

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**RASTGELE KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE RASTGELE KESİRLİ MERTEBEDEN  
KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ANALİZİ**

**DOKTORA TEZİ**

**HALİL ANAÇ**

**TEMMUZ 2020  
TRABZON**



**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**RASTGELE KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE RASTGELE KESİRLİ  
MERTEBEDEN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ANALİZİ**

**HALİL ANAÇ**

**ORCID : 0000 - 0002 - 1316 - 3947**

**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde**  
**"DOKTOR (MATEMATİK)"**  
**Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 12 / 06 / 2020**

**Tezin Savunma Tarihi : 13 / 07 / 2020**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Tülay KESEMEN**

**ORCID : 0000 - 0002 - 8807 - 5677**

**İkinci Danışman : Prof. Dr. Mehmet MERDAN**

**Trabzon 2020**

## ÖNSÖZ

Bu doktora tezi kapsamında, rastgele kısmi diferansiyel denklemlerin ve rastgele kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri farklı nümerik ve yarı-analitik metotlarla incelenmiştir.

Doktora eğitimim süresince, görüş ve önerileriyle beni yönlendiren değerli danışman hocalarım Doç. Dr. Mehmet MERDAN'a ve Prof. Dr. Tülay KESEMEN'e, manevi katkılarından dolayı Prof. Dr. Kazım İLARSLAN'a, Doç. Dr. Cem YÜCEL'e, Dr. Öğr. Üyesi Özkan BİNGÖL'e, Dr. Öğr. Üyesi İbrahim AKTAŞ'a, Dr. Öğr. Üyesi Metin Mutlu AYDIN'a, Dr. Öğr. Üyesi Nihan GÜNGÖR'e, Arş. Gör. Dr. Hasan EKER'e, Öğr. Gör. Salih TÜRK'e, Öğr. Gör. Hüseyin KALKAN'a, Arş. Gör. İlker ERKAN'a, Arş. Gör. Kaşif Furkan ÖZTÜRK'e, Arş. Gör. Şener ALİYAZICIOĞLU'na, Arş. Gör. Murat ŞAN'a, Arş. Gör. Özhan BİNGÖL'e, Arş. Gör. Dr. Tuğçem PARTAL'a, Arş. Gör. Halil İbrahim YÜKSEK'e ve Eren DAĞLI'ya teşekkürlerimi borç bilirim.

Bu çalışmayı annem Emine ANAÇ'a ve babam Ahmet ANAÇ'a ithaf ediyorum.

Halil ANAÇ  
Trabzon, 2020

## TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Doktora tezi olarak sunduğum ‘‘Rastgele Kısmi Diferansiyel Denklemler ve Rastgele Kesirli Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Analizi’’ başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Tülay KESEMEN ve Doç. Dr. Mehmet MERDAN’ ın sorumluluğunda tamamladığımı, verileri kendim topladığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 13/07/2020

Halil ANAÇ

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ .....	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET .....	VII
SUMMARY .....	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	IX
TABLolar DİZİNİ.....	XIII
SEMBOLLER DİZİNİ .....	XIV
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş .....	1
1.2. Literatür Özeti .....	3
1.2.1. Rastgele Kısmi Diferansiyel Denklemler .....	3
1.2.2. Rastgele Kesirli Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemler .....	6
1.3. Tezin Kapsamı, Amacı ve Özgün Değeri.....	9
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	11
2.1. İkinci Basamaktan Hemen-Hemen Lineer Denklemler İçin Bir Sınıflandırma, Kanonik Forma İndirgeme.....	11
2.1.1. Hiperbolik Tip .....	13
2.1.2. Parabolik Tip .....	16
2.1.3. Eliptik Tip.....	18
2.2. Kesirli Mertebeden Türev ve İntegral Tanımları ve Bazı Özellikleri .....	20
2.3. Kullanılan Metotlar .....	22
2.3.1. İki Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Metodu .....	22
2.3.2. Yeni Yinelemeli Sumudu Dönüşümü Metodu .....	23
2.3.3. Crank-Nicolson Metodu .....	26
2.3.4. Kesirli Mertebeden Laplace Varyasyonel Metodu .....	27
2.3.5. Laplace-Padé Metodu .....	28
2.3.6. Homotopi Pertürbasyon Elzaki Dönüşümü Metodu.....	30
2.4. Rastgele Kısmi Diferansiyel Denklemler .....	31

2.5.	Rastgele Kesirli Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemler .....	51
3.	İRDELEME .....	86
4.	SONUÇLAR .....	87
5.	ÖNERİLER .....	88
6.	KAYNAKLAR.....	89
7.	EKLER .....	96
ÖZGEÇMİŞ		



Doktora Tezi

ÖZET

RASTGELE KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER ve RASTGELE KESİRLİ  
MERTEBEDEN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ANALİZİ

Halil ANAÇ

Karadeniz Teknik Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı  
Danışman: Prof. Dr. Tülay KESEMEN  
İkinci Danışman: Doç. Dr. Mehmet MERDAN  
2020, 95 Sayfa, 10 Sayfa Ek

Bu çalışmada, rastgele kısmi diferansiyel denklemler ve rastgele kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri iki boyutlu diferansiyel dönüşüm metodu, Laplace-Padé metodu, yeni yinelemeli Sumudu dönüşümü metodu, Crank-Nicolson metodu, kesirli mertebeden Laplace varyasyonel metodu ve homotopi pertürbasyon Elzaki dönüşümü metodu ile ele alınmıştır. Çalışmanın amacı, deterministik kısmi diferansiyel denklemler ve kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemleri rastgele hale getirip nümerik ve yarı-analitik metotlarla çözümlerin elde edilmesidir. Bununla birlikte, elde edilen çözümlerin birinci ve ikinci momentleri farklı dağılımlarla bazen analitik olarak bazen de MATLAB (v.16b) veya MAPLE (v.13) programlarında hesaplanmıştır. Ayrıca, hesaplanan birinci ve ikinci momentlerin grafikleri, MATLAB (v.16b) veya MAPLE (v.13) yazılım programlarında çizdirilmiştir. İncelenen her rastgele deterministik ya da kesirli mertebeden denklem için hata analizleri yapılmıştır. Çalışmalar sonucunda, kullanılan metotlarla elde edilen çözümlerin analitik çözümlere yakın olduğu görülmüştür.

**Anahtar Kelimeler:** Caputo kesirli mertebeden türev, iki boyutlu diferansiyel dönüşüm metodu, yeni yinelemeli Sumudu dönüşümü metodu, Crank-Nicolson metodu, kesirli mertebeden Laplace varyasyonel metodu, beklenen değer, varyans.

PhD. Thesis

SUMMARY

ANALYSIS OF RANDOM PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS AND RANDOM  
FRACTIONAL PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Halil ANAÇ

Karadeniz Technical University  
The Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Mathematics Graduate Program  
Supervisor: Prof. Dr. Tülay KESEMEN  
Second Supervisor: Doç. Dr. Mehmet MERDAN  
2020, 95 Pages, 10 Appendix

In this study, the solutions of random partial differential equations and random fractional order partial differential equations are analyzed by two dimensional differential transformation method, Laplace-Padé method, the new Sumudu transform iterative method, Crank-Nicolson method, fractional Laplace variational method and homotopy perturbation Elzaki transform method. The aim of the study is to randomize partial differential equations and fractional order partial differential equations and to obtain solutions by numerical and semi-analytical methods. However, the first and second moments of the solutions obtained were calculated by different distributions, sometimes analytically and sometimes in MATLAB (v.16b) or MAPLE (v.13) softwares. In addition, the graphs of the calculated first and second moments are plotted in MATLAB (v.16b) or MAPLE (v.13) softwares. Error analyzes were performed for each random partial differential equations and random fractional order partial differential equations. As a result of the studies, it has been observed that the solutions obtained with the methods used are close to analytical solutions.

**Key Words:** Caputo fractional derivative, two dimensional differential transformation method, the new Sumudu transform iterative method, Crank-Nicolson method, fractional Laplace variational method, expected value, variance.



## ŞEKİLLER DİZİNİ

### Sayfa No

Şekil 2.1.	(2.86) denkleminin beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi.....	33
Şekil 2.2.	(2.86) denkleminin beklenen değerinin iyileştirilmiş diferansiyel dönüşüm metodu ile elde edilen çözümünün mekana ve zamana bağlı değişimi.....	34
Şekil 2.3.	(2.86) denkleminin varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi .....	35
Şekil 2.4.	(2.86) denkleminin varyansının iyileştirilmiş diferansiyel dönüşüm metodu ile elde edilen çözümünün mekana ve zamana bağlı değişimi .....	36
Şekil 2.5.	(2.93) denkleminin beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi.....	38
Şekil 2.6.	(2.93) denkleminin beklenen değerinin iyileştirilmiş diferansiyel dönüşüm metodu ile elde edilen çözümünün mekana ve zamana bağlı değişimi .....	38
Şekil 2.7.	(2.93) denkleminin varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi .....	39
Şekil 2.8.	(2.93) denkleminin varyansının iyileştirilmiş diferansiyel dönüşüm metodu ile elde edilen çözümünün mekana ve zamana bağlı değişimi .....	40
Şekil 2.9.	(2.101) denkleminin beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi.....	42
Şekil 2.10.	(2.101) denkleminin beklenen değerinin iyileştirilmiş diferansiyel dönüşüm metodu ile elde edilen çözümünün mekana ve zamana bağlı değişimi .....	42
Şekil 2.11.	(2.101) denkleminin varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi .....	43
Şekil 2.12.	(2.101) denkleminin varyansının iyileştirilmiş diferansiyel dönüşüm metodu ile elde edilen çözümünün mekana ve zamana bağlı değişimi .....	44
Şekil 2.13.	(2.112) yaklaşık çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi .....	47
Şekil 2.14.	(2.112) yaklaşık çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi .....	48
Şekil 2.15.	(2.118) yaklaşık çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi .....	50
Şekil 2.16.	(2.118) yaklaşık çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi .....	51
Şekil 2.17.	$\alpha = 0.9$ değeri için (2.124) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi .....	55

Şekil 2.18. $\alpha = 0.8$ değeri için (2.124) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi .....	55
Şekil 2.19. $\alpha = 0.7$ değeri için (2.124) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi .....	55
Şekil 2.20. $\alpha = 0.6$ değeri için (2.124) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi .....	56
Şekil 2.21. $\alpha = 0.9$ değeri için (2.124) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi.....	56
Şekil 2.22. $\alpha = 0.8$ değeri için (2.124) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi.....	57
Şekil 2.23. $\alpha = 0.7$ değeri için (2.124) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi.....	57
Şekil 2.24. $\alpha = 0.6$ değeri için (2.124) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi.....	57
Şekil 2.25. $\alpha = 0.9$ değeri için (2.130) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi .....	59
Şekil 2.26. $\alpha = 0.8$ değeri için (2.130) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi .....	60
Şekil 2.27. $\alpha = 0.7$ değeri için (2.130) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi .....	60
Şekil 2.28. $\alpha = 0.6$ değeri için (2.130) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi .....	60
Şekil 2.29. $\alpha = 0.9$ değeri için (2.130) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi.....	61
Şekil 2.30. $\alpha = 0.8$ değeri için (2.130) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi.....	61
Şekil 2.31. $\alpha = 0.7$ değeri için (2.130) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi.....	62
Şekil 2.32. $\alpha = 0.6$ değeri için (2.130) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi.....	62
Şekil 2.33. $\alpha = 0.9$ ve $a = 5$ değeri için (2.136) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi .....	64
Şekil 2.34. $\alpha = 0.8$ ve $a = 5$ değeri için (2.136) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi .....	64
Şekil 2.35. $\alpha = 0.7$ ve $a = 5$ değeri için (2.136) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi .....	65
Şekil 2.36. $\alpha = 0.6$ ve $a = 5$ değeri için (2.136) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi .....	65
Şekil 2.37. $\alpha = 0.9$ ve $a = 5$ değeri için (2.136) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi .....	66

Şekil 2.38. $\alpha = 0.8$ ve $a = 5$ değeri için (2.136) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi .....	66
Şekil 2.39. $\alpha = 0.7$ ve $a = 5$ değeri için (2.136) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi .....	66
Şekil 2.40. $\alpha = 0.6$ ve $a = 5$ değeri için (2.136) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi .....	67
Şekil 2.41. $\alpha = 0.9$ değeri için (2.142) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi .....	69
Şekil 2.42. $\alpha = 0.8$ değeri için (2.142) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi .....	69
Şekil 2.43. $\alpha = 0.7$ değeri için (2.142) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi .....	70
Şekil 2.44. $\alpha = 0.6$ değeri için (2.142) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi .....	70
Şekil 2.45. $\alpha = 0.9$ değeri için (2.142) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi.....	71
Şekil 2.46. $\alpha = 0.8$ değeri için (2.142) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi.....	71
Şekil 2.47. $\alpha = 0.7$ değeri için (2.142) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi.....	71
Şekil 2.48. $\alpha = 0.6$ değeri için (2.142) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi.....	72
Şekil 2.49. $\alpha = 0.9$ değeri için (2.148) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi .....	74
Şekil 2.50. $\alpha = 0.8$ değeri için (2.148) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi .....	75
Şekil 2.51. $\alpha = 0.7$ değeri için (2.148) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi .....	75
Şekil 2.52. $\alpha = 0.6$ değeri için (2.148) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi .....	75
Şekil 2.53. $\alpha = 0.9$ değeri için (2.148) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi.....	76
Şekil 2.54. $\alpha = 0.8$ değeri için (2.148) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi.....	76
Şekil 2.55. $\alpha = 0.7$ değeri için (2.148) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi.....	77
Şekil 2.56. $\alpha = 0.6$ değeri için (2.148) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi.....	77
Şekil 2.57. $\alpha = 0.9$ değeri için (2.154) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi .....	80

Şekil 2.58. $\alpha = 0.8$ değeri için (2.154) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi .....	80
Şekil 2.59. $\alpha = 0.7$ değeri için (2.154) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi .....	80
Şekil 2.60. $\alpha = 0.6$ değeri için (2.154) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi .....	81
Şekil 2.61. $\alpha = 0.9$ değeri için (2.154) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi.....	81
Şekil 2.62. $\alpha = 0.8$ değeri için (2.154) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi.....	82
Şekil 2.63. $\alpha = 0.7$ değeri için (2.154) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi.....	82
Şekil 2.64. $\alpha = 0.6$ değeri için (2.154) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi.....	82
Şekil 2.65. (2.155) denkleminin beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi .....	84
Şekil 2.66. (2.155) denkleminin varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi .....	85

## TABLolar DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 2.1. İki boyutlu diferansiyel dönüşümlerde temel işlemler .....	23
Tablo 2.2. $\alpha = 1, A = 2, B = 3$ için VİM' den elde edilen çözüm, altıncı basamaktan YYSdm yaklaşık çözümü ve tam çözümün karşılaştırılması .....	53
Tablo 2.3. $\alpha = 0.9, A = 2, B = 3$ için VİM' den elde edilen çözüm, altıncı basamaktan YYSdm yaklaşık çözümünün karşılaştırılması .....	53
Tablo 2.4. $\alpha = 1, A = 2, B = 3$ için mutlak hata karşılaştırılması .....	54
Tablo 2.5. (2.155) denkleminin yaklaşık çözümünün beklenen değerleri .....	83
Tablo 2.6. (2.155) denkleminin yaklaşık çözümünün varyansları .....	84

## SEMBOLLER DİZİNİ

- $S$  : Sumudu dönüşümü  
 $S^{-1}$  : Ters Sumudu dönüşümü  
 $\mathcal{L}$  : Laplace dönüşümü  
 $\lambda$  : Lagrange çarpanı  
 $\Gamma$  : Gamma fonksiyonu  
 $\left[\frac{L}{M}\right]$  : Padé yaklaşımı  
 $D^\alpha$  :  $\alpha$  basamaktan Caputo kesirli mertebeden türev operatörü  
 $I^\alpha$  :  $\alpha$  basamaktan Riemann-Liouville kesirli mertebeden integral operatörü  
 $E_\alpha$  : Mittag-Leffler fonksiyonu  
 $f_X(x)$  :  $X$  rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu  
 $N$  : Normal dağılım  
 $beta$  : Beta dağılımı  
 $gamma$ : Gamma dağılımı  
 $\mathbb{R}$  : Reel sayılar kümesi  
 $\check{u}_n$  : Sınırlı bir varyasyon

# 1. GENEL BİLGİLER

## 1.1. Giriş

Rastgele kısmi diferansiyel denklemler (RKDD), rastgele elemanları içeren kısmi diferansiyel denklemler olarak tanımlanmaktadır. Bir kısmi diferansiyel denklem; rastgele başlangıç şartı, rastgele homojen olmayan kısım, rastgele katsayılar ile üç şekilde rastgele olmaktadır. Bunun yanısıra, rastgele kısmi diferansiyel denklemler (RKDD) rastgele bir değişken veya stokastik bir süreç olabilen rastgele girdileri içeren kısmi diferansiyel denklemler olarak ta adlandırılmaktadır. Kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemler de benzer şekilde rastgele hale getirilip rastgele kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemler (RKMKDD) adını almaktadırlar (Soong, 1973).

Uygulamalar açısından bakıldığında, stokastik analizin ortalama kare teorisi ve rastgele deterministik veya kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemler basitliği nedeniyle caziptir ve pratik problemlere uygulanırken adi deterministik yöntemlere karşılık gelen ana hatlar takip edilmektedir. Son yıllarda, stokastik kalkülüs özellikle fizik, kimya, biyoloji, ekonomi, yönetim, sosyoloji, psikoloji, tıp ve tüm mühendislik disiplinlerinde kullanılmaktadır. Bu denklemler mühendislik, mekanik, kimyasal kinetik, ilaç yönetimi ve diğer uygulamalı alanlarda da önemli bir rol oynamaktadır (Soong, 1973).

Günümüzde, rastgele kısmi diferansiyel denklemlerin çoğu analitik olarak çözülemediğinden bu denklemlerin nümerik metotlarla veya yarı-analitik metotlarla çözülmesi gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Aynı şekilde rastgele kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin güncel nümerik metotlarla çözülmesi gerekmektedir. Teknolojinin getirdiği imkanlar ile birlikte bu denklemlerin çözümlerini MATLAB (v.16b) ve MAPLE (v.13) gibi programlarla uygun kodları yazarak daha kısa zamanlarda elde etmek mümkündür. Bununla birlikte denklemlerin çözümlerinin momentleri yine uygun kodlarla ya da analitik olarak hesaplanmıştır. Ayrıca bu momentlerin grafikleri MATLAB (v.16b) ve MAPLE (v.13) gibi programlarda çizdirilmiştir.

Kesirli mertebeden kalkülüs, keyfi basamaktan türevleri ve integrallerini (kompleks basamak ta dahil) ele alan uygulamalı matematiğin bir alanıdır ve kesirli mertebeden kalkülüsün matematik, mühendislik, ekonomi ve birçok alanda uygulamaları mevcuttur.

Kesirli mertebeden türevlerin ortaya çıkması kırk yıl öncesine dayanmaktadır. O zamandan beri birçok büyük matematikçi, N.H. Abel, M. Caputo, L. Euler, J. Fourier, A. K. Grünwald, J. Hadamard, G. H. Hardy, O. Heaviside, H. J. Holmgren, P. S. Laplace, G.W. Leibniz, A.V. Letnikov, J. Liouville, B. Riemann, M. Riesz ve H. Weyl bu alana katkıda bulunmuşlardır. Bununla birlikte, çoğu bilim adamı ve mühendis kesirli mertebeden kalkülsten o dönemlerde çeşitli sebeplerden dolayı habersiz kalmışlardır. Yaklaşık otuz yıl önce, matematiksel formülasyonlardan çeşitli alanlardaki uygulamalara geçilmeye başlanmıştır. Son on yılda bu kalkülüs, bilim, mühendislik ve matematiğin neredeyse her alanına uygulanmıştır. Bu kalkülüsün önemli bir etki yarattığı alanlardan bazıları; elektrik mühendisliği, elektrokimya, biyoloji, biyofizik ve biyomühendislik, sinyal ve görüntü işleme, mekanik, mekatronik, fizik ve kontrol teorisidir. Bazı matematiksel sorunlar çözülmemiş olsa da, zorlukların çoğunun üstesinden gelinmiştir. Alandaki belgelenmiş önemli matematiksel sorunların çoğu, hem tamsayı hem de kesirli mertebeden hesaplama için birçok matematiksel aracın aynı olduğu bir noktada çözülmüştür. Oldham ve Spanier (1974), Miller ve Ross (1993), Samko vd., (1993), Podlubny (1999) ve Hilfer (2000) kitapları, mühendislik, bilim, ekonomi ve finans, uygulamalı matematik topluluklarına alanın tanıtılmasında yardımcı olmuştur.

Bu tez çalışması kapsamında, rastgele kısmi diferansiyel denklemler (RKDD) ve rastgele kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin (RKMKDD) çözümleri farklı nümerik ve yarı-analitik metotlarla incelenmiştir. Öncelikle, kısmi diferansiyel denklemler rastgele hale getirilip yarı-analitik ve nümerik metotlarla çözülmüştür. Kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemler rastgele hale getirilip yarı-analitik ve nümerik metotlarla çözülmüştür. Burada kullanılan metotlar; iki boyutlu diferansiyel dönüşüm metodu (Kanth and Aruna, 2009; Ayaz, 2003; Kangalgil and Ayaz, 2009; Merdan, 2010; Yüzbaşı ve Ismailov, 2017; Tari vd., 2009; Ziyae ve Tari, 2015; Hadizadeh ve Moatamedi, 2007; Zhou, 1986), yeni yinelemeli Sumudu dönüşümü metodu (Wang ve Liu, 2016; Prakash vd., 2018; Kumar ve Daftardar-Gejji, 2019), Crank-Nicolson metodu (Crank ve Nicolson, 1947; Çelik ve Duman, 2012; Smith, 1965; Mathews ve Fink, 2004), kesirli mertebeden Laplace varyasyonel metodudur (Noor vd., 2018). Ayrıca, elde edilen çözümlerin karakteristikleri de elde edilip incelenmiştir.



## 1.2. Literatür Özeti

Bu tez çalışması kapsamında, rastgele kısmi diferansiyel denklemler (RKDD) ve rastgele kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemler (RKMKDD) farklı nümerik ve yarı-analitik metotlarla incelenmiştir. Literatürde, kısmi diferansiyel denklemler ve kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin çözümler ile ilgili çok sayıda çalışma mevcut olmasına rağmen, rastgele kısmi diferansiyel denklemlerin (RKDD) çözümleri ile ilgili çok az sayıda çalışma mevcut olup, rastgele kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin (RKMKDD) çözümleri ile ilgili olarak daha da az çalışma vardır. Bu bölümde, literatürdeki çalışmalar rastgele kısmi diferansiyel denklemler ve rastgele kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemler olarak verilecektir. Bu bölümde, literatürde rastgele kısmi diferansiyel denklemler ve rastgele kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemler ile ilgili çalışmalardan bahsedilecektir.

### 1.2.1. Rastgele Kısmi Diferansiyel Denklemler

Griego ve Hersh (1969), rastgele gelişimler kavramının olasılıksal araçların hem parabolik hem de hiperbolik tipte başlangıç-değer problemlerine basit ve güçlü uygulamalarına yol açtığını göstermişlerdir.

Griego ve Hersh (1971), rastgele gelişimleri soyut diferansiyel denklem sistemlerine olasılıksal çözümler elde etmek için kullanmışlardır. Uygulamaları bir boyutlu birinci dereceden hiperbolik sistemleri içermiştir. Önemli bir özel durum olan soyut telgraf denklemlerini göz önüne almışlar ve klasik  $n$  –boyutlu telgraf denklemi üzerinde Kac sonucunun genelleştirilmesine ulaşmışlardır.

Itoh (1977), çoklu değerli dönüşümlerin ölçülebilirliği ile ilgili bazı sonuçlar vermiştir. Sonra bu sonuçları kullanarak, bir rastgele sabit nokta teoremini ispatlamıştır.

Itoh (1979), genel ölçülebilir uzaylar üzerindeki Banach veya Hilbert uzaylarında çeşitli tek değişkenli dönüşümler, örneğin yoğunlaşan veya genişlemeyen dönüşümler vb. için birkaç rastgele sabit nokta teoremi vermiştir. Ayrıca bir uygulama olarak, bir Banach uzayında diferansiyel denklemin rastgele bir çözümünün varlığını göstermiştir.

Kannan (1981), rastgele eşleşmeler içeren doğrusal olmayan denklemlerin rastgele çözümlerinin varlığı, yinelemeli tekniklere başvurmadan deterministik durumdan elde

edilen sonuçların doğrudan kullanımıyla incelemiştir. Stokastik kontrol ve doğrusal olmayan rastgele operatör denklemlerine uygulamalar verilmiştir.

Babuska vd. (2007), zorlayıcı terimlere sahip rastgele katsayılı eliptik kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için bir stokastik kollokasyon yöntemi önermiş ve analiz etmişlerdir. Sıkı bir yakınsama analizi sağlamışlar ve rastgele girdi verilerindeki bazı düzenlilik varsayımları altında, olasılık uzayındaki her bir yöndeki Gauss noktalarının sayısına göre "olasılık hatasının" üstel yakınsaklığını göstermişlerdir. Sayısal örneklerle, yöntemin etkinliğini göstermişlerdir.

Nobile vd. (2008a), zorlayıcı terimlere sahip rastgele katsayılı kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü ile ilgili istatistiksel büyüklüklerin yaklaşması için bir Smolyak-tipi seyrek grid stokastik kollokasyon yöntemi önermiş ve analiz etmişlerdir. Ayrıca, belirli bir kesinliğe ulaşmak için yapılan hesaplama yöntemiyle Monte Carlo'yu karşılaştırmak için yapılan hata tahminlerinden de faydalanıp, bu metodun Monte Carlo yönteminden daha verimli olduğunu elde etmişlerdir.

Nobile vd. (2008b), zorlayıcı terimlere sahip rastgele katsayılı kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için bir izotropik olmayan seyrek grid stokastik kollokasyon yöntemi önermişler ve analiz etmişlerdir. Özellikle, orta derecede büyük boyutlu problemler için, uygun şekilde seçilmiş bir izotropik olmayan seyrek grid yaklaşımının, incelenen tüm yöntemlerden çok verimli ve üstün olduğunu göstermişlerdir.

Nouy vd. (2008), genişletilmiş sonlu elemanlar yönteminin stokastik çerçevesinin genişletilmesine dayanan tekniğin temelini teorik ve teknik açıdan ayrıntılı olarak ele almışlardır. Birkaç sayısal örnekle bu yöntemin etkinliğini göstermişler ve diğer yaklaşımlarla karşılaştırmışlardır.

Doostan ve Iaccarino (2009), boyutluluğun üstesinden gelmek için alternatif bir en küçük kareler şeması kullanarak yüksek boyutlu rastgele girdi verisi ile bir stokastik kısmi diferansiyel denklemin çözümünün düşük dereceli ayrılmış bir yaklaşımını elde etmişlerdir. Teoride, önerilen algoritmanın hesaplama maliyetinin, sistemin altında yatan olasılık uzayının boyutuna göre doğrusal olarak büyüdüğünü göstermişlerdir. Bir eliptik stokastik kısmi diferansiyel denklem durumunda, algoritmanın bir olası hata analizi elde etmişlerdir. Önerilen metodolojinin farklı yönlerini, bazı sayısal deneylere uygulamayla incelemiştir.

Babuska vd. (2010), zorlayıcı terimlere sahip rastgele katsayılı eliptik kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için bir stokastik kollokasyon yöntemi önermiş ve analiz

etmişlerdir. Kesin bir yakınsama analizi sağlamışlar ve rastgele girdi verilerindeki bazı düzenlilik varsayımları altında, olasılık uzayının her bir yönündeki Gauss noktalarının sayısına göre ‐olasılık hatasının‐ üstel yakınsaklığını göstermişlerdir. Sayısal örneklerle, yöntemin etkinliğini göstermişlerdir.

Caraballo vd. (2010), düzgün olmayan bir hiperbolisite veya düzgün olmayan bir üstel ikiye ayırma koşulu altında, rastgele kısmi diferansiyel denklemler ve stokastik kısmi diferansiyel denklemlerin bir sınıfı için rastgele pseudo-kararlı ve pseudo-kararsız manifoldların varlığını göstermiştir.

Charrier (2012), homojen Dirichlet sınır koşulları ile rastgele katsayılara sahip eliptik bir kısmi diferansiyel denklemin çözümüne sayısal olarak yaklaşma problemini ele almıştır. Lognormal bir katsayı durumuna odaklanmış ve rastgeleliğe göre düzgün zorlama ve düzgün sınırlılık eksikliği ile ilgilenmiştir. Bu katsayıyı, kesilmiş bir Karhunen-Loeve açılımı kullanarak sonlu boyutlu bir gürültü ile yaklaşmıştır. Çözümdeki ilgili hatanın hem güçlü hem de zayıf hata tahminlerini vermiştir. İki kat daha güçlü olan zayıf bir yakınsama oranı elde etmiştir. Ayrıca, ne zorlamanın ne de sınırlılığın stokastik olarak düzgün olmadığı durumda stokastik kollokasyon metoduna ilişkin tam bir hata tahmini vermiştir.

Kuo vd. (2012), yarı-Monte Carlo (YMC) sonlu elemanlar yöntemlerini rastgele katsayılı bir eliptik kısmi diferansiyel denklem sınıfına uygulamışlardır. Sonlu bir eleman ayrıklaştırmasının, şemanın genel verimliliği üzerindeki etkisini toplam maliyete karşı doğruluk açısından en iyi  $N$  –terim yaklaşımı ile karşılaştırılabilecek sonuçlarla analiz etmişlerdir. Bu yönteme karşılık gelen Monte Carlo yönteminden daha az maliyetle belirli bir hatayı elde etmişlerdir.

Gunzburger vd. (2014), fiziksel ve olasılıksal serbestlik derecelerinin birleştiği stokastik Galerkin yöntemleri gibi kesintili yaklaşımlar ve fiziksel ve olasılıksal serbestlik derecelerinin birleşmediği interpolatör tipli stokastik kollokasyon yöntemleri gibi kesintisiz yaklaşımlar olmak üzere birçok yaklaşım geliştirmişlerdir. Bazı yeni son gelişmeler dahil tüm bu yöntem sınıflarını incelemişlerdir.

