.1.3 de iki vektör uzayın Direkt toplama tanımını vermiştik. Eğer burada X bir cebir ise i ve ii şıklarına ilave olarak, yani;

i) $x+y=(a+c,b+d)$

ii) $\lambda x=(\lambda a,\lambda b)$, $\lambda\in F$

şıklarına ilave olarak bu uzayda keyfi iki $x=(a,b)$ ve $y=(c,d)$ elemanları için çarpımı şöyle tanımlayalım:

iii) $xy=(ac,bd)$

dir. O halde

X ve Y gibi iki cebirin direkt çarpımı da cebirdir.

1.4.2. Normlu Cebirde Lineer ve Sınırlı Operatörler

Tanım:

C bir cebir ve C' de bir $\| \ \|$ normu tanımlanmış olsun. Yani kısaca $(C,\| \ \|)$bir normlu uzay ve aynı zamanda cebir olsun. Bu norm her $x,y\in C$ için $\|xy\|\le\|x\|\|y\|$ şartını sağlıyorsa ve C' nin birim elemanlı olması halinde de $\|e\|=1$ ise C' ye normlu cebir denir.

Örnek 23.

Örnek 22' de $C[a,b]$'nin cebir olduğunu gördük. $C[a,b]$' nin Banach Cebiri olduğunu gösterelim. Örnek 16' dan $\|f\|=\sup\limits_{a\le x\le b}|f(x)|$ nin bir norm olduğunu biliyoruz. Şimdi $\|f\cdot g\|\le\|f\|\|g\|$ olduğunu gösterelim:

$$\sup\{|a||b|\}\le\sup|a|\sup|b|$$

olduğundan

$$\|f\cdot g\|=\sup(|f(x)||g(x)|)\le\sup|f(x)|\sup|g(x)|=\|f\|\|g\|$$

Buradan $(C[a,b],\| \ \|)$ bir normlu cebirdir.

Tanım:

İki normlu uzay arasındaki dönüşümlere operatörler adı verilir.

Tanım:

X ve Y aynı F cismi üzerinde iki vektör uzayı olsun. $A: X \to Y$ operatörü $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in F$ için;

i) $A(x+y) = A(x) + A(y)$

ii) $A(\alpha x) = \alpha A(x)$

şartlarını sağlıyorsa, A' ya lineer operatör denir. Bu iki şart, $\forall x, y \in A$ ve $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$ şartına denktir.

Örnek 24.

$A: X \to X$, $A(x) = \lambda x, \lambda \in F$ için A lineerdir.

Örnek 25.

$A_1, A_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ A_1(x_1, ..., x_n) := \sum_{i=1}^{n} x_i,\ A_2(x_1, ..., x_n) := x_1.x_2...x_n = \prod_{i=1}^{n} x_i,\ n > 1$ olsun. Açıkça, A_1 lineer, A_2 lineer değildir.

Tanım:

$\left(X, \| \|_x\right)$ ve $\left(Y, \| \|_y\right)$ iki normlu uzay ve $A: X \to Y$ bir operatör olsun. Öyle bir $K > 0$ sayısı varsa ki her $x \in X$ için $\|A(x)\|_y \leq K \|x\|_x$ ise, A' ya sınırlı operatör denir.

Örnek 26.

$A: X \to Y$ olmak üzere A sabit ise, A sınırlıdır.

Örnek 27.

$A: X \to X$ ve $A = id$ ise, $K = 1$ alınırsa $\forall\, x \in X$ için $\left\| A(x) \right\| = \|x\|$ olduğundan A sınırlıdır.

Şimdi lineer, sınırlı bir operatörün normunu tanımlayalım.

1.4.3. Operatörün Normu

Tanım:

$A: \left(X, \| \ \|_x \right) \to \left(Y, \| \ \|_y \right)$ lineer sınırlı bir operatör olsun. Bu takdirde;

$\|A\| := \inf \left\{ c > 0 : \|Ax\|_y \leq c \|x\|_x ,\ \forall\, x \in X \right\}$ bir norm olduğu kolayca gösterilebilir.

$\|A\|$ ' ya A ' nın normu denir.

Teorem 6.

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|_y = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Ax\|_y}{\|x\|_x} \text{ dir.}$$

İspat :

$$\alpha := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|_y \overset{x \to \frac{x}{\|x\|_x},\, x \neq \theta}{=} \sup_{x \neq \theta} \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|_x} \right) \right\|_y = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Ax\|_y}{\|x\|_x} \Rightarrow \alpha = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Ax\|_y}{\|x\|_x} \Rightarrow \|Ax\|_y \leq \alpha \|x\|_x \Rightarrow \|A\| \leq \alpha$$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \text{ için } \exists x_0 \in X : \alpha - \varepsilon \leq \frac{\|Ax_0\|_y}{\|x_0\|_x} \Rightarrow (\alpha - \varepsilon) \|x_0\|_x \leq \|Ax_0\|_y \leq \alpha \|x_0\|_x$$

$$\Rightarrow (\alpha - \varepsilon) \cancel{\|x_0\|_x} \leq \|Ax_0\|_y \leq \|A\| \cancel{\|x_0\|_x} \Rightarrow (\alpha - \varepsilon) \leq \|A\| \overset{\forall \varepsilon}{\Rightarrow} \alpha \leq \|A\| \Rightarrow \|A\| = \alpha \,.$$

Teorem 7.

X ve Y normlu uzaylar ve $A : X \to Y$ bir lineer operatör olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler denktir.

i) A süreklidir.

ii) $\left\{ \|A(x)\| : \|x\| \leq 1 \right\}$ sınırlıdır.

İspat :

$(i \Rightarrow ii)$ A, $\theta \in X$ noktasında sürekli olsun. Bu taktirde $\left\{ \|A(x)\| : \|x\| \leq 1 \right\}$ kümesinin sınırlı olduğunu gösterelim. A' nın $\theta \in X$ de sürekliliğini kabul edip $\left\{ \|A(x)\| : \|x\| \leq 1 \right\}$ kümesinin sınırlı olmadığını varsayalım. Bu taktirde $\|x_n\| \leq 1$ için $\|A(x_n)\| \geq n$ olacak şekilde bir $x_n \in X$ vardır. $y_n = \frac{1}{n} x_n$ denirse $\|y_n\| = \frac{1}{n}\|x_n\| \leq \frac{1}{n}$ olacağından $n \to \infty$ için $\|y_n\| \to 0$ olup $y_n \to \theta$ dır. A, $\theta \in X$ de sürekli olduğundan $A(y_n) \to \theta'$ olmalıdır. Fakat

$$\|A(y_n)\| = \left\| A\left(\frac{1}{n} x_n \right) \right\|' = \frac{1}{n}\|A(x_n)\| \geq \frac{1}{n} n = 1$$

olduğundan $\|A(y_n)\| \geq 1$ elde edilir. Bu ise $A(y_n) \to \theta'$ olmasıyla çelişir. Bu çelişki $\|A(x_n)\| \geq n$ kabulümüzden kaynaklandı. O halde $\left\{ \|A(x)\|' : \|x\| \leq 1 \right\}$ kümesi sınırlıdır.

$(ii \Rightarrow i)$ A sınırlı ise A' nın sürekli olduğunu gösterelim. $x \in X$ keyfi ve $x_n \to x$ olsun. Bu taktirde A nın lineer ve sınırlı olduğu göz önüne alınırsa

$$\|A(x_n) - A(x)\| \overset{A \, lineer}{=} \|A(x_n - x)\| \overset{A \, sınırlı}{\leq} \|A\| \|x_n - x\| \to 0$$

elde edilir. O halde $A(x_n) \to A(x)$ olup A, $x \in X$ de süreklidir. $x \in X$ keyfi olduğundan A, X' de süreklidir.

Sonuç 1.

A süreklidir $\Leftrightarrow \|A\|$ sınırlıdır.

Örnek 28.

X bir Banach uzayı ve $B(X)$, X' den X' e tanımlı tüm lineer sınırlı dönüşümler kümesi olsun. Yani $B(X) := \{ A : X \to X \,|\, A \text{ bir lineer,sınırlı operatördür} \}$' dir. $B(X)$ uzayının aşağıdaki işlemlere göre bir vektör uzayı olduğu gösterilebilir:

$(A+B)(x) := A(x) + B(x)$,

$(\lambda A)(x) := \lambda A(x),\ \lambda \in \mathbb{R}(\text{veya } \mathbb{C}), \forall x, y \in X$

Bu uzayın $\cdot : (A \cdot B)(x) := A(B(x))$ işlemine göre bir cebir olduğu kolayca ispatlanabilir. $B(X)$ üzerinde A' nın normunu $\|A\| := \inf\{ c : \|Ax\| \le c\|x\| \}$ olarak tanımlayalım. Böyle bir norm vardır, çünkü A sınırlı olduğundan $\forall x \in X$ için $\|Ax\| \le c\|x\|$ olacak şekilde bir pozitif c sayısı vardır. Teorem 6' dan bu tanım $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \le 1} \|Ax\| = \sup\limits_{x \ne \theta} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$ ifadesine denktir. Dolayısıyla $(B(X), \| \ \|)$ uzayı normlu uzaydır. Şimdi biz $(B(X), \| \ \|)$ nin bir normlu cebir olduğunu gösterelim. Yani $\forall A, B \in B(X)$ için $\|A \cdot B\| \le \|A\|\|B\|$ olduğunu gösterelim. $\forall x \in X$ için;

$$\|A \cdot B(x)\| = \|A(B(x))\| = \frac{\|A(B(x))\|}{\|B(x)\|}\|B(x)\| \le \left(\sup_{x \ne \theta} \frac{\|A(B(x))\|}{\|B(x)\|} \right)\|B(x)\| = \|A\|\|B(x)\|$$

$$= \|A\| \frac{\|B(x)\|}{\|x\|}\|x\| \le \|A\|\|x\| \sup_{x \ne \theta} \frac{\|B(x)\|}{\|x\|} = \|A\|\|B\|\|x\|$$

Yani $\|A \cdot B(x)\| \le \|A\|\|B\|\|x\|$ dir. Buradan;

$$\|A \cdot B\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|A \cdot B(x)\| \le \sup_{\|x\| \le 1} \|A\|\|B\|\|x\| = \|A\|\|B\| \Rightarrow \|A \cdot B\| \le \|A\|\|B\|$$

olup $(B(X), \| \ \|)$ bir normlu cebirdir.

1.4.4. Banach * - Cebiri Tanımı

Tanım:

$\left(C,\|\ \|\right)$ normlu cebiri tam uzay ise, bu normlu cebire Banach Cebiri adı verilir. Bu tanıma göre $\left(C,\|\ \|\right)$ Banach cebiri ise C' nin birim elemanlı olması gerekmez. Fakat C birim elemanlı ise Banach cebiri olabilmesi için, şartlardan biri $\|e\|=1$ olmasıdır.

Örnek 29.

Örnek 14' e göre $C[a,b]$ bir Banach uzayıdır. Örnek 22' e göre ise bu uzay bir cebirdir. Dolayısıyla $\left(C[a,b],\|\ \|\right)$ bir Banach Cebiridir.

Örnek 30.

Örnek 28 de $\left(B(X),\|\ \|\right)$ nin normlu cebir olduğunu gördük. Ayrıca $B(X)$ uzayı bu norma göre tamdır, yani $\left(B(X),\|\ \|\right)$ bir Banach cebiridir. Gösterelim ; $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset B(X)$ bir cauchy dizisi olsun. O halde $m,n\to\infty$ iken $\|A_n-A_m\|\to 0$ dır. Buradan $\forall x\in X$ için $\|(A_n-A_m)(x)\|\to 0$ yani;

$$\|A_n(x)-A_m(x)\|\to 0 \tag{4}$$

dir. $\forall x\in X$ bir sabit ve $x_n:=A_n(x)$ olsun. O halde $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, X' de bir dizidir. (4) den $m,n\to\infty$ iken $\|x_n-x_m\|\to 0$ dır. Bu yüzden $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, X' de bir cauchy dizisidir. X bir Banach uzayı yani tam olduğundan bu dizi X' in bir elemanına yakınsar. Bu elemanı a_x ile gösterelim. Bu durumda $n\to\infty$ iken $x_n\to a_x$ yani $n\to\infty$ iken

$$\|x_n-a_x\|\to 0 \text{' dir.} \tag{5}$$

Burada a_x elemanı x' e bağımlıdır. $A: X \to X$ operatörünü $\forall x \in X$ için $A(x) := a_x$ şeklinde tanımlayalım. $A \in B(X)$ olduğunu yani A' nın lineer, sınırlı olduğunu gösterelim. $\forall\, x,\, y \in X$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ için $A(\lambda x) = a_{\lambda x}$ ve $A(x+y) = A(x) + A(y)$ olduğunu gösterelim. A_n lineer olduğundan $A_n(\lambda x) = \lambda A_n(x) = \lambda x_n$ olup buradan $(\lambda x)_n = \lambda x_n$ dir. Benzer şekilde $A_n(x+y) = A_n(x) + A_n(y) = x_n + y_n$ buradan $(x+y)_n = x_n + y_n$ dir. O halde (5)' den $\left\|(\lambda x)_n - a_{\lambda x}\right\| \to 0, \left\|(x+y)_n - a_{x+y}\right\| \to 0$ olup, $a_{\lambda x} = \lambda a_x$ ve $a_{x+y} = a_x + a_y$ olduğunu görmek zor değildir. Buradan $A(\lambda x) = a_{\lambda x} = \lambda a_x = \lambda A(x)$, $A(x+y) = a_{x+y} = a_x + a_y = A(x) + A(y)$ dir. Yani A lineerdir. Şimdi A' nın sınırlı olduğunu gösterelim. A' nın sınırsız olduğunu varsayalım. O halde $k \to \infty$ iken $\left\|A(y_k)\right\| \to \infty$ olacak şekilde bir $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ dizisi vardır. Bu yüzden $k \to \infty$ iken $\left\|a_{y_k}\right\| \to \infty$ dır. Buradan n sabit ve $k \to \infty$ iken $\left\|(y_k)_n - a_{y_k}\right\| \to \infty$ olup bu (5) ile çelişir. Bu yüzden A sınırlıdır. O halde $A \in B(X)$ dir. Üstelik (5)' den $\forall x \in X$ ve $n \to \infty$ iken $\left\|x_n - a_x\right\| = \left\|A_n(x) - A(x)\right\| = \left\|(A_n - A)(x)\right\| \to 0$ dir. Buradan $\left\|A_n - A\right\| = \sup\limits_{\|x\| \le 1} \left\|(A_n - A)(x)\right\| \underset{n \to \infty}{\to} 0$ olduğundan $\left\|A_n - A\right\| \to 0$ yani $A_n \to A$ dır. Böylece $B(X)$ uzayındaki keyfi bir cauchy dizisi yine $B(X)$ uzayında bir elemana yakınsamaktadır. Bu yüzden $\left(B(X), \|\ \|\right)$ tamdır yani $B(X)$ bir Banach uzayıdır.

Tanım:

C bir cebir ve A, C' nin boş olmayan bir altkümesi olsun. Şayet C' deki işlemlere göre A' nın kendisi bir Banach Cebiri ise A' ya C' nin Alt Banach Cebiri denir.

Örnek 31.

$X = (\mathbb{C}, \mathbb{R})$ ve $A := (\mathbb{R}, \mathbb{R})$ olmak üzere $A \subset X$ bir alt reel Banach cebiridir.

Tanım:

X bir cebir olsun. $*: X \to X$ dönüşümü için $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{C}$ veya $\mathbb{R}$ olmak üzere

1) $\left(x^*\right)^* = x$

2) $\left(x+y\right)^* = x^* + y^*$

3) $\left(x \cdot y\right)^* = y^* \cdot x^*$

4) $\left(\lambda x\right)^* = \overline{\lambda} x^*$

koşulları sağlanıyorsa, * - dönüşümüne involusyon denir.

Örnek 32.

$X = \mathbb{C}$ için $z \in \mathbb{C}$ elemanının eşleniğini $z^* := \overline{z}$ olarak tanımlarsak yukarıdaki involusyon koşullarının sağladığı açıkça görülür.

Örnek 33.

$X = M_2\left(\mathbb{C}\right) = \left\{ A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{2} : a_{ij} \in \mathbb{C} \right\}$ 2×2 tipli matrisler uzayında $A \in X$ için $A^* := \overline{A^t}$ alalım, burada $\overline{A^t}$, A matrisinin transpozunun eşleniği anlamındadır.

$\left(A^*\right)^* = \overline{\left(\overline{A^t}\right)} = A$, $\left(A+B\right)^* = \overline{\left(A+B\right)^t} = \overline{A^t} + \overline{B^t} = A^* + B^*$, $\left(\lambda A\right)^* = \overline{\lambda} A^*$ olduğu açıktır.

$\left(A \cdot B\right)^* = B^* \cdot A^*$ olduğunu gösterelim.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ olsun. Bu taktirde

$A^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} \end{pmatrix}, B^* = \begin{pmatrix} \overline{b_{11}} & \overline{b_{21}} \\ \overline{b_{12}} & \overline{b_{22}} \end{pmatrix}$ dır.

$$\left(A \cdot B\right)^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}}\,\overline{b_{11}} + \overline{a_{12}}\,\overline{b_{21}} & \overline{a_{21}}\,\overline{b_{11}} + \overline{a_{22}}\,\overline{b_{21}} \\ \overline{a_{11}}\,\overline{b_{12}} + \overline{a_{12}}\,\overline{b_{22}} & \overline{a_{21}}\,\overline{b_{12}} + \overline{a_{22}}\,\overline{b_{22}} \end{pmatrix}$$

$$B^* \cdot A^* = \begin{pmatrix} \overline{b_{11}}\,\overline{a_{11}} + \overline{b_{21}}\,\overline{a_{12}} & \overline{b_{11}}\,\overline{a_{21}} + \overline{b_{21}}\,\overline{a_{22}} \\ \overline{b_{12}}\,\overline{a_{11}} + \overline{b_{22}}\,\overline{a_{12}} & \overline{b_{12}}\,\overline{a_{21}} + \overline{b_{22}}\,\overline{a_{22}} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow (A \cdot B)^* = B^* \cdot A^* \Rightarrow * : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C}),\ A^* := \overline{A^t}$ dönüşümü involusyondur.

Bu örnek $M_n(\mathbb{C})$ uzayınada $A^* := \overline{A^t}$ olarak genişletilebilir.

Tanım:

X cebirinde *-involusyon tanımlı ise, X ’ e *-Cebiri denir. Eğer X Banach cebiri olup, bu uzayda bir *-involusyon tanımlı ise, bu uzaya Banach *- Cebiri denir.

Örnek 34.

$M_n(\mathbb{C}) := \left\{ A = (a_{ij})_{i,\, j=1}^{n} : a_{ij} \in \mathbb{C} \right\} (n \in \mathbb{N})$ $n \times n$ tipli matrisler uzayını göz önüne alalım. Açıkça her $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrisi $\mathbb{C}^n$ uzayında bir lineer, sınırlı operatördür: $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Tersine, $B(\mathbb{C}^n)$' nin keyfi elemanının matrissel gösteriminin var olduğu kolayca gösterilebilir. Dolayısıyla $M_n(\mathbb{C}) = B(\mathbb{C}^n)$' dir. Örnek 30’ a göre $B(\mathbb{C}^n)$ bir Banach cebiridir. O halde $M_n(\mathbb{C}) = B(\mathbb{C}^n)$ cebiri $A^* = \overline{A}^t$ $(A \in M_n(\mathbb{C}))$’ ye göre bir Banach *-cebiridir.

Örnek 35.

Örnek 29’ a göre $(C[a,b], \|\ \|)$ bir Banach cebiridir. Bu cebirde $f^*(x) := \overline{f(x)}$ olarak tanımlanan $* : C[a,b] \to C[a,b]$ dönüşümü bir involusyon olup, bu involusyona göre $C[a,b]$ bir Banach * - cebiridir.

1.5. C^* ve W^* - Cebirleri

1.5.1. Kompleks C^* - Cebirleri

Tanım:

X bir kompleks Banach *-cebiri olsun. Eğer $\forall x \in X$ için $\|x^* \cdot x\| = \|x\|^2$ koşulu sağlanıyorsa, X uzayına bir C^*-Cebiri denir.

Örnek 36.

$X = \mathbb{C}$ uzayında $\|z\| = |z|$, $z^* := \overline{z}$ olarak tanımlanırsa, $\mathbb{C}$ bir C^*-cebiridir. $\|z\|^2 = \|z^* \cdot z\|$ olduğunu gösterelim. $z = x + iy$ olsun.

$$\|z\|^2 = |z|^2 = |x + iy| = x^2 + y^2$$

$$\|z^* \cdot z\| = |(x - iy)(x + iy)| = |x^2 + y^2| = x^2 + y^2$$

$\Rightarrow \|z^* \cdot z\| = \|z\|^2$ dir.

Örnek 37.

$C[a,b]$ uzayını ele alalım. Örnek 35' e göre bu uzay bir Banach *-cebiridir. $\forall f \in C[a,b]$ için

$$\|f^* \cdot f\| = \max_{a \le x \le b} |(f^* \cdot f)(x)| = \max_{a \le x \le b} |f^*(x) f(x)| = \max_{a \le x \le b} |f^*(x)||f(x)|$$

$$= \max_{a \le x \le b} |\overline{f(x)}||f(x)| \overset{|\overline{z}|=|z|}{=} \max_{a \le x \le b} |f(x)|^2 = \|f\|^2$$

olduğundan $C[a,b]$ bir C^*-cebiridir.

