

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BEZIER EĞRİLERİ, BEZIER YÜZEYLERİ VE MATLAB
İLE SAYISAL ALGORİTMALAR

139187

Muhsin İNCESU

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
“Yüksek Lisans (Matematik)”
Ünvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 05.08.2003
Tezin Savunma Tarihi : 22.08.2003

139187

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Osman GÜRİSOY
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Ziya YAPAR
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Ali İhsan KOBYA

Osman Gürsoy
Ziya Yapar
Ali İhsan Kobya

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Yusuf AYVAZ

Yusuf Ayvaz

Trabzon 2003

TC. YÜKSEK ÖĞRETİM BAKANLIĞI
DOKÜMAN YAYINLARI

ÖNSÖZ

Konunun belirlenmesinden, çalışmanın tamamlanıp bu hale getirilmesine kadar yardımlarını hiç esirgemeyen başta hocam sayın Prof. Dr. Osman GÜRSOY'a, sayın Prof. Dr. Djavvat KHADJIEV'e en içten duygularla saygı ve şükranlarımı sunarım.

Ayrıca teknik alanda yardımlarını gördüğüm Öğr. Gör. Ahmet GÖKDOĞAN'a, Öğr.Gör.Dr. Bahattin SİNSOYSAL'a, Öğr. Gör. Orhan KESEMEN'e ve diğer araştırma görevlisi arkadaşlarıma ayrı ayrı teşekkür ederim.

Muhsin İNCESU
Trabzon, 2003

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER	III
ÖZET.....	VI
SUMMARY.....	VII
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	VIII
SEMBOLLER DİZİNİ.....	X
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Bezier Eğrileri.....	2
1.2.1 Düzlemde Bezier Eğrileri	2
1.2.1.1. Lineer Bezier Eğrileri	2
1.2.1.2. Kuadratik Bezier Eğrileri.....	3
1.2.1.3. Kübik Bezier Eğrileri.....	5
1.2.1.4. Genel Bezier Eğrileri	6
1.2.1.5. Kontrol Poligonu	8
1.2.1.6. Konveks Hull	8
1.2.1.7. Bezier Eğrilerinin Özellikleri.....	9
1.2.2. \mathbb{R}^3 Uzayında Bezier Eğrileri	11
1.2.2.1. \mathbb{R}^3 Uzayında Bezier Eğrileri.....	11
1.2.2.2. Kontrol Poligonu	12
1.2.2.3. Konveks Hull.....	12
1.2.3. Bezier Eğrilerinde Türev Kavramı	13
1.2.4. Parçalı Bezier Eğrileri	17
1.3. Rasyonel Bezier Eğrileri.....	18
1.3.1. Projektif Kavramlar	19
1.3.1.1. Projeksiyonlar.....	19
1.3.1.2. Barisentrik (Barycentric) Koordinatlar	19
1.3.1.3. Çapraz oranlar	21

1.3.1.4. Reel Doğruların Projektif Dönüşümleri.....	22
1.3.1.5. Homojen Koordinatlar	24
1.3.2. Rasyonel Kuadratikler olarak Konikler	26
1.3.3. Genel Olarak Rasyonel Bezier Eğrileri	28
1.3.4. Kuadratik Rasyonel Bezier Eğrilerinin Sınıflandırılması.....	31
1.3.5. Rasyonel Bezier Eğrilerinde Türev Kavramı.....	31
1.3.6. Rasyonel Bezier Eğrilerinin Özellikleri.....	32
1.4. Bezier Yüzeyleleri.....	35
1.4.1. Parametrik Yüzeyleler	35
1.4.2. Parametrik Yüzeylelere Örnekler.....	38
1.4.2.1. Hiperbolik Paraboloid.....	38
1.4.2.2. Eliptik Paraboloid.....	38
1.4.2.3. Elipsoid	39
1.4.2.4. Eliptik Tor	40
1.4.3. Bezier Yüzeyleleri.....	41
1.4.3.1 Bezier Yüzeylelerinin Özellikleri	41
1.4.3.2. Bezier Yüzeylelerinde Türev Kavramı.....	43
1.4.4. Rasyonel Bezier Yüzeyleleri	46
1.4.4.1. Rasyonel Bezier Yüzeylelerinin Özellikleri	47
1.5. Eğri ve Yüzeyleler için Eğrilikler	49
1.5.1. Düzlem Eğrilerde Eğrilik.....	49
1.5.2. Uzay Eğrilerinde Eğrilik ve Torsiyon	52
1.5.3. Yüzeyle Eğrilikleri.....	53
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR, BULGULAR VE İRDELEME	58
2.1. Bernstein Polinomları ile İlgili Bazı Özellikler	58
2.2. Parçalı Bezier Eğrileri için Süreklilik	64
2.3. Bezier Eğrileri İçin Sayısal Algoritmalar	67
2.3.1. Bezier Eğrileri için De Casteljau Algoritması	68
2.3.2. MATLAB ile Bezier Eğrileri için De Casteljau Algoritması	70
2.3.3. Bezier Eğrileri için Bölme (Subdivision) Algoritması	70
2.3.4. MATLAB ile Bezier Eğrilerinin Bölme Algoritması.....	72
2.3.5. Bir Bezier Eğrisine Lineer Yaklaşımlar	72

2.3.6. MATLAB ile Bir Bezier Eğrisine Lineer Yaklaşımlar	74
2.3.7. Düzlemde Bir Bezier Eğrisi ile Bir Doğrunun Arakesitinin Bulunuşu	74
2.3.8. MATLAB İle Düzlem Bezier Eğrisi ile Bir Doğrunun Arakesitinin Bulunuşu	76
2.3.9. İki Bezier Eğrisinin Arakesitinin Bulunuşu.....	77
2.3.10. MATLAB ile İki Bezier Eğrisinin Arakesitinin Bulunuşu	77
2.4. Rasyonel Bezier Eğrileri İçin Sayısal Algoritmalar	78
2.4.1. Rasyonel Bezier Eğrileri İçin De Casteljau Algoritması.....	78
2.4.2. MATLAB İle Rasyonel Bezier Eğrileri için De Casteljau Algoritması.....	79
2.4.3. Rasyonel Bezier Eğrileri İçin Bölme Algoritması	79
2.4.4. MATLAB İle Rasyonel Bezier Eğrilerinin Bölme Algoritması	80
2.5. Yüzeyler İçin Sayısal Algoritmalar	82
2.5.1. Bezier Yüzeyleri İçin De Casteljau Algoritması.....	82
2.5.2. MATLAB İle Bezier Yüzeyleri İçin De Casteljau Algoritması.....	82
2.5.3. Bezier Yüzeyleri İçin Bölme Algoritması	84
2.5.4. MATLAB İle Bezier Yüzeyleri için Bölme Algoritması	87
2.6. Bezier Eğri ve Yüzeylerinin Eğrilikleri.....	88
2.6.1. Bezier Eğrilerinin Eğrilikleri	88
2.6.2. MATLAB İle Bezier Eğrilerinin Eğrilikleri	90
2.6.3. Bezier Yüzeylerinin Eğrilikleri	91
2.6.4. MATLAB ile Bezier Yüzeylerinin Eğrilikleri	98
3. SONUÇLAR.....	102
4. ÖNERİLER.....	103
5. KAYNAKLAR	104
ÖZGEÇMİŞ	106

ÖZET

Son zamanlarda kullanılan bilgisayar destekli tasarım (CAD) sistemleri içinde en kararlı sayısal çözümleri veren eğriler, Bezier ve rasyonel Bezier eğrileridir. Bezier eğrileri, kontrol noktaları adı verilen bir takım noktalar yardımıyla ifade edilen polinom eğrilerdir.

Bu çalışmada Bernstein polinomları ile ilgili bazı teoremler verilerek parçalı Bezier eğrilerinin süreklilik koşulları incelendi. Daha sonra tezin 2.3, 2.4. ve 2.5. bölümlerinde sırasıyla Bezier eğrilerine, rasyonel Bezier eğrilerine ve Bezier yüzeylerine ait De Casteljau ve bölme algoritmaları ve bu algoritmaların MATLAB programı ile sayısal uygulamaları verildi. Tezin 2.6. bölümünde ise; Bezier eğri ve yüzeylerine ait eğriliklerin kontrol noktaları cinsinden ifadeleri ve bu eğriliklerin MATLAB programında hesaplamaları için algoritma kodları verildi. Sonuç olarak Bezier yüzeylerinin birinci ve ikinci temel kuadratik formları verildi.

Anahtar Kelimeler: Bezier Eğrileri, Rasyonel Bezier Eğrileri, Bezier Yüzeyleri, MATLAB, Bezier Yüzeylerinin Eğrilikleri

SUMMARY

Bezier Curves, Bezier Surfaces, and Their Numerical Algorithms Using MATLAB

The curves that have the most stable numerical solutions among of the curves recently used in computer aided design (CAD) are Bezier and rational Bezier curves. Bezier curves can be defined by points called control points.

In this study some theorems are given on Bernstein polynomials and investigated continuity conditions of piecewise Bezier curves. Then the numerical algorithms such as De Casteljaou and subdivision, and their application using MATLAB on Bezier curves, rational Bezier curves, and Bezier surfaces were given in chapter 2.3., 2.4., and 2.5. respectively. In chapter 2.6. the curvatures of Bezier curves and Bezier surfaces are represented by in terms of their control points and given codes of the algorithms on the curvatures of Bezier curves and Bezier surfaces in MATLAB. Consequently the first and second fundamental forms of Bezier surfaces were presented.

Key Words: Bezier Curves, Rational Bezier Curves, Bezier Surfaces, MATLAB and Curvatures of Bezier Surfaces

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 1. Kontrol noktaları $b_0 = (p_0, q_0)$ ve $b_1 = (p_1, q_1)$ olan bir lineer Bezier eğrisi	3
Şekil 2. Kontrol noktaları $b_0 = (1, 2)$, $b_1 = (4, -1)$ ve $b_2 = (8, 6)$ olan kuadratik Bezier eğrisi	4
Şekil 3. Kontrol noktaları $b_0 = (1, 2)$, $b_1 = (8, 6)$ ve $b_2 = (4, -1)$ olan kuadratik Bezier eğrisi	5
Şekil 4. Kontrol noktaları $b_0 = (-3, 2)$, $b_1 = (4, 4)$, $b_2 = (6, -1)$ ve $b_3 = (6, 1)$ olan kübik Bezier eğrisi	6
Şekil 5. Kontrol noktaları $b_0 = (2, 0)$, $b_1 = (1, 1)$, $b_2 = (3, 4)$, $b_3 = (4, 3)$ ve $b_4 = (3, 0)$ olan Bezier eğrisinin kontrol poligonu.....	8
Şekil 6. $X = \{(2, 0), (2, 2), (3, 1), (3, 3), (3, 4), (4, 0), (4, 3)\}$ noktalarının konvex hulu.....	9
Şekil 7. Bir Bezier eğrisi için Varyasyon Azaltma Özelliği.....	11
Şekil 8. Kontrol noktaları $b_0 = (1, -2, 0)$, $b_1 = (2, 0, 1)$, $b_2 = (3, 1, 1)$, $b_3 = (-1, 2, -1)$ olan Bezier eğrisinin kontrol poligonu.....	12
Şekil 9. Merkezi projeksiyonlar (Central Projections)	20
Şekil 10. Lineer interpolasyon	20
Şekil 11. Düzlemde üç noktaya bağlı bir p noktasının barisentrik koordinatlarının Gösterimi	21
Şekil 12. a, b, c, d ve a*, b*, c*, d* noktalarının çapraz oranlarının gördükleri açığa bağlı olması	22
Şekil 13. Bir L doğrusunun L' doğrusuna projeksiyonu.....	24
Şekil 14. a) Homojen kordinatlar ve projeksiyonu b) üç boyutlu uzayda verilen bir parabolün $z = 1$ düzlemine projeksiyonu ile elde edilen konik parçası (Bir hiperbol kesiti)	27
Şekil 15. $X(u, v)$ parametrik yüzeyi ve bir p noktasındaki teğet düzlemi.....	37
Şekil 16. $X(u, v) = (u, v, uv)$ biçiminde verilen hiperbolik paraboloid	38
Şekil 17. Hiperbolik paraboloid olarak eyer yüzeyi (sadle surface).....	39
Şekil 18. Eliptik paraboloid.....	39
Şekil 19. Elipsoid.....	40
Şekil 20. Eliptik Tor.....	40
Şekil 21. Bezier Yüzeyi.....	41
Şekil 22. Rasyonel Bezier Yüzeyi	46

Şekil23. Yüzeyin p noktasındaki herhangi bir v teğet vektörü ile $N(u,v)$ birim normal vektörünün oluşturduğu düzlem ile yüzeyin arakesitinden elde edilen $C(t)$ parametrik eğrisi.....	54
şekil 24. $f(t)$ parçalı eğrisi.....	65
şekil 25. $f'(t)$ parçalı eğrisi.....	65
Şekil 26. De Casteljau algoritmasının şematik gösterimi	69
Şekil 27. Bir Bezier eğrisinin bölme işlemi.....	71
Şekil 28. Bir Bezier eğrisi için bölme algoritması.....	71
Şekil 29. $B(t)$ Bezier eğrisinin max. min. Sınır dörtgeni.....	73
Şekil 30. (a) Doğru ile hem kontrol poligonu, hem de Bezier eğrisi kesişir. (b) Doğru ile kontrol poligonu kesişir, ancak Bezier eğrisi kesişmez. (c) Doğru ile ne kontrol poligonu, ne de Bezier eğrisi kesişmez.	76
Şekil 31. Bir rasyonel Bezier eğrisi için ağırlıkların bölme algoritması.....	80

SEMBOLLER DİZİNİ

R	Reel Sayılar Kümesi
$\ a\ $	a vektörünün normu
$\langle a, b \rangle$	a ile b vektörlerinin iç çarpımı
$d(a, b)$	a ve b vektörleri arasındaki uzaklık
$\binom{n}{i}$	$\frac{n!}{(n-i)!i!}$ biçiminde ifade edilen Binom katsayıları
$B_i^n(t)$	$0 \leq i \leq n$ durumunda, $\binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i$ biçiminde diğer durumlarda sıfır olarak tanımlanan Bernstein taban polinomu
$CH(\{b_0, b_1, \dots, b_n\})$	$\{b_0, b_1, \dots, b_n\}$ noktalar sisteminin konveks hullu
$\left. \frac{dB}{dt} \right _{t=t_0}$	B(t) Bezier eğrisinin $t = t_0$ noktasındaki türevi
$X(u, v)$	Parametrik Yüzey
$X_u(u, v)$	X parametrik yüzeyinin u parametresine göre kısmi türevi
$J(X)(u, v)$	X parametrik yüzeyinin jakobiyeni
$X(U)_p$	X parametrik yüzeyine p noktasında teğet olan vektörlerin kümesi
$S_p\{X_u(u_0, v_0), X_v(u_0, v_0)\}$	X(u,v) parametrik yüzeyine $p = (u_0, v_0)$ noktasında teğet olan düzlemin bir tabanı
κ	Parametrik eğrilerde eğrilik
τ	Parametrik eğrilerde torsiyon
K	Parametrik yüzeylerin Gauss eğriliği
H	Parametrik yüzeylerin Ortalama eğriliği
$K_p(v)$	yüzeyin bir p noktasındaki ve v vektörü yönündeki normal eğriliği
$\text{rasyo}(a, b, c)$	$\frac{d(a, b)}{d(b, c)}$
$\text{cr}(a, b, c, d)$	a, b, c, d nin çapraz oranı

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Bilgisayar destekli tasarımların (CAD) temelini parametrik eğriler ve parametrik yüzeyler oluşturmaktadır. Bilgisayar destekli geometrik tasarımda (CAGD) şüphesiz ki en önemli buluşlar, Bezier Eğrileri ve yüzeyleri, Coons yamaları (patch) ve daha sonra da B- spline metodlarıdır. Bezier eğrileri ve yüzeyleri ilk defa 1958-1960 yıllarında otomotiv sektöründe, Citroen ve Renault firmalarında mühendis olarak görev yapan Paul de Casteljau ve Pierre Bezier tarafından birbirlerinden bağımsız olarak geliştirilmiştir. De Casteljau, P. Bezier'den az bir zaman önce geliştirmiş, ancak yaptığı çalışmaları herhangi bir yerde yayımlamamıştır. Böylece, polinom eğri ve yüzeylerin Bernstein formunda ifadesiyle tamamen gelişen Bezier eğri ve yüzeyleri teorisi, P.Bezier'in ismiyle anılır hale gelmiştir [1].

CAGD, 1974 yılında Amerika'da Utah Üniversitesinde yapılan konferansın ardından, Barnhill ve Riesenfeld' in [2] önderliğinde kendi içinde bir disiplin içine girmiştir.

Son zamanlarda kullanılan CAD sistemleri içinde en kararlı sayısal çözümleri veren eğrilerin Bezier ve rasyonel Bezier eğrileri oldukları da Farouki ve Rajan tarafından gösterilmiştir [3].

Bezier eğrileri ile ilgili pek çok çalışmalar yapılmıştır. Örneğin, Offset yüzeylerle ilgili olarak, G. Farin [4] , R. Farouki [5], J.Hoschek [6], W. Tiller [7], H. Potmann [8]; değişik yüzey ve koniklerle ilgili olarak, R.Farouki ve Carla Manni [9] , F. Chen [10], H. Pottmann [11], R.Krasauskas [12] trigonometrik polinomların özellikleriyle ilgili olarak Reyes [13], E. Mainar, J.M Pena ve Reyes [14]; kinematikle ilgili olarak, B. Jüttler [15], Q.J. Ge [16], B. Roth [17] ve sınırlı elemanlar metodu ile ısı transferlerinin uygulamasıyla ilgili olarak R. Cholewa ve arkadaşlarının [18] çalışmaları verilebilir.

Bezier eğri ve yüzeylerinin otomotiv sanayiinden uçak sanayiine kadar çok geniş bir yelpazede kullanılıyor olması [1], bizim bu konuyu seçmemizdeki önemli faktörlerden biridir. Yapılan yazılım çalışmalarında aranan en önemli özellik, ortaya konan programın istenilen sonuca ne kadar hızlı erişim sağladığıdır. Bu nedenle algoritmaların uygulamaları MATLAB programı ile verildi. MATLAB programının en önemli özelliklerinden biri de işlemlerin matrislerle yapılıyor olmasıdır.

Yaptığımız bu çalışmada öncelikli olarak 1. bölümde Bezier eğrileri, rasyonel Bezier eğrileri, Bezier yüzeyleri ve rasyonel Bezier yüzeyleri hakkında genel bilgiler verildi.

Tezin ikinci bölümünde ise, Bernstein polinomları ile ilgili bazı teoremler verilerek parçalı Bezier eğrilerinin süreklilik koşulları incelendi. Daha sonra tezin 2.3, 2.4. ve 2.5. bölümlerinde sırasıyla Bezier eğrilerine, rasyonel Bezier eğrilerine ve Bezier yüzeylerine ait De Casteljaou ve bölme algoritmaları ve bu algoritmaların MATLAB programı ile sayısal uygulamaları verildi. Tezin 2.6. bölümünde ise; Bezier eğri ve yüzeylerine ait eğriliklerin kontrol noktaları cinsinden ifadeleri ve bu eğriliklerin MATLAB programında hesaplamaları için algoritma kodları verildi. Sonuç olarak Bezier yüzeylerinin birinci ve ikinci temel kuadratik formları verildi.

1.2. Bezier Eğrileri

Bezier eğrileri, özellikle mekanikte çok önemli bir yeri olan polinom eğrilerdir. Bilgisayar destekli tasarımda (CAD) ve bilgisayar grafiklerinde kullanılan eğri ve yüzeylerin en önemli gösterimlerinden biri de Bezier formlarıdır. n . dereceden bir Bezier eğrisi; kontrol noktaları adı verilen, $n + 1$ tane nokta ile belirlenen ve n . dereceden Bernstein taban fonksiyonları ile lineer şekilde ifade edilen polinom eğri parçalarıdır. Bu eğriler kullanım alanlarına göre literatürde, düzlemde ve R^3 uzayında olmak üzere ayrı ayrı incelendiğinden biz de bu çalışmamızda ayrı olarak değineceğiz. Daha sonra rasyonel Bezier eğrilerini inceleyeceğiz.

1.2.1 Düzlemde Bezier Eğrileri

1.2.1.1. Lineer Bezier Eğrileri

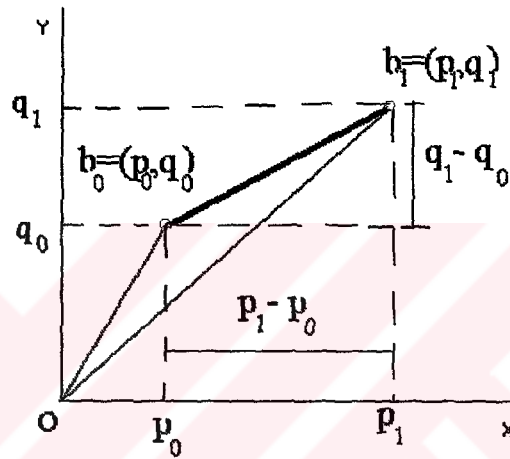
Lineer Bezier eğrileri derecesi 1 olan ve iki kontrol noktası bulunan polinom eğrilerdir. Bir lineer Bezier Eğrisi kontrol noktalarını birleştiren doğru parçasıdır. Lineer Bezier eğrilerinin vektörel anlamda denklemini verecek olursak; kontrol noktaları $b_0 = (p_0, q_0)$ ve $b_1 = (p_1, q_1)$ olan bir lineer Bezier eğrisi,

$$B(t) = (1-t)b_0 + tb_1, \quad t \in [0,1] \quad (1)$$

biçiminde verilir. Burada eğrimiz, b_0 noktasını b_1 noktasına birleştiren doğru parçasıdır ve başlama noktası $B(0) = b_0$, bitiş noktası ise $B(1) = b_1$ noktasıdır. Daha açık bir ifade ile yazacak olursak, kontrol noktaları $b_0 = (p_0, q_0)$ ve $b_1 = (p_1, q_1)$ olan bir lineer Bezier eğrisinin parametrik denklemi;

$$\begin{aligned} B(t) &= (x(t), y(t)), \\ x(t) &= (1-t)p_0 + t p_1 \\ y(t) &= (1-t)q_0 + t q_1 \quad t \in [0,1] \end{aligned} \quad (2)$$

ile verilir.



Şekil 1. Kontrol noktaları $b_0 = (p_0, q_0)$ ve $b_1 = (p_1, q_1)$ olan bir lineer Bezier eğrisi

1.2.1.2. Kuadratik Bezier Eğrileri

Kuadratik Bezier eğrileri, derecesi 2 olan ve üç tane kontrol noktası bulunan polinom eğrilerdir. Kontrol noktaları $b_0 = (p_0, q_0)$, $b_1 = (p_1, q_1)$ ve $b_2 = (p_2, q_2)$ olan bir kuadratik Bezier Eğrisi, başlangıç noktası $B(0) = b_0$ ve bitiş noktası da $B(1) = b_2$ olan ikinci dereceden bir eğri parçasıdır. Kuadratik Bezier eğrilerinin vektörel anlamda denklemini

$$B(t) = (1-t)^2 b_0 + 2(1-t)t b_1 + t^2 b_2, \quad t \in [0,1] \quad (3)$$

biçiminde vermek mümkündür. Parametrik denklemi ise;

$$\begin{aligned} B(t) &= (x(t), y(t)), \\ x(t) &= (1-t)^2 p_0 + 2(1-t)t p_1 + t^2 p_2 \end{aligned}$$

$$y(t) = (1-t)^2 q_0 + 2(1-t)tq_1 + t^2 q_2 \quad t \in [0,1] \quad (4)$$

olarak ifade edilir.

Örnek 1: Kontrol noktaları ; $b_0 = (1,2)$, $b_1 = (4,-1)$ ve $b_2 = (8,6)$ olan kuadratik Bezier eğrisinin vektörel ve parametrik denklemleri:

$$B(t) = (1-t)^2(1,2) + 2(1-t)t(4,-1) + t^2(8,6) \quad , t \in [0,1]$$

$$x(t) = (1-t)^2 + 8(1-t)t + 8t^2 = t^2 + 6t + 1$$

$$y(t) = 2(1-t)^2 - 2(1-t)t + 6t^2 = 10t^2 - 6t + 2$$

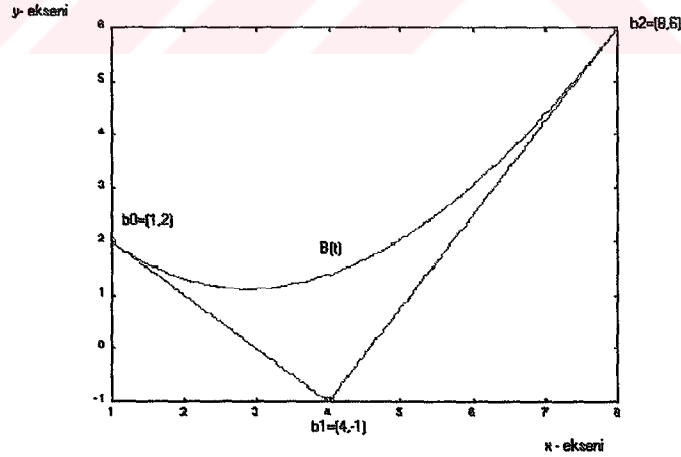
$$B(t) = (t^2 + 6t + 1 , 10t^2 - 6t + 2) , t \in [0,1]$$

şeklindedir. (Şekil 2). Burada kontrol noktalarının sırası çok önemlidir. Çünkü, eğrinin yönünü, şeklini , başlangıç ve bitim noktasını kontrol noktaları belirler. Bunu bir başka örnekle göstereyim.

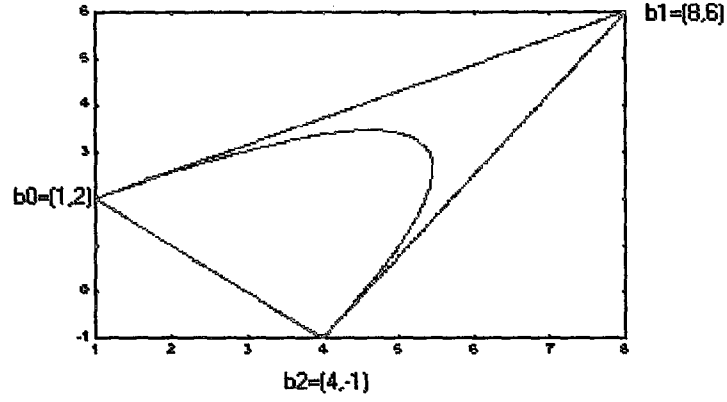
Örnek 2: Yukarıdaki örnekte b_1 ile b_2 noktalarının yerlerini değiştirelim ve bu değişimin eğriyi nasıl değiştirdiğini gözlemleyelim. Kontrol noktaları $b_0 = (1,2)$, $b_1 = (8,6)$ ve $b_2 = (4,-1)$ olan kuadratik Bezier eğrisinin parametrik ifadesi;

$$B(t) = (-11t^2 + 14t + 1 , -11t^2 + 8t + 2) , t \in [0,1]$$

biçimindedir. Bu eğrinin grafiği ise Şekil 3'te verildiği gibidir.



Şekil 2. Kontrol noktaları $b_0 = (1,2)$, $b_1 = (4,-1)$ ve $b_2 = (8,6)$ olan kuadratik Bezier eğrisi



Şekil 3. Kontrol noktaları $b_0 = (1,2)$, $b_1 = (8,6)$ ve $b_2 = (4,-1)$ olan kuadratik Bezier eğrisi

1.2.1.3. Kübik Bezier Eğrileri

Kübik Bezier eğrileri, üçüncü dereceden, dört tane kontrol noktası bulunan polinom eğrilerdir. Kontrol noktaları $b_0 = (p_0, q_0)$, $b_1 = (p_1, q_1)$, $b_2 = (p_2, q_2)$ ve $b_3 = (p_3, q_3)$ olan bir kübik Bezier eğrisi, b_0 noktasından başlayan, b_3 noktasında biten üçüncü derece polinom eğridir. Bu eğri vektörel olarak

$$B(t) = (1-t)^3 b_0 + 3(1-t)^2 t b_1 + 3(1-t) t^2 b_2 + t^3 b_3, \quad t \in [0,1] \quad (5)$$

biçiminde ifade edilir. Parametrik denklemi ise;

$$B(t) = (x(t), y(t)),$$

$$x(t) = (1-t)^3 p_0 + 3(1-t)^2 t p_1 + 3(1-t) t^2 p_2 + t^3 p_3$$

$$y(t) = (1-t)^3 q_0 + 3(1-t)^2 t q_1 + 3(1-t) t^2 q_2 + t^3 q_3 \quad t \in [0,1] \quad (6)$$

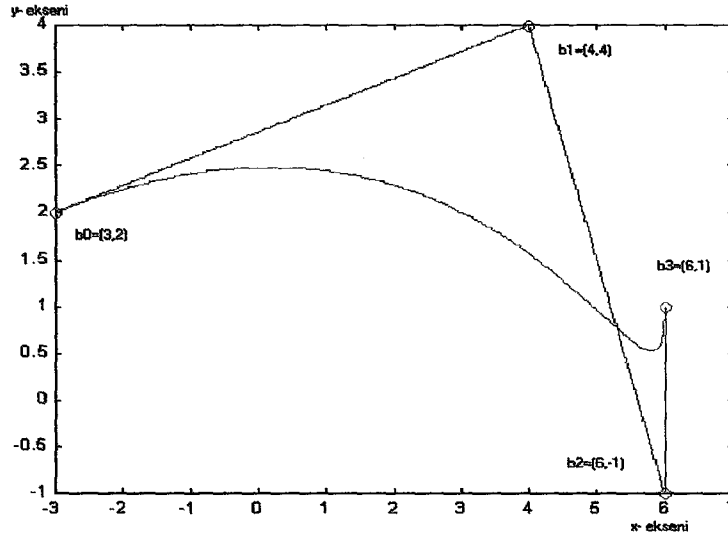
olarak verilir.

Örnek 3: Kontrol noktaları $b_0 = (-3,2)$, $b_1 = (4,4)$, $b_2 = (6,-1)$ ve $b_3 = (6,1)$ olan kübik Bezier eğrisinin parametrik ifadesi:

$$x(t) = -3(1-t)^3 + 12(1-t)^2 t + 18(1-t) t^2 + 6t^3$$

$$y(t) = 2(1-t)^3 + 12(1-t)^2 t - 3(1-t) t^2 + t^3 \quad t \in [0,1]$$

biçimindedir. (Şekil 4)



Şekil 4. Kontrol noktaları $b_0 = (-3,2)$, $b_1 = (4,4)$, $b_2 = (6,-1)$ ve $b_3 = (6,1)$ olan kübik Bezier eğrisi

1.2.1.4. Genel Bezier Eğrileri:

Tanım 1: Genel Bezier eğrisi, Kontrol noktaları $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ olarak verilen ve başlangıç noktası b_0 , bitim noktası b_n olan n . dereceden bir polinom eğridir. Genel Bezier eğrisi, vektörel formda,

$$B(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t), \quad t \in [0,1] \quad (7)$$

olarak tanımlanır. Burada $B_i^n(t)$ fonksiyonları

$$B_i^n(t) = \begin{cases} \frac{n!}{i!(n-i)!} (1-t)^{n-i} t^i, & 0 \leq i \leq n \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (8)$$

biçimde verilen Bernstein taban fonksiyonları (ya da Bernstein taban polinomları) dır.

$\frac{n!}{i!(n-i)!}$ ifadeleri de Binom katsayılarıdır ve $\binom{n}{i}$ ya da ${}^n C_i$ ile gösterilir.

Teorem 1: Bernstein taban polinomları aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$1-) \sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1, \quad t \in [0,1] \quad (\text{Toplamın birim olması}) \quad (9)$$

$$2-) B_i^n(t) \geq 0, \quad t \in [0,1] \quad (\text{Pozitiflik}) \quad (10)$$

$$3-) B_{n-i}^n(t) = B_i^n(1-t), \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (\text{Simetri}) \quad (11)$$

$$4-) B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + t B_{i-1}^{n-1}(t) \quad (\text{indirgeme}) \quad (12)$$

İspat:

$$1-) 1 = 1^n = (1-t+t)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i = \sum_{i=1}^n B_i^n(t)$$

2-) $t \in [0, 1]$ olduğundan $0 \leq t \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1-t \leq 1 \Rightarrow t \geq 0$ ve $1-t \geq 0$ dir. O halde

pozitif bir sayının tüm reel kuvvetleri de pozitif olduğundan $B_i^n(t) \geq 0$ elde edilir.

3-) $t \in [0, 1]$ için,

$$B_{n-i}^n(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} (1-t)^i t^{n-i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \left[(1-t)^i (1-(1-t))^{n-i} \right]$$

dir. $1-t = s$ dersek, $s \in [0, 1]$ dir ve

$$B_{n-i}^n(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} \left[(s)^i (1-s)^{n-i} \right] = B_i^n(s) = B_i^n(1-t)$$

elde edilir.

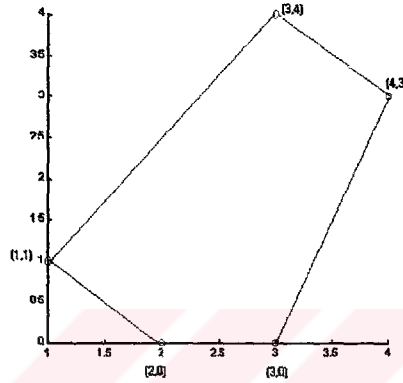
4-) $(1-t)B_i^{n-1}(t) + t B_{i-1}^{n-1}(t)$ ifadesinin değerini yazacak olursak;

$$\begin{aligned} (1-t)B_i^{n-1}(t) + t B_{i-1}^{n-1}(t) &= (1-t) \frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!} (1-t)^{n-1-i} t^i + (1-t) \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} (1-t)^{n-i} t^{i-1} \\ &= \frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!} (1-t)^{n-i} t^i + \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} (1-t)^{n-i} t^i \\ &= \left[\frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!} + \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} \right] (1-t)^{n-i} t^i \\ &= \left[\frac{(n-1)!}{i(i-1)!(n-1-i)!} + \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)(n-i-1)!} \right] (1-t)^{n-i} t^i \\ &= \left[\frac{(n-i)(n-1)! + i(n-1)!}{i(n-i)(i-1)!(n-1-i)!} \right] (1-t)^{n-i} t^i \\ &= \left[\frac{(n-1)!(n-i+i)}{i(i-1)!(n-i)(n-1-i)!} \right] (1-t)^{n-i} t^i \\ &= \left[\frac{n!}{i!(n-i)!} \right] (1-t)^{n-i} t^i = B_i^n(t) \end{aligned}$$

elde edilir. ♦

1.2.1.5. Kontrol Poligonu

Tanım 2: Kontrol noktaları $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ olarak verilen n . dereceden bir Bezier eğrisinin kontrol noktalarını sıra korumak kaydıyla birleştiren doğru parçalarının oluşturduğu geometrik şekle Bezier eğrisinin kontrol poligonu adı verilir.



Şekil 5. Kontrol noktaları $b_0 = (2,0)$, $b_1 = (1,1)$, $b_2 = (3,4)$, $b_3 = (4,3)$ ve $b_4 = (3,0)$ olan Bezier eğrisinin kontrol poligonu

Örnek 4: Kontrol noktaları $b_0 = (2,0)$, $b_1 = (1,1)$, $b_2 = (3,4)$, $b_3 = (4,3)$, $b_4 = (3,0)$, olan Bezier eğrisinin kontrol poligonu Şekil 5'te gösterilmiştir.

1.2.1.6. Konveks Hull

Konveks hull, özellikle bilgisayar destekli tasarımlarda çok önemli bir yer tutar. $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ gibi $n + 1$ noktadan oluşan noktalar sistemi için, verilen konveks hull şu şekilde tanımlanmaktadır:

Tanım 3: $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ sisteminin konveks hulu:

$$CH(X) = \left\{ a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n : \sum_{i=0}^n a_i = 1, a_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, n \right\} \quad (13)$$

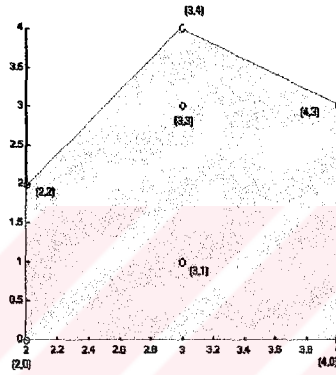
olarak tanımlanır. Yani düzlemde x_0, x_1, \dots, x_n noktalarını içeren en küçük konveks küme

$X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ sisteminin **konveks hulu** (Convex Hull) denir.

