KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BENZERLİK GEOMETRİSİNDE NOKTALARIN TAM İNVARYANTLARI SİSTEMİ

DOKTORA TEZİ

Muhsin İNCESU

OCAK 2008
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BENZERLİK GEOMETRİSİNDE NOKTALARIN TAM İNVARYANTLARI SİSTEMİ

Muhsin İNCESU

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"Doktor (Matematik)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 11.12.2007
Tezin Savunma Tarihi : 25.01.2008

Tez Danışmanı	**: Prof. Dr. Djavvat KHADJIEV**
Jüri Üyesi	**: Prof. Dr. Sami KARADENİZ**
Jüri Üyesi	**: Doç. Dr. Ömer PEKŞEN**
Jüri Üyesi	**: Prof. Dr. Ziya YAPAR**
Jüri Üyesi	**: Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU**
Enstitü Müdür V.	**: Doç. Dr. Salih TERZİOĞLU**

Trabzon 2008

ÖNSÖZ

Konunun belirlenmesinden, çalışmanın tamamlanıp bu hale getirilmesine kadar yardımlarını hiç esirgemeyen başta hocam sayın Prof. Dr. Djavvat KHADJIEV'e en içten duygularla saygı ve şükranlarımı sunarım.

Ayrıca çalışmaların başlamasından hemen hemen tamamlanmasına kadar bu teze danışmanlık yapan hocam sayın Prof. Dr. Osman GÜRSOY'a, yapıcı eleştirileri ile bana ufuk açan tez izleme komitesi üyeleri sayın Prof. Dr. Sami KARADENİZ ve sayın Doç. Dr. Ömer PEKŞEN'e, Ankara'da olmasına karşın, kendilerini Trabzon'daki kadar yakın hissettiğim, seminer ve sempozyumlarda her zaman yapıcı eleştirilerini aldığım, tez çalışmalarımda da özellikle bilimsel dil yönünden çok istifade ettiğim hocam sayın Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU'na, çalışmalar sırasında desteklerini hissettiğim KTÜ Matematik bölümünün değerli hocalarına ve bunların adına bölüm başkanımız sayın Prof. Dr. İhsan ÜNVER'e çok teşekkür ederim.

Bu çalışma Karadeniz Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonunca desteklenmiştir. Proje No: 2004.111.03.1

Muhsin İNCESU

Trabzon 2008

İÇİNDEKİLER

<u>Sayfa No</u>

ÖZET

Bu çalışmada; öncelikle n boyutlu benzerlik dönüşümlerinin B(n) grubu ve bu grubun SB(n), LB(n), SLB(n), H(n) LH(n) gibi önemli altgrupları ifade edilmiştir. Bu grupların n = 1 ve n = 2 için G- yörüngeleri bulunmuştur. n = 2 durumunda benzerlik gruplarının en önemli alt grupları olan LB(n) ve B(n) grupları için invaryant rasyonel fonksiyonlar ve bu invaryant rasyonel fonksiyonların üreteç kümeleri elde edilmiştir. Ardından 1 boyutlu lineer uzayda, yani R de verilen iki ayrı nokta sistemlerinin LB(1) ve B(1) denklik şartları ve R^2 de noktalar sisteminin LB(2) ve B(2) denklik şartları incelenmiştir. Böylece, nokta sistemlerinin invaryantları, LB(2) ve B(2) invaryant rasyonel fonksiyonların üreteç kümeleri ile verilerek iki sistemin birbirine benzer olup olmadığı kolayca test edilebilmektedir.

Anahtar Kelimeler: Invaryant, Benzerlik Dönüşümü, Benzerlik Grubu, Homoteti, Benzerlik Geometrisi.

SUMMARY

The Complete System of Point Invariants in the Similarity Geometry

In this study, first of all, the similarity group B(n) and its important subgroups SB(n), LB(n), SLB(n), H(n), LH(n) are introduced in the dimension n. The G- orbits of each mentioned subgroups of the similarity group B(n) are studied and sketched in the dimension 1 and dimension 2. In addition, invariant rational functions and their generator sets for the most mentioned subgroups of the group B(n) in dimension 2 are obtained. The LB(1)- and B(1)-equivalence conditions are investigated for given two-point systems in 1-dimensional linear space R. Later the LB (2) and B(2)- invariant rational functions and their generators are obtained. Then the LB(2) and B(2)- equivalence conditions are investigated for given two points systems in 2-dimensional linear space R^2. So any two systems can be tested easily using LB (2) and B(2)- invariant rational functions.

Key Words: Invariant,Similarity Transformation, Similarity Group, Homotethy, Similarity Geometry.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

SEMBOLLER DİZİNİ

B(n)	n boyutlu uzayda benzerlik hareketlerinin grubu
B(1)	R de tüm benzerlik hareketlerinin grubu
B(2)	R^2 de tüm benzerlik hareketlerinin grubu
B(1)- Denk	G = B(1) grubu için G- Denklik bağıntısı
B(2)- Denk	G = B(2) grubu için G- Denklik bağıntısı
H(n)	n boyutlu uzayda homoteti hareketlerinin grubu
LB(n)	n boyutlu uzayda lineer benzerlik hareketlerinin grubu
LB(1)	R de lineer benzerlik hareketlerinin grubu
LB(2)	R^2 de lineer benzerlik hareketlerinin grubu
LB(1)- Denk	G = LB(1) grubu için G- Denklik bağıntısı
LB(2)- Denk	G = LB(2) grubu için G- Denklik bağıntısı
LH(n)	n boyutlu uzayda lineer homoteti hareketlerinin grubu
O(n)	n boyutlu uzayda ortogonal dönüşümler
R	Reel Sayılar Kümesi
R^*	$R-\{0\}$
SO(n)	n boyutlu uzayda determinantı 1 olan ortogonal dönüşümler
Tr(n)	n boyutlu uzayda öteleme hareketlerinin grubu
Tr(1)- Denk	G = Tr(1) grubu için G- Denklik bağıntısı
Tr(2)- Denk	G = Tr(2) grubu için G- Denklik bağıntısı
$\\|a\\|$	a vektörünün normu
$\langle a,b\rangle$	a ile b vektörlerinin iç çarpımı
$R[x]$	Reel değerli tek değişkenli polinomlar halkası
$R[x]^G$	Reel değerli tek değişkenli G-invaryant polinomlar halkası
$R(x)^G$	Reel değerli tek değişkenli G-invaryant rasyonel fonksiyonlar cismi
$\{x_1,\ldots,x_k\}$	k tane vektörden oluşan sistem

$R[x_1,...,x_k]$	Reel değerli k değişkenli polinomlar halkası
$R[x_1,...,x_k]^G$	Reel değerli k değişkenli G-invaryant polinomlar halkası
$R(x_1,...x_k)^G$	Reel değerli k değişkenli G-invaryant rasyonel fonksiyonlar cismi
$G(x_1,...,x_k)$	$\{x_1,...,x_k\}$ vektör sisteminin Gram matrisi
$det\,G(x_1,...,x_k)$	$\{x_1,...,x_k\}$ vektör sisteminin Gram matrisinin determinantı
$\Vert x_1,...,x_k \Vert$	$\{x_1,...,x_k\}$ vektörlerinin oluşturduğu matris
$[x_1,...,x_k]$	$\{x_1,...,x_k\}$ vektörlerinin oluşturduğu matrisin determinantı
$\langle x,y\rangle_W$	*W* uzayında verilen *x* ve *y* vektörlerinin iç çarpımı
G:X	G grubunun X kümesi üzerinde etkisi
$x \overset{G}{\approx} y$	*x* ve *y* vektörleri G- denktir
Gx	*x* vektörünün G- Yörüngesi
$f\vert_B$	*f* fonksiyonunun *B* kümesi üzerine kısıtlanışı
$D_{yx} f(x_1,...,x_n)$	Polarizasyon operatörünün $f(x_1,...,x_n)$ fonksiyonuna etkisi
G(V)	*V* üzerinde tersi mevcut olan lineer operatörlerin kümesi
$T_h^{(1)} f$	$(T_h^{(1)} f)(x) = f(h^{-1}x)$ ile tanımlı lineer gösterim
$T_h^{(2)} f$	$(T_h^{(2)} f)(x,y) = f(h^{-1}x, h^{-1}y)$ ile tanımlı lineer gösterim
$\{x_1,...,x_k\} \overset{G}{\approx} \{y_1,...,y_k\}$	$\{x_1,...,x_k\}$ ve $\{y_1,...,y_k\}$ vektörleri G- denktir.
♦	Teorem ya da Önermenin ispatının bittiğini gösterir işaret

I. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Benzerlik ve farklılık kavramları insanoğlunun varolduğundan bu yana hep ilgi duyduğu kavramlar olmuştur. Öyleki zaman zaman yeni bir kavramı, hep benzer kavramlarla ilişkilendirmiş ya da önceden bilinen başka kavramlar arasındaki farkı gözlemleyerek öğrenme yolunu seçmiştir.

Matematikte benzerlik kavramının kullanılması ise, eski yunan matematikçisi Öklid [1] zamanına kadar uzanır. Bu zamanda benzerlik kavramı, esasen oranları eşit olan sayılar için kullanılmıştır.

İnvaryant teori alanındaki gelişmeler 19. yüzyılın ikinci yarısına dayanır. Bu çalışmaların temelinde $R[x]^G$-invaryant fonksiyonlar halkasının sonlu üreteçli olup olmadığının incelenmesi problemi vardır. Bu problem ilk defa 1860 lı yıllarda binary formları için verilmiştir. 1900 de David Hilbert, Paris'teki uluslararası konferansta sunduğu 23 problemden 14. sünde , bu üreteçlerin ne zaman sonlu olması gerektiği problemini ortaya koymuştur. Daha sonra 1962 de M. Nagata $R[x]^G$ - nin, G- nin lineer reduktif olması koşulunda sonlu üreteçli olduğunu göstermiştir. Lineer reduktif olmayan G grubları için $R[x]^G$ nin sonlu üreteçli olabilmesinin şartları da Khadjiev D. [2] ve Grosshans F. [3] çalışmalarında verilmiştir.

İnvaryant teorinin gelişimi matematiğin farklı alanlarını etkilemiştir. Felix Klein'e gelinceye kadar, sadece belli başlı geometriler bilinmekteydi. 1872 de F. Klein , Erlangen programı ile grup kavramının geometrilerin önemli yapı taşları olduğunu göstermiştir. Buna göre benzerlik geometrisi, benzerlik dönüşümleri grubu ve altgruplarının invaryantlar teorisidir. Yani, bu geometride iki eleman birbirlerine denktir, ancak ve ancak geometriyi oluşturan dönüşüm grubundan öyle bir dönüşüm alınabilir ki elemanlardan birini diğerine dönüştürür [4]. Bu açıdan benzerlik geometrisine ait çalışmalar yapılmamıştır. Açı, benzerlik oranı, çapraz oran gibi invaryantlar incelense de invaryant teori açısından tam bir inceleme yapılmamıştır.

Öklid, Elements adlı,13 kitaptan oluşan eserinde 1. ve 6. kitaplarında benzerlik dönüşümünü değil, benzer üçgen yada benzer çokgen tanımını vermiştir. Bu tanıma göre karşılıklı açıları eşit veya kenar uzunlukları orantılı olan üçgenlere benzer üçgen denir. Günümüzde benzerlik dönüşümü, keyfi iki noktayı, aralarındaki uzaklığın k katı uzaklıkta iki noktaya dönüştüren dönüşüm olarak tanımlanmaktadır. İki üçgenin benzerliği ise, bu üçgenlerin noktalarının denkliği ile verilmektedir. Yani iki üçgen benzerdir ancak ve ancak bir benzerlik dönüşümü bulunabilir öyleki, üçgenlerden birini diğerine dönüştürür. Burada şu soru sorulabilir: iki üçgen hangi koşullarda birbirine denktir? Bu koşullara benzerlik koşulları denir. Öklid, bugünkü anlamıyla, üçgenlerin benzerlik koşullarını benzerlik tanımı olarak vermiştir. Burada bir noktaya dikkat etmek gerekir. Bir benzerlik dönüşümün analitik ifadesini net olarak verebilmek için en az iki noktaya ihtiyaç duyulmaktadır. Bu tanımı bir nokta ile vermek gerekirse, yani dönüşüm, bir noktayı nasıl bir noktaya dönüştürmeli ki bir benzerlik dönüşümü olsun? sorusunun cevabı verilmek istenirse tezde elde edilen Sonuç 28 in kriterleri, bu anlamda bir tanım kriteri olarak verilmiş olur. Benzer şekilde bir lineer benzerlik dönüşümü için de tezde verilen Önerme 58 in kriterleri alınabilir.

O(n) grubu için noktaların tam invaryant sistemini 1897 de E. Study vermiştir. Daha sonra bunu Hermann Weyl geliştirmiştir [5]. 1988 de, Djavvat Khadjiev, R. Aripov tüm öklid hareketlerinin grubu E(n) için bu problemi çözmüştür [6].

Daha sonra Weyl gösterimleri çok çeşitli alanlara uygulanmaya başlamıştır. Biyolojide bakterilerin sınıflandırılmasından, insanların kavramları algılama problemlerine kadar bir çok alana bu uygulamalar genişletilmiştir. Örneğin, E. Cassier [7], transformasyon grubunun invaryantlarını, algısal karakterizasyonlar olarak vermiştir. Daha sonra Hoffman [8,9] Lie transformasyon grupları ve Lie cebirlerine dayalı olarak algı teorisini geliştirmiştir. Bunları Chan & Chan [10,11] ve Leyton [12] takip etmiştir.

Mekanikte benzerlik kavramı daha çok boyutsal analiz çalışmalarının geliştirilmesinde kullanılmıştır. Boyutsal analiz, oran, arantı, benzerlik gibi kavramların fiziğe genişletilme çabalarından ortaya çıkmıştır. İlk defa 1638 de Galileo tarafından, verilen bir materyalin ışınlarının kuvvetini tahmin etmekte kullanılmıştır [13]. Diğer uygulamaları 1686 da Mariotte ve Newton tarafından verilmiştir [13]. Ancak bütün fiziksel niceliklerin, bir takım temel birimler türünden ifade edildiği ve fiziksel sistemlerin başka bir fiziksel sisteme dönüştürülmesinin, ancak bu temel birimlerin birbirlerine dönüştürülmesiyle mümkün olabileceğini ilk defa 1822 de Fourier ifade etmiştir [13] [14].

Böylece birimlerin değişimiyle radyoaktif ısınmayı göz önüne almazsak küçük bir kürenin soğuması ile yer kürenin soğumasının aynı analitik formulle verilebileceğini göstermiştir[13]. 20. yüzyıla gelindiğinde bu alana katkı sağlayanlar arasında Birkhoff [13], Bridgman [15], Sedov [16], Langhaar [17] sayılabilir.

Uygulamada Kurşun [18], Yaprak [19] gibi örneklerden de anlaşılacağı gibi özellikle haritaların elde edilmesi için, merkezi Amerika da bulunan NAVSTAR GPS sisteminden elde edilen dataların ülke koordinatlarına dönüştürülmesinde; S. Özer [20] örneğindeki gibi nonlineer dağılan dalgaların incelenmesi için Korteweg-de Vries denkleminin adi diferensiyel denkleme indirgenmesinde; Kai tai Fang [21], L X Wang [22] çalışmalarına göre parmak izlerinin analizinde; Martin Dresner [23] den görülebileceği gibi, uçakla seyahat eden yolcuların tercih ve profillerinin benzerliklerinde; Horikawa [24, 25] örneklerinde olduğu gibi görüntü işleme ve Pattern Recognition süreçlerinde ve daha pek çok alanda benzerlik dönüşümleri kullanılmaktadır. Literatürde benzerlik dönüşümleri incelendiğinde özellikle homoteti dönüşümlerinin farklı tanımlandığı görülür.

Öklid uzaylarında tanımlanan homoteti dönüşümü (Coxeter [26], Smith [27], Niculin [28]) gibi bazı kaynaklarda, tezde LH(n) grubu ile verilen "lineer homoteti" dönüşümü biçiminde tanımlanmıştır. (Gray [29] , Cox and Kruskal [30, 31]) gibi bazı kaynaklarda ise homoteti dönüşümleri olarak tezde benzerlik dönüşümü olarak verilen genel tanım alınmıştır. Tezde ise homoteti dönüşümleri olarak Berger [32] deki tanım alınmıştır.

Literatürde ayrıca non lineer benzerlik diye de adlandırılan topolojik benzerlik kavramı vardır. Bazı çalışmalarda bu kavram "dissimilarity" ya da "D- similarity" olarak da adlandırılmaktadır. Bu konudaki geniş bilgi, Jiawei [33], Cappell [34], Rham [35] ve Kuiper [36] da mevcuttur.

Sosyal psikolojide de benzerlik, insanlar arasında; davranışlar, değerler, ilgi alanları, kişilikler bakımından birbirine ne kadar yakınlığın bulunması olarak tanımlanmaktadır. Bu konu hakkında daha detaylı bilgi Berscheid [37] , Smith [27], Kubitschek [38] ve Elliot [39] de yer almaktadır.

Bu tezde,

1-R ve R^2 de Benzerlik grubu ile önemli altgrubunun yörüngelerinin bulunması,

2-R ve R^2 de bulunan altgrublar için invaryant rasyonel fonksiyonlar cisminin üreteç cümlelerinin bulunması,

3- R ve R^2 de noktalardan oluşan iki sistemin bu grublara göre denklik probleminin çözülmesi temel problemleri incelenecektir.

1.2. Öklid Uzayı

R reel sayılar cismi olsun.

Tanım 1: E bir reel vektör uzayı olmak üzere bir $\varphi : E \times E \to R$ dönüşümü aşağıdaki aksiyomları sağlasın:

1. φ bir bilineer form yani, $\forall$x,y,z $\in$ E ve $\beta \in R$ için

$$\varphi(x+y,z)=\varphi(x,z)+\varphi(y,z),$$
$$\varphi(x,y+z)=\varphi(x,y)+\varphi(x,z),$$
$$\varphi(\beta x,y)=\varphi(x,\beta y)=\beta\varphi(x,y).$$

2. φ simetrik form yani, $\forall$x,y $\in$ E için

$$\varphi(x,y)=\varphi(y,x).$$

3. φ pozitif tanımlı yani, $\forall$x $\in$ E için

$$\varphi(x,x)\geq 0 \text{ ve } \varphi(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0.$$

Bu şekilde tanımlanan $\varphi : E \times E \to R$ dönüşümüne E de bir skaler (iç) çarpım denir. E uzayına da bir iç çarpım uzayı denir ve (E, φ) ikilisi ile gösterilir. $\varphi(x,y)$ de kısaca $\langle x,y \rangle$ ile gösterilecektir.

Örnek 1: R^n de toplama işlemi her $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $y=(y_1,y_2,...,y_n) \in R^n$ için,

$$+ : R^n \times R^n \to R^n \text{ , } x+y = (x_1,x_2,...,x_n)+(y_1,y_2,...,y_n) := (x_1+y_1,x_2+y_2,...,x_n+y_n)$$

ve skalerle çarpma işlemi,

$$\lambda\cdot : R \times R^n \to R^n \text{ , } \qquad \lambda x = \lambda(x_1,x_2,...,x_n) := (\lambda x_1,\lambda x_2,...,\lambda x_n)$$

ile tanımlansın. Bu şekilde tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemleri altında R^n**,** n boyutlu reel vektör uzayını göz önüne alalım. Burada tanımlanan $\langle x,y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ standart iç çarpım dönüşümü iç çarpım aksiyomlarını sağlar. Böylece R^n sonlu boyutlu bir iç çarpım uzayıdır.

Örnek 2: $[0,1] \subset R$ olsun. [0,1] de tanımlı tüm sürekli reel fonksiyonlar lineer uzayı $C[0,1]$ olsun. Bu uzayda; $f,g \in C[0,1]$ için

$$\langle f,g \rangle := \int_0^1 f(t)g(t)dt \tag{1}$$

biçiminde tanımlanan ifade bir iç çarpımdır. $C[0,1]$ uzayı da bir iç çarpım uzayıdır. Ancak sonlu boyutlu değildir.

Tanım 2: Sonlu boyutlu iç çarpım uzayına Öklid Uzayı denir.

Örnek 1 de tanımlanan $\langle x,y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ standart iç çarpım dönüşümü ile R^n bir Öklid uzayıdır.

Tanım 3: Eğer $\exists F : E_1 \to E_2$ dönüşümü lineer izomorfizm ve $\forall x,y \in E_1$ için $\varphi_2(F(x),F(y)) = \varphi_1(x,y)$ olacak şekilde bulunabilirse (E_1,φ_1) ve (E_2,φ_2) öklid uzaylarına izomorfdur denir.

Teorem 1: n boyutlu keyfi iki öklid uzayı birbirine izomorfdur [44, s. 57].

Not: Farklı boyutlu öklid uzayları izomorf değildirler.

Sonuç 1: n boyutlu keyfi öklid uzayı R^n ye izomorfdur.

Bundan sonra öklid uzayı denildiğinde (R^n , φ) algılanacaktır.

Tanım 4: R^n öklid uzayında $x \in R^n$ için $\sqrt{\langle x,x\rangle}$ sayısına x vektörünün normu denir ve $\|x\|$ ile gösterilir.

Lemma 1 :[45, s.163]. R^n de tanımlanan $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ ifadesi, şu aksiyomları (norm aksiyomları) sağlar:

1. $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad \forall x \in R^n$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \quad \forall x \in R^n, \lambda \in R$
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x,y \in R^n$

Tanım 5: R^n öklid uzayında x ve y iki vektör olsun. Eğer $\langle x,y\rangle = 0$ ise x ve y vektörlerine ortogonal vektörler denir ve $x \perp y$ biçiminde gösterilir.

Tanım 6: R^n öklid uzayında sıfırdan farklı k tane vektörden oluşan $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \subset R^n$ sistemi verilsin. Eğer her $i, j = 1,...,k$ için $i \neq j$ olmak üzere $x_i \perp x_j$ ise , $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ sistemine ortogonal sistem denir.

Tanım 7: $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \subset R^n$ vektör sistemi verilsin. $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in R$ olmak üzere, $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_k x_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ vektörüne $x_1, x_2, ..., x_k$ vektörlerinin lineer toplamı (lineer birleşimi) denir.

Tanım 8: $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \subset R^n$ olsun. Eğer, $\lambda_i \in R, i = 1, ..., k$ için $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_k x_k = 0$ iken $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = 0$ ise $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \subset R^n$ sistemine lineer bağımsız denir.

Teorem 2: [45, s.167]. Eğer, $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \subset R^n$ ortogonal vektörler sistemi ise

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \|x_i\|^2 \quad \text{dir.} \qquad \text{(Pisagor Teo.)} \ (2)$$

Teorem 3: [45,s.135]. $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \subset R^n$ ortogonal ve $x_i \neq 0, i = 1, ..., k$ ise sistem lineer bağımsızdır.

Tanım 9: $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \subset R^n$ sistemi verilsin. Eğer, $i, j = 1, ..., k$ için $\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$ ise bu sisteme ortonormal sistem denir,

Teorem 4: [45, s.172] Keyfi Öklid uzayında ortonormal taban mevcuttur.

Teorem 5: [45,s.176] Keyfi ortonormal sistem, ortonormal tabana kadar genişletilebilir.

Teorem 6: [45, s.167]. V bir iç çarpım uzayı ve $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \subset V$ de ortonormal vektörler ise, $\forall x \in V$ için

$$\sum_{i=1}^{k} \left| \langle x, x_i \rangle \right|^2 \leq \|x\|^2 \qquad \text{(Bessel Eşitsizliği)} \qquad (3)$$

dir.

1.3. Gram Matrisi ve Gram Determinantı

R^n de $\{x_1, ..., x_k\}$ keyfi vektörler sistemi verilsin.

Tanım 10: İki vektör arasında tanımlanan iç çarpım $\langle , \rangle$ olmak üzere,

$$G(x_1, ..., x_k) = \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_k \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_k, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_k, x_k \rangle \end{pmatrix} \qquad (4)$$

matrisine $\{x_1, ..., x_k\}$ sisteminin Gram matrisi denir.

Tanım 11: Gram matrisinin determinantına $\{x_1,...,x_k\}$ sisteminin Gram Determinantı denir ve $\det G(x_1,...,x_k)$ ile gösterilir. Yani,

$$\det G(x_1,...,x_k)=\begin{vmatrix}\langle x_1,x_1\rangle & \cdots & \langle x_1,x_k\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_k,x_1\rangle & \cdots & \langle x_k,x_k\rangle\end{vmatrix} \tag{5}$$

dir.

Şimdi, $\{x_1,...,x_k\}$ R^n de bir vektör sistemi olsun.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= (x_{11},...,x_{1n}) \\ x_2 &= (x_{21},...,x_{2n}) \\ &\vdots \\ x_k &= (x_{k1},...,x_{kn})\end{aligned}\right\} \text{ olmak üzere, } \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{kn}\end{pmatrix} \text{ matrisini } \|x_1,...,x_k\| \text{ ile}$$

gösterelim.

Önerme 1: $x_1,...,x_k$ ve $y_1,...,y_m$, R^n öklid uzayında vektörler olsun. Bu takdirde,

$$\|x_1,...,x_k\|^T.\|y_1,...,y_m\|=\begin{pmatrix}\langle x_1,y_1\rangle & \cdots & \langle x_1,y_m\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_k,y_1\rangle & \cdots & \langle x_k,y_m\rangle\end{pmatrix} \tag{6}$$

dir. Burada, $\|x_1,...,x_k\|^T$ matrisi, $\|x_1,...,x_k\|$ matrisinin transpozudur.

İspat:

$$\|x_1,...,x_k\|^T.\|y_1,...,y_m\|=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{kn}\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} y_{11} & y_{21} & \cdots & y_{m1} \\ y_{12} & y_{22} & \cdots & y_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1n} & y_{2n} & \cdots & y_{mn}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{n} x_{1i}.y_{1i} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_{1i}.y_{mi} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ki}.y_{1i} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_{ki}.y_{mi}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\langle x_1,y_1\rangle & \cdots & \langle x_1,y_m\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_k,y_1\rangle & \cdots & \langle x_k,y_m\rangle\end{pmatrix} \quad \blacklozenge$$

R^n de $\{x_1,...,x_n\}$ sistemini göz önüne aldığımızda $\|x_1,...,x_n\|$ matrisinin determinantını $[x_1,...,x_n]$ ile gösterelim.

Sonuç 2: $\left[x_1,...,x_n\right].\left[y_1,...,y_n\right]=\begin{vmatrix}\langle x_1,y_1\rangle & \cdots & \langle x_n,y_1\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_1,y_n\rangle & \cdots & \langle x_n,y_n\rangle\end{vmatrix}$ (7)

dir.

İspat: (6) da m = k = n alınırsa,

$$\left\|x_1,...,x_n\right\|^T.\left\|y_1,...,y_n\right\|=\begin{pmatrix}\langle x_1,y_1\rangle & \cdots & \langle x_1,y_n\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n,y_1\rangle & \cdots & \langle x_n,y_n\rangle\end{pmatrix}$$

olur. Buradan determinanta geçersek,

$$\begin{vmatrix}\langle x_1,y_1\rangle & \cdots & \langle x_1,y_n\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n,y_1\rangle & \cdots & \langle x_n,y_n\rangle\end{vmatrix}=det\left(\left\|x_1,...,x_n\right\|^T.\left\|y_1,...,y_n\right\|\right)=det\left(\left\|x_1,...,x_n\right\|^T\right).det\left(\left\|y_1,...,y_n\right\|\right)$$

$$=det(\left\|x_1,...,x_n\right\|).\left[y_1,...,y_n\right]$$

$$=\left[x_1,...,x_n\right].\left[y_1,...,y_n\right]$$

elde edilir. ♦

Sonuç 3: $x_1,...,x_n\in R^n$ için $det\,G(x_1,...,x_n)=\left[x_1,...,x_n\right]^2$ (8)

dir.

İspat: (7) de $y_1,...,y_n$ yerine $x_1,...,x_n$ alınırsa ispat çok açıktır. ♦

Önerme 2: $x_1,...,x_m\in R^n$ olsun.

1) $det\,G(x_1,...,x_m)\geq 0$, $\forall x_1,...,x_m\in R^n$; (9)

2) $det\,G(x_1,...,x_m)=0 \Leftrightarrow \{x_1,...,x_m\}$ sistemi lineer bağımlıdır. (10)

İspat: Bu önermenin ispatını 3 durumda inceleyelim.

i) m = n olsun.

1) $det\,G(x_1,...,x_n)=\left[x_1,...,x_n\right]^2\geq 0$ aşikardır.

2) $\Rightarrow$: $det\,G(x_1,...,x_n)=0$ olsun. $\Rightarrow \left[x_1,...,x_n\right]^2=0 \Rightarrow \left[x_1,...,x_n\right]=0$ dır $\Rightarrow$ $\{x_1,...,x_m\}$ lineer bağımlıdır. [44,s.192]

$\Leftarrow$: Tersine $\{x_1,...,x_n\}$ lineer bağımlı iken $det\,G(x_1,...,x_n)=0$ olduğunu gösterelim. $\{x_1,...,x_n\}$ lineer bağımlı olduğundan $\exists k=1,...,n$ için x_k vektörünü diğer vektörlerin bir lineer toplamı şeklinde yazmak mümkündür. Genelliği bozmadan k = n alabiliriz. Bu durumda,

$$x_n = \beta_1 x_1 + ... + \beta_{n-1} x_{n-1} \tag{11}$$

yazılabilir. (5) te k = n alır, x_n yerine (11) ifadesini yazarsak;

$$det\, G(x_1,...,x_n) = \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \cdots & \cdots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle x_{n-1}, x_1 \rangle & \cdots & \cdots & \langle x_{n-1}, x_n \rangle \\ \langle \beta_1 x_1 + ... + \beta_{n-1} x_{n-1}, x_1 \rangle & \cdots & \cdots & \langle \beta_1 x_1 + ... + \beta_{n-1} x_{n-1}, x_n \rangle \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \cdots & \cdots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle x_{n-1}, x_1 \rangle & \cdots & \cdots & \langle x_{n-1}, x_n \rangle \\ \beta_1 \langle x_1, x_1 \rangle + ... + \beta_{n-1} \langle x_{n-1}, x_1 \rangle & \cdots & \cdots & \beta_1 \langle x_1, x_n \rangle + ... + \beta_{n-1} \langle x_{n-1}, x_n \rangle \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

bulunur. Son satırı diğer satırların bir lineer toplamı olduğundan sonuç sıfırdır.

ii) m > n olsun. Yani n boyutlu uzayda n den daha büyük sayıda m tane vektör olsun.

1- Bu durumda m tane vektör her koşulda lineer bağımlıdır.

2- $\{x_1,...,x_m\}$ lineer bağımlı olduğundan, m = n durumunda yaptığımız gibi , n yerine m almak suretiyle benzer biçimde $det\, G(x_1,...,x_m) = 0$ olduğu görülür.

iii) m < n olsun. $\{x_1,...,x_m\}$ vektörlerinin lineer bağımsız olması durumunda $\{x_1,...,x_m\}$ vektörleriyle üretilen alt uzayı W ile gösterelim. $W \subset R^n$ dir. W, $\langle x, y \rangle$ iç çarpımına göre bir öklid uzayıdır. Keyfi öklid uzayı R^m ye izomorfdur ve iç çarpımı korur. Yani $\exists F : W \to R^m$ birebir ve örten öyleki,

$$\langle x, y \rangle_W = \langle F(x), F(y) \rangle_{R^m} \tag{12}$$

dir. (5) ifadesinde $det\, G(x_1,...,x_m)$ yi alır ve (12) ifadesini kullanırsak;

$$\begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle_W & \cdots & \langle x_1, x_m \rangle_W \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_m, x_1 \rangle_W & \cdots & \langle x_m, x_m \rangle_W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle F(x_1), F(x_1) \rangle_{R^m} & \cdots & \langle F(x_1), F(x_m) \rangle_{R^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle F(x_m), F(x_1) \rangle_{R^m} & \cdots & \langle F(x_m), F(x_m) \rangle_{R^m} \end{pmatrix} \tag{13}$$

bulunur. Determinanta geçersek;

$$det\,G(x_1,...,x_m)_{R^n} = \begin{vmatrix} \langle x_1,x_1\rangle_W & \cdots & \langle x_1,x_m\rangle_W \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_m,x_1\rangle_W & \cdots & \langle x_m,x_m\rangle_W \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \langle F(x_1),F(x_1)\rangle_{R^m} & \cdots & \langle F(x_1),F(x_m)\rangle_{R^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle F(x_m),F(x_1)\rangle_{R^m} & \cdots & \langle F(x_m),F(x_m)\rangle_{R^m} \end{vmatrix}$$

olduğu görülür. Böylece

$$det\,G(x_1,...,x_m)_{R^n} = det\,G(F(x_1),...,F(x_m))_{R^m} \tag{14}$$

elde edilir. Şimdi ispata geçelim.

1) m boyutlu uzayda m tane noktanın gram determinantının sıfır veya pozitif olduğu m = n durumunda gösterilmişti. Yani, $det\,G(F(x_1),...,F(x_m))_{R^m} \geq 0$ dır.

(14) ifadesinden $det\,G(x_1,...,x_m)_{R^n} \geq 0$ dır.

2) $\Rightarrow$: $det\,G(x_1,...,x_m) = 0$ olsun. $\{x_1,...,x_m\}$ vektörlerinin lineer bağımlı olduğunu gösterelim. Farz edelim ki $\{x_1,...,x_m\}$ lineer bağımsız olsun. Bu durumda yukarıda verildiği gibi bir izomorfizma vardır ve (13), (14) eşitlikleri sağlanır. $\{x_1,...,x_m\}$ lineer bağımsız ise $\{F(x_1),...,F(x_m)\}$ R^m de lineer bağımsızdır. $det\,G(F(x_1),...,F(x_m)) \neq 0$ olur. Bunun sonucunda (14) ifadesinden $det\,G(x_1,...,x_m) \neq 0$ bulunur ki bu bir çelişkidir. Yani, $det\,G(x_1,...,x_m) = 0$ ise $\{x_1,...,x_m\}$ vektörlerinin lineer bağımlıdır.

$\Leftarrow$: Tersine $\{x_1,...,x_n\}$ lineer bağımlı iken $det\,G(x_1,...,x_n) = 0$ olduğu yukarıda diğer koşullarda verildiği gibi benzer şekilde gösterilir. ♦

Önerme 3: x, y $\in$ R^n için

1-) $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|.\|y\|$ dir (Schwarz Eşitsizliği)

2-) $|\langle x,y\rangle| = \|x\|.\|y\|$ dir. $\Leftrightarrow$ x ve y lineer bağımlıdır.

İspat: 1- $det\,G(x,y) = \begin{vmatrix} \langle x,x\rangle & \langle x,y\rangle \\ \langle y,x\rangle & \langle y,y\rangle \end{vmatrix} \geq 0$

dır yani,

$$\langle x,x\rangle.\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2 \geq 0.$$

elde edilir. Buradan,

$$\langle x,y\rangle^2 \le \langle x,x\rangle.\langle y,y\rangle$$

dır. İki tarafın karekökü alınırsa,

$$|\langle x,y\rangle| \le \|x\|.\|y\|$$

bulunur.

2- Önerme 2 ye göre,

$det\,G(x,y) = \begin{vmatrix} \langle x,x\rangle & \langle x,y\rangle \\ \langle y,x\rangle & \langle y,y\rangle \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$ x ve y lineer bağımlıdır. Buradan

$\langle x,y\rangle^2 = \langle x,x\rangle.\langle y,y\rangle$ dır. Eşitliğin her iki yanının karekökü alındığında $|\langle x,y\rangle| = \|x\|.\|y\|$ dır $\Leftrightarrow$ x ve y lineer bağımlıdır.♦

1.4. İzometriler ve Lineer İzometriler

1.4.1. O(n) ve E(n) Grupları

Tanım 12: R^n öklid uzayında $x,y\in R^n$ vektörleri verilsin.

$$d(x,y) := \|x-y\|$$

reel sayısına *x* ve *y* vektörlerinin uç noktaları arasındaki uzaklık denir.

Tanım 13: (X, d) metrik uzay ve $F : X \to X$ olsun. Eğer keyfi $x, y \in$ X için $d(F(x),F(y)) = d(x,y)$ ise F ye bir izometri denir.

Örnek 3: R^n de öteleme dönüşümü bir izometridir.

$x \in R^n$ ve keyfi $a \in R^n$ için $F(x) = x + a$ dönüşümü bir öteleme dönüşümüdür. $x, y \in R^n$ için

$$d(F(x),F(y)) = d(x+a,y+a) = \|y+a-(x+a)\| = \|y-x\| = d(x,y)$$

dir. ♦

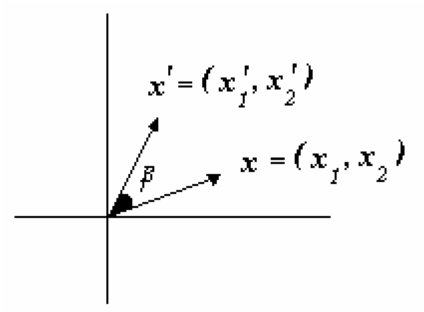
Örnek 4: R^2 de dönme hareketi bir izometridir. $x = (x_1, x_2)$, $x' = (x_1', x_2') \in R^2$ olmak üzere $F : R^2 \to R^2$, $F(x) = x'$ dönüşümü R^2 de bir dönme hareketi tanımlar. Burada

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1\cos\beta - x_2\sin\beta \\ x_2' &= x_1\sin\beta + x_2\cos\beta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \|F(x)\| = \|x\|$$

dir.

$$F(x) - F(y) = x' - y' = (x_1' - y_1', x_2' - y_2') \text{ ve},$$
$$\left.\begin{aligned} x_1' - y_1' &= x_1 \cos\beta - x_2 \sin\beta - y_1 \cos\beta + y_2 \sin\beta = (x_1 - y_1)\cos\beta - (x_2 - y_2)\sin\beta \\ x_2' - y_2' &= x_2 \cos\beta + x_1 \sin\beta - y_2 \cos\beta - y_1 \sin\beta = (x_2 - y_2)\cos\beta + (x_1 - y_1)\sin\beta \end{aligned}\right\}$$

olur. Buradan $F(x) - F(y) = F(x - y) \Rightarrow \|F(x) - F(y)\| = \|F(x-y)\| = \|x - y\|$ dir. Buna göre F izometridir. ♦



Şekil 1. O(2)- yörüngede dönme hareketi

Örnek 5: Birim dönüşüm bir izometri dönüşümüdür: $\|I(x) - I(y)\| = \|x - y\|$ ♦

R^n uzayında tanımlı tüm izometrilerin cümlesini Is (n) ile gösterelim.

Önerme 4: F_1 , $F_2 \in$ Is (n) ise F_1 ve F_2 dönüşümlerinin bileşkesi $F_1 \circ F_2 \in$ Is (n) dir.

İspat: $x, y \in R^n$ keyfi olsun.

$$d((F_1 \circ F_2)(x), (F_1 \circ F_2)(y)) = d(F_1(F_2(x)), F_1(F_2(y))) = d(F_2(x), F_2(y)) = d(x, y)$$

olduğundan $F_1 \circ F_2 \in$ Is (n) dir. ♦

Sonuç 4: (Is (n), $\circ$) fonksiyonların bileşke işlemine göre birimli yarı gruptur yani monoid dir.

İspat: $F_1, F_2, F_3 \in$ Is(n) olsun.

$$(F_1 \circ (F_2 \circ F_3))(x) = F_1(F_2(F_3(x))) = (F_1 \circ F_2)(F_3(x)) = ((F_1 \circ F_2) \circ F_3)(x)$$

asosyatif olduğu görülür. Birim dönüşüm izometri olduğundan birim elemanı var. Böylece (Is (n), $\circ$) monoiddir. ♦

Önerme 5: Keyfi $F : R^n \to R^n$ izometrisi birebirdir.

İspat: x , $y \in R^n$ ve $x \neq y$ olsun. Göstermemiz gereken $F(x) \neq F(y)$ olduğudur. Farzedelim ki F(x) = F(y) olsun. Bu durumda $d(F(x), F(y)) = \|F(y) - F(x)\| = 0$

olur. F izometri olduğundan $d(F(x),F(y)) = d(x,y) = \|y-x\| = 0$ olur. Buradan y – x = 0 ve x = y elde edilir. Bu ise bir çelişkidir.O halde F(x) = F(y) olamaz. Böylece F(x) ≠F(y) dir ve F birebirdir. ♦

Tanım 14: V ve W iki vektör uzayı ve $T : V \to W$ dönüşümü verilsin. Eğer $\forall v_1, v_2 \in V$ vektörleri ve her α, β skalerleri için

$$T(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha T(v_1) + \beta T(v_2),$$

ise T dönüşümüne bir lineer dönüşüm denir.

Tanım 15: F izometri ve lineer dönüşüm ise, F ye lineer izometri denir

R^n uzayında tanımlı tüm lineer izometrilerin cümlesini O(n) ile gösterelim. Buna göre O(n) $\subset$ Is(n) dir.

Önerme 6: F_1 , $F_2 \in$ O(n) ise $F_1 \circ F_2 \in$ O(n) dir.

İspat: x , $y \in R^n$ keyfi olsun. keyfi iki izometrinin bileşkesi önerme 4 e göre yine bir izometridir. Lineerliği gösterelim. F_1 ,F_2 lineer olduklarından $\forall \lambda, \nu \in R$ ve her x , $y \in R^n$ için

$$\begin{aligned}(F_1 \circ F_2)(\lambda x + \nu y) &= F_1(F_2(\lambda x + \nu y)) \\ &= F_1(\lambda F_2(x) + \nu F_2(y)) \quad (F_2 \text{ lineer olduğundan }) \\ &= \lambda F_1(F_2(x)) + \nu F_1(F_2(y)) \quad (F_1 \text{ lineer olduğundan }) \\ &= \lambda(F_1 \circ F_2)(x) + \nu(F_1 \circ F_2)(y)\end{aligned}$$

dir. Böylece $F_1 \circ F_2 \in$ O(n) dir. ♦

Sonuç 5: (O (n), $\circ$) ikilisi fonksiyonların bileşke işlemine göre bir monoiddir.

Önerme 7: $F : R^n \to R^n$ birebir ve lineer ise örtendir.

İspat: [45, s. 273-281] ♦

Sonuç 6: Keyfi lineer izometri örtendir.

İspat: Önerme 5 ve Önerme 7 den kolayca görülür. ♦

Sonuç 7: Keyfi F lineer izometri dönüşümünün tersi F^{-1} mevcuttur ve F^{-1} de bir lineer izometridir.

İspat: [45, s. 281-282] ♦

Sonuç 8: (O (n), $\circ$) ikilisi lineer izometri dönüşümlerinin cümlesi bileşke işlemine göre bir gruptur.

İspat: Önerme 7, Sonuç 5 ve Sonuç 7 den açıktır. ♦

Önerme 8: $T_a : R^n \to R^n$, $T_a(x) = x + a$ ötelemesi bir lineer izometridir ancak ve ancak $a = 0$ dır.

İspat: :⇒ T_a lineer izometri olsun. Bu durumda T_a lineerdir.∀ x , y ∈ R^n için $T_a(x+y) = T_a(x) + T_a(y) = (x+a) + (y+a) = x + y + 2a$ olur. Öte yandan T_a *(x)* in tanımından $T_a(x+y) = x + y + a$ dır. Buradan $a = 2a$ elde edilir. Böylece $a = 0$ bulunur.

⇐: $a = 0$ olsun. $T_a(x+y) = x + y = T_a(x) + T_a(y)$ ve $T_a(\lambda x) = \lambda x = \lambda T_a(x)$ olacağından T_a lineerdir. Ayrıca $\|T_a(x) - T_a(y)\| = \|x - y\|$ olduğundan T_a lineer izometridir. ♦

R^n deki tüm öteleme dönüşümlerinin cümlesini Tr(n) ile gösterelim. Örnek 3 e göre Tr(n) $\subset$ Is(n) dir.

Sonuç 9: Tr(n) $\cap$ O(n) = I dır.

İspat: Önerme 8 den görülür. ♦

Önerme 9: Keyfi öteleme örtendir.

İspat: R^n de keyfi öteleme dönüşümü F(x) = x+a biçimindedir. Keyfi y ∈ R^n için y – a ∈ R^n öyleki, F(y - a) = (y - a) + a = y dir yani F örtendir. ♦

Önerme 10: (Tr(n), $\circ$) dönüşümlerin bileşke işlemine göre bir değişmeli gruptur.

İspat: $T_a, T_b, T_c \in$ Tr(n) verilen üç öteleme dönüşümü ve x ∈ R^n keyfi olsun.

$$T_a \circ (T_b \circ T_c)(x) = T_a(T_b(T_c(x))) = T_a(x + c + b) = x + c + b + a = ((T_a \circ T_b) \circ T_c)(x)$$

olduğundan asosyatiflik sağlanır. Birim elemanı $T_0 = I$ dönüşümüdür. $T_a \in$ Tr(n) için $\exists T_{-a} \in$ Tr(n) öyleki $(T_{-a} \circ T_a)(x) = T_{-a}(x + a) = x + a - a = x$ dir ve ayrıca $(T_a \circ T_{-a})(x) = T_a(x - a) = x - a + a = x$ $\Rightarrow$ $T_{-a} \circ T_a = T_a \circ T_{-a}$ = I olduğundan her elemanın tersi mevcuttur.

Şimdi, $T_a, T_b \in$ Tr(n) olsun.

$$(T_a \circ T_b)(x) = T_a(T_b(x)) = x + b + a = x + a + b = T_b(T_a(x)) = (T_b \circ T_a)(x)$$

yazılabildiğinden $(\text{Tr(n)}, \circ)$ değişmeli gruptur. ♦

Tr(n) grubuna ötelemeler grubu denir.

Tanım 16: F, R^n Öklid uzayında tanımlı bir dönüşüm olsun. Eğer, $\forall x,y \in R^n$ için $\langle F(x),F(y)\rangle = \langle x,y\rangle$ ise F ye ortogonal dönüşüm denir.

Teorem 7: $F : R^n \to R^n$ dönüşümü için aşağıdaki ifadeler denktir:

i) F ortogonal dönüşümdür,

ii) F lineer izometridir,

iii) F izometri ve F (0) = 0 dır.

İspat: i) $\Rightarrow$ ii) F ortogonal olsun F nin lineer olduğunu gösterelim. Bunun için R^n nin bir ortonormal tabanı olarak $e_1,...,e_n$ alalım. F ortogonal olduğundan iç çarpımları korur.

$$\langle F(e_i),F(e_j)\rangle = \langle e_i,e_j\rangle = \delta_{ij}$$

dir ve $F(e_1),...,F(e_n)$ ortonormal tabandır. $x \in R^n$ için

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \quad , \lambda_i = \langle x, e_i\rangle \qquad\qquad F(x) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i F(e_i) \quad , \eta_i = \langle F(x), F(e_i)\rangle$$

$$y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i \quad , \beta_i = \langle y, e_i\rangle \qquad\qquad F(y) = \sum_{i=1}^{n} \kappa_i F(e_i) \quad , \kappa_i = \langle F(y), F(e_i)\rangle$$

yazılabilir. F ortogonal olduğundan $\lambda_i = \langle x, e_i\rangle = \langle F(x), F(e_i)\rangle = \eta_i$ ve

$\beta_i = \langle y, e_i\rangle = \langle F(y), F(e_i)\rangle = \kappa_i$ dir. $F(x+y)$ yi ifade edecek olursak

$$F(x+y) = F(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i) = F(\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \beta_i) e_i) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \beta_i) F(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F(e_i) + \sum_{i=1}^{n} \beta_i F(e_i)$$

olduğundan

$$F(x+y) = F(x) + F(y)$$

olduğu görülür ve $F(\mu x) = F(\mu \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i) = F(\sum_{i=1}^{n} \mu \lambda_i e_i) = \mu \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F(e_i) = \mu F(x)$ olduğundan F lineerdir. F nin izometri olduğunu gösterelim. F ortogonal olduğundan $\langle F(x),F(x)\rangle = \langle x,x\rangle$ dir. $\sqrt{\langle F(x),F(x)\rangle} = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ olacağından $\|F(x)\| = \|x\|$ dir. Diğer taraftan $\|F(x) - F(y)\| = \|F(x-y)\| = \|x-y\|$ olduğundan F izometridir. ♦

ii) $\Rightarrow$ iii) F lineer izometri olsun $\Rightarrow$ F izometridir.

F lineer dönüşüm olduğundan keyfi $x , y \in R^n$ için $F(x+y) = F(x) + F(y)$ dir.

$x + y = 0$ olsun. $\Rightarrow y = -x \Rightarrow F(0) = F(x+y) = F(x) + F(-x) = F(x) - F(x) = 0$

elde edilir. ♦

iii) $\Rightarrow$ i) F izometri ve F(0) = 0 olsun. $\|F(x)\| = \|F(x) - F(0)\| = \|x - 0\| = \|x\|$

Buradan, $\|F(x)\| = \|x\|$ ise $\|F(x)\|^2 = \|x\|^2$ olacağından $\langle F(x), F(x)\rangle = \langle x, x\rangle$ elde edilir.

Öte yandan $\langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$ yazmak mümkündür. Buradan

$$\langle x,y\rangle = \frac{\langle x+y,x+y\rangle - \langle x,x\rangle - \langle y,y\rangle}{2}$$

elde edilir. Buna göre;

$$\langle F(x),F(y)\rangle = \frac{\langle F(x+y),F(x+y)\rangle - \langle F(x),F(x)\rangle - \langle F(y),F(y)\rangle}{2}$$

ve $\langle F(x),F(x)\rangle = \langle x,x\rangle$ olduğundan,

$$\langle F(x),F(y)\rangle = \frac{\langle x+y,x+y\rangle - \langle x,x\rangle - \langle y,y\rangle}{2} = \langle x,y\rangle$$

dir . Böylece F ortogonaldır. ♦

Sonuç 10: Lineer izometriler grubu, ortogonal dönüşümler grubu ile çakışıktır.

Teorem 8: F, keyfi izometrisi için öyle bir T_a ötelemesi ve öyle bir C ortogonal dönüşümü, tek türlü olarak vardır öyleki, $F = T_a \circ C$ şeklinde ifade edilir.

İspat: [46,s.386]♦

Böylece, R^n öklid uzayında tanımlanan tüm izometrilerin cümlesini daha belirgin olarak E *(n)* ile gösterecek olursak,

$E(n) = \{F : R^n \to R^n : F(x) = g(x) + a,$ g ortogonal dönüşüm, a $\in R^n\}$ şeklinde tanımlayabiliriz.

Önerme 11: 1- F, R^n de bir ortogonal dönüşüm ve $\{e_1,...,e_n\}$, R^n de bir ortonormal sistem ise , $\{F(e_1),...,F(e_n)\}$ de ortonormaldir.

2- F, R^n de bir lineer dönüşüm olsun. Eğer, R^n deki bir $\{e_1,...,e_n\}$ ortonormal taban için $\{F(e_1),...,F(e_n)\}$ sistemi ortonormal ise, F ortogonal dönüşümdür.

İspat: 1- F ortogonal olsun. $\forall$ x, y $\in$ R^n için $\langle F(x),F(y)\rangle = \langle x,y\rangle$ olduğundan $\langle F(e_i),F(e_j)\rangle = \langle e_i,e_j\rangle = \delta_{ij}$ $\Rightarrow$ $F(e_1),...,F(e_n)$ ortonormaldir.

2- F lineer, $e_1,...,e_n$ ve $F(e_1),...,F(e_n)$ ortonormal olsunlar. $x=\sum_{i=1}^{n}\beta_i e_i$, $y=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i$ elemanları için $F(x)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i F(e_i)$ ve $F(y)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i F(e_i)$ dir. İç çarpımlarını alırsak,

$$\langle F(x),F(y)\rangle=\langle\sum_{i=1}^{n}\beta_i F(e_i),\sum_{j=1}^{n}\lambda_j F(e_j)\rangle=\sum_{i,j=1}^{n}\beta_i\lambda_j\langle F(e_i),F(e_j)\rangle=\beta_i\lambda_j$$

$$\langle x,y\rangle=\langle\sum_{i=1}^{n}\beta_i e_i,\sum_{j=1}^{n}\lambda_j e_j\rangle=\beta_i\lambda_j$$

olduğundan $\langle F(x),F(y)\rangle=\langle x,y\rangle$ dir. O halde F ortogonaldır. ♦

Sonuç 11: Keyfi $F:R^n\to R^n$ izometrisi örtendir.

İspat: Keyfi F izometrisi Teorem 8 e göre $F = T_a\circ C$ biçiminde ifade edilebilir, burada T_a bir öteleme ve C bir ortogonal dönüşümdür. . Sonuç 8 e göre keyfi C lineer izometrisi yani keyfi ortogonal dönüşümü örtendir. Önerme 9 a göre, keyfi T_a ötelemesi örtendir. Örten dönüşümlerin bileşkesi örten olduğundan dolayı $F = T_a\circ C$ örtendir. ♦

Sonuç 12: Keyfi F izometrisi için F^{-1} dönüşümü vardır ve bu da bir izometridir.

İspat: $F:R^n\to R^n$ bir izometri yani keyfi x,y∈ R^n için $\|F(y)-F(x)\|=\|y-x\|$ olsun. Önerme 5 ve Sonuç 11 e göre, F^{-1} dönüşümü mevcuttur. $F^{-1}(x),F^{-1}(y)\in R^n$ elemanları için

$$\|y-x\|=\|F(F^{-1}(y))-F(F^{-1}(x))\|=\|F^{-1}(y)-F^{-1}(x)\|$$

elde edilir. Böylece F^{-1} izometridir. ♦

Buna göre $E(n)$ bir gruptur.

Tanım 17: $E(n)$ grubuna Öklid hareketleri grubu denir.

R^n öklid uzayında tanımlanan lineer izometrilerin (ortogonal dönüşümlerin) cümlesini $O(n)$ ile gösterelim yani,

$$O(n)=\{F:R^n\to R^n : F(x)=g(x), \text{ g ortogonal dönüşüm }\}$$

alalım. Bu $O(n)$ grubuna ortogonal dönüşümler grubu ya da lineer izometriler grubu denir.

$F : R^n \to R^n$ lineer bir dönüşüm ve $\{e_1,...,e_n\}$, R^n nin standart ortonormal tabanı olsun. $\{e_1,...,e_n\}$ nin F altındaki görüntüsünü

$$\left.\begin{array}{l} F(e_1) = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + ... + a_{1n}e_n \\ F(e_2) = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + ... + a_{2n}e_n \\ \vdots \\ F(e_n) = a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + ... + a_{nn}e_n \end{array}\right\}$$

biçiminde alalım. Buna göre

$$M_F = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisine F nin $\{e_1,...,e_n\}$ tabanına göre matrisi denir.

Önerme 12: $F : R^n \to R^n$ lineer dönüşümü ortogonal dönüşümdür ancak ve ancak F nin $\{e_1,...,e_n\}$ tabanına göre matrisi ortogonal matristir.

İspat::$\Rightarrow$ F ortogonal ve F nin $\{e_1,...,e_n\}$ tabanına göre matrisi M_F olsun. $\langle F(x),F(y)\rangle = \langle x,y\rangle$ ve $\langle F(e_i),F(e_j)\rangle = \langle e_i,e_j\rangle = \delta_{ij}$ dır. Daha açık ifade ile

$$\langle F(e_i),F(e_j)\rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} a_{ik}e_k , \sum_{m=1}^{n} a_{jm}e_m \rangle = \sum_{k,m=1}^{n} a_{ik}a_{jm}\langle e_i,e_j\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}$$

olduğundan

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}a_{1k} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}a_{nk} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk}a_{1k} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}a_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I$$

dir. Böylece, M_F ortogonaldır. Tersine, M_F ortogonal olsun. O zaman;

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}a_{1k} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}a_{nk} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk}a_{1k} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}a_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I$$

dir. $x = (x_1,....,x_n)$ ve $y = (y_1,....,y_n)$ olmak üzere $F(x) = M_F x$ ve $F(y) = M_F y$ dir.

$$\langle F(x),F(y)\rangle = \langle M_F x, M_F y\rangle$$

$$= \langle (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \ldots, a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n), (a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n, \ldots, a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n) \rangle$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{1i}a_{1j}x_i y_j + \ldots + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ni}a_{nj}x_i y_j$$

dir. $\sum_{i,j=1}^{n} a_{1i}a_{1j}x_i y_j = \delta_{ij}$ olduğundan

$$\langle F(x), F(y) \rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = \langle x, y \rangle$$

dir. Böylece F ortogonaldır. ♦

1.4.2. SO(n) ve SE(n) Grupları

Ortogonal dönüşümlere karşılık gelen ortogonal matrislerin determinantı ±1 dir. Özel olarak det g =1 olan ortogonal dönüşümlerin cümlesini $SO(n)$ ile gösterelim yani

$$SO(n) = \{ F : R^n \to R^n : F(x) = \mathrm{gx}\ ,\ g \in O(n), \det \mathrm{g} = 1 \}.$$

Önerme 13: $SO(n)$, $O(n)$ grubunun alt grubudur.

İspat: F_1, F_2 $\in$ $SO(n)$ olsun. $(F_1 \circ F_2)(x) = F_1(F_2(x)) = g_1(g_2(x)) = g_1 g_2(x)$. g_1, $g_2 \in O(n)$ ve det g_1 = 1 , det g_2 = 1 olduğundan det g_1 g_2 = 1 dir. Böylece $(F_1 \circ F_2)(x) \in SO(n)$ dir. Ayrıca, birim dönüşüm de $I \in SO(n)$ dir. Keyfi F $\in$ $SO(n)$ için $F(x) = gx$, $g \in SO(n)$ ve det g = 1 dir. $F^{-1}(x) = g^{-1}x = g^T x$ fonksiyonu için

$$\det g = \det g^T = 1$$

olduğundan $F^{-1} \in SO(n)$ dir. Böylece ispat tamamlanır. ♦

Önerme 14: $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R^n$ ve $F \in SO(n)$ için

$$[F(a_1), \ldots, F(a_n)] = [a_1, \ldots, a_n]$$

dir.

İspat:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1n}) \\ \vdots \\ a_n = (a_{n1}, \ldots, a_{nn}) \end{array}\right\} \text{olmak üzere, } \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det \| a_1, \ldots, a_n \| = [a_1, \ldots, a_n]$$

ile gösterilmişti. $g=\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$ ve $[a_1,...,a_n]=det\|a_1,...,a_n\|$ sayısını alırsak,

$$F(a_1)=ga_1=\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}=(\sum_{i=1}^{n} g_{1i}a_{1i},...,\sum_{i=1}^{n} g_{ni}a_{1i})$$

$$\vdots$$

$$F(a_n)=ga_n=\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n1} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}=(\sum_{i=1}^{n} g_{1i}a_{ni},...,\sum_{i=1}^{n} g_{ni}a_{ni})$$

olmak üzere,

$$\|F(a_1),...,F(a_n)\|=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} g_{1i}a_{1i} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} g_{1i}a_{ni} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} g_{ni}a_{1i} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} g_{ni}a_{ni} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

elde dilir. Buradan, det g = 1 olduğundan

$$[F(a_1),...,F(a_n)]=det\|F(a_1),...,F(a_n)\|=[a_1,...,a_n]$$

elde edilir. ♦

Not: Bu önermenin geometrik anlamı $SO(n)$ grubunun elemanları , R^n de vektörlerin oluşturduğu paralelyüzlünün hacmini korur.

Öklid hareketlerine karşılık gelen tüm izometri dönüşümlerin cümlesi

$$E(n)=\{F:R^n\to R^n : F(x)=gx+b,\ g\in O(n),\ b\in R^n\}$$

idi. Burada $g\in O(n)$ elemanlarını özel olarak det g =1 olan ortogonal dönüşümlerden yani, $g\in SO(n)$ alırsak, bu dönüşümlerin cümlesini

$$SE(n)=\{F:R^n\to R^n : F(x)=gx+b,\ g\in SO(n),\ b\in R^n\}$$

ile gösterelim.

Önerme 15: $SE(n)\subset E(n)$ altgruptur.

İspat: F_1, $F_2\in SE(n)$ olsun. Bu takdirde,

$(F_1 \circ F_2)(x) = F_1(F_2(x)) = g_1(F_2(x)) + b_1 = g_1(g_2(x) + b_2) + b_1 = g_1 g_2 x + g_1 b_2 + b_1$

dır. Burada $g_1,\ g_2 \in SO(n)$ yani det g_1 = det g_2 = 1 olduğundan det g_1 g_2 = 1; ve $g_1 b_2 + b_1 \in R^n$ olduğundan $(F_1 \circ F_2)(x) \in SE(n)$ dir. Ayrıca birim dönüşüm $I \in SE(n)$ dir. $F \in SE(n)$, $F(x) = gx + b$, $g \in SO(n)$, $b \in R^n$ için ters dönüşüm

$$F^{-1}(x) = g^{-1}(x - b) = g^T(x - b) = g^T(x) - g^T b$$

fonksiyonuyla verilebilir. Burada det g^T = 1 ve $g^T b \in R^n$ dir. Gerçekten $F \circ F^{-1} = I$ ve $F^{-1} \circ F = I$ dır. Böylece $F^{-1} \in SE(n)$ dir. İspat tamamlanmış olur. ♦

1.5. Bir Grubun Bir Cümle Üzerindeki Etkisi

Tanım 18: (G, *) bir grup, X bir cümle ve $G \times X = \{ (g, x) \ ; \ g \in G, x \in X \}$ olmak üzere $\varphi : G \times X \to X$ dönüşümü verilsin. Eğer,

1. $\varphi(g_1, \varphi(g_2, x)) = \varphi(g_1 * g_2, x)$, $\forall g_1, g_2 \in G$ ve $\forall x \in X$;
2. $\varphi(e, x) = x$, $\forall x \in X$ *ve* e, G nin birim elemanı,

ise φ dönüşümüne G grubunun X cümlesi üzerindeki etkisi denir. Bu etkiyi $G : X$ ile göstereceğiz. $\varphi(g, x)$ ifadesini de *gx* ile belirteceğiz.

Örnek 6: $G = LB(1) = \{\lambda \in R : \lambda \neq 0\}$ cümlesini alalım. Bu cümlede ikili işlem olarak reel sayılardaki çarpma işlemini alalım. Bu işleme göre G bir gruptur. G grubunun X = R reel sayılar cümlesi üzerindeki $G : X$ etkisini, $g \in G$ reel sayısının $x \in R$ reel sayısı ile çarpımı olarak alalım. Yani,

$$\varphi : G \times X \to X$$
$$(g, x) \xrightarrow{\varphi} \varphi(g, x) = gx$$

olsun. Bu bir etkidir. Çünkü,

1. $\varphi(g_1, \varphi(g_2, x)) = \varphi(g_1, g_2 x) = \varphi(g_1 g_2, x)$, $\forall g_1, g_2 \in G$ ve $\forall x \in X$;
2. $\varphi(1, x) = 1x = x$, $\forall x \in X$ ve $1 \in$ G birim eleman,

dır. ♦

Örnek 7: $G = LH(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda > 0, \lambda \in R \right\}$ matrisler cümlesini alalım. Bu cümle, matrislerin çarpma işlemine göre bir gruptur. G grubunun X = R^2 üzerindeki $G : R^2$ etkisini, $g = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ve $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ olmak üzere,

$$\varphi : G \times R^2 \to R^2$$
$$(g, x) \xrightarrow{\varphi} \varphi(g, x) = gx$$

yani g matrisinin *x* sütun matrisi ile çarpımı olarak tanımlayalım. Gerçekten bu bir etkidir:

Her $g_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$, $g_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \in G$ ve $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^2$ için,

1. $$\varphi(g_1, \varphi(g_2, x)) = \varphi\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_2 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \lambda_2 x_1 \\ \lambda_1 \lambda_2 x_2 \end{pmatrix}$$
$$= \varphi\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right)$$
$$= \varphi(g_1 g_2, x)$$

2. $\varphi(1, x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$; $\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^2$ ve $1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in$ G birim eleman.

dır. ♦

Örnek 8: G bir grup olmak üzere , $\varphi_1 = G : X_1$ ve $\varphi_2 = G : X_2$ de G grubunun verilen X_1 ve X_2 cümleleri üzerindeki iki etkisi olsun.