Bu örnek aşağıdaki gibi genişletilebilir:

X bir yerel kompakt uzay olmak üzere $C_0(X) := \{ f : X \to \mathbb{R}, f \text{ sürekli}, f(\infty) = 0 \}$ uzayını ele alalım. Burada $f(\infty) = 0$ eşitliği şu anlamdadır:

$f(\infty)=0 :\Leftrightarrow \forall f \in C_0(X), \forall \varepsilon > 0$ için $\exists K \subset X, K$ kompakt $: |f(x)| < \varepsilon, \forall x \in X \setminus K.$

$C_0(X)$ ' de cebirsel işlemleri şöyle tanımlayalım:

$$(\alpha f)(x) := \alpha f(x),$$

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x),$$

$$(fg)(x) := f(x)g(x),$$

$$f^*(x) := \overline{f(x)}.$$

Normu ise $\|f\| := \sup\limits_{x\in X} |f(x)|$ olarak tanımlayalım. O halde $C_0(X)$ uzayı bir C^* - cebiridir.

1.5.1.1. Hilbert Uzayında Dual Operatör

İki Banach uzayı arasındaki bir operatörün duali, Banach uzaylarının duali yardımıyla tanımlanır. Burada Hilbert uzayları için denk olan başka bir tanımı vereceğiz. Bunun için şu teoremden yararlanalım.

Teorem 8 [29].

H ve H' iki Hilbert uzayı olmak üzere $A : H \to H'$ bir lineer, sürekli operatör olsun. Bu taktirde keyfi $\mu \in H'$ ve $\xi \in H$ için $\langle B\mu, \xi \rangle_1 = \langle \mu, A\xi \rangle_2$ olacak şekilde $B : H' \to H$ lineer sürekli operatörü vardır.

Tanım:

$(H, \langle\ \rangle)$ bir Hilbert uzayı ve $A : H \to H$ bir operatör olsun. Teorem 8' deki $B : H \to H$ operatörüne A operatörünün duali denir ve $B := A^*$ ile gösterilir. Şu halde; $\forall x, y \in H$ için $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$ dir.

Dual operatöre bir örnek verelim.

Örnek 38.

$H = \mathbb{C}^2$ olsun. $M_2(\mathbb{C}) = B(\mathbb{C}^2)$ olduğundan $A = (a_{ij})_{i,\,j=1}^{2} \in M_2(\mathbb{C})$ matrisi $A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ olarak bir lineer sürekli operatördür. $\forall\, x \in \mathbb{C}^2 \Rightarrow x = (x_1, x_2),\quad x_i \in \mathbb{C}$, $Ax = y = (y_1, y_2),\quad y_i \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda;

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow y = Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

$\mathbb{C}^n$ de $\langle x, y\rangle = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \ldots + x_n\overline{y_n}$ olduğu göz önüne alınırsa;

$\langle Ax, y\rangle = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)\overline{y_1} + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)\overline{y_2}$ dir.

$A^* = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ olsun. Bu taktirde $A^* y = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 \end{pmatrix}$ dir.

Buradan;

$\langle x, A^* y\rangle = x_1\left(\overline{b_{11}y_1} + \overline{b_{12}y_2}\right) + x_2\left(\overline{b_{21}y_1} + \overline{b_{22}y_2}\right)$ bulunur. Buna göre

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle \overset{\forall x,\, y}{\Rightarrow} a_{11} = \overline{b_{11}},\, a_{12} = \overline{b_{21}},\, a_{21} = \overline{b_{12}},\, a_{22} = \overline{b_{22}} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \overline{A}^t$$

dir.

Sonuç olarak; $M_2(\mathbb{C}) = B(\mathbb{C}^2)$ cebirinde bir A operatörünün duali $\overline{A^t}$ ' ye eşittir, yani A operatörünün duali, transpozunun eşleniğidir.

Benzer şekilde $B(\mathbb{R}^n)$ veya $B(\mathbb{C}^n)$ uzaylarında bir A operatörünün dualinin $A^* = \overline{A}^t$ olduğu gösterilebilir.

Bir H Hilbert uzayında A^*, A ' nın duali olmak üzere $* : H \to H$ dönüşümü bir involusyondur. Gerçekten; burada $\langle T\xi, \mu\rangle \overset{\forall \xi,\, \mu}{=} \langle P\xi, \mu\rangle \Leftrightarrow T = P$ olduğunu kullanacağız.

i) $\left\langle A^{**}\xi, \mu\right\rangle = \left\langle \xi, A^*\mu\right\rangle = \langle A\xi, \mu\rangle \Leftrightarrow A^{**} = A$

ii) $\left\langle (\lambda A)^* \xi, \mu\right\rangle = \langle \xi, \lambda A\mu\rangle = \overline{\lambda}\langle \xi, A\mu\rangle$

$$= \overline{\lambda}\left\langle A^*\xi, \mu\right\rangle = \left\langle \overline{\lambda}A^*\xi, \mu\right\rangle \Leftrightarrow (\lambda A)^* = \overline{\lambda}A^*.$$

iii) $\left\langle (A+B)^* \xi, \mu\right\rangle = \langle \xi, (A+B)\mu\rangle = \langle \xi, A\mu + B\mu\rangle$

$$= \langle \xi, A\mu \rangle + \langle \xi, B\mu \rangle$$

$$= \langle A^* \xi, \mu \rangle + \langle B^* \xi, \mu \rangle$$

$$= \langle (A^* + B^*) \xi, \mu \rangle$$

$$\Leftrightarrow (A + B)^* = A^* + B^*$$

iv) $$\langle (A \cdot B)^* \xi, \mu \rangle = \langle \xi, A \cdot B\mu \rangle = \left\langle \xi, A\underbrace{(B\mu)}_{\mu'} \right\rangle = \left\langle \underbrace{A^* \xi}_{\xi'}, B\mu \right\rangle$$

$$= \langle B^* \cdot A^* \xi, \mu \rangle \Leftrightarrow (A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*$$

Yani A ' nın A^* duali *-involusyon koşullarını sağlıyor.

Şimdi dual operatörü kullanarak C^* -cebirine iki örnek daha verelim.

Örnek 39.

$M_n(\mathbb{C}) = B(\mathbb{C}^n)$ cebirini ele alalım. Örnek 34' e göre bu cebir $A^* := \overline{A^t}$ ' ye göre bir Banach *-cebiridir. Örnek 38' e göre bu $* : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dönüşümü operatörün dualine eşittir. Dolayısıyla $B(\mathbb{C}^n)$ dual involusyona göre de bir Banach *-cebiridir. Bu cebir için $\|A^* \cdot A\| = \|A\|^2$ koşulunun sağlandığı aşağıdaki örnekte genel durumda gösterilmektedir. Dolayısıyla $M_n(\mathbb{C}) = B(\mathbb{C}^n)$ bir C^*-cebiridir.

Burada norm $\|A\| = \underset{\|x\| \le 1}{Sup} \|A(x)\|_n$, $\|x\|_n = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$ şeklinde tanımlanmakatadır.

Örnek 40.

Örnek 30' daki $B(X)$ Banach cebirini $X = H$ için ele alalım. Yani bir H Hilbert uzayı olmak üzere $B(H) := \{ A : H \to H, \text{lineer,sınırlı} \}$ olsun. Bu uzayda involusyon A ' nın duali olarak tanımlanırsa, $B(H)$ bir C* - cebiridir. Gösterelim:

$\left\|A^* \cdot A\right\| = \left\|A\right\|^2$ olduğunu gösterelim. Örnek 28’ de A’ nın normunun $\left\|A\right\| = \sup\limits_{\|x\|=1}\left\|Ax\right\|$ olduğu gösterilmiştir. O halde;

$$\left\|A\right\|^2 = \sup_{\|x\|=1}\left\|Ax\right\|^2 = \sup_{\|x\|=1}\left\langle Ax,\, Ax\right\rangle = \sup_{\|x\|=1}\left\langle x,\, A^* \cdot Ax\right\rangle \tag{6}$$

$$\left\langle x,\, A^* \cdot Ax\right\rangle^2 \overset{\substack{cauchy\\ eşts.}}{\leq} \left\langle x,\, x\right\rangle . \left\langle A^* \cdot Ax,\, A^* \cdot Ax\right\rangle = \left\|x\right\|^2 . \left\|A^* \cdot Ax\right\|^2 \qquad \begin{pmatrix} \left\langle x, y\right\rangle^2 \leq \left\langle x, x\right\rangle \left\langle y, y\right\rangle \\ \left|\left\langle x, y\right\rangle\right| \leq \left\|x\right\|\left\|y\right\| \end{pmatrix}$$

(6)’ ya göre;

$$\left\|A\right\|^2 = \sup_{\|x\|=1}\left\langle x,\, A^* Ax\right\rangle \leq \sup_{\|x\|=1}\left(\left\|x\right\| . \left\|A^* Ax\right\|\right) = \sup_{\|x\|=1}\left\|A^* Ax\right\| = \left\|A^* \cdot A\right\|$$ Yani;

$\left\|A\right\|^2 \leq \left\|A^* \cdot A\right\|$ dir.

$B(H)$ Banach * - cebiri olduğundan $\left\|A \cdot B\right\| \leq \left\|A\right\|\left\|B\right\|$ dir.

$\Rightarrow \left\|A\right\|^2 \leq \left\|A^* \cdot A\right\| \leq \left\|A^*\right\|\left\|A\right\| = \left\|A\right\|\left\|A\right\| = \left\|A\right\|^2$

$\Rightarrow \left\|A^* \cdot A\right\| = \left\|A\right\|^2$ olur.

1.5.2. Kompleks W^*-Cebirleri

Tanım:

H bir Hilbert uzayı ve $B(H) := \{\, T : H \to H, \text{T lineer, sınırlı} \,\}$ olsun. $M \subset B(H)$ bir *-altcebiri, yani M bir altcebir olup $\forall\, x \in M$ için $x^* \in M$ olsun.

$$M' := \{\, x \in B(H) : xy = yx,\ \forall\, y \in M \,\}$$

altkümesine M’ nin komutantı denir. M'', M' ün komutantı olsun. Açıkça; $M \subset M'' = M^{iv} = \ldots$ ve $M' \subset M''' = M^{v} = \ldots$ dir.

Tanım:

Eğer $M = M''$ ise, M’ e W^* - cebir veya bir Von Neumann Cebiri denir. Von Neumann Cebirleri kısaca VNC ile gösterilir.

Örnek 41.

H bir Hilbert uzayı olmak üzere $B(H)$ bir W^*-cebiridir, yani bir VNC' dir. $B(H)=B(H)''$ olduğunu gösterelim. Gerçekten;

$\forall A \in B(H)''$ alalım. O halde $AP=PA$, $\forall P \in B(H)'$ dir. Yani,

$\forall A \in B(H)'' = \left\{ A \in B(H) : AP=PA, \forall P \in B(H)' \right\} \subset B(H)$ dir. $M \subset M''$ olduğundan $B(H) \subset B(H)''$ dir. O halde $B(H)=B(H)''$ dir.

Sonuç olarak, $B(H)$ bir VNC dir.

1.5.2.1. Faktör

Tanım:

$M \subset B(H)$ bir VNC olsun. $Z(M) := M \cap M'$' e M' nin merkezi denir. Eğer $Z(M)$ trivial ise, yani $Z(M)=1\,\mathbb{C}$ (veya $1\mathbb{R}$) ise, M' e bir faktör veya $B(H)$ nin alt faktörü denir.

Örnek 42.

Örnek 41' deki $B(H)$' nin bir faktör olduğunu gösterelim. Yani $B(H) \cap B(H)' = 1\mathbb{C}$ $\left(1(\xi)=\xi\right)$ olduğunu gösterelim.

$B(H)' = \left\{ A \in B(H) : AP=PA, \forall P \in B(H) \right\}, \forall \xi \in H$ için;

$(AP)(\xi)=(PA)(\xi) \Leftrightarrow A\left(P(\xi)\right)=P\left(A(\xi)\right) \overset{A-sabit,\forall P}{\Leftrightarrow} A=\lambda 1 \,(\lambda \in \mathbb{C})$ dir. Gerçekten; $\lambda 1\left(P(\xi)\right)=\lambda P(\xi)$, $P\left(\lambda 1(\xi)\right) \overset{P-lineer}{=} \lambda P\left(1(\xi)\right)=\lambda P(\xi)$ dir.

$\Rightarrow \left[A \in B(H)' \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} : A=\lambda 1, 1(\xi)=\xi \right] \Rightarrow B(H)' = 1\mathbb{C} := \{\lambda 1 : \lambda \in \mathbb{C}\} \subset B(H)$

$\Rightarrow Z\left(B(H)\right)=B(H) \cap B(H)' = B(H)' = \lambda\mathbb{C}$ dir.

Sonuç olarak $B(H)$ bir faktördür.

Örnek 43.

$M_n(\mathbb{C})$, $n \times n$ tipli matrisler cebiri olsun. $M_n(\mathbb{C}) = B(\mathbb{C}^n)$ olduğundan ve $\mathbb{C}^n$ bir Hilbert uzayı olduğundan Örnek 42' e göre $M_n(\mathbb{C})$ bir faktördür.

Bu örnek aşağıdaki gibi genişletilebilir.

Teorem 9 (Von Neumann).

N, $M_n(\mathbb{C})$' nin birim matrisi içeren bir involutif *-altcebiri olsun. O halde, $N^{''} = N$ yani N bir VNC' dir.

İspat:

$H := \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n \oplus ... \oplus \mathbb{C}^n$ olsun ve $(H, \pi), M_n(\mathbb{C})$' nin kanonik köşegen gösterimi, yani keyfi $a = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C}) : \pi(a) := \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix}$ olsun. $\pi(a) \subset B(H)$ olduğu yani $\pi(a) : H \to H$ lineer, sınırlı olduğu açıktır.

$V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix} \in H$ olmak üzere, $\mathbb{C}^n$' de $(V_1, V_2, ..., V_n)$ ortogonal tabanını ele alalım.

$p : H \to \pi(N)V$ bir ortogonal izdüşüm olsun. O halde $H = (\pi(N)V) \oplus (\pi(N)V)^{\perp}$ dir.

1) O halde $p \in \pi(N)^{'}$ dür. Gerçekten: $\forall \xi \in H$ olsun. $\pi(N)^{'} = \{ x \in B(H) : x\pi(a) = \pi(a)x, \forall a \in N \}$. $\forall a \in N$ için $p\pi(a) = \pi(a)p$ olduğunu gösterelim. Eğer $\xi \in \pi(N)V$ ise, $p\xi = \xi$ dir. Bu yüzden $\pi(a)\xi \in \pi(N)V$ olduğundan $\pi(a)p\xi = \pi(a)\xi$ ve $p\pi(a)\xi = \pi(a)\xi$. Buradan keyfi $\xi \in \pi(N)V$ için $\pi(a)p\xi = p\pi(a)\xi$ dir.

Şimdi $\xi \in (\pi(N)V)^{\perp}$ olsun. O halde $p\xi = \theta$ dir. Keyfi $\pi(b)V \in \pi(N)V$ için

$\langle \pi(a)\xi, \pi(b)V \rangle = \left\langle \xi, \underbrace{\pi(a)^{*}\pi(b)}_{\pi(c)}V \right\rangle = \langle \xi, \pi(c)V \rangle = 0 \Rightarrow \pi(a)\xi = \theta$ dir. Burada $\pi(a)^{*}\pi(b) = \pi(c)$ dir. Çünkü

$$\pi(a)^{*}\pi(b) = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix}^{*} \begin{pmatrix} b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{*} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a^{*} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a^{*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^{*}b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a^{*}b & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a^{*}b \end{pmatrix} = \pi(c)$$

Burada N involutif *-alt cebir olduğundan $c := a^{*}b \in N$ dir. Buradan $p\pi(a)\xi = p(\theta) = \theta$ ve $\pi(a)p\xi = \pi(a)\theta = \theta$, yani keyfi $\xi \in (\pi(N)V)^{\perp}$ için $p\pi(a)\xi = \pi(a)p\xi$ dir. Bu yüzden keyfi $\xi \in H$ için $\pi(a)p\xi = p\pi(a)\xi$ olup $\pi(a)p = p\pi(a)$ dir. Sonuç olarak $p \in \pi(N)'$ dir.

$B(H) = M_n(\mathbb{C})$ olduğundan $B(H)$' nin keyfi elemanları, $M_n(\mathbb{C})$' nin elemanları ile $n \times n$ tipli matris olarak yazılabilir. Yani $B(H)$, $M_n(M_n(\mathbb{C}))$ ile özdeştir. Buradan $B(H) \cong M_n(M_n(\mathbb{C}))$.

2) O halde, $\pi(N)' = M_n(N')$ dir. Burada

$\pi(N)' = \{ x \in B(H) : x\pi(a) = \pi(a)x, \forall a \in N \}$,

$N' = \{ b \in B(\mathbb{C}^n) : ab = ba, \forall a \in N \}$ 'dir.

$\forall x \in B(H)$ olsun. $B(H) = M_n(M_n(\mathbb{C}))$ olduğundan $x = (x_{ij})$ ve $x_{ij} \in M_n(\mathbb{C})$

olacak şekilde bir $x_{ij} \in M_n\left(M_n\left(\mathbb{C}\right)\right)$ matrisi vardır. O halde, $\forall a \in N$ için:

$$\pi\left(a\right)x = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_{11} & ax_{12} & \dots & ax_{1n} \\ ax_{21} & ax_{22} & \dots & ax_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ax_{n1} & ax_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11}a & x_{12}a & \dots & x_{1n}a \\ x_{21}a & x_{22}a & \dots & x_{2n}a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}a & x_{n2}a & \dots & x_{nn}a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix} = x\pi\left(a\right)$$

$$\Leftrightarrow \forall i, j : x_{ij}a = ax_{ij} \Leftrightarrow x_{ij} \in N'$$

Bu yüzden $\pi\left(a\right)x = x\pi\left(a\right) \Leftrightarrow x = \left(x_{ij}\right) : x_{ij} \in N' \Leftrightarrow x \in M_n\left(N'\right)$ dir.

Buradan

$$x \in \pi\left(N\right)' \Leftrightarrow x \in M_n\left(N'\right) \text{ olup } \pi\left(N\right)' = M_n\left(N'\right).$$

Benzer şekilde $\pi\left(N''\right) \subset M_n\left(N'\right)'$ elde edilir. Böylece keyfi $b \in N''$ için $\pi\left(b\right) \in \pi\left(N''\right) \subset M_n\left(N'\right)' = \pi\left(N\right)'' \Rightarrow \pi\left(b\right) \in \pi\left(N\right)''$ bulunur. $p \in \pi\left(N\right)'$ olduğundan $p\pi\left(b\right) = \pi\left(b\right)p \Rightarrow \pi\left(b\right)p = p\pi\left(b\right)p$ dir. O halde keyfi $\pi\left(a\right)V = \pi\left(N\right)V$ için $\left(\pi\left(b\right)p\right)\left(\pi\left(a\right)V\right) = \left(p\pi\left(b\right)p\right)\left(\pi\left(a\right)V\right) = p\pi\left(b\right)p\left(\pi\left(a\right)V\right) = p\pi\left(b\right)\pi\left(a\right)V$ dir. Diğer taraftan $\left(\pi\left(b\right)p\right)\left(\pi\left(a\right)V\right) = \pi\left(b\right)p\pi\left(a\right)V = \pi\left(b\right)\pi\left(a\right)V$ dir. Buradan $p\pi\left(b\right)\pi\left(a\right)V = \pi\left(b\right)\pi\left(a\right)V$ elde edilir. $a = 1$ için

$$p\pi\left(b\right)\pi\left(1\right)V = \pi\left(b\right)\pi\left(1\right)V = \begin{pmatrix} b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bV_1 \\ bV_2 \\ \vdots \\ bV_n \end{pmatrix}, \ b \in N''.$$

$$\Rightarrow p\pi\left(b\right)\pi\left(1\right)V = \begin{pmatrix} bV_1 \\ bV_2 \\ \vdots \\ bV_n \end{pmatrix} \in \pi\left(N\right)V \Rightarrow \begin{pmatrix} bV_1 \\ bV_2 \\ \vdots \\ bV_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix} \in \pi\left(N\right)V.$$

Dolayısıyla b, her $V_1, V_2, ..., V_n$ vektöründe N' nin bir operatörü olarak çalışıyor. Yani, $b \in N$ olup $N'' \subset N$ dir.

Sonuç olarak, $N^{''} = N$ olup N bir VNC' dir.

1.5.3. C^* - Cebirlerinin * - Gösterimi

Bu paragrafta bir C^* (veya W^*)–cebirinin bir $B(H)$ uzayındaki gösterimi ele alınacaktır.

Tanım:

X ve Y iki *-cebiri olsun. Eğer $\pi : X \to Y$ için;

1) $\pi(\alpha x + \beta y) = \alpha\pi(x) + \beta\pi(y)$

2) $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$

3) $\pi(x^*) = \pi(x)^*$

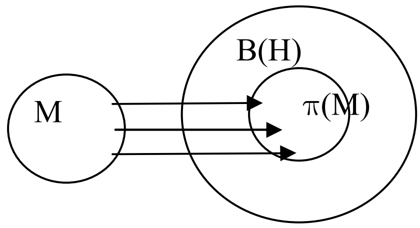
koşulları sağlanıyorsa, π ' e bir *-morfizmi denir.

Tanım:

$\pi : X \to Y$ bir *-morfizm olsun. Eğer π, bire-bir ve örten ise π ' ye *-izomorfizm denir. Bu durumda π $*$–izomorfizm $:\Leftrightarrow \ker(\pi) = \{\, x \in X : \pi(x) = \theta_y \,\} = \{\, \theta_x \,\}$ dir.

