KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ALT YÖRÜNGESEL GRAFLARIN ÖZEL KÖŞE DEĞERLERİ İLE ÖZEL SAYI DİZİLERİ ARASINDAKİ BAZI İLİŞKİLER

DOKTORA TEZİ

İbrahim GÖKCAN

TEMMUZ 2021
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ALT YÖRÜNGESEL GRAFLARIN ÖZEL KÖŞE DEĞERLERİ İLE ÖZEL SAYI DİZİLERİ ARASINDAKİ BAZI İLİŞKİLER

İbrahim GÖKCAN

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
DOKTOR (MATEMATİK)
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 18 / 06 /2021
Tezin Savunma Tarihi : 15 / 07 /2021

Tez Danışmanı :Doç. Dr. Ali Hikmet DEĞER

Trabzon 2021

ÖNSÖZ

Bu Doktora tez çalışması ile "Alt Yörüngesel Grafların Özel Köşe Değerleri İle Özel Sayı Dizileri Arasındaki Bazı İlişkiler" konusu farklı açılardan ele alınmıştır.

Doktora eğitimim süresince her zaman desteğini gördüğüm, görüş ve önerileriyle beni yönlendiren çok değerli hocam danışmanım Doç. Dr. Ali Hikmet Değer'e sonsuz saygılarımı ve şükranlarımı sunarım.

Bu zorlu eğitim süresince üzerimde emeği olan Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine ve özellikle Prof. Dr. Mehmet Akbaş'a teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim hayatım boyunca her zaman yanımda olan anne ve babama teşekkür ediyorum.

En önemli teşekkürüm ise her zaman yanımda olan, benimle birlikte üzülüp benimle birlikte sevinen eşim Sevde'ye, kızım İclal'e ve oğlum Selman'a.

İbrahim GÖKCAN

Trabzon, 2021

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Doktora Tezi olarak sunduğum Alt Yörüngesel Grafların Özel Köşe Değerleri İle Özel Sayı Dizileri Arasındaki Bazı İlişkiler" başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Doç. Dr. Ali Hikmet DEĞER'in sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 15/07/2021

İbrahim GÖKCAN

İÇİNDEKİLER

Doktora Tezi

ÖZET

ALT YÖRÜNGESEL GRAFLARIN ÖZEL KÖŞE DEĞERLERİ İLE ÖZEL SAYI DİZİLERİ ARASINDAKİ BAZI İLİŞKİLER

İbrahim GÖKCAN

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Ali Hikmet DEĞER
2021, 106 Sayfa

Bu çalışmada, Lorentz matris çarpımı kullanılarak bazı özel matrislerin $n.$ kuvvetleri elde edildi, kuadratik denklemleri ve karakteristik kökleri incelendi. Özellikle M matrisinin Lorentz matris çarpımı altında $n.$ kuvveti bulunarak klasik matris çarpımı altında elde edilen bazı özdeşliklere Lorentz matris çarpımıyla yeniden ulaşıldı. Graf teorinin süreç içinde gelişimi hakkında bilgi verildi. Alt yörüngesel graflar, $G_{u,N}$, $F_{u,N}$ ve Farey grafı incelendi. $F_{u,N}$ alt yörüngesel grafında, klasik matris çarpımı altında elde edilen köşeleri Lorentz matris çarpım altında veren Lorentz matrisi elde edildi. Lorentz matrisinin Modüler grubun elemanı olmadığı görüldü. $k = 3$ için elde edilen A^n matrisinde $F_n \cong \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$ özdeşliği kullanılarak ilgili matris Lucas sayıları türünden yazıldı. Matrisler ve sürekli kesirler arasındaki bağıntıdan alt yörüngesel grafın köşeleri Lucas sayıları ile yazıldı. Fibonacci ve Lucas sayı dizileri türünden yazılan alt yörüngesel grafın köşeleri $(u, N) = (3,4)$, $n = 15$ için elde edilerek karşılaştırıldı ve bu köşe değerlerinin birbirine çok yakın olduğu gözlemlendi. Bununla birlikte $\frac{F_{2n}}{F_{2n+2}} = \frac{-p_n}{p_{n+1}} \cong \frac{L_n}{\alpha L_{n+1}}$ denkleminden yeni özdeşlikler elde edilerek ispatlandı. Dijkstra algoritması Farey grafına uygulanarak kaynak bir köşeden diğer köşelere minimum uzunluk ve ağaç elde edildi.

Anahtar Kelimeler: Fibonacci ve Lucas sayı dizileri, Lorentz matris çarpımı, Farey grafı, Dijkstra algoritması

PhD. Thesis

SUMMARY

SOME RELATIONS BETWEEN SPECIAL VERTEX VALUES OF SUBORBITAL GRAPHS AND SPECIAL NUMBER SEQUENCES

İbrahim GÖKCAN

Karadeniz Technical University
The Graduate Institute of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Assoc. Prof. Ali Hikmet DEĞER
2021, 106 Pages

In this study, by using Lorentz matrix multiplication, n^{th} powers of some special matrices are obtained, their quadratic equations and characteristic roots are investigated. Especially by finding n^{th} power of matrix M under Lorentz matrix multiplication, some identities obtained under classical matrix multiplication have been reached again by using Lorentz matrix multiplication. Information was given about the development of Graph theory in the process. Suborbital graphs, $G_{u,N}$, $F_{u,N}$ and Farey graphs were examined. In the $F_{u,N}$ suborbital graph, the Lorentz matrix, which gives the vertices obtained under the classical matrix multiplication under Lorentz matrix multiplication, was obtained,. It was seen that the Lorentz matrix is not a member of the Modular group. In the matrix A^n obtained for $k=3$, the relevant matrix was written in the type of Lucas numbers using the identity $F_n \cong \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$. From the relation between matrices and continuous fractions, the vertices of suborbital graph were written with Lucas numbers. The vertices of suborbital graph obtained for $(u,N)=(3,4)$, $n=15$ written in the form of the Fibonacci and Lucas number sequences types were compared and it was observed that the values of vertices are very close to each other. However, new identities were obtained from the equation $\frac{F_{2n}}{F_{2n+2}} = \frac{-p_n}{p_{n+1}} \cong \frac{L_n}{\alpha L_{n+1}}$ and proved. Dijkstra algorithm was applied to the Farey graph and the minimum length from a source vertex to the other vertices and a tree were obtained.

Key Words: Fibonacci and Lucas number sequences, Lorentz matrix multiplication, Farey graph, Dijkstra algorithm

ŞEKİLLER DİZİNİ

TABLOLAR (ÇİZELGELER) DİZİNİ

Sayfa No

SEMBOLLER DİZİNİ

$\mathbb{H}$	: Hiperbolik üst yarı düzlem
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\widehat{\mathbb{Q}}$	: Genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi
Γ	: Modüler grup
$\Gamma_0(N)$	: Modüler grubun bir denklik alt grubu
$\Gamma_1(N)$	: Modüler grubun bir denklik alt grubu
$\Gamma_0^+(N)$	: Modüler grubun bir alt grubu
G_α	: Bir $\alpha \in \Omega$ köşesinin sabitleyeni
$\approx$	: Denklik bağıntısı
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\overline{\mathbb{R}}$	: Genişletilmiş reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	: n −boyutlu reel uzay
∞	: Sonsuz
$PSL(2,\mathbb{R})$	: Reel katsayılı lineer kesirli dönüşümler grubu
F_n	: Fibonacci dizisinin n. terimi
L_n	: Lucas dizisinin n. terimi
δ_{ij}	: Kronecker deltası
R_n^m	: $m \times n$ tipindeki matrislerin kümesi
$\cdot_L$	: Lorentz matris çarpımı
$\langle A_i, B^j \rangle_L$	: $A._L B$ nin (i,j). iç çarpımı
L_n^m	: Lorentz matris çarpımı uygulanmış R_n^m kümeleri
A^T	: $A \in L_n^m$ matrisinin transpozu
$G_{u,N}$	: $G(\infty, v)$ alt yörüngesel grafı
$F_{u,N}$	: Köşeleri $[\infty]$ bloğundan oluşan $G_{u,N}$'nin alt grafı
$\approx_n$	: $\Gamma_0(N)$ nin $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde indirgenmiş Γ-invaryant denklik bağıntısı
$[\infty]$	: Sonsuz bloğu
$\cong$	: Yaklaşık değer
$M\ddot{o}b$	: Möbiüs dönüşümleri grubu
$M\ddot{o}b^+$	: Pozitif Möbiüs dönüşümleri grubu

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Bu tez çalışmasında temel olarak irdelenen konulardan biri Fibonacci ve Lucas sayı dizileri ve ilgili kavramlardır. Ortaçağda, 1200' lü yıllarda Leonardo Fibonacci tarafından Liber Abaci adlı çalışmasıyla Avrupa'ya taşınan ve onun adıyla anılan 1,1,2,3,5,8,13,... sayı dizisi, bugün olduğu gibi geçmişte de çalışılmış ve doğanın mükemmel işleyişinin, matematiksel sayı oranlarının vb. olgu ve kavramların Fibonacci sayı dizisi ve oranlarıyla ilişkisi bulunmuştur. Benzer olgu ve kavramlar 1800'lü yıllarda 1,3,4,7,11,… olarak bilinen Lucas sayı dizisi ve oranları için de ortaya konulmuştur. Fibonacci ve Lucas sayı dizileri ve bu dizilerin terimlerinin sayısal değerleri arasındaki bazı ilişkiler ve sürekli kesirlerin matris bağlantılarının da kullanılmasıyla günümüzde Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin çalışma alanı genişlemiştir.

Fibonacci ve Lucas sayı dizileri ve ilgili çalışmalar için Alfred (1965), Bicknell ve Hoggatt (1973) ve Koshy (2001) çalışmaları incelenebilir.

Fibonacci ve Lucas sayı dizileri ve ilgili kavramlar matematikte yoğun bir şekilde çalışılmakta ve çeşitli alt disiplinlerle ilişkilendirilmektedir. Bunlardan biri de Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin terimleri ile oluşturulan matrislerdir. Bu matrislerin klasik matris işlemleri altında $n.$ kuvvetleri alınarak çok sayıda özdeşlik elde edildi. Örneğin, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisinin klasik matris çarpımı altında $n.$ kuvveti $Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ olarak bulunur. Buradan, $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ determinantı elde edilir. $Q^mQ^n = Q^{m+n}$ eşitliğinden Fibonacci sayı dizisi ile ilişkili çok sayıda özdeşlik elde edilir. Farklı matrislerin $n.$ kuvvetleri yardımıyla benzer şekilde Lucas, Pell vb. sayı dizileriyle ilişkili özdeşlikler elde edilir. Fibonacci ve Pell dizilerinin terimleri ile oluşturulan matrislerin $n.$ kuvvetleri ile elde edilen özdeşlikler, dizi toplamları ve genelleştirilmiş dizilerle ilgili Ho vd. (2014) incelenebilir. Bu elde edilen özdeşliklerden bazıları sadece bir sayı dizisinin terimlerinden oluşmakta ancak bazı özdeşliklerde ise Fibonacci ve Lucas sayı dizileri gibi birden fazla sayı dizisinin terimleri aynı anda yer almaktadır. Burada elde edilen özdeşliklerin bazıları şunlardır:

i) $F_mF_n - F_{m+k}F_{n-k} = (-1)^{n-k}F_{m+k-n}F_k$

ii) $F_n = F_m F_{n-m+1} + F_{m-1} F_{n-m}$

iii) $L_n = L_m F_{n-m+1} + L_{m-1} F_{n-m}$

iv) $L_{2m} L_{2n} = 5L_{m+n}^2 + F_{m-n}^2$

v) $L_{4n} = 5L_{2n}^2 + 2$

vi) $5F_n = L_{n-1} L_{n+1} + (-1)^n$

vii) $L_n L_{n+1} = L_{2n+1} + (-1)^n$

viii) $F_{m+n} = F_m L_n - (-1)^n F_{m-n}$

ix) $F_m L_n + F_n L_m = 2F_{m+n}$

x) $L_{m+n}^2 - L_{m-n}^2 = 5L_{2m} F_{2n}$

Bu çalışmada $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ve $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ matrislerinin klasik matris çarpımı altında n. kuvvetleri, kuadratik denklemleri ve karakteristik kökleri incelenerek farklı sonuçlar alınacaktır.

Gündoğan ve Keçilioğlu (2006) tarafından Lorentz matris çarpımı tanımlandı. Bu çalışmada Lorentz matris çarpımı kullanılarak Q, M ve R matrislerinin n. kuvvetleri, kuadratik denklemleri ve karakteristik kökleride incelenecektir. Buna ilave olarak matrislerin n. kuvvetleri Lorenz matris çarpımı altında genelleştirilmiş matris türünden yazılmaya çalışılarak, özdeşlikler elde edilmeye çalışılacaktır.

Çalışmamızda Graf teori ve elemanları önemli yer teşkil etmektedir. Graf teorinin başlangıcı neredeyse tüm Graf teori kitaplarının girişinde Beyaz Rusya (Prusya)'da bulunan Kaliningrad (Königsberg) kasabasından geçen Pregel nehri üzerinde kurulu yedi köprüden insanların belirli bir kurala göre geçme denemelerine dayandırılır. Bu durum İsviçreli matematikçi Euler (1707-1783) tarafından 1736 tarihli çalışması ile literatüre kazandırılmıştır. Ancak ilk graf örnekleri Pisagor ve öğrencilerine kadar geri gitmektedir. Pisagorcular beş adet düzgün cisim olduğunu kabul ettiler. Bu beş düzgün cismin açılması sonucu graf teorinin elemanları olan köşeler ve köşeleri birleştiren kenarlar oluşur (Cangül, 2017).

Daha önce yapılan çalışmalarda Graf teori Hiperbolik geometri üzerinde çalışılmıştır. Bilindiği üzere Hiperbolik geometri Eliptik geometri gibi Öklid olmayan geometri örneklerindendir. İlkçağlardan itibaren matematikçiler Öklid postulatları üzerinde yoğunlaşmışlardır. Özellikle 5. postulatın anlaşılması ve ispatlanması uzun yıllar almıştır. Bu postulata göre birbirine paralel olmayan iki doğruyu kesen bir doğru çizildiğinde eğer bu çizilen doğrunun başlangıçta var olan ve birbirine paralel olamayan doğruları kestiği noktalarda aynı yönlü dik açıdan küçük iki açı oluşuyorsa başlangıçta çizilen ve birbirine paralel olmayan bu doğruların sonsuzda bir yerde kesişmesi gerekirdi. Bir üçgen oluşacağı için iç açıları toplamı 2 dik açı yani $180°$ olması gerekirdi. Gauss (1777-1855), Riemann (1826-1866) ve Poincaré (1854-1912) gibi matematikçilerin cesur çalışmaları sonucu iç açıları toplamı 180° olması gerekmeyen manifoldlar elde edildi. Bu geometri Öklid olmayan olarak tanımlandı. Öklid olmayan geometriye örnek olarak küre verilebilir. Küreyi merkezden çaptan ikiye böldüğümüzü düşünelim. Küre üst ve alt yarım küre olmak üzere ikiye ayrılır. Üst yarım küredeki tüm tanım ve işlemler alt yarım küre içinde geçerlidir. Özel olarak üst yarım küre $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}: Im(z) > 0\}$ Hiperbolik düzlem olarak isimlendirilmiştir. $\mathbb{H}$'de uygulama alanı bulan Graf teorinin elemanları Öklid olmayan geometride tanımlandığı şekliyle $\overline{\mathbb{R}}$' ye dik doğrular ve merkezi $\overline{\mathbb{R}}$ üzerinde olan yarı doğrulardır.

Öklid olmayan geometri üzerine çalışmalar 19. yüzyılda da devam etti. 19. yüzyılın sonlarına doğru, ilk defa Henry Poincaré ayrık gruplar teorisi için temel oluşturan bazı önemli sonuçlara ulaştı ve bunlar Eliptik fonksiyonlar teorisinin genelleştirilmesinde kullanıldı. Birçok bilim adamı, Henry Poincaré tarafından sistematik olarak geliştirilen ve Fuchsian gruplar olarak isimlendirilen ayrık gruplar ile sol invaryant fonksiyonlar üzerine çalışmalar yaptı. 19. yüzyılda invaryant teori ve Öklid olmayan geometrinin keşfiyle, lineer kesirli dönüşüm grupları özel bir önem kazandı ve bu gruplar topolojik grup yapısına uygun olduğundan analitik ve cebirsel metodlarla yoğun bir şekilde çalışıldı. Eliptik eğrilerdeki, integral kuadratik formlardaki ve Eliptik Modüler fonksiyonlardaki öneminden dolayı, Γ Modüler grubunun $\Gamma(N), \Gamma_0(N), \Gamma_1(N)$ gibi denk alt grupları yoğun bir şekilde çalışıldı. 1637 yılında Pierre de Fermat'ın ispatladığı son teoreminde önemli bir rol oynayan Γ Modüler grubunun denk alt grupları son yıllarda alan uzmanlarının dikkatini çekerek daha çok çalışılır hale geldi (Beşenk, 2017).

Γ Modüler grubu ve denk alt grupların daha iyi tanımlamasına yönelik çalışma yapılmıştır. Beşenk'in (2017) çalışmasında amaç, 1970'ler den itibaren önem kazanan ve birçok çalışmaya konu olan Modüler gruplardaki denk alt grupları daha iyi tanımlamaya yardımcı olacak yeni bir metot oluşturmak ve bu metotla elde edilen denk alt grupların elemanlarının nasıl üretildiğini ortaya çıkarmaktır. Beşenk'in (2017) çalışmasında, Graf metot olarak isimlendirilen çağdaşıyla, alt graflardaki Eliptik elemanların sıraları ve bazı kapalı devrelerin uzunlukları arasındaki bağıntılar irdelenmiştir. Bu yöntemle işaret (signature) problemi alt yörüngesel graflara taşınmış olup, bu yeni bir yaklaşım elde etmek için denenmiştir.

İşaret problemi ayrık grupları tanımlama yöntemidir. Fakat bu problemi çözmek çok zordur. Aslında amaç, alt yörüngesel graf olarak isimlendirilen yeni bir metodun esaslarını oluşturmaktır (Beşenk, 2017).

Jones vd. (1991) Γ Modüler grubunun bir elemanı ile $F_{u,N}$ alt yörüngesel grafında elde edilen köşeler üzerine çalışmalar yapmıştır. Değer (2017), $(u,N)=1, u \leq N$ olmak üzere $F_{u,N}$ alt yörüngesel grafındaki her bir köşenin bir sürekli kesir yapısına sahip olduğu göstermiştir.

Bu çalışmada ise $F_{u,N}$ alt yörüngesel grafında klasik matris çarpımı altında elde edilen köşeleri Lorentz matris çarpım altında veren Lorentz matrisi elde edilecek ve Lorentz matrisinin Modüler grubun elemanı olmadığı gösterilecektir.

Değer (2017) minimal uzunluklu bir yolda herhangi bir köşenin değerini Fibonacci sayıları ile ifade etmiştir.

Bu çalışmada ise $F_n \cong \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$ özdeşliği kullanılarak $F_{u,N}$ altyörüngesel grafının köşeleri Lucas sayıları ile ifade edilecek ve buna dair özdeşliklere ulaşılacaktır.

Çalışmamızın son kısmında algoritmalar üzerine incelemeler yapılmıştır. Bir algoritma tespit edilen bir soruna yönelik çözüme götüren bir yoldur. Sonuç değildir. Önemli olan algoritmanın hızlı ve maksimum tasarrufla sorunu çözmesidir. Algoritma bir komutlar zinciridir ve çalışıyor olması önemlidir.

Graf teoride seçilen iki köşe ya da seçilen bir kaynak köşeden graftaki diğer köşelere ulaşımda zamandan ve uzunluktan maksimum tasarruf elde edilecek Dijkstra, Bellman-Ford ve Floyd algoritması gibi algoritmalar mevcutur. Graftaki minimum uzunluğu verecek algoritmanın seçimi grafa göre farklılık göstermektedir. Bir grafta verilen iki köşe arasında en verimli algoritmalardan biri Dijkstra (1959) tarafından tanımlanmıştır.

Bu çalışmada ise Dijkstra algoritması incelenecektir. Bir graf örneği üzerinde Dijkstra algoritması çalışılacak olup, Dijkstra algoritması Farey grafı örneğine uygulanacak ve algoritmanın adımları tablolar halinde verilerek ağaç elde edilmeye çalışılacaktır.

1.2. Fibonacci ve Lucas Sayı Dizileri

Fibonacci sayı dizisi $1,1,2,3,5,8,13, \ldots$ olarak bilinen dizidir. Dizinin ismi 1876 yılında Fransız matematikçi Lucas tarafından verilmiştir (Koshy, 2001). F_n dizinin n. terimini göstemek üzere $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ yinelenme bağıntısı tanımlıdır. Diğer bir deyişle ardışık iki terimin toplamı sonraki terimi verir.

Lucas sayı dizisi $1,3,4,7,11,18, \ldots$ ile bilinen dizidir. L_n dizinin n. terimini göstermek üzere Fibonacci sayı dizisinde olduğu gibi $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ yinelenme bağıntısı tanımlıdır.

1.3. k −Fibonacci Dizileri, Klasik Fibonacci ve Pell Sayı Dizileri

k pozitif bir tamsayı olmak üzere $\{F_{k,n}\}_{n\geq 0}$ k −Fibonacci dizisi, $F_{k,0} = 0$ ve $F_{k,1} = 1$ başlangıç koşullarıyla $n \geq 1$ için $F_{k,n+1} = kF_{k,n} + F_{k,n-1}$ yinelenme bağıntısı ile tanımlanabilir.

$k = 1$ alınırsa klasik Fibonacci sayı dizisi elde edilir. n dizi içinde herhangi bir elemanın sırasını göstermek üzere $F_{1,0} = 0$ ve $F_{1,1} = 1$ için $F_{1,n+1} = F_{1,n} + F_{1,n-1}$ yinelenme bağıntısından

$$F_{1,2} = F_{1,1} + F_{1,0} = 1 + 0 = 1$$
$$F_{1,3} = F_{1,2} + F_{1,1} = 1 + 1 = 2$$
$$F_{1,4} = F_{1,3} + F_{1,2} = 2 + 1 = 3$$
$$\vdots$$
$$\{F_{1,n}\}_{n\geq 0} = \{0,1,1,2,3,5,8,13, \cdots\}$$

dizisi elde edilir.

$k = 2$ alınırsa Pell sayı dizisi elde edilir. $F_{2,0} = 0$ ve $F_{2,1} = 1$ başlangıç koşullarıyla $F_{2,n+1} = 2F_{2,n} + F_{2,n-1}$ yinelenme bağıntısından

$$F_{2,2} = 2F_{2,1} + F_{2,0} = 2 \cdot 1 + 0 = 2$$
$$F_{2,3} = 2F_{2,2} + F_{2,1} = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$
$$F_{2,4} = 2F_{2,3} + F_{2,2} = 2 \cdot 5 + 2 = 12$$

$\vdots$

$$\{F_{2,n}\}_{n\geq 0} = \{0,1,2,5,12,29,70,169,\cdots\}$$

dizisi elde edilir.

Eğer k herhangi bir pozitif tamsayı ve başlangıç koşulları $F_{k,0} = 0$ ve $F_{k,1} = 1$ olarak alınırsa $F_{k,n+1} = kF_{k,n} + F_{k,n-1}$ yinelenme bağıntısı ile

$$F_{k,2} = kF_{k,1} + F_{k,0} = k \cdot 1 + 0 = k$$
$$F_{k,3} = kF_{k,2} + F_{k,1} = k \cdot k + 1 = k^2 + 1$$
$$F_{k,4} = kF_{k,3} + F_{k,2} = k \cdot (k^2 + 1) + k = k^3 + 2k$$
$$F_{k,5} = kF_{k,4} + F_{k,3} = k \cdot (k^3 + 2k) + k^2 + 1 = k^4 + 3k^2 + 1$$
$$F_{k,6} = kF_{k,5} + F_{k,4} = k \cdot (k^4 + 3k^2 + 1) + k^3 + 2k = k^5 + 4k^3 + 3k$$
$$\vdots$$
$$\{F_{k,n}\}_{n\geq 0} = \{0,1,k,k^2 + 1,k^3 + 2k,k^4 + 3k^2 + 1,k^5 + 4k^3 + 3k,\cdots\}$$

dizisi elde edilir.

Farklı yinelenme bağıntısı ve farklı başlangıç koşullarıyla farklı $\{F_{k,n}\}_{n\geq 0}$ dizileri elde edilebilir. Örneğin $F_{k,n+1} = (k^2 + 2)F_{k,n} - F_{k,n-1}$ yinelenme bağıntısı $F_{k,0} = -k$ ve $F_{k,1} = k$ başlangıç koşulları ile

$$F_{k,2} = (k^2 + 2)F_{k,1} - F_{k,0} = (k^2 + 2) \cdot k - (-k) = k^3 + 3k$$
$$F_{k,3} = (k^2 + 2)F_{k,2} - F_{k,1} = (k^2 + 2) \cdot (k^3 + 3k) - k = k^5 + 5k^3 + 5k$$
$$F_{k,4} = (k^2 + 2)F_{k,3} - F_{k,2} = (k^2 + 2) \cdot (k^5 + 5k^3 + 5k) - (k^3 + 3k)$$
$$= k^7 + 7k^5 + 14k^3 + 7k$$
$$\vdots$$
$$\{F_{k,n}\}_{n\geq 0} = \{-k,k,k^3 + 3k,k^5 + 5k^3 + 5k,k^7 + 7k^5 + 14k^3 + 7k,\cdots\}$$

dizisi elde edilir (Falcon, 2014).

1.4. Fibonacci Sayı Dizisinin Genelleştirilmesi

Genel Fibonacci sayı dizisinin başlangıç terimleri $G_1 = p$ ve $G_2 = q$ olsun. Eğer $G_n = G_{n-1} + G_{n-2}$ yinelenme bağıntısı kullanılırsa

$$G_3 = G_1 + G_2 = p + q$$
$$G_4 = G_2 + G_3 = q + p + q = p + 2q$$
$$G_5 = G_3 + G_4 = p + q + p + 2q = 2p + 3q$$
$$G_6 = G_4 + G_5 = p + 2q + 2p + 3q = 3p + 5q$$
$$\vdots$$
$$\{G_n\}_{n\geq 0, G_1=p, G_2=q} = \{p, q, p+q, p+2q, 2p+3q, 3p+5q, \cdots\}$$

dizisi elde edilir.

Dizinin terimlerinin katsayılarına bakılırsa ardışık Fibonacci sayıları olduğu görülür.

1.5. $\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{R}$ Matrislerinin $\boldsymbol{n}$. Kuvvetleri Yardımıyla Bazı Özdeşliklerin Elde Edilmesi

Bu kısımda Q matrisine yönelik n. kuvvetin bulunması ve özdeşliklerin elde edilmesi konusu çalışıldı. Benzer çalışmalar M ve R matrisleri için yapıldı.

1.5.1. $\boldsymbol{Q}$ Matrisi ve İlgili Özdeşlikler

$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ için $|Q| = -1$ olduğu görülebilir. Klasik matris çarpımı altında

$$Q^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

bulunur. Benzer şekilde devam edersek

$$Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

matrisine ulaşırız.

Teorem 1.5.1.1. (Koshy, 2001) $n \geq 1$ olduğunu kabul edelim. O halde

$$Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \text{ olur.}$$

□

Önerme 1.5.1.2. (Cassini'nin Formülü (Koshy, 2001)) $n \geq 1$ olduğunu kabul edelim. O halde $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ olur.

□

Önerme 1.5.1.3. (Koshy, 2001)

i) $F_{m+n+1} = F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n$

ii) $F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}$

iii) $F_{m+n} = F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n$

iv) $F_{m+n-1} = F_mF_n + F_{m-1}F_{n-1}$

dir.

□

Özellikle Önerme 1.5.1.3.'te $m = n$ alınırsa

i) için $F_{2n+1} = F_{n+1}F_{n+1} + F_nF_n = F_{n+1}^2 + F_n^2$ (1.2)

ii) için $F_{2n} = F_{n+1}F_n + F_nF_{n-1} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1}) = F_nL_n$ (1.3)

iv) için $F_{2n-1} = F_nF_n + F_{n-1}F_{n-1} = F_n^2 + F_{n-1}^2$ (1.4)

sonuçları elde edilir.

1.5.2. M Matrisi ve İlgili Özdeşlikler

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ için $|M| = 1$ olduğu görülebilir. Matris özellikleri kullanılarak

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_3 & F_4 \\ F_4 & F_5 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_5 & F_6 \\ F_6 & F_7 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 21 \\ 21 & 34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_7 & F_8 \\ F_8 & F_9 \end{pmatrix}$$

sonuçlarına ulaşılır. Benzer şekilde devam edersek $n \geq 1$ için

$$M^n = \begin{pmatrix} F_{2n-1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n+1} \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

matrisini buluruz.

Önerme 1.5.2.1. (Koshy, 2001) $n \geq 1$ olduğunu kabul ettiğimizde,

$M^n = \begin{pmatrix} F_{2n-1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n+1} \end{pmatrix}$ matrisini elde ederiz.

□

Şimdi bu önermeyi tümevarım metoduyla ispatlayalım:

$n = 1$ için

$$M^1 = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ F_2 & F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = M$$

olup önerme doğrudur.

Keyfi bir k sayısı için $M^k = \begin{pmatrix} F_{2k-1} & F_{2k} \\ F_{2k} & F_{2k+1} \end{pmatrix}$ matrisinin doğru olduğunu varsayalım. $k+1$ için bu durumun doğru olduğunu gösterelim:

$$M^{k+1} = \begin{pmatrix} F_{2k-1} & F_{2k} \\ F_{2k} & F_{2k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} F_{2k-1} + F_{2k} & F_{2k-1} + 2F_{2k} \\ F_{2k} + F_{2k+1} & F_{2k} + 2F_{2k+1} \end{pmatrix}$$

M^{k+1} matrisinin elemanları aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$F_{2k-1} + F_{2k} = F_{2k+1}$$
$$F_{2k-1} + 2F_{2k} = F_{2k-1} + F_{2k} + F_{2k} = F_{2k+1} + F_{2k} = F_{2k+2}$$
$$F_{2k} + F_{2k+1} = F_{2k+2}$$
$$F_{2k} + 2F_{2k+1} = F_{2k} + F_{2k+1} + F_{2k+1} = F_{2k+2} + F_{2k+1} = F_{2k+3}$$

Buradan M^{k+1} matrisi

$$M^{k+1} = \begin{pmatrix} F_{2k+1} & F_{2k+2} \\ F_{2k+2} & F_{2k+3} \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

□

Sonuç 1.5.2.2. $n \geq 1$ için $F_{2n-1}F_{2n+1} - F_{2n}^2 = 1$ olur.

