KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

O(3,1) -ORTOGONAL GRUBU İÇİN NOKTALARIN İNVARYANTLARI

DOKTORA TEZİ

İdris ÖREN

KASIM 2007
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

O(3,1)-ORTOGONAL GRUBU İÇİN NOKTALARIN İNVARYANTLARI

İdris ÖREN

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
“Doktor (Matematik)”
Ünvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih :28.09.2007
Tezin Savunma Tarihi :16.11.2007

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Djavvat KHADJİEV
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Ziya YAPAR
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Mustafa ALTUNBAŞ
Jüri Üyesi : Doç. Dr. Ömer PEKŞEN
Jüri Üyesi : Prof. Dr. H.Hilmi HACISALİHOĞLU

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. E.Zeki BAŞKENT

Trabzon 2007

ÖNSÖZ

“$O(3,1)$-Ortogonal Grubu için Noktaların İnvaryantları” adlı bu tez çalışması, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında “Doktora Tezi” olarak hazırlanmıştır.

Konunun belirlenmesinde ve çalışma süresince her türlü yardımını esirgemeyen ve beni destekleyen hocam Sayın Prof. Dr. Djavvat KHADJİEV’e (Cevat HACIOĞLU’na) en içten duygularımla teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Çalışmalarımın başlangıcı ve sonrasında tavsiye ve yardımlarından dolayı Doç. Dr. Ömer PEKŞEN’e teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Ayrıca diğer tüm konularda yardımlarını ve desteklerini aldığım ailem ve yakınlarım ile başta Öğr.Gör.Ahmet GÖKDOĞAN olmak üzere, diğer tüm dostlarıma çok teşekkür ederim.

İdris ÖREN

Trabzon 2007

İÇİNDEKİLER

<u>Sayfa No</u>

ÖZET

Bu tezde, $O(3,1)$-invaryant polinomlar halkasının üreteçleri, $O(3,1)$ grubunun yörüngeleri ve $O(3,1)$-Ortogonal grubu için noktaların denklik şartlarını bulma problemleri çözülmüştür. Üreteçleri bulmak için polarizasyon operatörü, Capelli denklikleri ile invaryant teorisinin yöntemleri kullanılmıştır. Bu yöntem kullanılarak $O(3,1)$ grubu ve $SO(3,1)$ altgrubunun üreteç invaryantları bulunmuştur. Ayrıca $\mathbb{R}^{3+1}$'in özaltuzaylarının tipleri, $k(U)$'nun invaryantlığı, $k(U)$ ile $\mathbb{R}^{3+1}$'in özaltuzayları ve Gram determinantı arasındaki ilişkiler ve Gram determinantının özelikleri bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler : Ortogonal Grup, İnvaryant, Yörünge, Gram determinant

.

SUMMARY

Invariants of Points for The Orthogonal Group O(31)

In this thesis, the problems of finding the generators of the ring of $O(3,1)$-invariant polynomials, the orbits of group $O(3,1)$ and conditions of the equivalence of points for the orthogonal group $O(3,1)$ are solved. In order to find the generators the polarisation operator, the Capelli's identity and the methods of invariant theory have been used. By using these methods, the generator invariants of the group $O(3,1)$ and its subgroup $SO(3,1)$ have been found. In addition, types of proper subspaces of $\mathbb{R}^{3+1}$, the invariance of $k(U)$, the relations between proper subspaces of $\mathbb{R}^{3+1}$ and the Gram determinant by $k(U)$ and the properties of Gram determinant have been investigated.

Key Words: Orthogonal Group, Invariant, Orbit, Gram determinant.

SEMBOLLER DİZİNİ

L	Lorentz Grubu
N	Doğal Sayılar Kümesi
N^{+}	Sayma Sayıları Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
S_r	$=\{(r_1,r_2,...,r_m) : r= r_1+r_2+...+r_m \ , r_i \geq 0 \ , i=1,2,...,m\}$
T	$=\left\{x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in \mathbb{R}^{3+1} : \langle x,x\rangle < 0\right\}$ tüm zamansal vektörler kümesi
T^{+}	$=\left\{x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in \mathbb{R}^{3+1} : \langle x,x\rangle < 0, x_4 > 0\right\}$ tüm gelecek yönlü zamansal vektörler kümesi
T^{-}	$=\left\{x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in \mathbb{R}^{3+1} : \langle x,x\rangle < 0, x_4 < 0\right\}$ tüm geçmiş yönlü zamansal vektörler kümesi
Q	Rasyonel Sayılar Kümesi
V	$n\geq 1$ boyutlu reel vektör uzayı
Z	Tam Sayılar Kümesi
$\left\|a_{ij}\right\|, i, j=1,2,...,n, a_{ij}\in\mathbb{R}$	$n\times n$ tipinde reel katsayılı bir matris
$D_{yx}f$	Polarizasyon operatörü
G(V)	$=\{ A:V\rightarrow V : A$ tersi mevcut olan lineer operatör$\}$
$Gr(x_1,x_2)$	$=\begin{pmatrix}\langle x_1,x_1\rangle & \langle x_1,x_2\rangle \\ \langle x_2,x_1\rangle & \langle x_2,x_2\rangle\end{pmatrix}, x_i\in\mathbb{R}^{3+1}, i=1,2$ olan Gram matrisi
$G(x)$	x-noktasının G-yörüngesi
$k(U)$	U altuzayındaki lineer bağımsız ışık vektör sayısı
$O(3,1,\mathbb{R})$	(3,1)-Ortogonal Grubu
$rankV_x^m$	Lineer bağımsız vektör sayısı
$\text{sgn}(i_1,...,i_n)$	$(i_1,...,i_n)$ permütasyonunun çift ya da tek olmasına göre 1 ya da -1'e eşittir.
$SO(3,1,\mathbb{R})$	Özel Ortogonal Grup

T($r_1,...,r_m$)	($r_1,...,r_m$)'lere bağlı olan bir açık önerme
$x \overset{G}{\sim} y$	*x* elemanı *y* elemanına *G*-denktir
$\{x_\tau, \tau \in T\}$	*T* kümesiyle indekslenen noktalar ailesi
$\{x_\tau, \tau \in T\} \sim \{y_\tau, \tau \in T\}$	$\{x_\tau, \tau \in T\}$ ailesi $\{y_\tau, \tau \in T\}$ ailesine *G*-denktir
Δ_{yx} f	$= \sum_{i=1}^{2} y_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}$
Ωf	$= \sum_{i_1, i_2} \mathrm{sgn}(i_1, i_2) \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_2}^{(2)} \partial x_{i_1}^{(1)}}$
η	$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
$\mathbb{R}^{3+1}$	4-Boyutlu Reel Vektör Uzayı
$\mathbb{R}^{3+1} \times \mathbb{R}^{3+1}$	$= \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}^{3+1}\}$
$\mathbb{R}^{3+1} \times ... \times \mathbb{R}^{3+1}$ (m-tane)	$= \{(x_1, ..., x_m) : x_i \in \mathbb{R}^{3+1}, i = 1, 2, ..., m\}$
$\mathbb{R}(x)$	*x*- bilinmeyenli rasyonel fonksiyonlar cismi
$\mathbb{R}(x)^G$	*G*-invaryant rasyonel fonksiyonlar cismi
$\mathbb{R}[x_1, ..., x_n]$	n-tane bilinmeyenli reel katsayılı polinomlar halkası
$\mathbb{R}[x_1, ..., x_n]^G$	n-tane bilinmeyenli reel katsayılı G-invaryant polinomlar halkası
$\wp$	$= D_{x^{\beta_q} x^{\alpha_q}} ... D_{x^{\beta_2} x^{\alpha_2}}$
V_x^m	$x_1, ..., x_m \in \mathbb{R}^{3+1}$ vektörlerinin oluşturduğu sistem
V_y^m	$y_1, ..., y_m \in \mathbb{R}^{3+1}$ vektörlerinin oluşturduğu sistem
♦	İspatın sonu

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Minkowski Uzayzaman geometrisinin doğum yılı 1905 olarak alınabilir. Hermann Minkowski(1864-1909) Öklid geometrisinden farklı olarak, yeni bir metrik tanımlayarak, adına "Minkowski Uzayzaman Geometri" denilecek olan bu geometrik yapıyı oluşturmuştur. Bu yapının Öklid geometrisinden farkı, uzaysal boyuta zaman boyutunun eklenmesi ile uzay-zamanın kaynaşık bir yapı olarak ele alınmasıdır. Böylece dört boyutlu Minkowski Uzayzaman geometrisi ortaya çıkmıştır.

1872'de F.Klein "Erlanger Programı" olarak bilinen konuşmasında geometrilerin grup etkisi altında incelenebileceğini ifade etmiştir. Bu bağlamda Öklid geometrisi, Öklid grubu; Afin geometrisi, Afin grubu altında; nokta, eğri ve yüzeylerin ortogonal ve afin dönüşümler altında korunan özeliklerinin-invaryantlarının- araştırılabileceğini ve önemini belirtmiştir.

Bu durum F.Klein'in ifade ettiği anlamda, Minkowski uzayzaman geometrisini ortaya çıkaran grup etkisi altında nokta, eğri ve yüzeylerin invaryantlarını bulma problemi ortaya çıkmıştır. Diğer taraftan bu geometri için matematiksel ve fiziksel yapılara ait çalışmalar yapılmıştır.(A.D. Alexandrov [1], H.J. Borchers [5], J.J. Callahan [9], A. Das [10], A.P.French [13], S.W.Hawking [14], J.T. Launey [23], H.A. Lorentz [24], C.Moller [26], G.L.Naber [27,28], V. Petkov [32], A.A.Robb [33], E.G.P. Rowe [34], P. Suppes [35], E.F. Taylor [37], E.C. Zeemann[40])

Bu tezde $O(3,1)$ olarak incelediğimiz ortogonal grup, Minkowski Uzayzaman Geometrisini etkileyen grup anlamında alınmıştır. Bu grup G.L. Naber [27,28] kitaplarında Genel Lorentz Grubu(L_{GH}) olarak adlandırılmıştır.

İnvaryantlar teorisi ile ilgili çalışmalara 1850-1870 yılları arasında başlanmıştır. İnvaryantlar teorisinde G bir grup olmak üzere $\mathbb{R}\left[x_1,...,x_n\right]^G$ nin üreteçleri, bu üreteçler arasındaki bağıntılar ve denklik problemi üzerinde durulmuştur. Birbirine G-denk olan iki nokta sistemi aldığımızda bunların herhangi bir G-invaryant polinom altındaki görüntüsü eşit çıkmaktadır. Fakat bunun tersi her zaman doğru değildir. Bu problem denklik problemidir.

1850'den 1960'a kadar $\mathbb{R}[x]^G$ halkasının cebirsel özelikleri incelenmiştir. 1890 yılında Hilbert, invaryantlar teorisi ile ilgili temel çalışmalar yapmıştır.

İnvaryantlara ait bu çalışmalar J.A.Dieudonne [11], D.Hilbert [20], D.Khadjiev [22], T.A.Springer [36], H.Weyl [38] eserlerinde yer almaktadır.

1946 yılında H.Weyl [38,syf.66], kitabında E.Study [41]'in 1897 yılında yaptığı çalışmalar yardımıyla $O(n)$ grubu ve $SO(n)$ altgrubuna ait noktaların üreteçler problemini incelemiş ve Lorentz grubuna ait problemin çözümünü açık bırakmıştır.

1963 yılında A.I.Mal'Cev [25], keyfi boyutlu iç çarpımlı uzayın, bu uzayın altuzayı ve onun ortogonal tümleyeninin direkt toplamı olarak yazılabilmesi için gerekli olan şart bulunmuştur.

1988 yılında D.Khadjiev [22] kitabında ve R.Aripov'un makalelerinde Öklid grubu için noktaların üreteçleri yardımıyla denklik problemi ve yörünge problemini incelemiştir.

1999 yılında R.Höfer [18], Gram matrisi yardımıyla Minkowski uzayında m tane noktanın yörüngelerini incelemiştir.

2001 yılında H. Hong [15,16], Lorentz grubu için Minkowski uzayzamanında fiziksel modellemeler vermiştir.

2001 yılında F.P.Washek [39], Lorentz grubundaki dönüşümlerin özelikleri, işaret fonksiyonu dilinde incelenmiştir.

2004 yılında İ.Ören [29], iki boyutlu Minkowski uzayzamanında, $O(1,1)$, $SO(1,1)$ ve L-Lorentz grubu için noktaların üreteçlerini ve üreteçleri arasındaki ilişkileri incelemiştir.

2005 yılında M.Karataş [21], n-boyutlu Öklid geometrisinde noktaların invaryantlarını incelemiştir.

2003 ve 2004 yıllarında W.Benz [3,4], iç çarpım dilinde uzaklığı koruyan Lorentz dönüşümleri ve metrik doğruları incelemiştir.

2006 yılında R.Höfer [17], ışıksal altuzay, Gram matrisi ve ışıksal altuzay ile ışıksal olmayan altuzayların boyutları ile ilgili incelemelerde bulunmuştur.

Bu konuya ait Türkiye'de de tezler yapılmıştır. Bunlardan bazıları [3],[8] ve [13]'de verilmiştir.

Tezde aşağıdaki problemler araştırılmıştır:

1. $G = O(3,1), SO(3,1)$ grupları için $\mathbb{R}[x]^G$'nin üreteçlerini bulma.

2. Bir nokta için $O(3,1)$-yörünge problemi.

3. Noktalar sistemi için $O(3,1)$-denklik problemi.

4. $O(3,1)$ grubu için Gram determinantının özelikleri.

5. $\mathbb{R}^{3+1}$'in altuzayı ve onun ortogonal tümleyeninin direkt toplamı olarak yazılabilme şartının incelenmesi.

Konunun güncelliği:

1. $O(3,1)$ grubu ve onun altgruplarının invaryantları günümüzde araştırılmaktadır. Bununla ilgili yayınlar W.Benz [3], R.Höfer [18], F.P.Washek [39] verilmiştir.

2. Minkowski uzayzamanı ve fiziksel uygulamaları ile ilgili yazılan birçok kitap bulunmaktadır. Bunlardan bazıları [9], [10], [28], [32], [34]'de verilmiştir.

3. Minkowski uzayzaman geometrisini etkileyen ve tüm fiziksel kanunlara göre invaryant olan Lorentz grubunun fiziksel problemlere uygulamaları ve modellemelerle ilgili bir çok yayın bulunmaktadır. Bunlardan bazıları [5], [14], [16]'te verilmiştir.

İ.Ören [28] , 2004 yılında Sakarya'da yapılan "II.Geometri Sempozyumu" na "İki Boyutlu Minkowski Uzayzaman Geometrisinde Noktaların Üreteç Invaryantları Sistemi" adlı bildirisiyle katılmıştır.

İ.Ören [29] , 2006 yılında Zonguldak'ta yapılan "IV.International Geometry Symposium" na "The Conditions of Equivalance of Points for Orthogonal and Lorentz Group on the 2-Dimensional Minkowski Spacetime" adlı bildirisiyle katılmıştır.

1.2. Bilineer ve Kuadratik Formlar

Tanım 1 : $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi, V - $\mathbb{R}$ üzerinde $n \geq 1$ boyutlu keyfi reel vektör uzayı ve $g: V \times V \to \mathbb{R}$ dönüşüm olmak üzere, $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall v, w \in V$ için

$g(av_1 + bv_2, w) = ag(v_1, w) + bg(v_2, w)$ ve $g(v, aw_1 + bw_2) = ag(v, w_1) + bg(v, w_2)$

özeliklerini sağlayan g -dönüşümüne, bilineer form denir.

Örnek 1 : $V = \mathbb{R}^4 = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1,2,3,4\}$ alalım. $f: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$,

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4), y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$ olmak üzere,

$f(x, y) = 2x_1y_1 + 5x_2y_2 - 3x_1y_2 + 4x_3y_2 - x_4y_4$ dönüşümü tanımlayalım. *f*- bilineer formdur.

Örnek 2 : $V = \mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1,2,...,n\}$ alalım. $h: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right), y=\left(y_1,y_2,...,y_n\right)\in\mathbb{R}^n$ olmak üzere, $h\left(x,y\right)=x_1{}^2y_1$ dönüşümünü tanımlayalım. *h*- bilineer form değildir.

Tanım 2 : $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi, V - $\mathbb{R}$ üzerinde $n\geq 1$ boyutlu keyfi reel vektör uzayı ve $g:V\times V\to\mathbb{R}$ bilineer dönüşüm olmak üzere, $\forall v,w\in V$ için $g\left(v,w\right)=g\left(w,v\right)$ ise, g 'ye simetrik denir.

Örnek 3 : $V=\mathbb{R}^n=\left\{x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right):x_i\in\mathbb{R}, i=1,2,...,n\right\}$ alalım. $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right), y=\left(y_1,y_2,...,y_n\right)\in\mathbb{R}^n$ olmak üzere $f\left(x,y\right)=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n$ dönüşümü tanımlayalım. *f*- simetriktir.

Örnek 4 : $V=\mathbb{R}^n=\left\{x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right):x_i\in\mathbb{R}, i=1,2,...,n\right\}$ alalım. $h:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right), y=\left(y_1,y_2,...,y_n\right)\in\mathbb{R}^n$ olmak üzere $h\left(x,y\right)=x_1y_2$ dönüşümünü tanımlayalım. *h*-simetrik değildir.

Tanım 3 : $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi, V - $\mathbb{R}$ üzerinde $n\geq 1$ boyutlu keyfi reel vektör uzayı ve $g:V\times V\to\mathbb{R}$ bilineer dönüşüm olmak üzere, $\forall w\in V$ için $g\left(v,w\right)=0$ olduğunda $v=0$ ise g 'ye bozulmamış denir.

Örnek 5 : $V=\mathbb{R}^n=\left\{x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right):x_i\in\mathbb{R}, i=1,2,...,n\right\}$ alalım. $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right), y=\left(y_1,y_2,...,y_n\right)\in\mathbb{R}^n$ olmak üzere, $f\left(x,y\right)=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n$ dönüşümü tanımlayalım. *f*-bozulmamıştır. *f*'nin bozulmamış olduğunu göstermek için $\forall x\in\mathbb{R}^n$ için $f\left(x,y\right)=0$ olduğunda $y=0$ olduğunu göstermek gerekir. Bunun için özel olarak $x=y$ alınırsa $f\left(y,y\right)=y_1{}^2+y_2{}^2+...+y_n{}^2=0$ elde edilir. $f\left(y,y\right)=y_1{}^2+y_2{}^2+...+y_n{}^2=0$ olması için $y_i=0, i=1,2,...,n$ olmalıdır. Buradan $y=0$ 'dır. O halde *f*- bozulmamıştır.

Örnek 6 : $\mathbb{R}^n=\left\{x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right):x_i\in\mathbb{R}, i=1,2,...,n, n>1\right\}$ alalım. $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right), y=\left(y_1,y_2,...,y_n\right)\in\mathbb{R}^n$ olmak üzere, $f\left(x,y\right)=x_1y_1$ dönüşümünü tanımlayalım. *f*- bozulmuştur.

Tanım 4: $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi, V - $\mathbb{R}$ üzerinde $n\geq 1$ boyutlu keyfi reel vektör uzayı olmak üzere, bilineer form, simetrik, bozulmamış özeliklerine sahip $g:V\times V\to\mathbb{R}$ dönüşümüne genelleştirilmiş iç çarpım denir ve $g\left(v,w\right)$ ile gösterilir.

Kısaca $g\left(v,w\right)=v\cdot w$ veya $g\left(v,w\right)=\left\langle v,w\right\rangle$ ile gösterelim.

Örnek 7: $V=\mathbb{R}^4=\left\{x=\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right):x_i\in\mathbb{R}, i=1,2,3,4\right\}$ alalım. $f:\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$, $x=\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right), y=\left(y_1,y_2,y_3,y_4\right)\in\mathbb{R}^4$ olmak üzere, $f\left(x,y\right)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-x_4y_4$ dönüşümünü tanımlayalım. *f*-genelleştirilmiş iç çarpımdır. Bunu göstermek için f 'nin bilineer, simetrik ve bozulmamış olduğunu göstermek gerekir. Bunun için;

$a,b\in\mathbb{R}, x,y,z\in\mathbb{R}^4$ olmak üzere,

1)

$$\begin{aligned} f\left(ax+by,z\right)&=\left(ax_1+by_1\right)z_1+\left(ax_2+by_2\right)z_2+\left(ax_3+by_3\right)z_3-\left(ax_4+by_4\right)z_4\\ &=a\left(x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3-x_4z_4\right)+b\left(y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3-y_4z_4\right)\\ &=af\left(x,z\right)+bf\left(y,z\right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(x,ay+bz\right)&=x_1\left(ay_1+bz_1\right)+x_2\left(ay_2+bz_2\right)+x_3\left(ay_3+bz_3\right)-x_4\left(ay_4+bz_4\right)\\ &=a\left(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-x_4y_4\right)+b\left(x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3-x_4z_4\right) \quad \text{‘dır.}\\ &=af\left(x,y\right)+bf\left(x,z\right) \end{aligned}$$

O halde *f*- bilineerdir.

2) $f\left(x,y\right)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-x_4y_4=y_1x_1+y_2x_2+y_3x_3-y_4x_4=f\left(y,x\right)$ ’dir. Böylece *f*- simetriktir.

3) $\forall x\in\mathbb{R}^4$ için $f\left(x,y\right)=0$ olduğunda $y=0$ olduğunu gösterirsek *f*’nin bozulmamış olduğunu göstermiş oluruz. Bunun için:

3.1) $x=\left(y_1,y_2,y_3,0\right)\in\mathbb{R}^4$ seçilirse,

$f\left(x,y\right)=y_1y_1+y_2y_2+y_3y_3-0y_4=0\Rightarrow y_1^{\,2}+y_2^{\,2}+y_3^{\,2}=0\Rightarrow y_1=y_2=y_3=0$ ’dır.

3.2) $f\left(x,y\right)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-x_4y_4=0+0+0-x_4y_4=-x_4y_4=0$ elde edilir. Burada $x_4=-1$ seçilirse $f\left(x,y\right)=-x_4y_4=-\left(-1\right)y_4=y_4=0$ ’dır.Buradan, $y=\left(y_1,y_2,y_3,y_4\right)=\left(0,0,0,0\right)=0$ elde edilir. Böylece, *f*- bozulmamıştır. Sonuç olarak, *f*-genelleştirilmiş iç çarpımdır.

Örnek 8 : $V=\mathbb{R}$ alalım. $h:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x,y\in\mathbb{R}$ olmak üzere $h\left(x,y\right)=x^2y$ dönüşümünü tanımlayalım. *h*-genelleştirilmiş iç çarpım değildir. Gerçekten;

$a,b\in\mathbb{R}, x,y,z\in\mathbb{R}$ olmak üzere,

$h\left(x,ay+bz\right)=x^2\left(ay+bz\right)=ax^2y+bx^2z=ah\left(x,y\right)+bh\left(y,z\right)$ ve

$h(ax+by,z)=(ax+by)^2 z=a^2x^2z+b^2y^2z+2abxyz$

$=ah(x,z)+bh(y,z)=a^2x^2z+b^2y^2z$ olması gerekir. Bunun eşit olması için $a^2x^2z+b^2y^2z+2abxyz=a^2x^2z+b^2y^2z$ olması gerekir. Bu eşitliğin sağlanabilmesi için katsayıların eşit olması gerekir. Bu eşitlikten $2ab=0$ olur. Buradan $ab=0$ olup $a=0$ veya $b=0$'dır. Fakat bu şartın yukarıdaki tüm *a* ve *b*'ler için sağlanması gerekir. Bu ise $h(a.x+b.y,z)\neq ah(x,z)+bh(y,z)$'dır. O halde *h*, bilineer değildir. Bu özelik sağlanmadığından *h*- genelleştirilmiş iç çarpım değildir.

Tanım 5: $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi, V - $\mathbb{R}$ üzerinde $n\geq 1$ boyutlu keyfi reel vektör uzayı ve $g:V\times V\to\mathbb{R}$ dönüşüm olmak üzere,

i) Sıfırdan farklı keyfi $v\in V$ için $g(v,v)>0$ ise, *g*'ye pozitif belirli denir.

ii) Sıfırdan farklı keyfi $v\in V$ için $g(v,v)<0$ ise, *g*'ye negatif belirli denir.

Örnek 9 : $V=\mathbb{R}^n=\{x=(x_1,x_2,...,x_n):x_i\in\mathbb{R},i=1,2,...,n\}$ alalım. $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $x=(x_1,x_2,...,x_n),y=(y_1,y_2,...,y_n)\in\mathbb{R}^n$ olmak üzere $f(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n$ dönüşümünü tanımlayalım. *f*-genelleştirilmiş iç çarpımı pozitif belirlidir.

Örnek 10: $V=\mathbb{R}$ alalım. $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x,y\in\mathbb{R}$ olmak üzere $f(x,y)=-xy$ dönüşümünü tanımlayalım. *f* - genelleştirilmiş iç çarpımı negatif belirlidir.

Tanım 6 : $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi, V - $\mathbb{R}$ üzerinde $n\geq 1$ boyutlu keyfi reel vektör uzayı ve $g:V\times V\to\mathbb{R}$ bir dönüşüm olmak üzere, g ne negatif belirli ne de pozitif belirli değilse, g'ye belirsiz denir.

Örnek 11 : $V=\mathbb{R}^4=\{x=(x_1,x_2,x_3,x_4):x_i\in\mathbb{R},i=1,2,3,4\}$ alalım. $f:\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$, $x=(x_1,x_2,x_3,x_4),y=(y_1,y_2,y_3,y_4)\in\mathbb{R}^4$ olmak üzere, $f(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-x_4y_4$ dönüşümünü tanımlayalım. *f*- genelleştirilmiş iç çarpımı belirsizdir.

İspat: Farz edelim ki *f* - belirsiz olmasın. Bu taktirde *f*- pozitif veya negatif belirlidir.

1) Eğer *f*-pozitif belirli ise, $0\neq x\in\mathbb{R}^4$ için $f(x,x)>0$'dır. Buradan, $f(x,x)=x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+x_3^{\,2}-x_4^{\,2}>0$'dır. Burada $x=(0,0,0,1)$ seçilirse $f(x,x)=0^2+0^2+0^2-1^2=-1<0$'dır.Bu ise, çelişkidir. Böylece *f* - pozitif belirli değildir.

2) Eğer *f*- negatif belirli ise, $0 \neq x \in \mathbb{R}^4$ için $f\left(x,x\right)<0$ 'dır. Buradan,

$f\left(x,x\right)=x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}-x_4^{\ 2}<0$ 'dır. Burada $x=(1,0,0,0)$ seçilirse

$f\left(x,x\right)=1^2+0^2+0^2-0^2=1>0$ 'dır. Bu ise, çelişkidir. Böylece *f*- negatif belirli değildir.

Sonuçta, f - ne pozitif ne de negatif belirli olduğundan belirsizdir.

Tanım 7 : $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi, V - $\mathbb{R}$ üzerinde $n \geq 1$ boyutlu keyfi reel vektör uzayı ve $g: V \times V \to \mathbb{R}$ bir genelleştirilmiş iç çarpım olsun. $v \in V$ ve $w \in V$ için $g\left(v,w\right)=\left\langle v,w\right\rangle=0$ ise v ve w vektörlerine ortogonal vektörler denir.

Tanım 8: $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi, V - $\mathbb{R}$ üzerinde $n \geq 1$ boyutlu keyfi reel vektör uzayı ve $g: V \times V \to \mathbb{R}$ bir genelleştirilmiş iç çarpım olsun. $\wp: V \to \mathbb{R}$, $\wp\left(v\right)=g\left(v,v\right)=\left\langle v,v\right\rangle$ ile tanımlanan dönüşüme V üzerinde g -genelleştirilmiş iç çarpımıyla verilen kuadratik form denir.

Tanım 9 : $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi, V - $\mathbb{R}$ üzerinde $n \geq 1$ boyutlu keyfi reel vektör uzayı ve $g: V \times V \to \mathbb{R}$ bir genelleştirilmiş iç çarpım olsun. Eğer $g\left(v,v\right)=\left\langle v,v\right\rangle=1$ veya $g\left(v,v\right)=\left\langle v,v\right\rangle=-1$ ise $v \in V$ vektörüne birim vektör denir.

Tanım 10 : $\left\{v_1,v_2,...,v_k\right\} \subset V$ vektör uzayında *k* tane vektör sistemi verilmek üzere, v_i vektörleri için $\left\langle v_i,v_j\right\rangle=0, i \neq j;\ i,\ j=1,2,...,k$ ise bu sisteme ortogonal sistem denir.

Tanım 11 : $\left\{v_1,v_2,...,v_k\right\} \subset V$ ortogonal sistem olsun. Eğer $\forall i=1,2,...,k$ için $\left\langle v_i,v_i\right\rangle=1$ veya $\left\langle v_i,v_i\right\rangle=-1$ ise bu sisteme ortonormal sistem denir.

Teorem 1 : V , $n \geq 1$ boyutlu reel vektör uzayı, $g: V \times V \to \mathbb{R}$ genelleştirilmiş iç çarpım olsun. Bu taktirde *V*'de $\left\langle e_i,e_i\right\rangle=\pm 1$, *i=1,2,…,n* ve $\left\langle e_i,e_j\right\rangle=0$, $i \neq j$, *i,j=1,2,…,n* olan $\left\{e_i\right\}$ *i=1,2,…,n* şeklinde bir taban vardır.

İspat: g , V üzerinde genelleştirilmiş iç çarpım olsun. g -bozulmamış olduğundan, biz iddia edebiliriz ki, *V*'de $u \neq 0$ vektörü vardır ve $\left\langle u,u\right\rangle \neq 0$ 'dır.Gerçekten,

1) Eğer $0 \neq u \in V$ için $\left\langle u,u\right\rangle \neq 0$ ise durum açıktır.

2) Şimdi $0 \neq u \in V$ için $\left\langle u,u\right\rangle=0$ olsun. Ancak g-bozulmamış olduğundan $0 \neq u \in V$ için *V*'de bir *v* vektörü vardır, öyle ki, $\left\langle u,v\right\rangle \neq 0$ 'dır. Burada;

2.1) Eğer $0 \neq v \in V$ için $\left\langle v,v\right\rangle \neq 0$ ise durum açıktır.

2.2) Eğer $0 \neq v \in V$ için $\langle v,v \rangle = 0$ ise, $0 \neq u \in V$ için $\langle u,u \rangle = 0$ ve $\langle u,v \rangle \neq 0$ olduğundan $\langle u+v,u+v \rangle = \langle u,u \rangle + 2.\langle u,v \rangle + \langle v,v \rangle \neq 0$ 'dır. Burada $w = u+v$ alırsak, ispat biter.

İspatı indüksiyon yöntemi ile yapalım.

$boyV = n = 1$ olsun. Bu durumda V'de $\langle u,u \rangle \neq 0$ olan bir $u \neq 0$ vektörü seçerek, $e_1 = \frac{1}{\sqrt{|\langle u,u \rangle|}}.u$ tanımlayabiliriz. Bu takdirde, $\langle e_1,e_1 \rangle = \pm 1$'dir. Böylece e_1, V'de tabandır.

Farz edelim ki $n-1$ için V'nin g-iç çarpımlı keyfi altuzayı yukarıdaki vektöre benzer tipte $\{e_1, e_2, ..., e_{n-1}\}$ şeklinde bir tabana sahip ve $boyV = n, n > 1$ olsun. Bu takdirde, $\langle u,u \rangle \neq 0$ olan $0 \neq u \in V$ seçilebilir. Burada $e_n = \frac{1}{\sqrt{|\langle u,u \rangle|}}.u$ şeklinde tanımlayalım.

$\{e_n\}$ ile üretilen $W = \{\lambda e_n : \lambda \in \mathbb{R}\} \subset V$ altuzayını alalım. *boyW=1*'dir. Böylece $\langle e_n, e_n \rangle = \pm 1$ olan $\{e_n\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{|\langle u,u \rangle|}}.u \right\}$'i W için taban olarak kabul edebiliriz.

W'nin ortogonal tümleyenini $W^{\perp}$ ile gösterelim.

$W^{\perp} = \{u \in V : \langle u,v \rangle = 0, \forall v \in W\}$'dir. $\forall v \in W$ öyle ki, $v = \beta e_n, \beta \in \mathbb{R}$ olarak yazılabildiğinden $W^{\perp}$ cümlesini $W^{\perp} = \{u \in V : \langle u, e_n \rangle = 0, e_n \in W\}$ olarak ifade edebiliriz.

$W^{\perp} \subset V$ olduğundan $W^{\perp}$- altuzaydır. Bunun altuzay olduğunu göstermek için $\forall x, y \in W^{\perp}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için $x+y, \lambda x \in W^{\perp}$ olduğunu göstermek yeterlidir.

a) $\forall x, y \in W^{\perp}$ ise tanımdan $\langle x, e_n \rangle = 0$ ve $\langle y, e_n \rangle = 0$ 'dır. Gerçekten, $\langle x+y, e_n \rangle = \langle x, e_n \rangle + \langle y, e_n \rangle = 0 + 0 = 0$ 'dır. Böylece $x + y \in W^{\perp}$'dir.

b) $\forall x \in W^{\perp}$ ise tanımdan $\langle x, e_n \rangle = 0$ 'dır. $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda x \in W^{\perp}$ olmalıdır. $\lambda x \in W^{\perp}$ olabilmesi için $\langle \lambda x, e_n \rangle = 0$ olmalıdır. Gerçekten, $\langle \lambda x, e_n \rangle = \lambda \langle x, e_n \rangle = \lambda 0 = 0$'dır. O halde $\lambda x \in W^{\perp}$'dir. Böylece $W^{\perp}$ altuzaydır. O halde $boyW^{\perp} \leq boyV = n$'dir.

Farz edelim ki $boyW^{\perp} = boyV = n$ olsun. Bu taktirde $W^{\perp} = V$'dir. Ancak $e_n \in W \subset V$ ve $e_n \notin W^{\perp} \subset V$ 'dir. Böylece $W^{\perp} \neq V$'dir. Buradan $boyW^{\perp} < boyV = n$ 'dir.

Şimdi $V = W \oplus W^{\perp}$ olarak yazılabileceğini ispat edelim. Bunu ispatlamak için öncelikle $W \cap W^{\perp} = \{0\}$ olduğunu gösterelim. Farz edelim ki $x \in W \cap W^{\perp}$ olsun. Buradan $x \in W$ ve $x \in W^{\perp}$'dir. $x \in W$ olduğundan $x = \lambda e_n, \lambda \in \mathbb{R}$ şeklindedir.

$x \in W^{\perp}$ olduğundan $\langle x, e_n \rangle = 0$'dır. Buradan, $\langle x, e_n \rangle = \langle \lambda e_n, e_n \rangle = \lambda \langle e_n, e_n \rangle = 0$'dır. Ancak $\langle e_n, e_n \rangle \neq 0$ olduğundan $\lambda = 0$ olmalıdır. Böylece $x = \lambda e_n = 0 e_n = 0$'dır. Buradan $W \cap W^{\perp} = \{0\}$'dır.

Şimdi $v \in V$ alalım. Bu v- vektörü için $w^{\perp} = v - \left(\langle e_n, e_n \rangle \langle v, e_n \rangle \right) e_n$ vektörünü alalım.

Bu takdirde,

$\langle w^{\perp}, e_n \rangle = \langle v, e_n \rangle - \left(\langle e_n, e_n \rangle \right)^2 \langle v, e_n \rangle = \langle v, e_n \rangle - (\pm 1)^2 \langle v, e_n \rangle = \langle v, e_n \rangle - \langle v, e_n \rangle = 0$'den

$w^{\perp} \in W^{\perp}$'dir. Buradan, $v = w^{\perp} + \left(\langle e_n, e_n \rangle . \langle v, e_n \rangle \right) . e_n$'dir. Burada $w^{\perp} \in W^{\perp}$ ve

$\left(\langle e_n, e_n \rangle \langle v, e_n \rangle \right) e_n \in W$'dir. Böylece $V = W + W^{\perp}$ olduğu gösterilmiş olur.

Sonuçta, $W \cap W^{\perp} = \{0\}$ ve $V = W + W^{\perp}$ yazılabildiğinden $V = W \oplus W^{\perp}$'dir. Burada *boy*V=n ve *boy*$W = 1$ olduğundan *boy*$W^{\perp} = n - 1$'dir.

$g \downarrow W^{\perp}$ ile g'nin $W^{\perp}$ altuzayına kısıtlanmasını gösterelim.

Şimdi $g \downarrow W^{\perp}$'nin bozulmamış olduğunu ispat edelim. $g \downarrow W^{\perp}$'nin bozulmamış olduğunu göstermek için $\forall x \in W^{\perp}$ için $\exists y \in W^{\perp}$ öyle ki $\langle x, y \rangle \neq 0$ olduğunu göstermek gerekir. g, V'de bozulmamış olduğu için keyfi bir $x \in W^{\perp}, x \neq 0$ için $\exists z \in V$ öyle ki $\langle x, z \rangle \neq 0$'dır.Ancak $V = W \oplus W^{\perp}$ olduğundan ve $z \in V$ olduğundan $z = w + w^{\perp}$: $w \in W, w^{\perp} \in W^{\perp}$'dir. Buradan,

$0 \neq \langle z, x \rangle = \langle w + w^{\perp}, x \rangle = \langle w, x \rangle + \langle w^{\perp}, x \rangle$'dir. Ancak $\langle w, x \rangle = 0$ ve $\langle x, z \rangle \neq 0$ olduğundan $\langle w^{\perp}, x \rangle \neq 0$'dır. Böylece $g \downarrow W^{\perp}$ bozulmamıştır. Burada g'nin $W^{\perp} \times W^{\perp}$'e kısıtlanması $W^{\perp}$'de bir genelleştirilmiş iç çarpımdır. Yukarıdaki varsayımdan $\langle e_i, e_i \rangle = \pm 1, i = 1, \ldots, n-1$ ve $\langle e_i, e_j \rangle = 0, i \neq j = 1, \ldots, n-1$ olan $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}$ şeklinde bir taban vardır.

Böylece V'de $\langle e_i, e_i \rangle = \pm 1, i = 2, \ldots, n$ ve $\langle e_i, e_j \rangle = 0, i \neq j = 1, \ldots, n$ olan

$\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, e_n\}$ şeklinde bir taban vardır. ♦

Not: Yukarıdaki teoremde $n=4$ alınarak Minkowski Uzayzaman geometrisi için benzer tabanın mevcutluğu gösterilir.

Önerme 1 : V dört boyutlu reel vektör uzayı, $g:V\times V\to\mathbb{R}$ genelleştirilmiş iç çarpım olsun.Bu takdirde V'de $\left\langle e_i,e_i\right\rangle=\pm1, i=1,2,3,4$ ve $\left\langle e_i,e_j\right\rangle=0\,, i\neq j=1,2,3,4$ olan $\{e_i\}$ $i=1,2,3,4$ şeklindeki keyfi ortonormal taban lineer bağımsızdır.

