KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HİPERYÜZEYLERİN DİFERANSİYEL İNVARYANTLARI VE 3-BOYUTLU RASYONEL CEBİRSEL EĞRİLERİN PROJEKTİF DENKLİKLERİNİN VE SİMETRİLERİNİN SAPTANMASI ÜZERİNE DİFERANSİYEL BİR YAKLAŞIM: ALGORİTMALAR VE İMPLEMENTASYON

DOKTORA TEZİ

UĞUR GÖZÜTOK

TEMMUZ 2022
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HİPERYÜZEYLERİN DİFERANSİYEL İNVARYANTLARI VE 3-BOYUTLU RASYONEL CEBİRSEL EĞRİLERİN PROJEKTİF DENKLİKLERİNİN VE SİMETRİLERİNİN SAPTANMASI ÜZERİNE DİFERANSİYEL BİR YAKLAŞIM: ALGORİTMALAR VE İMPLEMENTASYON

Uğur GÖZÜTOK

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"DOKTOR (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 27/05/2022
Tezin Savunma Tarihi : 04/07/2022

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Yasemin SAĞIROĞLU

Trabzon 2022

ÖNSÖZ

Lisansüstü öğrenimim boyunca her konuda desteğini esirgemeyen, bu zorlu süreçte her zaman yanımda olduğu ve göstermiş olduğu sabır için kıymetli danışman hocam Prof. Dr. Yasemin SAĞIROĞLU'na; bana her konuda destek olan, değerli sohbetleri ile ufkumu genişleten ve hayatımın şekillenmesine katkıda bulunan, bulunduğumuz konumun mimarı sevgili hocam Prof. Dr. Zameddin İSMAİLOV'a; sadece bana değil, tüm genç bilim insanlarına bir baba gibi sahip çıkmış olan, KTÜ Matematik Bölümü'nün kuruluşundan bu yana bölüme kol kanat geren değerli hocam Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ'a; tanıştığımızdan bu yana bana abi, arkadaş, kardeş, takım arkadaşı olan, birlikte bilim yapmaktan sonsuz haz aldığım, doktora sürecimde de desteğini hiç esirgememiş olan Dr. Hüsnü Anıl ÇOBAN'a; beni her zaman el üstünde tutan, desteklerini her süreçte esirgemeyen sevgili aileme; lisansüstü öğrenimim boyunca 2211-A Genel Yurtiçi Doktora Burs Programı ve 1002-Hızlı Destek Programı kapsamında beni maddi yönden destekleyen TÜBİTAK'a, BAP04 Altyapı Projesi kapsamında MAPLE™ (2021) programının lisanslanmasını destekleyen KTÜ BAP birimine; gerçekleştirmiş olduğum bütün bilimsel faaliyetlerin ilham kaynağı olan, yürüdüğümüz zorlu yollarda her zaman ve her koşulda yanımda olmayı bırakmayan, çok zorlu süreçlerin ardından bir çok şeyi birlikte başardığımız canım eşim Dr. Nazlı YAZICI GÖZÜTOK'a; hayatımıza dahil olduğundan beri hayatımızın vazgeçilmezi olan, varlığıyla hayatımızın her köşesini güzel kılan canım oğlum Toprak GÖZÜTOK'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez eşim Nazlı ve oğlum Toprak'a adanmıştır.

Me gustaría agradecer a Prof. Juan Gerardo Alcázar por sus aportes a mí y la segunda parte de mi tesis desde que nos conocimos.

Uğur GÖZÜTOK
Trabzon, 2022

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Doktora tezi olarak sunduğum "Hiperyüzeylerin Diferansiyel İnvaryantları" başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Yasemin Sağıroğlu'nun sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 04/07/2022

Uğur GÖZÜTOK

İÇİNDEKİLER

Doktora Tezi

ÖZET

HİPERYÜZEYLERİN DİFERANSİYEL İNVARYANTLARI VE $3-$BOYUTLU RASYONEL CEBİRSEL EĞRİLERİN PROJEKTİF DENKLİKLERİNİN VE SİMETRİLERİNİN SAPTANMASI ÜZERİNE DİFERANSİYEL BİR YAKLAŞIM: ALGORİTMALAR VE İMPLEMENTASYON

Uğur GÖZÜTOK

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Yasemin SAĞIROĞLU

2022, 74 Sayfa

Bu tez çalışmasında, iki önemli denklik problemi ele alınmıştır. Birinci problem parametrik hiperyüzeylerin Öklid denkliği iken, ikinci problem üç boyutlu rasyonel cebirsel eğrilerin projektif denklik ve simetrilerinin tespitidir. Bu problemler için invaryant teorinin etkin kullanımı ile çözüm üretilmesi amaçlanmıştır. Birinci problemin çözümü için hiperyüzeylerin Öklid grubuna göre diferansiyel invaryantları tespit edilmiş ve bu invaryantların tam sistemi elde edilmiştir. Yine benzer sonuçlar özel Öklid grubu için de araştırılmıştır. Buradaki sonuçlar sayesinde tezin diğer probleminin çözümü için gerekli bakış açısı oluşturulmuştur. İkinci problem için rasyonel eğri parametrizasyonları projektif uzayda ele alınmış olup, bu sayede rasyonel fonksiyonların kullanımından kaçınılıp, bunun yerine tüm girdileri polinomlardan oluşan temsillerle çalışılmıştır. İndirgenmiş formdaki rasyonel eğrilerin uygun parametrizasyonlarının, bilineer yeniden parametrelenişlere göre tek türlü bir temsil olduğu bilinmektedir. Bu bilginin üzerine inşa edilmiş ve projektif diferansiyel invaryantları merkezine alan bir yöntem oluşturulmuş, bu yöntem bir algoritma haline getirilip, MAPLE™ (2021) bilgisayar cebir sistemi kullanılarak geniş kapsamlı testlerle algoritmanın performansı incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Diferansiyel invaryant, Projektif denklik, Projektif simetri, Algoritma, Hesaplamalı cebirsel geometri

PhD Thesis

SUMMARY

DIFFERENTIAL INVARIANTS OF HYPERSURFACES AND A DIFFERENTIAL APPROACH TO DETECT PROJECTIVE EQUIVALENCES AND SYMMETRIES OF $3-$DIMENSIONAL RATIONAL ALGEBRAIC CURVES: ALGORITHMS AND IMPLEMENTATION

Uğur GÖZÜTOK

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Yasemin SAĞIROĞLU
2022, 74 Pages

In this thesis, two important equivalence problems are discussed. While the first problem is the Euclidean equivalence of parametric hypersurfaces, the second problem is the detection of the projective equivalences and symmetries of three-dimensional rational algebraic curves. It is aimed to produce solutions for these problems with the effective use of invariant theory. For the solution of the first problem, differential invariants of the hypersurfaces according to the Euclidean group are determined and the complete system of these invariants is obtained. Again, similar results are also investigated for the special Euclidean group. Thanks to the results obtained here, the necessary perspective for the solution of the other problem of the thesis is formed. For the second problem, the rational curve parametrizations are considered in the projective space, thus we avoid the use of rational functions, instead, we study with representations whose inputs are all polynomials. It is known that proper parametrizations of rational curves in reduced form are a uniform representation with respect to bilinear reparametrizations. A method based on projective differential invariants is constructed based on this knowledge. This method is turned into an algorithm and the performance of the algorithm is examined by extensive tests using the MAPLE™ (2021) computer algebra system.

Keywords: Differential invariant, Projective equivalence, Projective Symmetry, Algorithm, Computational algebraic geometry

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa No

SEMBOLLER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar cismi
$\mathbb{R}^n$	: n boyutlu reel vektör uzayı
$P^n(\mathbb{R})$	: n boyutlu reel projektif uzay
$x(u)$	: Parametrik hiperyüzey
$p(t_0, t_1)$	: Projektif uzayda eğri parametrizasyonu
$g(x)$	: x hiperyüzeyinin birinci temel formu
$L(x)$	: x hiperyüzeyinin ikinci temel formu
$Gr(v_1 v_2 \ldots v_n)$	: $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektörlerinden oluşan Gram matrisi
$\Vert v_1 v_2 \ldots v_n \Vert$	: $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektörlerinden oluşan matris
$[v_1 v_2 \ldots v_n]$	: $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektörlerinden oluşan determinant
$M(n)$	: n boyutlu Öklid grubu
$SM(n)$	: n boyutlu özel Öklid grubu
$O(n)$	: n boyutlu ortogonal grup
$SO(n)$	: n boyutlu özel ortogonal grup
$F[V]$	: Katsayıları F de olan, V nin polinomlarının halkası
$F[V]^G$	: $G-$invaryant polinomların cebiri
$p\{x\}$	: x in diferansiyel polinomu
$\mathbb{R}\{x\}$	: x in reel katsayılı diferansiyel polinomlarının diferansiyel cebiri
$h < x >$	: x in diferansiyel rasyonel fonksiyonu
$\mathbb{R} < x >$	: x in diferansiyel rasyonel fonksiyonlarının diferansiyel cismi
$< v_1, v_2 >$	: v_1 ve v_2 vektörlerinin iç çarpımı
$x \overset{G}{\sim} y$	: x ve y nin $G-$denkliği
κ_i	: Projektif eğrilikler
$gcd(f, g)$	: f ve g polinomlarının en büyük ortak böleni
$MCR(f, g)_{u,v}$	: f ve g polinomlarının Macaulay resultantı

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Ünlü matematikçi Sophie Germain, ”Algebra is nothing more than geometry, in words; geometry is nothing more than algebra, in pictures.” sözü ile geometri ve cebirin ne kadar iç içe olduğunu vurgulamıştır. Çok geçmeden Felix Klein, Erlangen Program (Klein, 1872) adlı ünlü çalışmasıyla, geometrileri grup teori temelli sınıflandırmıştır. Bu tarihlere kadar geometri dendiğinde aslında Öklid geometrisi anlaşılmaktaydı. Farklı geometriler (Öklid olmayan geometriler) ise bu tarihten sonra ortaya atılmıştı. Fakat bu geometrilerin birbiriyle ilişkisi ve hiyerarşik yapısı belirlenememişti. Erlangen Program’da,

- Projektif geometri, Klein’ın ele aldığı diğer tüm geometriler için birleştirici bir çerçeve olarak vurgulanmıştır. Özellikle Öklid geometrisi afin geometriden daha kısıtlayıcıdır, afin geometri de projektif geometriden daha kısıtlayıcıdır.
- Klein, simetri fikrini soyutlamak için cebirsel yöntemler kullanan bir matematik dalı olan grup teorinin geometrik bilgiyi düzenlemenin en yararlı yolu olduğunu vurgulamıştır.
- Klein, her geometrik dilin kendine özgü uygun kavramları olduğu fikrini çok daha açık bir şekilde ortaya koymuştur.

Burada en önemli sonuç üçüncü sonuçtur. Klein, her geometrinin kendine ait bir konsepte sahip olduğunu göstermiştir. Yani, bir geometrideki anlamlı bir yapı, diğer bir geometride bir şey ifade etmeyebilir. Örneğin, projektif geometri, konik kesitler hakkında bilgi verirken, çemberler ya da açılar hakkında bilgi vermez. Çünkü, çemberler ve açılar, projektif dönüşümler altında invaryant (değişmez) değildir. Böylece, bir geometrinin, onu belirleyen dönüşüm grubuna göre invaryantlardan oluştuğu söylenebilir. Bu da, geometri problemlerini çözmede invaryant teori yöntemlerinin ne kadar büyük bir öneme sahip olduğunu gösterir.

Invaryant teori, grupların çeşitli matematiksel yapılar üzerindeki hareketlerini ve bu hareketin fonksiyonlar üzerindeki etkisini inceleyen, cebirin bir alt dalıdır. Klasik teoride problem, bir dönüşüm grubunun elemanları altında değişmeyen ya da invaryant olan polinomların açık bir biçimde belirlenmesidir. Örneğin, özel lineer grubun, $n \times n$ tipindeki matrisler grubu üzerindeki hareketini ele alalım. Bu hareket için determinant fonksiyonu invaryanttır. Çünkü bir matrisin determinantı ile aynı matrisin grup hareketi altındaki determinantı aynıdır.

İnvaryant teorinin birinci problemi: G bir grup, V, bir F cismi üzerinde tanımlı sonlu boyutlu bir vektör uzayı, $F[V]$ kümesi de katsayıları F de olan, V nin polinomlarının halkası olsun. Diğer yandan herhangi bir $f \in F[V]$ ve her $g \in G$ için eğer $f(gx) = f(x)$ oluyorsa, f polinomuna G-invaryanttır denir. Tüm invaryant polinomların cebiri ise $F[V]^G$ ile ifade edilir. $F[V]^G$ sonlu üretilmiş midir? Yani bu cebirin her bir elemanı sonlu sayıdaki invaryant polinomlar cinsinden yazılabilir mi?

Örneğin, G olarak özel lineer grup ve V olarak da $n \times n$ tipindeki matrisler grubu alınırsa, $F[V]^G$ cebiri, determinant polinomu tarafından üretilen, tek değişkene bağlı bir polinom cebirine izomorftur. Daha açık bir ifadeyle, $F[V]^G$ cebirindeki her bir invaryant polinom, determinant polinomunun kuvvetlerinin bir lineer toplamı şeklinde yazılabilir, yani her bir invaryant polinom, determinant ile üretilebilir.

İnvaryant teorinin ikinci problemi: Eğer birinci problemin yanıtı evet ise, minimal bir taban bulunabilir mi? Yani, üreteç olarak elde edilen invaryant polinom sistemi içindeki polinomlar arasında ilişkiler elde edilebilir mi? Bu ilişkiler kullanılarak, üreteç sayısı azaltılabilir mi?

Minimal bir baz (sistem) elde etmenin avantajı, incelenecek ya da hesaplamaya dahil edilecek polinom sayısını minimum seviyede tutmasıdır. Böylece hesaplama basamakları azaltılmış ve hesaplama süresi de kısaltılmış olacaktır.

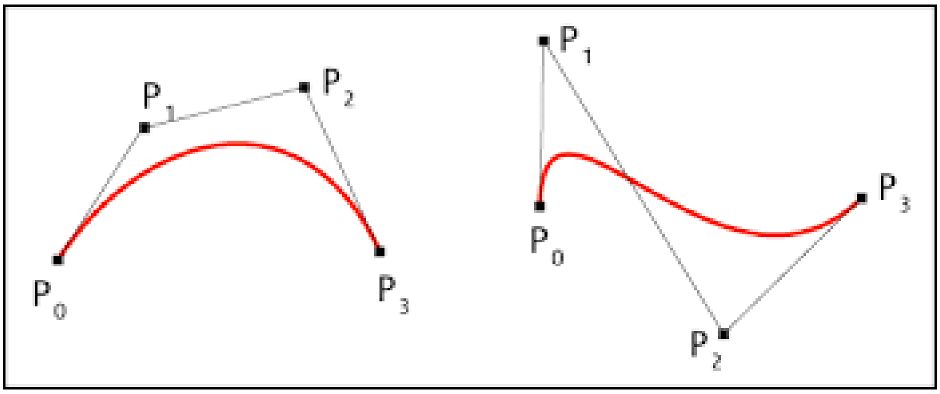
Burada verilen yaklaşımların cevaplayabileceği en önemli problemlerden biri ”denklik problemi” dir. G bir grup ve V de bir vektör uzayı olmak üzere, G nin V üzerindeki hareketi dikkate alınsın. $u, v \in V$ iki vektör olmak üzere, eğer G nin bir g elemanı için $v = gu$ oluyorsa, u vektörü v vektörüne G grubuna göre denktir (G-denktir) denir. Bu tanımlama sonlu sayıda vektörden oluşan iki sistem için de geçerlidir. Burada invaryant teorinin denklik problemine dahil olduğu nokta denk olan vektörlerin invaryant polinomlar altındaki görüntülerinin eşit olmasıdır. Yani, u ve v G-denk iki vektör ise bu durumda bir f invaryant polinomu için $f(u) = f(v)$ dir. Bu doğal gerektirmeyi elde etmek kolaydır: u ve v vektörleri, G-denk olduklarından, $v = gu$ olacak şekilde bir $g \in G$ elemanı mevcuttur. Bu durumda, f bir invaryant polinom olduğundan $f(v) = f(gu) = f(u)$ dur. Bu gerektirmenin tersi her zaman doğru değildir. Bu ise bir başka önemli problemi ortaya çıkarmaktadır. f bir invaryant polinom ve $f(u) = f(v)$ iken hangi koşullarda u ve v vektörleri G-denktir? Bu ancak minimal üreteç sistemindeki tüm invaryant polinomların eşitliği ile gerçeklenir.

Denklik problemi, matematiğin her alanını ilgilendirdiği gibi geometri alanı içinde de kendine yer bulmuştur. Klein'ın elde ettiği sonuçlara göre her bir geometri, ilgili dönüşüm grubuna göre invaryantlar ile tanımlanır. Bahsi geçen dönüşüm grubu, o geometrideki yapılarla önemli bir ilişki içerisindedir. Eğer bu dönüşüm grubunun bir elemanı vasıtası ile, o geometrideki iki yapı arasında geçiş yapılabiliyorsa, bu yapılara ilgili geometriye göre denktir denir. İki yapının denk olması demek de, o geometride bu yapıların aynı geometrik özelliklere sahip olduğu anlamına gelir. Böylece bu yapıların sınıflandırılması sağlanmış olur. Dolayısıyla herhangi bir geometrideki denklik problemini çözmek, gerçek hayat problemleri için önemli fikirler verir. Örneğin, Öklid geometrisinde, denk eğrileri ele alalım. Bu eğrilerden biri, diğerinin döndürülmüş ve ötelenmiş halidir. Yani uzaydaki bir eğri, eğilip bükülmeden, başka bir konuma götürülürse, elde edilen yeni eğri Öklid geometrisine göre ilk eğriye denktir ve ilk eğriyle aynı geometrik özelliklere sahiptir. Bu işlemin bir avantajı, bu iki eğriden hangisi ile çalışmak, ilgilenilen problemin çözümüne kolaylık sağlıyorsa, o eğri ile çalışılabilmesidir.

Genel olarak geometrinin önemli bir problemi olan denklik problemi, diferansiyel geometri ve cebirsel geometrinin ortak konusudur. İki çalışma alanında da ortak ilgi, temel olarak her bir dönüşüm grubu için eğri ve yüzeylerin denkliklerini açık biçimde elde edebilmektir. Ancak burada en önemli ayrım eğrilerin parametrelenişleridir. Çünkü iki eğrinin ya da yüzeyin denkliğini hesaplamak için öncelikle parametrelenişlerin bu duruma etkisini belirlemek gereklidir. Örneğin, cebirsel eğrilerin denklikleri hesaplanırken, ilgili geçiş parametrizasyonları karakterize edilmiştir (Sendra vd., 2007). Bu geçiş parametrizasyonları literatürde iyi bilinen Möbius dönüşümleridir (Beardon, 1995; Arnold ve Rogness, 2008). Diğer yandan, daha genel eğriler (cebirsel olmayabilir) için böyle bir sınıflama yapabilmek mümkün değildir. Bu zorluğun üstesinden gelinebilmesi için invaryant parametrizasyonların bulunması gerekmektedir (Aripov ve Khadjiev, 2007). Fakat, geometrinin yapısı karmaşıklaştıkça (afin geometri, projektif geometri gibi), bu parametrizasyonların elde edilmesi oldukça güçleşir. Örneğin, afin (2-boyutlu uzay hariç (Sağıroğlu, 2015)) ve projektif geometri için bu durum henüz çözüme kavuşturulamamış bir problemdir.

Bu tez çalışmasında, bu iki alanın ortak problemine farklı varyetelerle çözüm aranmıştır. Yapılan çalışmaların ilk kısmında sabit parametreleniş durumunda hiperyüzeylerin Öklid geometrisindeki denklik problemi araştırılmıştır. İkinci kısımda ise üç boyutlu cebirsel eğrilerin projektif ve afin denklik problemleri araştırılmıştır.

Cebirsel eğrilerin ele alınmasının en önemli nedeni, bu yapıların diğer alanlarla (Örüntü Tanıma, Bilgisayar Grafikleri ve Bilgisayarlı Görü gibi) ilişkisi ve gerçek hayat problemlerinin modellenmesine elverişli olmasıdır. Cebirsel eğrilere ve bilgisayar destekli tasarımdaki rollerine dair en önemli örnek Bezier eğrileridir (Bkz. Şekil 1). Bu eğriler, Renault'da bir mühendis olan Bézier (1968) tarafından, araç kasalarının tasarımı için



Şekil 1. Bezier eğrisi ve kontrol noktaları

geliştirilmiştir.

Bu formdaki eğrilerin tercih edilmesi ya da üzerlerinde önemli ölçüde çalışma yapılmasının başlıca nedeni bu eğrilerin müdahaleye ya da yeniden şekillendirmeye müsait olmalarıdır.

1.2. Problem ve Temel Bilgiler

1.2.1. Tezin 1. Problemi Üzerine

$U \in \mathbb{R}^n$ bağlantılı ve açık bir küme olmak üzere, $x : U \to \mathbb{R}^{n+1}$, C^∞ fonksiyonuna $\mathbb{R}^{n+1}$ de bir hiperyüzey denir. $x\,(u) = x(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ hiperyüzeyinin birinci ve ikinci temel formları sırasıyla $g\,(x) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x) du_i du_j$ ve $L\,(x) = \sum_{i,j=1}^{n} L_{ij}(x) du_i du_j$ olarak ifade edilsin. Eğer her $u \in U$ için $\delta_x = det \left\| g_{ij}\left(x\left(u\right)\right) \right\|_{i,j=1}^{n} \neq 0$ ise x hiperyüzeyine regülerdir denir. Eğer her $u \in U$ için $L_{dd}\left(x(u)\right) \neq 0$ ise x hiperyüzeyine $d-$nondejeneredir denir.

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ ve $y = (y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})$, $\mathbb{R}^{n+1}$ de iki vektör olmak üzere

$$< x, y >= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_{n+1} y_{n+1},$$

bu vektörlerin iç çarpımlarını göstersin. $a_i \in \mathbb{R}^{n+1}$ vektörlerinin $\| < a_k, a_l > \|_{k,l=1}^{n}$ Gram matrisinin determinantı ise $detGr(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ile gösterilsin. $\varepsilon_1 = (1, 0, \ldots, 0)\,, \varepsilon_2 = (0, 1, 0, \ldots., 0)\,, \ldots, \varepsilon_{n+1} = (0, \ldots, 0, 1)$ $\mathbb{R}^{n+1}$ de standart ortonormal baz olmak üzere $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n+1}\}$ kümesini göz önüne alalım. $\mathbb{R}^{n+1}$ deki $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ vektör kümesi için, sütun vektörleri olarak T transpoze operatörünü göstermek üzere $a_j =$

$(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{n+1,j})^T$ ve $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n+1}\}^T$ olarak alınsın. $k = 1, 2, \ldots, n+1$ için $P_k = det \left\| a_{ij} \right\|_{i=1,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n+1; j=1,\ldots,n}$ ve $A_k = (-1)^{1+k} P_k$ olsun. $[\varepsilon a_1 a_2 \ldots a_n] = A_1\varepsilon_1 + A_2\varepsilon_2 + \ldots + A_{n+1}\varepsilon_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$ olarak tanımlansın. Bu durumda

$$< [\varepsilon a_1 a_2 \ldots a_n], [\varepsilon a_1 a_2 \ldots a_n] >= detGr(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

olduğunu göstermek kolaydır. $n = 2$ için bu eşitlik Genişletilmiş Lagrange Özdeşliğidir (Hummel, 1965).

$\mathbb{R}^{n+1}$ deki herhangi $\{b, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ vektör kümesi için, $[ba_1 a_2 \ldots a_n] = det \left\| ba_1 a_2 \ldots a_n \right\|$ olarak alınsın.

Eğer $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $\mathbb{R}^{n+1}$ de lineer bağımsız bir vektör kümesi ise bu durumda

$$\bar{n} = \frac{[\varepsilon a_1 a_2 \ldots a_n]}{\sqrt{detGr(a_1, a_2, \ldots, a_n)}}$$

vektörü bir birim vektördür ve her $j = 1, 2, \ldots, n$ için $([\varepsilon a_1 a_2 \ldots a_n], a_j) = 0$ dır. Ayrıca $b \in \mathbb{R}^{n+1}$ olmak üzere

$$< \bar{n}, b >= \frac{[ba_1 a_2 \ldots a_n]}{\sqrt{detGr(a_1, a_2, \ldots, a_n)}}$$

dir.

$x(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\mathbb{R}^{n+1}$ de bir regüler hiperyüzey ise x in ikinci temel formunun katsayıları $i, j = 1, 2, \ldots, n$ olmak üzere

$$L_{ij}(x) = \left[\frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} \frac{\partial x}{\partial u_1} \frac{\partial x}{\partial u_2} \ldots \frac{\partial x}{\partial u_n} \right] \delta_x^{-\frac{1}{2}}$$

biçimindedir (Aminov, 2001). $n = 2$ için L_{ij} katsayıları (Kreyszig, 1998) çalışmasında verilmiştir.

Bu çalışmada incelenecek olan geometriyi meydana getiren dönüşüm grupları $M(n)$ ve $SM(n)$ gruplarıdır. Burada $M(n) = \{F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n | F(x) = gx + b, g \in O(n), b \in \mathbb{R}^n\}$ olup $O(n)$ bütün $n \times n$ tipli reel ortogonal matrisler grubudur. Diğer yandan $SM(n) = \{F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n | F(x) = gx + b, g \in SO(n), b \in \mathbb{R}^n\}$ olup burada $SO(n)$, determinantı 1 olan $n \times n$ tipli reel ortogonal matrisler grubudur.

$T = \{(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | 1 \leq i \leq j \leq n\}$ bir indis kümesi olsun. Bonnet Teoremine göre (Aminov, 2001), $x(u)$ ve $y(u)$ iki regüler hiperyüzey olmak üzere, her $(i, j) \in T$ ve her $u \in U$ için $g_{ij}(x(u)) = g_{ij}(y(u))$ ve $L_{ij}(x(u)) = L_{ij}(y(u))$ ise $y = F(x)$ olacak şekilde bir $F \in SM(n+1)$ dönüşümü vardır. Diğer yandan, birinci ve ikinci temel formların katsayılarının bağımsız olmadığı bilinmektedir. Bu katsayılar arasındaki bağıntılar Gauss-Codazzi denklemleriyle verilir (Bobenko ve Eitner, 2000). Bu sebeple aşağıdaki temel problem ortaya çıkmaktadır: x, y iki regüler hiperyüzey olmak üzere, her $(i,j) \in T_1 \subsetneq T$ ve her $u \in U$ için $g_{ij}(x(u)) = g_{ij}(y(u))$ ve $L_{ij}(x(u)) = L_{ij}(y(u))$ iken $y = F(x)$ eşitliğini sağlayan bir $F \in SM(n+1)$ dönüşümü elde edilecek şekilde bir $T_1 \subsetneq T$ alt indis kümesi bulunabilir mi? Yani birinci ve ikinci temel formun tüm katsayılarını kullanmadan denkliğe ulaşmak mümkün müdür? Eğer cevap hayırsa $\{g_{ij}, L_{ij} | (i,j) \in T\}$ sistemine $SM(n+1)-$invaryantların bir minimal tam sistemi denir.

Diğer yandan, $SM(n+1)-$invaryantların başka üreteç sistemleri de bulunabilir (Bobenko ve Eitner, 2000). Bu çalışmada da, $SM(n+1)-$invaryantların farklı bir minimal tam sistemi elde edilmiştir. Ayrıca $M(n+1)$ grubu için de bir minimal tam sistem elde edilmiştir.

Bu tez çalışmasında iki $d-$nondejenere hiperyüzeyin $SM(n+1)$ ve $M(n+1)$ gruplarına göre denklik probleminin çözümü global olarak ve diferansiyel invaryantlar kullanılarak verilmiştir.

1.2.2. Tezin 2. Problemi Üzerine

Bu tez çalışmasının ikinci problemi olan denkliklerin saptanması üzerine yayımlanan araştırmalar konunun güncelliğini ve literatürdeki önemini açıkça ortaya koymaktadır. Bu çalışmaların girdi eğrisinin ya da yüzeyinin veriliş biçimine göre ikiye ayrıldığı görülmektedir: Kapalı formda ve parametrik formda. Literatürde kapalı formda verilen bir cebirsel eğrinin, parametrik formunu elde etmeye yönelik algoritmalar (Alcazar vd., 2015, 2018, 2019; Alcazar ve Quintero, 2020) çalışmalarında elde edilmiştir. Bu çalışmada yalnızca parametrik formdaki eğri ve hiperyüzeyler için denklik problemi ele alınmıştır. Kapalı formda verilen cebirsel eğriler ve yüzeyler için de parametrik forma dönüştürülüp bu çalışmadaki yöntemler uygulanabilir.

Cebirsel eğrilerin denkliklerinin, simetrilerinin ve singülerliklerinin belirlenmesi, güncel literatürde oldukça ilgi görmektedir (Pérez-Díaz, 2007; Lebmeir ve Jürgen, 2008; Chen vd., 2008; Shi vd., 2013; Alcazar vd., 2015, 2018, 2019; Alcazar ve Quintero, 2020; Hauer ve Jüttler, 2018). Bunun sebebi bu çalışmaların çıktılarının Örüntü Tanıma, Bilgisayar Grafiği ve Bilgisayarlı Görü'de önemli problemlere çözüm getirmesidir. Örneğin, simetri tespiti, bilgisayar grafiğinde, görüntüleri belirlemek için önemli katkılar sağlamaktadır: Görüntü sıkıştırma ya da görüntü tamamlama işlemlerinde kullanılmaktadır. Cebirsel eğrilerin denklikleri ve simetrilerinin belirlenmesi üzerine yapılmış olan ilk çalışmalardan biri uçakların siluetlerini sınıflandırmak için B-spline momentlerinin kullanıldığı, afin dönüşümler üzerine bir incelemedir (Huang ve Cohen, 1996). Braß ve Knauer (2004) üç boyutlu ayrık nesnelerin Öklid simetrilerinden hareket ederek, Bezier eğri ve yüzeylerinin simetrilerini elde etmişlerdir. Son yıllarda Alcazar vd. (2015, 2018) benzerlik dönüşümleri altında parametrik rasyonel eğrilerin denkliklerini ve simetrilerini belirlemek için bir dizi çalışma yayımladılar. Sánchez-Reyes (2015), çalışmasında polinomsal Bezier eğrilerinin Öklid simetrilerini belirleyebilmek için Bernstein tabanlarını kullanarak oluşturduğu bir metot geliştirmiştir. Eğriler için yapılan güncel çalışmalar incelendiğinde, bu çalışmadaki probleme yaklaşımın (diferansiyel invaryantlar) literatürdeki herhangi bir çalışmada ele alınmadığı görülmektedir.

Tez çalışmasının bu bölümünde 3 boyutlu rasyonel cebirsel eğrilerin projektif denklik ve simetrilerinin saptanması problemini ele alacağız. 3 boyutlu rasyonel eğrileri, $P^3(\mathbb{R})$, 3 boyutlu genişletilmiş Öklid uzayında göz önüne alacağız. $P^3(\mathbb{R})$ uzayındaki noktaları, $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)^T \in P^3(\mathbb{R})$ homojen koordinat temsili ile ifade edeceğiz. Dolayısıyla homojen koordinatlarda x ve λx noktaları $\lambda \neq 0$ için $P^3(\mathbb{R})$ uzayının aynı noktasını temsil edecektir.

$P^3(\mathbb{R})$ uzayında C_1 ve C_2 rasyonel eğrileri aşağıdaki uygun (birasyonel) parametrelenişler ile verilir:

$$p : P^1(\mathbb{R}) \to C_1 \subset P^3(\mathbb{R}), \qquad (t_0, t_1) \to p(t_0, t_1) = (p_0(t_0, t_1), p_1(t_0, t_1), p_2(t_0, t_1), p_3(t_0, t_1)),$$
$$q : P^1(\mathbb{R}) \to C_2 \subset P^3(\mathbb{R}), \qquad (t_0, t_1) \to q(t_0, t_1) = (q_0(t_0, t_1), q_1(t_0, t_1), q_2(t_0, t_1), q_3(t_0, t_1)).$$

Burada iki parametrizasyonun da homojen koordinatları, derecesi n olan, aşağıdaki homojen polinomlardan oluşmaktadır:

$$p_i(t_0, t_1) = \sum_{j=0}^{n} c_{j,i} t_0^{n-j} t_1^j \text{ ve } q_i(t_0, t_1) = \sum_{j=0}^{n} c'_{j,i} t_0^{n-j} t_1^j, \ 0 \leq i \leq 3.$$

Bu homojen polinomların katsayı vektörleri sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$c_j = (c_{j,0}, c_{j,1}, c_{j,2}, c_{j,3})^T \ , \ c'_j = (c'_{j,0}, c'_{j,1}, c'_{j,2}, c'_{j,3})^T.$$

Tez çalışmasının bu kısmında yalnızca homojen temsil ile verilmiş, uygun parametrizasyonlarla ilgileneceğiz. Çünkü standart biçimde verilen eğriler; t^j yerine $t_0^{n-j} t_1^j$ yazılarak kolayca homojen temsile dönüştürülebilir. Ayrıca (Hauer ve Jüttler, 2018; Sendra vd., 2007) çalışmalarında, her rasyonel eğrinin, uygun bir parametrizasyon elde etmek için yeniden parametrelenebildiği kanıtlanmıştır.

Metodun doğru şekilde oluşturulabilmesi için aşağıdaki ek varsayımlara ihtiyaç duyulacaktır:

i. p ve q parametrizasyonları indirgenmiş formda olmalıdır. Yani

$$gcd(p_0(t_0,t_1), p_1(t_0,t_1), p_2(t_0,t_1), p_3(t_0,t_1)) = 1,$$
$$gcd(q_0(t_0,t_1), q_1(t_0,t_1), q_2(t_0,t_1), q_3(t_0,t_1)) = 1,$$

olmalıdır. Burada gcd, koordinat fonksiyonlarının en büyük ortak bölenini temsil etmektedir.

ii. Parametrizasyonlar aynı n derecesine sahip olmalıdır. Çünkü projektif dönüşümler dereceyi koruduğundan, projektif denk eğrilerin dereceleri aynı olmak zorundadır.

iii. Diferansiyel bir metod inşa edileceğinden, $n \geq 4$ olduğu kabul edilecektir.

iv. Eğrilerin hiçbirinin bir hiperdüzlemde yatmadığı kabul edilecektir. Çünkü, hiperdüzlemde yatan eğriler arasında sonsuz projektif denklik bulunmaktadır. Bu kabulün bir sonucu olarak, katsayı vektörlerinden oluşan $(c_{i,j})$ ve $(c'_{i,j})$ matrislerinin rankları 4 olacaktır (Hauer ve Jüttler, 2018).

Homojen koordinatlarda çalıştığımız için bir f projektif dönüşümü aşağıdaki matris temsili ile ifade edilebilir:

$$f : \bar{\mathbb{E}}^3 \to \bar{\mathbb{E}}^3 : x \mapsto f(x) = M \cdot x.$$

Burada $M = (m_{ij})_{0 \leq i,j \leq 3}$, regüler 4×4 tipinde bir matristir.