Anaç vd. (2019), kısmi diferansiyel denklemleri rastgele hale getirmişlerdir. Elde edilen rastgele kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri incelenmiştir. Bu rastgele kısmi diferansiyel denklemlerin başlangıç şartları ve parametreleri Beta dağılımı ile incelenmiştir. Rastgele diferansiyel dönüşüm yöntemi ile elde edilen çözümler birkaç örnekte verilmiştir. Ayrıca çözümlerin yakınsaklığını iyileştirmek için Laplace-Padé

metodu kullanılmıştır. Bununla birlikte, MAPLE (v.13) programı, rastgele bileşenli kısmi diferansiyel denklemlerin sonuçlarını simüle etmek için kullanılmıştır.

Anaç vd. (2020), bir ısı denklemini rastgele hale getirmişlerdir. Elde edilen rastgele ısı denkleminin çözümü Crank-Nicolson metoduyla incelenmiştir. Bu denklemin başlangıç şartı Normal dağılımla incelenmiştir. Bu ısı denkleminin çözümünün beklenen değeri ve varyansı hesaplanmıştır. Ayrıca, beklenen değer ve varyans grafikleri MATLAB (v.16b) yazılım programında çizdirilmiştir.

### 1.2.2. Rastgele Kesirli Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemler

Anh vd. (1999), kesirli mertebeden Brownian hareketlerinin sınıfını genişleten kesirli mertebeden Riesz-Bessel hareketleri gibi önemli bir kesirli mertebeden rastgele alanının önemli bir alt sınıfının varlığını kurmuşlardır. Markov difüzyonunun kapsamını, uzun genişliğe bağımlılığı ile rastgele alanları kapsayacak şekilde genişletmişlerdir.

Anh ve Leonenko (2003), rastgele başlangıç koşullarıyla kesirli mertebeden difüzyon-dalga denklemlerinin ortalama kare çözümlerinin Green fonksiyonlarını ve spektral gösterimlerini vermişlerdir.

Logvinova ve Néel (2004), hareketsiz bir akışkanın doyurduğu varsayılan heterojen gözenekli ortamın rastgele yapısına ilişkin hipotezlerden başlayarak model yayılmasını bir kesirli kısmi diferansiyel denklem yardımıyla incelemişlerdir. Kesirli denklemin temel çözümünü inceleyerek, ikinci anın zamanla orantılı olmadığını, yani anormal difüzyonun var olduğunu göstermişlerdir. Elde edilen denklemin toplam maddenin kütesini koruduğunu fark etmişlerdir.

Ding vd. (2010), değişken katsayılı uzay kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin başlangıç sınır değer problemlerinin bir sınıfını çözmek için ağırlıklı bir sonlu fark yöntemleri sınıfını vermişlerdir. Farklı ağırlıklandırma parametrelerine sahip yöntemlerin etkinliğini göstermek için bazı sayısal örnekler vermişlerdir.

Yang vd. (2010), Riesz kesirli mertebeden difüzyon denkleminin ve Riesz kesirli mertebeden taşınım-dağılım denkleminin homojen Dirichlet sınır koşullarına sahip sonlu bir tanım kümesinde çözümü için üç etkili sayısal yöntem vermişlerdir. Üç sayısal yöntemin etkinliğini ve yakınsaklığını sayısal sonuçlarla göstermişlerdir.

Odabasi ve Misirli (2015), iyileştirilmiş deneme denklemi yöntemi ile doğrusal olmayan kesirli mertebeden diferansiyel denklemleri incelemişlerdir. Doğrusal olmayan

kesirli Klein-Gordon denklemi ve kesirli birbirini tutan rastgele Walker'ın parabolik denklemi için bazı hareketli dalga çözümleri elde etmek için bu yöntemi uygulamışlardır. Bu yöntemin güçlü ve güvenilir olduğunu göstermişler ve periyodik çözümler, rasyonel fonksiyon çözümleri ve yalnız bükülme çözümleri gibi çeşitli çözüm fonksiyonlarının elde edilmesini sağlamışlardır.

Guner vd. (2016), lineer olmayan zaman-kesirli birbirini tutan rastgele Walker'ın parabolik denkleminin kesin çözümlerini incelemişlerdir.  $(G'/G)$  ve  $(G'/G, 1/G)$  açılım metotlarını, kesirli kompleks dönüşüme bağlı olarak modifiye edilmiş Riemann-Liouville türevi anlamında kesirli diferansiyel denklemlere genişletmişlerdir. Hiperbolik fonksiyon çözümleri, trigonometrik fonksiyon çözümleri ve rasyonel fonksiyon çözümleri elde etmişlerdir. Söz konusu yöntem ve dönüşümlerin bu tür kesirli denklemler için çok güvenilir ve verimli olduğunu göstermişlerdir.

Guner ve Bekir (2016), iyileştirilmiş Riemann-Liouville türevi anlamında lineer olmayan kesirli diferansiyel denklemlerin kesin çözümlerini bulmak için yeni bir yaklaşım olan Ansatz yöntemini uygulamışlardır. Lineer olmayan bir kesirli kompleks dönüşüme dayanarak, belirli bir kesirli kısmi diferansiyel denklemi, bir tam sayı mertebeden adi diferansiyel denkleme dönüştürmüşlerdir. Bu yöntemi, kesirli mertebeden biyolojik popülasyon modelini ve uzay-zaman kesirli iyileştirilmiş eşit genişlik denklemini çözmek için uygulamışlardır.

Mao ve Shen (2016), korunumlu olmayan formun yanı sıra korunumlu formda değişken katsayılı çok boyutlu kesirli eliptik denklemleri çözmek için etkili spektral-Galerkin algoritmalarını geliştirmişlerdir. Sınırlardaki singülerlikle (tekilliklerle) ilgili problemler için daha kesin bir yakınsama oranı sağlayan kesin ağırlıklı hata tahminlerini üretmişlerdir. Ayrıca algoritmaları ve hata tahminlerini doğrulamak için bol miktarda nümerik sonuçlar vermişlerdir.

Angstmann vd. (2016), reaksiyon alt difüzyonunu modelleyen kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin bir sınıfını çözmek için ayrık bir stokastik sürece dayanan yeni bir açık sayısal yöntem göstermişlerdir. Ayrık zaman rastgele yürüyüşlerinin toplamının olasılık yoğunluğunun evrimi için ana denklemlerden şemayı üretmişlerdir. Ana denklemlerin difüzyon limitinin, ilgilenilen kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemini kendine getirdiğini göstermişlerdir. Ayrıca, bu yöntemin standart reaksiyon difüzyon denklemlerine uygulanabildiğini de göstermişlerdir.

Su (2017), topraklardaki su hareketini analiz etmek için kesirli kısmi diferansiyel denklemin çözümlerini sunmuştur. Sonlu derinlikli topraklarda su hareketi için dağınık düzende kütle-zaman ve uzay-zaman kesirli kısmi diferansiyel denklem için analitik çözümleri ve yaklaşımlarını vermiştir. Akı-konsantrasyon ilişkisinin kesirli kısmi diferansiyel denklemde kesirli parametreleri içerdiğini göstermiştir ve geniş-zamanlı bir asimptot vermiştir.  $\beta_1$  ve  $\beta_2$  model parametrelerinin, gerçekçi fiziksel süreçleri açıklayan akış süreçleri üzerindeki etkisini incelemek için çözümlerin zamansal bileşenini göstermiştir.

Benchohra ve Heris (2017), tıkalık ölçüsü ve stokastik tanım kümesi ile bir rastgele sabit nokta teoremini uygulayarak duruma bağlı gecikmeli kesirli kısmi rastgele diferansiyel denklemlerin Darboux problemi için bazı varlık sonuçları vermiştir.

Firoozjaee ve Yousefi (2018), Caputo kesirli türevine dayanan kesirli kısmi diferansiyel denklemlerin (KKDD) sayısal çözümlerini Ritz yaklaşımını kullanarak elde etmişlerdir. Kesirli kısmi diferansiyel denklemlerini optimizasyon problemine dönüştürerek ve polinom temel fonksiyonlarını kullanarak cebirsel denklem sistemini elde etmişlerdir. Lineer olmayan cebirsel denklem sistemini Mathematica 7 kullanarak çözmüşler ve polinom açılım katsayılarını elde etmişlerdir. Yöntemin performansını gösteren bazı sayısal örnekler vermişlerdir.

Acan vd. (2018), uygun değişken yineleme yöntemi (U-DYY), uygun kesirli indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi (UKİDDY) ve uygun homotopi analiz yöntemini (U-HAY) tanıtmışlardır. Uygulamalarla bu yeni yöntemlerin son derece güvenilir ve son derece hassas olduğunu, doğrusal ve doğrusal olmayan kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde önemli bir gelişme sağladığını göstermişlerdir.

Merdan vd. (2019), zaman-kesirli mertebeden Klein-Gordon denklemini rastgele hale getirmişlerdir. Elde edilen rastgele zaman-kesirli mertebeden Klein-Gordon denklemini incelemişlerdir. Bu denklemin başlangıç şartını Gamma dağılımı ile incelemişlerdir. Kesirli mertebeden türevler Caputo anlamındadır. Bu denklem yeni yinelemeli Sumudu dönüşümü metoduyla çözülmüştür. Çözümlerin beklenen değeri ve varyansı elde edilmiştir. Ayrıca, MAPLE (v.13) yazılım programında beklenen değer ve varyans grafikleri çizdirilmiştir.

Merdan vd. (2020), kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemleri rastgele hale getirmişlerdir. Elde edilen rastgele kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerini incelemişlerdir. Bu denklemin başlangıç şartını Gamma dağılımı ile incelemişlerdir.

Kesirli mertebeden türevler Caputo anlamındadır. Bu denklem yeni yinelemeli Sumudu dönüşümü metoduyla çözülmüştür. Çözümlerin beklenen değeri ve varyansı elde edilmiştir. Ayrıca, MAPLE (v.13) yazılım programında beklenen değer ve varyans grafikleri çizdirilmiştir.

### 1.3. Tezin Amacı, Kapsamı ve Özgün Değeri

Günümüzde, rastgele kısmi diferansiyel denklemlerin çoğu analitik olarak çözülemediğinden bu denklemlerin nümerik metotlarla veya yarı-analitik metotlarla çözülmesi gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Aynı şekilde rastgele kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin güncel nümerik metotlarla çözülmesi gerekmektedir. Teknolojinin getirdiği imkanlar ile birlikte bu denklemlerin çözümlerini MATLAB (v.16b) ve MAPLE (v.13) yazılım programlarında uygun kodları yazarak daha kısa zamanlarda elde etmek mümkündür. Bununla birlikte denklemlerin çözümlerinin birinci ve ikinci momentleri yine uygun kodlarla ya da analitik olarak hesaplanıp, grafikleri MATLAB (v.16b) ve MAPLE (v.13) yazılım programlarında çizdirilmiştir.

Tez kapsamında, kısmi diferansiyel denklemler ve kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemler incelenmiştir. Bu denklemler rastgele hale getirilip yarı-analitik ve nümerik metotlarla çözülmüştür. Ayrıca, elde edilen çözümlerin karakteristikleri elde edilmiştir. Çalışma kapsamında rastgele kısmi diferansiyel denklemler ve rastgele kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerle ilgili sırasıyla aşağıdaki çalışmalar yapılmıştır:

- İlk olarak kısmi diferansiyel denklemler rastgele hale getirilip güncel nümerik metotlarla çözülmüştür. Çözümlerin momentleri hesaplanmış ve grafikleri çizdirilmiştir.
- Kısmi diferansiyel denklemler rastgele hale getirilip güncel yarı-analitik metotlarla çözülmüştür. Çözümlerin momentleri hesaplanmış ve grafikleri çizdirilmiştir.
- Caputo anlamındaki kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemler rastgele hale getirilip güncel nümerik metotlarla çözülmüştür. Çözümlerin momentleri hesaplanmış ve grafikleri çizdirilmiştir.

Literatür özetinden görüldüğü üzere, rastgele kısmi diferansiyel denklemlerle ilgili yapılan çalışmalar literatürde genellikle sınırlı sayıdadır ve rastgele kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerle ilgili yapılan çalışmalar literatürde çok nadirdir. Güncel

yöntemlerin rastgele kısmi diferansiyel denklemlere uygulanmamış olmasından dolayı, bu yöntemler bu denklemlere uygulanmış ve iyi sonuçlar elde edilmiştir. Rastgele kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri güncel olan nümerik metotlarla yapılmıştır. Ayrıca bu çözümlerin birinci ve ikinci momentleri hesaplanıp grafikleri MAPLE (v.13) veya MATLAB (v.16b) programlarında çizdirilmiştir.





## 2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu bölümde, ilk olarak ikinci basamaktan hemen-hemen lineer denklemleri vereceğiz.

### 2.1. İkinci Basamaktan Hemen-Hemen Lineer Denklemler İçin Bir Sınıflandırma, Kanonik Forma İndirgeme

$A, B, C \in C^2(D)$  olmak üzere, ikinci basamaktan, iki bağımsız değişkenli hemen-hemen lineer denklemin en genel şekli (Koca, 2008)

$$A(x, y)u_{xx} + B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (2.1)$$

şeklindedir. Bununla birlikte,

$$\Delta(x, y) := [B(x, y)]^2 - 4A(x, y)C(x, y)$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

**Tanım 2.1.1. (Koca, 2008)** (2.1) denklemine

- (i)  $\Delta > 0$  eşitsizliğinin sağlandığı durumlarda hiperbolik,
- (ii)  $\Delta = 0$  eşitliğinin sağlandığı durumlarda parabolik,
- (iii)  $\Delta < 0$  eşitsizliğinin sağlandığı durumlarda eliptik tiptendir denilmektedir.

**Örnek 2.1.2.**  $(x^2 - 1)u_{xx} + 2yu_{xy} - u_{yy} + u_x + u_y = 0$  denkleminde,  $A(x, y) = x^2 - 1, B(x, y) = 2y, C(x, y) = -1$  dir. Bu durumda,  $\Delta(x, y) := [2y]^2 - 4(x^2 - 1)(-1) = 4(x^2 + y^2) - 4$  'tür. Böylece verilen denklem,

$D_1 = \{(x, y): x^2 + y^2 > 1, x, y \in \mathbb{R}\}$  bölgesinde hiperbolik;

$D_2 = \{(x, y): x^2 + y^2 = 1, x, y \in \mathbb{R}\}$  çemberi üzerinde parabolik;

$D_3 = \{(x, y): x^2 + y^2 < 1, x, y \in \mathbb{R}\}$  açık diskinde eliptik tiptendir.

Şimdi (2.1) denklemine

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \varphi(x, y) \\ \mu &= \psi(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Burada  $\xi$  ve  $\mu$  yeni bağımsız değişkenlerdir. Ayrıca,

$$\frac{\partial(\xi, \mu)}{\partial(x, y)} \neq 0$$

olduğunu kabul edelim. İlk olarak (2.2) dönüşümü altında (2.1) denklemindeki türevleri hesaplayalım:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\mu \mu_x;$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\mu \mu_y;$$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}(u_x) = \frac{\partial}{\partial x}(u_\xi \xi_x + u_\mu \mu_x) = (u_\xi)_x \xi_x + u_\xi \xi_{xx} + (u_\mu)_x \mu_x + u_\mu \mu_{xx} \\ &= (u_{\xi\xi} \xi_x + u_{\xi\mu} \mu_x) \xi_x + u_\xi \xi_{xx} + (u_{\mu\xi} \xi_x + u_{\mu\mu} \mu_x) \mu_x + u_\mu \mu_{xx} \\ &= (\xi_x)^2 u_{\xi\xi} + 2\xi_x \mu_x u_{\xi\mu} + (\mu_x)^2 u_{\mu\mu} + \xi_{xx} u_\xi + \mu_{xx} u_\mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y}(u_x) = \frac{\partial}{\partial x}(u_\xi \xi_x + u_\mu \mu_x) = (u_\xi)_y \xi_x + u_\xi \xi_{xy} + (u_\mu)_y \mu_x + u_\mu \mu_{xy} \\ &= (u_{\xi\xi} \xi_y + u_{\xi\mu} \mu_y) \xi_x + u_\xi \xi_{xy} + (u_{\mu\xi} \xi_y + u_{\mu\mu} \mu_y) \mu_x + u_\mu \mu_{xy} \\ &= \xi_x \xi_y u_{\xi\xi} + (\xi_x \mu_y + \xi_y \mu_x) u_{\xi\mu} + \mu_x \mu_y u_{\mu\mu} + \xi_{xy} u_\xi + \mu_{xy} u_\mu. \end{aligned}$$

Benzer şekilde,

$$u_{yy} = (\xi_y)^2 u_{\xi\xi} + 2\xi_y \mu_y u_{\xi\mu} + (\mu_y)^2 u_{\mu\mu} + \xi_{yy} u_\xi + \mu_{yy} u_\mu$$

elde edilmektedir. Bu türevler (2.1) denkleminde yerine yazılıp düzenlenirse,

$$\begin{aligned} & \left[ A^*(\xi, \mu)(\xi_x)^2 + B^*(\xi, \mu)\xi_x \xi_y + C^*(\xi, \mu)(\xi_y)^2 \right] u_{\xi\xi} + \left[ 2A^*(\xi, \mu)\xi_x \mu_x + \right. \\ & B^*(\xi, \mu)(\xi_x \mu_y + \xi_y \mu_x) + 2C^*(\xi, \mu)\xi_y \mu_y \left. \right] u_{\xi\mu} + \left[ A^*(\xi, \mu)(\mu_x)^2 + B^*(\xi, \mu)\mu_x \mu_y + \right. \\ & \left. C^*(\xi, \mu)(\mu_y)^2 \right] u_{\mu\mu} + F^*(\xi, \mu, u, u_\xi, u_\mu) = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

olur. Burada  $A^*, B^*, C^*, F^*$ , (2.1) de olan  $A, B, C, F$  fonksiyonlarının (2.2) dönüşümü altındaki yeni fonksiyonlarıdır. Eğer (2.3) te

$$\left. \begin{aligned} A_1(\xi, \mu) &= A^*(\xi, \mu)(\xi_x)^2 + B^*(\xi, \mu)\xi_x\xi_y + C^*(\xi, \mu)(\xi_y)^2 \\ B_1(\xi, \mu) &= 2A^*(\xi, \mu)\xi_x\mu_x + B^*(\xi, \mu)(\xi_x\mu_y + \xi_y\mu_x) + 2C^*(\xi, \mu)\xi_y\mu_y \\ C_1(\xi, \mu) &= A^*(\xi, \mu)(\mu_x)^2 + B^*(\xi, \mu)\mu_x\mu_y + C^*(\xi, \mu)(\mu_y)^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

denilirse, (2.3) dönüşmüş denklemi

$$A_1(\xi, \mu)u_{\xi\xi} + B_1(\xi, \mu)u_{\xi\mu} + C_1(\xi, \mu)u_{\mu\mu} + F^*(\xi, \mu, u, u_\xi, u_\mu) = 0 \quad (2.5)$$

olur. (2.5) denkleminde görüldüğü gibi, (2.2) dönüşümü altında (2.1) denkleminin tipi değişmemektedir.

Şimdi (2.1) denkleminin kanonik forma dönüştürülmesine bakalım.

### 2.1.1. Hiperbolik Tip

(2.1) denkleminde  $B^2 - 4AC > 0$  olsun. Bu denkleme (2.2) genel dönüşümü uygulandıktan sonra elde edilen (2.5) denkleminde  $A_1(\xi, \mu) \equiv 0$ ,  $C_1(\xi, \mu) \equiv 0$  olduğunu varsayalım. Bu durumda, (2.4)'teki birinci ve üçüncü eşitliklerden (Koca, 2008).

$$\left. \begin{aligned} A^*(\xi, \mu)(\xi_x)^2 + B^*(\xi, \mu)\xi_x\xi_y + C^*(\xi, \mu)(\xi_y)^2 &= 0 \\ C_1(\xi, \mu) &= A^*(\xi, \mu)(\mu_x)^2 + B^*(\xi, \mu)\mu_x\mu_y + C^*(\xi, \mu)(\mu_y)^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

olur. (2.6) daki ilk denklem  $\xi_y^2$  ile bölünürse

$$A^* \left( \frac{\xi_x}{\xi_y} \right)^2 + B^* \frac{\xi_x}{\xi_y} + C^* = 0 \quad (2.7)$$

elde edilir. (2.2) deki dönüşümde  $c_1$  keyfi sabit olmak üzere,

$$\xi = \varphi(x, y) = c_1 \quad (2.8)$$

olduğunu varsayalım. Böylece (2.8) eğri ailesine seviye eğrileri denir. Diğer taraftan, (2.2) deki  $\mu$  fonksiyonuna da  $c_2$  keyfi sabit olmak üzere,

$$\mu = \psi(x, y) = c_2 \quad (2.9)$$

şeklinde seviye eğrileri olarak seçelim.

**Tanım 2.1.3. (Koca, 2008)**

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \varphi(x, y) = c_1 \\ \mu &= \psi(x, y) = c_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

eğri ailelerine (2.1) denkleminin karakteristikleri denir.

Jakobiyen sıfırdan farklı olduğu sürece, (2.10) daki eğri aileleri lineer bağımsızdır.

(2.10) daki ilk ifadededen,

$$d\xi = \xi_x dx + \xi_y dy = 0$$

yazılabilir ve buradan (Koca, 2008)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\xi_x}{\xi_y} \quad (2.11)$$

olur. (2.11), (2.7) de yerine yazılırsa

$$A^* \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - B^* \frac{dy}{dx} + C^* = 0$$

elde edilir. Buradan (Koca, 2008),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B^* \mp \sqrt{(B^*)^2 - 4A^*C^*}}{2A^*} \quad (2.12)$$

olur. Ayrıca,  $A^*(\xi, \mu) = A(x, y)$ ,  $B^*(\xi, \mu) = B(x, y)$ ,  $C^*(\xi, \mu) = C(x, y)$  olduğundan,

(2.12) deki denklemler

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (2.13)$$

olur. (2.13) adi diferansiyel denklemlerinin ayrı ayrı çözümlerinden (Koca, 2008),

$$\left. \begin{aligned} \xi^* &= \varphi(x, y) = c_1 \\ \mu^* &= \psi(x, y) = c_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

eğri aileleri bulunur.

**Tanım 2.1.4. (Koca, 2008)**

(2.13) denklemlerine, hiperbolik denkleme ait karakteristik denklemler denir. Buna göre (2.1) denkleminin (2.13) denklemlerinin çözümlerinden elde ettiğimiz.

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \varphi^*(x, y) = c_1 \\ \mu &= \psi^*(x, y) = c_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

dönüşümleri

$$\frac{\partial(\xi, \mu)}{\partial(x, y)} \neq 0$$

olmak üzere uygulanırsa (2.5) deki  $A_1$  ve  $C_1$  katsayıları özdeş olarak sıfırdır. Böylece (2.5) denklemi

$$u_{\xi\mu} + H^{**}(\xi, \mu, u, u_{\xi}, u_{\mu}) = 0 \quad (2.16)$$

olur. Burada  $H^{**} = \frac{H^*}{B_1}$  dir.

**Tanım 2.1.5. (Koca, 2008)** (2.16) denkleminin (2.1) hiperbolik denkleminin kanonik formu denir.

**Uyarı 2.1.6. (Koca, 2008)** (2.15) karakteristikleri bulunduğundan sonra (2.1) denkleminin

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \xi + \mu = \varphi^*(x, y) + \psi^*(x, y) \\ \beta &= \xi - \mu = \varphi^*(x, y) - \psi^*(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

dönüşümü uygulanırsa dönüşmüş denklem

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} + H_1(\alpha, \beta, u, u_{\alpha}, u_{\beta}) = 0 \quad (2.18)$$

elde edilir. (2.18) hiperbolik denklemlerinin bir başka kanonik formu olarak bilinmektedir.

### 2.1.2. Parabolik Tip

(2.1) denkleminde  $B^2 - 4AC = 0$  olsun. Bu durumda denklem parabolik tipten olacaktır. Bu denkleme (2.2) genel dönüşümü uygulanmasıyla (2.5) denklemi haline geldiğini varsayalım. (2.5) te  $A_1 \equiv B_1 \equiv 0$  seçilmesiyle denklem (Koca, 2008).

$$u_{\mu\mu} + H_1(\xi, \mu, u, u_\xi, u_\mu) = 0, H_1 = \frac{H^*}{C^*} \quad (2.19)$$

veya  $B_1 \equiv C_1 \equiv 0$  seçilmesiyle

$$u_{\xi\xi} + H_2(\xi, \mu, u, u_\xi, u_\mu) = 0, H_2 = \frac{H^*}{A^*} \quad (2.20)$$

olur.

**Tanım 2.1.7.** (Koca, 2008) (2.19) ve (2.20) denklemlerine (2.1) parabolik denkleminin kanonik formu denir.

Şimdi (2.2) genel dönüşümünün hangi özel hali için dönüşüm sonunda (2.1) denkleminin (2.19) ve (2.20) haline geleceğini araştıralım:

$A_1 \equiv B_1 \equiv 0$  özdeşliğinin sağlanması için (2.4) ten (Koca, 2008)

$$A^*(\xi, \mu)(\xi_x)^2 + B^*(\xi, \mu)\xi_x\xi_y + C^*(\xi, \mu)(\xi_y)^2 = 0 \quad (2.21)$$

$$2A^*(\xi, \mu)\xi_x\mu_x + B^*(\xi, \mu)(\xi_x\mu_y + \xi_y\mu_x) + 2C^*(\xi, \mu)\xi_y\mu_y = 0 \quad (2.22)$$

olmalıdır. Hiperbolik denklemlerin kanonik forma indirgenmesi sırasında olduğu gibi (2.21)' in sağlanması

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B^*(\xi, \mu)}{2A^*(\xi, \mu)} = \frac{B(x, y)}{2A(x, y)} \quad (2.23)$$

karakteristik denklemin sağlanması ile eşdeğerdir. Bu adi diferansiyel denklemin çözülmesinden bir tek

$$\varphi(x, y) = c_1 \quad (2.24)$$

karakteristiği elde edilir. İkinci karakteristiği (2.24) ile Jakobyeni sıfırdan farklı olacak şekilde kendimiz seçebiliriz. Kolaylık olsun diye genellikle  $\mu = y$  seçilir. Böylece (2.1) denkleminde (Koca, 2008).

$$\left. \begin{array}{l} \xi = \varphi(x, y) \\ \mu = y \end{array} \right\} \quad (2.25)$$

dönüşümleri

$$\frac{\partial(\xi, \mu)}{\partial(x, y)} \neq 0$$

olmak üzere uygulanırsa parabolik denklem kanonik forma indirgenmiş olur. (2.25) dönüşümü altında (2.22) denklemi de kendiliğinden gerçekleşir. Çünkü (2.22) ifadesinde  $\mu_x = 0, \mu_y = 1$  alınırsa

$$B^*(\xi, \mu)\xi_x + 2C^*(\xi, \mu)\xi_y = 0$$

olur. Buradan,

$$-\frac{\xi_x}{\xi_y} = \frac{2C^*}{B^*} \quad (2.26)$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\xi_x}{\xi_y}$$

idi. Böylece  $B^2 - 4AC = 0$  veya  $B^2 = 4AC, C = \frac{B^2}{4A}$  olduğu da göz önüne alınırsa

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B^*(\xi, \mu)}{2A^*(\xi, \mu)} = \frac{B(x, y)}{2A(x, y)}$$

bulunur. Bu ise (2.23)' ün aynısıdır. O halde (2.23)' ün sağlanması (2.22)' nin de sağlanmasını gerektirir. Sonuç olarak eğer (2.1) parabolik denkleminin (2.25) dönüşümü uygulanırsa (2.1) denklemi (2.19) kanonik formuna indirgenir (Koca, 2008).

Benzer yolla  $B_1 \equiv C_1 \equiv 0$  olması halinde

$$\xi = x$$

$$\mu = \psi(x, y)$$

dönüşümüyle (2.1) parabolik denklemi yine (2.20) kanonik formuna indirgenir.

### 2.1.3. Eliptik Tip

(2.1) denkleminde  $B^2 - 4AC < 0$  olsun. Bu durumda bu denklem eliptik tipten olacaktır. (2.5) dönüşmüş denkleminde  $A_1 = C_1$  ve  $B_1 \equiv 0$  olduğunu kabul edelim. O zaman eliptik denklem (Koca, 2008)

$$u_{\xi\xi} + u_{\mu\mu} + H_3(\xi, \mu, u, u_\xi, u_\mu) = 0 \quad (2.27)$$

haline gelir. Burada  $H_3 = \frac{H^*}{A_1}$  dir.