Tanım:

M bir C^* - cebiri olsun. Eğer $\exists H$ Hilbert (kompleks) uzayı ve $\exists \pi$ *-morfizm için $\pi : M \to B(H)$ ise, (π, H) (veya $\{\pi, H\}$) ikilisine M ' nin bir *-gösterimi denir.



Şekil 1. M ' nin bir *-gösterimi

Eğer $\pi : M \to \pi(M)$ olarak bir *-izomorfizm ise, yani $\ker(\pi) = \{\theta_x\}$ ise, (π, H) gösterimine M ' nin aşikar gösterimi denir.

Örnek 44.

Örnek 37' deki $C_0(X)$, C^* - cebirini ele alalım, burada X bir yerel kompakt uzaydır. m, X ' de bir ölçü olmak üzere $H := L_2(X, m)$ olsun. Her $f_0 \in C_0(X)$ için $\overline{f_0} : H \to H$ dönüşümünü şöyle tanımlayalım:

$$\overline{f_0}(f_0) := f_0 f \ , \ \forall f \in H$$

O halde $\overline{f_0} \in B(H)$ dir. Açıkça

$$\pi : C_0(X) \to B(H) : \pi(f_0) := \overline{f_0}$$

dönüşümü bir *-morfizm olup, $\pi(C_0(X)) \subset B(H)$ dir. Dolayısıyla (π, H), $C_0(X)$' in bir *-gösterimidir.

Tanım:

M bir W^*-cebiri olsun. Eğer $\pi : M \to B(H)$ olan bir H Hilbert uzayı ve π *-morfizmi varsa (π, H) ikilisine M **'** nin bir *- gösterimi denir.

Eğer π w- sürekli ise (π, H) ikilisine M **'** nin W^* - gösterimi denir.

Tanım:

H Hilbert uzayı ve (π, H) M **'** nin W^*-gösterimi olmak üzere eğer

$$\overline{l\{\pi(a)\xi : a \in A, \xi \in H\}} = H$$

eşitliği sağlanıyorsa (π, H) ikilisine M **'**nin yoz olmayan W^*-gösterimi adı verilir.

1.5.4. Yerel Konveks Topolojiler

H bir reel veya kompleks Hilbert uzayı olsun. $B(H)$' de aşağıdaki yakınsaklıklarla üretilen yerel konveks topolojileri ele alalım.

1. w**, zayıf (operatör) topolojisi:**

$$x_\alpha \to \theta :\Leftrightarrow \langle x_\alpha \xi, \eta \rangle \to 0 \,,\ \forall \xi, \eta \in H$$

2. w_α**,** σ **- zayıf (operatör) topolojisi** $(\sigma B(H), B(H)_*)$**:**

$$x_\alpha \to \theta :\Leftrightarrow \sum_n \langle x_\alpha \xi_n, \eta_n \rangle \to 0 \,,\ \forall \sum_n \left(\|\xi_n\|^2 + \|\eta_n\|^2 \right) < \infty$$

3. s**, güçlü (operatör) topolojisi:**

$$x_\alpha \to \theta :\Leftrightarrow \|x_\alpha \xi\| \to 0 \,,\ \forall \xi \in H$$

4. s^***, güçlü (operatör) * - topolojisi:**

$$x_\alpha \to \theta :\Leftrightarrow \|x_\alpha \xi\| + \|x_\alpha^* \xi\| \to 0 \,,\ \forall \xi \in H$$

5. s_σ**,** σ **- güçlü (operatör) topolojisi:**

$$x_\alpha \to \theta :\Leftrightarrow \sum_n \|x_\alpha \xi_n\|^2 \to 0 \,,\ \forall \sum_n \|\xi_n\|^2 < \infty$$

6. s_σ^*, σ - güçlü (operatör) * - topolojisi:

$$x_\alpha \to \theta :\Leftrightarrow \sum_n \left(\|x_\alpha \xi_n\|^2 + \|x_\alpha^* \xi_n\|^2 \right) \to 0, \; \forall \sum_n \|\xi_n\|^2 < \infty$$

7. u, düzgün (operatör) topolojisi:

$$x_\alpha \to \theta :\Leftrightarrow \|x_\alpha\| \to 0$$

Teorem 10 [24, 25].

$B(H)$' nin yerel konveks topolojileri arasında aşağıdaki ilişkiler vardır;

$$\begin{array}{l} w \le w_\alpha \le s_\sigma \le s_\sigma^* \le u \\ \cap \\ s \le s^* \le s_\sigma^* \\ \cap \\ s_\sigma \end{array}$$

H bir kompleks Hilbert uzayı olmak üzere eğer $A \subset B(H)$ alt cebiri bir C^*-cebiri ise bu uzay bir Banach *-cebiridir. Dolayısıyla A, $d(x,y) := \|x-y\|$ metriğine göre tamdır. Buradan A norm topolojisine göre kapalıdır, yani aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 11.

Bir C^*-cebiri düzgün topolojiye göre kapalıdır.

Teorem 12 [36].

Eğer A bir C^*-cebiri ise, öyle bir H Hilbert uzayı vardır ki A, $B(H)$' nin bir u-kapalı *-altcebirine *-izomorftur.

Teorem 13.

$M \subset B(H)$ olsun. Bu taktirde M bir W^*-cebiridir (yani VNC) $\Rightarrow$ M, w-kapalıdır.

İspat:

$x_\alpha \subset M$ ve $x \in B(H)$ için $x_\alpha \xrightarrow{w} x$ olsun. O halde, $\forall \xi, \eta \in H$ için $\langle x_\alpha \xi, \eta \rangle \rightarrow \langle x\xi, \eta \rangle$. $\forall x' \in M'$ alalım. $(x_\alpha) \subset M = M''$ olduğundan $x_\alpha x' = x' x_\alpha$ dir. Burada $\langle x_\alpha x' \xi, \eta \rangle = \langle x' x_\alpha \xi, \eta \rangle$ dir. $\langle x_\alpha x' \xi, \eta \rangle \rightarrow \langle x x' \xi, \eta \rangle$ ve $\langle x' x_\alpha \xi, \eta \rangle \rightarrow \langle x' x \xi, \eta \rangle$ olduğundan $\langle x x' \xi, \eta \rangle = \langle x' x \xi, \eta \rangle$ dir. Dolayısıyla $xx' = x'x$ dir. Buradan $x \in M'' = M$ dir. Sonuç olarak, M, w-kapalıdır.

Teorem 14.

$M \subset B(H)$ olsun. O halde, M w-kapalıdır $\Rightarrow$ M u-kapalıdır.

İspat:

$x_\alpha \subset M$ ve $x \in B(H)$ için $x_\alpha \xrightarrow{u} x$ olsun. $w \leq u$ olduğundan $x_\alpha \xrightarrow{w} x$ dir. M w-kapalı olduğundan $x \in M$ dir.

Sonuç 2.

M bir VNC dir $\Rightarrow$ M bir C^*-cebiridir.

İspat:

M bir VNC ise, Teorem 13' e göre M w-kapalıdır. Teorem 14' e göre M u-kapalıdır, yani bu cebir norma göre kapalıdır. Dolayısıyla M bir Banach *-cebiridir. Her $x \in M$ için $\|x\| = \|x^*\|$ olduğundan $\|x^* \cdot x\| \leq \|x^*\|\|x\| = \|x\|^2$ dir. Öte yandan

$$\|x^* \cdot x\| = \sup_{\|\xi\|=\|\eta\|=1} \left|\left\langle x^* x\xi, \eta \right\rangle\right| = \sup_{\|\xi\|=\|\eta\|=1} \left|\left\langle x\xi, x\eta \right\rangle\right| \geq \sup_{\|\xi\|=1} \left\langle x\xi, x\xi \right\rangle = \|x\|^2$$

Buradan $\|x^* \cdot x\| = \|x\|^2$ dir. Sonuç olarak, M bir C^*-cebiridir.

Sonuç 3.

$M \subset B(H)$ bir *-alt cebir olsun. O halde, M VNC' dir $\Leftrightarrow \overline{M}^{w} = M$ ve $1_H \in M$ dir.

Sonuç olarak;

1. Bir C^*-cebiri bir $B(H)$' nin düzgün (operatör) kapalı *-altcebiridir.

2. Bir W^*-cebiri (VNC) bir $B(H)$' nin zayıf (operatör) kapalı *-altcebiridir

1.5.5. Reel W^*-Cebirleri

Tanım:

H bir reel Hilbert uzayı $B(H)$, H' de tanımlı tüm lineer sınırlı operatörler cebiri, yani $B(H) := \{ A : H \to H, A\ lineer, sınırlı \}$ olsun. O halde her $A \in B(H)$ için $\exists A^* \in B(H)$ vardır öyle ki $\forall \xi, \eta \in H$ için $\langle A\xi, \eta \rangle = \langle \xi, A^*\eta \rangle$ dir. A^*' a A' nın duali veya eşlenik operatörü denir.

$R \subset B(H)$ bir alt cebir olsun. Eğer $\forall a \in R$ için $a^* \in R$ ise, R' ye *-alt cebir denir.

$R' := \{ a \in B(H) : ab = ba, \forall b \in R \}$ kümesine R' nin komutantı denir.

Tanım:

$R \subset B(H)$ bir *-alt cebir olsun. Eğer $R^{''} = R$ ise, R' ye bir Reel Von Neumann Cebiri denir. Burada $R^{''} := (R^{'})^{'}$ dir.

Teorem 15 [25, 5].

H bir reel Hilbert uzayı ve $H_c := H + iH$ olsun. Eğer $R \subset B(H)$ bir reel VNC ise, $M := R + iR$ cebiri de $B(H_c)$' de bir VNC olup, $M^{'} = R^{'} + iR^{'}$ ve $M^{''} = R^{''} + iR^{''}$ dir.

Teorem 10' a göre reel *-alt cebirler için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.

H bir reel Hilbert Uzayı ve $R \subset B(H)$ olsun. Eğer R w-kapalı ise, R u-kapalıdır.

Kompleks VNC' e benzer şekilde aşağıdaki teorem ve onun sonuçları ispatlanabilir.

Teorem 16 [25].

H bir reel Hilbert uzayı ve $R \subset B(H)$ olsun. Eğer $R^{''} = R$ ise, R w-kapalıdır. Yani reel VNC ise w-kapalıdır.

Sonuç 5.

H bir reel Hilbert uzayı ve $R \subset B(H)$ olsun. O halde R bir reel VNC $\Leftrightarrow$ R w-kapalı ve $1 \in R$ dir.

Sonuç 6.

$R \subset M_n(\mathbb{R})$ bir *-alt cebir olup, $1 \in R$ ise, $R'' = R$, yani R bir reel VNC' dir. Burada 1, birim matristir.

Tanım:

H bir kompleks Hilbert uzayı ve $R \subset B(H)$ olsun. Eğer R, $B(H)$' nin reel *-alt cebiri olup, $R = \overline{R}^{w}$, $1 \in R$ ve $R \cap iR = \{\theta\}$ ise R' e reel W^*-cebiri denir.

Reel VNC ile reel W^*-cebiri arasında aşağıdaki ilişki vardır.

Teorem 17 [5].

R reel W^*-cebiridir $\Leftrightarrow$ R bir reel VNC' dir.

Örnek 45.

Sonuç 6' a göre keyfi n için $M_n(\mathbb{R})$ bir reel W^* -cebiridir (VNC' dir).

Örnek 46.

$\mathbb{H}$; 4-boyutlu reel vektör uzayı ve $a_1 = 1$, $a_2 = i$, $a_3 = j$, $a_4 = k$ vektörleri bu uzayın tabanı olmak üzere $\mathbb{H}$ de çarpımı şöyle tanımlayalım :

$i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $\quad ij = k = -ji$

$jk = i = -kj$, $\quad ki = j = -ik$

	1	**i**	**j**	**k**
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

dir. $\forall x, y \in \mathbb{H}$ için;

$$\left.\begin{array}{l} x=\lambda_1 1+\lambda_2 i+\lambda_3 j+\lambda_4 k \\ y=\alpha_1 1+\alpha_2 i+\alpha_3 j+\alpha_4 k \end{array}\right\} \Rightarrow xy=\lambda_1\alpha_1+\left(\lambda_1\alpha_2+\lambda_2\alpha_1\right)i+...$$

$\mathbb{H}$ kuaternion sayılar cebiri olmak üzere $\forall\, x\in\mathbb{H}: x=a+ib+jc+kd$ olsun.

$$\forall\, x\in\mathbb{H}: x=a+ib+jc+kd=\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}\in M_n\left(\mathbb{R}\right)\subset B\left(\mathbb{R}^4\right)$$ olup,

$a=1,\ b=c=d=0$ için $x=\mathbb{1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\in\mathbb{H}$ ve $x^*=a-ib-jc+-kd\in\mathbb{H}$

olduğundan $\mathbb{H}$ bir *-alt cebirdir. Sonuç 6' a göre $\mathbb{H}$ bir reel W^* -cebiridir (reel VNC' dir).

1.6. Von Neumann Cebirlerinin Sınıflandırılması

1.6.1. İzdüşümler ve İz Kavramları

1.6.1.1. İzdüşümler

Tanım:

$M\subset B\left(H\right)$ bir VNC olsun. Eğer $p\in M$ için $p^2=p$ ve $p^*=p$ ise, p ' e bir izdüşüm denir. M ' nin tüm izdüşümlerinin kümesini $P\left(M\right)$ ile gösterelim. Yani $P\left(M\right):=\left\{\, p\in M : p \text{ izdüşüm}\,\right\}$ dir.

Tanım:

$p,q\in P\left(M\right)$ olsun.

1) Eğer $\exists v\in M$ için $v^*v=p$ ve $vv^*=q$ ise, p, q ' a denktir denir ve $p\sim q$ ile gösterilir.

2) Eğer $pq=q$ ise, q, p den büyük değildir denir ve $q\leq p$ ile gösterilir.

3) Eğer $\exists h \in P(M)$ için $h \leq p$ ve $h \sim q$ ise $q \preceq p$ ile gösterilir.

4) Eğer $pq = \theta$ ise, p ve q ortogonal izdüşümler denir ve $p \perp q$ ile gösterilir.

Tanım:

$M \subset B(H)$ bir VNC ve $p \in P(M)$ olsun. Eğer $q \in P(M)$ için $q \leq p \Rightarrow q = 0$ ya da $q = p$ ise, p ' e minimal (atom) denir.

Örnek 47.

$M_2(\mathbb{C})$ ' de $p = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrisleri bir izdüşüm olup her ikiside minimaldir.

1.6.1.2. İz Kavramı

Tanım:

M bir c^*-cebiri ve $x \in M$ olsun. Şayet $\exists y \in M : y^* = y$ ve $y^2 = x$ ise, x' e pozitif elemandır denir ve $x \geq 0$ ile gösterilir.

Tanım:

M bir VNC ve $M_+ := \{ x \in M : x \geq 0 \}$ olsun. $\tau : M_+ \to [0,+\infty]$ dönüşümü

1) $\tau(x+y) = \tau(x) + \tau(y), \quad \forall x, y \in M_+$,

2) $\tau(\lambda x) = \lambda \tau(x), \quad \forall \lambda \geq 0,\ \forall x \in M_+$, (burada $0.(+\infty) = 0$ kabul edilmektedir.)

3) $\tau(xx^*) = \tau(x^* x), \quad \forall x \in M_+$,

koşulları sağlanırsa τ ' a, M ' de bir izdir denir.

τ bir iz olsun. Bu halde

1) $\tau(a)=0 \Leftrightarrow a=\theta$ ise τ ' a, aşikar izdir denir.

2) $\forall\, x \in M_+$ için $\exists\, y \in M_+$ **:** $y \leq x$ ve $\tau(y)<\infty$ ise τ ' a, yarı-sonludur denir.

3) $\tau(1)<\infty$ ise τ ' a, sonludur denir.

4) $x_n \nearrow x_0 \Rightarrow \tau\left(\sup\limits_n x_n\right)=\sup\limits_n \tau(x_n)=\tau(x_0)$ ise τ ' a, normaldir denir.

5) Eğer $u \in M$ için $u^*u=uu^*=1$ ise u operatörüne üniterdir denir. $U(M)$ kümesi ile M ' nin tüm üniter elemanları kümesini gösterelim.

Lemma 1.

φ bir iz ise $\forall\, x \in M_+$ ve $\forall\, u \in U(M)$ için $\varphi(x)=\varphi(uxu^*)$ ' dir.

İspat:

$x \geq 0$ olduğundan x' in kökü vardır, yani $x=x^{1/2}x^{1/2}$ ' dir.
Buradan

$$\varphi(x)=\varphi\left(x^{1/2}x^{1/2}\right)=\varphi\left(x^{1/2}u^*ux^{1/2}\right)=\varphi\left(\left(ux^{1/2}\right)^*\left(ux^{1/2}\right)\right)$$

$$=\varphi\left(\left(ux^{1/2}\right)\left(ux^{1/2}\right)^*\right)=\varphi\left(ux^{1/2}x^{1/2}u^*\right)=\varphi\left(uxu^*\right).$$

Yani $\forall\, u:\ u^*u=1=uu^*$ için $\varphi(x)=\varphi(uxu^*)$ ' dır.

Lemma 2.

φ bir iz ise $\forall\, x, y \in M_+$ için $\varphi(xy)=\varphi(yx)$ ' dir.

İspat:

$y \in M_+ := \{\, a : a \geq 0 \,\} = \left\{\, a=b^*b \,\middle|\, b \in M \,\right\}$

olup $y=b^*b$, $b\in M$ olduğundan

$$y^*=\left(b^*b\right)^*=b^*\left(b^*\right)^*=b^*b=y\,.$$

Yani $y^*=y$ ’ dir.

$y\in M$ olduğundan $y=\sum_{i=1}^{4}\lambda_i u_i$ ’ dır, burada $u_i\in U\left(M\right)$ ve $\lambda_i\in\mathbb{C}$ ’ dır (7)

Lemma 1’ e göre $\varphi\left(x\right)=\varphi\left(uxu^*\right)$ olduğundan

$$\varphi\left(xu\right)=\varphi\left(uxu^*u\right)=\varphi\left(ux1\right)=\varphi\left(ux\right)\text{ ’ dir.}$$

Yani $\varphi\left(xu\right)=\varphi\left(ux\right)$ ’ dir. O halde (7)’ e göre

$$\varphi\left(xy\right)=\varphi\left(x\sum_{i=1}^{4}\lambda_i u_i\right)\overset{\varphi\, lin}{=}\sum_{i=1}^{4}\lambda\varphi\left(xu_i\right)=\sum_{i=1}^{4}\lambda\varphi\left(u_i x\right)$$

$$\overset{\varphi\, lin}{=}\varphi\left(\sum_{i=1}^{4}\lambda_i u_i x\right)=\varphi\left(yx\right).$$

Yani $\varphi\left(xy\right)=\varphi\left(yx\right)$ ’ dir.

O halde φ iz dönüşümü ise $y=x^*$ alındığında izin 3. şartı olan $\varphi\left(x^*x\right)=\varphi\left(xx^*\right)$ eşitliği ile çakıştığı görülür.

Teorem 18.

$\varphi:M\to\mathbb{C}$ lineer ve pozitif olsun. O halde

φ bir izdir $\Leftrightarrow\forall\, x,y\in M_+$ için $\varphi\left(xy\right)=\varphi\left(yx\right)$ ’ dir.

$\Leftrightarrow\forall\, x\in M_+$ ve $\forall\, u\in U\left(M\right)$ için $\varphi\left(x\right)=\varphi\left(uxu^*\right)$ ’ dır.

İspat:

$$\varphi\text{ izdir }\overset{Lemma\,1}{\Leftrightarrow}\varphi\left(x\right)=\varphi\left(uxu^*\right)\overset{Lemma\,2}{\Leftrightarrow}\varphi\left(xy\right)=\varphi\left(yx\right)$$

$$\overset{y=x^*}{\Leftrightarrow}\varphi\left(xx^*\right)=\varphi\left(x^*x\right)\Leftrightarrow\varphi\text{ izdir.}$$

Lemma 3 [24].

$\varphi : M \to \mathbb{C}$ lineer ve pozitif olsun. Eğer bir $c > 0$ ve $\forall\, p, q \in P(M)$ $p \sim q$ için $\varphi(p) \leq c.\varphi(q)$ ise $\forall\, x \in M$ için $\varphi\left(x^* x\right) \leq c.\varphi\left(xx^*\right)$' dır.

Teorem 19.

$\varphi : M \to \mathbb{C}$ lineer ve pozitif olsun. O halde φ bir izdir $\Leftrightarrow \forall\, p, q \in P(M) : p \sim q$ için $\varphi(p) = \varphi(q)$' dır.

İspat:

$(\Rightarrow)$ φ bir iz olup $\forall\, p, q \in P(M)$ için $p \sim q$ olsun. O halde

$\exists v \in M : v^* v = p$ ve $vv^* = q$' dır.

φ iz olduğundan tanıma göre

$\varphi\left(v^* v\right) = \varphi\left(vv^*\right)$' dır.

Buradan

$\varphi(p) = \varphi(q)$' dır.

$(\Leftarrow)$ $\forall\, p, q \in P(M) : p \sim q$ için $\varphi(p) = \varphi(q)$ olsun. O halde Lemma 3' de $c = 1$ alınırsa

$\forall\, x \in M$ için $\varphi\left(x^* x\right) \leq \varphi\left(xx^*\right)$

olup x, x^* ile değiştirilirse

$\varphi\left(xx^*\right) \leq \varphi\left(x^* x\right)$' dır.

Buradan $\varphi\left(xx^*\right) = \varphi\left(x^* x\right)$' dır. Böylece φ izdir.

Sonuç 7.

Eğer M değişmeli bir VNC ise M ' de tanımlanan her lineer, pozitif dönüşüm bir izdir.

Sonuç 8.