□

Sonuç 1.5.2.3. m ve n birer doğal sayı olmak üzere

i) $F_{2m+2n-1} = F_{2m-1}F_{2n-1} + F_{2m}F_{2n}$

ii) $F_{2(m+n)} = F_{2m-1}F_{2n} + F_{2m}F_{2n+1}$

iii) $F_{2(m+n)} = F_{2m}F_{2n-1} + F_{2m+1}F_{2n}$

iv) $F_{2m+2n+1} = F_{2m}F_{2n} + F_{2m+1}F_{2n+1}$

dir. □

Özellikle Sonuç 1.5.2.3.'te $m = n$ alınırsa

i) için $F_{4n-1} = F_{2n-1}F_{2n-1} + F_{2n}F_{2n} = F_{2n-1}^2 + F_{2n}^2$ (1.6)

ii) için $F_{4n} = F_{2n-1}F_{2n} + F_{2n}F_{2n+1} = F_{2n}(F_{2n+1} + F_{2n-1}) = F_{2n}L_{2n}$ (1.7)

iv) için $F_{4n+1} = F_{2n}F_{2n} + F_{2n+1}F_{2n+1} = F_{2n}^2 + F_{2n+1}^2$ (1.8)

özdeşlikleri elde edilir.

1.5.3. *R* Matrisi ve İlgili Özdeşlikler

$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ için $|R| = -5$ olduğu görülebilir. Matris özellikleri kullanılarak

$$R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 5I$$

$$R^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & -5 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 5R$$

$$R^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = 5^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 5^2 I$$

$$R^5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 50 \\ 50 & -25 \end{pmatrix} = 5^2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 5^2 R$$

$$R^6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 25 & 50 \\ 50 & -25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125 & 0 \\ 0 & 125 \end{pmatrix} = 5^3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 5^3 I$$

$$R^7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 125 & 0 \\ 0 & 125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125 & 250 \\ 250 & -125 \end{pmatrix} = 5^3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 5^3 R$$

$\vdots$

matrisleri elde edilir. Buradan

$$R^{2n} = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} = 5^n\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 5^n I \quad (1.9)$$

$$R^{2n+1} = \begin{pmatrix} 5^n & 2.5^n \\ 2.5^n & -5^n \end{pmatrix} = 5^n \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 5^n R \tag{1.10}$$

olarak yazılabilir.

Sonuç 1.5.3.1. $n \geq 1$ olduğu varsayıldığında

$$R^{2n} = 5^n I$$

sonucuna ulaşılır.

İspat. Tümevarım metoduyla ispatlayalım.

$n = 1$ için

$$R^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 5I$$

olduğundan önerme doğrudur.

Bu durumun keyfi bir k sayısı için doğru olduğunu, yani

$$R^{2k} = \begin{pmatrix} 5^k & 0 \\ 0 & 5^k \end{pmatrix} = 5^k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 5^k I$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda $k + 1$ için

$$R^{2k+2} = \begin{pmatrix} 5^{k+1} & 0 \\ 0 & 5^{k+1} \end{pmatrix} = 5^{k+1}. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 5^{k+1}. I$$

olup önerme doğrudur.

□

Sonuç 1.5.3.2. $n \geq 1$ olduğunu varsaydığımızda

$$R^{2n+1} = 5^n. R$$

olur.

İspat. Tümevarım metoduyla ispatlayalım.

$n = 1$ için doğrudur.

$$R^3 = \begin{pmatrix} 5^1 & 2.5^1 \\ 2.5^1 & -5^1 \end{pmatrix} = 5^1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 5^1 \cdot R$$

olduğundan önerme doğrudur.

Bu durumun keyfi bir k sayısı için doğru olduğunu, yani

$$R^{2k+1} = \begin{pmatrix} 5^k & 2.5^k \\ 2.5^k & -5^k \end{pmatrix} = 5^k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 5^k \cdot R$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda $k + 1$ için

$$R^{2k+3} = \begin{pmatrix} 5^{k+1} & 2.5^{k+1} \\ 2.5^{k+1} & -5^{k+1} \end{pmatrix} = 5^{k+1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 5^{k+1} \cdot R$$

olup önerme doğrudur.

$\square$

1.6. Q^n, M^n, R^n Matrislerinin Kuadratik Denklemlerinin ve Karakteristik Köklerinin Bulunması

Bu kısımda Q^n matrisinin kuadratik denklemi ve karakteristik köklerinin elde edilmesine değinildi (Koshy, 2001). Benzer çalışmalar M^n ve R^n matrisleri için yapıldı.

1.6.1. Q^n Matrisinin Kuadratik Denklemi ve Karakteristik Kökleri

$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 2×2 tipinde bir matris ve I, 2×2 tipinde bir birim matristir. Karakteristik denklemi $|Q - xI| = 0$ dır. Denklemin kökleri Q nun karakteristik kökleridir. Buradan Q^n in karakteristik kökleri aşağıda verildiği şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned}|Q^n - xI| &= \left|\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1}\end{pmatrix} - x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right| \\ &= \left|\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x\end{pmatrix}\right| \\ &= \left|\begin{pmatrix} F_{n+1} - x & F_n \\ F_n & F_{n-1} - x\end{pmatrix}\right| \\ &= (F_{n+1} - x)(F_{n-1} - x) - F_n^2 \\ &= x^2 + F_{n+1}F_{n-1} - x(F_{n+1} + F_{n-1}) - F_n^2 \\ &= x^2 - x(F_{n+1} + F_{n-1}) + F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 \\ &= x^2 - xL_n + (-1)^n\end{aligned}$$

$$x^2 - xL_n + (-1)^n = 0. \tag{1.11}$$

Kuadratik denklemi kullanarak karakteristik köklere ulaşabiliriz.

$$x_{1,2} = \frac{L_n \pm \sqrt{L_n^2 - 4(-1)^n}}{2} \tag{1.12}$$

$L_n^2 - 4(-1)^n = 5F_n^2$ özdeşliği dikkate alınırsa

$$x_{1,2} = \frac{L_n \pm \sqrt{5F_n^2}}{2} = \frac{L_n \pm \sqrt{5}F_n}{2} \tag{1.13}$$

sonucuna ulaşılır. $\alpha^n - \beta^n = \sqrt{5}F_n$ ve $\alpha^n + \beta^n = L_n$ özdeşliklerinden

$$\alpha^n = \frac{L_n + \sqrt{5}F_n}{2} = x_1 \tag{1.14}$$

ve

$$\beta^n = \frac{L_n - \sqrt{5}F_n}{2} = x_2 \tag{1.15}$$

elde edilir (Koshy, 2001).

1.7. Lorentz Matris Çarpımı

Bu bölümde, çalışmamızda önemli bir yer teşkil eden Lorentz matris çarpımı ve ilgili kavramlara yer vereceğiz.

1.7.1. Lorentz Dönüşümü

Tanım 1.7.1.1. (Ratcliffe, 1994) $\theta: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineer dönüşümü bir Lorentz dönüşümdür $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ için $\theta(x) \circ \theta(y) = x \circ y$.

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \mathbb{R}^n$ tabanının ortonormal olması için gerek ve yeter şart $x_1 \circ x_1 = 1$, diğer durumlar için $x_i \circ x_j = \delta_{ij}$ olmasıdır.

Teorem 1.7.1.2. (Ratcliffe, 1994) $\theta: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineer dönüşümü bir Lorentz dönüşümdür $\Leftrightarrow$ θ lineerdir ve $\{\theta(e_1), \theta(e_2), \dots, \theta(e_n)\}$ kümesi $\mathbb{R}^n$ in bir Lorentz ortonormal tabanıdır.

□

θ'nın lineer ve $\{\theta(e_1), \theta(e_2), \dots, \theta(e_n)\}$ in $\mathbb{R}^n$ de bir Lorentz ortonormal taban olduğunu kabul edelim. θ Lorentz dönüşüm olduğundan

$$
\begin{aligned}
\theta(x) \circ \theta(y) &= \theta\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i\right) \circ \theta\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\, e_j\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \theta(\,e_i)\right) \circ \left(\sum_{j=1}^{n} y_j\, \theta(e_j)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j\, \theta(e_i) \circ \theta(e_j) \\
&= -x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = x \circ y
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir.

□

Tanım 1.7.1.3. (Ratcliffe, 1994) $x, y \in \mathbb{R}^n$ Lorentz ortogonaldir $\Leftrightarrow x \circ y = 0$.

1.7.2. Lorentz Matris Çarpımının Bazı Özellikleri

R_n^m, $m \times n$ tipindeki matrislerin kümesi ve R_p^n, $n \times p$ tipindeki matrislerin kümesi olsun. $A = (a_{ij}) \in R_n^m$ matrisinin satırları ve $B = (b_{jk}) \in R_p^n$ matrisinin sütunları arasında "$\cdot_L$" ile $A \cdot_L B = \left(-a_{i1}b_{1k} + \sum_{j=2}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)$ matris çarpımı tanımlanmıştır ve bu çarpım "Lorentz matris çarpımı" olarak adlandırılmıştır. $A \cdot_L B$, $m \times p$ tipinde bir matristir. Bunun yanında eğer A_i ile A nın i. satırı, B^j ile B nin j. sütunu olarak kabul edersek, $A \cdot_L B$ nin (i, j) iç çarpımı $\langle A_i, B^j \rangle_L$ olur. L_n^m, Lorentz matris çarpımı uygulanmış R_n^m kümelerini simgeler. $A \cdot_L B$ daha genel olarak aşağıdaki şekildeki gibi verilebilir:

$$A \cdot_L B = \begin{pmatrix} \langle A_1, B^1 \rangle_L & \cdots & \langle A_1, B^j \rangle_L \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle A_i, B^1 \rangle_L & \cdots & \langle A_i, B^j \rangle_L \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

Teorem 1.7.2.1. (Gündoğan ve Keçilioğlu, 2006) Lorentz matris çarpımı altında

i) $\forall A \in L_n^m$, $B \in L_p^n$ ve $C \in L_r^p$ için $A \cdot_L (B \cdot_L C) = (A \cdot_L B) \cdot_L C$

ii) $\forall A \in L_n^m$, $B, C \in L_p^n$ için $A \cdot_L (B + C) = A \cdot_L B + A \cdot_L C$

iii) $\forall A, B \in L_n^m$, $C \in L_p^n$ için $(A + B) \cdot_L C = A \cdot_L C + B \cdot_L C$

iv) $\forall k \in \mathbb{R}$, $A \in L_n^m$, $B \in L_p^n$ için $k(A \cdot_L B) = (kA) \cdot_L B = A \cdot_L (kB)$

eşitlikleri doğrudur.

□

Tanım 1.7.2.2. (Gündoğan ve Keçilioğlu, 2006) Lorentz birim matris $I_{\cdot L}$ olmak üzere

$$I_{\cdot L} = \begin{pmatrix} -1 & & \cdots & & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \vdots \\ & & 0 & 1 & \\ 0 & & \cdots & & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} \tag{1.17}$$

olarak gösterilebilir.

Örneğin $n = 2$ için

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ için } I \cdot_L I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot_L \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I \cdot_L I = \begin{pmatrix} \langle I_1, I^1 \rangle & \langle I_1, I^2 \rangle \\ \langle I_2, I^1 \rangle & \langle I_2, I^2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle (1,0),(1,0) \rangle & \langle (1,0),(0,1) \rangle \\ \langle (0,1),(1,0) \rangle & \langle (0,1),(0,1) \rangle \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & -1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ -0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & -0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sonucu elde edilir.

Tanım 1.7.2.3. (Gündoğan ve Keçilioğlu, 2006) A ve B, $n \times n$ tipinde birer matris olmak üzere eğer $A \cdot_L B = B \cdot_L A = I_n$ ise A ya tersinebilir denir ve $B = A^{-1}$ ile gösterilir.

Tanım 1.7.2.4. (Gündoğan ve Keçilioğlu, 2006) $A = (a_{ij}) \in L_n^m$ matrisinin transpozu A^T ile gösterilir ve $A^T = (a_{ji}) \in L_m^n$ ile gösterilir.

Tanım 1.7.2.5. (Gündoğan ve Keçilioğlu, 2006) $A \in L_n^n$ matrisi eğer L-ortogonal ise $A^{-1} = A^T$ eşitliği sağlanır.

1.7.3. Pseudo Matris Çarpımı

$m \times n$ tipindeki matrislerin kümesini $\mathbb{R}^{m,n}$ ile gösterelim. $\mathbb{R}^{m,n}$ toplama ve skalerle çarpıma göre bir reel vektör uzayıdır. "$\bullet_v$" iki matris arasındaki Pseudo matris çarpımı olmak üzere $A \bullet_v B$ matrisinin her bir elemanı (1.18) ile tanımlanan iç çarpımdır.

Pseudo matris çarpımı tanımlı matrislerin kümesi $\mathbb{R}_v^{m,n}$ ile gösterilir. $x_i = (a_{ij} \mid 1 \leq i \leq n)$, $y_j = (b_{jk} \mid 1 \leq j \leq n)$ ve $1 \leq v \leq n$ için $A \bullet_v B$ matrisinin ij. elemanı

$$\langle x, y \rangle_v = -\sum_{j=1}^{v} a_{ij} b_{jk} + \sum_{j=v+1}^{n} a_{ij} b_{jk} \tag{1.18}$$

$$= -(a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \cdots + a_{iv} b_{vk}) + a_{iv+1} b_{v+1k} + \cdots + a_{in} b_{nk}$$

olarak tanımlanır.

(1) $v = 0$ ise

$$\langle x,y\rangle_0 = -\sum_{j=1}^{0} a_{ij}b_{jk} + \sum_{j=0+1}^{n} a_{ij}b_{jk} \tag{1.19}$$
$$= a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}$$

klasik matris çarpımına denk gelir.

(2) $v = 1$ ise

$$\langle x,y\rangle_1 = -\sum_{j=1}^{1} a_{ij}b_{jk} + \sum_{j=1+1}^{n} a_{ij}b_{jk} \tag{1.20}$$
$$= -a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}$$

Lorentz matris çarpımına denk gelir (Keçilioğlu ve Gündoğan, 2017).

Teorem 1.7.3.1. (Keçilioğlu ve Gündoğan, 2017) $\forall A, B \in \mathbb{R}_v^{n,n}$ için $det(A \bullet_v B) = (-1)^v detA \cdot detB$ olur.

□

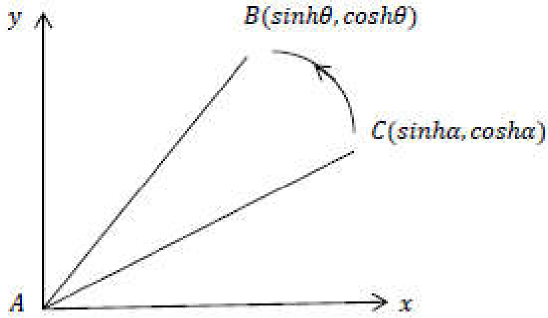
$v = 1$ alınırsa Lorentz matris çarpımındaki determinanta denk olacağından

$$det(A \bullet_{v=1} B) = -detA \cdot detB$$

bulunur.

1.7.4. İki Boyutlu Lorentz Uzayında Koordinat Dönüşümler

Bu kısımda $\mathbb{R}^2$'de iki nokta arasındaki yer değiştirme kullanılarak Lorentz matrisinin elde edilmesi konusu incelendi.



Şekil 1. $\mathbb{R}^2$'de iki nokta arasındaki rotasyon şeması

$m(CAx) = \alpha, m(BAC) = \beta,\ m(BAx) = \theta,\ B(sinh\theta, cosh\theta)$ ve $C(sinh\alpha, cosh\alpha)$ olsun. $C(x, y)$ noktası orijin etrafında saat yönünün tersine β açısıyla döndürülürse $B(x', y')$ noktasına dönüşür. C noktasının koordinatları $x = rsinh\alpha$ ve $y = rcosh\alpha$ olarak alındığından B noktasının koordinatları $x' = r\,sinh(\alpha + \beta)$ ve $y' = r\,cosh(\alpha + \beta)$ olarak yazılır.

x' ve y' nün trigonometrik açılımlarından

$$
\begin{aligned}
x' &= r \cdot sinh(\alpha + \beta) \\
&= r(sinh\alpha \cdot cosh\beta + sinh\beta \cdot cosh\alpha) \\
&= rsinh\alpha \cdot cosh\beta + rsinh\beta \cdot cosh\alpha \\
&= x \cdot cosh\beta + y \cdot sinh\beta
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
y' &= r \cdot \cosh(\alpha + \beta) \\
&= r(cosh\alpha \cdot cosh\beta + sinh\alpha \cdot sinh\beta) \\
&= rcosh\alpha \cdot cosh\beta + rsinh\alpha \cdot sinh\beta \\
&= y \cdot cosh\beta + x \cdot sinh\beta \\
&= x \cdot sinh\beta + y \cdot cosh\beta
\end{aligned}
$$

sonuçları elde edilir.

x' ve y' nün trigonometrik açılımları

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot cosh\beta + y \cdot sinh\beta \\ x \cdot sinh\beta + y \cdot cosh\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cosh\beta & sinh\beta \\ sinh\beta & cosh\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

şeklinde matris formunda tekrar yazılabilir. Eğer bu matris çarpımı Lorentz matris çarpımına göre yazılırsa

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot cosh\beta + y \cdot sinh\beta \\ x \cdot sinh\beta + y \cdot cosh\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -cosh\beta & sinh\beta \\ -sinh\beta & cosh\beta \end{pmatrix} \cdot_L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -cosh\beta & sinh\beta \\ -sinh\beta & cosh\beta \end{pmatrix} \in L_2^2$$

sonucu elde edilir (Gündoğan ve Keçilioğlu, 2006).

1.8. Hiperbolik Geometri

Geometrinin kurucusu olarak Öklid bilinir. Milattan önce 300’lü yıllarda İskenderiye’de kaleme aldığı Elements kitablarında yer verdiği postulatlar üzerine oluşturulan geometri yıllarca çalışılmıştır.

Postulat kelimesinin günümüzde aksiyom kelimesine karşılık geldiği söylenebilir. Aksiyom kelimesi ispatlanması gerekmeyen, doğru olduğunu gözlemleyebildiğimiz önermeler için kullanılır. Aksiyom kelimesi genel bir kullanıma sahip olup postulat kelimesi alana özgü bir kullanıma sahiptir.

Öklid’in ilk dört postulatının anlaşılması kolaydır. Beşinci postulatın anlaşılması ise diğerlerine göre zordur. Postulat kısaca, birbirine paralel olmayan iki doğruyu kesecek şekilde bir doğru çizdiğimizde son çizilen doğru başlangıçta var olan iki doğruyu kestiği noktalarda aynı yönlü 90°’den küçük iki açı oluşturuyorsa bu iki doğru sonsuz da bir yerde kesişirdi. Matematikçiler bu postulatı ispatlamak için çok sayıda eş tanım geliştirmişlerdir. Heath (1956) eş tanımların bir listesini vermiştir.

Bu postulatın ispatlanması matematikçileri uzun süre meşgul etti. Kesişim sonucu doğal olarak bir üçgen oluşacak ve iç açıları toplamı 180° olacaktı. Bir üçgenin iç açılarının toplamının 180° olması gerekmeyen durumlar varmıydı. Bu durumda üçgenin kenarları doğrular değil eğriler oluyordu. Bir üçgenin iç açılarının toplamının 180°den büyük olması Eliptik geometrileri, küçük olması Hiperbolik geometrileri oluşturuyordu.

Bilgi birikimli olarak ilerler. Ortaçağda İslam dünyasında Elements kitapları Arapça'ya çevrilmiş ve uzun yıllar müslümanlar tarafından çalışılmış, kitapta yer alan çalışmalara yönelik şerhler yazılmıştır. İslam dünyasında incelenen kavramlardan biride beşinci postulatta geçen sonsuz kavramıydı.

Öklid olmayan geometrilere yönelik çalışmaların uzun bir süre sonra tekrar gündeme gelmesi 18. yüzyılda olmuştur. Öklid olmayan geometrilerin kurucusu olarak Girolamo Saccheri (1667-1733) kabul edilir. Girolamo, Hiperbolik Paralel Postulatını ortaya atarak bu postulatın ilk dört postulatla çelişkisinin olduğunu ispatlamaya çalışmış ve böylece beşinci postulatın doğru olduğunu göstermeye çalışmış ancak çalışmaları sonuçsuz kalmıştır (Değer, 2011).

Batı dünyasında 18. ve 19. yüzyılda Öklid olmayan geometrilere yönelik çalışmalar artmaya başlamıştır. Özellikle Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792 - 1856) ve János Bolyai (1802 - 1860) konuya yönelik çalışmalar yapmışlardır. Yeni geometrilerin kabulü kolay olmadı. Bu tür geometrilerinde Öklid geometrisinde olduğu gibi kendi içerlerinde tutarlı ve Öklid geometrisinin cevap verdiği sorulara cevaplar vermeleri gerekiyordu.

Öklid olmayan geometrilere yönelik ilk cesur girişimlerden biri Bernhard Riemann (1826-1866) tarafından 1854 yılında gerçekleştirildi. Riemann dinleyiciler arasında danışmanı Gauss'un da bulunduğu deneme konferansında Eliptik, Hiperbolik ve Öklid geometrisini de kapsayan bir geometri modelinden bahsediyordu. Riemann konferansta deneysel olarak doğru kabul ettiğimiz fakat doğruluğundan emin olmadığımız postulatlara dayanarak bilgi üretmenin bizi yanlışa götürebileceğinden bahsediyordu. Analitik yaklaşımın benimsenmesini öngörüyordu.

Beşinci postulatın doğru olmadığı Eliptik ve Hiperbolik geometrilerin var olması matematikte mutlak doğrulara karşı ciddi bir şüphe uyandırdı.

Henry Poincaré (1854-1912) ve Eugenio Beltrami (1835-1900) Hiperbolik geometrinin görselleştirilmesine yönelik çalışmalar yapmışlardır.

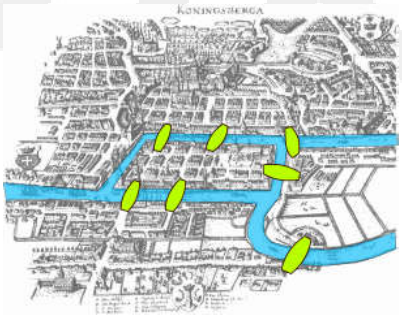
Hiperbolik düzlemde ötelenme, dönme ve yansıma gibi özelliklere sahiptir. Poincaré daire modeli ve Poincaré üst yarı düzlem modeli Hiperbolik düzlemi temsil etmek için kullanılan en genel modelleme örnekleridir. Hiperbolik düzlem ve Öklid düzleminin birbiriyle benzer ya da farklı olduğu özellikleri mevcuttur (Değer, 2011).

1.9. Graf Teori'nin Tarihçesi, Temel Tanım ve Kavramlar

1.9.1. Graf Teori'nin Tarihçesi

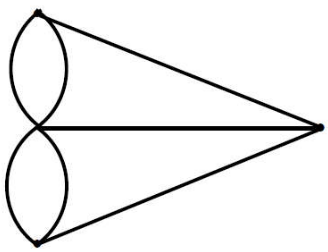
Graf teorinin genelde Beyaz Rusya'da bulunan Kaliningrad kasabasından geçen Pregel nehri üzerine kurulu yedi köprü üzerinden insanların belirli bir kurala göre geçme denemesine dayalı bir olayla başladığı kabul edilir. Olay herhangi bir köşeden başlayarak ve köprülerden sadece bir kez geçerek başlanan köşeye gelinip gelinemeyeceğinin denenmesidir (Cangül, 2017). İsveçli Matematikçi Leonhard Euler (1707-1783) 1736' da yayınladığı "Königsberg'in Yedi Köprüsü" çalışmasıyla konuyu literatüre kazandırmıştır.

Ancak Graf teorinin ilk örnekleri Pisagor ve öğrencilerinin çalışmalarına kadar götürülebilir. Pisagorcular düzgün olarak isimlendirebileceğimiz cisimlerin sadece beş tane olduğunu kabul ettiler. Bu beş düzgün cismin düzlemsel olarak açılması sonucu köşeler ve köşeleri birleştiren kenarlar oluşur. Sonuç olarak düzlemsel basit graflar ortaya çıkar.



Şekil 2. Königsberg'in yedi köprüsü'nün şeması

Eğer kara parçalarını köşelerle ve köprüleri kenarlarla gösterirsek aşağıdaki grafı elde ederiz.



Şekil 3. Königsberg'in yedi köprüsü'nün graf şeması

Graf teori zamanla farklı sorunlara odaklanmıştır. Bunlardan biride renk problemidir. 1850'li yıllara gelindiğinde İrlandalı matematikçi Sir William Rowan Hamilton'un (1805-1865) öğrencisi Francis Guthrie (1831-1899) 1852'de dört renk problemini ortaya atarak komşu ülkeler farklı renk olacak şekilde tüm ülkelerin dört renge boyanabileceğini iddia etmiştir. Renk problemi üzerinde Augustus de Morgan (1806-1871), Arthur Cayley (1821-1895), Alfred Kempe (1849-1922), Percy John Heawood (1861-1955) gibi matematikçiler çalışmıştır. 1922 yılında George David Birkhoff (1884-1944) tarafından sorunun çözümüne yönelik çalışmalar yapılmıştır. Her ne kadar matematikçiler tarafından bilgisayarla ispat kabul görmese de 1976' da Kenneth Appel (1932-2013) ve Wolfgang Haken (1928-) bir algoritma kullanarak renk problemine yönelik çözümü ispatlamışlardır (Cangül, 2017). Graf teori ile ilgili daha detaylı bilgi için Diestel (2005), Ruohonen (2006) incelenebilir.

Sonraki yıllarda Graf teori Hiperbolik düzlemde çalışılmaya başlanmıştır. $G_{u,N}$, $F_{u,N}$ ve özellikle $G_{1,1} = F$ Farey grafı tanımlanmıştır. Burada grafın ∞' dan başlayarak $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\mp\infty\}$ da aldığı değerler köşe, köşeler arası $\overline{\mathbb{R}}$' ye dik doğrular ve merkezi $\overline{\mathbb{R}}$ üzerinde olan yarı çemberlerden oluşan Hiperbolik geodezikler kenar olarak kabul edilmiştir. Graf teori ile ilgili Hiperbolik alanda yapılan çalışmalar için Schoeneberg (1974), Ratcliffe (1994) ve Anderson (2005) incelenebilir.

Graf teori üzerinde algoritmalar uygulama alanı bulmuştur. Birçok problem graf şemalarına dökülmüş ve graf şemaları üzerinde algoritmalar tanımlanmıştır. Böylece çözülmesi zor problemler görselleştirilerek çözüme ulaşılmıştır. Graf teori'de kullanılan algoritmaların çözüme odaklandıkları konulardan biri iki nokta arası en kısa yol problemidir. Bu problem için Dijkstra, Bellman-Ford ve Floyd vb. algoritmalar geliştirilmiştir. Graflarda algoritma uygulamaları birçok olaya uyarlanarak minimum maliyet, minimum emek, minimum vakit vb. hesaplanarak maliyet, emek, vakit vb.den kazanım elde edilmiştir. Uygulamalara örnek olarak trafik yolları, sosyal medya, maliyet tabloları, iş-işçi eşleşmeleri, molekül çalışmaları, tesisatçı problemi, network problemi, postacı problemi ve el kaldırmadan çizilebilme problemi verilebilir.

1.9.2.Temel Tanım ve Kavramlar

Tanım 1.9.2.1. Basit bir graf, köşeler ve bu köşeleri birleştiren kenarlardan oluşan ve geometrik olarak herhangi bir bilgi vermeyen çizgelerdir.

Tanım 1.9.2.2. Bir kenarın iki ucunda bulunan elemana köşe denir.

Tanım 1.9.2.3. Bir grafta iki köşe arasında bulunan elemana kenar denir.

Tanım 1.9.2.4. Kenarları yön bilgisi içeren graflara yönlü graf denir. Bir grafta kenarların hepsi yön bilgisine sahiptir ya da hiçbiri yön bilgisine sahip değildir.

Tanım 1.9.2.5. Bir grafta bir köşeden diğerine gidilirken izlenecek kenarların toplamına yol denir. Eğer graf basit ise toplam yol, üzerinden geçilen kenarların sayısına eşittir.

Tanım 1.9.2.6. Başlangıç ve bitiş köşesi aynı olan kenara çevrim denir.

Tanım 1.9.2.7. Bir köşeden başlayıp yine aynı köşeye dönen ve bir köşeden iki kez geçmeyen yola döngü denir. Bir grafta eğer kenar sayısı köşe sayısına eşit ya da kenar sayısı köşe sayısından fazla ise grafta en az bir döngü vardır.

Tanım 1.9.2.8. Döngü içermeyen grafa ağaç denir. Bu grafa bir kenar eklenmesi durumunda döngü oluşur ve graftaki kenar sayısı köşe sayısından bir eksiktir.

Tanım 1.9.2.9. Bağlantılı olmayan ve döngü içermeyen bir grafa orman denir. Orman ağaçlardan oluşur ve tek başına bir ağaç ta bir ormandır.

Tanım 1.9.2.10. Bir grafta kenarlar değer alabilir ve bu değerler grafın yapısına katılır. Tüm kenarların farklı değer aldığı graflara maliyetli graf denir. Maliyetli bir graftaki tüm değerlerin toplamı grafın toplam maliyetini verir. Tüm kenarların eşit değer aldığı graflar ise basit graf olarak değerlendirilir.

Tanım 1.9.2.11. Bir grafta yer alan herhangi bir köşe için en az maliyetli yol (ağaç) hesaplandıktan sonra yoldaki maliyetlerin toplamı ağacın toplam maliyetini verir. İki köşeden maliyeti düşük olan daha merkezidir. Bir grafta bulunan en az maliyetli köşeye grafın merkezi köşesi denir.

Tanım 1.9.2.12. Bir grafta yer alan tüm köşeleri kapsayan ağaca kapsar ağaç denir. Grafta yer alan tüm kapsar ağaçlar bulunduktan sonra maliyeti en düşük olan ağaç o grafın en az maliyetli ağacıdır.

Tanım 1.9.2.13. Bir grafta iki köşe arasında tanımlı en az bir yol varsa bu yollardan en kısa olanına, x ve y birer köşe olmak üzere, x ile y nin uzaklığı denilir ve $d(x,y)$ ile gösterilir.