İspat: V'de $\left\langle e_i,e_i\right\rangle=\pm1, i=1,2,3,4$ ve $\left\langle e_i,e_j\right\rangle=0\,, i\neq j=1,2,3,4$ olan $\{e_i\}$ $i=1,2,3,4$ şeklinde ortonormal bir taban olsun. Farz edelim ki, $\{e_i\}$ $i=1,2,3,4$ lineer bağımsız olmasın. Bu taktirde en az biri sıfırdan farklı $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\in\mathbb{R}$ vardır, öyle ki $\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3+\lambda_4e_4=0$ 'dır. Buradan, $\left\langle \lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3+\lambda_4e_4,e_1\right\rangle=0$ 'dır. Ancak $\left\langle \lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3+\lambda_4e_4,e_1\right\rangle=\lambda_1\underbrace{\left\langle e_1,e_1\right\rangle}_{\pm1}+\lambda_2\underbrace{\left\langle e_2,e_1\right\rangle}_{0}+\lambda_3\underbrace{\left\langle e_3,e_1\right\rangle}_{0}+\lambda_4\underbrace{\left\langle e_4,e_1\right\rangle}_{0}=\pm\lambda_1=0$ 'den $\lambda_1=0$ 'dır. Benzer şekilde $\left\langle \lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3+\lambda_4e_4,e_i\right\rangle=0, i=2,3,4$ 'dır. Ancak

$$\left\langle \lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3+\lambda_4e_4,e_i\right\rangle=\lambda_1\left\langle e_1,e_i\right\rangle+\lambda_2\left\langle e_2,e_i\right\rangle+\lambda_3\left\langle e_3,e_i\right\rangle+\lambda_4\left\langle e_4,e_i\right\rangle=\pm\lambda_i=0, i=2,3,4$$

olduğundan $\lambda_i=0, i=2,3,4$ 'dır. Böylece $\lambda_i=0, i=1,2,3,4$ olduğundan bu varsayım ile çelişir. Buradan $\{e_i\}$ *i=1,2,3,4* şeklindeki keyfi ortonormal taban lineer bağımsızdır. ♦

Tanım 12 : $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi, V - $\mathbb{R}$ üzerinde $n\geq1$ boyutlu keyfi reel vektör uzayı ve $g:V\times V\to\mathbb{R}$ bir genelleştirilmiş iç çarpım ve $\wp(e_i)=g(e_i,e_i)=1, i=1,2,...,n-1$ ve $\wp(e_n)=g(e_n,e_n)=-1$, olan $\{e_1,e_2,...,e_{n-1},e_n\}$ ortonormal taban olmak üzere, bu tabanla gösterimi $v=\sum_{i=1}^{n}v_i.e_i$ ve $w=\sum_{i=1}^{n}w_i.e_i$ olan vektörler ise,

$g(v,w)=v_1w_1+...+v_{n-1}w_{n-1}-v_nw_n$ ile tanımlanan genelleştirilmiş iç çarpıma Lorentz iç çarpımı denir.

Şimdi, $g:V\times V\to\mathbb{R}$ bir genelleştirilmiş iç çarpım olmak üzere $g(e_i,e_i)=-1$ olan e_i vektörlerinin sayısını r ile gösterelim.

Teorem 2 : $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi, V - $\mathbb{R}$ üzerinde $n\geq1$ boyutlu keyfi reel vektör uzayı ve $g:V\times V\to\mathbb{R}$ bir genelleştirilmiş iç çarpım olsun. V 'nin keyfi iki ortonormal tabanındaki $\left\langle e_i,e_i\right\rangle=-1$ olan e_i vektörlerinin sayısı eşittir.

İspat : $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ve $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ V'nin iki ortonormal tabanı olsun. $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ortonormal tabanında $\langle e_i, e_i \rangle = -1$ olan e_i vektörlerinin sayısını r_1 ile gösterelim. Benzer şekilde,
$\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ ortonormal tabanında $\langle f_i, f_i \rangle = -1$ olan f_i vektörlerinin sayısını r_2 ile gösterelim.
Şimdi $r_1 = r_2$ olduğunu ispat edelim.

Farz edelim, $r_1 \neq r_2$ olsun. Bu taktirde, $r_1 < r_2$ ve $r_2 < r_1$ olmak üzere iki durum vardır. Burada:

1) $r_1 < r_2$ olsun.

$\{e_1, e_2, ..., e_{r_1}, e_{r_1+1}, ..., e_n\}$ ortonormal tabanında $\langle e_i, e_i \rangle = -1$ olan e_i vektörlerinin sayısı r_1 olduğundan $n - r_1$ tane e_i vektör için $\langle e_i, e_i \rangle = 1, i = r_1 + 1, ..., n$'dir. Benzer şekilde,
$\{f_1, f_2, ..., f_{r_2}, f_{r_2+1}, ..., f_n\}$ ortonormal tabanında $\langle f_i, f_i \rangle = -1$ olan f_i vektörlerinin sayısı r_2 olduğundan $n - r_2$ tane f_i vektör için $\langle f_i, f_i \rangle = 1, i = r_2 + 1, ..., n$'dir.

V_1 ile $\{e_1, e_2, ..., e_{n-r_1}\}$ tarafından üretilen altuzayı gösterelim. Bu taktirde sıfırdan farklı keyfi $v_1 \in V_1$ için $\langle v_1, v_1 \rangle > 0$ olduğundan g, V_1'de pozitif belirlidir.
V_2 ile $\{f_1, ..., f_{r_2}\}$ tarafından üretilen altuzayı gösterelim. Bu taktirde sıfırdan farklı keyfi $v_2 \in V_2$ için $\langle v_2, v_2 \rangle < 0$ olduğundan g, V_2'de negatif belirlidir. Burada $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ olduğunu gösterelim.
Keyfi $w \in V_1 \cap V_2, w \neq 0$ vektörünü alalım. Bu taktirde $w \in V_1$ olduğundan $\langle w, w \rangle > 0$ ve $w \in V_2$ olduğundan $\langle w, w \rangle < 0$'dır. Bundan dolayı $V_1 \cap V_2 = \{0\}$'dır. $boyV_1 = n - r_1$
$boyV_2 = r_2$ ve $boy(V_1 \cap V_2) = 0$'dır.
$boy(V_1 + V_2) = boyV_1 + boyV_2 - boy(V_1 \cap V_2) = (n - r_1) + r_2 - 0 = (n - r_1) + r_2$ 'dir. Ancak $r_1 < r_2 \Rightarrow r_2 - r_1 > 0$ olduğundan $boy(V_1 + V_2) = n + (r_2 - r_1) > n$'dir. Bu ise V_1 ve V_2'nin altuzay ve $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ olmasından $boy(V_1 + V_2) \leq boyV = n$ olması ile çelişir. Buradan $r_1 < r_2$ olamaz.

2) $r_1 > r_2$ olsun. Bu durumda benzer şekilde, (1)'deki gibi sağlanamayacağı gösterilir.Yani $r_1 > r_2$ olamaz. Böylece $r_1 = r_2$ olmalıdır. ♦

Tanım 13: $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi, V - $\mathbb{R}$ üzerinde $n \geq 1$ boyutlu keyfi reel vektör uzayı ve $g : V \times V \to \mathbb{R}$ bir genelleştirilmiş iç çarpım olsun. $\wp(e_i) = g(e_i, e_i) = \langle e_i, e_i \rangle = -1$ olan g-genelleştirilmiş iç çarpımın her ortonormal tabanındaki e_i'lerin r sayısına g'nin indeksi denir.

Not: Lorentz iç çarpımının indeksi, 1'dir.

Önerme 2 : $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi, V - $\mathbb{R}$ üzerinde $n \geq 1$ boyutlu keyfi reel vektör uzayı, $g : V \times V \to \mathbb{R}$ bir genelleştirilmiş iç çarpım ve $V = W \oplus W^{\perp}$ olsun.Bu takdirde $g \downarrow W$ ve $g \downarrow W^{\perp}$ bozulmamıştır ve V'nin indeksi, W ile $W^{\perp}$'in indeksleri toplamına eşittir.

İspat : $W \neq \varnothing$ ve $\mathrm{W} \subset \mathrm{V}$ alalım. W'nin ortogonal tümleyenini $W^{\perp}$ ile gösterelim. $g \downarrow W$ ve $g \downarrow W^{\perp}$ bozulmamış olduklarından, A.I.Mal'Cev [25, syf.212]'deki Teorem 2'den W ve $W^{\perp}$'lerde ortonormal taban mevcuttur. O zaman $\{e_1, ..., e_m\}$ ile W'nin, $\{e_{m+1}, ..., e_n\}$ ile $W^{\perp}$'in ortonormal tabanını işaretleyelim.Bunların indeksleri, sırasıyla, $indexW = r_1$ ve $indexW^{\perp} = r_2$ olsun. $V = W \oplus W^{\perp}$ olduğundan V'de $\{e_1, ..., e_m, e_{m+1}, ..., e_n\}$ ortonormal taban vardır. $V = W \oplus W^{\perp}$ olduğundan $indexV = indexW + indexW^{\perp}$ 'dir. Böylece $indexV = r_1 + r_2$'dir. ♦

1.3. Minkowski Uzayzamanı

Tanım 14 : Dört boyutlu V reel vektör uzayında tanımlı indeksi 1 olan bilineer form, simetrik ve bozulmamış özeliğine sahip $g : V \times V \to \mathbb{R}$ genelleştirilmiş iç çarpımıyla tanımlı uzaya Minkowski uzayzamanı denir.

Buradan, $v = \sum_{i=1}^{4} v_i.e_i$ ve $w = \sum_{i=1}^{4} w_i.e_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ vektörler ve $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ortonormal taban olmak üzere $g(v, w) = v_1.w_1 + v_2.w_2 + v_3.w_3 - v_4.w_4$ Lorentz iç çarpımı alınır.

Ayrıca $v = v_1.e_1 + v_2.e_2 + v_3.e_3 + v_4.e_4$ olduğundan burada v'nin koordinatları olarak (v_1, v_2, v_3, v_4)'dir. (v_1, v_2, v_3) uzaysal koordinatlar, v_4 ise zamansal koordinatıdır. Bu nedenle V'yi, $\mathbb{R}^{3+1}$ ile gösteririz.

$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ortonormal taban olmak üzere,

$$\left[\langle e_i, e_j \rangle\right]_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \eta\,, i, j = 1,2,3,4$$ olarak ifade edebiliriz.

1.4. O(3,1,$\mathbb{R}$) Grubu ve SO(3,1,$\mathbb{R}$) Altgrubu

Bu kısımda $\mathbb{R}^{3+1}$ reel vektör uzayında, $g : \mathbb{R}^{3+1} \times \mathbb{R}^{3+1} \to \mathbb{R}$,

$g(x, y) = \langle x, y \rangle = x_1.y_1 + x_2.y_2 + x_3.y_3 - x_4.y_4$ ile verilen Lorentz iç çarpımını ve

$\langle e_i, e_i \rangle = \pm 1$, i=1,2,3,4 ve $\langle e_i, e_j \rangle = 0$, $i \neq j$, i,j=1,2,3,4 olan

$\{e_1 = (1,0,0,0), e_2 = (0,1,0,0), e_3 = (0,0,1,0), e_4 = (0,0,0,1)\}$ ortonormal tabanını alacağız.

$O(3,1,\mathbb{R}) = \left\{F : \mathbb{R}^{3+1} \to \mathbb{R}^{3+1} : \langle F(x), F(y) \rangle = \langle x, y \rangle\right\}$ cümlesi bir grup oluşturur. İspat aşağıda verilecek. Bunu kısaca $O(3,1,\mathbb{R}) := O(3,1)$ olarak gösterelim.

Tanım 15 : $\mathbb{R}^{3+1}$ reel vektör uzayı olmak üzere $\forall x, y \in \mathbb{R}^{3+1}$ için $\langle F(x), F(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ olan $F : \mathbb{R}^{3+1} \to \mathbb{R}^{3+1}$ dönüşümüne bir ortogonal dönüşüm denir.

Önerme 3 : $F : \mathbb{R}^{3+1} \to \mathbb{R}^{3+1}$ keyfi bir ortogonal dönüşüm ise, F lineerdir.

İspat: $\mathbb{R}^{3+1}$'de $\langle e_i, e_i \rangle = \pm 1$, i=1,2,3,4 ve $\langle e_i, e_j \rangle = 0$, $i \neq j$, i,j=1,2,3,4 olan

$\{e_1 = (1,0,0,0), e_2 = (0,1,0,0), e_3 = (0,0,1,0), e_4 = (0,0,0,1)\}$ ortonormal taban olsun. Bu tabana F'yi uygularsak,

$\langle F(e_i), F(e_i) \rangle = \langle e_i, e_i \rangle = 1, i = 1,2,3; \langle F(e_4), F(e_4) \rangle = \langle e_4, e_4 \rangle = -1, \langle F(e_i), F(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = 0$

$i \neq j$, i,j=1,2,3,4 'dür. $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ortonormal taban ve F ortogonal olduğundan

$\{F(e_i)\}, i = 1,2,3,4$ ortonormaldir.

Şimdi, $x\in \mathbb{R}^{3+1}$ olmak üzere, $x=\sum_{i=1}^{4} a_i.e_i,\ a_i\in\mathbb{R}, a_i=\langle x,e_i\rangle, i=1,2,3\ ; a_4=-\langle x,e_4\rangle$ yazabiliriz. $\{F(e_i)\}, i=1,2,3,4$ tabanı için,

$F(x)=\sum_{i=1}^{4} b_i.F(e_i),\ b_i\in\mathbb{R}, b_i=\langle F(x),F(e_i)\rangle, i=1,2,3\ ;\ b_4=-\langle F(x),F(e_4)\rangle$ yazabiliriz.

Ancak $b_i=\langle F(x),F(e_i)\rangle=\langle x,e_i\rangle=a_i, i=1,2,3$ ve $b_4=-\langle F(x),F(e_4)\rangle=-\langle x,e_4\rangle=a_4$ olduğundan $F(x)=\sum_{i=1}^{4} a_i.F(e_i)$ 'dir.

Benzer şekilde $y\in\mathbb{R}^{3+1}$ olmak üzere $y=\sum_{i=1}^{4} c_i.e_i, c_i\in\mathbb{R}, i=1,2,3,4$ için

$F(y)=\sum_{i=1}^{4} c_i.F(e_i)$ 'dir. Buradan, $x+y=\sum_{i=1}^{4}(a_i+c_i).e_i$ yazılabilir. Buna *F*'yi uygularsaksak; $F(x+y)=F\left(\sum_{i=1}^{4}\left((a_i+c_i).e_i\right)\right)=\sum_{i=1}^{4}(a_i+c_i)F(e_i)$ elde edilir. Bu eşitliği gösterelim.

$$\left\langle F\left(\sum_{i=1}^{4}(a_i+c_i).e_i\right),F(e_i)\right\rangle \overset{F-ortg.}{=} \left\langle \sum_{i=1}^{4}(a_i+c_i).e_i,e_i\right\rangle=\sum_{i=1}^{4}(a_i+c_i).\langle e_i,e_i\rangle \qquad (1)$$

$$\left\langle \sum_{i=1}^{4}(a_i+c_i)F(e_i),F(e_i)\right\rangle \overset{F-ortg.}{=} \left\langle \sum_{i=1}^{4}(a_i+c_i)e_i,e_i\right\rangle=\sum_{i=1}^{4}(a_i+c_i).\langle e_i,e_i\rangle \qquad (2)$$

(1) ve (2) ifadelerinden yukarıdaki eşitlik elde edilir. Böylece

$$F(x+y)=F\left(\sum_{i=1}^{4}\left((a_i+c_i).e_i\right)\right)=\sum_{i=1}^{4}(a_i+c_i)F(e_i)=$$
$$=\sum_{i=1}^{4}a_iF(e_i)+\sum_{i=1}^{4}c_iF(e_i)=F(x)+F(y)$$

elde edilir.

$\lambda\in\mathbb{R}$ alalım. $x\in\mathbb{R}^{3+1}$ olmak üzere $x=\sum_{i=1}^{4}a_i.e_i,\ a_i\in\mathbb{R}$ için $\lambda.x=\lambda.\sum_{i=1}^{4}a_i.e_i=\sum_{i=1}^{4}\lambda.a_i.e_i$ elde edilir.Buradan,

$F(\lambda.x)=F\left(\sum_{i=1}^{4}\lambda.a_i.e_i\right)=\sum_{i=1}^{4}F(\lambda.a_i.e_i)=\sum_{i=1}^{4}\lambda.a_i.F(e_i)=\lambda.\sum_{i=1}^{4}a_i.F(e_i)=\lambda.F(x)$ elde edilir. Böylece F lineerdir. ♦

Tanım 16 : $g:\mathbb{R}^{3+1}\times\mathbb{R}^{3+1}\to\mathbb{R}$ bir Lorentz iç çarpımı olsun. $\wp:\mathbb{R}^{3+1}\to\mathbb{R}$, $\wp(v)=g(v,v)=\langle v,v\rangle=v_1^{\,2}+v_2^{\,2}+v_3^{\,2}-v_4^{\,2}$ ile tanımlanan dönüşüme $\mathbb{R}^{3+1}$ üzerinde *g*-Lorentz iç çarpımıyla verilen kuadratik form denir.

Lemma 1: $F:\mathbb{R}^{3+1}\to\mathbb{R}^{3+1}$ bir lineer dönüşüm olsun. Bu taktirde aşağıdakiler denktir:

i) *F*, ortogonal dönüşümdür.

ii) *F*, kuadratik formu korur, yani $\forall x\in\mathbb{R}^{3+1}$ için $\wp(F(x))=\wp(x)$ 'dir.

iii) *F*, $\mathbb{R}^{3+1}$'nin her bir ortonormal tabanını $\mathbb{R}^{3+1}$'nin başka bir ortonormal tabanına taşır.

İspat:

"i)$\Rightarrow$ii)" *F*, ortogonal dönüşüm olsun. Bu taktirde tanımdan $\forall x,y\in\mathbb{R}^{3+1}$ için $\langle F(x),F(y)\rangle=\langle x,y\rangle$' dir. $\mathbb{R}^{3+1}$'de $\{e_i\},\ i=1,2,3,4$ ortonormal tabanını alalım. *F*, ortogonal olduğundan $\{F(e_i)\},\ i=1,2,3,4$' de ortonormaldir.

Yani, $\langle e_i,e_i\rangle=\langle F(e_i),F(e_i)\rangle=\mp1,\ i=1,2,3,4$, $\langle e_i,e_j\rangle=\langle F(e_i),F(e_j)\rangle=0,\ i\neq j$ 'dir.

$x\in\mathbb{R}^{3+1}$ alalım. Buradan $x=\sum_{i=1}^{4}x_i.e_i$ 'dir. Böylece $F(x)=\sum_{i=1}^{4}x_i.F(e_i)$ 'dir.

$$\wp(F(x))=\langle F(x),F(x)\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^{4}x_i.F(e_i),\sum_{i=1}^{4}x_i.F(e_i)\right\rangle=\sum_{i=1}^{4}x_i.x_j.\langle F(e_i),F(e_j)\rangle$$
$$=x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+x_3^{\,2}-x_4^{\,2}=\langle x,x\rangle=\wp(x)$$

olduğundan kuadratik formu korur.

"ii$\Rightarrow$iii)" Keyfi $x\in\mathbb{R}^{3+1}$ için $\wp(F(x))=\wp(x)$ olsun. $\mathbb{R}^{3+1}$ *'de* $\{e_i\},\ i=1,2,3,4$ ortonormal tabanını alalım. Keyfi $x\in\mathbb{R}^{3+1}$ elemanı $x=\sum_{i=1}^{4}x_i.e_i$ şeklinde ifade edilebilir.

F lineer olduğundan $F(x)=\sum_{i=1}^{4}x_i.F(e_i)$ 'dir. *F*, kuadratik formu koruduğundan keyfi $x\in\mathbb{R}^{3+1}$ için $\langle F(x),F(x)\rangle=\langle x,x\rangle$ 'dir. Buradan,

$$\langle F(x),F(x)\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^{4}x_i.F(e_i),\sum_{i=1}^{4}x_i.F(e_i)\right\rangle=\sum_{i,j=1}^{4}x_i.x_j.\langle F(e_i),F(e_j)\rangle \tag{3}$$

Diğer taraftan,

$$\langle x,x\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^{2}x_i.e_i,\sum_{i=1}^{2}x_i.e_i\right\rangle=\sum_{i,j=1}^{4}x_i.x_j.\langle e_i,e_j\rangle \tag{4}$$

$\left\langle F\left(x\right),F\left(x\right)\right\rangle=\left\langle x,x\right\rangle$ olduğundan, (3) ve (4) eşitliğinden,

$\left\langle F\left(e_i\right),F\left(e_j\right)\right\rangle=\left\langle e_i,e_j\right\rangle, i, j=1,2,3,4$ olmalıdır. Buradan, $\mathbb{R}^{3+1}$ *'de* $\{e_i\}, i=1,2,3,4$ ortonormal tabandır. Böylece $\{F\left(e_i\right)\}, i=1,2,3,4$ de ortonormal tabandır.

"iii)$\Rightarrow$i)" F'nin ortogonal olduğunu gösterelim. $\mathbb{R}^{3+1}$ *'de* $\{e_i\}, i=1,2,3,4$ ortonormal tabanını alalım. F, $\mathbb{R}^{3+1}$'nin her bir ortonormal tabanını $\mathbb{R}^{3+1}$'nin başka bir ortonormal tabanına taşıdığından $\{F\left(e_i\right)\}, i=1,2,3,4$'de bir ortonormal tabandır. $x\in\mathbb{R}^{3+1}$ alalım. $\mathbb{R}^{3+1}$ *'de* $\{e_i\}, i=1,2,3,4$ ortonormal taban olduğundan $x=\sum_{i=1}^{4}x_ie_i$ şeklinde ifade edilebilir. F lineer olduğundan $F\left(x\right)=\sum_{i=1}^{4}x_iF\left(e_i\right)$'dir. Benzer şekilde $y\in\mathbb{R}^{3+1}$ alalım. $\mathbb{R}^{3+1}$ *'de* $\{e_i\}, i=1,2,3,4$ ortonormal taban olduğundan $y=\sum_{i=1}^{4}y_ie_i$ şeklinde ifade edilebilir. F lineer olduğundan $F\left(y\right)=\sum_{i=1}^{4}y_iF\left(e_i\right)$'dir.

$$\begin{aligned}\left\langle F\left(x\right),F\left(y\right)\right\rangle&=\left\langle \sum_{i=1}^{4}x_iF\left(e_i\right),\sum_{i=1}^{4}y_iF\left(e_i\right)\right\rangle=\sum_{i,j=1}^{4}x_iy_j\left\langle F\left(e_i\right),F\left(e_j\right)\right\rangle\\&=\sum_{i,j=1}^{4}x_iy_j\left\langle e_i,e_j\right\rangle=\left\langle x,y\right\rangle\end{aligned}$$

olduğundan F ortogonaldir.♦

Önerme 4 : Keyfi $F\in O(3,1)$ ve $\{e_i\}, i=1,2,3,4$ indeksi bir olan ortonormal taban ise, $\{F\left(e_i\right)\}, i=1,2,3,4$'de indeksi bir olan ortonormal tabandır.

İspat : $F\in O(3,1)$ ve $\{e_i\}, i=1,2,3,4$ indeksi bir olan ortonormal taban olsun. $x=\sum_{i=1}^{4}x_ie_i$ ve $y=\sum_{i=1}^{4}y_ie_i$ alalım. F-lineer olduğundan, $F\left(x\right)=\sum_{i=1}^{4}x_iF\left(e_i\right)$ ve $F\left(y\right)=\sum_{i=1}^{4}y_iF\left(e_i\right)$'dir. F-ortogonal olduğundan $\left\langle F\left(x\right),F\left(y\right)\right\rangle=\left\langle x,y\right\rangle$'dir. Buradan,

$$\left\langle F\left(x\right),F\left(y\right)\right\rangle=\left\langle \sum_{i=1}^{4}x_iF\left(e_i\right),\sum_{i=1}^{4}y_iF\left(e_i\right)\right\rangle=\sum_{i,j=1}^{4}x_iy_j\left\langle F\left(e_i\right),F\left(e_j\right)\right\rangle$$

$\left\langle x,y\right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{4} x_i e_i, \sum_{i=1}^{4} y_i e_i \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{4} x_i y_j \left\langle e_i, e_j \right\rangle$ 'dir. $\left\langle F(x), F(y)\right\rangle = \left\langle x,y\right\rangle$ olduğundan

$\left\langle F(e_i), F(e_j)\right\rangle = \left\langle e_i, e_j\right\rangle$ olmalıdır. Ancak $\{e_i\}, i=1,2,3,4$ indeksi bir olan ortonormal taban olduğundan

$\left\langle e_i, e_i\right\rangle = 1, \left\langle e_i, e_j\right\rangle = 0, \left\langle e_4, e_4\right\rangle = -1, i=1,2,3, i \neq j = 1,2,3,4$;

$\left\langle e_i, e_i\right\rangle = 1, \left\langle e_i, e_j\right\rangle = 0, \left\langle e_3, e_3\right\rangle = -1, i=1,2,4, i \neq j = 1,2,3,4$;

$\left\langle e_i, e_i\right\rangle = 1, \left\langle e_i, e_j\right\rangle = 0, \left\langle e_2, e_2\right\rangle = -1, i=1,3,4, i \neq j = 1,2,3,4$;

$\left\langle e_i, e_i\right\rangle = 1, \left\langle e_i, e_j\right\rangle = 0, \left\langle e_1, e_1\right\rangle = -1, i=2,3,4, i \neq j = 1,2,3,4$ şeklindedir.

Eğer $\left\langle e_i, e_i\right\rangle = 1, \left\langle e_i, e_j\right\rangle = 0, \left\langle e_4, e_4\right\rangle = -1, i=1,2,3, i \neq j = 1,2,3,4$ ise

$\left\langle F(e_i), F(e_j)\right\rangle = \left\langle e_i, e_j\right\rangle$ olduğundan

$\left\langle F(e_i), F(e_i)\right\rangle = 1, \left\langle F(e_i), F(e_j)\right\rangle = 0, \left\langle F(e_4), F(e_4)\right\rangle = -1, i=1,2,3, i \neq j = 1,2,3,4$ 'dir.

Eğer $\left\langle e_i, e_i\right\rangle = 1, \left\langle e_i, e_j\right\rangle = 0, \left\langle e_3, e_3\right\rangle = -1, i=1,2,4, i \neq j = 1,2,3,4$ ise

$\left\langle F(e_i), F(e_j)\right\rangle = \left\langle e_i, e_j\right\rangle$ olduğundan

$\left\langle F(e_i), F(e_i)\right\rangle = 1, \left\langle F(e_i), F(e_j)\right\rangle = 0, \left\langle F(e_3), F(e_3)\right\rangle = -1, i=1,2,4, i \neq j = 1,2,3,4$ 'dir.

Eğer $\left\langle e_i, e_i\right\rangle = 1, \left\langle e_i, e_j\right\rangle = 0, \left\langle e_2, e_2\right\rangle = -1, i=1,3,4, i \neq j = 1,2,3,4$ ise

$\left\langle F(e_i), F(e_j)\right\rangle = \left\langle e_i, e_j\right\rangle$ olduğundan

$\left\langle F(e_i), F(e_i)\right\rangle = 1, \left\langle F(e_i), F(e_j)\right\rangle = 0, \left\langle F(e_2), F(e_2)\right\rangle = -1, i=1,3,4, i \neq j = 1,2,3,4$ 'dir.

Eğer $\left\langle e_i, e_i\right\rangle = 1, \left\langle e_i, e_j\right\rangle = 0, \left\langle e_1, e_1\right\rangle = -1, i=2,3,4, i \neq j = 1,2,3,4$ ise

$\left\langle F(e_i), F(e_j)\right\rangle = \left\langle e_i, e_j\right\rangle$ olduğundan

$\left\langle F(e_i), F(e_i)\right\rangle = 1, \left\langle F(e_i), F(e_j)\right\rangle = 0, \left\langle F(e_1), F(e_1)\right\rangle = -1, i=2,3,4, i \neq j = 1,2,3,4$ 'dir.

Böylece $\{F(e_i)\}, i=1,2,3,4$ indeksi bir olan ortonormal tabandır. ♦

Önerme 5 : $\{e_i\}, i=1,2,3,4$ ve $\{f_i\}, i=1,2,3,4$ indeksi bir olan ortonormal tabanlar ve $\sigma:\{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ keyfi permütasyon olmak üzere, $F(e_i) = f_{\sigma(i)}, i=1,2,3,4$ olacak şekilde tek $F \in O(3,1)$ vardır.

İspat : $x=\sum_{i=1}^{4} x_i e_i$ ve $y=\sum_{i=1}^{4} y_i e_i$ olmak üzere, $F(x)=\sum_{i=1}^{4} x_i F(e_i)$, $F(y)=\sum_{i=1}^{4} y_i F(e_i)$ alalım. $\{e_i\}, i=1,2,3,4$ indeksi bir olan ortonormal taban olduğundan $\langle e_i,e_i\rangle=1, \langle e_i,e_j\rangle=0, \langle e_4,e_4\rangle=-1, i=1,2,3, i\neq j=1,2,3,4$ olarak alalım. $\{f_i\}, i=1,2,3,4$ indeksi bir olan ortonormal taban olduğundan

$\langle f_i,f_i\rangle=1, \langle f_i,f_j\rangle=0, \langle f_4,f_4\rangle=-1, i=1,2,3, i\neq j=1,2,3,4$;

$\langle f_i,f_i\rangle=1, \langle f_i,f_j\rangle=0, \langle f_3,f_3\rangle=-1, i=1,2,4, i\neq j=1,2,3,4$;

$\langle f_i,f_i\rangle=1, \langle f_i,f_j\rangle=0, \langle f_2,f_2\rangle=-1, i=1,3,4, i\neq j=1,2,3,4$;

$\langle f_i,f_i\rangle=1, \langle f_i,f_j\rangle=0, \langle f_1,f_1\rangle=-1, i=2,3,4, i\neq j=1,2,3,4$ şeklindedir. Burada:

$\langle e_i,e_i\rangle=1, \langle e_i,e_j\rangle=0, \langle e_4,e_4\rangle=-1, i=1,2,3, i\neq j=1,2,3,4$ olmak üzere

$\langle f_i,f_i\rangle=1, \langle f_i,f_j\rangle=0, \langle f_4,f_4\rangle=-1, i=1,2,3, i\neq j=1,2,3,4$ olsun.

$F(e_i)=f_i, i=1,2,3,4$ olan lineer dönüşümü alalım.

$$\begin{aligned}\langle F(x),F(y)\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{4} x_i F(e_i), \sum_{i=1}^{4} y_i F(e_i)\right\rangle = \sum_{i,j=1}^{4} x_i y_j \langle F(e_i),F(e_j)\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{4} x_i y_j \langle f_i,f_j\rangle = \langle x,y\rangle\end{aligned}$$

olduğundan $F\in O(3,1)$ 'dir.

Şimdi, $\langle e_i,e_i\rangle=1, \langle e_i,e_j\rangle=0, \langle e_4,e_4\rangle=-1, i=1,2,3, i\neq j=1,2,3,4$ olmak üzere

$\langle f_i,f_i\rangle=1, \langle f_i,f_j\rangle=0, \langle f_3,f_3\rangle=-1, i=1,2,4, i\neq j=1,2,3,4$ olsun.

$F(e_i)=f_i, i=1,2, F(e_j)=f_k, j\neq k=3,4$ olan lineer dönüşümü alalım.

$$\begin{aligned}\langle F(x),F(y)\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{4} x_i F(e_i), \sum_{i=1}^{4} y_i F(e_i)\right\rangle = \sum_{i,j=1}^{4} x_i y_j \langle F(e_i),F(e_j)\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{4} x_i y_j \langle f_i,f_j\rangle = \langle x,y\rangle\end{aligned}$$

olduğundan $F\in O(3,1)$ 'dir.Benzer şekilde diğer durumlarda incelenirse $F\in O(3,1)$ olduğu görülür.

Şimdi ise, $F \in O(3,1)$ ’in tekliğini gösterelim. Farz edelim ki $F_1\left(e_i\right)=f_{\sigma(i)}, i=1,2,3,4$ ve $F_2\left(e_i\right)=f_{\sigma(i)}, i=1,2,3,4$ olsun.Yukarıdaki durumları sağlayacak şekilde $F_1, F_2 \in O(3,1)$ olsun. Keyfi $x=\sum_{i=1}^{4} x_i e_i$ olmak üzere,

$F_1\left(e_i\right)=f_{\sigma(i)}, i=1,2,3,4$ ve $F_2\left(e_i\right)=f_{\sigma(i)}, i=1,2,3,4$ için $F_1(x)=\sum_{i=1}^{4} x_i F_1\left(e_i\right)=\sum_{i=1}^{4} x_i f_{\sigma(i)}$, $F_2(x)=\sum_{i=1}^{4} x_i F_2\left(e_i\right)=\sum_{i=1}^{4} x_i f_{\sigma(i)}$ ’dir. Buradan $F_1(x)=F_2(x)$ olduğundan $F_1=F_2$ ’dir. Yukarıdaki benzer durumlarda da bu geçerlidir.

Sonuç olarak, bu önermedeki şartı sağlayan tek bir $F \in O(3,1)$ vardır. ♦

Önerme 6 : $O(3,1,\mathbb{R})=\left\{F:\mathbb{R}^{3+1} \rightarrow \mathbb{R}^{3+1}:\left\langle F(x), F(y)\right\rangle=\langle x, y\rangle\right\}=$

$$\left\{A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}: a_{ij} \in \mathbb{R}, i, j=1,2,3,4; A^t.\eta.A=\eta, \eta=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$$ şeklinde

ifade edilebilir.

İspat: $\mathbb{R}^{3+1}$’de $g:\mathbb{R}^{3+1} \times \mathbb{R}^{3+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y)=\langle x, y\rangle=x_1 y_1+x_2 y_2+x_3 y_3-x_4 y_4$ Lorentz iç çarpımı olmak üzere $\left\langle e_i, e_i\right\rangle=\pm 1$, i=1,2,3,4 ve $\left\langle e_i, e_j\right\rangle=0$, $i \neq j$, i,j=1,2,3,4 olan $\left\{e_1=(1,0,0,0), e_2=(0,1,0,0), e_3=(0,0,1,0), e_4=(0,0,0,1)\right\}$ şeklindeki $\left\{e_i\right\}, i=1,2,3,4$ ortonormal taban olsun. $F:\mathbb{R}^{3+1} \rightarrow \mathbb{R}^{3+1}$ bir ortogonal dönüşüm olsun. $\left\{e_i\right\}, i=1,2,3,4$ bir ortonormal taban olmak üzere, $F\left(e_i\right)=\left(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4}\right), i=1,2,3,4$ olarak tanımlayalım. Bu dönüşüme karşılık gelen matrisi $A=\left(a_{ij}\right)_{i, j=1,2,3,4}$ ’dir. *F*- ortogonal dönüşümünün özeliğini kullanarak ,

$\left\langle e_1, e_1\right\rangle=1$ ve $\left\langle e_1, e_1\right\rangle=\left\langle F\left(e_1\right), F\left(e_1\right)\right\rangle$ olduğundan,

$$\left\langle F\left(e_1\right), F\left(e_1\right)\right\rangle=1 \Rightarrow\left\langle\left(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}\right),\left(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}\right)\right\rangle=1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{3} a_{1i}{ }^2-a_{14}{ }^2=1 \qquad (5)$$

$\left\langle e_1, e_2\right\rangle=0$ ve $\left\langle e_1, e_2\right\rangle=\left\langle F\left(e_1\right), F\left(e_2\right)\right\rangle$ olduğundan,

$$\left\langle F\left(e_1\right), F\left(e_2\right)\right\rangle=0 \Rightarrow\left\langle\left(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}\right),\left(a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}\right)\right\rangle=0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{3} a_{1i} a_{2i}-a_{14} a_{24}=0 \qquad (6)$$

$\langle e_1,e_3\rangle=0$ ve $\langle e_1,e_3\rangle=\langle F(e_1),F(e_3)\rangle$ olduğundan,

$$\langle F(e_1),F(e_3)\rangle=0\Rightarrow\langle(a_{11},a_{12},a_{13},a_{14}),(a_{31},a_{32},a_{33},a_{34})\rangle=0\Rightarrow\sum_{i=1}^{3}a_{1i}a_{3i}-a_{14}a_{34}=0 \quad (7)$$

$\langle e_1,e_4\rangle=0$ ve $\langle e_1,e_4\rangle=\langle F(e_1),F(e_4)\rangle$ olduğundan,

$\langle F(e_1),F(e_4)\rangle=0\Rightarrow\langle(a_{11},a_{12},a_{13},a_{14}),(a_{41},a_{42},a_{43},a_{44})\rangle=0\Rightarrow\sum_{i=1}^{3}a_{1i}a_{4i}-a_{14}a_{44}=0$ ’dır. (8)

$\langle e_2,e_2\rangle=1$ ve $\langle e_2,e_2\rangle=\langle F(e_2),F(e_2)\rangle$ olduğundan,

$\langle F(e_2),F(e_2)\rangle=1\Rightarrow\langle(a_{21},a_{22},a_{23},a_{24}),(a_{21},a_{22},a_{23},a_{24})\rangle=1\Rightarrow\sum_{i=1}^{3}a_{2i}{}^2-a_{24}{}^2=1$ ’dır. (9)

$\langle e_2,e_3\rangle=0$ ve $\langle e_2,e_3\rangle=\langle F(e_2),F(e_3)\rangle$ olduğundan,

$\langle F(e_2),F(e_3)\rangle=0\Rightarrow\langle(a_{21},a_{22},a_{23},a_{24}),(a_{31},a_{32},a_{33},a_{34})\rangle=0\Rightarrow\sum_{i=1}^{3}a_{2i}a_{3i}-a_{24}a_{34}=0$ ’dır.(10

$\langle e_2,e_4\rangle=0$ ve $\langle e_2,e_4\rangle=\langle F(e_2),F(e_4)\rangle$ olduğundan,

$\langle F(e_2),F(e_4)\rangle=0\Rightarrow\langle(a_{21},a_{22},a_{23},a_{24}),(a_{41},a_{42},a_{43},a_{44})\rangle=0\Rightarrow\sum_{i=1}^{3}a_{2i}a_{4i}-a_{24}a_{44}=0$ ’dır.

(11)

$\langle e_3,e_3\rangle=1$ ve $\langle e_3,e_3\rangle=\langle F(e_3),F(e_3)\rangle$ olduğundan,

$\langle F(e_3),F(e_3)\rangle=1\Rightarrow\langle(a_{31},a_{32},a_{33},a_{34}),(a_{31},a_{32},a_{33},a_{34})\rangle=1\Rightarrow\sum_{i=1}^{3}a_{3i}{}^2-a_{34}{}^2=1$ ’dır. (12)

$\langle e_3,e_4\rangle=0$ ve $\langle e_3,e_4\rangle=\langle F(e_3),F(e_4)\rangle$ olduğundan,

$\langle F(e_3),F(e_4)\rangle=0\Rightarrow\langle(a_{31},a_{32},a_{33},a_{34}),(a_{41},a_{42},a_{43},a_{44})\rangle=0\Rightarrow\sum_{i=1}^{3}a_{3i}a_{4i}-a_{34}a_{44}=0$ ’dır.(13

$\langle e_4,e_4\rangle=-1$ ve $\langle e_4,e_4\rangle=\langle F(e_4),F(e_4)\rangle$ olduğundan,

$\langle F(e_4),F(e_4)\rangle=-1\Rightarrow\langle(a_{41},a_{42},a_{43},a_{44}),(a_{41},a_{42},a_{43},a_{44})\rangle=-1\Rightarrow\sum_{i=1}^{3}a_{4i}{}^2-a_{44}{}^2=-1$ ’dır.

(14)

Ancak ortogonal dönüşüm matris formunda

$$\begin{pmatrix} \langle F(e_1),F(e_1)\rangle & \langle F(e_1),F(e_2)\rangle & \langle F(e_1),F(e_3)\rangle & \langle F(e_1),F(e_4)\rangle \\ \langle F(e_2),F(e_1)\rangle & \langle F(e_2),F(e_2)\rangle & \langle F(e_2),F(e_3)\rangle & \langle F(e_2),F(e_4)\rangle \\ \langle F(e_3),F(e_1)\rangle & \langle F(e_3),F(e_2)\rangle & \langle F(e_3),F(e_3)\rangle & \langle F(e_3),F(e_4)\rangle \\ \langle F(e_4),F(e_1)\rangle & \langle F(e_4),F(e_2)\rangle & \langle F(e_4),F(e_3)\rangle & \langle F(e_4),F(e_4)\rangle \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \langle e_1,e_1\rangle & \langle e_1,e_2\rangle & \langle e_1,e_3\rangle & \langle e_1,e_4\rangle \\ \langle e_2,e_1\rangle & \langle e_2,e_2\rangle & \langle e_2,e_3\rangle & \langle e_2,e_4\rangle \\ \langle e_3,e_1\rangle & \langle e_3,e_2\rangle & \langle e_3,e_3\rangle & \langle e_3,e_4\rangle \\ \langle e_4,e_1\rangle & \langle e_4,e_2\rangle & \langle e_4,e_3\rangle & \langle e_4,e_4\rangle \end{pmatrix}$$ biçiminde yazılabileceğinden (5), (6),…, (14)’u

kullanarak, bu matris

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{3} a_{1i}{}^2 - a_{14}{}^2 & \sum_{i=1}^{3} a_{1i}a_{2i} - a_{14}a_{24} & \sum_{i=1}^{3} a_{1i}a_{3i} - a_{14}a_{34} & \sum_{i=1}^{3} a_{1i}a_{4i} - a_{14}a_{44} \\ \sum_{i=1}^{3} a_{1i}a_{2i} - a_{14}a_{24} & \sum_{i=1}^{3} a_{2i}{}^2 - a_{24}{}^2 & \sum_{i=1}^{3} a_{2i}a_{3i} - a_{24}a_{34} & \sum_{i=1}^{3} a_{2i}a_{4i} - a_{24}a_{44} \\ \sum_{i=1}^{3} a_{1i}a_{3i} - a_{14}a_{34} & \sum_{i=1}^{3} a_{2i}a_{3i} - a_{24}a_{34} & \sum_{i=1}^{3} a_{3i}{}^2 - a_{34}{}^2 & \sum_{i=1}^{3} a_{3i}a_{4i} - a_{34}a_{44} \\ \sum_{i=1}^{3} a_{1i}a_{4i} - a_{14}a_{44} & \sum_{i=1}^{3} a_{2i}a_{4i} - a_{24}a_{44} & \sum_{i=1}^{3} a_{3i}a_{4i} - a_{34}a_{44} & \sum_{i=1}^{3} a_{4i}{}^2 - a_{44}{}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dır. Ayrıca $A.\eta.A^t = A^t.\eta.A = \eta$ olduğundan F ortogonal dönüşümü bu matris ile ifade edilebilir.

