KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KAFESLERDE İNDİRGENEMEZ ELEMANLAR YARDIMIYLA ÜRETİLEN T-NORMLAR

DOKTORA TEZİ

Şerife YILMAZ

HAZİRAN 2011
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KAFESLERDE İNDİRGENEMEZ ELEMANLAR YARDIMIYLA ÜRETİLEN T-NORMLAR

Yüksek Matematikçi Şerife YILMAZ

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"DOKTOR (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 18.05.2011
Tezin Savunma Tarihi : 16.06.2011

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Osman KAZANCI

Trabzon 2011

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalında

Şerife YILMAZ Tarafından Hazırlanan

KAFESLERDE İNDİRGENEMEZ ELEMANLAR YARDIMIYLA ÜRETİLEN T-NORMLAR

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 24.05.2011 gün ve 1406/2 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 16.06.2011 tarihinde yapılan sınavda

DOKTORA TEZİ

olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Adnan BAKİ

Üye : Doç. Dr. Osman KAZANCI

Üye : Doç. Dr. Sultan YAMAK

Üye : Prof. Dr. İhsan ÜNVER

Üye : Prof. Dr. Bernard DE BAETS

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

En başından beri bana inanan, bana yol gösteren, her zaman desteğini hissettiğim saygıdeğer hocam Doç. Dr. Osman KAZANCI'ya, bu çalışma süresince hiçbir yardımdan kaçınmayan, eleştirileri ile çalışmama katkıda bulunan değerli hocam Doç. Dr. Sultan YAMAK'a teşekkür ederim.

Erasmus programı kapsamında Belçika Gent Üniversitesi'nde bulunduğum zaman içerisinde çalışmalarım boyunca bana yol gösteren, beni yüreklendiren ve karşıma çıkan her problemde benden yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Bernard DE BAETS'a bana karşı göstermiş olduğu misafirperverlik, sabır ve destek için teşekkür ederim.

Bana doğru bildiğim, inandığım yolda yürümeyi öğreten, hayatım boyunca attığım her adımda, aldığım her kararda arkamda duran, yurduma ve insanlara yararlı bir insan olmam için hiçbir fedakarlıktan kaçınmadan, maksimum sevgi ve çabayla beni yetiştiren, bugünlere gelmemdeki en büyük paya sahip canım aileme teşekkür ederim.

Son olarak, Belçika'da tanıdığım ve orada bulunduğum süre boyunca yardım ve desteklerini gördüğüm, başta Barış GÜNEŞ olmak üzere bütün arkadaşlarıma ve Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'ndeki arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Şerife YILMAZ
Trabzon 2011

TEZ BEYANNAMESİ

Doktora tezi olarak sunduğum “Kafeslerde İndirgenemez Elemanlar Yardımıyla Üretilen T-Normlar” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanlarım Doç. Dr. Osman KAZANCI ve Prof. Dr. Bernard DE BAETS‘ın sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 18/05/2011

Şerife YILMAZ

İÇİNDEKİLER

Doktora Tezi

ÖZET

KAFESLERDE İNDİRGENEMEZ ELEMANLAR YARDIMIYLA ÜRETİLEN T-NORMLAR

Şerife YILMAZ

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Osman KAZANCI
2011, 52 Sayfa

Bu çalışmada, tam kafeslerin direkt çarpımında $\vee$ -indirgemez ($\wedge$ -indirgenemez) elemanlarının sıralı kümesinin yapısı irdelenmiştir. Özellikle $[0,1]^2$ tam kafesi üzerinde verilen bir t-normun (t-eşnormun) kafesin $\vee$-indirgemez ($\wedge$-indirgenemez) elemanlarının sıralı kümesine kısıtlanışının hangi durumlarda t-norm (t-eşnorm) olduğu araştırılmıştır. Sonlu dağılımlı bir kafesin $\vee$-indirgemez ($\wedge$-indirgenemez) elemanlarının kümesi üzerinde verilen bir t-norm (t-eşnorm) yardımıyla verilen kafes üzerinde bir t-norm (t-eşnorm) elde edilmiştir. Dağılımlı bir kafes üzerinde verilen bir t-normun idempotent olması için gerek ve yeter koşulun t-normun $\vee$-indirgemez elemanların kümesi üzerinde idempotent olduğu gösterilmiştir. Bir L tam kafesi üzerinde verilen bir t-eşnorm yardımıyla kafesin bir elemanı tarafından üretilen dual ideali üzerinde yeni bir t-eşnorm elde edilmiştir. $L^{[n]}$ kafesinin $\vee$ -indirgenemez elemanlarının kümesinin bir parçalanışı verilmiş ve bu parçalanış yardımıyla $L^{[n]}$ üzerinde bir t-norm elde edilmiştir. Ayrıca bir kafeste $\wedge$ ve $\vee$ işlemleri ile verilen bazı özel elemanlar t-norm ve t-eşnormlar yardımıyla genelleştirilmiş ve bu elemanların bazı cebirsel özellikleri incelenmiştir. Son olarak, sınırlı bir zincirin direkt çarpımı üzerindeki bütün otomorfizmler karakterize edilmiş ve iki kafes arasındaki izomorfizm kavramı kullanılarak, verilen t-normlardan yeni t-normlar inşa edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: kafes, t- norm, $\vee$-indirgemez eleman, kafes otomorfizmi, asal eleman

PhD. Thesis

SUMMARY

T-NORMS OBTAINED VIA THE IRREDUCIBLE ELEMENTS IN LATTICES

Şerife YILMAZ

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Assoc. Prof. Osman KAZANCI
2011, 52 Pages

In this thesis, the structure of the poset of $\vee$-irreducible ($\wedge$-irreducible) elements of the direct product of complete lattices is observed. Particularly, for a given t-norm (t-conorm) on the complete lattice $[0,1]^2$, the conditions under which the restriction of the t-norm to the set of $\vee$-irreducible ($\wedge$-irreducible) elements is again a t-norm (t-conorm) are researched. A method for constructing t-norms (t-conorms) on finite distributive lattice from a given behaviour on the $\vee$-irreducible ($\wedge$-irreducible) elements is presented. It is proved that a t-norm on a distributive lattice is idempotent if and only if it is idempotent on the set of the $\vee$-irreducible elements. A method to construct t-conorms on a dual ideal of a complete lattice via given t-conorms on the lattice is given. A partition of the set of $\vee$-irreducible elements of the lattice $L^{[n]}$ is given and a method to construct t-norms on the lattice is presented using this partition. Also some special elements in a lattice defined by the operations $\wedge$ and $\vee$ are generalized by t-norms (t-conorms). Some algebraic properties of these elements are investigated. A characterization of the automorphisms of the direct product of bounded chains is given. New t-norms are constructed from given t-norms by automorphisms.

Key Words: lattice, triangular norm, $\vee$-irreducible element, lattice automorphism, prime element

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sayfa No</u>

SEMBOLLER DİZİNİ

$y \prec x$	: x elemanı y elemanınını örter
$a \parallel b$	: a ve b elemanları kıyaslanamazdır
$L_1 \times L_2$	: L_1 ve L_2 kafeslerinin direkt çarpımı
$L^{[2]}$	: Aralık-değerli kafes
$\mathcal{P}(A)$	: A kümesinin kuvvet kümesi
$\downarrow x$	: x ile üretilen esas ideal
$Id(L)$	: L kafesinin tüm ideallerinin kümesi
$Fi(L)$	: L kafesinin tüm filtrelerinin kümesi
$K(L)$	: L kafesinin tüm kompakt elemanlarının kümesi
$A(L)$	: L kafesinin tüm atomlarının kümesi
$C(L)$	: L kafesinin tüm eş atomlarının kümesi
$J(L)$	: L 'nin bütün $\vee -$indirgenemez elemanlarının kümesi
$\mathcal{M}(L)$	: L 'nin bütün $\wedge -$indirgenemez elemanlarının kümesi
$I_T(L)$	: L üzerindeki T t-normuna göre tüm idempotent elemanların kümesi
$J(L)^*$	: L 'nin $\vee -$indirgenemez elemanlarının genişletilmiş kümesi
$\mathcal{M}(L)^*$	: L 'nin $\wedge -$indirgenemez elemanlarının genişletilmiş kümesi
$pr(L)$	: L 'nin bütün asal elemanlarının kümesi
$copr(L)$	: L 'nin bütün eş asal elemanlarının kümesi
$T_a(L)$	: L 'nin bütün $T -$asal elemanlarının kümesi
$S_e(L)$	: L 'nin bütün $S -$eş asal elemanlarının kümesi
$T_i(L)$	: L 'nin bütün $T -$indirgenemez elemanlarının kümesi
$L_R(T)$	: L 'nin tüm T-asal radikal elemanlarının kümesi

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Üçgensel norm kavramı ilk olarak Menger'in 1942 de ''Statistical Metrics'' [1] isimli çalışmasında tanımlanmıştır. Genel olarak, üçgensel normlar (kısaca t-normlar) bugünkü aksiyomları ile birlikte 1960 lı yılların başında B. Schweizer ve A. Sklar [2-5] tarafından verilmiştir. Üçgensel normları kullanmadaki temel düşünce, uzaydaki iki eleman arasındaki uzaklığın bir reel sayı yerine olasılık dağılım fonksiyonları ile ölçüldüğü metrik uzayları çalışmaktı. Üçgensel normlar metrik uzaylardaki klasik üçgen eşitsizliğini daha genel olan bağlamda, olasılıklı metrik uzaylara genelleştirmek için kullanılmıştır. Bu gelişmelerden hareketle t-normlarla ilgili elde edilen birçok sonuç B. Schweizer ve A. Sklar'ın [6] çalışmasında özetlenmiştir.

1980 li yılların başında t-normlar bulanık küme teorisinde kullanılmaya başlamıştır. Bulanık kümeleri ilk olarak Zadeh [7] ortaya koymuş ve bu kümeler üzerinde kesişim, birleşim ve tümleyen işlemlerini tanımlamıştır. Daha sonra kesişim, birleşim ve tümleyen işlemlerini modellemek için, sırasıyla, t-norm, t-eşnorm ve negasyonlar kullanılmıştır. Bulanık küme teorisi ile sıralama teorisi arasındaki yakın bağlantı sebebiyle [8], birçok yazar t-normları kısmi sıralı kümeler üzerinde, özellikle sınırlı kafesler üzerinde çalışmıştır [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15] . Bu çalışmalarda sınırlı kısmi sıralı kümeler üzerinde t-normların temel özellikleri verilmiştir.

Üçgensel normlar ve eş-üçgensel normlar agregasyon işlemlerinin önemli bir sınıfını oluşturduğundan, bu işlemler agregasyon işlemleri olarak da çalışılmış ve bu açıdan geniş uygulama alanı bulmuştur [16]. Bir agregasyon işlemi, n değişkenli reel değerli bir fonksiyondur. Birkaç girdi değerinin bir tek çıktı değerine agregasyonu sadece matematik veya fizik için vazgeçilmez bir araç değildir; mühendislik, ekonomik, sosyal bilimlerde de önemli bir role sahiptir. Üçgensel normlar ayrıca karar vermede, toplamsal olmayan ölçümler teorisinde ve istatistikte yaygın olarak kullanılır.

Matematikte t-normlar birim reel aralık (daha genel olarak, sınırlı kafesler ve kısmi sıralı kümeler) üzerinde özel ikili işlemlerdir. Üçgensel normların kesin tanımla veya daha önceden bilinen fonksiyonlardan dönüşümle elde edilen çeşitli inşaları, t-normların önemli örnek ve sınıflarını oluşturur. Bu yöntemlerle aksine örnek bulunması veya özel özelliklere sahip t-normların inşası bulanık mantığın mühendislik uygulamalarında kullanılması için önemlidir. Üçgensel normların inşasında, üreteçler kullanma, t-normların parametrik ailelerini tanımlama, rotasyonlar ve t-normların sırasal toplamı gibi yöntemler kullanılır.

Schweizer, B. and Sklar A. [5, 6] da $[0,1]$ tam kafesi üzerinde üçgensel normların dizi toplamı olarak adlandırılan inşayı verdiler. Schweizer, B. and Sklar A. bu çalışmalarında $[0,1]$ kafesinin ikişer ikişer ayrık açık alt aralıkları üzerinde tanımlı t-normlar yardımıyla bu kafes üzerinde tanımladıkları ikili işlemin bir t-norm olduğunu göstermişlerdir. S. Jenei ve B. De Baets [14] de kafeslerin çarpımı üzerinde direkt çarpım şeklinde yazılamayan üçgensel normlar üretmek için bir yöntem vermişlerdir. S. Jenei ve B. De Baets bu çalışmalarında, $[0,1]^n$ birim hiperkübü üzerinde infimum ve supremum işlemleri yardımıyla sürekli bir t-norm tanımlamışlar ve bu t-normun $[0,1]$ üzerindeki t-normların direkt çarpımı şeklinde yazılamayacağını göstermişlerdir. Üçgensel normlar özel kompakt yarıgruplar olduğundan, Clifford'un [17] verdiği sırasal toplam kavramının verilen t-normlardan yeni t-normlar elde etmek için bir yöntem sunacağı fikri ile, S. Saminger [18] , sınırlı bir kafesin sabit bir alt aralığı üzerinde verilen bir t-norm yardımıyla bir sırasal toplam tanımlamış ve bu kafesin zincirlerin yatay toplamı şeklinde yazılması durumunda bu sırasal toplamın bir t-norm olduğunu göstermiştir. B. Gasse ve diğerleri [19] , $[0,1]$ tam kafesi üzerinde verilen sol-sürekli t-normlar yardımıyla bu kafesi aralık-değerli kafesi üzerinde yeni sol-sürekli üçgensel normlar elde etmişlerdir. Literatürde birçok yazar sınırlı kafesler üzerinde yeni t-normlar üretmek için çalışmalar yapmıştır [13, 15, 20, 21, 22, 23] .

Bir kafesin yapısı ile üzerinde tanımlanabilen t-normlar arasında sıkı bir ilişki vardır. Bu tezde birinci bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilmiştir. İkinci bölümde tam kafeslerin direkt çarpımı olan kafeslerin $\vee$-indirgemez ($\wedge$-indirgenemez) elemanlarının sıralı kümesinin yapısı irdelenmiştir. Özellikle $[0,1]^2$ tam kafesi üzerinde verilen bir t-normun (t-eşnormun) bu kafesin $\vee$-indirgemez ($\wedge$-indirgenemez) elemanlarının sıralı kümesine kısıtlanışının hangi durumlarda t-norm (t-eşnorm) olduğu araştırılmıştır. Ayrıca sonlu dağılımlı bir kafesin $\vee$-indirgemez ($\wedge$-

indirgenemez) elemanlarının kümesi üzerinde verilen bir t-norm (t-eşnorm) yardımıyla verilen kafes üzerinde bir t-norm (t-eşnorm) elde edilmiştir. Dağılımlı bir kafes üzerinde verilen bir t-normun idempotent olması için gerek ve yeter koşulun t-normun $\vee$-indirgemez elemanların kümesi üzerinde idempotent olduğu gösterilmiştir. Bir L tam kafesi üzerinde verilen bir t-eşnorm yardımıyla kafesin bir elemanı tarafından üretilen dual ideali üzerinde yeni bir t-eşnorm elde edilmiştir. $L^{[n]}$ kafesinin $\vee$-indirgenemez elemanlarının kümesinin bir parçalanışı verilmiş ve bu parçalanış yardımıyla $L^{[n]}$ üzerinde bir t-norm elde edilmiştir. Ayrıca bir kafeste $\wedge$ ve $\vee$ işlemleri ile tanımlanan bazı özel elemanlar t-norm ve t-eşnormlar yardımıyla genelleştirilmiş ve bu elemanların bazı cebirsel özellikleri incelenmiştir. Son olarak, sınırlı bir zincirin direkt çarpımı üzerindeki bütün otomorfizmler karakterize edilmiş ve iki kafes arasındaki izomorfizm kavramı kullanılarak, verilen t-normlardan yeni t-normlar inşa edilmiştir.

1.2. Sıralı Kümeler Anlamında Kafesler

Bu kısımda tezin ana konusuna kaynak teşkil edecek olan sıralı kümeler ve kafeslerle ilgili temel bilgiler [24,25,26] kaynakları baz alınarak verilmiştir.

Tanım 1.2.1. $L \neq \emptyset$ olan bir küme ve ''$\leq$'' L üzerinde tanımlı bir bağıntı olsun. ''$\leq$'' bağıntısına L üzerinde bir *kısmi sıralama bağıntısı* denir $\Leftrightarrow$ Her $a, b, c \in L$ için

i) $a \leq a$,

ii) $a \leq b$ ve $b \leq a$ ise $a = b$,

iii) $a \leq b$ ve $b \leq c$ ise $a \leq c$

dir. Bu durumda $(L, \leq)$ ikilisine bir *kısmi sıralı küme* denir.

Tanım 1.2.2. $(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme ve $B \subseteq L$ ve $c, d \in L$ olsun.

i) Her $b \in B$ için $c \leq b$ ise c elemanına B kümesinin bir *alt sınırı* ,

ii) Her $b \in B$ için $b \leq d$ ise d elemanına B kümesinin bir *üst sınırı*

denir.

Tanım 1.2.3. $(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme, $B \subseteq L$ ve $a_0 \in B$ olsun.

i) Her $b \in B$ için $a_0 \leq b$ ise a_0 elemanına B kümesinin *en küçük elemanı* ,

ii) Her $b \in B$ için $b \leq a_0$ ise a_0 elemanına B kümesinin *en büyük elemanı*

denir.

Eğer L nin en küçük (en büyük) elemanı mevcut ise, bu eleman 0 (1) ile gösterilir.

