KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SİMGE VE KONGRÜANS DENKLEMLER

DOKTORA TEZİ

Hatice ŞENGÜL

MAYIS 2021
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SİMGE VE KONGRÜANS DENKLEMLER

Hatice ŞENGÜL

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"DOKTOR (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 27 / 04 /2021
Tezin Savunma Tarihi : 21 / 05 /2021

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ

Trabzon 2021

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalında

Hatice ŞENGÜL Tarafından Hazırlanan

SİMGE VE KONGRÜANS DENKLEMLER

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 29 /04/2021 gün ve 1902 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda
DOKTORA TEZİ
olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan :	**Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ**	…..……………………………....
Üye :	**Prof. Dr. Funda KARAÇAL**	…..…………………………...…
Üye :	**Prof. Dr. Ruşen YILMAZ**	……...……………………...……
Üye :	**Prof. Dr. Hilmi ZENGİN**	……...……………………...……
Üye :	**Prof. Dr. Serkan KADER**	……...……………………...……

Prof. Dr. Asim KADIOĞLU
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, Γ modüler grubunun alt grupları olan $\hat{\Gamma}_0^2(N)$, N tek veya $2||N$ olması halinde $\hat{\Gamma}_0^3(N)$ gruplarının simgelerindeki sınır bileşenlerinin sayıları ve $\Lambda_n(N)$ nin $\Gamma_0(N)$ deki indeksi hesaplanmıştır. Ayrıca, bazı modüler alt grupların imprimitif hareketi yardımıyla $x^2 + a^2 \equiv 0\ mod\ p^\beta$ kongrüans denkleminin $mod\ p^\beta$ ya göre tek çözüme sahip olduğu elde edilmiştir.

Konunun belirlenmesinden, çalışmanın tamamlanmasına kadar olan süreçte emeğiyle, öneri ve yönlendirmeleriyle önemli katkıda bulunan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ'a en içten dileklerimle saygı ve şükranlarımı sunuyorum. Aynı zamanda bu tez aşamasında değerli görüş ve tavsiyeleri ile katkıda bulunan tez izleme jüri üyesi hocalarım, Prof. Dr. Funda KARAÇAL ve Prof. Dr. Hilmi ZENGİN'e teşekkürü bir borç bilirim. Bu tezi tamamlama sürecinde verdikleri destekten dolayı ve öğrenim sürecinde katkı sağlayan Matematik Bölümündeki tüm değerli öğretim üyelerine ve araştırma görevlisi arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Tüm eğitim-öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme ve sevgili eşime, Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi öğretim üyelerinden Sayın Doç. Dr. Yavuz KESİCİOĞLU'na ve Doç. Dr. Mustafa Cemil BİŞGİN'e çok teşekkür ederim.

Hatice ŞENGÜL

Trabzon 2021

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Doktora Tezi olarak sunduğum "Simge ve Kongrüans Denklemler" başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ'ın sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 21/05/2021

Hatice ŞENGÜL

İÇİNDEKİLER

Doktora Tezi

ÖZET

SİMGE VE KONGRÜANS DENKLEMLER

Hatice ŞENGÜL

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ
2021, 88 Sayfa

Bu çalışmada, bazı NEC gruplarının simgelerindeki sınır bileşenlerinin sayıları ve sınır bileşenlerindeki ∞ ların sayıları hesaplanmıştır. Ayrıca bazı modüler alt grupların imprimitif hareketi yardımıyla kongrüans denklemlerin çözümleri verilmiştir.

Birinci bölümde Öklid olmayan kristalize grupların yapısı incelendi. $PSL(2,\mathbb{R}), \Gamma$ modüler grubu, kongrüans alt grupların bazı özellikleri, ayrık gruplar, temel bölgeler ve imprimitif hareket ile ilgili ihtiyaç duyduğumuz temel tanım, teorem ve sonuçlar verilmiştir.

İkinci bölümde her $N \in \mathbb{N}$ için $\hat{\Gamma}_0^2(N)$ grubunun ve N tek veya $2||N$ olduğu durumlarda ise $\hat{\Gamma}_0^3(N)$ grubunun simgelerindeki sınır bileşenlerinin sayıları Hoare-Uzzel Teoremi yardımıyla hesaplanmıştır. Ayrıca, $\Lambda_n(N)$ grubunun $\Gamma_0(N)$ kongrüans alt grubundaki indeksi hesaplanmıştır. Bunlara ek olarak p, $p \equiv 1 \ mod \ 4$ özelliğine sahip bir asal sayı ve $\beta \in \mathbb{N}$ olmak üzere p ile aralarında asal olan her a tam sayısı için modüler alt grupların özel bir imprimitif transitif hareketi kullanılarak $a^2 + x^2 \equiv 0 \ mod \ p^\beta$ kongrüans denklemini sağlayan x tamsayı çözümleri bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Simge, Modüler grup, Ayrık grup, Öklid olmayan kristalize gruplar, Sınır bileşeni, İndeks

PhD. Thesis

SUMMARY

SIGNATURE AND CONGRUANCE EQUATIONS

Hatice ŞENGÜL

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ
2021, 88 Pages

In this thesis, the numbers of link periods in the signatures of some NEC groups and the numbers of ∞ in the link periods are calculated. In addition, by the aid of imprimitive action of some modular subgroups, the solutions of congruence equations are given.

In the first part, the structure of Non-Euclidean crystallized groups is examined. Required basic definitions, theorems and conclusions related with $PSL(2,\mathbb{R})$, the modular group Γ, some properties of congruence subgroups, discrete groups, fundamental regions and imprimitive action are given.

In the second part, the numbers of link periods in the signatures of the group $\hat{\Gamma}_0^2(N)$ for all $N \in \mathbb{N}$ and the group $\hat{\Gamma}_0^3(N)$ when N is odd or $2||N$ are calculated by using the Hoare-Uzzel Theorem. Moreover, the index of $\Lambda_n(N)$ group in the congruence subgroup $\Gamma_0(N)$ is calculated. In addition, if p is a prime number with $p \equiv 1 \; mod \; 4$ and $\beta \in \mathbb{N}$, for any integer a coprime with p, the integer solutions x of the congruence equation $a^2 + x^2 \equiv 0 \; mod \; p^\beta$ are obtained by using a special imprimitive transitive action of modular subgroups.

Key Words: Signature, Modular group, Discrete group, Non-Euclidean crystallized group, Link period, Boundary component, Index

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

SEMBOLLER DİZİNİ

Gx	: x noktasının G yörüngesi
S_x	: x noktasının S deki sabitleyeni
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\widehat{\mathbb{Q}}$	: Genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{C}_\infty$	: Genişletilmiş kompleks sayılar kümesi
$\mathcal{U}$	: $\mathbb{C}$ de üst yarı düzlem
Γ	: Modüler grup
Γ^2	: Modüler grubun elemanlarının kareleri alınarak elde edilen alt grup
Γ^3	: Modüler grubun elemanlarının küpleri alınarak elde edilen alt grup
Γ_∞	: ∞ un Γ modüler grubundaki sabitleyeni
$\Gamma_0(N)$	: Modüler grubun $c \equiv 0 \ mod \ N$ olan alt grubu
$\Gamma_0^2(N)$	: Γ^2 grubunun $c \equiv 0 \ mod \ N$ olan alt grubu
$\Gamma_0^3(N)$	: Γ^3 grubunun $c \equiv 0 \ mod \ N$ olan alt grubu
$PSL(2,\mathbb{R})$	: Reel katsayılı lineer kesirli dönüşümlerin grubu
$SL(2,\mathbb{Z})$	: Katsayıları tamsayı olan lineer matrislerin grubu
$\mu(E)$	: E kümesinin hiperbolik alanı
$\ell(C)$	: Parçalı, sürekli, diferansiyellenebilir bir C eğrisinin hiperbolik uzunluğu
$a\|b$	: a sayısı b sayısını böler
$a \nmid b$	: a sayısı b sayısını bölmez
$a\|\|b$	: a sayısı b sayısının bir tam bölenidir
$\|A{:}B\|$	: B alt grubunun A grubundaki indeksi
$[G,X]$	: Topolojik dönüşüm grubu
$[\alpha]$	: Alfa bloğu
∞	: Sonsuz

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

19. yüzyılın sonlarına doğru Henry Poincare ayrık gruplar teorisinin temelini oluşturan bazı önemli sonuçlar elde etmiş ve bu sonuçları eliptik fonksiyonlar teorisinin genellemesinde kullanmıştır. Henry Poincare tarafından sistematik olarak geliştirilen ve Fuchsian grupları olarak adlandırılan bu grupların invaryant bıraktığı fonksiyonlar günümüze kadar birçok bilim adamı tarafından çalışılmıştır. Öklid olmayan geometriler ve invaryant teorisinin keşfiyle lineer kesirli dönüşümler grubu, topolojik grup yapısına uygun olması sebebiyle, hem analizsel hem de cebirsel yöntemler kullanılarak araştırmacılar tarafından detaylıca incelenmiştir. Γ modüler grubunun kongrüans alt grupları olan $\Gamma(N), \Gamma_1(N), \Gamma_0(N), \Gamma^0(N)$ gruplarının büyük öneme sahip olduğu gözlemlenmiştir. Örneğin, 1637 yılında Pierre de Fermat'ın son teoreminin ispatında Γ nın kongrüans alt gruplarının önemli bir yer tuttuğu ortaya çıkmıştır.

Schoeneberg [1], $\Gamma_0(N)$ nin simgesini cebirsel yollardan elde etmiştir. Akbaş [2], $\Gamma_F(N) := \langle \Gamma_0(N), z \to \frac{1}{N}\bar{z} \rangle$ Fricke grubunun sınır bileşenlerindeki ∞ ların sayısını hesaplamıştır. Jones ve arkadaşları [3] tarafından alt yörüngesel graflar, devre uzunlukları ve devrelerin orman olma durumları araştırılmıştır. Akbaş [4] ise Γ modüler grubunun kongrüans alt grubu olan $\Gamma_0(N)$ nin periyodlarını ve ilgili alt yörüngesel grafların devreleri arasındaki ilişkileri incelemiştir.

Kader [5], $PSL(2, \mathbb{R})$ nin bazı alt gruplarının simgelerini elde etmiştir. Ayrıca, bu özel alt grupların simgeleri ile karşılık gelen alt yörüngesel grafların devreleri arasındaki ilişkiler ortaya konulmuştur. Beşenk [6] doktora çalışmasında NEC gruplar ve Fuchsian grupların simge devirleri üzerinde bazı hesaplamalar yaparak uygulamalarına yer vermiştir. Kesicioğlu [7] doktora tezinde Γ^3 grubunun ve $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere G_5 Hecke grubunun $\hat{\mathbb{Q}}$ ve $\hat{\mathbb{Q}}[\lambda]$ üzerindeki hareketi ile elde edilen alt yörüngesel grafları incelemiştir. Bu grafların devre uzunlukları ve bu grupları üreten eliptik elemanlar arasındaki ilişki incelenmiştir. Kör [8] ise Γ^3 grubunun $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki alt yörüngesel graflarından olan $F^3_{1,1}$ grafının bağlantısız olduğunu göstermiştir. Ayrıca bazı özel hallerde Fibonacci sayılarının elde edildiğini gözlemlemiştir. Şanlı [9] çalışmasında $\Gamma_{0,n}(N)$ kongrüans alt grubunun $\Gamma_0(N)$ deki indeksini ve Büyükkaragöz [10] ise $\Gamma_{0,n}(N)$ grubunun $\Lambda_n(N)$ deki indeksini hesaplamışlardır.

1.2. Topolojik Grup

Tanım 1.1. $G \neq \emptyset$ bir küme ve $\cdot : G \times G \to G$ bir ikili işlem olsun. Eğer G üzerinde tanımlı $\cdot$ işlemi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $(G,\cdot)$ ikilisine bir grup denir.

(i) $\forall a, b \in G$ için $a \cdot b \in G$ dir.

(ii) $\forall a, b, c \in G$ için $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ dir.

(iii) $\forall a \in G$ için $\exists e \in G$ öyle ki $a \cdot e = e \cdot a = a$ dır.

(iv) $\forall a \in G$ için $\exists a^{-1} \in G$ öyle ki $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ dir.

Tanım 1.2. $(G,\cdot)$ bir grup olsun. Eğer $\forall a, b \in G$ için $a \cdot b = b \cdot a$ ise G ye değişmeli (abel, komutatif) grup denir.

Tanım 1.3. $(G,\cdot)$ bir grup olsun. G nin eleman sayısı sonlu ve n ise bu gruba sonlu grup veya n-inci mertebeden bir gruptur denir ve $|G| = n$ ile gösterilir. Diğer durumda bu gruba sonsuz mertebeli gruptur denir.

Tanım 1.4. $(G,\cdot)$ bir grup ve $\emptyset \neq H \subset G$ olsun. Eğer $\forall a, b \in H$ için $a \cdot b^{-1} \in H$ (veya $a^{-1} \cdot b \in H$) ise H ya G nin bir alt grubudur denir ve $H \leq G$ ile gösterilir.

e, G nin birim elemanı olmak üzere $\{e\}$ ve G ye G nin aşikar (trivial) alt grupları denir. Ayrıca, eğer $H \leq G$ fakat $H \neq G$ ise H ya G nin öz altgrubu denir ve $H < G$ ile gösterilir.

Tanım 1.5. $(G,\cdot)$ bir grup, $H \leq G$ ve $a \in G$ olsun. Buna göre

(i) $Ha = \{h \cdot a | h \in H\}$ kümesine H ın G deki sağ yan sınıfı (sağ koseti) denir.

(ii) $aH = \{a \cdot h | h \in H\}$ kümesine H ın G deki sol yan sınıfı (sol koseti) denir.

Tanım 1.6. $(G,\cdot)$ bir grup ve $X \subset G$ olmak üzere $\mathcal{M} := \{H | H \leq G, X \subset H\}$ şeklinde tanımlansın. $M = \bigcap_{H \in \mathcal{M}} H$ alt grubuna G nin X alt kümesi tarafından üretilen alt grubu denir ve $M = \langle X \rangle$ ile gösterilir. Eğer $\exists a \in G$ öyle ki $G = \langle a \rangle$ ise G grubuna devirli grup denir.

Tanım 1.7. $(G,\cdot)$ bir grup, $H < G$ olmak üzere G de H alt grubunu içeren her K alt grubu için $K = G$ ise H ya G de bir maksimal alt grup denir.

Tanım 1.8. G bir grup, $H \leq G$ olsun. Eğer $\forall g \in G$ ve $\forall h \in H$ için $ghg^{-1} \in H$ veya denk olarak $gH = Hg$ ise H alt grubuna G nin normal alt grubu denir ve $H \lhd G$ ile gösterilir. Ayrıca

$$N_G(H) = \{g \in G | gH = Hg\} = \{g \in G | \forall a \in H \text{ için } ga = ag\}$$

kümesine H nin G deki normalleyeni adı verilir.

Tanım 1.9. G bir grup, $H \lhd G$ olmak üzere H ın yan sınıflarının teşkil ettiği küme

$$G/H = \{gH | g \in G\}$$

olup bu küme üzerinde $gH \cdot g'H = gg'H$ şeklinde tanımlanan işleme göre G/H bir grup olur. Bu gruba bölüm grubu adı verilir.

Tanım 1.10. $(G,\cdot)$ ve $(G',*)$ iki grup ve $\Pi: G \to G'$ dönüşümü verilsin. Eğer $\forall g_1, g_2 \in G$ için $\Pi(g_1 \cdot g_2) = \Pi(g_1) * \Pi(g_2)$ ise Π ye homomorfizma denir. Bununla birlikte eğer

Π homomorfizması örten ise Π ye epimorfizma

Π homomorfizması 1-1 ise Π ye monomorfizma

Π homomorfizması 1-1 ve örten ise Π ye izomorfizma

denir. Eğer Π dönüşümü bir izomorfizma ise G ve G' ye izomorftur denir ve $G \cong G'$ ile gösterilir.

Ayrıca $\Pi: G \to G$ izomorfizmasına G de bir otomorfizma adı verilir ve G deki otomorfizmaların kümesi $Aut(G)$ ile gösterilir.

Tanım 1.11. $\Pi: G \to G'$ bir homomorfizma ve e, G' nün birim elemanı olsun. Bu takdirde

$$\Pi^{-1}(e) = \{g \in G | \Pi(g) = e\}$$

kümesine Π homomorfizmasının çekirdeği denir ve Çek Π ile gösterilir.

Tanım 1.12. X bir küme ve 2^X, X in tüm alt kümelerinin ailesi olmak üzere aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\tau \subset 2^X$ alt kümesine X üzerinde bir topoloji adı verilir.

(i) $\emptyset, X \in \tau$ dır.

(ii) $G_1, G_2, \ldots, G_n \in \tau$ ise $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \tau$ dır.

(iii) $\Lambda \neq \emptyset$ bir indis kümesi olmak üzere $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \tau$ ise $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \in \tau$ dır.

Ayrıca (X, τ) ikilisine bir topolojik uzay ve τ nun elemanlarına ise bu uzayda açık kümeler adı verilir.

Tanım 1.13. (X, τ) bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. Eğer bir $U \in \tau$ için $x \in U$ ise U ya x in açık komşuluğu veya kısaca komşuluğu adı verilir.

Tanım 1.14. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer $\forall x, y \in X, x \neq y$ elemanları için x ve y nin ayrık açık komşulukları varsa (X, τ) uzayına Haussdorff uzayı adı verilir.

Tanım 1.15. $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ iki topolojik uzay, $x_0 \in X$ ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer $f(x_0)$ ın her bir V açık komşuluğu için $f(U) \subset V$ olacak şekilde x_0 ın bir U açık komşuluğu varsa f fonksiyonuna x_0 noktasında süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu X in her noktasında sürekli ise f ye sürekli fonksiyon denir.

Tanım 1.16. X, Y iki topolojik uzay ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer

(i) f 1-1 ve örten

(ii) f sürekli

(iii) f^{-1} sürekli

ise f ye homeomorfizm veya topolojik eş yapı dönüşümü denir.

Tanım 1.17. (X, τ) bir topolojik uzay, $Y \neq \emptyset$ bir küme ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun.

$$\tau_f := \{U \subset Y | f^{-1}(U) \in \tau\}$$

topolojisine f fonksiyonu ile Y üzerinde üretilen bitiş topolojisi denir.

Tanım 1.18. (X, τ) bir topolojik uzay, $Y \neq \emptyset$ bir küme ve $f: X \to Y$ örten bir fonksiyon olmak üzere f fonksiyonuna göre Y üzerindeki bitiş topolojisine bir bölüm topolojisi ve $f: X \to Y$ fonksiyonuna bölüm fonksiyonu adı verilir.

Tanım 1.19. (X, τ) bir topolojik uzay olsun.

(i) Eğer bir $\mathcal{A} \subset \tau$ için $X = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ ise $\mathcal{A}$ ailesine X in bir açık örtümü denir.

(ii) $\mathcal{A}$ ailesi X in bir açık örtümü ve $\mathcal{A}$ sonlu ise $\mathcal{A}$ ya X in sonlu örtümü denir.

(iii) Eğer X uzayının her açık örtümünün sonlu bir alt örtümü varsa X uzayına kompakttır denir.

Tanım 1.20. (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ olsun. Eğer

(i) $A \cap U \neq \emptyset$

(ii) $A \cap V \neq \emptyset$

(iii) $(A \cap U) \cap (A \cap V) = \emptyset$

(iv) $A = (A \cap U) \cup (A \cap V)$

olacak şekilde iki açık $U, V \subset X$ alt kümeleri bulunamaz ise A alt kümesine τ topolojisine göre bir bağlantılı küme denir. Aksi halde bağlantısızdır denir.

Tanım 1.21. X en az iki elemanlı bir küme olsun. Bir $d: X \times X \to \mathbb{R}$ dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa d ye X üzerinde bir metrik denir.

(i) $\forall x, y \in X$ için $d(x,y) \geq 0$ ve $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ dir.

(ii) $\forall x, y \in X$ için $d(x,y) = d(y,x)$ dir.

(iii) $\forall x, y, z \in X$ için $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ dir.

Burada (X, d) ikilisine ise bir metrik uzay denir.

Tanım 1.22. $(G,\cdot)$ grubu bir topolojik uzay olsun. Eğer $\forall g, h \in G$ için

(i) $m: G \times G \longrightarrow G$

$$(g,h) \to g \cdot h$$

(ii) $i: G \longrightarrow G$

$$g \to g^{-1}$$

dönüşümleri sürekli ise G ye bir topolojik grup denir.

Tanım 1.23. Bir X topolojik uzayı verilsin. Bir G topolojik grubu için

$$\Lambda: G \times X \longrightarrow X$$
$$\Lambda(g,x) = g\Lambda x =: gx$$

dönüşümü sürekli ve $\forall g_1, g_2 \in G$ ve $\forall x \in X$ için

(i) $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$

(ii) $ex = x$

şartları sağlanıyorsa $[G, X, \Lambda]$ üçlüsüne veya $[G, X]$ ikilisine bir topolojik dönüşüm grubu ve G ye X üzerinde bir hareket grubu denir. Burada e, G grubunun birim elemanıdır.

Tanım 1.24. Δ keyfi bir topolojik uzayın alt kümesi olarak verilsin. Eğer $\forall x \in \Delta$ için bir U komşuluğu, $U \cap \Delta = \{x\}$ şartını sağlayacak şekilde bulunabiliyorsa Δ ya ayrıktır denir.

$\mathbb{R}$ nin ayrık alt kümelerine örnekler, $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi, $\mathbb{R}$ nin her sonlu alt kümesi, $A = \left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\right\}$ kümeleri verilebilir. $B = \left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\right\} \cup \{0\}$ kümesi $\mathbb{R}$ nin ayrık olmayan bir alt kümesidir.

Lemma 1.25. [11] $[G, X]$ topolojik dönüşüm grubu verilsin. $\forall x, y \in X$ için

$$x \approx y :\Leftrightarrow \exists g \in G : gx = y$$

olarak tanımlanan " $\approx$ " bağıntısı X üzerinde denklik bağıntısıdır. ■

Tanım 1.26. Lemma 1.25 de tanımlanan " $\approx$ " bağıntısının her bir denklik sınıfı hareketin yörüngesi olarak adlandırılır. $x \in X$ noktasını içeren yörüngeye bu noktanın yörüngesi denir ve bu yörünge $Gx \coloneqq \{gx | g \in G\}$ ile gösterilir.

Tanım 1.27. G, X üzerinde bir hareket grubu olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ için $gx = y$ olacak şekilde bir $g \in G$ bulunabiliyorsa G, X üzerinde transitif olarak hareket ediyor denir. Tanım gereğince G, X üzerinde transitif olarak hareket ediyorsa $\forall x \in X$ için $Gx = X$ olur. Bu durumda bir tek yörünge vardır ve bu yörünge grubun transitif olarak hareket ettiği kümedir.

Tanım 1.28. Bir G grubu verilsin ve $H \leq G$ olsun. H grubuna göre sağ ve sol denklik sınıflarının sayısı aynı olup, bu sayıya H nin G içerisindeki indeksi denir ve $|G:H|$ ile gösterilir.

Tanım 1.29. G, X üzerinde bir hareket grubu olsun. $x \in X$ noktası için

$$G_x \coloneqq \{g \in G | gx = x\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye bu noktanın sabitleyeni denir.

Tanım 1.30. Bir G grubu için $C \coloneqq \{g \in G | \forall x \in G \text{ için } gx = xg\}$ şeklinde tanımlı kümeye G nin merkezi denir.

Tanım 1.31. $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir dönüşüm olsun. Bu takdirde $T^m = I$ eşitliğini sağlayan en küçük $m \in \mathbb{Z}^+$ sayısına T dönüşümünün periyodu veya mertebesi denir. Eğer böyle bir m pozitif tamsayısı bulunamazsa T ye sonsuz periyotludur denir.

Tanım 1.32. $n \geq 1$ olmak üzere n den küçük ve n ile aralarında asal olan pozitif tamsayıların sayısını veren fonksiyona Eulerin φ fonksiyonu denir ve $\varphi(n)$ ile gösterilir.

$n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ verildiğinde

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right)$$

şeklindedir.

Tanım 1.33. p bir tek asal sayı ve $(a,p)=1$ olsun. Eğer $x^2 \equiv a\,mod\,p$ kongrüans denkleminin çözümü var ise a tamsayısına p nin kuadratik rezidüsü denir. Eğer $x^2 \equiv a\,mod\,p$ kongrüans denkleminin çözümü yoksa a tamsayısına p nin kuadratik olmayan residüsü denir.

Tanım 1.34. p bir tek asal sayı ve a ise p ile bölünemeyen bir tamsayı olmak üzere

$$\left(\frac{a}{p}\right)=\begin{cases}1, & \text{eğer } a, p \text{ nin kuadratik residüsü ise}\\ -1, & \text{eğer } a, p \text{ nin kuadratik olmayan residüsü ise}\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\left(\frac{a}{p}\right)$ sembolüne Legendre sembolü denir. Bu sembol Fransız matematikçi Adrien-Marie Legendre tarafından verilmiştir.

Teorem 1.35. [12] p bir tek asal sayı olmak üzere

$$\left(-\frac{1}{p}\right)=\begin{cases}1, & p \equiv 1\;mod\;4 \text{ ise}\\ -1, & p \equiv -1\;mod\;4 \text{ ise}\end{cases}$$

dir. ■

1.3. Öklid Olmayan Kristalize Gruplar

1. $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ genişletilmiş kompleks düzlem olmak üzere

(A) $\left\{z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d} \,\middle|\, a,b,c,d \in \mathbb{R} \text{ ve } ad-bc=1\right\}$

(B) $\left\{z \longrightarrow \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \,\middle|\, a,b,c,d \in \mathbb{R} \text{ ve } ad-bc=-1\right\}$

şeklindeki dönüşümlerin grubu G ile gösterilsin. Bu gruba ait olan her bir eleman

$$\mathcal{U} \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \mid Im\,z > 0\}$$

şeklinde tanımlı düzlemin kendi üzerine konform veya ters konform homeomorfizmasıdır.