Şimdi de tersini gösterelim.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R}, i, j = 1,2,3,4;\ A^t.\eta.A = \eta, \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ olan matrise

karşılık gelen dönüşümün ortogonal olduğunu gösterelim.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R}, i, j = 1,2,3,4;\ A^t.\eta.A = \eta, \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ matrisini

alalım. Bu matrise karşılık gelen dönüşüm $F:\mathbb{R}^{3+1} \to \mathbb{R}^{3+1}$ olsun. Biz F’nin ortogonal olduğunu göstermek istiyoruz. O zaman $\mathbb{R}^{3+1}$’de $g:\mathbb{R}^{3+1}\times\mathbb{R}^{3+1} \to \mathbb{R}$,

$g(x,y)=\langle x,y\rangle = x_1.y_1+x_2.y_2+x_3.y_3-x_4.y_4$ Lorentz iç çarpımı olmak üzere $\langle e_i,e_i\rangle=\pm 1$, i=1,2,3,4 ve $\langle e_i,e_j\rangle=0$, $i\neq j$, i,j=1,2,3,4 olan $\{e_1=(1,0,0,0),e_2=(0,1,0,0),e_3=(0,0,1,0),e_4=(0,0,0,1)\}$ şeklindeki $\{e_i\}, i=1,2,3,4$ ortonormal tabanı alalım. Buradan $F(e_i)=(a_{i1},a_{i2},a_{i3},a_{i4}), i=1,2,3,4$ yazabiliriz.

A matrisinin özeliğinden,

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{3} a_{1i}^{\;2}-a_{14}^{\;2} & \sum_{i=1}^{3} a_{1i}a_{2i}-a_{14}a_{24} & \sum_{i=1}^{3} a_{1i}a_{3i}-a_{14}a_{34} & \sum_{i=1}^{3} a_{1i}a_{4i}-a_{14}a_{44} \\ \sum_{i=1}^{3} a_{1i}a_{2i}-a_{14}a_{24} & \sum_{i=1}^{3} a_{2i}^{\;2}-a_{24}^{\;2} & \sum_{i=1}^{3} a_{2i}a_{3i}-a_{24}a_{34} & \sum_{i=1}^{3} a_{2i}a_{4i}-a_{24}a_{44} \\ \sum_{i=1}^{3} a_{1i}a_{3i}-a_{14}a_{34} & \sum_{i=1}^{3} a_{2i}a_{3i}-a_{24}a_{34} & \sum_{i=1}^{3} a_{3i}^{\;2}-a_{34}^{\;2} & \sum_{i=1}^{3} a_{3i}a_{4i}-a_{34}a_{44} \\ \sum_{i=1}^{3} a_{1i}a_{4i}-a_{14}a_{44} & \sum_{i=1}^{3} a_{2i}a_{4i}-a_{24}a_{44} & \sum_{i=1}^{3} a_{3i}a_{4i}-a_{34}a_{44} & \sum_{i=1}^{3} a_{4i}^{\;2}-a_{44}^{\;2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

yazabiliriz.

$$\langle F(e_1),F(e_1)\rangle = \langle (a_{11},a_{12},a_{13},a_{14}),(a_{11},a_{12},a_{13},a_{14})\rangle = \sum_{i=1}^{3} a_{1i}^{\;2}-a_{14}^{\;2} = \langle e_1,e_1\rangle = 1$$

$$\langle F(e_1),F(e_2)\rangle = \langle (a_{11},a_{12},a_{13},a_{14}),(a_{21},a_{22},a_{23},a_{24})\rangle = \sum_{i=1}^{3} a_{1i}a_{2i}-a_{14}a_{24} = \langle e_1,e_2\rangle = 0$$

$$\langle F(e_1),F(e_3)\rangle = \langle (a_{11},a_{12},a_{13},a_{14}),(a_{31},a_{32},a_{33},a_{34})\rangle = \sum_{i=1}^{3} a_{1i}a_{3i}-a_{14}a_{34} = \langle e_1,e_3\rangle = 0$$

$$\langle F(e_1),F(e_4)\rangle = \langle (a_{11},a_{12},a_{13},a_{14}),(a_{41},a_{42},a_{43},a_{44})\rangle = \sum_{i=1}^{3} a_{1i}a_{4i}-a_{14}a_{44} = \langle e_1,e_4\rangle = 0$$

$$\langle F(e_2),F(e_2)\rangle = \langle (a_{21},a_{22},a_{23},a_{24}),(a_{21},a_{22},a_{23},a_{24})\rangle = \sum_{i=1}^{3} a_{2i}^{\;2}-a_{24}^{\;2} = \langle e_2,e_2\rangle = 1$$

$$\langle F(e_2),F(e_3)\rangle = \langle (a_{21},a_{22},a_{23},a_{24}),(a_{31},a_{32},a_{33},a_{34})\rangle = \sum_{i=1}^{3} a_{2i}a_{3i}-a_{24}a_{34} = \langle e_2,e_3\rangle = 0$$

$$\langle F(e_2),F(e_4)\rangle = \langle (a_{21},a_{22},a_{23},a_{24}),(a_{41},a_{42},a_{43},a_{44})\rangle = \sum_{i=1}^{3} a_{2i}a_{4i}-a_{24}a_{44} = \langle e_2,e_4\rangle = 0$$

$$\langle F(e_3),F(e_3)\rangle = \langle (a_{31},a_{32},a_{33},a_{34}),(a_{31},a_{32},a_{33},a_{34})\rangle = \sum_{i=1}^{3} a_{3i}^{\;2}-a_{34}^{\;2} = \langle e_3,e_3\rangle = 1$$

$$\langle F(e_3),F(e_4)\rangle = \langle (a_{31},a_{32},a_{33},a_{34}),(a_{41},a_{42},a_{43},a_{44})\rangle = \sum_{i=1}^{3} a_{3i}a_{4i}-a_{34}a_{44} = \langle e_3,e_4\rangle = 0$$

$\left\langle F\left(e_4\right),F\left(e_4\right)\right\rangle=\left\langle\left(a_{41},a_{42},a_{43},a_{44}\right),\left(a_{41},a_{42},a_{43},a_{44}\right)\right\rangle=\sum_{i=1}^{3}a_{4i}{}^2-a_{44}{}^2=\left\langle e_4,e_4\right\rangle=-1$ ’dir.

Buradan $x\in\mathbb{R}^{3+1}$ olmak üzere $x=\sum_{i=1}^{4}c_{1i}.e_i$ alırsak, bunu $F\left(x\right)=\sum_{i=1}^{4}c_{1i}.F\left(e_i\right)$ ile ifade edebiliriz. Benzer şekilde $y\in\mathbb{R}^{3+1}$ olmak üzere $y=\sum_{i=1}^{4}d_{1i}.e_i,d_{1i}\in\mathbb{R}$ için $F\left(y\right)=\sum_{i=1}^{4}d_{1i}.F\left(e_i\right)$ ’dir. Buradan,

$$\begin{aligned}\left\langle F\left(x\right),F\left(y\right)\right\rangle&=\left\langle\sum_{i=1}^{4}c_{1i}.F\left(e_i\right),\sum_{i=1}^{4}d_{1i}.F\left(e_i\right)\right\rangle=\sum_{i,j=1}^{4}c_{1i}d_{1j}\left\langle F\left(e_i\right),F\left(e_j\right)\right\rangle=\sum_{i,j=1}^{4}c_{1i}d_{1j}\left\langle e_i,e_j\right\rangle\\&=\left\langle x,y\right\rangle\end{aligned}$$

olduğundan F ortogonaldir. Böylece,

$$O\left(3,1,\mathbb{R}\right)=\left\{F:\mathbb{R}^{3+1}\to\mathbb{R}^{3+1}:\left\langle F\left(x\right),F\left(y\right)\right\rangle=\left\langle x,y\right\rangle\right\}=$$

$$\left\{A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix}:a_{ij}\in\mathbb{R},i,\ j=1,2,3,4;A^t.\eta.A=\eta,\eta=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\right\}\text{ ’dir. }\blacklozenge$$

Önerme 7:

$$O\left(3,1\right)=\left\{A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix}:a_{ij}\in\mathbb{R},i,\ j=1,2,3,4;A^t.\eta.A=\eta,\eta=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\right\}$$

cümlesi matrislerdeki çarpma işlemine göre bir gruptur.

İspat: $A,B\in O\left(3,1\right)$ olsun.

$A\in O\left(3,1\right)$ olduğu için tanımdan $A^t\eta A=\eta$ ’dır. (15)

$B\in O\left(3,1\right)$ olduğu için tanımdan $B^t\eta B=\eta$ ‘dır. (16)

Biz $AB\in O\left(3,1\right)$ olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için; $\left(AB\right)^t\eta\left(AB\right)=\eta$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$\left(AB\right)^t\eta\left(AB\right)=\eta\Rightarrow B^t\underbrace{A^t\eta A}_{(15)}B=\eta\Rightarrow\underbrace{B^t\eta B}_{(16)}=\eta$ olduğundan $AB\in O\left(3,1\right)$ ’dir.

Şimdi grup aksiyomlarını gösterelim:

1) $A,B,C\in O(3,1)$ olsun. $(AB)C=A(BC)$ olduğunu göstermek istiyoruz. Matrislerdeki çarpma işleminin özeliklerini uygularsak her cümledeki matris için $(AB)C=A(BC)$ olduğu görülür.

2) $I=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ matrisini alalım. $I^t\eta I=\eta$ ve $\det I=1\neq 0$ olduğundan $I\in O(3,1)$'dir.

$A=I\in O(3,1)$ olarak alınırsa $\forall B\in O(3,1)$ için $IB=BI=B$ olduğundan $I\in O(3,1)$ birim elemandır.

3) $A\in O(3,1)$ alalım. $A\in O(3,1)$ olduğundan $A^t\eta A=\eta$'dir. Her iki tarafın determinantı alınırsa $\det\left(A^t\eta A\right)=\det\eta\Rightarrow\det A^t\det\eta\det A=\det\eta$'dır. Ancak $\det A^t=\det A$'dır. Buradan $(\det A)^2=1\Rightarrow\det A=\mp 1$'dir. $\det A\neq 0$ olduğundan A matrisinin tersi vardır ve A^{-1} ile gösterilir. Biz $A^{-1}\in O(3,1)$ olduğunu göstermek istiyoruz.

$A\in O(3,1)$ olduğundan $A^t\eta A=\eta\Rightarrow A^t\eta=\eta A^{-1}\Rightarrow\left(A^t\right)^{-1}\eta A^{-1}=\eta$'dır. Ancak A^{-1}, A matrisinin tersi olduğundan $AA^{-1}=A^{-1}A=I$'dır. Burada transpoze işlemi uygulanırsa $\left(AA^{-1}\right)^t=\left(A^{-1}A\right)^t=I^t\Rightarrow\left(A^{-1}\right)^t A^t=A^t\left(A^{-1}\right)^t=I$'dır. Burada A^t'nin tersi $\left(A^{-1}\right)^t$'dir. Aynı zamanda A^t'nin tersi $\left(A^t\right)^{-1}$ olduğundan $\left(A^t\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^t$'dir. Böylece $\left(A^{-1}\right)^t\eta A^{-1}=\eta$ eşitliğinden $A^{-1}\in O(3,1)$'dir.

O halde $O(3,1)$ cümlesi matrislerde çarpma işlemine göre bir gruptur. ♦

Sonuç 1 : Keyfi bir $A\in O(3,1)$ için $\det A=\mp 1$'dir.

İspat : $A\in O(3,1)$ alalım. O zaman $A^t\eta A=\eta$'dir. Her iki tarafın determinantı alınırsa $\det\left(A^t\eta A\right)=\det\eta\Rightarrow\det A^t\det\eta\det A=\det\eta\Rightarrow(\det A)^2=1$'dir. Ancak $\det A^t=\det A$'dır. Buradan $(\det A)^2=1\Rightarrow\det A=\mp 1$'dir. ♦

Not: Yukarıdaki grubun benzeri, Öklid'deki ortogonal gruba göre $A^T A = I$ şeklindedir. Bu $O(r,n-r)$ (yarı) ortogonal grup için, $A \in O(r,n-r)$ olmak üzere $A\eta A^T = I$ 'dır. Bu $n = r$ olduğunda, Öklid'deki ortogonal matrise karşılık gelir.([2],[12])

$SO(3,1,\mathbb{R}) = \{A \in O(3,1,\mathbb{R}) : \det A = 1\}$ cümlesi de matrislerin çarpma işlemine göre bir grup oluşturur. Bu gruba özel ortogonal grup denir. Bu grubu kısaca $SO(3,1,\mathbb{R}) := SO(3,1)$ ile gösterelim.

Önerme 8 : $SO(3,1,\mathbb{R}) = \{A \in O(3,1,\mathbb{R}) : \det A = 1\}$ cümlesi de matrislerde çarpma işlemine göre bir gruptur.

İspat: $A, B \in SO(3,1)$ olsun.

$A \in SO(3,1)$ olduğu için tanımdan $A^t \eta A = \eta$, $\det A = 1$ 'dir. (17)

$B \in SO(3,1)$ olduğu için tanımdan $B^t \eta B = \eta$, $\det B = 1$ 'dir. (18)

Biz $AB \in SO(3,1)$ olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için; $(AB)^t \eta (AB) = \eta$ ve $\det(AB) = 1$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$(AB)^t \eta (AB) = \eta \Rightarrow B^t \underbrace{A^t \eta A}_{(15)} B = \eta \Rightarrow \underbrace{B^t \eta B}_{(16)} = \eta$ olduğundan $AB \in O(3,1)$ 'dir. Şimdi AB 'nin determinantına bakalım. $\det(AB) = \det A \det B = 1.1 = 1$ olduğundan $AB \in SO(3,1)$ 'dir.

Şimdi grup aksiyomlarını gösterelim:

1) $A, B, C \in SO(3,1)$ olsun. $(AB)C = A(BC)$ olduğunu göstermek istiyoruz. Ancak $SO(3,1) \subset O(3,1)$ olduğundan bu özelik özel olarak sağlanır.

2) $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrisini alalım. $I \in O(3,1)$, $\det I = 1$ olduğundan $I \in SO(3,1)$ 'dir.

$A = I \in SO(3,1)$ olarak alınırsa $\forall B \in SO(3,1)$ için $IB = BI = B$ olduğundan $I \in SO(3,1)$ birim elemandır.

3) $A \in SO(3,1)$ alalım. $A \in SO(3,1)$ olduğundan $A \in O(3,1)$, $\det A = 1$'dir. $\det A \neq 0$ olduğundan A matrisinin tersi vardır ve A^{-1} ile gösterilir. Biz $A^{-1} \in SO(3,1)$ olduğunu göstermek istiyoruz.

$A \in O(3,1)$, $\det A = 1$ olduğundan, bunu $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$, $\det A = 1$ ile gösterelim.

$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & -a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & -a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & -a_{43} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & a_{44} \end{pmatrix} \in O(3,1)$, $\det A = 1$ olduğundan $A^{-1} \in SO(3,1)$'dir.

Böylece $SO(3,1)$ cümlesi matrislerde çarpma işlemine göre bir gruptur. ♦

1.5. Genel Lorentz Grubu

$$L_G = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R}, i, j = 1,2,3,4; A^t.\eta.A = \eta, \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$ olarak

tanımladığımız gruba Genel Lorentz grubu denir. Ancak bu grup daha önce tanımladığımız $O(3,1)$-ortogonal grup ile çakışmaktadır. Bundan dolayı $L_G = O(3,1)$'dir.

Önerme 9 : $L_G = O(3,1)$ cümlesi matrislerde çarpma işlemine göre bir gruptur.

İspat: Önerme 7'de ispatlanmıştır. ♦

1.6. Cümle Üzerinde Grup Etkisi

Tanım 17: G bir grup ve K bir cümle olsun. Bir $\phi : G \times K \to K$ dönüşümü verilsin. $g \in G, x \in K$ için $\phi(g, x) = gx$ şeklinde yazalım. $\forall g_1, g_2 \in G$, $\forall x \in K$ için;

i) $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$

ii) e, G'nin birimi olmak üzere; $ex = x$

koşulları sağlanıyorsa, ϕ'ye G'nin K üzerindeki hareketi (etkisi) denir. G'nin K üzerindeki hareketi $G:K$ şeklinde gösterilir.

Örnek 12 : $O(3,1)$ grubunun $\mathbb{R}^{3+1}$ üzerindeki etkisi $g=\left(a_{ij}\right)\in O(3,1)$ ve $x=\left(x_j\right)\in\mathbb{R}^{3+1}$ (i,j=1,2,3,4) olmak üzere $gx=\left(a_{ij}\right)\left(x_j\right)=\left(\sum_{j=1}^{4}a_{ij}x_j\right)$ olarak tanımlayalım.

1) $g=\left(a_{ij}\right)$, $h=\left(b_{ij}\right)\in O(3,1)$ ve $x=\left(x_j\right)\in\mathbb{R}^{3+1}$ için;

$$\begin{aligned}(gh)x&=\left(\left(a_{ij}\right)\left(b_{ij}\right)\right)\left(x_j\right)=\left(\sum_{j=1}^{4}a_{ij}b_{jk}\right)\left(x_j\right)=\left(\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{4}(a_{ij}b_{jk})x_k\right)\\&=\left(\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{4}(a_{ij}b_{jk})x_k\right)=\left(a_{ij}\right)\left(\sum_{k=1}^{4}(b_{jk})x_k\right)=\left(a_{ij}\right)\left(\left(b_{jk}\right)\left(x_k\right)\right)\end{aligned}$$

elde edilir.

2) $I=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\in O(3,1)$ birim elemanını alalım. $\forall x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3+1}$ için,

$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$ olacağından $Ix=x$ elde edilir.

1.7. G-Denk Vektörler Sistemi ve G-Yörünge

Tanım 18: G bir grup olmak üzere, G'nin X cümlesi üzerindeki etkisi verilsin. $x,y\in X$ olmak üzere, $\exists g\in G$ için $y=gx$ ise x, y'ye G-*denk*'tir denir ve bu durum $x\overset{G}{\sim}y$ şeklinde gösterilir.

Önerme 10: G grubunun $\mathbb{R}^{3+1}$ üzerindeki etkisi verilmiş olsun.Bu takdirde, $x,y\in\mathbb{R}^{3+1}$ için $x\overset{G}{\sim}y$ bir denklik bağıntısıdır.

İspat : "$\sim$" bağıntısının denklik bağıntısı olduğunu göstermek için yansıma, simetrik ve geçişme özeliklerinin sağladığını göstermemiz gerekir. Bunları gösterelim.

1) $"\sim"$'nin yansıma özeliği vardır. $g = I \in G$ alalım. $x = gx = Ix = x$ olacağından $x \sim x$'dir.

2) $"\sim"$'nin simetri özeliği vardır: $x, y \in \mathbb{R}^{3+1}$ alalım. $x \sim y \Rightarrow \exists g \in G$ öyle ki

$y = gx$'dir. Burada eşitliğin her iki tarafı $g^{-1} \in G$ ile çarpılırsa

$y = gx \Rightarrow g^{-1}y = g^{-1}gx \Rightarrow g^{-1}y = Ix = x$ olacağından $y \sim x$'dir.

3) $"\sim"$'nin geçişme özeliği vardır: $x, y, z \in \mathbb{R}^{3+1}$ alalım.

$x \sim y$ olduğundan $\exists g_1 \in G$ öyle ki $y = g_1 x$'dir. (19)

$y \sim z$ olduğundan $\exists g_2 \in G$ öyle ki $z = g_2 y$'dir. (20)

(20)'de y yerine (19)'daki eşiti yazılırsa $z = g_2 g_1 x$'dir. Ancak $g_1 g_2 \in G$ olduğundan $x \sim z$'dir. Böylece $"\sim"$ bağıntısı için yansıma, simetrik ve geçişme özelikleri sağlandığından $"\sim"$ denklik bağıntısıdır. ♦

Örnek 13 : $G = O(3,1)$ alalım. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3+1}$ için

$\exists A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \in O(3,1)$ öyle ki, $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$'dir. O halde, x ,y'ye $O(3,1)$-denktir.

Tanım 19 : $\{x_\tau, \tau \in T\}$ ve $\{y_\tau, \tau \in T\}$ iki vektör ailesi olsun. $y_\tau = g.x_\tau$, $\forall \tau \in T$ olacak şekilde $\exists g \in G$ ise, bu vektör ailelerine G-*denk* denir. İki vektör ailesinin denkliği $\{x_\tau,\ \tau \in T\} \overset{G}{\sim} \{y_\tau,\ \tau \in T\}$ ile gösterilir.

Önerme 11: $\{x_\tau, \tau \in T\}$ ve $\{y_\tau, \tau \in T\}$ iki vektör ailesi olsun. Bu takdirde $\{x_\tau,\ \tau \in T\} \overset{G}{\sim} \{y_\tau,\ \tau \in T\}$ bir denklik bağıntısıdır.

İspat: Önerme10'un ispatına benzer olarak yapılır. ♦

Tanım 20 : Bir G grubunun bir X cümlesi üzerindeki etkisi verilsin ve $x \in X$ olsun. $Gx = \{gx :\ g \in G\}$ cümlesine x noktasının G-*yörünge*'si denir.

Örnek 14 : $G = O(3,1)$ ve $X = \mathbb{R}^{3+1}$ alalım.Bir $x \in \mathbb{R}^{3+1}$ noktasının $O(3,1)$ yörüngesi

$$O(3,1)x = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right\}$$ şeklindedir.

Not :

1) Yörüngeler, G-denklik bağıntısının denklik sınıflarıdır.

2) İki yörüngenin arakesiti boş cümle değilse yörüngeler çakışır. Arakesiti boş cümle ise farklı yörüngelerdir. Bundan dolayı yörüngeler denklik sınıfları ile çakışır.

1.8. Zamansal, Uzaysal ve Işıksal Vektörler

Tanım 21 : $g : \mathbb{R}^{3+1} \times \mathbb{R}^{3+1} \to \mathbb{R}$ Lorentz iç çarpımı olmak üzere,

i) $0 \neq v \in \mathbb{R}^{3+1}$ için $g(v,v) = \langle v,v \rangle = 0$ ise *v*-vektörüne ışıksal vektör denir.

ii) $v \in \mathbb{R}^{3+1}$ için $g(v,v) = \langle v,v \rangle < 0$ ise *v*-vektörüne zamansal vektör denir.

iii) $v \in \mathbb{R}^{3+1}$ için $g(v,v) = \langle v,v \rangle > 0$ ise *v*-vektörüne uzaysal vektör denir.

Örnek 15 : $\mathbb{R}^{3+1}$'de $v = (v_1, v_2, v_3, v_4) = (0,0,1,-1) \in \mathbb{R}^{3+1}$ alalım. Buradan,

$g(v,v) = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - v_4^2 = 0^2 + 0^2 + 1^2 - (-1)^2 = 1 - 1 = 0$ olduğundan v-ışıksal vektördür.

Örnek 16 : $\mathbb{R}^{3+1}$'de $v = (v_1, v_2, v_3, v_4) = (1,1,1,3) \in \mathbb{R}^{3+1}$ alalım. Buradan,

$g(v,v) = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - v_4^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 - (3)^2 = 3 - 9 = -6 < 0$ olduğundan v-zamansal vektördür.

Örnek 17 : $\mathbb{R}^{3+1}$'de $v = (v_1, v_2, v_3, v_4) = (3,1,1,1) \in \mathbb{R}^{3+1}$ alalım. Buradan,

$g(v,v) = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - v_4^2 = 3^2 + 1^2 + 1^2 - 1^2 = 11 - 1 = 10 > 0$ olduğundan v-uzaysal vektördür.

Teorem 3 : $g : \mathbb{R}^{3+1} \times \mathbb{R}^{3+1} \to \mathbb{R}$ Lorentz iç çarpımı , $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ zamansal vektör ve $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ zamansal veya sıfırdan farklı ışıksal vektör olmak üzere $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4$ ve $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3 + y_4e_4$ olsun. Bu taktirde,

i) $x_4 y_4 > 0 \Leftrightarrow \langle x, y \rangle < 0$

ii) $x_4 y_4 < 0 \Leftrightarrow \langle x, y \rangle > 0$ ’dır.

İspat:

“$\Rightarrow$” $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ zamansal vektör olduğundan

$$\langle x, x \rangle = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 < 0 \text{ 'dır.} \qquad (21)$$

$y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ zamansal veya sıfırdan farklı ışıksal vektör olduğundan

$$\langle y, y \rangle = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 \le 0 \text{ 'dır.} \qquad (22)$$

Burada, (21)’den $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < x_4^2$ ve (22)’den $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \le y_4^2$ elde edilir.Taraf tarafa çarpma işlemi yapılırsa,

$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) < x_4^2 y_4^2$ ’dir.Burada $\mathbb{R}^{3+0}$ ’daki Schwartz eşitsizliği kullanılırsa, $(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2 \le (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) < x_4^2 y_4^2$ ’den

$$|x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3| < |x_4 y_4| \qquad (23)$$

elde edilir.

Burada $x_4 y_4 \ne 0$ ve ayrıca $\langle x, y \rangle \ne 0$ ’dır.

Eğer $x_4 y_4 = 0$ ise $x_4 = 0$ veya $y_4 = 0$ ’dır. Fakat $x_4 = 0$ ise (21)’den $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 0$ dır. Bu $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \ge 0$ olması ile çelişir. Benzer şekilde $y_4 = 0$ ise (22)’den $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 < 0$ olduğundan, bu $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \ge 0$ olması ile çelişir.

Böylece $x_4 y_4 \ne 0$ ’dır. Burada iki durumu inceleyelim

1) $x_4 . y_4 > 0$ olsun. (23)’ten

$|x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3| < x_4 y_4 \Rightarrow x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 < x_4 y_4$ ’den

$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 y_4 < 0 \Rightarrow \langle x, y \rangle < 0$ ’dır.

2) $x_4 . y_4 < 0$ olsun. (23)’ten

$|x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3| < -x_4 y_4 \Rightarrow -(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) < -x_4 y_4$ ’den

$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 y_4 > 0 \Rightarrow \langle x, y \rangle > 0$ elde edilir.

“$\Leftarrow$” Şimdi ters tarafını ispatlayalım. Yani, $\langle x, y \rangle < 0 \Rightarrow x_4 . y_4 > 0$ ve $\langle x, y \rangle > 0 \Rightarrow x_4 y_4 < 0$ olduğunu gösterelim.(23)’ten $x_4 y_4 \ne 0$ olup $x_4 y_4 > 0$ veya $x_4 . y_4 < 0$ ’dır.

a) Farz edelim $\langle x,y\rangle<0$ ve $x_4.y_4<0$ olsun.

$x_4y_4<0$ ise $\langle x,y\rangle>0$ olduğundan bu, varsayımdaki $\langle x,y\rangle<0$ ile çelişir. Buradan $\langle x,y\rangle<0$ ise $x_4y_4>0$ olmalıdır.

b) Farz edelim $\langle x,y\rangle>0$ ve $x_4y_4>0$ olsun.

$x_4y_4>0$ ise $\langle x,y\rangle<0$ olduğundan bu, varsayımdaki $\langle x,y\rangle>0$ ile çelişir. Buradan $\langle x,y\rangle>0$ ise $x_4y_4<0$ olmalıdır. Böylece ispat biter. ♦

Sonuç 2 : $\mathbb{R}^{3+1}$'de sıfırdan farklı bir vektör bir zamansal vektöre ortogonal ise bu taktirde o vektör uzaysal vektördür.

İspat: $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\neq 0$ bir vektör , $y=(y_1,y_2,y_3,y_4)$ zamansal vektör ve $\langle x,y\rangle=0$ olsun. Amacımız *x*-vektörünün uzaysal olduğunu göstermektir. Farz edelim ki, *x*-vektörü uzaysal olmasın. Bu taktirde *x*- zamansal veya sıfırdan farklı ışıksal vektördür. *x*- zamansal veya sıfırdan farklı ışıksal vektör ise Teorem 3'ün ispatında gösterildiği üzere $x_4y_4\neq 0$'dır. Buradan $x_4y_4>0$ veya $x_4y_4<0$'dır.

1) Eğer $x_4y_4>0$ ise Teorem 3'den $\langle x,y\rangle<0$'dır. Bu ise $\langle x,y\rangle=0$ olması ile çelişir.

2) Eğer $x_4y_4<0$ ise Teorem 3'den $\langle x,y\rangle>0$'dır. Bu ise $\langle x,y\rangle=0$ olması ile çelişir. Böylece *x*-uzaysal olmalıdır. ♦

Tüm zamansal vektörlerin cümlesini "T" ile gösterelim. Böylece,

$\mathrm{T}=\left\{x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^{3+1}:\langle x,x\rangle<0\right\}$ ile tanımlayalım.

T'yi gelecek(veya pozitif) ve geçmiş(veya negatif) yönlü olmak üzere sırasıyla T^+ ve T^- ile gösterelim. Böylece,

$\mathrm{T}^+=\left\{x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^{3+1}:\langle x,x\rangle<0,x_4>0\right\}$ ve

$\mathrm{T}^-=\left\{x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^{3+1}:\langle x,x\rangle<0,x_4<0\right\}$ ile tanımlayalım. Buradan, $\mathrm{T}=\mathrm{T}^+\cup\mathrm{T}^-$ ve $\mathrm{T}^+\cap\mathrm{T}^-=\varnothing$'dır.

$\forall x,y\in\mathrm{T}$ için $x\sim y\Leftrightarrow\langle x,y\rangle<0$ olarak "$\sim$" bağıntısı tanımlayalım.

Önerme 12 : "$\sim$" bağıntısı T'de denklik bağıntısıdır.

İspat: "$\sim$" bağıntısının denklik bağıntısı olduğunu göstermek için yansıma, simetrik ve geçişme özeliklerinin sağladığını göstermemiz gerekir.Bunları gösterelim.

1) $"\sim"$ bağıntısının yansıma özeliği vardır: Yani, $\forall x \in \mathrm{T}$ için $x \sim x$'dir. $x \in \mathrm{T}$ alalım. x- zamansal olduğundan $\langle x, x \rangle < 0$'dır. Bu ise, tanımdan $x \sim x$'dır.

2) $"\sim"$ bağıntısının simetri özeliği vardır: Yani, $\forall x, y \in \mathrm{T}$ için $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$'dir. $x, y \in \mathrm{T}$ alalım. $x \sim y$ olsun. Bu taktirde tanımdan $\langle x, y \rangle < 0$'dır. Ancak iç çarpımın simetrik özeliğinden $\langle y, x \rangle < 0$'dır. Bu ise, $y \sim x$'dir.

3) $"\sim"$ bağıntısının geçişme özeliği vardır: Yani, $\forall x, y, z \in \mathrm{T}$ için $x \sim y$ ve $y \sim z \Rightarrow x \sim z$'dir. $x = (x_1, x_2, x_3, x_4), y = (y_1, y_2, y_3, y_4), z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathrm{T}$ alalım.

$x \sim y$ ise tanımdan $\langle x, y \rangle < 0$'dır. Böylece Teorem 3'ten $x_4 y_4 > 0$'dır.

$y \sim z$ ise tanımdan $\langle y, z \rangle < 0$'dır. Böylece Teorem3'ten $y_4 z_4 > 0$'dır. Buradan,

3.1) $x_4 > 0$ olsun.Bu taktirde $y_4 > 0$ olduğundan $z_4 > 0$'dır.Buradan $x_4 z_4 > 0$'dır. Teorem3'ten $\langle x, z \rangle < 0$'dır. Böylece tanımdan $x \sim z$'dir.

3.2) $x_4 < 0$ olsun. Bu taktirde $y_4 < 0$ olup, $z_4 < 0$'dır.Buradan $x_4 z_4 > 0$'dır. Teorem 3'ten $\langle x, z \rangle < 0$'dır. Böylece tanımdan $x \sim z$'dir. O halde $"\sim"$ bağıntısının yansıma, simetri ve geçişme özelikleri sağlandığından $"\sim"$ bağıntısı denklik bağıntısıdır. ♦

Önerme 13 :

i) $\forall x, y \in \mathrm{T}^+$ için $x \sim y$'dir.

ii) $\forall x, y \in \mathrm{T}^-$ için $x \sim y$'dir.

iii) $\forall x \in \mathrm{T}^+$ ve $\forall y \in \mathrm{T}^-$ için $x \nsim y$'dir.

İspat:

i) $x = (x_1, x_2, x_3, x_4), y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathrm{T}^+$ alalım. Buradan $x_4 y_4 > 0$'dır. Teorem 3'ten $\langle x, y \rangle < 0$ ve tanımdan $x \sim y$'dır.

ii) $x = (x_1, x_2, x_3, x_4), y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathrm{T}^-$ alalım. Buradan $x_4 y_4 > 0$ 'dır. Teorem 3'ten $\langle x, y \rangle < 0$ ve tanımdan $x \sim y$'dır.

iii) $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathrm{T}^+$ ve $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathrm{T}^-$ alalım. $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathrm{T}^+$ için $x_4 > 0$'dır. $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathrm{T}^-$ için $y_4 < 0$'dır. Buradan $x_4 y_4 < 0$ 'dır. Teorem 3'ten $\langle x, y \rangle > 0$'dır. Ancak denklik tanımından $x \nsim y$'dir. ♦

Önerme 14 :

i) $\forall x, y \in \mathrm{T}^{+}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}^{+}$ ise bu taktirde $\lambda x, (x+y) \in \mathrm{T}^{+}$'dir.

ii) $\forall x, y \in \mathrm{T}^{-}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}^{+}$ ise bu taktirde $\lambda x, (x+y) \in \mathrm{T}^{-}$'dir.

İspat:

i) $x = (x_1, x_2, x_3, x_4), y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathrm{T}^{+}$ alalım ve $\lambda \in \mathbb{R}^{+}$ olsun.

$x \in \mathrm{T}^{+}$ olduğundan $\langle x, x \rangle < 0$'dır. Buradan $x_4 > 0$'dır. $\lambda \in \mathbb{R}^{+}$ için

$\langle \lambda x, \lambda x \rangle = \lambda^2 \langle x, x \rangle < 0 \Rightarrow \lambda x \in \mathrm{T}^{+}$'dır.

Şimdi ise, $(x+y) \in \mathrm{T}^{+}$ olduğunu gösterelim.

$x \in \mathrm{T}^{+}$ olduğundan $\langle x, x \rangle < 0$'dır. Buradan $x_4 > 0$'dır. $y \in \mathrm{T}^{+}$ olduğundan $\langle y, y \rangle < 0$'dan $y_4 > 0$'dır.

$x + y = (x_1, x_2, x_3, x_4) + (y_1, y_2, y_3, y_4) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4)$'dir. Buradan,

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4), y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathrm{T}^{+}$ olduğundan $\langle x, x \rangle < 0$, $\langle y, y \rangle < 0$ ve Önerme13'ten $\langle x, y \rangle < 0$'dır. Böylece

$\langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + 2.\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle < 0 \Rightarrow \langle x+y, x+y \rangle < 0$'dır.Buradan $x + y \in \mathrm{T}^{+}$'dir.

ii) $x = (x_1, x_2, x_3, x_4), y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathrm{T}^{-}$ alalım ve $\lambda \in \mathbb{R}^{+}$ olsun.

$x \in \mathrm{T}^{-}$ olduğundan $\langle x, x \rangle < 0$ olup, $x_4 < 0$'dır. $\lambda \in \mathbb{R}^{+}$ için

$\langle \lambda x, \lambda x \rangle = \lambda^2 \langle x, x \rangle < 0 \Rightarrow \lambda x \in \mathrm{T}^{-}$'dır.

Şimdi ise $(x+y) \in \mathrm{T}^{-}$ olduğunu gösterelim.

$x \in \mathrm{T}^{-}$ olduğundan $\langle x, x \rangle < 0$ olup, $x_4 < 0$'dır.

$y \in \mathrm{T}^{-}$ olduğundan $\langle y, y \rangle < 0$ olup, $y_4 < 0$'dır.

$x + y = (x_1, x_2, x_3, x_4) + (y_1, y_2, y_3, y_4) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4)$'dir. Buradan,

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4), y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathrm{T}^{-}$ olduğundan $\langle x, x \rangle < 0$, $\langle y, y \rangle < 0$ ve Önerme 13'ten $\langle x, y \rangle < 0$'dır. Böylece

$\langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle < 0 \Rightarrow \langle x+y, x+y \rangle < 0$'dır. Buradan

$x + y \in \mathrm{T}^{-}$'dir.♦

Tanım 22 :

i) $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ sıfırdan farklı ışıksal vektör olmak üzere $x_4>0$ ise, x- ışıksal vektörüne gelecek yönlü ışıksal vektör denir.

ii) $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ sıfırdan farklı ışıksal vektör olmak üzere $x_4<0$ ise, x- ışıksal vektörüne geçmiş yönlü ışıksal vektör denir.

Önerme 15 : $g:\mathbb{R}^{3+1}\times\mathbb{R}^{3+1}\to\mathbb{R}$ indeksi bir olan Lorentz iç çarpımı olmak üzere,

i) x-sıfırdan farklı ışıksal vektör ve $y\in \mathrm{T}^{+}$ için $\langle x,y\rangle<0$ ise, x-ışıksal vektör gelecek yönlüdür.

ii) x-sıfırdan farklı ışıksal vektör ve $y\in \mathrm{T}^{+}$ için $\langle x,y\rangle>0$ ise, x-ışıksal vektör geçmiş yönlüdür.

İspat: $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ sıfırdan farklı ışıksal vektör alalım.Buradan,

i) $y=(y_1,y_2,y_3,y_4)\in \mathrm{T}^{+}$ için $\langle x,y\rangle<0$ ise, Teorem 3'ten $x_4y_4>0$ olup $y_4>0$ olduğundan $x_4>0$'dır. O halde x-ışıksal vektör gelecek yönlüdür.

ii) $y=(y_1,y_2,y_3,y_4)\in \mathrm{T}^{+}$ için $\langle x,y\rangle>0$ ise, Teorem 3'ten $x_4y_4<0$ olup $y_4>0$ olacağından $x_4<0$'dır. O halde x- ışıksal vektör geçmiş yönlüdür. ♦

Not: $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ ve $y=(y_1,y_2,y_3,y_4)$ sıfırdan farklı ışıksal vektörleri aynı zaman yönlüdür $\Leftrightarrow$ x_4 ve y_4 aynı işaretlidir.

Teorem 4 : $A\in O(3,1)$ olsun. Bu taktirde aşağıdakiler denktir:

i) $A=(a_{ij})_{i,j=1,\dots,4}\in O(3,1)$ için $a_{44}\geq 1$'dir.

ii) A, tüm sıfırdan farklı ışıksal ve zamansal vektörlerin yönlendirmelerini (gelecek veya geçmiş yönlü olduğunu) korur.