1.10. Alt Yörüngesel Graflar

(G,Ω) bir transitif permütasyon grubu, $g \in G$ ve $\alpha,\beta \in \Omega$ olmak üzere $G, \Omega \times \Omega$ üzerinde

$$g: (\alpha,\beta) \to (g(\alpha), g(\beta)) \tag{1.21}$$

dönüşümünü gerçekler. Bu dönüşümün yörüngelerine G nin alt yörüngeleri denir. $O(\alpha,\beta)$, (α,β) yı kapsayan alt yörüngeyi simgeler.

$$O(\alpha,\beta) = \left\{g(\alpha,\beta) \mid g \in G\right\} \tag{1.22}$$

$$(x,y) \in O(\alpha,\beta) \Leftrightarrow \exists g \in G: (x,y) = g(\alpha,\beta) = \big(g(\alpha), g(\beta)\big) \tag{1.23}$$

$G(\alpha,\beta)$ alt yörüngesel grafı $O(\alpha,\beta)$ alt yörüngesinden elde edilebilir. γ ve δ köşeleri $\widehat{\mathbb{Q}}$ ın elemanları olmak üzere eğer $(\gamma,\delta) \in O(\alpha,\beta)$ var ise yörünge γ dan δ ya yönlü bir kenarı temsil eder ve $\gamma \to \delta$ ile gösterilir. Bu kenar $\mathbb{H}$' de bir Hiperbolik geodezik olarak çizebilir.

$O(\beta,\alpha)$ da bir yörüngedir ve $O(\alpha,\beta)$ yörüngesine eşit ya da farklı olabilir. Yörüngelerin birbirinden farklı olması durumunda $G(\beta,\alpha)$ alt yörüngesel grafı, $G(\alpha,\beta)$ alt yörüngesel grafının oklarının ters yönlüsüdür ve bu durumda alt yörüngesel graflara eşleşmiş alt yörüngesel graflar denir. Yörüngelerin birbirine eşit olması durumunda, $G(\beta,\alpha) = G(\alpha,\beta)$ olup graf karşıt yönlü kenar çiftini kapsar; bu durumda her çifti basit bir yönlendirilmiş kenar ile değiştirerek kendisiyle eşleşmiş graf olan yönlendirilmemiş bir kenar elde edilir. Diğer bir deyişle $O(\beta,\alpha) = O(\alpha,\beta)$ ve $(\gamma,\delta) \in O(\alpha,\beta)$ ise γ ile δ

köşeleri arasındaki kenar $\gamma \leftrightarrow \delta$ yerine $\gamma - \delta$ ile gösterilir. Sims (1967) ile ilk kez ortaya atılan bu fikirler, Neumann (1977) ve Tsukuzu (1979) nun çalışmalarında, sonlu gruplara yönelik uygulamalarda önemli yer buldu.

" $\approx$ " Denklik bağıntısı, $\forall \alpha, \beta \in \Omega$ ve $\forall g \in G$ için $\alpha \approx \beta$ olduğunda $g(\alpha) \approx g(\beta)$ sağlanıyorsa " $\approx$ " ya Ω' da bir " $G -$ invaryant denklik bağıntısı" denir ve bu şekilde oluşan denk sınıflara da "bloklar" denir. Bu bağıntılara özdeşlik ve evrensel bağıntı örnek olarak verilebilir:

i)"$\forall \alpha, \beta \in \Omega$ için $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha \approx \beta$" özdeşlik bağıntısı
ii)"$\forall \alpha, \beta \in \Omega$ için $\alpha \approx \beta$" evrensel bağıntı.

Bu bağıntılardan farklı olarak Ω üzerinde $G -$ invaryant denklik bağıntısı varsa (G, Ω) ikilisine imprimitif, yoksa primitif adı verilir. (G, Ω) primitif grubunun transitif hareketi zorunludur aksi taktir de yörüngeler bir sistem bloğu teşkil etmez ve bu durumun tersi doğru değildir.

Önerme 1.10.1. (Biggs ve White, 1979) (G, Ω) bir transitif permütasyon grubu olsun. Bu taktirde (G, Ω) primitiftir $\Leftrightarrow$ Bir $\alpha \in \Omega$ köşesinin sabitleyeni olan G_α, $\forall \alpha \in \Omega$ için G nin bir maksimal alt grubudur.

□

Önerme 1.10.2. (Jones vd., 1991) $\boldsymbol{G}$ bir (G, Ω) transitif permütasyon grubu için bir alt yörüngesel graf olsun. Bu takdirde,

i) G, $\boldsymbol{G}$ nin otomorfizmalarının bir grubu olarak hareket eder.

ii) G, $\boldsymbol{G}$ nin köşeleri üzerinde transitif olarak hareket eder.

iii) Eğer G kendisiyle eşleşmiş ise bu takdirde G,$\boldsymbol{G}$ nin ardışık köşelerinin sıralı çiftleri üzerinde transitif olarak hareket eder.

iv) $\boldsymbol{G}$ kendisiyle eşleşmiş değil ise bu takdirde G, $\boldsymbol{G}$ nin kenarları üzerinde transitif olarak hareket eder.

□

1.11. Γ −Modüler Grubu ve Klasik Matris Çarpım Altında $\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ Üzerindeki Hareketi

Modüler grup, $SL\,(2,\mathbb{Z})$ grubunun $\{\mp I\}$ ile bölüm grubudur. Özel olarak Modüler grubu Γ ile gösterilirse

$$\Gamma = PSL\,(2,\mathbb{Z}) \cong {SL\,(2,\mathbb{Z})}/{\{\mp I\}} \tag{1.24}$$

$$\Gamma = \left\{ \mp \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a,b,c,d \in \mathbb{Z} \; ve \; ad - bc = 1 \right\} \tag{1.25}$$

olarak yazılır. Γ, $\mp \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matris çiftlerinden oluşur. Burada $+$ ile $-$ sembolü göz ardı edilip eş kabul edilir.

Γ nın bazı denk alt grupları aşağıda verilmiştir:

$$\Gamma_0(N) \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma | c \equiv 0 \; (mod\; N) \right\} \tag{1.26}$$

$$\Gamma^0(N) \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma | b \equiv 0 \; (mod\; N) \right\} \tag{1.27}$$

$$\Gamma_1(N) \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma | a \equiv d \equiv 1 (mod\; N), c \equiv 0 \; (mod\; N) \right\} \tag{1.28}$$

Hiperbolik düzlem $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$ ile tanımlanır. Möbiüs dönüşümleri, $\mathbb{H}$ üst yarı düzleminde Γ Modüler grubunun elemanları ile bilinen bir dönüşümdür. Dönüşüm $\forall z \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \mathrm{z} \to \frac{az+b}{cz+d} \tag{1.29}$$

ile tanımlanır. Örneğin $f(z)$ ve $g(z)$ birer lineer sürekli kesir olmak üzere

$f(z) = -\frac{1}{z} = \frac{0.z-1}{1.z+0} \Longrightarrow f = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve

$g(z) = z + \lambda = \frac{1.z+\lambda}{0.z+1} \Rightarrow g = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ için

f ve g, Γ Modüler grubunun elemanları olarak gösterilebilir.

Ayrıca Möbiüs dönüşümleri, Γ nın elemanları ile $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi tanımlamak için kullanılır. Özellikle $\frac{a}{c} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ için $c = 0$ ise $\frac{a}{c} = \infty$ olarak kabul edilir. $x, y \in \mathbb{Z}$ ve $(x, y) = 1$ için $\widehat{\mathbb{Q}}$ nın her bir elemanı indirgenmiş $\frac{x}{y}$ şeklinde ifade edilebilir. $\frac{x}{y} = \frac{-x}{-y}$ olduğundan gösterim tek türlü değildir. ∞, $\frac{1}{0} = \frac{-1}{0}$ olarak düşünülecektir. Bu durumda $z = \frac{x}{y}$ için

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \frac{x}{y} \to \frac{ax+by}{cx+dy} \tag{1.30}$$

olarak yazılır ve (1.30)'da elde edilen sonucun indirgenmiş olduğu aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$c(ax+by) - a(cx+dy) = cax + cby - acx - ady = (cb - ad)y = -y$$
$$d(ax+by) - b(cx+dy) = dax + dby - bcx - bdy = (ad - bc)x = x$$

$$(ax+by, cx+dy) = 1 \tag{1.31}$$

Lemma 1.11.1.

i) Γ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi transitiftir.

ii) $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki bir köşeyi sabitleyen Γ nın elemanı sonsuz devirlidir.

□

Buraya kadar alt yörüngesel graflarla ilgili verilenleri, G nin Γ Modüler grubu ve Ω nın da $\widehat{\mathbb{Q}}$ olması durumunda inceleyelim. Γ_∞ , $Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ile üretilen, ∞ u sabitleyen Γ nın bir altgrubudur. O hale Γ_∞ u veya denk olarak Z yi içeren Γ nın H alt gruplarını elde ederek $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde Γ −invaryant denklik bağıntılarını üretebiliriz. $Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

olduğundan, $N \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\Gamma_0(N)$ kongrüans grupları H olarak seçilebilir. Açıkca, $\forall N \in \mathbb{N}$ için $\Gamma_\infty < \Gamma_0(N) \leq \Gamma$ ve $N > 1$ ise $\Gamma_\infty < \Gamma_0(N) < \Gamma$ dır. Buradan Γ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi imprimitiftir.

$\Gamma_0(N)$ nin $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde indirgenmiş $\Gamma -$invaryant denklik bağıntısını "$\approx_N$" ile gösterelim. $v = \frac{r}{s}, w = \frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ ve $g = \begin{pmatrix} r & * \\ s & * \end{pmatrix}$, $g' = \begin{pmatrix} x & * \\ y & * \end{pmatrix} \in \Gamma$ için $v = g(\infty)$ ve $w = g'(\infty)$ dönüşümleri sağlansın.

$$v \approx_N w \Leftrightarrow g(v) \approx g'(w) \Leftrightarrow g^{-1}g' \in H = \Gamma_0(N) \tag{1.32}$$

ve

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} * & * \\ -s & r \end{pmatrix} \tag{1.33}$$

olduğundan

$$g^{-1}g' = \begin{pmatrix} * & * \\ -s & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & * \\ y & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ ry - sx & * \end{pmatrix} \in H = \Gamma_0(\mathrm{N}) \tag{1.34}$$

$$v \approx w \Leftrightarrow ry - sx \equiv 0 \ (mod\ N) \tag{1.35}$$

sonuçları elde edilir. Başka ifade ile

$$v = \frac{r}{s} \text{ ve } w = \frac{x}{y} \text{ denktir} \Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{H}: x \equiv ur \ (mod\ N), y \equiv us \ (mod\ N) \tag{1.36}$$

yazılabilir.

Benzer şekilde 0 ın sabitleyeni Γ_0, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ile üretilen Γ nın bir altgrubudur. Böylece Γ_0 ı içeren (veya denk olarak B yi içeren) Γ nın K alt gruplarını bularak $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde $\Gamma -$invaryant denklik bağıntılarını üretebiliriz.
"$\approx_N$" altında denklik sınıflarının sayısı ise

$$\Psi(N) = |\Gamma : \Gamma_0(N)| \tag{1.37}$$

denklemi ile verilir.

Lemma 1.11.2. Çarpım, N'yi bölen farklı p asalları üzerinden verildiğinde

$$\Psi(N) = N\prod_{p/N}\left(1+\frac{1}{p}\right) \tag{1.38}$$

denklemi elde edilir.

□

1.12. $G_{u,N}$ ve $F_{u,N}$' nin İncelenmesi

Γ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi transitif olduğundan, her bir alt yörünge, $v \in \widehat{\mathbb{Q}}$ için (∞, v) çiftini içerir. $N \geq 0$ ve $(u, N) = 1$ için $v = \frac{u}{N}$ olarak alınırsa, bu alt yörüngeyi $O_{u,N}$ ve alt yörüngeye karşılık gelen $G(\infty, v)$ alt yörüngesel grafını da $G_{u,N}$ ile gösteririz. Eğer $v = \infty$ ise bu, $G_{1,0} = G_{-1,0}$ aşikâr alt yörüngesel graftır, böylece $v \in \widehat{\mathbb{Q}}$ olduğunu kabul edebiliriz. $v, v' \in \widehat{\mathbb{Q}}$ ve $O(\infty, v) = O(\infty, v') \Leftrightarrow v$ ve v', Γ_∞ un yörüngesindedir ve Γ_∞ $Z: v \to v+1$ ile üretildiğinden bu durum $u \equiv u'(mod\ N)$ için $v' = \frac{u'}{N}$ ifadesine denktir.

Teorem 1.12.1. (Jones vd., 1991) $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y} \in G_{u,N} \Leftrightarrow$

i) $x \equiv ur\ (mod\ N)$, $y \equiv us\ (mod\ N)$ ve $ry - sx = N$

ii) $x \equiv -ur\ (mod\ N)$, $y \equiv -us\ (mod\ N)$ ve $ry - sx = -N$.

İspat. $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y} \in G_{u,N}$ olsun. Bu takdirde bir $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ elemanı $\infty = \frac{1}{0}$ ı $\frac{r}{s}$ ye ve $\frac{u}{N}$ yi $\frac{x}{y}$ ye resmeder. Böylece

$$\pm\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & x \\ s & y \end{pmatrix}$$

matris denklemi elde edilir. Eğer $+$ işareti alınırsa,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & au+bN \\ c & cu+dN \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & x \\ s & y \end{pmatrix}$$

$a = r, c = s, au + bN = x$ ve $cu + dN = y$,

$$au + bN = x \Rightarrow x \equiv ur\ (mod\ N) \text{ ve } cu + dN = y \Rightarrow y \equiv us\ (mod\ N)$$

denklikleri elde edilir. Bununla birlikte yukarıdaki verilen matrisin determinantı alınır ve r, y, s ve x için bulunan değerler yerine yazılırsa $ry - sx = N$ olduğu görülür, dolayısıyla (i) sağlanır.

Benzer şekilde eğer – işareti alınırsa (ii) elde edilir.

Tersine, eğer (i) sağlanırsa $\exists b, d \in \mathbb{Z}: x = ur + bN, y = us + dN$ için

$$\pm\begin{pmatrix} r & b \\ s & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & x \\ s & y \end{pmatrix}$$

matrisi yazılır. $ry - sx = N$ olduğundan

$$\begin{aligned} ry - sx &= r(us + dN) - s(ur + bN) \\ &= rus + rdN - sur - sbN \\ &= N(rd - sb) \\ &= N \end{aligned}$$

$$rd - bs = 1$$

sonucu elde edilir. Böylece $\begin{pmatrix} r & b \\ s & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ ve buradan $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y} \in G_{u,N}$ dir.

x ve y, $-x$ ve $-y$ ile değiştirilerek $\frac{r}{s} \to \frac{-x}{-y} = \frac{x}{y} \in G_{u,N}$ elde edilir.

□

Sonuç 1.12.2. (Jones vd., 1991) $\bar{u}, u\bar{u} \equiv 1\ (mod\ N)$ olmak üzere, $G_{u,N}$ ile eşleşmiş alt yörüngesel graf $G_{-\bar{u},N}$ dir.

□

Sonuç 1.12.3. $G_{u,N}$ kendisiyle eşleşmiştir $\Leftrightarrow u^2 \equiv -1\ (mod\ N)$.

□

$G_{u,N}$, $\Psi(N)$ tane alt grafın ayrık birleşimidir ve herbir alt grafın köşeleri $ry - sx \equiv 0\ (mod\ N)$ ile tanımlanan $\approx_N$ Γ −invaryant denklik bağıntısına göre tek blok oluşturur. Γ,

$\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden, bu blokları transitif olarak permüte eder ve alt grafların hepsi izomorfiktir.

$F_{u,N}$, köşeleri ∞ u içeren

$$[\infty] = \left\{x, y \in \widehat{\mathbb{Q}} \,\middle|\, y \equiv 0 \ (mod\ N)\right\} \tag{1.39}$$

bloğundan oluşan $G_{u,N}$ nin alt grafı olsun. Böylece $G_{u,N}$, $F_{u,N}$ nin $\Psi(N)$ tane ayrık kopyasından oluşur.

Teorem 1.12.4. (Jones vd., 1991) $\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y} \in F_{u,N} \Leftrightarrow$

i) $x \equiv ur \ (mod\ N)$ ve $ry - sx = N$,

ii) $x \equiv -ur \ (mod\ N)$ ve $ry - sx = -N$.

□

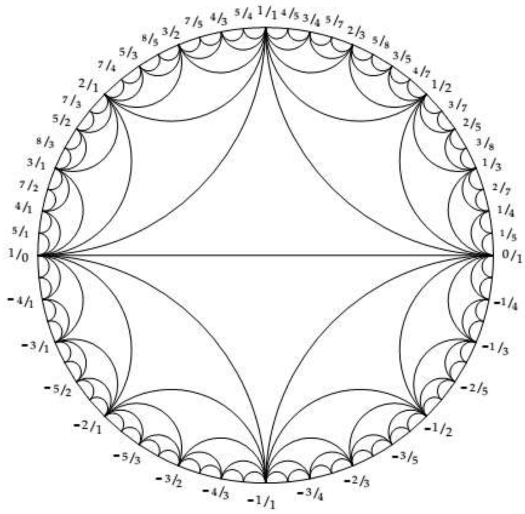
Teorem 1.12.5. $\Gamma_0(N)$, $F_{u,N}$ nin köşelerini ve kenarlarını transitif olarak permüte eder.

□

1.13. Farey Grafı'nın İncelenmesi

1.13.1. Farey Diyagramı

Farey diyagramı ve grafı temelde rasyonel sayılar ve aralarındaki ilişkileri konu alır.



Şekil 4. Farey diyagramı

Yukarıdaki şekilde Farey diyagramının bir parçası gösterilmiştir. Bu diyagram esas olarak çember çizgisine doğru yaklaşan sonsuz eğri üçgenlerden oluşur.

Başlangıçta boş bir çembere çap çizilir ve birer kenarı çapla ortak dört eğri üçgen çizilir. Sonra bu dört eğri üçgenin altına dördünün birer kenarı çapla ortak sekiz eğri üçgen çizilir ve bu şekilde devam ederek, giderek küçülen ve çembere yaklaşan eğri üçgenler çizilir.

Diyagram iki yarı düzlemden oluşur. Bunlar üst yarı düzlem ve alt yarı düzlemdir. Üst yarı düzlemdeki köşeler pozitif, alt yarı düzlemdekiler ise negatiftir. Üst yarı düzlemdeki köşelerin Farey diyagramı üzerinde konumları alt yarı düzlemdekilerle simetriktir. Farey diyagramı üzerindeki bir köşe simetriğinin tersidir.

Köşeler çemberin etrafında uygun bir şekilde sıralandığında, çemberin etrafında saat yönünün tersine dolaştıkça köşeler $-\infty$ dan $+\infty$ a artar.

1.13.2. Farey Dizileri ve Grafı

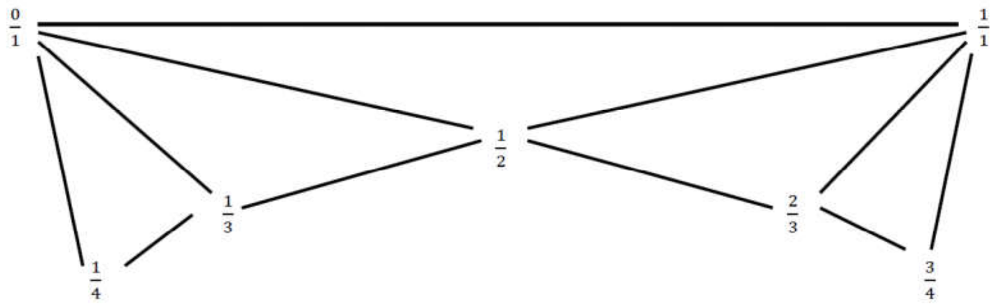
Çap üzerindeki iki köşe $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ ise, orta köşe $\frac{a+c}{b+d}$ 'dir. Bu kesire $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ 'nin medyanı denir. Medyan kuralı kullanılarak Farey dizileri oluşturulabilir. Örneğin ilk iki köşe $\frac{0}{1}$ ve $\frac{1}{1}$ ise

$$\left\{\frac{0}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{1}\right\}$$

olarak bulunur. Bundan sonra diziye $\frac{0}{1}$ ile $\frac{1}{2}$ arasına ve $\frac{1}{2}$ ile $\frac{1}{1}$ arasına iki köşe ilave edilerek

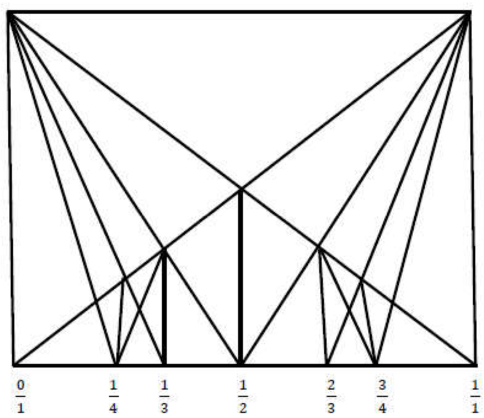
$$\left\{\frac{0}{1},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{1}\right\}$$

olarak bulunur. Bu işleme böylece devam edersek aşağıdaki diyagram elde edilir.



Şekil 5. $\frac{0}{1}$ ile $\frac{1}{1}$ arasındaki Farey dizileri diyagramı

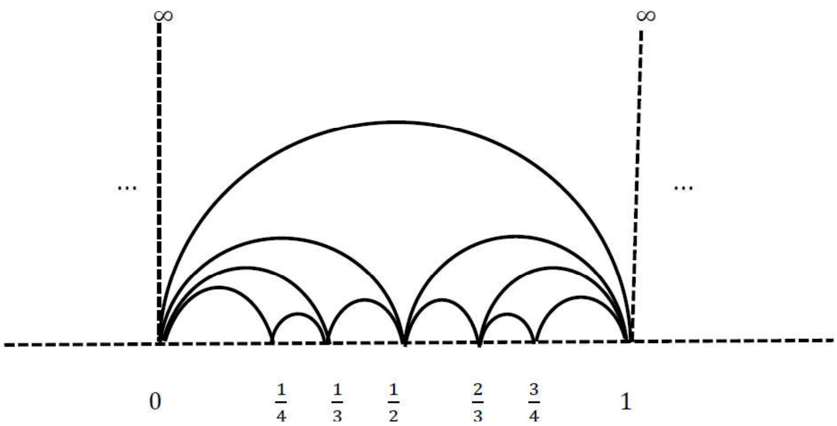
Yukarıdaki şekilde bulunan her köşe dikey doğrultuda x −ekseni üzerine işaretlenirse aşağıdaki diyagram elde edilir.



Şekil 6. $\frac{0}{1}$ ile $\frac{1}{1}$ arasındaki Farey dizileri ile oluşturulan üçgenler diyagramı

Farey diyagramı üzerinde köşelerin bu şekilde sıralandığını doğrulamak için, x −ekseni üzerinde $\left(\frac{a}{b},0\right)$ ın üst köşesi $\left(\frac{a}{b},\frac{1}{b}\right)$ ve $\left(\frac{c}{d},0\right)$ ın üst köşesi $\left(\frac{c}{d},\frac{1}{d}\right)$ olarak alındığında, $\left(\frac{a}{b},\frac{1}{b}\right)$ ve $\left(\frac{c}{d},\frac{1}{d}\right)$ köşelerinin medyanının $\left(\frac{a+c}{b+d},\frac{2}{b+d}\right)$ olduğunu göstermek yeterlidir.

Üçgenlerden oluşan yukarıda verilen diyagramda üçgenlerin tepe köşelerini alt uç köşelerine daraltarak merkezi x −ekseni üzerinde olan eğrisel üçgenlere dönüştürebiliriz. Farey üçgenler diyagramı aşağıdaki hali alır.



Şekil 7. $\frac{0}{1}$ ile $\frac{1}{1}$ arasındaki Farey dizileri ile oluşturulan eğrisel üçgenler diyagramı

Bu diyagram x ekseni boyunca sadece 0 ve 1 arasında değil, ardışık tamsayıların tüm çiftleri arasındaki kesirler için çizilebilir (URL-1, 2020).

Graf, Farey dizisiyle olan ilişkisinden dolayı Farey grafı olarak adlandırılır ve $G_{1,1} = F$ ile simgelenir. F grafının köşelerinin kümesi $\widehat{\mathbb{Q}}$ dır. Her $n \geq 1$ tamsayısı için n mertebeli F_n Farey dizisi, kesin artan şekilde sıralanan tüm $\frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ rasyonel sayılarından oluşur. Örneğin

$$F_4 = \left\{\dots,\frac{-1}{3},\frac{-1}{4},0,\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},1,\frac{5}{4},\frac{4}{3},\dots\right\}$$

dir. Farey dizisinin alt kümeleri arasında $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \cdots$ ilişkisi vardır ve $\bigcup_{n\geq 1} F_n = \widehat{\mathbb{Q}}$ sağlanır.

Lemma 1.13.3. (Jones vd., 1991) $\frac{r}{s}, \frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ indirgenmiş rasyoneller olsun. Bu taktirde aşağıdaki üç koşul birbirine denktir:

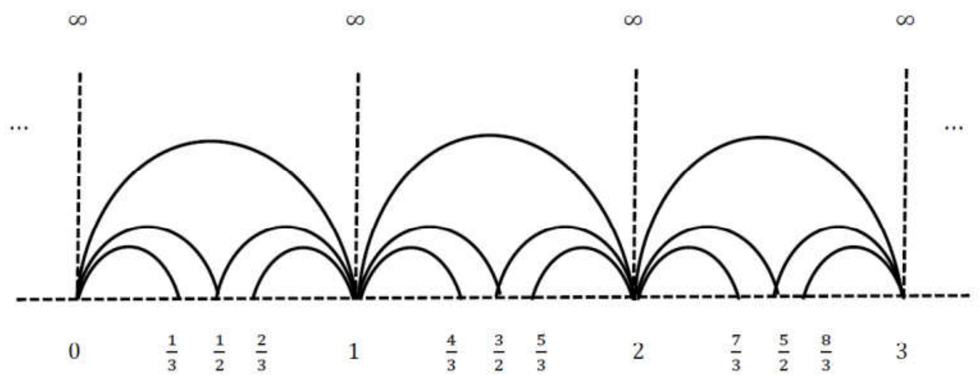
i) $\frac{r}{s}$ ve $\frac{x}{y}$, F de komşu köşelerdir;

ii) $ry - sx = \pm 1$;

iii) Bir $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{r}{s}$ ve $\frac{x}{y}$, F_n de komşu köşelerdir.

□

Her bir terime hemen öncesindeki ve sonrasındaki terimleri ekleyerek her bir F_n 2 değerli bir ağaç olur. Lemma 1.13.3.'ten bu ağaçların birleşimi F nin $\mathbb{Q}$ üzerinde indirgenmiş alt grafı olup ∞ değerini alan bir köşe ilave edip tamsayılarla birleştirerek F oluşturulur.



Şekil 8. $G_{1,1} = F$ Farey grafı

Şekil 8 kenarların ∞ ile ortak olduğunu ve F_3 ün elemanlarının birleşmesiyle meydana geldiğini gösterir ve 1 periyotludur. Görsel olarak F nin kenarları, $\mathbb{H}$ üst yarı düzleminde merkezi $\mathbb{R}$ üzerinde olan Öklid yarı-çemberleri ya da $\mathbb{R}$ ye dik Öklid-yarı doğruları şeklindeki Hiperbolik geodezikler olarak gösterilir. Yarı doğrular ∞ ile birleşmiş olarak kabul edilir. $\mathbb{H}$ nin Hiperbolik izometrilerinin bir grubu olarak Möbiüs dönüşümleri Γ ile bir hareketi tanımlar ve bu hareket altında Hiperbolik geodezikler Hiperbolik geodeziklere resmedilir, böylece $\mathbb{H}$ deki F gösterimi Γ altında invaryanttır.

Sonuç 1.13.4. (Jones vd., 1991) F nin kenarları $\mathbb{H}$ de kesişmez.

□

Daha ayrıntlı bilgi için Sims (1967), Jones vd. (1991) ve Akbaş (2001) incelenebilir.

1.14. Sürekli Kesir Yapısı

Sürekli kesirler sonlu ve sonsuz olmak üzere temelde iki grupta incelenir.

1.14.1. Sonlu Sürekli Kesirler

$a_1 \geq 0, i \geq 2$ için a_i pozitif tamsayı olmak üzere sonlu sürekli bir kesir

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{}{a_{m-2} + \cfrac{1}{a_{m-1} + \cfrac{1}{a_m}}}}}} \tag{1.40}$$

ile tanımlanır. Notasyon olarak

$$x = a_1 + \frac{1}{a_2 +}\frac{1}{a_3 +}\cdots\frac{1}{+a_m} \tag{1.41}$$

ile yazılabilir. Bazı durumlarda

$$x = [a_1; a_2, a_3, \dots, a_k] \tag{1.42}$$

notasyonu kullanılır.

1.14.2. Sonsuz Sürekli Kesirler

$a_1 \geq 0$ ve $i \geq 2$ için $a_i \geq 1$ olmak üzere sonsuz sürekli bir kesir

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots \atop a_{m-2} + \cfrac{1}{a_{m-1} + \cfrac{1}{\ddots}}}}} \tag{1.43}$$

ile tanımlanır. Notasyon olarak

$$x = [a_1; a_2, a_3, \dots] \tag{1.44}$$

ile yazılabilir.

Daha genel anlamda bir sürekli kesir, $\mathbb{N}$ doğal sayılar ve $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesini göstermek üzere her $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sayısı için $a_i \in \mathbb{Z} - \{0\}$ ve $b_i \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \ddots}}} \tag{1.45}$$

ile verilebilir. Bu (1.45) sürekli kesiri sembolik olarak

$$b_0 + \mathrm{K}_{i=1}^{\infty}\left(\frac{a_i}{b_i}\right) \tag{1.46}$$

ile yazılabilir. Bununla birlikte (1.45) sürekli kesri için n. yaklaşım f_n sembolü ile gösterilir ve

$$f_n = b_0 + \mathrm{K}_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{b_i}\right) \tag{1.47}$$

ile ifade edilir. Bununla birlikte $i \geq 1$, $a_i \neq 0$ ve $\left(\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{b_i\}_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\right)$ dizisi

$$t_0(s) = s,\, t_n(s) = \frac{a_n}{b_n + s},\, n = 1,2,3, \dots \tag{1.48}$$

$$T_0(s) = t_0(s), T_n(s) = T_{n-1}\big(t_n(s)\big), n = 1,2,3, \dots \tag{1.49}$$

$$f_n = T_n(0) \in \widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}, n = 1,2,3, \dots \tag{1.50}$$

olmak üzere, $\{t_n(s)\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ ve $\{T_n(s)\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ lineer kesirli dönüşüm dizileri ile bir $\{f_n\}$ dizisini oluşturur. Buradan

$$\Big(\big(\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{b_i\}_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\big), \{f_n\}\Big) \tag{1.51}$$

yazılabilir. Bu elde edilen dizi (1.45) te verilen sürekli kesire denk gelir. Burada a_i elemanına kısmi pay, b_i elemanına ise kısmi payda denir.