**Tanım 2.1.8. (Koca, 2008)** (2.27) denkleminin eliptik denkleminin kanonik formu denir.

Şimdi hangi dönüşüm altında (2.1) denkleminin (2.27) kanonik formuna dönüşeceğini araştıralım. (2.27)' nin elde edilmesi (2.5) denkleminde  $A_1 = C_1$  ve  $B_1 \equiv 0$  olmasıyla mümkündür. O zaman (2.4)' ten (Koca, 2008)

$$B_1 = 2A^*(\xi, \mu)\xi_x\mu_x + B^*(\xi, \mu)(\xi_x\mu_y + \xi_y\mu_x) + 2C^*(\xi, \mu)\xi_y\mu_y = 0 \quad (2.28)$$

$$A_1 - C_1 = A^*(\xi, \mu)(\xi_x^2 - \mu_x^2) + B^*(\xi, \mu)(\xi_x\xi_y\mu_y - \mu_x\mu_y) + C^*(\xi, \mu)(\xi_y^2 - \mu_y^2) \quad (2.29)$$

yazılabilir. (2.28) denklemini  $i$  ile çarpıp (2.29) denklemini ile taraf tarafa toplarsak

$$iB_1 + A_1 - C_1 = A^*(\xi, \mu)(\xi_x^2 - \mu_x^2 + 2i\xi_x\mu_x) + B^*(\xi, \mu)(\xi_x\xi_y - \mu_x\mu_y + i\xi_x\mu_y + i\xi_y\mu_x) + C^*(\xi, \mu)(\xi_y^2 - \mu_y^2 + 2i\xi_y\mu_y) = 0 \quad (2.30)$$



Böylece (2.30)' dan (Koca, 2008)

$$A^*(\xi, \mu)(\xi_x + i\mu_x)^2 + B^*(\xi, \mu)(\xi_x + i\mu_x)(\xi_y + i\mu_y) + C^*(\xi, \mu)(\xi_y + i\mu_y)^2 = 0$$

yazılabilir. Bunun her iki tarafını  $(\xi_y + i\mu_y)^2$  ile bölüp sonra

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\xi_x + i\mu_x}{\xi_y + i\mu_y}$$

dersek, eliptik denklem için

$$A^*(\xi, \mu) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - B^*(\xi, \mu) \frac{dy}{dx} + C^*(\xi, \mu) = 0 \quad (2.31)$$

karakteristik denklemini elde edilir. Buradan (Koca, 2008),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B^* \pm \sqrt{(B^*)^2 - 4A^*C^*}}{2A^*}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{B(x,y) \pm i\sqrt{4A(x,y)C(x,y) - [B(x,y)]^2}}{2A(x,y)} \quad (2.32)$$

adi diferansiyel denklemlerine ulaşılır. (2.32) diferansiyel denklemlerin çözülmesiyle biri diğerinin kompleks eşleniği olan

$$\left. \begin{aligned} \phi(x, y) &= c_1 \\ \psi(x, y) &= c_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

şeklinde iki kompleks karakteristik bulunur. Eliptik denklemlerin reel karakteristikleri yoktur. Sonuç olarak  $\xi + i\mu = \phi$ ,  $\xi - i\mu = \psi$  olmak üzere

$$\xi = \frac{\phi + \psi}{2} = \text{Re}\phi, \quad \mu = \frac{\phi - \psi}{2i} = \text{Im}\phi, \quad \frac{\partial(\xi, \mu)}{\partial(x, y)} \neq 0$$

dönüşümleri ile (2.1) eliptik denklemini, (2.27) kanonik formuna indirgenir. Ayrıca, (2.27) dönüşmüş denkleminin reel uzayda çözümü yoktur. Ancak eliptik denkleme

$$u = \phi(x, y)$$

$$v = \psi(x, y)$$

şeklinde bir kompleks dönüşüm uygulandığında kompleks düzlemde genel çözüm elde edilebilir. Burada  $u, v$  nin kompleks eşleniğidir.

Bu tezde bu kısmi diferansiyel denklemlerin, katsayılarını, başlangıç şartlarını ve homojen olmayan kısımlarını rastgele yaparak elde ettiğimiz rastgele kısmi diferansiyel denklemleri örneklerle vereceğiz.

## 2.2. Kesirli Mertebeden Türev ve İntegral Tanımları ve Bazı Önemli Özellikler

**Tanım 2.2.1.**  $\forall \mu \in \mathbb{R}$  için  $f(x) = x^p f_1(x)$  olacak şekilde bir  $p$  ( $p > \mu$ ) reel sayısı varsa  $x > 0$  olmak üzere bir  $f(x)$  reel fonksiyonu  $C_\mu$  uzayındadır ve  $m \in \mathbb{N}$  için  $f^{(m)} \in C_\mu$  ise  $x > 0$  olmak üzere bir  $f(x)$  reel fonksiyonu  $C_\mu$  uzayındadır. Burada  $f_1(x) \in C[0, \infty)$ ' dir. (Wang ve Liu, 2016; Dimovski, 1990; Miller ve Ross, 1993; Samko vd., 1993; Kilbas vd., 2006; Diethelm, 2010)

**Tanım 2.2.2.** Bir  $f(x)$  fonksiyonunun Caputo kesirli mertebeden türevi,

$$D^a f(x) = I^{a-n} D^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-a)} \int_0^x (x-t)^{n-a-1} f^{(n)}(t) dt \quad (2.34)$$

şeklinde tanımlıdır (Hilfer, 2000; Yang vd., 2016; Wang ve Liu, 2016; Miller ve Ross, 1993; Oldham ve Spanier, 1974; Podlubny, 1999; Kilbas vd., 2006; Diethelm, 2010; Laskin, 2000; Mainardi, 2010; Klimek, 2005; Dumitru vd., 2012). Burada  $n-1 < a \leq n, x > 0, n \in \mathbb{N}, f \in C_{-1}^n$ ' dir.

$D^a$ ' nin bazı özellikleri;

$$(1) \quad D^a I^a f(x) = f(x)$$

$$(2) \quad x > 0 \text{ için } I^a D^a f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0^+) \frac{x^k}{k!} \text{ dir.}$$

**Tanım 2.2.3.**  $\mu \geq -1$  için bir  $f \in C_\mu$  fonksiyonunun  $a \geq 0$  basamaktan Riemann-Liouville kesirli mertebeden integrali,

$$I^a f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x (x-t)^{a-1} f(t) dt, & a > 0, x > 0, \\ I^0 f(x) = f(x), & a = 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

şeklinde tanımlıdır (Hilfer, 2000; Wang ve Liu, 2016; Miller ve Ross, 1993; Oldham ve Spanier, 1974; Podlubny, 1999; Laskin, 2000; Mainardi, 2010; Klimek, 2005; Diethelm, 2010). Burada  $\Gamma(\cdot)$ , Gamma fonksiyonudur.

$f \in C_{\mu}$ ,  $\mu, \gamma \geq -1$ ,  $\alpha, \beta \geq 0$  için,  $I^a$  operatörünün bazı özellikleri

$$1) I^{\alpha} I^{\beta} f(x) = I^{\beta} I^{\alpha} f(x) = I^{\alpha+\beta} f(x),$$

$$2) I^{\alpha} x^{\gamma} = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} x^{\alpha+\gamma} \text{ dır.}$$

**Tanım 2.2.4.**  $a > 0$  olmak üzere,  $E_a$  Mittag-Leffler fonksiyonu,

$$E_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(na+1)} \quad (2.36)$$

şeklinde tanımlıdır (Chaurasia ve Singh, 2010; Wang ve Liu, 2016; Gupta ve Debnath, 2007; Diethelm, 2010).

**Tanım 2.2.5.**

$$A = \left\{ f(t) \left| \exists M, \tau_1, \tau_2 > 0, |f(t)| < M e^{\frac{t}{\tau_j}}, t \in (-1)^j \times [0, \infty) \right. \right\} \quad \text{fonksiyonlar}$$

kümesi üzerinde Sumudu dönüşümü  $v \in (\tau_1, \tau_2)$  için,

$$S[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-t} f(vt) dt \quad (2.37)$$

olarak verilmiştir (Chaurasia ve Singh, 2010; Wang ve Liu, 2016).

**Tanım 2.2.6.** Caputo kesirli mertebeden türevinin Sumudu dönüşümü  $n - 1 < na \leq n$  için,

$$S[D_x^{na} u(x, t)] = v^{-na} S[u(x, t)] - \sum_{k=0}^{n-1} v^{(-na+k)} u^{(k)}(0, t) \quad (2.38)$$

şeklinde verilmiştir (Wang ve Liu, 2016; Miller ve Ross, 1993).

**Tanım 2.2.7.** Bir  $f(t)$  fonksiyonunun Laplace dönüşümü,

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (2.39)$$

şeklinde tanımlıdır (Gupta vd., 2015; Miller ve Ross, 1993).

**Tanım 2.2.8.** Bir fonksiyonun Caputo kesirli mertebeden türevinin Laplace dönüşümü,

$$\mathcal{L}[D_t^\alpha u(x, t)] = s^\alpha \mathcal{L}[u(x, t)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{(\alpha-k-1)} u^{(k)}(x, 0), n-1 < \alpha \leq n \quad (2.40)$$

şeklinde tanımlıdır (Gupta vd., 2015; Miller ve Ross, 1993).

**Tanım 2.2.9.**  $n-1 < \alpha \leq n$  olmak üzere bir  $f(t) = t^\alpha$  fonksiyonunun Laplace dönüşümü,

$$\mathcal{L}[t^\alpha] = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}} \quad (2.41)$$

şeklinde verilmiştir (Sontakke ve Shaikh, 2015; Miller ve Ross, 1993).

### 2.3. Kullanılan Metotlar

Bu kısımda, yapılan çalışmalarda kullanılan yarı-analitik ve nümerik metotlar verilmektedir.

#### 2.3.1. İki Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Metodu

$w(x, y)$  tanım kümesinde analitik ve sürekli diferansiyellenebilir olsun.  $W(k, h)$

$$W(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+h} w(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{(x_0, y_0)} \quad (2.42)$$

ile tanımlıdır (Merdan vd., 2012). Burada  $w(x, y)$  orijinal fonksiyon ve  $W(k, h)$  dönüşüm fonksiyonudur.  $W(k, h)$ ' nin diferansiyel ters dönüşümü

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} W(k, h) (x - x_0)^k (y - y_0)^h \quad (2.43)$$

ile tanımlıdır (Chen ve Ho, 1999; Merdan vd., 2012). (2.42) ve (2.43) eşitlikleri kullanılırsa,

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+h} w(x, y)}{\partial^k \partial^h} \right]_{(x_0, y_0)} (x - x_0)^k (y - y_0)^h \quad (2.44)$$

eşitliği elde edilir.

İki boyutlu diferansiyel dönüşüm kavramı, iki boyutlu Taylor serisi açılımından bulunmaktadır. (2.43) ve (2.44) eşitliklerinden, iki boyutlu diferansiyel dönüşümle elde edilen temel işlemler Tablo 2.1' de verilmektedir (Jang vd., 2001; Ayaz, 2003; Jafari vd., 2010; Bildik vd., 2006).

Tablo 2.1. İki boyutlu diferansiyel dönüşümlerde temel işlemler

Orijinal fonksiyon	Dönüşüm fonksiyonu
$w(x, y) = u(x, y) \pm v(x, y)$	$W(k, h) = U(k, h) \pm V(k, h)$
$w(x, y) = \alpha u(x, y)$	$W(k, h) = \alpha U(k, h)$
$w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$	$W(k, h) = \frac{(k+1)}{H} U(k+1, h)$
$w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$	$W(k, h) = \frac{(k+1)}{K} U(k, h+1)$
$w(x, y) = \frac{\partial^{r+s} u(x, y)}{\partial^r \partial^s}$	$W(k, h) = \frac{[(k+1)(k+2) \dots (k+r)(h+1)(h+2) \dots (h+s) \dots U(k+r, h+s)]}{(H^r K^s)}$
$w(x, y) = u(x, y)v(x, y)$	$W(k, h) = U(k, h) \otimes V(k, h)$ $= \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h U(r, h-s) V(k-r, s)$
$w(x, y) = x^m y^n$	$W(k, h) = H^m K^n \delta(k-m) \delta(h-n)$

### 2.3.2. Yeni Yinelemeli Sumudu Dönüşümü Metodu

$$\begin{cases} D_t^{na} u(x, t) + Lu(x, t) + Ru(x, t) = g(x, t), \\ n-1 < na \leq n, \\ u(x, 0) = k(x). \end{cases} \quad (2.45)$$

başlangıç-değer problemini göz önüne alalım. Burada  $D_t^{na}$  Caputo kesirli mertebeden türev operatörü,  $g(x, t)$  sürekli fonksiyon,  $L$  lineer operatör ve  $R$  is lineer olmayan operatördür (Wang ve Liu, 2016; Tuluçe Demiray vd., 2015).

(2.45) probleminde denklemin her iki tarafına Sumudu dönüşümü uygulanırsa,

$$S[D_t^{na}u(x,t) + Lu(x,t) + Ru(x,t)] = S[g(x,t)] \quad (2.46)$$

eşitliği elde edilir. Sumudu dönüşümünün özelliği kullanılırsa (Wang ve Liu, 2016),

$$S[u(x,t)] - v^{na} \sum_{k=0}^{n-1} u^{(k)}(x,0) + v^{na} S[Lu(x,t) + Ru(x,t) - g(x,t)] = 0 \quad (2.47)$$

(2.47) eşitliği düzenlendiğinde,

$$S[u(x,t)] = v^{na} \sum_{k=0}^{n-1} u^{(k)}(x,0) - v^{na} S[Lu(x,t) + Ru(x,t) - g(x,t)] \quad (2.48)$$

eşitliği elde edilmektedir.

(2.48) eşitliğine ters Sumudu dönüşümü uygulanırsa,

$$u(x,t) = S^{-1}\left[v^{na} \sum_{k=0}^{n-1} u^{(k)}(x,0)\right] - S^{-1}\left[v^{na} S[Lu(x,t) + Ru(x,t) - g(x,t)]\right] \quad (2.49)$$

eşitliği elde edilmektedir.

Aşağıdaki eşitliklerin sağlandığını varsayalım.

$$\begin{cases} f(x,t) = S^{-1}\left[v^{na} \sum_{k=0}^{n-1} u^{(k)}(x,0) + v^{na} S[g(x,t)]\right], \\ N(u(x,t)) = -S^{-1}\left[v^{na} S[Ru(x,t)]\right], \\ K(u(x,t)) = -S^{-1}\left[v^{na} S[Lu(x,t)]\right] \end{cases} \quad (2.50)$$

(2.50) eşitlikleri (2.49) eşitliğinde kullanılırsa,

$$u(x,t) = f(x,t) + K(u(x,t)) + N(u(x,t)) \quad (2.51)$$

eşitliği elde edilmektedir. Burada  $f$  bilinen bir fonksiyon,  $K$ ,  $u$ ' nun lineer operatörü ve  $N$ ,  $u$ ' nun lineer olmayan operatürüdür. (2.51) eşitliğinin çözümü,

$$u(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x,t) \quad (2.52)$$

serisi formunda verilmektedir (Wang ve Liu, 2016).

$K$  lineer bir operatör olduğundan,

$$K(\sum_{i=0}^{\infty} u_i) = \sum_{i=0}^{\infty} K(u_i) \quad (2.53)$$

eşitliği yazılmaktadır.

$N$  lineer olmayan operatörü,

$$N(\sum_{i=0}^{\infty} u_i) = N(u_0) + \sum_{i=0}^{\infty} [N(\sum_{j=0}^i u_j) - N(\sum_{j=0}^{i-1} u_j)] \quad (2.54)$$

olarak yazılabilmektedir (Daftardar-Gejji vd., 2006; Wang ve Liu, 2016; ).

Böylece (2.51) eşitliği,

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_i = f + \sum_{i=0}^{\infty} K(u_i) + N(u_0) + \sum_{i=0}^{\infty} [N(\sum_{j=0}^i u_j) - N(\sum_{j=0}^{i-1} u_j)] \quad (2.55)$$

olarak verilmektedir (Wang ve Liu, 2016).

$$\begin{cases} u_0 = f, \\ u_1 = K(u_0) + N(u_0), \\ u_{m+1} = K(u_m) + N(u_0 + \dots + u_m) - N(u_0 + u_1 + \dots + u_{m-1}) \end{cases} \quad (2.56)$$

rekürans bağıntıları tanımlıysa,

$$(u_1 + \dots + u_{m+1}) = K(u_0 + \dots + u_m) + N(u_0 + \dots + u_m) \quad (2.57)$$

eşitliği elde edilmektedir (Wang ve Liu, 2016).

Böylece,

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_i = f + K(\sum_{i=0}^{\infty} u_i) + N(\sum_{i=0}^{\infty} u_i) \quad (2.58)$$

eşitliği elde edilmektedir.

(2.51)' in  $m$ -terimli çözümü yaklaşık olarak

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{m-1} \quad (2.59)$$

olarak elde edilmektedir.

### 2.3.3. Crank-Nicolson Metodu

Bu kısımda Crank-Nicolson metodunu veriyoruz. Şimdi,  $t = 0$  ve  $0 \leq x \leq a$  için

$$u(x, 0) = f(x) \quad (2.60)$$

başlangıç şartı,  $x = 0$  ve  $0 \leq t \leq b$  için  $u(0, t) = c_1$  ve  $x = a$  ve  $0 \leq t \leq b$  için  $u(a, t) = c_2$  sınır şartları ile birlikte,  $0 \leq x < a$  ve  $0 < t < b$  için

$$u_t(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t) \quad (2.61)$$

bir-boyutlu lineer ısı denklemini düşünelim.

(2.61) denkleminde Crank-Nicolson ayrıklaştırması uygulandığında,

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = c^2 \frac{u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{2h^2} \quad (2.62)$$

eşitliği elde edilmektedir (Mathews vd., 2004). Burada  $r = \frac{c^2 k}{h^2}$  ifadesi (2.62) eşitliğinde yerine yazılır ve düzenlenirse,  $i = 2, 3, \dots, n - 1$  için,

$$\begin{aligned} -ru_{i-1,j+1} + (2 + 2r)u_{i,j+1} - ru_{i+1,j+1} &= (2 - 2r)u_{i,j} \\ +r(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) \end{aligned} \quad (2.63)$$

kapalı fark formülü elde edilmektedir (Mathews vd., 2004). Burada denklemin sağ tarafındaki terimlerin hepsi bilinmektedir. (2.63) formülünde  $r = 1$  alınırsa  $i = 2, 3, \dots, n - 1$  için,

$$-u_{i-1,j+1} + 4u_{i,j+1} - u_{i+1,j+1} = u_{i-1,j} + u_{i+1,j} \quad (2.64)$$

eşitliği elde edilmektedir (Mathews vd., 2004). Ayrıca sınır şartları sırasıyla  $u_{1,j} = u_{1,j+1} = c_1$  ve  $u_{n,j} = u_{n,j+1} = c_2$  ilk ve son denklemleri vermektedir (Mathews vd., 2004).

(2.64) denklemleri  $Ax = B$  tridiagonal matris formunda çözülmektedir. Şimdi bu denklemleri  $Ax = B$  tridiagonal matris formunda yazarsak,



$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 4 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{2,j+1} \\ u_{3,j+1} \\ \vdots \\ u_{p,j+1} \\ \vdots \\ u_{n-2,j+1} \\ u_{n-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c_1 + u_{3,j} \\ u_{2,j} + u_{4,j} \\ \vdots \\ u_{p-1,j} + u_{p+1,j} \\ \vdots \\ u_{n-3,j} + u_{n-1,j} \\ u_{n-2,j} + 2c_2 \end{bmatrix}$$

eşitliği elde edilmektedir (Mathews vd., 2004).

Crank-Nicolson metodu ise MATLAB (v. 16b) programında uygulanırsa, bu  $Ax = B$  lineer sistemi doğrudan yöntemlerle veya iterasyon yoluyla çözülmektedir (Mathews vd., 2004).

### 2.3.4. Kesirli Mertebeden Laplace Varyasyonel Metodu

$$\begin{cases} D_t^\alpha u(x, t) + Lu(x, t) + Nu(x, t) = g(x, t), \\ 0 < x < 1, 0 < \alpha \leq 1, 0 < t \leq 1, \\ u(x, 0) = u_0 \end{cases} \quad (2.65)$$

başlangıç-değer problemini göz önüne alalım. Burada  $D_t^\alpha$  Caputo kesirli mertebeden türev operatörü,  $g(x, t)$  sürekli fonksiyon,  $L$  lineer operatör ve  $N$  is lineer olmayan operatördür (Wang ve Liu, 2016).

Laplace dönüşümü (2.65) problemindeki denkleme uygulanırsa, bu denkleme karşılık gelen rekürans bağıntısı

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x, s) = u_n(x, s) + \lambda[s^\alpha u_n(x, s) - s^{\alpha-1}u_0(x, 0)] \\ + \lambda\mathcal{L}[Lu_n(x, t) + Nu_n(x, t) - g(x, t)] \end{aligned} \quad (2.66)$$

olarak elde edilmektedir (Noor vd., 2018).

Varyasyon (2.66) eşitliğinin her iki tarafına uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \delta u_{n+1}(x, s) = \delta u_n(x, s) + \lambda\delta[s^\alpha u_n(x, s) - s^{\alpha-1}u_0(x, 0)] \\ + \lambda\delta\mathcal{L}[Lu_n(x, t) + Nu_n(x, t) - g(x, t)] \end{aligned} \quad (2.67)$$

eşitliği elde edilmektedir (Noor vd., 2018).

En iyilik şartları kullanılarak,

$$\frac{\delta u_{n+1}}{\delta u_n} = 0$$

olarak alınabilir.  $\check{u}_n$  sınırlı bir varyasyondur yani  $\delta \check{u}_n = 0$ ' dır (Noor vd., 2018). Böylece  $\lambda$  Lagrange çarpanı

$$0 = \delta u_n + s^\alpha \lambda \delta u_n \Rightarrow \delta u_n (1 + s^\alpha \lambda) = 0 \Rightarrow 1 + s^\alpha \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{s^\alpha}$$

şeklinde elde edilmektedir.

$\lambda$  değeri (2.66) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$u_{n+1}(x, s) = u_n(x, s) - \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}[u_{nt}^\alpha(x, t) + Lu_n(x, t) + Nu_n(x, t) - g(x, t)] \quad (2.68)$$

eşitliği elde edilmektedir (Noor vd., 2018).

(2.68) eşitliğinin her iki tarafına ters Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$u_{n+1}(x, s) = u_n(x, s) - \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}[u_{nt}^\alpha(x, t) + Lu_n(x, t) + Nu_n(x, t) - g(x, t)] \quad (2.69)$$

iterasyon formülü elde edilmektedir (Noor vd., 2018).

Böylece, (2.65)' in yaklaşık çözümü

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t) \quad (2.70)$$

ile verilmektedir.

### 2.3.5. Laplace–Padé Metodu

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

kuvvet serisini düşünelim. Kabul edelim ki

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad (2.71)$$

olsun. Bir Padé yaklaşımı (Merdan, 2010; Abassy vd., 2007)

$$\left[ \frac{L}{M} \right] = \frac{P_L(x)}{Q_M(x)} = \frac{p_L x^{L+\dots+p_1 x+p_0}}{q_M x^M+\dots+q_1 x+q_0} \quad (2.72)$$

şeklinde tanımlıdır. Padé yaklaşımı, (2.71)' e göre Maclaurin açılımından elde edilebilmektedir. (2.72) formülünde  $(L + 1)$  tane bölünen ve  $(M + 1)$  tane bölen katsayı vardır. (2.72) formülündeki polinomlar,  $x = 0$  noktasında  $f(x)$ ,  $\left[ \frac{L}{M} \right]$  ve bunların  $L + M$ ' ye kadar türevleri uygun olacak şekilde oluşturulmuştur.  $Q_0(x) = 1$  şartında, yaklaşım  $f(x)$  için tam olarak Maclaurin açılımıdır.  $L + M$ ' nin sabit bir değeri için,  $P_L(x)$  ve  $Q_M(x)$  aynı dereceye sahip veya  $P_L(x)$ ' in derecesi  $Q_M(x)$ ' in derecesinden bir derece büyük olduğunda hata en küçüktür.  $Q_M$ ' nin sabit katsayısı  $q_0 = 1$ ' dir.  $P_L(x)$  ve  $Q_M(x)$ ' i aynı sabitle bölündüğünde,  $\left[ \frac{L}{M} \right]$  değişmemektedir. Böylece  $\left[ \frac{L}{M} \right]$  rasyonel fonksiyonu,  $(L + M + 1)$  tane bilinmeyen katsayıya sahiptir. Bu sayı,  $\left[ \frac{L}{M} \right]$ ' nin

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \frac{P_L(x)}{Q_M(x)} = \frac{p_L x^{L+\dots+p_1 x+p_0}}{q_M x^M+\dots+q_1 x+q_0} + O(x^{L+M+1}) \quad (2.73)$$

genel kuvvet serisindeki  $1, x, x^2, \dots, x^{L+M}$  basamakları boyunca (2.71) kuvvet serisine uyması gerektiğini sunar. (2.73)' ün sağ tarafındaki bölen ile (2.73)' ün her iki tarafını çarpar ve (2.73)' te her iki tarafın katsayılarını karşılaştırırsak,

$$a_s + \sum_{i=1}^M a_{s-i} q_i = p_s, (s = 0, \dots, M) \quad (2.74)$$

$$a_s + \sum_{i=1}^L a_{s-i} q_i = 0, (s = M + 1, \dots, M + L) \quad (2.75)$$

(2.74) ve (2.75) eşitliklerini elde ederiz. (2.75)' teki lineer denklemi çözersek,  $i = 1, \dots, L$  için  $q_i$ ' leri elde ederiz. (2.74)' te  $q_i$ ' leri yerine yazarsak,  $s = 0, 1, \dots, M$  için  $a_s$ ' leri elde ederiz. Böylece,  $x^{L+M}$  basamağı boyunca,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

ile uygun olan bir  $\left[ \frac{L}{M} \right]$  Padé yaklaşımı oluştururuz.  $L$  ve  $M$  sırasıyla Padé serisindeki bölen ve bölünenin derecesi olmak üzere,  $M \leq L \leq M + 2$  iken, adi diferansiyel denklem için bir sabit formül Padé serisi ile elde edilmiştir (Abassy vd., 2007).

### 2.3.6. Homotopi Pertürbasyon Elzaki Dönüşümü Metodu

$$\begin{cases} Du(x, t) + Ru(x, t) + Nu(x, t) = g(x, t), \\ u(x, 0) = h(x), u_t(x, 0) = f(x) \end{cases} \quad (2.76)$$

başlangıç-değer problemini göz önüne alalım. Burada  $D$  ikinci basamaktan lineer diferansiyel operatörü,  $R, D'$  nin basamağından az lineer diferansiyel operatörü,  $N$  doğrusal olmayan diferansiyel operatörü,  $g(x, t)$  sürekli fonksiyondur (Elzaki ve Hilal, 2012).

Elzaki dönüşümü (2.76) problemindeki denkleme uygulanırsa, bu denkleme karşılık gelen rekürans bağıntısı

$$E[Du(x, t)] + E[Ru(x, t)] + E[Nu(x, t)] = E[g(x, t)] \quad (2.77)$$

olarak elde edilmektedir (Elzaki ve Hilal, 2012).

Elzaki dönüşümünün diferansiyel özelliği ve başlangıç şartları kullanıldığında,

$$E[u(x, t)] = v^2 E[g(x, t)] + v^2 h(x) + v^3 f(x) - v^2 E[Ru(x, t) + Nu(x, t)] \quad (2.78)$$

eşitliği elde edilmektedir. Ters Elzaki dönüşümü (2.78) eşitliğinin her iki tarafına uygulanırsa,

$$u(x, t) = G(x, t) - E^{-1}\{v^2 E[Ru(x, t) + Nu(x, t)]\} \quad (2.79)$$

olarak elde edilmektedir. Burada  $G(x, t)$ ,  $g(x, t)$  sürekli fonksiyonundan ve başlangıç şartlarından ortaya çıkan fonksiyonu temsil etmektedir.

Şimdi,

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x, t) \quad (2.80)$$

homotopi pertürbasyon metodu uygulanıp, doğrusal olmayan terim

$$Nu(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(u) \quad (2.81)$$

olarak parçalanmaktadır. Burada,  $H_n(u)$

$$H_n(u_0, u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \frac{\partial}{\partial p^n} [N(\sum_{i=0}^{\infty} p^i u_i)]_{p=0}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.82)$$

ile verilmektedir. (2.81) - (2.82) eşitlikleri (2.80) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x, t) = G(x, t) - p \{E^{-1}\{v^2 E[R \sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x, t) + \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(u)]\}\} \quad (2.83)$$

eşitliği elde edilmektedir.

(2.83) eşitliği, Elzaki dönüşümü ile homotopi pertürbasyon metodunun birleşimidir.

$p$ ' nin aynı kuvvetlerinin katsayıları karşılaştırılırsa,

$$\begin{aligned} p^0: u_0(x, t) &= G(x, t), \\ p^1: u_1(x, t) &= -E^{-1}\{v^2 E[Ru_0(x, t) + H_0(u)]\}, \\ p^2: u_2(x, t) &= -E^{-1}\{v^2 E[Ru_1(x, t) + H_1(u)]\}, \\ p^3: u_3(x, t) &= -E^{-1}\{v^2 E[Ru_2(x, t) + H_2(u)]\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

yaklaşımları elde edilmektedir. Böylece (2.76) başlangıç-değer probleminin çözümü,

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) + \dots \quad (2.84)$$

olarak elde edilmektedir.

#### 2.4. Rastgele Kısmi Diferansiyel Denklemler

Bu kısımda, kısmi diferansiyel denklemlerin başlangıç şartları rastgele yapılan rastgele kısmi diferansiyel denklemler incelenmektedir. Diferansiyel dönüşüm metodu ve Laplace- Padé metodu ile bu denklemlerin nümerik çözümleri elde edilmiştir. Elde edilen bu çözümlerin birinci ve ikinci momentleri analitik olarak veya MAPLE (v.13) yazılım programında yazılan uygun kodlarla elde edilmiştir. Ayrıca, bu yazılım programında beklenen değer ve varyans grafikleri çizdirilmiştir. Bununla birlikte, ele aldığımız difüzyon denklemleri akışkanlar mekaniği, kimya mühendisliği gibi birçok alanda kullanılmaktadır. Beta dağılımı da bu bilim alanlarında belirli bir minimum değer ile belirli bir maksimum değer aralığı içinde sınırlanmış olayların ortaya çıkmasındaki pratik sorunların modellenmesi için kullanıldığından Beta dağılımları kullanılmıştır. Kullanılan Laplace- Padé metodunu, denklemlerin yaklaşık analitik çözümlerinin beklenen değerleri ve

varyansları için elde edilen çözümleri iyileştirmek için uyguladığımızda  $P_L(x)$ ' in derecesi üç ve  $Q_M(x)$ ' in derecesi bir alınmıştır.

**Örnek 2.4.1.**

$c > 0$  olmak üzere,

$$u(x, 0) = \frac{x^2}{c} \quad (2.85)$$

başlangıç şartı ile

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.86)$$

doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemini ele alıyoruz.

