KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MATEMATİK PROGRAMI

M-GRUPLARI VE SYLOW ALTGRUPLARI BLACKBURN p-GRUPLARI OLAN NILPOTENT GRUPLARIN GÖSTERİMLERİ

Mustafa Sabri TERZİ

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"DOKTORA"
Ünvanının Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 22 TEMMUZ 1987
Tezin Sözlü Savunma Tarihi : 25 EYLÜL 1987

Tez Danışmanı : Prof.Dr.Ergün BAYAR
Jüri Üyesi : Prof.Dr.Yavuz GÜNDÜZALP
Jüri Üyesi : Prof.Dr.H.Hilmi HACISALİHOĞLU

Enstitü Müdürü Prof.Dr.Doğan TURHAN

TEMMUZ 1987
TRABZON

ÖNSÖZ

Doktoramı yönetmeyi kabul ederek bana bu çalışmayı veren, karşılaştığım güçlüklerde değerli uyarılarını eksik etmeyen Sayın Hocam Prof.Dr.Ergün BAYAR'a saygı ve minnet duygularımı sunmayı bir borç bilirim.

Verdiği derslerle çalışmamı destekleyen Sayın Hocam Prof.Dr.Yavuz GÜNDÜZALP'e, değerli uyarılarını esirgemeyen Sayın Hocam Yrd.Doç.Dr.Kâmil ALNIAÇIK'a teşekkür ederim.

Ayrıca bu çalışmayı bir proje olarak kabul eden Karadeniz Üniversitesi Araştırma Fonu Yönetim Kurulu nezdinde Karadeniz Üniversitesi Rektörlüğüne teşekkürlerimi arzederim.

TEMMUZ, 1987 M.Sabri TERZİ
Trabzon

İ Ç İ N D E K İ L E R

ÖNSÖZ II

ÖZET III

SUMMARY IV

BÖLÜM I. SONLU GRUPLARIN GÖSTERİM TEORİSİ 1

1. GRUP GÖSTERİMLERİ VE MODÜLLER 1

2. YARIBASİT HALKALAR VE MODÜLLER 7

3. GRUP KARAKTERLERİ 16

4. GÖSTERİMLERİN KENETLENME SAYISI 21

BÖLÜM II. MONOMİAL GÖSTERİMLER VE GENELLEŞTİRİLMİŞ METABELYEN GRUPLAR. 25

5. MONOMİAL GÖSTERİMLER VE M-GRUPLARI 25

KAYNAKLAR 58

ÖZGEÇMİŞ 59

ÖZET

İki bölümden oluşan bu tezin ilk bölümünde, Grup gösterimlerinin temel tanım ve teoremleri verilmiştir. Bu temel tanım ve teoremler Curtis-Reiner(1962a,1983b) Huppert(1967)Dornhoff(1971b)den derlenmiştir.

İkinci bölümde Monomial gösterimler kısaca özetlendikten sonra yapılan orjinal çalışma verilmiştir.

G sonlu bir grup $D \subseteq H \subseteq K$, G nin $D \triangleleft H$, H/D devirli ve $K' \cap H \subseteq D$, $K \triangleleft G$ koşullarını gerçekleyen altgrupları olmak üzere π H in D çekirdekli lineer gösterimi ve $\bar{\pi}$, π nin K üzerine lineer genişletilmişi olsun. K, $K' \cap H \subseteq D$ koşulunu gerçekleyen G nin maksimal altgrubu ise $\bar{\pi}^G$ nin indirgenemez olduğunu Basmaji(1969) göstermiştir. İlk olarak $\bar{\pi}^G$ nin indirgenemez olması halinde K nin verilen koşulu gerçekleyen G nin maksimal altgrubu olduğunu göstererek Basmaji'nin çalışması gerek ve yeter hale getirilmiştir.

Sonlu grupların belli bir $\mathfrak{A}$ ailesinin çözülebilir grupların bir alt ailesi olduğu gösterilerek bu ailenin herbir elemanının monomial gösterimleri elde edilmiştir.

Basmaji(1969) genelleştirilmiş meta-Abelyen grup tanımını vererek her genelleştirilmiş meta-Abelyen grubun bir M-grup olduğunu göstermiştir. Bu çalışmada her $p \in \mathbb{P}-\{2\}'$ için üretenleri ve tanımlı bağıntıları Blackburn (1957) tarafından verilen türev grubu iki üretenli olan p-gruplarının genelleştirilmiş meta-Abelyen grup olduğu gösterilmiş ve daha sonra bu grubun indirgenemez gösterimlerinin tam sistemi elde edilmiştir.

Son olarak Genelleştirilmiş meta-Abelyen grupların sonlu direkt çarpıma kapalı olduğu gösterilerek tüm Sylow altgruplarının türev grupları iki üretenli olan nilpotent grupların indirgenemez gösterimlerinin bir tam sistemi verilmiştir.

SUMMARY

This thesis is consist of two parts. In the first part, basic definitions and theorems of group representation are given. These definitions and theorems have been collected from Curtis-Reiner(1962a,1983b),Huppert(1967)andDornhoff(197

In the second part, after giving a short summation of monomial representations the original part of work has been given.

Let G be a finite group and let $D \subseteq H \subseteq K$ be subgroups of G such that $D \Delta H$, H/D is cyclic, $K' \cap H \subseteq D$ and $K \Delta G$. Furthermore let π be a linear representation of H such that Ker $\pi = D$ and let $\bar{\pi}$ be a linear extension of π onto K.

Basmaji(1969)proved that if K is a maximal subgroup of G satisfying the above condition, then induced representation $\bar{\pi}^G$ is a irreducible representation of G. In the first step of this work we proved that converse Basmaji's theorem is also true; that is if induced representation $\bar{\pi}^G$ is irreducible then the group K is a maximal subgroup of G with $K' \cap H \subseteq D$ (see 5.1). Hence Basmaji's work has been reexpressed with necessarry and sufficient conditions.

In the second part of this work, considering a certain family of finite groups it has been show that $\mathfrak{U}$ is a subfamily of solvable groups and it has been obtained that all of the monomial representation of each member of $\mathfrak{U}$. Next, it has been shown that family $\mathfrak{U}$ is closed under the operation finite-direct product.

Basmaji(1969)gave the definition of the generalized metabelian groups and proved that every generalized metabelian group is a M-group. Furthermore

he gave a p-group which has order p^{13} ($p\in \mathbb{P}-\{2\}$) such that it's derived group generated by two element as an example for generalized metabelian groups but not metabelian.

In this work, for each $p\in \mathbb{P}-\{2\}$ it has been proved that p-groups such that their derived group generated by two elements (Blackburn p-groups) are generalized metabelian groups. And then complete system of irreducible representations of such groups has been given.

Seeing that the conditions on subgroup K implies that K is a maximal subgroup of G with $K' \subseteq HK'$, we obtained a comlete system of irreducible representations of Blackburn p-groups ($p\in \mathbb{P}-\{2\}$).

Finally it has been proved that if G_1, G_2 are finite generalized metabelian groups, then $G_1 x G_2$ is a generalized metabelian group. And if $P_1, P_2, \ldots, P_n$ are Blackburn p_i-groups ($p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{P}-\{2\}$) then $G = \overset{n}{\underset{i=1}{X}} P_i$ is a generalized metabelian group. Furthermore it has been obtained a presentation of G and a complete system of irreducible representations of G.

BÖLÜM-I

SONLU GRUPLARIN GÖSTERİM TEORİSİ

1. GRUP GÖSTERİMLERİ ve MODÜLLER

Bu paragrafta K (aksi söylenmedikçe) keyfi bir cismi, M sıfırdan farklı n boyutlu ($|M:K|=n$) bir K-vektör uzayını, $Hom_K(M,M)$ M uzayının K-lineer dönüşümlerinin K-cebirini $M_n(K)$ K üzerindeki n satır, n sütunlu matrislerin K-cebirini, Ψ $Hom_k(M,M)$ in $M_n(K)$ üzerine cebir izomorfisini, $GL(M)$ $Hom_K(M,M)$ in birimlerinin grubunu ve $GL(n,K)$ da $M_n(K)$ nin birimlerinin grubunu göstersin.

1.1 Tanım

(1) Bir G grubunu GL(M) içine resmeden her π homomorfisine G grubunun M uzaylı bir gösterimi denir.

(2) M vektör uzayının boyutu olan n sayısına gösterimin derecesi denir.

(3) G sonlu bir grup ve K karakteristiği k(K) olan bir cisim olsun. $k(K)=0$ ise gösterime adî gösterim, aksi taktirde gösterime modülar gösterim denir.

(4) G grubunun M uzaylı π gösterimi ve Ψ izomorfisi yardımıyla bir $\pi^*=\Psi\pi:G \longrightarrow GL(n,K)$ dönüşümü G grubunu GL(n,K) grubuna resmeden bir homomorfidir. π^* homomorfisine G grubunun n dereceli bir matris gösterimi denir.

Her $g\in G$ için

$$gm=\pi(g)m \quad m\in M \tag{1.1}$$

etkisiyle M G-operatorlü Abel grubu olur. Bunun yanında her $\lambda\in K$ için

$$g(\lambda m)=\lambda(gm) \quad g\in G,\ m\in M$$

olduğundan M biri diğeri ile değişimli olan iki operatörlü bir Abel grubudur.

(5) M vektör uzayının G-operatörlü K-altuzaylarına M in G altuzayları denir.

(6) π_i G nin M_i $(i=1,2)$ uzaylı gösterimleri olsun. M_1, M_2 K-uzayları G-operatör izomofsa, π_1 ve π_2 gösterimlerine denktir denir ve $\pi_1 \sim \pi_2$ yazılır.
Diğer bir ifadeyle bir $\theta : M_1 \longrightarrow M_2$ K-izomorfisi her $g \in G$ için

$$\pi_1(g)\theta = \theta\pi_2(g)$$

koşulunu gerçekleyecek şekilde mevcutsa, π_1 ve π_2 gösterimlerine denktir, denir. Benzer şekilde matris gösterimlerinin denkliği verilir. Bir $S \in GL(n,K)$ elemanı her $g \in G$ için

$$\pi_1^*(g) = S\pi_2^*(g)S^{-1}$$

olacak şekilde mevcutsa π_1^* ve π_2^* matris gösterimlerine denktir, denir ve $\pi_1^* \sim \pi_2^*$ yazılır.

(7) Bir G grubunun 1 dereceli gösterimlerine lineer (1-boyutlu) gösterim denir.

1.2 Teorem

G sonlu bir grup G' G nin türev (komütatör) grubu olsun. G grubunun farklı lineer gösterimlerinin sayısı s ise

$$s \leq [G:G'] = r$$

verilir.

ξ 1'in K üzerindeki r inci pirimitif kökü olmak üzere $\xi \in K$ ve $k(K) \nmid |G|$ ise, $s = r$ verilir.

1.3 Tanım

π bir G grubunun M uzaylı bir gösterimi olsun. M in G-altuzayları sadece tiriviyal altuzayları ise π'ye indirgenemez gösterim, aksitaktirde indirgenebilir gösterim denir.

M'in her G-altuzayı N için M in bir N' G-altuzayı

$$M = N \oplus N'$$

olacak şekilde mevcut ise π gösterimine tam indirgenebilirdir denir. Bu durumda π_1, π_2 sırasıyla G grubunun N, N' uzaylı gösterimleri olmak üzere

$$\pi \sim \pi_1 \oplus \pi_2$$

dir.

Aşağıda verilen teorem adi gösterim teorisinde çok önemli bir rol oynar.

1.4 Teorem (MASCHKE)

G sonlu bir grup, $k(K)\nmid|G|$ ve π G nin M uzaylı bir gösterimi olsun. Bu taktirde π gösterimi tam indirgenebilirdir.

1.4 yardımıyla ve $|M:K|$ üzerinden indiksüyonla aşağıdaki sonuç kolaylıkla elde edilir.

1.5 SONUÇ;

G sonlu bir grup, $k(K)\nmid|G|$, π G nin M uzaylı bir gösterimi ve M_i $(1\leq i\leq s)$ M in indirgenemez G-altuzayları olmak üzere

$$M=M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_s =: \bigoplus_{i=1}^{s} M_i \qquad (1.2)$$

olsun. Bu taktirde π_i $(1\leq i\leq s)$'ler G grubunun M_i uzaylı gösterimleri olmak üzere:

$$\pi \sim \pi_1 \oplus \pi_2 \oplus \dots \oplus \pi_s =: \bigoplus_{i=1}^{s} \pi_i \qquad (1.3)$$

verilir.

(1.3) matris notasyonu ile ifadesi bir $s\in GL(n,K)$ elemanının her $g\in G$ için

$$S\pi^*(g)S^{-1} = \begin{bmatrix} \pi_1^*(g) & & & \mathbf{0} \\ & \pi_2^*(g) & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \pi_s^*(g) \end{bmatrix} =: \pi_1^*(g)\dot{+}\pi_2^*(g)\dot{+} \dots \dot{+}\pi_s^*(g) \qquad (1.4)$$

olacak şekilde mevcut olmasıdır.

(1.2) ayrışımındaki s sayısı Remark-Krull-Schmıdt teoreminden dolayı tektir ve M_i $(1\leq i\leq s)$ direkt toplam faktörleri (G-izomorfi hariç olmak üzere) tek türlü olarak belirlidir.

1.6 Tanım

Bir G grubu ve K cismi yardımıyla teşkil edilen

$$KG:=\{\sum_{g\in G}\lambda_g g \mid \lambda_g\in K, \text{ sonlu sayıda } g\in G \text{ için } \lambda_g\neq 0\}$$

kümesinde her $a=\sum_{g\in G}\lambda_g g$, $b=\sum_{h\in G}\beta_h h \in KG$, $\lambda\in K$ için

$$a+b=\sum_{g\in G}(\lambda_g+\beta_g)g, \quad ab=\sum_{t\in G}\gamma_t t, \quad \gamma_t=\sum_{g\in G}\lambda_g\beta_{g^{-1}t},$$

$$\lambda a=\sum_{g\in G}(\lambda\lambda_g)g$$

yardımıyla, sırasıyla toplama, çarpma ve skalarla çarpma işlemleri tanımlansın. Bu taktirde KG tanımlanan bu işlemlere göre boyutu $|G|$ olan bir K-cebirdir. G nin elemanlarının KG nin bir K-tabanını oluşturacağı açıktır.

1.7 Tanım

π G nin M uzaylı bir gösterimi olsun.

$$\overline{\pi}\left(\sum_{g\in G}\lambda_g g\right)=\sum_{g\in G}\lambda_g\pi(g) \quad , \quad \sum_{g\in G}\lambda_g g\in KG \tag{1.5}$$

yardımıyla tanımlanan $\overline{\pi}$ dönüşümü KG grup cebirini $Hom_K(M,M)$ cebirine resmeden bir K-cebir homomorfisidir. $\overline{\pi}$'ye KG nin M uzaylı bir gösterimi denir.

Tersine olarak (1.5) ifadesi yardımıyla KG nin M uzaylı her gösterimine karşılık G grubunun M uzaylı bir gösterimi tanımlanabilir.

$\overline{\pi}_i$ KG grup cebirinin M_i $(i=1,2)$ uzaylı gösterimleri olsun. M_1, M_2 uzayları KG-izomorfsa, $\overline{\pi}_1$ ve $\overline{\pi}_2$ gösterimleri denktir, denir ve

$$\overline{\pi}_1 \sim \overline{\pi}_2$$

yazılır. Diğer bir ifadeyle bir $\theta: M_1 \longrightarrow M_2$ K-izomorfisi her $a\in KG$ için

$$\overline{\pi}_1(a)\theta=\theta\overline{\pi}_2(a)$$

olacak şekilde mevcutsa, $\overline{\pi}_1$ ve $\overline{\pi}_2$ gösterimleri denktir denir.

Benzer şekilde matris gösterimlerinin denkliği verilir. Bir $S\in GL(n,K)$ elemanı her $a\in KG$ için

$$\overline{\pi}_1^*(a)=S\overline{\pi}_2^*(a)S^{-1}$$

olacak şekilde mevcutsa, $\overline{\pi}_1^*$ ve $\overline{\pi}_2^*$ gösterimleri denktir denir ve

$$\overline{\pi}_1^* \sim \overline{\pi}_2^*$$

yazılır.

Buna göre KG nin $\bar{\pi}_1$ ve $\bar{\pi}_2$ gösterimlerine karşılık gelen G grubunun gösterimleri π_1 ve π_2 olsun. Bu taktirde $\bar{\pi}_1$ ve $\bar{\pi}_2$ gösterimlerinin denk olabilmesi için gerek ve yeter koşul π_1 ve π_2 gösterimlerinin denk olmasıdır.

1.8 Tanım

G bir grup, M bir KG-solmodül ve $\{m_1 \ldots m_n\}$ M in K-tabanı olsun. Bu taktirde her $a \in KG$ için,

$$am_i = \sum_{1 \leq j \leq n} \lambda_{ji}(a) m_j \qquad (1 \leq i \leq n)$$

yazılışı tek türlü olduğundan

$$\rho(a)(m_i) = \sum_{1 \leq j \leq n} \lambda_{ji}(a) m_j$$

yardımıyla tanımlanan

$$\rho : KG \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(M,M)$$

dönüşümü KG cebirinin M uzaylı bir gösterimidir. ρ'ya KG nin n dereceli regüler gösterimi denir. Açık olarak her $a \in KG$ için

$$\rho^*(a) = \Psi\rho(a) = [\lambda_{ij}(a)] \qquad (1.6)$$

verilir.

(1.1) ve (1.5) ifadeleri; G grubunun gösterimleri ile KG-sol modül'ler arasında birebir bir eşlemenin mevcut olduğunu verir. M'in KG-solaltmodülleri M in G-altuzaylarıdır.

İki KG-solmodül'ün izomorf olabilmesi için gerek ve yeter koşul, ilgili gösterimlerin denk olmasıdır.