Yukarıda verilenlere uygun olarak lineer kesirli $T_n(s)$ dönüşümü

$$T_n(s) = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \ddots + \cfrac{a_n}{b_n + s}}}} \tag{1.52}$$

ile ifade edilebilir. Sürekli kesirlerin gösteriminden

$$T_n(s) = b_0 + \frac{a_1}{b_1+}\frac{a_2}{b_2+}\cdots\frac{a_{n-1}}{+b_{n-1}}\frac{a_n}{+b_n+s} \tag{1.53}$$

ile gösterilebilir. “o” bileşke işlemi olmak üzere

$$T_n(s) = (t_0 \mathrm{o} t_1 \mathrm{o} t_2 \mathrm{o} \dots \mathrm{o} t_n)(s) \tag{1.54}$$

yazılabilir.

$$(t_0 \mathrm{o} t_1)(s) = t_0(t_1(s)) \tag{1.55}$$

ve

$$t^n(s) = \left(\underbrace{toto \dots ot}_{n \text{ kere}}\right)(s) \tag{1.56}$$

olur. $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ dizisi için n. değiştirilmiş yaklaşım sayısı

$$T_n(S_n) \in \widehat{\mathbb{R}} \tag{1.57}$$

ile gösterilir.

1.14.3. Sürekli Kesirlerde Yakınsama

Sonlu ya da sonsuz bir x sürekli kesri için yakınsamalar dizisi $\{C_k\}_{k\geq 1} = \left\{a_1, a_1 + \frac{1}{a_2}, a_1 + \frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3}}, \cdots\right\}$ olarak tanımlanır. Örnek olarak eğer $x = [1; 1,1,1,1,1,1, \dots]$ alınırsa $\{C_k\}_{k\geq 1}$ yakınsamalar dizisinin elemanları

$$C_1 = [1] = 1$$

$$C_2 = [1; 1] = 2$$

$$C_3 = [1; 1,1] = 1,5 = \frac{3}{2}$$

$$C_4 = [1; 1,1,1] \approx 1,6666666667 = \frac{5}{3}$$

$$C_5 = [1; 1,1,1,1] = 1,6 = \frac{8}{5}$$

$$C_6 = [1; 1,1,1,1,1] = 1,625 = \frac{13}{8}$$

$$C_7 = [1; 1,1,1,1,1,1] = \frac{21}{13} \approx 1,6153846154 = \frac{21}{13}$$

$$\vdots$$

olarak bulunur.

$1 \leq k \leq m$ için k arttıkça C_k nın asıl değeri $\frac{21}{13}$'e yakınsar. Gerçekte, bu yakınsamalar son biri hariç, yakınsamalar dizisinin elemanları için tek alt indisli elemanlar alttan, çift alt indisli elemanlar üstten yakınsar.

$x = [1; 1,1,1,1,1,1, \dots]$ sonsuz sürekli kesrinin $n.$ yakınsaması olan C_n, $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ Fibonacci oranına karşılık gelir.

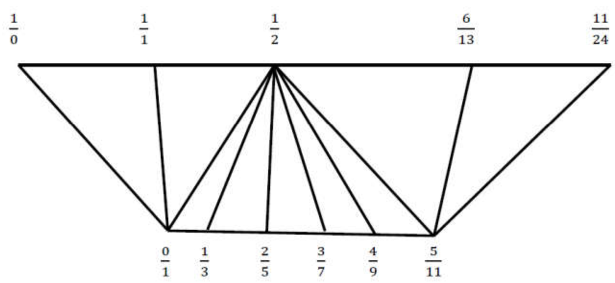
Bu bağıntı ilk olarak 1753 yılında R. Simson tarafından çalışıldı.

1.14.4. Sürekli Kesirlerle Farey Diyagramı'nın Çizilmesi ve Matrisler

$x = [0; a_1, a_2, \dots, a_k]$ sürekli kesri k −adet üçgen oluşturur. Birinci üçgen a_1 −adet küçük üçgenden, ikinci üçgen a_2 −adet küçük üçgenden, üçüncü üçgen a_3 −adet küçük üçgenden ve böylece devam ederek $k.$ üçgen a_k −adet küçük üçgenden oluşur. Örneğin $\frac{11}{24}$ sürekli kesri

$$\frac{11}{24} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2}}}$$

olarak yazılabilir. Burada $a_1 = 2$, $a_2 = 5$ ve $a_3 = 2$ için elde edilen diyagram aşağıda verilmiştir.

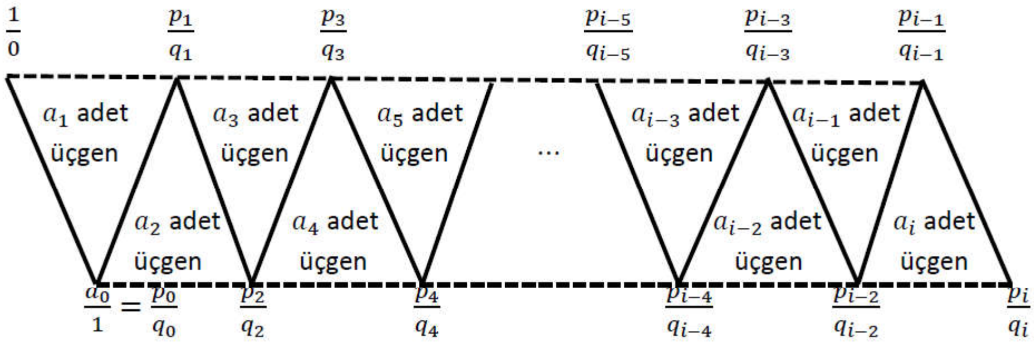


Şekil 9. $\frac{11}{24}$ Sürekli kesri ile oluşturulan üçgenler

$x = a_0 + {}^1/_{a_1} + {}^1/_{a_2} + \cdots + {}^1/_{a_k}$ sürekli kesri için ardışık herbir $\frac{p_i}{q_i}$ köşesi, önceki iki köşe aracılığıyla ve yinelenme kuralı ile

$$\frac{p_i}{q_i} = \frac{a_i p_{i-1} + p_{i-2}}{a_i q_{i-1} + q_{i-2}} \tag{1.58}$$

olarak bulunabilir.



Şekil 10. $\frac{p_i}{q_i}$ Sürekli kesri ile oluşturulan üçgenler

Yol $\frac{1}{0}$ ve $\frac{a_0}{1}$ köşeleri ile başlar ve yinelenme bağıntısı ile köşeler bulunarak $\frac{p}{q}$ köşesine ulaşılır. $\frac{p_n}{q_n} = \frac{p}{q}$ olduğunu göstermek için

$$P = \begin{pmatrix} 1 & a_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{pmatrix} \tag{1.59}$$

çarpımını düşünelim.

Çarpıma sağdan ya da soldan başlayarak yapabiliriz. Soldan başlayarak çarpım yaptığımızı kabul edelim. Başlangıç matrisi $\begin{pmatrix} 1 & a_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dir ve bu matrisin sütunlarını üçgen şeridinin soldan ilk iki köşesini etiketleyen $\frac{1}{0}$ ve $\frac{a_0}{1}$ olarak düşünebiliriz. Başlangıç matrisi ile $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix}$ matrisini çarptığımızda

$$\begin{pmatrix} 1 & a_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 1 + a_0 a_1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 \\ q_0 & q_1 \end{pmatrix} \tag{1.60}$$

elde ederiz. $\begin{pmatrix} p_0 & p_1 \\ q_0 & q_1 \end{pmatrix}$ ise yoldaki ikinci kenarın köşelerini sütun kabul eden matristir. Tüm matrisler çarpıldığında $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ ve $\frac{p_n}{q_n}$ köşeleri ile oluşturulan kenara karşılık matris elde edilir. Buradan P matrisinin ikinci sütunu $\frac{p_n}{q_n}$ olur ve bu geriye kalan $a_0 + {}^1/_{a_1} + {}^1/_{a_2} + \cdots + {}^1/_{a_n}$sürekli kesrinin $\frac{p}{q}$ değerine eşit olduğu anlamına gelir (URL-1, 2020).

Ayrıca n. payı p_n ve n. paydası q_n olan bir sürekli kesir için

$$t_n(s) = \frac{a_n}{b_n + s}, n = 1,2,3, \dots$$

ve

$$x_n = \begin{pmatrix} 0 & a_n \\ 1 & b_n \end{pmatrix}, n = 1,2,3, \dots \tag{1.61}$$

sağlansın. O halde (1.54) ve (1.75) dönüşümleri

$$X_n = x_1 x_2 x_3 \cdots x_n = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{pmatrix}, n = 1,2,3, \dots \tag{1.62}$$

matrisine karşılık gelir.

1.15. Yinelenme Bağıntıları

Sürekli kesrin n. payı p_n ve n. paydası q_n olsun. $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$, $p_0 = 0$, $q_0 = 1$ başlangıç şartlarıyla yinelenme bağıntısı

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \left\{ b_n \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{pmatrix} + a_n \begin{pmatrix} p_{n-2} \\ q_{n-2} \end{pmatrix}, n = 1,2,3, \dots \right\} \tag{1.63}$$

olarak tanımlanabilir. $b_n = -k$ ve $a_n = -1$ olarak alınırsa yinelenme bağıntısı

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \left\{ -k \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_{n-2} \\ q_{n-2} \end{pmatrix}, n = 1,2,3, \dots \right\} \tag{1.64}$$

olarak tanımlanabilir. Sürekli kesrin n. değeri

$$T_n(k) = \frac{-kp_{n-1} - p_{n-2}}{-kq_{n-1} - q_{n-2}} \tag{1.65}$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$f_n = T_n(0) = \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} \tag{1.66}$$

ve

$$f_{n-1} = T_n(\infty) = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \tag{1.67}$$

elde edilir.

(1.64) de tanımlanan yinelenme bağıntısı incelenirse klasik matris işlemleriyle

$$\binom{p_n}{q_n} = -k\binom{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \binom{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \binom{-kp_{n-1}}{-kq_{n-1}} - \binom{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \binom{-kp_{n-1} - p_{n-2}}{-kq_{n-1} - q_{n-2}} \tag{1.68}$$

$$p_n = -kp_{n-1} - p_{n-2} \Rightarrow p_n + kp_{n-1} + p_{n-2} = 0 \tag{1.69}$$

$$q_n = -kq_{n-1} - q_{n-2} \Rightarrow q_n + kq_{n-1} + q_{n-2} = 0 \tag{1.70}$$

sonuçları elde edilir ve özel olarak $p_n + kp_{n-1} + p_{n-2} = 0$ eşitliğinde $n \to n+2$ değişken değiştirmesi uygulanırsa

$$p_{n+2} + kp_{n+1} + p_n = 0 \tag{1.71}$$

sonucu bulunur. $k > 2$ için eğer (1.71) denklemi çözülürse

$$p_n = (-1)^n 2^{1-n} \sum_{t=1}^{n} \left(k + \sqrt{k^2 - 4}\right)^{n-t} \left(k - \sqrt{k^2 - 4}\right)^{t-1} \tag{1.72}$$

sonucu elde edilir. Özel olarak $k = 2$ için

$$p_n = (-1)^n n \tag{1.73}$$

bulunur. Tanımlı yinelenme bağıntısından $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$ için

$$q_n = -p_{n+1} \tag{1.74}$$

sonucu bulunur.

1.16. Sürekli Kesirlerle Alt Yörüngesel Grafların Özel Köşe Değerleri Arasındaki İlişki

(1.57) de ifade edilen $T_n(S_n)$

$$T_n(S_n) = \frac{p_n + p_{n-1}S_n}{q_n + q_{n-1}S_n}, n = 1,2,3, \dots \tag{1.75}$$

ile ifade edilebilir. Buradan f_n ve f_{n-1}

$$f_n = T_n(0) = \frac{p_n}{q_n}, f_{n-1} = T_n(\infty) = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \tag{1.76}$$

olarak yazılabilir.

(1.64)'de tanımlı yineleneme bağıntısı ve $q_n = -p_{n+1}$ ile $F_{u,N}$ alt yörüngesel grafında minimal uzunluğa sahip yolda $n.$ köşe

$$\frac{u + T_n(0)}{N} = \frac{u + \frac{p_n}{q_n}}{N} = \frac{u - \frac{p_n}{p_{n+1}}}{N} = \frac{p_{n+1}u - p_n}{p_{n+1}N} \tag{1.77}$$

ile tanımlanır. (1.76) dan

$$T_n = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{pmatrix} \tag{1.78}$$

matrisi elde edilir. (1.61) ve (1.62)'den

$$\begin{pmatrix} p_{n-1} & p_n \\ -p_n & -p_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -k \end{pmatrix}^n \tag{1.79}$$

bulunur.

Sürekli kesirlerle ilgili daha geniş bilgi için Cuyt vd. (2008) incelenebilir.

1.17. Altyörüngesel Grafların Köşeleri ve Fibonacci Sayıları Arasındaki Bağıntının Çalışılması

Teorem 1.17.1. (Değer, 2017) Eğer $k = 2$ ise $p_n = (-1)^n n$ ve $k > 2$ ise

$$p_n = (-1)^n 2^{1-n} \sum_{t=1}^{n} (k + \sqrt{k^2 - 4})^{n-t} (k - \sqrt{k^2 - 4})^{t-1}. \tag{1.80}$$

□

Lemma 1.17.2. (Değer, 2017) p_n, $K_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{-3}\right)$ sürekli kesrinin n. payı olmak üzere

$$F_{2n} p_{n+1} + F_{2n+2} p_n = 0 \tag{1.81}$$

dır.

□

Sonuç 1.17.3. (Değer, 2017) $\begin{pmatrix} (-1)^{n-1} F_{2n-2} & (-1)^n F_{2n} \\ (-1)^{n+1} F_{2n} & (-1)^n F_{2n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^n$ dir.

□

1.18. Alt Yörüngesel Graflarda Minimal Uzunluklu Yollar

Tanım 1.18.1. (Değer, 2017) $v_0, v_1, \dots, v_m$, $F_{u,N}$ alt yörüngesel grafının farklı köşelerinin bir dizisi olsun. Eğer $m \geq 2$ ise $v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_m \to v_0$ yoluna bir yönlendirilmiş devre (veya kapalı yol) denir. Eğer bu yoldaki en az bir ok (hepsi değil) ters yönlü ise bu yola, bir yönlendirilmemiş devre (veya ters yönlendirilmiş devre) adı verilir. Eğer $m = 2$ ise devre, yönlendirilmiş olsun veya olmasın, üçgen olarak adlandırılır. Eğer $m = 1$ ise $v_0 \to v_1 \to v_0$ yoluna kendisi ile eşleşmiş bir kenar denir.

Tanım 1.18.2. (Değer, 2017) Γ Modüler grubunun elemanları Hiperbolik doğruları Hiperbolik doğrulara resmettiğinden, uygun görsellik açısından $F_{u,N}$ grafının kenarları

$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}: Im(z) > 0\}$ üst yarı düzleminde reel eksene dik yarı doğrular ve merkezi $\mathbb{R}$ üzerinde bulunan yarı doğrular şeklinde Hiperbolik geodezikler olarak gösterilir.

Tanım 1.18.3. (Değer, 2017) $v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_m$ ve $v_0 \to v_1 \to \cdots$ yoluna sırası ile $F_{u,N}$ grafında bir yol ve bir sonsuz yol adı verilir.

Tanım 1.18.4. (Değer, 2017) $\frac{r}{s} \overset{<}{\overbrace{\rightarrow}} \frac{x}{y} \in F_{u,N}$ $\left(\frac{r}{s} \overset{>}{\overbrace{\rightarrow}} \frac{x}{y} \in F_{u,N}\right)$, eğer $F_{u,N}$ grafında $\frac{r}{s}$ köşesine bağlanan $\frac{x}{y}$ köşesinden daha büyük (veya küçük) bir köşe yoksa $\frac{x}{y}$ köşesine en uzak (en yakın) köşe denir.

Tanım 1.18.5. (Değer, 2017) $F_{u,N}$ grafındaki $v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_m$ yolunun minimal uzunluklu olması için, $i < j - 1$, $i \in \{0,1, \ldots, m-2\}, j \in \{2,3, \ldots, m\}$ olmak üzere $v_i \nleftrightarrow v_j$ olması ve v_{i+1} köşesinin v_i köşesine bağlanan en uzak köşe olması gerekir.

Tanım 1.18.6. (Değer, 2017) Eğer $F_{u,N}$ hiçbir devre içermiyorsa bir orman; devre içermeyen bağlantılı boş olmayan bir graf ise bir ağaçtır.

Lemma 1.18.7. (Değer vd., 2011) $(u, N) = 1$ ise $u^2 + ku + 1 \equiv 0\ (mod\ N)$ kongrüans denklemini sağlayan bir k tamsayısı vardır.

□

$k \geq 2$ ve $k \in \mathbb{Z}$ için Modüler grubun bir denk alt grubunun elemanı olan $\begin{pmatrix} -u & \frac{u^2+ku+1}{N} \\ -N & u+k \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$, $F_{u,N}$ alt yörüngesel grafında sonsuz minimal uzunluklu yolda köşeleri sırasıyla birbirine bağlar ve herbir köşe sürekli kesir yapısı oluşturur.

$$\infty = \frac{1}{0} \to \frac{u}{N} \to \frac{u + \frac{1}{k}}{N} \to \frac{u + \frac{1}{k - \frac{1}{k}}}{N} \to \frac{u + \frac{1}{k - \frac{1}{k - \frac{1}{k}}}}{N} \to \cdots \tag{1.82}$$

Bu yol sağ yönlüdür. Her bir köşe bir önceki köşe için bağlanabilecek en uzak köşedir. $v_0 = \frac{u}{N}$ olmak üzere, her $q \in \mathbb{Z}^+$ için

$$v_q = \begin{pmatrix} -u & \frac{u^2+ku+1}{N} \\ -N & u+k \end{pmatrix}^q (v_0) \tag{1.83}$$

olarak tanımlanabilir.

Teorem 1.18.8. (Deger vd., 2011) $F_{u,N}$ Farey grafında $u^2 + ku + 1 \equiv 0\ (mod\ N)$ ve $1 < k < N$ olduğunu kabul edelim.

i) $\frac{u}{N}$ nin bağlanabileceği en uzak köşe $\frac{u+\frac{1}{k}}{N}$ olur ve benzer en yakın köşe yoktur.

ii) $\frac{u+\frac{1}{k}}{N}$ nin bağlanabileceği en uzak köşe $\frac{u+\frac{1}{k-\frac{1}{k}}}{N}$ olur ve benzer en yakın köşe yoktur.

□

Teorem 1.18.9. (Deger, 2017) $1 \leq k, l \leq N$ için $u^2 + ku + 1 \equiv 0\ (mod\ N)$ ve $u^2 - lu + 1 \equiv 0\ (mod\ N)$ olsun. $F_{u,N}$ alt yörüngesel grafı kendisi ile eşleşmiş ise $k = l = N$ ve aksi taktirde $l = N - k$ dır.

□

Teorem 1.18.10. (Deger, 2017) $F_{u,N}$ Farey grafında $u^2 - lu + 1 \equiv 0\ (mod\ N)$ ve $1 < l \leq N$ olsun.

i) $\frac{u}{N}$ nin bağlanabileceği en uzak köşe $\frac{u-\frac{1}{l}}{N}$ dir ve benzer en yakın köşe yoktur.

ii) $\frac{u-\frac{1}{l}}{N}$ nin bağlanabileceği en uzak köşe $\frac{u-\frac{1}{l-\frac{1}{l}}}{N}$ dir ve benzer en yakın köşe yoktur.

□

Sonuç 1.18.11. (Deger, 2017) Eğer $u^2 - u + 1 \equiv 0\ (mod\ N)$ ise $F_{u,N}$, $\frac{1}{0} \leftarrow \frac{u-1}{N} \leftarrow \frac{u}{N} \leftarrow \frac{1}{0}$ şeklinde bir üçgene sahiptir.

□

Örnek 1.18.12. $k = 3$ ve $u^2 + 3u + 1 \equiv 0 \ (mod\ N)$ için $F_{u,N}$ alt yörüngesel grafında $u = 3$ ve $N = 4$ olsun. $F_{3,4}$ alt yörüngesel grafı için

$$\infty = \frac{1}{0} \to \underbrace{\frac{3}{4}}_{1.Köşe} \to \underbrace{\frac{3+\frac{1}{3}}{4}}_{2.Köşe} \to \underbrace{\frac{3+\cfrac{1}{3-\frac{1}{3}}}{4}}_{3.Köşe} \to \cdots \to \underbrace{\frac{3+\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{3-\ddots_{\frac{1}{3}}}}}{4}}_{n.Köşe} \to \underbrace{\frac{3+\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{3-\ddots_{\frac{1}{3}}}}}{4}}_{n+1.Köşe} \to \cdots$$

minimal uzunluğa sahip sonsuz yolda n. köşenin bağlanabileceği en uzak $(n+1)$. köşenin değeri $\frac{u+\frac{F_{2n}}{F_{2n+2}}}{N}$ olur. Örneğin 14. köşenin bağlanabileceği en uzak köşe olan 15. köşenin değerini elde etmek için $n = 14$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} (-1)^{n-1}F_{2n-2} & (-1)^n F_{2n} \\ (-1)^{n+1}F_{2n} & (-1)^n F_{2n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F_{26} & F_{28} \\ -F_{28} & F_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^{14}$$

$$= \begin{pmatrix} -271443 & 710647 \\ -710647 & 1860498 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. Buradan 15. köşenin değeri

$$\underbrace{\frac{3+\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{3-\ddots_{\frac{1}{3}}}}}{4}}_{15.Köşe} = \frac{3+\frac{F_{28}}{F_{30}}}{4} = \frac{3+\frac{710647}{1860498}}{4}$$

$$= 0.8454915028126877857433869 8$$

olur.

1.19. Algoritma

Algoritmalar günlük hayatımızın bir çok aşamasında önemli yere sahiptir. Her geçen gün artan teknolojik araçların kullanımı algoritmaların önemini bir kat daha artırmaktadır. Algoritmalar belirli bir sorunun çözülebilmesi ya da istenilen bir duruma ulaşılabilmesi için izlenmesi gereken adımları veren şemalardır. Algoritma bir sonuç değil sonuca giden bir yoldur.

Belirli bir duruma yönelik daha hızlı ve net çözümler veren algoritmaların bulunması süreci süreklidir. Bu süreçte duruma yönelik daha önceden yapılmış algoritmaların incelenmesi ve bunların geliştirilmesi önem arz etmektedir.

Günlük hayatımızın her aşamasında bilgisayar ve ağ sistemlerini görürüz. Hayatımızı kolaylaştıran, daha kısa zamanda uzun mesafeler almamızı ve dünyayla iletişimizi sağlayan ağ sistemleri mevcuttur. Bu ağ sistemlerinin temelinde de belirli komutlara göre çalışan algoritmalar bulunmaktadır.

Ağ sistemlerinin temelinde yatan gerçek verilen bir nesneyi minimum zaman ve maliyette bir noktadan diğerine taşımaktır. Bu taşıma esnasında problemin çözümüne yönelik modeller geliştirilerek algoritmalar çalışılır.

Algoritmalarla ilgili daha detaylı bilgi için Ahuja vd. (1993) ve Ruohonen (2006) çalışmaları incelenebilir.

1.19.1. Dijkstra Algoritması

Bir grafta kaynak bir köşeden graftaki diğer köşelere en kısa yolun bulunması problemine yönelik algoritmalar geliştirilmiştir. Belirtilen iki köşe arasındaki en kısa yolun ne olduğu probleminde en verimli algoritma Dijkstra (1959) ve Whiting ve Hillier (1960) tarafından tanımlanmıştır (Dreyfus, 1969). Pollack ve Wiebenson Dijkstra algoritmasının uygulanmasında köşelerin kalıcı değerlerinin elde edilmesine yönelik Minty'i tanımladı (Dreyfus, 1969).

Problemin çözümünde kullanılacak algoritmanın seçimi ise problemin türüne göre değişiklik göstermektedir. En kısa yol algoritmalarına örnek olarak single-sourch (Graftaki kaynak bir köşeden diğer tüm köşelere), single-destination (Graftaki tüm köşelerden verilen bir köşeye), single-pair (Seçilen iki köşe arasında), all-pairs (Graftaki tüm köşe çiftleri arasında) verilebilir.

Dijkstra algoritması W. E. Dijkstra (1930-2002) tarafından ortaya konmuştur. Grafta kaynak bir köşeden graftaki diğer tüm köşelere yüklerin alınış türüne göre minimum maliyeti, minimum uzunluğu, minimum direnci vb. bulmamızı sağlar. Grafın negatif yüklü olması durumunda Dijkstra algoritması çalışmaz, bu durumda Bellman-Ford veya Floyd algoritması gibi algoritmalarla çalışılması gerekir.

Burada Dijkstra algoritmasının akış şemasını verelim:

$\alpha(r,s)$ (r,s) kenarının uzunluğu olarak verilsin. Dijkstra algoritması köşeleri geçici veya kalıcı olarak etiketler. Bir r köşesinin değeri $\beta(r)$ ile gösterilsin. Etiketin değerleri ise

$$\gamma(r) = \begin{cases} 1, & \text{Kalıcı Etiket} \\ 0, & \text{Geçici Etiket} \end{cases}$$

olarak alınsın. $\beta(r)$, $u - r$ uzunluğunun en küçük değeri olarak verilsin. Geçici $\beta(r)$ değerleri ∞ olarak alınır. Eğer $u - r$ uzunluklu en küçük değerli yolda r'nin öncülü

$$\pi(r) = \begin{cases} 1, & \text{Varsa} \\ 0, & \text{Yoksa} \end{cases}$$

olarak alınır. Algoritmanın adımları şu şekilde uygulanır:

Kaynak köşe u olsun.

1. Adım: $\beta(u) \to 0$ ve $\gamma(u) = 1$. Diğer tüm r köşeleri için $\beta(r) \to \infty$, $\gamma(r) = 0$
$\pi(r) \to 0$ olur.

Bununla birlikte $u \to w$ olsun.

2. Adım: Her (w,r) uzunluğu için $\gamma(r) = 0$ ve $\beta(r) > \beta(w) + \alpha(w,r)$ olsun. O halde
$\beta(w) + \alpha(w,r) \to \beta(r), \pi(r) \to w$ olur.

3. Adım: $\gamma(r^*) = 0, \beta(r^*) < \infty$ ve $\beta(r^*) = \min_{\gamma(r)=0}\{\beta(r)\}$ olacak şekilde r^* bulalım.
Buradan $\gamma(r^*) \to 1$ ve $r^* \to w$ olur.

Eğer bu şekilde bir r^* köşesi yoksa, yönlü bir $u - r$ uzunluğu yoktur ve algoritma durdurulur.

4. Adım: Eğer $w \neq v$ ise, 2. adıma gidilir.

5. Adım: Dur.

(Ruohonen, 2006).

Dijkstra (1959) tarafından yayınlanan çalışmada iki problem üzerine durulmuştur. Birinci problem köşeler arasında minimum uzunlukta bir ağaç oluşturulması, ikincisi verilen iki köşe arasındaki minimum uzunluğun bulunmasıdır.

1.19.1.1. Minimum Uzunlukta Bir Ağaç Oluşturulması Problemi

Köşeler arasında minimum uzunlukta bir ağaç oluşturulması probleminde ağacı oluşturan kenarlar üç gruba ve köşeler iki gruba ayrılır.

Kenar grupları; oluşturulacak olan ağaca, kesinlikle ayrılan kenarlar, oluşturulacak olan ağaca sonradan eklenecek olan kenarlar ve ilk iki grup için henüz düşünülmeyen kenarlardır.

Köşe grupları; oluşturulacak olan ağaca kesinlikle ayrılan kenarlar ile birbirine bağlanan köşeler ve diğer köşelerdir.

İlk olarak oluşturulacak olan ağaca kesinlikle ayrılan kenarlar ile birbirine bağlanan köşeler grubundan rasgele bir köşe seçilir ve bu köşe ile biten tüm kenarlar oluşturulacak olan ağaca sonradan eklenecek olan kenarlar grubuna yerleştirerek işleme başlanır. Sonrasında aşağıdaki iki adım ağaç oluşturulana kadar tekrarlanır.

1. Adım: Ağaca sonradan eklenecek olan kenarlar grubunun en kısa dalı gruptan çıkarılır ve ağaca kesinlikle ayrılan kenarlar grubuna alınır. Sonuç olarak bir köşede ağaçta kullanılan köşeler grubuna geçer.

2. Adım: Adım 1 de ağaçta kullanılan köşeler grubuna henüz aktarılmış olan köşeden, ağaçta kullanılma ihtimali olan köşelere giden kenarları düşündüğümüzde söz konusu kenar ağaca sonradan eklenecek olan kenarlar grubunda karşılık gelen kenardan daha uzunsa sonradan eklenilmesi düşünülen kenar reddedilir. Sonradan eklenilmesi düşünülen kenar karşılık gelen kenardan daha kısa ise karşılık gelen kenar bu gruba alınır ve diğeri reddedilir. Sonra Adım 1'e dönülür ve ağaca sonradan eklenecek olan kenarlar grubu ve diğer köşeler grubu bitene kadar bu işlem tekrarlanır (Dijkstra, 1959).

1.19.1.2. İki Köşe Arasındaki Minimum Uzunluğun Hesaplanması

p ve q iki köşe olmak üzere minimum uzunluğun hesaplanması probleminde köşe ve kenarlar üçer gruba ayrılır.

r, p'den q'ya minimum yol üzerinde bir köşe olsun. p ile r arasındaki uzunluk minimum uzunluğu ifade eder. Benzer şekilde p'den q'ya kadar olan tüm kenarlar uzunluk sırasına göre küçükten büyüğe sıralanır.

Köşe grupları; p'den minimum yol uzunluğu bilinen köşeler, p'den minimum yol uzunluğu bilinen köşeler ile ortak kenarları olan henüz ilk gruba eklenmeyen köşeler ve diğer köşelerdir.

Kenar grupları; p'den minimum yol uzunluğu bilinen köşelerle bağlantılı kenarlar ve ilk kenar grubuna alınacak olan kenarların bulunduğu gruplardır. Bu ikinci gruptaki bir kenar bir köşenin grup değiştirmesine neden olur. Bunun yanında bir üçüncü grubu teşkil eden ve ilk iki gruba dahil olmayan kenarlar vardır.

İlk olarak p köşesi minimum yol uzunluğu bilinen köşeler grubuna alınır ve aşağıdaki iki adım iki köşe arasında minimum uzunluk oluşturulana kadar tekrarlanır.