(2.86) denkleminin diferansiyel dönüşümünü aldığımızda,

$$\begin{aligned} & (h+1)U(k, h+1) \\ &= \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (r+1)(k-r+1)U(r+1, h-s)U(k-r+1, s) \\ &+ \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k-r+1)(k-r+2)U(r, h-s)U(k-r+2, s) \end{aligned} \quad (2.87)$$

eşitliğini elde ederiz. (2.86) denkleminin tam çözümü

$$u(x, t) = \frac{x^2}{6-ct} \quad (2.88)$$

olduğunu biliyoruz. Ayrıca yazdığımız MAPLE (v.13) kodlarından (2.86) denkleminin

$$\begin{aligned} u(x, t) = x^2 & \left( \frac{1}{c} + \frac{6t}{c^2} + \frac{36t^2}{c^3} + \frac{216t^3}{c^4} + \frac{1296t^4}{c^5} + \frac{7776t^5}{c^6} + \frac{46656t^6}{c^7} \right. \\ & \left. + \frac{279936t^7}{c^8} + \frac{1679616t^8}{c^9} \right) \end{aligned} \quad (2.89)$$

yaklaşık çözümünü elde ediyoruz.

$\frac{1}{c} = \mu \in \text{Beta}(\alpha = 2, \beta = 1)$  olsun. O halde yaklaşık çözüm,

$$\begin{aligned} u(x, t) = x^2 & [\mu + 6\mu^2 t + 36\mu^3 t^2 + 216\mu^4 t^3 + 1296\mu^5 t^4 + 7776\mu^6 t^5 \\ & + 46656\mu^7 t^6 + 279936\mu^8 t^7 + 1679616\mu^9 t^8] \end{aligned} \quad (2.90)$$

elde edilmektedir. Burada momentler

$$E(\mu) = \frac{2}{2+1} = 3, E(\mu^2) = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{1}{2}, E(\mu^3) = \frac{2}{5}, E(\mu^4) = \frac{1}{3}, E(\mu^5) = \frac{2}{7}, E(\mu^6) = \frac{1}{4},$$

$$E(\mu^7) = \frac{2}{9}, E(\mu^8) = \frac{1}{5}, E(\mu^9) = \frac{2}{11} \text{ ve } E(\mu^{10}) = \frac{1}{6}$$

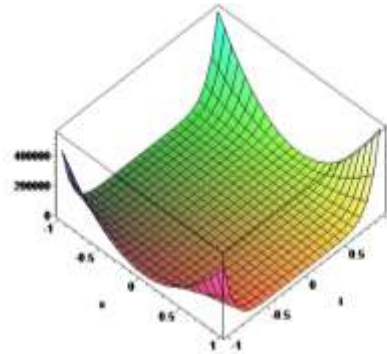
olarak elde edilmektedir. (2.89) eşitliğinin beklenen değerini aldığımızda,

$$E[u(x, t)] = E(\mu)x^2 + 6E(\mu^2)x^2t + 36E(\mu^3)x^2t^2 + 216E(\mu^4)x^2t^3 + 1296E(\mu^5)x^2t^4 \\ + 7776E(\mu^6)x^2t^5 + 46656E(\mu^7)x^2t^6 + 279936E(\mu^8)x^2t^7 + 1679616E(\mu^9)x^2t^8$$

elde edilmektedir. Momentleri son eşitlikte yerine yazdığımızda,

$$E[u(x, t)] = x^2 \left[ \frac{2}{3} + 3t + \frac{72t^2}{5} + 72t^3 + \frac{2592t^4}{7} + 1944t^5 + \frac{93312t^6}{9} + \frac{279936t^7}{5} \right. \\ \left. + \frac{3359232t^8}{7} \right]$$

eşitliğini elde ediyoruz. (2.86) denkleminin beklenen değerinin grafiği MAPLE (v.13) yazılım programında çizdirilmiş olup Şekil 2.1.' de verilmektedir.

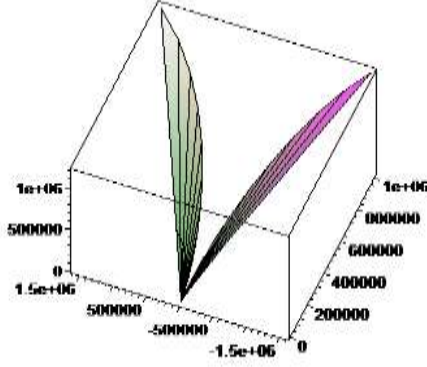


Şekil 2.1. (2.86) denkleminin beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi

(2.86) denkleminin beklenen değeri için elde edilen yaklaşık analitik çözümü iyileştirmek için Laplace-Padé metodu ile MAPLE (v.13) yazılım programında yazılan kodlardan,

$$M = \frac{1}{6252} x^2 e^{\left(\frac{168}{17}t\right)} \left( -4168 \cosh\left(\frac{12t\sqrt{2605}}{85}\right) + 61\sqrt{2605} \sinh\left(\frac{12t\sqrt{2605}}{85}\right) \right)$$

çözümü elde edilmektedir. Bu çözümün grafiği Şekil 2.2.' de verilmektedir.



Şekil 2.2. (2.86) denkleminin beklenen değerinin iyileştirilmiş diferansiyel dönüşüm metodu ile elde edilen çözümünün mekana ve zamana bağlı değişimi

Şimdi (2.89) eşitliğinin varyansını hesaplayalım. Bunun için

$$V[u(x, t)] = \sum_{j=0}^4 \sum_{i=0}^4 \text{cov}(x(i), x(j)) t^{i+j} \quad (2.91)$$

formülünü kullanıyoruz. Burada,  $\text{cov}(x(i), x(j)) = E(x(i)x(j)) - E(x(i))E(x(j))$  'dir.

(2.91)' deki serinin açılımı,

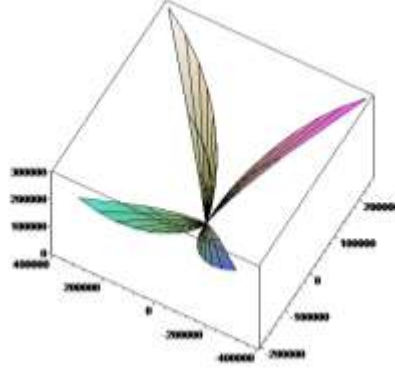
$$\begin{aligned} V[u(x, t)] = & \text{cov}(x(0), x(0)) + \text{cov}(x(1), x(0))t + \text{cov}(x(2), x(0))t^2 \\ & + \text{cov}(x(3), x(0))t^3 + \text{cov}(x(4), x(0))t^4 + \text{cov}(x(0), x(1))t + \text{cov}(x(1), x(1))t^2 \\ & + \text{cov}(x(2), x(1))t^3 + \text{cov}(x(3), x(1))t^4 + \text{cov}(x(4), x(1))t^5 + \text{cov}(x(0), x(2))t^2 \\ & + \text{cov}(x(1), x(2))t^3 + \text{cov}(x(2), x(2))t^4 + \text{cov}(x(3), x(2))t^5 + \text{cov}(x(4), x(2))t^6 \\ & + \text{cov}(x(0), x(3))t^3 + \text{cov}(x(1), x(3))t^4 + \text{cov}(x(2), x(3))t^5 + \text{cov}(x(3), x(3))t^6 \\ & + \text{cov}(x(4), x(3))t^7 + \text{cov}(x(0), x(4))t^4 + \text{cov}(x(1), x(4))t^5 + \text{cov}(x(2), x(4))t^6 \\ & + \text{cov}(x(3), x(4))t^7 + \text{cov}(x(4), x(4))t^8 \end{aligned}$$

dir. Hesaplanan kovaryans değerlerini açtığımız seride yerine yazdığımızda, (2.86)'nın varyansını



$$\begin{aligned}
V[u(x,t)] &= \frac{1}{18}x^4 + \frac{2}{5}x^4t + \frac{12}{5}x^4t^2 + \frac{96}{7}x^4t^3 + \frac{1620}{21}x^4t^4 + \frac{2}{5}x^4t + 3x^4t^2 \\
&+ \frac{648}{35}x^4t^3 + 108x^4t^4 + \frac{4320}{7}x^4t^5 + \frac{12}{5}x^4t^2 + \frac{648}{35}x^4t^3 + \frac{6804}{25}x^4t^4 + \frac{3456}{5}x^4t^5 \\
&+ \frac{139968}{35}x^4t^6 + \frac{864}{63}x^4t^3 + 108x^4t^4 + \frac{3456}{5}x^4t^5 + \frac{20736}{5}x^4t^6 + \frac{1866240}{77}x^4t^7 \\
&+ \frac{1620}{21}x^4t^4 + \frac{4320}{7}x^4t^5 + \frac{139968}{35}x^4t^6 + \frac{1866240}{77}x^4t^7 + \frac{6998400}{49}x^4t^8 \\
\Rightarrow V[u(x,t)] &= x^4 \left[ \frac{1}{18} + \frac{4}{5}t + \frac{39t^2}{5} + \frac{6768}{105}t^3 + \frac{337284}{25}t^4 + \frac{91584}{35}t^5 + \frac{425088}{35}t^6 \right. \\
&\left. + \frac{3732480}{77}t^7 + \frac{6998400}{49}t^8 \right]
\end{aligned}$$

olarak elde ederiz. (2.86) denkleminin varyansının grafiği MAPLE (v.13) yazılım programında çizdirilmiş olup Şekil 2.3.' te verilmektedir.

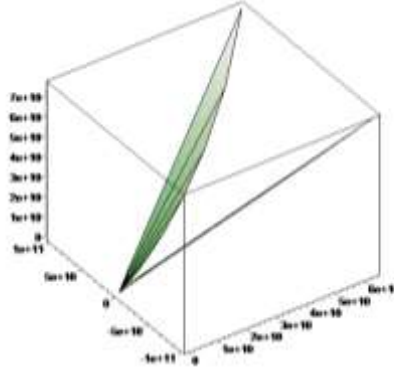


Şekil 2.3. (2.86) denkleminin varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi

Laplace-Padé metodu, (2.86) denkleminin varyansı için elde edilen yaklaşık analitik çözümü iyileştirmek için uyguladığımızda,

$$N = \frac{-1}{3657510} x^4 e^{\frac{2364t}{119}} \left( -203195 \cosh\left(\frac{6t\sqrt{40639}}{119}\right) + 542\sqrt{40639} \sinh\left(\frac{6t\sqrt{40639}}{119}\right) \right)$$

çözümünü elde ediyoruz. Bu çözümün grafiği Şekil 2.4.' te verilmektedir.



Şekil 2.4. (2.86) denkleminin varyansının iyileştirilmiş diferansiyel dönüşüm metodu ile elde edilen çözümünün mekana ve zamana bağlı değişimi

### Örnek 2.4.2.

$a > 0$  olmak üzere

$$u(x, 0) = ae^x, u(0, t) = ae^t u_t(x, 0) = ae^x u_x(0, t) = ae^t \quad (2.92)$$

başlangıç-değer şartları ile

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u^2 + u \quad (2.93)$$

taşınım-difüzyon denklemini ele alıyoruz.

(2.93) denkleminin diferansiyel dönüşümünü aldığımızda,

$$\begin{aligned} (h+1)U(k, h+1) &= (k+1)(k+2)U(k+2, h) - (k+1)U(k+1, h) \\ &+ U(k, h) + \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k-r+1)(k-r+2)U(r, h-s)U(k-r+2, s) \\ &- \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h U(r, h-s)U(k-r, s) \end{aligned} \quad (2.94)$$

eşitliğini elde ederiz. (2.93) denkleminin tam çözümünün

$$u(x, t) = ae^{x+t} \quad (2.95)$$

olduğunu biliyoruz. Ayrıca yazdığımız MAPLE (v.13) kodlarından (2.93) denkleminin

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & a + at + \frac{at^2}{2} + ax + axt + \frac{axt^2}{2} + \frac{ax^2}{2} + \frac{ax^2t}{2} + \frac{ax^2t^2}{4} + \frac{ax^3}{6} \\
& + \frac{ax^3t}{6} + \frac{ax^3t^2}{2} + \frac{ax^4}{24} + \frac{ax^4t}{24} + \frac{ax^4t^2}{48}
\end{aligned} \tag{2.96}$$

yaklaşık çözümünü elde ediyoruz. O halde yaklaşık çözüm,

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & \left( a + ax + \frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{6}ax^3 + \frac{1}{24}ax^4 \right) + t \left( a + ax + \frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{6}ax^3 + \right. \\
& \left. \frac{1}{24}ax^4 \right) + t^2 \left( \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{4}ax^2 + \frac{1}{12}ax^3 + \frac{1}{48}ax^4 \right) \\
\Rightarrow u(x, t) = & a \left( 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \right) + at \left( 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \right) \\
& + \frac{at^2}{2} \left( 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \right) \\
\Rightarrow u(x, t) = & f(x) \left( a + at + \frac{at^2}{2} \right)
\end{aligned} \tag{2.97}$$

olarak elde edilmektedir. Burada  $f(x) = \left( 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \right)$ , tür.  $a \in \text{Beta}(\alpha = 2, \beta = 1)$  olsun. Böylece momentler

$$E(a) = \frac{2}{3}, E(a^2) = \frac{1}{2}$$

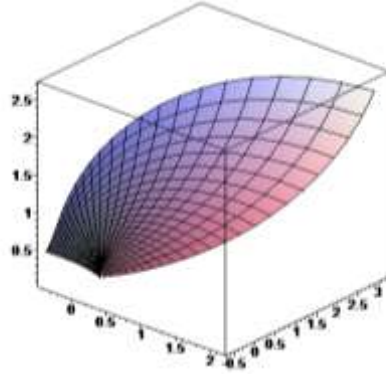
olarak elde edilmektedir. (2.97) eşitliğinin beklenen değerini aldığımızda,

$$\begin{aligned}
E[u(x, t)] &= E[f(x)(a + at + at^2)] = f(x)(E(a) + E(a)t + E(a)t^2) \\
&= f(x) \left( \frac{2}{3} + \frac{2t}{3} + \frac{t^2}{3} \right)
\end{aligned}$$

elde edilmektedir. Momentleri son eşitlikte yerine yazdığımızda,

$$E[u(x, t)] = \left( 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \right) \left( \frac{2}{3} + \frac{2t}{3} + \frac{t^2}{3} \right)$$

eşitliğini elde ediyoruz. (2.93) denkleminin beklenen değerinin grafiği MAPLE (v.13) yazılım programında çizdirilmiş olup Şekil 2.5.' te verilmektedir.

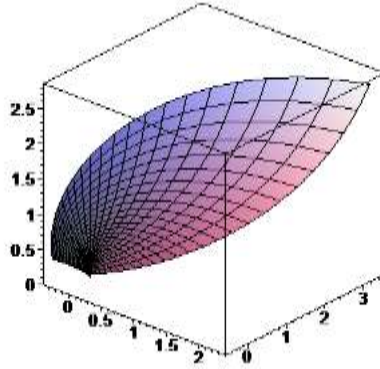


Şekil 2.5. (2.93) denkleminin beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi

Laplace-Padé metodu, (2.93) denkleminin beklenen değeri için elde edilen yaklaşık analitik çözümü iyileştirmek için uyguladığımızda,

$$M = \frac{1}{36} (24 + 24x + 12x^2 + 4x^3 + x^4) e^t$$

çözümünü elde ederiz. Bu çözümün grafiği Şekil 2.6.' da verilmektedir.



Şekil 2.6. (2.93) denkleminin beklenen değerinin iyileştirilmiş diferansiyel dönüşüm metodu ile elde edilen çözümünün mekana ve zamana bağlı değişimi

Şimdi (2.97) eşitliğinin varyansını hesaplayalım. Bunun için

$$V[u(x, t)] = \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^2 cov(x(i), x(j)) t^{i+j} \quad (2.98)$$

formülünü kullanıyoruz. Burada,  $cov(x(i), x(j)) = E(x(i)x(j)) - E(x(i))E(x(j))$  'dir.

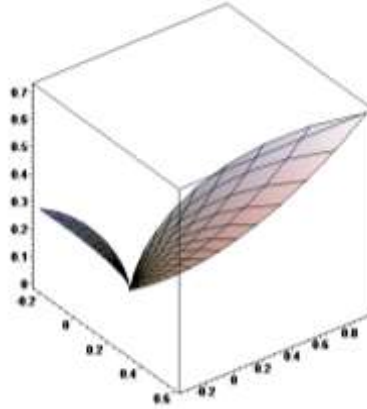
(2.99)'daki serinin açılımı

$$\begin{aligned}
V[u(x, t)] &= cov(x(0), x(0)) + cov(x(0), x(1))t + cov(x(0), x(2))t^2 \\
&+ cov(x(1), x(0))t + cov(x(1), x(1))t^2 + cov(x(1), x(2))t^3 + cov(x(2), x(0))t^2 \\
&+ cov(x(2), x(1))t^3 + cov(x(2), x(2))t^4
\end{aligned}$$

tür. Hesaplanan kovaryans değerlerini açtığımız seride yerine yazdığımızda, (2.97)' nin varyansını

$$V[u(x, t)] = \left(1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + \frac{2x^4}{3} + \frac{x^5}{4} + \frac{5x^6}{72} + \frac{x^7}{72} + \frac{x^8}{576}\right) \left(\frac{t^2}{9} + \frac{t^3}{18} + \frac{t^4}{72}\right) \quad (2.99)$$

olarak buluruz. (2.93) denkleminin varyansının grafiği MAPLE (v.13) yazılım programında çizdirilmiş olup Şekil 2.7.' de verilmektedir.

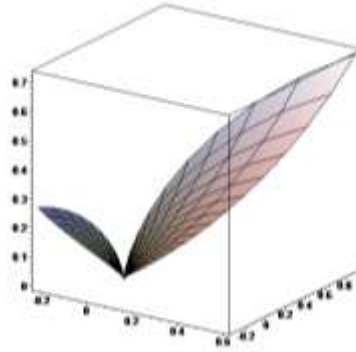


Şekil 2.7. (2.93) denkleminin varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi

Laplace-Padé metodu, (2.93) denkleminin varyansı için elde edilen yaklaşık analitik çözümü iyileştirmek için uyguladığımızda,

$$\begin{aligned}
N = & \frac{16}{27}x + \frac{16}{27}x^2 + \frac{32}{81}x^3 + \frac{16}{81}x^4 - \frac{16}{27}e^{\frac{3}{4}t}x\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{2}{27}x^5 + \frac{5}{243}x^6 + \frac{1}{243}x^7 \\
& + \frac{1}{1944}x^8 + \frac{8}{27} + \frac{16}{27}e^{\frac{3}{4}t}x\sqrt{3}\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{16}{27}e^{\frac{3}{4}t}x^2\sqrt{3}\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{4}\right) \\
& + \frac{32}{81}e^{\frac{3}{4}t}x^3\sqrt{3}\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{16}{81}e^{\frac{3}{4}t}x^4\sqrt{3}\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{2}{27}e^{\frac{3}{4}t}x^5\sqrt{3}\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{4}\right) \\
& + \frac{5}{243}e^{\frac{3}{4}t}x^6\sqrt{3}\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{1}{243}e^{\frac{3}{4}t}x^7\sqrt{3}\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{1}{1944}e^{\frac{3}{4}t}x^8\sqrt{3}\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{4}\right) \\
& - \frac{16}{27}e^{\frac{3}{4}t}x^2\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{4}\right) - \frac{32}{81}e^{\frac{3}{4}t}x^3\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{4}\right) - \frac{16}{81}e^{\frac{3}{4}t}x^4\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{4}\right) \\
& + \frac{8}{27}e^{\frac{3}{4}t}\sqrt{3}\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{4}\right) - \frac{2}{27}e^{\frac{3}{4}t}x^5\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{4}\right) - \frac{5}{243}e^{\frac{3}{4}t}x^6\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{4}\right) \\
& - \frac{1}{243}e^{\frac{3}{4}t}x^7\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{4}\right) - \frac{1}{1944}e^{\frac{3}{4}t}x^8\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{4}\right) - \frac{8}{27}e^{\frac{3}{4}t}\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{4}\right)
\end{aligned}$$

çözümünü elde ediyoruz. Bu çözümün grafiği Şekil 2.8.' de verilmektedir.



Şekil 2.8. (2.93) denkleminin varyansının iyileştirilmiş diferansiyel dönüşüm metodu ile elde edilen çözümünün mekana ve zamana bağlı değişimi

### Örnek 2.4.3.

$a > 0$  olmak üzere

$$u(x, 0) = ae^{-x}, u(0, t) = ae^t u_t(x, 0) = ae^{-x}, u_x(0, t) = -ae^{-t} \quad (2.100)$$

başlangıç-değer şartları ile

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - u^2 + u \quad (2.101)$$

gaz-dinamik denklemini ele alıyoruz. (2.101) denkleminin diferansiyel dönüşümünü aldığımızda,

$$\begin{aligned} (h+1)U(k, h+1) &= - \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k-r+1)U(r, h-s)U(k-r+1, s) \\ &+ U(k, h) - \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h U(r, h-s)U(k-r, s) \end{aligned} \quad (2.102)$$

eşitliğini elde ederiz. (2.101) denkleminin tam çözümünün

$$u(x, t) = ae^{-x+t} \quad (2.103)$$

olduğunu biliyoruz. Ayrıca yazdığımız MAPLE (v.13) kodlarından (2.101) denkleminin

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \left( a - ax + \frac{ax^2}{2} - \frac{ax^3}{6} + \frac{ax^4}{24} \right) + t \left( a - ax + \frac{ax^2}{2} - \frac{ax^3}{6} + \frac{ax^4}{24} \right) \\ &+ t^2 \left( \frac{a}{2} - \frac{ax}{2} + \frac{ax^2}{4} - \frac{ax^3}{12} + \frac{ax^4}{48} \right) \end{aligned} \quad (2.104)$$

yaklaşık çözümünü elde ediyoruz. O halde yaklaşık çözüm,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= a \left( 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \right) + at \left( 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \right) \\ &+ \frac{at^2}{2} \left( 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \right) \Rightarrow u(x, t) = f(x) \left( a + at + \frac{1}{2}at^2 \right) \end{aligned} \quad (2.105)$$

olarak elde edilmektedir. Burada  $f(x) = \left( 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \right)$ , tür.  $a \in \text{Beta}(\alpha = 2, \beta = 1)$  olsun. Böylece momentler

$$E(a) = \frac{2}{3}, E(a^2) = \frac{1}{2}$$

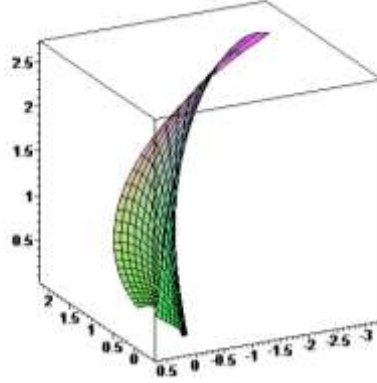
olarak elde edilmektedir. (2.105) eşitliğinin beklenen değerini aldığımızda,

$$\begin{aligned} E[u(x, t)] &= E[f(x)(a + at + at^2)] = f(x)[E(a) + E(a)t + E(a)t^2] \\ &= f(x) \left( \frac{2}{3} + \frac{2t}{3} + \frac{t^2}{3} \right) \end{aligned}$$

elde edilmektedir. Momentleri son eşitlikte yerine yazdığımızda,

$$E[u(x, t)] = \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) \left(\frac{2}{3} + \frac{2t}{3} + \frac{t^2}{3}\right)$$

eşitliğini elde ediyoruz. (2.101) denkleminin beklenen değerinin grafiği MAPLE (v.13) yazılım programında çizdirilmiş olup Şekil 2.9.' da verilmektedir.

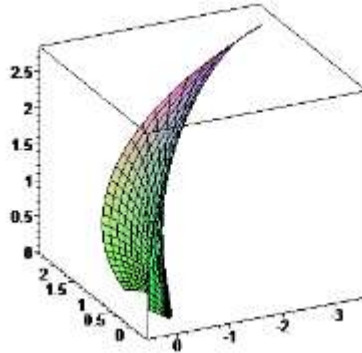


Şekil 2.9. (2.101) denkleminin beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi

Laplace-Padé metodu, (2.101) denkleminin beklenen değeri için elde edilen yaklaşık analitik çözümü iyileştirmek için uyguladığımızda,

$$M = \frac{1}{36} (24 - 24x + 12x^2 - 4x^3 + x^4) e^t$$

çözümünü elde ediyoruz. Bu çözümün grafiği Şekil 2.10.' da verilmektedir.



Şekil 2.10. (2.101) denkleminin beklenen değerinin iyileştirilmiş diferansiyel dönüşüm metodu ile elde edilen çözümünün mekana ve zamana bağlı değişimi



Şimdi (2.105) eşitliğinin varyansını hesaplayalım. Bunun için

$$V[u(x, t)] = \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^2 \text{cov}(x(i), x(j)) t^{i+j} \quad (2.106)$$

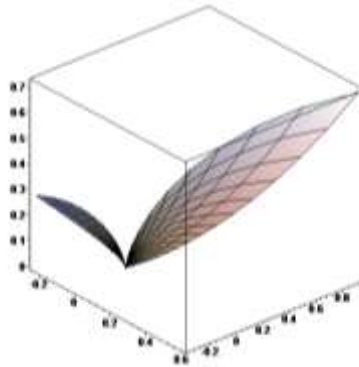
formülünü kullanıyoruz. Burada,  $\text{cov}(x(i), x(j)) = E(x(i)x(j)) - E(x(i))E(x(j))$  'dir. (2.106)' daki serinin açılımı,

$$\begin{aligned} V[u(x, t)] &= \text{cov}(x(0), x(0)) + \text{cov}(x(0), x(1))t + \text{cov}(x(0), x(2))t^2 \\ &+ \text{cov}(x(1), x(0))t + \text{cov}(x(1), x(1))t^2 + \text{cov}(x(1), x(2))t^3 + \text{cov}(x(2), x(0))t^2 \\ &+ \text{cov}(x(2), x(1))t^3 + \text{cov}(x(2), x(2))t^4 \end{aligned}$$

'tür. Hesaplanan kovaryans değerlerini açtığımız seride yerine yazdığımızda, (2.105)' in varyansını

$$\begin{aligned} V[u(x, t)] &= \left( 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4x^3}{3} + \frac{2x^4}{3} - \frac{x^5}{4} + \frac{5x^6}{72} - \frac{x^7}{72} + \frac{x^8}{576} \right) \\ &\left( \frac{t^2}{9} + \frac{t^3}{18} + \frac{t^4}{72} \right) \end{aligned} \quad (2.107)$$

olarak elde ederiz. (2.101) denkleminin varyansının grafiği MAPLE (v.13) yazılım programında çizdirilmiş olup Şekil 2.11.' de verilmektedir.

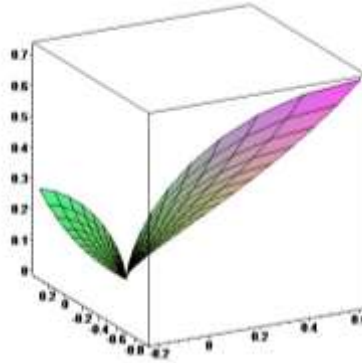


Şekil 2.11. (2.101) denkleminin varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi

Laplace-Padé metodu, (2.101) denkleminin varyansı için elde edilen yaklaşık analitik çözümü iyileştirmek için uyguladığımızda,

$$\begin{aligned}
N = & -\frac{16}{27}x + \frac{16}{27}x^2 - \frac{32}{81}x^3 + \frac{16}{81}x^4 + \frac{16}{27}e^{\frac{3}{4}t}x \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{4}\right) - \frac{2}{27}x^5 + \frac{5}{243}x^6 - \frac{1}{243}x^7 \\
& + \frac{1}{1944}x^8 + \frac{8}{27} - \frac{16}{27}e^{\frac{3}{4}t}x\sqrt{3} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{16}{27}e^{\frac{3}{4}t}x^2\sqrt{3} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{4}\right) \\
& - \frac{32}{81}e^{\frac{3}{4}t}x^3\sqrt{3} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{16}{81}e^{\frac{3}{4}t}x^4\sqrt{3} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{4}\right) - \frac{2}{27}e^{\frac{3}{4}t}x^5\sqrt{3} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{4}\right) \\
& + \frac{5}{243}e^{\frac{3}{4}t}x^6\sqrt{3} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{4}\right) - \frac{1}{243}e^{\frac{3}{4}t}x^7\sqrt{3} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{1}{1944}e^{\frac{3}{4}t}x^8\sqrt{3} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{4}\right) \\
& - \frac{16}{27}e^{\frac{3}{4}t}x^2 \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{32}{81}e^{\frac{3}{4}t}x^3 \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{4}\right) - \frac{16}{81}e^{\frac{3}{4}t}x^4 \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{4}\right) \\
& + \frac{8}{27}e^{\frac{3}{4}t}\sqrt{3} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{2}{27}e^{\frac{3}{4}t}x^5 \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{4}\right) - \frac{5}{243}e^{\frac{3}{4}t}x^6 \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{4}\right) \\
& + \frac{1}{243}e^{\frac{3}{4}t}x^7 \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{4}\right) - \frac{1}{1944}e^{\frac{3}{4}t}x^8 \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{4}\right) - \frac{8}{27}e^{\frac{3}{4}t} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{4}\right)
\end{aligned}$$

çözümünü elde ederiz. Bu çözümün grafiği Şekil 2.12.' de verilmektedir.



Şekil 2.12. (2.101) denkleminin varyansının iyileştirilmiş diferansiyel dönüşüm metodu ile elde edilen çözümünün mekana ve zamana bağlı değişimi

#### Örnek 2.4.4.

$$\begin{cases} u_t(x, t) + u(x, t)u_x(x, t) = -Bx + 2A^2x^3 - 3ABx^2 + B^2xt^2, \\ u(x, 0) = Ax^2, \end{cases} \quad (2.108)$$

rastgele kısmi diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Burada  $A$ ,  $\alpha = 3$  ve  $\beta = 2$  olan normal dağılımlı ve  $B$ ,  $\alpha = 2$  ve  $\beta = 1$  olan düzgün dağılımlı rastgele değişkenlerdir, yani  $A \sim N(\alpha = 3, \beta = 2)$  ve  $B \sim U(\alpha = 2, \beta = 1)$  ' dir.

