KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SÜREKSİZ GRUPLAR VE GRAFLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ALİ Hikmet DEĞER

AĞUSTOS 2006
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SÜREKSİZ GRUPLAR VE GRAFLAR

ALİ Hikmet DEĞER

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"Yüksek Lisans (Matematik)"
Ünvanı Verilmek İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 31. 07. 2006
Tezin Sözlü Savunma Tarihi : 23. 08. 2006

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ
Jüri Üyesi : Yrd.Doç.Dr. Sema DİKMENOĞLU
Jüri Üyesi : Prof.Dr. Hilmi ZENGİN

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Emin Zeki BAŞKENT

Trabzon 2006

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, süreksiz gruplar ve graflar incelendi.

Öncelikle, tez konusunu seçen ve çalışma süresince yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ a teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

KTÜ Fen-Edebiyat Fakültesi ve KTÜ Rize Fen-Edebiyat Fakültesindeki tüm asistan arkadaşlarıma ve hayatım boyunca desteklerini hiç esirgemeyen sevgili aileme çok teşekkür ederim.

Ali Hikmet DEĞER

Trabzon, 2006

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Süreksiz Gruplar ve Graflar

Ali Hikmet DEĞER

Bu tez çalışmasında, hiperbolik geometrinin temel özellikleri verildi ve $\Gamma_0(N)$ nin $PSL(2,\mathbb{R})$ deki normalliyeninin alt yörüngesel graflarıyla ilgili bazı sonuçlar elde edildi.

Birinci bölümde, topolojik grup, topolojik dönüşüm grupları açıklandı ve ihtiyaç duyduğumuz bazı tanımlar verildi.

İkinci bölümde, hiperbolik geometri ve Fuchsian Grupların teorisine bir giriş yapıldıktan sonra Normalliyenin grafları araştırıldı. Son olarak normalliyenin eliptik elemanlarıyla ilişkili bazı sonuçlar verildi.

Anahtar Kelimeler: $PSL(2,\mathbb{R})$, Topolojik Dönüşüm Grupları, Hiperbolik Geometri, Fuchsian Grupları, Alt Yörüngesel Graflar, Modüler Grup, Lineer Kesirli Dönüşümler

SUMMARY

Discontinuous Groups and Graphs

Ali Hikmet DEĞER

In this thesis, the basic properties of hyperbolic geometry are given and some conclusions related to the suborbital graphs of the normalizer of $\Gamma_0(\mathrm{N})$ in $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ are obtained.

In first chapter, we describe topological group, topological transformation group and give some definitions we require.

In second chapter, we give an introduce hyperbolic geometry and the theory of Fuchsian Groups, then we investigate the graphs of the normalizer. Finally we give some results about elliptic elements of the normalizer.

Key Words: $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, Topological Transformation Groups, Hyperbolic Geometry, Fuchsian Groups, Suborbital Graphs, Modular Group, Linear Fractional Transformations

ŞEKİLLER DİZİNİ

SEMBOLLER DİZİNİ

$A \subset B$	A kümesi B kümesinin alt kümesidir
$A \backslash B$	A kümesinin B kümesinden farkı
$A \leq B$	A grubu B grubunun alt grubudur
$A \trianglelefteq B$	A grubu B grubunun normal alt grubudur
$a \mid b$	*a* sayısı *b* sayısını böler
$a \nmid b$	*a* sayısı *b* sayısını bölmez
$a \parallel b$	*a* sayısı *b* sayısının bir tam bölenidir
$a \equiv b (\mathrm{mod}\, n)$	*n* sayısı $(a-b)$ sayısını böler
(a,b)	a ile b sayısının en büyük ortak böleni
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{C}_\infty$	Genişletilmiş kompleks sayılar kümesi
$\mathcal{N}$	$\Gamma_0(N)$ nin $PSL(2,\mathbb{R})$ deki normalliyeni
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$PSL(2,\mathbb{R})$	Gerçel katsayılı, lineer, kesir dönüşümlerinin grubu
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}_\infty$	Genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi
Γ	Modüler grup
$\Gamma_0(N)$	Γ nın $N \mid c$ olan bir alt grubu
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_\infty$	Genişletilmiş reel sayılar kümesi
$\mathbb{U}$	$\mathbb{C}$ de üst yarı düzlem
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\forall$	Her
$\exists$	Bazı
∞	Sonsuz
$:=$	Tanım olarak eşittir
$:\Leftrightarrow$	Tanım olarak ancak ve ancak

1. GENEL BİLGİLER

1.1 Giriş

1.1.1 Topolojik Gruplar

Tanım 1: $(G,\cdot)$ bir grup ve aynı zamanda bir topolojik uzay olsun.

i) $\begin{array}{c} M: G\times G \longrightarrow G \\ (g,h) \longrightarrow g\cdot h \end{array}$

ii) $\begin{array}{c} m: G \longrightarrow G \\ g \longrightarrow g^{-1} \end{array}$

dönüşümleri sürekli ise G ye bir Topolojik Grup denir.

Bundan böyle, aksi söylenmedikçe, $g\cdot h := gh$ alınacaktır.

Lemma 1: G bir topolojik grup olsun. Bu takdirde;

$$\begin{array}{c} m: G \longrightarrow G \\ g \longrightarrow g^{-1} \end{array}$$

dönüşümü bir homeomorfizmadır.

İspat: Öncelikle aşağıdaki iki dönüşümü göz önüne alalım:

i) $\begin{array}{c} k: G\times\{e\} \longrightarrow G \\ (g,e) \longrightarrow g^{-1} \end{array}$

ii) $\begin{array}{c} t: G \longrightarrow G\times\{e\} \\ (g,e) \longrightarrow g^{-1} \end{array}$

olmak üzere,

$$\begin{array}{ccccc} G & \longrightarrow & G\times\{e\} & \longrightarrow & G \\ g & \longrightarrow & (g,e) & \longrightarrow & g^{-1} \end{array}$$

olsun. Bu durumda $G\times\{e\}$ deki açık kümeler $U\subset G$ açık olmak üzere $U\times\{e\}$ nin birleşimleri olarak yazılabilir. Dolayısıyla; $t^{-1}(U\times\{e\})=U$ açık olup t süreklidir. Ayrıca

G topolojik grup olduğundan k süreklidir. Böylece $m := k \circ t : \underset{g}{G} \underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \underset{g^{-1}}{G}$ fonksiyonu da süreklidir. $m(g) = g^{-1}$ dir. Buradan;

$m \circ m(g) = m(m(g)) = m(g^{-1}) = g \Rightarrow m^2 = I \Rightarrow m = m^{-1}$

olup m^{-1} de süreklidir.

Şimdi $m: \underset{g}{G} \underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \underset{g^{-1}}{G}$ dönüşümünün örten olup olmadığına bakalım. Bunun için $h \in G$ keyfi olmak üzere $m(g) = h$ olacak şekilde bir $g \in G$ bulmalıyız.

$m(g) = h \Rightarrow g^{-1} = h \Rightarrow (g^{-1})^{-1} = h^{-1} \Rightarrow g = h^{-1} \Rightarrow m(h^{-1}) = (h^{-1})^{-1} = h$

olup $m: \underset{g}{G} \underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \underset{g^{-1}}{G}$ örtendir.

Dolayısıyla $m: \underset{g}{G} \underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \underset{g^{-1}}{G}$ dönüşümü bir homeomorfizmadır.■

Sonuç 1: G bir topolojik grup ve $U \subset G$ açık bir küme olsun. Bu takdirde

$$U^{-1} = \{u^{-1} \in G \mid u \in U\} \subset G$$

açık bir kümedir.

İspat: $m: \underset{g}{G} \underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \underset{g^{-1}}{G}$ dönüşümü bir homeomorfizma olduğundan m fonksiyonu açık kümeleri açık kümelere resmeder. Yani $m(U) = U^{-1}$ açıktır.■

Lemma 2: G bir grup ve bir topolojik uzay olsun.

G bir topolojik gruptur $\Leftrightarrow s: \underset{(g,h)}{G \times G} \underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \underset{gh^{-1}}{G}$ dönüşümü süreklidir.

İspat: "$\Rightarrow$" **:** Farzedelimki G bir topolojik grup olsun. $s: \underset{(g,h)}{G \times G} \underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \underset{gh^{-1}}{G}$ dönüşümünün sürekli olduğunu gösterelim. $V \subset G$ keyfi açık bir küme olsun. $s^{-1}(V)$ nin $G \times G$ de açık olduğunu gösterelim. $(a,b) \in s^{-1}(V)$ keyfi olsun. $M: \underset{(g,h)}{G \times G} \underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \underset{g \cdot h}{G}$ dönüşümü $(a,b^{-1}) \in M^{-1}(V)$ noktasında sürekli olduğundan U_a (a nın komşuluğu) ve $U_{b^{-1}}$ (b nin komşuluğu) mevcuttur. Buradan $U_a \times U_{b^{-1}} \subset M^{-1}(V)$ olup $U_a \times U_{b^{-1}}^{-1} \subset s^{-1}(V)$ dir. Bu ise (a,b) nin $s^{-1}(V)$ nin bir iç noktası olduğunu gösterir. Dolayısıyla $s^{-1}(V)$ açıktır. Buradan s süreklidir.

"$\Leftarrow$" **:** Şimdi $\underset{(g,h)\ \longrightarrow\ gh^{-1}}{s:G\times G\longrightarrow G}$ sürekli ise $\underset{(g,h)\ \longrightarrow\ g\cdot h}{M:G\times G\longrightarrow G}$ ve $\underset{g\ \longrightarrow\ g^{-1}}{m:G\longrightarrow G}$ nin sürekli olduğunu gösterelim.

$V\subset G$ keyfi bir açık küme olsun. $(a,b)\in M^{-1}(V)$ alalım. $(a,b^{-1})\in s^{-1}(V)$ olduğundan U_a ve $U_{b^{-1}}$ açık komşulukları vardır. $(a,b^{-1})\in U_a\times U_{b^{-1}}\subset s^{-1}(V)$ dir. Buradan $(a,b)\in U_a\times U_{b^{-1}}^{-1}\subset M^{-1}(V)$ dir. $U_{b^{-1}}^{-1}$ açık olduğundan $U_a\times U_{b^{-1}}^{-1}$ $G\times G$ de açık olup $\underset{(g,h)\ \longrightarrow\ g\cdot h}{M:G\times G\longrightarrow G}$ dönüşümü süreklidir.

$\underset{g\ \longrightarrow\ g^{-1}}{m:G\longrightarrow G}$ dönüşümümün sürekli olduğunu gösterelim. $\underset{(g,h)\ \longrightarrow\ gh^{-1}}{s:G\times G\longrightarrow G}$ dönüşümü sürekli olduğundan $\underset{(e,g)\ \longrightarrow\ g^{-1}}{r:\{e\}\times G\longrightarrow G}$ dönüşümü de süreklidir. Ayrıca $\underset{g\ \longrightarrow\ (e,g)}{p:G\longrightarrow \{e\}\times G}$ dönüşümü de süreklidir. Dolayısıyla $\underset{g\ \longrightarrow\ (e,g)\ \longrightarrow\ g^{-1}}{m:=r\circ p:G\longrightarrow\{e\}\times G\longrightarrow G}$ süreklidir.■

Sonuç 2: G bir topolojik gruptur $\Leftrightarrow$ $\underset{(g,h)\ \longrightarrow\ g^{-1}h}{t:G\times G\longrightarrow G}$ dönüşümü süreklidir.

İspat: Lemma 2 den $\underset{(g,h)\ \longrightarrow\ gh^{-1}}{s:G\times G\longrightarrow G}$ dönüşümü süreklidir. Diğer taraftan, $\underset{g\ \longrightarrow\ g^{-1}}{m:G\longrightarrow G}$ dönüşümü bir homeomorfizma olduğundan $\underset{(g,h)\ \longrightarrow\ (g^{-1},h^{-1})}{y:G\times G\longrightarrow G\times G}$ dönüşümünün bir homeomorfizma olduğu açıktır. Sonuç olarak,

$$\underset{(g,h)\ \longrightarrow\ (g^{-1},h^{-1})\ \longrightarrow\ g^{-1}h}{t:=s\circ y:G\times G\xrightarrow{y}G\times G\xrightarrow{s}G}$$

dönüşümü süreklidir.■

Lemma 3: G bir topolojik grup ve $a\in G$ keyfi olsun. Bu takdirde,

$$\underset{g\ \longrightarrow\ ag}{\lambda_a:G\longrightarrow G}\ ,\quad \underset{g\ \longrightarrow\ ga}{\rho_a:G\longrightarrow G}\quad \text{ve}\quad \underset{g\ \longrightarrow\ aga^{-1}}{\alpha_a:G\longrightarrow G}$$

dönüşümleri birer homeomorfizmadır.

İspat: $\lambda_a : \underset{g}{G} \xrightarrow{\quad} \underset{ag}{G}$ dönüşümünün bir homeomorfizma olduğunu gösterelim.

Önce birebir olduğunu gösterelim. $g_1, g_2 \in G$ olmak üzere $\lambda_a(g_1) = \lambda_a(g_2)$ olsun. $\lambda_a(g_1) = \lambda_a(g_2) \Rightarrow ag_1 = ag_2 \Rightarrow a^{-1}ag_1 = a^{-1}ag_2 \Rightarrow eg_1 = eg_2 \Rightarrow g_1 = g_2$ olup $\lambda_a : \underset{g}{G} \xrightarrow{\quad} \underset{ag}{G}$ birebirdir.

Örten olduğunu gösterelim. $h \in G$ olsun. Bu takdirde $g := a^{-1}h \in G$ olup $\lambda_a(g) = h$ dır. Yani, $\lambda_a : \underset{g}{G} \xrightarrow{\quad} \underset{ag}{G}$ örtendir.

Şimdi sürekli olduğunu gösterelim.

$$\underset{g}{G} \xrightarrow{r} \underset{(a^{-1},g)}{\{a^{-1}\} \times G} \xrightarrow{p} \underset{ag}{G}$$

alalım.Bu takdirde $\lambda_a := p \circ r$ dir. $\{a^{-1}\} \times G \subset G \times G$ ve $t : \underset{(g,h)}{G \times G} \xrightarrow{\quad} \underset{g^{-1}h}{G}$ dönüşümü sürekli olduğundan $p : \underset{(a^{-1},g)}{\{a^{-1}\} \times G} \xrightarrow{\quad} \underset{ag}{G}$ dönüşümü de süreklidir. $U \subset G$ keyfi açık bir küme olmak üzere $r^{-1}\left(\{a^{-1}\} \times U\right) = U$ açık olup $r : \underset{g}{G} \xrightarrow{\quad} \underset{(a^{-1},g)}{\{a^{-1}\} \times G}$ süreklidir. Dolayısıyla $\lambda_a = p \circ r$ süreklidir.

Son olarak $(\lambda_a)^{-1} : \underset{g}{G} \xrightarrow{\quad} \underset{a^{-1}g}{G}$ ters dönüşümünün sürekli olduğunu gösterelim.

$\lambda_a : \underset{g}{G} \xrightarrow{\quad} \underset{ag}{G}$ dönüşümünün sürekli olduğunu gösterdik. Benzer şekilde $(\lambda_a)^{-1} = \lambda_{a^{-1}}$ olup $(\lambda_a)^{-1} : \underset{g}{G} \xrightarrow{\quad} \underset{a^{-1}g}{G}$ dönüşümü de süreklidir.

Sonuç olarak $\lambda_a : \underset{g}{G} \xrightarrow{\quad} \underset{ag}{G}$ dönüşümü bir homeomorfizmadır.

Benzer şekilde $\rho_a : \underset{g}{G} \xrightarrow{\quad} \underset{ga}{G}$ dönüşümünün bir homeomorfizma olduğu gösterilebilir.

$\alpha_a : \underset{g}{G} \xrightarrow{\quad} \underset{aga^{-1}}{G}$ dönüşümünün bir homeomorfizma olduğunu gösterelim.

Önce birebir olduğunu gösterelim. $g_1, g_2 \in G$ olmak üzere $\alpha_a(g_1) = \alpha_a(g_2)$ olsun. $\alpha_a(g_1) = \alpha_a(g_2) \Rightarrow ag_1a^{-1} = ag_2a^{-1} \Rightarrow a^{-1}ag_1a^{-1}a = a^{-1}ag_2a^{-1}a \Rightarrow g_1 = g_2$

olup $\alpha_a : \underset{g}{G} \xrightarrow{\quad} \underset{aga^{-1}}{G}$ birebirdir.

Örten olduğunu gösterelim. $h \in G$ olsun. Bu takdirde $\alpha_a(g) = h$ olacak şekilde bir $g \in G$ vardır. Gerçekten $\alpha_a(g) = h \Rightarrow aga^{-1} = h \Rightarrow a^{-1}aga^{-1}a = a^{-1}ha \Rightarrow g = a^{-1}ha \in G$ olup $\alpha_a : \underset{g}{G} \underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \underset{aga^{-1}}{G}$ örtendir.

Şimdi sürekli olduğunu gösterelim.

$$\alpha_a := \rho_{a^{-1}} \circ \lambda_a : \underset{g}{G} \underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \underset{ag}{G} \underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \underset{aga^{-1}}{G}$$

alalım. $\lambda_a : \underset{g}{G} \underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \underset{ag}{G}$ ve $\rho_{a^{-1}} : \underset{ag}{G} \underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \underset{aga^{-1}}{G}$ dönüşümleri sürekli olduğundan $\alpha_a := \rho_{a^{-1}} \circ \lambda_a$ dönüşümü süreklidir.

Son olarak $(\alpha_a)^{-1} : \underset{g}{G} \underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \underset{a^{-1}ga}{G}$ ters dönüşümünün sürekli olduğunu gösterelim. $\alpha_a : \underset{g}{G} \underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \underset{aga^{-1}}{G}$ dönüşümünün sürekli olduğunu gösterdik. Benzer şekilde $(\alpha_a)^{-1} = \alpha_{a^{-1}}$ olup $\alpha_{a^{-1}} : \underset{g}{G} \underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \underset{a^{-1}ga}{G}$ dönüşümü süreklidir.

Sonuç olarak $\alpha_a : \underset{g}{G} \underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \underset{aga^{-1}}{G}$ dönüşümü bir homeomorfizmadır.■

Notasyon: $\aleph$, G nin e birim elemanını içeren açık kümelerinin bir ailesi olsun. Yani ; $\aleph = \{U \subset G : U \text{ açık ve } e \in U\}$ dir.

Sonuç 3:

1) $\{aU : U \in \aleph\}$, $\{Ua : U \in \aleph\}$ ve $\{aUa^{-1} : U \in \aleph\}$ a yı ihtiva eden bütün açık kümelerin ailesidir. aU, Ua ve aUa^{-1} açıktırlar. Çünkü

$$\lambda_a : \underset{g}{G} \underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \underset{ag}{G}\ ,\ \rho_a : \underset{g}{G} \underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \underset{ga}{G} \text{ ve } \alpha_a : \underset{g}{G} \underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \underset{aga^{-1}}{G}$$

dönüşümleri birer homeomorfizma olduğundan açık kümeleri açık kümelere resmederler.

2) G topolojik grubu verildiğinde G deki topolojik yapıyı ancak $\aleph$ yi bilirsek belirleriz. Gerçekten $\varnothing \neq W \subset G$ keyfi açık bir küme olsun. $g \in W$ alalım. Bu durumda $g^{-1}W$ açıktır ve $g^{-1}g \in g^{-1}W \Rightarrow e \in g^{-1}W \in \aleph$ dir. Dolayısıyla herhangi bir açık küme $\aleph$ nin bir elemanı ile G nin bir elemanının çarpımına eşittir.

Tanım 2: G bir topolojik grup ve $U \subset G$ olsun. $U = U^{-1}$ ise U ya bir simetrik küme denir.

Lemma 4: $U \in \aleph$ olsun. Bu takdirde $VV \subset U$ olacak şekilde $V \in \aleph$ simetrik kümesi vardır

İspat: $W := M^{-1}(U) = \{(g,h) \in G \times G \mid gh \in U\}$ alalım. Bu takdirde $e \in U$ ve $UU \subset W$ olduğundan (e,e) $\in W$ dir. W e yi ihtiva eden açık bir kümedir. Dolayısıyla $V_1 \times V_2 \subset W$ olacak şekilde $V_1, V_2 \in \aleph$ mevcuttur. Çünkü (e,e) yi ihtiva eden açık küme $V_1 \times V_2$ dir. Böylece $M(V_1 \times V_2) = V_1V_2 \subset U$ dur. $V_3 := V_1 \cap V_2$ tanımlarsak $V_3 \subset V_1$, $V_3 \subset V_2$ olduğundan $V_3V_3 \subset V_1V_2 \subset U$ dur. $V := V_3 \cap V_3^{-1}$ alırsak $m: \begin{matrix} G \longrightarrow G \\ g \longrightarrow g^{-1} \end{matrix}$ dönüşümü bir homeomorfizma olduğundan V_3, V_3^{-1} açık olup $V \in \aleph$ ve $VV \subset U$ dur.

V simetriktir. Yani $V = V^{-1}$ dir. Gerçekten, $a \in V$ olsun. $\Rightarrow$ $a \in V_3$ ve $a \in V_3^{-1}$ $\Rightarrow$ $a \in V_3$ ve $a^{-1} \in V_3 \Rightarrow a^{-1} \in V_3^{-1}$ ve $a^{-1} \in V_3 \Rightarrow a^{-1} \in V_3^{-1} \cap V_3 = V \Rightarrow a \in V^{-1} \Rightarrow V \subset V^{-1}$ dir.

Diğer taraftan $a^{-1} \in V^{-1}$ olsun. $\Rightarrow a \in V \Rightarrow a \in V_3$ ve $a \in V_3^{-1}$ $\Rightarrow a^{-1} \in V_3^{-1}$ ve $a^{-1} \in V_3$ $\Rightarrow a^{-1} \in V_3^{-1} \cap V_3 = V \Rightarrow V^{-1} \subset V$ dir.

Dolayısıyla $V \subset V^{-1}$ ve $V^{-1} \subset V$ olduğundan $V = V^{-1}$ dir.■

Topolojik Gruplara Örnekler:

1) G herhangi bir grup olsun. G üzerinde bir ayrık topoloji varsa G topolojik bir gruptur.

2) $(\mathbb{R},+)$ bir topolojik gruptur.

3) $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ kümesi kompleks sayıların çarpma işlemine göre bir topolojik gruptur.

4) G bir topolojik grup ve $H \leq G$ kapalı bir alt grup olsun. $G/H := \{gH \mid g \in G\}$ sol yan sınıf uzayı, $\varphi : \underset{g}{G} \underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \underset{gH}{G/H}$ kanonik dönüşümü tarafından indirgenen topoloji ile (Yani, $A \subset G/H$ açıktır $:\Leftrightarrow$ $\varphi^{-1}(A)$, G de açıktır), bir Hausdorff uzayıdır ve ayrıca $\varphi : \underset{g}{G} \underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \underset{gH}{G/H}$ sürekli ve açık bir dönüşümdür.

1.1.2. Topolojik Dönüşüm Grupları

Tanım 3: G bir topolojik grup ve X bir topolojik uzay olsun. Bu Takdirde;

$$\wedge : \underset{(g,x)}{G \times X} \underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \underset{\wedge(g,x)=:g\wedge x}{X}$$

sürekli bir dönüşüm ve

i) $g \wedge (h \wedge x) = gh \wedge x$, $g,h \in G$, $x \in X$

ii) $e \wedge x = x$, $e \in G$, $x \in X$

şartları sağlanıyorsa $[G, X, \wedge]$ üçlüsüne veya $[G, X]$ ikilisine bir topolojik dönüşüm grubu adı verilir. Bu durumda G ye X üzerinde hareket eder veya G ye X üzerinde bir hareket grubu diyeceğiz. Kolaylık olması bakımından $g \wedge x$ yerine gx yazacağız.

Tanım 4: $[G, X]$ bir topolojik dönüşüm grubu olsun. $G_0 := \{g \in G \mid \forall x \in X \text{ için } gx = x\}$ kümesine $[G, X]$ topolojik dönüşüm grubunun çekirdeği denir. Eğer $G_0 = \{e\}$ ise $[G, X]$ topolojik dönüşüm grubuna etkili topolojik dönüşüm grubu adı verilir.

Lemma 5: X bir Hausdorff uzayı ve $[G, X]$ bir topolojik dönüşüm grubu olsun. Bu takdirde $G_0 := \{g \in G \mid \forall x \in X \text{ için } gx = x\}$ çekirdeği G nin normal alt grubudur ve kapalıdır.

İspat: Önce $G_0 \leq G$ olduğunu gösterelim. $G_0 \leq G \Leftrightarrow \forall g_1, g_2 \in G_0$ için $g_1 g_2^{-1} \in G_0$.

$\forall g_1, g_2 \in G_0$ ve $\forall x \in X$ için $g_1 g_2^{-1} x \overset{g_2^{-1} \in G_0}{=} g_1 x = x \Rightarrow g_1 g_2^{-1} \in G_0 \Rightarrow G_0 \leq G$.