Örnek 5: Düzlemde $X = \{(2,0), (2,2), (3,1), (3,3), (3,4), (4,0), (4,3)\}$ noktalarından oluşan kümenin konveks hulu:

$$\begin{aligned} \text{CH}(X) &= \left\{ a_0(2,0) + a_1(2,2) + \dots + a_6(4,3) : \sum_{i=0}^6 a_i = 1, a_i \geq 0, i = 0,1,\dots,6 \right\} \\ &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{aligned} x &= 2(a_0 + a_1) + 3(a_2 + a_3 + a_4) + 4(a_5 + a_6), \\ y &= a_2 + 2a_1 + 3(a_3 + a_6) + 4a_4; \sum_{i=0}^6 a_i = 1, a_i \geq 0, i = 0,1,\dots,6 \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

biçiminde verilir. Bunu daha iyi kavramak için Şekil 6 incelenebilir.



Şekil 6. $X = \{(2,0), (2,2), (3,1), (3,3), (3,4), (4,0), (4,3)\}$ noktalarının konveks hulu

1.2.1.7. Bezier Eğrilerinin Özellikleri

Teorem 2: Kontrol noktaları $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ olarak verilen n . dereceden bir $B = B(t)$ Bezier eğrisi aşağıdaki özellikleri sağlar:

1- $B(0) = b_0, \quad B(1) = b_n$ (Son nokta interpolasyon özelliği) (14)

2- $B'(0) = \frac{dB}{dt} \Big|_{t=0} = n(b_1 - b_0)$ (Son nokta teğet özelliği)

$B'(1) = \frac{dB}{dt} \Big|_{t=1} = n(b_n - b_{n-1})$ (15)

3- $\forall t \in [0,1]$ için, $B(t) \in \text{CH}(\{b_0, b_1, \dots, b_n\})$ (16)

(Bezier eğrisinin tamamı, kontrol noktalarının konveks alanı içinde kalmaktadır.)

4- F , bir Afın dönüşümü olmak üzere,

$$F(B(t)) = F\left(\sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t)\right) = \sum_{i=0}^n F(b_i) B_i^n(t) \quad (17)$$

dir. (Kontrol noktaları b_i , $i = 0, 1, \dots, n$ olan Bezier eğrisinin bir Afin dönüşümü altındaki görüntüsü, kontrol noktaları $F(b_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$ olan Bezier eğrisidir.)

5- Bir d doğrusu ile $B(t)$ düzlemsel Bezier eğrisinin arakesit noktalarının sayısı m , $B(t)$ Bezier eğrisinin kontrol poligonunun arakesit noktalarının sayısı s ise

$$m \leq s \quad \text{dir.} \quad (\text{Varyasyon Azaltma Özelliği})$$

İspat: 1- (7) formatında verilen Genel Bezier Eğrisinde, $t=0$ için; $i \neq 0$ iken $B_i^n(t) = 0$ dir. $i = 0$ durumunda ise, $B_0^n(t) = (1-t)^n$ dir. Böylece,

$$B(0) = b_0 B_0^n(0) = b_0 (1-0)^n = b_0$$

elde edilir. Benzer şekilde, $t = 1$ için; $i \neq n$ iken $B_i^n(t) = 0$ dir. $i = n$ durumunda ise,

$B_n^n(t) = t^n$ olduğundan,

$$B(1) = b_n B_n^n(1) = b_n 1^n = b_n$$

bulunur.

$$\begin{aligned} 2- B'(t) &= \left[\sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t) \right]' = \left[\sum_{i=0}^n b_i \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \right]' \\ &= \sum_{i=0}^n b_i \binom{n}{i} \left[-(n-i)(1-t)^{n-i-1} t^i + i(1-t)^{n-i} t^{i-1} \right] \\ &= b_0 \left[-n(1-t)^{n-1} \right] + b_1 n \left[(1-n)(1-t)^{n-2} t + (1-t)^{n-1} \right] + \\ &\quad + b_2 \binom{n}{2} \left[(2-n)(1-t)^{n-3} t^2 + 2(1-t)^{n-2} t \right] + \dots \\ &\quad + b_{n-1} n \left[-t^{n-1} + (n-1)(1-t)t^{n-2} \right] + b_n n t^{n-1} \end{aligned}$$

dir. Böylece,

$$B'(0) = -nb_0 + b_1 n = n(b_1 - b_0) \quad \text{ve} \quad B'(1) = -b_{n-1} n + b_n n = n(b_n - b_{n-1})$$

elde edilir.

3- $\forall t \in [0, 1]$ için $B_n^n(t) \geq 0$ ve $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$ olduğundan konveks hull tanımından

$B(t) \in \text{CH}(\{b_0, \dots, b_n\})$ dir.

4- F bir afin dönüşümü, $F(x) = gx + c$, $g \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}^2$ biçiminde ifade edilebilir. O halde $\forall t \in [0, 1]$ için,

$$F(B(t)) = F\left(\sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t)\right) = g \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t) + c$$

dir. $c = c \cdot 1$ olarak alınırsa ve (9) da 1 yerine $\sum_{i=0}^n B_i^n(t)$ yazılırsa,

$$F(B(t)) = g \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t) + c \cdot \sum_{i=0}^n B_i^n(t)$$

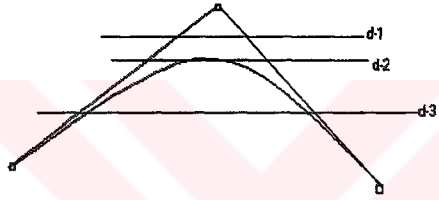
elde edilir. İfade aynı toplam altında yazıldığında:

$$F(B(t)) = \sum_{i=0}^n (gb_i + c) B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n F(b_i) B_i^n(t)$$

elde edilir.

5- [1, p.54] ♦

Not: Varyasyon azaltma özelliği ilk kez I. Schoenberg [19] tarafından verilmiştir. Bu konuda daha geniş bilgi Farin' de mevcuttur.



Arakesit Noktalarının Sayısı

DOĞRU	BEZİER	POLİGON
d-1	0	2
d-2	1	2
d-3	2	2

Şekil 7. Bir Bezier eğrisi için Varyasyon Azaltma Özelliği

1.2.2. \mathbb{R}^3 Uzayında Bezier Eğrileri

1.2.2.1. \mathbb{R}^3 Uzayında Genel Bezier Eğrisi

\mathbb{R}^3 uzayında tanımlanan Bezier eğrileri, aynen düzlemdeki Bezier eğrileri gibi tanımlanır. Ancak burada kontrol noktaları düzlemin değil, \mathbb{R}^3 uzayının elemanlarıdır.

Tanım 4: \mathbb{R}^3 uzayında Genel Bezier eğrisi, Kontrol noktaları $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ olarak verilen ve başlangıç noktası b_0 , bitim noktası b_n olan n . dereceden bir polinom eğridir. Genel Bezier eğrisi, vektörel formda,

$$B(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t), \quad t \in [0,1] \quad (18)$$

olarak tanımlanır. Burada $B_i^n(t)$ fonksiyonları düzlemsel Bezier eğrilerinde olduğu gibi

$$B_i^n(t) = \begin{cases} \frac{n!}{i!(n-i)!} (1-t)^{n-i} t^i, & 0 \leq i \leq n \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (19)$$

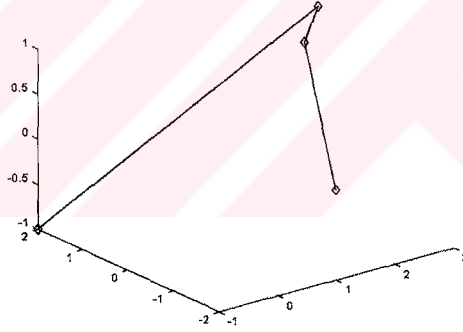
biçimde verilen Bernstein taban fonksiyonları (ya da Bernstein taban polinomları) dır.

1.2.2.2. Kontrol Poligonu

\mathbb{R}^3 uzayındaki kontrol poligonu da, düzlemde tanımlanan Bezier eğrilerinin kontrol poligonu tanımına benzer şekilde tanımlanabilir. Ancak, burada da kontrol noktaları \mathbb{R}^3 ün elemanlarıdır.

Tanım 5: Kontrol noktaları $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ olarak verilen n . dereceden bir Bezier eğrisinin kontrol noktalarını sıra korumak kaydıyla birleştiren doğru parçalarının oluşturduğu geometrik şekle Bezier eğrisinin kontrol poligonu adı verilir.

Örnek 6: Kontrol noktaları $b_0 = (1, -2, 0)$, $b_1 = (2, 0, 1)$, $b_2 = (3, 1, 1)$, $b_3 = (-1, 2, -1)$ olan Bezier eğrisinin kontrol poligonu Şekil 8 de gösterilmiştir.



Şekil 8. Kontrol noktaları $b_0 = (1, -2, 0)$, $b_1 = (2, 0, 1)$, $b_2 = (3, 1, 1)$, $b_3 = (-1, 2, -1)$ olan Bezier eğrisinin kontrol poligonu

1.2.2.3. Konveks Hullar (Convex Hull)

Düzlemde verilen $n+1$ noktadan oluşan $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, noktalar sistemi için konveks hull tanımlanmıştı. Uzayda böyle bir tanım verecek olursak, artık burada bir alandan değil, uzayın bir bölgesinden bahsetmemiz gerekecektir. \mathbb{R}^3 uzayında verilen $n+1$ noktadan oluşan $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, noktalar sistemi için konveks hull şu şekilde tanımlanmaktadır:

Tanım 6: $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^3$ sisteminin konveks hulunun vektörel ifadesi:

$$CH(X) = \left\{ a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n : x_i \in X, \sum_{i=0}^n a_i = 1, a_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, n \right\} \quad (20)$$

olarak tanımlanır. Yani uzayda x_0, x_1, \dots, x_n noktalarını birleştirmek suretiyle elde edilen en geniş bölgeye $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ sisteminin konveks hulu denir.

Düzlemdeki Bezier eğrilerinin özellikleri ile ilgili verilen teorem, benzer şekilde uzaydaki Bezier eğrileri için de verilebilir. Ancak uzaydaki Bezier eğrileri için, Varyasyon Azaltma Özelliğinde, “Bir Bezier eğrisi ile bir doğrunun arakesit noktaları” ifadesi yerine, “Bir Bezier eğrisi ile bir düzlemin arakesit noktaları” ifadesi alınacaktır [20, p.151].

1.2.3. Bezier Eğrilerinde Türev Kavramı

Bezier eğrilerinde türevler, Bernstein polinomlarının türevlerinden elde edilmektedir.

Teorem 3: $0 \leq t \leq n$ için $B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i$ Bernstein taban fonksiyonlarının birinci ve ikinci türevleri

$$1- B_i^{n'}(t) = n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)) \quad \text{ya da} \quad (21)$$

$$B_i^{n'}(t) = \frac{i-nt}{t(1-t)} B_i^n(t) \quad (22)$$

$$2- B_i^{n''}(t) = n(n-1) [B_{i-2}^{n-2}(t) - 2B_{i-1}^{n-2}(t) + B_{i-2}^{n-2}(t)] \quad \text{ya da} \quad (23)$$

$$B_i^{n''}(t) = \left(\frac{i(i-1) - 2i(n-1)t + n(n-1)t^2}{t^2(1-t)^2} \right) B_i^n(t) \quad (24)$$

biçimindedir.

İspat: Bu teoremin (21), (22), ve (24) ifadeleri ve ispatı çok kısa olarak [20, p.153] te verilmektedir. Ancak burada bu ifadelerin ispatını daha anlaşılabilir bir ifadeyle verip, (23) ifadesini ve ispatını da buraya ekliyoruz. Şimdi bunların ispatını verelim.

1- $0 \leq t \leq n$ için $B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i$ olduğundan t -ye göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} B_i^{n'}(t) &= \binom{n}{i} \left[-(n-i)(1-t)^{n-i-1} t^i + i t^{i-1} (1-t)^{n-i} \right] \\ &= \binom{n}{i} i t^{i-1} (1-t)^{n-i} - \binom{n}{i} (n-i) (1-t)^{n-i-1} t^i \quad \dots \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \frac{i}{t} - \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \frac{(n-i)}{(1-t)} \\
&= B_i^n(t) \frac{i}{t} - B_i^n(t) \frac{(n-i)}{(1-t)} \\
&= B_i^n(t) \left(\frac{i}{t} - \frac{n-i}{1-t} \right) \\
&= B_i^n(t) \left(\frac{i-nt}{t(1-t)} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. (25) ifadesi başka bir şekilde ifade edilecek olursa, $n-i = (n-1)-(i-1)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
B_i^n'(t) &= \frac{n!}{(n-i)!i!} (1-t)^{n-1-(i-1)} t^{i-1} i - \frac{n!}{(n-i)!i!} (n-i)(1-t)^{n-1-i} t^i \\
&= \frac{n(n-1)!}{(n-1-(i-1))!(i-1)!} (1-t)^{n-1-(i-1)} t^{i-1} - \frac{n(n-1)!}{(n-i)!i!} (n-i)(1-t)^{n-1-i} t^i \\
&= n \frac{(n-1)!}{(n-1-(i-1))!(i-1)!} (1-t)^{n-1-(i-1)} t^{i-1} - n \frac{(n-1)!}{(n-1-i)!i!} (1-t)^{n-1-i} t^i \\
&= n B_{i-1}^{n-1}(t) - n B_i^{n-1}(t) \\
&= n (B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t))
\end{aligned}$$

elde edilir.

2- (21) eşitliğinin her iki tarafının t -ye göre türevini alırsak,

$$\begin{aligned}
B_i^n''(t) &= n(B_{i-1}^{n-1}'(t) - B_i^{n-1}'(t)) \\
&= n \left\{ (n-1) [B_{i-2}^{n-2}(t) - B_{i-1}^{n-2}(t)] - (n-1) [B_{i-1}^{n-2}(t) - B_i^{n-2}(t)] \right\} \\
&= n(n-1) [B_{i-2}^{n-2}(t) - B_{i-1}^{n-2}(t) - B_{i-1}^{n-2}(t) + B_i^{n-2}(t)] \\
&= n(n-1) [B_{i-2}^{n-2}(t) - 2B_{i-1}^{n-2}(t) + B_i^{n-2}(t)]
\end{aligned}$$

bulunur. İkinci türev olarak, (22) eşitliğinin türevi alırsa,

$$\begin{aligned}
B_i^n''(t) &= \left[\frac{i-nt}{t(1-t)} B_i^n(t) \right]' \\
&= \left[\frac{i-nt}{t(1-t)} \right]' B_i^n(t) + \frac{i-nt}{t(1-t)} [B_i^n(t)]' \\
&= \frac{-nt(1-t) - (1-2t)(i-nt)}{t^2(1-t)^2} B_i^n(t) + \frac{(i-nt)^2}{t^2(1-t)^2} B_i^n(t)
\end{aligned}$$

$$= \left[\frac{-nt(1-t) - (1-2t)(i-nt)}{t^2(1-t)^2} + \frac{(i-nt)^2}{t^2(1-t)^2} \right] B_i^n(t)$$

$$= \left(\frac{i(i-1) - 2i(n-1)t + n(n-1)t^2}{t^2(1-t)^2} \right) B_i^n(t)$$

şeklinde elde edilir. ♦

Yukarıda verilen teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4: Kontrol noktaları b_i , $i = 0, 1, \dots, n$ olan ve $B(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t)$ biçiminde verilen bir Bezier eğrisinin türevi, kontrol noktaları $b_i^{(1)} = n(b_{i+1} - b_i)$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ olan $(n-1)$. dereceden bir Bezier eğrisidir. Yani,

$$B'(t) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i^{(1)} B_i^{n-1}(t) \quad , \quad b_i^{(1)} = n(b_{i+1} - b_i) \quad (26)$$

dir.

İspat: $B(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t)$ biçiminde verilen Bezier eğrisinin türevi (21) ifadesinden,

$$B'(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n'(t) = \sum_{i=0}^n b_i n (B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)) = n \sum_{i=0}^n b_i B_{i-1}^{n-1}(t) - n \sum_{i=0}^n b_i B_i^{n-1}(t)$$

şeklinde elde edilir. $i = 0$ için $B_{i-1}^{n-1}(t) = B_{-1}^{n-1}(t) = 0$, ve $i = n$ durumunda $B_i^{n-1}(t) = B_n^{n-1}(t) = 0$ olduklarından

$$B'(t) = n \sum_{i=1}^n b_i B_{i-1}^{n-1}(t) - n \sum_{i=0}^{n-1} b_i B_i^{n-1}(t)$$

yazılabilir. Tekrar numaralandırma yapılırsa,

$$B'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} b_{i+1} B_i^{n-1}(t) - n \sum_{i=0}^{n-1} b_i B_i^{n-1}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} n(b_{i+1} - b_i) B_i^{n-1}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i^{(1)} B_i^{n-1}(t)$$

elde edilir [20, p.153].

Sonuç 1: Kontrol noktaları b_i , $i = 0, 1, \dots, n$ olan ve $B(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t)$ biçiminde verilen bir Bezier eğrisinin ikinci türevi, kontrol noktaları $b_i^{(2)} = n(n-1)(b_{i+2} - 2b_{i+1} + b_i)$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ olan $(n-2)$. dereceden bir Bezier eğrisidir. Yani,

$$B''(t) = \sum_{i=0}^{n-2} b_i^{(2)} B_i^{n-2}(t) \quad , \quad b_i^{(2)} = n(n-1)(b_{i+2} - 2b_{i+1} + b_i) \quad (27)$$

dir.

İspat: $B'(t)$ kontrol noktaları $b_i^{(1)} = n(b_{i+1} - b_i)$ biçiminde olan $(n-1)$. dereceden bir Bezier eğrisi olduğundan bir kez daha türev alırsak, kontrol noktaları (26) dan,

$$b_i^{(2)} = (b_i^{(1)})^{(1)} = (n-1)(b_{i+1}^{(1)} - b_i^{(1)}) = (n-1)[n(b_{i+2} - b_{i+1}) - n(b_{i+1} - b_i)]$$

$$b_i^{(2)} = n(n-1)[(b_{i+2} - 2b_{i+1} + b_i)]$$

biçiminde olan $(n-2)$. dereceden Bezier eğrisi olur. Yani,

$$B''(t) = \sum_{i=0}^{n-2} b_i^{(2)} B_i^{n-2}(t) \quad , \quad b_i^{(2)} = n(n-1)(b_{i+2} - 2b_{i+1} + b_i)$$

olur. ♦

Sonuç 2: Kontrol noktaları b_i , $i = 0, 1, \dots, n$ olan n . dereceden bir $B(t)$ Bezier eğri fonksiyonu için r . türev fonksiyonu, kontrol noktaları $i = 0, 1, \dots, n-r$ olmak üzere

$b_i^{(r)} = n(n-1)\dots(n-r+1) \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} b_{i+j}$ olan $(n-r)$. dereceden bir Bezier eğrisi temsil eder.

Yani,

$$B^{(r)}(t) = \sum_{i=0}^{n-r} b_i^{(r)} B_i^{n-r}(t) \quad , \quad b_i^{(r)} = n(n-1)\dots(n-r+1) \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} b_{i+j} \quad (28)$$

dir.

İspat: İspatı tümevarımla yapabiliriz. $r = 1$ için ;

$$b_i^{(1)} = n \sum_{j=0}^1 (-1)^{1-j} \binom{1}{j} b_{i+j} = n(-b_i + b_{i+1})$$

elde edilir ki bu (26) ifadesinden doğrudur. r için doğru olsun. Yani,

$$b_i^{(r)} = n(n-1)\dots(n-r+1) \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} b_{i+j}$$

olsun. $r+1$ için ;

$$b_i^{(r+1)} = (b_i^{(r)})^{(1)} = (n-r)(b_{i+1}^{(r)} - b_i^{(r)})$$

$$b_i^{(r+1)} = (n-r) \left[\left(n(n-1)\dots(n-r+1) \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} b_{i+1+j} \right) - \left(n(n-1)\dots(n-r+1) \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} b_{i+j} \right) \right]$$

$$= n(n-1)\dots(n-r+1)(n-r) \sum_{j=0}^r [(-1)^{r-j} \binom{r}{j} b_{i+1+j} - (-1)^{r-j} \binom{r}{j} b_{i+j}]$$

$$= n(n-1)\dots(n-r+1)(n-r) \sum_{j=0}^r [(-1)^{r-j} \binom{r}{j} b_{i+1+j} + (-1)^{r-j+1} \binom{r}{j} b_{i+j}]$$

$$= n(n-1)\dots(n-r+1)(n-r) \left[(-1)^r \binom{r}{0} b_{i+1} + (-1)^{r+1} \binom{r}{0} b_i + \dots \right]$$

$$\begin{aligned}
& \dots + \left((-1)^{r-1} \binom{r}{1} b_{i+2} + (-1)^r \binom{r}{2} b_{i+1} \right) + \dots + \left((-1)^0 \binom{r}{r} b_{i+r} + (-1)^1 \binom{r}{r-1} b_{i+r-1} \right) \\
& = n(n-1)\dots(n-r+1)(n-r) \left[(-1)^{r+1} \binom{r}{0} b_i + (-1)^r \left(\binom{r}{0} + \binom{r}{1} \right) b_{i+1} + \dots \right. \\
& \quad \left. \dots + (-1)^1 \left(\binom{r}{r-1} + \binom{r}{r} \right) b_{i+r} + (-1)^0 \binom{r}{r} b_{i+r+1} \right] \\
& = n(n-1)\dots(n-r+1)(n-r) \left[(-1)^{r+1} \binom{r+1}{0} b_i + (-1)^r \binom{r+1}{1} b_{i+1} + \dots \right. \\
& \quad \left. \dots + (-1)^1 \binom{r+1}{r} b_{i+r} + (-1)^0 \binom{r+1}{r+1} b_{i+r+1} \right] \\
& = n(n-1)\dots(n-r+1)(n-r) \sum_{j=0}^{r+1} (-1)^{r+1-j} \binom{r+1}{j} b_{i+j}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır [20, p.154] . ♦

Sonuç 1 ve Sonuç 2 ifadeleri [20, p.153] de ispatsız olarak verilmiştir. İspatı buraya eklenmiştir.

1.2.4. Parçalı Bezier Eğrileri

Bezier eğrileri keyfi aralıkta da tanımlı olabilir. Bu durumda parametre dönüşümü yapılarak Bezier eğrileri $[0,1]$ aralığında tanımlı standart Bezier formunda ifade edilebilir. $[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı, kontrol noktaları b_i , $i = 0,1,\dots,n$ olan Bezier

eğrisi; $t \rightarrow \frac{t-a}{b-a}$ parametre dönüşümü ile

$$B(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n \left(\frac{t-a}{b-a} \right)$$

biçiminde ifade edilebilir.

Tanım 7: Keyfi $[a,b]$ aralığında tanımlı bir Bezier eğrisi için $\varphi: [a,b] \rightarrow [0,1]$

öyleki, $t \rightarrow \varphi(t) = \frac{t-a}{b-a}$ parametre dönüşümü yapıldığında elde edilen

$$\hat{B}(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n (\varphi(t)), \quad t \in [0,1] \quad (29)$$

ifadesine Bezier eğrisinin **normalleştirilmesi** denir.

Tanım 8: $I = [a,b]$ olsun. $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{r-1} < t_r = b$ I aralığının bir parçalanışı olsun. $t \in [t_j, t_{j+1}]$ için bir $B_j(t)$ keyfi aralıklı Bezier eğrisi bulunabilirse öyle ki,

$$(i) P(t) = B_j(t) \quad t \in [t_j, t_{j+1}] \quad j = 0, \dots, r-1$$

$$(ii) P(t_j) = B_{j-1}(t_j) \quad \text{ya da} \quad P(t_j) = B_j(t_j) \quad j = 1, \dots, r-1$$

$$(iii) P(t_0) = B_0(t_0) \quad \text{ve} \quad P(t_r) = B_{r-1}(t_r)$$

ise $P(t)$ eğrisine **parçalı Bezier eğrisi** denir. $t_0, t_1, t_2, \dots, t_{r-1}, t_r$ noktalarına da parçalı Bezier eğrisinin **kırılma noktaları** denir.

Parçalı Bezier eğrisi, Bezier eğrilerinin birleşimidir. Uygulamalarda genellikle sürekli eğriler gözönüne alınmaktadır. Parçalı sürekli Bezier eğrisi için $P(t_j)$ tek değerlidir ve $P(t_j) = B_{j-1}(t_j) = B_j(t_j)$ dir.

$$\text{Örnek 7: } B_0(t), \quad t \in [-2, 0]; \quad B_1(t), \quad t \in [0, 3]; \quad B_2(t), \quad t \in [3, 4]$$

biçiminde tanımlı Bezier eğrilerini gözönüne alalım. Bunların kontrol noktaları ise,

$$B_0(t) \text{ için, } b_{00} = (2, -1), \quad b_{01} = (5, 2), \quad b_{02} = (7, 3), \quad b_{03} = (8, -1);$$

$$B_1(t) \text{ için, } b_{10} = (8, -1), \quad b_{11} = (8, -3), \quad b_{12} = (7, -4), \quad b_{13} = (5, -4);$$

$$B_2(t) \text{ için, } b_{20} = (5, -4), \quad b_{21} = (3, -4), \quad b_{22} = (4, -2), \quad b_{23} = (6, -2);$$

olsun. $B_0(t), B_1(t), B_2(t)$ lerden oluşan parçalı Bezier eğrisi

$$P(t) = \begin{cases} B_0(t), & -2 \leq t < 0, \\ B_1(t), & 0 \leq t < 3, \\ B_2(t), & 3 \leq t \leq 4, \end{cases}$$

biçiminde ifade edilebilir [20, p.151-161].

1.3. Rasyonel Bezier Eğrileri

Rasyonel Bezier eğrilerini daha iyi kavrayabilmek için, projektif geometriye ait temel kavramlara ihtiyaç duyulmaktadır. Bu konuyla ilgili detaylı bilgi Farin, [1], Marsh [20], Byoung K. Choi, [21] de mevcuttur. Biz bu bölümde, bize lazım olduğu kadarıyla projektif geometriye ait temel kavramları açıklayıp daha derli toplu bir halde rasyonel Bezier eğrilerini sunacağız.

Konikler, genel olarak üç tip olarak sınıflandırılır: Parabol, hiperboller ve elipsler. Parabol polinom fonksiyonlarla parametrelenebilir. Ancak, hiperbol ve elips ancak rasyonel fonksiyonlarla parametrelenebildiğinden hiperbol ve elips için Bezier formları ancak rasyonel biçimde verilebilmektedir. Bu nedenle rasyonel Bezier eğrilerinin ortaya

konulmasında, bilgisayar destekli tasarımlarda koniklerin Bezier formunda ifade edilebilme problemi önemli rol oynamıştır.

Bugün koniklerin, uçak endüstrisinden bilgisayar destekli matbaacılık alanlarına kadar pek çok alanda önemli ölçüde kullanım alanı vardır. Koniklerle ilgili yapılan algoritmik çalışmalar 1940–lı yıllarda gelişmeye başlamıştır. Bu konuda R. Liming [22] örnek olarak verilebilir. Koniklerin rasyonel Bezier formlarını veren E. Lee [23] dir [1, p.213].

1.3.1. Projektif Kavramlar

Rasyonel Bezier eğrileri projektif geometri ile yakından ilgili olduğundan burada biraz projektif geometriye ait temel kavramlardan bahsedeceğiz. Öncelikle bilgisayar grafiklerinde pek çok kullanım alanına sahip olan projeksiyonlarla başlayalım.

1.3.1.1. Projeksiyonlar

Bir π düzlemini ve düzlemin dışında bir S noktasını göz önüne alalım. π düzleminde bazı noktalar alalım. Bu noktaları A, B, C, ... olarak işaretleyelim. Bu noktalar ile belirli doğruları da AB, AC, BC, ... olarak belirleyelim. S noktasından A, B, C, ... noktalarına doğrular çizilirse, elde edilecek olan, SA, SB, SC, ... doğrularına sırasıyla A, B, C, ... **noktalarının Projektörleri**; SAB, SAC, SBC,... düzlemlerine de sırasıyla AB, AC, BC,... **doğrularının Projektörleri** denir. Şimdi bu projektörlerin keyfi konumlu bir başka π' düzlemi ile arakesitleri alırsa, örneğin A'B'C' üçgeni elde edilir. (Şekil 9) Böylece, ABC üçgenine A'B'C' üçgeninin π düzlemine **projeksiyonu** denir. π düzlemine de **görüntü düzlemi (image plane)** adı verilir [24, p.7].

1.3.1.2. Barisentrik (Barycentric) Koordinatlar

Barisentrik koordinatlar, ilk defa F. Moebius [25] tarafından verilmiştir.

Tanım 9: a, x, b R^3 uzayında doğrusal üç nokta olmak üzere; a, x, b arasında

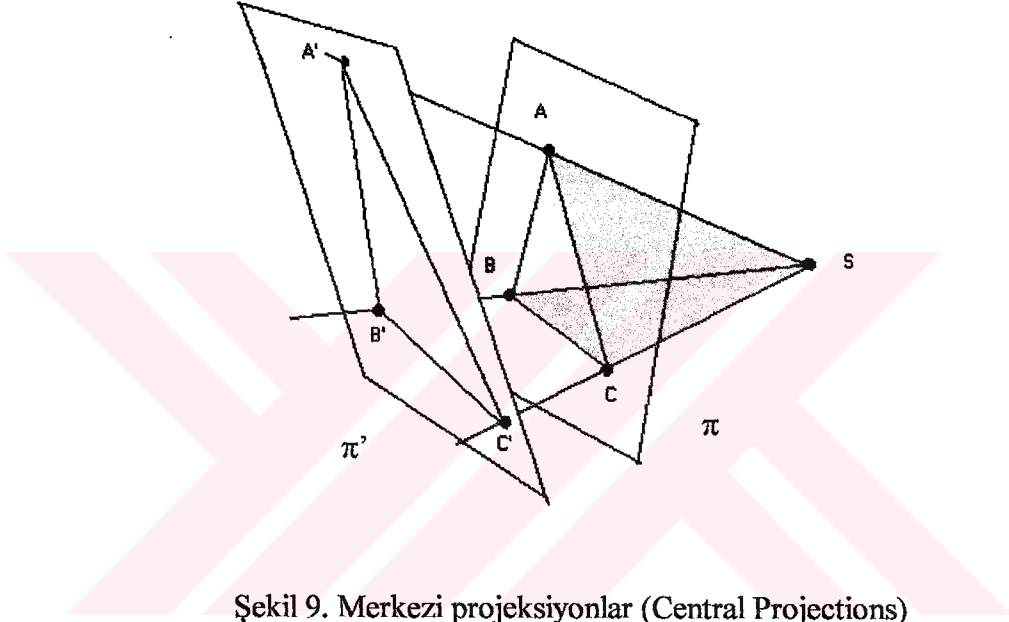
$$x = \alpha a + \beta b \quad \alpha + \beta = 1 \quad (30)$$

biçiminde bir bağıntı varsa, α , β ya x -in a ve b -ye göre Barisentrik koordinatları denir. Keyfi a, b, c doğrusal üç nokta için, b -nin a ve c -ye göre barisentrik kordinatları; $d(x, y)$, x ile y arasındaki uzaklık olmak üzere,

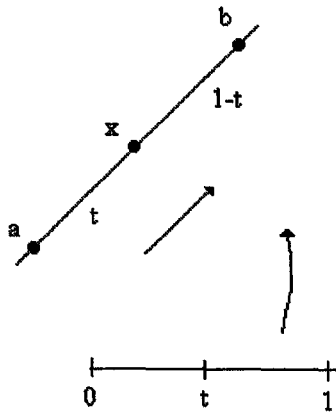
$$\alpha = \frac{d(b, c)}{d(a, c)} = \frac{\|c - b\|}{\|c - a\|}$$

$$\beta = \frac{d(a, b)}{d(a, c)} = \frac{\|b - a\|}{\|c - a\|}$$
(31)

biçiminde verilir.



Şekil 9. Merkezi projeksiyonlar (Central Projections)



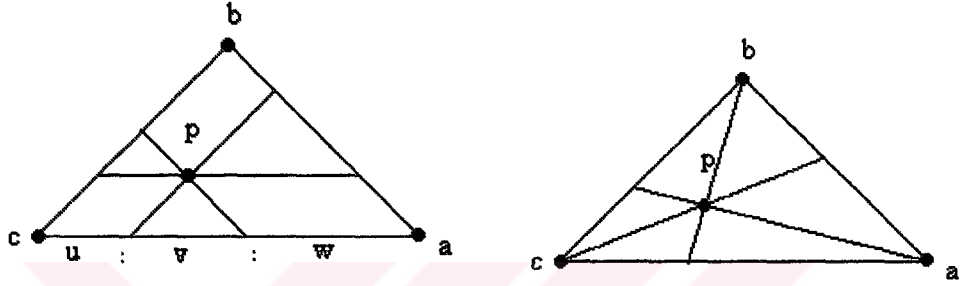
Şekil 10. Lineer interpolasyon. a ve b arasındaki doğru parçası üzerinde alınan bir x noktasının ab -yi t ve $1-t$ ile orantılı olarak ikiye ayırması

Barisentrik koordinatlar yalnızca dorusal olan noktalar için değil, düzlemsel noktalar için de verilebilir.

Tanım 10: a, b, c ve p \mathbb{R}^3 uzayında aynı düzlemde bulunan (düzlemsel) dört nokta ve a, b, c bir doğru üzerinde bulunmayan üç nokta olmak üzere; p -yi a, b, c -nin bir barisentrik kombinasyonu olarak,

$$p = ua + vb + wc \quad u + v + w = 1 \quad (32)$$

biçiminde yazmak mümkündür. Burada $U := (u, v, w)$ katsayılarına p -nin a, b ve c -ye göre barisentrik koordinatları denir.



Şekil 11. Düzlemde üç noktaya bağlı bir p noktasının barisentrik koordinatlarının gösterimi

Keyfi a, b, c ve p düzlemsel üç nokta için, p -nin a, b ve c -ye göre barisentrik kordinatları

$$\begin{aligned} u &= \frac{\text{Alan}(p, b, c)}{\text{Alan}(a, b, c)} \\ v &= \frac{\text{Alan}(a, p, c)}{\text{Alan}(a, b, c)} \\ w &= \frac{\text{Alan}(a, b, p)}{\text{Alan}(a, b, c)} \end{aligned} \quad (33)$$

biçiminde verilir [1, p.20,304].

1.3.1.3. Çapraz oranlar

Projektif geometri de önemli kavramalardan biri de rasyolardır. a, b, c gibi doğrusal üç noktanın rasyosu

$$\text{rasyo}(a, b, c) = \frac{d(a, b)}{d(b, c)} \quad (34)$$

dir. Eğer α, β b-nin a ve c -ye göre barisentrik koordinatları ise

$$\text{rasyo}(a, b, c) = \frac{\beta}{\alpha} \quad (35)$$

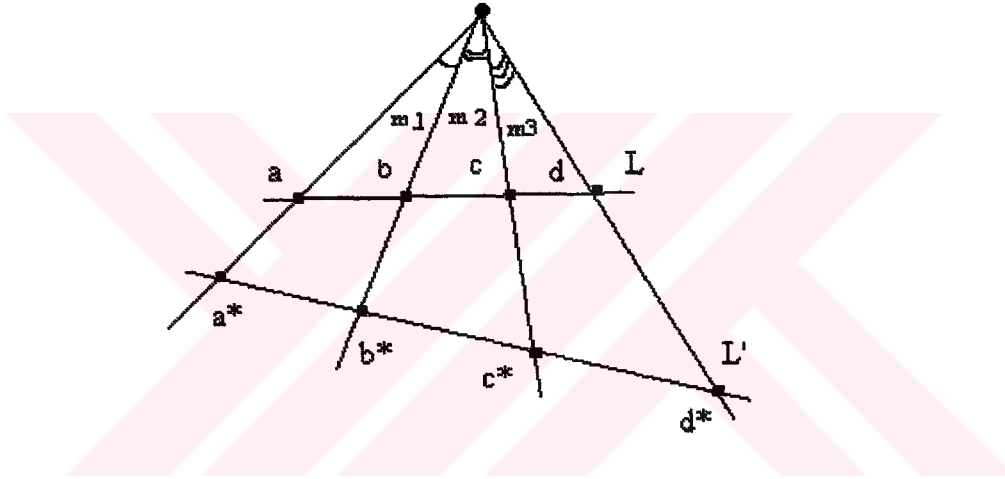
dir. Bu rasyolar afin dönüşümler altında invaryant kalmaktadır. Yani, $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ afin dönüşümü olmak üzere

$$\text{rasyo}(\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c)) = \frac{\beta}{\alpha} \quad (36)$$

dir. Dört doğrusal noktanın çapraz oranı (cross ratio , cr), rasyoların oranı olarak

$$\text{cr}(a, b, c, d) = \frac{\text{rasyo}(a, b, d)}{\text{rasyo}(a, c, d)} \quad (37)$$

biçiminde tanımlanır.