$X_1 x X_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$ olmak üzere

$$\varphi : G \times (X_1 x X_2) \to X_1 x X_2$$
$$(g, (x_1, x_2)) \xrightarrow{\varphi} \varphi(g, (x_1, x_2)) = (\varphi_1(g, x_1), \varphi_2(g, x_2))$$

dönüşümü de bir etkidir. Bu etkiyi $\varphi = G : X_1 x X_2$ ile göstereceğiz. Şimdi bunun bir etki olduğunu gösterelim: φ_1 ve φ_2 birer etki olduklarından,

1. $$\varphi(g_1, \varphi(g_2, (x_1, x_2))) = \varphi(g_1, (\varphi_1(g_2, x_1), \varphi_2(g_2, x_2))) = \varphi(g_1, (\varphi_1(g_2, x_1), \varphi_2(g_2, x_2)))$$
$$= (\varphi_1(g_1, \varphi_1(g_2, x_1)), \varphi_2(g_1, \varphi_2(g_2, x_2)))$$
$$= (\varphi_1(g_1 g_2, x_1), \varphi_2(g_1 g_2, x_2))$$
$$= \varphi(g_1 g_2, (x_1, x_2))$$

2. $\varphi(e, (x_1, x_2)) = (\varphi_1(e, x_1), \varphi_2(e, x_2)) = (x_1, x_2)$; $\forall\ (x_1, x_2) \in X_1 x X_2$ ve $e \in$ G birim eleman.

♦

Örnek 9: G=LB(1) olmak üzere , $\varphi_1 = G : R$ öyleki $\varphi_1(r,x) = rx$ ve $\varphi_2 = G : R$ öyleki $\varphi_2(r,x) = r^2 x$ verilsin. $R^2 = RxR = \{(x_1, x_2) : x_1 \in R, x_2 \in R\}$ olmak üzere

$$\varphi : \mathrm{G} \times \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$$
$$(\mathrm{r}, (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)) \xrightarrow{\varphi} \varphi(\mathrm{r}, (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)) = (\varphi_1(\mathrm{r}, \mathrm{x}_1), \varphi_2(\mathrm{r}, \mathrm{x}_2))$$

dönüşümü de bir etkidir. Şimdi bunun bir etki olduğunu gösterelim: φ_1 ve φ_2 birer etki olduklarından,

1. $$\begin{aligned} \varphi(r_1, \varphi(r_2, (x_1, x_2))) &= \varphi(r_1, (\varphi_1(r_2, x_1), \varphi_2(r_2, x_2))) \\ &= \varphi(r_1, (r_2 x_1, r_2^2 x_2)) \\ &= (\varphi_1(r_1, r_2 x_1), \varphi_2(r_1, r_2^2 x_2)) \\ &= (r_1 r_2 x_1, r_1^2 r_2^2 x_2) \\ &= \varphi(r_1 r_2, (x_1, x_2)) \end{aligned}$$

2. $\varphi(e, (x_1, x_2)) = (\varphi_1(e, x_1), \varphi_2(e, x_2)) = (x_1, x_2)$; $\forall$ $(x_1, x_2) \in$ $\mathrm{X}_1 \mathrm{x} \mathrm{X}_2$ ve $e \in$ G birim eleman.

dır. ♦

Bir $\varphi : \mathrm{G} \times \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ dönüşümüyle verilen bir etkide $g \in G$ elemanını seçip sabitlediğimizde

$$\varphi : \mathrm{G} \times \mathrm{X} \to \mathrm{X}$$
$$(\mathrm{g}, \mathrm{x}) \xrightarrow{\varphi} \varphi(\mathrm{g}, \mathrm{x}) = \mathrm{gx}$$

dönüşümü

$$\varphi(\mathrm{g}, .) : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$$
$$\mathrm{x} \xrightarrow{\varphi(\mathrm{g},.)} \varphi(\mathrm{g}, \mathrm{x}) = \mathrm{gx}$$

dönüşümüne indirgenmiş olur.

Tanım 19: G bir grup olmak üzere , $\varphi_1 = G : X_1$ ve $\varphi_2 = G : X_2$ de G grubunun verilen X_1 ve X_2 cümleleri üzerindeki iki etkisi olsun. Eğer, $\exists F : X_1 \longrightarrow X_2$ birebir ve örten dönüşümü,

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{F} & X_2 \\ \varphi_1(g,.) \downarrow & & \downarrow \varphi_2(g,.) \\ X_1 & \xrightarrow[F]{} & X_2 \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde ya da $F \circ \varphi_1(g,.) = \varphi_2(g,.) \circ F$ eşitliğini sağlayacak biçimde bulunabilirse φ_1 ve φ_2 etkilerine denktir denir.

Örnek 10: $G = LH(2)$ olsun. G grubunun $X_1 = \{(x,y) : y > x\} \subset R^2$ ve

$X_2 = \{(x,y) : x > y\} \subset R^2$ cümleleri üzerindeki etkileri $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$\varphi_1 : G \times X_1 \to X_1$$
$$(\lambda,(x,y)) = \left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \xrightarrow{\varphi_1} \varphi_1(\lambda,(x,y)) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

ve

$$\varphi_1 : G \times X_2 \to X_2$$
$$(\lambda,(x,y)) = \left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \xrightarrow{\varphi_2} \varphi_2(\lambda,(x,y)) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

olarak verilsin. Bu durumda bir $F : X_1 \to X_2$ dönüşümü olarak $F(x,y) = (y,x)$ alınabilir. F, birebir ve örten bir dönüşümdür. Buna göre;

$$\begin{array}{ccc} & X_1 \xrightarrow{F} & X_2 \\ \varphi_1(\lambda,.)\downarrow & & \downarrow \varphi_2(\lambda,.) \\ & X_1 \xrightarrow[F]{} & X_2 \end{array}$$

$$(F \circ \varphi_1(\lambda,.))(x,y) = F(\varphi_1(\lambda,.)(x,y)) = F(\varphi_1(\lambda,(x,y))) = F(\lambda x, \lambda y) = (\lambda y, \lambda x)$$

öte yandan

$$(\varphi_2(\lambda,.) \circ F)(x,y) = \varphi_2(\lambda,.)(F(x,y)) = \varphi_2(\lambda,.)(y,x) = \varphi_2(\lambda,(y,x)) = (\lambda y, \lambda x)$$

olur. Böylece bu diyagramın değişmeli olduğu görülür. Buna göre bu iki etki denktir.

Örnek 11: *G=LB(1)* alalım. $X_1 = X_2 = R$ olsun. Bu etkileri

$$\varphi_1 : G \times X_1 \to X_1 \qquad\qquad \varphi_2 : G \times X_2 \to X_2$$
$$(\lambda, x) \xrightarrow{\varphi_1} \varphi_1(\lambda, x) = \lambda x \quad \text{ve} \quad (\lambda, x) \xrightarrow{\varphi_2} \varphi_2(\lambda, x) = \lambda^2 x$$

biçiminde tanımlayalım. Bu etkiler denk etkiler değildir. Şimdi varsayalım ki bu etkiler denk olsun. O halde birebir ve örten bir $F : R \to R$ dönüşümü vardır öyleki

$$F(\varphi_1(\lambda, x)) = \varphi_2(\lambda, F(x))$$

dir. O halde $F(\lambda x) = \lambda^2 F(x)$ olmalıdır. Buna göre $F(\lambda x) = F(-\lambda x)$ dir. Ancak $x \neq 0$ için $\lambda x \neq -\lambda x$ dir. Bu durum F nin birebir olmasıyla çelişir. Dolayısıyla bu etkiler denk değildir.♦

1.6. G- Denk Noktalar ve G- Yörünge

Tanım 20: G bir grup ve $\varphi = G : X$ etkisi verilmiş olsun Eğer $\forall\, h \in H$ ve $\forall g \in G$ için $gh \in H$ ise $H \subset X$ altcümlesine G-invaryant altcümle denir.

Bu tanımda H olarak $H = \{x_0\} \subset X$ alındığında Tanım 20 ye göre; $\forall g \in G$ için $gx_0 = x_0$ ise bu x_0 noktasına G-invaryant nokta denir.

Tanım 21: $G : X$ verilsin. Bir $x \in X$ noktası için

$$Gx = \{gx \;:\; g \in G\}$$

cümlesine x elemanının G- yörüngesi denir.

Örnek 12: $G = LB(1)$ olsun. G grubunun $X = R$ üzerindeki etkisi

$$\varphi : \mathrm{G} \times \mathrm{R} \to \mathrm{R}$$
$$(\mathrm{r}, \mathrm{x}) \xrightarrow{\varphi} \varphi(\mathrm{r}, \mathrm{x}) = \mathrm{rx}$$

olsun. Bu etkiye göre bir $r \in R$ noktasının G- yörüngesi

$$Gr = \begin{cases} 0 \quad , & r = 0 \\ R - \{0\}, & r \neq 0 \end{cases}$$

dir.

Örnek 13: $G = B(1) = \left\{F : F\left(x\right) = \lambda x + b \;\;,\;\; \lambda \neq 0, \lambda, b, x \in R\right\}$ olsun. G grubunun $X = R$ üzerindeki etkisi $k \in R$ olmak üzere,

$$\varphi_1 : \mathrm{G} \times \mathrm{R} \to \mathrm{R}$$
$$(\mathrm{r}, \mathrm{x}) \xrightarrow{\varphi} \varphi(\mathrm{r}, \mathrm{x}) = \mathrm{rx} + \mathrm{k}$$

olsun. Bu etkiye göre keyfi bir $r \in R$ noktasının G- yörüngesi

$$Gr = \{\varphi(g, r) \;:\; g \in B(1)\} = R$$

dir.

Önerme 16 : $G : X$ etkisi verilmiş olsun. Keyfi $x \in X$ elemanının G- yörüngesi bir G-invaryant altcümledir.

İspat: $x \in X$ elemanının G- yörüngesi $Gx = \{gx \;:\; g \in G\}$ dir. Şimdi $Gx \subset X$ in bir G- invaryant altcümle olduğunu gösterelim. Bunun için her $y \in Gx$ ve her $g \in G$ için $gy \in Gx$ olduğunu göstermeliyiz. $y \in Gx$ olduğundan $\exists g_1 \in G$ öyleki $y = g_1 x$ dir. Buna göre $gy = g(g_1 x)$ yazabiliriz. Etkinin tanımından $g(g_1 x) = (gg_1)x$ dir. G bir grup ve $g^* = gg_1 \in G$ olduğundan $gy = g^* x \in Gx$ dir. ♦

Önerme 17: $G:X$ etkisi verilmiş olsun. Keyfi bir $x\in X$ elemanının G- yörüngesi Gx olmak üzere Gx -in kendisinden farklı G-invaryant altcümlesi yoktur.

İspat: $H\subset Gx$ alalım ve H, G-invaryant altcümle olsun. $H=Gx$ olduğunu gösterelim. e, G nin birim elemanı olmak üzere $x=ex$ ve $e\in G$ olduğundan $x\in Gx$ dir. $y\in H$ olsun. Bu takdirde $\exists g_1\in G$ öyleki $y=g_1x\in H$ dir. H, G-invaryant altcümle olduğundan her $g\in G$ için $gy=g(g_1x)\in H$ dir. O halde $g=g_1^{-1}$ için de doğrudur. Dolayısıyla, $gy=g_1^{-1}(g_1x)=(g_1^{-1}g_1)x=x\in H$ dir. $x\in H$ ve H, G-invaryant altcümle ve her $g\in G$ için $gx\in H$ olduğundan $Gx\subset H$ dir. Buradan $Gx=H$ elde edilir. ♦

Burada bu önerme ile şu gösterilmiş oldu: bir G-invaryant altcümle eğer bir noktayı kapsıyorsa onun yörüngesini de kapsamaktadır ve bir elemanın kendisini içeren en küçük G-invaryant altcümle o elemanın yörüngesidir. Yani bir $x\in X$ için x i kapsayan en küçük G-invaryant altcümle Gx dir.

Sonuç 13: Keyfi $a\in Gx$ için $Ga=Gx$ dir.

İspat: $Ga\subset Gx$ altcümlesi, Önerme 16 ya göre, Gx' in invaryant altcümlesidir. Bu takdirde, Önerme 17' ye göre, $Ga=Gx$ dir.

Önerme 18: G bir grup ve $G:X$ etkisi verilmiş olsun. $x,y\in X$ ($x\neq y$) noktalarının yörüngeleri Gx ve Gy ler olmak üzere $Gx\bigcap Gy\neq\emptyset$ ise, $Gx=Gy$ dir. Başka bir ifade ile $Gx\neq Gy$ ise $Gx\bigcap Gy=\emptyset$ dir.

İspat: Varsayalım ki $Gx\bigcap Gy\neq\emptyset$ olsun. Bu takdirde $a\in Gx\cap Gy$ elemanı mevcuttur. Sonuç 13'e göre $Ga=Gx$ ve $Ga=Gy$ dir. Dolayısıyla $Gx=Gy$ dir. ♦

Tanım 22: G bir grup ve $G:X$ etkisi verilmiş olsun. Eğer, $\exists g\in G$ öyleki $x_2=gx_1$ ise $x_1,x_2\in X$ noktalarına G-denk noktalar denir. Bu noktaların G- denk olması $x_1\overset{G}{\sim}x_2$ şeklinde gösterilir.

Tanım 23: X de $\{x_1,x_2,...,x_k\}$ ve $\{y_1,y_2,...,y_k\}$ noktalar sistemi ve $G:X$ etkisi verilmiş olsun. Eğer bir $g\in G$, $i=1,2,...,k$ için $y_i=gx_i$ olacak biçimde bulunabilirse $\{x_1,x_2,...,x_k\}$ ve $\{y_1,y_2,...,y_k\}$ noktalar sistemine G- denk denir ve $\{x_1,x_2,...,x_k\}\overset{G}{\approx}\{y_1,y_2,...,y_k\}$ şeklinde gösterilir.

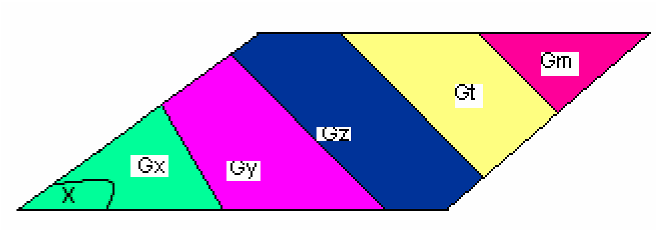
Önerme 19: Noktaların G- denklik bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat: 1. $x_1 \overset{G}{\sim} x_1$ dir. Çünkü e, G nin birim elemanı olmak üzere $x_1 = ex_1$ dir.

2. $x_1 \overset{G}{\sim} x_2$ olsun. Bu takdirde bir $g \in G$ vardır öyleki, $x_2 = gx_1$ dir. Bu durumda $g^{-1}x_2 = (g^{-1}g)x_1 = x_1$ olacağından $x_2 \overset{G}{\sim} x_1$ dir.

3. $x_1 \overset{G}{\sim} x_2$ ve $x_2 \overset{G}{\sim} x_3$ olsun. Buna göre bir $g_1 \in G$ vardır, öyleki $x_2 = g_1 x_1$ dir ve bir $g_2 \in G$ vardır öyleki, $x_3 = g_2 x_2$ dir. O halde $x_3 = g_2(g_1 x) = (g_2 g_1)x$ ve $g_2 g_1 \in G$ olduğundan $x_1 \overset{G}{\sim} x_3$ dir. Dolayısıyla $\overset{G}{\sim}$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. ♦

Böylece bir elemanın $\overset{G}{\sim}$ bağıntısına göre denklik sınıfları o elemanın G-yörüngeleridir. Bu $\overset{G}{\sim}$ bağıntısı cümlenin elemanlarını arakesitleri boş olan denklik sınıflarına ayırmaktadır.



Şekil 2. X cümlesinin elemanlarının $\overset{G}{\sim}$ bağıntısına göre yörüngeleri.

1.7. G- invaryant Fonksiyonlar ve G- Denklik Problemi

Tanım 24: G bir grup, $f : X \to R$ fonksiyonu ve $G : X$ etkisi verilmiş olsun. Eğer, $x \overset{G}{\sim} y$ olduğunda $f(x) = f(y)$ ise ya da $\forall g \in G$ ve $\forall x \in X$ için $f(gx) = f(x)$ ise f fonksiyonuna G- invaryant fonksiyon denir.

Dikkat edilirse G- invaryant fonksiyon, bir G- yörünge boyunca aynı değeri almaktadır. Matematiğin farklı alanlarında aşağıdaki problem doğal olarak ortaya çıkmaktadır.

Problem: Keyfi iki farklı Gx ve Gy yörüngelerinde farklı değerler alan bir G-invaryant fonksiyonu mevcut mudur?

Bu tez çalışmasında bu soruya benzerlik grubunun alt grupları için cevap aranacaktır.

Örnek 14: $G = SO(1)$ alalım. G- invaryant polinomların nasıl olduklarına bakalım. $P(x)$ bir G- invaryant polinom olsun $SO(1) = \{1\}$ olduğundan $P(1x) = P(x)$ dir. Yani $P(x) = P(x)$ olur ki bunun anlamı tüm polinomlar *SO(1)*- invaryanttır.

Örnek 15: *G = O(1)* olsun. G- invaryant polinomların nasıl olduklarına bakalım. $P(x)$ bir G- invaryant polinom olsun $O(1) = \{-1,1\}$ olduğundan dolayı, $P(1x) = P(x)$ ve $P(-1x) = P(x)$ dir. Yani $P(-x) = P(x)$ bulmak yeterlidir. O halde

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

biçiminde bir polinom için *P(-x)* polinomu ise

$$P(-x) = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - ... + (-1)^n a_n x^n$$

olur. Bu iki polinomun eşit olmasından $a_1 = a_3 = a_5 = ... = a_{2n+1} = 0$ elde edilir. O halde *O(1)* invaryant polinomu

$$P(x) = a_0 + a_2 x^2 + ... + a_{2n} x^{2n}$$

biçimindedir.

Tanım 25: G bir grup, $H \subset G$ bir altgrup ve *f*, R^n de tanımlı bir reel fonksiyon olsun. Bir $\lambda(h)$, $h \in H$, reel fonksiyonu için

$$f(hx) = \lambda(h) f(x) \;,\; \forall h \in H \;,\; \forall x \in R^n$$

ise , *f'* ye nispi invaryant fonksiyon denir. $\lambda(h)$ fonksiyonuna da f nin çarpanı denir.

$x \in R^n$ ve $h_1, h_2 \in H$ olmak üzere f , λ çarpanına sahip bir nispi invaryant fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$f((h_1 h_2)x) = f(h_1(h_2 x)) = \lambda(h_1) f(h_2 x) = \lambda(h_1)\lambda(h_2) f(x)$$

ve

$$f((h_1 h_2)x) = \lambda(h_1 h_2) f(x)$$

olduğundan her iki tarafın eşitliğinden ve $f(x) \neq 0$ ise, keyfi $h_1, h_2 \in H$ için

$$\lambda(h_1 h_2) = \lambda(h_1)\lambda(h_2)$$

elde edilir.

Önerme 20: $H \subset B(n)$ bir altgrup ve f , H- invaryant rasyonel fonksiyon olsun. Bu durumda f ,

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \;,\; Q(x) \neq 0$$

olacak şekilde çarpanları eşit iki nispi invaryant polinomun bölümü biçiminde yazılabilir.

İspat: $f(x)$, H- invaryant olduğundan $\forall h \in H$ için $f(hx) = f(x)$ dir. f rasyonel fonksiyon olduğundan, P ve Q aralarında asal polinomlar olmak üzere

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$f(hx) = \frac{P(hx)}{Q(hx)} = \frac{P(x)}{Q(x)} = f(x)$$

dir. Bu eşitlikten,

$$P(hx).Q(x) = P(x).Q(hx)$$

elde edilir. $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomları aralarında asal ve

$$P(hx) = \frac{P(x)Q(hx)}{Q(x)}$$

olduğundan $Q(hx)$, $Q(x)$ polinomuna bölünecektir. Yani, bir $\varphi(x,h)$ polinomu mevcut öyleki, $Q(hx) = \varphi(x,h)Q(x)$ olacaktır. Polinomların eşitliğinden her iki tarafın derecesi eşit olacaktır. Bu durumda $\varphi(x,h)$ polinomu sadece h ye bağlı olmalıdır. O halde

$$Q(hx) = \varphi(h)Q(x)$$

dir. Bu eşitliği yukarıda yerine yazarsak,

$$P(hx) = \frac{P(x)\varphi(h)Q(x)}{Q(x)}$$

olacağından

$$P(hx) = \varphi(h)P(x)$$

dir. ♦

Tüm bir bilinmeyenli reel katsayılı G- invaryant polinomların cümlesini $R[x]^G$ ile, tüm bir bilinmeyenli reel katsayılı G- invaryant rasyonel fonksiyonların cümlesini de $R(x)^G$ ile göstereceğiz.

Tanım 26: K bir cisim ve K üzerinde toplama, çarpma ve skalerle çarpım işlemleri tanımlansın. Eğer

1- $(K,+,\ \cdot\ )$ değişmeli, birimli halka;

2- $(K,+,\ \lambda\cdot\ )$ R üzerinde vektör uzayı;

3- $\forall a,b\in K$ ve $\forall\lambda\in R$ için $\lambda(a\cdot b)=(\lambda a)\cdot b=a\cdot(\lambda b)$

ise $(K,+,\cdot,\lambda\cdot)$ sistemine R-cebir denir.

Örnek 16 : Bir bilinmeyenli polinomların $R[x]$ halkası birimli R-cebirdir.

Önerme 21: $R[x]^G$, $R[x]$ polinomlar R-cebirinin birimli alt R-cebiridir.

İspat: $f_1, f_2\in R[x]^G$ olsun. $\forall x\in R^n$ ve $\forall g\in G$ için,

$$(f_1+f_2)(gx)=f_1(gx)+f_2(gx)=f_1(x)+f_2(x)=(f_1+f_2)(x),$$
$$(f_1\ .\ f_2)(gx)=f_1(gx)\ .\ f_2(gx)=f_1(x)\ .\ f_2(x)=(f_1\ .\ f_2)(x),$$

$\lambda\in R$ olmak üzere,

$$(\lambda f)(gx)=\lambda f(gx)=\lambda f(x)=(\lambda f)(x)$$

ve $1(x)=1\in R[x]$ birim elemanı için

$$(1f)(gx)=1(gx).f(gx)=1.f(x)=f(x)$$

olduğundan f_1-f_2 , $f_1.f_2$, $\lambda.f$,$1\in R[x]^G$ dir. Yani, $R[x]^G$, $R[x]$ in birimli alt R-cebiridir.♦

1.8. Afin Manifoldlar ve Zarisski Topolojisi

R^n, n- boyutlu reel vektör uzayı olsun.

Tanım 27: Eğer bir $\{f_\tau(x),\tau\in T\}$ ailesi, $f_\tau(x)\in R[x]$ olmak üzere bulunabiliyorsa

$$X=\{x\in R^n : f_\tau(x)=0,\forall\tau\in T\}\subset R^n$$

altcümlesine R^n nin bir afin manifoldu denir

Örnek 17: $R^n=\{x\in R^n : 0(x)=0\}$ ve $\varnothing=\{x\in R^n : 1(x)=0\}$ yazılabileceğinden R^n ve $\varnothing$ birer afin manifoldlarıdır.

Örnek 18: R de keyfi bir sonlu altcümle bir afin manifolddur. Yani, $X=\{r_1,r_2,...,r_m\}\subset R$ bir afin manifolddur. Çünkü,

$X=\{x\in R : (x-r_1)...(x-r_m)=0\}\subset R$ yazılabilir.

Önerme 22: X, R de bir afin manifold olsun. Bu takdirde $X=R$ veya $X=\varnothing$ ya da X, R nin sonlu bir altcümlesidir.

İspat: [47, S. 16]♦

Örnek 19: n = 2 durumunda iki değişkenli polinomların sıfır yerleri olarak

$$X = \{(x,y) \in R^2 : f(x,y) = ax + by + c = 0\}$$

cümlesini alalım, burada $a,b,c \in R$ sabit sayılar olsun. Bu cümle düzlemde bir doğrudur. Dolayısıyla keyfi doğru düzlemde bir afin manifolddur.

Örnek 20: n = 2 durumunda iki değişkenli polinomların sıfır yerleri olarak

$$X = \{(x,y) \in R^2 : f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + k = 0\}$$

cümlesini alalım, burada $a,b,c,d,e,k \in R$ sabit sayılar olsun. Bu cümle düzlemde bir koniktir. Dolayısıyla keyfi bir konik düzlemde bir afin manifolddur.

Örnek 21: $y = \sin x$ fonksiyonunu alalım.

$$X = \{x \in R : f(x) = \sin x = 0\}$$

afin manifold değildir. Çünkü, $X = \{2\pi n, n \in Z\} \neq R$, $X \neq \varnothing$ ve X sonsuz olduğundan dolayı, Önerme 22'e göre, X bir afin manifold değildir.

Önerme 23: Herhangi sayıda afin manifoldların arakesiti de bir afin manifolddur.

İspat: [47,S. 17]♦

Önerme 24: X_1, X_2 afin manifoldlar ise $X_1 \cup X_2$ de bir afin manifolddur.

İspat: [47, S. 17]♦

Sonuç 14: Sonlu sayıda afin manifoldun birleşimi de bir afin manifolddur. ♦

Şimdi R^n deki afin manifoldlarla bir topoloji oluşturacağız. $\Im$ ile R^n deki tüm afin manifoldlar sistemini gösterelim.yani,

$$\Im = \{X : X \subset R^n \ afin\ manifold\}$$

olsun. Örnek 1 e göre $R^n \in \Im$ ve $\phi \in \Im$ dur, yani topolojik uzay aksiyomlarının birinci ve ikinci aksiyomları sağlanmış olur. Önerme 23 ve önerme 24 e göre üçüncü ve dördüncü aksiyomlar da sağlanır. Böylece

$T1)$ $R^n \in \Im$

$T2)$ $\varnothing \in \Im$

$T3)$ $\forall \tau \in \mathrm{T}$ için $\mathrm{X}_\tau \in \Im$ iken $\bigcap_{\tau \in \mathrm{T}} \mathrm{X}_\tau \in \Im$

$T4)$ $X_1, X_2, ..., X_m \in \Im$ *için* $\bigcup_{\tau=1}^{m} \mathrm{X}_\tau \in \Im$

dır. Dolayısıyla $\Im$ sistemi, R^n de kapalı cümlelerle oluşturulmuş bir topolojidir. Bu topolojiye Zarisski topolojisi denir.

R^n deki sonlu sayıda noktadan oluşan keyfi bir altcümle Zarisski topolojisine göre kapalıdır. Önerme 22 e göre n = 1 için R deki Zarisski topolojisine göre R nin kapalı altcümleleri ancak R, ϕ ve sonlu altcümleleridir. Buna göre R de $[0,1]$ aralığı öklid topolojisine göre kapalı olmasına karşın Zarisski topolojisine göre kapalı değildir.

Önerme 25: R de Zarisski topolojisi Housdorf topolojisi değildir.

İspat: Bu topolojiye göre bir noktayı içeren açık cümle, o noktayı ihtiva eden, ancak, R veya R den sonlu sayıda noktanın çıkartılmasıyla kalan cümledir. $x, y \in R$ ve $x \neq y$ olsun. x i içeren açık cümle olarak

$$B(x) = R \setminus \{r_1, r_2, ..., r_m\}$$

alalım. Benzer şekilde y i içeren açık cümle olarak $B(y) = R \setminus \{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_m\}$ alalım.

$$B(x) \cap B(y) = R \setminus \{r_1, r_2, ..., r_m\} \cup \{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_m\} = R \setminus \{r_1, r_2, ..., r_m, \delta_1, \delta_2, ..., \delta_m\} \neq \phi$$

olduğundan zarisski topolojisi housdorf topolojisi değildir. ♦

1.9. ϑ ve J Operatörleri

Tanım 28: K, birimli, değişmeli R- cebir ve $I \subset K$ boştan farklı bir alt cümle olsun.

1. $\forall a, b \in I$ için $a - b \in I$ ve
2. $\forall a \in I$ ve $\forall s \in K$ için $a \cdot s \in I$

koşulları sağlanıyorsa I ya K nın ideali denir ve $I \triangleleft K$ biçiminde gösterilir.

Şimdi ϑ ve J operatörlerini tanımlayalım. $R[x_1, .., x_n]$ polinomlarının R- cebirinin ideallerinin cümlesini $L\{R[x_1, ..., x_n]\}$ ile gösterelim.

Tanım 29: ϑ operatörü :

$$\vartheta : L\{R[x_1, .., x_n]\} \to R^n$$
$$I \to \vartheta(I) = \{x \in R^n : f(x) = 0, \ \forall f \in I\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $I \in L\{R[x_1, ..., x_n]\}$ bir idealdir.

Tanım 30: J operatörü:

$$J : \quad 2^{R^n} \to 2^{R[x_1, .., x_n]}$$
$$X \subset R^n \to J(X) = \{f \in R[x_1, .., x_n] : f(x) = 0, \ \forall x \in X\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $X \in 2^{R^n}$ dir.

Önerme 26: 1. $I \in L\{R[x_1,...,x_n]\}$ için $\vartheta(I)$ bir afin manifolddur.

2. $X \in 2^{R^n}$ için $J(X) \in L\{R[x_1,...,x_n]\}$ dir.

İspat:

1. açıktır. ♦

2. $f_1, f_2 \in J(X)$ olsun. Bu durumda $\forall x \in X$ için

$(f_1 - f_2)(x) = f_1(x) - f_2(x) = 0 - 0 = 0$

olduğundan $(f_1 - f_2) \in J(X)$ dir. Ayrıca, $f \in J(X)$ ve $\gamma \in R[x_1,..,x_n]$ olmak üzere $\forall x \in X$ için $(\gamma \cdot f)(x) = \gamma(x) \cdot f(x) = \gamma(x) \cdot 0 = 0$ olduğundan $\gamma \cdot f \in J(X)$ dir. ♦

Önerme 27: $I \in L\{R[x_1,...,x_n]\}$ ve $X \subset R^n$ için $I \subset J(\vartheta(I))$ ve $X \subset \vartheta(J(X))$ dir.

İspat: $f \in I$ olsun. Bu durumda keyfi $x \in \vartheta(I)$ için $f(x) = 0$ dır. O halde $f \in J(\vartheta(I))$ dır. Böylece, $I \subset J(\vartheta(I))$ dir.

Şimdi, $x \in X$ olsun. Bu durumda keyfi $f \in J(X)$ için $f(x) = 0$ dır. O halde $x \in \vartheta(J(X))$ dir. Böylece, $X \subset \vartheta(J(X))$ elde edilir. ♦

Genel olarak $I \neq J(\vartheta(I))$ ve $X \neq \vartheta(J(X))$ dir. Bunlara birer örnek verelim.

Örnek 22: n = 1 boyutta $X = Q$ rasyonel sayılar cümlesi olsun. Bu durumda

$$J(Q) = \{f \in R[x] : f(x) = 0, \ \forall x \in Q\} = \{0\}$$

dir ve

$$\vartheta(J(Q)) = \{x \in R : 0(x) = 0\} = R$$

olduğundan $Q \subset \vartheta(J(Q))$, fakat $Q \neq \vartheta(J(Q)) = R$ dir. ♦

Örnek 23: $R[x]$ de $I = x^2 \cdot R[x]$ idealini göz önüne alalım. Bu durumda,

$$\vartheta(I) = \{x \in R : f(x) = 0, \ \forall f \in I\} = \{x \in R : x^2\varphi(x) = 0, \ \forall \varphi \in R[x]\} = \{0\} \text{ ve}$$

$$J(\vartheta(I)) = \{\varphi \in R[x] : \varphi(0) = 0\}$$

şeklindedir. Örneğin $f(x) = x$ polinomu için $f(0) = 0$ dır ancak $f \notin I = x^2R[x]$ dir. Böylece, $I \subset J(\vartheta(I))$, fakat $I \neq J(\vartheta(I))$ olduğu görülmüş olur. ♦

Tanım 31: K bir birimli, değişmeli halka ve $I \triangleleft K$ bir ideali olsun. $a, b \in I$ olmak üzere $ab \in I$ için $a \in I$ ya da $b \in I$ ise I ya asal ideal denir.

Tanım 32: K bir birimli, değişmeli halka ve $I \lhd K$ bir ideal olsun. I idealinin asal radikali

$$R(I) = \bigcap_{\substack{I \subset P \\ P \ asal}} P$$

olarak tanımlanır. Burada, eğer $I \neq K$ ise I – yı kapsayan asal ideal her zaman mevcuttur. Çünkü birimli halkalar her zaman bir maksimal ideale sahiptir. Eğer $I = K$ ise $R(I) = K$ dır.

1.9.1. ϑ Operatörünün Özelikleri

Önerme 28: $K = R[x_1, x_2, ..., x_n]$ ve

1- $\vartheta(K) = \varnothing$,

2- $\vartheta(\{0\}) = R^n$,

3- $I_1, I_2 \lhd K$ ve $I_1 \subset I_2$ ise $\vartheta(I_1) \supset \vartheta(I_2)$,

4- $R(I)$, I idealinin radikali olmak üzere, $\vartheta(I) = \vartheta(R(I))$ dir.

İspat: [47, S. 19]♦

1.9.2. J Operatörünün Özelikleri

Önerme 29: $K = R[x_1, x_2, ..., x_n]$ olmak üzere,

1- $J(\varnothing) = K$,

2- $J(R^n) = \{0\}$,

3- $X, Y \subset R^n$ ve $X \subset Y$ ise $J(X) \supset J(Y)$,

4- $I \lhd K$ ve $R(I)$, I idealinin radikali ise $J(\vartheta(I)) \supset R(I)$,

5- $X \subset R^n$ için $J(X) = R(J(X))$ dir.

İspat: [47, S. 19]♦

Tanım 33: X bir topolojik uzay olsun. Eğer, $X_1, X_2 \subset X$ kapalı altcümleleri, $X_1 \neq X$, $X_2 \neq X$ iken $X_1 \cup X_2 = X$ olacak biçimde bulunabiliyorsa X topolojik uzayına indirgenebilir denir. Aksi halde X topolojik uzayına indirgenemez denir.

Örnek 24: Zarisski topolojisine göre R topolojik uzayı indirgenemezdir. Eğer aksi olmuş olsaydı R nin iki sonlu alt cümlenin birleşimi şeklinde yazılabilir olması gerekirdi ki bu da R nin sonsuz olmasıyla çelişir. Dolayısıyla R indirgenemezdir. ♦

Önerme 30: M topolojik uzayı indirgenemezdir ancak ve ancak M deki keyfi iki boştan farklı açık cümlelerin arakesiti boş değildir.

İspat: [47, S. 21]♦

Önerme 31: R^n indirgenemezdir.

İspat: [47, S. 20]♦

Önerme 32: U, R^n de boştan farklı keyfi bir açık cümle ise $\overline{U} = R^n$ dir. Yani U, R^n de yoğundur.

İspat: [47, S. 20]♦

Önerme 33: $f \in R[x_1, x_2, ..., x_n]$ ise $f : R^n \to R$ sürekli dönüşümdür.

İspat: $A \subset R$ kapalı cümlesi için $f^{-1}(A) \subset R^n$ nin kapalı olduğunu göstermemiz gerekir. $A \subset R$ kapalı alalım. R deki kapalı cümleler $R, \varnothing$ ve sonlu $\{r_1, r_2, ..., r_m\}$ cümleleri olduğundan, $A = R$ ise, $f^{-1}(R) = R^n$ kapalıdır. $A = \varnothing$ ise, $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ kapalıdır.

$A = \{r_1, r_2, ..., r_m\}$ olsun. Bu durumda

$$f^{-1}(r_1) = \{x \in R^n : f(x) = r_1\},$$

$$f^{-1}(r_2) = \{x \in R^n : f(x) = r_2\},$$

...

$$f^{-1}(r_m) = \{x \in R^n : f(x) = r_m\}$$

afin manifoldlar olduğundan

$$f^{-1}(r_1) \cup f^{-1}(r_2) \cup ... \cup f^{-1}(r_m)$$

de bir afin manifolddur. Diğer taraftan

$$f^{-1}(A) = f^{-1}(r_1) \cup f^{-1}(r_2) \cup ... \cup f^{-1}(r_m)$$

olduğundan $f^{-1}(A)$ da bir afin manifolddur , dolayısıyla Zarisski topolojisine göre kapalıdır. O halde *f* süreklidir. ♦

Önerme 34: $B \subset R^n$ bir alt cümle ve $f \in R[x_1, x_2, ..., x_n]$ öyleki $f(x) = 0, \forall x \in B$ olsun. Bu takdirde $f(x) = 0, \forall x \in \overline{B}$ dir.

İspat: Önceki önermeye göre $f : R^n \to R$ sürekli dönüşümdür. Dolayısıyla R nin 0 elemanı için $f^{-1}(0)$, R^n de kapalıdır. $f(x) = 0, \forall x \in B$ olduğundan $B \subset f^{-1}(0)$ dir. Buradan ve $f^{-1}(0)$ cümlesinin kapalı olmasından $\overline{B} \subset \overline{f^{-1}(0)} = f^{-1}(0)$ dır. Dolayısıyla $\overline{B} \subset f^{-1}(0)$ yani $\forall x \in \overline{B}$ için $f(x) = 0$ elde edilir. ♦

Lemma 2 (R^n için Cebirsel Eşitsizliklerin Önemli Olmadığı Prensibi):
$p_i \in R[x_1, x_2, ..., x_n]$, $i = 1, 2, .., k$ sıfırdan farklı polinomlar olsunlar.

$$B = \{x \in R^n : p_i(x) \neq 0, i = 1, 2, .., k\}$$

olsun. Bir $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ polinomu için $F|_B = 0$ ($\forall x \in B$ için $F(x) = 0$) ise, $F|_{R^n} = 0$ dir.

İspat: Her *i=1,...,k* için $A_i = \{x \in R^n : p_i(x) = 0\}$ ve $B_i = \{x \in R^n : p_i(x) \neq 0\}$ cümlelerini tanımlayalım. $B_i = R^n \setminus A_i$ dır , dolayısıyla açık cümledir. Bu takdirde, $B = B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_k$ dır ve sonlu sayıda açık cümlelerin arakesiti de açık olduğundan B açıktır. Şimdi F polinomu için Lemmanın varsayımına göre $F|_B = 0$ dır. Buradan önceki önermeye göre $F|_{\overline{B}} = 0$ dır. Diğer taraftan A_i cümlelerinin her biri R^n den farklıdır çünkü, her $P_i(x)$ polinomu lemmanın varsayımına göre sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla her B_i boştan farklıdır. Önceki önermelere göre B_i ler boştan farklı açık cümleler olduğundan dolayı $B = B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_k$ arakesiti de boştan farklı açık cümledir. Bu takdirde, önceki önermeye göre $\overline{B} = R^n$ dir. Dolayısıyla $F|_{R^n} = F|_{\overline{B}} = 0$ yani *F* sıfır polinomdur. ♦

Sonuç 15: $p_i \in R[x_1, x_2, ..., x_n]$, $i = 1, 2, .., k$ sıfırdan farklı polinomlar ve

$$B = \{x \in R^n : p_i(x) \neq 0, i = 1, 2, .., k\}$$

olsun. $f, g \in R[x_1, x_2, ..., x_n]$ öyle ki, $f|_B = g|_B$ olsun. Bu takdirde $f|_{R^n} = g|_{R^n}$ dir.

İspat: $F = f - g$ dersek, sonucun varsayımına göre $\left(f - g \right)\big|_{B} = 0$ dir. Bu takdirde önceki önermeye göre $\left(f - g \right)\big|_{R^n} = 0$ dır. Dolayısıyla $f\big|_{R^n} = g\big|_{R^n}$ elde edilir. ♦

1.10. Polarizasyon Operatörü

R^n de $x = \left(x_1, x_2, ..., x_n \right)$ ve $y = \left(y_1, y_2, ..., y_n \right)$ bilinmeyen vektörler olsunlar.

Tanım 34: $D_{yx} : R\left[x_1, x_2, ..., x_n \right] \to R\left[x_1, x_2, ..., x_n ; y_1, y_2, ..., y_n \right]$

olmak üzere bir $f \in R\left[x_1, x_2, ..., x_n \right]$ için

$$D_{yx} f\left(x_1, x_2, ..., x_n \right) = y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + ... + y_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \tag{15}$$

olarak tanımlı operatöre polarizasyon operatörü denir [5].

Örnek 25: $D_{yx} : R\left[x_1, x_2 \right] \to R\left[x_1, x_2 ; y_1, y_2 \right]$ polarizasyon operatörü olmak üzere *O(2)* grubunun R^2 deki hareketi göz önüne alındığında her $x = (x_1, x_2) \in R^2$ noktasının *O(2)*-invaryant polinomu olarak $f(x) = \left\langle x, x \right\rangle = x_1^{\,2} + x_2^{\,2}$ polinomunu alırsak f ye polarizasyon operatörü uygulanırsa,

$$D_{yx} f\left(x_1, x_2 \right) = y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} = y_1 2x_1 + y_2 2x_2 = 2\left\langle x, y \right\rangle$$

elde edilir.

V n- boyutlu vektör uzayı olmak üzere

G(V) = { A: $V \to V$: A tersi mevcut olan lineer operatör} cümlesi dönüşümlerin bileşke işlemine göre bir gruptur.

Tanım 35: H bir grup olmak üzere $\xi : H \to G\left(V \right)$ homomorfizmasına H nin V deki lineer gösterimi denir.

Örnek 26: $V = R^2$ olsun. $H = LH(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \middle| \lambda \in R^+ \right\}$ alalım.

$\xi : LH(2) \to G(R^2)$ **;** $\quad h \to \xi_h$

olsun**.** $\forall x = (x_1, x_2) \in R^2$ için $\xi_h(x) = hx = (hx_1, hx_2)$ olarak tanımlansın.

$\forall x = (x_1, x_2) \in R^2$ için $h_1, h_2 \in LH(2)$ olmak üzere,

$$\xi_{h_1h_2}(x)=\left(h_1h_2\right)x=\left(h_1h_2x_1,h_1h_2x_2\right) \quad \text{ve}$$

$$\left(\xi_{h_1}\circ\xi_{h_2}\right)(x)=\xi_{h_1}\left(\xi_{h_2}(x)\right)=\xi_{h_1}\left(h_2x\right)=h_1\left(h_2x\right)=\left(h_1h_2\right)x=\left(h_1h_2x_1,h_1h_2x_2\right)$$

olduğundan $\xi_{h_1h_2}=\xi_{h_1}\circ\xi_{h_2}$ elde edilir. Dolayısıyla $\xi : LH(2)\to G(R^2)$ bir homomorfizma ve $LH(2)$ grubunun bir lineer gösterimidir.

Tanım 36: H bir grup, V ve W ise, sırasıyla, n ve m boyutlu iki vektör uzayı olsunlar. $\xi : H\to G(V)$ ve $\zeta : H\to G(W)$ H nin iki lineer gösterimi ve $\psi : V\to W$ sıfırdan farklı bir lineer operatör olsun. $\forall v\in V$ ve $\forall h\in H$ için

$$\left(\psi\circ\xi(h)\right)(v)=\left(\zeta(h)\circ\psi\right)(v)$$

ise $\psi : V\to W$ operatörüne H- equivaryant operatör denir.

$G=GL(V)$ ve $H\subset G$ olmak üzere $\xi : H\to G$; $h\xrightarrow{\xi}\xi(h)=h$ homomorfizmasını göz önüne alalım. Bu bir lineer gösterimdir. Bu lineer gösterim yardımıyla $W=R[x_1,x_2,...,x_n]$ polinomlar halkasında bir lineer gösterim tanımlayacağız. $\forall x\in R^n$ için

$$\left(T_h^{(1)}f\right)(x)=f\left(\xi\left(h^{-1}\right)x\right)=f\left(h^{-1}x\right)$$

olarak alalım. Bu bir lineer gösterimdir. Burada $h^{-1}x$, h^{-1} matrisinin x sütun vektörüyle matris çarpımı anlamındadır. Gerçekten $\forall x\in R^n$, $\forall f\in R[x_1,x_2,...,x_n]$ ve $h_1,h_2\in H$ için,

$$\left(T_{h_1h_2}{}^{(1)}f\right)(x)=f\left(\left(h_1h_2\right)^{-1}x\right)=f\left(\left(h_2^{-1}h_1^{-1}\right)x\right)$$

yazılabilir. $f\left(h_2^{-1}x\right)=\varphi(x)$ dersek,

$$\left(T_{h_1h_2}{}^{(1)}f\right)(x)=f\left(h_2^{-1}h_1^{-1}x\right)=T_{h_1}^{(1)}\varphi(x)=T_{h_1}^{(1)}\left(T_{h_2}^{(1)}f(x)\right)=T_{h_1}^{(1)}\left(T_{h_2}^{(1)}f\right)(x)$$

dir.

$R[x_1,x_2,...,x_n;y_1,y_2,...,y_n]$ üzerinde başka bir $T_h^{(2)}$ lineer gösterimi tanımlayalım. $\overline{f}\in R[x_1,x_2,...,x_n;y_1,y_2,...,y_n]$ için,

$$\left(T_h^{(2)}\overline{f}\right)(x,y)=\overline{f}\left(\xi\left(h^{-1}\right)x,\xi\left(h^{-1}\right)y\right)=\overline{f}\left(h^{-1}x,h^{-1}y\right)$$

olarak tanımlanırsa bu da bir lineer gösterim olur.

Önerme 35: $D_{yx} : R[x]\to R[x,y]$ olmak üzere, $\forall h\in H$ için

$$D_{yx}\left(T_h^{(1)}f\right)=T_h^{(2)}D_{yx}f$$

dir. Yani, D_{yx}, H- equivaryant operatördür.

İspat: [47, S. 27]♦

Sonuç 16: Eğer f, $T_h^{(1)}$ lineer gösterimine göre H-invaryant ise, $D_{yx} f$ de $T_h^{(2)}$ lineer gösterimine göre H- invaryanttır.

İspat: f, $T_h^{(1)}$ lineer gösterimine göre H-invaryant olduğundan $\forall h \in H$ için, $\left(T_h^{(1)} f\right)(x) = f\left(h^{-1}x\right)$ dir. Buradan

$$D_{yx} f(x) = D_{yx} f(h^{-1}x) = D_{yx} T_h^{(1)} f\left(x\right) = T_h^{(2)}\left(D_{yx} f\left(x\right)\right)$$

dir. Yani, $D_{yx} f$, $T_h^{(2)}$ lineer gösterimine göre H- invaryanttır

Sonuç 17: $D_{y^{(m)}x} D_{y^{(m-1)}x} ... D_{y^{(1)}x}$ H- equinvaryant operatördür

Şimdi keyfi m doğal sayısı için $T_h^{(m+1)}$ lineer gösterimini tanımlayalım. Bunun için, $\left\{x, y^{(1)}, ..., y^{(m)}\right\} \subset R^n$ bilinmeyen vektörler ve $f\left(x, y^{(1)}, ..., y^{(m)}\right) \in R\left[x, y^{(1)}, ..., y^{(m)}\right]$ olsun. $R\left[x, y^{(1)}, ..., y^{(m)}\right]$ halkasında $T_h^{(m+1)}$ lineer gösterimini

$$T_h^{(m+1)} f\left(x, y^{(1)}, ..., y^{(m)}\right) = f\left(h^{-1}x, h^{-1}y^{(1)}, ..., h^{-1}y^{(m)}\right)$$

şeklinde tanımlayalım.

Sonuç 18: Eğer, f , $T_h^{(1)}$ lineer gösterimine göre H-invaryant ise, $D_{y^{(m)}x} D_{y^{(m-1)}x} ... D_{y^{(1)}x} f$ de $T_h^{(m+1)}$ lineer gösterimine göre H- invaryanttır.

Tanım 37: $m \in N$ olmak üzere, eğer, $\forall \lambda \in R$ için,

$$f\left(\lambda x\right) = \lambda^m f\left(x\right)$$

ise $f \in R[x] = R[x_1, ..., x_n]$ polinomuna m. dereceden homojen polinom denir.

Önerme 36 (Euler): $f\left(x\right)$ m. dereceden homojen bir polinom ise $x_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + ... + x_n \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ ifadesini $D_{xx} f$ ile gösterirsek,

$$D_{yx} f\left(x\right)\Big|_{y=x} = D_{xx} f\left(x\right) = mf\left(x\right)$$

dir.

İspat: $f\left(\lambda x\right) = \lambda^m f\left(x\right)$ ifadesinde her iki tarafın λ - ya göre türevini alırsak,

$$\frac{d}{d\lambda} f\left(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n\right) = \frac{d}{d\lambda}\left(\lambda^m f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)\right) = m\lambda^{m-1} f\left(x\right)$$

dir. Öte yandan,

$$\frac{d}{d\lambda} f\left(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n\right) = x_1 \frac{\partial f}{\partial \lambda x_1} + ... + x_n \frac{\partial f}{\partial \lambda x_n}$$

dir. $\lambda = 1$ alınırsa,

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + ... + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = m\lambda^{m-1} f\left(x\right)$$

elde edilir ki, bu da

$$D_{yx} f\left(x\right)\Big|_{y=x} = D_{xx} f\left(x\right) = mf\left(x\right)$$

eşitliğini verecektir.

Önerme 37: $f\left(x\right)$ m. dereceden homojen bir polinom ise,

$$D_{y^{(m)}x} D_{y^{(m-1)}x} ... D_{y^{(1)}x} f\left(x\right)\Big|_{y^{(m)}=y^{(m-1)}=...=y^{(1)}=x} = m!\, f\left(x\right)$$

dir.

İspat: Tümevarımla yapılabilir.

Sonuç 19: $f\left(x\right)$ m. dereceden homojen bir polinom ise

$$f\left(x\right) = \frac{1}{m!} D_{y^{(m)}x} D_{y^{(m-1)}x} ... D_{y^{(1)}x} f\left(x\right)\Big|_{y^{(m)}=y^{(m-1)}=...=y^{(1)}=x}$$

dir.

1.11. Kapelli Denklikleri

$x, x' \in R^n$ olsun. $x' = \left(x_1', x_2', ..., x_n'\right)$, $x = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ olmak üzere ileride $\sum_{i=1}^{n} x_i' \frac{\partial f}{\partial x_i}$ ifadesi için

$$D_{x'x} f = \sum_{i=1}^{n} x_i' \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \text{ve} \quad \Delta_{x'x} f = \sum_{i=1}^{n} x_i' \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

gösterimlerini kullanacağız. Burada f yi, hangi değişkene göre türev alınıyorsa o değişkenlere bağlı bir polinom olarak alıyoruz. Bu takdirde $x'_i \neq y_j$; $i, j = 1,...,n$ ise;

$$D_{y'y} D_{x'x} f = D_{y'y}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i' \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_{j=1}^{n} y_j' \cdot \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i' \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \overset{x' \neq y \text{ ise}}{=} \sum_{i,j=1}^{n} y_j'.x_i' \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i . \partial y_j}$$

elde edilir. $x'_i \neq y_j$; $i, j = 1,...,n$ koşulu yoksa;

$$\Delta_{y'y}\Delta_{x'x} f := \sum_{i,\, j=1}^{n} y_j\,'.x_i\,'\cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i.\partial y_j}$$

olarak gösterilir.

Üç vektör için bu durumu aşağıdaki şekilde incelersek: $x'_i \neq y_j$, $x'_i \neq z_j$, $y'_j \neq z_j$; $i, j = 1,...,n$ ise;

$$D_{z'z} D_{y'y} D_{x'x} f = D_{z'z} \sum_{i,\, j=1}^{n} y_j\,'.x_i\,'\cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i.\partial y_j} = \sum_{i,\, j,\, k=1}^{n} z_k\,'.y_j\,'.x_i\,'\cdot \frac{\partial^3 f}{\partial x_i.\partial y_j.\partial z_k}$$

olur. $x'_i \neq y_j$, $x'_i \neq z_j$, $y'_j \neq z_j$; $i, j = 1,...,n$ koşulları yoksa;

$$\Delta_{z'z}\Delta_{y'y}\Delta_{x'x} f := \sum_{i,\, j,\, k=1}^{n} z_k\,'.y_j\,'.x_i\,'\cdot \frac{\partial^3 f}{\partial x_i.\partial y_j.\partial z_k}$$

olarak gösterilir.

$x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(m)}$ m tane vektör için $k < r$ olmak üzere $\overline{x}_i^{(k)} \neq x_j^{(r)}$; $i, j = 1,...,n$ ise;

$$D_{\overline{x}^{(m)}x^{m}} D_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(m-1)}} ... D_{\overline{x}^{(1)}x^{(1)}} f = \sum_{i_1,\, ...,\, i_m=1}^{n} \overline{x}_{i_1}^{(1)} ... \overline{x}_{i_m}^{(m)} \cdot \frac{\partial^{(m)} f}{\partial x_{i_1}^{(1)} ... \partial x_{i_m}^{(m)}}$$

olarak elde edilir. Eğer $\overline{x}_i^{(k)} \neq x_j^{(r)}$; $i, j = 1,...,n$ koşulları yoksa;

$$\Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(m)}} \Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(m-1)}} ... \Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(1)}} f = \sum_{i_1,\, ...,\, i_m=1}^{n} \overline{x}_{i_1}^{(1)} ... \overline{x}_{i_m}^{(m)} \cdot \frac{\partial^{(m)} f}{\partial x_{i_1}^{(1)} ... \partial x_{i_m}^{(m)}}$$

olarak gösterilir.

$D_{y'y}\Delta_{x'x} f$ ifadesi aşağıdaki gibi değişir:

$$D_{y'y}\Delta_{x'x} f = \sum_{j=1}^{n} y_j\,'\cdot \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\,'\cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \sum_{i,\, j=1}^{n} y_j\,'.x_i\,'\cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i.\partial y_j} + \delta_{yx'}.\sum_{i,\, j=1}^{n} y_j\,'\cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} =$$

$$= \Delta_{y'y}\Delta_{x'x} f + \delta_{yx'}.\Delta_{y'x} f = \begin{cases} \Delta_{y'y}\Delta_{x'x} f + \Delta_{y'x} f, & y = x' \\ \Delta_{y'y}\Delta_{x'x} f, & y \neq x' \end{cases} .$$

Üç vektör için bunu yazarsak;

$$D_{z'z}\Delta_{y'y}\Delta_{x'x} f = \sum_{k=1}^{n} z_k\,'\cdot \frac{\partial}{\partial z_k}\left(\sum_{i,\, j=1}^{n} y_j\,'.x_i\,'\cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i.\partial y_j} \right) =$$

$$= \sum_{i,\, j,\, k=1}^{n} z_k\,'.y_j\,'.x_i\,'\cdot \frac{\partial^3 f}{\partial x_i.\partial y_j.\partial z_k} + \delta_{zx'}.\sum_{i,\, j=1}^{n} z_i\,'.y_j\,'\cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i.\partial y_j} + \delta_{zy'}.\sum_{i,\, j=1}^{n} z_j\,'.x_i\,'\cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i.\partial y_j} =$$

$$= \Delta_{z'z}\Delta_{y'y}\Delta_{x'x} f + \delta_{zx'}.\Delta_{y'y}\Delta_{z'x} f + \delta_{zy'}.\Delta_{x'x}\Delta_{z'y} f \quad .$$

şeklinde olur.

m tane vektör için yazarsak;

$$D_{\overline{x}^{(m)}x^{(m)}}\Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(m-1)}}...\Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(1)}} f = \sum \overline{x}_{i_m}^{(m)} \cdot \frac{\partial}{\partial x_{i_m}^{(m)}}\left(\sum \overline{x}_{i_1}^{(1)}...\overline{x}_{i_{m-1}}^{(m-1)} \cdot \frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{i_1}^{(1)}...\partial x_{i_{m-1}}^{(m-1)}} \right) =$$

$$= \sum \overline{x}_{i_1}^{(1)}...\overline{x}_{i_m}^{(m)} \cdot \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}^{(1)}...\partial x_{i_m}^{(m)}} + \delta_{x^{(m)}\overline{x}^{(1)}} \cdot \left(\sum \overline{x}_{i_1}^{(m)}...\overline{x}_{i_{m-1}}^{(m-1)} \cdot \frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{i_1}^{(1)}...\partial x_{i_{m-1}}^{(m-1)}} \right) +$$

$$+ \delta_{x^{(m)}\overline{x}^{(2)}} \cdot \left(\sum \overline{x}_{i_1}^{(1)}.\overline{x}_{i_2}^{(2)}...\overline{x}_{i_{m-1}}^{(m-1)} \cdot \frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{i_1}^{(1)}...\partial x_{i_{m-1}}^{(m-1)}} \right) + ... +$$

$$+ \delta_{x^{(m)}\overline{x}^{(m-1)}} \cdot \left(\sum \overline{x}_{i_1}^{(1)}...\overline{x}_{i_{m-2}}^{(m-2)}.\overline{x}_{i_{m-1}}^{(m)} \cdot \frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{i_1}^{(1)}...\partial x_{i_{m-1}}^{(m-1)}} \right)$$

$$= \Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(m)}}\Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(m-1)}}...\Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(1)}} f + \delta_{x^{(m)}\overline{x}^{(1)}}.\Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(m-1)}}...\Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(1)}} f +$$
$$+ \delta_{x^{(m)}\overline{x}^{(2)}}.\Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(m-1)}}...\Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(2)}}\Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(1)}} f + ... +$$
$$+ \delta_{x^{(m)}\overline{x}^{(m-1)}}.\Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(m-1)}}...\Delta_{\overline{x}^{(2)}x^{(2)}}\Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(1)}} f$$

şeklinde olur.

Şimdi bir alterne toplamın ifadesine bakalım:

$$\sum \operatorname{sgn}(i_1,\ i_2) D_{\overline{x}^{(2)}\overline{x}^{(i_2)}} D_{\overline{x}^{(1)}\overline{x}^{(i_1)}} = D_{\overline{x}^{(2)}\overline{x}^{(2)}} D_{\overline{x}^{(1)}\overline{x}^{(1)}} - D_{\overline{x}^{(2)}\overline{x}^{(1)}} D_{\overline{x}^{(1)}\overline{x}^{(2)}}$$

olur. Üç vektör için :

$$\sum \operatorname{sgn}(i_1,\ i_2,\ i_3) D_{\overline{x}^{(3)}\overline{x}^{(i_3)}} D_{\overline{x}^{(2)}\overline{x}^{(i_2)}} D_{\overline{x}^{(1)}\overline{x}^{(i_1)}} = D_{\overline{x}^{(3)}\overline{x}^{(3)}} D_{\overline{x}^{(2)}\overline{x}^{(2)}} D_{\overline{x}^{(1)}\overline{x}^{(1)}} + D_{\overline{x}^{(3)}\overline{x}^{(2)}} D_{\overline{x}^{(2)}\overline{x}^{(1)}} D_{\overline{x}^{(1)}\overline{x}^{(3)}}$$
$$+ D_{\overline{x}^{(3)}\overline{x}^{(1)}} D_{\overline{x}^{(2)}\overline{x}^{(3)}} D_{\overline{x}^{(1)}\overline{x}^{(2)}} - D_{\overline{x}^{(3)}\overline{x}^{(3)}} D_{\overline{x}^{(2)}\overline{x}^{(1)}} D_{\overline{x}^{(1)}\overline{x}^{(2)}} - D_{\overline{x}^{(3)}\overline{x}^{(2)}} D_{\overline{x}^{(2)}\overline{x}^{(3)}} D_{\overline{x}^{(1)}\overline{x}^{(1)}}$$
$$- D_{\overline{x}^{(3)}\overline{x}^{(1)}} D_{\overline{x}^{(2)}\overline{x}^{(2)}} D_{\overline{x}^{(1)}\overline{x}^{(3)}} \quad .$$

Burada $\operatorname{sgn}(i_1,\ i_2,\ i_3)$, permütasyonun çift ya da tek olmasına göre 1 ya da -1'e eşittir.

$\sum \operatorname{sgn}(i_1,\ i_2,\ ...,\ i_m).D_{\overline{x}^{(m)}x^{(i_m)}}.\Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(i_{m-1})}}...\Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(i_1)}} f$ alterne toplamını alalım. Bu ifadeyi determinant olarak şu şekilde yazabiliriz:

$$\begin{vmatrix} D_{\overline{x}^{(m)}x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(1)}} \\ D_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{\overline{x}^{(1)}x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f = \sum_{\overline{x}^{(m)},\ ...,\ \overline{x}^{(1)}} \operatorname{sgn}(i_1,\ i_2,\ ...,\ i_m).D_{\overline{x}^{(m)}x^{(i_m)}}.\Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(i_{m-1})}}...\Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(i_1)}} f$$

$$= \sum_{\overline{x}^{(m)},\, ...,\, \overline{x}^{(1)}} \operatorname{sgn}(i_1,\, i_2,\, ...,\, i_m).\Delta_{\overline{x}^{(m)} x^{(i_m)}} ... \Delta_{\overline{x}^{(1)} x^{(i_1)}} f +$$

$$+ \sum_{\overline{x}^{(m)},\, ...,\, \overline{x}^{(1)}} \operatorname{sgn}(i_1,\, i_2,\, ...,\, i_m).\left(\sum_{k=1}^{m-1} \delta_{x^{(m)} \overline{x}^{(i_k)}} .\left(\Delta_{\overline{x}^{(m-1)} x^{(i_{m-1})}} ... \Delta_{\overline{x}^{(m)} x^{(i_k)}} ... \Delta_{\overline{x}^{(1)} x^{(i_1)}} f \right) \right) =$$

$$= \sum \operatorname{sgn}(i_1,\, i_2,\, ...,\, i_m).\Delta_{\overline{x}^{(m)} x^{(i_m)}} ... \Delta_{\overline{x}^{(1)} x^{(i_1)}} f - (m-1).\sum \operatorname{sgn}(i_1,\, i_2,\, ...,\, i_m).\delta_{x^{(m)} \overline{x}^{(i_m)}} .\Delta_{\overline{x}^{(m-1)} x^{(i_{m-1})}} ... \Delta_{\overline{x}^{(1)} x^{(i_1)}} f$$

dir. Buradan;

$$\sum \operatorname{sgn}(i_1,\, i_2,\, ...,\, i_m).\left(D_{\overline{x}^{(m)} x^{(i_m)}} + (m-1).\delta_{\overline{x}^{(m)} x^{(i_m)}} \right) \Delta_{\overline{x}^{(m-1)} x^{(i_{m-1})}} ... \Delta_{\overline{x}^{(1)} x^{(i_1)}} f =$$

$$= \sum \operatorname{sgn}(i_1,\, i_2,\, ...,\, i_m).\Delta_{\overline{x}^{(m)} x^{(i_m)}} ... \Delta_{\overline{x}^{(1)} x^{(i_1)}} f \qquad (16)$$

elde edilir. Bu eşitliği determinantlar yardımıyla şu şekilde ifade edebiliriz:

$$\begin{vmatrix} D_{\overline{x}^{(m)} x^{(m)}} + (m-1).\delta_{\overline{x}^{(m)} x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(m)} x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(m)} x^{(1)}} \\ D_{\overline{x}^{(m-1)} x^{(m)}} + (m-1).\delta_{\overline{x}^{(m-1)} x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(m-1)} x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(m-1)} x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{\overline{x}^{(1)} x^{(m)}} + (m-1).\delta_{\overline{x}^{(1)} x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(1)} x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(1)} x^{(1)}} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \Delta_{\overline{x}^{(m)} x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(m)} x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(m)} x^{(1)}} \\ \Delta_{\overline{x}^{(m-1)} x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(m-1)} x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(m-1)} x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{\overline{x}^{(1)} x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(1)} x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(1)} x^{(1)}} \end{vmatrix} f$$

$\overline{x}^{(k)} = x^{(k)}$ ve $x^{(k)} \neq x^{(l)},\ k \neq l\ (k,\ l = 1,\ ...,\ m)$ olarak alırsak aşağıdaki determinantı elde ederiz:

$$\begin{vmatrix} D_{\overline{x}^{(m)} x^{(m)}} + (m-1) & \Delta_{\overline{x}^{(m)} x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(m)} x^{(1)}} \\ D_{\overline{x}^{(m-1)} x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(m-1)} x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(m-1)} x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{\overline{x}^{(1)} x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(1)} x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(1)} x^{(1)}} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \Delta_{\overline{x}^{(m)} x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(m)} x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(m)} x^{(1)}} \\ \Delta_{\overline{x}^{(m-1)} x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(m-1)} x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(m-1)} x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{\overline{x}^{(1)} x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(1)} x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(1)} x^{(1)}} \end{vmatrix} f \quad .$$

$\overline{x}^{(m)} = x^{(m+1)},\ \overline{x}^{(m-1)} = x^{(m)},\ ...,\ \overline{x}^{(1)} = x^{(2)}$ olarak alırsak aşağıdaki determinantı elde ederiz:

$$\begin{vmatrix} D_{\overline{x}^{(m+1)} x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(m+1)} x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(m+1)} x^{(1)}} \\ D_{\overline{x}^{(m)} x^{(m)}} + (m-1) & \Delta_{\overline{x}^{(m)} x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(m)} x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{\overline{x}^{(2)} x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(2)} x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(2)} x^{(1)}} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \Delta_{\overline{x}^{(m+1)} x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(m+1)} x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(m+1)} x^{(1)}} \\ \Delta_{\overline{x}^{(m)} x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(m)} x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(m)} x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{\overline{x}^{(2)} x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(2)} x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(2)} x^{(1)}} \end{vmatrix} f \quad .$$

Bunları sembolik olarak şöyle ifade edebiliriz:

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{x^{(m+1)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(m+1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m+1)}x^{(1)}} \\ D_{x^{(m)}x^{(m)}}+(m-1) & \Delta_{x^{(m)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m)}x^{(1)}} \\ D_{x^{(m-1)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(m-1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{x^{(1)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{x^{(m+1)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(m+1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m+1)}x^{(1)}} \\ \Delta_{x^{(m)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(m)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m)}x^{(1)}} \\ \Delta_{x^{(m-1)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(m-1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{x^{(1)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f$$

$m \geq 1$ için keyfi minörler karşılıklı olarak birbirine eşittir. Bunu kullanarak aşağıdaki (17) eşitliğini göstermek istiyoruz. Bunun için,

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{x^{(m+1)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(m+1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m+1)}x^{(1)}} \\ \Delta_{x^{(m)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(m)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m)}x^{(1)}} \\ \Delta_{x^{(m-1)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(m-1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{x^{(1)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f$$

ifadesini F şeklinde işaretleyelim. Şimdi,

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{x^{(m+1)}x^{(m)}} & D_{x^{(m+1)}x^{(m-1)}} & \cdots & D_{x^{(m+1)}x^{(1)}} \\ D_{x^{(m)}x^{(m)}}+(m-1) & D_{x^{(m)}x^{(m-1)}} & \cdots & D_{x^{(m)}x^{(1)}} \\ D_{x^{(m-1)}x^{(m)}} & D_{x^{(m-1)}x^{(m-1)}}+(m-2) & \cdots & D_{x^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{x^{(1)}x^{(m)}} & D_{x^{(1)}x^{(m-1)}} & \cdots & D_{x^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f = F \qquad (17)$$

eşitliğin doğru olduğunu gösterelim. Bu eşitliğin anlamı keyfi $m.$dereceli minörlerinin eşit olmasıdır.(17) eşitliğinin m = 1 ve m = 2 durumlarında ispatı aşağıdaki önermelerde verilmektedir.