(1.3) ifadesinde π yerine ρ alınırsa, ρ nun

$$\rho \sim \bigoplus_{i=1}^{s} \pi_i \qquad (1.7)$$

indirgenemez gösterimlere parçalanışı elde edilir.

R birim elemanlı bir halka M R-sağ, N R-sol modül'ler F MxN üzerindeki serbest Abelyen grup ve H

i) $(m_1+m_2,n)-(m_1,n)-(m_2,n)$
ii) $(m,n_1+n_2)-(m,n_1)-(m,n_2)$ $\qquad m_1, m_i \in M \quad n, n_i \in N \quad i=1,2$
iii) $(mr,n)-(m,rn)$ $\qquad r \in R$

şeklindeki elemanların tümüyle üretilen F'in altgrubu olsun. Bu taktirde F/H faktör grubuna M ve N'in tensör çarpımı denir ve $M\otimes_R N$ notasyonu ile gösterilir.

$$M\otimes_R N =: F/H$$

R,S birim elemanlı halkalar M (S,R)-bimodül N R-solmodül olsun. Bu taktirde her $m\otimes n\in M\otimes_R N$, $s\in S$ için

$$s(m\otimes n) = sm\otimes n$$

etkisiyle $M\otimes_R N$ bir S-solmodül olur. M,N sonlu boyutlu K-uzaylar ve π_1 G nin M uzaylı, π_2 G nin N uzaylı gösterimleri olsun. Her $g\in G$ için;

$$(\pi_1(g)\otimes\pi_2(g))(m\otimes n) = \pi_1(g)(m)\otimes\pi_2(g)(n)\ ,\quad m\otimes n\in M\otimes_K N$$

yardımıyla tanımlanan

$$\pi_1\otimes\pi_2 : G \longrightarrow GL(M\otimes_K N)$$

dönüşümü G nin $M\otimes_K N$ uzaylı bir gösterimidir ve $\pi_1\otimes\pi_2$ gösteriminin derecesi

$$|M\otimes_K N:K| = |M:K|\,|N:K|$$

dir.

$$\pi_1^*(g) = [a_{ij}(g)]\ ,\quad \pi_2^*(g) = [b_{kl}(g)]\ ,\ g\in G$$

olmak üzere

$$(\pi_1(g)\otimes\pi_2(g))^* = [a_{ij}(g)[b_{kl}(g)]]\qquad g\in G$$

yardımıyla G nin $M\otimes_K N$ uzaylı $\pi_1\otimes\pi_2$ gösterimine karşılık gelen G nin matris gösterimi elde edilir ve gösterim $\pi_1^*(g)\dot{X}\pi_2^*(g)$ $g\in G$ ile gösterilir.

G sonlu bir grup $H<G$ ve M KH-solmodül olsun. Bu taktirde KG (KG,KH)-bimodül olduğundan $KG\otimes_{KH} M$ KG-solmodül'dür.

$$M^G = KG\otimes_{KH} M \tag{1.8}$$

diyelim. M^G'ye KH-solmodül M'den indüklenmiştir denir.

$\{g_1,g_2\ldots g_t\}$ $(t=[G:H])$ H'in G deki sol sınıflarının temsilciler sistemi olsun. Bu taktirde;

$$G = \bigcup_{1\le i\le t} g_i H$$

dir.

KG nin her elemanı $\sum_{i=1}^{t} g_i b_i$, $b_i \in KH$ bir tek olarak ifade edilebilir. Bundan dolayı

$$KG = \bigoplus_{1\le i\le t} g_i KH \ , \quad M^G = \bigoplus_{1\le i\le t} g_i \otimes_{KH} M$$

verilir.

$\{m_1,\ldots,m_r\}$ M in K-tabanı ise $\{g_i \otimes m_j \mid 1\le i\le t,\ 1\le j\le r\}$ M^G nin K-tabanıdır. Bu ise $|M^G:K| = tr = [G:H]\,|M:K|$ olduğunu verir. π H in M uzaylı bir gösterimi olsun. Her $g\in G$ için

$$\pi^G(g) = \begin{cases} \pi(g) & g\in H \\ 0 & g\notin H \end{cases}$$

yardımıyla tanımlanan π^G ye π'den indüklenen gösterim denir.

$$\pi_{ij}(g) = \pi(g_i^{-1} g g_j) \qquad 1\le i,j\le t \ , \quad g\in G$$

olmak üzere

$$\pi^G(g) = [\pi_{ij}(g)] \tag{1.9}$$

verilir.

(1.7) G nin her indirgenemez gösterimi G nin regüler gösteriminde bulunacağını ifade eder. O halde G nin denk olmayan indirgenemez gösterimlerinin tümünün bulunması probleminde G nin regüler gösteriminin rolü büyüktür. Bunun yanında, regüler gösterimin incelenmesi, KG cebirinin KG-solmodül olarak incelenmesine denktir.

2. YARIBASİT HALKALAR ve MODÜLLER

Bu paragraftaki halkaların birim elemanlı olduğu varsayılacaktır.

2.1 Tanım

R bir halka ve M bir R-solmodül olsun.

(a) M'in altmodüllerinden oluşan her

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots$$

zinciri için bir $i\in \mathbb{N}$ sayısı

$$M_i = M_{i+j} \qquad j\in \mathbb{N}$$

olacak şekilde bulunabiliyorsa, M'e Artin modülü ve sözü geçen koşulada "azalan zincir koşulu" denir.

(b) M'in altmodüllerinden oluşan her

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots$$

artan zinciri için bir $k \in \mathbb{N}$ sayısı

$$M_k = M_{k+j} \ , \quad j \in \mathbb{N}$$

koşulunu gerçekleyecek şekilde bulunabiliyorsa, M'e Noether modülü ve sözü geçen koşulada "artan zincir koşulu" denir.

2.2 Teorem

R bir halka M bir R-solmodül olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) M Noether modülü'dür.

(b) M'in her altmodülü sonlu üretenlidir.

(c) M'in altmodüllerinin boştan farklı her ailesi bir maksimal eleman içerir.

2.3 Teorem

R bir halka ve M bir R-solmodül olsun. M'in Artin modülü olabilmesi için gerek ve yeter koşul, M'in altmodüllerinin boştan farklı her ailesinin bir minimal eleman içermesidir.

2.4 Tanım

Her R halkası bir R-solmodül olarak gözönüne alınabilir. Bu R-solmodül bir Artin modülü ise R ye bir Artin halkası, bir Noether modülü ise R yi Noether modülü denir.

2.5 Teorem

R bir halka ve M bir R-solmodül olsun. M'in bir esas seriye sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşul, M'in hem Artin ve hem de Noether modülü olmasıdır.

2.6 Tanım

(a) R bir halka ve $x \in R$ belli bir eleman olsun. Bir $m \in \mathbb{N}$ sayısı

$$x^m=0$$

olacak şekilde mevcutsa x'e R in bir nilpotent elemanı denir.

$$x^2=x\neq 0$$

ise x'e R in bir idempotent elemanı denir.

(b) $I \subseteq R$ bir sol (sağ, iki yanlı) ideal olsun. Bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı

$$I^n=0$$

olacak şekilde mevcutsa, I ya nilpotent sol (sağ, iki yanlı) ideal denir.

2.7 Teorem

R bir Artin halkası ve $I \subset R$ nilpotent olmayan bir sol ideal olsun. Bu taktirde I'de en az bir idempotent eleman içerilir.

2.8 Teorem

R bir Artin halkası ve R in tüm nilpotent sol ideallerinin ailesi $\mathfrak{N}$ olmak üzere

$$N=\sum_{I \in \mathfrak{N}} I$$

olsun. Bu taktirde $N \subset R$ nilpotent olan iki yanlı bir idealdir, R in nilpotent olan her sağ ideali N de içerilir ve R/N halkası sıfırdan farklı nilpotent ideal içermez.

2.9 Tanım

2.8 de belirlenen N'e R in radikali denir ve rad R ile gösterilir. rad R=0 koşulunu gerçekleyen her R halkasına yarı basit'tir denir.

2.10 Teorem

R bir Artin halkası olsun. R in yarı basit olabilmesi için gerek ve yeter koşul, $_RR$ regüler R-solmodülünün tam indirgenebilir olmasıdır.

R yarı basit olan bir Artin halkası olsun. 2.10'un sonucu olarak $I_1, I_2, \ldots I_n$ R minimal sol idealleri

$$R=I_1 \oplus I_2 \oplus \ldots \oplus I_n=\bigoplus_{i=1}^{n} I_i \tag{2.1}$$

olacak şekilde mevcuttur. rad $R=0$ olduğundan $I_1, I_2, \ldots \subseteq R$ sol idealleri nilpotent değildir, 2.7 den dolayı $e_1, e_2 \ldots e_n \in R$ idempotent elemanları $e_i \in I_i$ $(1 \leq i \leq n)$ olacak şekilde mevcuttur ve $0 \neq Re_i \subseteq I_i$ $(1 \leq i \leq n)$, I_i minimal olduğundan

$$I_i = Re_i \qquad (1 \leq i \leq n)$$

elde edilir. Buna göre (2.1) eşitliği

$$R = \bigoplus_{i=1}^{n} Re_i \qquad (2.1)'$$

şeklinde ifade edilebilir.

2.11 Tanım

$$1 = e_1 + e_2 + \ldots + e_n, \qquad e_i e_j = \delta_{ij} e_i \qquad (2.2)$$

özelliğini gerçekleyen idempotentlerin $\{e_1, \ldots e_n\}$ kümesine bir ortogonal idempotent kümesi denir. $e_1 \ldots e_n$ idempotentlerinin her biri pirimitif (iki idempotentin toplamı olarak yazılamayan) ve (2.2) özelliği gerçekleniyorsa $\{e_1 \ldots e_n\}$ kümesine ortogonal pirimitif idempotentlerin bir tam sistemi denir.

2.12 Teorem

R bir Artin halkası olsun. R'in yarı basit olabilmesi için gerek ve yeter koşul, her R-solmodülün tam indirgenebilir olmasıdır.

2.13 Teorem

R yarı basit bir halka olsun. Bu taktirde her indirgenemez R-solmodül R'in bir minimal sol idealine izomorftur.

2.13'ün sonucu olarak R yarı basit bir halka olmak üzere her R-solmodül M R in bir sol idealine izomorf olduğu ifade edilebilir.

2.14 Teorem

R yarı basit bir halka ve $I=Re$ $(e^2=e)$ bir sol ideal olsun. I nin minimal sol ideal olabilmesi için gerek ve yeter koşul, eRe halkasının bir çarpık cisim olmasıdır.

2.15 Teorem

$I, I' \subset R$ iki minimal sol ideal olsun. $I \cong I'$ olabilmesi için gerek ve yeter koşul, $II' \neq 0$ olmasıdır.

2.16 Tanım

S bir Artin halkası olsun. S'in iki yanlı idealleri sadece tiriviyal ideallerden ibaretse, S'e basit halka denir.

Bu halde radS S'in iki yanlı bir ideal ve S birim elemanlı olduğundan radS=0 dır. Buna göre birim elemanlı her basit halka yarı basittir.

R yarı basit bir halka ve $\mathfrak{M}(R)$, R'in tüm minimal solideallerinin kümesi olmak üzere $I_1, I_2 \in \mathfrak{M}(R)$ keyfi olsun.

$$I_1 \sim I_2 : \Longleftrightarrow I_1 I_2 \neq 0$$

yardımıyla bir "~" bağıntısı tanımlanabilir. "~" $\mathfrak{M}(R)$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır. $\mathfrak{M}(R)$ kümesinin "~" bağıntısına göre denklik sınıflarının temsilcilerinin bir tam sistemi $\overline{\mathfrak{M}}(R)$ olsun. Her $I \in \overline{\mathfrak{M}}(R)$ için

$$B_I := \sum_{I' \in [I]} I' \quad , \quad ([I] \text{ I nin denklik sınıfı})$$

yazalım.

2.17 Teo[illegible]

R yarı b[illegible]sit bir halka ve $I \in \overline{\mathfrak{M}}(R)$ keyfi olsun. Bu taktirde $B_I \subset R$ (bas[illegible] iki yanlı idealdir. B_I ye R halkasının basit bileşeni (Wedderburn bileşeni) denir. Bilindiği üzere:

$$R = \bigoplus_{I \in \overline{\mathfrak{M}}(R)} B_I \tag{2.3}$$

verilir (C.R.1962 a). R in keyfi bir ideali belli bir sayıdaki basit bileşenlerinin bir toplamıdır.

O halde yarı basit olan bir Artin R halkasının basit bileşenlerinin yapısının bilinmesiyle tam olarak belirlenebilir. Bunun için basit olan Artin halkalarının yapısını belirlemek gerekir.

S basit olan bir Artin halkası olsun. Bu taktirde $s_1, \ldots s_k$ minimal sol idealleri

$$S = \bigoplus_{i=1}^{k} S_i \ , \quad S_iS_j \neq 0 \qquad (2.4)$$

olacak şekilde mevcuttur. Her S_i için bir e_i pirimitif idempotenti $S_i = Se_i$ olacak şekilde mevcuttur ve 2.14'e göre e_iSe_i bir çarpık cisimdir.

2.18 Teorem (Wedderburn)

S basit bir Artin halkası ve e S'in bir pirimitif idempotenti olsun. Bu taktirde;

$$D = \mathrm{Hom}_S(Se,Se) \cong eSe$$

verilir. D nin Se üzerindeki etkisi, eSe ile sağdan yapılan çarpma ile aynıdır. Se, eSe üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayıdır. $|Se:eSe| = r$ ise,

$$S \cong \mathrm{Hom}_{eSe}(Se,Se) \cong M_r(D) \cong M_r(eSe)$$

verilir. Se'nin eSe üzerindeki r boyutlu S'in (2.4) parçalanışındaki minimal sol ideallerinin sayısına eşittir: $r = k$ dır.

G sonlu bir grup, K, $(k(K) \nmid |G|)$ bir cisim olsun. Bu taktirde 1.4 ve 2.10 dan dolayı KG yarı basit bir halkadır. $|G| < \infty$ ve K cisim olduğunda KG bir Artin halkasıdır.

Buna göre her $I \in \overline{\mathfrak{M}}(KG)$ için

$$B_I = \sum_{I' \in [I]} I' = \bigoplus_{I' \in [I]} I'$$

olmak üzere

$$KG = \bigoplus_{I \in \overline{\mathfrak{M}}(KG)} B_I = \bigoplus_{I \in \overline{\mathfrak{M}}(KG)} \left(\bigoplus_{I' \in [I]} I' \right) \qquad (2.5)$$

parçalanışı elde edilir. Bunun yanında her $I \in \overline{\mathfrak{M}}(KG)$ için bir $e \in KG$ pirimitif idempotenti $I = (KG)e$ olacak şekilde mevcuttur ve 2.15'e göre $k = |[I]|$ olmak üzere

$$B_I = \bigoplus_{I' \in [I]} I' \cong \mathrm{Hom}_{e(KG)e}((KG)e, (KG)e) \cong M_k(e(KG)e)$$

verilir.

2.19 Teorem (SCHUR)

K cebirsel kapalı bir cisim, A sonlu boyutlu K-cebir ve M,N indirgenemez A-solmodül'ler olsun. Bu taktirde;

$$\mathrm{Hom}_A(M,N) = \begin{cases} (0) & M \not\cong N \\ K.1_M & M \cong N \end{cases}$$

verilir.

A K-cebir, M bir A-solmodül ve $a \in A$ belli bir eleman olsun. Her $m \in M$ için

$$a_L(m) = am$$

yardımıyla tanımlanan $a_L : M \longrightarrow M$ dönüşümü bir K-homomorfidir. $a_L \in \mathrm{Hom}_K(M,M)$, $A_L = \{a_L \mid a \in A\} \subset \mathrm{Hom}_K(M,M)$ bir altcebirdir.

2.20 Teorem (Burnside)

K cebirsel kapalı bir cisim, A bir K-cebir ve M indirgenemez bir A-solmodül olsun. Bu taktirde;

$$\mathrm{Hom}_K(M,M) = A_L$$

verilir.

2.21 Tanım

A bir K-cebir ve M $(n=|M:K|<\infty)$ bir A-solmodül olsun. (1.6) yardımıyla tanımlanan A nın n dereceli matris gösterimi

$$\rho^* : A \longrightarrow M_n(K),$$

tanımlanabilir.

$$f_{ij}(a) = \lambda_{ij}(a) \qquad a \in A \qquad 1 \le i,j \le n$$

yardımıyla $f_{ij} : A \longrightarrow K$ $(1 \le i,j \le n)$ fonksiyonlarını tanımlayalım. $\{f_{ij} \mid 1 \le i,j \le n\}$ kümesine ρ^* gösteriminin koordinat fonksiyonları denir.

2.22 Teorem (Frobenius, Schur)

K cebirsel kapalı bir cisim, A bir K-cebir, $M_1 \ldots M_s$ ikişer tarzda izomorf olmayan $n_r = |M_r:K|$ $(1 \le r \le s)$ boyutlu indirgenemez A-solmodül'ler ve her $1 \le r \le s$ için ρ_r^*, A nın M_r ile elde edilen $\{f_{ij}^{(r)} \mid 1 \le i,j \le n_r\}$ koordinat fonksiyonlu gösterimi olsun. Bu taktirde

$$\{f_{ij}^{(r)} \mid 1 \le i,j \le n_r \quad 1 \le r \le S\} \tag{2.6}$$

kümesi K-lineer bağımsızdır.

2.23 Teorem

G sonlu bir grup, K $(k(K) \nmid |G|)$ cebirsel kapalı bir cisim ve $\mathfrak{M}(KG)=\{I_1, I_2, \dots, I_s\}$ olsun.