Şekil 12. Çapraz oran. a,b,c,d ve a*,b*,c*,d* noktalarının çapraz oranlarının gördükleri açıya bağlı olması

Önerme 1: Şekildeki gibi verilen L doğrusu üzerinde bulunan a,b,c,d noktalarının çapraz oranı, L' doğrusu üzerinde bulunan a*,b*,c*,d* noktalarının çapraz oranına eşittir. Yani,

$$\text{cr}(a, b, c, d) = \text{cr}(a^*, b^*, c^*, d^*) \quad (38)$$

dir.

İspat: Köşe noktaları p,q,r olan bir üçgenin alanını $\Delta(p,q,r)$ ile gösterelim.

$$\text{rasyo}(a,b,c) = \Delta(a,b,o)/\Delta(b,c,o)$$

olduğundan a,b,c,d -nin çapraz oranı,

$$\text{cr}(a, b, c, d) = \frac{\text{rasyo}(a, b, d)}{\text{rasyo}(a, c, d)} = \frac{\Delta(a, b, o)/\Delta(b, d, o)}{\Delta(a, c, o)/\Delta(c, d, o)} = \frac{\Delta(a, b, o)\Delta(c, d, o)}{\Delta(b, d, o)\Delta(a, c, o)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{1}{2}|ao||bo|\sin(m1) \frac{1}{2}|co||do|\sin(m3)}{\frac{1}{2}|bo||do|\sin(m2+m3) \frac{1}{2}|ao||co|\sin(m1+m2)} \\
&= \frac{\sin(m1)\sin(m3)}{\sin(m2+m3)\sin(m1+m2)}
\end{aligned}$$

dir. Görüldüğü gibi, çapraz oranı noktaların O projeksiyon merkezine olan uzaklıklarına bağlı değil, yalnızca noktaların O merkezinde yaptığı açılara ve bu açılarının sinüs değerlerine bağlıdır. Bu nedenle a^*, b^*, c^*, d^* noktalarının da merkezle yaptıkları açılar $m1, m2, m3$ olduğundan,

$$cr(a, b, c, d) = cr(a^*, b^*, c^*, d^*)$$

dir. ♦

1.3.1.4. Reel Doğruların Projektif Dönüşümleri

Bir L doğrusunun P düzlemine projeksiyonu, Şekil 13 deki gibi bir L' doğrusudur. Bu suretle, projeksiyonları, reel doğruları reel doğrulara dönüştüren bir dönüşüm olarak görebiliriz. Böylece, bir projeksiyon, reel doğruları reel doğrulara dönüştüren bir projektif dönüşümdür.

L doğrusu üzerinde bulunan a, b, d noktalarının, L' doğrusu üzerinde bulunan a^*, b^*, d^* noktalarına dönüştüğü bir projektif dönüşümü göz önüne alalım. L doğrusu üzerinde başka bir t noktasına, L' doğrusu üzerinde bulunan t^* noktasının nasıl karşılık geldiği, çapraz oranı ile bulunmaktadır. Böylece, reel doğruları reel doğrulara resmeden bir projektif dönüşüm, a,b,c ve a^*, b^*, c^* sayıları ile belirlidir. Bir t noktasının, t^* projektif resmi,

$$cr(a, b, t, c) = cr(a^*, b^*, t^*, c^*)$$

çapraz oranı ile hesaplanabilir [1, p.213]. Böylece,

$$\begin{aligned}
cr(a, b, t, c) &= \frac{rasyo(a, b, c)}{rasyo(a, t, c)} = cr(a^*, b^*, t^*, c^*) = \frac{rasyo(a^*, b^*, c^*)}{rasyo(a^*, t^*, c^*)} \\
\frac{d(a, b)/d(b, c)}{d(a, t)/d(t, c)} &= \frac{d(a^*, b^*)/d(b^*, c^*)}{d(a^*, t^*)/d(t^*, c^*)} \\
\frac{(b-a)/(c-b)}{(t-a)/(c-t)} &= \frac{(b^*-a^*)/(c^*-b^*)}{(t^*-a^*)/(c^*-t^*)}
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Burada, $(b-a)/(c-b) = v$ ve $(b^*-a^*)/(c^*-b^*) = v^*$ denilirse,

$$\frac{v}{(t-a)/(c-t)} = \frac{v^*}{(t^*-a^*)/(c^*-t^*)}$$

dır. Biraz daha düzenlersek,

$$v(c-t)(t^*-a^*) = v^*(c^*-t^*)(t-a)$$

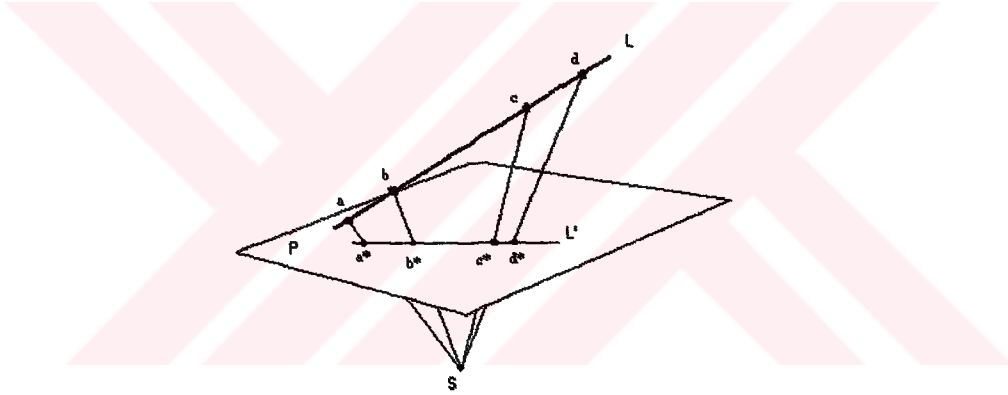
olur. Buradan t^* yalnız bırakılırsa,

$$t^* = \frac{v^*c^*(t-a) + a^*v(c-t)}{v(c-t) + v^*(t-a)} \quad (39)$$

elde edilir. Daha kolay ve daha kullanışlı bir ifade için, $a = a^* = 0$; ve $c = c^* = 1$ alınırsa t^* ifadesi;

$$t^* = \frac{v^*t}{v(1-t) + v^*t} \quad (40)$$

halini alır. Böylece, bir projektif dönüşüm bir rasyonel lineer dönüşüme karşılık gelmektedir [1, p.213-216].



Şekil 13. Bir L doğrusunun L' doğrusuna projeksiyonu

1.3.1.5. Homojen Koordinatlar

Bütün afin dönüşümleri bir dönüşüm matrisine sahiptir. Örneğin düzlemde, orijin etrafında α kadar dönme hareketi göz önüne alınırsa, bir (x,y) noktası bu dönüşüm altında;

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (41)$$

biçiminde ifade edilebilir ve dönmeye ait matris ise,

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

matrisidir. Hareketler sadece bir dönüşümden oluşmayabilir. Örneğin hareket, A matrisi ile verilen dönme hareketi ve ardından da $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ matrisi ile verilen bir hareket ile tanımlı olsun. Bu durumda hareketin matrisi,

$$H = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cos \alpha & 3 \sin \alpha \\ -5 \sin \alpha & 3 \cos \alpha \end{bmatrix}$$

biçiminde iki matrisin çarpımı ile verilebilir. Ancak hareket, öteleme hareketi de içeriyorsa o zaman hareketin matrisini 2x2 lik tek matriste ifade etmek mümkün değildir. Bunun için yeni bir koordinat sistemine ihtiyaç vardır.

Düzlemde bir (x, y) noktasına, α kadar dönme ve $p=(a,b)$ kadar öteleme uygulayalım. Yani, (41) dönme hareketini yaptıktan sonra

$$(x', y') = (x + a, y + b)$$

biçiminde $p=(a,b)$ kadar öteleme hareketi yapsın. Bu iki hareketi aynı matriste göstermek istiyoruz. Bunun için, düzlemdeki bir $x = (x_1, x_2)$ vektörünü bir boyut daha ekleyip sanki üç boyutlu imiş gibi $x = (x_1, x_2, 1)$ ile göstereceğiz. Hareketin matrisini ise,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & a \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (42)$$

biçiminde 3x3 matris ile gösterebiliriz. Burada da kullandığımız gibi düzlemin bir (x,y) elemanının $(x, y, 1)$ biçiminde, veya $r \neq 0$ için (rx, ry, r) biçimindeki gösterimine **homojen koordinatları** (ya da **projektif koordinatlar**) denir. E^2 nin (x, y) elemanını, $[x \ y]^T$ olarak; bu elemanın homojen koordinatlardaki karşılığını da $[wx \ wy \ w]^T$ ile gösterebiliriz. $[wx \ wy \ w]^T$, $[x \ y]^T$ noktasının bir projektörüdür.

Örnek 8: Düzlemde $(2,3)$ noktasının homojen koordinatları,

$$\{(2r, 3r, r) : r \in \mathbb{R} - \{0\}\}$$

biçimindedir. (x, y, w) biçiminde homojen koordinatlara sahip bir noktanın düzlemdeki kartezyen koordinatlardaki karşılığı $(x/w, y/w)$ noktasıdır.

Örnek 9: Homojen koordinatı, $(6,4,2)$ olan noktanın düzlemdeki kartezyen koordinatını bulmak için, homojen koordinatın son elemanının 1 olması sağlanır. Bunun için homojen koordinatta verilen ifadeyi, son elemana böleriz. Bu şekilde $\frac{1}{2}(6,4,2) = (3,2,1)$ elde edilir. Böylece, noktanın düzlemdeki kartezyen koordinatı $(3,2)$ noktasıdır.

Düzlemdeki noktaların homojen koordinatlarda gösterimi 3- boyutlu uzayın elemanlarının gösterimi biçimindedir. Benzer şekilde 3- boyutlu uzayın elemanlarının homojen koordinatlarda gösterimi de 4- boyutlu uzayın elemanlarının gösterimi biçimindedir [20, -13-20].

1.3.2. Rasyonel Kuadratikler Olarak Konikler

Koniklerin bir çok tanımı mevcuttur. Ancak biz burada çok kullanışlı olan bir tanımı vermek istiyoruz.

E^2 uzayında tanımlanan bir konik parçası, aslında E^3 de verilen bir parabolün bir düzleme projeksiyonudur. $x = (x_1, x_2) \in E^2$ elemanın $[wx_1 \ wx_2 \ w]^T$ biçimindeki homojen koordinatlarını kısaca, $[wx \ w]^T$ ile göstereceğiz.

$c(t) \in E^2$, konik üzerinde bir nokta olsun. $c(t) - y_i \ [c(t) \ 1]^T \in E^3$ olarak belirtebiliriz. Bu nokta, 3 boyutlu uzayda parabolik bir eğri olarak verilen eğrinin, (ki, bunu bir Bezier eğrisi olarak alabiliriz.) bir $[w(t)c(t) \ w(t)]^T$ noktasının $z = 1$ düzlemine projeksiyonudur. 3 boyutlu noktanın üçüncü bileşeni $w(t)$, t parametresine bağlı ikinci derece bir fonksiyon olmalıdır. $w(t)$ Bernstein formunda,

$$w(t) = w_0 B_0^2(t) + w_1 B_1^2(t) + w_2 B_2^2(t)$$

olarak ifade edilebilir. Böylece,

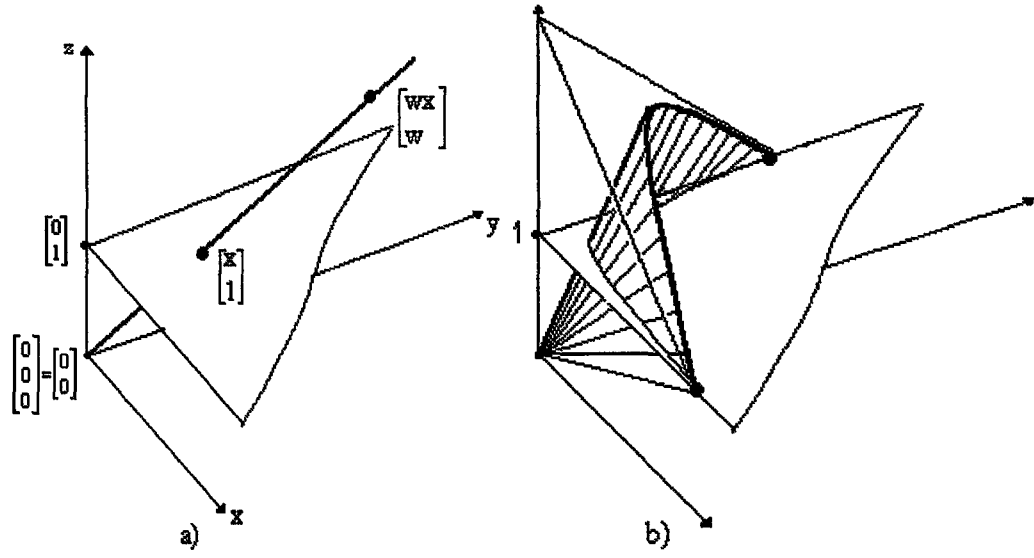
$$w(t) \begin{bmatrix} c(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w(t)c(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(t) \sum_{i=0}^2 w_i B_i^2(t) \\ \sum_{i=0}^2 w_i B_i^2(t) \end{bmatrix}$$

dir. Eşitliklerden elde edilen en son ifade, üç boyutlu uzayda bir parabol belirttiğinden, bu eğri Bezier formunda yazılırsa, kontrol noktaları b_i -ler olmak üzere;

$$\sum_{i=0}^2 b_i B_i^2(t) = \begin{bmatrix} c(t) \sum_{i=0}^2 w_i B_i^2(t) \\ \sum_{i=0}^2 w_i B_i^2(t) \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir. b_i - kontrol noktaları, parabole ait olduklarından parabol ile aynı

$w(t)$ bileşenine sahiptir. Dolayısıyla $b_i = \begin{bmatrix} w_i p_i \\ w_i \end{bmatrix}$, ($p_i \in E^2$) dir. Yerine yazılacak olursa,



Şekil 14. a) Homojen koordinatlar ve projeksiyonu b) üç boyutlu uzayda verilen bir parabolün $z = 1$ düzlemine projeksiyonu ile elde edilen konik parçası (Bir hiperbol kesiti)

$$\sum_{i=0}^2 \begin{bmatrix} w_i p_i \\ w_i \end{bmatrix} B_i^2(t) = \begin{bmatrix} c(t) \sum_{i=0}^2 w_i B_i^2(t) \\ \sum_{i=0}^2 w_i B_i^2(t) \end{bmatrix}$$

olur. Daha açık bir ifadeyle,

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^2 w_i p_i B_i^2(t) \\ \sum_{i=0}^2 w_i B_i^2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(t) \sum_{i=0}^2 w_i B_i^2(t) \\ \sum_{i=0}^2 w_i B_i^2(t) \end{bmatrix}$$

dir. Matrislerin eşitliğinden,

$$\sum_{i=0}^2 w_i p_i B_i^2(t) = c(t) \sum_{i=0}^2 w_i B_i^2(t)$$

elde edilir. Buradan $c(t)$ yalnız bırakılırsa,

$$c(t) = \frac{\sum_{i=0}^2 w_i p_i B_i^2(t)}{\sum_{i=0}^2 w_i B_i^2(t)} \quad (43)$$

elde edilir. Böylece elde edilen $c(t)$ eğrisi, kuadratik rasyonel Bezier eğrisidir.

1.3.3. Genel Olarak Rasyonel Bezier Eğrileri

Bir önceki paragrafta, E^2 deki bir konik parçasını, E^3 teki bir parabolün projeksiyonu olarak elde ettik. Burada yapılan iş, E^2 de Bezier formunda direkt olarak ifade edemediğimiz konik parçalarının, direkt olarak Bezier formunda ifade edebildiğimiz E^3 teki parabolün E^2 ye projeksiyonunu alarak rasyonel Bezier formunu elde etmek idi. Bu işlemi E^2 de derecesi n olan rasyonel Bezier eğrisini elde etme problemine genişletirsek, şöyle bir sonuç elde edebiliriz: E^2 de derecesi n olan bir rasyonel Bezier eğrisi, E^3 te verilen bir Bezier eğrisinin E^2 ye projeksiyonu ile bulunur. Benzer şekilde, E^3 deki n . derece rasyonel Bezier eğrisi de, E^4 teki bir Bezier eğrisinin E^3 - e projeksiyonu ile elde edilir.

Rasyonel Bezier eğrilerinin bilgisayar destekli tasarımlarda kullanımlarının güzel birer örneği Coons [26] ve Forrest [27] vermişlerdir [1, p.231]

Tanım 11: Kontrol noktaları b_i , $i = 0, 1, \dots, n$ ve ağırlıklı katsayıları w_i , $i = 0, 1, \dots, n$ olan n . derece bir rasyonel Bezier eğrisi,

$$B(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i b_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)}, \quad t \in [0, 1] \quad (44)$$

denklemleriyle tanımlanır. Burada w_i -lerin tümü sıfır olamaz. En az bir $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ için $w_i \neq 0$ dır. Bir $B(t)$ rasyonel Bezier eğrisi ; $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ için,

$$R_i^n(t) = \begin{cases} \frac{w_i B_i^n(t)}{\sum_{j=0}^n w_j B_j^n(t)} & , w_i \neq 0 \\ \frac{B_i^n(t)}{\sum_{j=0}^n w_j B_j^n(t)} & , w_i = 0 \end{cases} \quad (45)$$

olmak üzere

$$B(t) = \sum_{i=0}^n b_i R_i^n(t) \quad (46)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada açıkça görülüyor ki, $\sum_{i=0}^n R_i^n(t) = 1$ dir [20, p.13-20].

Örnek 10: Kontrol noktaları $b_0 = (0,0,0)$, $b_1 = (1,2,3)$, $b_2 = (2,2,4)$ ve ağırlıkları $w_0 = 0.5$, $w_1 = 1$, $w_2 = 0.5$ olan kuadratik rasyonel Bezier eğrisi, $t \in [0,1]$ olmak üzere

$$B(t) = \left(\frac{-t^2 + 2t}{-t^2 + t + \frac{1}{2}}, \frac{-3t^2 + 4t}{-t^2 + t + \frac{1}{2}}, \frac{-t^2 + 3t}{-t^2 + t + \frac{1}{2}} \right)$$

fonksiyonuyla tanımlanır.

Lemma 1: O merkezli, r yarıçaplı çember üzerinde, merkezde θ kadar açı ile alınan, $b_0 = (r,0)$ noktasından başlayan ve $b_2 = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ noktasında biten dairesel yayı; kontrol noktaları;

$$b_0 = (r,0), \quad b_1 = \left(r, r \tan \frac{\theta}{2}\right) \quad \text{ve} \quad b_2 = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

olan ve ağırlık fonksiyonları ise,

$$w_0 = 1, \quad w_1 = \cos \frac{\theta}{2}, \quad w_2 = 1$$

olan rasyonel kuadratik Bezier gösterimine sahiptir.

İspat: Kuadratik rasyonel Bezier eğrisi ifadesinde kontrol noktaları ve ağırlıklar yerlerine yazılırsa,

$$x(t) = \frac{r(1-t)^2 + 2rt(1-t) \cos \frac{\theta}{2} + rt^2 \cos \theta}{(1-t)^2 + 2t(1-t) \cos \frac{\theta}{2} + t^2}$$

ve

$$y(t) = \frac{2rt(1-t) \sin \frac{\theta}{2} + rt^2 \sin \theta}{(1-t)^2 + 2t(1-t) \cos \frac{\theta}{2} + t^2}$$

olur. $x(t)$ ve $y(t)$ -nin kareleri alınır ve toplanırsa,

$$x^2 + y^2 = r^2$$

olduğu görülür. ♦

Teorem 5: Derecesi n , kontrol noktaları b_i , ağırlıkları w_i olan rasyonel Bezier eğrisi için, herhangi bir w_k ağırlığı, δw_k kadar arttırıldığında, rasyonel Bezier eğrisi üzerindeki her $b = B(t)$ noktası,

$$\alpha = \frac{\delta w_k B_k^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t) + \delta w_k B_k^n(t)}$$

olmak üzere

$$b_w = (1-\alpha)b + \alpha b_k = (1-\alpha)B(t) + \alpha b_k \quad (47)$$

noktasına dönüşür.

İspat: Verilen α için $1-\alpha$ değeri,

$$1-\alpha = \frac{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t) + \delta w_k B_k^n(t)}$$

dir. Bu durumda,

$$b_w = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} b_i w_i B_i^n(t) + b_k (w_k + \delta w_k) B_k^n(t) + \sum_{i=k+1}^n b_i w_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{k-1} w_i B_i^n(t) + (w_k + \delta w_k) B_k^n(t) + \sum_{i=k+1}^n w_i B_i^n(t)}$$

olur. Bu ifade biraz daha düzenlenirse,

$$\begin{aligned} b_w &= \frac{\sum_{i=0}^n b_i w_i B_i^n(t) + b_k \delta w_k B_k^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t) + \delta w_k B_k^n(t)} \\ &= \frac{\sum_{i=0}^n b_i w_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t) + \delta w_k B_k^n(t)} + \frac{\delta w_k B_k^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t) + \delta w_k B_k^n(t)} b_k \\ &= \frac{\sum_{i=0}^n b_i w_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t) + \delta w_k B_k^n(t)} \cdot \left(\frac{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)} \right) + \frac{\delta w_k B_k^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t) + \delta w_k B_k^n(t)} b_k \\ &= \frac{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t) + \delta w_k B_k^n(t)} \cdot \left(\frac{\sum_{i=0}^n b_i w_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)} \right) + \frac{\delta w_k B_k^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t) + \delta w_k B_k^n(t)} b_k \\ &= (1-\alpha)B(t) + \alpha b_k \\ &= (1-\alpha)b + \alpha b_k \end{aligned}$$

elde edilir. ♦

1.3.4. Kuadratik Rasyonel Bezier Eğrilerinin Sınıflandırılması

Paragraf 1.3.2. de ifade edildiği gibi, herhangi bir konik, kuadratik rasyonel fonksiyonlarla parametrize edilebilir. Tersine, kuadratik rasyonel fonksiyonlarla parametrize edilebilen herhangi bir eğri koniktir. Konikler; parabol, elipsler ve hiperboller olarak başlıca üç sınıfa ayrıldığından kuadratik rasyonel Bezier eğrileri de başlıca üç sınıfa ayrılır.

Bir kuadratik rasyonel Bezier eğrisi,

$$B(t) = \frac{w_0 b_0 B_0^2(t) + w_1 b_1 B_1^2(t) + w_2 b_2 B_2^2(t)}{w_0 B_0^2(t) + w_1 B_1^2(t) + w_2 B_2^2(t)}$$

biçimindedir. Burada,

$w_1^2 - w_0 w_2 < 0$ ise kuadratik rasyonel Bezier eğrisine **eliptik** denir.

$w_1^2 - w_0 w_2 = 0$ ise kuadratik rasyonel Bezier eğrisi bir **parabolik** denir.

$w_1^2 - w_0 w_2 > 0$ ise kuadratik rasyonel Bezier eğrisi bir **hiperbolik** denir.

1.3.5. Rasyonel Bezier Eğrilerinde Türev Kavramı

Rasyonel Bezier eğrileri, rasyonel fonksiyonlarla verildiklerinden rasyonel fonksiyonlar için türev kuralları burada da geçerlidir.

$$F(t) = \frac{f(t)}{g(t)} \quad (48)$$

biçiminde verilen bir rasyonel fonksiyonun türevi,

$$F'(t) = \frac{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)}{g^2(t)} = \frac{f'(t) - g'(t)F(t)}{g(t)} \quad (49)$$

olarak verilmektedir. Rasyonel fonksiyonların r. dereceden türevlerini almak için, (48) ifadesinden ,

$$f(t) = g(t)F(t)$$

yazılırsa, iki fonksiyonun çarpımının r. dereceden türevi Leibnitz kuralına göre alındığında,

$$\begin{aligned} f^{(r)}(t) &= \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} g^{(i)}(t) F^{(r-i)}(t) \\ &= g(t) F^{(r)}(t) + \sum_{i=1}^r \binom{r}{i} g^{(i)}(t) F^{(r-i)}(t) \end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Buradan $F^{(r)}(t)$ ifadesi yalnız bırakılırsa,

$$F^{(r)}(t) = \frac{f^{(r)}(t) - \sum_{i=1}^r \binom{r}{i} g^{(i)}(t) F^{(r-i)}(t)}{g(t)} \quad (50)$$

olarak ifade edilir.

Rasyonel Bezier eğrileri için türev kavramını ifade edelim. Derecesi n olan

$$B(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i b_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)}$$

denklemleriyle ifade edilen bir rasyonel Bezier eğrisini göz önüne alalım.

$$f(t) = \sum_{i=0}^n w_i b_i B_i^n(t), \quad g(t) = \sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t) \text{ denilirse } B'(t) \text{ nin,}$$

$$B'(t) = \frac{\left(\sum_{i=0}^n w_i b_i B_i^n(t) \right)' - \left(\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t) \right)' B(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)} \quad (51)$$

şeklinde olduğu görülür [20, p.167-175].

1.3.6. Rasyonel Bezier Eğrilerinin Özellikleri

Teorem 6: Rasyonel Bezier eğrileri aşağıdaki şartları sağlar.

1- Her $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ için $w_i > 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $\forall t \in [0, 1]$ için, $B(t) \in CH(\{b_0, b_1, \dots, b_n\})$ (Bezier eğrisinin tamamı, kontrol noktalarının konvex bölgesi içinde kalmaktadır.)

2- F , bir Afin dönüşümü olmak üzere,

$$F(B(t)) = F \left(\frac{\sum_{i=0}^n w_i b_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)} \right) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i F(b_i) B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)}$$

dir.

3- $B(0) = b_0$ ve $B(1) = b_n$ dir. (Son nokta interpolasyon özelliği)

$$4- B'(0) = \frac{dB}{dt} \Big|_{t=0} = n \frac{w_1}{w_0} (b_1 - b_0) \quad \text{ve}$$

$$B'(1) = \frac{dB}{dt} \Big|_{t=1} = n \frac{w_{n-1}}{w_n} (b_n - b_{n-1}) \quad (\text{Son nokta teğet özelliği})$$

dir.

Bu teorem, [20, p.167] de verilmiş, ancak ispatı verilmemiştir. İspatı buraya biz ilave ediyoruz.

İspat:

1- Her $i = 0, 1, 2, \dots, n$ için $B_i^n(t) \geq 0$ dir ve $w_i > 0$ alırsak ,

$$R_i^n(t) = \begin{cases} \frac{w_i B_i^n(t)}{\sum_{j=0}^n w_j B_j^n(t)} & , w_i \neq 0 \\ \frac{B_i^n(t)}{\sum_{j=0}^n w_j B_j^n(t)} & , w_i = 0 \end{cases}$$

biçiminde verilen $R_i^n(t)$ fonksiyonu için, $R_i^n(t) \geq 0$ olduğu görülür. $\sum_{i=0}^n R_i^n(t) = 1$

olduğundan, rasyonel Bezier eğrisini (46) formunda ifade edersek, konvex hull özelliğinden rasyonel Bezier eğrisinin kontrol noktalarının konvex bölgesi içinde kaldığı söylenir.

2- F, bir Afın dönüşümü ise, g ortogonal dönüşüm ve $b \in E^3$ olmak üzere,

$$F(x) = g(x) + b$$

biçimindedir. g lineer olduğundan,

$$F(B(t)) = F \left(\frac{\sum_{i=0}^n w_i b_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)} \right) = F \left(\sum_{i=0}^n b_i R_i^n(t) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= g \left(\sum_{i=0}^n b_i R_i^n(t) \right) + b \cdot 1 \\
&= \sum_{i=0}^n g(b_i R_i^n(t)) + b \cdot \sum_{i=0}^n R_i^n(t) = \sum_{i=0}^n g(b_i) R_i^n(t) + b \cdot \sum_{i=0}^n R_i^n(t) \\
&= \sum_{i=0}^n (g(b_i) + b) R_i^n(t) = \sum_{i=0}^n F(b_i) R_i^n(t) \\
&= \frac{\sum_{i=0}^n w_i F(b_i) B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

3- $t = 0$ ise,

$$R_i^n(t) = \begin{cases} \frac{w_0 B_i^n(t)}{w_0 B_i^n(t)} = 1, & i = 0 \\ 0, & i \neq 0 \end{cases}$$

olduğundan, $t = 0$ ise, (46) ifadesinde $B(0) = b_0$ elde edilir. Benzer şekilde $t = 1$ ise,

$$R_i^n(t) = \begin{cases} \frac{w_0 B_i^n(t)}{w_0 B_i^n(t)} = 1, & i = n \\ 0, & i \neq n \end{cases}$$

olacağından, $B(1) = b_n$ elde edilir.

4- (51) den,

$$\begin{aligned}
B'(0) &= \frac{n(w_1 b_1 - w_0 b_0) - n(w_1 - w_0) b_0}{w_0} \\
&= n \frac{w_1}{w_0} (b_1 - b_0)
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$B'(1) = n \frac{w_{n-1}}{w_n} (b_n - b_{n-1})$$

elde edilir. ♦

1.4. Bezier Yüzeyleri

1.4.1. Parametrik Yüzeyler

Tanım 12 (Parametrik Yüzey): $U \subset \mathbb{R}^2$ açık bir küme olmak üzere, $X:U \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferensiyellenebilir dönüşümüne \mathbb{R}^3 te bir parametrik yüzey (a patch) denir. \mathbb{R}^3 teki bir parametrik yüzey; her $(u,v) \in U$ için,

$$X(u, v) = (X_1(u, v), X_2(u, v), X_3(u, v)) \quad (52)$$

biçiminde yazılabilir. $X(u,v)$ fonksiyonunun u parametresine göre kısmi türevi,

$$X_u(u, v) = \left(\frac{\partial X_1}{\partial u}(u, v), \frac{\partial X_2}{\partial u}(u, v), \frac{\partial X_3}{\partial u}(u, v) \right) \quad (53)$$

olarak tanımlanır. Benzer şekilde $X_v(u, v)$, $X_{uu}(u, v)$, $X_{uv}(u, v)$ kısmi türevleri de tanımlanabilir.

Tanım 13 (Bir parametrik yüzeyin jakobiyeni): Bir $X:U \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrik yüzeyinin jakobiyen matrisi,

$$J(X)(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial X_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial X_3}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial X_1}{\partial v}(u, v) & \frac{\partial X_2}{\partial v}(u, v) & \frac{\partial X_3}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} \quad (54)$$

biçiminde tanımlanır.

Bir $X:U \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrik yüzeyinin, verilen bir $(u_0, v_0) \in U$ noktasında jakobiyen matrisinin rankı 2 ise, X parametrik yüzeyine (u_0, v_0) noktasında regülerdir denir.

Tanım 14 (Regüler Parametrik Yüzey): Bir $X:U \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrik yüzeyinin jakobiyen matrisinin rankı, her $(u,v) \in U$ için 2 ise X parametrik yüzeyine regüler parametrik yüzey denir.

Tanım 15: Bir $X:U \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrik yüzeyi olmak üzere, her (u_1, v_1) , $(u_2, v_2) \in U$ için

$$X(u_1, v_1) = X(u_2, v_2)$$

olduğunda ancak, $(u_1, v_1) = (u_2, v_2)$ oluyorsa X -e bire- bir parametrik yüzey denir.

Önerme: $X:U \rightarrow \mathbb{R}^3$ regüler parametrik yüzey olmak üzere, her $(u,v) \in U$ için,

(i) $X_u(u, v) \neq 0$ ve $X_v(u, v) \neq 0$ dir.

(ii) $X_u(u, v)$ ve $X_v(u, v)$ lineer bağımsızdır.

(iii) $X_u(u, v) \times X_v(u, v) \neq 0$ dir [28, p.273].

Önerme 2: $X:U \rightarrow \mathbb{R}^3$ regüler parametrik yüzey ve $q \in U$ olsun. Bu takdirde, q -nun bir U_q komşuluğu vardır öyleki $X:U_q \rightarrow X(U_q)$ dönüşümü diffeomorfizmdir [28, p.274].

Tanım 16: $X:U \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir parametrik yüzey ve $(u_0, v_0) \in U$ sabitlenmiş bir nokta olsun. Bu takdirde,

$$u \rightarrow X(u, v_0) \quad \text{ve} \quad v \rightarrow X(u_0, v) \quad (55)$$

parametrik eğrilerine X parametrik yüzeyinin sırasıyla u – parametre eğrisi, ve v – parametre eğrisi denir. Parametre eğrilerine koordinat eğrileri de denir.

Tanım 17: $X:U \rightarrow \mathbb{R}^3$ bire-bir parametrik yüzey, $p \in X(U)$ olsun. X –e p noktasında teğet olan vektör, $v_p \in \mathbb{R}^3$ teğet vektörüdür ve bu teğet vektörü için, bir $\alpha:(a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi mevcuttur öyleki,

$$\alpha(t) = X(u(t), v(t)) \quad (a < t < b) \quad (56)$$

dir ve $\alpha(0) = p$ $\alpha'(0) = v_p$ dir. X parametrik yüzeyine p noktasında teğet olan vektörlerin kümesini de $X(U)_p$ ile gösterelim.

Lemma 2: X parametrik yüzeyine p noktasında teğet olan vektörlerin kümesi $X(U)_p$, $p = X(u_0, v_0) \in X(U)$ noktasında, tabanı $Sp\{X_u(u_0, v_0), X_v(u_0, v_0)\}$ olan vektör uzayı oluşturur.

İspat: X –e p noktasında teğet olan $v_p \in \mathbb{R}^3$ teğet vektörünün tanımına göre (56) ifadesiyle verilen bir $\alpha:(a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi, $\alpha(0) = p$ $\alpha'(0) = v_p$ olacak şekilde mevcuttur. (56) da türev alınırsa zincir kuralından,

$$\alpha'(t) = u'(t)X_u(u(t), v(t)) + v'(t)X_v(u(t), v(t))$$

elde edilir. özel olarak, $t = 0$ alınırsa,

$$\begin{aligned} v_p &= \alpha'(0) = u'(0)X_u(u(0), v(0)) + v'(0)X_v(u(0), v(0)) \\ &= u'(0)X_u(u_0, v_0) + v'(0)X_v(u_0, v_0) \end{aligned}$$

elde edilir. $X_u(u_0, v_0)$ ve $X_v(u_0, v_0)$ -ler lineer bağımsız olduklarından taban oldukları görülür. ♦

Tanım 18: $X:U \rightarrow \mathbb{R}^3$ bire-bir parametrik yüzey, $p \in X(U)$ ile $z_p \in \mathbb{R}_p^3$ verilsin. Eğer her $v_p \in X(U)_p$ için $\langle z_p, v_p \rangle = 0$ ise $z_p \in \mathbb{R}_p^3$ -e X parametrik yüzeyine p noktasında **normaldir**, ya da **diktir** denir.

Tanım 19: $X:U \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrik yüzeyi üzerindeki V vektör alanı, her bir $q \in U$ elemanını, $p = X(q)$ olmak üzere, $V(q) \in \mathbb{R}_p^3$ teğet vektörüne karşılık getiren bir fonksiyondur. Eğer, her $q \in U$ için, $V(q) \in X(U)_{X(q)}$ ise, V vektör alanına X parametrik yüzeyine **teğet** vektör alanı denir. Benzer şekilde, X parametrik yüzeyi üzerinde vektör alanı, W olsun. Her $q \in U$ ve her $v_p \in X(U)_{X(q)}$ için, $\langle W(q), v_p \rangle = 0$ ise W vektör alanına X parametrik yüzeyine **normal** ya da **dik** vektör alanı denir.

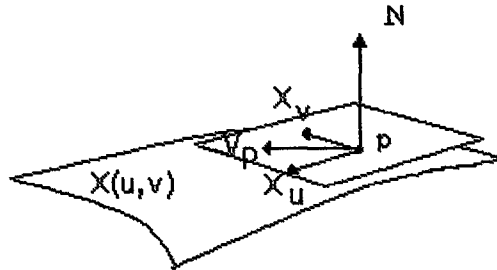
Lemma 3: $X:U \rightarrow \mathbb{R}^3$ bire-bir parametrik yüzey olsun. Bu takdirde, bir $(u,v) \in U$ elemanını $(u,v) \rightarrow X_u \times X_v$ dönüştüren vektör alanı, $X(U)$ ya her yerde normaldir.

İspat: Vektörel çarpımın tanımından $X_u \times X_v$ vektörü, hem X_u ye hem de X_v ye diktir. X parametrik yüzeyine teğet olan keyfi v_p vektörü, X_u ve X_v -nin bir lineer toplamı biçiminde olduğundan $(u,v) \rightarrow X_u \times X_v$ dönüştüren vektör alanı, $X(U)$ ya diktir. ♦

Tanım 20: $X:U \rightarrow \mathbb{R}^3$ bire-bir ve regüler parametrik yüzey için birim normal vektör alanı,

$$N(u,v) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}(u,v)$$

olarak tanımlanır.