İspat:

"i$\Rightarrow$ii" $A=(a_{ij})_{i,j=1,\dots,4}\in O(3,1)$ için $a_{44}\geq 1$ olsun. $x=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4e_4$ zamansal veya sıfırdan farklı ışıksal vektörü alalım. Biz A'nın tüm sıfırdan farklı ışıksal ve zamansal vektörlerinin yönlendirmesini koruduğunu, yani $x=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4e_4$ ve

$A.x=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ için x_4 ile $a_{14}x_1+a_{24}x_2+a_{34}x_3+a_{44}x_4$'ün aynı işaretli olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için;

$A\in O(3,1)$ olduğundan $a_{14}{}^2+a_{24}{}^2+a_{34}{}^2-a_{44}{}^2=-1$ olup, buradan

$$a_{14}{}^2+a_{24}{}^2+a_{34}{}^2<a_{44}{}^2 \text{'tür.} \tag{24}$$

x- zamansal veya sıfırdan farklı ışıksal vektör olduğundan

$$x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2\leq x_4{}^2 \text{'dir.} \tag{25}$$

Böylece (24) ve (25)'ten

$$\left(a_{14}{}^2+a_{24}{}^2+a_{34}{}^2\right)\left(x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2\right)<\left(a_{44}x_4\right)^2 \text{'dir.} \tag{26}$$

Burada $\mathbb{R}^{3+0}$'daki Schwartz eşitsizliği kullanılırsa, $\left(a_{14}x_1+a_{24}x_2+a_{34}x_3\right)^2<\left(a_{44}x_4\right)^2$ elde edilir.Buradan

$$\left(a_{14}x_1+a_{24}x_2+a_{34}x_3-a_{44}x_4\right)\left(a_{14}x_1+a_{24}x_2+a_{34}x_3+a_{44}x_4\right)<0 \text{'dır.} \tag{27}$$

Şimdi başka bir $y=y_1e_1+y_2e_2+y_3e_3+y_4e_4$ şeklinde sıfırdan farklı vektörünü alalım. Bu vektörü $y=\left(y_1,y_2,y_3,y_4\right)=\left(a_{14},a_{24},a_{34},a_{44}\right)$ olarak seçersek,

$a_{14}{}^2+a_{24}{}^2+a_{34}{}^2-a_{44}{}^2=-1$ olduğundan y- zamansal vektördür. Ancak

$\left\langle x,y\right\rangle=a_{14}x_1+a_{24}x_2+a_{34}x_3-a_{44}x_4$ olduğundan (27) ifadesinden

$$\left\langle x,y\right\rangle.\left(a_{14}x_1+a_{24}x_2+a_{34}x_3+a_{44}x_4\right)<0 \text{'dır.} \tag{28}$$

(28)'den $\left\langle x,y\right\rangle$ ile $\left(a_{14}x_1+a_{24}x_2+a_{34}x_3+a_{44}x_4\right)$ ters işaretlidir. Biz x_4 ile $\left(a_{14}x_1+a_{24}x_2+a_{34}x_3+a_{44}x_4\right)$'ün aynı işaretli olduğunu gösterirsek ispat biter. Burada iki durum vardır:

1) $x_4>0$ alalım. (27)'den $\left|a_{14}x_1+a_{24}x_2+a_{34}x_3\right|<\left|a_{44}x_4\right|$'dir. Ancak $a_{44}\geq 1$ olduğundan $\left|a_{14}x_1+a_{24}x_2+a_{34}x_3\right|<a_{44}x_4 \Rightarrow -\left(a_{14}x_1+a_{24}x_2+a_{34}x_3\right)\leq\left|a_{14}x_1+a_{24}x_2+a_{34}x_3\right|<a_{44}x_4$ olup, $\left(a_{14}x_1+a_{24}x_2+a_{34}x_3+a_{44}x_4\right)>0$'dır. Böylece $x_4>0$ ise, $\left(a_{14}x_1+a_{24}x_2+a_{34}x_3+a_{44}x_4\right)>0$'dır.

2) $x_4<0$ alalım. (27)'den $\left|a_{14}x_1+a_{24}x_2+a_{34}x_3\right|<\left|a_{44}x_4\right|$'dir. Ancak $a_{44}\geq 1$

$\left|a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3\right| < -a_{44}x_4 \Rightarrow \left(a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3\right) \leq \left|a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3\right| < -a_{44}x_4$

olduğundan $\left(a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4\right) < 0$ 'dır. Böylece $x_4 < 0$ ise,

$\left(a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4\right) < 0$ 'dır.

Buradan A tüm sıfırdan farklı ışıksal vektörleri ile zamansal vektörlerin yönlendirmelerini korur.

"ii$\Rightarrow$i" *A*, tüm sıfırdan farklı ışıksal ve zamansal vektörlerin yönlendirmesini korusun.

Yani, $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4$ zamansal veya sıfırdan farklı ışıksal vektör olmak üzere

$x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4$ ve $A.x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ için x_4 ile

$a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4$ aynı işaretli olsun.

Biz $A \in O(3,1)$ için $a_{44} \geq 1$ olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için,

$A \in O(3,1)$ olduğundan $a_{14}{}^2 + a_{24}{}^2 + a_{34}{}^2 - a_{44}{}^2 = -1$ 'dir. Buradan

$$0 \leq a_{14}{}^2 + a_{24}{}^2 + a_{34}{}^2 = -1 + a_{44}{}^2 \text{ 'dir.} \tag{29}$$

(29)'dan $-1 + a_{44}{}^2 \geq 0 \Rightarrow a_{44}{}^2 \geq 1 \Rightarrow a_{44} \geq 1$ veya $a_{44} \leq -1$ 'dir.

Farz edelim ki, $a_{44} \leq -1$ olsun.

Ancak *A*, tüm sıfırdan farklı ışıksal ve zamansal vektörlerin yönlendirmelerini koruduğundan x_4 ile $a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4$ aynı işaretlidir. Burada $x_4 > 0$ ve $a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4 > 0$ veya $x_4 < 0$ ve $a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4 < 0$ olmak üzere iki durum vardır.

1) Varsayalım ki, $x_4 > 0$ ve $a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4 > 0$ olsun.

x- zamansal veya sıfırdan farklı ışıksal vektörü olduğundan

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 \leq x_4{}^2 \tag{30}$$

elde edilir.

Böylece (29) ve (30)'dan

$$\left|a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3\right| < \left|a_{44}x_4\right| \tag{31}$$

olur.

$a_{44} \leq -1$ ve $x_4 > 0$ olduğundan, $a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4 < 0$ olup, varsayım ile çelişir.

2) Varsayalım ki, $x_4 < 0$ ve $a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4 < 0$ olsun.

(29) ve (30)'dan (31) denklemi elde edilir. Burada $a_{44} \le -1$ ve $x_4 < 0$ olduğundan, $a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4 > 0$ olup, varsayım ile çelişir.

Böylece $a_{44} \le -1$ olamaz. $A = \left(a_{ij}\right)_{i,\,j=1,\ldots,4} \in O(3,1)$ için $a_{44} \ge 1$ olmalıdır. ♦

1.9. Cebirler

Tanım 23:

i) $(C,\ +,\ \cdot)$ halka,

ii) $(C,\ +,\ \lambda\cdot)$ $\mathbb{R}$ üzerinde vektör uzayı,

iii) $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$, $\forall x,\ y \in C$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ise $\{C,\ +,\ \cdot,\ \lambda\cdot,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ sistemine $\mathbb{R}$-*cebir* denir.

Örnek 18 : $\{\mathbb{R},\ +,\ \cdot,\ \lambda\cdot,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{R}$-*cebir* 'dir.

Örnek 19: Katsayıları $\mathbb{R}$ 'den olan tüm polinomlar cümlesini $\mathbb{R}[x]$ ile gösterelim. $\{\mathbb{R}[x],\ +,\ \cdot,\ \lambda\cdot,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{R}$-*cebir* 'dir.

Örnek 20 : Tüm rasyonel fonksiyonlar cümlesini $\mathbb{R}(x)$ ile gösterelim. $\{\mathbb{R}(x),\ +,\ \cdot,\ \lambda\cdot,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{R}$-*cebir* 'dir.

Örnek 21 : $\{\mathbb{R}[x_1,\ \ldots,\ x_n],\ +,\ \cdot,\ \lambda\cdot,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ ve $\{\mathbb{R}(x_1,\ \ldots,\ x_n),\ +,\ \cdot,\ \lambda\cdot,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}$-*cebir* 'dir.

Tanım 24 : C, $\mathbb{R}$-*cebir* ve $C_1 \subset C$ olsun. $\{C_1,\ +,\ \cdot,\ \lambda\cdot,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{R}$-*cebir* ise C_1 alt cümlesine $\mathbb{R}$-*altcebir* denir.

Önerme 16 : C, $\mathbb{R}$-*cebir* ve $\{C_\tau,\ \tau \in T\}$, C 'nin $\mathbb{R}$-*altcebirler* 'inin bir ailesi olsun. Bu takdirde $\bigcap_{\tau \in T} C_\tau$ da $\mathbb{R}$-*altcebir* 'dir.

İspat: $x,\ y \in \bigcap_{\tau \in T} C_\tau$ olsun. Buradan $\forall \tau \in T$ için $x,\ y \in C_\tau$ 'dur. C_τ, $\mathbb{R}$-*cebir* olduğu için;

$\left.\begin{array}{l} x-y\in C_\tau,\ \forall\tau\in T \\ x.y\in C_\tau,\ \forall\tau\in T \end{array}\right\} \bigcap_{\tau\in T} C_\tau$, C'nin alt halkasıdır. Benzer şekilde $\bigcap_{\tau\in T} C_\tau$, C'nin lineer alt uzayıdır. O halde $\bigcap_{\tau\in T} C_\tau$ da $\mathbb{R}$-*altcebir*'dir. ♦

Not: C, $\mathbb{R}$-*cebir* ve $S\subset C$ olsun. $[S]_{\mathbb{R}} = \bigcap_{S\subset C} C_\tau$ şeklinde gösterelim. Burada C_τ, C'nin $\mathbb{R}$-*altcebir*'idir. S'yi kapsayan en az bir tane $\mathbb{R}$-*altcebir* vardır. Bu ise C'nin kendisidir.

Tanım 25: C, $\mathbb{R}$-*cebir* ve $S\subset C$ olsun. $[S]_{\mathbb{R}} = C$ ise S'ye C'nin üreteç sistemi denir.

Örnek 22 : $C=\mathbb{R}[x]$ olsun. $S=\{1,\ x\}$ alalım. Burada 1, C'nin birimidir.

$[S]_{\mathbb{R}} = \{a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx_n,\ a_i\in\mathbb{R},\ i=0,\ 1,\ ...,\ n\}$ olduğundan $[S]_{\mathbb{R}} = C$'dir.

Örnek 23 : $C=\mathbb{R}[x]$ olsun. $S=\{x\}$ alalım.

$[S]_{\mathbb{R}} = \{a_1x+a_2x^2+...+a_nx_n,\ a_i\in\mathbb{R},\ i=1,\ ...,\ n\}$ olduğundan $[S]_{\mathbb{R}} \neq C$'dir.

Örnek 24: $C=\mathbb{R}[x_1,\ ...,\ x_n]$ olsun. $S=\{1,\ x_1,\ ...,\ x_n\}$ alınırsa $[S]_{\mathbb{R}} = C$ olur.

Not: C, $\mathbb{R}$-*cebir* olsun. C'nin sonlu üreteci mevcut olsa da C'nin $\mathbb{R}$-*altcebirler*'i sonlu üreteçli olmayabilir.

Örnek 25 : $C=\mathbb{R}[x,\ y]$ olsun. $S=\{x,\ xy,\ xy^2,\ ...,\ xy^n,\ ...\}$ alırsak $C_1=[S]_{\mathbb{R}}$ $\mathbb{R}$-*altcebir*'inin sonlu tane üreteci yoktur. Bunu gösterelim:

Farz edelim C_1 sonlu üreteçli olsun. C_1'in üreteç sistemi $\{f_1,\ ...,\ f_m\}$ olsun. Buradan $\{f_1,\ ...,\ f_m\}$ üreteç sistemi olduğundan $\forall f\in C_1$ için bir $P(t_1,\ ...,\ t_m)$ polinomu vardır öyle ki, $f=P(f_1,\ ...,f_m)$'dir.

$f_1,\ ...,f_m\in[S]_{\mathbb{R}}$ olduğundan bazı Q_i $i=1,\ ...,m$ polinomları mevcut, öyle ki

$$f_1 = Q_1\left(x,\ xy,\ ...,xy^{n_1}\right)$$
$$\vdots$$
$$f_m = Q_m\left(x,\ xy,\ ...,xy^{n_m}\right)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $n=\max\left(n_1,\ ...,\ n_m\right)$ alalım. Özel olarak xy^{n+1} elemanını alalım. $\{f_1,\ ...,\ f_m\}$ C_1'in üreteç sistemi olduğundan bazı $P_{n+1}\left(t_1,\ ...,\ t_m\right)$ polinomu için $xy^{n+1}=P_{n+1}\left(f_1,\ ...,f_m\right)$'dir.

$$xy^{n+1}=P_{n+1}\left(f_1,\ ...,f_m\right)=P_{n+1}\left(Q_1\left(x,\ xy,\ ...,xy^{n_1}\right),\ ...,\ Q_m\left(x,\ xy,\ ...,xy^{n_m}\right)\right)=$$
$$=Q\left(x,\ xy,\ ...,xy^{n}\right)$$

$$xy^{n+1}=\sum a_{\alpha_0,\ ...,\ \alpha_n}.x^{\alpha_0}.(xy)^{\alpha_1}...\left(xy^n\right)^{\alpha_n}=$$
$$=\sum_{\alpha_0+...+\alpha_n\le 1} a_{\alpha_0,\ ...,\ \alpha_n}.x^{\alpha_0}.(xy)^{\alpha_1}...\left(xy^n\right)^{\alpha_n}+\sum_{\alpha_0+...+\alpha_n> 1} a_{\alpha_0,\ ...,\ \alpha_n}.x^{\alpha_0}.(xy)^{\alpha_1}...\left(xy^n\right)^{\alpha_n}$$

Bu iki polinom eşit ise dereceleri eşit olmalıdır. O halde;

$$xy^{n+1}=\sum_{\alpha_0+...+\alpha_n=1} a_{\alpha_0,\ ...,\ \alpha_n}.x^{\alpha_0}.(xy)^{\alpha_1}...\left(xy^n\right)^{\alpha_n}$$

$$xy^{n+1}=a_0.x+a_1.xy+...+a_n.xy^n$$

Polinomlar teorisinden böyle bir eşitlik olamaz. Böylece bir çelişki bulduk. Bu çelişkiden C_1'in sonlu üreteci yoktur.

Tanım 26 : K değişmeli, birimli halka olmak üzere, $\forall\, a\in K$, $a\neq 0$ için $ab=1$ olacak şekilde $b\in K$ mevcut ise K'ya cisim denir.

Örnek 26 : $\mathbb{R}$, reel sayılar cümlesi bir cisimdir.

Tanım 27 : K cisim, $H\subset K$ olmak üzere $\forall\, a\in H$, $a\neq 0$ için $ab=1$ olacak şekilde $b\in H$ mevcut ise H'ye K cisminin alt cismi denir.

Örnek 27 : $\mathbb{Q}$, rasyonel sayılar cümlesi $\mathbb{R}$'nin alt cismidir.

Önerme 17 : C, cisim ve $\{C_\tau,\ \tau\in T\}$, C'nin alt cisimlerinin bir ailesi olsun. Bu takdirde $\bigcap_{\tau\in T} C_\tau$ da alt cisimdir.

İspat: $\forall f,\ g\in\bigcap_{\tau\in T} C_\tau$ olsun. $f\in\bigcap_{\tau\in T} C_\tau$ olduğundan $\forall\,\tau\in T$ için $f\in C_\tau$'dur. $g\in\bigcap_{\tau\in T} C_\tau$ olduğundan $\forall\,\tau\in T$ için $g\in C_\tau$'dur. C_τ, alt cisim olduğundan $f+g\in C_\tau$, $\forall\,\tau\in T$, $f+g\in\bigcap_{\tau\in T} C_\tau$ olur.

Yukarıdakine benzer şekilde,

$f.g \in \bigcap_{\tau \in T} C_\tau$, $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda.f \in \bigcap_{\tau \in T} C_\tau$ ve $\dfrac{f}{g} \in \bigcap_{\tau \in T} C_\tau$, $(g \neq 0)$ olduğu da gösterilir. Böylece $\bigcap_{\tau \in T} C_\tau$ bir alt cisimdir. ♦

Not: C, cisim ve $S \subset C$ olsun. $(S) = \bigcap_{C_\tau \subset C} C_\tau$ şeklinde gösterelim. Burada C_τ, C'nin alt cismidir. S'yi kapsayan en az bir alt cisim vardır ve bu C'nin kendisidir.

Tanım 28 : C, cisim ve $S \subset C$ olsun. $(S) = C$ ise S'ye C'nin üreteç sistemi (cisim olarak) denir.

Örnek 28 : $\mathbb{R}(x)$, rasyonel fonksiyonlar cismini alalım. $S = \{\mathbb{R}, x\}$, $\mathbb{R}(x)$'in cisim olarak üreteç sistemidir. Fakat $S = \{\mathbb{R}, x\}$, $\mathbb{R}(x)$'in cebir olarak üreteç sistemi değildir. Çünkü, $[S]_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}[x] \neq \mathbb{R}(x)$'dir.

1.10. G-İnvaryant Fonksiyonlar

Tanım 29 : Bir G grubunun X cümlesi üzerindeki etkisini alalım. $f : X \to \mathbb{R}$ olmak üzere $\forall g \in G$ için $f(gx) = f(x)$, $\forall x \in X$ ise f reel fonksiyonuna G-*invaryant* denir.

Not: Tüm G-*invaryant* polinomlar cümlesi $\mathbb{R}[x]^G$ ve tüm G-*invaryant* rasyonel fonksiyonlar cümlesi ise $\mathbb{R}(x)^G$ şeklinde gösterilir.

Örnek 29 : $O(3,1)$ grubunun $\mathbb{R}^{3+1}$ üzerindeki hareketini alalım.

$$x_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{24} \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \\ x_{34} \end{pmatrix}, x_4 = \begin{pmatrix} x_{41} \\ x_{42} \\ x_{43} \\ x_{44} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3+1} \text{ olmak üzere,}$$

$$\left|\det(x_1, x_2, x_3, x_4)\right| = \left| \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} & x_{41} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} & x_{42} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} & x_{43} \\ x_{14} & x_{24} & x_{34} & x_{44} \end{bmatrix} \right| \text{ alınırsa bu } O(3,1)\text{-}invaryant\text{'tır.Gerçekten,}$$

$\forall g \in O(3,1)$ için,

$$\left|\det\left(gx_1, gx_2, gx_3, gx_4\right)\right| = \left|\det g \det\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)\right| =$$
$$= \left|\det g\right| \left|\det\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)\right| = \left|\det\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)\right|$$

elde edilip istenen sağlanır.

Örnek 30 : $G = O(3,1)$ olsun. $O(3,1)$ grubunun $\mathbb{R}$ üzerindeki hareketini alalım. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = \langle x, x\rangle$ alınırsa bu $O(3,1)$-*invaryant*'tır.Gerçekten, $\forall g \in O(3,1)$ için $f(g.x) = \langle gx, gx\rangle = \langle x, x\rangle = f(x)$ olduğundan istenen sağlanır.

Örnek 31 : $O(3,1)$ grubunun, $\mathbb{R}^{3+1}$ üzerindeki hareketini alalım. $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}^{3+1}$ olmak üzere $\det G(x_1, x_2, x_3, x_4) = \det\left(\left\langle x_i, x_j\right\rangle\right)_{i,j=1,2,3,4}$ alınırsa bu $O(3,1)$-*invaryant*'tır. Gerçekten, $\forall g \in O(3,1)$ için,

$\det G(gx_1, gx_2, gx_3, gx_4) = \det\left(\left\langle gx_i, gx_j\right\rangle\right) \overset{g\in O(3,1)}{=} \det\left(\left\langle x_i, x_j\right\rangle\right) = \det G(x_1, x_2, x_3, x_4)$ elde edilip istenen sağlanır.

Önerme 18 : $x \overset{G}{\sim} y$ olsun. Bu takdirde $\forall f \in \mathbb{R}[x]^G$ için $f(x) = f(y)$'dir.

İspat: $x \overset{G}{\sim} y$ olduğundan $\exists g \in G$ için $y = gx$'dir. Keyfi f G-*invaryant* polinomu için $f(y) = f(gx) = f(x)$ olduğundan $f(x) = f(y)$'dir. ♦

Not: Keyfi f, G-*invaryant* polinomu için $f(y) = f(x)$ ise $y \overset{G}{\sim} x$ olmayabilir.

Tanım 30(Yay uzunluğu): $y = f(x)$ eğrisi için yay uzunluğunun diferensiyeli, $\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 = \left[1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right]\Delta x^2$'dir. $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \Delta s = ds$ olmak üzere, $ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$'dir.[6]

Örnek 32: $\mathbb{R}^2$'de, Öklid uzayında, $x^2 + y^2 = 1$ çemberini alalım.

$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2$'dir.Burada her iki tarafın diferensiyeli alınarak,

$y' = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y'^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$ olur ve buradan

$$s = \int_1^x \sqrt{1 - \frac{x^2}{1-x^2}}\,dx = \arcsin x \Big|_1^x = \arcsin x - \arcsin 1 = \left|\arcsin x - \frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

bulunur. $A(AOB) = S = \int_x^1 y\,dx + \frac{xy}{2} = \int_x^1 \sqrt{1-x^2}\,dx + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$'dir. Buradan,

$2S=2\int_x^1\sqrt{1-x^2}\,dx+x\sqrt{1-x^2}\Rightarrow S=\int_x^1\sqrt{1-x^2}\,dx+x\sqrt{1-x^2}$ ’dir.|

$\sin(\arcsin x)=x$ olduğundan $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$ ’dir.

$x=\sin t\Rightarrow dx=\cos t.dt$ ’dir. Diğer taraftan, $x=\sin t\Rightarrow x^2=\sin^2 t\Rightarrow 1-x^2=\cos^2 t$ olduğundan,

$$\int_x^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_x^1\cos^2 t\,dt=\int_x^1\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{\arcsin x}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+0-\arcsin x-\frac{1}{2}\sin 2\left(\arcsin x\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+0-\arcsin x-\sin\left(\arcsin x\right)\cos\left(\arcsin x\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin x-x\sqrt{1-x^2}\right)$$

’dir. Buradan, $S=\int_x^1\sqrt{1-x^2}\,dx+x\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin x-x\sqrt{1-x^2}\right)+x\sqrt{1-x^2}$ ’dir.

Burada, $2S=\frac{\pi}{2}-\arcsin x\Rightarrow\overset{\frown}{AB}=2S$ olur.([6])

Tanım 31(Yay uzunluğu ve daire kesmesinin alanı): $y=f(x)$ eğrisi için yay uzunluğunun diferensiyeli, $\Delta s^2=\left|\Delta x^2-\Delta y^2\right|=\left|1-\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right|\Delta x^2$ ’dir.

$\lim_{\Delta s\to 0}\Delta s=ds$ olmak üzere, $ds=\sqrt{\left|1-y'^2\right|}dx$ ’dir.([6])

Örnek 33: $\mathbb{R}^{1+1}$ ’de, Minkowski uzayında, $x^2-y^2=1$ çemberini alalım.

$x^2-y^2=1\Rightarrow y^2=x^2-1$ ’dir.Burada her iki tarafın diferensiyeli alınarak,

$y'=\frac{x}{y}=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\Rightarrow y'^2=\frac{x^2}{x^2-1}$ olur ve buradan

$$S=\int_1^x\sqrt{\left|1-\frac{x^2}{x^2-1}\right|}dx=\arcsin x\Big|_1^x=\arcsin x-\arcsin 1=\left|\arcsin x-\frac{\pi}{2}\right|=\frac{\pi}{2}-\arcsin x$$

bulunur. $A(AOB)=S=\frac{xy}{2}-\int_x^1 y\,dx=xy-2\int_x^1 y\,dx=x\sqrt{x^2-1}-2\int_x^1\sqrt{x^2-1}\,dx$ ’dir. Buradan,

$2S=\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ bulunur. Şu halde $\overset{\frown}{AB}=2S$ ’dir.([6])

Örnek 32 ve Örnek 33'ten, Öklid ve Minkowski düzlemlerinde alan, aynı anlamdadır.

Önerme 19 : $\mathbb{R}[x]^G$, $\mathbb{R}[x]$ polinomlar $\mathbb{R}$-*cebir* 'inin birimli $\mathbb{R}$-*altcebir* 'idir.

İspat: $\forall f_1,\ f_2 \in \mathbb{R}[x]^G$ olsun. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall g \in G$ için;

$(f_1+f_2)(gx) = f_1(gx)+f_2(gx) = f_1(x)+f_2(x) = (f_1+f_2)(x)$

$(f_1 f_2)(gx) = f_1(gx)\, f_2(gx) = f_1(x)\, f_2(x) = (f_1 f_2)(x)$

$\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $(\lambda f_1)(gx) = \lambda f_1(gx) = \lambda f_1(x) = (\lambda f_1)(x)$

$1(x) = 1 \in \mathbb{R}[x]$ birim elemanı için, $(1.f_1)(gx) = 1.(gx)\, f_1(gx) = 1.f_1(x) = f_1(x)$

olduğundan, $f_1+f_2,\ f_1 f_2,\ \lambda f_1,\ 1 \in \mathbb{R}[x]^G$ 'dir. Yani $\mathbb{R}[x]^G$, $\mathbb{R}[x]$'in birimli $\mathbb{R}$-*altcebir* 'idir. ♦

Tanım 32 : H grubunun X cümlesi üzerindeki etkisini alalım. f, X cümlesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. $\exists \lambda(h)$ $(h \in H)$ fonksiyonu için $f(hx) = \lambda(h)\, f(x)$, $\forall h \in H,\ \forall x \in X$ ise f 'ye nispi invaryant denir. Bu $\lambda(h)$ fonksiyonuna ise f 'nin çarpanı denir.

Önerme 20 : $x \in X$ ve $h_1, h_2 \in H$ olmak üzere f, λ çarpanına sahip en az bir noktada sıfırdan farklı bir nispi invaryant fonksiyon olsun. Bu takdirde $\lambda(h_1 h_2) = \lambda(h_1)\lambda(h_2)$ 'dir.

İspat: $f((h_1h_2)x) = f(h_1(h_2x)) = \lambda(h_1)\, f(h_2x) = \lambda(h_1)\lambda(h_2)\, f(x)$

$f((h_1h_2)x) = \lambda(h_1h_2)\, f(x)$ olduğundan her iki tarafın eşitliğinden $\lambda(h_1h_2) = \lambda(h_1)\lambda(h_2)$ elde edilir. ♦

Örnek 34 : $H = O(3,1)$ ve $x_i \in \mathbb{R}^{3+1}, i = 1,2,3,4$ olsun. $O(3,1)$'in $\mathbb{R}^{3+1}$ üzerindeki hareketi Örnek 29'daki gibi olmak üzere $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \det(x_1,x_2,x_3,x_4)$ polinomunu Örnek29'daki gibi alalım. $\forall g \in H$ için

$f(gx_1, gx_2, gx_3, gx_4) = \det(gx_1, gx_2, gx_3, gx_4) = \det g.\det(x_1,x_2,x_3,x_4)$ olduğundan

$\lambda(g) = \det g$ olur. $\det g_1 g_2 = \det g_1 \det g_2$ olduğundan determinant $O(3,1)$ grubuna göre nispi invaryanttır.

Önerme 21 : H bir grup olmak üzere, H'nın $\mathbb{R}^{3+1}$ üzerinde hareketi verilen ve $f(x) \in \mathbb{R}(x)^H$ olsun. Bu durumda $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}, Q(x) \neq 0$ olacak şekilde çarpanları eşit olan iki nispi *H-invaryant* polinomun bölümü şeklinde yazılabilir.

İspat: $f(x)$, *H-invaryant* olduğundan $\forall h \in H$ için $f(gx) = f(x)$' dir. Buradan;

$$f(hx) = \frac{P(hx)}{Q(hx)} = \frac{P(x)}{Q(x)} = f(x)$$

dir. İçler dışlar çarpımı yapılırsa $P(hx)Q(x) = P(x)Q(hx)$ elde edilir. $P(x)$ ve $Q(x)$ i aralarında asal olarak alabiliriz. Bu durumda $P(hx) = \dfrac{P(x)Q(hx)}{Q(x)}$ olacağından $Q(hx), Q(x)$ e bölünecektir. Yani $\exists\, \varphi(x,h)$ polinomu için $Q(hx) = \varphi(x,h)Q(x)$ olacaktır. Polinomların eşitliğinden her iki tarafın derecesi eşit olmalıdır. Bu durumda $\varphi(x,h)$ polinomu sadece h ye bağlı olmalıdır. O halde $Q(hx) = \varphi(h)Q(x)$ 'dir. Bu eşitliği yukarıda yerine yazarsak;

$$P(hx) = \frac{P(x)Q(hx)}{Q(x)} = \frac{P(x)\varphi(h)Q(x)}{Q(x)} = \varphi(h)P(x)$$

olacaktır. Diğer taraftan $h_1, h_2 \in H$ için;

$$Q((h_1h_2)x) = \varphi(h_1h_2)Q(x)$$
$$Q((h_1h_2)x) = Q(h_1(h_2x)) = \varphi(h_1)Q(h_2x) = \varphi(h_1)\varphi(h_2)Q(x)$$

'dır.İki tarafın eşitliğinden $Q(x) \neq 0$ olduğundan $\varphi(h_1h_2) = \varphi(h_1)\varphi(h_2)$ elde edilir. Yani $P(x)$ ve $Q(x)$ aynı çarpana sahip olan nispi invaryantlardır.♦

Önerme 22 : $\mathbb{R}$ 'de yukarıdaki önermedeki $\varphi(h)$ polinomu $\exists r \in N^+$ için $\varphi(h) = h^r$ biçimindedir.

İspat: $\varphi(h)$, r dereceli bir polinom olsun. O halde $\varphi(h) = a_0 + a_1h^1 + \ldots + a_rh^r$ biçimindedir.

$$\varphi(k) = a_0 + a_1k^1 + \ldots + a_rk^r,\ \varphi(h.k) = a_0 + a_1(hk)^1 + \ldots + a_r(hk)^r$$

olur. $\varphi(hk) = \varphi(h)\varphi(k)$ olduğundan bunları yerine yazarsak;

$$a_0 + a_1(hk)^1 + \ldots + a_r(hk)^r = \left(a_0 + a_1h^1 + \ldots + a_rh^r\right)\left(a_0 + a_1k^1 + \ldots + a_rk^r\right) =$$

$= a_0^{\ 2} + a_0 a_1 h + a_0 a_1 k + ... + a_r^{\ 2} h^r k^r$ elde edilir. Her iki tarafın eşitliğinden $a_i^{\ 2} = a_i$, $i \neq j$ için $a_i a_j = 0$ $i, j = 0, 1, ..., r$ elde edilir. r için de $a_r^{\ 2} = a_r$ 'dir. Buradan $a_r = 0$ veya $a_r = 1$ 'dir. Polinomun derecesi r olduğundan $a_r \neq 0$ 'dır. Yani $a_r = 1$ 'dir. $a_i a_r = 0$, $i = 0, 1, ..., r-1$ olduğundan $\forall i$ için $a_i = 0$ olmalıdır. Buradan $\varphi(h) = a_r h^r$ biçimindedir. $a_r = 1$ olduğundan $\varphi(h) = h^r$ olduğu elde edilir.♦

Önerme 23 : $g \in O(3,1)$ olmak üzere $\lambda(g)$ bir rasyonel fonksiyon olsun. ($g = \|a_{ij}\|$, $\lambda(g)$, a_{ij}, $i, j = 1, 2, 3, 4$ 'lere göre rasyonel fonksiyon) ve $\forall g_1, g_2 \in O(3,1)$ için $\lambda(g_1 g_2) = \lambda(g_1)\lambda(g_2)$ olsun. Bu takdirde $\exists k \in \mathbb{Z}$ için $\lambda(g) = (\det g)^k$ ' dır.

İspat: [38].♦

Önerme 24 : $\mathbb{R}\left(x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(m)}\right)^H$, $\mathbb{R}\left(x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(m)}\right)$ cisminin alt cismidir.

İspat: $\forall f_1, f_2 \in \mathbb{R}\left(x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(m)}\right)^H$ olsun. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall g \in H$ için;

$$(f_1 + f_2)(gx) = f_1(gx) + f_2(gx) = f_1(x) + f_2(x) = (f_1 + f_2)(x)$$

$$(f_1 f_2)(gx) = f_1(gx)\, f_2(gx) = f_1(x)\, f_2(x) = (f_1 f_2)(x)$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $(\lambda f_1)(gx) = \lambda f_1(gx) = \lambda f_1(x) = (\lambda f_1)(x)$

$$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(gx) = \frac{f_1(gx)}{f_2(gx)} = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x),\ f_2(gx) = f_2(x) \neq 0$$

olduğundan, $f_1 + f_2$, $f_1 f_2$, λf_1, $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x) \in \mathbb{R}\left(x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(m)}\right)^H$ 'dir.

Yani, $\mathbb{R}\left(x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(m)}\right)^H$, $\mathbb{R}\left(x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(m)}\right)$ cisminin alt cismidir. ♦

Not: S, $\mathbb{R}\left(x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(m)}\right)^H$ 'nin bir alt cümlesi olsun. S 'yi ve $\mathbb{R}$ 'yi kapsayan en küçük alt cismi $(S)_{\mathbb{R}}$ şeklinde gösterelim.

Tanım 33 : $(S)_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\left(x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(m)}\right)^H$ ise S 'ye $\mathbb{R}\left(x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(m)}\right)^H$ cisminin üreteç cümlesi denir.

1.11. Polarizasyon Operatörü

Tanım 34 : $D_{yx} f(x) = y_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + ... + y_n \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ şeklinde tanımlı

$D_{yx} : \mathbb{R}[x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n] \to \mathbb{R}[x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n;\ y_1,\ y_2,\ ...,\ y_n]$ dönüşümüne polarizasyon operatörü denir.

Tanım 35 : H bir grup ve E, n-boyutlu vektör uzayı olsun.

$G(E) = \{A : E \to E \mid A$ tersi mevcut olan lineer operatör$\}$ cümlesi dönüşümlerin bileşke işlemine göre bir gruptur.

Bir $\psi : H \to G(E)$ homomorfizmasına H 'nin E 'deki bir lineer gösterimi denir.

Örnek 35 : $V = \mathbb{R}^{3+1}$, $H = O(3,1)$ olsun. $\psi : O(3,1) \to G(\mathbb{R}^{3+1})$, $g \to \psi_g$ olsun. ψ_g, $\forall x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^{3+1}$ için $\psi_g(x) = gx = g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (gx_1, gx_2, gx_3, gx_4)$ olarak tanımlansın. $\forall x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^{3+1}$ için $g_1, g_2 \in O(3,1)$ olmak üzere;

$$\psi_{g_1 \cdot g_2}(x) = (g_1 g_2)x = (g_1 g_2 x_1, g_1 g_2 x_2, g_1 g_2 x_3, g_1 g_2 x_4)$$

$$\begin{aligned}
(\psi_{g_1} \circ \psi_{g_2})(x) &= \psi_{g_1}(\psi_{g_2}(x)) = \psi_{g_1}(g_2.x) = \\
&= \psi_{g_1}(g_2 x_1, g_2 x_2, g_2 x_3, g_2 x_4) = g_1(g_2 x_1, g_2 x_2, g_2 x_3, g_2 x_4) = \\
&= (g_1(g_2 x_1), g_1(g_2 x_2), g_1(g_2 x_3), g_1(g_2 x_4)) = \\
&= (g_1 g_2 x_1, g_1 g_2 x_2, g_1 g_2 x_3, g_1 g_2 x_4)
\end{aligned}$$

olduğundan, her iki tarafın eşitliğinden $\psi_{g_1 \cdot g_2} = \psi_{g_1} \circ \psi_{g_2}$ elde edilir. Dolayısıyla ψ, $O(3,1)$ 'in $\mathbb{R}^{3+1}$ 'de bir lineer gösterimidir.

Örnek 36 : $D_{yx} : \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3, x_4] \to \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3, x_4; y_1, y_2, y_3, y_4]$ polarizasyon operatörü olmak üzere $O(3,1)$ grubunun $\mathbb{R}^{3+1}$ 'deki hareketini alalım.

$\forall x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^{3+1}$ noktasının invaryant fonksiyonunu $f(x) = \langle x, x \rangle =$ alalım.

Burada f 'ye polarizasyon operatörünü uygularsak

$D_{yx} f(x) = 2x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 2x_3 y_3 - 2x_4 y_4 = 2(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 y_4) = 2\langle x, y \rangle$ elde edilir.

Örnek 37 : $D_{yx}: \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3, x_4] \to \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3, x_4; y_1, y_2, y_3, y_4]$ polarizasyon operatörü olmak üzere $O(3,1)$ grubunun $\mathbb{R}^{3+1}$'deki hareketini alalım. $\forall x = (x_1, x_2, x_3, x_4), y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^{3+1}$ iki noktanın invaryant fonksiyonunu $f(x, y) = \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 y_4$ alalım. Burada f'ye polarizasyon operatörünü $y = x$ olarak alıp, uygularsak $D_{xx} f(x, y) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = \langle x, x \rangle = f(x, x)$ elde edilir. Benzer şekilde, $x = y$ alıp uygularsak $D_{yy} f(x, y) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 = \langle y, y \rangle = f(y, y)$ elde edilir.

Tanım 36 : H bir grup; E_1, n-boyutlu ve E_2, m-boyutlu iki vektör uzayı olsun. $\psi : H \to G(E_1)$, $\phi : H \to G(E_2)$ H'nin iki lineer gösterimi ve $\rho : E_1 \to E_2$ sıfırdan farklı bir lineer operatör olsun. $\forall k \in E_1$, $\forall h \in H$ için $(\rho \circ \psi(h))(k) = (\phi(h) \circ \rho)(k)$ ise ρ'ya H - *ekuvaryant* operatör denir.

$H \subset O(3,1)$ bir alt grup olmak üzere $\psi : H \to O(3,1)$, $\forall h \in H$ için $\psi(h) = h$ birim homomorfizmasını alalım. Bu gösterim yardımıyla $E_2 = \mathbb{R}[x_1, x_2, ..., x_n]$ polinomlar halkasında bir gösterim tanımlayacağız.

$\left(T_h^{(1)} f\right)(x) = f\left(\psi(h^{-1})x\right) = f(h^{-1}x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^{3+1}$ olarak alalım. Bu bir lineer gösterimdir. Gerçekten;

$\forall x \in \mathbb{R}^{3+1}$, $\forall f \in \mathbb{R}[x_1, x_2, ..., x_n]$, $h_1, h_2 \in H$ için;

$\left(T_{h_1 h_2}^{(1)} f\right)(x) = f\left((h_1 h_2)^{-1} x\right) = f\left(h_2^{-1} h_1^{-1} x\right)$

$f(h_2^{-1} x) = \omega(x)$ dersek;

$\left(T_{h_1 h_2}^{(1)} f\right)(x) = f\left(h_2^{-1} h_1^{-1} x\right) = T_{h_1}^{(1)} \omega(x) = T_{h_1}^{(1)}\left(\left(T_{h_2}^{(1)} f\right)(x)\right) = \left(T_{h_1}^{(1)}\left(T_{h_2}^{(1)} f\right)\right)(x)$ olur.

$\mathbb{R}[x_1, x_2, ..., x_n; y_1, y_2, ..., y_n]$'de başka bir $T_h^{(2)}$ gösterimini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$\sigma \in \mathbb{R}[x_1, x_2, ..., x_n; y_1, y_2, ..., y_n]$ için;

$\left(T_h^{(2)} \sigma\right)(x, y) = \sigma\left(\psi(h^{-1})x, \psi(h^{-1})y\right) = \sigma\left(h^{-1}x, h^{-1}y\right)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^{3+1}$

olarak verilirse bunun lineer gösterim olduğu yukarıdakine benzer şekilde yapılır.