($g_2 \in G_0 \Rightarrow g_2 x = x \Rightarrow g_2^{-1} g_2 x = g_2^{-1} x \Rightarrow x = g_2^{-1} x \Rightarrow g_2^{-1} \in G_0$).

Şimdi $G_0 \trianglelefteq G$ olduğunu gösterelim. $G_0 \trianglelefteq G \Leftrightarrow \forall g \in G$ ve $\forall g_0 \in G_0$ için $gg_0g^{-1} \in G_0$.

$\forall g \in G, \forall g_0 \in G_0$ ve $\forall x \in X$ için $gg_0g^{-1}x \overset{g_0 \in G_0}{=} gg^{-1}x = x \Rightarrow gg_0g^{-1} \in G_0 \Rightarrow G_0 \trianglelefteq G.$

Şimdi son olarak G_0 ın kapalı olduğunu gösterelim. $x \in X$ keyfi fakat sabit olsun. $\wedge : \underset{(g,x)}{G \times X} \underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \underset{gx}{X}$ sürekli olduğundan $T : \underset{(g,x)}{G \times \{x\}} \underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \underset{gx}{X}$ süreklidir. $K : \underset{g}{G} \underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \underset{gx}{G \times \{x\}}$ dönüşümü de , $K^{-1}\left(U \times \{x\}\right) = U$ açık olduğundan, sürekli bir dönüşümdür. Dolayısıyla $M_x := K \circ T : \underset{g}{G} \underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \underset{gx}{X}$ süreklidir. Buradan $G_0 = \bigcap_{x \in X} M_x^{-1}\left(\{x\}\right)$ dir. Gerçekten;

$g \in G_0 \Rightarrow gx = x \Rightarrow M_x(g) = x \Rightarrow g \in M_x^{-1}\left(\{x\}\right) \Rightarrow g \in \bigcap_{x \in X} M_x^{-1}\left(\{x\}\right) \Rightarrow G_0 \subset \bigcap_{x \in X} M_x^{-1}\left(\{x\}\right)$
ve $g \in \bigcap_{x \in X} M_x^{-1}\left(\{x\}\right) \Rightarrow \forall x \in X$ için $g \in M_x^{-1}\left(\{x\}\right) \Rightarrow M_x(g) \in \{x\} \Rightarrow M_x(g) = x \Rightarrow gx = x$

$\Rightarrow g \in G_0 \Rightarrow \bigcap_{x \in X} M_x^{-1}\left(\{x\}\right) \subset G_0$ dir. Dolayısıyla , $G_0 = \bigcap_{x \in X} M_x^{-1}\left(\{x\}\right)$ dir. X bir Hausdorff uzay olduğundan; $\{x\}$ kapalı ve sürekli bir dönüşüm altında kapalı kümelerin ters resimleri de kapalı olduğundan, $M_x^{-1}\left(\{x\}\right)$ kapalıdır. Kapalı kümelerin arakesitleri de kapalı olduğundan G_0 kapalıdır.■

Lemma 6: $[G, X]$ bir topolojik dönüşüm grubu ve $G_0 \trianglelefteq G$ de bu topolojik dönüşüm grubunun çekirdeği olsun. Bu takdirde $s : \underset{(gG_0, x)}{G/G_0 \times X} \underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \underset{gx}{X}$ ile $[G/G_0, X]$ bir etkili topolojik dönüşüm grubudur.

İspat: İlk önce G/G_0 ın bir topolojik grup olduğunu gösterelim. Bunun için $\mu : \underset{(gG_0, hG_0)}{G/G_0 \times G/G_0} \underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \underset{g^{-1}hG_0}{G/G_0}$ dönüşümünün sürekli olduğunu gösterelim. $t : \underset{(g,h)}{G \times G} \underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \underset{g^{-1}h}{G}$ dönüşümü bir homeomorfizma olduğundan süreklidir. $\varphi : \underset{g}{G} \underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \underset{gG_0}{G/G_0}$ projeksiyonu sürekli olduğundan $\psi := \varphi \times \varphi : \underset{(g,h)}{G \times G} \underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \underset{(gG_0, hG_0)}{G/G_0 \times G/G_0}$ dönüşümü de süreklidir. Buradan,

$\mu : \underset{(gG_0, hG_0)}{G/G_0 \times G/G_0} \underset{\longrightarrow}{\xrightarrow{\psi^{-1} := (\varphi \times \varphi)^{-1}}} \underset{(g,h)}{G \times G} \underset{\longrightarrow}{\xrightarrow{t}} \underset{g^{-1}h}{G} \underset{\longrightarrow}{\xrightarrow{\varphi}} \underset{g^{-1}hG_0}{G/G_0}$ olmak üzere $W \subset G/G_0$ keyfi açık bir küme olsun. $\mu^{-1}(W) = (\varphi \times \varphi)\left(t^{-1}\varphi^{-1}(W)\right)$ açıktır. $\Rightarrow \mu$ süreklidir.

Şimdi $[G/G_0, X]$ in bir topolojik dönüşüm grubu olduğunu gösterelim. Bunun için ise; $\underset{(gG_0,x)\ \longrightarrow\ gx}{s: G/G_0 \times X \longrightarrow X}$ dönüşümünün sürekli olduğunu gösterelim. $\underset{g\ \longrightarrow\ gG_0}{\varphi: G \longrightarrow G/G_0}$ sürekli olduğundan $\underset{(g,x)\ \longrightarrow\ (gG_0,x)}{\varphi\times I: G\times X \longrightarrow G/G_0 \times X}$ da süreklidir. $\underset{(g,x)\ \longrightarrow\ gx}{\wedge: G\times X \longrightarrow X}$ topolojik dönüşüm grubunun tanımından süreklidir. Buradan, $\underset{(gG_0,x)\ \longrightarrow\ (g,x)\ \longrightarrow\ gx}{s: G/G_0 \times X \xrightarrow{(\varphi\times I)^{-1}} G\times X \xrightarrow{\wedge} X}$ olmak üzere $U\subset X$ keyfi açık bir küme olsun. $s^{-1}(U) = (\varphi\times I)(\wedge^{-1}(U))$ açıktır. Böylece s süreklidir.

Son olarak $[G/G_0, X]$ topolojik dönüşüm grubunun etkili olduğunu gösterelim. Yani $A=\{a\in G/G_0 : \forall x\in X \text{ için } ax=x\}=\{eG_0\}=\{G_0\}$ olduğunu göstereceğiz. Aksini farzedelim. Yani A G_0 dan farklı bir B elemanını ihtiva etsin. Buradan $\exists$ $B\in G\setminus G_0$ ve $\exists$ $g\in G/G_0$ öyleki $B=gG_0$ dır.A nın tanımından $gG_0 \wedge x=gx=x$ dir. $\forall x\in X$ için $gx=x$ olduğundan G_0 ın tanımından $g\in G_0$ dır. Bu ise $B\in G\setminus G_0$ olduğundan bir çelişkidir. Bu çelişki A nın tek elemanlı olduğunu gösterir.. Yani $A=\{G_0\}$ dır. Dolayısıyla $[G/G_0, X]$ bir etkili topolojik dönüşüm grubudur.■

Tanım 5: $[G, X]$ bir topolojik dönüşüm grubu ve $x,y\in X$ olsun. Bu takdirde

$$x\sim y \Leftrightarrow \exists g\in G: y=gx$$

olarak tanımlanırsa ~ bağıntısı X üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısı X topolojik uzayını denklik sınıflarına parçalar. Her bir denklik sınıfına bir G-yörünge veya kısaca yörünge adı verilir. $x\in X$ noktasını içeren yörünge $Gx := \{gx \mid g\in G\}$ dir. Eğer X in bütün noktaları bir denklik sınıfına aitse, yani bir tek yörünge ($\exists x_0\in X$ öyleki $X=Gx_0$) varsa, $[G, X]$ topolojik dönüşüm grubuna transitiftir veya geçişlidir diyeceğiz.

Notasyon: Bütün yörüngelerin ailesini X/G ile gösterelim. Yani $X/G := \{Gx \mid x\in X\}$ dir. X/G kümesi üzerindeki, yukarıya benzer, aşağıdaki gibi bir topoloji koyabiliriz:

$$p: \underset{x}{X} \underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \underset{Gx}{X/G}$$

dönüşümünü göz önüne alalım. Bu durumda

$$U \subset X/G \text{ açıktır } :\Leftrightarrow p^{-1}(U) \subset X$$

açıktır. Bu topoloji ile X/G ye bir yörünge uzayı diyeceğiz. p dönüşümü açıkça süreklidir ve projeksiyon olarak adlandırılır.

Tanım 6: $[G,X]$ bir topolojik dönüşüm grubu ve x∈X olsun. Bu takdirde

$$S_x := \{g \in G \mid gx = x\}$$

kümesine x noktasının sabitleyeni denir.

Lemma 7: $[G,X]$ bir topolojik dönüşüm grubu ve X bir Hausdorff uzayı olsun. Bu takdirde, $S_x := \{g \in G \mid gx = x\}$ G nin kapalı bir alt grubudur.

İspat: Önce $S_x \leq G$ olduğunu gösterelim. $S_x \leq G \Leftrightarrow \forall g_1, g_2 \in S_x$ için $g_1 {g_2}^{-1} \in S_x$.
$\forall g_1, g_2 \in S_x$ için $g_1 x = x$, $g_2 x = x \Rightarrow {g_2}^{-1} x = x \Rightarrow g_1 {g_2}^{-1} x = g_1 \left({g_2}^{-1} x\right) = g_1 x = x \Rightarrow g_1 {g_2}^{-1} \in S_x$.
Şimdi S_x in G nin bir kapalı alt kümesi olduğunu gösterelim. x∈X keyfi fakat sabit olsun. $T_0 : \underset{g}{G} \underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \underset{gx}{X}$ dönüşümü sürekli ve aynı zamanda X Hausdorff olduğundan $T_0^{-1}\left(\{x\}\right) = S_x$ kapalıdır. $\Rightarrow$ $S_x \leq G$ ve S_x kapalıdır.■

Lemma 8: $[G,X]$ bir topolojik dönüşüm grubu ve $y_0 \in Gx$ keyfi fakat sabit olsun. Bu takdirde, $A = \{g \in G \mid y_0 = gx\}$ bir S_x yan sınıfıdır.

İspat: $y_0 \in Gx$ olduğundan $\exists g_0 \in G : y_0 = g_0 x$ dir. Şimdi $g_0 S_x$ =A olduğunu gösterelim. $a \in g_0 S_x$ keyfi olsun. $a = g_0 g_1$ olacak şekilde $g_1 \in S_x$ mevcuttur. $ax = g_0 g_1 x = g_0 x = y_0$ dir.Bu ise a∈A olduğunu gösterir. Buradan $g_0 S_x \subset A$ dır.Şimdi g∈A alalım. Buradan

$$gx = y_0 \text{ dır. } gx = y_0 = g_0 x \Rightarrow {g_0}^{-1} gx = x \Rightarrow {g_0}^{-1} g \in S_x \Rightarrow g \in g_0 S_x$$

$\Rightarrow A \subset g_0 S_x$ dır. Dolayısıyla, $g_0 S_x \subset A$ ve $A \subset g_0 S_x$ olduğundan $g_0 S_x$ =A dır.■

Lemma 9: $[G,X]$ bir topolojik dönüşüm grubu olsun. x$\in$X keyfi fakat sabit olmak üzere

$$\tau : G/S_x \longrightarrow Gx, \quad gS_x \longrightarrow gx$$

dönüşümü birebir ve örtendir.

İspat: $\tau : G/S_x \longrightarrow Gx$, $gS_x \longrightarrow gx$ birebir olduğunu gösterelim. İki yan sınıf ya çakışır ya da ayrık iki kümedir. $\tau(g_1S_x) = \tau(g_2S_x)$ olsun. Böylece,

$g_1x = g_2x \Rightarrow \quad g_1^{-1}g_2x = x \Rightarrow \ g_1^{-1}g_2 \in S_x \Rightarrow \quad g_2 \in g_1S_x , \quad (g_2 \in g_2S_x) \Rightarrow \ g_1S_x = g_2S_x$ dir. (a$\in S_x$ ve a$\in S_y \Rightarrow S_x = S_y$).

Şimdi τ nun örten olduğunu gösterelim. h$\in$Gx keyfi olsun. $\exists g_0 \in G : h = g_0x$. $\tau(g_0S_x) = g_0x = h \in Gx \Rightarrow g_0S_x \in G/S_x \ \exists. \Rightarrow \tau$ örtendir.■

Lemma 10: $[G,X]$ bir topolojik dönüşüm grubu ve y=gx (veya y$\in$Gx) olsun. $S_y = gS_xg^{-1}$ dir. Yani, bir yörüngedeki farklı iki elemanın sabitleyenleri eşlenik alt gruplardır.

İspat: $g_0 \in S_y$ keyfi olsun. $S_y := \{g \in G \mid gy = y\}$ olduğundan $g_0y = y$ dir. y=gx$\Rightarrow$ $g_0gx = gx \Rightarrow g^{-1}g_0gx = x \Rightarrow g^{-1}g_0g \in S_x \Rightarrow g_0g \in gS_x \Rightarrow g_0 \in gS_xg^{-1} \Rightarrow S_y \subset gS_xg^{-1}$ ...(*).

Şimdi $h \in gS_xg^{-1}$ olsun. $\exists g_0 \in S_x : h = gg_0g^{-1} \Rightarrow hy = gg_0g^{-1}y = gg_0x = gx = y \Rightarrow h \in S_y$ $\Rightarrow gS_xg^{-1} \subset S_y$ ...(**). (*) ve (**) ın sonucu olarak $S_y = gS_xg^{-1}$ dir.■

Topolojik dönüşüm gruplarına örnekler:

1) G herhangi bir topolojik grup olsun. $[G,G]$ çifti aşağıdaki gibi üç değişik şekilde bir topolojik dönüşüm grubu olarak tanımlanabilir:

i) $g \wedge x = gx$ (sol gösterim)

ii) $g \wedge x = xg^{-1}$ (sağ gösterim)

iii) $g \wedge x = gxg^{-1}$ (birleşik gösterim)

2) G bir topolojik grup ve $H \leq G$ kapalı bir alt grup olsun. Bu takdirde;

i) $[H,G]$ ikilisi, $h \wedge g = hg$ ile, bir topolojik dönüşüm grubudur. Özel olarak $G := (\mathbb{C},+)$ ve $H := \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ alınırsa $[H,G]$ bir topolojik dönüşüm grubudur.

ii) $[G, G/H]$, $g_1 \wedge g_2H = g_1g_2H$ ile bir topolojik dönüşüm grubudur.

3) $X := \mathbb{C}\cup\{\infty\} := \mathbb{C}_\infty$ Riemann küresi verilsin. X üzerindeki topoloji alışılmış topoloji, ∞ un komşulukları kompleks düzlemin bütün kompakt alt kümelerinin bütünleyenleridir.

$$G = \left\{ T : T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \mid a,b,c,d \in \mathbb{C}, ad\text{-}bc \neq 0 \right\} := PGL(2,\mathbb{C})$$

fonksiyonların bileşke işlemine göre bir gruptur. Bu grup $\mathbb{C}_\infty$ dan $\mathbb{C}_\infty$ a otomorfizmlerin grubudur. G üzerindeki topoloji a,b,c,d$\in \mathbb{C}$ kompleks sayıları ile tanımlanır. Yani G nin elemanları (a,b,c,d)$\in \mathbb{C}^4$ olarak göz önüne alınırsa ve ayrıca (-a,-b,-c,-d) ile (a,b,c,d) yi denkleştirirsek G üzerinde özdeşleştirme ile bir topoloji tanımlanabilir. Bu durumda $[PGL(2,\mathbb{C}), \mathbb{C}_\infty]$ bir topolojik dönüşüm grubudur.

4) $$G := PSL(2,\mathbb{R}) := \left\{ T : z \to \frac{az+b}{cz+d} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R},\ ad\text{-}bc=1 \right\}$$

bir gruptur. G yi $\mathbb{R}^4$ ün bir alt kümesi olarak düşünebiliriz. Şayet $T : z \to \dfrac{az+b}{cz+d}$ ise (a,b,c,d)$\in \mathbb{R}^4$ dür. (a,b,c,d) ~ (-a,-b,-c,-d) alırsak G üzerindeki topolojiyi $\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : ad - bc = 1\}/\sim$ üzerindeki topoloji olarak tanımlayabiliriz. Bu topoloji ile PSL(2,$\mathbb{R}$) bir topolojik gruptur. Buradan [PSL(2,$\mathbb{R}$),$\mathbb{U}$], $\mathbb{U} = \{a+ib \mid a,b \in \mathbb{R}, b>0\}$ bir topolojik dönüşüm grubudur.

Uyarı: Yukarıda [PSL(2,$\mathbb{R}$),$\mathbb{U}$] nun bir topolojik dönüşüm grubu olduğunu ifade ettik. PSL(2,$\mathbb{R}$) nin herhangi bir elemanının $\mathbb{U}$ yu $\mathbb{U}$ ya resmettiğini göstermemiz gerekir.

Gerçekten;

$$T(z)=\frac{az+b}{cz+d},\ z\in \mathbb{U}\ ,\ T(z)=\frac{(az+b)(c\overline{z}+d)}{\left|cz+d\right|^2}=\frac{ac\left|z\right|^2+adz+bc\overline{z}+bd}{\left|cz+d\right|^2}$$

$$\Rightarrow\ \mathrm{Im}(T(z))=\frac{(ad-bc)y}{\left|cz+d\right|^2}=\frac{y}{\left|cz+d\right|^2}>0\ \text{dır.}$$

Çünkü $z=x+iy\in \mathbb{U}$ ise $y>0$ dır. Dolayısıyla her bir $T\in PSL(2,\mathbb{R})$ $\mathbb{U}$ yu $\mathbb{U}$ üzerine resmeder.

Tanım 7: $[G,X]$ bir topolojik dönüşüm grubu olsun. $P\subset X$ ve $\{gP \mid g\in G\}$ kümeleri ayrıksa veya başka bir ifadeyle $g\in G\backslash\{I\}$ iken $P\cap gP=\varnothing$ ise $P\subset X$ e bir G-paketleme denir.

Tanım 8: $[G,X]$ bir topolojik dönüşüm grubu ve $C\subset X$ olsun. $\bigcup\limits_{g\in G} gC=X$ ise $C\subset X$ e bir G-örtmesi denir.

Lemma 11: $[G,X]$ bir topolojik dönüşüm grubu ve P bir G-paketleme olsun. Bu takdirde $x\in X$ keyfi olmak üzere $\left|P\cap Gx\right|\leq 1$ dir. Yani, P G-paketlemesi her bir yörüngeden en fazla bir eleman içerir.

İspat: Farzedelimki $\exists x\in X$ öyleki $\left|P\cap Gx\right|\geq 2$ olsun. Bu durumda $y_1\neq y_2$ olmak üzere $\exists y_1,y_2\in Gx$ öyleki $y_1,y_2\in P$ dir. $y_1,y_2\in Gx\Rightarrow \exists g_1,g_2\in G$ öyleki $y_1=g_1x$ ve $y_2=g_2x$. $y_1\in P\Rightarrow x=g_1^{-1}y_1\in g_1^{-1}P$ ve benzer şekilde $y_2\in P$ $\Rightarrow x=g_2^{-1}y_2\in g_2^{-1}P\Rightarrow g_1^{-1}P\cap g_2^{-1}P\neq\varnothing\Rightarrow\ P\cap g_1g_2^{-1}P\neq\varnothing$. Dolayısıyla buradan P nin bir G-paketlemesi olmadığı sonucu ortaya çıkar. Bu bir çelişkidir. Bu çelişki $\forall x\in X$ için $\left|P\cap Gx\right|\leq 1$ olduğunu gösterir.■

Lemma 12: $[G,X]$ bir topolojik dönüşüm grubu ve C bir G-örtmesi olsun. Bu takdirde $\left|C\cap Gx\right|\geq 1$ dir. Yani, bir G-örtmesi her bir yörüngeden en az bir eleman içerir.

İspat: Farzedelimki $C \cap Gx = \varnothing$ olacak şekilde bir $x \in X$ mevcut olsun. Yani $\exists x \in X$ öyleki $|C \cap Gx| < 1$ dir. Buradan $C \subset X \backslash Gx$ dir. $\bigcup_{g \in G} gC \subset X \backslash Gx$ olduğunu göstereceğiz. Şayet bu iddia yanlış ise, yani $\bigcup_{g \in G} gC \not\subset X \backslash Gx$ ise $\exists y \in \bigcup_{g \in G} gC$ öyleki $y \notin X \backslash Gx \Rightarrow y \in Gx$ dir. $\exists g_0 \in G$ öyleki $y \in g_0 C \Rightarrow y \in Gx$ ve $y \in g_0 C \Rightarrow y \in Gx \cap g_0 C$ $\Rightarrow g_0^{-1} y \in \left(g_0^{-1} Gx\right) \cap C \overset{g_0^{-1}Gx = Gx}{\Rightarrow} g_0^{-1} y \in Gx \cap C$. Fakat $Gx \cap C = \varnothing$ olduğundan bu bir çelişkidir. Bu çelişki $\bigcup_{g \in G} gC \subset X \backslash Gx$ olduğunu gösterir. C bir G-örtme olduğundan $X = \bigcup_{g \in G} gC \subset X \backslash Gx$ dir. Bu da bir çelişkidir. Çünkü $Gx = \varnothing$ olamaz. Sonuç olarak $\forall x \in X$ için $Gx \cap C \neq \varnothing$ dur. Yani $|C \cap Gx| \geq 1$ dir.■

Lemma 13: G bir topolojik grup ve $H \leq G$ olsun. Bu takdirde H ayrıktır $\Leftrightarrow$ açık bir V H-paketlemesi vardır.

İspat: '$\Rightarrow$': H ayrıktır $\Leftrightarrow$ $\forall h \in H$ için $\exists V \subset G$ öyleki $h \in V$ ve $V \cap H = \{h\}$. H ayrık olsun. Bu takdirde $\exists V \in \aleph$ öyleki $V \cap H = \{e\}$ dir. $[H,G]$ bir topolojik dönüşüm grubudur. $V \in \aleph$ olsun. Bu takdirde $U \in \aleph$ simetrik kümesi vardır öyleki $UU^{-1} \subset V$ dir. U nun bir H-paketlemesi olduğunu göstereceğiz. Bunun için $h \in H \backslash \{e\}$ olmak üzere $hU \cap U = \varnothing$ olduğunu gösterelim. Farzedelimki $\exists e \neq h \in H$ öyleki $hU \cap U \neq \varnothing$ olsun. Bu takdirde $\exists a,b \in U$ öyleki $ha = b$ dir. Buradan $h = ba^{-1} \in UU^{-1}K \Rightarrow h \in V$ dir. $V \cap H = \{e\}$ olduğundan bu bir çelişkidir. Bu çelişki U nun bir H-paketlemesi olduğunu gösterir.
'$\Leftarrow$': V açık bir H-paketlemesi olsun. Genellikten bir şey kaybetmeden $V \in \aleph$ alalım. her bir $h \in H$ uygun bir hV açık kümesinde bulunur. $H \cap hV = \{h\}$ dır. Aksini farzedelim.Yani, $h \neq h_1$ iken $H \cap hV = \{h, h_1\}$ ise $hV \cap h_1 V \neq \varnothing \Rightarrow h_1^{-1} hV \cap V \neq \varnothing \Rightarrow h_1^{-1} h = e \Rightarrow h_1 = h$. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla bu çelişki H ın ayrık olduğunu belirtir.■

Lemma 14: G bir topolojik grup ve H G nin ayrık bir alt grubu olsun. Ayrıca $C \subset G$ kompakt kümesi verilsin. Bu takdirde $H \cap C$ sonludur.

İspat: H ayrık olduğundan $V \cap H=\{e\}$ olacak şekilde $V \in \aleph$ mevcuttur. Ayrıca $UU^{-1} \subset V$ olacak şekilde $U,V \in \aleph$ vardır. $\{Ug | g \in G\}$ G nin bir açık örtümüdür. Aynı zamanda $C \subset G$ nin de bir açık örtümüdür. C kompakt olduğundan sonlu bir alt örtüme sahiptir. Yani $\exists g_1, g_2, ..., g_n$ öyleki $Ug_1 \cup Ug_2 \cup, ..., \cup Ug_n \supset C$ dir. her bir Ug de H nın en çok bir elemanı vardır. Yani $|H \cap Ug_i| \le 1$, $1 \le i \le n$ dir. Aksini farzedelim. Yani, $\exists \upsilon \in \{1,2,...,n\}$ öyleki $|Ug_\upsilon \cap H| \ge 2$ olsun. Buradan $h_1 = u_1 g_\upsilon$ ve $h_2 = u_2 g_\upsilon$ $(h_1 \ne h_2,\ u_1, u_2 \in U,\ h_1, h_2 \in H)$ vardır. $\Rightarrow$ $h_2 h_1^{-1} = u_2 u_1^{-1} \in H$ dır. Fakat $u_2 u_1^{-1} \in UU^{-1} \subset V$ ve $V \cap H=\{e\}$ olduğundan $u_2 u_1^{-1} \in \{e\}$ olup $u_2 u_1^{-1} = e$ dir. $\Rightarrow$ $u_1 = u_2 \Rightarrow h_1 = h_2$. Bu ise bir çelişkidir. Bu çelişkiden $|H \cap Ug_i| \le 1$, $1 \le i \le n$ sonucu çıkar. Buradan, $[H \cap (Ug_1 \cup Ug_2 \cup ... \cup Ug_n)] \supset H \cap C$ $\Rightarrow$ $\wp := (H \cap Ug_1) \cup (H \cap Ug_2) \cup ... \cup (H \cap g_n) \supset H \cap C \Rightarrow n \ge |\wp| \ge |H \cap C| \Rightarrow H \cap C$ sonludur.■

Teorem 1: $[G, X]$ bir topolojik dönüşüm grubu olsun. Eğer açık bir G-paketlemesi mevcut ise, G ayrıktır.