$M = (m_{ij})_{0 \leq i,j \leq 3}$, f projektif dönüşümüne karşılık gelen matris olsun. Eğer $m_{00} \neq 0,\ m_{01} = m_{02} = m_{03} = 0$ ise f bir afin dönüşümdür.

Tanım 1. C_1 ve C_2 eğrileri için $f(C_1) = C_2$ olacak şekilde bir f projektif dönüşümü varsa, bu eğrilere projektif denktir denir.

Tanım 2. C eğrisi için $f(C) = C$ olacak şekilde birimden farklı bir f projektif dönüşümü varsa, bu eğriye projektif simetriktir denir.

(Sendra vd., 2007) çalışmasında kanıtlandığı üzere, bir rasyonel eğrinin iki uygun parametrizasyonu bir doğrusal rasyonel dönüşüm ile ilişkilidir. Bu doğrusal rasyonel dönüşüm 3 boyutlu eğriler durumunda bir Möbius dönüşümüdür ve bu dönüşüme projektif doğrunun bir doğrusal dönüşümü gözüyle bakılablir. Dolayısıyla homojen koordinatlarda bu dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz

$$\varphi : P^1(\mathbb{R}) \to P^1(\mathbb{R}), \quad (t_0, t_1) \to \varphi(t_0, t_1) = (at_0 + bt_1, ct_0 + dt_1).$$

Burada $ad - bc \neq 0$ dır. Buradan da, sırasıyla p, q uygun parametrzasyonları ile parametrelenmiş C_1, C_2 eğrilerinin projektif denk olması için gerek ve yeterli koşul $Mp = q(\varphi)$ olacak şekilde bir regüler 4×4 M matrisi ve $\varphi(t_0, t_1) = (at_0 + bt_1, ct_0 + dt_1)$, $ad - bc \neq 0$ şeklinde bir Möbius dönüşümünün var olmasıdır. Tez çalışmasının bu ikinci bölümünde oluşturacağımız metodu, bu sonuca dayandıracağız.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Hiperyüzeylerin Diferansiyel İnvaryantları

2.1.1. $G = M(n+1)$ ve $G = SM(n+1)$ İnvaryantların Üreteç Sistemleri

Tanım 3. (Kaplansky, 1957) $x\,(u) = x(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\mathbb{R}^{n+1}$ de bir $U-$hiperyüzey olsun. Her $m_i \in \mathbb{N}$ ve $i = 1, 2, \ldots, n$ için $x^{(0,0,\ldots,0)} = x$ ve $x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)} = \frac{\partial^{m_1+m_2+\ldots+m_n} x}{\partial u_1^{m_1} \partial u_2^{m_2} \ldots \partial u_n^{m_n}}$ tanımlansın. Katsayıları $\mathbb{R}$ de olan, x ve x in sonlu sayıda kısmi türevlerinin herhangi bir $p(x, x^{(1,0,\ldots,0)}, x^{(0,1,\ldots,0)}, \ldots, x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)})$ polinomuna x in bir diferansiyel polinomu denir ve bu polinom kısaca $p\{x\}$ ile ifade edilir.

x in reel katsayılı tüm diferansiyel polinomlarının kümesi $\mathbb{R}\{x\}$ ile ifade edilir. Bu küme $\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u_n}$ türevlerine göre bir diferansiyel $\mathbb{R}-$cebirdir. Bu diferansiyel $\mathbb{R}$-cebir, aynı zamanda bir tamlık bölgesidir. Bu kümenin bölüm cismi $\mathbb{R} < x >$ ile ifade edilir. Bu küme ise, $\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u_n}$ türevlerine göre bir diferansiyel cisimdir. $\mathbb{R} < x >$ kümesinin bir h elemanına, x in bir diferansiyel rasyonel fonksiyonu denir ve bu fonksiyon kısaca $h < x >$ ile ifade edilir.

$m, k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x_1 = x_1\,(u)\,, x_2 = x_2\,(u)\,, \ldots, x_m = x_m(u)$, $\mathbb{R}^{n+1}$ de sonlu sayıda $U-$hiperyüzeyler ve $f_1, f_2, \ldots, f_k \in \mathbb{R} < x_1, x_2, \ldots, x_m >$ olsun. $x_1, x_2, \ldots x_m, f_1, f_2, \ldots, f_k$ nın bir diferansiyel polinomu benzer şekilde tanımlanır ve bu polinom $p\{x_{,1}, x_2, \ldots, x_m, f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ ile ifade edilir. $x_1, x_2, \ldots x_m, f_1, f_2, \ldots, f_k$ nin tüm diferansiyel polinomlarının diferansiyel $\mathbb{R}$-cebiri $\mathbb{R}\{x_1, x_2, \ldots x_m, f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ ile ve $x_1, x_2, \ldots x_m, f_1, f_2, \ldots, f_k$ nin tüm diferansiyel rasyonel fonksiyonlarının diferansiyel cismi ise $\mathbb{R} < x_1, x_2, \ldots x_m, f_1, f_2, \ldots, f_k >$ ile ifade edilir.

Tanım 4. G, $M(n+1)$ in bir alt grubu olmak üzere, bir $h < x_1, x_2, \ldots, x_m, f_1, f_2, \ldots, f_k >$ diferansiyel rasyonel fonksiyonu verilsin. Eğer her $g \in G$ için

$$h < gx_1, gx_2, \ldots, gx_m, f_1 < gx_1, gx_2, \ldots, gx_m >, \ldots, f_m < gx_1, gx_2, \ldots, gx_m >>$$
$$= h < x_1, x_2, \ldots, x_m, f_1 < x_1, \ldots, x_m >, \ldots, f_k < x_1, \ldots, x_m >>$$

sağlanıyorsa h fonksiyonuna $G-$invaryanttır denir.

$x_1, x_2, \ldots, x_m$ hiperyüzeylerinin ve $f_1, f_2, \ldots, f_k$ fonsiyonlarının tüm $G-$invaryant diferansiyel rasyonel fonksiyonlarının kümesi $\mathbb{R} < x_1, x_2, \ldots, x_m, f_1, f_2, \ldots, f_k >^G$ ile ifade edilir. Bu küme $\mathbb{R} < x_1, x_2, \ldots, x_m, f_1, f_2, \ldots, f_k >$ diferansiyel cisminin bir alt diferansiyel cismidir. $x_1, x_2, \ldots, x_m$ hiperyüzeylerinin ve $f_1, f_2, \ldots, f_k$ fonsiyonlarının tüm $G-$invaryant diferansiyel polinomlarının kümesi $\mathbb{R}\{x_1, x_2, \ldots, x_m, f_1, f_2, \ldots, f_k\}^G$ ile ifade edilir. Bu küme $\mathbb{R}\{x_1, x_2, \ldots, x_m, f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ diferansiyel cebirinin bir alt diferansiyel cebiridir.

Tanım 5. $K, \mathbb{R} < x_1, x_2, \ldots, x_m >$ diferansiyel cisminin bir alt diferansiyel cismi ve $S \subset K$ olsun. Eğer K nın S yi içeren en küçük diferansiyel alt cismi K ise S alt kümesine K diferansiyel cisminin bir üreteç sistemidir denir.

Tanım 6. $f_1, f_2, \ldots, f_k \in \mathbb{R} < x_1, x_2, \ldots, x_m >$ ve K da $\mathbb{R}\{x_1, x_2, \ldots, x_m, f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ diferansiyel cebirinin bir diferansiyel alt cebiri olsun. $S \subset K$ olmak üzere, eğer K nın S yi içeren en küçük diferansiyel alt cebiri K ise S alt kümesine K diferansiyel cebirinin bir üreteç sistemidir denir.

Bir x hiperyüzeyi için Δ_d fonksiyonu $y_1 = z_1 = \dfrac{\partial x}{\partial u_1}, \ldots, y_n = z_n = \dfrac{\partial x}{\partial u_n}, y_{n+1} = z_{n+1} = \dfrac{\partial^2 x}{\partial u_d^2}$ olmak üzere $\Delta_d = \| < y_i, z_j > \|_{i,j=1}^{n+1}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda x hiperyüzeyi ve Δ_d^{-1} fonksiyonunun tüm $G-$invaryant diferansiyel polinomlarının diferansiyel cebiri $\mathbb{R}\{x, \Delta_d^{-1}\}$ olmak üzere $< x^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}, x^{(p_1, p_2, \ldots, p_n)} >$ fonksiyonlarının $M\,(n+1)-$invaryant oldukları biliyoruz. Dolayısıyla Δ_d ve Δ_d^{-1} fonksiyonları da $M\,(n+1)-$invaryanttır. Bu kısımda $\Delta = \Delta_1$ olmak üzere $\mathbb{R}\left\{x, \Delta^{-1}\right\}^G$ diferansiyel cebirinin özelliklerini inceleyeceğiz. Diğer d değerleri için de benzer işlemler yapılabilir.

Lemma 7. $\mathbb{R}\left\{x, \Delta^{-1}\right\}^{M(n+1)} = \mathbb{R}\left\{\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}, \Delta^{-1}\right\}^{O(n+1)}$

İspat. $q\left\{x, \Delta^{-1}\right\} = q\left(x, \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}, \ldots, x^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}, \Delta^{-1}\right) \in \mathbb{R}\left\{x, \Delta^{-1}\right\}^{M(n+1)}$ olsun. Bu takdirde her $g \in O(n+1)$ ve $b \in \mathbb{R}^{n+1}$ için

$$
\begin{aligned}
& q\left\{gx + b, \Delta^{-1}\left(gx + b\right)\right\} = \\
& = q\left(gx + b, \frac{\partial (gx + b)}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial (gx + b)}{\partial u_n}, \ldots, (gx + b)^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}, \Delta^{-1}\left(gx + b\right)\right) \\
& = q\left(gx + b, g\frac{\partial x}{\partial u_1}, g\frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, g\frac{\partial x}{\partial u_n}, \ldots, gx^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}, \Delta^{-1}\left(x\right)\right) \\
& = q\left(x, \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}, \ldots, x^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}, \Delta^{-1}\left(x\right)\right) \\
& = q\{x, \Delta^{-1}(x)\}
\end{aligned}
$$

yazılır. Yukarıdaki eşitliği kullanarak q polinomunun x ten bağımsız olduğunu gösterelim. Eşitlik her $g \in O(n+1)$ için sağlandığından, $g = I \in O(n+1)$ birim matrisi için de sağlanır. Bu durumda

$$q\left(x+b, \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}, \ldots, x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}, \Delta^{-1}(x)\right) = \\ = q\left(x, \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}, \ldots, x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}, \Delta^{-1}(x)\right)$$

elde edilir. Diğer yandan, bu eşitlik her $b \in \mathbb{R}^{n+1}$ için sağlandığından, keyfi bir $u_0 \in \mathbb{R}^n$ noktası için $b = -x(u_0)$ için de sağlanır. Böylece,

$$q\left(x(u_0) - x(u_0), \frac{\partial x}{\partial u_1}(u_0), \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}(u_0), \ldots, x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}(u_0), \Delta^{-1}(x)(u_0)\right) = \\ = q\left(x(u_0), \frac{\partial x}{\partial u_1}(u_0), \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}(u_0), \ldots, x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}(u_0), \Delta^{-1}(x)(u_0)\right) \\ = q\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}(u_0), \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}(u_0), \ldots, x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}(u_0), \Delta^{-1}(x)(u_0)\right)$$

Son eşitlik her u_0 için elde edilebildiğinden

$$q\left(x, \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}, \ldots, x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}, \Delta^{-1}(x)\right) \\ = q\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}, \ldots, x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}, \Delta^{-1}(x)\right)$$

elde edilir. Buradan $q \in \mathbb{R}\left\{\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}, \Delta^{-1}\right\}^{O(n+1)}$ elde edilmiş olur. Tersine, $q\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}, \ldots, x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}, \Delta^{-1}(x)\right) \in \mathbb{R}\left\{\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}, \Delta^{-1}\right\}^{O(n+1)}$ alalım. Bu polinom ötelemelere göre invaryant olduğundan $q \in \mathbb{R}\left\{x, \Delta^{-1}\right\}^{M(n+1)}$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Lemma 8. $\left\{< x^{(m_1,\ldots,m_n)}, x^{(p_1,\ldots,p_n)} >: \sum_{i=1}^{n} m_i \geq 1, \sum_{i=1}^{n} p_i \geq 1, m_i, p_i \in \mathbb{N}\right\}$ kümesi $\mathbb{R}\left\{\frac{\partial x}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}\right\}^{O(n+1)}$ diferansiyel cebirinin bir üreteç sistemidir.

İspat. $\mathbb{R}\left\{x^{(m_1,\ldots,m_n)}, m_i \in \mathbb{N}\right\}^{O(n+1)}$ kümesi, $m_i \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{n} m_i \geq 1$ olmak üzere, $\left\{x^{(m_1,\ldots,m_n)}\right\}$ sisteminin $O(n+1)$ −invaryant diferansiyel polinomlarının diferansiyel cebiri olsun. $x^{(m_1,\ldots,m_n)}$ türevleri $\frac{\partial x}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}$ türevleri ile üretilebileceğinden

$$\mathbb{R}\left\{x^{(m_1,\ldots,m_n)}, m_i \in \mathbb{N}\right\}^{O(n+1)} = \mathbb{R}\left\{\frac{\partial x}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}\right\}^{O(n+1)}$$

olduğu açıktır. Diğer yandan (Weyl, 1946) çalışmasında verilen, $O(n)$ için temel teorem gereğince,

$$\left\{< x^{(m_1,\ldots,m_n)}, x^{(p_1,\ldots,p_n)} >: \sum_{i=1}^{n} m_i \geq 1, \sum_{i=1}^{n} p_i \geq 1, m_i, p_i \in \mathbb{N}\right\}$$

sistemi $\mathbb{R}\left\{x^{(m_1,\ldots,m_n)}, m_i \in \mathbb{N}\right\}^{O(n+1)}$ diferansiyel cebirinin bir üreteç sistemidir. Dolayısıyla bir önceki eşitlik dikkate alındığında

$$\left\{< x^{(m_1,\ldots,m_n)}, x^{(p_1,\ldots,p_n)} >: \sum_{i=1}^{n} m_i \geq 1, \sum_{i=1}^{n} p_i \geq 1, m_i, p_i \in \mathbb{N}\right\}$$

sistemi $\mathbb{R}\left\{\frac{\partial x}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}\right\}^{O(n+1)}$ diferansiyel cebirinin bir üreteç sistemidir. $\square$

Lemma 9. $\{< x^{(m_1,\ldots,m_n)}, x^{(p_1,\ldots,p_n)} >, \Delta^{-1} : \sum_{i=1}^{n} m_i \geq 1, \sum_{i=1}^{n} p_i \geq 1, m_i, p_i \in \mathbb{N}\}$ kümesi $\mathbb{R}\left\{\frac{\partial x}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}, \Delta^{-1}\right\}^{O(n+1)}$ diferansiyel cebirinin bir üreteç sistemidir.

İspat. $f \in \mathbb{R}\left\{\frac{\partial x}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}, \Delta^{-1}\right\}^{O(n+1)}$ olsun. Bu takdirde f fonksiyonu, $h \in \mathbb{R}\left\{\frac{\partial x}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}, \Delta^{-1}\right\}$ ve $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $f = \frac{h\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}\right)}{\Delta^m}$ şeklinde yazılabilir. Keyfi bir $g \in O(n+1)$ elemanı için f bir $O\,(n+1)\,-$invaryant fonksiyon olduğundan $\frac{h\left(\frac{\partial (gx)}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial (gx)}{\partial u_n}\right)}{\Delta^m(gx)} = \frac{h\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}\right)}{\Delta^m(x)}$ yazılır. Diğer yandan Δ fonksiyonu bir $M\,(n+1)\,-$invaryant fonksiyon olduğundan $h\left(\frac{\partial (gx)}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial (gx)}{\partial u_n}\right) = h\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}\right)$ bulunur, yani $h \in \mathbb{R}\left\{\frac{\partial x}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}\right\}^{O(n+1)}$ elde edilir. Lemma 8 kullanılırsa ispat tamamlanır. $\square$

$V = \left\{< \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} >, 1 \leq i \leq j \leq n; < \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_r} >, 1 \leq r \leq n\right\}$ kümesi tanımlansın ve $\mathbb{R}\{V\}$ de $\mathbb{R}\left\{\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}, \Delta^{-1}\right\}^{O(n+1)}$ nin V ile üretilen diferansiyel alt cebiri olsun. $\mathbb{R}\left\{\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}, \Delta^{-1}\right\}^{O(n+1)}$ nin V nin elemanları ve Δ^{-1} fonksiyonu ile üretilen diferansiyel alt cebiri $\mathbb{R}\{V, \Delta^{-1}\}$ ile ifade edilsin.

$V_0 = \left\{< \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} >, 1 \leq i \leq j \leq n\right\}$ kümesi tanımlansın ve $\mathbb{R}\{V_0\}$ da $\mathbb{R}\left\{\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}, \Delta^{-1}\right\}^{O(n+1)}$ nin V_0 ile üretilen diferansiyel alt cebiri olsun. $V_0 \subset V$ olduğundan $\mathbb{R}\,\{V_0\} \subset \mathbb{R}\{V\}$ olduğu açıktır.

Lemma 10. Her $i, j, l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ için $< \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j}, \frac{\partial x}{\partial u_l} > \in \mathbb{R}\{V_0\}$ dır.

İspat. Her $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ için $\frac{\partial}{\partial u_j} < \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_i} >= 2 < \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j}, \frac{\partial x}{\partial u_i} >$ elde edilir. V_0 kümesinin tanımından $< \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_i} > \in V_0$ dir ve dolayısıyla $< \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j}, \frac{\partial x}{\partial u_i} > \in \mathbb{R}\{V_0\}$ elde edilir. Diğer yandan $\frac{\partial}{\partial u_i} < \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} >=< \frac{\partial^2 x}{\partial u_i^2}, \frac{\partial x}{\partial u_j} > + < \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j}, \frac{\partial x}{\partial u_i} >$ olup, $< \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} >$ $, < \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j}, \frac{\partial x}{\partial u_i} >\in V_0$ olduğundan $< \frac{\partial^2 x}{\partial u_i^2}, \frac{\partial x}{\partial u_j} >\in \mathbb{R}\{V_0\}$ elde edilir. $i \neq j, i \neq l$ ve $j \neq l$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler elde edilir:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial u_j} < \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_l} >=< \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j}, \frac{\partial x}{\partial u_l} > + < \frac{\partial^2 x}{\partial u_j \partial u_l}, \frac{\partial x}{\partial u_i} > \\ \frac{\partial}{\partial u_i} < \frac{\partial x}{\partial u_j}, \frac{\partial x}{\partial u_l} >=< \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j}, \frac{\partial x}{\partial u_l} > + < \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_l}, \frac{\partial x}{\partial u_j} > \\ \frac{\partial}{\partial u_l} < \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} >=< \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_l}, \frac{\partial x}{\partial u_j} > + < \frac{\partial^2 x}{\partial u_j \partial u_l}, \frac{\partial x}{\partial u_i} > . \end{cases} \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial u_j} < \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_l} >= b_1, \frac{\partial}{\partial u_i} < \frac{\partial x}{\partial u_j}, \frac{\partial x}{\partial u_l} >= b_2, \frac{\partial}{\partial u_l} < \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} >= b_3,$$
$$< \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j}, \frac{\partial x}{\partial u_l} >= w_1, < \frac{\partial^2 x}{\partial u_j \partial u_l}, \frac{\partial x}{\partial u_i} >= w_2, < \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_l}, \frac{\partial x}{\partial u_j} >= w_3$$

diyelim. Bu durumda (1) denklem sistemi

$$\begin{aligned} &w_1 + w_2 = b_1 \\ &w_1 + w_3 = b_2 \\ &w_2 + w_3 = b_3 \end{aligned}$$

şeklini alır. Bu sistem için

$$\begin{aligned} &w_1 = \tfrac{1}{2}(b_1 + b_2 - b_3) \\ &w_2 = \tfrac{1}{2}(b_1 + b_3 - b_2) \\ &w_3 = \tfrac{1}{2}(b_2 + b_3 - b_1) \end{aligned}$$

çözümü elde edilir ve $< \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_l} >, < \frac{\partial x}{\partial u_j}, \frac{\partial x}{\partial u_l} >, < \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} >\in V_0$ olduğundan, $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}\{V_0\}$ olur. Böylece ispat tamamlanır. □

Lemma 11. $\Delta \in \mathbb{R}\{V\}$.

İspat. $\Delta = det \, \| < y_i, z_j > \|_{i,j=1}^{n+1}, y_i = z_i = \frac{\partial x}{\partial u_i}, 1 \leq i \leq n$ ve $y_{n+1} = z_{n+1} = \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}$ olduğunu biliyoruz. $\Delta \in \mathbb{R}\{V\}$ olduğunu göstermek için, her i, j için $< y_i, z_j >\in V$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. V nin tanımından, her $1 \leq i, j \leq n$ için $< y_i, z_j >=< \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} >\in V$ ve $< y_{n+1}, z_{n+1} >=< \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} >\in V$ olduğu görülür. Diğer yandan $i = n+1$ ve her $1 \leq j \leq n$ için $< y_i, z_j >=< \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}, \frac{\partial x}{\partial u_j} >$ dir. Yine benzer şekilde $j = n + 1$ ve her $1 \leq i \leq n$ için $< y_i, z_j >=< \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}, \frac{\partial x}{\partial u_i} >$ dir. Lemma 10 kullanılırsa her $1 \leq i \leq n$ için $< \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}, \frac{\partial x}{\partial u_i} >\in V$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Lemma 12. (Weyl, 1946) $\mathbb{R}^{n+1}$ deki tüm $y_1, y_2, \ldots, y_{n+2}, z_1, z_2, \ldots, z_{n+2}$ vektörleri için $detGr\,(y_1, y_2, \ldots, y_{n+2}; z_1, z_2, \ldots, z_{n+2}) = det \, \| < y_i, z_j > \|_{i,j}^{n+2} = 0$.

Lemma 13. $\sum_{i=1}^{n} m_i \geq 1$ ve $\sum_{i=1}^{n} p_i \geq 1$ olmak üzere $(m_1, m_2, \ldots, m_n), (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{N}^n$ sıralı $n-$lileri verilsin. $< x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} >, < x^{(p_1,p_2,\ldots,p_n)}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} > \in \mathbb{R}\{V, \Delta^{-1}\}$ ve her $1 \leq i \leq n$ için $< x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}, \frac{\partial x}{\partial u_i} >, < x^{(p_1,p_2,\ldots,p_n)}, \frac{\partial x}{\partial u_i} > \in \mathbb{R}\{V, \Delta^{-1}\}$ olsun. Bu takdirde $< x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}, x^{(p_1,p_2,\ldots,p_n)} > \in \mathbb{R}\{V, \Delta^{-1}\}$ dir.

İspat. Lemma 12 aşağıdaki vektörlere uygulanırsa

$$y_1 = z_1 = \frac{\partial x}{\partial u_1}, \ldots, y_n = z_n = \frac{\partial x}{\partial u_n},$$
$$y_{n+1} = z_{n+1} = \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}, y_{n+2} = x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}, z_{n+2} = x^{(p_1,p_2,\ldots,p_n)}$$

$A = \| < y_i, z_j > \|_{i=1}^{n+2}$ olmak üzere, $\det A = 0$ elde edilir. $j = 1, 2, \ldots, n+2$ olmak üzere, A matrisinin $< y_{n+2}, z_j >$ elemanının kofaktörünü $D_{n+2|j}$ ile ifade edelim. $\det A = 0$ olduğundan

$$< y_{n+2}, z_1 > D_{n+2|1} + \ldots + < y_{n+2}, z_{n+1} > D_{n+2|n+1} + < y_{n+2}, z_{n+2} > D_{n+2|n+2} = 0 \quad (2)$$

elde edilir. $D_{n+2|n+2} = \Delta$ olduğu dikkate alındığında, $\Delta \neq 0$ olduğundan, (2) den

$$\begin{aligned} < y_{n+2}, z_{n+2} > &= < x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}, x^{(p_1,p_2,\ldots,p_n)} > \\ &= -\Delta^{-1} \left(< y_{n+2}, z_1 > D_{n+2|1} + \ldots + < y_{n+2}, z_{n+1} > D_{n+2|n+1} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Lemmanın kabulleri gereğince $< y_{n+2}, z_{n+1} > = < x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} > \in \mathbb{R}\{V, \Delta^{-1}\}$ ve her $1 \leq i \leq n$ için $< y_{n+2}, z_i > = < x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}, \frac{\partial x}{\partial u_i} > \in \mathbb{R}\{V, \Delta^{-1}\}$ dir. Şimdi tüm $1 \leq s \leq n+1$ için $D_{n+2|s} \in \mathbb{R}\{V, \Delta^{-1}\}$ olduğunu göstereceğiz. $D_{n+2|s}$ tanım gereği aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$D_{n+2|s} = (-1)^{n+2+s} \det Gr(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}; z_1, z_2, \ldots, z_{s-1}, z_{s+1}, \ldots, z_{n+1}).$$

V nin tanımından $< y_{n+1}, z_{n+1} > \in \mathbb{R}\{V\}$ ve her $1 \leq i, j \leq n$ için $< y_i, z_j > \in \mathbb{R}\{V\}$ dir. Lemma 10'dan her $1 \leq i, j \leq n$ için $< y_{n+1}, z_j >, < y_i, z_{n+1} > \in \mathbb{R}\{V\}$ elde edilir. Lemma kabulünden her $1 \leq i \leq n$ için $< y_i, z_{n+2} > = < \frac{\partial x}{\partial u_i}, x^{(p_1,p_2,\ldots,p_n)} > \in \mathbb{R}\{V, \Delta^{-1}\}$ ve $< y_{n+1}, z_{n+2} > = < \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}, x^{(p_1,p_2,\ldots,p_n)} > \in \mathbb{R}\{V, \Delta^{-1}\}$ dir. Dolayısıyla her $1 \leq s \leq n+1$ için $D_{n+2|s} \in \mathbb{R}\{V, \Delta^{-1}\}$ olduğundan $< y_{n+2}, z_{n+2} > \in \mathbb{R}\{V, \Delta^{-1}\}$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Lemma 14. Her $1 \leq i, j \leq n$ için $< \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_i}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_j} > \in \mathbb{R}\{V, \Delta^{-1}\}$ dir.

İspat. Lemma 10'dan, her $1 \leq i, j \leq n$ için $< \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} > \in \mathbb{R}\{V\}$ olduğunu biliyoruz. V

nin tanımından, her $1 \leq i \leq n$ için $< \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_i}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} >\in V$ dir. Böylece Lemma 13'ün şartları sağlanmış olur ve her $1 \leq i, j \leq n$ için $< \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_i}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_j} >\in \mathbb{R}\{V, \Delta^{-1}\}$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Lemma 15. Her $1 \leq i, j \leq n$ için $< \frac{\partial^3 x}{\partial u_1^2 \partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} >\in \mathbb{R}\{V, \Delta^{-1}\}$ dir.

İspat. Her $1 \leq i, j \leq n$ için aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\frac{\partial}{\partial u_1} < \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} >=< \frac{\partial^3 x}{\partial u_1^2 \partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} > + < \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_i}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_j} > . \tag{3}$$

Her $1 \leq i, j \leq n$ için, Lemma 10'dan $< \frac{\partial^3 x}{\partial u_1^2 \partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} >\in \mathbb{R}\{V\}$ ve Lemma 14'ten $< \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_i}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_j} >\in \mathbb{R}\{V, \Delta^{-1}\}$ dir. Dolayısıyla, (3) denkleminden $< \frac{\partial^3 x}{\partial u_1^2 \partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} >\in \mathbb{R}\{V, \Delta^{-1}\}$ elde edilir. □

Lemma 16. Her $1 \leq i, j \leq n$ için $< \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} >\in \mathbb{R}\{V, \Delta^{-1}\}$ dir.

İspat. Her $1 \leq i, j \leq n$ için aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\frac{\partial}{\partial u_i} < \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}, \frac{\partial x}{\partial u_j} >=< \frac{\partial^3 x}{\partial u_1^2 \partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} > + < \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} > . \tag{4}$$

Her $1 \leq i, j \leq n$ için, Lemma 10'dan $< \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}, \frac{\partial x}{\partial u_j} >\in \mathbb{R}\{V\}$ ve Lemma 15'ten $< \frac{\partial^3 x}{\partial u_1^2 \partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} >\in \mathbb{R}\{V, \Delta^{-1}\}$ dir. Dolayısıyla, (4) denkleminden $< \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} >\in \mathbb{R}\{V, \Delta^{-1}\}$ elde edilir. □

Lemma 17. Her $1 \leq i \leq n$ için $< \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}, \frac{\partial^3 x}{\partial u_1^2 \partial u_i} >\in \mathbb{R}\{V\}$ dir.

İspat. $\frac{\partial}{\partial u_i} < \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} >= 2 < \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}, \frac{\partial^3 x}{\partial u_1^2 \partial u_i} >$ dir. $< \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} >\in V$ olduğundan, $< \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}, \frac{\partial^3 x}{\partial u_1^2 \partial u_i} >\in \mathbb{R}\{V\}$ elde edilir. □

Lemma 18. $\sum_{i=1}^{n} m_i \geq 1$ olmak üzere tüm $(m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ sıralı $n-$lileri için $< x^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}, \frac{\partial x}{\partial u_i} >\in \mathbb{R}\{V, \Delta^{-1}\}$ ve $< x^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} >\in \mathbb{R}\{V, \Delta^{-1}\}$ dir.

İspat. $r = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ olmak üzere, ispat için r üzerine tümevarım uygulayalım. $r = 1$ olsun. Bu takdirde V nin tanımından $< x^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}, \frac{\partial x}{\partial u_i} >=< \frac{\partial x}{\partial u_j}, \frac{\partial x}{\partial u_i} >\in V$ dir. $V \subset \mathbb{R}\{V, \Delta^{-1}\}$ olduğundan $< x^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}, \frac{\partial x}{\partial u_i} >\in \mathbb{R}\{V, \Delta^{-1}\}$ elde edilir. Diğer yandan Lemma 10 kullanılırsa $< x^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} >=< \frac{\partial x}{\partial u_j}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} >\in \mathbb{R}\{V, \Delta^{-1}\}$ elde edilir. Dolayısıyla $r = 1$ için iddia doğrudur. Kabul edelim ki iddia r için doğru olsun yani $< x^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}, \frac{\partial x}{\partial u_i} >, < x^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} >\in \mathbb{R}\{V, \Delta^{-1}\}$ olsun. Şimdi iddianın $r + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. Lemma 10 kullanılırsa, her $1 \leq i, j, l \leq n$ için

$< \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j}, \frac{\partial x}{\partial u_l} >\in \mathbb{R}\{V\}$ ve diğer yandan Lemma 16 kullanılırsa, her $1 \leq i, j \leq n$ için $< \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} >\in \mathbb{R}\{V, \Delta^{-1}\}$ elde edilir. Dolayısıyla, tümevarım hipotezi de dikkate alınırsa $x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}$ ve $\frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j}$ türevleri için Lemma 13'ün şartları sağlanır. Böylece her $1 \leq i, j \leq n$ için $< x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} >\in \mathbb{R}\{V, \Delta^{-1}\}$ elde edilir. $< x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}, \frac{\partial x}{\partial u_j} >$ çarpımının u_i ye göre türevi alınırsa $\frac{\partial x}{\partial u_i} < x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}, \frac{\partial x}{\partial u_j} >=< \frac{\partial x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} > + < x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} >$ elde edilir. $< x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}, \frac{\partial x}{\partial u_j} >, < x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} >\in \mathbb{R}\{V, \Delta^{-1}\}$ olduğundan, yukarıda eşitlik yardımıyla $< \frac{\partial x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} >\in \mathbb{R}\{V, \Delta^{-1}\}$ olduğu elde edilir. Diğer yandan, Lemma 15'ten, her $1 \leq i, j \leq n$ için $< \frac{\partial^3 x}{\partial u_1^2 \partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} >\in \mathbb{R}\{V, \Delta^{-1}\}$ ve Lemma 17'den, her $1 \leq i \leq n$ için $< \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}, \frac{\partial^3 x}{\partial u_1^2 \partial u_i} >\in \mathbb{R}\{V\}$ yazılır. Bu durumda tümevarım hipotezi de dikkate alınırsa $x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}$ ve $\frac{\partial^3 x}{\partial u_1^2 \partial u_i}$ türevleri için Lemma 13'ün şartları sağlanır. Böylece, her $1 \leq i \leq n$ için $< x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}, \frac{\partial^3 x}{\partial u_1^2 \partial u_i} >\in \mathbb{R}\{V, \Delta^{-1}\}$ elde edilir. $< x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} >$ çarpımının u_i ye göre türevi alınırsa $\frac{\partial x}{\partial u_i} < x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} >=< \frac{\partial x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}}{\partial u_i}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} > + < x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}, \frac{\partial^3 x}{\partial u_1^2 \partial u_i} >$ elde edilir. $< x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} >, < x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}, \frac{\partial^3 x}{\partial u_1^2 \partial u_i} >\in \mathbb{R}\{V, \Delta^{-1}\}$ olduğundan yukarıdaki eşitlik yardımıyla $< \frac{\partial x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}}{\partial u_i}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} >\in \mathbb{R}\{V, \Delta^{-1}\}$ olduğu elde edilir. Sonuç olarak $\frac{\partial x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}}{\partial u_i}$ türevi için $< \frac{\partial x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} >, < \frac{\partial x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}}{\partial u_i}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} >\in \mathbb{R}\{V, \Delta^{-1}\}$ bulunur. Bu ise iddianın $r+1$ için de doğru olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır. □

Lemma 19. $\sum_{i=1}^{n} m_i \geq 1$ ve $\sum_{i=n}^{n} p_i \geq 1$ olacak şekilde tüm $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$, $(p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{N}^n$ sıralı $n-$lileri için $< x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}, x^{(p_1,p_2,\ldots,p_n)} >\in \mathbb{R}\{V, \Delta^{-1}\}$ ve $R\{V, \Delta^{-1}\} = R\{x, \Delta^{-1}\}^{M(n+1)}$ dir.