(2.108) denkleminde Elzaki dönüşümü uygulandığında ve Elzaki dönüşümünün diferansiyel özelliği kullanıldığında,

$$E[u(x, t)] = Ax^2v^2 - Bxv^3 + 2A^2x^3v^3 - 3ABx^2v^4 + 2B^2xv^5 - vE[u(x, t)u_x(x, t)] \quad (2.109)$$

eşitliği elde edilmektedir. (2.109) eşitliğine ters Elzaki dönüşümü uygulandığında,

$$u(x, t) = Ax^2 - Bxt + 2A^2x^3t - \frac{3ABx^2t^2}{2} + \frac{B^2xt^3}{3} - E^{-1}\{vE[u(x, t)u_x(x, t)]\} \quad (2.110)$$

Şimdi, homotopi pertürbasyon metodu uygulanırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x, t) = Ax^2 - Bxt + 2A^2x^3t - \frac{3ABx^2t^2}{2} + \frac{B^2xt^3}{3} - p \left[ E^{-1} \left\{ vE \left[ \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(u) \right] \right\} \right] \quad (2.111)$$

eşitliği elde edilmektedir. Burada,  $H_n(u)$  doğrusal olmayan terimleri ifade eden He polinomlarıdır.

He polinomlarının birkaç terimi,

$$\begin{aligned} H_0(u) &= u_0 u_{0x}, \\ H_1(u) &= u_0 u_{1x} + u_1 u_{0x}, \\ H_2(u) &= u_0 u_{2x} + u_1 u_{1x} + u_2 u_{0x} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$p$ ' nin aynı kuvvetlerinin katsayıları karşılaştırılırsa,

$$p^0: u_0(x, t) = Ax^2 - Bxt + 2A^2x^3t - \frac{3ABx^2t^2}{2} + \frac{B^2xt^3}{3},$$

$$H_0(u) = \left( Ax^2 - Bxt + 2A^2x^3t - \frac{3ABx^2t^2}{2} + \frac{B^2xt^3}{3} \right)$$

$$\left( 2Ax - Bt + 6A^2x^2t - 3ABxt^2 + \frac{B^2t^3}{3} \right),$$

$$p^1: u_1(x, t) = -2A^2x^3t + \frac{ABx^2t^2}{2} - 3A^3xt^2 + 3A^2Bx^3t^3 - \frac{10AB^2x^2t^4}{3}$$

$$+ ABx^2t^2 - \frac{B^2xt^3}{3} + \frac{B^3xt^5}{15} - 2A^3x^4t^2 + A^2Bx^3t^3 - 4A^4x^5t^3 + \frac{13A^3Bx^4t^4}{2}$$

$$- \frac{2A^2B^2x^3t^5}{15} - \frac{AB^2x^2t^4}{8} + \frac{3A^3Bx^4t^4}{4} - \frac{4A^2B^2x^3t^5}{5} + \frac{AB^3x^2t^6}{12} + \frac{2A^2Bx^3t^3}{3}$$

$$- \frac{5AB^2x^2t^4}{12} + \frac{3A^3Bx^4t^4}{2} - \frac{A^2B^2x^2t^5}{5} + \frac{B^3xt^5}{3} - \frac{2A^2B^2x^3t^5}{5} + \frac{AB^3x^2t^6}{18}$$

$$+ 80AB^3x^2t^6 - 80B^4xt^7$$

elde edilmektedir.

Böylece (2.108) başlangıç-değer probleminin çözümü,

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) = Ax^2 - Bxt + 2A^2x^3t - \frac{3ABx^2t^2}{2} + \frac{B^2xt^3}{3}$$

$$- 2A^2x^3t + \frac{ABx^2t^2}{2} - 3A^3xt^2 + 3A^2Bx^3t^3 - \frac{10AB^2x^2t^4}{3} + ABx^2t^2$$

$$- \frac{B^2xt^3}{3} + \frac{B^3xt^5}{15} - 2A^3x^4t^2 + A^2Bx^3t^3 - 4A^4x^5t^3 + \frac{13A^3Bx^4t^4}{2} - \frac{2A^2B^2x^3t^5}{15}$$

$$- \frac{AB^2x^2t^4}{8} + \frac{3A^3Bx^4t^4}{4} - \frac{4A^2B^2x^3t^5}{5} + \frac{AB^3x^2t^6}{12} + \frac{2A^2Bx^3t^3}{3} - \frac{5AB^2x^2t^4}{12}$$

$$+ \frac{3A^3Bx^4t^4}{2} - \frac{A^2B^2x^2t^5}{5} + \frac{B^3xt^5}{3} - \frac{2A^2B^2x^3t^5}{5} + \frac{AB^3x^2t^6}{18} + 80AB^3x^2t^6$$

$$- 80B^4xt^7 \quad (2.112)$$

olarak elde edilmektedir.

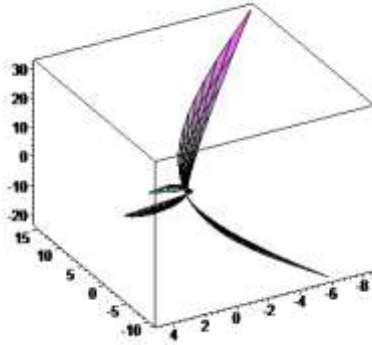
Şimdi yaklaşık çözümün beklenen değerini ve varyansını hesaplıyoruz. Öncelikle  $A \sim N(\alpha = 3, \beta = 2)$  ve  $B \sim U(\alpha = 2, \beta = 1)$  olduğundan momentleri,

$$\begin{aligned}
E(A) &= 3, E(A^2) = 13, E(A^3) = 63, E(A^4) = 345, E(A^5) = 1323, E(A^6) \\
&= 13029, E(A^7) = 88119, E(A^8) = 622608, E(B) = \frac{3}{2}, E(B^2) = \frac{7}{3}, E(B^3) \\
&= \frac{15}{4}, E(B^4) = \frac{31}{5}
\end{aligned}$$

olarak elde edilmektedir. (2.112) çözümünün beklenen değeri,

$$\begin{aligned}
E[u(x, t)] &= 3x^2 - \frac{3xt}{2} + 26x^3t - \frac{9x^2t^2}{4} - 189xt^2 - \frac{39x^3t^3}{2} - \frac{147x^2t^4}{6} + \frac{xt^5}{2} \\
&- 126x^4t^2 + \frac{65}{2}x^3t^3 - 1380x^5t^3 + \frac{189x^4t^4}{4} + 567x^4t^4 - \frac{728x^3t^5}{45} - \frac{7x^2t^4}{8} \\
&+ \frac{1701x^4t^4}{8} + \frac{5x^2t^6}{16} - \frac{7x^2t^4}{4} - \frac{91x^2t^5}{15} - \frac{182x^3t^5}{15} + \frac{5x^2t^6}{4} + 900x^2t^6 \\
&- 496xt^7
\end{aligned}$$

olarak elde edilmektedir. (2.112) yaklaşık çözümünün beklenen değerinin grafiği MAPLE (v.13) yazılım programında çizdirilmiştir.

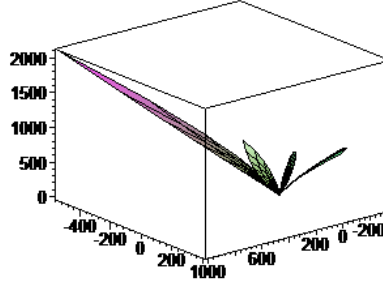


Şekil 2.13. (2.112) yaklaşık çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi

$A \sim N(\alpha = 3, \beta = 2)$  ve  $B \sim U(\alpha = 2, \beta = 1)$  olduğundan, (2.112) çözümünün varyansı,

$$V[u(x, t)] = E[u^2(x, t)] - (E[u(x, t)])^2$$

formülünden MAPLE (v.13) yazılım porgramı ile elde edilmiştir. (2.112) yaklaşık çözümünün varyansının grafiği MAPLE (v.13) yazılım programında çizdirilmiştir.



Şekil 2.14. (2.112) yaklaşık çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi

#### Örnek 2.4.5.

$$\begin{cases} u_t(x, t) + u(x, t)u_x(x, t) = ABt^3 + B^2xt^2 + 2At + Bx, \\ u(x, 0) = -Bx, \end{cases} \quad (2.114)$$

rastgele kısmi diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Burada  $A$ ,  $\alpha = 2$  ve  $\beta = 1$  olan normal dağılımlı ve  $B$ ,  $\alpha = 2$  ve  $\beta = 3$  olan düzgün dağılımlı rastgele değişkenlerdir, yani  $A \sim N(\alpha = 2, \beta = 1)$  ve  $B \sim U(\alpha = 2, \beta = 3)$  ' dir.

(2.114) denkleminin Elzaki dönüşümü uygulandığında ve Elzaki dönüşümünün diferansiyel özelliği kullanıldığında,

$$\begin{aligned} E[u(x, t)] &= 6ABv^6 + 2B^2xv^5 + 2Av^4 + Bxv^3 - Bxv^2 \\ &- vE[u(x, t)u_x(x, t)] \end{aligned} \quad (2.115)$$

eşitliği elde edilmektedir. (2.115) eşitliğine ters Elzaki dönüşümü uygulandığında,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{ABt^4}{4} + \frac{B^2xt^3}{3} + At^2 + Bxt - Bx \\ &- E^{-1}\{vE[u(x, t)u_x(x, t)]\} \end{aligned} \quad (2.116)$$

Şimdi, homotopi pertürbasyon metodu uygulanırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x, t) = \frac{ABt^4}{4} + \frac{B^2xt^3}{3} + At^2 + Bxt - Bx - p \left[ E^{-1} \left\{ vE \left[ \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(u) \right] \right\} \right] \quad (2.117)$$

eşitliği elde edilmektedir. Burada,  $H_n(u)$  doğrusal olmayan terimleri ifade eden He polinomlarıdır.

He polinomlarının birkaç terimi,

$$H_0(u) = u_0 u_{0x},$$

$$H_1(u) = u_0 u_{1x} + u_1 u_{0x},$$

$$H_2(u) = u_0 u_{2x} + u_1 u_{1x} + u_2 u_{0x}$$

⋮

$p'$  nin aynı kuvvetlerinin katsayıları karşılaştırılırsa,

$$p^0: u_0(x, t) = \frac{ABt^4}{4} + \frac{B^2xt^3}{3} + At^2 + Bxt - Bx,$$

$$H_0(u) = \left( \frac{ABt^4}{4} + \frac{B^2xt^3}{3} + At^2 + Bxt - Bx \right) \left( \frac{B^2t^3}{3} + Bt - B \right),$$

$$p^1: u_1(x, t) = \frac{AB^3t^8}{96} + \frac{7AB^2t^6}{72} - \frac{AB^2t^5}{20} + \frac{B^4xt^7}{63} + \frac{2B^3xt^5}{15} - \frac{B^3xt^4}{6}$$

$$+ \frac{ABt^4}{4} - \frac{ABt^3}{3} + \frac{B^2xt^3}{3} - B^2xt^2 + B^2xt$$

elde edilmektedir.

Böylece (2.114) başlangıç-değer probleminin çözümü,

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) = \frac{ABt^4}{4} + \frac{B^2xt^3}{3} + At^2 + Bxt - Bx + \frac{AB^3t^8}{96}$$

$$+ \frac{7AB^2t^6}{72} - \frac{AB^2t^5}{20} + \frac{B^4xt^7}{63} + \frac{2B^3xt^5}{15} - \frac{B^3xt^4}{6} + \frac{ABt^4}{4} - \frac{ABt^3}{3} + \frac{B^2xt^3}{3}$$

$$- B^2xt^2 + B^2xt \quad (2.118)$$

olarak elde edilmektedir.

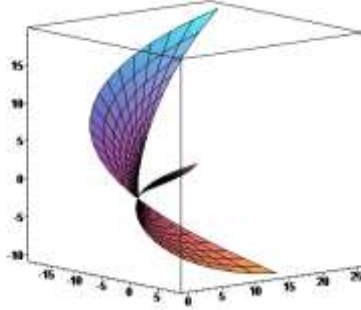
Şimdi yaklaşık çözümün beklenen değerini ve varyansını hesaplıyoruz. Öncelikle  $A \sim N(\alpha = 2, \beta = 1)$  ve  $B \sim U(\alpha = 2, \beta = 3)$  olduğundan momentleri,

$$\begin{aligned} E(A) = 2, E(A^2) = 5, E(B) = \frac{5}{2}, E(B^2) = \frac{19}{3}, E(B^3) = \frac{65}{4}, E(B^4) = \frac{211}{5}, E(B^5) \\ = \frac{665}{6}, E(B^6) = \frac{2059}{7}, E(B^7) = \frac{6305}{8}, E(B^8) = \frac{19171}{9} \end{aligned}$$

olarak elde edilmektedir. (2.118) çözümünün beklenen değeri,

$$\begin{aligned} E[u(x, t)] = \frac{5t^4}{2} + \frac{38xt^3}{9} + 2t^2 + \frac{53xt}{6} - \frac{5x}{2} + \frac{65t^8}{192} + \frac{133t^6}{108} - \frac{19t^5}{30} + \frac{211xt^7}{315} \\ + \frac{13xt^5}{6} - \frac{65xt^4}{24} - \frac{5t^3}{3} - \frac{19xt^2}{3} \end{aligned}$$

olarak elde edilmektedir. (2.118) yaklaşık çözümünün beklenen değerinin grafiği MAPLE (v.13) yazılım programında çizdirilmiştir.



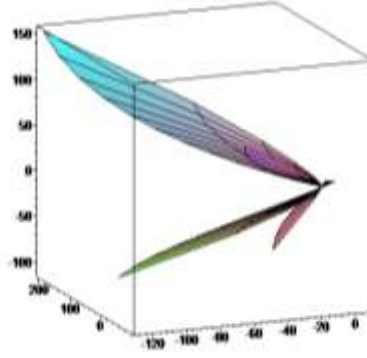
Şekil 2.15. (2.118) yaklaşık çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi

$A \sim N(\alpha = 2, \beta = 1)$  ve  $B \sim U(\alpha = 2, \beta = 3)$  olduğundan, (2.118) çözümünün varyansı,

$$V[u(x, t)] = E[u^2(x, t)] - (E[u(x, t)])^2$$

formülünden MAPLE (v.13) yazılım programı ile elde edilmiştir. (2.118) yaklaşık çözümünün varyansının grafiği MAPLE (v.13) yazılım programında çizdirilmiştir.





Şekil 2.16. (2.118) yaklaşık çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi

## 2.5. Rastgele Kesirli Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemler

Bu kısımda, rastgele kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemler incelenmektedir. Kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemler rastgele hale getirilmiştir. Yeni yinelemeli Sumudu dönüşümü metodu, kesirli mertebeden Laplace varyasyonel metodu ve Crank-Nicolson metodu ile bu denklemlerin nümerik veya yarı analitik çözümleri elde edilmiştir. Mutlak hata analizi yapılmış ve hataların ihmal edilebilecek kadar küçük olduğu gözlemlenmiştir. Ayrıca, elde edilen bu çözümlerin birinci ve ikinci momentleri analitik olarak, MAPLE (v.13) veya MATLAB (v.16b) yazılım programında yazılan uygun kodlarla elde edilmiştir. MAPLE (v.13) veya MATLAB (v.16b) yazılım programlarında beklenen değer ve varyans grafikleri çizdirilmiştir. Bununla birlikte, uygulamalarımızda  $\alpha = 1$  civarında tam çözümden ne kadar uzaklaşıldığını göstermek için buna uygun  $\alpha$  değerleri seçilmiştir. Ayrıca, ele aldığımız kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemler akışkanlar mekaniği, finans matematiği, elektrostatik gibi bilimin birçok alanında kullanılmaktadır. Gamma dağılımının önemi de öncelikle hem yaşayan organizmalar hem de onların materyalleri için yaşam dağılımı olarak sık sık kullanılmasından gelmektedir. Aynı zamanda sigorta şirketlerinde talep sahipleri tarafından kaydedilen taleplerin dağılımını karakterize etmekte kullanılmaktadır. Bunun için uygulamalarımızda Gamma dağılımı kullanılmıştır.

### Örnek 2.5.1.

$$\begin{cases} u_t^\alpha(x, t) = u_{xx}(x, t) + u(x, t), \\ 0 < \alpha \leq 1, \\ u(x, 0) = A \sin x + B, \end{cases} \quad (2.119)$$

rastgele kesirli mertebeden Klein-Gordon denklemini göz önüne alalım. Burada  $A, B \alpha = 4$  ve  $\beta = 5$  olan Gamma dağılımlı rastgele değişkenlerdir, yani  $A, B \sim G(\alpha = 4, \beta = 5)$ ' tir.

(2.119) denkleminde Sumudu dönüşümü uygulandığında ve Sumudu dönüşümünün diferansiyel özelliği kullanıldığında,

$$S[u] = u(x, 0) + v^\alpha S[u_{xx} - u] \quad (2.120)$$

eşitliği elde edilmektedir. (2.120) eşitliğine ters Sumudu dönüşümü uygulandığında,

$$u(x, t) = S^{-1}[Asinx + B] + S^{-1}[v^\alpha S[u_{xx} - u]] \quad (2.121)$$

eşitliği elde edilmektedir. Son eşitlik düzenlendiğinde,

$$u(x, t) = Asinx + B + S^{-1}[v^\alpha S[u_{xx} - u]] \quad (2.122)$$

elde edilmektedir.

Yeni yinelemeli Sumudu dönüşümü metoduna (YYSDM) göre aşağıdaki eşitlikler sağlanmaktadır.

$$\begin{cases} u_0 = Asinx + B, \\ K[u(x, t)] = S^{-1}[v^\alpha S[u_{xx} - u]] \end{cases} \quad (2.123)$$

iterasyon ile, sırasıyla

$$u_0 = Asinx + B, u_1 = \frac{Bt^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)}, u_2 = \frac{Bt^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)}, u_3 = \frac{Bt^{3\alpha}}{\Gamma(1 + 3\alpha)}, \dots, u_n = \frac{Bt^{n\alpha}}{\Gamma(1 + n\alpha)}$$

sonuçları elde edilmektedir. Böylece, (2.119) denkleminin yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned} u(x, t) &= Asinx + B + \frac{Bt^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} + \frac{Bt^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)} + \frac{Bt^{3\alpha}}{\Gamma(1 + 3\alpha)} + \dots + \frac{Bt^{n\alpha}}{\Gamma(1 + n\alpha)} \\ &= Asinx + B \left( 1 + \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)} + \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1 + 3\alpha)} + \dots + \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(1 + n\alpha)} \right) \\ &\Rightarrow u(x, t) = Asinx + BE_\alpha[t^\alpha] \end{aligned} \quad (2.124)$$

olarak elde edilmektedir.  $u(x, t) = A \sin x + B e^t$  formu,  $\alpha = 1$  için (2.119)' un yaklaşık çözümüdür. Ayrıca bu form,  $\alpha = 1$  için (2.119)' un tam çözümüdür.

Tablo 2.2.  $\alpha = 1, A = 2, B = 3$  için VİM' den elde edilen çözüm, altıncı basamaktan YYSDM yaklaşık çözümü ve tam çözümün karşılaştırılması

$x$	$t$	Tam Çözüm	YYSDM	VİM
0.5	0.2	4.623059351	4.623059345	4.623059077
0.5	0.4	5.434325171	5.434325171	5.434307078
0.5	0.6	6.425207477	6.425189477	6.424995080
0.5	0.8	7.635473861	7.635335345	7.634243080
0.5	1.0	9.113696561	9.113017745	9.108851080
1.0	0.2	5.347150244	5.347150238	5.347149970
1.0	0.4	6.158416064	6.158415038	6.158397970
1.0	0.6	7.149298370	7.149280370	7.149085970
1.0	0.8	8.359564754	8.359426238	8.358333970
1.0	1.0	9.837787454	9.837108638	9.832941970
1.5	0.2	5.659198247	5.659198247	5.659198241
1.5	0.4	6.470464067	6.470463041	6.470445970
1.5	0.6	7.461346373	7.461328373	7.461133970
1.5	0.8	8.671612757	8.671474241	8.670381970
1.5	1.0	10.149835460	10.149156640	10.144989970

Tablo 2.3.  $\alpha = 0.9, A = 2, B = 3$  için VİM' den elde edilen çözüm, altıncı basamaktan YYSDM yaklaşık çözümünün karşılaştırılması

$x$	$t$	YYSDM	VİM
0.5	0.2	4.800450449	4.798719554
0.5	0.4	5.740077833	5.734086881
0.5	0.6	6.865282529	6.849157273
0.5	0.8	8.227008434	8.189855214
0.5	1.0	9.880842554	9.804132230
1.0	0.2	5.524541342	5.522810447
1.0	0.4	6.464168726	6.458177768
1.0	0.6	7.589373422	7.573248163
1.0	0.8	8.951099327	8.913946104
1.0	1.0	10.604933450	10.528223110
1.5	0.2	5.836589345	5.834858450
1.5	0.4	6.770216729	6.770225768
1.5	0.6	7.901421425	7.885296163
1.5	0.8	9.263147330	9.225994106
1.5	1.0	10.916981450	10.840271110

Tablo 2.4.  $\alpha = 1, A = 2, B = 3$  için mutlak hata karşılaştırılması

		$t$					
	$x$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
YSDYM	0.0	0.0	0.0	$6 \times 10^{-9}$	$1 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-6}$	$4 \times 10^{-6}$
VİM		0.0	$4 \times 10^{-9}$	$2 \times 10^{-7}$	$3 \times 10^{-6}$	$1 \times 10^{-5}$	$7 \times 10^{-5}$
YSDYM	0.1	0.0	0.0	$6 \times 10^{-9}$	$1 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-6}$	$4 \times 10^{-6}$
VİM		0.0	$4 \times 10^{-9}$	$2 \times 10^{-7}$	$3 \times 10^{-6}$	$1 \times 10^{-5}$	$7 \times 10^{-5}$
YSDYM	0.2	0.0	0.0	$6 \times 10^{-9}$	$1 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-6}$	$4 \times 10^{-6}$
VİM		0.0	$4 \times 10^{-9}$	$2 \times 10^{-7}$	$3 \times 10^{-6}$	$1 \times 10^{-5}$	$7 \times 10^{-5}$
YSDYM	0.3	0.0	0.0	$6 \times 10^{-9}$	$1 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-6}$	$4 \times 10^{-6}$
VİM		0.0	$4 \times 10^{-9}$	$2 \times 10^{-7}$	$3 \times 10^{-6}$	$1 \times 10^{-5}$	$7 \times 10^{-5}$
YSDYM	0.4	0.0	0.0	$6 \times 10^{-9}$	$1 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-6}$	$4 \times 10^{-6}$
VİM		0.0	$4 \times 10^{-9}$	$2 \times 10^{-7}$	$3 \times 10^{-6}$	$1 \times 10^{-5}$	$7 \times 10^{-5}$
YSDYM	0.5	0.0	0.0	$6 \times 10^{-9}$	$1 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-6}$	$4 \times 10^{-6}$
VİM		0.0	$4 \times 10^{-9}$	$2 \times 10^{-7}$	$3 \times 10^{-6}$	$1 \times 10^{-5}$	$7 \times 10^{-5}$

Tablo 2.2.'den YYSDM ile elde edilen sayısal çözümün tam çözüme çok yakın olduğu gözlenmektedir. Mutlak hatanın farklı yöntemlerden elde edilen yaklaşık çözümler ile tam çözümün farklı  $x$  ve  $t$  değerleri arasındaki karşılaştırması Tablo 2.4.'te gösterilmektedir. Tablo 2.4'ten mutlak hatanın ihmal edilebileceği görülmektedir. Tablo 2.2, Tablo 2.3 ve Tablo 2.4 YYSDM'nin VİM'den daha etkili bir yöntem olduğunu göstermektedir.

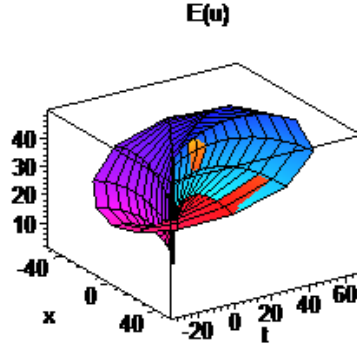
Şimdi yaklaşık çözümün beklenen değerini ve varyansını hesaplıyoruz. Öncelikle  $A, B \sim G(\alpha = 4, \beta = 5)$  olduğundan momentleri,

$$E(A) = 4.5 = 20, E(A^2) = 4.25(1 + 4) = 500, E(B) = 4.5 = 20, E(B^2) = 4.25(1 + 4) = 500$$

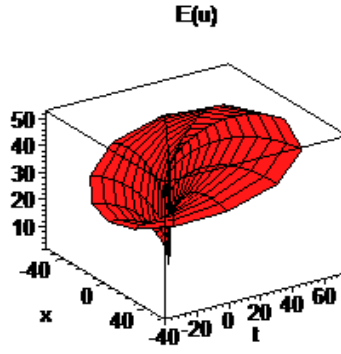
olarak buluyoruz. (2.124) çözümünün beklenen değeri,

$$E[u(x, t)] = E[A] \sin x + E[B] E_\alpha(t^\alpha) = 20(\sin x + E_\alpha(t^\alpha))$$

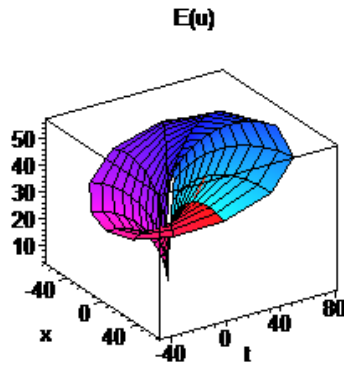
olarak elde edilmektedir. Farklı  $\alpha$  değerleri için (2.124) çözümünün beklenen değerlerinin grafikleri MAPLE (v.13) yazılım programında çizdirilmiştir.



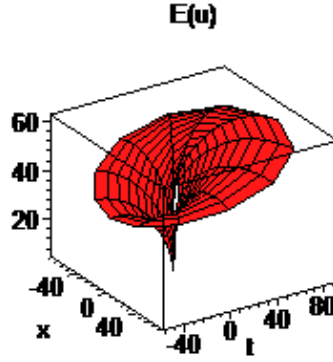
Şekil 2.17.  $\alpha = 0.9$  değeri için (2.124) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi



Şekil 2.18.  $\alpha = 0.8$  değeri için (2.124) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi



Şekil 2.19.  $\alpha = 0.7$  değeri için (2.124) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi

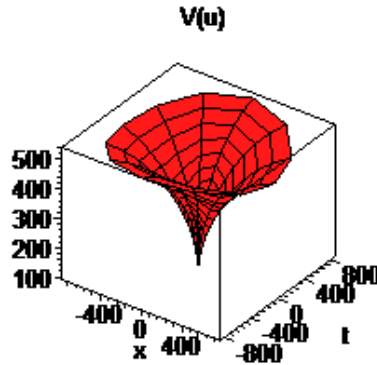


Şekil 2.20.  $\alpha = 0.6$  değeri için (2.124) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi

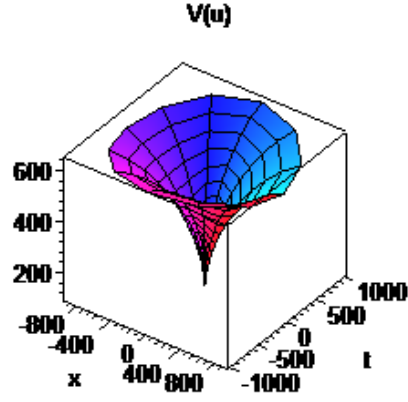
$A, B \sim G(\alpha = 4, \beta = 5)$  olduğundan, (2.124) çözümünün varyansı,

$$\begin{aligned} V[u(x, t)] &= E[u^2(x, t)] - (E[u(x, t)])^2 \\ &= E[(A \sin x + B E_\alpha[t^\alpha])^2] - (20(\sin x + E_\alpha[t^\alpha]))^2 \\ &= 100(\sin^2 x + (E_\alpha[t^\alpha])^2) \end{aligned}$$

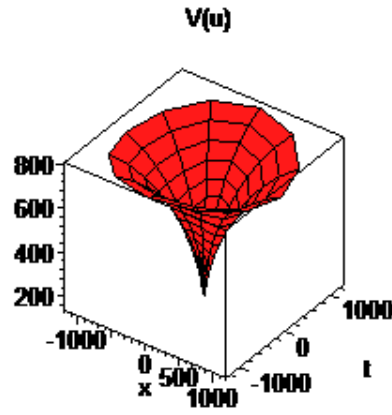
olarak elde edilmektedir. Farklı  $\alpha$  değerleri için (2.124) çözümünün varyanslarının grafikleri MAPLE (v.13) yazılım programında çizdirilmiştir.



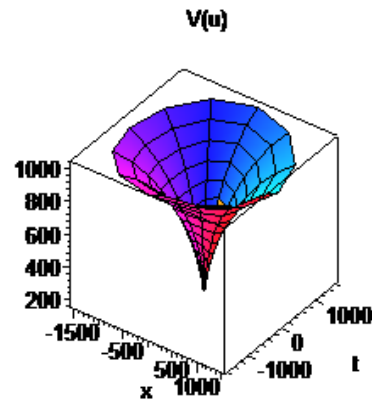
Şekil 2.21.  $\alpha = 0.9$  değeri için (2.124) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi



Şekil 2.22.  $\alpha = 0.8$  değeri için (2.124) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi



Şekil 2.23.  $\alpha = 0.7$  değeri için (2.124) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi



Şekil 2.24.  $\alpha = 0.6$  değeri için (2.124) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi

**Örnek 2.5.2.**

$$\begin{cases} u_t^\alpha(x, t) + u(x, t)u_x(x, t) + u(x, t)(1 + u(x, t)) = 0, \\ 0 < \alpha \leq 1, \\ u(x, 0) = Ae^{-x} \end{cases} \quad (2.125)$$

rastgele kesirli mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Burada  $A$ ,  $\alpha = 3$  ve  $\beta = 2$  olan Gamma dağılımlı rastgele değişkendir, yani  $A \sim G(\alpha = 3, \beta = 2)$ ' tir.

(2.125) denkleminde Sumudu dönüşümü uygulandığında ve Sumudu dönüşümünün diferansiyel özelliği kullanıldığında,

$$S[u] = u(x, 0) + v^\alpha S[-uu_x - u - u^2] \quad (2.126)$$

eşitliği elde edilmektedir. (2.126) eşitliğine ters Sumudu dönüşümü uygulandığında,

$$u(x, t) = S^{-1}[Ae^{-x}] + S^{-1}[v^\alpha S[-uu_x - u - u^2]] \quad (2.127)$$

eşitliği elde edilmektedir. Son eşitlik düzenlendiğinde,

$$u(x, t) = Ae^{-x} + S^{-1}[v^\alpha S[-uu_x - u - u^2]] \quad (2.128)$$

elde edilmektedir.