İspat: V açık bir G-paketleme olsun. $x \in V$ keyfi fakat sabit tutulsun. Bu takdirde, $U \times \{x\} \subset G \times \{x\}$ keyfi açık bir küme olmak üzere $L^{-1}(U \times \{x\}) = U \subset G$ açık olduğundan $\underset{g \to (g,x)}{L: G \to G \times \{x\}}$ dönüşümü süreklidir. Ayrıca, $\wedge : \underset{(g,x) \longrightarrow gx}{G \times X \longrightarrow X}$ dönüşümü sürekli olup

$K : \underset{(g,x) \longrightarrow gx}{G \times \{x\} \longrightarrow X}$ dönüşümü de süreklidir. Dolayısıyla,

$$T := K \circ L : \underset{g \longrightarrow (g,x) \longrightarrow gx}{G \longrightarrow G \times \{x\} \longrightarrow X}$$

dönüşümü süreklidir. Buradan $T^{-1}(V) = \{g \in G \mid gx \in V\}$ açık bir kümedir. $T^{-1}(V) = \{e\}$ dir. Aksini farzedelim. Yani, $g_1, g_2 \in T^{-1}(V)$ ve $g_1 \ne g_2$ olsun. Bu durumda $g_1 x, g_2 x \in V$ dir. $x \in V$ olduğundan $g_1 x \in g_1 V,\ g_2 x \in g_2 V$ dir. Buradan $g_1 V \cap V \ne \varnothing$ ve $g_2 V \cap V \ne \varnothing$ dur. V bir G-paketleme olduğundan $g_1 = g_2 = e$ dir. Bu ise bir çelişkidir. Bu çelişkiden $T^{-1}(V) = \{e\}$ elde edilir. $\{e\}$ açıktır ve G topolojik grup olduğundan $\forall g \in G$ için $G \cap g\{e\} = \{g\}$ dir. Dolayısıyla G ayrıktır.■

Tanım 9: X topolojik uzayı bağlantılıdır $\Leftrightarrow$ X, boştan farklı ayrık iki açık kümenin birleşimi şeklinde yazılamaz.

Teorem 2: G bir topolojik grup olsun. Bu takdirde G deki birim elemanın bileşeni G nin normal bir alt grubudur.

$x \in X$ in bileşeni x i ihtiva eden X in bütün bağlantılı alt kümelerinin birleşimidir ve X in herhangi bir açık-kapalı alt kümesindedir.

İspat: N, e nin G deki bileşenini göstersin. Önce $N \leq G$ olduğunu gösterelim. $\begin{array}{c} t: G \times G \longrightarrow G \\ (g,h) \longrightarrow g^{-1}h \end{array}$ dönüşümü bir homeomorfizma olduğundan $g^{-1}N$ bağlantılı ve $e \in g^{-1}N$ dir. Dolayısıyla $\forall g \in N$ için $g^{-1}N \subset N$ dir. Buradan $g^{-1} \in N$ ve N, e nin G deki bileşeni olduğundan $N^{-1}N \subset N$ olup $N \leq G$ dir.

Şimdi $N \trianglelefteq G$ olduğunu gösterelim. $a \in G$ keyfi sabit olmak üzere $\begin{array}{c} \alpha_a : G \longrightarrow G \\ g \longrightarrow aga^{-1} \end{array}$ dönüşümü bir homeomorfizma olduğundan $a^{-1}Na$ bağlantılı ve $e \in a^{-1}Na$ dir. Böylece $a^{-1}Na \subset N$ olup $N \trianglelefteq G$ dir.■

Tanım 10: G bir topolojik grup olsun. Bu takdirde;

$$N_G(G_0) =: N(G_0) = \{t \in G \mid tG_0t^{-1} = G_0\}$$

kümesine $G_0 \subset G$ nin normalliyeni ve

$$M_G(G_0) =: M(G_0) = \{t \in G \mid tg_0t^{-1} = g_0, \forall g_0 \in G_0 \text{ için}\}$$

kümesine de $G_0 \subset G$ nin merkezleyeni denir. $M(G_0) \subset N(G_0)$ ve $M(G_0)$, $N(G_0) \leq G$ olduğu açıktır. Ayrıca, $M(G_0) = \bigcap_{g_0 \in G_0} M(g_0)$ ve $M(G_0) = \bigcap_{g_0 \in G_0} N(g_0)$ dır.

Teorem 3: H G topolojik grubunun ayrık bir alt grubu olsun. Şayet $A \subset H$ sonlu ise bu takdirde $M(A) \cap N(H)$, $N(H)$ da açık bir kümedir.

İspat: $M(G_0)=\bigcap_{g_0\in G_0} M(g_0)$ yani, bir kümenin merkezleyeni elemanlarının merkezleyenlerinin arakesiti olduğundan ve ayrıca açık kümelerin sonlu arakesiti açık olduğundan $h\in H$ olmak üzere M(h) nın N(H) da açık olduğunu gösterelim. H ayrık olduğundan $\exists U\in \aleph$ öyleki $hU\cap H=\{h\}$ dır. $g\in G$ keyfi sabit olmak üzere $J: \underset{g}{N(H)} \longrightarrow \underset{ghg^{-1}}{G}$ dönüşümü sürekli ve $T(e) = ehe^{-1} = h\in hU \Rightarrow e\in T^{-1}(hU)$ olduğundan $\exists V\in \aleph$ öyleki $T(V\cap N(H))\subset hU$ dur. $V\cap N(H)$, N(H) da açık ve N(H) da e nin komşuluğudur. H, N(H) da normal olduğundan $\forall g\in N(H)$ ve $\forall h\in H$ için $ghg^{-1}\in H$ dır. Dolayısıyla $T(V\cap N(H))\subset H$ dır. Buradan $T(V\cap N(H))\subset hU\cap H$ olup $g\in V\cap N(H)$ keyfi olmak üzere $T(g)=ghg^{-1}\in hU\cap H=\{h\}\Rightarrow ghg^{-1}=h\Rightarrow V\cap N(H)\subset M(h)\cap N(H)$ dır. Bu ise $M(h)\cap N(H)$ grubunun e birim elemanının $M(h)\cap N(H)$ nın bir iç noktası olduğunu gösterir. $h_1\in (M(h)\setminus\{e\})\cap N(H)$ ise $h_1 V h_1$ i ihtiva eden açık bir kümedir. $h_1V\cap h_1N(H)=h_1V\cap N(H)$ kümesi $h_1M(H)\cap h_1N(H)=M(h)\cap N(H)$ nın açık bir alt kümesidir. Dolayısıyla h_1, N(H) da M(h) nın bir iç noktasıdır. Sonuç olarak $h\in H$ nın merkezleyeni N(H) da açıktır.■

Teorem 4:

i) $\mathbb{R}$ nin aşikar olmayan her ayrık alt grubu sonsuz devirli bir gruptur.

ii) $S^1=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$ in aşikar olmayan her ayrık alt grubu sonlu devirli bir gruptur.

İspat:

i) $\{0\}\neq H\subset\mathbb{R}$ ve $0<a\in H$ olmak üzere H kümesinin ayrık olduğunu varsayalım. $C=\{x\in\mathbb{R}:|x|\le a\}$ kompakt kümesini göz önüne alalım. C=[-a,a] aralığında H nın sonlu tane elemanı vardır. $H\cap C$ sonludur. $b\in H$ $H\cap C$ de bulunan en küçük pozitif sayı olsun. Bu durumda $\langle b\rangle=H$ olduğunu gösterelim. Aksini farzedelim. Yani, $\langle b\rangle\neq H$ olsun. $\langle b\rangle=H$ $\Leftrightarrow$ $\forall h\in H$ için $\exists m\in\mathbb{Z}$ öyleki h=mb dir. Bu takdirde $\exists x_0\in H$ öyleki $x_0\notin\langle b\rangle\subset H$ dır. Buradan $\forall m\in\mathbb{Z}$ için $x_0\neq mb\Rightarrow \exists m_0\in\mathbb{Z}$ öyleki $m_0b<x_0<(m_0+1)b\Rightarrow 0<x_0-m_0b<b$ dir. $x_0, b\in H$ ve H bir grup olduğundan $x_0-m_0b\in H$ dır. Bu ise b nin seçimiyle çelişir. Dolayısıyla $\langle b\rangle=H$ dır. Sonuç olarak H sonsuz elemanlıdır.■

ii) $H \subset S^1$ ayrık olsun. $(S^1,.)$ bir topolojik gruptur ve kompakttır. $H \subset S^1$ ayrık olduğundan $H \cap S^1 = H$ sonludur.

$$H = \{z_1, z_2, ..., z_{m+1}\} = \{1, e^{ik_1}, e^{ik_2}, ..., e^{ik_m}\}, k_1, k_2, ..., k_m > 0$$

şeklinde yazılabilir. K=min{ $k_1, k_2, ..., k_m$ } alalım. H=$\langle e^{ik} \rangle$ olduğunu gösterelim. Aksini varsayalım. Yani, H≠$\langle e^{ik} \rangle$ olsun. Bu takdirde $\exists h = e^{im} \in H$ öyleki $h \notin \langle e^{ik} \rangle$ dır. Buradan k<m<k_p alırsak 0<m-k<k_p-k $\Rightarrow$ $e^{i(m-k)} \in H$ dır. m-k>0 olduğundan bu bir çelişkidir. Bu çelişkiden H=$\langle e^{ik} \rangle$ dır.■

Tanım 11: $[G, X]$ bir topolojik dönüşüm grubu ve g$\in$G olsun. Bu takdirde;

$$B := \{x \in X \mid gx = x\}$$

kümesine g nin sabit nokta kümesi adı verilir.

Teorem 5: $[G, X]$ bir topolojik dönüşüm grubu ve gh=hg olsun. Bu takdirde g, h nın sabit nokta kümesini kendi üzerine resmeder.

İspat: A={x$\in$X | hx=x} olsun. x$\in$A alalım. gx$\in$A olduğunu gösterelim. $[G, X]$ topolojik dönüşüm grubu olup $h(gx) = h \wedge (g \wedge x) = hg \wedge x = gh \wedge x = g(hx) = gx \in A$ dır.■

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR

2.1. Lineer Kesirli Dönüşümler

Tanım 12: $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ olmak üzere $m : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$, $z \longrightarrow m(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ **,** a,b,c,d$\in \mathbb{C}$, ad-bc≠0 dönüşümüne bir Möbiüs dönüşümü adı verilir. Bütün Möbiüs dönüşümleri $PGL(2,\mathbb{C})$ ile gösterilecektir.

Notasyon: a≠0 olmak üzere süreklilikten $\frac{a}{0}$ ∞ a karşılık getirilecektir. Yani $\frac{a}{0} = \lim\limits_{w \to 0} \frac{a}{w}$ olarak alacağız. a≠0 olduğundan $\frac{a}{w} \neq 0$ dır. $\left|\frac{a}{w}\right|$ yı göz önüne alırsak $\lim\limits_{w \to 0} \frac{a}{w} = \infty$ ($\mathbb{C}$ de) olduğu görülür. Buna rağmen $\frac{0}{0}$ tanımsızdır. Benzer biçimde ∞ un $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ altındaki görüntüsünü süreklilikle tanımlayalım. Yani,

$$m(\infty) = \lim_{z \to \infty} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}$$

dir.

$m(\infty)$ iyi tanımlıdır. Çünkü ad-bc≠0 olduğundan a ve c nin en az biri sıfırdan farklıdır. $m(\infty) = \frac{a}{c}$ den $m(\infty) = \infty \Leftrightarrow c = 0, m(0) = \frac{b}{d}$ olduğundan m(0)=0 $\Leftrightarrow$ b=0 dır.

Sonuç 4:

i) $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ Möbiüs dönüşümü birebir ve örtendir.

ii) ($PGL(2,\mathbb{C})$, $\circ$) bir gruptur. Grubun birim elemanı m(z)=z dönüşümüdür.

Uyarı: Bir Möbiüs dönüşümünün biçimi $\mathbb{C}_\infty$ un a,b$\in \mathbb{C}$ ve a≠0 olmak üzere f(z)=az+b, z$\in \mathbb{C}$ ve f(∞)=∞ homeomorfizmi ile j(z)=$\frac{1}{z}$, z$\in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, j(0)=∞, j(∞)=0 homeomorfizmi biçimlerine benzerdir. Aslında şimdi göstereceğiz ki her Möbiüs dönüşümü bu biçimdeki iki dönüşümün bir bileşkesidir.

Teorem 6: a,b,c,d$\in \mathbb{C}$ ve ad-bc≠0 olmak üzere $m(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ Möbiüs dönüşümünü göz önüne alalım.

c=0 ise $m(z)=\dfrac{a}{d}z+\dfrac{b}{d}$,

c≠0 ise $g(z)=c^2z+d$ ve f(z)=-(ad-bc)z+$\dfrac{a}{c}$ olmak üzere m(z) =f(j(g(z)))

dir.

İspat: c=0 ise ispat açıktır. c≠0 olsun. Bu takdirde;

$$m(z)=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{(az+b).c}{(cz+d).c}=\frac{acz+bc}{c^2z+dc}$$

dir. ad-bc≠0 olduğundan

$$m(z)=\frac{acz+bc}{c^2z+dc}=\frac{acz+ad-(ad-bc)}{c^2z+cd}=\frac{a}{c}-\frac{ad-bc}{c^2z+cd}=\text{ f(j(g(z)))}.$$

Burada, $g(z)=c^2z+d$ ve f(z)=-(ad-bc)z+$\dfrac{a}{c}$ dir.■

Şimdi Möbiüs dönüşümlerini sabit noktalarına göre sınıflandıralım:

m$\in$ PGL$(2,\mathbb{C})$ dönüşümünün bir sabit noktası m(z)=z şartını sağlayan z$\in$ $\mathbb{C}_\infty$ noktalarıdır. m dönüşümü birim olmasın. $m(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ Möbiüs dönüşümü için m(∞)=$\dfrac{a}{c}$ olduğunu biliyoruz. Böylece $m(\infty)=\infty \Leftrightarrow c=0$ dır. c=0 ise $m(z)=\dfrac{a}{d}z+\dfrac{b}{d}$ dir. $m(z)=z=\dfrac{a}{d}z+\dfrac{b}{d}$ olsun. $\dfrac{a}{d}=1$ ise $\mathbb{C}$ de çözüm yoktur. $\dfrac{a}{d}\neq 1$ ise $z=\dfrac{b}{d-a}$ denklemin bir çözümüdür. Özellikle c=0 ise m ya bir ya da iki tane sabit noktaya sahiptir.

c≠0 ise m(∞)≠∞ dur. Böylece m nin sabit noktaları $m(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ = z denkleminin çözümleridir. Dolayısıyla bu çözümler $cz^2+(d-a)z+b=0$ denkleminin kökleridir. Bu durumda c≠0 ise m ya bir ya da iki tane sabit noktaya sahiptir. Yukarıda yapılan bu hesaplamalar aşağıdaki önemli sonucu (Teorem 7) doğurur:

Teorem 7: m(z), $\mathbb{C}_\infty$ da farklı üç noktayı sabit bırakan bir Möbiüs dönüşümü ise m birim dönüşümdür [1].■

Lemma 15: $PGL(2,\mathbb{C})$ nin en önemli özelliklerinden biri $\mathbb{C}_\infty$ da yegâne üçlü transitifliğidir. Yani, $\mathbb{C}_\infty$ da farklı noktaların (z_1,z_2,z_3) ve (w_1,w_2,w_3) gibi iki üçlüsü için $\exists! m\in PGL(2,\mathbb{C})$ öyleki $m(z_i)=w_i$, i=1,2,3 tür.

İspat: $\mathbb{C}_\infty$ da farklı noktaların iki üçlüsü (z_1,z_2,z_3) ve (w_1,w_2,w_3) olsun. Farzedelimki $\exists m,n\in PGL(2,\mathbb{C})$ öyleki $n(z_1)=w_1=m(z_1)$, $n(z_2)=w_2=m(z_2)$ ve $n(z_3)=w_3=m(z_3)$ tür. Teorem 7' den $m^{-1}\circ n$ $\mathbb{C}_\infty$ da üç farklı nokta sabit bıraktığından $m^{-1}\circ n$ birimdir. Böylece m=n dir.

Şimdi (z_1,z_2,z_3) noktasını (w_1,w_2,w_3) noktasına resmeden bir $PGL(2,\mathbb{C})$ dönüşümü bulabilmek için $m(z_1)=0,\ m(z_2)=1,\ m(z_3)=\infty$ olan bir $m\in PGL(2,\mathbb{C})$ bulmak yeterlidir. Şayet böyle bir $m\in PGL(2,\mathbb{C})$ oluşturabilirsek $n(w_1)=0,\ n(w_2)=1,\ n(w_3)=\infty$ olan bir $n\in PGL(2,\mathbb{C})$ bulabiliriz. Bu durumda $n^{-1}\circ m$ istenilen dönüşüm olur.

Böylece $m(z_1)=0,\ m(z_2)=1,\ m(z_3)=\infty$ olan bir $m\in PGL(2,\mathbb{C})$ bulalım. Bütün z_k lar $\mathbb{C}$ de olsun. Bu durumda $\mathbb{C}_\infty$ da

$$m(z)=\frac{z-z_1}{z-z_3}\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}=\frac{(z_2-z_3)z-z_1(z_2-z_3)}{(z_2-z_1)z-z_3(z_2-z_1)}$$

dönüşümünü göz önüne alalım. Açıkça,

$$ad-bc=(z_2-z_3)(-z_3(z_2-z_1))-(-z_1)(z_2-z_3)(z_2-z_1)=(z_2-z_3)(z_1-z_3)(z_2-z_1)\neq 0$$

olduğundan $m\in PGL(2,\mathbb{C})$ dir.

Şayet $z_1=\infty$ alınırsa $m(z):=\dfrac{z_2-z_3}{z-z_3}$; $z_2=\infty$ alınırsa $m(z):=\dfrac{z-z_1}{z-z_3}$; $z_3=\infty$ alınırsa $m(z):=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ elde edilir.■

Lemma 16: G X üzerinde hareket etsin ve $x_0 \in X$ olsun. $\forall y \in X$ için $\exists g \in G$ öyleki g(y)=x_0 ise G hareketi geçişlidir.

İspat: y,z$\in$ X keyfi olsun. $\exists g_y, g_z \in G$ öyleki $g_y(y) = x_0 = g_z(z)$ dir. Bu takdirde $(g_z)^{-1} \circ g_y(y) = z$ dir.■

Not: $PGL(2,\mathbb{C})$ nın $\mathbb{C}_\infty$ un farklı noktalarının üçlüleri üzerindeki hareketini hatırlarsak; iki üçlü verildiğinde birini diğerine resmeden bir tek Möbiüs dönüşümü vardı. Bu bize G nin X kümesi üzerinde tek bir şekilde geçişken hareket etme tanımının verilebileceğini gösterir. $\forall x, y \in X$ için $\exists! g \in G$ öyleki g(x)=y ise G, X üzerinde tekli şekilde geçişken (transitif) hareket eder diyeceğiz.

Teorem 8: $PGL(2,\mathbb{C})$ grubu $\mathbb{C}_\infty$ un farklı noktalarının üçlülerinin T kümesi üzerinde tekli olarak transitiftir [1].■

Tanım 13: $m_1, m_2 \in PGL(2,\mathbb{C})$ dönüşümlerine eşleniktirler denir : $\Leftrightarrow$ $\exists$p$\in$ $PGL(2,\mathbb{C})$ öyleki $m_2 = p \circ m_1 \circ p^{-1}$ dir.

Geometrik olarak m_1 ve m_2 p ile eşlenik ise m_1 in $\mathbb{C}_\infty$ üzerindeki hareketi ile m_2 nin p($\mathbb{C}_\infty$)=$\mathbb{C}_\infty$ üzerindeki hareketi aynıdır. Yani, eşleniklik $\mathbb{C}_\infty$ üzerinde koordinatların bir değişimini yansıtır.

$$PGL(2,\mathbb{C}) := \left\{ T : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty,\ T(z) = w = \frac{az+b}{cz+d} \mid a,b,c,d \in \mathbb{C}, ad\text{-}bc \neq 0 \right\}$$

bileşke grubu $\mathbb{C}_\infty$ Riemann küresi üzerinde hareket eder. Burada T,U$\in$ $PGL(2,\mathbb{C})$ ise $T \circ U$=:TU olarak gösterilecektir.

$PGL(2,\mathbb{C})$ üzerindeki topolojiyi a,b,c,d$\in$ $\mathbb{C}$ ile, daha önce verdiğimiz $PSL(2,\mathbb{R})$ üzerindeki topoloji gibi, tanımlayalım. Yani $PGL(2,\mathbb{C})$ nin elemanları $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$ olarak göz önüne alınırsa ve ayrıca (a,b,c,d) ile (-a,-b,-c,-d) yi özdeşleştirirsek $PGL(2,\mathbb{C})$ üzerinde özdeşleştirme ile bir topoloji tanımlanabilir. Bu durumda,

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ ad - bc = 1$$

dönüşümüne $\pm(a,b,c,d)$ dörtlüsü karşılık gelir. $A:=\{(a,b,c,d)\in\mathbb{C}^4 : ad-bc=1\}$ kümesini tanımlarsak $PGL(2,\mathbb{C})$ üzerindeki topolojiyi $A/\sim$ üzerindeki topoloji olarak alacağız. Yani, (a,b,c,d)$\in$A, (a,b,c,d)~(-a,-b,-c,-d).

$$p: \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A/\sim \\ (a,b,c,d) & \longrightarrow & [a,b,c,d]:=\{\pm(a,b,c,d)\} \end{array}$$ projeksiyon dönüşümünü göz önüne alalım. Bu dönüşüm süreklidir. $U\subset A/\sim$ açıktır $:\Leftrightarrow$ $p^{-1}(U)\subset A$ açıktır. Bu topoloji ile $PGL(2,\mathbb{C})$ bir topolojik gruptur. Dolayısıyla [$PGL(2,\mathbb{C})$, $\mathbb{C}_\infty$] bir topolojik dönüşüm grubudur.

w=z alırsak

$$z=\frac{az+b}{cz+d}\Rightarrow cz^2+(d-a)z-b=0$$

quadratik denkleminin kökleri dönüşümün sabit noktalarını verir. T≠I ise bu denklemin en fazla iki tane kökü vardır. Yani bu durumda T dönüşümünün en fazla iki tane sabit noktası olacaktır. Eğer bu sabit noktalar ikiden fazla ise T bir özdeşlik dönüşümüdür. Yani, a=d ve b=c=0 dır.