(A) şeklindeki dönüşümlerin grubu $PSL(2,\mathbb{R})$ ile temsil edilir. Bu şekilde tanımlı grup G de 2 indeksli bir alt gruptur. $\mathcal{U}$ düzleminin her konform homeomorfizmi $PSL(2,\mathbb{R})$ de yer alır [3].

G üzerinde bir topolojik yapı şu şekilde inşa edilebilir:

$$K = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 | ad - bc = \pm 1\}$$

alt kümesini ele alalım. Bu küme $\mathbb{R}^4$ ten indirgenen Öklid metriğine göre bir metrik uzaydır. K üzerinde $\mathbb{R}^4$ de tanımlı Öklid topolojisine göre oluşturulan alt topolojiyi göz önüne alalım. K uzayında (a, b, c, d) ile $(-a, -b, -c, -d)$ noktalarını özdeşleştirelim.

$$\delta: K \longrightarrow K, \qquad \delta(a, b, c, d) \coloneqq (-a, -b, -c, -d)$$

şeklinde tanımlı δ dönüşümü bir homeomorfizma olup özdeşlikle beraber K üzerinde 2. mertebeden bir devirli grup olarak hareket eder.

Şimdi $K/_{\langle\delta\rangle}$ kümesini üzerinde tanımlı bölüm topolojisi ile göz önüne alalım. Bu durumda G ile $K/_{\langle\delta\rangle}$ arasında birebir ve örten bir dönüşüm bulunabilir. Bundan dolayı

$$p: K \longrightarrow K/_{\langle\delta\rangle}\ , \qquad p(a, b, c, d) \coloneqq [(a, b, c, d)]$$

şeklinde tanımlı projeksiyon dönüşümü süreklidir. Bu durumda G grubunun üzerindeki topolojiyi $K/_{\langle\delta\rangle}$ üzerindeki topoloji olarak alabiliriz. Böylece G grubu bir topolojik yapıya sahip olur. Buna ek olarak $G, \mathcal{U}$ üzerinde bir hareket grubu olup G nin de her dönüşümü $\mathcal{U}$ üzerinde sürekli olacağından $[G, \mathcal{U}]$ bir topolojik dönüşüm grubu olur. Ayrıca $G, \mathcal{U}$ üzerinde transitif olarak hareket eder.

G topolojik grubu $PSL(2, \mathbb{R})$ ve $G \backslash PSL(2, \mathbb{R})$ şeklinde iki bileşene sahiptir.

G nin her bir ayrık alt grubuna Öklid olmayan kristalize grup denir ve kısaca NEC ile sembolize edilir. Bir Fuchsian grup, $PSL(2, \mathbb{R})$ deki bir NEC grubu olarak tanımlanır. Eğer herhangi bir NEC grubu, (B) türündeki elemanları içeriyorsa bu özel bir NEC grubu olarak adlandırılır. $\mathcal{U}$ düzlemi, Öklid olmayan (hiperbolik) düzlemin bir modeline şu şekilde dönüştürülebilir:

Bir yay elemanının hiperbolik uzunluğu ds ile gösterilir ve

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = \frac{|dz|^2}{y^2}, z = x + iy$$

şeklinde tanımlanır.

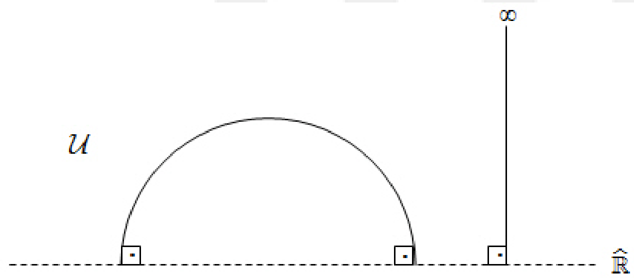
Bu tanım vasıtasıyla parçalı, sürekli ve diferansiyellenebilir özellikli bir C eğrisinin hiperbolik uzunluğu

$$\ell(C) := \int_C ds = \int_C \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$$

şeklinde hesaplanabilir. Ek olarak, ölçülebilir bir E kümesinin hiperbolik alanı ise

$$\mu(E) \coloneqq \iint_E \frac{dxdy}{y^2}$$

formülü ile verilebilir. Yukarıdaki hiperbolik düzlem modelinin geodezikleri, reel eksene dik yarı çemberler ve yarı doğrular olup bu tip eğriler hiperbolik doğrular olarak adlandırılır.



Şekil 1. Hiperbolik doğrular

$\mathcal{U}$ da verilen herhangi iki nokta arasındaki hiperbolik uzaklık, bu noktaları birleştiren bir tek hiperbolik doğru parçasının uzunluğudur. Bu metrik vasıtasıyla türetilen topoloji, bilinen Öklid topolojisine eş değerdir. Dolayısıyla herhangi bir topolojideki açık küme, diğerinde de açıktır. Hiperbolik uzaklık ve alan, $PSL(2,\mathbb{R})$ nin dönüşümleri altında korunur [3].

2. Şimdi, G grubuna ait olan elemanları, yön durumlarına ve sabit nokta kümelerine göre kategorize edelim:

($\boldsymbol{A}^*$) $T \in PSL(2,\mathbb{R})\backslash\{I\}$ dönüşümünün sabit noktalarını belirlemek için

$$\frac{az+b}{cz+d} = z$$

eşitliğinden

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0 \qquad (1)$$

denklemi elde edilir. (1) in kökleri T nin sabit noktaları olup bu noktaların sayısı en fazla 2 dir. Bu noktalar ise

$$z_{1,2} = \frac{-(d-a) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c}$$

şeklinde belirlenir. Kökler için aşağıdaki durumlar gözlemlenir:

(i) $|a+d| > 2$ ise, T iki farklı sabit noktaya sahiptir ve bu noktalar $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ üzerinde yer alır. Bu şekildeki T dönüşümüne hiperbolik dönüşüm denir.

(ii) $|a+d| = 2$ ise, T birbirine eşit iki sabit noktaya sahiptir ve bu noktalar $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ da yer alır. Bu şekildeki T dönüşümüne parabolik dönüşüm denir.

(iii) $|a+d| < 2$ ise, T birbirinin eşleniği olan iki kompleks sabit noktaya sahiptir ve bu noktalardan yalnızca biri $\mathcal{U}$ kümesindedir. Bu şekildeki T dönüşümüne eliptik dönüşüm denir.

($\boldsymbol{B}^*$) Şimdi $T \in G \backslash PSL(2,\ \mathbb{R})$ alalım ve

$$z = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$$

yazalım. Buradan

$$cz\bar{z} + dz - a\bar{z} - b = 0 \tag{2}$$

denklemi bulunur. Bu denklemde $z = x + iy$ ve $\bar{z} = x - iy$ yazılırsa

$$c(x+iy)(x-iy) + d(x+iy) - a(x-iy) - b = 0$$

$$c(x^2+y^2) + dx - ax + i(dy+ay) - b = 0$$

$$\begin{cases} c(x^2+y^2) + (d-a)x - b = 0 \\ (d+a)y = 0 \end{cases}$$

şeklinde iki denklem elde edilir. Bu denklemler incelendiğinde aşağıdaki sonuçlara ulaşılabilir:

i) Eğer $a + d \neq 0$ ise $y = 0$ olup

$$cx^2 + (d-a)x - b = 0$$

denklemi elde edilir. Dolayısıyla denklemin diskriminantı

$\Delta = (d-a)^2 + 4bc = d^2 - 2ad + a^2 + 4bc$

olup eğer $ad - bc = -1$ eşitliği de kullanılırsa $\Delta = (a+d)^2 + 4 > 0$ olduğu görülür. Bunun sonucunda T iki farklı sabit noktaya sahiptir ve bu noktalar $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ üzerindedirler. Bu şekildeki T dönüşümüne kayan-yansıma denir.

ii) Eğer $a + d = 0$ ise $(a+d)y = 0$ eşitliği her bir y noktası için sağlanacağından

$c(x^2 + y^2) + (d-a)x - b = 0$

eşitliği gereğince T dönüşümünün sabit noktaları kümesi $c \neq 0$ için bir çemberdir. Ayrıca

$a + d = 0$ ve $ad - bc = -1$

eşitlikleri göz önüne alınarak bu çemberin merkezinin $\left(\frac{a}{c}, 0\right)$ ve yarıçapının $\frac{1}{|c|}$ olduğu elde edilir. $c = 0$ olması durumunda $x = b/(d-a)$ doğrusu bulunur. Bu takdirde T dönüşümüne bir yansıma denir.

Bu sonuçlar göz önüne alındığında G grubunun hiperbolik, parabolik, eliptik, kayan-yansıma ve yansıma şeklinde adlandırılan beş tip elemanı olduğu görülür [3].

Tanım 1.36. T_1 ve T_2, G grubunun keyfi iki elemanı olmak üzere $T_1 = TT_2T^{-1}$ olacak şekilde bir $T \in G$ bulunabilirse T_1 ve T_2 birbirinin eşleniğidir denir.

Lemma 1.37. [3] Birbirinin eşleniği olan T_1 ve T_2 aynı tiptendirler. ■

G ye ait olan elemanları, bu elemanların izleri (trace) denilen $a + d$ ye ve determinantlarına göre kategorize edebiliriz. G nin eşlenik elemanlarının aynı tip olduğu gerçeği kullanıldığında, dönüşümlerin her biri bir doğal gösterime sahiptir. Doğal gösterimler aşağıdaki şekilde sınıflandırılır:

Eleman Türü	Doğal Gösterim
Hiperbolik	$z \longrightarrow \lambda z \quad (\lambda > 1)$
Eliptik	$z \longrightarrow w, \frac{w-i}{w+i} = e^{i\theta}\frac{z-i}{z+i},\ \theta \neq 2n\pi$
Parabolik	$z \longrightarrow z \pm 1$
Kayan-yansıma	$z \longrightarrow \lambda\bar{z} \quad (\lambda < -1)$
Yansıma	$z \longrightarrow -\bar{z}$

Tanım 1.38. Λ bir Fuchsian grubu olmak üzere

(i) $\bigcup_{T\in\Lambda} T(\mathrm{F}) = \mathcal{U}$ **(ii)** $\forall T \in \Lambda\backslash\{I\}$ için $\mathring{\mathrm{F}} \cap T(\mathring{\mathrm{F}}) = \emptyset$

koşullarını gerçekleyen kapalı F kümesine bu Fuchsian grubu için temel bölge denir.

Tanım 1.39. $\Lambda \leq \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}), T \in \Lambda$ ve

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, c \neq 0$$

olsun. $I(T)$: $|cz+d|^2 = 1$ şeklinde tanımlı çember, T dönüşümünün izometrik çemberi olarak adlandırılır. Burada

$$|T'(z)| = 1 \Leftrightarrow z \in I(T)$$

olacağından izometrik çember, diferansiyel Öklid uzunluğunu değiştirmeden T ile dönüştürülen noktaların geometrik yeridir. Eğer F_∞, Λ da sonsuzun Λ_∞ sabitleyeni için bir temel bölge ayrıca K, Λ nın tüm izometrik çemberlerinin dışında kalan bölge ise $F = F_\infty \cap K, \Lambda$ için bir temel bölge adını alır. Bu tip bölgelere Ford Bölgesi denir.

1.4. Simge

Macbeath [13] her bir NEC grubuna bu grubun cebirsel yapısını karakterize eden bir simge karşılık getirdi. Her sonlu üretilmiş Fuchsian grubu aşağıdaki gibi bir gösterime sahiptir:

Üreticiler: $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$:hiperbolik elemanlar

$x_1, \dots, x_r$:eliptik elemanlar

$p_1, \dots, p_m$:parabolik elemanlar

Bağlantılar: $x_i^{m_i}, i = 1,2,\dots,r$

$$\prod_{j=1}^{g} a_j b_j a_j^{-1} b_j^{-1} \cdot \prod_{k=1}^{r} x_k \prod_{t=1}^{m} p_t = 1$$

Simge: $(g\ ;\ m_1, m_2, \dots, m_r\ ;\ m)$

Burada g-grubun cinsini, $m_i, i = 1,2,\dots,r$ üretici eliptik elemanların mertebelerini ve m parabolik sınıf sayısını göstermektedir [14].

Bir NEC grubunun simgesi

- Üreteçleri: x_i , $i = 1,2, \dots , r$

  e_i , $i = 1,2, \dots , k$

  c_{ij} , $i = 1,2, \dots , k$, $j = 0,1, \dots , s_i$

  $a_i b_j$, $j = 1,2, \dots , g$

Bağıntıları: $x_i^{m_i}$, $i = 1,2, \dots , r$

$c_{is_i} = e_i^{-1} c_{i0} e_i$, $i = 1,2, \dots , k$

$c_{ij-1}^2 = c_{ij}^2 = (c_{ij-1}.c_{ij})^{n_{ij}} = 1$, $i = 1,2, \dots , k$, $j = 1,2, \dots , s_i$

$x_1 x_2 \dots x_r e_1 e_2 \dots e_k a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1$

Simge:

$$\left(g; +; [m_1, m_2, \dots , m_r]; \left\{\left(n_{11.}n_{12.\dots,}n_{1s_1}\right), \left(n_{21.}n_{22.\dots,}n_{2s_2}\right), \dots , \left(n_{k1.}n_{k2.\dots,}n_{ks_k}\right)\right\}\right) \quad (3)$$

veya

- Üreteçleri: x_i , $i = 1,2, \dots , r$

  e_i , $i = 1,2, \dots , k$

  c_{ij} , $i = 1,2, \dots , k$, $j = 0,1, \dots , s_i$

  d_j , $j = 1,2, \dots , g$

Bağıntıları: $x_i^{m_i}$, $i = 1,2, \dots , r$

$c_{is_i} = e_i^{-1} c_{i0} e_i$, $i = 1,2, \dots , k$

$c_{ij-1}^2 = c_{ij}^2 = (c_{ij-1}.c_{ij})^{n_{ij}} = 1$, $i = 1,2, \dots , k$, $j = 1,2, \dots , s_i$

$x_1 x_2 \dots x_r e_1 e_2 \dots e_k d_1^2 d_2^2 \dots d_g^2 = 1$

Simge:

$$\left(g; -; [m_1, m_2, \dots , m_r]; \left\{\left(n_{11.}n_{12.\dots,}n_{1s_1}\right), \left(n_{21.}n_{22.\dots,}n_{2s_2}\right), \dots , \left(n_{k1.}n_{k2.\dots,}n_{ks_k}\right)\right\}\right) \quad (4)$$

biçimindedir. Burada m_i sayılarına (öz)periyodlar, $\left(n_{i1.}n_{i2.\dots,}n_{is_i}\right)$ parantezlerine periyod-devirler veya sınır bileşenleri adı verilir. Simge, üzerinde çalışılan grubun invaryantlarını belirlediği için oldukça önemlidir.

1.5. Modüler Grup

Tanım 1.40. Modüler grup, $PSL(2,\mathbb{R})$ grubunun

$$\Gamma := PSL(2,\mathbb{Z}) = \left\{ z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d} \middle| \, a,b,c,d \in \mathbb{Z} \text{ ve } ad-bc=1 \right\}$$

şeklinde tanımlı alt grubudur.

Bu şekilde tanımlı grup, girdileri tam sayı olan 2×2 boyutlu matrisler yardımıyla

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, det\, A = 1$$

olarak da temsil edilebilir.

A ve $-A$ matrisleri aynı dönüşümü temsil edeceği için A matrisi negatifi ile eş alınır. Dolayısıyla tez boyunca matris ve dönüşüm arasında bir ayrım olmayacaktır. Benzer şekilde $k \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

matrisleri aynı dönüşümü temsil edeceğinden hesaplamaların uygun görülen yerlerinde bu matrisler eşit olarak alınacaktır. (Burada determinantın 1 olma şartı aranmayabilir.)

Şimdi Γ modüler grubunun $T(z) = z+1$ ve $U(z) = -\frac{1}{z}$ şeklinde tanımlı dönüşümler vasıtasıyla üretildiğini gösteren teoremi ifade ve ispat edelim.

Teorem 1.41. [1] Γ modüler grubu $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisleri ile üretilir.

İspat. Öncelikle Γ nın Ford bölgesini bulalım. Kabul edelim ki Γ_∞ ile Γ da ∞ un sabitleyeni temsil edilsin.

$$F_\infty = \left\{ z \in \mathcal{U} : |Re(z)| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

alalım. Bu durumda yukarıda tanımlı şerit, Γ_∞ sabitleyeni için bir temel bölge olur. Ayrıca en geniş izometrik çemberlerin yarıçapları 1 olup bu şekildeki çemberlerin merkezleri reel eksen üzerindeki tam sayılardır. Bu çemberler içerisinden merkezleri $0, -1, 1$ olan üç çember bu şerit ile kesişir. Bu kesişimler şu şekildedir:

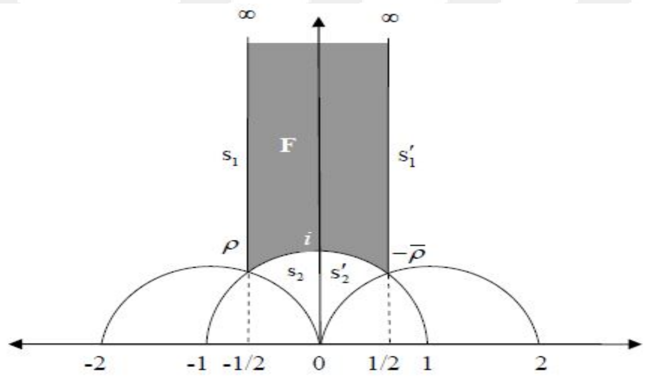
$$\rho = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \text{ ve } -\bar{\rho} = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

için 0 merkezli çember ρ ve $-\bar{\rho}$ noktalarında; 1 merkezli çember $-\bar{\rho}$ noktasında; -1 merkezli çember ρ noktasında F_∞ ile kesişir.

Ayrıca bunlar dışında kalan çemberlerin yarıçapları $1/2$ den küçük veya eşittir. Bundan dolayı

$$F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \geq 1, |x| \leq \frac{1}{2}, y > 0\right\}$$

şeklinde tanımlı küme Γ modüler grubunun temel bölgesidir.



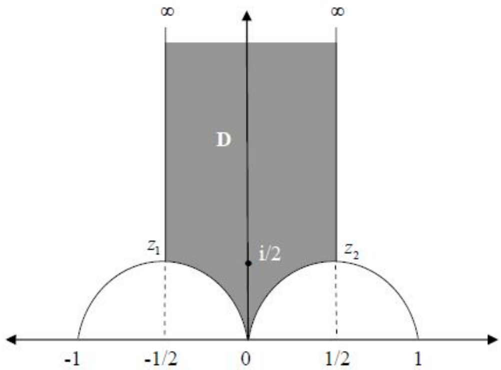
Şekil 2. Γ modüler grubunun F temel bölgesi

$T(z) = z + 1$ şeklinde verilen dönüşüm için $T(s_1) = s_1'$ ve $U(z) = -\frac{1}{z}$ şeklinde verilen dönüşüm için $U(s_2) = s_2'$ olacağından (s_1, s_1') ve (s_2, s_2') ikilileri eşlenik kenar çiftleridir. Böylece Γ modüler grubu, yukarıda verilen T ve U dönüşümleri ile üretilir. T ile U dönüşümlerinin tanımları gereğince T nin parabolik eleman ve U nun 2. mertebeden eliptik eleman olduğu görülür. Böylece Γ modüler grubu

$$V \coloneqq TU = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlı 3. mertebeden eliptik eleman olmak üzere $U(z) = -\frac{1}{z}$ ve $V(z) = \frac{z-1}{z}$ elemanları vasıtasıyla da üretilebilir. O halde $U^2 = V^3 = I$ elde edilir. Sonuç olarak Γ grubunun üreticileri U, V, T olduğundan bu grubun simgesi $(0; 2, 3, \infty)$ şeklindedir. ■

$N = 2$ alındığında $\Gamma_0(2)$ grubunun temel bölgesi olan D, Şekil 3 deki gibi resmedilebilir.



Şekil 3. $\Gamma_0(2)$ grubunun D temel bölgesi

$T(z) = \frac{z}{2z+1} \in \Gamma_0(2)$ şeklinde verilen parabolik elemanı için $T(z_1) = z_2$ ve $S(z) = \frac{z-1}{2z-1} \in \Gamma_0(2)$ şeklinde verilen 2. mertebeden eliptik elemanı için $S(z_2) = z_2$ dir. Buna ek olarak birer parabolik eleman da 0 ve ∞ noktalarını sabit bırakır. Bunun sonucu olarak $\Gamma_0(2)$ grubunun simgesi $(0; 2, \infty, \infty)$ şeklindedir.

$(x, y) = 1$ ve $ad - bc = 1$ alınırsa

$$\frac{ax + by}{cx + dy}$$

indirgenmiş formda olduğu açıktır. Gerçekten, eğer aksi olsaydı, $n|\ ax + by$ ve $n|\ cx + dy$ koşulunu sağlayan bir $n \in \mathbb{Z}$ bulunabilirdi. Buradan $k, l \in \mathbb{Z}$ için

$$ax + by = kn \tag{5}$$

ve

$$cx + dy = ln \tag{6}$$

olur ki (5) ve (6) eşitliklerinin her iki tarafı sırasıyla d ve $-b$ ile çarpılırsa

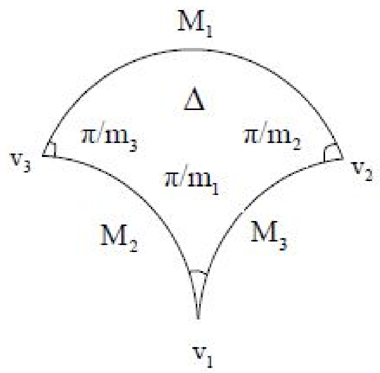
$$(ad - bc)x = (kd - bl)n \tag{7}$$

elde edilir. Benzer olarak (5) ve (6) eşitlikleri sırasıyla $-c$ ve a ile çarpılırsa

$$(ad - bc)y = (al - ck)n \tag{8}$$

bulunur. (7) ve (8) den $n|\ x$ ve $n|\ y$ elde edilir ki bu bir çelişkidir [3].

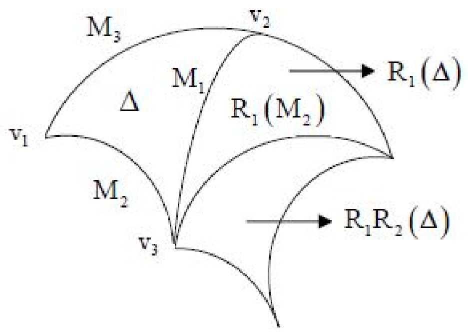
G bir topolojik grup olmak üzere $\mathcal{U}$ düzleminin ters konformal homeomorfizmleri, $\mathrm{G}\backslash PSL(2,\mathbb{R})$ grubunun elemanlarıdır. Bundan dolayı $\mathrm{G}\backslash PSL(2,\mathbb{R})$ grubunun elemanlarına genellikle hiperbolik yansıma veya $\mathbb{H}$-yansıma denir.



Şekil 4. Δ Hiperbolik üçgeni

Δ hiperbolik üçgeni Şekil 4 ten görüldüğü üzere; köşeleri $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3$ sırasıyla bu köşelerdeki açıları $\frac{\pi}{\mathrm{m}_1}, \frac{\pi}{\mathrm{m}_2}, \frac{\pi}{\mathrm{m}_3}$ ve bu köşelerin karşısındaki kenarları $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3$ olan bir $\mathbb{H}$-üçgen olsun.

$\mathrm{i} = 1,2,3$ için $\mathrm{R_i}$ ler $\mathrm{M_i}$ leri içeren $\mathbb{H}$-doğrusundaki yansımalar olarak alınsın. Ayrıca $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \mathrm{R}_3$ yansımaları vasıtasıyla üretilen grup Γ^* olsun. Γ^* grubu, $\mathrm{R_i} \notin PSL(2,\mathbb{R})$ olduğundan bir Fuchsian grup değildir. Fakat $\Gamma = \Gamma^* \cap PSL(2,\mathbb{R})$ olduğundan Γ^*ın Γ grubundaki yan sınıfın birleşimi olduğu görülür. Bu durumda genelliği bozmadan bu ifadeyi $\Gamma^* \cup \mathrm{R}_1\Gamma$ olarak alabiliriz. $S \in \Gamma^*\backslash\Gamma$ olması halinde $\mathrm{R}_1\mathrm{S}$, iki ters konformal homeomorfizmin bileşkesi olur. Sonuç olarak $\mathrm{R}_1\mathrm{S}$ konform olup $\mathrm{R}_1 S \in PSL(2,\mathbb{R})$ sağlanır. Benzer şekilde $\mathrm{R}_1 S \in \Gamma^*$ olduğundan $\mathrm{R}_1\mathrm{S} \in \Gamma$ ve $S = \mathrm{R}_1(\mathrm{R}_1\mathrm{S}) \in \mathrm{R}_1\Gamma$ sağlanır.



Şekil 5. $R_1(\Delta)$, $R_1R_2(\Delta)$ $\mathbb{H}$-üçgenleri

Kenarları $R_1(M_1) = M_1$, $R_1(M_2)$, $R_1(M_3)$ olan $R_1(\Delta)$ $\mathbb{H}$-üçgeni, yukarıda verilen Δ üçgeninin R_1 $\mathbb{H}$-yansıması altındaki görüntüsüdür. $R_1(M_2)$ nin bir $\mathbb{H}$-yansıma olmasının sebebi, $R_1R_2R_1^{-1}$ nin noktasal olarak $R_1(M_2)$ yi sabit bırakmasıdır. Bu yansıma kullanılarak Şekil 5 den görüleceği üzere

$$R_1R_2R_1^{-1}\big(R_1(\Delta)\big) = R_1R_2(\Delta)$$

elde edilir.