1. Adım: p köşesi ile aralarında kenar bulunan köşeleri dikkate alalım. İkinci kenar grubundaki bir e kenarının p'den r'ye daha kısa bir yol sağlayıp sağlamayacağına bakılır. Eğer daha kısa bir yol sağlıyorsa yer değiştirirler ve diğeri reddedilir. Eğer r köşesi son grupta ise ikinci gruba ve ilgili kenarda ikinci kenar grubuna alınır. Sağlamıyorsa e kenarı red edilir.

2. Adım: Yalnızca p'den minimum yol uzunluğu bilinen köşeler ile ortak kenarları olan henüz ilk gruba eklenmeyen köşeler, p'den minimum yol uzunluğu bilinen köşelerle bağlantılı kenarlar ve ilk kenar grubuna alınacak olan kenarlar ile düşünüldüğünde p yalnızca bir şekilde bağlanabilir. Bu köşelerin p'den bir uzaklığı vardır. Yani p köşesi ile ikinci köşe grubunda bulunan her köşe arasında bir kenar vardır. p köşesinden minimum uzunluğa sahip köşe ilk köşe grubuna alınır ve ilgili kenarda ilk kenar grubuna alınır. q köşesi ilk köşe grubuna alınana kadar bu böyle devam eder (Dijkstra,1959).

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. M^n Matrisinin Kuadratik Denklemi ve Karakteristik Kökleri

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 2×2 tipinde bir matris ve I, 2×2 tipinde bir birim matristir. Karakteristik denklemi $|M - xI| = 0$ dir. Denklemin kökleri M nin karakteristik kökleridir. M^n in karakteristik kökleri aşağıda verildiği şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned}
|M^n - xI| &= \left| \begin{pmatrix} F_{2n-1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n+1} \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| \\
&= \left| \begin{pmatrix} F_{2n-1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \right| \\
&= \left| \begin{pmatrix} F_{2n-1} - x & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n+1} - x \end{pmatrix} \right| \\
&= (F_{2n-1} - x)(F_{2n+1} - x) - F_{2n}^2 \\
&= x^2 + F_{2n+1}F_{2n-1} - x(F_{2n+1} + F_{2n-1}) - F_{2n}^2 \\
&= x^2 - x(F_{2n+1} + F_{2n-1}) + F_{2n+1}F_{2n-1} - F_{2n}^2 \\
&= x^2 - xL_{2n} + 1
\end{aligned}$$

$$x^2 - xL_{2n} + 1 = 0 \tag{2.1}$$

Kuadratik denklemi kullanarak karakteristik köklere ulaşabiliriz.

$$x_{1,2} = \frac{L_{2n} \pm \sqrt{L_{2n}^2 - 4}}{2} \tag{2.2}$$

$L_n^2 - 4(-1)^n = 5F_n^2$ özdeşliği dikkate alınırsa, $n \to 2n$ değişken değiştirmesi ile $L_{2n}^2 - 4 = 5F_{2n}^2$ olur. Elde edilen özdeşlik (2.2) de yerine yazılırsa

$$x_{1,2} = \frac{L_{2n} \pm \sqrt{5F_{2n}^2}}{2} = \frac{L_{2n} \pm \sqrt{5}F_{2n}}{2} \tag{2.3}$$

sonucu elde edilir. Sonuç olarak $\alpha^{2n} - \beta^{2n} = \sqrt{5}F_{2n}$ ve $\alpha^{2n} + \beta^{2n} = L_{2n}$ özdeşliklerinden

$$\alpha^n = \sqrt{\frac{L_{2n} + \sqrt{5}F_{2n}}{2}} = \sqrt{x_1} \tag{2.4}$$

ve

$$\beta^n = \sqrt{\frac{L_{2n} - \sqrt{5}F_{2n}}{2}} = \sqrt{x_2} \tag{2.5}$$

sonuçları elde edilir.

2.2. R^n Matrisinin Kuadratik Denklemi ve Karakteristik Kökleri

$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, 2×2 tipinde bir matris ve I, 2×2 tipinde bir birim matristir. Karakteristik denklemi $|R - xI| = 0$ dır. Denklemin kökleri R nin karakteristik kökleridir. R^n in karakteristik kökleri aşağıda verildiği şekilde elde edilir.

R^{2n} matrisinin karakteristik köklerini elde edelim:

$$\begin{aligned}
|R^{2n} - xI| &= \left|\begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} - x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} 5^n - x & 0 \\ 0 & 5^n - x \end{pmatrix}\right| \\
&= (5^n - x)(5^n - x) \\
&= 5^{2n} - 2x5^n + x^2 \\
&= x^2 - 2.5^n x + 5^{2n}
\end{aligned}$$

$$x^2 - 2.5^n x + 5^{2n} = 0 \tag{2.6}$$

Kuadratik denklemin karakteristik kökleri

$$x_{1,2} = \frac{2.5^n \pm \sqrt{4.5^{2n} - 4.5^{2n}}}{2} = \frac{2.5^n}{2} = 5^n \tag{2.7}$$

olarak bulunur.

R^{2n+1} matrisinin karakteristik köklerini elde edelim:

$$\begin{aligned}|R^{2n+1} - xI| &= \left|\begin{pmatrix} 5^n & 2.5^n \\ 2.5^n & -5^n \end{pmatrix} - x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| \\ &= \left|\begin{pmatrix} 5^n & 2.5^n \\ 2.5^n & -5^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}\right| \\ &= \left|\begin{pmatrix} 5^n - x & 2.5^n \\ 2.5^n & -5^n - x \end{pmatrix}\right| \\ &= (5^n - x)(-5^n - x) - 4.5^{2n} \\ &= (5^n - x)(5^n + x) + 4.5^{2n} \\ &= -x^2 + 5^{2n} + 4.5^{2n}\end{aligned}$$

$$x^2 - 5^{2n+1} = 0 \tag{2.8}$$

Kuadratik denklemin karakteristik kökleri

$$x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{4.5^{2n+1}}}{2} = \pm 5^n\sqrt{5} \tag{2.9}$$

olarak bulunur.

2.3. $\boldsymbol{Q, M, R}$ Matrislerinin Lorentz Matris Çarpımı Altında $\boldsymbol{n}$. Kuvvetleri Yardımıyla Bazı Özdeşliklerin Elde Edilmesi

Bu kısımda Lorentz matris çarpımı altında Q, M ve R matrislerinin $\boldsymbol{n}$. kuvvetleri elde edilecektir. İki matris arasındaki Lorentz matris çarpımı "$\cdot_L$" ile gösterildi. $Q^{n\cdot_L}$ matrisi kullanılarak bir adet (2.10) özdeşliği elde edildi. $M^{n\cdot_L}$ ve Lorentz matris çarpımı kullanılarak Teorem 2.3.2.1. ve Teorem 2.3.2.2.'de verilen özdeşlikler elde edildi. Ancak R matrisi genelleştirilmiş matris türünden yazılamadığından özdeşlik elde edilemedi.

2.3.1. $\boldsymbol{Q}$ Matrisi ve İlgili Özdeşlik

$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisinin Lorentz matris çarpımı altında n. kuvveti

$$Q^{2\cdot_L} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot_L \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 & -F_1 \\ -F_1 & -F_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right| = -1$$

$$Q^{3\cdot_L} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \cdot_L \begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-F_1 & F_0\\ F_0 & F_1\end{pmatrix} \Rightarrow \left|\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right| = -1$$

$$Q^{4\cdot_L} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \cdot_L \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_1 & F_1\\ F_1 & F_0\end{pmatrix} \Rightarrow \left|\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right| = -1$$

$$Q^{5\cdot_L} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \cdot_L \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_0 & -F_1\\ -F_1 & -F_1\end{pmatrix} \Rightarrow \left|\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\right| = -1$$

$$Q^{6\cdot_L} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \cdot_L \begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-F_1 & F_0\\ F_0 & F_1\end{pmatrix} \Rightarrow \left|\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right| = -1$$

$\vdots$

$$Q^{n\cdot_L} = \begin{cases} \begin{pmatrix}F_1 & F_1\\ F_1 & F_0\end{pmatrix}, & \left|\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right| = -1, n = 3k+1, k \in \mathbb{N} \\ \begin{pmatrix}F_0 & -F_1\\ -F_1 & -F_1\end{pmatrix}, & \left|\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\right| = -1, n = 3k+2, k \in \mathbb{N} \\ \begin{pmatrix}-F_1 & F_0\\ F_0 & F_1\end{pmatrix}, & \left|\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right| = -1, n = 3k+3, k \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad (2.10)$$

olarak bulunur.

2.3.2. *M* Matrisi ve İlgili Özdeşlikler

$M = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ matrisinin Lorentz matris çarpımı altında n. kuvveti

$$M^{2\cdot_L} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} \cdot_L \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_0 & F_2\\ F_2 & F_4\end{pmatrix} \Rightarrow \left|\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\right| = -1$$

$$M^{3\cdot_L} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix} \cdot_L \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_1 & F_3\\ F_3 & F_5\end{pmatrix} \Rightarrow \left|\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}\right| = 1$$

$$M^{4\cdot_L} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix} \cdot_L \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_2 & F_4\\ F_4 & F_6\end{pmatrix} \Rightarrow \left|\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 8\end{pmatrix}\right| = -1$$

$$M^{5\cdot_L} = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 8\end{pmatrix} \cdot_L \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 5\\ 5 & 13\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_3 & F_5\\ F_5 & F_7\end{pmatrix} \Rightarrow \left|\begin{pmatrix}2 & 5\\ 5 & 13\end{pmatrix}\right| = 1$$

$\vdots$

$$M^{n\cdot_L} = \begin{pmatrix}F_{n-2} & F_n\\ F_n & F_{n+2}\end{pmatrix} \Rightarrow \left|\begin{pmatrix}F_{n-2} & F_n\\ F_n & F_{n+2}\end{pmatrix}\right| = (-1)^{n+1} \qquad (2.11)$$

olarak bulunur. Determinantı

$$F_{n-2}F_{n+2} - F_n^2 = (-1)^{n+1}, n \geq 2 \tag{2.12}$$

olur.

Tümevarım yöntemiyle $M^{n \cdot_L}$'in doğruluğunu inceleyelim:

$n = 2$ için doğrudur.

$$F_0F_4 - F_2^2 = 0.3 - 1^2 = (-1)^{2+1} = -1$$

$n = k$ için doğru olduğunu kabul edelim.

$$M^{k \cdot_L} = \begin{pmatrix} F_{k-2} & F_k \\ F_k & F_{k+2} \end{pmatrix}$$

$n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterelim:

$$M^{k+1 \cdot_L} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{k \cdot_L} \cdot_L \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k-2} & F_k \\ F_k & F_{k+2} \end{pmatrix} \cdot_L \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -F_{k-2} + F_k & -F_{k-2} + 2F_k \\ -F_k + F_{k+2} & -F_k + 2F_{k+2} \end{pmatrix}$$

$M^{k+1 \cdot_L}$ matrisinin elemanları düzenlenirse

$$F_k = F_{k-1} + F_{k-2} \Longrightarrow F_{k-1} = -F_{k-2} + F_k$$

$$-F_{k-2} + 2F_k = F_{k-1} + F_k = F_{k+1}$$

$$-F_k + 2F_{k+2} = -F_k + F_{k+2} + F_{k+2} = F_{k+1} + F_{k+2} = F_{k+3}$$

$$M^{k+1 \cdot_L} = \begin{pmatrix} F_{k-1} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_{k+3} \end{pmatrix}$$

olarak yazılabilir.

□

Diğer yandan

$$M^{2 \cdot_L} \cdot_L M^{3 \cdot_L} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot_L \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix} = M^{5 \cdot_L}$$

$$M^{1 \cdot_L} \cdot_L M^{5 \cdot_L} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot_L \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 8 & 21 \end{pmatrix} = M^{6 \cdot_L}$$

$$M^{2 \cdot_L} \cdot_L M^{4 \cdot_L} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot_L \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 8 & 21 \end{pmatrix} = M^{6 \cdot_L}$$

$$\vdots$$

olduğundan farklı m ve n sayıları için

$$M^{m \cdot_L} = \begin{pmatrix} F_{m-2} & F_m \\ F_m & F_{m+2} \end{pmatrix} \text{ ve } M^{n \cdot_L} = \begin{pmatrix} F_{n-2} & F_n \\ F_n & F_{n+2} \end{pmatrix}$$

$$M^{m+n \cdot_L} = \begin{pmatrix} F_{m+n-2} & F_{m+n} \\ F_{m+n} & F_{m+n+2} \end{pmatrix}$$

sonucuna ulaşılır.

Teorem 2.3.2.1.'de elde edilen özdeşlikler aynı zamanda klasik matris çarpımı altında elde edilen özdeşliklerdir. Bu çalışmada aynı özdeşliklere Lorentz matris çarpımı ile ulaşılmıştır.

Teorem 2.3.2.1.

i) $F_{m+n-2} = -F_{m-2}F_{n-2} + F_mF_n$

ii) $F_{m+n} = -F_{m-2}F_n + F_mF_{n+2}$

iii) $F_{m+n} = -F_mF_{n-2} + F_{m+2}F_n$

iv) $F_{m+n+2} = -F_mF_n + F_{m+2}F_{n+2}$

v) $\frac{F_m}{F_n} = \frac{F_{m+2}+F_{m-2}}{F_{n+2}+F_{n-2}}$

vi) $F_{2n} = L_nF_n$

İspat. Farklı m ve n sayıları için aşağıdaki işlemler Lorentz matris çarpımı altında sağlanır.

$$M^{m \cdot_L} = \begin{pmatrix} F_{m-2} & F_m \\ F_m & F_{m+2} \end{pmatrix} \text{ ve } M^{n \cdot_L} = \begin{pmatrix} F_{n-2} & F_n \\ F_n & F_{n+2} \end{pmatrix} \text{ için}$$

$$M^{m \cdot_L} \cdot_L M^{n \cdot_L} = \begin{pmatrix} F_{m-2} & F_m \\ F_m & F_{m+2} \end{pmatrix} \cdot_L \begin{pmatrix} F_{n-2} & F_n \\ F_n & F_{n+2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -F_{m-2}F_{n-2} + F_mF_n & -F_{m-2}F_n + F_mF_{n+2} \\ -F_mF_{n-2} + F_{m+2}F_n & -F_mF_n + F_{m+2}F_{n+2} \end{pmatrix}$$

$$M^{m+n \cdot_L} = \begin{pmatrix} F_{m+n-2} & F_{m+n} \\ F_{m+n} & F_{m+n+2} \end{pmatrix}$$

$$M^{m+n \cdot_L} = M^{m \cdot_L} \cdot_L M^{n \cdot_L}$$

bulunur.

i) $F_{m+n-2} = -F_{m-2}F_{n-2} + F_m F_n$

$F_r F_{m+n} = F_{m+r}F_n - (-1)^r F_m F_{n-r}$ (Halton,1965) özdeşliğinde özel olarak $r = 2$, $m = n - 2$ ve $n = m$ alınırsa

$$F_2 F_{n-2+m} = F_{n-2+2}F_m - (-1)^2 F_{n-2}F_{m-2}$$

$$F_{n+m-2} = -F_{n-2}F_{m-2} + F_n F_m$$

sonucuna ulaşılır.

ii) $F_{m+n} = -F_{m-2}F_n + F_m F_{n+2}$

$F_r F_{m+n} = F_{m+r}F_n - (-1)^r F_m F_{n-r}$ (Halton,1965) özdeşliğinde özel olarak $r = 2$, $m = n$ ve $n = m$ alınırsa

$$F_2 F_{n+m} = F_{n+2}F_m - (-1)^2 F_n F_{m-2}$$

$$F_{m+n} = -F_n F_{m-2} + F_{n+2}F_m$$

elde edilir.

iii) $F_{m+n} = -F_m F_{n-2} + F_{m+2}F_n$

$F_r F_{m+n} = F_{m+r}F_n - (-1)^r F_m F_{n-r}$ (Halton,1965) özdeşliğinde özel olarak $r = 2$ alınırsa

$$F_2 F_{m+n} = F_{m+2}F_n - (-1)^2 F_m F_{n-2}$$

$$F_{m+n} = F_{m+2}F_n - F_m F_{n-2}$$

bulunur.

iv) $F_{m+n+2} = -F_m F_n + F_{m+2}F_{n+2}$

$F_r F_{m+n} = F_{m+r}F_n - (-1)^r F_m F_{n-r}$ (Halton,1965) özdeşliğinde özel olarak $r = 2$, $n = m + 2$ ve $m = n$ alınırsa

$$F_r F_{m+n} = F_{m+r}F_n - (-1)^r F_m F_{n-r}$$

$$F_{n+m+2} = -F_n F_m + F_{n+2} F_{m+2}$$

elde edilir.

v) Özellikle (ii) ve (iii) özdeşliklerinden

$$F_{m+n} = -F_{m-2} F_n + F_m F_{n+2}$$

$$F_{m+n} = -F_m F_{n-2} + F_{m+2} F_n$$

$$-F_{m-2} F_n + F_m F_{n+2} = -F_m F_{n-2} + F_{m+2} F_n$$

$$F_m F_{n+2} + F_m F_{n-2} = F_{m+2} F_n + F_{m-2} F_n$$

$$F_m (F_{n+2} + F_{n-2}) = (F_{m+2} + F_{m-2}) F_n$$

$$\frac{F_m}{F_n} = \frac{F_{m+2} + F_{m-2}}{F_{n+2} + F_{n-2}}$$

sonucuna ulaşılır.

vi) (ii) özdeşliğinde eğer $m = n$ alınırsa

$$F_{m+n} = -F_{m-2} F_n + F_m F_{n+2} \Longrightarrow F_{n+n} = -F_{n-2} F_n + F_n F_{n+2}$$

$$F_{2n} = -F_{n-2} F_n + F_n F_{n+2} = (F_{n+2} - F_{n-2}) F_n = L_n F_n$$

$$F_{2n} = L_n F_n$$

bulunur.

□

Bu kısımda Lorentz matris çarpımı altında elde edilen yeni özdeşliklere yer verilmiştir.

Teorem 2.3.2.2.

i) $3F_{m+n} = F_{m+2} F_{n+2} - F_{m-2} F_{n-2}$

ii) $L_{m+n-1} = -L_{m-1} F_{n-2} + L_{m+1} F_n$

iii) $L_{m+n+1} = -L_{m-1} F_n + L_{m+1} F_{n+2}$

iv) $F_{2n-2} = -F_{n-2}^2 + F_n^2$

v) $F_{2n+2} = -F_n^2 + F_{n+2}^2$

vi) $3F_{2n} = F_{n+2}^2 - F_{n-2}^2$

vii) $L_{2n-1} = -L_{n-1}F_{n-2} + L_{n+1}F_n$

viii) $L_{2n+1} = -L_{n-1}F_n + L_{n+1}F_{n+2}$

ix) $L_{2n-1} + L_{2n+1} = -L_{n-1}^2 + L_{n+1}^2$

x) $L_{2n-1} = -F_{n-2}^2 + F_n^2 + L_nF_n$

İspat:

i) Özellikle Teorem 2.3.2.1. (i) ve Teorem 2.3.2.1. (iv) özdeşliklerinden

$$F_{m+n-2} = -F_{m-2}F_{n-2} + F_mF_n \Longrightarrow F_{m+n-2} + F_{m-2}F_{n-2} = F_mF_n$$

$$F_{m+n+2} = -F_mF_n + F_{m+2}F_{n+2} \Longrightarrow F_mF_n = F_{m+2}F_{n+2} - F_{m+n+2}$$

$$F_{m+n-2} + F_{m-2}F_{n-2} = F_{m+2}F_{n+2} - F_{m+n+2}$$

$$F_{m+n-2} + F_{m+n+2} = F_{m+2}F_{n+2} - F_{m-2}F_{n-2}$$

$$3F_{m+n} = F_{m+2}F_{n+2} - F_{m-2}F_{n-2}$$

bulunur.

ii) Özellikle Teorem 2.3.2.1. (i) ve Teorem 2.3.2.1. (iii) özdeşliklerinden

$$F_{m+n-2} = -F_{m-2}F_{n-2} + F_mF_n$$

$$F_{m+n} = -F_mF_{n-2} + F_{m+2}F_n$$

$$F_{m+n-2} + F_{m+n} = -F_{m-2}F_{n-2} + F_mF_n - F_mF_{n-2} + F_{m+2}F_n$$

$$= -(F_{m-2}+F_m)F_{n-2} + (F_m + F_{m+2})F_n$$

$$= -L_{m-1}F_{n-2} + L_{m+1}F_n$$

$$F_{m+n-2} + F_{m+n} = -L_{m-1}F_{n-2} + L_{m+1}F_n$$

$$L_{m+n-1} = -L_{m-1}F_{n-2} + L_{m+1}F_n$$

elde edilir.

iii) Özellikle Teorem 2.3.2.1. (ii) ve Teorem 2.3.2.1. (iv) özdeşliklerinden

$$F_{m+n} = -F_{m-2}F_n + F_mF_{n+2}$$

$$F_{m+n+2} = -F_mF_n + F_{m+2}F_{n+2}$$

$$F_{m+n} + F_{m+n+2} = -F_{m-2}F_n + F_mF_{n+2} - F_mF_n + F_{m+2}F_{n+2}$$

$$= -(F_{m-2} + F_m)F_n + (F_m + F_{m+2})F_{n+2}$$

$$= -L_{m-1}F_n + L_{m+1}F_{n+2}$$

$$L_{m+n+1} = -L_{m-1}F_n + L_{m+1}F_{n+2}$$

olur.

iv) Teorem 2.3.2.1. (i) özdeşliğinde eğer $m = n$ alınırsa

$$F_{m+n-2} = -F_{m-2}F_{n-2} + F_mF_n \Longrightarrow F_{n+n-2} = -F_{n-2}F_{n-2} + F_nF_n$$

$$F_{2n-2} = -F_{n-2}^2 + F_n^2$$

sonucu elde edilir.

v) Teorem 2.3.2.1. (iv) özdeşliğinde eğer $m = n$ alınırsa

$$F_{m+n+2} = -F_mF_n + F_{m+2}F_{n+2} \Longrightarrow F_{n+n+2} = -F_nF_n + F_{n+2}F_{n+2}$$

$$F_{2n+2} = -F_n^2 + F_{n+2}^2$$

sonucuna ulaşılır.

vi) (i) eşleniğinde eğer $m = n$ alınırsa

$$3F_{m+n} = F_{m+2}F_{n+2} - F_{m-2}F_{n-2}$$

$$3F_{2n} = F_{n+2}^2 - F_{n-2}^2$$

olur.

vii) (ii) özdeşliğinde eğer $m = n$ alınırsa

$$L_{m+n-1} = -L_{m-1}F_{n-2} + L_{m+1}F_n$$

$$L_{2n-1} = -L_{n-1}F_{n-2} + L_{n+1}F_n$$

sonucuna ulaşılır.

viii) (iii) özdeşliğinde eğer $m = n$ alınırsa

$$L_{m+n+1} = -L_{m-1}F_n + L_{m+1}F_{n+2}$$

$$L_{2n+1} = -L_{n-1}F_n + L_{n+1}F_{n+2}$$

sonucuna ulaşılır.

ix) (vii) ve (viii) da bulunan sonuçlar kullanılırsa

$$L_{2n-1} = -L_{n-1}F_{n-2} + L_{n+1}F_n$$

$$L_{2n+1} = -L_{n-1}F_n + L_{n+1}F_{n+2}$$

$$\begin{aligned} L_{2n-1} + L_{2n+1} &= -L_{n-1}F_{n-2} + L_{n+1}F_n - L_{n-1}F_n + L_{n+1}F_{n+2} \\ &= -(F_{n-2} + F_n)L_{n-1} + (F_n + F_{n+2})L_{n+1} \\ &= -L_{n-1}L_{n-1} + L_{n+1}L_{n+1} \\ &= -L_{n-1}^2 + L_{n+1}^2 \end{aligned}$$

$$L_{2n-1} + L_{2n+1} = -L_{n-1}^2 + L_{n+1}^2$$

sonucu elde edilir.

x) (iv) ve Teorem 2.3.2.1. (vi) da bulunan sonuçlar kullanılırsa

$$F_{2n-2} = -F_{n-2}^2 + F_n^2$$

$$F_{2n} = L_nF_n$$

$$F_{2n-2} + F_{2n} = -F_{n-2}^2 + F_n^2 + L_nF_n$$

$$L_{2n-1} = -F_{n-2}^2 + F_n^2 + L_nF_n$$

olur.

□

2.3.3. *R* Matrisi'nin İncelenmesi

$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ matrisinin Lorentz matris çarpımı altında n. kuvveti incelendiğinde

$$R^{2\cdot_L} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot_L \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_2 & -L_3 \\ -L_3 & -L_2 \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}\right| = -25$$

$$R^{3\cdot_L} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot_L \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -2 \\ -2 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L_5 & -F_3 \\ -F_3 & L_5 \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{pmatrix} -11 & -2 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}\right| = -125$$

$$R^{4\cdot_L} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot_L \begin{pmatrix} -11 & -2 \\ -2 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 24 \\ 24 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_4 & 24 \\ 24 & -L_4 \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{pmatrix} -11 & -2 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}\right| = -625$$

$$R^{5\cdot_L} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot_L \begin{pmatrix} 7 & 24 \\ 24 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 38 \\ -38 & -41 \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{pmatrix} 41 & 38 \\ -38 & -41 \end{pmatrix}\right| = -1325$$

sonucu elde edilir.

$R^{n\cdot_L}$ matrisi genelleştirilmiş matris türünden yazılamadığından özdeşlik elde edilemedi.

2.4. $Q^{n\cdot_L}, M^{n\cdot_L}, R^{n\cdot_L}$ Matrislerinin Kuadratik Denklemlerinin ve Karakteristik Köklerinin Bulunması

2.4.1. $Q^{n\cdot_L}$ Matrisinin Kuadratik Denklemi ve Karakteristik Köklerinin Bulunması

$Q^{n\cdot_L}$ değeri genelleştirilmiş matris türünden yazılamadığından kuadratik denklemi ve karakteristik kökleri bulunamamıştır.

2.4.2. $M^{n\cdot_L}$ Matrisinin Kuadratik Denklemi ve Karakteristik Köklerinin Bulunması

M matrisi için Lorentz matris çarpımı altında $F_{n-2}F_{n+2} - F_n^2 = (-1)^{n+1}$ özdeşliği elde edildi. $M^{n\cdot_L}$ matrisinin kuadratik denkleminden

$$|M^{n\cdot_L} - xI| = \left|\begin{pmatrix} F_{n-2} & F_n \\ F_n & F_{n+2} \end{pmatrix} - x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} F_{n-2} & F_n \\ F_n & F_{n+2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}\right|$$

$$= \left|\begin{pmatrix} F_{n-2} - x & F_n \\ F_n & F_{n+2} - x \end{pmatrix}\right|$$
$$= (F_{n-2} - x)(F_{n+2} - x) - F_n^2$$
$$= x^2 + F_{n-2}F_{n+2} - x(F_{n-2} + F_{n+2}) - F_n^2$$

bulunur.

$F_{n-2} + F_{n+2}$ ifadesinin karşılığını bulmak için

$$F_{m+n} = F_m L_n - (-1)^n F_{m-n} \quad \text{(Ruggles, 1963)} \tag{2.13}$$

özdeşliği kullanılırsa ve özdeşlikte $m \to n$ ve $n \to 2$ değişken değiştirmeleri yapılırsa

$$F_{n+2} = F_n L_2 - (-1)^2 F_{n-2}$$
$$F_{n+2} = F_n L_2 - F_{n-2}$$
$$F_{n+2} + F_{n-2} = F_n L_2 \Rightarrow F_{n+2} + F_{n-2} = 3F_n$$

bulunur. Elde edilen son özdeşlik kuadratik denklemde yerine yazılırsa

$$|M^{n.L} - xI| = x^2 + F_{n-2}F_{n+2} - x(F_{n-2} + F_{n+2}) - F_n^2$$
$$= x^2 + F_{n-2}F_{n+2} - 3F_n x - F_n^2$$
$$= x^2 - 3F_n x + (-1)^{n+1}$$
$$x^2 - 3F_n x + (-1)^{n+1} = 0 \tag{2.14}$$

sonucuna ulaşılır.

Kuadratik denklemi kullanarak karakteristik köklere ulaşabiliriz.

$$x_{1,2} = \frac{3F_n \pm \sqrt{9F_n^2 - 4(-1)^{n+1}}}{2} = \frac{3F_n \pm \sqrt{9F_n^2 + 4(-1)^n}}{2} \tag{2.15}$$

2.4.3. $R^{n \cdot L}$ Matrisinin Kuadratik Denklemi ve Karakteristik Köklerinin İncelenmesi

$R^{n \cdot L}$ değeri genelleştirilmiş matris türünden yazılamadığından kuadratik denklemi ve karakteristik kökleri bulunamamıştır.

2.5. Lorentz Matris Çarpımı Altında Alt Yörüngesel Grafın Köşelerinin Bulunması

Bu çalışmada ise $F_{u,N}$ alt yörüngesel grafında klasik matris çarpımı altında elde edilen köşeleri Lorentz matris çarpım altında veren Lorentz matrisi incelenecek ve Lorentz matrisinin Modüler grubun elemanı olmadığı gösterilecektir.

1.7.4'te $\mathbb{R}^2$'de iki nokta arasındaki yer değiştirme kullanılarak Lorentz matrisinin elde edilmesi konusu incelendi.

$v_0 = \frac{u}{N}$ olmak üzere, her $q \in \mathbb{Z}^+$ için

$$v_q = \begin{pmatrix} -u & \dfrac{u^2 + ku + 1}{N} \\ -N & u + k \end{pmatrix}^q (v_0)$$

yazılabilir. 1.7.4.'ten minimal uzunluklu yolda aynı köşeleri veren Lorentz matrisi

$$\begin{pmatrix} u & \dfrac{u^2 + ku + 1}{N} \\ N & u + k \end{pmatrix} \in L_2^2 \tag{2.16}$$

ile verilebilir. Buradan $v_0 = \frac{u}{N}$ ve her $q \in \mathbb{Z}^+$ için

$$v_q = \begin{pmatrix} u & \dfrac{u^2 + ku + 1}{N} \\ N & u + k \end{pmatrix}^q \cdot_L (v_0)$$

minimal uzunluklu yolun köşeleri sağlanır.

Sonuç 2.5.1. (2.16) ile verilen Lorentz matrisi Modüler grubun elemanı değildir.