YYSDM' ye göre aşağıdaki eşitlikler sağlanmaktadır.

$$\begin{cases} u_0 = Ae^{-x}, \\ K[u(x, t)] = S^{-1}[v^\alpha S[-uu_x - u - u^2]] \end{cases} \quad (2.129)$$

iterasyon ile, sırasıyla

$$u_0 = Ae^{-x}, u_1 = \frac{-Ae^{-x}t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)}, u_2 = \frac{Ae^{-x}t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)}, u_3 = \frac{-Ae^{-x}t^{3\alpha}}{\Gamma(1 + 3\alpha)}, \dots, u_n = \frac{Ae^{-x}(-t)^{n\alpha}}{\Gamma(1 + n\alpha)}$$

sonuçları elde edilmektedir. Böylece, (2.125) denkleminin yaklaşık çözümü



$$\begin{aligned}
u(x, t) &= Ae^{-x} - \frac{Ae^{-x}t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{Ae^{-x}t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} - \frac{Ae^{-x}t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} + \dots + \frac{Ae^{-x}(-t)^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)} \\
&= Ae^{-x} \left( 1 - \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} - \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} + \dots + \frac{(-t)^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)} \right) \\
\Rightarrow u(x, t) &= Ae^{-x} E_\alpha[(-t)^\alpha] \tag{2.130}
\end{aligned}$$

olarak elde edilmektedir.  $u(x, t) = Ae^{-x-t}$  formu,  $\alpha = 1$  için (2.125)' in yaklaşık çözümüdür. Ayrıca bu form,  $\alpha = 1$  için (2.125)' in tam çözümüdür.

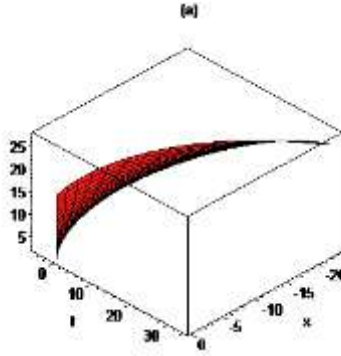
Şimdi yaklaşık çözümün beklenen değerini ve varyansını hesaplıyoruz. Öncelikle  $A \sim G(\alpha = 3, \beta = 2)$  olduğundan momentleri,

$$E(A) = 3.2 = 6, E(A^2) = 3.4(1 + 3) = 48$$

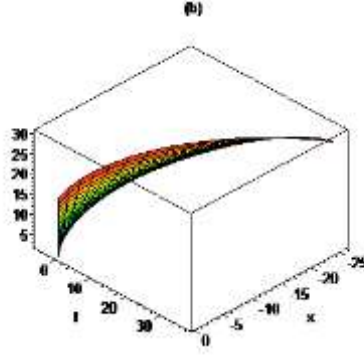
olarak buluyoruz. (2.130) çözümünün beklenen değeri,

$$E[u(x, t)] = E[A]e^{-x} E_\alpha[(-t)^\alpha] = 6e^{-x} E_\alpha[(-t)^\alpha]$$

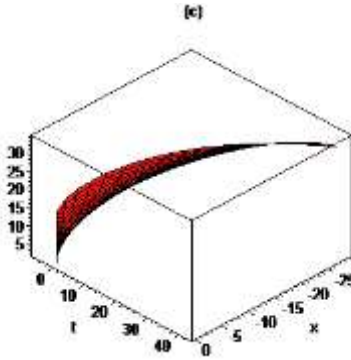
olarak elde edilmektedir. Farklı  $\alpha$  değerleri için (2.130) çözümünün beklenen değerlerinin grafikleri MAPLE (v.13) yazılım programında çizdirilmiştir.



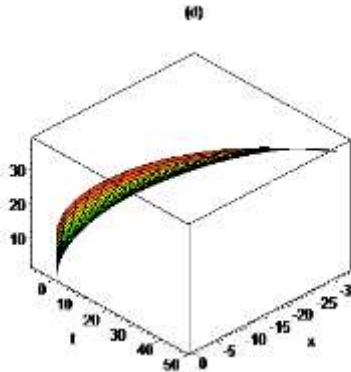
Şekil 2.25.  $\alpha = 0.9$  değeri için (2.130) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi



Şekil 2.26.  $\alpha = 0.8$  değeri için (2.130) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi



Şekil 2.27.  $\alpha = 0.7$  değeri için (2.130) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi

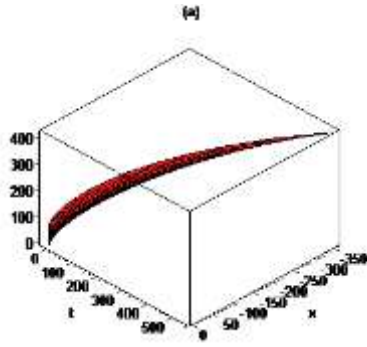


Şekil 2.28.  $\alpha = 0.6$  değeri için (2.130) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi

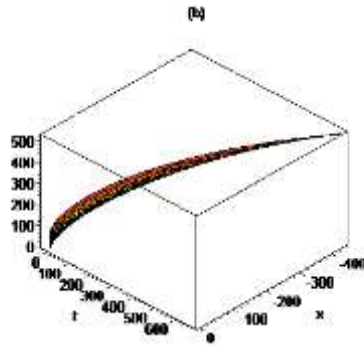
$A \sim G(\alpha = 3, \beta = 2)$  olduğundan, (2.130) çözümünün varyansı,

$$\begin{aligned}
V[u(x, t)] &= E[u^2(x, t)] - (E[u(x, t)])^2 \\
&= E[A^2]e^{-2x}(E_\alpha[(-t)^\alpha])^2 - (E[A])^2e^{-2x}(E_\alpha[(-t)^\alpha])^2 \\
&= 48e^{-2x}(E_\alpha[(-t)^\alpha])^2 - 36e^{-2x}(E_\alpha[(-t)^\alpha])^2 \\
&= 12e^{-2x}(E_\alpha[(-t)^\alpha])^2
\end{aligned}$$

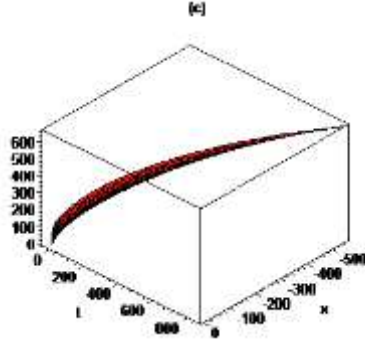
olarak elde edilmektedir. Farklı  $\alpha$  değerleri için (2.130) çözümlünün varyanslarının grafikleri MAPLE (v.13) yazılım programında çizdirilmiştir.



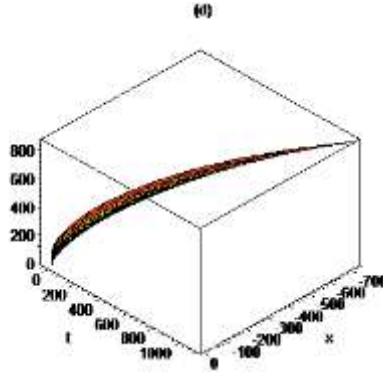
Şekil 2.29.  $\alpha = 0.9$  değeri için (2.130) çözümlünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi



Şekil 2.30.  $\alpha = 0.8$  değeri için (2.130) çözümlünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi



Şekil 2.31.  $\alpha = 0.7$  değeri için (2.130) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi



Şekil 2.32.  $\alpha = 0.6$  değeri için (2.130) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi

### Örnek 2.5.3.

$$\begin{cases} u_t^\alpha(x, t) + u(x, t)u_x(x, t) + u(x, t)(1 + u(x, t))\ln a = 0, \\ 0 < \alpha \leq 1, \\ u(x, 0) = Aa^{-x} \end{cases} \quad (2.131)$$

rastgele kesirli mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Burada  $A$ ,  $\alpha = 3$  ve  $\beta = 2$  olan Gamma dağılımlı rastgele değişkenlerdir, yani  $A \sim G(\alpha = 3, \beta = 2)$ ' tir.

(2.131) denkleminde Sumudu dönüşümü uygulandığında ve Sumudu dönüşümünün diferansiyel özelliği kullanıldığında,

$$S[u] = u(x, 0) + v^\alpha S[-uu_x - ulna - u^2 \ln a] \quad (2.132)$$

eşitliği elde edilmektedir. (2.132) eşitliğine ters Sumudu dönüşümü uygulandığında,

$$u(x, t) = S^{-1}[Aa^{-x}] + S^{-1}[v^\alpha S[-uu_x - ulna - u^2lna]] \quad (2.133)$$

eşitliği elde edilmektedir. Son eşitlik düzenlendiğinde,

$$u(x, t) = Aa^{-x} + S^{-1}[v^\alpha S[-uu_x - ulna - u^2lna]] \quad (2.134)$$

elde edilmektedir.

YYSDM' ye göre aşağıdaki eşitlikler sağlanmaktadır.

$$\begin{cases} u_0 = Aa^{-x}, \\ K[u(x, t)] = S^{-1}[v^\alpha S[-uu_x - ulna - u^2lna]] \end{cases} \quad (2.135)$$

iterasyon ile, sırasıyla

$$u_0 = Aa^{-x}, u_1 = \frac{-Aa^{-x}t^\alpha lna}{\Gamma(1 + \alpha)}, u_2 = \frac{Aa^{-x}t^{2\alpha}ln^2a}{\Gamma(1 + 2\alpha)}, u_3 = \frac{-Aa^{-x}t^{3\alpha}ln^3a}{\Gamma(1 + 3\alpha)}, \dots$$

$$u_n = \frac{Aa^{-x}(-lnat^\alpha)^n}{\Gamma(1 + n\alpha)}$$

sonuçları elde edilmektedir. Böylece, (2.131) denkleminin yaklaşık çözümü,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= Aa^{-x} - \frac{Aa^{-x}t^\alpha lna}{\Gamma(1 + \alpha)} + \frac{Aa^{-x}t^{2\alpha}ln^2a}{\Gamma(1 + 2\alpha)} - \frac{Aa^{-x}t^{3\alpha}ln^3a}{\Gamma(1 + 3\alpha)} + \dots + \frac{Aa^{-x}(-lnat^\alpha)^n}{\Gamma(1 + n\alpha)} \\ &= Aa^{-x} \left( 1 - \frac{t^\alpha lna}{\Gamma(1 + \alpha)} + \frac{t^{2\alpha}ln^2a}{\Gamma(1 + 2\alpha)} - \frac{t^{3\alpha}ln^3a}{\Gamma(1 + 3\alpha)} + \dots + \frac{(-lnat^\alpha)^n}{\Gamma(1 + n\alpha)} \right) \\ &\Rightarrow u(x, t) = Aa^{-x} E_\alpha[-lnat^\alpha] \end{aligned} \quad (2.136)$$

olarak elde edilmektedir.  $u(x, t) = Aa^{-x-t}$  formu,  $\alpha = 1$  için (2.131)' in yaklaşık çözümüdür. Ayrıca bu form,  $\alpha = 1$  için (2.131)' in tam çözümüdür.

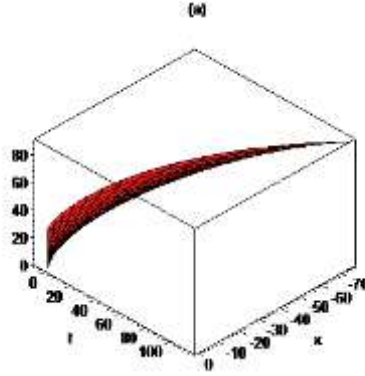
Şimdi yaklaşık çözümün beklenen değerini ve varyansını hesaplıyoruz. Öncelikle  $A \sim G(\alpha = 3, \beta = 2)$  olduğundan momentleri,

$$E(A) = 3.2 = 6, E(A^2) = 3.4(1 + 3) = 48$$

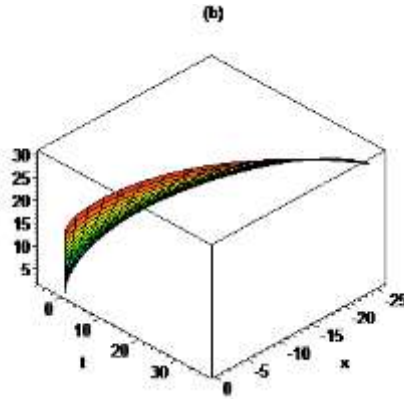
olarak buluyoruz. Böylece (2.136) çözümünün beklenen değeri,

$$E[u(x, t)] = E[A]a^{-x}E_{\alpha}[-lnat^{\alpha}] = 6a^{-x}E_{\alpha}[-lnat^{\alpha}]$$

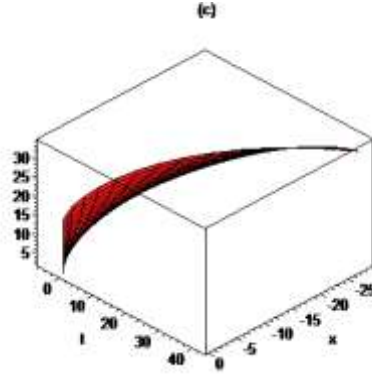
olarak elde edilmektedir. Farklı  $\alpha$  değerleri ve  $a = 5$  için (2.136) çözümünün beklenen değerlerinin grafikleri MAPLE (v.13) yazılım programında çizdirilmiştir.



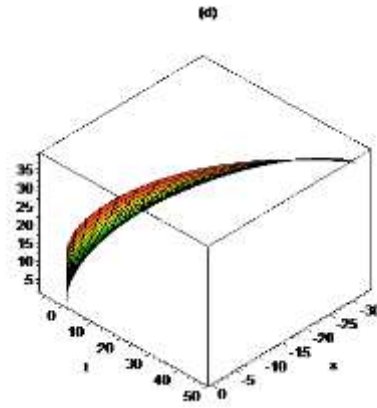
Şekil 2.33.  $\alpha = 0.9$  ve  $a = 5$  değeri için (2.136) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi



Şekil 2.34.  $\alpha = 0.8$  ve  $a = 5$  değeri için (2.136) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi



Şekil 2.35.  $\alpha = 0.7$  ve  $a = 5$  değeri için (2.136) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi

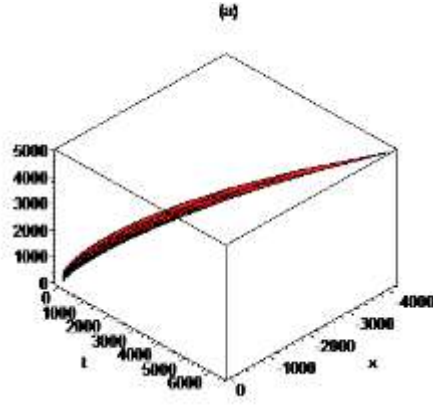


Şekil 2.36.  $\alpha = 0.6$  ve  $a = 5$  değeri için (2.136) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi

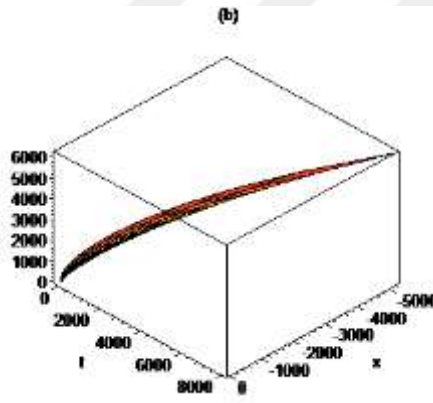
$A \sim G(\alpha = 3, \beta = 2)$  olduğundan, (2.136) çözümünün varyansı,

$$\begin{aligned} V[u(x, t)] &= E[u^2(x, t)] - (E[u(x, t)])^2 = E[A^2]a^{-2x}(E_\alpha[-\ln at^\alpha])^2 \\ &\quad - (E[A])^2 a^{-2x} (E_\alpha[-\ln at^\alpha])^2 \\ &= 48a^{-2x}(E_\alpha[-\ln at^\alpha])^2 - 36a^{-2x}(E_\alpha[-\ln at^\alpha])^2 \\ &= 12a^{-2x}(E_\alpha[-\ln at^\alpha])^2 \end{aligned}$$

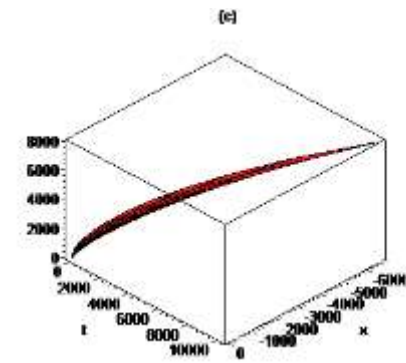
olarak elde edilmektedir. Farklı  $\alpha$  değerleri ve  $a = 5$  için (2.136) çözümünün varyanslarının grafikleri MAPLE (v.13) yazılım programında çizdirilmiştir.



Şekil 2.37.  $\alpha = 0.9$  değeri için (2.136) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi

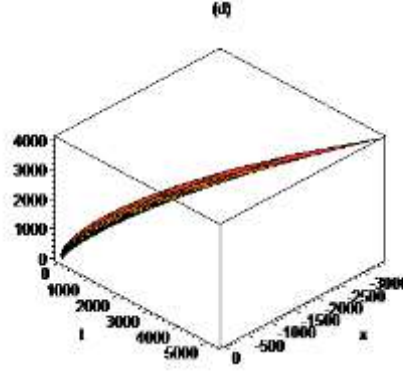


Şekil 2.38.  $\alpha = 0.8$  değeri için (2.136) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi



Şekil 2.39.  $\alpha = 0.7$  değeri için (2.136) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi





Şekil 2.40.  $\alpha = 0.6$  değeri için (2.136) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi

#### Örnek 2.5.4.

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{2}x^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \\ 0 < x < 1, 0 < \alpha \leq 1, 0 < t \leq 1, \\ u(x,0) = Ax^2, u(0,t) = 0, u(1,t) = Ae^t \end{cases} \quad (2.137)$$

Başlangıç-sınır şartları ile rastgele kesirli mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Burada  $A$ ,  $\alpha = 2$  ve  $\beta = 3$  olan Gamma dağılımlı rastgele değişkendir, yani  $A \sim G(\alpha = 2, \beta = 3)$ ' tür.

Laplace dönüşümü (2.137) problemindeki denkleme uygulanırsa, bu denkleme karşılık gelen rekürans bağıntısı

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x,s) &= u_n(x,s) + \lambda[s^\alpha u_n(x,s) - s^{\alpha-1}u_0(x,0)] \\ &+ \lambda \mathcal{L} \left[ -\frac{1}{2}x^2 \tilde{u}_{nxx}(x,t) \right] \end{aligned} \quad (2.138)$$

olarak elde edilmektedir.

Varyasyon (2.138) eşitliğinin her iki tarafına uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \delta u_{n+1}(x,t) \delta u_n(x,t) &+ \lambda \delta [s^\alpha u_n(x,s) - s^{\alpha-1}u_0(x,0)] + \\ \delta \lambda \mathcal{L} \left[ -\frac{1}{2}x^2 \tilde{u}_{nxx}(x,t) \right] \end{aligned} \quad (2.139)$$

eşitliği elde edilmektedir.

En iyilik şartları kullanılarak,

$$\frac{\delta u_{n+1}}{\delta u_n} = 0$$

olarak alınabilir.  $\check{u}_n$  sınırlı bir varyasyondur yani  $\delta \check{u}_n = 0$ 'dır. Böylece  $\lambda$ , Lagrange çarpanı

$$0 = \delta u_n + s^\alpha \lambda \delta u_n \Rightarrow \delta u_n (1 + s^\alpha \lambda) = 0 \Rightarrow 1 + s^\alpha \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{s^\alpha}$$

şeklinde elde edilmektedir.

$\lambda$  değeri (2.138) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$u_{n+1}(x, s) = u_n(x, s) - \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L} \left[ u_{nt}^\alpha(x, t) - \frac{1}{2} x^2 u_{nxx}(x, t) \right] \quad (2.140)$$

eşitliği elde edilmektedir.

(2.140) eşitliğinin her iki tarafına ters Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L} \left[ u_{nt}^\alpha(x, t) - \frac{1}{2} x^2 u_{nxx}(x, t) \right] \right\} \quad (2.141)$$

iterasyon formülü elde edilmektedir.

Böylece, iterasyon ile elde edilen yaklaşımlar,

$$u_1(x, t) = Ax^2 + \frac{Ax^2 t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}, u_2(x, t) = Ax^2 + \frac{Ax^2 t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{Ax^2 t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)},$$

$$u_3(x, t) = Ax^2 + \frac{Ax^2 t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{Ax^2 t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{Ax^2 t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)}, \dots, u_n(x, t) = \sum_{k=0}^n \frac{Ax^2 t^{k\alpha}}{\Gamma(1 + k\alpha)}$$

olarak hesaplanmaktadır.

(2.137) denkleminin yaklaşık çözümü

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{Ax^2 t^{k\alpha}}{\Gamma(1 + k\alpha)} = Ax^2 E_\alpha(t^\alpha) \quad (2.142)$$

'dır.  $u(x, t) = Ax^2 e^t$  formu,  $\alpha = 1$  için (2.137)'nin yaklaşık çözümüdür. Ayrıca bu form,  $\alpha = 1$  için (2.137)'nin tam çözümüdür.

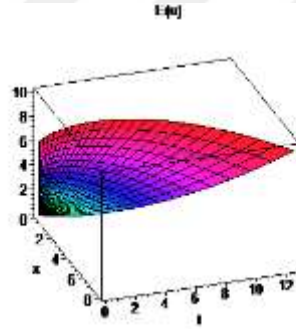
Şimdi yaklaşık çözümün beklenen değerini ve varyansını hesaplıyoruz. Öncelikle  $A \sim G(\alpha = 2, \beta = 3)$  olduğundan momentleri,

$$E(A) = 2.3 = 6, E(A^2) = 2.9(1 + 2) = 54$$

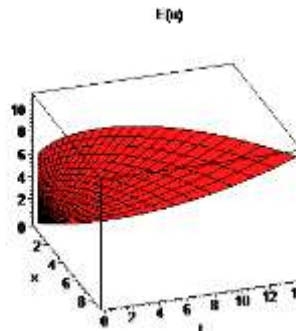
olarak buluyoruz. Böylece (2.142) çözümünün beklenen değeri,

$$E[u(x, t)] = E[A]x^2 E_\alpha(t^\alpha) = 6x^2 E_\alpha(t^\alpha)$$

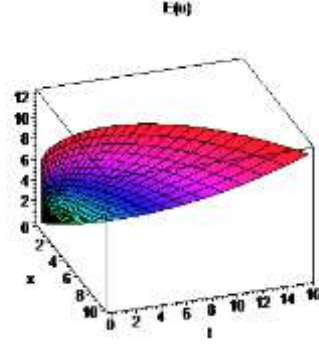
olarak elde edilmektedir. Farklı  $\alpha$  değerleri için (2.142) çözümünün beklenen değerinin grafikleri MAPLE (v.13) yazılım programında çizdirilmiştir.



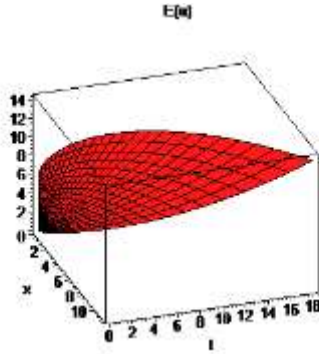
Şekil 2.41.  $\alpha = 0.9$  ve  $a = 5$  değeri için (2.142) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi



Şekil 2.42.  $\alpha = 0.8$  ve  $a = 5$  değeri için (2.142) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi



Şekil 2.43.  $\alpha = 0.7$  ve  $a = 5$  değeri için (2.142) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi

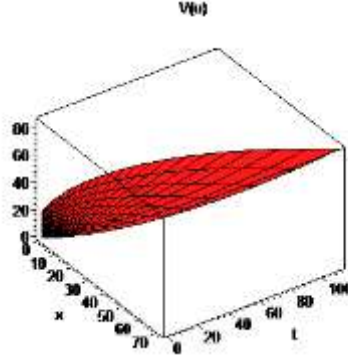


Şekil 2.44.  $\alpha = 0.6$  ve  $a = 5$  değeri için (2.142) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi

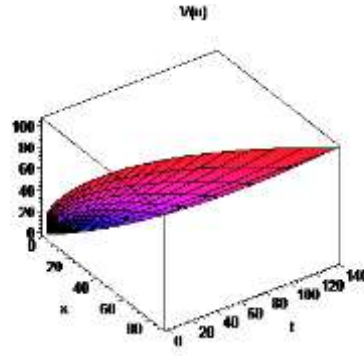
$A \sim G(\alpha = 2, \beta = 3)$  olduğundan, (2.142) çözümünün varyansı,

$$\begin{aligned} V[u(x, t)] &= E[u^2(x, t)] - (E[u(x, t)])^2 = E[A^2]x^4(E_\alpha[t^\alpha])^2 - (E[A])^2x^4(E_\alpha[t^\alpha])^2 \\ &= 54x^4(E_\alpha[t^\alpha])^2 - 36x^4(E_\alpha[t^\alpha])^2 = 18x^4(E_\alpha[t^\alpha])^2 \end{aligned}$$

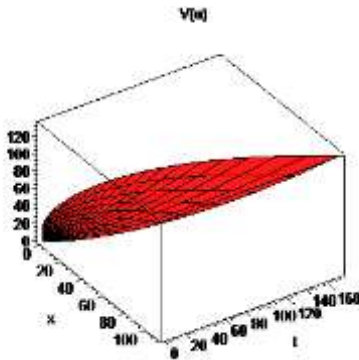
olarak elde edilmektedir. Farklı  $\alpha$  değerleri için (2.142) çözümünün varyanslarının grafikleri MAPLE (v.13) yazılım programında çizdirilmiştir.



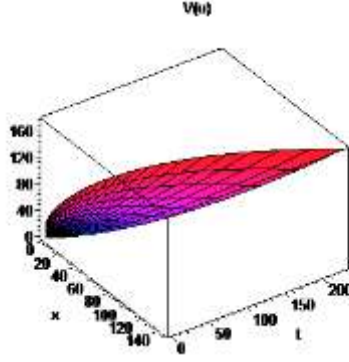
Şekil 2.45.  $\alpha = 0.9$  değeri için (2.142) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi



Şekil 2.46.  $\alpha = 0.8$  değeri için (2.142) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi



Şekil 2.47.  $\alpha = 0.7$  değeri için (2.142) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi



Şekil 2.48.  $\alpha = 0.6$  değeri için (2.142) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi

### Örnek 2.5.5.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} + x^2 e^t \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - (x+1) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = Atx + At - Bt, \\ 0 < x < 1, 0 < \alpha \leq 1, 0 < t \leq 1, \\ u(x,0) = A(x+1), u(0,t) = A(2e^t - t - 1) - \frac{Bt^2}{2}, u(1,t) = 2A(2e^t - t - 1) - \frac{bt^2}{2} \end{array} \right. \quad (2.143)$$

Başlangıç-sınır şartları ile rastgele kesirli mertebeden homojen olmayan geriye doğru Kolmogorov denklemini göz önüne alalım. Burada  $A, B$   $\alpha = 2$  ve  $\beta = 3$  olan Gamma dağılımlı rastgele değişkenlerdir, yani  $A, B \sim G(\alpha = 2, \beta = 3)$ ' tür.

Laplace dönüşümü (2.143) problemindeki denkleme uygulanırsa, bu denkleme karşılık gelen rekürans bağıntısı

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x,s) = & u_n(x,s) + \lambda [s^\alpha u_n(x,s) - s^{\alpha-1} u_0(x,0)] + \lambda \mathcal{L}[x^2 e^t \check{u}_{nxx}(x,t) - \\ & (x+1) \check{u}_{nx}(x,t) - Atx - At + Bt] \end{aligned} \quad (2.144)$$

olarak elde edilmektedir.

Varyasyon (2.144) eşitliğinin her iki tarafına uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \delta u_{n+1}(x,t) \delta u_n(x,t) + \lambda \delta [s^\alpha u_n(x,s) - s^{\alpha-1} u_0(x,0)] + \delta \lambda \mathcal{L}[x^2 e^t \check{u}_{nxx}(x,t) - \\ (x+1) \check{u}_{nx}(x,t) - Atx - At + Bt] \end{aligned} \quad (2.145)$$

eşitliği elde edilmektedir.

En iyilik şartları kullanılarak,

$$\frac{\delta u_{n+1}}{\delta u_n} = 0$$

olarak alınabilir.  $\check{u}_n$  sınırlı bir varyasyondur yani  $\delta \check{u}_n = 0$ 'dır. Böylece  $\lambda$  Lagrange çarpanı

$$0 = \delta u_n + s^\alpha \lambda \delta u_n \Rightarrow \delta u_n (1 + s^\alpha \lambda) = 0 \Rightarrow 1 + s^\alpha \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{s^\alpha}$$

şeklinde elde edilmektedir.

$\lambda$  değeri (2.144) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$u_{n+1}(x, s) = u_n(x, s) - \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}[u_{nt}^\alpha(x, t) + x^2 e^t u_{nxx}(x, t) - (x + 1)u_{nx}(x, t) - Atx - At + Bt] \quad (2.146)$$

eşitliği elde edilmektedir.

(2.146) eşitliğinin her iki tarafına ters Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}[u_{nt}^\alpha(x, t) + x^2 e^t u_{nxx}(x, t) - (x + 1)u_{nx}(x, t) - Atx - At + Bt]\right\} \quad (2.147)$$

iterasyon formülü elde edilmektedir.

Böylece, iterasyon ile elde edilen yaklaşımlar,

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= Ax + A + \frac{(Ax + A)t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{(Ax + A - B)t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha + 2)}, \\ u_2(x, t) &= Ax + A + \frac{(Ax + A)t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{(Ax + A - B)t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha + 2)} + \frac{(Ax + A)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{(Ax + A)t^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha + 2)}, \\ u_3(x, t) &= Ax + A + \frac{(Ax + A)t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{(Ax + A - B)t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha + 2)} + \frac{(Ax + A)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{(Ax + A)t^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha + 2)} \\ &+ \frac{(Ax + A)t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \frac{(Ax + A)t^{3\alpha+1}}{\Gamma(3\alpha + 2)}, \\ &\vdots \\ u_n(x, t) &= (Ax + A) \left[ 2 \sum_{k=0}^n \frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(1 + k\alpha)} - t - 1 \right] - \frac{Bt^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha + 2)} \end{aligned}$$

olarak hesaplanmaktadır.