Önerme 38: $\begin{vmatrix} \vdots \\ D_{zx} \\ D_{yx} \\ D_{xx} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \vdots \\ \Delta_{zx} \\ \Delta_{yx} \\ \Delta_{xx} \end{vmatrix} f$ dir.

Bu ifade, karşılıklı minörlerin eşit olduğunu verir. Yani;

$D_{xx} f = \Delta_{xx} f$, $D_{yx} f = \Delta_{yx} f$, $D_{zx} f = \Delta_{zx} f$, ...

İspat: $D_{zx} f = \sum_{i=1}^{n} z_i . \frac{\partial f}{\partial x_i}$ ve $\Delta_{zx} f = \sum_{i=1}^{n} z_i . \frac{\partial f}{\partial x_i}$ olduğundan $D_{zx} f = \Delta_{zx} f$ elde edilir.

Özel olarak $D_{xx} f = \Delta_{xx} f$ ’dir. ◆

Önerme 39: $\begin{vmatrix} \vdots & \vdots \\ D_{zy} & \Delta_{zx} \\ D_{yy}+1 & \Delta_{yx} \\ D_{xy} & \Delta_{xx} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots \\ \Delta_{zy} & \Delta_{zx} \\ \Delta_{yy} & \Delta_{yx} \\ \Delta_{xy} & \Delta_{xx} \end{vmatrix} f$

dir. Bunun anlamı;

$$\begin{vmatrix} D_{yy}+1 & \Delta_{yx} \\ D_{xy} & \Delta_{xx} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \Delta_{yy} & \Delta_{yx} \\ \Delta_{xy} & \Delta_{xx} \end{vmatrix} f \text{ , } \left(\left(D_{yy}+1 \right).\Delta_{xx} - D_{xy}.\Delta_{yx} \right) f = \left(\Delta_{yy}.\Delta_{xx} - \Delta_{xy}.\Delta_{yx} \right) f$$

$$\begin{vmatrix} D_{zy} & \Delta_{zx} \\ D_{xy} & \Delta_{xx} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \Delta_{zy} & \Delta_{zx} \\ \Delta_{xy} & \Delta_{xx} \end{vmatrix} f \text{ , } \begin{vmatrix} D_{zy} & \Delta_{zx} \\ D_{yy}+1 & \Delta_{yx} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \Delta_{zy} & \Delta_{zx} \\ \Delta_{yy} & \Delta_{yx} \end{vmatrix} f$$

demektir.

İspat: [47, S. 32]♦

Şimdi (13) eşitliğini keyfi m için gösterelim:

$m=1$ için bu eşitlik;

$$\begin{vmatrix} \vdots \\ D_{x^{(m)}x^{(1)}} \\ D_{x^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \vdots \\ D_{x^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \vdots \\ \Delta_{x^{(m)}x^{(1)}} \\ \Delta_{x^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \vdots \\ \Delta_{x^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f$$

$\forall i,\ j \in N^{+}$ için $D_{x^{(i)}x^{(j)}} f = \Delta_{x^{(i)}x^{(j)}} f$ olduğundan yukarıdaki ilk önermeden dolayı eşitlik doğrudur. $m-1$ için doğru olsun. Yani;

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{x^{(m)}x^{(m-1)}} & D_{x^{(m)}x^{(m-2)}} & \cdots & D_{x^{(m)}x^{(1)}} \\ D_{x^{(m-1)}x^{(m-1)}} + (m-2) & D_{x^{(m-1)}x^{(m-2)}} & \cdots & D_{x^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{x^{(1)}x^{(m-1)}} & D_{x^{(1)}x^{(m-2)}} & \cdots & D_{x^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{x^{(m)}x^{(m-1)}} & \Delta_{x^{(m)}x^{(m-2)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m)}x^{(1)}} \\ \Delta_{x^{(m-1)}x^{(m-1)}} & \Delta_{x^{(m-1)}x^{(m-2)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{x^{(1)}x^{(m-1)}} & \Delta_{x^{(1)}x^{(m-2)}} & \cdots & \Delta_{x^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f$$

olsun.

m için bu eşitliği gösterelim:

$$\begin{vmatrix} D_{x^{(m)}x^{(m)}} + (m-1) & \Delta_{x^{(m)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m)}x^{(1)}} \\ D_{x^{(m-1)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(m-1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{x^{(1)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \Delta_{x^{(m)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(m)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m)}x^{(1)}} \\ \Delta_{x^{(m-1)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(m-1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{x^{(1)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f$$

olduğunu biliyoruz. Buradan şunu elde ederiz:

$$\left(D_{x^{(m)}x^{(m)}}+(m-1)\right).M_{x^{(m)}x^{(m)}}+D_{x^{(m-1)}x^{(m)}}.M_{x^{(m-1)}x^{(m)}}+\ldots+D_{x^{(1)}x^{(m)}}.M_{x^{(1)}x^{(m)}}=$$

$$=\left(D_{x^{(m)}x^{(m)}}+(m-1)\right).M^{D}_{x^{(m)}x^{(m)}}+D_{x^{(m-1)}x^{(m)}}.M^{D}_{x^{(m-1)}x^{(m)}}+\ldots+D_{x^{(1)}x^{(m)}}.M^{D}_{x^{(1)}x^{(m)}}.$$

Burada,

$$M_{x^{(i)}x^{(m)}}=\begin{vmatrix}\Delta_{x^{(m)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m)}x^{(1)}}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \Delta_{x^{(i+1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(i+1)}x^{(1)}}\\ \Delta_{x^{(i-1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(i-1)}x^{(1)}}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \Delta_{x^{(1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(1)}x^{(1)}}\end{vmatrix},\ i=1,\ \ldots,\ m$$

dir. M^D ise bu determinantın D operatörüne göre yazılmış halidir. Bununla eşitlik gösterilmiş olur.♦

Şimdi Cayley operatörünü verelim.

$$\sum_{x^{(m)},\ \ldots,\ x^{(1)}}\pm\Delta_{x^{(m)}x^{(m)}}\ldots\Delta_{x^{(1)}x^{(1)}}f=\sum_{x^{(m)},\ \ldots,\ x^{(1)}}\pm\left(\sum_{i_1,\ \ldots,\ i_m}x^{(1)}_{i_1}\ldots x^{(m)}_{i_m}\cdot\frac{\partial^m f}{\partial x^{(1)}_{i_1}\ldots\partial x^{(m)}_{i_m}}\right)=$$

$$=\sum_{i_1,\ \ldots,\ i_m}\left(\sum_{x^{(m)},\ \ldots,\ x^{(1)}}\pm x^{(1)}_{i_1}\ldots x^{(m)}_{i_m}\right)\cdot\frac{\partial^m f}{\partial x^{(1)}_{i_1}\ldots\partial x^{(m)}_{i_m}}$$

Burada

$$\sum_{x^{(m)},\ \ldots,\ x^{(1)}}\pm x^{(1)}_{i_1}\ldots x^{(m)}_{i_m}=\begin{vmatrix}x^{(1)}_{i_1} & x^{(2)}_{i_1} & \cdots & x^{(m)}_{i_1}\\ x^{(1)}_{i_2} & x^{(2)}_{i_2} & \cdots & x^{(m)}_{i_2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x^{(1)}_{i_m} & x^{(2)}_{i_m} & \cdots & x^{(m)}_{i_m}\end{vmatrix}$$

dır. Eğer, i_k, $(k=1,\ \ldots,\ m)$'lar birbirinden farklı değilse bu determinant sıfır olur. Eğer $m>n$ ise i_k'lar içinde en az iki tanesi eşit olur ki bu da determinantı sıfır yapar. $m=n$ ve i_k, $(k=1,\ \ldots,\ m)$'lar içinde eşit olanlar varsa yine determinant sıfıra eşit olur. $m=n$ ve i_k'lar birbirinden farklı ise $(i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_n)$'nin bir permütasyonudur. Buradan;

$$\begin{vmatrix}x^{(1)}_{i_1} & x^{(2)}_{i_1} & \cdots & x^{(n)}_{i_1}\\ x^{(1)}_{i_2} & x^{(2)}_{i_2} & \cdots & x^{(n)}_{i_2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x^{(1)}_{i_n} & x^{(2)}_{i_n} & \cdots & x^{(n)}_{i_n}\end{vmatrix}=\operatorname{sgn}(i_1,\ \ldots,\ i_n).\begin{vmatrix}x^{(1)}_{i_1} & x^{(2)}_{i_1} & \cdots & x^{(n)}_{i_1}\\ x^{(1)}_{i_2} & x^{(2)}_{i_2} & \cdots & x^{(n)}_{i_2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x^{(1)}_{i_n} & x^{(2)}_{i_n} & \cdots & x^{(n)}_{i_n}\end{vmatrix}=\operatorname{sgn}(i_1,\ \ldots,\ i_n).\left[x^{(1)}x^{(2)}\ldots x^{(n)}\right]$$

olur. Buradan da;

$$\sum_{i_1,\ ...,\ i_m=1}^{n}\left(\sum \operatorname{sgn}\left(i_1,\ ...,\ i_m\right).x_{i_m}^{(m)}...x_{i_1}^{(1)}\right)\cdot\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m}^{(m)}...\partial x_{i_1}^{(1)}}=\sum_{i_1,\ ...,\ i_n=1}^{n}\operatorname{sgn}\left(i_1,\ ...,\ i_n\right).\left[x^{(1)}...x^{(n)}\right]\cdot\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n}^{(n)}...\partial x_{i_1}^{(1)}}=$$

$$=\left[x^{(1)}...x^{(n)}\right].\sum_{i_1,\ ...,\ i_n}\operatorname{sgn}\left(i_1,\ ...,\ i_n\right)\cdot\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n}^{(n)}...\partial x_{i_1}^{(1)}}$$

ifadesi elde edilir.

Tanım 38: $\sum_{i_1,\ ...,\ i_n}\operatorname{sgn}\left(i_1,\ ...,\ i_n\right)\cdot\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n}^{(n)}...\partial x_{i_1}^{(1)}}$ operatörüne Cayley operatörü denir ve Ωf şeklinde gösterilir. O halde yukarıdaki eşitlik şu hali alır:

$$\sum_{i_1,\ ...,\ i_m=1}^{n}\left(\sum \operatorname{sgn}\left(i_1,\ ...,\ i_m\right).x_{i_m}^{(m)}...x_{i_1}^{(1)}\right)\cdot\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m}^{(m)}...\partial x_{i_1}^{(1)}}=\left[x^{(1)}x^{(2)}...x^{(n)}\right].\Omega f$$

Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış olur:

Teorem 9 (Kapelli) :

$$\begin{vmatrix} D_{x^{(m)}x^{(m)}}+(m-1) & D_{x^{(m)}x^{(m-1)}} & \cdots & D_{x^{(m)}x^{(1)}} \\ D_{x^{(m-1)}x^{(m)}} & D_{x^{(m-1)}x^{(m-1)}}+(m-2) & \cdots & D_{x^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{x^{(1)}x^{(m)}} & D_{x^{(1)}x^{(m-1)}} & \cdots & D_{x^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f=\begin{cases} 0, & m>n \\ \left[x^{(1)}x^{(2)}...x^{(n)}\right].\Omega f, & m=n \end{cases} \tag{18}$$

dır.

Bu teoremle verilen eşitliklere Kapelli denklikleri denir.

1.12. Kapelli Denklikleri Yardımıyla 1.Esas Teoremin İndirgenmesi

$r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m$ sonlu doğal sayılar olsunlar.

$S_r:=\left\{\left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m\right): r=r_1+r_2+...+r_m,\ r_i\geq 0,\ i=1,\ 2,\ ...,\ m\right\}$

olarak alalım. $\left|S_r\right|\leq\left(r+1\right)^m$ olduğundan S_r sonlu cümledir. S_r üzerinde bir sıralama tanımlayacağız:

Tanım 39: $\left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m\right),\ \left(s_1,\ s_2,\ ...,\ s_m\right)\in S_r$ olsun.

i) Bir k $\left(1\leq k\leq m\right)$ için; $r_1=s_1,\ ...,\ r_{k-1}=s_{k-1}$ ve $r_k<s_k$ ise

$\left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m\right)<\left(s_1,\ s_2,\ ...,\ s_m\right)$

denir.

ii) $\forall i=1,\ 2,\ ...,\ m$ için; $r_i = s_i$ ise $(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m) = (s_1,\ s_2,\ ...,\ s_m)$ denir.

iii)Eğer $(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m) < (s_1,\ s_2,\ ...,\ s_m)$ veya $(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m) = (s_1,\ s_2,\ ...,\ s_m)$ ise $(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m) \leq (s_1,\ s_2,\ ...,\ s_m)$ denir.

Önerme 40: "$\leq$" bağıntısı S_r üzerinde bir sıralama bağıntısıdır.

İspat: [47, S. 37]♦

Önerme 41: $(S_r,\ \leq)$ iyi sıralı bir cümledir.

İspat: $\forall (r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m),\ (s_1,\ s_2,\ ...,\ s_m) \in S_r$ için $(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m) \neq (s_1,\ s_2,\ ...,\ s_m)$ olsun. Bu takdirde öyle en küçük k mevcuttur ki $r_k \neq s_k$'dır. Buradan $r_k < s_k$ veya $s_k < r_k$'dır.

$r_k < s_k$ ise $(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m) < (s_1,\ s_2,\ ...,\ s_m)$ olur.

$s_k < r_k$ ise $(s_1,\ s_2,\ ...,\ s_m) < (r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m)$ olur.

Dolayısıyla $(S_r,\ \leq)$ iyi sıralı bir cümledir. ◆

Önerme 42: $(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m) \in S_r$ için $T(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m)$ bir önerme olmak üzere,

1) $T(0,\ 0,\ ...,\ r)$ doğru olsun.

2) $(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m) < (s_1,\ s_2,\ ...,\ s_m)$ için $T(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m)$'nin doğru olmasından $T(s_1,\ s_2,\ ...,\ s_m)$ doğru oluyorsa, $\forall (r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m) \in S_r$ için $T(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m)$ doğrudur.

İspat: Farz edelim ki; en az bir $(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m) \in S_r$ için $T(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m)$ doğru olmasın.

$B = \{(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m) \in S_r : T(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m) \text{ doğru değil}\} \subset S_r$

olarak alalım. Varsayımımıza göre $B \neq \emptyset$'dir. S_r sonlu ve iyi sıralı olduğundan B'nin bir en küçük elemanı vardır.Bu eleman $(r_1^0,\ r_2^0,\ ...,\ r_m^0) \in B$ olsun. $T(0,0,...,r)$ doğru olduğundan ve $(0,0,...,r)$, S_r nin en küçük elemanı olduğundan $(0,0,...,r) \notin B$, dolayısıyla $(0,0,...,r) < (r_1^0,\ r_2^0,\ ...,\ r_m^0)$ dir.

$\left(r_1,\ r_2,\ ...,r_m\right)<\left(r_1^0,\ r_2^0,\ ...,r_m^0\right)$ olan tüm $\left(r_1,\ r_2,\ ...,r_m\right)\in S_r$ ’ler için $\left(r_1,\ r_2,\ ...,r_m\right)\notin B$ olduğundan $T\left(r_1,\ r_2,\ ...,r_m\right)$ doğrudur. Hipoteze göre $T\left(r_1^0,\ r_2^0,\ ...,r_m^0\right)$ doğru olmalıdır. Fakat bu bir çelişkidir. ◆

Önerme 43: $\left(r_1,\ r_2,\ ...,r_m\right)\in S_r$ için $T\left(r_1,\ r_2,\ ...,r_m\right)$ bir önerme olmak üzere,

1) $r_1=r_2=...=r_{m-n}=0$ olan tüm $\left(r_1,\ r_2,\ ...,r_m\right)=\left(0,\ 0,...,0,r_{m-n+1},\ ...,r_m\right)\in S_r$ ler için $T\left(r_1,\ r_2,\ ...,r_m\right)$ doğru olsun.

2) $\left(r_1,\ r_2,\ ...,r_m\right)<\left(s_1,\ s_2,\ ...,s_m\right)$ olan $\forall\left(r_1,\ r_2,\ ...,r_m\right)\in S_r$ için $T\left(r_1,\ r_2,\ ...,r_m\right)$’nin doğru olmasından $T\left(s_1,\ s_2,\ ...,s_m\right)$ doğru oluyorsa $\forall\left(r_1,\ r_2,\ ...,r_m\right)\in S_r$ için $T\left(r_1,\ r_2,\ ...,r_m\right)$ doğrudur.

İspat: Önerme 42’ye benzer şekilde yapılır. ◆

Teorem 10: $H\subset O(n)$ bir alt grup ve $x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,x^{(m)}$ R^n’de m tane bilinmeyen vektör olsun.

Eğer, $m=n$ için $\{\varphi_1,\ \varphi_2,\ ...,\varphi_N\}$ polinomlar ailesi, $R\left[x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,x^{(m)}\right]^H$’nin üreteç cümlesi ise; $m>n$ durumunda,

$$\left\{\varphi_1,\ \varphi_2,\ ...,\varphi_N,\ D_{x^{(i)}x^{(j)}}\varphi_k,\ i,\ j=1,\ 2,...,m,\ k=1,\ 2,...,N,\ D_{x^{(i)}x^{(j)}}\left(D_{x^{(s)}x^{(t)}}.\varphi_k\right),\ ...\right\} \qquad (19)$$

cümlesi, $R\left[x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,x^{(m)}\right]^H$’nin üreteç cümlesidir.

İspat: Her polinom homojen polinomların toplamı şeklinde tek türlü olarak yazılabileceğinden burada homojen polinomlar göz önüne alınabilir. Keyfi bir homojen polinom, her $x^{(i)}$’ye $(i=1,2,...,m)$ göre homojen olan polinomların toplamı olarak tek türlü yazılabilir. İnvaryant polinomların keyfi homojen kısmı da invaryanttır. Teorem $x^{(i)}$’lere göre homojen olan invaryant polinomlar için ispat edlirse, keyfi invaryant polinom için de ispatlanmış olur.

$f\left(x^{(1)},x^{(2)},...,x^{(m)}\right)$, $x^{(1)}$’e göre derecesi r_1, $x^{(2)}$’ye göre derecesi r_2, …., $x^{(m)}$’ye göre derecesi r_m olan her bir $x^{(i)}$’ye $(i=1,2,...,m)$ göre homojen olan bir invaryant polinom olsun. Buradan f’nin derecesi $r=r_1+r_2+...+r_m$ olur.

Kapelli denkliklerindeki operatör determinantının ilk elemanı;

$$\left(D_{x^{(m)}x^{(m)}}+(m-1)\right)...\left(D_{x^{(2)}x^{(2)}}+1\right).D_{x^{(1)}x^{(1)}}$$

şeklindedir. Bunun f ’deki görüntüsü Önerme 36 dan,

$$\left(\left(D_{x^{(m)}x^{(m)}}+(m-1)\right)\ldots\left(D_{x^{(2)}x^{(2)}}+1\right).D_{x^{(1)}x^{(1)}}\right)f=(r_m+m-1)\ldots(r_2+1).r_1 f\ .$$

Şekildedir. $\rho=(r_m+m-1)\ldots(r_2+1).r_1$ olarak alalım. f , $x^{(1)}$ değişkenine bağlı ise $r_1>0$ olur. Bu durumda $\rho\neq 0$ ’dır. Eğer $\rho=0$ ise, $(r_m+m-1)\ldots(r_2+1).r_1=0$ demektir. Buradan $(r_2+1)=0$ olamaz. Çünkü, bu durumda $r_2=-1$ olur ki polinomların derecesi negatif sayı olamaz. Benzer şekilde, $m\geq 2$ için $(r_m+m-1)\neq 0$ dır. Böylece, $r_1=0$ olur. $r_1=0$ olması, f nin $x^{(1)}$-e göre derecesi sıfır demektir. Bu ise, f nin $x^{(m)},x^{(m-1)},\ldots,x^{(2)}$ vektörlerine yani m-1 tane bilinmeyen vektörlere bağlı bir polinom olduğunu gösterir. Bu ispat, tümevarım yöntemi ile yapıldığından, burada m-1 tane vektör için teoremin doğru olduğu varsayılıp, m tane vektör için de doğru olduğu gösterilmek istenmektedir. Dolayısıyla, $r_1=0$ durumunda, teorem m-1 tane vektöre indirgeneceğinden zaten doğru olacaktır. Bundan dolayı $r_1\neq 0$ alabiliriz. Dolayısıyla $\rho\neq 0$ dır.

Kapelli denkliklerindeki operatör determinantının diğer elemanlarında $D_{x^{(\alpha)}x^{(\alpha)}}+\alpha-1$ diyagonal elemanlarını bırakabiliriz. Onların etkisi f ’nin bir sayı ile çarpımını verir. Bunların hepsini ρ^* şeklinde gösterelim. Bu takdirde böyle bir eleman şu şekilde olur:

$$\rho^*.D_{x^{\beta_q}x^{\alpha_q}}\ldots D_{x^{\beta_2}x^{\alpha_2}}.D_{x^{\beta_1}x^{\alpha_1}}$$

Burada $\alpha_q>\alpha_{q-1}>\ldots>\alpha_2>\alpha_1$, $\beta_i\neq\alpha_i$, $i=1,2,\ldots,q$ ve $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_q$ ’lar α_1, α_2, ..., α_q ’ların bir permütasyonudur. Buradan $q\geq 2$ ve $\beta_1>\alpha_1$ elde edilir. Çünkü $q=1$ ise yukarıdaki ifade $\rho^*.D_{x^{\beta}x^{\alpha}}$ biçiminde olup, $\beta=\alpha$ elde edilir. Yukarıda diagonal elemanlarının bırakılabileceğini ifade etmiştik. Buna göre $q\geq 2$ olmalıdır. α_1 en küçük olduğundan ve $\beta_1\neq\alpha_1$ olduğundan $\beta_1>\alpha_1$ olmalıdır. Bu durumda;

$$\rho.f=\left(D_{x^{(m)}x^{(m)}}+(m-1)\right)\ldots\left(D_{x^{(2)}x^{(2)}}+1\right).D_{x^{(1)}x^{(1)}}f$$

$$f^*=\rho^*.D_{x^{\beta_1}x^{\alpha_1}}f$$

$$\wp=D_{x^{\beta_q}x^{\alpha_q}}\ldots D_{x^{\beta_2}x^{\alpha_2}}$$

olarak alırsak Kapelli denkliklerinin sol tarafı $\rho.f-\sum\wp.f^*$ halini alır. Burada, $f^*=\rho^*.D_{x^{\beta_1}x^{\alpha_1}}f$, x^{α_1} ’e göre f ’den daha küçük dereceye sahiptir.

Şimdi Kapelli denkliklerini aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\rho.f = \sum \wp.f^{*} \qquad (m > n) \qquad (20)$$

$$\rho.f = \sum \wp.f^{*} + \left[x^{(1)}x^{(2)}...x^{(n)}\right]\Omega f \qquad (\mathrm{m} = \mathrm{n}) \qquad (21)$$

$m > n$ için $\rho.f = \sum \wp.f^{*}$ ’dır. f, $x^{(1)}$’e bağlı ise $\rho \neq 0$ olacağından $f = \frac{1}{\rho} \cdot \sum \wp.f^{*}$ olur.

Tümevarımla iddiamızı ispatlamaya çalışalım. En küçük durum vektör sayısının n tane olduğu durumdur.

$m = n$ için $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N\}$, $R\left[x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,\ x^{(m)}\right]^{H}$ ’nin üreteç cümlesi olsun. Gösterelim ki $m > n$ için;

$$\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N, D_{x^{(i)}x^{(j)}}\varphi_1, ..., D_{x^{(k)}x^{(k)}}...D_{x^{(1)}x^{(1)}}\varphi_1, ...\}$$

cümlesi $R\left[x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,\ x^{(m)}\right]^{H}$ için üreteç cümlesidir.

$m = n$ tane vektör için yukarıdaki kabul gereği (19) cümlesinin $R\left[x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,\ x^{(m)}\right]^{H}$ nin üreteç cümlesi olduğu açıktır.

$m-1$ tane vektör için (19) cümlesi $R\left[x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,\ x^{(m)}\right]^{H}$ nin üreteç cümlesi olsun. Şimdi m tane vektör durumuna bakalım. $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(m)}$ vektörleri için $r_1 = 0$ ise $m-1$ vektöre dönüştüğünden iddia geçerli olur. $r_1 \neq 0$ olsun. Polinomun derecesi $r = r_1 + r_2 + ... + r_m$ olduğundan bunlardan biri sıfır ise $m-1$ vektör durumuna geleceğinden iddia geçerli olur. Dolayısıyla hepsi sıfırdan farklı olsun.

“$\leq$” sıralamasına göre $(r_1, r_2, ..., r_m)$’den küçük olanlar için iddia doğru olsun. $f^{*} = \rho^{*}.D_{x^{\beta_1}x^{\alpha_1}} f$ ’nin x^{α_1}’e göre derecesi f ’den küçük olduğundan $f^{*} = \rho^{*}.D_{x^{\beta_1}x^{\alpha_1}} f$ ifadesi (19) cümlesi ile üretilebilir. Yani $\exists \psi$ için;

$$f^{*} = \rho^{*}.D_{x^{\beta_1}x^{\alpha_1}} f = \psi\left(\varphi_1,\ \varphi_2,\ ...,\ \varphi_N.D\varphi_1,\ D\varphi_2,\ ...,\ D\varphi_N,\ ...\right)$$

$$f = \frac{1}{\rho} \cdot \sum D_{x^{\beta_k}x^{\alpha_k}}...D_{x^{\beta_2}x^{\alpha_2}}\psi(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N.D\varphi_1, D\varphi_2, ..., D\varphi_N, ...)$$

olur. Sondaki ifadeyi açarsak:

$$D_{x^{\beta_2}x^{\alpha_2}}\psi(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N.D\varphi_1, D\varphi_2, ..., D\varphi_N, ...) =$$

$$= \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi_1} D_{x^{\beta_2}x^{\alpha_2}}\varphi_1 + \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi_2} D_{x^{\beta_2}x^{\alpha_2}}\varphi_2 + ... + \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi_N} D_{x^{\beta_2}x^{\alpha_2}}\varphi_N + \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi_1} D_{x^{\beta_2}x^{\alpha_2}}\varphi_1(D\varphi_1) + ...$$

olur. Bu şekilde devam edilirse f fonksiyonu da (19) cümlesinin elemanları cinsinden yazılmış olur. Dolayısıyla $\forall m > n$ için (19) cümlesi $R\left[x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,\ x^{(m)}\right]^H$ 'nin üreteç cümlesi olur. Böylece ispat bitmiş olur. ◆

Not: $S = \bigcup_{r=0}^{\infty} S_r$ olarak alalım. Burada;

$$S_0 = \{(0,\ 0, 0, ..., 0)\}$$
$$S_1 = \{(1,\ 0, 0, ..., 0),\ (0,\ 1, 0, ..., 0),\ ...,\ (0, 0, 0, ..., 1)\}$$
$$\vdots$$
$$S_r = \{(r_1,\ r_2,\ r_3,\ ..., r_m) : r_1 + r_2 + r_3 + ... + r_m = r,\ r_i \in N,\ i = 1,\ 2, 3, ..., m\}$$
$$\vdots$$

olarak alınmaktadır. Bu S cümlesi üzerinde bir sıralama bağıntısı tanımlayalım.

Tanım 40: $(r_1, r_2, ..., r_m), (s_1, s_2, ..., s_m) \in S$ olsun. Eğer $r_1 + r_2 + ... + r_m = r$ ve $s_1 + s_2 + ... + s_m = s$ için;

$r < s$ ise $(r_1, r_2, ..., r_m) < (s_1, s_2, ..., s_m)$'dir.

$r = s$ ise $(r_1, r_2, ..., r_m), (s_1, s_2, ..., s_m) \in S_r$ olacağından S_r'deki sıralama bağıntısı alınır.

$(r_1, r_2, ..., r_m) < (s_1, s_2, ..., s_m)$ veya $(r_1, r_2, ..., r_m) = (s_1, s_2, ..., s_m)$ ise $(r_1, r_2, ..., r_m) \le (s_1, s_2, ..., s_m)$'dir.

Bu şekilde tanımlanan "$\le$" bağıntısı S üzerinde bir sıralama bağıntısıdır. Şimdi bunu gösterelim:

1) $\forall (r_1, r_2, ..., r_m) \in S$ için $(r_1, r_2, ..., r_m) = (r_1, r_2, ..., r_m)$ olduğundan $(r_1, r_2, ..., r_m) \le (r_1, r_2, ..., r_m)$'dir. (Yansıma özeliği)

2) $\forall (r_1, r_2, ..., r_m), (s_1, s_2, ..., s_m) \in S$ için $(r_1, r_2, ..., r_m) \le (s_1, s_2, ..., s_m)$ ve $(s_1, s_2, ..., s_m) \le (r_1, r_2, ..., r_m)$ olsun. Bu elemanlar için $r_1 + r_2 + ... + r_m = r$ ve $s_1 + s_2 + ... + s_m = s$ olsun. $(r_1, r_2, ..., r_m) \le (s_1, s_2, ..., s_m)$ olduğundan $r \le s$'dir. $(s_1, s_2, ..., s_m) \le (r_1, r_2, ..., r_m)$ olduğundan $s \le r$'dir. O halde $r = s$'dir. Buradan $(r_1, r_2, ..., r_m)$ ve $(s_1, s_2, ..., s_m)$ S_r'nin elemanlarıdır.Önerme 41 den $(S_r, \le)$ iyi sıralı cümle olduğundan $(r_1, r_2, ..., r_m) \le (s_1, s_2, ..., s_m)$ ve $(s_1, s_2, ..., s_m) \le (r_1, r_2, ..., r_m)$ olduğundan $(r_1, r_2, ..., r_m) = (s_1, s_2, ..., s_m)$ elde edilir. (Simetri özeliği)

3) $\forall(r_1, r_2, ..., r_m), (s_1, s_2, ..., s_m), (t_1, t_2, ..., t_m) \in S$ için $(r_1, r_2, ..., r_m) \leq (s_1, s_2, ..., s_m)$ ve $(s_1, s_2, ..., s_m) \leq (t_1, t_2, ..., t_m)$ olsun. Bunlar için $r_1 + r_2 + ... + r_m = r$, $s_1 + s_2 + ... + s_m = s$ ve $t_1 + t_2 + ... + t_m = t$ olsun. $(r_1, r_2, ..., r_m) \leq (s_1, s_2, ..., s_m)$ olduğundan $r \leq s$ 'dir. $(s_1, s_2, ..., s_m) \leq (t_1, t_2, ..., t_m)$ olduğundan $s \leq t$ 'dir. Buradan $r \leq t$ olur. $r < t$ ise $(r_1, r_2, ..., r_m) \leq (t_1, t_2, ..., t_m)$ elde edilir. $r = t$ ise S_r 'dek sıralama geçerli olacağından yine $(r_1, r_2, ..., r_m) \leq (t_1, t_2, ..., t_m)$ olur (Geçişme Özeliği). ◆

Lemma 3: $(S, \leq)$ iyi sıralı bir cümledir.

İspat: $(r_1, r_2, ..., r_m), (s_1, s_2, ..., s_m) \in S$ için;

$(r_1, r_2, ..., r_m) \neq (s_1, s_2, ..., s_m)$, $r_1 + r_2 + ... + r_m = r$ ve $s_1 + s_2 + ... + s_m = s$ olsun.

i) $r = s$ ise $(r_1, r_2, ..., r_m), (s_1, s_2, ..., s_m) \in S_r$ olur. Önerme 41 'den $(S_r, \leq)$ iyi sıralı cümle olduğundan $(r_1, r_2, ..., r_m) < (s_1, s_2, ..., s_m)$ veya $(s_1, s_2, ..., s_m) < (r_1, r_2, ..., r_m)$ elde edilir.

ii) $r \neq s$ ise $r < s$ veya $s < r$ dir. $r < s$ ise $(r_1, r_2, ..., r_m) < (s_1, s_2, ..., s_m)$ dir. $s < r$ ise $(s_1, s_2, ..., s_m) < (r_1, r_2, ..., r_m)$ dir.

Dolayısıyla $(S, \leq)$ iyi sıralı bir cümledir. ◆

Teorem 11: $H \subset SO(n)$ bir alt grup olmak üzere $n-1$ tane bilinmeyen vektör için $R\left[x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,\ x^{(n-1)}\right]^H$ nin üreteç cümlesi $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N\}$ olsun. Bu durumda $m > n-1$ için $R\left[x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,\ x^{(m)}\right]^H$ nin üreteç cümlesi,

$$\left\{\varphi_1,\ \varphi_2,\ ...,\ \varphi_N,\ D\varphi_1,\ \mathrm{D}\varphi_2,\ ...,\ D\varphi_N,\ DD\varphi_1,\ ...,\ \left[x^{(1)}x^{(2)}...x^{(n)}\right],\ D\left[x^{(1)}x^{(2)}...x^{(n)}\right],\ ...\right\} \quad (22)$$

biçimindedir.

İspat: $(r_1, r_2, ..., r_m) \in S$ için $T(r_1, r_2, ..., r_m)$ önermesi yukarıdaki ifade olsun.

$m = n$ durumunu göz önüne alalım. $\forall(0, r_2, ..., r_n) \in S$ için $T(0, r_2, ..., r_n)$ doğrudur. $(s_1, s_2, ..., s_n) \leq (r_1, r_2, ..., r_n)$ olan $\forall(s_1, s_2, ..., s_n)$ ler için $T(s_1, s_2, ..., s_n)$ doğru olsun. $T(r_1, r_2, ..., r_n)$ nin de doğru olduğunu gösterelim:

$f\left(x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n-1)}\right)$, H - *invaryant* polinomunu göz önüne alalım.

$m = n$ için;

$$\rho.f = \sum \wp.f^{*} + \left[x^{(1)}x^{(2)}...x^{(n)}\right]\Omega f$$

olduğunu biliyoruz. f, $x^{(1)}$'e bağlı değilse tümevarım hipotezi gereği f, (22) cümlesinin elemanları cinsinden üretilebilir. f, $x^{(1)}$'e bağlı olsun. Bu durumda $\rho \neq 0$'dır ve

$$f = \frac{1}{\rho}\cdot \sum \wp.f^{*} + \frac{1}{\rho}\cdot\left[x^{(1)}x^{(2)}...x^{(n)}\right]\Omega f$$

dir. f^{*}'ın $x^{(1)}$'e göre dercesi S_r'deki sıralamaya göre f'den küçüktür. Ωf'nin derecesi ise $r-n$'dir. Tümevarım hipotezine göre bunların toplamı da (22) cümlesinin elemanları cinsinden yazılabilir. Dolayısıyla f, (22) cümlesinin elemanları cinsinden yazılabilir. Bundan dolayı $m=n$ için f, (22) cümlesinin elemanları cinsinden yazılabilir yani $m=n$ için, (22) cümlesi $R\left[x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,\ x^{(m)}\right]^{H}$'nin üreteç cümlesidir.

Şimdi, $m>n$ için Teorem 11'e göre H grubu için (22) cümlesi, $R\left[x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,\ x^{(m)}\right]^{H}$'nin üreteç cümlesidir. ◆

1. 13. $O(n)$ ve $SO(n)$ Grupları İçin 1. Temel Teorem

Bu bölüm [48] den alınmıştır.

Tanım 41: f, nispi $O(n)$-*invaryant* polinom olmak üzere $\forall g \in O(n)$ için $\lambda(g)=1$ ise f'ye çift (mutlak) invaryant polinom denir.

Tanım 42: f, nispi $O(n)$-*invaryant* polinom olmak üzere $\forall g \in O(n)$ için $\lambda(g) = \det g$ ise f'ye tek invaryant polinom denir.

Örnek 27: $O(1)=\{1,-1\}$ grubunun R üzerindeki etkisini alalım. $f \in R$ olmak üzere;

$\lambda(1)=1$ ve $\lambda(-1)=1$ ise $f(-x)=f(x)$ olup; f, çift invaryant polinomdur.

$\lambda(1)=1$ ve $\lambda(-1)=-1$ ise $f(-x)=-f(x)$ olup; f, tek invaryant polinomdur.

Önerme 44:

1-Çift invaryant polinomların toplamı çift invaryant polinomdur.

2- f, çift invaryant polinom ve $\lambda \in R$ olmak üzere $\lambda.f$ polinomu çift invaryant polinomdur.

3-Çift invaryant polinomların çarpımı çift invaryant polinomdur.

İspat: [48]♦

Önerme 45:

1-Tek invaryant polinomların toplamı tek invaryanttır.

2- f , tek invaryant polinom ve $\lambda \in R$ olmak üzere $\lambda . f$ polinomu tek invaryant polinomdur.

3-Tek invaryant polinomların çarpımı çift invaryant polinomdur.

4-Tek ve çift invaryant polinomların çarpımı tek invaryant polinomdur.

İspat: [48]♦

Örnek 28: $f\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,\ x^{(n)}\right)=\left[x^{(1)}x^{(2)}...x^{(m)}\right]$ invaryant polinomunu alalım.

$$f\left(g.x^{(1)},\ g.x^{(2)},\ ...,\ g.x^{(m)}\right)=\left[g.x^{(1)}g.x^{(2)}...g.x^{(m)}\right]=\det g.\left[x^{(1)}x^{(2)}...x^{(m)}\right]$$

olduğundan $\left[x^{(1)}x^{(2)}...x^{(m)}\right]$ polinomu tek invaryant polinomdur.

Önerme 46:

1- f , çift invaryant polinom ise Ωf tek invaryant polinomdur.

2- f , tek invaryant polinom ise Ωf çift invaryant polinomdur.

İspat: [48]♦

Önerme 47: $f\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,\ x^{(m)}\right)$, $SO(n)$-*invaryant* polinom olsun. Bu takdirde;

$$f\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,\ x^{(m)}\right)=f_1\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,\ x^{(m)}\right)+f_2\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,\ x^{(m)}\right)$$

şeklinde f_1 çift ve f_2 tek $SO(n)$-*invaryant* polinomların toplamı şeklinde yazılabilir.

İspat: [48]♦

Teorem 12:

1-Keyfi bir çift invaryant polinom;

$\left\langle x^{(i)},\ x^{(j)}\right\rangle;\ i,\ j=1,\ 2,\ ...,\ m$’lerin

polinomu olarak ifade edilebilir.

2-Keyfi bir tek invaryant polinom, $\varphi\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,\ x^{(m)}\right)$ çift invaryant polinom olmak üzere;

$\left[x^{(i_1)}x^{(i_2)}...x^{(i_n)}\right].\varphi\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,\ x^{(m)}\right);\ i_1,\ i_2,\ ...,\ i_n=1;\ i_1<i_2<...<i_n$

şeklindeki tek invaryant polinomların toplamı olarak ifade edilebilir.

İspat: [48]♦

Teorem 13: $x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,\ x^{(m)}$ ’ler R^n ’de bilinmeyen vektörler olsun. Bu takdirde;

$\left\langle x^{(i)},\ x^{(j)} \right\rangle;\ i,\ j=1,\ 2,\ ...,\ m;\ i \le j$

sistemi, $R\left[x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,\ x^{(m)} \right]^{O(n)}$ $R\text{-}cebir$ ’inin üreteç sistemidir.

İspat: Bu aslında Teorem 12’nin 1. kısmıdır. ◆

Teorem 14: $x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,\ x^{(m)}$ ’ler R^n ’de bilinmeyen vektörler olsun. Bu takdirde;

$\left\langle x^{(i)},\ x^{(j)} \right\rangle;\qquad i,\ j=1,\ 2,\ ...,\ m$

$\left[x^{(i_1)} x^{(i_2)} ... x^{(i_n)} \right];\ 1 \le i_1 \le i_2 \le ... \le i_n \le m$

sistemi, $R\left[x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,\ x^{(m)} \right]^{SO(n)}$ $R\text{-}cebir$ ’inin üreteç sistemidir.

İspat: [48] ◆

1.13.1 $O(n)$ ve $SO(n)$ Grupları İçin $R\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,\ x^{(m)} \right)^G$ Cisminin Üreteçleri

Teorem 15: $G=O(n)$ olsun. Bu takdirde;

i) $m \le n$ ise,

$\left\langle x^{(i)},\ x^{(j)} \right\rangle;\quad i,\ j=1,\ 2,\ ...,\ m;\quad i \le j$

sistemi $R\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,\ x^{(m)} \right)^{O(n)}$ cisminin üreteç sistemidir.

ii) $m > n$ ise,

$\left\langle x^{(i)},\ x^{(j)} \right\rangle;\ i,\ j=1,\ 2,\ ...,\ n;\ i \le j$

$\left\langle x^{(i)},\ x^{(p)} \right\rangle;\ i=1,\ 2,\ ...,\ n;\ p=n+1,\ n+2,\ ...,\ m$

sistemi $R\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,\ x^{(m)} \right)^{O(n)}$ cisminin üreteç sistemidir.

İspat: [48]♦

Teorem 16: $G=SO(n)$ olsun. Bu takdirde;

i) $m < n$ ise,

$\left\langle x^{(i)},\ x^{(j)} \right\rangle;\quad i,\ j=1,\ 2,\ ...,\ m;\quad i \le j$

sistemi $R\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,\ x^{(m)} \right)^{SO(n)}$ cisminin üreteç sistemidir.

ii) $m \ge n$ ise,

$\left[x^{(1)}x^{(2)}...x^{(n)}\right]$;

$\left\langle x^{(i)},\ x^{(j)}\right\rangle;\ \ i,\ j=1,\ 2,\ ...,\ n;\ \ i \le j;\ \ i+j<2n$

$\left\langle x^{(i)},\ x^{(p)}\right\rangle;\ \ i=1,\ 2,\ ...,\ n;\ \ p>n$

sistemi $R\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,\ x^{(m)}\right)^{SO(n)}$ cisminin üreteç sistemidir.

İspat: [48]♦

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Benzerlik Grupları

2.1.1. B(n) ve LB(n) Grupları

Tanım 43: R^n öklid uzayı olsun. Her $\forall$ x, y $\in$ R^n için

$$\|F(x)-F(y)\| = \lambda \|x-y\| \tag{23}$$

olacak şekilde bir $\lambda \in R$, $\lambda > 0$ bulunabilirse $F : R^n \to R^n$ dönüşümüne bir Benzerlik Dönüşümü denir. Buradaki λ sayısına F benzerlik dönüşümünün ölçeği ya da kısaca benzerlik ölçeği denir ve λ_F ile gösterilir.

Not: λ benzerlik ölçeği tek türlü belirlidir. Farzedelim λ_1, λ_2 sayıları için ,
$\|F(x)-F(y)\| = \lambda_1 \|x-y\|$ ve $\|F(x)-F(y)\| = \lambda_2 \|x-y\|$ olsun. Bu eşitlikler keyfi x ve y ler için doğru olduklarından dolayı, özel olarak $x \neq y$ ler için de doğrudur. Buna göre $\|F(x)-F(y)\| = \lambda_1 \|x-y\| = \lambda_2 \|x-y\|$ olduğundan $(\lambda_1 - \lambda_2)\|x-y\| = 0$ dır. Böylece $\lambda_1 = \lambda_2$ elde edilir.

Örnek 29: Birim dönüşüm benzerlik ölçeği 1 olan benzerlik dönüşümüdür.
$\|I(x) - I(y)\| = \|x - y\|$

Örnek 30: R^n de tüm izometriler benzerlik ölçeği 1 olan benzerlik dönüşümleridir.

Örnek 31: Sıfır dönüşümü benzerlik dönüşümü değildir. Çünkü Her $\forall$ x $\in$ R^n için F(x) = 0 dönüşümü için $\|F(x)-F(y)\| = \|0-0\| = 0$ dır. Oysa ki x $\neq$ y için $\|x-y\| \neq 0$ olduğundan (23) eşitliği ancak λ = 0 durumunda gerçeklenir. Bu ise λ > 0 olmasıyla çelişir. Dolayısıyla sıfır dönüşümü benzerlik dönüşümü değildir. ♦

Örnek 32: Reel sayılarda tanımlı F(x) = ax + b , a $\neq$ 0 dönüşümü bir benzerlik dönüşümüdür.

$$\|F(x)-F(y)\| = \|(ax+b)-(ay+b)\| = \|ax-ay\| = \|a(x-y)\| = |a|\|x-y\|$$

dir. Burada F nin benzerlik ölçeği, $|a|$ dır.

R^n uzayında tanımlı tüm benzerlik dönüşümlerinin cümlesini B(n) ile gösterelim.

Önerme 48: F_1 , $F_2 \in$ B (n) ise $F_1 \circ F_2 \in$ B (n) dir ve $\lambda_{F_1 \circ F_2} = \lambda_{F_1}\lambda_{F_2}$ dir.

İspat: $\forall$ x, y $\in R^n$ keyfi elemanları için

$$\|(F_1 \circ F_2)(x) - (F_1 \circ F_2)(y)\| = \|F_1(F_2(x)) - F_1(F_2(y))\|$$
$$= \lambda_1 \|F_2(x) - F_2(y)\| = \lambda_1\lambda_2 \|x - y\|$$

olduğundan $F_1 \circ F_2 \in$ B(n) dir ve $\lambda_{F_1 \circ F_2} = \lambda_{F_1}\lambda_{F_2}$ olduğu açıktır.♦

Sonuç 20: (B (n), $\circ$) ikilisi fonksiyonların bileşke işlemine göre birimli bir yarı gruptur yani monoiddir.

İspat: Keyfi F_1, F_2, $F_3 \in$ B(n) için,

$$(F_1 \circ (F_2 \circ F_3))(x) = F_1(F_2(F_3(x))) = (F_1 \circ F_2)(F_3(x)) = ((F_1 \circ F_2) \circ F_3)(x)$$

olduğundan bileşke işlemi asosyatiftir. Ayrıca birim dönüşüm benzerlik dönüşümü olduğundan B(n) – nin birim elemanı vardır. Dolayısıyla (B (n), $\circ$) bir monoiddir. ♦

Önerme 49: $F : R^n \to R^n$ keyfi benzerlik dönüşümü birebirdir.

İspat: Farz edelim x , y $\in R^n$ öyleki, F(x) = F(y) olsun. Bu durumda $\|F(x) - F(y)\| = 0$ olur. F benzerlik dönüşümü olduğundan $\|F(x) - F(y)\| = \lambda\|x - y\| = 0$ ve $\lambda \neq 0$ olduğundan $\|x - y\| = 0$ olur. Normun özeliğinden x – y = 0 ve buradan x = y elde edilir. Böylece F keyfi benzerlik dönüşümü birebirdir. ♦

Tanım 44: F benzerlik dönüşümü lineer ise F ye lineer benzerlik dönüşümü denir.

R^n uzayında tanımlı tüm lineer benzerlik dönüşümlerinin cümlesini LB(n) ile gösterelim.

Örnek 33: Birim dönüşüm lineer benzerlik dönüşümüdür. Öteleme dönüşümü ise lineer olmayan benzerlik dönüşümüdür.

Önerme 50: $F_1, F_2 \in LB(n)$ ise $F_1 \circ F_2 \in LB(n)$ dir.

İspat: açıktır. ♦

Sonuç 21: (LB (n), $\circ$) fonksiyonların bileşke işlemine göre birimli bir yarı gruptur.

Önerme 51: Keyfi lineer benzerlik dönüşümü örtendir.

İspat: F$\in$LB(n) olsun. Önerme 49'a göre F birebirdir. Önerme 7 ye göre de F örtendir.♦

Önerme 52: Keyfi F lineer benzerlik dönüşümünün tersi mevcuttur ve F^{-1} de lineer benzerlik dönüşümüdür. Ayrıca $\lambda_F = \lambda$ ise $\lambda_{F^{-1}} = \dfrac{1}{\lambda}$ dır.

İspat: Öncelikle $F^{-1}(a + b) = F^{-1}(a) + F^{-1}(b)$ eşitliğini gösterelim. Keyfi $a, b \in R^n$ leri alalım. F örten olduğundan $x, y \in R^n$ mevcuttur öyle ki, $F(x) = a$, $F(y) = b$ şeklindedir. Buradan $x + y = F^{-1}(F(x+y))$ dir. F lineer olduğundan

$$x + y = F^{-1}(F(x+y)) = F^{-1}(F(x) + F(y))$$

dir. Ayrıca, $x + y == F^{-1}(F(x)) + F^{-1}(F(y))$ ve $F(x) = a$, $F(y) = b$ olduğundan

$$F^{-1}(a+b) = F^{-1}(a) + F^{-1}(b)$$

dir. Şimdi, keyfi $a \in R^n$ ve keyfi $\mu \in R$ için $F^{-1}(\mu a) = \mu F^{-1}(a)$ eşitliğini ispat edelim. F örten olduğundan $x \in R^n$ mevcut öyleki $F(x) = a$ dır. F lineer olduğundan $F^{-1}(\mu F(x)) = F^{-1}(F(\mu x)) = \mu x$ dir ve $\mu x = \mu F^{-1}(F(x))$ olduğundan $F(x) = a$ için $F^{-1}(\mu a) = \mu F^{-1}(a)$ dır. Böylece F^{-1} lineer dönüşümdür.

F^{-1} dönüşümünün benzerlik dönüşümü olduğunu gösterelim. Bunun için F benzerlik dönüşüm olduğundan $\|x - y\| = \|F(F^{-1}(x)) - F(F^{-1}(y))\| = \lambda \|F^{-1}(x) - F^{-1}(y)\|$ ifade edilebilir. Buradan, $\|F^{-1}(x) - F^{-1}(y)\| = \dfrac{1}{\lambda}\|x - y\|$ dir. Böylece, F^{-1} lineer benzerlik dönüşümü ve $\lambda_{F^{-1}} = \dfrac{1}{\lambda}$ dır. ♦

Sonuç 22: (LB (n), $\circ$) gruptur.

İspat: Sonuç 21 ve önerme 50-52 den (LB (n), $\circ$) ikilisinin bir grup olduğu açıktır.

Not: Fakat LB (n) grubu n ≥ 2 için değişmeli değildir. Değişmeli olmadığını gösterelim. Bunun için n = 2 durumunda F_1 ve F_2 $\in$ LB (n) dönüşümlerini, bir $\alpha \in R$ için,

$$F_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{ve}$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olarak alalım. F_1 ve F_2 dönüşümleri birer lineer izometri dönüşümleri olduklarından aynı zamanda bir lineer benzerlik dönüşümüdürler. Bunların bileşkeleri alındığında

$$F_1 \circ F_2 = \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{pmatrix} \text{ ve } F_2 \circ F_1 = \begin{pmatrix} -\sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}$$

bulunur. $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ için bunlar farklıdır. Dolayısıyla lineer benzerlik grubu, dönüşümlerin bileşke işlemine göre değişmeli değildir.♦

Sonuç 23: LB (n) $\subset$ B (n) alt gruptur.

2.1.2. H (n) , LH (n) Grupları

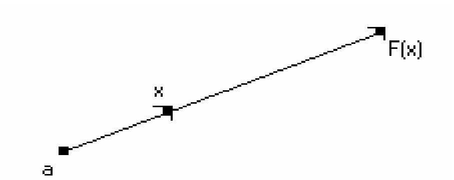
Tanım 45: $a \in R^n$ ve $\lambda > 0$ olmak üzere $\forall\, x \in R^n$ için

F(x) = a + λ *(x – a)*

olarak tanımlanan $F : R^n \to R^n$ dönüşümüne a merkezli, λ ölçekli Homoteti denir. R^n üzerinde tanımlı tüm homotetilerin cümlesini H (n) ile gösterelim. Yani

$$H(n) = \left\{ F \,\middle|\, F : R^n \to R^n ; F(x) = a + \lambda\left(x - a\right); a \in R^n \right\}$$

olsun.



Şekil 3. *a* merkezli λ ölçekli homoteti

Önerme 53: Keyfi F(x) = a + λ(x – a) homoteti dönüşümü λ ölçekli benzerlik dönüşümüdür.

İspat: $\|F(x) - F(y)\| = \|(a + \lambda(x - a)) - (a - \lambda(y - a))\| = \|\lambda(x - y)\| = \lambda\|x - y\|$ ♦

Önerme 54: F $\in$ H(n), a merkezli ve λ ölçekli homoteti dönüşümü lineerdir. $\Leftrightarrow$ a = 0 ya da λ = 1 dir.

İspat: F lineer olsun. O halde $F(x + y) = a + \lambda(x + y - a) = a + \lambda x + \lambda y - \lambda a$ dir. ve $F(x) + F(y) = a + \lambda(x - a) + a + \lambda(y - a) = 2a + \lambda x + \lambda y - 2\lambda a$ dır. F lineer olduğundan bunlar eşit olmalıdır. $a + \lambda x + \lambda y - \lambda a = 2a + \lambda x + \lambda y - 2\lambda a$ yazılabilir. Buradan a(1-λ) = 0 bulunur Böylece, a = 0 ya da λ = 1 elde edilir. Tersine a = 0 olsun. Bu durumda F homoteti dönüşümü,

$F(x) = a + \lambda(x - a) = \lambda x$

şeklindedir ve F lineerdir. $\lambda = 1$ durumunda da F homoteti dönüşümü

$$F(x) = a + \lambda(x - a) = x$$

şeklinde olacağından $F(x) = \lambda x$ in bir özel hali biçimindedir. Dolayısıyla F lineerdir.♦

Sonuç 24: F lineer homotetidir $\Leftrightarrow$ $F(x) = \lambda x$; $\lambda > 0$ dir.

R^n üzerinde tanımlı tüm lineer homotetilerin cümlesini LH (n) ile gösterelim.

Sonuç 25: (LH (n), $\circ$) fonksiyonların bileşke işlemine göre birimli yarı gruptur.

Önerme 55: Keyfi lineer homoteti örtendir.

İspat: $F \in$ LH (n) keyfi alalım. $F(x) = \lambda x$ dir. Keyfi $y \in R^n$ için $\exists\, x = \frac{1}{\lambda} y \in R^n$ dir. $F(x) = \lambda x = \lambda \frac{1}{\lambda} y = y$ dir. Böylece F örtendir. ♦

Sonuç 26: (LH(n), $\circ$) değişmeli gruptur.

Sonuç 27:. LH(n) $\subset$ LB (n) altgruptur.

Önerme 56: h, keyfi lineer homoteti ve f keyfi izometri olmak üzere

$$F = h \circ f$$

dönüşümü bir benzerlik dönüşümüdür.

İspat: keyfi lineer homoteti ve izometriler birer benzerlik dönüşümü olduğundan ispat açıktır. ♦

Teorem 17: F , λ ölçekli benzerlik dönüşümü için bir $h \in$ LH (n) lineer homoteti dönüşümü ve bir $D \in$ E (n) izometrisi tek türlü olarak vardır, öyleki $F = h \circ D$ dir.

İspat: [28]♦

Sonuç 28: $F : R^n \to R^n$, λ ölçekli benzerlik dönüşümü ise $\forall x \in R^n$ için

$$F(x) = \lambda g x + b \quad , \quad \lambda > 0 \ , \ b \in R^n, g \in O(n)$$

olarak tek türlü yazılabilir.

İspat: Teorem 17 ye göre $F = h_\lambda \circ D$ ve Teorem 8 e göre keyfi izometri

$$D(x) = gx + c \ , \ c \in R^n, g \in O(n)$$

biçiminde tek türlü olduklarından

$$F(x) = (h_\lambda \circ D)(x) = h_\lambda(D(x)) = h_\lambda(gx + c) = \lambda(gx + c) = \lambda g x + \lambda c = \lambda g x + b$$

dir. Burada, $\lambda > 0$, $c \in R^n$, $b = \lambda c \in R^n, g \in O(n)$ dir. ♦

Sonuç 29: Keyfi benzerlik dönüşümü örtendir.

İspat: Keyfi lineer homoteti örten, keyfi izometri örten olduğundan keyfi benzerlik dönüşümü örtendir. ♦

Önerme 57: F keyfi benzerlik dönüşümü için F^{-1} vardır ve bu da bir benzerlik dönüşümüdür.

İspat: Önerme 49 ve sonuç 29 a göre keyfi benzerlik dönüşümünün tersi mevcuttur. Şimdi ters dönüşümün bir benzerlik dönüşümü olduğunu gösterelim: $x, y \in R^n$ için,

$$x = F\left(F^{-1}(x)\right) \qquad \text{ve} \qquad y = F\left(F^{-1}(y)\right)$$

olduğundan

$$\|x - y\| = \left\|F\left(F^{-1}(x)\right) - F\left(F^{-1}(y)\right)\right\|$$

dir. F benzerlik dönüşümü olduğundan

$$\|x - y\| = \left\|F\left(F^{-1}(x)\right) - F\left(F^{-1}(y)\right)\right\| = \lambda\left\|F^{-1}(x) - F^{-1}(y)\right\|$$

dir. Buradan

$$\left\|F^{-1}(x) - F^{-1}(y)\right\| = \frac{1}{\lambda}\|x - y\|$$

elde edilir. Böylece F^{-1} dönüşümü de bir benzerlik dönüşümüdür üstelik, $\lambda_{F^{-1}} = \dfrac{1}{\lambda}$ dir.

Sonuç 30: (B (n), $\circ$) bir gruptur.

Önerme 58: $F : R^n \to R^n$, λ ölçekli lineer benzerlik dönüşümü olmak üzere $\forall x \in R^n$ için,

$$F(x) = \lambda gx \quad , \quad \lambda > 0 \; , \; g \in O(n)$$

biçiminde tek türlü olarak belirlidir.

İspat: F = $h_\lambda \circ$ D lineer ise D izometrisi de lineer olmalıdır. D lineer izometri ise ortogonal dönüşümdür. O halde

$$F(x) = (h_\lambda \circ D)(x) = h_\lambda(D(x)) = h_\lambda(gx) = \lambda(gx) = \lambda gx \; , \quad \lambda > 0 \; , g \in O(n)$$

dir. Bu şekilde bulunacak h_λ ve D dönüşümleri Teorem 17 e göre tek türlü olarak belirli olduğundan ispat açıktır. ♦

Sonuç 31: h, keyfi lineer homoteti ve f keyfi ortogonal dönüşüm olmak üzere

$$F = h \circ f$$

dönüşümü bir lineer benzerlik dönüşümüdür.

İspat: Keyfi lineer homoteti ve ortogonal dönüşümler birer lineer benzerlik dönüşümü olduğundan ispat açıktır. ♦

Önerme 59: R^n de h_λ , ölçeği λ olan lineer homoteti dönüşümü ve $T_a \in Tr(n)$ ötelemesi olmak üzere

$F = h_\lambda \circ T_a$

dönüşümü

i) $\lambda \neq 1$ ise ölçeği λ olan ve $c = \dfrac{\lambda}{1-\lambda} a$ merkezli homoteti dönüşümüdür.

ii) $\lambda = 1$ ise T_a ötelemesidir.

İspat: i) $\lambda \neq 1$ ise $x \in R^n$ için F dönüşümü $F(x) = \lambda(x+a) = \lambda x + \lambda a$ dir. Burada, $F(x) = c + \lambda(x-c) = \lambda x + c(1-\lambda)$ biçiminde yazılırsa

$\lambda a = c(1-\lambda)$ veya $c = \dfrac{\lambda}{1-\lambda} a$

elde edilir. Bu ise F dönüşümünün c merkezli λ ölçekli homoteti dönüşümü olduğunu gösterir.

ii) $\lambda = 1$ ise h_λ birim dönüşüm olacağından F dönüşümü T_a ötelemesi ile aynıdır.♦

Sonuç 32: T_a ötelemesi bir homoteti dönüşümüdür ancak ve ancak a = 0 dır.

Sonuç 33: h ortogonal dönüşümü bir homoteti dönüşümüdür ancak ve ancak h birim dönüşümdür.

Önerme 60: R^n de F , λ ölçekli ve a merkezli homoteti dönüşümü olsun. Bu takdirde; h_λ , ölçeği λ olan lineer homoteti dönüşümü ve $b = \dfrac{(1-\lambda)}{\lambda} a$ olmak üzere

$F = h_\lambda \circ T_b$

biçiminde tek türlü olarak ifade edilebilir.

İspat: F , λ ölçekli ve a merkezli homoteti dönüşümü verilsin. $h_\lambda(x) = \lambda x$ lineer homotetisini alalım. $a \in R^n$ için $\dfrac{(1-\lambda)}{\lambda} \in R$ olduğundan $\dfrac{(1-\lambda)}{\lambda} a \in R^n$ dir Öteleme olarak da $T_b(x) = x + a\dfrac{(1-\lambda)}{\lambda}$ öteleme dönüşümünü alalım.

$$(h_\lambda \circ T_b)(x) = h_\lambda(T_b(x)) = \lambda\left(x + a\frac{(1-\lambda)}{\lambda}\right) = \lambda x + a(1-\lambda) = a + \lambda(x-a) = F(x)$$

elde edilir. Böylece, $F = h_\lambda \circ T_b$ dir. Şimdi tekliği gösterelim: Farzedelim ki

F= $h_{\bar\lambda} \circ T_{\bar b}$ olsun.

$$F = h_{\bar\lambda}\left(T_{\bar b}\right) = h_{\bar\lambda}(x+\bar b) = \bar\lambda(x+\bar b) = \bar\lambda x + \bar\lambda \bar b$$

dir. F , λ ölçekli a merkezli homoteti dönüşümü olduğundan F aynı zamanda

$$F = a + \lambda(x - a) = \lambda x + (1 - \lambda)a$$

dir. Bu iki eşitlikten $\overline{\lambda} = \lambda$ ve $\overline{b} = \dfrac{1-\lambda}{\lambda} a = b$ elde edilir.♦

Önerme 61: F, λ ölçekli keyfi lineer benzerlik dönüşümü ise $\forall x,y \in R^n$ için

$$\langle F(x), F(y)\rangle = \lambda^2 \langle x, y\rangle$$

dir.