İspat. $\left|\begin{pmatrix} u & \frac{u^2+ku+1}{N} \\ N & u+k \end{pmatrix}\right| = u(u+k) - N\left(\frac{u^2+ku+1}{N}\right) = u^2 + uk - u^2 - uk - 1 = -1.$

□

Sonuç 2.5.1. de determinant -1 olduğundan ilgili matrisi normalleştirebiliriz. Möbiüs dönüşümü ile ifade edelim.

$$m(z) = \frac{u \cdot z + \frac{u^2 + ku + 1}{N}}{N \cdot z + u + k}$$

$\alpha \in \hat{\mathbb{C}}/\{0\}$ için

$$m(z) = \frac{\alpha u \cdot z + \alpha \frac{u^2 + ku + 1}{N}}{\alpha N \cdot z + \alpha(u + k)}$$

$$det\big(m(z)\big) = \alpha u\big(\alpha(u + k)\big) - \alpha N\left(\alpha \frac{u^2 + ku + 1}{N}\right)$$

$$= \alpha^2 u(u + k) - \alpha^2(u^2 + ku + 1)$$

$$= \alpha^2 u^2 + \alpha^2 ku - \alpha^2 u^2 - \alpha^2 ku - \alpha^2 = 1$$

$\alpha^2 = -1$ için $\alpha = \pm i$ olur.

$\alpha = i$ için alalım. Bu durumda

$$m(z) = \frac{iu \cdot z + i\frac{u^2 + ku + 1}{N}}{iN \cdot z + i(u + k)}$$

olur. Möbiüs dönüşümü $i \in \hat{\mathbb{C}}/\{0\}$ için

$$\begin{pmatrix} ui & \dfrac{u^2+ku+1}{N}i \\ Ni & (u+k)i \end{pmatrix}$$

Modüler grubun elemanı olarak yazılabilir. Benzer işlemler $\alpha = -i$ için yapılabilir.

Möbiüs dönüşümünün türünü belirleyelim. $m(z) = \frac{a\cdot z+b}{c\cdot z+d}$ Möbiüs dönüşümünün izi $\tau(m) = (a+d)^2$ olmak üzere

$$\tau(m) = (a+d)^2 = (ui+(u+k)i)^2$$

$$= (ui)^2 + 2ui(u+k)i + \left((u+k)i\right)^2$$

$$= -u^2 - 2u^2 - 2uk + (-u^2 - 2uk - k^2)$$

$$= -4u^2 - 4uk - k^2$$

$$= -(2u+k)^2$$

$k \geq 2, k \in \mathbb{Z}$ ve u keyfi olduğunda, $u = -\frac{k}{2}$ için $\tau(m) = 0$ reel olduğundan m eliptik ve $u \neq -\frac{k}{2}$ için $\tau(m)$ reel olduğundan m loxodromiktir.

Sonuç 2.5.2. $(u,N) = 1$ ve $k \geq 2, k \in \mathbb{Z}$ için $u^2 + ku - 1 \equiv 0 \ (mod\ N)$ olmak üzere, $\begin{pmatrix} u & \frac{u^2+ku-1}{N} \\ N & u+k \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ elemanı $F_{u,N}$ alt yörüngesel grafında

$$\infty \overset{\cdot L}{\rightrightarrows} \frac{u}{N} \overset{\cdot L}{\rightrightarrows} \frac{u-\frac{1}{k}}{N} \overset{\cdot L}{\rightrightarrows} \frac{u-\cfrac{1}{k+\frac{1}{k}}}{N} \overset{\cdot L}{\rightrightarrows} \dots \overset{\cdot L}{\rightrightarrows} \underbrace{\frac{u-\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{k+\ddots \frac{1}{k}}}}{N}}_{n.\ K\ddot{o}\c{s}e} \overset{\cdot L}{\rightrightarrows} \dots \tag{2.17}$$

yolunu sağlar.

□

Örnek 2.5.3. Sonuç 2.5.2. de $u = 1$, $N = 5$ ve $k = 3$ için

$$\infty \overset{\cdot L}{\rightarrow} \frac{1}{5} \overset{\cdot L}{\rightarrow} \frac{2}{15} \overset{\cdot L}{\rightarrow} \frac{7}{50} \overset{\cdot L}{\rightarrow} \cdots \overset{\cdot L}{\rightarrow} \underbrace{\frac{1 - \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \ddots \frac{1}{3}}}}{5}}_{n.\ Köşe} \overset{\cdot L}{\rightarrow} \cdots$$

elde edilir.

2.6. Klasik Matris Çarpımı Altında Elde Edilen Alt Yörüngesel Grafların Köşeleri ve Lucas Sayıları Arasındaki Bağıntının Çalışılması

Değer (2017) tarafından yapılan çalışmada Sonuç 1.17.3. te özel olarak A matrisinde $k = 3$ alınarak, klasik matris çarpımı altında A matrisinin $n.$ kuvveti Fibonacci sayılarıyla ifade edildi. Matrisler ve sürekli kesirler arasındaki bağıntıdan alt yörüngesel grafın köşeleri Fibonacci sayıları ile tespit edildi.

Bu kısımda ise aynı k değeri için A matrisinin $n.$ kuvveti Lucas sayılarıyla ifade edilecek ve doğal olarak alt yörüngesel grafın köşeleri Lucas sayıları yardımıyla bulunacaktır.

Eğer $n \in \mathbb{N}$ için $F_{2n} = F_n \cdot L_n$

ve

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

özdeşlikleri ile

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

ve

$$\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

olduğu dikkate alınırsa $n \to \infty$ için

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}\left(1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right) \cong \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} \tag{2.18}$$

elde edilir.

Bulunan son yaklaşık değer $F_{2n} = F_n \cdot L_n$ özdeşliğinde yerine yazılırsa

$$F_{2n} = F_n \cdot L_n \cong \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} \cdot L_n \tag{2.19}$$

olur. Buradan alt yörüngesel grafın n. payı p_n olmak üzere

$$p_n = (-1)^n F_{2n} \cong (-1)^n \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} \cdot L_n \tag{2.20}$$

olarak bulunur. Buradan $F_{u,N}$ alt yörüngesel grafında $\frac{u}{N}$ köşesi ile başlayan minimal uzunluğa sahip yolda $(n+1)$. köşenin Lucas sayıları ile gösterimi

$$\frac{\frac{-p_n}{p_{n+1}} + u}{N} \cong \frac{\frac{(-1)^{n+1}\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} \cdot L_n}{(-1)^{n+1}\frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}} \cdot L_{n+1}} + u}{N} = \frac{\frac{L_n}{\alpha L_{n+1}} + u}{N} \tag{2.21}$$

olarak bulunur.

O halde Sonuç 1.17.3 te tanımlı matris için

$$p_{n-1} \cong (-1)^{n-1} \frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{5}} \cdot L_{n-1} \tag{2.22}$$

$$q_n = -p_{n+1} \cong -(-1)^{n+1} \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}} \cdot L_{n+1} = (-1)^n \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}} \cdot L_{n+1} \tag{2.23}$$

$$q_{n-1} = -p_n \cong -(-1)^n \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} \cdot L_n = (-1)^{n+1} \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} \cdot L_n \tag{2.24}$$

özdeşlikleri bulunur. Değerler matriste yerine yazılırsa

$$\begin{pmatrix} (-1)^{n-1} \frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{5}} \cdot L_{n-1} & (-1)^n \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} \cdot L_n \\ (-1)^{n+1} \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} \cdot L_n & (-1)^n \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}} \cdot L_{n+1} \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^n \tag{2.25}$$

sonucu elde edilir.

$$L_{-n} = (-1)^n L_n \tag{2.26}$$

özdeşliği kullanılarak (2.25) te elde edilen matris

$$\begin{pmatrix} \frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{5}} \cdot L_{1-n} & \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} \cdot L_{-n} \\ -\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} \cdot L_{-n} & -\frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}} \cdot L_{-n-1} \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^n \tag{2.27}$$

olarak yazılabilir.

Lucas sayıları ile oluşturulan (2.25) matrisi ile Örnek 1.18.12. de incelenen aynı adımın değerini bularak karşılaştıralım:

15. köşenin değeri için $n = 14$ ve $\alpha = 1.6180339887$ olarak alınırsa

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^{14} \cong \begin{pmatrix} -\frac{\alpha^{13}}{\sqrt{5}} \cdot L_{13} & \frac{\alpha^{14}}{\sqrt{5}} \cdot L_{14} \\ -\frac{\alpha^{14}}{\sqrt{5}} \cdot L_{14} & \frac{\alpha^{15}}{\sqrt{5}} \cdot L_{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -121392 & 317811 \\ -317811 & 832039 \end{pmatrix}$$

bulunur. $u = 3$, $N = 4$ için 15. köşenin değeri (2.21) de verilen özdeşlik kullanılarak

$$\frac{\frac{-p_n}{p_{n+1}}+u}{N} \cong \frac{\frac{L_n}{\alpha L_{n+1}}+u}{N}$$

$$\underbrace{\frac{3+\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{3-\ddots\cfrac{1}{3}}}}{4}}_{15.Köşe} \cong \frac{3+\frac{L_{14}}{\alpha L_{15}}}{4} = \frac{3+\frac{843}{1.6180339887\ \cdot 1364}}{4}$$

$$= 0.84549168851397129138782035$$

olarak bulunur. Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin terimleri ile oluşturulan matrisler ile elde edilen alt yörüngesel grafın köşe değerleri görüldüğü gibi birbirine çok yakındır.

□

Lemma 2.6.1. $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left|\begin{pmatrix} (-1)^{n-1}F_{2n-2} & (-1)^n F_{2n} \\ (-1)^{n+1}F_{2n} & (-1)^n F_{2n+2} \end{pmatrix}\right| = 1 \tag{2.28}$$

olur.

İspat.

$$\left|\begin{pmatrix} (-1)^{n-1}F_{2n-2} & (-1)^n F_{2n} \\ (-1)^{n+1}F_{2n} & (-1)^n F_{2n+2} \end{pmatrix}\right| =$$

$$= (-1)^{n-1}F_{2n-2}(-1)^n F_{2n+2} - (-1)^{n+1}F_{2n}(-1)^n F_{2n}$$
$$= (-1)^{2n-1}F_{2n-2}F_{2n+2} + (-1)^{2n+2}F_{2n}F_{2n}$$
$$= -F_{2n-2}F_{2n+2} + F_{2n}F_{2n}$$

$F_{n-2}F_{n+2} - F_n^2 = (-1)^{n+1}$ için $n \to 2n$ olarak alınırsa $F_{2n-2}F_{2n+2} - F_{2n}^2 = (-1)^{2n+1}$ için $F_{2n}^2 - F_{2n-2}F_{2n+2} = 1$ elde edilir.

□

Lemma 2.6.2. $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left|\begin{pmatrix} (-1)^{n-1}\dfrac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{5}}\cdot L_{n-1} & (-1)^{n}\dfrac{\alpha^{n}}{\sqrt{5}}\cdot L_{n} \\ (-1)^{n+1}\dfrac{\alpha^{n}}{\sqrt{5}}\cdot L_{n} & (-1)^{n}\dfrac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}}\cdot L_{n+1} \end{pmatrix}\right| = \begin{cases} \alpha^{2n} & n\ çift \\ -\alpha^{2n} & n\ tek \end{cases} \tag{2.29}$$

determinantı elde edilir.

İspat.

$$\left|\begin{pmatrix} (-1)^{n-1}\dfrac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{5}}\cdot L_{n-1} & (-1)^{n}\dfrac{\alpha^{n}}{\sqrt{5}}\cdot L_{n} \\ (-1)^{n+1}\dfrac{\alpha^{n}}{\sqrt{5}}\cdot L_{n} & (-1)^{n}\dfrac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}}\cdot L_{n+1} \end{pmatrix}\right| =$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{5}}\cdot L_{n-1}(-1)^{n}\frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}}\cdot L_{n+1} - (-1)^{n+1}\frac{\alpha^{n}}{\sqrt{5}}\cdot L_{n}\cdot(-1)^{n}\frac{\alpha^{n}}{\sqrt{5}}\cdot L_{n}$$

$$= (-1)^{2n-1}\frac{\alpha^{2n}}{5}\cdot L_{n-1}\cdot L_{n+1} - (-1)^{2n+1}\frac{\alpha^{2n}}{5}\cdot L_{n}^{2}$$

$$= -\frac{\alpha^{2n}}{5}\cdot L_{n-1}\cdot L_{n+1} + \frac{\alpha^{2n}}{5}\cdot L_{n}^{2}$$

$$= \frac{\alpha^{2n}}{5}(L_{n}^{2} - L_{n-1}\cdot L_{n+1})$$

$$= \frac{\alpha^{2n}}{5}5(-1)^{n}$$

$$= \alpha^{2n}(-1)^{n} = \begin{cases} \alpha^{2n} & n\ çift \\ -\alpha^{2n} & n\ tek \end{cases}$$

dir.

□

Lemma 2.6.3. Eğer $k = 3$ ise

$$x_n = -\frac{p_n}{p_{n+1}} \cong \frac{L_n}{\alpha L_{n+1}} \tag{2.30}$$

özdeşliği elde edilir.

İspat. Eğer $k = 3$ ise (2.21) den

$$x_n = \frac{F_{2n}}{F_{2n+2}} = \frac{-p_n}{p_{n+1}} \cong -\frac{-(-1)^n \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} \cdot L_n}{(-1)^{n+1} \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}} \cdot L_{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot \alpha^n \cdot \sqrt{5} \cdot L_n}{(-1)^{n+1} \cdot \alpha^{n+1} \cdot \sqrt{5} \cdot L_{n+1}}$$

$$= \frac{L_n}{\alpha L_{n+1}}$$

sonucuna ulaşılır.

□

Lemma 2.6.4. Eğer $k = 3$ ve $n \geq 1$ ise

$$\alpha F_{2n} L_{n+1} - F_{2n+2} L_n \cong 0 \tag{2.31}$$

dır.

İspat. Lemma 2.6.3' te elde edilen veriler kullanılarak

$$-\frac{p_n}{p_{n+1}} = \frac{F_{2n}}{F_{2n+2}} \cong \frac{L_n}{\alpha L_{n+1}}$$

$$\frac{F_{2n}}{F_{2n+2}} \cong \frac{L_n}{\alpha L_{n+1}} \Rightarrow \alpha F_{2n} L_{n+1} - F_{2n+2} L_n \cong 0.$$

sonucuna ulaşılır.

□

Lemma 2.6.5. $n \geq 1$ ise

$$L_{2n} \cong \frac{\sqrt{5}}{\alpha^{2n}} \left(\alpha p_{2n-1} - \frac{p_{2n+1}}{\alpha} \right) \tag{2.32}$$

olur.

İspat. $p_n = (-1)^n F_{2n} \cong (-1)^n \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}.L_n$ için $L_n \cong \frac{\sqrt{5}}{(-1)^n \alpha^n} p_n$ elde edilir.

$$L_{2n} = L_{2n+1} - L_{2n-1}$$

olduğundan

$$L_{2n+1} \cong \frac{\sqrt{5}}{(-1)^{2n+1}\alpha^{2n+1}} p_{2n+1} = \frac{-\sqrt{5}}{\alpha^{2n+1}} p_{2n+1}$$

$$L_{2n-1} \cong \frac{\sqrt{5}}{(-1)^{2n-1}\alpha^{2n-1}} p_{2n-1} = \frac{-\sqrt{5}}{\alpha^{2n-1}} p_{2n-1}$$

$$\begin{aligned} L_{2n} &= L_{2n+1} - L_{2n-1} \cong \frac{-\sqrt{5}}{\alpha^{2n+1}} p_{2n+1} + \frac{\sqrt{5}}{\alpha^{2n-1}} p_{2n-1} \\ &= \sqrt{5}\left(\frac{p_{2n-1}}{\alpha^{2n-1}} - \frac{p_{2n+1}}{\alpha^{2n+1}}\right) = \frac{\sqrt{5}}{\alpha^{2n}}\left(\alpha p_{2n-1} - \frac{p_{2n+1}}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

sonucu bulunur.

□

Lemma 2.6.6. $n \geq 1$ ise

$$F_n \cong -\frac{L_n}{5p_n}\left(\alpha p_{n-1} + \frac{1}{\alpha} p_{n+1}\right) \tag{2.33}$$

sonucu elde edilir.

İspat.

$$L_n \cong \frac{\sqrt{5}}{(-1)^n \alpha^n} p_n$$

özdeşliğinden

$$L_{n-1} \cong \frac{\sqrt{5}}{(-1)^{n-1}\alpha^{n-1}} p_{n-1}$$

$$L_{n+1} \cong \frac{\sqrt{5}}{(-1)^{n+1}\alpha^{n+1}} p_{n+1}$$

$$\begin{aligned} L_{n-1} + L_{n-1} &\cong \frac{\sqrt{5}}{(-1)^{n-1}\alpha^{n-1}} p_{n-1} + \frac{\sqrt{5}}{(-1)^{n+1}\alpha^{n+1}} p_{n+1} \\ &= -\frac{\sqrt{5}}{(-1)^{n}\alpha^{n-1}} p_{n-1} - \frac{\sqrt{5}}{(-1)^{n}\alpha^{n+1}} p_{n+1} \\ &= -\frac{\sqrt{5}}{(-1)^{n}\alpha^{n}} \left(\alpha p_{n-1} + \frac{1}{\alpha} p_{n+1}\right) \\ &= -\frac{L_n}{p_n} \left(\alpha p_{n-1} + \frac{1}{\alpha} p_{n+1}\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$L_{n-1} = F_{n-2} + F_n \text{ ve } L_{n+1} = F_n + F_{n+2}$$

olduğundan

$$L_{n-1} + L_{n+1} = F_{n-2} + 2F_n + F_{n+2}$$

bulunur. $F_{n-2} + F_{n+2} = 3F_n$ olduğundan

$$L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n$$

elde edilir. Buradan

$$F_n \cong -\frac{L_n}{5p_n} \left(\alpha p_{n-1} + \frac{1}{\alpha} p_{n+1}\right)$$

sonucuna ulaşılır.

□

Lemma 2.6.7. $n \geq 1$ ise

$$L_{n-1}L_{n+1} + (-1)^n \cong \frac{5}{\alpha^{2n}} p_{n-1}p_{n+1} + (-1)^n \tag{2.34}$$

sonucu elde edilir.

İspat.

$$\begin{aligned} L_{n-1}L_{n+1} + (-1)^n &\cong \frac{\sqrt{5}}{(-1)^{n-1}\alpha^{n-1}} p_{n-1} \frac{\sqrt{5}}{(-1)^{n+1}\alpha^{n+1}} p_{n+1} + (-1)^n \\ &= \frac{5}{(-1)^{2n}\alpha^{2n}} p_{n-1}p_{n+1} + (-1)^n \\ &= \frac{5}{\alpha^{2n}} p_{n-1}p_{n+1} + (-1)^n \end{aligned}$$

□

Lemma 2.6.8. $n \geq 1$ ise

$$(-1)^{n+1}(\alpha F_n - F_{n+1}) \cong 0. \tag{2.35}$$

İspat.

$$(-1)^{n+1}(\alpha F_n - F_{n+1}) \cong (-1)^{n+1}\left(\alpha \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} - \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}}\right) = 0$$

dır.

□

Lemma 2.6.9. $n \geq 1$ ise

$$L_n \cong F_n + 2F_{n-1} \tag{2.36}$$

sonucuna ulaşılır.

İspat.

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1} \cong \frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$$

$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$ kuadratik denklemi $\alpha + \frac{1}{\alpha} = 1 + \frac{2}{\alpha}$ olarak yazılırsa

$$\begin{aligned} L_n &\cong \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) \\ &= \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} + \frac{2\alpha^n}{\sqrt{5}\alpha} \\ &= \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} + \frac{2\alpha^{n-1}}{\sqrt{5}} \\ &= F_n + 2F_{n-1} \end{aligned}$$

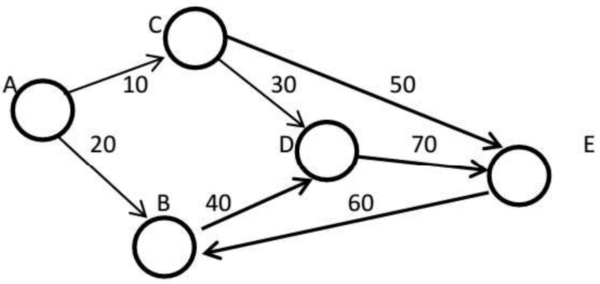
sonucuna ulaşılır.

□

2.7. Dijkstra Algoritması’nın Uygulanışı

Dijkstra algoritmasının uygulanmasında kaynak bir köşe seçilir ve bu köşenin değeri 0, diğer köşelerin değerlerleri henüz belirsiz olduğundan ∞ değerini alır. Kaynak kabul edilen köşeden grafın yönlenişine göre ulaşılabilecek olan ilk köşelere kenarlardaki yükler değerler olarak atanır. Bu durumda bu köşelere daha önce atanmış olan ∞ değerleri ile yeni değerler arasında bir değer kıyaslaması yapılır ve her türlü yeni değerler ∞’dan küçük olduğundan köşelerin yeni değerleri olarak atanırlar. Bu şekilde gelinen yeni köşeden grafın yönlenişine göre gidilebilecek olan ikinci köşeler belirlenir ve ikinci köşelere birinci kenarın ve ikinci kenarın yükleri eklenerek ikinci köşenin değerleri elde edilir. Buradan elde edilen veriler daha önce atanan değerlerle mukayese edilir. Küçük olan değer yeni değer olarak atanır. Bu şekilde tüm graf dolaşılır ve tablo sürekli güncellenir.

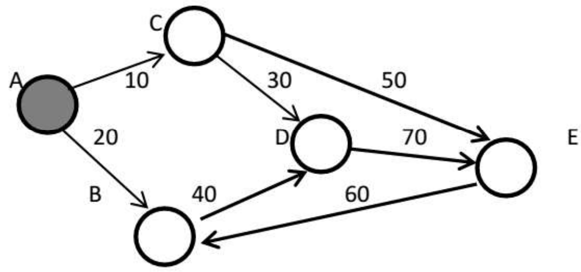
Örnek 2.7.1. Aşağıda verilen grafta seçilen bir kaynak köşeden diğer köşelere uzanan minimum yolu ve minimum uzunluktaki ağacı Dijkstra algoritması yardımıyla hesaplayalım.



Şekil 11. Yönlü ve yüklü bir graf

Çözüm. Grafta verilen gri renk şu an bulunduğumuz köşeyi sarı renk ise varılmak istenen köşeyi simgelesin.

1. Adım: A köşesini kaynak köşe olarak alalım. Kişinin A köşesinde olduğunu kabul edersek ve bulunduğu yere gelmesi için herhangi bir maliyet ya da A köşesine gitmesi için gereken bir mesafe bulunmadığından A köşesinin değeri 0 ve diğer köşeler ∞ olarak alınır.

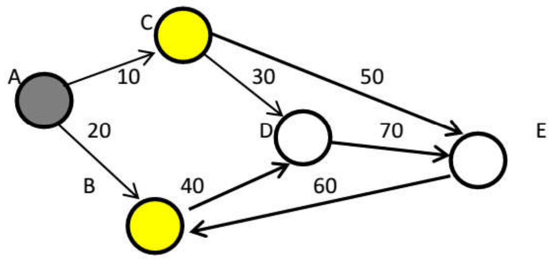


Şekil 12. Kaynak köşesi A olan yönlü ve yüklü graf

Tablo 1. Birinci adımın değer tablosu

Gidilen Köşeler (Minimum Değerleri)	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
A	0	∞	∞	∞	∞

2. Adım: Grafın yönlenişine göre A köşesinden B ve C köşelerine gidilebilir. Başlangıçta B köşesinin değeri ∞ olarak alınmıştı. $20 < \infty$ olduğundan B köşesinin yeni değeri 20 olur. Benzer şekilde $10 < \infty$ olduğundan C köşesinin yeni değeri 10 olur.

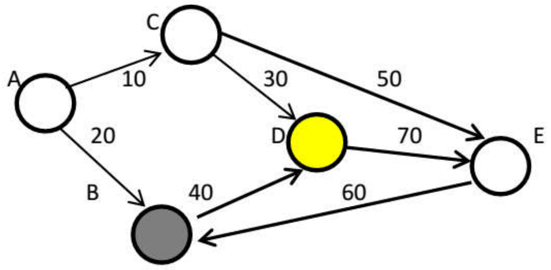


Şekil 13. Kaynak köşesi A olan, C ve B köşelerine yönlü ve yüklü graf

Tablo 2. İkinci adım değer tablosu

Gidilen Köşeler (Minimum Değerleri)	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
A	0	∞	∞	∞	∞
A (0)	0	20	10	∞	∞

3. Adım: Grafın yönlenişine göre A köşesinden B köşesine gidildiğini kabul edelim. B köşesinin değeri 20 olduğundan ve B köşesinden sadece D köşesine gidilebildiğinden A-B kenarının değeri 20 ve B-D kenarının değeri 40 olduğu dikkate alınırsa D köşesinin değeri 60 olur ve $60 < \infty$ olduğundan D köşesinin yeni değeri 60 olur. D köşesinden başka gidilecek köşe olmadığından diğer köşelerin değerleri aynı kalır.

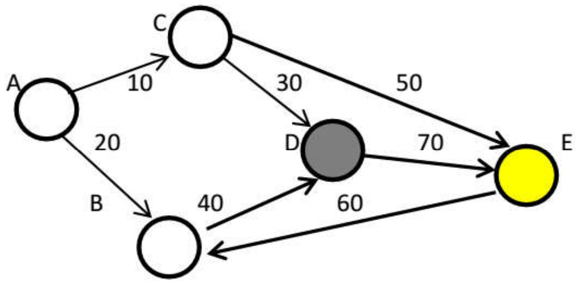


Şekil 14. Hareket köşesi B olan ve D köşesine yönlü ve yüklü graf

Tablo 3. Üçüncü adım değer tablosu

Gidilen Köşeler (Minimum Değerleri)	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
A	0	∞	∞	∞	∞
A (0)	0	20	10	∞	∞
B (20)	0	20	10	60	∞

4. Adım: Grafın yönlenişine göre B köşesinden D köşesine gidildiğini kabul edelim. D köşesinin değeri 60 olduğundan ve D köşesinden sadece E köşesine gidilebildiğinden D-E kenarının değerinin 70 olduğu dikkate alınırsa E köşesinin değeri 130 olur ve $130 < \infty$ olduğundan E köşesinin yeni değeri 130 olur.



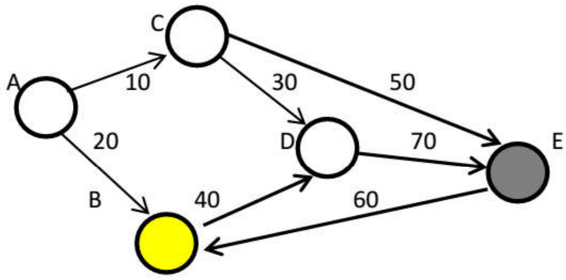
Şekil 15. Hareket köşesi D olan ve E köşesine yönlü ve yüklü graf

Tablo 4. Dördüncü adım değer tablosu

Gidilen Köşeler (Minimum Değerleri)	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
A	0	∞	∞	∞	∞
A (0)	0	20	10	∞	∞
B (20)	0	20	10	60	∞
D (60)	0	20	10	60	130

5. Adım: Grafın yönlenişine göre D köşesinden E köşesine gidildiğini kabul edelim. E köşesinin değeri 130 olduğundan ve E köşesinden sadece B köşesine gidilebildiğinden B

köşesinin değeri 190 olur fakat $20 < 190$ olduğundan B köşesinin değeri artacağından değiştirilmez. Başka gidilecek köşe olmadığından hepsi aynı kalır.

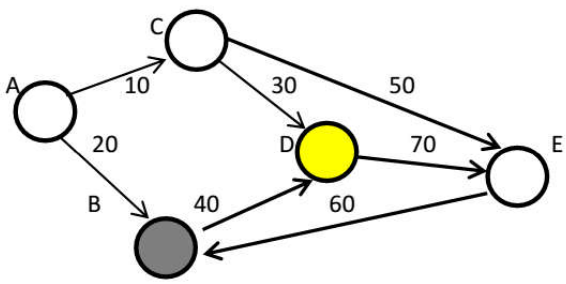


Şekil 16. Hareket köşesi E olan ve B köşesine yönlü ve yüklü graf

Tablo 5. Beşinci adım değer tablosu

Gidilen Köşeler (Minimum Değerleri)	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
A	0	∞	∞	∞	∞
A (0)	0	20	10	∞	∞
B (20)	0	20	10	60	∞
D (60)	0	20	10	60	130
E (130)	0	20	10	60	130

6. Adım: Grafın yönlenişine göre E köşesinden B köşesine gidildiğini kabul edelim. B köşesinin değeri 20 olduğundan ve B köşesinden sadece D köşesine gidilebildiğinden ve B-D kenarının değeri 40 olduğu dikkate alınırsa, D köşesinin değeri 60 olur ve D köşesinin değeri değiştirilmez. Başka gidilecek köşe olmadığından hepsi aynı kalır.

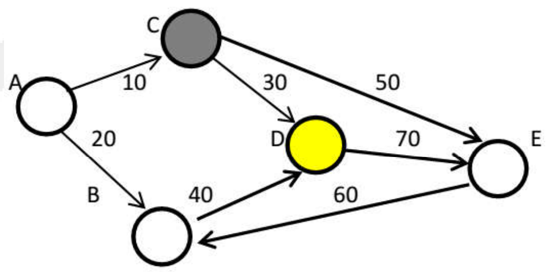


Şekil 17. Hareket köşesi B olan ve D köşesine yönlü ve yüklü graf

Tablo 6. Altıncı adım değer tablosu

Gidilen Köşeler (Minimum Değerleri)	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
A	0	∞	∞	∞	∞
A (0)	0	20	10	∞	∞
B (20)	0	20	10	60	∞
D (60)	0	20	10	60	130
E (130)	0	20	10	60	130
B (20)	0	20	10	60	130

7. Adım: Grafın yönlenişine göre A köşesinden C köşesine gidildiğini kabul edelim. C köşesinin değeri 10 olur ve C köşesinden hem D köşesine hem de E köşesine gidilebilir. D köşesine gidildiği kabul edilirse ve C-D kenarının değerinin 30 olduğu dikkate alınırsa D köşesinin değeri 40 olur ve $40 < 60$ olduğundan D köşesinin yeni değeri 40 olur.