Tanım 1.2.4. $(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme ve $B \subseteq L$ olsun. B nin tüm alt sınırlarının oluşturduğu küme $\underline{B}$ ve tüm üst sınırlarının oluşturduğu küme $\overline{B}$ ile gösterilsin. Bu takdirde:

i) $\underline{B} \neq \emptyset$ olan bir küme ve bu kümenin en büyük elemanı mevcut ise bu elemana B kümesinin *en büyük alt sınırı(infimumu)* denir ve inf B , $\wedge B$, $\bigwedge_{b \in B} b$ notasyonlarından biri ile gösterilir.

ii) $\overline{B} \neq \emptyset$ olan bir küme ve bu kümenin en küçük elemanı mevcut ise bu elemana B kümesinin *en küçük üst sınırı(supremumu)* denir ve sup B , $\vee B$, $\bigvee_{b \in B} b$ notasyonlarından biri ile gösterilir.

Tanım 1.2.5. $(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun.

i) Her $a, b \in L$ için inf $\{a, b\}$ mevcut ise L ‘ye bir $\wedge$-*yarıkafes*,

ii) Her $a, b \in L$ için sup $\{a, b\}$ mevcut ise L ‘ye bir $\vee$-*yarıkafes*,

iii) Her $a, b \in L$ için inf $\{a, b\}$ ve sup $\{a, b\}$ mevcut ise L ‘ye bir *kafes*

denir.

$a, b \in L$ olmak üzere a ve b elemanlarının infimumu ve supremumu, sırasıyla, $a \wedge b$ ve $a \vee b$ ile gösterilir.

Teorem 1.2.6. $(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme ve $a_1, a_2, b_1, b_2 \in L$ olsun. Bu takdirde $a_1 \leq a_2$ ve $b_1 \leq b_2$ ise $a_1 \vee b_1 \leq a_2 \vee b_2$ ve $a_1 \wedge b_1 \leq a_2 \wedge b_2$ dir.

Tümevarım yöntemi ile bir kafesin boş olmayan her sonlu alt kümesinin supremum ve infimumu vardır.

Tanım 1.2.7. $(L, \leq)$ bir kafes, $\emptyset \neq H \subseteq L$ olmak üzere, her $a, b \in H$ için $a \vee b, a \wedge b \in H$ ise, H ‘ye L ‘nin bir *alt kafes*i denir.

Tanım 1.2.8. $(L, \leq)$ bir kafes olsun.

i) Eğer L kafesinin en küçük elemanı mevcut ise L 'ye *alttan sınırlı bir kafes* denir ve $(L, \leq, 0)$ ile gösterilir.

ii) Eğer L kafesinin en büyük elemanı mevcut ise L 'ye *üstten sınırlı bir kafes* denir ve $(L, \leq, 1)$ ile gösterilir.

iii) L kafesine *sınırlıdır* denir $\Leftrightarrow$ L alttan ve üstten sınırlıdır. Eğer L sınırlı bir kafes ise bu $(L, \leq, 0, 1)$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.9. $(L, \leq)$ bir kafes olsun. L sonlu bir küme ise, $(L, \leq)$ kafesine *sonlu kafes* denir.

Özellikle her sonlu kafes sınırlıdır.

Önerme 1.2.10. $(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. $(L, \leq)$ sınırlı bir kafestir $\Leftrightarrow$ L 'nin her sonlu alt kümesi supremum ve infimuma sahiptir.

Teorem 1.2.11. $(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme ve $A, B \subseteq L$ sonlu kümeler olmak üzere,

$$\bigvee(A \cup B) = (\bigvee A) \vee (\bigvee B)$$

$$\bigwedge(A \cup B) = (\bigwedge A) \wedge (\bigwedge B)$$

dir.

Eğer $B = \emptyset$ ise, açık olarak $\bigvee \emptyset = 0$ ve $\bigwedge \emptyset = 1$ dir.

Tanım 1.2.12. $(L, \leq)$ bir kafes ve $x, y \in L$ olsun. x *y'yi örter* denir ve $y \prec x$ ile gösterilir $\Leftrightarrow$ $x < y$ ve $x \leq z < y$ olan $\forall z \in X$ için $z = x$ dir.

Tanım 1.2.13. $(L, \leq)$ bir kafes ve $a, b \in L$ olsun. Eğer $a \leq b$ veya $b \leq a$ koşullarından biri sağlanıyorsa, a ve b elemanlarına *kıyaslanabilir elemanlar* denir. Aksi takdirde *kıyaslanamaz elemanlar* denir. Eğer a ve b kıyaslanamaz elemanlar ise, bu durum $a \parallel b$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.14. $(L, \leq)$ bir kafes olsun. L'nin herhangi iki elemanı kıyaslanabilir ise L 'ye *tam sıralı kafes* veya *zincir* denir.

Tanım 1.2.15. $(L_1, \leq_1, 0_1, 1_1)$ ve $(L_2, \leq_2, 0_2, 1_2)$ iki sınırlı kafes olmak üzere,

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq_1 x_2 \text{ ve } y_1 \leq_2 y_2$$

kısmi sıralaması ile tanımlı $\left(L_1 \times L_2, \leq, (0_1, 0_2), (1_1, 1_2)\right)$ sınırlı kafesine L_1 *ve* L_2 *kafeslerinin (kartezyen) çarpımı* denir.

Tanım 1.2.16. $(L, \leq, 0, 1)$ bir sınırlı kafes ve $L^{[2]} = \{[a, b] | a, b \in L, a \leq b\}$ olsun. $[a, b], [c, d] \in L^{[2]}$ için

$$[a, b] \leq [c, d] \Leftrightarrow a \leq c \;\; \wedge \; b \leq d$$

kısmi sıralaması ile tanımlı $\left(L^{[2]}, \leq, [0,0], [1,1]\right)$ tam kafesine bir *aralık-değerli kafes* denir.

1.3. Cebirsel Yapılar Anlamında Kafesler

Tanım 1.3.1. $L \neq \emptyset$ olan bir küme ve $\wedge$ ve $\vee$, L üzerinde tanımlı ikili işlemler olsun. $(L, \wedge, \vee)$ cebirine bir *kafes* denir $\Leftrightarrow$ Her $a, b, c \in L$ için

$a \wedge b = b \wedge a$, $a \vee b = b \vee a$ (komutatif),

$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$, $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ (asosyatif),

$a \wedge a = a$, $a \vee a = a$ (idempotent),

$a \wedge (a \vee b) = a$, $a \vee (a \wedge b) = a$

dır. Bu durumda L kafesi $(L, \wedge, \vee)$ ile gösterilir.

Tanım 1.3.2. $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ cebirsel yapısına bir *sınırlı kafes* denir $\Leftrightarrow$

i) $(L, \vee, \wedge)$ bir kafes,

ii) 0 ‘’$\vee$’’ işleminin etkisiz elemanı,

iii) 1 ‘’$\wedge$’’ işleminin etkisiz elemanı dır.

Kafeslerin cebirsel yorumu evrensel cebirde önemli bir rol oynar. Kafesler grup-benzeri cebirsel yapılar ailesi ile bazı bağlantılara sahiptir. Çünkü infimum ve supremum ikili işlemleri komutatif ve asosyatiftir. Bu durumda bir kafesin, tanım kümeleri aynı olan iki komutatif yarıgruptan oluştuğu görülebilir. Kafesi özellikle sınırlı alırsak, bu takdirde bu yarıgruplar komutatif monoidler olur.

Komutatif ve asosyatiflikten dolayı, supremum ve infimum ikili işlemlerinin iki eleman yerine boştan farklı sonlu kümeler için tanımlanabileceği düşünülebilir. Teorem 1.2.11. ile $\vee \emptyset = 0$ ve $\wedge \emptyset = 1$ olduğundan sınırlı kafesler genel kafeslerden daha özeldir. Dolayısıyla birçok yazar bütün kafeslerin sınırlı olmasını arzu eder.

Tanım 1.3.3. $(L_1,\wedge_1,\vee_1,0_1,1_1)$ ve $(L_2,\wedge_2,\vee_2,0_2,1_2)$ iki sınırlı kafes olsun. $L_1 \times L_2$ üzerindeki infimum ve supremum, sırasıyla,$\forall\ (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in L_1 \times L_2$ için

$$(x_1,y_1) \wedge (x_2,y_2) = (x_1 \wedge_1 x_2, y_1 \wedge_2 y_2),$$

$$(x_1,y_1) \vee (x_2,y_2) = (x_1 \vee_1 x_2, y_1 \vee_2 y_2)$$

işlemleri ile tanımlı $\big(L_1 \times L_2,\wedge,\vee,(0_1,0_2),(1_1,1_2)\big)$ sınırlı kafesine *L_1 ve L_2 kafeslerinin (kartezyen) çarpımı* denir.

Tanım 1.3.4. $(L,\wedge,\vee\ ,0,1)$ bir sınırlı kafes olsun. $L^{[2]}$ üzerindeki infimum ve supremum, sırasıyla, $[a,b],[c,d] \in L^{[2]}$ için

$$[a,b] \sqcap [c,d] = [a \wedge c, b \wedge d],$$

$$[a,b] \sqcup [c,d] = [a \vee c, b \vee d]$$

işlemleri ile tanımlı $\big(L^{[2]},\sqcap,\sqcup,[0,0],[1,1]\big)$ tam kafesine bir *aralık-değerli kafes* denir.

Sıralı kümeler anlamında kafesler ile cebirsel yapılar anlamında kafesler arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 1.3.5. $(L,\wedge,\vee)$ bir kafes olsun. L üzerinde ‘’$\leq$’’ sıralama bağıntısı

$$a \leq b\ \Leftrightarrow a \vee b = b$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde $(L,\leq)$, Tanım 1.2.5. ile bir kafestir ve her $a,b \in L$ için,

$$a \vee b = sup\{a, b\} \text{ ve } a \wedge b = inf\{a, b\}$$

dir.

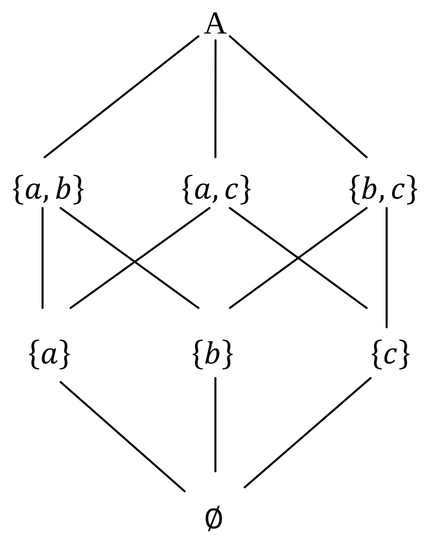
Bundan sonra aksi belirtilmedikçe $(L, \leq)$ veya $(L, \wedge, \vee)$ yerine L kafesi notasyonu kullanılacaktır.

Örnek 1.3.6.

1. A bir küme olmak üzere $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ kısmi sıralı bir kümedir. Her $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ için

$$X \wedge Y = X \cap Y \quad , \; X \vee Y = X \cup Y$$

ikili işlemleri ile birlikte sınırlı bir kafestir. Özellikle $A = \{a, b, c\}$ için $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ kafesinin kafes diyagramı Şekil 1 de verilmiştir.



Şekil 1. $A = \{a, b, c\}$ için $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ kafesinin kafes diyagramı

2. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi doğal sıralaması ile birlikte bir kafestir. Burada 0 en küçük elemandır, ancak en büyük eleman yoktur.

3. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üzerinde ‘‘ $\leq$ ’’ bağıntısı ‘‘ $a \leq b \Leftrightarrow a \mid b$ ’’ olarak tanımlanırsa, $(\mathbb{N}, \leq)$ sınırlı bir kafestir. Bu sıralama bağıntısına göre, $(\mathbb{N}, \leq)$ kafesinin en büyük ve en küçük elemanları, sırasıyla, 0 ve 1 dir.

Tanım 1.3.7. L bir kafes ve $\emptyset \neq I \subseteq L$ olsun. I ‘ya L ‘nin bir *ideal*i denir $\Leftrightarrow$

i) Her $a, b \in I$ için $a \vee b \in I$,

ii) Her $a \in I, x \in L$ için $x \leq a$ ise $x \in I$

dır. L ‘nin tüm ideallerinin kümesini $Id(L)$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.3.8. L bir kafes ve $x \in L$ olsun. $\{y \in L | y \leq x\}$ kümesine x *ile üretilen esas ideal* denir ve $\downarrow x$ ile gösterilir.

Tanım 1.3.9. L bir kafes ve $\emptyset \neq F \subseteq L$ olsun. F ‘ye L ‘nin bir *filtre*si denir $\Leftrightarrow$

i) Her $a, b \in F$ için $a \wedge b \in F$,

ii) Her $a \in F, x \in L$ için $x \geq a$ ise $x \in F$

dır. L ‘nin tüm filtrelerinin kümesini $Fi(L)$ ile gösterilecektir.

Bu tanıma göre, $x \in L$ için $\uparrow x = \{y \in L | y \geq x\}$ kümesi L ‘nin bir filtresidir.

1.4. Kafeslerin Temel Özellikleri

Bu bölümde kafeslerin bazı özel sınıfları ve özellikleri incelenecektir.

Tanım 1.4.1. L bir kafes olsun. Her $H \subseteq L$ için $\bigwedge H$ ve $\bigvee H$ mevcut ise, L ‘ye bir *tam kafes* denir.

Teorem 1.4.2. $(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Bu takdirde L bir tam kafestir $\Leftrightarrow 1 \in L$ ve her $\emptyset \neq B \subseteq L$ için $\inf B$ mevcuttur.

Tanım 1.4.3. $(L_1, \leq_1)$ ve $(L_2, \leq_2)$ iki kafes olsun. $\varphi: L_1 \to L_2$ dönüşümüne bir *kafes izomorfizmi* denir $\Leftrightarrow \varphi$ birebir, örten ve her $a, b \in L$ için

$$a \leq b \Leftrightarrow \varphi(a) \leq \varphi(b)$$

dir.

Lemma 1.4.4. L sonlu bir kafes olsun. Bu takdirde L bir tam kafestir.

Örnek 1.4.5.

1. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Bu uzayın kapalı (veya açık) alt kümelerinin kümesi bir tam kafestir.

2. Bir cebirsel yapının alt cebirlerinin kümesi bir tam kafestir.

Özellikle her tam kafes sınırlıdır. Ancak sınırlı kafeslerin tam kafes olması gerekmez.

Tanım 1.4.6. L bir kafes olsun. Her $a, b, c \in L$ için

$$D_1:\ a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c),$$

$$D_2:\ a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

eşitliklerinden en az biri sağlanıyorsa, L ‘ye bir *dağılımlı kafes* denir.

Tanımdan görüleceği gibi L kafesi D_1 koşulunu gerçekler $\Leftrightarrow$ L kafesi D_2 koşulunu gerçekler.

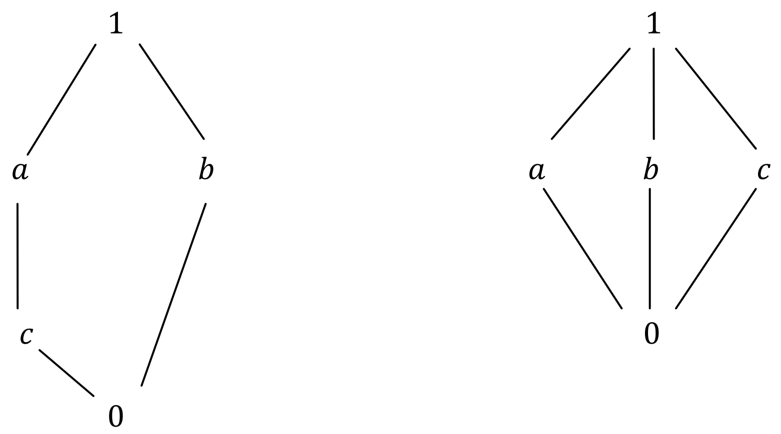
Örnek 1.4.7.

1. Her zincir dağılımlı kafestir.

2. Z_6 halkasının ideallerinin kafesi dağılımlıdır.

3. Şekil 1 de kafes diyagramı verilen $\mathcal{P}(A)$ kafesi dağılmalıdır.

4. Şekil 2 de kafes diyagramları verilen N_5 ve M_3 kafesleri dağılımlı değildir.



N_5 M_3

Şekil 2. N_5 ve M_3 kafeslerinin kafes diyagramları

Lemma 1.4.8. L dağılımlı bir kafes olsun. Bu takdirde L ‘nin her alt kafesi dağılımlıdır.

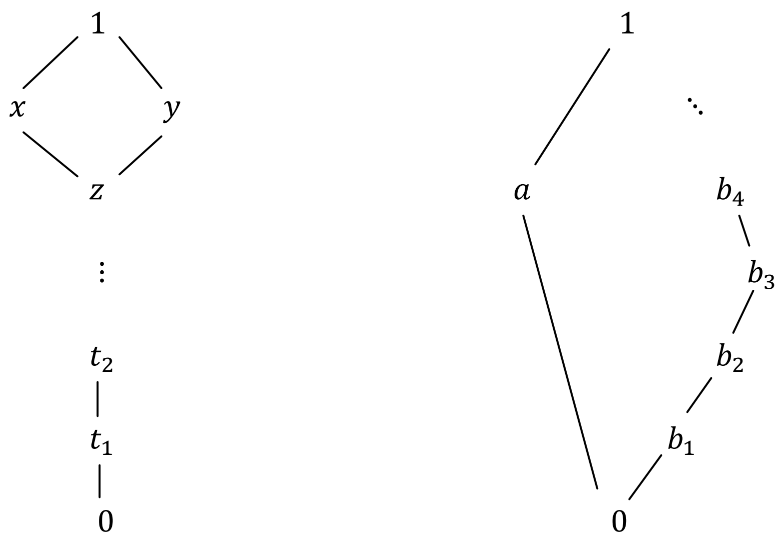
Yukarıdaki lemmadan, eğer bir kafes N_5 veya M_3 ‘e izomorf bir alt kafes içeriyorsa, bu kafes dağılımlı olamaz. Bunun tersi de şu şekilde ifade edilebilir: Bir kafes N_5 veya M_3 ‘e izomorf bir alt kafes içermiyorsa, bu kafes dağılımlıdır.