Sonuç 5:

i) $PGL(2,\mathbb{C})$ $\mathbb{C}_\infty$ üzerinde transitif olarak hareket eder. Yani $\mathbb{C}_\infty$ da bir tek yörünge vardır. Benzer şekilde,

$$PSL(2,\mathbb{R})=\left\{T:\mathbb{C}_\infty\to\mathbb{C}_\infty,\ T(z)=w=\frac{az+b}{cz+d} \mid a,b,c,d\in\mathbb{R}, ad\text{-}bc=1\right\}$$

topolojik grubu $\mathbb{R}_\infty$ üzerinde ikili (çift) transitif olarak hareket eder.

ii) $a(x^2+y^2)+2gx+2hy+c=0,\ a,g,h,c\in\mathbb{R}$ çember denklemini düşünelim. Eğer a=0 ise bu denklem bir doğru denklemidir(dejenere çember veya sonsuz yarıçaplı çember). Bu takdirde çember denklemimiz

$$az\bar{z}+g(z+\bar{z})+ih(\bar{z}-z)+c=0\Rightarrow az\bar{z}+(g-ih)z+(g+ih)\bar{z}+c=0$$

$$\Rightarrow Az\bar{z}+Bz+\overline{Bz}+C=0,\ A=a, C=c, B=g\text{-}ih$$

şeklinde yazılabilir. Bu ise $\varphi=\begin{bmatrix}\bar{z}\\1\end{bmatrix}$ ve $p=\begin{bmatrix}A & \bar{B}\\ B & C\end{bmatrix}$ olmak üzere $\varphi^H p\varphi=0$ Hermit formudur ($\varphi^H=\bar{\varphi}^T$).

$$T(z)=w=\frac{az+b}{cz+d}\Rightarrow az+b=cwz+wd\Rightarrow (a-cw)z=wd-b\Rightarrow z=T^{-1}(w)=\frac{-dw+b}{cw-a}$$

yı çember denkleminde yerine yazarsak

$$A\left(\frac{-dw+b}{cw-a}\right)\left(\frac{\overline{-dw}+\overline{b}}{\overline{cw}-\overline{a}}\right)+B\left(\frac{-dw+b}{cw-a}\right)+\overline{B}\left(\frac{\overline{-dw}+\overline{b}}{\overline{cw}-\overline{a}}\right)+C=0$$

$$\Rightarrow A(-dw+b)(\overline{-dw}+\overline{b})+B(-dw+b)(\overline{cw}-\overline{a})+\overline{B}(\overline{-dw}+\overline{b})(cw-a)+C(cw-a)(\overline{cw}-\overline{a})=0$$

denklemini elde ederiz. Bu denklem de bir Hermit formudur ve çemberleri çemberlere resmeder.

iii) $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R}):=\left\{T:\mathbb{C}_\infty\to\mathbb{C}_\infty,\ T(z)=w=\frac{az+b}{cz+d}\mid a,b,c,d\in\mathbb{R},\text{ad-bc}\neq 0\right\}$

alt grubunda sadece $\mathbb{R}_\infty$ bütün dönüşümler altında invaryant kalır. Merkezleri $\mathbb{R}$ üzerinde olan çemberler ve $\mathbb{R}$ ye dik olan doğrular yani, $\mathbb{R}$ deki bütün ortogonal çemberlerin kümesi $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$ nin elemanları ile kendi üzerlerine resmedilirler. Bu tip çemberlere Öklid olmayan (hiperbolik) doğrular adı verilir. $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$ alt grubu $\mathbb{R}_\infty$un birbirinden farklı ikili noktalar kümesinde transitif olduğu gibi aynı zamanda Öklid olmayan doğrular kümesi üzerinde de transitiftir. Ayrıca $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$ alt grubu, i noktasını $\mathbb{U}$ üst yarı düzlemindeki herhangi bir q+pi noktasına resmeden w=pz+q, (p>0) dönüşümünü içerdiği için, aynı zamanda $\mathbb{U}$ üst yarı düzlemindeki noktalar üzerinde de transitiftir. Bu sonuçtan aşağıdaki teoremi yazabiliriz:

Teorem 9: $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$**,** $\mathbb{U}$ üst yarı düzlemindeki noktalar kümesinde ve aynı zamanda Öklid olmayan doğrular kümesinde transitiftir [1].■

Önerme 2:

i) $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ $\mathbb{U}$ üst yarı düzleminde transitiftir.

ii) $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ $\mathbb{R}_\infty$ üzerinde ikili(çift) transitiftir.

İspat:

i) ai+b$\in \mathbb{U}$, (a>0), $T(z)=\dfrac{\frac{a}{\sqrt{a}}z+\frac{b}{\sqrt{a}}}{\frac{1}{\sqrt{a}}}$ tanımlayalım. T$\in PSL(2,\mathbb{R})$ dir. Buradan T(i)=ai+b dir. Dolayısıyla i nin yörüngesi bütün $\mathbb{U}$ ya eşittir. Böylece $PSL(2,\mathbb{R})$ nin $\mathbb{U}$ üzerindeki hareketi transitiftir.■

ii) a,b$\in \mathbb{R}$ öyleki a>b olsun. $S(z)=\dfrac{z-a}{z-b}$ dönüşümünü tanımlayalım. S$\in PSL(2,\mathbb{R})$ dir. Çünkü normalleştirme ile $S(z)=\dfrac{\frac{z}{\sqrt{a-b}}-\frac{a}{\sqrt{a-b}}}{\frac{z}{\sqrt{a-b}}-\frac{b}{\sqrt{a-b}}}$. S dönüşümü (a,b) yi (0,∞) a resmeder. Ayrıca $z\rightarrow -\dfrac{1}{z}$ dönüşümü $PSL(2,\mathbb{R})$ dedir ve (0,∞) u (∞,0) a resmeder. Benzer şekilde $z\rightarrow z+b$ dönüşümü de $PSL(2,\mathbb{R})$ dedir ve (0,∞) u (b,∞) a resmeder. Buradan (0,∞) un yörüngesi $PSL(2,\mathbb{R})$ nin hareketi altında (a,b) (a,b$\in \mathbb{R}_\infty$, a≠b) çiftlerinden oluşur. Dolayısıyla $PSL(2,\mathbb{R})$ $\mathbb{R}_\infty$ üzerinde ikili transitiftir.■

$PSL(2,\mathbb{R})$ deki üç çeşit dönüşüm sabit noktalar kümesine göre sınıflandırılır. Yani, $PSL(2,\mathbb{R})$ nin sabit noktaları $PSL(2,\mathbb{R})$ deki reel katsayılı quadratik denklemin kökleridir. İlk önce T$\in PSL(2,\mathbb{R})\backslash\{I\}$ olmak üzere T(z)=z denkleminin köklerini bulalım.

$$T(z)=\frac{az+b}{cz+d}=z,\ \text{ad-bc=1}\Rightarrow az+b=cz^2+dz\Rightarrow cz^2+(d-a)z-b=0$$

$$\Rightarrow \Delta=(d-a)^2+4bc=a^2+d^2-2ad+4bc=a^2+d^2+2ad-4(ad-bc)$$

$$=a^2+d^2+2ad-4=(a+d)^2-4$$

$$\Rightarrow z_{1,2}=\frac{-(d-a)\pm\sqrt{(a+d)^2-4}}{2c}$$

elde edilir. Bu durumda üç olasılık vardır:

1°) Kökler reel ve farklı ise yani, $|a+d|>2$ ise T dönüşümünün p,q$\in \mathbb{R}_\infty$ gibi iki sabit noktası mevcuttur. Bu durumda T dönüşümüne hiperbolik eleman diyeceğiz.

$k\in \mathbb{R}_\infty \backslash\{0\}$ olmak üzere ∞ u ∞ a resmeden herhangi bir lineer kesirli dönüşümün T(z)=kz+1 ve ayrıca 0 ı da 0 a resmeden herhangi bir lineer kesirli dönüşümün T(z)=kz formunda olduğunu biliyoruz. T p,q$\in \mathbb{R}_\infty$ sabit noktalarına sahip hiperbolik bir dönüşüm ve w=T(z) olsun. Buradan $w_1=\dfrac{w-p}{w-q}$ ve $z_1=\dfrac{z-p}{z-q}$ alırsak $w_1=0,\infty$ noktaları $z_1=0,\infty$ noktalarına karşılık gelir. Dolayısıyla w_1 ve z_1 arasındaki bağıntı $w_1=kz_1$ yani, $\dfrac{w-p}{w-q}=k\left(\dfrac{z-p}{z-q}\right)$ şeklini alır. U,P$\in$ PSL$(2,\mathbb{R})$ olmak üzere (z)=$\dfrac{z-p}{z-q}(p>q)$ ve P(z)=kz ise $w_1=kz_1$ denklemi UT(z)=PU(z) şeklinde yazılabilir. Buradan P=UTU^{-1} dır. P nin normalleyenini biliyorsak T nin de normalleyenini buluruz. Çünkü T$\to$P=UTU^{-1} dönüşümü sürekli bir otomorfizmadır. P 0 ve ∞ sabit noktalarına sahiptir. Teorem 5 den P nin normalleyeninin herhangi bir elemanı $(0,\infty)$ ikilisini $(0,\infty)$ ikilisine resmetmelidir. Bunu gerçekleştiren iki tip dönüşüm vardır:

i) 0 ı 0 a ve ∞ u ∞ a resmeden $w=kz_1$,

ii) 0 ı ∞ a ve ∞ u 0 a resmeden $w=\dfrac{k_2}{z}$.

Basit bir hesapla i) in P ye karşılık geldiği ve ii) nin P ye karşılık gelmediği görülür. Böylece T hiperbolik dönüşümünün normalliyeni $\mathbb{R}^+$ çarpım grubuna izomorftur ($\mathbb{R}$ toplamsal grubuna da izomorftur) ve aynı sabit nokta kümelerine sahip olan bütün hiperbolik dönüşümlerden oluşur.

Bir hiperbolik dönüşüm sonsuz devirli ve ayrık grupları oluşturur.

T $\in$ PSL$(2,\mathbb{R})$ p,q$\in \mathbb{R}_\infty$ sabit noktalarına sahip bir hiperbolik dönüşüm olsun. Bu takdirde Önerme 2 nin ii). şıkkından dolayı $\exists S\in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}): S(p)=0$ ve S(q)=∞ dur. Böylece STS^{-1} bir hiperbolik elemandır ve 0 ve ∞ u sabit bırakır. Buradan STS^{-1}= U_λ =λz, $\lambda\in \mathbb{R}^+\backslash\{0,1\}$ dir. Eğer $B(z)=-1/z$ ise bu takdirde B U_λ B^{-1}= $U_{\lambda^{-1}}$. Dolayısıyla U_λ ve $U_{\lambda^{-1}}$ PSL$(2,\mathbb{R})$ de eşleniktirler. Kolayca gösterilebilir ki $k\neq\lambda,\lambda^{-1}$ ise U_λ ve U_k eşlenik olamazlar. Bu yüzden PSL$(2,\mathbb{R})$ nin her bir hiperbolik elemanı bir ve bir tek U_λ (λ>1) elemanına eşleniktir.

2°) Kökler eşitse (çift katlı kök) yani, $|a+d|=2$ ise T dönüşümüne bir parabolik dönüşüm diyeceğiz. Dolayısıyla T dönüşümü bir ve bir tek sabit noktaya sahiptir. Böylece parabolik dönüşümlerin $\mathbb{U}$ üst yarı düzleminde sabit noktası yoktur. Eğer $T\in PSL(2,\mathbb{R})\setminus\{I\}$ $p\in \mathbb{R}_{\infty}$ sabit noktasına sahip parabolik bir dönüşüm ve $w=T(z)$ ise bu T dönüşümü $w_1=\dfrac{1}{w-p}$ ve $z_1=\dfrac{1}{z-p}$ olmak üzere $w_1=\infty$ noktasını $z_1=\infty$ noktasına karşılık getirir. Buradan $k\in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ olmak üzere w_1 ve z_1 arasındaki bağıntı $w_1=kz_1+1$ şeklindedir. Şayet $k\neq 1$ ise ikinci bir sabit nokta mevcut olacağından k=1 almalıyız. Eğer $w_1=Iw_2$ ve $z_1=Iz_2$ alırsak $w_2=z_2+1$ elde edilir.

Bir parabolik dönüşüm sonsuz devirli ve ayrık grupları oluşturur. $T(z)=w=z+1$ in normalliyeni Teorem 5 in sonucu olarak ∞ u ∞ a resmeder. Dolayısıyla $w=kz+1$ formundaki dönüşümler kümesinin bir alt grubudur. Buna $w=U(z)$ diyelim. $w=z+1$ dönüşümü yaparsak;

$$z\xrightarrow{U^{-1}}\frac{z-1}{k}\xrightarrow{T}\frac{z-1+k}{k}\xrightarrow{U}z+k$$

Elde edilir. Burada k=1 ise $T(z)=z+1$ e geri döneriz. Böylece parabolik bir dönüşümün normalliyeni $\mathbb{R}$ ile izomorftur ve aynı sabit noktalı bütün parabolik dönüşümleri içerir.

$p\in \mathbb{R}_{\infty}$ T parabolik dönüşümünün sabit noktası olsun. Önerme 2 nin ii). şıkkından dolayı $\exists S\in PSL(2,\mathbb{R}):S(p)=\infty$ dur. Böylece STS^{-1} bir parabolik elemandır ve ∞ u sabit bırakır. Buradan $W=STS^{-1}:z\to z+b$, $b\in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ dır.

$V(z)=\dfrac{z}{|b|}$ alalım. Bu takdirde $VWV^{-1}:z\to z\mp b$, b<0 se işaret “-“, b>0 ise işaret “+” dır ($\det V=1.|b|>0$). Buradan $PSL(2,\mathbb{R})$ deki parabolik elemanların iki eşlenik sınıfı vardır. $z\to z+1$ ile $z\to z-1$ dönüşümleri $PSL(2,\mathbb{R})$ de eşlenik olamazlar.

3°) Kökler kompleks ve birbirinin eşleniği şeklinde ise yani, $|a+d|<2$ ise T dönüşümüne eliptik eleman adını vereceğiz. Bu durumda T nin $\mathbb{U}$ düzleminde bir tek sabit noktası mevcuttur.

p ve $\overline{p}$ iki kompleks eşlenik sabit nokta olsun. Bu sabit noktalardan sadece biri $\mathbb{U}$ düzlemindedir. Farzedelimki p, $\mathbb{U}$ düzleminde ve $\overline{p}$, $-\mathbb{U}$ düzleminde olsun. Bu takdirde bir eliptik dönüşüm

$$\frac{w-p}{w-\overline{p}} = \lambda \frac{z-p}{z-\overline{p}}$$

şeklinde yazılabilir. Burada λ nın reel olması gerekmez. Ancak reel eksen kendi üzerine resmedildiği zaman z reel ise w reel yani, her ikisi de reel olmak üzere

$$\left|\frac{w-p}{w-\overline{p}}\right| = \left|\frac{z-p}{z-\overline{p}}\right| = 1$$

dir. Dolayısıyla $|\lambda| = 1$ ve λ $e^{i\theta}$ formundadır. Buradan T bir eliptik dönüşüm olmak üzere

$$\frac{w-p}{w-\overline{p}} = e^{i\theta} \frac{z-p}{z-\overline{p}}$$

şeklinde yazılabilir.

T$\in$ PSL$(2,\mathbb{R})$ ile değişmeli olan herhangi bir U$\in$ PSL$(2,\mathbb{R})$ dönüşümü $(p,\overline{p})$ ikilisini $(p,\overline{p})$ ikilisine resmeder. Özellikle $p,\overline{p} \in \mathbb{U}$ ise U hem p yi hem de $\overline{p}$ yi sabit bırakır.

Dolayısıyla U dönüşümü

$$\frac{w-p}{w-\overline{p}} = e^{i\phi} \frac{z-p}{z-\overline{p}} \tag{1}$$

şeklindedir.

Tersine T ile değişmeli olan (1) formundaki herhangi bir dönüşüm alalım. Buradan T nin normalliyeni bütün U dönüşümlerinin grubudur. S^1 ile izomorf olan $|z| = 1$ çarpım grubuyla izomorftur. Ayrıca T nin normalliyeni kesinlikle T ile aynı sabit noktalara sahip dönüşümlerdir.

Eliptik dönüşümler sonlu mertebelidir. Buradan $\exists m,n\in \mathbb{Z}$ öyleki $m\theta = n\pi$ olup eliptik dönüşümler sonlu devirli grupları oluştururlar. Ayrıca bir eliptik dönüşüm sonsuz mertebeli ise Teorem 4' ün sonucu olarak ayrık olmayan devirli grupları oluşturur.

T bir eliptik eleman ve $\xi \in \mathbb{U}$ T nin sabit noktası olsun. Önerme 2' nin ii). şıkkından dolayı $\exists S\in$ PSL$(2,\mathbb{R}) : S(\xi)=i$ dir. Bu takdirde $S(\overline{\xi}) = \overline{i} = -i$ dir. Dolayısıyla W=STS^{-1} i ve –i yi sabit bırakan bir eliptik elemandır.

Böylece;

$$\frac{W(z)-i}{W(z)+i}=\lambda\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$$

dir. W $\mathbb{R}_\infty$ u $\mathbb{R}_\infty$ üzerine resmeder. Bu durumda $\exists\alpha\in\mathbb{R}:W(\alpha)\in\mathbb{R}$ dir. Buradan

$$\left|\frac{W(\alpha)-i}{W(\alpha)+i}\right|=|\lambda|\left|\frac{\alpha-i}{\alpha+i}\right|=1\Rightarrow|\lambda|=1$$

dir. Böylece $\lambda=e^{i\theta}$ $(0\le\theta\le 2\pi)$. Dolayısıyla T, W ya eşleniktir. Burada $\frac{W(z)-i}{W(z)+i}=e^{i\theta}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$, $(0\le\theta\le 2\pi)$. Buradan $\frac{z-i}{z+i}=z'$, $\frac{W(z)\text{-}i}{W(z)+i}=w'$ ise $z',w'\in D$, birim daire ve $w'=e^{i\theta}z'$ dir. Dolayısıyla $PGL(2,\mathbb{C})$ de, T birim daire θ lık bir rotasyonuna eşleniktir.

Sonuç 6:

1) a+d ye T nin izi diyeceğiz. Yani, İzT = a+d.

2) T(z) = z+1 ise İzT=2 olup T bir parabolik dönüşümdür. Buradan ∞ u sabit bırakan T parabolik elemanının merkezleyeni:

$$M_{PSL(2,\mathbb{R})}(T)=\{S\mid ST=TS\}$$

dir. Teorem 5 e göre ST=TS ise S elemanı T nin sabit nokta kümesini kendi üzerine resmeder. Dolayısıyla S ∞ u sabit bırakır. Buradan;

$$M_{PSL(2,\mathbb{R})}(T)=\{z\to z+k\mid k\in\mathbb{R}\}$$

dir.

3) $M_{PSL(2,\mathbb{R})}(T)=\{z\to\mu z\mid\mu>0\}$, $T:z\to\lambda z$, $(\lambda>0,\ \lambda\neq 1)$

4) i ve –i yi sabit bırakan T eliptik elemanının merkezleyeni

$$M_{PSL(2,\mathbb{R})}(T)=\left\{W:\frac{W(z)-i}{W(z)+i}=e^{i\theta}\left(\frac{z-i}{z+i}\right),\ (0\le\theta\le 2\pi)\right\}$$

dir.

Önerme 3: $PSL(2,\mathbb{R})$ nin birimden farklı herhangi iki elemanı komutatiftir ancak ve ancak bu elemanların sabit nokta kümeleri aynıdır.

İspat: "$\Rightarrow$": $V_1, V_2 \in PSL(2,\mathbb{R}) \setminus \{I\}$ ve $V_1V_2 = V_2V_1$ olsun. Farzedelimki V_1 parabolik ve ∞ u sabit bıraksın. Bu taktirde $V_1(z) = z + \lambda,\ \lambda \neq 0$ olur. $V_2(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, ad-bc=1 olsun. V_1, V_2 komutatif olduklarından $C := V_1V_2V_1^{-1}V_2^{-1} = I$ dır. Hesaplamalar gösterir ki :

$$C(z) = \frac{\left(1 + ac\lambda + c^2\lambda^2\right)z + \lambda - a^2\lambda - ac\lambda^2}{c^2\lambda z + 1 - ac\lambda}$$

dır. Buradan

$$C(z) = I(z) \Leftrightarrow c = 0 \text{ ve } \lambda(1\text{-}a^2 - ac\lambda) = 0,\ \lambda \neq 0$$

olduğundan

$$1\text{-}a^2 - ac\lambda = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \mp 1,\ \text{ad-bc=1} \Rightarrow \text{ad=1} \Rightarrow \text{d=}\mp 1\,.$$

dir. Böylece $a + d = \mp 2$ ve V_2 ∞ u sabit bırakan parabolik elemandır.

Şimdi V_1 $0,\infty$ un sabit bırakan hiperbolik eleman olsun. Bu takdirde $V_1(z) = \alpha z,\ \alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1$ ($\alpha>1$ alabiliriz. Hiperbolik eleman bir ve bir tek $U_\lambda = \lambda z,\ \lambda>1$ elemanına eşleniktir). Bu durumda,

$$C(z) = \alpha\frac{\left(ad - bc\alpha\right)z + ab(\alpha - 1)}{cd(1-\alpha)z + (-bc + ad\alpha)}$$

dır. $C(z) = I(z)$ olması için her şeyden önce ab = cd = 0 olmalıdır. Bu durumu aşağıdaki gibi iki şekilde ele alalım:

i) bc = 0 ise ad-bc = 1 $\Rightarrow$ ad = 1 $\Rightarrow$ a $\neq$ 0, d $\neq$ 0 $\Rightarrow$ b = c = 0 $\Rightarrow$ $V_2\left(z\right) = \dfrac{az}{d} = a^2z$ bir hiperbolik elemandır ve $0,\infty$ u sabit bırakır.

ii) bc $\neq$ 0 olsun. Bu durumda ad-bc = 1 $\Rightarrow$ a = d = 0 elde edilir. Çünkü ab = cd = 0. Buradan bc = -1 dir. Böylece $V_2(z) = \dfrac{b}{cz} = -\dfrac{b^2}{z}$ bir eliptik elemandır ve i yi sabit bırakır. Ayrıca C = I olduğundan $\alpha(ad - bc\alpha) = -bc + ad\alpha \Rightarrow \alpha^2 = 1$ ya da $\alpha = -1$ dir. Bu olamaz. Çünkü $\alpha > 1$ idi. Dolayısıyla bc = 0 olmak zorundadır. Sonuç olarak bc $\neq$ 0 ise bu durum önermemize uymaz. Yani doğru değildir.

$V_1V_2 = V_2V_1$ ve farzedelimki V_1 eliptik ve $\zeta \in \mathbb{U}$ yu sabit bıraksın. V_1, V_2 ile komutatif olduğundan ve $\zeta \in \mathbb{U} \Rightarrow V_2\,\zeta \in \mathbb{U} \Rightarrow V_2\,\zeta = \zeta$ dir. Çünkü komutatif iki eleman birbirlerinin sabit nokta kümelerini kendi üzerlerine resmederler. Dolayısıyla V_2 nin de sabit nokta kümeleri aynıdır. Yani V_2 bir eliptik elemandır.

"$\Leftarrow$": $V_1, V_2 \in PSL(2,\mathbb{R}) \setminus \{I\}$ aynı sabit nokta kümesine sahip olsun. Dolayısıyla V_1 ve V_2 nin türleri aynıdır.

Şimdi farzedelimki V_1 ve V_2 parabolik olsun. Bu durumda bir $A \in PSL(2,\mathbb{R})$ seçebiliriz öyleki $V_1' = AV_1A^{-1}$ ve $V_2' = AV_2A^{-1}$ sadece ∞ u sabit bırakan parabolik elemanlardır. Dolayısıyla $V_1'(z) = z + \lambda_1,\ V_2' = z + \lambda_2,\ \lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_2$ dir. Açıkça V_1' ve V_2' komutatiftir. Böylece,

$$V_1'V_2' = AV_1A^{-1}AV_2A^{-1} = AV_2A^{-1}AV_1A^{-1} = V_2'V_1' \Rightarrow V_1V_2 = V_2V_1$$

dir.

İkinci olarak farzedelimki V_1 ve V_2 hiperbolik ve sabit noktaları α, β olsun. Bu durumda bir $A \in PSL(2,\mathbb{R})$ seçebiliriz öyleki $V_1' = AV_1A^{-1}$ ve $V_2' = AV_2A^{-1}$ 0 ve ∞ u sabit bırakan hiperbolik elemanlardır. Dolayısıyla $V_1'(z) = \lambda_1 z,\ V_2' = \lambda_2 z,\ \lambda_1 \neq 0, 1 \neq \lambda_2$ dir. Açıkça V_1' ve V_2' komutatiftir. Böylece V_1 ve V_2 komutatiftir.

Son olarak farzedelimki V_1 ve V_2 eliptik ve sabit noktaları i ve –i olsun. Bu durumda bir $A \in PSL(2,\mathbb{R})$ seçebiliriz öyleki $V_1' = AV_1A^{-1}$ ve $V_2' = AV_2A^{-1}$ i ve –i yi sabit bırakan eliptik elemanlardır. Dolayısıyla

$$\frac{V_1'(z) - i}{V_1'(z) + i} = e^{i\theta_1}\left(\frac{z-i}{z+i}\right),\quad \frac{V_2'(z) - i}{V_2'(z) + i} = e^{i\theta_2}\left(\frac{z-i}{z+i}\right),\quad 0 \le \theta_1, \theta_2 < 2\pi$$

dir. Buradan hesaplamalarla V_1' ve V_2' nün komutatif olduğu kolaylıkla görülebilir. Böylece V_1 ve V_2 komutatiftir.■

Önerme 4: $PSL(2,\mathbb{R})$ de her hiperbolik (parabolik, eliptik) elemanın $PSL(2,\mathbb{R})$ deki merkezleyeni aynı sabit nokta kümeli hiperbolik (parabolik, eliptik) elemanlardan ve birim elemandan oluşur.

İspat: $T\in PSL(2,\mathbb{R})$ hiperbolik olsun. Bunun merkezleyeni $M_{PSL(2,\mathbb{R})}(T)=\{S \mid ST=TS\}$. $S\in M_{PSL(2,\mathbb{R})}(T)$ ise ST = TS dir. S = I ise ispat açıktır. S ≠ I ise Önerme 3 e göre S hiperboliktir ve T ile aynı sabit nokta kümesine sahiptir.■

2.2. Hiperbolik Geometri (Öklid Olmayan Geometri)

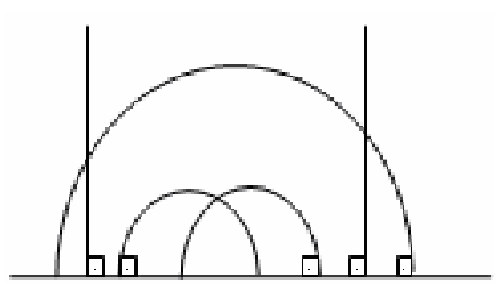
Hiperbolik düzlem için bir model oluşturalım. Bir model ile seçeceğimiz bir uzay ve temel geometrik nesnelerin nasıl temsil edileceğinin bir seçimini kastetmekteyiz. Burada bu geometrik nesnelerin bazıları noktalar ve doğrulardır.