Bu düşünce benzer şekilde sürdürüldüğünde Δ, $R_1(\Delta)$, $R_1R_2(\Delta)$, $R_1R_2R_1(\Delta)$,..., $(R_1R_2)^{m_3-1}(\Delta)$ nin v_3 köşesi etrafında çevrilen hiperbolik üçgenler olduğu görülür. v_3 köşesini sabit bırakan iki $\mathbb{H}$-yansımanın çarpımı R_1R_2 olmak üzere bu çarpım v_3 köşesi etrafında $\frac{2\pi}{m_3}$ açı ölçüsünce hiperbolik dönme şeklinde alınabilir. Bu durumda $(R_1R_2)^{m_3} = I$ eşitliği elde edilir.

$\mathcal{U}$ düzleminin bir gösterimini $\{T(\Delta): T \in \Gamma^*\}$ kümesinin oluşturduğu, Δ üçgeninin Γ^* görüntülerinin birbirini örtmediğinden ve $\mathcal{U}$ düzleminin her bir noktasının Δ nın bir Γ^* görüntüsüne ait olduğundan söylenebilir.

Şimdi keyfi bir $p \in \Delta$ noktası alalım. O zaman bu keyfi noktanın Γ^* görüntüleri, döşemenin diğer üçgenlerine karşılık gelen noktalardır. Bu durumda bu noktalar ayrık bir küme meydana getirirler. Bunun sonucu olarak $\mathcal{U}$ düzlemine ait olan her bir noktanın Γ yörüngesi, ayrık bir kümedir. Bu durumda Γ bir Fuchsian grup olup bu şekilde oluşturulan gruba üçgen grup denir. Açıkça görüleceği üzere

$$R_1^2 = R_2^2 = R_3^2 = (R_1R_2)^{m_3} = (R_2R_3)^{m_1} = (R_1R_3)^{m_2} = I$$

eşitliği sağlanır. Eğer Γ grubunda, $X = R_1R_2$ ve $Y = R_2R_3$ olarak seçilirse

$$X^{m_3} = Y^{m_1} = (XY)^{m_2} = I$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlikler vasıtasıyla Γ grubundaki her bir bağıntı elde edilebilir. Grup teorisi göz önüne alındığında Γ grubunun temsili

$$\Gamma = \langle X, Y \mid X^{m_3} = Y^{m_1} = (XY)^{m_2} = I \rangle$$

olarak alınabilir. Bundan dolayı Γ, m_1, m_2, m_3 doğal periyotlarına sahip olan bir üçgen grubudur ki, bu grup $\frac{\pi}{m_1}, \frac{\pi}{m_2}, \frac{\pi}{m_3}$ açılarından oluşan Δ, $\mathbb{H}$-üçgeninden elde edilir.

$l, m, n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$ olmak üzere bir üçgen grup, (l, m, n) şeklinde gösterilir ve

$$\{x, y, z: x^l = y^m = z^n = xyz = 1\}$$

bağıntısına sahiptir. Geometrik bir bakış açısıyla, X küre, Euclid düzlemi ya da hiperbolik düzlem olmak üzere $\frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}$ açılarına sahip olan Δ üçgenini göz önüne alalım. O halde X in yansımaları vasıtasıyla Δ nın kenarlarında türetilen grup, 2-indeksli bir alt gruba sahip olup (l, m, n) ye izomorf olan konform dönüşümlerden oluşur. Burada X uzayı $l, m, n \in \mathbb{Z}^+$ vasıtasıyla belirlenir ve

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} > 1 \text{ ise Küre}$$
$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1 \text{ ise Euclid Düzlemi}$$
$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1 \text{ ise Hiperbolik Düzlemdir.}$$

Γ, bir üçgen grup olarak ele alındığında $\Gamma \cong (2, 3, \infty)$ izomorfizması bulunur [6].

1.6. Γ nın $\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ Üzerindeki Hareketi

Her $x, y \in \mathbb{Z}$ için $(x, y) = 1$ olmak üzere $\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ kümesinin her bir elemanı x/y indirgenmiş kesri şeklinde temsil edilir. Burada $x/y = -x/-y$ olacağından bu temsil tek değildir. ∞, $1/0 = -1/0$ şeklinde temsil edilmek üzere Γ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \frac{x}{y} \to \frac{ax + by}{cx + dy}$$

dir. $T \in \Gamma$ için

$$T\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{a\frac{x}{y} + b}{c\frac{x}{y} + d} = \frac{ax + by}{cx + dy} \text{ ve } T\left(\frac{-x}{-y}\right) = \frac{-ax - by}{-cx - dy} = \frac{ax + by}{cx + dy} = T\left(\frac{x}{y}\right)$$

sağlanacağından Γ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi iyi tanımlı olur. Eğer $(x, y) = 1$ ve $ad - bc = 1$ ise

$$\frac{ax + by}{cx + dy}$$

indirgenmiş kesir olur [3].

Teorem 1.42. [15] Γ grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ kümesi üzerindeki hareketi transitiftir.

İspat. $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \widehat{\mathbb{Q}}: \frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$ ve $(a, b) = (c, d) = 1$ alalım. Bu takdirde

$$a\alpha - b\beta = 1, c\delta - d\gamma = 1$$

eşitliklerini sağlayan $\alpha, \beta, \delta, \gamma \in \mathbb{Z}$ mevcuttur. Eğer

$$T(z) := \frac{az + \beta}{bz + \alpha}, S(z) := \frac{cz + \gamma}{dz + \delta}$$

olarak tanımlanırsa $T(\infty) = \frac{a}{b}, S(\infty) = \frac{c}{d}$ olacak şekilde bir $\varphi := ST^{-1} \in \Gamma$ dönüşümü mevcuttur. Böylece Γ grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ kümesi üzerindeki hareketi transitif olduğu elde edilir. ■

Teorem 1.43. $\infty \in \Gamma$ noktasının Γ_∞ sabitleyeni sonsuz devirli bir gruptur.

İspat. $T \in \Gamma$ ve $T(\infty) = \infty$ alalım. Bu durumda

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

olarak alınırsa $T(\infty) = \infty$ olacağından $c = 0$ ve $ad = 1$ elde edilir. Buradan hareketle

$$T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = a^2 z + m = z + m \quad (m = b \text{ veya } m = -b)$$

yazılabilir. O halde $W(z) = z + 1$ için $\Gamma_\infty = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ olarak bulunur. ■

1.7. Modüler Grubun Kongrüans Alt Grupları

Tanım 1.44. $N \in \mathbb{Z}^{+}$için Γ nın temel kongrüans alt grubu

$$\Gamma(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \middle| \, a \equiv d \equiv 1 \; mod \; N, b \equiv \; c \equiv 0 \; mod \; N \right\}$$

şeklinde tanımlanır. $\Gamma(N)$ leri içeren Γ nın keyfi bir alt grubu, kongrüans alt grubu adını alır. Literatürde en fazla karşılaşılan bazı kongrüans alt grupları

$$\Gamma_1(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \middle| \, a \equiv d \equiv 1 \; mod \; N, \;\; c \equiv 0 \; mod \; N \right\},$$

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \middle| \; c \equiv 0 \; mod \; N \right\},$$

$$\Gamma^0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \middle| \; b \equiv 0 \; mod \; N \right\}$$

gruplarıdır. $N \in \mathbb{Z}$ için

$$\Gamma(N) \leq \Gamma_1(N) \leq \Gamma_0(N) \leq \Gamma$$

dır. $\Gamma(N)$, Γ nın normal bir alt grubu olduğundan bu grup aynı zamanda $\Gamma_0(N)$ ve $\Gamma_1(N)$ gruplarının da normal alt grubudur. Öte yandan $\Gamma_1(N) \lhd \Gamma_0(N)$ sağlanır. Bundan dolayı indeksler, $N > 2$ olması halinde

$$|\Gamma : \Gamma_0(N)| = N \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

$$|\Gamma : \Gamma_1(N)| = \frac{N^2}{2} \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right),$$

$$|\Gamma : \Gamma(N)| = \frac{N^3}{2} \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$

şeklindedir.

$N = 2$ olması halinde

$$|\Gamma : \Gamma_0(2)| = 3, |\Gamma : \Gamma_1(2)| = 3, |\Gamma : \Gamma(2)| = 6$$

şeklindedir. Yukarıdaki indeksler göz önüne alındığında $N > 2$ için

$$|\Gamma_0(N):\Gamma_1(N)| = \frac{|\Gamma:\Gamma_1(N)|}{|\Gamma:\Gamma_0(N)|} = \frac{N}{2}\prod_{p|N}\left(1-\frac{1}{p}\right), |\Gamma_1(N):\Gamma(N)| = \frac{|\Gamma:\Gamma(N)|}{|\Gamma:\Gamma_1(N)|} = N$$

elde edilir.

$\Gamma_0(N), \Gamma_1(N)$ ve $\Gamma(N)$ grupları, Γ nın sonlu indeksli alt grupları ve Fuchsian gruplarının sonlu indeksli keyfi alt grupları da Fuchsian grubu ile aynı cusp kümesine sahip olduğundan bu grupların cusp kümesi $\widehat{\mathbb{Q}}$ dır [16].

Teorem 1.45. $N > 1$ için $\Gamma_0(N)$ nin $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi transitif değildir.

İspat. $\Gamma_0(N)$ nin $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi transitif olduğunu varsayalım. O halde $0, \infty \in \widehat{\mathbb{Q}}$ aldığımızda

$$\begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eşitliğini sağlayan $\begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ elemanı mevcuttur. Buradan $b = 1, d = 0$ bulunur. Determinant ile bunun $c = -1, N = 1$ olmasıyla mümkün olduğu görülür. Yani, $\begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix} \notin \Gamma_0(N)$ olur ki bu bir çelişkidir. ■

1.8. İmprimitif Hareket

Tanım 1.46. (i) $X \neq \emptyset$ kümesi için $\xi: X \longrightarrow X$ şeklinde tanımlı dönüşüm 1-1 ve örten ise bu dönüşüme X kümesinin permütasyonu denir. Bu kümenin tüm permütasyonlarının kümesi S^X ile gösterilir.

(ii) $\xi_1, \xi_2 \in S^X$ için $\xi_1 \circ \xi_2 \in S^X$ dir. S^X bir grup olup, bu gruba X üzerinde simetrik grup adı verilir. Ayrıca bu grubun her bir alt grubuna da X üzerinde bir permütasyon grubu adı verilir.

Tanım 1.47. G, X üzerinde bir permütasyon grubu olarak alındığında bu grup X üzerinde hareket eder. Yani $g: G \longrightarrow G$, 1-1 ve örten bir dönüşüm olup $x \in G$ için $gx \coloneqq g(x)$ şeklinde tanımlanırsa

$$(g_1g_2)x = g_1(g_2x) \text{ ve } 1x = x$$

sağlanır. Bu harekete G grubunun X üzerindeki doğal hareketi denir ve "(G,X) permütasyon grubu" ifadesi kullanılır. Ek olarak, X üzerinde transitif olarak hareket eden G grubu için (G,X) ikilisine transitif permütasyon grubu denir.

Tanım 1.48. (G,X) ikilisi transitif permütasyon grubu olmak üzere X üzerinde bir " $\approx$ " denklik bağıntısı alalım. Her $\alpha, \beta \in X$ için

$$\alpha \approx \beta \text{ durumunda } \forall g \in G \text{ için } g(\alpha) \approx g(\beta)$$

sağlanıyorsa " $\approx$ " bağıntısına X üzerinde G-invaryanttır denir. Bu şekildeki bağıntının her bir denklik sınıfına blok adı verilir.

Şimdi G-invaryant denklik bağıntılarına iki örnek verelim:

(i) Özdeşlik Bağıntısı: $\alpha \approx \beta \;\Leftrightarrow\; \alpha = \beta$

(ii) Evrensel Bağıntı: $\forall \alpha, \beta \in X$ için $\alpha \approx \beta$

X üzerinde yukarıdaki iki bağıntıdan farklı olan en az bir G-invaryant denklik bağıntısı bulunabiliyorsa (G,X) e imprimitif aksi durumda primitif denir.

Lemma 1.49. [3] (G,X) transitif olsun. Bu takdirde (G,X) primitiftir $\Leftrightarrow$ $\forall \alpha \in X$ için G_α, G nin maksimal bir alt grubudur. Burada G_α, $\alpha \in X$ noktasının sabitleyenidir. ■

Teorem 1.50. [3] (G,X) transitif permütasyon grubu olmak üzere $G_\alpha < H < G$ durumunda

$$g(\alpha) \approx g'(\alpha) \Leftrightarrow g' \in gH$$

şeklinde tanımlanan " $\approx$ " bağıntısı X üzerinde iyi tanımlı G-invaryant denklik bağıntısıdır. Bu bağıntı özdeşlik veya evrensel bağıntı değildir. Dolayısıyla bu imprimitif G-invaryant denklik bağıntısından oluşacak blokların sayısı $|G:H|$ indeksini verir. ■

Şimdi, çalışmamız için gerekli Γ^2 ve Γ^3 gruplarını ve bu grupların temel özelliklerini verelim. İlk olarak Γ^2 grubu ve bu grubun özelliklerini verelim.

1.9. Γ^2 Modüler Alt Grubu

Γ^2 sembolü ile Γ ya ait olan elemanların karelerinin ürettiği grup gösterilecektir. Rankin'in [17] çalışması göz önüne alındığında

$$\Gamma^2 := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \,\middle|\, ab + bc + cd \equiv 0 \; mod \; 2 \right\}$$

ve

$$x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere $\Gamma^2 = \langle y, xyx \rangle$ dir. Bundan dolayı $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ için Γ^2 nin elemanları

$$\begin{pmatrix} 2a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 2b \\ 2c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2d \end{pmatrix} \tag{9}$$

matris temsiline sahiptir.

$\frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ ve $\infty, \frac{1}{0}$ veya $-\frac{1}{0}$ şeklinde alınmak üzere Γ^2 grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \frac{x}{y} \to \frac{ax + by}{cx + dy}$$

dir.

Lemma 1.51. [18]

(i) Γ^2 nin $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi transitiftir.

(ii) Bir noktanın sabitleyeni sonsuz devirli bir gruptur. ■

Gösterim. $N \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\Gamma_0^2(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma^2 \,\middle|\, c \equiv 0 \; mod \; N \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Sonuç 1.52. [18] $\Gamma_0(N), \Gamma$ nın ve $\Gamma_0^2(N)$ de Γ^2 nin alt gruplarıdır. İlaveten

$$|\Gamma : \Gamma^2| = 2 \text{ ve } |\Gamma_0(N) : \Gamma_0^2(N)| = 2$$

dir. ■

Teorem 1.50 de $G \coloneqq \Gamma^2, H \coloneqq \Gamma_0^2(N)$ ve $G_\alpha := \Gamma_\infty^2$ alınırsa

$\forall N \in \mathbb{N}$ için $\Gamma_\infty^2 \leq \Gamma_0^2(N) \leq \Gamma^2$

elde edilir. Fakat $N > 1$ alındığında $\Gamma_\infty^2 \lneqq \Gamma_0^2(N) \lneqq \Gamma^2$ olacaktır. Gerçekten,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \Gamma^2 \backslash \Gamma_0^2(N) \text{ ve } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2N & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0^2(N) \backslash \Gamma_\infty^2$$

olur ki bu Γ^2 nin $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketinin imprimitif olduğunu gösterir. Dolayısıyla $(\Gamma^2, \widehat{\mathbb{Q}})$ imprimitif permütasyon grubudur.

$\Gamma_0^2(N)$ grubuyla $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde indirgenmiş olan Γ^2 invaryant denklik bağıntısı " $\approx$ " olmak üzere $v = \frac{r}{s}$ ve $w = \frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ alalım. Γ^2 nin $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketinin transitif olmasından dolayı $v = g(\infty)$ ve $w = h(\infty)$ sağlanacak biçimde $g, h \in \Gamma^2$ bulunabilir. Bu takdirde

$$g = \begin{pmatrix} r & * \\ s & * \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} x & * \\ y & * \end{pmatrix}$$

dir. Bundan dolayı

$$v \approx w \Leftrightarrow g^{-1}h \in \Gamma_0^2(N), g^{-1} = \begin{pmatrix} * & * \\ -s & r \end{pmatrix}$$

sağlanacağından

$$v \approx w \Leftrightarrow ry - sx \equiv 0 \; mod \; N$$

dir. Açık olarak ∞ un bloğu

$$[\infty] \coloneqq \left\{ \frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}} \,\middle|\, y \equiv 0 \; mod \; N \right\}$$

kümesidir. Dolayısıyla blokların sayısı

$$\Psi(N) = |\Gamma^2 : \Gamma_0^2(N)|$$

dir.

Lemma 1.53. [17] p ler N nin asal bölenlerini temsil etmek üzere

$$\Psi(N) = N \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

dir. ■

Benzer şekilde Γ^3 grubunu ve bu grubun temel özelliklerini verelim.

1.10. Γ^3 Modüler Alt Grubu

Γ^3 sembolü ile Γ ya ait olan elemanların küplerinin ürettiği grup gösterilecektir. Rankin'in [17] çalışması göz önüne alındığında

$$\Gamma^3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \,\middle|\, ab + cd \equiv 0 \; mod \; 3 \right\}$$

dir. $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ için Γ^3 ün elemanları

$$\begin{pmatrix} 3a & b \\ c & 3d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 3b \\ 3c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{10}$$

matris temsiline sahiptir [7].

Teorem 1.54. [17] $x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ için $\Gamma = \Gamma^3 + y\Gamma^3 + y^2\Gamma^3$, $\Gamma^3 = \langle \, x, \; yxy^2, y^2xy \, \rangle$ ve $|\Gamma : \Gamma^3| = 3$ tür. ■

Lemma 1.55. [7]

(i) Γ^3 ün $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi transitiftir.

(ii) $\widehat{\mathbb{Q}}$ ya ait olan elemanların sabitleyeni sonsuz mertebeli devirli bir gruptur. ■

Gösterim. $N \in \mathbb{Z}$ için

$$\Gamma_0^3(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma^3 \,\middle|\, c \equiv 0 \; mod \; N \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 1.56. [7] $|\Gamma_0(N) : \Gamma_0^3(N)| = 3$ tür.■

Lemma 1.55 (i) den Γ^3 ün $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi transitif olduğundan özdeşlik ve evrensel bağıntılarından farklı bağıntılar bulunabilir. Şimdi, Teorem 1.50 de verilen bağıntıyı göz önünde bulundurarak " $\approx$ " ile gösterilen ve $\Gamma_0^3(N)$ ile $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerine indirgenmiş olan Γ^3-invaryant denklik bağıntısını oluşturalım.

$v = \frac{r}{s}$ ve $w = \frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ olmak üzere Γ^3 ün $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketinin transitif olmasından yola çıkarak

$$v = g(\infty) \text{ ve } w = g'(\infty)$$

koşulları sağlanacak şekilde $g,\ g' \in \Gamma^3$ bulunabilir. Bu durumda g ve g'

$$g = \begin{pmatrix} r & * \\ s & * \end{pmatrix},\ g' = \begin{pmatrix} x & * \\ y & * \end{pmatrix}$$

şeklinde olup

$$v \approx w \quad \Leftrightarrow \quad g^{-1}g' \ \in \ \Gamma_0^3(N)$$

olacağından

$$v \approx w \ \Leftrightarrow \ ry - sx \equiv 0 \ mod \ N$$

yazılabilir. Ek olarak $\infty \in \widehat{\mathbb{Q}}$ nın ait olduğu denklik sınıfının

$$[\infty] = \left\{ \frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}} \middle| \ y \equiv 0 \ mod \ N \right\}$$

şeklinde tanımlanabileceği açıkça görülebilir. Bu koşullar altında, blokların sayısı $\psi(N) = |\Gamma^3 \colon \Gamma_0^3(N)|$ dir [7].

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Sınır Bileşenleri

Bu çalışmada ilk olarak özel bir NEC grubu olan

$$\hat{\Gamma}_0^2(N) := \langle \Gamma_0^2(N), z \to -\bar{z} \rangle$$

grubunun simgesindeki sınır bileşenlerinin sayısı ile

$$\hat{\Gamma}_0^3(N) := \langle \Gamma_0^3(N), z \to -\bar{z} \rangle$$

grubunun simgesindeki sınır bileşenlerinin sayısı Hoare-Uzzel Teoremi [19] yardımıyla hesaplanacaktır.

Genişletilmiş modüler grup

$$\hat{\Gamma} = \left\{ z \to \frac{az+b}{cz+d} \middle| a,b,c,d \in \mathbb{Z}, ad-bc=1 \right\} \cup \left\{ z \to \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \middle| a,b,c,d \in \mathbb{Z}, ad-bc=1 \right\}$$

olmak üzere, Γ modüler grubunun $\hat{\Gamma}$ daki indeksinin 2 olduğunu biliyoruz [1]. Böylece $r, \hat{\Gamma}$ da bir yansıma olmak üzere, $\hat{\Gamma} = \Gamma \cup r\Gamma$ dır. Burada $r, z \to -\bar{z}$ dönüşümü veya $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ matrisi olarak seçilebilir. Böylece, $\hat{\Gamma}$ nın

$$c_1 = r : z \to -\bar{z} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$c_2 \ : z \to \frac{1}{\bar{z}} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c_3 \ : z \to -\bar{z} - 1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

yansımaları tarafından üretildiği görülür. Burada

$$(c_1c_2)^2 = (c_2c_3)^3 = (c_1c_3)^\infty = 1$$

dir. Böylece, $\hat{\Gamma}$ nın simgesi $(0; +; [\ \ ]; \{(2,3,\infty)\})$ dir [1].

Teorem 2.1. (Hoare-Uzzel Teoremi) [19] G grubu

$$\sigma(G)=\left(g;\ +;[m_1,\dots,m_r];\left\{\left(n_{11},\dots,n_{1s_1}\right),\dots,\left(n_{k1},\dots,n_{ks_k}\right)\right\}\right)$$

simgeli bir NEC grubu ve H ise G nin sonlu indekse sahip bir alt grubu olsun. H-kosetleri üzerinde G grubunun permütasyon gösteriminin bir yansıması c_i olmak üzere, c_i nin her bir sabit noktası H da bir yansıma verir. c_i, c_{i+1}ifadeleri mertebesi $c_i c_{i+1} \leq \infty$ olan iki yansıma olmak üzere $y_i = c_i c_{i+1}$ elemanı, r_i uzunluğunda bir yörüngeye sahip olsun. Bu takdirde aşağıdakilerden biri gerçekleşir:

a) Bu yörünge c_i veya c_{i+1} in hiçbir sabit noktasını içermez. Bu durumda aynı uzunluklu farklı bir yörünge mevcuttur ve bunların ikisi n_i/r_i bir doğal periyodunu gösterir.

b) Bu yörünge c_i ve c_{i+1} in iki sabit noktasını içerir.

i. Eğer r_i tek ise her ikisi birer sabit noktaya sahiptir.

ii. Eğer r_i çift ise yansımalardan birisi iki sabit noktaya sahip olup diğerinin sabit noktası yoktur. Ayrıca bu ikisi arasında

$$c_i \overset{n_i/r_i}{\sim} c_{i+1}$$

bağıntısı mevcuttur. Bu bağlantıların birleştirilmesi sonucunda n_i/r_i sınır bileşenleri ile periyodik devreler bulunur. ■

2.2. $\hat{\Gamma}_0^2(N)$ nin Sınır Bileşenleri

Bu bölümde $\hat{\Gamma}_0^2(N)$ nin simgesindeki sınır bileşenlerinin sayısı ve bu bileşenlerdeki ∞ ların sayıları hesaplanmaktadır.

Teorem 2.2. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \hat{\Gamma}$ olsun. Bu takdirde

(i) c_1, $\hat{\Gamma}_0^2(N)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ kosetini sabit bırakır $\Leftrightarrow N|2cd$.

(ii) c_2, kosetlerin hiçbirini sabit bırakmaz.

(iii) c_3, kosetlerin hiçbirini sabit bırakmaz.

İspat. (i) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \hat{\Gamma}$ olsun. Bu takdirde

$$\hat{\Gamma}_0^2(N)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} c_1 = \hat{\Gamma}_0^2(N)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

dir. Buradan

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in \hat{\Gamma}_0^2(N)$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in \hat{\Gamma}_0^2(N)$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} ad+bc & -2ab \\ 2cd & -ad-bc \end{pmatrix} \in \hat{\Gamma}_0^2(N)$$

bulunur. Böylece

$$N|2cd \text{ ve } (ad+bc)(-2ab)+(-2ab)(2cd)+(2cd)(-ad-bc) \equiv 0 \, mod \, 2$$
$$\Leftrightarrow N|2cd$$

elde edilir.

(ii) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \hat{\Gamma}$ olsun. (i) deki işlemlere benzer şekilde

$$\hat{\Gamma}_0^2(N)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} c_2 = \hat{\Gamma}_0^2(N)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in \hat{\Gamma}_0^2(N)$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in \hat{\Gamma}_0^2(N)$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} bd-ac & a^2-b^2 \\ d^2-c^2 & ac-bd \end{pmatrix} \in \hat{\Gamma}_0^2(N)$$

$$\Leftrightarrow N|d^2-c^2 \text{ ve } (bd-ac)(a^2-b^2)+(a^2-b^2)(d^2-c^2) + (d^2-c^2)(ac-bd) \equiv 0 \, mod \, 2 \quad (11)$$

bulunur.

$$ad - bc = \mp 1 \quad (12)$$

olduğundan a, b, c, d den en az biri çift olmalıdır.