Şekil 15. $X(u,v)$ parametrik yüzeyi ve bir p noktasındaki teğet düzlemi

1.4.2. Parametrik Yüzeyle Örnekler

1.4.2.1. Hiperbolik paraboloid

Hiperbolik paraboloidin en basit parametreleniş

$$X(u, v) = (u, v, uv)$$

biçimindedir. (Şekil 16) Hiperbolik paraboloidin en bilinen örneği de eyer yüzeyi (Saddle surface) dir. Eyer yüzeyi ise

$$X(u, v) = (u, v, u^2 - 3uv^2)$$

olarak parametrelenir. (Şekil 17)

1.4.2.2. Eliptik Paraboloid

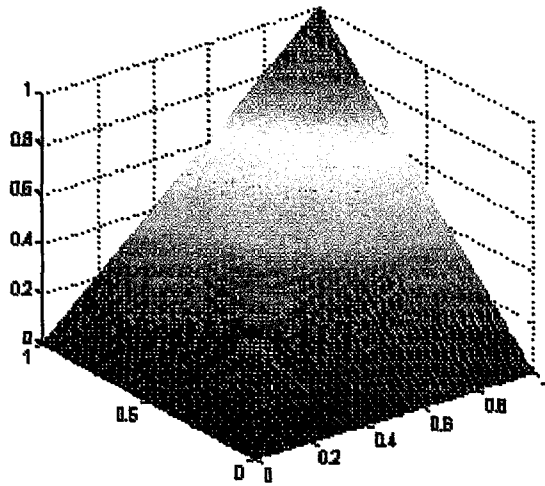
Eliptik paraboloidin kapalı formda ifadesi,

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

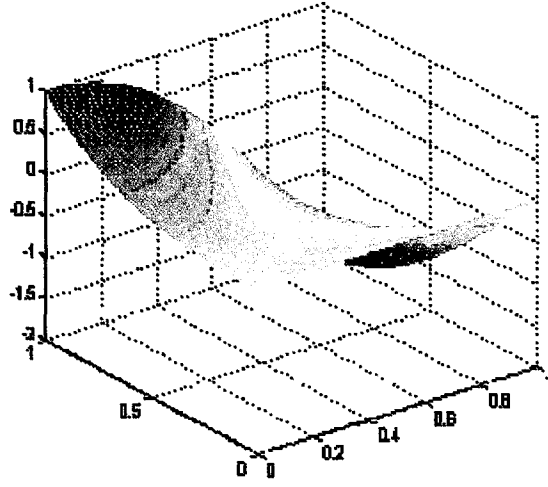
olduğundan parametrik ifadesi ise,

$$X(u, v) = (a \cos u, b \sin u, v^2), \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times (-\infty, \infty)$$

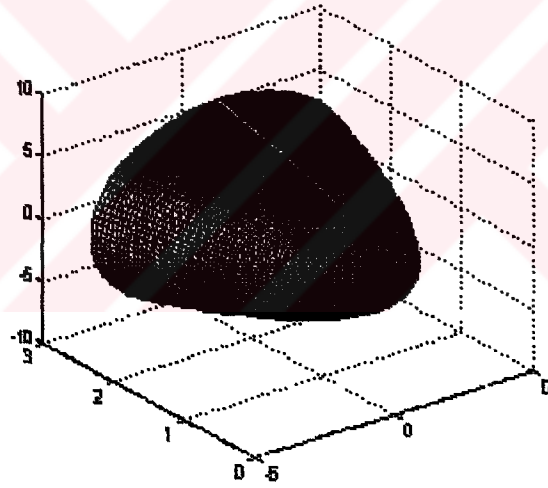
biçimindedir. (Şekil 18)



Şekil 16. $X(u, v) = (u, v, uv)$ biçiminde verilen hiperbolik paraboloid



Şekil 17. Hiperbolik paraboloid olarak eyer yüzeyi (sadle surface)



Şekil 18. Eliptik Paraboloid

1.4.2.3. Elipsoid

Elipsoidin kapalı formda ifadesi,

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

olduğundan parametrik ifadesi

$$X(u, v) = (a \cos v \cos u, b \cos v \sin u, c \sin v), (u, v) \in [0, 2\pi] \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

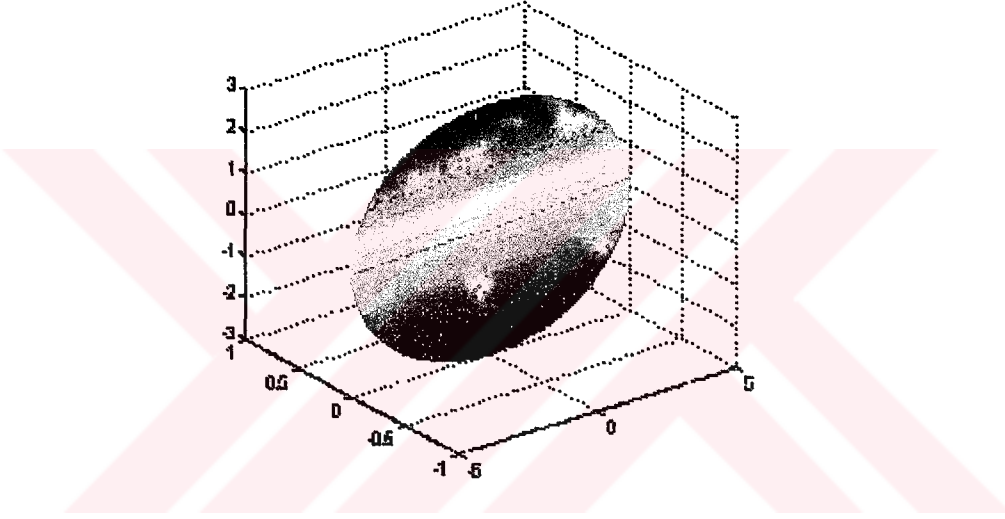
olarak verilir. (Şekil 19)

1.4.2.4. Eliptik Tor

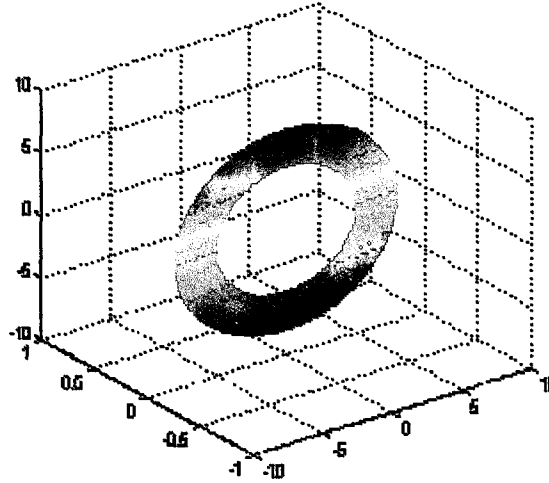
Eliptik tor, $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi)$ olmak üzere,

$$X(u, v) = ((a + b \cos v) \cos u, (a + b \cos v) \sin u, c \sin v)$$

biçiminde parametrize edilir [28, p.269-316].



Şekil 19. Elipsoid



Şekil 20. Eliptik Tor

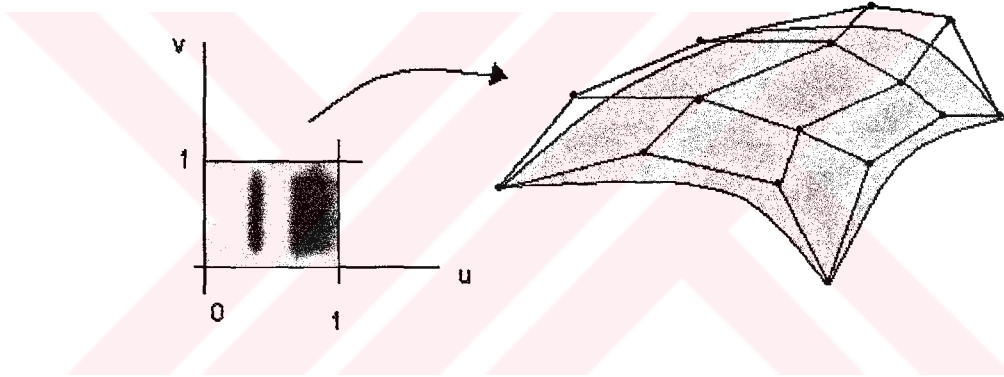
1.4.3. Bezier Yüzeyleri

Tanım 21: $B_i^n(u)$ ve $B_j^m(v)$ sırasıyla u ve v parametrelerine bağlı dereceleri n ve m olan Bernstein taban fonksiyonları olsun. $0 \leq i \leq n$ ve $0 \leq j \leq m$ olmak üzere p_{ij} kontrol noktaları ile bir Bezier yüzeyi, $(u, v) \in [0,1] \times [0,1]$ olmak üzere

$$B(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m p_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v) \quad (57)$$

fonksiyonuyla tanımlanır. (Şekil 21)

Bezier yüzeylerinin koordinat eğrileri de birer Bezier eğrisidir. Özel olarak, $B(u,0)$, $B(u,1)$, $B(0,v)$, $B(1,v)$ parametre eğrileri, (Şekil 21) deki gibi verilen Bezier yüzeyinin sınır eğrilerini teşkil eder.



Şekil 21. Bezier Yüzeyi

1.4.3.1 Bezier Yüzeylerinin Özellikleri

Teorem 7: (57) ifadesiyle verilen bir Bezier yüzeyi aşağıdaki özellikleri sağlar.

(1) (Son nokta interpolasyon özelliği) $B(0,0) = p_{00}$, $B(1,0) = p_{n0}$,

$B(0,1) = p_{0m}$, $B(1,1) = p_{nm}$ dir.

(2) (Konvex hull özelliği) Her $(u,v) \in [0,1] \times [0,1]$ için $B(u,v) \in CH\{p_{00}, \dots, p_{nm}\}$ dir.

(3) (Afin dönüşümler altında değişmeme özelliği) T bir afin dönüşüm olmak üzere,

$$T \left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m p_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v) \right) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m T(p_{ij}) B_i^n(u) B_j^m(v)$$

dir.

İspat: (1) $u = v = 0$ için, $B_i^n(u) = \begin{cases} (1-u)^n, & i=0 \\ 0, & i \neq 0 \end{cases}$ ve $B_j^m(v) = \begin{cases} (1-v)^m, & j=0 \\ 0, & j \neq 0 \end{cases}$ dir.

Böylece,

$$B(0,0) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m p_{ij} B_i^n(0) B_j^m(0) = p_{00} (1-0)^n (1-0)^m = p_{00}$$

elde edilir. Benzer şekilde, $u = v = 1$ için, $B_i^n(u) = \begin{cases} u^n, & i=n \\ 0, & i \neq n \end{cases}$ ve $B_j^m(v) = \begin{cases} v^m, & j=m \\ 0, & j \neq m \end{cases}$

dir. Böylece,

$$B(1,1) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m p_{ij} B_i^n(1) B_j^m(1) = p_{nm} 1^n 1^m = p_{nm}$$

elde edilir. Aynı yolla, $u = 0, v = 1$ için, $B_i^n(u) = \begin{cases} (1-u)^n, & i=0 \\ 0, & i \neq 0 \end{cases}$ ve $B_j^m(v) = \begin{cases} v^m, & j=m \\ 0, & j \neq m \end{cases}$

dir. Böylece,

$$B(0,1) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m p_{ij} B_i^n(0) B_j^m(1) = p_{0m} (1-0)^n 1^m = p_{0m}$$

bulunur. Benzer şekilde, $u = 1, v = 0$ için, $B_i^n(u) = \begin{cases} u^n, & i=n \\ 0, & i \neq n \end{cases}$ ve

$B_j^m(v) = \begin{cases} (1-v)^m, & j=0 \\ 0, & j \neq 0 \end{cases}$ dir. Böylece,

$$B(1,0) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m p_{ij} B_i^n(1) B_j^m(0) = p_{n0} (1-0)^n 1^m = p_{n0}$$

elde edilir.

(2) Bunun için $(u,v) \in [0,1] \times [0,1]$, $0 \leq i \leq n$ ve $0 \leq j \leq m$ olmak üzere

$$B_i^n(u) B_j^m(v) \geq 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(u) B_j^m(v) = 1$$

olduğunu göstermemiz gerekmektedir. $B_i^n(u) B_j^m(v) \geq 0$ olduğu açıktır.

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(u) B_j^m(v) = \sum_{i=0}^n B_i^n(u) \left(\sum_{j=0}^m B_j^m(v) \right) = \sum_{i=0}^n B_i^n(u) = 1$$

elde edilir. Böylece, her $(u,v) \in [0,1] \times [0,1]$ için $B(u,v) = CH\{p_{00}, \dots, p_{nm}\}$ dir.

(3) T bir afin dönüşümü ise, her $x \in R^3$ için $T(x) = g(x) + c$ biçimindedir. Burada g, determinantı sıfırdan farklı bir dönüşüm, $c \in R^3$ tür. Buna göre,

$$\begin{aligned}
T\left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m p_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)\right) &= g\left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m p_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)\right) + c \cdot 1 \\
&= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m g(p_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)) + c \cdot \left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(u) B_j^m(v)\right) \\
&= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m g(p_{ij}) B_i^n(u) B_j^m(v) + \left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m c \cdot B_i^n(u) B_j^m(v)\right) \\
&= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (g(p_{ij}) + c) B_i^n(u) B_j^m(v) \\
&= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m T(p_{ij}) B_i^n(u) B_j^m(v)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. ♦

1.4.3.2. Bezier Yüzeylerinde Türev Kavramı

Bir Bezier yüzeyi parametrik olarak,

$$B(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m p_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v) = \sum_{j=0}^m \left(\sum_{i=0}^n p_{ij} B_i^n(u) \right) B_j^m(v)$$

biçiminde yazılabilir. Bu durumda u parametresine göre kısmi türev alınacak olursa,

$$B_u(u, v) = \frac{\partial}{\partial u} \sum_{j=0}^m \left(\sum_{i=0}^n p_{ij} B_i^n(u) \right) B_j^m(v) = \sum_{j=0}^m \left(\frac{\partial}{\partial u} \sum_{i=0}^n p_{ij} B_i^n(u) \right) B_j^m(v)$$

olduğu görülür. $\sum_{i=0}^n p_{ij} B_i^n(u)$ ifadesi derecesi n olan bir Bezier eğrisi olduğundan, Bezier

eğrilerini temsil eden fonksiyonlarda türevler kullanılarak,

$$\begin{aligned}
B_u(u, v) &= \sum_{j=0}^m \left(n \sum_{i=0}^{n-1} (p_{(i+1)j} - p_{ij}) B_i^{n-1}(u) \right) B_j^m(v) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m n(p_{(i+1)j} - p_{ij}) B_i^{n-1}(u) B_j^m(v) \tag{58}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $B(u, v)$ fonksiyonunun birinci dereceden u parametresine göre kısmi türevini aldığımızı belirtmek için, Bezier eğrilerinin türev kavramında olduğu gibi, $n(p_{(i+1)j} - p_{ij})$ ifadesini $p_{ij}^{(1,0)}$ ile gösterirsek, u parametresine göre kısmi türev,

$$B_u(u, v) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m p_{ij}^{(1,0)} B_i^{n-1}(u) B_j^m(v) \quad (59)$$

biçiminde bir gösterime sahip olur. Benzer şekilde, $B(u, v)$ fonksiyonunun v parametresine göre kısmi türevi,

$$B_v(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} p_{ij}^{(0,1)} B_i^n(u) B_j^{m-1}(v) \quad (60)$$

olacaktır. Burada $p_{ij}^{(0,1)} = m(p_{i(j+1)} - p_{ij})$ dir. Elde edilen kısmi türevlerin tekrar u ve v parametrelerine göre türevlerini almaya devam edersek, yüksek dereceden türevlere ulaşırız. Bu şekilde elde edilen $B_u(u, v)$ ve $B_v(u, v)$ türevlerini sırasıyla $B^{(1,0)}(u, v)$ ve $B^{(0,1)}(u, v)$ ile gösterelim. Bu gösterime göre $B_{uv}(u, v)$ ikinci derece türev ifadesi de $B^{(1,1)}(u, v)$ ile gösterilmiş olacaktır.

Teorem 8: (57) ifadesiyle verilen bir Bezier yüzeyi için u parametresine göre α . dereceden, v parametresine göre de β . dereceden türev alınır;

$$B^{(\alpha,\beta)}(u, v) = \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial u^\alpha \partial v^\beta} B(u, v) = \sum_{i=0}^{n-\alpha} \sum_{j=0}^{m-\beta} p_{ij}^{(\alpha,\beta)} B_i^{n-\alpha}(u) B_j^{m-\beta}(v) \quad (61)$$

elde edilir. Burada

$$p_{ij}^{(\alpha,\beta)} = \frac{n!}{(n-\alpha)!} \frac{m!}{(m-\beta)!} \sum_{k=0}^{\alpha} \sum_{s=0}^{\beta} (-1)^k (-1)^s \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{s} p_{(i+\alpha-k)(j+\beta-s)} \quad (62)$$

dir.

İspat: (59) ifadesinin v parametresine göre türevini alalım.

$$\begin{aligned} B_{uv}(u, v) &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} m(p_{i(j+1)}^{(1,0)} - p_{ij}^{(1,0)}) B_i^{n-1}(u) B_j^{m-1}(v) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} m \left(\left[n(p_{(i+1)(j+1)} - p_{i(j+1)}) \right] - \left[n(p_{(i+1)j} - p_{ij}) \right] \right) B_i^{n-1}(u) B_j^{m-1}(v) \end{aligned}$$

dir. Burada $m \left(\left[n(p_{(i+1)(j+1)} - p_{i(j+1)}) \right] - \left[n(p_{(i+1)j} - p_{ij}) \right] \right)$ ifadesine $p_{ij}^{(1,1)}$ denirse,

$$B_{uv}(u, v) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} p_{ij}^{(1,1)} B_i^{n-1}(u) B_j^{m-1}(v)$$

elde edilir. $p_{ij}^{(1,1)}$ ifadesi de yeniden düzenlenirse,

$$p_{ij}^{(1,1)} = mn(p_{(i+1)(j+1)} - p_{i(j+1)} - p_{(i+1)j} + p_{ij})$$

$$= \frac{n!}{(n-1)!} \frac{m!}{(m-1)!} \sum_{k=0}^1 \sum_{s=0}^1 (-1)^k (-1)^s \binom{1}{k} \binom{1}{s} p_{(i+1-k)(j+1-s)}$$

olarak yazılabilir. Böylece $(\alpha, \beta) = (1, 1)$ için doğru olduğu görülür. Şimdi $(\alpha - 1, \beta - 1)$ için doğru olsun. Yani,

$$B^{(\alpha-1, \beta-1)}(u, v) = \frac{\partial^{\alpha+\beta-2}}{\partial u^{\alpha-1} \partial v^{\beta-1}} B(u, v) = \sum_{i=0}^{n-\alpha+1} \sum_{j=0}^{m-\beta+1} p_{ij}^{(\alpha-1, \beta-1)} B_i^{n-\alpha+1}(u) B_j^{m-\beta+1}(v)$$

olsun ve $p_{ij}^{(\alpha-1, \beta-1)}$ ifadesi de,

$$p_{ij}^{(\alpha-1, \beta-1)} = \frac{n!}{(n-\alpha+1)!} \frac{m!}{(m-\beta+1)!} \sum_{k=0}^{\alpha-1} \sum_{s=0}^{\beta-1} (-1)^k (-1)^s \binom{\alpha-1}{k} \binom{\beta-1}{s} p_{(i+\alpha-k-1)(j+\beta-s-1)}$$

olsun. $B^{(\alpha-1, \beta-1)}(u, v)$ ifadesinin u ve v parametrelerine göre birer kez daha türevini alalım. (59) ifadesinden,

$$B^{(\alpha, \beta)}(u, v) = \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial u^{\alpha} \partial v^{\beta}} B(u, v) = \sum_{i=0}^{n-\alpha} \sum_{j=0}^{m-\beta} \left(p_{ij}^{(\alpha-1, \beta-1)} \right)^{(1,1)} B_i^{n-\alpha}(u) B_j^{m-\beta}(v)$$

olur. Burada $p_{ij}^{(\alpha, \beta)}$ ifadesi de,

$$\begin{aligned} \left(p_{ij}^{(\alpha-1, \beta-1)} \right)^{(1,1)} &= [n - (\alpha - 1)][n - (\beta - 1)] \left[p_{(i+1)(j+1)}^{(\alpha-1, \beta-1)} - p_{(i+1)j}^{(\alpha-1, \beta-1)} - p_{i(j+1)}^{(\alpha-1, \beta-1)} + p_{ij}^{(\alpha-1, \beta-1)} \right] \\ &= \left[\frac{(n-\alpha+1)n!}{(n-\alpha+1)!} \frac{(m-\beta+1)m!}{(m-\beta+1)!} \right] \left\{ + \sum_{k=0}^{\alpha-1} \sum_{s=0}^{\beta-1} (-1)^{k+1} (-1)^{s+1} \binom{\alpha-1}{k} \binom{\beta-1}{s} p_{(i+\alpha-k)(j+\beta-s)} \right. \\ &\quad - \sum_{k=0}^{\alpha-1} \sum_{s=0}^{\beta-1} (-1)^{k+1} (-1)^{s+1} \binom{\alpha-1}{k} \binom{\beta-1}{s} p_{(i+\alpha-k-1)(j+\beta-s)} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{\alpha-1} \sum_{s=0}^{\beta-1} (-1)^{k+1} (-1)^{s+1} \binom{\alpha-1}{k} \binom{\beta-1}{s} p_{(i+\alpha-k)(j+\beta-s-1)} \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{\alpha-1} \sum_{s=0}^{\beta-1} (-1)^{k+1} (-1)^{s+1} \binom{\alpha-1}{k} \binom{\beta-1}{s} p_{(i+\alpha-k-1)(j+\beta-s-1)} \right\} \end{aligned}$$

dir. Böylece, $\left(p_{ij}^{(\alpha-1, \beta-1)} \right)^{(1,1)} = p_{ij}^{(\alpha, \beta)}$ almırsa,

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(\alpha, \beta)} &= \left[\frac{n!}{(n-\alpha)!} \frac{m!}{(m-\beta)!} \right] \left\{ \sum_{k=0}^{\alpha-1} (-1)^{k+1} \binom{\alpha-1}{k} \left(\sum_{s=0}^{\beta-1} (-1)^{s+1} \binom{\beta-1}{s} \left(p_{(i+\alpha-k)(j+\beta-s)} - p_{(i+\alpha-k)(j+\beta-s-1)} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{\alpha-1} (-1)^{k+1} \binom{\alpha-1}{k} \left[\sum_{s=0}^{\beta-1} (-1)^{s+1} \binom{\beta-1}{s} \left(p_{(i+\alpha-k-1)(j+\beta-s-1)} - p_{(i+\alpha-k-1)(j+\beta-s)} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

olur. Bu ifade düzenlenirse,

$$P_{ij}^{(\alpha, \beta)} = \left[\frac{n!}{(n-\alpha)!} \frac{m!}{(m-\beta)!} \right] \left\{ \sum_{k=1}^{\alpha} (-1)^k \binom{\alpha-1}{k-1} \left[\sum_{s=1}^{\beta} (-1)^s \binom{\beta-1}{s-1} (P_{(i+\alpha-k+1)(j+\beta-s+1)} - P_{(i+\alpha-k+1)(j+\beta-s)} + P_{(i+\alpha-k)(j+\beta-s)} - P_{(i+\alpha-k)(j+\beta-s+1)}) \right] \right\}$$

$\binom{\alpha-1}{k-1} = \frac{k}{\alpha} \binom{\alpha}{k}$ olduğundan, $\left[\frac{n!}{(n-\alpha)!} \frac{m!}{(m-\beta)!} \right] = A$ dersek,

$$P_{ij}^{(\alpha, \beta)} = A \sum_{k=1}^{\alpha} \left\{ (-1)^k \frac{k}{\alpha} \binom{\alpha}{k} \left[\sum_{s=1}^{\beta} (-1)^s \frac{s}{\beta} \binom{\beta}{s} (P_{(i+\alpha-k+1)(j+\beta-s+1)} - P_{(i+\alpha-k+1)(j+\beta-s)} + P_{(i+\alpha-k)(j+\beta-s)} - P_{(i+\alpha-k)(j+\beta-s+1)}) \right] \right\}$$

olur. İndislerin yeniden düzenlenmesiyle;

$$P_{ij}^{(\alpha, \beta)} = A \sum_{k=1}^{\alpha} \sum_{s=1}^{\beta} (-1)^k (-1)^s \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{s} P_{(i+\alpha-k)(j+\beta-s)}$$

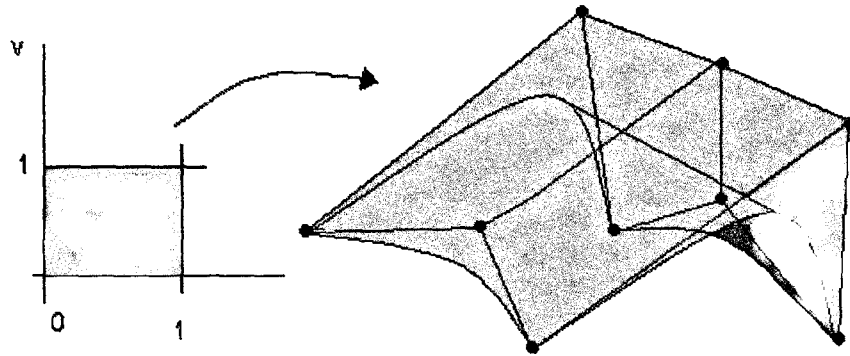
elde edilir. ♦

1.4.4. Rasyonel Bezier Yüzeyleri

Tanım 22: $B_i^n(u)$ ve $B_j^m(v)$ sırasıyla u ve v parametrelerine bağlı dereceleri n ve m olan Bernstein taban fonksiyonları olsun. Kontrol noktaları $0 \leq i \leq n$ ve $0 \leq j \leq m$ olmak üzere p_{ij} -ler olan ve ağırlıklı katsayıları w_{ij} - ler olan bir rasyonel Bezier yüzeyi, parametrik olarak $(u, v) \in [0,1] \times [0,1]$ olmak üzere

$$B(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} p_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)} \quad (63)$$

şeklinde tanımlanır.



Şekil 22. Rasyonel Bezier Yüzeyi

Bezier yüzeylerinde olduğu gibi, rasyonel Bezier yüzeylerinin de koordinat eğrileri birer rasyonel Bezier eğrisidir. Özel olarak, $B(u,0)$, $B(u,1)$, $B(0,v)$, $B(1,v)$ parametre eğrileri, şekildeki gibi verilen rasyonel Bezier yüzeyinin sınır eğrilerini teşkil eder.

1.4.4.1 Rasyonel Bezier Yüzeylerinin Özellikleri

Teorem 9: (63) ifadesiyle verilen bir Bezier yüzeyi aşağıdaki özellikleri sağlar.

(1) (Son nokta interpolasyon özelliği) $B(0,0) = p_{00}$, $B(1,0) = p_{n0}$, $B(0,1) = p_{0m}$,
 $B(1,1) = p_{nm}$ dir.

(2) (konvex hull özelliği) Her i,j için, $w_{ij} \geq 0$ (en az bir $w_{ij} > 0$) ise her $(u,v) \in [0,1] \times [0,1]$ için $B(u,v) \in CH\{p_{00}, \dots, p_{nm}\}$ dir.

(3) (Afin dönüşümler altında değişmeme özelliği) T bir afin dönüşüm olmak üzere,

$$T \left(\frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} p_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)} \right) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} T(p_{ij}) B_i^n(u) B_j^m(v)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)}$$

dir.

İspat: İspat Bezier yüzeyleri için verilen teoremin ispatına benzer şekilde yapılır.

(1) $u = v = 0$ için, $B_i^n(u) = \begin{cases} (1-u)^n, & i=0 \\ 0, & i \neq 0 \end{cases}$ ve $B_j^m(v) = \begin{cases} (1-v)^m, & j=0 \\ 0, & j \neq 0 \end{cases}$ dir.

Böylece,

$$B(0,0) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} p_{ij} B_i^n(0) B_j^m(0)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} B_i^n(0) B_j^m(0)} = \frac{p_{00} w_{00} (1-0)^n (1-0)^m}{w_{00} (1-0)^n (1-0)^m} = p_{00}$$

elde edilir. Benzer şekilde, $u = v = 1$ için, $B_i^n(u) = \begin{cases} u^n, & i=n \\ 0, & i \neq n \end{cases}$ ve $B_j^m(v) = \begin{cases} v^m, & j=m \\ 0, & j \neq m \end{cases}$

dir. Böylece,

$$B(1,1) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} p_{ij} B_i^n(1) B_j^m(1)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} B_i^n(1) B_j^m(1)} = \frac{w_{nm} p_{nm} 1^n 1^m}{w_{nm} 1^n 1^m} = p_{nm}$$

bulunur. Aynı yolla, $u = 0, v = 1$ için, $B_i^n(u) = \begin{cases} (1-u)^n, & i=0 \\ 0, & i \neq 0 \end{cases}$ ve $B_j^m(v) = \begin{cases} v^m, & j=m \\ 0, & j \neq m \end{cases}$

dır. Böylece,

$$B(0,1) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} p_{ij} B_i^n(0) B_j^m(1)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} B_i^n(0) B_j^m(1)} = \frac{w_{0m} p_{0m} (1-0)^n 1^m}{w_{0m} (1-0)^n 1^m} = p_{0m}$$

olur. Benzer şekilde, $u = 1, v = 0$ için, $B_i^n(u) = \begin{cases} u^n, & i=n \\ 0, & i \neq n \end{cases}$ ve $B_j^m(v) = \begin{cases} (1-v)^m, & j=0 \\ 0, & j \neq 0 \end{cases}$

dır. Böylece,

$$B(1,0) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} p_{ij} B_i^n(1) B_j^m(0)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} B_i^n(1) B_j^m(0)} = \frac{w_{n0} p_{n0} (1-0)^n 1^m}{w_{n0} (1-0)^n 1^m} = p_{n0}$$

elde edilir.

(2) Bunun için $(u,v) \in [0,1] \times [0,1]$, $0 \leq i \leq n$ ve $0 \leq j \leq m$ olmak üzere

$$B_i^n(u) B_j^m(v) \geq 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(u) B_j^m(v) = 1$$

olduğu gösterilmiştir. Burada,

$$\frac{w_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)} \geq 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{w_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)} = 1$$

olduğu açıkça görülebilir. Böylece, her $(u,v) \in [0,1] \times [0,1]$ için $B(u,v) = CH\{p_{00}, \dots, p_{nm}\}$ dir.

(3) T bir afin dönüşümü ise, her $x \in R^3$ için $T(x) = g(x) + c$ biçimindedir. Burada g, determinantı sıfırdan farklı bir dönüşüm, $c \in R^3$ tür. Buna göre,

$$T \left(\frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} p_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)} \right) = g \left(\frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} p_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)} \right) + c.1$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m g \left(p_{ij} \frac{w_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)} \right) + c \cdot \left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{w_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)} \right) \\
&= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m g(p_{ij}) \frac{w_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)} + \left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m c \cdot \frac{w_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)} \right) \\
&= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (g(p_{ij}) + c) \frac{w_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)} \\
&= \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m T(p_{ij}) w_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. ♦

1.5. Eğri ve Yüzeyler İçin Eğrilikler

1.5.1. Düzlem Eğrilerde Eğrilik

Tanım 23: $\alpha(t)$, $I = [a, b]$ aralığında tanımlı, istenilen mertebeden türevlenebilir bir parametrik eğri olsun. Eğer, her $t \in [a, b]$ için $\alpha'(t) \neq 0$ ise $\alpha(t)$ parametrik eğrisine **regülerdir** denir. Eğer her $t \in [a, b]$ için $\|\alpha'(t)\| = 1$ ise α -ya **birim hızlı** denir.

Tanım 24: $I = [a, b]$ aralığında tanımlı, sürekli ve türevlenebilir bir $\alpha(t)$ parametrik eğrisi için, **yay uzunluğu**,

$$l(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

ile tanımlanır. $t_0 \in [a, b]$ olmak üzere, t_0 dan itibaren t nin artan değerlerine karşın, α parametrik eğrisinin yay uzunluğu fonksiyonu $u \in [a, b]$ olmak üzere,

$$s_\alpha(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du \quad (64)$$

ile tanımlıdır. $s_\alpha(t)$ - nin aldığı değerler $[0, s_\alpha(t)]$ aralığında değişmektedir. Açıkça görülebilir ki,

$$\frac{d}{dt}s_\alpha(t) = s'_\alpha(t) = \|\alpha'(t)\|$$

dir. $\|\alpha'(t)\| \geq 0$ olduğundan $s_\alpha(t)$ fonksiyonu monoton artan bir fonksiyondur. Dolayısıyla tersi mevcuttur. Bu ters fonksiyon, $\alpha(t)$ parametrik eğrisi için $s \in [0, s_\alpha(t)]$ elemanını $t = t_\alpha(s) \in [a, b]$ elemanına dönüştüren bir parametre dönüşümüdür. Böylece, $s_\alpha(t)$ ve $t_\alpha(s)$ ters fonksiyonlar olduklarından, $t_\alpha(s_\alpha(t)) = t$ ve $s_\alpha(t_\alpha(s)) = s$ elde edilir. Bu şekilde elde edilen $t = t_\alpha(s)$ parametresine **yay uzunluğu parametresi** denir. Bir $\alpha(t)$ parametrik eğrisi, s yay uzunluğu parametresine göre $\beta(s) = \alpha(t_\alpha(s))$ biçiminde yeniden parametrize edilebilir [28, p.11-12].

Bir $\alpha(t)$ parametrik eğrisi üzerinde Frenet çatısı denilen $\{ T, N, B \}$ çatısı inşa edilebilir. $T(s)$ ve $N(s)$ vektörleri, sırasıyla $\alpha(t)$ nin birim teğet ve birim asal normal vektörleri olsun. $\langle T(s), T(s) \rangle = 1$ olduğundan türev alınırsa, $\left\langle T(s), \frac{d}{ds} T(s) \right\rangle = 0$ elde edileceğinden $\frac{d}{ds} T(s)$, $T(s)$ vektörüne dik ve $N(s)$ vektörüne paralel olur. Böylece,

$$\frac{d}{ds} T(s) = \kappa(s)N(s) \quad (65)$$

yazılırsa, $\kappa(s)$ ye, α nın verilen $s(t)$ noktasındaki **eğriliği** denir. $\frac{1}{\kappa(s)}$ ifadesine de α nın s

noktasındaki **eğrilik yarıçapı** denir. Bir parametrik eğrinin herhangi bir noktasındaki eğriliği, eğrinin yay uzunluğuna göre o noktadaki teğetin dönme hızıdır. $T(s)$ birim teğet vektörünün t parametresine göre türevi alınır, zincir kuralına göre,

$$\frac{d}{dt} T(s(t)) = \frac{d}{ds} T(s(t)) \frac{d}{dt} s(t) = \kappa(s(t)) \frac{d}{dt} s(t) N(s(t)) \quad (66)$$

dir. α eğrisi, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ olarak alındığında t ye göre türevi $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$ olur. Böylece,

$$\frac{d}{dt} s(t) = \|\alpha'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

dir. Bu ifadeye $v(t)$ denilirse ve (66) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\frac{d}{dt}T(t) = \kappa(t)v(t)N(t) \quad (67)$$

elde edilir.

Teorem 10: $C(t) = (x(t), y(t))$ regüler düzlem eğrisinin eğriliği,

$$\kappa(t) = \frac{\frac{dx(t)}{dt} \frac{d^2y(t)}{dt^2} - \frac{d^2x(t)}{dt^2} \frac{dy(t)}{dt}}{\|C'(t)\|^3} \quad (68)$$

dir.