M sonlu (bu kavram aşağıdaki tanımda 3. şık olarak verilmiştir) ise $\forall\, p \in P(M)$ için $\varphi(p) < \infty$ ' dır, burada φ, M ' nin herhangi bir izidir.

1.6.2. Sınıflandırma

Tanım:

$M \subset B(H)$ bir VNC ve $p \in P(M)$ olsun. Eğer;

1) $q \in P(M)$, $q \leq p$ ve $q \sim p \Rightarrow q = p$ ise p' e sonlu izdüşüm denir.

Aksi halde p' e sonsuz denir.

2) p sıfırdan farklı sonlu alt izdüşümü içermezse p' e saf sonsuz denir.

3) 1 sonlu (sonsuz, saf sonsuz) ise M' e sonlu (sonsuz, saf sonsuz) denir.

Önerme 1.

$M \subset B(H)$ bir VNC ve $Z = M \cap M'$ olsun. Z ' de maksimal, sonlu izdüşüm vardır.

İspat:

$z_1 := Sup\{\, z \in P(Z) : z \text{ sonludur} \,\}$ ile gösterelim. $P(Z)$ kümesi yarı sıralı küme olup üstten 1 ile sınırlıdır. Zorn Lemmasına göre $Sup\{\, z \in P(Z) \,\}$ mevcuttur. Dolayısıyla z_1 elemanı mevcuttur. z_1 ' in sonlu olduğunu gösterelim.

Varsayalım ki $\exists q \in P(M): q \leq z_1$ ve $q \sim z_1$ olsun. $P(Z)$' den keyfi bir z sonlu izdüşüm alalım. O halde $z \leq z_1$ olup $z = zz_1 \sim zq$' dır. $z(zq) = z^2 q = zq$ ve $(zq)z = zqz = zzq = zq$ olduğundan $zq \leq z$' dir. $z = zz_1 \sim zq \leq z$ olup $z = zq$' dır. Buradan $z \leq q$ olup z keyfi olduğundan $z_1 \leq q$' dır. $q \leq z_1$ olduğundan $z_1 = q$ elde edilir. Böylece z_1 sonludur.

Önerme 2.

$M \subset B(H)$ bir VNC, $p \in P(M)$ ve $\forall q \leq p$ olsun. Eğer p sonlu ise q da sonludur.

İspat:

$\forall q_1 \in P(M): q_1 \leq q$ ve $q_1 \sim q$ olsun. $q_1 \sim q$ olduğundan $\exists v \in M: v^* v = q, vv^* = q_1$' dir. $u := v + (p - q)$ ile gösterelim. O halde

$$u^* u = p \text{ ve } uu^* = (p - q) + q_1 \leq p \text{' dir.}$$

p sonlu olduğundan $(p - q) + q_1 = p$' dir.

Yani $q_1 = q$' dır. Dolayısıyla q sonludur

Önerme 3.

Bir VNC merkezinin maksimal saf sonsuz izdüşümü vardır.

İspat:

$z_3 := \sup\{ z \in P(M) \cap Z : z \text{ saf sonsuzdur} \}$ olsun. z_3' ün saf sonsuz olduğunu göterelim. $\forall p \in P(M)$ ve $p \leq z_3$ ve p sonlu olsun. Z' den keyfi ve sabit bir z saf sonsuz izdüşüm alalım. $p(pz) = pz = (pz)p$ olduğundan $pz \leq p$' dir. Önerme 2' e göre

pz sonludur. $(pz)z = pz = z(pz)$ olduğundan $pz \leq z$' dir. Buradan z saf sonsuz olduğundan $pz = 0$' dır. z keyfi olduğundan $pz_3 = 0$' dır, yani $p = pz_3 = 0$' dır. Dolaysıyla z_3 saf sonsuzdur.

Tanım:

M bir VNC ve $p \in P(M)$ olsun. Eğer

1) $z_3 = 0$ ise M' e yarı – sonlu (semifinite);

2) $z_1 = 0$ ise M' e asl sonsuz (properly infinite);

3) M_p yarı – sonlu (asl sonsuz) ise p' e yarı – sonlu (asl sonsuz) denir.

Teorem 20.

Bir M VNC' nin

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus M_3$$

olacak şekilde bir tek açılımı vardır, burada $M_1 = Mz_1$ sonludur, $M_3 = Mz_3$ saf sonsuzdur, $M_2 = Mz_2$ yarı – sonlu ve asl sonsuz olup

$$z_1 + z_2 + z_3 = 1\text{' dir.}$$

İspat:

z_1 ve z_3 izdüşümleri varolduğundan M' nin $M_1 \oplus M_2 \oplus M_3$ açılımı mevcuttur. Bu açılımda $M_1 = Mz_1$' in sonlu ve $M_3 = Mz_3$' in ise saf sonsuz olduğu açıktır. $z_1, z_3 \in P(M) \cap Z$ ve $z_1 z_3 = 0$ olduğundan $z_2 \in P(M) \cap Z$' dir. Buradan $Z(M_2) = M_2 \cap Z$' dir. O halde $\forall e \in P(M_2) \cap Z(M_2)$ için $e \in P(M) \cap Z$' dir. Dolayısıyla M_2' de $z_3 = z_1 = 0$ olduğundan e saf sonsuz veya sonlu olamaz. Sonuç olarak M_2 yarı – sonludur.

Şimdi bu açılımın tek olduğunu gösterelim. Varsayalım ki $M = Mp_1 \oplus Mp_2 \oplus Mp_3$, M ' nin başka bir açılımı olsun. O halde $p_1 \leq z_1$ ve $p_3 \leq z_3$ ' dir. Bu izdüşümlerin hepsi merkezden olduğundan $i = 2, 3$ için

$$\left(z_1 - p_1\right) p_i p_1 = p_1 \left(z_1 - p_1\right) p_i = \left(z_1 p_1 - p_1^2\right) p_i = \left(z_1 - p_1\right) p_i \text{ ' dir.}$$

Dolayısıyla $\left(z_1 - p_1\right) p_i \leq p_1$ ' dir. p_1 sonlu olduğundan Önerme 2' e göre $\left(z_1 - p_1\right) p_2$ ve $\left(z_1 - p_1\right) p_3$ izdüşümleri de sonludur. Öte yandan $\left(z_1 - p_1\right) p_2 \in Mp_2$, $\left(z_1 - p_1\right) p_3 \in Mp_3$ ve Mp_2, Mp_3 asl sonsuz olduğundan $\left(z_1 - p_1\right) p_2 = 0$ ve $\left(z_1 - p_1\right) p_3 = 0$ ' dır.

O halde $p_1 p_2 + p_1 p_3 = 0$ ve $1 - p_1 = p_2 + p_3$ olduğundan

$$\Rightarrow z_1 p_2 + z_1 p_3 = 0 \Rightarrow z_1 \left(p_2 + p_3\right) = 0$$

$$\Rightarrow z_1 \left(1 - p_1\right) = 0 \Rightarrow z_1 - z_1 p_1 = 0$$

$$\Rightarrow z_1 = z_1 p_1 \Rightarrow z_1 \leq p_1 .$$

Buradan

$$z_1 = p_1 \text{ ' dir.}$$

Eğer $\left(z_3 - p_3\right) p_1 \neq 0$ (veya $\left(z_3 - p_3\right) p_2 \neq 0$) ise, $\left(z_3 - p_3\right) p_1$ (veya $\left(z_3 - p_3\right) p_2$) saf sonsuzdur. Çünkü

$$\left(z_3 - p_3\right) p_1 p_3 = p_3 \left(z_3 - p_3\right) p_1 = \left(z_3 p_3 - p_3 p_3\right) p_1 = \left(z_3 - p_3\right) p_1$$

olduğundan $\left(z_3 - p_3\right) p_1 \leq p_3$ ' dir. p_3 saf sonsuz olduğundan onun her alt izdüşümü de saf sonsuzdur. Öte yandan

$$\left(z_3 - p_3\right) p_1 \in Mp_1 \text{ (veya } \left(z_3 - p_3\right) p_2 \in Mp_2\text{)' dir.}$$

Oysa Mp_1 (veya Mp_2)' nin saf sonsuz olmamasıyla çelişir. Dolayısıyla $\left(z_3 - p_3\right) p_1 = 0$ ve $\left(z_3 - p_3\right) p_2 = 0$ ' dır. Buradan $z_3 = p_3$ ' dir. Sonuç olarak $z_3 = p_3$, $z_2 = p_2$, $z_1 = p_1$ ' dir.

Teorem 21 [5]:

M bir VNC olsun. O halde

(1) M sonludur $\Leftrightarrow$ M **'** nin aşikar, sonlu, normal izi vardır.

(2) M yarı- sonludur $\Leftrightarrow$ M 'nin aşikar, yarı- sonlu, normal izi vardır.

(3) M asl sonsuzdur $\Leftrightarrow$ M **'** nin sıfırdan farklı yarı- sonlu, normal izi yoktur.

1.7. Tensör Çarpım

1.7.1. Hilbert uzaylarının tensör çarpımı

$\left(H_1, \langle .,. \rangle_1\right)$ ve $\left(H_2, \langle .,. \rangle_2\right)$ iki kompleks Hilbert uzayı ve $B\left(H_2, H_1\right) := \left\{ T : H_2 \to H_1, T \text{ lineer, sınırlıdır} \right\}$ olsun. $\xi \in H_1$ ve $\eta, \eta' \in H_2$ için $x := \xi \otimes \eta$ ' i şöyle tanımlayalım:

$$x\eta' := \left(\xi \otimes \eta\right)\eta' := \langle \eta', \eta \rangle_2 . \xi$$

Açıkça her $\eta' \in H_2$ için $x\eta' = \left(\xi \otimes \eta\right)\eta' \in H_1$ ve $\xi \otimes \eta : H_2 \to H_1$ olup $x = \xi \otimes \eta \in B\left(H_2, H_1\right)$ 'dir.

$$H_1 \odot H_2 = \left\{ u = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \otimes \eta_i ,\, n \in \mathbb{N},\, \xi_i \in H_1, \eta_i \in H_2, i = 1,2,...,n \right\}$$

olsun. Bu uzayın bir öklid uzayı olduğunu gösterelim.

$\forall u = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \otimes \eta_i$ ve $v = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \otimes \beta_j \in H_1 \odot H_2$ alalım.

1) $u = \theta :\Leftrightarrow \forall \xi \in H_1$ ve $\forall \eta \in H_2$ için $\sum_{i=1}^{n} \langle \xi_i, \xi \rangle_1 . \langle \eta_i, \eta \rangle_2 = 0$

2) $\langle u, v \rangle := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \langle \xi_i, \alpha_j \rangle_1 . \langle \eta_i, \beta_j \rangle_2$

Teorem 22.

$\left(H_1 \odot H_2, \langle .,. \rangle\right)$ bir öklid uzayıdır.

Teorem 22' e göre $\left(H_1 \odot H_2, \|.\|\right)$ bir normlu uzaydır, burada $\|u\| := \langle u, u \rangle^{1/2}$ ' dir. Dolayısıyla bu uzay $d\left(u, v\right) := \|u - v\|$ ' e göre bir metrik uzaydır.

Tanım:

$H_1 \odot H_2$ uzayının tamlaştırılmasına H_1 ve H_2 uzaylarının bir tensör çarpımı denir. H_1 ve H_2 uzaylarının tensör çarpımı $H_1 \otimes H_2$ ile gösterilir.

Önerme 4.

$\left(H, \langle .,. \rangle_1\right)$ ve $\left(K, \langle .,. \rangle_2\right)$ iki kompleks Hilbert uzayı ve $x \in B(H), y \in B(K)$ olsun. O halde $\exists! x \otimes y \in B(H \otimes K) : \forall \xi \in H \; ve \; \forall \eta \in K$ için

$(x \otimes y)(\xi \otimes \eta) = x\xi \otimes y\eta$ ve $\|x \otimes y\| = \|x\|\|y\|$ ’ dir.

Direkt toplam kavramını kullanarak $H_1 \otimes H_2$ uzayını araştıralım:
$|\Lambda| := \dim(H_2)$ olmak üzere $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, H_2 uzayının bir normal ortogonal (Hamel) tabanı olsun. Her λ için $H_\lambda := \left\{ \xi \otimes e_\lambda \middle| \xi \in H_1 \right\}$ olsun. O halde H_λ, $H_1 \otimes H_2$ uzayının bir alt vektör uzayıdır ve $H_\lambda \cong H_1$ ’ dir. Bundan başka

$H_1 \otimes H_2 = \bigoplus_\lambda H_\lambda$ ’ dir.

Şimdi $u_\lambda : H_1 \to H_1 \otimes H_2$ dönüşümünü $u_\lambda \xi := \xi \otimes e_\lambda$ olarak tanımlayalım:

Önerme 5.

$u_\lambda H_1 = H_\lambda$ ve u_λ bir izometriktir

İspat :

u_λ ’ nın tanımına göre $u_\lambda H_1 = H_\lambda$ olduğu açıktır. Önerme 4’ e göre $\|\xi \otimes e_\lambda\| = \|\xi\|\|e_\lambda\|$ olduğundan

$\|u_\lambda \xi\| = \|\xi \otimes e_\lambda\| = \|\xi\|\|e_\lambda\| = \|\xi\| 1 = \|\xi\|$ ’ dir.

Böylece u_λ bir izometriktir.

Önerme 6.

$\xi, \xi' \in H_1$ ve $\eta \in H_2$ için

$\langle u_\lambda \xi', \xi \otimes \eta \rangle_{1\times 2} := \langle \xi', u_\lambda^* (\xi \otimes \eta) \rangle_1$

olarak tanımlanan $u_\lambda^* : H_1 \otimes H_2 \to H_1$ dönüşümü lineer, $u_\lambda^* H_\lambda \cong H_1$ izometriktir ve her $\mu \neq \lambda$ için $u_\lambda^* H_\mu = \{ \theta \}$ ' dır.

İspat:

u_λ^* dönüşümünün lineer olduğu açıktır.

Şimdi $\forall \xi \in H_1$ ve $\forall \eta \in H_\mu$ için $\langle \xi, u_\lambda^* \eta \rangle = 0$ olduğunu gösterelim:

$\eta \in H_\mu$ olduğundan $\exists \xi' \in H_1 : \eta = \xi' \otimes e_\mu$ ' dir. O halde

$$\langle \xi, u_\lambda^* \eta \rangle = \langle u_\lambda \xi, \eta \rangle = \langle \xi \otimes e_\lambda, \eta \rangle = \langle \xi \otimes e_\lambda, \xi' \otimes e_\mu \rangle$$

$$= \langle \xi, \xi' \rangle \langle e_\lambda, e_\mu \rangle = \langle \xi, \xi' \rangle 0 = 0 \text{ ' dır.}$$

ξ keyfi olduğundan $u_\lambda^* \eta = \theta$ ' dır. Buradan $u_\lambda^* H_\mu = \{ \theta \}$ ' dır.

Şimdi $u_\lambda^* H_\lambda \cong H_1$ izometrik olduğunu gösterelim:

$\forall (\xi \otimes e_\lambda) \in H_\lambda$ alalım. $\forall \xi' \in H_1$ için

$$\langle \xi', u_\lambda^* (\xi \otimes e_\lambda) \rangle = \langle u_\lambda \xi', \xi \otimes e_\lambda \rangle = \langle \xi' \otimes e_\lambda, \xi \otimes e_\lambda \rangle$$

$$= \langle \xi', \xi \rangle \langle e_\lambda, e_\lambda \rangle = \langle \xi', \xi \rangle \text{ ' dir.}$$

ξ' keyfi olduğundan

$$u_\lambda^* (\xi \otimes e_\lambda) = \xi \text{ ' dir} \qquad (8)$$

(8)' e göre

$$\left\| u_\lambda^* (\xi \otimes e_\lambda) \right\|^2 = \langle u_\lambda^* (\xi \otimes e_\lambda), u_\lambda^* (\xi \otimes e_\lambda) \rangle$$

$$\overset{(8)}{=} \left\| u_\lambda^* (\xi \otimes e_\lambda), \xi \right\| \overset{*}{=} \langle \xi, \xi \rangle = \left\| \xi \right\|^2 \text{ ' dir.}$$

Buradan $\left\| u_\lambda^* (\xi \otimes e_\lambda) \right\| = \left\| \xi \right\|$ ' dir.

Dolayısıyla $u_\lambda^* H_\lambda \cong H_1$ izometriktir.

Önerme 7.

$u_\lambda^* u_\lambda$, H_1 uzayında bir özdeşlik dönüşümüdür, yani $\xi \in H_1$ için $u_\lambda^* u_\lambda \xi = \xi$' dir. $\left(u_\lambda^* u_\lambda = 1_1\right)$

İspat:

$\forall\, \xi, \eta \in H_1$ için

$\langle u_\lambda^* u_\lambda \xi, \eta\rangle = \langle u_\lambda \xi, u_\lambda \eta\rangle = \langle \xi \otimes e_\lambda, \eta \otimes e_\lambda\rangle = \langle \xi, \eta\rangle$

olup η keyfi olduğundan $u_\lambda^* u_\lambda \xi = \xi$' dir.

Önerme 8.

$u_\lambda u_\lambda^* := p_\lambda : H_1 \otimes H_2 \to H_\lambda$ bir izdüşümdür ve

$\sum_\lambda p_\lambda = 1$' dir.

İspat :

$\forall\left(\xi \otimes \eta\right) \in H_1 \otimes H_2$ ve $\xi' := u_\lambda^*\left(\xi \otimes \eta\right)$ olsun. $u_\lambda^* : H_1 \otimes H_2 \to H_1$ olduğundan $\xi' \in H_1$' dir ve $u_\lambda u_\lambda^*\left(\xi \otimes \eta\right) = u_\lambda \xi' = \xi' \otimes e_\lambda$' dir. Buradan $u_\lambda u_\lambda^* : H_1 \otimes H_2 \to H_\lambda$' dir.

$\forall\left(\xi \otimes e_\lambda\right) \in H_\lambda$ olsun. (8)' e göre

$u_\lambda u_\lambda^*\left(\xi \otimes e_\lambda\right) = u_\lambda \xi = \xi \otimes e_\lambda$' dir.

Dolayısıyla $H_\lambda \subset H_1 \otimes H_2$ alt kümesi için $p_\lambda\big|_{H_\lambda} = id$' dir. O halde $p_\lambda^2 = p_\lambda\left(p_\lambda\right) = p_\lambda$' dir.

$p_\lambda^* = \left(u_\lambda u_\lambda^*\right)^* = \left(u_\lambda^*\right)^* u_\lambda^* = u_\lambda u_\lambda^* = p_\lambda$

olduğundan $p_\lambda^* = p_\lambda$' dir.

Şimdi $\sum_\lambda p_\lambda = 1$ olduğunu gösterelim. $\forall\left(\xi \otimes \eta\right) \in H_1 \otimes H_2$ alalım. $\xi \otimes \eta = \bigoplus_\mu \left(\xi \otimes e_\mu\right)$ olduğundan

$$\sum_\lambda p_\lambda(\xi\otimes\eta)=\sum_\lambda u_\lambda u_\lambda^*(\xi\otimes\eta)=\sum_\lambda u_\lambda u_\lambda^*\left(\bigoplus_\mu\left(\xi\otimes e_\mu\right)\right)$$

$$=\bigoplus_\mu\left(\xi\otimes e_\mu\right)=\xi\otimes\eta \text{ ' dir.}$$

Buradan $\sum_\lambda p_\lambda=1$' dir.

Kolaylık için λ ve μ' i sırasıyla i ve j ile gösterelim. $\forall x\in B\left(H_1\otimes H_2\right)$ için

$$x_{ij}:=u_i^* x u_j$$

olsun. O halde

$$x_{ij}:H_1\xrightarrow{u_j}H_1\otimes H_2\xrightarrow{x}H_1\otimes H_2\xrightarrow{u_i^*}H_1$$

olduğundan $x_{ij}\in B\left(H_1\right)$' dir.

$\forall\gamma\in H_1\otimes H_2=\underset{i}{\oplus}H_i$ için $x\gamma=\sum_i\left(\xi_i\otimes e_i\right)$ olduğundan (8)' e göre

$$u_i^* x\gamma=\sum_j u_i^*\left(\xi_j\otimes e_j\right)=u_i^*\left(\xi_i\otimes e_i\right)=\xi_i,$$

yani $u_i^* x\gamma=\xi_i$' dir. Buradan

$$x\gamma=\sum_i\left(\xi_i\otimes e_i\right)=\sum_i\left(u_i^* x\gamma\otimes e_i\right),$$

yani $x\gamma=\sum_i\left(u_i^* x\gamma\otimes e_i\right)$' dir. $\sum_j u_j u_j^*=1$ olduğundan $\sum_j u_j u_j^*\gamma=\gamma$' dır. Dolayısıyla

$$x\gamma=\sum_i\left(\sum_j u_i^* x u_j u_j^*\gamma\right)\otimes e_i=\sum_i\left(\sum_j x_{i,j}\xi'_j\right)\otimes e_i$$

olup, burada $\xi'_j:=u_j^*\gamma\in H_1$' dir. Sonuç olarak $\forall\gamma\in H_1\otimes H_2$ için

$$x\gamma=\sum_i\left(\sum_j x_{i,j}\xi'_j\right)\otimes e_i,\qquad \xi_j\in H_1$$

olur. Her i için $H_i\cong H_1$ olduğundan $\sum_j x_{i,j}\xi'_j\otimes e_i\in H_1$' dir. Dolayısıyla $x\in B\left(H_1\otimes H_2\right)$ elemanı aşağıdaki matris şeklinde yazılabilir

$$x=\left(x_{ij}\right)_{i,j\in\Lambda}.$$

Lemma 4.