1) Varsayalım ki a çift olsun. Bu takdirde (12) den b ve c tektir. Böylece (11) den

$$d \cdot 1 + 1 \cdot (d^2 - 1) + (d^2 - 1) \cdot d \equiv 0 \, mod \, 2$$
$$\Leftrightarrow d + d^2 - 1 + d^3 - d \equiv 0 \, mod \, 2$$
$$\Leftrightarrow d^3 + d^2 - 1 \equiv 0 \, mod \, 2$$

çelişkisi elde edilir. Dolayısı ile a çift olamaz.

2) Varsayalım ki d çift olsun. Bu takdirde (12) den b ve c tektir. Böylece (11) den

$a \cdot (a^2 - 1) + (a^2 - 1) \cdot 1 + (-1) \cdot a \equiv 0 \; mod \; 2$

$\Leftrightarrow a^3 - a + a^2 - 1 - a \equiv 0 \; mod \; 2$

$\Leftrightarrow a^3 + a^2 - 2a - 1 \equiv 0 \; mod \; 2$

çelişkisi elde edilir. Dolayısı ile d çift olamaz.

3) Varsayalım ki b çift olsun. Bu takdirde (12) den a ve d tektir. Böylece (11) den

$c \cdot 1 + 1 \cdot (1 - c^2) + (1 - c^2) \cdot c \equiv 0 \; mod \; 2$

$\Leftrightarrow c + 1 - c^2 + c - c^3 \equiv 0 \; mod \; 2$

$\Leftrightarrow 1 + 2c - c^2 - c^3 \equiv 0 \; mod \; 2$

çelişkisi elde edilir. Dolayısı ile b çift olamaz.

4) Varsayalım ki c çift olsun. Bu takdirde (12) den a ve d tektir. Böylece (11) den

$b \cdot (-b^2 + 1) + (-b^2 + 1) \cdot 1 + 1 \cdot (-b) \equiv 0 \; mod \; 2$

$\Leftrightarrow -b^3 + b - b^2 + 1 - b \equiv 0 \; mod \; 2$

$\Leftrightarrow -b^3 - b^2 + 1 \equiv 0 \; mod \; 2$

çelişkisi elde edilir. Dolayısı ile c çift olamaz.

Sonuç olarak 1), 2), 3) ve 4) ten c_2 nin sabit noktası olmadığı elde edilir.

(iii) c_1 ve c_2 için yapılan işlemleri c_3 için uygulayalım.

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \hat{\Gamma}$ olsun. Bu takdirde

$$\hat{\Gamma}_0^2(N) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} c_3 = \hat{\Gamma}_0^2(N) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in \hat{\Gamma}_0^2(N)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & a - b \\ c & c - d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in \hat{\Gamma}_0^2(N)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} ad - ac + bc & a^2 - 2ab \\ 2cd - c^2 & -bc + ac - ad \end{pmatrix} \in \hat{\Gamma}_0^2(N)$$

$$\Leftrightarrow N | 2cd - c^2 \text{ ve } (ad - ac + bc)(a^2 - 2ab) + (a^2 - 2ab)(2cd - c^2) + (2cd - c^2)(-bc + ac - ad) \equiv 0 \; mod \; 2 \qquad (13)$$

elde edilir.

1*) Varsayalım ki a çift olsun. Bu takdirde (12) den b ve c tektir. Böylece (13) den

$$1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) \equiv 0 \ mod\ 2$$

çelişkisi elde edilir. Dolayısı ile a çift olamaz.

2*) Varsayalım ki d çift olsun. Bu takdirde (12) den b ve c tektir. Böylece (13) den

$$(-a+1) \cdot a^2 + a^2 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1+a) \equiv 0 \ mod\ 2$$
$$\Leftrightarrow -a^3 + a^2 - a^2 + 1 - a \equiv 0 \ mod\ 2$$
$$\Leftrightarrow -a^3 - a + 1 \equiv 0 \ mod\ 2$$

çelişkisi elde edilir. Dolayısı ile d çift olamaz.

3*) Varsayalım ki b çift olsun. Bu takdirde (12) den a ve d tektir. Böylece (13) den

$$(1-c) \cdot 1 + 1 \cdot (-c^2) + (-c^2) \cdot (c-1) \equiv 0 \ mod\ 2$$
$$\Leftrightarrow 1 - c - c^2 - c^3 + c^2 \equiv 0 \ mod\ 2$$
$$\Leftrightarrow 1 - c - c^3 \equiv 0 \ mod\ 2$$

çelişkisi elde edilir. Dolayısı ile b çift olamaz.

4*) Varsayalım ki c çift olsun. Bu takdirde (12) den a ve d tektir. Böylece (13) den

$$1 \cdot 1 + 0 + 0 \equiv 0 \ mod\ 2$$

çelişkisi elde edilir. Dolayısı ile c çift olamaz.

Sonuç olarak 1*), 2*), 3*) ve 4*) ten c_3 ün sabit noktası olmadığı elde edilir. ■

Not. $\hat{\Gamma}$ da $\hat{\Gamma}_0^2(N)$ nin indeksi

$$2N \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

dir. Burada çarpım N nin p asal çarpanları üzerinde tanımlanmıştır.

Notasyon. $N = N_1 \cdot N_2, (N_1, N_2) = 1$ (yani N_1 ile N_2 aralarında asal sayılar) olsun. Bu takdirde

$$\hat{\Gamma}_0^2(N) \begin{pmatrix} a & b \\ cN_1 & dN_2 \end{pmatrix}$$

koseti yerine $(i, j, k \cdot N_1, l \cdot N_2)$ notasyonunu kullanacağız. Burada a, b, c, d sayılarının tek veya çift olmasına bağlı olarak sırasıyla $i, j, k, l = 1,2$ değerlerini alırlar. Örneğin, eğer a çift, d tek sayı ise koset $(2, 1, 1 \cdot N_1, 1 \cdot N_2)$ olur.

• N tek sayı olsun. Bu takdirde c_1 in farklı kosetlerinin $(2,1,1\cdot N_1, 2\cdot N_2)$, $(2,1,1\cdot N_1, 1\cdot N_2)$ olduğu görülür. Bu takdirde Lemma 2.3 ü elde ederiz.

Lemma 2.3. N tek ve $N = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot \ldots \cdot p_l^{\alpha_l}, N$ nin asal çarpanlarına ayrılışı olsun. Bu takdirde c_1 tarafından sabit bırakılan kosetlerin sayısı 2^{l+1} dir . ■

Teorem 2.4. N tek ve $N = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot \ldots \cdot p_l^{\alpha_l}, N$ nin asal çarpanlarına ayrılışı olsun. Bu takdirde $\hat{\Gamma}_0^2(N)$ nin simgesindeki sınır bileşenlerinin sayısı 2^{l+1} dir ve her bir sınır bileşen iki tane ∞ içerir.

İspat. Sınır bileşenlerinin sayısını ve sınır bileşenlerini hesaplamak için ilk olarak derecesi 2 olan

$$c_1c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

eliptik elemanını ele alalım. Yani, $n_{12} = 2$ dir.

$$(2,1,1\cdot N_1, 2\cdot N_2) \cong \begin{pmatrix} 2a & b \\ cN_1 & 2dN_2 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\begin{pmatrix} 2a & b \\ cN_1 & 2dN_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & 2a \\ -2dN_2 & cN_1 \end{pmatrix} \cong (1,2,2\cdot N_2, 1\cdot N_1)$$

olup

$$(1,2,2\cdot N_2, 1\cdot N_1) \cong (2,1,1\cdot N_2, 1\cdot N_1)$$

elde edilir. Gerçekten

$$(1,2,2\cdot N_2, 1\cdot N_1) \cong \begin{pmatrix} a_1 & 2b_1 \\ 2c_1N_2 & d_1N_1 \end{pmatrix}$$

$$(2,1,1\cdot N_2, 1\cdot N_1) \cong \begin{pmatrix} 2a_2 & b_2 \\ c_2N_2 & d_2N_1 \end{pmatrix}$$

olup

$$\begin{pmatrix} a_1 & 2b_1 \\ 2c_1N_2 & d_1N_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2a_2 & b_2 \\ c_2N_2 & d_2N_1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & 2b_1 \\ 2c_1N_2 & d_1N_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_2N_1 & -b_2 \\ -c_2N_2 & 2a_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1d_2N_1 - 2b_1c_2N_2 & -a_1b_2 + 4a_2b_1 \\ (2c_1d_2 - c_2d_1)N_1N_2 & -2b_2c_1N_2 + 2a_2d_1N_1 \end{pmatrix} \in \hat{\Gamma}_0^2(N)$$

olduğundan

$$(1,2,2\cdot N_2,1\cdot N_1)\cong(2,1,1\cdot N_2,1\cdot N_1)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{pmatrix}2a & b\\ cN_2 & dN_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-b & 2a\\ -dN_1 & cN_2\end{pmatrix}\cong(1,2,1\cdot N_1,1\cdot N_2)=(2,1,1\cdot N_1,2\cdot N_2)$$

elde edilir. Buradan $\{(2,1,1\cdot N_1,2\cdot N_2),(2,1,1\cdot N_2,1\cdot N_1)\}$ kümesi yörüngelerden biridir.

Öte yandan

$$(2,1,1\cdot N_1,1\cdot N_2)\cong\begin{pmatrix}2a & b\\ cN_1 & dN_2\end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\begin{pmatrix}2a & b\\ cN_1 & dN_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-b & 2a\\ -dN_2 & cN_1\end{pmatrix}\cong(1,2,1\cdot N_2,1\cdot N_1)=(2,1,1\cdot N_2,2\cdot N_1)$$

$$\begin{pmatrix}2a & b\\ cN_2 & 2dN_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-b & 2a\\ -2dN_1 & cN_2\end{pmatrix}\cong(1,2,2\cdot N_1,1\cdot N_2)=(2,1,1\cdot N_1,1\cdot N_2)$$

dir. Dolayısı ile $\{(2,1,1\cdot N_1,1\cdot N_2),(2,1,1\cdot N_2,2\cdot N_1)\}$ kümesi diğer yörüngedir. Böylece c_1c_2 nin 2 şer uzunluklu iki yörüngesi olduğu bulunur. Sonuç olarak, c_1c_2 için

$$c_{1_{(2,1,1\cdot N_1,2\cdot N_2)}}\overset{1}{\sim}c_{1_{(2,1,1\cdot N_2,1\cdot N_1)}}\tag{14}$$

$$c_{1_{(2,1,1\cdot N_1,1\cdot N_2)}}\overset{1}{\sim}c_{1_{(2,1,1\cdot N_2,2\cdot N_1)}}\tag{15}$$

bağıntıları elde edilir.

Şimdi $(c_1c_3)^k$ için yörüngeleri hesaplayalım.

$$(c_1c_3)^k=\begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

olup

$$(2,1,1\cdot N_1,2\cdot N_2)\cong\begin{pmatrix}2a & b\\ cN_1 & 2dN_2\end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\begin{pmatrix}2a & b\\ cN_1 & 2dN_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a & 2ak+b\\ cN_1 & ckN_1+2dN_2\end{pmatrix}$$

elde edilir. Buradan $k=N_2$ seçilirse

$$(2,1,1\cdot N_1,2\cdot N_2)\cong(2,1,1\cdot N_1,1\cdot N_2)$$

olup

$$c_{1_{(2,1,1\cdot N_1,2\cdot N_2)}}\overset{\infty}{\sim}c_{1_{(2,1,1\cdot N_1,1\cdot N_2)}} \tag{16}$$

bağıntısı elde edilir. Benzer şekilde

$$(2,1,1\cdot N_2,1\cdot N_1)\cong\begin{pmatrix}2a & b\\ cN_2 & dN_1\end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\begin{pmatrix}2a & b\\ cN_2 & dN_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a & 2ak+b\\ cN_2 & ckN_2+dN_1\end{pmatrix}$$

bulunur. Eğer $k=N_1$ seçilirse

$$(2,1,1\cdot N_2,1\cdot N_1)\cong(2,1,1\cdot N_2,2\cdot N_1)$$

olup

$$c_{1_{(2,1,1\cdot N_2,1\cdot N_1)}}\overset{\infty}{\sim}c_{1_{(2,1,1\cdot N_2,2\cdot N_1)}} \tag{17}$$

bağıntısı elde edilir.

Ayrıca

$$(2,1,1\cdot N_1,1\cdot N_2)\cong\begin{pmatrix}2a & b\\ cN_1 & dN_2\end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\begin{pmatrix} 2a & b \\ cN_1 & dN_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2ak+b \\ cN_1 & ckN_1 + dN_2 \end{pmatrix} \cong (2,1,1\cdot N_1, 2\cdot N_2)$$

olup $k = N_2$ için

$$c_{1_{(2,1,1\cdot N_1,1\cdot N_2)}} \overset{\infty}{\sim} c_{1_{(2,1,1\cdot N_1,2\cdot N_2)}} \tag{18}$$

bağıntısı bulunur. (14)-(18) den

$$c_{1_{(2,1,1\cdot N_1,2\cdot N_2)}} \overset{1}{\sim} c_{1_{(2,1,1\cdot N_2,1\cdot N_1)}} \overset{1}{\sim} c_{1_{(2,1,1\cdot N_2,2\cdot N_1)}} \overset{\infty}{\sim} c_{1_{(2,1,1\cdot N_1,1\cdot N_2)}} \overset{\infty}{\sim} c_{1_{(2,1,1\cdot N_1,2\cdot N_2)}}$$

bağıntısı elde edilir. ■

- N nin çift olması durumunu inceleyelim. Bu takdirde 2 durum söz konusudur:

I. $N = 2\cdot p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot \ldots \cdot p_l^{\alpha_l}, p_i > 2, i = 1,2,\ldots,l,$ N nin asal çarpanlarına ayrılışı olsun. Yani, $2||N$ olsun.

II. $N = 2^{\alpha}\cdot p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot \ldots \cdot p_l^{\alpha_l}, \alpha > 1,\ p_i > 2, i = 1,2,\ldots,l,$ N nin asal çarpanlarına ayrılışı olsun.

İki durumu ayrı ayrı inceleyelim.

Teorem 2.5. $N = 2\cdot p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot \ldots \cdot p_l^{\alpha_l}, p_i > 2, i = 1,2,\ldots,l,$ N nin asal çarpanlarına ayrılışı olsun. Bu takdirde $\hat{\Gamma}_0^2(N)$ nin simgesindeki sınır bileşenlerinin sayısı 2^{l+1} dir ve her bir sınır bileşen iki tane ∞ içerir.

İspat. $2||N$ olsun. Bu takdirde

$$N = 2\cdot N_1\cdot N_2, (N_1, N_2) = 1$$

dir. Buradan bazı basit hesaplamalar ile Teorem 2.4 deki durumun elde edildiği kolaylıkla görülür. ■

Teorem 2.6. $N = 2^{\alpha}\cdot p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot \ldots \cdot p_l^{\alpha_l}, \alpha > 1,\ p_i > 2, i = 1,2,\ldots,l,$ N nin asal çarpanlarına ayrılışı olsun. Bu takdirde $\hat{\Gamma}_0^2(N)$ nin simgesindeki sınır bileşenlerinin sayısı 2^l dir ve her bir sınır bileşen dört tane ∞ içerir.

İspat. $N = 2^{\alpha} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_l^{\alpha_l}, \alpha > 1$ olsun. $M_1 = 2^{\alpha-1} \cdot N_1, M_2 = N_2$ ve N_1, N_2 tek sayılar olarak alalım. Bu takdirde c_1 i sabit bırakan kosetler

$$\{(1,1,1 \cdot M_1, 1 \cdot M_2), (1,2,1 \cdot M_1, 1 \cdot M_2), (1,2,2 \cdot M_1, 1 \cdot M_2), (1,1,2 \cdot M_1, 1 \cdot M_2)\}$$
$$\{(1,1,1 \cdot M_2, 1 \cdot M_1), (2,1,1 \cdot M_2, 1 \cdot M_1), (2,1,1 \cdot M_2, 2 \cdot M_1), (1,1,1 \cdot M_2, 2 \cdot M_1)\}$$

dir. Şimdi

$$c_1 c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } (c_1 c_3)^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nin yörüngelerini hesaplayalım. Teorem 2.4 ün ispatına benzer işlemler ile

$$(1,1,1 \cdot M_1, 1 \cdot M_2) \cong \begin{pmatrix} a & b \\ cM_1 & dM_2 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\begin{pmatrix} a & b \\ cM_1 & dM_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & a \\ -dM_2 & cM_1 \end{pmatrix} \cong (1,1,1 \cdot M_2, 1 \cdot M_1)$$

elde edilir. Buradan

$$c_{1_{(1,1,1 \cdot M_1, 1 \cdot M_2)}} \overset{1}{\sim} c_{1_{(1,1,1 \cdot M_2, 1 \cdot M_1)}}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$(1,1,1 \cdot M_2, 1 \cdot M_1) \cong \begin{pmatrix} a & b \\ cM_2 & dM_1 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\begin{pmatrix} a & b \\ cM_2 & dM_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & ak+b \\ cM_2 & ckM_2 + dM_1 \end{pmatrix}$$

bulunur. Buradan $k = M_1$ için

$$\begin{pmatrix} a & ak+b \\ cM_2 & ckM_2 + dM_1 \end{pmatrix} \cong (1,1,1 \cdot M_2, 2 \cdot M_1)$$

olup

$$c_{1_{(1,1,1 \cdot M_2, 1 \cdot M_1)}} \overset{\infty}{\sim} c_{1_{(1,1,1 \cdot M_2, 2 \cdot M_1)}}$$

elde edilir.

Ayrıca

$$(1,1,1\cdot M_2,2\cdot M_1)\cong\begin{pmatrix} a & b \\ cM_2 & 2dM_1 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow\begin{pmatrix} a & b \\ cM_2 & 2dM_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -b & a \\ -2dM_1 & cM_2 \end{pmatrix}\cong(1,1,2\cdot M_1,1\cdot M_2)$$

olduğundan

$$c_{1_{(1,1,1\cdot M_2,2\cdot M_1)}}\overset{1}{\sim}c_{1_{(1,1,2\cdot M_1,1\cdot M_2)}}$$

dir. Benzer şekilde

$$(1,1,2\cdot M_1,1\cdot M_2)\cong\begin{pmatrix} a & b \\ 2cM_1 & dM_2 \end{pmatrix}$$

olup $k=M_2$ seçilirse

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} a & b \\ 2cM_1 & dM_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & ak+b \\ 2cM_1 & 2ckM_1+dM_2 \end{pmatrix}\cong(1,2,2\cdot M_1,1\cdot M_2)$$

bulunur. Buradan

$$c_{1_{(1,1,2\cdot M_1,1\cdot M_2)}}\overset{\infty}{\sim}c_{1_{(1,2,2\cdot M_1,1\cdot M_2)}}$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse

$$(1,2,2\cdot M_1,1\cdot M_2)\cong\begin{pmatrix} a & 2b \\ 2cM_1 & dM_2 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow\begin{pmatrix} a & 2b \\ 2cM_1 & dM_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2b & a \\ -dM_2 & 2cM_1 \end{pmatrix}\cong(2,1,1\cdot M_2,2\cdot M_1)$$

bulunur. Buradan

$$c_{1_{(1,2,2\cdot M_1,1\cdot M_2)}}\overset{1}{\sim}c_{1_{(2,1,1\cdot M_2,2\cdot M_1)}}$$

dir. Ayrıca

$$(2,1,1\cdot M_2,2\cdot M_1)\cong\begin{pmatrix} 2a & b \\ cM_2 & 2dM_1 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 2a & b \\ cM_2 & 2dM_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a & 2ak+b \\ cM_2 & ckM_2+2dM_1 \end{pmatrix}$$

olup $k = M_1$ için

$$\begin{pmatrix} 2a & 2ak+b \\ cM_2 & ckM_2 + 2dM_1 \end{pmatrix} \cong (2,1,1\cdot M_2, 1\cdot M_1)$$

olduğundan

$$c_{1_{(2,1,1\cdot M_2, 2\cdot M_1)}} \overset{\infty}{\sim} c_{1_{(2,1,1\cdot M_2, 1\cdot M_1)}}$$

elde edilir. Benzer işlemler ile

$$(2,1,1\cdot M_2, 1\cdot M_1) \cong \begin{pmatrix} 2a & b \\ cM_2 & dM_1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a & b \\ cM_2 & dM_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & 2a \\ -dM_1 & cM_2 \end{pmatrix} \cong (1,2,1\cdot M_1, 1\cdot M_2)$$

olup

$$c_{1_{(2,1,1\cdot M_2, 1\cdot M_1)}} \overset{1}{\sim} c_{1_{(1,2,1\cdot M_1, 1\cdot M_2)}}$$

bulunur. Ayrıca

$$(1,2,1\cdot M_1, 1\cdot M_2) \cong \begin{pmatrix} a & 2b \\ cM_1 & dM_2 \end{pmatrix}$$

olduğundan $k = M_2$ için

$$\begin{pmatrix} a & 2b \\ cM_1 & dM_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & ak+2b \\ cM_1 & ckM_1 + dM_2 \end{pmatrix} \cong (1,1,1\cdot M_1, 1\cdot M_2)$$

elde edilir. Böylece

$$c_{1_{(1,2,1\cdot M_1, 1\cdot M_2)}} \overset{\infty}{\sim} c_{1_{(1,1,1\cdot M_1, 1\cdot M_2)}}$$

dir. Sonuç olarak

$$c_{1_{(1,1,1\cdot M_1, 1\cdot M_2)}} \overset{1}{\sim} c_{1_{(1,1,1\cdot M_2, 1\cdot M_1)}} \overset{\infty}{\sim} c_{1_{(1,1,1\cdot M_2, 2\cdot M_1)}} \overset{1}{\sim} c_{1_{(1,1,2\cdot M_1, 1\cdot M_2)}} \overset{\infty}{\sim} c_{1_{(1,2,2\cdot M_1, 1\cdot M_2)}}$$
$$\overset{1}{\sim} c_{1_{(2,1,1\cdot M_2, 2\cdot M_1)}} \overset{\infty}{\sim} c_{1_{(2,1,1\cdot M_2, 1\cdot M_1)}} \overset{1}{\sim} c_{1_{(1,2,1\cdot M_1, 1\cdot M_2)}} \overset{\infty}{\sim} c_{1_{(1,1,1\cdot M_1, 1\cdot M_2)}} \tag{19}$$

bağıntıları elde edilir. ■

2.3. $\hat{\Gamma}_0^3(N)$ nin Sınır Bileşenleri

Bölüm 2.2 de $\hat{\Gamma}_0^2(N)$ nin sınır bileşenleri elde edildi. Bu bölümde ise N nin tek ve $2||N$ durumları için $\hat{\Gamma}_0^3(N)$ nin sınır bileşenleri hesaplanmaktadır. Bunun için öncelikle

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

yansımalarının sabit bıraktığı koset temsilcilerini bulalım.

Teorem 2.7. $c_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ elemanı $\hat{\Gamma}_0^3(N)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ elemanını sabit bırakıyor ise $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \hat{\Gamma}^3$ tür.

İspat. c_1 elemanı $\hat{\Gamma}_0^3(N)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ yi sabit bırakıyor ise

$$\hat{\Gamma}_0^3(N)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \hat{\Gamma}_0^3(N)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

dir. Buradan

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \in \hat{\Gamma}_0^3(N)$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} ad+bc & -2ab \\ 2cd & -ad-bc \end{pmatrix} \in \hat{\Gamma}_0^3(N)$$

elde edilir. Böylece $N|2cd$ bulunur. Burada $3|2cd$ veya $3 \nmid 2cd$ olacak şekilde iki durum söz konusudur.

(i) $3|2cd$ olsun. Buradan $3|2ab$ elde edilir ve

$$\begin{cases} 3|c \text{ ise } 3|b \text{ dir} \\ 3|d \text{ ise } 3|a \text{ dır} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \hat{\Gamma}^3$$

bulunur.

(ii) $3 \nmid 2cd$ olsun. Bu takdirde $3 \nmid 2ab$ dir. Buradan $3|ad+bc$ ise $3|-ad-bc$ bulunur. Dolayısı ile bu durumda da $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \hat{\Gamma}^3$ tür.

Böylece hesaplama yaparken temsilci olan $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ elemanı $\hat{\Gamma}^3$ ten alınabilir. ■

Şimdi N nin durumlarına göre c_2 nin sabit bıraktığı koset temsilcilerini bulalım.

Teorem 2.8. c_2 elemanı, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \hat{\Gamma}$ olmak üzere $\hat{\Gamma}_0^3(N)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ kosetini sabit bırakıyor ise $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \hat{\Gamma}^3$ dır.

İspat. $c_2, \hat{\Gamma}_0^3(N)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ yi sabit bıraktığından

$$\hat{\Gamma}_0^3(N)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{\Gamma}_0^3(N)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

dir. Buradan

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \in \hat{\Gamma}_0^3(N)$$

bulunur. Dolayısı ile

$$\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bd - ac & a^2 - b^2 \\ d^2 - c^2 & ac - bd \end{pmatrix} \in \hat{\Gamma}_0^3(N)$$

olmalıdır. Eğer

$$A := \begin{pmatrix} bd - ac & a^2 - b^2 \\ d^2 - c^2 & ac - bd \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanırsa $A \in \hat{\Gamma}_0^3(N)$ bulunur. Bu takdirde aşağıdaki durumlar söz konusudur.

- $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nin elemanlarından hiç biri 3 e bölünmüyorsa $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \hat{\Gamma}^3$ tür.
- a, b, c, d den sadece biri 3 e bölünsün. Örneğin, $a \equiv 0 \; mod \; 3$ olsun. Bu durumda $3 \nmid a^2 - b^2$ dir. Ancak

$c \not\equiv 0 \; mod \; 3$ ve $d \not\equiv 0 \; mod \; 3 \Longrightarrow c, d = \mp 1 \; mod \; 3$

$\Longrightarrow c^2, d^2 \equiv 1 \; mod \; 3$

$\Longrightarrow d^2 - c^2 \equiv 0 \; mod \; 3$

olur. Bu durumda $A \notin \hat{\Gamma}_0^3(N)$ dir.