İspat: F lineer benzerlik dönüşümü olduğundan $F(x) = \lambda gx$ biçimindedir.

$\langle F(x), F(y)\rangle = \langle \lambda gx, \lambda gy\rangle = \lambda^2 \langle gx, gy\rangle$ dir. $g \in O(n)$ olduğundan $\langle gx, gy\rangle = \langle x, y\rangle$ dir. Böylece $\langle F(x), F(y)\rangle = \lambda^2 \langle x, y\rangle$ elde edilir. ♦

Tanım 46: F, R^n de tanımlı lineer bir dönüşüm ve bu dönüşüme karşılık gelen matris g olsun. Eğer detg >0 ise F ye yön koruyan dönüşüm denir.

2.1.3. SB(n) ve SLB(n) Grupları

Tanım 47: Keyfi lineer benzerlik dönüşümü, lineer homoteti ve ortogonal bir dönüşümün bileşkesi biçiminde yazılabilmektedir. Burada ortogonal dönüşümler yerine özel olarak $SO(n) = \{ g \in O(n),\ \det g = 1 \} \subset O(n)$ alınarak elde edilen lineer benzerlik dönüşümlerini ele alalım. Bu şekilde alınan lineer benzerlik dönüşümlerinin cümlesini SLB(n) ile gösterirsek, $SLB(n) = \{ \lambda g : g \in SO(n),\ \lambda > 0 \}$ olarak tanımlanabilir.

Önerme 62 : $(SLB(n), \circ)$ bir gruptur.

İspat: $F_1, F_2 \in SLB(n)$ olsun.

$$(F_1 \circ F_2)(x) = F_1(F_2(x)) = \lambda_1 g_1(g_2 x) = \lambda_1\lambda_2 g_1 g_2 x.$$

$g_1, g_2 \in SO(n)$ ve $\det g_1 = 1$, $\det g_2 = 1$ olduğundan $\det g_1 g_2 = 1$ dir. $(F_1 \circ F_2)(x) \in SLB(n)$ dir. Ayrıca birim dönüşüm $I \in SLB(n)$ dir. $F \in SLB(n)$ olsun. $x \in R^n$ için $F(x) = \lambda g(x)$, $g \in SO(n)$ dir. $F^{-1}(x) = \dfrac{1}{\lambda} g^{-1}(x)$ olarak alırsak, $(F^{-1} \circ F)(x) = I(x)$ ve $\det(g^{-1}) = \dfrac{1}{\det g} = \dfrac{1}{1} = 1$ olduğundan $g^{-1} \in SO(n) \Rightarrow F^{-1} \in SLB(n)$ ♦

Sonuç 34: $SLB(n) \subset LB(n)$ alt gruptur.

Tanım 48: Keyfi benzerlik dönüşümünü, lineer homoteti ve bir izometri dönüşümünün bileşkesi biçiminde yazmak mümkündür. Burada E(n) izometriler yerine özel olarak

SE(n) = { F: F(x) = g x + b , g $\in$ SO(n), b $\in$ R^n } $\subset$ E(n)

alınarak elde edilen benzerlik dönüşümlerini ele alalım. Bu şekilde alınan benzerlik dönüşümlerinin cümlesini SB(n) ile gösterirsek,

SB(n) = {F: F(x) = λgx + b , g $\in$ SO(n) , λ>0 , b $\in$ R^n }

biçiminde tanımlamak mümkündür.

Önerme 63: $(SB(n), \circ)$ bir gruptur.

İspat:F_1,$F_2$$\in$ $SB(n)$ olsun.

$(F_1 \circ F_2)(x)=F_1(F_2(x)) = \lambda_1 g_1(F_2(x)) + b_1 = \lambda_1\lambda_2 g_1 g_2(x) + \lambda_1 b_2 + b_1$

$g_1,\ g_2 \in SO(n)$ ve det g_1 = 1 , det g_2 = 1 olduğundan det g_1 g_2 = 1 ve $\lambda_1 b_2 + b_1 \in R^n$ dir. Böylece $(F_1 \circ F_2)(x) \in$ SB(n) dir. Birim dönüşüm I $\in$ $SB(n)$ dir. F $\in$ $SB(n)$ olsun. T_b $\in$ Tr(n), $h_\lambda \in$ LH (n), C $\in$ SO(n) olmak üzere $F = T_b \circ h_\lambda \circ C$ dir. $F^{-1} = C^{-1} \circ h_{\lambda^{-1}} \circ T_b^{-1} \Rightarrow det(C^{-1}) = \dfrac{1}{det\, C} = \dfrac{1}{1} = 1$ olduğundan F^{-1} $\in$ $SLB(n)$dir. ♦

Sonuç 35: SB(n) $\subset$ B (n) alt gruptur.

2.1.4. 1 ve 2 Boyutlu Lineer Uzaylarda Benzerlik Grupları

Burada amacımız E(n), SE(n), O(n), SO(n) izometri gruplarının ve diğer benzerlik grupları olan B(n), SB(n), LB(n), SLB(n), H(n) ve LH(n) gruplarının R^n üzerinde etkilerini vermektir.

Öncelikli olarak n = 1 ve n = 2 durumlarında bu grupları biraz inceleyelim:

i) SO(n) grubu:

$SO(n) = \{ g : g \text{ ortogonal, } \det g = 1 \} = \{ g : g^T = g^{-1}, \det g = 1 \}$

idi. n = 1 durumunda bu grup, $SO(1) = \{1\}$ dir. n =2 durumunda unimodular ortogonal bir matris

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad a^2 + b^2 = 1 \tag{24}$$

biçiminde yazılabilir. Bunun tersi de doğrudur. Yani (24) biçimindeki bir matris unimodular ortogonal bir matristir. (24) biçimindeki unimodular ortogonal bir matris

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \ \alpha \in [0,2\pi]$$

ile gösterilebilir [32]. Buna göre $SO(2)$ grubu

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \ \alpha \in [0,2\pi] \right\}$$

şeklindedir.

ii) O(n) grubu:

R^2 de ortogonal bir g matrisi için $g^T = g^{-1}$ olduğundan iki tarafın determinantını aldığımızda

$$\det g = \det g^T = \det g^{-1} = \frac{1}{\det g}$$

olur. Buradan da $\det g = \pm 1$ bulunur. n = 1 durumunda 1x1 lik matrisler reel sayıları ifade edeceğinden ve reel sayılar için, $r^T = r$, $r^{-1} = r$ ve $\det r = r$ olduklarından

$$O(1) = \{-1 \ , \ 1\}$$

dir. n = 2 durumunda ise $\det g = 1$ olan matrisler SO(2) grubunun elemanları olduğundan yukarıdaki biçimde ifade edilebilir. $\det g = -1$ olan yansıma dönüşümleri için de şöyle bir önerme verilebilir:

Önerme 64: Keyfi $\overline{g}$ yansıma dönüşümü için $\exists g \in SO(2)$ öyleki,

$$\overline{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} g$$

dir.

İspat: $\overline{g}$ determinantı -1 olan keyfi bir yansıma dönüşümü olsun.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ matrisi, transpozu da inversi de kendisine eşit olan bir matristir. Dolayısıyla ortogonal bir matristir. Keyfi ortoganal matrisle bu matrisin çarpımı da yine ortogonal matris olacağından, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \bar{g}$ matrisi ortogonal bir matristir ve determinantı

$$det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \det \bar{g} = 1$$

dir. Bu matrisi g ile gösterirsek, yani $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \bar{g}$ dersek $g \in SO(2)$ dir. Buna göre

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \bar{g} = \bar{g}$$

dir. ♦

Bu önermenin tersi de doğrudur. Yani,

Önerme 65: Keyfi $g \in SO(2)$ dönüşümü için,

$$\bar{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} g$$

matrisi, determinantı -1 olan bir ortogonal matristir.

İspat: Keyfi $g \in SO(2)$ dönüşümü $g = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in [0,2\pi]$ biçimindedir. O halde ,

$$\bar{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

dir. $\det \bar{g} = -1$ dir. Ayrıca, $\bar{g} = (\bar{g})^T = (\bar{g})^{-1}$ olduğundan $\bar{g}$, determinantı -1 olan ortogonal matristir. ♦

Sonuç 36: n = 2 durumunda

$$O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \alpha \in [0,2\pi] \right\}$$

biçiminde ifade edilebilir.

iii) SE(n) grubu:

R^n de öklid hareketleri grubu

$$SE(n) = \{ f : f(x) = gx + b,\ g \in SO(n),\ b \in R^n \}$$

dir. O halde $n=1$ durumunda

$$SE(1)=\{f : f(x)=gx+b,\ g\in SO(1),\ b\in R\}$$
$$=\{f : f(x)=x+b,\ b\in R\}$$

ve $n=2$ durumunda ise

$$SE(2)=\{f : f(x)=gx+b,\ g\in SO(2),\ b\in R^2\}$$

yazılabilir.

iv) E(n) grubu:

R^n de öklid izometriler grubu

$$E(n)=\{f : f(x)=gx+b,\ g\in O(n),\ b\in R^n\}$$

dur. O halde $n=1$ durumunda

$$E(1)=\{f : f(x)=gx+b,\ g\in O(1),\ b\in R\}$$
$$=\{f : f(x)=\pm x+b,\ b\in R\}$$

ve $n=2$ durumunda ise

$$E(2)=\{f : f(x)=gx+b,\ g\in O(2),\ b\in R^2\}$$

olur. Şimdi diğer benzerlik gruplarını inceleyelim.

v) LH(n) Grubu:

R^n de Lineer homotetiler grubu

$$LH(n)=\{f : f(x)=\lambda x\ ,\ \lambda>0, \lambda\in \mathrm{R}\ \}$$

idi. R^n de $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ elemanının bir skaler ile çarpımı

$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$ biçimindedir. Bunu matrisel olarak ifade edecek olursak;

$$\lambda x=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=(\lambda x_1,\lambda x_2,...,\lambda x_n)$$

dir. O halde

$$LH(n)=\left\{\begin{pmatrix}\lambda & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{pmatrix} : \lambda>0, \lambda\in \mathrm{R}\right\}$$

dir. n = 1 durumunda;

$$LH(1)=\{\lambda \ : \ \lambda>0, \lambda\in \mathrm{R}\}=(0,\infty)$$

dir. n = 2 durumunda ise

$$LH(2)=\left\{\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} \ : \ \lambda>0, \lambda\in \mathrm{R}\right\}$$

dir.

vi) H(n) Grubu:

$a\in R^n$ merkezli λ ölçekli bir homoteti dönüşümü

$$F(x)=a+\lambda(x-a)$$

idi. Bu dönüşümü

$$F(x)=\lambda x+(1-\lambda)a$$

biçiminde yazar ve $(1-\lambda)a=b$ dersek homoteti dönüşümü $b\in R^n$ olduğundan

$$F(x)=\lambda x+b$$

ile ifade edilebilir. Buna göre;

$$H(n)=\{f \ : \ f(x)=\lambda x+b \ , \ \lambda>0, \lambda\in \mathrm{R}, \mathrm{b}\in \mathrm{R}^n\}$$

biçiminde ifade edilebilir. n = 1 durumunda bu grup

$$H(1)=\{f \ : \ f(x)=\lambda x+b \ , \ \lambda>0, \lambda\in \mathrm{R}, \mathrm{b}\in \mathrm{R}\}$$

dir. n = 2 durumunda ise

$$H(2)=\{f \ : \ f(x)=\lambda x+b \ , \ \lambda>0, \lambda\in \mathrm{R}, \mathrm{b}\in \mathrm{R}^2\}$$

dir.

vii) LB(n) Grubu:

R^n de lineer benzerlikler grubu

$$LB(n)=\{f \ : \ f(x)=\lambda gx, \ \mathrm{g}\in O(n), \lambda>0, \lambda\in \mathrm{R}\}$$
$$=\{\lambda g : \ \mathrm{g}\in O(n), \lambda>0, \lambda\in \mathrm{R}\}$$

idi. n = 1 durumunda bu grubu

$$LB(1)=\{\pm\lambda:\lambda>0,\lambda\in \mathrm{R}\}=R-\{0\}$$

şeklinde yazabiliriz. n = 2 durumunda ise

$$LB(2)=\left\{\begin{pmatrix}\lambda\cos\alpha & -\lambda\sin\alpha\\ \lambda\sin\alpha & \lambda\cos\alpha\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & -\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix},\alpha\in[0,2\pi],\lambda\in R,\lambda>0\right\}$$

biçiminde ifade edilir.

viii) SLB(n) Grubu:

R^n de SLB(n) grubu

$$SLB(n)=\{f:f(x)=\lambda gx,\ \mathrm{g}\in SO(n),\lambda>0,\lambda\in \mathrm{R}\}$$
$$=\{\lambda g:\mathrm{g}\in SO(n),\lambda>0,\lambda\in \mathrm{R}\}$$

idi. n = 1 durumunda bu grubu

$$SLB(1)=\{\lambda:\lambda>0,\lambda\in \mathrm{R}\}=(0,\infty)$$

biçiminde yazabiliriz. n = 2 durumunda ise bu grup

$$SLB(2)=\left\{\begin{pmatrix}\lambda\cos\alpha & -\lambda\sin\alpha\\ \lambda\sin\alpha & \lambda\cos\alpha\end{pmatrix},\alpha\in[0,2\pi],\lambda\in R\right\}$$

yazılabilir.

ix) B(n) Grubu:

R^n de benzerlikler grubu

$$B(n)=\{f:f(x)=\lambda gx+b,\ \mathrm{g}\in O(n),\lambda>0,\lambda\in \mathrm{R},\mathrm{b}\in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}\}$$

idi. n = 1 durumunda

$$B(1)=\{f:f(x)=\pm\lambda x+b,\ \lambda>0,\lambda\in \mathrm{R},\mathrm{b}\in \mathrm{R}\}$$

dır. n = 2 durumunda ise bu grup

$$B(2)=\{f\ :f(x)=\lambda gx+b,\ \lambda>0,\lambda\in R,g\in O(2)b\in R^2\}$$

olur.

x) SB(n) Grubu:

R^n de

$$SB(n)=\{f:f(x)=\lambda gx+b,\ \mathrm{g}\in SO(n),\lambda>0,\lambda\in \mathrm{R},\mathrm{b}\in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}\}$$

grubunu equi-benzerlikler grubu olarak adlandırabiliriz. Bu grup n = 1 durumunda

$$SB(1)=\{ f : f(x)=\lambda x+b,\ \lambda>0, \lambda\in \mathrm{R}, \mathrm{b}\in \mathrm{R}\}$$

yazılabilir. n = 2 durumunda ise

$$B(2)=\{ f : f(x)=\lambda gx+b,\ \lambda>0,\lambda\in R, g\in SO(2)\, b\in R^2\}$$

dır.

2.2. Benzerlik Grupları İçin G- Yörüngeler

Şimdi G = E(n), SE(n), O(n), SO(n) ,B(n), SB(n), LB(n), SLB(n), H(n) ve LH(n) gruplarının n = 1 durumunda R deki, n = 2 durumunda da R^2 deki yörüngelerini bulalım:

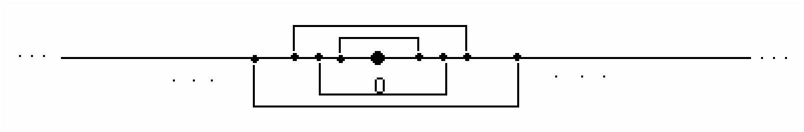
1- *SO(1) : R* etkisini alalım. Bu etki gx biçiminde iki reel sayının çarpımı olarak verilsin. SO(1) = {1} olduğundan bu etki $\varphi(1,x)=x$ olur. Buna göre bir $x\in R$ elemanının SO(1) yörüngesi $Gx=\{x\}$ dir. Yani *SO(1) R* yi tek noktalı yörüngelere ayırır. Böylece R de sonsuz sayıda *SO(1)*- yörünge mevcuttur.

Şekil 4. R nin *SO*(1) yörüngeleri

2- *O(1) : R* etkisini alalım. Bu etki gx biçiminde iki reel sayının çarpımı olarak verilsin. O(1) = {-1, 1} olduğundan bu etki $\varphi(1,x)=x$ ya da $\varphi(1,x)=-x$ biçiminde olur. Buna göre bir $x\in R$ elemanının O(1) yörüngesi $Gx=\{\pm x\}$ dir. Yani O(1), R yi en fazla iki noktadan oluşan yörüngelere ayırır. O halde yörüngeler,

$$Gx=\begin{cases} 0 & x=0 \\ \pm x & x\neq 0 \end{cases}$$

dir.



Şekil 5. R nin *O*(1) yörüngeleri

3- *SE(1) : R* etkisini alalım. Bu etki $\varphi(x) = x + b \ , b \in R$ biçiminde olur. Buna göre bir $x \in R$ elemanının SE(1) yörüngesi R nin kendisidir. Yani $Gx = R$ dir.

Şekil 6. R nin *SE*(1) yörüngesi

4- *E(1) : R* etkisini alalım. Bu etki $\varphi(x) = x + b \ , b \in R$ ya da $\varphi(x) = -x + b \ , b \in R$ biçiminde olur. Buna göre bir $x \in R$ elemanının *E(1)* yörüngesi de R nin kendisidir. Yani $Gx = R$ dir.

Şekil 7. R nin *E*(1) yörüngesi

5- *LH(1) : R* etkisini alalım. Bu etki gx biçiminde iki reel sayının çarpımı olduğundan bu etki $\varphi(x) = \lambda x \ , \lambda > 0$ olur. Buna göre bir $x \in R$ elemanının *LH(1)* yörüngesi

$$Gx = \begin{cases} (-\infty, 0) & , x < 0 \\ 0 & , \ x = 0 \\ (0, \infty) & , x > 0 \end{cases}$$

dir. Yani *LH(1), R* yi 3 yörüngeye ayırır.

Şekil 8. R nin LH(1) yörüngeleri

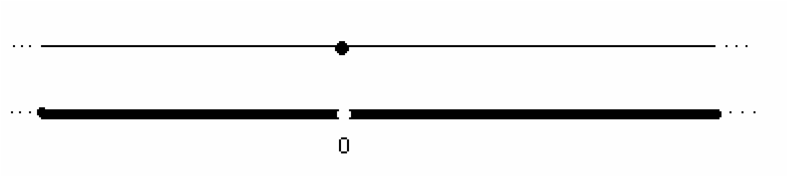
6- *H(1) : R* etkisini alalım. Bu etki $\varphi(x) = \lambda x + b \ , \lambda > 0, b \in R$ olur. Buna göre bir $x \in R$ elemanının *H(1)* yörüngesi *R* nin kendisidir. Yani $Gx = R$ dir.

Şekil 9. R nin H(1) yörüngesi

7- *LB(1) : R* etkisini alalım. Bu etki gx biçiminde iki reel sayının çarpımı olduğundan bu etki $\varphi(x) = \lambda x \ ,\lambda \neq 0$ biçiminde olur. Buna göre bir $x \in R$ elemanının *LB(1)* yörüngesi

$$Gx = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ R - \{0\} & x \neq 0 \end{cases}$$

dir. Yani *LB(1), R* yi 2 yörüngeye ayırır.



Şekil 10. R nin LB(1) yörüngeleri

8- *SLB(1) : R* etkisini alalım. *SLB(1)* ve *LH(1)* çakıştığından dolayı *SLB(1)*- in R deki yörüngeleri 5. örnekte verilen *LH(1)* in yörüngeleri ile aynıdır.

9- *SB(1) : R* etkisini alalım. *SB(1)* ve *H(1)* çakıştığından dolayı *SB(1)* - in R deki yörüngeleri 6. örnekte verilen *H(1)* in yörüngeleri ile aynıdır.

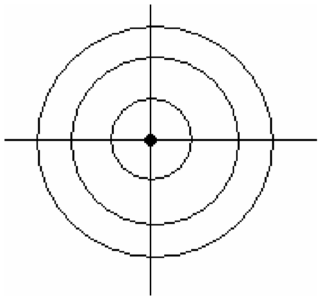
10- *B(1) : R* etkisini alalım. Bu etki $\varphi(x) = \lambda x + b \ ,b \in R, \lambda \neq 0$ biçiminde olur. Buna göre bir $x \in R$ elemanının *B(1)* yörüngesi de R nin kendisidir. Yani $Gx = R$ dir.

Şekil 11. R nin B(1) yörüngesi

11- *SO(2) : R* ^{2} etkisini alalım. Bu etki $g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \in$ *SO(2)* ve $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^2$ olmak üzere $\varphi(x) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ biçiminde olur. Buna göre bir $x \in R^2$ elemanının *SO(2)* yörüngesi

$$Gx = \begin{cases} (0,0), & x = (0,0) \\ C(0,r),\ \mathrm{r} = \sqrt{x_1^{\,2} + x_2^{\,2}} & x \neq (0,0) \end{cases} \tag{25}$$

dir. Yani *SO(2),* R^2 yi orjin ve orjin merkezli çemberlerden oluşan yörüngelere ayırır.



Şekil 12. R^2 nin SO(2) nin yörüngeleri

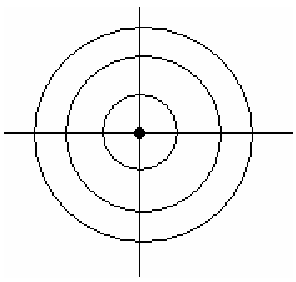
12- *O(2) :* R^2 etkisini alalım. Bu etki $g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \in$ *O(2)* ve $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^2$ olmak

üzere $\varphi(x) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ biçiminde olur. Buna göre bir $x \in R^2$ elemanının

O(2) yörüngesi

$$Gx = \begin{cases} (0,0), & x = (0,0) \\ C(0,r),\ \mathrm{r} = \sqrt{x_1^{\,2} + x_2^{\,2}} & x \neq (0,0) \end{cases} \tag{26}$$

dir. Yani *O(2)* de , R^2 yi orijin ve orijin merkezli çemberlerden oluşan yörüngelere ayırır.



Şekil 13. R^2 nin $O(2)$ yörüngeleri

13- *SE(2) : R²* etkisini alalım. Bu etki $g=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}\in SO(2)$, $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix}$,

$b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2\end{pmatrix}\in R^2$ olmak üzere $\varphi(x)=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2\end{pmatrix}$ biçiminde olur. Buna göre bir $x\in R^2$ elemanının *SE(2)* yörüngesi R^2 nin kendisidir. Dolayısıyla *SE(2)* nin R^2 de tek yörüngesi vardır. Yani

$$Gx = R^2 \tag{27}$$

dir.

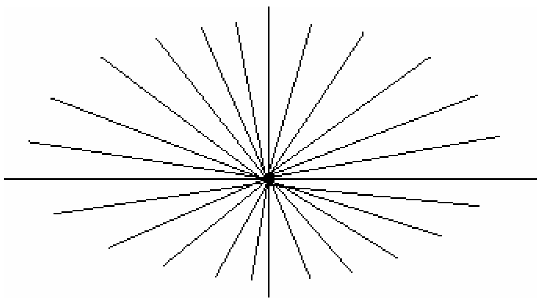
14- *E(2) : R²* etkisini alalım. Bu etki $g=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}\in O(2)$, $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2\end{pmatrix}\in R^2$

olmak üzere $\varphi(x)=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2\end{pmatrix}$ biçiminde olur. Buna göre bir $x\in R^2$ elemanının *E(2)* yörüngesi R^2 nin kendisidir. Dolayısıyla *E(2)* nin de R^2 de tek yörüngesi vardır.Yani $Gx = R^2$ dir.

15- *LH(2) : R²* etkisini alalım. Bu etki $g=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}\in$ *LH(2)* ve $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix}\in R^2$ olmak üzere

$$\varphi(x)=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix} \tag{28}$$

biçiminde olur. Buna göre bir $x\in R^2$ elemanının *LH(2)* yörüngesi sifır noktası için sıfır, diğer noktalar için ise başlangıç noktası orijin olan yarıdoğrudur (burada orjin yani (0,0) noktası yarıdoğrulara dahil değildir.) . Yani *LH(2)* , R^2 yi orijin ve orijin çıkışlı açık yarıdoğrulardan oluşan yörüngelere ayırır.



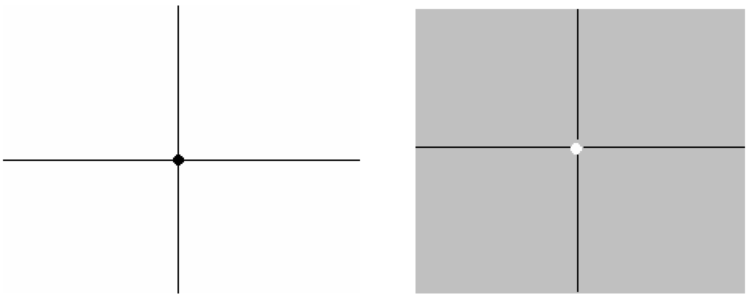
Şekil 14. R^2 nin LH(2) yörüngeleri

16- *H(2) : R²* etkisini alalım. Bu etki $\varphi(x) = \lambda x + b$, $\lambda > 0, b \in R^2$ biçiminde olur. Buna göre bir $x \in R^2$ elemanının *H(2)* yörüngesi R^2 nin kendisidir. Yani $Gx = R^2$ dir.

17- *LB(2) : R²* etkisini alalım. Bu etki $g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \in$ *LB(2)* ve $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^2$ olmak üzere $\varphi(x) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ biçiminde olur. Buna göre bir $x \in R^2$ elemanının *LB(2)* yörüngesi

$$Gx = \begin{cases} (0,0) & x = (0,0) \\ R^2 - \{(0,0)\} & x \neq (0,0) \end{cases} \tag{29}$$

dir. Yani *LB(2)*, R^2 yi 2 yörüngeye ayırır.



Şekil 15. R² nin LB(2) yörüngeleri

18- *SLB(2) : R²* etkisini alalım. Bu etki $g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \in$ *SLB(2)* ve $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^2$ olmak üzere $\varphi(x) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ biçiminde olur. Buna göre bir $x \in R^2$ elemanının *SLB(2)* yörüngesi

$$Gx = \begin{cases} (0,0) & x = (0,0) \\ R^2 - \{(0,0)\} & x \neq (0,0) \end{cases} \tag{30}$$

dir. Yani *SLB(2)*, R^2 yi 2 yörüngeye ayırır.

19- *SB(2) : R* ^{2} etkisini alalım. Bu etki $g=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \in$ *LB(2)* , $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$,

$b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in R^2$ olmak üzere $\varphi(x)=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ biçiminde olur. Buna

göre keyfi bir $x \in R^2$ elemanının *SB(2)* yörüngesi R^2 nin kendisidir. Yani

$$Gx = R^2 \tag{31}$$

dir.

20- *B(2) : R* etkisini alalım. Bu etki $g=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \in$ *LB(2)* , $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$,

$b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in R^2$ olmak üzere $\varphi(x)=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ biçiminde olur. Buna

göre keyfi bir $x \in R^2$ elemanının *B(2)* yörüngesi de R^2 nin kendisidir. Yani

$Gx = R^2$ dir.

2.3. LB(1) - İnvaryant Polinomlar ve Rasyonel Fonksiyonlar

Önerme 66: k tane vektör için LB(1)- invaryant polinom

$$P(x_1, x_2, ..., x_k) = a_{\underbrace{00...0}_{k}}$$

şeklindedir. Yani sabit polinomdur.

İspat: k tane vektör için LB(1)- invaryant polinom

$$P(x_1, x_2, ..., x_k) = \sum a_{i_1 i_2 ... i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_k^{i_k}$$

olsun. invaryant polinom tanımına göre $\forall \lambda \in R^*$ için $P(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_k) = P(x_1, x_2, ..., x_k)$

olmalıdır.

$$P(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_k) = \sum a_{i_1 i_2 ... i_k} \lambda^{i_1+i_2+...+i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_k^{i_k}$$

dir. O halde

$$\sum a_{i_1 i_2 ... i_k} \lambda^{i_1+i_2+...+i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_k^{i_k} = \sum a_{i_1 i_2 ... i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_k^{i_k}$$

eşitliğinden $\forall i_1, i_2, ..., i_k$ ve $\forall \lambda \in R^*$ için $a_{i_1 i_2 ... i_k} \lambda^{i_1+i_2+...+i_k} = a_{i_1 i_2 ... i_k}$ elde edilir. Buradan

$\forall i_1, i_2, ..., i_k$ ve $\forall \lambda \in R^*$ için $a_{i_1 i_2 ... i_k}\left(\lambda^{i_1+i_2+...+i_k} - 1\right) = 0$ yazılabilir. Buradan da

$\forall i_1, i_2, ..., i_k$ ve $\forall \lambda \in R^*$ için

$a_{i_1 i_2 \dots i_k} = 0$ ya da $\lambda^{i_1+i_2+\dots+i_k} = 1$

elde edilir. Eğer $\forall i_1, i_2, \dots, i_k$ için $a_{i_1 i_2 \dots i_k} = 0$ ise, k vektör için LB(1)- invaryant polinom $P(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$ dır. Yani sıfır sabit polinomudur. $\forall i_1, i_2, \dots, i_k$ için $a_{i_1 i_2 \dots i_k} = 0$ olmasın. Yani $\exists \overline{i_1}, \overline{i_2}, \dots, \overline{i_k}$ için $a_{i_1 i_2 \dots i_k} \neq 0$ olsun. Eğer $\overline{i_1} + \overline{i_2} + \dots + \overline{i_k} \neq 0$ ise $\forall \lambda \in R^*$ için $\lambda^{\overline{i_1}+\overline{i_2}+\dots+\overline{i_k}} = 1$ olamaz. Örneğin $\lambda = 2$ için λ nın hiçbir kuvveti 1 değildir. Böylece polinom sadece $\overline{i_1} + \overline{i_2} + \dots + \overline{i_k} = 0$ durumunda sıfırdan farklıdır. $\overline{i_1}, \overline{i_2}, \dots, \overline{i_k}$ ler doğal sayı olduklarından $\overline{i_1} = \overline{i_2} = \dots = \overline{i_k} = 0$ dır. Yani k tane vektör için LB(1)- invaryant polinom

$$P(x_1, x_2, \dots, x_k) = a_{\underbrace{00..0}_{k}}$$

dir. Bu önermenin tersi de doğrudur.Yani $P(x_1, x_2, \dots, x_k) = a_{\underbrace{00..0}_{k}}$ şeklindeki sabit polinom LB(1)- invaryant polinomdur. ♦

Önerme 67: k tane vektör için nispi LB(1)- invaryant polinom

$$P(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_k=m} a_{i_1 i_2 \dots i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_k^{i_k}$$

şeklindedir.

İspat: k tane vektör için tanımlı polinom

$$P(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum a_{i_1 i_2 \dots i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_k^{i_k}$$

olsun. Buna göre $P(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_k)$ ifadesi

$$P(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_k) = \sum a_{i_1 i_2 \dots i_k} \lambda^{i_1+i_2+\dots+i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_k^{i_k}$$

olur. Nispi LB(1)- invaryant polinom tanımına göre

$$\sum a_{i_1 i_2 \dots i_k} \lambda^{i_1+i_2+\dots+i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_k^{i_k} = \sum \varphi(\lambda) a_{i_1 i_2 \dots i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_k^{i_k}$$

şeklindedir. Buradan $\forall i_1, i_2, \dots, i_k$ ve $\forall \lambda \in R^*$ için $a_{i_1 i_2 \dots i_k} \lambda^{i_1+i_2+\dots+i_k} = \varphi(\lambda) a_{i_1 i_2 \dots i_k}$ elde edilir. Buradan $\forall i_1, i_2, \dots, i_k$ ve $\forall \lambda \in R^*$ için $a_{i_1 i_2 \dots i_k} \left(\lambda^{i_1+i_2+\dots+i_k} - \varphi(\lambda) \right) = 0$ yazılabilir. Buradan da $\forall i_1, i_2, \dots, i_k$ ve $\forall \lambda \in R^*$ için

$a_{i_1 i_2 \dots i_k} = 0$ ya da $\varphi(\lambda) = \lambda^{i_1+i_2+\dots+i_k}$

elde edilir. Eğer $\forall i_1, i_2, \dots, i_k$ için $a_{i_1 i_2 \dots i_k} = 0$ ise, nispi LB(1)- invaryant polinom $P(x) = 0$ dır. Yani sıfır sabit polinomudur. $\forall i_1, i_2, \dots, i_k$ için $a_{i_1 i_2 \dots i_k} = 0$ olmasın. Yani

$\exists \bar{i}_1, \bar{i}_2, ..., \bar{i}_k$ için $a_{\bar{i}_1 \bar{i}_2 ... \bar{i}_k} \neq 0$ olsun. Bu durumda $\forall \lambda \in R^*$ için $\varphi(\lambda) = \lambda^{\bar{i}_1 + \bar{i}_2 + ... + \bar{i}_k}$ dir. Bu eşitliği nispi invaryant polinom tanımında yerine yazarsak,

$$\sum a_{i_1 i_2 ... i_k} \lambda^{i_1 + i_2 + ... + i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_k^{i_k} = \sum \lambda^{\bar{i}_1 + \bar{i}_2 + ... + \bar{i}_k} a_{i_1 i_2 ... i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_k^{i_k}$$

ifadesi elde edilir. Buradan $\forall i_1, i_2, ..., i_k$ ve $\forall \lambda \in R^*$ için $a_{i_1 i_2 ... i_k} \lambda^{i_1 + i_2 + ... + i_k} = \lambda^{\bar{i}_1 + \bar{i}_2 + ... + \bar{i}_k} a_{i_1 i_2 ... i_k}$ ya da $a_{i_1 i_2 ... i_k} \left(\lambda^{i_1 + i_2 + ... + i_k} - \lambda^{\bar{i}_1 + \bar{i}_2 + ... + \bar{i}_k} \right) = 0$ elde edilir. $\bar{i}_1 + \bar{i}_2 + ... + \bar{i}_k = m$ olsun. Böylece, $i_1 + i_2 + ... + i_k \neq m$ olan $\forall i_1, i_2, ..., i_k$ için $a_{i_1 i_2 ... i_k} = 0$ dır. Sonuç olarak k tane vektör için nispi LB(1)- invaryant polinom

$$P(x_1, x_2, ..., x_k) = \sum_{i_1 + i_2 + ... + i_k = m} a_{i_1 i_2 ... i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_k^{i_k}$$

şeklindedir. Yani homojen polinomdur. Bu önermenin tersi de doğrudur.Yani $P(x_1, x_2, ..., x_k) = \sum_{i_1 + i_2 + ... + i_k = m} a_{i_1 i_2 ... i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_k^{i_k}$ şeklindeki bir polinom nispi LB(1)- invaryant polinomdur. Gerçekten de

$$P(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_k) = \sum_{i_1 + i_2 + ... + i_k = m} a_{i_1 i_2 ... i_k} \lambda^{i_1 + i_2 + ... + i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_k^{i_k} = \lambda^m \sum_{i_1 + i_2 + ... + i_k = m} a_{i_1 i_2 ... i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_k^{i_k}$$
$$= \lambda^m P(x_1, x_2, ..., x_k)$$

dir. Yani $P(x_1, x_2, ..., x_k)$ nispi LB(1)- invaryant polinomdur. ♦

Önerme 68: k tane vektör için LB(1)- invaryant rasyonel fonksiyon

$$f(x_1, x_2, ..., x_k) = \frac{\sum_{i_1 + i_2 + ... + i_k = m} a_{i_1 i_2 ... i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_k^{i_k}}{\sum_{i_1 + i_2 + ... + i_k = m} b_{i_1 i_2 ... i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_k^{i_k}}$$

şeklindedir.

İspat: k tane vektör için LB(1)- invaryant rasyonel fonksiyon çarpanları eşit iki nispi LB(1)- invaryant polinomun oranı biçiminde olduğundan ve keyfi nispi LB(1)- invaryant polinom da $\sum_{i_1 + i_2 + ... + i_k = m} a_{i_1 i_2 ... i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_k^{i_k}$ biçiminde idi. Buna göre k tane vektör için LB(1)- invaryant rasyonel fonksiyon

$$f(x_1, x_2, ..., x_k) = \frac{\sum_{i_1 + i_2 + ... + i_k = m} a_{i_1 i_2 ... i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_k^{i_k}}{\sum_{i_1 + i_2 + ... + i_k = m} b_{i_1 i_2 ... i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_k^{i_k}}$$

şeklindedir. Tersine verilen $f(x_1, x_2, ..., x_k)$ fonksiyonu LB(1)- invaryant rasyonel fonksiyondur. Gerçekten de

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_k) = \frac{\sum\limits_{i_1+i_2+...+i_k=m} a_{i_1 i_2 ... i_k} \lambda^{i_1+i_2+...+i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_k^{i_k}}{\sum\limits_{i_1+i_2+...+i_k=m} b_{i_1 i_2 ... i_k} \lambda^{i_1+i_2+...+i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_k^{i_k}} = \frac{\lambda^m \sum\limits_{i_1+i_2+...+i_k=m} a_{i_1 i_2 ... i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_k^{i_k}}{\lambda^m \sum\limits_{i_1+i_2+...+i_k=m} b_{i_1 i_2 ... i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_k^{i_k}}$$

$$= \frac{\sum\limits_{i_1+i_2+...+i_k=m} a_{i_1 i_2 ... i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_k^{i_k}}{\sum\limits_{i_1+i_2+...+i_k=m} b_{i_1 i_2 ... i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_k^{i_k}} = f(x_1, x_2, ..., x_k)$$

dir. ♦

2.4. $R(x_1, x_2, ..., x_k)^{LB(1)}$- Cisminin Üreteç Cümleleri

R de LB(1)- invaryant polinomlar sabit polinomlar olduğundan burada yalnızca LB(1)- invaryant rasyonel fonksiyonlar cisminin üreteç cümleleri bulunacaktır.

Teorem 18: R de $k \geq 1$ olmak üzere $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ biçiminde verilen k tane vektör için LB(1)- invaryant rasyonel fonksiyonlar cisminin üreteç cümlesi $\left\{1, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, ..., \frac{x_k}{x_1}\right\}$ dir.

İspat: R de k tane vektör için LB(1)- invaryant rasyonel fonksiyon

$$f(x_1, x_2, ..., x_k) = \frac{\sum\limits_{i_1+i_2+...+i_k=m} a_{i_1 i_2 ... i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_k^{i_k}}{\sum\limits_{i_1+i_2+...+i_k=m} b_{i_1 i_2 ... i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_k^{i_k}}$$

idi. Şimdi bu fonksiyonlar cisminin üreteç cümlesini bulmaya çalışalım. Fonksiyonun pay ve paydasını $\frac{1}{x_1^m}$ ile çarparsak ifade değişmez. Buna göre

$$f(x_1, x_2, ..., x_k) = \frac{\sum\limits_{i_1+i_2+...+i_k=m} a_{i_1 i_2 ... i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_k^{i_k}}{\sum\limits_{i_1+i_2+...+i_k=m} b_{i_1 i_2 ... i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_k^{i_k}} = \frac{\dfrac{\sum\limits_{i_1+i_2+...+i_k=m} a_{i_1 i_2 ... i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_k^{i_k}}{x_1^m}}{\dfrac{\sum\limits_{i_1+i_2+...+i_k=m} b_{i_1 i_2 ... i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_k^{i_k}}{x_1^m}}$$

$$=\frac{\sum\limits_{i_1+i_2+...+i_k=m}\dfrac{a_{i_1i_2...i_k}x_1^{i_1}x_2^{i_2}...x_k^{i_k}}{x_1^{m}}}{\sum\limits_{i_1+i_2+...+i_k=m}\dfrac{b_{i_1i_2...i_k}x_1^{i_1}x_2^{i_2}...x_k^{i_k}}{x_1^{m}}}=\frac{\sum\limits_{i_1+i_2+...+i_k=m}\dfrac{a_{i_1i_2...i_k}x_1^{i_1}x_2^{i_2}...x_k^{i_k}}{x_1^{i_1}x_1^{i_2}...x_1^{i_k}}}{\sum\limits_{i_1+i_2+...+i_k=m}\dfrac{b_{i_1i_2...i_k}x_1^{i_1}x_2^{i_2}...x_k^{i_k}}{x_1^{i_1}x_1^{i_2}...x_1^{i_k}}}$$

$$=\frac{\sum\limits_{i_1+i_2+...+i_k=m}a_{i_1i_2...i_k}\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^{i_2}...\left(\dfrac{x_k}{x_1}\right)^{i_k}}{\sum\limits_{i_1+i_2+...+i_k=m}b_{i_1i_2...i_k}\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^{i_2}...\left(\dfrac{x_k}{x_1}\right)^{i_k}}$$

elde edilir. Burada $\dfrac{x_2}{x_1},\dfrac{x_3}{x_1},...,\dfrac{x_k}{x_1}$ LB(1)- invaryant rasyonel fonksiyonlardır. İnvaryant bir fonksiyonun keyfi toplamı, çarpımı ve bölünmesi de invaryanttır. Dolayısıyla k tane vektör için LB(1)- invaryant rasyonel fonksiyon $\dfrac{x_2}{x_1},\dfrac{x_3}{x_1},...,\dfrac{x_k}{x_1}$ ile üretilebilir. ♦

2.5. *R* de Noktalar Sisteminin LB (1)- Denklik Şartları

Önerme 69: R de keyfi x ve y noktaları için

1- $x=y=0$ ise $x\overset{LB(1)}{\approx}y$ dir.

2- $x=0$ $y\neq 0$ ya da $x\neq 0$ $y=0$ ise $x\overset{LB(1)}{\approx}y$ olamaz.

3- $x\neq 0$ ve $y\neq 0$ ise her zaman $x\overset{LB(1)}{\approx}y$ dir.

İspat: 1- $0=\lambda 0$ olduğundan her zaman $0\overset{LB(1)}{\approx}0$ dir.

2- $x=0$ $y\neq 0$ olsun. Varsayalım ki x ve y LB(1)- denk olsunlar. $y=\lambda x$ dir. Buna göre $y=\lambda\cdot 0=0$ olur ki çelişkidir. Buna göre x ve y LB(1)- denk olamazlar. Şimdi $x\neq 0$ $y=0$ olsun. yine varsayalım ki x ve y LB(1)- denk olsunlar. $y=\lambda x$ olacağından $x\neq 0$ ve $\lambda\neq 0$ olduğundan $y=\lambda x\neq 0$ olur ki bu da bir çelişkidir. Dolayısıyla x ve y LB(1)- denk olamazlar.

3- $x,y\in R^*=R-\{0\}$ olsunlar. x ve y sıfırdan farklı olduklarından $\dfrac{y}{x}\in R^*$ dır. Dolayısıyla $y=\dfrac{y}{x}x$ biçiminde yazılabileceğinden x ve y LB(1)- denk noktalardır. ♦

Teorem 19: R de $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ ve $\{y_1, y_2, ..., y_k\}$ noktalar sistemi verilsin.

1. her $i \in \{1, 2, ..., k\}$ için $x_i \neq 0$ ve $y_i \neq 0$ olsun. Bu durumda

$\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{LB(1)}{\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ LB(1)- denk noktalardır ancak ve ancak

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{y_2}{y_1} \\ \dfrac{x_3}{x_1} = \dfrac{y_3}{y_1} \\ \cdots \\ \dfrac{x_k}{x_1} = \dfrac{y_k}{y_1} \end{array}\right\}$$

dir.

2. $\exists i = 1, 2, ..., k$ için $x_i = 0$ ve $y_i = 0$ olsun. Bu durumda $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ ve $\{y_1, y_2, ..., y_k\}$ noktalar sisteminin denklik şartları; k-1 noktadan oluşan $\{x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_k\}$ ve $\{y_1, y_2, ..., y_{i-1}, y_{i+1}, ..., y_k\}$ noktalar sisteminin denklik şartlarına indirgenir.

3. $\exists i = 1, 2, ..., k$ için $x_i = 0$ ve $y_i \neq 0$ veya $x_i \neq 0$ ve $y_i = 0$ ise

$\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{LB(1)}{\not\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ denk olamazlar.

İspat: 1. $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{LB(1)}{\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ olsunlar. O halde $\exists \lambda \in R^*$ öyleki, $i = 1, 2, ..., k$ için $y_i = \lambda x_i$ dir. Bunu şu şekilde de ifade edebiliriz.

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = ... = \frac{y_k}{x_k} = \lambda$$

dir. Buradan

$$y_1 x_2 = x_1 y_2$$
$$y_1 x_3 = x_1 y_3$$
$$...$$
$$y_1 x_k = x_1 y_k$$

eşitlikleri elde edilir. $i = 1, 2, ..., k$ için $x_i, y_i \in R^*$ olduklarından bu eşitlikler

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}$$
$$\frac{x_3}{x_1}=\frac{y_3}{y_1}$$
$$...$$
$$\frac{x_k}{x_1}=\frac{y_k}{y_1}$$

ile de ifade edilmiş olur. Tersine $i=1,2,...,k$ için $x_i, y_i \in R^*$ ve

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}$$
$$\frac{x_3}{x_1}=\frac{y_3}{y_1}$$
$$...$$
$$\frac{x_k}{x_1}=\frac{y_k}{y_1}$$

eşitlikleri verilmiş olsun. $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{LB(1)}{\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ olduklarını gösterelim. Bunun için şöyle bir $\lambda \in R^* = R-\{0\}$ bulmalıyım öyleki $i=1,2,...,k$ için $y_i=\lambda x_i$ olsun. verilen eşitliklerden

$$y_1x_2=x_1y_2$$
$$y_1x_3=x_1y_3$$
$$...$$
$$y_1x_k=x_1y_k$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan da

$$\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}$$
$$\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_3}{x_3}$$
$$...$$
$$\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_k}{x_k}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşit olan $\frac{y_1}{x_1}$ oranına λ dersek $\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}=...=\frac{y_k}{x_k}=\lambda$ olur.

Buradan da $i=1,2,...,k$ için $y_i=\lambda x_i$ elde edilir ki bu sonuç

$\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{LB(1)}{\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ olduklarını gösterir.

2. $\exists i = 1, 2, ..., k$ için $x_i = 0$ ve $y_i = 0$ olsun. Bu durumda $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{LB(1)}{\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ denklik şartı $\{x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_k\} \overset{LB(1)}{\approx} \{y_1, y_2, ..., y_{i-1}, y_{i+1}, ..., y_k\}$ denklik şartı ile verilebilir. Gerçekten de $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{LB(1)}{\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ ise, aynı zamanda

$$\{x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_k\} \overset{LB(1)}{\approx} \{y_1, y_2, ..., y_{i-1}, y_{i+1}, ..., y_k\}$$

dir. Tersine, $\{x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_k\} \overset{LB(1)}{\approx} \{y_1, y_2, ..., y_{i-1}, y_{i+1}, ..., y_k\}$ olsun. Bu takdirde, şöyle bir $\lambda \in R^* = R - \{0\}$ vardır ki, her $j = 1, 2, ..., i-1, i+1, ..., k$ için $y_j = \lambda x_j$ dir. aynı λ için $x_i = 0$ ve $y_i = 0$ olduğundan $y_i = \lambda x_i$ dir. Böylece,

$$\{x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_k\} \overset{LB(1)}{\approx} \{y_1, y_2, ..., y_{i-1}, y_{i+1}, ..., y_k\}$$

olur.

3. $\exists i = 1, 2, ..., k$ için $x_i = 0$ ve $y_i \neq 0$ olsun. Bu durumda $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{LB(1)}{\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ denk olamayacaklarını gösterelim. Varsayalım bunlar LB(1)- denk olsunlar. Bu durumda şöyle bir $\lambda \in R^* = R - \{0\}$ vardır ki, her $i = 1, 2, ..., k$ için $y_i = \lambda x_i$ dir. $x_i = 0$ olduğundan $y_i = 0$ bulunur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{LB(1)}{\not\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ denk olamazlar. Benzer şekilde, $\exists i = 1, 2, ..., k$ için $x_i \neq 0$ ve $y_i = 0$ durumunda da $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{LB(1)}{\not\approx} \{y_1, y_2, ... y_k\}$ denk olamazlar. ♦

2.6. B(1) - İnvaryant Rasyonel Fonksiyonlar

Tr (1), R de öteleme dönüşümlerinin grubu olmak üzere $Tr(1) \subset B(1)$ ve $LB(1) \subset B(1)$ olduğundan $B(1)-$ invaryant fonksiyon aynı zamanda hem $Tr(1)$- invaryant hem de $LB(1)$- invaryant fonksiyon olmalıdır.

2.6.1. Bir Tane Vektör İçin B(1) İnvaryant Rasyonel Fonksiyonlar

Önerme 70: Bir tane vektör için Tr(1)- invatyant polinom sabit polinomdur.

İspat: Bir $Tr(1)$- invaryant polinom

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

biçiminde olsun. $P(x)$, $Tr(1)$ invaryant olduğundan dolayı her $b \in R$ için

$$P(x+b) = P(x)$$

sağlamalıdır. Buna göre

$$P(x+b) = a_n (x+b)^n + a_{n-1}(x+b)^{n-1} + \ldots + a_1 (x+b) + a_0$$

yazılabilir. Bu ifade açıldığında

$$\begin{aligned} P(x+b) = a_n (x)^n &+ \left[a_n \binom{n}{n-1} (x)^{n-1} b + a_{n-1} \binom{n-1}{n-1} (x)^{n-1} \right] + \\ &+ \left[a_n \binom{n}{n-2} (x)^{n-2} b^2 + a_{n-1} \binom{n-1}{n-2} (x)^{n-2} b + a_{n-2} \binom{n-2}{n-2} (x)^{n-2} \right] + \ldots + \\ &+ \left[a_n \binom{n}{1} (x) b^{n-1} + a_{n-1} \binom{n-1}{1} (x) b^{n-2} + \ldots + a_1 \binom{1}{1} (x) \right] + \\ &+ \left[a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0 \right] \end{aligned}$$

elde edilir. $P(x+b) = P(x)$ koşulundan dolayı her iki polinomu birbirine eşitlediğimizde (n-1). dereceli x^{n-1} terimlerinin katsayılarının eşitliğinden

$$a_n \binom{n}{n-1} b + a_{n-1} = a_{n-1}$$

elde edilir. Buradan $a_n \binom{n}{n-1} b = 0$ eşitliği elde edilir. b keyfi olduğundan dolayı $a_n = 0$ dır. (n-2). dereceli x^{n-2} terimlerinin katsayılarının eşitliğinden

$$a_n \binom{n}{n-2} b^2 + a_{n-1} \binom{n-1}{n-2} b + a_{n-2} = a_{n-2}$$

bulunur. $a_n = 0$, b keyfi olduğundan $a_{n-1} = 0$ bulunur. Sırayla karşılıklı aynı dereceli terimler bir birlerine eşitlenirse, $a_n = a_{n-1} = a_{n-2} = \ldots = a_1 = 0$ oldukları görülür. Böylece, Bir tane vektör için Tr(1)- invatyant polinom sabit polinomdur. ♦

Önerme 71: Bir tane vektör için nispi $Tr(1)$- invaryant polinom sabit polinomdur.

İspat: Bir tane vektör için nispi $Tr(1)$- invaryant polinom

$$P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

biçiminde olsun. $P(x)$, $Tr(1)$ invaryant olduğundan dolayı her $b\in R$ için

$$P(x+b)=\varphi(x,b)P(x)$$

sağlamalıdır. Buna göre

$$P(x+b)=\sum_{i=0}^{n} a_i (x+b)^i = \sum_{i=0}^{n}\varphi(x,b)a_i x^i$$

yazılabilir. Bu ifade açıldığında aynı dereceli terimlerin katsayılarını bir birine eşitlersek, n. dereceli terimlerin katsayılarının eşitliğinden

$$a_n(\varphi(x,b)-1)=0$$

olur. Buradan $a_n=0$ veya her b sayısı için $\varphi(x,b)=1$

elde edilir. Şimdi varsayalım ki $a_n \neq 0$ olsun. Bu durumda $\varphi(x,b)=1$ olmalıdır. $(n-1)$. dereceli terimlerin katsayılarının eşitliğinden

$$a_n\binom{n}{n-1}b + a_{n-1} = \varphi(x,b)a_{n-1}$$

olacağından

$$a_n\binom{n}{n-1}b + a_{n-1}(1-\varphi(x,b))=0$$

yazılabilir. $\varphi(x,b)=1$ olduğundan her b sayısı için $a_n\binom{n}{n-1}b=0$ olur. $a_n\neq 0$ olduğundan $b=0$ elde edilir ki, bu b sayısının keyfi olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $a_n=0$ olmalıdır. Bu durumda $(n-1)$. dereceli terimlerin katsayılarının eşitliğinden

$$a_{n-1}(\varphi(x,b)-1)=0$$

elde edilir.. Buna göre $a_{n-1}=0$ veya $\varphi(x,b)=1$ dir. Benzer işlemler yapılarak polinomdaki terimlerin derecelerini azaltarak karşılıklı terimlerin katsayılarının eşitliğini kullanarak,

$$a_n = a_{n-1} = a_{n-2} = ... = a_1 = 0$$

elde edilir. Ayrıca, nispi invaryant çarpanı da $\varphi(x,b)=1$ elde edilir. Böylece, Bir tane vektör için nispi Tr(1)- invaryant polinom sabit polinomdur. ♦

Önerme 72: Bir tane vektör için Tr(1)- invaryant rasyonel fonksiyon sabit fonksiyondur.

İspat: nispi Tr(1)- invaryant polinomlar sabit polinomlar olduğundan ve bir invaryant rasyonel fonksiyon iki nispi invaryant polinomun oranı olduğundan ispat açıktır. ♦

Önerme 73: Bir tane vektör için B(1) invaryant rasyonel fonksiyon sabit fonksiyondur.

İspat: $Tr(1) \subset B(1)$ olduğundan $B(1)-$ invaryant rasyonel fonksiyon aynı zamanda $Tr(1)$- invaryanttır. $Tr(1)$- invaryant rasyonel fonksiyonlar sabit fonksiyon olduğundan Bir tane vektör için B(1) invaryant rasyonel fonksiyon da sabit olmalıdır. ♦

2.6.2. k Tane Vektör İçin B(1)- İnvaryant Rasyonel Fonksiyonlar

Önce k tane vektör için R de öteleme dönüşümlerine göre invaryant polinomu bulalım.

Önerme 74: $k \geq 2$ tane vektör için keyfi Tr(1)- invaryant polinom

$$f(x_1, x_2, x_3, ..., x_k) = g(x_2 - x_1, x_3 - x_1, ..., x_k - x_1)$$

şeklinde yazılabilir. Tersine $f(x_1, x_2, x_3, ..., x_k) = g(x_2 - x_1, x_3 - x_1, ..., x_k - x_1)$ şeklindeki keyfi polinom Tr(1)- invaryant polinomdur.

İspat: Bunun için $g(x) = x + b$, $b \in R$ dönüşümüne göre invaryant polinom

$$f(x_1, x_2, x_3, ..., x_k) = f(x_1 + b, x_2 + b, x_3 + b, ..., x_k + b)$$

sağlayan polinomdur. Bu koşul her $b \in R$ için sağlanır. Şimdi x_1 i keyfi alıp sabit bırakalım. $b = -x_1$ için

$$f(x_1, x_2, x_3, ..., x_k) = f(0, x_2 - x_1, x_3 - x_1, ..., x_k - x_1)$$

olur. Burada $f(0, y_1, y_2, ..., y_{k-1}) = h(y_1, y_2, ..., y_{k-1})$ dersek, h fonksiyonu $y_1, y_2, ..., y_{k-1}$ değişkenlerine bağlı k-1 değişkenli bir polinomsal fonksiyon olur. Böylece,

$$f(0, x_2 - x_1, x_3 - x_1, ..., x_k - x_1) = h(x_2 - x_1, x_3 - x_1, ..., x_k - x_1)$$

şeklinde yazılabilir. Tersine, $f(x_1, x_2, x_3, ..., x_k) = g(x_2 - x_1, x_3 - x_1, ..., x_k - x_1)$ şeklindeki keyfi polinomun Tr(1)- invaryant olduğunu gösterelim.

$$f\left(x_1+b,x_2+b,...,x_k+b,\right)=g\left(\left(x_2+b\right)-\left(x_1+b\right),\left(x_3+b\right)-\left(x_1+b\right),...,\left(x_k+b\right)-\left(x_1+b\right)\right)$$
$$=g\left(x_2-x_1,x_3-x_1,...,x_k-x_1\right)=f\left(x_1,x_2,...,x_k\right)$$

olduğundan açıktır.♦

Şimdi şu teoremi verebiliriz.

Teorem 20: $k\geq 2$ tane vektör için tanımlı bir $f\left(x_1,x_2,x_3,...,x_k\right)$ polinomsal fonksiyonu B(1)- invaryant ise $g\left(x_1,x_2,x_3,...,x_k\right)=f\left(0,x_2-x_1,x_3-x_1,...,x_k-x_1\right)$ polinomsal fonksiyonu LB(1)- invaryanttır. Tersine,

$$f\left(x_1,x_2,x_3,...x_k\right)=h\left(x_2-x_1,x_3-x_1,...,x_k-x_1\right)$$

biçiminde yazılsın. h , LB(1)- invaryant ise, $f\left(x_1,x_2,...,x_k\right)$ B(1)- invaryanttır.

İspat: k tane vektör için tanımlı bir polinomsal fonksiyon f, B(1)- invaryant olsun. $g\left(x_1,x_2,x_3,...,x_k\right)=f\left(0,x_2-x_1,x_3-x_1,...,x_k-x_1\right)$ nın LB(1) invaryant olduğunu gösterelim. Her $\lambda\in LB(1)$ için $\left(\lambda\in R-\{0\}\right)$ $g\left(x_1,x_2,x_3,...,x_k\right)=g\left(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3,...,\lambda x_k\right)$ olduğunu göstermemiz gerekecektir. f, B(1)- invaryant olduğundan her $\lambda\in LB(1)$ ve her $b\in R$ için

$$f\left(x_1,x_2,x_3,...,x_k\right)=f\left(\lambda x_1+b,\lambda x_2+b,\lambda x_3+b,...,\lambda x_k+b\right)$$

dir. Özel olarak $b=0$ için de invaryanttır. Dolayısıyla

$$f\left(x_1,x_2,x_3,...,x_k\right)=f\left(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3,...,\lambda x_k\right) \tag{32}$$

sağlanır. g nin tanımından dolayı her $\lambda\in LB(1)$ için

$$g\left(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3,...,\lambda x_k\right)=f\left(0,\lambda x_2-\lambda x_1,...,\lambda x_k-\lambda x_1\right)=f\left(\lambda 0,\lambda\left(x_2-x_1\right),...,\lambda\left(x_k-x_1\right)\right)$$

dir. (32) den , her $\lambda\in LB(1)$ için

$$g\left(\lambda x_1,\lambda x_2,...,\lambda x_k\right)=f\left(0,x_2-x_1,...,x_k-x_1\right)=g\left(x_1,x_2,x_3,...x_k\right)$$

olur ki bu durum g nin LB(1) invaryant olduğunu gösterir.

Tersine, k tane vektör için tanımlı bir polinomsal fonksiyon $f\left(x_1,x_2,...,x_k\right)=h\left(x_2-x_1,x_3-x_1,...,x_k-x_1\right)$ biçiminde yazılsın ve h , LB(1) invaryant olsun. f nin B(1)- invaryant olduğunu gösterelim. Bunun için her $\lambda\in LB(1)$ ve her $b\in R$ için

$$f\left(x_1,x_2,x_3,..,x_k\right)=f\left(\lambda x_1+b,\lambda x_2+b,\lambda x_3+b,...,\lambda x_k+b\right)$$

gösterilmesi gerekir. $f\left(x_1,x_2,...,x_k\right)=h\left(x_2-x_1,x_3-x_1,...,x_k-x_1\right)$ yazıldığından

$$f\left(\lambda x_1+b,\lambda x_2+b,...,\lambda x_k+b\right)=h\left(\left(\lambda x_2+b\right)-\left(\lambda x_1+b\right),...,\left(\lambda x_k+b\right)-\left(\lambda x_1+b\right)\right)$$
$$=h\left(\lambda\left(x_2-x_1\right),\lambda\left(x_3-x_1\right),...,\lambda\left(x_k-x_1\right)\right)$$

olduğu görülür. h , LB(1) invaryant olduğundan

$$f\left(\lambda x_1+b,\lambda x_2+b,...,\lambda x_k+b\right)=h\left(\lambda\left(x_2-x_1\right),...,\lambda\left(x_k-x_1\right)\right)$$
$$=h\left(x_2-x_1,...,x_k-x_1\right)=f\left(x_1,x_2,...,x_k\right)$$

elde edilir. Böylece, her $\lambda\in LB(1)$ ve her $b\in R$ için

$$f\left(x_1,x_2,...,x_k\right)=f\left(\lambda x_1+b,\lambda x_2+b,...,\lambda x_k+b\right)$$

olduğundan f, B(1)- invaryanttır. ♦

Önerme 75: k tane vektör için B(1) invaryant polinom sabit polinomdur.

İspat: teorem 20 ve önerme 66 dan k tane vektör için B(1) invaryant polinom sabit polinomdur. ♦

Önerme 76: k tane vektör için nispi B(1) invaryant polinom

$$f\left(x_1,x_2,...,x_k\right)=\sum_{i_1+i_2+...+i_{k-1}=m} a_{i_1i_2...i_{k-1}}\left(x_2-x_1\right)^{i_1}\left(x_3-x_1\right)^{i_2}...\left(x_k-x_1\right)^{i_{k-1}}$$

biçimindedir.

İspat: Teorem 20 nin invaryant polinomlar için gerçeklendiği kadar nispi invaryant polinomlar için de doğru olduğu kolayca görülebilir. Buna göre k tane vektör için nispi B(1) invaryant polinom $h\left(x_2-x_1,x_3-x_1,...,x_k-x_1\right)$ biçiminde nispi LB(1) invaryant polinomdur. Ayrıca, k-1 tane vektör için nispi LB(1) invaryant polinom

$$f\left(x_1,x_2,...,x_k\right)=\sum_{i_1+i_2+...+i_{k-1}=m} a_{i_1i_2...i_{k-1}}x_1^{i_1}x_2^{i_2}...x_{k-1}^{i_{k-1}}$$

biçiminde homojen bir polinom olmasından k tane vektör için nispi B(1) invaryant polinom

$$f\left(x_1,x_2,...,x_k\right)=\sum_{i_1+i_2+...+i_{k-1}=m} a_{i_1i_2...i_{k-1}}\left(x_2-x_1\right)^{i_1}\left(x_3-x_1\right)^{i_2}...\left(x_k-x_1\right)^{i_{k-1}}$$

biçimindedir. ♦

Önerme 77: k tane vektör için B(1) invaryant rasyonel fonksiyon

$$f\left(x_1,x_2,...,x_k\right)=\frac{\sum\limits_{i_1+i_2+...+i_{k-1}=m} a_{i_1i_2...i_{k-1}}\left(x_2-x_1\right)^{i_1}\left(x_3-x_1\right)^{i_2}...\left(x_k-x_1\right)^{i_{k-1}}}{\sum\limits_{j_1+j_2+...+j_{k-1}=m} b_{j_1j_2...j_{k-1}}\left(x_2-x_1\right)^{j_1}\left(x_3-x_1\right)^{j_2}...\left(x_k-x_1\right)^{j_{k-1}}}$$

biçimindedir.

İspat: k tane vektör için nispi B(1) invaryant polinom

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_k\right) = \sum_{i_1+i_2+...+i_{k-1}=m} a_{i_1 i_2 ... i_{k-1}} \left(x_2 - x_1\right)^{i_1} \left(x_3 - x_1\right)^{i_2} ... \left(x_k - x_1\right)^{i_{k-1}}$$

biçiminde olduğundan ve k vektör için B(1) invaryant rasyonel fonksiyon, k-1 tane vektör için nispi B(1) invaryant polinomun oranı biçiminde olduğundan ispat açıktır. ♦

2.7. $\boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_k\right)^{\boldsymbol{B}(1)}$ - Cisminin Üreteç Cümleleri

R de B(1) invaryant polinomlar sabit polinomlar olduğundan dolayı burada yalnızca B(1) invaryant rasyonel fonksiyonlar cisminin üreteç cümlelerini bulacağız.