(2.143) denkleminin yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( (Ax + A) \left[ 2 \sum_{k=0}^n \frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(1 + k\alpha)} - t - 1 \right] - \frac{Bt^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha + 2)} \right) \\
 &= (Ax + A)[2E_\alpha(t^\alpha) - t - 1] - \frac{Bt^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} \quad (2.148)
 \end{aligned}$$

$u(x, t) = (Ax + A)[2e^t - t - 1] - \frac{Bt^2}{2}$  formu,  $\alpha = 1$  için (2.143)' ün yaklaşık çözümüdür.

Ayrıca bu form,  $\alpha = 1$  için (2.143)' ün tam çözümüdür.

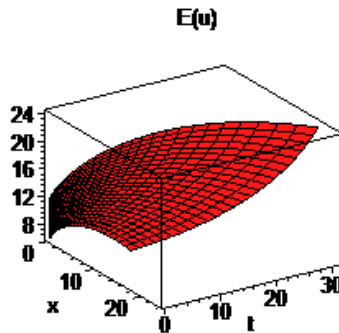
Şimdi yaklaşık çözümün beklenen değerini ve varyansını hesaplıyoruz. Öncelikle  $A, B \sim G(\alpha = 2, \beta = 3)$  olduğundan momentleri,

$$E(A) = 2.3 = 6, E(A^2) = 2.9(1 + 2) = 54, E(B) = 2.3 = 6, E(B^2) = 2.9(1 + 2) = 54$$

olarak buluyoruz. Böylece (2.148) çözümünün beklenen değeri,

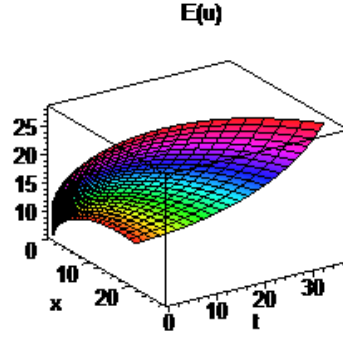
$$\begin{aligned}
 E[u(x, t)] &= (E[A]x + E[A])[2E_\alpha(t^\alpha) - t - 1] - \frac{E[B]t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha + 2)} \\
 &= (6x + 6)[2E_\alpha(t^\alpha) - t - 1] - \frac{6t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha + 2)}
 \end{aligned}$$

olarak elde edilmektedir. Farklı  $\alpha$  değerleri için (2.148) çözümünün beklenen değerinin grafikleri MAPLE (v.13) yazılım programında çizdirilmiştir.

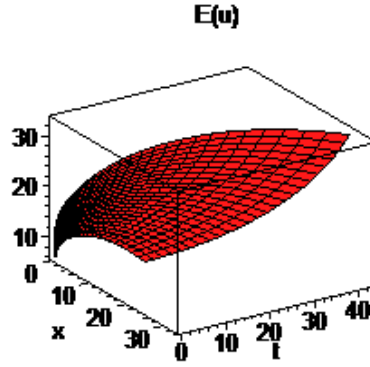


Şekil 2.49.  $\alpha = 0.9$  ve  $a = 5$  değeri için (2.148) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi

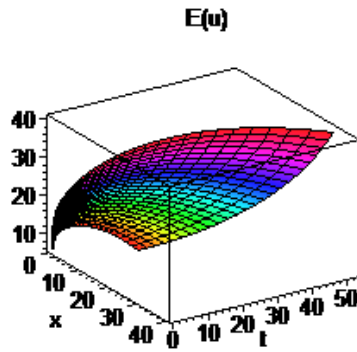




Şekil 2.50.  $\alpha = 0.8$  ve  $a = 5$  değeri için (2.148) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi



Şekil 2.51.  $\alpha = 0.7$  ve  $a = 5$  değeri için (2.148) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi

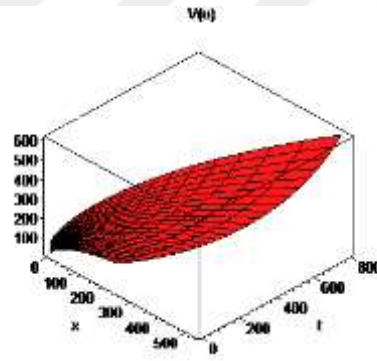


Şekil 2.52.  $\alpha = 0.6$  ve  $a = 5$  değeri için (2.148) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi

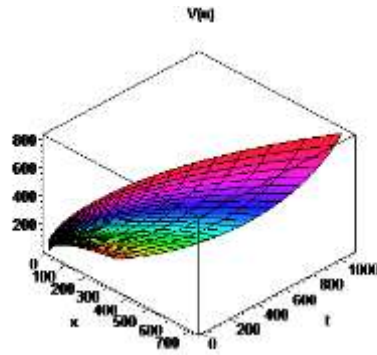
$A, B \sim G(\alpha = 2, \beta = 3)$  olduğundan, (2.148) çözümünün varyansı,

$$\begin{aligned}
 V[u(x, t)] &= E[u^2(x, t)] - (E[u(x, t)])^2 \\
 &= E \left[ \left( (Ax + A)(2E_\alpha[t^\alpha] - t - 1) - \frac{Bt^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha + 2)} \right)^2 \right] - ((6x + 6)(2E_\alpha[t^\alpha] - t - 1) \\
 &\quad - \frac{6t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha + 2)})^2 \\
 &= (18x^2 + 36x + 18)(4(E_\alpha[t^\alpha])^2 - 4E_\alpha[t^\alpha](t + 1) + t^2 + 2t + 1) + \frac{18t^{2\alpha+2}}{(\Gamma(\alpha + 2))^2}
 \end{aligned}$$

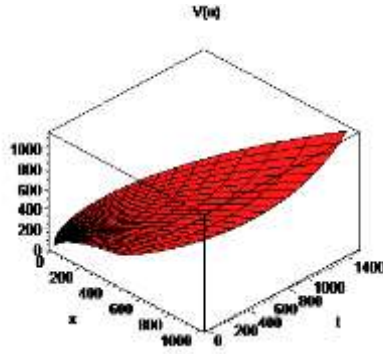
olarak elde edilmektedir. Farklı  $\alpha$  değerleri için (2.148) çözümünün varyanslarının grafikleri MAPLE (v.13) yazılım programında çizdirilmiştir.



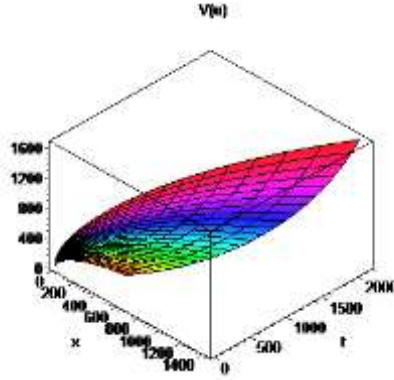
Şekil 2.53.  $\alpha = 0.9$  değeri için (2.148) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi



Şekil 2.54.  $\alpha = 0.8$  değeri için (2.148) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi



Şekil 2.55.  $\alpha = 0.7$  değeri için (2.148) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi



Şekil 2.56.  $\alpha = 0.6$  değeri için (2.148) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi

### Örnek 2.5.6.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} + x \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = Bt^\alpha + 2Ax^2 + 2A, \\ 0 < x < 1, 0 < \alpha \leq 1, 0 < t \leq 1, \\ u(x,0) = Ax^2, u(0,t) = B \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)} t^{2\alpha}, u(1,t) = A + B \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)} t^{2\alpha} \end{array} \right. \quad (2.149)$$

Başlangıç-sınır şartları ile rastgele kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Burada  $A, B$   $\alpha = 2$  ve  $\beta = 3$  olan Gamma dağılımlı rastgele değişkenlerdir, yani  $A, B \sim G(\alpha = 2, \beta = 3)$ ' tür.

Laplace dönüşümü (2.149) problemindeki denkleme uygulanırsa, bu denkleme karşılık gelen rekürans bağıntısı

$$u_{n+1}(x, s) = u_n(x, s) + \lambda[s^\alpha u_n(x, s) - s^{\alpha-1}u_0(x, 0)] + \lambda\mathcal{L}[x\check{u}_{nx}(x, t) + \check{u}_{nxx}(x, t) - Bt^\alpha - 2Ax^2 - 2A] \quad (2.150)$$

olarak elde edilmektedir.

Varyasyon (2.150) eşitliğinin her iki tarafına uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \delta u_{n+1}(x, t) &= \delta u_n(x, t) + \lambda\delta[s^\alpha u_n(x, s) - s^{\alpha-1}u_0(x, 0)] \\ \delta\lambda\mathcal{L}[x\check{u}_{nx}(x, t) + \check{u}_{nxx}(x, t) - Bt^\alpha - 2Ax^2 - 2A] \end{aligned} \quad (2.151)$$

eşitliği elde edilmektedir.

En iyilik şartları kullanılarak,

$$\frac{\delta u_{n+1}}{\delta u_n} = 0$$

olarak alınabilir.  $\check{u}_n$  sınırlı bir varyasyondur yani  $\delta\check{u}_n = 0$ ' dir. Böylece  $\lambda$  Lagrange çarpanı

$$0 = \delta u_n + s^\alpha \lambda \delta u_n \Rightarrow \delta u_n(1 + s^\alpha \lambda) = 0 \Rightarrow 1 + s^\alpha \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{s^\alpha}$$

şeklinde elde edilmektedir.

$\lambda$  değeri (2.150) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x, s) &= u_n(x, s) \\ -\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}[u_{nt}^\alpha(x, t) + xu_{nx}(x, t) + u_{nxx}(x, t) - Bt^\alpha - 2Ax^2 - 2A] \end{aligned} \quad (2.152)$$

eşitliği elde edilmektedir.

(2.152) eşitliğinin her iki tarafına ters Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x, t) &= u_n(x, t) - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}[u_{nt}^\alpha(x, t) + xu_{nx}(x, t) + u_{nxx}(x, t) \right. \\ &\quad \left. - Bt^\alpha - 2Ax^2 - 2A]\right\} \end{aligned} \quad (2.153)$$

iterasyon formülü elde edilmektedir.

Böylece iterasyon ile elde edilen yaklaşımlar,

$$u_1(x, t) = Ax^2 + \frac{B\Gamma(\alpha + 1)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)}, u_2(x, t) = Ax^2 + \frac{B\Gamma(\alpha + 1)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)},$$

$$u_3(x, t) = Ax^2 + \frac{B\Gamma(\alpha + 1)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)}, \dots, u_n(x, t) = Ax^2 + \frac{B\Gamma(\alpha + 1)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)}$$

olarak hesaplanmaktadır.

(2.149) denkleminin yaklaşık çözümü

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left( Ax^2 + \frac{B\Gamma(\alpha + 1)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \right) \quad (2.154)$$

$$= Ax^2 + \frac{B\Gamma(\alpha + 1)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)}$$

$u(x, t) = Ax^2 + \frac{Bt^2}{2}$  formu,  $\alpha = 1$  için (2.149)' un yaklaşık çözümüdür. Ayrıca bu form,  $\alpha = 1$  için (2.149)' un tam çözümüdür.

Şimdi yaklaşık çözümün beklenen değerini ve varyansını hesaplıyoruz. Öncelikle  $A, B \sim G(\alpha = 2, \beta = 3)$  olduğundan momentleri,

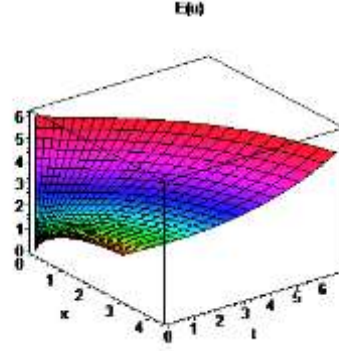
$$E(A) = 2.3 = 6, E(A^2) = 2.9(1 + 2) = 54, E(B) = 2.3 = 6, E(B^2) = 2.9(1 + 2) = 54$$

olarak buluyoruz. Böylece (2.154) çözümünün beklenen değeri,

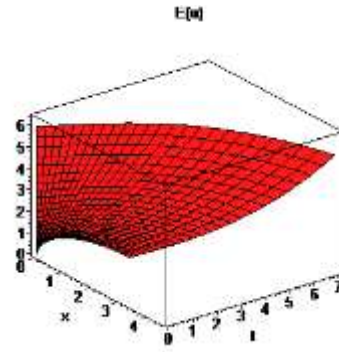
$$E[u(x, t)] = E[A]x^2 + \frac{E[B]\Gamma(\alpha + 1)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} = 6x^2 + \frac{6\Gamma(\alpha + 1)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)}$$

olarak elde edilmektedir.

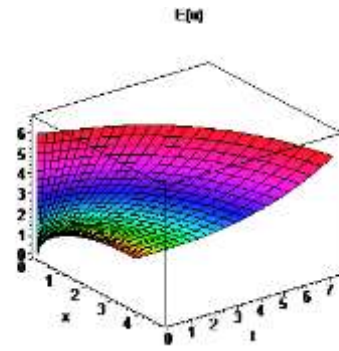
Farklı  $\alpha$  değerleri için (2.154) çözümünün beklenen değerinin grafikleri MAPLE (v.13) yazılım programında çizdirilmiştir.



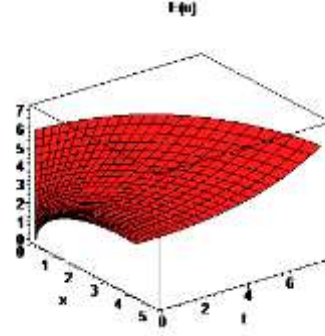
Şekil 2.57.  $\alpha = 0.9$  değeri için (2.154) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi



Şekil 2.58.  $\alpha = 0.8$  değeri için (2.154) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi



Şekil 2.59.  $\alpha = 0.7$  değeri için (2.154) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi

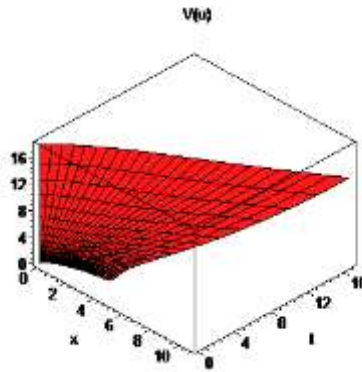


Şekil 2.60.  $\alpha = 0.6$  değeri için (2.154) çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi

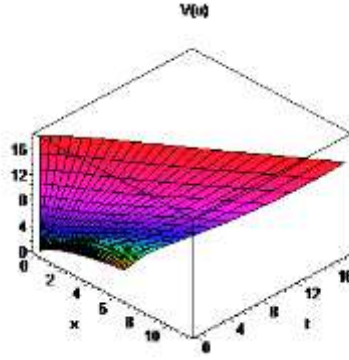
$A, B \sim G(\alpha = 2, \beta = 3)$  olduğundan, (2.154) çözümünün varyansı,

$$\begin{aligned}
 V[u(x, t)] &= E[u^2(x, t)] - (E[u(x, t)])^2 \\
 &= E \left[ \left( Ax^2 + \frac{B\Gamma(\alpha + 1)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \right)^2 \right] - \left( 6x^2 + \frac{6\Gamma(\alpha + 1)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \right)^2 \\
 &= 18x^4 + \frac{18(\Gamma(\alpha + 1))^2 t^{4\alpha}}{(\Gamma(2\alpha + 1))^2}
 \end{aligned}$$

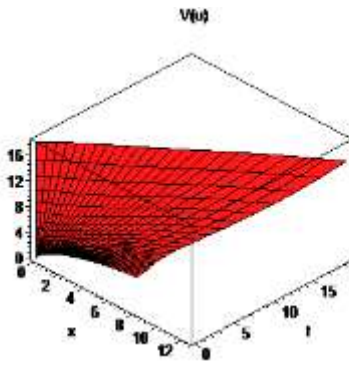
olarak elde edilmektedir. Farklı  $\alpha$  değerleri için (2.154) çözümünün varyanslarının grafikleri MAPLE (v.13) yazılım programında çizdirilmiştir.



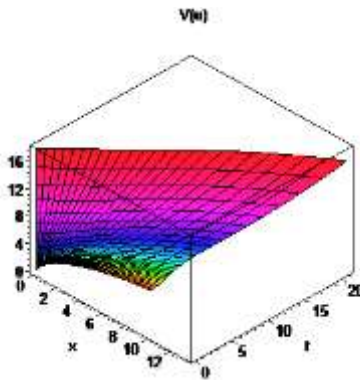
Şekil 2.61.  $\alpha = 0.9$  değeri için (2.154) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi



Şekil 2.62.  $\alpha = 0.8$  değeri için (2.154) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi



Şekil 2.63.  $\alpha = 0.7$  değeri için (2.154) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi



Şekil 2.64.  $\alpha = 0.6$  değeri için (2.154) çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi



**Örnek 2.5.7.**

$$\begin{cases} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \\ 0 < x < 1, 0 < t < 0.1, \\ u(x, 0) = A \sin(\pi x) + B \sin(3\pi x), u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases} \quad (2.155)$$

Başlangıç-sınır şartları ile rastgele bir-boyutlu lineer ısı denklemini göz önüne alalım. Burada  $A, B$   $\mu = 1$  ve  $\sigma = 1$  olan Normal dağılımlı rastgele değişkenlerdir, yani  $A, B \sim N(\mu = 1, \sigma^2 = 1)$ ' dir.

Adım uzunlukları  $\Delta x = h = 0.1$  ve  $\Delta t = k = 0.01$  olarak alırsak  $r = 1$  olmaktadır. Izgara,  $m = 11$  satır yüksekliğinde  $n = 11$  sütun genişliğinde elde edilmektedir. Algoritmayı uygularsak,  $0 < x_i < 1$  ve  $0 \leq t_j \leq 0.1$  için (2.155) problemindeki denklemin yaklaşık çözümlerinin beklenen değerlerini elde ediyoruz. Ayrıca, bu çözümlerin beklenen değerleri için MATLAB (v.16b) programında Monte-Carlo simülasyonu  $10^3$  kez yapılmıştır. Elde edilen beklenen değerler Tablo 2.5'te gösterilmektedir.

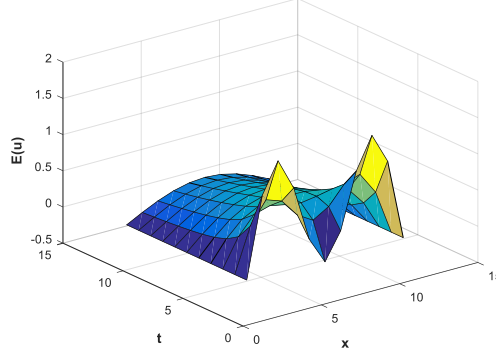
Tablo 2.5. (2.155) denkleminin yaklaşık çözümünün beklenen değerleri

	$x_2 = 0.1$	$x_3 = 0.2$	$x_4 = 0.3$	$x_5 = 0.4$	$x_6 = 0.5$	$x_7 = 0.6$	$x_8 = 0.7$	$x_9 = 0.8$	$x_{10} = 0.9$
$t_1$	1,14413	1,55603	1,08649	0,27368	-0,11527	0,27368	1,08649	1,55603	1,14413
$t_2$	0,61866	0,91861	0,82517	0,55235	0,41301	0,55235	0,82517	0,91861	0,61866
$t_3$	0,38665	0,62802	0,68160	0,62741	0,58988	0,62741	0,68160	0,62802	0,38665
$t_4$	0,27804	0,48414	0,59028	0,62156	0,62449	0,62156	0,59028	0,48414	0,27804
$t_5$	0,22190	0,40347	0,52367	0,58549	0,60353	0,58549	0,52367	0,40347	0,22190
$t_6$	0,18863	0,35105	0,47000	0,53998	0,56274	0,53998	0,47000	0,35105	0,18863
$t_7$	0,16580	0,31214	0,42414	0,49339	0,51669	0,49339	0,42414	0,31214	0,16580
$t_8$	0,14815	0,28045	0,38373	0,44893	0,47116	0,44893	0,38373	0,28045	0,14815
$t_9$	0,13341	0,25322	0,34757	0,40769	0,42831	0,40769	0,34757	0,25322	0,13341
$t_{10}$	0,12059	0,22914	0,31499	0,36992	0,38881	0,36992	0,31499	0,22914	0,12059
$t_{11}$	0,10918	0,20757	0,28554	0,33551	0,35272	0,33551	0,28554	0,20757	0,10918

Crank-Nicolson yöntemiyle elde edilen bu değerleri karşılaştırsak, bunların  $A = B = 1$  için neredeyse  $u(x, t) = \sin(\pi x)e^{-\pi^2 t} + \sin(3\pi x)e^{-9\pi^2 t}$  analitik çözümüyle aynı olduğu görülmektedir.

(2.155) denkleminin yaklaşık çözümünün beklenen değerinin grafiği Şekil 2.65.' te verilmektedir.

(2.155)denkleminin beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi



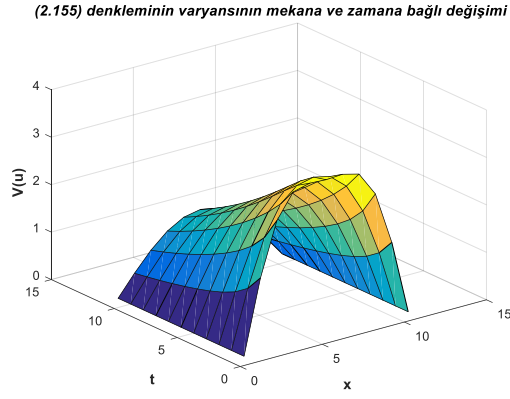
Şekil 2.65. (2.155) denkleminin yaklaşık çözümünün beklenen değerinin mekana ve zamana bağlı değişimi

Algoritmayı uygularsak,  $0 < x_i < 1$  ve  $0 \leq t_j \leq 0.1$  için (2.155) problemindeki denklemin yaklaşık çözümlerinin varyanslarını elde ediyoruz. Ayrıca, bu çözümlerin varyansları için MATLAB (v.16b) programında Monte-Carlo simülasyonu  $10^3$  kez yapılmıştır. Elde edilen varyanslar Tablo 2.6.'da gösterilmektedir.

Tablo 2.6. (2.155) denkleminin yaklaşık çözümünün varyansları

	$x_2 = 0.1$	$x_3 = 0.2$	$x_4 = 0.3$	$x_5 = 0.4$	$x_6 = 0.5$	$x_7 = 0.6$	$x_8 = 0.7$	$x_9 = 0.8$	$x_{10} = 0.9$
$t_1$	1,60787	2,77220	3,32875	3,45015	3,44174	3,45015	3,32875	2,77220	1,60787
$t_2$	1,26553	2,28933	2,95050	3,27783	3,36993	3,27783	2,95050	2,28933	1,26553
$t_3$	1,06739	1,98239	2,64701	3,03423	3,15924	3,03423	2,64701	1,98239	1,06739
$t_4$	0,93447	1,75856	2,38828	2,77700	2,90762	2,77700	2,38828	1,75856	0,93447
$t_5$	0,83340	1,57829	2,16053	2,52864	2,65426	2,52864	2,16053	1,57829	0,83340
$t_6$	0,74986	1,42428	1,95688	2,29716	2,41405	2,29716	1,95688	1,42428	0,74986
$t_7$	0,67748	1,28856	1,77342	2,08466	2,19189	2,08466	1,77342	1,28856	0,67748
$t_8$	0,61326	1,16715	1,60758	1,89090	1,98864	1,89090	1,60758	1,16715	0,61326
$t_9$	0,55561	1,05775	1,45741	1,71476	1,80360	1,71476	1,45741	1,05775	0,55561
$t_{10}$	0,50359	0,95884	1,32135	1,55487	1,63551	1,55487	1,32135	0,95884	0,50359
$t_{11}$	0,45652	0,86927	1,19801	1,40983	1,48298	1,40983	1,19801	0,86927	0,45652

(2.155) denkleminin yaklaşık çözümünün varyansının grafiği Şekil 2.66.'da verilmektedir.



Şekil 2.66. (2.155) denkleminin yaklaşık çözümünün varyansının mekana ve zamana bağlı değişimi

### 3. İRDELEME

Bu tez çalışması kapsamında, rastgele kısmi diferansiyel denklemler (RKDD) ve rastgele kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin (RKMKDD) çözümleri, iki boyutlu diferansiyel dönüşüm metodu, Laplace-Padé metodu, yeni yinelemeli Sumudu dönüşümü metodu, Crank-Nicolson metodu, kesirli mertebeden Laplace varyasyonel metodu ve homotopi pertürbasyon Elzaki dönüşümü metodu ile incelenmiştir. Bu denklemler rastgele hale getirilip yarı-analitik ve nümerik metotlarla çözülmüştür. Ayrıca, elde edilen çözümlerin karakteristikleri analitik olarak veya MAPLE (v.13) ya da MATLAB (v.16b) yazılım programlarında yazılan kodlarla sayısal olarak elde edilmiştir. Elde edilen çözümlerin tam çözümlerle hata analizleri yapılmış olup hataların kabul edilebilir seviyede olduğu görülmüştür. Rastgele kısmi diferansiyel denklemlerin güncel nümerik metotlarla hızlı bir şekilde çözümleri elde edilmiştir. Rastgele kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin güncel nümerik metotlarla ve ve Crank-Nicolson metoduyla pratik şekilde çözümleri elde edilmiştir. Hem rastgele kısmi diferansiyel denklemler hem de rastgele kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin birinci ve ikinci mertebeden momentlerinin iyi sonuçlar verdiği, MAPLE (v.13) ya da MATLAB (v.16b) yazılım programlarından elde edilen grafiklerde görülmüştür.

#### 4. SONUÇLAR

Bu çalışmada, rastgele kısmi diferansiyel denklemler (RKDD) ve rastgele kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemler (RKMDD) çözümleri, iki boyutlu diferansiyel dönüşüm metodu, Laplace-Padé metodu, yeni yinelemeli Sumudu dönüşümü metodu, Crank-Nicolson metodu, kesirli mertebeden Laplace varyasyonel metodu ve homotopi pertürbasyon Elzaki dönüşümü metodu ile incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir:

1. Rastgele kısmi diferansiyel denklemlerin güncel nümerik metotlarla ve Crank-Nicolson metoduyla MAPLE (v.13) veya MATLAB (v.16b) yazılım programlarında yazılan kodlar ile hızlı bir şekilde analitik çözümlere çok yakın çözümler elde edilmiştir.
2. Rastgele kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin iki boyutlu diferansiyel dönüşüm metodu, Laplace- Padé metodu, yeni yinelemeli Sumudu dönüşüm metodu, kesirli mertebeden Laplace varyasyonel metodu ve homotopi pertürbasyon Elzaki dönüşüm metodu ile MAPLE (v.13) veya MATLAB (v.16b) yazılım programlarında kodlar yazılarak pratik bir şekilde analitik çözümlere çok yakın çözümler elde edilmiştir.
3. Yapılan hata analizlerinde hataların ihmal edilebilir olduğu gözlemlenmiştir.
4. Rastgele kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin birinci ve ikinci momentlerinin iyi sonuçlar verdiği MAPLE (v.13) veya MATLAB (v.16b) yazılım programlarından elde edilen grafiklerden yorumlanmıştır.
5. Rastgele kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin birinci ve ikinci mertebeden momentlerinin iyi sonuçlar verdiği MAPLE (v.13) ya da MATLAB (v.16b) yazılım programlarından elde edilen grafiklerde yorumlanmıştır.

## 5. ÖNERİLER

Yapılan bu çalışma kapsamında rastgele kısmi diferansiyel denklemler ve rastgele kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri ile bu konuyla ilgili çalışma yapmayı düşünen araştırmacılar için bazı öneriler aşağıdaki gibi sıralanmıştır:

1. Rastgele kısmi diferansiyel denklemler için elde edilen çözümlerin birinci ve ikinci momentlerini birkaç dağılımla elde edilmiştir. Bu çözümlerin birinci ve ikinci momentleri farklı dağılımlarla elde edilebilir.
2. Rastgele kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemler için elde edilen çözümlerin birinci ve ikinci momentleri birkaç dağılımla elde edilmiştir. Bu çözümlerin birinci ve ikinci momentleri farklı dağılımlarla elde edilebilir.
3. Kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerde türevler Caputo veya Riemann-Liouville anlamında incelenmiştir. Buradaki türevler, Grünwald-Letnikov, Wely, Riesz, Atangana-Baleanu gibi farklı kesirli mertebeden türevler olarak alınıp çözümler elde edilebilir.
4. Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler için Crank-Nicolson metoduyla çözümler elde edilebilir.
5. Gelecekte üretilecek farklı nümerik metotlar rastgele kısmi diferansiyel denklemlere uygulanabilir.
6. Gelecekte üretilecek farklı nümerik metotlar rastgele kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlere uygulanabilir.