Lemma 1.4.9. L_1 ve L_2 dağılmalı kafesler olsun. Bu takdirde $L_1 \times L_2$ kafesi dağılımlıdır.

Tanım 1.4.10. L bir tam kafes olsun. Bir $x \in L$ elemanına *kompakt* denir $\Leftrightarrow$ $x \leq \bigvee A$ olacak şekildeki her $A \subseteq L$ için $\exists F \subseteq A$ sonlu kümesi öyle ki $x \leq \bigvee F$ dir.

L kafesinin tüm kompakt elemanlarının kümesi $K(L)$ ile gösterilecektir.

Dikkat edelim ki $K(L)$ sonlu supremum altında kapalıdır ve $0 \in K(L)$dir. Böylece $K(L)$ bir $\vee$-yarıkafestir. Bununla birlikte $K(L)$ infimum altında kapalı olmayabilir; Şekil 3 (a) da kafes diyagramı verilen $L = \{1, x, y, z, t_1, t_2, \dots, 0\}$ kafesinde x ve y kompakt iken $x \wedge y = z_1$ kompakt değildir.



(a) (b)

Şekil 3. $L = \{1, x, y, z, t_1, t_2, \ldots, 0\}$ ve $L = \{0, 1, a, b_1, b_2, \ldots\}$ kafeslerinin kafes diyagramları

Tanım 1.4.11. L bir tam kafes olsun. L ‘ye bir *cebirsel kafes* denir $\Leftrightarrow$ L ‘nin her elemanı kompakt elemanların supremumu şeklinde yazılabilirdir.

Cebirsel kafeslere literatürde *kompakt olarak üretilen kafesler* de denir.

Örnek 1.4.12.

1. Her sonlu kafes cebirseldir.

2. $L = [0,1]$ tam kafesini göz önüne alalım. Bu durumda $C(L) = \{0\}$ dır. Böylece L bir cebirsel kafes değildir.

3. Şekil 3 (b) de diyagramı verilen $L = \{0, 1, a, b_1, b_2, \ldots\}$ tam kafesi bir cebirsel kafes değildir. Çünkü $a \in L$ elemanı kompakt değildir ve kompakt elemanların supremumu şeklinde yazılamaz.

Tanım 1.4.13. Bir L kafesine *güçlü atomik kafes* denir $\Leftrightarrow$ $a > b$ koşulunu gerçekleyen $\forall a, b \in L$ için $\exists u \in L$ öyle ki $b \prec u \leq a$ dir.

Teorem 1.4.14. [27] L cebirsel kafesi güçlü atomik bir kafes olsun. Bu takdirde L ‘nin her elemanı indirgenemez gösterime sahiptir.

Özellikle L dağılımlı ise, indirgenemez gösterimler tektir.

Teorem 1.4.15. [27] L dağılımlı, güçlü atomik ve cebirsel bir kafes olsun. Bu takdirde L ‘nin her elemanı bir tek indirgenemez gösterime sahiptir.

Tanım 1.4.16. L sınırlı bir kafes ve $a \in L$ olsun. Bir $b \in L$ elemanına a ‘nın *tümleyen*i denir $\Leftrightarrow$ $a \wedge b = 0, a \vee b = 1$ dir. a ‘nın tümleyeni a' ile gösterilir.

Tanım 1.4.17. L sınırlı bir kafes olsun. Her $a \in L$ için $a' \in L$ mevcut ise L kafesine bir *tümlenebilir kafes* denir.

Lemma 1.4.18. Sınırlı dağılımlı bir kafeste bir elemanın tümleyeni tektir.

Tanım 1.4.19. L bir kafes ve $a \leq x \leq b$ olsun. y ye x ‘in bu aralıkta bir *göreceli tümleyeni* denir $\Leftrightarrow$ $x \wedge y = a$ ve $x \vee y = b$ dir.

Tanım 1.4.20. L bir kafes olsun. L ‘ye *göreceli tümlenebilir kafes* denir $\Leftrightarrow$ L ‘nin her elemanı kendisini kapsayan her aralıkta bir göreceli tümleyene sahiptir.

Tanım 1.4.21. L kafesi tümlenebilir ve dağılımlı bir kafes ise L kafesine *Boolean kafesi* denir.

1.5. Kafeslerde Özel Elemanlar

Tanım 1.5.1. L sınırlı bir kafes ve $a \in L$ olsun.

i) a elemanına bir *atom* denir $\Leftrightarrow$ $0 \prec a$,

ii) a elemanına bir eş-*atom* denir $\Leftrightarrow$ $a \prec 1$

dır.

L ‘nin bütün atomlarının ve eş atomlarının kümeleri, sırasıyla, $A(L)$ ve $C(L)$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.5.2. L bir tam kafes ve $x \in L$ olsun. $x = a \vee b$ koşulunu gerçekleyen her $a, b \in L$ için, $x = a$ veya $x = b$ ise x elemanına $\vee -indirgenemez\ eleman$ denir.

L 'nin bütün $\vee -$indirgenemez elemanlarının kümesi $J(L)$ ile gösterilecektir.

Lemma 1.5.3. L alttan sınırlı bir kafes olsun. Bu takdirde

i) $A(L) \subseteq J(L)$,

ii) Eğer L bir Boolean kafesi ise $A(L) \cup \{0\} = J(L)$

dir.

Uyarı 1.5.4.

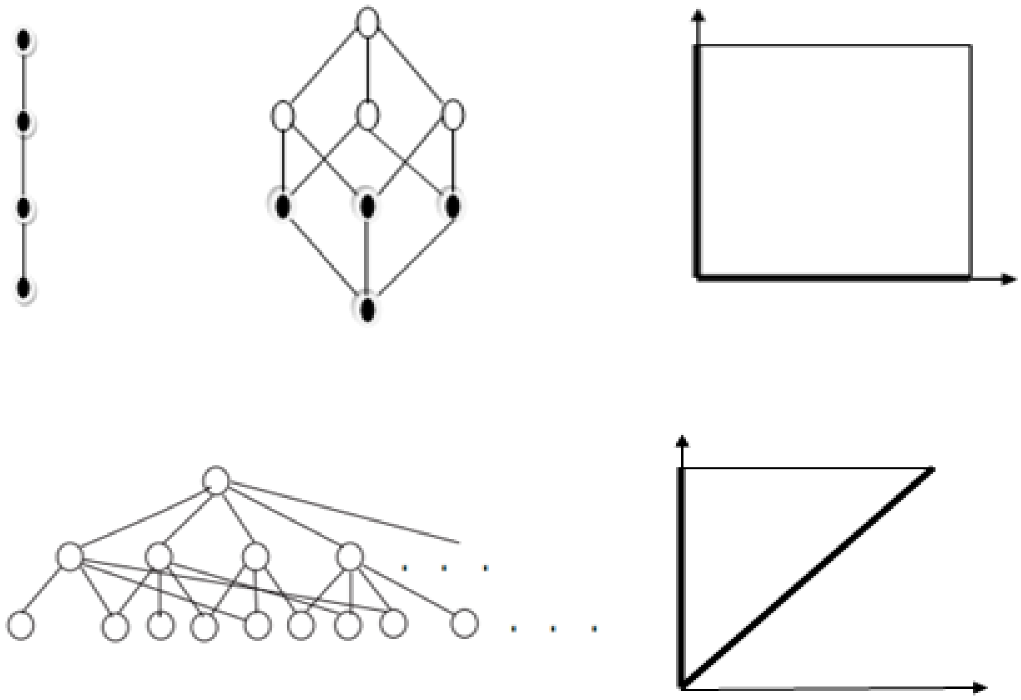
i) $J(L) \neq \emptyset$ gerekmez. Örneğin; $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi göz önüne alındığında $(Id(\mathbb{Z}), \subseteq)$ kafesinde $\vee -indirgenemez$ eleman mevcut olmadığından $J(Id(\mathbb{Z})) = \emptyset$ dir.

ii) $J(L)$'nin L 'nin bir alt kafesi olması gerekmez.

iii) Eğer L tam sıralı bir kafes ise $J(L) = L$ dir.

iv) $J(L)$ bir $\wedge$-yarıkafes (ve L 'nin bir alt $\wedge$-yarıkafesi) olabilir. Örneğin; L bir Boolean kafesi ise, $J(L) = A(L) \cup \{0\}$ bir $\wedge$-yarıkafestir.

Örnek 1.5.5. Şekil 4 te sırasıyla $L_1 = (\mathbb{N}, \leq)$, $L_2 = (\wp(A), \subseteq), A = \{a, b, c\}$, $L_3 = [0,1]^2$, $L_4 = (Id(\mathbb{Z}), \subseteq)$, $L_5 = [0,1]^{[2]}$ kafeslerinin kafes diyagramları ve bu diyagramlarda 0 elemanı ile birlikte $\vee -$indirgenemez elemanları verilmiştir.

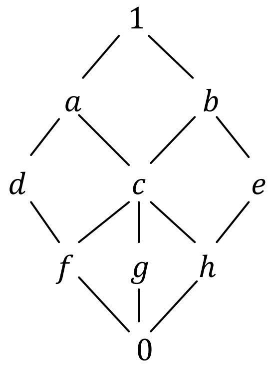


Şekil 4. Örnek 1.5.5. de verilen kafeslerin kafes diyagramları ve ∨-indirgenemez elemanları

Tanım 1.5.6. L bir tam kafes olsun. Bir $x \in L$ elemanı *sonlu* ∨-*ayrışıma sahiptir* denir ⟺ $\exists p_1, p_2, \dots, p_n \in L$ $\vee -indirgenemez$ elemanları öyle ki $x = \bigvee_{i=1}^{n} p_i$ dir. Eğer keyfi $j < n$ için $x \neq \bigvee_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} p_i$ ise, bu takdirde bu ayrışıma *indirgenemezdir* denir. Bu durumda $x \in L$ *indirgenemez sonlu bir* ∨-*ayrışıma sahiptir* denir.

Örnek 1.5.7.

1. Şekil 5 de kafes diyagramı verilen $L = \{1, a, b, c, d, e, f, g, h, 0\}$ kafesinde $J(L) = \{d, e, f, g, h\}$ olup $a = d \vee g = d \vee h$, $b = f \vee e = g \vee e, 1 = d \vee e$ olduğundan 0'dan farklı her eleman indirgenemez sonlu ∨-ayrışıma sahiptir.



Şekil 5. $L = \{1, a, b, c, d, e, f, g, h, 0\}$ kafesinin kafes diyagramı

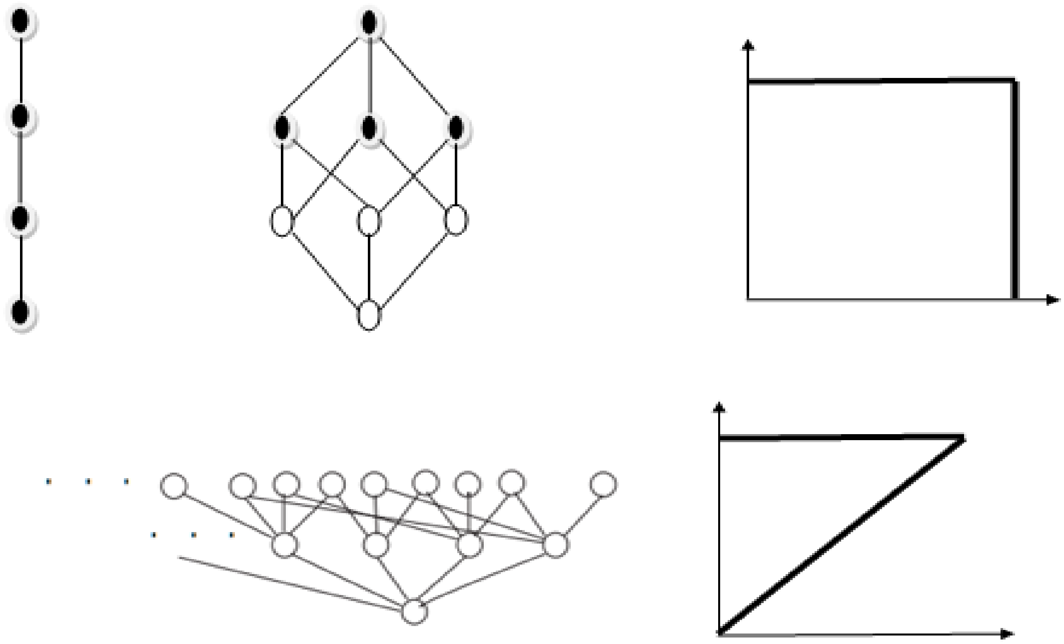
2. $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ sonlu bir küme olsun. Bu takdirde $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ bir Boolean kafesidir. Burada $J(\mathcal{P}(X)) = \{\{a_i\} \big| 1 \le i \le n\} \cup \{\emptyset\}$ olup her $A \in \mathcal{P}(X)$ için $A = \bigvee_{a \in A}\{a\}$ sonlu $\vee$ −ayrışımına sahiptir.

3. $[0,1]^2 = [0,1] \times [0,1]$ tam kafesinde $J([0,1]^2) = \{(0,x), (x,0) | x \in [0,1]\}$ dir. $\forall (x,y) \in]0,1]^2$ için $(x,y) = (0,y) \vee (x,0)$ olduğundan her $(x,y) \neq [0,0]$ elemanı sonlu $\vee$-ayrışıma sahiptir.

Tanım 1.5.8. L bir tam kafes ve $y \in L - \{1\}$ sun. $y = a \wedge b$ koşulunu gerçekleyen her $a, b \in L$ için, $y = a$ veya $y = b$ ise y ‘e bir $\wedge$ $-indirgenemez\ eleman$ denir.

L ‘nin bütün $\wedge$ −indirgenemez elemanlarının kümesi $\mathcal{M}(L)$ ile gösterilecektir.

Örnek 1.5.9. Şekil 6 da sırasıyla $L_1 = (\mathbb{N}, \leq)$, $L_2 = (\wp(A), \subseteq), A = \{a, b, c\}$, $L_3 = [0,1]^2$, $L_4 = (\mathbb{N}^*, \preccurlyeq)$, $a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \mid b$, $L_5 = [0,1]^{[2]}$ kafeslerinin diyagramları ve bu diyagramlarda 1 elemanı ile birlikte $\wedge$ −indirgenemez elemanları verilmiştir.

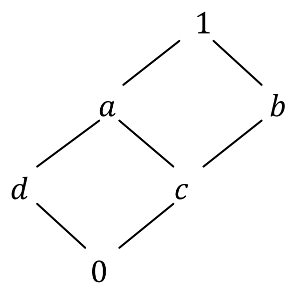


Şekil 6. Örnek 1.5.9. de verilen kafeslerin kafes diyagramları ve ∧-indirgenemez elemanları

Tanım 1.5.10. L bir tam kafes olsun. Bir $y \in L$ elemanı *sonlu ∧-ayrışıma sahiptir* denir $\Leftrightarrow$ $\exists q_1, q_2, \ldots, q_m \in L\ \wedge -indirgenemez$ elemanları öyle ki $y = \wedge_{j=1}^{m} q_j$ dir. Eğer keyfi $k \leq m$ için $x \neq \vee_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m} p_i$ ise, bu takdirde bu ayrışıma *indirgenemezdir* denir. Bu durumda $y \in L\ indirgenemez\ sonlu\ bir\ \wedge -ayrışıma\ sahiptir$ denir.

Örnek 1.5.11.

1. $L = [0,1]^{[2]}$ dağılımlı tam kafesinde $\mathcal{M}\left([0,1]^{[2]}\right) = \{(x,x),(x,1) | x \in [0,1[\}$ dir. $\forall (x,y) \in [0,1[^{[2]}$ için $(x,y) = (x,1) \wedge (y,y)$ olduğundan her $(x,y) \neq [1,1]$ elemanı sonlu ∧-ayrışıma sahiptir.
2. Şekil 7 de kafes diyagramı verilen $L = \{1,a,b,c,d,0\}$ dağılımlı kafesi için, $\mathcal{M}(L) = \{a,b,d\}$ dir. $c = a \wedge b, 0 = b \wedge d$ olduğundan 1'den farklı her eleman indirgenemez sonlu ∧-ayrışıma sahiptir.



Şekil 7. $L = \{1, a, b, c, d, 0\}$ kafesinin kafes diyagramı

Önerme 1.5.12. L sonlu dağılımlı bir kafes olsun. Bu takdirde

i) L'nin her elemanı, $\vee -indirgenemez$ elemanların supremumu şeklinde bir tek sonlu $\vee$-ayrışıma sahiptir.

ii) L'nin her elemanı, $\wedge -indirgenemez$ elemanların infimumu şeklinde bir tek sonlu $\wedge$-ayrışıma sahiptir.

Teorem 1.5.13. L bir kafes olsun. $\forall x \in L$ için,

$$\eta(x) \coloneqq \{i \in J(L) | i \leq x\} = J(L) \cap \downarrow x$$

ile tanımlı $\eta: L \to Id(J(L))$ dönüşümü L 'den $Id(J(L))$ 'ye örten bir homomorfizmdir.