(a) $KG \cong \dot{+}_{1 \le i \le s} M_{n_i}(K)$, $|I_i:K|=n_i$ $1 \le i \le s$ verilir.

(b) ρ KG nin regüler gösterimi ve π_i , I_i minimal sol ideali ile elde edilen gösterim olmak üzere

$$\rho \sim n_1\pi_1 \oplus n_2\pi_2 \oplus \dots \oplus n_s\pi_s \tag{2.7}$$

verilir.

(c) $|G| = \sum_{i=1}^{s} n_i^2$ dir.

(d) $C_1, C_2, \dots C_r$ G nin eşlenik sınıfları olmak üzere

$$c_i = \sum_{x \in C_i} x \quad (1 \le i \le r)$$

olsun. Bu taktirde $\{c_1, c_2, \dots c_r\}$ $Z(KG)$ nin bir K-tabanıdır ve $r=s$ dir. ($Z(KG)$ KG nin merkezidir.)

K bir cisim $L \supset K$ keyfi bir cisim genişlemesi ve A bir K-cebir olsun. Bu taktirde $A \otimes_K L$ bir L-cebirdir. Bu cebiri A^L ile göstereceğiz. π A nın M uzaylı bir gösterimi olsun. Bu taktirde her $a = \sum_i \ell_i a_i \in A^L$ için

$$\overline{\pi}(a) = \sum_i \ell_i \pi(a_i)$$

yardımıyla tanımlanan $\overline{\pi}$, A^L in M^L uzaylı bir gösterimidir.

K nın hangi genişlemeleri için π ve $\overline{\pi}$ nin indirgenemezliklerinin korunacağını araştıralım.

2.24 Teorem

M,N A-sol modül'ler, $L \supset K$ keyfi bir cisim genişlemesi olsun.

(a) $Hom_A(M,N) \otimes_K L \cong Hom_{A^L}(M^L, N^L)$ verilir.

(b) M^L, N^L A^L-solmodülleri A^L- izomorfa M,N A-sol modülleri A-izomorftur.

2.25 Tanım

(a) A bir K-cebir ve M indirgenemez A-solmodül olsun.Her $L \supset K$ cisim genişlemesi için M^L indirgenemez A^L-solmodül ise M'e mutlak indirgenemez A-solmodül denir.
(b) $L \supset K$ bir cisim genişlemesi olsun. Her indirgenemez A^L-solmodül mutlak indirgenemez A^L-solmodül ise L'e A nın bir parçalayıcı cismi denir.
(c) G sonlu bir grup A=KG olsun. A nın her parçalayıcı cismine G nin bir parçalayıcı cismi denir.

2.26 Teorem

A bir K-cebir M indirgenemez A-solmodül olsun. M in mutlak indirgenemez A-solmodül olabilmesi için gerek ve yeter koşul,

$$\mathrm{Hom}_A(M,M) \cong K$$

olmasıdır.

K nın cebirsel kapalı olması halinde indirgenemezlik ile mutlak indirgenemezliğin çakışacağı açıktır.

2.27 Teorem

G sonlu bir grup olsun. Bu taktirde G nin bir parçalayıcı cismi mevcuttur ve bu cisim cebirsel sayılar cisminin bir alt cismidir.

K G nin bir parçalayıcı cismi ve M indirgenemez KG-solmodül olsun. Bu taktirde M mutlak indirgenemez KG-solmodül'dür. 2.26'ya göre $\mathrm{Hom}_{KG}(M,M) \cong K$ verilir. Bu sonuç Schur teoreminden başka bir şey değildir. Schur teoremine bağlı olarak verilen Burnside, Frobenius-Schur teoremleri, K nın parçalayıcı cisim olması durumunda da verilir.

$L \supset K$ Keyfi bir cisim genişlemesi ve $\mathfrak{M}(KG)=\{I_1, I_2, \dots I_s\}$ olsun. Bu taktirde $\mathfrak{M}(LG)=\{I_1^L, I_2^L, \dots I_s^L\}$ verilir.

2.28 Teorem

G sonlu bir grup, $H_1, H_2 \triangleleft G$ olmak üzere $G=H_1 \times H_2$ ve K, $(k(K) \nmid |G|)$ bir cisim olsun.

(a) π_i, H_i'nin M_i $(i=1,2)$ uzaylı gösterimleri ise

$$\pi(h_1h_2)(m_1 \otimes m_2)=\pi_1(h_1)m_1 \otimes \pi_2(h_2)m_2,\ h_i \in H_i,\ m_i \in M_i\ (i=1,2)$$

yardımıyla tanımlanan π dönüşümü G nin $M_1 \otimes_K M_2$ uzaylı bir gösterimidir.

(b) K H_1, H_2 için bir parçalayıcı cisim ve M_i indirgenemez KH_i-solmodül $(i=1,2)$ ise,

$$(h_1h_2)(m_1 \otimes m_2) = h_1m_1 \otimes h_2m_2,\quad h_i \in H_i,\ m_i \in M_i \quad (i=1,2)$$

işlemine göre, $M_1 \otimes_K M_2$ indirgenemez bir KG-solmodül'dür. Tersine olarak her indirgenemez KG-solmodül yukarıdaki gibi bir tensör çarpımıdır. (Bkz. Dornhoff(1971 b))

2.29 SONUÇ

G sonlu bir grup, $H_1, H_2 \triangleleft G$ olmak üzere $G=H_1 x H_2$ ve K,$(k(K)\nmid |G|)$ H_1, H_2 altgruplarının parçalayıcı cismi olsun. Bu taktirde;

$\mathfrak{M}(KH_\ell)=\{I_{\ell 1}, I_{\ell 2} \ldots I_{\ell s_\ell}\}$ $(\ell=1,2)$ olmak üzere

$\mathfrak{M}(KG) =\{I_{1m} \otimes I_{2n} \mid 1 \le m \le s_1.\ 1 \le n \le s_2\}$

verilir.

3. GRUP KARAKTERLERİ

Karakter teori, grup ve grup gösterimleri teorisinde çok önemli bir rol oynar.

Bu paragrafta K bir cisim, G sonlu bir grup ve M $(|M:K|<\infty)$ KG-solmodül olsun.

3.1 Tanım

π G nin M uzaylı bir gösterimi olsun. Bu taktirde;

$$X(x)= iz(\overline{\pi}^*(x)) \qquad x \in KG$$

yardımıyla tanımlanan $X:KG \longrightarrow K$ dönüşümüne KG nin M ile elde edilen karakteri denir ve

$$X = \text{İz}(KG, M)$$

ile gösterilir. π indirgenemez ise, X ye G nin indirgenemez karakteri denir.

Bilindiği üzere her $A, B \in M_n(K)$ için

$$\text{İz}(AB) = \text{İz}(BA)$$

verilir.

3.2 Teorem

(a) $X \in \text{Hom}_K(KG, K)$ dır.

(b) M ve M' karakterleri sırasıyla X ve X' olan izomorf KG-solmodüller olsun. Bu taktirde $X = X'$ verilir.

(c) Her $g \in G$ için $X(g)$ birin K üzerindeki köklerinin bir toplamıdır.

3.3 Teorem

M ve N karakterleri sırasıyla X ve ν olan KG-solmodül'ler olsun. Bu taktirde $M \dot{+} N$ ve $M \otimes_K N$ KG-solmodül'lerinin karakterleri sırasıyla $X + \nu$ ve $X\nu$ dir.

$k(K) \nmid |G|$, $\mathfrak{M}(KG) = \{I_1, I_2, \ldots I_s\}$, M KG-solmodül ve $n_r \in \mathbb{N}_0$ M'in I_r ye izomorf olan KG-altmodüllerinin sayısı olsun. Bu taktirde;

$$M \approx n_1 I_1 \oplus n_2 I_2 \oplus \ldots \oplus n_s I_s := \overbrace{I_1 \oplus \ldots \oplus I_1}^{n_1} \oplus \overbrace{I_2 \oplus \ldots \oplus I_2}^{n_2} \oplus \ldots \oplus \overbrace{I_s \oplus \ldots \oplus I_s}^{n_s} \tag{3.1}$$

yazalım. $X_r = \text{İz}(KG, I_r)$ $1 \le r \le s$ olmak üzere 3.2 b den

$$X = \text{İz}(KG, M) = \sum_{r=1}^{s} n_r X_r$$

elde edilir.

2.20, 2.22, 2.23 ve 2.28 teoremlerinin bir sonucu olarak aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

3.4 Teorem

$\mathfrak{M}(KG) = \{I_0, I_2, \ldots I_s\}$, $X_r = \text{İz}(KG, I_r)$, $1 \le r \le s$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadelerden her biri için $\{X_1, X_2, \ldots X_s\}$ kümesi K-lineer bağımsızdır.

(a) $k(K) = 0$

(b) K G nin bir parçalayıcı cismidir.

3.5 Teorem

M ve N karakterleri sırasıyla χ ve ν olan KG-solmodüller olsun. Bu taktirde;

(a) $k(K)=0$ olmak üzere $M\cong N$ olabilmesi için gerek ve yeter koşul, $\chi=\nu$ olmasıdır.

(b) M,N mutlak indirgenemez KG-solmodüller olmak üzere $M\cong N$ olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\chi=\nu$ olmasıdır.

3.6 Teorem

K G nin bir parçalayıcı cismi, $\mathfrak{M}(KG)=\{I_1,I_2,\ldots,I_s\}$ ve $\chi_r=\dot{I}z(KG,I_r)$ $1\leq r\leq s$ olsun. Bu taktirde;

$$\sum_{g\in G}\chi_m(g)\chi_n(g^{-1})=|G|\delta_{mn}\qquad 1\leq m,n\leq 1\qquad (*)$$

(δ_{mn} kroneker sembolü) verilir. $C_1,C_2,\ldots C_s$ G nin $h_i=|C_i|$ $1\leq i\leq s$ olan eşlenik sınıflarının tümü olsun. Bu taktirde $g_i\in C_i(1\leq i\leq s)$ olmak üzere (*) ifadesinden

$$\sum_{i=1}^{s} h_i\chi_m(g_i)\chi_n(g_i^{-1})=|G|\delta_{mn}\qquad 1\leq m,n\leq s$$

elde edilir. Bunun yanında

$$\sum_{n=1}^{s}\chi_n(g_i)\chi_n(g_j^{-1})=\frac{|G|}{h_i}\delta_{ij}\qquad (**)$$

verilir. * * ifadesinde $g_i=g_j=1$ alınırsa $h_i=1$ ve

$$\sum_{n=1}^{s}(\chi_n(1))^2=\sum_{n=1}^{s}f_n^2=|G|\ ,\ \chi_n(1)=f_n=|I_n:K|\qquad 1\leq n\leq s$$

elde edilir.

3.7 Teorem

K bir G grubunun sıfır karakteristikli bir parçalayıcı cismi olsun. Bu taktirde;

(a) G nin her indirgenemez gösteriminin derecesi, G nin mertebesinin bir bölenidir.

(b) $I_m \in \mathfrak{M}(KG)$, $B_{I_m} = \sum_{I \in [I_m]} I$, $\chi_m = \dot{I}z(KG, I_m)$ $1 \le m \le s$

$f_m = \chi_m(1)$, $c_i = \sum_{h \in C_i} h$ $1 \le i, m \le s$ $g_i \in C_i$ olmak üzere

$$e_m = \frac{f_m}{|G|} \sum_{i=1}^{s} \chi_m(g_i^{-1})\ c_i \in KG$$

elemanını göz önüne alalım. Bu taktirde;

$$B_{I_m} = (KG)\ e_m$$

dir. Burada merkezi idempotent olan e_m, I_m'in verilmesiyle tektürlü olarak belirlidir.

Bundan sonra aksi söylenmedikçe $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismini, G de sonlu bir grubu gösterecektir.

$H \le G$, M bir $\mathbb{C}H$-solmodül olsun. Bu taktirde (1.8) ile M^G nin yapısını biliyoruz.

$$\chi = \dot{I}z(\mathbb{C}H, M)$$

ise, M^G ile elde edilen karakteri χ^G ile gösterelim.

$$\chi^G = \dot{I}z(\mathbb{C}G, M^G)$$

χ^G ye χ den indüklenen karakter denir.

$[G:H]=n$, $G = \bigcup_{i=1}^{n} g_i H$, π G nin M uzaylı bir gösterimi olsun. Bu taktirde (1.9) ile π^G yi biliyoruz.

$$(\pi^G(g))^* = [\pi^*(g_j^{-1} g g_i)] \quad 1 \le i, j \le n$$

olmak üzere,

$$\chi^G(g) = \sum_{i=1}^{n} \dot{I}z(\pi^*(g_i^{-1} g g_i)) \ , \quad \dot{\chi}(g_i^{-1} g g_i) = \dot{I}z\ \pi_{ii}^*(g),$$

$$\dot{\chi}(g_i^{-1} g g_i) = \begin{cases} \chi(g) & g_i^{-1} g g_i \in H \\ 0 & g_i^{-1} g g_i \notin H \end{cases}$$

$$\chi^G(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{t \in G} \dot{\chi}(t^{-1} g t)$$

eşitliği ile G nin M^G ile elde edilen karakteri verilir.

3.8 Tanım

Her $g,t \in G$ için

$$\theta(t^{-1}gt)=\theta(g)$$

koşulunu gerçekleyenbir $\theta:G \longrightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonuna G üzerinde bir sınıf fonksiyonu denir.

$$Cf(G):=\{\theta \mid \theta:G \longrightarrow \mathbb{C}\ ,\theta \text{ bir sınıf fonksiyonudur.}\}$$

kümesini göz önüne alalım. Her $\theta,\theta_i \in Cf(G)$ $(i=1,2)$ için

$$(\theta_1+\theta_2)(g)= \theta_1(g)+\theta_2(g)$$
$$(\theta_1\theta_2)(g)= \theta_1(g)\theta_2(g) \qquad g\in G,\ \ \lambda\in\mathbb{C}$$
$$(\lambda\theta)(g) = \lambda\theta(g)$$

yardımyla tanımlanan işlemlere göre $Cf(G)$ bir $\mathbb{C}$-cebirdir.

$\chi_1,\chi_2,\ldots\chi_s$ G nin indirgenemez karakterlerinin bir ortogonal tam sistemi olmak üzere

$$Cf(G) = \mathbb{C}\chi_1 \oplus \mathbb{C}\chi_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}\chi_s$$

verilir.

Her $\theta_1,\theta_2 \in Cf(G)$ için

$$(\theta_1,\theta_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \theta_1(g)\ \overline{\theta_2(g)}$$

yardımıyla tanımlanan

$$(\ \ ,\ \ ):Cf(G) \times Cf(G) \longrightarrow \mathbb{C}$$

dönüşümü $Cf(G)$ üzerinde bir iç çarpımdır.

$k(\mathbb{C})=0$ olduğundan M,N karakterleri sırasıyla χ,ν olan $\mathbb{C}G$-solmodüller olsun. 3.5/a dan dolayı karakterler için verilecek her eşitlik ilgili modüller için izomorfiye dönüşecektir.

3.9 Teorem

$N\leq H\leq G$ bir altgrup zinciri ve M χ karakterli KN-solmodül olsun. Bu taktirde

$$(\chi^H)^G = \chi^G$$

3.10 Teorem

$H<G$, M karakteri χ olan bir $\mathbb{C}H$-solmodül ve N karakteri ν olan bir $\mathbb{C}G$-solmodül olsun. Bu taktirde;

$$\chi^G\nu=(\chi\,\nu_H)^G \quad , \quad (\chi^G,\nu) = (\chi,\nu_H)$$

verilir.

3.11 Teorem

$I_r \in \widetilde{\mathfrak{M}}(\mathbb{C}G)$, $\chi_r = \mathrm{İz}(\mathbb{C}G, I_r)$ $1 \leq r \leq s$ ve M karakteri χ olan bir $\mathbb{C}G$-solmodül olsun. Bu taktirde (3.1) ifadesindeki n_r sayıları bir tek olarak belirlidir ve

$$n_r = (\chi,\chi_r) \quad , \quad 1 \leq r \leq s$$

dir. M'in indirgenemez $\mathbb{C}G$-solmodül olabilmesi için gerek ve yeter koşul, $(\chi,\chi) = 1$ olmasıdır.

3.12 Tanım

G bir grup ve $H \leq G$ olsun. $H_1 \trianglelefteq H$ devirli ve $H_2 \triangleleft H$ p-grup için $H = H_1 \times H_2$ olacak şekilde bulunabiliyorsa, H'a G nin bir elemanter altgrubu denir.

3.13 Teorem (Karakterlerin Brauer Karakterizasyonu)

G nin her $\mathbb{C}$-karakteri G nin elemanter altgruplarının lineer karakterlerinden indüklenen karakterlerinin bir $\mathbb{Z}$-lineer kombinasyondur. Curtis-Reiner (1962 a))

4. GÖSTERİMLERİN KENETLENME SAYISI

4.1 Tanım

M,N KG-solmodül'ler olsun. $\mathrm{Hom}_{KG}(M,N)$'in K-boyutuna M ve N in kenetlenme sayısı denir ve $i(M,N)$ ile gösterilir:

$$i(M,N) = |\mathrm{Hom}_{KG}(M,N):K|$$

Bilindiği üzere M_1, M_2, N KG-solmodül'ler olmak üzere

$$i(M_1 \oplus M_2, N) = i(M_1,N) + i(M_2,N),$$

KG nin yarı basit olması halinde her KG-solmodül M,N için

$$i(M,N) = i(N,M)$$

verilir.

4.2 Tanım

M tam indirgenebilir KG-solmodül ve N indirgenemez KG-solmodül olsun. M in indirgenemez bileşenlerden oluşan ayrışımında, N'e izomorf olan altmodüllerin r sayısına N in M'de içerilme sayısı denir.

Bilindiği üzere K nın cebirsel kapalı olması halinde bu r sayısı i(M,N) e eşittir. Buna göre tam indirgenebilir KG-solmodül M in indirgenemez olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$i(M,M) = 1$$

olmasıdır.