- a, b, c, d den ikisi 3 e bölünüyor ise bu durumda $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \hat{\Gamma}^3$ olduğu açıktır.

Böylece $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \hat{\Gamma}^3$ alınması yeterlidir. Dolayısı ile

c_2 elemanı $\hat{\Gamma}_0^3(N)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ elemanını sabit bırakır $\Leftrightarrow N|d^2 - c^2$ dir. ■

Teorem 2.9. N tek ve $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \hat{\Gamma}^3$ olmak üzere

$c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ elemanı $\hat{\Gamma}_0^3(N)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ yi sabit bırakır $\Leftrightarrow$

$$c = \frac{l_2M_i - l_1N_i}{2}, d = \frac{l_1N_i + l_2M_i}{2}$$

olacak şekilde $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$ mevcuttur. Burada $N = N_i \cdot M_i, (N_i, M_i) = 1$ dir.

İspat. c_2 elemanı $\hat{\Gamma}_0^3(N)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ yi sabit bıraktığından $N|d^2 - c^2$ dir. Yani

$$N|(d-c)(d+c)$$

dir. Buradan

$$d - c = l_1N_i, d + c = l_2M_i$$

olan N_i, M_i mevcut ve $(N_i, M_i) = 1, N = N_i \cdot M_i$ bulunur. Böylece

$$c = \frac{l_2M_i - l_1N_i}{2}, d = \frac{l_1N_i + l_2M_i}{2}$$

elde edilir. ■

Teorem 2.10. $\begin{pmatrix} * & * \\ \frac{l_2M_i - l_1N_i}{2} & \frac{l_1N_i + l_2M_i}{2} \end{pmatrix}$ elemanı ile $A = \begin{pmatrix} * & * \\ \frac{M_i - N_i}{2} & \frac{N_i + M_i}{2} \end{pmatrix} \in \hat{\Gamma}^3$ elemanı aynı koseti temsil eder.

İspat.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{N_i + M_i}{2} & * \\ -\frac{M_i - N_i}{2} & * \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\begin{pmatrix} * & * \\ \frac{l_2M_i - l_1N_i}{2} & \frac{l_1N_i + l_2M_i}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{N_i + M_i}{2} & * \\ -\frac{M_i - N_i}{2} & * \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} * & * \\ \frac{l_2M_i - l_1N_i}{2}\frac{N_i + M_i}{2} - \frac{l_1N_i + l_2M_i}{2}\frac{M_i - N_i}{2} & * \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} * & * \\ \frac{l_2N_iM_i + l_2M_i^2 - l_1N_i^2 - l_1N_iM_i - l_1N_iM_i + l_1N_i^2 - l_2M_i^2 + l_2N_iM_i}{4} & * \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} * & * \\ \frac{1}{2}[l_2N_iM_i - l_1N_iM_i] & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ \frac{1}{2}[(l_2 - l_1)N_iM_i] & * \end{pmatrix}$$

dir. Burada $l_2 - l_1$ her zaman çifttir. Gerçekten

$$d - c = l_1N_i, d + c = l_2M_i$$

göz önüne alalım. d ve c tek ise l_1 ve l_2 çifttir. Buradan $l_2 - l_1$ çifttir. Böylece

$$N = N_iM_i \left| \frac{1}{2}(l_2 - l_1)N_iM_i \right.$$

bulunur. Böylelikle

$$\begin{pmatrix} * & * \\ \frac{l_2M_i - l_1N_i}{2} & \frac{l_1N_i + l_2M_i}{2} \end{pmatrix}$$

koset temsilcisi yerine daha sade biçimi olan

$$\begin{pmatrix} * & * \\ \frac{M_i - N_i}{2} & \frac{N_i + M_i}{2} \end{pmatrix}$$

alınabilir. ∎

Teorem 2.11. $c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ yansıması, $N = N_i \cdot M_i, (N_i, M_i) = 1, N_i, M_i$ tek olmak üzere temsilcileri

$$\begin{pmatrix} * & * \\ \frac{N_i - M_i}{2} & \frac{N_i + M_i}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & * \\ \frac{M_i - N_i}{2} & \frac{N_i + M_i}{2} \end{pmatrix}$$

olan kosetleri sabit bırakır. Ayrıca, bunların sayısı $N = {p_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot {p_r}^{\alpha_r}$ olmak üzere 2^r tanedir. ∎

Şimdi N nin çift ve $2||N$ olması durumunda c_2 nin sabit bıraktığı koset temsilcilerini belirleyelim.

Teorem 2.12. N çift, $2||N, N = 2 \cdot N_i \cdot M_i, (N_i, M_i) = 1$ ve $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \hat{\Gamma}^3$ olmak üzere c_2 elemanı $\hat{\Gamma}_0^3(N)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ elemanını sabit bırakır $\Leftrightarrow$

$$c = \frac{l_2M_i - 2l_1N_i}{2}, d = \frac{2l_1N_i + l_2M_i}{2}$$

olacak şekilde $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$ mevcuttur.

İspat. c_2 elemanı $\hat{\Gamma}_0^3(N)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ elemanını sabit bıraktığından $N|d^2 - c^2$ dir. Buradan

$$d - c = 2l_1N_i, d + c = l_2M_i$$

olan l_1, l_2 mevcuttur ve $(N_i, M_i) = 1, N = 2N_iM_i$ dir. Böylece

$$c = \frac{l_2M_i - 2l_1N_i}{2}, d = \frac{2l_1N_i + l_2M_i}{2}$$

elde edilir. ■

Teorem 2.13. $\begin{pmatrix} * & * \\ \frac{l_2M_i - 2l_1N_i}{2} & \frac{2l_1N_i + l_2M_i}{2} \end{pmatrix}$ elemanı ile $A = \begin{pmatrix} * & * \\ M_i - 2N_i & M_i + 2N_i \end{pmatrix} \in \hat{\Gamma}^3$ elemanı aynı koseti temsil eder.

İspat.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} M_i + 2N_i & * \\ -M_i + 2N_i & * \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\begin{pmatrix} * & * \\ \frac{l_2M_i - 2l_1N_i}{2} & \frac{2l_1N_i + l_2M_i}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_i + 2N_i & * \\ -M_i + 2N_i & * \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} * & * \\ \frac{l_2M_i - 2l_1N_i}{2}(M_i + 2N_i) + \frac{2l_1N_i + l_2M_i}{2}(-M_i + 2N_i) & * \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} * & * \\ \frac{l_2M_i^2 - 2l_1N_iM_i + 2l_2N_iM_i - 4l_1N_i^2 - 2l_1N_iM_i - l_2M_i^2 + 4l_1N_i^2 + 2l_2N_iM_i}{2} & * \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} * & * \\ 2(l_2 - l_1)N_iM_i & * \end{pmatrix} \in \hat{\Gamma}_0^3(N)$$

olup

$$\begin{pmatrix} * & * \\ \frac{l_2M_i - 2l_1N_i}{2} & \frac{2l_1N_i + l_2M_i}{2} \end{pmatrix}$$

temsilcisi yerine daha sade biçimi olan

$$\begin{pmatrix} * & * \\ M_i - 2N_i & M_i + 2N_i \end{pmatrix}$$

alınabilir. ■

Teorem 2.14. c_2 yansıması, $N = 2 \cdot N_i \cdot M_i, (N_i, M_i) = 1, N_i, M_i$ tek olmak üzere temsilcileri

$$\begin{pmatrix} * & * \\ M_i - 2N_i & M_i + 2N_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & * \\ N_i - 2M_i & N_i + 2M_i \end{pmatrix}$$

olan kosetleri sabit bırakır. Ayrıca, bunların sayısı $N = 2 \cdot p_2{}^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r{}^{\alpha_r}$ olmak üzere 2^{r-1} tanedir. ■

Şimdi c_3 ün sabit bıraktığı koset temsilcilerini belirleyelim.

- İlk olarak N nin tek olması durumunu inceleyelim.

Teorem 2.15. N tek, $N = N_i \cdot M_i, (N_i, M_i) = 1$ olsun. Bu takdirde

$c_3, \hat{\Gamma}_0^3(N)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ yi sabit bırakır $\Leftrightarrow$ $N |\, c(2d - c)$ dir.

İspat. $c_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ elemanı $\hat{\Gamma}_0^3(N)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ yi sabit bırakır

$$\Leftrightarrow \hat{\Gamma}_0^3(N)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \hat{\Gamma}_0^3(N)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \in \hat{\Gamma}_0^3(N)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} ad - c(a-b) & a(a-2b) \\ c(2d-c) & -ad + c(a-b) \end{pmatrix} \in \hat{\Gamma}_0^3(N)$$

olduğundan

$$\mathcal{M} := \begin{pmatrix} ad - c(a-b) & a(a-2b) \\ c(2d-c) & -ad + c(a-b) \end{pmatrix} \tag{20}$$

olarak tanımlanırsa $\mathcal{M} \in \hat{\Gamma}_0^3(N)$ dir. Böylece $N |\, c(2d - c)$ elde edilir. ■

Not. N tek, $N = N_i \cdot M_i, (N_i, M_i) = 1$ olsun. Bu takdirde $c_3, \hat{\Gamma}_0^3(N) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ yi sabit bırakıyorsa $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ temsilcisi yerine $\begin{pmatrix} a & b \\ l_1 N_i & \frac{l_1 N_i + l_2 M_i}{2} \end{pmatrix}$ alınabilir. Gerçekten, (20) de tanımlanan $\mathcal{M}$ matrisinde $\mathcal{M} \in \hat{\Gamma}_0^3(N)$ olabilmesi için $N|\, c(2d-c)$ olmalıdır. Buradan $(c, 2d-c) = \begin{cases} 1, c \text{ tek} \\ 2, c \text{ çift} \end{cases}$ elde edilir. $N|\, c(2d-c)$ olduğundan $c = l_1 N_i$, $2d - c = l_2 M_i$ olan $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$ mevcuttur. Böylece

$$d = \frac{l_1 N_i + l_2 M_i}{2}$$

bulunur. Dolayısı ile $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ temsilcisi yerine

$$\begin{pmatrix} a & b \\ l_1 N_i & \dfrac{l_1 N_i + l_2 M_i}{2} \end{pmatrix}$$

alınabilir.

Teorem 2.16. N tek, $N = N_i \cdot M_i, (N_i, M_i) = 1$ olsun. Bu takdirde c_3 ün $\hat{\Gamma}_0^3(N) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ yi sabit bıraktığı koset temsilcileri

[1] $\begin{pmatrix} 3a+1 & 3b-1 \\ 3c & d \end{pmatrix}$,

[2] $\begin{pmatrix} 3a-1 & 3b+1 \\ 3c & d \end{pmatrix}$,

[3] $\begin{pmatrix} 3a & b \\ 3c+1 & 3d-1 \end{pmatrix}$,

[4] $\begin{pmatrix} 3a & b \\ 3c-1 & 3d+1 \end{pmatrix}$,

[5] $\begin{pmatrix} 3a+1 & 3b+1 \\ c & 3d \end{pmatrix}$,

[6] $\begin{pmatrix} 3a-1 & 3b-1 \\ c & 3d \end{pmatrix}$,

[7] $\begin{pmatrix} 3a+1 & 3b \\ 3c+1 & 3d+1 \end{pmatrix}$,

[8] $\begin{pmatrix} 3a+1 & 3b \\ 3c-1 & 3d-1 \end{pmatrix}$,

[9] $\begin{pmatrix} 3a-1 & 3b \\ 3c+1 & 3d+1 \end{pmatrix}$,

[10] $\begin{pmatrix} 3a-1 & 3b \\ 3c-1 & 3d-1 \end{pmatrix}$

dir.

İspat. (20) de tanımlanan $\mathcal{M}$ matrisi ile $\mathcal{M} \in \hat{\Gamma}_0^3(N)$ olması için $N|\ c(2d-c)$ nin yanında aşağıdaki durumlar söz konusu olabilecektir.

A. Farz edelim ki $3|\ c(2d-c)$ olsun. Bu durumda $3|\ a(a-2b)$ dir.

1) $3|\ c$ olsun. $3 \nmid a$ olduğundan $3|\ a-2b$ dir. Böylece,

$$a-2b \equiv 0\ mod\ 3 \Rightarrow a+b \equiv 0\ mod\ 3 \Longrightarrow a \equiv \mp 1, b \equiv \pm 1$$

bulunur. (Bu sıraya dikkat edilmeli. $a \equiv 1$ alındığında $b \equiv -1$ alınmalı vb.) Dolayısı ile a yerine $3a \mp 1$; b yerine $3b \pm 1$ gelecektir. Böylece

$$\begin{pmatrix} 3a+1 & 3b-1 \\ 3c & d \end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix} 3a-1 & 3b+1 \\ 3c & d \end{pmatrix} \tag{21}$$

matrisleri c_3 tarafından sabit bırakılır.

2) $3 \nmid c$ olsun. Bu durumda $3|\ 2d-c$ dir. Yine $3|\ a(a-2b)$ olacaktır.

(i) $3|\ a$ olsun. $2d-c \equiv d+c \equiv 0\ mod\ 3$ olduğundan $d \equiv \mp 1, c \equiv \pm 1\ mod\ 3$ tür. Böylece, elde edilen temsili matrisler

$$\begin{pmatrix} 3a & b \\ 3c+1 & 3d-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3a & b \\ 3c-1 & 3d+1 \end{pmatrix} \tag{22}$$

matrisleridir.

(ii) $3|\ 2d-c$ ve $3|\ a-2b$ olsun. Buradan,

$$c+d \equiv 0\ mod\ 3, a+b \equiv 0\ mod\ 3$$

elde edilir. Buradan $a \equiv \mp 1, b \equiv \pm 1; c \equiv \mp 1, d \pm 1$ bulunur. Böylece

$$\begin{pmatrix} 3a+1 & 3b-1 \\ 3c+1 & 3d-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3a+1 & 3b-1 \\ 3c-1 & 3d+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3a-1 & 3b+1 \\ 3c+1 & 3d-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3a-1 & 3b+1 \\ 3c-1 & 3d+1 \end{pmatrix}$$

matrisleri elde edilir. Ancak bu dört matrisin hangisi alınırsa alınsın, $\mathcal{M}$ nin 1. ve 3. elemanları 3 ile bölünür. Bu mümkün olmadığından (ii) nin 4 matrisi sabit nokta temsilcisi olamaz.

B. Farz edelim ki $3|\ ad - c(a-b)$ olsun.

(1) Varsayalım ki $3|\ ad, 3|c(a-b)$ olsun. Buradan eğer $3|\ a$ ise $3|\ a-b$ olduğundan $3|\ b$ çelişkisi elde edilir. Dolayısı ile $3|\ d$ ve $3|\ a-b$ dir. Buradan

$$a - b \equiv 0\ mod\ 3 \Rightarrow a \equiv \mp 1, b \equiv \mp 1\ mod\ 3$$

bulunur. Böylece $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ temsilcisi

$$\begin{pmatrix} 3a+1 & 3b+1 \\ c & 3d \end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix} 3a-1 & 3b-1 \\ c & 3d \end{pmatrix} \tag{23}$$

matrisleri halini alır.

(2) Varsayalım ki $3 \nmid ad$ ve $3 \nmid c(a-b)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki 24 ihtimal söz konusudur. (Kongrüanslar mod 3 e göre alınmıştır.)

(i) $a \equiv 1, d \equiv 1, c \equiv 1, b \equiv 0$

(ii) $a \equiv 1, d \equiv -1, c \equiv -1, b \equiv 0$

(iii) $a \equiv -1, d \equiv 1, c \equiv 1, b \equiv 0$

(iv) $a \equiv 1, d \equiv -1, c \equiv -1, b \equiv 0$

(v) $a \equiv 1, d \equiv 1, c \equiv 1, b \equiv 1$

(vi) $a \equiv 1, d \equiv 1, c \equiv 1, b \equiv -1$

(vii) $a \equiv 1, d \equiv 1, c \equiv -1, b \equiv 0$

(viii) $a \equiv 1, d \equiv 1, c \equiv -1, b \equiv 1$

(ix) $a \equiv 1, d \equiv 1, c \equiv -1, b \equiv -1$

(x) $a \equiv 1, d \equiv -1, c \equiv 1, b \equiv 0$

(xi) $a \equiv 1, d \equiv -1, c \equiv 1, b \equiv 1$

(xii) $a \equiv 1, d \equiv -1, c \equiv 1, b \equiv -1$

(xiii) $a \equiv 1, d \equiv -1, c \equiv -1, b \equiv 1$

(xiv) $a \equiv 1, d \equiv -1, c \equiv -1, b \equiv -1$

(xv) $a \equiv -1, d \equiv 1, c \equiv 1, b \equiv 1$

(xvi) $a \equiv -1, d \equiv 1, c \equiv 1, b \equiv -1$

(xvii) $a \equiv -1, d \equiv 1, c - 1, b \equiv 0$

(xviii) $a \equiv -1, d \equiv 1, c \equiv -1, b \equiv 1$

(xix) $a \equiv -1, d \equiv 1, c \equiv -1, b \equiv -1$

(xx) $a \equiv -1, d \equiv -1, c \equiv 1, b \equiv 0$

(xxi) $a \equiv -1, d \equiv -1, c \equiv 1, b \equiv 1$

(xxii) $a \equiv -1, d \equiv -1, c \equiv 1, b \equiv -1$

(xxiii) $a \equiv -1, d \equiv -1, c \equiv -1, b \equiv 1$

(xxiv) $a \equiv -1, d \equiv -1, c \equiv -1, b \equiv -1$

Bu 24 durumdan sadece ilk 4 ü $3 \nmid ad$ ve $3 \nmid c(a-b)$ şartını sağlar ve $\mathcal{M} \in \hat{\Gamma}_0^3(N)$ dir. Diğer 20 durum $3 \nmid ad$ ve $3 \nmid c(a-b)$ şartını sağlar ancak $\mathcal{M} \notin \hat{\Gamma}_0^3(N)$ dir. Sonuçta istenilen sabit koset temsilcileri

$$\begin{pmatrix} 3a+1 & 3b \\ 3c+1 & 3d+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3a-1 & 3b \\ 3c+1 & 3d+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3a+1 & 3b \\ 3c-1 & 3d-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3a-1 & 3b \\ 3c-1 & 3d-1 \end{pmatrix} \qquad (24)$$

matrisleridir. ■

NOT. N nin tek olması durumunda c_3 ün sabit bıraktığı kosetlerin $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ temsilcileri

$$T := \begin{pmatrix} a & b \\ l_1 N_i & \dfrac{l_1 N_i + l_2 M_i}{2} \end{pmatrix} \qquad (25)$$

matrisleri olarak elde edilmişti. Burada $(N_i, M_i) = 1$ dir. Eğer $3|\ l_1 N_i$ ise T matrisi Teorem 2.16 daki [1] veya [2] matrisidir.

(1) Eğer $3|\ N_i$ ise

$$A := \begin{pmatrix} 3a+1 & 3b-1 \\ l_1 N_i & \dfrac{l_1 N_i + l_2 M_i}{2} \end{pmatrix} \text{ ile } B := \begin{pmatrix} 3a_0+1 & 3b_0-1 \\ N_i & \dfrac{N_i + M_i}{2} \end{pmatrix}$$

aynı koseti verirler. Böyle matrisleri $A \simeq B$ ile gösterelim.

(2) Eğer $3 \nmid N_i, 3|\ l_1 N_i$ fakat $3|\ \frac{N_i+M_i}{2}$ ise

$$\begin{pmatrix} 3a_0+1 & 3b_0-1 \\ l_1 N_i & \dfrac{l_1 N_i + l_2 M_i}{2} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 3a+1 & 3b-1 \\ N_i & \dfrac{N_i + M_i}{2} \end{pmatrix}$$

elde edilir.

(3) Eğer $3 \nmid N_i, 3 \nmid l_1 N_i, 3 \nmid \frac{N_i+M_i}{2}, N_i \equiv 1, \frac{N_i+M_i}{2} \equiv 1 \; mod \; 3$ ise

$$\begin{pmatrix} 3a_0+1 & 3b_0-1 \\ l_1 N_i & \dfrac{l_1 N_i + l_2 M_i}{2} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 3a+1 & 3b \\ N_i & \dfrac{N_i+M_i}{2} \end{pmatrix}$$

elde edilir.

(4) Eğer $3 \nmid N_i, 3|\, l_1 N_i, 3|\, \frac{N_i+M_i}{2}, N_i \equiv 1, \frac{N_i+M_i}{2} \equiv -1 \; mod \; 3$ ise

$$\begin{pmatrix} 3a_0-1 & 3b_0+1 \\ l_1 N_i & \dfrac{l_1 N_i + l_2 M_i}{2} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 3a & b \\ N_i & \dfrac{N_i+M_i}{2} \end{pmatrix}$$

elde edilir.

(5) Eğer $3 \nmid N_i, 3|\, l_1 N_i, 3 \nmid \frac{N_i+M_i}{2}, N_i \equiv -1, \frac{N_i+M_i}{2} \equiv 1 \; mod \; 3$ ise

$$\begin{pmatrix} 3a+1 & 3b-1 \\ l_1 N_i & \dfrac{l_1 N_i + l_2 M_i}{2} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 3a_0 & b_0 \\ N_i & \dfrac{N_i+M_i}{2} \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Bu şekilde devam edilirse yani bütün ihtimaller göz önüne alınırsa Teorem 2.16 daki matrislerin 2. satırları uygun $\left(N_i, \frac{N_i+M_i}{2}\right)$ olarak alınabilir. Dolayısı ile Lemma 2.17 elde edilir.

Lemma 2.17. Teorem 2.16 da elde edilen 10 koset temsilcisi tek türlü belirlidir. Yani, aynı biçimde bir diğer matris alınırsa bunlar birbirine denktir ($\simeq$ anlamında). Böylece N tek, $(N_i, M_i) = 1$ olmak üzere $N = N_i \cdot M_i$ verildiğinde

$$C := \begin{pmatrix} a & b \\ N_i & \dfrac{N_i+M_i}{2} \end{pmatrix} \tag{26}$$

koset temsilcileri olarak alınır. (a, b) çifti tek türlü olarak belirlendiğinden bunların sayısı 2^r tanedir. Burada r, N nin asal çarpanlarının sayısıdır. Ayrıca $3|\, N_i$ ise C matrisi [1] e veya [2] ye denktir. Bu biçimde hareketle 10 tane matrise ulaşılabilir. Yani, C nin elemanlarının

3 e bölünme veya bölünememe durumuna göre Teorem 2.16 daki 10 tane matrise ulaşılabilir. Örneğin, $3|\, b$ ise elde edilen matris [7] veya [8] matrisidir. ■

- Şimdi N nin çift ve $2||N$ olması durumunu inceleyelim.

Teorem 2.18. N çift ve $2||N,\ N = 2 \cdot N_i \cdot M_i, (N_i, M_i) = 1$ olsun. Bu durumunda c_3 ün sabit bıraktığı koset temsilcileri

$$\begin{pmatrix} * & * \\ 2M_i & 2N_i + M_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & * \\ 4N_i & 2N_i + M_i \end{pmatrix}$$

dir. ■

İspat. $2||c$ ve $4||c$ durumlarını ayrı ayrı inceleyelim.

(i) $2||c$ olsun. $N|c(2d-c)$ olduğundan $(c, 2d-c) = 2$ dir. Şimdi varsayalım ki

$N_i|c$ ve $M_i|2d - c$

olsun. Buradan

$c = 2c_0N_i$ ve $2d - c = 2^\beta d_0 M_i$

olacak şekilde $c_0, d_0, \beta \in \mathbb{Z}$ mevcuttur. Böylece

$$d = c_0N_i + 2^{\beta-1}d_0M_i$$

bulunur. Açıkça $\beta \geq 2$ dir. Bu durumda eğer

$$B_0 \coloneqq \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 2c_0N_i & c_0N_i + 2^{\beta-1}d_0M_i \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanırsa B_0 ın c_3 tarafından sabit kalması için

$$\begin{pmatrix} ad - c(a-b) & a(a-2b) \\ c(2d-c) & -ad + c(a-b) \end{pmatrix} \in \hat{\Gamma}_0^3(N)$$

olmalıdır. Böyle olduğunu kabul edelim ve gösterelim ki

$$A_0 \coloneqq \begin{pmatrix} A & B \\ 2N_i & N_i + 2M_i \end{pmatrix}$$

c_3 ü sabit bırakılıyor ise $A_0 \simeq B_0$ dir.

Bu durumda

$$A_1 := \begin{pmatrix} A(N_i + 2M_i) - 2N_i(A - B) & A(A - 2B) \\ 8N_iM_i & -A(N_i + 2M_i) + 2N_i(A - B) \end{pmatrix}$$

ve

$$B_1 := \begin{pmatrix} a\left(c_0N_i + 2^{\beta-1}d_0M_i\right) - 2c_0(a - b)N_i & a(a - 2b) \\ 2^{\beta+1}c_0d_0N_iM_i & -a\left(c_0N_i + 2^{\beta-1}d_0M_i\right) + 2c_0(a - b)N_i \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanırsa $A_1, B_1 \in \hat{\Gamma}_0^3(N)$ dir.

Şimdi bazı durumları inceleyelim:

(1) $3|N_i$ olsun. Bu durumda A_1 ve B_1 matrislerinden $3|A(A - 2B)$ ve $3|a(a - 2b)$ dir.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= A_0B_0^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} A\left(c_0N_i + 2^{\beta-1}d_0M_i\right) - 2Bc_0N_i & -bA + aB \\ 2N_i\left(c_0N_i + 2^{\beta-1}d_0M_i\right) - 2c_0N_i^2 - 4c_0N_iM_i & -2bN_i + aN_i + 2aM_i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

matrisinin $\hat{\Gamma}_0^3(N)$ nin elemanı olduğunu gösterelim. Bunun için $3| -bA + aB$ olduğunu gösterelim.