Uyarı 1.5.14. Yukarıdaki teoremin açık bir sonucu olarak, eğer L dağılımlı bir kafes ise $\forall x \in L$ için $x = \vee \eta(x)$ ve $x \leq y \Leftrightarrow \eta(x) \subseteq \eta(y)$ olduğundan, $\eta(x \vee y) = \eta(x) \cup \eta(y)$ dir. O halde L dağılımlı değilse $L \ncong Id(J(L))$ dir.

Teorem 1.5.15. L sonlu dağılımlı bir kafes olsun. $\forall x \in L$ için,

$$\eta(x) \coloneqq \{i \in J(L) | i \leq x\} = J(L) \cap \downarrow x$$

ile tanımlı $\eta: L \to Id(J(L))$ dönüşümü L 'den $Id(J(L))$ 'ye bir izomorfizmdir.

Teorem 1.5.16. L bir kafes olsun. $\forall x \in L$ için,

$\mu(x) \coloneqq \{j \in \mathcal{M}(L) | j \geq x\} = \mathcal{M}(L) \cap \uparrow x$ ile tanımlı $\mu: L \to Fi(\mathcal{M}(L))$ dönüşümü L 'den $Fi(\mathcal{M}(L))$ 'ye örten bir homomorfizmdir.

Uyarı 1.5.17. Yukarıdaki teoremin açık bir sonucu olarak, eğer L dağılmalı bir kafes ise $\forall x \in L$ için $x = \mu(x)$ ve $x \leq y \Leftrightarrow \mu(x) \supseteq \mu(y)$ olduğundan $\mu(x \wedge y) = \mu(x) \cap \mu(y)$ dir. O halde L dağılımlı değilse $L \ncong Fi(\mathcal{M}(L))$ dir.

Teorem1.5.18. L sonlu dağılımlı bir kafes olsun. $\forall x \in L$ için,

$$\mu(x) \coloneqq \{j \in \mathcal{M}(L) | j \geq x\} = \mathcal{M}(L) \cap \uparrow x$$

ile tanımlı $\mu: L \to Fi(\mathcal{M}(L))$ dönüşümü L 'den $Fi(\mathcal{M}(L))$ 'ye bir izomorfizmdir.

1.6. Üçgensel ve Eş-üçgensel Normlar

Tanım 1.6.1. $(L, \leq, \wedge, \vee, 0, 1)$ bir kafes ve T L üzerinde bir ikili işlem olsun. T 'ye L üzerinde bir *t-norm* denir $\Leftrightarrow$ Her $x, y, z \in L$ için,

i) $T(x, 1) = x$,
ii) $x \leq y \Rightarrow T(x, z) \leq T(y, z)$,
iii) $T(x, y) = T(y, x)$,
iv) $T(x, T(y, z)\,) = T(T(x, y), z)$

dir.

Örnek 1.6.2. Aşağıda $L = [0,1]$ tam kafesi üzerinde tanımlı temel t-normlar ve üç-boyutlu grafikleri verilmiştir.

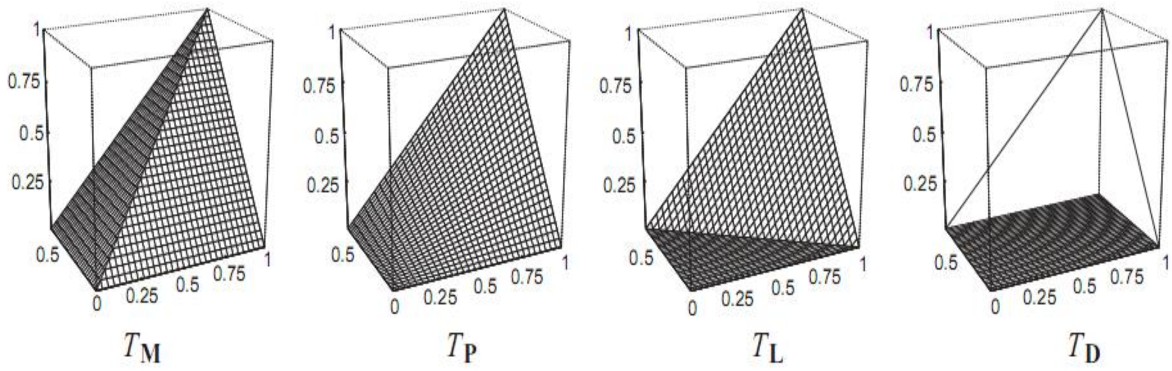
$T_M(x, y) = min\{x, y\}$ (minimum)

$T_P(x, y) = x.y$ (çarpım)

$T_L(x, y) = maks\{x + y - 1, 0\}$ (Lukasiewicz)

$$T_D(x, y) = \begin{cases} 0 , & x, y \in [0,1[\\ min\{x, y\} , & x = 1 \; veya \; y = 1 \end{cases}$$ (drastik)

$$T_{nm}(x, y) = \begin{cases} 0 , & x + y \leq 1 \\ min\{x, y\} , & x + y > 1 \end{cases}$$ (nilpotent minimum)



Şekil 8. T_M, T_P, T_L, T_D t-normlarının grafikleri

Tanım 1.6.3. $(L, \leq, \wedge, \vee, 0, 1)$ bir kafes ve T L üzerinde bir ikili işlem olsun. Her $x, y, z \in L$ için,

i) $x \leq y \Rightarrow T(x,z) \leq T(y,z)$,

ii) $T(x,y) = T(y,x)$,

iii) $T(x, T(y,z)) = T(T(x,y), z)$,

iv) $T(x,y) \leq x \wedge y$

koşulları sağlanıyorsa, T ‘ye bir *t-altnorm* denir.

Teorem 1.6.4. L bir kafes ve T L üzerinde bir t-norm olsun. Bu takdirde her $x, y \in L$ için,

i) $T(x,y) \leq x \wedge y$,

ii) $T(x,0) = T(0,x) = 0$

dır.

Tanım 1.6.5. L bir tam kafes ve T L üzerinde bir t-norm olsun.

i) T ’ye L üzerinde $\vee -dağılımlı$ t-norm denir $\Leftrightarrow$ Her $a, b_1, b_2 \in L$ için

$$T(a, b_1 \vee b_2) = T(a, b_1) \vee T(a, b_2)$$

dir.

ii) T 'ye L üzerinde sonsuz $\vee -dağılımlı$ t-norm denir ⟺ Her $a, b_i \in L(i \in I)$ için

$$T\left(a, \bigvee_{i \in I} b_i\right) = \bigvee_{i \in I} T(a, b_i)$$

dir.

Örnek 1.6.6.

1. T_P t-normu $[0,1]$ üzerinde sonsuz $\vee -dağılımlı$ bir t-normdur.
2. T_D t-normu $[0,1]$ üzerinde sonsuz $\vee -dağılımlı$ bir t-norm değildir.

Tanım 1.6.7. L bir kafes ve T_1, T_2 L üzerinde herhangi iki t-norm olsun. T_1 , T_2'den zayıftır(veya T_2 , T_1'den güçlüdür) denir ⟺ Her $x, y \in L$ için $T_1(x,y) \leq T_2(x,y)$ dir. Bu durum $T_1 \leq T_2$ ile gösterilecektir.

Örnek 1.6.8. L bir tam kafes olmak üzere,

1. Her $x, y \in L$ için

$$T_D(x,y) = \begin{cases} x \wedge y & , \quad y = 1 \; veya \; x = 1 \\ 0 & , \quad x \neq 1 \; ve \; y \neq 1 \end{cases}$$

ile tanımlı T_D L üzerinde bir t-normdur.

2. Her $x, y \in L$ için $T_M(x,y) = x \wedge y$ ile tanımlı T_M L üzerinde bir t-normdur.

L üzerinde herhangi bir T t-normu için $T_D \leq T \leq T_M$ olduğundan T_D , L üzerindeki en zayıf t-norm ve T_M , L üzerindeki en güçlü t-normdur.

Tanım 1.6.9. L_1, L_2 iki sınırlı kafes ve T_1, T_2 sırasıyla bu kafesler üzerinde iki t-norm olsun. Bu takdirde

$$T_1 \times T_2\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = \big(T_1(x_1,x_2), T_2(y_1,y_2)\big)$$

ile tanımlı $T_1 \times T_2$ ikili işlemi, $L_1 \times L_2$ kafesi üzerinde bir t-normdur. Bu t-norma *T_1 ve T_2 nin direkt çarpımı* denir.

Tanım 1.6.10. L bir tam kafes ve T L üzerinde bir t-norm olsun. $a \in L$'ye bir *idempotent eleman* denir ⟺ $T(a,a) = a$ dır.

L üzerindeki T t-normuna göre tüm idempotent elemanların kümesi $I_T(L)$ ile gösterilecektir.

Teorem 1.6.11. L bir tam kafes ve T L üzerinde bir t-norm olsun. I ve J birer indis kümesi olmak üzere $\{a_i | i \in I\}$ ve $\{b_j | j \in J\}$ aileleri için $T\left(\bigwedge_{i\in I} a_i, \bigwedge_{j\in J} b_j\right) \leq \bigwedge_{(i,j)\in I\times J} T\left(a_i, b_j\right)$ dir.

Tanım 1.6.12. $(L, \leq, \wedge, \vee, 0, 1)$ bir kafes ve S L üzerinde bir ikili işlem olsun. S 'ye L üzerinde bir *t-eşnorm* denir $\Leftrightarrow$ Her $x, y, z \in L$ için,

i) $S(x, 0) = x$,
ii) $x \leq y \Rightarrow S(x, z) \leq S(y, z)$,
iii) $S(x, y) = S(y, x)$,
iv) $S(x, S(y, z)\,) = S(S(x, y), z)$

dir.

Örnek 1.3.13. Aşağıda $L = [0,1]$ tam kafesi üzerinde tanımlı temel t-eşnormlar ve üç-boyutlu grafikleri verilmiştir.

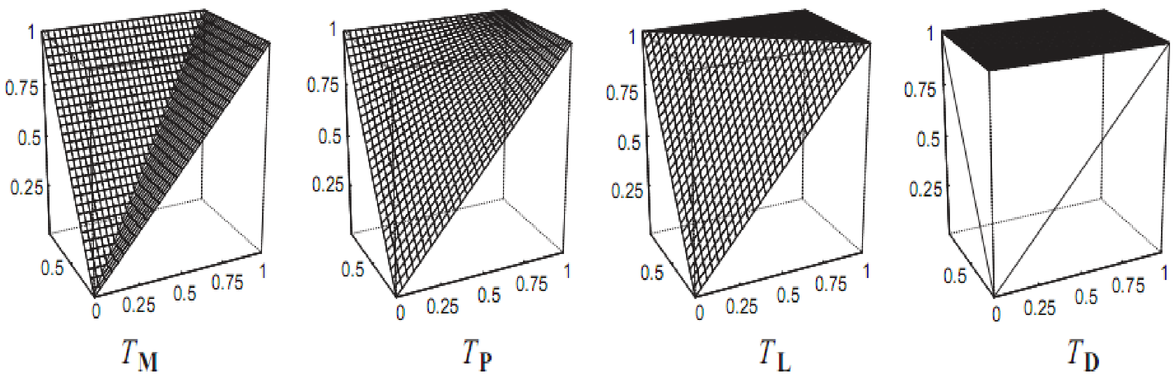
$S_M(x, y) = mak\{x, y\}$ (maksimum)

$S_P(x, y) = x + y - x.y$ (olasılıklı toplam)

$S_{LK}(x, y) = min\{x + y, 1\}$ (Lukasiewicz)

$$S_D(x, y) = \begin{cases} 1 \quad , & x, y \in L \setminus \{0\} \\ maks\{x, y\} \quad , & x = 0 \; veya \; y = 0 \end{cases}$$ (kesin toplam)

$$S_{nm}(x, y) = \begin{cases} 1 \quad , & x + y \leq 1 \\ maks\{x, y\} \; , & x + y > 1 \end{cases}$$ (nilpotent maksimum)



Şekil 9. S_M, S_P, S, S_D t-eşnormlarının grafikleri

Teorem 1.6.14. T $[0,1]$ üzerinde bir t-norm olsun. Bu takdirde $\forall x, y \in [0,1]$ için $S(x,y) = 1 - T(1-x, 1-y)$ olarak tanımlanan S ikili işlemi $[0,1]$ üzerinde bir t-eşnormdur.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR

Bazı kafesler $\vee\,(\wedge)$ - indirgenemez elemanlar gibi özel elemanlar tarafından üretilebilir. Bu bölümde tam kafeslerde $\vee\,(\wedge)$- indirgenemez elemanların kümesinin yapısı incelenerek, bu elemanlar üzerinde davranışı verilen t-normları (t-eşnormları) belirlemek amaçlanmıştır. Ayrıca $L^{[n]}$ tam kafesinin $\vee$- indirgenemez elemanlarının kümesinin bir parçalanışı verilerek, bu parçalanış yardımıyla verilen kafes üzerinde yeni t-normlar üretilmiştir.

2.1. $\vee\,(\wedge)$- İndirgenemez Elemanlar ve t-(eş)normlar

Tanım 2.1.1. L bir kafes olsun. $J(L)^* = J(L) \cup \{0,1\}$ kümesine L 'nin $\vee -indirgenemez$ *elemanlarının genişletilmiş kümesi* denir.

Önerme 2.1.2. L_1 ve L_2 tam kafesler ve $L = L_1 \times L_2$ olsun. Bu takdirde

i) $J(L) = (J(L_1) \times \{0\}) \cup \left(\{0\} \times J(L_2)\right)$ dir.

ii) $J(L_1)^*$ ve $J(L_2)^*$ $\wedge(\vee)$-yarıkafes ise $J(L)^*$de $\wedge(\vee)$-yarıkafestir.

İspat.

i) $\forall (x,y) \in L$ için $(x,y) = (x,0) \vee (0,y)$ gösterimi mevcuttur. Eğer $(x,y) \in J(L)$ ise $x = 0$ veya $y = 0$ dır. Kabul edelim ki $y = 0$ olsun. Bu durumda $(x,y) = (x,0)$ dır. Eğer $x = x_1 \vee x_2$ ise, $(x,0) = (x_1,0) \vee (x_2,0)$ dır. Böylece $x = x_1$ veya $x = x_2$ dir; buradan da $x \in J(L_1)$dir. Benzer şekilde $x = 0$ ise, $y \in J(L_2)$ elde edilir. Sonuç olarak, $J(L) \subseteq (J(L_1) \times \{0\}) \cup \left(\{0\} \times J(L_2)\right)$ elde edilir. Tersine, $(J(L_1) \times \{0\}) \cup \left(\{0\} \times J(L_2)\right) \subseteq J(L)$ olduğu açıktır. O halde $J(L) = (J(L_1) \times \{0\}) \cup \left(\{0\} \times J(L_2)\right)$ dir.

ii) $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in J(L)^*$ keyfi olsun.

a) Eğer $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in J(L_1) \times \{0\}$ ise,

$\exists x, y \in J(L_1)$ öyle ki $(x_1, y_1) = (x, 0)$ ve $(x_2, y_2) = (y, 0)$ dır. Bu durumda

$(x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2) = (x, 0) \wedge (y, 0) = (x \wedge y, 0) \in J(L_1) \times \{0\}$ dir.

b) Eğer $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \{0\} \times J(L_2)$ ise,

$\exists x, y \in J(L_2)$ öyle ki $(x_1, y_1) = (0, x)$ ve $(x_2, y_2) = (0, y)$ dir. Bu durumda

$(x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2) = (0, x) \wedge (0, y) = (0, x \wedge y) \in \{0\} \times J(L_2)$ dir.

c) Eğer $(x_1, y_1) \in J(L_1) \times \{0\}$ ve $(x_2, y_2) \in \{0\} \times J(L_2)$ ise,
$\exists x \in J(L_1), y \in J(L_2)$ öyle ki $(x_1, y_1) = (x, 0)$ ve $(x_2, y_2) = (0, y)$ dır.

Buradan $(x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2) = (x, 0) \wedge (0, y) = (0,0) \in J(L)^*$ dir.

d) Eğer $(x_2, y_2) = (0,0)$ ise,
$(x_1, y_1) \wedge (0,0) = (0,0) \in J(L)^*$ dir.
e) Eğer $(x_2, y_2) = (1,1)$ise,
$(x_1, y_1) \wedge (1,1) = (x_1, y_1) \in J(L)^*$ dir.

Böylece $J(L)^*$ bir $\wedge$-yarıkafestir. Benzer şekilde $J(L_1)^*$ ve $J(L_2)^*$ $\vee$-yarı kafes ise, $J(L)^*$ ın bir $\vee$-yarı kafes olduğu gösterilir.

Önerme 2.1.3. L bir tam kafes olsun. Bu takdirde

i) $J\left(L^{[2]}\right) = \{(x, x), (0, x) | x \in J(L)\}$ dir.

ii) $J(L)^*$ $\wedge(\vee)$-yarıkafes ise $J\left(L^{[2]}\right)^*$ de $\wedge(\vee)$-yarıkafestir.