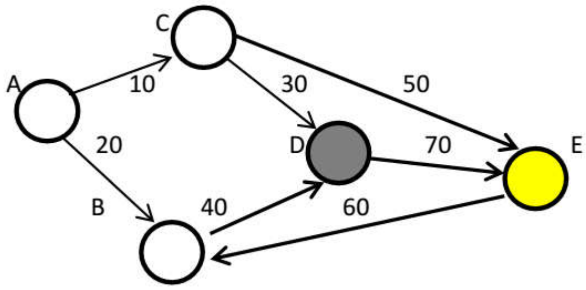


Şekil 18. Hareket köşesi C olan ve D köşesine yönlü ve yüklü graf

Tablo 7. Yedinci adım değer tablosu

Gidilen Köşeler (Minimum Değerleri)	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
A	0	∞	∞	∞	∞
A (0)	0	20	10	∞	∞
B (20)	0	20	10	60	∞
D (60)	0	20	10	60	130
E (130)	0	20	10	60	130
B (20)	0	20	10	60	130
C (10)	0	20	10	40	130

8. Adım: Grafın yönlenişine göre C köşesinden D köşesine gidildiğini kabul edelim. D köşesinin değerinin 40 ve D-E kenarının değerinin 70 olduğu dikkate alınırsa E köşesinin değeri 110 olur ve 110< 130 olduğundan E köşesinin yeni değeri 110 olur.

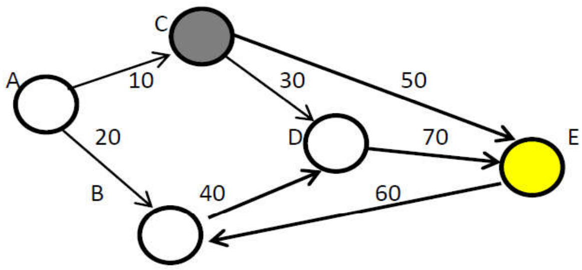


Şekil 19. Hareket köşesi D olan ve E köşesine yönlü ve yüklü graf

Tablo 8. Sekizinci adım değer tablosu

Gidilen Köşeler (Minimum Değerleri)	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
A	0	∞	∞	∞	∞
A (0)	0	20	10	∞	∞
B (20)	0	20	10	60	∞
D (60)	0	20	10	60	130
E (130)	0	20	10	60	130
B (20)	0	20	10	60	130
C (10)	0	20	10	40	130
D (40)	0	20	10	40	110

9. Adım: Grafın yönlenişine göre A köşesinden C köşesine gidildiğini kabul edelim. C köşesinin değeri 10 ve C-E kenarının değeri 50 olduğu dikkate alınırsa E köşesinin değeri 60 olur ve 60< 110 olduğundan E köşesinin yeni değeri 60 olur.

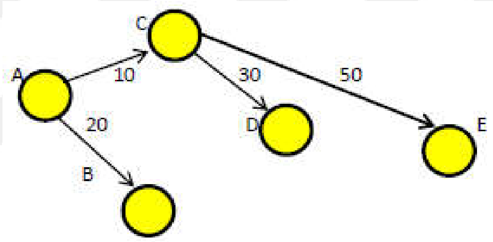


Şekil 20. Hareket köşesi C olan ve E köşesine yönlü ve yüklü graf

Tablo 9. Dokuzuncu adım değer tablosu

Gidilen Köşeler (Minimum Değerleri)	A	B	C	D	E
A	0	∞	∞	∞	∞
A (0)	0	20	10	∞	∞
B (20)	0	20	10	60	∞
D (60)	0	20	10	60	130
E (130)	0	20	10	60	130
B (20)	0	20	10	60	130
C (10)	0	20	10	40	130
D (40)	0	20	10	40	110
C (10)	0	20	10	40	60

O halde minimum yol ağacı



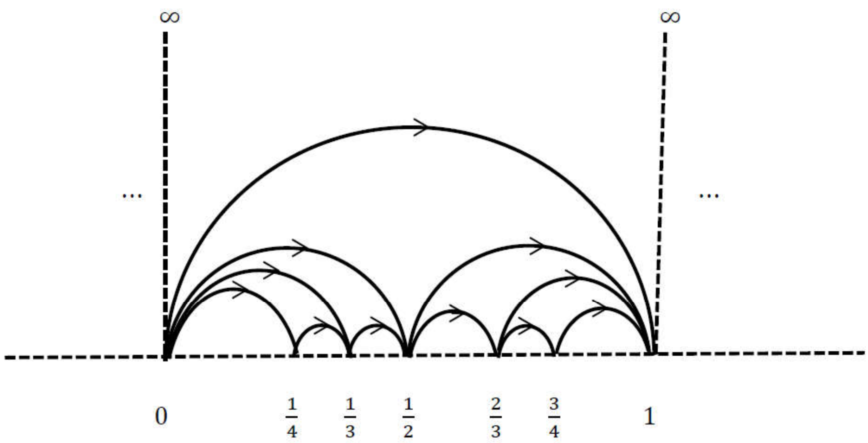
Şekil 21. Ağaç grafiği

Şekil 21'deki grafikte olduğu gibidir.

Benzer şekilde diğer noktalarda kaynak köşe alınarak çok farklı minimum uzunluklu ağaçlar elde edilebilir.

2.8. Farey Grafı Örneğinde Dijsktra Algoritması ile İki Köşe Arasındaki Minimum Uzunluğun Bulunması

Örnek 2.8.1. $G_{1,1} = F$ Farey grafı örneğini aşağıda verildiği şekilde yönlü graf olarak gösterelim. Grafta seçilen bir kaynak köşeden Dijkstra algoritması yardımıyla diğer köşelere minimum uzunluğu ve minimum uzunluktaki ağacı hesaplayalım.



Şekil 22. $G_{1,1} = F$ Farey grafı örneği

Çözüm. $\frac{t}{s}$ ve $\frac{x}{y}$ köşeleri arasındaki kenarın yükünü $Ç = \pi r$ olarak alalım ve grafın ardışık köşeleri arasındaki r' yi medyan kuralından elde edelim.

$\frac{t}{s}$ ve $\frac{x}{y}$, F de komşu köşeler olsun. O halde medyan $r = \frac{t}{s} \oplus \frac{x}{y} = \frac{t+x}{s+y}$ olur. Buradan bir kenarın yükü $Ç = \frac{1}{2} 2\pi \left(\frac{t+x}{s+y}\right) = \pi \left(\frac{t+x}{s+y}\right)$ olarak bulunur.

Tablo 10. $G_{1,1} = F$ Farey grafı yük tablosu

Hiperbolik Doğrunun Adı	Başlangıç Köşesi	Bitiş Köşesi	Medyan Değeri	Yük Değeri
$Ç_1$	0	1	$1/2$	$\pi/2$
$Ç_2$	$0/1$	$1/2$	$1/3$	$\pi/3$
$Ç_3$	$1/2$	1	$2/3$	$2\pi/3$
$Ç_4$	$0/1$	$1/3$	$1/4$	$\pi/4$
$Ç_5$	$2/3$	1	$3/4$	$3\pi/4$
$Ç_6$	$0/1$	$1/4$	$1/5$	$\pi/5$
$Ç_7$	$1/4$	$1/3$	$2/7$	$2\pi/7$
$Ç_8$	$1/3$	$1/2$	$2/5$	$2\pi/5$
$Ç_9$	$1/2$	$2/3$	$3/5$	$3\pi/5$
$Ç_{10}$	$2/3$	$3/4$	$5/7$	$5\pi/7$
$Ç_{11}$	$3/4$	1	$4/5$	$4\pi/5$

1. Adım: İlk önce 0 köşesini kaynak köşe olarak alalım. Kişinin 0 köşesinde olduğunu kabul edersek ve bulunduğu yere gelmesi için herhangi bir maliyet ya da 0 köşesine gitmesi için gerekli bir mesafe olmadığından 0 köşesinin değeri 0 ve diğer köşeler ∞ olarak alınır.

Tablo 11. $G_{1,1} = F$ Farey grafı birinci adımın değer tablosu

Gidilen Köşeler (Minimum Değerleri)	$\mathbf{0/1}$	$\mathbf{1/4}$	$\mathbf{1/3}$	$\mathbf{1/2}$	$\mathbf{2/3}$	$\mathbf{3/4}$	$\mathbf{1}$
$0/1$	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞

2. Adım: Grafın yönlenişine göre $\frac{0}{1}$ köşesinden $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{1}$ köşelerine gidilebilir. Tüm bu köşeler için başlangıç değerleri ∞ olarak alınmıştı. $\frac{1}{4}$ köşesi için $\frac{\pi}{5} < \infty$ olduğundan $\frac{1}{4}$ köşesinin yeni değeri $\frac{\pi}{5}$ olur. $\frac{1}{3}$ köşesi için $\frac{\pi}{4} < \infty$ olduğundan $\frac{1}{3}$ köşesinin yeni değeri $\frac{\pi}{4}$ olur. $\frac{1}{2}$ köşesi için $\frac{\pi}{3} < \infty$ olduğundan $\frac{1}{2}$ köşesinin yeni değeri $\frac{\pi}{3}$ olur. $\frac{1}{1}$ köşesi için $\frac{\pi}{2} < \infty$ olduğundan $\frac{1}{1}$ köşesinin yeni değeri $\frac{\pi}{2}$ olur.

Tablo 12. $G_{1,1} = F$ Farey grafı ikinci adımın değer tablosu

Gidilen Köşeler (Minimum Değerleri)	$\mathbf{0/1}$	$\mathbf{1/4}$	$\mathbf{1/3}$	$\mathbf{1/2}$	$\mathbf{2/3}$	$\mathbf{3/4}$	$\mathbf{1}$
$0/1$	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$0/1\ (0)$	0	$\pi/5$	$\pi/4$	$\pi/3$	∞	∞	$\pi/2$

3. Adım: Grafın yönlenişine göre $\frac{0}{1}$ köşesinden $\frac{1}{4}$ köşesine gidildiğini kabul edelim. $\frac{1}{4}$ köşesinden sadece $\frac{1}{3}$ köşesine gidilebilir. Başlangıçta $\frac{1}{3}$ köşesinin değeri $\frac{\pi}{4}$ olarak alınmıştı. $\frac{1}{4}$ ile $\frac{1}{3}$ köşeleri arasındaki yarı çemberin yükü $\frac{2\pi}{7}$ olarak bulunur. Buradan $\frac{1}{3}$ köşesinin değeri $\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{7} = \frac{17\pi}{35}$ olur. Ancak $\frac{\pi}{4} < \frac{17\pi}{35}$ olduğundan köşelerin değerlerinde değişiklik yapılmaz.

Tablo 13. $G_{1,1} = F$ Farey grafı üçüncü adımın değer tablosu

Gidilen Köşeler (Minimum Değerleri)	$\mathbf{0/1}$	$\mathbf{1/4}$	$\mathbf{1/3}$	$\mathbf{1/2}$	$\mathbf{2/3}$	$\mathbf{3/4}$	$\mathbf{1}$
$0/1$	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$0/1\ (0)$	0	$\pi/5$	$\pi/4$	$\pi/3$	∞	∞	$\pi/2$
$1/4\ (\pi/5)$	0	$\pi/5$	$\pi/4$	$\pi/3$	∞	∞	$\pi/2$

4. Adım: Grafın yönlenişine göre $\frac{1}{4}$ köşesinden $\frac{1}{3}$ köşesine gidildiğini kabul edelim. $\frac{1}{3}$ köşesinden sadece $\frac{1}{2}$ köşesine gidilebilir. Başlangıçta $\frac{1}{2}$ köşesinin değeri $\frac{\pi}{3}$ olarak alınmıştı. $\frac{1}{3}$ ile $\frac{1}{2}$ köşeleri arasındaki yarı çemberin yükü $\frac{2\pi}{5}$ olarak bulunur. Buradan $\frac{1}{2}$ köşesinin değeri $\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{5} = \frac{13\pi}{20}$ olur. Ancak $\frac{\pi}{3} < \frac{13\pi}{20}$ olduğundan köşelerin değerlerinde değişiklik yapılmaz.

Tablo 14. $G_{1,1} = F$ Farey grafı dördüncü adımın değer tablosu

Gidilen Köşeler (Minimum Değerleri)	$\mathbf{0/1}$	$\mathbf{1/4}$	$\mathbf{1/3}$	$\mathbf{1/2}$	$\mathbf{2/3}$	$\mathbf{3/4}$	$\mathbf{1}$
$0/1$	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$0/1\ (0)$	0	$\pi/5$	$\pi/4$	$\pi/3$	∞	∞	$\pi/2$
$1/4\ (\pi/5)$	0	$\pi/5$	$\pi/4$	$\pi/3$	∞	∞	$\pi/2$
$1/3\ (\pi/4)$	0	$\pi/5$	$\pi/4$	$\pi/3$	∞	∞	$\pi/2$

5. Adım: Grafın yönlenişine göre $\frac{1}{3}$ köşesinden $\frac{1}{2}$ köşesine gidildiğini kabul edelim. $\frac{1}{2}$ köşesinden $\frac{2}{3}$ ve $\frac{1}{1}$ köşelerine gidilebilir. Başlangıçta $\frac{2}{3}$ köşesinin değeri ∞ olarak alınmıştı. $\frac{1}{2}$ ile $\frac{2}{3}$ köşeleri arasındaki yarı çemberin yükü $\frac{3\pi}{5}$ olarak bulunur. Buradan $\frac{2}{3}$ köşesinin değeri $\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{5} = \frac{14\pi}{15}$ olur. $\frac{14\pi}{15} < \infty$ olduğundan $\frac{2}{3}$ köşesinin yeni değeri $\frac{14\pi}{15}$ olur. Başlangıçta $\frac{1}{1}$ köşesinin değeri $\frac{\pi}{2}$ olarak alınmıştı. $\frac{1}{2}$ ile $\frac{1}{1}$ köşeleri arasındaki yarı çemberin yükü $\frac{2\pi}{3}$ olarak bulunur. Buradan $\frac{1}{1}$ köşesinin değeri $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$ olur. $\frac{\pi}{2} < \pi$ olduğundan köşe değerinde değişiklik yapılmaz.

Tablo 15. $G_{1,1} = F$ Farey grafı beşinci adımın değer tablosu

Gidilen Köşeler (Minimum Değerleri)	$\mathbf{0/1}$	$\mathbf{1/4}$	$\mathbf{1/3}$	$\mathbf{1/2}$	$\mathbf{2/3}$	$\mathbf{3/4}$	$\mathbf{1}$
$0/1$	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$0/1\ (0)$	0	$\pi/5$	$\pi/4$	$\pi/3$	∞	∞	$\pi/2$
$1/4\ (\pi/5)$	0	$\pi/5$	$\pi/4$	$\pi/3$	∞	∞	$\pi/2$
$1/3\ (\pi/4)$	0	$\pi/5$	$\pi/4$	$\pi/3$	∞	∞	$\pi/2$
$1/2\ (\pi/3)$	0	$\pi/5$	$\pi/4$	$\pi/3$	$14\pi/15$	∞	$\pi/2$

6. Adım: Grafın yönlenişine göre $\frac{1}{2}$ köşesinden $\frac{2}{3}$ köşesine gidildiğini kabul edelim. $\frac{2}{3}$ köşesinden $\frac{3}{4}$ ve $\frac{1}{1}$ köşelerine gidilebilir. Başlangıçta $\frac{3}{4}$ köşesinin değeri ∞ olarak alınmıştı. $\frac{2}{3}$ ile $\frac{3}{4}$ köşeleri arasındaki yarı çemberin yükü $\frac{5\pi}{7}$ olarak bulunur. Buradan $\frac{3}{4}$ köşesinin değeri $\frac{14\pi}{15} + \frac{5\pi}{7} = \frac{173\pi}{105}$ olur.$\frac{173\pi}{105} < \infty$ olduğundan $\frac{3}{4}$ köşesinin yeni değeri $\frac{173\pi}{105}$ olur. $\frac{1}{1}$ köşesinin minimum değeri $\frac{\pi}{2}$ olarak alınmıştı. $\frac{2}{3}$ ile $\frac{1}{1}$ köşeleri arasındaki yarı çemberin yükü $\frac{3\pi}{4}$ olarak bulunur. Buradan $\frac{1}{1}$ köşesinin değeri $\frac{14\pi}{15} + \frac{3\pi}{4} = \frac{101\pi}{60}$ olur. $\frac{\pi}{2} < \frac{101\pi}{60}$ olduğundan köşe değerinde değişiklik yapılmaz.

Tablo 16. $G_{1,1} = F$ Farey grafı altıncı adımın değer tablosu

Gidilen Köşeler (Minimum Değerleri)	$\mathbf{0/1}$	$\mathbf{1/4}$	$\mathbf{1/3}$	$\mathbf{1/2}$	$\mathbf{2/3}$	$\mathbf{3/4}$	$\mathbf{1}$
$0/1$	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$0/1\ (0)$	0	$\pi/5$	$\pi/4$	$\pi/3$	∞	∞	$\pi/2$
$1/4\ (\pi/5)$	0	$\pi/5$	$\pi/4$	$\pi/3$	∞	∞	$\pi/2$
$1/3\ (\pi/4)$	0	$\pi/5$	$\pi/4$	$\pi/3$	∞	∞	$\pi/2$
$1/2\ (\pi/3)$	0	$\pi/5$	$\pi/4$	$\pi/3$	$14\pi/15$	∞	$\pi/2$
$2/3\ (14\pi/15)$	0	$\pi/5$	$\pi/4$	$\pi/3$	$14\pi/15$	$173\pi/105$	$\pi/2$

7. Adım: Grafın yönlenişine göre $\frac{2}{3}$ köşesinden $\frac{3}{4}$ köşesine gidildiğini kabul edelim. $\frac{3}{4}$ köşesinden sadece $\frac{1}{1}$ köşesine gidilebilir. $\frac{3}{4}$ köşesinin minimum değeri $\frac{173\pi}{105}$ olarak alınmıştı. $\frac{3}{4}$ ile $\frac{1}{1}$ köşeleri arasındaki yarı çemberin yükü

$\frac{4\pi}{5}$ olarak bulunur. $\frac{1}{1}$ köşesinin değeri $\frac{\pi}{2}$ olarak alınmıştı. Buradan $\frac{1}{1}$ köşesinin değeri $\frac{173\pi}{105} + \frac{4\pi}{5} = \frac{257\pi}{105}$ olur. $\frac{\pi}{2} < \frac{257\pi}{105}$ olduğundan köşe değerinde değişiklik yapılmaz.

Tablo 17. $G_{1,1} = F$ Farey grafı yedinci adımın değer tablosu

Gidilen Köşeler (Minimum Değerleri)	$0/1$	$1/4$	$1/3$	$1/2$	$2/3$	$3/4$	1
$0/1$	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$0/1$ (0)	0	$\pi/5$	$\pi/4$	$\pi/3$	∞	∞	$\pi/2$
$1/4$ $(\pi/5)$	0	$\pi/5$	$\pi/4$	$\pi/3$	∞	∞	$\pi/2$
$1/3$ $(\pi/4)$	0	$\pi/5$	$\pi/4$	$\pi/3$	∞	∞	$\pi/2$
$1/2$ $(\pi/3)$	0	$\pi/5$	$\pi/4$	$\pi/3$	$14\pi/15$	∞	$\pi/2$
$2/3$ $(14\pi/15)$	0	$\pi/5$	$\pi/4$	$\pi/3$	$14\pi/15$	$173\pi/105$	$\pi/2$
$3/4$ $(173\pi/105)$	0	$\pi/5$	$\pi/4$	$\pi/3$	$14\pi/15$	$173\pi/105$	$\pi/2$

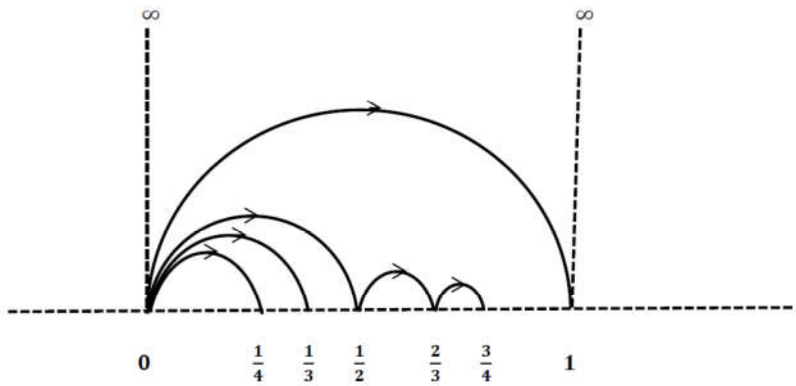
8. Adım: Grafın yönlenişine göre $\frac{3}{4}$ köşesinden $\frac{1}{1}$ köşesine gidildiğini kabul edelim. $\frac{1}{1}$ köşesinden grafın yönlenişine göre gidilecek bir köşe olmadığından algoritma sonlandırılır. Köşe değerlerinde değişiklik yapılmaz.

Tablo 18. $G_{1,1} = F$ Farey grafı sekizinci adımın değer tablosu

Gidilen Köşeler (Minimum Değerleri)	$0/1$	$1/4$	$1/3$	$1/2$	$2/3$	$3/4$	1
$0/1$	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$0/1$ (0)	0	$\pi/5$	$\pi/4$	$\pi/3$	∞	∞	$\pi/2$
$1/4$ $(\pi/5)$	0	$\pi/5$	$\pi/4$	$\pi/3$	∞	∞	$\pi/2$
$1/3$ $(\pi/4)$	0	$\pi/5$	$\pi/4$	$\pi/3$	∞	∞	$\pi/2$
$1/2$ $(\pi/3)$	0	$\pi/5$	$\pi/4$	$\pi/3$	$14\pi/15$	∞	$\pi/2$
$2/3$ $(14\pi/15)$	0	$\pi/5$	$\pi/4$	$\pi/3$	$14\pi/15$	$173\pi/105$	$\pi/2$
$3/4$ $(173\pi/105)$	0	$\pi/5$	$\pi/4$	$\pi/3$	$14\pi/15$	$173\pi/105$	$\pi/2$
$1/1$ $(\pi/2)$	0	$\pi/5$	$\pi/4$	$\pi/3$	$14\pi/15$	$173\pi/105$	$\pi/2$

Farey grafının tanımlı $\frac{t}{s}$ ve $\frac{x}{y}$ komşu köşeleri arasında $ty - sx = \pm 1$ koşulu sağlanır. Bu örnekte sadece $ty - sx = -1$ olma durumu dikkate alındı. Bazı örneklerde kenarlardan bazıları $ty - sx = 1$ koşulunu gerçekler.

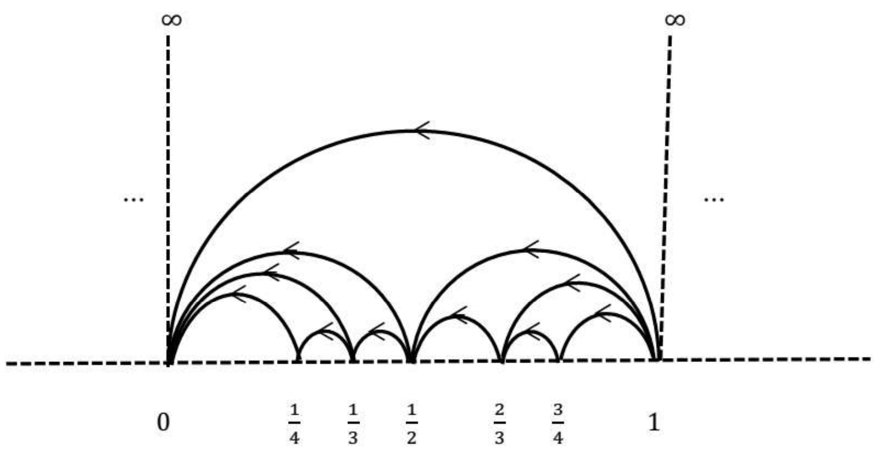
O halde minimum uzunluklu ağaç



Şekil 23. $G_{1,1} = F$ Farey ağaç grafı

olarak verilebilir.

Örnek 2.8.2. $G_{1,1} = F$ Farey grafı örneğini aşağıda verildiği şekilde yönlü graf olarak gösterelim. Grafta seçilen bir kaynak köşeden Dijkstra algoritması yardımıyla diğer köşelere minimum uzunluğu ve minimum uzunluktaki ağacı hesaplayalım.



Şekil 24. $G_{1,1} = F$ Farey grafı örneği

Çözüm. $\frac{t}{s}$ ve $\frac{x}{y}$ köşeleri arasındaki kenarın yükünü $Ç = \pi r$ olarak alalım ve grafın ardışık köşeleri arasındaki r' yi medyan kuralından elde edelim.

$\frac{t}{s}$ ve $\frac{x}{y}$, F de komşu köşeler olsun. O halde medyan $r = \frac{t}{s} \oplus \frac{x}{y} = \frac{t+x}{s+y}$ olur. Buradan bir kenarın yükü $Ç = \frac{1}{2} 2\pi \left(\frac{t+x}{s+y}\right) = \pi \left(\frac{t+x}{s+y}\right)$ olarak bulunur.

Tablo 19. $G_{1,1} = F$ Farey grafı yük tablosu

Hiperbolik Doğrunun Adı	Başlangıç Köşesi	Bitiş Köşesi	Medyan Değeri	Yük Değeri
$Ç_1$	1	0	$1/2$	$\pi/2$
$Ç_2$	1	$1/2$	$2/3$	$2\pi/3$
$Ç_3$	1	$2/3$	$3/4$	$3\pi/4$
$Ç_4$	1	$3/4$	$4/5$	$4\pi/5$
$Ç_5$	$3/4$	$2/3$	$5/7$	$5\pi/7$
$Ç_6$	$2/3$	$1/2$	$3/5$	$3\pi/5$
$Ç_7$	$1/2$	0	$1/3$	$\pi/3$
$Ç_8$	$1/2$	$1/3$	$2/5$	$2\pi/5$
$Ç_9$	$1/3$	0	$1/4$	$\pi/4$
$Ç_{10}$	$1/3$	$1/4$	$2/7$	$2\pi/7$
$Ç_{11}$	$1/4$	0	$1/5$	$\pi/5$

1. Adım: İlk önce 1 köşesini kaynak köşe olarak alalım. Kişinin 1 köşesinde olduğunu kabul edersek ve bulunduğu yere gelmesi için herhangi bir maliyet ya da 1 köşesine gitmesi için gerekli bir mesafe olmadığından 1 köşesinin değeri 0 ve diğer köşeler ∞ olarak alınır.

Tablo 20. $G_{1,1} = F$ Farey grafı birinci adımın değer tablosu

Gidilen Köşeler (Minimum Değerleri)	$\mathbf{0/1}$	$\mathbf{1/4}$	$\mathbf{1/3}$	$\mathbf{1/2}$	$\mathbf{2/3}$	$\mathbf{3/4}$	**1**
1	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

2. Adım: Grafın yönlenişine göre $\frac{1}{1}$ köşesinden $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ ve $\frac{0}{1}$ köşelerine gidilebilir. Tüm bu köşeler için başlangıç değerleri ∞ olarak alınmıştı. $\frac{3}{4}$ köşesi için $\frac{4\pi}{5} < \infty$ olduğundan $\frac{3}{4}$ köşesinin yeni değeri $\frac{4\pi}{5}$ olur. $\frac{2}{3}$ köşesi için $\frac{3\pi}{4} < \infty$ olduğundan $\frac{2}{3}$ köşesinin yeni değeri $\frac{3\pi}{4}$ olur. $\frac{1}{2}$ köşesi için $\frac{2\pi}{3} < \infty$ olduğundan $\frac{1}{2}$ köşesinin yeni değeri $\frac{2\pi}{3}$ olur. $\frac{0}{1}$ köşesi için $\frac{\pi}{2} < \infty$ olduğundan $\frac{0}{1}$ köşesinin yeni değeri $\frac{\pi}{2}$ olur.

Tablo 21. $G_{1,1} = F$ Farey grafı ikinci adımın değer tablosu

Gidilen Köşeler (Minimum Değerleri)	$\mathbf{0/1}$	$\mathbf{1/4}$	$\mathbf{1/3}$	$\mathbf{1/2}$	$\mathbf{2/3}$	$\mathbf{3/4}$	$\mathbf{1}$
1	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0
$1/1\ (0)$	$\pi/2$	∞	∞	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$4\pi/5$	0

3. Adım: Grafın yönlenişine göre $\frac{1}{1}$ köşesinden $\frac{3}{4}$ köşesine gidildiğini kabul edelim. $\frac{3}{4}$ köşesinden sadece $\frac{2}{3}$ köşesine gidilebilir. Başlangıçta $\frac{2}{3}$ köşesinin değeri $\frac{3\pi}{4}$ olarak alınmıştı. $\frac{3}{4}$ ile $\frac{2}{3}$ köşeleri arasındaki yarı çemberin yükü $\frac{5\pi}{7}$ olarak bulunur. Buradan $\frac{2}{3}$ köşesinin değeri $\frac{4\pi}{5} + \frac{5\pi}{7} = \frac{53\pi}{35}$ olur. Ancak $\frac{3\pi}{4} < \frac{53\pi}{35}$ olduğundan köşelerin değerlerinde değişiklik yapılmaz.

Tablo 22. $G_{1,1} = F$ Farey grafı üçüncü adımın değer tablosu

Gidilen Köşeler (Minimum Değerleri)	$\mathbf{0/1}$	$\mathbf{1/4}$	$\mathbf{1/3}$	$\mathbf{1/2}$	$\mathbf{2/3}$	$\mathbf{3/4}$	$\mathbf{1}$
1	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0
$1/1\,(0)$	$\pi/2$	∞	∞	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$4\pi/5$	0
$3/4\ (4\pi/5)$	$\pi/2$	∞	∞	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$4\pi/5$	0

4. Adım: Grafın yönlenişine göre $\frac{3}{4}$ köşesinden $\frac{2}{3}$ köşesine gidildiğini kabul edelim. $\frac{2}{3}$ köşesinden sadece $\frac{1}{2}$ köşesine gidilebilir. Başlangıçta $\frac{1}{2}$ köşesinin değeri $\frac{2\pi}{3}$ olarak alınmıştı. $\frac{2}{3}$ ile $\frac{1}{2}$ köşeleri arasındaki yarı çemberin yükü $\frac{3\pi}{5}$ olarak bulunur. Buradan $\frac{1}{2}$ köşesinin

değeri $\frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi}{5}=\frac{27\pi}{20}$ olur. Ancak $\frac{2\pi}{3}<\frac{27\pi}{20}$ olduğundan köşelerin değerlerinde değişiklik yapılmaz.