Teorem 21: *i)* $k \leq 2$ olmak üzere k tane vektör için B(1) invaryant rasyonel fonksiyonlar cisminin üreteç cümlesi $\{1\}$ dir.

ii) $k > 2$ olmak üzere k tane vektör için B(1) invaryant rasyonel fonksiyonlar cisminin üreteç cümlesi

$$\left\{1, \frac{\left(x_3 - x_1\right)}{\left(x_2 - x_1\right)}, \frac{\left(x_4 - x_1\right)}{\left(x_2 - x_1\right)}, ..., \frac{\left(x_k - x_1\right)}{\left(x_2 - x_1\right)}\right\}$$

dir.

İspat: *i)* $k \leq 2$ olmak üzere k tane vektör için B(1) invaryant rasyonel fonksiyon sabit fonksiyon olduğundan keyfi sabit sayı 1 ile üretilebilir.

ii) $k > 2$ olmak üzere k tane vektör için B(1) invaryant rasyonel fonksiyon

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_k\right) = \frac{\sum_{i_1+i_2+...+i_{k-1}=m} a_{i_1 i_2 ... i_{k-1}} \left(x_2 - x_1\right)^{i_1} \left(x_3 - x_1\right)^{i_2} ... \left(x_k - x_1\right)^{i_{k-1}}}{\sum_{j_1+j_2+...+j_{k-1}=m} b_{j_1 j_2 ... j_{k-1}} \left(x_2 - x_1\right)^{j_1} \left(x_3 - x_1\right)^{j_2} ... \left(x_k - x_1\right)^{j_{k-1}}}$$

biçimindedir. Şimdi bu fonksiyonun üreteç cümlesini bulmaya çalışalım. Fonksiyonun pay ve paydasını $\frac{1}{\left(x_2 - x_1\right)^m}$ ile çarparsak ifade değişmez. Buna göre

$$f\left(x_1,x_2,...,x_k\right)=\frac{\sum\limits_{i_1+i_2+...+i_{k-1}=m} a_{i_1 i_2 ... i_{k-1}}\left(x_2-x_1\right)^{i_1}\left(x_3-x_1\right)^{i_2}...\left(x_k-x_1\right)^{i_{k-1}}}{\sum\limits_{j_1+j_2+...+j_{k-1}=m} b_{j_1 j_2 ... j_{k-1}}\left(x_2-x_1\right)^{j_1}\left(x_3-x_1\right)^{j_2}...\left(x_k-x_1\right)^{j_{k-1}}}$$

$$=\frac{\dfrac{\sum\limits_{i_1+i_2+...+i_{k-1}=m} a_{i_1 i_2 ... i_{k-1}}\left(x_2-x_1\right)^{i_1}\left(x_3-x_1\right)^{i_2}...\left(x_k-x_1\right)^{i_{k-1}}}{\left(x_2-x_1\right)^m}}{\dfrac{\sum\limits_{j_1+j_2+...+j_{k-1}=m} b_{j_1 j_2 ... j_{k-1}}\left(x_2-x_1\right)^{j_1}\left(x_3-x_1\right)^{j_2}...\left(x_k-x_1\right)^{j_{k-1}}}{\left(x_2-x_1\right)^m}}$$

olarak yazılabilir. $i_1+i_2+...+i_{k-1}=m$ olduğundan

$$\frac{1}{\left(x_2-x_1\right)^m}=\frac{1}{\left(x_2-x_1\right)^{i_1}\left(x_2-x_1\right)^{i_2}...\left(x_2-x_1\right)^{i_{k-1}}}$$

yazar ve $\dfrac{1}{\left(x_2-x_1\right)^m}$ ifadesini toplamın her bir elemanına dağıtırsak

$$f\left(x_1,x_2,...,x_k\right)=\frac{\sum\limits_{i_1+i_2+...+i_{k-1}=m} \dfrac{a_{i_1 i_2 ... i_{k-1}}\left(x_2-x_1\right)^{i_1}\left(x_3-x_1\right)^{i_2}...\left(x_k-x_1\right)^{i_{k-1}}}{\left(x_2-x_1\right)^{i_1}\left(x_2-x_1\right)^{i_2}...\left(x_2-x_1\right)^{i_{k-1}}}}{\sum\limits_{i_1+i_2+...+i_{k-1}=m} \dfrac{b_{i_1 i_2 ... i_{k-1}}\left(x_2-x_1\right)^{i_1}\left(x_3-x_1\right)^{i_2}...\left(x_k-x_1\right)^{i_{k-1}}}{\left(x_2-x_1\right)^{i_1}\left(x_2-x_1\right)^{i_2}...\left(x_2-x_1\right)^{i_{k-1}}}}$$

$$=\frac{\sum\limits_{i_1+i_2+...+i_{k-1}=m} a_{i_1 i_2 ... i_{k-1}}\left(\dfrac{x_3-x_1}{x_2-x_1}\right)^{i_2}\left(\dfrac{x_4-x_1}{x_2-x_1}\right)^{i_3}...\left(\dfrac{x_k-x_1}{x_2-x_1}\right)^{i_{k-1}}}{\sum\limits_{i_1+i_2+...+i_{k-1}=m} b_{i_1 i_2 ... i_{k-1}}\left(\dfrac{x_3-x_1}{x_2-x_1}\right)^{i_2}\left(\dfrac{x_4-x_1}{x_2-x_1}\right)^{i_3}...\left(\dfrac{x_k-x_1}{x_2-x_1}\right)^{i_{k-1}}}$$

elde edilir. Burada $\left(\dfrac{x_3-x_1}{x_2-x_1}\right),\left(\dfrac{x_4-x_1}{x_2-x_1}\right),...,\left(\dfrac{x_k-x_1}{x_2-x_1}\right)$ fonksiyonları B(1)-invaryant rasyonel fonksiyonlardır. İnvaryant bir fonksiyonun keyfi toplamı, çarpımı ve bölünmesi de invaryanttır. Dolayısıyla k tane vektör için B(1)- invaryant rasyonel fonksiyon

$$\left\{1,\frac{\left(x_3-x_1\right)}{\left(x_2-x_1\right)},\frac{\left(x_4-x_1\right)}{\left(x_2-x_1\right)}...,\frac{\left(x_k-x_1\right)}{\left(x_2-x_1\right)}\right\}$$

ile üretilebilir. ♦

2.8. Noktalar Sisteminin B(1)- Denklik Şartları

Önerme 78: R de keyfi $\{x\}$ ve $\{y\}$ noktaları için her zaman $x \overset{B(1)}{\approx} y$ dir.

İspat: R de keyfi iki nokta x ve y alalım. $\lambda = 1$ olsun ve $b \in R$ olarak $b = y - x \in R$ sayısı alınırsa $y = \lambda x + b$ olduğu görülür. Böylece, $x \overset{B(1)}{\approx} y$ dir. ♦

Önerme 79: R de $\{x_1, x_2\}$ ve $\{y_1, y_2\}$ noktalar sistemi için

1- $x_1 = x_2$ ise $\{x_1, x_2\} \overset{B(1)}{\approx} \{y_1, y_2\}$ dir ancak ve ancak $y_1 = y_2$ dir.

2- $x_1 \neq x_2$ ise $\{x_1, x_2\} \overset{B(1)}{\approx} \{y_1, y_2\}$ dir ancak ve ancak $y_1 \neq y_2$ dir.

İspat: 1. $x_1 = x_2$ olsun.

İlk olarak $\{x_1, x_2\} \overset{B(1)}{\approx} \{y_1, y_2\}$ olsun. O halde $\exists \lambda \in R^*$ ve $b \in R$ öyleki, $y_1 = \lambda x_1 + b$ ve $y_2 = \lambda x_2 + b$ dir. $x_1 = x_2$ olduğundan $\lambda x_1 + b = \lambda x_2 + b$ dir. Buradan da $y_1 = y_2$ dir. Tersine, $x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2$ olsun. $\{x_1, x_2\} \overset{B(1)}{\approx} \{y_1, y_2\}$ olduğunu gösterelim. Bunun için bir $\lambda \in R^* = R - \{0\}$ ve $b \in R$ bulmalıyız öyle ki $y_1 = \lambda x_1 + b$ ve $y_2 = \lambda x_2 + b$ olsun. $\lambda = 1$ ve $b = y_1 - x_1$ alınırsa, $x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2$ olduğundan aynı zamanda $b = y_2 - x_2$ dir. Böylece $y_1 = x_1 + b$ ve $y_2 = x_2 + b$ olur. Dolayısıyla $\{x_1, x_2\} \overset{B(1)}{\approx} \{y_1, y_2\}$ dir.

2. $x_1 \neq x_2$ ve $\{x_1, x_2\} \overset{B(1)}{\approx} \{y_1, y_2\}$ olsun. $y_1 \neq y_2$ olduğunu gösterelim. $\{x_1, x_2\} \overset{B(1)}{\approx} \{y_1, y_2\}$ olduğundan $\exists \lambda \in R^*$ ve $b \in R$ öyleki, $y_1 = \lambda x_1 + b$ ve $y_2 = \lambda x_2 + b$ dir. $x_1 \neq x_2$ olduğundan $\lambda x_1 \neq \lambda x_2$ ve $\lambda x_1 + b \neq \lambda x_2 + b$ dir. Böylece, $y_1 \neq y_2$ olur.

Tersine, $x_1 \neq x_2$ ve $y_1 \neq y_2$ olsun. $\{x_1, x_2\} \overset{B(1)}{\approx} \{y_1, y_2\}$ olduğunu gösterelim. Bunun için bir $\lambda \in R^* = R - \{0\}$ ve $b \in R$ bulmalıyız öyle ki $y_1 = \lambda x_1 + b$ ve $y_2 = \lambda x_2 + b$ olsun. λ olarak

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

alınırsa, $y_2 - y_1 = \lambda(x_2 - x_1)$ olur. Buradan $y_2 - \lambda x_2 = y_1 - \lambda x_1$ elde edilir. b olarak

$$b = y_2 - \lambda x_2 = y_1 - \lambda x_1$$

denilirse $\lambda x_1 + b = \lambda x_1 + (y_1 - \lambda x_1) = y_1$ ve $\lambda x_2 + b = \lambda x_2 + (y_2 - \lambda x_2) = y_2$ olduğu görülür. . Dolayısıyla $\{x_1, x_2\} \overset{B(1)}{\approx} \{y_1, y_2\}$ dir. ♦

Teorem 22: R de $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_k\}$ ve $\{y_1, y_2, y_3, ...y_k\}$ nokta sistemleri için

1- $x_i \neq x_j$ ve $y_i \neq y_j$; $\forall i, j = 1, 2, 3, ..., k$; $i \neq j$ ise

$\{x_1, x_2, x_3, ..., x_k\} \overset{B(1)}{\approx} \{y_1, y_2, y_3, ..., y_k\}$ dir ancak ve ancak

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} \\ \dfrac{x_4 - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_4 - y_1}{y_2 - y_1} \\ \vdots \\ \dfrac{x_k - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_k - y_1}{y_2 - y_1} \end{array}\right\} \text{dir.}$$

2- $\exists i, j = 1, 2, 3, ...k$; $i \neq j$ için $x_i = x_j$ durumunda,

$\{x_1, x_2, x_3, ..., x_k\} \overset{B(1)}{\approx} \{y_1, y_2, y_3, ..., y_k\}$ ise $y_i = y_j$ dir. Tersine, $\exists i, j = 1, 2, 3, ...k$; $i \neq j$ için $x_i = x_j$ ve $y_i = y_j$ ise, $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_k\} \overset{B(1)}{\approx} \{y_1, y_2, y_3, ..., y_k\}$ denklik problemi k-1 noktanın denklik problemine indirgenir.

İspat:1. $\forall i, j = 1, 2, 3, ..., k$; $i \neq j$ için $x_i \neq x_j$ ve $y_i \neq y_j$; ve

$\{x_1, x_2, x_3, ..., x_k\} \overset{B(1)}{\approx} \{y_1, y_2, y_3, ..., y_k\}$ olsun.

$$\begin{array}{l} \dfrac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} \\ \dfrac{x_4 - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_4 - y_1}{y_2 - y_1} \\ \vdots \\ \dfrac{x_k - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_k - y_1}{y_2 - y_1} \end{array}$$

olduğunu gösterelim. $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_k\} \overset{B(1)}{\approx} \{y_1, y_2, y_3, ..., y_k\}$ olduğundan $\exists \lambda \in R^*$ ve $b \in R$ öyleki, $y_1 = \lambda x_1 + b$, $y_2 = \lambda x_2 + b$, $y_3 = \lambda x_3 + b$,..., $y_k = \lambda x_k + b$ dir. Buna göre

$$\begin{array}{l} \dfrac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{(\lambda x_3 + b) - (\lambda x_1 + b)}{(\lambda x_2 + b) - (\lambda x_1 + b)} = \dfrac{\lambda(x_3 - x_1)}{\lambda(x_2 - x_1)} = \dfrac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \\ \dfrac{y_4 - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{(\lambda x_4 + b) - (\lambda x_1 + b)}{(\lambda x_2 + b) - (\lambda x_1 + b)} = \dfrac{\lambda(x_4 - x_1)}{\lambda(x_2 - x_1)} = \dfrac{x_4 - x_1}{x_2 - x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{y_k - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{(\lambda x_k + b) - (\lambda x_1 + b)}{(\lambda x_2 + b) - (\lambda x_1 + b)} = \dfrac{\lambda(x_k - x_1)}{\lambda(x_2 - x_1)} = \dfrac{x_k - x_1}{x_2 - x_1} \end{array}$$

olduğu görülür. Tersine $x_i \neq x_j$ ve $y_i \neq y_j$; $\forall i, j = 1,2,3,...,k$; $i \neq j$ ve

$$\begin{aligned} &\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} \\ &\frac{x_4 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_4 - y_1}{y_2 - y_1} \\ &\vdots \\ &\frac{x_k - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_k - y_1}{y_2 - y_1} \end{aligned} \tag{33}$$

olsun. $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_k\} \overset{B(1)}{\approx} \{y_1, y_2, y_3, ..., y_k\}$ olduğunu gösterelim. $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \lambda$ dersek,

$\lambda \in R^*$ dır. şimdi, (33) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} &\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \lambda \\ &\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_4 - y_1}{x_4 - x_1} = \lambda \\ &\vdots \\ &\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_k - y_1}{x_k - x_1} = \lambda \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan da

$$\begin{aligned} &\mathrm{y}_2 = \lambda x_2 - \lambda x_1 + y_1 \\ &\mathrm{y}_3 = \lambda x_3 - \lambda x_1 + y_1 \\ &\vdots \\ &\mathrm{y}_\mathrm{k} = \lambda x_k - \lambda x_1 + y_1 \end{aligned}$$

elde edilir. bu ifadelerde yer alan $-\lambda x_1 + y_1$ ifadesine b dersek,

$$\begin{aligned} &y_1 = \lambda x_1 + b \\ &\mathrm{y}_2 = \lambda x_2 + b \\ &\mathrm{y}_3 = \lambda x_3 + b \\ &\vdots \\ &\mathrm{y}_\mathrm{k} = \lambda x_k + b \end{aligned}$$

olur. Bu ise, $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_k\} \overset{B(1)}{\approx} \{y_1, y_2, y_3, ..., y_k\}$ denkliğini verir.

2- $\exists i, j = 1,2,3,...,k$; $i \neq j$ için $x_i = x_j$ durumunda,

$\{x_1, x_2, x_3, ..., x_k\} \overset{B(1)}{\approx} \{y_1, y_2, y_3, ..., y_k\}$ ise $y_i = y_j$ olduğunu gösterelim.

$\{x_1, x_2, x_3, ..., x_k\} \overset{B(1)}{\approx} \{y_1, y_2, y_3, ..., y_k\}$ olduğundan $\exists \lambda \in R^*$ ve $b \in R$ öyleki, $y_1 = \lambda x_1 + b$, $y_2 = \lambda x_2 + b$, $y_3 = \lambda x_3 + b$, ..., $y_k = \lambda x_k + b$ dir. $\exists i, j = 1, 2, 3, ..., k$; $i \neq j$ için $x_i = x_j$ olduğundan $\lambda x_i = \lambda x_j$ ve $\lambda x_i + b = \lambda x_j + b$ yazılabilir. Bu ise $y_i = y_j$ verir. Tersine, $\exists i, j = 1, 2, ..., k$; $i \neq j$ için $x_i = x_j$ ve $y_i = y_j$ ise, $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_k\} \overset{B(1)}{\approx} \{y_1, y_2, y_3, ..., y_k\}$ denklik problemi k-1 noktanın denklik problemine indirgenir. Bu kısım aşikardır. ♦

2.9. R^2 de LB(2)- İnvaryant Polinomlar ve Rasyonel Fonksiyonlar

Önce O(2)- invaryant polinomları bulmamız gerekecek.

Önerme 80: $x = (x_1, x_2)$ olmak üzere bir tane vektör için

1. O(2)- invaryant polinom

$$P(x) = P(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^{n} a_i \left(x_1^{\,2} + x_2^{\,2}\right)^i = \sum_{i=0}^{n} a_i \left\langle x, x \right\rangle^i$$

2. Keyfi nispi O(2)- invaryant polinom

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \left\langle x, x \right\rangle^i$$

şeklindedir.

İspat: Teorem 12 ,13 ve 14 ün bir sonucudur. ♦

Önerme 81: $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$; $x^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$; …; $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$ ve $k > 1$ olmak üzere k tane vektör için

1. nispi tek O(2)- invaryant polinom

$$f\left(x^{(1)}, ..., x^{(k)}\right) =$$

$$= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{k} \left[x^{(i)} \quad x^{(j)}\right] \sum_{i^{(1)}{}_1 ... i^{(1)}{}_k i^{(2)}{}_2 ... i^{(2)}{}_k ... i^{(k-1)}{}_k i^{(k)}{}_k} a^{(i)(j)}{}_{i^{(1)}{}_1 ... i^{(1)}{}_k i^{(2)}{}_2 ... i^{(2)}{}_k ... i^{(k-1)}{}_k i^{(k)}{}_k} \left(\prod_{s=1}^{k} \left\langle x^{(1)}, x^{(s)} \right\rangle^{i^{(1)}{}_s}\right) \left(\prod_{t=2}^{k} \left\langle x^{(2)}, x^{(t)} \right\rangle^{i^{(2)}{}_t}\right) ... \left(\prod_{p=k-1}^{k} \left\langle x^{(k-1)}, x^{(p)} \right\rangle^{i^{(k-1)}{}_p}\right) \left\langle x^{(k)}, x^{(k)} \right\rangle^{i^{(k)}{}_k}$$

2. nispi çift O(2)- invaryant polinom yani O(2)- invaryant polinom

$$f\left(x^{(1)},...,x^{(k)}\right)=$$
$$=\sum_{{i^{(1)}}_1...{i^{(1)}}_k{i^{(2)}}_2...{i^{(2)}}_k...{i^{(k-1)}}_k{i^{(k)}}_k} a^{(i)(j)}{}_{{i^{(1)}}_1...{i^{(1)}}_k{i^{(2)}}_2...{i^{(2)}}_k...{i^{(k-1)}}_k{i^{(k)}}_k}\left(\prod_{s=1}^{k}\left\langle x^{(1)},x^{(s)}\right\rangle^{{i^{(1)}}_s}\right)\left(\prod_{t=2}^{k}\left\langle x^{(2)},x^{(t)}\right\rangle^{{i^{(2)}}_t}\right)...\left(\prod_{p=k-1}^{k}\left\langle x^{(k-1)},x^{(p)}\right\rangle^{{i^{(k-1)}}_p}\right)\left\langle x^{(k)},x^{(k)}\right\rangle^{{i^{(k)}}_k}$$

biçimindedir.

İspat: Teorem 12 ,13 ve 14 ün bir sonucudur. ♦

Teorem 23: 1. k tane vektör için LH(2)- invaryant polinom sabit polinomdur.

2. k tane vektör için nispi LH(2)- invaryant polinom $x^{(1)}=(x_1{}^{(1)},x_2{}^{(1)})$;
$x^{(2)}=(x_1{}^{(2)},x_2{}^{(2)})$; ;…; $x^{(k)}=(x_1{}^{(k)},x_2{}^{(k)})$ olmak üzere

$$f\left(x^{(1)},x^{(2)},...,x^{(k)}\right)=\sum_{i_1{}^{(1)}+i_2{}^{(1)}+...+i_1{}^{(k)}+i_2{}^{(k)}=m} a_{i_1{}^{(1)}i_2{}^{(1)}...i_1{}^{(k)}i_2{}^{(k)}}\left(x_1{}^{(1)}\right)^{i_1{}^{(1)}}\left(x_2{}^{(1)}\right)^{i_2{}^{(1)}}...\left(x_1{}^{(k)}\right)^{i_1{}^{(k)}}\left(x_2{}^{(k)}\right)^{i_2{}^{(k)}}$$

dir.

İspat: 1. $x^{(1)}=(x_1{}^{(1)},x_2{}^{(1)})$; $x^{(2)}=(x_1{}^{(2)},x_2{}^{(2)})$;…; $x^{(k)}=(x_1{}^{(k)},x_2{}^{(k)})$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f\left(\lambda x^{(1)},\lambda x^{(2)},...,\lambda x^{(k)}\right) &= f\left(\left(\lambda x_1{}^{(1)},\lambda x_2{}^{(1)}\right),\left(\lambda x_1{}^{(2)},\lambda x_2{}^{(2)}\right),...,\left(\lambda x_1{}^{(k)},\lambda x_2{}^{(k)}\right)\right)\\ &= f\left(\lambda x_1{}^{(1)},\lambda x_2{}^{(1)},\lambda x_1{}^{(2)},\lambda x_2{}^{(2)},...,\lambda x_1{}^{(k)},\lambda x_2{}^{(k)}\right)\end{aligned}$$

olduğundan R^2 de k tane vektör için LH(2) invaryant polinom

$$f\left(\lambda x_1{}^{(1)},\lambda x_2{}^{(1)},\lambda x_1{}^{(2)},\lambda x_2{}^{(2)},...,\lambda x_1{}^{(k)},\lambda x_2{}^{(k)}\right)=f\left(x_1{}^{(1)},x_2{}^{(1)},x_1{}^{(2)},x_2{}^{(2)},...,x_1{}^{(k)},x_2{}^{(k)}\right)$$

sağlamalıdır. O halde

$$\sum_{i_1{}^{(1)}i_2{}^{(1)}...i_1{}^{(k)}i_2{}^{(k)}} a_{i_1{}^{(1)}i_2{}^{(1)}...i_1{}^{(k)}i_2{}^{(k)}}\lambda^{i_1{}^{(1)}+i_2{}^{(1)}+...+i_1{}^{(k)}+i_2{}^{(k)}}\left(x_1{}^{(1)}\right)^{i_1{}^{(1)}}\left(x_2{}^{(1)}\right)^{i_2{}^{(1)}}...\left(x_1{}^{(k)}\right)^{i_1{}^{(k)}}\left(x_2{}^{(k)}\right)^{i_2{}^{(k)}}=$$
$$=\sum_{i_1{}^{(1)}i_2{}^{(1)}...i_1{}^{(k)}i_2{}^{(k)}} a_{i_1{}^{(1)}i_2{}^{(1)}...i_1{}^{(k)}i_2{}^{(k)}}\left(x_1{}^{(1)}\right)^{i_1{}^{(1)}}\left(x_2{}^{(1)}\right)^{i_2{}^{(1)}}...\left(x_1{}^{(k)}\right)^{i_1{}^{(k)}}\left(x_2{}^{(k)}\right)^{i_2{}^{(k)}}$$

olur. Her $i_1^{(1)}i_2^{(1)}...i_1^{(k)}i_2^{(k)}$ için $a_{i_1^{(1)}i_2^{(1)}...i_1^{(k)}i_2^{(k)}}\left(\lambda^{i_1^{(1)}+i_2^{(1)}+...+i_1^{(k)}+i_2^{(k)}}-1\right)=0$ bulunur. Her $i_1^{(1)}+i_2^{(1)}+...+i_1^{(k)}+i_2^{(k)}\neq 0$ için $a_{i_1^{(1)}i_2^{(1)}...i_1^{(k)}i_2^{(k)}}=0$ olur. $i_1^{(1)}+i_2^{(1)}+...+i_1^{(k)}+i_2^{(k)}=0$ durumunda ise polinom

$$P(x)=a_{0000...00}$$

biçiminde sabit polinom olur.

2- $x^{(1)}=(x_1^{(1)},x_2^{(1)})$; $x^{(2)}=(x_1^{(2)},x_2^{(2)})$; …; $x^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)})$ olmak üzere k tane vektör için nispi LH(2)- invaryant polinom

$$f\left(\lambda x_1^{(1)},\lambda x_2^{(1)},\lambda x_1^{(2)},\lambda x_2^{(2)},...,\lambda x_1^{(k)},\lambda x_2^{(k)}\right)=\varphi(\lambda)\, f\left(x_1^{(1)},x_2^{(1)},x_1^{(2)},x_2^{(2)},...,x_1^{(k)},x_2^{(k)}\right)$$

sağlamalıdır. Buna göre

$$\sum_{i_1^{(1)}i_2^{(1)}...i_1^{(k)}i_2^{(k)}} a_{i_1^{(1)}i_2^{(1)}...i_1^{(k)}i_2^{(k)}}\lambda^{i_1^{(1)}+i_2^{(1)}+...+i_1^{(k)}+i_2^{(k)}}\left(x_1^{(1)}\right)^{i_1^{(1)}}\left(x_2^{(1)}\right)^{i_2^{(1)}}...\left(x_1^{(k)}\right)^{i_1^{(k)}}\left(x_2^{(k)}\right)^{i_2^{(k)}}=$$
$$=\varphi(\lambda)\sum_{i_1^{(1)}i_2^{(1)}...i_1^{(k)}i_2^{(k)}} a_{i_1^{(1)}i_2^{(1)}...i_1^{(k)}i_2^{(k)}}\left(x_1^{(1)}\right)^{i_1^{(1)}}\left(x_2^{(1)}\right)^{i_2^{(1)}}...\left(x_1^{(k)}\right)^{i_1^{(k)}}\left(x_2^{(k)}\right)^{i_2^{(k)}}$$

eşitliği yazılabilir. Buradan her $i_1^{(1)}i_2^{(1)}...i_1^{(k)}i_2^{(k)}$ ve her $\forall\lambda\in R^+$ için

$$a_{i_1^{(1)}i_2^{(1)}...i_1^{(k)}i_2^{(k)}}\lambda^{i_1^{(1)}+i_2^{(1)}+...+i_1^{(k)}+i_2^{(k)}}=\varphi(\lambda)\,a_{i_1^{(1)}i_2^{(1)}...i_1^{(k)}i_2^{(k)}}$$

dir. Bu eşitliği

$$a_{i_1^{(1)}i_2^{(1)}...i_1^{(k)}i_2^{(k)}}\left(\lambda^{i_1^{(1)}+i_2^{(1)}+...+i_1^{(k)}+i_2^{(k)}}-\varphi(\lambda)\right)=0$$

biçiminde yazabiliriz. Buradan $i_1^{(1)}+i_2^{(1)}+...+i_1^{(k)}+i_2^{(k)}\neq 0$ olan her $i_1^{(1)}i_2^{(1)}...i_1^{(k)}i_2^{(k)}$ ve her $\forall\lambda\in R^+$ için $a_{i_1^{(1)}i_2^{(1)}...i_1^{(k)}i_2^{(k)}}=0$ ya da $\lambda^{i_1^{(1)}+i_2^{(1)}+...+i_1^{(k)}+i_2^{(k)}}=\varphi(\lambda)$ elde edilir. Buna göre her $i_1^{(1)}i_2^{(1)}...i_1^{(k)}i_2^{(k)}$ ve her $\forall\lambda\in R^+$ için $a_{i_1^{(1)}i_2^{(1)}...i_1^{(k)}i_2^{(k)}}=0$ ise k tane vektör için nispi LH(2) invaryant polinom sıfır sabit polinomudur. Eğer $\exists\overline{i_1^{(1)}},\overline{i_2^{(1)}},...,\overline{i_1^{(k)}},\overline{i_2^{(k)}}$ öyleki

$a_{\overline{i_1^{(1)}}\,\overline{i_2^{(1)}},\ldots\overline{i_1^{(k)}}\,\overline{i_2^{(k)}}} \neq 0$ ise $\lambda^{\overline{i_1^{(1)}}+\overline{i_2^{(1)}}+\ldots+\overline{i_1^{(k)}}+\overline{i_2^{(k)}}} = \varphi(\lambda)$ dır. Bunu yukarıdaki nispi invaryant polinom ifadesinde yerine yazarsak,

$$\sum_{i_1^{(1)}i_2^{(1)}\ldots i_1^{(k)}i_2^{(k)}} a_{i_1^{(1)}i_2^{(1)}\ldots i_1^{(k)}i_2^{(k)}} \lambda^{i_1^{(1)}+i_2^{(1)}+\ldots+i_1^{(k)}+i_2^{(k)}} \left(x_1^{(1)}\right)^{i_1^{(1)}} \left(x_2^{(1)}\right)^{i_2^{(1)}} \ldots \left(x_1^{(k)}\right)^{i_1^{(k)}} \left(x_2^{(k)}\right)^{i_2^{(k)}} =$$

$$= \lambda^{\overline{i_1^{(1)}}+\overline{i_2^{(1)}}+\ldots+\overline{i_1^{(k)}}+\overline{i_2^{(k)}}} \sum_{i_1^{(1)}i_2^{(1)}\ldots i_1^{(k)}i_2^{(k)}} a_{i_1^{(1)}i_2^{(1)}\ldots i_1^{(k)}i_2^{(k)}} \left(x_1^{(1)}\right)^{i_1^{(1)}} \left(x_2^{(1)}\right)^{i_2^{(1)}} \ldots \left(x_1^{(k)}\right)^{i_1^{(k)}} \left(x_2^{(k)}\right)^{i_2^{(k)}}$$

elde edilir. Buradan her $i_1^{(1)}i_2^{(1)}\ldots i_1^{(k)}i_2^{(k)}$ ve her $\forall\lambda \in R^+$ için

$$a_{i_1^{(1)}i_2^{(1)}\ldots i_1^{(k)}i_2^{(k)}} \left(\lambda^{i_1^{(1)}+i_2^{(1)}+\ldots+i_1^{(k)}+i_2^{(k)}} - \lambda^{\overline{i_1^{(1)}}+\overline{i_2^{(1)}}+\ldots+\overline{i_1^{(k)}}+\overline{i_2^{(k)}}}\right) = 0$$

elde edilir. Buna göre $\overline{i_1^{(1)}} + \overline{i_2^{(1)}} + \ldots + \overline{i_1^{(k)}} + \overline{i_2^{(k)}} = m$ dersek $i_1^{(1)} + i_2^{(1)} + \ldots + i_1^{(k)} + i_2^{(k)} \neq m$ için $a_{i_1^{(1)}i_2^{(1)}\ldots i_1^{(k)}i_2^{(k)}} = 0$ bulunur. Böylece ispat tamamlanır. ♦

Önerme 82: Keyfi LB(2) – invaryant fonksiyon, hem LH(2)- invaryant hem de O(2)- invaryant fonksiyondur. Tersine, eğer bir f fonksiyonu hem LH(2)- invaryant hem de O(2)- invaryant ise f, LB(2) – invaryant fonksiyondur.

İspat: f, LB(2)- dönüşümü olsun. bu durumda

$$f(x) = \lambda g x \quad , \lambda > 0, g \in O(2)$$

biçimindedir. Buna göre LB(2)- invaryant polinom $\forall\lambda > 0$ ve $\forall g \in O(2)$ için

$$f(\lambda g x) = f(x) \tag{34}$$

sağlamalıdır. Özel olarak $\lambda = 1$ alınırsa bu eşitlik $\forall g \in O(2)$ için $f(gx) = f(x)$ olur ki bu da f nin O(2) – invaryant olduğunu gösterir. (34) ifadesinde g olarak birim dönüşümü alırsak $\forall\lambda > 0$ için $f(\lambda x) = f(x)$ biçiminde olur ki bu da f nin LH(2) – invaryant fonksiyon olduğu anlamındadır.

Tersine, f fonksiyonu hem LH(2)- invaryant hem de O(2)- invaryant olsun. bu durumda f nin LB(2)-invaryant olduğunu gösterelim. f, LH(2)- invaryant olduğundan $\forall\lambda > 0$ ve $\forall g \in O(2)$ için

$$f\left(\lambda gx\right) = f\left(gx\right)$$

dir. f, aynı zamanda O(2)- invaryant olduğundan $\forall g \in O(2)$ için

$$f\left(gx\right) = f\left(x\right)$$

biçimindedir. Buna göre $\forall\lambda > 0$ ve $\forall g \in O(2)$ için

$$f\left(\lambda gx\right) = f\left(x\right)$$

olur ki bu f nin LB(2)-invaryant olduğunu gösterir. ♦

Önerme 83: k tane vektör için LB(2)- invaryant polinom sabit polinomdur.

İspat: k tane vektör için LB(2)- invaryant polinom aynı zamanda LH(2) invaryant olması gerektiğinden Teorem 23 e göre sabit polinomdur. ♦

Teorem 24: k tane vektör için nispi LB(2)- invaryant polinom

1. $k = 1$ ise $P(x) = a_m \left\langle x, x\right\rangle^m$ biçimindedir.

2. $k \geq 2$ ve f çift invaryant ise,

$$f\left(x^{(1)},...,x^{(k)}\right) =$$
$$= \sum_{\substack{i^{(1)}{}_1+...+i^{(1)}{}_k+ \\ +i^{(2)}{}_2+...+i^{(2)}{}_k+ \\ +...+ \\ +i^{(k-1)}{}_k+i^{(k)}{}_k=m}} a_{i^{(1)}{}_1...i^{(1)}{}_k i^{(2)}{}_2...i^{(2)}{}_k...i^{(k-1)}{}_k i^{(k)}{}_k} \left(\prod_{s=1}^{k}\left\langle x^{(1)},x^{(s)}\right\rangle^{i^{(1)}{}_s}\right)\left(\prod_{t=2}^{k}\left\langle x^{(2)},x^{(t)}\right\rangle^{i^{(2)}{}_t}\right)...\left(\prod_{p=k-1}^{k}\left\langle x^{(k-1)},x^{(p)}\right\rangle^{i^{(k-1)}{}_p}\right)\left\langle x^{(k)},x^{(k)}\right\rangle^{i^{(k)}{}_k}$$

3. $k \geq 2$ ve f tek invaryant ise,

$$f\left(x^{(1)},...,x^{(k)}\right) =$$
$$= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\leq j}}^{k}\left[x^{(i)} \quad x^{(j)}\right] \sum_{\substack{i^{(1)}{}_1+...+i^{(1)}{}_k+ \\ +i^{(2)}{}_2+...+i^{(2)}{}_k+ \\ +...+ \\ +i^{(k-1)}{}_k+i^{(k)}{}_k=m}} a_{i^{(1)}{}_1...i^{(1)}{}_k i^{(2)}{}_2...i^{(2)}{}_k...i^{(k-1)}{}_k i^{(k)}{}_k} \left(\prod_{s=1}^{k}\left\langle x^{(1)},x^{(s)}\right\rangle^{i^{(1)}{}_s}\right)\left(\prod_{t=2}^{k}\left\langle x^{(2)},x^{(t)}\right\rangle^{i^{(2)}{}_t}\right)...\left(\prod_{p=k-1}^{k}\left\langle x^{(k-1)},x^{(p)}\right\rangle^{i^{(k-1)}{}_p}\right)\left\langle x^{(k)},x^{(k)}\right\rangle^{i^{(k)}{}_k}$$

biçimindedir.

İspat: 1. Bir tane vektör için nispi LB(2)- invaryant polinom $\forall\lambda > 0$ ve $\forall g \in O(2)$ için

$$f(\lambda gx) = \varphi(\lambda, g)\, f(x)$$

biçiminde olmalıdır. R^2 de $x = (x_1, x_2)$ için $\lambda gx = g\lambda x$ dir. Çünkü,

$$\lambda gx = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(g_{11}x_1 + g_{12}x_2) \\ \lambda(g_{21}x_1 + g_{22}x_2) \end{pmatrix}$$

$$g\lambda x = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(g_{11}x_1 + g_{12}x_2) \\ \lambda(g_{21}x_1 + g_{22}x_2) \end{pmatrix}$$

dir. Böylece

$$f(\lambda gx) = \sum_{i=0}^{n} a_i \langle \lambda x, \lambda x \rangle^i$$

olur. Şimdi nispi LB(2)- invaryant polinomu bulalım. Bunun için bir tane vektörle tanımlı nispi O(2)- invaryant polinomu bulmamız gerekir. Bir tane vektörle tanımlı nispi O(2)- invaryant polinom $f(gx) = \lambda(g)\, f(x)$ eşitliğini sağlayan bir polinomdur. Burada verilen $\lambda(g)$ çarpanı [48] e göre $\lambda(g) = 1$ ya da $\lambda(g) = \det g$ dir. $\lambda(g) = 1$ ise f çift invaryant polinom, $\lambda(g) = \det g$ ise f tek invaryant polinomdur. Buna göre eğer f çift invaryant polinom ise mutlak anlamda O(2)- invaryant polinomdur ve yine [48] e göre $\langle x, x \rangle$ ile üretilebilir. Burada eğer f tek invaryant polinom ise bu durumda $\lambda(g) = \det g$ dir. ortogonal dönüşümlerin determinantları ± 1 olduklarından dolayı özel olarak $\det g = 1$ olması durumunda çift invaryant polinoma indirgeneceğinden yine $\langle x, x \rangle$ ile üretilebilir. Bu durumda bir tane vektörle tanımlı nispi O(2)- invaryant polinom

$$f(gx) = \det g \sum_{i=0}^{n} a_i \langle x, x \rangle^i$$

eşitliğini sağlamalıdır. Ayrıca, Önerme 82, keyfi LB(2)- invaryant polinom için olduğu kadar keyfi nispi LB(2)- invaryant polinomlar için de doğrudur. Buna göre nispi LB(2)- invaryant polinom

$$f\left(g\lambda x\right)=\det g\left(\varphi(\lambda)\right)\sum_{i=0}^{n}a_i\left\langle x,x\right\rangle^i$$

biçiminde olur. Buradan

$$\sum_{i=0}^{n}a_i\lambda^{2i}\left\langle x,x\right\rangle^i=\sum_{i=0}^{n}\det g\left(\varphi(\lambda)\right)a_i\left\langle x,x\right\rangle^i$$

eşitliği elde dilir. Buradan $\forall i$ ve $\forall\lambda\in R^+$ için

$$a_i\lambda^{2i}=a_i\left(\varphi(\lambda)\right)\det g$$

bulunur. Buradan $\forall i$ ve $\forall\lambda\in R^+$ için $a_i\left(\lambda^{2i}-\left(\varphi(\lambda)\right)\det g\right)=0$ bulunur. Böylece $\forall i$ ve $\forall\lambda\in R^+$ için $a_i=0$ veya $\varphi(\lambda)=\dfrac{\lambda^{2i}}{\det g}$ dir. Eğer $\forall i$ için $a_i=0$ ise nispi LB(2)- invaryant polinom sıfır polinomudur. En az bir i için $a_{\bar{i}}\neq 0$ olsun. Bu durumda $\forall i$ ve $\forall\lambda\in R^+$ için $\varphi(\lambda)=\dfrac{\lambda^{2\bar{i}}}{\det g}$ dır. $g\in O(n)$ için $\det g=\pm 1$ olduğundan $\varphi(\lambda,g)=\pm\lambda^{2\bar{i}}$ dir. şimdi tekrar nispi LB(2)- invaryant polinoma dönelim.

$$\sum_{i=0}^{n}a_i\lambda^{2i}\left\langle x,x\right\rangle^i=\sum_{i=0}^{n}\pm a_i\lambda^{2\bar{i}}\left\langle x,x\right\rangle^i$$

bulunur. Buradan $\forall i$ ve $\forall\lambda\in R^+$ için $a_i\left(\lambda^{2i}\mp\lambda^{2\bar{i}}\right)=0$ elde edilir. Böylece bu ifadeyi incelediğimizde, $\lambda^{2i}+\lambda^{2\bar{i}}$ ifadesi her zaman sıfırdan farklı olacağından her i için $a_i=0$ bulunur ki bu da nispi LB(2)- invaryant polinomun sıfır polinom olduğunu gösterir. $i\neq\bar{i}$ için $\lambda^{2i}-\lambda^{2\bar{i}}\neq 0$ olduğundan her $i\neq\bar{i}$ için $a_i=0$ bulunur. Bu durumda nispi LB(2)- invaryant polinom $\bar{i}=m$ dersek,

$$P(x) = a_m \left\langle x, x \right\rangle^m$$

biçiminde olur. Bu önermenin tersi de doğrudur. Yani Keyfi $P(x) = a_m \left\langle x, x \right\rangle^m$ biçimindeki polinom nispi LB(2)- invaryant polinomdur. Çarpanı da $\varphi(\lambda) = \lambda^{2m}$ dır.

2. k tane vektör için tanımlı çift nispi O(2)- invaryant polinom

$$f\left(x^{(1)}, \dots, x^{(k)}\right) =$$
$$= \sum_{i^{(1)}_1 \dots i^{(1)}_k i^{(2)}_{2 \dots} i^{(2)}_k \dots i^{k-1}_k i^{(k)}_k} a_{i^{(1)}_1 \dots i^{(1)}_k i^{(2)}_{2 \dots} i^{(2)}_k \dots i^{k-1}_k i^{(k)}_k} \left(\prod_{s=1}^{k} \left\langle x^{(1)}, x^{(s)} \right\rangle^{i^{(1)}_s} \right) \left(\prod_{t=2}^{k} \left\langle x^{(2)}, x^{(t)} \right\rangle^{i^{(2)}_t} \right) \dots \left(\prod_{p=k-1}^{k} \left\langle x^{(k-1)}, x^{(p)} \right\rangle^{i^{(k-1)}_p} \right) \left\langle x^{(k)}, x^{(k)} \right\rangle^{i^{(k)}_k}$$

biçimindedir. Buna göre nispi LB(2)- invaryant çift polinom

$$f\left(\lambda x^{(1)}, \dots, \lambda x^{(k)}\right) = \sum_{i^{(1)}_1 \dots i^{(1)}_k i^{(2)}_{2 \dots} i^{(2)}_k \dots i^{(k-1)}_k i^{(k)}_k} a_{i^{(1)}_1 \dots i^{(1)}_k i^{(2)}_{2 \dots} i^{(2)}_k \dots i^{(k-1)}_k i^{(k)}_k} \left(\prod_{s=1}^{k} \left\langle \lambda x^{(1)}, \lambda x^{(s)} \right\rangle^{i^{(1)}_s} \right) \left(\prod_{t=2}^{k} \left\langle \lambda x^{(2)}, \lambda x^{(t)} \right\rangle^{i^{(2)}_t} \right) \dots \left(\prod_{p=k-1}^{k} \left\langle \lambda x^{(k-1)}, \lambda x^{(p)} \right\rangle^{i^{(k-1)}_p} \right) \left\langle \lambda x^{(k)}, \lambda x^{(k)} \right\rangle^{i^k_k}$$
$$= \sum_{i^{(1)}_1 \dots i^{(1)}_k i^{(2)}_{2 \dots} i^{(2)}_k \dots i^{(k-1)}_k i^{(k)}_k} \varphi(\lambda) a_{i^{(1)}_1 \dots i^{(1)}_k i^{(2)}_{2 \dots} i^{(2)}_k \dots i^{(k-1)}_k i^{(k)}_k} \left(\prod_{s=1}^{k} \left\langle \lambda x^{(1)}, \lambda x^{(s)} \right\rangle^{i^{(1)}_s} \right) \left(\prod_{t=2}^{k} \left\langle \lambda x^{(2)}, \lambda x^{(t)} \right\rangle^{i^{(2)}_t} \right) \dots \left(\prod_{p=k-1}^{k} \left\langle \lambda x^{(k-1)}, \lambda x^{(p)} \right\rangle^{i^{(k-1)}_p} \right) \left\langle \lambda x^{(k)}, \lambda x^{(k)} \right\rangle^{i^k_k}$$

elde edilir. Buradan her $i^1_1 \dots i^1_k i^2_{2 \dots} i^2_k \dots i^{k-1}_k i^k_k$ ve her $\forall \lambda \in R^+$ için

$$a_{i^1_1 \dots i^1_k i^2_{2 \dots} i^2_k \dots i^{k-1}_k i^k_k} \left(\lambda^{2(i^1_1 + \dots + i^1_k + i^2_2 + \dots + i^2_k + \dots + i^{k-1}_k + i^k_k)} - \varphi(\lambda) \right) = 0$$

bulunur. Buradan da her $i^1_1 \dots i^1_k i^2_{2 \dots} i^2_k \dots i^{k-1}_k i^k_k$ ve her $\forall \lambda \in R^+$ için $a_{i^1_1 \dots i^1_k i^2_{2 \dots} i^2_k \dots i^{k-1}_k i^k_k} = 0$ ise LB(2) çift invaryant polinom sıfır sabit polinomu olur. Eğer $\exists \overline{i^1_1} \dots \overline{i^1_k}\, \overline{i^2_2} \dots \overline{i^2_k} \dots \overline{i^{k-1}_k}\, \overline{i^k_k}$ ve her $\forall \lambda \in R^+$ için $a_{\overline{i^1_1} \dots \overline{i^1_k}\, \overline{i^2_2} \dots \overline{i^2_k} \dots \overline{i^{k-1}_k}\, \overline{i^k_k}} \neq 0$ ise ; Bu takdirde, $\varphi(\lambda) = \lambda^{2(\overline{i^1_1} + \dots + \overline{i^1_k} + \overline{i^2_2} + \dots + \overline{i^2_k} + \dots + \overline{i^{k-1}_k} + \overline{i^k_k})}$ olur. Veya $\overline{i^1_1} + \dots + \overline{i^1_k} + \overline{i^2_2} + \dots + \overline{i^2_k} + \dots + \overline{i^{k-1}_k} + \overline{i^k_k} = m$ dersek $\varphi(\lambda) = \lambda^{2m}$ olur. Buna göre nispi LB(2) invaryant polinom

$$f\left(\lambda x^{(1)}, \dots, \lambda x^{(k)}\right) =$$
$$= \sum_{i^{(1)}_1 \dots i^{(1)}_k i^{(2)}_{2 \dots} i^{(2)}_k \dots i^{(k-1)}_k i^{(k)}_k} \lambda^{2m} a_{i^{(1)}_1 \dots i^{(1)}_k i^{(2)}_{2 \dots} i^{(2)}_k \dots i^{(k-1)}_k i^{(k)}_k} \left(\prod_{s=1}^{k} \left\langle \lambda x^{(1)}, \lambda x^{(s)} \right\rangle^{i^{(1)}_s} \right) \dots \left(\prod_{p=k-1}^{k} \left\langle \lambda x^{(k-1)}, \lambda x^{(p)} \right\rangle^{i^{(k-1)}_p} \right) \left\langle \lambda x^{(k)}, \lambda x^{(k)} \right\rangle^{i^k_k}$$

dir. Buradan her $i^{(1)}{}_1 ... i^{(1)}{}_k i^{(2)}{}_{2...} i^{(2)}{}_k ... i^{(k-1)}{}_k i^{(k)}{}_k$ ve her $\forall\lambda \in R^+$ için

$$a_{i^{(1)}{}_1 ... i^{(1)}{}_k i^{(2)}{}_{2...} i^{(2)}{}_k ... i^{(k-1)}{}_k i^{(k)}{}_k}\left(\lambda^{2(i^{(1)}{}_1+...+i^{(1)}{}_k+i^{(2)}{}_2+...+i^{(2)}{}_k+...+i^{(k-1)}{}_k+i^{(k)}{}_k)} - \lambda^{2m}\right) = 0$$

elde edilir. Buna göre $i^{(1)}{}_1 + ... + i^{(1)}{}_k + i^{(2)}{}_2 + ... + i^{(2)}{}_k + ... + i^{(k-1)}{}_k + i^{(k)}{}_k \neq m$ olan her $i^{(1)}{}_1 ... i^{(1)}{}_k i^{(2)}{}_{2...} i^{(2)}{}_k ... i^{(k-1)}{}_k i^{(k)}{}_k$ ve her $\forall\lambda \in R^+$ için $a_{i^{(1)}{}_1 ... i^{(1)}{}_k i^{(2)}{}_{2...} i^{(2)}{}_k ... i^{(k-1)}{}_k i^{(k)}{}_k} = 0$ dır. Böylece, LB(2) çift invaryant polinom

$$f\left(x^{(1)},...,x^{(k)}\right) = \sum_{i^{(1)}{}_1 ... i^{(1)}{}_k i^{(2)}{}_{2...} i^{(2)}{}_k ... i^{k-1}{}_k i^{(k)}{}_k} a_{i^{(1)}{}_1 ... i^{(1)}{}_k i^{(2)}{}_{2...} i^{(2)}{}_k ... i^{k-1}{}_k i^{(k)}{}_k}\left(\prod_{s=1}^{k}\left\langle x^{(1)}, x^{(s)}\right\rangle^{i^{(1)}{}_s}\right)\left(\prod_{t=2}^{k}\left\langle x^{(2)}, x^{(t)}\right\rangle^{i^{(2)}{}_t}\right)...\left(\prod_{p=k-1}^{k}\left\langle x^{(k-1)}, x^{(p)}\right\rangle^{i^{(k-1)}{}_p}\right)\left\langle x^{(k)}, x^{(k)}\right\rangle^{i^{(k)}{}_k}$$

olur.

3. k tane vektör için tanımlı tek nispi O(2)- invaryant polinom

$$f\left(x^{(1)},...,x^{(k)}\right) = \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{k}\left[x^{(i)} \quad x^{(j)}\right]\sum_{i^{(1)}{}_1 ... i^{(1)}{}_k i^{(2)}{}_{2...} i^{(2)}{}_k ... i^{k-1}{}_k i^{(k)}{}_k} a^{(i,j)}{}_{i^{(1)}{}_1 ... i^{(1)}{}_k i^{(2)}{}_{2...} i^{(2)}{}_k ... i^{k-1}{}_k i^{(k)}{}_k}\left(\prod_{s=1}^{k}\left\langle x^{(1)}, x^{(s)}\right\rangle^{i^{(1)}{}_s}\right)\left(\prod_{t=2}^{k}\left\langle x^{(2)}, x^{(t)}\right\rangle^{i^{(2)}{}_t}\right)...\left(\prod_{p=k-1}^{k}\left\langle x^{(k-1)}, x^{(p)}\right\rangle^{i^{(k-1)}{}_p}\right)\left\langle x^{(k)}, x^{(k)}\right\rangle^{i^{(k)}{}_k}$$

biçimindedir. Buna göre tek nispi LB(2)- invaryant polinom

$$\begin{aligned}
& f\left(\lambda x^{(1)},...,\lambda x^{(k)}\right) = \\
& = \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{k}\left[\lambda x^{(i)} \quad \lambda x^{(j)}\right]\sum_{i^{(1)}{}_1+...+i^{(1)}{}_k+i^{(2)}{}_2+...+i^{(2)}{}_k+...+i^{k-1}{}_k+i^{(k)}{}_k=m} a^{(i,j)}{}_{i^{(1)}{}_1 ... i^{(1)}{}_k i^{(2)}{}_{2...} i^{(2)}{}_k ... i^{k-1}{}_k i^{(k)}{}_k}\left(\prod_{s=1}^{k}\left\langle \lambda x^{(1)}, \lambda x^{(s)}\right\rangle^{i^{(1)}{}_s}\right)\left(\prod_{t=2}^{k}\left\langle \lambda x^{(2)}, \lambda x^{(t)}\right\rangle^{i^{(2)}{}_t}\right)...\left(\prod_{p=k-1}^{k}\left\langle \lambda x^{(k-1)}, \lambda x^{(p)}\right\rangle^{i^{(k-1)}{}_p}\right)\left\langle \lambda x^{(k)}, \lambda x^{(k)}\right\rangle^{i^{(k)}{}_k} \\
& = \varphi(\lambda)\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{k}\left[x^{(i)} \quad x^{(j)}\right]\sum_{i^{(1)}{}_1+...+i^{(1)}{}_k+i^{(2)}{}_2+...+i^{(2)}{}_k+...+i^{k-1}{}_k+i^{(k)}{}_k=m} a^{(i,j)}{}_{i^{(1)}{}_1 ... i^{(1)}{}_k i^{(2)}{}_{2...} i^{(2)}{}_k ... i^{k-1}{}_k i^{(k)}{}_k}\left(\prod_{s=1}^{k}\left\langle x^{(1)}, x^{(s)}\right\rangle^{i^{(1)}{}_s}\right)\left(\prod_{t=2}^{k}\left\langle x^{(2)}, x^{(t)}\right\rangle^{i^{(2)}{}_t}\right)...\left(\prod_{p=k-1}^{k}\left\langle x^{(k-1)}, x^{(p)}\right\rangle^{i^{(k-1)}{}_p}\right)\left\langle x^{(k)}, x^{(k)}\right\rangle^{i^{(k)}{}_k}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan her $i^{(1)}{}_1 ... i^{(1)}{}_k i^{(2)}{}_{2...} i^{(2)}{}_k ... i^{k-1}{}_k i^{(k)}{}_k$ ve her $\forall\lambda \in R^+$ için

$$a_{i^{(1)}{}_1 ... i^{(1)}{}_k i^{(2)}{}_{2...} i^{(2)}{}_k ... i^{(k-1)}{}_k i^{(k)}{}_k}\left(\lambda^{2(i^{(1)}{}_1+...+i^{(1)}{}_k+i^{(2)}{}_2+...+i^{(2)}{}_k+...+i^{(k-1)}{}_k+i^{(k)}{}_k+1)} - \varphi(\lambda)\right) = 0$$

bulunur. Buradan da her $i^{(1)}{}_1 ... i^{(1)}{}_k i^{(2)}{}_{2...} i^{(2)}{}_k ... i^{(k-1)}{}_k i^{(k)}{}_k$ ve her $\forall\lambda \in R^+$ için $a_{i^{(1)}{}_1 ... i^{(1)}{}_k i^{(2)}{}_{2...} i^{(2)}{}_k ... i^{(k-1)}{}_k i^{(k)}{}_k} = 0$ ise LB(2) çift invaryant polinom sıfır sabit polinomu olur. Eğer $\exists \overline{i^{(1)}{}_1} ... \overline{i^{(1)}{}_k}\, \overline{i^{(2)}{}_2} ... \overline{i^{(2)}{}_k} ... \overline{i^{(k-1)}{}_k}\, \overline{i^{(k)}{}_k}$ ve her $\forall\lambda \in R^+$ için $a_{\overline{i^{(1)}{}_1} ... \overline{i^{(1)}{}_k}\, \overline{i^{(2)}{}_2} ... \overline{i^{(2)}{}_k} ... \overline{i^{(k-1)}{}_k}\, \overline{i^{(k)}{}_k}} \neq 0$ ise ; Bu takdirde,

$\varphi(\lambda)=\lambda^{2(\overline{i^{(1)}}_1+\ldots+\overline{i^{(1)}}_k+\overline{i^{(2)}}_2+\ldots+\overline{i^{(2)}}_k+\ldots+\overline{i^{(k-1)}}_k+\overline{i^{(k)}}_k+1)}$ olur. Veya $\overline{i^{(1)}}_1+\ldots+\overline{i^{(1)}}_k+\overline{i^{(2)}}_2+\ldots+\overline{i^{(2)}}_k+\ldots+\overline{i^{(k-1)}}_k+\overline{i^{(k)}}_k=m$ dersek $\varphi(\lambda)=\lambda^{2m+2}$ olur. Buna göre tek nispi LB(2) invaryant polinom

$$f\left(\lambda x^{(1)},\ldots,\lambda x^{(k)}\right)=$$
$$=\lambda^{2m+2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{k}\left[x^{(i)}\quad x^{(j)}\right]\sum_{i^1_1+\ldots+i^1_k+i^2_2+\ldots+i^2_k+\ldots+i^{k-1}_k+i^k_k=m} a^{(i,j)}{}_{i^1_1\ldots i^1_k i^2_{2\ldots} i^2_k\ldots i^{k-1}_k i^k_k}\left(\prod_{s=1}^{k}\left\langle x^{(1)},x^{(s)}\right\rangle^{i^1_s}\right)\left(\prod_{t=2}^{k}\left\langle x^{(2)},x^{(t)}\right\rangle^{i^2_t}\right)\ldots\left(\prod_{p=k-1}^{k}\left\langle x^{(k-1)},x^{(p)}\right\rangle^{i^{k-1}_p}\right)\left\langle x^{(k)},x^{(k)}\right\rangle^{i^k_k}$$

dir. Buradan her $i^1_1\ldots i^1_k i^2_{2\ldots} i^2_k\ldots i^{k-1}_k i^k_k$ ve her $\forall\lambda\in R^+$ için

$$a_{i^1_1\ldots i^1_k i^2_{2\ldots} i^2_k\ldots i^{k-1}_k i^k_k}\left(\lambda^{2(i^1_1+\ldots+i^1_k+i^2_2+\ldots+i^2_k+\ldots+i^{k-1}_k+i^k_k+1)}-\lambda^{2m+2}\right)=0$$

elde edilir. Buna göre $i^1_1+\ldots+i^1_k+i^2_2+\ldots+i^2_k+\ldots+i^{k-1}_k+i^k_k\neq m$ olan her $i^1_1\ldots i^1_k i^2_{2\ldots} i^2_k\ldots i^{k-1}_k i^k_k$ ve her $\forall\lambda\in R^+$ için $a_{i^1_1\ldots i^1_k i^2_{2\ldots} i^2_k\ldots i^{k-1}_k i^k_k}=0$ dır. Böylece, tek nispi LB(2) invaryant polinom

$$f\left(x^{(1)},\ldots,x^{(k)}\right)=$$
$$=\sum_{\substack{i,j=1\\ i\leq j}}^{k}\left[x^{(i)}\quad x^{(j)}\right]\sum_{\substack{i^{(1)}_1+\ldots+i^{(1)}_k+\\ +i^{(2)}_2+\ldots+i^{(2)}_k+\\ +\ldots+\\ +i^{(k-1)}_k+i^{(k)}_k=m}} a_{i^{(1)}_1\ldots i^{(1)}_k i^{(2)}_2\ldots i^{(2)}_k\ldots i^{(k-1)}_k i^{(k)}_k}\left(\prod_{s=1}^{k}\left\langle x^{(1)},x^{(s)}\right\rangle^{i^{(1)}_s}\right)\left(\prod_{t=2}^{k}\left\langle x^{(2)},x^{(t)}\right\rangle^{i^{(2)}_t}\right)\ldots\left(\prod_{p=k-1}^{k}\left\langle x^{(k-1)},x^{(p)}\right\rangle^{i^{(k-1)}_p}\right)\left\langle x^{(k)},x^{(k)}\right\rangle^{i^{(k)}_k}$$

olur.♦

Teorem 25: k tane vektör için LB(2)- invaryant rasyonel fonksiyon

1. $k=1$ ise sabittir.

2. $k\geq 2$ ise . f çift ise,

$$f\left(x^{(1)},\ldots,x^{(k)}\right)=$$
$$=\frac{\displaystyle\sum_{i^1_1+\ldots+i^1_k+i^2_2+\ldots+i^2_k+\ldots+i^{k-1}_k+i^k_k=m} a_{i^1_1\ldots i^1_k i^2_{2\ldots} i^2_k\ldots i^{k-1}_k i^k_k}\left(\prod_{s=1}^{k}\left\langle x^{(1)},x^{(s)}\right\rangle^{i^1_s}\right)\left(\prod_{t=2}^{k}\left\langle x^{(2)},x^{(t)}\right\rangle^{i^2_t}\right)\ldots\left(\prod_{p=k-1}^{k}\left\langle x^{(k-1)},x^{(p)}\right\rangle^{i^{k-1}_p}\right)\left\langle x^{(k)},x^{(k)}\right\rangle^{i^k_k}}{\displaystyle\sum_{i^1_1+\ldots+i^1_k+i^2_2+\ldots+i^2_k+\ldots+i^{k-1}_k+i^k_k=m} a_{i^1_1\ldots i^1_k i^2_{2\ldots} i^2_k\ldots i^{k-1}_k i^k_k}\left(\prod_{s=1}^{k}\left\langle x^{(1)},x^{(s)}\right\rangle^{i^1_s}\right)\left(\prod_{t=2}^{k}\left\langle x^{(2)},x^{(t)}\right\rangle^{i^2_t}\right)\ldots\left(\prod_{p=k-1}^{k}\left\langle x^{(k-1)},x^{(p)}\right\rangle^{i^{k-1}_p}\right)\left\langle x^{(k)},x^{(k)}\right\rangle^{i^k_k}}$$

f tek ise,

$$f\left(x^{(1)},\ldots,x^{(k)}\right)=$$
$$=\frac{\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{k}\left[x^{(i)} \quad x^{(j)}\right]\sum_{i^1_1+\ldots+i^1_k+i^2_2+\ldots+i^2_k+\ldots+i^{k-1}_k+i^k_k=m} a^{(i)(j)}_{i^1_1\ldots i^1_k i^2_2\ldots i^2_k\ldots i^{k-1}_k i^k_k}\left(\prod_{s=1}^{k}\left\langle x^{(1)},x^{(s)}\right\rangle^{i^1_s}\right)\left(\prod_{t=2}^{k}\left\langle x^{(2)},x^{(t)}\right\rangle^{i^2_t}\right)\ldots\left(\prod_{p=k-1}^{k}\left\langle x^{(k-1)},x^{(p)}\right\rangle^{i^{k-1}_p}\right)\left\langle x^{(k)},x^{(k)}\right\rangle^{i^k_k}}{\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{k}\left[x^{(i)} \quad x^{(j)}\right]\sum_{i^1_1+\ldots+i^1_k+i^2_2+\ldots+i^2_k+\ldots+i^{k-1}_k+i^k_k=m} a^{(i)(j)}_{i^1_1\ldots i^1_k i^2_2\ldots i^2_k\ldots i^{k-1}_k i^k_k}\left(\prod_{s=1}^{k}\left\langle x^{(1)},x^{(s)}\right\rangle^{i^1_s}\right)\left(\prod_{t=2}^{k}\left\langle x^{(2)},x^{(t)}\right\rangle^{i^2_t}\right)\ldots\left(\prod_{p=k-1}^{k}\left\langle x^{(k-1)},x^{(p)}\right\rangle^{i^{k-1}_p}\right)\left\langle x^{(k)},x^{(k)}\right\rangle^{i^k_k}}$$

biçimindedir.

İspat: 1. Bir tane vektör için nispi LB(2)- invaryant polinom $P(x)=a_k\left\langle x,x\right\rangle^k$ şeklinde olduğundan ve LB(2)- invaryant rasyonel fonksiyon ağırlık fonksiyonları eşit iki nispi LB(2)- invaryant polinomun oranı biçiminde olduğundan , LB(2)- invaryant rasyonel fonksiyon

$$f(x)=\frac{a_k\left\langle x,x\right\rangle^k}{b_k\left\langle x,x\right\rangle^k}=\frac{a_k}{b_k}=c_k$$

sabit polinomdur.