İspat.

i) $\forall (x, y) \in L^{[2]}$ için $(x, y) = (x, x) \vee (0, y)$ gösterimi mevcuttur. Eğer $(x, y) \in J\left(L^{[2]}\right)$ ise $x = 0$ veya $y = x$ dir. Kabul edelim ki $y = x$ olsun. Böylece $(x, y) = (x, x)$ dir. Eğer $x = x_1 \vee x_2$ ise, $(x, x) = (x_1, x) \vee (x_2, x)$ dir. Buradan $x = x_1$ veya $x = x_2$; yani $x \in J(L)$ dir. Eğer $y \neq x$ ise, $x = 0$ dir. Bu durumda $(x, y) = (0, y)$ dir. Eğer $y = y_1 \vee y_2$ ise, $(0, y) = (0, y_1) \vee (0, y_2)$ dir. O halde $y = y_1$ veya $y = y_2$; yani $y \in J(L)$ dir. Sonuç olarak, $J\left(L^{[2]}\right) \subseteq \{(x, x), (0, x) | x \in J(L)\}$ dir. Tersine $\{(x, x), (0, x) | x \in J(L)\} \subseteq J\left(L^{[2]}\right)$ olduğu kolayca gösterilebilir. Böylece $J\left(L^{[2]}\right) = \{(x, x), (0, x) | x \in J(L)\}$ dir.

ii) $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in J\big(L^{[2]}\big)^*$ keyfi olsun.

a) Eğer $(x_2, y_2) = (0,0)$ ise,

$(x_1, y_1) \wedge (0,0) = (0,0) \in J\big(L^{[2]}\big)^*$ dir.

b) Eğer $(x_2, y_2) = (1,1)$ ise,

$(x_1, y_1) \wedge (1,1) = (x_1, y_1) \in J\big(L^{[2]}\big)^*$ dir.

c) Eğer $x, y \in J(L)$ olmak üzere, $(x_1, y_1) = (x, x)$ ve $(x_2, y_2) = (y, y)$ ise,

$(x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2) = (x, x) \wedge (y, y) = (x \wedge y, x \wedge y) \in J\big(L^{[2]}\big)^*$ dir.

d) Eğer $x, y \in J(L)$ olmak üzere $(x_1, y_1) = (0, x)$ ve $(x_2, y_2) = (0, y)$ ise,

$(x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2) = (0, x) \wedge (0, y) = (0, x \wedge y) \in J\big(L^{[2]}\big)^*$ dir.

e) Eğer $x, y \in J(L)$ olmak üzere $(x_1, y_1) = (x, x)$, $(x_2, y_2) = (0, y)$ ise,

$(x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2) = (x, x) \wedge (0, y) = (0, x \wedge y) \in J\big(L^{[2]}\big)^*$ dir.

Böylece $J\big(L^{[2]}\big)^*$ bir $\wedge$-yarıkafestir. Benzer şekilde $J(L)^*$ $\vee$-yarı kafes ise, $J\big(L^{[2]}\big)^*$ nin bir $\vee$-yarı kafes olduğu gösterilir.

Tanım 2.1.4. L bir kafes olsun. $\mathcal{M}(L)^* = \mathcal{M}(L) \cup \{0,1\}$ kümesine L 'nin $\wedge -$*indirgenemez elemanlarının genişletilmiş kümesi* denir.

Önerme 2.1.5. L_1 ve L_2 tam kafesler ve $L = L_1 \times L_2$ olsun. Bu takdirde

i) $\mathcal{M}(L) = (\mathcal{M}(L_1) \times \{1\}) \cup \big(\{1\} \times \mathcal{M}(L_2)\big)$ dir.

ii) $\mathcal{M}(L_1)^*$ ve $\mathcal{M}(L_2)^*$ $\vee(\wedge)$-yarıkafes ise $\mathcal{M}(L)^*$de $\vee(\wedge)$-yarıkafestir.

İspat.

i) $\forall (x, y) \in L$ için $(x, y) = (x, 1) \wedge (1, y)$ gösterimi mevcuttur. Eğer $(x, y) \in \mathcal{M}(L)$ ise $x = 1$ veya $y = 1$ dır. Kabul edelim ki $y = 1$ olsun. Bu durumda $(x, y) = (x, 1)$ dir. Eğer $x = x_1 \wedge x_2$ ise, $(x, 1) = (x_1, 1) \wedge (x_2, 1)$ dir. Böylece $x = x_1$ veya $x = x_2$; buradan da $x \in \mathcal{M}(L_1)$ dir. Benzer şekilde $x = 1$ ise, $y \in \mathcal{M}(L_2)$ elde edilir. O halde $\mathcal{M}(L) \subseteq (\mathcal{M}(L_1) \times \{1\}) \cup \big(\{1\} \times \mathcal{M}(L_2)\big)$ elde edilir. Tersine, $(\mathcal{M}(L_1) \times \{1\}) \cup \big(\{1\} \times \mathcal{M}(L_2)\big) \subseteq \mathcal{M}(L)$ olduğu kolayca gösterilebilir. O halde $\mathcal{M}(L) = (\mathcal{M}(L_1) \times \{1\}) \cup \big(\{1\} \times \mathcal{M}(L_2)\big)$ dir.

ii) $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathcal{M}(L)^*$ keyfi olsun.

a) Eğer $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathcal{M}(L_1) \times \{1\}$ ise,

$\exists x, y \in \mathcal{M}(L_1)$ öyle ki $(x_1, y_1) = (x, 1)$ ve $(x_2, y_2) = (y, 1)$ dır. Bu durumda $(x_1, y_1) \vee (x_2, y_2) = (x, 1) \vee (y, 1) = (x \vee y, 0) \in \mathcal{M}(L_1) \times \{1\}$ dir.

b) Eğer $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \{1\} \times \mathcal{M}(L_2)$ ise,

$\exists x, y \in \mathcal{M}(L_2)$ öyle ki $(x_1, y_1) = (1, x)$ ve $(x_2, y_2) = (1, y)$ dir. Bu durumda $(x_1, y_1) \vee (x_2, y_2) = (1, x) \vee (1, y) = (1, x \vee y) \in \{1\} \times \mathcal{M}(L_2)$ dir.

c) Eğer $(x_1, y_1) \in \mathcal{M}(L_1) \times \{1\}$ ve $(x_2, y_2) \in \{1\} \times \mathcal{M}(L_2)$ ise,

$\exists x \in \mathcal{M}(L_1), y \in \mathcal{M}(L_2)$ öyle ki $(x_1, y_1) = (x, 1)$ ve $(x_2, y_2) = (1, y)$ dır. Buradan $(x_1, y_1) \vee (x_2, y_2) = (x, 1) \vee (1, y) = (1,1) \in \mathcal{M}(L)^*$ dir.

d) Eğer $(x_2, y_2) = (1,1)$ ise,

$(x_1, y_1) \vee (1,1) = (1,1) \in \mathcal{M}(L)^*$ dir.

e) Eğer $(x_2, y_2) = (0,0)$ ise,

$(x_1, y_1) \vee (0,0) = (x_1, y_1) \in \mathcal{M}(L)^*$ dir.

Böylece $\mathcal{M}(L)^*$ bir $\vee$-yarıkafestir. Benzer şekilde $\mathcal{M}(L_1)^*$ ve $\mathcal{M}(L_2)^*$ $\wedge$-yarı kafes ise, $\mathcal{M}(L)^*$ ın bir $\wedge$-yarı kafes olduğu gösterilir.

Önerme 2.1.6. L bir tam kafes olsun. Bu takdirde

i) $\mathcal{M}(L^{[2]}) = \{(x, x), (x, 1) | x \in \mathcal{M}(L)\}$ dir.

ii) $\mathcal{M}(L)^*$ $\vee(\wedge)$-yarıkafes ise $\mathcal{M}(L^{[2]})^*$ de $\vee(\wedge)$-yarıkafestir.

İspat.

i) $\forall (x, y) \in L^{[2]}$ için $(x, y) = (y, y) \wedge (x, 1)$ gösterimi mevcuttur. $(x, y) \in \mathcal{M}(L^{[2]})$ ise $x = y$ veya $y = 1$ dir. Kabul edelim ki x$= y$ olsun. Böylece $(x, y) = (y, y)$ dir. Eğer $y = y_1 \wedge y_2$ ise, $(y, y) = (y, y_1) \wedge (y, y_2)$ dir. Buradan $y = y_1$ veya $y = y_2$; yani $y \in \mathcal{M}(L)$ dir. Eğer $x \neq y$ ise, $y = 1$ dir. Bu durumda $(x, y) = (x, 1)$ dir. Eğer $x = x_1 \wedge x_2$ ise, $(x, 1) = (x_1, 1) \wedge (x_2, 1)$ dir.

O halde $x = x_1$ veya $x = x_2$; yani $x \in \mathcal{M}(L)$ dir. Sonuç olarak,

$$\mathcal{M}(L^{[2]}) \subseteq \{(x, x), (x, 1) | x \in \mathcal{M}(L)\}$$

dir. Tersine $\{(x, x), (x, 1) | x \in \mathcal{M}(L)\} \subseteq \mathcal{M}(L^{[2]})$ olduğu kolayca gösterilebilir. Böylece $\mathcal{M}(L^{[2]}) = \{(x, x), (x, 1) | x \in \mathcal{M}(L)\}$ dir.

ii) $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathcal{M}(L^{[2]})^*$ keyfi olsun.

a) Eğer $(x_2, y_2) = (0,0)$ ise,

$(x_1, y_1) \vee (0,0) = (x_1, y_1) \in \mathcal{M}\left(L^{[2]}\right)^*$ dir.

b) Eğer $(x_2, y_2) = (1,1)$ ise,

$(x_1, y_1) \vee (1,1) = (1,1) \in \mathcal{M}\left(L^{[2]}\right)^*$ dir.

c) Eğer $x, y \in \mathcal{M}(L)$ olmak üzere, $(x_1, y_1) = (x, x)$ ve $(x_2, y_2) = (y, y)$ ise,

$(x_1, y_1) \vee (x_2, y_2) = (x, x) \vee (y, y) = (x \vee y, x \vee y) \in \mathcal{M}\left(L^{[2]}\right)^*$ dir.

d) Eğer $x, y \in \mathcal{M}(L)$ olmak üzere, $(x_1, y_1) = (x, 1)$ ve $(x_2, y_2) = (y, 1)$ ise,

$(x_1, y_1) \vee (x_2, y_2) = (x, 1) \vee (y, 1) = (x \vee y, 1) \in \mathcal{M}\left(L^{[2]}\right)^*$ dir.

e) Eğer $x, y \in \mathcal{M}(L)$ olmak üzere, $(x_1, y_1) = (x, x)$, $(x_2, y_2) = (y, 1)$ ise,

$(x_1, y_1) \vee (x_2, y_2) = (x, x) \vee (y, 1) = (x \vee y, 1) \in \mathcal{M}\left(L^{[2]}\right)^*$ dir.

Böylece $\mathcal{M}\left(L^{[2]}\right)^*$ bir $\vee$-yarıkafestir. Benzer şekilde $\mathcal{M}(L)^*$ $\wedge$-yarı kafes ise, $\mathcal{M}\left(L^{[2]}\right)^*$ nin bir $\wedge$-yarı kafes olduğu gösterilebilir.

Teorem 2.1.7. T, $[0,1]^2$ üzerinde bir t-norm olsun. Bu takdirde

i) T, $J([0,1]^2)^*$ üzerinde bir t-normdur.

ii) T, $[0,1] \times \{0\}$ üzerinde ve T, $\{0\} \times [0,1]$ üzerinde t-altnormdur.

iii) T direkt çarpım şeklinde ise, T, $[0,1] \times \{0\}$ üzerinde ve T, $\{0\} \times [0,1]$ üzerinde t-normdur.

İspat.

i)

1) $T \downarrow J([0,1]^2)^*$ nın $J([0,1]^2)^*$ üzerinde kapalı olduğunu gösterelim.

$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in J([0,1]^2)^*$ keyfi olmak üzere,

a) $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in [0,1] \times \{0\}$ ise,

$\exists x, y \in [0,1]$ öyle ki $(x_1, y_1) = (x, 0)$ ve $(x_2, y_2) = (y, 0)$ dır. Buradan

$T\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = T\big((x, 0), (y, 0)\big) = (z, 0) \in [0,1] \times \{0\} \subseteq J([0,1]^2)^*$ olduğundan,

$T\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) \in J([0,1]^2)^*$ elde edilir.

b) $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \{0\} \times [0,1]$ ise,

$\exists x, y \in [0,1]$ öyle ki $(x_1, y_1) = (0, x)$ ve $(x_2, y_2) = (0, y)$ dir.

$T\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = T\big((0, x), (0, y)\big) = (0, z) \in \{0\} \times [0,1] \subseteq J([0,1]^2)^*$ olduğundan,

$T\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) \in J([0,1]^2)^*$ elde edilir.

c) $(x_1, y_1) \in [0,1] \times \{0\}$ ve $(x_2, y_2) \in \{0\} \times [0,1]$ ise,

$\exists x, y \in [0,1]$ öyle ki $(x_1, y_1) = (x, 0)$ ve $(x_2, y_2) = (0, y)$ dir. Buradan

$T\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = T\big((x, 0), (0, y)\big) = (0,0) \in J([0,1]^2)^*$ elde edilir.

d) $(x_2, y_2) = (1,1)$ ise,

$T\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = T\big((x_1, y_1), (1,1)\big) = (x_1, y_1) \in J([0,1]^2)^*$ dır.

Buradan $T, J([0,1]^2)^*$ üzerinde kapalıdır.

2) T asosyatif ve $J([0,1]^2)^*$ üzerinde kapalı olduğundan T, $J([0,1]^2)^*$ üzerinde asosyatiftir.

3) T , $[0,1]^2$ üzerinde komutatif ve monoton olduğundan, $J([0,1]^2)^* \subseteq [0,1]^2$ üzerinde de komutatif ve monotondur.

4) $T\big((x_1, y_1), (1,1)\big) = (x_1, y_1)$ ve $(1,1) \in J([0,1]^2)^*$ olduğundan, $(1,1)$ birim elemandır.

Böylece $(1-4)$ ve Tanım 1.6.1. ile $T, J([0,1]^2)^*$ üzerinde bir t-normdur.

ii) T nin $[0,1] \times \{0\}$ üzerinde kapalı, asosyatif, komutatif ve monoton olduğu açıktır. Ayrıca $T\big((x, 0), (y, 0)\big) \leq min\{(x, 0), (y, 0)\}$ olduğundan, $T, [0,1] \times \{0\}$ üzerinde bir t-altnormdur.

iii) T direkt çarpım şeklinde ise, Tanım 1.6.9 ile $[0,1]$ üzerinde $\exists T_1, T_2$ t-normları öyle ki $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in [0,1]^2$ için $T\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \big(T_1(x_1, x_2), T_2(y_1, y_2)\big)$ dir.

a) $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in [0,1] \times \{0\}$ keyfi olsun. Buradan $\exists x, y \in [0,1]$ öyle ki $(x_1, y_1) = (x, 0)$ ve $(x_2, y_2) = (y, 0)$ dır.

$$T\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = T\big((x, 0), (y, 0)\big) = \big(T_1(x, y), T_2(0,0)\big)$$

$$= (T_1(x,y),0) \in [0,1] \times \{0\}$$

olup T, $([0,1] \times \{0\})$ üzerinde kapalıdır ve

$$T \downarrow ([0,1] \times \{0\})\big((x,0),(y,0)\big) = (T_1(x,y),0)$$

dır.

b) T , $[0,1]^2$ üzerinde komutatif ve monoton olduğundan, $[0,1] \times \{0\} \subseteq [0,1]^2$ üzerinde de komutatif ve monotondur.

c) T asosyatif ve T, $[0,1] \times \{0\}$ üzerinde kapalı olduğundan T $[0,1] \times \{0\}$ üzerinde asosyatiftir.

d) $T\big((x,0),(1,0)\big) = (T_1(x,1),0) = (x,0)$ olduğundan $(1,0) \in [0,1] \times \{0\}$ birim elemandır.

Sonuç olarak T, $([0,1] \times \{0\})$ üzerinde bir t-normdur. Benzer şekilde T nin $\{0\} \times [0,1]$ üzerinde bir t-norm olduğu gösterilir.

2.2. Üretilen t-normlar ve t-eşnormlar

Teorem 2.2.1. L sonlu dağılımlı bir kafes ve T $J(L)^*$ üzerinde bir t-norm olsun. Bu takdirde

$$\tilde{T}(x,y) = \vee_{j\in\eta(x)} \vee_{h\in\eta(y)} T(j,h)$$

şeklinde tanımlanan $\tilde{T}$ L üzerinde bir t-normdur.