Çalışacağımız model üst yarı düzlem modeli olacaktır. Bu modelin uzayı $\mathbb{U}:=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im} z>0\}$ üst yarı düzlemidir.

Burada nokta ve açı kavramları $\mathbb{C}$ deki nokta ve açı kavramlarıdır. Yani, $\mathbb{U}$ da iki eğri arasındaki açı, bu eğriler $\mathbb{C}$ de düşünülerek tanımlanan eğriler arasındaki açıdır. Başka bir deyişle, açı teğet doğrular arasındaki açıdır.

$\mathbb{U}$ daki hiperbolik doğruları bilinen Öklid doğruları ve $\mathbb{C}$ deki Öklid çemberleri cinsinden tanımlayacağız.

Tanım 14: Görünüşte farklı iki tip hiperbolik doğru vardır. Birincisi, $\mathbb{C}$ de $\mathbb{R}$ ye dik olan Öklid doğrularının $\mathbb{U}$ ile kesişimleri; diğeri $\mathbb{C}$ de merkezi $\mathbb{R}$ üzerinde olan çemberlerin $\mathbb{U}$ ile kesişimleridir. Yani hiperbolik doğru dendiğinde zayıf bir tabirle reel eksene dik yarı çemberler ve reel eksene dik yarı doğrulardır. Doğruları yarıçapı ∞ olan çemberler olarak düşünürsek, hiperbolik doğru reel eksene dik yarı çemberlerdir.



Şekil 1. Hiperbolik Doğrular

Önerme 5: $p,q \in \mathbb{U}$ farklı noktalar olsun. Bu takdirde $\mathbb{U}$ da p ve q dan geçen bir ve bir tek hiperbolik ℓ doğrusu vardır.

İspat: İki durum göz önüne alalım. İlk önce Re(p) = Re(q) olsun. Bu taktirde $L = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(p)\}$ Öklid doğrusu reel eksene paralel ve p,q dan geçer. Böylece $\ell = \mathbb{U} \cap L$ istenilen hiperbolik doğrudur.

Şimdi farzedelimki Re(p) ≠ Re(q) dur. Artık p ve q dan geçen Öklid doğrusu $\mathbb{R}$ ye dik değildir. Dolayısı ile p ve q dan geçen ve $\mathbb{R}$ ye dik olan bir Öklid çemberi bulmalıyız. L_{pq} p ve q dan geçen Öklid doğru parçası ve K da L_{pq} nun orta dikmesi olsun. Bu takdirde, p ve q dan geçen her Öklid çemberinin merkezi K üzerindedir. Re(p) ≠ Re(q) olduğundan K $\mathbb{R}$ ye paralel değildir. Böylece K ile $\mathbb{R}$ bir tek $c \in \mathbb{R}$ noktasında kesişir.

A merkezi c de yarıçapı $|c - p|$ olan Öklid çemberi olsun. Böylece A p den geçer. c K üzerinde olduğundan $|c - p| = |c - q|$ dur. Böylece K q dan da geçer. Dolayısıyla $\ell = \mathbb{U} \cap A$ istenilen hiperbolik doğrudur.

p ve q dan geçen hiperbolik doğrunun tekliği Öklid doğruları ve Öklid çemberlerinin kendi inşalarında var olan özelliklerinden çıkar.■

Tanım 15: İki hiperbolik doğrunun arakesiti boş ise bu iki doğruya paralel doğrular denir.

Öklid geometrisinde paralel doğrular mevcuttur. Şayet L bir Öklid doğrusu ve $a \in \mathbb{C}$ de L üzerinde olmayan bir nokta ise a dan geçen ve L ye paralel olan bir ve bir tek K doğrusu vardır. Öklid geometrisinde paralel doğrular eşit uzaklıktadır. Yani, L ve K paralel doğrular ve $a,b \in L$ ise bu takdirde a ile K arasındaki uzaklık b ile K arasındaki uzaklığa eşittir. Hiperbolik geometride paralellik oldukça farklı hale sahiptir.

Teorem 10: ℓ, $\mathbb{U}$ da bir hiperbolik doğru ve $p \in \mathbb{U}$, $p \notin \ell$ olsun. Bu takdirde p den geçen ve ℓ ye paralel olan sonsuz farklı hiperbolik doğru vardır.

İspat: Önerme 5 in ispatında olduğu gibi iki durumu göz önüne alacağız. Birinci olarak farzedelimki ℓ bir L Öklid doğrusunun içinde olsun. p L üzerinde olmadığından p den geçen ve L ye paralel olan bir K Öklid doğrusu vardır. L $\mathbb{R}$ ye dik olduğundan K da $\mathbb{R}$ ye diktir. Böylece $\mathbb{U}$ da p den geçen ve ℓ ye paralel olan $\mathbb{U} \cap$ K hiperbolik doğrusu elde edilir.

p den geçen ve ℓ ye paralel olan başka bir hiperbolik doğru elde edelim. Bunun için, K ile L arasında $x \in \mathbb{R}$ olan bir nokta alalım. A da, x ve p den geçen, merkezi $\mathbb{R}$ de olan Öklid çemberi olsun. Re(x) $\neq$ Re(p) olduğundan böyle bir A Öklid çemberi vardır. A nın alınışından dolayı, $A \cap L = \varnothing$, yani $\mathbb{U} \cap$ A hiperbolik doğrusu ℓ den ayrıktır. Yani $\mathbb{U} \cap$ A, p den geçen ve ℓ ye paralel olan ikinci bir hiperbolik doğrudur.

K ile L arasında $\mathbb{R}$ üzerinde sonsuz tane nokta olduğundan bu oluşturma p den geçen ve ℓ ye paralel olan sonsuz tane hiperbolik doğru verir.

Şimdi ikinci olarak farzedelimki ℓ hiperbolik doğrusu bir A Öklid çemberinde bulunsun. D de, p den geçen ve A ile aynı merkeze sahip Öklid çemberi olsun. Aynı merkezli çemberler ayrık olduğundan p den geçen ve ℓ ye paralel olan bir hiperbolik doğru $\mathbb{U} \cap$ D dir.

Şimdi p den geçen ve ℓ ye paralel olan ikinci bir hiperbolik doğru elde edelim. A ile D arasında herhangi bir $x \in \mathbb{R}$ alalım. E, merkezi $\mathbb{R}$ üzerinde x ve p den geçen Öklid çemberi olsun. Alınış gereği E ve A ayrıktır. Böylece $\mathbb{U} \cap$ E p den geçen ve ℓ ye paralel olan başka bir hiperbolik doğrudur.

$\mathbb{R}$ üzerinde A ile D arasında sonsuz tane nokta olduğundan p den geçen ve ℓ ye paralel olan sonsuz hiperbolik doğru vardır.■

Şu ana kadar hareket edebileceğimiz bir model elde ettik. Yukarıda bahsedilen hiperbolik geometrinin gelişimi için gerilere, tarihsel gelişimlere dönelim. Bunun için en iyi yaklaşım Öklid geometrisi aksiyomları ile başlamak olacaktır. Aksiyomlardan biri yukarıda bahsedilen paralel doğrular hakkındaki ifadedir, yani bir L Öklid doğrusu ve bunun dışında bir p noktası verildiğinde p den geçen ve L ye paralel olan bir tek Öklid doğrusu vardır. Bu aksiyom "Paralel Postülatı" olarak adlandırılır.

Bu durumda, hiperbolik geometri aksiyomların aynı kümesini kullanarak tanımlanır. Fakat paralel postülatda hiperbolik değişiklik vardır. Bu, "verilen bir ℓ hiperbolik doğrusu ve bunun dışında bir p noktası için, p den geçen ve ℓ ye paralel olan en az iki hiperbolik doğru vardır" dır. Bu durumda üst yarı düzlem modeli, hiperbolik doğrularla Öklid olmayan geometrinin bir modelidir.

Şimdi parçalı sürekli diferensiyellenebilir bir γ yolunun hiperbolik uzunluğunu tanımlayalım. Bundan önce $\mathbb{R}^2$ de bir β parçalı sürekli diferensiyellenebilir yolunun

Öklid uzunluğunu tanımlayalım. x ve y parçalı sürekli fonksiyonlar olmak üzere $\beta : I \to \mathbb{R}^2$, $I=[0,1]$, $\beta(t) = (x(t), y(t))$ olsun. Bu durumda β nın Öklid uzunluğu $ds^2 = dx^2 + dy^2$ formülü yardımıyla tanımlanır. Daha açık olarak;

$$e(\beta) = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_\beta ds$$

dir.

Benzer olarak $\mathbb{U}$ da hiperbolik uzunluğu şu şekilde tanımlayalım:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = \frac{|dz|^2}{y^2}, \ z=x+iy .$$

Yani, $\gamma : I \to \mathbb{U}$ parçalı sürekli diferensiyellenebilir bir eğri ve $\gamma(t) = x(t) + iy(t) = z(t)$ ise $h(\gamma)$ hiperbolik uzunluğu

$$h(\gamma) = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y}\, dt = \int_0^1 \frac{\left|\frac{dz}{dt}\right|}{y}\, dt$$

olarak tanımlanır.

Şimdi de $E \subseteq \mathbb{U}$ ölçülebilir kümesinin hiperbolik alanını tanımlayalım. Bu durumda eğer integral mevcutsa E nin hiperbolik alanı

$$\mu(E) = \iint_E \frac{dxdy}{y^2}$$

olarak tanımlanır.

Bazı durumlarda kartezyen koordinatlar yerine (r,θ) kutupsal koordinatlarını kullanmak daha uygundur. Böylece sırasıyla yukarıdaki formüller

$$ds^2 = \frac{dr^2}{r^2 \sin^2\theta} + \frac{d\theta^2}{\sin^2\theta}, \quad h(\gamma) = \int_{r_1}^{r_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}}{r \sin\theta} \quad \text{ve} \quad \mu(E) = \iint_E \frac{drd\theta}{r \sin^2\theta}$$

şekline dönüşür.

Teorem 11: $T \in PSL(2,\mathbb{R})$ keyfi olsun. Bu takdirde;

$$h(T(\gamma)) = h(\gamma) \ \text{ ve } \ \mu(T(E)) = \mu(E)$$

dir. Yani hiperbolik uzunluk ve hiperbolik alan bütün $PSL(2,\mathbb{R})$ nin elemanları altında invaryanttır.

İspat: $T\in PSL(2,\mathbb{R})$ keyfi olsun. c≠0 alalım. Bu takdirde $w=T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ dönüşümü $w=\dfrac{a}{c}-\dfrac{1}{c^2\left(z+\frac{d}{c}\right)}$ şeklinde yazılabilir. Buradan $\dfrac{a}{c}=k_1\in\mathbb{R}, c^2=p\in\mathbb{R}$ ve $\dfrac{d}{c}=k_2\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$w=k_1-\frac{1}{p(z+k_2)}=W_1UVW_2(z)$$

alırsak

(a) W_1, W_2; w=z+k, $k\in\mathbb{R}$ (parabolik)

(b) V(z) = pz, (0<p∈ $\mathbb{R}$) (hiperbolik)

(c) U(z) = $-\dfrac{1}{z}$ (eliptik)

dir. c=0 ise T(z) = pz+k = WV(z).

Dolayısıyla hiperbolik yay uzunluğu ve alanın U,V,W dönüşümleri altında invaryant kaldığını ispatlayalım.

(a) w=z+k (k∈ $\mathbb{R}$) dx,dy ve y yi değiştirilmemiş bırakır. Buradan hiperbolik yay uzunluğu ve alan bu tip dönüşümler altında invaryant kalır. Gerçekten;

W(z)=w=z+k=(x+k)+iy, (k∈ $\mathbb{R}$)

$$\Rightarrow\ h(W(\gamma))=\int_0^1\frac{\sqrt{[d(x+k)]^2+(dy)^2}}{y}=\int_0^1\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y}=h(\gamma)$$

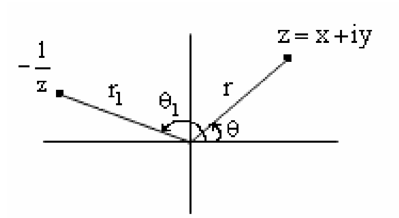
$$\mu(W(E))=\iint_E\frac{d(x+k)dy}{y}=\iint_E\frac{dxdy}{y}=\mu(E).$$

(b) V(z)=pz, (0<p∈ $\mathbb{R}$) ⇒ V(z)=px+piy=pz

$$\Rightarrow h(V(\gamma))=\int_0^1\frac{\sqrt{(pdx)^2+(pdy)^2}}{py}=\int_0^1\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y}=h(\gamma)$$

$$\mu(V(E))=\iint_E\frac{pdxpdy}{p^2y^2}=\iint_E\frac{dxdy}{y^2}=\mu(E).$$

(c) $U(z) = -\frac{1}{z} = -\frac{1}{x+iy} \Rightarrow (r,\theta)$ kutupsal koordinatları U dönüşümü altında $U(r,\theta)=\left(\frac{1}{r},\pi-\theta\right)$ ya dönüşür. Gerçekten;



Şekil 2. Teorem 11 için yardımcı şekil

z=x+iy , x=rcosθ, y=rsinθ

$\Rightarrow$ z=r(cosθ+isinθ) ve r=$\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \ \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

$$\Rightarrow U(z) = -\frac{1}{z} = -\frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2} \text{ ve } r_1 = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \cos\theta_1 = \frac{-\frac{x}{x^2+y^2}}{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \cos\theta_1 = -\cos\theta = \cos(\pi-\theta) \Rightarrow \pi-\theta = \theta_1 .$$

Dolayısıyla;

$$h(U(\gamma)) = \iint_\gamma \frac{\sqrt{\left(d\left(\frac{1}{r}\right)\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(d(\pi-\theta)\right)^2}}{\frac{1}{r}\sin(\pi-\theta)} = \iint_\gamma \frac{\sqrt{\left(-\frac{1}{r^2}dr\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(-d\theta\right)^2}}{\frac{1}{r}\sin\left(\pi-\theta\right)}$$

$$= \iint_\gamma \frac{\sqrt{\frac{1}{r^4}\left(dr\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(d\theta\right)^2}}{\frac{1}{r}\sin\theta} = \iint_\gamma \frac{\sqrt{\left(dr\right)^2 + r^2\left(d\theta\right)^2}}{r\sin\theta} = h\left(\gamma\right)$$

$$\mu(U(E)) = \iint_E \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)d\left(\pi-\theta\right)}{\frac{1}{r}\sin^2\left(\pi-\theta\right)} = \iint_E \frac{\left(-\frac{1}{r^2}dr\right)\left(-d\theta\right)}{\frac{1}{r}\sin^2\theta} = \iint_E \frac{drd\theta}{r\sin^2\theta} = \mu(E) .\blacksquare$$

Şimdi $\mathbb{U}$ üst yarı düzleminde herhangi iki nokta arasında en kısa hiperbolik uzunluğa sahip bir tek yolun varlığını göstereceğiz. Bu tür yollara hiperbolik doğru parçaları veya kısaca H-doğru parçaları diyeceğiz. Teorem 11 in bir sonucu olarak $PSL(2,\mathbb{R})$ nin her bir elemanı H-doğru parçalarını H-doğru parçalarına resmeder.

İlk olarak gösterelim ki b>a>0 olmak üzere ia ile ib noktalarını birleştiren Öklid doğru parçasıdır.

$$K:\underset{t}{[0,1]}\ \underset{\longrightarrow}{\longrightarrow}\ \underset{K(t)=(0,y(t))}{\mathbb{U}} \quad , \frac{dy}{dt}>0,\ y(0)=a,\ y(1)=b$$

bu doğru parçasının parametrik bir gösterimi olsun. Böylece;

$$h(K)=\int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)}dt=\int_0^1 \frac{\left|\frac{dy}{dt}\right|}{y(t)}dt=\int_0^1 \frac{\frac{dy}{dt}}{y(t)}dt \ ,\ u=y(t)\Rightarrow du=\frac{dy(t)}{dt}dt$$

t=0 için u=a

t=1 için u=b

$$\Rightarrow\ h(K)=\int_a^b \frac{du}{u}=\ln u\,|_a^b=\ln\frac{b}{a}.$$

Şimdi gösterelim ki ia noktasını ib noktasına birleştiren ve en kısa hiperbolik uzunluğa sahip eğrinin parametrik gösterimi yukarıda verildiği gibidir.

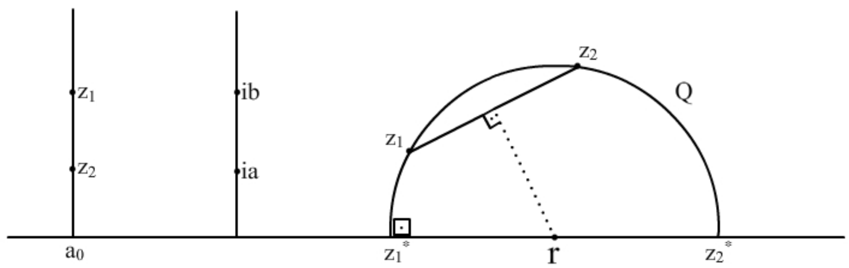
$\tilde{K}:[0,1]\to\mathbb{U}$ ia yı ib ye birleştiren herhangi parçalı sürekli diferensiyellenebilir bir eğri olsun. $\tilde{K}(t)=(\tilde{x}(t),\tilde{y}(t))$ alalım. Bu durumda;

$$h(\tilde{K})=\int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{d\tilde{x}}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\tilde{y}}{dt}\right)^2}}{\tilde{y}(t)}dt\geq\int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{d\tilde{y}(t)}{dt}\right)^2}}{\tilde{y}(t)}dt\geq\int_0^1 \frac{\frac{d\tilde{y}(t)}{dt}}{\tilde{y}(t)}dt=\int_0^1 \frac{\frac{dy}{dt}}{y(t)}dt=h(K)$$

dır. Eşitlik ancak $\frac{d\tilde{x}(t)}{dt}=0$ ve $\frac{d\tilde{y}(t)}{dt}\geq 0$ ile mümkündür.

Sonuç olarak ia noktasını ib noktasına birleştiren H-doğru parçası bu iki noktayı birleştiren Öklid doğru parçasıdır.

Şimdi farzedelimki z_1 ve z_2 aynı reel kısıma sahip olmasın. z_1 ve z_2 yi birleştiren doğrunun orta dikmesi reel ekseni bir r noktasında keser. Bu r noktası z_1 ve z_2 den geçen reel eksene dik olan çemberin merkezidir (Q çemberi). Q çemberinin reel ekseni kestiği noktalar z_1^* ve z_2^* olsun. $PSL(2,\mathbb{R})$ nin her bir elemanı çemberleri çemberlere resmeder ve açıları korur. Önerme 2 (ii)' den $\exists T \in PSL(2,\mathbb{R})$ öyleki $T(z_1^{\ *}) = 0, T(z_2^{\ *}) = \infty$ dur. Dolayısıyla T elemanı Q yarı çemberini y-ekseninin pozitif kısımına resmeder. Böylece $T(z_1)$ ve $T(z_2)$ y-ekseni üzerindedir ve bu iki noktayı birleştiren H-doğru parçası Öklid anlamda doğru parçasıdır. Teorem 11' e göre $PSL(2,\mathbb{R})$ nin elemanları bu H-uzunluğu değiştirmediğinden z_1 ve z_2 yi birleştiren H-doğru parçası bu iki noktayı birleştiren ve reel eksene dik olan çemberin bu iki nokta arasındaki parçasıdır.



Şekil 3. H-Doğru Parçaları

Teorem 12: $\mathbb{U}$ daki H-doğru parçaları, merkezi reel eksen üzerinde bulunan yarı çemberler ya da reel eksene dik olan Öklid doğrularıdır [2].■

Tanım 16: Yukarıdaki teoremde geçen çemberlere ve reel eksene dik Öklid doğrularına Hiperbolik doğrular veya kısaca H-doğruları diyeceğiz. Burada dik H-doğrularının bir bitim noktasını ∞ da kabul edeceğiz. Dolayısıyla her bir H-doğruları $\mathbb{R}_\infty$ da iki bitim noktasına sahiptir.

Sonuç olarak hiperbolik doğrular $A|z|^2 + Bx + C = 0$ eşitliği ile gösterilir. Dolayısıyla burada kesinlikle farklı iki p,q∈ $\mathbb{U}$ noktası vardır. Bu yay p,q dan geçen hiperbolik doğru parçasıdır.

Teorem 13: $PSL(2,\mathbb{R})$ bütün H-doğrularının oluşturduğu küme üzerinde transitiftir.

İspat: P ve Q herhangi iki H-doğrusu öyleki bitim noktaları sırsıyla s,t ve $s^{'}, t^{'}$ olsun. Burada $s,t,s^{'},t^{'} \in \mathbb{R}_\infty$. Önerme 2 (ii) den $\exists T \in PSL(2,\mathbb{R})$ öyleki $T(s)=s^{'}$ ve $T(t)=t^{'}$ dür. T elemanı çemberleri çemberlere resmettiğinden ve açıları koruduğundan P çemberi Q çemberine resmedilir. Çünkü P çemberi s ve t tarafından tek türlü olarak belirlidir. Bir H-doğrusu bütün noktaları ile tek türlü olarak belirlidir. Yani T(P)=Q dur. ■

Tanım 17: z,w$\in \mathbb{U}$ olsun. Z yi w ya birleştiren H-doğru parçasının H-uzunluğuna hiperbolik fark(uzaklık) deyip ρ (z,w) ile göstereceğiz.

$$\rho(z,w) = \ln\left\{\frac{|z-\overline{w}|+|z-w|}{|z-\overline{w}|-|z-w|}\right\}$$

olarak formulüze edilir. Ayrıca $\sinh^2\left(\frac{1}{2}\rho(z,w)\right) = \frac{|z-w|^2}{4\,\mathrm{Im}\,z\,\mathrm{Im}\,w}$ dır.

NOT: $(\mathbb{U},\rho)$ bir metrik uzaydır. Üçgen eşitsizliği ise H-doğru parçasının iki nokta arasında bir ve bir tek en kısa yol olma özelliğinden çıkar. ρ metriği ile $\mathbb{U}$ üst yarı düzlemi hiperbolik düzlemin bir modelidir.

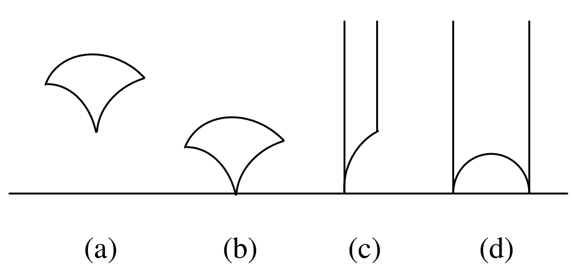
Tanım olarak iki H-doğrusu paraleldir denir şayet bunlar hiç bir noktada kesişmezlerse.

Teorem 14: z,w$\in \mathbb{U}$ ve T$\in$ $PSL(2,\mathbb{R})$ ise

$$\rho(T(z),T(w)) = \rho(z,w)$$

dir [2].■

Tanım 18: $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ olmak üzere $\mathbb{U}$ nun $\mathbb{C}_\infty$ daki kapanışında bir kapalı kümeye n-kenarlı hiperbolik poligon denir. Bu küme n tane hiperbolik doğru parçası tarafından sınırlıdır.



Şekil 4. Hiperbolik Poligonlar

Şayet herhangi iki hiperbolik doğru parçası kesişirse, bu takdirde bu kesişme noktasına poligonun bir köşesi adı verilir. Reel eksenin hiçbir parçası bir hiperbolik poligona ait olmamasına rağmen Şekil 4. (c) ve (d) deki gibi $\mathbb{R}_\infty$ da köşeler olabilir (Şekil4. (c),(d)).

Tanım 19: $\mathbb{U}$ daki iki hiperbolik doğru parçası arasındaki açı bunların kesişme noktasındaki teğetleri arasındaki açıdır.

Sonuç olarak $\mathbb{R}_\infty$ un bir noktasında kesişen iki hiperbolik doğru parçası arasındaki açı sıfırdır.

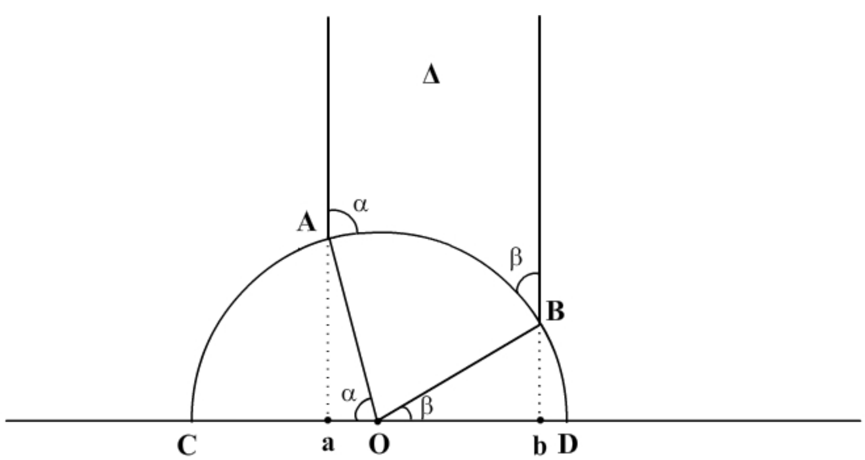
Teorem 15 (Gauss-Bonnet): Δ α, β, γ açılı hiperbolik bir üçgen olsun. Bu takdirde;

$$\mu(\Delta) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$$

dır.