İspat. Lemma 13 ve Lemma 18'den $\sum_{i=1}^{n} m_i \geq 1$ ve $\sum_{i=n}^{n} p_i \geq 1$ olacak şekilde tüm $(m_1, m_2, \ldots, m_n), (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{N}^n$ sıralı $n-$lileri için $< x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}, x^{(p_1,p_2,\ldots,p_n)} >\in \mathbb{R}\{V, \Delta^{-1}\}$ dır. $R\{V, \Delta^{-1}\} = R\{x, \Delta^{-1}\}^{M(n+1)}$ eşitliği için $R\{V, \Delta^{-1}\} \subset R\{x, \Delta^{-1}\}^{M(n+1)}$ olduğu açıktır. Lemma 7 ve Lemma 9'dan biliyoruz ki $\sum_{i=1}^{n} m_i \geq 1$ ve $\sum_{i=n}^{n} p_i \geq 1$ olacak şekilde tüm $(m_1, m_2, \ldots, m_n), (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{N}^n$ sıralı $n-$lileri için $< x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}, x^{(p_1,p_2,\ldots,p_n)} >$ sistemi $R\{x, \Delta^{-1}\}^{M(n+1)}$ diferansiyel cebirinin bir üreteç sistemidir. Diğer yandan $R\{V, \Delta^{-1}\}$ diferansiyel cebiri bu üreteçleri içerdiğinden $R\{V, \Delta^{-1}\} = R\{x, \Delta^{-1}\}^{M(n+1)}$ elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. □

Teorem 20. $< \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} >, 1 \leq i \leq j \leq n; < \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_r} >, 1 \leq r \leq n; \Delta^{-1}$ elemanlarının kümesi, $R\{x, \Delta^{-1}\}^{M(n+1)}$ diferansiyel cebirinin bir üreteç sistemidir.

İspat. Lemma 7, Lemma 9 ve Lemma 19'dan açıktır. □

$\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}$ türevlerinin tüm diferansiyel rasyonel fonksiyonlarının diferansiyel cismi $\mathbb{R} < \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n} >$ ve $\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}$ türevlerinin tüm $G-$invaryant diferansiyel rasyonel fonksiyonlarının diferansiyel cismi $\mathbb{R} < \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n} >^G$ olsun.

Lemma 21. $\mathbb{R} < x >^{M(n+1)} = \mathbb{R} < \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n} >^{O(n+1)}$.

İspat. $f < x >= q\left(x, \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}, \ldots, x^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}\right) \in \mathbb{R} < x >^{M(n+1)}$ olsun. Bu takdirde her $g \in O(n+1)$ ve $b \in \mathbb{R}^{n+1}$ için

$$
\begin{aligned}
& f < gx + b > \\
& = f\left(gx + b, \frac{\partial(gx+b)}{\partial u_1}, \frac{\partial(gx+b)}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial(gx+b)}{\partial u_n}, \ldots, (gx+b)^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}\right) \\
& = f\left(gx + b, g\frac{\partial x}{\partial u_1}, g\frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, g\frac{\partial x}{\partial u_n}, \ldots, gx^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}\right) \\
& = f\left(x, \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}, \ldots, x^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}\right) = f < x >
\end{aligned}
$$

yazılır. Yukarıdaki eşitliği kullanarak f fonksiyonunun x ten bağımsız olduğunu gösterelim. Eşitlik her $g \in O(n+1)$ için sağlandığından, $g = I \in O(n+1)$ birim matrisi için de sağlanır. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
& f\left(x + b, \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}, \ldots, x^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}\right) \\
& = f\left(x, \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}, \ldots, x^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Diğer yandan, bu eşitlik her $b \in \mathbb{R}^{n+1}$ için sağlandığından, keyfi bir $u_0 \in \mathbb{R}^n$ noktası için $b = -x(u_0)$ için de sağlanır. Böylece,

$$
\begin{aligned}
& f\left(x\left(u_0\right) - x(u_0), \frac{\partial x}{\partial u_1}(u_0), \frac{\partial x}{\partial u_2}(u_0), \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}(u_0), \ldots, x^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}(u_0)\right) \\
& = f\left(x(u_0), \frac{\partial x}{\partial u_1}(u_0), \frac{\partial x}{\partial u_2}(u_0), \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}(u_0), \ldots, x^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}(u_0)\right) \\
& = f\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}(u_0), \frac{\partial x}{\partial u_2}(u_0), \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}(u_0), \ldots, x^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}(u_0)\right)
\end{aligned}
$$

Son eşitlik her u_0 için elde edilebildiğinden

$$
\begin{aligned}
& f\left(x, \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}, \ldots, x^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}\right) \\
& = f\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}, \ldots, x^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan $f \in \mathbb{R} < \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n} >^{O(n+1)}$ elde edilmiş olur.

Tersine,

$$f\left(\frac{\partial x}{\partial u_1},\frac{\partial x}{\partial u_2},\ldots,\frac{\partial x}{\partial u_n},\ldots,x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}\right)\in\mathbb{R}<\frac{\partial x}{\partial u_1},\frac{\partial x}{\partial u_2},\ldots,\frac{\partial x}{\partial u_n}>^{O(n+1)}$$

olsun. Bu polinom ötelemelere göre invaryant olduğundan $f\in\mathbb{R}<x>^{M(n+1)}$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Lemma 22. $f\in\mathbb{R}<\frac{\partial x}{\partial u_1},\frac{\partial x}{\partial u_2},\ldots,\frac{\partial x}{\partial u_n}>^{O(n+1)}$ olsun. Bu takdirde, $f=\frac{f_1}{f_2}$ olacak şekilde f_1 ve f_2, $O\left(n+1\right)-$invaryant diferansiyel polinomları mevcuttur.

İspat. $f\in\mathbb{R}<\frac{\partial x}{\partial u_1},\frac{\partial x}{\partial u_2},\ldots,\frac{\partial x}{\partial u_n}>^{O(n+1)}$ olsun. Bu takdirde tanım gereği, $f=\frac{f_1}{f_2}$ olacak şekilde, çarpanları λ olan f_1 ve f_2 nispi invaryant diferansiyel polinomları mevcuttur. Ancak $O(n+1)$ grubu için nispi invaryantların çarpanları $+1$ ya da -1 dir. Dolayısıyla $f=\frac{f_1}{f_2}$ olacak şekilde f_1 ve f_2 $O\left(n+1\right)-$invaryant diferansiyel polinomları mevcuttur. □

Lemma 23. $\left\{<x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)},x^{(p_1,p_2,\ldots,p_n)}>:\sum_{i=1}^{n}m_i\geq 1,\sum_{i=1}^{n}p_i\geq 1,m_i,p_i\in\mathbb{N}\right\}$ kümesi $\mathbb{R}<\frac{\partial x}{\partial u_1},\frac{\partial x}{\partial u_2},\ldots,\frac{\partial x}{\partial u_n}>^{O(n+1)}$ diferansiyel cisminin bir üreteç sistemidir.

İspat. $\mathbb{R}\left\{x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)},m_i\in\mathbb{N}\right\}^{O(n+1)}$ kümesi, $m_i\in\mathbb{N},\sum_{i=1}^{n}m_i\geq 1$ olmak üzere, $\left\{x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}\right\}$ sisteminin $O\left(n+1\right)-$invaryant diferansiyel polinomlarının diferansiyel cebiri olsun. $x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}$ türevleri $\frac{\partial x}{\partial u_1},\frac{\partial x}{\partial u_2},\ldots,\frac{\partial x}{\partial u_n}$ türevleri ile üretilebileceğinden $\mathbb{R}\left\{x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)},m_i\in\mathbb{N}\right\}^{O(n+1)}=\mathbb{R}\left\{\frac{\partial x}{\partial u_1},\frac{\partial x}{\partial u_2},\ldots,\frac{\partial x}{\partial u_n}\right\}^{O(n+1)}$ olduğu açıktır. Diğer yandan (Weyl, 1946) çalışmasında verilen, $O(n)$ için temel teorem gereğince, $\left\{<x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)},x^{(p_1,p_2,\ldots,p_n)}>:\sum_{i=1}^{n}m_i\geq 1,\sum_{i=1}^{n}p_i\geq 1,m_i,p_i\in\mathbb{N}\right\}$ sistemi $\mathbb{R}\left\{x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)},m_i\in\mathbb{N}\right\}^{O(n+1)}$ diferansiyel cebirinin bir üreteç sistemidir. Dolayısıyla bir önceki eşitlik dikkate alındığında $\left\{<x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)},x^{(p_1,p_2,\ldots,p_n)}>:\sum_{i=1}^{n}m_i\geq 1,\sum_{i=1}^{n}p_i\geq 1,m_i,p_i\in\mathbb{N}\right\}$ sistemi $\mathbb{R}\left\{\frac{\partial x}{\partial u_1},\frac{\partial x}{\partial u_2},\ldots,\frac{\partial x}{\partial u_n}\right\}^{O(n+1)}$ diferansiyel cebirinin bir üreteç sistemidir. Lemma 21 ve Lemma 22 dikkate alınırsa, $\left\{<x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)},x^{(p_1,p_2,\ldots,p_n)}>:\sum_{i=1}^{n}m_i\geq 1,\sum_{i=1}^{n}p_i\geq 1,m_i,p_i\in\mathbb{N}\right\}$ kümesi $\mathbb{R}<\frac{\partial x}{\partial u_1},\frac{\partial x}{\partial u_2},\ldots,\frac{\partial x}{\partial u_n}>^{O(n+1)}$ diferansiyel cisminin bir üreteç sistemidir. □

Teorem 24. $<\frac{\partial x}{\partial u_i},\frac{\partial x}{\partial u_j}>,1\leq i\leq j\leq n;<\frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2},\frac{\partial^2 x}{\partial u_1\partial u_r}>,1\leq r\leq n$ elemanlarının kümesi, $\mathbb{R}<x>^{M(n+1)}$ diferansiyel cisminin bir üreteç sistemidir.

İspat. V kümesi teoremin ifadesinde verilen sistem olsun. Lemma 7'den $\Delta\in\mathbb{R}\{V\}\subset\mathbb{R}<V>$ elde edilir. Buradan

$$\mathbb{R}\left\{V,\Delta^{-1}\right\}\subset\mathbb{R}<V>\subset\mathbb{R}<\frac{\partial x}{\partial u_1},\frac{\partial x}{\partial u_2},\ldots,\frac{\partial x}{\partial u_n}>^{O(n+1)}$$

elde edilir. Lemma 23'ten biliyoruz ki

$$\left\{< x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}, x^{(p_1,p_2,\ldots,p_n)} >: \sum_{i=1}^{n} m_i \geq 1, \sum_{i=1}^{n} p_i \geq 1, m_i, p_i \in \mathbb{N}\right\}$$

kümesi, $\mathbb{R} < \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n} >^{O(n+1)}$ nin bir üreteç sistemidir ve Lemma 19'dan biliyoruz ki $\sum_{i=1}^{n} m_i \geq 1$ ve $\sum_{i=n}^{n} p_i \geq 1$ olacak şekildeki tüm $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$, $(p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{N}^n$ sıralı $n-$lileri için $< x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}, x^{(p_1,p_2,\ldots,p_n)} >\in \mathbb{R}\{V, \Delta^{-1}\}$ dir. $\mathbb{R}\{V, \Delta^{-1}\} \subset \mathbb{R} < V >$ olduğundan, $\sum_{i=1}^{n} m_i \geq 1$ ve $\sum_{i=n}^{n} p_i \geq 1$ olacak şekildeki bütün $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$, $(p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{N}^n$ sıralı $n-$lileri için $< x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}, x^{(p_1,p_2,\ldots,p_n)} >\in \mathbb{R}\{V\}$ olup, $R\{V\} = \mathbb{R} < \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n} >^{O(n+1)}$ elde edilir. Lemma 21'den $R\{V\} = \mathbb{R} < x >^{M(n+1)}$ elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. □

$a_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{n+1j})^T$ vektörü bir sütun vektörü olmak üzere, $\mathbb{R}^{n+1}$ deki her $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$ vektör kümesi için $[a_1 a_2 \ldots a_{n+1}] = \det \|a_{ij}\|_{i,j=1}^{n+1}$ olsun. $\mathbb{R}^{n+1}$ deki herhangi bir $x(u)$ hiperyüzeyi için $\left[x^{(m_{11},m_{12},\ldots,m_{1n})} x^{(m_{21},m_{22},\ldots,m_{2n})} \ldots x^{(m_{n+1,1},m_{n+2,2},\ldots,m_{n+1,n})}\right]$ ve $y_1 = z_1 = \frac{\partial x}{\partial u_1}$, $y_2 = z_2 = \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, y_n = z_n = \frac{\partial x}{\partial u_n}$ olmak üzere $\delta = \delta_x = \det Gr(y_1, y_2, \ldots, y_n; z_1, z_2, \ldots, z_n)$ determinantlarını göz önüne alalım.

Lemma 25. $\mathbb{R}\{x, \delta^{-1}, \Delta^{-1}\}^{SM(n+1)} = \mathbb{R}\{\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}, \delta^{-1}, \Delta^{-1}\}^{SO(n+1)}$.

İspat. $q\{x, \delta^{-1}, \Delta^{-1}\} \in \mathbb{R}\{x, \delta^{-1}, \Delta^{-1}\}^{SM(n+1)}$ olsun. Bu takdirde her $g \in SO(n+1)$ ve $b \in \mathbb{R}^{n+1}$ için

$$\begin{aligned}
&q\left\{gx+b, \delta_{gx+b}^{-1}, \Delta^{-1}(gx+b)\right\} \\
&= q\left(gx+b, \frac{\partial(gx+b)}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial(gx+b)}{\partial u_n}, \ldots, \delta_{gx+b}^{-1}, \Delta^{-1}(gx+b)\right) \\
&= q\left(gx+b, g\frac{\partial x}{\partial u_1}, g\frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, g\frac{\partial x}{\partial u_n}, \ldots, gx^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}, \delta_x^{-1}, \Delta^{-1}(x)\right) \\
&= q\left(x, \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}, \ldots, x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}, \delta_x^{-1}, \Delta^{-1}(x)\right) = q\{x, \delta_x^{-1}, \Delta^{-1}(x)\}
\end{aligned}$$

yazılır. Yukarıdaki eşitliği kullanarak q polinomunun x ten bağımsız olduğunu gösterelim. Eşitlik her $g \in SO(n+1)$ için sağlandığından, $g = I \in SO(n+1)$ birim matrisi için de sağlanır. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&q\left(x+b, \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}, \ldots, x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}, \delta_x^{-1}, \Delta^{-1}(x)\right) \\
&= q\left(x, \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}, \ldots, x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}, \delta_x^{-1}, \Delta^{-1}(x)\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan, bu eşitlik her $b \in \mathbb{R}^{n+1}$ için sağlandığından, keyfi bir $u_0 \in \mathbb{R}^n$ noktası için $b = -x(u_0)$ için de sağlanır. Böylece,

$$q\left(x\left(u_0\right), \frac{\partial x}{\partial u_1}\left(u_0\right), \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}\left(u_0\right), \ldots, x^{(m_1,\ldots,m_n)}\left(u_0\right), \delta_x^{-1}(u_0), \Delta^{-1}\left(x\right)\left(u_0\right)\right)$$
$$= q\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}\left(u_0\right), \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}\left(u_0\right), \ldots, x^{(m_1,\ldots,m_n)}\left(u_0\right), \delta_x^{-1}(u_0), \Delta^{-1}\left(x\right)\left(u_0\right)\right)$$

elde edilir. Son eşitlik her u_0 için elde edilebildiğinden

$$q\left(x, \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}, \ldots, x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}, \delta_x^{-1}, \Delta^{-1}\left(x\right)\right)$$
$$= q\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}, \ldots, x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}, \delta_x^{-1}, \Delta^{-1}\left(x\right)\right)$$

elde edilir. Buradan $q \in \mathbb{R}\left\{\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}, \delta^{-1}, \Delta^{-1}\right\}^{SO(n+1)}$ elde edilmiş olur.

Tersine, $q\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}, \ldots, x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}, \delta_x^{-1}, \Delta^{-1}\left(x\right)\right)$ polinomunu alalım ve bu polinom, $\mathbb{R}\left\{\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}, \delta^{-1}, \Delta^{-1}\right\}^{SO(n+1)}$ kümesinin bir elemanı olsun. Bu polinom ötelemelere göre invaryant olduğundan $q \in \mathbb{R}\left\{x, \delta^{-1}, \Delta^{-1}\right\}^{M(n+1)}$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Lemma 26. $\sum_{j=1}^{n} m_{ij} \geq 1, \sum_{i=1}^{n} p_i \geq 1, \sum_{i=1}^{n} q_i \geq 1$ olmak üzere δ^{-1}, Δ^{-1}, $\left[x^{(m_{11},\ldots,m_{1n})}x^{(m_{21},\ldots,m_{2n})}\ldots x^{(m_{n+1,1},\ldots,m_{n+1,n})}\right]$, $< x^{(p_1,\ldots,p_n)}, x^{(q_1,\ldots,q_n)} >$ elemanlarının kümesi, $\mathbb{R}\{\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}, \delta^{-1}, \Delta^{-1}\}^{SO(n+1)}$ diferansiyel cebirinin bir üreteç sistemidir.

İspat. $\mathbb{R}\left\{x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}, \sum_{j=1}^{n} m_i \geq 1\right\}^{SO(n+1)}$ kümesi, $\sum_{j=1}^{n} m_i \geq 1$ olmak üzere, tüm $x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}$ türevlerinin $SO\left(n+1\right)-$invaryant polinomlarının cebiri olsun. $\sum_{j=1}^{n} m_i \geq 1$ olmak üzere, $x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}$ türevleri $\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}$ türevleri ile üretilebileceğinden $\mathbb{R}\left\{x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}, m_i \in \mathbb{N}\right\}^{SO(n+1)} = \mathbb{R}\left\{\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}\right\}^{SO(n+1)}$ olduğu açıktır. Diğer yandan (Weyl, 1946) çalışmasında verilen, $SO(n)$ için temel teorem gereğince,

$$\left[x^{(m_{11},m_{12},\ldots,m_{1n})}x^{(m_{21},m_{22},\ldots,m_{2n})}\ldots x^{(m_{n+1,1},m_{n+2,2},\ldots,m_{n+1,n})}\right], \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \geq 1,$$
$$< x^{(p_1,p_2,\ldots,p_n)}, x^{(q_1,q_2,\ldots,q_n)} >, \sum_{i=1}^{n} p_i \geq 1, \sum_{i=1}^{n} q_i \geq 1$$

sistemi $\mathbb{R}\left\{x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}, m_i \in \mathbb{N}\right\}^{SO(n+1)}$ diferansiyel cebirinin bir üreteç sistemidir. Dolayısıyla bir önceki eşitlik dikkate alındığında, yukarıdaki sistem $\mathbb{R}\left\{\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}\right\}^{SO(n+1)}$ diferansiyel cebirinin bir üreteç sistemidir. Diğer yandan, $f \in \mathbb{R}\{\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}, \delta^{-1}, \Delta^{-1}\}^{SO(n+1)}$ olsun. Bu takdirde f fonksiyonu, $h\left\{\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}\right\} \in \mathbb{R}\left\{\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}\right\}$ ve $m, k \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $f = \frac{h\{\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}\}}{\delta^m \Delta^k}$ şeklinde yazılabilir. Keyfi bir $g \in SO(n+1)$ elemanı için f bir $SO\,(n+1)\,-$invaryant fonksiyon olduğundan $\frac{h\left(\frac{\partial (gx)}{\partial u_1}, \frac{\partial (gx)}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial (gx)}{\partial u_n}\right)}{\delta_{gx}^m \Delta^k(gx)} = \frac{h\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}\right)}{\delta_x^m \Delta^k(x)}$ yazılır. Diğer yandan δ, Δ fonksiyonları $M\,(n+1)\,-$invaryant fonksiyonlar olduklarından $h\left(\frac{\partial (gx)}{\partial u_1}, \frac{\partial (gx)}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial (gx)}{\partial u_n}\right) = h\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}\right)$ bulunur, yani $h \in \mathbb{R}\left\{\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}\right\}^{SO(n+1)}$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

$< \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} >, 1 \leq i \leq j \leq n; < \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_s} >, 2 \leq s \leq n; \left[\frac{\partial x}{\partial u_1}\frac{\partial x}{\partial u_2}\ldots\frac{\partial x}{\partial u_n}\frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}\right]$ elemanlarının kümesi Z ile ifade edilsin. $\mathbb{R}\{Z\}$, $\mathbb{R}\{\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}, \delta^{-1}, \Delta^{-1}\}^{SO(n+1)}$ diferansiyel cebirinin, Z sistemi ile üretilen diferansiyel alt cebiri olsun. Diğer yandan, $\mathbb{R} < \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n} >^{SO(n+1)}$ diferansiyel cebirinin $\{Z, \delta^{-1}, \Delta^{-1}\}$ sistemi ile üretilen diferansiyel alt cebiri $\mathbb{R}\left\{Z, \delta^{-1}, \Delta^{-1}\right\}$ ile ifade edilsin.

Lemma 27. $\delta \in \mathbb{R}\{Z\}$.

İspat. Her $1 \leq i \leq j \leq n$ için $< y_i, z_j > = < \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} > \in Z$ olduğundan $\delta \in \mathbb{R}\{Z\}$ dir. □

Lemma 28. (Weyl, 1946) $\mathbb{R}^{n+1}$ deki her $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}, z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}$ vektörleri için $[y_1 y_2 \ldots y_{n+1}]\,[z_1 z_2 \ldots z_{n+1}] = \det \|< y_i, z_j >\|_{i,j=1}^{n+1}$ aşitliği sağlanır.

Lemma 29. $\Delta \in \mathbb{R}\{Z\}$.

İspat. $y_1 = z_1 = \frac{\partial x}{\partial u_1}, y_2 = z_2 = \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, y_n = z_n = \frac{\partial x}{\partial u_n}, y_{n+1} = z_{n+1} = \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}$ vektörleri için Lemma 28 uygulanırsa

$$\left[\frac{\partial x}{\partial u_1}\frac{\partial x}{\partial u_2}\cdots\frac{\partial x}{\partial u_n}\frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}\right]^2 = \det \|< y_i, z_j >\|_{i,j=1}^{n+1} = \Delta \tag{5}$$

olup $\Delta \in Z$ elde edilir. □

Lemma 30. $< \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} > \in \mathbb{R}\{Z, \delta^{-1}\}$ ve $V \subset \mathbb{R}\{Z, \delta^{-1}\}$ dir.

İspat. $1 \leq j \leq n+1$ olmak üzere, (5) denklemindeki $\|< y_i, z_j >\|_{i,j=1}^{n+1}$ matrisinin $< y_{n+1}, z_j >$ elemanının kofaktörünü $D_{n+1|j}$ ile gösterelim. Bu takdirde (5) denkleminden

$$\Delta = < y_{n+1}, z_1 > D_{n+1|1} + \ldots + < y_{n+1}, z_n > D_{n+1|n} + < y_{n+1}, z_{n+1} > D_{n+1|n+1} \tag{6}$$

elde edilir. $D_{n+1|n+1} = \delta$ ve $\delta \neq 0$ olduğundan, $D_{n+1|n+1} \neq 0$ olup, (6) denkleminden

$$\begin{aligned} < y_{n+1}, z_{n+1} > &=< \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} > \\ &= \Delta\delta^{-1} - < y_{n+1}, z_1 > D_{n+1|1}\delta^{-1} - \ldots - < y_{n+1}, z_n > D_{n+1|n}\delta^{-1} \end{aligned}$$

elde edilir. $V_0 \subset Z$ olduğundan $\mathbb{R}\{V_0\} \subset \mathbb{R}\{Z\}$ dir. Lemma 10'dan biliyoruz ki her $1 \leq j \leq n$ için $< y_{n+1}, z_j >=< \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}, \frac{\partial x}{\partial u_j} >\in R\{V_0\} \subset \mathbb{R}\{Z\}$ dir. Şimdi her $1 \leq s \leq n$ için $D_{n+1|s} \in \mathbb{R}\{Z\}$ olduğunu gösterelim. $D_{n+1|s} = (-1)^{n+1+s} \det Gr(y_1, y_2, \ldots, y_n; z_1, z_2, \ldots, z_{s-1}, z_{s+1}, \ldots, z_{n+1})$ olduğunu $D_{n+1|s}$ tanımından biliyoruz. Bu eşitlikten $D_{n+1|s}$ nin elemanlarının $1 \leq i, j \leq n$ ve $j \neq s$ için $< y_i, z_j >$ ve $1 \leq k \leq n$ için $< y_k, z_{n+1} >$ formunda olduğu elde edilir. Her $1 \leq i, j \leq n$ ve $j \neq s$ için, Z nin tanımından $< y_i, z_j >\in Z \subset \mathbb{R}\{Z\}$ elde edilir. Diğer yandan, Lemma 10'dan, her $1 \leq k \leq n$ için $< y_k, z_{n+1} >\in R\{V_0\} \subset \mathbb{R}\{Z\}$ elde edilir. Dolayısıyla her $1 \leq s \leq n$ için $D_{n+1|s} \in \mathbb{R}\{Z\}$ olur. Böylece $< y_{n+1}, z_{n+1} >=< \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} >\in \mathbb{R}\{Z, \delta^{-1}\}$ elde edilir. $V \subset Z \cup \{< y_{n+1}, z_{n+1} >\}$ olduğundan $V \subset \mathbb{R}\{Z, \delta^{-1}\}$ elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. □

Lemma 31. $\sum_{i=1}^{n} p_i \geq 1, \sum_{i=1}^{n} r_i \geq 1, p_i, r_i \in \mathbb{N}$ için $< x^{(p_1,p_2,\ldots,p_n)}, x^{(r_1,r_2,\ldots,r_n)} >\in \mathbb{R}\{Z, \delta^{-1}, \Delta^{-1}\}$ dir.

İspat. Lemma 30'dan $\mathbb{R}\{Z, \delta^{-1}\}$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $\mathbb{R}\{V, \Delta^{-1}\} \subset \mathbb{R}\{Z, \delta^{-1}, \Delta^{-1}\}$ dir. Lemma 19'dan $\sum_{i=1}^{n} p_i \geq 1, \sum_{i=1}^{n} r_i \geq 1, p_i, r_i \in \mathbb{N}$ olmak üzere $< x^{(p_1,p_2,\ldots,p_n)}, x^{(r_1,r_2,\ldots,r_n)} >\in \mathbb{R}\{Z, \delta^{-1}, \Delta^{-1}\}$ elde edilir. □

Lemma 32. $\sum_{j=1}^{n} m_{ij} \geq 1, 1 \leq i \leq n+1, m_{ij} \in \mathbb{N}$ için

$$\left[x^{(m_{11},m_{12},\ldots,m_{1n})} x^{(m_{21},m_{22},\ldots,m_{2n})} \ldots x^{\left(m_{n+1|1},m_{n+1|2},\ldots,m_{n+1|n}\right)}\right] \in \mathbb{R}\{Z, \delta^{-1}, \Delta^{-1}\}$$

dir.

İspat.

$$\begin{aligned} &y_1 = \frac{\partial x}{\partial u_1}, y_2 = \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, y_n = \frac{\partial x}{\partial u_n}, y_{n+1} = \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} \\ &z_1 = x^{(m_{11},m_{12},\ldots,m_{1n})}, z_2 = x^{(m_{21},m_{22},\ldots,m_{2n})}, \ldots, z_{n+1} = x^{\left(m_{n+1|1},m_{n+1|2},\ldots,m_{n+1|n}\right)} \end{aligned}$$

vektörleri için Lemma 28 uygulanırsa

$$[y_1 y_2 \ldots y_{n+1}]\,[z_1 z_2 \ldots z_{n+1}] = \det \| < y_i, z_j > \|_{i,j=1}^{n+1} \tag{7}$$

elde edilir. (4) denkleminden $\Delta = [y_1 y_2 \ldots y_{n+1}]^2$ olduğunu biliyoruz. (7) denkleminden $[z_1 z_2 \ldots z_{n+1}] = \Delta^{-1}[y_1 y_2 \ldots y_{n+1}] \det \| < y_i, z_j > \|_{i,j=1}^{n+1}$ yazılabilir. Lemma 31'den her $1 \leq i, j \leq n+1$ için $< y_i, z_j > \in \mathbb{R}\{Z, \delta^{-1}, \Delta^{-1}\}$ dır. Dolayısıyla $\det \| < y_i, z_j > \|_{i,j=1}^{n+1} \in \mathbb{R}\{Z, \delta^{-1}, \Delta^{-1}\}$ dir. Ayrıca $[y_1 y_2 \ldots y_{n+1}] \in Z$ olduğundan $[y_1 y_2 \ldots y_{n+1}] \in \mathbb{R}\{Z, \delta^{-1}, \Delta^{-1}\}$ dir. Böylece $[z_1 z_2 \ldots z_{n+1}] \in \mathbb{R}\{Z, \delta^{-1}, \Delta^{-1}\}$ olup, ispat tamamlanır. □

Teorem 33. $\left[\frac{\partial x}{\partial u_1} \frac{\partial x}{\partial u_2} \ldots \frac{\partial x}{\partial u_n} \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}\right]$; δ^{-1}; Δ^{-1}; $< \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} >$, $1 \leq i \leq j \leq n$; $< \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_s} >$, $2 \leq s \leq n$ elemanlarının kümesi, $\mathbb{R}\{x, \delta^{-1}, \Delta^{-1}\}^{SM(n+1)}$ diferansiyel cebirinin bir üreteç sistemidir.

İspat. Lemma 25'ten, Lemma 26'nın ifadesindeki sistem $\mathbb{R}\{x, \delta^{-1}, \Delta^{-1}\}^{SM(n+1)}$ diferansiyel cebirinin bir üreteç sistemidir. Lemma 31'den $\sum_{i=1}^{n} p_i \geq 1$, $\sum_{i=1}^{n} r_i \geq 1$, $p_i, r_i \in \mathbb{N}$ için $< x^{(p_1, p_2, \ldots, p_n)}, x^{(r_1, r_2, \ldots, r_n)} > \in \mathbb{R}\{Z, \delta^{-1}, \Delta^{-1}\}$ ve Lemma 32'den $\sum_{j=1}^{n} m_{ij} \geq 1$, $1 \leq i \leq n+1, m_{ij} \in \mathbb{N}$ için

$$\left[x^{(m_{11}, m_{12}, \ldots, m_{1n})} x^{(m_{21}, m_{22}, \ldots, m_{2n})} \ldots x^{\left(m_{n+1|1}, m_{n+1|2}, \ldots, m_{n+1|n}\right)}\right] \in \mathbb{R}\{Z, \delta^{-1}, \Delta^{-1}\}$$

dir. Yani, $\mathbb{R}\{Z, \delta^{-1}, \Delta^{-1}\}$ diferansiyel cebiri $\mathbb{R}\{x, \delta^{-1}, \Delta^{-1}\}^{SM(n+1)}$ diferansiyel cebirinin üreteçlerini içerir. Dolayısıyla $\mathbb{R}\{Z, \delta^{-1}, \Delta^{-1}\} = \mathbb{R}\{x, \delta^{-1}, \Delta^{-1}\}^{SM(n+1)}$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Lemma 34. $\mathbb{R} < x >^{SM(n+1)} = \mathbb{R} < \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n} >^{SO(n+1)}$.

İspat. $q < x > = q\left(x, \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}, \ldots, x^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}, \Delta^{-1}\right) \in \mathbb{R} < x >^{SM(n+1)}$ olsun. Bu takdirde her $g \in SO(n+1)$ ve $b \in \mathbb{R}^{n+1}$ için

$$\begin{aligned}
& q < gx + b > \\
&= q\left(gx + b, \frac{\partial(gx+b)}{\partial u_1}, \frac{\partial(gx+b)}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial(gx+b)}{\partial u_n}, \ldots, (gx+b)^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}\right) \\
&= q\left(gx + b, g\frac{\partial x}{\partial u_1}, g\frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, g\frac{\partial x}{\partial u_n}, \ldots, gx^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}\right) \\
&= q\left(x, \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}, \ldots, x^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}\right) = q < x >
\end{aligned}$$

yazılır. Yukarıdaki eşitliği kullanarak q polinomunun x ten bağımsız olduğunu gösterelim. Eşitlik her $g \in SO(n+1)$ için sağlandığından, $g = I \in SO(n+1)$ birim matrisi için de sağlanır. Bu durumda

$$q\left(x+b,\frac{\partial x}{\partial u_1},\frac{\partial x}{\partial u_2},\ldots,\frac{\partial x}{\partial u_n},\ldots,x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}\right)$$
$$=q\left(x,\frac{\partial x}{\partial u_1},\frac{\partial x}{\partial u_2},\ldots,\frac{\partial x}{\partial u_n},\ldots,x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}\right)$$

elde edilir. Diğer yandan, bu eşitlik her $b\in\mathbb{R}^{n+1}$ için sağlandığından, keyfi bir $u_0\in\mathbb{R}^n$ noktası için $b=-x(u_0)$ için de sağlanır. Böylece,

$$q\left(x\left(u_0\right)-x(u_0),\frac{\partial x}{\partial u_1}(u_0),\frac{\partial x}{\partial u_2}(u_0),\ldots,\frac{\partial x}{\partial u_n}(u_0),\ldots,x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}(u_0)\right)$$
$$=q\left(x(u_0),\frac{\partial x}{\partial u_1}(u_0),\frac{\partial x}{\partial u_2}(u_0),\ldots,\frac{\partial x}{\partial u_n}(u_0),\ldots,x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}(u_0)\right)$$
$$=q\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}(u_0),\frac{\partial x}{\partial u_2}(u_0),\ldots,\frac{\partial x}{\partial u_n}(u_0),\ldots,x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}(u_0)\right)$$

elde edilir. Son eşitlik her u_0 için elde edilebildiğinden

$$q\left(x,\frac{\partial x}{\partial u_1},\frac{\partial x}{\partial u_2},\ldots,\frac{\partial x}{\partial u_n},\ldots,x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}\right)$$
$$=q\left(\frac{\partial x}{\partial u_1},\frac{\partial x}{\partial u_2},\ldots,\frac{\partial x}{\partial u_n},\ldots,x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}\right)$$

yazılır. Buradan $q\in\mathbb{R}<\frac{\partial x}{\partial u_1},\frac{\partial x}{\partial u_2},\ldots,\frac{\partial x}{\partial u_n}>^{SO(n+1)}$ elde edilmiş olur.

Tersine,

$$q\left(\frac{\partial x}{\partial u_1},\frac{\partial x}{\partial u_2},\ldots,\frac{\partial x}{\partial u_n},\ldots,x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}\right)\in\mathbb{R}<\frac{\partial x}{\partial u_1},\frac{\partial x}{\partial u_2},\ldots,\frac{\partial x}{\partial u_n}>^{SO(n+1)}$$

olsun. Bu polinom ötelemelere göre invaryant olduğundan $q\in\mathbb{R}<x>^{SM(n+1)}$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Lemma 35. $f\in\mathbb{R}<\frac{\partial x}{\partial u_1},\frac{\partial x}{\partial u_2},\ldots,\frac{\partial x}{\partial u_n}>^{SO(n+1)}$ olsun. Bu takdirde, $f=\frac{f_1}{f_2}$ olacak şekilde f_1 ve f_2 $SO\left(n+1\right)-$invaryant diferansiyel polinomları mevcuttur.