İspat: $T(t) = \frac{C'(t)}{v(t)} = \frac{C'(t)}{\|C'(t)\|} = \frac{C'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}$

dir. Buradan t ye göre türev alınır ve $C(t) = (x(t), y(t))$ ile

$v(t) = \|C'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ ifadeleri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} T'(t) &= \frac{C''(t)v(t) - C'(t)v'(t)}{(v(t))^2} = \frac{C''(t)v(t) - C'(t)\left(\frac{x'(t)x''(t) + y'(t)y''(t)}{v(t)}\right)}{(v(t))^2} \\ &= \frac{C''(t)(v(t))^2 - C'(t)(x'(t)x''(t) + y'(t)y''(t))}{(v(t))^3} \\ &= \frac{\left(\left((v(t))^2 - (x'(t))^2\right)x''(t) - x'(t)y'(t)y''(t), \left((v(t))^2 - (y'(t))^2\right)y''(t) - y'(t)x'(t)x''(t)\right)}{(v(t))^3} \\ &= \frac{\left(y'(t)(y'(t)x''(t) - x'(t)y''(t)), x'(t)(x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t))\right)}{(v(t))^3} \\ &= \frac{(-y'(t), x'(t))(x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t))}{(v(t))^3} \end{aligned}$$

elde edilir. (67) den

$$\kappa(t) = \frac{\langle T'(t), N(t) \rangle}{v(t)} = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{(v(t))^3} = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{\|C'(t)\|^3}$$

olduğu görülür [20, p. 239] . ♦

1.5.2. Uzak Eğrilerinde Eğrilik ve Torsiyon

$C(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $I = [a, b]$ aralığında tanımlı, regüler bir parametrik uzay eğrisi olsun. Düzlem eğrilerde olduğu gibi $C(t)$ eğrisi, $C(t(s))$ biçiminde yay uzunluğu parametresine göre parametrelenip birim hızlı yapılır ve $C(t(s))$ üzerinde $\{T, N, B\}$ çatısı inşa edilirse,

$$\left. \begin{aligned} T(s) &= \frac{\frac{d}{ds} C(s)}{\left\| \frac{d}{ds} C(s) \right\|} \\ N(s) &= \frac{\frac{d}{ds} T(s)}{\left\| \frac{d}{ds} T(s) \right\|} = \frac{\frac{d}{ds} T(s)}{\kappa} \\ B(s) &= T(s) \times N(s) \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada, $B(s)$, eğrinin binormalidir ve $\langle T(s), B(s) \rangle = 0$ olduğundan s ye göre türev alınırsa,

$$\langle T'(s), B(s) \rangle + \langle T(s), B'(s) \rangle = 0$$

dır. (65) ifadesinden

$$\langle \kappa(s)N(s), B(s) \rangle + \langle T(s), B'(s) \rangle = 0$$

ve $\langle N(s), B(s) \rangle = 0$ olduğundan,

$$\langle T(s), B'(s) \rangle = 0 \quad (70)$$

elde edilir. Böylece, $B'(s)$, $T(s)$ ye dik olur. Ayrıca $B'(s)$, $B(s)$ ye de dik olacağından $B'(s)$, $N(s)$ yönünde olacaktır. Bu durumda,

$$\frac{d}{ds} B(s) = -\tau(s)N(s) \quad (71)$$

olduğu görülür. Burada (-) işareti s nin artan değerlerinde binormalin dönme yönünden kaynaklanmaktadır. Yani, $\frac{d}{ds} B(s)$, $N(s)$ vektörünün ters yönündedir. Böylece,

$$\tau(s) = \left\| \frac{d}{ds} B(s) \right\| \quad (72)$$

ifadesine $C(t)$ parametrik eğrisinin bir $s(t)$ noktasındaki **torsiyonu (burulması)** denir. Bu ifade ile de anlaşılacağı gibi, bir parametrik eğrinin herhangi bir noktasındaki burulması, eğrinin yay uzunluğuna göre o noktadaki binormalinin dönme hızıdır.

Böylece toplarsak, T , N ve B vektörlerinin s parametresine göre türevlerini formülleştirebilirsek,

$$\left. \begin{aligned} T' &= \kappa N \\ N' &= \tau B - \kappa T \\ B' &= -\tau N \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

biçiminde ifade edebiliriz. Bu formüllere Frenet- Serret formülleri denir. Bu formüller, 1851 de Serret, 1852 de de Frenet tarafından verilmiştir. [29]

Teorem 11: $C(t)$ regüler bir parametrik eğri olsun. Bu takdirde,

$$\kappa = \frac{\left\| \frac{d}{dt} C(t) \times \frac{d^2}{dt^2} C(t) \right\|}{\left\| \frac{d}{dt} C(t) \right\|^3}, \quad \tau = \frac{\left\langle \left(\frac{d}{dt} C(t) \times \frac{d^2}{dt^2} C(t) \right), \frac{d^3}{dt^3} C(t) \right\rangle}{\left\| \frac{d}{dt} C(t) \times \frac{d^2}{dt^2} C(t) \right\|^2},$$

$$T = \frac{\frac{d}{dt} C(t)}{\left\| \frac{d}{dt} C(t) \right\|}, \quad B = \frac{\frac{d}{dt} C(t) \times \frac{d^2}{dt^2} C(t)}{\left\| \frac{d}{dt} C(t) \times \frac{d^2}{dt^2} C(t) \right\|} \quad \text{ve} \quad N = B \times T$$

dir.

İspat: [20, 248], [28, 192]

1.5.3. Yüzey Eğrilikleri

U, \mathbb{R}^2 de açık küme olmak üzere, $(u,v) \in U$ için, $X(u,v) = (X_1(u,v), X_2(u,v), X_3(u,v))$ biçiminde verilen parametrik yüzeyi göz önüne alalım. U içinde bir eğri parçası alalım. Yani, $t \in [a,b]$ olmak üzere X yüzeyi üzerinde bir parametrik eğri olarak $C(t) = X(u(t), v(t))$ alınabilir. $C(t)$ parametrik eğrisinin t parametresine göre türevi zincir kuralından,

$$\frac{d}{dt} C(t) = X_u(u,v) \frac{d}{dt} u(t) + X_v(u,v) \frac{d}{dt} v(t) \quad (74)$$

biçiminde alınır. $N(u,v)$, X yüzeyinin birim normali olmak üzere,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dt}C(t), N \right\rangle &= \left\langle X_u(u, v) \frac{d}{dt}u(t) + X_v(u, v) \frac{d}{dt}v(t), N \right\rangle = 0 \\ &= \frac{d}{dt}u(t) \langle X_u(u, v), N \rangle + \frac{d}{dt}v(t) \langle X_v(u, v), N \rangle = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $C(t)$ eğrisine teğet olan her vektör aynı zamanda yüzeye de teğettir.

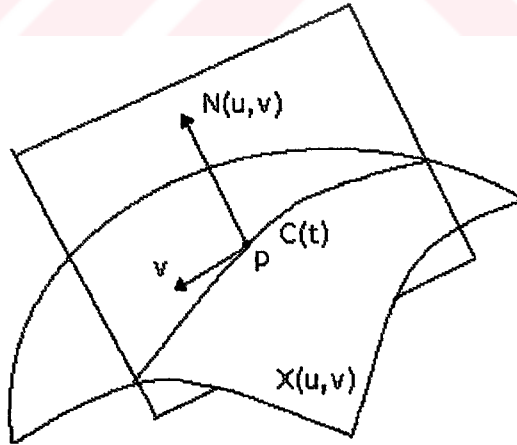
Lemma 4: $X:U \rightarrow \mathbb{R}^3$ regüler yüzey olsun. Eğer bir v vektörü X yüzeyine bir p noktasında teğet ise, o zaman yüzey üzerinde bir $C(t)$ eğrisi mevcuttur öyleki $C(0) = p$ ve

$$\left. \frac{d}{dt}C(t) \right|_{t=0} = v \text{ dir. [20, 255.]}$$

Lemmadan da görülebileceği gibi, yüzeyin bir p noktasındaki teğet vektörler (74) formatında verilmektedir.

Bir $p = X(u_0, v_0)$ noktası regüler nokta olsun ve p noktasında yüzeye teğet vektörler teğet düzlemi denilen bir düzlem oluştururlar. Bu düzlemin bir tabanı $\text{Sp}\{X_u(u_0, v_0), X_v(u_0, v_0)\}$ olduğu daha önce gösterilmişti. (Lemma 2) Yüzeyin p noktasındaki herhangi bir v teğet vektörü ile $N(u, v)$ birim normal vektörünün oluşturduğu düzlem ile yüzeyin arakesiti bir $C(t)$ parametrik eğrisidir. (Şekil 23)

$C(t)$ eğrisi, $C(0) = p$ ve $\left. \frac{d}{dt}C(t) \right|_{t=0} = v$ olacak biçimde parametrize edilebilir.



Şekil23. Yüzeyin p noktasındaki herhangi bir v teğet vektörü ile $N(u, v)$ birim normal vektörünün oluşturduğu düzlem ile yüzeyin arakesitinden elde edilen $C(t)$ parametrik eğrisi

Tanım 25: $C(t)$ parametrik eğrisinin $t = 0$ daki eğriliğine yüzeyin p noktasındaki v yönündeki **normal eğriliği** denir ve $\kappa_p(v)$ ile gösterilir.

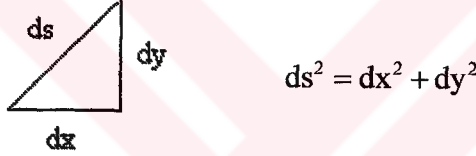
$C(t) = X(u(t), v(t))$, X parametrik yüzeyi üzerinde bir parametrik eğri olmak üzere türev

$$\frac{d}{dt}X(u, v) = X_u(u, v) \frac{du(t)}{dt} + X_v(u, v) \frac{dv(t)}{dt}$$

biçiminde yazılabilir. Kısalık olması için, $\frac{d}{du}X(u, v) = X_u$, $\frac{d}{dv}X(u, v) = X_v$, $u(t) = u$ ve $v(t) = v$ ile gösterilirse, ikinci türev,

$$\frac{d^2X}{dt^2} = X_{uu} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2X_{uv} \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + X_{vv} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + X_u \frac{d^2u}{dt^2} + X_v \frac{d^2v}{dt^2} \quad (75)$$

biçimindedir. Pisagor bağıntısından çok iyi biliyoruz ki, düzlemde

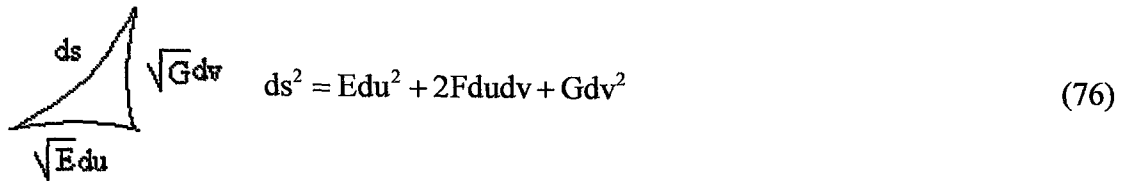


$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

dir. Yüzey üzerinde bulunan bir eğrinin yay uzunluğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 &= \|C'(t)\|^2 = \langle C'(t), C'(t) \rangle \\ &= \left\langle X_u(u, v) \frac{du(t)}{dt} + X_v(u, v) \frac{dv(t)}{dt}, X_u(u, v) \frac{du(t)}{dt} + X_v(u, v) \frac{dv(t)}{dt} \right\rangle \\ &= \langle X_u, X_u \rangle \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2 \langle X_u, X_v \rangle \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \langle X_v, X_v \rangle \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $\langle X_u, X_u \rangle = E$, $\langle X_u, X_v \rangle = F$, $\langle X_v, X_v \rangle = G$ denirse,



$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \quad (76)$$

biçiminde ifade edilmiş olur. Bu ifadeye yüzeyin **Birinci Kuadratik Formu** ya da **Birinci Temel Formu** adı verilir. Benzer şekilde $C(t) = X(u(t), v(t))$ nin ikinci türevinin $N(u, v)$

birim normal vektör üzerine izdüşümü yazıldığında, $C''(t) = \frac{d^2X(u, v)}{dt^2}$ olduğundan

$$\begin{aligned}\langle C'(t), N \rangle &= \left\langle \frac{d^2 X(u, v)}{dt^2}, N \right\rangle = \langle X_{uu} du^2 + 2X_{uv} dudv + X_{vv} dv^2 + X_u d^2u + X_v d^2v, N \rangle \\ &= \langle X_{uu}, N \rangle du^2 + 2\langle X_{uv}, N \rangle dudv + \langle X_{vv}, N \rangle dv^2 + \langle X_u, N \rangle d^2u + \langle X_v, N \rangle d^2v\end{aligned}$$

elde edilir. $\langle X_u, N \rangle = \langle X_v, N \rangle = 0$ olduğundan,

$$\langle C'(t), N \rangle = \langle X_{uu}, N \rangle du^2 + 2\langle X_{uv}, N \rangle dudv + \langle X_{vv}, N \rangle dv^2$$

bulunur. $\langle X_{uu}, N \rangle = e$, $\langle X_{uv}, N \rangle = f$, $\langle X_{vv}, N \rangle = g$ alınırsa,

$$\langle C'(t), N \rangle = e du^2 + 2f dudv + g dv^2 \quad (77)$$

ifadesi elde edilir. Böylece, (77) ifadesine de yüzeyin **İkinci Kuadratik Formu** ya da **İkinci Temel Formu** denir. [20, 255-256][28, 342-368]

Lemma 5: $X(u, v)$, birebir regüler bir parametrik yüzey ve $p = (u_0, v_0)$ X üzerinde bir nokta olsun. v_p ise, X parametrik yüzeyinin p noktasındaki

$$v_p = aX_u(u, v) + bX_v(u, v)$$

biçiminde yazılan keyfi bir teğet vektörü olsun. Bu takdirde, yüzeyin p noktasındaki ve v_p yönündeki normal eğriliği

$$\kappa_p(v_p) = \frac{ea^2 + 2fab + gb^2}{Ea^2 + 2Fab + b^2}$$

dir.

İspat: [28, 370]

Teorem 12 (Euler): $X(u, v)$ yüzeyi ve onun bir regüler p noktası verilmiş olsun. Farzedelim ki, yüzeyin p noktasındaki ve bir v teğet vektörü yönündeki normal eğriliği ($\kappa_p(v)$) sabit olmayan bir fonksiyon olsun. Bu takdirde öyle bir v_{\max} ve bir v_{\min} birim teğet vektörleri tek türlü olarak vardır öyle ki, p noktasındaki normal eğriliklerden v_{\max} yönündeki normal eğrilik maksimum eğrilik ve v_{\min} yönündeki normal eğrilik de minimum eğriliktir. Yani, $\kappa_p(v_{\max}) = \kappa_{\max}$ ve $\kappa_p(v_{\min}) = \kappa_{\min}$ dir.

İspat: [20, p.257-258].

Bu teoremde de bahsedildiği gibi, bir yüzeyin verilen bir regüler noktasında bir v teğet vektörü yönündeki normal eğriliğin maksimum ve minimum değerleri olarak verilen κ_{\max} ve κ_{\min} değerlerine, yüzeyin **asal eğrilikleri** adı verilir. Bazı kitaplarda $k_1(p)$ ve $k_2(p)$ ile de gösterilir.

Teorem 13 (Euler): $X(u,v)$ parametrik yüzeyinin bir p noktasındaki ve keyfi bir v_p teğet vektörü yönündeki normal eğriliği, v_p ile v_{\max} teğet vektörleri arasındaki açı θ olmak üzere,

$$\kappa_p(v_p) = \kappa_{\max} \cos^2 \theta + \kappa_{\min} \sin^2 \theta$$

şeklindedir.

İspat: [28, p.372]

Yüzeylerde asal eğrilikler çok önemlidir. Ancak bu eğriliklerden ziyade yine asal eğrilikler yardımıyla tanımlanan Gauss ve ortalama eğrilikler çok kullanışlıdır.

Tanım 26: $K = \kappa_{\max} \cdot \kappa_{\min}$ ve $H = \frac{1}{2}(\kappa_{\max} + \kappa_{\min})$ ifadelerine bir yüzeyin

verilen bir p noktasındaki sırasıyla **Gauss eğriliği** ve **ortalama eğriliği** adı verilir.

Teorem 14: $X:U \rightarrow \mathbb{R}^3$ regüler parametrik yüzey olsun. $N(u,v)$ ise, yüzeyin birim normal vektörü olmak üzere, $\langle X_u, X_u \rangle = E$, $\langle X_u, X_v \rangle = F$, $\langle X_v, X_v \rangle = G$ ve $\langle X_{uu}, N \rangle = e$, $\langle X_{uv}, N \rangle = f$, $\langle X_{vv}, N \rangle = g$ alınırsa, X parametrik yüzeyinin verilen bir p noktasındaki Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad H = \frac{1}{2} \left(\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} \right)$$

ifadelerine eşittir.

İspat: [28, p.377]

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR, BULGULAR VE İRDELEME

Bu bölümde Bernstein polinomlarına ait bazı önerme ve teoremler verilmiştir. Ayrıca, literatürde mevcut, ancak açıkça ispatı verilmemiş parçalı Bezier eğrilerinin süreklilik şartlarına ait bazı teorem ve önermeler, alınan sonuçlar verilmiştir. Daha sonra Bezier eğrileri ve yüzeylerine ait literatürde bulunan sayısal algoritmalar, bir bütünlük arzemesi için bu bölümde ifade edilmiş ve MATLAB programı kullanılarak bu algoritmaların bilgisayar ortamında hesaplamalarını yapmak, grafiklerini çizmek vs. amacıyla programın kodları da burada sunulmuştur.

2.1. Bernstein Polinomları İle İlgili Bazı Özellikler

Teorem 15: $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $B_0^n(t)$, $B_1^n(t)$, $B_2^n(t)$, ..., $B_n^n(t)$ biçimindeki n . derece Bernstein taban polinomları lineer bağımsızdır.

İspat: Bernstein polinomları $t \in [0,1]$ olmak üzere,

$$B_i^n(t) = \begin{cases} \frac{n!}{i!(n-i)!} (1-t)^{n-i} t^i, & 0 \leq i \leq n \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlanmıştır.

$$t = 0 \text{ ise, } B_1^n(t) = B_2^n(t) = \dots = B_n^n(t) = 0 \text{ ve } B_0^n(t) = (1-t)^n \neq 0;$$

$$t = 1 \text{ ise, } B_0^n(t) = B_1^n(t) = B_2^n(t) = \dots = B_{n-1}^n(t) = 0 \text{ ve } B_n^n(t) = t^n \neq 0 \quad (78)$$

dır. Ancak $t \in (0,1)$ için, $B_0^n(t) \neq 0$, $B_1^n(t) \neq 0$, ..., $B_n^n(t) \neq 0$ dir. Şimdi, $B_0^n(t)$, $B_1^n(t)$, $B_2^n(t)$, ..., $B_n^n(t)$ biçimindeki n . derece Bernstein taban polinomlarının lineer bağımsızlığını tümevarımla gösterelim.

$n = 1$ durumunda, $B_0^1(t) = 1-t$ ve $B_1^1(t) = t$ dir. Şimdi öyle bir $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$ sayıları mevcut olsun öyleki, her $t \in [0,1]$ için

$$\lambda_0(1-t) + \lambda_1 t = 0$$

olsun. Bu durumda, $t = 0$ için $\lambda_0 = 0$ ve $t = 1$ için $\lambda_1 = 0$ elde edilir. Böylece, $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$ dir ve $B_0^1(t)$ ve $B_1^1(t)$ lineer bağımsızdır.

$n - 1$ durumunda, $B_0^{n-1}(t), B_1^{n-1}(t), B_2^{n-1}(t), \dots, B_{n-1}^{n-1}(t)$ -ler lineer bağımsız olsun. Yani, öyle $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ sayıları mevcut olsun ki, her $t \in [0,1]$ için

$$\lambda_0 B_0^{n-1}(t) + \lambda_1 B_1^{n-1}(t) + \lambda_2 B_2^{n-1}(t) + \dots + \lambda_{n-1} B_{n-1}^{n-1}(t) = 0$$

iken

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0 \quad (79)$$

olsun.

n durumunda da $B_0^n(t), B_1^n(t), B_2^n(t), \dots, B_n^n(t)$ -lerin lineer bağımsız olduklarını gösterelim. Yine öyle $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ sayıları mevcut olsun ki, her $t \in [0,1]$ için

$$\lambda_0 B_0^n(t) + \lambda_1 B_1^n(t) + \dots + \lambda_{n-1} B_{n-1}^n(t) + \lambda_n B_n^n(t) = 0 \quad (80)$$

olsun. Bu durumda $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için Bernstein taban polinomlarının indirgeme özelliği kullanılırsa (80) ifadesi,

$$\begin{aligned} & \lambda_0 \left[(1-t)B_0^{n-1}(t) + tB_{-1}^{n-1}(t) \right] + \lambda_1 \left[(1-t)B_1^{n-1}(t) + tB_0^{n-1}(t) \right] + \dots + \\ & + \lambda_{n-1} \left[(1-t)B_{n-1}^{n-1}(t) + tB_{n-2}^{n-1}(t) \right] + \lambda_n \left[(1-t)B_n^{n-1}(t) + tB_{n-1}^{n-1}(t) \right] = 0 \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. $B_{-1}^{n-1}(t) = B_n^{n-1}(t) = 0$ olduğundan,

$$(\lambda_0(1-t) + \lambda_1 t) B_0^{n-1}(t) + (\lambda_1(1-t) + \lambda_2 t) B_1^{n-1}(t) + \dots + (\lambda_{n-1}(1-t) + \lambda_n t) B_{n-1}^{n-1}(t) = 0$$

olur. Bu ifade biraz daha düzenlenirse, her $t \in [0,1]$ için

$$(\lambda_0 + (\lambda_1 - \lambda_0)t) B_0^{n-1}(t) + (\lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)t) B_1^{n-1}(t) + \dots + (\lambda_{n-1} + (\lambda_n - \lambda_{n-1})t) B_{n-1}^{n-1}(t) = 0$$

bulunur. Buradan her $t \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} & (\lambda_0 B_0^{n-1}(t) + \lambda_1 B_1^{n-1}(t) + \dots + \lambda_{n-1} B_{n-1}^{n-1}(t)) + \\ & + t((\lambda_1 - \lambda_0) B_0^{n-1}(t) + (\lambda_2 - \lambda_1) B_1^{n-1}(t) + \dots + (\lambda_n - \lambda_{n-1}) B_{n-1}^{n-1}(t)) = 0 \end{aligned} \quad (81)$$

elde edilir. $t = 0$ olduğunda,

$$\lambda_0 B_0^{n-1}(t) + \lambda_1 B_1^{n-1}(t) + \dots + \lambda_{n-1} B_{n-1}^{n-1}(t) = 0 \quad (82)$$

ve $t = 1$ olduğunda,

$$\lambda_1 B_0^{n-1}(t) + \lambda_2 B_1^{n-1}(t) + \dots + \lambda_n B_{n-1}^{n-1}(t) = 0 \quad (83)$$

elde edilir. $B_0^{n-1}(t), B_1^{n-1}(t), B_2^{n-1}(t), \dots, B_{n-1}^{n-1}(t)$ -ler lineer bağımsız olduklarından

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0 \quad \text{ve} \quad \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$$

eşitlikleri bulunur. Buradan

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$$

elde edilir. Böylece, $B_0^{n-1}(t)$, $B_1^{n-1}(t)$, $B_2^{n-1}(t), \dots, B_n^n(t)$ n. derece Bernstein taban polinomları lineer bağımsızdır. ♦

Sonuç 3: Derecesi n ye kadar olan ($\leq n$)keyfi $P(t)$ polinomu, $B_0^n(t)$, $B_1^n(t)$, $B_2^n(t), \dots, B_n^n(t)$ ler yardımıyla, $\mu_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, n$ olmak üzere

$$P(t) = \mu_0 B_0^n(t) + \mu_1 B_1^n(t) + \dots + \mu_n B_n^n(t)$$

biçiminde tek türlü olarak ifade edilebilir.

İspat: Tüm derecesi n ye kadar olan polinomlar kümesi \mathbb{R} üzerinde $(n+1)$ boyutlu lineer uzay oluşturur. Bu lineer uzayı H ile gösterelim. $\{B_0^n(t), B_1^n(t), B_2^n(t), \dots, B_n^n(t)\}$ ler n. dereceden ve lineer bağımsız olduklarından $n+1$ boyutludur ve H nin bir tabanıdır. Böylece H nin keyfi elemanı $\{B_0^n(t), B_1^n(t), B_2^n(t), \dots, B_n^n(t)\}$ lerle tek türlü olarak lineer biçimde ifade edilebilir. ♦

Teorem 16: Kontrol noktaları b_i , $i = 0, 1, \dots, n$ olan n. dereceden bir Bezier eğrisi,

$$h_i = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} b_j (-1)^{i+j}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

olmak üzere;

$$B(t) = h_0 + h_1 t + h_2 t^2 + \dots + h_n t^n \quad (84)$$

biçiminde derecesi n olan bir polinom eğridir.

İspat: $n + 1$ tane kontrol noktası bulunan n. derece Bezier eğrisi, (7) formuyla verilmektedir. İspatı tümevarımla yapalım.

$n = 1$ durumunda,

$$\begin{aligned} B(t) &= b_0 B_0^1(t) + b_1 B_1^1(t) = b_0(1-t) + b_1 t \\ &= b_0 - b_0 t + b_1 t \\ &= b_0 + (b_1 - b_0)t \end{aligned}$$

dir. Teoremin ifadesine göre $n = 1$ durumunda,

$$h_0 = \binom{1}{0} \sum_{j=0}^0 \binom{0}{j} b_j (-1)^{0+j} = b_0$$

$$h_1 = \binom{1}{0} \sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} b_j (-1)^{1+j} = -b_0 + b_1$$

dır. Böylece, $b_0 = h_0$ ve $b_1 - b_0 = h_1$ olduğundan

$$B(t) = h_0 + h_1 t$$

elde edilir.

$n-1$ durumunda önerme doğru olsun. Yani ,

$$h_i = \binom{n-1}{i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} b_j (-1)^{i+j}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

olmak üzere;

$$B(t) = h_0 + h_1 t + h_2 t^2 + \dots + h_{n-1} t^{n-1} \quad (85)$$

biçiminde ifade edilebilir olsun. Şimdi n durumunda da benzer biçimde ifade edilebildiğini gösterelim. n durumunda bir Bezier eğrisi,

$$B(t) = b_0 B_0^n(t) + b_1 B_1^n(t) + \dots + b_n B_n^n(t)$$

biçiminde ifade edilmektedir. Bernstein polinomlarının indirgeme özelliğinden dolayı, derecesi n olan Bezier eğrisi

$$\begin{aligned} B(t) &= b_0 \left((1-t) B_0^{n-1}(t) + t B_{-1}^{n-1}(t) \right) + b_1 \left((1-t) B_1^{n-1}(t) + t B_0^{n-1}(t) \right) + \dots + b_n \left((1-t) B_n^{n-1}(t) + t B_{n-1}^{n-1}(t) \right) \\ &= \left(b_0 (1-t) + b_1 t \right) B_0^{n-1}(t) + \left(b_1 (1-t) + b_2 t \right) B_1^{n-1}(t) + \dots + \left(b_{n-1} (1-t) + b_n t \right) B_{n-1}^{n-1}(t) \end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir. Bu eğri, kontrol noktaları $b_i^* = b_i (1-t) + b_{i+1} t$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ olan $(n-1)$. dereceden bir Bezier eğrisidir. Derecesi $n-1$ olan Bezier eğrilerinin (85) biçiminde yazılabildiğini varsaymıştık. Buna göre bu eğri de

$$B(t) = h_0^* + h_1^* t + h_2^* t^2 + \dots + h_{n-1}^* t^{n-1}$$

şeklinde ifade edilebilir. Ancak burada h_i^* lar

$$h_i^* = \binom{n-1}{i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \left(b_j (1-t) + b_{j+1} t \right) (-1)^{i+j}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

biçimindedir. Bu ifade düzenlenecek olursa,

$$\begin{aligned} h_i^* &= \binom{n-1}{i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \left(b_j + (b_{j+1} - b_j) t \right) (-1)^{i+j} \\ &= \binom{n-1}{i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} b_j (-1)^{i+j} + \binom{n-1}{i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (b_{j+1} - b_j) t (-1)^{i+j} \\ &= \left(\binom{n-1}{i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} b_j (-1)^{i+j} \right) + t \left(\binom{n-1}{i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} b_{j+1} (-1)^{i+j} - \binom{n-1}{i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} b_j (-1)^{i+j} \right) \\ &= h_i + t(h_i' - h_i) \end{aligned}$$

bulunur. Burada $h_i = \binom{n-1}{i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} b_j (-1)^{i+j}$ ve $h_i' = \binom{n-1}{i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} b_{j+1} (-1)^{i+j}$ dir. Böylece

polinomumuz,

$$\begin{aligned}
B(t) &= h_0^* + h_1^* t + h_2^* t^2 + \dots + h_{n-1}^* t^{n-1} \\
&= [h_0 + (h_0' - h_0) t] + [h_1 + (h_1' - h_1) t] t + \dots [h_{n-1} + (h_{n-1}' - h_{n-1}) t] t^{n-1} \\
&= h_0 + (h_0' - h_0 + h_1) t + (h_1' - h_1 + h_2) t^2 + \dots + (h_{n-1}' - h_{n-1}) t^n
\end{aligned}$$

olur. $h_i' - h_i + h_{i+1}$ ifadesi incelendiğinde

$$\begin{aligned}
h_i' - h_i + h_{i+1} &= \binom{n-1}{i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (b_{j+1} - b_j) (-1)^{i+j} + \binom{n-1}{i+1} \sum_{j=0}^i \binom{i+1}{j} b_j (-1)^{i+1+j} \\
&= \left[\frac{i+1}{n} \binom{n}{i+1} \right] \sum_{j=0}^i \left(1 - \frac{j}{i+1} \binom{i+1}{j} \right) (b_{j+1} - b_j) (-1)^{i+j} - \left[\left(1 - \frac{i+1}{n} \right) \binom{n}{i+1} \right] \sum_{j=0}^i \binom{i+1}{j} b_j (-1)^{i+j}
\end{aligned}$$

bulunur. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa ve numaralandırma da tekrar düzenlenirse,

$$h_i^x = h_i' - h_i + h_{i+1} = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} b_j (-1)^{i+j}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

elde edilir. Böylece,

$$B(t) = h_0^x + h_1^x t + h_2^x t^2 + \dots + h_n^x t^n$$

biçiminde bir polinom gösterime sahiptir. ♦

Bir Bezier eğrisinin derecesi n ise, en az $n+1$ tane kontrol noktası vardır. Eğer bir Bezier eğrisi, derecesi n olduğu halde $n + 1$ den daha fazla kontrol noktasına sahipse, yani, $n + 1$ den daha fazla kontrol noktası bulunan n . derece bir Bezier eğrisi, derecesi n olan ve

$$B(t) = h_0 + h_1 t + h_2 t^2 + h_3 t^3 + \dots + h_n t^n$$

biçiminde bir polinom olduğundan n . dereceli terimin katsayısı olan h_n den sonraki h_{n+1} , h_{n+2} , ... katsayıları sıfırdır.

Teorem 17: $B(t)$, kontrol noktaları, b_i , $i = 0, 1, \dots, m-1$ ve derecesi n olan bir Bezier eğrisi ise, $B(t)$ - nin polinom ifadesinde $m > n + 1$ olması durumunda,

$$h_{n+1} = h_{n+2} = \dots = h_{m-1} = 0$$

dır.

İspat: m tane kontrol noktası bulunan bir Bezier eğrisi,

$$B(t) = \sum_{i=0}^{m-1} b_i B_i^{m-1}(t), \quad t \in [0, 1]$$

olarak ifade edilebilir. Bu ifade açılırsa, derecesi $m-1$ olan bir polinom elde edilir. Bu polinom,

$$B(t) = h_0 + h_1 t + \dots + h_n t^n + h_{n+1} t^{n+1} + \dots + h_{m-1} t^{m-1}$$

biçimindedir. $B(t)$ – nin derecesi n olduğuna göre, polinomların eşitliğinden $i > n$ için $h_i = 0$ olmalıdır. Buna göre,

$$h_{n+1} = h_{n+2} = \dots = h_{m-1} = 0$$

bulunur.

Bir Bezier eğrisinin derecesi n ise, en az $n+1$ tane kontrol noktası vardır. Eğer bir Bezier eğrisi, derecesi n olduğu halde $n + 1$ den daha fazla kontrol noktasma sahipse, bu kontrol noktaları arasında bir ilişki söz konusudur. Yani $n+1$ den fazla olan kontrol noktaları, $n+1$ tane kontrol noktasının bir lineer toplamı şeklindedir. ♦

Teorem 18: $B(t)$ ve $C(t)$, dereceleri n olan iki Bezier eğrisi olsun. $B(t)$ nin kontrol noktaları b_0, b_1, \dots, b_n ve $C(t)$ nin kontrol noktaları c_0, c_1, \dots, c_n olsun. Bu takdirde $t \in [0,1]$ için $B(t) = C(t)$ dir ancak ve ancak $i = 0,1,\dots,n$ için $b_i = c_i$ dir.

İspat: $t = 0$ için $B(t) = b_0$ ve $C(t) = c_0$ olduğundan $B(t) = C(t)$ ancak ve ancak $b_0 = c_0$ denilebilir. Benzer şekilde $t = 1$ için, $B(t) = b_n$ ve $C(t) = c_n$ olduğundan $B(t) = C(t)$ ancak ve ancak $b_n = c_n$ denilebilir. $t \in (0,1)$ durumunda ispatı tümevarımla yapacağız.

$n = 1$ durumunda;

$$B(t) = b_0 + (b_1 - b_0)t \text{ ve } C(t) = c_0 + (c_1 - c_0)t$$

dir. $B(t) = C(t)$ olduğundan

$$b_0 + (b_1 - b_0)t = c_0 + (c_1 - c_0)t$$

dir. Buradan $b_0 = c_0$ ve $b_1 - b_0 = c_1 - c_0$ dir. Böylece, $b_0 = c_0$ ve $b_1 = c_1$ elde edilir. Tersine zaten açıktır. Yani, $b_0 = c_0$ ve $b_1 = c_1$ durumunda $B(t) = C(t)$ elde edilir.

$n-1$ durumunda doğru olsun. Yani $B(t) = C(t)$ ancak ve ancak $i = 0,1,\dots,n-1$ için $b_i = c_i$ olsun. Bu durumda, $B(t)$ ve $C(t)$ dereceleri $n-1$ olduklarından

$$B(t) = h_0^* + h_1^*t + h_2^*t^2 + \dots + h_{n-1}^*t^{n-1}$$

$$C(t) = k_0^* + k_1^*t + k_2^*t^2 + \dots + k_{n-1}^*t^{n-1}$$

biçiminde yazılabilir. Burada $i = 0,1,\dots,n-1$ için $h_i^* = \binom{n-1}{i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} b_j (-1)^{i+j}$,

$k_i^* = \binom{n-1}{i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} c_j (-1)^{i+j}$ dir. Polinomların eşitliğinden $h_i^* = k_i^*$ dir. Varsayımımıza göre

$i = 0,1,\dots,n-1$ için $h_i^* = k_i^*$ durumunda $b_i = c_i$ dir.

n durumunda inceleyelim. $B(t) = C(t)$ olsun. $B(t)$ ve $C(t)$ dereceleri n olduklarından

$$B(t) = h_0 + h_1 t + h_2 t^2 + \dots + h_{n-1} t^{n-1} + h_n t^n$$

$$C(t) = k_0 + k_1 t + k_2 t^2 + \dots + k_{n-1} t^{n-1} + k_n t^n$$

biçiminde yazılabilir. Burada $i = 0, 1, \dots, n$ için,
$$h_i = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} b_j (-1)^{i+j},$$

$k_i = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} c_j (-1)^{i+j}$ dir. Polinomların eşitliğinden $i = 0, 1, \dots, n$ için $h_i = k_i$ dir. Bu

durumda

$$h_i = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} b_j (-1)^{i+j} = \frac{n}{n-1} \binom{n-1}{i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} b_j (-1)^{i+j} = \frac{n}{n-1} h_i^*$$

$$k_i = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} c_j (-1)^{i+j} = \frac{n}{n-1} \binom{n-1}{i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} c_j (-1)^{i+j} = \frac{n}{n-1} k_i^*$$

olur. $h_i = k_i$ durumunda $h_i^* = k_i^*$ elde edilir ve bu duruma da varsayımımıza göre $i = 0, 1, \dots, n$ için $b_i = c_i$ dir. ♦

2.2. Parçalı Bezier Eğrileri İçin Süreklilik

$$P(t) = (x(t), y(t)) = (t, f(t)), \quad f(t) = \begin{cases} 3t^2 + 2t + 1, & t \leq 0 \\ t + 1, & t > 0 \end{cases} \quad (\text{şekil 24})$$

eğrisini göz önüne alalım. polinom fonksiyonlar her yerde C^∞ sınıftan olduğundan $t, t+1, 3t^2 + 2t + 1 \in C^\infty$ dur. $f'(t)$ türevi incelenecek olursa,

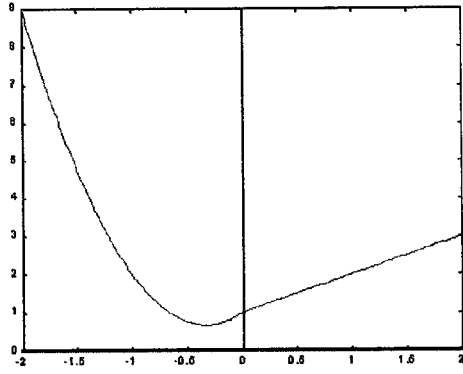
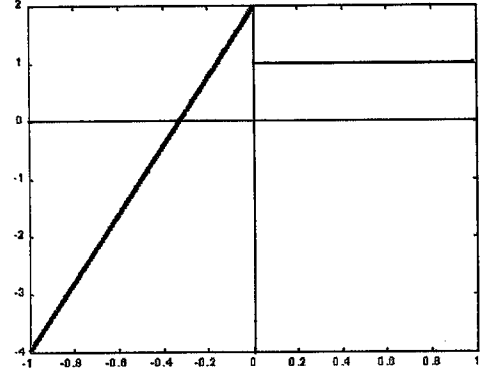
$$f'(t) = \begin{cases} 6t + 2, & t \leq 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

bulunur. Açıkça görülüyor ki, $f(t)$, C^0 sınıftandır, ancak C^1 sınıftan değildir. Çünkü $t = 0$ noktasında $f'(t)$ sürekli değildir. (şekil 25)

Bu örnekte incelenen $P(t)$ parçalı eğrisi $\alpha : (x(t), y(t)) = (t, 3t^2 + 2t + 1)$ ve $\beta : (x(t), y(t)) = (t, t + 1)$ eğrilerinin birleşiminden oluşmaktadır. Burada α eğrisinin derecesi $d(\alpha) = 2$, β eğrisinin derecesi $d(\beta) = 1$ olduğundan $P(t)$ parçalı eğrisi maksimum

$$k = \min(d(\alpha), d(\beta)) = \min(2, 1) = 1$$

olmak üzere $C^k = C^1$ sınıftandır. Şimdi, $I = [a, b]$ aralığında tanımlı, kırılma noktaları

Şekil 24. $f(t)$ parçalı eğrisiŞekil 25. $f'(t)$ parçalı eğrisi

$a = t_0, t_1, t_2, \dots, t_{r-1}, t_r = b$ olan ve $B_j(t)$, $t \in I_j = [t_j, t_{j+1}]$, $j = 0, 1, \dots, r-1$ Bezier eğrilerinden oluşan $P(t)$ parçalı Bezier eğrisini göz önüne alalım. $P(t)$ nin koordinat fonksiyonları polinom fonksiyonlar olduğundan, kırık nokta olmayan her noktada C^∞ sınıfındadır.