$3|A(A - 2B)$ olduğundan $3|A - 2B$ dir. Buradan

$3|A + B$ ve $3|a(a - 2b)$

olup

$3|a - 2b \Rightarrow 3|a + b$

bulunur. Bu durumda

$B = -A + 3t_1, b = -a + 3t_2$ olacak şekilde $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$

vardır. Böylece

$$-bA + aB = -A(-a + 3t_2) + a(-A + 3t_1) = -3At_2 + 3at_1 \equiv 0 \; mod \; 3$$

tür. Yani, $3| - bA + aB$ dir. Buradan $A_0 \simeq B_0$ elde edilir.

(2) $3|M_i$ olsun. Bu durumda

$3|A(A-2B)$ ve $3|a(a-2b)$

dir. Eğer $3|A$ ve $3|a$ ise $A_0 \simeq B_0$ olduğu açıktır.

Öte yandan $3|A-2B$ ve $3|a-2b$ olamaz. Gerçekten, eğer $3|A-2B$ olsa

$3|A-2B \Rightarrow A-2B \equiv 0\ mod\ 3 \Rightarrow A = 2B + 3l_1$

olacak şekilde $l_1 \in \mathbb{Z}$ mevcuttur. Bu durumda

$$B_0 = \begin{pmatrix} 2B+3l_1 & B \\ 2N_i & N_i+2M_i \end{pmatrix} \xRightarrow{\det(B_0)=\mp 1} (2B+3l_1)(N_i+2M_i) - 2BN_i = \mp 1$$

dir. Buradan

$4BM_i + 3l_1(N_i+2M_i) = \mp 1$

elde edilir. Bu ise $3|M_i$ varsayımı ile çelişir. Bu durumda $3|A-2B$ ve $3|a-2b$ olamaz. Böylece $3|A$ ve $3|a$ olmak zorundadır.

(3) $3 \nmid N_iM_i$ ve $3|c_0$ olsun. B_0 matrisinden

$3 \nmid A$ ve $3 \nmid A-2B$ olduğundan $3 \nmid A+B$

elde edilir. Bu durumda $A \equiv B \equiv \mp 1\ mod\ 3$ tür. Dolayısı ile $3|A-B$ dir.

a. $3|N_i+2M_i$ olduğunu varsayalım. Böylece

$N_i + 2M_i \equiv N_i - M_i \equiv 0\ mod\ 3$

tür. Dolayısı ile

$N_i \equiv M_i \equiv \mp 1\ mod\ 3$

bulunur. $3|a-2b$ $(3|a+b)$ dir. Şimdi, $\mathcal{A} \in \hat{\Gamma}_0^3(N)$ olduğunu gösterelim. Bunun için

$$2^{\beta-1}Ad_0M_i(-bA+aB) + 2^{\beta}d_0N_iM_i[-2bN_i + aN_i + 2aM_i] \equiv 0\ mod\ 3 \qquad (27)$$

sağlandığını gösterelim. Öte yandan

$(d_0, 3) = (M_i, 3) = 1$ ve $\left(2^{\beta}, 3\right) = \left(2^{\beta-1}, 3\right) = 1$

olduğundan (27) yerine daha sade biçimi olan

$$A(-bA + aB) - N_i[bN_i + aN_i - aM_i] \equiv 0 \; mod \; 3$$
$$\Longrightarrow -bA^2 + aAB - bN_i^2 - aN_i^2 + aN_iM_i \equiv 0 \; mod \; 3$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$$A^2 \equiv AB \equiv N_i^2 \equiv N_iM_i \equiv 1 \; mod \; 3$$

olduğundan

$$-bA^2 + aAB - bN_i^2 - aN_i^2 + aN_iM_i \equiv -b + a - b - a + a \equiv a - 2b \; mod \; 3$$

elde edilir. Ayrıca $a \equiv -b \; mod \; 3$ kongrüansı kullanılırsa

$$-b - b - b \equiv -3b \equiv 0 \; mod \; 3$$

elde edilir. Dolayısı ile $\mathcal{A} \in \hat{\Gamma}_0^3(N)$ dir.

b. $3 \nmid N_i + 2M_i$ olamayacağını gösterelim. Varsayalım ki $3 \nmid N_i + 2M_i$ doğru olsun. Buradan

$$N_i \equiv -M_i \equiv \mp 1 \; mod \; 3$$

tür. Öte yandan

$$3 \nmid A \text{ ve } 3 \nmid A - 2B \quad (3 \nmid A + B)$$

olduğundan

$$A \equiv B \equiv \mp 1 \; mod 3$$

tür. Ayrıca $3|a + b$ $(3|a - 2b)$ olduğunu biliyoruz. $\det B_0 \equiv \mp 1$ olduğundan

$$a\left[c_0N_i + 2^{\beta-1}d_0M_i\right] - 2bc_0N_i = \mp 1$$

dir. Buradan

$$2^{\beta-1}d_0M_i \equiv \mp 1 \; mod \; 3$$

tür. Ayrıca $\det A_0 = \mp 1$ olduğundan

$$A(N_i + 2M_i) - 2BN_i \equiv \mp 1 \; mod \; 3$$

elde edilir.

$N_i \equiv -M_i \equiv \mp 1 \; mod \; 3$ ve $A \equiv B \equiv \mp 1 \; mod \; 3$ kongrüans denklemlerinden

- $N_i \equiv 1, M_i \equiv -1$
- $N_i \equiv -1, M_i \equiv 1$
- $A \equiv B \equiv 1$
- $A \equiv B \equiv -1$

bulunur. Şimdi bu durumları inceleyelim.

(1*) $N_i \equiv 1, M_i \equiv -1$ ve $A \equiv B \equiv 1$ ise

$$A(N_i + 2M_i) - 2BN_i \equiv 1(1-2) - 2 \cdot 1 \cdot 1 \not\equiv \mp 1 \; mod \; 3$$

elde edilir.

(2*) $N_i \equiv 1, M_i \equiv -1$ ve $A \equiv B \equiv -1$ ise

$$-1(1-2) - 2 \cdot (-1) \cdot 1 \equiv 3 \not\equiv \mp 1 \; mod \; 3$$

elde edilir.

(3*) $N_i \equiv -1, M_i \equiv 1$ ve $A \equiv B \equiv 1$ ise

$$1(-1+2) - 2 \cdot 1 \cdot (-1) \equiv 3 \not\equiv \mp 1 \; mod \; 3$$

elde edilir.

(4*) $N_i \equiv -1, M_i \equiv 1$ ve $A \equiv B \equiv -1$ ise

$$-1(-1+2) - 2 \cdot (-1) \cdot (-1) \equiv -3 \not\equiv \mp 1 \; mod \; 3$$

elde edilir.

Böylece $3 \nmid N_i + 2M_i$ olamayacağı elde edilir.

Sonuç olarak her durumda

$$A_0 \simeq B_0$$

dır. Böylece B_0 matrisi yerine ona denk olan daha sade A_0 matrisini almak yeterlidir.

(ii) $4||c$ olsun. $N_i|c$ ve $M_i|2d-c$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$c = 4c_0N_i, 2d - c = 2d_0M_i$ olan $c_0, d_0 \in \mathbb{Z}$

vardır. Buradan

$$d = 2c_0N_i + d_0M_i$$

dir.

$A_0 := \begin{pmatrix} A & B \\ 4N_i & 2N_i + M_i \end{pmatrix}, c_3$ ile sabit bırakılır $\Leftrightarrow$

$$A_1 := \begin{pmatrix} A(2N_i + M_i) - 4N_i(A-B) & A(A-2B) \\ 8N_iM_i & -A(2N_i+M_i) + 4N_i(A-B) \end{pmatrix} \in \hat{\Gamma}_0^3(N) \text{ dir.}$$

Ayrıca

$B_0 := \begin{pmatrix} a & b \\ 4c_0N_i & 2c_0N_i + d_0M_i \end{pmatrix}, c_3$ ile sabit bırakılır $\Leftrightarrow$

$B_1 := \begin{pmatrix} a(2c_0N_i + d_0M_i) - 4c_0(a-b)N_i & a(a-2b) \\ 8c_0d_0N_iM_i & -a(2c_0N_i + d_0M_i) + 4c_0(a-b)N_i \end{pmatrix} \in$ $\hat{\Gamma}_0^3(N)$ dir.

B_0 matrisi yerine daha sade biçimi olan A_0 matrisini kullanabileceğimizi, yani $A_0 \simeq B_0$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $\mathcal{A} := A_0 \cdot B_0^{-1}$ matrisinin $\hat{\Gamma}_0^3(N)$ elemanı olduğunu göstermeliyiz.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A(2c_0N_i + d_0M_i) - 4c_0BN_i & -bA + aB \\ 4N_i(2c_0N_i + d_0M_i) - 4c_0N_i(2N_i + M_i) & -4bN_i + 2aN_i + aM_i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A(2c_0N_i + d_0M_i) - 4c_0B & -bA + aB \\ 4(d_0 - c_0)N_iM_i & -4bN_i + 2aN_i + aM_i \end{pmatrix}$$

olduğundan aşağıdaki durumlar ele alınmalıdır.

(1°) $3|N_i$ olsun. Bu durumda $3| -bA + aB$ olduğu gösterilmelidir.

$3|N_i \Rightarrow A_0$ matrisinden $(A,3) = 1$ ve B_0 matrisinden $(a,3) = 1$

olduğu elde edilir. Buradan $\mathcal{A} \in \hat{\Gamma}_0^3(N)$ olabilmesi için $3|aB - bA$ olduğu göstermeliyiz.

$A_1, B_1 \in \hat{\Gamma}_0^3(N)$ olduğundan

$3|A(A-2B)$ ve $3|a(a-2b)$

elde edilir. Ayrıca

$(A,3) = (a,3) = 1$

olduğundan

$3|A-2B$ ve $3|a-2b$

bulunur. Buradan

$$A - 2B \equiv A + B \equiv 0 \; mod\; 3 \Rightarrow A \equiv -B \; mod\; 3$$
$$a - 2b \equiv a + b \equiv 0 \; mod\; 3 \Rightarrow a \equiv -b \; mod\; 3$$

elde edilir. Böylece

$aB - bA \equiv (-b)(-A) - bA \equiv 0 \; mod\; 3$

olduğundan

$A_0 \simeq B_0$

dır.

(2°) $3|M_i$ olsun. $3|aB - bA$ olduğunu gösterelim. A_0 ve B_0 matrislerinin determinantları göz önüne alındığında

$3 \nmid A - 2B$ veya $3 \nmid a - 2b$

olamaz. Böylece

$3|A$ ve $3|a$

bulunur. Bu durumda $\mathcal{A} \in \hat{\Gamma}_0^3(N)$ olup, $A_0 \simeq B_0$ dır.

(3°) $3 \nmid N_i M_i$ ve $3|c_0$ olsun. A_1 matrisinden

$3 \nmid A$ ve $3 \nmid A - 2B$

ve B_1 matrisinden

$3|a$ veya $3|a-2b$

dir. B_0 matrisi ile $3 \nmid a$ olduğundan

$3|a-2b \Rightarrow 3|a+b$

bulunur. Ayrıca

$3 \nmid A-2B \Rightarrow A \equiv B \equiv \mp 1 \; mod \; 3$

elde edilir. Böylece $3|A-B$ dir.

(a°) $3|2N_i + M_i$ olduğunu varsayalım. Böylece

$2N_i + M_i \equiv N_i - M_i \equiv 0 \; mod \; 3$

olduğundan

$N_i \equiv M_i \equiv \mp 1 \; mod \; 3$

tür. Şimdi $\mathcal{A} \in \hat{\Gamma}_0^3(N)$ olduğunu gösterelim.

$3|a+b \Rightarrow a \equiv -b \equiv \mp 1 \; mod \; 3$

olduğundan

$A \equiv B \equiv \mp 1$
$a \equiv -b \equiv \mp 1$

elde edilir. $3|c_0$ olup B_0 matrisinden $(3, d_0) = 1$ dir. $\mathcal{A} \in \hat{\Gamma}_0^3(N)$ olması için

$$[A(2c_0N_i + d_0M_i) - 4c_0BN_i][-bA + aB]$$
$$+4(d_0 - c_0)N_iM_i[-4bN_i + 2aN_i + aM_i] \equiv 0 \; mod \; 3$$

olduğu gösterilmelidir. Öte yandan $3|c_0$ olduğundan $\mathcal{A} \in \hat{\Gamma}_0^3(N)$ olması için

$$Ad_0M_i(-bA + aB) + 4d_0N_iM_i(-bN_i - aN_i + aM_i) \equiv 0 \; mod \; 3 \qquad (28)$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Ayrıca $(M_id_0, 3) = 1$ olduğundan (28) yerine

$$-bA^2 + aAB + N_i(-bN_i - aN_i + aM_i) \equiv 0 \; mod \; 3$$
$$\Rightarrow -bA^2 + aAB - bN_i^2 - aN_i^2 + aN_iM_i \equiv 0 \; mod \; 3$$

kongrüans bağıntısının doğruluğunu göstermeliyiz.

$$A^2 \equiv AB \equiv N_iM_i \equiv N_i^2 \equiv 1$$

olduğundan

$$-b + a - b - a + a \equiv -b - b - b \equiv 0 \; mod \; 3$$

elde edilir. Böylece $\mathcal{A} \in \hat{\Gamma}_0^3$ olduğu elde edilir.

(b°) $3 \nmid 2N_i + M_i$ durumunun olamayacağını gösterelim. Varsayalım ki $3 \nmid 2N_i + M_i$ doğru olsun. Bu durumda

$$3 \nmid M_i - N_i \Rightarrow N_i \equiv -M_i \equiv \mp 1 \; mod \; 3$$

elde edilir. Öte yandan $3 \nmid A - 2B$ ile

$$3 \nmid A + B \Rightarrow A \equiv B \equiv \mp 1 \; mod \; 3$$

ve $3|a + b$ ile

$$a \equiv -b \equiv \mp 1 \; mod \; 3$$

bulunur. Ayrıca

$$\det A_0 = A(2N_i + M_i) - 4BN_i \equiv \mp 1 \; mod \; 3$$

olduğundan

$$2N_i + M_i - N_i = N_i + M_i \equiv 0 \; mod \; 3$$

elde edilir. Bu çelişki $3 \nmid 2N_i + M_i$ olamayacağını gösterir.

Sonuç olarak tüm durumlarda $\mathcal{A} \in \hat{\Gamma}_0^3$ olduğu elde edilir. Dolayısıyla $A_0 \simeq B_0$ dır. Yani, $2||N$ durumunda c_3 ün sabit bıraktığı koset temsilcileri

$$\begin{pmatrix} * & * \\ 2M_i & 2N_i + M_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & * \\ 4N_i & 2N_i + M_i \end{pmatrix}$$

dir.■

Teorem 2.19. I. $N = N_i \cdot M_i = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}, N_i, M_i$ tek ise $\hat{\Gamma}_0^3(N)$ nin simgesindeki sınır bileşenlerinin sayısı 2^{r-1} dir ve her bir sınır bileşen iki tane ∞ içerir.

II. $N = 2 \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}, p_j > 2, j = 2, \ldots, r$ ve $2||N$ ise $\hat{\Gamma}_0^3(N)$ nin simgesindeki sınır bileşenlerinin sayısı 2^{r-2} dir ve her bir sınır bileşen dört tane ∞ içerir.

İspat.

I. $N = N_i \cdot M_i, (N_i, M_i) = 1, N_i, M_i$ tek olması durumunda

- c_1 in sabit bıraktığı koset temsilcileri

$\begin{pmatrix} * & * \\ N_i & M_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & * \\ M_i & N_i \end{pmatrix}$

- c_2 nin sabit bıraktığı koset temsilcileri

$\begin{pmatrix} * & * \\ \frac{N_i - M_i}{2} & \frac{N_i + M_i}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & * \\ \frac{M_i - N_i}{2} & \frac{N_i + M_i}{2} \end{pmatrix}$

- c_3 ün sabit bıraktığı koset temsilcileri

$\begin{pmatrix} * & * \\ N_i & \frac{N_i + M_i}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & * \\ M_i & \frac{N_i + M_i}{2} \end{pmatrix}$

olarak elde edildi. Şimdi bu koset temsilcileri arasındaki bağıntıları bulup sonsuzların sayısını belirleyelim.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ N_i & M_i \end{pmatrix} c_1 c_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ N_i & M_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & a \\ -M_i & N_i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ M_i & N_i \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$c_{1_{\begin{pmatrix} * & * \\ N_i & M_i \end{pmatrix}}} \overset{1}{\sim} c_{1_{\begin{pmatrix} * & * \\ M_i & N_i \end{pmatrix}}} \tag{29}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{pmatrix} a & b \\ M_i & N_i \end{pmatrix} (c_1 c_3)^k = \begin{pmatrix} a & b \\ M_i & N_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & ak + b \\ M_i & kM_i + N_i \end{pmatrix}$$

olup burada $k = \frac{1+3M_i}{2}$ alınırsa

$$\begin{pmatrix} a & ak+b \\ M_i & kM_i+N_i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ M_i & \dfrac{N_i+M_i}{2} \end{pmatrix}$$

olduğu görülür. Böylece

$$c_{1_{\begin{pmatrix} * & * \\ M_i & N_i \end{pmatrix}}} \overset{\infty}{\sim} c_{3_{\begin{pmatrix} * & * \\ M_i & \frac{N_i+M_i}{2} \end{pmatrix}}} \tag{30}$$

elde edilir.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ M_i & \dfrac{N_i+M_i}{2} \end{pmatrix} c_2 c_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ M_i & \dfrac{N_i+M_i}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a+b \\ \dfrac{N_i+M_i}{2} & \dfrac{N_i-M_i}{2} \end{pmatrix}$$

olup

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} b & -a+b \\ \dfrac{N_i+M_i}{2} & \dfrac{N_i-M_i}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \dfrac{N_i-M_i}{2} & \dfrac{N_i+M_i}{2} \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} b & -a+b \\ \dfrac{N_i+M_i}{2} & \dfrac{N_i-M_i}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{N_i+M_i}{2} & -b_1 \\ \dfrac{-N_i+M_i}{2} & a_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{bN_i+bM_i+(-a+b)M_i+(a-b)N_i}{2} & -bb_1+a_1(-a+b) \\ \dfrac{M_i^2+2N_iM_i+N_i^2-M_i^2+2N_iM_i-N_i^2}{4} & \dfrac{-b_1(N_i+M_i)+a_1(N_i-M_i)}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} * & * \\ N_iM_i & * \end{pmatrix} \in \hat{\Gamma}_0^3(N)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{pmatrix} b & -a+b \\ \dfrac{N_i+M_i}{2} & \dfrac{N_i-M_i}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \dfrac{N_i-M_i}{2} & \dfrac{N_i+M_i}{2} \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece

$$c_{3_{\begin{pmatrix} * & * \\ M_i & \frac{N_i+M_i}{2} \end{pmatrix}}} \overset{1}{\sim} c_{2_{\begin{pmatrix} * & * \\ \frac{N_i-M_i}{2} & \frac{N_i+M_i}{2} \end{pmatrix}}} \tag{31}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{N_i - M_i}{2} & \frac{N_i + M_i}{2} \end{pmatrix} c_1 c_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{N_i - M_i}{2} & \frac{N_i + M_i}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & a \\ \frac{-N_i - M_i}{2} & \frac{N_i - M_i}{2} \end{pmatrix}$$

olup

$$\begin{pmatrix} -b & a \\ \frac{-N_i - M_i}{2} & \frac{N_i - M_i}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \frac{M_i - N_i}{2} & \frac{N_i + M_i}{2} \end{pmatrix}^{-1} \in \hat{\Gamma}_0^3(N)$$

olduğundan

$$\begin{pmatrix} -b & a \\ \frac{-N_i - M_i}{2} & \frac{N_i - M_i}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \frac{M_i - N_i}{2} & \frac{N_i + M_i}{2} \end{pmatrix}$$

dir. Böylece

$$c_{2\begin{pmatrix} * & * \\ \frac{N_i - M_i}{2} & \frac{N_i + M_i}{2} \end{pmatrix}} \overset{1}{\sim} c_{2\begin{pmatrix} * & * \\ \frac{M_i - N_i}{2} & \frac{N_i + M_i}{2} \end{pmatrix}} \tag{32}$$

elde edilir. Yukarıdakilere benzer işlemler ile

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{M_i - N_i}{2} & \frac{N_i + M_i}{2} \end{pmatrix} c_2 c_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{M_i - N_i}{2} & \frac{N_i + M_i}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a + b \\ \frac{N_i + M_i}{2} & N_i \end{pmatrix}$$

ve

$$\begin{pmatrix} b & -a + b \\ \frac{N_i + M_i}{2} & N_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a + b & -a \\ N_i & \frac{N_i - M_i}{2} \end{pmatrix}$$

olup

$$\begin{pmatrix} -a + b & -a \\ N_i & \frac{N_i - M_i}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ N_i & \frac{N_i + M_i}{2} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} (-a + b)\frac{N_i + M_i}{2} + aN_i & ab_1 - bb_1 - aa_1 \\ N_i M_i & -b_1 N_i + a_1 \frac{N_i - M_i}{2} \end{pmatrix} \in \hat{\Gamma}_0^3(N)$$

olduğundan

$$\begin{pmatrix} -a+b & a \\ N_i & \dfrac{N_i-M_i}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ N_i & \dfrac{N_i+M_i}{2} \end{pmatrix}$$

dir. Böylece

$$c_{2_{\left(\overset{*}{\frac{M_i-N_i}{2}} \;\; \overset{*}{\frac{N_i+M_i}{2}}\right)}} \overset{1}{\sim} c_{3_{\left(\overset{*}{N_i} \;\; \overset{*}{\frac{N_i+M_i}{2}}\right)}} \tag{33}$$

elde edilir.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ N_i & \dfrac{N_i+M_i}{2} \end{pmatrix} (c_1c_3)^k = \begin{pmatrix} a & b \\ N_i & \dfrac{N_i+M_i}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & ak+b \\ N_i & kN_i + \dfrac{N_i+M_i}{2} \end{pmatrix}$$

olup burada $k = \frac{M_i-1}{2}$ alınırsa

$$\begin{pmatrix} a & ak+b \\ N_i & kN_i + \dfrac{N_i+M_i}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ N_i & M_i \end{pmatrix}$$

olur. Böylece

$$c_{3_{\left(\overset{*}{N_i} \;\; \overset{*}{\frac{N_i+M_i}{2}}\right)}} \overset{\infty}{\sim} c_{1_{\left(\overset{*}{N_i} \;\; \overset{*}{M_i}\right)}} \tag{34}$$

elde edilir. (29)-(34) ten

$$c_{1_{\left(\overset{*}{N_i} \;\; \overset{*}{M_i}\right)}} \overset{1}{\sim} c_{1_{\left(\overset{*}{M_i} \;\; \overset{*}{N_i}\right)}} \overset{\infty}{\sim} c_{3_{\left(\overset{*}{M_i} \;\; \overset{*}{\frac{N_i+M_i}{2}}\right)}} \overset{1}{\sim} c_{2_{\left(\overset{*}{\frac{N_i-M_i}{2}} \;\; \overset{*}{\frac{N_i+M_i}{2}}\right)}} \overset{1}{\sim} c_{2_{\left(\overset{*}{\frac{M_i-N_i}{2}} \;\; \overset{*}{\frac{N_i+M_i}{2}}\right)}}$$

$$\overset{1}{\sim} c_{3_{\left(\overset{*}{N_i} \;\; \overset{*}{\frac{N_i+M_i}{2}}\right)}} \overset{\infty}{\sim} c_{1_{\left(\overset{*}{N_i} \;\; \overset{*}{M_i}\right)}} \tag{35}$$

dir. Burada $N = N_i \cdot M_i = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$ olmak üzere $i = 2,3,\ldots,2^{r-1}$ dir. Böylece her bir sınır bileşeni 2 tane ∞ içerir ve sınır bileşenlerinin sayısı 2^{r-1} dir. Sonuç olarak N nin tek olması durumunda $\hat{\Gamma}_0^3(N)$ nin simgesindeki periyot devirleri $\{(\infty,\infty)2^{r-1}\}$ şeklindedir.

II. N çift ve $N = 2 \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}, p_j > 2, j = 2, \ldots, r$ yani $2||N$ olsun. Bu durumda $N = 2 \cdot N_i \cdot M_i, (N_i, M_i) = 1$ olacak şekilde N_i, M_i tek tam sayılar mevcuttur.