İspat:

Durum 1)



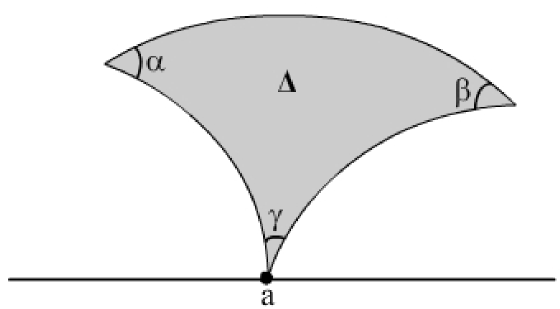
Şekil 5. Teorem 15 için yardımcı şekil

Bu durumda farzedelimki Δ nın iki kenarı reel eksene dik Öklid doğru parçaları olsun. Buradan Δ nın tabanı Öklid yarı çemberinin bir parçası olur. $\lambda, k \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ olmak üzere $z \to z + k$, $z \to \lambda z$ dönüşümleri $PSL(2, \mathbb{R})$ dedir. Bu dönüşümleri Şekil 5' e uygularsak çemberimizi 0 merkezli ve 1 yarıçaplı olarak düşünebiliriz (Teorem 13 gereği verilen çember 0 merkezli 1 yarıçaplı çembere resmedilir). Teorem 11' den üçgenin alanı $PSL(2,\mathbb{R})$ altında değişmediğinden, yukarıdaki dönüşümler hiperbolik alanı değiştirmeyecektir. Dönüşümler açı koruduklarından α, β ve γ açıları da değişmeyecektir. Buradan Şekil 5. deki durumu göz önüne almak yeterlidir. Dolayısıyla;

$$\mu(\Delta) = \iint_\Delta \frac{dxdy}{y^2} = \int_a^b \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} \right) dx = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \ \text{x=cos}\theta \ (0 \le \theta \le \pi)$$

$$= \int_{\pi-\alpha}^{\beta} -\frac{\sin\theta}{\sin\theta} d\theta = \pi - \alpha - \beta .$$

Durum 2)



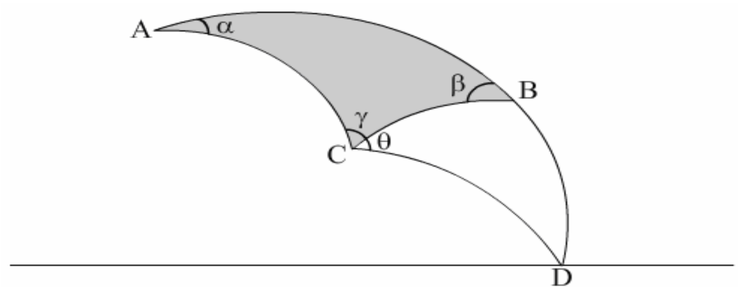
Şekil 6. Teorem 15 için yardımcı şekil

Şimdi farzedelimki üçgenimizin, Şekil 6' daki gibi, bir köşesi reel eksen üzerinde olsun. Önerme 2. ii) den $\exists T \in PSL(2,\mathbb{R})$ öyleki T(a) = ∞ dur. Aynı zamanda T, üçgenin alanını değiştirmez. Dolayısıyla;

$$\mu(\Delta) = \mu(T(\Delta)) = \pi - \alpha - \beta$$

dır.

Durum 3)



Şekil 7. Teorem 15 için yardımcı şekil

Şimdi farzedelimki Δ nın $\mathbb{R}_\infty$ da hiçbir köşesi bulunmasın ve Δ nın köşeleri A,B,C olsun. Diğer taraftan AB hiperbolik doğru parçası $\mathbb{R}$ yi D de kessin. Δ_1 ACD hiperbolik üçgenini ve Δ_2 BCD hiperbolik üçgenini göstersin. Bu takdirde $\Delta = \Delta_1 - \Delta_2$ dir. Dolayısıyla;

$$\mu(\Delta) = \mu(\Delta_1) - \mu(\Delta_2) = \pi - \alpha - (\gamma + \theta) - \left[\pi - \theta - (\pi - \beta)\right] = \pi - \alpha - \beta - \gamma$$

elde edilir. ■

Not: Gauss-Bonnet formülünü hiperbolik poligonların bazı tiplerine genişletebiliriz.

Tanım 20: $C \subset \mathbb{U}$ alt kümesine hiperbolik yıldız biçimlidir denir $\Leftrightarrow \exists c_0 \in C$ öyleki $\forall p \in C$ noktası için c_0 ile p yi birleştiren hiperbolik doğru parçası C de kalır.

Tanım 21: $C \subset \mathbb{U}$ alt kümesine hiperbolik konveks küme adı verilir $\Leftrightarrow$ $p, q \in C$ keyfi olmak üzere p ve q yu birleştiren hiperbolik doğru parçası C dedir.

Not: $C \subset \mathbb{U}$ hiperbolik konveks ise hiperbolik yıldız biçimlidir.

Sonuç 7: $A \subset \mathbb{U}$ bir n-kenarlı hiperbolik yıldız biçimli poligon ve iç açıları $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ olsun. Bu takdirde;

$$\mu(A) = (n-2)\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_n$$

dir.

İspat: A nın köşeleri $A_1, A_2, \cdots, A_n$ ve O da A nın bir elemanı öyleki $OA_1, OA_2, \cdots, OA_n$ hiperbolik doğru parçaları A dadır. $OA_1A_2, OA_2A_3, \cdots, OA_nA_1$ üçgenlerine Teorem 15 i uygularsak istenilen elde edilir.

2.3. Fuchsian Gruplar

Tanım 22: $PSL(2,\mathbb{R})$ nin her bir ayrık alt grubuna bir Fuchsian grup adı verilir.

Örnek 1:

$$\Gamma := \left\{ T : z \to \frac{az+b}{cz+d},\ a,b,c,d \in \mathbb{Z}, ad-bc=1 \right\}$$

Modüler grubu $PSL(2,\mathbb{R})$ nin ayrık bir alt grubudur. Dolayısıyla da bir Fuchsian gruptur.

Tanım 23: Y bir topolojik uzay ve G de Y nin homeomorfizmlerinin bir grubu olsun. G Y üzerinde düzenli süreksiz (properly discontinuous) hareket eder diyeceğiz $\Leftrightarrow$ Y nin her bir y noktası bir V komşuluğuna sahiptir öyleki $g(V) \cap V \neq \varnothing$ ise, bu takdirde g(y)=y dir.

Önerme 6: $w \subset \mathbb{U}$ ve $K \subset \mathbb{U}$ kompakt olsun. Bu takdirde $E = \{ T \in PSL(2,\mathbb{R}) \mid T(w) \in K \}$ kompakttır.

İspat:

$$SL(2,\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R},\ ad-bc=1 \right\}$$

alalım. Bu takdirde;

$$PSL(2,\mathbb{R}) = \left\{ T : z \to \frac{az+b}{cz+d},\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}) \right\}$$

dir. Dolayısıyla

$$\begin{array}{rcl} q : SL(2,\mathbb{R}) & \longrightarrow & PSL(2,\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longrightarrow & T{:}z \to \frac{az+b}{cz+d} \end{array}$$

fonksiyonu süreklidir.

Şimdi

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}) : \frac{aw+b}{cw+d} \in K \right\}$$

kümesinin kompakt olduğunu gösterelim. Dolayısıyla $E_1 \subset \mathbb{R}^4$ ün kapalı ve sınırlı olduğunu gösterelim. $\beta : \underset{A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}{SL(2,\mathbb{R})} \xrightarrow{\quad} \underset{q(A).w}{\mathbb{U}}$ sürekli bir dönüşümdür. Buradan

$E_1 = \beta^{-1}(K)$ dır. K kompakt olduğundan kapalıdır. β da sürekli olduğundan E_1 kapalıdır. K sınırlı olduğundan $\exists M_1 \in \mathbb{R}$ öyleki her $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E_1$ için $\left|\frac{aw+b}{cw+d}\right| < M_1$ dir. Üstelik, $K \subset \mathbb{U}$ kompakt olduğundan $\exists M_2 > 0$ öyleki $\operatorname{Im}\frac{aw+b}{cw+d} \geq M_2$ dir. $ad-bc=1$ ve $\operatorname{Im}\left(\frac{aw+b}{cw+d}\right) = \frac{\operatorname{Im} w}{|cw+d|^2}$ olduğundan $|cw+d| \leq \sqrt{\frac{\operatorname{Im} w}{M_2}}$ ve böylece $|aw+b| \leq M_1\sqrt{\frac{\operatorname{Im} w}{M_2}}$ dir. Buradan da a,b,c,d sınırlıdır. Dolayısıyla E_1 sınırlıdır. Sonuç olarak E_1 kompakt ve böylece $E = \{T \in PSL(2,\mathbb{R}) \mid T(w) \in K\}$ kompakttır. ■

Sonuç 8: $w \subset \mathbb{U}$ ve $K \subset \mathbb{U}$ kompakt olsun. Bu takdirde eğer Λ bir Fuchsian grup ise $A = \{T \in \Lambda \mid T(w) \in K\}$ sonludur.

İspat: Önerme 6 dan dolayı A kümesi kompakttır. A Λ Fuchsian grubunun bir alt kümesi olduğundan ayrıktır. Buradan A sonlu olmak zorundadır (Ω bir G topolojik grubunun ayrık bir alt grubu ve $K_0 \subset G$ kompakt ise $\Omega \cap K_0$ sonludur). ■

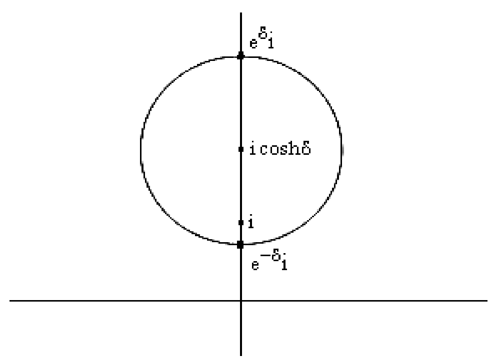
Not: Bundan önce z,w$\in \mathbb{U}$ olmak üzere $\rho(z,w)$ nin z ile w arasındaki hiperbolik uzaklık olduğunu ve ayrıca $(\mathbb{U},\rho)$ nun bir metrik uzay olduğunu ifade etmiştik. ρ hiperbolik uzaklığı hiperbolik metrikle Öklid metriğinde farklı olmasına rağmen ispatsız olarak aşağıdaki ifadeyi verebiliriz.

Teorem 16: Hiperbolik metrikle indirgenen topoloji Öklid metrik tarafından üretilen topoloji ile aynıdır [2].■

Örneğin, i merkezli δ yarıçaplı hiperbolik çember $(0,\cosh\delta)$ merkezli $\sinh\delta$ yarıçaplı bir Öklid çemberidir. Bu çember C olsun. $C=\{z\in\mathbb{U} \mid \rho(z,i)=\delta\}$ dır.

$$C=\left\{z\in\mathbb{U} \mid \sinh^2\left(\frac{1}{2}\rho(z,i)\right)=\sinh^2\left(\frac{1}{2}\delta\right)\right\}=\left\{z\in\mathbb{U} \mid \sinh^2\left(\frac{1}{2}\delta\right)=\frac{|z-i|}{4y}\right\}$$
$$=\left\{z\in\mathbb{U} \mid |z-i|^2=4y\sinh^2\left(\frac{1}{2}\delta\right)\right\}=\left\{z\in\mathbb{U} \mid x^2+y^2+1=2y\left(2\sinh^2\left(\frac{1}{2}\delta\right)+1\right)=2y\cosh\delta\right\}$$
$$=\left\{z\in\mathbb{U} \mid x^2+(y-\cosh\delta)^2=\cosh^2\delta-1=\sinh^2\delta\right\}$$

ki bu $(0,\cosh\delta)$ =$i\cosh\delta$ merkezli $\sinh\delta$ yarıçaplı Öklid çemberidir.



Şekil 8. Teorem 16 için yardımcı şekil

Teorem 17:

(i) Λ $PSL(2,\mathbb{R})$ nin bir alt grubu olsun. Bu takdirde Λ bir Fuchsian gruptur $\Leftrightarrow$ Λ $\mathbb{U}$ üst yarı düzleminde düzenli süreksiz olarak hareket eder.

(ii) Λ bir Fuchsian grup ve p$\in\mathbb{U}$ elemanı $\Lambda\setminus\{I\}$ nın en az bir elemanı tarafından sabit bırakılsın. Bu takdirde p nin bir W komşuluğu vardır öyleki $\Lambda\setminus\{I\}$ nın hiçbir elemanı W da p den başka sabit noktaya sahip değildir (Kısaca $\Lambda\setminus\{I\}$ nın $\mathbb{U}$ daki sabit noktalarının kümesi ayrıktır).

İspat:

(i) **"$\Rightarrow$"**: İlk önce Λ Fuchsian grubunun $\mathbb{U}$ üzerinde düzenli süreksiz olarak hareket ettiğini gösterelim. $z_0 \in \mathbb{U}$ ve $\overline{B_\varepsilon(z_0)}$ z_0 merkezli ε-yarıçaplı kapalı bir hiperbolik daire olsun. Hiperbolik metrikle indirgenen topoloji ile Öklid metrikle indirgenen topoloji aynı olduğundan $\overline{B_\varepsilon(z_0)}$ kompakttır. Sonuç 8. den $\{T \in \Lambda \mid T(z_0) \in \overline{B_\varepsilon(z_0)}\}$ sonludur. Böylece $\exists \delta : 0 < \delta < \varepsilon$ öyleki $\overline{B_\delta(z_0)}$, z_0 ın Λ yörüngesinde z_0 dan başka nokta ihtiva etmez. $V = \overline{B_{\delta/2}(z_0)}$ alalım. Şayet bir $S \in \Lambda$ için $V \cap SV \neq \varnothing$ ise $\exists z \in V$ öyleki $S(z) = V$ dir. Böylece $\rho(z, z_0) < \delta/2$, $\rho(S(z), z_0) < \delta/2$ ve buradan

$$\rho(z_0, S(z_0)) \leq \rho(z_0, S(z)) + \rho(S(z), S(z_0)) = \rho(z_0, S(z)) + \rho(z, z_0) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

dır. $S(z_0) \in \overline{B_\delta(z_0)}$ olduğundan ve δ nın tanımından $S(z_0) = z_0$ dır. Dolayısıyla Λ $\mathbb{U}$ üzerinde düzenli süreksiz olarak hareket eder.

Şimdi (i) in tersini ispatlamadan önce (ii) nin ispatını verelim.

(ii) $p \in \mathbb{U}$ $I \neq S \in \Lambda$ tarafından sabit bırakılsın. Λ bir Fuchsian grup olduğundan $\mathbb{U}$ üzerinde düzenli süreksiz olarak hareket eder. Dolayısıyla p nin bir W komşuluğu vardır öyleki $W \cap S(W) \neq \varnothing$ olup p=S(P) dir. Şayet $q \in W$ $I \neq T \in \Lambda$ tarafından sabit bırakılırsa bu takdirde $T(W) \cap W \neq \varnothing$ dir. Buradan T(p)=p, $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ dir. Dolayısıyla $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ nin $\mathbb{U}$ da en fazla bir sabit noktası olacağından q=p olmak zorundadır.

(i) **"$\Leftarrow$"**: Farzedelimki Λ bir Fuchsian grup olmasın. $s \in \mathbb{U}$ noktası $\Lambda \backslash \{I\}$ nın hiçbir elemanı tarafından sabit bırakılmasın. Λ ayrık olmadığından $\exists \{T_k\} \subset \Lambda$ farklı noktaların dizisi öyleki $T_k \to I$, $k \to \infty$ dır. Böylece $T_k(s) \to s$ dir. S $\Lambda \backslash \{I\}$ nın hiçbir elemanı tarafından sabit bırakılmadığından $\{T_k(s)\}$ farklı noktaların bir dizisidir. Böylece s nin her komşuluğu Λ_s (s nin yörüngesi) nin s den farklı birçok elemanını ihtiva eder. Dolayısıyla Λ $\mathbb{U}$ üzerinde düzenli süreksiz olarak hareket etmez. Sonuç olarak Λ ayrık olmak zorundadır.

Sonuç 9: $\Lambda \leq PSL(2,\mathbb{R})$ olsun. Bu takdirde Λ bir Fuchsian gruptur $\Leftrightarrow$ $\forall z \in \mathbb{U}$ için Λ_z yörüngesi $\mathbb{U}$ nun ayrık bir alt kümesidir.

İspat: "$\Leftarrow$": Λ_z $\mathbb{U}$ nun ayrık bir alt kümesi olsun. Bu takdirde $\exists \varepsilon>0$ öyleki $B_\varepsilon(z)$ açık hiperbolik dairesi Λ_z nin z den başka bir noktasını ihtiva etmez. Böylece $V \subseteq B_{\varepsilon/2}(z)$ alalım. Bu takdirde gösterelim ki $S \in \Lambda$ için $V \cap SV \neq \varnothing$ ise $S(z)=z$ dir. Dolayısıyla Teorem 17. den Λ bir Fuchsian gruptur.
"$\Rightarrow$": Λ bir Fuchsian grup ise bu takdirde Λ $\mathbb{U}$ üzerinde düzenli süreksiz olarak hareket eder ve böylece Λ_z $\mathbb{U}$ da ayrıktır.

Sonuç 10: $z \in \mathbb{U}$, $\{T_n\}$ Λ Fuchsian grubunda farklı noktaların bir dizisi olsun. Şayet $\{T_n(z)\}$ $\alpha \in \mathbb{C}_\infty$ gibi bir limite sahipse $\alpha \in \mathbb{R}_\infty$ dur. Bütün mümkün limit noktalarının kümesine Λ nın limit kümesi adı verilir ve $L(\Lambda)$ ile gösterilir.

Örnek 2:

1) Γ Modular grup ise $L(\Gamma)=\mathbb{R}_\infty := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dur.

2) Şayet Λ $z \to 2z$ dönüşümüyle üretilen devirli grup ise $L(\Lambda)=\{0,\infty\}$ dur.

Not: Genelde bir ayrık grubun düzenli süreksiz olarak hareket edip etmediği, hareket ettiği uzaya bağlıdır. Mesela, Modular grup $\mathbb{R}_\infty$ üzerinde düzenli süreksiz olarak hareket etmez; çünkü 0 ın yörüngesi Γ_0 $\mathbb{Q}_\infty := \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ kümesidir. Bu küme $\mathbb{R}_\infty$ da yoğundur. Benzer şekilde, $\mathbb{Z}[i] = \{m + ni \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ Gauss tamsayılar halkası olmak üzere

$$PSL(2,\mathbb{Z}[i]) = \left\{ T : T(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ a,b,c,d \in \mathbb{Z}[i],\ ad\text{-}bc=1 \right\}$$

Piccard Modüler grubu $PSL(2,\mathbb{C})$ nin bir ayrık alt grubudur. Fakat bu grubun $\mathbb{C}_\infty$ üzerindeki hareketi düzenli süreksiz değildir. Çünkü 0 ın yörüngesi $\{r + si \mid r, s \in \mathbb{Q}\} \cup \{\infty\}$ dir. Bu küme $\mathbb{C}_\infty$ da yoğundur.

2.4. Fuchsian Grupların Cebirsel Özellikleri

Önerme 7: Λ, birimden farklı bütün elemanları aynı sabit nokta kümesine sahip olan bir Fuchsian grup olsun. Bu takdirde Λ devirlidir.

İspat: Farzedelimki $S \in \Lambda$ hiperbolik olsun ve sabit nokta kümesi 0 ve ∞ dan oluşsun (Aksi halde bir eşlenik grup seçebilirdik. Yani, S nin sabit nokta kümesi $\{\alpha, \beta\}$ olmak üzere Önerme 2 (ii) den $\exists T \in PSL(2,\mathbb{R})$ öyleki $T(\alpha)=0, T(\beta)=\infty$ dur. Λ yerine $T\Lambda T^{-1}$ eşlenik grubunu alırsak bu eşlenik grubun sabit nokta kümesi $\{0,\infty\}$ olur ($T\Lambda T^{-1}(0)=0,\ T\Lambda T^{-1}(\infty)=\infty$).
Λ Fuchsian olduğundan $T\Lambda T^{-1}$ da Fuchsian gruptur). Bu durumda Λ nın elemanları $z \to \lambda z,\ \lambda \neq 0,1$ şeklindedir. Λ $H=\{z \to \lambda z \mid \lambda > 0\}$ ın ayrık bir alt grubudur. H bir topolojik grup olarak $\mathbb{R}_+^* = (\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}, \bullet)$ a izomorftur. $\mathbb{R}_+^*$ da bir topolojik grup olarak $\mathbb{R}$ ye izomorftur. Buradaki izomorfizma $x \to \ln x$ dir. $\mathbb{R}$ nin aşikâr olmayan her ayrık alt grubu sonsuz devirlidir. Dolayısıyla Λ nın resmi sonlu devirli olur. Buradan Λ sonlu devirlidir.

$S \in \Lambda$ parabolik olsun. farzedelimki S nin sabit noktası ∞ olsun. Bu duru Λ nın elemanları $z \to z+\lambda,\ 0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ şeklindedir. $H_0=\{z \to z+\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ grubu $(\mathbb{R},+)$ ya izomorftur. Λ H_0 ın ayrık bir alt grubudur. Dolayısıyla Λ nın resmi $\mathbb{R}$ nin bir ayrık alt grubuna izomorf olur. Bu grup devirli olduğundan Λ da sonlu devirlidir.

Son olarak $\Lambda \setminus \{I\}$ nın her bir elemanı eliptik ve $\{i,-i\}$ de sabit nokta kümesi olsun. Bu sabit nokta kümesine sahip her bir elemanın

$$\frac{W(z)-i}{W(z)+i} = e^{i\theta}\left(\frac{z-i}{z+i}\right),\ (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

formunda olduğunu biliyoruz. Buradaki W eliptik elemanını W_θ ile gösterirsek $\{W_\theta \mid 0 \leq \theta < 2\pi\}$ $S^1 = \{|z|=1 \mid z \in \mathbb{C}\} = \{e^{i\theta} \mid 0 \leq \theta < 2\pi\}$ çemberine topolojik grup olarak izomorftur. Buradan $\Lambda \subset \{W_\theta \mid 0 \leq \theta < 2\pi\}$ dir. O halde Λ S^1 in bir ayrık alt grubuna izomorftur. Dolayısıyla Λ sonlu devirlidir. ■

Önerme 8: Bir Λ Fuchsian grubunun her bir eliptik elemanı sonlu mertebelidir.

İspat: $S\in\Lambda$ keyfi bir eliptik eleman olsun. $\langle S\rangle$ bir devirli gruptur ve bütün elemanları aynı sabit nokta kümesine sahiptir. Önerme 7. den $\langle S\rangle$ sonlu devirlidir. Dolayısıyla $\exists m\in\mathbb{N}:\left|\langle S\rangle\right|=m$ dir. Buradan $S^m=I$ dır. Yani S sonlu mertebelidir. ■

Önerme 9: Her Abel Fuchsian grup devirlidir.

İspat: Λ Abel Fuchsian grup olsun. Dolayısıyla $\forall A,B\in\Lambda$ için AB=BA dır. Buradan Λ nın birimden farklı her Λ elemanı aynı sabit nokta kümesine sahiptir. Dolayısıyla Önerme 7'den Λ devirlidir. ■

Önerme 10: Λ devirli olmayan bir Fuchsian grup olsun. Bu takdirde $N_{PSL(2,\mathbb{R})}(\Lambda)=\{S\in PSL(2,\mathbb{R})\mid S\Lambda=\Lambda S\}$, Λ nın $PSL(2,\mathbb{R})$ deki normalliyeni, bir Fuchsian gruptur.