Önerme 25 : $D_{yx} : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x, y]$ olmak üzere $\forall h \in H$ için

$D_{yx}\left(T_h^{(1)} f\right) = T_h^{(2)}\left(D_{yx} f\right)$'dir.

İspat: Aşağıda verilen P polinomunun MacLaurin açılımını göz önüne alalım:

$$P(\lambda)=P(0)+\lambda P'(0)+\frac{\lambda^2}{2!}P''(0)+...+\frac{\lambda^k}{k!}P^{(k)}(0)\,,\ \exists k\in\mathbb{N}$$

$$P(\lambda)=f\left(x+\lambda y\right)=f(x)+\lambda\frac{\partial f\left(x+\lambda y\right)}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=0}+...$$ elde edilir.

$$\frac{\partial f\left(x+\lambda y\right)}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=0}=\frac{\partial f\left(x_1+\lambda y_1,\ ...,x_n+\lambda y_n\right)}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=0}=$$

$$=\left(y_1\frac{\partial f}{\partial\left(x_1+\lambda y_1\right)}+...+y_n\frac{\partial f}{\partial\left(x_n+\lambda y_n\right)}\right)\bigg|_{\lambda=0}=y_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+...+y_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=D_{yx}f$$

olur. Dolayısıyla,

$f\left(x+\lambda y\right)=f(x)+\lambda D_{yx}f(x)+...$ elde edilir. $D_{yx}f=f_1\left(x,\ y\right)$ olsun. O halde;

$$f\left(h^{-1}\left(x+\lambda y\right)\right)=f\left(h^{-1}x+\lambda h^{-1}y\right)=f\left(h^{-1}x\right)+\lambda f_1\left(h^{-1}x,\ h^{-1}y\right)+...$$

elde edilir. Diğer taraftan $q(x)=f\left(h^{-1}x\right)$ olarak alırsak bu polinom için;

$q\left(x+\lambda y\right)=q(x)+\lambda q_1\left(x,\ y\right)+...$ olur. Dolayısıyla;

$$T_h^{(2)}\left(D_{yx}f(x)\right)=T_h^{(2)}f_1\left(x,\ y\right)=f_1\left(h^{-1}x,\ h^{-1}y\right)=D_{yx}q(x)=D_{yx}f\left(h^{-1}x\right)=D_{yx}\left(T_h^{(1)}f\right)$$

olup, $D_{yx}\left(T_h^{(1)}f\right)=T_h^{(2)}\left(D_{yx}f\right)$ elde edilir. Yani D_{yx} polarizasyon operatörü H - *ekuvaryant* operatördür.♦

Sonuç 3 : Eğer f, H - *invaryant* ise, $D_{yx}f$ de H - *invaryant*'tır.

İspat: $\forall h\in H$ için $T_h^{(1)}f(x)=f\left(h^{-1}x\right)=f(x)$'dir. Buradan;

$D_{yx}f(x)=D_{yx}f\left(h^{-1}x\right)=D_{yx}T_h^{(1)}f(x)=T_h^{(2)}D_{yx}f(x)$ olup, $D_{yx}f$, H - *invaryant*'tır. ♦

Sonuç 4 : $D_{y^{(m)}x}...D_{y^{(1)}x}$ operatörü H - *ekuvaryant* operatördür.

Sonuç 5 : f, H - *invaryant* ise, $D_{y^{(m)}x}...D_{y^{(1)}x}f$ de H - *invaryant*'tır.

1.12. Kapelli Denklikleri

$x',\ x\in\mathbb{R}^{3+1}$ olsun. $x'=\left(x_1',\ x_2',x_3',x_4'\right)$ ve $x=\left(x_1,\ x_2,x_3,x_4\right)$ olmak üzere;

$$D_{x'x} f = \sum_{i=1}^{4} x_i' \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \text{ve} \quad \Delta_{x'x} f = \sum_{i=1}^{4} x_i' \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

olarak gösterelim. Burada f, hangi değişkene göre türev alınıyorsa o değişkenlere bağlı polinom olarak alıyoruz. Bu takdirde $x' \neq y$ ise;

$$D_{y'y} D_{x'x} f = D_{y'y} \left(\sum_{i=1}^{4} x_i' \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \sum_{j=1}^{4} y_j' \cdot \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\sum_{i=1}^{4} x_i' \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \overset{x' \neq y \text{ ise}}{=} \sum_{i,\, j=1}^{4} y_j'.x_i' \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i . \partial y_j}$$

olarak gösterelim. Hiçbir koşul yoksa;

$$\Delta_{y'y} \Delta_{x'x} f := \sum_{i,\, j=1}^{4} y_j'.x_i' \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i . \partial y_j} \text{ olarak gösterelim.}$$

Üç tane vektör için bu aşağıdaki şekilde gösterelim.: $x' \neq y,\ x' \neq z,\ y' \neq z$ ise;

$$D_{z'z} D_{y'y} D_{x'x} f = D_{z'z} \sum_{i,\, j=1}^{4} y_j'.x_i' \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i . \partial y_j} = \sum_{i,\, j,\, k=1}^{4} z_k'.y_j'.x_i' \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial x_i . \partial y_j . \partial z_k}$$

olur. Hiçbir koşul yoksa;

$$\Delta_{z'z} \Delta_{y'y} \Delta_{x'x} f := \sum_{i,\, j,\, k=1}^{4} z_k'.y_j'.x_i' \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial x_i . \partial y_j . \partial z_k}$$

olarak gösterelim. $x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,\ x^{(m)}$ m tane vektör için $k < r$ olmak üzere $\overline{x}^{(k)} \neq x^{(r)}$ ise;

$$D_{\overline{x}^{(m)} x^m} D_{\overline{x}^{(m-1)} x^{(m-1)}} ... D_{\overline{x}^{(1)} x^{(1)}} f = \sum_{i_1,\, ...,\, i_m=1}^{4} \overline{x}_{i_1}^{(1)} ... \overline{x}_{i_m}^{(m)} \cdot \frac{\partial^{(m)} f}{\partial x_{i_1}^{(1)} ... \partial x_{i_m}^{(m)}}$$

olarak ifade edilir. Hiçbir koşul yoksa;

$$\Delta_{\overline{x}^{(m)} x^{(m)}} \Delta_{\overline{x}^{(m-1)} x^{(m-1)}} ... \Delta_{\overline{x}^{(1)} x^{(1)}} f = \sum_{i_1,\, ...,\, i_m=1}^{4} \overline{x}_{i_1}^{(1)} ... \overline{x}_{i_m}^{(m)} \cdot \frac{\partial^{(m)} f}{\partial x_{i_1}^{(1)} ... \partial x_{i_m}^{(m)}}$$

olarak ifade edilir.

$D_{y'y} \Delta_{x'x} f$ olarak aldığımızda bu aşağıdaki gibi değişir:

$$D_{y'y} \Delta_{x'x} f = \sum_{j=1}^{4} y_j' \cdot \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\sum_{i=1}^{4} x_i' \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \sum_{i,\, j=1}^{4} y_j'.x_i' \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i . \partial y_j} + \delta_{yx'} . \sum_{i,\, j=1}^{4} y_j' \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} =$$

$$= \Delta_{y'y} \Delta_{x'x} f + \delta_{yx'} . \Delta_{y'x} f = \begin{cases} \Delta_{y'y} \Delta_{x'x} f + \Delta_{y'x} f, & y = x' \\ \Delta_{y'y} \Delta_{x'x} f, & y \neq x' \end{cases}$$

Burada $\delta_{yx^1} = \begin{cases} 1, y = x^1 \\ 0, y \neq x^1 \end{cases}$ dir.

Üç vektör için bunu yazarsak;

$$D_{z'z}\Delta_{y'y}\Delta_{x'x}f=\sum_{k=1}^{4}z_k{}'\cdot\frac{\partial}{\partial z_k}\left(\sum_{i,\,j=1}^{4}y_j{}'.x_i{}'\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x_i.\partial y_j}\right)=$$

$$=\sum_{i,\,j,\,k=1}^{4}z_k{}'.y_j{}'.x_i{}'\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x_i.\partial y_j.\partial z_k}+\delta_{zx'}.\sum_{i,\,j=1}^{4}z_i{}'.y_j{}'\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x_i.\partial y_j}+\delta_{zy'}.\sum_{i,\,j=1}^{4}z_j{}'.x_i{}'\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x_i.\partial y_j}=$$

$$=\Delta_{z'z}\Delta_{y'y}\Delta_{x'x}f+\delta_{zx'}.\Delta_{y'y}\Delta_{z'x}f+\delta_{zy'}.\Delta_{x'x}\Delta_{z'y}f$$

şeklinde olur.

m tane vektör için yazarsak;

$$D_{\overline{x}^{(m)}x^{(m)}}\Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(m-1)}}\ldots\Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(1)}}f=\sum\overline{x}_{i_m}^{(m)}\cdot\frac{\partial}{\partial x_{i_m}^{(m)}}\left(\sum\overline{x}_{i_1}^{(1)}\ldots\overline{x}_{i_{m-1}}^{(m-1)}\cdot\frac{\partial^{m-1}f}{\partial x_{i_1}^{(1)}\ldots\partial x_{i_{m-1}}^{(m-1)}}\right)=$$

$$=\sum\overline{x}_{i_1}^{(1)}\ldots\overline{x}_{i_m}^{(m)}\cdot\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}^{(1)}\ldots\partial x_{i_m}^{(m)}}+\delta_{x^{(m)}\overline{x}^{(1)}}\cdot\left(\sum\overline{x}_{i_1}^{(m)}\ldots\overline{x}_{i_{m-1}}^{(m-1)}\cdot\frac{\partial^{m-1}f}{\partial x_{i_1}^{(1)}\ldots\partial x_{i_{m-1}}^{(m-1)}}\right)+$$

$$+\delta_{x^{(m)}\overline{x}^{(2)}}\cdot\left(\sum\overline{x}_{i_1}^{(1)}.\overline{x}_{i_2}^{(2)}\ldots\overline{x}_{i_{m-1}}^{(m-1)}\cdot\frac{\partial^{m-1}f}{\partial x_{i_1}^{(1)}\ldots\partial x_{i_{m-1}}^{(m-1)}}\right)+\ldots+$$

$$+\delta_{x^{(m)}\overline{x}^{(m-1)}}\cdot\left(\sum\overline{x}_{i_1}^{(1)}\ldots\overline{x}_{i_{m-2}}^{(m-2)}.\overline{x}_{i_{m-1}}^{(m)}\cdot\frac{\partial^{m-1}f}{\partial x_{i_1}^{(1)}\ldots\partial x_{i_{m-1}}^{(m-1)}}\right)=$$

$$=\Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(m)}}\Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(m-1)}}\ldots\Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(1)}}f+\delta_{x^{(m)}\overline{x}^{(1)}}.\Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(m-1)}}\ldots\Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(1)}}f+$$

$$+\delta_{x^{(m)}\overline{x}^{(2)}}.\Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(m-1)}}\ldots\Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(2)}}\Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(1)}}f+\ldots+$$

$$+\delta_{x^{(m)}\overline{x}^{(m-1)}}.\Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(m-1)}}\ldots\Delta_{\overline{x}^{(2)}x^{(2)}}\Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(1)}}f$$

şeklinde olur.

Bir alterne toplam şu şekilde açılır:

$$\sum\operatorname{sgn}(i_1,\ i_2).D_{\overline{x}^{(i_1)}\overline{x}^{(i_2)}}=D_{\overline{x}^{(1)}\overline{x}^{(2)}}-D_{\overline{x}^{(2)}\overline{x}^{(1)}}$$

$$\sum\operatorname{sgn}(i_1,\ i_2,\ i_3).D_{\overline{x}^{(i_1)}\overline{x}^{(i_2)}\overline{x}^{(i_3)}}=D_{\overline{x}^{(1)}\overline{x}^{(2)}\overline{x}^{(3)}}+D_{\overline{x}^{(3)}\overline{x}^{(1)}\overline{x}^{(2)}}+D_{\overline{x}^{(2)}\overline{x}^{(3)}\overline{x}^{(1)}}-$$

$$-D_{\overline{x}^{(3)}\overline{x}^{(2)}\overline{x}^{(1)}}-D_{\overline{x}^{(2)}\overline{x}^{(1)}\overline{x}^{(3)}}-D_{\overline{x}^{(1)}\overline{x}^{(3)}\overline{x}^{(2)}}$$

Burada $\operatorname{sgn}(i_1,\ i_2,\ i_3)$, permütasyonun çift ya da tek olmasına göre 1 ya da -1'e eşittir.

$\sum\operatorname{sgn}(i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_m).D_{\overline{x}^{(m)}x^{(i_m)}}.\Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(i_{m-1})}}\ldots\Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(i_1)}}f$ alterne toplamını alalım. Bu ifadeyi determinant olarak şu şekilde yazabiliriz:

$$\begin{vmatrix} D_{\overline{x}^{(m)}x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(1)}} \\ D_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{\overline{x}^{(1)}x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f$$

$$\sum_{\overline{x}^{(m)},\,...,\,\overline{x}^{(1)}} \operatorname{sgn}\left(i_1,\ i_2,\ ...,\ i_m\right).D_{\overline{x}^{(m)}x^{(i_m)}}.\Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(i_{m-1})}}...\Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(i_1)}}\ f =$$

$$= \sum_{\overline{x}^{(m)},\,...,\,\overline{x}^{(1)}} \operatorname{sgn}\left(i_1,\ i_2,\ ...,\ i_m\right).\Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(i_m)}}...\Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(i_1)}}\ f +$$

$$+ \sum_{\overline{x}^{(m)},\,...,\,\overline{x}^{(1)}} \operatorname{sgn}\left(i_1,\ i_2,\ ...,\ i_m\right).\left(\sum_{k=1}^{m-1} \delta_{x^{(m)}\overline{x}^{(i_k)}}.\left(\Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(i_{m-1})}}...\Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(i_k)}}...\Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(i_1)}}\ f\right)\right) =$$

$$= \sum \operatorname{sgn}\left(i_1,\ i_2,\ ...,\ i_m\right).\Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(i_m)}}...\Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(i_1)}}\ f - (m-1).\sum \operatorname{sgn}\left(i_1,\ i_2,\ ...,\ i_m\right).\delta_{x^{(m)}\overline{x}^{(i_m)}}.\Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(i_{m-1})}}...\Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(i_1)}}\ f$$

Buradan;

$$\sum \operatorname{sgn}\left(i_1,\ i_2,\ ...,\ i_m\right).\left(D_{\overline{x}^{(m)}x^{(i_m)}} + (m-1).\delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(i_m)}}\right)\Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(i_{m-1})}}...\Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(i_1)}}\ f =$$

$$= \sum \operatorname{sgn}\left(i_1,\ i_2,\ ...,\ i_m\right).\Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(i_m)}}...\Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(i_1)}}\ f \tag{32}$$

elde edilir. Bu eşitliği determinantlar yardımıyla şu şekilde ifade edebiliriz:

$$\begin{vmatrix} D_{\overline{x}^{(m)}x^{(m)}} + (m-1).\delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(1)}} \\ D_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(m)}} + (m-1).\delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{\overline{x}^{(1)}x^{(m)}} + (m-1).\delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(1)}} \\ \Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f$$

$\overline{x}^{(k)} = x^{(k)}$ ve $x^{(k)} \neq x^{(l)},\ k \neq l\ \left(k,\ l = 1,\ ...,\ m\right)$ olarak alırsak aşağıdaki determinantı elde ederiz:

$$\begin{vmatrix} D_{\overline{x}^{(m)}x^{(m)}} + (m-1) & \Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(1)}} \\ D_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{\overline{x}^{(1)}x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(1)}} \\ \Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f$$

$\overline{x}^{(m)} = x^{(m+1)},\ \overline{x}^{(m-1)} = x^{(m)},\ ...,\ \overline{x}^{(1)} = x^{(2)}$ olarak alırsak aşağıdaki determinantı elde ederiz:

$$\begin{vmatrix} D_{\overline{x}^{(m+1)}x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(m+1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(m+1)}x^{(1)}} \\ D_{\overline{x}^{(m)}x^{(m)}} + (m-1) & \Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{\overline{x}^{(2)}x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(2)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(2)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \Delta_{\overline{x}^{(m+1)}x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(m+1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(m+1)}x^{(1)}} \\ \Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{\overline{x}^{(2)}x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(2)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(2)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f$$

Bunların hepsini sembolik olarak şöyle ifade edebiliriz:

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{x^{(m+1)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(m+1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m+1)}x^{(1)}} \\ D_{x^{(m)}x^{(m)}}+(m-1) & \Delta_{x^{(m)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m)}x^{(1)}} \\ D_{x^{(m-1)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(m-1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{x^{(1)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{x^{(m+1)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(m+1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m+1)}x^{(1)}} \\ \Delta_{x^{(m)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(m)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m)}x^{(1)}} \\ \Delta_{x^{(m-1)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(m-1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{x^{(1)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f$$

$m \geq 1$ için keyfi minörler karşılıklı olarak birbirine eşittir. Bunu kullanarak aşağıdaki eşitliği göstermek istiyoruz:

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{x^{(m+1)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(m+1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m+1)}x^{(1)}} \\ \Delta_{x^{(m)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(m)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m)}x^{(1)}} \\ \Delta_{x^{(m-1)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(m-1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{x^{(1)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f$$

ifadesini F şeklinde gösterelim. Buradan;

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{x^{(m+1)}x^{(m)}} & D_{x^{(m+1)}x^{(m-1)}} & \cdots & D_{x^{(m+1)}x^{(1)}} \\ D_{x^{(m)}x^{(m)}}+(m-1) & D_{x^{(m)}x^{(m-1)}} & \cdots & D_{x^{(m)}x^{(1)}} \\ D_{x^{(m-1)}x^{(m)}} & D_{x^{(m-1)}x^{(m-1)}}+(m-2) & \cdots & D_{x^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{x^{(1)}x^{(m)}} & D_{x^{(1)}x^{(m-1)}} & \cdots & D_{x^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f = F \qquad (33)$$

eşitliği elde edilir. Bunun anlamı keyfi $m.$dereceli minörlerinin eşit olması demektir.

Önerme 26 : $\begin{vmatrix} \vdots \\ D_{zx} \\ D_{yx} \\ D_{xx} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \vdots \\ \Delta_{zx} \\ \Delta_{yx} \\ \Delta_{xx} \end{vmatrix} f$ dir.

Bunun anlamı karşılık gelen minörlerin eşit olmasıdır. Yani;

$D_{xx} f = \Delta_{xx} f$, $D_{yx} f = \Delta_{yx} f$, $D_{zx} f = \Delta_{zx} f$, ...

İspat: $D_{zx} f = \sum_{i=1}^{4} z_i . \frac{\partial f}{\partial x_i}$ ve $\Delta_{zx} f = \sum_{i=1}^{4} z_i . \frac{\partial f}{\partial x_i}$ olduğundan $D_{zx} f = \Delta_{zx} f$ elde edilir. Özel olarak $D_{xx} f = \Delta_{xx} f$ ’dir. ♦

Önerme 27 : $\begin{vmatrix} \vdots & \vdots \\ D_{zy} & \Delta_{zx} \\ D_{yy}+1 & \Delta_{yx} \\ D_{xy} & \Delta_{xx} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots \\ \Delta_{zy} & \Delta_{zx} \\ \Delta_{yy} & \Delta_{yx} \\ \Delta_{xy} & \Delta_{xx} \end{vmatrix} f$ 'dir. Bunun anlamı;

$$\begin{vmatrix} D_{yy}+1 & \Delta_{yx} \\ D_{xy} & \Delta_{xx} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \Delta_{yy} & \Delta_{yx} \\ \Delta_{xy} & \Delta_{xx} \end{vmatrix} f \,,\ \left(\left(D_{yy}+1\right).\Delta_{xx} - D_{xy}.\Delta_{yx}\right) f = \left(\Delta_{yy}.\Delta_{xx} - \Delta_{xy}.\Delta_{yx}\right) f$$

$$\begin{vmatrix} D_{zy} & \Delta_{zx} \\ D_{xy} & \Delta_{xx} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \Delta_{zy} & \Delta_{zx} \\ \Delta_{xy} & \Delta_{xx} \end{vmatrix} f \,,\ \begin{vmatrix} D_{zy} & \Delta_{zx} \\ D_{yy}+1 & \Delta_{yx} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \Delta_{zy} & \Delta_{zx} \\ \Delta_{yy} & \Delta_{yx} \end{vmatrix} f \text{ , ... demektir.}$$

İspat: (32) eşitliğinden $m = 2$ durumunda,

$$\sum \pm \left(D_{\overline{x}^{(2)}x^{(2)}} + \delta_{\overline{x}^{(2)}x^{(2)}}\right).\Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(1)}} f = \sum \pm \Delta_{\overline{x}^{(2)}x^{(2)}}.\Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(1)}} f$$

elde edilir. Burada $\overline{x}^{(2)} = y$, $x^{(2)} = y$, $\overline{x}^{(1)} = x$, $x^{(1)} = x$ olarak alırsak yukarıdaki eşitliği şu şekilde yazabiliriz:

$$\sum \pm \left(\left(D_{yy}+1\right).\Delta_{xx}\right) f = \sum \pm \left(\Delta_{yy}.\Delta_{xx}\right) f$$

Bu ifadenin determinant olarak ifadesi şu şekildedir:

$$\begin{vmatrix} D_{yy}+1 & \Delta_{yx} \\ D_{xy} & \Delta_{xx} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \Delta_{yy} & \Delta_{yx} \\ \Delta_{xy} & \Delta_{xx} \end{vmatrix} f \,,\ \left(D_{yy}+1\right).\Delta_{xx} f - D_{xy}.\Delta_{yx} f = \Delta_{yy}.\Delta_{xx} f - \Delta_{xy}.\Delta_{yx} f$$

$m = 2$ genel durumunda $\overline{x}^{(2)} = z$, $x^{(2)} = y$, $\overline{x}^{(1)} = y$, $x^{(1)} = x$ olarak alırsak;

$$\sum \pm \left(D_{zy} + \delta_{zy}\right).\Delta_{yx} f = \sum \pm \left(\Delta_{zy}.\Delta_{yx}\right) f$$

elde ederiz. Alterne toplam açılırsa;

$\left(D_{zy}.\Delta_{yx} - \left(D_{yy}+1\right).\Delta_{zx}\right) f = \left(\Delta_{zy}.\Delta_{yx} - \Delta_{yy}.\Delta_{zx}\right) f$ elde edilir. Bunun determinant olarak yazılışı şöyledir:

$$\begin{vmatrix} D_{zy} & \Delta_{zx} \\ D_{yy}+1 & \Delta_{yx} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \Delta_{zy} & \Delta_{zx} \\ \Delta_{yy} & \Delta_{yx} \end{vmatrix} f$$

Üçüncü determinant $\overline{x}^{(2)} = z$, $x^{(2)} = y$, $\overline{x}^{(1)} = y$, $x^{(1)} = x$ alınarak benzer şekilde yapılabilir. Bu şekilde bütün determinantların eşitliği görülür.

Şimdi (33) eşitliğini göstermeye çalışalım:

$m = 1$ için bu eşitlik;

$$\begin{vmatrix} \vdots \\ D_{x^{(m)}x^{(1)}} \\ D_{x^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \vdots \\ D_{x^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \vdots \\ \Delta_{x^{(m)}x^{(1)}} \\ \Delta_{x^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \vdots \\ \Delta_{x^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f$$

$\forall i,\, j \in \mathbb{N}^{+}$ için $D_{x^{(i)}x^{(j)}} f = \Delta_{x^{(i)}x^{(j)}} f$ olduğundan yukarıdaki ilk önermeden dolayı eşitlik doğrudur.

$m-1$ için doğru olsun. Yani;

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{x^{(m)}x^{(m-1)}} & D_{x^{(m)}x^{(m-2)}} & \cdots & D_{x^{(m)}x^{(1)}} \\ D_{x^{(m-1)}x^{(m-1)}} + (m-2) & D_{x^{(m-1)}x^{(m-2)}} & \cdots & D_{x^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{x^{(1)}x^{(m-1)}} & D_{x^{(1)}x^{(m-2)}} & \cdots & D_{x^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{x^{(m)}x^{(m-1)}} & \Delta_{x^{(m)}x^{(m-2)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m)}x^{(1)}} \\ \Delta_{x^{(m-1)}x^{(m-1)}} & \Delta_{x^{(m-1)}x^{(m-2)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{x^{(1)}x^{(m-1)}} & \Delta_{x^{(1)}x^{(m-2)}} & \cdots & \Delta_{x^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f$$

olsun.

m için bu eşitliği gösterelim:

$$\begin{vmatrix} D_{x^{(m)}x^{(m)}} + (m-1) & \Delta_{x^{(m)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m)}x^{(1)}} \\ D_{x^{(m-1)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(m-1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{x^{(1)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \Delta_{x^{(m)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(m)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m)}x^{(1)}} \\ \Delta_{x^{(m-1)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(m-1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{x^{(1)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f$$

olduğunu biliyoruz. Buradan şunu elde ederiz:

$$\left(D_{x^{(m)}x^{(m)}} + (m-1)\right).M_{x^{(m)}x^{(m)}} + D_{x^{(m-1)}x^{(m)}}.M_{x^{(m-1)}x^{(m)}} + \ldots + D_{x^{(1)}x^{(m)}}.M_{x^{(1)}x^{(m)}} =$$

$$= \left(D_{x^{(m)}x^{(m)}} + (m-1)\right).M^{D}_{x^{(m)}x^{(m)}} + D_{x^{(m-1)}x^{(m)}}.M^{D}_{x^{(m-1)}x^{(m)}} + \ldots + D_{x^{(1)}x^{(m)}}.M^{D}_{x^{(1)}x^{(m)}}$$

Burada $M_{x^{(i)}x^{(m)}} = \begin{vmatrix} \Delta_{x^{(m)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{x^{(i+1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(i+1)}x^{(1)}} \\ \Delta_{x^{(i-1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(i-1)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{x^{(1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix}$, $i = 1,\ \ldots,\ m$’dir. M^{D} ise bu determinantın D

operatörüne göre yazılmış halidir. Bununla eşitlik gösterilmiş olur.

$$\sum_{x^{(m)},\ \dots,\ x^{(1)}} \pm\Delta_{x^{(m)}x^{(m)}}\dots\Delta_{x^{(1)}x^{(1)}} f = \sum_{x^{(m)},\ \dots,\ x^{(1)}} \pm\left(\sum_{i_1,\ \dots,\ i_m} x_{i_1}^{(1)}\dots x_{i_m}^{(m)}\cdot\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}^{(1)}\dots\partial x_{i_m}^{(m)}}\right)=$$

$$=\sum_{i_1,\ \dots,\ i_m}\left(\sum_{x^{(m)},\ \dots,\ x^{(1)}} \pm x_{i_1}^{(1)}\dots x_{i_m}^{(m)}\right)\cdot\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}^{(1)}\dots\partial x_{i_m}^{(m)}}$$

Burada $\sum\limits_{x^{(m)},\ \dots,\ x^{(1)}} \pm x_{i_1}^{(1)}\dots x_{i_m}^{(m)}$ şudur:

$$\sum_{x^{(m)},\ \dots,\ x^{(1)}} \pm x_{i_1}^{(1)}\dots x_{i_m}^{(m)} = \begin{vmatrix} x_{i_1}^{(1)} & x_{i_1}^{(2)} & \cdots & x_{i_1}^{(m)} \\ x_{i_2}^{(1)} & x_{i_2}^{(2)} & \cdots & x_{i_2}^{(m)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{i_m}^{(1)} & x_{i_m}^{(2)} & \cdots & x_{i_m}^{(m)} \end{vmatrix}$$

i_k, $(k=1,\ \dots,\ m)$’lar farklı değilse bu determinant sıfır olur. Eğer $m>n$ ise i_k’lar farklı olamaz ve determinant sıfır olur. $m=n$ ve içinde eşit olanlar varsa yine determinant sıfıra eşit olur. $m=n$ ve i_k’lar farklı ise $(i_1,\ i_2,\ \dots,\ i_n)$’nin bir permütasyonudur. Buradan;

$$\begin{vmatrix} x_{i_1}^{(1)} & x_{i_1}^{(2)} & \cdots & x_{i_1}^{(n)} \\ x_{i_2}^{(1)} & x_{i_2}^{(2)} & \cdots & x_{i_2}^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{i_n}^{(1)} & x_{i_n}^{(2)} & \cdots & x_{i_n}^{(n)} \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(i_1,\ \dots,\ i_n).\begin{vmatrix} x_{i_1}^{(1)} & x_{i_1}^{(2)} & \cdots & x_{i_1}^{(n)} \\ x_{i_2}^{(1)} & x_{i_2}^{(2)} & \cdots & x_{i_2}^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{i_n}^{(1)} & x_{i_n}^{(2)} & \cdots & x_{i_n}^{(n)} \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(i_1,\ \dots,\ i_n).\left[x^{(1)}x^{(2)}\dots x^{(n)}\right]$$

olur. Buradan;

$$\sum_{i_1,\ \dots,\ i_m=1}^{4}\left(\sum \operatorname{sgn}(i_1,\ \dots,\ i_m).x_{i_m}^{(m)}\dots x_{i_1}^{(1)}\right)\cdot\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m}^{(m)}\dots\partial x_{i_1}^{(1)}} = \sum_{i_1,\ \dots,\ i_n=1}^{4}\operatorname{sgn}(i_1,\ \dots,\ i_n).\left[x^{(1)}\dots x^{(n)}\right]\cdot\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n}^{(n)}\dots\partial x_{i_1}^{(1)}}=$$

$$=\left[x^{(1)}\dots x^{(n)}\right].\sum_{i_1,\ \dots,\ i_n}\operatorname{sgn}(i_1,\ \dots,\ i_n)\cdot\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n}^{(n)}\dots\partial x_{i_1}^{(1)}}$$

$\sum\limits_{i_1,\ \dots,\ i_n}\operatorname{sgn}(i_1,\ \dots,\ i_n)\cdot\dfrac{\partial^n f}{\partial x_{i_n}^{(n)}\dots\partial x_{i_1}^{(1)}}$ operatörüne Cayley operatörü denir ve Ωf şeklinde gösterilir. O halde yukarıdaki eşitlik şu hali alır:

$$\sum_{i_1,\ \dots,\ i_m=1}^{4}\left(\sum \operatorname{sgn}(i_1,\ \dots,\ i_m).x_{i_m}^{(m)}\dots x_{i_1}^{(1)}\right)\cdot\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m}^{(m)}\dots\partial x_{i_1}^{(1)}} = \left[x^{(1)}x^{(2)}\dots x^{(n)}\right].\Omega f \ \blacklozenge$$

Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış olur:

Teorem 5:

$$\begin{vmatrix} D_{x^{(m)}x^{(m)}}+(m-1) & D_{x^{(m)}x^{(m-1)}} & \cdots & D_{x^{(m)}x^{(1)}} \\ D_{x^{(m-1)}x^{(m)}} & D_{x^{(m-1)}x^{(m-1)}}+(m-2) & \cdots & D_{x^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{x^{(1)}x^{(m)}} & D_{x^{(1)}x^{(m-1)}} & \cdots & D_{x^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f = \begin{cases} 0 & , m>4 \\ \left[x^{(1)}x^{(2)}x^{(3)}x^{(4)}\right]\Omega f & , m=4 \end{cases}$$

(34)

Teorem 6 : Eğer f, derecesi m olan homojen bir polinom ise $\left(D_{yx}f\right)_{y=x}=m.f$ 'dir.

İspat: $\left(D_{yx}f\right)_{y=x}=\sum_{i=1}^{4}x_i\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ olduğunu biliyoruz. $\lambda\in\mathbb{R}$ için f, $m.$ dereceli bir polinom olduğundan;

$$f\left(\lambda.x_1,\ \lambda.x_2,\ ...,\ \lambda.x_n\right)=\lambda^m.f\left(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\right)$$

olur. Buradan her iki tarafın türevi alalım: $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ için;

$$\frac{\partial f\left(\lambda.x_1,\ ...,\ \lambda.x_n\right)}{\partial\lambda}=\frac{\partial f}{\partial\left(\lambda.x_1\right)}\left(\lambda.x_1\right)_\lambda'+...+\frac{\partial f}{\partial\left(\lambda.x_n\right)}\left(\lambda.x_n\right)_\lambda'=m.\lambda^{m-1}.f\left(x_1,\ ...,\ x_n\right)$$

ve $\lambda=1$ için $x_1\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x_1}+...+x_n\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x_n}=m.f\left(x_1,\ ...,\ x_n\right)$ elde edilir. ♦

Önerme 28 : f, m dereceli homojen bir polinom olsun. Bu takdirde;

$D_{y^{(m)}x}.D_{y^{(m-1)}x}...D_{y^{(1)}x}f(x)|_{y^{(m)}=...=y^{(1)}=x}=m!.f(x)$ 'dir.

İspat: $f(x)$, x değişkenine göre m dereceli olduğundan;

$D_{y^{(1)}x}f(x)$ x değişkenine göre $m-1$ dereceli,

$D_{y^{(2)}x}D_{y^{(1)}x}f(x)$ x değişkenine göre $m-2$ dereceli,

....

$D_{y^{(m)}x}...D_{y^{(1)}x}f(x)$ x değişkenine göre 0 derecelidir.

Buradan Teorem 6'dan dolayı;

$$D_{y^{(m)}x}\left(D_{y^{(m-1)}x}...D_{y^{(1)}x}f(x)\right)|_{y^{(m)}=x}=1.D_{y^{(m-1)}x}...D_{y^{(1)}x}f(x)$$

$$D_{y^{(m-1)}x}\left(D_{y^{(m-2)}x}...D_{y^{(1)}x}f(x)\right)|_{y^{(m-1)}=x}=2.D_{y^{(m-2)}x}...D_{y^{(1)}x}f(x)$$

$$D_{y^{(m-2)}x}\left(D_{y^{(m-3)}x}...D_{y^{(1)}x}f(x)\right)|_{y^{(m-2)}=x}=3.D_{y^{(m-3)}x}...D_{y^{(1)}x}f(x)$$

$$\vdots$$

$$D_{y^{(1)}x}f(x)|_{y^{(1)}=x}=m.f(x)$$

elde edilir. Buradan;

$$D_{y^{(m)}x}\left(D_{y^{(m-1)}x}\left(D_{y^{(m-2)}x}\left(\ldots\left(D_{y^{(1)}x}f(x)\right)\right)\right)\right)|_{y^{(m)}=\ldots=y^{(1)}=x}=$$
$$=1.\left(D_{y^{(m-1)}x}\left(D_{y^{(m-2)}x}\left(\ldots\left(D_{y^{(1)}x}f(x)\right)\right)\right)\right)|_{y^{(m-1)}=\ldots=y^{(1)}=x}$$
$$=1.2.\left(D_{y^{(m-2)}x}\left(\ldots\left(D_{y^{(1)}x}f(x)\right)\right)\right)|_{y^{(m-2)}=\ldots=y^{(1)}=x}$$
$$=1.2.3.\left(D_{y^{(m-3)}x}\left(\ldots\left(D_{y^{(1)}x}f(x)\right)\right)\right)|_{y^{(m-3)}=\ldots=y^{(1)}=x}$$
$$=\ldots$$
$$=1.2.3...m.f(x)$$
$$=m!.f(x)$$

elde edilir. ♦

1.13. Kapelli Denklikleri Yardımıyla 1.Esas Teoremin İndirgenmesi

$r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m$ sonlu doğal sayılar olmak üzere,

$S_r:=\{(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m):r=r_1+r_2+...+r_m,\ r_i\geq 0,\ i=1,\ 2,\ ...,\ m\}$ olarak alalım.

$|S_r|\leq(r+1)^m$ olduğundan S_r sonlu cümledir. S_r üzerinde bir sıralama tanımlayacağız.

Tanım 37 : $(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m),\ (s_1,\ s_2,\ ...,\ s_m)\in S_r$ olsun.

Bir k $(1\leq k\leq m)$ için; $r_1=s_1,\ ...,\ r_{k-1}=s_{k-1}$ ve $r_k<s_k$ ise $(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m)<(s_1,\ s_2,\ ...,\ s_m)$ denir.

$\forall i=1,\ 2,\ ...,\ m$ için; $r_i=s_i$ ise $(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m)=(s_1,\ s_2,\ ...,\ s_m)$ denir.

Eğer $(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m)<(s_1,\ s_2,\ ...,\ s_m)$ veya $(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m)=(s_1,\ s_2,\ ...,\ s_m)$ ise $(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m)\leq(s_1,\ s_2,\ ...,\ s_m)$ denir.

Önerme 29: "$\leq$" bağıntısı S_r üzerinde bir sıralama bağıntısıdır.

İspat: "$\leq$" bağıntısının sıralama bağıntısı olduğunu göstermek için yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerini sağladığını göstermemiz gerekir. Şimdi bunları gösterelim:

1) $\forall(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m)\in S_r$ için;

$(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m)=(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m)$ olduğundan $(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m)\leq(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m)$'dir.

2) $\forall(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m),\ (s_1,\ s_2,\ ...,\ s_m)\in S_r$ için;

$(r_1, r_2, ..., r_m) \leq (s_1, s_2, ..., s_m)$ ve $(s_1, s_2, ..., s_m) \leq (r_1, r_2, ..., r_m)$ olsun. Farz edelim; $(r_1, r_2, ..., r_m) \neq (s_1, s_2, ..., s_m)$ olsun. Bu durumda en küçük bir $i = 1, ..., m$ mevcuttur ki $r_i \neq s_i$'dir. Yani $(r_1, ..., r_{i-1}, r_i, ..., r_m) \neq (s_1, ..., s_{i-1}, s_i, ..., s_m)$'dir. $r_i \neq s_i$ olduğundan $r_i < s_i$ veya $s_i < r_i$'dir.

$r_i < s_i$ ise $(r_1, r_2, ..., r_m) < (s_1, s_2, ..., s_m)$'dir. Fakat $(s_1, s_2, ..., s_m) \leq (r_1, r_2, ..., r_m)$ koşulu sağlanmadığından bu bir çelişkidir.

$s_i < r_i$ ise $(s_1, s_2, ..., s_m) < (r_1, r_2, ..., r_m)$'dir. Fakat $(r_1, r_2, ..., r_m) \leq (s_1, s_2, ..., s_m)$ koşulu sağlanmadığından bu da bir çelişkidir.

Dolayısıyla $(r_1, r_2, ..., r_m) = (s_1, s_2, ..., s_m)$ olmak zorundadır.

3) $\forall (r_1, r_2, ..., r_m), (s_1, s_2, ..., s_m), (t_1, t_2, ..., t_m) \in S_r$ için;

$(r_1, r_2, ..., r_m) \leq (s_1, s_2, ..., s_m)$ ve $(s_1, s_2, ..., s_m) \leq (t_1, t_2, ..., t_m)$ olsun.

3.1) $(r_1, r_2, ..., r_m) = (s_1, s_2, ..., s_m)$ ve $(s_1, s_2, ..., s_m) = (t_1, t_2, ..., t_m)$ ise;

$(r_1, r_2, ..., r_m) = (t_1, t_2, ..., t_m)$ olduğundan, $(r_1, r_2, ..., r_m) \leq (t_1, t_2, ..., t_m)$ olur.

3.2) $(r_1, r_2, ..., r_m) = (s_1, s_2, ..., s_m)$ ve $(s_1, s_2, ..., s_m) < (t_1, t_2, ..., t_m)$ ise;

$(r_1, r_2, ..., r_m) < (t_1, t_2, ..., t_m)$ olduğundan, $(r_1, r_2, ..., r_m) \leq (t_1, t_2, ..., t_m)$ olur.

3.3) $(r_1, r_2, ..., r_m) < (s_1, s_2, ..., s_m)$ ve $(s_1, s_2, ..., s_m) = (t_1, t_2, ..., t_m)$ ise;

$(r_1, r_2, ..., r_m) < (t_1, t_2, ..., t_m)$ olduğundan, $(r_1, r_2, ..., r_m) \leq (t_1, t_2, ..., t_m)$ olur.

$(r_1, r_2, ..., r_m) < (s_1, s_2, ..., s_m)$ ve $(s_1, s_2, ..., s_m) < (t_1, t_2, ..., t_m)$ olsun.