2. Keyfi LB(2)- invaryant rasyonel fonksiyon çarpanları eşit iki tek ya da iki çift nispi LB(2) invaryant polinomun oranı biçimindedir. k tane vektör için tanımlı tek nispi LB(2)- invaryant polinom

$$f\left(x^{(1)},\ldots,x^{(k)}\right)=$$
$$=\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{k}\left[x^{(i)} \quad x^{(j)}\right]\sum_{i^1_1+\ldots+i^1_k+i^2_2+\ldots+i^2_k+\ldots+i^{k-1}_k+i^k_k=m} a^{(i)(j)}_{i^1_1\ldots i^1_k i^2_2\ldots i^2_k\ldots i^{k-1}_k i^k_k}\left(\prod_{s=1}^{k}\left\langle x^{(1)},x^{(s)}\right\rangle^{i^1_s}\right)\left(\prod_{t=2}^{k}\left\langle x^{(2)},x^{(t)}\right\rangle^{i^2_t}\right)\ldots\left(\prod_{p=k-1}^{k}\left\langle x^{(k-1)},x^{(p)}\right\rangle^{i^{k-1}_p}\right)\left\langle x^{(k)},x^{(k)}\right\rangle^{i^k_k}$$

biçiminde idi. Buna göre LB(2)- invaryant rasyonel fonksiyon

$$f\left(x^{(1)},\ldots,x^{(k)}\right)=$$
$$=\frac{\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{k}\left[x^{(i)} \quad x^{(j)}\right]\sum_{i^1_1+\ldots+i^1_k+i^2_2+\ldots+i^2_k+\ldots+i^{k-1}_k+i^k_k=m} a^{(i)(j)}_{i^1_1\ldots i^1_k i^2_2\ldots i^2_k\ldots i^{k-1}_k i^k_k}\left(\prod_{s=1}^{k}\left\langle x^{(1)},x^{(s)}\right\rangle^{i^1_s}\right)\left(\prod_{t=2}^{k}\left\langle x^{(2)},x^{(t)}\right\rangle^{i^2_t}\right)\ldots\left(\prod_{p=k-1}^{k}\left\langle x^{(k-1)},x^{(p)}\right\rangle^{i^{k-1}_p}\right)\left\langle x^{(k)},x^{(k)}\right\rangle^{i^k_k}}{\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{k}\left[x^{(i)} \quad x^{(j)}\right]\sum_{i^1_1+\ldots+i^1_k+i^2_2+\ldots+i^2_k+\ldots+i^{k-1}_k+i^k_k=m} b^{(i)(j)}_{i^1_1\ldots i^1_k i^2_2\ldots i^2_k\ldots i^{k-1}_k i^k_k}\left(\prod_{s=1}^{k}\left\langle x^{(1)},x^{(s)}\right\rangle^{i^1_s}\right)\left(\prod_{t=2}^{k}\left\langle x^{(2)},x^{(t)}\right\rangle^{i^2_t}\right)\ldots\left(\prod_{p=k-1}^{k}\left\langle x^{(k-1)},x^{(p)}\right\rangle^{i^{k-1}_p}\right)\left\langle x^{(k)},x^{(k)}\right\rangle^{i^k_k}}$$

şeklinde olur. Benzer şekilde k tane vektör için tanımlı çift nispi LB(2)- invaryant polinom

$$f\left(x^{(1)},\dots,x^{(k)}\right)=$$

$$=\sum_{i^1_1+\dots+i^1_k+i^2_2+\dots+i^2_k+\dots+i^{k-1}_k+i^k_k=m} a_{i^1_1\dots i^1_k i^2_2\dots i^2_k\dots i^{k-1}_k i^k_k}\left(\prod_{s=1}^{k}\left\langle x^{(1)},x^{(s)}\right\rangle^{i^1_s}\right)\left(\prod_{t=2}^{k}\left\langle x^{(2)},x^{(t)}\right\rangle^{i^2_t}\right)\dots\left(\prod_{p=k-1}^{k}\left\langle x^{(k-1)},x^{(p)}\right\rangle^{i^{k-1}_p}\right)\left\langle x^{(k)},x^{(k)}\right\rangle^{i^k_k}$$

biçiminde idi. Buna göre LB(2)- invaryant rasyonel fonksiyon

$$f\left(x^{(1)},\dots,x^{(k)}\right)=$$

$$=\frac{\displaystyle\sum_{i^1_1+\dots+i^1_k+i^2_2+\dots+i^2_k+\dots+i^{k-1}_k+i^k_k=m} a_{i^1_1\dots i^1_k i^2_2\dots i^2_k\dots i^{k-1}_k i^k_k}\left(\prod_{s=1}^{k}\left\langle x^{(1)},x^{(s)}\right\rangle^{i^1_s}\right)\left(\prod_{t=2}^{k}\left\langle x^{(2)},x^{(t)}\right\rangle^{i^2_t}\right)\dots\left(\prod_{p=k-1}^{k}\left\langle x^{(k-1)},x^{(p)}\right\rangle^{i^{k-1}_p}\right)\left\langle x^{(k)},x^{(k)}\right\rangle^{i^k_k}}{\displaystyle\sum_{i^1_1+\dots+i^1_k+i^2_2+\dots+i^2_k+\dots+i^{k-1}_k+i^k_k=m} b_{i^1_1\dots i^1_k i^2_2\dots i^2_k\dots i^{k-1}_k i^k_k}\left(\prod_{s=1}^{k}\left\langle x^{(1)},x^{(s)}\right\rangle^{i^1_s}\right)\left(\prod_{t=2}^{k}\left\langle x^{(2)},x^{(t)}\right\rangle^{i^2_t}\right)\dots\left(\prod_{p=k-1}^{k}\left\langle x^{(k-1)},x^{(p)}\right\rangle^{i^{k-1}_p}\right)\left\langle x^{(k)},x^{(k)}\right\rangle^{i^k_k}}$$

biçiminde bir ifadeye sahip olur. ♦

2.10. $\boldsymbol{R}\left(x_1,x_2,\dots,x_k\right)^{LB(2)}$ - Cisminin Üreteç Cümleleri

Teorem 26: k tane vektör için LB(2)- invaryant rasyonel fonksiyonlar cisminin üreteç cümlesi

1. $k=1$ ise $\{1\}$ dir.

2. $k\geq 2$ ise

$$\left\{\frac{\left\langle x^{(i)},x^{(j)}\right\rangle}{\left\langle x^{(1)},x^{(1)}\right\rangle},\ i\leq j;i,j=1,\dots,k\right\}$$

dir.

İspat: 1. Bir tane vektör için LB(2) invaryant rasyonel fonksiyon sabit olduğundan keyfi reel sayı 1 ile üretilebilir.

2. k tane vektör için çift LB(2) invaryant rasyonel fonksiyon

$$f\left(x^{(1)},\dots,x^{(k)}\right)=$$

$$=\frac{\displaystyle\sum_{i^1_1+\dots+i^1_k+i^2_2+\dots+i^2_k+\dots+i^{k-1}_k+i^k_k=m} a_{i^1_1\dots i^1_k i^2_2\dots i^2_k\dots i^{k-1}_k i^k_k}\left(\prod_{s=1}^{k}\left\langle x^{(1)},x^{(s)}\right\rangle^{i^1_s}\right)\left(\prod_{t=2}^{k}\left\langle x^{(2)},x^{(t)}\right\rangle^{i^2_t}\right)\dots\left(\prod_{p=k-1}^{k}\left\langle x^{(k-1)},x^{(p)}\right\rangle^{i^{k-1}_p}\right)\left\langle x^{(k)},x^{(k)}\right\rangle^{i^k_k}}{\displaystyle\sum_{i^1_1+\dots+i^1_k+i^2_2+\dots+i^2_k+\dots+i^{k-1}_k+i^k_k=m} b_{i^1_1\dots i^1_k i^2_2\dots i^2_k\dots i^{k-1}_k i^k_k}\left(\prod_{s=1}^{k}\left\langle x^{(1)},x^{(s)}\right\rangle^{i^1_s}\right)\left(\prod_{t=2}^{k}\left\langle x^{(2)},x^{(t)}\right\rangle^{i^2_t}\right)\dots\left(\prod_{p=k-1}^{k}\left\langle x^{(k-1)},x^{(p)}\right\rangle^{i^{k-1}_p}\right)\left\langle x^{(k)},x^{(k)}\right\rangle^{i^k_k}}$$

biçiminde idi. Burada $\left\langle x^{(1)},x^{(1)}\right\rangle\neq 0$ olmak üzere pay ve paydayı $\left\langle x^{(1)},x^{(1)}\right\rangle^{m}$ sayısına bölersek, $i^1_1 + ... + i^1_k + i^2_2 + ... + i^2_k + ... + i^{k-1}_k + i^k_k = m$ olduğundan daha sade biçimde

$$f\left(x^{(1)},...,x^{(k)}\right)=$$

$$=\frac{\displaystyle\sum_{i^1_1+...+i^1_k+i^2_2+...+i^2_k+...+i^{k-1}_k+i^k_k=m} a_{i^1_1...i^1_k i^2_2...i^2_k...i^{k-1}_k i^k_k}\left(\prod_{s=1}^{k}\left(\frac{\left\langle x^{(1)},x^{(s)}\right\rangle}{\left\langle x^{(1)},x^{(1)}\right\rangle}\right)^{i^1_s}\right)\left(\prod_{t=2}^{k}\left(\frac{\left\langle x^{(2)},x^{(t)}\right\rangle}{\left\langle x^{(1)},x^{(1)}\right\rangle}\right)^{i^2_t}\right)...\left(\prod_{p=k-1}^{k}\left(\frac{\left\langle x^{(k-1)},x^{(p)}\right\rangle}{\left\langle x^{(1)},x^{(1)}\right\rangle}\right)^{i^{k-1}_p}\right)\left(\frac{\left\langle x^{(k)},x^{(k)}\right\rangle}{\left\langle x^{(1)},x^{(1)}\right\rangle}\right)^{i^k_k}}{\displaystyle\sum_{i^1_1+...+i^1_k+i^2_2+...+i^2_k+...+i^{k-1}_k+i^k_k=m} b_{i^1_1...i^1_k i^2_2...i^2_k...i^{k-1}_k i^k_k}\left(\prod_{s=1}^{k}\left(\frac{\left\langle x^{(1)},x^{(s)}\right\rangle}{\left\langle x^{(1)},x^{(1)}\right\rangle}\right)^{i^1_s}\right)\left(\prod_{t=2}^{k}\left(\frac{\left\langle x^{(2)},x^{(t)}\right\rangle}{\left\langle x^{(1)},x^{(1)}\right\rangle}\right)^{i^2_t}\right)...\left(\prod_{p=k-1}^{k}\left(\frac{\left\langle x^{(k-1)},x^{(p)}\right\rangle}{\left\langle x^{(1)},x^{(1)}\right\rangle}\right)^{i^{k-1}_p}\right)\left(\frac{\left\langle x^{(k)},x^{(k)}\right\rangle}{\left\langle x^{(1)},x^{(1)}\right\rangle}\right)^{i^k_k}}$$

ile ifade edilebilir. Burada

$$\frac{\left\langle x^{(i)},x^{(j)}\right\rangle}{\left\langle x^{(1)},x^{(1)}\right\rangle} \quad i=1,...,k \ , \quad j=1,...,k \ \text{ ve } \quad i\leq j$$

LB(2)- invaryant rasyonel fonksiyonlardır. İnvaryant bir fonksiyonun keyfi toplamı, çarpımı ve bölünmesi de invaryanttır. Dolayısıyla k tane vektör için LB(2)- invaryant rasyonel fonksiyon

$$\frac{\left\langle x^{(i)},x^{(j)}\right\rangle}{\left\langle x^{(1)},x^{(1)}\right\rangle} \quad i=1,...,k \ , \quad j=1,...,k \ \text{ ve } \quad i\leq j\,;$$

ile üretilebilir.

Şimdi f tek olsun. Bu durumda LB(2)- invaryant rasyonel fonksiyon

$$f\left(x^{(1)},...,x^{(k)}\right)=$$

$$=\frac{\displaystyle\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{k}\left[x^{(i)}\quad x^{(j)}\right]\sum_{i^1_1+...+i^1_k+i^2_2+...+i^2_k+...+i^{k-1}_k+i^k_k=m} a^{(i)(j)}_{i^1_1...i^1_k i^2_2...i^2_k...i^{k-1}_k i^k_k}\left(\prod_{s=1}^{k}\left\langle x^{(1)},x^{(s)}\right\rangle^{i^1_s}\right)\left(\prod_{t=2}^{k}\left\langle x^{(2)},x^{(t)}\right\rangle^{i^2_t}\right)...\left(\prod_{p=k-1}^{k}\left\langle x^{(k-1)},x^{(p)}\right\rangle^{i^{k-1}_p}\right)\left\langle x^{(k)},x^{(k)}\right\rangle^{i^k_k}}{\displaystyle\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{k}\left[x^{(i)}\quad x^{(j)}\right]\sum_{i^1_1+...+i^1_k+i^2_2+...+i^2_k+...+i^{k-1}_k+i^k_k=m} b^{(i)(j)}_{i^1_1...i^1_k i^2_2...i^2_k...i^{k-1}_k i^k_k}\left(\prod_{s=1}^{k}\left\langle x^{(1)},x^{(s)}\right\rangle^{i^1_s}\right)\left(\prod_{t=2}^{k}\left\langle x^{(2)},x^{(t)}\right\rangle^{i^2_t}\right)...\left(\prod_{p=k-1}^{k}\left\langle x^{(k-1)},x^{(p)}\right\rangle^{i^{k-1}_p}\right)\left\langle x^{(k)},x^{(k)}\right\rangle^{i^k_k}}$$

biçiminde idi. Burada $\left[x^{(1)}\quad x^{(2)}\right]\neq 0$ ve $\left\langle x^{(1)},x^{(1)}\right\rangle\neq 0$ olmak üzere pay ve paydayı

$\left[x^{(1)}\quad x^{(2)}\right]$ ve $\left\langle x^{(1)},x^{(1)}\right\rangle^{m}$ sayılarına ayrı ayrı bölersek,

$i^1_1 + ... + i^1_k + i^2_2 + ... + i^2_k + ... + i^{k-1}_k + i^k_k = m$ olduğundan daha sade biçimde

$$f\left(x^{(1)},...,x^{(k)}\right)=$$

$$=\frac{\displaystyle\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{k}\frac{\left[x^{(i)}\quad x^{(j)}\right]}{\left[x^{(1)}\quad x^{(2)}\right]}\sum_{i^1_1+...+i^1_k+i^2_2+...+i^2_k+...+i^{k-1}_k+i^k_k=m} a^{(i)(j)}_{i^1_1...i^1_k i^2_2...i^2_k...i^{k-1}_k i^k_k}\left(\prod_{s=1}^{k}\left(\frac{\left\langle x^{(1)},x^{(s)}\right\rangle}{\left\langle x^{(1)},x^{(1)}\right\rangle}\right)^{i^1_s}\right)\left(\prod_{t=2}^{k}\left(\frac{\left\langle x^{(2)},x^{(t)}\right\rangle}{\left\langle x^{(1)},x^{(1)}\right\rangle}\right)^{i^2_t}\right)...\left(\prod_{p=k-1}^{k}\left(\frac{\left\langle x^{(k-1)},x^{(p)}\right\rangle}{\left\langle x^{(1)},x^{(1)}\right\rangle}\right)^{i^{k-1}_p}\right)\left(\frac{\left\langle x^{(k)},x^{(k)}\right\rangle}{\left\langle x^{(1)},x^{(1)}\right\rangle}\right)^{i^k_k}}{\displaystyle\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{k}\frac{\left[x^{(i)}\quad x^{(j)}\right]}{\left[x^{(1)}\quad x^{(2)}\right]}\sum_{i^1_1+...+i^1_k+i^2_2+...+i^2_k+...+i^{k-1}_k+i^k_k=m} b^{(i)(j)}_{i^1_1...i^1_k i^2_2...i^2_k...i^{k-1}_k i^k_k}\left(\prod_{s=1}^{k}\left(\frac{\left\langle x^{(1)},x^{(s)}\right\rangle}{\left\langle x^{(1)},x^{(1)}\right\rangle}\right)^{i^1_s}\right)\left(\prod_{t=2}^{k}\left(\frac{\left\langle x^{(2)},x^{(t)}\right\rangle}{\left\langle x^{(1)},x^{(1)}\right\rangle}\right)^{i^2_t}\right)...\left(\prod_{p=k-1}^{k}\left(\frac{\left\langle x^{(k-1)},x^{(p)}\right\rangle}{\left\langle x^{(1)},x^{(1)}\right\rangle}\right)^{i^{k-1}_p}\right)\left(\frac{\left\langle x^{(k)},x^{(k)}\right\rangle}{\left\langle x^{(1)},x^{(1)}\right\rangle}\right)^{i^k_k}}$$

ile ifade edilebilir. Burada ,

$$\frac{\left[x^{(i)} \quad x^{(j)}\right]}{\left[x^{(1)} \quad x^{(2)}\right]}; i,j=1,...,k; i<j \quad \text{ve} \quad \frac{\left\langle x^{(i)}, x^{(j)}\right\rangle}{\left\langle x^{(k)}, x^{(k)}\right\rangle} \quad i,j=1,...,k \ ; \ i \le j$$

LB(2)- invaryant rasyonel fonksiyonlardır. İnvaryant bir fonksiyonun keyfi toplamı, çarpımı ve bölünmesi de invaryanttır. Dolayısıyla iki tane vektör için LB(2)- invaryant rasyonel fonksiyon $\frac{\left[x^{(i)} \quad x^{(j)}\right]}{\left[x^{(1)} \quad x^{(2)}\right]}; i,j=1,...,k; i<j$ ve $\frac{\left\langle x^{(i)}, x^{(j)}\right\rangle}{\left\langle x^{(k)}, x^{(k)}\right\rangle} \quad i,j=1,...,k \ ; \ i \le j$ ile üretilebilir. Burada

$$\frac{\left[x^{(i)} \quad x^{(j)}\right]}{\left[x^{(1)} \quad x^{(2)}\right]}; i,j=1,...,k; i<j$$

ifadesini incelediğimizde $i,j=1,...,k; i<j$ için

$$\frac{\left[x^{(i)} \quad x^{(j)}\right]}{\left[x^{(1)} \quad x^{(2)}\right]} = \frac{\left[x^{(i)} \quad x^{(j)}\right]}{\left[x^{(1)} \quad x^{(2)}\right]}.1 = \frac{\left[x^{(i)} \quad x^{(j)}\right]}{\left[x^{(1)} \quad x^{(2)}\right]}\frac{\left[x^{(1)} \quad x^{(2)}\right]}{\left[x^{(1)} \quad x^{(2)}\right]} = \frac{\left[x^{(i)} \quad x^{(j)}\right]\left[x^{(1)} \quad x^{(2)}\right]}{\left[x^{(1)} \quad x^{(2)}\right]^2}$$

olur. Böylece, $\left[x^{(i)} \quad x^{(j)}\right]; i,j=1,...,k; i<j$ determinantı tek invaryant polinomdur. $\left[x^{(1)} \quad x^{(2)}\right]$ determinantı da tek invaryant polinomdur.İki tek invaryant polinomun çarpımı çift invaryant polinom olduğundan bu ifade iki çift invaryant polinomun oranı biçiminde olur ki bu da

$$\frac{\left[x^{(i)} \quad x^{(j)}\right]}{\left[x^{(1)} \quad x^{(2)}\right]}; i,j=1,...,k; i<j$$

ifadesinin de

$$\frac{\left\langle x^{(i)}, x^{(j)}\right\rangle}{\left\langle x^{(k)}, x^{(k)}\right\rangle} \quad i,j=1,...,k \ ; \ i \le j$$

ile üretilebilir olduğunu gösterir. ♦

2.11. Noktalar Sisteminin LB(2) – Denklik Şartları

Önerme 83 : R^2 de $x=(x_1,x_2)$ ve $y=(y_1,y_2)$ vektörleri için

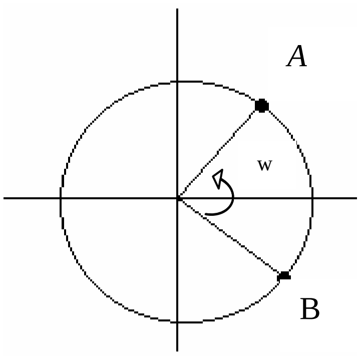
1- $x=(x_1,x_2)\neq(0,0)$ ve $y=(y_1,y_2)\neq(0,0)$ ise $x \overset{LB(2)}{\approx} y$ dir.

2- $x=(x_1,x_2)\neq(0,0)$ ve $y=(y_1,y_2)=(0,0)$; veya $x=(x_1,x_2)=(0,0)$ ve $y=(y_1,y_2)\neq(0,0)$ ise $x \overset{LB(2)}{\not\approx} y$ dir. Yani, denk olamazlar.

3- $x=(x_1,x_2)=(0,0)$ ve $y=(y_1,y_2)=(0,0)$ ise $x \overset{LB(2)}{\approx} y$ dir.

İspat: 1- $x=(x_1,x_2)\neq(0,0)$ ve $y=(y_1,y_2)\neq(0,0)$ olsun. Bu durumda $\langle x,x\rangle\neq 0$ ve $\|x\|\neq 0$ dır. λ olarak $\lambda=\frac{\|y\|}{\|x\|}=\sqrt{\frac{\langle y,y\rangle}{\langle x,x\rangle}}>0$ alınırsa $\|y\|=\|\lambda x\|$ dir. Burada bir lemma verelim.

Lemma 4: A ve B , R^2 de iki vektör olsun. Eğer $\langle A,A\rangle=\langle B,B\rangle$ ise, $\exists g\in O(2)$ öyleki, $A=gB$ dir.



Şekil16. O(2)- yörüngede A ve B vektörleri

İspat: $\langle A,A\rangle=\langle B,B\rangle$ olduğundan $\|A\|=\|B\|=r$ denilebilir. Bu ise, A ve B vektörlerinin aynı *O(2)* – yörünge üzerinde olduğu anlamındadır. Dolayısıyla A ve B vektörleri arasındaki açı w ise,

$$g=\begin{pmatrix}\cos w & \sin w\\ -\sin w & \cos w\end{pmatrix}\in O(2)$$

alınırsa $A=gB$ olur.♦

Şimdi önermenin ispatına devam edelim. $\|\lambda x\|=\|y\|$ olduğundan λx vektörü ile y vektörü aynı O(2)- yörünge üzerindedirler. Yani $\exists\bar{g}\in O(2)$ öyleki $y=\bar{g}\lambda x=\lambda\bar{g}x$ dir. Burada $\lambda\bar{g}$ dönüşümünü $\tilde{g}$ ile gösterirsek, $\tilde{g}\in LB(2)$ olur. Böylece,

$$\tilde{g}x=y$$

elde edilir. Bu ise $x \overset{LB(2)}{\approx} y$ olduklarını gösterir.

2- $x=(x_1,x_2)\neq(0,0)$ ve $y=(y_1,y_2)=(0,0)$ olsun. Bu durumda $\langle x,x\rangle\neq 0$ ve $\langle y,y\rangle=0$ dır. Ayrıca, varsayalım $x\overset{LB(2)}{\approx}y$ olsun. Bu durumda $\exists h\in LB(2)$ öyleki, $y=hx$ dir. Yani bir $\lambda>0$ ve bir $g\in O(2)$ vardır öyleki, $y=\lambda gx$ dir. g bir ortogonal dönüşüm olduğundan iç çarpımı korur. Dolayısıyla $\langle y,y\rangle=\langle g\lambda x,g\lambda x\rangle=\langle \lambda x,\lambda x\rangle=\lambda^2\langle x,x\rangle$ dir. Buradan $\lambda>0$ ve $\langle x,x\rangle\neq 0$ olduğundan $\langle y,y\rangle\neq 0$ ki bu $y\neq 0$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla bir çelişki elde edilir. Buna göre $x\overset{LB(2)}{\not\approx}y$, dir, yani denk olamazlar.

İkinci durumda $x=(x_1,x_2)=(0,0)$ ve $y=(y_1,y_2)\neq(0,0)$ ise $x\overset{LB(2)}{\not\approx}y$ denk olamayacağını gösterelim. $x\overset{LB(2)}{\approx}y$ olsun. Bu durumda $\overset{LB(2)}{\approx}$ bağıntısı bir denklik bağıntısı olduğundan $y\overset{LB(2)}{\approx}x$ olmalıdır. Oysa birinci durumda bunun olamayacağı gösterilmiştir. Dolayısıyla $x\overset{LB(2)}{\not\approx}y$ dir.

3- $x=y=0$ olsunlar. Bu durumda keyfi $g\in O(2)$ için $gx=0$ olur. Dolayısıyla $x\overset{LB(2)}{\approx}y$ dir. ♦

Teorem 27: R^2 de $\{x_1,x_2,...,x_k\}$ ve $\{y_1,y_2,...,y_k\}$ sistemleri için

1- $\exists i=1,...,k$ için $x_i\neq 0, y_i=0$ veya $y_i\neq 0, x_i=0$ ise $\{x_1,x_2,...,x_k\}\overset{LB(2)}{\not\approx}\{y_1,y_2,...,y_k\}$ denk olamazlar.

2- $\exists i=1,...,k$ için $x_i=y_i=0$ ise $\{x_1,x_2,...,x_k\}$ ve $\{y_1,y_2,...,y_k\}$ denklik şartı R^2 de k-1 vektörün denklik şartına indirgenir.Yani, $x_i=y_i=0$ ise $\{x_1,x_2,...,x_k\}\overset{LB(2)}{\approx}\{y_1,y_2,...,y_k\}$ dir ancak ve ancak, $\{x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_k\}\overset{LB(2)}{\approx}\{y_1,...,y_{i-1},y_{i+1},...,y_k\}$ dır.

3- $x_i\neq 0; y_i\neq 0;\ i=1,...,k$ ise

i) $rank\left(\left\|x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_k\right\|\right) = rank\left(\left\|y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_k\right\|\right) = 2$ ise

$\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{LB(2)}{\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ dir ancak ve ancak $\dfrac{\langle x_i, x_j\rangle}{\langle x_1, x_1\rangle} = \dfrac{\langle y_i, y_j\rangle}{\langle y_1, y_1\rangle}$; $i \le j$; $i, j = 1, ..., k$ dir.

ii) $rank\left(\left\|x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_k\right\|\right) = rank\left(\left\|y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_k\right\|\right) = 1$ ise,

$\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{LB(2)}{\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ dir ancak ve ancak $\dfrac{\langle x_1, x_j\rangle}{\langle x_1, x_1\rangle} = \dfrac{\langle y_1, y_j\rangle}{\langle y_1, y_1\rangle}$; $j = 2, 3, ...k$ dir.

iii) $rank\left(\left\|x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_k\right\|\right) \ne rank\left(\left\|y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_k\right\|\right)$ ise

$\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{LB(2)}{\not\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ denk olamazlar.

İspat: 1- $\exists i = 1, 2, ..., k$ için $y_i \ne 0, x_i = 0$ ise $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{LB(2)}{\not\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ denk olamadıklarını gösterelim. Varsayalım ki bunlar denk olsunlar. Bu durumda $\exists g \in O(2)$ ve $\lambda > 0$ için, $y_i = \lambda g x_i$ dir. Burada $x_i = 0$ ise $y_i = 0$ olur ki bu bir çelişkidir. Benzer şekilde $y_i = 0$, $x_i \ne 0$ ise, $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{LB(2)}{\not\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ denk olamadıklarını gösterelim. Varsayalım ki bunlar denk olsunlar. Bu durumda $\exists g \in O(2)$ ve $\lambda > 0$ için, $y_i = \lambda g x_i$ dir. g ortogonal dönüşüm olduğundan $x_i = \dfrac{1}{\lambda} g^T y_i$ dir. $y_i = 0$ olduğundan $x_i = 0$ elde edilir ki, bu da yine bir çelişkidir. O halde $\exists i = 1, 2, ..., k$ için $x_i \ne 0, y_i = 0$ veya $y_i \ne 0, x_i = 0$ ise $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{LB(2)}{\not\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ denk olamazlar.

2- $\exists i = 1, 2, ..., k$ için $x_i = y_i = 0$ ve $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{LB(2)}{\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ olsun. Bu durumda $\exists g \in O(2)$ ve $\lambda > 0$ için, $y_j = \lambda g x_j$; $j = 1, 2, ..., k$ dir. Buradan

$y_j = \lambda g x_j$; $j = 1, 2, ..., i-1, i+1, ...k$ olduğu görülür. Böylece,

$\{x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_k\} \overset{LB(2)}{\approx} \{y_1, ..., y_{i-1}, y_{i+1}, ..., y_k\}$ dir. Tersine,

$\{x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_k\} \overset{LB(2)}{\approx} \{y_1, ..., y_{i-1}, y_{i+1}, ..., y_k\}$ olsun. O halde $\exists g \in O(2)$ ve $\lambda > 0$ için, $y_j = \lambda g x_j$; $j = 1, 2, ..., i-1, i+1, ...k$ dir. $x_i = y_i = 0$ olduğundan ve R^2 de her zaman

$0 \overset{LB(2)}{\approx} 0$ olduğundan $y_j = \lambda g x_j$; $j = 1, 2, ..., k$ dir. Böylece,

$\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{LB(2)}{\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ elde edilmiş olur.

3- i) $x_i \neq 0; y_i \neq 0;\ i = 1, ..., k$;

$rank\left(\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k \end{Vmatrix}\right) = rank\left(\begin{Vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_k \end{Vmatrix}\right) = 2$ ve

$\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{LB(2)}{\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ olsun. O halde $\exists \lambda \in R^*$ ve $g \in O(2)$ öyleki, $i = 1, 2, .., k$

için $y_i = \lambda g x_i$ dir. Buradan, $i \leq j$; $i, j = 1, 2, ..., k$ için $\dfrac{\langle y_i, y_j \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle}$ ifadelerinde $i = 1, ..., k$

için $y_i = \lambda g x_i$ eşitlikleri yerlerine konulursa g ortogonal dönüşümü iç çarpımı koruduğundan ve iç çarpımın özelliklerinden

$$\frac{\langle y_i, y_j \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} = \frac{\langle \lambda g x_i, \lambda g x_j \rangle}{\langle \lambda g x_1, \lambda g x_1 \rangle} = \frac{\lambda^2 \langle g x_i, g x_j \rangle}{\lambda^2 \langle g x_1, g x_1 \rangle} = \frac{\langle g x_i, g x_j \rangle}{\langle g x_1, g x_1 \rangle} = \frac{\langle x_i, x_j \rangle}{\langle x_1, x_1 \rangle}$$

elde edilir. Tersine, $rank\left(\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k \end{Vmatrix}\right) = rank\left(\begin{Vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_k \end{Vmatrix}\right) = 2$ ve

$\dfrac{\langle x_i, x_j \rangle}{\langle x_1, x_1 \rangle} = \dfrac{\langle y_i, y_j \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle}$; $i \leq j$; $i, j = 1, 2, ..., k$ eşitlikleri verilsin.

$\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{LB(2)}{\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ olduklarını gösterelim. Verilen eşitliklerden

$i \leq j; i, j = 1, 2, ..., k$ için

$$\langle y_i, y_j \rangle = \langle y_1, y_1 \rangle \frac{\langle x_i, x_j \rangle}{\langle x_1, x_1 \rangle} = \frac{\langle y_1, y_1 \rangle}{\langle x_1, x_1 \rangle} \langle x_i, x_j \rangle$$

yazılabilir. Buradaki $\dfrac{\langle y_1, y_1 \rangle}{\langle x_1, x_1 \rangle} > 0$ ifadesine λ^2 denilirse, veya $\lambda = \sqrt{\dfrac{\langle y_1, y_1 \rangle}{\langle x_1, x_1 \rangle}}$

alınırsa, $i, j = 1, 2, ..., k;$ $i \leq j$ için

$$\langle y_i, y_j \rangle = \langle \lambda x_i, \lambda x_j \rangle$$

veya

$$\begin{aligned}
&\langle y_1, y_1\rangle = \langle \lambda x_1, \lambda x_1\rangle \\
&\langle y_1, y_2\rangle = \langle \lambda x_1, \lambda x_2\rangle \\
&\vdots \\
&\langle y_1, y_k\rangle = \langle \lambda x_1, \lambda x_k\rangle \\
&\langle y_2, y_2\rangle = \langle \lambda x_2, \lambda x_2\rangle \\
&\vdots \\
&\langle y_2, y_k\rangle = \langle \lambda x_2, \lambda x_k\rangle \\
&\vdots \\
&\langle y_k, y_k\rangle = \langle \lambda x_k, \lambda x_k\rangle
\end{aligned} \tag{35}$$

eşitlikleri elde edilir. $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ ve $\{y_1, y_2, ..., y_k\}$ vektör sistemleri lineer bağımlı ve $rank\left(\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k \end{Vmatrix}\right) = rank\left(\begin{Vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_k \end{Vmatrix}\right) = 2$ olduğundan lineer bağımsız olan vektörlerin hangiler olduğunun belirlenmesi gerekmektedir. Varsayalım $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ sisteminde lineer bağımsız olan vektörler $\{x_i, x_j\}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{vmatrix} \langle \lambda x_i, \lambda x_i\rangle & \langle \lambda x_i, \lambda x_j\rangle \\ \langle \lambda x_j, \lambda x_i\rangle & \langle \lambda x_j, \lambda x_j\rangle \end{vmatrix} \neq 0$$

dır. Buna göre verilen (35) eşitliklerinden

$$\begin{vmatrix} \langle y_i, y_i\rangle & \langle y_i, y_j\rangle \\ \langle y_j, y_i\rangle & \langle y_j, y_j\rangle \end{vmatrix} \neq 0$$

olur. Böylece $\{y_1, y_2, ..., y_k\}$ sisteminde $\{y_i, y_j\}$ vektörleri lineer bağımsızdır. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&x_1 = \alpha_{1i}x_i + \alpha_{1j}x_j \qquad && y_1 = \beta_{1i}y_i + \beta_{1j}y_j \\
&x_2 = \alpha_{2i}x_i + \alpha_{2j}x_j \qquad \text{ve} && y_2 = \beta_{2i}y_i + \beta_{2j}y_j \\
&\vdots && \vdots \\
&x_k = \alpha_{ki}x_i + \alpha_{kj}x_j && y_k = \beta_{ki}y_i + \beta_{kj}y_j
\end{aligned} \tag{36}$$

yazılabilir. Açıktır ki $\{x_i, x_j\} = \{x_1, x_2\}$ ise $\alpha_{1i} = \alpha_{2j} = \beta_{1i} = \beta_{2j} = 1$ ve $\alpha_{2i} = \alpha_{1j} = \beta_{2i} = \beta_{1j} = 0$ dır. Şimdi $\{\lambda x_i, \lambda x_j\}, \{y_i, y_j\}$ vektörlerini

$$\lambda x_i = (\lambda x_{i1}, \lambda x_{i2})$$
$$\lambda x_j = (\lambda x_{j1}, \lambda x_{j2})$$
$$y_i = (y_{i1}, y_{i2})$$
$$y_j = (y_{j1}, y_{j2})$$

biçiminde yazarsak,

$$\begin{Vmatrix}\lambda x_i & \lambda x_j\end{Vmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda x_{i1} & \lambda x_{j1} \\ \lambda x_{i2} & \lambda x_{j2}\end{bmatrix}, \qquad \begin{Vmatrix}y_i & y_j\end{Vmatrix} = \begin{bmatrix}y_{i1} & y_{j1} \\ y_{i2} & y_{j2}\end{bmatrix}$$

matrislerini göz önüne aldığımızda

$$\begin{Vmatrix}\lambda x_i & \lambda x_j\end{Vmatrix}^T \begin{Vmatrix}\lambda x_i & \lambda x_j\end{Vmatrix} = \begin{vmatrix}\langle \lambda x_i, \lambda x_i\rangle & \langle \lambda x_i, \lambda x_j\rangle \\ \langle \lambda x_j, \lambda x_i\rangle & \langle \lambda x_j, \lambda x_j\rangle\end{vmatrix}$$

yazabiliriz. Benzer şekilde

$$\begin{Vmatrix}y_i & y_j\end{Vmatrix}^T \begin{Vmatrix}y_i & y_j\end{Vmatrix} = \begin{vmatrix}\langle y_i, y_i\rangle & \langle y_i, y_j\rangle \\ \langle y_j, y_i\rangle & \langle y_j, y_j\rangle\end{vmatrix}$$

dir. (35) eşitliklerinden

$$\begin{vmatrix}\langle \lambda x_i, \lambda x_i\rangle & \langle \lambda x_i, \lambda x_j\rangle \\ \langle \lambda x_j, \lambda x_i\rangle & \langle \lambda x_j, \lambda x_j\rangle\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\langle y_i, y_i\rangle & \langle y_i, y_j\rangle \\ \langle y_j, y_i\rangle & \langle y_j, y_j\rangle\end{vmatrix}$$

eşitliği yazılabileceğinden

$$\begin{Vmatrix}\lambda x_i & \lambda x_j\end{Vmatrix}^T \begin{Vmatrix}\lambda x_i & \lambda x_j\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}y_i & y_j\end{Vmatrix}^T \begin{Vmatrix}y_i & y_j\end{Vmatrix}$$

eşitliği elde edilir. $\{\lambda x_i, \lambda x_j\}$ vektörleri lineer bağımsız olduğundan $\begin{Vmatrix}\lambda x_i & \lambda x_j\end{Vmatrix}$ determinantı sıfırdan farklı ve tersi mevcut bir matristir. Benzer şekilde $\{y_i, y_j\}$ vektörleri de lineer bağımsız olduklarından $\begin{Vmatrix}y_i & y_j\end{Vmatrix}$ de tersi mevcut bir matristir. Lineer cebirden biliyoruz ki, determinantı sıfırdan farklı bir g matrisi mevcut ve

$$\begin{Vmatrix}y_i & y_j\end{Vmatrix} = g\begin{Vmatrix}\lambda x_i & \lambda x_j\end{Vmatrix}$$

dir. Bu eşitliği bir önceki eşitlikte yerine yazarsak,

$$\begin{Vmatrix}\lambda x_i & \lambda x_j\end{Vmatrix}^T \begin{Vmatrix}\lambda x_i & \lambda x_j\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}\lambda x_i & \lambda x_j\end{Vmatrix}^T g^T g \begin{Vmatrix}\lambda x_i & \lambda x_j\end{Vmatrix}$$

elde edilir. Burada eşitliğin her iki tarafını soldan $\left(\left\|\lambda x_i \quad \lambda x_j\right\|^T\right)^{-1}$ ile sağdan da $\left(\left\|\lambda x_i \quad \lambda x_j\right\|\right)^{-1}$ ile çarparsak,

$$I = g^T g$$

elde edilir ki bu, g nin ortogonal olduğunu gösterir. Dolayısıyla $g \in O(2)$ dir. $\left\|y_i \quad y_j\right\| = g\left\|\lambda x_i \quad \lambda x_j\right\|$ olduğundan

$$y_i = \lambda g x_i$$
$$y_j = \lambda g x_j \tag{37}$$

elde edilir. Buradan ve (36) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
\lambda x_1 &= \alpha_{1i}\lambda x_i + \alpha_{1j}\lambda x_j \\
\lambda x_2 &= \alpha_{2i}\lambda x_i + \alpha_{2j}\lambda x_j \\
&\vdots \\
\lambda x_k &= \alpha_{ki}\lambda x_i + \alpha_{kj}\lambda x_j
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
g(\lambda x_1) &= g\left(\alpha_{1i}\lambda x_i + \alpha_{1j}\lambda x_j\right) = \alpha_{1i} g(\lambda x_i) + \alpha_{1j} g\left(\lambda x_j\right) = \alpha_{1i} y_i + \alpha_{1j} y_j \\
g(\lambda x_2) &= g\left(\alpha_{2i}\lambda x_i + \alpha_{2j}\lambda x_j\right) = \alpha_{2i} g(\lambda x_i) + \alpha_{2j} g\left(\lambda x_j\right) = \alpha_{2i} y_i + \alpha_{2j} y_j \\
&\vdots \\
g(\lambda x_k) &= g\left(\alpha_{ki}\lambda x_i + \alpha_{kj}\lambda x_j\right) = \alpha_{ki} g(\lambda x_i) + \alpha_{kj} g\left(\lambda x_j\right) = \alpha_{ki} y_i + \alpha_{kj} y_j
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $s = 1, 2, ..., k$ için

$$y_s = \beta_{si} y_i + \beta_{sj} y_j \quad \text{ve} \quad \lambda g x_s = \alpha_{si} y_i + \alpha_{sj} y_j$$

elde edilmiş olur. Bu iki vektörün birbirine eşit olması, ancak $s = 1, 2, ..., k$ için $\alpha_{si} = \beta_i$ ve $\alpha_{sj} = \beta_j$ eşitliklerinin var olmasına bağlıdır. Şimdi bu eşitliklerin var olduğunu gösterelim: (36) eşitliğinden $s = 1, 2, ..., k$ için

$$\begin{aligned}
\left\langle \lambda x_i, \lambda x_s \right\rangle &= \left\langle \lambda x_i, \lambda\left(\alpha_{si} x_i + \alpha_{sj} x_j\right)\right\rangle = \alpha_{si}\left\langle \lambda x_i, \lambda x_i\right\rangle + \alpha_{sj}\left\langle \lambda x_i, \lambda x_j\right\rangle \\
\left\langle \lambda x_j, \lambda x_s \right\rangle &= \left\langle \lambda x_j, \lambda\left(\alpha_{si} x_i + \alpha_{sj} x_j\right)\right\rangle = \alpha_{si}\left\langle \lambda x_i, \lambda x_i\right\rangle + \alpha_{sj}\left\langle \lambda x_i, \lambda x_j\right\rangle
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\left\langle y_i, y_s \right\rangle &= \left\langle y_i, \beta_{si} y_i + \beta_{sj} y_j \right\rangle = \beta_{si}\left\langle y_i, y_i\right\rangle + \beta_{sj}\left\langle y_i, y_j\right\rangle \\
\left\langle y_j, y_s \right\rangle &= \left\langle y_j, \beta_{si} y_i + \beta_{sj} y_j \right\rangle = \beta_{si}\left\langle y_j, y_i\right\rangle + \beta_{sj}\left\langle y_j, y_j\right\rangle
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu lineer denklemlerin çözümünden

$$\alpha_{si}=\frac{\langle \lambda x_i,\lambda x_s\rangle\langle \lambda x_j,\lambda x_j\rangle-\langle \lambda x_i,\lambda x_j\rangle\langle \lambda x_j,\lambda x_s\rangle}{\langle \lambda x_i,\lambda x_i\rangle\langle \lambda x_j,\lambda x_j\rangle-\langle \lambda x_i,\lambda x_j\rangle^2}=\frac{\begin{vmatrix}\langle \lambda x_i,\lambda x_s\rangle & \langle \lambda x_i,\lambda x_j\rangle\\ \langle \lambda x_j,\lambda x_s\rangle & \langle \lambda x_j,\lambda x_j\rangle\end{vmatrix}}{\det Gr\left(\lambda x_i,\lambda x_j\right)}$$

$$\alpha_{sj}=\frac{\langle \lambda x_i,\lambda x_i\rangle\langle \lambda x_j,\lambda x_s\rangle-\langle \lambda x_i,\lambda x_s\rangle\langle \lambda x_j,\lambda x_i\rangle}{\langle \lambda x_i,\lambda x_i\rangle\langle \lambda x_j,\lambda x_j\rangle-\langle \lambda x_i,\lambda x_j\rangle^2}=\frac{\begin{vmatrix}\langle \lambda x_i,\lambda x_i\rangle & \langle \lambda x_i,\lambda x_s\rangle\\ \langle \lambda x_j,\lambda x_i\rangle & \langle \lambda x_j,\lambda x_s\rangle\end{vmatrix}}{\det Gr\left(\lambda x_i,\lambda x_j\right)}$$

ve

$$\beta_{si}=\frac{\langle y_i,y_s\rangle\langle y_j,y_j\rangle-\langle y_i,y_j\rangle\langle y_j,y_s\rangle}{\langle y_i,y_i\rangle\langle y_j,y_j\rangle-\langle y_i,y_j\rangle^2}=\frac{\begin{vmatrix}\langle y_i,y_s\rangle & \langle y_i,y_j\rangle\\ \langle y_j,y_s\rangle & \langle y_j,y_j\rangle\end{vmatrix}}{\det Gr\left(y_i,y_j\right)}$$

$$\beta_{sj}=\frac{\langle y_i,y_i\rangle\langle y_j,y_s\rangle-\langle y_i,y_s\rangle\langle y_j,y_i\rangle}{\langle y_i,y_i\rangle\langle y_j,y_j\rangle-\langle y_i,y_j\rangle^2}=\frac{\begin{vmatrix}\langle y_i,y_i\rangle & \langle y_i,y_s\rangle\\ \langle y_j,y_i\rangle & \langle y_j,y_s\rangle\end{vmatrix}}{\det Gr\left(y_i,y_j\right)}$$

eşitlikleri elde edilir. (35) eşitlikleri kullanılarak $\alpha_{si}=\beta_{si}$ ve $\alpha_{sj}=\beta_{sj}$ oldukları görülür. Böylece, $s=1,2,...,k$ için $y_s=\lambda g x_s$ olur. Buna göre $\{x_1,x_2,...,x_k\}\overset{LB(2)}{\approx}\{y_1,y_2,...,y_k\}$ dir.

ii) $rank\left(\|x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_k\|\right)=rank\left(\|y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_k\|\right)=1$ ve $\{x_1,x_2,...,x_k\}\overset{LB(2)}{\approx}\{y_1,y_2,...,y_k\}$ olsun. $\dfrac{\langle x_1,x_j\rangle}{\langle x_1,x_1\rangle}=\dfrac{\langle y_1,y_j\rangle}{\langle y_1,y_1\rangle}$; $j=2,3,...k$ eşitliklerinin mevcut olduğunu gösterelim. $\{x_1,x_2,...,x_k\}\overset{LB(2)}{\approx}\{y_1,y_2,...,y_k\}$ olduğundan $\exists g\in O(2)$ ve $\lambda>0$ için, $y_i=\lambda g x_i$; $i=1,2,...,k$ dir.

$rank\left(\|x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_k\|\right)=rank\left(\|y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_k\|\right)=1$ olduğundan her iki vektör sisteminde de bir tane lineer bağımsız vektör var demektir. O halde lineer bağımsız olan vektörler $\exists s=1,2,...,k$ için $\{x_s\}$ ve $\{y_s\}$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{matrix} x_1 = l_1 x_s \\ x_2 = l_2 x_s \\ \vdots \\ x_k = l_k x_s \end{matrix} \quad \text{ve} \quad \begin{matrix} y_1 = m_1 y_s \\ y_2 = m_2 y_s \\ \vdots \\ y_k = m_k y_s \end{matrix} \tag{38}$$

yazılabilir. Buna göre,

$$\frac{\langle y_1, y_2\rangle}{\langle y_1, y_1\rangle} = \frac{\langle m_1 y_s, m_2 y_s\rangle}{\langle m_1 y_s, m_1 y_s\rangle} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{\langle g\lambda x_1, g\lambda x_2\rangle}{\langle g\lambda x_1, g\lambda x_1\rangle} = \frac{\langle \lambda x_1, \lambda x_2\rangle}{\langle \lambda x_1, \lambda x_1\rangle} = \frac{\langle x_1, x_2\rangle}{\langle x_1, x_1\rangle} = \frac{\langle l_1 x_1, l_2 x_1\rangle}{\langle l_1 x_1, l_1 x_1\rangle} = \frac{l_2}{l_1}$$

$$\frac{\langle y_1, y_3\rangle}{\langle y_1, y_1\rangle} = \frac{\langle m_1 y_s, m_3 y_s\rangle}{\langle m_1 y_s, m_1 y_s\rangle} = \frac{m_3}{m_1} = \frac{\langle g\lambda x_1, g\lambda x_3\rangle}{\langle g\lambda x_1, g\lambda x_1\rangle} = \frac{\langle \lambda x_1, \lambda x_3\rangle}{\langle \lambda x_1, \lambda x_1\rangle} = \frac{\langle x_1, x_3\rangle}{\langle x_1, x_1\rangle} = \frac{\langle l_1 x_1, l_3 x_1\rangle}{\langle l_1 x_1, l_1 x_1\rangle} = \frac{l_3}{l_1}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\langle y_1, y_k\rangle}{\langle y_1, y_1\rangle} = \frac{\langle m_1 y_s, m_k y_s\rangle}{\langle m_1 y_s, m_1 y_s\rangle} = \frac{m_k}{m_1} = \frac{\langle g\lambda x_1, g\lambda x_k\rangle}{\langle g\lambda x_1, g\lambda x_1\rangle} = \frac{\langle \lambda x_1, \lambda x_3\rangle}{\langle \lambda x_1, \lambda x_1\rangle} = \frac{\langle x_1, x_k\rangle}{\langle x_1, x_1\rangle} = \frac{\langle l_1 x_1, l_k x_1\rangle}{\langle l_1 x_1, l_1 x_1\rangle} = \frac{l_k}{l_1}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan, $\dfrac{\langle x_1, x_j\rangle}{\langle x_1, x_1\rangle} = \dfrac{\langle y_1, y_j\rangle}{\langle y_1, y_1\rangle}$; $j = 2,3,...,k$ elde edilir. Ayrıca burada, $rank\left(\|x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_k\|\right) = rank\left(\|y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_k\|\right) = 1$ ve $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ ve $\{y_1, y_2, ..., y_k\}$ vektörleri (38) biçiminde yazıldığında $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{LB(2)}{\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ ise

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{m_2}{m_1} \;\; ; \;\; \frac{l_3}{l_1} = \frac{m_3}{m_1} \;\; ; \; ... \; ; \;\; \frac{l_k}{l_1} = \frac{m_k}{m_1}$$

elde edilir. Tersine, $rank\left(\|x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_k\|\right) = rank\left(\|y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_k\|\right) = 1$ ve $\dfrac{\langle x_1, x_j\rangle}{\langle x_1, x_1\rangle} = \dfrac{\langle y_1, y_j\rangle}{\langle y_1, y_1\rangle}$; $j = 2,3,...k$ eşitlikleri mevcut olsun. $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{LB(2)}{\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ olduğunu gösterelim. Yani, $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ ve $\{y_1, y_2, ..., y_k\}$ vektörleri (38) biçiminde yazıldığında $\dfrac{l_2}{l_1} = \dfrac{m_2}{m_1}$; $\dfrac{l_3}{l_1} = \dfrac{m_3}{m_1}$; ... ; $\dfrac{l_k}{l_1} = \dfrac{m_k}{m_1}$ iken $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{LB(2)}{\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ olduğunu gösterelim:

$rank\left(\|x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_k\|\right) = rank\left(\|y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_k\|\right) = 1$ ve $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ ve $\{y_1, y_2, ..., y_k\}$ sistemleri için (38) eşitlikleri verilsin. Önerme 83 den, her zaman

$x_s \overset{LB(2)}{\approx} y_s$ dir. Buna göre, $\exists g \in O(2)$ ve $\lambda > 0$ için, $y_s = \lambda g x_s$ dir. $j = 2,3,...,k$ için $\dfrac{\langle x_1, x_j \rangle}{\langle x_1, x_1 \rangle} = \dfrac{\langle y_1, y_j \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle}$ eşitlikleri ve (38) eşitliklerinden $j = 2,3,...,k$ için

$$\frac{\langle x_1, x_j \rangle}{\langle x_1, x_1 \rangle} = \frac{\langle l_1 x_s, k_j x_s \rangle}{\langle l_1 x_s, k_1 x_s \rangle} = \frac{l_j}{l_1} = \frac{\langle y_1, y_j \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} = \frac{\langle m_1 y_s, m_j y_s \rangle}{\langle m_1 y_s, m_1 y_s \rangle} = \frac{m_j}{m_1}$$

olduğundan $j = 2,3,...k$ için $\dfrac{\langle x_1, x_j \rangle}{\langle x_1, x_1 \rangle} = \dfrac{\langle y_1, y_j \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle}$ eşitliklerinden $j = 2,3.,,,k$ için

$$\frac{m_1}{l_1} = \frac{m_j}{l_j} \qquad \text{veya} \qquad m_j = \frac{m_1}{l_1} l_j$$

elde edilir. Burada $\dfrac{m_1}{l_1} = \sqrt{\dfrac{\langle y_1, y_1 \rangle}{\langle x_1, x_1 \rangle}} > 0$ dır. $\dfrac{m_1}{l_1}\lambda = \tilde{\lambda}$ dersek $\tilde{\lambda} > 0$ dır. Şimdi

$y_s = \lambda g x_s$ olduğundan

$$y_1 = m_1 y_s = \frac{m_1}{l_1} l_1 (\lambda g x_s) = \frac{m_1}{k_1} \lambda g (l_1 x_s) = \tilde{\lambda} g x_1$$

$$y_2 = m_2 y_s = \frac{m_1}{l_1} l_2 (\lambda g x_s) = \frac{m_1}{l_1} \lambda g (l_2 x_s) = \tilde{\lambda} g x_2$$

$$\vdots$$

$$y_k = m_k y_s = \frac{m_1}{l_1} l_k (\lambda g x_s) = \frac{m_1}{k_1} \lambda g (l_k x_s) = \tilde{\lambda} g x_k$$

yazılabilir. Buna göre $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{LB(2)}{\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ dir. Böylece, şu ifade gösterilmiş oldu: $rank(\|x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_k\|) = rank(\|y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_k\|) = 1$ ve

$$\begin{matrix} x_1 = l_1 x_s \\ x_2 = l_2 x_s \\ \vdots \\ x_k = l_k x_s \end{matrix} \quad \text{ve} \quad \begin{matrix} y_1 = m_1 y_s \\ y_2 = m_2 y_s \\ \vdots \\ y_k = m_k y_s \end{matrix}$$

ise, $\{x_1, x_2, ..., x_3\} \overset{LB(2)}{\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ dir ancak ve ancak $\{l_1, l_2, ..., l_k\} \overset{LB(1)}{\approx} \{m_1, m_2, ..., m_k\}$ ise.

iii) $rank(\|x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_k\|) \neq rank(\|y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_k\|)$ ise $\{x_1, ..., x_k\} \overset{LB(2)}{\not\approx} \{y_1, ..., y_k\}$ denk olamayacağını gösterelim. Bu vekörlerin rankları sıfır olamaz. Çünkü ranklardan biri 0 olsa, bu durumda vektör sistemi sıfır vektörlerinden ibaret olur ki, bu durum 1) durumunda incelenmiştir. O halde ranklardan birinin 1 diğerinin 2 olması durumu söz konusu olabilir. Öncelikli olarak $rank\left(\|x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_k\|\right)=1$ ve $rank\left(\|y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_k\|\right)=2$ olsun. Bu durumda $\exists i, j, s = 1,...,k$ için $\{x_1, x_2,..., x_k\}$ sisteminde lineer bağımsız olan vektör $\{x_i\}$, $\{y_1, y_2,..., y_k\}$ sisteminde lineer bağımsız olan vektörler de $\{y_j, y_s\}$ olsunlar. O halde,

$$\begin{array}{lcl} x_1 = a_1 x_i & & y_1 = b_{1j} y_j + b_{1s} y_s \\ x_2 = a_2 x_i & \text{ve} & y_2 = b_{2j} y_j + b_{2s} y_s \\ \vdots & & \vdots \\ x_k = a_k x_i & & y_k = b_{kj} y_j + b_{ks} y_s \end{array} \tag{39}$$

yazabiliriz. Buradan açıkça görülebilir ki, $a_i = b_{jj} = b_{ss} = 1$ ve $b_{js} = b_{sj} = 0$ dır.

Varsayalım ki $\{x_1, x_2,..., x_k\} \overset{LB(2)}{\approx} \{y_1, y_2,..., y_k\}$ olsun. Bu durumda $\exists g \in O(2)$ ve $\lambda > 0$ için, $y_i = \lambda g x_i$; $i = 1, 2,..., k$ dir. Buna göre

$$\begin{array}{l} y_1 = \lambda g x_1 = \lambda g\left(a_1 x_i\right) = a_1\left(\lambda g x_i\right) = a_1 y_i \\ y_2 = \lambda g x_2 = \lambda g\left(a_2 x_i\right) = a_2\left(\lambda g x_i\right) = a_2 y_i \\ \vdots \\ y_k = \lambda g x_k = \lambda g\left(a_k x_i\right) = a_k\left(\lambda g x_i\right) = a_k y_i \end{array}$$

oldukları görülür ki bunun anlamı $\{y_1, y_2,..., y_k\}$ vektörleri $\{x_i\}$ vektörü ile ifade edilebilmektedir. Bu ise $rank\left(\|y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_k\|\right)=2$ olması ile çelişir. O halde $\{x_1, x_2,..., x_k\} \overset{LB(2)}{\not\approx} \{y_1, y_2,..., y_k\}$ denk olamazlar.

İkinci olarak $rank\left(\|x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_k\|\right)=2$ ve $rank\left(\|y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_k\|\right)=1$ olsun. Ayrıca, $\exists i, j, s = 1,...,k$ için $\{x_1, x_2,..., x_k\}$ sisteminde lineer bağımsız olan vektörler $\{x_i, x_j\}$, $\{y_1, y_2,..., y_k\}$ sisteminde lineer bağımsız olan vektör de $\{y_s\}$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{array}{l} y_1 = a_1 y_s \\ y_2 = a_2 y_s \\ \vdots \\ y_k = a_k y_s \end{array}$$

yazılabilir. Varsayalım ki $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{LB(2)}{\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ olsun. Bu durumda $\exists g \in O(2)$ ve $\lambda > 0$ için, $y_i = \lambda g x_i$; $i = 1, 2, ..., k$ dir. Bu ifadeyi matrisel formda

$$\|y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_k\| = g\|\lambda x_1 \quad \lambda x_2 \quad \cdots \quad \lambda x_k\|$$

yazılabilir. Buradan $\|\lambda x_1 \quad \lambda x_2 \quad \cdots \quad \lambda x_k\| = g^T\|y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_k\|$ yazılabilir. Bu durumda $i = 1, 2, ..., k$ için $\lambda x_i = g^T y_i$ dir. Böylece,

$$\begin{aligned}
\lambda x_1 &= g^T y_1 = g^T(a_1 y_s) = a_1(g^T y_s) = a_1 \lambda x_s \\
\lambda x_2 &= g^T y_2 = g^T(a_2 y_s) = a_2(g^T y_s) = a_2 \lambda x_s \\
&\vdots \\
\lambda x_k &= g^T y_k = g^T(a_k y_s) = a_k(g^T y_s) = a_k \lambda x_s
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklere göre $\{\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_k\}$ vektörleri $\{\lambda x_s\}$ vektörü ile ifade edilebilmektedir. Bu ise $rank(\|x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_k\|) = 2$ olmasıyla çelişir. Buna göre $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{LB(2)}{\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ varsayımı yanlıştır. Dolayısıyla, $rank(\|x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_k\|) = 2$ ve $rank(\|y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_k\|) = 1$ durumunda $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{LB(2)}{\not\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ denk olamazlar.♦

2.12. B(2)- İnvaryant Rasyonel Fonksiyonlar

Tr (2), R^2 de öteleme dönüşümlerinin grubu olmak üzere $Tr(2) \subset B(2)$ ve $LB(2) \subset B(2)$ olduğundan $B(2)-$invaryant fonksiyon aynı zamanda hem $Tr(2)$-invaryant hem de $LB(2)$- invaryant fonksiyon olmalıdır.

Teorem 28: 1. Bir tane vektör için Tr(2)- invaryant polinom sabit polinomdur.

2. $k \geq 2$ olmak üzere k tane vektör için Tr(2)- invaryant polinom

$$f(x_1, x_2, x_3, ..., x_k) = g(x_2 - x_1, x_3 - x_1, ..., x_k - x_1)$$

şeklinde yazılabilir. Tersine $f(x_1, x_2, x_3, ..., x_k) = g(x_2 - x_1, x_3 - x_1, ..., x_k - x_1)$ şeklindeki keyfi polinom Tr(2)- invaryant polinomdur.

İspat: 1. Bir $Tr(2)$- invaryant polinom $x = (x_1, x_2)$ olmak üzere

$$P(x)=\sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}x_1^{\,i}x_2^{\,j}$$

biçiminde olsun. $P(x)$, $Tr(2)$- invaryant olduğundan dolayı her $b=(b_1,b_2)\in R^2$ için

$$P(x+b)=P(x)$$

sağlamalıdır. Buna göre $b=x\in R^2$ için de bu ifade gerçeklenir. O halde

$$P(2x)=P(x)$$

veya

$$P(2x)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}2^{i+j}x_1^{\,i}x_2^{\,j}=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_1^{\,i}x_2^{\,j}=P(x)$$

yazılabilir. Bu ifadeden her i, j için

$$a_{ij}x_1^{\,i}x_2^{\,j}\left(2^{i+j}-1\right)=0$$

elde edilir. Bu eşitlik her $x\in R^2$ için sağlanacağından $x_1\neq 0$ ve $x_2\neq 0$ için de doğrudur. Buna göre $i+j\neq 0$ için

$$a_{ij}=0$$

elde edilir. Bu sonuca göre bir tane vektör için tanımlı Tr(2)- invaryant polinom

$$P(x)=a_{00}$$

biçiminde sabit polinomdur. Tersine, sabit bir polinom Tr(2)- invaryant polinomdur. Bu aşikar bir durumdur.

2. Bunun için $g(x)=x+b$, $b\in R$ dönüşümüne göre invaryant polinom

$$f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_k)=f(x_1+b,x_2+b,x_3+b,\ldots,x_k+b)$$

sağlayan polinomdur. Bu koşul her $b\in R^2$ için sağlanır. Şimdi x_1 i keyfi alıp sabit bırakalım. $b=-x_1$ için

$$f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_k)=f(0,x_2-x_1,x_3-x_1,\ldots,x_k-x_1)$$

olur. Burada

$$f(0,y_1,y_2,\ldots,y_{k-1})=h(y_1,y_2,\ldots,y_{k-1})$$

dersek, h fonksiyonu $y_1,y_2,\ldots,y_{k-1}$ değişkenlerine bağlı k-1 değişkenli bir polinomsal fonksiyon olur. Böylece,

$$f(0,x_2-x_1,x_3-x_1,\ldots,x_k-x_1)=h(x_2-x_1,x_3-x_1,\ldots,x_k-x_1)$$

şeklinde yazılabilir. Tersine, $f\left(x_1,x_2,x_3,...,x_k\right)=g\left(x_2-x_1,x_3-x_1,...,x_k-x_1\right)$ şeklindeki keyfi polinomun Tr(2)- invaryant olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} f\left(x_1+b,x_2+b,...,x_k+b\right) &= g\left(\left(x_2+b\right)-\left(x_1+b\right),\left(x_3+b\right)-\left(x_1+b\right),...,\left(x_k+b\right)-\left(x_1+b\right)\right) \\ &= g\left(x_2-x_1,x_3-x_1,...,x_k-x_1\right)=f\left(x_1,x_2,...,x_k\right) \end{aligned}$$

olduğundan açıktır.♦

Teorem 29: k tane vektör için tanımlı bir $f\left(x_1,x_2,x_3,...,x_k\right)$ polinomsal fonksiyonu B(2)- invaryant ise $g\left(x_1,x_2,x_3,...,x_k\right)=f\left(0,x_2-x_1,x_3-x_1,...,x_k-x_1\right)$ polinomsal fonksiyonu LB(2)- invaryanttır. Tersine,

$$f\left(x_1,x_2,x_3,...x_k\right)=h\left(x_2-x_1,x_3-x_1,...,x_k-x_1\right)$$

biçiminde yazılsın. h , LB(2)- invaryant ise, $f\left(x_1,x_2,...,x_k\right)$ B(2)- invaryanttır.

İspat: k tane vektör için tanımlı bir polinomsal fonksiyon f, B(2)- invaryant olsun. $g\left(x_1,x_2,x_3,...,x_k\right)=f\left(0,x_2-x_1,x_3-x_1,...,x_k-x_1\right)$ nın LB(2) invaryant olduğunu gösterelim. Her $\lambda w\in LB(2)$ için $g\left(x_1,x_2,x_3,...,x_k\right)=g\left(\lambda wx_1,\lambda wx_2,\lambda wx_3,...,\lambda wx_k\right)$ olduğunu göstermemiz gerekecektir. f, B(2)- invaryant olduğundan her $\lambda w\in LB(2)$ ve her $b\in R^2$ için

$$f\left(x_1,x_2,x_3,...,x_k\right)=f\left(\lambda wx_1+b,\lambda wx_2+b,\lambda wx_3+b,...,\lambda wx_k+b\right)$$

dir. Özel olarak $b=0$ için de invaryanttır. Dolayısıyla

$$f\left(x_1,x_2,x_3,...,x_k\right)=f\left(\lambda wx_1,\lambda wx_2,\lambda wx_3,...,\lambda wx_k\right) \qquad (40)$$

sağlanır. g nin tanımından dolayı her $\lambda w\in LB(2)$ için

$$g\left(\lambda wx_1,...,\lambda wx_k\right)=f\left(0,\lambda w\left(x_2-x_1\right),...,\lambda w\left(x_k-x_1\right)\right)=f\left(\lambda w0,\lambda w\left(x_2-x_1\right),...,\lambda w\left(x_k-x_1\right)\right)$$

dir. (40) den , her $\lambda w\in LB(2)$ için

$$g\left(\lambda wx_1,\lambda wx_2,...,\lambda wx_k\right)=f\left(0,x_2-x_1,...,x_k-x_1\right)=g\left(x_1,x_2,x_3,...x_k\right)$$

olur ki bu durum g nin LB(2) invaryant olduğunu gösterir.