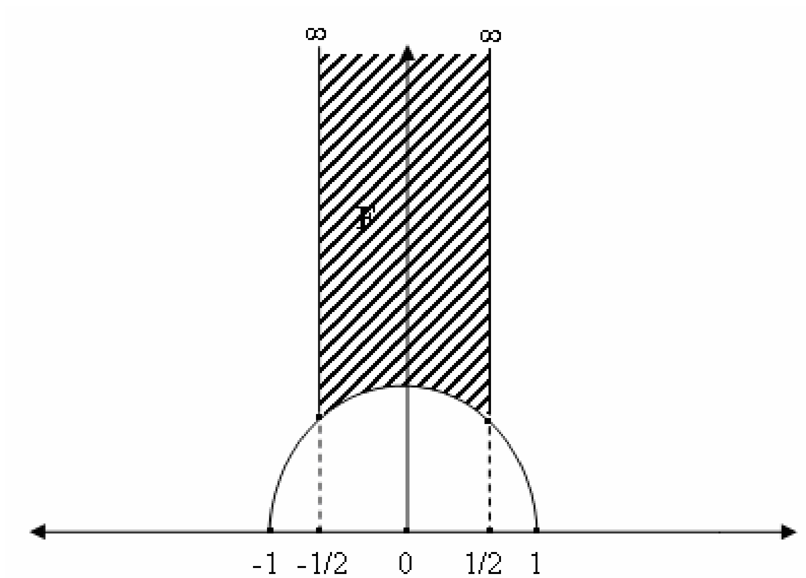
İspat: Farzedelimki Λ nın $PSL(2,\mathbb{R})$ deki normalliyeni bir Fuchsian grup olmasın. Dolayısıyla farklı noktaların sonsuz bir $\{T_n\}\subset N_{PSL(2,\mathbb{R})}(\Lambda)$ dizisi vardır öyleki $T_n\to I$ dır. Böylece $S\in\Lambda\setminus\{I\}$ ise $T_nST_n^{-1}\to S$ dir. Λ ayrık olduğundan $\exists m\in\mathbb{N}$ öyleki $\forall n>m$ için $T_nST_n^{-1}=S$ dir. $\forall n>m$ için T_n ile S aynı sabit nokta kümesine sahiptir. Λ devirli olmadığından Λ abel değildir. Dolayısıyla $\exists S_1,S_2\in\Lambda$ öyleki $S_1S_2\neq S_2S_1$ dir. Buradan S_1 ve S_2 farklı sabit nokta kümelerine sahiptir. Yukarıda S yerine S_1 koyalım. Bu durumda $\exists m_0\in\mathbb{N}$ öyleki $\forall n>m$ için T_n ile S_1 aynı sabit nokta kümesine sahiptir. S yerine S_2 koyarsak $\exists m_1\in\mathbb{N}$ öyleki $\forall n>m_1$ için T_n ile S_2 aynı sabit nokta kümesine sahiptir. $n>\max\{m_0,m_1\}$ alırsak T_n ile S_1 ve S_2 aynı sabit nokta kümesine sahiptir. Oysa S_1 ve S_2 nin sabit nokta kümelerini farklı almıştık. Bu bir çelişkidir. Buradan $N_{PSL(2,\mathbb{R})}(\Lambda)$ bir Fuchsian gruptur. ■

Teorem 18: Bir $\Lambda\subset PSL(2,\mathbb{R})$ Fuchsian grubunun normalliyeni ayrıktır şayet Λ devirli değil ise.

İspat: Λ devirli değilse Λ abel değildir. Bu demektir ki $\exists g_1, g_2 \in \Lambda : g_1 g_2 \neq g_2 g_1$ dir. Böylece g_1 in sabit nokta kümesi g_2 in sabit nokta kümesinden farklıdır. g_i, (i=1,2) elemanının normalliyeni g_i ile aynı sabit nokta kümeli elemanlar ile birim elemandan oluşur. (g_1, g_2) çiftinin merkezleyeni g_1 ve g_2 nin normalleyenlerinin arakesiti olduğundan $\{e\}$ den oluşur. Böylece $\{e\}$ N(Λ) da açıktır. Dolayısıyla N(Λ) ayrıktır.■

2.5. Temel Bölgeler

Tanım 24: $\Lambda \subset PSL(2,\mathbb{R})$ bir Fuchsian grup olsun. $F \subset \mathbb{C}_\infty$ kapalı kümesine Λ için bir temel bölgedir denir :$\Leftrightarrow$ **i)** $\bigcup_{T\in\Gamma} T(F) = \mathbb{U}$, **ii)** $\overset{\circ}{F} \cap T(\overset{\circ}{F}) = \varnothing,\ T \in \Lambda \setminus \{I\}$.

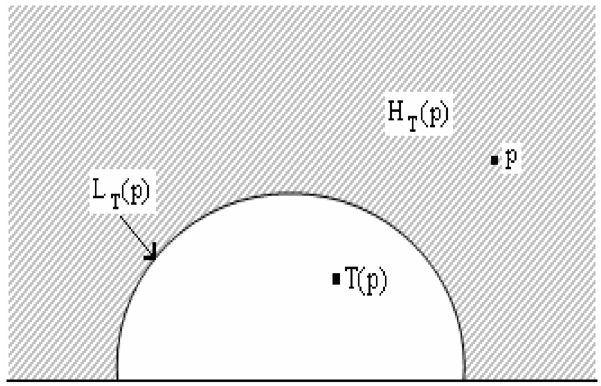


Şekil 9. Λ için F Temel Bölgesi

Tanım 25: Λ bir Fuchsian grup ve $p \in \mathbb{U}$ $\Lambda \setminus \{I\}$ nın hiçbir elemanı tarafından sabit bırakılmasın. Bu takdirde

$$\begin{aligned} D_p(\Lambda) &= \{z \in \mathbb{U} \mid \rho(z,p) \leq \rho(z,T(p)),\ \forall T \in \Lambda\} \\ &= \{z \in \mathbb{U} \mid \rho(z,p) \leq \rho(T(z),p),\ \forall T \in \Lambda\} \end{aligned}$$

bölgesine bir Dirichlet bölgesi adı verilir.



Şekil 10. Dirichlet Bölgesi

$$H_T(p) = \{z \in \mathbb{U} \mid \rho(z,p) \le \rho(z,T(p))\} \supset D_p(\Lambda)$$
$$L_T(p) = \{z \in \mathbb{U} \mid \rho(z,p) = \rho(z,T(p))\}$$
$$D_p(\Lambda) = \bigcap_{T \in \Lambda \setminus \{I\}} H_T(p)$$

Sonuç 11: $z \in H_g(p) \Leftrightarrow p \in H_{g^{-1}}(z)$.

İspat: $z \in H_g(p) \Leftrightarrow \rho(z,p) \le \rho(z,g(p)) \Leftrightarrow \rho(g^{-1}(z), g^{-1}(p)) \le \rho(g^{-1}(z),p)$

$$\Leftrightarrow \rho(p,z) = \rho(z,p) \le \rho(p,g^{-1}(z)) \Leftrightarrow p \in H_{g^{-1}}(z) \text{ .}\blacksquare$$

Önerme 11: $D_p(\Lambda)$ Λ için bir konveks temel bölgedir.

İspat: Her bir $H_g(p)$ konveks olduğundan ve p yi ihtiva ettiğinden $D_p(\Lambda)$ konveks bir bölgedir. İlk önce $\overset{\circ}{D}_p(\Lambda) \cap T(\overset{\circ}{D}_p(\Lambda)) = \varnothing,\ \forall T \in \Lambda \setminus \{I\}$ olduğunu gösterelim. Aksini farzedelim. Yani,

$$\exists T_0 \in \Lambda \setminus \{I\} \text{ öyleki } \overset{\circ}{D}_p(\Lambda) \cap T_0(\overset{\circ}{D}_p(\Lambda)) \ne \varnothing$$

olsun. Bu durumda;

$$\overset{\circ}{D}_p(\Lambda) = \{z \in \mathbb{U} \mid \rho(z,p) < \rho(T(z),p)\},\ \forall T \in \Lambda \setminus \{I\}$$

olduğundan $z_0 \in \overset{\circ}{D_p}(\Lambda)$ olmak üzere $T_0(z_0) \in \overset{\circ}{D_p}(\Lambda)$ alabiliriz. Dolayısıyla buradan

$$\rho(T_0(z_0), p) < \rho(T(T_0(z_0)), p), \ \forall T \in \Lambda \backslash \{I\}$$

ve böylece $\rho(z_0, p) < \rho(T_0(z_0), p)$, $\forall T \in \Lambda \backslash \{I\}$ dir. $T = T_0^{-1}$ alalım. Bu takdirde $\rho(z_0, p) < \rho(T_0(z_0), p) < \rho(z_0, p)$ olur. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $\forall T \in \Lambda \backslash \{I\}$ için $\overset{\circ}{D_p}(\Lambda) \cap T(\overset{\circ}{D_p}(\Lambda)) = \varnothing$ dur.

Son olarak $\bigcup_{T \in \Gamma} T(D_p(\Lambda)) = \mathbb{U}$ olduğunu gösterelim. $\bigcup_{T \in \Gamma} T(D_p(\Lambda)) \subset \mathbb{U}$ olduğu açıktır. $z \in \mathbb{U}$ keyfi alalım. Farzedelimki $g_0(z)$, z nin yörüngesinin bir elemanı, p noktasından minimum uzaklıkta olsun. Bu takdirde

$$\rho(g_0 z, p) \le \rho(g g_0 z, p), \ g \in \Lambda \Rightarrow g_0 z \in D_p(\Lambda) \Rightarrow z \in g_0^{-1}(D_p(\Lambda))$$

$$\Rightarrow z \in \bigcup_{T \in \Gamma} T(D_p(\Lambda)) \Rightarrow \mathbb{U} = \bigcup_{T \in \Gamma} T(D_p(\Lambda))$$

olur. Böylece $D_p(\Lambda)$, Λ için bir temel bölgedir.■

Şimdi,

$$\Gamma := \left\{ T : z \to \frac{az+b}{cz+d} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \ ad\text{-}bc=1 \right\}$$

Modüler grubu için (aynı zamanda Fuchsian grubudur) bir temel bölge bulalım.

Lemma 17: $\mathbb{U}$ üst yarı düzleminde bir z sabit noktası için $|cz+d| \le 1$ olan sonlu sayıda (c,d) tamsayı çifti vardır.

İspat: (c,d) tamsayı çifti $|cz+d| \le 1$ şartını sağlasın. Bu takdirde $|cz+d|^2 = (cx+d)^2 + c^2y^2$, böylece de $c^2y^2 \le (cx+d)^2 + c^2y^2 \le 1$. Bu durumda $|c| \le \frac{1}{y}$ dir. Bu şarta uyan sonlu sayıda c vardır. c nin bu şarttaki herhangi bir değeri için $(cx+d)^2 + c^2y^2 \le 1$ ifadesi bize ancak sonlu sayıda d olduğunu gösterir.■

Tanım 26: z = x+iy$\in \mathbb{U}$ olmak üzere y = Imz ye z nin yüksekliği diyeceğiz.

Lemma 18: $z\in \mathbb{U}$ keyfi olsun. $\{T(z) \mid T\in \Gamma\}$ kümesindeki elemanların yüksekliklerinden oluşsan küme $Y := \{y_T \mid T\in\Gamma$ ve y_T T(z) nin yüksekliği$\}$ olsun. Bu yüksekliklerden ancak sonlu tanesi z nin yüksekliğinden büyük olabilir.

İspat: z = x+iy, yük(z) = y. $T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}=\dfrac{a(x+iy)+b}{c(x+iy)+d}=\dfrac{(ax+b)+iya}{(cx+d)+iyc}$ dir. Buradan $T(z)=\dfrac{\left[(ax+b)+iya\right]\left[(cx+d)+iyc\right]}{|cz+d|^2}=\dfrac{\mathrm{Reel}+i(ad-bc)y}{|cz+d|^2}$. Yani sonuç olarak

$$\operatorname{Im}T(z)=\frac{\operatorname{Im}z}{|cz+d|^2},\quad \operatorname{Im}T(z)\ge \operatorname{Im}z \Leftrightarrow |cz+d|^2\le 1.$$

Böylece $|cz+d|\le 1$. Lemma 1 den $|cz+d|\le 1$ şartını sağlayan (c,d) tamsayı çiftlerinin sayısı sonludur. Bu ise ancak sonlu tane yüksekliğin z nin yüksekliğinden büyük olduğunu gösterir.■

Teorem 19: $D=\left\{z\in\mathbb{U} \mid |\operatorname{Re}z|\le\dfrac{1}{2} \text{ ve } |z|\ge 1\right\}$ kümesi Γ Modüler grubu için bir temel bölgedir.

İspat: $D_1=\left\{z\in\mathbb{U} \mid |\operatorname{Re}z|\le\dfrac{1}{2} \text{ ve } |cz+d|\ge 1\right\}$ (c=d=0 için (c,d) tamsayı çifti hariç) c=1 ve d=0 $D_1\subseteq D$ elde edilir. Şimdi $z\in D$ keyfi olsun. Bu takdirde

$$|cz+d|^2=(cx+d)^2+c^2y^2=c^2(x^2+y^2)+2cdx+d^2>c^2-cd+d^2\ge 1,$$ (c=d=0 için (c,d) tamsayı çifti hariç). Buradan $z\in D_1$ dir. Böylece D nin kapanışı her bir yörüngeden en az bir nokta ihtiva eder. Şimdi gösterelim ki Γ altında eşdeğer olan noktalar D nin kapanışındadır. Farzedelimki $z,z'\in D$ ve $z \underset{\Gamma}{\sim} z'$ için $z'=Lz$. Bu takdirde

$$\operatorname{Im}z'=\operatorname{Im}Lz\Rightarrow 1=|cz+d|=(cx+d)^2+c^2y^2\ge c^2+d^2-cd\ge 1.$$

Böylece $c=0, d=\mp 1$ ya da $d=0, c=\mp 1$ dir. Buradan 1. durumda L = T , T:z→z+1 ve ikinci durumda ise L = S, S:$z\to -\dfrac{1}{z}$ dir. Bu ise ispatı bitirir.■

Tanım 27: F bir Λ Fuchsian grubu için temel bölge olsun. Bu temel bölgeye lokal sonludur denir $\Leftrightarrow$ her bir $a\in F$ noktası bir V(a) komşuluğuna sahiptir öyleki ancak sonlu sayıda $T\in\Lambda$ için $V(a)\cap T(F)\neq\varnothing$ dir.

Teorem 20: Bir Dirichlet Bölgesi lokal sonludur.

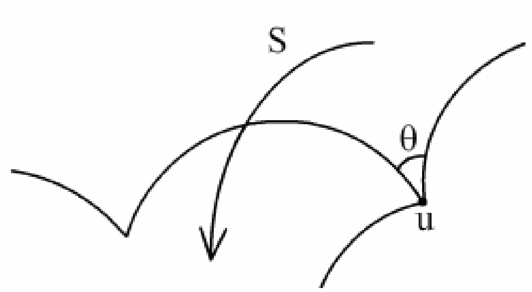
İspat: $F=D_p(\Lambda)$ ve p $\Lambda\setminus\{I\}$ nın hiçbir elemanı tarafından sabit bırakılmasın. $a\in F$ ve K da a nın kompakt bir komşuluğu olsun. farzedelimki $K\cap T_i(F)\neq\varnothing$ olacak şekilde sonsuz sayıda birbirinden farklı $T_1, T_2, \ldots$ elemanları mevcuttur. $G:=\sup\limits_{z\in K}\rho(p,z)$ olsun. Bu takdirde K sınırlı olduğundan ρ sonludur. $w_j\in K\cap T_j(F)$ olsun. Buradan $z_j\in F$ için $w_j=T_j(z_j)$ ve böylece $z_j\in D_p(\Lambda)$ olmak üzere

$$\rho(p,T_j(p))\leq\rho(p,w_j)+\rho(w_j,T_j(p))=\rho(p,w_j)+\rho(z_j,p)\leq\rho(p,w_j)+\rho(w_j,p)\leq 2\delta$$

dir. Buradan $T_1(p), T_2(p), \ldots$ noktalarının sonsuz kümesi p merkezli 2δ yarıçaplı H-dairesinin içine düşer. Bu bir çelişkidir. Çünkü Sonuç 8. den ancak sonlu sayıda T için bu sağlanır.■

Tanım 28: F Λ Fuchsian grubu için bir Dirichlet bölgesi ve u ve v de F nin iki köşesi olsun. Bu takdirde T(u)=v olacak şekilde bir $T\in\Lambda$ dönüşümü varsa u ve v köşelerine eşdeğerdir (veya kongrüdür) denir. Bu eşdeğer olma F nin köşeleri üzerinde bir eşdeğerlik bağıntısıdır. Eşdeğerlik sınıflarına devreler (cycles) adı verilir. Şayet u bir S eliptik elemanı tarafından sabit bırakılırsa v de TST^{-1} elemanı tarafından sabit bırakılır. Böylece şayet bir köşe bir eliptik eleman tarafından sabit bırakılırsa bu devirdeki bütün köşeler de eliptik elemanlar tarafından sabit bırakılır. Böyle bir devreye eliptik devre denir ve bu devrenin köşelerine de eliptik köşeler diyeceğiz.

F Dirichlet bölgesi bir temel bölge olduğundan $\mathbb{U}$ üst yarı düzlemin her w noktası Λ nın bir S' elemanı (eliptik) tarafından sabit bırakılıyorsa bu nokta, bir $T\in\Lambda$ için, T(F) nin sınırındadır. Böylece $u=T^{-1}(w)$ noktası F nin sınırındadır ve $S=T^{-1}S'T$ eliptik elemanı tarafından sabit bırakılır. Böylece S sonlu bir k mertebesine sahiptir. farzedelimki $k\geq 3$ olsun. S bir hiperbolik izometri olduğundan ve H-doğrularını H-doğrularına resmettiğinden u F nin bir köşesi olmak zorundadır ve açısı θ en fazla $2\pi/k$ kadardır.



Şekil 11. Tanım 28 için yardımcı şekil

F konveks (hiperbolik olarak) bölgesi H-doğrularının bir birleşimi tarafından sınırlanır. F nin bu H-doğruları ile arakesiti ya bir tek nokta veya bir H-doğru parçasıdır. Bu parçalara F nin kenarları adı verilir.

Şayet S nin mertebesi 2 ise S nin sabit noktası F nin bir kenarının içinde olur. Bu durumda S bu kenarın bu sabit nokta ile ayrılmış iki parçasını birbiri üzerine resmeder. Böyle eliptik sabit noktalarını F nin köşeleri olarak göz önüne alacağız. Bu köşelerdeki açılar π kadardır.

$PSL(2,\mathbb{R})$ nin trivial olmayan sonlu devirli alt grupları eliptik elemanlar tarafından üretilmiş alt gruplardır. Şayet $\mathbb{U}$ da bir noktanın Λ da trivial olmayan bir sabitleyeni mevcut ise bu takdirde bu sabitleyen Λ nın sonlu devirli bir alt grubudur. Bu sonlu devirli alt grup bir maksimal sonlu devirli alt gruptur.

Teorem 21: Λ bir Fuchsian grup ve F de Λ için bir temel bölge olsun. F nin eliptik devirleri ile trivial olmayan maksimal sonlu devirli alt gruplarının eşlenik sınıfları arasında birebir bir tekabül vardır.■

Örnek 3: Γ Modüler grup olsun. $F=\{z\in\mathbb{U} \mid |\mathrm{Re}\, z|\le 1/2 \text{ ve } |z|\ge 1\}$ Γ için bir Dirichlet bölgesidir. F nin köşeleri $z_3=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $w_3=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ve i dir.

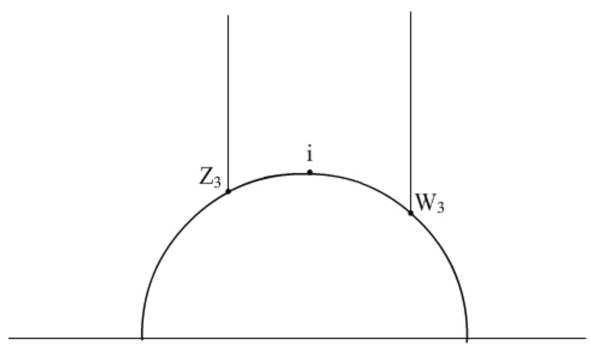
Bunlar sırasıyla $z\to(-z-1)/z$, $z\to(z-1)/z$, $z\to 1/z$ dönüşümlerinin ürettiği devirli alt gruplar tarafından sabit bırakılırlar.

Tanım 29: Λ bir Fuchsian grup ise Λ nın maksimal sonlu alt gruplarının mertebeleri Λ nın peryodları olarak adlandırılır. Her bir peryod o mertebeden Λ nın maksimal sonlu alt gruplarının eşlenik sınıfları kadar tekrar eder. Böylece Modüler grup 2 ve 3 peryodlarına sahiptir.

Not: Bir parabolik eleman sonsuz mertebeden bir eliptik eleman olarak düşünülür.

Tanım 30: Λ bir Fuchsian grup ve F Λ için bir Dirichlet bölgesi olsun. s F nin bir kenarı olsun. $T \in \Lambda \setminus \{I\}$, T(s) F nin bir kenarı ise bu takdirde s ve T(s) ye eşlenik kenarlar diyeceğiz. T(s) aynı zamanda T(F) nin bir kenarıdır. Böylece $T(s) \subseteq F \cap T(F)$ dir. T(F) F nin bir komşu yüzüdür ve gösterilebilir ki $T(s) = F \cap T(F)$ dir.

Örnek 4: Γ Modüler grubu için elde ettiğimiz temel bölgenin iki dik düşey kenarları $z \to z+1$ dönüşümü ile eşleniktir. z_3 ve w_3 arasında kalan birim çember $z \to -1/z$ eliptik elemanı ile kendi üzerine resmedilir.



Şekil 12. Örnek 4 için yardımcı şekil

Teorem 22: Λ bir Fuchsian grup ve F Λ için bir Dirichlet bölgesi olsun. $\{T_i\}$ ile F nin kenarlarını eşleştiren Λ nın bir alt kümesi ise $\{T_i\}$ kümesi Λ yı üretir .

İspat: $\Delta = \langle T_i \rangle$ olsun. $\Delta \subset \Lambda$ olduğu açıktır. $\Delta = \Lambda$ olduğunu gösterelim. $s_1 \in \Delta$ ve $s_2(F)$ $s_1(F)$ nin bir komşu yüzü olsun. $s_1^{-1}s_2(F)$ F nin bir komşu yüzüdür. Böylece bir $T_k \in \{T_i\}$ için $s_1^{-1}s_2 = T_k$ yani $s_2 = s_1 T_k$ dır. $s_2 \in \Delta$ dır. Şayet $s_3(F)$ $s_1(F)$ yi bir v köşesinde keserse bu takdirde v köşesini köşe kabul eden ancak sonlu sayıda yüz vardır. Buradan $s_3 \in \Delta$ elde edilir. Böylece eğer $X=\bigcup_{s\in\Lambda} s(F)$, $Y=\bigcup_{s\in\Gamma\setminus\Lambda} s(F)$ ise $X\cap Y=\varnothing$ dir. $X\cup Y=\mathbb{U}$ dur. Buradan X ve Y nin $\mathbb{U}$ nun kapalı alt kümeleri olduğunu gösterirsek bu takdirde $\mathbb{U}$ bağlantılı ve X≠∅ olduğundan X=$\mathbb{U}$ ve Y=∅ elde edilir. Buradan $\Delta=\Lambda$ elde edilir.

Şimdi $\bigcup V_j(F)$ herhangi bir birleşiminin kapalı olduğunu gösterelim. farzedelimki $\bigcup V_j(F)$ noktalarının $\{z_i\}$ sonsuz dizisi bir $\ell\in\mathbb{U}$ limitine yaklaşsın. Bir A∈ Λ için $\ell\in A(F)$ dir. ℓ nin bir N komşuluğu vardır öyleki ancak sonlu sayıda $V_j(F)$ ile kesişir. Böylece bu sonlu ailenin bir yüzü, mesela $V_m(F)$, $\{z_i\}$ dizisinin ℓ ye yakınsayan bir alt dizisini ihtiva eder. $V_m(F)$ kapalı olduğundan $\ell\in V_m(F)$ dir. Böylece $\bigcup V_i(F)$ kapalıdır. Özellikle X ve Y kapalıdır.■

$C\subset PSL(2,\mathbb{R})$ herhangi bir grup olsun. Biliyoruz ki C abeldir ⇔ C devirlidir. Bu durumda C nin birim olmayan bütün elemanları aynı sabit nokta kümesine sahiptir ve bunlar aynı tiptendir. (Eliptik, parabolik veya hiperbolik gibi). Bir Λ Fuchsian grubunun parabolik alt grupları yukarıdaki aşikar olmayan $C\leq\Lambda$ devirli alt grupları olarak tanımlanır ve bu özelliğe göre bunlar maksimaldir.

Λ nın parabolik sınıf sayısı (s) Λ nın parabolik alt gruplarının eşlenik sınıflarının sayısıdır.

Lemma 19: Γ Modüler grubu $\mathbb{Q}_\infty$ üzerinde transitiftir.

İspat: $r=\frac{a}{c}\in\mathbb{Q}$ keyfi öyleki (a,c)=1 olsun. (a,c)=1 olduğundan Öklid Algoritması gereği $\exists b,d\in\mathbb{Z}$ öyleki ad-bc=1 dir. $T:z\to\frac{az+b}{cz+d}$ elemanı Γ dadır. $T(\infty)=\frac{a}{c}=r\Rightarrow\Gamma$ $\mathbb{Q}_\infty$ üzerinde transitiftir. Yani $\Gamma_\infty=\mathbb{Q}_\infty$.■

Sonuç 12: $\Lambda\leq\Gamma$ olsun. Λ nın parabolik alt grupları trivial olmayan $\Lambda_r,(r\in\mathbb{Q}_\infty)$ sabitleyenleridir.