Önerme 3: $P(t)$; Kırılma noktaları $a = t_0, t_1, t_2, \dots, t_{r-1}, t_r = b$ olan, $I = [a, b]$ aralığında tanımlı ve $k \in \{0, 1, 2, \dots, r-1\}$ olmak üzere kontrol noktaları $b_0^k, b_1^k, b_2^k, \dots, b_{n_k}^k$ olan $B_k(t)$, $t \in I_k = [t_k, t_{k+1}]$ aralığında tanımlı, n_k dereceden Bezier eğrilerinden oluşan parçalı Bezier eğrisi olsun. Bu takdirde $P(t)$, $t = t_k$ noktasında süreklidir ancak ve ancak $b_{n_{k-1}}^{k-1} = b_0^k$ dir.

İspat: $P(t)$, süreklilik tanımından $t = t_k$ noktasında süreklidir ancak ve ancak $\lim_{t \rightarrow t_k^-} P(t) = \lim_{t \rightarrow t_k^+} P(t) = P(t_k)$ olmalıdır. $\lim_{t \rightarrow t_k^-} P(t) = \lim_{t \rightarrow t_k^-} B_{k-1}(t) = b_{n_{k-1}}^{k-1}$ ve $\lim_{t \rightarrow t_k^+} P(t) = \lim_{t \rightarrow t_k^+} B_k(t) = b_0^k$ olduklarından $P(t)$, $t = t_k$ noktasında süreklidir ancak ve ancak $b_{n_{k-1}}^{k-1} = b_0^k$ dir. Yani $P(t)$ parçalı Bezier eğrisinin $t = t_k$ noktasında sürekli olması için $B_{k-1}(t)$ Bezier eğrisinin son kontrol noktası ile $B_k(t)$ Bezier eğrisinin ilk kontrol noktası aynı nokta olmalıdır.

Sonuç 4: $P(t)$ C^p sınıfındadır ancak ve ancak $\forall m \leq p$ ve her $k \in \{0, 1, 2, \dots, r-1\}$ için

$$\frac{1}{(t_k - t_{k-1})^m} B_{k-1}^{(m)}(1) = \frac{1}{(t_{k+1} - t_k)^m} B_k^{(m)}(0) \quad \text{dir.} \quad (86)$$

İspat: $P(t)$ C^p sınıfından olabilmesi için $\forall m \leq p$ ve her $k \in \{0,1,2,\dots,r-1\}$ için $t = t_k$ noktalarında $B_{k-1}^{(m)}(t_k) = B_k^{(m)}(t_k)$ olmalıdır. $B_k(t)$ Bezier eğrileri

$$B_k(t) = \hat{B}_k\left(\frac{t-t_{\min}}{t_{\max}-t_{\min}}\right)$$

biçiminde $[0,1]$ aralığında tanımlı normalleştirilmiş Bezier eğrileri haline getirilir ve her iki tarafın da m . dereceden türevi alınır, zincir kuralından

$$\frac{1}{(t_k - t_{k-1})^m} B_{k-1}^{(m)}(1) = \frac{1}{(t_{k+1} - t_k)^m} B_k^{(m)}(0)$$

ifadesi elde edilir.

Tanım 27: $B_k(t)$, $k = 0,1,\dots,r-1$ Bezier eğrilerinden oluşan Bir $P(t)$ parçalı Bezier eğrisi için, eğer $\exists \mu_k$ katsayıları öyle ki bir t_k ; $k = 0,1,\dots,r-1$ noktası için

$$\mu_k B_{k-1}'(t_k) = B_k'(t_k)$$

ise $P(t)$ parçalı Bezier eğrisine $t = t_k$ noktasında görülebilir teğetsel sürekli (visually tangent continuous) denir.

Eğer, $P(t)$ parçalı Bezier eğrisi, her t_k ; $k = 0,1,\dots,r-1$ kırılma noktalarında görülebilir teğetsel sürekli ise, $P(t)$ parçalı Bezier eğrisine görülebilir teğetsel sürekli eğri denir.

Eğer, her $k = 0,1,\dots,r-1$ için, $\mu_k = 1$ ise, $P(t)$ parçalı Bezier eğrisi, C^1 sınıfındadır.

Teorem 19: $B(t)$, kontrol noktaları b_i , $i = 0,1,\dots,n$ olan n . dereceden bir Bezier eğrisi ve $C(t)$ de kontrol noktaları c_i , $i = 0,1,\dots,n$ olan n . dereceden bir Bezier eğrisi olsun. $B(t)$ ve $C(t)$ nin birleşiminden oluşan $P(t)$ parçalı Bezier eğrisi için;

1- $P(t)$, C^0 süreklidir ancak ve ancak $b_n = c_0$ ise.

2- $P(t)$, C^1 süreklidir ancak ve ancak $b_n = c_0$ ve $c_1 = 2b_n - b_{n-1}$ ise.

3- $P(t)$, görülebilir teğetsel süreklidir ancak ve ancak $b_n = c_0$ ve $c_1 = (1 + \mu)b_n - \mu b_{n-1}$ ise.

İspat: $B(t)$ ve $C(t)$ nin birleşiminden oluşan $P(t)$ parçalı Bezier eğrisi için kırılma noktası t_m olsun. $B(t_m) = b_n$ ve $C(t_m) = c_0$ dir.

1- Önerme 3 ten $P(t)$, C^0 süreklidir ancak ve ancak $b_n = c_0$ dir.

2- Bezier eğrilerinin son nokta teğet özelliğinden dolayı $B'(t_m) = b_n - b_{n-1}$ ve $C'(t_m) = c_1 - c_0$ dir. $P(t)$, C^1 sürekli ise aynı zamanda C^0 sürekli dir. Bu durumda $b_n = c_0$ dir. O halde $P(t)$, C^1 sürekli ise $B'(t_m) = C'(t_m)$ olduğundan $b_n - b_{n-1} = c_1 - c_0 \Rightarrow c_1 = c_0 + b_n - b_{n-1}$ ve $b_n = c_0$ olduğundan $c_1 = 2b_n - b_{n-1}$ elde edilir.

3- $P(t)$, görülebilir teğetsel sürekli olsun. Bu durumda, $\mu B'(t_m) = C'(t_m)$ dir. $B'(t_m) = b_n - b_{n-1}$ ve $C'(t_m) = c_1 - c_0$ olduğundan $c_1 = c_0 + \mu b_n - \mu b_{n-1}$ elde edilir. Ancak görülebilir teğetsel sürekli olabilmesi için, C^0 sürekli olması gerektiğinden, $b_n = c_0$ dir. Böylece, $b_n = c_0$ ve $c_1 = (1 + \mu)b_n - \mu b_{n-1}$ elde edilir.

Sonuç 5: $P(t)$, kontrol noktaları $b_0^k, b_1^k, b_2^k, \dots, b_n^k$ olan n . dereceden $B_k(t)$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, r-1\}$ Bezier eğrilerinden oluşan parçalı Bezier eğrisi için,

- 1- $P(t)$, C^0 sürekli dir ancak ve ancak $b_n^k = b_0^{k+1}$ dir.
- 2- $P(t)$, C^1 sürekli dir ancak ve ancak $b_n^k = b_0^{k+1}$ ve $b_1^{k+1} = 2b_n^k - b_{n-1}^k$ dir.
- 3- $P(t)$, görülebilir teğetsel sürekli dir ancak ve ancak $b_n^k = b_0^{k+1}$ ve $b_1^{k+1} = (1 + \mu)b_n^k - \mu b_{n-1}^k$ dir.

2.3. Bezier Eğrileri İçin Sayısal Algoritmalar

Bu bölümde bir $B(t)$ Bezier eğrisinin herhangi bir $t_0 \in [0, 1]$ noktasındaki $B(t_0)$ değerini hesaplamak için geliştirilen sayısal algoritmaları vereceğiz. Sayısal Algoritmalar Uygulamalı Matematikte, mekanikte, Bilgisayar destekli tasarımda ve daha bir çok alanda kullanılmaktadır. Günümüzde işlemler çok büyük boyutlarda gerçekleştirilmektedir. Bir $t_0 \in [0, 1]$ noktasındaki $B(t_0)$ değerini hesaplamak için, önce $B(t)$ Bezier eğrisinin parametrik denklemi bulunur, daha sonra bu denklemde t_0 değeri yerine yazılır ve sonucu bulunabilir. Burada, derecesi küçük olan Bezier eğrileri için belki fark etmeyebilir, ancak derece büyüdükçe çok daha fazla işlem yapılması gerekecektir. Bir $t_0 \in [0, 1]$ değeri için $(t_0)^n$ değerinin hesaplanmasında n büyüdükçe sayıların incelikleri yani virgülden sonraki rakamlar çok fazla olacağından istenilen değere tam olarak ulaşmak mümkün olmayabilecektir. Bu durumlarda, işlemlerin fazlalığından ya da sayıların inceliklerinden

kaynaklanabilecek hata miktarını en aza indirmek için sayısal algoritmalar geliştirilmiştir.

2.3.1. Bezier Eğrileri İçin De Casteljau Algoritması

De Casteljau Algoritması, bir Bezier eğrisinin $t_0 \in [0,1]$ noktasındaki $B(t_0)$ değerini hesaplamak için geliştirilmiş bir algoritmadır. Ayrıca verilen bir Bezier eğrisinin iki ayrı parçaya ayrılmasında da yine sıklıkla bu algoritma kullanılmaktadır. Kontrol noktaları $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ olarak verilen n . dereceden bir $B = B(t)$ Bezier eğrisi için $t = t_0$ noktasındaki değerini bulmak için De Casteljau Algoritmasının ifadesi aşağıdaki teoremle verilebilir:

Teorem 20 : Kontrol noktaları $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ olarak verilen n . dereceden bir $B = B(t)$ Bezier eğrisinin, $t = t_0$ noktasındaki değeri $B(t_0) = b_0^n$ dir. Burada $j = 1, \dots, n$ ve $i = 0, 1, \dots, n-j$ için;

$$\begin{aligned} b_i^0 &= b_i \\ b_i^j &= (1-t_0)b_i^{j-1} + t_0b_{i+1}^{j-1}, \end{aligned} \quad (87)$$

dir.

İspat: Genel Bezier eğrisi, (7) de ifade edilmişti. Ayrıca Bernstein polinomlarının indirgeme (12) özelliği verilmişti. Bu kullanılarak;

$$\begin{aligned} B(t) &= \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n b_i ((1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t)) \\ &= \sum_{i=0}^n b_i (1-t)B_i^{n-1}(t) + \sum_{i=0}^n b_i tB_{i-1}^{n-1}(t); \end{aligned}$$

elde edilir. $B_{-1}^{n-1}(t) = 0$ ve $B_n^{n-1}(t) = 0$ olduğundan

$$B(t) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i (1-t)B_i^{n-1}(t) + \sum_{i=1}^n b_i tB_{i-1}^{n-1}(t)$$

yazılabilir. İki toplamın da sıfırdan başlaması için, ikinci toplamda i yerine $i+1$ alınır ve sıfırdan başlatılırsa bir şey değişmeyeceğinden;

$$\begin{aligned} B(t) &= \sum_{i=0}^{n-1} b_i (1-t)B_i^{n-1}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} b_{i+1} tB_i^{n-1}(t) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} [b_i (1-t) + b_{i+1} t] B_i^{n-1}(t) \end{aligned}$$

olur. Böylece; $b_i = b_i^0$ ve $b_i^1 = (1-t)b_i^0 + tb_{i+1}^0$ $i = 0,1,\dots,n-1$ denilirse;

$$B(t) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i^1 B_i^{n-1}(t) \quad (88)$$

elde edilir. Burada (88) ifadesi bize gösteriyor ki, $B(t)$ Bezier eğrisi, kontrol noktaları $b_0^1, b_1^1, \dots, b_{n-1}^1$ olan $(n-1)$. dereceden bir Bezier eğrisidir. İndirgeme özelliği tekrar kullanılarak benzer şekilde

$$B(t) = \sum_{i=0}^{n-2} b_i^2 B_i^{n-2}(t) \quad (89)$$

elde edilir. Burada; $b_i^2 = (1-t)b_i^1 + tb_{i+1}^1$, $i = 0,1,\dots,n-2$ biçimindedir. İndirgeme özelliği tekrar tekrar uygulanırsa, ifade daha genel olarak, (tümevarım yöntemi kullanılarak),

$$B(t) = \sum_{i=0}^{n-j} b_i^j B_i^{n-j}(t) \quad (90)$$

biçiminde verilebilir. Burada $b_i^j = (1-t)b_i^{j-1} + tb_{i+1}^{j-1}$, $i = 0,1,\dots,n-j$ dir. $j = n$ alınır;

$$B(t) = \sum_{i=0}^0 b_i^n B_i^0(t) = b_0^n$$

elde edilir. ♦

$$\begin{array}{cccc} b_0^0 & b_1^0 & \dots & b_{n-1}^0 & b_n^0 \\ b_0^1 & b_1^1 & \dots & b_{n-1}^1 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ b_0^{n-1} & b_1^{n-1} & & & \\ b_0^n & & & & \end{array} \quad (91)$$

Şekil 26: De Casteljau algoritmasının şematik gösterimi

Örnek 11: Kontrol noktaları $b_0 = (2,0)$, $b_1 = (1,1)$, $b_2 = (3,4)$, $b_3 = (4,3)$ ve $b_4 = (3,0)$ olan Bezier eğrisinin $t = 0.25$ değerini De Casteljau Algoritması ile bulalım:

$$\begin{aligned} b_0 &= (2,0) & ; b_1 &= (1,1) & ; b_2 &= (3,4) & ; b_3 &= (4,3) & ; b_4 &= (3,0) \\ b_0^1 &= \frac{3}{4}b_0 + \frac{1}{4}b_1 = \left(\frac{7}{4}, \frac{1}{4}\right) & ; b_1^1 &= \left(\frac{6}{4}, \frac{7}{4}\right) & ; b_2^1 &= \left(\frac{13}{4}, \frac{15}{4}\right) & ; b_3^1 &= \left(\frac{15}{4}, \frac{9}{4}\right) \\ b_0^2 &= \frac{3}{4}b_0^1 + \frac{1}{4}b_1^1 = \left(\frac{27}{16}, \frac{10}{16}\right) & ; b_1^2 &= \left(\frac{31}{16}, \frac{36}{16}\right) & ; b_2^2 &= \left(\frac{54}{16}, \frac{24}{16}\right) \end{aligned}$$

$$b_0^3 = \frac{3}{4}b_0^2 + \frac{1}{4}b_1^2 = \left(\frac{112}{64}, \frac{66}{64}\right); b_1^3 = \left(\frac{147}{64}, \frac{132}{64}\right)$$

$$b_0^4 = \frac{3}{4}b_0^3 + \frac{1}{4}b_1^3 = \left(\frac{483}{256}, \frac{340}{256}\right)$$

$$\Rightarrow B(0,25) = b_0^4 = \left(\frac{483}{256}, \frac{340}{256}\right) = (1.88671875, 1.328125)$$

olarak bulunur.

2.3.2. MATLAB ile Bezier Eğrileri İçin De Casteljau Algoritması

De Casteljau algoritmasının MATLAB programı ile uygulaması aşağıdaki biçimde yapılabilir.

```
n=input('kontrol noktalarının sayısını giriniz'\n');
t0=input('t0 değerini giriniz'\n');
B0=input('kontrol noktalarını giriniz'\n');
p=(n.*(n+1))./2;
for i=1:n
    B(i,:)=B0(i,:);
end
for j=1:n-1
    s=(j.*n)-((j.*(j-1))./2);
    k=((j-1).*n)-((j-1).*(j-2))./2;
    for i=1:n-j
        B(s+i,:)=B(k+i,:).*(1-t0)+B(k+i+1,:).*t0;
    end
end
end
bt0=B(p,:);
bt0
```

2.3.3. Bezier Eğrileri İçin Bölme (Subdivision) Algoritması

Kontrol noktaları $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ olan n . dereceden bir $B(t)$ Bezier eğrisi $[0,1]$ kapalı aralığında tanımlanmaktadır. $[0,1]$ aralığı bir $\alpha \in [0,1]$ noktasından ikiye ayrıldığında, $B(t)$ Bezier eğrisi de $B(\alpha)$ noktasından ikiye ayrılacaktır. Böylece elde edilen iki ayrı eğri parçasından $B(\alpha)$ noktasının solunda kalan kısmı B_{sol} , sağında kalan kısmı da $B_{sağ}$ olarak ifade edilecek olursa, bu iki eğrinin tanım aralıkları sırasıyla $[0,\alpha]$ ve $[\alpha,1]$ kapalı aralıkları olur. Her iki eğri parçası da, parametre dönüşümü yapılarak $[0,1]$ aralığında tanımlı Bezier eğrisi formunda ifade edilebilir. Böylece, elde edilen yeni Bezier eğrilerinin dereceleri de, ilk eğrinin derecesi ile aynı olacaktır. Kontrol noktaları da

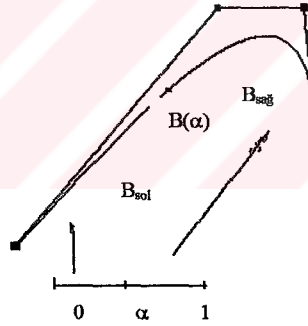
değişecek ve toplam $2n+2$ tane olacaktır. Yani n . dereceden bir Bezier eğrisi, yine dereceleri n olan iki ayrı parçaya ayrılmaktadır. (Şekil 27)

Elde edilen yeni Bezier eğrilerinin kontrol noktaları bölme algoritması ile bulunmaktadır. Bu algoritmada De Casteljau algoritması kullanılır. Bu algoritma ile elde edilen B_{sol} ve $B_{sağ}$ Bezier eğrilerinin kontrol noktaları şu şekilde bulunur:

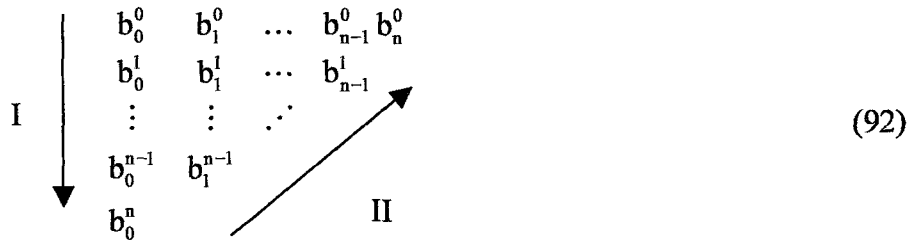
Şekil 28 incelendiğinde I oku yönündeki noktalar, yukarıdan aşağıya doğru sırasıyla $b_0^0, b_0^1, \dots, b_0^{n-1}, b_0^n$ noktaları, B_{sol} Bezier eğrisinin kontrol noktaları; II oku yönündeki noktalar, aşağıdan yukarıya doğru sırasıyla $b_0^n, b_1^{n-1}, \dots, b_{n-1}^1, b_n^0$ noktaları, $B_{sağ}$ Bezier eğrisinin kontrol noktalarıdır. Bu durum bir teorem olarak aşağıdaki şekilde verilebilir:

Teorem 21: Kontrol noktaları $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ olan n . dereceden bir $B(t)$ Bezier eğrisini ikiye bölmek suretiyle elde edilen B_{sol} ve $B_{sağ}$ Bezier eğrilerinin kontrol noktaları; B_{sol} için $b_0^0, b_0^1, \dots, b_0^{n-1}, b_0^n$ ve $B_{sağ}$ için ise $b_0^n, b_1^{n-1}, \dots, b_{n-1}^1, b_n^0$ noktalarıdır. Burada b_i^j , (87) de verildiği gibidir.

İspat: [20, p.145]



Şekil 27: Bir Bezier eğrisinin ayrılması



Şekil 28: Bir Bezier eğrisi için bölme algoritması

2.3.4. MATLAB ile Bezier Eğrilerinin Bölme Algoritması

De Casteljau algoritması yardımıyla oluşturduğumuz bölme algoritmasının MATLAB kodu aşağıdaki gibidir:

```
n=input('kontrol noktalarının sayısını giriniz'\n');
t0=input('t0 değerini giriniz'\n');
B0=input('kontrol noktalarını giriniz'\n');
P=(n.*(n+1))./2;
for i=1:n
    B(i,:)=B0(i,:);
end
for j=1:n-1
    s=(j.*n)-((j.*(j-1))./2);
    k=((j-1).*n)-((j-1).(j-2))./2;
    for i=1:n-j
        B(s+i,:)=B(k+i,:).*(1-t0)+B(k+i+1,:).*t0;
    end
    Bsol(j+1,:)=B(s+1,:);
    Bsag(n-j+1,:)=B(s,:);
end
Bsol(1,:)=B(1,:);
Bsag(1,:)=B(P,:);
Bsol
Bsag
```

2.3.5. Bir Bezier Eğrisine Lineer Yaklaşımlar

Bu bölümde De Casteljau algoritmasının bir uygulaması olan Bezier eğrisine lineer yaklaşımlar için algoritmalar verilecektir. Bunun için önce maximum minimum sınır dörtgeni ve hemen hemen lineerlik tanımları verilecektir.

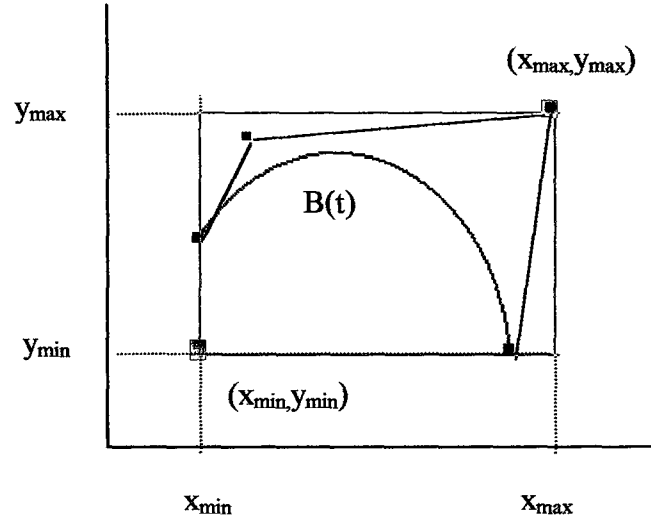
Tanım 28: Düzlemde verilen bir Bezier eğrisinin tüm kontrol noktalarını içine alacak şekilde eksenlere dik olarak çizilen en küçük dikdörtgene, Bezier eğrisinin maximum-minimum **sınır dörtgeni** denir. (Şekil 29)

Tanım 29: Bir ε değeri için bir Bezier eğrisinin max. min sınır dörtgeninin yatay ya da dikey uzunluğu ε dan küçük ise bu Bezier eğrisine **hemen hemen lineer** denir. ε ne kadar küçük olursa, hemen hemen lineerlik o kadar kuvvetli olur.

Bezier eğrisinin çizimi için verilen lineer yaklaşım algoritması:

Bu algoritma üç adımda gerçekleştirilir.

1. Adım: Verilen B Bezier eğrisi $t = \frac{1}{2}$ noktasında bölme algoritması ile B_{sol} ve



Şekil 29 : $B(t)$ Bezier eğrisinin max. min. sınır dörtgeni

$B_{sağ}$ Bezier eğrilerine ayrılır. B_{sol} ve $B_{sağ}$ Bezier eğrilerini sırasıyla B_L ve B_R ile gösterelim

2. Adım: i) Eğer, B_L Bezier eğrisi hemen hemen lineerse 3. adıma geçilir, değilse B_L eğrisi için algoritma yinelenir. B_L eğrisi için 1. adım tekrar uygulanır ve B_L eğrisi, $B_{L_{sol}}$ ve $B_{L_{sağ}}$ olarak ikiye ayrılır. Burada $B_{L_{sol}}$ Bezier eğrisini B_{LL} ve $B_{L_{sağ}}$ Bezier eğrisini de B_{LR} olarak gösterebiliriz.

ii) Eğer, B_R Bezier eğrisi hemen hemen lineerse 3. adıma geçilir, değilse B_R eğrisi için algoritma yinelenir. B_R eğrisi için 1. adım tekrar uygulanır ve B_R eğrisi, $B_{R_{sol}}$ ve $B_{R_{sağ}}$ olarak ikiye ayrılır. Burada da $B_{R_{sol}}$ Bezier eğrisini B_{RL} ve $B_{R_{sağ}}$ Bezier eğrisini de B_{RR} olarak gösterebiliriz.

3. Adım: Bu Bezier eğri parçası hemen hemen lineerdir ve bu Bezier eğrisinin yerine kontrol poligonu çizilebilir. Bu kontrol poligonu hemen hemen lineer parçalarda Bezier eğrisi için bir yaklaşımdır.

Böylece elde edilen hemen hemen lineer Bezier eğri parçalarının ait kontrol poligonlarının birleşimi orjinal Bezier eğrisine lineer yaklaşımları verir.

2.3.6. MATLAB ile Bir Bezier Eğrisine Lineer Yaklaşımlar

Bezier eğrisinin hemen hemen lineer olan kontrol noktalarının geometrik yeri, Bezier eğrisine lineer yaklaşım olarak alınmaktadır. Bu algoritmayı MATLAB programında verelim.

```
% lineer ağac yapısı
b0=input('kontrol noktalarını giriniz'\n');
t=0.5;
e=input('epsilon değerini giriniz'\n');
n=size(b0,1);
alt_ok(b0,t,e,n);

function alt_ok(b,t,e,n)
if( (max(b(:,1))-min(b(:,1)))<e | (max(b(:,2))-min(b(:,2)))<e )
    b % b matrisini ekrana yaz
    return
else
    P=(n.*(n+1))./2;
    for i=1:n
        B(i,:)=b(i,:);
    end
    for j=1:n-1
        s=(j.*n)-((j.*(j-1))./2);
        k=((j-1).*n)-((j-1.*(j-2))./2);
        for i=1:n-j
            B(s+i,:)=B(k+i,:).*(1-t)+B(k+i+1,:).*t;
        end
        Bsol(j+1,:)=B(s+1,:);
        Bsag(n-j+1,:)=B(s,:);
    end
    Bsol(1,:)=B(1,:);
    Bsag(1,:)=B(P,:);

    alt_ok(Bsol,t,e,n);
    alt_ok(Bsag,t,e,n);
end
return
```

2.3.7. Düzlemde Bir Bezier Eğrisi ile Bir Doğrunun Arakesitinin Bulunuşu

Kontrol noktaları $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ olan n . dereceden bir $B(t)$ Bezier eğrisi, n . derece bir polinomdur. n . dereceli bir polinomun bir doğru ile ortak çözümü yapıldığında en fazla n tane ortak çözümü olduğu görülür. Bu nedenle n . derece bir Bezier eğrisi ile bir doğrunun arakesit noktalarının sayısı en fazla n tanedir. Arakesit noktalarının bulunmasında eğrinin derecesi arttıkça arakesit noktalarını hesaplamak güçleşir. Örneğin $y = ax^2 + bx + c$ parabolü ile $y = mx + n$ doğrusunun arakesit noktasını bulmak için

$y = ax^2 + bx + c$ ve $y = mx + n$ ortak çözümünden $ax^2 + (b - m)x + c - n = 0$ ikinci dereceli bir bilinmeyenli denklemi elde edilir. Bu denklemi çözmek mümkündür. Ancak eğri olarak parabol yerine daha yüksek dereceli bir polinom alındığında, örneğin $y = ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + ex^3 + fx^2 + gx + h$ polinomu ile $y = mx + n$ doğrusunun arakesit noktalarını bulmak o kadar kolay olmamaktadır. Bu durumda $ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + ex^3 + fx^2 + (g - m)x + h - n = 0$ gibi yedinci dereceden bir polinomun çözüm kümesini bulma problemi ile karşı karşıya kalınmaktadır. Bu problemi ortadan kaldırmak için bir algoritma geliştirilmiştir:

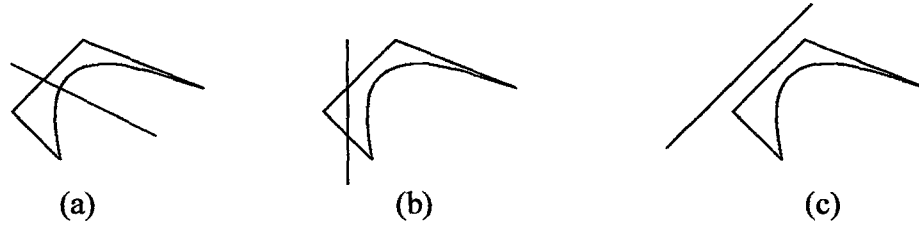
1. Adım: Bezier eğrisinin kontrol poligonu ile doğrunun arakesitinin olup olmadığı araştırılır. Eğer arakesit noktaları yoksa, o zaman Bezier eğrisi ile doğrunun arakesiti de yoktur. Eğer arakesit noktaları mevcutsa 2. Adıma geçilir. Burada, bir doğru ile Bezier eğrisinin kontrol poligonunun arakesitlerinin olup olmadığı ise şu şekilde test edilir:

Bir doğru ile kontrol poligonunun arakesitlerinin olup olmadığı testi:

Bildiğimiz gibi bir doğru, bir düzlemi iki ayrı bölgeye ayırır. Bir $ax + by + c = 0$ doğrusu, düzlemi, $A : ax + by + c < 0$ ve $B : ax + by + c > 0$ gibi iki bölgeye ayırır. Bezier eğrisinin kontrol noktalarının tamamı A bölgesinde ya da B bölgesinde kalıyorsa Bezier eğrisinin kontrol poligonu ile doğrunun arakesit noktaları yoktur. Yani bunlar kesişmezler. Eğer kontrol noktalarının bir bölümü A bölgesinde ve bir bölümü de B bölgesinde kalıyorsa, doğru ile Bezier eğrisinin kontrol poligonunun arakesit noktaları vardır. Yani bunlar kesişir. Burada şunu belirtmek gerekir ki, Bezier eğrisinin **kontrol poligonu ile doğrunun** arakesit noktalarının mevcut olması, **doğru ile Bezier eğrisinin** arakesit noktalarının mevcut olmasını gerektirmez. Şekil 30 (b) de de görüldüğü gibi, doğru ile kontrol poligonu kesişmesine rağmen Bezier eğrisi kesişmez

2. Adım: Bezier eğrisinin hemen hemen lineer olup olmadığı test edilir. Eğer hemen hemen lineerse 3. Adıma geçilir. Şayet hemen hemen lineer değilse, bölme algoritmasında olduğu gibi Bezier eğrisi $t = \frac{1}{2}$ noktasında bölme algoritması ile B_{sol} ve $B_{sağ}$ Bezier eğrilerine ayrılır. Daha sonra B_{sol} ve $B_{sağ}$ Bezier eğrileri ile doğrunun arakesit noktalarının mevcut olup olmadığını test etmek için algoritma her iki eğri için yinelenir.

3. Adım: Bezier eğrisi hemen hemen lineer olduğundan eğri yerine kontrol poligonunu alınabilir. Böylece Bezier eğrisinin kontrol poligonu ile doğrunun arakesit noktaları Bezier eğrisi ile doğrunun arakesit noktalarıdır.



Şekil 30: (a) Doğru ile hem kontrol poligonu, hem de Bezier eğrisi kesişir.
 (b) Doğru ile kontrol poligonu kesişir, ancak Bezier eğrisi kesişmez.
 (c) Doğru ile ne kontrol poligonu, ne de Bezier eğrisi kesişmez.

2.3.8. MATLAB ile Bir Düzlem Bezier Eğrisi ile Bir Doğrunun Arakesitinin

Bulunuşu

Bir Bezier eğrisi ile düzlemde $y = m x + n$ biçiminde verilen bir doğrunun arakesitinin bulunması için aşağıdaki gibi bir algoritma verilebilir.

```
!del birlik.txt
b0=input('kontrol noktalarını giriniz'\n');
%b0=[0.5 1.5; 0.5 2.6; 0.7 2.6; 1 2.6; 1.3 2.6];
t=0.5;
e=input('epsilon değerini giriniz'\n');
%e=0.05;
n=size(b0,1);

alt_ok(b0,t,e,n);

load birlik.txt
b1=birlik(:,1);
b2=birlik(:,2);
bb=[birlik(abs(b1-b2) >e,1) birlik(abs(b1-b2) >e,2)]
x=bb(:,1);
y=bb(:,2);
m=input('y=mx+n doğrunun m değeri gir: ');
n=input('y=mx+n doğrunun n değeri gir: ');
dogru=y-m*x-n;
poz=dogru(dogru>0);
neg=dogru(dogru<0);
if(length(poz) & length(neg))
[a,i]=min(abs(dogru));
ara=bb(i,:)
else
disp('ara kesit yoktur');
end

figure;plot(bb(:,1),bb(:,2),b0(:,1),b0(:,2),'ro')
```

2.3.9. İki Bezier Eğrisinin Arakesitinin Bulunuşu

Bezout teoreminin bir sonucu olarak, derecesi m olan bir Bezier eğrisi ile, derecesi n olan bir diğer Bezier eğrisi, $(m.n)$ sayıda noktada kesişebilirler. [30] İki Bezier eğrisinin arakesitinin bulunuşunda aşağıdaki gibi bir algoritma verilebilir:

Algoritma: İki Bezier eğrisinin konvex hullarının kesişip kesişmediği test edilir. Eğer konvex hullar kesişiyorsa, ikinci adıma geçilir. Eğer kesişmiyorsa, o zaman bu iki Bezier eğrisinin arakesitleri boş kümedir.

İki Bezier eğrisinin konvex hullarının kesişip kesişmediği testi:

1. Adım: İki Bezier eğrisinin konvex hullarının kesişip kesişmediğini test etmek için, her iki konvex hullun da maksimum minimum sınır dörtgeni oluşturulur. Daha sonra bu dörtgenlerin kesişip kesişmediğine bakılır. Şayet kesişiyorlarsa, konvex hullar da kesişiyor demektir.

2. Adım: Bezier eğrilerinin hemen hemen lineer olup olmadıkları test edilir. Eğer Bezier eğrilerinin ikisi de hemen hemen lineer ise 3. adıma geçilir. Eğrilerin ikisi de hemen hemen lineer değilse her ikisi de hemen hemen lineer oluncaya kadar De Casteljau algoritması kullanılarak, bölme algoritması ile hemen hemen lineer hale getirilir.

3. Adım: Bezier eğrileri hemen hemen lineer olduğundan eğrilerin yerine kontrol poligonlarını alınabilir. Böylece Bezier eğrilerinin arakesit noktaları olarak kontrol poligonlarının arakesit noktaları alınabilir.