G bir grup H<G olsun. Her $a,b\in G$, $h\in H$ için

$$h^{a^{-1}} := {}^{a}h = aha^{-1}, \quad h^{b} = b^{-1}hb, \quad {}^{a}H = aHa^{-1} = H^{a^{-1}}$$

yazalım. M bir KH-solmodül ve $a\in G$ olsun. ${}^{a}M$ K-vektör uzay olarak M ile aynı olup ${}^{a}H$ in ${}^{a}M$ üzerindeki etkisi

$${}^{a}h * m = hm \quad , \quad h\in H \quad , \quad m\in M$$

ile tanımlıdır. Buna göre ${}^{a}M$ bir $K({}^{a}H)$-solmodül'dür. ${}^{a}M$'e M in eşleniği denir. π H in M ile elde edilen gösterimi ve X bu gösterimin karakteri olsun. Bu taktirde;

$$\pi^{a}({}^{a}h) = \pi(h) \quad , \quad X^{a}({}^{a}h) = X(h) \qquad {}^{a}h\in {}^{a}H$$

yardımıyla tanımlanan π^{a} ya π nin, X^{a} ya X nin eşleniği denir.

4.3 Altgrup Teoremi

H_1, H_2 G nin altgrupları ve M bir KH_1-solmodül olsun. Bu taktirde $H_2\backslash G/H_1$ (H_2,H_1)-çift yan sınıfların bir tam sistemi olmak üzere

$$M^{G}|_{H_2} \cong \bigoplus_{H_2aH_1\in H_2\backslash G/H_1} \left({}^{a}M|_{{}^{a}H_1\cap H_2}\right)^{H_2}$$

verilir. Bu ayrışmdaki herbir direkt toplam faktörü (H_2,H_1)-çift yan sınıfların temsilcilerinin seçiminden bağımsızdır. Diğer bir ifadeyle: $H_2aH_1=H_2bH_1$ ise

$$({}^{a}M|_{{}^{a}H_1\cap H_2})^{H_2} \cong ({}^{b}M|_{{}^{b}H_1\cap H_2})^{H_2}$$

verilir.

G bir grup H_1,H_2 G nin altgrupları ve G_0 G x G nin diyagonalı olsun. Bu taktirde G x G deki (G_0,H_1xH_2)-çift yansınıfların $\Lambda_0=G_0\backslash G\times G/H_1xH_2$ kümesinden G deki (H_1,H_2)-çift yansınıfların $\Lambda:=H_1\backslash G/H_2$ kümesi üzerine birebir bir dönüşüm vardır. Bu dönüşüm her $G_0(x,y)\ H_1xH_2 \in G_0\backslash G\times G/H_1xH_2$ için $\theta(G_0(x,y)(H_1xH_2)) = H_1x^{-1}yH_2$ ile verilir.

4.4 Tensör Çarpım Teoremi

$H_1,H_2 < G$ ve M_i KH_i-solmodül (i=1,2) olsun. Bu taktirde;

$$M_1^G \otimes M_2^G \cong \bigoplus_{G_0(x,y)(H_1xH_2)\in\Lambda_0} (({}^{x}M_1 \otimes {}^{y}M_2))_{{}^{x}H_1\cap {}^{y}H_2})^G$$

$$\cong \bigoplus_{H_1x^{-1}yH_2\in\Lambda} (({}^{x}M_1 \otimes {}^{y}M_2)|_{{}^{x}H_1\cap {}^{y}H_2})^G$$

verilir. $H_1x^{-1}yH_2=H_1u^{-1}vH_2$ ise

$$(({}^{x}M_1 \otimes {}^{y}M_2)_{{}^{x}H_1\cap {}^{y}H_2})^G \cong (({}^{u}M_1 \otimes {}^{v}M_2)_{{}^{u}H_1\cap {}^{v}H_2})^G$$

verilir.

π_i H_i nin M_i(i=1,2) ile elde edilen gösterimi olsun. Bu taktirde

$$\pi_1^G \otimes \pi_2^G \approx \bigoplus_{H_1x^{-1}yH_2\in\Lambda} ((\pi_1^x \otimes \pi_2^y)|_{{}^{x}H_1\cap {}^{y}H_2})^G$$

verilir. Curtis-Reiner (1983 b)

4.5 Teorem

G, H_1,H_2,M_1,M_2 4.4 deki gibi olmak üzere $(x,y)\in G\times G$ için

$$i({}^{x}M_1,{}^{y}M_2)=i(M_1,M_2,\ H_1\ x^{-1}yH_2)$$

yazalım. Bu taktirde;

$$i(M_1^G, M_2^G) = \sum_{H_1x^{-1}yH_2 \in \Lambda} i(M_1, M_2, H_1x^{-1}yH_2)$$

verilir.

π_i H_i nin M_i (i=1,2) ile elde edilen gösterimi olmak üzere

$$i(\pi_1^G, \pi_2^G) = \sum_{H_1x^{-1}yH_2 \in \Lambda} i(\pi_1|^{x}H_1 \cap {}^{y}H_2, \; \pi_2^{x^{-1}y}|^{x}H_1 \cap {}^{y}H_2)$$

verilir.

χ_i π_i nin (i=1,2) karakteri olmak üzere

$$i(\pi_1^G, \pi_2^G) = (\chi_1^G, \chi_2^G) = \sum_{H_1x^{-1}yH_2 \in \Lambda} (\chi_1^x, \chi_2^y)_{{}^{x}H_1 \cap {}^{y}H_2}$$

verilir. Curtis-Reiner(1983 b)

BÖLÜM II

MONOMİAL GÖSTERİMLER VE GENELLEŞTİRİLMİŞ METABELYEN GRUPLAR

5 MONOMİAL GÖSTERİMLER VE M-GRUPLARI

G sonlu bir grup, $H \leq G$ ve π H'in bir lineer gösterimi olsun. Bu taktirde π^G ye G nin bir monomial gösterimi denir. π^G indirgenemez ise, indirgenemez monomial gösterim denir.

G grubunun her indirgenemez $\mathbb{C}$-gösterimi monomial ise, G grubuna bir monomial grup (kısaca M-grup) denir. Her süper çözülebilir grup bir M-grup, her M-grup çözülebilirdir ve ayrıca her sonlu çözülebilir bir grup bir M-grubu içine gömülebilir. Huppert (1967)

Buna mukabil her çözülebilir grup bir M-grup değildir. Örneğin,

$$P = \langle x,y,z \mid z=[x,y] \ , \ x^3=y^3=z^3=1 \rangle$$

olmak üzere

$$x^{\alpha}=y, y^{\alpha}=x^2, \quad z^{\alpha}=z$$

yardımıyla tanımlanan $\alpha : P \longrightarrow P$ dönüşümü P nin mertebesi 4 olan bir otomorfisidir. Bu otomorfi ve P grubu yardımıyla

$$G=P\langle\alpha\rangle$$

grubunu tanımlayalım. $G''=E$ olduğundan G, çözülebilir olmasına mukabil bir M-grup değildir. Dornhoff (1967 a) , Winter (1972).

Günümüze değin çözülebilir bir grubun bir M-grup olabilmesi için gerek ve yeter bir koşul verilememiştir. Ancak bir çözülebilir grubun bir M-grup olabilmesi için bazı yeter koşullar verilebilmiştir. Örneğin; G bir grup ve N,G nin tüm sylow altgrupları Abel olan bir çözülebilir normal altgrubu olmak üzere G/N süper çözülebilir olsun. Bu taktirde G bir M-gruptur. Huppert (1967).

5.8 de tanımlanan her genelleştirilmiş metabelyen grubun bir M-grup olduğunu Basmaj (1969) de göstermiştir.

Bu bölümde belli koşulları gerçekleyen sonlu bir G grubunun monomial gösterimleri için bir tam sistem elde edilmiş ve her Blackburn p-grubunun ($P\in\mathbb{P}-\{2\}$) bir genelleştirilmiş metabelyen grup olduğu gösterilmiştir. Ayrıca Blackburn p-gruplarının indirgenemez $\mathbb{C}$-gösterimlerinin tam sistemi elde edilmiştir. Son olarak genelleştirilmiş metabelyen grupların sonlu direkt çarpımlarının da bir genelleştirilmiş metabelyen grup olduğu gösterilmiş ve tüm sylow altgrupları Blackburn grupları olan bir nilpotent grubun üretenleri ve tanımlı bağıntıları, denk olmayan indirgenemez gösterimlerinin tam sistemi elde edilmiştir.

G sonlu bir grup, $D \leq H \leq K \leq G$ altgrup zinciri için aşağıdaki iki koşulun gerçeklendiğini kabul edelim.

(i) $D\Delta H$, H/D devirli

(ii) $K'\cap H\subseteq D$, $K\Delta G$

Bu taktirde bir $h\in H$ için $|H:D|=s$ olmak üzere

$$H=\bigcup_{\nu=0}^{s-1} h^{\nu}D$$

yazabiliriz.

ξ 1'in bir s. pirimitif kökü olmak üzere

$$\pi(h)=\xi$$

yardımıyla tanımlanan $\pi:H \longrightarrow \mathbb{C}$ dönüşümü H in D çekirdekli bir lineer gösterimidir. H in D çekirdekli farklı lineer gösterimlerinin sayısı $\varphi(s)$ dir. π gösterimini üreten $\mathbb{C}H$ grup cebirinin pirimitif idempotenti

$$e=\frac{1}{|H|}\sum_{g\in H}\overline{\pi(g)}\,g$$

şeklindedir.

Bu pirimitif idempotenti D çekirdeği yardımıyla

$$e=\frac{1}{|H|}\Big(\sum_{d\in D} d\Big)\Big(\sum_{\nu=0}^{s-1}\bar{\xi}^{\nu}h^{\nu}\Big)$$

şeklinde yazabiliriz. (bkz. Huppert [1])

$$R=HK' \quad , \quad C=DK'$$

olsun. Bu taktirde;

$$R=HK'=\bigcup_{\nu=0}^{s-1} h^{\nu}DK' = \bigcup_{\nu=0}^{s-1} h^{\nu}C$$

verilir. Buna göre π R in C çekirdekli bir lineer gösterimidir. $K'\leq R<K$ olduğundan K/R Abel grubudur.

$$K/R = \bigtimes_{1\leq i\leq n} \langle k_i R\rangle$$

olsun. Bu taktirde $k_i^{\varepsilon_i}\in R$ $(1\leq i\leq n)$ özelliğini gerçekleyen minimal $\varepsilon_i\in \mathbb{Z}$ sayıları mevcuttur.

$$\omega^{\varepsilon_i} = \pi(k_i^{\varepsilon_i}) \quad (1\leq i\leq n)$$

denklemlerinin bir çözümü $\omega_1,\omega_2,\ldots\omega_n$ olsun. Her $k\in K$ elemanı için $0\leq t_i\leq \varepsilon_i-1$ $(1\leq i\leq n)$ sayıları ve $r\in R$ elemanı

$$k= k_1^{t_1}\, k_2^{t_2} \ldots k_n^{t_n}\, r$$

olacak şekilde tek türlü olarak belirlidir. Diğer taraftan

$$\overline{\pi}(k) = \omega_1^{t_1}\omega_2^{t_2}\ldots\omega_n^{t_n}\,\pi(r)$$

yardımıyla tanımlanan $\overline{\pi}:K \longrightarrow \mathbb{C}$ dönüşümü K nin bir lineer gösterimidir. K nin π den yukarıdaki gibi elde edilen farklı $\overline{\pi}$ gösterimlerinin sayısı $|K:R|$ dir. $\overline{\pi}$ gösterimini üreten pirimitif idempotent:

$$\overline{e}= \frac{1}{|K|}\sum_{k\in K} \overline{\pi(k)}\, k$$

şeklindedir.

5.1 Teorem

G nin $\overline{\pi}^G$ indüklenmiş gösteriminin indirgenemez olabilmesi için gerek ve yeter koşul, K nin G de $K'\cap H\subseteq D$ özelliğine sahip maksimal altgrup olmasıdır.

İspat

$\overline{\pi}^G$ gösteriminin indirgenemez olduğunu, ancak K nin $K'\cap H\subseteq D$ özelliğini gerçekleyen G nin maksimal altgrup olmadığını kabul edelim. Bu taktirde $K\underset{\neq}{<}\overline{K}$, $\overline{K}'\cap H\subseteq D$ olacak şekilde bir $\overline{K}\leq G$ altgrubu vardır. $x\in\overline{K}-K$ ve $K_1=<x,K>$ olsun. $K\triangleleft G$ olduğundan $K_1=<x>K$ dir. $\varepsilon\in\mathbb{Z}$ sayısı $x^\varepsilon\in K$ özelliğindeki minimal sayı ve θ_1 $\theta_1^\varepsilon=\overline{\pi}(x^\varepsilon)$ denkleminin bir çözümü olsun. Her $g\in K_1$ için $t\in\mathbb{Z}$ $(0\leq t\leq \varepsilon-1)$ sayısı ve $k\in K$ elemanı $g=x^tk$ olacak şekilde tektürlü olarak belirlidir.

$$\delta(g)=\theta_1^t\overline{\pi}(k)$$

yardımıyla tanımlanan $\delta:K_1\longrightarrow\mathbb{C}$ dönüşümü K_1 in bir lineer gösterimidir. δ^G G nin $|G:K_1|$ dereceli bir monomial gösterimidir. $K\underset{\neq}{<}K_1$ olduğundan $|G:K_1|\underset{\neq}{\leq}|G:K|$ olup, $\overline{\pi}^G$ nin derecesi δ^G nin derecesinden büyüktür. $\overline{\pi}^G$ indirgenemez olduğundan

$$i(\overline{\pi}^G,\delta^G)=0 \quad \text{dır.}$$

$g_1\in K$ olmak üzere $\{g_1,\ldots,g_m\}$ G nin (K_1,K)-çift yansınıflarının bir temsilciler sistemi olsun. Bu taktirde 4.5'e göre

$$i(\delta^G,\overline{\pi}^G)=\sum_{\nu=1}^{m} i(\delta\downarrow K_1\cap K,\ \overline{\pi}^{g_\nu}\downarrow K_1\cap K)$$

$$=i(\delta\downarrow K,\ \overline{\pi}^{g_1}\downarrow K)+\sum_{\nu=2}^{m} i(\delta\downarrow K,\ \overline{\pi}^{g_\nu}\downarrow K)$$

yazabiliriz. Burada δ nin inşası göz önüne alınırsa

$$\delta\downarrow K=\overline{\pi}$$

dir.

Buna göre $i(\delta{\downarrow}K_1,\overline{\pi}^{g_1}{\downarrow}K)=1$ elde edilir. $i(\delta^G,\overline{\pi}^G)\geq i(\delta,\overline{\pi}^{g_1})$ olduğundan $o\geq 1$ çelişkisi elde edilir. O halde varsayım yanlıştır. Yani; K G nin $K'\cap H\subseteq D$ özelliğindeki G nin maksimal altgrubudur.

Basmaj(1969) K, $K'\cap H\subseteq D$ koşulunu gerçekleyen G nin maksimal altgrubu olsun. Bu taktirde (4.5)'e göre

$$i(\overline{\pi}^G,\overline{\pi}^G) = i(\overline{\pi},\overline{\pi}^{d_1})+\sum_{\nu=2}^{|G:K|} i(\overline{\pi},\overline{\pi}^{d_\nu}) \qquad (d_1\in K)$$

verilir. $\nu\geq 2$ için $d_\nu\notin K$ olduğundan en az bir $k\in K$ elemanı $\overline{\pi}(k)\neq\overline{\pi}^{d_\nu}(k)$ olacak şekilde mevcuttur. Aksi taktirde her $k\in K$ için $\overline{\pi}(k)=\overline{\pi}^{d_\nu}(k)$ ise, $\overline{\pi}(k^{-1}d_\nu^{-1}kd_\nu)=1$ ve $k^{-1}d_\nu^{-1}kd_\nu\in$ Çek $\overline{\pi}$ elde edilir.

$$\overline{K}=\langle d_\nu, K)$$

olsun. Bu taktirde $\overline{K}'\subseteq$ Çek $\overline{\pi}$ ve dolayısıyla $H\cap\overline{K}'\subseteq$ Çek $\overline{\pi}\cap K=D$ olurki, bu sonuç K nin $K'\cap H\subseteq D$ koşulunu gerçekleyen G nin maksimal altgrubu olmasıyla çelişir. O halde her $2\leq\nu\leq|G:K|$ için en az bir $k_\nu\in K$ elemanı $\overline{\pi}(k_\nu)\neq\overline{\pi}^{d_\nu}(k_\nu)$ olacak şekilde mevcuttur. Buradan

$$i(\overline{\pi},\overline{\pi}^{d_\nu})=0 \qquad 2\leq\nu\leq|G:K|$$

elde edilir. Bununla birlikte $K'\subseteq$ Çek $\overline{\pi}$ olduğu göz önünde bulundurulursa,

$$\begin{aligned} i(\overline{\pi}^G,\overline{\pi}^G) &= i(\overline{\pi},\overline{\pi}^{d_1}) \\ &= (\overline{\pi},\overline{\pi}^{d_1}) \\ &= \frac{1}{|K|}\sum_{k\in K}\overline{\pi}(k)\overline{\pi}(d_1^{-1}k^{-1}d_1) \\ &= \frac{1}{|K|}\sum_{k\in K}\overline{\pi}([k^{-1},d_1]) \\ &= \frac{1}{|K|}\sum_{k\in K}1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

yazabiliriz. Bu sonuç $\overline{\pi}^G$ nin indirgenemez olduğunu ifade eder.

q.e.d

$\overline{\pi}^G$ $(\mathbb{C}G)\,\overline{e}$ minimal sol ideali tarafından üretilen G nin indirgenemez gösterimidir.