İspat. $f\in\mathbb{R}<\frac{\partial x}{\partial u_1},\frac{\partial x}{\partial u_2},\ldots,\frac{\partial x}{\partial u_n}>^{SO(n+1)}$ olsun. Bu takdirde tanım gereği, $f=\frac{f_1}{f_2}$ olacak şekilde, çarpanları λ olan f_1 ve f_2 nispi invaryant diferansiyel polinomları mevcuttur. Ancak $SO(n+1)$ grubu için nispi invaryantların çarpanları $+1$ dir. Dolayısıyla $f=\frac{f_1}{f_2}$ olacak şekilde f_1 ve f_2 $SO\left(n+1\right)-$invaryant diferansiyel polinomları mevcuttur. □

Lemma 36. $1\leq i\leq n+1$, $\sum_{j=1}^{n}m_{ij}\geq 1$, $\sum_{i=1}^{n}p_i\geq 1$, $\sum_{i=1}^{n}q_i\geq 1$ olmak üzere,

$$\left[x^{(m_{11},\ldots,m_{1n})}x^{(m_{21},\ldots,m_{2n})}\ldots x^{(m_{n+1|1},\ldots,m_{n+1|n})}\right],<x^{(p_1,\ldots,p_n)},x^{(q_1,\ldots,q_n)}> \tag{8}$$

sistemi $\mathbb{R} < \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n} >^{SO(n+1)}$ diferansiyel cisminin bir üreteç sistemidir.

İspat. $\mathbb{R}\left\{x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)} : \sum_{i=1}^{n} m_i \geq 1\right\}^{SO(n+1)}$ kümesini göz önüne alalım. (Weyl, 1946) çalışmasında verilen, $SO(n)$ için temel teorem gereğince, (8) sistemi $\mathbb{R}\left\{x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)} : \sum_{i=1}^{n} m_i \geq 1\right\}^{SO(n+1)}$ için bir üreteç sistemidir. $\mathbb{R}\left\{x^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)} : \sum_{i=1}^{n} m_i \geq 1\right\}^{SO(n+1)} = \mathbb{R}\{\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}\}^{SO(n+1)}$ olduğu dikkate alınırsa, Lemma 35 kullanılarak ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 37. $\left[\frac{\partial x}{\partial u_1}\frac{\partial x}{\partial u_2}\ldots\frac{\partial x}{\partial u_n}\frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}\right]; < \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} >, 1 \leq i \leq j \leq n; < \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_s} >, 2 \leq s \leq n$ elemanları ile oluşturulan küme $\mathbb{R} < x >^{SM(n+1)}$ diferansiyel cisminin bir üreteç sistemidir.

İspat. Z, $< \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} >, 1 \leq i \leq j \leq n; < \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_s} >, 2 \leq s \leq n; \left[\frac{\partial x}{\partial u_1}\frac{\partial x}{\partial u_2}\ldots\frac{\partial x}{\partial u_n}\frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}\right]$ elemanlarının kümesi olsun. Lemma 27 ve Lemma 29'dan $\delta, \Delta \in \mathbb{R}\{Z\} \subset \mathbb{R} < Z >$ elde edilir. Böylece $\mathbb{R}\{Z, \delta^{-1}, \Delta^{-1}\} \subset \mathbb{R} < Z > \subset \mathbb{R}\{\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}\}^{SO(n+1)}$ olur. Lemma 30 ve Lemma 32'den $< x^{(p_1,\ldots,p_n)}, x^{(r_1,\ldots,r_n)} >$, $\left[x^{(m_{11},\ldots,m_{1n})}x^{(m_{21},\ldots,m_{2n})}\ldots x^{\left(m_{n+1|1},\ldots,m_{n+1|n}\right)}\right] \in \mathbb{R}\{Z, \delta^{-1}, \Delta^{-1}\} \subset \mathbb{R} < Z >$ olduğunu biliyoruz. Lemma 36'dan bu elemanların $\mathbb{R}\{\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}\}^{SO(n+1)}$ diferansiyel cebirinin üreteçleri olduğu dikkate alınırsa $\mathbb{R} < Z >= \mathbb{R}\{\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}\}^{SO(n+1)}$ elde edilir. Böylece Lemma 34'ten $\mathbb{R} < Z >= \mathbb{R} < x >^{SM(n+1)}$ elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. □

$W = \left\{< \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} >, \left[\frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_s}\frac{\partial x}{\partial u_1}\frac{\partial x}{\partial u_2}\ldots\frac{\partial x}{\partial u_n}\right] : 1 \leq i \leq j \leq n, 1 \leq s \leq n\right\}$ kümesini göz önüne alalım. $\mathbb{R}\{W\}$ kümesi, $\mathbb{R} < \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n} >^{O(n+1)}$ diferansiyel cisminin W nun elemanlarıyla üretilen diferansiyel alt cebiri olsun. $\mathbb{R}\{W, \delta^{-1}, \Delta^{-1}\}$ kümesi de, $\mathbb{R} < \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n} >^{O(n+1)}$ diferansiyel cisminin W nun elemanları ve δ^{-1}, Δ^{-1} fonksiyonları ile üretilen diferansiyel alt cebiri olsun.

Daha önceden tanımlanış olan $V_0 = \left\{< \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} >: 1 \leq i \leq j \leq n\right\}$ kümesini ele alalım. $V_0 \subset W$ ve $\delta \in \mathbb{R}\{V_0\}$ olduğundan $\delta \in \mathbb{R}\{V_0\} \subset \mathbb{R}\{W\}$ ve $\mathbb{R}\{V_0, \delta^{-1}\} \subset \mathbb{R}\{W, \delta^{-1}, \Delta^{-1}\}$ elde edilir. Diğer yandan Lemma 10'dan her $i, j, l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ için $< \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j}, \frac{\partial x}{\partial u_l} > \in \mathbb{R}\{V_0\}$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla

$$< \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j}, \frac{\partial x}{\partial u_l} > \in R\{W\}, i, j, l \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad (9)$$

elde edilir.

Lemma 38. Her $1 \leq i \leq n$ için $< \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_i} > \in \mathbb{R}\{W, \delta^{-1}, \Delta^{-1}\}$ dir.

İspat. $y_1 = \frac{\partial x}{\partial u_1}, \ldots, y_n = \frac{\partial x}{\partial u_n}, y_{n+1} = \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}, z_1 = \frac{\partial x}{\partial u_1}, \ldots, z_n = \frac{\partial x}{\partial u_n}, z_{n+1} = \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_i}$

vektörlerine Lemma 38 uygulanırsa

$$[y_1 y_2 \dots y_{n+1}] [z_1 z_2 \dots z_{n+1}] = \det \| < y_i, z_j > \|_{i,j=1}^{n+1} \tag{10}$$

yazılır. $1 \leq j \leq n+1$ için $D_{n+1|j}$, $\| < y_i, z_j > \|_{i,j=1}^{n+1}$ matrisinin $< y_{n+1}, z_j >$ elemanının kofaktörü olsun. (10) denkleminden

$$\begin{aligned} & [y_1 y_2 \dots y_{n+1}] [z_1 z_2 \dots z_{n+1}] \\ & = < y_{n+1}, z_1 > D_{n+1|1} + \dots + < y_{n+1}, z_{n+1} > D_{n+1|n+1} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned} & < y_{n+1}, z_{n+1} > D_{n+1|n+1} \\ & = [y_1 y_2 \dots y_{n+1}] [z_1 z_2 \dots z_{n+1}] - < y_{n+1}, z_1 > D_{n+1|1} - \dots - < y_{n+1}, z_n > D_{n+1|n} \end{aligned}$$

yazılabilir. $D_{n+1|n+1} = \delta$ olduğu dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} & < y_{n+1}, z_{n+1} > \\ & = \delta^{-1} [y_1 y_2 \dots y_{n+1}] [z_1 z_2 \dots z_{n+1}] \\ & - \delta^{-1} < y_{n+1}, z_1 > D_{n+1|1} - \dots - \delta^{-1} < y_{n+1}, z_n > D_{n+1|n} \end{aligned} \tag{11}$$

eşitliği oluşturulabilir. W kümesinin tanımından $[y_1 y_2 \dots y_{n+1}], [z_1 z_2 \dots z_{n+1}] \in \mathbb{R}\{W\}$ ve dolayısıyla $[y_1 y_2 \dots y_{n+1}] [z_1 z_2 \dots z_{n+1}] \in \mathbb{R}\{W\}$ dir. Diğer yandan, (9) denkleminden, her $1 \leq i \leq n$ için $< y_{n+1}, z_i > = < \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}, \frac{\partial x}{\partial u_i} > \in \mathbb{R}\{W\}$ dur. Şimdi de son olarak her $1 \leq s \leq n$ için $D_{n+1|s} \in \mathbb{R}\{W, \delta^{-1}, \Delta^{-1}\}$ olduğunu gösterelim. $D_{n+1|s}$ nin tanımından

$$D_{n+1|s} = (-1)^{n+1+s} \det Gr(y_1, y_2, \dots, y_n; z_1, z_2, \dots, z_{s-1}, z_{s+1}, \dots, z_{n+1})$$

yazılır. Bu eşitlikten $D_{n+1|s}$ nin elemanlarının $1 \leq i, j \leq n$ için $< y_i, z_j >$ şeklinde ve $1 \leq k \leq n$ için $< y_k, z_{n+1} >$ şeklinde olduğu görülür. W nun tanımından, her $1 \leq i, j \leq n$ için $< y_i, z_j > \in \mathbb{R}\{W\}$ olduğu elde edilir. Ayrıca Lemma 10'dan da her $1 \leq k \leq n$ için $< y_k, z_{n+1} > \in R\{V_0\} \subset \mathbb{R}\{W\}$ elde edilir. Dolayısıyla her $1 \leq s \leq n$ için $D_{n+1|s} \in \mathbb{R}\{W, \delta^{-1}, \Delta^{-1}\}$ dır. Sonuç olarak, (11) denkleminden $< y_{n+1}, z_{n+1} > = < \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_i} > \in \mathbb{R}\{W, \delta^{-1}, \Delta^{-1}\}$ elde edilmiş olur. Bu ise ispatı tamamlar. □

Teorem 39. $1 \leq s \leq n$ ve $1 \leq i \leq j \leq n$ olmak üzere $< \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} >$, δ^{-1}, Δ^{-1}, $\left[\frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_s} \frac{\partial x}{\partial u_1} \frac{\partial x}{\partial u_2} \dots \frac{\partial x}{\partial u_n}\right]$ sistemi, $\mathbb{R}\left\{x, \delta^{-1}, \Delta^{-1}\right\}^{SM(n+1)}$ diferansiyel cebirinin bir üreteç sistemidir.

İspat. Z ve W kümelerinin tanımları dikkate alınırsa, Lemma 38'den $Z \subset \mathbb{R}\left\{W, \delta^{-1}, \Delta^{-1}\right\}$

elde edilir. Teorem 33'ten $\mathbb{R}\{Z,\delta^{-1},\Delta^{-1}\} = \mathbb{R}\{x,\delta^{-1},\Delta^{-1}\}^{SM(n+1)}$ yazılır. Bu iki ifadeden anlaşılır ki $\mathbb{R}\{W,\delta^{-1},\Delta^{-1}\}$ diferansiyel cebiri, $\mathbb{R}\{x,\delta^{-1},\Delta^{-1}\}^{SM(n+1)}$ diferansiyel cebirinin üreteçleri olan $\{Z,\delta^{-1},\Delta^{-1}\}$ kümesini içerir. O halde $\mathbb{R}\{W,\delta^{-1},\Delta^{-1}\} = \mathbb{R}\{x,\delta^{-1},\Delta^{-1}\}^{SM(n+1)}$ olup, ispat tamamlanır. □

Teorem 40. $< \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} >$, $1 \le i \le j \le n$; $\left[\frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_s}\frac{\partial x}{\partial u_1}\frac{\partial x}{\partial u_2}\dots\frac{\partial x}{\partial u_n}\right]$, $1 \le s \le n$ sistemi $\mathbb{R} < x >^{SM(n+1)}$ diferansiyel cisminin bir üreteç sistemidir.

İspat. Δ nın tanımından $\Delta = \left[\frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}\frac{\partial x}{\partial u_1}\frac{\partial x}{\partial u_2}\dots\frac{\partial x}{\partial u_n}\right]^2$ olup, $\Delta \in \mathbb{R}\{W\}$ yazılır. Dolayısıyla $\Delta^{-1} \in \mathbb{R} < W >$ elde edilir. Benzer şekilde $\delta \in \mathbb{R}\{W\}$ olduğundan $\delta^{-1} \in \mathbb{R} < W >$ dir. Böylece $\mathbb{R}\{W,\delta^{-1},\Delta^{-1}\} \subset \mathbb{R} < W >$ olur. Lemma 38'den $Z \subset \mathbb{R}\{W,\delta^{-1},\Delta^{-1}\}$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $Z \subset \mathbb{R}\{W,\delta^{-1},\Delta^{-1}\} \subset \mathbb{R} < W > \subset \mathbb{R} < x >^{SM(n+1)}$ elde edilir. Teorem 37'nin ispatından $\mathbb{R} < Z > = \mathbb{R} < x >^{SM(n+1)}$ elde edilmişti. Bunun anlamı Z kümesi $\mathbb{R} < x >^{SM(n+1)}$ diferansiyel cisminin bir üreteç sistemidir. Yukarıdaki zincirden ise $Z \subset \mathbb{R} < W > \subset \mathbb{R} < x >^{SM(n+1)}$ elde edilmişti. Böylece $\mathbb{R} < W >$, $\mathbb{R} < x >^{SM(n+1)}$ diferansiyel cisminin üreteci olan Z kümesini içerdiğinden $\mathbb{R} < W > = \mathbb{R} < x >^{SM(n+1)}$ elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. □

Lemma 41. $d \in \{1,2,\dots,n\}$ olmak üzere, x bir $d-$nondejenere hiperyüzey olsun. Bu takdirde x bir regüler hiperyüzeydir ve her $u \in U$ için $\delta_x(u) > 0$ dır.

İspat. x bir $d-$nondejenere hiperyüzey olsun. Bu takdirde her $u \in U$ için $L_{dd}(x)(u) \neq 0$ dır. L_{dd} nin tanımından, $1 \le i \le n$ için $a_i(x) = \frac{\partial x}{\partial u_i}$ ve $a_{n+1}(x) = \frac{\partial^2 x}{\partial u_d^2}$ olmak üzere $[a_1(x)\,a_2(x)\dots a_{n+1}(x)] \neq 0$ elde edilir. Bu ise her $u \in U$ için $a_1(x), a_2(x), \dots, a_{n+1}(x)$ vektörlerinin lineer bağımsız olduğunu ifade eder. Dolayısıyla $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x)$ vektörleri de lineer bağımsızdır. Bu takdirde her $u \in U$ için $\delta_x(u) = \det \| < a_i(x), a_j(x) > \|_{i,j=1}^{n} \neq 0$ olup, x hiperyüzeyi regülerdir ve $\delta_x(u) > 0$ dır. □

$\mathbb{R}^{n+1}$ deki bir x hiperyüzeyinin birinci ve ikinci temel formlarının tüm katsayılarının kümesi $\{g_{ij}, L_{ij} : i,j = 1,2,\dots,n\}$ olsun. Kabul edelim ki x, $\mathbb{R}^{n+1}$ de bir $d-$nondejenere hiperyüzey olsun. Bu takdirde her $u \in U$ için $\Delta_d(x)(u) \neq 0$ dır. Dolayısıyla Δ_d^{-1} fonksiyonu mevcuttur. Lemma 41'den de biliyoruz ki $\delta_x(u) > 0$ dır, dolayısıyla $\delta_x^{-1/2}$ fonksiyonu da mevcuttur.

Teorem 42. $d \in \{1,2,\dots,n\}$ ve x, $\mathbb{R}^{n+1}$ de bir $d-$nondejenere hiperyüzey olsun. Bu takdirde $\left\{g_{ij}(x), \Delta_d^{-1}(x), \delta_x^{-\frac{1}{2}}, L_{dr}(x) : i,j,r = 1,2,\dots,n, i \le j\right\}$ kümesi $\mathbb{R}\left\{g_{ij}(x), \Delta_d^{-1}(x), \delta_x^{-\frac{1}{2}}, L_{ij}(x) : 1 \le i \le j \le n\right\}$ diferansiyel cebirinin bir üreteç sistemidir.

İspat. $d = 1$ için $W_1 = \{g_{ij}(x), L_{1r}(x) : i,j,r = 1,2,\ldots,n, i \leq j\}$ kümesini göz önüne alalım. $\mathbb{R}\left\{W_1, \Delta^{-1}, \delta^{-\frac{1}{2}}\right\}$, $\mathbb{R}\left\{g_{ij}(x), \Delta_d^{-1}(x), \delta_x^{-\frac{1}{2}}, L_{ij}(x) : 1 \leq i \leq j \leq n\right\}$ diferansiyel cebirinin, W_1 kümesi ve $\Delta^{-1}, \delta^{-\frac{1}{2}}$ fonksiyonları ile üretilen diferansiyel alt cebiri olsun. $L_{ij}(x)$ in tanımından her $1 \leq j \leq n$ için $\left[\frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_j} \frac{\partial x}{\partial u_1} \frac{\partial x}{\partial u_2} \ldots \frac{\partial x}{\partial u_n}\right] = \delta^{\frac{1}{2}} L_{1j}(x)$ elde edilir. Buradan $\delta^{\frac{1}{2}} L_{1j}(x) \in \mathbb{R}\left\{W_1, \Delta^{-1}, \delta^{-\frac{1}{2}}\right\}$ olduğundan her $1 \leq j \leq n$ için $\left[\frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_j} \frac{\partial x}{\partial u_1} \frac{\partial x}{\partial u_2} \ldots \frac{\partial x}{\partial u_n}\right] \in \mathbb{R}\left\{W_1, \Delta^{-1}, \delta^{-\frac{1}{2}}\right\}$ elde edilir. Buradan $W \subset \mathbb{R}\left\{W_1, \Delta^{-1}, \delta^{-\frac{1}{2}}\right\}$ elde edilir. Dolayısıyla $\mathbb{R}\{W, \Delta^{-1}, \delta^{-1}\} \subset \mathbb{R}\left\{W_1, \Delta^{-1}, \delta^{-\frac{1}{2}}\right\}$ dir. Teorem 39'dan $\mathbb{R}\{W, \delta^{-1}, \Delta^{-1}\} = \mathbb{R}\{x, \delta^{-1}, \Delta^{-1}\}^{SM(n+1)}$ olduğunu biliyoruz. O halde her $i,j = 1,2,\ldots,n$ için $\left[\frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} \frac{\partial x}{\partial u_1} \frac{\partial x}{\partial u_2} \ldots \frac{\partial x}{\partial u_n}\right] \in \mathbb{R}\{W, \Delta^{-1}, \delta^{-1}\}$ dir. Diğer yandan $\mathbb{R}\{W, \Delta^{-1}, \delta^{-1}\} \subset \mathbb{R}\left\{W_1, \Delta^{-1}, \delta^{-\frac{1}{2}}\right\}$ olduğundan $\left[\frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} \frac{\partial x}{\partial u_1} \frac{\partial x}{\partial u_2} \ldots \frac{\partial x}{\partial u_n}\right] \in \mathbb{R}\left\{W_1, \Delta^{-1}, \delta^{-\frac{1}{2}}\right\}$ elde edilir. Sonuç olarak $L_{ij}(x)$ in tanımından $L_{ij}(x) = \left[\frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} \frac{\partial x}{\partial u_1} \frac{\partial x}{\partial u_2} \ldots \frac{\partial x}{\partial u_n}\right] \delta^{-\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}\left\{W_1, \Delta^{-1}, \delta^{-\frac{1}{2}}\right\}$ elde edilir. Buradan da $\mathbb{R}\left\{W_1, \Delta^{-1}, \delta^{-\frac{1}{2}}\right\} = \mathbb{R}\left\{g_{ij}(x), \Delta_d^{-1}(x), \delta_x^{-\frac{1}{2}}, L_{ij}(x) : 1 \leq i \leq j \leq n\right\}$ olur. $d = 1$ için ispat tamamlanmış olur. Diğer d değerleri için de benzer yöntemle istenilen elde edilir. □

2.1.2. Hiperyüzeylerin İnvaryantlarının Tam Sistemi

G, $M(n+1)$ grubunun herhangi bir alt grubu olsun.

Tanım 43. x ve y, $\mathbb{R}^{n+1}$ de iki hiperyüzey olsun. Eğer her $u \in U$ için $y(u) = Fx(u)$ olacak şekilde bir $F \in G$ dönüşümü mevcut ise x ve y hiperyüzeylerine $G-$denktir denir ve bu durum $x \overset{G}{\sim} y$ ile ifade edilir.

Her $1 \leq i \leq n$ için $a_i(x) = \frac{\partial x}{\partial u_i}$ ve $a_{n+1}(x) = \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}$ sütun vektörleri olmak üzere $A(x) = \|a_1(x)\, a_2(x) \ldots a_{n+1}(x)\|$ matrisini ve $\det(A(x)) = [a_1(x)\, a_2(x) \ldots a_{n+1}(x)]$ determinantını tanımlayalım.

$\mathbb{R}^{n+1}$ deki her $1-$nondejenere hiperyüzey kısaca bir nondejenere hiperyüzey olarak adlandırılır. x, $\mathbb{R}^{n+1}$ de bir nondejenere hiperyüzey olsun. x nondejenere olduğundan, her $u \in U$ için $\Delta(x) = [a_1(x)\, a_2(x) \ldots a_{n+1}(x)]^2 \neq 0$ dır. Dolayısıyla her $u \in U$ için $[a_1(x)\, a_2(x) \ldots a_{n+1}(x)] \neq 0$ olup $A(x)^{-1}$ tanımlıdır. Her $1 \leq s \leq n$ için $\frac{\partial A(x)}{\partial u_s} = \|\frac{\partial a_1(x)}{\partial u_s} \frac{\partial a_2(x)}{\partial u_s} \ldots \frac{\partial a_{n+1}(x)}{\partial u_s}\|$ şeklinde tanımlansın. $A(x)^{-1} \frac{\partial A(x)}{\partial u_s} = \left\|p_{ij}^s(x)\right\|$ matrisini göz önüne alalım.

Lemma 44. Her $1 \leq i,j \leq n+1$ ve her $1 \leq s \leq n$ için $p_{ij}^s(x) \in \mathbb{R}\{V, \Delta^{-1}\}$ dir.

İspat. $A(x)^{-1}\frac{\partial A(x)}{\partial u_s} = \left\|p_{ij}^s(x)\right\|$ eşitliğinden $A(x)\left\|p_{ij}^s(x)\right\| = \frac{\partial A(x)}{\partial u_s}$ elde edilir. x bir nondejenere hiperyüzey olduğundan, her $u \in U$ için $\Delta_x(u) = (detA(x)(u))^2 \neq 0$ dır. $detA(x)(u) \neq 0$ olduğundan, $1 \leq i,j \leq n+1$ ve $1 \leq s \leq n$ olmak üzere $A(x)\left\|p_{ij}^s(x)\right\| = \frac{\partial A(x)}{\partial u_s}$ lineer denklem sistemi aşağıdaki çözüme sahiptir:

$$p_{ij}^s(x) = \left[a_1(x)\dots a_{i-1}(x)\frac{\partial a_j(x)}{\partial u_s}a_{i+1}(x)\dots a_{n+1}(x)\right]\left[a_1(x)\dots a_{n+1}(x)\right]^{-1}$$

Bu eşitlikten her $1 \leq i,j \leq n+1$ ve her $1 \leq s \leq n$ için

$$p_{ij}^s(x) = \left[a_1(x)\dots a_{i-1}(x)\frac{\partial a_j(x)}{\partial u_s}a_{i+1}(x)\dots a_{n+1}(x)\right]\left[a_1(x)\dots a_{n+1}(x)\right]\Delta^{-1}$$

elde edilir. Lemma 28 ve Teorem 20'den

$$\left[a_1(x)\dots a_{i-1}(x)\frac{\partial a_j(x)}{\partial u_s}a_{i+1}(x)\dots a_{n+1}(x)\right]\left[a_1(x)\dots a_{n+1}(x)\right]$$

ifadesinin, $\mathbb{R}\{V,\Delta^{-1}\}$ kümesinin elemanı olduğu bulunur. $\Delta^{-1} \in \mathbb{R}\{V,\Delta^{-1}\}$ olduğundan $1 \leq i,j \leq n+1$ ve $1 \leq s \leq n$ olan her i,j,s için $p_{ij}^s(x) \in \mathbb{R}\{V,\Delta^{-1}\}$ dir. □

Teorem 45. x ve y, $\mathbb{R}^{n+1}$ de iki nondejenere hiperyüzey olsun.

i) $x \overset{M(n+1)}{\sim} y$ olsun. Bu takdirde, her $1 \leq i,j,s \leq n$ ve her $u \in U$ için

$$<\frac{\partial x}{\partial u_i},\frac{\partial x}{\partial u_j}>=<\frac{\partial y}{\partial u_i},\frac{\partial y}{\partial u_j}>,<\frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2},\frac{\partial^2 x}{\partial u_1\partial u_s}>=<\frac{\partial^2 y}{\partial u_1^2},\frac{\partial^2 y}{\partial u_1\partial u_s}> \qquad (12)$$

dir.

ii) (12) eşitlikleri sağlansın. Bu takdirde, $x \overset{M(n+1)}{\sim} y$ dir. Buna ek olarak, her $u \in U$ için $y(u) = gx(u) + b$ olacak şekilde bir tek $g \in O(n+1)$ ve bir tek $b \in \mathbb{R}^{n+1}$ vardır. Açık bir biçimde $g = A(y)A(x)^{-1}$ ve $b = y - A(y)A(x)^{-1}x$ şeklindedir.

İspat. i) Kabul edelim ki $x \overset{M(n+1)}{\sim} y$ olsun. Bu takdirde, her $u \in U$ için $y(u) = gx(u) + b$ olacak şekilde bir $g \in O(n+1)$ ve bir $b \in \mathbb{R}^{n+1}$ vardır. $<\frac{\partial x}{\partial u_i},\frac{\partial x}{\partial u_j}>$ ve $<\frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2},\frac{\partial^2 x}{\partial u_1\partial u_s}>$ fonksiyonları birer $M(n+1)-$invaryant olduklarından $<\frac{\partial x}{\partial u_i},\frac{\partial x}{\partial u_j}>=<\frac{\partial y}{\partial u_i},\frac{\partial y}{\partial u_j}>$ ve $<\frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2},\frac{\partial^2 x}{\partial u_1\partial u_s}>=<\frac{\partial^2 y}{\partial u_1^2},\frac{\partial^2 y}{\partial u_1\partial u_s}>$ elde edilir.

ii) Kabul edelim ki (12) eşitlikleri sağlansın. Bu takdirde, Lemma 11'den her $u \in U$ için $\Delta(x)(u) = \Delta(y)(u)$ elde edilir. x ve y hiperyüzeyleri nondejenere olduklarından her $u \in U$ için $\Delta(x)^{-1}(u)$ ve $\Delta(y)^{-1}(u)$ tanımlıdır ve dolayısıyla $\Delta(x)^{-1}(u) = \Delta(y)^{-1}(u)$ elde edilir. $f\{x\} \in \mathbb{R}\{V,\Delta^{-1}\}$ polinomunu alalım.

Teorem 20'den biliyoruz ki $\mathbb{R}\{V,\Delta^{-1}\} = \mathbb{R}\{x,\Delta^{-1}\}^{M(n+1)}$ dır. Diğer yandan $\Delta(x)^{-1}(u) = \Delta(y)^{-1}(u)$ olduğu dikkate alınırsa her $u \in U$ için

$$f\{x(u)\} = f\{y(u)\} \tag{13}$$

elde edilir. (12) ve (13) eşitlikleri ile Lemma 44 kullanılırsa, her $u \in U$ ve $1 \leq i,j \leq n+1$ ve $1 \leq s \leq n$ olan her i,j,s için $p^s_{ij}(x(u)) = p^s_{ij}(y(u))$ elde edilir. Buradan $A(x)^{-1}\frac{\partial A(x)}{\partial u_s} = \left\|p^s_{ij}(x)\right\|$ eşitliğinden her $u \in U$ ve $1 \leq s \leq n$ olan her s için

$$A(x(u))^{-1}\frac{\partial A(x(u))}{\partial u_s} = A(y(u))^{-1}\frac{\partial A(y(u))}{\partial u_s} \tag{14}$$

bulunur. Böylece her $u \in U$ ve $1 \leq s \leq n$ olan her s için

$$\begin{aligned}\frac{\partial(A(y)A(x)^{-1})}{\partial u_s} &= \frac{\partial A(y)}{\partial u_s}A(x)^{-1} + A(y)\frac{\partial A(x)^{-1}}{\partial u_s}\\ &= \frac{\partial A(y)}{\partial u_s}A(x)^{-1} - A(y)A(x)^{-1}\frac{\partial A(x)}{\partial u_s}A(x)^{-1}\\ &= A(y)\left(A(y)^{-1}\frac{\partial A(y)}{\partial u_s} - A(x)^{-1}\frac{\partial A(x)}{\partial u_s}\right)A(x)^{-1}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik ve (14) denklemi kullanılarak, $1 \leq s \leq n$ olan her s için $\frac{\partial(A(y)A(x)^{-1})}{\partial u_s} = 0$ bulunur. U, $\mathbb{R}^n$ de bağlantılı ve açık bir altküme olduğundan bu eşitliği $1 \leq s \leq n$ olan her s için kullanırsak $A(y(u))A(x(u))^{-1}$ ifadesinin $u \in U$ ya bağlı olmadığı görülür. $g = A(y)A(x)^{-1}$ olarak alalım. Her $u \in U$ için $\det(A(x)(u)) \neq 0$ ve $\det(A(y)(u)) \neq 0$ olduğundan $\det(g) \neq 0$ dır ve her $u \in U$ için $A(y) = gA(x)$ elde edilir.

Şimdi $g \in O(n+1)$ olduğunu gösterelim. Lemma 18, (13) eşitliği ve $A(x)^T A(x) = \|< a_i(x), a_j(x) >\|_{i,j=1}^{n+1}$ eşitliğinden $A(x)^T A(x) = A(y)^T A(y)$ elde edilir. $A(y) = gA(x)$ olduğundan, I birim matrisi göstermek üzere, $g^T g = I$ bulunur. Buradan $g \in O(n+1)$ olduğu elde edilir.

$A_y(u) = gA_x(u)$ eşitliğinden her $u \in U$ ve $1 \leq s \leq n$ olan her s için $\frac{\partial y(u)}{\partial u_s} = g\frac{\partial x(u)}{\partial u_s}$ eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten her $u \in U$ için $y(u) = gx(u) + b$ ifadesi bulunur. Bu ise $b \in \mathbb{R}^{n+1}$ elemanının varlığını gösterir.

Şimdi bu denkliğin tek olduğunu gösterelim. İki hiperyüzeyi birbirine dönüştüren ikinci bir dönüşüm mevcut olsun. Yani, her $u \in U$ için $y(u) = Dx(u) + c$ olacak şekilde bir $c \in \mathbb{R}^{n+1}$ ve $D \in O(n+1)$ mevcut olsun. Bu durumda her $i = 1, 2, \ldots, n$ ve $u \in U$ için $\frac{\partial y(u)}{\partial u_s} = D\frac{\partial x(u)}{\partial u_s}$ dir. Bu denklemleri kullanarak her $u \in U$ için $A(y(u)) = DA(x(u))$ elde edilir. Buradan $D = A(y)A(x)^{-1} = g$ bulunur. $y(u) = Dx(u) + c$ ve $D = A(y)A(x)^{-1}$ eşitliklerinden $c = y - A(y)A(x)^{-1}x = b$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

□

Teorem 45, (12) denklem sisteminin $\mathbb{R}^{n+1}$ deki bütün nondejenere $U-$hiperyüzeylerin kümesi üzerinde $M\left(n+1\right)-$invaryantların bir tam sistemi olduğunu gösterir.

Teorem 46. x ve y, $\mathbb{R}^{n+1}$ de iki nondejenere hiperyüzey olsun.

i) $x \overset{SM(n+1)}{\sim} y$ olsun. Bu takdirde, her $1 \leq i, j \leq n$, her $2 \leq s \leq n$ ve her $u \in U$ için

$$< \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} >=< \frac{\partial y}{\partial u_i}, \frac{\partial y}{\partial u_j} >, < \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_s} >=< \frac{\partial^2 y}{\partial u_1^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial u_1 \partial u_s} >$$
$$\left[\frac{\partial x}{\partial u_1}\frac{\partial x}{\partial u_2}\cdots\frac{\partial x}{\partial u_n}\frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}\right] = \left[\frac{\partial y}{\partial u_1}\frac{\partial y}{\partial u_2}\cdots\frac{\partial y}{\partial u_n}\frac{\partial^2 y}{\partial u_1^2}\right] \tag{15}$$

dir.

ii) (15) eşitlikleri sağlansın. Bu takdirde, $x \overset{SM(n+1)}{\sim} y$ dir. Buna ek olarak, her $u \in U$ için $y\left(u\right) = gx\left(u\right) + b$ olacak şekilde bir tek $g \in SO(n+1)$ ve bir tek $b \in \mathbb{R}^{n+1}$ vardır. Açık bir biçimde $g = A\left(y\right)A\left(x\right)^{-1}$ ve $b = y - A\left(y\right)A\left(x\right)^{-1}x$ şeklindedir.