2.3.10. MATLAB ile İki Bezier Eğrisinin Arakesitinin Bulunuşu

Düzlemde iki Bezier eğrisinin arakesitinin bulunması için aşağıdaki gibi bir algoritma verilebilir.

```
% lineer ağac yapısı
!del birlik.txt
b0=input('Birinci Bezier eğrisinin kontrol noktalarını
giriniz''\n');
%b0=[0.5 1.5; 0.5 2.6; 0.7 2.6; 1 2.6; 1.3 2.6];
t=0.5;
e=input('epsilon değerini giriniz''\n');
%e=0.05;
n=size(b0,1);

alt_ok(b0,t,e,n);
```

```

load birlik.txt
b1=birlik;

% lineer ağac yapısı
!del birlik.txt
b0=input('İkinci Bezier eğrisinin kontrol noktalarını
giriniz'\n');
%b0=[0.5 1.5; 0.5 2.6; 0.7 2.6; 1 2.6; 1.3 2.6];
t=0.5;
%e=input('epsilon değerini giriniz'\n');
%e=0.05;
n=size(b0,1);

alt_ok(b0,t,e,n);

load birlik.txt
b2=birlik;
wer=size(b1,1);
wez=size(b2,1);
pol=0;
for i=1:wer
    for j=1:wez
        if b1(i,:)==b2(j,:)
            kale=b1(i,:)
        else
            'arakesit noktası yok'
            return
        end
    end
end
end
end

```

2.4. Rasyonel Bezier Eğrileri İçin Sayısal Algoritmalar

2.4.1. Rasyonel Bezier Eğrileri İçin De Casteljau Algoritması

Bir Bezier eğrisinin $t_0 \in [0,1]$ noktasındaki $B(t_0)$ değerini hesaplamak için geliştirilmiş bir algoritmadır. Ayrıca verilen bir rasyonel Bezier eğrisini iki ayrı parçaya bölmek için de yine sıklıkla bu algoritma kullanılmaktadır. Kontrol noktaları $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ olarak, ağırlıkları da $w_0, w_1, w_2, \dots, w_n$ olarak verilen n . dereceden bir $B = B(t)$ rasyonel Bezier eğrisinin $t = t_0$ noktasındaki değerini bulmak için, De Casteljau algoritmasının ifadesi aşağıdaki teoremle verilebilir:

Teorem 22 : Kontrol noktaları $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ olarak, ağırlıkları da $w_0, w_1, w_2, \dots, w_n$ olarak verilen n . dereceden bir $B = B(t)$ rasyonel Bezier eğrisinin $t = t_0$ noktasındaki değeri $B(t_0) = b_0^n$ dir. Burada $j = 1, \dots, n$ ve $i = 0, 1, \dots, n-j$ için;

$$\begin{aligned}
b_i^0 &= b_i, w_i^0 = w_i \\
b_i^j &= (1-t_0) \frac{w_i^{j-1}}{w_i^j} b_i^{j-1} + t_0 \frac{w_{i+1}^{j-1}}{w_i^j} b_{i+1}^{j-1} \\
w_i^j &= (1-t_0)w_i^{j-1} + t_0 w_{i+1}^{j-1}
\end{aligned} \tag{93}$$

dir.

İspat: Bezier eğrilerinde olduğu gibi, Bernstein polinomlarının indirgeme özelliğinden kolayca görülebilir. ♦

2.4.2. MATLAB ile Rasyonel Bezier Eğrileri için De Casteljau Algoritması

Rasyonel Bezier eğrileri için De Casteljau algoritmasını bir de MATLAB ile verelim.

```

n=input('kontrol noktalarının sayısını giriniz'\n');
t0=input('t0 değerini giriniz'\n');
B0=input('kontrol noktalarını giriniz'\n');
W0=input('wi ağırlıklarını giriniz'\n');
p=(n.*(n+1))./2;
for i=1:n
    B(i,:)=B0(i,:);
    W(i,:)=W0(i,:);
end
for j=1:n-1
    s=(j.*n)-((j.*(j-1))./2);
    k=((j-1).*n)-((j-1.*(j-2))./2);
    for i=1:n-j
        W(s+i,:)=W(k+i,:).*(1-t0)+W(k+i+1,:).*t0;
    end
end
w=W(p,:);
for j=1:n-1
    s=(j.*n)-((j.*(j-1))./2);
    k=((j-1).*n)-((j-1.*(j-2))./2);
    for i=1:n-j
        B(s+i,:)=B(k+i,:).*(W(k+i,:)./W(s+i,:)).*(1-t0)
            + B(k+i+1,:).*t0.*(W(k+i+1,:)./W(s+i,:));
    end
end
bt0=B(p,:);
w
bt0

```

2.4.3. Rasyonel Bezier Eğrileri için Bölme Algoritması

Kontrol noktaları $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ olarak, ağırlıkları da $w_0, w_1, w_2, \dots, w_n$ olarak verilen n . dereceden bir $B = B(t)$ rasyonel Bezier eğrisi $[0,1]$ kapalı aralığında

tanımlanmaktadır. $[0,1]$ aralığı bir $\alpha \in [0,1]$ noktasından ikiye ayrıldığında, $B(t)$ Bezier eğrisi de $B(\alpha)$ noktasından ikiye ayrılacaktır. Böylece elde edilen iki ayrı eğri parçasından $B(\alpha)$ noktasının solunda kalan kısmı B_{sol} , sağında kalan kısmı $B_{\text{sağ}}$ olarak ifade edilecek olursa, bu iki eğrinin tanım aralıkları sırasıyla $[0,\alpha]$ ve $[\alpha,1]$ kapalı aralıklardır. Her iki eğri parçası da, parametre dönüşümü yapılarak $[0,1]$ aralığında tanımlı rasyonel Bezier eğrisi formunda ifade edilebilir. Böylece, elde edilen yeni rasyonel Bezier eğrilerinin dereceleri de, önceki ilk eğrinin derecesi ile aynı olacaktır. Kontrol noktaları da değişecek her ikisinin de $(n+1)$ er olmak üzere toplam $2n+2$ tane olacaktır. Yani n . dereceden bir rasyonel Bezier eğrisi, yine dereceleri n olan iki ayrı parçaya ayrılmış olacaktır.

Elde edilen yeni rasyonel Bezier eğrilerinin kontrol noktaları ve ağırlıkları De Casteljau algoritması yardımı ile bulunmaktadır. Bu algoritmada elde edilen B_{sol} ve $B_{\text{sağ}}$ rasyonel Bezier eğrilerinin kontrol noktaları (93) te verildiği şekliyle elde edilip (92) deki gibi bir gösterime sahip olur. Burada ayrıca, ağırlıklarda (92) gibi bir gösterim ile verilebilir.(Şekil 31)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & w_0^0 & w_1^0 & \dots & w_{n-1}^0 & w_n^0 & \\
 & w_0^1 & w_1^1 & \dots & w_{n-1}^1 & & \\
 & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\
 \text{I} \downarrow & w_0^{n-1} & w_1^{n-1} & & & & \\
 & w_0^n & & & & & \\
 & & & & & & \nearrow \text{II}
 \end{array} \quad (94)$$

Şekil 31: Bir rasyonel Bezier eğrisi için ağırlıkların bölme algoritması

I oku yönündeki noktalar, yukarıdan aşağıya doğru sırasıyla $b_0^0, b_1^0, \dots, b_{n-1}^0, b_n^0$ noktaları, B_{sol} Bezier eğrisinin kontrol noktaları; II oku yönündeki noktalar, aşağıdan yukarıya doğru sırasıyla $b_0^n, b_1^{n-1}, \dots, b_{n-1}^1, b_n^0$ noktaları $B_{\text{sağ}}$ Bezier eğrisinin kontrol noktalarıdır.

2.4.4. MATLAB ile Rasyonel Bezier Eğrilerinin Bölme Algoritması

Rasyonel Bezier eğrileri için De Casteljau algoritmasının MATLAB kodları aşağıdaki gibidir:

```
n=input('kontrol noktalarının sayısını giriniz'\n');
t0=input('t0 değerini giriniz'\n');
```

```

B0=input('kontrol noktalarını giriniz'\n');
W0=input('wi ağırlıklarını giriniz'\n');
p=(n.*(n+1))./2;
for i=1:n
    B(i,:)=B0(i,:);
    W(i,:)=W0(i,:);
end
for j=1:n-1
    s=(j.*n)-((j.*(j-1))./2);
    k=((j-1).*n)-((j-1).(j-2))./2;
    for i=1:n-j
        W(s+i,:)=W(k+i,:).*(1-t0)+W(k+i+1,:).*t0;
    end
    Wsol(j+1,:)=W(s+1,:);
    Wsag(n-j+1,:)=W(s,:);
end
Wsol(1,:)=W(1,:);
Wsag(1,:)=W(p,:);
Wsol
Wsag
for j=1:n-1
    s=(j.*n)-((j.*(j-1))./2);
    k=((j-1).*n)-((j-1).(j-2))./2;
    for i=1:n-j
        B(s+i,:)=B(k+i,:).*(W(k+i,:)./W(s+i,:)).*(1-
t0)+B(k+i+1,:).*t0.*(W(k+1+i,:)./W(s+i,:));
    end
    Bsol(j+1,:)=B(s+1,:);
    Bsag(n-j+1,:)=B(s,:);
end
Bsol(1,:)=B(1,:);
Bsag(1,:)=B(p,:);
Bsol
Bsag

```

Örnek 12: Kontrol noktaları $(0,0,1)$, $(0,1,4)$, $(0,2,5)$, $(3,2,1)$; ağırlıkları, 1,2,1 ve 0.4 olan kübik rasyonel Bezier eğrisine $t_0 = 0.5$ noktasında bölme algoritması uygulanırsa, MATLAB de yukarıdaki algoritma koşturulduğunda ekran bilgileri aşağıdaki gibi oluşur:

```

kontrol noktalarının sayısını giriniz'
4
t0 değerini giriniz'
0.5
kontrol noktalarını giriniz'
[0 0 1;0 1 4;0 2 5;3 2 1]
wi ağırlıklarını giriniz'
[1;2;1;0.4]
Wsol =
    1.0000
    1.5000
    1.5000
    1.3000
Wsag =
    1.3000
    1.1000

```

	0.7000		
	0.4000		
Bsol =			
	0	0	1.0000
	0	0.6667	3.0000
	0	1.0000	3.6667
	0.1154	1.2308	3.8846
Bsag =			
	0.1154	1.2308	3.8846
	0.2727	1.5455	4.1818
	0.8571	2.0000	3.8571
	3.0000	2.0000	1.0000

2.5. Yüzeyler İçin Sayısal Algoritmalar

2.5.1. Bezier Yüzeyleri İçin De Casteljau Algoritması

Bezier ve rasyonel Bezier eğrilerinde olduğu gibi (57) biçiminde verilen bir $B(u,v)$ Bezier yüzeyinin bir (u_0, v_0) noktasındaki değerini sayısal olarak hesaplamak için de De Casteljau algoritması verilebilir. Bunun için algoritma $B(u,v)$ Bezier yüzeyinin önce v parametresi yönünde, daha sonra da u parametresi yönünde uygulanır. Algoritmayı v yönünde uygulamak için, P_{ij} kontrol noktalarının her bir i kökü için i - ler sabitlendiğinde elde edilen j - ye bağlı kontrol noktaları; her bir i kökü için v parametresine bağlı bir $B(v)$ Bezier eğrisinin kontrol noktaları olarak düşünülür ve $v = v_0$ noktası için De Casteljau algoritması hesaplanır. Daha sonra, benzer şekilde j . kökler sabit bırakılarak elde edilen i ye bağlı P_{ij} kontrol noktaları için $u = u_0$ için De Casteljau algoritması hesaplanır.

Bu algoritmayı daha iyi anlamak için yüzeylerde verilen bölme algoritmasını da kavramak gerekebilir. Çünkü, bu iki algoritma birbirleriyle iç içedir.

2.5.2. MATLAB ile Bezier Yüzeyleri İçin De Casteljau Algoritması

Yüzeyler için De Casteljau algoritmasının MATLAB kodları aşağıdaki gibi verilebilir:

```
n=input('Yüzeyin u parametresine göre derecesini giriniz (n)''\n');
m=input('Yüzeyin v parametresine göre derecesini giriniz (m)''\n');
u0=input('u0 değerini giriniz''\n');
```

```

v0=input('v0 değerini giriniz'\n');
B0=input('Pij kontrol noktalarını, [P00;...;P0m;P10;...;P1m;...;Pn0;...;Pnm] biçiminde giriniz'\n');
p=((n+2).*(n+1))./2;
q=((m+2).*(m+1))./2;
for a=0:n
    D=B0(a.*(m+1)+1:(a+1).*(m+1),:);
    for j=1:m
        s=(j.*(m+1))-((j.*(j-1))./2);
        k=((j-1).*(m+1))-((j-1).*(j-2))./2;
        for i=1:m+1-j
            D(s+i,:)=D(k+i,:).*(1-v0)+D(k+i+1,:).*v0;
        end
        Bsol(j+1,:)=D(s+1,:);
        Bsag(m+1-j+1,:)=D(s,:);
    end
    Bsol(1,:)=D(1,:);
    Bsag(1,:)=D(q,:);
    Ysol((a.*(m+1)+1:(a+1).*(m+1)),:)=Bsol;
    Ysag((a.*(m+1)+1:(a+1).*(m+1)),:)=Bsag;
end
Ysol;
Ysag;
for a=0:m
    for b=0:n
        C(b+1,:)=Ysol(b.*(m+1)+1+a,:);
    end
    for j=1:n
        s=(j.*(n+1))-((j.*(j-1))./2);
        k=((j-1).*(n+1))-((j-1).*(j-2))./2;
        for i=1:n+1-j
            C(s+i,:)=C(k+i,:).*(1-u0)+C(k+i+1,:).*u0;
        end
        Ksol(j+1,:)=C(s+1,:);
        Ksag(n+1-j+1,:)=C(s,:);
    end
    Ksol(1,:)=C(1,:);
    Ksag(1,:)=C(p,:);
    Ysolsol((a.*(n+1)+1:(a+1).*(n+1)),:)=Ksol;
    Ysolsag((a.*(n+1)+1:(a+1).*(n+1)),:)=Ksag;
end
Ysolsol;
Ysolsag;

for a=0:m
    for b=0:n
        C(b+1,:)=Ysag(b.*(m+1)+1+a,:);
    end
    for j=1:n
        s=(j.*(n+1))-((j.*(j-1))./2);
        k=((j-1).*(n+1))-((j-1).*(j-2))./2;
        for i=1:n+1-j
            C(s+i,:)=C(k+i,:).*(1-u0)+C(k+i+1,:).*u0;
        end
        Ksol(j+1,:)=C(s+1,:);
        Ksag(n+1-j+1,:)=C(s,:);
    end
    Ksol(1,:)=C(1,:);
    Ksag(1,:)=C(p,:);
end

```

```

Ysagsol(a.*(n+1)+1:(a+1).*(n+1),:)=Ksol;
Ysagsag(a.*(n+1)+1:(a+1).*(n+1),:)=Ksag;
end
Ysagsol;
Ysagsag;
'B(u0,v0) değeri'
Ysagsag(1,:)

```

2.5.3. Bezier Yüzeyleri için Bölme Algoritması

Parametrik olarak verilen bir Bezier yüzeyini, verilen bir (u_0, v_0) noktasında yüzeye ait $B(u_0, v)$ ve $B(u, v_0)$ koordinat eğrileri ile 4 ayrı yüzeye bölmek mümkündür. Elde edilen yeni yüzeylerin kontrol noktaları De Casteljau algoritması ile hesaplanır.

Örnek 13: Kontrol noktaları

$$P_{00} = (2, 3, 0) \quad P_{01} = (2, 6, 3) \quad P_{02} = (2, 10, 0)$$

$$P_{10} = (6, 2, 1) \quad P_{11} = (6, 6, 4) \quad P_{12} = (6, 9, 1)$$

$$P_{20} = (10, 2, 0) \quad P_{21} = (10, 6, 3) \quad P_{22} = (10, 10, 0)$$

olan bir $B(u, v)$ Bezier yüzeyine $(u_0, v_0) = (0.5, 0.25)$ noktasında bölme algoritmasını uygulayarak, $B(0.5, 0.25)$ değerini hesaplayalım. Bunun için, her bir i değerine karşın P_{ij} kontrol noktalarını De Casteljau algoritmasına uygulayalım. $v_0 = 0.25$ için algoritma,

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{ccc}
 & (2, 3, 0) & (2, 6, 3) & (2, 10, 0) \\
 i = 0 \text{ için, I} & \downarrow & & \\
 & (2, 3.75, 0.75) & (2, 7, 2.25) & \\
 & \downarrow & \nearrow & \\
 & (2, 4.5625, 1.125) & & \\
 & & \text{II} & \\
 & (6, 2, 1) & (6, 6, 4) & (6, 9, 1) \\
 i = 1 \text{ için,} & (6, 3, 1.75) & (6, 6.75, 3.25) & \\
 & (6, 3.9375, 2.125) & & \\
 & (10, 2, 0) & (10, 6, 3) & (10, 10, 0) \\
 i = 2 \text{ için,} & (10, 3, 0.75) & (10, 7, 2.25) & \\
 & (10, 4, 1.125) & &
 \end{array}
 \end{array}$$

biçimindedir. Böylece, mevcut kontrol noktalarından I ve II yönlerinde ayrı ayrı her bir i değeri için noktalar elde edilmiş olur. Bu elde ettiğimiz kontrol noktaları I ve II yüzeyinin kontrol noktalarıdır. Yani, I yüzeyi için yalnız I yönündeki noktalar alınırsa I yüzeyinin kontrol noktaları,

$$\begin{aligned}
i = 0 \text{ için} \quad & P_{00} = (2, 3, 0) \quad P_{01} = (2, 3.75, 0.75) \quad P_{02} = (2, 4.5625, 1.125) \\
i = 1 \text{ için} \quad & P_{10} = (6, 2, 1) \quad P_{11} = (6, 3, 1.75) \quad P_{12} = (6, 3.9375, 2.125) \\
i = 2 \text{ için} \quad & P_{20} = (10, 2, 0) \quad P_{21} = (10, 3, 0.75) \quad P_{22} = (10, 4, 1.125)
\end{aligned}$$

biçimindedir.

Benzer şekilde, II yüzeyi için her i değerine karşılık yalnız II yönündeki noktaları alınırsa, II yüzeyinin kontrol noktaları da

$$\begin{aligned}
i = 0 \text{ için} \quad & P_{00} = (2, 4.5625, 1.125) \quad P_{01} = (2, 7, 2.25) \quad P_{02} = (2, 10, 0) \\
i = 1 \text{ için} \quad & P_{10} = (6, 3.9375, 2.125) \quad P_{11} = (6, 6.75, 3.25) \quad P_{12} = (6, 9, 1) \\
i = 2 \text{ için} \quad & P_{20} = (10, 4, 1.125) \quad P_{21} = (10, 7, 2.25) \quad P_{22} = (10, 10, 0)
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir.

Böylece, $B(u, v)$ yüzeyi $v_0 = 0.25$ için $B(u, 0.25)$ koordinat eğrisi ile I ve II yüzeyleri olarak iki ayrı yüzeye ayrılmış olur. Şimdi, her iki yüzeyi de $u_0 = 0.5$ için $B(0.5, v)$ koordinat eğrisiyle ayıralım. Ancak burada işlemleri her bir j değeri için yapacağız.

I yüzeyi için kontrol noktalarına De Casteljau algoritması uygulanırsa,

$$\begin{array}{rcc}
& & (2, 3, 0) & (6, 2, 1) & (10, 2, 0) \\
j = 0 \text{ için, } & 1 & \downarrow & & \nearrow & 2 \\
& & (4, 2.5, 0.5) & (8, 2, 0.5) & & \\
& & \downarrow & & & \\
& & (6, 2.25, 0.5) & & & \\
& & & & & \\
j = 1 \text{ için} & & (2, 3.75, 0.75) & (6, 3, 1.75) & (10, 3, 0.75) \\
& & (4, 3.375, 1.25) & (8, 3, 1.25) & & \\
& & (6, 3.1875, 1.25) & & & \\
& & & & & \\
j = 2 \text{ için} & & (2, 4.5625, 1.125) & (6, 3.9375, 2.125) & (10, 4, 1.125) \\
& & (4, 4.25, 1.625) & (8, 3.96875, 1.625) & & \\
& & (6, 4.109375, 1.625) & & &
\end{array} \quad (95)$$

elde edilir. Böylece, I yüzeyi de 1 ve 2 yönünde iki ayrı Bezier yüzeyine ayrılmış olur. Bu yüzeyleri I_1 ve I_2 yüzeyleri diye adlandıırırsak, I_1 yüzeyinin kontrol noktaları

$$\begin{aligned}
j = 0 \text{ için} \quad & P_{00} = (2, 3, 0) \quad P_{01} = (4, 2.5, 0.5) \quad P_{02} = (6, 2.25, 0.5) \\
j = 1 \text{ için} \quad & P_{10} = (2, 3.75, 0.75) \quad P_{11} = (4, 3.375, 1.25) \quad P_{12} = (6, 3.1875, 1.25) \\
j = 2 \text{ için} \quad & P_{20} = (2, 4.5625, 1.125) \quad P_{21} = (4, 4.25, 1.625) \quad P_{22} = (6, 4.109375, 1.625)
\end{aligned}$$

biçimindedir. I_2 yüzeyi için yalnız 2 yönündeki noktaları alınırsa, I_2 yüzeyinin kontrol noktaları

$$\begin{array}{lll}
j = 0 \text{ için} & P_{00} = (6, 2.25, 0.5) & P_{01} = (8, 2, 0.5) & P_{02} = (10, 2, 0) \\
j = 1 \text{ için} & P_{10} = (6, 3.1875, 1.25) & P_{11} = (8, 3, 1.25) & P_{12} = (10, 3, 0.75) \\
j = 2 \text{ için} & P_{20} = (6, 4.109375, 1.625) & P_{21} = (8, 3.96875, 1.625) & P_{22} = (10, 4, 1.125)
\end{array}$$

biçiminde elde edilir.

Benzer şekilde, II yüzeyi için kontrol noktalarına da De Casteljau algoritması uygulandığında,

$$\begin{array}{lll}
j = 0 \text{ için, } 1 \downarrow & (2, 4.5625, 1.125) & (6, 3.9375, 2.125) & (10, 4, 1.125) \\
& (4, 4.25, 1.625) & (8, 3.96875, 1.625) & \\
& \downarrow & \nearrow & 2 \\
& (6, 4.109375, 1.625) & & \\
j = 1 \text{ için} & (2, 7, 2.25) & (6, 6.75, 3.25) & (10, 7, 2.25) \\
& (4, 6.875, 2.75) & (8, 6.875, 2.75) & \\
& (6, 6.875, 2.75) & & \\
j = 2 \text{ için} & (2, 10, 0) & (6, 9, 1) & (10, 10, 0) \\
& (4, 9.5, 0.5) & (8, 9.5, 0.5) & \\
& (6, 9.5, 0.5) & &
\end{array} \quad (96)$$

elde edilir. Böylece, II yüzeyi de 1 ve 2 yönünde iki ayrı Bezier yüzeyine ayrılmış olur. Bu yüzeyler de Π_1 ve Π_2 yüzeyleri diye adlandırılırsa, Π_1 yüzeyinin kontrol noktaları

$$\begin{array}{lll}
j = 0 \text{ için} & P_{00} = (2, 4.5625, 1.125) & P_{01} = (4, 4.25, 1.625) & P_{02} = (6, 4.109375, 1.625) \\
j = 1 \text{ için} & P_{10} = (2, 7, 2.25) & P_{11} = (4, 6.875, 2.75) & P_{12} = (6, 6.875, 2.75) \\
j = 2 \text{ için} & P_{20} = (2, 10, 0) & P_{21} = (4, 9.5, 0.5) & P_{22} = (6, 9.5, 0.5)
\end{array}$$

biçimindedir. Π_2 yüzeyi için yalnız 2 yönündeki noktalar alınır, Π_2 yüzeyinin kontrol noktaları

$$\begin{array}{lll}
j = 0 \text{ için} & P_{00} = (6, 4.109375, 1.625) & P_{01} = (8, 3.96875, 1.625) & P_{02} = (10, 4, 1.125) \\
j = 1 \text{ için} & P_{10} = (6, 6.875, 2.75) & P_{11} = (8, 6.875, 2.75) & P_{12} = (10, 7, 2.25) \\
j = 2 \text{ için} & P_{20} = (6, 9.5, 0.5) & P_{21} = (8, 9.5, 0.5) & P_{22} = (10, 10, 0)
\end{array}$$

biçiminde elde edilir.

Bu işlemlerden sonra görülüyor ki, I yüzeyinin kontrol noktalarına De Casteljau algoritması uygulandığında elde edilen $j = 2$ durumlu (95) algoritması ile, II yüzeyinin kontrol noktalarına De Casteljau algoritması uygulandığında elde edilen $j = 0$ durumlu (96) algoritması aynı noktaları içermektedir. Bu nedenle (95) ya da (96) algoritmasının

sonunda elde edilen (6,4.109375,1.625) noktası $B(0.5,0.25)$ değerini vermektedir.

Böylece,

$$B(0.5,0.25) = (6,4.109375,1.625)$$

dır.

2.5.4. MATLAB İle Bezier Yüzeyleri İçin Bölme Algoritması

Yüzeyler için De Casteljau algoritmasının MATLAB kodları aşağıdaki gibi verilebilir:

```
n=input('Yüzeyin u parametresine göre derecesini giriniz (n)'\n');
m=input('Yüzeyin v parametresine göre derecesini giriniz (m)'\n');
u0=input('u0 değerini giriniz'\n');
v0=input('v0 değerini giriniz'\n');
B0=input('Pij kontrol noktalarını, [P00;...;P0m;P10;...;P1m;...;Pn0;...;Pnm] biçiminde giriniz'\n');
p=((n+2).*(n+1))./2;
q=((m+2).*(m+1))./2;
for a=0:n
    D=B0(a.*(m+1)+1:(a+1).*(m+1),:);
    for j=1:m
        s=(j.*(m+1))-((j.*(j-1))./2);
        k=((j-1).*(m+1))-((j-1).*(j-2))./2;
        for i=1:m+1-j
            D(s+i,:)=D(k+i,:).*(1-v0)+D(k+i+1,:).*v0;
        end
        Bsol(j+1,:)=D(s+1,:);
        Bsag(m+1-j+1,:)=D(s,:);
    end
    Bsol(1,:)=D(1,:);
    Bsag(1,:)=D(q,:);
    Ysol((a.*(m+1)+1:(a+1).*(m+1)),:)=Bsol;
    Ysag((a.*(m+1)+1:(a+1).*(m+1)),:)=Bsag;
end
Ysol;
Ysag;
for a=0:m
    for b=0:n
        C(b+1,:)=Ysol(b.*(m+1)+1+a,:);
    end
    for j=1:n
        s=(j.*(n+1))-((j.*(j-1))./2);
        k=((j-1).*(n+1))-((j-1).*(j-2))./2;
        for i=1:n+1-j
            C(s+i,:)=C(k+i,:).*(1-u0)+C(k+i+1,:).*u0;
        end
        Ksol(j+1,:)=C(s+1,:);
        Ksag(n+1-j+1,:)=C(s,:);
    end
    Ksol(1,:)=C(1,:);
    Ksag(1,:)=C(p,:);
    Ysolsol((a.*(n+1)+1:(a+1).*(n+1)),:)=Ksol;
```

```

    Ysolsag((a.*(n+1)+1:(a+1).*(n+1)),:)=Ksag;
end
Ysolsol
Ysolsag

for a=0:m
    for b=0:n
        C(b+1,:)=Ysag(b.*(m+1)+1+a,:);
    end
    for j=1:n
        s=(j.*(n+1))-((j.*(j-1))./2);
        k=((j-1).*(n+1))-((j-1).*(j-2))./2;
        for i=1:n+1-j
            C(s+i,:)=C(k+i,:).*(1-u0)+C(k+i+1,:).*u0;
        end
        Ksol(j+1,:)=C(s+1,:);
        Ksag(n+1-j+1,:)=C(s,:);
    end
    Ksol(1,:)=C(1,:);
    Ksag(1,:)=C(p,:);
    Ysagsol(a.*(n+1)+1:(a+1).*(n+1),:)=Ksol;
    Ysagsag(a.*(n+1)+1:(a+1).*(n+1),:)=Ksag;
end
Ysagsol
Ysagsag

```

2.6. Bezier Eğri ve Yüzeylerinin Eğrilikleri

2.6.1. Bezier Eğrilerinin Eğrilikleri

Teorem 23: Kontrol noktaları b_0, b_1, \dots, b_n olan n . dereceden bir $B(t)$ Bezier eğrisinin $t = 0$ noktasında eğrilikleri

$$\kappa = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{b}{a^3}, \quad \tau = \frac{n-2}{n} \cdot \frac{c}{b^2}$$

dir. Burada, $a = \|b_1 - b_0\|$, $b = \|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)\|$ ve $c = \langle (b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1), (b_3 - b_2) \rangle$ dir.

İspat: Bezier eğrilerinde türevler ve son nokta teğet özellikleri kullanılarak,

$$\left\| \frac{d}{dt} B(t) \right\|_{t=0} = n \| (b_1 - b_0) \|$$

$$\left\| \frac{d^2}{dt^2} B(t) \right\|_{t=0} = n(n-1)(b_2 - 2b_1 + b_0) = n(n-1) \| (b_2 - b_1) - (b_1 - b_0) \|$$

$$\left\| \frac{d^3}{dt^3} B(t) \right\|_{t=0} = n(n-1)(n-2) \| (b_3 - 3b_2 + 3b_1 - b_0) \|$$

olduğu görülür.

$$\begin{aligned}\kappa|_{t=0} &= \frac{\left\| \frac{d}{dt} B(t) \times \frac{d^2}{dt^2} B(t) \right\|_{t=0}}{\left\| \frac{d}{dt} B(t) \right\|_{t=0}^3} = \frac{n^2(n-1) \|(b_1 - b_0) \times [(b_2 - b_1) - (b_1 - b_0)]\|}{n^3 \|(b_1 - b_0)\|^3} \\ &= \frac{(n-1) \|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)\|}{n \|(b_1 - b_0)\|^3} = \frac{(n-1)b}{na^3} \\ \tau|_{t=0} &= \frac{\left\langle \frac{d}{dt} B(t) \times \frac{d^2}{dt^2} B(t), \frac{d^3}{dt^3} B(t) \right\rangle_{t=0}}{\left\| \frac{d}{dt} B(t) \times \frac{d^2}{dt^2} B(t) \right\|_{t=0}^2} \\ &= \frac{(n-2) \langle (b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1), (b_3 - 3b_2 + 3b_1 - b_0) \rangle}{n \|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)\|^2} \\ &= \frac{(n-2) \langle (b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1), (b_3 - b_2) \rangle}{n \|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)\|^2} = \frac{(n-2)c}{nb^2}\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 24: Kontrol noktaları b_0, b_1, \dots, b_n ve ağırlıkları w_0, w_1, \dots, w_n olan n . dereceden bir $B(t)$ rasyonel Bezier eğrisinin $t = 0$ noktasında eğrilikleri

$$\kappa = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{w_0 w_2}{(w_1)^2} \cdot \frac{b}{a^3}, \quad \tau = \frac{n-2}{n} \cdot \frac{w_0 w_3}{w_1 w_2} \cdot \frac{c}{b^2}$$

dir. Burada, $a = \|b_1 - b_0\|$, $b = \|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)\|$ ve $c = \langle (b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1), (b_3 - b_2) \rangle$ dir.[20, 253.]

Bir $B(t)$ Bezier eğrisinin keyfi bir $t_0 \in [0,1]$ noktasındaki eğriliklerini sayısal olarak elde etmek için şu yol takip edilir: Bezier eğrisi, $t=t_0$ noktasında De Casteljau algoritması yardımıyla B_{sol} ve $B_{sağ}$ olarak ikiye ayrılır. $B_{sağ}$ eğrisi, tekrar $[0,1]$ aralığında parametrelendirir. Bu parametrelmeden sonra, $t=t_0$ noktası, $t(u)|_{u=0} = t_0$ biçiminde bir nokta olacaktır. Böylece, $B_{sağ}$ Bezier eğrisinin $u = 0$ noktasındaki eğrilikleri, $B(t)$ eğrisinin $t = t_0$ noktasındaki eğriliklerini vermektedir.

2.6.2. MATLAB ile Bezier Eğrilerinin Eğrilikleri

MATLAB ile bir Bezier eğrisinin verilen bir t_0 noktasındaki **eğriliğinin** hesaplanması

için aşağıdaki algoritma verilebilir:

```
n=input('kontrol noktalarının sayısını giriniz'\n');
B0=input('kontrol noktalarını giriniz'\n');
t0=input('t0 değerini giriniz'\n');
if t0==0;
    x=B0(2,:)-B0(1,:);
    y=B0(3,:)-B0(2,:);
    f=cross(x,y);
    b=norm(f);
    a=norm(x);
    K=((n-2)./(n-1)).*b./(a.^3);
    K
else
    P=(n.*(n+1))./2;
    for i=1:n
        B(i,:)=B0(i,:);
    end
    for j=1:n-1
        s=(j.*n)-((j.*(j-1))./2);
        k=((j-1).*n)-((j-1).(j-2))./2;
        for i=1:n-j
            B(s+i,:)=B(k+i,).* (1-t0)+B(k+i+1,).*t0;
        end
        Bsol(j+1,:)=B(s+1,:);
        Bsag(n-j+1,:)=B(s,:);
    end
    Bsol(1,:)=B(1,:);
    Bsag(1,:)=B(P,:);
    Bsol;
    Bsag;
    x=Bsag(2,:)-Bsag(1,:);
    y=Bsag(3,:)-Bsag(2,:);
    f=cross(x,y);
    b=norm(f);
    a=norm(x);
    K=((n-2)./(n-1)).*b./(a.^3);
    K
end
```

Bir Bezier eğrisinin **torsiyonunun** hesaplanması için ise aşağıdaki algoritma verilebilir:

```
n=input('kontrol noktalarının sayısını giriniz'\n');
B0=input('kontrol noktalarını giriniz'\n');
t0=input('t0 değerini giriniz'\n');
if t0==0;
    x=B0(2,:)-B0(1,:);
    y=B0(3,:)-B0(2,:);
    z=B0(4,:)-B0(3,:);
    f=cross(x,y);
    b=norm(f);
```

```

a=norm(x);
c=f*z';
T=((n-3)/(n-1)).*c/(b.^2);
T
else
    P=(n.*(n+1))./2;
    for i=1:n
        B(i,:)=B0(i,:);
    end
    for j=1:n-1
        s=(j.*n)-((j.*(j-1))./2);
        k=((j-1).*n)-((j-1).(j-2))./2;
        for i=1:n-j
            B(s+i,:)=B(k+i,:).*(1-t0)+B(k+i+1,:).*t0;
        end
        Bsol(j+1,:)=B(s+1,:);
        Bsag(n-j+1,:)=B(s,:);
    end
    Bsol(1,:)=B(1,:);
    Bsag(1,:)=B(P,:);
    Bsol;
    Bsag;
    x=Bsag(2,:)-Bsag(1,:);
    y=Bsag(3,:)-Bsag(2,:);
    z=Bsag(4,:)-Bsag(3,:);
    f=cross(x,y);
    b=norm(f);
    a=norm(x);
    c=f*z';
    T=((n-3)/(n-1)).*c/(b.^2);
    T
end

```

2.6.3. Bezier Yüzeylerinin Eğrilikleri

Teorem 25: $B(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)$ biçiminde verilen bir Bezier yüzeyi için

son nokta interpolasyon ve son nokta teğet özellikleri aşağıdaki biçimde verilebilir:

$$1- B(u, v)|_{(u,v)=(0,0)} = P_{00} \quad \text{ve} \quad B(u, v)|_{(u,v)=(1,1)} = P_{nm} \quad \text{dir. (son nokta interpolasyon öz.)}$$

$$2- B_u(u, v)|_{(u,v)=(0,0)} = n(P_{10} - P_{00}) \quad \text{ve} \quad B_u(u, v)|_{(u,v)=(1,1)} = n(P_{nm} - P_{(n-1)m})$$

$$B_v(u, v)|_{(u,v)=(0,0)} = m(P_{01} - P_{00}) \quad \text{ve} \quad B_v(u, v)|_{(u,v)=(1,1)} = m(P_{nm} - P_{n(m-1)}) \quad \text{dir.}$$

(son nokta teğet öz.)

İspat: 1- Verilen Bezier yüzeyinin (0,0) noktasında sahip olduğu değeri,

$$B(u, v)|_{(u,v)=(0,0)} = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^m P_{ij} B_j^m(0) \right) B_i^n(0)$$

biçiminde yazılabilir. Bezier eğrilerinin son nokta interpolasyon özelliğinden (14) biliyoruz ki, j indisine göre yazılan Bezier eğrisinin $v = 0$ noktasındaki değeri, $j = 0$ olan kontrol noktasına eşittir. Buradan,

$$B(u, v)|_{(u,v)=(0,0)} = \sum_{i=0}^n (P_{i0}) B_i^n(0)$$

yazılabilir. Yine (14) ten i indisine göre verilmiş bir Bezier eğrisinin $u = 0$ daki değeri $i = 0$ indisli kontrol noktasına eşit olduğundan

$$B(u, v)|_{(u,v)=(0,0)} = P_{00}$$

dır. Benzer şekilde

$$B(u, v)|_{(u,v)=(1,1)} = P_{nm}$$

olduğu görülebilir.