İspat. L sonlu dağılımlı bir kafes olduğundan, Önerme 1.5.12. ile $\forall x \in L$ için $x = \vee\, \eta(x)$ sonlu gösterimi tek türlüdür. Bu durumda $\tilde{T}$ iyi tanımlıdır. Şimdi $\tilde{T}$ ‘nin t-norm olduğunu gösterelim.

i) $\tilde{T}(x,1) = \vee_{j\in\eta(x)} \vee_{h\in\eta(1)} T(j,h)$

$$= \vee_{j\in\eta(x)} T(j,\ 1)$$

$$= \vee_{j\in\eta(x)} j$$

$= x,$

böylece $\tilde{T}(x,1) = x$ dir.

ii) $x, y, z \in L$ ve $y \leq z$ olsun. Uyarı 1.5.17. ile $\eta(y) \subseteq \eta(z)$ olduğundan $\bigvee \eta(y) \leq \bigvee \eta(z)$ dir. O halde $\tilde{T}(x,y) \leq \tilde{T}(x,z)$ dir.

iii) T ve $\bigvee$ işlemleri komutatif olduğundan, $\tilde{T}(x,y) = \tilde{T}(y,x)$ dir.

iv) $x, y, z \in L$ keyfi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\tilde{T}\big(\tilde{T}(x,y),z\big) &= \tilde{T}\big(\textstyle\bigvee_{j\in\eta(x)} \bigvee_{h\in\eta(y)} T(j,h)\,,z\big) \\
&= \tilde{T}\big(T(j_{1,}h_1) \vee T(j_{1,}h_2) \vee \ldots \vee T(j_{1,}h_n) \vee \ldots \vee T(j_{m,}h_1) \vee \\
&\quad T(j_{m,}h_2) \vee \ldots \vee T(j_{m,}h_n), z\big) \\
&= T(T(j_1,h_1),k_1) \vee\ T(T(j_1,h_2),k_1) \vee \ldots \vee T(T(j_1,h_n),k_1) \vee \\
&\quad \ldots \vee T(T(j_m,h_1),k_1) \vee T(T(j_m,h_2),k_1) \vee \ldots \vee \\
&\quad T(T(j_m,h_n),k_1) \vee \ldots \vee T(T(j_1,h_1),k_r) \vee\ T(T(j_1,h_2),k_r) \vee \\
&\quad \ldots \vee T(T(j_1,h_n),k_r) \vee \ldots \vee T(T(j_m,h_1),k_r) \vee \\
&\quad T(T(j_m,h_2),k_r) \vee \ldots \vee T(T(j_m,h_n),k_r) \\
&= T\big(j_1,T(h_1,k_1)\big) \vee T\big(j_1,T(h_2,k_1)\big) \vee \ldots \vee T\big(j_1,T(h_n,k_1)\big) \vee \\
&\quad \ldots \vee T\big(j_m,T(h_1,k_1)\big) \vee T\big(j_m,T(h_2,k_1)\big) \vee \ldots \vee \\
&\quad T\big(j_m,T(h_n,k_1)\big) \vee \ldots \vee\ T\big(j_1,T(h_1,k_r)\big) \vee T\big(j_1,T(h_2,k_r)\big) \vee \\
&\quad \ldots \vee T\big(j_1,T(h_n,k_r)\big) \vee \ldots \vee\ T\big(j_m,T(h_1,k_r)\big) \vee \\
&\quad T\big(j_m,T(h_2,k_r)\big) \vee \ldots \vee T\big(j_m,T(h_n,k_r)\big) \\
&= \tilde{T}\big(x, \textstyle\bigvee_{h\in\eta(y)} \bigvee_{k\in\eta(z)} T(h,k)\ \big) = \tilde{T}\left(x,\tilde{T}(y,z)\right).
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $\tilde{T}$ nın asosyatif olduğunu gösterir. Tanım 1.6.1. ile $\tilde{T}$, L üzerinde bir t-normdur.

Örnek 2.2.2. Tam dağılımlı $[0,1]^2$ kafesinin $J([0,1]^2)^*$ kümesi üzerinde bir T ikili işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$T(x,y) = \begin{cases} (0,0) & , \quad x \in [0,1] \times \{0\}\,, y \in \{0\} \times [0,1] \\ x.y & , \quad x, y \in [0,1] \times \{0\} \\ x \wedge y & , \quad x, y \in \{0\} \times [0,1] \\ x \wedge\ y & , \quad x = (1,1)\ veya\ y = (1,1) \end{cases}$$

Bu takdirde T, $J([0,1]^2)^*$ üzerinde bir t-normdur. Gerçekten,

T nin monotonluğu ve komutatifliği açıkça gösterilebilir. $\forall x \in [0,1]^2$ için $T\big(x,(1,1)\big) = x$ olduğundan $(1,1)$ birim elemandır. Asosyatiflik için,

$\forall x, y, z \in [0,1]^2$ için $T(T(x,y),z) = T\big(x,T(y,z)\big)$

olduğu gösterilmelidir.

i) $x, y, z \in [0,1] \times \{0\}$ ise, $T(T(x,y),z) = T(x.y,z) = x.y.z$ ve $T\big(x,T(y,z)\big) = T(x,y.z) = x.y.z$ olup $T(T(x,y),z) = T\big(x,T(y,z)\big)$ dir.

ii) $x, y, z \in \{0\} \times [0,1]$ ise, $T(T(x,y),z) = T(x \wedge y, z) = x \wedge y \wedge z$ ve $T\big(x,T(y,z)\big) = T(x, y \wedge z) = x \wedge y \wedge z$ olup $T(T(x,y),z) = T\big(x,T(y,z)\big)$ dir.

iii) $x, y \in [0,1] \times \{0\}$ ve $z \in \{0\} \times [0,1]$ ise, $T(T(x,y),z) = T(x.y,z) = (0,0)$ ve $T\big(x,T(y,z)\big) = T\big(x,(0,0)\big) = (0,0)$ olup $T(T(x,y),z) = T\big(x,T(y,z)\big)$ dir.

iv) $x \in [0,1] \times \{0\}$ ve $y, z \in \{0\} \times [0,1]$ ise, $T(T(x,y),z) = T\big((0,0),z\big) = (0,0)$ ve $T\big(x,T(y,z)\big) = T(x, y \wedge z) = (0,0)$ olup $T(T(x,y),z) = T\big(x,T(y,z)\big)$ dir.

v) $x = (1,1)$ ise, $T\big(T\big((1,1),y\big),z\big) = T(y,z)$ ve $T\big((1,1),T(y,z)\big) = T(y,z)$ olup $T(T(x,y),z) = T\big(x,T(y,z)\big)$ dir.

Buradan T asosyatiftir. Böylece T, $J([0,1]^2)^*$ üzerinde bir t-normdur. Şimdi Teorem 2.2.1. kullanılarak, $\tilde{T}$ nın $[0,1]^2$ üzerinde bir t-norm olduğu gösterilsin.

$x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in J([0,1]^2)^*$ keyfi olsun.

$$\tilde{T}(x,y) = \vee_{j \in \eta(x)} \vee_{h \in \eta(y)} T(j,h)$$

$$= T\big((x_1,0),(y_1,0)\big) \vee T\big((x_1,0),(0,y_2)\big) \vee T\big((0,x_2),(y_1,0)\big) \vee T\big((0,x_2),(0,y_2)\big)$$

$$= (0, x_2 \wedge y_2) \vee (x_1.y_1, 0)$$

$$= (x_1.y_1, x_2 \wedge y_2)$$

dir. Tanım 1.6.9. ile $\tilde{T}$, $[0,1]^2$ üzerinde bir t-normdur.

Teorem 2.2.3. L dağılımlı bir tam kafes ve T , L üzerinde bir t-norm olsun. Bu takdirde $J(L) \subseteq I_T(L) \Leftrightarrow T = \wedge$ dir.

İspat. L bir dağılımlı tam kafes olduğundan, $\forall x \in L$ için $\exists j_m \in J(L), m \in Q$ öyle ki $x = \bigvee_{meQ} j_m$ dir. $x \in L$ keyfi olsun. Buradan

$$T(x,x) = T\left(\bigvee_{meQ} j_m, \bigvee_{meQ} j_m\right) \geq \left(\bigvee_{m\in Q} T(j_m, j_m)\right) \vee \left(\bigvee_{m,n\in Q, m\neq n} T(j_m, j_n)\right)$$

$$\geq \bigvee_{m\in Q} T(j_m, j_m) = \bigvee_{meQ} j_m = x$$

olduğundan $T(x,x) = x$ elde edilir. O halde $T = \wedge$ dir. Tersi açıktır.

Teorem 2.2.4. L sonlu dağılımlı bir kafes ve S $M(L)^*$ üzerinde bir t-eşnorm olsun. Bu takdirde

$$\tilde{S}(x,y) = \wedge_{m\in\mu(x)} \wedge_{n\in\mu(y)} S(m,n)$$

şeklinde tanımlanan $\tilde{S}$ L üzerinde bir t-eşnormdur.

İspat. L sonlu dağılımlı bir kafes olduğundan, Önerme 1.5.12. ile $\forall x \in L$ için $x = \wedge \mu(x)$ sonlu gösterimi tek türlüdür. Bu durumda $\tilde{S}$ iyi tanımlıdır. Şimdi $\tilde{S}$ 'nin t-eşnorm olduğunu gösterelim.

i)
$$\begin{aligned}\tilde{S}(x,0) &= \wedge_{m\in\mu(x)} \wedge_{n\in\mu(y)} S(m,n)\\ &= \wedge_{m\in\mu(x)} S(m,0)\\ &= \wedge_{m\in\mu(x)} m\\ &= x,\end{aligned}$$

böylece $\tilde{S}(x,0) = x$ dir.

ii) $x,y,z \in L$ ve $y \leq z$ olsun. Uyarı 1.5.17. ile $\mu(z) \subseteq \mu(y)$ olduğundan $\wedge \mu(y) \leq \wedge \mu(z)$ dir. O halde $\tilde{S}(x,y) \leq \tilde{S}(x,z)$ dir.

iii) S ve $\wedge$ işlemleri komutatif olduğundan, $\tilde{S}(x,y) = \tilde{S}(y,x)$ dir.

iv) $x,y,z \in L$ keyfi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\tilde{S}(\tilde{S}(x,y),z) &= \tilde{S}(\wedge_{m\in\mu(x)} \wedge_{n\in\mu(y)} S(m,n), z)\\ &= \wedge_{m\in\mu(x)} \wedge_{n\in\mu(y)} \wedge_{q\in\mu(z)} S(S(m,n),q)\end{aligned}$$

$$= \wedge_{m\in\mu(x)} \wedge_{n\in\mu(y)} \wedge_{q\in\mu(z)} S\big(m, S(n,q)\big)$$

$$= \tilde{S}\left(x, \tilde{S}(y,z)\right)$$

elde edilir. Bu ise $\tilde{S}$ nın asosyatif olduğunu gösterir. Tanım 1.6.12. ile $\tilde{\tilde{S}}$, L üzerinde bir t-eşnormdur.

Önerme 2.2.5. S L üzerinde sonsuz $\wedge -dağılımlı$ bir t-eşnorm ve $x \in L$ olsun. Bu takdirde

$$\vec{S} :=\downarrow x \ \times \downarrow x \longrightarrow \downarrow x \quad , \quad \vec{S}(a,b) = S(a,b) \wedge x$$

ile tanımlı $\vec{S}$ $\downarrow x$ üzerinde sonsuz $\wedge -dağılımlı$ bir t-eşnormdur.

İspat. $a, b, c \in\downarrow x$ keyfi olsun.

i) $\vec{S}(a,0) = S(a,0) \wedge x = a \wedge x = a$, 0 birim elemandır.

ii) $\vec{S}$ nın monotonluğu ve komutatifliği S nin bir t-eşnorm olmasından ve $\wedge$ işleminden kolaylıkla elde edilir.

iii) $\vec{S}$ nın asosyatif olduğunu gösterelim.

$$\vec{S}\big(\vec{S}(a,b),c\big) = \vec{S}(S(a,b) \wedge x, c) = S(S(a,b) \wedge x, c) \wedge x$$

$$= S(S(a,b),c) \wedge S(x,c) \wedge x$$

$$= S(S(a,b),c) \wedge x$$

$$= S(S(a,b),c) \wedge S(a,x) \wedge x$$

$$= S(a, S(b,c) \wedge x) \wedge x$$

$$= S\left(a, \vec{S}(b,c)\right) \wedge x$$

$$= \vec{S}\left(a, \vec{S}(b,c)\right)$$

dir. Bu ise $\vec{S}$ nın asosyatif olduğunu gösterir. Şimdi $\vec{S}$ nın sonsuz $\wedge -$ dağılımlı olduğunu gösterelim.

iv) $\vec{S}(a, \wedge_{i\in I} b_i) = S(a, \wedge_{i\in I} b_i) \wedge x = (\wedge_{i\in I} S(a,b_i)) \wedge x$

$$= \wedge_{i\in I}(S(a,b_i) \wedge x) = \wedge_{i\in I} \vec{S}(a,b_i)$$

dir. Böylece $\vec{S}$ sonsuz $\wedge -$dağılımlı bir t-eşnormdur.

Teorem 2.2.6. L dağılımlı bir tam kafes ve S , L üzerinde bir t-eşnorm olsun. Bu takdirde $M(L) \subseteq I_S(L) \Leftrightarrow S = \vee$ dir.

İspat. L dağılımlı bir tam kafes olduğundan, $\forall x \in L$ için $\exists m_i \in M(L), i \in I$ öyle ki $x = \bigwedge_{i \in I} m_i$ dir. $x \in L$ keyfi olsun.

$$S(x,x) = S(\textstyle\bigwedge_{i \in I} m_i \,, \bigwedge_{i \in I} m_i)$$

$$\leq (\textstyle\bigwedge_{i \in I} S(m_i, m_i)) = \bigwedge_{i \in I} m_i = x$$

olduğundan $S(x,x) = x$ elde edilir. O halde $S = \vee$ dır. Tersi açıktır.

L sınırlı bir zincir olmak üzere, $L^{[n]} = \{(a_1, a_{2,} \dots, a_n) | a_i \in L \,, a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n\}$ sınırlı bir dağılımlı kafestir. C. Walker ve E. Walker [30] de bu kafesin $\vee -$indirgenemez elemanlarının kümesinin

$$(0,0, \dots ,0, a), (0,0, \dots ,0, a, a), \dots , (0, a, \dots , a), (a, a, \dots , a)$$

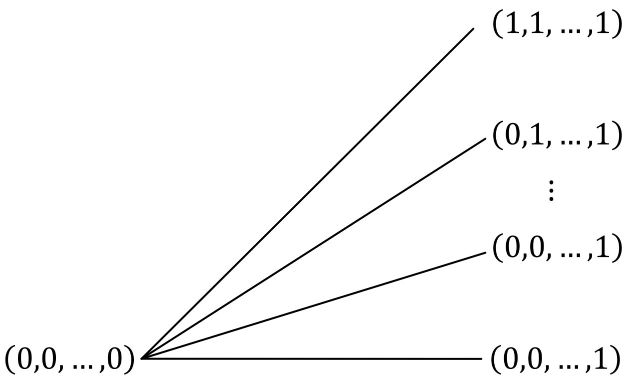
formundaki elemanlardan oluştuğunu göstermişlerdir. Biz burada $L^{[n]}$ kafesinin $\vee -$indirgenemez elemanlarının kümesinin bir parçalanışını vereceğiz ve bu parçalanış yardımıyla $L^{[n]}$ üzerinde t-normlar tanımlayacağız.

Önerme 2.2.7.

$$\begin{aligned} J_1 &= \{(0,0, \dots ,0, a) | a \in L\}, \\ J_2 &= \{(0,0, \dots ,0, a, a) | a \in L\}, \\ &\vdots \\ J_{n-1} &= \{(0, a, \dots , a, a) | a \in L\}, \\ J_n &= \{(0,0, \dots ,0, a) | a \in L\} \end{aligned}$$

kümeleri $J(L^{[n]})$ in bir parçalanışını oluşturur.

İspat. Açık olarak keyfi $k \neq m$ için $J_k \cap J_m = \{(0,0, \dots ,0)\}$ ve $J(L^{[n]}) = \bigcup_{i=1}^{n} J_n$ olduğundan, $J_1, J_2, \dots , J_n$ kümeleri $J(L^{[n]})$ in bir parçalanışını oluşturur.



Şekil 10. $L^{[n]}$ kafesinin $\vee -indirgenemez$ elemanlarının parçalanışı

Teorem 2.2.8. T_i $J_i(i \in \{1,2,\dots,n\})$ üzerinde t-norm olmak üzere,

$x = \bigvee_{i\in\{1,2,\dots,n\}} x_i$, $y = \bigvee_{i\in\{1,2,\dots,n\}} y_i$, $x_i, y_i \in J_i$ için

$$T : L^{[n]} \times L^{[n]} \to L^{[n]} \quad , \quad T(x,y) = \bigvee_{i\in\{1,2,\dots,n\}} T_i(x_i, y_i)$$

şeklinde tanımlanan T ikili işlemi $L^{[n]}$ üzerinde bir t-normdur.

İspat.

i)
$$\begin{aligned} T\big((x_1,x_2,\dots,x_n),(1,1,\dots,1)\big) &= T_1\big((x_1,x_1,\dots,x_1),(1,1,\dots,1)\big) \vee \\ &= T_2\big((0,x_2,\dots,x_2),(0,1,\dots,1)\big) \vee \dots \vee \\ &\quad T_n\big((0,0,\dots,x_n),(0,0,\dots,0,1)\big) \\ &= (x_1,x_1,\dots,x_1) \vee (0,x_2,\dots,x_2) \vee \dots \vee \\ &\quad (0,0,\dots,x_n) \\ &= (x_1,x_2,\dots,x_n) \end{aligned}$$

ii) $\forall 1 \le i \le n$ için T_i , J_i üzerinde t-norm olduğundan T nin komutatifliği ve monotonluğu açıktır.

iii) Şimdi T nin asosyatif olduğunu gösterelim. $(x_1,x_2,\dots,x_n) \in L^{[n]}$ keyfi olsun. Bu durumda

$$T\Big(T\big((x_1,x_2,\dots,x_n),(y_1,y_2,\dots,y_n)\big),(z_1,z_2,\dots,z_n)\Big) =$$

$$T\Big(T_1\big((x_1,x_1,\dots,x_1),(y_1,y_1,\dots,y_1)\ \big) \vee \dots$$
$$\vee \quad T_n\big((0,0,\dots,x_n),(0,0,\dots,0,y_n)\big),(z_1,z_2,\dots,z_n)\Big) =$$

$$T_1\Big(T_1\big((x_1,x_1,\dots,x_1),(y_1,y_1,\dots,y_1)\ \big),(z_1,z_1,\dots,z_1)\Big) \vee \dots$$
$$\vee T_n\Big(\quad T_n\big((0,0,\dots,x_n),(0,0,\dots,0,y_n)\big),(0,0,\dots,z_n)\Big) =$$

$$T_1\Big((x_1,x_1,\dots,x_1),T_1\big((y_1,y_1,\dots,y_1),(z,z_1,\dots,z_1)\ \big)\Big) \vee \dots$$
$$\vee T_n\Big(\ (0,0,\dots,x_n),T_n\big((0,0,\dots,y_n),(0,0,\dots,0,z_n)\big)\Big) =$$

$$T\Big((x_1,x_2,\dots,x_n),T\big((y_1,y_2,\dots,y_n),(z_1,z_2,\dots,z_n)\ \big)\Big)$$

elde edilir. Bu ise T nin asosyatif olduğunu gösterir. Sonuç olarak T, $L^{[n]}$ üzerinde bir t-normdur.