İspat: Her bir $C \leq \Gamma$ parabolik alt grubu bir tek $r \in \mathbb{R}_\infty$ noktasını sabit bırakır. C grubu $T: z \to \dfrac{az+b}{cz+d}$ parabolik elemanı tarafından üretilsin.

$T(r) = \dfrac{ar+b}{cr+d} = r \Rightarrow cr^2 + (d-a)r - b = 0$. T parabolik olduğundan $|a+d| = 2$ ve $r_{1,2} = \dfrac{a-d \mp \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2c} = \dfrac{a-d}{2c} \in \mathbb{Q}_\infty$ olup $C \leq \Lambda_r$.

Şimdi gösterelim ki her bir $\Lambda_r, (r \in \mathbb{Q}_\infty)$ sabitleyeni ya trivialdir ya da parabolik alt gruptur. Yukarıdaki lemmadan $\exists T \in \Gamma$ öyleki $T(r)=\infty$ dur. Bu durumda $T\Lambda T^{-1}$ grubunu göz önüne alalım. Burada Λ_r yerine Λ_∞ alabiliriz. $\Lambda_\infty \subset \Gamma_\infty$ dur ($\Gamma_\infty = \langle T: z \to z+1 \rangle$). Λ_∞ abel dolayısıyla devirlidir. Bu grup birim eleman ve parabolik elemanlardan oluşur. Şayet Λ_∞ trivial değilse (Yani $\Lambda_\infty \neq \{I\}$) bu bir parabolik alt gruptur. Çünkü Λ nın daha büyük devirli alt grubu ∞ u sabit bırakacak ve dolayısıyla da Λ_∞ da bulunacaktır. Tersine gördük ki her parabolik C alt grubu $\Lambda_r, (r \in \mathbb{Q}_\infty)$ de bulunur. Buradan $C = \Lambda_\infty$ veya daha genel olarak $C = \Lambda_r$ elde edilir.■

Sonuç 13: Λ nın parabolik sınıf sayısı Λ nın $\mathbb{Q}_\infty$ üzerindeki yörüngelerinin sayısıdır öyleki Λ_r de trivial değildir. Yani $s = \{|\Lambda_r| \mid \Lambda_r \text{ trivial değil}\}$.

İspat: $r, r' \in \mathbb{Q}_\infty$ ve Λ_r ve $\Lambda_{r'}$ sabitleyenleri trivial olmasın. r ve r' aynı yörüngededirler $\Leftrightarrow$ Λ_r ve $\Lambda_{r'}$ sabitleyenleri Λ da eşleniktirler.

Sonuç 11. den biliyoruz ki parabolik alt gruplar trivial olmayan $\Lambda_r, (r \in \mathbb{Q}_\infty)$ idi. Dolayısıyla Λ_r lerin her bir eşlenik sınıfına bir ve bir tek yörünge karşılık gelir.■

Lemma 20: A ve B bir G grubunun iki alt grubu ve $C = A \cap B$ olsun. Bu takdirde $|B:C| \leq |G:A|$ dır.

İspat: C nin B deki her bir bC yan sınıfına A nın G de bir bA yan sınıfını karşılık getirelim. Bu yan sınıf temsilcilerinin seçiminden bağımsızdır. Çünkü $b_1C = b_2C$ ise

$b_1^{-1}b_2 \in C \leq A$ dan $b_1A = b_2A$ elde edilir. Farklı bC yan sınıfları farklı bA yan sınıflarına karşılık gelir. Çünkü şayet $b_1A = b_2A,\ (b_1, b_2 \in B)$ ise $b_1^{-1}b_2 \in A \cap B = C$. Buradan $b_1C = b_2C$ olur. Böylece A nın G deki yan sınıflarının sayısı C nin B deki yan sınıflarının sayısından fazladır.■

Sonuç 14: Λ nın parabolik alt grupları $\Lambda_r, (r \in \mathbb{Q}_\infty)$ sabitleyenleridir ve Λ nın parabolik sınıf sayısı Λ nın $\mathbb{Q}_\infty$ üzerindeki yörüngelerinin sayısıdır.

İspat: Sonuç 11 ve Sonuç 12' yi göz önüne alırsak her r$\in \mathbb{Q}_\infty$ için Λ_r sabitleyeninin trivial olmadığını göstermek yeterlidir. G=Γ, A=Λ ve B=Γ_r yazarsak Lemma 20. den $C = A \cap B = \Lambda \cap \Gamma_r = \Lambda_r$ dır. Böylece $|\Gamma_r : \Lambda_r| \leq |\Gamma : \Lambda|$ ve sonludur. $|\Gamma_r : \Lambda_r|$ sonlu olduğundan Λ_r trivial olamaz.■

Sonuç 15: Λ nın parabolik sınıf sayısı s olsun. Bu takdirde

$$1 \leq s \leq N,\ N = |\Gamma : \Lambda|$$

dır.

İspat: Sonuç 13. gereği s Λ nın $\mathbb{Q}_\infty$ üzerindeki yörüngelerinin sayısı olduğundan $s \geq 1$ dir.

Şimdi $\Lambda T_1, ..., \Lambda T_N$, Λ nın Γ daki yan sınıfları olsun. Γ Modüler grubu $\mathbb{Q}_\infty$ üzerinde transitif olduğundan herhangi bir r$\in \mathbb{Q}_\infty$ için $T = ST_i,\ (i = 1, 2, ..., N)$ diyelim. Bu durumda $r = s(T_i(\infty))$ $\Lambda T_i(\infty)$ yörüngesindedir. Dolayısıyla en fazla N tane yörünge vardır.■

2.6. $\mathbf{\Gamma_0(N)}$ nin Normalliyeninin Graflar Üzerindeki Özellikleri

$N \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\Gamma_0(N) := \left\{ T : z \to \frac{az+b}{cz+d},\ T \in \Gamma,\ c \equiv 0 (\mathrm{mod}\, N) \right\}$$

kümesini göz önüne alalım.

[3] de olduğu gibi, $\Gamma_0(N)$ nin $PSL(2,\mathbb{R})$ deki $\mathcal{N} := N_{PSL(2,\mathbb{R})}(\Gamma_0(N))$ normalliyeni, matris gösterimi olarak, (ki biz burada $T: z \to \frac{az+b}{cz+d}$, ad-bc=1, dönüşümüne $\mp\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisini karşılık getireceğiz ve aksi söylenmedikçe de kısaca $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alacağız) $\begin{pmatrix} ae & b/h \\ cN/h & de \end{pmatrix}$ matrislerinden oluşur. Burada bütün harfler tamsayı ve h (h=h(N)) h^2/N şartını sağlayan 24 ün en büyük böleni ve $e \| N/h^2$, yani $(e, N/eh^2) = 1$, ve matrisin determinantı e dir.

$$\Gamma_0(N/h : h) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b/h \\ cN & d \end{pmatrix}, \ ad\text{-}bcN/h = 1 \right\}$$

grubu açıkça $\Gamma_0(N)$ ve $\begin{pmatrix} 1 & 1/h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ile üretilir.

2.7. $\mathcal{N}$ Normalliyeninin $\mathbb{Q}_\infty$ Üzerindeki Hareketi

$x/y \in \mathbb{Q}_\infty$ elemanını indirgenmiş biçimde düşüneceğiz, yani (x,y)=1 olarak alacağız. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisinin x/y üzerindeki hareketi $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : x/y \longrightarrow \frac{ax+by}{cx+dy}$ olarak alınacaktır. Buna göre x/y ve $-x/-y$ üzerindeki hareketler aynıdır.

Teorem 23: N nin $N = 2^{\alpha_1}.3^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3}...p_n^{\alpha_n}$ asal çarpanlara parçalanışı verilsin. Bu takdirde $\mathcal{N}$ $\mathbb{Q}_\infty$ üzerinde transitiftir ancak ve ancak $\alpha_1 \le 7, \alpha_2 \le 3$ ve i=3,…,n olmak üzere $\alpha_i \le 1$ dir [4].■

Lemma 21: N yukarıdaki gibi olsun. Bu takdirde $\mathbb{Q}_\infty$ un herhangi bir noktasının sabitleyeni $\mathcal{N}$ nin sonsuz devirli bir alt grubudur.

İspat: Hareket transitif olduğundan $\mathbb{Q}_\infty$ daki iki noktanın sabitleyenleri $\mathcal{N}$ de eşleniktir. Böylece sadece ∞ elemanının $\mathcal{N}_\infty$ sabitleyenini almak yeterlidir. Bu açıkça $b\in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\begin{pmatrix} 1 & b/h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ elemanlarından oluşur. Böylece $\mathcal{N}_\infty$ $\begin{pmatrix} 1 & 1/h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ile üretilen sonsuz devirli gruptur.

Tanım 31: Bir G grubu bir Ω kümesi üzerinde transitif olarak hareket etsin. (G,Ω) ikilisine imprimitiftir denir $:\Leftrightarrow$ Ω üzerinde

(i) $\alpha,\beta\in\Omega$ için, $\alpha\approx\beta \Leftrightarrow \alpha=\beta$ (özdeşlik bağıntısı)

(ii) $\forall\alpha,\beta\in\Omega$ için $\alpha\approx\beta$ (evrensel bağıntı)

bağıntıları dışında bir "$\approx$" G-invaryant (yani $\alpha\approx\beta$ ise $g(\alpha)\approx g(\beta)$, $\forall g\in G$) denklik bağıntısı vardır.

Aksi halde (G,Ω) ya primitiftir denir. Denklik sınıflarına Bloklar adı verilir.

Lemma 22: (G,Ω) transitif olsun. (G,Ω) primitiftir ancak ve ancak her $\alpha\in\Omega$ için α nın sabitleyeni G_α G nin maksimal bir alt grubudur [5].■

Bu lemmaya göre bir $\alpha\in\Omega$ için $G_\alpha \lneqq H \lneqq G$ ise Ω üzerinde

$$g(\alpha)\approx g'(\alpha) :\Leftrightarrow g^{-1}g'\in H$$

ile tanımlı "$\approx$" bağıntısı ile (G,Ω) imprimitiftir.

Buna göre $\mathcal{N}_\infty \lneqq \Gamma_0(N/h:h) \lneqq \mathcal{N}$ olduğundan G yerine $\mathcal{N}$ normalliyenini; Ω yerine $\mathbb{Q}_\infty$ ve G_α yerine $\mathcal{N}_\infty$ alarak $(\mathcal{N}, \mathbb{Q}_\infty)$ ikilisini oluşturacağız. $v = r/s \in \mathbb{Q}_\infty$ ise $\exists b,d\in\mathbb{Z}$ öyleki $g := \begin{pmatrix} (re_2')e_2^0 & b/h \\ s_1 N/h & de_2^0 \end{pmatrix} \in \mathcal{N}$ ve determinant $g = e_2^0 \| N/h^2$ ve g ∞ u r/s ye resmeder, ve de $e_1 = (s, N/H)$, $s = s_1e_1$, $e_2 = N/e_1h$, $e_2^0 = (e_2, N/h^2)$, $e_2 = e_2'e_2^0$.

Benzer şekilde $w := x/y \in \mathbb{Q}_\infty$ verildiğinde $g'(\infty) = x/y$ olan bir $g'\in\mathcal{N}$ vardır. Böylece $v\approx w = g(\infty)\approx g'(\infty) \Leftrightarrow g^{-1}g'\in\Gamma_0(N/h:h) \Leftrightarrow ry_1e_2' - xs_1f_2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, h)$ dır. Burada x/y

den elde edilen y_1, f_2; r/s den elde edilen s_1, e_2' ye karşılık gelir. Buradan $r/s = 1/0$ ise $e_2' = 1$ ve $y_1 \equiv 0(\mathrm{mod}\, h)$ dır. Ve burada $y_1 \equiv 0(\mathrm{mod}\, h)$ bize $y_1 \equiv 0(\mathrm{mod}\, N)$ yi verir. Sonuç olarak ∞ un bloğu

$$[\infty] := \left\{ x/y \in \mathbb{Q}_\infty \mid y \equiv 0(\mathrm{mod}\, N) \right\}$$

dir.

2.8. $\mathcal{N}$ nin $\mathbb{Q}_\infty$ Üzerindeki Alt Yörüngesel Grafları

($\mathcal{N}$, $\mathbb{Q}_\infty$) transitif permütasyon grubu olduğundan ($\mathcal{N}$, $\mathbb{Q}_\infty^2$) de, $(\alpha,\beta) \in \mathbb{Q}_\infty^2$ ve $g \in \mathcal{N}$ olmak üzere $g(\alpha,\beta) := (g(\alpha), g(\beta))$ ile, bir permütasyon grubudur. Bu hareketin yörüngeleri $\mathcal{N}$ nin alt yörüngesel grafları olarak adlandırılır. (α,β) nın $O(\alpha,\beta)$ yörüngesinden aşağıdaki gibi bir $\Delta(\alpha,\beta)$ alt yörüngesel grafı oluşturulur:

Köşeleri $\mathbb{Q}_\infty$ un elemanları ve $(a,b) \in O(\alpha,\beta)$ ise a dan b ye bir yönlü kenardır. Bunu genelde $a \to b$ ile göstereceğiz

$O(\alpha,\beta) = O(\beta,\alpha)$ ise karşılık gelen graf aynı zamanda ters yönlendirilmiş çiftlerden oluşur. Böyle graflara kendi eşlenmiş graf diyeceğiz. $O(\alpha,\beta) \neq O(\beta,\alpha)$ ise $\Delta(\beta,\alpha)$ okları ters dönmüş $\Delta(\alpha,\beta)$ grafıdır. Bu durumda $\Delta(\alpha,\beta)$ ve $\Delta(\beta,\alpha)$ graflarına eşlenmiş graflar diyeceğiz. $\mathcal{N}$ $\mathbb{Q}_\infty$ üzerinde transitif olduğundan bir $v \in \mathbb{Q}$ için her bir alt yörünge bir (∞, v) çiftini içerir. n>0 ve $v = u'/n, (u', n) = 1$ ise $O(\infty, u'/n)$ yörüngesini $O_{u',n}$ ile grafı da $\Delta_{u',n}$ ile göstereceğiz.

Bu yukarıdaki kavram ilk olarak [5], [6], [7], [8]' de yer almışlardır. Uygulamaları genelde sonlu gruplar üzerine yapılmıştır.

[6] daki Teorem 4.1. den

$$O(\infty, u'/n) = O(\infty, u/mN)$$

olacak şekilde u,m tamsayıları elde ederiz.

Teorem 24: $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y}$ $\Delta_{u,mN}$ de bir kenardır ancak ve ancak $e \| N/h^2$, $N/(eh) \mid s$ olan bir $e \in \mathbb{Z}$ vardır öyleki ya

a) ry-sx= mN/e ve $x \equiv ur \bmod (mN/(eh))$, $y \equiv us \bmod (mN)$ veya

b) ry-sx= $-mN/e$ ve $x \equiv -ur \bmod (mN/(eh))$, $y \equiv -us \bmod (mN)$ dir.

İspat: $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y}$ $\Delta_{u,mN}$ de bir kenar olsun. Bu takdirde $\mathcal{N}$ de determinantı $e \| N/h^2$ ve ∞ u r/s ye $u/(mN)$ yi x/y ye resmeden bir $A = \begin{pmatrix} ae & b/h \\ cN/h & de \end{pmatrix}$ elemanı vardır. Böylece $\frac{ae}{cN/h} = \frac{r}{s}$ ve $\frac{(aeu + bmN/h)}{(cun/h + demN)} = \frac{x}{y}$ dir. a=r ve $s = cN/eh$ elde edilir. Böylece $N/(eh) \mid s$ dir. Benzer şekilde $x = \pm(cuN/(eh) + dmN)$ ve $y = \pm(cuN/(eh) + dmN)$ dir. Bu durumda i,j=0,1 olmak üzere

$$\begin{pmatrix} ae & b/h \\ cN/h & de \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & mN \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae & aeu + bmN/h \\ cN/h & cuN/h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^i er & (-1)^j ex \\ (-1)^i es & (-1)^j ey \end{pmatrix}$$

dir. i=j=0 ise $x \equiv ur \bmod (mN/(eh))$, $y \equiv us \bmod (mN)$ ve determinanttan ry-sx= mN/e dir. i=1,j=0(veya i=0,j=1) ise b) elde edilir.

Tersine a) sağlanıyorsa $x = ur + bmN/(eh)$ ve $y = us + dmN$ olan b,m$\in \mathbb{Z}$ vardır. Bu durumda $\begin{pmatrix} re & b/h \\ se & de \end{pmatrix} \in \mathcal{N}$ ve bu eleman ∞ u r/s ye ve $u/(mN)$ yi de x/y ye resmeder. Şayet b) doğru ise işlemler benzer şekilde yapılır.

Kolaylık olması bakımından bundan böyle m=1 alınacaktır.

Teorem 25: $uv \equiv -1 (\bmod N)$ ise $\Delta_{u,N}$ ve $\Delta_{v,N}$ alt yörüngesel grafları eşleşmiştir.

İspat: $uv \equiv -1 (\bmod N)$ ve $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y}$ $\Delta_{u,mN}$ de bir kenar olsun. Teorem (bir önceki) den $e \| N/h^2$, $N/(eh) \mid s$ ve a) veya b) yi sağlayan bir e tamsayısı vardır. Farzedelimki a) sağlansın. Bu takdirde $ry - sx = N/e$ ve $x \equiv ur (\bmod N/(eh))$, $y \equiv us (\bmod N)$ dir.

$uv \equiv -1 (\mathrm{mod}\, N)$ olduğundan $r \equiv -vx\,(\mathrm{mod}\, N/(eh))$, $s \equiv -vy (\mathrm{mod}\, N)$ dir. Bu durumda $\frac{x}{y} \to \frac{r}{s}$ kenarı $\Delta_{v,N}$ de bir kenardır. Dolayısı ile de $\Delta_{u,N}$ ile $\Delta_{v,N}$ eşleşmiştir.■

Sonuç 16: $\Delta_{u,N}$ kendi-eşleşmiştir ancak ve ancak $u^2 \equiv -1 \left(\mathrm{mod}\, N/h\right)$ dır.

İspat: $O\left(\infty, {}^{u}\!/\!_{n}\right) = O\left({}^{u}\!/\!_{N}, \infty\right)$ olsun. Bu takdirde ∞ u ${}^{u}\!/\!_{N}$ ye ve ${}^{u}\!/\!_{N}$ yi ∞ a resmeden $\mathcal{N}$ de bir $\varphi = \begin{pmatrix} ae & {}^{b}\!/\!_{h} \\ {}^{cN}\!/\!_{h} & de \end{pmatrix}$ elemanı vardır. Bu durumda φ elemanı $\begin{pmatrix} ue & {}^{b}\!/\!_{h} \\ ce & -ue \end{pmatrix}$ olmak zorundadır. Dolayısıyla e=1 dir. Böylece $u^2 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, N/h)$ dir.

Tersine $u^2 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, N/h)$ olsun. Bu takdirde $u^2 = -1 + bN/h$ olan bir $b \in \mathbb{Z}$ vardır. Böylece $\begin{pmatrix} u & {}^{b}\!/\!_{h} \\ Ne & -u \end{pmatrix} \in \mathcal{N}$ dir ve istenilen özellikleri sağlar.■

3. İRDELEME

Lineer kesirli dönüşümlerin grubu-PGL$(2,\mathbb{C})$, özellikle 19. yy. da Öklid Olmayan Geometriler ve İnvaryant Teorinin keşfiyle büyük önem kazanmış, topolojik-grup yapısına haiz olması nedeniyle gerek analiz, gerekse cebirsel metodlarla derinlemesine incelemiş, oldukça iyi bilinen alt grupları; PSL$(2,\mathbb{R})$, Modüler Grup ve Kongrüans Alt Gruplarıyla önemli sonuçlar alınmıştır.

Bu tez çalışmasıyla literatürdeki genel kavramlar özetlenmiş ve çalışmalarımıza en iyi modeli teşkil etmesi bakımından Hiperbolik Geometri irdelenmiştir.

Son olarak bir Fuchsian grup olan $\Gamma_0(N)$ nin PSL$(2,\mathbb{R})$deki Normalliyeni ile ilgili Graf teoriden yararlanılarak bazı özgün sonuçlar elde edilmiştir.

4. SONUÇLAR

$\Gamma_0(N)$ nin $PSL(2,\mathbb{R})$ deki Normalliyeni sonlu üretilmiş bir Fonksiyon grubu olduğundan simgesi vardır ve simge, grubun invaryantlarını ortaya koyması bakımından son derece önemlidir. Simgedeki parametreler; Grubun cinsi, Eliptik Elemanların Mertebeleri ve Parabolik Sınıf Sayısıdır. Bu bakımdan bu tez çalışmasında, normalliyendeki eliptik elemanlarla ilgili teorem ve sonuçlar oldukça önemlidir.

5. ÖNERİLER

$\Gamma_0(N)$ nin $PSL(2,\mathbb{R})$ deki $\mathcal{N}$ normalliyeni özellikle Monster Basit grubu için önem arzetmektedir. Bu sebeple normalliyenin yapısını tam belirlemek oldukça önemlidir. Bunun içinde $\mathcal{N}$ ye farklı biçimlerde yaklaşmak bir çıkış yolu olarak görülebilir. Graflarla $\mathcal{N}$ nin eliptik üreticileri arasındaki ilişki araştırılabilir. Bu ilişkiyi araştırma ileri bir problem olarak alınıp, üzerinde çalışma yapılabilir.

6. KAYNAKLAR

1. Anderson, J.W., Hyperbolic Geometry, Second Edition, Springer-Verlag., London, 2005.

2. Jones, G.A. ve Singerman, D., Complex Functions, Cambridge Univ. Press., Cambridge, London, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney, 1987.

3. Conway, J.H. ve Norton, S.P., Montrous Moonshine, Bull. London Math. Soc., 11 (1979) 308-339.

4. Akbaş, M. ve Singerman, D., The signature of the normalizer of $\Gamma_0(N)$, London Math. Soc., Lecture Notes 165, CUP, Cambridge, (1992) 77-86.

5. Biggs, N.L. ve White, A.T., Permutation Groups and Combinatorial Structures, London Math. Soc. Lecture Notes 33, Cambridge University Press., Cambridge, 1979.

6. Sims, C.C., Graphs and Finite Permutation Groups, Math. Z., 95 (1967) 76-86.

7. Neumann, P.M., Finite Permutation Groups, Edge-Coloured Graphs and Matrices. Topics in Group Theory and Computation, Academic Press., London, New York, San Francisco, 1977.

8. Tsuzuku, T., Finite Groups and Finite Geometries, Cambridge University Press., Cambridge, 1982.

9. Akbaş, M., The Normalizer of Modular Subgroups, Doktora Tezi, University of Southampton, Faculty of Mathematical Studies, Southampton, 1989.

10. Güler, B.Ö., Özel Bir Kongrüans Grubunun Alt Yörüngesel Grafları, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2002.

11. Beşenk, M., $PSL(2,\mathbb{R})$ deki $\Gamma_0(N)$ nin $\Gamma_B(N)$ Normalliyeninin Parabolik Sınıf Sayısı, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, 2004.

12. Shimura, G., Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions, Princeton University Press., New Jersey, 1974.

13. Schoeneberg, B., Elliptic Modular Functions, Springer Verlag., Berlin, Heidelberg, New York, 1974.

14. Beardon, A.F., The Geometry of Discrete Groups, Springer Verlag., New York, Heidelberg, Berlin, 1983.

15. Wilkie, H.C., On Non-Euclidian Crystallographic Groups, Math. Zeitschr., 91 (1966) 87-102.

16. Massey, W.S., Algebraic Topology: An Introduction, Harcourd, Brace and World Inc., New York, 1967.

17. Hardy, G.H. ve Wright, E.M., An Introduction to the Theory of Numbers, Oxford University Press., Oxford, 1979.

18. Akbaş, M. ve Başkan, T., Suborbital Graphs fort he Normalizer of $\Gamma_0(N)$, Tr.J. of Math, Tübitak., 20 (1996) 379-387.

19. Hurwitz, A., Über Algebraische Gebilde Mit Eindeutigen Transformationen in Sich, Math. Annalen., 41 (1893) 403-442.

20. Klein, F., Über die Transformationen Siebenter Ordnung der Elliptischen Funktionen, Math. Annalen., 14 (1879) 429-471.

21. Macbeat, A.M., On a Theorem of Hurwitz, Proc. Glasgow Math. Assoc., 5 (1961) 90-96.

ÖZGEÇMİŞ

Ali Hikmet DEĞER, 1980 yılında Trabzon'da doğdu. İlk öğrenimini, Trabzon Mimar Sinan İlkokulu, orta ve lise öğrenimini Trabzon Özel Ata Kolejinde tamamladı. 2003 yılında Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünden mezun oldu. Aynı yıl K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans (Matematik) programına başladı. 2004 yılında K.T.Ü. Rize Eğitim Fakültesinde Araştırma Görevlisi oldu. 2005 yılında görevlendirme ile K.T.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma görevlisi olarak görevine başladı ve halen bu görevine devam etmektedir.