İspat. i) Kabul edelim ki $x \overset{SM(n+1)}{\sim} y$ olsun. Bu takdirde, her $u \in U$ için $y\left(u\right) = gx\left(u\right) + b$ olacak şekilde bir $g \in SO(n+1)$ ve bir $b \in \mathbb{R}^{n+1}$ vardır. $< \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} >$, $< \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_s} >$ ve $\left[\frac{\partial x}{\partial u_1}\frac{\partial x}{\partial u_2}\cdots\frac{\partial x}{\partial u_n}\frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}\right]$ fonksiyonları $SM\left(n+1\right)$-invaryant olduklarından $< \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} >=< \frac{\partial y}{\partial u_i}, \frac{\partial y}{\partial u_j} >$, $< \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_s} >=< \frac{\partial^2 y}{\partial u_1^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial u_1 \partial u_s} >$ ve $\left[\frac{\partial x}{\partial u_1}\frac{\partial x}{\partial u_2}\cdots\frac{\partial x}{\partial u_n}\frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}\right] = \left[\frac{\partial y}{\partial u_1}\frac{\partial y}{\partial u_2}\cdots\frac{\partial y}{\partial u_n}\frac{\partial^2 y}{\partial u_1^2}\right]$ elde edilir.

ii) Tersine, (15) eşitlikleri sağlansın. $< \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} >, 1 \leq i \leq j \leq n; < \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_s} >, 2 \leq s \leq n; \left[\frac{\partial x}{\partial u_1}\frac{\partial x}{\partial u_2}\cdots\frac{\partial x}{\partial u_n}\frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}\right]$ elemanlarının kümesi Z ile ifade edilsin. $\mathbb{R}\{Z\}$, $\mathbb{R}\{\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}, \delta^{-1}, \Delta^{-1}\}^{SO(n+1)}$ diferansiyel cebirinin, Z sistemi ile üretilen diferansiyel alt cebiri olsun. $v_1 = z_1 = \frac{\partial x}{\partial u_1}, v_2 = z_2 = \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, v_n = z_n = \frac{\partial x}{\partial u_n}$ olmak üzere $\delta = \delta_x = detGr(v_1, v_2, \ldots, v_n; z_1, z_2, \ldots, z_n)$ olsun. Lemma 27 ve Lemma 29'dan $\delta_x, \Delta_x \epsilon \mathbb{R}\{Z\}$ dir. Böylece (15) denklemlerinden her $u \in U$ için $\delta_x = \delta_y, \Delta_x = \Delta_y$ elde edilir. $x\left(u\right), y(u)$ nondejenere hiperyüzeyler olduğundan, her $u \in U$ için $\Delta_x(u) \neq 0$ ve $\Delta_y(u) \neq 0$ dır. Lemma 41 ile her $u \in U$ için $\delta_x(u) > 0$ ve $\delta_y(u) > 0$ elde edilir. $\delta_x = \delta_y$ ve $\Delta_x = \Delta_y$ eşitlikleri ve Lemma 41'den her $u \in U$ için $\delta_x^{-1} = \delta_y^{-1}$ ve $\Delta_x^{-1} = \Delta_y^{-1}$ bulunur. $\mathbb{R}\left\{Z, \delta^{-1}, \Delta^{-1}\right\}^{SM(n+1)}$, Teorem 33'teki diferansiyel cebir olmak üzere $f\left\{x\right\} \in \mathbb{R}\left\{Z, \delta^{-1}, \Delta^{-1}\right\}^{SM(n+1)}$ olsun. Bu durumda $\delta_x^{-1} = \delta_y^{-1}$ ve $\Delta_x^{-1} = \Delta_y^{-1}$ denklemleri ve denklem (15) ten her

$u \in U$ için $f(x) = f(y)$ elde edilir. Lemma 30, (15) denklemleri ve $f(x) = f(y)$ eşitlikleri kullanılarak (12) denklemleri elde edilir. Böylece Teorem 45'ten her $u \in U$ için $y(u) = gx(u) + b$ olacak şekilde bir tek $g \in O(n+1)$ ve bir tek $b \in \mathbb{R}^{n+1}$ vardır. Buradan (15) denklemleriyle $\det(g)\left[\frac{\partial x}{\partial u_1}\frac{\partial x}{\partial u_2}\cdots\frac{\partial x}{\partial u_n}\frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}\right] = \left[\frac{\partial y}{\partial u_1}\frac{\partial y}{\partial u_2}\cdots\frac{\partial y}{\partial u_n}\frac{\partial^2 y}{\partial u_1^2}\right]$ dir. Her $u \in U$ için $\Delta_x(u) = \left[\frac{\partial x}{\partial u_1}\frac{\partial x}{\partial u_2}\cdots\frac{\partial x}{\partial u_n}\frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}\right]^2 \neq 0$ olduğundan, $detg = 1$ elde edilir. Teorem 45 ile $g = A(y)A(x)^{-1}$ ve $b = y - A(y)A(x)^{-1}x$ şeklindedir.

□

Teorem 46, (15) denklem sisteminin $\mathbb{R}^{n+1}$ deki bütün nondejenere $U-$hiperyüzeylerin kümesi üzerinde $SM(n+1)-$invaryantların bir tam sistemi olduğunu gösterir.

Teorem 47. x ve y, $\mathbb{R}^{n+1}$ de iki nondejenere hiperyüzey ve $d \in \{1, 2, \ldots, n\}$ olsun.

i) $x \overset{SM(n+1)}{\sim} y$ olsun. Bu takdirde, $i \leq j$ olan her $1 \leq i, j, s \leq n$, her $2 \leq s \leq n$ ve her $u \in U$ için

$$g_{ij}(x) = g_{ij}(y), L_{ds}(x) = L_{ds}(y) \tag{16}$$

dir.

ii) (16) eşitlikleri sağlansın. Bu takdirde, $x \overset{SM(n+1)}{\sim} y$ dir. Buna ek olarak, her $u \in U$ için $y(u) = gx(u) + b$ olacak şekilde bir tek $g \in SO(n+1)$ ve bir tek $b \in \mathbb{R}^{n+1}$ vardır. Açık bir biçimde $g = A(y)A(x)^{-1}$ ve $b = y - A(y)A(x)^{-1}x$ şeklindedir.

İspat. i) Kabul edelim ki $x \overset{SM(n+1)}{\sim} y$ olsun. Bu takdirde $g_{ij}(x)$ ve $L_{ds}(x)$ fonksiyonları her $1 \leq i, j, s \leq n$ için $SM(n+1)-$invaryant olduklarından (16) denklemleri sağlanır.

ii) Tersine, (16) eşitlikleri sağlansın. Teoremi $d = 1$ durumu için ispatlayacağız. W_1, Teorem 42'nin ispatında kullanılan küme ve $\mathbb{R}\{W_1\}$ yine Teorem 42'nin ispatındaki diferansiyel $\mathbb{R}$-cebir olsun. Ayrıca $\delta = \delta_x$ Teorem 33'ün ispatında kullanılan fonksiyon olsun. $\delta = det\,\|g_{ij}\|_{i,j=1}^n$ olduğundan, $\delta \in \mathbb{R}\{W_1\}$ dir. Buradan $\Delta = \delta(L_{11})^2$ dir. O halde $\Delta \in \mathbb{R}\{W_1\}$ dir. x ve y nondejenere hiperyüzeyler olduğundan her $u \in U$ için $\Delta_x(u) \neq 0$ ve $\Delta_y(u) \neq 0$ dır. Lemma 41 ile $\delta_x(u) > 0$ ve $\delta_y(u) > 0$ dır.
$\mathbb{R}\left\{W_1, \Delta^{-1}, \delta^{-\frac{1}{2}}\right\}$ kümesi Teorem 42'nin ispatında kullanılan diferansiyel cebir olsun. Teorem 42 ile her $i, j = 1, 2, \ldots, n$ için $L_{ij} \in \mathbb{R}\left\{W_1, \Delta^{-1}, \delta^{-\frac{1}{2}}\right\}$ dir. Buradan her $i, j = 1, 2, \ldots, n$ için $\left[\frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j}\frac{\partial x}{\partial u_1}\frac{\partial x}{\partial u_2}\cdots\frac{\partial x}{\partial u_n}\right] = \delta^{-\frac{1}{2}}L_{ij}\epsilon\mathbb{R}\left\{W_1, \Delta^{-1}, \delta^{-\frac{1}{2}}\right\}$ elde edilir. Buradan W, Teorem 39'un ispatında kullanılan küme olmak üzere, $W \subset$

$\mathbb{R}\left\{W_1, \Delta^{-1}, \delta^{-\frac{1}{2}}\right\}$ dir. Böylece, $\mathbb{R}\left\{W, \Delta^{-1}, \delta^{-1}\right\} \subseteq \mathbb{R}\left\{W_1, \Delta^{-1}, \delta^{-\frac{1}{2}}\right\}$ bulunur. Z, Lemma 27'de kullanılan küme olmak üzere, $Z \subset \mathbb{R}\left\{W, \Delta^{-1}, \delta^{-1}\right\}$ dir. Buradan $\mathbb{R}\{Z\} \subseteq \mathbb{R}\left\{W_1, \Delta^{-1}, \delta^{-\frac{1}{2}}\right\}$ dir.

$\delta_x = \delta_y$ ve $\Delta_x = \Delta_y$ eşitliklerinden her $u \in U$ için $\delta_x^{-1} = \delta_y^{-1}$ ve $\Delta_x^{-1} = \Delta_y^{-1}$ elde edilir. $f\{x\} \in \mathbb{R}\{Z\} \subseteq \mathbb{R}\left\{W_1, \Delta^{-1}, \delta^{-\frac{1}{2}}\right\}$ olsun. Bu durumda $\delta_x^{-1} = \delta_y^{-1}$, $\Delta_x^{-1} = \Delta_y^{-1}$ ve (16) eşitliklerinden her $u \in U$ için

$$f\{x(u)\} = f\{y(u)\} \tag{17}$$

olur. $\mathbb{R}\{Z\} \subseteq \mathbb{R}\left\{W_1, \Delta^{-1}, \delta^{-\frac{1}{2}}\right\}$ olduğundan, (17) eşitliğinden (12) eşitlikleri elde edilir. Bu durumda, Teorem 46'dan $x \overset{SM(n+1)}{\sim} y$ dir. Ayrıca, yine Teorem 46'dan her $u \in U$ için $y(u) = gx(u) + b$ olacak şekilde bir tek $g \in SO(n+1)$ ve bir tek $b \in \mathbb{R}^{n+1}$ vardır ve $g = A(y)A(x)^{-1}$ ve $b = y - A(y)A(x)^{-1}x$ şeklindedir.

□

2.2. 3-Boyutlu Rasyonel Cebirsel Eğrilerin Projektif Denklik ve Simetrileri

2.2.1. Temel Projektif Diferansiyel İnvaryantlar

Tanım 48. Uygun bir $p(t_0, t_1) = (p_0(t_0, t_1), p_1(t_0, t_1), p_2(t_0, t_1), p_3(t_0, t_1))$ parametrizasyonu ile parametrelenmiş C rasyonel cebirsel eğrisi verilsin. $k, l \geq 0$ tam sayılar olmak üzere p nin kısmi türevlerini aşağıdaki şekilde göstereceğiz:

$$p_{t_0^k t_1^l} := \frac{\partial^{k+l} p}{\partial t_0^k \partial t_1^l}(t_0, t_1).$$

Lemma 49. Uygun bir p parametrizasyonu ile parametrelenmiş bir C rasyonel cebirsel eğrisi verilsin. Bu takdirde $p_{t_0^{l-k} t_1^k}$, $k = 0, 1, \ldots, l$ kısmi türevi, her $l > 1$ için $p_{t_1}, p_{t_0}, p_{t_0^2}, \ldots, p_{t_0^l}$ kısmi türevleri ile üretilebilir. Yani $p_{t_0^{l-k} t_1^k} = f_{l-k,k,0} p_{t_1} + f_{l-k,k,1} p_{t_0} + \ldots + f_{l-k,k,l} p_{t_0^l}$ olacak şekilde t_0, t_1 değişkenlerine bağlı $f_{l-k,k,0}, f_{l-k,k,1}, \ldots, f_{l-k,k,l}$ rasyonel fonksiyonları vardır.

İspat. n, p parametrizasyonunun derecesi olmak üzere, Euler'in homojen fonksiyon teoreminden

$$t_0 p_{t_0} + t_1 p_{t_1} = np \tag{18}$$

elde edilir. (18) denkleminin t_0 değişkenine göre türevi alınırsa,

$$p_{t_0t_1} = \frac{n-1}{t_1}p_{t_0} - \frac{t_0}{t_1}p_{t_0^2}. \tag{19}$$

elde edilir.

Benzer şekilde (18) denkleminin t_1 değişkenine göre türevi alınırsa, ve yeni eşitlikte (19) denklemi yerine yazılırsa,

$$p_{t_1^2} = -\frac{n-1}{t_1^2}t_0p_{t_0} + \frac{n-1}{t_0}p_{t_1} + \frac{t_0^2}{t_1^2}p_{t_0^2}$$

bulunur. Böylece lemmanın hipotezi $l = 2$ için sağlanır.

Şimdi, hipotezin l için sağlandığını kabul edelim, yani $k = 0, 1, \ldots, l$ için

$$p_{t_0^{l-k}t_1^k} = f_{l-k,k,0}p_{t_1} + f_{l-k,k,1}p_{t_0} + \ldots + f_{l-k,k,l}p_{t_0^l}, \tag{20}$$

eşitliği sağlansın.

(20) denkleminin t_0 değişkenine göre türevlenmesiyle ve (19) denkleminin yerine yaılmasıyla, $k = 0, 1, \ldots, l$ için

$$p_{t_0^{l-k+1}t_1^k} = g_{l-k,k,0}p_{t_1} + g_{l-k,k,1}p_{t_0} + \ldots + g_{l-k,k,l}p_{t_0^l} + g_{l-k,k,l+1}p_{t_0^{l+1}}, \tag{21}$$

elde edilir. Burada, $i = 3, \ldots, l$ için $g_{l-k,k,i} = \dfrac{\partial f_{l-k,k,i}}{\partial t_0} + f_{l-k,k,i-1}$ ve

$$\begin{aligned}
g_{l-k,k,0} &= \frac{\partial f_{l-k,k,0}}{\partial t_0} \\
g_{l-k,k,1} &= \frac{\partial f_{l-k,k,1}}{\partial t_0} + \frac{n-1}{t_1}f_{l-k,k,0} \\
g_{l-k,k,2} &= \frac{\partial f_{l-k,k,2}}{\partial t_0} + f_{l-k,k,1} - \frac{t_0}{t_1}f_{l-k,k,0} \\
g_{l-k,k,l+1} &= f_{l-k,k,l}
\end{aligned}$$

dir.

Böylece ispatı tamamlamak için $p_{t_1^{l+1}}$ kısmi türevinin hipotezdeki kısmi türevlerle üretildiğini göstermek yeterlidir. $k = l$ ifadesi (20) denkleminde yerine yazılırsa,

$$p_{t_1^l} = f_{0,l,0}p_{t_1} + f_{0,l,1}p_{t_0} + \ldots + f_{0,l,l}p_{t_0^l} \tag{22}$$

ifadesi elde edilir.

Son olarak (22) denkleminin t_1 değişkenine göre türevlenmesiyle ve $p_{t_1^2}$ kısmi türevinin eşiti, (20) ve (21) denklemleri yerine yazılırsa, eşitliğin sağ tarafındaki ifadelerin hepsi hipotezdeki kısmi türevlerle üretilmiş olur. Dolayısıyla $p_{t_1^{l+1}}$ üretilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

Tanım 50. $D(p) := \|p_{t_0}\, p_{t_1}\, p_{t_0^2}\, p_{t_0^3}\|$ matrisi ve onun determinantı $\Delta(p) := Det(D(p)) = \left[p_{t_0}\, p_{t_1}\, p_{t_0^2}\, p_{t_0^3}\right]$ tanımlansın.

Lemma 51. Uygun bir p parametrizasyonu ile parametrelenmiş bir C rasyonel cebirsel eğrisi için, C eğrisi bir hiperdüzlemde içerilmez ancak ve ancak $\Delta(p)$ determinantı sonlu sayıda singüler nokta hariç özdeş olarak sıfır olamaz.

İspat. p uygun parametrizasyonu için aşağıdaki temsili göz önüne alalım:

$$p(t_0, t_1) = A \cdot \begin{bmatrix} t_1^n \\ t_1^{n-1} t_0 \\ \vdots \\ t_1 t_0^{n-1} \\ t_0^n \end{bmatrix}, \tag{23}$$

Burada A, p parametrizasyonuna karşılık gelen $4 \times (n+1)$ tipindeki katsayı matrisidir. (23)

ifadesinin art arda türevlenmesiyle

$$p_{t_0}(t_0,t_1) = A \cdot T_0, \qquad T_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ t_1^{n-1} \\ \vdots \\ (n-1)t_1 t_0^{n-2} \\ n t_0^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$p_{t_1}(t_0,t_1) = A \cdot T_1, \qquad T_1 = \begin{bmatrix} n t_1^{n-1} \\ (n-1)t_1^{n-2} t_0 \\ \vdots \\ t_0^{n-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$p_{t_0^2}(t_0,t_1) = A \cdot T_2, \qquad T_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ (n-1)(n-2)t_1 t_0^{n-3} \\ n(n-1) t_0^{n-2} \end{bmatrix}$$

$$p_{t_0^3}(t_0,t_1) = A \cdot T_3, \qquad T_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ (n-1)(n-2)(n-3)t_1 t_0^{n-4} \\ n(n-1)(n-2) t_0^{n-3} \end{bmatrix}$$

elde edilir.Böylece

$$D(p) = \| A \cdot T_0 \ A \cdot T_1 \ A \cdot T_2 \ A \cdot T_3 \| = A \cdot T, \tag{24}$$

bulunur ki burada $T = \|T_0 \ T_1 \ T_2 \ T_3\|$ dir. $n \geq 4$ olduğundan, $Rank(T) = 4$ elde edilir.

Yeter şart için kabul edelim ki $\Delta(p) = Det(A \cdot T)$ özdeşçe sıfır olsun. Bu takdirde $Rank(D(p)) < 4$ dir. C bir hiperdüzlemde içerilmediğinden, $Rank(A) = 4$ olup, böylece $A^T \cdot A$ çarpımının rankı 4 tür. Burada A^T, A matrisinin transpozudur. Ayrıca $n \geq 4$ olduğundan, $Rank(T) = 4$ tür. $D(p) = A \cdot T$ ifadesini soldan A^T ile çarparsak, $A^T \cdot A \cdot T = A^T \cdot D(p)$ bulunur. Son olarak bu denklemin sol tarafındaki matrisin rankı 4 tür. Fakat $Rank(A^T) = 4$ ve $Rank(D(p)) < 4$ olduğundan, eşitliğin sağındaki matrisin rankı 4 ten küçüktür. Bu bir çelişkidir, dolayısıyla $\Delta(p)$ yalnızca sonlu sayıda singüler noktalarda sıfır olabilir.

Gerek şart için kabul edelim ki C eğrisi bir hiperdüzlemde içerilsin. Dolayısıyla $Rank(A) < 4$ tür ve $n \geq 4$ olduğundan, $Rank(T) = 4$ tür. Böylece $Rank(A \cdot T) \geq min(Rank(A), Rank(T)) = Rank(A) < 4$ olup $Rank(D(p)) = Rank(A \cdot T) < 4$ elde edilir. Buradan da $Det(D(p)) = \Delta(p)$ determinantının özdeşçe sıfır olduğu bulunur. Bu da bir çelişkidir. Böylece ispat tamamlanır. □

Bu lemma, ele aldığımız eğrinin p parametrelenişi için, sonlu sayıda singülerlik durumu dışında $\Delta(p)$ determinantının sıfırdan farklı olduğunu garanti eder. Bu eğrileri incelerken bu singüler noktaları işlemlerimizde dikkate almayacağız, çünkü bu singülerlikler, denklik durumunda, projektif dönüşümler tarafından korunur. Yani, birinci girdi eğrisindeki bu singüler noktalar, eğrileri denk yapan projektif dönüşümlerle ikinci eğri üzerindeki singüler noktalara dönüştürülür. Bu nedenle, eğer eğri bir hiperdüzlemde yer almıyorsa, o zaman $\Delta(p)$ determinantının sıfır olmadığını varsayabiliriz.

Şimdi bir C eğrisinin bazı diferansiyel invaryantlarını, eğrinin uygun parametrizasyonu p üzerinden tanımlayacağız.

Tanım 52. p parametrizasyonunun projektif diferansiyel invaryantları aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$I_1(p) := \frac{A_1(p)}{\Delta(p)},\; I_2(p) := \frac{A_2(p)}{\Delta(p)},\; I_3(p) := \frac{A_3(p)}{\Delta(p)},\; I_4(p) := \frac{A_4(p)}{\Delta(p)}.$$

Burada

$$\begin{aligned} A_1(p) &:= \left[p_{t_0^4}\, p_{t_1}\, p_{t_0^2}\, p_{t_0^3}\right], \\ A_2(p) &:= \left[p_{t_0}\, p_{t_0^4}\, p_{t_0^2}\, p_{t_0^3}\right], \\ A_3(p) &:= \left[p_{t_0}\, p_{t_1}\, p_{t_0^4}\, p_{t_0^3}\right], \\ A_4(p) &:= \left[p_{t_0}\, p_{t_1}\, p_{t_0^2}\, p_{t_0^4}\right]. \end{aligned}$$

dır.

Lemma 53. Uygun bir $p(t_0, t_1) = (p_0(t_0, t_1), p_1(t_0, t_1), p_2(t_0, t_1), p_3(t_0, t_1))$ parametrizasyonu ile parametrelenmiş bir C rasyonel cebirsel eğrisi verilsin. Bu takdirde t_1, $\Delta(p)$ nin bir çarpanıdır.

İspat. Parametrizasyonun derecesi n olduğundan,

$$p_k(t_0, t_1) = \sum_{r=0}^{n} a_{r,k} t_0^{n-r} t_1^r, \;\; 0 \leq k \leq 3,$$

yazılır. Bu polinomların t_0 değişkenine göre i.mertebeden kısmi türevleri

$$\frac{\partial^i p_k}{\partial t_0^i}(t_0,t_1)=\sum_{r=0}^{n-i}\frac{(n-r)!}{(n-r-i)!}a_{r,k}t_0^{n-r-i}t_1^r,\ 1\le i\le 3$$

şeklinde hesaplanır. Tanımdan

$$\Delta(p)=\left[p_{t_0}\,p_{t_1}\,p_{t_0^2}\,p_{t_0^3}\right]=\begin{vmatrix}\frac{\partial p_0}{\partial t_0}(t_0,t_1) & \frac{\partial p_0}{\partial t_1}(t_0,t_1), & \frac{\partial^2 p_0}{\partial t_0^2}(t_0,t_1), & \frac{\partial^3 p_0}{\partial t_0^3}(t_0,t_1)\\ \frac{\partial p_1}{\partial t_0}(t_0,t_1) & \frac{\partial p_1}{\partial t_1}(t_0,t_1), & \frac{\partial^2 p_1}{\partial t_0^2}(t_0,t_1), & \frac{\partial^3 p_1}{\partial t_0^3}(t_0,t_1)\\ \frac{\partial p_2}{\partial t_0}(t_0,t_1) & \frac{\partial p_2}{\partial t_1}(t_0,t_1), & \frac{\partial^2 p_2}{\partial t_0^2}(t_0,t_1), & \frac{\partial^3 p_2}{\partial t_0^3}(t_0,t_1)\\ \frac{\partial p_3}{\partial t_0}(t_0,t_1) & \frac{\partial p_3}{\partial t_1}(t_0,t_1), & \frac{\partial^2 p_3}{\partial t_0^2}(t_0,t_1), & \frac{\partial^3 p_3}{\partial t_0^3}(t_0,t_1)\end{vmatrix}$$

olduğunu biliyoruz. $\Delta(p)$ determinantını birinci sütuna göre açarsak

$$\begin{aligned}\Delta(p)=\frac{\partial p_0}{\partial t_0}(t_0,t_1)&\begin{vmatrix}\frac{\partial p_1}{\partial t_1}(t_0,t_1), & \frac{\partial^2 p_1}{\partial t_0^2}(t_0,t_1), & \frac{\partial^3 p_1}{\partial t_0^3}(t_0,t_1)\\ \frac{\partial p_2}{\partial t_1}(t_0,t_1), & \frac{\partial^2 p_2}{\partial t_0^2}(t_0,t_1), & \frac{\partial^3 p_2}{\partial t_0^3}(t_0,t_1)\\ \frac{\partial p_3}{\partial t_1}(t_0,t_1), & \frac{\partial^2 p_3}{\partial t_0^2}(t_0,t_1), & \frac{\partial^3 p_3}{\partial t_0^3}(t_0,t_1)\end{vmatrix}\\ -\frac{\partial p_1}{\partial t_0}(t_0,t_1)&\begin{vmatrix}\frac{\partial p_0}{\partial t_1}(t_0,t_1), & \frac{\partial^2 p_0}{\partial t_0^2}(t_0,t_1), & \frac{\partial^3 p_0}{\partial t_0^3}(t_0,t_1)\\ \frac{\partial p_2}{\partial t_1}(t_0,t_1), & \frac{\partial^2 p_2}{\partial t_0^2}(t_0,t_1), & \frac{\partial^3 p_2}{\partial t_0^3}(t_0,t_1)\\ \frac{\partial p_3}{\partial t_1}(t_0,t_1), & \frac{\partial^2 p_3}{\partial t_0^2}(t_0,t_1), & \frac{\partial^3 p_3}{\partial t_0^3}(t_0,t_1)\end{vmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}+\frac{\partial p_2}{\partial t_0}(t_0,t_1)&\begin{vmatrix}\frac{\partial p_0}{\partial t_1}(t_0,t_1), & \frac{\partial^2 p_0}{\partial t_0^2}(t_0,t_1), & \frac{\partial^3 p_0}{\partial t_0^3}(t_0,t_1)\\ \frac{\partial p_1}{\partial t_1}(t_0,t_1), & \frac{\partial^2 p_1}{\partial t_0^2}(t_0,t_1), & \frac{\partial^3 p_1}{\partial t_0^3}(t_0,t_1)\\ \frac{\partial p_3}{\partial t_1}(t_0,t_1), & \frac{\partial^2 p_3}{\partial t_0^2}(t_0,t_1), & \frac{\partial^3 p_3}{\partial t_0^3}(t_0,t_1)\end{vmatrix}\\ -\frac{\partial p_3}{\partial t_0}(t_0,t_1)&\begin{vmatrix}\frac{\partial p_0}{\partial t_1}(t_0,t_1), & \frac{\partial^2 p_0}{\partial t_0^2}(t_0,t_1), & \frac{\partial^3 p_0}{\partial t_0^3}(t_0,t_1)\\ \frac{\partial p_1}{\partial t_1}(t_0,t_1), & \frac{\partial^2 p_1}{\partial t_0^2}(t_0,t_1), & \frac{\partial^3 p_1}{\partial t_0^3}(t_0,t_1)\\ \frac{\partial p_2}{\partial t_1}(t_0,t_1), & \frac{\partial^2 p_2}{\partial t_0^2}(t_0,t_1), & \frac{\partial^3 p_2}{\partial t_0^3}(t_0,t_1)\end{vmatrix}\end{aligned}$$

elde edilir. Ardından her bir sütun girdisinin katsayıları olan kofaktörler tekrar birinci sütuna göre açılırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 p_k}{\partial t_0^2}(t_0,t_1)\frac{\partial^3 p_l}{\partial t_0^3}(t_0,t_1)-\frac{\partial^3 p_l}{\partial t_0^3}(t_0,t_1)\frac{\partial^2 p_k}{\partial t_0^2}(t_0,t_1)=\\
&=\sum_{r=0}^{n-2}\sum_{s=0}^{n-3}\frac{(n-r)!}{(n-r-2)!}\frac{(n-s)!}{(n-s-3)!}a_{r,k}a_{s,l}t_0^{2n-(r+s+5)}t_1^{r+s}\\
&-\sum_{r=0}^{n-2}\sum_{s=0}^{n-3}\frac{(n-r)!}{(n-r-2)!}\frac{(n-s)!}{(n-s-3)!}a_{s,k}a_{r,l}t_0^{2n-(r+s+5)}t_1^{r+s}\\
&=\sum_{r=0}^{n-2}\sum_{s=0}^{n-3}\frac{(n-r)!}{(n-r-2)!}\frac{(n-s)!}{(n-s-3)!}(a_{s,k}a_{r,l}-a_{r,k}a_{s,l})t_0^{2n-(r+s+5)}t_1^{r+s},
\end{aligned}$$

elde edilir ki burada $0 \leq k < l \leq 3$ dır. $r = s$ olduğunda $a_{s,k}a_{r,l} - a_{r,k}a_{s,l} = 0$ olduğu aşikardır. Böylece $r + s > 0$ kabul edilebilir. Dolayısıyla t_1, her $0 \leq k < l \leq 3$ için $\frac{\partial^2 p_k}{\partial t_0^2}(t_0,t_1)\frac{\partial^3 p_l}{\partial t_0^3}(t_0,t_1)-\frac{\partial^3 p_k}{\partial t_0^3}(t_0,t_1)\frac{\partial^2 p_l}{\partial t_0^2}(t_0,t_1)$ ifadesinin bir çarpanıdır. $\Delta(p)$ nin hesabı dikkate alındığında, t_1 in $\Delta(p)$ nin çarpanı olduğu elde edilmiş olur. □

Lemma 54. Uygun bir p parametrizasyonu ile parametrelenmiş bir C rasyonel cebirsel eğrisinin projektif diferansiyel invaryantları aşağıdaki şekilde veilmiş olsun

$$I_1(p) := \frac{A_1(p)}{\Delta(p)},\ I_2(p) := \frac{A_2(p)}{\Delta(p)},\ I_3(p) := \frac{A_3(p)}{\Delta(p)},\ I_4(p) := \frac{A_4(p)}{\Delta(p)}. \tag{25}$$

Bu takdirde

$$\begin{aligned}
A_1(p)_{t_0} &= A_{5,1}(p) - \frac{n-1}{t_1}A_2(p)\\
A_2(p)_{t_0} &= A_{5,2}(p)\\
A_3(p)_{t_0} &= A_{5,3}(p) + \frac{t_0}{t_1}A_2(p) - A_1(p)\\
A_4(p)_{t_0} &= A_{5,4}(p) - A_3(p),
\end{aligned}$$

dir ve burada

$$A_{5,1}(p) = \left[p_{t_0^5}\, p_{t_1}\, p_{t_0^2}\, p_{t_0^3}\right], \qquad A_{5,2}(p) = \left[p_{t_0}\, p_{t_0^5}\, p_{t_0^2}\, p_{t_0^3}\right],$$
$$A_{5,3}(p) = \left[p_{t_0}\, p_{t_1}\, p_{t_0^5}\, p_{t_0^3}\right], \qquad A_{5,4}(p) = \left[p_{t_0}\, p_{t_1}\, p_{t_0^2}\, p_{t_0^5}\right]$$

şeklindedir.

İspat. Lemmanın ispatı determinant fonksiyonunun lineerlik özelliğinden açıktır. □

Aşağıdaki lemma klasik invaryant teoride standart olan bir *bracket syzygy* eşitliğidir. Bu yüzden bu lemmayı ispatsız olarak vereceğiz.

Lemma 55. $x_0, x_1, ..., x_n, y_2, y_3, ..., y_n \in \mathbb{E}^n$ vektörleri için aşağıdaki eşitlik sağlanır

$$[x_1\, x_2 \ldots x_n]\,[x_0\, y_2 \ldots y_n] - [x_0\, x_2 \ldots x_n]\,[x_1\, y_2 \ldots y_n] - \ldots - [x_1 \ldots x_{n-1}\, x_0]\,[x_n\, y_2 \ldots y_n] = 0. \tag{26}$$

Lemma 56. Uygun bir p parametrizasyonu ile parametrelenmiş bir C rasyonel cebirsel eğrisi verilsin. $A_i(p)$, $\Delta(p)$ ve $A_i(p_{t_0})$, $\Delta(p_{t_0})$ determinantları aşağıdaki ilişkileri sağlar

$$\begin{aligned}
\Delta(p_{t_0}) &= -\frac{n-1}{t_1} A_2(p) \\
A_1(p_{t_0}) &= \frac{n-1}{t_1}(I_3(p)A_{5,2}(p) - I_2(p)A_{5,3}(p)) - \frac{t_0}{t_1}(I_2(p)A_{5,1}(p) - I_1(p)A_{5,2}(p)) \\
A_2(p_{t_0}) &= I_2(p)A_{5,1}(p) - I_1(p)A_{5,2}(p) \\
A_3(p_{t_0}) &= \frac{n-1}{t_1}(I_4(p)A_{5,2}(p) - I_2(p)A_{5,4}(p)).
\end{aligned}$$

İspat. Lemmayı yalnızca $A_1(p_{t_0})$ için kanıtlayacağız, çünkü diğerleri de benzer şekilde elde edilebilir. A_1 determinantının tanımından, $A_1(p_{t_0}) = \left[p_{t_0^5}\, p_{t_1 t_0}\, p_{t_0^3}\, p_{t_0^4}\right]$ olduğunu biliyoruz. (19) denkleminden,

$$A_1(p_{t_0}) = \frac{n-1}{t_1}\left[p_{t_0^5}\, p_{t_0}\, p_{t_0^3}\, p_{t_0^4}\right] - \frac{t_0}{t_1}\left[p_{t_0^5}\, p_{t_0^2}\, p_{t_0^3}\, p_{t_0^4}\right]$$

elde edilir.

Şimdi $p_{t_1}, p_{t_0^5}, p_{t_0}, p_{t_0^3}, p_{t_0^4}$ ve $p_{t_0}, p_{t_0^2}, p_{t_0^3}$ vektörleri için Lemma 55 uygulanırsa ve sonucu sıfır gelen determinantlar elenirse,

$$\left[p_{t_0^5}\, p_{t_0}\, p_{t_0^3}\, p_{t_0^4}\right]\left[p_{t_1}\, p_{t_0}\, p_{t_0^2}\, p_{t_0^3}\right] - \left[p_{t_1}\, p_{t_0}\, p_{t_0^3}\, p_{t_0^4}\right]\left[p_{t_0^5}\, p_{t_0}\, p_{t_0^2}\, p_{t_0^3}\right] - \left[p_{t_0^5}\, p_{t_0}\, p_{t_0^3}\, p_{t_1}\right]\left[p_{t_0^4}\, p_{t_0}\, p_{t_0^2}\, p_{t_0^3}\right] = 0$$

bulunur.

$A_2(p), A_3(p), A_{5,2}(p), A_{5,3}(p), \Delta(p)$ determinantlarının tanımından,

$$\left[p_{t_0^5}\, p_{t_0}\, p_{t_0^3}\, p_{t_0^4}\right]\Delta(p) = A_2(p)A_{5,3}(p) - A_3(p)A_{5,2}(p)$$

yazılır. Böylece Lemma 51'den

$$\left[p_{t_0^5}\, p_{t_0}\, p_{t_0^3}\, p_{t_0^4}\right] = I_2(p)A_{5,3}(p) - I_3(p)A_{5,2}(p) \tag{27}$$

elde edilir.

Benzer şekilde, $p_{t_0}, p_{t_0^5}, p_{t_0^2}, p_{t_0^3}, p_{t_0^4}$ ve $p_{t_1}, p_{t_0^2}, p_{t_0^3}$ vektörleri için Lemma 55 uygulanırsa ve sonucu sıfır olan determinantlar elenirse,

$$\left[p_{t_0^5}\, p_{t_0^2}\, p_{t_0^3}\, p_{t_0^4}\right]\left[p_{t_0}\, p_{t_1}\, p_{t_0^2}\, p_{t_0^3}\right]-\left[p_{t_0}\, p_{t_0^2}\, p_{t_0^3}\, p_{t_0^4}\right]\left[p_{t_0^5}\, p_{t_1}\, p_{t_0^2}\, p_{t_0^3}\right]-\left[p_{t_0^5}\, p_{t_0^2}\, p_{t_0^3}\, p_{t_0}\right]\left[p_{t_0^4}\, p_{t_1}\, p_{t_0^2}\, p_{t_0^3}\right]=0$$

bulunur. $A_1(p), A_2(p), A_{5,1}(p), A_{5,2}(p), \Delta(p)$ determinantlarının tanımından

$$\left[p_{t_0^5}\, p_{t_0^2}\, p_{t_0^3}\, p_{t_0^4}\right]\Delta(p)=A_2(p)A_{5,1}(p)-A_1(p)A_{5,2}(p)$$

elde edilir. Böylece Lemma 51'den

$$\left[p_{t_0^5}\, p_{t_0^2}\, p_{t_0^3}\, p_{t_0^4}\right]=I_2(p)A_{5,1}(p)-I_1(p)A_{5,2}(p) \tag{28}$$

sonucuna ulaşılır. (27) ve (28) denklemleri birleştirilirse,

$$A_1(p_{t_0})=\frac{n-1}{t_1}(I_3(p)A_{5,2}(p)-I_2(p)A_{5,3}(p))-\frac{t_0}{t_1}(I_2(p)A_{5,1}(p)-I_1(p)A_{5,2}(p)).$$

olup, istenilen elde edilir. □

Lemma 57. Uygun bir p parametrizasyonu ile parametrelenmiş bir C rasyonel cebirsel eğrisi verilsin ve p parametrizasyonunun katsayı vektörleri $c_j, j=0,...,n$ olsun. Eğer $A_i(p)$, $i=1,2,3$ ve $\Delta(p)$ determinantları t_0 değişkenine bağlı değilse $c_0=0$ dır.