Uyarı 2.2.9. Eğer L sonlu bir zincir ise, yukarıdaki teoremde verilen t-norm sonsuz $\vee -da\text{ğ}\imath l\imath ml\imath$ dır.

2.3. t-norm ve t-eşnorm Yardımıyla Tanımlanan Elemanlar

Bu bölümde kafeslerdeki $\wedge$ ve $\vee$ işlemleri ile verilen bazı özel elemanlar t-norm ve t-eşnormlar yardımıyla genelleştirilmiş ve bu elemanların bazı özellikleri incelenmiştir.

Tanım 2.3.1.[29]

i) $x \in L$ olsun. $a \wedge b \leq x$ koşulunu gerçekleyen her $a, b \in L$ için $a \leq x$ veya $b \leq x$ ise, x elemanına $asal\ eleman(veya\ \wedge -asal\ eleman)$ denir.

ii) $x \in L$ olsun. $a \vee b \geq x$ koşulunu gerçekleyen her $a, b \in L$ için $a \geq x$ veya $b \geq x$ ise, x elemanına eş $asal\ eleman(veya\ \vee -asal\ eleman)$ denir.

L ‘nin bütün asal ve eş asal elemanlarının kümeleri, sırasıyla, $pr(L)$ ve $copr(L)$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.3.2. [29] T L üzerinde bir t-norm ve $p \in L \setminus \{1\}$ olsun.

i) p elemanına $T - asal\ eleman$ denir $\Leftrightarrow$ $T(a,b) \leq p$ koşulunu gerçekleyen her $a, b \in L$ için $a \leq p$ veya $b \leq p$ dir.

ii) p elemanına $T - yarıasal\ eleman$ denir $\Leftrightarrow$ $T(a,a) \leq p$ koşulunu gerçekleyen her $a \in L$ için $a \leq p$ dir.

Tanım 2.3.3. S L üzerinde bir t-eşnorm ve $q \in L \setminus \{0\}$ olsun.

i) q elemanına $S - eş\ asal\ eleman$ denir $\Leftrightarrow$ $S(a,b) \geq q$ koşulunu gerçekleyen her $a, b \in L$ için $a \geq q$ veya $b \geq q$ dir.

ii) q elemanına $S - yarı\ eş\ asal\ eleman$ denir $\Leftrightarrow$ $S(a,a) \geq q$ koşulunu gerçekleyen her $a \in L$ için $a \geq q$ dir.

L ‘nin bütün T −asal ve S −eş asal elemanlarının kümeleri, sırasıyla, $T_a(L)$ ve $S_e(L)$ ile gösterilecektir.

Önerme 2.3.4. [26] L bir kafes olsun. Bu takdirde

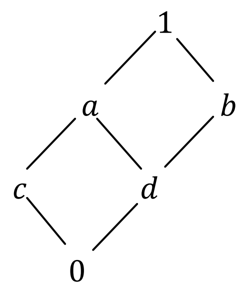
i) $pr(L) \subseteq \mathcal{M}(L)$ ve $copr(L) \subseteq J(L)$,

ii) Eğer L dağılımlı ise $\mathcal{M}(L) \subseteq pr(L)$ ve $J(L) \subseteq copr(L)$

dir.

Örnek 2.3.5.

1. Şekil 11 de kafes diyagramı verilen $L = \{0, a, b, c, d, 1\}$ dağılımlı kafesinde $J(L) = copr(L) = \{b, c, d\}$ dir.



Şekil 11. Örnek 2.3.5. de verilen $L = \{0, a, b, c, d, 1\}$ kafesinin kafes diyagramı

2. Örnekler 1.4.6. (2) de verilen N_5 kafesinde $J(N_5) = \{a, b, c\}$ ve $copr(N_5) = \{b, c\}$ dir.

Önerme 2.3.6. L bir kafes, S L üzerinde bir t-eşnorm ve 1 $S - yarı\ eş\ asal$ eleman olsun. $x, y \in L$ olmak üzere,

$$S(x, y) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \vee y = 1$$

dir.

İspat. $\Leftarrow$: $x \vee y = 1$ olsun. $S(x, y) \geq x \vee y = 1$ ve böylece $S(x, y) = 1$ dir.

$\Rightarrow$: $S(x, y) = 1$ olsun. Bu durumda $S(x \vee y, x \vee y) \geq S(x, y) = 1$ dir. 1 $S - yarı\ eş\ asal$ eleman olduğundan $x \vee y = 1$ dir.

Tanım 2.3.7. T , L üzerinde bir t-norm ve $p \in L \setminus \{1\}$ olsun. $T(a, b) = p$ koşulunu gerçekleyen her $a, b \in L$ için $a = p$ veya $b = p$ ise p elemanına $T - indirgenemez\ eleman$ denir.

L 'nin tüm T-indirgenemez elemanlarının kümesi $T_i(L)$ ile gösterilecektir.

Önerme 2.3.8. T, L üzerinde bir t-norm ise $T_a(L) \subseteq T_i(L)$ dir.

İspat. $q \in T_a(L)$ keyfi ve $T(x, y) = q$ olsun. $q \leq x$ ve $q \leq y$ olduğu açıktır.

$T(x, y) = q \leq q$ ve $q \in T_a(L)$ olduğundan, $x \leq q$ veya $y \leq q$ dir. Buradan $x = q$ veya $y = q$ dir, böylece $q \in T_i(L)$ dir.

Önerme 2.3.9. T_1, T_2 L üzerinde t-normlar ve $T_1 \leq T_2$ olsun. Bu takdirde ${T_1}_a(L) \subseteq {T_2}_a(L)$ dir.

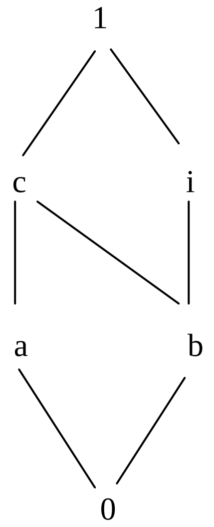
İspat. $p \in {T_1}_a(L)$ keyfi ve ${T_2}_a(x, y) \leq p$ olsun. Bu durumda ${T_1}_a(x, y) \leq {T_2}_a(x, y) \leq p$ ve böylece $x \leq p$ veya $y \leq p$ dir.

Uyarı 2.3.10. L üzerindeki keyfi T t-normu için $T_D \leq T \leq T_M$ olduğundan, ${T_D}_a(L) \subseteq T_a(L) \subseteq {T_M}_a(L)$ dir.

Örnek 2.3.11. Şekil 12 de kafes diyagramı verilen $L = \{0, a, b, c, i, 1\}$ dağılımlı kafesi üzerinde T_1 ve T_2 t-normları aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$T_1(x,y) = \begin{cases} x \wedge y & , \quad x = 1 \; veya \; y = 1 \\ x \wedge y \wedge i & , \quad diğer \; durumda \end{cases}$$

$$T_2(x,y) = \begin{cases} i & , \quad x = i \,, y = i \\ x \wedge y & , \quad x = 1 \; veya \; y = 1 \\ 0 & , \quad diğer \; durumda \end{cases}$$



Şekil 12. Örnek 2.3.11 de verilen $L = \{0, a, b, c, i, 1\}$ kafesinin kafes diyagramı

Bu takdirde $T_{1_a}(L) = \{a, c\}$, $T_{2_a}(L) = \{c\}$, $T_{M_a}(L) = \{i, a, c\}$, $T_{D_a}(L) = \emptyset$ olup $T_{D_a}(L) \subseteq T_{2_a}(L) \subseteq T_{1_a}(L) \subseteq T_{M_a}(L)$ dır.

Tanım 2.3.12. [29] T, L üzerinde bir t-norm ve $x \in L$ olsun. Eğer

$x = \wedge\{p \in T_a(L) | p \geq x\}$ ise, a elemanına $T - asal\ radikal\ eleman$ denir.

L 'nin tüm T-asal radikal elemanlarının kümesi $L_R(T)$ ile gösterilecektir. Özel olarak, $1 \in L_R(T)$ alınacaktır.

Önerme 2.3.13. T_1, T_2 L üzerinde iki t-norm ve $T_1 \leq T_2$ olsun. Bu takdirde $L_R(T_1) \subseteq L_R(T_2)$ dir.

İspat. $x \in L_R(T_1)$ keyfi olsun. Bu durumda

$$x = \bigwedge\{p \in T_{1_a}(L) \big| p \geq x\} \geq \bigwedge\{p \in T_{2_a}(L) \big| p \geq x\}$$

dir. Diğer yandan $x \leq \bigwedge\{p \in T_{2_a}(L) \big| p \geq x\}$ olduğundan, $x = \bigwedge\{p \in T_{2_a}(L) \big| p \geq x\}$ dir. Buradan $x \in L_R(T_2)$ dir. O halde $L_R(T_1) \subseteq L_R(T_2)$ dir.

Önerme 2.3.14. T_1, T_2 L üzerinde iki t-norm ve $T_1 \leq T_2$ olsun. Bu takdirde $L_R(T_1)$, $L_R(T_2)$ 'nin bir –alt $\wedge$-yarıkafesidir.

İspat. $x, y \in L_R(T_1)$ keyfi olsun. Bu durumda $x = \bigwedge\{p \in T_{1_a}(L) \big| p \geq x\}$, $y = \bigwedge\{q \in T_{1_a}(L) \big| q \geq y\}$ dir.

$$\begin{aligned} x \wedge y &= \bigwedge\{p \in T_{1_a}(L) \big| p \geq x\} \wedge \bigwedge\{q \in T_{1_a}(L) \big| q \geq y\} \\ &\geq \bigwedge\{r \in T_{1_a}(L) \big| r \geq x \wedge y\} \end{aligned}$$

dir. Aynı zamanda $x \wedge y \leq \bigwedge\{r \in T_{1_a}(L) \big| r \geq x \wedge y\}$ olup

$$x \wedge y = \bigwedge\{r \in T_{1_a}(L) \big| r \geq x \wedge y\}$$

dir.

Önerme 2.3.15. L ve M iki tam kafes, $\varphi: L \longrightarrow M$ bir kafes izomorfizmi ve T, L üzerinde bir t-norm olsun. Bu takdirde $T_\varphi(a, b) = \varphi\left(T\left(\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)\right)\right)$ ile tanımlı T_φ ikili işlemi M üzerinde bir t-normdur.

İspat. $\forall a, b, c \in M$ için,

i. $$\begin{aligned} T_\varphi(a, 1_M) &= \varphi\left(T\left(\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(1_M)\right)\right) \\ &= \varphi\left(T(\varphi^{-1}(a), 1_L)\right) \\ &= \varphi\left(\varphi^{-1}(a)\right) = a \end{aligned}$$

ii. $$\begin{aligned} T_\varphi(a, b) &= \varphi\left(T\left(\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)\right)\right) \\ &= \varphi\left(T\left(\varphi^{-1}(b), \varphi^{-1}(a)\right)\right) \\ &= T_\varphi(b, a) \end{aligned}$$

iii. $b \leq c$ ise $\varphi^{-1}(b) \leq \varphi^{-1}(c)$ olduğundan

$T\big(\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)\big) \le T\big(\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(c)\big)$, buradan

$\varphi\Big(T\big(\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)\big)\Big) \le \varphi\Big(T\big(\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(c)\big)\Big)$ ve böylece

$T_\varphi(a,b) \le T_\varphi(a,c)$ dır.

iv. $T_\varphi\big(T_\varphi(a,b), c\big) = T_\varphi\Big(\varphi\Big(T\big(\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)\big)\Big), c\Big)$

$$= \varphi\left(T\left(\varphi^{-1}\varphi\Big(T\big(\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)\big)\Big), \varphi^{-1}(c)\right)\right)$$

$$= \varphi\Big(T\Big(T\big(\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)\big), \varphi^{-1}(c)\Big)\Big)$$

$$= \varphi\Big(T\Big(\varphi^{-1}(a), T\big(\varphi^{-1}(b), \varphi^{-1}(c)\big)\Big)\Big)$$

$$= T_\varphi\Big(a, \varphi\Big(T\big(\varphi^{-1}(b), \varphi^{-1}(c)\big)\Big)\Big)$$

$$= T_\varphi\big(a, T_\varphi(b,c)\big)$$

Böylece T_φ, M üzerinde bir t-normdur.

Örnek 2.3.16. Sırasıyla $0 < 1 < \cdots < n-1$ ve $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1}$ sıralamaları ile verilen $L_1 = \{0,1,\dots,n-1\}$ ve $L_2 = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ kafeslerini göz önüne alalım. $\varphi: L_1 \longrightarrow L_2$, $\varphi(a) = x_a$ izomorfizm ve $T = \wedge$, L_1 üzerinde bit t-norm olsun. Bu durumda $T_\varphi(a,b) = \varphi\big(\varphi^{-1}(a) \wedge \varphi^{-1}(b)\big) = a \wedge b$ ile tanımlı T_φ ikili işlemi L_2 üzerinde bir t-normdur.

Önerme 2.3.17. L ve M tam kafesler, $\varphi: L \longrightarrow M$ bir kafes izomorfizmi, T L üzerinde bir t-norm ve $p \in T_a(L)$ olsun. Bu takdirde $\varphi(p) \in T_{\varphi_a}(M)$ dir.

İspat. $a, b \in L$ keyfi ve $T_\varphi(a,b) \le \varphi(p)$ olsun. Bu durumda

$\varphi\Big(T\big(\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)\big)\Big) \le \varphi(p)$ dir. φ bir kafes izomorfizmi olduğundan

$T\big(\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)\big) \le p$ elde edilir. $p \in T_a(L)$ olduğundan

$\varphi^{-1}(a) \le p$ veya $\varphi^{-1}(b) \le p$ dir. Buradan

$a \le \varphi(p)$ veya $b \le \varphi(p)$ ve böylece $\varphi(p) \in T_{\varphi_a}(M)$ dir.

Önerme 2.3.18. L ve M tam kafesler, $\varphi: L \longrightarrow M$ bir kafes izomorfizmi, T L üzerinde bir t-norm ve $p \in L$, T-yarıasal olsun. Bu takdirde $\varphi(p) \in M$, T_φ-yarıasaldır.

İspat. $a \in L$ keyfi $T_\varphi(a,a) \leq \varphi(p)$ olsun. Buradan

$\varphi\left(T\left(\varphi^{-1}(a),\varphi^{-1}(a)\right)\right) \leq \varphi(p)$ dır. φ bir kafes izomorfizmi olduğundan,

$T\left(\varphi^{-1}(a),\varphi^{-1}(a)\right) \leq p$ dir. p T-yarıasal eleman olduğundan,

$\varphi^{-1}(a) \leq p$ elde edilir. Bu durumda

$a \leq \varphi(p)$ dir. O halde $\varphi(p)$ T_φ-yarıasal elemandır.

Önerme 2.3.19. L ve M tam kafesler, $\varphi: L \longrightarrow M$ bir kafes izomorfizmi, T L üzerinde bir t-norm ve $p \in T_i(L)$ olsun. Bu takdirde $\varphi(p) \in T_{\varphi_i}(M)$ dir.

İspat. $a, b \in L$ keyfi ve $T_\varphi(a,b) = \varphi(p)$ olsun. Buradan

$\varphi\left(T\left(\varphi^{-1}(a),\varphi^{-1}(b)\right)\right) = \varphi(p)$ dır. φ kafes izomorfizmi olduğundan,

$T\left(\varphi^{-1}(a),\varphi^{-1}(b)\right) = p$ elde edilir. $p \in T_i(L)$ olduğundan,

$\varphi^{-1}(a) = p$ veya $\varphi^{-1}(b) = p$ dır. Buradan

$a = \varphi(p)$ veya $b = \varphi(p)$ elde edilir. O halde

$\varphi(p) \in T_{\varphi_i}(M)$ dir.

De Baets ve Mesiar ‘ın [10] $L = [0,1]$ ve $n = 2$ durumunda otomorfizmler için verdikleri karakterizasyon aşağıdaki teorem ile genelleştirilerek sınırlı bir zincirin direkt çarpımı üzerindeki bütün otomorfizmler karakterize edilmiştir.

Teorem 2.3.20. L sınırlı bir zincir olsun. $\varphi: L^n \rightarrow L^n$ dönüşümü bir otomorfizmdir $\Leftrightarrow \exists \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n: L \rightarrow L$ otomorfizmleri öyle ki $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in L$ için $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\varphi_1\left(x_{\sigma(1)}\right), \varphi_2\left(x_{\sigma(2)}\right), \dots, \varphi_n\left(x_{\sigma(n)}\right)\right)$, $\sigma: \{1,2,\dots,n\} \longrightarrow \{1,2,\dots,n\}$ bir permütasyondur.

İspat. $\Leftarrow$: Aşikardır.

$\Rightarrow$: $\varphi: L^n \to L^n$ bir otomorfizm ve $\varphi(1,0,\dots,0) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ olsun. $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (1,0,\dots,0), (0,1,0,\dots,0), \dots, (0,0,\dots,1)$ olduğunu göstereceğiz.