$(r_1, r_2, ..., r_m) < (s_1, s_2, ..., s_m)$ olduğundan $\exists k \in \mathbb{N}$ için $r_1 = s_1$, $r_2 = s_2$, ..., $r_{k-1} = s_{k-1}$ ve $r_k < s_k$'dır.

$(s_1, s_2, ..., s_m) < (t_1, t_2, ..., t_m)$ olduğundan $\exists l \in \mathbb{N}$ için $s_1 = t_1$, $s_2 = t_2$, ..., $s_{l-1} = t_{l-1}$ ve $s_l < t_l$'dir.

a) $k = l$ ise

$(r_1, r_2, ..., r_{k-1}, r_k, r_{k+1}, ..., r_m) < (r_1, r_2, ..., r_{k-1}, s_k, s_{k+1}, ..., s_m)$ ve

$(r_1, r_2, ..., r_{k-1}, s_k, s_{k+1}, ..., s_m) < (r_1, r_2, ..., r_{k-1}, t_k, t_{k+1}, ..., t_m)$ olur.

$r_i = s_i = t_i$, $i = 1, 2, ..., k-1$ ve $r_k < s_k < t_k$ olduğundan $r_k < t_k$ 'dır. Buradan $(r_1, r_2, ..., r_m) < (t_1, t_2, ..., t_m)$ elde edilir.

b) $k < l$ ise

$(r_1, r_2, ..., r_{k-1}, r_k, r_{k+1}, ..., r_l, ..., r_m) < (r_1, r_2, ..., r_{k-1}, s_k, s_{k+1}, ..., s_l, ..., s_m)$ ve $(r_1, r_2, ..., r_{k-1}, s_k, ..., s_{l-1}, s_l, s_{l+1}, ..., s_m) < (r_1, r_2, ..., r_{k-1}, s_k, ..., s_{l-1}, t_l, t_{l+1}, ..., t_m)$ olur. k. bileşen için $r_i = s_i = t_i$, $i = 1, 2, ..., k-1$ ve $r_k < s_k = t_k$ olduğundan $r_k < t_k$ elde edilir ki buradan $(r_1, r_2, ..., r_m) < (t_1, t_2, ..., t_m)$ olur.

c) $k > l$ ise $(r_1, r_2, ..., r_{l-1}, r_l, ..., r_{k-1}, r_k, ..., r_m) < (r_1, r_2, ..., r_{l-1}, r_l, ..., r_{k-1}, s_k, ..., s_m)$ ve $(r_1, r_2, ..., r_{l-1}, r_l, ..., r_{k-1}, s_k, s_{k+1}, ..., s_m) < (r_1, r_2, ..., r_{l-1}, t_l, t_{l+1}, ..., t_m)$'dir. l.bileşen için $r_i = s_i = t_i$, $i = 1, 2, ..., l-1$ ve $r_l = s_l < t_l$ olduğundan, $(r_1, r_2, ..., r_m) < (t_1, t_2, ..., t_m)$ elde edilir. ♦

Lemma 2 : $(S_r, \leq)$ iyi sıralı bir cümledir.

İspat: $\forall (r_1, r_2, ..., r_m), (s_1, s_2, ..., s_m) \in S_r$ için $(r_1, r_2, ..., r_m) \neq (s_1, s_2, ..., s_m)$ olsun. Bu takdirde öyle en küçük k mevcuttur ki $r_k \neq s_k$ 'dır. Buradan $r_k < s_k$ veya $s_k < r_k$ 'dır.

$r_k < s_k$ ise $(r_1, r_2, ..., r_m) < (s_1, s_2, ..., s_m)$ olur.

$s_k < r_k$ ise $(s_1, s_2, ..., s_m) < (r_1, r_2, ..., r_m)$ olur.

Dolayısıyla $(S_r, \leq)$ iyi sıralı bir cümledir. ♦

Önerme 30 : $(r_1, r_2, ..., r_m) \in S_r$ için $T(r_1, r_2, ..., r_m)$ bir önerme olsun.

i) $T(0, 0, ..., r)$ doğru olsun.

ii) $(r_1, r_2, ..., r_m) < (s_1, s_2, ..., s_m)$ için $T(r_1, r_2, ..., r_m)$'nin doğru olmasından $T(s_1, s_2, ..., s_m)$ doğru oluyorsa $\forall (r_1, r_2, ..., r_m) \in S_r$ için $T(r_1, r_2, ..., r_m)$ doğrudur.

İspat: Farz edelim; $\exists (r_1, r_2, ..., r_m) \in S_r$ için $T(r_1, r_2, ..., r_m)$ doğru olmasın. $B = \{(r_1, r_2, ..., r_m) \in S_r : T(r_1, r_2, ..., r_m) \text{ doğru değil}\} \subset S_r$ olarak alalım. Varsayımımıza göre $B \neq \varnothing$'dir. S_r sonlu ve iyi sıralı olduğundan B'nin bir en küçük elemanı vardır. $(r_1^0, r_2^0, ..., r_m^0) \in B$, B'nin en küçük elemanı olsun.

$\forall\left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m\right)<\left(r_1^0,\ r_2^0,\ ...,\ r_m^0\right)$ olan $\left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m\right)\in S_r$ 'ler için $\left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m\right)\notin B$ olduğundan $T\left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m\right)$ doğrudur. Hipoteze göre $T\left(r_1^0,\ r_2^0,\ ...,\ r_m^0\right)$ doğru olmalıdır. Fakat bu bir çelişkidir. ♦

Önerme 31 : $\left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m\right)\in S_r$ için $T\left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m\right)$ bir önerme olsun.

i) $r_1=r_2=...=r_{m-n}=0$ olmak üzere $\left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m\right)=\left(0,\ 0,\ ...,\ 0,\ r_{m-n+1},\ ...,\ r_m\right)\in S_r$ için $T\left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m\right)$ doğru olsun.

ii) $\left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m\right)<\left(s_1,\ s_2,\ ...,\ s_m\right)$ olan $\forall\left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m\right)\in S_r$ için $T\left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m\right)$'nin doğru olmasından $T\left(s_1,\ s_2,\ ...,\ s_m\right)$ doğru oluyorsa $\forall\left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m\right)\in S_r$ için $T\left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m\right)$ doğrudur.

İspat: Önerme 30'un ispatına benzer şekilde yapılır. ♦

Teorem 7 : $H\subset O(3,1)$ bir alt grup ve $x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,\ x^{(m)}$ $\mathbb{R}^{3+1}$'de m tane bilinmeyen vektör olsun.

$m=4$ için $\varphi_1,\ \varphi_2,\ ...,\ \varphi_N$, $\mathbb{R}\left[x^{(1)},\ x^{(2)},x^{(3)},\ x^{(4)}\right]^H$ 'nin üreteç cümlesi ise;

$m>4$ durumunda,

$$\left\{\varphi_1,\ \varphi_2,\ ...,\ \varphi_N,\ D_{x^{(i)}x^{(j)}}\varphi_k,\ i,\ j=1,\ 2,\ ...,\ m,\ k=1,\ 2,\ ...,\ N,\ D_{x^{(i)}x^{(j)}}\left(D_{x^{(s)}x^{(t)}}.\varphi_k\right),\ ...\right\} \quad (35)$$

cümlesi, $\mathbb{R}\left[x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,\ x^{(m)}\right]^H$ 'nin üreteç cümlesidir.

İspat: Her polinom homojen polinomların toplamı şeklinde tek türlü olarak yazılabileceğinden biz burada homojen polinomları göz önüne alabiliriz. Her homojen polinom da her $x^{(i)}$'ye $\left(i=1,2,...,m\right)$ göre homojen olan polinomların toplamı olarak tek türlü yazılabilir. İnvaryant polinomların keyfi homojen kısmı da invaryanttır. Teoremi $x^{(i)}$'ye göre homojen olan invaryant polinomlar için ispat edersek keyfi invaryant polinom için de ispatlamış oluruz.

$f\left(x^{(1)},x^{(2)},...,x^{(m)}\right)$, $x^{(1)}$'e göre derecesi r_1, $x^{(2)}$'ye göre derecesi r_2, …., $x^{(m)}$'ye göre derecesi r_m olan her bir $x^{(i)}$'ye $\left(i=1,2,...,m\right)$ göre homojen olan bir invaryant polinom olsun. Buradan f 'nin derecesi $r=r_1+r_2+...+r_m$ olur.

Kapelli denkliklerindeki operatör determinantının ilk elemanı;

$\left(D_{x^{(m)}x^{(m)}}+(m-1)\right)\ldots\left(D_{x^{(2)}x^{(2)}}+1\right).D_{x^{(1)}x^{(1)}}\big)$ şeklindedir. Bunun f 'deki görüntüsü şu şekildedir:

$\left(D_{x^{(m)}x^{(m)}}+(m-1)\right)\ldots\left(D_{x^{(2)}x^{(2)}}+1\right).D_{x^{(1)}x^{(1)}}\big)f=(r_m+m-1)\ldots(r_2+1).r_1 f$

$\rho=(r_m+m-1)\ldots(r_2+1).r_1$ olarak alalım. f, $x^{(1)}$ değişkenine bağlı ise $r_1>0$ olur. Bu durumda $\rho\neq 0$ 'dır.

Operatör determinantının diğer elemanlarında $D_{x^{(\alpha)}x^{(\alpha)}}+\alpha-1$ diyagonal elemanlarını bırakabiliriz. Onların etkisi f 'nin bir sayı ile çarpımını verir. Bunların hepsini ρ^* şeklinde işaretleyelim. Bu takdirde böyle bir eleman şu şekilde olur:

$\rho^*.D_{x^{\beta_q}x^{\alpha_q}}\ldots D_{x^{\beta_2}x^{\alpha_2}}.D_{x^{\beta_1}x^{\alpha_1}}$

Burada $\alpha_q>\alpha_{q-1}>\ldots>\alpha_2>\alpha_1$, $\beta_i\neq\alpha_i$, $i=1,2,\ldots,q$ ve $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_q$ 'lar α_1, α_2, ..., α_q 'ların bir permütasyonudur. Buradan $q\geq 2$ ve $\beta_1>\alpha_1$ elde edilir. Çünkü $q=1$ ise yukarıdaki ifade $\rho^*.D_{x^{\beta}x^{\alpha}}$ biçiminde olduğundan, $\beta=\alpha$ elde edilir. O halde $q\geq 2$ olmalıdır. α_1 en küçük olduğundan ve $\beta_1\neq\alpha_1$ olduğundan $\beta_1>\alpha_1$ olmalıdır. Bu durumda;

$\rho.f=\left(D_{x^{(m)}x^{(m)}}+(m-1)\right)\ldots\left(D_{x^{(2)}x^{(2)}}+1\right).D_{x^{(1)}x^{(1)}}f$

$f^*=\rho^*.D_{x^{\beta_1}x^{\alpha_1}}f$

$\wp=D_{x^{\beta_q}x^{\alpha_q}}\ldots D_{x^{\beta_2}x^{\alpha_2}}$

olarak alırsak Kapelli denkliklerinin sol tarafı $\rho.f-\sum\wp.f^*$ halini alır. $D_{x^{\beta_1}x^{\alpha_1}}f$, x^{α_1} 'e göre f 'den daha küçük dereceye sahiptir.

Şimdi Kapelli denkliklerini aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\rho.f=\sum\wp.f^* \qquad (m>4)$$

$$\rho.f=\sum\wp.f^*+\left[x^{(1)}x^{(2)}x^{(3)}x^{(4)}\right]\Omega f \qquad (\mathrm{m}=4)$$

$m>4$ için $\rho.f=\sum\wp.f^*$ 'dır. f, $x^{(1)}$ 'e bağlı ise $\rho\neq 0$ olacağından $f=\dfrac{1}{\rho}\cdot\sum\wp.f^*$ olur.

Tümevarımla iddiamızı ispatlamaya çalışalım. En küçük durum vektör sayısının n tane olduğu durumdur.

$m=4$ için $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_N$, $\mathbb{R}\left[x^{(1)}x^{(2)}x^{(3)}x^{(4)}\right]^H$ 'nin üreteç cümlesi olsun. Gösterelim ki $m>4$ için;

$$\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N, D_{x^{(i)}x^{(j)}}\varphi_1, ..., D_{x^{(k)}x^{(k)}}...D_{x^{(1)}x^{(1)}}\varphi_1, ...\}$$

cümlesi $\mathbb{R}\left[x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,\ x^{(m)}\right]^H$ için üreteç cümlesidir.

$m=4$ tane vektör için yukarıdaki kabul gereği (35) cümlesinin üreteç cümlesi olduğu açıktır.

$m-1$ tane vektör için (35) cümlesi üreteç cümlesi olsun. Şimdi m tane vektör durumuna bakalım. $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(m)}$ vektörleri için $r_1=0$ ise $m-1$ vektöre dönüştüğünden iddia geçerli olur. $r_1 \neq 0$ olsun. Polinomun derecesi $r = r_1 + r_2 + ... + r_m$ olduğundan bunlardan biri sıfır ise $m-1$ vektör durumuna geleceğinden iddia geçerli olur. Dolayısıyla hepsi sıfırdan farklı olsun.

"$\leq$" sıralamasına göre $(r_1, r_2, ..., r_m)$'den küçük olanlar için iddia doğru olsun. $D_{x^{\beta_1}x^{\alpha_1}} f$ 'nin x^{α_1}'e göre derecesi f'den küçük olduğundan $D_{x^{\beta_1}x^{\alpha_1}} f$ (35) cümlesi ile üretilebilir. Yani $\exists\psi$ için;

$$D_{x^{\beta_1}x^{\alpha_1}} f = \psi(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N . D\varphi_1, D\varphi_2, ..., D\varphi_N, ...)$$

$$f = \frac{1}{\rho}\cdot\sum D_{x^{\beta_k}x^{\alpha_k}}...D_{x^{\beta_2}x^{\alpha_2}}\psi(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N . D\varphi_1, D\varphi_2, ..., D\varphi_N, ...)$$

olur. Sondaki ifadeyi açarsak:

$$D_{x^{\beta_2}x^{\alpha_2}}\psi(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N . D\varphi_1, D\varphi_2, ..., D\varphi_N, ...) =$$

$$= \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi_1}D_{x^{\beta_2}x^{\alpha_2}}\varphi_1 + \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi_2}D_{x^{\beta_2}x^{\alpha_2}}\varphi_2 + ... + \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi_N}D_{x^{\beta_2}x^{\alpha_2}}\varphi_N + \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi_1}D_{x^{\beta_2}x^{\alpha_2}}\varphi_1(D\varphi_1) + ...$$

Bu şekilde devam edilirse f fonksiyonu da (35) cümlesinin elemanları cinsinden yazılmış olur. Dolayısıyla $\forall m > 4$ için (35) cümlesi $\mathbb{R}\left[x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,\ x^{(m)}\right]^H$'nin üreteç cümlesi olur. Böylece ispat bitmiş olur. ♦

Not: $S = \bigcup_{r=-1}^{\infty} S_r$ olarak alalım. Burada;

$$S_{-1} = \{\overline{0}\}$$
$$S_0 = \{(0, 0, 0, ..., 0)\}$$
$$S_1 = \{(1, 0, 0, ..., 0), (0, 1, 0, ..., 0), ..., (0, 0, 0, ..., 1)\}$$
$$\vdots$$
$$S_r = \{(r_1, r_2, r_3, ..., r_m) : r_1 + r_2 + r_3 + ... + r_m = r, r_i \in N, i = 1, 2, 3, ..., m\}$$
$$\vdots$$

olarak alınmaktadır. Bu S cümlesi üzerinde bir sıralama bağıntısı tanımlayalım.

Tanım 38: $(r_1, r_2, ..., r_m), (s_1, s_2, ..., s_m) \in S$ olsun. Eğer $r_1 + r_2 + ... + r_m = r$ ve $s_1 + s_2 + ... + s_m = s$ için;

$r < s$ ise $(r_1, r_2, ..., r_m) < (s_1, s_2, ..., s_m)$'dir.

$r = s$ ise $(r_1, r_2, ..., r_m), (s_1, s_2, ..., s_m) \in S_r$ olacağından S_r'deki sıralama bağıntısı alınır.

$(r_1, r_2, ..., r_m) < (s_1, s_2, ..., s_m)$ veya $(r_1, r_2, ..., r_m) = (s_1, s_2, ..., s_m)$ ise

$(r_1, r_2, ..., r_m) \leq (s_1, s_2, ..., s_m)$'dir.

Bu şekilde tanımlanan "$\leq$" bağıntısı S üzerinde bir sıralama bağıntısıdır. Şimdi bunu gösterelim:

1) $\forall (r_1, r_2, ..., r_m) \in S$ için $(r_1, r_2, ..., r_m) = (r_1, r_2, ..., r_m)$ olduğundan $(r_1, r_2, ..., r_m) \leq (r_1, r_2, ..., r_m)$'dir.

2) $\forall (r_1, r_2, ..., r_m), (s_1, s_2, ..., s_m) \in S$ için $(r_1, r_2, ..., r_m) \leq (s_1, s_2, ..., s_m)$ ve $(s_1, s_2, ..., s_m) \leq (r_1, r_2, ..., r_m)$ olsun. Bu elemanlar için $r_1 + r_2 + ... + r_m = r$ ve $s_1 + s_2 + ... + s_m = s$ olsun. $(r_1, r_2, ..., r_m) \leq (s_1, s_2, ..., s_m)$ olduğundan $r \leq s$'dir. $(s_1, s_2, ..., s_m) \leq (r_1, r_2, ..., r_m)$ olduğundan $s \leq r$'dir. O halde $r = s$'dir. Buradan $(r_1, r_2, ..., r_m)$ ve $(s_1, s_2, ..., s_m)$ S_r'nin elemanlarıdır. Lemma 2'den $(S_r, \leq)$ iyi sıralı cümle olduğundan $(r_1, r_2, ..., r_m) \leq (s_1, s_2, ..., s_m)$ ve $(s_1, s_2, ..., s_m) \leq (r_1, r_2, ..., r_m)$ olduğundan $(r_1, r_2, ..., r_m) = (s_1, s_2, ..., s_m)$ elde edilir.

3) $\forall (r_1, r_2, ..., r_m), (s_1, s_2, ..., s_m), (t_1, t_2, ..., t_m) \in S$ için $(r_1, r_2, ..., r_m) \leq (s_1, s_2, ..., s_m)$ ve $(s_1, s_2, ..., s_m) \leq (t_1, t_2, ..., t_m)$ olsun. Bunlar için $r_1 + r_2 + ... + r_m = r$, $s_1 + s_2 + ... + s_m = s$ ve $t_1 + t_2 + ... + t_m = t$ olsun. $(r_1, r_2, ..., r_m) \leq (s_1, s_2, ..., s_m)$ olduğundan $r \leq s$'dir.
$(s_1, s_2, ..., s_m) \leq (t_1, t_2, ..., t_m)$ olduğundan $s \leq t$'dir. Buradan $r \leq t$ olur. $r < t$ ise
$(r_1, r_2, ..., r_m) \leq (t_1, t_2, ..., t_m)$ elde edilir. $r = t$ ise S_r'dek sıralama geçerli olacağından yine
$(r_1, r_2, ..., r_m) \leq (t_1, t_2, ..., t_m)$ olur.

Teorem 8 : $H \subset SO(3,1)$ bir alt grup olmak üzere 3 tane bilinmeyen vektör için $\mathbb{R}\left[x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}\right]^H$'nin üreteç cümlesi $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N\}$ olsun. Bu durumda $m > 3$ için $\mathbb{R}\left[x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(m)}\right]^H$'nin üreteç cümlesi;

$\left\{\varphi_1,\ \varphi_2,\ ...,\ \varphi_N,\ D\varphi_1,\ \mathrm{D}\varphi_2,\ ...,\ D\varphi_N,\ DD\varphi_1,\ ...,\ \left[x^{(1)}x^{(2)}x^{(3)}x^{(4)}\right],\ D\left[x^{(1)}x^{(2)}x^{(3)}x^{(4)}\right],\ ...\right\}$

(36) biçimindedir.

İspat: $(r_1, r_2, ..., r_m) \in S$ için $T(r_1, r_2, ..., r_m)$ önermesi yukarıdaki ifade olsun.

$m > 4$ için Teorem 7'e göre $O(3,1)$ grubu için (36) cümlesi $\mathbb{R}\left[x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,\ x^{(m)}\right]^H$'nin üreteç cümlesidir.

$m = 4$ durumunu göz önüne alalım. $\forall(0, r_2, ..., r_n) \in S$ için $T(0, r_2, ..., r_n)$ doğrudur. $(s_1, s_2, ..., s_n) \leq (r_1, r_2, ..., r_n)$ olan $\forall(s_1, s_2, ..., s_n)$'ler için $T(s_1, s_2, ..., s_n)$ doğru olsun. $T(r_1, r_2, ..., r_n)$'nin doğru olduğunu gösterelim:

$f\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ x^{(3)}\right),\ SO(3,1)$ - *invaryant* polinomunu göz önüne alalım.

$m = 4$ için;

$$\rho.f = \sum \wp.f^* + \left[x^{(1)}x^{(2)}x^{(3)}x^{(4)}\right]\Omega f$$

olduğunu biliyoruz. f, $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$'e bağlı değilse tümevarım hipotezi gereği f, (36) cümlesinin elemanları cinsinden üretilebilir. f, $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$'e bağlı olsun. Bu durumda $\rho \neq 0$'dır ve

$$f = \frac{1}{\rho} \cdot \sum \wp.f^* + \frac{1}{\rho} \cdot \left[x^{(1)}x^{(2)}x^{(3)}x^{(4)}\right]\Omega f$$

dir. f^*'ın $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$'e göre derecesi S_r'deki sıralamaya göre f'den küçüktür. Ωf'nin derecesi ise $r-4$'dir. Tümevarım hipotezine göre bunların toplamı da (36) cümlesinin elemanları cinsinden yazılabilir. Dolayısıyla f, (36) cümlesinin elemanları cinsinden yazılabilir. Bundan dolayı $\forall m > 3$ için f, (7) cümlesinin elemanları cinsinden yazılabilir. O halde $\forall m > 3$ için (36) cümlesi $\mathbb{R}\left[x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,\ x^{(m)}\right]^H$'nin üreteç cümlesidir. ♦

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. $k(U)$ - İnvaryant

Tanım 39: $U \subset \mathbb{R}^{3+1}$ altuzay olmak üzere, U 'ya $\mathbb{R}^{3+1}$'in regüler altuzayı denir, eğer $rankg \downarrow U = boyU$ ise.

Regüler olmayan altuzaylara singüler altuzaylar denir.

$U \subset \mathbb{R}^{3+1}$ altuzay olmak üzere, $k(U)$ ile U'daki lineer bağımsız ışıksal vektörlerin sayısını tanımlayalım.

Tanım 40: $U \subset \mathbb{R}^{3+1}$ regüler altuzay olmak üzere, sıfırdan farklı keyfi $u \in U$ için $\langle u,u \rangle > 0$ ise, U'ya uzaysal denir.

Tanım 41: $U \subset \mathbb{R}^{3+1}$ regüler altuzay olmak üzere, sıfırdan farklı keyfi $u \in U$ için $\langle u,u \rangle < 0$ ise,U'ya zamansal denir.

Önerme 32: $k(U) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} U - uzaysal & ,boyU = 1 \\ U - zamansal & ,boyU = 1 \\ U - uzaysal & ,boyU > 1 \end{array} \right\}.$

İspat:

$\Rightarrow$: $k(U) = 0$ olsun.

1) $boyU = 1$ olsun.Bu takdirde, sıfırdan farklı $u \in U$ için $U = sp\{u\}$ ile gösterelim. $k(U) = 0$ olduğundan $\langle u,u \rangle \neq 0$'dır.Eğer $\langle u,u \rangle < 0$ ise, U zamansal vektörle üretildiğinden U'daki tüm vektörler zamansal olup, U –*zamansal*dır. Diğer taraftan, $\langle u,u \rangle > 0$ ise, U uzaysal vektörle üretildiğinden U'daki tüm vektörler uzaysal olup, U-*uzaysal*dır.

2) $boyU > 1$ olsun. Bu takdirde, U'da $\{u_1,...,u_n\}$ tabanı seçelim öyle ki $U = sp\{u_1,...,u_n\}$ ile gösterelim.

Varsayalım ki, $U - uzaysal$ olmasın.Bu takdirde, $k(U) = 0$ olduğundan, U'daki tüm vektörler zamansal veya U'da en az bir zamansal vektör ve en az bir uzaysal vektör mevcuttur.

2.1) U'daki tüm vektörler zamansal olamaz.Eğer U'daki tüm vektörler zamansal olsaydı $indexg \downarrow U = boyU$ olurdu.Ancak $boyU > 1$ olduğundan $indexg \downarrow U > 1$ olurdu.

$index\mathbb{R}^{3+1}=1$ ve $indexg\downarrow U>1$ olup, $indexg\downarrow U\leq 1$ olması gerektiğinden bu çelişkidir.

2.2) U'da en az bir zamansal vektör ve en az bir uzaysal vektör olsun.Bu takdirde, bunlar lineer bağımsızdır.Şimdi, $\lambda\in\mathbb{R}$ olmak üzere, $u+\lambda v$ vektörünü gözönüne alalım.Burada u ve v vektörleri için $\langle u,v\rangle^2-\langle v,v\rangle\langle u,u\rangle>0$ olup, buna göre

$\lambda_{1,2}=\dfrac{-\langle u,v\rangle\mp\sqrt{\langle u,v\rangle^2-\langle v,v\rangle\langle u,u\rangle}}{\langle v,v\rangle}$ seçilirse, $\langle u+\lambda v,u+\lambda v\rangle=0$ 'dır.Ayrıca

$u+\lambda v\neq 0$ olup, $k(U)=0$ ile çelişir.

$\Leftarrow$:Varsayalım ki, $k(U)\neq 0$ olsun.

1) $boyU=1$ için *U-zamansal* veya *U-uzaysal olsun.*

Sıfırdan farklı $u\in U$ için $U=sp\{u\}$ ile gösterelim. $k(U)\neq 0$ olduğundan $\langle u,u\rangle=0$ 'dır.Bu ise *U-zamansal* veya *U-uzaysal* ile çelişir.

2) $boyU>1$ için *U-uzaysal olsun.*Bu takdirde, $\forall u\in U$ için $\langle u,u\rangle>0$ olup $k(U)=0$ 'dır.♦

Önerme 33: $U\subset\mathbb{R}^{3+1}$ altuzay ve $F\in O(3,1)$ olsun.Bu takdirde, $k(U)=k(FU)$.

İspat:

$boyU=m, m\geq 1$ olsun. Bu takdirde, sıfırdan farklı $u_i\in U, i=1,...,m$ için $U=sp\{u_i\}$ ile gösterelim. $\forall F\in O(3,1)$ için $FU=sp\{Fu_i\}$ 'dir.

1) $k(U)=0$ olsun.Bu takdirde $\forall 0\neq u\in U:\langle u,u\rangle\neq 0$ 'dır. $\forall F\in O(3,1)$ için $\langle u,u\rangle=\langle Fu,Fu\rangle\neq 0$ 'dır.Buradan, $k(FU)=0$ 'dır.

2) $k(U)=r, r\geq 1$ olsun.Bu takdirde sıfırdan farklı $u_i\in U, i=1,...,r$ için $\langle u_i,u_i\rangle=0$ 'dır. $\forall F\in O(3,1)$ için $\langle u_i,u_i\rangle=\langle Fu_i,Fu_i\rangle=0$ olduğundan $Fu_i\in FU, i=1,...,r$ ışıksal vektörlerdir. $F\in O(3,1)$ olduğundan Fu_i 'ler lineer bağımsızdır. Buradan FU 'da en az *r*-tane ışıksal vektör mevcut, öyle ki $k(FU)=r+s, s\geq 0$ 'dır.

Gösterelim ki, $s=0$ 'dır.

Varsayalım ki, $s\neq 0$ olsun.Bu takdirde, sıfırdan farklı $v_i\in FU, i=1,...,r,r+1,...,r+s$ mevcut, öyle ki $\langle v_i,v_i\rangle=0$ 'dır.

$F \in O(3,1)$ için $F^{-1} \in O(3,1)$ mevcuttur.O zaman $\left\langle v_i, v_i \right\rangle = \left\langle F^{-1}v_i, F^{-1}v_i \right\rangle = 0$ olup $F^{-1}v_i \in U$ ışıksal vektörlerdir.Böylece U'da en az $r+s$ tane ışıksal vektör mevcuttur. Diğer taraftan, U'da r - tane ışıksal vektör mevcut olup, $s=0$ 'dır.Bu ise varsayımla çelişir.Buradan, $s=0$ olup $k(U)=k(FU)$ 'dır. ♦

Sonuç 6: $k(U)$, $O(3,1)$-invaryanttır.

Lemma 3: $U \subset \mathbb{R}^{3+1}$ özaltuzay ve $k(U)=m \geq 1$ olsun.Bu takdirde, $\exists F \in O(3,1)$ öyle ki, $FU = sp\left\{\widetilde{u_1} = (1,0,0,1), u_i = (u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}, 0), i = 2,...,m\right\}$ şeklinde ifade edilebilir.

İspat: $boyU = m, m \geq 1$ olsun. Bu takdirde, sıfırdan farklı $x_i \in U, i=1,...,m$ için $U = sp\{x_i\}$ tabanını gösterelim. $k(U)=r, r \geq 1$olsun. Bu takdirde, U'daki lineer bağımsız ışıksal vektörlerini $x_i \in U, i=1,...,r$ ile gösterelim.

Diğer taraftan, $boy\mathbb{R}^{3+1} = 4$ olduğundan $boyU \leq 3$'dir.

$x_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4}), i=1,...,m$ ile gösterelim.

$x_i \in U, i=1,...,r$ ışıksal vektörler olduğundan $\langle x_i, x_i \rangle = 0, i=1,...,r$ 'dir. Buradan

$x_{i1}^2 + x_{i2}^2 + x_{i3}^2 - x_{i4}^2 = 0, i=1,...,r$ 'dır. Burada $x_{i4} \neq 0$ 'dır.

Şimdi $\overline{x_i} = \dfrac{x_i}{x_{i4}}, i=1,...,r$ vektörünü ele alalım. Böylece $\overline{x_i} = \left(\overline{x_{i1}}, \overline{x_{i2}}, \overline{x_{i3}}, 1\right), i=1,...,r$ elde edilir.Burada $\overline{x_i}$, $i=1,...,r$ ışıksal olduğundan $\left\langle \overline{x_i}, \overline{x_i} \right\rangle = 0, i=1,...,r$ 'dır. Buradan

$\overline{x}_{i1}^2 + \overline{x}_{i2}^2 + \overline{x}_{i3}^2 - 1 = 0, i=1,...,r$ 'dır. Böylece $\overline{x}_{i1}^2 + \overline{x}_{i2}^2 + \overline{x}_{i3}^2 = 1, i=1,...,r$ elde edilir.

Şimdi F'yi şöyle seçelim ki, $F = \begin{pmatrix} \cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ \cos\alpha\cos\beta & \sin\alpha\cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in O(3,1)$

$F\overline{x_1} = (1,0,0,1)$ olsun. $F\overline{x_1} = (1,0,0,1) = \overline{\overline{x_1}}$ gösterelim. Böylece,

$F\overline{x_i} = \left(\overline{\overline{x_{i1}}}, \overline{\overline{x_{i2}}}, \overline{\overline{x_{i3}}}, 1\right) = \overline{\overline{x_i}}, i=2,...,r$ ve $Fx_i = \left(\overline{\overline{x_{i1}}}, \overline{\overline{x_{i2}}}, \overline{\overline{x_{i3}}}, \overline{\overline{x_{i4}}}\right) = \overline{\overline{x_i}}, i=r+1,...,m$ olup

$FU = sp\left\{\overline{\overline{x_i}}, i=1,...,r,r+1,...,m\right\}$ 'e getirilir.

Şimdi, $\widetilde{u_1}=\overline{\overline{x_1}}, u_i=\overline{\overline{x_i}}-\widetilde{u_1}, i=2,...,r$ ve $u_i=\overline{\overline{x_i}}-\overline{\overline{x_{i4}}}\widetilde{u_1}, i=r+1,...,m$ vektörlerini tanımlayalım. Diğer taraftan, Önerme 33'ten $k(U)=k(FU)$ olduğundan, $k(FU)\geq 1$'dir. Buradan $FU=sp\left\{\widetilde{u_1}=(1,0,0,1), u_i=(u_{i1},u_{i2},u_{i3},0), i=2,...,m\right\}$ elde edilir. ♦

Lemma 4: $W\subset\mathbb{R}^{3+1}$ özaltuzay ve $W=sp\left\{\widetilde{u_1}=(1,0,0,1), u_i=(u_{i1},u_{i2},u_{i3},0), i=2,...,m\right\}$ olsun. Bu takdirde, $k(W)=1 \Leftrightarrow u_{i1}=0, i=2,...,m$'dır.

İspat: Lemma 3'ten $k(W)\geq 1$ için $W=sp\left\{\widetilde{u_1}=(1,0,0,1), u_i=(u_{i1},u_{i2},u_{i3},0), i=2,...,m\right\}$ şeklinde ifade edilebilir.

$\Rightarrow$: Varsayalım ki, $u_{i1}, i=2,...,m$'lerden en az biri sıfırdan farklı olsun.O zaman $u_{21}\neq 0$ alalım.

Gösterelim ki, sıfırdan farklı $\lambda\in\mathbb{R}$ mevcut, öyle ki $\widetilde{u_1}+\lambda u_2$ ışıksaldır. $u_2\neq 0$ olduğundan $\langle u_2,u_2\rangle\neq 0$'dır.O zaman $\lambda=\dfrac{-2\langle\widetilde{u_1},u_2\rangle}{\langle u_2,u_2\rangle}$ alalım.

Gösterelim ki, $\lambda\neq 0$'dır.

Varsayalım ki, $\lambda=0$ olsun.Bu takdirde $\langle\widetilde{u_1},u_2\rangle=0$'dır.Ancak $\langle\widetilde{u_1},u_2\rangle=u_{21}\neq 0$ olduğundan,bu bir çelişkidir.Böylece $\lambda\neq 0$'dır.Burada, $\widetilde{u_1}+\lambda u_2$ ışıksaldır.Böylece $k(W)>1$ elde edilir ki, bu $k(W)=1$ ile çelişir.

Dolayısıyla $k(W)=1$ için $u_{i1}=0, i=2,...,m$'dır.

$\Leftarrow$: $W=sp\left\{\widetilde{u_1}=(1,0,0,1), u_i=(u_{i1},u_{i2},u_{i3},0), i=2,...,m\right\}$ ve $u_{i1}=0, i=2,...,m$ olsun.Bu takdirde, $W=sp\left\{\widetilde{u_1}=(1,0,0,1), u_i=(0,u_{i2},u_{i3},0), i=2,...,m\right\}$'dır.

$\widetilde{u_1}\in W$ olduğundan $k(W)\geq 1$'dir. $k(W)=1$ olduğunu gösterelim.

Varsayalım ki, $k(W)>1$ olsun.Bu takdirde, $\lambda_i\in\mathbb{R}, i=2,...,m$'lerden en az biri sıfırdan farklı olmak üzere W'de $\widetilde{u_1}$'den başka lineer bağımsız $\widetilde{u_1}+\sum_{i=2}^{m}\lambda_i u_i$ şeklinde ışıksal vektör var olsun.

$\widetilde{u_1}+\sum_{i=2}^{m}\lambda_i u_i$ ışıksal olduğundan, $\left\langle \sum_{i=2}^{m}\lambda_i u_i, \sum_{i=2}^{m}\lambda_i u_i \right\rangle = 0$ ’dır. Ancak $u_i \in W, i=2,...,m$’ler ve onların lineer kombinasyonları standart iç çarpım olduğundan, $\left\langle \sum_{i=2}^{m}\lambda_i u_i, \sum_{i=2}^{m}\lambda_i u_i \right\rangle = 0$ ’dan $\sum_{i=2}^{m}\lambda_i u_i$ =0’dır. Buradan $\lambda_i = 0, i=2,...,m$ ’dır. W’de $\widetilde{u_1}$ ’den başka ışıksal vektör yoktur. Bu ise varsayımla çelişir. Böylece, $k(W)=1$ ’dir. ♦

Tanım 42 : $U \subset \mathbb{R}^{3+1}$ özaltuzay olmak üzere, $k(U)=1$ ise, U’ya ışıksal altuzay denir.

Sonuç 7 : $W \subset \mathbb{R}^{3+1}$ özaltuzay ve $W = sp\left\{\widetilde{u_1} = (1,0,0,1), u_i = (u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}, 0), i=2,...,m\right\}$ olsun. Eğer $k(W)>1$ ise, $\exists 2 \le i \le m$ öyle ki $u_{i1} \neq 0$ dır.

Önerme 34 : $k(U)>1$ ise $k(U) = boyU$.

İspat: $boyU = m, m>1$ olsun. $F \in O(3,1)$ için $k(U)=k(FU)$ ’dur. $k(U)>1$ olduğundan $k(FU)>1$’dir. Bu takdirde, Lemma 3’ten öyle bir $F \in O(3,1)$ vardır ki, öyle ki $FU = sp\left\{\widetilde{u_1}, u_2, ..., u_m\right\}$ şeklindedir. $k(U)=m$ olduğunu gösterelim. $k(FU)>1$ olduğundan $k(FU)\geq 2$ ’dir. O zaman en az biri sıfırdan farklı $\lambda_i \in \mathbb{R}, i=2,...,m$ ’ler için $\widetilde{u_1}+\sum_{i=2}^{m}\lambda_i u_i$ ışıksaldır. Gerçekten,

$\lambda_2 = \dfrac{-2\left\langle \widetilde{u_1}, u_2 \right\rangle}{\left\langle u_2, u_2 \right\rangle}, \lambda_i = 0, i=3,...,m$ seçilirse, $\widetilde{u_1}+\sum_{i=2}^{m}\lambda_i u_i = \widetilde{u_1}+\lambda_2 u_2$ ışıksaldır. Bunu $\widetilde{u_2} = \widetilde{u_1}+\lambda_2 u_2$ ile gösterelim. Burada $\tilde{u}_1$ ile $\widetilde{u_2}$ lineer bağımsızdır. Eğer lineer bağımlı olsaydı, $\lambda_2 = 0$ olurdu. Bu ise $\lambda_2 \neq 0$ ile çelişir. Böylece FU ’da en az iki tane lineer bağımsız ışıksal vektör vardır. $k(FU)>2$ olduğunu gösterelim. Burada $\lambda_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\widetilde{u_i} = \widetilde{u_1}+\lambda_i\left(u_2+u_i\right), i=3,...,m$ vektörlerini tanımlayalım. Bunların ışıksal olduğunu gösterelim.

$\left\langle \widetilde{u_1}, u_2+u_i \right\rangle = \left\langle \widetilde{u_1}, u_2 \right\rangle + \left\langle \widetilde{u_1}, u_i \right\rangle = 0 + u_{21} = u_{21} \neq 0$ ’dır. Diğer taraftan, u_2+u_i vektörleri uzaysal vektörler olduklarından $\left\langle u_2+u_i, u_2+u_i \right\rangle \neq 0$ ’dır. Böylece, burada

$\lambda_i = \dfrac{-2\left\langle \widetilde{u_1}, u_2+u_i \right\rangle}{\left\langle u_2+u_i, u_2+u_i \right\rangle}, i=3,...,m$ seçilirse, $\widetilde{u_i} = \widetilde{u_1}+\lambda_i\left(u_2+u_i\right), i=3,...,m$ vektörleri ışıksldır. Şimdi, bunların lineer bağımsız olduklarını gösterelim. En az biri sıfırdan farklı olmak üzere, $\mu_1\tilde{u}_1+\mu_2\tilde{u}_2+...+\mu_m\tilde{u}_m=0$'ı sağlayan $\mu_1,...,\mu_m$'lerin var olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $\mu_1\tilde{u}_1+\mu_2\tilde{u}_2+...+\mu_m\tilde{u}_m=0$ bağıntısından $(\mu_1+...+\mu_m)u_1+(\mu_2\lambda_2+\mu_3\lambda_3+...+\mu_m\lambda_m)u_2+\mu_3\lambda_3u_3+...+\mu_m\lambda_mu_m=0$ elde edilir. Burada $\{\widetilde{u_1},u_2,...,u_m\}$ lineer bağımsız olduğundan,

$\mu_1+...+\mu_m=0, \mu_2\lambda_2+\mu_3\lambda_3+...+\mu_m\lambda_m=0, \mu_i\lambda_i=0, i=3,...,m$'dir. Ancak $\lambda_i\neq 0$ olduğundan, üstteki denklemden $\mu_i=0, i=1,...,m$ elde edilir. Bu ise varsayımla çelişir. Dolayısıyla $\{\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,...,\tilde{u}_m\}$ ışıksal vektörleri lineer bağımsız olup, $k(FU)=m$'dir. $k(U)=k(FU)$ olduğundan, $k(U)=m$'dir. Böylece $k(U)=boyU$'dur.♦

2.2. Altuzay ve Ortogonal Tümleyeni Hakkındaki Teorem

Teorem 9: U, $\mathbb{R}^{3+1}$'in altuzayı ve $U^{\perp}$,U'nun ortogonal tümleyeni olsun.Bu takdirde, $\mathbb{R}^{3+1}=U\oplus U^{\perp}\Leftrightarrow k(U)\neq 1$'dir.