Tablo 23. $G_{1,1}=F$ Farey grafı dördüncü adımın değer tablosu

Gidilen Köşeler (Minimum Değerleri)	$0/1$	$1/4$	$1/3$	$1/2$	$2/3$	$3/4$	1
1	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0
$1/1\ (0)$	$\pi/2$	∞	∞	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$4\pi/5$	0
$3/4\ (4\pi/5)$	$\pi/2$	∞	∞	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$4\pi/5$	0
$2/3\ (3\pi/4)$	$\pi/2$	∞	∞	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$4\pi/5$	0

5. Adım: Grafın yönlenişine göre $\frac{2}{3}$ köşesinden $\frac{1}{2}$ köşesine gidildiğini kabul edelim. $\frac{1}{2}$ köşesinden $\frac{1}{3}$ ve $\frac{0}{1}$ köşelerine gidilebilir. Başlangıçta $\frac{1}{3}$ köşesinin değeri ∞ olarak alınmıştı. $\frac{1}{2}$ ile $\frac{1}{3}$ köşeleri arasındaki yarı çemberin yükü $\frac{2\pi}{5}$ olarak bulunur. Buradan $\frac{1}{3}$ köşesinin değeri $\frac{2\pi}{3}+\frac{2\pi}{5}=\frac{16\pi}{15}$ olur. $\frac{16\pi}{15}<\infty$ olduğundan $\frac{1}{3}$ köşesinin yeni değeri $\frac{16\pi}{15}$ olur. Başlangıçta $\frac{0}{1}$ köşesinin değeri $\frac{\pi}{2}$ olarak alınmıştı. $\frac{1}{2}$ ile $\frac{0}{1}$ köşeleri arasındaki yarı çemberin yükü $\frac{\pi}{3}$ olarak bulunur. Buradan $\frac{0}{1}$ köşesinin değeri $\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\pi$ olur. $\frac{\pi}{2}<\pi$ olduğundan köşe değerinde değişiklik yapılmaz.

Tablo 24. $G_{1,1}=F$ Farey grafı beşinci adımın değer tablosu

Gidilen Köşeler (Minimum Değerleri)	$0/1$	$1/4$	$1/3$	$1/2$	$2/3$	$3/4$	1
1	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0
$1/1\ (0)$	$\pi/2$	∞	∞	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$4\pi/5$	0
$3/4\ (4\pi/5)$	$\pi/2$	∞	∞	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$4\pi/5$	0
$2/3\ (3\pi/4)$	$\pi/2$	∞	∞	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$4\pi/5$	0
$1/2\ (2\pi/3)$	$\pi/2$	∞	$16\pi/15$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$4\pi/5$	0

6. Adım: Grafın yönlenişine göre $\frac{1}{2}$ köşesinden $\frac{1}{3}$ köşesine gidildiğini kabul edelim. $\frac{1}{3}$ köşesinden $\frac{1}{4}$ ve $\frac{0}{1}$ köşelerine gidilebilir. Başlangıçta $\frac{1}{4}$ köşesinin değeri ∞ olarak alınmıştı. $\frac{1}{3}$ ile $\frac{1}{4}$ köşeleri arasındaki yarı çemberin yükü $\frac{2\pi}{7}$ olarak bulunur. Buradan $\frac{1}{4}$ köşesinin değeri $\frac{16\pi}{15}+\frac{2\pi}{7}=\frac{142\pi}{105}$ olur.$\frac{142\pi}{105}<\infty$ olduğundan $\frac{1}{4}$ köşesinin yeni değeri $\frac{142\pi}{105}$ olur. $\frac{0}{1}$ köşesinin değeri $\frac{\pi}{2}$ olarak alınmıştı. $\frac{1}{3}$ ile $\frac{1}{1}$ köşeleri arasındaki yarı çemberin yükü $\frac{2\pi}{4}$ olarak bulunur. Buradan $\frac{0}{1}$ köşesinin değeri $\frac{16\pi}{15}+\frac{2\pi}{4}=\frac{94\pi}{60}$ olur. $\frac{\pi}{2}<\frac{94\pi}{60}$ olduğundan köşe değerinde değişiklik yapılmaz.

Tablo 25. $G_{1,1}=F$ Farey grafı altıncı adımın değer tablosu

Gidilen Köşeler (Minimum Değerleri)	**$0/1$**	**$1/4$**	**$1/3$**	**$1/2$**	**$2/3$**	**$3/4$**	**1**
1	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0
$1/1$ (0)	$\pi/2$	∞	∞	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$4\pi/5$	0
$3/4$ $(4\pi/5)$	$\pi/2$	∞	∞	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$4\pi/5$	0
$2/3$ $(3\pi/4)$	$\pi/2$	∞	∞	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$4\pi/5$	0
$1/2$ $(2\pi/3)$	$\pi/2$	∞	$16\pi/15$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$4\pi/5$	0
$1/3$ $(16\pi/15)$	$\pi/2$	$142\pi/105$	$16\pi/15$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$4\pi/5$	0

7. Adım: Grafın yönlenişine göre $\frac{1}{3}$ köşesinden $\frac{1}{4}$ köşesine gidildiğini kabul edelim. $\frac{1}{4}$ köşesinden sadece $\frac{0}{1}$ köşesine gidilebilir. $\frac{1}{4}$ köşesinin minimum değeri $\frac{142\pi}{105}$ olarak alınmıştı. $\frac{1}{4}$ ile $\frac{0}{1}$ köşeleri arasındaki yarı çemberin yükü $\frac{\pi}{5}$ olarak bulunur. $\frac{0}{1}$ köşesinin değeri $\frac{\pi}{2}$ olarak alınmıştı. Buradan $\frac{0}{1}$ köşesinin değeri $\frac{142\pi}{105}+\frac{\pi}{5}=\frac{163\pi}{105}$ olur. $\frac{\pi}{2}<\frac{163\pi}{105}$ olduğundan köşe değerinde değişiklik yapılmaz.

Tablo 26. $G_{1,1}=F$ Farey grafı yedinci adımın değer tablosu

Gidilen Köşeler (Minimum Değerleri)	**$0/1$**	**$1/4$**	**$1/3$**	**$1/2$**	**$2/3$**	**$3/4$**	**1**
1	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

Tablo 26'nın devamı

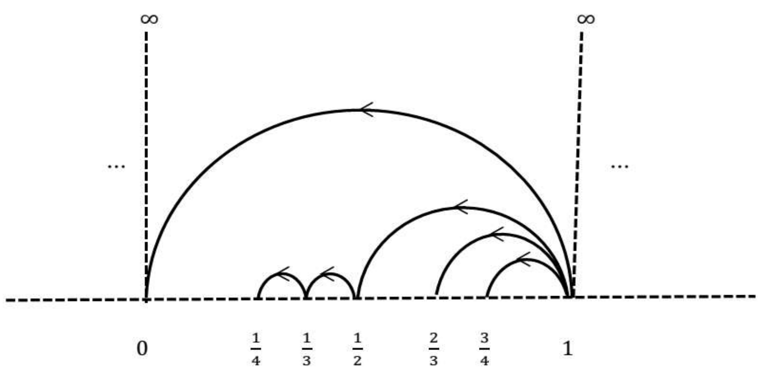
$1/1\ (0)$	$\pi/2$	∞	∞	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$4\pi/5$	0
$3/4\ (4\pi/5)$	$\pi/2$	∞	∞	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$4\pi/5$	0
$2/3\ (3\pi/4)$	$\pi/2$	∞	∞	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$4\pi/5$	0
$1/2\ (2\pi/3)$	$\pi/2$	∞	$16\pi/15$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$4\pi/5$	0
$1/3\ (16\pi/15)$	$\pi/2$	$142\pi/105$	$16\pi/15$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$4\pi/5$	0
$1/4\ (142\pi/105)$	$\pi/2$	$142\pi/105$	$16\pi/15$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$4\pi/5$	0

8. Adım: Grafın yönlenişine göre $\frac{1}{4}$ köşesinden $\frac{0}{1}$ köşesine gidildiğini kabul edelim. $\frac{0}{1}$ köşesinden grafın yönlenişine göre gidilecek bir köşe olmadığından algoritma sonlandırılır. Köşe değerlerinde değişiklik yapılmaz.

Tablo 27. $G_{1,1} = F$ Farey grafı sekizinci adımın değer tablosu

Gidilen Köşeler (Minimum Değerleri)	$\mathbf{0/1}$	$\mathbf{1/4}$	$\mathbf{1/3}$	$\mathbf{1/2}$	$\mathbf{2/3}$	$\mathbf{3/4}$	**1**
1	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0
$1/1\ (0)$	$\pi/2$	∞	∞	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$4\pi/5$	0
$3/4\ (4\pi/5)$	$\pi/2$	∞	∞	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$4\pi/5$	0
$2/3\ (3\pi/4)$	$\pi/2$	∞	∞	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$4\pi/5$	0
$1/2\ (2\pi/3)$	$\pi/2$	∞	$16\pi/15$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$4\pi/5$	0
$1/3\ (16\pi/15)$	$\pi/2$	$142\pi/105$	$16\pi/15$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$4\pi/5$	0
$1/4\ (142\pi/105)$	$\pi/2$	$142\pi/105$	$16\pi/15$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$4\pi/5$	0
$0/1\ (\pi/2)$	$\pi/2$	$142\pi/105$	$16\pi/15$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$4\pi/5$	0

O halde minimum uzunluklu ağaç



Şekil 25. $G_{1,1} = F$ Farey ağaç grafı

olarak verilebilir.

Farey grafının tanımlı $\frac{t}{s}$ ve $\frac{x}{y}$ komşu köşeleri arasında $ty - sx = \pm 1$ koşulu sağlanır. Bu örnekte sadece $ty - sx = +1$ olma durumu dikkate alındı. Bazı örneklerde kenarlardan bazıları $ty - sx = -1$ koşulunu gerçekler.

Son olarak Örnek 2.8.1. ve Örnek 2.8.2. de elde edilen $G_{1,1} = F$ Farey ağaç graflarını sürekli kesirler ile ilişkilendirelim. $G_{1,1} = F$ bağlantılıdır, çünkü ∞ 0 a bağlı iken, herhangi bir rasyonel köşe çifti (yeterince büyük m için) F_m de bir yol ile bağlanır. Buradan, $v, w \in \widehat{\mathbb{Q}}$ $G_{1,1} = F$ de herhangi iki köşe olmak üzere, $d(v, w)$ Farey uzaklığını, v den w ya herhangi bir yoldaki minimum kenar sayısı olarak tanımlayabiliriz; böylece d $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde bir metrik ve Γ izometrilerin bir grubudur. $p, q \in \mathbb{Z}, |q| \geq 2$ için ∞ dan 2 uzaklıktaki köşeler için $p + q^{-1}$ rasyonelleri var iken, $d(\infty, v) = 1$ olan w köşeleri tamsayılardır. Wicks (1983) tarafından, $a_i \in \mathbb{Z}$ için $G_{1,1} = F$ de w yı

$$a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{a_3 - \cfrac{\ddots}{- \cfrac{1}{a_n}}}}$$

şeklinde sürekli bir kesir ile ifade edilerek ∞ dan w ya en kısa yolun nasıl bulunabileceğini gösterdi. Örneğin,

$$6/_{11} = 1 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{-5}}$$

sürekli kesrine karşılık gelen 3 uzunluklu yol

$$\infty \to 1 \to 1 - 1/_2 \to 1 - (2 - (-5)^{-1})^{-1} = 6/_{11}$$

ile verilir. Eğer $w = \frac{x}{y}$ ise buradan $d(\infty, w)$ aynı zamanda, (x, y) nin en büyük ortak çarpanını bulmak için kullanılan en küçük kalan algoritmasında yer alan bölümlerin sayısıdır. Örneğin;

$$6 = 1.11 - 5 \left(|5| \leq \frac{1}{2}|11|\right)$$

$$11 = -2.-5 + 1 \; (|1| \leq \frac{1}{2}|-5|)$$

$-5 = -5.1$ (0 kalanı ile).

Burada $d(\infty, w)$ yı w nın kompleksliğinin bir ölçüsü olarak düşünebiliriz (Jones vd.,1991).

Sonuç 2.8.3. Örnek 2.8.1. de elde edilen sağa yönlü $G_{1,1} = F$ Farey ağaç grafının adım sayısı aşağıdaki tablo ile verilebilir. $d(\infty, 0/1) = 1$ olarak alalım.

Tablo 28. Sağa yönlü $G_{1,1} = F$ Farey ağaç grafının adım sayısı değer tablosu

Gidilen Köşeler	$\mathbf{0/1}$	$\mathbf{1/4}$	$\mathbf{1/3}$	$\mathbf{1/2}$	$\mathbf{2/3}$	$\mathbf{3/4}$	$\mathbf{1}$
Minimum Adım Sayısı	1	2	2	2	3	4	2

Sonuç 2.8.4. Örnek 2.8.2. de elde edilen sola yönlü $G_{1,1} = F$ Farey ağaç grafının adım sayısı aşağıdaki tablo ile verilebilir. $d(\infty, 1/1) = 1$ olarak alalım.

Tablo 29. Sola yönlü $G_{1,1} = F$ Farey ağaç grafının adım sayısı değer tablosu

Gidilen Köşeler	$\mathbf{0/1}$	$\mathbf{1/4}$	$\mathbf{1/3}$	$\mathbf{1/2}$	$\mathbf{2/3}$	$\mathbf{3/4}$	$\mathbf{1}$
Minimum Adım Sayısı	2	4	3	2	2	2	1

3. İRDELEME

Literatürü incelediğimizde Fibonacci, Lucas, Pell vb. sayı dizilerinin uzun yıllar boyunca matematikçiler ve alana ilgi duyanlar tarafından çalışıldığını, birçok bilimsel gerçekle ilişkilendirildiğini gözlemlemekteyiz. Bu dizilerin terimleri ile oluşturulan matrislerin $n.$ kuvvetleri yardımıyla, yine bu dizilerin genel terimleri ile oluşturulan matrislerin ve özdeşliklerin elde edilmesi bu duruma örnek verilebilir.

Fermat'ın ispatladığı son teoreminde de önemli yer tutan Modüler grup ve denk alt grupları yoğun bir şekilde çalışılmaktadır. Öklid olmayan geometrilerin bulunması, o zamana kadar yapılan çalışmaları uygulamak için farklı alanlar oluşturmuştur. Buna örnek olarak Modüler grup ve denk alt gruplarının Hiperbolik geometri üzerinde çalışılması verilebilir.

Sims (1967) tarafından alt yörüngesel graf hareketine yönelik ilk kez ortaya atılan fikirler, Neumann (1977) ve Tsukuzu (1979) nun çalışmalarında, sonlu gruplara yönelik uygulamalarda önemli yer buldu.

Jones vd. (1991), Γ Modüler grubunun bir elemanı ile $F_{u,N}$ alt yörüngesel grafında çalışmalar yaptı. Değer (2017) tarafından $(u,N)=1, u \leq N$ olmak üzere $F_{u,N}$ alt yörüngesel grafındaki her bir köşenin bir sürekli kesir yapısına sahip olduğu gösterildi.

Değer (2017) tarafından yapılan çalışmada özel olarak A matrisinde $k=3$ alınarak, A matrisinin $n.$ kuvveti Fibonacci sayılarıyla ifade edilmiştir. Matrisler ve sürekli kesirler arasındaki bağıntıdan $F_{u,N}$ alt yörüngesel grafının $n.$ köşesi $\frac{u+\frac{F_{2n}}{F_{2n+2}}}{N}$ olarak bulundu. Buradan Fibonacci sayı dizisinin elemanları ile alt yörüngesel grafın herhangi bir köşesi elde edildi.

Belirli bir duruma yönelik çözüm yolunu veren algoritmaların, özellikle bilgisayarların keşfiyle daha fazla çalışılır hale geldiği bilinmektedir. Algoritma geliştirme süreci ger geçen gün devam etmektedir. Bu çalışmada özel olarak iki nokta arasındaki minimum uzunluğu veren Dijkstra algoritması incelenmiştir. Dijkstra algoritması W. E. Dijkstra (1930-2002) tarafından ortaya konmuştur. Grafta kaynak bir köşeden graftaki diğer tüm köşelere ya da belirli iki köşe arasında minimum uzunluğu verir. Dijkstra algoritması negatif yük olması durumunda çalışmaz. Negatif yüklü graflarda Bellman-Ford ve Floyd algoritması gibi algoritmalarla çalışılması gerekir.

Bu tez çalışmasında, Lorentz matris çarpımı kullanılarak bazı özel matrislerin $n.$ kuvvetleri elde edildi, kuadratik denklemleri ve karakteristik kökleri incelendi. Özellikle M matrisinin Lorentz matris çarpımı altında $n.$ kuvveti bulunarak daha önceden klasik matris çarpımı altında elde edilen özdeşliklere Lorentz matris çarpımıyla ulaşıldı.

Minimal uzunluklu $F_{u,N}$ yolunda alt yörüngesel grafın köşelerini Lorentz matris çarpımı altında veren Lorentz matrisi elde edildi. Bu matrisin Modüler grubun elemanı olmadığı görüldü.

Değer (2017) tarafından elde edilen A^n matrisi $F_n \cong \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$ özdeşliği kullanılarak Lucas sayıları türünden yazıldı. Matrisler ve sürekli kesirler arasındaki bağıntıdan alt yörüngesel grafın köşeleri Lucas sayıları ile yazıldı. A^n matrisi yardımıyla, Fibonacci ve Lucas sayı dizileri türünden yazılan alt yörüngesel grafın adımları $(u, N) = (3,4)$, $n = 15$ için karşılaştırıldı ve bu adımların değerlerinin birbirine çok yakın olduğu gözlemlendi. Bununla birlikte $\frac{F_{2n}}{F_{2n+2}} = \frac{-p_n}{p_{n+1}} \cong \frac{L_n}{\alpha L_{n+1}}$ denkleminden yeni özdeşlikler elde edilerek ispatlandı.

Farey grafı örneğine Dijkstra algoritması uygulanarak kaynak bir köşeden diğer köşelere minimum uzunluk ve ağaç elde edildi. $G_{1,1} = F$ Farey ağaç grafları adım sayıları ile ilişkilendirildi. Dijkstra algoritması ile köşelere yönelik elde edilen minimum uzunluklar adım sayısı ile tablolar halinde gösterildi.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmadan elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibi listelenebilir.

1. Fibonacci ve Lucas sayı dizileri ile yapılan çalışmalar hakkında literatür çalışması yapılarak Q, M, R matrislerinin $n.$ kuvvetlerinin bulunması suretiyle, özdeşlikler elde edildi. Q^n, M^n, R^n matrislerinin kuadratik denklemleri ve karakteristik kökleri incelendi.

2. Lorentz matris çarpımı incelendi. İki boyutlu Lorentz uzayında koordinatsal dönüşümlerle Lorentz matrisinin elde edilişi incelendi. Klasik matris çarpımından farklı olarak Lorentz matris çarpımı altında Q, M, R matrislerinin $n.$ kuvvetleri elde edildi. $Q^{n \cdot L}$ ile ilgili bir adet özdeşliğe ulaşıldı. Ancak R matrisi Lorentz matris çarpımı altında genelleştirilmiş matris türünden yazılamadığından özdeşlik elde edilemedi. $Q^{n \cdot L}$ ve $R^{n \cdot L}$ matrislerinin kuadratik denklemlerine ve karakteristik köklerine ulaşılamadı. $M^{n \cdot L}$ elde edildi. Kuadratik denklem ve karakteristik köklerine ulaşıldı. Bunun sonucunda bazıları doğruluğu daha önceden bilinen özdeşlikler olmak üzere özdeşliklere ulaşıldı.

3. Sürekli kesirler incelendi. Sürekli kesirler yardımıyla Farey grafının elde edilişi irdelendi. $p/q = a_0 + {}^1\!/_{a_1} + {}^1\!/_{a_2} + \cdots + {}^1\!/_{a_n}$ sürekli kesrinin matris formunda yazılması incelendi.

4. Graf teorinin süreç içinde gelişimi hakkında bilgi verildi. Alt yörüngesel graflar, $G_{u,N}$, $F_{u,N}$ ve Farey grafı incelendi. Bu çalışmada ise $F_{u,N}$ alt yörüngesel grafında klasik matris çarpımı altında elde edilen köşeleri Lorentz matris çarpım altında veren Lorentz matrisi elde edildi. Lorentz matrisinin Modüler grubun elemanı olmadığı görüldü.

5. Yinelenme bağıntıları yardımıyla $F_{u,N}$ alt yörüngesel grafının köşeleri Fibonacci sayılarıyla hesaplandı. Bu çalışmada ise $F_{u,N}$ alt yörüngesel grafının köşeleri Lucas sayılarıyla ifade edildi. Herhangi bir köşe için Fibonacci sayılarıyla elde edilen köşe değeri ile Lucas sayılarıyla elde edilen köşe değerinin çok yakın olduğu gözlemlendi.
$\frac{F_{2n}}{F_{2n+2}} \cong \frac{L_n}{\alpha L_{n+1}}$ özdeşliği kullanılarak yeni özdeşliklere ulaşıldı.

6. Bir graf üzerinde tanımlı iki köşe ya da kaynak bir köşeden graftaki diğer köşelere minimum uzunluğu veren Dijkstra algoritması çalışıldı. Farey grafı örneğine uygulandı. Farey grafındaki köşeler arasında minimal uzunluklar ve minimum uzunluklu ağaç elde edildi. $G_{1,1} = F$ Farey ağaç grafları adım sayıları ile ilişkilendirildi. Dijkstra algoritması ile köşelere yönelik elde edilen minimum uzunluklar adım sayısı ile tablolar halinde gösterildi.

5. ÖNERİLER

Bu tez çalışması ile ilgili öneriler aşağıdaki gibi listelenebilir.

1. Bu tez çalışmasında 2×2 tipindeki matrisler üzerinde Lorentz matris çarpımı uygulanarak matrisler genelleştirilmeye ve özdeşlikler elde edilmeye çalışıldı. Bu durumdan farklı olarak $n \times n$ tipindeki matrisler üzerinde Pseudo matris çarpımı uygulanarak matrisler genelleştirilebilir ve farklı özdeşliklerin elde edilmesi için çalışılabilir.

2. Bu tez çalışmasında $F_{u,N}$ alt yörüngesel grafının köşeleri Lucas sayılarıyla ifade edildi. Alt yörüngesel grafın köşesi farklı sayı dizilerinin elemanları türünden ifade edilebilir ve bunun sonucunda köşenin değerinin gerçek değerine ne kadar yaklaştığı karşılaştırılabilir.

3. (1.63) de tanımlanan yinelenme bağıntısında özel olarak $b_n = -k$ ve $a_n = -1$ alınarak (1.64) yinelenme bağıntısı elde edildi. b_n ve a_n değerleri çok farklı değerler alınarak yeni denklem sistemleri elde edilebilir. Buradan çok farklı alt yörüngesel graf köşeleri elde edilebilir.

4. $F_{u,N}$ alt yörüngesel grafında klasik matris çarpımı altında elde edilen köşeleri Lorentz matris çarpım altında veren Lorentz matrisi elde edildi. Lorentz matrisinin Modüler grubun elemanı olmadığı tespit edildi. Bu matrisin determinantının -1 olduğu görüldü. Bu matris normallaştirilerek incelenebilir ve normalleştirilen matrisin adımları incelenebilir.

5. Bu tez çalışmasında Dijkstra algoritması çalışılarak Farey grafı örneğine uygulandı. Dijkstra algoritması negatif yüklü graflarda çalışmamaktadır. Negatif yüklü Farey grafları tanımlanarak, Bellman-Ford veya Floyd algoritması gibi algoritmalarla köşeler arasında minimal uzunluklar ve minimum uzunluklu ağaç elde edilebilir.

6. $G_{1,1} = F$ Farey ağaç grafları adım sayıları ile ilişkilendirildi. Dijkstra algoritması ile köşelere yönelik elde edilen minimum uzunluklar adım sayısı ile tablolar halinde gösterildi. $G_{1,1} = F$ Farey grafı genelleştirilerek sağ ya da sol yönlü F_m Farey grafına Dijkstra algoritması uygulanarak köşelere minimum adım sayıları hesaplanarak çözüm genelleştirilebilir.

6. KAYNAKLAR

Akbaş, M., 2001. On Suborbital Graphs for Modular Group, Bull. London Math. Soc., 33, 647-652.

Alaca, Ş. ve Williams, K., S., 2004. Introductory Algebraic Number Theory, Cambridge University Press.

Alfred, B., U., 1965. An Introduction to Fibonacci Discovery.

Ahuja, R., K., Magnanti, T., L. ve Orlin, J., B., 1993. Network Flows, Prentice-Hall, New Jersey.

Anderson, J., W., 2005. Hyperbolic Geometry, Second Edition, Springer, Southampton.

Beşenk, M., 2017. Suborbital Graphs for the Invariance Group, Beykent Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi, Sayı 10-1, 15 – 29.

Beşenk, M., 2018. Congruence Conditional Signature Problem, NTMSCI 6, 1, 106-113.

Bicknell, M. ve Hoggatt V., E., 1973. A Primer for the Fibonacci Numbers.

Biggs, N., L. ve White, A., T., 1979. Permutation Groups and Combinatorial Structures, London Math. Soc. Lecture Notes 33, Cambridge University Press, Cambridge.

Cangül, İ., N., 2017. Graf Teori-I, Dora Basım-Yayın Dağıtım Ltd. Şti., 1. Baskı, Bursa.

Cuyt, A., Petersen, V., B., Verdonk, B., Waadeland, H. ve Jones, W., B., 2008. Handbook of Continued Fractions for Special Functions, Springer, New York.

Değer, A., H., 2011. $\Gamma_0(n)$ Grubunun Alt Yörüngesel Graflarındaki $\widehat{\mathbb{Q}}$ Köşeli Minimal Uzunluklu Eğriler, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Deger, A., H., Besenk, M. ve Guler, B., O., 2011. On Suborbital Graphs and Related Continued Fractions, Applied Mathematics and Computation, 218, 3, 746-750.

Deger, A., H., 2017. Fibonacci Sayıları ile Alt Yörüngesel Grafların Özel Köşeleri Arasındaki İlişkiler, Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, Cilt 7,168-200.

Deger, A., H., 2017. Vertices of Paths of Minimal Lengths on Suborbital Graphs, Filomat, 31, 4, 913-923.

Diamond, H., G., 1982. Elementary Methods in the Study of the Distrubition of Prime Numbers, Bulletin of the American Mathematical Society, 7, 3, 553-589

Diestel, R., 2005. Graph Theory, Springer-Verlag Heidelberg, 3. Edition, New York.

Dijkstra, E., W., 1959. A Note on Two Problems in Connexion with Graphs, Numerische mathematik, 1, 269-271.

Donal, O., 2017. Poincaré Sanısı, TÜBİTAK Popüler Bilim Kitapları, 337 Sayfa, Ankara.

Dreyfus, S., E., 1969. An Appraisel of Some Shortest-Path Algorithms, Operations Research, 17, 395-412.

Falcon, S., 2014. Relationships Between Some k −Fibonacci Sequences, Applied Mathematics, 5, 2226-2234.

Guler, B., O., Besenk, M., Deger, A., H. ve Kader, S., 2011. Elliptic Elements and Circuits in Suborbital Graphs, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 40, 2, 203-210.

Gündoğan, H. ve Keçilioğlu, O., 2006. Lorentzian Matrix Multiplication and the Motions on Lorentzian Plane, Glasnık Matematički, Vol. 41, 61, 329-334.

Heath, T., 1956. The Thirteen Books of Euclid's Elements. New York: Dover Publications.

Ho, C., K., Woon, H., S. ve Chong, C-Y., 2014. Generating Matrix and Sums of Fibonacci and Pell Sequences, AIP Conference Proceedings 1605, 678-683.

James, I., 2009. Büyük Matematikçiler, Türkiye İş Bankası Kültür Yayınları, 611 Sayfa, İstanbul.

Jones, W., B. ve Thron, W.J., 1980. Continued Fractions Analytic Theory and Applications, Encyclopedia of Mathematics and It's Applications, 11, Addison-Wesley Publishing Company, London.

Jones, G., A., ve Singerman, D., 1987. Complex Functions: An Algebraic and Geometric Viewpoint, (1st edition), Cambridge University Press, UK.

Jones, G., A., Singerman, D. ve Wicks, K., 1991. The Modular Group and Generalized Farey Graphs, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 160, 316-338.

Kader, S., Guler, B., O. ve Deger, A., H., 2010. Suborbital Graphs for a Special Subgroup of the Normalizer of $\Gamma_0(m)$, Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science, 34, 4, 305-312.

Keçilioğlu, O. ve Gündoğan, H., 2017. Pseudo Matrix Multiplication, Commum Fac. Sci. Uni. Ank. Series A1, Vol. 66, 2, 37-43.

Koshy, T., 2001. Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, Wiley-Interscience Publication, New York.

Lorentzen, L. ve Waadeland, H., 1992. Continued Fractions with Applications, First ed., Studies in Computational Mathematics, North-Holland Publishing Corporation, Amsterdam.

Neumann, P., M., 1977. Finite Permutation Groups, Edge Coloured Graphs and Matrices, Topics in Group Theory and Computation, Curran M.P.J. (eds.), Academic Press, London, 118p.

Niven, I., Zuckerman, H., S. ve Montgomery, H., L., 2008. An Introduction to the Theory of Numbers, Wiley India Pvt. Limited, 545p.

Rankin, R., A., 1977. Modular Forms and Functions, Cambridge University Press.

Ratcliffe, J., G., 1994. Foundations of Hyperbolic Manifolds, Springer-Verlag, New York.

Ruohonen, K., 2006. Graph Theory.

Ruggles, I., D., 1963.Some Fibonacci results using Fibonacci-type sequences, The Fibonacci Quarterly, 1,2 , 75–80.

Sarma, R., Kushwaha, S. ve Krishnan, R., 2015. Continued Fractions Arising From $\mathcal{F}_{1,2}$, Journal of Number Theory, 154, 179-200.

Sims, C., C., 1967. Graphs and Finite Permutation Groups, Mathematische. Zeitschrift., 95,76-86.

Schoeneberg, B., 1974. Elliptic Modular Functions, Springer-Verlag, New York.

Whiting, P., D. ve Hillier, J., A., 1960. A Method for Finding the Shortest Route Trough a Road Network, Operations Research Quarterly 11, 37-40.

Wicks, K., 1983. The Farey Graph and Related Topics, Project, Faculty of Mathematical Studies, University of Southampton.

Tsukuzu, T., 1982. Finite Groups and Finite Geometries, Cambridge University Press, Cambridge, 328p.

URL-1, http://pi.math.cornell.edu/~hatcher/TN/TNch1.pdf. 24.11.2020.

ÖZGEÇMİŞ

Anadolu Lisesi'nden mezun oldu. 2004 yılında Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde başladığı lisans eğitimini 2008 yılında tamamladı. 2015 yılında Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda başladığı yüksek lisans eğitimini 2017 yılında tamamladı. 2017 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda doktora eğitimine başladı. 2011 yılı itibari ile Artvin Çoruh Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi'nde Bilgisayar İşletmeni olarak itibariyle görev yapmaktadır. İyi seviyede İngilizce bilen İbrahim GÖKCAN, evli ve 2 çocuk babasıdır.