Her $x\in G-K$ için

$$\overline{\pi}^x(k)=\overline{\pi}(x^{-1}kx)\quad,\quad k\in K$$

yardımıyla tanımlanan $\overline{\pi}^x:K\longrightarrow\mathbb{C}$ dönüşümü K nin bir lineer gösterimidir. Bu gösterime $\overline{\pi}$ nin bir eşleniği denir.

$$\overline{e}_x=x^{-1}\overline{e}x$$

olmak üzere $\overline{\pi}^x$ gösteriminin üreten pirimitif idempotent $\overline{e}_x$ şeklindedir. Böyle $\overline{\pi}$ gösteriminin farklı eşleniklerinin sayısı $|G:K|$ dir. $x_1,x_2,\ldots,x_m$ $(|G:K|=m)$ G nin K ya göre sol yan sınıflarının bir temsilciler sistemi olmak üzere

$$\tilde{e}=\sum_{i=1}^{m}\overline{e}_{x_i}$$

olsun. Bu taktirde $\tilde{e}$ $\mathbb{C}G$ grup cebirinin bir merkezi idempotentidir. Dolayısıyla $(\mathbb{C}G)\,\tilde{e}$ $\mathbb{C}G$ nin bir basit bileşenidir. $\overline{\pi}^G$ nin karakter formülü

$$\overline{\chi}^G(g)=\begin{cases}0 & g\in G-K\\ \dfrac{1}{|K|}\displaystyle\sum_{x}\overline{\pi}^x(g) & \end{cases}$$

ile verilir.(Bkz.Basmaji(1969)).

5.2 Teorem

G nin yukarıdaki şekilde $D\subset H\subseteq K\subseteq G$ zincirine göre elde edilen tüm $\overline{\pi}^G$ indirgenemez gösterimlerinin kümesi $\mathfrak{N}_G(D,H,K)$ olsun.

(a) Her $x\in G$ için $\mathfrak{N}_G(D,H,K)=\mathfrak{N}_G(x^{-1}Dx,x^{-1}Hx,K)$ verilir.

(b) $\overline{\pi}_1^G,\ \overline{\pi}_2^G\in\mathfrak{N}_G(D,H,K)$ olmak üzere $i(\overline{\pi}_1^G,\ \overline{\pi}_2^G)=1$ olabilmesi için gerek ve yeter koşul, bir $x\in G$ için $\overline{\pi}_2=\overline{\pi}_1^x$ olmasıdır.

(c) $H\Delta G$, D ve D_1 H in G de eşlenik olmayan normal altgrupları, H/D ve H/D_1 devirli, K ve K_1 $K'\cap H\subseteq D$ ve $K_1'\cap H\subseteq D_1$ özelliğine sahip G nin maksimal altgrupları ve $K\Delta G$, $K_1\Delta G$ olsun. Bu taktirde;

Her $\overline{\pi}^G \in \mathfrak{N}_G(D,H,K)$ ve $\overline{\pi}_1^G \in \mathfrak{N}_G(D_1,H,K_1)$ için

$$i(\overline{\pi}^G,\overline{\pi}_1^G) = 0$$

verilir.

İspat

(a) Her $x \in G$ için $(K' \cap H)^x \subseteq D^x$ den $K' \cap x^{-1}Hx \subseteq x^{-1}Dx$ elde edilir.

$$\Lambda_G(D,H) = \{L \leq G \mid L' \cap H \subseteq D\}$$

yazalım. Bu taktirde $K \in \Lambda_G(D,H)$ olduğundan $\Lambda_G(D,H) \neq \emptyset$ ve $K \in \Lambda_G(x^{-1}Dx,\ x^{-1}Hx)$ olduğundan $\Lambda_G(x^{-1}Dx,\ x^{-1}Hx) \neq \emptyset$ elde edilir.

Şimdi K nin $\Lambda_G(x^{-1}Dx,\ x^{-1}Hx)$' in bir maksimal elemanı olduğunu gösterelim. K nin $\Lambda_G(x^{-1}Dx,\ x^{-1}Hx)$ in maksimal elemanı olmadığını kabul edelim. Bu taktirde $\Lambda_G(x^{-1}Dx,\ x^{-1}Hx)$ in bir $\overline{K}$ maksimal elemanı $\overline{K} \gneq K$ olacak şekilde mevcuttur. Buna göre;

$$\overline{K}' \cap x^{-1}Hx \subseteq x^{-1}Dx$$

dir. Bunun yanında;

$$(\overline{K}' \cap x^{-1}Hx)^{x^{-1}} \subseteq (x^{-1}Dx)^{x^{-1}} = D$$

olduğundan $x(\overline{K}')x^{-1} \cap H \subseteq D$ ve dolayısıyla $\overline{K}^x \in \Lambda_G(D,H)$ elde edilir. Bu sonuç K nin $\Lambda_G(D,H)$ in bir maksimal elemanı olmasıyla çelişir. Dolayısıyla

$$\mathfrak{N}_G(D,H,K) = \mathfrak{N}_G(x^{-1}Dx,x^{-1}Hx,K)\ , \qquad x \in G$$

elde edilir.

(b) 4.5'e göre

$$i(\overline{\pi}_1^G,\ \overline{\pi}_2^G) = \sum_{\nu=1}^{m} i(\overline{\pi}_1,\overline{\pi}_2^{d_\nu}) \qquad (|G:K| = m)$$

yazabiliriz. $i(\overline{\pi}_1^G,\overline{\pi}_2^G) = 1$ olabilmesi için gerek ve yeter koşul, bir d_ν için

$$i(\bar{\pi}_1^G,\bar{\pi}_2^G) = i(\bar{\pi}_1,\bar{\pi}_2^{d_\nu})=1$$

olmasıdır. $i(\bar{\pi}_1,\bar{\pi}_2^{d_\nu})=1$ olabilmesi için gerek ve yeter koşul her $k\in K$ için $\bar{\pi}_1(k)=\bar{\pi}_2^{d_\nu}(k) = \bar{\pi}_2(d_\nu^{-1}kd_\nu)$ olmasıdır. Buna göre $\bar{\pi}_1,\bar{\pi}_2$ G de eşleniktir.

(c) $\bar{\pi}^G\in\mathfrak{N}_G(D,H,K)$, $\bar{\pi}_1^G\in\mathfrak{N}_G(D_1,H,K_1)$ için

$$i(\bar{\pi}^G,\bar{\pi}_2^G)=1$$

olduğunu kabul edelim. (b) ye göre bir d_ν için

$$1=i(\bar{\pi}^G,\bar{\pi}_1^G) = i(\bar{\pi}\downarrow K\cap K_1,\ \bar{\pi}_1^{d_\nu}\downarrow K\cap K_1)$$

verilir. $i(\bar{\pi}\downarrow K\cap K_1,\ \bar{\pi}_1^{d_\nu}\downarrow K\cap K_1)=1$ ifadesinden de her $k\in K\cap K_1$ için $\bar{\pi}(k)=\bar{\pi}_1(d_\nu^{-1}kd_\nu)$ olduğu elde edilir. Özellikle her $d\in\bar{D}=$ Çek $\bar{\pi}$ için $1=\bar{\pi}(d) = \bar{\pi}_1(d_\nu^{-1}dd_\nu)$ dir. Buradan ; $d_\nu^{-1}dd_\nu\in\bar{D}_1=$ Çek $\bar{\pi}_1$ ve dolayısıyla $d\in d_\nu\bar{D}_1d_\nu^{-1}$ veya;

$$\bar{D}_1= d_\nu\bar{D}\,d_\nu^{-1}$$

elde edilir. $H\Delta G$ olduğundan $d_\nu Hd_\nu^{-1}=H$ ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} D_1=\bar{D}_1\cap H &= d_\nu\bar{D}d_\nu^{-1}\cap d_\nu Hd_\nu^{-1} \\ &= (\bar{D}\cap H)^{d_\nu^{-1}} \\ &= d_\nu Dd_\nu^{-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade D_1 ve D nin eşlenik olduklarını belirler. Bu sonuç D_1 ve D nin seçimine aykırıdır. O halde her $\bar{\pi}^G\in\mathfrak{N}_G(D,H,K)$, $\bar{\pi}_1^G\in\mathfrak{N}_G(D_1,H,K_1)$ için $i(\bar{\pi}^G,\bar{\pi}_1^G)=0$ dır. q.e.d.

Şimdi G nin $\bar{\pi}_i^G\in\mathfrak{N}_G(D,H,K)$ denk olmayan indirgenemez gösterimlerinin tasnifini yapalım.

Bir $x\in G$ için

$$\bar{\pi}_i=\bar{\pi}_j^x \quad \text{ise} \quad \bar{\pi}_i^G\sim\bar{\pi}_j^G$$

yardımıyla $\mathfrak{N}_G(D,H,K)$'da bir "~" bağıntısı tanımlayalım. Bu bağıntı 5.2/b'ye göre $\mathfrak{N}_G(D,H,K)$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısına göre $\mathfrak{N}_G(D,H,K)$ nın denklik sınıflarının kümesi $\bar{\mathfrak{N}}_G(D,H,K)$ olsun. H G nin bir normal altgrubu ise

$$|\bar{\mathfrak{N}}_G(D,H,K)| = \frac{|G:N_G(D)|\,\varphi(|H:D|)\,|K:R|}{|G:K|} \quad , \qquad R=HK'$$

formulü ile verilir. (bkz.Basmaj (1969))

G sonlu bir grup, $\mathcal{X}(G)$ G nin tüm altgruplarının ailesi,

$\mathcal{F}(G)=\{(D,H)\in\mathcal{X}(G)\times\mathcal{X}(G)\,|\,D\triangleleft H,\ H/D$ devirli$\}$

olsun. $p\in\mathbb{P}$, $p\,|\,|G|$ olmak üzere, $P\in S_p(G)$ olsun. $H=Z(P)\neq E$ yazalım. Bu taktirde;

$$H=\mathop{X}_{i=1}^{s}\langle a_i\rangle \quad , \quad D=\mathop{X}_{j=i}^{s-1}\langle a_i\rangle$$

yazalım. $(D,H)\in\mathcal{F}(G)$ olduğundan $\mathcal{F}(G)\neq\emptyset$ dır. Her $(D,H)\in\mathcal{F}(G)$ için

$\Lambda_G(D,H)=\{L<G\,|\,L'\cap H\subseteq D\}$

olsun.

$\mathfrak{U}=\{G\,|\,|G|<\infty$ olan bir grup, her $(D,H)\in\mathcal{F}(G)$ için en az bir $K\in\Lambda_G(D,H)$ maksimal elemanı G de normaldır$\}$.

olsun. Her meta devirli grup, metabelyen grup ve türev grubu iki üreten-li olan p-grupları $(p\in\mathbb{P}-\{2\})$ $\mathfrak{U}$ ailesinde bulunduğundan $\mathfrak{U}\neq\emptyset$ dır.

5.B Teorem

(a) $\mathfrak{U}$ çözülebilir grupların bir altailesidir.

(b) $G\in\mathfrak{U}$ olmak üzere G nin her indirgenemez monomial gösterimi Φ için bir $D\subseteq H\subseteq K\subseteq G$ altgrup zinciri

(i) $(D,H)\in\mathcal{F}(G)$

(ii) $K\triangleleft G$ ve K $\Lambda_G(D,H)$ in bir maksimal elemanıdır.

koşullarını gerçekler ve $\Phi\in\mathfrak{N}_G(D,H,K)$ dır.

İspat

(a) $G\in\mathfrak{U}$ minimal mertebeli bir karşı örnek teşkil etsin. N G nin bir minimal normal böleni olmak üzere $\overline{G}=G/N$ yazalım. Bu taktirde $\overline{G}\in\mathfrak{U}$ olacağını gösterelim. $(\overline{D},\overline{H})\in\mathfrak{F}(\overline{G})$ keyfi olsun. G/N'nin altgrup yapısından dolayı $D,H\in\mathfrak{X}(G)$ elemanları $\overline{D}=D/N$, $\overline{H}=H/N$ olacak şekilde mevcuttur. Bunun yanında

$$\overline{H}/\overline{D}=(H/N)/(D/N)\cong H/D,\quad \overline{H}/\overline{D} \text{ devirli}$$

olduğundan H/D devirli olup, $(D,H)\in\mathfrak{F}(G)$ dir. $G\in\mathfrak{U}$ olduğundan $\Lambda_G(D,H)$ in en az bir K maksimal elemanı G'de normal olacak şekilde mevcuttur. $\overline{K}=K/N$ yazalım. Bu taktirde $\overline{K}\Delta\overline{G}$ ve $\overline{K}$ $\Lambda_{\overline{G}}(\overline{D},\overline{H})$ nin maksimal elemanlarından biridir. Dolayısıyla $G/N\in\mathfrak{U}$ dır. $|G/N|=|G:N|\lneq|G|$ olduğundan G/N çözülebilirdir.

$p\in\mathbb{P}$, $p\,|\,|N|$ ve $P\in S_p(N)$ olsun. Bu taktirde $Z(P)\neq E$ dir. Z(P) Abel olduğundan;

$$Z(P)=\mathop{X}_{i=1}^{\ell}\langle a_i\rangle$$

yazabiliriz. $H_i=\langle a_i\rangle$ $(1\le i\le\ell)$ ve $D_i=E$ olmak üzere $(D_i,H_i)\in\mathfrak{F}(G)$ dir. $G\in\mathfrak{U}$ olduğundan $\Lambda_G(D_i,H_i)$ nin bir K_i maksimal elemanı G de normal olacak şekilde vardır. Şimdi $D_i\subseteq H_i\subseteq K_i\subseteq G$ zincirini göz önüne alalım. $K_i\cap N\Delta G$ ve N G nin minimal normal böleni olduğundan $K_i\cap N=N$ dir. $K_i'\cap H_i\subseteq D_i=E$ olduğundan $N'\cap H_i=E$ dir. $N'\lneq N$, $N'\Delta G$ ve N in minimalliğinden $N'=E$ elde edilir. Dolayısıyla N Abeldir ve N çözülebilirdir. N, G/N çözülebilir olduğundan G çözülebilirdir (bkz.Huppert (1967)) O halde $\mathfrak{U}$ da çözülebilir olmayan eleman yoktur. Dolayısıyla $\mathfrak{U}$ çözülebilir grupların bir alt ailesidir.

(b) Φ G nin bir indirgenemez monomial gösterimi olsun. Bu taktirde Φ G nin bir A altgrubunun bir π lineer gösteriminin indüklenmesiyle elde edilmiştir. D= Çek π yazalım. $A'\subseteq D$ olduğundan A/D Abeldir. Dolayısıyla;

$$A/D=\mathop{X}_{i=1}^{r}\langle a_iD\rangle$$

yazabiliriz. $H_i=\langle a_i D\rangle$ olsun. Bu taktirde $(D,H_i)\in\mathcal{F}(G)$ olup $G\in\mathfrak{U}$ olduğundan bir $K_i\in\Lambda_G(D,H_i)$ maksimal elemanı $K_i\Delta G$ olacak şekilde mevcuttur. $D\subseteq H_i\subseteq K_i\subseteq G$ altgrup zincirini elde ettik. $A\cap K_i/D$ Abel olduğu açıktır. Buradan

$$A\cap K_i/D = \mathop{X}_{j=1}^{r_i} \langle k_{ij}D\rangle$$

olsun. $C_i=DK_i'$ olmak üzere $R_i=\mathop{X}_{j=1}^{r_i}\langle k_{ij}C_i\rangle$ yazabiliriz. $\delta_i=\pi\downarrow A\cap K_i$ olsun.

Bu taktirde δ_i çekirdeği C_i yi içeren R_i nin bir lineer gösterimidir. $K_i'\subseteq R_i$ olduğundan K_i/R_i Abeldir.

$$K_i/R_i = \mathop{X}_{j=1}^{n_i}\langle z_{ij}\, R_i\rangle$$

yazabiliriz. Bu taktirde $m_1,m_2,\ldots m_{n_i}\in\mathbb{Z}$ minimal sayıları $z_{ij}^{m_j}\in R_i$ $(1\le j\le n_i)$ olacak şekilde mevcuttur. $\omega_{i1},\omega_{i2}\ldots\omega_{in_i}$

$$\omega_j^{m_j}=\delta(z_{ij}^{m_j}) \quad , \quad (1\le j\le n_i)$$

sisteminin bir çözümü olsun. Bu taktirde her $k\in K_i$ elemanı için $t_1,t_2,\ldots t_{n_i}\in\mathbb{Z}$ ve $g\in R_i$ için $k=z_{i1}^{t_1}\ z_{i2}^{t_2}\ldots z_{in_i}^{t_{n_i}}\ g_i$ yazılış tektürlü olacak şekilde belirlidir.

$$\overline{\delta}_i(k)=\omega_{i1}^{t_1}\ \omega_{i2}^{t_2}\cdots\omega_{in_i}^{t_{n_i}}\ \delta_i(g_i)$$

yardımıyla tanımlanan $\overline{\delta}_i:K_i\longrightarrow\mathbb{C}$ dönüşümü K_i nin bir lineer gösterimidir. Bunun yanında $\overline{\delta}_i^G$ 5.1'e göre G nin indirgenemez bir gösterimidir. Diğer taraftan 4.5 e göre

$$i(\overline{\delta}_i^G,\pi^G) = \sum_{K_i d_\nu A} i(\overline{\delta}\downarrow A\cap K_i,\pi^{d_\nu}\downarrow A\cap K_i)$$

$$=i(\delta_i,\delta_i)+\sum_{\substack{K_i d_\nu A\\ d_\nu\notin K_iA}} i(\overline{\delta}_i\downarrow A\cap K_i,\pi^{d_\nu}\downarrow A\cap K_i)\ge 1$$

yazabiliriz. Buradan $\overline{\delta}_i^G$, $\Phi=\pi^G$ gösterimlerinin indirgenemezliği yardımıyla $i(\overline{\delta}_i^G, \pi^G)=i(\overline{\delta}_i^G,\Phi)=1$ elde edilir. Buna göre $\Phi\in\mathfrak{N}_G(D,H_i,K_i)$ dir.

q.e.d.