## 6. KAYNAKLAR

- Abassy, T. A., El-Tawil, M. A. ve El-Zoheiry, H., 2007. Exact Solutions of Some Nonlinear Partial Differential Equations Using the Variational Iteration Method Linked with Laplace Transforms and the Pade Technique. Computers and Mathematics with Applications, 54, 940-954.
- Acan, O., Firat, O. ve Keskin, Y., 2018. Conformable Variational Iteration Method, Conformable Fractional Reduced Differential Transform Method and Conformable Homotopy Analysis Method for Non-linear Fractional Partial Differential Equations. Waves in Random and Complex Media, 1-19.
- Aliyev, R., 2010. Stokastik Süreçler Teorisine Giriş, KTÜ Matbaası, Trabzon.
- Anaç, H., Merdan, M., Bekiryazıcı, Z. ve Kesemen, T., 2019. Bazı Rastgele Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Diferansiyel Dönüşüm Metodu ve Laplace-Padé Metodu Kullanarak Çözümü. Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 9, 1, 108-118.
- Anaç, H., Merdan, M. ve Kesemen, T., 2020. Application of Crank-Nicolson Method to a Random Component Heat Equation. Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 38, 1, 475-480.
- Anaç, H., Merdan, M. ve Kesemen, T., 2020. Solving for the random component time-fractional partial differential equations with the new Sumudu transform iterative method. SN Applied Sciences, DOI: 10.1007/s42452-020-2625-3.
- Angstmann, C. N., Donnelly, I. C., Henry, B. I., Jacobs, B. A., Langlands, T. A. ve Nichols, J. A., 2016. From stochastic processes to numerical methods: A new scheme for solving reaction subdiffusion fractional partial differential equations. Journal of Computational Physics, 307, 508-534.
- Anh, V. V., Angulo, J. M. ve Ruiz-Medina, M. D., 1999. Possible long-range dependence in fractional random fields. Journal of Statistical Planning and Inference, 80, 1-2, 95-110.
- Ayaz, F., 2003. On the two-dimensional differential transform method. Applied Mathematics and Computation, 143, 2-3, 361-374.
- Babuška, I., Nobile, F. ve Tempone, R., 2007. A stochastic collocation method for elliptic partial differential equations with random input data. SIAM Journal on Numerical Analysis, 45, 3, 1005-1034.
- Babuška, I., Nobile, F. ve Tempone, R., 2010. A stochastic collocation method for elliptic partial differential equations with random input data. SIAM review, 52, 2, 317-355.

- Benchohra, M. ve Heris, A., 2017. Fractional Partial Random Differential Equations with State-Dependent Delay. Annals of West University of Timisoara-Mathematics and Computer Science, 55, 1, 21-35.
- Bildik, N., Konuralp, A., Bek, F. O. ve Küçükarslan, S., 2006. Solution of Different Type of the Partial Differential Equation by Differential Transform Method and Adomian's Decomposition Method. Applied Mathematics and Computation, 172, 1, 551-567.
- Calatayud, J., Cortés, J. C., Díaz, J. A. ve Jornet, M., 2020. Constructing reliable approximations of the probability density function to the random heat PDE via a finite difference scheme. Applied Numerical Mathematics, 151, 413-424.
- Caraballo, T., Duany, J., Lu, K. ve Schmalfuß, B., 2010. Invariant manifolds for random and stochastic partial differential equations. Advanced Nonlinear Studies, 10, 1, 23-52.
- Charrier, J., 2012. Strong and weak error estimates for elliptic partial differential equations with random coefficients. SIAM Journal on numerical analysis, 50, 1, 216-246.
- Chen, C. O. K. ve Ho, S. H., 1999. Solving partial differential equations by two-dimensional differential transform method. Applied Mathematics and Computation, 106, 2-3, 171-179.
- Crank, J. ve Nicolson, P., 1947. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat conduction type. Proc. Camb. Phil. Soc., 43, 1, 50-67.
- Cyganowski, S., Kloedon, P. ve Ombach, J., 2002. From Elementary Probability to Stochastic Differential Equations with MAPLE, Springer, New York.
- Çelik, C. ve Duman, M., 2012. Crank–Nicolson method for the fractional diffusion equation with the Riesz fractional derivative. Journal of computational physics, 231, 4, 1743-1750.
- Daftardar-Gejji, V. ve Jafari, H., 2006. An iterative method for solving nonlinear functional equations. J. Math. Anal. Appl. 316, 753-763.
- Diethelm, K., 2010. The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type. Springer-Verlag.
- Dimovski, I. H., 1990. Convolutional Calculus, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.
- Ding, Z., Xiao, A. ve Li, M., 2010. Weighted finite difference methods for a class of space fractional partial differential equations with variable coefficients. Journal of Computational and Applied Mathematics, 233, 8, 1905-1914.



- Doostan, A. ve Iaccarino, G., 2009. A least-squares approximation of partial differential equations with high-dimensional random inputs. Journal of Computational Physics, 228, 12, 4332-4345.
- Dumitru, B., Kai, D. ve Enrico, S., 2012. Fractional calculus: models and numerical methods, 3. World Scientific, Singapore.
- Elzaki, T. M. ve Hilal, E. M. A., 2012. Homotopy perturbation and Elzaki transform for solving nonlinear partial differential equations. Mathematical Theory and Modeling, 2, 3, 33-42.
- Feller, W., 2008. An Introduction to Probability Theory and Its Applications, 2, John Wiley & Sons, New York.
- Firoozjaee, M. A. ve Yousefi, S. A., 2018. A numerical approach for fractional partial differential equations by using Ritz approximation. Applied Mathematics and Computation, 338, 711-721.
- Griego, R. J. ve Hersh, R., 1969. Random evolutions, Markov chains, and systems of partial differential equations. Proceedings of the National Academy of Sciences, 62, 2, 305-308.
- Griego, R. ve Hersh, R., 1971. Theory of random evolutions with applications to partial differential equations. Transactions of the American Mathematical Society, 156, 405-418.
- Guner, O., Bekir, A. ve Ünsal, Ö., 2016. Two reliable methods for solving the time fractional Clannish Random Walker's Parabolic equation. Optik, 127, 20, 9571-9577.
- Guner, O. ve Bekir, A., 2017. A novel method for nonlinear fractional differential equations using symbolic computation. Waves in Random and Complex Media, 27, 1, 163-170.
- Gunzburger, M. D., Webster, C. G. ve Zhang, G., 2014. Stochastic finite element methods for partial differential equations with random input data. Acta Numerica, 23, 521-650.
- Gupta, I. S. ve Debnath, L., 2007. Some properties of the Mittag-Leffler functions. Integral Transforms and Special Functions, 18, 5, 329-336.
- Gupta S., Kumar D. ve Singh J., 2015. Numerical study for systems of fractional differential equations via Laplace transform. Journal of Egyptian Mathematical Society, 23, 2, 256-262.
- Hadizadeh, M. ve Moatamedi, N., 2007. A New Differential Transformation Approach for Two-Dimensional Volterra Integral Equations. International Journal of Computer Mathematics, 84, 4, 515-526.

- Hilfer, R., 2000. Application of Fractional Calculus in Physics, World Scientific Publishing Company, Singapore.
- Itoh, S., 1977. A random fixed point theorem for a multivalued contraction mapping. Pacific Journal of Mathematics, 68, 1, 85-90.
- Itoh, S., 1979. Random fixed point theorems with an application to random differential equations in Banach spaces. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 67, 2, 261-273.
- Jafari, H., Alipour, M. ve Tajadodi, H., 2010. Two-dimensional differential transform method for solving nonlinear partial differential equations. International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences, 2, 1, 47-52.
- Kannan, R., 1981. Random correspondences and nonlinear equations. Journal of Multivariate Analysis, 11, 2, 230-243.
- Kangalgil, F. ve Ayaz, F., 2009. Solitary Wave Solutions for the KdV and mKdV Equations by Differential Transform Method. Chaos, Solitons and Fractals, 41, 464-472.
- Kanth, R. A. S. V. ve Aruna, K., 2009. Two-Dimensional Differential Transform Method for Solving Linear and Non-linear Schrödinger Equations. Chaos, Solitons and Fractals, 41, 2277-2281.
- Khaniyev, T., Ünver, İ., Küçük, Z. ve Kesemen, T., 2017. Olasılık Kuramında Çözümlü Problemler, Nobel Akademik Yayıncılık, TÜRKİYE.
- Kilbas, A. A. A., Srivastava, H. M. ve Trujillo, J. J., 2006. Theory and applications of fractional differential equations, 204, Elsevier Science Limited, Amsterdam.
- Klimek, K., 2005. Fractional sequential mechanics-models with symmetric fractional derivative. Czech J Phys, 55, 1447-1453.
- Koca, K., 2008. Kısmi türevli denklemler, Gündüz Eğitim ve Yayıncılık, Ankara.
- Kumar, M. ve Daftardar-Gejji, V., 2019. Exact solutions of fractional partial differential equations by Sumudu transform iterative method. In Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. Birkhäuser, Singapore.
- Kuo, F. Y., Schwab, C. ve Sloan, I. H., 2012. Quasi-Monte Carlo finite element methods for a class of elliptic partial differential equations with random coefficients. SIAM Journal on Numerical Analysis, 50, 6, 3351-3374.
- Laskin, N., 2000. Fractional quantum mechanics. Physical Review E, 62, 3, 3135.
- Logvinova, K. ve Néel, M. C., 2004. A fractional equation for anomalous diffusion in a randomly heterogeneous porous medium. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 14, 4, 982-987.

- Lord, G. J., Powell, C. E. ve Shardlow, T. 2014. An introduction to computational stochastic PDEs, 50, Cambridge University Press, New York.
- Mainardi, F., 2010. Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity. Imperial College Press, London.
- Mao, Z. ve Shen, J., 2016. Efficient spectral–Galerkin methods for fractional partial differential equations with variable coefficients. Journal of Computational Physics, 307, 243-261.
- Mathews, J. H. ve Fink, K. D., 2004. Numerical methods using MATLAB, 4, Pearson Prentice Hall, New Jersey.
- Merdan, M., 2010. A New Application of Modified Differential Transformation Method for Modelling the Pollution of a System of Lakes. Selçuk Journal of Applied Mathematics, 11, 2, 27-40.
- Merdan, M., Anaç, H. ve Kesemen, T., 2019. The New Sumudu Transform İterative Method for Studying the Random Component Time-Fractional Klein-Gordon Equation. Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 10, 3, 343-354.
- Miller, K. S. ve Ross, B., 1993. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. Wiley, New York.
- Nobile, F., Tempone, R. ve Webster, C. G., 2008. A sparse grid stochastic collocation method for partial differential equations with random input data. SIAM Journal on Numerical Analysis, 46, 5, 2309-2345.
- Nobile, F., Tempone, R. ve Webster, C. G., 2008. An anisotropic sparse grid stochastic collocation method for partial differential equations with random input data. SIAM Journal on Numerical Analysis, 46, 5, 2411-2442.
- Noor, M. A., Sohail, A. ve Arshad, S., 2018. Laplace variational method for system of partial differential equations. IOP Conf. Series: J Phys: Conf Series, 1039, 1, 012005.
- Nouy, A., Clement, A., Schoefs, F. ve Moës, N., 2008. An extended stochastic finite element method for solving stochastic partial differential equations on random domains. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 197, 51-52, 4663-4682.
- Odabasi, M. ve Misirli, E., 2018. On the solutions of the nonlinear fractional differential equations via the modified trial equation method. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 41, 3, 904-911.
- Oldham, K. B. ve Spanier, J., 1974. The fractional calculus. Academic Press, New York.
- Podlubny, I., 1999. Fractional Differential Eqautions. Academic Press, San Diego.

- Prakash, A., Kumar, M. ve Baleanu, D., 2018. A new iterative technique for a fractional model of nonlinear Zakharov–Kuznetsov equations via Sumudu transform. Applied Mathematics and Computation, 334, 30-40.
- Pukhov, G. E., 1982. Differential Transforms and Circuit Theory. Circuit Theory and Applications, 10, 265-276.
- Roussas, G. G., 2014. Introduction to Probability, 2, Academic Press, USA.
- Samko, S. G., Kilbas, A. A. ve Marichev O. I., 1993. Fractional Integrals and Derivatives Theory and Applications. Gordon and Breach, New York.
- Smith, G. D., 1965. Numerical Solution of Partial Differential Equations. Oxford University Press, New York.
- Soong, T. T., 1973. Random differential equations in science and engineering. Academic Press, USA.
- Sontakke, B. R. ve Shaikh, A. S., 2015. Properties of Caputo operator and its applications to linear fractional differential equations. International Journal of Engineering Research and Applications, 5, 5, 22-29.
- Su, N., 2017. Exact and approximate solutions of fractional partial differential equations for water movement in soils. Hydrology, 4, 1, 8.
- Tari, A., Rahimi, M. Y., Shahmorad, S. ve Talati, F., 2009. Solving a Class of Two-Dimensional Linear and Nonlinear Volterra Integral Equations by the Differential Transform Method. Journal of Computational and Applied Mathematics, 228, 70-76.
- Tuluçe Demiray, S., Bulut, H. ve Belgacem, F. B. M., 2015. Sumudu transform method for analytical solutions of fractional type ordinary differential equations. Mathematical Problems in Engineering, 2015.
- Wang, K. ve Liu, S., 2016. A new Sumudu transform iterative method for time-fractional Cauchy reaction-diffusion equation. Springer Plus, 5, 1, 865.
- Yang, Q., Liu, F. ve Turner, I., 2010. Numerical methods for fractional partial differential equations with Riesz space fractional derivatives. Applied Mathematical Modelling, 34, 1, 200-218.
- Yang, X. J., Baleanu, D. ve Srivastava, H. M., 2016. Local fractional integral transforms and their applications, Academic Press, London.
- Yüzbaşı, Ş. ve Ismailov, N., 2017. Differential Transform Method to Solve Two-Dimensional Volterra Integral Equations with Proportional Delays. New Trends in Mathematical Sciences, 5, 4, 65-71.

Zhou, J. K., 1986. Differential Transformation and Its Applications for Electrical Circuits. Huazhong University Press, Wuhan.

Ziyae, F. ve Tari, A., 2015. Differential Transform Method for Solving the Two-Dimensional Fredholm Integral Equations. Applications and Applied Mathematics, 10, 2, 852-863.



## 7. EKLER

### Ek 1. Olasılık Uzayı, Rastgele Değişken ve Stokastik Süreçler

İlk olarak olasılık uzayı, rastgele değişken ve stokastik süreçler ile ilgili temel tanımları verelim.

**Tanım 1.** (Aliyev, 2010)  $\Omega \neq \emptyset$  verilen bir küme ve  $\mathcal{F}$ ,  $\Omega$  nın alt kümelerinden oluşan bir küme olsun. Eğer  $\mathcal{F}$  ailesi,

$$(i) \emptyset, \Omega \in \mathcal{F},$$

$$(ii) A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F},$$

$$(iii) A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

koşullarını sağlıyorsa  $\mathcal{F}$  ye  $\Omega$  üzerinde bir  **$\sigma$  cebiri** denir.  $(\Omega, \mathcal{F})$  ikilisine de bir **ölçülebilir uzay** denir.

**Tanım 2.** (Aliyev, 2010) Bir  $P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  fonksiyonu  $(\Omega, \mathcal{F})$  ölçülebilir uzayı üzerinde aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa  $P$  ye **olasılık ölçüsü** denir.

$$(i) P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1,$$

$$(ii) A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \text{ olayları ayrık olaylar } (A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j) \text{ ise}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

dir. Bu durumda  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  üçlüsüne bir **olasılık uzayı** denir.

**Olasılık Ölçüsünün Bazı Özellikleri:**  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  bir olasılık uzayı ve  $A, B, C \in \mathcal{F}$  keyfi olaylar olsun.

$$(i) P(\emptyset) = 0,$$

$$(ii) P(\bar{A}) = 1 - P(A),$$

$$(iii) A \subseteq B \text{ ise } P(A) \leq P(B),$$

$$(iv) 0 \leq P(A) \leq 1,$$

$$(v) A \subseteq B \text{ ise } P(B \setminus A) = P(B) - P(A),$$

$$(vi) \forall A, B \in \mathcal{F} \text{ için } P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B),$$

$$(vii) \forall A, B \in \mathcal{F} \text{ için } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

$$(viii) \forall A, B \in \mathcal{F} \text{ için}$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \text{ dir.}$$

**Tanım 3.** (Aliyev, 2010)  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  bir olasılık uzayı olsun.  $\Omega$  nın  $\mathcal{F}$  ye ait altkümelerine  $\mathcal{F}$  ölçülebilir kümeler denir.

**Tanım 4.** (Aliyev, 2010)  $U$ , bir  $\Omega$  örnek uzayının tüm açık alt kümelerinin doğurduğu  $\sigma$  cebiri ise,  $\mathcal{B}$ 'ye  $\Omega$  üzerinde bir Borel  $\sigma$  cebiri denir.

**Tanım 5.** (Aliyev, 2010)  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  bir olasılık uzayı ve  $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  bir fonksiyon olsun. Eğer  $U \in \mathbb{R}^n$  tüm alt kümeleri için,

$$Y^{-1}(U) := \{w \in \Omega; Y(w) \in U\} \in \mathcal{F}$$

ise  $Y$  fonksiyonuna  $\mathcal{F}$  ölçülebilir denir.

**Tanım 6.** (Aliyev, 2010)  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  bir olasılık uzayı ve  $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$  reel sayılar kümesinin alt kümeleri üzerinde tanımlanmış Borel  $\sigma$  cebiri  $B_{\mathbb{R}}$  olsun.  $\Omega$  üzerinde tanımlanmış,  $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$  reel sayılar kümesinden değerler alan ve  $\mathcal{F}$  ölçülebilir olan  $\xi = \xi(w)$  fonksiyonuna **rastgele değişken** denir.

**Tanım 7.** (Aliyev, 2010)  $T \subseteq \mathbb{R}$  ve  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  bir olasılık uzayı olsun.  $\forall t \in T$  için  $\Omega$  örnek uzayında tanımlanmış reel değerli  $\xi(w, t)$  fonksiyonu rastgele değışikense bu fonksiyona rastgele fonksiyon denir. Rastgele fonksiyonlar  $X(w, t)$ ,  $Y(w, t)$  veya  $\xi(t)$ ,  $\eta(t)$  sembolleri ile gösterilir.  $T = \mathbb{R}^+$  ve  $t$  parametresi zamanı göstermek üzere  $\xi(w, t)$  rastgele fonksiyonuna **stokastik süreç** denir.

Eğer  $\xi(w, t)$  stokastik sürecinin  $w$  parametresi sabit tutulursa sadece  $t$  ye bağı olan rastgele olmayan bir fonksiyon elde edilir. Bu fonksiyona stokastik sürecin **realizasyonu** (gerçekleşmesi) denir. Buna karşılık  $\xi(w, t)$  stokastik sürecinin  $t$  parametresi sabit tutulursa sadece  $w$  ya bağı olan rastgele değışken elde edilir. (Aliyev, 2010)

### Stokastik sürecin Sonlu Boyutlu Dağılımları

Stokastik süreç sonsuz sayıda rastgele değışkenler ailesi olduğundan stokastik sürecin dağılım fonksiyonu da sonsuz boyutlu olmalıdır. Bu ise fonksiyonların matematiksel olarak ifade edilmesini mümkün kılmamaktadır. Dolayısıyla bir stokastik sürecin sonlu boyutlu dağılımları gerekmektedir. (Aliyev, 2010)

**Tanım 8.** (Aliyev, 2010)  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$  olmak üzere  $\xi(w, t)$  bir stokastik süreç olsun.  $\xi(w, t_1), \xi(w, t_2), \dots, \xi(w, t_n)$  rastgele değışkenlerinin  $x_i \in \mathbb{R}$  olmak üzere,

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{w: \xi(w, t_1) \leq x_1, \dots, \xi(w, t_n) \leq x_n\}$$

ortak dağılım fonksiyonuna  $\xi(w, t)$  stokastik sürecinin  **$n$  –boyutlu dağılım fonksiyonu** adı verilir. (Aliyev 2010)

Tüm  $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ 'ler ile oluşturulan  $n$  –boyutlu  $F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  fonksiyonlarının  $\{F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$  ailesine stokastik sürecin **sonlu boyutlu dağılım fonksiyonları** denir.

Sonlu boyutlu dağılım fonksiyonu ;

$$1. F_{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \infty),$$

$$2. F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$$

özelliklerine sahiptir. ( Burada  $i_1, i_2, \dots, i_n$  indekslerin yer değişimini göstermektedir.)

Birinci özellik,  $n$  boyutlu dağılım fonksiyonu biliniyorsa  $(n - 1)$  boyutlu dağılım fonksiyonunun bulunabileceğini belirtir. İkinci özellik, sonlu boyutlu dağılım fonksiyonunun indekslerin yer değişimine göre değişmez (invariant) olduğunu belirtir.

**Teorem 1. (Kolmogorov teoremi)** (Aliyev, 2010)

$x_i \in \mathbb{R}, t_i \in T$  ve  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  olmak üzere,  $n \geq 1$  için  $\{F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$  sonlu boyutlu dağılım fonksiyonları ailesi olsun. Bu durumda öyle bir  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  olasılık uzayı ve  $\xi(w, t)$  stokastik süreci vardır ki,

$$P\{w: \xi(w, t_1) \leq x_1, \dots, \xi(w, t_n) \leq x_n\} = F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (E. 1)$$

dir.

Kolmogorov teoremine göre stokastik süreç ile onun sonlu boyutlu dağılımları birbirlerinin yerine kullanılabilir.



## Ek 2. Beklenen Değer ve Varyansın Temel Özellikleri

Beklenen değer, temel özellikleri ve genelleştirilmiş sonuçları verilmektedir.

**Tanım 1.**  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  bir olasılık uzayı olsun. Bir  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  rastgele değişkeni için bu rastgele değişkenin dağılım fonksiyonu  $F_X(x)$  olsun. Eğer

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| dF_X(x) < \infty$$

ise

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dF_X(x)$$

ifadesine  $X$  rastgele değişkeninin beklenen değeri adı verilmektedir. Beklenen değer,  $X$  rastgele değişkeninin dağılımının mutlak sürekli veya kesikli olmasına göre hesaplanmaktadır.

1)  $X$  rastgele değişkeninin dağılımı mutlak sürekli olsun. Öyleyse  $X$  rastgele değişkeninin beklenen değeri aşağıdaki şekilde verilmektedir. Eğer

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| dF_X(x) < \infty$$

ise

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

olur.  $f_X(x)$ ,  $X$  rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu ifade etmektedir.

2)  $X$  rastgele değişkeninin dağılımı kesikli olsun. Öyleyse  $X$  rastgele değişkeninin beklenen değeri aşağıdaki şekilde verilmektedir. Eğer

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < \infty$$

ise

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

olur.  $X$  rastgele değişkeninin aldığı değerler  $x_i$ , bu değerlerin geręekleşebilme olasılıkları  $p_i$ ' lerdir (Khaniyev vd., 2017).

### Beklenen Değerlerin Özellikleri

Rastgele değişkenlerin beklenen değerleri var ve sonlu ise aşığıdaki özellikler mevcuttur:

- 1)  $\forall c \in \mathbb{R}$  için  $E(c) = c$ ' dir.
- 2)  $\forall c \in \mathbb{R}$  için  $E(cX) = cE(X)$ ' tir.
- 3)  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  için  $E(aX + b) = aE(X) + b$ ' dir.
- 4)  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ ' dir.
- 5)  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  için  $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ ' dir.
- 6)  $X$  ve  $Y$  bağımsız rastgele değişkenleri için,  $E(XY) = E(X)E(Y)$ ' dir.

### Genelleştirilmiş Sonuçlar

1)  $n$  –tane rastgele değişken ve  $i = 1, 2, \dots, n$  olmak üzere  $\forall a_i \in \mathbb{R}$  için aşığıdaki özellikler mevcuttur.

(i)

$$E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$$

(ii)

$$E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i) \text{ ' dir.}$$

2)  $n$  –tane bağımsız rastgele değişkeni için

$$E\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n E(X_i)$$

dir.

Varyansın tanımı, temel özellikleri ve genelleştirilmiş sonuçları verilmektedir.

**Tanım 2.**  $E[X - E(X)]^2$  ifadesine  $X$  rastgele değişkeninin varyansı adı verilmektedir. Beklenen değerin özelliklerinden,

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

formülü elde edilmektedir. Burada,

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_X(x)$$

ifadesi rastgele değişkenin ikinci momentidir.

### Varyansın Özellikleri

1)  $\forall c \in \mathbb{R}$  için  $Var(c) = 0$ ' dır.

2)  $\forall c \in \mathbb{R}$  için  $Var(cX) = c^2 Var(X)$ ' tir.

3)  $\forall X$  rastgele değişkeni için  $Var(X) \geq 0$ ' dır.

4)  $X$  ve  $Y$  bağımsız rastgele değişkenleri olsun. Bu durumda aşağıdaki  $\chi$  özellik mevcuttur.

(i)  $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$

(ii)  $Var(X - Y) = Var(X) + Var[(-1)Y] = Var(X) + (-1)^2 Var(Y)$

$\Rightarrow Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y)$ ' dir.

### Ek 3. Normal Dağılım, Gamma Dağılımı ve Beta Dağılımı

Normal, gamma ve beta dağılımının tanımları verilmektedir.

**Tanım 1.**  $X$  sürekli rastgele değişken olsun.  $-\infty < x < \infty$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$  için,  $X$ ' in olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

olduğunda,  $X$  rastgele değişkeni  $(\mu, \sigma^2)$  parametrelili normal dağılıma sahiptir denir ve  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  şeklinde ifade edilir. Ayrıca bu dağılıma Gauss dağılımı adı da verilir.

**Tanım 2.**  $X$  rastgele değişkeni  $(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$  parametrelili normal dağılıma sahip olsun.  $-\infty < x < \infty$ , olmak üzere  $X$ ' in olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

olur. Bu durumda  $X$  rastgele değişkeni  $(0,1)$  parametrelili standart normal dağılıma sahiptir denir ve  $X \sim N(0,1)$  şeklinde ifade edilir.

**Uyarı 1.**  $X$  rastgele değişkeni normal dağılıma sahip ise  $X$  rastgele değişkeninin beklenen değeri ve varyansı sırasıyla,

$$E(X) = \mu, \text{Var}(X) = \sigma^2$$

' dir (Feller, 2008 ).

**Tanım 3.** Her  $x > 0$  değerleri için tanımlı olan

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

fonksiyonuna gamma fonksiyonu adı verilmektedir.

Gamma fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1)  $x = 1, 2, 3, \dots$  için  $\Gamma(x) = (x - 1)!$  dir.

2)  $x > 0$  için  $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$  tir.

Ayrıca  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$  dir.

**Tanım 4.**  $X$  sıfır veya pozitif değerler alan sürekli bir rastgele değişken olsun.  $X$ ' in olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_X(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, & x \geq 0, \quad \alpha, \beta > 0 \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

olacak şekilde ise  $X$  rastgele değişkeni  $(\alpha, \beta)$  parametrelili gamma dağılımına sahiptir denir ve  $X \sim \text{gamma}(\alpha, \beta)$  şeklinde ifade edilir.

**Uyarı 2.**  $X$  rastgele değişkeni gamma dağılımına sahip yani  $X \sim \text{gamma}(\alpha, \beta)$  ise  $X$  rastgele değişkeninin beklenen değeri ve varyansı sırasıyla,

$$E(X) = \alpha\beta, \text{Var}(X) = \alpha\beta^2$$

' dir (Feller, 2008; Roussas, 2014).

**Tanım 5.** Tüm  $\alpha, \beta > 0$  değerleri için tanımlı olan

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$$

fonksiyonuna beta fonksiyonu adı verilmektedir. Ayrıca  $B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$ ' dir ve  $\alpha, \beta > 0$  olmak üzere,

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$

' dir.

**Tanım 6.**  $X$  sürekli bir rastgele değişken olsun.  $X$ ' in olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_X(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}, & 0 \leq x \leq 1, \quad \alpha, \beta > 0 \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

olacak şekilde ise  $X$  rastgele değişkeni  $(\alpha, \beta)$  parametrelili beta dağılımına sahiptir denir ve  $X \sim \text{beta}(\alpha, \beta)$  şeklinde ifade edilir.

**Uyarı 3.**  $X$  rastgele değişkeni beta dağılımına sahip yani  $X \sim \text{beta}(\alpha, \beta)$  ise  $X$  rastgele değişkeninin beklenen değeri ve varyansı sırasıyla,

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \text{Var}(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

' dir (Feller, 2008).

**Ek 4. Crank-Nicolson metodu ile ilgili MATLAB kodu**

```

function U = crnich(c1, c2, a, b, c, n, m)
% a=1;
% b=0.1;
% c1=0;
% c2=0;
% c=1;
% n=11;
% m=11;
% f=sin(pi*x)+sin(3*pi*x);
h=a/(n-1);
k=b/(m-1);
r=c^2*k/h^2;
s1=2+2/r;
s2=2/r-2;
U=zeros(n,m);
U(1,1:m)=c1;
U(n,1:m)=c2;
h1=h:h:(n-2)*h;
f=sin(pi*h1)+sin(3*pi*h1);
U(2:n-1,1)=f';
% U(2:n-1,1)=feval(f,h:h:(n-2)*h)';
Vd(1,1:n)=s1*ones(1,n);
Vd(1)=1;
Vd(n)=1;
Va=-ones(1,n-1);
Va(n-1)=0;
Vc=-ones(1,n-1);
Vc(1)=0;
Vb(1)=c1;
Vb(n)=c2;
for j=2:m
for i=2:n-1

```

```
Vb(i)=U(i-1,j-1) + U(i+1, j-1) + s2*U(i,j-1);  
end  
X=trisys(Va, Vd, Vc, Vb);  
U(1:n,j)=X';  
end  
U=U'  
end
```



## ÖZGEÇMİŞ

Halil ANAÇ, 1986 yılında Sinop'ta doğdu. 2004 yılında Mamak Çağrıbey Anadolu Lisesi'nden mezun oldu. 2005 yılında Kırıkkale Üniversitesi Matematik Bölümü'nde başladığı lisans eğitimini 2009 yılında tamamladı. Aynı yıl Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda başladığı yüksek lisans eğitimini 2014 yılında tamamladı. Aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda doktora eğitimine başladı. 2013 yılında Gümüşhane Üniversitesi Matematik Mühendisliği Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başlamış olup; halen görevine devam etmektedir. İngilizce bilmektedir.

Tezden üretilen ve dergilerde yayımlanan makaleler:

Anaç, H., Merdan, M., Bekiryazıcı, Z., Kesemen, T., 2019. Solving of Some Random Partial Differential Equations by Using Differential Transformation Method and Laplace- Padé Method, Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 9 (1) , 108-118.

Merdan, M., Anaç, H., Kesemen, T., 2019. The New Sumudu Transform Iterative Method for Studying The Random Component Time-Fractional Klein-Gordon Equation, Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 10 (3), 343-354.

Anaç, H., Merdan, M., Kesemen, T., 2020. Application of Crank-Nicolson Method to a Random Component Heat Equation, Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 38 (1), 475-480.

Anaç, H., Merdan, M., Kesemen, T., 2020. Solving for the random component time-fractional partial differential equations with the new Sumudu transform iterative method, SN Applied Sciences, DOI: 10.1007/s42452-020-2625-3.