Kabul edelim ki $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$ olsun. L^n de $(a_1, 0, \dots, 0), (0, a_2, 0, \dots, 0)$ elemanlarını göz önüne alalım. $(a_1, 0, \dots, 0) \parallel (0, a_2, 0, \dots, 0)$ dir. $(a_1, 0, \dots, 0) < (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ve $(0, a_2, 0, \dots, 0) < (a_1, a_2, \dots, a_n)$ olduğundan $\varphi^{-1}(a_1, 0, \dots, 0) < (1,0,\dots,0)$ ve $\varphi^{-1}(0, a_2, 0, \dots, 0) < (1,0,\dots,0)$ dır. Buradan $\varphi^{-1}(a_1, 0, \dots, 0)$ ve $\varphi^{-1}(0, a_2, 0, \dots, 0)$ nin kıyaslanabilir olduğu elde edilir ki bu $(a_1, 0, \dots, 0) \parallel (0, a_2, 0, \dots, 0)$ olması ile çelişir. Bu durumda $a_1 = 0$ veya $a_2 = 0$ dır. $a_1 = 0$ olsun.

Şimdi benzer şekilde $a_2 \neq 0, a_3 \neq 0$ olduğunu kabul edelim. L^n de $(0, a_2, 0, \dots, 0), (0,0, a_3, 0, \dots, 0)$ elemanlarını göz önüne alalım. $(0, a_2, 0, \dots, 0) \parallel (0,0, a_3, 0, \dots, 0)$ dir. $(0, a_2, 0, \dots, 0) < (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ve $(0,0, a_3, 0, \dots, 0) < (a_1, a_2, \dots, a_n)$ olduğundan $\varphi^{-1}(0, a_2, 0, \dots, 0) < (1,0,\dots,0)$ ve $\varphi^{-1}(0,0, a_3, 0, \dots, 0) < (1,0,\dots,0)$ dır. Buradan $\varphi^{-1}(0, a_2, 0, \dots, 0)$ ve $\varphi^{-1}(0,0, a_3, 0, \dots, 0)$ nin kıyaslanabilir olduğu elde edilir ki bu $(0, a_2, 0, \dots, 0) \parallel (0,0, a_3, 0, \dots, 0)$ olması ile çelişir. Bu durumda $a_2 = 0$ veya $a_3 = 0$ dır. $a_2 = 0$ olsun.

Bu şekilde devamla en son adımda $a_{n-1} = 0$ veya $a_n = 0$ elde edilir. $a_{n-1} = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $a_n = 1$ olduğunu göstermeliyiz.

Kabul edelim ki $a_n \neq 1$ olsun. $(0,0,\dots, a_n) < (0,0,\dots,1)$ olduğundan $\varphi^{-1}(0,0,\dots, a_n) = (1,0,\dots,0) < \varphi^{-1}(0,0,\dots,1)$ dir ve buradan $\exists c_1, c_2, \dots, c_n \in L$ öyle ki bu elemanlardan en az biri sıfırdan farklıdır. $c_1 \neq 0$ olsun. $(0, c_1, \dots, c_{n-1}) \parallel (c_1, 0, c_2, \dots, c_{n-1})$ dir. $(0, c_1, \dots, c_{n-1}) < (1, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$ olduğundan $\varphi(0, c_1, \dots, c_{n-1}) < (0,0,\dots,1)$ dir ve $(c_1, 0, c_2, \dots, c_{n-1}) < (1, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$ olduğundan $\varphi(c_1, 0, c_2, \dots, c_{n-1}) < (0,0,\dots,1)$ dir. Buradan $\varphi(0, c_1, \dots, c_{n-1})$ ve $\varphi(c_1, 0, c_2, \dots, c_{n-1})$ in kıyaslanabilir olduğu elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde $a_n = 1$ dir. Bu takdirde $\varphi(1,0,\dots,0) = (0,0,\dots,1)$ dir.

Buradan φ nin $\{(x_1, 0, \dots, 0) | x_1 \in L\}, \{(0, x_2, 0, \dots, 0) | x_2 \in L\}, \dots, \{(0,0,\dots,0, x_n) | x_n \in L\}$ kümelerine kısıtlanışları L nin birer otomorfizmidir.

$\varphi(1,0,\dots,0) = (0,0,\dots,1)$ durumunu göz önüne alalım. Bu durumda $\varphi(0,0,\dots,1) = (1,0,\dots,0)$ dır.

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n : L \longrightarrow L$ otomorfizmler öyle ki $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in L$ için

$$\varphi(x_1, 0, \dots, 0) = (\varphi_1(x_1), 0 \dots, 0) ,$$

$$\varphi(0, x_2, 0, \dots, 0) = (0, \varphi_2(x_2), 0 \dots, 0) ,$$

$$\vdots$$

$$\varphi(0, \dots, 0, x_n) = \big(0 \dots, 0, \varphi_n(x_n)\big)$$

olsun.

$(x_1, 0, \dots, 0) < (x_1, x_2, \dots, x_n) \Longrightarrow \varphi(x_1, 0, \dots, 0) < \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$(0, x_2, 0, \dots, 0) < (x_1, x_2, \dots, x_n) \Longrightarrow \varphi(0, x_2, 0, \dots, 0) < \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$$\vdots$$

$(0, \dots, 0, x_n) < (x_1, x_2, \dots, x_n) \Longrightarrow \varphi(0, \dots, 0, x_n) < \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

buradan da

$$\big(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \dots, \varphi_n(x_n)\big) \leq \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

dir. Kabul edelim ki

$$\big(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \dots, \varphi_n(x_n)\big) < \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

olsun. Bu durumda $\varphi^{-1}\big(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \dots, \varphi_n(x_n)\big) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dir.

Ayrıca $\big(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \dots, \varphi_n(x_n)\big) > (\varphi_1(x_1), 0, \dots, 0)$ olduğundan

$(x_1, 0, \dots, 0) < \varphi^{-1}\big(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \dots, \varphi_n(x_n)\big)$ dir. Benzer şekilde

$(0, x_2, \dots, 0) < \varphi^{-1}\big(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \dots, \varphi_n(x_n)\big)$

$$\vdots$$

$(0, \dots, 0, x_n) < \varphi^{-1}\big(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \dots, \varphi_n(x_n)\big)$ elde edilir. Böylece

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \varphi^{-1}\big(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \dots, \varphi_n(x_n)\big)$$

$$\Longrightarrow \ \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \big(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \dots, \varphi_n(x_n)\big)$$

olur ki bu bir çelişkidir. Sonuç olarak, $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \big(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \dots, \varphi_n(x_n)\big)$ dir.

3. İRDELEME

Literatürde sınırlı kafesler üzerinde kesin tanımla veya daha önceden verilen t-normlardan dönüşümle yeni t-normlar elde edilmiştir [13, 15, 20, 21, 22, 23] . Bir kafesin yapısı ile üzerinde tanımlanabilen t-normlar arasında sıkı bir ilişki vardır. Buradan hareketle bu çalışmada amacımız, indirgenemez elemanlar tarafından üretilen kafesler üzerinde, bu elemanların kısmi sıralı kümesi üzerinde verilen t-normlar yardımıyla yeni t-normlar elde etmektir. Sonlu dağılımlı bir kafesin $\vee$-indirgemez ($\wedge$-indirgenemez) elemanlarının kısmi sıralı kümesi üzerinde verilen bir t-norm (t-eşnorm) yardımıyla bu kafes üzerinde bir t-norm (t-eşnorm) elde edilmiştir. Bir L tam kafesi üzerinde verilen bir t-eşnorm yardımıyla kafesin bir elemanı tarafından üretilen dual ideali üzerinde yeni bir t-eşnorm elde edilmiştir. $L^{[n]}$ kafesinin $\vee$-indirgenemez elemanlarının kümesinin bir parçalanışı verilmiş ve bu parçalanış yardımıyla $L^{[n]}$ üzerinde bir t-norm elde edilmiştir.

Ayrıca bir kafeste $\wedge$ ve $\vee$ işlemleri ile verilen bazı özel elemanlar t-norm ve t-eşnormlar yardımıyla genelleştirilmiş ve bu elemanların bazı cebirsel özellikleri incelenmiştir.

4. SONUÇLAR

1. Bu çalışmada tam kafeslerin direkt çarpımının ve bir tam kafesin aralık değerli kafesinin $\vee$-indirgemez ($\wedge$-indirgenemez) elemanlarının sıralı kümeleri karakterize edilmiştir. Özellikle $[0,1]^2$ tam kafesi üzerinde verilen bir t-normun (t-eşnormun) bu kafesin $\vee$-indirgemez ($\wedge$-indirgenemez) elemanlarının sıralı kümesine kısıtlanışının t-norm olduğu gösterilmiştir.

2. Sonlu dağılımlı bir kafesin $\vee$-indirgemez ($\wedge$-indirgenemez) elemanlarının kümesi üzerinde verilen bir t-norm (t-eşnorm) yardımıyla bu kafes üzerinde bir t-norm (t-eşnorm) elde edilmiştir.

3. Dağılımlı bir kafes üzerinde verilen bir t-normun idempotent olması için gerek ve yeter koşulun t-normun $\vee$-indirgemez elemanların kümesi üzerinde idempotent olduğu gösterilmiştir.

4. Bir L tam kafesi üzerinde verilen bir t-eşnorm yardımıyla kafesin bir elemanı tarafından üretilen dual ideali üzerinde yeni bir t-eşnorm elde edilmiştir.

5. $L^{[n]}$ kafesinin $\vee$-indirgenemez elemanlarının kümesinin bir parçalanışı verilmiş ve bu parçalanış yardımıyla $L^{[n]}$ üzerinde bir t-norm elde edilmiştir.

6. Ayrıca bir kafeste $\wedge$ ve $\vee$ işlemleri ile verilen bazı özel elemanlar t-norm ve t-eşnormlar yardımıyla genelleştirilerek bu elemanların bazı cebirsel özellikleri incelenmiş ve bu özelliklerin otomorfizmler altında korunduğu gösterilmiştir.

7. Sınırlı bir zincirin direkt çarpımı üzerindeki bütün otomorfizmler karakterize edilmiştir.

5. ÖNERİLER

1. Bu çalışmada sonlu dağılımlı bir kafesin $\vee$-indirgemez ($\wedge$-indirgenemez) elemanlarının kümesi üzerinde verilen bir t-norm (t-eşnorm) yardımıyla verilen t-norm inşası, bazı özel elemanlar tarafından üretilen kafesler üzerinde verilebilir.

2. Bu çalışmada verilen, $L^{[n]}$ kafesinin $\vee$ -indirgenemez elemanlarının kümesinin parçalanışı kullanılarak, bu kafes üzerindeki t-normların karakterizasyonu verilebilir.

3. Bu çalışmada t-normlar için verilen inşa metodları t-normdan daha zayıf olan işlemler için verilebilir mi?

4. Kafeslerin direkt çarpımının otomorfizmleri karakterize edilebilir mi?

6. KAYNAKLAR

1. Menger, K., Statistical Metrics, Proceeding of National Academy of Sciences, USA, 28 (1942) 535-537.

2. Schweizer, B. ve Sklar, A., Escapes mRetriques alReatoires, C. R. Acad. Sci. Paris SRer. A, 247 (1958) 2092-2094.

3. Schweizer, B. ve Sklar, A., Statistical Metric Spaces, Pasific J. Math., 10 (1960) 313-334.

4. Schweizer, B. ve Sklar, A., Associative Functions and Statistical Triangle Inequalities, Publ. Math. Debrecen, 8 (1961) 169-186.

5. Schweizer, B. ve Sklar, A., Associative Functions and Abstract Semigroups, Publ. Math. Debrecen, 10 (1963) 69-81.

6. Schweizer, B. ve Sklar, A., Probabilistic Metric Spaces, Elsevier, Amsterdam, 1983.

7. Zadeh, L. A., Fuzzy Sets, Inform. Control, 8 (1965) 338-353.

8. Goguen J. A., L-fuzzy Sets, J. Math. Anal. Appl., 18, 1 (1967) 145-174.

9. De Baets, B. ve Mesiar, R., Triangular Norms, Fuzzy Sets and Systems, 104 (1999) 1-2.

10. De Baets, B. ve Mesiar, R., Triangular Norms on Product Lattices, Fuzzy Sets and Systems, 104 (1999) 61-75.

11. Drossos, C. A. ve Navara, M., Generalized t-conorms and closure operators, in: H. J. Zimmermann (Ed.), Proc. 4th Eur. Cong. On Intelligent Techniques and Soft Computing, 1 (1996), 22-26.

12. Drossos, C. A., Generalized t-norms, Fuzzy Sets and Systems, 104 (1999) 53-59.

13. Jenei, S., A More Efficient Method for Defining Fuzzy Connectives, Fuzzy Sets and Systems, 90 (1997) 25-35.

14. Jenei. S. ve De Baets, B., On the Direct Decomposability of t-norms on Product Lattices, Fuzzy Sets nd Systems, 139 (2003) 699-707.

15. Nguyen, H. T. ve Walker, E., A First Course in Fuzzy Logic, CRC Press, Boca Raton, FL, 1997.

16. Calvo, T., Kolesarova, A., Komornikova, M. ve Mesiar, R., Aggregation Operators: Properties, Classes and Construction Methods, Physica-Verlag GmbH Heidelberg, Germany, 2002.

17. Clifford, A. H., Naturally Totally Ordered Commutative Semigroups, Amer. J. Math., 76 (1954) 631-646.

18. Saminger, S., On Ordinal Sums of Triangular Norms on Bounded Lattices, Fuzzy Sets and Systems, 157 (2006) 1403-1416.

19. Gasse, B. V., Cornelis, C., Deschrijver, G. ve Kerre, E., A Characterization of Interval-Valued Residuated Lattices, International Journal of Approximate Reasoning, 49 (2008) 478-487.

20. De Baets, B., An Order-Theoretic Approach to Solving sup-τ Equations, in:D. Ruan (Ed.), Fuzzy Set Theory and Advanced Mathematical Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1995), 67-87.

21. De Cooman, G. ve Kerre, E., Order Norms on Bounded Partially Ordered Sets, J. Fuzzy Math., 2 (1994) 281-310.

22. Ray, S., Representation of a Boolean Algebra by its Triangular Norms, Mathware Soft Comput., 4 (1997) 63-68.

23. Klement, E., Mesiar, R. ve Pap, E., Triangular Norms as Ordinal Sums of Semigroups in the Sense of A. H. Clifford, Semigroup Forum, 65 (2002) 71-82.

24. Birkhoff, G., Lattice Theory, Colloquium Publications, XXV, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1967.

25. Gratzer, G., General Lattice Theory, Birkhauser, Basel, 1978.

26. Davey, B. A. ve Priestly H. A., Introduction to Lattices and Order, Cambridge University Press, Cambridge, United States, 1990.

27. Crawley, P. ve Dilworth, R. P.,Algebraic Theory of Lattices, Prentice-Hall (Englewood Cliffs, N. J.) 1973.

28. Kazancı, O. ve Yamak, S., Fuzzy Ideals and Semiprime Fuzzy Ideals in Semigroups, Information Sciences, 179 (2009) 3720-3731.

29. Karaçal, F. ve Sağıroğlu, Y., Infinitely $\vee$-Distributive t-norms on Complete Lattices and Pseudo-Complements, Fuzzy Sets and Systems, 160 (2009) 32-43.

30. Walker, C. L. ve Walker E., Automorphisms of Powers of Linearly Ordered Sets, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 14 (2006) 77-85.

31. Blyth, T. S., Lattices and Ordered Algebraic Structures, Springer-Verlag, London, 2005.

32. Erne, M., Seselja, B. ve Tepavcevic, A., Posets Generated by Irreducible Elements, Kluwer Academic Publishers, 20 (2003) 79-89.

33. Hajek, P., Metamathematics of Fuzzy Logic, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.

34. Karaçal, F. ve Khadjiev, D., ∨-Distributive and Infinitely ∨-Distributive t-norms on Complete Lattices, Fuzzy Sets and Systems, 151 (2005) 341-352.

35. Kazancı, O. ve Yılmaz, Ş., Kafesler Üzerinde Normlar, IXX. Ulusal Matematik Sempozyumu, Kütahya, 2006.

36. Klement, E., Mesiar, R. ve Pap, E., Triangular Norms, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

37. Klement, E., Mesiar, R. ve Pap, E., Triangular Norms. Position Paper I: Basic Analytical and Algebraic Properties, Fuzzy Sets and Systems, 143 (2004) 5-26.

38. Klement, E., Mesiar, R. ve Pap, E., Triangular Norms. Position Paper III: Continuous t-norms, Fuzzy Sets and Systems, 145 (2004) 439-454.

39. Klement, E., Mesiar, R. ve Pap, E., Triangular Norms. Position Paper II: General Constructions and Parametrized Families, Fuzzy Sets and Systems, 145 (2004) 411-438.

40. Yılmaz, Ş. ve De Baets, B., Constructing t-norms from a given behaviour on join-irreducible elements, 30th Linz Seminar on Fuzzy Set Theory, Austria, 2009.

41. Zhang, D., Triangular Norms on Partially Ordered Sets, Fuzzy Sets and Systems, 153, 2 (2005) 195-209.

ÖZGEÇMİŞ

Şerife YILMAZ 1981 yılında Kayseri'de doğdu. İlköğrenimini Müncübe Cıngıllıoğlu İlkokulunda, orta öğrenimini Mehmet Karamancı İmam Hatip Lisesi'nde ve lise öğrenimini Melikgazi (Yabancı Dil Ağırlıklı) Lisesi'nde tamamladı.

1998-1999 eğitim-öğretim yılında Erciyes Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü lisans programını kazandı ve 2002 yılında lisans eğitimini tamamladı. Aynı yıl Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. 2004 yılında yüksek lisans derecesini aldı. 2005 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında doktora programına ve 50/d kadrosunda Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı. 2010 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Anabilim dalında Öğretim Görevlisi olarak atandı. Halen bu görevine devam etmekte olan Şerife YILMAZ İngilizce, Fransızca ve Arapça dillerini bilmektedir.