İspat. $c_0=0$ olduğunu göstermek için n üzerinden tümevarım uygulayacağız. $n=4$ için

$$p(t_0,t_1)=(\sum_{i=0}^{4}c_{i,0}t_0^{4-i}t_1^i, \sum_{i=0}^{4}c_{i,1}t_0^{4-i}t_1^i, \sum_{i=0}^{4}c_{i,2}t_0^{4-i}t_1^i, \sum_{i=0}^{4}c_{i,3}t_0^{4-i}t_1^i)$$

yazılır ki burada $c_{j,i}$, $0\le i\le 4$ reel sayıları c_j, $0\le j\le 3$ katsayı vektörlerinin bileşenlerini ifade etmektedir. Şimdi $\Delta(p)$ determinantını aşağıdaki şekilde hesaplayalım

$$\begin{aligned}\Delta(p)=&-192\,[c_2\,c_3\,c_1\,c_0]\,t_0^4t_1^5-192\,[c_2\,c_4\,c_1\,c_0]\,t_0^3t_1^6+288\,[c_3\,c_4\,c_1\,c_0]\,t_0^2t_1^7\\&+384\,[c_3\,c_4\,c_2\,c_0]\,t_0t_1^8+96\,[c_3\,c_4\,c_2\,c_1]\,t_1^9.\end{aligned}$$

$\Delta(p)$, t_0 değişkenine bağlı olmadığından,

$$[c_3\,c_4\,c_2\,c_1]\neq 0, [c_3\,c_4\,c_2\,c_0]=0, [c_3\,c_4\,c_1\,c_0]=0, [c_2\,c_4\,c_1\,c_0]=0, [c_2\,c_3\,c_1\,c_0]=0$$

elde edilir. $[c_3\,c_4\,c_2\,c_0]=0$ ve $[c_3\,c_4\,c_2\,c_1]\neq 0$ olduğundan, $c_0=\lambda_1c_3+\lambda_2c_4+\lambda_3c_2$ olacak şekilde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ reel sayıları vardır. $c_0 = \lambda_1 c_3 + \lambda_2 c_4 + \lambda_3 c_2$ ifadesi sonucu sıfır olan determinantlarda yerine yazılırsa, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ sonucuna ulaşılır. Yani $c_0 = 0$ dır.

Lemmanın hipotezinin n için sağlandığını kabul edelim ve derecesi $n+1$ ve katsayı vektörleri c_i, $i = 0, ..., n+1$ olan bir p parametrizasyonu için hipotezin sağlandığını gösterelim. Kabul edelim ki $A_i(p)$, $i = 1, 2, 3$ ve $\Delta(p)$ determinantları t_0 değişkenine bağlı olmasın. Böylece $c_0 = 0$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. Bunun için de derecesi n ve katsayı vektörleri c'_j, $j = 0, ..., n$ olan $q = p_{t_0}$ parametrizasyonunu göz önüne alalım. $A_i(p)$, $i = 1, 2, 3$ ve $\Delta(p)$ determinantları t_0 değişkenine bağlı olmadığından,

$$A_1(p) = k_1 t_1^{4n-6}, A_2(p) = k_2 t_1^{4n-6}, A_3(p) = k_3 t_1^{4n-5}, \Delta(p) = k_0 t_1^{4n-3}, \tag{29}$$

yazılır ki burada k_0, k_1, k_2, k_3 sabittir. (27) denklemi ve Lemma 54 kullanılırsa

$$A_{5,1}(p) = nk_2 t_1^{4n-7}, A_{5,2}(p) = 0, A_{5,3}(p) = k_1 t_1^{4n-6} - k_2 t_0 t_1^{4n-7}, A_{5,4}(p) = k_3 t_1^{4n-5} \tag{30}$$

elde edilir. Ayrıca Lemma 56, (29) ve (30) denklemlerinden, $A_i(q)$, $i = 1, 2, 3$ ve $\Delta(q)$ determinantlarının t_0 değişkenine bağlı olmadığı bulunur. Hipotez n için doğru olduğundan $c'_0 = 0$ bulunur. p parametrizasyonunun ve c_j, $j = 0, 1, 2, 3$ katsayı vektörlerinin tanımından, $i = 0, ..., n$ için $c_i = (n+1-i)c'_i$ olduğu kolayca görülür. $c'_0 = 0$ ve $n \geq 4$ olduğundan, $c_0 = 0$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Sonuç 58. Uygun bir p parametrizasyonu ile parametrelenmiş bir C rasyonel cebirsel eğrisi verilsin. $A_i(p)$, $i = 1, 2, 3$ ve $\Delta(p)$ determinantlarından en az biri hem t_0 hem de t_1 değişkenlerine bağlıdır.

Teorem 59. Uygun bir p parametrizasyonu ile parametrelenmiş bir C rasyonel cebirsel eğrisi verilsin. p parametrizasyonu üzerinde tanımlı $I_1(p), I_2(p), I_3(p), I_4(p)$ projektif diferansiyel invaryantlar cebirsel bağımsızdır.

İspat. Kabul edelim ki $I_1(p) = \dfrac{A_1(p)}{\Delta(p)}, I_2(p) = \dfrac{A_2(p)}{\Delta(p)}, I_3(p) = \dfrac{A_3(p)}{\Delta(p)}, I_4(p) = \dfrac{A_4(p)}{\Delta(p)}$ fonksiyonları cebirsel bağımlı olsun. Bu takdirde $\Delta(p), A_1(p), A_2(p), A_3(p), A_4(p)$ homojen polinomları da cebirsel bağımlıdır. Bunun anlamı

$$J(p) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \Delta(p)}{\partial t_0} & \dfrac{\partial \Delta(p)}{\partial t_1} \\ \dfrac{\partial A_1(p)}{\partial t_0} & \dfrac{\partial A_1(p)}{\partial t_1} \\ \dfrac{\partial A_2(p)}{\partial t_0} & \dfrac{\partial A_2(p)}{\partial t_1} \\ \dfrac{\partial A_3(p)}{\partial t_0} & \dfrac{\partial A_3(p)}{\partial t_1} \\ \dfrac{\partial A_4(p)}{\partial t_0} & \dfrac{\partial A_4(p)}{\partial t_1} \end{bmatrix}$$

Jakobiyen matrisinin rankının bir olmasıdır. $n \geq 4$, p parametrizasyonunun derecesi olmak üzere, $\Delta(p), A_1(p), A_2(p), A_3(p), A_4(p)$ homojen polinomlarının derecelerinin sırasıyla $4n-7, 4n-10, 4n-10, 4n-9, 4n-8$ olduğu açıktır. $J(p)$ nun ikinci sütunundaki t_1 değişkenine göre kısmi türevi elimine etmek için Euler'in homojen fonksiyon teoremini uygularsak, $J(p)$ matrisini

$$J(p) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \Delta(p)}{\partial t_0} & \dfrac{4n-7}{t_1}\Delta(p) - \dfrac{t_0}{t_1}\dfrac{\partial \Delta(p)}{\partial t_0} \\ \dfrac{\partial A_1(p)}{\partial t_0} & \dfrac{4n-10}{t_1}A_1(p) - \dfrac{t_0}{t_1}\dfrac{\partial A_1(p)}{\partial t_0} \\ \dfrac{\partial A_2(p)}{\partial t_0} & \dfrac{4n-10}{t_1}A_2(p) - \dfrac{t_0}{t_1}\dfrac{\partial A_2(p)}{\partial t_0} \\ \dfrac{\partial A_3(p)}{\partial t_0} & \dfrac{4n-9}{t_1}A_3(p) - \dfrac{t_0}{t_1}\dfrac{\partial A_3(p)}{\partial t_0} \\ \dfrac{\partial A_4(p)}{\partial t_0} & \dfrac{4n-8}{t_1}A_4(p) - \dfrac{t_0}{t_1}\dfrac{\partial A_4(p)}{\partial t_0} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazabiliriz. Yine sütun indirgeme operasyonuyla,

$$\tilde{J}(p) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \Delta(p)}{\partial t_0} & \dfrac{4n-7}{t_1}\Delta(p) \\ \dfrac{\partial A_1(p)}{\partial t_0} & \dfrac{4n-10}{t_1}A_1(p) \\ \dfrac{\partial A_2(p)}{\partial t_0} & \dfrac{4n-10}{t_1}A_2(p) \\ \dfrac{\partial A_3(p)}{\partial t_0} & \dfrac{4n-9}{t_1}A_3(p) \\ \dfrac{\partial A_4(p)}{\partial t_0} & \dfrac{4n-8}{t_1}A_4(p) \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. $\tilde{J}(p)$ matrisinin rankı bir olduğundan, $\dfrac{4n-8}{t_1}\dfrac{\partial \Delta(p)}{\partial t_0}A_4(p) - \dfrac{4n-7}{t_1}\Delta(p)\dfrac{\partial A_4(p)}{\partial t_0} = 0$ dir. Bu diferansiyel denklemin çözümünden $\Delta(p)^{4n-8} = f(t_1)A_4(p)^{4n-7}$ elde edilir. Burada f, t_1 değişkeninin keyfi bir fonksiyonudur. Fakat

$\Delta(p)^{4n-8}$ ve $A_4(p)^{4n-7}$ polinomlarının dereceleri aynı olmalıdır. Dolayısıyla f bir sabit fonksiyon olmalıdır. $f(t_1) = c$ olsun. Tanım gereği $\dfrac{\partial\Delta(p)}{\partial t_0} = A_4(p)$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $\Delta(p)^{4n-8} = c(\dfrac{\partial\Delta(p)}{\partial t_0})^{4n-7}$ şeklinde bir diferansiyel denklem elde dilir. Bu denklemin çözülmesiyle, $\Delta(p)(t_0, t_1) = (c_1t_0 + g(t_1))^{4n-7}$ elde edilir. Yine burada g, t_1 değişkeninin keyfi bir fonksiyonu ve c_1 de bir sabittir. $\Delta(p)$ determinantının t_0, t_1 değişkenlerine bağlı, derecesi $4n-7$ olan bir homojen polinom olduğunu biliyoruz. Öyleyse g fonksiyonu $g(t_1) = c_2t_1$ şeklinde olmalıdır. Diğer yandan, Lemma 53'ten, t_1 değişkeni $\Delta(p)$ determinantının çarpanı olmalıdır. Böylece $c_1 = 0$ olur. Bu takdirde $\Delta(p) = r_0t_1^{4n-7}$ olacak şekilde bir r_0 sabiti vardır.

Benzer şekilde $\tilde{J}(p)$ matrisinin rankı bir olduğundan, aşağıdaki denklemler de sağlanır

$$\frac{4n-10}{t_1}\frac{\partial\Delta(p)}{\partial t_0}A_1(p) - \frac{4n-7}{t_1}\Delta(p)\frac{\partial A_1(p)}{\partial t_0} = 0 \tag{31}$$

$$\frac{4n-10}{t_1}\frac{\partial\Delta(p)}{\partial t_0}A_2(p) - \frac{4n-7}{t_1}\Delta(p)\frac{\partial A_2(p)}{\partial t_0} = 0 \tag{32}$$

$$\frac{4n-9}{t_1}\frac{\partial\Delta(p)}{\partial t_0}A_3(p) - \frac{4n-7}{t_1}\Delta(p)\frac{\partial A_3(p)}{\partial t_0} = 0 \tag{33}$$

$\Delta(p)$ polinomunun t_0 değişkenine bağlı olmadığı gerçeği ve (31),(32), (33) denklemleri kullanılırsa, her $i = 1, 2, 3$ için $A_i(p)$ determinantlarının t_0 değişkenine bağlı olmadığı sonucuna ulaşılır. Bu da Sonuç 58 ile çelişir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

2.2.2. Projektif Eğrilikler

Lemma 60. Uygun bir p parametrizasyonu ile parametrelenmiş bir C rasyonel cebirsel eğrisi ve $\varphi(t_0, t_1) = (at_0 + bt_1, ct_0 + dt_1) = (u, v)$ Möbius dönüşümü verilsin. Bu takdirde,

$\delta = ad - bc \neq 0$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır

$$\begin{aligned} v^4 I_1(p\circ\varphi) &= c^3(n-1)(n-2)(n-3)(3v+dt_1) \\ &+ c^2(n-1)(n-2)\delta t_1(2v+dt_1)I_4(p)\circ\varphi \\ &- c(n-1)\delta^2 t_1^2(v+dt_1)I_3(p)\circ\varphi + \delta^3 t_1^4(dI_1(p)\circ\varphi - bI_2(p)\circ\varphi) \quad (34) \\ v^4 I_2(p\circ\varphi) &= -c^4(n-1)(n-2)(n-3)t_1 - c^3(n-1)(n-2)\delta t_1^2 I_4(p)\circ\varphi \\ &+ c^2(n-1)\delta^2 t_1^3 I_3(p)\circ\varphi + \delta^3 t_1^4(aI_2(p)\circ\varphi - cI_1(p)\circ\varphi) \quad (35) \\ v^2 I_3(p\circ\varphi) &= -6c^2(n-2)(n-3) - 3c(n-2)\delta t_1 I_4(p)\circ\varphi + \delta^2 t_1^2 I_3(p)\circ\varphi \quad (36) \\ vI_4(p\circ\varphi) &= 4c(n-3) + \delta t_1 I_4(p)\circ\varphi. \quad (37) \end{aligned}$$

İspat. Öncelikle $I_i(p(\varphi))(t_0,t_1)$ ifadelerini hesaplayalım. Bunun için Tanım 52 uygulanacaktır. Böylece $\dfrac{\partial^i(p(\varphi))}{\partial t_0^i}(t_0,t_1)$, $1 \leq i \leq 4$ ve $\dfrac{\partial(p(\varphi))}{\partial t_1}(t_0,t_1)$ hesaplanacaktır. Zincir kuralı ve $u = at_0 + bt_1$, $v = ct_0 + dt_1$ eşitlikleri kullanılırsa,

$$\frac{\partial^i(p(\varphi))}{\partial t_0^i}(t_0,t_1) = \sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}a^{i-j}c^j p_{u^{i-j}v^j}(u,v) \quad (38)$$

$$\frac{\partial(p(\varphi))}{\partial t_1}(t_0,t_1) = bp_u(u,v) + dp_v(u,v) \quad (39)$$

elde edilir ki burada $p_{u^k v^m}(u,v) = \dfrac{\partial^{k+m}(p(u,v))}{\partial u^k \partial u^m}$ dır. (38) ve Lemma 49 kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial(p(\varphi))}{\partial t_0}(t_0,t_1) &= ap_u(u,v) + cp_v(u,v) \\ \frac{\partial^2(p(\varphi))}{\partial t_0^2}(t_0,t_1) &= \frac{c(n-1)}{v^2}(2av-cu)p_u(u,v) + \frac{c^2(n-1)}{v}p_v(u,v) + \frac{(av-cu)^2}{v^2}p_{u^2}(u,v) \\ &= \frac{c(n-1)(av+\delta t_1)}{v^2}p_u(u,v) + \frac{c^2(n-1)}{v}p_v(u,v) + \frac{\delta^2 t_1^2}{v^2}p_{u^2}(u,v) \\ \frac{\partial^3(p(\varphi))}{\partial t_0^3}(t_0,t_1) &= \frac{c^2(n-1)(n-2)(av+2\delta t_1)}{v^3}p_u(u,v) + \frac{c^3(n-1)(n-2)}{v^2}p_v(u,v) \\ &+ \frac{3c(n-2)(\delta^2 t_1^2)}{v^3}p_{u^2}(u,v) + \frac{\delta^3 t_1^3}{v^3}p_{u^3}(u,v) \\ \frac{\partial^4(p(\varphi))}{\partial t_0^4}(t_0,t_1) &= \frac{c^3(n-1)(n-2)(n-3)(av+3\delta t_1)}{v^4}p_u(u,v) \\ &+ \frac{c^4(n-1)(n-2)(n-3)}{v^3}p_v(u,v) + \frac{6c^2(n-2)(n-3)\delta^2 t_1^2}{v^4}p_{u^2}(u,v) \\ &+ \frac{4c(n-3)\delta^3 t_1^3}{v^4}p_{u^3}(u,v) + \frac{\delta^4 t_1^4}{v^4}p_{u^4}(u,v) \end{aligned}$$

bulunur. Buarada sadece $I_1(p(\varphi))(t_0,t_1)$ ifadesinin nasıl elde edileceğini ayrıntılı biçimde göstereceğiz, diğer ifadeler de benzer biçimde elde edilebilmektedir. Yukarıdaki eşitlikler

$I_1(p(\varphi))(t_0,t_1)$ ifadesinde yerine yazılırsa ve determinantların lineerlik özellikleri kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
I_1(p(\varphi))(t_0,t_1) &= \frac{\left[\frac{\partial^4(p(\varphi))}{\partial t_0^4}(t_0,t_1)\,\frac{\partial(p(\varphi))}{\partial t_1}(t_0,t_1)\,\frac{\partial^2(p(\varphi))}{\partial t_0^2}(t_0,t_1)\,\frac{\partial^3(p(\varphi))}{\partial t_0^3}(t_0,t_1)\right]}{\left[\frac{\partial(p(\varphi))}{\partial t_0}(t_0,t_1)\,\frac{\partial(p(\varphi))}{\partial t_1}(t_0,t_1)\,\frac{\partial^2(p(\varphi))}{\partial t_0^2}(t_0,t_1)\,\frac{\partial^3(p(\varphi))}{\partial t_0^3}(t_0,t_1)\right]} \\
&= \frac{c^3(n-1)(n-2)(n-3)(3v+at_1)}{v^4} \\
&\quad + \frac{c^2(n-1)(n-2)(2v+at_1)\delta t_1}{v^4}\frac{[p_u(u,v)\,p_v(u,v)\,p_{u^2}(u,v)\,p_{u^4}(u,v)]}{[p_u(u,v)\,p_v(u,v)\,p_{u^2}(u,v)\,p_{u^3}(u,v)]} \\
&\quad - \frac{c(n-1)(v+at_1)\delta^2 t_1^2}{v^4}\frac{[p_u(u,v)\,p_v(u,v)\,p_{u^4}(u,v)\,p_{u^3}(u,v)]}{[p_u(u,v)\,p_v(u,v)\,p_{u^2}(u,v)\,p_{u^3}(u,v)]} \\
&\quad + \frac{\delta^3 t_1^4}{v^4}d\frac{[p_{u^4}(u,v)\,p_v(u,v)\,p_{u^2}(u,v)\,p_{u^3}(u,v)]}{[p_u(u,v)\,p_v(u,v)\,p_{u^2}(u,v)\,p_{u^3}(u,v)]} \\
&\quad - \frac{\delta^3 t_1^4}{v^4}b\frac{[p_u(u,v)\,p_{u^4}(u,v)\,p_{u^2}(u,v)\,p_{u^3}(u,v)]}{[p_u(u,v)\,p_v(u,v)\,p_{u^2}(u,v)\,p_{u^3}(u,v)]} \\
&= \frac{c^3(n-1)(n-2)(n-3)(3v+at_1)}{v^4} \\
&\quad + \frac{c^2(n-1)(n-2)(2v+at_1)\delta t_1}{v^4}I_4(p)(u,v) \\
&\quad - \frac{c(n-1)(v+at_1)\delta^2 t_1^2}{v^4}I_3(p)(u,v) \\
&\quad + \frac{\delta^3 t_1^4}{v^4}(dI_1(p)(u,v) - bI_2(p)(u,v))
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece

$$
\begin{aligned}
v^4 I_1(p\circ\varphi) &= c^3(n-1)(n-2)(n-3)(3v+dt_1) + c^2(n-1)(n-2)\delta t_1(2v+dt_1)I_4(p)\circ\varphi \\
&\quad - c(n-1)\delta^2 t_1^2(v+dt_1)I_3(p)\circ\varphi + \delta^3 t_1^4(dI_1(p)\circ\varphi - bI_2(p)\circ\varphi)
\end{aligned}
$$

elde edilmiş olur. □

Teorem 61. Sırasıyla, uygun p ve q parametrizasyonları ile parametrelenmiş C_1 ve C_2 rasyonel cebirsel eğrileri verilsin. Eğer C_1 ve C_2 projektif denk ise, yani $f(C_1) = C_2$ olacak şekilde bir f projektif dönüşümü varsa, bu takdirde $M \cdot p = q(\varphi)$ olacak şekilde, aşağıdaki eşitlikleri sağlayan bir $\varphi(t_0,t_1) = (at_0 + bt_1, ct_0 + dt_1) = (u,v)$ Möbius dönüşümü ve regüler 4×4 tipinde bir M matrisi vardır:

$$v^4 I_1(p)(t_0,t_1) = c^3(n-1)(n-2)(n-3)(3v+dt_1) + c^2(n-1)(n-2)\delta t_1(2v+dt_1)I_4(q(u,v)$$
$$-c(n-1)\delta^2 t_1^2(v+dt_1)I_3(q)(u,v) + \delta^3 t_1^4(dI_1(q)(u,v) - bI_2(q)(u,v)) \quad (40)$$
$$v^4 I_2(p)(t_0,t_1) = -c^4(n-1)(n-2)(n-3)t_1 - c^3(n-1)(n-2)\delta t_1^2 I_4(q)(u,v)$$
$$+c^2(n-1)\delta^2 t_1^3 I_3(q)(u,v) + \delta^3 t_1^4(aI_2(q)(u,v) - cI_1(q)(u,v)) \quad (41)$$
$$v^2 I_3(p)(t_0,t_1) = -6c^2(n-2)(n-3) - 3c(n-2)\delta t_1 I_4(q)(u,v) + \delta^2 t_1^2 I_3(q)(u,v) \quad (42)$$
$$vI_4(p)(t_0,t_1) = 4c(n-3) + \delta t_1 I_4(q)(u,v), \quad (43)$$

burada $\delta = ad - bc$ dir.

İspat. C_1 ve C_2 eğrileri projektif denk olsun. Bu takdirde $M \cdot p = q(\varphi)$ olacak şekilde bir φ Möbius dönüşümü ve regüler bir M matrisi vardır. $I_1(p)(t_0,t_1), I_2(p)(t_0,t_1), I_3(p)(t_0,t_1), I_4(p)(t_0,t_1)$ fonksiyonları projektif diferansiyel invaryantlar olduğundan,

$$I_i(M \cdot p)(t_0,t_1) = I_i(p)(t_0,t_1), 1 \leq i \leq 4 \quad (44)$$

yazılır. Buna ek olarak, Lemma 60'dan,

$$\begin{aligned} I_1(q(\varphi))(t_0,t_1) = & I_1(q\circ\varphi)(t_0,t_1) = \frac{1}{v^4}(c^3(n-1)(n-2)(n-3)(3v+dt_1) \\ & + c^2(n-1)(n-2)\delta t_1(2v+dt_1)I_4(q)\circ\varphi \\ & - c(n-1)\delta^2 t_1^2(v+dt_1)I_3(q)\circ\varphi \\ & + \delta^3 t_1^4(dI_1(q)\circ\varphi - bI_2(q)\circ\varphi))(t_0,t_1) \\ & = \frac{1}{v^4}(c^3(n-1)(n-2)(n-3)(3v+dt_1) \\ & + c^2(n-1)(n-2)\delta t_1(2v+dt_1)I_4(q)(u,v) \\ & - c(n-1)\delta^2 t_1^2(v+dt_1)I_3(q)(u,v) \\ & + \delta^3 t_1^4(dI_1(q)(u,v) - bI_2(q)(u,v))) \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned}I_2(q(\varphi))(t_0,t_1) =& I_2(q\circ\varphi)(t_0,t_1) = \frac{1}{v^4}(-c^4(n-1)(n-2)(n-3)t_1 \\ &- c^3(n-1)(n-2)\delta t_1^2 I_4(q)\circ\varphi + c^2(n-1)\delta^2 t_1^3 I_3(q)\circ\varphi \\ &+ \delta^3 t_1^4(aI_2(q)\circ\varphi - cI_1(q)\circ\varphi))(t_0,t_1) \\ &= \frac{1}{v^4}(-c^4(n-1)(n-2)(n-3)t_1 \\ &- c^3(n-1)(n-2)\delta t_1^2 I_4(q)(u,v) + c^2(n-1)\delta^2 t_1^3 I_3(q)(u,v) \\ &+ \delta^3 t_1^4(aI_2(q)(u,v) - cI_1(q)(u,v)))(t_0,t_1)\end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned}I_3(q(\varphi))(t_0,t_1) &= I_3(q\circ\varphi)(t_0,t_1) = \frac{1}{v^2}(-6c^2(n-2)(n-3) \\ &- 3c(n-2)\delta t_1 I_4(q)\circ\varphi + \delta^2 t_1^2 I_3(q)\circ\varphi)(t_0,t_1) \\ &= \frac{1}{v^2}(-6c^2(n-2)(n-3) - 3c(n-2)\delta t_1 I_4(q)(u,v) \\ &+ \delta^2 t_1^2 I_3(q)(u,v))\end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned}I_4(p(\varphi))(t_0,t_1) &= I_4(p\circ\varphi)(t_0,t_1) = \frac{1}{v}(4c(n-3) + \delta t_1 I_4(q)\circ\varphi)(t_0,t_1) \\ &= \frac{1}{v}(4c(n-3) + \delta t_1 I_4(q)(u,v)),\end{aligned} \tag{48}$$

elde edilir.

Son olarak (44), (45), (46), (47) ve (48) denklemlerinden (40), (41), (42) ve (43) eşitlikleri elde edilmiş olur. □

Şimdi bu denklemlerden Möbius dönüşümünün parametrelerini yok edip, φ ile değişmeli bir yapıya sahip olacak ivaryantlar bulmaya çalışacağız. Bunun için de öncelikle (40) ve (41) denklemlerinden a, b, d parametrelerini elimine etmek için (40) denklemini t_0 ve (41) denklemini de $-t_1$ ile çarpıp, sonuçları toplayalım. Bu işlemin sonucundan

$$\begin{aligned}v^4 I_0(p)(t_0,t_1) &= 4c^3(n-1)(n-2)(n-3)t_1 v + 3c^2(n-1)(n-2)\delta t_1^2 v I_4(q)(u,v) \\ &- 2c(n-1)\delta^2 t_1^3 v I_3(q)(u,v) + \delta^3 t_1^4 I_0(q)(u,v),\end{aligned} \tag{49}$$

elde edilir ki burada $I_0(p)(t_0,t_1) = t_1 I_1(p)(t_0,t_1) - t_0 I_2(p)(t_0,t_1)$ şeklindedir.

Yine, (41) denkleminden a parametresini yok etmek için $av - cu = \delta$ ifadesini kullanalım. $a = \dfrac{\delta + cu}{v}$ ifadesi (41) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} v^5 I_2(p)(t_0,t_1) &= -c^4(n-1)(n-2)(n-3)t_1 v - c^3(n-1)(n-2)\delta t_1^2 v I_4(q)(u,v) \\ &+ c^2(n-1)\delta^2 t_1^3 v I_3(q)(u,v) - c\delta^3 t_1^4 I_0(q)(u,v) + \delta^4 t_1^5 I_2(q)(u,v) \quad (50) \end{aligned}$$

bulunur.

Ayrıca, Möbius dönüşümünün katsayıları için $\delta = ad - bc \neq 0$ eşitsizliğinin sağlandığını biliyoruz. Bu takdirde $\delta s = 1$ olacak şekilde bir $s \neq 0$ sayısı vardır. Bu sonucu, (40)-(43) denklemlerinden δ, c parametrelerini elimine etmek için kullanalım. Böylece (43), (42), (49), (50) denklemleri sırasıyla s, s^2, s^3, s^4 ile çarpılırsa,

$$svI_4(p)(t_0,t_1) = 4(cs)(n-3) + t_1 I_4(q)(u,v) \quad (51)$$

$$s^2v^2I_3(p)(t_0,t_1) = -6(cs)^2(n-2)(n-3) - 3(cs)(n-2)t_1 I_4(q)(u,v) + t_1^2 I_3(q)(u,v) \quad (52)$$

$$\begin{aligned} s^3v^4I_0(p)(t_0,t_1) &= 4(cs)^3(n-1)(n-2)(n-3)t_1 v + 3(cs)^2(n-1)(n-2)t_1^2 v I_4(q)(u,v) \\ &-2(cs)(n-1)t_1^3 v I_3(q)(u,v) + t_1^4 I_0(q)(u,v) \quad (53) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s^4v^5I_2(p)(t_0,t_1) &= -(cs)^4(n-1)(n-2)(n-3)t_1 v - (cs)^3(n-1)(n-2)t_1^2 v I_4(q)(u,v) \\ &+(cs)^2(n-1)t_1^3 v I_3(q)(u,v) - (cs)t_1^4 I_0(q)(u,v) + t_1^5 I_2(q)(u,v) \quad (54) \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

Bu kısımdan itibaren denklemleri daha basit bir formda yazabilmek için, aksi belirtilmedikçe, $I_i(q)(u,v)$ ifadesi $J_i(q)$ ile; $I_i(p)(t_0,t_1)$ ifadesi de $I_i(p)$ ile gösterilecektir. Şimdi yukarıdaki eşitliklerden c parametresini yok edelim. İlk denklemden cs ifadesi aşağıdaki şekilde çekilebilir:

$$cs = \frac{vsI_4(p) - t_1 J_4(q)}{4(n-3)}.$$

cs ifadesi (52), (53), (54) denklemlerinde yerine yazılıp, Theorem 59, kullanılırsa,

$$s^2 = \frac{t_1^2(8(n-3)J_3(q) + 3(n-2)J_4^2(q))}{v^2(8(n-3)I_3(p) + 3(n-2)I_4^2(p))}, \quad (55)$$

$$s^3 = \frac{t_1^4(8(n-3)^2 J_0(q) + 4(n-1)(n-3)t_1 J_3(q)J_4(q) + (n-1)(n-2)t_1 J_4^3(q))}{v^4(8(n-3)^2 I_0(p) + 4(n-1)(n-3)t_1 I_3(p)I_4(p) + (n-1)(n-2)t_1 I_4^3(p))} \quad (56)$$

ve

$$s^4 = \frac{t_1^5(256(n-3)^3J_2(q)+64(n-3)^2J_0(q)J_4(q)+16(n-1)(n-3)t_1J_3(q)J_4^2(q)+3(n-1)(n-2)t_1J_4^4(q))}{v^5(256(n-3)^3I_2(p)+64(n-3)^2I_0(p)I_4(p)+16(n-1)(n-3)t_1I_3(p)I_4^2(p)+3(n-1)(n-2)t_1I_4^4(p))} \quad (57)$$

eşitlikleri elde edilir.

Son olarak (55) ifadesinin küpü ile (56) ifadesinin karesi alınıp eşitlenirse

$$\begin{aligned}&\frac{(8(n-3)^2I_0(p)+4(n-1)(n-3)t_1I_3(p)I_4(p)+(n-1)(n-2)t_1I_4^3(p))^2}{t_1^2(8(n-3)I_3(p)+3(n-2)I_4^2(p))^3}\\ &= \frac{(8(n-3)J_0(q)+4(n-1)(n-3)t_1J_3(q)J_4(q)+(n-1)(n-2)t_1J_4^3(q))^2}{v^2(8(n-3)J_3(q)+3(n-2)J_4^2(q))^3}\end{aligned} \quad (58)$$

ifadesi ve (55) ifadesinin karesi ile (57) ifadesi eşitlenirse,

$$\begin{aligned}&\frac{256(n-3)^3I_2(p)+64(n-3)^2I_0(p)I_4(p)+16(n-1)(n-3)t_1I_3(p))I_4^2(p)+3(n-1)(n-2)t_1I_4^4(p)}{t_1(8(n-3)I_3(p)+3(n-2)I_4^2(p))^2}\\ &= \frac{256(n-3)^3J_2(q)+64(n-3)^2J_0(q)J_4(q)+16(n-1)(n-3)t_1J_3(q))J_4^2(q)+3(n-1)(n-2)t_1J_4^4(q)}{v(8(n-3)J_3(q)+3(n-2)J_4^2(q))^2}\end{aligned} \quad (59)$$

ifadesi elde edilir.

(58) ve (59) denklemleri incelendiğinde aşağıdaki tanım verilebilir:

Tanım 62. Uygun bir p parametrizasyonu ile parametrelenmiş bir C rasyonel cebirsel eğrisi verilsin. Bu takdirde C rasyonel cebirsel eğrisinin κ_1 ve κ_2 projektif eğrilikleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned}\kappa_1(p) &= \frac{(8(n-3)^2I_0(p)+4(n-1)(n-3)t_1I_3(p)I_4(p)+(n-1)(n-2)t_1I_4^3(p))^2}{t_1^2(8(n-3)I_3(p)+3(n-2)I_4^2(p))^3}\\ \kappa_2(p) &= \frac{256(n-3)^3I_2(p)+64(n-3)^2I_0(p)I_4(p)+16(n-1)(n-3)t_1I_3(p))I_4^2(p)+3(n-1)(n-2)t_1I_4^4(p)}{t_1(8(n-3)I_3(p)+3(n-2)I_4^2(p))^2}.\end{aligned}$$

Burada $I_0(p)(t_0,t_1) = t_1I_1(p) - t_0I_2(p)$ şeklindedir.

Uyarı 63. κ_1 ve κ_2 projektif eğrlikleri temel invaryantlarla üretildiğinden, bu eğrilikler de projektif dönüşümler altında invaryanttır.

Şimdi κ_1 ve κ_2 eğriliklerinin parametre değişiminden nasıl etkilendiğini araştıracağız.

Lemma 64. Uygun bir p parametrizasyonu ile parametrelenmiş bir C rasyonel cebirsel eğrisi ve $\varphi(t_0,t_1) = (at_0+bt_1, ct_0+dt_1) = (u,v)$ Möbius dönüşümü verilsin. Bu takdirde aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

i. $\kappa_1(p\circ\varphi) = \kappa_1(p)\circ\varphi$,

ii. $\kappa_2(p \circ \varphi) = \kappa_2(p) \circ \varphi$.