$x=(x_{ij}),\ y=(y_{ij})\in B(H_1\otimes H_2)$ için $x.y=\left(\sum_k x_{ik}y_{kj}\right)_{i,\,j\in\Lambda}$ ' dır.

İspat:

$\sum_k u_k u_k^*=1$, $x_{ik}=u_i^* x u_k$ ve $y_{kj}=u_k^* y u_j$ olduğundan

$$u_i^* xyu_j=u_i^* x\left(\sum_k u_k u_k^*\right)yu_j^*=\sum_k x_{ik}.y_{kj}\ \text{' dir.}$$

Buradan

$$(xy)_{ij}=u_i^*(xy)u_j=\sum_k x_{ik}.y_{kj}\ \text{' dir.}$$

Dolayısıyla $xy=\left((xy)_{ij}\right)_{i,\,j\in\Lambda}=\left(\sum_k x_{ik}y_{kj}\right)_{i,\,j\in\Lambda}$ ' dır.

Sonuç 9.

$1_{1\times 2}=(\delta_{ij}1_1)_{i,\,j\in\Lambda}$ ve $x.1_{1\times 2}=(x_{ij})_{i,\,j\in\Lambda}$ ' dir.

Lemma 5.

$x\in B(H_1)$ ve $y\in B(H_2)$ olsun. $(e_j)_{j\in\Lambda}$, H_2' nin bir Hamel tabanı olmak üzere $(a_{ij})\subset\mathbb{C}$, y' nin Hamel tabandaki matrisi, yani $ye_j=\sum_i a_{ij}e_i$ olsun. O halde

$$x\otimes y=(a_{ij}x)_{i,\,j\in\Lambda}\ \text{' dir.}$$

Özel halde $x\otimes 1_2=(\delta_{ij}x)_{i,\,j\in\Lambda}$ ' dir.

İspat:

$\xi \in H_1$ için

$$u_i^*\left(x \otimes y\right)u_j\xi = u_i^*\left(x \otimes y\right)\left(\xi \otimes e_j\right) = u_i^*\left(x\xi \otimes ye_j\right)$$

$$= u_i^*\left(x\xi \otimes \sum_k a_{kj}e_k\right) = \sum_k u_i^*\left(x\xi \otimes a_{kj}e_k\right) = \sum_k a_{kj}u_i^*\left(x\xi \otimes e_k\right)$$

$$= a_{ij}u_i^*\left(x\xi \otimes e_i\right) = a_{ij}x\xi$$

olduğundan $u_i^*\left(x \otimes y\right)u_j = a_{ij}x$ ' dir. Buradan

$$\left(x \otimes y\right)_{ij} = u_i^*\left(x \otimes y\right)u_j = a_{ij}x \text{ ' dir.}$$

Dolayısıyla $x \otimes y = \left(a_{ij}x\right)_{i,\, j \in \Lambda}$ ' dır.

$y = 1_2$ olsun. Her j için $1_2 e_j = e_j$ olduğundan $a_{ij} = \delta_{ij}$ ' dir. O halde $x \otimes 1_2 = \left(\delta_{ij}x\right)_{i,\, j \in \Lambda}$ ' dir.

Sonuç 10.

$x \in B\left(H_1\right)$ ve $y \in B\left(H_2\right)$ olsun. Eğer $\dim\left(H_2\right) = n < \infty$ ise, $x \otimes y \in M_n\left(B\left(H_1\right)\right)$ olup özel halde,

$$x \otimes 1_2 = \begin{pmatrix} x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x \end{pmatrix} \text{ ' dir.}$$

Lemma 6.

$B\left(H_1 \otimes H_2\right)$ uzayında

$\left\{ u_i u_j^* : i,\, j \in \Lambda \right\}' = \left\{ x \otimes 1_2 : x \in B\left(H_1\right) \right\}$ ' dir.

İspat:

$\forall\, x \in B(H_1)$ alalım.

$$u_s^*(x\otimes 1_2)(u_iu_j^*)u_t = u_s^*(x\otimes 1_2)u_iu_j^*u_t = \delta_{si}u_j^*u_t$$

$$= \delta_{si}x(\delta_{jt}1_1) = \delta_{si}\delta_{jt}x = u_s^*u_iu_j^*(x\otimes 1_2)u_t = u_s^*(u_iu_j^*)(x\otimes 1_2)u_t$$

olduğundan $x\otimes 1_2 \in \{u_iu_j^* : i, j\in\Lambda\}^{'}$' dir.

Tersine $\forall\, y \in \{u_iu_j^* \mid i, j\in\Lambda\}^{'}$ olsun. $u_i^*u_i = 1_1$ ve $i\neq j$ için $u_i^*u_j = \theta$ olduğundan

$$u_i^*yu_j = u_i^*y(u_ju_j^*u_j) = u_i^*y(u_ju_j^*)u_j$$

$$= u_i^*u_ju_j^*yu_j = (u_i^*u_j)u_j^*yu_j = \theta\text{' dır.}$$

Şayet $i = j$ ise

$u_i^*yu_i = u_j^*u_ju_i^*yu_i = u_j^*yu_ju_i^*u_i = u_j^*yu_j$ ' dir.

$x := u_i^*yu_i$ ile gösterelim. O halde $x\in B(H_1)$ ve

$y := x\otimes 1_2 = (\delta_{ij}x) = (\delta_{ij}u_i^*yu_i)$ ' dir.

Buradan $y\in\{x\otimes 1_2 \mid x\in B(H_1)\}$' dir. $M\subset B(H)$ *-alt cebiri için $M^{'}$ bir VNC ve Lemma 3' e göre

$$\{u_iu_j^* : i, j\in\Lambda\}^{'} = \{x\otimes 1_2 \mid x\in B(H_1)\}$$

olduğundan $\{x\otimes 1_2 \mid x\in B(H_1)\}$ bir VNC' dir. Buradan aşağıdaki sonucun doğru olduğu açıktır.

Sonuç 11.

$\{x\otimes 1_2 \mid x\in B(H_1)\}$ bir VNC' dir.

1.7.2. Von Neumann Cebirlerinin Tensör Çarpımı

Tanım:

$M_1 \subset B(H_1)$ ve $M_2 \subset B(H_2)$ iki VNC olsun.

$N := \left\{ x \otimes y \,\middle|\, x \in M_1,\, y \in M_2 \right\}'' \subset B(H_1 \otimes H_2)$

ile tanımlanan N ' e M_1 ve M_2 cebirlerinin tensör çarpımı denir ve $M_1 \overline{\otimes} M_2$ ile gösterilir. Yani;

$M_1 \overline{\otimes} M_2 := \left\{ x \otimes y \,\middle|\, x \in M_1,\, y \in M_2 \right\}''$ ' dır.

Bu tanıma göre

$$B(H_1)\overline{\otimes}\mathbb{C}1_2 = \left\{ x \otimes (\gamma 1_2) \,\middle|\, x \in B(H_1),\, \gamma \in \mathbb{C} \right\}''$$

$$= \left\{ x \otimes 1_2 \,\middle|\, x \in B(H_1) \right\}''$$ ' dır.

Sonuç 3' e göre $\left\{ x \otimes 1_2 \,\middle|\, x \in B(H_1) \right\}$ bir VNC' dir. Dolayısıyla

$\left\{ x \otimes 1_2 \,\middle|\, x \in B(H_1) \right\}'' = \left\{ x \otimes 1_2 \,\middle|\, x \in B(H_1) \right\}$ ' dir.

Sonuç olarak

$B(H_1)\overline{\otimes}\mathbb{C}1_2 = \left\{ x \otimes 1_2 \,\middle|\, x \in B(H_1) \right\}$ ' dir.

Önerme 9.

$M \subset B(H_1)$ bir VNC olsun. O halde

$M \overline{\otimes} B(H_2) = \left\{ x \in B(H_1 \otimes H_2) : x = (x_{ij})_{i,\, j \in \Lambda},\, x_{ij} \in M \right\}$ ' dir.

İspat:

$N := \left\{ x \in B(H_1 \otimes H_2) : x = (x_{ij})_{i,\, j \in \Lambda},\, x_{ij} \in M \right\}$ olsun.

Lemma 4' e göre N bir VNC' dir. Lemma 5' e göre $\forall x \otimes y \in M \overline{\otimes} B(H_2)$ için $x \otimes y = (a_{ij} x)_{i,\, j \in \Lambda}$ ve $a_{ij} x \in M$ olduğundan $x \otimes y \in N$ ' dir. Dolayısıyla,

$M \overline{\otimes} B(H_2) \subset N$ ' dir.

Tersine $\forall x = (x_{ij})_{i,\, j\in\Lambda} \in B(H_1 \otimes H_2) : x_{ij} \in M$ olsun. $\forall E, F \subset \Lambda$ için

$$x_{ij}^{(E,F)} := \begin{cases} x_{ij}, & i \in E,\ j \in F, \\ \theta \end{cases}$$

ile tanımlayalım. $x_{E,F} := \left(x_{ij}^{(E,F)}\right)_{i,\, j\in\Lambda}$ olsun. $E = \{ s \}$ ve $F = \{ t \}$ için $\left(x_{ij}^{(E,F)}\right)_{i,\, j\in\Lambda}$ ' i $\left(x^{(s,t)}\right)_{i,\, j\in\Lambda}$ ile gösterelim. O halde

$$\left(x^{(s,t)}\right)_{i,\, j\in\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & x_{st} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \left(\delta_{si}\delta_{tj}x_{st}\right)_{i,\, j\in\Lambda} \text{ ' dır.}$$

Lemma 5'e göre

$$\left(\delta_{si}\delta_{tj}x_{st}\right)_{i,\, j\in\Lambda} = x_{st} \otimes \delta_{si}\delta_{tj}1_2 \text{ ' dir.}$$

Buradan

$$x_{E,F} := \left(x_{ij}^{(E,F)}\right)_{i,\, j\in\Lambda} = \sum_{\substack{s\in E \\ t\in F}} \left(x^{(s,t)}\right)_{i,\, j\in\Lambda} = \sum_{\substack{s\in E \\ t\in F}} x_{st} \otimes \delta_{si}\delta_{tj}1_2 \text{ ve}$$

$x_{st} \otimes \delta_{si}\delta_{tj}1_2 \in M \overline{\otimes} B(H_2)$ olduğundan

$$x_{E,F} = \sum_{\substack{s\in E \\ t\in F}} x_{st} \otimes \delta_{si}\delta_{tj}1_2 \in M \overline{\otimes} B(H_2) \text{ ' dir.}$$

$\forall \xi, \eta \in H_1 \otimes H_2$ ve $E, F \to \Lambda$ için

$$\langle x_{E,F}\xi, \eta\rangle - \langle (x_{ij})_{i,\, j\in\Lambda}\, \xi, \eta\rangle \to 0$$

olduğundan $x_{E,F} \xrightarrow{w} (x_{ij})_{i,\, j\in\Lambda} = x$ ' dir. Dolayısıyla $x \in M \overline{\otimes} B(H_2)$ ' dir.

Teorem 23.

$M \subset B(H)$ bir VNC olsun. Eğer $(p_i)_{i\in\Lambda} \subset P(M)$:

$$\sum_{i\in\Lambda} p_i = 1 \text{ ve } p_i p_j = 0,\ p_i \sim p_j,\ \forall i \neq j$$

ise, $M \overset{unit}{\cong} M_p \overline{\otimes} B(K)$ ' dır, burada $p = p_1$ ve K – Hilbert uzayı, $\dim(K) = |\Lambda|$ ' dır.

İspat:

Her i için $p_1 \sim p_i$ olduğundan $\exists (v_i)_{i\in\Lambda} \subset M$:

$p := p_1 = v_i^* v_i$ ve $p_i = v_i v_i^*$ ' dır.

$H_i = p_i H$ ve $L := pH$ olsun. Açıkça

$$H = \bigoplus_{i\in\Lambda} H_i \text{ ' dir.}$$

$U := \sum_{i\in\Lambda} v_i^*$ olsun. O halde

$$UU^* = \sum_{i\in\Lambda} v_i^* \sum_{j\in\Lambda} v_j = \sum_{i\in\Lambda}\sum_{j\in\Lambda} v_i^* v_j = \sum_{i\in\Lambda} v_i^* v_i = \sum_i p = 1_{\widetilde{H}},$$

$$U^*U = \sum_{i\in\Lambda} v_i \sum_{j\in\Lambda} v_j^* = \sum_{i\in\Lambda}\sum_{j\in\Lambda} v_i v_j^* = \sum_{i\in\Lambda} v_i v_i^* = \sum_{i\in\Lambda} p_i = 1$$

olduğundan $U : H \to \widetilde{H}$ bir uniter operatördür, burada $\widetilde{H} = U(H)$ ' dir. Şimdi $\widetilde{H}$ ' i araştıralım.

$$U(H) = \sum_{i\in\Lambda} v_i^* \bigoplus_{j\in\Lambda} p_j H = \bigoplus_{i\in\Lambda} v_i^* p_i H = \bigoplus_{i\in\Lambda} p_i v_i^* H = \bigoplus_{i\in\Lambda} H^i,$$

burada $H^i := p v_i^* H \cong pH = L$ ' dir.

$H_1 \otimes H_2 = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda,\ H_\lambda = \left\{ \xi \otimes e_\lambda \,\middle|\, \xi \in H_1, (e_\lambda) \subset H_2 \right\}$ ' e göre

$$\bigoplus_{i\in\Lambda} H^i = pH \otimes K = L \otimes K \text{ ' dır,}$$

burada K bir Hilbert uzayı ve $\dim(K) = |\Lambda|$ ' dır. Dolayısıyla $U : H \to L \otimes K$ bir üniter operatördür. Buradan $H = L \otimes K$ kabul edilebilir.

$\forall x \in M$ ve $\forall i, j \in \Lambda$ için $x_{ij} = v_i^* x v_j \in M_p$ olup Önerme 6' a göre

$$x = (x_{ij})_{i,\, j\in\Lambda} \in M_p \overline{\otimes} B(K) \text{ ' dır.}$$

Buradan

$$M \subset M_p \overline{\otimes} B(K) \text{ ' dır.}$$

Benzer şekilde $\forall x' \in M'$ ve $\forall i, j \in \Lambda$ için

$$x'_{ij} = v_i^* x' v_j = v_i^* v_j x' = \delta_{ij} x' p \in M'_p \text{ ' dir.}$$

Buradan

$$M' \subset M'_p \overline{\otimes} B(K)' = M'_p \overline{\otimes} \mathbb{C}1_K \text{ ' dır.}$$

Dolayısıyla

$$M = M^{''} \supset \left(M_p^{'}\overline{\otimes}\mathbb{C}1_K\right)^{'} = M_p^{''}\overline{\otimes}\left(\mathbb{C}1_K\right)^{'} = M_p\overline{\otimes}B\left(K\right),$$

yani

$M = M_p\overline{\otimes}B\left(K\right)$' dır.

1.8. İnvolutif *-Antiotomorfizm

Tanım:

M bir W^*-cebiri ve $\alpha : M \to M$ lineer olsun. Eğer $\forall x, y \in M$ için $\alpha\left(xy\right) = \alpha\left(y\right)\alpha\left(x\right)$, $\alpha\left(x^*\right) = \alpha\left(x\right)^*$ olup $\alpha\left(\alpha\left(x\right)\right) = x$ ise α'a, M' de involutif *-antiotomorfizm denir.

Örnek 48.

$\mathbb{C}$' de $z = x + iy$ olmak üzere $\alpha\left(z\right) := x - iy$ dönüşümü involutif *-antiotomorfizmdir.

Örnek 49.

M bir W^*-cebiri $J : M \to M$, $J^* = J$, $J^2 = 1$ ve J eş – lineer ise $\alpha\left(x\right) := Jx^*J$ dönüşümü bir involutif *-antiotomorfizmdir.

Genel olarak $\forall u$-üniter eleman için $\alpha\left(x\right) := Jux^*u^*J$ bir involutif *-antiotomorfizmdir.

Teorem 24 [5].

M bir W^*-cebiri ve α, M' de involutif *-antiotomorfizm ise $(M,\alpha):=\{x\in M:\alpha(x)=x^*\}$ kümesi bir reel W^*-cebiri olup $(M,\alpha)+i(M,\alpha)=M$' dir.

Tersine, eğer R bir reel W^* - cebiri ise $U(R)=R+iR$ cebiri bir W^*-cebiri olup $U(R)$ cebirinde öyle bir α involutif *-antiotomorfizma mevcuttur ki $R=\{x\in U(R):\alpha(x)=x^*\}$' dır.

Bu teoremden dolayı R' i (M,α) ile göstereceğiz.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR, BULGULAR VE İRDELEME

2.1. İnvolutif *-Antiotomorfizm İnvariantlı (İAİ) Kanonik W^* - gösterimi

2.1.1. İAİ L^2 - Uzayı

M sonlu faktör, τ, M 'nin izi ve $\alpha : M \to M$ keyfi, sabit, involutif *-antiotomorf ve $\tau \circ \alpha = \tau$ olsun. O halde Teorem 24' e göre $(M, \alpha) = \{ x \in M : \alpha(x) = x^* \}$ bir reel faktördür. Ayrıca

$$\tau|_{(M,\alpha)} := \tau_r$$

(M, α) ' nın bir tek sonlu aşikar izi olduğu gösterilebilir.

$L^2(M)$ ile M ' nin $\langle x, y \rangle = \tau(y^* x)$ iç çarpımına göre tamlaştırılmasını gösterelim [24]. Aşağıda aynı uzayı (M, α) için tanımlayacağız.

$$\forall x, y \in (M, \alpha) \text{ için } \langle x, y \rangle^r := \mathrm{Re}\left(\tau_r\left(y^* x\right)\right)$$

reel iç çarpımdır. Gerçekten,

(i) $\langle x, x \rangle^r = \mathrm{Re}\left(\tau_r\left(x^* x\right)\right) \geq 0$

$a \in (M, \alpha) \subset M$ olduğundan $\tau_r(a) = \tau(a)$ olup

$$\tau_r\left(x^* x\right) = \tau\left(x^* x\right) = \langle x, x \rangle_c = \overline{\langle x, x \rangle_c}.$$

Böylece, $\tau_r\left(x^* x\right) \in \mathbb{R}$.

Yani,

$$\mathrm{Re}\left(\tau_r\left(x^* x\right)\right) = \tau_r\left(x^* x\right).$$

$$\langle x, x \rangle^r = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(\tau_r\left(x^* x\right)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \tau_r\left(x^* x\right) = 0 \Leftrightarrow x^* x = 0 \Leftrightarrow x = \theta \text{ 'dır.}$$

(ii) $\forall x, y \in (M, \alpha)$ için $\langle x, y \rangle^r = \langle y, x \rangle^r$ ' dır.

Gerçekten,

$$\langle x, y \rangle^r = \mathrm{Re}\left(\tau_r\left(y^* x\right)\right) = \mathrm{Re}\left(\tau_r\left(\alpha\left(x^* y\right)\right)\right)$$

$$= \operatorname{Re}\left(\left(\tau_r o\alpha\right)\left(x^* y\right)\right) = \operatorname{Re}\left(\tau_r\left(x^* y\right)\right) = \langle y, x\rangle^r \text{' dır.}$$

(iii) $\langle \lambda x, y\rangle^r = \lambda\langle x, y\rangle^r$, $\qquad \lambda \in \mathbb{R}$ **.**

Gerçekten,

$$\langle \lambda x, y\rangle^r = \operatorname{Re}\left(\tau_r\left(y^*\left(\lambda x\right)\right)\right) = \operatorname{Re}\left(\lambda \tau_r\left(y^* x\right)\right)$$

$$= \lambda \operatorname{Re}\left(\tau_r\left(y^* x\right)\right) = \lambda\langle x, y\rangle^r \text{' dır.}$$

(iv) $\langle x + y, z\rangle^r = \langle x, z\rangle^r + \langle y, z\rangle^r$, $\qquad x, y, z \in (M, \alpha)$

Gerçekten,

$$\langle x + y, z\rangle^r = \operatorname{Re}\left(\tau_r\left(z^*\left(x + y\right)\right)\right) = \operatorname{Re}\left(\tau_r\left(z^* x + z^* y\right)\right)$$

$$= \operatorname{Re}\left(\tau_r\left(z^* x\right) + \tau_r\left(z^* y\right)\right) = \operatorname{Re}\left(\tau_r\left(z^* x\right)\right) + \operatorname{Re}\left(\tau_r\left(z^* y\right)\right)$$

$$= \langle x, z\rangle^r + \langle y, z\rangle^r \text{'dir.}$$

Böylece,

$$\langle x, y\rangle^r := \operatorname{Re}\left(\tau_r\left(y^* x\right)\right)$$

reel iç çarpımdır.

$$\langle x, y\rangle = \tau_r\left(y^* x\right) \quad x, y \in \left(M, \alpha\right) \subset M \subset B\left(H\right)$$

bir iç çarpım olup

$$\langle x, y\rangle = \tau_r\left(y^* x\right) = \tau_r\left(\alpha\left(y\right)\alpha\left(x^*\right)\right) = \tau_r\left(\alpha\left(x^* y\right)\right)$$

$$= \tau_r\left(x^* y\right) = \langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle} \text{'dır.}$$

Böylece,

$\langle x, y\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$ olduğundan $\operatorname{Re}\left(\tau_r\left(y^* x\right)\right) = \tau_r\left(y^* x\right)$ olup

$\langle x, y\rangle^r = \langle x, y\rangle$ elde edilir.

Bundan sonra

$$\langle x, y\rangle^r = \operatorname{Re}\left(\tau_r\left(y^* x\right)\right) = \tau_r\left(y^* x\right)$$

olduğundan

$$\langle x, y\rangle^r = \tau_r\left(y^* x\right)$$

olarak tanımlanabilir.