İspat:

$\Leftarrow$: $k(U)\neq 1$ olsun. Bu takdirde $k(U)=0$ veya $k(U)>1$'dir.

$boyU=m, m\geq 1$olsun.

1) $k(U)=0$ olsun. Bu takdirde U'da ışıksal vektör yoktur. O zaman $\forall u\in U$ için $\langle u,u\rangle\neq 0$'dır. Teorem1 kullanılarak U'da $\{e_i\}, i=1,...,m$ tabanı mevcuttur.

$U^{\perp}=\{w\in M^{n+1}:\langle w,e_i\rangle=0,\forall e_i\in U, i=1,...,m\}$ alalım. $U\cap U^{\perp}=\{0\}$ olduğunu gösterelim. Varsayalım $U\cap U^{\perp}\neq\{0\}$ olsun. Bu takdirde $0\neq v\in\mathbb{R}^{3+1}$ için $v\in U\cap U^{\perp}$'dir. Buradan $v\in U$ ve $v\in U^{\perp}$'dir.

$v\in U^{\perp}$ ise $\langle v,v\rangle=0$ olup v-ışıksaldır. Aynı zamanda $v\in U$ olduğundan, bu $k(U)=0$ ile çelişir. Dolayısıyla

$$U\cap U^{\perp}=\{0\}\text{'dır.} \tag{37}$$

Şimdi $\mathbb{R}^{3+1}=U+U^{\perp}$ olduğunu gösterelim.

Keyfi $v\in\mathbb{R}^{3+1}$ için $w=v-\sum_{i=1}^{m}\langle e_i,e_i\rangle\langle v,e_i\rangle e_i$'yi tanımlayalım.

Burada $\langle e_i, w\rangle = 0, i = 1,...,m$ olup $w \in U^{\perp}$'dir. Böylece $w = v - \sum_{i=1}^{m}\langle e_i, e_i\rangle\langle v, e_i\rangle e_i$'den $v = w + \sum_{i=1}^{m}\langle e_i, e_i\rangle\langle v, e_i\rangle e_i$ olup

$M^{n+1} = U + U^{\perp}$ yazılır. (38)

(37) ve (38)'den $\mathbb{R}^{3+1} = U \oplus U^{\perp}$'dir.

2) $k(U) > 1$ olsun. Bu takdirde Sonuç 2'den

$U = sp\left\{\widetilde{u_1} = (1,0,0,1), u_2 = (u_{21}, u_{22}, u_{23}, 0), u_i = (0, u_{i2}, u_{i3}, 0), u_{21} \neq 0, i = 3,...,m\right\}$ şeklinde ifade edilebilir.

$U^{\perp} = \left\{y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^{3+1} : \left\langle y, \tilde{u}_1\right\rangle = \left\langle y, u_i\right\rangle = 0, \forall \tilde{u}_1, u_i \in U, i = 2,...,m\right\}$ alalım.

$\left\langle y, \tilde{u}_1\right\rangle = 0$'dan $y_1 = y_4$ elde edilir. O zaman

$U^{\perp} = \left\{y = (y_1, y_2, y_3, y_1) \in \mathbb{R}^{3+1} : \left\langle y, u_i\right\rangle = 0, \forall, u_i \in U, i = 2,...,m\right\}$ yazılır. (39)

Varsayalım $k\left(U^{\perp}\right) \neq 0$ olsun. Bu takdirde $0 \neq y \in U^{\perp}$ için $\left\langle y, y\right\rangle = 0$'dır. Buradan $y_i = 0, i = 2,3$ elde edilir.

$\left\langle y, u_2\right\rangle = 0 \Rightarrow y_1u_{21} + y_2u_{22} + y_3u_{23} = 0 \Rightarrow y_1 \underbrace{u_{21}}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow y_1 = 0$ elde edilir.

Böylece $y = 0$ olup, bu $y \neq 0$ ile çelişir. Buradan $k(U^{\perp}) = 0$'dır.

Diğer taraftan, varsayımımızdan $k(U) > 1$ olup $U \cap U^{\perp} = \{0\}$'dır.

Şimdi $\mathbb{R}^{3+1} = U + U^{\perp}$ olduğunu gösterelim.

(39)'daki $\left\langle y, u_i\right\rangle = 0$ ifadesinden

$y_2u_{i2} + y_3u_{i3} = 0, i = 3,...,m$'dır. (40)

(40) sisteminin rankı *m*-1 ve bilinmeyen sayısı 3'tür. Bu takdirde bu sistemin 4-*m* tane bağımsız değişkeni olup, bu değişkenler $U^{\perp}$'de taban oluşturur. Buradan $boyU^{\perp} = 4 - m$'dir.O halde

$\mathbb{R}^{3+1} = U + U^{\perp}$'dır. (41)

Böylece $\mathbb{R}^{3+1} = U + U^{\perp}$ ve $U \cap U^{\perp} = \{0\}$ olduğundan $\mathbb{R}^{3+1} = U \oplus U^{\perp}$'dir.

$\Rightarrow$: $\mathbb{R}^{3+1} = U \oplus U^{\perp}$ olsun. $k(U) \neq 1$ olduğunu gösterelim.

Varsayalım $k(U)=1$ olsun.Bu takdirde Lemma 4'ten

$U=sp\left\{\widetilde{u_1}=(1,0,0,1),u_i=(0,u_{i2},u_{i3},0),i=2,...,m\right\}$ şeklindedir.Yukarıdaki (39) ifadesi alınırsa, burada (39)'daki $\langle y,u_i\rangle=0\Rightarrow y_2u_{i2}+y_3u_{i3}=0,i=2,...,m$ elde edilir. Bu sistemin çözümleri içinde aşikar olarak, $y_i=0,i=2,3$ çözümü vardır. Bu çözüm altında $y=(y_1,0,0,y_1)\in U^{\perp}$'dir. Ancak $y\in U$ olduğundan $U\cap U^{\perp}\neq\{0\}$'dır. Bu ise $\mathbb{R}^{3+1}=U\oplus U^{\perp}$ ile çelişir. Böylece $k(U)\neq 1$'dır.♦

2.3. $G=O(3,1)$ Grubu ve $G=SO(3,1)$ Altgrubu için $\mathbb{R}[x]^G$ Halkasının Üreteçleri

Tanım 43 : $O(3,1)$ grubunun $\mathbb{R}^{3+1}$ üzerindeki etkisini alalım. f, $\mathbb{R}^{3+1}$ üzerinde tanımlı bir polinom olsun. $f(gx_1,\ gx_2,\ ...,gx_m)=\lambda(g)\,f(x_1,\ x_2,\ ...,x_m)$, $\forall g\in O(3,1)$ olacak şekilde $\exists\lambda(g)$ fonksiyonu mevcutsa $f(x_1,\ x_2,\ ...,x_m)$ polinomuna nispi $O(3,1)$-*invaryant* denir.

Tanım 44 : Yukarıdaki $\lambda(g)$ fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu denir.

Ağırlık fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir: $\forall g,\ g_1,\ g_2\in O(3,1)$ için;

1) $\lambda(g_1g_2)=\lambda(g_1)\lambda(g_2)$ (Önerme 20'den)

2) $\lambda(g)=\pm 1$'dir.

Gerçekten, Önerme 23'e göre $\lambda(g)=(\det g)^k$'dır. Keyfi $g\in O(3,1)$ için $\det g=\pm 1$ olduğundan $\lambda(g)=\pm 1$'dir.

Tanım 45 : f, nispi $O(3,1)$-*invaryant* polinom olmak üzere $\forall g\in O(3,1)$ için $\lambda(g)=1$ ise, f'ye çift (mutlak) invaryant polinom denir.

Tanım 46 : f, nispi $O(3,1)$-*invaryant* polinom olmak üzere $g\in SO(3,1)$ için $\lambda(g)=1$ ve $\lambda(g)=\det g=-1$ ise, f'ye tek invaryant polinom denir.

Örnek 36 : $O(1)=\{1,-1\}$ grubunun $\mathbb{R}$ üzerindeki etkisini alalım. $f\in\mathbb{R}$ olmak üzere;

$\lambda(1)=1$ ve $\lambda(-1)=1$ ise, $f(-x)=f(x)$ olduğundan, f -çift invaryant polinomdur.

$\lambda(1)=1$ ve $\lambda(-1)=-1$ ise, $f(-x)=-f(x)$ olduğundan, f -tek invaryant polinomdur.

Önerme 35 :

(i) Çift invaryant polinomların toplamı çift invaryant polinomdur.

(ii) f , çift invaryant polinom ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\lambda . f$ polinomu çift invaryant polinomdur.

(iii) Çift invaryant polinomların çarpımı çift invaryant polinomdur.

İspat:

i) f_1, f_2 çift invaryant polinomlar olsun. Bu takdirde,

$f_1(gx) = \lambda(g)\, f_1(x)$, $f_2(gx) = \lambda(g)\, f_2(x)$, $\lambda(g) = 1$ şeklinde yazılabilir. Şimdi $f_1(x) + f_2(x)$ 'in çift olduğunu gösterelim:

$f_1(gx) + f_2(gx) = \lambda(g)\, f_1(x) + \lambda(g)\, f_2(x) = \lambda(g)\big(f_1(x) + f_2(x)\big)$ olduğundan,

$\lambda(g) = 1$'dir ve $f_1(x) + f_2(x)$ çifttir.

ii) f , çift invaryant polinom ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. f çift olduğundan,

$f(gx) = \lambda(g)\, f(x)$, $\lambda(g) = 1$ şeklinde yazılabilir. Buradan,

$\lambda f(gx) = \lambda\big(\lambda(g)\, f(x)\big) = \lambda\lambda(g)\, f(x) = \lambda(g)\lambda f(x)$ 'dir ve $\lambda(g) = 1$ olduğundan $\lambda f(x)$ çifttir.

iii) f_1, f_2 çift invaryant polinomlar olsun. Bu takdirde,

$f_1(gx) = \lambda(g)\, f_1(x)$, $f_2(gx) = \lambda(g)\, f_2(x)$, $\lambda(g) = 1$ şeklinde yazılabilir. Buradan,

$f_1(gx) f_2(gx) = \big(\lambda(g)\, f_1(x)\big)\big(\lambda(g)\, f_2(x)\big) = \lambda(g)\lambda(g)\, f_1(x) f_2(x)$ 'dir ve $\lambda(g) = 1$ olduğundan $f_1 f_2$ çifttir. ♦

Önerme 36:

i) Tek invaryant polinomların toplamı tek invaryanttır.

ii) f , tek invaryant polinom ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere λf polinomu tek invaryant polinomdur.

iii) Tek invaryant polinomların çarpımı çift invaryant polinomdur.

iv) Tek ve çift invaryant polinomun çarpımı tek invaryant polinomdur.

İspat:

i) f_1, f_2 tek invaryant polinomlar olsun. Bu takdirde,

$f_1(gx) = \det g f_1(x)$, $f_2(gx) = \det g f_2(x)$, $\det g = -1$ yazılabilir. Buradan,

$f_1(gx)+f_2(gx)=\det gf_1(x)+\det gf_2(x)=\det g\left(f_1(x)+f_2(x)\right)$'dir. $\det g=-1$ olduğundan $f_1(x)+f_2(x)$ tektir.

ii) f, tek invaryant polinom ve $\lambda\in\mathbb{R}$ olsun. f tek olduğundan,

$f(gx)=\det gf(x)$, $\det g=-1$şeklinde yazılabilir. Buradan,

$\lambda f(gx)=\lambda\left(\det gf(x)\right)=\lambda\det gf(x)=\det g\lambda f(x)$'dir. $\det g=-1$olduğundan $\lambda f(x)$ tektir.

iii) f_1, f_2 tek invaryant polinomlar olsun. Bu takdirde, $f_1(gx)=\det gf_1(x)$, $f_2(gx)=\det gf_2(x)$, $\det g=-1$şeklinde yazılabilir. Buradan,

$f_1(gx)f_2(gx)=\left(\det gf_1(x)\right)\left(\det gf_2(x)\right)=\left(\det g\right)^2 f_1(x)f_2(x)$'dir ve $\det g=-1$ olduğundan f_1f_2 çifttir.

iV) f_1 tek ve f_2 çift invaryant polinomlar olsun. Bu takdirde, $f_1(gx)=\det gf_1(x)$, $f_2(gx)=\lambda(g)f_2(x)$, $\lambda(g)=1$, $\det g=-1$ şeklinde yazılabilir. Buradan,

$f_1(gx)f_2(gx)=\left(\det gf_1(x)\right)\left(\lambda(g)f_2(x)\right)=\det gf_1(x)\lambda(g)f_2(x)=\det g\left(f_1(x)f_2(x)\right)$'dir ve $\det g=-1$ olduğundan f_1f_2 tektir. ♦

Örnek 37 : $f\left(x_1, x_2, ..., x_m\right)=\left[x_1\ x_2\ ...\ x_m\right]$ invaryant polinomunu alalım.

$f\left(gx_1, gx_2, ..., gx_m\right)=\left[gx_1\ gx_2\ ...\ gx_m\right]=\det g\left[x_1\ x_2\ ...\ x_m\right]$ olduğundan $\left[x_1\ x_2\ ...\ x_m\right]$ polinomu tek invaryant polinomdur.

Önerme 37 :

i) f, çift invaryant polinom ise, Ωf tek invaryant polinomdur.

ii) f, tek invaryant polinom ise, Ωf çift invaryant polinomdur.

İspat: Kapelli denkliklerinin $m=n$ durumunu hatırlayalım:

$$\begin{vmatrix} D_{x^{(m)}x^{(m)}}+(m-1) & D_{x^{(m)}x^{(m-1)}} & \cdots & D_{x^{(m)}x^{(1)}} \\ D_{x^{(m-1)}x^{(m)}} & D_{x^{(m-1)}x^{(m-1)}}+(m-2) & \cdots & D_{x^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{x^{(1)}x^{(m)}} & D_{x^{(1)}x^{(m-1)}} & \cdots & D_{x^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f=\begin{cases} 0, & m>n \\ \left[x^{(1)}x^{(2)}...x^{(n)}\right].\Omega f, & m=n \end{cases}$$

Şimdi önermenin ispatına geçelim:

i) f, çift invaryant polinom olsun. Bu takdirde Sonuç 3'ten $D_{yx}f$ 'nin de çift invaryant polinom olduğu ortaya çıkar. Buradan;

$$T_g^{(2)} D_{yx^{(i)}} f\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ \ldots,\ x^{(m)}\right) = D_{yx^{(i)}} T_g^{(1)} f\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ \ldots,\ x^{(m)}\right) =$$
$$= D_{yx^{(i)}} f\left(g.x^{(1)},\ g.x^{(2)},\ \ldots,\ g.x^{(m)}\right) =$$
$$= D_{yx^{(i)}} f\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ \ldots,\ x^{(m)}\right)$$

olur.

$$T_g^{(1)}\left[x^{(1)}x^{(2)}\ldots x^{(m)}\right]\Omega f = \left[g.x^{(1)}g.x^{(2)}\ldots g.x^{(m)}\right]T_g^{(1)}\Omega f = \left[x^{(1)}x^{(2)}\ldots x^{(m)}\right]T_g^{(1)}\Omega f$$

yazılır.

$$\left[g.x^{(1)}g.x^{(2)}\ldots g.x^{(m)}\right]\Omega f = \left[x^{(1)}x^{(2)}\ldots x^{(m)}\right]T_g^{(1)}\Omega f$$
$$\Rightarrow \det g.\left[x^{(1)}x^{(2)}\ldots x^{(m)}\right]T_g^{(1)}\Omega f = \left[x^{(1)}x^{(2)}\ldots x^{(m)}\right]\Omega f$$

olduğundan;

$T_g^{(1)}\Omega f = \det g.\Omega f$ olduğundan, Ωf , tek invaryant polinomdur.

ii) f , tek invaryant polinom olsun. Bu takdirde Önerme 25'ten $D_{yx}\left(T_h^{(1)} f\right) = T_h^{(2)}\left(D_{yx} f\right)$ olduğundan $D_{yx} f$ de tek invaryant polinomdur. Gerçekten, $h \in O(3,1)$ olsun. $h \in SO(3,1)$ ise,

$\left(T_h^{(1)} f\right)(x) = f\left(h^{-1}x\right) = f(x)$ olur. Buradan, $T_h^{(2)}\left(D_{yx} f\right) = D_{yx} f$ olduğundan, $D_{yx} f$ polinomu $SO(3,1)$-*invaryant* 'tır.

Şimdi $h \in O(3,1)$ yani $\det h = -1$ olsun. Buradan,

$\left(T_h^{(1)} f\right)(x) = f\left(h^{-1}x\right) = \lambda(g)\, f(x) = -1.f(x) = -f(x)$ olur.

$T_h^{(2)}\left(D_{yx} f\right) = D_{yx}(-f) = T_h^{(2)}\left(D_{yx} f\right) = -D_{yx} f$ olduğundan, $D_{yx} f$ tek invaryant polinomdur.

Buradan;

$$T_g^{(2)} D_{yx^{(i)}} f\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ \ldots,\ x^{(m)}\right) = D_{yx^{(i)}} T_g^{(1)} f\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ \ldots,\ x^{(m)}\right) =$$
$$= D_{yx^{(i)}} f\left(g.x^{(1)},\ g.x^{(2)},\ \ldots,\ g.x^{(m)}\right) =$$
$$= D_{yx^{(i)}} \lambda(g)\, f\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ \ldots,\ x^{(m)}\right)$$

olur.

$$T_g^{(2)}\left[x^{(1)}x^{(2)}\ldots x^{(m)}\right]\Omega f = \left[g.x^{(1)}g.x^{(2)}\ldots g.x^{(m)}\right]\Omega f = \det g\left[x^{(1)}x^{(2)}\ldots x^{(m)}\right]\Omega f$$

$\left[g.x^{(1)}g.x^{(2)}\ldots g.x^{(m)}\right]T_g^{(1)}\Omega f = \det g\left[x^{(1)}x^{(2)}\ldots x^{(m)}\right]\Omega f$ olduğundan, $T_g^{(1)}\Omega f = \Omega f$

olduğundan, Ωf , çift invaryant polinomdur. ♦

Önerme 38 : $f\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,x^{(m)}\right)$, $SO(3,1)$-*invaryant* polinom olsun. Bu takdirde;

$$f\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,x^{(m)}\right)=f_1\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,x^{(m)}\right)+f_2\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,x^{(m)}\right)$$

şeklinde f_1 çift ve f_2 tek $SO(3,1)$-*invaryant* polinomların toplamı şeklinde tek türlü yazılabilir.

İspat: $f(x)=\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,\ x^{(m)}\right)$, keyfi $SO(3,1)$-*invaryant* polinom olsun.

$$h=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$ olacak şekilde $h\in O(3,1)$ alalım. Burada $\det h=-1$ ve

$h^{-1}=h$'dir. Bu takdirde, $\varphi(x)=\frac{1}{2}\left(f(x)+f(hx)\right)$ çift polinom, $\psi(x)=\frac{1}{2}\left(f(x)-f(hx)\right)$ tek polinomdur. Gerçekten; $g\in O(3,1)$ ve $\det g=-1$ için, $g=g_1h=hg_2$ olacak şekilde $g_1,\ g_2\in SO(3,1)$ mevcuttur ve $g_1=gh^{-1}$, $g_2=h^{-1}g$'dir. Buradan;

$g\in SO(3,1)$ ise, $\varphi(gx)=\frac{1}{2}\left(f(gx)+f(hgx)\right)=\frac{1}{2}\left(f(x)+f(hgh^{-1}hx)\right)$'dır.

Burada; $hgh^{-1}\in SO(3,1)$ ve f, $SO(3,1)$-*invaryant* olduğundan,

$\varphi(gx)=\frac{1}{2}\left(f(x)+f(hx)\right)=\varphi(x)$ olur.

$g\in O(3,1)$ ve $\det g=-1$ ise, $\varphi(gx)=\frac{1}{2}\left(f(gx)+f(hgx)\right)$'dir.

Burada; $g=g_1h$ olacak şekilde $g_1\in SO(3,1)$ mevcuttur.

$\varphi(gx)=\frac{1}{2}\left(f(g_1hx)+f(hgx)\right)$ yazarız. Burada f'nin $SO(3,1)$-*invaryant* ve $hg\in SO(3,1)$ olduğu kullanılarak,

$\varphi(gx)=\frac{1}{2}\left(f(hx)+f(x)\right)=\varphi(x)$ elde edilir. Dolayısıyla $\varphi(x)=\frac{1}{2}\left(f(x)+f(hx)\right)$,

$O(3,1)$-*invaryant*'tır. Yani çifttir. Şimdi $\psi(x)=\frac{1}{2}\left(f(x)-f(hx)\right)$'in tek invaryant olduğunu gösterelim: Bunun için önce bunun $SO(3,1)$-*invaryant* olduğunu gösterelim:

$g\in SO(3,1)$ ise, $\psi(gx)=\frac{1}{2}\left(f(gx)-f(hgx)\right)=\frac{1}{2}\left(f(x)-f(hgh^{-1}x)\right)$'dir.

$hgh^{-1} \in SO(3,1)$ ve f , $SO(3,1)$ - *invaryant* olduğundan, $\psi(gx) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(hx) \right) = \psi(x)$

elde edilir. $g \in O(3,1)$ ve $\det g = -1$ ise,

$\psi(gx) = \frac{1}{2}\left(f(gx) - f(hgx) \right) = \frac{1}{2}\left(f(g_1 hx) - f(hgx) \right)$

yazarız. Burada $hg \in SO(3,1)$ ve f ’nin $SO(3,1)$ - *invaryant* olduğu kullanılarak,

$\psi(gx) = \frac{1}{2}\left(f(hx) - f(x) \right) = -\psi(x)$ elde edilir. Dolayısıyla $\psi(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(hx) \right)$ tek invaryanttır. ♦

Teorem 10 :

i) Keyfi çift invaryant polinom, $\langle x_i, x_j \rangle, i, j = 1, 2, ..., m$ ’lerin polinomu olarak ifade edilebilir.

ii) Keyfi tek invaryant polinom , $\varphi\left(x_1, x_2, ..., x_m \right)$ çift invaryant polinom olmak üzere $\left[x_{i_1}\ x_{i_2}\ x_{i_3}\ x_{i_4} \right] \varphi\left(x_1, x_2, ..., x_m \right), i_1 < i_2 < ... < i_4;\ i_1, ..., i_4 = 1, ..., m$ ’lerin polinomu şeklinde ifade edilebilir.

İspat : $T_{3+1}{}^{m}$ ile (3+1)-boyutlu uzayda *m*-tane vektöre bağlı önermeyi gösterelim.
$m > 4$ durumunda Kapelli denkliklerinin 1. kısmı kullanılarak, teorem, $T_{3+1}{}^{m} \to T_{3+1}{}^{4}$ durumuna indirilir [38].
Bu taktirde $T_{3+1}{}^{4}$ durumunu inceleyelim.
$m = 4$ durumunda Kapelli denkliklerinin 2.kısmı kullanılarak, teorem, $T_{3+1}{}^{3}$ durumunun incelenmesine indirilir[38].
Kapelli denkliğinin $m = 4$ olan durumunu f ’ye kullanalım:

$$f = \frac{1}{\rho} \sum P.f^{*} + \left[x_{i_1}\ x_{i_2}\ x_{i_3}\ x_{i_4} \right].\Omega f \text{ ’dir.} \qquad (42)$$

f - çift olsun. S_r ’deki sıraya göre $P.f$ polinomu f ’den küçüktür ve keyfi $P.f^{*}$ polinomu çifttir. ($P.f^{*}$ ’ler $D_{\alpha^{(i)}\beta^{(i)}} ... D_{\alpha^{(1)}\beta^{(1)}} f^{*}$ şeklindedir.)

$\left[x_{i_1}\ x_{i_2}\ x_{i_3}\ x_{i_4} \right].\Omega f$ terimini inceleyelim:

Ωf ’nin derecesi $r - 4$ olduğundan Ωf için T_{3+1}^{4} doğrudur.

f , çift ise, Ωf tektir. Ωf için T_{3+1}^{4} doğru olduğundan, $\Omega f = \left[x_{i_1}\ x_{i_2}\ x_{i_3}\ x_{i_4} \right].\varphi$

şeklinde ifade edilebilir. Burada φ, çifttir. Dolayısıyla,

$$\left[x_{i_1}\ x_{i_2}\ x_{i_3}\ x_{i_4}\ \right].\Omega f=\left[x_{i_1}\ x_{i_2}\ x_{i_3}\ x_{i_4}\ \right].\left[x_{i_1}\ x_{i_2}\ x_{i_3}\ x_{i_4}\ \right].\varphi=\begin{vmatrix}\langle x_{i_1},x_{i_1}\rangle & \cdots & \langle x_{i_1},x_{i_4}\rangle\\ \cdots & \ddots & \cdots\\ \langle x_{i_4},x_{i_1}\rangle & \cdots & \langle x_{i_4},x_{i_4}\rangle\end{vmatrix}.\varphi$$

şeklinde yazılabilir. Burada φ, çift ve S_r 'deki sırası f 'den küçük (derecesi küçük) olduğundan φ polinomu $\langle x_i,\ x_j\rangle$ 'ler cinsinden ifade ediliyor. Bundan dolayı f 'nin çift olduğu durumda f için T_{3+1}^4 doğrudur.

Şimdi f, tek olsun. Bu takdirde (42) eşitliğindeki $P.f^*$ 'ler de tektir. $P.f^*$ 'lerin S_r 'deki sırası f 'den küçüktür. Buna göre $P.f^*$ 'ler için T_{3+1}^4 doğrudur.

Şimdi $\left[x_{i_1}\ x_{i_2}\ x_{i_3}\ x_{i_4}\ \right].\Omega f$ terimini inceleyelim:

f, tek olduğundan Ωf çifttir. Dolayısıyla f polinomu $\left[x_{i_1}\ x_{i_2}\ x_{i_3}\ x_{i_4}\ \right].\Omega f$ polinomlarının toplamı şeklindedir. Burada φ, çifttir. Sonuçta f için T_{3+1}^4 doğrudur.

Şimdi ${T_{3+1}}^3$ durumunu inceleyelim. Burada ispat iki kısma ayrılır:

1) Çift invaryant polinomların incelenmesi. (Bunu ${T_{3+1}}^{3C}$ ile göstereceğiz.)

2) Tek invaryant polinomların incelenmesi. (Bunu ${T_{3+1}}^{3T}$ ile göstereceğiz.)

Şimdi ;

1) ${T_{3+1}}^{3C}$ kısmını ispatlayalım.Bunun anlamı (3+1)-boyutlu uzayda 3 tane vektöre bağlı çift invaryant polinomlara ait önermedir.Burada,

$f(x_1,x_2,x_3)$, $O(3,1)$-çift invaryant polinom olsun. Burada $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}^{3+1}$ lineer bağımsız vektörleri $x_1=(x_{11},x_{12},x_{13},x_{14}),x_2=(x_{21},x_{22},x_{23},x_{24}),x_3=(x_{31},x_{32},x_{33},x_{34})$ ile gösterelim. $\det G(x_1,x_2,x_3)\neq 0$ olsun.

Bu takdirde $F\in O(3,1)$ ile $Fx_i=y_i=(y_{i1},y_{i2},0,y_{i3}),i=1,2,3$ şekline getirilebilir. Böylece $\det G(y_1,y_2,y_3)\neq 0$ 'dır. Bu takdirde, $f(y_1,y_2,y_3)=\varphi(\langle y_i,y_j\rangle),i\leq j=1,2,3$ şeklinde ifade edilebilir. Ayrıca burada $\{y_i\},i=1,2,3$ 'ler $\mathbb{R}^{2+1}$ 'in elemanlarıdır. Diğer taraftan,

$\varphi(\langle y_i,y_j\rangle)=\varphi(\langle Fx_i,Fx_j\rangle)\overset{F\in O(3,1)}{=}\varphi(\langle x_i,x_j\rangle)$ 'dir. O zaman $f(x_1,x_2,x_3)=\varphi(\langle x_i,x_j\rangle)$ şeklinde ifade edilebilir.

Varsayalım $\det G(x_1,x_2,x_3)=0$ olsun. Bu takdirde, H.Weyl [38,syf.4,Lemma1.1.A]'dan cebirsel eşitsizliklerin önemli olmadığı prensibine göre, bir polinom kökleri dışında sıfır ise her yerde sıfırdır.Yani, çözüm sağlanır.

Diğer taraftan, $f\left(y_1,y_2,y_3\right)$ polinomu, $\mathbb{R}^{2+1}$'de $\left\{y_i\right\}, i=1,2,3$'lerin $O(2,1)$-*invaryant* polinomudur.Yani üç tane vektörün çift polinomudur. Böylece durum $T_{3+1}^{\;3C} \to T_{2+1}^{3C}$'ü incelemeye iner.

Burada $m=3$ durumunda Kapelli denkliklerinin 2. kısmı kullanılarak, teorem $T_{2+1}^{\;3C} \to T_{2+1}^{\;2C}$ durumuna indirilir [38].

Böylece ispatımız $T_{2+1}^{\;2C}$ durumunu incelemeye iner. Ancak yukarıdaki kısımdaki gibi ispat yapılırsa $T_{2+1}^{\;2C} \to T_{1+1}^{2C}$ durumuna indirilir. T_{1+1}^{2C} durumu İ.Ören [29]'da ispatlanmıştır.

2) $T_{3+1}^{\;3T}$ kısmını ispatlayalım.

$f\left(x_1,x_2,x_3\right)$, $O\left(3,1\right)$-*tek invaryant* polinom olsun. Burada $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}^{3+1}$ lineer bağımsız vektörleri $x_1=\left(x_{11},x_{12},x_{13},x_{14}\right), x_2=\left(x_{21},x_{22},x_{23},x_{24}\right), x_3=\left(x_{31},x_{32},x_{33},x_{34}\right)$ ile gösterelim. Bu takdirde $F\in O(3,1)$ ile $Fx_i=y_i=\left(y_{i1},y_{i2},0,y_{i3}\right), i=1,2,3$ şekline getirilebilir.

$f\left(x_1,x_2,x_3\right)$, $O\left(3,1\right)$-*tek invaryant* polinom ve $F\in O(3,1)$ olduğundan

$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=f\left(F\left(x_1\right),F\left(x_2\right),F\left(x_3\right)\right)=\det F.f\left(y_1,y_2,y_3\right)$ olur. $F\in O(3,1)$ olduğundan F^{-1} mevcut ve $F^{-1}\in O(3,1)$'dir. $F\left(x_i\right)=y_i, i=1,2,3$ ifadesinden $F^{-1}\left(y_i\right)=x_i, i=1,2,3$ yazabiliriz. $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$, $O\left(3,1\right)$-*tek invaryant* polinom olduğundan

$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=f\left(F^{-1}\left(y_1\right),F^{-1}\left(y_2\right),F^{-1}\left(y_3\right)\right)=\det F^{-1}.f\left(y_1,y_2,y_3\right)$ elde edilir.

Şimdi $z=\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3\\ z_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3+1}$ ve $\delta=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}, \det\delta=-1$ olan $\delta\in O\left(3,1\right)$ alalım.Buradan

$\delta z=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3\\ z_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ -z_3\\ z_4\end{pmatrix}$ olur.Bu $\delta\in O\left(3,1\right)$'i $\left\{y_1,y_2,y_3\right\}$'e kullanırsak

$\delta y_i=y_i, i=1,2,3$ elde edilir.Buradan

$f(y_1,y_2,y_3)= f(\delta(y_1),\delta(y_2),\delta(y_3))=\underbrace{\det\delta}_{-1}.f(y_1,y_2,y_3)=-f(y_1,y_2,y_3)$ olduğundan $f(y_1,y_2,y_3)$=0 elde edilir. Böylece $f(x_1,x_2,x_3)$=0 olur.O halde $f(x_1,x_2,x_3)$, $O(3,1)$-*tek invaryant* polinom sıfırdır.

Sonuç olarak, ${T_{3+1}}^3$ durumunda keyfi invaryant polinom $\langle x_i,x_j\rangle, i, j=1,2,3$'lerin polinomu olarak ifade edilebiliyor. Bu ${T_{3+1}}^4$'de doğru olduğundan ${T_{3+1}}^m$'de keyfi çift invaryant polinom $\langle x_i,x_j\rangle, i, j=1,2,...,m$'lerin polinomu olarak ; keyfi tek invaryant polinom , φ-çift olmak üzere $\left[x_{i_1}\ x_{i_2}\ x_{i_3}\ x_{i_4}\right].\varphi$ şeklinde tek invaryant polinomların toplamı olarak ifade edilebilir. ♦

Teorem 11 : $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_m$'ler $\mathbb{R}^{3+1}$'de bilinmeyen vektörler olsun. Bu takdirde;

$\langle x_i,\ x_j\rangle,\ i,\ j=1,2,...,m;\ i\le j$ sistemi, $\mathbb{R}[x_1,\ x_2,\ ...,\ x_m]^{O(3,1)}$ $\mathbb{R}$-*cebir*'inin üreteç sistemidir.

İspat: Bu aslında Teorem 5'in 1. kısmıdır. ♦

Teorem 12 : $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_m$'ler $\mathbb{R}^{3+1}$'de bilinmeyen vektörler olsun. Bu takdirde;

$\langle x_i,\ x_j\rangle,\ i,\ j=1,2,...,m;\ i\le j$

$\left[x_{i_1}\ x_{i_2}...\ x_{i_4}\right];\ 1\le i_1\le i_2\le...\le i_4\le m$

sistemi, $\mathbb{R}[x_1,\ x_2,\ ...,\ x_m]^{SO(3,1)}$ $\mathbb{R}$-*cebir*'inin üreteç sistemidir.

İspat: Bu teorem, Teorem 5'in ve Önerme 38'in bir sonucudur. ♦

2.4. $O(3,1)$ Grubu için Gram Matrisi ve Gram Determinantı

Tanım 47 : $\mathbb{R}^{3+1}$ dört boyutlu reel vektör uzayı ve $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_m\in\mathbb{R}^{3+1}$ olmak üzere,

$$\begin{pmatrix}\langle x_1,x_1\rangle & \cdots & \langle x_1,x_m\rangle\\ \cdots & \ddots & \cdots\\ \langle x_m,x_1\rangle & \cdots & \langle x_m,x_m\rangle\end{pmatrix}$$

matrisine $x_1,x_2,...,x_m$ vektörlerinin Gram matrisi denir. Bu matris $G(x_1,x_2,...,x_m)$ ile gösterilir.

Tanım 48 : Gram matrisinin determinantına Gram determinantı denir. Bu determinant $\det G(x_1, x_2, ..., x_m)$ ile gösterilir. Yani;

$$\det G(x_1, x_2, ..., x_m) = \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_m \rangle \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \langle x_m, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_m, x_m \rangle \end{vmatrix} \text{ dir.}$$

Not: $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_m \in \mathbb{R}^{3+1}$ ise,

$x_1 = (x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}), x_2 = (x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}), ..., x_m = (x_{m1}, x_{m2}, x_{m3}, x_{m4}) \in \mathbb{R}^{3+1}$

olmak üzere, $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & ... & x_{m1} \\ x_{12} & x_{22} & ... & x_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{14} & x_{24} & ... & x_{m4} \end{pmatrix}$ matrisini $\|x_1...x_m\|$ ile gösterelim.

Tanım 49: $A = (a_{ij}), i = 1, ..., n;\ j = 1, 2, 3, 4$ bir matris olsun.

$A^T = (a_{ji}), i = 1, ..., n;\ j = 1, 2, 3, 4$ matrisine A matrisinin transpozesi denir.

Önerme 39 : $\{x_1,\ x_2,\ ...,\ x_m\}$ ve $\{y_1,\ y_2,\ ...,\ y_k\} \subset \mathbb{R}^{3+1}$'de vektörler sistemi, $\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ olsun. Bu takdirde; $\|x_1...x_m\|^T .\eta. \|y_1...y_k\| = \begin{pmatrix} \langle x_1, y_1 \rangle & \cdots & \langle x_1, y_k \rangle \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \langle x_m, y_1 \rangle & \cdots & \langle x_m, y_k \rangle \end{pmatrix}$ dır.

İspat:

$$\|x_1...x_m\|^T .\eta. \|y_1...y_k\| = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & x_{m4} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{21} & ... & y_{k1} \\ y_{12} & y_{22} & ... & y_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{14} & y_{24} & ... & y_{k4} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & -x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & -x_{24} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & -x_{m4} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y_{11} & y_{21} & \cdots & y_{k1} \\ y_{12} & y_{22} & \cdots & y_{k2} \\ y_{13} & y_{23} & \cdots & y_{k3} \\ y_{14} & y_{24} & \cdots & y_{k4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle x_1, y_1 \rangle & \cdots & \langle x_1, y_k \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_m, y_1 \rangle & \cdots & \langle x_m, y_k \rangle \end{pmatrix} \blacklozenge$$

Not: $\|x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4\|$ matrisinin determinantını,

$\det\|x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4\| = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]$ ile gösterelim.

Sonuç 8 : $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}^{3+1}$ olmak üzere, $\det G(x_1, x_2, x_3, x_4) = -[x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^2$ dir.

İspat: Üstteki önermede, $k = m = 4$ ve y_1, y_2, y_3, y_4 yerine x_1, x_2, x_3, x_4 alınırsa, $\det G(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left|\langle x_i, x_j \rangle\right|_{i,j=1,2,3,4} = -[x_1, x_2, x_3, x_4]^2$ olur. ♦

Önerme 40 : $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_m \in \mathbb{R}^{3+1}$ olmak üzere,

i) $m > 4$ için, $\det G(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_m) = 0$ 'dır.

ii) $m = 4$ için, $\det G(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) \leq 0$ 'dır.

iii) $1 < m \leq 4$ için, $x_1,\ x_2, ..., x_m$ 'ler lineer bağımlı ise $\det G(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_m) = 0$

iV) $m = 1$ için, $\det G(x_1) = 0 \Leftrightarrow x_1$-sıfırdan farklı ışıksal veya sıfır vektörü ise.

V) $m = 1$ için, $\det G(x_1) > 0 \Leftrightarrow x_1$-uzaysal vektör ise.

Vi) $m = 1$ için, $\det G(x_1) < 0 \Leftrightarrow x_1$-zamansal vektör ise.