- c_1 in sabit bıraktığı koset temsilcileri

$$\begin{pmatrix} * & * \\ N_i & M_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & * \\ M_i & N_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & * \\ 2N_i & M_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & * \\ M_i & 2N_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & * \\ 2M_i & N_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & * \\ N_i & 2M_i \end{pmatrix}$$

- c_2 nin sabit bıraktığı koset temsilcileri

$$\begin{pmatrix} * & * \\ M_i - 2N_i & 2N_i + M_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & * \\ N_i - 2M_i & N_i + 2M_i \end{pmatrix}$$

- c_3 ün sabit bıraktığı koset temsilcileri

$$\begin{pmatrix} * & * \\ 2M_i & 2N_i + M_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & * \\ 4N_i & 2N_i + M_i \end{pmatrix}$$

olarak elde edilmişti. Şimdi bu koset temsilcileri arasındaki bağıntıları bulup sonsuzların sayısını belirleyelim.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2N_i & M_i \end{pmatrix} c_1 c_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 2N_i & M_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & a \\ -M_i & 2N_i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ M_i & 2N_i \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$c_{1_{\begin{pmatrix} * & * \\ 2N_i & M_i \end{pmatrix}}} \overset{1}{\sim} c_{1_{\begin{pmatrix} * & * \\ M_i & 2N_i \end{pmatrix}}} \tag{36}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{pmatrix} a & b \\ M_i & 2N_i \end{pmatrix} (c_1 c_3)^k = \begin{pmatrix} a & b \\ M_i & 2N_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & ak + b \\ M_i & kM_i + 2N_i \end{pmatrix}$$

olup burada $k = N_i$ alınırsa

$$\begin{pmatrix} a & ak + b \\ M_i & kM_i + 2N_i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ M_i & N_i \end{pmatrix}$$

olduğu görülür. Böylece

$$c_{1\left(\overset{*}{M_i}\;\;\overset{*}{2N_i}\right)} \overset{\infty}{\sim} c_{1\left(\overset{*}{M_i}\;\;\overset{*}{N_i}\right)} \tag{37}$$

elde edilir.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ M_i & N_i \end{pmatrix} c_1 c_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ M_i & N_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & a \\ -N_i & M_i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ N_i & M_i \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$c_{1\left(\overset{*}{M_i}\;\;\overset{*}{N_i}\right)} \overset{1}{\sim} c_{1\left(\overset{*}{N_i}\;\;\overset{*}{M_i}\right)} \tag{38}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{pmatrix} a & b \\ N_i & M_i \end{pmatrix} (c_1 c_3)^k = \begin{pmatrix} a & b \\ N_i & M_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & ak + b \\ N_i & kN_i + M_i \end{pmatrix}$$

olup burada $k = M_i$ alınırsa

$$\begin{pmatrix} a & ak + b \\ N_i & kN_i + M_i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ N_i & 2M_i \end{pmatrix}$$

olur. Böylece

$$c_{1\left(\overset{*}{N_i}\;\;\overset{*}{M_i}\right)} \overset{\infty}{\sim} c_{1\left(\overset{*}{N_i}\;\;\overset{*}{2M_i}\right)} \tag{39}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{pmatrix} a & b \\ N_i & 2M_i \end{pmatrix} c_1 c_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ N_i & 2M_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & a \\ -2M_i & N_i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 2M_i & N_i \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$c_{1\left(\overset{*}{N_i}\;\;\overset{*}{2M_i}\right)} \overset{1}{\sim} c_{1\left(\overset{*}{2M_i}\;\;\overset{*}{N_i}\right)} \tag{40}$$

elde edilir. Yukarıdaki işlemlere benzer olarak

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2M_i & N_i \end{pmatrix} (c_1c_3)^k = \begin{pmatrix} a & b \\ 2M_i & N_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & ak+b \\ 2M_i & N_i + 2kM_i \end{pmatrix}$$

olup $k = \frac{N_i - 1}{2}$ alınırsa

$$\begin{pmatrix} a & ak+b \\ 2M_i & N_i + 2kM_i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 2M_i & 2N_i + M_i \end{pmatrix}$$

dir. Böylece

$$c_{1\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 2M_i & N_i \end{smallmatrix}\right)} \overset{\infty}{\sim} c_{3\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 2M_i & 2N_i + M_i \end{smallmatrix}\right)} \tag{41}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ 2M_i & 2N_i + M_i \end{pmatrix} c_2c_3 &= \begin{pmatrix} a & b \\ 2M_i & 2N_i + M_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b & -a+b \\ 2N_i + M_i & 2N_i - M_i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ N_i - 2M_i & N_i + 2M_i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olduğundan

$$c_{3\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 2M_i & 2N_i + M_i \end{smallmatrix}\right)} \overset{1}{\sim} c_{2\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ N_i - 2M_i & N_i + 2M_i \end{smallmatrix}\right)} \tag{42}$$

elde edilir. Benzer işlemler ile

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ N_i - 2M_i & N_i + 2M_i \end{pmatrix} c_1c_2 &= \begin{pmatrix} a & b \\ N_i - 2M_i & N_i + 2M_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -b & a \\ -N_i - 2M_i & N_i - 2M_i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ M_i - 2N_i & 2N_i + M_i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olduğundan

$$c_{2\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ N_i - 2M_i & N_i + 2M_i \end{smallmatrix}\right)} \overset{1}{\sim} c_{2\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ M_i - 2N_i & 2N_i + M_i \end{smallmatrix}\right)} \tag{43}$$

elde edilir.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ M_i-2N_i & 2N_i+M_i \end{pmatrix}(c_2c_3)^2=\begin{pmatrix} a & b \\ M_i-2N_i & 2N_i+M_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -a+b & -a \\ 4N_i & 2N_i-M_i \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 4N_i & 2N_i+M_i \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$c_{2\left(\overset{*}{M_i-2N_i}\quad\overset{*}{2N_i+M_i}\right)}\overset{1}{\sim}c_{3\left(\overset{*}{4N_i}\quad\overset{*}{2N_i+M_i}\right)} \tag{44}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 4N_i & 2N_i+M_i \end{pmatrix}(c_1c_3)^k=\begin{pmatrix} a & b \\ 4N_i & 2N_i+M_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & ak+b \\ 4N_i & (4k+2)N_i+M_i \end{pmatrix}$$

olup $k=\frac{M_i-1}{2}$ alınırsa

$$\begin{pmatrix} a & ak+b \\ 4N_i & (4k+2)N_i+M_i \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 2N_i & M_i \end{pmatrix}$$

olur. Böylece

$$c_{3\left(\overset{*}{4N_i}\quad\overset{*}{2N_i+M_i}\right)}\overset{\infty}{\sim}c_{1\left(\overset{*}{2N_i}\quad\overset{*}{M_i}\right)} \tag{45}$$

elde edilir. (36)-(45) ten

$$c_{1\left(\overset{*}{2N_i}\ \overset{*}{M_i}\right)}\overset{1}{\sim}c_{1\left(\overset{*}{M_i}\ \overset{*}{2N_i}\right)}\overset{\infty}{\sim}c_{1\left(\overset{*}{M_i}\ \overset{*}{N_i}\right)}\overset{1}{\sim}c_{1\left(\overset{*}{N_i}\ \overset{*}{M_i}\right)}\overset{\infty}{\sim}c_{1\left(\overset{*}{N_i}\ \overset{*}{2M_i}\right)}\overset{1}{\sim}c_{1\left(\overset{*}{2M_i}\ \overset{*}{N_i}\right)}\overset{\infty}{\sim}c_{3\left(\overset{*}{2M_i}\ \overset{*}{2N_i+M_i}\right)}$$
$$\overset{1}{\sim}c_{2\left(\overset{*}{N_i-2M_i}\ \overset{*}{N_i+2M_i}\right)}\overset{1}{\sim}c_{2\left(\overset{*}{M_i-2N_i}\ \overset{*}{2N_i+M_i}\right)}\overset{1}{\sim}c_{3\left(\overset{*}{4N_i}\ \overset{*}{2N_i+M_i}\right)}\overset{\infty}{\sim}c_{1\left(\overset{*}{2N_i}\ \overset{*}{M_i}\right)} \tag{46}$$

dir. Burada $N=2\cdot N_i\cdot M_i=2\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_r^{\alpha_r}$ olmak üzere $i=2,3,\ldots,2^{r-2}$ dir. Böylece her bir sınır bileşeni 4 tane ∞ içerir ve sınır bileşenlerinin sayısı 2^{r-2} dir. Sonuç olarak $\hat{\Gamma}_0^3(N)$ nin simgesindeki periyot devirleri $\{(\infty,\infty,\infty,\infty)2^{r-2}\}$ şeklindedir.■

2.4. $\Lambda_n(N)$ nin $\Gamma_0(N)$ deki İndeksi

$n, N \in \mathbb{N}$ ve $n|N$ olmak üzere

$$\Lambda_n(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \middle| \, a^4 \equiv 1 \; mod \; n \text{ veya } a^2 \equiv d^2 \; mod \; n \right\}$$

kümesi $\Gamma_0(N)$ nin bir alt grubudur. Şimdi $\Phi_N(n) := |\Gamma_0(N) : \Lambda_n(N)|$ indeksini bulalım.

İndeks konusunda daha önceden birçok çalışma yapılmıştır. Literatürde elde edilen sonuçlardan bu çalışmada kullanılan aşağıdaki teoremleri verelim.

İlk olarak Teorem 2.20 deki $\Gamma_{0,n}(N)$ grubunu tanımlayalım:
$n, N \in \mathbb{N}$ ve $n|N$ olmak üzere

$$\Gamma_{0,n}(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \middle| \, a \equiv d \; mod \; n \text{ veya } a^2 \equiv 1 \; mod \; n \right\}$$

kümesi $\Gamma_0(N)$ nin bir alt grubudur.

Teorem 2.20. [9] $n, N \in \mathbb{N}, n|N$ ve n nin asal çarpanlarına ayrılışı $n = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \cdots p_r^{\alpha_r}$ olarak verilsin. Bu takdirde, φ Euler fonksiyonu olmak üzere

$$\varphi_N(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{r-1}} \varphi\left(3^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \cdots p_r^{\alpha_r}\right), & \alpha_1 \leq 3 \text{ ise} \\ \dfrac{1}{2^{r+1}} \varphi(n), & \alpha_1 > 3 \text{ ise} \end{cases}$$

dir. Burada $\varphi_N(n) = \left|\Gamma_0(N) : \Gamma_{0,n}(N)\right|$ dir. ∎

Teorem 2.21. [10] $n, N \in \mathbb{N}, n|N$ ve n nin asal çarpanlarına ayrılışı $n = 2^{\alpha} p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r} q_1^{\beta_1} \cdots q_l^{\beta_l}$ olarak verilsin. Bu takdirde $1 \leq i \leq r$ için $p_i \equiv -1 \; mod \; 4$ ve $1 \leq j \leq l$ için $q_j \equiv 1 \; mod \; 4$ olmak üzere

$$\Psi_N(n) = \begin{cases} 2^l, & \alpha \leq 3 \text{ ise} \\ 2^{l+1}, & \alpha > 3 \text{ ise} \end{cases}$$

dir. Burada $\Psi_N(n) = \left|\Lambda_n(N) : \Gamma_{0,n}(N)\right|$ dir. ∎

Şimdi $G=\Gamma_0(N), H=\Lambda_n(N)$ olsun. ∞ un $\Gamma_0(N)$ altındaki yörüngesi

$$\Gamma_0(N)(\infty)=\left\{\frac{a}{bN}\middle|\ a,b\in\mathbb{Z}\right\}$$

dir. Böylece $\Gamma_0(N)$ nin transitif olarak hareket ettiği en büyük kümelerden biri

$$\widehat{\mathbb{Q}}(N):=\left\{\frac{a}{bN}\middle|\ a,b\in\mathbb{Z}\right\}$$

kümesidir.

Şimdi $\Gamma_0(N)_\infty$ sabitleyenini belirleyelim. $\begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix}\in\Gamma_0(N)$ olsun. Buradan

$$\begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} a \\ cN \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\Leftrightarrow a=1, c=0$$

bulunur. Böylece

$$\Gamma_0(N)_\infty=\left\{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\middle|\ b\in\mathbb{Z}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\rangle$$

elde edilir. Dolayısı ile

$$\left\langle\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\rangle=\Gamma_0(N)_\infty<\Lambda_n(N)<\Gamma_0(N)$$

dir.

$$v=\frac{r}{sN}, w=\frac{x}{yN}\in\widehat{\mathbb{Q}}(N)$$

olmak üzere $v=g(\infty)$ ve $w=h(\infty)$ olan $g,h\in\Gamma_0(N)$ vardır. Burada

$$g=\begin{pmatrix} r & k \\ sN & l \end{pmatrix} \text{ ve } h=\begin{pmatrix} x & m \\ yN & t \end{pmatrix}$$

formundadır.

$$\begin{aligned} v\approx w &\Leftrightarrow g^{-1}h\in\Lambda_n(N) \\ &\Leftrightarrow\begin{pmatrix} l & -k \\ -sN & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & m \\ yN & t \end{pmatrix}\in\Lambda_n(N) \\ &\Leftrightarrow\begin{pmatrix} lx-kyN & lm-kt \\ -sxN+ryN & -smN+rt \end{pmatrix}\in\Lambda_n(N) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (lx - kyN)^4 \equiv 1 \; mod \; n$$

$$\Leftrightarrow (l^2x^2)^2 \equiv 1 \; mod \; n \Leftrightarrow l^4x^4 \equiv 1 \; mod \; n$$

$\det(g) = 1$ olduğundan $lr \equiv 1 \; mod \; n$ elde edilir. Buradan $l \equiv r^{-1} \; mod \; n$ bulunur. Böylece

$$x^4 \equiv r^4 \; mod \; n$$

olur.

Sonuç olarak

$$\frac{x}{yN} \underset{n}{\approx} \frac{r}{sN} \Leftrightarrow x^4 \equiv r^4 \; mod \; n$$

dir. Kısa olması açısından bazı durumlarda

$$\frac{x}{yN} \underset{n}{\approx} \frac{r}{sN} \text{ yerine } x \underset{n}{\approx} r$$

kullanacağız.

$\Phi_N(n)$ ile $\underset{n}{\approx}$ invaryant denklik bağıntısı altındaki blokların sayısını gösterelim. İmprimitif hareketten dolayı $\Phi_N(n) := |\Gamma_0(N) : \Lambda_n(N)|$ dir. Öncelikle $\Phi_N(n)$ nin çarpımsal olduğunu gösterelim. Daha sonra da $\Phi_N(n)$ fonksiyonunu yani indeksi bulalım.

Önerme 2.22. $n|N$ olmak üzere $\Phi_N(n)$ fonksiyonu çarpımsaldır.

İspat. $n \in \mathbb{N}$ ve $n = k \cdot l, (k, l) = 1, k, l > 1$ olsun.

$$a \underset{n}{\approx} b \text{ ise } a^4 \equiv b^4 \; mod \; n, n = k \cdot l \text{ ve } (k, l) = 1$$

olduğundan

$$a^4 \equiv b^4 \; mod \; k \quad \text{ve} \quad a^4 \equiv b^4 \; mod \; l$$

dir. Böylece $a \underset{k}{\approx} b$ ve $a \underset{l}{\approx} b$ dir.

Şimdi tersine $a_1 \underset{k}{\approx} b_1$ ve $a_2 \underset{l}{\approx} b_2$ olarak alalım ve $a \underset{n}{\approx} b$ olduğunu gösterelim.

$(k, l) = 1$ olduğundan

$$a_1 + kx_1 = a_2 + ly_1 \text{ ve } b_1 + kx_2 = b_2 + ly_2$$

olacak şekilde $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$ mevcuttur. Buradan

$$a_1 + kx_1 \underset{n=kl}{\approx} b_1 + kx_2$$

elde edilir. Böylece

$$\Phi_N(n) = \Phi_N(k) \cdot \Phi_N(l)$$

dir. ■

Önerme 2.23. $N = 2^\alpha, n = 2^\beta, \beta < \alpha$ olsun. Bu takdirde φ Euler fonksiyonu olmak üzere

$$\Phi_{2^\alpha}(2^\beta) = \begin{cases} 1, & \beta \leq 3 \ ise, \\ \dfrac{\varphi(2^\beta)}{8}, & \beta > 3 \ ise, \end{cases}$$

dir.

İspat. (i) $\beta \leq 3$ olsun. Bütün $\frac{a}{b2^\alpha} \in \widehat{\mathbb{Q}}(N)$ sayılarının $\underset{2^\beta}{\approx}$ altında denk olduklarını gösterelim.

Bunun için

$$\frac{a}{b2^\alpha} \approx \frac{c}{d2^\alpha} \Leftrightarrow a^4 \equiv c^4 \ mod \ 2^\beta$$

yani $a^4 \equiv c^4 \ mod \ 2^\beta$ olduğunu gösterelim.

$(a, b2^\alpha) = 1$ ve $(c, d2^\alpha) = 1$ olduğundan a ve c tek sayılardır. Buradan

$a = 2a_0 - 1$ ve $c = 2c_0 - 1$ olacak şekilde $a_0, c_0 \in \mathbb{N}$

sayıları vardır. Buradan

$$\begin{aligned}
a^4 - c^4 &= (a^2 - c^2)(a^2 + c^2) = (a-c)(a+c)(a^2+c^2) \\
&= (2a_0 - 1 - 2c_0 + 1)(2a_0 - 1 + 2c_0 - 1)(4a_0^2 - 4a_0 + 1 + 4c_0^2 - 4c_0 + 1) \\
&= 2 \cdot (a_0 - c_0) \cdot 2 \cdot (a_0 + c_0 - 1) \cdot 2 \cdot (2a_0^2 - 2a_0 + 2c_0^2 - 2c_0 + 1) \\
&= 2^3 (a_0 - c_0)(a_0 + c_0 - 1)(2a_0^2 - 2a_0 + 2c_0^2 - 2c_0 + 1) \\
&\equiv 0 \ mod\ 2^3
\end{aligned}$$

tür. Böylece $a^4 \equiv c^4 \ mod\ 2^\beta$ dır. Yani $\beta \leq 3$ için $\Phi_{2^\alpha}(2^\beta) = 1$ olduğu elde edilir.

(ii) $\beta > 3$ olsun. Bu takdirde 2^β ile aralarında asal olan pozitif sayıların kümesi $\{1, 3, 5, \dots, 2^\beta - 1\}$ dir. Bu kümenin eleman sayısı $\varphi(2^\beta)$ dır. Şimdi

$$\frac{1}{2^\alpha}, \frac{3}{2^\alpha}, \dots, \frac{2^\beta - 1}{2^\alpha}$$

sayıları arasından $\underset{2^\beta}{\approx}$ ya göre denk olanları bulalım.

$l \in \{1, 3, \dots, 2^\beta - 1\}$ olmak üzere $l^4 \equiv (2^\beta - l)^4 \ mod\ 2^\beta$ olduğundan $l \underset{2^\beta}{\approx} 2^\beta - l$

dir. Böylece temsilciler yarıya iner ki bunların sayısı

$$\frac{\varphi(2^\beta)}{2}$$

dir. İddia ediyoruz ki

$$\frac{m}{2^\alpha}, \frac{2^{\beta-1} - m}{2^\alpha}, \frac{2^{\beta-2} - m}{2^\alpha}$$

sayıları $\underset{2^\beta}{\approx}$ bağıntısına göre denktir.

a) $m^4 \equiv (2^{\beta-1} - m)^4 \ mod\ 2^\beta$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
(2^{\beta-1} - m)^4 = \left((2^{\beta-1} - m)^2\right)^2 &= (2^{2\beta-2} - m \cdot 2^\beta + m^2)^2 \\
&= 2^{4\beta-4} + m^2 \cdot 2^{2\beta} + m^4 - m \cdot 2^{3\beta-1} + m^2 \cdot 2^{2\beta-1} - m^3 \cdot 2^{\beta+1} \\
&= 2^\beta (2^{3\beta-4} + m^2 \cdot 2^\beta - m \cdot 2^{2\beta-1} + m^2 \cdot 2^{\beta-1} - 2m^3) + m^4 \\
&\equiv m^4 \ mod\ 2^\beta
\end{aligned}$$

olur.

b) $m^4 \equiv \left(2^{\beta-2} - m\right)^4 \; mod \; 2^\beta$ olduğunu gösterelim.

$$\left(2^{\beta-2} - m\right)^4 = \left(\left(2^{\beta-2} - m\right)^2\right)^2 = \left(2^{2\beta-4} - m \cdot 2^{\beta-1} + m^2\right)^2$$

$$= 2^{4\beta-8} + m^2 \cdot 2^{2\beta-2} + m^4 - m \cdot 2^{3\beta-4} + m^2 \cdot 2^{2\beta-3} - m^3 \cdot 2^\beta$$

$$= 2^\beta\left(2^{3\beta-8} + m^2 \cdot 2^{\beta-2} - m \cdot 2^{2\beta-4} + m^2 \cdot 2^{\beta-3} - m^3\right) + m^4$$

$$\equiv m^4 \; mod \; 2^\beta$$

olur.

(a) ve (b) den

$$\frac{m}{2^\alpha} \underset{2^\beta}{\approx} \frac{2^{\beta-1} - m}{2^\alpha} \underset{2^\beta}{\approx} \frac{2^{\beta-2} - m}{2^\alpha}$$

elde edilir. Böylece temsilciler

$$\frac{1}{2^\alpha}, \frac{3}{2^\alpha}, \dots, \frac{2^{\beta-3} - 1}{2^\alpha}$$

olup bunların sayısı $\frac{\varphi(2^\beta)}{8}$ dir. Şimdi bunların hepsinin farklı sınıflarda olduğunu gösterelim. Kolaylık olması açısından paydaları atalım. Bu durumda

$$1, 3, \dots, 2^{\beta-3} - 1$$

kosetleri elde edilir. Şimdi bunlardan herhangi ikisinin $\underset{2^\beta}{\approx}$ ya göre denk olmadığını gösterelim.

Varsayalım ki

$$m, k \leq 2^{\beta-3} - 1 \text{ ve } 2^{\beta-3} - m \underset{2^\beta}{\approx} 2^{\beta-3} - k$$

olsun. Buradan

$$\left(2^{\beta-3} - m\right)^4 \equiv \left(2^{\beta-3} - k\right)^4 \; mod \; 2^\beta \Longrightarrow m^4 \equiv k^4 \; mod \; 2^\beta$$

olur. Böylece

$$m^4 - k^4 \equiv 0 \; mod \; 2^\beta \Longrightarrow (m-k)(m+k)(m^2+k^2) \equiv 0 \; mod \; 2^\beta$$

elde edilir. Ayrıca $2|\ m^2+k^2$ olduğundan

$$(m-k)(m+k) \equiv 0\ mod\ 2^{\beta}, 2||(m-k, m+k)$$

bulunur. Buradan ise $2|m-k$ ve $2^{\beta-2}|m+k$ dır. Ancak

$$m+k \leq 2^{\beta-3}-1+2^{\beta-3}-1 = 2^{\beta-2}-2$$

olduğundan $2^{\beta-2}|m+k$ olamaz. Böylece $m-k=0$ dır. Yani $m=k$ dır. Sonuç olarak

$$\frac{1}{2^{\alpha}}, \frac{3}{2^{\alpha}}, \dots, \frac{2^{\beta-3}-1}{2^{\alpha}}$$

sayıları birbirinden farklı olan yan sınıf temsilcileridir. Böylece $\beta > 3$ ise

$$\Phi_{2^{\alpha}}\left(2^{\beta}\right) = \frac{\varphi\left(2^{\beta}\right)}{8}$$

dir. ■

Önerme 2.24. $p \geq 3, p \equiv -1\ mod\ 4, p$ asal, $N = p^{\alpha}, n = p^{\beta}, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$ olsun. Bu takdirde φ Euler fonksiyonu olmak üzere

$$\Phi_{p^{\alpha}}\left(p^{\beta}\right) = \frac{\varphi\left(p^{\beta}\right)}{2}$$

dir.

İspat. p^{β} dan küçük ve p ile aralarında asal olan $1, 2, \dots, p-1, \dots, p^{\beta}-1$ sayılarını göz önüne alalım. Açık olarak

$$1 \underset{p^{\beta}}{\approx} p^{\beta}-1, 2 \underset{p^{\beta}}{\approx} p^{\beta}-2, \dots, \frac{p^{\beta}-1}{2} \underset{p^{\beta}}{\approx} \frac{p^{\beta}+1}{2}$$

dir. Bu durumda, temsilciler

$$1, 2, \dots, p-1, \dots, \frac{p^{\beta}-1}{2}$$

olup bunların sayısı $\frac{\varphi(p^{\beta})}{2}$ dir. $p \equiv -1\ mod\ 4$ için temsilcilerin hiçbirinin birbirine denk olmadığını göstermeliyiz.

Varsayalım ki

$$1 \leq a, b \leq \frac{p^\beta - 1}{2} \text{ ve } a^4 \equiv b^4 \; mod \; p^\beta$$

olsun. Bu durumda

$$(a^2 - b^2)(a^2 + b^2) \equiv 0 \; mod \; p^\beta$$

olur. Böylece

$$p^\beta \big| \; a^2 - b^2 \text{ veya } p^\beta \big| a^2 + b^2$$

dır.

- $a^2 + b^2 \equiv 0 \; mod \; p^\beta$ ise $a^2 \equiv -b^2 \; mod \; p^\beta$ dır. Öte yandan

  $\left(b, p^\beta\right) = 1$ olduğundan $kb \equiv 1 \; mod \; p^\beta$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}$ vardır.

Buradan

$$b \equiv k^{-1} \; mod \; p^\beta \Longrightarrow a^2 \equiv -k^{-2} \; mod \; p^\beta \Longrightarrow (ak)^2 \equiv -1 \; mod \; p^\beta$$

olur. Böylece $\left(-\frac{1}{p}\right) = 1$ olup bu durum ancak $p \equiv 1 \; mod \; 4$ ile mümkündür. Bu çelişki ile $a^2 + b^2 \equiv 0 \; mod \; p^\beta$ olamayacağı elde edilir.

- $a^2 - b^2 \equiv 0 \; mod \; p^\beta$ ise $(a - b)(a + b) \equiv 0 \; mod \; p^\beta$ dır. Buradan

$$a - b \equiv 0 \; mod \; p^\beta \text{ veya } a + b \equiv 0 \; mod \; p^\beta$$

elde edilir.

$$a, b \leq \frac{p^\beta - 1}{2} \text{ olduğundan } a + b < p^\beta \text{ ve } a - b < p^\beta$$

dır. $a \neq b$ ise iki durum da söz konusu değildir. Böylece

$$p \equiv -1 \; mod \; 4 \text{ ve } 1 < a, b \leq \frac{p^\beta - 1}{2} \text{ ise } a^4 \not\equiv b^4 \; mod \; p^\beta$$

dır. Yani $\Phi_{p^\alpha}\left(p^\beta\right) = \frac{\varphi(p^\beta)}{2}$ dir. ■

Önerme 2.25. $p \geq 5, p \equiv 1 \; mod \; 4, p$ asal, $N = p^{\alpha}, n = p^{\beta}, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$ olsun. Bu takdirde φ Euler fonksiyonu olmak üzere

$$\Phi_{p^{\alpha}}(p^{\beta}) = \frac{\varphi(p^{\beta})}{4}$$

dir.