Böylece aşağıdaki teoremin doğruluğu ispatlanmış olur.

Teorem 25.

$\left((M,\alpha),\langle .,.\rangle^r\right)$ bir reel öklid uzayıdır.

2.1.2. İAİ L^2 - Uzayının Kompleksleştirilmesi

Teorem 25' den dolayı aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 1:

$\left((M,\alpha),\langle .,.\rangle^r\right)$ uzayının tamlaştırılmasını $L^2(M,\alpha)$ ile gösterelim. O halde $L^2(M,\alpha)$ uzayı (M,α)'nın $\langle .,.\rangle^r$ e göre kapanışı olup bir reel Hilbert uzayıdır.

Teorem 26.

Hilbert uzayı anlamında $L^2(M,\alpha)+iL^2(M,\alpha)=L^2(M)$'dir.

İspat:

$a,b,c,d\in(M,\alpha)$ için

$$\begin{aligned}\langle a+ib,c+id\rangle &= \tau\left((c+id)^*(a+ib)\right)=\tau\left(\left(c^*-id^*\right)(a+ib)\right)\\ &= \tau\left(c^*a+d^*b+ic^*b-id^*a\right)=\tau\left(c^*a\right)+\tau\left(d^*b\right)+i\tau\left(c^*b\right)-i\tau\left(d^*a\right)\\ &= \tau_r\left(c^*a\right)+\tau_r\left(d^*b\right)+i\tau_r\left(c^*b\right)-i\tau_r\left(d^*a\right)\\ &= \langle a,c\rangle^r+\langle b,d\rangle^r+i\langle b,c\rangle^r-i\langle a,d\rangle^r .\end{aligned}$$

Böylece öklid uzayı anlamında

$$(M,\alpha)+i(M,\alpha)=M \text{ ' dir.}$$

Bir topolojik vektör uzayında $X+iX=Y \Rightarrow \overline{X}+i\overline{X}=\overline{Y}$ olduğundan

$$\overline{(M,\alpha)}^{\langle.,.\rangle^r}+i\overline{(M,\alpha)}^{\langle.,.\rangle^r}=\overline{M}^{\langle.,.\rangle}\text{' dir.}$$

Böylece,

$L^2(M,\alpha)+iL^2(M,\alpha)=L^2(M)$' dir.

2.1.3. İAİ Kanonik W^* - gösterim Tanımı ve Onun Kompleksleştirilmesi

$\lambda(M)=\{\lambda_x : x\in M \ ve\ \lambda_x(y)=xy, \forall y\in M\}$ ve

$\lambda_r(M,\alpha)=\{\lambda^r{}_x : \alpha(x)=x^* \ ve\ \forall y\in M, \alpha(y)=y^* \ için\ \lambda^r{}_x(y)=xy\}$ *olarak*

tanımlayalım.

Daha sonra $\lambda_r(M,\alpha)$ cebiri (M,α)' nın kanonik W^*-gösterimi olduğunu göstereceğiz. Aşağıdaki teoremde bu gösterimin kompleksleştirilmesini ele alalım.

Teorem 27.

Topolojik vektör uzayı anlamında

$$\lambda_r(M,\alpha)+i\lambda_r(M,\alpha)=\lambda(M)\text{' dir.}$$

İspat:

$\lambda^r{}_a, \lambda^r{}_b\in\lambda_r(M,\alpha)$ olsun. O halde $\alpha(a)=a^*, \alpha(b)=b^*$ ve $\forall y\in M$, $\alpha(y)=y^*$ için

$$\lambda^r{}_a(y)=ay,\ \lambda^r{}_b(y)=by\text{' dir.}$$

$\forall x\in(M,\alpha)$ için

$$\begin{aligned}(\lambda^r{}_a+i\lambda^r{}_b)(x+iy)&=(\lambda^r{}_a+i\lambda^r{}_b)(x)+i(\lambda^r{}_a+i\lambda^r{}_b)(y)\\&=\lambda^r{}_a(x)+i\lambda^r{}_b(x)+i\lambda^r{}_a(y)-\lambda^r{}_b(y)\\&=ax+ibx+iay-by.\end{aligned}$$

$\lambda_{a+ib}(x+iy)=(a+ib)(x+iy)=ax+ibx+iay-by$ olup

$$\lambda^r{}_a + i\lambda^r{}_b = \lambda_{a+ib}$$ ’ dir.

Böylece,

$$\lambda_r(M,\alpha) + i\lambda_r(M,\alpha) = \lambda(M)$$ ’ dir.

2.1.4. Kanonik Gösterimin Standart İnvolutif *- Antiotomorfizmi

Bu paragrafta α ’ ı kullanarak $\lambda_r(M,\alpha)$ ’ i üreten $\lambda(M)$ ’ nin involutif *- antiotomorfizminin tanımını vereceğiz.

Keyfi H reel Hilbert uzayı için $B(H) + iB(H) = B(H + iH)$ olduğundan [24], aşağıdaki Lemma doğrudur.

Lemma 7.

$$B_r\left(L^2(M,\alpha)\right) + iB_r\left(L^2(M,\alpha)\right) = B\left(L^2(M)\right)$$ ’ dir.

$\lambda(M)$ ’ de cebirsel işlemler aşağıdaki gibidir:

$a \in \mathbb{C}, \quad \forall x, y \in M$ ve $\forall z \in L^2(M)$ için

$$\left(\lambda_x \circ \lambda_y\right)(z) = \left(\lambda_x\left(\lambda_y\right)\right)(z) = \lambda_x(yz)$$

$$= x(yz) = (xy)z = \lambda_{xy}(z),$$

$$\left(a.\lambda_x\right)(z) = a.\left(\lambda_x(z)\right) = a.(xz) = (ax)z = \lambda_{ax}(z).$$

O halde

$$\lambda_x \circ \lambda_y = \lambda_{xy}, \; a.\lambda_x = \lambda_{ax}$$ ’ dir.

Lemma 8.

$\lambda^*{}_x = \lambda_{x^*}$ ’ dır.

İspat:

$\forall\, x \in M$ ve $\forall\, y, z \in L^2(M)$ için

$$\langle \lambda^*_x(y), z\rangle = \langle y, \lambda_x(z)\rangle = \langle y, xz\rangle = \tau\left((xz)^* y\right)$$

$$= \tau\left(z^*\left(x^* y\right)\right) = \langle x^* y, z\rangle = \langle \lambda_{x^*} y, z\rangle$$

olduğundan

$\lambda^*_x = \lambda_{x^*}$ ' dır.

Şimdi kanonik gösterimin standart involutif *-antiotomorfizmi için $\beta : \lambda(M) \to \lambda(M)$ dönüşümünü şu şekilde tanımlayalım:

$$\beta(\lambda_x) := \lambda_{\alpha(x)}, \qquad \forall\, \lambda_x \in \lambda(M)$$

Teorem 28.

β bir involutif $*$-antiotomorfizmdir.

İspat:

$\forall\, a \in \mathbb{C}$ ve $\forall\, x, y \in M$ için

$$\beta\left(\lambda_x + \lambda_y\right) = \beta\left(\lambda_{x+y}\right) = \lambda_{\alpha(x+y)} = \lambda_{\alpha(x)+\alpha(y)}$$

$$= \lambda_{\alpha(x)} + \lambda_{\alpha(y)} = \beta(\lambda_x) + \beta\left(\lambda_y\right),$$

$$\beta(a\lambda_x) = \beta(\lambda_{ax}) = \lambda_{\alpha(ax)} = \lambda_{a\alpha(x)}$$

$$= a\lambda_{\alpha(x)} = a\beta(\lambda_x)$$

olduğundan β lineerdir.

$$\beta\left(\lambda_x \circ \lambda_y\right) = \beta\left(\lambda_{xy}\right) = \lambda_{\alpha(xy)} = \lambda_{\alpha(y)\alpha(x)}$$

$$= \lambda_{\alpha(y)} \circ \lambda_{\alpha(x)} = \beta\left(\lambda_y\right) \circ \beta(\lambda_x)$$

olduğundan β bir homomorfizmdir.

$$\beta\left(\lambda^{*}{}_{x}\right)=\beta\left(\lambda_{x^{*}}\right)=\lambda_{\alpha\left(x^{*}\right)}=\lambda_{(\alpha(x))^{*}}$$

$$=\lambda^{*}{}_{\alpha(x)}=\left(\beta\left(\lambda_{x}\right)\right)^{*}=\beta\left(\lambda_{x}\right)^{*}$$

olduğundan β bir $*$-homomorfizmdir.

$$\beta^{2}\left(\lambda_{x}\right)=\beta\left(\lambda_{\alpha(x)}\right)=\lambda_{\alpha(\alpha(x))}=\lambda_{x}$$

olduğundan β involutiftir. Dolayısıyla β örtendir, çünkü $\forall\lambda_{x}\in\lambda(M)$ için $\beta^{-1}\left(\lambda_{x}\right)=\lambda_{\alpha(x)}$' dir.

$$\beta\left(\lambda_{x}\right)=0\Rightarrow\lambda_{\alpha(x)}=0\Rightarrow\alpha(x)=0\Rightarrow x=0$$

olduğundan $\beta^{-1}(0)=\{0\}$' dır.Yani β 1-1 dönüşümdür.

Sonuç olarak $\beta:\lambda(M)\rightarrow\lambda(M)$ bir involutif $*$-anti otomorfizmdir.

2.1.5. İAİ Kanonik W^{*} - gösterimi

$\lambda_{r}(M,\alpha)$ cebiri ile β arasında aşağıdaki ilişki vardır.

Teorem 29.

$(M,\alpha)_{\beta}:=\left\{\lambda_{x}\in\lambda(M):\beta\left(\lambda_{x}\right):=\lambda^{*}{}_{x}\right\}$ olmak üzere

$$\lambda_{r}(M,\alpha)=(M,\alpha)_{\beta}\text{' dir.}$$

İspat:

[5]' e göre $(M,\alpha)_{\beta}$ bir Reel Von Neumann Cebiridir. $\lambda_{r}(M,\alpha)=(M,\alpha)_{\beta}$ olduğunu gösterelim. Açıkça

$$\lambda_{x}\in(M,\alpha)_{\beta}\Rightarrow\beta\left(\lambda_{x}\right)=\lambda^{*}{}_{x}\Rightarrow\lambda_{\alpha(x)}=\lambda_{x^{*}}$$

$$\Rightarrow\alpha(x)=x^{*}\Rightarrow x\in(M,\alpha)\text{' dir.}$$

Buradan her $\lambda_{x}\in(M,\alpha)_{\beta}$ için $\alpha(x)=x^{*}$ olup,

$\lambda_x \in \lambda(M) \subset B(L^2(M)) = B_r(L^2(M,\alpha)) + iB_r(L^2(M,\alpha))$ olduğundan

$\exists \lambda_{x_1}, \lambda_{x_2} \in B_r(L^2(M,\alpha))$ öyleki $\lambda_x = \lambda_{x_1} + \lambda_{x_2}$ ' dir. O halde

$$\beta(\lambda_x) = \beta(\lambda_{x_1} + \lambda_{x_2}) = \beta(\lambda_{x_1}) + \beta(\lambda_{x_2}) = \lambda_{\alpha(x_1)} + i\lambda_{\alpha(x_2)}$$
$$= \lambda_{x^*_1} + i\lambda_{x^*_2} = \lambda_{x^*_1 + ix^*_2}$$

ve $\beta(\lambda_x) = \lambda_{x^*}$ olduğundan $\lambda_{x^*} = \lambda_{x^*_1 + ix^*_2}$ ' dir. Buradan $x^* = x^*_1 + ix^*_2$, yani $x = x_1 - ix_2$ ' dir.

Öte yandan

$$x^* = \alpha(x) = \alpha(x_1 - ix_2) = \alpha(x_1) - i\alpha(x_2) = x^*_1 - ix^*_2 \text{ ' dir.}$$

Dolayısıyla

$$x^*_1 + ix^*_2 = x^* = x^*_1 - ix^*_2 \text{ ' dir. Buradan } x_2 = 0 \text{ ' dir.}$$

O halde,

$$\lambda_x = \lambda_{x_1} + \lambda_{x_2} = \lambda_{x_1} \in B_r(L^2(M,\alpha)) \text{ olup}$$

sonuç olarak

$$(M,\alpha)_\beta \subset B_r(L^2(M,\alpha)) \text{ ' dir.}$$

Tanıma göre

$$\lambda_r(M,\alpha) = \left\{ \lambda^r{}_x \in B_r(L^2(M,\alpha)) : \alpha(x) = x^* \; ve \; \forall\, y \in M,\ \alpha(y) = y^* \; için \; \lambda^r{}_x(y) = xy \right\}$$

olduğundan

$$(M,\alpha)_\beta \subset \lambda_r(M,\alpha) \text{ ' dir.}$$

Şimdi tersini gösterelim:

$\forall \lambda^r{}_x \in \lambda_r(M,\alpha)$ alalım.

$\alpha(x) = x^*$ ve $\lambda^r{}_x \in \lambda_r(M,\alpha) \subset \lambda(M)$ olduğundan

$$\beta(\lambda^r{}_x) = \lambda^r{}_{\alpha(x)} = \lambda^r{}_{x^*} = (\lambda^r{}_x)^* \text{ ' dır.}$$

Buradan $\lambda^r{}_x \in (M,\alpha)_\beta$ ' dır. Dolayısıyla

$$\lambda_r(M,\alpha) \subset (M,\alpha)_\beta \text{ ' dır.}$$

Sonuç 12.

$\lambda_r(M,\alpha)+i\lambda_r(M,\alpha)=\lambda(M)$ olup $\lambda_r(M,\alpha)$ bir Reel Von Neumann Faktörüdür. Dolayısıyla $\{\lambda, L^2(M)\}$ ikilisi M' nin bir aşikar W^*-gösterimi olduğundan [24] $\{\lambda_r, L^2(M,\alpha)\}$ ikilisi (M,α)' nın bir aşikar reel W^*-gösterimidir.

2.2. Kanonik Gösterim İçin Komutant Teoremi

Şimdi $\beta' : \lambda(M)' \to \lambda(M)'$ dönüşümünü şöyle tanımlayalım:

$$\beta'(\lambda_{x'}) := J\beta(J\lambda_{x'}J)J, \qquad \lambda_{x'} \in \lambda(M)',$$

burada

$$\lambda(M)' := \left\{ \lambda_{x'} \in B\left(L^2(M)\right) : \lambda_{x'} \circ \lambda_x = \lambda_x \circ \lambda_{x'}, \forall \lambda_x \in \lambda(M) \right\}.$$

[24]' e göre

$$\lambda(M)' = J\lambda(M)J \text{ ve } \lambda(M) = J\lambda(M)'J$$

olduğundan

$$J\lambda_{x'}J \in \lambda(M) \Rightarrow \beta(J\lambda_{x'}J) \in \lambda(M) \Rightarrow J\beta(J\lambda_{x'}J)J \in \lambda(M)',$$

yani $\beta' : \lambda(M)' \to \lambda(M)'$ dır.

Şimdi β' ü kullanarak $\lambda_r(M,\alpha)'$ ü şöyle tanımlayalım:

$$\lambda_r(M,\alpha)' := \left\{ \lambda_{x'} \in \lambda(M)' : \beta'(\lambda_{x'}) = \lambda^*_{x'} \right\}.$$

Sonuç 12' e benzer olarak

$$\lambda_r(M,\alpha)' + i\lambda_r(M,\alpha)' = \lambda(M)'$$

olup $\lambda_r(M,\alpha)'$ bir reel Von Neumann Faktörüdür.

Teorem 30 (Kanonik Gösterim İçin Komutant Teoremi).

$\lambda_r(M,\alpha)' = J\lambda_r(M,\alpha)J$ dir.

İspat:

$\forall \lambda_x \in \lambda_r(M,\alpha)$ alalım. O halde

$$J\lambda_x J \in J\lambda_r(M,\alpha)J \text{ ve } \beta(\lambda_x) = \lambda^*{}_x$$

olduğundan

$$\beta'(J\lambda_x J) = J\beta(JJ\lambda_x JJ)J = J\beta(\lambda_x)J$$
$$= J\lambda^*{}_x J = (J\lambda_x J)^*,$$

yani $\beta'(J\lambda_x J) = (J\lambda_x J)^*$ dir. Buradan $J\lambda_x J \in \lambda_r(M,\alpha)'$ tür. Dolayısıyla

$$J\lambda_r(M,\alpha)J \subset \lambda_r(M,\alpha)' \text{ dır.}$$

Tersine $\forall \lambda_{x'} \in \lambda_r(M,\alpha)'$ alalım. O halde $\beta(\lambda_{x'}) = \lambda^*{}_{x'}$ dır.

$\lambda_r(M,\alpha)' \subset \lambda(M)'$ olduğundan $\lambda_{x'} \in \lambda(M)'$ dır.

[24]' e göre $\lambda(M)' = J\lambda(M)J$ ' dir. O halde

$$\exists \lambda_y \in \lambda(M) \text{ öyleki } \lambda_{x'} = J\lambda_y J \text{ ' dir.}$$

$\beta(\lambda_{x'}) = \lambda^*_{x'}$ olduğundan

$$\beta'(J\lambda_y J) = J\lambda^*{}_y J \Rightarrow J\beta(JJ\lambda_y JJ)J = J\lambda^*{}_y J \Rightarrow J\beta(\lambda_y)J = J\lambda^*{}_y J \Rightarrow$$
$$\Rightarrow J^2\beta(\lambda_y)J^2 = J^2\lambda^*{}_y J^2 \quad \Rightarrow \beta(\lambda_y) = \lambda^*{}_y \qquad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda_y \in \lambda_r(M,\alpha),$$

yani $\lambda_{x'} = J\lambda_y J = J\lambda_r(M,\alpha)J$ ' dir. Dolayısıyla

$$\lambda_r(M,\alpha)' \subset J\lambda_r(M,\alpha)J \text{ dır.}$$

Sonuç 13.

$\lambda_r(M,\alpha)'$ cebiri $\lambda_r(M,\alpha)$ ' nın reel komutantıdır, yani

$$\lambda_r(M,\alpha)' = \left\{ \lambda_x \in B_r\left(L^2(M,\alpha)\right) : \lambda_x \circ \lambda_y = \lambda_y \circ \lambda_x, \forall \lambda_y \in \lambda_r(M,\alpha) \right\} \text{ ' dir.}$$

İspat :

Teorem 29' un ispatında β yerine $\beta^{'}$ alınırsa aşağıdaki özellik elde edilir:

$\beta^{'}\left(\lambda_x\right)=\lambda^{*}{}_x \Rightarrow \lambda_x \in B_r\left(L^2\left(M,\alpha\right)\right)$' dir.

Dolayısıyla

$\lambda_r\left(M,\alpha\right)^{'} \subset B_r\left(L^2\left(M,\alpha\right)\right)$' dır.

Öte yandan $\lambda_r\left(M,\alpha\right)^{'} \subset \lambda\left(M\right)^{'}$ olduğundan

$\lambda_x \in \lambda_r\left(M,\alpha\right)^{'}$ ve $\lambda_y \in \lambda\left(M\right)$ için $\lambda_x \circ \lambda_y = \lambda_y \circ \lambda_x$' dir.

$\lambda_r\left(M,\alpha\right) \subset \lambda\left(M\right)$ olduğundan

$\forall \lambda_x \in \lambda_r\left(M,\alpha\right)^{'}$ ve $\lambda_y \in \lambda_r\left(M,\alpha\right)$ için $\lambda_x \circ \lambda_y = \lambda_y \circ \lambda_x$' dir.

2.3. Kanonik Gösterim Teoremi

Teorem 31.

$M_1 \subset B\left(H_1\right)$ ve $M_2 \subset B\left(H_2\right)$ iki W^{*}-cebiri $\alpha_i : M_i \to M_i \left(i=1,2\right)$ bir involutif *-antiotomorfizmi olsun. Eğer $\phi : M_1 \to M_2$ bir normal *-homomorfizmi olup, $\phi \circ \alpha_1 = \alpha_2 \circ \phi$ ise, $\phi = \phi_3 \circ \phi_2 \circ \phi_1$ olacak şekilde

$\phi_1 : M_1 \to M_1 \overline{\otimes} \mathbb{C}1_L ,$ $\qquad \phi_1 \circ \alpha_1 = \widetilde{\alpha_1} \circ \phi_1 ,$

$\phi_2 : M_1 \overline{\otimes} \mathbb{C}1_L \to \left(M_1 \overline{\otimes} \mathbb{C}1_L\right) p^{'} ,$ $\qquad \phi_2 \circ \widetilde{\alpha_1} = \overline{\alpha_1} \circ \phi_2 ,$

$\phi_3 : \left(M_1 \overline{\otimes} \mathbb{C}1_L\right) p^{'} \to M_2 ,$ $\qquad \phi_3 \circ \overline{\alpha_1} = \alpha_2 \circ \phi_3 ,$

dönüşümleri ve $p^{'} \in \left(M_1 \overline{\otimes} \mathbb{C}1_L\right)^{'}$, $\widetilde{\alpha_1}^{'}\left(p^{'}\right) = p^{'}$ olacak şekilde bir $p^{'}$ izdüşümü mevcuttur, burada L bir Hilbert Uzayı, $\widetilde{\alpha_1} := \alpha_1 \otimes id$, $\widetilde{\alpha_1}^{'} := J_1 \widetilde{\alpha_1}\left(J_1\left(.\right)J_1\right)J_1 \otimes id$ ve $\overline{\alpha_1} : \left(M_1 \overline{\otimes} \mathbb{C}1_L\right) p^{'} \to \left(M_1 \overline{\otimes} \mathbb{C}1_L\right) p^{'}$, $\overline{\alpha_1}\left(.p^{'}\right) := \widetilde{\alpha_1}\left(.\right) p^{'}$ tür.