İspat:

i) $m > 4$ olsun. 4-boyutlu uzayda, 4'ten fazla vektör olduğundan $x_1, x_2, ..., x_m$ vektörleri lineer bağımlıdır. O halde, $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_m$ lineer bağımlı olduğundan $\exists k = 1,\ 2,\ ...,\ \mathrm{m}$ için bir x_k vektörünü diğer vektörlerin bir lineer toplamı şeklinde yazmak mümkündür. Genelliği bozmadan $k = m$ alıp, $x_m = \lambda_1.x_1 + ... + \lambda_{m-1}.x_{m-1}$ yazalım.

$$\det G(x_1,\ ...,\ x_m) = \begin{vmatrix} \langle x_1,\ x_1\rangle & \cdots & \cdots & \langle x_1,\ x_m\rangle \\ \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ \langle x_{m-1},\ x_1\rangle & \cdots & \ddots & \langle x_{m-1},\ x_m\rangle \\ \langle \lambda_1.x_1 + ... + \lambda_{m-1}.x_{m-1},\ x_1\rangle & \cdots & \cdots & \langle \lambda_1.x_1 + ... + \lambda_{m-1}.x_{m-1},\ x_m\rangle \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \langle x_1,\ x_1\rangle & \cdots & \cdots & \langle x_1,\ x_m\rangle \\ \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ \langle x_{m-1},\ x_1\rangle & \cdots & \ddots & \langle x_{m-1},\ x_m\rangle \\ \lambda_1.\langle x_1,\ x_1\rangle + ... + \lambda_{m-1}.\langle x_{m-1},\ x_1\rangle & \cdots & \cdots & \lambda_1.\langle x_1,\ x_m\rangle + ... + \lambda_{m-1}.\langle x_{m-1},\ x_m\rangle \end{vmatrix} = 0 \quad \text{bulunur.}$$

Çünkü matrisin son satırı, diğer satırların bir lineer toplamı olduğundan sonuç sıfırdır.

ii) $m=4$ olsun. Bu durumda, $X=\|x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4\|$ şeklinde vektörlerin sütun matrisi olmak üzere,

$\det G(x_1,\ x_2,x_3,x_4)=X^T\eta X$ 'dir.

$\det G(x_1,\ x_2,x_3,x_4)=\det(X^T\eta X)=\det(X^T).\det(\eta).\det(X)$

$\det(X)=\det(X^T)$, $\det(\eta)$=-1 olduğundan,

$\det G(x_1,\ x_2,x_3,x_4)=-\det(X)^2$'dir. Ancak $\det(X)^2\geq 0$ olduğundan,

$\det G(x_1,\ x_2,x_3,x_4)\leq 0$'dır.

iii) $x_1,x_2,...,x_m$ vektörleri lineer bağımlı olsun. Bu takdirde $\det G(x_1,\ x_2,...,x_m)=0$ olduğu önermenin birinci kısmındaki gibi gösterilir.

iV) $m=1$ olsun.

$\det G(x_1)=\langle x_1,x_1\rangle=0\Leftrightarrow x_1$-ışıksal veya sıfırdır.

V) $m=1$ olsun.

$\det G(x_1)=\langle x_1,x_1\rangle>0\Leftrightarrow x_1$-uzaysaldır.

Vi) $m=1$ olsun.

$\det G(x_1)=\langle x_1,x_1\rangle<0\Leftrightarrow x_1$-zamansaldır. ♦

Teorem 13: $\{V_x^m,1\leq \text{m}<4\}$ lineer bağımsız vektörler sistemi olsun. Bu takdirde,

$k(V_x^m)=1\Leftrightarrow\det G(x_1,x_2,...,x_m)=0$'dır.

İspat:$\Rightarrow$: $k(V_x^m)=1$ olsun. Burada Lemma 4'ten $\exists F\in O(3,1)$: $FU=\{\tilde{x}_1=(1,0,0,1),\tilde{x}_i=(0,\tilde{x}_{i2},\tilde{x}_{i3},0),2\leq i\leq m\}$'dir. Diğer taraftan, Önerme 33'ten $k(U)=k(FU)$'dir.

$\det G(x_1,x_2,...,x_m)=\det G(Fx_1,Fx_2,...,Fx_m)=\det G(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_m)=0$ olduğundan,

$\det G(x_1,x_2,...,x_m)=0$'dır.

$\Leftarrow$: $\det G(x_1,x_2,...,x_m)=0$ olsun.

Varsayalım $k(U)\neq 1$'dir. Bu takdirde, $k(U)=0$ veya $k(U)>1$'dir.

(i) $k(U)=0$ olsun.

(i-1) $boy(U)=1$ olsun. $m=1$ için $U=sp\{x_1\}$ ile gösterelim. Diğer taraftan $k(U)=0$ olduğundan $0\neq x_1\in U$ öyle ki $\langle x_1,x_1\rangle\neq 0$ 'dır. Buradan $\det G(x_1)\neq 0$ 'dır. Bu ise, kabulümüzle çelişir.

(i-2) $boy(U)>1$ olsun. $k(U)=0$ olduğundan, Önerme32'den U -uzaysaldır. Bu takdirde, M.Karataş [21]'den $\det G(x_1,x_2,...,x_m)\neq 0$ 'dır. Bu ise kabulle çelişir.

(ii) $k(U)>1$ olsun. Bu takdirde, Önerme 34'den $k(U\ )=boyU$ 'dir. Burada, $boy(U)>1$ 'dir. Burada Sonuç 7'den $\exists F\in O(3,1)$:

$FU=\{\tilde{x}_1=(1,0,0,1),\tilde{x}_i=(\tilde{x}_{i1},\tilde{x}_{i2},\tilde{x}_{i3},0),\exists i:\tilde{x}_{i1}\neq 0,2\leq i\leq m\}$ 'dir.

Varsayalım $\tilde{x}_{21}\neq 0$ ve $\tilde{x}_{i1}=0,i=3,...,m$ olsun.Bu takdirde,

$\det G(x_1,x_2,...,x_m)=\det G(Fx_1,Fx_2,...,Fx_m)=\det G(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_m)$ 'dir.

$\det G(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_m)=-\tilde{x}_{21}^2\det G(\tilde{x}_3,...,\tilde{x}_m)$ elde edilir. Ancak $\{\tilde{x}_3,...,\tilde{x}_m\}$ 'ler lineer bağımsız ve uzaysal vektörler olduklarından Öklid uzayındaki vektörler olarak alınabilir. Ancak Öklid uzayında $\det G(\tilde{x}_3,...,\tilde{x}_m)\neq 0$ 'dır. Diğer taraftan, $\det G(x_1,x_2,...,x_m)=0$ olduğundan, $\det G(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_m)=-\tilde{x}_{21}^2\det G(\tilde{x}_3,...,\tilde{x}_m)=0$ olduğundan $\tilde{x}_{21}=0$ 'dır. Bu ise varsayımla çelişir. Dolayısıyla $k(U)=1$ 'dir..♦

Sonuç 9: $\{V_x^m\ ,1\leq \mathrm{m}\}$ vektörler sistemi ve $k(V_x^m\ )\neq 1$ olsun. Bu takdirde, $\{x_1,...,x_m\}$'ler lineer bağımsızdır $\Leftrightarrow \det G(x_1,x_2,...,x_m)\neq 0$ 'dır.

2.5. $O(3,1)$ Grubunun Yörüngeleri

Önerme 41 : $A=\begin{pmatrix} B & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, B\in O(3,0)$ olacak şekilde $A\in O(3,1)$ ortogonal dönüşüm mevcuttur.

İspat : $A\in GL(4,\mathbb{R})$ için $A=\begin{pmatrix} B & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, B\in O(3,0)$ olsun. $A\in O(3,1)$ olduğunu göstermek için $A^T\eta A=\eta$ olduğunu ispatlayalım.

$$A^T\eta A=\begin{pmatrix} B & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B^T & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B^TB & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\eta$$

$I\in O(3,0)$, I-birim matris olduğundan $A\in O(3,1)$ 'dir.♦

Verilen $k \in \mathbb{R}$ için,

$Y_k = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^{3+1} : \left\langle x, x \right\rangle = k, x \neq 0 \right\}$ cümlesini gösterelim.

Önerme 42: $O(3,1)$ ortogonal grup olmak üzere,

i) $k \neq 0$ için Y_k, $k = 0$ için Y_0 ve $\{0\}$ cümleleri $O(3,1)$ grubunun yörüngeleridir.

ii) $O(3,1)$ grubunun bunlardan başka yörüngesi yoktur.

İspat :

i)

i.1) $k \neq 0$ için Y_k cümlesini alalım.Burada $x \in Y_k$ için $\left\langle x, x \right\rangle = k$ denklemini inceleyelim.

i.1.1) $k > 0$ ve $x = \left(x_1, ..., x_4 \right) \in \mathbb{R}^{3+1}$ olsun. Bu takdirde,

$\left\langle x, x \right\rangle = k \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = k \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = k + x_4^2$ elde edilir. Burada $k + x_4^2 \neq 0$ 'dır. O zaman $k + x_4^2 = s^2$ ile gösterelim. Buradan $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = s^2, s > 0$ olduğundan, bu $\mathbb{R}^3$'te s-yarıçaplı küre denklemini verir. Bunu küresel koordinatlar dilinde, $x_1 = s\cos\alpha\sin\beta, x_2 = s\sin\alpha\sin\beta, x_3 = s\cos\beta$ şeklinde ifade edebiliriz. Şimdi, şöyle

$$F_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ \cos\alpha\cos\beta & \sin\alpha\cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in O(3,1)$$

alalım. Bunu x'e kullanırsak, $F_1 x = \left(s, 0, 0, x_4 \right) = \overline{x}$ elde edilir. $x \neq y$ olan $y \in Y_k$ alalım. Tanımdan $\left\langle y, y \right\rangle = k > 0$ 'dır. Bu y vektörü yukarıdaki gibi incelenirse, bir $F_2 \in O(3,1)$ için $F_2 y = \left(p, 0, 0, y_4 \right) = \overline{y}$ elde edilir. Burada

$$F = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

alalım. Eğer $F\overline{x} = \overline{y}$ olacak şekilde $a^2 - b^2 = 1$ şartını sağlayan $a, b \in \mathbb{R}$ 'ler mevcut ise, İ.Ören [29,syf.60]'daki Önerme 31'den $F \in O(3,1)$ olup ispat biter. Şimdi bunu gösterelim.

$F\overline{x} = \overline{y}$ 'den $\left. \begin{aligned} as + bx_4 &= p \\ ax_4 + bs &= y_4 \end{aligned} \right\}$ elde edilir. Bu sistem çözülürse, $a = \dfrac{ps - x_4 y_4}{s^2 - x_4^2}, b = \dfrac{sy_4 - px_4}{s^2 - x_4^2}$

elde edilir.Burada $s^2 - x_4^2 \neq 0$ 'dır.Eğer $s^2 - x_4^2 = 0$ olsaydı, $\left\langle \overline{x}, \overline{x} \right\rangle = 0$ olurdu ki bu ise

$\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \neq 0$ ile çelişir. Burada $a^2 - b^2 = 1$ olduğundan, $F \in O(3,1)$ 'dir. Böylece $F_2^{-1}FF_1 \in O(3,1)$ olup $\left(F_2^{-1}FF_1\right)x = y$ 'dir.Yani, $k > 0$ durumunda Y_k 'nın keyfi iki vektörü denktir.

i.1.2) $k < 0$ olsun. Bu durumda (i.1.1) kısmının ispatına benzer şekilde incelenirse, $k < 0$ durumunda Y_k 'nın keyfi iki noktasının denk olduğu görülür. Sonuçta, $\forall x \in \mathbb{R}^{3+1}$ için $\langle x, x \rangle$, $O(3,1) - invaryant$ olduğundan Y_k 'daki bir nokta ,onun dışında başka bir noktaya denk değildir. Yani, $k \neq 0$ için Y_k cümlesi $O(3,1)$ grubunun yörüngesidir.

i.2) $k = 0$ için $Y_0 = \left\{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^{3+1} : x \neq 0, \langle x, x \rangle = 0\right\}$ cümlesini alalım. $x \in Y_0$ olsun. Tanımdan $\langle x, x \rangle = 0, x \neq 0$ 'dır. Burada $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ olarak alırsak,

$$\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0 \text{ bulunur.} \tag{43}$$

Burada $x_4 \neq 0$ 'dır. (Eğer $x_4 = 0$ olsaydı,

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \Rightarrow x_i = 0, i = 1, 2, 3$ 'dır.Bu takdirde, $x = 0$ olup bu $x \neq 0$ ile çelişir.)

(43)'ten $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_4^2$ elde edilir. Bu durum i.1.1'deki gibi incelenirse, bir $F_3 \in O(3,1)$ için $F_3 x = \left(x_4, 0, 0, \mp x_4\right) = \bar{x}$ elde edilir. Şimdi $x \neq y$ olan $y \in Y_0$ alalım. Tanımdan $\langle y, y \rangle = 0$ 'dır.Bu y vektörü yukarıdaki gibi incelenirse, $F_4 \in O(3,1)$ için $F_4 y = \left(y_4, 0, 0, \mp y_4\right) = \bar{y}$ elde edilir. Şimdi $F\bar{x} = \bar{y}$ olacak şekilde $F \in O(3,1)$ mevcut olduğunu gösterelim.

i.2.1) $\bar{x} = \left(x_4, 0, 0, x_4\right)$ ve $\bar{y} = \left(y_4, 0, 0, y_4\right)$ alalım. Bu takdirde

$$F = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in O(3,1)$$ mevcut, öyle ki $F\bar{x} = \bar{y}$ 'dir. Böylece $F_4^{-1}FF_3 \in O(3,1)$ olduğundan $\left(F_4^{-1}FF_3\right)x = y$ 'dir.

i.2.2) $\overline{x}=\left(x_4,0,0,x_4\right)$ ve $\overline{y}=\left(y_4,0,0,-y_4\right)$ alalım. Bu takdirde

$F=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -b & 0 & 0 & -a \end{pmatrix} \in O(3,1)$ mevcut, öyle ki $F\overline{x}=\overline{y}$ 'dir. Böylece $F_4^{-1}FF_3 \in O(3,1)$

olduğundan $\left(F_4^{-1}FF_3\right)x=y$ 'dir.

Yani, $k=0$ durumunda Y_0 'ın keyfi iki vektörü denktir.

Sonuçta; $\forall x \in Y_0$ noktasını $y \in Y_0$ noktasına götürecek $O(3,1)$ ortogonal dönüşüm mevcut olduğundan Y_0 cümlesinin keyfi iki elemanı $O(3,1)$-denktir. $y \in Y_0$ olsun. Eğer $y=0$ ise, $\{0\}$ nokta Y_0 'ın hiçbir noktasına $O(3,1)$-denk değildir. Eğer $y \notin Y_0$ ve $y \neq 0$ ise, $y \in Y_k$ bir $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$ için $\langle x,x\rangle$, $O(3,1)-$*invaryant* olduğundan Y_0 'ın hiçbir noktası y-noktasına $O(3,1)$-denk olamaz. Dolayısıyla Y_0 cümlesi $O(3,1)$ grubunun yörüngesidir.

i.3) $\{(0,0)\}$ noktası $\forall F \in O(3,1)$ için $F(0)=0$ olduğundan $\{0\}$ noktası $O(3,1)$ grubunun yörüngesidir.

ii) $\forall x \in \mathbb{R}^{3+1}$ noktası alalım. $x=0$ ise, x-elemanı $\{0\}$ yörüngededir. $x \neq 0$ olsun. Bu taktirde bir $k \in \mathbb{R}$ için $\langle x,x\rangle = k$ 'dır. Eğer $k=0$ ise $x \in Y_0$ 'dır. Eğer $k \neq 0$ ise, $x \in Y_k$ 'dır. $O(3,1)$ grubunun bunlardan başka yörüngesi yoktur. ♦

2.6. $O(3,1)$ Grubu için Vektörlerin Denklik Teoremi

Tanım 50 : $O(3,1)$ pseudo-orthogonal grup, $m \geq 1$ için V_x^m ve V_y^m vektör sistemleri olmak üzere, $x_i, y_i \in \mathbb{R}^{3+1}, i=1,...,m$ için $\exists g \in O(3,1)$ öyle ki $y_i = g.x_i, i=1,2,...,m$ ise V_x^m ve V_y^m sistemlerine $O(3,1)$-*denk* denir ve $V_x^m \overset{O(3,1)}{\sim} V_y^m$ şeklinde gösterilir.

Önerme 43 : $O(3,1)$ ortogonal grup olmak üzere, $m=1$ için

$V_x^1=\{x=0\}$ ve $V_y^1=\{y\neq 0\}$ olsun. Bu takdirde $V_x^1 \overset{O(3,1)}{\not\sim} V_y^1$ 'dir.

İspat: $m=1$ için $V_x^1=\{x=0\}$ ve $V_y^1=\{y\neq 0\}$ olsun. Varsayalım $V_x^1 \overset{O(3,1)}{\sim} V_y^1$ olsun. Bu takdirde $\exists g \in O(3,1)$ öyle ki $y=gx$ 'dir….(1)

Ancak $x=0$ olduğundan (1)'den $y=0$'dır. Bu ise $V_y^1=\{y\neq 0\}$ ile çelişir. Varsayım yanlıştır. Böylece $V_x^1 \overset{O(3,1)}{\nsim} V_y^1$'dir.♦

Not : Bu kısımdan itibaren V_x^m ve V_y^m sistemlerindeki vektörlerin tümünü sıfırdan farklı alacağız.(Çünkü $V_x^m \overset{O(3,1)}{\sim} V_y^m$ ve V_x^m sistemindeki en az bir vektör sıfır ise Önerme43'ten V_y^m'deki en az bir vektör sıfırdır. O zaman, V_x^m ve V_y^m'lerin denkliği $V_x^{m-1} \overset{O(3,1)}{\sim} V_y^{m-1}$ durumuna iner. Burada benzer uygulama yapılırsa, V_x^{m-1} ve V_y^{m-1}'lerin denkliği $V_x^{m-2} \overset{O(3,1)}{\sim} V_y^{m-2}$ durumuna iner. Bu şekilde devam edilerek, $V_x^m \overset{O(3,1)}{\sim} V_y^m$ denkliği $V_x^1 \overset{O(3,1)}{\sim} V_y^1$'lerin denkliğine iner. Bu ise, Önerme43'te incelenmiştir. Sonuç olarak, V_x^m ve V_y^m sistemlerindeki vektörlerin tümünü sıfırdan farklı alacağız.)

Not : V_x^m sistemindeki lineer bağısız vektör sayısını $rankV_x^m$ ile göstereceğiz.

Önerme 44 : $m\geq 1$ için $V_x^m \overset{O(3,1)}{\sim} V_y^m$ olsun. Bu takdirde $rankV_x^m = rankV_y^m$'dir.

İspat: $m\geq 1$ için $V_x^m \overset{O(3,1)}{\sim} V_y^m$ ise $\exists g\in O(3,1)$ öyle ki $y_i = g.x_i, i=1,2,...,m$ (44)

Varsayalım $rankV_x^m \neq rankV_y^m$ olsun. $rankV_x^m = r, r\in\mathbb{N}$ alalım. Bu takdirde V_x^m'de sıfırdan farklı $x_1,...,x_r$'ler için $\{x_1,...,x_r\}$ sistemi lineer bağımsızdır. Ancak (44)'den $y_i = g.x_i, i=1,2,...,m$ olduğundan V_y^m'de $\{y_1,...,y_r\}$ sistemi lineer bağımsız olduğundan, $rankV_y^m = r, r\in\mathbb{N}$ elde edilir. Bu ise varsayımla çelişir. Böylece $rankV_x^m = rankV_y^m$'dir. ♦

Sonuç 10 : V_x^m ve V_y^m sistemlerinin rankı, $O(3,1)$*-denk* olarak invaryanttır.

Teorem 14: $\{V_x^m ,\mathrm{m}\geq 1\}$, $\{V_y^m ,\mathrm{m}\geq 1\}$ iki vektör sistemi ve $rankV_x^m = rankV_y^m = 4$ olsun. Bu takdirde,

$$V_x^m \overset{O(3,1)}{\sim} V_y^m \Leftrightarrow \langle x_i, x_j\rangle = \langle y_i, y_j\rangle, i\leq j=1,...,m \text{'dir.}$$

İspat: $\{V_x^m ,\mathrm{m}\geq 1\}$, $\{V_y^m ,\mathrm{m}\geq 1\}$ iki vektör sistemi ve $rankV_x^m = rankV_y^m = 4$ olsun.

$\Rightarrow$: Varsayalım $V_x^m \overset{O(3,1)}{\sim} V_y^m$ olsun. Bu takdirde, $\exists g\in O(3,1): y_i = gx_i, i=1,...,m$'dir. O zaman, $\langle y_i, y_j\rangle = \langle gx_i, gx_j\rangle \overset{g\in O(3,1)}{=} \langle x_i, x_j\rangle$ olup $\langle x_i, x_j\rangle = \langle y_i, y_j\rangle, i\leq j=1,...,m$'dir.

$\Leftarrow$: Varsayalım $\langle x_i, x_j \rangle = \langle y_i, y_j \rangle, i \leq j = 1,...,m$ olsun.

$\{V_x^m \text{ ,m} \geq 1\}$, $\{V_y^m \text{ ,m} \geq 1\}$ iki vektör sistemini ve $rankV_x^m = rankV_y^m = 4$ alalım.

$m = 4$ olsun. Bu takdirde, $V_x^4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $V_y^4 = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ şeklindedir. Buradan $V_x^4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ve $V_y^4 = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ sistemlerindeki vektörler lineer bağımsızdır.

Şimdi, $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ve $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ vektörlerinin oluşturduğu matrisleri sırasıyla,

$$X = \|x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4\| = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} & x_{41} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} & x_{42} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} & x_{43} \\ x_{14} & x_{24} & x_{34} & x_{44} \end{pmatrix} \text{ ve}$$

$$Y = \|y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_3\| = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{21} & y_{31} & y_{41} \\ y_{12} & y_{22} & y_{32} & y_{42} \\ y_{13} & y_{23} & y_{33} & y_{43} \\ y_{14} & y_{24} & y_{34} & y_{44} \end{pmatrix}$$ ile gösterelim. $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ve

$\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ 'ler lineer bağımsız olduğu için $\det X \neq 0$ ve $\det Y \neq 0$ 'dır. O zaman,

$Y = AX$ olacak şekilde $A \in GL(4,\mathbb{R})$ mevcuttur. (45)

Diğer taraftan, $\langle x_i, x_j \rangle = \langle y_i, y_j \rangle, i \leq j = 1,...,4$ eşitliğinden

$G(x_1, x_2, x_3, x_4) = G(y_1, y_2, y_3, y_4)$ elde edilir. Burada $\eta \in O(3,1)$ olmak üzere, bu eşitlik $X^T \eta X = Y^T \eta Y$ şeklinde ifade edilebilir. (46)

(46) ifadesinde (45) kullanılırsa, $X^T \eta X = (AX)^T \eta (AX) = X^T A^T \eta AX$ elde edilir. Bu eşitlik sol taraftan $(X^T)^{-1}$ ve sağ taraftan X^{-1} ile çarpılırsa, $A^T \eta A = \eta$ elde edilir ki, burada $A \in O(3,1)$ 'dir.Böylece, $y_i = Ax_i, 1 \leq i \leq 4$ olur. (47)

Şimdi, $m > 4$ alalım.

$\langle x_i, x_j \rangle = \langle y_i, y_j \rangle, i \leq j = 1,2,3,4$ ve $\langle x_i, x_j \rangle = \langle y_i, y_j \rangle, 1 \leq i \leq 4, 5 \leq j \leq m$ eşitliklerinden,

$X^T \eta x_j = Y^T \eta y_j, 5 \leq j \leq m$ elde edilir. Burada $Y = AX$ kullanırsak,

$X^T \eta x_j = (AX)^T \eta y_j = X^T A^T \eta y_j$ elde edilir. Bu eşitlik sol taraftan $(X^T)^{-1}$ ile çarpılırsa $\eta x_j = A^T \eta y_j$ elde edilir. $A^T \eta A = \eta$ 'dan $A^T \eta = \eta A^{-1}$ elde edilir. Bu ifade $\eta x_j = A^T \eta y_j$ 'de kullanılırsa $\eta x_j = \eta A^{-1} y_j$ elde edilir. Bu ifade soldan önce η ve sonra A matrisi ile çarpılırsa $y_j = Ax_j, 5 \leq j \leq m$ elde edilir. (48)

Böylece,

(47) ve (48) ifadelerinden, $y_i = Ax_i, 1 \leq i \leq m$ elde edilir, öyle ki $A \in O(3,1)$ olduğundan $V_x^m \overset{O(3,1)}{\sim} V_y^m$'dir. ♦

3. BULGULAR VE SONUÇLAR

1. $U \subset \mathbb{R}^{3+1}$'in özaltuzayı olmak üzere, $\mathbb{R}^{3+1}$'in özaltuzaylarının tipleri, U-uzaysal özaltuzay, U-zamansal özaltuzay ve U-ışıksal özaltuzay olarak üç tip olarak Tanım 38, Tanım 39 ve Tanım 40'ta tanımlanmıştır.

2. $U \subset \mathbb{R}^{3+1}$'in zamansal veya uzaysal özaltuzayı olmak üzere, $k(U) \in \mathbb{N}$ sayısı ile özaltuzaylar arasındaki ilişki,

$$k(U) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} U - uzaysal & ,boyU = 1 \\ U - zamansal & ,boyU = 1 \\ U - uzaysal & ,boyU > 1 \end{matrix} \right\}$$ olarak Önerme 32'de verilmiştir.

3. $k(U) = 1 \Leftrightarrow U - ışıksal, boyU \geq 1$ olduğu Önerme 32'nin sonucudur.

4. $k(U) \in \mathbb{N}$'nin $O(3,1)$-*invaryant* olduğu Önerme 33'de gösterilmiştir.

5. $k(U) \geq 1$ durumunda U'nun bir tabanının genel görüntüsü

$U = sp\left\{ \widetilde{u_1} = (1,0,0,1), u_i = (u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}, 0), i = 2,...,m \right\}$ şeklinde olduğu Lemma 3'te verilmiştir.

6. $k(U) = 1$ durumunda ise U'nun bir tabanının genel görüntüsü

$U = sp\left\{ \widetilde{u_1} = (1,0,0,1), u_i = (u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}, 0), i = 2,...,m \right\}$ şeklinde olduğu Lemma 4'te verilmiştir.

7. $k(U) > 1$ durumunda $k(U) = boyU$ olduğu Önerme 34'te ispatlanmıştır.

8. $\mathbb{R}^{3+1}$'in altuzayı ve onun ortogonal tümleyeninin direkt toplamı ile $k(U) \in \mathbb{N}$ arasındaki bağlantı,

$\mathbb{R}^{3+1} = U \oplus U^{\perp} \Leftrightarrow k(U) \neq 1$ şeklinde Teorem 9'da verilmiştir.

9. Keyfi çift invaryant polinom olmak üzere,

$\left\langle x_i, x_j \right\rangle, i, j = 1, 2, ..., m$'lerin,

keyfi tek invaryant polinom ise, $\varphi(x_1, x_2, ..., x_m)$ çift invaryant polinom olmak üzere

$\left[x_{i_1} \ x_{i_2} \ x_{i_3} \ x_{i_4} \right] \varphi(x_1, x_2, ..., x_m), i_1 < i_2 < ... < i_4;\ i_1, ..., i_4 = 1, ..., m$'lerin

polinomu şeklinde ifade edilebileceği Teorem 10'da verilmiştir.

10. $\mathbb{R}[x_1,\ x_2,\ ...,\ x_m]^{O(3,1)}$ $\mathbb{R}$-*cebir* 'inin üreteç sisteminin

$\langle x_i,\ x_j\rangle,\ i,\ j=1,2,...,m;\ i\leq j$ şeklinde olduğu Teorem 11'de gösterilmiştir.

11. $\mathbb{R}[x_1,\ x_2,\ ...,\ x_m]^{SO(3,1)}$ $\mathbb{R}$-*cebir* 'inin üreteç sisteminin

$\langle x_i,\ x_j\rangle,\ i,\ j=1,2,...,m;\ i\leq j$

$[x_{i_1}\ x_{i_2}...\ x_{i_4}];\ 1\leq i_1\leq i_2\leq...\leq i_4\leq m$ şeklinde olduğu Teorem 12'de gösterilmiştir.

12. $O(3,1)$ grubu için Gram determinantının özelikleri Önerme 40'da gösterilmiştir.

13. $\{V_x^m\ ,1\leq \text{m}<4\}$ lineer bağımsız vektörler sistemi olmak üzere,

$k(V_x^m\ )=1\Leftrightarrow \det G(x_1,x_2,...,x_m)=0$ olduğu Teorem 13'te gösterilmiştir.

14. $\{V_x^m\ ,1\leq \text{m}\}$ vektörler sistemi ve $k(V_x^m\ )\neq 1$ olmak üzere,

$\{x_1,...,x_m\}$'ler lineer bağımsızdır $\Leftrightarrow \det G(x_1,x_2,...,x_m)\neq 0$ şeklinde olduğu Sonuç 9'da verilmiştir.

15. $O(3,1)$ grubunun tüm yörüngeleri $Y_k=\{x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^{3+1}:\langle x,x\rangle=k,x\neq 0\}$ olmak üzere, $k\neq 0$ için Y_k, $k=0$ için Y_0 ve $\{0\}$ cümleleri olduğu Önerme 42'de bulunmuştur.

16. V_x^m ve V_y^m vektör sistemlerinin $O(3,1)$-*denklik*'te ranklarının invaryantlığı $m\geq 1$ için $V_x^m \overset{O(3,1)}{\sim} V_y^m$ ise $rankV_x^m=rankV_y^m$ olduğu Önerme 44 ve Sonuç 10'da gösterilmiştir.

17. $rankV_x^m=4$ olduğu durumunda denklik probleminin çözümü

$V_x^m \overset{O(3,1)}{\sim} V_y^m \Leftrightarrow \langle x_i,x_j\rangle=\langle y_i,y_j\rangle, i\leq j=1,...,m$ şeklinde Teorem 14'de verilmiştir.

4. İRDELEME

H.Weyl [35], 1897 yılında E.Study [38]'ın çalışmasından yararlanarak $O(n,\mathbb{R})$ ve $SO(n,\mathbb{R})$ grupları için noktaların invaryantlarını bulmuştur. 1946 yılında yayınladığı kitabında [35] bu invaryantların Lorentz grubu, $O(p,q,\mathbb{R})$ ve $SO(p,q,\mathbb{R})$ grupları için bulunabileceğini belirtmiştir. Ancak bu kitapta sadece bir not olarak kalmış, bu grupların invaryantları tam olarak incelenmemiştir. İ.Ören [26]'da $O(1,1)$ ve $SO(1,1)$ grupları için noktaların üreteç invaryantları sistemini elde etmiştir. Tezde ise, $O(3,1)$ ve onun altgrubu $SO(3,1)$'in $\mathbb{R}^{3+1}$'deki noktalarının üreteç invaryantları sistemi bulunmuştur.

R.Höfer [15]'de Reel Geometrilerde m tane noktanın invaryantları bulma ile uğraşmış ve bu noktaların yörüngelerini Gram matrisleri yardımıyla ifade etmiş ve Minkowski uzayında örneklemiştir.Diğer taraftan İ.Ören [28]'de $O(1,1)$, $SO(1,1)$ ve Lorentz gruplarının yörüngelerini ve vektörlerin denklik şartlarını vermiştir. Tezde ise, $O(3,1)$ grubunun yörüngeleri ve lineer bağımsız vektör sayısı dört olduğunda denklik problemi çözülmüştür.

R.Höfer [14]'de Minkowski uzayında ışıksal altuzay kavramı ifade edilmiş ve ışıksal altuzayın ve ışıksal olmayan altuzayın boyutu, Gram matrisinin rankı dilinde ifade edilmiştir. Tezde ise, Minkowski uzayında Gram matrisinin tüm özelikleri ve altuzaylar için invaryant olan bir sayı bulunmuştur.Bu sayı yardımıyla altuzayların tipleri ve bu sayı ile aralarındaki bağıntılar verilmiştir.

G.L.Naber [24,25]'de $O(3,1)$ grubu ve onun altgrubu ile ilgili özelikleri incelemiştir. Minkowski uzayında invaryant altuzay ve onların direkt toplamı ile uğraşmıştır. Ayrıca A.I.Mal'Cev [22,syf.212,Teorem 2]'de altuzaylar ve onların ortogonal tümleyenlerinin direkt toplamı olarak yazılabilmesi için gerekli olan şartın bozulmamış altuzay olması gerektiğini ispatlamıştır. Tezde ise, bunun bu şekilde yazılabilmesi için, altuzaylarda invaryant olarak bulunan sayı ile bağlantısı verilmiştir.

$O(3,1)$ grubunun yörüngeleri, $k(U)\in\mathbb{N}$, $O(3,1)$-*invaryant*'lığı , $\mathbb{R}^{3+1}$'in özaltuzaylarının tipleri ve $k(U)\in\mathbb{N}$ ile aralarındaki ilişkiler, altuzayların direkt toplamı ile $k(U)\in\mathbb{N}$ arasındaki ilişki hakkındaki teorem, Gram determinantının özelikleri ve denklik problemi çözülmüştür.

5. ÖNERİLER

$(3+1)$-boyutlu Minkowski uzayzaman geometrisi için noktaların, eğrilerin ve yüzeylerin invaryantlarının bulunması ve bunların fiziksel problemlere uygulanması önemlidir. m-tane $(m>1)$ noktanın, eğrinin ve yüzeyin denklik şartları nelerdir? Aralarındaki bağıntılar ve bunların fiziksel anlamları nelerdir? gibi soruların cevaplarını araştırmak gereklidir. $1<m<4$ durumunda vektörlerin denklik probleminin çözümü Öklid geometrisindeki $O(n)$ grubundaki kadar net olarak ortaya konulamıyor. Bunun için yeni kavramlar ve bağlantılar gerekmektedir. Bu kavram ve bağıntılar nelerdir? Bu elde edilen yeni bilgiler ışığında bu denklik probleminin çözümü nasıl olmaktadır? Bu yöntemler $O(p,q)$ ve onun altgrupları için uygulanabilir mi?

Bu soruların cevapları araştırılmış ancak tam olarak sonuçlara ulaşılamamıştır. Bu soruların cevaplarını bulmak için farklı yöntemler gereklidir. Bunun için biz bu geometriyi $(3+1)$-boyutta inceleyerek, $O(3,1)$ grubu için bu soruların cevaplarını kısmi olarak bulmaya çalıştık.

Tez çalışmasının önemi:

1. Minkowski uzayzaman geometrisinde vektörlerin invaryantlarının bulunmasında invaryant teorisi yöntemlerinin önemli olduğunu göstermektir.
2. Tezde kullanılan yöntemler başka geometrilerin (Simplektik, Üniter, Projektif ve diğerleri) noktalarının invaryantlarını bulma probleminde önemlidir.
3. Tezde kullanılan yöntemler eğrilerin ve yüzeylerin invaryantlarını bulmada önemlidir.

6. KAYNAKLAR

1. Alexandrov, A. D., Mappings of Spaces with Families of Cones and Spacetime Transformations, Annali Di Math., 3 (1975).

2. Başdaş, E., Minkowski Uzayında Hareketler, Doktora Tezi,Ankara Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara,1997.

3. Benz, W., On Lorentz-Minkowski Geometry in real iner product Spaces, Advenced in Geometry, Special Issue (2003) 1-12.

4. Benz, W., Metric and Periodic Lines in real Inner Space Geometries, Monaths Math., 141 (2004) 1-10.

5. Borchers, H. J.and Hegerfeldt, G. C., The Structure of Spacetime Transformations, Communs. Math. Phys., 29, 3 (1972) 259-266.

6. Ciğerim, Ü., Sayılar ve Geometriler, Yüksek Lisans Tezi,Ankara Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara,1993.

7. Curtis, C. W., Linear Algebra: An Introductory Approach, Springer-Verlag, New York, 1984.

8. Criedberg, S. H., Insel, A. J. and Spence, L. E., Linear Algebra, Prentice-Hall, USA,1997.

9. Callahan, James J., The Geometry of Spacetime : An Introduction to Special and General Relativity, Springer-Verlag, New York, 1999.

10. Das, A., The Special Theory of Relativity: A Mathematical Exposition, Springer-Verlag, New York, 1996.

11. Dieudonne, J. A. and Carrell, J. B., Invariant Theory, Old and New, Acad. Pres., New York, London, 1971.

12. Ergin, A. A, Lorentz Düzleminde Kinematik Geometri, Doktora Tezi, Ankara Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü,Ankara,1989.

13. French, A.P., Special Relativity, Norton.New York, 1968.

14. Hawking, S. W., Thorne, K. S., Novikov, I. and Ferris, T., The Future of Spacetime, Norton, New York, 2002.

15. Hong, HK. and Liu, CS., Lorentz Group on Minkowski Spacetime for Construction of the Two Basic Principles of Plasticity, Int.J. of Non-Linear Mechanics,36 (2001) 679-686.

16. Hong, HK., Liu, CS., Some Pysical Models with Minkowski Spacetime Structure and Lorentz Group Symmetry, Int.J. of Non-Linear Mechanics, 36 (2001)1075-1084.

17. Höfer, R., Metric Lines in Lorentz-Minkowski Geometry, Aequationes Math., 71 (2006) 162-173.

18. Höfer, R., m-Point Invariants of Real Geometries, Beitrage Algebra Geom., 40,1 (1999)261-266.

19. Hungerford, T. W., Algebra, Springer-Verlag, New York, 1987.

20. Hilbert, D., Theory of Algebraic Invariants, Cambridge Univ. Press, New York, 1993.

21. Karataş, M., n-Boyutlu Öklid Geometrisinde Noktaların İnvaryantları, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü,Trabzon,2005.

22. Khadjiev, Dj., An Application of the Invariant Theory to the Differential Geometry, Fan, Tashkent, 1988.

23. Launey, J.T. and Eywind, H. W., On the Causal Structure of Minkowski Spacetime, J.Math.Phys., 38, 10(1997) 5044-5086.

24. Lorentz, H. A., Einstein, A., Minkowski, H. and Weyl, H., The Principle of Relativity: A Collection of Original Memoirs on The Special and General Relativity, Dover, New York, 1952.

25. Mal'Cev, A. I., Foundations of Linear Algebra, W.H.Freeman and Comp.,San Francisko, 1965.(Trans.Russian)

26. Moller, C., The Theory of Relativity, Oxford, Clarendon Pres,1972.

27. Naber, G. L., Spacetime and Singularities, Cambridge Univ. Press, New York, 1988.

28. Naber, G. L., The Geometry of Minkowski Spacetime, Springer-Verlag, New York, 1992.

29. Ören, İ., Minkowski Uzayzaman Geometrisinde Noktaların Invaryantları,Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2004.

30. Ören, İ., İki Boyutlu Minkowski Uzayzaman Geometrisinde Noktaların Üreteç Invaryantları Sistemi, II.Geometri Sempozyumu,Temmuz 2004, Sakarya,Bildiri Özetleri,18.

31. Ören, İ., The Conditions of Equivalance of Points for Orthogonal and Lorentz Group on the 2-Dimensional Minkowski Spacetime, IV.International Geometry Symposium, Temmuz 2006, Zonguldak, Abstracts, 76.

32. Petkov, V., Relativity and The Nature of Spacetime, Springer-Verlag, New York, 2005.

33. Robb, A. A., Geometry of Space and Time, New Jersey, 1936.

34. Rowe,E. G. P., Geometrical Physics in Minkowski Spacetime, Springer-Verlag, London, 2001

35. Suppes, P., Space, Time and Geometry,Dordrecht, Boston, Reidel, 1973.

36. Springer, T. A., Invariant Theory, Springer-Verlag, New York, 1977.

37. Taylor, E. F., Spacetime Physics : An İntroduction to Special Theory, San Francisco, 1966., 1992.

38. Weyl, H., The Classical Groups, Their Invariants and Representations, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1946.

39. Washek, F. P., Special Relativity without Physics, Rend.Istit.Mat.Univ.Trieste, 33 (2001) 251-280.

40. Zeemann,E.C., Causality İmplies the Lorentz Group, J.Math.Phys., 5, 4(1964) 490.

41. Ztudy,E., The first main theorem for orthogonal vector invariants, Ber. Sachs. Akad., Wissensch, (1897) 136.

ÖZGEÇMİŞ

İdris ÖREN, 21.08.1978 tarihinde Karabük'te doğdu. 1985-1995 yılları arasında ilk ve ortaöğrenimini Karabük ilinde tamamladı. 1996-2000 yılları arasında K.T.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde lisans eğitimini ve 2000-2004 yılları arasında K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik bölümü Geometri anabilim dalında yüksek lisans eğitimini tamamladı. 2004 yılında K.TÜ. Fen Bilimleri Enstirüsü Matematik bölümü geometri anabilim dalında doktora eğitimine başladı. Aynı zamanda 2000-2006 yılları arasında Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı okullarda Matematik öğretmeni olarak görev yaptı. 2006 yılından itibaren K.T.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde öğretim görevlisi olarak görev yapmaktadır. Yabancı dili İngilizce'dir.