5.4 SONUÇ

$G\in\mathfrak{U}$ keyfi olmak üzere $(D_i,H_i)\in\mathfrak{F}(G)$ $(i=1,2)$ olsun. Bir $x\in G$ elemanı

$$D_2=x^{-1}D_1x \ , \quad H_2=x^{-1}H_1x$$

olacak şekilde mevcutsa $(D_1,H_1) \sim (D_2,H_2)$ yazalım. Bu taktirde "~" bağıntısı $\mathfrak{F}(G)$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır. $\mathfrak{F}(G)$ nin "~" e göre denklik sınıflarının kümesi $\overline{\mathfrak{F}}(G)$ ve $\mathfrak{M}_0(G)$ G nin denk olmayan indirgenemez monomial gösterimlerinin kümesi olsun. Bu taktirde

$$\mathfrak{M}_0(G) = \bigcup_{(D,H)\in\overline{\mathfrak{F}}(G)} \mathfrak{N}_G(D,H,K(D,H))$$

verilir. Burada $K(D,H)$ $\Lambda_G(D,H)$ in G de normal olan maksimal elemanıdır.

İspat

5.1 ve 5.3/b yardımıyla hemen elde edilir.

q.e.d.

5.5 Teorem

Her $G_1,G_2\in\mathfrak{U}$ için $G_1xG_2\in\mathfrak{U}$ verilir.

İspat

$(D,H)\in\mathfrak{F}(G_1xG_2)$ keyfi olsun. Bu taktirde $D\Delta H$, H/D devirlidir. $D,H\in\mathfrak{X}(G_1xG_2)$ olduğundan $D_i,H_i\in\mathfrak{X}(G_i)$ $(i=1,2)$ elemanları

$$D=D_1xD_2, \quad H=H_1xH_2 \ , \quad D_i\Delta H_i$$

olacak şekilde mevcuttur.

$$H/D \cong H_1/D_1 \times H_2/D_2$$

olduğundan H_i/D_i $(i=1,2)$ devirlidir. Buradan $(D_i,H_i)\in\mathfrak{F}(G_i)$ $(i=1,2)$ elde edilir. $G_1,G_2\in\mathfrak{U}$ olduğundan $\Lambda_G(D_i,H_i)$ nin $(i=1,2)$ bir K_i maksimal elemanı $K_i\Delta G_i$ $(i=1,2)$ olacak şekilde mevcuttur. $K=K_1xK_2$ yazalım. Bu taktirde K $\Lambda_{G_1xG_2}(D,H)$ 'in maksimal elemanlarından birisidir. Aynı zamanda $K\Delta G_1xG_2$ dır. Dolayısıyla $G_1xG_2\in\mathfrak{U}$ elde edilir.

5.6 SONUÇ

$G_1,G_2,\ldots G_n\in\mathfrak{U}, n\in\mathbb{N}$ olsun. Bu taktirde

(a) $G=\overset{n}{\underset{i=1}{X}}G_i$ olmak üzere $G\in\mathfrak{U}$ verilir.

(b) Her $\bar{\pi}^G\in\mathfrak{M}_0(G)$ için $\bar{\pi}_i^{G_i}\in\mathfrak{M}_0(G_i)$ $(1\leq i\leq n)$ gösterimleri

$$\bar{\pi}^G=\bar{\pi}_1^{G_1}\otimes\bar{\pi}_2^{G_2}\otimes\ldots\otimes\bar{\pi}_n^{G_n}$$

olacak şekilde mevcuttur. Diğer bir ifade ile

$$\mathfrak{M}_0(G)=\{\bar{\pi}_1^{G_1}\otimes\bar{\pi}_2^{G_2}\otimes\ldots\otimes\bar{\pi}_n^{G_n}|\bar{\pi}_i^{G_i}\in\mathfrak{M}_0(G_i)\quad 1\leq i\leq n\}$$

verilir.

İspat (a).

n üzerinden indüksiyonla kolaylıkla elde edilir.

(b) 2.28 ve 2.29 göre açıktır.

5.7 Teorem

$G\in\mathfrak{U}$, $(D,H)\in\mathfrak{F}(G)$ ve $K=K(D,H)$ $\Lambda_G(D,H)$ in G de normal olan maksimal elemanı olsun. $R=HK'$ yazalım. Bu taktirde K,G nin $K'\subseteq R$ özelliğindeki maksimal altgrubudur.

İspat

Bir $K_1<G$, $K \lneq K_1$ altgrubunun $K_1' \subseteq R$ olacak şekilde mevcut olduğunu kabul edelim. $K_1' \subseteq R \subset K$ olduğundan K_1/K Abeldir. Buna göre;

$$K_1/K = \underset{\ell=1}{\overset{m}{X}} \langle a_\ell K\rangle$$

yazabiliriz. $u_i \in \mathbb{Z}$ $(1\leq \ell\leq m)$ sayıları $a_\ell^{u_\ell} \in K$ $(1\leq\ell\leq m)$, özelliğindeki minimal sayılar olsun. Her $g\in K_1$ elemanı için

$$g=a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \ldots a_m^{\varepsilon_m}\, k,\quad k\in K \quad 0\leq\varepsilon_\ell\leq u_1 \quad (1\leq\ell\leq m)$$

yazılışı tek türlü olarak belirlidir. $\overline{\pi}^G \in \mathfrak{N}_G(D,H,K)$ ve ω_ℓ, $\omega^{u_\ell}=\overline{\pi}(a_\ell^{u_\ell})$, $(1\leq\ell\leq m)$ sisteminin bir çözümü olsun. Bu taktirde

$$\delta(g)=\omega_1^{\varepsilon_1}\, \omega_2^{\varepsilon 2} \ldots \omega_m^{\varepsilon_m}\, \overline{\pi}(k),\ k\in K,\quad 0\leq\varepsilon_\ell\leq u_\ell \ ,\ (1\leq\ell\leq m)$$

yardımıyla tanımlanan $\delta: K_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ dönüşümü K_1 in bir lineer gösterimidir. $|G:K_1| \lneq |G:K|$ ve $\overline{\pi}^G$ indirgenemez olduğundan

$$i(\delta^G, \overline{\pi}^G)=0$$

dir. Diğer taraftan, 4.5'e göre;

$$i(\delta^G,\overline{\pi}^G)=i(\delta{\downarrow}K,\overline{\pi}{\downarrow}K)+\sum_{d\notin K_1 K} i(\delta{\downarrow}K_1,\overline{\pi}^d{\downarrow}K) \geq 1$$

yazabiliriz. Buradan $0\geq 1$ çelişkisi elde edilir. O halde K,G nin $K' \subseteq R$ özelliğini gerçekleyen maksimal altgrubudur.

q.e.d.

5.8 Tanım

G sonlu bir grup olmak üzere

$$E=H_0 \Delta H_1 \Delta \ldots \Delta H_n \Delta H_{n+1}=G$$

G nin Abel faktörlü bir normal serisi olsun. G nin $H_{i-1} \subseteq D_i \subsetneqq H_i$

$1\leq i\leq n-1$ ve $H_{n-1}\subseteq D_n\subseteq H_n$, H_i/D_i devirli olan altgrupları için $K_i'\subseteq D_i$, $H_i\cap K_i'\supseteq D_i$ özelliğinde bir $K_i=K(D_i,H_i)$ maksimal altgrubu $K_i\Delta G$ olacak şekilde mevcutsa, G'ye bir genelleştirilmiş metabelyen grup denir. Meta devirli gruplar, Metabelyen gruplar ve Blackburn p-grupları (bkz. 5.9) Genelleştirilmiş metabelyen gruplardır. Genelleştirilmiş metabelyen grupların $\mathfrak{U}_0$ ailesinin M-gruplarının bir altailesi olduğu gösterilmiştir (bkz. Basmaji (1969)).

5.9 Tanım

$p\in \mathbb{P}-\{2\}$ olmak üzere türev grubu iki üretenli olan bir p-grubuna Blackburn p-grubu denir(1). Bu tip p-gruplarının üretenleri ve tanımlı bağıntıları aşağıdaki gibidir.

$$P=\langle x,y,z\rangle,[x,y]=a,[y,z]=b,\ x^{p^m}=y^{p^{n+k}}=z^{p^{n+k}}=a^{p^m}=b^{p^{n+k}}=$$

$$[a,x]=[b,y]=[x,z]=1,[a,z]=a^{p^{m-k}},[b,z]=b^{2p^{m-k}},[a,y]=b^{p^{n-m+k}}$$

$$[b,x]=a^{-p^{m-k}}b^{p^n},[a,b]=b^{p^n}\quad 0<2k\leq m\leq n,\ m,n,k\in \mathbb{N}$$ (bkz. Blackburn (1957)).

5.10 Teorem

$p\in \mathbb{P}-\{2\}$ olmak üzere P bir Blackburn p-grubu olsun. Bu taktirde $P\in\mathfrak{U}_0$ verilir.

İspat

$E\Delta\langle b^{p^n}\rangle\Delta\langle b^{p^k}\rangle\Delta\langle b^{p^k},a\rangle\Delta\langle a,b\rangle\Delta P$

Abel faktörlü normal serisini göz önüne alalım. Bu taktirde;

(I) $D_i=\langle b^{p^{n+i}}\rangle$, $H_i=\langle b^{p^{n+i-1}}\rangle$, $0\leq i\leq k$ olmak üzere

$K_i=K(D_i,H_i)\in\Lambda_p(D_i,H_i)$ maksimal elemanının $K_i\Delta G$ olacak şekilde bulalım. Bunun için

(1) Bu grupların yapısını ilk olarak Blackburn incelediğinden tarafımızdan bu ismin konulması uygun görülmüştür.

$$K_i=\langle x^{r_i},y^{s_i},z^{t_i},a^{u_i},b^{v_i}\rangle\ ,\quad K_i'\subseteq D_i\ ,\quad H_i\cap K_i'\subset D_i$$

özelliğini gerçekleyen minimal r_i,s_i,t_i,u_i,v_i $(0<i\le k)$ tamsayılarını belirleyelim. Bunun için de K_i' yu hesaplamamız gerekiyor.

$$[x^{r_i},y^{s_i}]=a^{r_is_i}\ \frac{1}{b^2}\qquad (s_i-1)p^{n-m+k}$$

$$[x^{r_i},b^{v_i}]=a^{v_ir_ip^{m-}}\qquad v_ir_ip^{n}$$

$$[y^{s_i},z^{t_i}]=\qquad b^{s_i}\qquad +2p^{m-k})^{\ell}$$

$$[y^{s_i},a^{u_i}]=b^{-u_is_ip'}$$

$$[z^{t_i},a^{u_i}]=a^{u_i(1-(1+\qquad k)^{t_i})}$$

$$[z^{t_i},b^{v_i}]=b^{v_i(1-(1+\qquad)^{t_i})}$$

$$[a^{u_i},b^{v_i}]=b^{u_iv_ip^n}$$

$$[x^{r_i},z^{t_i}]=[x^{r_i},a^{u_i}]=[y^{s_i},b^{v_i}]=1$$

olduğu kolaylıkla elde edilir. $K_i'\subseteq D_i$ olabilmesi için gerek ve yeter koşul,

1) $r_is_i\equiv 0(p^m)$

2) $v_ir_i\equiv 0(p^k)$

3) $s_i\sum\limits_{\ell=0}^{t_i-1}(1+2p^{m-k})^{\ell}\equiv 0(p^{n+i})$

4) $u_is_i\equiv 0(p^{m+i-k})$

5) $u_i(1-(1+p^{m-k})^{t_i})\equiv 0(p^m)$

6) $v_i(1-(1+2p^{m-k})^{t_i})\equiv 0(p^{n+i})$

7) $u_i v_i \equiv 0(p^i)$

olmasıdır.

7) kongruansının bir çözümü $u_i=1$, $v_i=b^{p^i}$ dir.

6) dan $t_i=p^{n-m+k}$, 4) den, $s_i=p^{m+i-k}$ ve 1) den $r_i=p^{k-i}$ elde edilir.

$$K_i=\langle x^{p^{k-i}}, y^{p^{m+i}} \quad p^{n-m+k}, \; a, b^{p^i} \rangle, \; 0<i\leq k$$

K_i, P nin $K_i' \subseteq D_i$ özelliği i maksimal altgruplarından biridir ve özellikle $K_i \Delta P$ dir. Diğe ftan

$$|K_i|=p^{2m+2n+2k-i}, \; |K \quad =p^{2m+2n+k-1}, \; |P:K_i|=p^{n+k+i}$$

dir ve $D_i \Delta P$ olduğundan do

$$|P:N_p(D_i)|=1$$

dir.

(II) $D_i=\langle b^{p^{n-i}} \rangle$, $H_i= \quad {}^{n-i-1} \rangle$, $0\leq i<n-k$

olmak üzere $K_i' \subseteq D_i$ olabil için gerek ve yeter koşul

1') $r_i s_i \equiv 0(p^m)$

2') $v_i r_i \equiv 0(p^k)$

3') $s_i \sum\limits_{\ell=0}^{t_i-1} (1+2p^{m-k})^{\ell} \equiv 0(p^{n-i})$

4') $u_i s_i \equiv 0(p^{m-k-i})$

5') $u_i(1-(1+p^{m-k})^{t_i}) \equiv 0(p^m)$

6') $v_i(1-(1+2p^{m-k})^{t_i}) \equiv 0(p^{n-i})$

7') $u_i v_i p^n \equiv 0(p^{n-i})$

olmasıdır.

7') kongruansı her u_i, v_i için gerçeklenir. O halde $u_i=v_i=1$ alabiliriz.

(a) $i<n-m$ ise 6') kongruansından $t_i=p^{n-m+k-i}$, 3') den $s_i=p^{m-k}$ ve 1') den $r_i=p^k$ elde edilir.

(b) $i\geq n-m$ ise 5') den $t_i=p^k$, 2') den $r_i=p^k$ 1') den $s_i=p^{m-k}$ elde edilir.

Buna göre $i<n-m$ ise, $K_i=<x^{p^k}, y^{p^{m-k}}, z^{p^{n-m+k-i}}, a,b>$ K_i P nin $K_i^! \subseteq D_i$ özelliğindeki maksimal altgruplarından biridir ve özellikle $K_i \Delta P$ dir. Diğer taraftan;

$$|K_i|=p^{2m+2n+2k+i}, \quad |P:K_i|=p^{n+k-i}, \quad |K_i:H_i|=p^{2m+2n+k-1}$$

dir.

Bzş. $D_i \Delta P$ ve $|P:N_P(D_i)|=1$ elde edilir.

dir.

$i\geq n-m$ ise

$$K_i=<x^{p^k}, y^{p^{m-k}}, z^{p^k}, a,b>$$

P nin $K_i^! \subseteq D_i$ özelliğindeki maksimal altgruplarından biridir ve özellikle $K_i \Delta P$ dir. Diğer taraftan

$$|K_i|=p^{m+3n+2k}, \quad |P:K_i|=p^{m+k}, \quad |K_i:H_i|=p^{m+3n+k-i-1}$$

dir. Bzş. $D_i \Delta P$ ve $|P:N_P(D_i)|=1$ elde edilir.

(III) $D_i=<b^{p^k}, a^{p^{m-i}}>$, $H_i=<b^{p^k}, a^{p^{m-i-1}}>$, $(0\leq i \lneq m)$

olmak üzere $K_i^! \subseteq D_i$ olabilmesi için gerek ve yeter koşul

1") $r_i s_i \equiv 0(p^{m-i})$

2") $v_i r_i \equiv 0(p^{k-i})$

3") $s_i \sum\limits_{\ell=0}^{t_{i-1}} (1+2p^{m-k})^{\ell} \equiv 0(p^k)$

4") $u_i(1-(1+p^{m-k})^{t_i}) \equiv 0(p^{m-i})$

5") $v_i(1-(1+2p^{m-k})^{t_i}) \equiv 0(p^k)$

6") $u_i v_i p^n \equiv 0(p^k)$

olmasıdır.

$u_i v_i p^n \equiv 0(p^k)$ her $u_i, v_i \in \mathbb{Z}$ için gerçeklenir. O halde $u_i = v_i = 1$ alabiliriz.

(a") $i<k$ ise 2") den, $r_i = p^{k-i}$, 1") den $s_i = p^{m-k}$ ve 5") den $t_i = p^k$ elde edilir. Buna göre

$$K_i = \langle x^{p^{k-i}}, y^{p^{m-k}}, z^{p^k}, a, b\rangle \quad 0 \leq i \lneq k$$

elde edilir. K_i $(0 \leq i \lneq k)$ P nin $K_i' \subseteq D_i$ özelliğindeki maksimal altgrubudur ve özellikle $K_i \Delta P$ dir. Diğer taraftan

$$|K_i| = p^{m+3n+2k+i}, \quad |P:K_i| = p^{m+k-i}, \quad |K_i:H_i| = p^{m+2n+2k-1}$$

verilir. Bzş. $D_i \Delta P$ ve $|P:N_P(D_i)| = 1$ dir.

(b) $i \geq k$ ise 2") den $r_i = 1$. 1") den $s_i = p^{m-i}$, 5") den $t_i = p^k$ elde edilir. Buna göre;

$$K_i = \langle x, y^{p^{m-i}}, z^{p^k}, a, b\rangle, \quad k \leq i \lneq m$$

olmak üzere $K_i (k \leq i \lneq m)$ P nin $K_i' \subseteq D_i$ özelliğindeki maksimal altgrubudur ve özellikle $K_i \Delta P$ dir.

$$|K_i| = p^{m+3n+2k+i}, \quad |P:K_i| = p^{m+k-i}, \quad |K_i:H_i| = p^{m+2n+2k-1}$$

verilir. $D_i \Delta P$ olduğundan $|P:N_P(D_i)| = 1$ dir.