2- (57) biçiminde verilen Bezier yüzeyi için u ve v parametrelerine göre kısmi türevler alınrsa, bu kısmi türevlerin $(0,0)$ noktasında sahip oldukları değerleri bulunabilir. u parametresine göre kısmi türev için,

$$\begin{aligned} B_u(u, v)|_{(u,v)=(0,0)} &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^m n (P_{(i+1)j} - P_{ij}) B_j^m(0) \right) B_i^{n-1}(0) \\ &= n \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^m P_{(i+1)j} B_j^m(0) - \sum_{j=0}^m P_{ij} B_j^m(0) \right) B_i^{n-1}(0) \\ &= n \sum_{i=0}^{n-1} (P_{(i+1)0} - P_{i0}) B_i^{n-1}(0) \\ &= n(P_{10} - P_{00}) \end{aligned}$$

bulunur. Paralel şekilde,

$$\begin{aligned} B_u(u, v)|_{(u,v)=(1,1)} &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^m n (P_{(i+1)j} - P_{ij}) B_j^m(1) \right) B_i^{n-1}(1) \\ &= n \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^m P_{(i+1)j} B_j^m(1) - \sum_{j=0}^m P_{ij} B_j^m(1) \right) B_i^{n-1}(1) \\ &= n \sum_{i=0}^{n-1} (P_{(i+1)m} - P_{im}) B_i^{n-1}(0) \\ &= n(P_{nm} - P_{(n-1)m}) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Benzer şekilde v parametresine göre kısmi türev alındığında diğer ifadelerin de doğru olduğu kolayca görülür. ♦

Teorem 26: Parametrik ifadesi $B(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)$ biçiminde verilen bir

Bezier yüzeyine ait ikinci türevler,

$$1- B_{uu}(u, v)|_{(u,v)=(0,0)} = n(n-1)(P_{20} - 2P_{10} + P_{00})$$

$$2- B_{uv}(u, v)|_{(u,v)=(0,0)} = nm(P_{11} - P_{01} - P_{10} + P_{00})$$

$$3- B_{vv}(u, v)|_{(u,v)=(0,0)} = m(m-1)(P_{02} - 2P_{01} + P_{00})$$

dır.

İspat: 1- $B_{uu}(u, v) = \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^m [n(n-1)(P_{(i+2)j} - 2P_{(i+1)j} + P_{ij})] B_i^{n-2}(u) B_j^m(v)$ dir. O halde,

$$\begin{aligned} B_{uu}(u, v)|_{(u,v)=(0,0)} &= \sum_{i=0}^{n-2} \left(\sum_{j=0}^m [n(n-1)(P_{(i+2)j} - 2P_{(i+1)j} + P_{ij})] B_j^m(0) \right) B_i^{n-2}(0) \\ &= n(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} (P_{(i+2)0} - 2P_{(i+1)0} + P_{i0}) B_i^{n-2}(0) \\ &= n(n-1) \left(\sum_{i=0}^{n-2} P_{(i+2)0} B_i^{n-2}(0) - 2 \sum_{i=0}^{n-2} P_{(i+1)0} B_i^{n-2}(0) + \sum_{i=0}^{n-2} P_{i0} B_i^{n-2}(0) \right) \\ &= n(n-1)(P_{20} - 2P_{10} + P_{00}) \end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} 2- B_{uv}(u, v)|_{(u,v)=(0,0)} &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{m-1} [nm(P_{(i+1)(j+1)} - P_{(i+1)j} - P_{i(j+1)} + P_{ij})] B_j^{m-1}(0) \right) B_i^{n-1}(0) \\ &= nm \sum_{i=0}^{n-1} (P_{(i+1)1} - P_{(i+1)0} - P_{i1} + P_{i0}) B_i^{n-1}(0) \\ &= nm \left(\sum_{i=0}^{n-1} P_{(i+1)1} B_i^{n-1}(0) - 2 \sum_{i=0}^{n-1} P_{(i+1)0} B_i^{n-1}(0) - 2 \sum_{i=0}^{n-1} P_{i1} B_i^{n-1}(0) + \sum_{i=0}^{n-1} P_{i0} B_i^{n-1}(0) \right) \\ &= nm(P_{11} - P_{10} - P_{01} + P_{00}) \end{aligned}$$

elde edilir.

3- $B_{vv}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-2} [m(m-1)(P_{i(j+2)} - 2P_{i(j+1)} + P_{ij})] B_i^n(u) B_j^{m-2}(v)$ dir. O halde,

$$\begin{aligned} B_{vv}(u, v)|_{(u,v)=(0,0)} &= \sum_{i=0}^{n-2} \left(\sum_{j=0}^m [n(n-1)(P_{(i+2)j} - 2P_{(i+1)j} + P_{ij})] B_j^m(0) \right) B_i^{n-2}(0) \\ &= m(m-1) \sum_{i=0}^n (P_{i2} - 2P_{i1} + P_{i0}) B_i^n(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= m(m-1) \left(\sum_{i=0}^n P_{i2} B_i^n(0) - 2 \sum_{i=0}^n P_{i1} B_i^n(0) + \sum_{i=0}^n P_{i0} B_i^n(0) \right) \\
&= m(m-1) (P_{02} - 2P_{01} + P_{00})
\end{aligned}$$

bulunur. ♦

Teorem 27: $B(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)$ biçiminde verilen bir Bezier yüzeyinin

birinci kuadratik form ifadesindeki E, F, G katsayılarının, $(u, v) = (0, 0)$ noktasındaki değerlerinin kontrol noktaları cinsinden ifadeleri,

$$1- E = \langle B_u(u, v), B_u(u, v) \rangle \Big|_{(u,v)=(0,0)} = n^2 \|P_{10} - P_{00}\|^2$$

$$2- F = \langle B_u(u, v), B_v(u, v) \rangle \Big|_{(u,v)=(0,0)} = nm \langle P_{10} - P_{00}, P_{01} - P_{00} \rangle$$

$$3- G = \langle B_v(u, v), B_v(u, v) \rangle \Big|_{(u,v)=(0,0)} = m^2 \|P_{01} - P_{00}\|^2$$

dir.

$$\begin{aligned}
\text{İspat: } 1- E &= \langle B_u(u, v), B_u(u, v) \rangle \Big|_{(u,v)=(0,0)} = \langle n(P_{10} - P_{00}), n(P_{10} - P_{00}) \rangle \\
&= n^2 \langle (P_{10} - P_{00}), (P_{10} - P_{00}) \rangle \\
&= n^2 \|P_{10} - P_{00}\|^2
\end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}
2- F &= \langle B_u(u, v), B_v(u, v) \rangle \Big|_{(u,v)=(0,0)} = \langle n(P_{10} - P_{00}), m(P_{01} - P_{00}) \rangle \\
&= nm \langle (P_{10} - P_{00}), (P_{01} - P_{00}) \rangle
\end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}
3- G &= \langle B_v(u, v), B_v(u, v) \rangle \Big|_{(u,v)=(0,0)} = \langle m(P_{01} - P_{00}), m(P_{01} - P_{00}) \rangle \\
&= m^2 \|P_{01} - P_{00}\|^2
\end{aligned}$$

olduğu rahatça görülebilir. ♦

Sonuç 6: Kontrol noktaları P_{ij} noktaları olan ve $B(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)$

biçiminde verilen bir Bezier yüzeyinin Birinci kuadratik formunun $(u_0, v_0) = (0, 0)$ noktasındaki ifadesi

$$ds^2 = n^2 \|P_{10} - P_{00}\|^2 du^2 + 2nm \langle P_{10} - P_{00}, P_{01} - P_{00} \rangle dudv + m^2 \|P_{01} - P_{00}\|^2 dv^2$$

biçimindedir.

İspat: Açıktır. ♦

Sonuç 7: Kontrol noktaları P_{ij} noktaları olan ve $B(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)$

biçiminde verilen bir Bezier yüzeyinin Birinci kuadratik formunun verilen keyfi bir (u_0, v_0) noktasındaki ifadesi

$$ds^2 = n^2 \|P_{10} - P_{00}\|^2 du^2 + 2nm \langle P_{10} - P_{00}, P_{01} - P_{00} \rangle dudv + m^2 \|P_{01} - P_{00}\|^2 dv^2$$

biçimindedir. Burada P_{00}, P_{01} ve P_{10} noktaları, Bezier yüzeyinin (u_0, v_0) noktasında bölme algoritması ile elde edilen $Y_{sağsağ}$ Bezier yüzeyinin kontrol noktalarıdır.

İspat: Açıktır. ♦

Teorem 28: Parametrik ifadesi $B(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)$ biçiminde verilen bir

Bezier yüzeyinin normal vektörü ile ikinci kuadratik formun katsayıları olan e, f, g fonksiyonlarının $(u, v) = (0, 0)$ noktasındaki değerlerinin, kontrol noktaları cinsinden ifadeleri aşağıdaki gibidir:

$$1- N(u, v) \Big|_{(u,v)=(0,0)} = \frac{((P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00}))}{\|((P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00}))\|}$$

$$2- e = \langle B_{uu}(u, v), N(u, v) \rangle \Big|_{(u,v)=(0,0)} = \frac{n(n-1)}{\|c_4 \times c_5\|} \langle c_1, (c_4 \times c_5) \rangle$$

$$3- f = \langle B_{uv}(u, v), N(u, v) \rangle \Big|_{(u,v)=(0,0)} = \frac{nm}{\|c_4 \times c_5\|} \langle c_3, c_4 \times c_5 \rangle$$

$$4- g = \langle B_{vv}(u, v), N(u, v) \rangle \Big|_{(u,v)=(0,0)} = \frac{m(m-1)}{\|c_4 \times c_5\|} \langle c_2, (c_4 \times c_5) \rangle$$

dir. Burada $c_1 = P_{20} - P_{10}$, $c_2 = P_{02} - P_{01}$, $c_3 = P_{11} - P_{10}$, $c_4 = P_{10} - P_{00}$, $c_5 = P_{01} - P_{00}$ biçimindedir.

$$\begin{aligned} \text{İspat: } 1- N(u, v) \Big|_{(u,v)=(0,0)} &= \frac{(n(P_{10} - P_{00}) \times m(P_{01} - P_{00}))}{\|(n(P_{10} - P_{00}) \times m(P_{01} - P_{00}))\|} \\ &= \frac{nm((P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00}))}{\|nm((P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00}))\|} \\ &= \frac{((P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00}))}{\|((P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00}))\|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2- \quad e &= \langle B_{uu}(u, v), N(u, v) \rangle_{(u,v)=(0,0)} = \left\langle n(n-1)(P_{20} - 2P_{10} + P_{00}), \frac{((P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00}))}{\|((P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00}))\|} \right\rangle \\
&= \frac{n(n-1)}{\|((P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00}))\|} \langle ((P_{20} - P_{10}) - (P_{10} - P_{00})), ((P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00})) \rangle \\
&= \frac{n(n-1)}{\|((P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00}))\|} \langle (P_{20} - P_{10}), ((P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00})) \rangle \\
&= \frac{n(n-1)}{\|c_4 \times c_5\|} \langle c_1, (c_4 \times c_5) \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3- \quad f &= \langle B_{uv}(u, v), N(u, v) \rangle_{(u,v)=(0,0)} = \left\langle nm(P_{11} - P_{10} - P_{01} + P_{00}), \frac{((P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00}))}{\|((P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00}))\|} \right\rangle \\
&= \frac{nm}{\|((P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00}))\|} \langle ((P_{11} - P_{10}) - (P_{01} - P_{00})), ((P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00})) \rangle \\
&= \frac{nm}{\|((P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00}))\|} \langle (P_{11} - P_{10}), ((P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00})) \rangle \\
&= \frac{nm}{\|c_4 \times c_5\|} \langle c_3, c_4 \times c_5 \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4- \quad g &= \langle B_{vv}(u, v), N(u, v) \rangle_{(u,v)=(0,0)} = \left\langle m(m-1)(P_{02} - 2P_{01} + P_{00}), \frac{((P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00}))}{\|((P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00}))\|} \right\rangle \\
&= \frac{m(m-1)}{\|((P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00}))\|} \langle ((P_{02} - P_{01}) - (P_{01} - P_{00})), ((P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00})) \rangle \\
&= \frac{m(m-1)}{\|((P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00}))\|} \langle (P_{02} - P_{01}), ((P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00})) \rangle \\
&= \frac{m(m-1)}{\|c_4 \times c_5\|} \langle c_2, (c_4 \times c_5) \rangle
\end{aligned}$$

dir. ♦

Sonuç 8: Kontrol noktaları P_{ij} noktaları olan ve $B(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)$

biçiminde verilen bir Bezier yüzeyinin İkinci kuadratik formunun $(u_0, v_0) = (0, 0)$ noktasındaki ifadesi $c_1 = P_{20} - P_{10}$, $c_2 = P_{02} - P_{01}$, $c_3 = P_{11} - P_{10}$, $c_4 = P_{10} - P_{00}$, $c_5 = P_{01} - P_{00}$ olmak üzere,

$$\langle C^*(t), N \rangle = \frac{n(n-1)}{\|c_4 \times c_5\|} \langle c_1, (c_4 \times c_5) \rangle du^2 + 2 \frac{nm}{\|c_4 \times c_5\|} \langle c_3, c_4 \times c_5 \rangle dudv + \frac{m(m-1)}{\|c_4 \times c_5\|} \langle c_2, (c_4 \times c_5) \rangle dv^2$$

biçimindedir.

İspat: Açıktır. ♦

Teorem 29: $B(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)$ biçiminde verilen bir Bezier yüzeyinin

Gauss ve ortalama eğrilikleri kontrol noktaları cinsinden, $c_1 = P_{20} - P_{10}$, $c_2 = P_{02} - P_{01}$,

$c_3 = P_{11} - P_{10}$, $c_4 = P_{10} - P_{00}$, $c_5 = P_{01} - P_{00}$ olmak üzere aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$K = \frac{(m-1)(n-1)}{mn} \frac{\langle c_1, (c_4 \times c_5) \rangle \langle c_2, (c_4 \times c_5) \rangle - \langle c_3, c_4 \times c_5 \rangle^2}{\|c_4 \times c_5\|^2 (\|c_4\|^2 \|c_5\|^2 - \langle c_4, c_5 \rangle^2)}$$

$$H = \frac{1}{\|c_4 \times c_5\|} \frac{\left(\frac{\|c_5\|^2 (n-1)}{n} \langle c_1, (c_4 \times c_5) \rangle - 2 \langle c_4, c_5 \rangle \langle c_3, c_4 \times c_5 \rangle + \frac{(m-1) \|c_4\|^2}{m} \langle c_2, (c_4 \times c_5) \rangle \right)}{(\|c_4\|^2 \|c_5\|^2 - \langle c_4, c_5 \rangle^2)}$$

dir.

İspat:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\frac{n(n-1)}{\|c_4 \times c_5\|} \langle c_1, (c_4 \times c_5) \rangle \frac{m(m-1)}{\|c_4 \times c_5\|} \langle c_2, (c_4 \times c_5) \rangle - \frac{n^2 m^2}{\|c_4 \times c_5\|^2} \langle c_3, c_4 \times c_5 \rangle^2}{n^2 \|P_{10} - P_{00}\|^2 m^2 \|P_{01} - P_{00}\|^2 - n^2 m^2 \langle (P_{10} - P_{00}), (P_{01} - P_{00}) \rangle^2}$$

$$= \frac{nm}{\|c_4 \times c_5\|^2} \frac{\left((m-1)(n-1) \langle c_1, (c_4 \times c_5) \rangle \langle c_2, (c_4 \times c_5) \rangle - nm \langle c_3, c_4 \times c_5 \rangle^2 \right)}{n^2 m^2 (\|c_4\|^2 \|c_5\|^2 - \langle c_4, c_5 \rangle^2)}$$

$$= \frac{(m-1)(n-1)}{mn} \frac{\langle c_1, (c_4 \times c_5) \rangle \langle c_2, (c_4 \times c_5) \rangle - \langle c_3, c_4 \times c_5 \rangle^2}{\|c_4 \times c_5\|^2 (\|c_4\|^2 \|c_5\|^2 - \langle c_4, c_5 \rangle^2)}$$

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} \right)$$

$$= \frac{\frac{nm^2 \|c_5\|^2 (n-1)}{\|c_4 \times c_5\|} \langle c_1, (c_4 \times c_5) \rangle - 2 \frac{n^2 m^2 \langle c_4, c_5 \rangle}{\|c_4 \times c_5\|} \langle c_3, c_4 \times c_5 \rangle + \frac{mn^2 (m-1) \|c_4\|^2}{\|c_4 \times c_5\|} \langle c_2, (c_4 \times c_5) \rangle}{n^2 m^2 (\|c_4\|^2 \|c_5\|^2 - \langle c_4, c_5 \rangle^2)}$$

$$= \frac{\frac{nm}{\|c_4 \times c_5\|} \left(\|c_5\|^2 m(n-1) \langle c_1, (c_4 \times c_5) \rangle - 2nm \langle c_4, c_5 \rangle \langle c_3, c_4 \times c_5 \rangle + n(m-1) \|c_4\|^2 \langle c_2, (c_4 \times c_5) \rangle \right)}{n^2 m^2 \left(\|c_4\|^2 \|c_5\|^2 - \langle c_4, c_5 \rangle \right)}$$

$$= \frac{1}{\|c_4 \times c_5\|} \left(\frac{\|c_5\|^2 (n-1)}{n} \langle c_1, (c_4 \times c_5) \rangle - 2 \langle c_4, c_5 \rangle \langle c_3, c_4 \times c_5 \rangle + \frac{(m-1) \|c_4\|^2}{m} \langle c_2, (c_4 \times c_5) \rangle \right) \frac{1}{\left(\|c_4\|^2 \|c_5\|^2 - \langle c_4, c_5 \rangle \right)}$$

dir. ♦

Böylece, $(u,v) = (0,0)$ noktasındaki eğrilikler verilmiş oldu. Bir Bezier yüzeyinin keyfi bir (u,v) noktasındaki eğriliklerini elde etmek için, (u_0,v_0) noktasında Bezier yüzeyine bölme algoritması uygulanır. $B(u_0,v_0)$ değeri ve alt yüzeyler elde edilir. Elde edilen alt yüzeyler, $B(u_0,v_0)$ değeri $(0,0)$ noktasına karşılık gelecek şekilde tekrar parametrelendir ve yeni yüzeylerin $(0,0)$ noktasındaki eğrilikleri başlangıçtaki $B(u,v)$ Bezier yüzeyinin eğriliklerini verir.

2.6.4. MATLAB ile Bezier Yüzeylerinin Eğrilikleri

MATLAB ile bir Bezier yüzeyinin verilen (u_0,v_0) noktasındaki Gauss eğriliği için aşağıdaki gibi bir algoritma verilebilir:

```
n=input('Yüzeyin u parametresine göre derecesini giriniz (n)'\n');
m=input('Yüzeyin v parametresine göre derecesini giriniz (m)'\n');
u0=input('u0 değerini giriniz'\n');
v0=input('v0 değerini giriniz'\n');
B0=input('Pij kontrol noktalarını, [P00;...;P0m;P10;...;P1m;...;Pn0;...;Pnm] biçiminde giriniz'\n');
if u0==0 & v0==0
    c1=B0(2.*(m+1)+1,:)-B0(m+2,:);
    c2=B0(3,:)-B0(2,:);
    c3=B0(m+3,:)-B0(m+2,:);
    c4=B0(m+2,:)-B0(1,:);
    c5=B0(2,:)-B0(1,:);
    x=cross(c4,c5);
    y=norm(x);
    K=(((m-1).*(n-1))./(m.*n)).*((c1*x').*(c2*x')-(c3*x').^2))./((norm(x).^2).*((norm(c4).^2).*(norm(c5).^2)-(c4*c5').^2));
    'Yüzeyin (u0,v0) noktasındaki gauss eğriliği'
    K
else
    p=((n+2).*(n+1))./2;
    q=((m+2).*(m+1))./2;
```

```

for a=0:n
D=B0(a.*(m+1)+1:(a+1).*(m+1),:);
  for j=1:m
    s=(j.*(m+1))-((j.*(j-1))./2);
    k=((j-1).*(m+1))-((j-1).*(j-2))./2;
    for i=1:m+1-j
      D(s+i,:)=D(k+i,:).*(1-v0)+D(k+i+1,:).*v0;
    end
    Bsol(j+1,:)=D(s+1,:);
    Bsag(m+1-j+1,:)=D(s,:);
  end
end
Bsol(1,:)=D(1,:);
Bsag(1,:)=D(q,:);
Ysol((a.*(m+1)+1:(a+1).*(m+1)),:)=Bsol;
Ysag((a.*(m+1)+1:(a+1).*(m+1)),:)=Bsag;
end
Ysol;
Ysag;
for a=0:m
  for b=0:n
    C(b+1,:)=Ysol(b.*(m+1)+1+a,:);
  end
  for j=1:n
    s=(j.*(n+1))-((j.*(j-1))./2);
    k=((j-1).*(n+1))-((j-1).*(j-2))./2;
    for i=1:n+1-j
      C(s+i,:)=C(k+i,:).*(1-u0)+C(k+i+1,:).*u0;
    end
    Ksol(j+1,:)=C(s+1,:);
    Ksag(n+1-j+1,:)=C(s,:);
  end
  end
  Ksol(1,:)=C(1,:);
  Ksag(1,:)=C(p,:);
  Ysolsol((a.*(n+1)+1:(a+1).*(n+1)),:)=Ksol;
  Ysolsag((a.*(n+1)+1:(a+1).*(n+1)),:)=Ksag;
end
Ysolsol;
Ysolsag;

for a=0:m
  for b=0:n
    C(b+1,:)=Ysag(b.*(m+1)+1+a,:);
  end
  for j=1:n
    s=(j.*(n+1))-((j.*(j-1))./2);
    k=((j-1).*(n+1))-((j-1).*(j-2))./2;
    for i=1:n+1-j
      C(s+i,:)=C(k+i,:).*(1-u0)+C(k+i+1,:).*u0;
    end
    Ksol(j+1,:)=C(s+1,:);
    Ksag(n+1-j+1,:)=C(s,:);
  end
  end
  Ksol(1,:)=C(1,:);
  Ksag(1,:)=C(p,:);
  Ysagsol(a.*(n+1)+1:(a+1).*(n+1),:)=Ksol;
  Ysagsag(a.*(n+1)+1:(a+1).*(n+1),:)=Ksag;
end
Ysagsol;
Ysagsag;
c1=Ysagsag(2.*(m+1)+1,:)-Ysagsag(m+2,:);

```

```

c2=Ysagsag(3,:)-Ysagsag(2,:);
c3=Ysagsag(m+3,:)-Ysagsag(m+2,:);
c4=Ysagsag(m+2,:)-Ysagsag(1,:);
c5=Ysagsag(2,:)-Ysagsag(1,:);
x=cross(c4,c5);
y=norm(x);
K=(((m-1).*(n-1))./(m.*n)).*((c1*x').*(c2*x')-
(c3*x').^2))./(norm(x).^2).*(((norm(c4)).^2).*(norm(c5)).^2)-
(c4*c5').^2);
'Yüzeyin (u0,v0) noktasındaki gauss eğriliği'
K
end

```

Benzer şekilde, MATLAB ile bir Bezier yüzeyinin verilen (u_0, v_0) noktasındaki ortalama eğriliği için de aşağıdaki gibi bir algoritma verilebilir:

```

n=input('Yüzeyin u parametresine göre derecesini giriniz (n)'\n');
m=input('Yüzeyin v parametresine göre derecesini giriniz (m)'\n');
u0=input('u0 değerini giriniz'\n');
v0=input('v0 değerini giriniz'\n');
B0=input('Pij kontrol
noktalarını, [P00;...;P0m;P10;...;P1m;...;Pn0;...;Pnm] biçiminde
giriniz'\n');
if u0==0 & v0==0
    c1=B0(2.*(m+1)+1,:)-B0(m+2,:);
    c2=B0(3,:)-B0(2,:);
    c3=B0(m+3,:)-B0(m+2,:);
    c4=B0(m+2,:)-B0(1,:);
    c5=B0(2,:)-B0(1,:);
    x=cross(c4,c5);
    y=norm(x);
    e=norm(x).*((norm(c4).*norm(c5)).^2-(c4*c5').^2);
    we=((norm(c5)).^2).*((n-1)./n).*(c1*x');
    wc=((m-1)./m).*(c2*x').*(norm(c4)).^2;
    H=(we-2.*(c4*c5').*(c3*x')+wc)./e;
    'Yüzeyin (u0,v0) noktasındaki ortalama eğriliği'
    H
else
    p=((n+2).*(n+1))./2;
    q=((m+2).*(m+1))./2;
    for a=0:n
        D=B0(a.*(m+1)+1:(a+1).*(m+1),:);
        for j=1:m
            s=(j.*(m+1))-((j.*(j-1))./2);
            k=((j-1).*(m+1))-((j-1).*(j-2))./2;
            for i=1:m+1-j
                D(s+i,:)=D(k+i,:).*(1-v0)+D(k+i+1,:).*v0;
            end
            Bsol(j+1,:)=D(s+1,:);
            Bsag(m+1-j+1,:)=D(s,:);
        end
        Bsol(1,:)=D(1,:);
        Bsag(1,:)=D(q,:);
        Ysol((a.*(m+1)+1:(a+1).*(m+1)),:)=Bsol;
        Ysag((a.*(m+1)+1:(a+1).*(m+1)),:)=Bsag;
    end
    Ysol;
    Ysag;
end

```

```

for a=0:m
  for b=0:n
    C(b+1,:)=Ysol(b.*(m+1)+1+a,:);
  end
  for j=1:n
    s=(j.*(n+1))-((j.*(j-1))./2);
    k=((j-1).*(n+1))-((j-1).*(j-2))./2;
    for i=1:n+1-j
      C(s+i,:)=C(k+i,:).*(1-u0)+C(k+i+1,:).*u0;
    end
    Ksol(j+1,:)=C(s+1,:);
    Ksag(n+1-j+1,:)=C(s,:);
  end
  Ksol(1,:)=C(1,:);
  Ksag(1,:)=C(p,:);
  Ysolsol((a.*(n+1)+1:(a+1).*(n+1)),:)=Ksol;
  Ysolsag((a.*(n+1)+1:(a+1).*(n+1)),:)=Ksag;
end
Ysolsol;
Ysolsag;

for a=0:m
  for b=0:n
    C(b+1,:)=Ysag(b.*(m+1)+1+a,:);
  end
  for j=1:n
    s=(j.*(n+1))-((j.*(j-1))./2);
    k=((j-1).*(n+1))-((j-1).*(j-2))./2;
    for i=1:n+1-j
      C(s+i,:)=C(k+i,:).*(1-u0)+C(k+i+1,:).*u0;
    end
    Ksol(j+1,:)=C(s+1,:);
    Ksag(n+1-j+1,:)=C(s,:);
  end
  Ksol(1,:)=C(1,:);
  Ksag(1,:)=C(p,:);
  Ysagsol(a.*(n+1)+1:(a+1).*(n+1),:)=Ksol;
  Ysagsag(a.*(n+1)+1:(a+1).*(n+1),:)=Ksag;
end
Ysagsol;
Ysagsag;
c1=Ysagsag(2.*(m+1)+1,:)-Ysagsag(m+2,:);
c2=Ysagsag(3,:)-Ysagsag(2,:);
c3=Ysagsag(m+3,:)-Ysagsag(m+2,:);
c4=Ysagsag(m+2,:)-Ysagsag(1,:);
c5=Ysagsag(2,:)-Ysagsag(1,:);
x=cross(c4,c5);
y=norm(x);
e=norm(x).*((norm(c4).*norm(c5)).^2-(c4*c5').^2);
we=((norm(c5)).^2).*(n-1)./n.*(c1*x');
wc=((m-1)./m).*(c2*x').*(norm(c4)).^2;
H=(we-2.*(c4*c5').*(c3*x')+wc)./e;
'Yüzeyin (u0,v0) noktasındaki ortalama eğriliği'
H
end

```

3. SONUÇLAR

Tezde elde edilen önemli sonuçlar şunlardır:

1. Bernstein polinomlarının lineer bağımsızlığından dolayı Bezier eğrilerinin kontrol noktalarıyla tamamen ve tek türlü olarak ifade edilebileceği gösterilmiştir. Bu konuda Teorem 15,16,17 ve 18 ile Sonuç 3 verilmiştir.

2. Sonuç 4 ile Parçalı Bezier eğrilerinin ancak (86) şartı sağlandığı takdirde C^p sınıfından olduğu verilmiştir.

3. Bezier ve rasyonel Bezier eğrileri ile Bezier yüzeyleri için sayısal algoritmaların MATLAB programında kodları sunulmuştur.

4. Teorem 23 ve Teorem 24 te Bezier ve rasyonel Bezier eğrilerinin eğrilik ve burulmalarının (torsiyon) kontrol noktaları ve ağırlıkları cinsinde ifade edilebileceği gösterilmiş ve bunların kontrol noktaları türünde ifadeleri verilmiştir.

5. Sonuç 6 ve sonuç 7 ifadeleri ile bir Bezier yüzeyinin birinci temel kuadratik formunun $(u,v) = (0,0)$ noktasındaki ifadesinin tamamen kontrol noktaları ile verilebileceği belirtilmiştir. $(u,v) \neq (0,0)$ durumunda ise, birince temel kuadratik form ifadesinin, yüzeye (u,v) noktasında bölme algoritması uygulanarak elde edilen Y_{sagsag} Bezier yüzeyinin kontrol noktaları cinsinden ifade edilebileceği gösterilmiştir.

6. Sonuç 8 ve Teorem 29 ifadeleri ile de bir Bezier yüzeyinin ikinci temel kuadratik formunun, ortalama ve Gauss eğriliklerinin $(u,v) = (0,0)$ noktasındaki ifadelerinin tamamen kontrol noktaları ile verilebileceği belirtilmiştir. $(u,v) \neq (0,0)$ durumunda ise kontrol noktaları olarak, yüzeye bölme algoritması uygulanarak elde edilen Y_{sagsag} Bezier yüzeyinin kontrol noktaları alınabileceği ifade edilmiştir.

4. ÖNERİLER

1. Bezier eğri ve yüzeylerinin otomobil sanayiinden uçak sanayiine kadar çok geniş bir yelpazede kullanılıyor olması ve yapılan modellemelerde knot denilen kontrol noktalarının kullanılıyor olması nedeniyle tezde alınan sonuçların ilgili sektörlerde yapılacak olan çalışmalara katkı sağlayabilir.

2. Yüzeyleri tanımak, bir takım dönüşümlerde nasıl bir değişime uğrayacağını kestirmek için pratik en iyi bilgi yüzeyin Gauss ve ortalama eğrilikleridir. Bu eğriliklerin önemi bunların parametre değişimine bağlı olmamalarından gelmektedir. Bu nedenle de yüzeye ait birinci ve ikinci temel kuadratik formlarla Gauss ve ortalama eğriliklerin kontrol noktaları ile ifade edilebilmesi çok önemli olmaktadır. Yapılan bu çalışma ilgili sektörlerde yapılacak olan çalışmalara bu konuda da yardımcı olabilir.

3. Bezier yüzeyleri, koordinat eğrileri Bezier eğrileri olan yüzeylerdir. Koordinat eğrileri, bir parametreye göre Bezier eğrileri, diğer parametreye göre ise Bezier formatında olmayan parametrik eğriler olarak alınarak yarı-Bezier yüzeyleri tanımlanabilir. Böylece diferansiyel geometri açısından daha geniş bir perspektifte incelenebilir.

5. KAYNAKLAR

1. Farin G., Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design A Practical Guide, 2nd edition, Academic Press Inc., San Diego, 1990.
2. Barnhill R. and Riesenfeld R. F., editors, Computer Aided Geometric Design, Academic Press, 1974.
3. Farouki R. and Rajan V.T., On the numerical condition of polynomials in Bernstein form. Computer Aided Geometric Design, 4,3 (1987) 191-216.
4. Farin G., Curvature continuity and offsets for piecewise conics, ACM Transactions on Graphics, 8, 2 (1989) 89-99.
5. Farouki R., Exact offset procedures for simple solids. Computer Aided Geometric Design, 2,4 (1985) 257-279.
6. Hoschek J., Offset curves in the plane, Computer Aided Design, 17, 2 (1985) 77-82.
7. Tiller W. and Hanson E., Offsets of two-dimensional profiles, IEEE Computer Graphics and Applications, 4, (1984) 36-46.
8. Potmann H., Rational curves and surfaces with rational offsets, Computer Aided Geometric Design, 12, (1995) 175-192.
9. Farouki R., Manni C. and Sestini A., Real-time CNC interpolators for Bezier conics, Computer Aided Geometric Design, 18, (2001) 639-655.
10. Chen F., Zheng J. and Sederberg T.W., The mu-basis of rational ruled surface, Computer Aided Geometric Design, 18, (2001) 61-72.
11. Pottmann H. and Paukowitzsch P., Inflections of planar surface curves, Computer Aided Geometric Design, 14, (1997) 293-297.
12. Krasauskas R., Toric surface patches, Advances in Computational Mathematics, volume: 17, (2002) 89-113.
13. Reyes J. S., Harmonic rational Bezier curves, p-Bezier curves and trigonometric polynomials, Computer Aided Geometric Design, 15, (1998) 909-923.
14. Mainar E., Pena J.M. and Reyes J.S., Shape preserving alternatives to the rational Bezier model, Computer Aided Geometric Design, 18, (2001) 37-60.
15. Jüttler B. and Wagner M.G., Computer-Aided Design with Spatial Rational B-Spline Motions, Journal of Mechanical Design Trans. of the ASME, 118, (1996) 193-201.

16. Ge Q.J. and Sirchia M., Computer Aided Geometric Design of Two-Parameter Freeform Motions, Journal of Mechanical Design Transactions of the ASME, 121, (1999) 502-506.
17. Mavroidis C. and Roth B., On the Geometry of Spatial Polygons and Screw Polygons, Journal of Mechanical Design Transactions of the ASME, 119, (1997) 246-252.
18. Cholewa R., Nowak A.J., Bialecki R. A. and Wrobel L.C., Cubik Bezier splines for BEM heat transfer analysis of the 2-D continuous casting problems, Computational Mechanics, 28, (2002) 282-290.
19. Schoenberg I., On variation diminishing approximation methods. In R.E.Langer, editor, On Numerical Approximation, p. 249-274, Univ. of Wisconsin Press, 1953.
20. Marsh D., Applied Geometry for Computer Graphics and CAD, Springer-Verlag London Berlin Heidelberg, London, 1999.
21. Choi B.K., Surface Modeling for CAD/CAM, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1991.
22. Liming R., Practical Analytic Geometry with Applications to Aircraft, Macmillan, 1944.
23. Lee E., The Rational Bezier Representation for Conics. In G. Farin, editor, Geometric Modeling: Algorithms and New Trends, pages 3-19, SIAM, Philadelphia, 1987
24. Patterson B. C., Projective Geometry, 7 th edition, John Wiley&Sons, New York, 1959.
25. Moebius F., August Ferdinal Moebius, Gesammelte Werke. Verlag von S. Hirzel, 1885. also published by Dr. M. Seanding oHG, Wiesbaden, FRG, 1967.
26. Coons S., Rational Bicubic Surface Parthes, technical report, project MAC, MIT, 1968
27. Forrest A., Curves and surfaces for computer aided design. PhD thesis, Cambridge, 1968.
28. Gray A., Modern Differential Geometry of curves and surfaces with Mathematica, 2nd edition, CRC Press LCC, Boca Raton, Florida, 1998.
29. Weatherburn C.E., Üç Boyutlu diferensiyel geometri, Çev: Z. Asuman ILGAZ, K.T.Ü. Yayınları, yayın No: 16, KTÜ Basımevi, Trabzon, 1984
30. Séroul R., Programming for Mathematicians, Springer-Verlag, Berlin , 2000.

ÖZGEÇMİŞ

Muhsin İNCESU, 25.09.1975 tarihinde Ankara'nın Çubuk ilçesinde doğdu. 1986 yılında Çubuk Atatürk İlkokulu'ndan mezun oldu. Orta ve lise öğrenimini 1986-1992 yıllarında Çubuk Lisesi'nde yaptı. 1993 yılında kazandığı Akdeniz Üniversitesi Sosyal Bilimler MYO işletmecilik bölümünü 1995 yılında başarı ile tamamlayarak, aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde başladığı lisans eğitimini 1999 yılında başarı ile tamamladı. Halen Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü yüksek lisans öğrenimine devam etmektedir. Aralık 2000 tarihinde KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'na Araştırma görevlisi olarak atandı. Yabancı dili İngilizce'dir.