Tersine, k tane vektör için tanımlı bir polinomsal fonksiyon $f\left(x_1,x_2,...,x_k\right)=h\left(x_2-x_1,x_3-x_1,...,x_k-x_1\right)$ biçiminde yazılsın ve h , LB(2) invaryant olsun. f nin B(2)- invaryant olduğunu gösterelim. Bunun için her $\lambda w \in LB(2)$ ve her $b \in R^2$ için

$$f\left(x_1, x_2, x_3, .., x_k\right) = f\left(\lambda w x_1 + b, \lambda w x_2 + b, \lambda w x_3 + b, ..., \lambda w x_k + b\right)$$

gösterilmesi gerekir. $f\left(x_1, x_2, ..., x_k\right) = h\left(x_2 - x_1, x_3 - x_1, ..., x_k - x_1\right)$ yazıldığından

$$\begin{aligned} f\left(\lambda w x_1 + b, ..., \lambda w x_k + b\right) &= h\left(\left(\lambda w x_2 + b\right) - \left(\lambda w x_1 + b\right), ..., \left(\lambda w x_k + b\right) - \left(\lambda w x_1 + b\right)\right) \\ &= h\left(\lambda w\left(x_2 - x_1\right), \lambda w\left(x_3 - x_1\right), ..., \lambda w\left(x_k - x_1\right)\right) \end{aligned}$$

olduğu görülür. h , LB(2) invaryant olduğundan

$$\begin{aligned} f\left(\lambda w x_1 + b, \lambda w x_2 + b, ..., \lambda w x_k + b\right) &= h\left(\lambda w\left(x_2 - x_1\right), ..., \lambda w\left(x_k - x_1\right)\right) \\ &= h\left(x_2 - x_1, ..., x_k - x_1\right) = f\left(x_1, x_2, ..., x_k\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, her $\lambda \in LB(2)$ ve her $b \in R^2$ için

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_k\right) = f\left(\lambda w x_1 + b, \lambda w x_2 + b, ..., \lambda w x_k + b\right)$$

olduğundan f, B(2)- invaryanttır. ♦

Önerme 84: Bir tane vektör için nispi $Tr(2)$- invaryant polinom sabit polinomdur.

İspat: Bir tane vektör için nispi $Tr(2)$- invaryant polinom $x = \left(x_1, x_2\right)$ olmak üzere

$$P\left(x\right) = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} x_1^{\,i} x_2^{\,j}$$

biçiminde olsun. $P(x)$, nispi $Tr(2)$ invaryant olduğundan dolayı her $b = \left(b_1, b_2\right) \in R^2$ için

$$P(x+b) = \varphi\left(x,b\right) P(x)$$

sağlamalıdır. Buna göre

$$\sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}\left(x_1 + b_1\right)^i \left(x_2 + b_2\right)^j = \sum_{i,j=0}^{n} \varphi\left(x,b\right) a_{ij} x_1^{\,i} x_2^{\,j}$$

yazılabilir. Bu ifade her $b = \left(b_1, b_2\right) \in R^2$ ve her $x = \left(x_1, x_2\right) \in R^2$ için sağlanır. O halde $x \neq 0$ ve $b = -x \in R^2$ için de doğrudur. Buna göre

$$\sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} 0^i 0^j = \sum_{i=0}^{n} \varphi\left(x,b\right) a_{ij} x_1^{\,i} x_2^{\,j} \qquad (41)$$

yazılabilir. Buradan $i + j \neq 0$ olan her i, j için

$$a_{ij}\left(\varphi\left(x,b\right) x_1^{\,i} x_2^{\,j} - 0\right) = 0$$

veya

$$a_{ij}\left(\varphi(x,b)x_1^{\,i}x_2^{\,j}\right)=0$$

elde edilir. Buna göre $\varphi(x,b)x_1^{\,i}x_2^{\,j}\neq 0$ olacağından $i+j\neq 0$ olan her i,j için $a_{ij}=0$ elde edilir. Böylece $i+j=0$ durumunda ise

$$a_{ij}\left(\varphi(x,b)-1\right)=0$$

yazılabilir. Buradan $a_{00}=0$ veya $\varphi(x,b)=1$ bulunur. Buradan $\varphi(x,b)=1$ olduğu görülür. Sonuç olarak Bir tane vektör için nispi $Tr(2)$- invaryant polinom $P(x)=a_{00}$ biçiminde sabit polinomdur ve $\varphi(x,b)=1$ dir. ♦

Önerme 85: Bir tane vektör için Tr(2)- invaryant rasyonel fonksiyon sabit fonksiyondur.

İspat: Bir tane vektör için nispi Tr(2)- invaryant polinomlar sabit polinomlar olduğundan ve bir invaryant rasyonel fonksiyon iki nispi invaryant polinomun oranı olduğundan ispat açıktır. ♦

Önerme 86: Bir tane vektör için B(2) invaryant rasyonel fonksiyon sabit fonksiyondur.

İspat: $Tr(2)\subset B(2)$ olduğundan $B(2)-$invaryant rasyonel fonksiyon aynı zamanda $Tr(2)$- invaryanttır. $Tr(2)$- invaryant rasyonel fonksiyonlar sabit fonksiyon olduğundan Bir tane vektör için B(2) invaryant rasyonel fonksiyon da sabit olmalıdır. ♦

Önerme 87: İki tane vektör için B(2) invaryant polinom sabit polinomdur.

İspat: İki tane vektör için B(2) invaryant polinom $h(x_2-x_1)$ biçiminde olan LB(2) invaryant polinom ve bir tane vektör için LB(2) invaryant polinom sabit polinom olduğundan dolayı iki tane vektör için B(2) invaryant polinom sabit polinomdur. ♦

Lemma 5: k tane vektör için tanımlı bir $f(x_1,x_2,x_3,...,x_k)$ polinomsal fonksiyonu nispi B(2)- invaryant ise $g(x_1,x_2,x_3,...,x_k)=f(0,x_2-x_1,x_3-x_1,...,x_k-x_1)$ polinomsal fonksiyonu nispi LB(2)- invaryanttır. Tersine,

$$f(x_1,x_2,x_3,...x_k)=h(x_2-x_1,x_3-x_1,...,x_k-x_1)$$

biçiminde yazılsın. h, nispi LB(2)- invaryant ise, $f(x_1,x_2,...,x_k)$ nispi B(2)- invaryanttır.

İspat: k tane vektör için tanımlı bir polinomsal fonksiyon f, nispi B(2)- invaryant olsun. $g(x_1,x_2,x_3,...,x_k)=f(0,x_2-x_1,x_3-x_1,...,x_k-x_1)$ nın nispi LB(2) invaryant olduğunu gösterelim. *f*, nispi B(2)- invaryant olduğundan her $\lambda w \in LB(2)$ ve her $b \in R^2$ için

$$f\left(\lambda w x_1 + b, \lambda w x_2 + b, \lambda w x_3 + b, ..., \lambda w x_k + b\right) = \varphi(\lambda, w)\, f\left(x_1, x_2, x_3, ..., x_k\right)$$

dir. Özel olarak $b = 0$ için de doğrudur. Dolayısıyla

$$f\left(\lambda w x_1, \lambda w x_2, \lambda w x_3, ..., \lambda w x_k\right) = \varphi(\lambda, w)\, f\left(x_1, x_2, x_3, ..., x_k\right)$$

sağlanır. g nin tanımından dolayı her $\lambda w \in LB(2)$ için

$$g\left(\lambda w x_1, ..., \lambda w x_k\right) = f\left(0, \lambda w\left(x_2 - x_1\right), ..., \lambda w\left(x_k - x_1\right)\right) = \varphi(\lambda, w)\, g\left(x_1, x_2, x_3, ..., x_k\right)$$

olur ki bu durum g nin nispi LB(2) invaryant olduğunu gösterir.

Tersine, k tane vektör için tanımlı bir polinomsal fonksiyon $f\left(x_1, x_2, ..., x_k\right) = h\left(x_2 - x_1, x_3 - x_1, ..., x_k - x_1\right)$ biçiminde yazılsın ve h, nispi LB(2) invaryant olsun. f nin nispi B(2)- invaryant olduğunu gösterelim. Burada *f* nin tanımından ve *h* , nispi LB(2) invaryant olduğundan her $\lambda w \in LB(2)$ ve her $b \in R^2$ için

$$\begin{aligned} f\left(\lambda w x_1 + b, ..., \lambda w x_k + b\right) &= h\left(\left(\lambda w x_2 + b\right) - \left(\lambda w x_1 + b\right), ..., \left(\lambda w x_k + b\right) - \left(\lambda w x_1 + b\right)\right) \\ &= h\left(\lambda w\left(x_2 - x_1\right), \lambda w\left(x_3 - x_1\right), ..., \lambda w\left(x_k - x_1\right)\right) \\ &= \varphi(\lambda, w)\, h\left(x_2 - x_1, x_3 - x_1, ..., x_k - x_1\right) \\ &= \varphi(\lambda, w)\, f\left(x_1, x_2, ..., x_k\right) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla f, nispi B(2)- invaryanttır. ♦

Önerme 88: İki tane vektör için nispi B(2) invaryant polinom

$$f\left(x_1, x_2\right) = a_n \left\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1 \right\rangle^n$$

biçimindedir.

İspat: Lemma 5' e göre iki tane vektör için nispi B(2) invaryant polinom $h\left(x_2 - x_1\right)$ biçiminde nispi LB(2) invaryant polinomdur. Ayrıca bir tane vektör için nispi LB(2) invaryant polinom

$$f\left(x\right) = a_n \left\langle x, x \right\rangle^n$$

biçiminde homojen bir polinom olduğundan dolayı iki tane vektör için nispi B(2) invaryant polinom

$$f\left(x_1, x_2\right) = a_n \left\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1 \right\rangle^n$$

biçiminde olmalıdır. ♦

Önerme 89: İki tane vektör için B(2) invaryant rasyonel fonksiyon sabit fonksiyondur.

İspat: İki tane vektör için nispi B(2) invaryant polinom

$$f\left(x_1, x_2\right) = a_n \left\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1 \right\rangle^n$$

biçiminde olduğundan iki tane vektör için B(2) invaryant rasyonel fonksiyon

$$f\left(x_1, x_2\right) = \frac{a_n \left\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1 \right\rangle^n}{b_n \left\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1 \right\rangle^n} = \frac{a_n}{b_n} = c_n$$

biçiminde dereceleri eşit iki nispi B(2) invaryant polinomun oranı biçimindedir. Dolayısıyla iki tane vektör için B(2) invaryant rasyonel fonksiyon sabit fonksiyondur.♦

Önerme 90 : k tane vektör için nispi B(2) invaryant polinom

f çift ise,

$$f\left(x^{(1)}, \dots, x^{(k)}\right) =$$
$$= \sum_{\substack{i^{(2)}{}_2 + \dots + i^{(2)}{}_k + \\ \dots \\ + i^{(k-1)}{}_k + i^{(k)}{}_k = m}} a_{i^{(2)}{}_{2\dots} i^{(2)}{}_k \dots . i^{(k-1)}{}_k i^{(k)}{}_k} \left(\prod_{s=2}^{k} \left\langle x^{(2)} - x^{(1)}, x^{(s)} - x^{(1)} \right\rangle^{i^{(2)}{}_s} \right) \left(\prod_{t=3}^{k} \left\langle x^{(3)} - x^{(1)}, x^{(t)} - x^{(1)} \right\rangle^{i^{(3)}{}_t} \right) \dots \left\langle x^{(k)} - x^{(1)}, x^{(k)} - x^{(1)} \right\rangle$$

f tek ise,

$$f\left(x^{(1)}, \dots, x^{(k)}\right) =$$
$$= \sum_{\substack{i,j=2 \\ i<j}}^{k} \left[x^{(i)} - x^{(1)} \quad x^{(j)} - x^{(1)} \right] \sum_{\substack{i^{(2)}{}_2 + \dots + i^{(2)}{}_k + \\ \dots \\ + i^{(k-1)}{}_k + i^{(k)}{}_k = m}} a_{i^{(2)}{}_{2\dots} i^{(2)}{}_k \dots . i^{(k-1)}{}_k i^{(k)}{}_k} \left(\prod_{s=2}^{k} \left\langle x^{(2)} - x^{(1)}, x^{(s)} - x^{(1)} \right\rangle^{i^{(2)}{}_s} \right) \left(\prod_{t=3}^{k} \left\langle x^{(3)} - x^{(1)}, x^{(t)} - x^{(1)} \right\rangle^{i^{(3)}{}_t} \right) \dots \left\langle x^{(k)} - x^{(1)}, x^{(k)} - x^{(1)} \right\rangle^{i^{(k)}{}_k}$$

biçimindedir.

İspat: Lemma 5' e göre k tane vektör için nispi B(2) invaryant polinom $h\left(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_k - x_1\right)$ biçiminde nispi LB(2) invaryant polinomdur. Buna göre k tane vektör için nispi B(2) invaryant polinom f çift ise,

$$f\left(x^{(1)}, \dots, x^{(k)}\right) = \sum_{\substack{i^{(2)}{}_2 + \dots + i^{(2)}{}_k + \\ \dots \\ + i^{(k-1)}{}_k + i^{(k)}{}_k = m}} a_{i^{(2)}{}_{2\dots} i^{(2)}{}_k \dots . i^{(k-1)}{}_k i^{(k)}{}_k} \left(\prod_{s=2}^{k} \left\langle x^{(2)} - x^{(1)}, x^{(s)} - x^{(1)} \right\rangle^{i^{(2)}{}_s} \right) \left(\prod_{t=3}^{k} \left\langle x^{(3)} - x^{(1)}, x^{(t)} - x^{(1)} \right\rangle^{i^{(3)}{}_t} \right) \dots \left\langle x^{(k)} - x^{(1)}, x^{(k)} - x^{(1)} \right\rangle$$

f tek ise,

$$f\left(x^{(1)},\dots,x^{(k)}\right)=$$
$$=\sum_{\substack{i,j=2\\ i<j}}^{k}\left[x^{(i)}-x^{(1)}\quad x^{(j)}-x^{(1)}\right]\sum_{\substack{i^{(2)}{}_2+\dots+i^{(2)}{}_k+\\ \dots\\ +i^{(k-1)}{}_k+i^{(k)}{}_k=m}} a_{i^{(2)}{}_{2\dots}i^{(2)}{}_k\dots i^{(k-1)}{}_k i^{(k)}{}_k}\left(\prod_{s=2}^{k}\left\langle x^{(2)}-x^{(1)},x^{(s)}-x^{(1)}\right\rangle^{i^{(2)}{}_s}\right)\left(\prod_{t=3}^{k}\left\langle x^{(3)}-x^{(1)},x^{(t)}-x^{(1)}\right\rangle^{i^{(3)}{}_t}\right)\dots\left\langle x^{(k)}-x^{(1)},x^{(k)}-x^{(1)}\right\rangle^{i^{(k)}{}_k}$$

biçimindedir. ♦

Teorem 30: k tane vektör için B(2) invaryant rasyonel fonksiyon

f çift ise,

$$f\left(x^{(1)},\dots,x^{(k)}\right)=$$
$$=\frac{\displaystyle\sum_{\substack{i^{(2)}{}_2+\dots+i^{(2)}{}_k+\\ \dots\\ +i^{(k-1)}{}_k+i^{(k)}{}_k=m}} a_{i^{(2)}{}_{2\dots}i^{(2)}{}_k\dots i^{(k-1)}{}_k i^{(k)}{}_k}\left(\prod_{s=2}^{k}\left\langle x^{(2)}-x^{(1)},x^{(s)}-x^{(1)}\right\rangle^{i^{(2)}{}_s}\right)\left(\prod_{t=3}^{k}\left\langle x^{(3)}-x^{(1)},x^{(t)}-x^{(1)}\right\rangle^{i^{(3)}{}_t}\right)\dots\left\langle x^{(k)}-x^{(1)},x^{(k)}-x^{(1)}\right\rangle}{\displaystyle\sum_{\substack{i^{(2)}{}_2+\dots+i^{(2)}{}_k+\\ \dots\\ +i^{(k-1)}{}_k+i^{(k)}{}_k=m}} b_{i^{(2)}{}_{2\dots}i^{(2)}{}_k\dots i^{(k-1)}{}_k i^{(k)}{}_k}\left(\prod_{s=2}^{k}\left\langle x^{(2)}-x^{(1)},x^{(s)}-x^{(1)}\right\rangle^{i^{(2)}{}_s}\right)\left(\prod_{t=3}^{k}\left\langle x^{(3)}-x^{(1)},x^{(t)}-x^{(1)}\right\rangle^{i^{(3)}{}_t}\right)\dots\left\langle x^{(k)}-x^{(1)},x^{(k)}-x^{(1)}\right\rangle}$$

f tek ise,

$$f\left(x^{(1)},\dots,x^{(k)}\right)=$$
$$=\frac{\displaystyle\sum_{\substack{i,j=2\\ i<j}}^{k}\left[x^{(i)}-x^{(1)}\quad x^{(j)}-x^{(1)}\right]\sum_{\substack{i^{(2)}{}_2+\dots+i^{(2)}{}_k+\\ \dots\\ +i^{(k-1)}{}_k+i^{(k)}{}_k=m}} a_{i^{(2)}{}_{2\dots}i^{(2)}{}_k\dots i^{(k-1)}{}_k i^{(k)}{}_k}\left(\prod_{s=2}^{k}\left\langle x^{(2)}-x^{(1)},x^{(s)}-x^{(1)}\right\rangle^{i^{(2)}{}_s}\right)\left(\prod_{t=3}^{k}\left\langle x^{(3)}-x^{(1)},x^{(t)}-x^{(1)}\right\rangle^{i^{(3)}{}_t}\right)\dots\left\langle x^{(k)}-x^{(1)},x^{(k)}-x^{(1)}\right\rangle^{i^{(k)}{}_k}}{\displaystyle\sum_{\substack{i,j=2\\ i<j}}^{k}\left[x^{(i)}-x^{(1)}\quad x^{(j)}-x^{(1)}\right]\sum_{\substack{i^{(2)}{}_2+\dots+i^{(2)}{}_k+\\ \dots\\ +i^{(k-1)}{}_k+i^{(k)}{}_k=m}} b_{i^{(2)}{}_{2\dots}i^{(2)}{}_k\dots i^{(k-1)}{}_k i^{(k)}{}_k}\left(\prod_{s=2}^{k}\left\langle x^{(2)}-x^{(1)},x^{(s)}-x^{(1)}\right\rangle^{i^{(2)}{}_s}\right)\left(\prod_{t=3}^{k}\left\langle x^{(3)}-x^{(1)},x^{(t)}-x^{(1)}\right\rangle^{i^{(3)}{}_t}\right)\dots\left\langle x^{(k)}-x^{(1)},x^{(k)}-x^{(1)}\right\rangle^{i^{(k)}{}_k}}$$

biçimindedir.

İspat: k tane vektör için nispi B(2) invaryant polinom

f çift ise,

$$f\left(x^{(1)},\dots,x^{(k)}\right)=\sum_{\substack{i^{(2)}{}_2+\dots+i^{(2)}{}_k+\\ \dots\\ +i^{(k-1)}{}_k+i^{(k)}{}_k=m}} a_{i^{(2)}{}_{2\dots}i^{(2)}{}_k\dots i^{(k-1)}{}_k i^{(k)}{}_k}\left(\prod_{s=2}^{k}\left\langle x^{(2)}-x^{(1)},x^{(s)}-x^{(1)}\right\rangle^{i^{(2)}{}_s}\right)\left(\prod_{t=3}^{k}\left\langle x^{(3)}-x^{(1)},x^{(t)}-x^{(1)}\right\rangle^{i^{(3)}{}_t}\right)\dots\left\langle x^{(k)}-x^{(1)},x^{(k)}-x^{(1)}\right\rangle$$

f tek ise,

$$f\left(x^{(1)},\dots,x^{(k)}\right)=$$
$$=\sum_{\substack{i,j=2\\ i<j}}^{k}\left[x^{(i)}-x^{(1)}\quad x^{(j)}-x^{(1)}\right]\sum_{\substack{i^{(2)}{}_2+\dots+i^{(2)}{}_k+\\ \dots\\ +i^{(k-1)}{}_k+i^{(k)}{}_k=m}} a_{i^{(2)}{}_{2\dots}i^{(2)}{}_k\dots i^{(k-1)}{}_k i^{(k)}{}_k}\left(\prod_{s=2}^{k}\left\langle x^{(2)}-x^{(1)},x^{(s)}-x^{(1)}\right\rangle^{i^{(2)}{}_s}\right)\left(\prod_{t=3}^{k}\left\langle x^{(3)}-x^{(1)},x^{(t)}-x^{(1)}\right\rangle^{i^{(3)}{}_t}\right)\dots\left\langle x^{(k)}-x^{(1)},x^{(k)}-x^{(1)}\right\rangle^{i^{(k)}{}_k}$$

biçiminde olduğundan ve k vektör için B(2) invaryant rasyonel fonksiyon, ağırlık fonksiyonları eşit iki tane tek ya da iki tane çift nispi B(2) invaryant polinomun oranı biçiminde olduğundan ispat açıktır. ♦

2.13. $R\left(x_1, x_2, ..., x_k\right)^{B(2)}$ Cisminin Üreteç Cümleleri

R^2 de B(2) invaryant polinomlar sabit polinomlar olduklarından dolayı biz burada yalnızca B(2)- invaryant rasyonel fonksiyonlar cisminin üreteç cümlelerini inceleyeceğiz.

Teorem 31 : k tane vektör için B(2) invaryant rasyonel fonksiyonlar cisminin üreteç cümlesi

1. $k \le 2$ ise $\{1\}$ dir.

2. $k \ge 3$ ise

$$\left\{ \frac{\langle x_i - x_1, x_j - x_1 \rangle}{\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1 \rangle} \right\} \quad i = 2, ..., k \ , \quad j = 2, ..., k \quad \text{ve} \quad i \le j$$

dir.

İspat: 1. Bir ve iki tane vektör için B(2) invaryant rasyonel fonksiyon sabit olduğundan keyfi reel sayı 1 ile üretilebilir.

2. k tane vektör için çift B(2) invaryant rasyonel fonksiyon

$$f(x_1, x_2, ..., x_k) = \frac{\displaystyle\sum_{\substack{i_{2,2}+...+i_{2,k} \\ +...+ \\ +i_{k-1,k}+i_{k,k}=m}} a_{i_{2,2}...i_{2,k}...i_{k-1,k}i_{k,k}} \left(\prod_{s=2}^{k} \langle x_2 - x_1, x_s - x_1 \rangle^{i_{2,s}} \right) \left(\prod_{t=3}^{k} \langle x_3 - x_1, x_t - x_1 \rangle^{i_{3,t}} \right) ... \langle x_k - x_1, x_k - x_1 \rangle^{i_{k,k}}}{\displaystyle\sum_{\substack{i_{2,2}+...+i_{2,k} \\ +...+ \\ +i_{k-1,k}+i_{k,k}=m}} b_{i_{2,2}...i_{2,k}...i_{k-1,k}i_{k,k}} \left(\prod_{s=2}^{k} \langle x_2 - x_1, x_s - x_1 \rangle^{i_{2,s}} \right) \left(\prod_{t=3}^{k} \langle x_3 - x_1, x_t - x_1 \rangle^{i_{3,t}} \right) ... \langle x_k - x_1, x_k - x_1 \rangle^{i_{k,k}}}$$

biçiminde idi. Burada pay ve paydayı $\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1 \rangle^m$ sayısına bölersek,

$i_{2,2} + ... + i_{2,k} + ... + i_{k-1,k} + i_{k,k} = m$ ve $j_{2,2} + ... + j_{2,k} + ... + j_{k-1,k} + j_{k,k} = m$ olduğundan daha sade biçimde

$$f(x_1, x_2, ..., x_k) = \frac{\displaystyle\sum_{\substack{i_{2,2}+...+i_{2,k} \\ +...+ \\ +i_{k-1,k}+i_{k,k}=m}} a_{i_{2,2}...i_{2,k}...i_{k-1,k}i_{k,k}} \left(\prod_{s=2}^{k} \left(\frac{\langle x_2 - x_1, x_s - x_1 \rangle}{\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1 \rangle} \right)^{i_{2,s}} \right) \left(\prod_{t=3}^{k} \left(\frac{\langle x_3 - x_1, x_t - x_1 \rangle}{\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1 \rangle} \right)^{i_{3,t}} \right) ... \left(\frac{\langle x_k - x_1, x_k - x_1 \rangle}{\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1 \rangle} \right)^{i_{k,k}}}{\displaystyle\sum_{\substack{j_{2,2}+...+j_{2,k} \\ +...+ \\ +j_{k-1,k}+j_{k,k}=m}} b_{j_{2,2}...j_{2,k}...j_{k-1,k}j_{k,k}} \left(\prod_{s=2}^{k} \left(\frac{\langle x_2 - x_1, x_s - x_1 \rangle}{\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1 \rangle} \right)^{j_{2,s}} \right) \left(\prod_{t=3}^{k} \left(\frac{\langle x_3 - x_1, x_t - x_1 \rangle}{\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1 \rangle} \right)^{j_{3,t}} \right) ... \left(\frac{\langle x_k - x_1, x_k - x_1 \rangle}{\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1 \rangle} \right)^{j_{k,k}}}$$

ile ifade edilebilir. Burada $\dfrac{\langle x_i - x_1, x_j - x_1\rangle}{\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1\rangle}$ $i = 2,...,k$, $j = 2,...,k$ ve $i \le j$

fonksiyonları B(2)- invaryant rasyonel fonksiyonlardır. İnvaryant bir fonksiyonun keyfi toplamı, çarpımı ve bölünmesi de invaryanttır. Dolayısıyla k tane vektör için B(2)- invaryant rasyonel fonksiyon

$$\left\{\frac{\langle x_i - x_1, x_j - x_1\rangle}{\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1\rangle}\right\} \quad i = 2,...,k \ , \quad j = 2,...,k \quad \text{ve} \quad i \le j$$

ile üretilebilir.

Şimdi f tek olsun. Bu durumda B(2)- invaryant rasyonel fonksiyon

$$f(x_1,...,x_k) = \frac{\displaystyle\sum_{\substack{i,j=2\\ i\le j}}^{k} \frac{[x_i - x_1 \quad x_j - x_1]}{[x_2 - x_1 \quad x_3 - x_1]} \sum_{\substack{i_{2,2}+...+i_{2,k}\\ +...+\\ +i_{k-1,k}+i_{k,k}=m}} a_{i_{2,2}...i_{k,k}} \left(\prod_{s=2}^{k}\langle x_2 - x_1, x_s - x_1\rangle^{i_{2,s}}\right)\left(\prod_{t=3}^{k}\langle x_3 - x_1, x_t - x_1\rangle^{i_{3,t}}\right)...\langle x_k - x_1, x_k - x_1\rangle^{i_{k,k}}}{\displaystyle\sum_{\substack{i,j=2\\ i\le j}}^{k} \frac{[x_i - x_1 \quad x_j - x_1]}{[x_2 - x_1 \quad x_3 - x_1]} \sum_{\substack{j_{2,2}+...+j_{2,k}\\ +...+\\ +j_{k-1,k}+j_{k,k}=m}} b_{j_{2,2}...j_{k,k}} \left(\prod_{s=2}^{k}\langle x_2 - x_1, x_s - x_1\rangle^{j_{2,s}}\right)\left(\prod_{t=3}^{k}\langle x_3 - x_1, x_t - x_1\rangle^{j_{3,t}}\right)...\langle x_k - x_1, x_k - x_1\rangle^{j_{k,k}}}$$

biçiminde idi. Burada $[x_2 - x_1 \quad x_3 - x_1] \ne 0$ ve $\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1\rangle \ne 0$ olmak üzere pay ve paydayı $[x_2 - x_1 \quad x_3 - x_1]$ ve $\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1\rangle^m$ sayılarına ayrı ayrı bölersek,

$i_{2,2} + ... + i_{2,k} + ... + i_{k-1,k} + i_{k,k} = m$ ve $j_{2,2} + ... + j_{2,k} + ... + j_{k-1,k} + j_{k,k} = m$ olduğundan

daha sade biçimde

$$f(x_1,...,x_k) = \frac{\displaystyle\sum_{\substack{i,j=1\\ i< j}}^{k} \frac{[x_i - x_1 \quad x_j - x_1]}{[x_2 - x_1 \quad x_3 - x_1]} \sum_{\substack{i_{2,2}+...+i_{2,k}\\ +...+\\ +i_{k-1,k}+i_{k,k}=m}} a_{i_{2,2}...i_{k,k}} \left(\prod_{s=2}^{k}\left(\frac{\langle x_2 - x_1, x_s - x_1\rangle}{\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1\rangle}\right)^{i_{2,s}}\right)\left(\prod_{t=3}^{k}\left(\frac{\langle x_3 - x_1, x_t - x_1\rangle}{\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1\rangle}\right)^{i_{3,t}}\right)...\left(\frac{\langle x_k - x_1, x_k - x_1\rangle}{\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1\rangle}\right)^{i_{k,k}}}{\displaystyle\sum_{\substack{i,j=1\\ i< j}}^{k} \frac{[x_i - x_1 \quad x_j - x_1]}{[x_2 - x_1 \quad x_3 - x_1]} \sum_{\substack{j_{2,2}+...+j_{2,k}\\ +...+\\ +j_{k-1,k}+j_{k,k}=m}} b_{j_{2,2}...j_{k,k}} \left(\prod_{s=2}^{k}\left(\frac{\langle x_2 - x_1, x_s - x_1\rangle}{\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1\rangle}\right)^{j_{2,s}}\right)\left(\prod_{t=3}^{k}\left(\frac{\langle x_3 - x_1, x_t - x_1\rangle}{\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1\rangle}\right)^{j_{3,t}}\right)...\left(\frac{\langle x_k - x_1, x_k - x_1\rangle}{\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1\rangle}\right)^{j_{k,k}}}$$

ile ifade edilebilir. Burada ,

$$\frac{[x_i - x_1 \quad x_j - x_1]}{[x_2 - x_1 \quad x_3 - x_1]}; i, j = 2,...,k; i < j \quad \text{ve} \quad \frac{\langle x_i - x_1, x_j - x_1\rangle}{\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1\rangle} \quad i, j = 2,...,k \ ; \ i \le j$$

B(2)- invaryant rasyonel fonksiyonlardır. Gerçekten de $i, j = 2,...,k; i < j$ için

$$f\left(x_1,x_2,x_3,x_i,x_j\right)=\frac{\left[x_i-x_1 \quad x_j-x_1\right]}{\left[x_2-x_1 \quad x_3-x_1\right]}$$

dersek, her $\lambda>0$, $g\in O(2)$ ve $b\in R^2$ için

$$f\left(\lambda gx_1+b,\lambda gx_2+b,\lambda gx_3+b,\lambda gx_i+b,\lambda gx_j+b\right)=\frac{\left[\lambda gx_i-\lambda gx_1 \quad \lambda gx_j-\lambda gx_1\right]}{\left[\lambda gx_2-\lambda gx_1 \quad \lambda gx_3-\lambda gx_1\right]}$$

$$=\frac{\left[\lambda g\left(x_i-x_1\right) \quad \lambda g\left(x_j-x_1\right)\right]}{\left[\lambda g\left(x_2-x_1\right) \quad \lambda g\left(x_3-x_1\right)\right]}=\frac{\det g\left[\left(x_i-x_1\right) \quad \left(x_j-x_1\right)\right]}{\det g\left[\left(x_2-x_1\right) \quad \left(x_3-x_1\right)\right]}=f\left(x_1,x_2,x_3,x_i,x_j\right)$$

elde edilir ki bu sonuç $f\left(x_1,x_2,x_3,x_i,x_j\right)=\dfrac{\left[x_i-x_1 \quad x_j-x_1\right]}{\left[x_2-x_1 \quad x_3-x_1\right]}$ nin B(2) invaryant olduğunu gösterir. İnvaryant bir fonksiyonun keyfi toplamı, çarpımı ve bölünmesi de invaryanttır. Dolayısıyla k tane vektör için B(2)- invaryant rasyonel fonksiyon

$$\frac{\left[x_i-x_1 \quad x_j-x_1\right]}{\left[x_2-x_1 \quad x_3-x_1\right]};i,j=2,...,k;i<j \quad \text{ve} \quad \frac{\left\langle x_i-x_1,x_j-x_1\right\rangle}{\left\langle x_2-x_1,x_2-x_1\right\rangle} \quad i,j=2,...,k\ ;\ i\le j$$

ile üretilebilir. Burada

$$\frac{\left[x_i-x_1 \quad x_j-x_1\right]}{\left[x_2-x_1 \quad x_3-x_1\right]};i,j=2,...,k;i<j$$

ifadesini incelediğimizde $i,j=2,...,k;i<j$ için

$$\frac{\left[x_i-x_1 \quad x_j-x_1\right]}{\left[x_2-x_1 \quad x_3-x_1\right]}=\frac{\left[x_i-x_1 \quad x_j-x_1\right]}{\left[x_2-x_1 \quad x_3-x_1\right]}.1=\frac{\left[x_i-x_1 \quad x_j-x_1\right]}{\left[x_2-x_1 \quad x_3-x_1\right]}\frac{\left[x_2-x_1 \quad x_3-x_1\right]}{\left[x_2-x_1 \quad x_3-x_1\right]}$$

$$=\frac{\left[x_i-x_1 \quad x_j-x_1\right]\left[x_2-x_1 \quad x_3-x_1\right]}{\left[x_2-x_1 \quad x_3-x_1\right]^2}$$

olur. Böylece, $\left[x_i-x_1 \quad x_j-x_1\right];i,j=2,...,k;i<j$ determinantı tek invaryant polinomdur. $\left[x_2-x_1 \quad x_3-x_1\right]$ determinantı da tek invaryant polinomdur.İki tek invaryant polinomun çarpımı çift invaryant polinom olduğundan

$$\frac{\left[x_i-x_1 \quad x_j-x_1\right]\left[x_2-x_1 \quad x_3-x_1\right]}{\left[x_2-x_1 \quad x_3-x_1\right]^2}$$

ifadesi iki çift invaryant polinomun oranı biçiminde olur ki bu da

$$\frac{\left[x_i-x_1 \quad x_j-x_1\right]}{\left[x_2-x_1 \quad x_3-x_1\right]};i,j=2,...,k;i<j$$

ifadesinin de

$$\frac{\langle x_i - x_1, x_j - x_1 \rangle}{\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1 \rangle} \quad i, j = 2, \ldots, k \;\; ; \;\; i \leq j$$

ile üretilebilir olduğunu gösterir. ♦

2.14. Noktalar Sistemlerinin B(2) – Denklik Şartları

Önerme 91 : R^2 de keyfi $x = (x_1, x_2)$ ve $y = (y_1, y_2)$ vektörleri her zaman *B(2)*-denkdir.

İspat: R^2 de x ve y vektörleri verilsin. $\lambda = 1$, $I \in O(2)$ ve $y - x = b \in R^2$ için $y = \lambda g x + b$ yazılabileceğinden $x \overset{B(2)}{\approx} y$ dir. ♦

Teorem 32 : R^2 de $\{x_1, x_2\}$ ve $\{y_1, y_2\}$ sistemleri verilmiş olsun.

1- $x_2 \neq x_1$ ve $y_2 \neq y_1$ ise $\{x_1, x_2\} \overset{B(2)}{\approx} \{y_1, y_2\}$ dir.

2- $x_2 \neq x_1$ ve $y_2 = y_1$; veya $x_2 = x_1$ ve $y_2 \neq y_1$ ise $\{x_1, x_2\} \overset{B(2)}{\not\approx} \{y_1, y_2\}$ dir. Yani, denk olamazlar.

3- $x_2 = x_1$ ve $y_2 = y_1$ ise $\{x_1, x_2\} \overset{B(2)}{\approx} \{y_1, y_2\}$ dir.

İspat: 1- $x_2 \neq x_1$ ve $y_2 \neq y_1$ olsun. Bu durumda $\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1 \rangle \neq 0$ ve $\|x_2 - x_1\| \neq 0$ dır. λ olarak $\lambda = \dfrac{\|y_2 - y_1\|}{\|x_2 - x_1\|} = \sqrt{\dfrac{\langle y_2 - y_1, y_2 - y_1 \rangle}{\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1 \rangle}} > 0$ alınırsa $\|y_2 - y_1\| = \|\lambda(x_2 - x_1)\|$ dir. Lemma 4 e göre $\exists g \in O(2)$ öyleki,

$y_2 - y_1 = g(\lambda(x_2 - x_1)) = \lambda g(x_2 - x_1)$ dir. Buradan

$$y_2 - \lambda g x_2 = y_1 - \lambda g x_1$$

elde edilir. Bu elde edilen $y_1 - \lambda g x_1$ vektörünü b vektörü olarak alırsak,

$$y_1 = \lambda g x_1 + b$$

$$y_2 = \lambda g x_2 + b$$

olur ki bu ise $\{x_1, x_2\} \overset{B(2)}{\approx} \{y_1, y_2\}$ olduklarını gösterir.

2- $x_2 \neq x_1$ ve $y_2 = y_1$ olsun. Bu durumda $\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1 \rangle \neq 0$ ve $\langle y_2 - y_1, y_2 - y_1 \rangle = 0$ dır. Ayrıca, varsayalım $\{x_1, x_2\} \overset{B(2)}{\approx} \{y_1, y_2\}$ olsun. Bu durumda bir $\lambda > 0$, $g \in O(2)$ ve $b \in R^2$ vardır öyleki, $y_2 - y_1 = \lambda g(x_2 - x_1)$ dir. g bir ortogonal dönüşüm olduğundan iç çarpımı korur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\langle y_2 - y_1, y_2 - y_1 \rangle &= \langle g\lambda(x_2 - x_1), g\lambda(x_2 - x_1) \rangle = \langle \lambda(x_2 - x_1), \lambda(x_2 - x_1) \rangle \\ &= \lambda^2 \langle x_2 - x_1, x_2 - x_1 \rangle\end{aligned}$$

dir. Buradan $\lambda > 0$ ve $\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1 \rangle \neq 0$ olduğundan $\langle y_2 - y_1, y_2 - y_1 \rangle \neq 0$ olur ki, bu $y_2 \neq y_1$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla bir çelişki elde edilir. Buna göre, $\{x_1, x_2\} \overset{B(2)}{\not\approx} \{y_1, y_2\}$ dir, yani denk olamazlar.

İkinci durumda $x_2 = x_1$ ve $y_2 \neq y_1$ ise $\{x_1, x_2\} \overset{B(2)}{\not\approx} \{y_1, y_2\}$ denk olamayacağını gösterelim. Bu durumda $\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1 \rangle = 0$ ve $\langle y_2 - y_1, y_2 - y_1 \rangle \neq 0$ dır. Varsayalım $\{x_1, x_2\} \overset{B(2)}{\approx} \{y_1, y_2\}$ olsun. O halde bir $\lambda > 0$, $g \in O(2)$ ve $b \in R^2$ vardır öyleki, $y_2 - y_1 = \lambda g(x_2 - x_1)$ dir. g bir ortogonal dönüşüm olduğundan iç çarpımı korur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\langle y_2 - y_1, y_2 - y_1 \rangle &= \langle g\lambda(x_2 - x_1), g\lambda(x_2 - x_1) \rangle = \langle \lambda(x_2 - x_1), \lambda(x_2 - x_1) \rangle \\ &= \lambda^2 \langle x_2 - x_1, x_2 - x_1 \rangle\end{aligned}$$

dir. Buradan $\lambda > 0$ ve $\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1 \rangle = 0$ olduğundan $\langle y_2 - y_1, y_2 - y_1 \rangle = 0$ olur ki, bu $y_2 = y_1$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla bir çelişki elde edilir. Buna göre, $\{x_1, x_2\} \overset{B(2)}{\not\approx} \{y_1, y_2\}$ dir, yani denk olamazlar.

3- $x_2 = x_1$ ve $y_2 = y_1$ olsunlar. $\lambda = 1$, $I \in O(2)$ ve $y_1 - x_1 = b \in R^2$ için $y_1 = \lambda I x_1 + b$ yazılabileceğinden her zaman $x_1 \overset{B(2)}{\approx} y_1$ dir. $x_2 = x_1$ ve $y_2 = y_1$ durumda aynı λ, I ve b değerleri için $x_2 \overset{B(2)}{\approx} y_2$ dir. O halde $\{x_1, x_2\} \overset{B(2)}{\approx} \{y_1, y_2\}$ olduğu açıktır.♦

Teorem 33: R^2 de $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ ve $\{y_1, y_2, ..., y_k\}$ sistemleri için

1- $\exists i = 2,...,k$ için $x_i = x_1, \quad y_i \neq y_1$ veya $x_i \neq x_1, \quad y_i = y_1$ ise

$\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{B(2)}{\not\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ denk olamazlar.

2- $\exists i = 2,...,k$ için $x_i = x_1, \quad y_i = y_1$ ise $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ ve $\{y_1, y_2, ..., y_k\}$ denklik şartı R^2 de k-1 vektörün denklik şartına indirgenir.Yani, $x_i = x_1, \quad y_i = y_1$ ise

$\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{B(2)}{\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ dir ancak ve ancak,

$\{x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_k\} \overset{B(2)}{\approx} \{y_1, ..., y_{i-1}, y_{i+1}, ..., y_k\}$ ise.

3- $\boldsymbol{x_i \neq x_1}, \quad \boldsymbol{y_i \neq y_1}$; $i = 2,...,k$ ise

i) $rank\left(\|x_2 - x_1 \quad x_3 - x_1 \quad \cdots \quad x_k - x_1\|\right) = rank\left(\|y_2 - y_1 \quad y_3 - y_1 \quad \cdots \quad y_k - y_1\|\right) = 2$

ise $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{B(2)}{\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ dir ancak ve ancak

$\dfrac{\langle x_i - x_1, x_j - x_1\rangle}{\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1\rangle} = \dfrac{\langle y_i - y_1, y_j - y_1\rangle}{\langle y_2 - y_1, y_2 - y_1\rangle}$; $i \leq j$; $i, j = 2,...,k$ dir.

ii) $rank\left(\|x_2 - x_1 \quad x_3 - x_1 \quad \cdots \quad x_k - x_1\|\right) = rank\left(\|y_2 - y_1 \quad y_3 - y_1 \quad \cdots \quad y_k - y_1\|\right) = 1$

ise,$\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{B(2)}{\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ dir ancak ve ancak $\dfrac{\langle x_2 - x_1, x_j - x_1\rangle}{\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1\rangle} = \dfrac{\langle y_2 - y_1, y_j - y_1\rangle}{\langle y_2 - y_1, y_2 - y_1\rangle}$;

$j = 2,3,...k$ dir.

iii) $rank\left(\|x_2 - x_1 \quad x_3 - x_1 \quad \cdots \quad x_k - x_1\|\right) \neq rank\left(\|y_2 - y_1 \quad y_3 - y_1 \quad \cdots \quad y_k - y_1\|\right)$

ise $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{B(2)}{\not\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ denk olamazlar.

İspat:

1- $\exists i = 2,...,k$ için $x_i = x_1, \quad y_i \neq y_1$ ise $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{B(2)}{\not\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ denk olamadıklarını gösterelim. Varsayalım ki bunlar denk olsunlar. Bu durumda $\exists g \in O(2)$, $\lambda > 0$ ve $b \in R^2$ için, $y_i = \lambda g x_i + b$ dir. Burada $x_i = x_1$ ise $y_i = y_1$ olur ki bu hipotezle çelişir. Benzer şekilde $y_i = y_1$, $x_i \neq x_1$ ise, $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{B(2)}{\not\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ denk olamadıklarını gösterelim. Varsayalım ki bunlar denk olsunlar. Bu durumda $\exists g \in O(2)$, $\lambda > 0$ ve $b \in R^2$ için, $y_i = \lambda g x_i + b$ dir. g ortogonal dönüşüm olduğundan

$x_i = \frac{1}{\lambda} g^T\left(y_i - b\right)$ dir. $y_i = y_1$ olduğundan $x_i = x_1$ elde edilir ki, bu da yine hipotezle çelişir. O halde $\exists i = 2,...,k$ için için $y_i = y_1$, $x_i \neq x_1$ veya $x_i = x_1$, $y_i \neq y_1$ ise $\left\{x_1, x_2,..., x_k\right\} \overset{B(2)}{\not\approx} \left\{y_1, y_2,..., y_k\right\}$ dir, yani denk olamazlar.

2- $\exists i = 2,...,k$ için $y_i = y_1$, $x_i = x_1$ ve $\left\{x_1, x_2,..., x_k\right\} \overset{B(2)}{\approx} \left\{y_1, y_2,..., y_k\right\}$ olsun. Bu durumda $\exists g \in O(2)$, $\lambda > 0$ ve $b \in R^2$ için, $y_j = \lambda g x_j + b$; $j = 1, 2,..., k$ dir. Buradan

$y_j = \lambda g x_j + b$; $j = 1, 2,..., i-1, i+1,...k$ olduğu görülür. Böylece,

$\left\{x_1,..., x_{i-1}, x_{i+1},..., x_k\right\} \overset{B(2)}{\approx} \left\{y_1,..., y_{i-1}, y_{i+1},..., y_k\right\}$ dir. Tersine,

$\left\{x_1,..., x_{i-1}, x_{i+1},..., x_k\right\} \overset{B(2)}{\approx} \left\{y_1,..., y_{i-1}, y_{i+1},..., y_k\right\}$ olsun. O halde $\exists g \in O(2)$, $\lambda > 0$ ve $b \in R^2$ için, $y_j = \lambda g x_j + b$; $j = 1, 2,..., i-1, i+1,...k$ dir. $y_i = y_1$, $x_i = x_1$ olduğundan $y_j = \lambda g x_j$; $j = 1, 2,..., k$ dir. Böylece, $\left\{x_1, x_2,..., x_k\right\} \overset{B(2)}{\approx} \left\{y_1, y_2,..., y_k\right\}$ elde edilmiş olur.

3- i) $x_i \neq x_1$, $y_i \neq y_1$; $i = 2,...,k$ olmak üzere

$rank\left(\left\| x_2 - x_1 \quad x_3 - x_1 \quad \cdots \quad x_k - x_1 \right\|\right) = rank\left(\left\| y_2 - y_1 \quad y_3 - y_1 \quad \cdots \quad y_k - y_1 \right\|\right) = 2$ ve $\left\{x_1, x_2,..., x_k\right\} \overset{B(2)}{\approx} \left\{y_1, y_2,..., y_k\right\}$ olsun. O halde $\exists \lambda \in R^*$, $g \in O\left(2\right)$ ve $b \in R^2$ öyleki, $s = 1, 2,.., k$ için $y_s = \lambda g x_s + b$ dir. Buradan, $i \leq j$; $i, j = 2,...,k$ için $\frac{\left\langle y_i - y_1, y_j - y_1 \right\rangle}{\left\langle y_2 - y_1, y_2 - y_1 \right\rangle}$ ifadelerinde $s = 1, 2,.., k$ için $y_s = \lambda g x_s + b$ eşitlikleri yerlerine konulursa g ortogonal dönüşümü iç çarpımı koruduğundan ve iç çarpımın özelliklerinden

$$\frac{\left\langle y_i - y_1, y_j - y_1 \right\rangle}{\left\langle y_2 - y_1, y_2 - y_1 \right\rangle} = \frac{\left\langle \lambda g\left(x_i - x_1\right), \lambda g\left(x_j - x_1\right) \right\rangle}{\left\langle \lambda g\left(x_2 - x_1\right), \lambda g\left(x_2 - x_1\right) \right\rangle} = \frac{\left\langle x_i - x_1, x_j - x_1 \right\rangle}{\left\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1 \right\rangle}$$

elde edilir. Tersine,

$$rank\left(\left\| x_2 - x_1 \quad x_3 - x_1 \quad \cdots \quad x_k - x_1 \right\|\right) = rank\left(\left\| y_2 - y_1 \quad y_3 - y_1 \quad \cdots \quad y_k - y_1 \right\|\right) = 2$$

ve ancak $\dfrac{\langle x_i - x_1, x_j - x_1\rangle}{\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1\rangle} = \dfrac{\langle y_i - y_1, y_j - y_1\rangle}{\langle y_2 - y_1, y_2 - y_1\rangle}$; $i \le j$; $i, j = 2,...,k$ eşitlikleri

verilsin. $\{x_1, x_2,..., x_k\} \overset{B(2)}{\approx} \{y_1, y_2,..., y_k\}$ olduklarını gösterelim. Verilen eşitliklerden $i \le j$; $i, j = 2,...,k$ için

$$\langle y_i - y_1, y_j - y_1\rangle = \frac{\langle y_2 - y_1, y_2 - y_1\rangle}{\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1\rangle}\langle x_i - x_1, x_j - x_1\rangle$$

yazılabilir. Buradaki $\dfrac{\langle y_2 - y_1, y_2 - y_1\rangle}{\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1\rangle} > 0$ ifadesine λ^2 denilirse, veya

$\lambda = \sqrt{\dfrac{\langle y_2 - y_1, y_2 - y_1\rangle}{\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1\rangle}}$ alınırsa, $i, j = 2,...,k;$ $i \le j$ için

$$\langle y_i - y_1, y_j - y_1\rangle = \langle \lambda(x_i - x_1), \lambda(x_j - x_1)\rangle \tag{42}$$

eşitlikleri elde edilir. $\{x_2 - x_1,..., x_k - x_1\}$ ve $\{y_2 - y_1,..., y_k - y_1\}$ vektör sistemleri lineer bağımlı ve

$$rank\left(\left\| x_2 - x_1 \quad x_3 - x_1 \quad \cdots \quad x_k - x_1 \right\|\right) = rank\left(\left\| y_2 - y_1 \quad y_3 - y_1 \quad \cdots \quad y_k - y_1 \right\|\right) = 2$$

olduğundan lineer bağımsız olan vektörlerin hangiler olduğunun belirlenmesi gerekmektedir. Varsayalım $\{x_2 - x_1,..., x_k - x_1\}$ sisteminde lineer bağımsız olan vektörler $\{x_i - x_1, x_j - x_1\}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{vmatrix} \langle \lambda(x_i - x_1), \lambda(x_i - x_1)\rangle & \langle \lambda(x_i - x_1), \lambda(x_j - x_1)\rangle \\ \langle \lambda(x_j - x_1), \lambda(x_i - x_1)\rangle & \langle \lambda(x_j - x_1), \lambda(x_j - x_1)\rangle \end{vmatrix} \ne 0$$

dır. Buna göre verilen (42) eşitliklerinden

$$\begin{vmatrix} \langle y_i - y_1, y_i - y_1\rangle & \langle y_i - y_1, y_j - y_1\rangle \\ \langle y_j - y_1, y_i - y_1\rangle & \langle y_j - y_1, y_j - y_1\rangle \end{vmatrix} \ne 0$$

olur. Böylece $\{y_2 - y_1,..., y_k - y_1\}$ sisteminde $\{y_i - y_1, y_j - y_1\}$ vektörleri lineer bağımsızdır. Bu durumda

$$\begin{array}{lcl} x_2 - x_1 = \alpha_{2i}(x_i - x_1) + \alpha_{2j}(x_j - x_1) & & y_2 - y_1 = \beta_{2i}(y_i - y_1) + \beta_{2j}(y_j - y_1) \\ \vdots & \text{ve} & \vdots \\ x_k - x_1 = \alpha_{ki}(x_i - x_1) + \alpha_{kj}(x_j - x_1) & & y_k - y_1 = \beta_{ki}(y_i - y_1) + \beta_{kj}(y_j - y_1) \end{array} \tag{43}$$

yazılabilir. Şimdi $\{\lambda(x_i-x_1),\lambda(x_j-x_1)\},\{y_i-y_1,y_j-y_1\}$ vektörlerini

$$\lambda(x_i-x_1)=(\lambda(x_{i1}-x_{11}),\lambda(x_{i2}-x_{12}))$$
$$\lambda(x_j-x_1)=(\lambda(x_{j1}-x_{11}),\lambda(x_{j2}-x_{12}))$$
$$y_i-y_1=(y_{i1}-y_{11},y_{i2}-y_{12})$$
$$y_j-y_1=(y_{j1}-y_{11},y_{j2}-y_{12})$$

biçiminde yazarsak,

$$\left\|\lambda(x_i-x_1)\quad \lambda(x_j-x_1)\right\|=\begin{bmatrix}\lambda(x_{i1}-x_{11}) & \lambda(x_{j1}-x_{11})\\ \lambda(x_{i2}-x_{12}) & \lambda(x_{j2}-x_{12})\end{bmatrix}$$

$$\left\|y_i-y_1\quad y_j-y_1\right\|=\begin{bmatrix}y_{i1}-y_{11} & y_{j1}-y_{11}\\ y_{i2}-y_{12} & y_{j2}-y_{12}\end{bmatrix}$$

matrislerini göz önüne aldığımızda

$$\left\|\lambda(x_i-x_1)\quad \lambda(x_j-x_1)\right\|^T\left\|\lambda(x_i-x_1)\quad \lambda(x_j-x_1)\right\|=$$
$$=\begin{vmatrix}\langle\lambda(x_i-x_1),\lambda(x_i-x_1)\rangle & \langle\lambda(x_i-x_1),\lambda(x_j-x_1)\rangle\\ \langle\lambda(x_j-x_1),\lambda(x_i-x_1)\rangle & \langle\lambda(x_j-x_1),\lambda(x_j-x_1)\rangle\end{vmatrix}$$

yazabiliriz. Benzer şekilde

$$\left\|y_i-y_1\quad y_j-y_1\right\|^T\left\|y_i-y_1\quad y_j-y_1\right\|=\begin{vmatrix}\langle y_i-y_1,y_i-y_1\rangle & \langle y_i-y_1,y_j-y_1\rangle\\ \langle y_j-y_1,y_i-y_1\rangle & \langle y_j-y_1,y_j-y_1\rangle\end{vmatrix}$$

dir. (42) eşitliklerinden

$$\begin{vmatrix}\langle\lambda(x_i-x_1),\lambda(x_i-x_1)\rangle & \langle\lambda(x_i-x_1),\lambda(x_j-x_1)\rangle\\ \langle\lambda(x_j-x_1),\lambda(x_i-x_1)\rangle & \langle\lambda(x_j-x_1),\lambda(x_j-x_1)\rangle\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\langle y_i-y_1,y_i-y_1\rangle & \langle y_i-y_1,y_j-y_1\rangle\\ \langle y_j-y_1,y_i-y_1\rangle & \langle y_j-y_1,y_j-y_1\rangle\end{vmatrix}$$

eşitliği yazılabileceğinden

$$\left\|\lambda(x_i-x_1)\quad \lambda(x_j-x_1)\right\|^T\left\|\lambda(x_i-x_1)\quad \lambda(x_j-x_1)\right\|=\left\|y_i-y_1\quad y_j-y_1\right\|^T\left\|y_i-y_1\quad y_j-y_1\right\|$$

eşitliği elde edilir. $\{\lambda(x_i-x_1),\lambda(x_j-x_1)\}$ vektörleri lineer bağımsız olduğundan

$\left\|\lambda(x_i-x_1)\quad \lambda(x_j-x_1)\right\|$ determinantı sıfırdan farklı ve tersi mevcut bir matristir.

Benzer şekilde $\{y_i-y_1,y_j-y_1\}$ vektörleri de lineer bağımsız olduklarından

$\left\| y_i - y_1 \quad y_j - y_1 \right\|$ de tersi mevcut bir matristir. Lineer cebirden biliyoruz ki, determinantı sıfırdan farklı bir g matrisi mevcut ve

$$\left\| y_i - y_1 \quad y_j - y_1 \right\| = g \left\| \lambda\left(x_i - x_1\right) \quad \lambda\left(x_j - x_1\right) \right\|$$

dir. Bu eşitliği bir önceki eşitlikte yerine yazarsak,

$$\left\| \lambda\left(x_i - x_1\right) \quad \lambda\left(x_j - x_1\right) \right\|^T \left\| \lambda\left(x_i - x_1\right) \quad \lambda\left(x_j - x_1\right) \right\| = \left\| \lambda\left(x_i - x_1\right) \quad \lambda\left(x_j - x_1\right) \right\|^T g^T g \left\| \lambda\left(x_i - x_1\right) \quad \lambda\left(x_j - x_1\right) \right\|$$

elde edilir. Burada eşitliğin her iki tarafını , soldan $\left(\left\| \lambda\left(x_i - x_1\right) \quad \lambda\left(x_j - x_1\right) \right\|^T \right)^{-1}$ ile sağdan da $\left(\left\| \lambda\left(x_i - x_1\right) \quad \lambda\left(x_j - x_1\right) \right\| \right)^{-1}$ ile çarparsak,

$$I = g^T g$$

elde edilir ki bu, g nin ortogonal olduğunu gösterir. Dolayısıyla $g \in O(2)$ dir.

$$\left\| y_i - y_1 \quad y_j - y_1 \right\| = g \left\| \lambda\left(x_i - x_1\right) \quad \lambda\left(x_j - x_1\right) \right\|$$

olduğundan

$$\begin{aligned} y_i - y_1 &= \lambda g\left(x_i - x_1\right) \\ y_j - y_1 &= \lambda g\left(x_j - x_1\right) \end{aligned} \tag{44}$$

elde edilir. Buradan ve (43) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} &\lambda\left(x_2 - x_1\right) = \alpha_{2i}\lambda\left(x_i - x_1\right) + \alpha_{2j}\lambda\left(x_j - x_1\right) \\ &\vdots \\ &\lambda\left(x_k - x_1\right) = \alpha_{ki}\lambda\left(x_i - x_1\right) + \alpha_{kj}\lambda\left(x_j - x_1\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} &g\lambda\left(x_2 - x_1\right) = g\left(\alpha_{2i}\lambda\left(x_i - x_1\right) + \alpha_{2j}\lambda\left(x_j - x_1\right)\right) = \alpha_{2i} g\lambda\left(x_i - x_1\right) + \alpha_{2j} g\lambda\left(x_j - x_1\right) = \alpha_{2i}\left(y_i - y_1\right) + \alpha_{2j}\left(y_j - y_1\right) \\ &\vdots \\ &g\lambda\left(x_k - x_1\right) = g\left(\alpha_{ki}\lambda\left(x_i - x_1\right) + \alpha_{kj}\lambda\left(x_j - x_1\right)\right) = \alpha_{ki} g\lambda\left(x_i - x_1\right) + \alpha_{kj} g\lambda\left(x_j - x_1\right) = \alpha_{ki}\left(y_i - y_1\right) + \alpha_{kj}\left(y_j - y_1\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $s = 2, \ldots, k$ için

$$y_s - y_1 = \beta_{si}\left(y_i - y_1\right) + \beta_{sj}\left(y_j - y_1\right) \quad \text{ve} \quad \lambda g\left(x_s - x_1\right) = \alpha_{si}\left(y_i - y_1\right) + \alpha_{sj}\left(y_j - y_1\right)$$

elde edilmiş olur. Bu iki vektörün birbirine eşit olması, ancak $s = 2, \ldots, k$ için $\alpha_{si} = \beta_{si}$ ve $\alpha_{sj} = \beta_{sj}$ eşitliklerinin var olmasına bağlıdır. Şimdi bu eşitliklerin var olduğunu gösterelim: (43) eşitliğinden $s = 2, \ldots, k$ için

$$\left\langle \lambda(x_i - x_1), \lambda(x_s - x_1) \right\rangle = \left\langle \lambda(x_i - x_1), \lambda\left(\alpha_{si}(x_i - x_1) + \alpha_{sj}(x_j - x_1)\right) \right\rangle$$
$$= \alpha_{si} \left\langle \lambda(x_i - x_1), \lambda(x_i - x_1) \right\rangle + \alpha_{sj} \left\langle \lambda(x_i - x_1), \lambda(x_j - x_1) \right\rangle$$
$$\left\langle \lambda(x_j - x_1), \lambda(x_s - x_1) \right\rangle = \left\langle \lambda(x_j - x_1), \lambda\left(\alpha_{si}(x_i - x_1) + \alpha_{sj}(x_j - x_1)\right) \right\rangle$$
$$= \alpha_{si} \left\langle \lambda(x_i - x_1), \lambda(x_i - x_1) \right\rangle + \alpha_{sj} \left\langle \lambda(x_i - x_1), \lambda(x_j - x_1) \right\rangle$$

ve

$$\left\langle y_i - y_1, y_s - y_1 \right\rangle = \left\langle y_i - y_1, \beta_{si}(y_i - y_1) + \beta_{sj}(y_j - y_1) \right\rangle = \beta_{si} \left\langle y_i - y_1, y_i - y_1 \right\rangle + \beta_{sj} \left\langle y_i - y_1, y_j - y_1 \right\rangle$$
$$\left\langle y_j - y_1, y_s - y_1 \right\rangle = \left\langle y_j - y_1, \beta_{si}(y_i - y_1) + \beta_{sj}(y_j - y_1) \right\rangle = \beta_{si} \left\langle y_j - y_1, y_i - y_1 \right\rangle + \beta_{sj} \left\langle y_j - y_1, y_j - y_1 \right\rangle$$

yazılabilir. Bu lineer denklemlerin çözümünden

$$\alpha_{si} = \frac{\left\langle \lambda(x_i - x_1), \lambda(x_s - x_1) \right\rangle \left\langle \lambda(x_j - x_1), \lambda(x_j - x_1) \right\rangle - \left\langle \lambda(x_i - x_1), \lambda(x_j - x_1) \right\rangle \left\langle \lambda(x_j - x_1), \lambda(x_s - x_1) \right\rangle}{\left\langle \lambda(x_i - x_1), \lambda(x_i - x_1) \right\rangle \left\langle \lambda(x_j - x_1), \lambda(x_j - x_1) \right\rangle - \left\langle \lambda(x_i - x_1), \lambda(x_j - x_1) \right\rangle^2}$$
$$= \frac{\begin{vmatrix} \left\langle \lambda(x_i - x_1), \lambda(x_s - x_1) \right\rangle & \left\langle \lambda(x_i - x_1), \lambda(x_j - x_1) \right\rangle \\ \left\langle \lambda(x_j - x_1), \lambda(x_s - x_1) \right\rangle & \left\langle \lambda(x_j - x_1), \lambda(x_j - x_1) \right\rangle \end{vmatrix}}{\det Gr\left(\lambda(x_i - x_1), \lambda(x_j - x_1)\right)}$$

$$\alpha_{sj} = \frac{\left\langle \lambda(x_i - x_1), \lambda(x_i - x_1) \right\rangle \left\langle \lambda(x_j - x_1), \lambda(x_s - x_1) \right\rangle - \left\langle \lambda(x_i - x_1), \lambda(x_s - x_1) \right\rangle \left\langle \lambda(x_j - x_1), \lambda(x_i - x_1) \right\rangle}{\left\langle \lambda(x_i - x_1), \lambda(x_i - x_1) \right\rangle \left\langle \lambda(x_j - x_1), \lambda(x_j - x_1) \right\rangle - \left\langle \lambda(x_i - x_1), \lambda(x_j - x_1) \right\rangle^2}$$
$$= \frac{\begin{vmatrix} \left\langle \lambda(x_i - x_1), \lambda(x_i - x_1) \right\rangle & \left\langle \lambda(x_i - x_1), \lambda(x_s - x_1) \right\rangle \\ \left\langle \lambda(x_j - x_1), \lambda(x_i - x_1) \right\rangle & \left\langle \lambda(x_j - x_1), \lambda(x_s - x_1) \right\rangle \end{vmatrix}}{\det Gr\left(\lambda(x_i - x_1), \lambda(x_j - x_1)\right)}$$

ve

$$\beta_{si} = \frac{\left\langle y_i - y_1, y_s - y_1 \right\rangle \left\langle y_j - y_1, y_j - y_1 \right\rangle - \left\langle y_i - y_1, y_j - y_1 \right\rangle \left\langle y_j - y_1, y_s - y_1 \right\rangle}{\left\langle y_i - y_1, y_i - y_1 \right\rangle \left\langle y_j - y_1, y_j - y_1 \right\rangle - \left\langle y_i - y_1, y_j - y_1 \right\rangle^2}$$
$$= \frac{\begin{vmatrix} \left\langle y_i - y_1, y_s - y_1 \right\rangle & \left\langle y_i - y_1, y_j - y_1 \right\rangle \\ \left\langle y_j - y_1, y_s - y_1 \right\rangle & \left\langle y_j - y_1, y_j - y_1 \right\rangle \end{vmatrix}}{\det Gr\left(y_i - y_1, y_j - y_1\right)}$$

$$\beta_{sj}=\frac{\langle y_i-y_1,y_i-y_1\rangle\langle y_j-y_1,y_sv\rangle-\langle y_i-y_1,y_s-y_1\rangle\langle y_j-y_1,y_i-y_1\rangle}{\langle y_i-y_1,y_i-y_1\rangle\langle y_j-y_1,y_j-y_1\rangle-\langle y_i-y_1,y_j-y_1\rangle^2}$$

$$=\frac{\begin{vmatrix}\langle y_i-y_1,y_i-y_1\rangle & \langle y_i-y_1,y_s-y_1\rangle\\ \langle y_j-y_1,y_i-y_1\rangle & \langle y_j-y_1,y_s-y_1\rangle\end{vmatrix}}{\det Gr\left(y_i-y_1,y_j-y_1\right)}$$

eşitlikleri elde edilir. (42) eşitlikleri kullanılarak $\alpha_{si}=\beta_{si}$ ve $\alpha_{sj}=\beta_{sj}$ oldukları görülür. Böylece, $s=2,...,k$ için $y_s-y_1=\lambda g\left(x_s-x_1\right)$ olur. Bu ifade açıldığında $s=2,...,k$ için $y_s-\lambda gx_s=y_1-\lambda gx_1$ olur. $\left(y_1-\lambda gx_1\right)\in R^2$ ifadesine b dersek, $s=1,...,k$ için $y_s=\lambda gx_s+b$ elde edilir. Buna göre $\left\{x_1,x_2,...,x_k\right\}\overset{B(2)}{\approx}\left\{y_1,y_2,...,y_k\right\}$ dir.

ii) $rank\left(\left\|x_2-x_1 \quad x_3-x_1 \quad \cdots \quad x_k-x_1\right\|\right)=rank\left(\left\|y_2-y_1 \quad y_3-y_1 \quad \cdots \quad y_k-y_1\right\|\right)=1$ ve $\left\{x_1,x_2,...,x_k\right\}\overset{B(2)}{\approx}\left\{y_1,y_2,...,y_k\right\}$ olsun. $\dfrac{\langle x_2-x_1,x_j-x_1\rangle}{\langle x_2-x_1,x_2-x_1\rangle}=\dfrac{\langle y_2-y_1,y_j-y_1\rangle}{\langle y_2-y_1,y_2-y_1\rangle}$; $j=2,3,...k$ eşitliklerinin mevcut olduğunu gösterelim. $\left\{x_1,x_2,...,x_k\right\}\overset{B(2)}{\approx}\left\{y_1,y_2,...,y_k\right\}$ olduğundan $\exists g\in O(2)$, $\lambda>0$ ve $b\in R^2$ için, $y_i=\lambda gx_i+b$; $i=1,2,...,k$ dir. $rank\left(\left\|x_2-x_1 \quad x_3-x_1 \quad \cdots \quad x_k-x_1\right\|\right)=rank\left(\left\|y_2-y_1 \quad y_3-y_1 \quad \cdots \quad y_k-y_1\right\|\right)=1$ olduğundan her iki vektör sisteminde de bir tane lineer bağımsız vektör var demektir. O halde lineer bağımsız olan vektörler $\exists s=2,...,k$ için $\left\{x_s-x_1\right\}$ ve $\left\{y_s-y_1\right\}$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{matrix} x_2-x_1=l_2\left(x_s-x_1\right) & & y_2-y_1=m_2\left(y_s-y_1\right)\\ \vdots & \text{ve} & \vdots \\ x_k-x_1=l_k\left(x_s-x_1\right) & & y_k-y_1=m_k\left(y_s-y_1\right)\end{matrix} \tag{45}$$

yazılabilir. Buna göre,

$$\frac{\langle y_2-y_1,y_2-y_1\rangle}{\langle y_2-y_1,y_2-y_1\rangle}=\frac{\langle m_2\left(y_s-y_1\right),m_2\left(y_s-y_1\right)\rangle}{\langle m_2\left(y_s-y_1\right),m_2\left(y_s-y_1\right)\rangle}=\frac{m_2}{m_2}$$

$$=\frac{\langle g\lambda\left(x_2-x_1\right),g\lambda\left(x_2-x_1\right)\rangle}{\langle g\lambda\left(x_2-x_1\right),g\lambda\left(x_2-x_1\right)\rangle}=\frac{\langle x_2-x_1,x_2-x_1\rangle}{\langle x_2-x_1,x_2-x_1\rangle}=\frac{\langle l_2\left(x_s-x_1\right),l_2\left(x_s-x_1\right)\rangle}{\langle l_2\left(x_s-x_1\right),l_2\left(x_s-x_1\right)\rangle}$$

$$=\frac{l_2}{l_2}$$

$$\frac{\langle y_2-y_1,y_3-y_1\rangle}{\langle y_2-y_1,y_2-y_1\rangle}=\frac{\langle m_2(y_s-y_1),m_3(y_s-y_1)\rangle}{\langle m_2(y_s-y_1),m_2(y_s-y_1)\rangle}=\frac{m_3}{m_2}$$

$$=\frac{\langle g\lambda(x_2-x_1),g\lambda(x_3-x_1)\rangle}{\langle g\lambda(x_2-x_1),g\lambda(x_2-x_1)\rangle}=\frac{\langle x_2-x_1,x_3-x_1\rangle}{\langle x_2-x_1,x_2-x_1\rangle}=\frac{\langle l_2(x_s-x_1),l_3(x_s-x_1)\rangle}{\langle l_2(x_s-x_1),l_2(x_s-x_1)\rangle}=\frac{l_3}{l_2}$$

$\vdots$

$$\frac{\langle y_2-y_1,y_k-y_1\rangle}{\langle y_2-y_1,y_2-y_1\rangle}=\frac{\langle m_2(y_s-y_1),m_k(y_s-y_1)\rangle}{\langle m_2(y_s-y_1),m_2(y_s-y_1)\rangle}=\frac{m_k}{m_2}$$

$$=\frac{\langle g\lambda(x_2-x_1),g\lambda(x_k-x_1)\rangle}{\langle g\lambda(x_2-x_1),g\lambda(x_2-x_1)\rangle}=\frac{\langle x_2-x_1,x_k-x_1\rangle}{\langle x_2-x_1,x_2-x_1\rangle}=\frac{\langle l_2(x_s-x_1),l_k(x_s-x_1)\rangle}{\langle l_2(x_s-x_1),l_2(x_s-x_1)\rangle}=\frac{l_k}{l_2}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan, $\dfrac{\langle x_2-x_1,x_j-x_1\rangle}{\langle x_2-x_1,x_2-x_1\rangle}=\dfrac{\langle y_2-y_1,y_j-y_1\rangle}{\langle y_2-y_1,y_2-y_1\rangle}$; $j=2,3,...,k$ elde edilir. Ayrıca burada,

$rank\left(\|x_2-x_1 \quad x_3-x_1 \quad \cdots \quad x_k-x_1\|\right)=rank\left(\|y_2-y_1 \quad y_3-y_1 \quad \cdots \quad y_k-y_1\|\right)=1$ ve

$\{x_2-x_1,...,x_k-x_1\}$ ve $\{y_2-y_1,...,y_k-y_1\}$ vektörleri (45) biçiminde yazıldığında

$\{x_1,x_2,...,x_k\}\overset{B(2)}{\approx}\{y_1,y_2,...,y_k\}$ ise

$$\frac{l_2}{l_2}=\frac{m_2}{m_2}\ ;\ \frac{l_3}{l_2}=\frac{m_3}{m_2}\ ;\ ...\ ;\ \frac{l_k}{l_2}=\frac{m_k}{m_2}$$

elde edilir. Tersine,

$rank\left(\|x_2-x_1 \quad x_3-x_1 \quad \cdots \quad x_k-x_1\|\right)=rank\left(\|y_2-y_1 \quad y_3-y_1 \quad \cdots \quad y_k-y_1\|\right)=1$ ve

$\dfrac{\langle x_2-x_1,x_j-x_1\rangle}{\langle x_2-x_1,x_2-x_1\rangle}=\dfrac{\langle y_2-y_1,y_j-y_1\rangle}{\langle y_2-y_1,y_2-y_1\rangle}$; $j=2,3,...k$ eşitlikleri mevcut olsun.