(IV) $D_i = \langle b^{p^{k-i}}, a\rangle$, $H_i = \langle b^{p^{k-i-1}}, a\rangle$, $0 \leq i \lneq k$

olsun. $b^{p^n}, a \in D_i$ olduğundan $x, y, a, b \in K_i$ olmalıdır. Buna göre;

$K_i \subseteq D_i$ olabilmesi için geek ve yeter koşul,

$$\sum_{\ell=0}^{t_{i-1}} (1+2p^{m-k})^{\ell} \equiv 0(p^{k-i})$$

olmasıdır. Bu kongruansı gerçekleyen minimal t_i tamsayısı $t_i = p^{k-i}$ dir. Buna göre;

$$K_i = \langle x, y, z^{p^{k-i}}, a, b\rangle, \quad 0 \leq i < k$$

elde edilir.

$|K_i|=p^{2m+3n+2k+i}$ $|P:K_i|=p^{k-i}$, $|K_i:H_i|=p^{m+2n+2k-1}$

olup $K_i \Delta P$ dir. $D_i \Delta P$ olduğundan $|P:N_P(D_i)|=1$ dir.

(V) $D_i=P'=\langle a,b\rangle$ seçilirse $K_i=P$ dir.

I,II,III,IV , V ve 5.8' e göre her Blackburn p-grubu bir genelleştirilmiş metabelyen gruptur.

q.e.d.

Şimdi P bir Blackburn p-grubu olmak üzere $\mathbb{C}P$ grup cebirinin minimal sol ideallerinin bir tam sistemini elde edelim. Bunun için ζ 1 in bir p. pirimitif kökü olsun. Bu taktirde;

(I') Çekirdekleri $\langle b^{p^n}\rangle$ de içerilen P nin indirgenemez gösterimlerini bulalım.

$\pi_{ij}(b^{p^{n+i-1}})=\zeta$, $(0<i\leq k)$ yardımıyla tanımlanan $\pi_{ij}:H_i \longrightarrow \mathbb{C}$ dönüşümü $H_i=\langle b^{p^{n+i-1}}\rangle$ 'in $D_i=\langle b^{p^{n+i}}\rangle$ çekirdekli bir lineer gösterimidir. $K_i=\langle x^{p^{k-i}}, y^{p^{m+i-k}}, z^{p^{n-m+k}}, a, b^{p^i}\rangle$, $(0<i\leq k)$ olmak üzere $K_i' \subseteq D_i \subseteq H_i$ olduğundan K_i/H_i bir Abel grubudur.

$$K_i/H_i=\langle x^{p^{k-i}}H_i\rangle \times \langle y^{p^{m+i-k}}H_i\rangle \times \langle z^{p^{n-m+k}}H_i\rangle \times \langle aH_i\rangle \times \langle b^{p^i}H_i\rangle$$

yazabiliriz.

$$(x^{p^{k-i}})^{p^{m-k+i}}, (y^{p^{m+i-k}})^{p^{n-m-i+2k}}, (z^{p^{n-m+k}})^{p^m}, a^{p^m}, (b^{p^i})^{p^{n-1}} \in H_i$$

olduğundan $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ sırasıyla $\eta^{\ell}=1$ $\ell=p^{m-k+i}, p^{n-m-i+2k}, p^m, p^m$ denklemlerinin bir çözümü ve η_5 $\eta^{p^{n-1}}=\zeta$ denkleminin bir çözümü olsun.

$$\Lambda_i=\{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5)\,|\,0\leq\lambda_1\leq p^{m-k+i}-1, 0\leq\lambda_2\leq p^{h-m-i+2k}, 0\leq\lambda_3,\lambda_4\leq p^m-1,$$
$$0\leq\lambda_5\leq p^{n-1}-1)\}$$

olmak üzere her $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5)\in\Lambda_i$ için

$$\overline{\pi}_{ij}((x^{p^{k-1}})^{\lambda_1}(y^{p^{m+i-k}})^{\lambda_2}(z^{p^{n-m+k}})^{\lambda_3}\, a^{\lambda_4}(b^{p^i})^{\lambda_5})=\eta_1^{\lambda_1}\eta_2^{\lambda_2}\eta_3^{\lambda_3}\eta_4^{\lambda_4}\eta_5^{\lambda_5}\pi_{ij}(h)$$

$h\in H_i$ yardımıyla tanımlanan $\overline{\pi}_{ij}:K_i \longrightarrow \mathbb{C}$ dönüşümü K_i nin π_{ij} den elde edilen bir lineer gösterimidir. K_i nin π_{ij} lineer gösterimi $n_i=2m+2n+2k-i$ ve $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5)=:(\lambda)_5$ olmak üzere

$$e_{ij}=p^{-n_i}\Big(\sum_{\alpha=p^{n+i}}^{p^{n+k}} b^{\alpha}\Big)\sum_{(\lambda)_5\in\Lambda_i}\Big(\prod_{s=1}^{5}\eta_s^{\lambda_s}\Big)\, x^{\lambda_1 p^{k-i}} y^{\lambda_2 p^{m+i-k}} z^{\lambda_3 p^{n-m+k}} a^{\lambda_4} b^{\lambda_5 p^{i}} \in \mathbb{C}K_i$$

pirimitif idempotenti tarafından üretilir. Buna göre π_{ij} yardımıyla indüklenen P nin indirgenemez $\overline{\pi}_{ij}^{P}$ gösterimi $\mathbb{C}P$ nin $(\mathbb{C}P)e_{ij}$ minimal sol ideali ile elde edilmiştir. $\overline{\pi}_{ij}^{P}$ nin derecesi

$$|P:K_i|=p^{n+k+i} \quad , \quad (0<i\leq k)$$

olduğundan her $0<i\leq k$ için denk olan $\overline{\pi}_{ij}^{P}$ lerin sayısı p^{n+k+i} dır. P nin p^{n+k+i} dereceli denk olmayan gösterimlerini sayısı

$$s_i=|\overline{\mathfrak{N}}_P(D_i,H_i,K_i)|=p^{2m+n-i}-p^{2m+n-i-1}, \quad (0<i\leq k)$$

ile verilir.

$$\overline{\Lambda}_i=\{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\,|\,0\leq\lambda_1<p^{k-i},\ 0\leq\lambda_2<p^{m+i-k},0\leq\lambda_3<p^{n-m+k},\ 0\leq\lambda_4<p^{i}\}$$

olmak üzere

$$\overline{e}_{ij}=\sum_{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\overline{\Lambda}_i}(x^{\lambda_1}y^{\lambda_2}z^{\lambda_3}b^{\lambda_4})^{-1}e_{ij}(x^{\lambda_1}y^{\lambda_2}z^{\lambda_3}b^{\lambda_4})$$

yardımıyla tanımlanan $\overline{e}_{ij}$ $\mathbb{C}P$ nin bir merkezi idempotentidir. $\mathbb{C}P$ nin $\overline{\pi}_{ij}^{P}$ gösterimine karşılık gelen basit bileşeni $(\mathbb{C}P)\overline{e}_{ij}\approx p^{n+k+i}(\mathbb{C}P)e_{ij}$ dir.

(II') Çekirdekleri $<b^{n}>\Delta<b^{p^k}>$ arasında bulunan P nin indirgenemez gösterimlerini bulalım. $\pi_{i\ell}(bp^{n-i-1})=\mathfrak{s}, 0\leq i<n-k$ yardımıyla tanımlanan $\pi_{i\ell}:H_i\longrightarrow\mathbb{C}$ dönüşümü $H_i=<b^{p^{n-i-1}}>$ in $D_i=<bp^{n-i}>$ çekirdekli bir lineer gösterimidir.

$i<n-m$ ise $K_i=<x^{p^k},y^{p^{m-k}},z^{p^{n-m+k-i}},a,b>$ olup $K_i^{\prime}\subseteq D_i\subset H_i$ olduğundan K_i/H_i bir Abel grubudur. Buna göre;

$$K_i/H_i=\langle x^{p^k}H_i\rangle\times\langle y^{p^{m-k}}H_i\rangle\times\langle z^{p^{n-m+k-i}}H_i\rangle\times\langle aH_i\rangle\times\langle bH_i\rangle$$

yazabiliriz.

$$(x^{p^k})^{p^{m-k}},(y^{p^{m-k}})^{p^{n-m+2k}},(z^{p^{n-m+k-i}})^{p^{m+i}},a^{p^m},b^{p^{n-i-1}}\in H_i$$

dir. $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ sırasıyla $\eta^t=1$, $t=p^{m-k}$, p^{n-m+2k}, p^{m+i}, p^m, p^{n-i-1} denklemlerinin bir çözümü ve η_5 $\eta^{p^{n-i-1}}=\acute{s}$ denkleminin bir çözümü olsun.

$$\Lambda_i=\{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5)\,|\,0\le\lambda_1<p^{m-k},0\le\lambda_2<p^{n-m+k},0\le\lambda_3<p^{m+i},0\le\lambda_4<p^m$$
$$,0\le\lambda_5<p^{n-i-1}\}\ ,\quad 0\le i<n-m$$

olmak üzere her $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5)\in\Lambda_i$ için

$$\bar{\pi}_{i\ell}((x^{p^k})^{\lambda_1}(y^{p^{m-k}})^{\lambda_2}(z^{p^{n-m+k-i}})^{\lambda_3}a^{\lambda_4}b^{\lambda_5})=\eta_1^{\lambda_1}\eta_2^{\lambda_2}\eta_3^{\lambda_3}\eta_4^{\lambda_4}\eta_5^{\lambda_5}\pi_{i\ell}(h),h\in H_i$$

yardımıyla tanımlanan $\bar{\pi}_{i\ell}:K_i\longrightarrow\mathbb{C}$ dönüşümü K_i nin $\pi_{i\ell}$ yardımıyla elde edilen bir lineer gösterimidir. K_i nin $\bar{\pi}_{i\ell}$ lineer gösterimi $n_i=2m+2n+2k+i$ ve $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5)=:(\lambda)_5$ olmak üzere

$$e_{i\ell}=p^{-n_i}\Big(\sum_{\alpha=p^{n-i}}^{p^{n+k}}b^{\alpha}\Big)\sum_{(\lambda)_5\in\Lambda_i}\Big(\prod_{s=1}^{5}\bar{\eta}_s^{\lambda_s}\Big)x^{\lambda_1p^k}y^{\lambda_2p^{m-k}}z^{\lambda_3p^{n-m+k-i}}a^{\lambda_4}b^{\lambda_5}\in\mathbb{C}K_i$$

pirimitif idempotenti tarafından üretilir. Buna göre $\bar{\pi}_{ij}$ yardımıyla elde edilen P nin $\bar{\pi}_{i\ell}^P$ indirgenemez gösterimi $\mathbb{C}P$ nin $(\mathbb{C}P)e_{i\ell}$ minimal solideali ile elde edilmiştir. $\bar{\pi}_{i\ell}^P$ nin derecesi;

$$|P:K_i|=p^{n+k-i}\ ,\quad (0\le i<n-m)$$

olduğundan $\bar{\pi}_{i\ell}^P$ ye denk olan gösterimlerin sayısı p^{n+k-i} dir. P nin p^{n+k-i} , $(0\le i<n-m)$ dereceli denk olmayan indirgenemez gösterimlerinin sayısı

$$s_i=|\mathfrak{N}_P(D_i,H_i,K_i)|=p^{2m+n+i}-p^{2m+n+i-1}\ ,\quad 0\le i<n-m$$

ile verilir.

$$\overline{\Lambda}_i=\{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\,|\,0\le\lambda_1<p^k,\ \ 0\le\lambda_2<p^{m-k},\ 0\le\lambda_3<p^{n-m+k-i}\}$$

olmak üzere

$$\overline{e}_{i\ell}=\sum_{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\overline{\Lambda}_i}(x^{\lambda_1}y^{\lambda_2}z^{\lambda_3})^{-1}\ e_{i\ell}(x^{\lambda_1}y^{\lambda_2}z^{\lambda_3})\quad,\ 0\le i<n-m$$

yardımıyla tanımlanan $\overline{e}_{i\ell}$ $\mathbb{C}P$ nin bir merkezi idempotentidir. $\overline{\pi}^P_{i\ell}$ gösterimine karşılık gelen $\mathbb{C}P$ nin basit bileşeni $(\mathbb{C}P)\overline{e}_{i\ell}\approx p^{n+k-i}(\mathbb{C}P)e_{i\ell}$ dir.

$i\ge n-m$ ise, $K_i=\langle x^{p^k},\ y^{p^{m-k}},\ z^{p^k},\ a,b\rangle$ olup $K_i\subseteq P_i\subset H_i$

olduğundan K_i/H_i Abel gruptur.

$$K_i/H_i=\langle x^{p^k}H_i\rangle\times\langle y^{p^{m-k}}H_i\rangle\times\langle z^{p^k}H_i\rangle\times\langle aH_i\rangle\times\langle bH_i\rangle$$

yazabiliriz.

$$(x^{p^k})^{p^{m-k}}\ (y^{p^{m-k}})^{p^{n-m+2k}},(z^{p^k})^{p^n},\ a^{p^m},b^{p^{n-i-1}}\quad\in H_i$$

dir. $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ sırasıyla $\eta^t=p^{m-k},p^{n-m+2k},\ p^n,p^m$ denklemlerinin bir çözümü ve η_5 $\eta^{p^{n-i-1}}=\acute{s}$ denkleminin bir çözümü olsun.

$$\Lambda_i=\{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\,|\,0\le\lambda_1<p^{m-k},\ 0\le\lambda_2<p^{n-m+2k},\ 0\le\lambda_3<p^n\ 0\le\lambda_4<p^m,\ 0\le\lambda_5<p^{n-i-1}\}$$

olmak üzere

$$\overline{\pi}_{i\ell}((x^{p^k})^{\lambda_1}(y^{p^{m-k}})^{\lambda_2}(z^{p^k})^{\lambda_3}\ a^{\lambda_4}b^{\lambda_5})=\eta_1^{\lambda_1}\eta_2^{\lambda_2}\eta_3^{\lambda_3}\eta_4^{\lambda_4}\eta_5^{\lambda_5}\ \ \pi_{i\ell}(h),h\in H_i,(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5)\in$$

yardımıyla tanımlanan $\overline{\pi}_{i\ell}:K_i\longrightarrow\mathbb{C}$ dönüşümü K_i nin $\pi_{i\ell}$ yardımıyla elde edilen bir lineer gösterimidir. K_i nin $\overline{\pi}_{i\ell}$ lineer gösterimi $n_i=m+3n+2k$ ve $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5)=:(\lambda)_5$ olmak üzere

$$e_{i\ell}=p^{-n_i}\Big(\sum_{\alpha=p^{n-i-\ell}}^{p^{n+k}}b^{\alpha}\Big)\sum_{(\lambda)_5\in\Lambda_i}\Big(\prod_{s=1}^{5}\overline{\eta}_s^{\lambda_s}\Big)\ x^{\lambda_1p^k}\ y^{\lambda_2p^{m-k}}\ z^{\lambda_3p^k}\ a^{\lambda_4}b^{\lambda_5}\ \in\mathbb{C}K_i$$

pirimitif idempotenti tarafından üretilir. $\overline{\pi}_{i\ell}$ yardımıyla indüklenen $\overline{\pi}^P_{i\ell}$ indirgenemez gösterimi $\mathbb{C}P$ nin $(\mathbb{C}P)e_{i\ell}$ minimal sol ideali ile elde edilmiştir. P nin $\overline{\pi}^P_{i\ell}$ gösteriminin derecesi:

$|P:K_i|=p^{m+k}$

olduğundan $\overline{\pi}_{i\ell}^{P}$ ye denk olan P nin gösterimlerinin sayısı p^{m+k} dir. P nin p^{m+k} dereceli denk olmayan indirgenemez gösterimlerinin sayısı

$$s_i=|\mathfrak{N}_P(D_i,H_i,K_i)|=p^{3n-i}-p^{3n-i-1}\ ,\ n-m\le i<n-k$$

dir.

$$\overline{\Lambda}_i=\{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\mid 0\le\lambda_1<p^k,\ 0\le\lambda_2<p^{m-k},\ 0\le\lambda_3<p^k\}$$

olmak üzere;

$$\overline{e}_{i\ell}=\sum_{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\overline{\Lambda}_i}(x^{\lambda_1}y^{\lambda_2}z^{\lambda_3})^{-1}\,e_{i\ell}(x^{\lambda_1}y^{\lambda_2}z^{\lambda_3})\quad,\quad n-m\le i<n-k$$

olsun. Bu taktirde $\overline{e}_{i\ell}$ $\mathbb{C}P$ nin bir merkezi idempotentidir ve $\overline{\pi}_{i\ell}^{P}$ gösterimine karşılık gelen $\mathbb{C}P$ nin basit bileşeni $(\mathbb{C}P)\overline{e}_{i\ell}\approx p^{m+k}(\mathbb{C}P)e_{i\ell}$ dir.

(III') Çekirdekleri $\langle b^{p^k}\rangle\Lambda\langle b^{p^k},a\rangle$ arasında bulunan P nin indirgenemez gösterimlerini bulalım. $\pi_{ir}(a^{p^{m-i-1}})=\acute{s}$, $\pi_{ir}(b^{p^k})=1$ yardımıyla tanımlanan $\pi_{ir}:H_i\longrightarrow\mathbb{C}$ dönüşümü $H_i=\langle b^{p^k},a^{p^{m-i-1}}\rangle$ nin $D_i=\langle b^{p^k},a^{p^{m-i}}\rangle$ çekirdekli bir lineer gösterimidir.