İspat:

Biliyoruz ki $M \subset B(H)$ VNC için $\overline{M\xi} = H$, $\xi \in H$ ise ξ, M' nin bir çembersel vektörüdür.

Önce (M_2, α_2)' nin bir η çembersel vektörü var olduğunu varsayalım. Bu durumda $\overline{(M_2, \alpha_2)\eta} = H_2^r$ olup

$$\overline{M_2\eta} = \overline{(M_2, \alpha_2)\eta} + i\overline{(M_2, \alpha_2)\eta} = H_2^r + iH_2^r = H_2,$$

yani bu vektör M_2' nin bir çembersel vektörüdür.

$\phi \circ \alpha_1 = \alpha_2 \circ \phi$ olduğundan $\forall\, a \in (M_1, \alpha_1)$ için

$$\alpha_2(\phi(a)) = \phi(\alpha_1(a)) = \phi(a^*) = \phi(a)^*,$$

yani $\phi(a) \in (M_2, \alpha_2)$' dir. Buradan $\phi((M_1, \alpha_1)) \subset (M_2, \alpha_2)$' dir.

$$\varphi(a) := \langle \varphi(a)\eta, \eta \rangle, \qquad \forall\, a \in (M_1, \alpha_1)$$

olarak tanımlanan $\varphi : (M_1, \alpha_1) \to \mathbb{R}$ dönüşümünü ele alalım. Bu normal pozitif olup

$$\varphi(a + ib) := \varphi(a), \qquad a, b \in (M_1, \alpha_1)$$

şeklinde $\varphi : M_1 \to \mathbb{R}$ -normal pozitif fonksiyoneline genişletilebilir. [25]' e göre

$$\varphi(a) = \sum_n \langle a\xi_n, \xi_n \rangle \quad (\forall\, a \in (M_1, \alpha_1)) \text{ ve } \sum_n \|\xi_n\|^2 < \infty$$

olacak şekilde bir $(\xi_n) \subset H^r{}_1$ dizisi vardır. Buradan $a, b \in (M_1, \alpha_1)$ için

$$\varphi(a + ib) = \varphi(a) = \sum_n \langle a\xi_n, \xi_n \rangle \text{' dir.}$$

$$L_r := \ell_2^r := \left\{ (x_n) \subset \mathbb{R} : \sum_n x_n^2 < \infty \right\},\ L := L_r + iL_r \text{ ve } \xi := (\xi_n) \subset H_1^r \otimes L_r,$$

$$\phi_1(a) := a \otimes 1_L, \qquad \forall\, a \in M_1$$

olsun. O halde $\phi_1 : M_1 \to M_1 \overline{\otimes} \mathbb{C}1_L$,

$$(\phi_1 \circ \alpha_1)(a) = \phi_1(\alpha_1(a)) = \alpha_1(a) \otimes 1_L = (\alpha_1 \otimes id)(a \otimes 1_L)$$

$$\widetilde{\alpha_1}(\phi_1(a)) = (\widetilde{\alpha_1} \circ \phi_1)(a)$$

ve her $a \in (M_1, \alpha_1)$ için

$$\langle \phi_1(a)\xi, \xi\rangle = \langle \left(a\otimes 1_{L_r}\right)\xi, \xi\rangle = \sum_n \langle a\xi_n, \xi_n\rangle = \varphi(a)$$ ' dır.

Şimdi $p^{'} : H_1^r \otimes L_r \to \overline{\phi_1\left(\left(M_1, \alpha_1\right)\right)\xi}$ izdüşümünü ele alalım.

$\forall\, x = a\otimes 1_{L_r} \in \left(\left(M_1, \alpha_1\right)\overline{\otimes}\mathbb{R}1_{L_r}\right)$ için

$$\phi_1(a)\xi \in \phi_1\left(M_1, \alpha_1\right)\xi \subset \overline{\phi_1\left(M_1, \alpha_1\right)\xi}$$

olduğundan

$$\left(p^{'}x\right)\xi = p^{'}\left(\left(a\otimes 1_{L_r}\right)\xi\right) = p^{'}\left(\phi_1(a)\xi\right) = \phi_1(a)\xi$$

$$= \left(a\otimes 1_{L_r}\right)\xi = x\xi = x\left(\left(1\otimes 1_{L_r}\right)\xi\right) = x\left(\phi_1(1)\xi\right)$$

$$= x\left(p^{'}\left(\phi_1(1)\xi\right)\right) = x\left(p^{'}(\xi)\right) = \left(xp^{'}\right)\xi .$$

Benzer düşünce ile $\forall\, \gamma \in H_1^r \otimes L_r : \gamma \neq \xi$ için

$$\left(p^{'}x\right)\gamma = p^{'}\left(\phi_1(a)\gamma\right) = \theta = x(\theta) = x\left(p^{'}\left(\phi_1(1)\gamma\right)\right)$$

$$= xp^{'}\left(\left(1\otimes 1_{L_r}\right)\gamma\right) = xp^{'}(\gamma)$$ ' dır.

Sonuç olarak $\forall\, \gamma \in H_1^r \otimes L_r$ ve $\forall\, x \in \left(\left(M_1, \alpha_1\right)\overline{\otimes}\mathbb{R}1_{L_r}\right)$ için

$$\left(p^{'}x\right)\gamma = \left(xp^{'}\right)\gamma$$ ' dir.

Yani $p^{'}x = xp^{'}$ tür. Dolayısıyla $p^{'} \in \left(\left(M_1, \alpha_1\right)\overline{\otimes}\mathbb{R}1_{L_r}\right)^{'}$ dır, yani $\widetilde{\alpha_1}^{'} := J_1\widetilde{\alpha_1}\left(J_1(.)J_1\right)J_1 \otimes id$ olmak üzere

$$p^{'} \in \left(M_1\overline{\otimes}\mathbb{C}1_L\right)^{'}$$ ve $$\widetilde{\alpha_1}^{'}\left(p^{'}\right) = p^{'}$$ dür.

Şimdi $\phi_2 : M_1\overline{\otimes}\mathbb{C}1_L \to \left(M_1\overline{\otimes}\mathbb{C}1_L\right)p^{'}$ dönüşümünü

$$\phi_2\left(a\otimes 1_L\right) := \left(a\otimes 1_L\right)p^{'}, \qquad a\in M_1$$

olarak tanımlayalım. O halde

$$\left(\phi_2 \circ \widetilde{\alpha_1}\right)\left(a\otimes 1_L\right) = \phi_2\left(\widetilde{\alpha_1}\left(a\otimes 1_L\right)\right) = \phi_2\left(\alpha_1(a)\otimes 1_L\right)$$

$$= \left(\alpha_1(a)\otimes 1_L\right)p^{'} = \widetilde{\alpha_1}\left(a\otimes 1_L\right)p^{'}$$

$$= \overline{\alpha_1}\left(\left(a\otimes 1_L\right)p^{'}\right) = \overline{\alpha_1}\left(\phi_2\left(a\otimes 1_L\right)\right)$$

$$= \left(\overline{\alpha_1}\circ\phi_2\right)\left(a\otimes 1_L\right),$$

Yani $\phi_2 \circ \widetilde{\alpha_1} = \overline{\alpha_1} \circ \phi_2$' dir.

$$p^{'}\xi = p^{'}\left(\left(1\otimes 1_L\right)\xi\right) = p^{'}\left(\phi_1\left(1\right)\xi\right) = \phi_1\left(1\right)\xi = \xi$$

olduğundan $a \in \left(M_1, \alpha_1\right)$ için

$$\langle\left(\phi_2 \circ \phi_1\right)\left(a\right)\xi, \xi\rangle = \langle\left(\phi_2\left(a\otimes 1_{L_r}\right)\right)\xi, \xi\rangle = \langle\left(a\otimes 1_{L_r}\right)p^{'}\xi, \xi\rangle$$

$$= \langle\left(a\otimes 1_{L_r}\right)\xi, \xi\rangle = \langle\phi_1\left(a\right)\xi, \xi\rangle = \varphi\left(a\right),$$

yani

$$\varphi\left(a\right) = \langle\left(\phi_2 \circ \phi_1\right)\left(a\right)\xi, \xi\rangle, \quad \forall a \in \left(M_1, \alpha_1\right).$$

Şimdi $u : \phi\left(\left(M_1, \alpha_1\right)\right)\eta \to p^{'}\left(H_1^r \otimes L_r\right)$ lineer dönüşümünü şöyle tanımlayalım:

$$u\phi\left(a\right)\eta := \left(\phi_2 \circ \phi_1\right)\left(a\right)\xi = p^{'}\left(a\xi_n\right) = \left(a\xi_n\right), \quad \forall a \in \left(M_1, \alpha_1\right).$$

Her $a \in \left(M_1, \alpha_1\right)$ için $u\phi\left(a\right)\eta := \left(\phi_2 \circ \phi_1\right)\left(a\right)\xi$ ve

$\langle\phi\left(a\right)\eta, \eta\rangle = \varphi\left(a\right) = \langle\left(\phi_2 \circ \phi_1\right)\left(a\right)\xi, \xi\rangle$ olduğundan

$\left\|u\phi\left(a\right)\eta\right\|^{'} = \left\|\phi\left(a\right)\eta\right\|_2^r$' dir. Yani u izometriktir, burada $\left\|.\right\|_2^r$, H_2 uzayının; $\left\|.\right\|^{'}$ ise $H_1^r \otimes L_r$ uzayının normudur.

$\phi\left(\left(M_1, \alpha_1\right)\right)\eta = \left(M_2, \alpha_2\right)\eta$ ve $\left(\phi_2 \circ \phi_1\right)\left(\left(M_1, \alpha_1\right)\right)\xi = \phi_1\left(\left(M_1, \alpha_1\right)\right)\xi$ olup

$$\overline{\phi\left(\left(M_1, \alpha_1\right)\right)\eta} = \overline{\left(M_2, \alpha_2\right)\eta} = H_2^r \text{ ve}$$

$$\overline{\left(\phi_2 \circ \phi_1\right)\left(\left(M_1, \alpha_1\right)\right)\xi} = \overline{\phi_1\left(\left(M_1, \alpha_1\right)\right)\xi} = p^{'}\left(H_1^r \otimes L_r\right)$$

olduğundan u dönüşümü bir $\overline{u} : H_2^r \to p^{'}\left(H_1^r \otimes L\right)$ üniter dönüşümüne genişletilebilir. Ayrıca her $a \in \left(M_1, \alpha_1\right)$ için

$$\overline{u}\phi\left(a\right)\overline{u}^{-1} = \phi_2 \circ \phi_1\left(a\right) \tag{9}$$

O halde

$$\phi_3\left(.\right) := \overline{u}^{-1}\left(.\right)\overline{u} : \left(\left(M_1, \alpha_1\right)\overline{\otimes}\mathbb{R}1_{L_r}\right)p^{'} \to \left(M_2, \alpha_2\right)$$

bir reel *- izomorfizmi olmak üzere

$$\left(\left(M_1, \alpha_1\right)\overline{\otimes}\mathbb{R}1_{L_r}\right)p^{'} + i\left(\left(M_1, \alpha_1\right)\overline{\otimes}\mathbb{R}1_{L_r}\right)p^{'} = \left(M_1\overline{\otimes}\mathbb{C}1_L\right)p^{'}$$

ve

$$\left(M_2, \alpha_2\right) + i\left(M_2, \alpha_2\right) = M_2$$

olduğundan ϕ_3 dönüşümü

$$\phi_3(a+ib) := \phi_3(a) + i\phi_3(b)$$

olarak bir $\phi_3 : \left(M_1 \overline{\otimes} \mathbb{C}1_L\right) p' \to M_2$ *-izomorfizmine genişletilebilir, bu genişletme yine ϕ_3 ile gösterilmektedir, burada $a, b \in \left((M_1, \alpha_1) \overline{\otimes} \mathbb{R}1_{L_r}\right) p'$ dir.

O halde, (9)' a göre

$$\phi = \phi_3 \circ \phi_2 \circ \phi_1 \text{ ' dir.}$$

Genel durumda $\exists\left(H_2^l\right) \subset H_2^r$ ve $\exists(\eta_l) \subset H_2^r$:

$$H_2^r = \bigoplus_l H_2^l \text{ ve } H_2^l = \overline{(M_2, \alpha_2)\eta_l}, \ (\forall l) \text{ ' dir.}$$

$q_l' : H_2^r \to \overline{(M_2, \alpha_2)\eta_l} = H_2^l$ doğal izdüşüm olsun. O halde $q_l' \in (M_2, \alpha_2)'$ $(\forall l)$' dir. Her l için $\phi_l = q_l'\phi : (M_1, \alpha_1) \to (M_2, \alpha_2) q_l'$ bir normal *-homomorfizmidir. Bu dönüşüm doğal olarak bir $\phi_l : M_1 \to M_2 q_l'$ normal *-homomorfizmisine genişletilebilir. Birinci duruma benzer şekilde $\exists \phi_3^{(l)}, \phi_2^{(l)}, \phi_1^{(l)}$:

$$\phi_l = \phi_3^{(l)} \circ \phi_2^{(l)} \circ \phi_1^{(l)} \quad , (\forall l) \text{ ' dir.}$$

O halde $i = 1, 2, 3$ için

$$\phi_i := \bigoplus_l \phi_i^{(l)}$$

olmak üzere $\phi = \phi_3 \circ \phi_2 \circ \phi_1$ olup ϕ_3, ϕ_2, ϕ_1 dönüşümleri gerekli şartları sağlar.

Teorem 32.

M bir sonlu faktör ve α, M ' nin bir involutif *-antiotomorfizmi olsun. Eğer $\{\pi, H\}$ ikilisi M ' nin yoz olmayan bir aşikar W^*-gösterimi olup, bir $\widetilde{\alpha} : \pi(M) \to \pi(M)$ involutif *-antiotomorfizmi için $\pi \circ \alpha = \widetilde{\alpha} \circ \pi$ koşulu sağlanıyorsa,

$$u\pi(x) = \left(\lambda(x) \otimes 1_K\right) u, \quad \forall x \in M$$

olacak şekilde $p' \in \left(\lambda_r(M, \alpha) \otimes 1_{K_r}\right)'$ bir izdüşümü, $u : H_r \to p'\left(L^2(M, \alpha) \otimes K_r\right)$ bir uniter operatörü ve K_r reel Hilbert uzayı vardır, burada $K = K_r + iK_r$ ' dir.

İspat:

$M_1 := \lambda(M)$ ve $M_2 := \pi(M)$ olmak üzere $\phi(\lambda(x)) := \pi(x)$ olarak tanımlanan $\phi : M_1 \to M_2$ dönüşümü bir *-izomorfizmi olup, $\phi(\lambda_r(M,\alpha)) \subset (\pi(M),\widetilde{\alpha})$' dir. O halde teoremin iddiası direkt Teorem 31' dan elde edilir.

2.4. İnvolutif *-Antiotomorfizm İnvariantlı Kanonik Von Neumann Eş Sabit Kavramı

M bir sonlu faktör ve α, M' nin bir involutif *-antiotomorfizmi olsun. $\{\pi, H\}$ ikilisi M' nin yoz olmayan bir aşikar W^*-gösterimi olup, bir $\widetilde{\alpha} : \pi(M) \to \pi(M)$ involutif *-antiotomorfizmi için $\pi \circ \alpha = \widetilde{\alpha} \circ \pi$ şartını sağlasın. $(\pi(M),\widetilde{\alpha})^{'} + i(\pi(M),\widetilde{\alpha})^{'} = \pi(M)^{'}$ ve $\pi(M)^{'}$ yarı-sonlu olduğundan $(\pi(M),\widetilde{\alpha})^{'}$ cebiri de yarı-sonludur. O halde Teorem 21' e göre $(\pi(M),\widetilde{\alpha})^{'}$' nin bir aşikar yarı-sonlu normal izi vardır. Şimdi $(\pi(M),\widetilde{\alpha})^{'}$ üzerinde $Tr_{H_r}^{'}$ doğal izini tanımlayalım:

1. *Özel durum*: $\{\pi, H\} = \{\lambda \otimes 1, L^2(M) \otimes K\}$ olsun. Bu durumda $(\lambda(M) \otimes 1_K)^{'} = J\lambda(M)J \overline{\otimes} B(K)$ sonsuz olup, (M,α) için

$$\left\{ \pi|_{(M,\alpha)}, H_r \right\} = \left\{ \lambda_r \otimes 1, L^2(M,\alpha) \otimes K_r \right\}$$

(bundan sonra kolaylık olması açısından $\pi|_{(M,\alpha)}$' ı yine π ile göstereceğiz) ve

$$\left(\lambda_r(M,\alpha) \otimes 1_{K_r}\right)^{'} = J\lambda_r(M,\alpha)J \overline{\otimes} B(K_r) \text{' dir.}$$

$\{e_i\}$, K' nın bir ortogonal normal Hamel tabanı olsun.

O halde her $t^{'} \in (\lambda(M) \otimes 1_K)^{'}$ için

$$t^{'} = (J\lambda(x_{ij})J), \quad (x_{ij}) \subset M,$$

şeklinde tek türlü yazılabilir. Eğer $t^{'} \in \left(\lambda_r \left(M, \alpha \right) \otimes 1_{K_r} \right)^{'}$ ise, $\widetilde{\alpha}\left(t^{'} \right) = \left(t^{'} \right)^{*}$ olduğundan reel W^{*}-cebirleri için tensor çarpım teorisi [24] kullanılarak $\left(x_{ij} \right) \subset \left(M, \alpha \right)$ olduğu yani her i, j için $\alpha\left(x_{ij} \right) = x_{ij}^{*}$ olduğu gösterilebilir.

Şimdi $Tr_H^{'}$ ' i şöyle tanımlayalım:

$$Tr^{'}_{L^2(M)\otimes K}\left(t^{'} \right) := \sum_i \tau\left(x_{ii} \right), \qquad t^{'} = \left(J\lambda\left(x_{ij} \right) J \right) \in \left(\lambda\left(M \right) \otimes 1_K \right)^{'}_{+},$$

burada τ, M ' nin α-invariant aşikar, normal izidir. Açıkça $Tr^{'}_{L^2(M)\otimes K}$ izi $\left(\lambda\left(M \right) \otimes 1_K \right)^{'}_{+}$ üzerinde aşikar, yarı-sonlu, normal izdir.

Her $t^{'} \in \left(\lambda_r \left(M, \alpha \right) \otimes 1_{K_r} \right)^{'}$ için $\left(x_{ij} \right) \subset \left(M, \alpha \right)$ olup $\tau \circ \alpha = \tau$ olduğundan

$$Tr^{'}_{L^2(M,\alpha)\otimes K_r}\left(t^{'} \right) := \sum_i \tau\left(x_{ii} \right), \qquad t^{'} = \left(J\lambda\left(x_{ij} \right) J \right) \in \left(\lambda_r\left(M, \alpha \right) \otimes 1_{K_r} \right)^{'}_{+} \text{ için}$$

$$Tr^{'}_{L^2(M)\otimes K}\Big|_{(M,\alpha)} = Tr^{'}_{L^2(M,\alpha)\otimes K_r} \text{ ' dir.}$$

[24]' e göre $Tr^{'}_{L^2(M)\otimes K}$ ' nın tanımı $\left\{ e_i \right\}$ ailesinin seçiminden bağımsızdır.

2. *Genel durum*: $\left\{ \pi, H \right\}$ ikilisi M 'nin herhangi yoz olmayan bir aşikar W^{*}-gösterimi ve $\pi \circ \alpha = \widetilde{\alpha} \circ \pi$ olsun. Teorem 32' e göre

$$u\pi\left(x \right) u^{*} = \left(\lambda\left(x \right) \otimes 1_K \right) p^{'}, \qquad \forall x \in M$$

olacak şekilde bir $p^{'} \in \left(\lambda_r \left(M, \alpha \right) \otimes 1_{K_r} \right)^{'}$ izdüşümü, $u : H_r \to p^{'}\left(L^2\left(M, \alpha \right) \otimes K_r \right)$ üniter operatörü ve K_r reel Hilbert uzayı vardır, burada $K = K_r + iK_r$ ' dir.

Bu durumda $Tr_H^{'}$ ' i şöyle tanımlayalım:

$$Tr_H^{'}\left(t^{'} \right) := Tr^{'}_{L^2(M)\otimes K}\left(ut^{'}u^{*} \right), \qquad \forall t^{'} \in \pi\left(M \right)^{'}_{+}.$$

[24]' e göre $Tr_H^{'}$ ' nin tanımı $p^{'}$ ve u ' dan bağımsız olup, $\pi\left(M \right)^{'}_{+}$ ' nin yarı-sonlu, aşikar, normal izidir. Açıkça

$$Tr^{'}_{H_r}\left(t^{'} \right) := Tr^{'}_{L^2(M,\alpha)\otimes K_r}\left(ut^{'}u^{*} \right), \qquad \forall t^{'} \in \left(\pi\left(M \right), \widetilde{\alpha} \right)^{'}_{+}$$

olarak tanımlanan $Tr^{'}_{H_r}$ için

$$Tr_H^{'}\Big|_{(M,\alpha)} = Tr_{H_r}^{'} \text{ ' dir.}$$

Dolayısıyla $Tr_{H_r}^{'}$, $\left(\pi\left(M\right), \widetilde{\alpha}\right)^{'}$ ' nın bir yarı-sonlu, aşikar, normal izidir.