İspat. Teorem 2.20 ve Teorem 2.21 gereği

$$\Phi_{p^{\alpha}}(p^{\beta}) = \frac{\varphi(p^{\beta})}{4}$$

elde edilir.■

Teorem 2.26. $n, N \in \mathbb{Z}^{+}, n|N$, $n = 2^{\gamma} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}, 1 \leq i \leq r$ için $p_i \equiv -1 \; mod \; 4$ ve φ Euler fonksiyonu olmak üzere

$$\Phi_N(n) = \begin{cases} \frac{1}{2^r}\varphi\left(p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}\right), & \gamma \leq 3 \text{ ise} \\ \frac{1}{2^{r+3}}\varphi(n), & \gamma > 3 \text{ ise} \end{cases}$$

dir. Burada $\Phi_N(n) = |\Gamma_0(N) \colon \Lambda_n(N)|$ dir. ■

İspat. Önerme 2.23 den

$$\Phi_{2^{\alpha}}(2^{\beta}) = \begin{cases} 1, & \beta \leq 3 \;\; ise, \\ \frac{\varphi(2^{\beta})}{8}, & \beta > 3 \; ise, \end{cases}$$

ve Önerme 2.24 ile

$$\Phi_N(p^{\beta}) = \frac{\varphi(p^{\beta})}{2}$$

dir. Ayrıca Önerme 2.22 gereği $\Phi_N(n)$ fonksiyonu çarpımsal olduğundan

$$\Phi_N(n) = \begin{cases} \frac{1}{2^r}\varphi\left(p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}\right), & \gamma \leq 3 \text{ ise} \\ \frac{1}{2^{r+3}}\varphi(n), & \gamma > 3 \text{ ise} \end{cases}$$

elde edilir. ■

2.4.1. Bazı Modüler Alt Grupların İmprimitif Hareketi Yardımıyla Kongrüans Denklemlerin Çözümleri

$p, p \equiv 1\, mod\, 4$ özelliğine sahip bir asal sayı ve $\beta \in \mathbb{N}$ olsun. Bu çalışmada, p ile aralarında asal olan her a tam sayısı için modüler alt grupların özel bir imprimitif transitif hareketi kullanılarak $a^2 + x^2 \equiv 0\, mod\, p^\beta$ kongrüans denklemini sağlayan x tamsayı çözümleri bulunacaktır.

Önerme 2.27. $\beta \leq \alpha$ olmak üzere $\left|\Lambda_{p^\beta}(p^\alpha): \Gamma_{0,p^\beta}(p^\alpha)\right|$ indeksi 2 ye eşittir.

İspat. İlk önce $\Gamma_{0,p^\beta}(p^\alpha) \lneqq \Lambda_{p^\beta}(p^\alpha)$ olduğunu gösterelim.

$p \equiv 1\, mod\, 4$ olduğundan $x^2 \equiv -1\, mod\, p^\alpha$ olacak şekilde bir $x \in \mathbb{Z}$ mevcuttur. Ayrıca

$(x, p^\alpha) = 1$ eşitliğinden $xx_0 - y_0 p^\alpha = 1$ olacak şekilde $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ vardır.

Böylece

$$\begin{pmatrix} x & y_0 \\ p^\alpha & x_0 \end{pmatrix} \in \Lambda_{p^\beta}(p^\alpha) \backslash \Gamma_{0,p^\beta}(p^\alpha)$$

bulunur.

Şimdi $\left|\Lambda_{p^\beta}(p^\alpha): \Gamma_{0,p^\beta}(p^\alpha)\right| = 2$ olduğunu gösterelim. Bunun için

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ cp^\alpha & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} k & l \\ mp^\alpha & u \end{pmatrix} \in \Lambda_{p^\beta}(p^\alpha) \backslash \Gamma_{0,p^\beta}(p^\alpha)$$

olsun. Buradan

$$AB^{-1} = \begin{pmatrix} au - bmp^\alpha & * \\ * & * \end{pmatrix}, \qquad (au - bmp^\alpha)^2 \equiv a^2u^2\, mod\, p^\beta$$

elde edilir. Ayrıca $a^2 \equiv d^2\, mod\, p^\beta$ olduğundan $p^\beta | (a-d)(a+d)$ dir. Öte yandan

$$A \notin \Gamma_{0,p^\beta}(p^\alpha) \Rightarrow a \not\equiv d\, mod\, p^\beta$$

dır. Buradan $p^\beta | a + d$ elde edilir. Böylece $a \equiv -d\, mod\, p^\beta$ bulunur.

Benzer şekilde $k \equiv -u\, mod\, p^\beta$ elde ederiz. Ayrıca

$ad \equiv 1\, mod\, p^\beta$ ve $ku \equiv 1\, mod\, p^\beta$

olduğundan

$$k^2 \equiv -1 \; mod \; p^\beta, a^2 \equiv -1 \; mod \; p^\beta$$

bulunur. Öte yandan

$$a^2 \equiv d^2 \; mod \; p^\beta, k^2 \equiv u^2 \; mod \; p^\beta \Longrightarrow a^2u^2 \equiv a^2k^2 \equiv (-1)(-1) \equiv 1 \; mod \; p^\beta$$

dır. Sonuç olarak

$$AB^{-1} \in \Gamma_{0,p^\beta}(p^\alpha)$$

elde edilir. Bu $\left|\Lambda_{p^\beta}(p^\alpha) : \Gamma_{0,p^\beta}(p^\alpha)\right|$ indeksinin 2 olduğunu verir.■

Teorem 1.50 de X kümesi olarak $\mathbb{Q}_{p^\alpha} := \left\{\frac{a}{bp^\alpha}\right\}$, G grubu olarak $\Gamma_0(p^\alpha)$, H alt grubu olarak $\Gamma_{0,p^\beta}(p^\alpha)$ ve G_α olarak $\Gamma_{\underset{\infty}{0}}(p^\alpha) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ sabitleyeni alınırsa

$$\Gamma_{\underset{\infty}{0}}(p^\alpha) \lneqq \Gamma_{0,p^\beta}(p^\alpha) \lneqq \Gamma_0(p^\alpha)$$

olduğu kolaylıkla görülür. Buradan Önerme 2.28 elde edilir.

Önerme 2.28. $\left(\Gamma_0(p^\alpha), \mathbb{Q}_{p^\alpha}\right)$ bir imprimitif transitif permütasyon grubu ve φ Euler fonksiyonu olmak üzere

$$\left|\Gamma_0(p^\alpha) : \Gamma_{0,p^\beta}(p^\alpha)\right| = \frac{\varphi(p^\beta)}{2}$$

dir.

İspat. ∞ un $\Gamma_0(p^\alpha)$ grubu altındaki yörüngesinin $\mathbb{Q}_{p^\alpha}$ kümesi olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Bu yüzden transitiflik açıktır. Buradan

her $\frac{a}{bp^\alpha} \in \mathbb{Q}_{p^\alpha}$ için $g(\infty) = \frac{a}{bp^\alpha}$ olacak şekilde bir $g \in \Gamma_0(p^\alpha)$

vardır. Böylece

$$g = \begin{pmatrix} a & k \\ bp^\alpha & l \end{pmatrix}$$

dir.

$\frac{a}{bp^\alpha}, \frac{x}{yp^\alpha} \in \mathbb{Q}_{p^\alpha}$ olsun. Teorem 1.50 de olduğu gibi

$$\frac{a}{bp^\alpha} \approx \frac{x}{yp^\alpha} \Leftrightarrow gh^{-1} \in \Gamma_{0,p^\beta}(p^\alpha)$$

şeklinde tanımlanan bir denklik bağıntısı elde ederiz. Burada

$$h = \begin{pmatrix} x & t \\ yp^\alpha & u \end{pmatrix} \in \Gamma_0(p^\alpha)$$

dır. Böylece

$$gh^{-1} = \begin{pmatrix} au - kyp^\alpha & * \\ * & -tbp^\alpha + lx \end{pmatrix} \in \Gamma_{0,p^\beta}(p^\alpha)$$

bulunur. Buradan

$$au - kyp^\alpha \equiv lx - tbp^\alpha \; mod \; p^\beta \Longrightarrow au \equiv lx \; mod \; p^\beta$$

elde edilir. Diğer taraftan $al \equiv ux \equiv 1 \; mod \; p^\beta$ dır. Bu kongrüanslardan

$$a^2 u \equiv alx \equiv x \; mod \; p^\beta \Rightarrow a^2 ux \equiv x^2 \; mod \; p^\beta$$

elde edilir. Böylece $a^2 \equiv x^2 \; mod \; p^\beta$ dır. Sonuç olarak

$$\frac{a}{bp^\alpha} \approx \frac{x}{yp^\alpha} \Leftrightarrow a^2 \equiv x^2 \; mod \; p^\beta$$

dır. Kısaca

$$\frac{a}{bp^\alpha} \approx \frac{x}{yp^\alpha} \text{ yerine } a \approx x$$

kullanalım.

$k \geq \beta$ olmak üzere $a \approx a + p^k$ olduğundan blokların temsilcilerini $1,2, \dots, p-1, \dots, p^\beta - 1$ sayılarından elde ederiz. Buradaki temsilcilerin sayısı $\varphi(p^\beta)$ dır. Eğer l bu sayılardan biri ise $l \approx p^\beta - l$ dir. Bu, blokların sayısının $\frac{\varphi(p^\beta)}{2}$ den küçük veya eşit olduğunu gösterir. Bu nedenle temsilciler $1,2, \dots, p-1, \dots, \frac{p^\beta - 1}{2}$ den seçilebilir. Şimdi bu sayıların denk olmadıklarını gösterelim.

$$a \approx b \Longrightarrow a^2 \equiv b^2 \; mod \; p^\beta$$

dır. Buradan

$$p^\beta | (a-b)(a+b)$$

elde edilir. Öte yandan

$$(a,p) = (b,p) = 1$$

olduğundan $p|a-b$ ve $p|a+b$ olamaz. Bu yüzden

sadece $p^\beta|a-b$ veya $p^\beta|a+b$

dir. Fakat $a-b, a+b < p^\beta - 1$ olduğundan bu iki durum yine sağlanamaz. Sonuç olarak blokların sayısı

$$\frac{\varphi(p^\beta)}{2}$$

dir. ■

Teorem 2.29. $p, p \equiv 1 \; mod \; 4$ biçiminde bir asal sayı, a, p ile aralarında asal bir tamsayı ve β herhangi bir doğal sayı olsun. Bu takdirde

$$x^2 + a^2 \equiv 0 \; mod \; p^\beta$$

kongrüans denklemi $mod \; p^\beta$ ya göre tek bir x tamsayı çözümüne sahiptir.

İspat. $G = \Gamma_0(p^\alpha), H = \Lambda_{p^\beta}(p^\alpha), X = \mathbb{Q}_{p^\alpha}$ olsun. Bu takdirde Önerme 2.28 de olduğu gibi $\left(\Gamma_0(p^\alpha), \mathbb{Q}_{p^\alpha}\right)$, $\Lambda_{p^\beta}(p^\alpha)$ alt grubuna göre bir imprimitif transitif permütasyon grubudur. Ayrıca imprimitif denklik bağıntısı

$$\frac{a}{bp^\alpha} \approx \frac{x}{yp^\alpha} \Leftrightarrow a^4 \equiv x^4 \; mod \; p^\beta$$

şeklindedir. Gerçekten

$$v = \frac{x}{yp^\alpha}, w = \frac{a}{bp^\alpha} \in \widehat{\mathbb{Q}}_{p^\alpha}$$

olmak üzere, $v = g(\infty)$ ve $w = h(\infty)$ olan $g, h \in \Gamma_0(p^\alpha)$ vardır. Burada

$$g = \begin{pmatrix} x & t \\ yp^{\alpha} & u \end{pmatrix} \text{ ve } h = \begin{pmatrix} a & k \\ bp^{\alpha} & l \end{pmatrix}$$

formundadır.

$$v \approx w \Leftrightarrow g^{-1}h \in \Lambda_{p^{\beta}}(p^{\alpha})$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} u & -t \\ -yp^{\alpha} & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & k \\ bp^{\alpha} & l \end{pmatrix} \in \Lambda_{p^{\beta}}(p^{\alpha})$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} au - btp^{\alpha} & ku - lt \\ -ayp^{\alpha} + bxp^{\alpha} & -kyp^{\alpha} + lx \end{pmatrix} \in \Lambda_{p^{\beta}}(p^{\alpha})$$

$$\Leftrightarrow (au - btp^{\alpha})^4 \equiv 1 \ mod \ p^{\beta}$$

$$\Leftrightarrow (a^2u^2)^2 \equiv 1 \ mod \ p^{\beta} \Leftrightarrow a^4u^4 \equiv 1 \ mod \ p^{\beta}$$

Öte yandan $\det(g) = 1$ olduğundan

$$ux \equiv 1 \ mod \ p^{\beta}$$

elde edilir. Buradan

$$u \equiv x^{-1} \ mod \ p^{\beta}$$

bulunur. Böylece

$$a^4 \equiv x^4 \ mod \ p^{\beta}$$

olur. Sonuç olarak

$$\frac{a}{bp^{\alpha}} \approx \frac{x}{yp^{\alpha}} \Leftrightarrow a^4 \equiv x^4 \ mod \ p^{\beta}$$

dir. Kısaca

$\dfrac{a}{bp^{\alpha}} \approx \dfrac{x}{yp^{\alpha}}$ yerine $a \approx x$

kullanacağız. Dolayısı ile

$$a \approx x \Leftrightarrow a^4 \equiv x^4 \ mod \ p^{\beta} \tag{47}$$

dır. Buradan $(a,p)=1$ olduğundan $a \approx a+p^{\beta}$ olduğu kolaylıkla görülür. Böylece $1,2,\dots,p-1,\dots,p^{\beta}-1$ dizisinden elemanları p ile aralarında asal, p^{β} dan küçük olan denklik sınıflarının temsilcilerini elde ederiz. Eğer l bu dizinin elemanı ise $l \approx p^{\beta}-l$ dir. Böylece temsilciler, sayısı $\frac{\varphi(p^{\beta})}{2}$ olan $1,2,\dots,\frac{p^{\beta}-1}{2}$ dizisinden seçilebilir. Öte yandan

$$\left|\Gamma_0(p^{\alpha}):\Gamma_{0,p^{\beta}}(p^{\alpha})\right| = \left|\Gamma_0(p^{\alpha}):\Lambda_{p^{\beta}}(p^{\alpha})\right| \cdot \left|\Lambda_{p^{\beta}}(p^{\alpha}):\Gamma_{0,p^{\beta}}(p^{\alpha})\right|$$

eşitliği doğrudur. Ayrıca Önerme 2.27 ve Önerme 2.28 den

$$\left|\Gamma_0(p^{\alpha}):\Lambda_{p^{\beta}}(p^{\alpha})\right| = \frac{\varphi(p^{\beta})}{4}$$

olduğundan (47) deki bağıntının bloklarının sayısı

$$\frac{\varphi(p^{\beta})}{4}$$

tür. (47) den ise

$$p^{\beta}|(a^2-x^2)(a^2+x^2)$$

elde edilir. Fakat $p|a^2-x^2, p|a^2+x^2$ durumları sağlanmadığından

$$p^{\beta}|(a^2-x^2) \text{ veya } p^{\beta}|(a^2+x^2)$$

dir. Dolayısı ile temsilciler

$$R=\left\{1,2,\dots,\frac{p^{\beta}-1}{2}\right\}$$

kümesidir. Yani, a,x elemanları R dedir. Bu nedenle $p^{\beta} \nmid a^2-x^2$ dir. Sonuç olarak

$$p^{\beta}|a^2+x^2$$

elde edilir. Böylece

$$a \approx x \Leftrightarrow a^2+x^2 \equiv 0 \; mod \; p^{\beta}$$

dır.

R kümesindeki elemanların herhangi üçü $mod\ p^{\beta}$ ya denk değildir. Gerçekten, $a, b, c \in R$ öyle ki $a \approx b \approx c$ olsun. Bu takdirde

$$a^2 + b^2 \equiv b^2 + c^2 \equiv 0\ mod\ p^{\beta}$$

elde edilir. Böylece

$$a^2 \equiv c^2\ mod\ p^{\beta}$$

bulunur. Dolayısı ile

$p^{\beta}|a - c$ veya $p^{\beta}|a + c$

dir. Öte yandan

$a, c \leq \frac{p^{\beta}-1}{2}$ olduğundan $p^{\beta} \nmid a + c$

bulunur. Dolayısı ile $p^{\beta}|a - c$ olup buradan $a = c$ elde edilir. Bu yüzden R nin en çok iki elemanı $mod\ p^{\beta}$ ya göre denk olabilir. Blokların sayısı $\frac{\varphi(p^{\beta})}{4}$ olduğundan eğer $a \in R$ ise

$$a^2 + x^2 \equiv 0\ mod\ p^{\beta}$$

olacak şekilde $x \in R$ vardır. Böylece eğer a, p ile aralarında asal bir tamsayı ise a, R de bir sayıya denktir. Dolayısı ile yukarıdan

$a^2 + x^2 \equiv 0\ mod\ p^{\beta}$ kongrüans denklemini sağlayan $x \in \mathbb{Z}$

mevcuttur. Teklik açıktır. ■

3. İRDELEME

Mehmet Akbaş [20] Hoare-Uzzel Teoremi yardımıyla $\hat{\Gamma}_0(N)$ nin simgesindeki sınır bileşenlerinin sayısını hesaplamıştır. Şanlı [9] $n|N$ olmak üzere $\Gamma_{0,n}(N)$ kongrüans alt grubunun $\Gamma_0(N)$ kongrüans alt grubundaki indeksini ve Büyükkaragöz [10] $\Gamma_{0,n}(N)$ grubunun $\Lambda_n(N)$ deki indeksini hesaplamıştır.

Bu çalışmada, her $N \in \mathbb{N}$ için $\hat{\Gamma}_0^2(N)$ alt grubunun, N nin tek veya $2||N$ olması durumlarında ise $\hat{\Gamma}_0^3(N)$ alt grubunun simgelerindeki sınır bileşenlerinin sayıları ve sınır bileşenlerindeki ∞ ların sayıları elde edilmiştir. Ayrıca, $\Lambda_n(N)$ nin $\Gamma_0(N)$ deki indeksi hesaplanmıştır. Bunlara ek olarak, p, $p \equiv 1 \; mod \; 4$ özelliğine sahip bir asal sayı ve a, p ile aralarında asal tamsayı olmak üzere $n = p^\beta$, $N = p^\alpha$, $\beta \leq \alpha$ alındığında $\Gamma_{0,p^\beta}(p^\alpha)$, $\Lambda_{p^\beta}(p^\alpha)$ modüler alt grupları için $\left|\Lambda_{p^\beta}(p^\alpha) \colon \Gamma_{0,p^\beta}(p^\alpha)\right|$, $\left|\Gamma_0(p^\alpha) \colon \Gamma_{0,p^\beta}(p^\alpha)\right|$ indeks hesaplamaları yardımıyla $x^2 + a^2 \equiv 0 \; mod \; p^\beta$ kongrüans denkleminin $mod \; p^\beta$ ya göre tek çözüme sahip olduğu elde edilmiştir.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

1. N tek ve l, N nin asal çarpanlara ayrılışındaki asalların sayısı olmak üzere, $\hat{\Gamma}_0^2(N)$ nin simgesindeki sınır bileşenlerinin sayısının 2^{l+1} olduğu ve her bir sınır bileşeninin iki tane ∞ içerdiği elde edilmiştir. (Teorem 2.4)

2. N çift, $2||N$ ve l, N nin asal çarpanlara ayrılışındaki asalların sayısı olmak üzere, $\hat{\Gamma}_0^2(N)$ nin simgesindeki sınır bileşenlerinin sayısının 2^{l+1} olduğu ve her bir sınır bileşeninin iki tane ∞ içerdiği elde edilmiştir. (Teorem 2.5)

3. N çift, $\alpha > 1, \alpha \in \mathbb{Z}$ için $2^{\alpha}||N$ ve l, N nin asal çarpanlara ayrılışındaki tek asalların sayısı olmak üzere, $\hat{\Gamma}_0^2(N)$ nin simgesindeki sınır bileşenlerinin sayısının 2^{l} olduğu ve her bir sınır bileşeninin dört tane ∞ içerdiği elde edilmiştir. (Teorem 2.6)

4. N tek ve r, N nin asal çarpanlara ayrılışındaki asalların sayısı olmak üzere, $\hat{\Gamma}_0^3(N)$ nin simgesindeki sınır bileşenlerinin sayısının 2^{r-1} olduğu ve her bir sınır bileşeninin iki tane ∞ içerdiği elde edilmiştir. (Teorem 2.19.I)

5. N çift, $2||N$ ve r, N nin asal çarpanlara ayrılışındaki asalların sayısı olmak üzere, $\hat{\Gamma}_0^3(N)$ nin simgesindeki sınır bileşenlerinin sayısının 2^{r-2} olduğu ve her bir sınır bileşeninin dört tane ∞ içerdiği elde edilmiştir. (Teorem 2.19.II)

6. $n|N$ ve $\Phi_N(n) = |\Gamma_0(N): \Lambda_n(N)|$ olmak üzere $\Phi_N(n)$ nin çarpımsal bir fonksiyon olduğu gösterildi. (Önerme 2.22)

7. $n, N \in \mathbb{Z}^+, n|N$ ve $n = 2^{\gamma} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}, 1 \leq i \leq r$ için $p_i \equiv -1 \; mod \; 4$ olmak üzere $\Phi_N(n) = |\Gamma_0(N): \Lambda_n(N)|$ fonksiyonu belirlendi. (Teorem 2.26)

8. $p, p \equiv 1 \; mod \; 4$ biçiminde bir asal sayı, a, p ile aralarında asal tamsayı ve $\beta \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x^2 + a^2 \equiv 0 \; mod \; p^{\beta}$ kongrüans denkleminin $mod \; p^{\beta}$ ya göre tek bir x tamsayı çözümüne sahip olduğu elde edildi. (Teorem 2.29)

5. ÖNERİLER

$\hat{\Gamma}_0^3(N)$'nin simgesindeki sınır bileşenlerinin sayısı hesaplanırken N nin çift olması durumunda $2||N$ için hesaplamalar yapılmıştır. $\alpha \in \mathbb{Z}, \alpha \geq 2$ olmak üzere $2^{\alpha}||N$ için sınır bileşenlerinin sayısı hesaplanabilir.

6. KAYNAKLAR

1. Schoeneberg, B., Elliptic Modular Functions: An Introduction, Springer-Verlang, Berlin, 1974.

2. Akbaş, M. ve Singerman, D., The Normalizer of $\Gamma_0(N)$ in $PSL(2,\mathbb{R})$, Glasgow Mathematical Journal, 32 (1990) 317-327.

3. Jones, G.A., Singerman, D. ve Wicks, K., The Modular Group and Generalized Farey Graphs, London Mathematical Lecture Note Series, 160 (1991) 316-338.

4. Akbaş, M., On Suborbital Graphs for the Modular Group, Bulletin of the London Mathematical Society, 33 (2001) 647-652.

5. Kader, S., NEC Grupların Simgeleri ve Grafları, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2008.

6. Besenk, M., Simge Devirleri ve Graflar, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2009.

7. Kesicioğlu, Y., Γ^2 ve G_5 Hecke Gruplarının Alt Yörüngesel Grafları, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2011.

8. Kör, T., Bir Tip Modüler Graf ve Fibonacci Sayıları, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2012.

9. Şanlı, Z., Γ^2, Γ^3 ve Hecke Gruplarının Normalliyeni ve Graflar, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2019.

10. Büyükkaragöz, A., Genişletilmiş Modüler Grubun Bazı Alt Gruplarının Simgeleri ve Graf Bağlantıları, Doktora Tezi, Ordu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ordu, 2019.

11. Rose, J.S., A Course on Group Theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1978.

12. Rosen, K.H., Elementary Number Theory and Its Applications, Sixth Edition, Addison-Wesley, New York, 2011.

13. Macbeath, A.M., The Classification of Non-Euclidean Plane Crystallographic Groups, Canadian Journal of Mathematics, 19 (1967)1192-1205.

14. Beardon, A.F., The Geometry of Discrete Groups, Springer-Verlang, New York, 1983.

15. Jones, G.A. ve Singerman, D., Complex Functions: An Algebraic and Geometric Viewpoint, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

16. Ogg, A.P., Automorphismes des Courbes Modulaires, Seminaire Delange-Pisot, Poitou, 7 1974.

17. Rankin, R.A., Modular Forms and Functions, Cambridge University Press, Cambridge, 1977.

18. Güler, B.Ö., vd., Suborbital Graphs for the Group Γ^2, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 44 (2015) 1033-1044.

19. Singerman, D., Subgroups of Fuchsian Groups and Finite Permutation Groups, Bulletin of the London Mathematical Society, 2 (1970) 319-323.

20. Akbaş, M.,The Normalizer of Modular Subgroups, Ph.D. Thesis, Universtiy of Southampton, 1989.

ÖZGEÇMİŞ

Görele Ziya Okay İlköğretim Okulunu bitirdikten sonra Beşikdüzü İMKB Anadolu Öğretmen Lisesindeki öğrenimini tamamladı. Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik Öğretmenliğinden mezun oldu ve aynı yıl içerisinde Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümünde tezli yüksek lisansa başladı. 2013 yılında tezli yüksek lisans programını tamamladıktan sonra aynı yıl aynı enstitüde doktora programına başladı. Evli ve bir çocuk sahibi olup yabancı dili İngilizcedir.