İspat. $\kappa_1(p \circ \varphi)$ ifadesini hesaplayalım.

$$\kappa_1(p \circ \varphi) = \frac{(8(n-3)I_0(p \circ \varphi) + 4(n-1)(n-3)t_1 I_3(p \circ \varphi) I_4(p \circ \varphi) + (n-1)(n-2)t_1 I_4^3(p \circ \varphi))^2}{t_1^2(8(n-3)I_3(p \circ \varphi) + 3(n-2)I_4^2(p \circ \varphi))^3}.$$

Lemma 60'daki eşitlikler, yukarıdaki eşitlikte yerine yazılıp, $\kappa_1(p \circ \varphi)$ ifadesinin pay ve paydası sadeleştirilirse,

$$\begin{aligned}
\kappa_1(p \circ \varphi) &= \frac{(8(n-3)I_0(p \circ \varphi) + 4(n-1)(n-3)t_1 I_3(p \circ \varphi) I_4(p \circ \varphi) + (n-1)(n-2)t_1 I_4^3(p \circ \varphi))^2}{t_1^2(8(n-3)I_3(p \circ \varphi) + 3(n-2)I_4^2(p \circ \varphi))^3} \\
&= \frac{\frac{\delta^6 t_1^8}{v^8}(8(n-3)I_0(p) \circ \varphi + 4(n-1)(n-3)v(I_3(p) \circ \varphi)(I_4(p) \circ \varphi) + (n-1)(n-2)vI_4^3(p) \circ \varphi)^2}{\frac{\delta^6 t_1^6}{v^6} t_1^2(8(n-3)I_3(p) \circ \varphi + 3(n-2)I_4^2(p) \circ \varphi)^3} \\
&= \frac{(8(n-3)I_0(p) \circ \varphi + 4(n-1)(n-3)v(I_3(p) \circ \varphi)(I_4(p) \circ \varphi) + (n-1)(n-2)vI_4^3(p) \circ \varphi)^2}{v^2(8(n-3)I_3(p) \circ \varphi + 3(n-2)I_4^2(p) \circ \varphi)^3} \\
&= \kappa_1(p) \circ \varphi.
\end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer yolla $\kappa_2(p \circ \varphi) = \kappa_2(p) \circ \varphi$ ifadesi de elde edilebilir. $\square$

Aşağıdaki teorem projektif denk eğrilerin, projektif eğrilikleri arasındaki bağıntıyı vermektedir:

Teorem 65. Sırasıyla uygun p, q parametrizasyonları ile parametrelenmiş C_1, C_2 rasyonel cebirsel eğrileri verilsin. Eğer C_1 ve C_2 projektif denk ise yani $f(C_1) = C_2$ olacak şekilde bir f projektif dönüşümü varsa, bu takdirde $M \cdot p = q(\varphi)$ olacak şekilde, aşağıdaki eşitlikleri sağlayan bir $\varphi(t_0, t_1) = (at_0 + bt_1, ct_0 + dt_1) = (u, v)$ Möbius dönüşümü ve regüler 4×4 tipinde bir M matrisi vardır:

$$\kappa_1(p)(t_0, t_1) = \kappa_1(q)(u, v) \tag{60}$$

$$\kappa_2(p)(t_0, t_1) = \kappa_2(q)(u, v). \tag{61}$$

İspat. Eğriler projektif denk olsun. Bu takdirde $M \cdot p = q(\varphi)$ olacak şekilde bir $\varphi(t_0, t_1) = (at_0 + bt_1, ct_0 + dt_1) = (u, v)$ Möbius dönüşümü ve regüler 4×4 tipinde bir M matrisi vardır. Uyarı 63 ve Lemma 64'ün art arda uygulanması ile, $i = 1$ ve 2 için,

$$\kappa_i(p)(t_0, t_1) = \kappa_i(M \cdot p)(t_0, t_1) = \kappa_i(q(\varphi))(t_0, t_1) = (\kappa_i(q) \circ \varphi)(t_0, t_1) = \kappa_i(q)(u, v).$$

elde edilir. $\square$

2.2.3. Möbius Dönüşümlerinin Belirlenmesi

(Alcazar vd., 2015) çalışmasında yazarlar, uzay eğrilerinin Öklid simetrilerini tespit edebilmek için iyi bilinen eğrilikler olan κ ve τ'yu kullanarak güçlü bir metod inşa etmişlerdir (bkz. Alcazar vd., 2015, Kısım 3). Tez çalışmasının bu kısmında (Alcazar vd., 2015) çalışmasında kullanılan metod baz alınarak, projektif denklik ve simetrilerin tespiti için yeni bir yaklaşım oluşturacağız.

Sırasıyla uygun p, q parametrizasyonları ile parametrelenmiş C_1, C_2 rasyonel cebirsel eğrileri verilsin. κ_1 ve κ_2 eğrilikleri p ve q parametrizasyonlarının rasyonel fonksiyonları olduğundan, eğrilikler için aşğıdaki temsili kullanacağız:

$$\kappa_1(p)(t_0,t_1) = \frac{U(t_0,t_1)}{V(t_0,t_1)} \qquad \kappa_2(p)(t_0,t_1) = \frac{Y(t_0,t_1)}{Z(t_0,t_1)}, \tag{62}$$

$$\kappa_1(q)(t_0,t_1) = \frac{\bar{U}(t_0,t_1)}{\bar{V}(t_0,t_1)} \qquad \kappa_2(q)(t_0,t_1) = \frac{\bar{Y}(t_0,t_1)}{\bar{Z}(t_0,t_1)}. \tag{63}$$

Burada U, V, Y, Z ve $\bar{U}, \bar{V}, \bar{Y}, \bar{Z}$ polinomları, $gcd(U,V) = 1$, $gcd(Y,Z) = 1$, $gcd(\bar{U},\bar{V}) = 1$ ve $gcd(\bar{Y},\bar{Z}) = 1$ şartını sağlayan homojen polinomları ifade etmektedir.

Şimdi Teorem 65'i uygulayarak aşağıdaki iki denklemi oluşturalım:

$$\kappa_1(p)(t_0,t_1) - \kappa_1(q)(u,v) = 0, \quad \kappa_2(p)(t_0,t_1) - \kappa_2(q)(u,v) = 0. \tag{64}$$

Bu denklemlerin paydalarını eşitleyip, payda kısmından kurtularak, t_0, t_1, u, v değişkenlerine bağlı E_1 ve E_2 ile temsil edeceğimiz iki homojen polinom oluşturalım:

$$E_1(t_0,t_1,u,v) := U(t_0,t_1)\bar{V}(u,v) - V(t_0,t_1)\bar{U}(u,v) \tag{65}$$

$$E_2(t_0,t_1,u,v) := Y(t_0,t_1)\bar{Z}(u,v) - Z(t_0,t_1)\bar{Y}(u,v). \tag{66}$$

E_1 ve E_2 denklemlerinin ortak çözümlerini elde etmek istediğimizden, bu polinomların ortak çarpanları ile ilgileneceğiz. Bu polinomların ortak böleni olan homojen polinomu

$$G(t_0,t_1,u,v) := gcd(E_1(t_0,t_1,u,v), E_2(t_0,t_1,u,v)), \tag{67}$$

ile ifade edeceğiz.

Diğer yandan, keyfi bir $\varphi(t_0,t_1) = (at_0 + bt_1, ct_0 + dt_1) = (u,v)$ Möbius dönüşümü için, $ad - bc \neq 0$ olmak üzere, bir $F(t_0,t_1,u,v)$ homojen polinomunu aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$F(t_0, t_1, u, v) = u(ct_0 + dt_1) - v(at_0 + bt_1). \tag{68}$$

Bu F polinomuna Möbius-çarpanı adını vereceğiz. $ad - bc \neq 0$ eşitsizliği, F polinomunun indirgenemez bir polinom olduğunu garanti etmektedir. $\varphi(t_0, t_1) = (t_0, t_1)$ birim Möbius dönüşümüne karşılık gelen Möbius çarpanı $F(t_0, t_1, u, v) = ut_1 - vt_0$ şeklinde olacaktır.

Teorem 66. Sırasıyla uygun p, q parametrizasyonları ile parametrelenmiş C_1, C_2 rasyonel cebirsel eğrileri verilsin. Ayrıca G de (67) denklemindeki gibi olsun. Eğer C_1 ve C_2 projektif denk ise, bu takdirde F polinomu G polinomunu bölecek şekilde, φ Möbius dönüşümüne karşılık gelen bir F Möbius-çarpanı vardır.

İspat. Eğriler projektif denk olduklarından, $M \cdot p = q(\varphi)$ olacak şekilde bir $\varphi(t_0, t_1) = (at_0 + bt_1, ct_0 + dt_1) = (u, v)$ Möbius dönüşümü ve regüler 4×4 tipli bir M matrisi vardır. F, φ dönüşümüne karşılık gelen Möbius-çarpan olsun. Lemma 64'ten, (65)-(66) sisteminin sıfır kümesi, F polinomunun sıfır kümesini yani $\{(t_0, t_1, u, v) \,:\, (u, v) = \varphi(t_0, t_1)\}$ kümesini içerir. Bezout'nun teoreminden $gcd(E_1, F) \neq 1$ ve $gcd(E_2, F) \neq 1$ elde edilir. Dolayısıyla, F indirgenemez olduğundan, F polinomu hem E_1 hem de E_2 polinomlarını böler. Sonuç olarak F, $gcd(E_1, E_2) = G$ polinomunu böler. □

Bu adımdan sonra hesaplamalı tekniklerin en kullanışlılarından olan resultant kavramını kullanacağız. Bizim durumumuzda, resultant iki değişkene göre hesaplanacağından Macaulay resultantını kullanacağız. (Macaulay, 1994) çalışmasındaki sonuçlardan ve Teorem 66'dan, aşağıdaki sonuç doğrudan verilebilir:

Sonuç 67. Sırasıyla uygun p, q parametrizasyonları ile parametrelenmiş C_1, C_2 rasyonel cebirsel eğrileri verilsin. Ayrıca G polinomu (67) denklemindeki gibi tanımlansın. Eğer C_1 ve C_2 projektif denk ise, bu takdirde F ve G polinomlarının (u, v) değişkenlerine göre Macaulay resultantı özdeşçe sıfırdır.

Macaulay resultantı, (Macaulay, 1994) çalışmasında, iki değişkenli homojen polinomlar için aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

Tanım 68. (Macaulay, 1994, Kısım 2) $f_1(x_1, x_2) = a_1 x_1^{l_1} + b_1 x_1^{l_1 - 1} x_2 + \ldots + k_1 x_2^{l_1}$, $f_2(x_1, x_2) = k_2 x_1^{l_2} + \ldots + a_2 x_2^{l_2}$ ve $l = l_1 + l_2 - 2$ olsun. Bu takdirde f_1 ve f_2 polinomlarının x_1, x_2 değişkenlerine göre Macaulay resultantı

$$MCR(f_1, f_2)_{x_1,x_2} := \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & k_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_1 & b_1 & \cdots & k_1 & \cdot & \cdot \\ & & & \vdots & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_1 & b_1 & \cdots & k_1 \\ k_2 & \cdots & \cdots & a_2 & \cdot & \cdot\cdot & \\ \cdot & k_2 & \cdots & \cdots & a_2 & \cdot & \cdot \\ & & & \vdots & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & k_2 & \cdots & \cdots & a_2 \end{vmatrix} \tag{69}$$

determinantı ile tanımlanır.

$G(t_0, t_1, u, v) = \sum_{i=0}^{m} g_i(t_0, t_1)u^{m-i}v^i$ olsun, burada m, G polinomunun derecesini ve $i = 0, ..., m$ için g_i polinomları da t_0, t_1 değişkenlerine bağlı homojen polinomları ifade etmektedir. (69) denkleminden G ve F nin resultantı aşağıdaki determinantla hesaplanabilir

$$\begin{aligned} MCR(F, G)_{u,v} &= \begin{vmatrix} g_0 & g_1 & g_2 & \cdots & g_m \\ ct_0 + dt_1 & -(at_0 + bt_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & ct_0 + dt_1 & -(at_0 + bt_1) & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & ct_0 + dt_1 & -(at_0 + bt_1) \end{vmatrix} \\ &= (-1)^m \sum_{i=0}^{m} g_i(at_0 + bt_1)^{m-i}(ct_0 + dt_1)^i. \end{aligned} \tag{70}$$

(70) ifadesinden anlaşılacağı üzere, $MCR(F, G)_{u,v}$, t_0, t_1 değişkenlerine bağlı bir homojen polinomdur ve katsıyaları da a, b, c, d parametrelerine bağlı homojen polinomlardır. $MCR(F, G)_{u,v}$ polinomunun özdeşçe sıfır olması için tüm katsayı polinomlarının da özdeşçe sıfır olması gerekir. Dolayısıyla $MCR(F, G)_{u,v}$ polinomunun katsayılarından bir polinom denklem sistemi oluşturulur. Bu sisteme S diyelim. Buna ek olarak $ad - bc \neq 0$ eşitsizliğini $(ad-bc)k = 1$ eşitliği ile yer değiştirip bir denklem daha elde edeceğiz. Böylece bir k parametresi daha sisteme eklenecektir. $(ad - bc)k = 1$ denkleminin S sistemine eklenmesiyle oluşan sistemi $\bar{S}$ ile temsil edelim. Bu sistemin çözümü tüm Möbius dönüşümüne karşılık gelecektir. Sonuç olarak bu kısım ve daha öncesinde elde edilen sonuçlarla aşağıdaki sonuç doğrudan ifade edilebilir:

Sonuç 69. C_1 ve C_2 arasındaki projektif denklikler $\bar{S}$ sistemini sağlayan Möbius dönüşümlerine karşılık gelir.

2.2.4. Denklik ve Simetrilerin Belirlenmesi

Bir önceki alt başlıkta projektif denklik ve simetrilere karşılık gelen Möbius dönüşümlerini elde etmiştik. Bu başlıkta da regüler M matrisini bulmak için basit bir metod vereceğiz. Her bir Möbius dönüşümünün elde edilmesiyle, bu Möbius dönüşümlerine karşılık gelen her bir projektif denklik ya da simetri, yani regüler M matrisi, basit bir matrix çarpımıyla elde edilebilecektir.

Aşağıdaki lemma, Tanım 50'de verilen $D(p)$ ve $D(q)$ matrisleri arasındaki ilişkiyi verecektir.

Lemma 70. Sırasıyla uygun p, q parametrizasyonları ile parametrelenmiş C_1, C_2 rasyonel cebirsel eğrileri verilsin. Eğer her $1 \leq i \leq 4$ için $I_i(p) = I_i(q)$ ise bu takdirde her $k = 0, 1$ için,

$$(D(p))^{-1} \cdot \frac{\partial D(p)}{\partial t_k} = (D(q))^{-1} \cdot \frac{\partial D(q)}{\partial t_k}, \tag{71}$$

eşitliği sağlanır. Burada $(D(p))^{-1}$, $D(p)$ matrisinin ters matrisini sembolize etmektedir.

İspat. U_k, $k = 0, 1$ bilinmeyen matrisleri için $(D(p))^{-1} \cdot \dfrac{\partial D(p)}{\partial t_k} = U_k$ olsun. Bu takdirde $D(p) \cdot U_k = \dfrac{\partial D(p)}{\partial t_k}$ yazılır. Şimdi $1 \leq j \leq 4$ için $D(p)$ matrisinin j. sütununu $D(p)_j$ ile ifade edip, benzer şekilde U_k matrisinin j. sütununu da U_k^j ile ifade edelim. Dolayısıyla buradan her biri bir j, k çiftine karşılık gelen 8 denklem sistemi elde edilir. Bu sistemleri açık şekilde, her $k = 0, 1$ ve $1 \leq j \leq 4$ için aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

$$D(p) \cdot U_k^j = \frac{\partial D(p)_j}{\partial t_k}. \tag{72}$$

Her bir ikiliye karşılık gelen denklem sistemi U_k^j nin bileşenlerine göre lineerdir. Diğer yandan $D(p)$ katsayılar matrisi regüler olduğundan, her bir sistem tek bir çözüme sahiptir. Bu sistemlerin çözümünden

$$U_k^j = \begin{bmatrix} \dfrac{\left[\dfrac{\partial D(p)_j}{\partial t_k}\; p_{t_1}\; p_{t_0^2}\; p_{t_0^3}\right]}{\Delta(p)} \\ \dfrac{\left[p_{t_0}\; \dfrac{\partial D(p)_j}{\partial t_k}\; p_{t_0^2}\; p_{t_0^3}\right]}{\Delta(p)} \\ \dfrac{\left[p_{t_0}\; p_{t_1}\; \dfrac{\partial D(p)_j}{\partial t_k}\; p_{t_0^3}\right]}{\Delta(p)} \\ \dfrac{\left[p_{t_0}\; p_{t_1}\; p_{t_0^2}\; \dfrac{\partial D(p)_j}{\partial t_k}\right]}{\Delta(p)} \end{bmatrix} \tag{73}$$

çözümleri elde edilir. Lemma 49'den, $k = 0$ ve $j < 4$ için

$$U_0^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\; U_0^2 = \begin{bmatrix} \frac{n-1}{t_1} \\ 0 \\ -\frac{t_0}{t_1} \\ 0 \end{bmatrix},\; U_0^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{74}$$

ve $k = 1$, $j < 4$ için

$$U_1^1 = \begin{bmatrix} \frac{n-1}{t_1} \\ 0 \\ -\frac{t_0}{t_1} \\ 0 \end{bmatrix},\; U_1^2 = \begin{bmatrix} -\frac{(n-1)t_0}{t_1^2} \\ \frac{n-1}{t_1} \\ \frac{t_0^2}{t_1^2} \\ 0 \end{bmatrix},\; U_1^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{n-2}{t_1} \\ -\frac{t_0}{t_1} \end{bmatrix} \tag{75}$$

elde edilir. $k = 0, 1$ ve $j < 4$ için görülür ki U_k^j çözümleri parametreden bağımsızdır. Şimdi $k = 0$ ve $j = 4$ için $\dfrac{\partial D(p)_4}{\partial t_0} = \dfrac{\partial p_{t_0^3}}{\partial t_0} = p_{t_0^4}$ dir. Böylece

$$U_0^4 = \begin{bmatrix} \dfrac{\left[p_{t_0^4}\; p_{t_1}\; p_{t_0^2}\; p_{t_0^3}\right]}{\Delta(p)} \\ \dfrac{\left[p_{t_0}\; p_{t_0^4}\; p_{t_0^2}\; p_{t_0^3}\right]}{\Delta(p)} \\ \dfrac{\left[p_{t_0}\; p_{t_1}\; p_{t_0^4}\; p_{t_0^3}\right]}{\Delta(p)} \\ \dfrac{\left[p_{t_0}\; p_{t_1}\; p_{t_0^2}\; p_{t_0^4}\right]}{\Delta(p)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1(p) \\ I_2(p) \\ I_3(p) \\ I_4(p) \end{bmatrix} \tag{76}$$

çözümü elde edilir. Benzer şekilde, Lemma 49'den, $k=1$ ve $j=4$ için, $\dfrac{\partial D(p)_4}{\partial t_1} = \dfrac{\partial p_{t_0^3}}{\partial t_1} = p_{t_0^3 t_1} = \frac{n-3}{t_1} p_{t_0^3} - \dfrac{t_0}{t_1} p_{t_0^4}$ olup,

$$U_1^4 = \begin{bmatrix} \dfrac{\left[\frac{n-3}{t_1}p_{t_0^3} - \dfrac{t_0}{t_1}p_{t_0^4}\; p_{t_1}\; p_{t_0^2}\; p_{t_0^3}\right]}{\Delta(p)} \\ \dfrac{\left[p_{t_0}\; \frac{n-3}{t_1}p_{t_0^3} - \dfrac{t_0}{t_1}p_{t_0^4}\; p_{t_0^2}\; p_{t_0^3}\right]}{\Delta(p)} \\ \dfrac{\left[p_{t_0}\; p_{t_1}\; \frac{n-3}{t_1}p_{t_0^3} - \dfrac{t_0}{t_1}p_{t_0^4}\; p_{t_0^3}\right]}{\Delta(p)} \\ \dfrac{\left[p_{t_0}\; p_{t_1}\; p_{t_0^2}\; \frac{n-3}{t_1}p_{t_0^3} - \dfrac{t_0}{t_1}p_{t_0^4}\right]}{\Delta(p)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{t_0}{t_1} I_1(p) \\ -\frac{t_0}{t_1} I_2(p) \\ -\frac{t_0}{t_1} I_3(p) \\ \frac{n-3}{t_1} - \frac{t_0}{t_1} I_4(p) \end{bmatrix} \tag{77}$$

çözümü elde edilir.

Yine bilinmeyen bir V_k, $k=0,1$ matrisi ve $1 \le j \le 4$ için $(D(q))^{-1} \cdot \dfrac{\partial D(q)}{\partial t_k} = V_k$ olsun. Bu takdirde $D(q) \cdot V_k = \dfrac{\partial D(q)}{\partial t_k}$ dir. $D(q)$ matrisinin j. sütununu $D(q)_j$, V_k matrisinin j. sütununu V_k^j ile ifade edelim. Benzer şekilde her bir j ve k ikilisine karşılık gelen 8 denklem sistemi elde edilir. V_k^j çözümleri için, U_k^j ve V_k^j çözümleri parametrizasyonlardan bağımsız olduğundan, her k ve $j < 4$ için $U_k^j = V_k^j$ olur. Ayrıca aynı işlemlerle,

$$V_0^4 = \begin{bmatrix} I_1(q) \\ I_2(q) \\ I_3(q) \\ I_4(q) \end{bmatrix}, \tag{78}$$

ve

$$V_1^4 = \begin{bmatrix} -\frac{t_0}{t_1} I_1(q) \\ -\frac{t_0}{t_1} I_2(q) \\ -\frac{t_0}{t_1} I_3(q) \\ \frac{n-3}{t_1} - \frac{t_0}{t_1} I_4(q) \end{bmatrix} \tag{79}$$

elde edilir.

Her $1 \le i \le 4$ için $I_i(p) = I_i(q)$ olduğundan her k için $U_k^4 = V_k^4$ bulunur. Sonuç olarak her k için $U_k = V_k$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 71. Sırasıyla uygun p, q parametrizasyonları ile parametrelenmiş C_1, C_2 rasyonel cebirsel eğrileri verilsin. Bu takdirde her $1 \leq i \leq 4$ için $I_i(p) = I_i(q)$ dir ancak ve ancak $M \cdot p = q$ olacak şekilde regüler 4×4 tipli bir M matrisi vardır ve $M = D(q) \cdot (D(p))^{-1}$ dir.

İspat. Projektif diferansiyel invaryantların tanımı gereği, ispatın yeter şart kısmı açıktır. Dolayısıyla biz sadece gerek şartı kanıtlayacağız.

Her $1 \leq i \leq 4$ için $I_i(p) = I_i(q)$ olsun. Lemma 70'ten, her $k = 0, 1$ için $(D(p))^{-1} \cdot \dfrac{\partial D(p)}{\partial t_k} = (D(q))^{-1} \cdot \dfrac{\partial D(q)}{\partial t_k}$ dir. $D(q) \cdot (D(p))^{-1}$ matrisini göz önüne alalım. Bu matrisin t_k, $k = 0, 1$ değişkenine göre türevlenmesiyle

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(D(q) \cdot (D(p))^{-1})}{\partial t_k} &= \frac{\partial D(q)}{\partial t_k} \cdot (D(p))^{-1} + D(q) \cdot \frac{\partial (D(p))^{-1}}{\partial t_k} \\
&= \frac{\partial D(q)}{\partial t_k} \cdot (D(p))^{-1} - D(q)(D(p))^{-1} \cdot \frac{\partial D(p)}{\partial t_k} \cdot (D(p))^{-1} \\
&= D(q) \cdot \left((D(q))^{-1} \cdot \frac{\partial D(q)}{\partial t_k} - (D(p))^{-1} \cdot \frac{\partial D(p)}{\partial t_k} \right) \cdot (D(p))^{-1}
\end{aligned}$$

elde edilir. $(D(p))^{-1} \cdot \dfrac{\partial D(p)}{\partial t_k} = (D(q))^{-1} \cdot \dfrac{\partial D(q)}{\partial t_k}$ olduğundan, her k için $\dfrac{\partial(D(q) \cdot (D(p))^{-1})}{\partial t_k} = 0$ dir. Bu da $D(q) \cdot (D(p))^{-1}$ matrisinin bir sabit matris olduğu, yani matrisin t_0, t_1 değişkenlerinden bağımsız olduğu anlamına gelir. $D(q) \cdot (D(p))^{-1} = M$ olsun. $\Delta(p)$ ve $\Delta(q)$ özdeşçe sıfır olmadığından, M regüler bir matristir. Buradan $M \cdot D(p) = D(q)$ yazılır. Bu eşitlikten $M \cdot p_{t_0} = q_{t_0}$ ve $M \cdot p_{t_1} = q_{t_1}$ elde edilir.

Euler'in homojen funksiyon teoreminden

$$nq = t_0 q_{t_0} + t_1 q_{t_1} = t_0 M \cdot p_{t_0} + t_1 M \cdot p_{t_1} = M \cdot (t_0 p_{t_0} + t_1 p_{t_1}) = nM \cdot p$$

olup, $M \cdot p = q$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

Teorem 71, C_1 ve C_2 eğrilerinin iki uygun parametrizasyonunun temel invaryantları eşit olduğunda, bu parametrizasyonları ilişkilendiren bir regüler M matrisi her zaman bulunabilir. Dolayısıyla Sonuç 69'u sağlayan her bir φ Möbius dönüşümü için, $M = D(q(\varphi)) \cdot (D(p))^{-1}$ özdeşliği kullanılarak φ dönüşümüne karşılık gelen bir regüler M matrisi bulunabilir. Böylece bu özdeşlik sayesinde bir denklem sistemi oluşturmadan ve herhangi sistemi çözmeden eğrileri denk yapan projektif dönüşümler bulunmuş olur. Özetle, projektif denklik ve simetrilerin saptanması için, Möbius bulunması yeterlidir. Bununla birlikte eğer sistemin çözümünden herhangi bir Möbius dönüşümü bulunamazsa, yani $\bar{S}$ sisteminin çözümü yoksa, eğriler arasında denklik olmadığı elde edilmiş olur.

2.2.5. Algoritma

İki uygun p ve q parametrizasyonu verildiğinde, $Algoritma\ Prj3D$ çıktı olarak, girdi eğrilerinin eşit olup olmamasına göre, projektif denkliklerin ya da simetrilerin sayısını verir.

Metodun her bir adımı aşağıda açık bir şekilde verilmiştir:

1. Adım: p ve q parametrizasyonlarının her biri için ayrı ayrı I_0, I_1, I_2, I_3, I_4 temel diferansiyel invaryantlar hesaplanır.

2. Adım: 1. Adımda bulunan verilerle p ve q parametrizasyonlarının her biri için ayrı ayrı κ_1 ve κ_2 eğrilikleri hesaplanır.

3. Adım: $\kappa_1(p)(t_0, t_1) - \kappa_1(q)(u, v) = 0$ ve $\kappa_2(p)(t_0, t_1) - \kappa_2(q)(u, v) = 0$ denklemleri kullanılarak, $E_1(t_0, t_1, u, v)$ ve $E_2(t_0, t_1, u, v)$ polinomları hesaplanır.

4. Adım: $G(t_0, t_1, u, v) = gcd(E_1(t_0, t_1, u, v), E_2(t_0, t_1, u, v))$ hesaplanır.

5. Adım: $MCR(F, G)_{u,v}$ Macaulay resultantı hesaplanır. $P := MCR(F, G)_{u,v}$ ataması yapılır.

6. Adım: P polinomu t_0, t_1 değişkenlerine göre düzenlenip, a, b, c, d parametrelerine bağlı tüm katsayı polinomları elde edilir.

7. Adım: P polinomunun katsayı polinomlarından ve $(ad - bc)k = 1$ denkleminden oluşan $\bar{S}$ sistemi oluşturulur.

8. Adım: $\bar{S}$ sistemi a, b, c, d, k bilinmeyenlerine göre, Gröbner bazı kullanılarak çözülür.

9. Adım: **Denklik Durumu:** *Girdi özdeş değil* Eğer çözüm kümesi boş ise eğriler denk değil. Eğer çözüm kümesi boş değil ise denkliklere karşılık gelen her bir Möbius dönüşümü hesaplanır.
Simetri Durumu: *Girdiler özdeş* Çözüm kümesinde en az bir eleman mevcuttur. $\varphi(t_0, t_1) = (t_0, t_1)$ dönüşümüne karşılık gelen trivial çözümdür. Eğer çözüm kümesi trivial çözümden başka çözüm içermiyorsa eğri simetrik değildir. Aksi halde simetrilere karşılık gelen her bir Möbius dönüşümü hesaplanır.

Algoritma $Prj3D$

Girdi: *Homojen tamsile sahip* p *ve* q *parametrizasyonları*
Çıktı: *Denkliklerin/simetrilerin sayısı*

procedure $Prj3D(p, q)$
  E_1, E_2, ve G homojen polinomlarını hesapla
  $F \longleftarrow u(ct_0 + dt_1) - v(at_0 + bt_1)$
  $MCR(F, G)_{u,v}$ Macaulay resultantını hesapla
  $P \longleftarrow MCR(F, G)_{u,v}$
  P polinomunun katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle elde edilen denklemler ve $(ad - bc)k = 1$ denkleminden oluşan $\bar{S}$ sistemini üret
  $\bar{S}$ sistemini a, b, c, d, k değişkenlerine göre çöz ▷ Burada Gröbner bazı hesaplanır
  m, her biri farklı bir Möbius dönüşümüne karşılık gelen çözümlerin sayısını olsun
  if p=q **then**
    if $m = 0$ **then return** "Simetri yok."
    elsereturn "Simetrilerin sayısı m."
  else
    if $m = 0$ **then return** "Denklik yok."
    elsereturn "Denkliklerin sayısı m."

Metodun tüm basamaklarının ayrıntılı biçimde incelenebileceği bir hesaplamalı örnek aşağıda verilmiştir:

Örnek 72. Aşağıdaki uygun parametrizasyonlarla verilen eğrileri ele alalım:

$$p(t_0, t_1) = \begin{pmatrix} (t_0 - t_1)^4 + 16t_0^4 - 8t_0^3(t_0 - t_1) + 4t_0^2(t_0 - t_1)^2 \\ 4t_0^2(t_0 - t_1)^2 \\ 8t_0^3(t_0 - t_1) \\ 2t_0(t_0 - t_1)((t_0 - t_1)^2 + 4t_0^2) \end{pmatrix},$$

$$q(t_0, t_1) = \begin{pmatrix} (t_0 - t_1)^4 + 16t_0^4 \\ 2t_0(t_0 - t_1)((t_0 - t_1)^2 + 4t_0^2) \\ 2(t_0 - t_1)^3 t_0 \\ 4t_0^2(t_0 - t_1)^2 \end{pmatrix}.$$

Eğrilerin projektif diferansiyel invaryantları aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned}
I_1(q)(t_0,t_1) &= \frac{18t_0}{t_0^4-t_1^4} & I_1(p)(t_0,t_1) &= \frac{270t_0+24t_1}{15t_0^4+4t_0^3t_1-6t_0^2t_1^2+4t_0t_1^3-t_1^4}\\
I_2(q)(t_0,t_1) &= \frac{-6t_1}{t_0^4-t_1^4} & I_2(p)(t_0,t_1) &= \frac{-90t_1}{15t_0^4+4t_0^3t_1-6t_0^2t_1^2+4t_0t_1^3-t_1^4}\\
I_3(q)(t_0,t_1) &= \frac{-12t_0^2}{t_0^4-t_1^4} & I_3(p)(t_0,t_1) &= \frac{-180t_0^2-24t_0t_1+12t_1^2}{15t_0^4+4t_0^3t_1-6t_0^2t_1^2+4t_0t_1^3-t_1^4}\\
I_4(q)(t_0,t_1) &= \frac{4t_0^3}{t_0^4-t_1^4} & I_4(p)(t_0,t_1) &= \frac{60t_0^3+12t_0^2t_1-12t_0t_1^2+4t_1^3}{15t_0^4+4t_0^3t_1-6t_0^2t_1^2+4t_0t_1^3-t_1^4}\\
I_0(q)(t_0,t_1) &= \frac{24t_0t_1}{t_0^4-t_1^4} & I_0(p)(t_0,t_1) &= \frac{24t_1(15t_0+t_1)}{15t_0^4+4t_0^3t_1-6t_0^2t_1^2+4t_0t_1^3-t_1^4}
\end{aligned}$$

Bu invaryantlar kullanılarak, eğrilerin projektif eğrilikleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned}
\kappa_1(q)(t_0,t_1) &= \frac{(t_0^4+t_1^4)^4}{24t_0^4t_1^4}\\
\kappa_2(q)(t_0,t_1) &= \frac{t_0^8+t_0^4t_1^4+t_1^8}{6t_0^4t_1^4}\\
\kappa_1(p)(u,v) &= \frac{(17u^4-4u^3v+6u^2v^2-4uv^3+v^4)^2}{384u^4(u-v)^4}\\
\kappa_2(p)(u,v) &= \frac{273u^8-72u^7v+124u^6v^2-120u^5v^3+86u^4v^4-56u^3v^5+28u^2v^6-8uv^7+v^8}{96u^4(u-v)^4}.
\end{aligned}$$

Böylece E_1 ve E_2 homojen polinomları

$$\begin{aligned}
E_1(t_0,t_1,u,v) &= 384(t_0^4+t_1^4)^2u^4(-v+u)^2(u^2-2uv+v^2)-24t_0^4t_1^4(17u^4-4u^3v+6u^2v^2-4uv^3+v^4)^2\\
E_2(t_0,t_1,u,v) &= 96(t_0^8+t_0^4t_1^4+t_1^8)(u^2-2uv+v^2)^2u^4\\
&\quad -6t_0^4t_1^4(273u^8-72u^7v+124u^6v^2-120u^5v^3+86u^4v^4-56u^3v^5+28u^2v^6-8uv^7+v^8)
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır.