Tanım 2:

M bir sonlu faktör, α , M ' nin bir involutif *-antiotomorfizmi, $\{\pi, H\}$ ikilisi M ' nin yoz olmayan bir aşikar W^{*} -gösterimi ve $\pi \circ \alpha = \widetilde{\alpha} \circ \pi$ olsun.

$$\dim_{(M,\alpha)}\left(H_r\right) := Tr_{H_r}^{'}\left(1\right)$$

olarak tanımlanan $\dim_{(M,\alpha)}\left(H_r\right)$ sayısına $\left(\pi\left(M\right), \widetilde{\alpha}\right)$ ve $\left(\pi\left(M\right), \widetilde{\alpha}\right)^{'}$ cebirleri arasındaki involutif *-antiotomorfizm invariantlı Von Neumann Eş Sabiti denir.

2.5. Eş Sabitin Özellikleri

Teorem 33.

M bir sonlu faktör ve α , M **'** nin bir involutif *-antiotomorfizmi olsun. Eğer $\{\pi, H\}$ ve $\{\pi^{'}, H^{'}\}$ bu cebirin iki aşikar W^{*} -gösterimi olup, $\pi \circ \alpha = \widetilde{\alpha} \circ \pi^{'}$ ise,

$$\dim_{(M,\alpha)}\left(H_r\right) = \dim_{(M,\alpha)}\left(H_r^{'}\right) \Leftrightarrow \{\pi, H\} \overset{w}{\cong} \{\pi^{'}, H^{'}\} \text{ ve}$$

$$\pi\left(\alpha\left(w\right)\right) = \widetilde{\alpha}\pi^{'}\left(w\right) = \pi^{'}\left(w\right)^{*} \text{ ' dır.}$$

İspat:

Teorem 32' e göre

$$\exists\, p^{'} \in P\left(\lambda_r\left(M,\alpha\right) \otimes 1_{K_r}\right)^{'}, \quad \exists\, u : H_r \to p^{'}\left(L^2\left(\left(M,\alpha\right)\right) \otimes K_r\right) \text{ üniter}$$

ve

$$\exists\, q^{'} \in P\left(\lambda_r\left(M,\alpha\right) \otimes 1_{K_r}\right)^{'}, \quad \exists\, v : H_r^{'} \to q^{'}\left(L^2\left(\left(M,\alpha\right)\right) \otimes K_r\right) \text{ üniter:}$$

$$u\left(\pi\left(M\right), \widetilde{\alpha}\right)u^{*} = p^{'}\left(\lambda_r\left(M,\alpha\right) \otimes 1_{K_r}\right)$$

$v\left(\pi(M), \widetilde{\alpha}\right)v^{*} = q^{'}\left(\lambda_r(M, \alpha) \otimes 1_{K_r}\right)$' dir.

Buradan $p^{'} = uu^{*}$, $q^{'} = vv^{*} \in \left(\lambda_r(M, \alpha) \otimes 1_{K_r}\right)^{'}$ olup

$$\dim_{(M,\alpha)}(H_r) = Tr^{'}_{L^2(M,\alpha)\otimes K_r}\left(uu^{*}\right)$$

$$\dim_{(M,\alpha)}(H^{'}_r) = Tr^{'}_{L^2(M,\alpha)\otimes K_r}\left(vv^{*}\right)$$ ' dir.

O halde

$$\begin{aligned}\dim_{(M,\alpha)}(H_r) = \dim_{(M,\alpha)}(H^{'}_r) &\Leftrightarrow Tr^{'}_{L^2((M,\alpha))\otimes K_r}\left(uu^{*}\right) = Tr^{'}_{L^2((M,\alpha))\otimes K_r}\left(vv^{*}\right)\\ &\Leftrightarrow Tr^{'}_{L^2((M,\alpha))\otimes K_r}\left(p^{'}\right) = Tr^{'}_{L^2((M,\alpha))\otimes K_r}\left(q^{'}\right)\\ &\Leftrightarrow \left(\lambda_r(M,\alpha)\otimes 1_{K_r}\right)^{'} \text{ uzayında } p^{'} \sim q^{'} \text{' dür.}\end{aligned}$$

Teorem 32' e göre

$$\{\pi, H_r\} \cong \left\{\left(\lambda_r \otimes 1_{K_r}\right)p^{'}, p^{'}\left(L^2(M,\alpha)\right)\otimes K_r\right\}$$

ve

$$\{\pi^{'}, H^{'}_r\} \cong \left\{\left(\lambda_r \otimes 1_{K_r}\right)q^{'}, q^{'}\left(L^2(M,\alpha)\right)\otimes K_r\right\}$$

olduğundan $\left(\lambda_r(M,\alpha)\otimes 1_{K_r}\right)^{'}$ uzayında

$$p^{'} \sim q^{'} \Leftrightarrow \{\pi, H_r\} \cong \{\pi^{'}, H^{'}_r\}$$

yani bir $w \in \left(\lambda_r(M,\alpha)\otimes 1_{K_r}\right)^{'}$ uniter elemanı için $\{\pi, H\} \overset{w}{\cong} \{\pi^{'}, H^{'}\}$' dir.

$$w \in \left(\lambda_r(M,\alpha)\otimes 1_{K_r}\right)^{'} \Leftrightarrow \pi\left(\alpha(w)\right) = \widetilde{\alpha}\pi^{'}(w) = \pi^{'}(w)^{*}$$

olduğu göz önüne alınırsa önermenin ispatı biter.

Teorem 34.

Eğer M bir sonlu faktör ve α, M' nin bir involutif *- antiotomorfizm ise,

$$\dim_{(M,\alpha)}\left(L^2((M,\alpha))\right) = 1$$ ' dir.

İspat:

$\forall\, a \in L^2(M,\alpha)$ ve $\xi \in K_r \subset K_r + iK_r$, $\|\xi\| = 1$ olsun. $u : L^2(M,\alpha) \to L^2(M,\alpha)\otimes[\xi]_r$ üniter dönüşümünü

$$u(a) := a \otimes \xi$$

olarak tanımlayalım, burada $[\xi]_r$, $\{\,\xi\,\}$ ' nin reel lineer zarfıdır.

Şimdi $u^* : L^2(M,\alpha)\otimes[\xi]_r \to L^2(M,\alpha)$ için $u^*(b\otimes\mu\xi) = \mu b$ $\quad(\mu\in\mathbb{R})$ olduğunu gösterelim.

$$\langle a\otimes\xi, b\otimes\mu\xi\rangle_2 = \langle u(a), b\otimes\mu\xi\rangle_2 = \langle a, u^*(b\otimes\mu\xi)\rangle_1$$

ve

$$\langle a\otimes\xi, b\otimes\mu\xi\rangle_2 = \langle a,b\rangle_1 . \langle \xi, \mu\xi\rangle_K$$

$$= \langle a,b\rangle_1 . \mu\|\xi\|^2 = \mu\langle a,b\rangle_1$$

olduğundan $\mu\langle a,b\rangle_1 = \langle a, u^*(b\otimes\mu\xi)\rangle_1$ ' dir. Yani

$$\langle a, \mu b\rangle_1 = \langle a, u^*(b\otimes\mu\xi)\rangle_1 \text{ ' dir.}$$

Buradan $u^*(b\otimes\mu\xi) = \mu b$ ' dir.

Açıkça, $uu^*(b\otimes\mu\xi) = u(\mu b) = \mu b\otimes\xi = b\otimes\mu\xi$ ve

$$u^*u(a) = u^*(a\otimes\xi) = a \text{ ' dir.}$$

Dolayısıyla $p' : L^2(M,\alpha)\otimes K_r \to L^2(M,\alpha)\otimes[\xi]_r$ doğal izdüşüm olmak üzere

$$u^*u = 1 \text{ ve } uu^* = p' \text{ ' dir.}$$

$\forall\, \lambda_r(x) \in \lambda_r(M,\alpha)$, $\eta \in L^2(M,\alpha)$ ve $\gamma \in K_r$ olsun. O halde

$$p'\left(\lambda_r(x)\overline{\otimes}1_{K_r}\right)(\eta\otimes\gamma) = p'\left(\lambda_r(x)\eta\otimes\gamma\right) = \lambda_r(x)\eta\otimes\mu\xi\,,$$

$$\left(\lambda_r(x)\overline{\otimes}1_{K_r}\right)p'(\eta\otimes\gamma) = \left(\lambda_r(x)\overline{\otimes}1_{K_r}\right)(\eta\otimes\mu\xi) = \lambda_r(x)\eta\otimes\mu\xi$$

olduğundan $p' \in \left(\lambda_r(M,\alpha)\overline{\otimes}1_{K_r}\right)'$ ' dir. $\forall\, a \in L^2(M,\alpha)$ ve $\forall\, \mu\xi \in [\xi]_r$ için

$$u\lambda_r(x)u^*(a\otimes\mu\xi) = u\lambda_r(x)(\mu a) = \mu\left(u\lambda_r(x)a\right)$$

$$= \mu\left(\lambda_r(x)a\otimes\xi\right),$$

$$\left(\lambda_r(x)\overline{\otimes}1_{K_r}\right)p'(a\otimes\mu\xi)=\left(\lambda_r(x)\overline{\otimes}1_{K_r}\right)(a\otimes\mu\xi)$$
$$=\lambda_r(x)a\otimes\mu\xi$$

olduğundan $u\lambda_r(x)u^*=\left(\lambda_r(x)\overline{\otimes}1_{K_r}\right)p'$' dir. Buradan Teorem 32' e göre $\lambda:=\lambda_r+i\lambda_r$ için $\{\lambda,L^2(M)\}$ ikilisi M 'nin α -invariantlı (yani $\lambda\circ\alpha=\widetilde{\alpha}\circ\lambda$) aşikar bir W^*-gösterimidir. Yani $\{\lambda_r,L^2(M,\alpha)\}$ ikilisi (M,α)' nın bir aşikar reel W^*-gösterimidir.

$e_1=\xi$ olmak üzere $\{e_n\}_{n\in\Lambda}$, K_r+iK_r' nin bir Hamel tabanı olsun. O halde p'' nün matris gösterimi

$$p'=\left(J\lambda\left(x_{ij}\right)J\right)_{i,j\in\Lambda}\text{ ' dir.}$$

Burada $x_{ij}=u_i^*p'u_j$ olup, $j\neq 1$ için $p'\left(a\otimes e_j\right)=0$ olduğundan $x_{11}=1$, $x_{ij}=0$ $\left((i,j)\neq(1,1)\right)$' dir. Dolayısıyla

$$\dim_{(M,\alpha)}\left(L^2\left((M,\alpha)\right)\right)=Tr'_{L^2(M,\alpha)}\left(uu^*\right)=Tr'_{L^2(M,\alpha)}\left(p'\right)$$
$$=\sum_{i\in\Lambda}\tau\left(x_{ii}\right)=\tau(1)=1\text{ ' dir.}$$

Teorem 35.

M bir sonlu faktör ve α, M' nin bir involutif *-antiotomorfizmi olsun. Eğer $\{\pi,H\}$ M' nin aşikar W^*-gösterimi ve $\pi\circ\alpha=\widetilde{\alpha}\circ\pi$ ise

$$\left(\pi(M),\widetilde{\alpha}\right)'\text{ sonludur }\Leftrightarrow\ Tr'_{H_r}\text{ sonludur }\Leftrightarrow\ \dim_{(M,\alpha)}\left(H_r\right)<\infty\text{ ' dır.}$$

İspat:

$\pi(M,\alpha)'=\left(\lambda_r(M,\alpha)\overline{\otimes}1_{K_r}\right)'$ ve $1_{\left(\lambda_r(M,\alpha)\overline{\otimes}1_{K_r}\right)'}=p'=uu^*$ olduğundan

$$\pi(M,\alpha)'\text{ sonludur }\Leftrightarrow\ p'\text{ sonludur.}$$

Öte yandan

$$p'\text{ sonludur }\Leftrightarrow\ Tr'_{L^2(M,\alpha)\otimes K_r}\left(p'\right)<\infty\text{ ' dır.}$$

Gerçekten;

τ bir iz olmak üzere, eğer τ sonlu ise $\forall x \in (M, \alpha)_+$ için $\tau(x) < \infty$ olduğundan $\tau(1) < \infty$' dır. Tersine eğer $\exists x \in (M, \alpha)_+ : \tau(x) = \infty$ ise $1 - x \geq 0$ ve $\tau(1 - x) \geq 0$ olduğundan $0 \leq \tau(1 - x) = \tau(1) - \tau(x)$' dir. Buradan $\infty = \tau(x) \leq \tau(1)$, yani $\tau(1) = \infty$' dır. Sonuç olarak

$$\tau \text{ sonludur} \Leftrightarrow \tau(1) < \infty \text{' dır.}$$

Buradan

$$\dim_{(M, \alpha)}(H_r) = Tr'_{L^2(M, \alpha) \otimes K_r}(p') < \infty \text{' dır.}$$

3. SONUÇLAR

Bu çalışma ile elde edilen bazı sonuçlar aşağıdaki şekilde verilebilir.

1. α involutif *-antiotomorfizm dönüşümü ile reel L^2 uzayı tanımlandı.

2. Hilbert uzayı anlamında $L^2(M,\alpha)+iL^2(M,\alpha)=L^2(M)$ olduğu ispat edildi.

3. İAİ kanonik gösterimin standart involutif *- antiotomorfizmi tanımlandı.

4. (M,α)**'** nın İAİ W^* - gösterimleri elde edildi.

5. Kanonik gösterim için komutant hakkındaki teorem ispatlandı.

6. (M,α)**'** nın İAİ komutantının kanonik gösterimi elde edildi.

7. Kanonik Gösterim Teoremi ifade ve ispat edildi.

8. İAİ Kanonik Von Neumann eş sabiti tanımlandı.

9. Eş sabitin birkaç özelliği gösterildi.

4. ÖNERİLER

Çalışma sonucunda elde edilen sonuçlardan anlaşılacağı üzere aşağıdaki çalışmaların yapılması önerilebilir.

1. İnvolutif *- antiotomorfizme göre invaryant indeks kavramı tanımlanabilir.

2. Sonlu, yarı-sonlu ve saf sonsuz faktörler için invaryant indeks hesaplanabilir.

3. Reel operatör cebirlerinin sınıflandırılması incelenebilir.

5. KAYNAKLAR

1. Ayupov, Sh. A., Modular Jordan Algebras of Self-Adjoint Operators, Theor. İ Mat. Hyzika, 53, 1 (1982) 77-82.

2. Ayupov, Sh. A., Types of Jordan Algebras of Self-Adjoint Operators and Their Enveloping Von Neumann Algebras, Funkt. Anal. I Ego Pril, 17, (1983) 65-66.

3. Ayupov, Sh. A., Classification of Injective JW-Factors, Funkt. Anal. I Ego Pril, 18, 3 (1984) 67-68.

4. Ayupov, Sh. A., Traces on JW-Algebras and Enveloping W*-Algebras, Mathematische Zeitscrift, 194 (1987) 15-23.

5. Ayupov, Sh. A., Rakhimov, A. A., Usmanov, Sh. M. and Jordan, Real and Lie Structures in Operator Algebras, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1997.

6. Ayupov, Sh. A., Rakhimov, A. A. and Abduvaitov, A., Description of The Real Von Neumann Algebras with Abelian Self-Adjoint Path, Mathematıcal Notes, 17, 3 (2002) 473-476.

7. Bayraktar, M., Fonksiyonel Analiz, Üçüncü Baskı, Atatürk Üniversitesi Basımevi, Erzurum, 1998.

8. Connes, A., Une Classification Des Facteurs De Type III, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., 6 (1973) 133-252.

9. Connes, A., Takesaki M. Flots De Poids Sur Les Facteurs De Type III, C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. A., 278 (1974) 937-940.

10. Connes, A., Classification of Injective Factors., Ann. Math., 104, 1 (1976) 73-115.

11. Connes, A., Periodic Automorphisms of The Hyperfinite Factor of Type II_1., Acta Sci. Math., 39, 1 (1977) 39-66.

12. Connes, A., Takesaki M. The Flow of Weights on Factors of Type III, Thoku Math. J. Ser. , 29, 2 (1977) 473-575.

13. Dixmier, J., Les Algebres D'operateurs Dans L'espace Hilbertien, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

14. Dixmier, J., Les C*-Algebres Et Leurs Representations, Gauthier - Villars Ed., Paris, 1969.

15. Dixmier, J., Von Neumann Algebras, Sixth Edition, Universite Paris, France, 1981.

16. Giordano, T., Jones, V., Antiautomorphismes Involutifs Du Facteur Hyperfini De TypeII_1. C. R., Acad. Sci. Paris. Ser. A, 290 (1980) 29-31.

17. Giordano, T., Antiautomorphismes Involutifs Des Facteurs Injectifs, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A, 291 (1980) 583-585.

18. Giordano, T., Antiautomorphismes Involutifs Des Facteurs De Von Neumann Injectifs, I. J. Operator Theory, 10, 2 (1983) 252-287.

19. Giordano, T., Classification of Antiautomorphisms of Injective Factors of Type III_\Lambda (\Lambda \Not= 0), Current Topics in Operator Algebras (Nara, 1990), 425-431, World Sci. Publishing River Edge, NJ, 1991

20. Jones, V. F. R., Index for Subfactors, Invent. Math., 71 (1983) 1-25

21. Jones, V. F. R., Notes on Subfactors and Statistical Mechanics, Braid Group, Knot Theory and Statistical Mechanics, ed. C.N. Yang and M.-L. Ge, World scientific, 1989.

22. Jones, V., Sunder, V. S., Introduction to Subfactor, London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, United Kingdom, 1997

23. Kolmogorov, A.N. and Fomin, S.V., Functional Analysis, Graylock Pres, N.Y., 1957

24. Li, B., Intruduction to Operator Algebras, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 1992.

25. Li, B., Real Operator Algebras, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2003.

26. Murray, F., Von Neumann J. on Rings of Operators. I, Ann. Math., 37 (1936) 116-229.

27. Murray, F., Von Neumann J. on Rings of Operators. II, Trans. Amer. Math. Soc., 41 (1937) 208-248.

28. Murray, F., Von Neumann J. on Rings of Operators. IV, Ann. Math., 44 (1943) 716-808.

29. Musayev, B. ve Alp, M., Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları, Ankara, 2000.

30. Rakhimov, A. A., Classification of Periodic *-Antiautomorphisms of Type II_1 Hyperfinite Factor, Doklady Mathematics of Akademy Sciences Ruz., 10 (1991) 3-4.

31. Rakhimov, A. A. and Usmanov, Sh.M., Outer Conjugacy Classes of Automorphisms and Antiautomorphisms of Real And Complex Injective Factors, Journal of Functional Analysis, 144 (1997) 475-485.

32. Rakhimov, A. A., Injective Real W*-Factors of Type III_L, 0<L<1, Functional Analysis And Its App., 3 (1997) 41-44.

33. Rakhimov, A. A., Actions of Finite Groups on The Hyperfinite Real Type II_1 Factor, Methods of Functional Analysis And Topology, 4, 3 (1998) 72-88.

34. Rakhimov, A. A. and Betkhush, A., Real Structures of The Symmitric Algebras of Operators in The Pontryagin's Space of Type Pi_1, Uzbekish Mathematical Journal, 4 (2000) 65-74.

35. Rakhimov, A. A., Topolojik Uzaylar, Seçkin Yayıncılık, Ankara, 2006.

36. Sakai, S., C*-Algebras and W*-algebras, Springer, Berlin, 1971, IX+256 P.

37. Sakai, S., on Automorphism Groups of II_1-Factors, Tohoku Math., 26, 3 (1974) 423-430.

38. Stacey, P. J., Real Structure in The Approximately Finite Dimensional II_\İnfty Factor, Preprint Melbourne, 1981.

39. Stacey, P. J., Real Structure in S-Finite Factors of Type III_L, where 0<L< 1, Proc. London Math. Soc, 47, 3 (1983) 275-284.

40. Stormer, E., on The Jordan Structure of C*-Algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 120, 12 (1965) 438-447.

41. Stormer, E., Jordan Algebras of Type I., Acta Math., 115, 3-4 (1966) 165-184..

42. Stormer, E., Real Structure in The Hyperfinite Factor, Duke Math. J., 47, 1 (1980) 145-153.

43. Stormer, E., Conjugacy of Involutive Antiautomorpisms of Von Neumann Algebras, Preprint Oslo University, 1984.

44. Takesaki, M., The Structure of A Von Neumann Algebra with A Homogeneous Periodic State, Acta Math., 131 (1973) 79-122.

45. Takesaki, M., Theory of Operator Algebras I., Springer, Berlin, 1979, VIII + 415 P.

46. Takesaki, M., Structure of Factors and Automorphism Groups, Amer. Math. Soc, 1983.

47. Usmanov, Sh. M., Classification of Real W*-Factors of Type III_L, 0<L<1, Preprint 8082-84 Deposed at Viniti, Russian, 1984.

48. Usmanov, Sh.M., Classification of Real W*-Factors of Type III_L, 0\Leq L < 1, Funkt. Anal. İ Ego Pril. , 19, 3 (1985) 94-95.

49. Von Neumann, J., Selected Works in Functional Analysis,Vol. 1., Nauka, Moscow, 1987.

50. Von Neumann, J., Selected Works in Functional Analysis, Nauka, Moscow, Vol. 2. 1987.

ÖZGEÇMİŞ

Mücahide Nesibe CANSU, 11.11.1981 tarihinde Kırıkkale’ de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Kırıkkale’ de tamamladı. 1998- 1999 eğitim-öğretim yılında lise öğrenimini tamamladıktan sonra 1999- 2000 eğitim-öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. 2003- 2004 eğitim öğretim yılında Matematik Bölümünü birincilikle bitirdi. 2004- 2005 eğitim öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı’ nda tezli yüksek lisans programını kazanarak bir yıl süreyle İngilizce hazırlık öğrenimi gördü. 10.01.2005 tarihinden beri Matematik Anabilim Dalı’ nda araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.