$\{x_1,x_2,...,x_k\}\overset{B(2)}{\approx}\{y_1,y_2,...,y_k\}$ olduğunu gösterelim. Yani, $\{x_2-x_1,...,x_k-x_1\}$ ve $\{y_2-y_1,...,y_k-y_1\}$ vektörleri (45) biçiminde yazıldığında $\dfrac{l_2}{l_2}=\dfrac{m_2}{m_2}$; $\dfrac{l_3}{l_2}=\dfrac{m_3}{m_2}$; ... ; $\dfrac{l_k}{l_2}=\dfrac{m_k}{m_2}$ iken $\{x_1,x_2,...,x_k\}\overset{B(2)}{\approx}\{y_1,y_2,...,y_k\}$ olduğunu gösterelim:

$rank\left(\|x_2-x_1 \quad x_3-x_1 \quad \cdots \quad x_k-x_1\|\right)=rank\left(\|y_2-y_1 \quad y_3-y_1 \quad \cdots \quad y_k-y_1\|\right)=1$ ve

$\{x_2-x_1,...,x_k-x_1\}$ ve $\{y_2-y_1,...,y_k-y_1\}$ sistemleri için (45) eşitlikleri verilsin.

Önerme 91 den, her zaman $x_s \overset{B(2)}{\approx} y_s$ dir. Buna göre, $\exists g \in O(2)$, $\lambda > 0$ ve $b \in R^2$ için,

$y_s = \lambda g x_s + b$ dir. $\frac{l_2}{l_2} = \frac{m_2}{m_2}$; $\frac{l_3}{l_2} = \frac{m_3}{m_2}$; ... ; $\frac{l_k}{l_2} = \frac{m_k}{m_2}$ ve (45) eşitliklerinden

$j = 2,3,...,k$ için

$$m_j = \frac{m_2}{l_2} l_j$$

elde edilir. Burada $\frac{m_2}{l_2} = \sqrt{\frac{\langle y_2 - y_1, y_2 - y_1 \rangle}{\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1 \rangle}} > 0$ dır. $\frac{m_2}{l_2}\lambda = \tilde{\lambda}$ dersek $\tilde{\lambda} > 0$ dır.

Şimdi $y_s = \lambda g x_s + b$ olduğundan $b = y_s - \lambda g x_s$ ve

$$y_2 - y_1 = m_2 \left(y_s - y_1 \right) = \frac{m_2}{l_2} l_2 \left(\lambda g \left(x_s - x_1 \right) \right) = \tilde{\lambda} g \left(x_2 - x_1 \right)$$
$$\vdots$$
$$y_k - y_1 = m_k \left(y_s - y_1 \right) = \frac{m_2}{l_2} l_k \left(\lambda g \left(x_s - x_1 \right) \right) = \tilde{\lambda} g \left(x_k - x_1 \right)$$

yazılabilir. Buradan $j = 2,3,...,k$ için, $y_j - y_1 = \tilde{\lambda} g \left(x_j - x_1 \right)$ bulunur. Bu ifade açıldığında $j = 2,3,...,k$ için $y_j - \tilde{\lambda} g x_j = b = y_1 - \tilde{\lambda} g x_1$ olduğu görülür. Sonuç olarak , $j = 1,2,3,...,k$ için

$y_j = \lambda g x_j + b$ dir. Buna göre $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{B(2)}{\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ dir. Böylece, şu ifade gösterilmiş oldu:

$rank\left(\left\| x_2 - x_1 \quad x_3 - x_1 \quad \cdots \quad x_k - x_1 \right\| \right) = rank\left(\left\| y_2 - y_1 \quad y_3 - y_1 \quad \cdots \quad y_k - y_1 \right\| \right) = 1$ ve

$$\begin{array}{lcl} x_2 - x_1 = l_2 \left(x_s - x_1 \right) & & y_2 - y_1 = m_2 \left(y_s - y_1 \right) \\ \vdots & \text{ve} & \vdots \\ x_k - x_1 = l_k \left(x_s - x_1 \right) & & y_k - y_1 = m_k \left(y_s - y_1 \right) \end{array}$$

ise, $\{x_1, x_2, ..., x_3\} \overset{B(2)}{\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ dir ancak ve ancak $\{l_2, ..., l_k\} \overset{LB(1)}{\approx} \{m_2, ..., m_k\}$ ise.

iii) $rank\left(\left\| x_2 - x_1 \quad \cdots \quad x_k - x_1 \right\| \right) \neq rank\left(\left\| y_2 - y_1 \quad \cdots \quad y_k - y_1 \right\| \right)$ ise

$\{x_1, ..., x_k\} \overset{B(2)}{\not\approx} \{y_1, ..., y_k\}$ denk olamayacağını gösterelim. Bu ranklar sıfır olamaz. Çünkü ranklardan biri 0 olsa, örneğin $rank\left(\left\| x_2 - x_1 \quad \cdots \quad x_k - x_1 \right\| \right) = 0$ olsa, bu durumda

$\{x_1,...,x_k\}$ vektör sistemi $\{x_1\}$ vektöründen ibaret olur ki, bu durum tek vektörün denklik şartında incelenmiştir. O halde ranklardan birinin 1 diğerinin 2 olması durumu söz konusu olabilir. Öncelikli olarak $rank\left(\left\| x_2-x_1 \quad \cdots \quad x_k-x_1 \right\|\right)=1$ ve $rank\left(\left\| y_2-y_1 \quad \cdots \quad y_k-y_1 \right\|\right)=2$ olsun. Bu durumda $\exists i, j, s = 2,...,k$ için $\{x_2-x_1,...,x_k-x_1\}$ sisteminde lineer bağımsız olan vektör $\{x_i-x_1\}$, $\{y_2-y_1,...,y_k-y_1\}$ sisteminde lineer bağımsız olan vektörler de $\{y_j-y_1, y_s-y_1\}$ olsunlar. O halde,

$$\begin{array}{lcl} x_2-x_1=a_2\left(x_i-x_1\right) & & y_2-y_1=b_{2j}\left(y_j-y_1\right)+b_{2s}\left(y_s-y_1\right) \\ \vdots & \text{ve} & \vdots \\ x_k-x_1=a_k\left(x_i-x_1\right) & & y_k-y_1=b_{kj}\left(y_j-y_1\right)+b_{ks}\left(y_s-y_1\right) \end{array} \tag{46}$$

yazabiliriz. Varsayalım ki $\{x_1,x_2,...,x_k\}\overset{B(2)}{\approx}\{y_1,y_2,...,y_k\}$ olsun. Bu durumda $\exists g\in O(2)$ ve $\lambda>0$ için, $y_i=\lambda g x_i$; $i=1,2,...,k$ dir. Buna göre

$$\begin{array}{l} y_2-y_1=\lambda g\left(x_2-x_1\right)=\lambda g a_2\left(x_i-x_1\right)=a_2\left(\lambda g\left(x_i-x_1\right)\right)=a_2\left(y_i-y_1\right) \\ \vdots \\ y_k-y_1=\lambda g\left(x_k-x_1\right)=\lambda g a_k\left(x_i-x_1\right)=a_k\left(\lambda g\left(x_i-x_1\right)\right)=a_k\left(y_i-y_1\right) \end{array}$$

oldukları görülür ki bunun anlamı $\{y_2-y_1,...,y_k-y_1\}$ vektörleri $\{y_i-y_1\}$ vektörü ile ifade edilebilmektedir. Bu ise $rank\left(\left\| y_2-y_1 \quad \cdots \quad y_k-y_1 \right\|\right)=2$ olması ile çelişir. O halde $\{x_1,x_2,...,x_k\}\overset{B(2)}{\not\approx}\{y_1,y_2,...,y_k\}$ denk olamazlar.

İkinci olarak $rank\left(\left\| x_2-x_1 \quad \cdots \quad x_k-x_1 \right\|\right)=2$ ve $rank\left(\left\| y_2-y_1 \quad \cdots \quad y_k-y_1 \right\|\right)=1$ olsun. Ayrıca, $\exists i, j, s=2,...,k$ için $\{x_2-x_1,...,x_k-x_1\}$ sisteminde lineer bağımsız olan vektörler $\{x_i-x_1, x_j-x_1\}$, $\{y_2-y_1,...,y_k-y_1\}$ sisteminde lineer bağımsız olan vektör de $\{y_s-y_1\}$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{array}{l} y_2-y_1=a_2\left(y_s-y_1\right) \\ \vdots \\ y_k-y_1=a_k\left(y_s-y_1\right) \end{array}$$

yazılabilir. Varsayalım ki $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{B(2)}{\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ olsun. Bu durumda $\exists g \in O(2)$ ve $\lambda > 0$ için, $y_i = \lambda g x_i$; $i = 1, 2, ..., k$ dir. Bu ifadeyi matrisel formda

$$\|y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_k\| = g\,\|\lambda x_1 \quad \lambda x_2 \quad \cdots \quad \lambda x_k\|$$

yazılabilir. Buradan $\|\lambda x_1 \quad \lambda x_2 \quad \cdots \quad \lambda x_k\| = g^T \|y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_k\|$ olur. Bu durumda $i = 1, 2, ..., k$ için $\lambda x_i = g^T y_i$ dir. Böylece,

$$\lambda(x_2 - x_1) = g^T(y_2 - y_1) = g^T\left(a_2(y_s - y_1)\right) = a_2\left(g^T(y_s - y_1)\right) = a_2\lambda(x_s - x_1)$$
$$\vdots$$
$$\lambda(x_k - x_1) = g^T(y_k - y_1) = g^T\left(a_k(y_s - y_1)\right) = a_k\left(g^T(y_s - y_1)\right) = a_k\lambda(x_s - x_1)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklere göre $\{x_2 - x_1, ..., x_k - x_1\}$ vektörleri $\{x_s\}$ vektörü ile ifade edilebilmektedir. Bu ise $rank\left(\|x_2 - x_1 \quad \cdots \quad x_k - x_1\|\right) = 2$ olmasıyla çelişir. Buna göre $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{B(2)}{\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ varsayımı yanlıştır. Dolayısıyla, $rank\left(\|x_2 - x_1 \quad \cdots \quad x_k - x_1\|\right) = 2$ ve $rank\left(\|y_2 - y_1 \quad \cdots \quad y_k - y_1\|\right) = 1$ durumunda $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{B(2)}{\not\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ denk olamazlar.♦

3. BULGULAR

Tezde elde edilen bulgular şunlardır:

1. Tezin 2.2. bölümünde n =1 durumunda benzerlik gruplarının G- yörüngeleri:

- $G = SO(1)$ grubu için $x \in R$ elemanının G- yörüngesi, $Gx = \{x\}$;
- $G = O(1)$ grubu için $x \in R$ elemanının G- yörüngesi, $Gx = \{\pm x\}$;
- $G = E(1), H(1), SE(1), SB(1), B(1)$ grubları için $x \in R$ elemanının G- yörüngesi, $Gx = R$;
- $G = LH(1), SLB(1)$ grubları için $x \in R$ elemanının G- yörüngesi,
$$Gx = \begin{cases} (-\infty, 0); & x < 0 \\ 0; & x = 0 \\ (0, \infty); & x > 0 \end{cases};$$
- $G = LB(1)$ grubu için $x \in R$ elemanının G- yörüngesi, $Gx = \begin{cases} 0; & x = 0 \\ R - \{0\}; & x \neq 0 \end{cases}$

biçiminde elde edilmiştir.

2. Tezin 2.2. bölümünde n = 2 durumunda benzerlik gruplarının G- yörüngeleri:

- $G = SO(2), O(2)$ grubları için $x = (x_1, x_2) \in R^2$ elemanının G- yörüngesi,
$$Gx = \begin{cases} 0 = (0,0); & x = 0 \\ C(0,r), r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}; & x \neq 0 \end{cases};$$
- $G = E(1), H(2), SE(2), SB(2), B(2)$ grubları için $x \in R^2$ elemanının G-yörüngesi, $Gx = R^2$;
- $G = LH(2)$ grubu için $x \in R^2$ elemanının G- yörüngesi,
$$Gx = \begin{cases} 0; & x = 0 \\ \{\lambda x : \lambda > 0\}; & x \neq 0 \end{cases};$$
- $G = LB(2), SLB(2)$ grubları için $x \in R^2$ elemanının G- yörüngesi,
$$Gx = \begin{cases} 0; & x = 0 \\ R - \{0\}; & x \neq 0 \end{cases}$$

biçiminde verilmiştir.

R de $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ ve $\{y_1, y_2, ..., y_k\}$ noktalar sistemi verildiğinde

3. k tane vektör için LB(1)- invaryant rasyonel fonksiyonun

$$f(x_1,x_2,...,x_k)=\frac{\sum\limits_{i_1+i_2+...+i_k=m} a_{i_1i_2...i_k}x_1^{i_1}x_2^{i_2}...x_k^{i_k}}{\sum\limits_{i_1+i_2+...+i_k=m} b_{i_1i_2...i_k}x_1^{i_1}x_2^{i_2}...x_k^{i_k}}$$

biçiminde olduğu önerme 68 ile verilmiştir.

4. Önerme 77 ile k tane vektör için B(1) invaryant rasyonel fonksiyonun

$$f\left(x_1,x_2,...,x_k\right)=\frac{\sum\limits_{i_1+i_2+...+i_{k-1}=m} a_{i_1i_2...i_{k-1}}\left(x_2-x_1\right)^{i_1}\left(x_3-x_1\right)^{i_2}...\left(x_k-x_1\right)^{i_{k-1}}}{\sum\limits_{j_1+j_2+...+j_{k-1}=m} b_{j_1j_2...j_{k-1}}\left(x_2-x_1\right)^{j_1}\left(x_3-x_1\right)^{j_2}...\left(x_k-x_1\right)^{j_{k-1}}}$$

biçiminde olduğu verilmiştir.

5. k tane vektör için LB(1)- invaryant rasyonel fonksiyonlar cisminin üreteç Cümlesinin $\left\{1,\frac{x_2}{x_1},\frac{x_3}{x_1},...,\frac{x_k}{x_1}\right\}$ olduğu teorem 18 ile verilmiştir.

6. k tane vektör için B(1) invaryant rasyonel fonksiyonlar cisminin üreteç Cümlesinin

$$\begin{cases}\{1\}; & k\le 2\\ \left\{1,\frac{(x_3-x_1)}{(x_2-x_1)},\frac{(x_4-x_1)}{(x_2-x_1)}...,\frac{(x_k-x_1)}{(x_2-x_1)}\right\}; & k>2\end{cases}$$

biçiminde olduğu teorem 21 ile verilmiştir.

7. Önerme 69 ile R de keyfi x ve y noktaları için $x=0$ $y\neq 0$ ya da $x\neq 0$ $y=0$ ise $x\overset{LB(1)}{\approx}y$ olamayacağı ; ancak $x=y=0$ ya da $x\neq 0$ ve $y\neq 0$ ise her zaman $x\overset{LB(1)}{\approx}y$ olduğu gösterilmiştir.

8. Teorem 19 ile $\exists i=1,2,...,k$ için $x_i=0$ ve $y_i\neq 0$ veya $x_i\neq 0$ ve $y_i=0$ ise $\{x_1,x_2,...,x_k\}\overset{LB(1)}{\not\approx}\{y_1,y_2,...,y_k\}$ denk olamayacakları, $\exists i=1,2,...,k$ için $x_i=0$ ve $y_i=0$ durumda ise $\{x_1,x_2,...,x_k\}$ ve $\{y_1,y_2,...,y_k\}$ noktalar sisteminin denklik şartlarının; k-1 noktadan oluşan $\{x_1,x_2,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_k\}$ ve $\{y_1,y_2,...,y_{i-1},y_{i+1},...,y_k\}$ noktalar sisteminin denklik şartlarına indirgeneceği, her $i\in\{1,2,...,k\}$ için $x_i\neq 0$ ve $y_i\neq 0$ durumda da $\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1};\frac{x_3}{x_1}=\frac{y_3}{y_1};...;\frac{x_k}{x_1}=\frac{y_k}{y_1}$ eşitliklerinin sağlanması halinde $\{x_1,x_2,...,x_k\}\overset{LB(1)}{\approx}\{y_1,y_2,...,y_k\}$ LB(1)- denk oldukları verilmiştir.

9. Önerme 78 ve 79 ile R de keyfi *x* ve *y* noktalarının her zaman B(1)- denk oldukları; $\{x_1, x_2\}$ ve $\{y_1, y_2\}$ sistemi için de $\{x_1, x_2\} \overset{B(1)}{\approx} \{y_1, y_2\}$ denklik şartının ancak, $x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2$ ya da $x_1 \neq x_2$ ve $y_1 \neq y_2$ olması durumunda mümkün olacağı gösterilmiştir.

10. R de $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_k\}$ ve $\{y_1, y_2, y_3, ...y_k\}$ nokta sistemleri için $\forall i, j = 1, 2, 3, ..., k$; $i \neq j$ için $x_i \neq x_j$ ve $y_i \neq y_j$ durumunda $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_k\} \overset{B(1)}{\approx} \{y_1, y_2, y_3, ..., y_k\}$ denklik şartının

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1};\quad \frac{x_4 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_4 - y_1}{y_2 - y_1};\ \ldots\ ;\frac{x_k - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_k - y_1}{y_2 - y_1}$$

eşitliklerine bağlı olduğu; $\exists i, j = 1, 2, 3, ...k$; $i \neq j$ için $x_i = x_j$ durumunda ise , $y_i = y_j$ olması halinde denklik problemi k-1 noktanın denklik problemine indirgeneceği, $y_i \neq y_j$ olması halinde de bu sistemlerin denk olamayacakları Teorem 22 ile verilmiştir.

11. k tane vektör için LB(2)- invaryant rasyonel fonksiyonun $k = 1$ ise sabit olduğu, $k \geq 2$ ise f nin çift invaryant fonksiyon olması halinde,

$$f\left(x^{(1)},...,x^{(k)}\right) = \frac{\displaystyle\sum_{i^1{}_1+\ldots+i^1{}_k+i^2{}_2+\ldots+i^2{}_k+\ldots+i^{k-1}{}_k+i^k{}_k=m} a_{i^1{}_1\ldots i^1{}_k i^2{}_2\ldots i^2{}_k\ldots i^{k-1}{}_k i^k{}_k}\left(\prod_{s=1}^{k}\left\langle x^{(1)},x^{(s)}\right\rangle^{i^1{}_s}\right)\left(\prod_{t=2}^{k}\left\langle x^{(2)},x^{(t)}\right\rangle^{i^2{}_t}\right)\cdots\left(\prod_{p=k-1}^{k}\left\langle x^{(k-1)},x^{(p)}\right\rangle^{i^{k-1}{}_p}\right)\left\langle x^{(k)},x^{(k)}\right\rangle^{i^k{}_k}}{\displaystyle\sum_{i^1{}_1+\ldots+i^1{}_k+i^2{}_2+\ldots+i^2{}_k+\ldots+i^{k-1}{}_k+i^k{}_k=m} a_{i^1{}_1\ldots i^1{}_k i^2{}_2\ldots i^2{}_k\ldots i^{k-1}{}_k i^k{}_k}\left(\prod_{s=1}^{k}\left\langle x^{(1)},x^{(s)}\right\rangle^{i^1{}_s}\right)\left(\prod_{t=2}^{k}\left\langle x^{(2)},x^{(t)}\right\rangle^{i^2{}_t}\right)\cdots\left(\prod_{p=k-1}^{k}\left\langle x^{(k-1)},x^{(p)}\right\rangle^{i^{k-1}{}_p}\right)\left\langle x^{(k)},x^{(k)}\right\rangle^{i^k{}_k}}$$

biçiminde olduğu, *f* nin f tek invaryant fonksiyon olması halinde ise,

$$f\left(x^{(1)},...,x^{(k)}\right) = \frac{\displaystyle\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{k}\left[x^{(i)}\quad x^{(j)}\right]\sum_{i^1{}_1+\ldots+i^1{}_k+i^2{}_2+\ldots+i^2{}_k+\ldots+i^{k-1}{}_k+i^k{}_k=m} a^{(i)(j)}{}_{i^1{}_1\ldots i^1{}_k i^2{}_2\ldots i^2{}_k\ldots i^{k-1}{}_k i^k{}_k}\left(\prod_{s=1}^{k}\left\langle x^{(1)},x^{(s)}\right\rangle^{i^1{}_s}\right)\left(\prod_{t=2}^{k}\left\langle x^{(2)},x^{(t)}\right\rangle^{i^2{}_t}\right)\cdots\left(\prod_{p=k-1}^{k}\left\langle x^{(k-1)},x^{(p)}\right\rangle^{i^{k-1}{}_p}\right)\left\langle x^{(k)},x^{(k)}\right\rangle^{i^k{}_k}}{\displaystyle\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{k}\left[x^{(i)}\quad x^{(j)}\right]\sum_{i^1{}_1+\ldots+i^1{}_k+i^2{}_2+\ldots+i^2{}_k+\ldots+i^{k-1}{}_k+i^k{}_k=m} a^{(i)(j)}{}_{i^1{}_1\ldots i^1{}_k i^2{}_2\ldots i^2{}_k\ldots i^{k-1}{}_k i^k{}_k}\left(\prod_{s=1}^{k}\left\langle x^{(1)},x^{(s)}\right\rangle^{i^1{}_s}\right)\left(\prod_{t=2}^{k}\left\langle x^{(2)},x^{(t)}\right\rangle^{i^2{}_t}\right)\cdots\left(\prod_{p=k-1}^{k}\left\langle x^{(k-1)},x^{(p)}\right\rangle^{i^{k-1}{}_p}\right)\left\langle x^{(k)},x^{(k)}\right\rangle^{i^k{}_k}}$$

biçiminde olduğu teorem 25 ile verilmiştir.

12. k tane vektör için LB(2) invaryant rasyonel fonksiyonlar cisminin üreteç Cümlesi

$$\begin{cases} \{1\}; & k=1 \\ \left\{ \dfrac{\langle x^{(i)}, x^{(j)} \rangle}{\langle x^{(1)}, x^{(1)} \rangle}, i \le j; i, j = 1, ..., k \right\}; & k \ge 2 \end{cases}$$

olarak teorem 26 da verilmiştir.

13. Önerme 83 ile R^2 de $x = (x_1, x_2)$ ve $y = (y_1, y_2)$ vektörleri için $x \neq 0$ ve $y \neq 0$ ya da $x = 0$ ve $y = 0$ ise her zaman $x \overset{LB(2)}{\approx} y$ oldukları, $x \neq 0$ ve $y = 0$ ya da $x = 0$ ve $y \neq 0$ durumunda $x \overset{LB(2)}{\not\approx} y$ denk olamayacakları gösterilmiştir.

R^2 de $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ ve $\{y_1, y_2, ..., y_k\}$ sistemleri için

14. Teorem 27 ile $\exists i = 1, ..., k$ için $x_i \neq 0, y_i = 0$ veya $y_i \neq 0, x_i = 0$ ise $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{LB(2)}{\not\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ denk olamayacakları, $\exists i = 1, ..., k$ için $x_i = y_i = 0$ ise $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ ve $\{y_1, y_2, ..., y_k\}$ denklik şartının R^2 de k-1 vektörün denklik şartına indirgeneceği, $x_i \neq 0; y_i \neq 0;\ i = 1, ..., k$ durumunda ise üç durumun söz konusu olabileceği, buna göre ; i) $rank\left(\|x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_k\|\right) = rank\left(\|y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_k\|\right) = 2$ olması durumunda $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{LB(2)}{\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ denklik şartının $\dfrac{\langle x_i, x_j \rangle}{\langle x_1, x_1 \rangle} = \dfrac{\langle y_i, y_j \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle}$; $i \le j$; $i, j = 1, ..., k$ eşitliklerinin var olmasına bağlı olduğu,

ii) $rank\left(\|x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_k\|\right) = rank\left(\|y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_k\|\right) = 1$ olması durumunda da , $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{LB(2)}{\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ denklik şartının $\dfrac{\langle x_1, x_j \rangle}{\langle x_1, x_1 \rangle} = \dfrac{\langle y_1, y_j \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle}$; $j = 2, 3, ...k$ eşitliklerinin var olmasına bağlı olduğu ve

iii) $rank\left(\|x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_k\|\right) \neq rank\left(\|y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_k\|\right)$ durumunda ise $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{LB(2)}{\not\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ denk olamayacakları elde edilmiştir.

15. k tane vektör için B(2) invaryant rasyonel fonksiyon f nin çift olması halinde

$$f\left(x^{(1)},...,x^{(k)}\right)=$$
$$=\frac{\sum\limits_{\substack{i^{(2)}{}_2+...+i^{(2)}{}_k+\\ ...\\ +i^{(k-1)}{}_k+i^{(k)}{}_k=m}} a_{i^{(2)}{}_{2...}i^{(2)}{}_k....i^{(k-1)}{}_k i^{(k)}{}_k}\left(\prod\limits_{s=2}^{k}\left\langle x^{(2)}-x^{(1)},x^{(s)}-x^{(1)}\right\rangle^{i^{(2)}{}_s}\right)\left(\prod\limits_{t=3}^{k}\left\langle x^{(3)}-x^{(1)},x^{(t)}-x^{(1)}\right\rangle^{i^{(3)}{}_t}\right)...\left\langle x^{(k)}-x^{(1)},x^{(k)}-x^{(1)}\right\rangle}{\sum\limits_{\substack{i^{(2)}{}_2+...+i^{(2)}{}_k+\\ ...\\ +i^{(k-1)}{}_k+i^{(k)}{}_k=m}} b_{i^{(2)}{}_{2...}i^{(2)}{}_k....i^{(k-1)}{}_k i^{(k)}{}_k}\left(\prod\limits_{s=2}^{k}\left\langle x^{(2)}-x^{(1)},x^{(s)}-x^{(1)}\right\rangle^{i^{(2)}{}_s}\right)\left(\prod\limits_{t=3}^{k}\left\langle x^{(3)}-x^{(1)},x^{(t)}-x^{(1)}\right\rangle^{i^{(3)}{}_t}\right)...\left\langle x^{(k)}-x^{(1)},x^{(k)}-x^{(1)}\right\rangle}$$

biçiminde f nin tek olması durumunda ise ,

$$f\left(x^{(1)},...,x^{(k)}\right)=$$
$$=\frac{\sum\limits_{\substack{i,j=2\\ i<j}}^{k}\left[x^{(i)}-x^{(1)}\quad x^{(j)}-x^{(1)}\right]\sum\limits_{\substack{i^{(2)}{}_2+...+i^{(2)}{}_k+\\ ...\\ +i^{(k-1)}{}_k+i^{(k)}{}_k=m}} a_{i^{(2)}{}_{2...}i^{(2)}{}_k....i^{(k-1)}{}_k i^{(k)}{}_k}\left(\prod\limits_{s=2}^{k}\left\langle x^{(2)}-x^{(1)},x^{(s)}-x^{(1)}\right\rangle^{i^{(2)}{}_s}\right)\left(\prod\limits_{t=3}^{k}\left\langle x^{(3)}-x^{(1)},x^{(t)}-x^{(1)}\right\rangle^{i^{(3)}{}_t}\right)...\left\langle x^{(k)}-x^{(1)},x^{(k)}-x^{(1)}\right\rangle^{i^{(k)}{}_k}}{\sum\limits_{\substack{i,j=2\\ i<j}}^{k}\left[x^{(i)}-x^{(1)}\quad x^{(j)}-x^{(1)}\right]\sum\limits_{\substack{i^{(2)}{}_2+...+i^{(2)}{}_k+\\ ...\\ +i^{(k-1)}{}_k+i^{(k)}{}_k=m}} b_{i^{(2)}{}_{2...}i^{(2)}{}_k....i^{(k-1)}{}_k i^{(k)}{}_k}\left(\prod\limits_{s=2}^{k}\left\langle x^{(2)}-x^{(1)},x^{(s)}-x^{(1)}\right\rangle^{i^{(2)}{}_s}\right)\left(\prod\limits_{t=3}^{k}\left\langle x^{(3)}-x^{(1)},x^{(t)}-x^{(1)}\right\rangle^{i^{(3)}{}_t}\right)...\left\langle x^{(k)}-x^{(1)},x^{(k)}-x^{(1)}\right\rangle^{i^{(k)}{}_k}}$$

biçiminde olduğu Teorem 30 ile verilmiştir.

16. Teorem 31 ile k tane vektör için B(2) invaryant rasyonel fonksiyonlar cisminin üreteç Cümlesi

$$\begin{cases}\{1\}; & k\le 2\\ \left\{\dfrac{\langle x_i-x_1,x_j-x_1\rangle}{\langle x_2-x_1,x_2-x_1\rangle}\right\}, \quad i,j=2,...,k; i\le j; & k\ge 3\end{cases}$$

biçimindedir.

17. Önerme 91 ve Teorem 32 ile R^2 de keyfi $x=\left(x_1,x_2\right)$ ve $y=\left(y_1,y_2\right)$ vektörlerinin her zaman *B(*2*)*- denk oldukları; R^2 de $\{x_1,x_2\}$ ve $\{y_1,y_2\}$ sistemleri için de eğer, $x_2\neq x_1$ ve $y_2=y_1$; veya $x_2=x_1$ ve $y_2\neq y_1$ ise $\{x_1,x_2\}\overset{B(2)}{\not\approx}\{y_1,y_2\}$ B(2)-denk olamayacakları, $x_2\neq x_1$ ve $y_2\neq y_1$ ya da $x_2=x_1$ ve $y_2=y_1$ durumunda bu sistemlerin her zaman $\{x_1,x_2\}\overset{B(2)}{\approx}\{y_1,y_2\}$ B(2)-denk oldukları verilmiştir.

18. R^2 de $\{x_1,x_2,...,x_k\}$ ve $\{y_1,y_2,...,y_k\}$ sistemleri için $\exists i=2,...,k$ için $x_i=x_1,\ \ y_i\neq y_1$ veya $x_i\neq x_1,\ \ y_i=y_1$ ise $\{x_1,x_2,...,x_k\}\overset{B(2)}{\not\approx}\{y_1,y_2,...,y_k\}$ denk olamayacakları, $\exists i=2,...,k$ için $x_i=x_1,\ \ y_i=y_1$ ise $\{x_1,x_2,...,x_k\}$ ve $\{y_1,y_2,...,y_k\}$

denklik şartı R^2 de k-1 vektörün denklik şartına indirgeneceği, $\boldsymbol{x_i \neq x_1}$, $\boldsymbol{y_i \neq y_1}$; $i = 2,...,k$ durumunda ise eğer,

i) $rank\left(\|x_2 - x_1 \quad x_3 - x_1 \quad \cdots \quad x_k - x_1\|\right) = rank\left(\|y_2 - y_1 \quad y_3 - y_1 \quad \cdots \quad y_k - y_1\|\right) = 2$

ise $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{B(2)}{\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ denklik şartının ancak

$\dfrac{\langle x_i - x_1, x_j - x_1\rangle}{\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1\rangle} = \dfrac{\langle y_i - y_1, y_j - y_1\rangle}{\langle y_2 - y_1, y_2 - y_1\rangle}$; $i \leq j$; $i, j = 2,...,k$ eşitliklerinin var olmasında mümkün olabildiği,

ii) $rank\left(\|x_2 - x_1 \quad x_3 - x_1 \quad \cdots \quad x_k - x_1\|\right) = rank\left(\|y_2 - y_1 \quad y_3 - y_1 \quad \cdots \quad y_k - y_1\|\right) = 1$

ise, $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{B(2)}{\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ denklik şartının ancak

$\dfrac{\langle x_2 - x_1, x_j - x_1\rangle}{\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1\rangle} = \dfrac{\langle y_2 - y_1, y_j - y_1\rangle}{\langle y_2 - y_1, y_2 - y_1\rangle}$; $j = 2, 3, ...k$ eşitliklerinin var olmasında mümkün olabildiği ve

iii) $rank\left(\|x_2 - x_1 \quad x_3 - x_1 \quad \cdots \quad x_k - x_1\|\right) \neq rank\left(\|y_2 - y_1 \quad y_3 - y_1 \quad \cdots \quad y_k - y_1\|\right)$ ise

$\{x_1, x_2, ..., x_k\} \overset{B(2)}{\not\approx} \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ B(2)-denk olamayacakları teorem 33 ile görülmüştür.

4. İRDELEME

Noktalar sisteminin invaryantları ile ilgili olarak çeşlitli çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalar özetle şu şekilde verilebilir:

1897 de E.Study O(n) grubu için noktaların invaryantlarını vermiş, daha sonra bunu H. Weyl daha da geliştirmiştir [5]. Weyl'in bu çalışmasında invaryant teorinin birinci temel teoremi Kapelli denklikleri kullanılarak verilmiştir. Daha sonra 1986 da D. Khadjiev tüm öklid hareketleri için bu teoremi genişletmiş ve E(n) grubu için birinci temel teoremi vermiştir [6].

1970 ve 1980 lerde birinci temel teorem için, Turnbull'un [53] geliştirdiği yöntem kullanılarak birkaç ispat verilmiştir [54]. 1998 de Goodmann ve Wallach klasik invaryant teorinin birinci ve ikinci temel teoremini, yardımcı sonuçları kullanmadan ispatlamıştır [54,55]. 1991 de E. Roger Howe, küresel altgruplarla GL(n,C) ve altgruplarının birinci temel teoremini vermiştir [56]. 1980 de Schwarz [57], (G_2, C^7) ve ($Spin_7$, C^8) için bu problemi çözmüş ve 1995 de E. Roger Howe'un danışmanlığında Yui Kwan Wong, yaptığı doktora tezinde Schwarz'ın bu sonuçlarını kullanarak G_2 *ve* $Spin_7$ için invaryant diferensiyel operatörler halkasının üreteçlerini bulmuştur [58].

Tez çalışmamızda ise, LB(n) ve B(n) grupları için birinci temel teorem, Weyl'in çalışmasında olduğu gibi Kapelli denklikleri ile elde edilen sonuçlar kullanılarak verilmiştir.

Tezde ayrıca noktaların denklik problemi ele alınmıştır. İki nokta sistemi için, Jien-Yu Han [59], bir takım analitik formullerle benzerlik dönüşümünü bulma problemini incelemiştir. Benzer bir çalışma Cox ve Kruskal [31] tarafından bir algoritma geliştirilerek incelenmiş, ancak bu çalışmalar invaryant teori açısından incelenmemiştir.

Ayrıca Berger [32], Hummel [60] gibi bir çok kaynakta benzerlik geometrisinin açı, benzerlik oranı, yönlü açı, yönsüz açı, çapraz oran (cross ratio) gibi invaryantları ifade edilmiştir. Bu çalışmalardan ortaya şöyle bir problem çıkmaktadır: Bilinen benzerlik invaryantlarından farklı olan başka bir benzerlik invaryantı var mıdır? Bu problem eski bir klasik problemdir. Tezde bu problem incelenmiş, benzerlik geometrisine ait invaryantların üreteçleri bulunmuş, bilinen benzerlik invaryantlarının ve bunlardan başka herhangi bir rasyonel invaryantın, bulunan bu üreteçler ile ifade edileceği gösterilmiştir.

Örneğin, en temel benzerlik invaryantı iki vektör arasındaki yönsüz açıdır. Berger [32] deki açı tanımı dikkate alındığında, başlangıç noktaları orjinde bulunan $\overrightarrow{OA}$ ve $\overrightarrow{OB}$ vektörleri arasındaki yönsüz açı $\left\{\overrightarrow{OA}\,\hat{,}\,\overrightarrow{OB}\right\}$ ile, bu açının cosinüsü de $\cos\left\{\overrightarrow{OA}\,\hat{,}\,\overrightarrow{OB}\right\}$ ile gösterilirse,

$$\cos\left\{\overrightarrow{OA}\,\hat{,}\,\overrightarrow{OB}\right\}=\frac{\left\langle \vec{A},\vec{B}\right\rangle}{\left\|\vec{A}\right\|\left\|\vec{B}\right\|}=\frac{\left\langle \vec{A},\vec{B}\right\rangle}{\sqrt{\left\langle \vec{A},\vec{A}\right\rangle}\sqrt{\left\langle \vec{B},\vec{B}\right\rangle}}$$

dır. Benzerlik dönüşümlerinde iki vektör arasındaki yönsüz açı ve bu açının cosinüs değeri de korunacaktır [32]. Bu açıdan bir benzerlik invaryantı olan $\left\{\overrightarrow{OA}\,\hat{,}\,\overrightarrow{OB}\right\}$ açısı ve bu açının cosinüs değeri; vektörlerin başlangıç noktası orjinde olduğundan, tezde incelediğimiz biçimde $\left\{\vec{O},\vec{A},\vec{B}\right\}$ üç vektörden oluşan sistemin invaryantları olarak LB(2)-invaryant rasyonel fonksiyonlar cisminin üreteçlerinin bir fonksiyonudur. Üstelik bu üç vektörden birinin $\vec{O}$ vektörü olmasından dolayı bu invaryantlar iki vektörden oluşan $\left\{\vec{A},\vec{B}\right\}$ sistemi için LB(2)- invaryant rasyonel fonksiyonlar cisminin üreteçleri olan $\left\{\left\langle \vec{A},\vec{A}\right\rangle,\left\langle \vec{A},\vec{B}\right\rangle,\left\langle \vec{B},\vec{B}\right\rangle\right\}$ sistemiyle üretilebildiği anlamındadır.

Benzer şekilde başlangıç noktaları bir $\overrightarrow{OX}$ vektörünün uç noktası olan $\overrightarrow{XA}$ ve $\overrightarrow{XB}$ vektörleri arasındaki yönsüz açı $\left\{\overrightarrow{XA}\,\hat{,}\,\overrightarrow{XB}\right\}$ ile, bu açının cosinüsü de $\cos\left\{\overrightarrow{XA}\,\hat{,}\,\overrightarrow{XB}\right\}$ ile gösteririlirse,

$$\cos\left\{\overrightarrow{XA}\,\hat{,}\,\overrightarrow{XB}\right\}=\frac{\left\langle \vec{A}-\vec{X},\vec{B}-\vec{X}\right\rangle}{\left\|\vec{A}-\vec{X}\right\|\left\|\vec{B}-\vec{X}\right\|}=\frac{\left\langle \vec{A}-\vec{X},\vec{B}-\vec{X}\right\rangle}{\sqrt{\left\langle \vec{A}-\vec{X},\vec{A}-\vec{X}\right\rangle}\sqrt{\left\langle \vec{B}-\vec{X},\vec{B}-\vec{X}\right\rangle}}$$

dır. Böylece bir benzerlik invaryantı olan $\left\{\overrightarrow{XA}\,\hat{,}\,\overrightarrow{XB}\right\}$ açısı ve bu açının cosinüs değerinin de, tezde incelediğimiz biçimiyle $\left\{\vec{X},\vec{A},\vec{B}\right\}$ vektörlerinden oluşan sistemin invaryantları olarak üç vektör için B(2)- invaryant rasyonel fonksiyonlar cisminin üreteçleri olan

$\left\{\left\langle \vec{A}-\vec{X},\vec{B}-\vec{X}\right\rangle,\left\langle \vec{A}-\vec{X},\vec{A}-\vec{X}\right\rangle,\left\langle \vec{B}-\vec{X},\vec{B}-\vec{X}\right\rangle\right\}$ elemanların bir fonksiyonu biçiminde ifade edildiği görülür.

Mekanikte de benzerlikle ilgili çalışmalar yapılmıştır. Özellikle Buckingham'ın Pi teoremi, n = 1 durumunda, bulunan r tane nokta için boyutsal analiz metodları ile denklik şartlarını ifade etmektedir. Tezde invaryant teori yöntemleri ile elde ettiğimiz LB(1)-invaryant rasyonel fonksiyonların üreteç kümesinin mekanikteki Buckingham'ın Pi teoremini sağlayan sayılarla çakıştığı görülmektedir. Bu ilişki göz önüne alındığında tezde incelenen LB(2)- invaryant rasyonel fonksiyonlar cisminin üreteç kümesine de boyutsal analiz açısından Pi teoreminin 2- boyutlu uzaya genişletilmesi olarak bakılabilir.

Kısaca bu çalışmada R^2 de benzerlik dönüşümleri altında noktaların tam invaryantları sistemi elde edildi. Böylece noktaların herhangi bir rasyonel benzerlik invaryantı, elde edilen üreteç invaryantların bir fonksiyonu olarak elde edilebilecektir.

5. SONUÇLAR

Tezde elde edilen önemli sonuçlar şunlardır:

1. Literatürde mevcut olan Benzerlik dönüşümlerinin invaryant teori açısından önemli olan grup yapıları incelenerek önemli alt grupları verilmiştir. Bunların bir kısmı literatürde bir şekilde belli idi. Bunlarla ilgili olarak Önerme 48-65 ve Teorem 17 ile Sonuç 20-33 verilmiştir. Daha sonra tezin 2.2. bölümünde bu grupların R ve R^2 de etkileri göz önüne alınarak G- Yörüngeleri bulunmuştur.

2. Önerme 68 ile LB(1)- invaryant rasyonel fonksiyonların genel ifadesi elde edilmiştir.

3. LB(1)- invaryant rasyonel fonksiyonlar cisminin üreteç cümleleri Teorem 18 ile ifade edilmiştir.

4. R de k noktadan oluşan iki nokta sistemi için LB(1)- denklik şartları, LB(1)- invaryant rasyonel fonksiyonlar cisminin üreteçlerine bağlı olarak verilmiştir. Bu şartlar Önerme 69 ve Teorem 19 da sunulmuştur.

5. B(1)- invaryant rasyonel fonksiyonların genel ifadesi bulunmuştur. Bunlar için Önerme 73 ve Önerme 77 verilmiştir.

6. B(1)- invaryant rasyonel fonksiyonlar cisminin üreteç cümleleri için Teorem 21 verilmiştir.

7. R de k noktadan oluşan iki nokta sistemi için B(1)- denklik şartları, B(1)- invaryant rasyonel fonksiyonlar cisminin üreteçlerine bağlı olarak verilmiştir. Bu şartlar Önerme 78-79 ve Teorem 22 de yer almaktadır.

8. LB(2)- invaryant rasyonel fonksiyonların genel ifadesi bulunmuştur. Bunlar Teorem 25 de ifade edilmiştir.

9. LB(2)- invaryant rasyonel fonksiyonlar cisminin üreteç cümlesi için Teorem 26 verilmiştir.

10. R^2 de k noktadan oluşan iki nokta sistemi için LB(2)- denklik şartları, LB(2)- invaryant rasyonel fonksiyonlar cisminin üreteçlerine bağlı olarak verilmiştir. Bu şartlar Önerme 83 ve Teorem 27 de sunulmuştur.

11. B(2)- invaryant rasyonel fonksiyonların genel ifadesi bulunmuştur. Bunlar Önerme 86, 89 ve Teorem 30 da ifade edilmiştir.

12. B(2)- invaryant rasyonel fonksiyonlar cisminin üreteç cümlesi için Teorem 31 verilmiştir.

13. R^2 de k noktadan oluşan iki nokta sistemi için B(2)- denklik şartları, B(2)- invaryant rasyonel fonksiyonlar cisminin üreteçlerine bağlı olarak verilmiştir. Bu şartlar Önerme 91 ve Teorem 32, 33 de sunulmuştur.

Tezde elde edilen bu sonuçlar,

III.Geometri Sempozyumu, (2005) Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir [40],

XVIII.Ulusal Matematik Sempozyumu, (2005) İst. Kültür Üniv., İstanbul [41],

Vlore conference on Algebra, Coding Theory and Cryptography, (2007) Vlore, Albania [42] ,

International Workshop II on Applications of Wavelets To Real World Problems, Istanbul Aydın University, DSİ, 2007, İstanbul [43]

sempozyumlarında sunulmuş ve bildiri olarak yayınlanmıştır.

6. ÖNERİLER

1. Bu çalışma düzlemde noktalar sistemiyle ifade edilen tüm sistemlerin benzerlik koşullarını vermektedir.

2. Bu çalışma 3 boyutlu uzayda da yapılabilir. Böylece, özellikle de haritacılık alanında, günümüzde google earth veri tabanı kullanılarak fotoğrafı ya da özellikle video görüntüsü verilen herhangi bir yörenin neresi olduğunun tespiti mümkün olabilecektir. Bu tespit işlemi için görüntünün sayısallaştırılması ve veri tabanından o kesitin bulunduğu değerlerle örtüşen yerlerin olup olmadığının araştırılması sağlanabilir. Bu işlemlerle, görüntü değerlerinin gerçek değerlerle benzer olup olmadığı test edilebilir. Bu test için tez sonuçları kullanılabilir. Bu tespit bazen güvenlik açısından son derece önemli olabilmektedir. Bu bağlamda yer yüzü havzalarının benzerliği incelenebilir.

3. Özellikle tanımayı zorlaştırmak amacıyla şekilsel değişiklikler yapılmış olan sistemlerin benzerliklerinin ortaya çıkarılması önemli bir problemdir. Bu çalışma, iki nokta sisteminin birbirine %100 benzer olup olmadığını test etmek için kullanılacaktır. Ancak birkaç tane nokta haricinde, birbirlerine çok benzeyen, fakat bu birkaç noktadan dolayı %100 benzer olamayan iki sistem düşünüldüğünde test “benzerlik yoktur” yanıtını verecektir. Bu itibarla yapılan bu tez çalışmasının biraz daha ileri boyutu olarak fuzzy ya da zayıf benzerlik kavramları için bir test geliştirilebilir. Böylece sistemin “benzer değil” yanıtı yerine %80-90 oranında benzer yanıtını vermesi sağlanabilir.

4. Mekanikte boyutsal analiz ya da boyut teorisinde benzerlik kavramı çok önemli yer tutmaktadır. Boyutsal analizin en temel aracı Buckingham’ın Pi teoremidir. Pi teorem, fiziksel sistemlerin denkliklerinin matematiksel ifadesidir. $n=1$ durumunda Pi teoremi sağlayan sayıların r tane nokta için $LB(1)$- invaryant rasyonel fonksiyonların üreteç kümeleri olduğu görülebilir. Buna göre boyutsal analiz konularına invaryant teori açısından da bakılabilir.

7. KAYNAKLAR

1. Euclid, Elements, (tr. T.L.Heath) Volume 2 of Britannia Great Books, Encyclopedia Britannica, Chicago,1982.

2. Khadjiev Dj., Some Questions in the Theory of Vector Invariants, Math. USSR-Sbornic, 1, 3 (1967) 383-396.

3. Grosshans F., Obsevable Groups and Hilbert's Problem, American Journal of Math., 95 (1973) 229-253.

4. Klein F., A comperative review of recent researches in geometry (D. W. Haskell, trans.) Bulletin of the New York Mathematical Society, 2 (1893) 215-249.

5. Weyl H., The Classical Groups, Their Invariants and Representations, 2nd ed., with suppl.. Princeton, Princeton University Press, 1946

6. Khadjiev Dj., An Application of the Invariant Theory to the Differential Geometry of Curves, Fan, Tashkent, 1988. (in Russian)

7. Cassier E. T., The concept of group and the theory of perception, Philosophy and Phenomenological Research, 5 (1944) 1-35. (original French version published in 1938)

8. Hoffman W. C., The Lie algebra of visual perception, Journal of Mathematical Psychology, 3 (1966) 65-98.

9. Hoffman W. C., The Lie transformation group approach to visual neuropsychology, in E.L.J. Leewenberg & H. F. J. M. Buffart, Formal theories of visual perception, 27-66, Chichester, UK. Wiley, 1978.

10. Chan &Chan, A transformational analysis of form recognition under plane isometries, Journal of Mathematical Psychology, 26, 3 (1982) 237-251.

11. Chan &Chan, A mental space similarity Group model of Shape constancy, Journal of Mathematical Psychology, 43 (1999) 410-432.

12. Leyton M. A theory of information structure: II.A theory of perceptual organization, Journal of Mathematical Psychology, 30 (1986) 257-305.

13. Fourier J.B.J., Theoric Analytique de la Chaleur, 1822, English Transl. By A. Freeman, Cambridge University Pres,1878.

14. Birkhoff, G. Hydrodynamics, second Ed. Princeton, New Jersey, Princeton Univ. Pres, 1960.

15. Bridgman P. W., Dimensional Analysis, 2 nd Ed. New Heaven, 1931.

16. Sedov, L.I., Similarity and Dimensional Method in Mechanics, 4.th. ed., Moscow, 1957. English Tr., Academic Press, 1960.

17. Langhaar H.L., Dimensional Analysis and Theory of Models,Wiley, 1951.

18. Kurşun H.ve Kalkan Y., İstanbul' da Farklı Tarihlerde Yapılmış Doğalgaz Alt Yapı Haritalarının Doğruluk Yönünden bir Karşılaştırılması, 2. Mühendislik Ölçmeleri Sempozyumu, 23-25 Kasım 2005, İTÜ, İstanbul

19. Yaprak S ve Yaprak H., Comparison of GPS Stop and Go Method and Electronic Tachometry Technique in Map Production, Gazi Üniversitesi Journal of Science ,18, 4 (2005) 627-637.

20. Özer S., Kortewed –de Vries Denklemlerinin Nümerik Çözümü, Doktora Tezi, İnönü Üniversitesi Fen bilimleri Enstitüsü, 1995.

21. Kai- Tai Fang, et all, Critical value determination on similarity of Fingerprints, Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems, 82, 1 (2006) 236-240.

22. Wang L.X., et all, Vectorial angle method for evaluating the similarity between two chromatographic fingerprints of chinese herb, Acta Pharmaceutica Sinica, 37, 9 (2002) 713-717.

23. Dresner Martin, Leisure versus business passengers: Similarities, differences, and implications, Journal of Air Transport Menagement, 12 (2006) 28-32.

24. Yo Horikawa, Bispectrum – based feature of 2D and 3D images invariant to similarity Transformations, Proc. IEEE, (2000) 511-514.

25. Yo Horikawa, Pattern recognition with invariance to similarity transformations based on the third- order correlation, Proc. 13th. International Conference on Pattern Recognition (ICPR'96) , 2 (1996) 200-204.

26. Coxeter H.S.M., and Greitzer S.L., Geometry Revisited, DC: Math. Assoc., Amer., 1967.

27. Smith J.O., Introduction to Digital Filters with Audio Applications, W3K Publishing 2007.

28. Nikulin V., and Shafarevich I.R., Geometries and Groups,Springer, New York, 1994.

29. Gray A., Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, 2nd edition, CRC Press LCC, Boca Raton, Florida, 1998.

30. I J Cox and J B Kruskal, On the Congruence of Noisy Images to Line Segment Models International Conference on Computer Vision, IEEE, 1988.

31. Cox I J , and Kruskal J B, Determining the 2- or 3- Dimensional Similarity Transformation Between A point Set and A Model Made of Lines and Area, Proceeding of the 28 th Conference on Decision and Control, Tempo, Florida , December 1989.

32. M. Berger, Geometry I-II. 2 volumes,Springer – Verlag, Berlin Heidelberg, 1987.

33. Hong Jiawei, Tan Xiaonan, Recognize the similarity Between Shapes under Affine Transformation, IEEE , (1988), 489-493.

34. Cappell S.E., and Shaneson J.L., at all, The Classification of Nonlinear Similarities over Z_2, Bulletin of the Mathematical Society 22 , 1 (1990) 51-57.

35. Rham G. de, Reidemeister's torsion invariant and rotations of S^n , Differential Analysis, (Bombay Colloq.) Oxford University Press, London, 1964, 27-36.

36. Kuiper N., and Robbin J.W., Topological Classification of Linear Endomorphisms, Invent. Math. 19 (1973) 83-106.

37. Berscheid, E.,and Walster, E.H., Interpersonal Attracttion. Addison- Wesley Publishing Co. , CCCN 69-17443., 1969.

38. Kubitschek, W.N.,and Hallinan M. T., Social Psychology Quarterly;Tracking and Student's Friendships. Vol.61, American Sociological Association,1998.

39. Eliot A, Wilson T. D., and Akert.R. M. Social Psychology Sixth Ed. New Jersey: Upper Saddle River, 2007.

40. İncesu M., Gürsoy O., Benzerlik Grupları ve Yörüngeleri, III. Geometri Sempozyumu, Osmangazi Üniversitesi 4-6 Temmuz 2005, Eskişehir.

41. İncesu M., Gürsoy O., "Benzerlik Geometrisinde Düzlemde İnvaryant Fonksiyonlar" XVIII. Ulusal Matematik Sempozyumu, İstanbul Kültür Üniversitesi, 5-8 Eylül 2005, İstanbul.

42. İncesu M., Gürsoy O., "Linear and non Linear Similarity Invariant Rational Functions and Their Generators in R2" Vlore conference on Algebra, Coding Theory and Cryptography, 26-27 May 2007, Vlore, Albania.

43. İncesu M., Gürsoy O., An Invariant System Of Control Points And Similarities In Plane R2, International Workshop II on Applications of Wavelets To Real World Problems, Istanbul Aydın University, DSİ, 07-09 June, 2007, İstanbul, Turkey.

44. Greub W. H., Linear algebra, 3rd. Ed., Springer- Verlag Berlin Heidelberg, Netherland, 1967.

45. Hacısalihoğlu H.H., LineerCebir, Bizim Büro, Ankara, 1982.

46. Hacısalihoğlu H.H., Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş, Fırat Ü. Fen Fak. Yayınları, Elazığ, 1980.

47. Yasemin Sağıroğlu, Parametrik Eğrilerin Afin Diferensiyel İnvaryantları, Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniv. Fen Bilimleri Ens. 2002.

48. M. Karataş, Noktalar Sisteminin Öklid İnvaryantları, Y. Lisans Tezi, Karadeniz TeknikÜniversitesi, 2005, Trabzon.

49. Shuanping Du, and Jinchuan Hou , Similarity invariant real linear subspaces and similarity preserving additive maps , Linear Algebra and its Applications, 377 (2004) 141-153.

50. Mokhtarian F. and Abbasi S., Shape similarity retrieval under affine transforms , Pattern Recognition, 35, 1 (2002) 31- 41.

51. Golub, G.H. and Van Loan, C.F. Matrix Computations , 3 rd ed., Baltimore,MD, John Hopkins University Press, 1996.

52. Fraleigh J.B.,and Beauregard R.A., , Linear Algebra 3 rd. Ed. Addison Wesley Publishing Company, Inc., 1995 ,USA.

53. Turnbull H. W., The Theory of Determinants, Matrices and Invariants, Blackie, London, Glaskow, 1929.

54. Goodmann R. and Wallach N.R., Representations and invariants of classsical groups, Bulletin of the American Mathematical Society, 36, 4 (1999) 533-538.

55. Goodmann R. and Wallach N.R., Representations and invariants of classsical groups, Cambridge Univ. Pres, Cambridge,1998.

56. Howe E. R., The first fundamental theorem of invariant theory and spherical subgroups, Algebraic groups and their generalizations: Classical Methods, University Park, PA, 1991.

57. G. Schwarz, Invariant theory of G_2 and $Spin_7$, Comment. Math. Helv. 63 (1988) 624-663.

58. Yui, Kwan Wong, The First Fundamental Theorem of covariants for G_2 and $Spin_7$, Doktora Tezi, Yale University Fen Bilimleri Ens., USA, 1995.

59. Jen- Yu Han, at all, Stepwise Parameter Estimations in a Time – Variant Similarity Transformations, Journal of Surveying Engineering ASCE, 132, 4 (2006) 141-148.

60. James A. Hummel, Vector Geometry, Univ. Of Maryland, Adison Wesley Publ., USA, 1965.

61. Stephen H. Freidberg, Arnold J. Insel, Lawrence E. Spence, Linear Algebra, 4 th Ed., Prentice Hall, Pearson Education, Inc. Berlin 1998.

ÖZGEÇMİŞ

Muhsin İNCESU, 25.09.1975 tarihinde Ankara'nın Çubuk ilçesinde doğdu. 1986 yılında Çubuk Atatürk İlkokulu'ndan mezun oldu. Orta ve lise öğrenimini 1986-1992 yıllarında Çubuk Lisesi'nde yaptı. 1995 yılında Akdeniz Üniversitesi Sosyal Bilimler MYO işletmecilik bölümünden, 1999 yılında da Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden başarı ile mezun oldu. 2003 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında, hazırladığı "Bezier Eğrileri, Bezier Yüzeyleri ve MATLAB ile Sayısal Algoritmalar" adlı tez ile yüksek lisans öğrenimini tamamladı. Eylül 2003 de Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında doktora öğrenimine başladı.

Aralık 2000 tarihinde KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'na Araştırma görevlisi olarak, Ocak 2006 tarihinde ise Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne Öğretim Görevlisi olarak atandı. Halen bu görevini sürdürmekte olan Muhsin İNCESU evli ve yabancı dili İngilizce'dir.