$G=gcd(E_1,E_2)$ homojen polinomu da aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
G(t_0,t_1,u,v) &= t_0^8u^8-4t_0^8u^7v+6t_0^8u^6v^2-4t_0^8u^5v^3+t_0^8u^4v^4-\frac{257}{16}t_0^4t_1^4u^8+\frac{1}{2}t_0^4t_1^4u^7v-\frac{7}{4}t_0^4t_1^4u^6v^2\\
&\quad+\frac{7}{2}t_0^4t_1^4u^5v^3-\frac{35}{8}t_0^4t_1^4u^4v^4+\frac{7}{2}t_0^4t_1^4u^3v^5-\frac{7}{4}t_0^4t_1^4u^2v^6+\frac{1}{2}t_0^4t_1^4uv^7-\frac{1}{16}t_0^4t_1^4v^8+t_1^8u^8\\
&\quad-4t_1^8u^7v+6t_1^8u^6v^2-4t_1^8u^5v^3.
\end{aligned}$$

Dolayısıyla $P=MCR(F,G)_{u,v}$ resultantı

$$P(t_0,t_1)=\sum_{i=0}^{16}f_i(a,b,c,d)t_0^{16-i}t_1^i,$$

şeklinde hesaplanır ki burada

$$
\begin{aligned}
f_0(a,b,c,d) &= a^8-4a^7c+6a^6c^2-4a^5c^3+a^4c^4\\
f_1(a,b,c,d) &= 8a^7b-4a^7d-28a^6bc+12a^6cd+36a^5bc^2-12a^5c^2d-20a^4bc^3+4a^4c^3d+4a^3bc^4\\
f_2(a,b,c,d) &= 28a^6b^2-28a^6bd+6a^6d^2-84a^5b^2c+72a^5bcd-12a^5cd^2+90a^4b^2c^2-60a^4bc^2d+6a^4c^2d^2\\
&\quad -40a^3b^2c^3+16a^3bc^3d+6a^2b^2c^4\\
f_3(a,b,c,d) &= 56a^5b^3-84a^5b^2d+36a^5bd^2-4a^5d^3-140a^4b^3c+180a^4b^2cd-60a^4bcd^2+4a^4cd^3+120a^3b^3c^2\\
&\quad -120a^3b^2c^2d+24a^3bc^2d^2-40a^2b^3c^3+24a^2b^2c^3d+4ab^3c^4\\
&\vdots\\
f_{14}(a,b,c,d) &= 28a^2b^6-84a^2b^5d+90a^2b^4d^2-40a^2b^3d^3+6a^2b^2d^4-28ab^6c+72ab^5cd-60ab^4cd^2+16ab^3cd^3\\
&\quad +6b^6c^2-12b^5c^2d+6b^4c^2d^2\\
f_{15}(a,b,c,d) &= 8ab^7-28ab^6d+36ab^5d^2-20ab^4d^3+4ab^3d^4-4b^7c+12b^6cd-12b^5cd^2+4b^4cd^3\\
f_{16}(a,b,c,d) &= b^8-4b^7d+6b^6d^2-4b^5d^3+b^4d^4
\end{aligned}
$$

şeklindedir. f_i polinomlarının sıfıra eşitlenmesiyle elde edilen denklemler ve $(ad-bc)k=1$ denkleminin bu sisteme eklenmesiyle, $\bar{S}$ sistemi üretilir:

$$
\begin{cases}
f_i(a,b,c,d)=0, \quad \mathit{for}\ 0\le i\le 16\\
(ad-bc)k=1
\end{cases}
$$

Bu sistemin çözümünden karmaşık ve tekrar eden çözümlerin elenmesiyle aşağıdaki Möbius dönüşümleri elde edilir:

$$
\begin{gathered}
\varphi_1(t_0,t_1)=(t_0,2t_0-t1), \quad \varphi_2(t_0,t_1)=(-t_0+t_1,3t_0+t1)\\
\varphi_3(t_0,t_1)=(t_0,t_1), \quad \varphi_4(t_0,t_1)=(t_0-t_1,5t_0-t_1).
\end{gathered}
$$

Sırasıyla bu Möbius dönüşümlerine karşılık gelen projektif denklikler

$$
M_1=\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&-1\\0&1&0&0\end{pmatrix}, \quad M_2=\begin{pmatrix}16&-16&16&0\\0&0&0&16\\0&0&16&0\\0&16&0&0\end{pmatrix}
$$
$$
M_3=\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}, \quad M_4=\begin{pmatrix}16&-16&16&0\\0&0&0&-16\\0&0&-16&0\\0&16&0&0\end{pmatrix}
$$

şeklinde bulunur.

2.2.6. İmplementasyon ve Performans

Algoritma $Prj3D$, MAPLE™ (2021) bilgisayar cebir sistemi(BCS) kullanılarak bilgisayar ortamına aktarılmıştır ve donanım olarak 3.6 GHz Intel Core $i7$ işlemciye ve 32 GB belleğe sahip bir masaüstü bilgisayarda test edilmiştir.

MAPLE™ (2021) kullanılarak, girdi eğrilerilerinin projektif denklik ve simetrilerini hesaplayan `Prj3D` adında bir prosedür yazılmıştır. `Prj3D` prosedüründe $\bar{S}$ sisteminin çözümü hariç herhangi bir MAPLE™ (2021) özel paketi kullanılmamıştır, yani hesaplamanın tüm basamakları temel MAPLE™ (2021) fonksiyonları ile yapılmıştır. $\bar{S}$ sisteminin çözümü için `SolveTools` paketinin `PolynomialSystem` fonksiyonu `engine=groebner` opsiyonu ile kullanılmıştır. Ayrıca Macaulay resultantının hesaplanabilmesi için MAPLE™ (2021) BCS'de `MCR` adında bir başka yardımcı prosedür kodlanmıştır. Ayrıntılı testlerde hesaplama süresinin büyük bir kısmı E_1 ve E_2 polinomlarının ortak bölenlerinin hesaplanması sırasında harcanmaktadır. Teknik detaylar, örnekler ve kaynak kodlarına tez yazarının kişisel internet sayfasından ulaşılabilmektedir Gözütok (2021).

Tez çalışmasının bu kısmında algoritmanın başarısının ölçülmesi için hesaplama sürelerini göteren tablolar verilmiştir. Öncelikle bu tez çalışmasında ve algoritmanın (Hauer ve Jüttler, 2018) çalışmasında verilen algoritma ile karşılaştırılmasını veren tablolar sunulmuş, ardından diğer çalışmalarda yer almayan daha detaylı ve zorlayıcı testler ve bu testlerin sonuçlarını içeren tablolar verilmiştir.

Test sonuçları parametrizasyonun derecesi, parametrizasyonu oluşturan polinomların katsayılarının büyüklüğü ve elbette bu polinomların yoğun (dense) ya da seyrek (sparse) olmasından etkilenebilmektedir. Bu tez çalışmasında en genel yönde bir araştırma yapıldığından, parametrizasyonlar yoğun seçilmiş olup, derece ve katsayı büyüklüklerinin (bitsize) yönteme etkisi derinlemesine incelenmiştir. Diğer benzer çalışmaların aksine bitsize etkisi yalnızca bu tez çalışmasında gözlemlenmiştir. Bir k tamsayısının bitsize değeri τ, $\tau = \lceil log_2 k \rceil + 1$ tamsayısı olarak tanımlanmaktadır (Alcazar vd., 2015). Eğer bir tam sayının bitsize değeri τ ise bu tamsayının d basamak sayısı $d = \lceil log\tau \rceil + 1$ formülü ile hesaplanabilir. Bu kısımda verilen tablolarda da τ sayısı, eğriyi temsil eden parametizasyonun bileşenlerindeki polinomların katsayıları arasından en büyük bitsize değerine sahip olanın bitsize değerini ifade etmektedir.

2.2.7. Metodların Karşılaştırılması

Tablo 1 bazı uzay eğrilerinin homojen temsildeki parametrizasyonlarını listelemektedir. Bu parametrizasyonlardan ilk üç tanesi (Hauer ve Jüttler, 2018) çalışmasından alınmıştır. Bunlara üç örneğe ek olarak $Algoritma\ Prj3D$'nin etkinliğinin anlaşılması için dört örnek daha listeye eklenmiştir.

Tablo 1. Kısım 2.2.7'de ele alınan eğrilerin parametrizasyonları

Derece	Parametrizasyon
4	$\begin{pmatrix} t_0^4+t_1^4 \\ t_0^3t_1+t_0\,t_1^3 \\ t_0\,t_1^3 \\ t_0^2t_1^2 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 125t_0^6+450t_0^5t_1+690t_0^4t_1^2+576t_0^3t_1^3+276t_0^2t_1^4+72t_0\,t_1^5+8t_1^6 \\ -27t_0^6-54t_0^5t_1-36t_0^4t_1^2-8t_0^3t_1^3 \\ 64t_0^6+288t_0^5t_1+528t_0^4t_1^2+504t_0^3t_1^3+264t_0^2t_1^4+72t_0\,t_1^5+8t_1^6 \\ 21t_0^6+122t_0^5t_1+216t_0^4t_1^2+168t_0^3t_1^3+60t_0^2t_1^4+8t_0\,t_1^5 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 625t_0^8+3000t_0^7t_1+6400t_0^6t_1^2+7920t_0^5t_1^3+6216t_0^4t_1^4+3168t_0^3t_1^5+1024t_0^2t_1^6+192t_0\,t_1^7+16t_1^8 \\ -2027t_0^8-8392t_0^7t_1-14344t_0^6t_1^2-12768t_0^5t_1^3-5960t_0^4t_1^4-1056t_0^3t_1^5+224t_0^2t_1^6+128t_0\,t_1^7+16t_1^8 \\ 1664t_0^8+7744t_0^7t_1+16288t_0^6t_1^2+20528t_0^5t_1^3+17040t_0^4t_1^4+9472t_0^3t_1^5+3392t_0^2t_1^6+704t_0\,t_1^7+64t_1^8 \\ 405t_0^8+1080t_0^7t_1+1080t_0^6t_1^2+480t_0^5t_1^3+80t_0^4t_1^4 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} t_0^9 \\ t_1^9 \\ t_0^8t_1+t_0^6t_1^3 \\ t_0^6t_1^3+t_0^4t_1^5 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 49t_0^{10}-22t_0^9t_1+87t_0^8t_1^2+84t_0^7t_1^3+75t_0^6t_1^4-96t_0^5t_1^5-28t_0^4t_1^6-76t_0^3t_1^7-36t_0^2t_1^8-55t_0\,t_1^9+27t_1^{10} \\ 97t_0^{10}-97t_0^9t_1-73t_0^8t_1^2+57t_0^7t_1^3+73t_0^6t_1^4+64t_0^5t_1^5-20t_0^4t_1^6+85t_0^3t_1^7+99t_0^2t_1^8+57t_0\,t_1^9+96t_1^{10} \\ 74t_0^{10}-69t_0^9t_1-9t_0^8t_1^2+47t_0^7t_1^3+44t_0^6t_1^4-62t_0^5t_1^5+8t_0^4t_1^6-84t_0^3t_1^7+38t_0^2t_1^8-t_0\,t_1^9+55t_1^{10} \\ -35t_0^{10}-35t_0^9t_1+63t_0^8t_1^2+41t_0^7t_1^3+16t_0^6t_1^4-77t_0^5t_1^5+76t_0^4t_1^6+95t_0^3t_1^7+56t_0^2t_1^8-16t_0\,t_1^9-95t_1^{10} \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} -62t_0^{11}-16t_0^{10}t_1+68t_0^9t_1^2-15t_0^8t_1^3-31t_0^7t_1^4+62t_0^6t_1^5-14t_0^5t_1^6+67t_0^4t_1^7+49t_0^3t_1^8+52t_0^2t_1^9-20t_0\,t_1^{10}-74t_1^{11} \\ -19t_0^{11}-68t_0^{10}t_1-48t_0^9t_1^2+45t_0^8t_1^3+59t_0^7t_1^4-96t_0^6t_1^5-6t_0^5t_1^6+89t_0^4t_1^7+41t_0^3t_1^8+20t_0^2t_1^9+25t_0\,t_1^{10} \\ -80t_0^{11}+42t_0^{10}t_1-67t_0^9t_1^2+63t_0^8t_1^3-81t_0^7t_1^4+76t_0^6t_1^5-44t_0^5t_1^6-59t_0^4t_1^7-11t_0^3t_1^8-75t_0^2t_1^9-84t_0\,t_1^{10}+47t_1^{11} \\ -27t_0^{11}-34t_0^{10}t_1+96t_0^9t_1^2+82t_0^8t_1^3-58t_0^7t_1^4+59t_0^6t_1^5+36t_0^5t_1^6+33t_0^4t_1^7+35t_0^3t_1^8+27t_0^2t_1^9+46t_0\,t_1^{10}+19t_1^{11} \end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix} -62t_0^{12}-26t_0^{11}t_1+46t_0^{10}t_1^2+65t_0^9t_1^3-51t_0^8t_1^4+60t_0^7t_1^5-56t_0^6t_1^6-46t_0^5t_1^7+86t_0^4t_1^8-31t_0^3t_1^9+84t_0^2t_1^{10}+5t_0\,t_1^{11}+25t_1^{12} \\ -17t_0^{12}+79t_0^{11}t_1+73t_0^{10}t_1^2-78t_0^9t_1^3+13t_0^8t_1^4+93t_0^7t_1^5+64t_0^6t_1^6-70t_0^5t_1^7-71t_0^4t_1^8-51t_0^3t_1^9-71t_0^2t_1^{10}+10t_0t_1^{11} \\ -76t_0^{12}-25t_0^{11}t_1+38t_0^{10}t_1^2+89t_0^9t_1^3-92t_0^8t_1^4-84t_0^7t_1^5-77t_0^6t_1^6-34t_0^5t_1^7-20t_0^4t_1^8+73t_0^3t_1^9-94t_0^2t_1^{10}+99t_0t_1^{11}+18t_1^{12} \\ 39t_0^{12}-77t_0^{11}t_1-70t_0^{10}t_1^2-49t_0^9t_1^3-46t_0^8t_1^4+34t_0^7t_1^5-84t_0^6t_1^6+98t_0^5t_1^7+41t_0^4t_1^8-46t_0^3t_1^9+13t_0^2t_1^{10}-3t_0t_1^{11}+8t_1^{12} \end{pmatrix}$

Tablo 2'de verilen CPU süreleri, Tablo 1'de verilen eğrilerin projektif denklik ve simetrilerinin hesabında harcanan sürelere karşılık gelmektedir. Bu tabloda $Algoritma\ Prj3D$ nin hesaplama sürelerini temsil eden t ile (Hauer ve Jüttler, 2018) çalışmasındaki indirgenmiş metodun hesaplama sürelerini temsil eden t_h karşılaştırılmıştır. Tablodan anlaşılacağı üzere (Hauer ve Jüttler, 2018) çalışmasındaki metod, derecesi 4 ve 6 olan eğriler için

$Algoritma\ Prj3D$'den daha iyi sonuçlar elde etmiştir. Fakat derecesi 8 olan eğri için, $Algoritma\ Prj3D$, (Hauer ve Jüttler, 2018) çalışmasındaki metottan önemli derecede iyi sonuçlar elde etmiştir. Aynı tabloda, daha yüksek dereceli $(9, 10, 11, 12)$ eğriler üzerinde yürütülen testlerin sonuçları, $Algoritma\ Prj3D$'nin etkinliğini kanıtlar niteliktedir.

Tablo 2. Tablo 1'de verilen parametrizasyonlarla temsil edilen eğrilerin projektif denklik ve simetrilerinin hesaplanmasında harcanan CPU süreleri (sn)

Derece	Denklik Sayısı	t_h Simetriler	t_h Denklikler	t Simetriler	t Denklikler
4	4	0.01	0.01	1.047	0.421
6	4	0.06	0.02	1.063	1.218
8	2	37	0.78	0.078	0.093
9	2			0.032	0.047
10	1			0.218	0.250
11	1			0.531	0.453
12	1			0.625	0.640

Tablo 3'te hesaplamalar, (Hauer ve Jüttler, 2018) çalışmasında olduğu gibi, bitsize değeri $3 < \tau < 4$ (parametrizasyonların katsayıları -10 ile 10 arasında değişmektedir) olan rastgele eğriler için yapılmıştır. Bir önceki testteki gibi ilk altı örnek (Hauer ve Jüttler, 2018) çalışmasından alınmıştır. Önceki tabloda olduğu gibi derecesi 4 olan eğri hariç, $Algoritma\ Prj3D$, (Hauer ve Jüttler, 2018) çalışmasındaki metottan çok daha iyi sonuçlar vermiştir. Ayrıca, Tablo 3'teki ek örnekler, derece arttıkça hesaplama sürelerinde yanlızca ufak artmalar olduğunu göstermiştir.

Tablo 3. Sabit bitsize değerine $(3 < \tau < 4)$ sahip rastgele eğrilerin projektif denklik ve simetrilerinin hesaplanmasında harcanan CPU süreleri (sn)

Derece	t_h Simetriler	t_h Denklikler	t Simetriler	t Denklikler
4	0.04	0.4	0.250	0.329
5	1	1.6	0.016	0.031
6	8.4	1.2	0.156	0.047
7	37	8.6	0.172	0.780
8	150	310	0.250	0.125
9	670	1700	0.422	0.188
10			0.562	0.250
11			0.610	0.484
12			1.015	0.547

2.2.8. Rastgele Eğrilerin Projektif Denklik ve Simetrileri

Tablo 4 ve Tablo 5 incelendiğinde açıkça görülebilir ki $Algoritma\ Prj3D$, derecenin 4 olduğu durum haric, rastgele derece ve bitsize değerlerine sahip eğrilerin projektif denklik ve simetrileri (yalnızca trivial simetri) için oldukça hızlı hesaplama sürelerine sahiptir.

Projektif denk rastgele eğriler üretmek için bir bitsize değeri ve derece ikilisine karşılık gelen bir rastgele q parametrizasyonuna, aşağıdaki projektif dönüşüm ve Möbius dönüşümü uygulanmıştır:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(t_0, t_1) = (-t_0 + t_1, 2t_0).$$

Böylece $p = Mq(\varphi)$ alınarak, $Prj3D(p, q)$ ile Tablo 4'ün içeriği; $Prj3D(q, q)$ ile Tablo 5'in içeriği oluşturulmuştur. q parametrizasyonu rastgele bir parametrizasyon olduğundan, beklendiği üzere yalnızca trivial simetriye sahiptir.

Tablo 4. Çeşitli m derecesine ve τ bitsize değerine sahip rastgele eğrilerin projektif denkliğinin hesaplanmasında harcanan CPU süreleri (sn)

t	$\tau = 4$	$\tau = 8$	$\tau = 16$	$\tau = 32$	$\tau = 64$	$\tau = 128$	$\tau = 256$
4	1.156	1.344	2.406	4.016	8.344	26.453	55.625
6	0.047	0.047	0.062	0.047	0.078	0.094	0.156
8	0.344	0.125	0.125	0.156	1.594	0.281	0.453
10	0.359	0.906	0.281	0.890	1.234	0.562	1.329
12	0.625	0.875	1.110	1.000	1.500	2.157	1.625
14	0.953	1.218	1.719	2.078	2.516	6.172	3.562
16	1.718	0.953	2.187	2.078	2.375	1.891	5.015
18	2.250	2.391	3.547	3.625	3.203	3.969	7.016
20	2.172	2.844	3.625	8.000	4.562	7.359	22.063
22	3.922	4.109	4.188	3.641	12.938	6.938	13.015
24	10.297	4.672	4.594	5.953	12.250	10.906	22.125

Tablo 5. Çeşitli m derecesine ve τ bitsize değerine sahip rastgele eğrilerin projektif simetrilerinin (sadece trivial simetri) hesaplanmasında harcanan CPU süreleri (sn)

t	$\tau=4$	$\tau=8$	$\tau=16$	$\tau=32$	$\tau=64$	$\tau=128$	$\tau=256$
4	1.156	2.610	2.157	3.938	8.735	26.875	80.187
6	0.046	0.047	0.063	0.062	0.078	0.203	0.579
8	0.156	0.156	1.562	1.500	0.375	2.078	3.563
10	0.407	0.828	0.562	1.172	1.484	2.578	8.328
12	0.735	0.650	1.313	1.594	3.015	6.047	11.844
14	1.453	2.016	2.172	2.125	4.234	7.781	19.750
16	2.797	3.531	4.391	2.937	7.266	9.563	31.172
18	4.532	4.375	8.843	5.703	8.187	20.172	42.985
20	3.078	4.078	7.672	16.469	12.984	21.156	76.469
22	8.812	11.391	9.468	13.687	30.531	40.344	89.750
24	21.484	13.375	10.969	18.234	26.781	56.391	97.672

2.2.9. Merkezil İnversiyona Sahip Rastgele Eğrilerin Projektif Simetrileri

Trivial olmayan ek bir simetrinin hesaplamaya etkisini araştırmak için, simetrik bir $p_0(t_0,t_1)$ ve anti-simetrik $p_1(t_0,t_1), p_2(t_0,t_1), p_3(t_0,t_1)$ bileşenlerine sahip bir $p(t_0,t_1) = (p_0(t_0,t_1), p_1(t_0,t_1), p_2(t_0,t_1), p_3(t_0,t_1))$ parametrizasyonunu göz önüne alalım. Bu bileşenler aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$
\begin{aligned}
p_0(t_0,t_1) &= c_{0,0}t_0^m + c_{1,0}t_0^{m-1}t_1 + \ldots + c_{1,0}t_0t_1^{m-1} + c_{0,0}t_1^m \\
p_i(t_0,t_1) &= c_{0,i}t_0^m + c_{1,i}t_0^{m-1}t_1 + \ldots - c_{1,i}t_0t_1^{m-1} - c_{0,i}t_1^m, \qquad 1 \le i \le 3,
\end{aligned}
$$

Burada her $1 \le i \le 3$ için $c_{\frac{m}{2},i} = 0$ dir. $p(t_1,t_0) = (p_0(t_0,t_1), -p_1(t_0,t_1), -p_2(t_0,t_1), -p_3(t_0,t_1))$ olduğundan, böyle bir parametrik eğri bir merkezil inversiyona sahiptir.

Tablo 6, çeşitli m derecelerine ve τ bitsize değerine sahip rastgele eğrilerin simetrilerinin (merkezil inversiyon) saptanması için harcanan hesaplama sürelerini listelemektedir. Beklendiği gibi, hesaplama süreleri yine benzer büyüklüklerde seyretmiştir, tüm simetriler kısa bir sürede elde edilebilmiştir.

Tablo 6. Çeşitli m derecesine ve τ bitsize değerine sahip rastgele eğrilerin projektif simetrilerinin (merkezil inversiyon) hesaplanmasında harcanan CPU süreleri (sn)

t	$\tau = 4$	$\tau = 8$	$\tau = 16$	$\tau = 32$	$\tau = 64$	$\tau = 128$	$\tau = 256$
8	0.187	0.063	0.063	0.093	0.328	0.546	1.313
10	0.203	0.250	0.359	0.360	0.563	1.297	3.922
12	0.390	0.406	0.469	0.718	1.125	2.516	8.390
14	0.563	0.562	0.656	1.000	1.906	4.047	13.391
16	1.047	1.016	1.234	1.672	3.078	6.500	19.719
18	1.265	1.375	1.563	2.485	4.344	8.719	27.406
20	1.766	1.656	2.141	3.140	5.313	12.171	37.297

2.2.10. Eğrilerin Projektif Denk Olmama Durumu

Bu kısımda, denklik araştırması yapılan her iki eğri de rastgele seçilmiştir. Beklenileceği gibi bu eğriler projektif denk değildirler. Tablo 7 çeşitli m derecelerine ve τ bitsize değerine sahip rastgele eğrilerin projektif denk olmama durumunun saptanması için harcanan hesaplama sürelerini listelemektedir. Tablo 7'den de görüleceği üzere algoritma denklik olmayan durumların hesabını da çok kısa bir zaman diliminde gerçekleştirebilmektedir.

Tablo 7. Çeşitli m derecesine ve τ bitsize değerine sahip rastgele eğrilerin projektif denk olmama durumunun saptanması için harcanan CPU süreleri (sn)

t	$\tau = 4$	$\tau = 8$	$\tau = 16$	$\tau = 32$	$\tau = 64$	$\tau = 128$	$\tau = 256$
4	0.016	0.015	0.016	0.015	0.015	0.015	0.015
6	0.109	0.032	0.031	0.031	0.047	0.047	0.110
8	0.063	0.078	0.078	0.079	0.125	0.156	0.969
10	0.406	0.156	0.156	0.203	0.250	1.016	0.687
12	0.312	0.266	0.563	0.687	0.985	0.703	1.641
14	0.594	0.547	0.390	0.422	0.547	1.047	2.156
16	0.781	0.531	0.907	1.063	1.281	2.219	3.359
18	1.110	1.047	1.125	1.234	1.906	2.562	4.953
20	1.547	1.156	1.141	1.734	2.250	3.672	6.532
22	1.734	1.453	1.953	2.844	3.484	4.906	7.937
24	2.047	2.250	2.313	2.844	4.110	6.766	12.031

3. İRDELEME VE SONUÇLAR

1. Tezde ele alınan birinci problem için, Bonnet Teoremi'nden, $\mathbb{R}^3$ uzayındaki iki parametrik yüzeyin birinci ve ikinci temel formlarının eşit olmasının, yüzeyleri birbirine dönüştüren bir izometrinin varlığını garanti ettiği bilinmektedir. Bu tez çalışmasında, $\mathbb{R}^{n+1}$ keyfi boyutlu uzayındaki dejenere olmayan hiperyüzeyler için, aynı durumu garanti eden koşullar elde edilmiştir. Daha açık bir ifadeyle, burada elde edilen sonuçlar ile, her iki temel formun tüm katsayılanın eşit olması gerekliliği ortadan kaldırılmıştır. Gerçekten de Gauss-Codazzi denklemlerinden, birinci ve ikinci temel formun katsayılarının bağımsız olmadığı bilinmektedir. Diğer yandan regülerlik, parametrizasyonun d-nondejenere olmasının bir sonucu olduğundan, yüzeyde regüler olma şartı da ortadan kaldırılmıştır.

2. Tezde ele alınan ikinci problem için, projektif diferansiyel invaryantları kullanarak rasyonel uzay eğrilerinin projektif (afin) denkliklerini ve simetrilerini tespit etme problemine yeni ve etkili bir yaklaşım sunulmuştur. Diferansiyel değişmezlerin benzer bir soruna katkısı (Alcazar vd., 2015), en genel durum olan projektif denkliğe, diferansiyel bir yaklaşım geliştirilip geliştirilemeyeceği sorusunu gündeme getirmiştir. Böylece bu tez çalışmasında, rasyonel bir eğrinin projektif diferansiyel invaryantları tanımlanıp, yöntem bu invaryantlar üzerine inşa edilmiştir. Yöntem, indirgenmiş formdaki bir rasyonel uzay eğrisinin herhangi iki uygun parametrelenişinin, bir rasyonel dönüşümle ilişkili olduğu fikrini temel almaktadır. Yöntemin geri kalanı, (Alcazar vd., 2015)'den bazı fikirleri kullanarak parametre uzaylarıyla ilgili lineer rasyonel dönüşümün katsayılarını belirlemeye ayrılmıştır. Son olarak, güçlü bir teorik altyapıya sahip etkili bir Algoritma ($Prj3D$) oluşturulmuştur.

   $Prj3D$ Algoritması, MAPLE™ (2021) kullanarak bilgisayar ortamına aktarılmıştır. Ardından algoritma bir MAPLE™ (2021) prosedürüne dönüştürülüp, çeşitli kapsamlı testler yürülmüştür. 2.2.6 bölümündeki tablolardan görülebileceği gibi, en genel problem çözülüyor olsa da, test sonuçları simetri ve benzerlik tespiti (Alcazar vd., 2015, 2019) gibi benzer problemler için elde edilen sonuçlara yakın değerler karşımıza çıkarmıştır. Bu yaklaşımların tümü, Öklid geometrisindeki yapıları ele almaktadır. Projektif denkliklerin daha genel durumu için, bildiğimiz kadarıyla, projektif ve afin denklikler problemini ele alan ilk kapsamlı çalışma (Hauer ve Jüttler, 2018) dır. Bu çalışma keyfi boyutta yöntemini inşa etse de, bu yöntem yalnızca orta dereceli (düzlemsel durum için yaklaşık 10) düzlem ve uzay eğrileri durumunda iyi sonuçlar vermektedir.

Öte yandan, çalışma uzay eğrileri durumu için ayrıntılı testler içermemektedir. Ayrıca bu tez çalışmasındaki sonuçlarla karşılaştırıldığında, sonuçların uzay eğrileri için ortalama olduğu görülmektedir. Buna karşılık, burada inşa edilen metod, aynı anda yüksek derecelere (yaklaşık 24) ve bitsize değerlerine (yaklaşık 256) sahip eğriler için bile çözüm sunabilmektedir.

4. ÖNERİLER

1. Tezin birinci problemi ile ilgili olarak, gelecekteki çalışmalarda, iki parametrik yüzeyin veya hiperyüzeyin ne zaman aynı görüntüye sahip olduğunu belirlemek için bir yöntem geliştirilebilir. Daha açık bir ifadeyle, bir parametrik (hiper)yüzey $x(u)$ alalım ve $h(u)$ yeniden parametrelenişini uygulayalım. Bu durumda $y(u) = (x \circ h)(u)$ ve $x(u)$ aynı şeyi tanımlar. Fakat $h(u)$ bilinmiyorsa, $x(u)$ ve $y(u)$ hiperyüzeylerinin görüntülerinin aynı olup olmadığını saptamak için Bonnet Teoremi veya tezde bulunun sistemin nasıl kullanılacağı araştırılabilir.

2. Tezin ikinci problemi ile ilgili olarak, gelecekteki çalışmalarda, genel yüzeyler için benzer bir yaklaşım ve amaç ile inceleme yapılabilir. Ayrıca tez çalışmasında tanımladığımız κ_1 ve κ_2 projektif eğriliklerinin geometrik yorumlarının araştırılmasının, rasyonel eğrilerin projektif geometrisinin anlaşılmasında yol gösterici olacaktır. Gerçekten de, bir ön araştırmada, κ_1 ve κ_2 eğrilikleri sabit olan rasyonel eğrilerin W-eğrileri (Sasaki, 1936) ile ilişkili olabileceği görülmüştür. Son olarak, ilgili problem sadece 3 boyutlu durumda ele alınsa da, inşasından da anlaşılacağı üzere, yöntemin keyfi boyuta genelleştirilmesi de yapılabilir.

5. KAYNAKLAR

Alcázar, J.G., Hermoso, C. ve Muntingh, G., 2015. Symmetry detection of rational space curves from their curvature and torsion, Computer Aided Geometric Design, 33, 51-65.

Alcázar, J.G., Hermoso, C. ve Muntingh, G., 2018. Similarity detection of rational space curves, Journal of Symbolic Computation, 85, 4-24.

Alcázar, J.G., Díaz Toca, G.M. ve Hermoso, C., 2019. On the problem of detecting when two implicit plane algebraic curves are similar, International Journal of Algebra and Computation, 29, 5, 775–793.

Alcázar, J.G. ve Quintero, E., 2020. Affine equivalences, isometries and symmetries of ruled rational surfaces, Journal of Computational and Applied Mathematics, 364, 112339.

Aminov, Y.A., 2001. The Geometry of Submanifolds, Gordan and Breach Sciences Publ., Amsterdam.

Aripov, R.G. ve Khadjiev, D., 2007. The complete system of global differential and integral invariants of a curve in Euclidean geometry, Russian Mathematics, 7,51, 1-14.

Arnold, D.N. ve Rogness, J., 2008. Möbius Transformations Revealed, Notices of AMS, 55, 10, 1226-1231.

Beardon, A.F., 1995. The Geometry of Discrete Groups, Springer, New York.

Bézier, P., 1968. Procede de definition numerique des courbes et surfaces non mathematiques: Systeme UNISURF, Automatisme,13.

Bizzarri, M., Lavicka, M. ve Vrsek, J., 2020. Computing projective equivalences of special algebraic varieties, Journal of Computational and Applied Mathematics, 367, 112438.

Bobenko, A.I. ve Eitner, U., 2000. Painleve Equations in the Differential Geometry of Surfaces, Springer, Berlin.

Braß, P. ve Knauer, C., 2004. Testing congruence and symmetry for general 3-dimensional objects, Computational Geometry, 27, 1, 3–11.

Chen, F., Wang, W. ve Liu, Y., 2008. Computing singular points of plane rational curves, Journal of Symbolic Computation, 43, 92–117.

Gözütok, U., 2021. Academics, Software. `https://www.ugurgozutok.com/`.

Hauer, M. ve Jüttler, B., 2018. Projective and affine symmetries and equivalences of rational curves in arbitrary dimension, Journal of Symbolic Computation, 87, 68-86.

Huang, Z. ve Cohen, F.S., 1996. Affine-invariant B-spline moments for curve matching, IEEE Transactions on Image Processing, 5, 10, 1473–1480.

Hummel, J.A., 1965. Vector Geometry, Addison-Vesley Publ.Comp. Inc., Massachusetts.

Kaplansky, I., 1957. An Introduction to Differential Algebra, Hermann, Paris.

Klein, F., 1872. Vergleichende Betrachtungen Über Neuere Geometrische Forschungen, Verlag, Erlangen.

Kreyszig, E., 1998. Introduction to Differential Geometry and Riemannian Geometry, Dover Publications, New York.

Lebmeir, P. ve Jürgen, R.G., 2008. Rotations, translations and symmetry detection for complexified curves, Computer Aided Geometric Design, 25, 9, 707–719.

Macaulay, F.S., 1994. The Algebraic Theory of Modular Systems, 1. Ed., Cambridge University Press, Cambridge.

Maple™, 2021. Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc. Waterloo, Ontario.

Pérez-Dí, S., 2007. Computation of the singularities of parametric plane curves, Journal of Symbolic Computation, 42, 835-857.

Sağıroğlu, Y., 2012. Affine Differential Invariants of Curves, LAP, Saarbrücken.

Sağıroğlu, Y., 2015. Global differential invariants of affine curves in $\mathbb{R}^2$, Far East Journal of Mathematical Sciences, 96, 4, 497-515.

Sánchez-Reyes, J., 2015. Detecting symmetries in polynomial Bézier curves, Journal of Computational and Applied Mathematics, 288, 274–283.

Sasaki, S., 1936. Contributions to the affine and projective differential geometries of space curves, Japanese Journal of Mathematics, 13, 473–481.

Sedra, J.R., Winkler, F. ve Pérez-Diaz, S., 2007. Rational Algebraic Curves: A Computer Algebra Approach, Springer, New York.

Shi, X., Jia, X. ve Goldman, R.N., 2013. Using a bihomogeneous resultant to find the singularities of rational space curves, Journal of Symbolic Computation, 53, 1–2.

Weyl, H., 1946. The classical groups, their invariants and representations, Princeton University Press, Princeton.

ÖZGEÇMİŞ

Ilk ve orta o¨ ˘grenimini 50. Yıl ˙Ilko¨ ˘gretim Okulu'nda ve lise o¨ ˘grenimini Samsun Anadolu Lisesi'nde tamamladı.

Lisans ogrenimini Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik Bolumunde, Yuksek Lisans öğrenimini Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tamamladı.

2015 yılından bu yana Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak görev yapmaktadır. 2017 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında doktora programına başlamış ve 2022 yılında 6 ay süreyle Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Bölümünde 39. Madde ile görevlendirmede bulunmuştur. Yabancı dili İngilizcedir.

2017 yılında TÜBİTAK 2211-A Genel Yurt içi Doktora Bursu almaya hak kazanmış ve doktora eğitimi boyunca TÜBİTAK tarafından bu burs programı kapsamında desteklenmiştir. Yine TÜBİTAK 1002 Hızlı Destek Programı kapsamında 119F043 kodlu projede 2019-2020 yılları arasında araştırmacı olarak görev yapmıştır. Bu tez çalışması 119F043 kodlu proje ile desteklenmiştir. Ayrıca TÜBİTAK 2221 Konuk veya Akademik İzinli Bilim İnsanı Destekleme Programı kapsamında Prof. Juan Gerardo Alcázar ile 06-13 Şubat 2022 tarihlerinde Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Bölümünde tez çalışmaları yürütmüştür. KTÜ BAP04 Altyapı Projesi kapsamında FAY-2021-9648 kodlu projede araştırmacı olarak görev yapmaktadır. Uğur Gözütok, TÜBİTAK 2218 Doktora Sonrası Araştırma Bursu 2022 yılı 2. döneminde bu program kapsamında doktora sonrası araştırmalarını Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Bölümünde yürütmek üzere burs almaya hak kazanmıştır.