(a') $0\le i<k$ ise $K_i=\langle x^{p^{k-i}},y^{p^{m-k}},z^{p^k},a,b\rangle$ olup $K_i'\subseteq D_i\subset H_i$

olduğundan, K_i/H_i bir Abel grubudur.

$$K_i/H_i=\langle x^{k-i}H_i\rangle\times\langle y^{p^{m-k}}H_i\rangle\times\langle z^{p^k}H_i\rangle\times\langle aH_i\rangle\times\langle bH_i\rangle$$

yazabiliriz.

$$(x^{p^{k-i}})^{p^{m-k+i}},(y^{p^{m-k}})^{p^{n-m+2k}},(z^{p^k})^{p^n}\ a^{p^{m-i-1}},b^{p^k}\in H_i$$

dir. $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_5$ sırasıyla $\eta^t=1$, $t=p^{m-k+i}$, p^{n-m+2k}, p^n,p^k denklemlerinin bir çözümü olsun. ve. η_4, $\eta^{p^{m-i-1}}=\acute{s}$, $(0\le l<k)$ denkleminin bir çözümü olsun. Bu taktirde;

$$\Lambda_i=\{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5)\mid 0\le\lambda_1<p^{m-k+i},\ 0\le\lambda_2<p^{n-m+2k},\ 0\le\lambda_3<p^n,0\le\lambda_4<p^{m-i-1},$$

$0\le\lambda_5<p^k\}$, $0\le i<k$ olmak üzere her $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5)\in\Lambda_i$ için

$$\bar{\pi}_{ir}((x^{p^{k-i}})^{\lambda_1}(y^{p^{m-k}})^{\lambda_2}(z^{p^k})^{\lambda_3}a^{\lambda_4}b^{\lambda_5}h)=\eta_1^{\lambda_1}\eta_2^{\lambda_2}\eta_3^{\lambda_3}\eta_4^{\lambda_4}\eta_5^{\lambda_5}\ \pi_{ir}(h),\ h\in H_i$$

ile tanımlanan $\bar{\pi}_{ir}:K_i \longrightarrow \mathbb{C}$ dönüşümü K_i nin π_{ir} yardımıyla elde edilen bir lineer gösterimidir. K_i nin $\bar{\pi}_{ir}$ lineer gösterimi; $n_i=m+3n+2k+i$, $(0\leq i<k)$ ve $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5)=:(\lambda)_5$ olmak üzere

$$e_{ir}=p^{-n_i}\left(\sum_{\alpha=p^{m-i}}^{p^m}\sum_{\beta=p^k}^{p^{n+k}}a^{\alpha}b^{\beta}\right)\sum_{(\lambda)_5\in\Lambda_i}\left(\prod_{s=1}^{5}\bar{\eta}_s^{\lambda_s}\right)x^{\lambda_1 p^{k-i}}y^{\lambda_2 p^{m-k}}z^{\lambda_3 p^k}a^{\lambda_4}b^{\lambda_5}\in\mathbb{C}K_i$$

pirimitif idempotenti tarafından üretilir. Buna göre P nin indirgenemez $\bar{\pi}_{ir}^{P}$ gösterimi $\mathbb{C}P$ nin $(\mathbb{C}P)e_{ir}$ minimal sol ideali ile elde edilmiştir. $\bar{\pi}_{ir}^{P}$ gösteriminin derecesi;

$$|P:K_i|=p^{m+k-i},\ (0\leq i<k)$$

dir. Her $0\leq i<k$ için $\bar{\pi}_{ir}^{P}$ ye denk olan P nin tam p^{m+k-i} tane indirgenemez gösterimi ve dolayısıyla $(\mathbb{C}P)e_{ir}$ e denk olan $\mathbb{C}P$ nin minimal sol idealleri-nin sayısı p^{m+k-i}, $(0\leq i<k)$ dir. P nin p^{m+k-i} dereceli denk olmayan gösterim-lerinin sayısı:

$$s_i=|\mathfrak{N}_P(D_i,H_i,K_i)|=p^{2n+k+i}-p^{2n+k+i-1}\ ,\ 0\leq i<k$$

ile verilir.

$$\bar{\Lambda}_i=\{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\,|\,0\leq\lambda_1<p^{k-i},\ 0\leq\lambda_2<p^{m-k}\ 0\leq\lambda_3<p^k\}$$

olmak üzere;

$$\bar{e}_{ir}=\sum_{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\bar{\Lambda}_i}(x^{\lambda_1}y^{\lambda_2}z^{\lambda_3})^{-1}\ \bar{e}_{ir}(x^{\lambda_1}y^{\lambda_2}z^{\lambda_3}),\quad (0\leq i<k)$$

olsun. Bu taktirde $\bar{e}_{ir}$ $\mathbb{C}P$ nin bir merkezi idempotentidir ve $\mathbb{C}P$ nin $(\mathbb{C}P)e_{ir}$ ye karşılık gelen basit bileşeni,

$$(\mathbb{C}P)\bar{e}_{ir}\approx p^{m+k-i}\ (\mathbb{C}P)e_{ir},\quad (0\leq i<k)$$

ile verilir.

(b') $k\le i<m$ ise $K_i=<x,y^{p^{m-i}}, z^{p^k},a,b>$ olup $K_i'\subseteq D_i\subset H_i$ olduğundan K_i/H_i bir Abel grubudur.

$$K_i/H_i=<xH_i>x<y^{p^{m-i}}H_i>x<z^{p^k}H_i>x<aH_i>x<bH_i>$$

yazabiliriz.

$$x^{p^m},(y^{p^{m-i}})^{p^{n-m+2k+i}},(z^{p^k}),a^{p^{m-i-1}},b^{p^k}\in H_i$$

dir. $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_5$ sırasıyla $\eta^r=1$, $r=p^m$, $p^{n-m+2k+i}$, p^n, p^k denklemlerinin bir çözümü ve η_4, $\eta^{p^{m-i-1}}=\acute{s}$ denkleminin bir çözümü olsun. Bu taktirde;

$$\Lambda_i=\{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5)|0\le\lambda_1<p^m,0\le\lambda_2<p^{n-m+2k+i},0\le\lambda_3<p^n,0\le\lambda_4<p^{m-i-1},0\le\lambda_5<p^k\}$$

olmak üzere

$$\overline{\pi}_{ir}(x^{\lambda_1}(y^{p^{m-i}})^{\lambda_2}(z^{p^k})^{\lambda_3}a^{\lambda_4}b^{\lambda_5}h)=\eta_1^{\lambda_1}\eta_2^{\lambda_2}\eta_3^{\lambda_3}\eta_4^{\lambda_4}\eta_5^{\lambda_5}\pi_{ir}(h),h\in H_i,$$

$$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5)\in\Lambda_i$$

yardımıyla tanımlanan $\overline{\pi}_{ir}:K_i\longrightarrow\mathbb{C}$ dönüşümü K_i nin π_{ir} ile elde edilen bir lineer gösterimidir. K_i nin $\overline{\pi}_{ir}$ lineer gösterimi $n_i=m+3n+2k+i$ ve $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5)=:(\lambda)_5$ olmak üzere;

$$e_{ir}=p^{-n_i}\Big(\sum_{\alpha=p^{m-i}}^{p^m}\sum_{\beta=p^k}^{p^{n+k}}a^{\alpha}b^{\beta}\Big)\sum_{(\lambda)_5\in\Lambda_i}\Big(\prod_{s=1}^{5}\overline{\eta}_s^{\lambda_s}\Big)x^{\lambda_1}y^{\lambda_2p^{m-k}}z^{\lambda_3p^k}a^{\lambda_4}b^{\lambda_5}\in\mathbb{C}K_i$$

Pirimitif idempotenti tarafından üretilmiştir. P nin $\overline{\pi}_{ir}^P$ indirgenemez gösterimi $\mathbb{C}P$ nin $(\mathbb{C}P)e_{ir}$ minimal solideali ile elde edilmiştir. $\overline{\pi}_{ir}^P$ gösteriminin derecesi;

$$|P:K_i|=p^{m+k-i},\ (k\le i<m)$$

ile verilir. $\overline{\pi}_{ir}^P$ nin denk olduğu tam p^{m+k-i} ,$(k\le i<m)$ indirgenemez gösterim ve dolayısıyla $(\mathbb{C}P)e_{ir}$ in denk olduğu $\mathbb{C}P$ nin minimal sol ideallerinin sayısı p^{m+k-i} dir. P nin p^{m+k-i} dereceli denk olmayan gösterimlerinin sayısı

$$s_i=|\mathfrak{M}_P(D_i,H_i,K_i)|=p^{2n+k+i}-p^{2n+k+i-1},\ (k\le i<m)$$

ile verilir.

$$\bar{\Lambda}_i=\{(\lambda_1,\lambda_2)\,|\,0\le\lambda_1<p^{m-i},\ 0\le\lambda_2<p^k\} \quad , \ (k\le i<m)$$

olmak üzere;

$$\bar{e}_{ir}=\sum_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\bar{\Lambda}_i}(y^{\lambda_1}z^{\lambda_2})^{-1}e_{ir}(y^{\lambda_1}z^{\lambda_2}) \quad , \quad (k\le i<m)$$

olsun. $\bar{e}_{ir}$ $\mathbb{C}P$ nin bir merkezi idempotentidir ve $\mathbb{C}P$ nin $(\mathbb{C}P)e_{ir}$ minimal sol idealine karşılık gelen basit bileşeni

$$(\mathbb{C}P)\bar{e}_{ir} \approx p^{m+k-i}\ (\mathbb{C}P)e_{ir}$$

ile verilir.

(IV') Çekirdekleri $\langle b^{p^k},a\rangle\Delta\langle a,b\rangle$ arasında kalan P nin indirgenemez gösterimlerini bulalım. $\pi_{it}(b^{p^{k-i-1}})=\acute{s}$, $\pi_{it}(a)=1$ yardımıyla tanımlanan $\pi_{it}:H_i\longrightarrow\mathbb{C}$ dönüşümü $H_i=\langle b^{p^{k-i-1}},a\rangle$ nin $D_i=\langle b^{p^{k-i}},a\rangle$, $(0\le i<k)$ çekirdekli bir lineer gösterimidir. $K_i=\langle x,y,z^{p^{k-i}},a,b\rangle$, $(0\le i<k)$ olup $K_i'\subseteq D_i\subset H_i$ olduğundan K_i/H_i bir Abel grubudur. Buna göre

$$K_i/H_i=\langle xH_i\rangle\times\langle yH_i\rangle\times\langle z^{p^{k-i}}H_i\rangle\times\langle b^{p^{k-i}}H_i\rangle \quad , \quad (0\le i<k)$$

yazabiliriz.

$$x^{p^m},\ y^{p^{n+k}},\ (z^{p^{k-i}})^{p^{n+i}},\ (b^{p^{k-i}})^{p^i}\in H_i$$

dir. $\eta_1\ \eta_2\ \eta_3$ sırasıyla $\eta^f=1$, $f=p^m$, p^{n+k}, p^{n+i} , denklemlerinin bir çözümü ve η_4 , $\eta^{p^i}=\acute{s}$ denkleminin bir çözümü olsun.

$$\Lambda_i=\{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\,|\,0\le\lambda_1<p^m,\ 0\le\lambda_2<p^{n+k},0\le\lambda_3<p^{n+i},0\le\lambda_4<p^i\}$$

olmak üzere

$$\bar{\pi}_{it}(x^{\lambda_1}y^{\lambda_2}(z^{p^{k-i}})^{\lambda_3}b^{\lambda_4}h)=\eta_1^{\lambda_1}\eta_2^{\lambda_2}\eta_3^{\lambda_3}\eta_4^{\lambda_4}\pi_{it}(h),h\in H_i,(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\in\Lambda_i$$

yardımıyla tanımlanan $\bar{\pi}_{it}:K_i\longrightarrow\mathbb{C}$ dönüşümü K_i nin π_{it} den elde edilen bir lineer gösterimidir. K_i nin $\overline{\pi}_{it}$ lineer gösterimi $n_i=2m+3n+2k+i$, $(0\leq i<k)$ ve $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)=:(\lambda)_4$ olmak üzere;

$$e_{it}=p^{-n_i}\Big(\sum_{\alpha=0}^{p^m-1}\sum_{\beta=p^{k-i}}^{p^{n+k}} a^{\alpha}b^{\beta}\Big)\sum_{(\lambda)_4\in\Lambda_i}\Big(\prod_{s=1}^{4}\overline{\eta}_s^{\lambda_s}\Big)\, x^{\lambda_1}y^{\lambda_2}z^{\lambda_3 p^{k-i}}\, b^{\lambda_4} \quad \in\mathbb{C}K_i$$

pirimitif idempotenti tarafından elde edilmiştir. $\overline{\pi}_{it}^{P}$ $(0\leq i<k)$ P nin p^{k-i} dereceli bir indirgenemez gösterimidir. $\overline{\pi}_{it}^{P}$ $\mathbb{C}P$ nin $(\mathbb{C}P)e_{it}$ minimal sol ideali ile elde edilmiştir. $\overline{\pi}_{it}^{P}$ nin denk olduğu gösterimlerin sayısı p^{k-i}, $(0\leq i<k)$ ve $(\mathbb{C}P)e_{it}$ nin denk olduğu $\mathbb{C}P$ nin minimal sol ideallerinin sayısı p^{k-i}, $(0\leq i<k)$ dir. P nin p^{k-i}, $(0\leq i<k)$ dereceli denk olmayan indirgenemez gösterimlerinin sayısı

$$s_i=|\mathcal{R}_p(D_i,H_i,K_i)|=p^{m+2n+k+i}-p^{m+2n+k+i-1}\ ,\quad 0\leq i<k$$

dir.

$$\overline{e}_{it}=\sum_{\lambda=0}^{p^{k-i}-1} z^{-\lambda}\, e_{it}\, z^{\lambda}\quad ,\quad (0\leq i<k)$$

olsun. $\overline{e}_{it}$ $\mathbb{C}P$ nin bir merkezi idempotentidir ve $\mathbb{C}P$ nin $(\mathbb{C}P)e_{it}$ minimal sol idealine karşılık gelen basit bileşeni

$$(\mathbb{C}P)\overline{e}_{it}\approx p^{k-i}(\mathbb{C}P)e_{it}\quad ,\quad (0\leq i<k)$$

ile verilir.

(V) $D=\langle a,b\rangle=P'=H$, alalım. Bu taktirde $K=P$ dir.

$$K/P'=\langle xP'\rangle\times\langle yP'\rangle\times\langle zP'\rangle$$

yazabiliriz.

$$x^{p^m}\ ,\ y^{p^{n+k}}\ ,\ z^{p^{n+k}}\in P'$$

dir. η_1,η_2,η_3 sırasıyla $\eta^f=1$ $f=p^m,\ p^{n+k},\ p^{n+k}$ denklemlerinin bir çözümü olsun. Bu taktirde;

$$\pi_i(x^{\lambda_1}y^{\lambda_2},z^{\lambda_3}a^{\mu}b^{\nu})=\eta_1^{\lambda_1}\eta_2^{\lambda_2}\eta_3^{\lambda_3}\ ,\ 0\leq\lambda_1,\mu<p^m\ ,\quad 0\leq\lambda_2,\lambda_3,\nu<p^{n+k}$$

yardımıyla tanımlanan $\pi_i : P \longrightarrow \mathbb{C}$ dönüşümü P nin bir lineer gösterimidir. π_i lineer gösterimi $n_i=2m+3n+3k$ olmak üzere

$$e_i=p^{-n_i}\left(\sum_{\alpha=0}^{p^m-1}\sum_{\beta=0}^{p^{n+k}-1} a^{\alpha}b^{\beta}\right)\sum_{\lambda_1=0}^{p^{m}-1}\ \sum_{\lambda_2,\lambda_3=0}^{p^{n+k}-1} \bar{\eta}_1^{\lambda_1}\bar{\eta}_2^{\lambda_2}\bar{\eta}_3^{\lambda_3}\; x^{\lambda_1}y^{\lambda_2}z^{\lambda_3} \in \mathbb{C}K_i$$

pirimitif idempotenti ile üretilir. $(\mathbb{C}P)e_i$ $\mathbb{C}P$ nin aynı zamanda bir basit bileşenidir. P nin farklı lineer gösterimlerinin sayısı, 1.2 ye göre $|P:P'|=p^{m+2n+2k}$ dir.

$$\sum_{i=1}^{k} s_i\, p^{2n+2k+i} + \sum_{i=0}^{n-m-1} s_i\, p^{2n+2k-2i} + \sum_{i=n-m}^{n-k-1} s_i\, p^{2m+2k} + \sum_{i=0}^{k-1} p^{2m+2k-2i}$$

$$+ \sum_{i=k}^{m-1} s_i\, p^{2m+2k-2i} + \sum_{i=0}^{k-1} s_i\, p^{2k-2i} + |P:P'|=p^{2m+3n+3k} = |P|$$

elde edilir. 2.23(c) ye göre P nin indirgenemez gösterimlerinin bir tam sistemi elde edilmiş olur. P nin denk olmayan indirgenemez gösterimlerinin sayısı s olsun. Bu taktirde

$$s= \sum_{i=1}^{k} s_i + \sum_{i=0}^{n-m-1} s_i + \sum_{i=n-m}^{n-k-1} s_i + \sum_{i=0}^{k-1} s_i + \sum_{i=k}^{m-1} s_i + \sum_{i=0}^{k-1} s_i + |P:P'|$$

$$=p^{m+2n-1}(p^{2k+1}+p^{2k}+p+1)-p^{n+k-1}(p^{2m-2k}+p^{n+1}+p^{n})$$

verilir.

2.23 ve yukarıdaki hesaplamalarda aşağıdaki teoremi elde edilmiştir.

5.11 Teorem

P bir Blackburn p-grubu olsun. Bu taktirde

(a) P nin denk olmayan indirgenemez gösterimlerinin sayısı

$$s=p^{m+2n-1}(p^{2k+1}+p^{2k}+p+1)-p^{n+k-1}(p^{2m-2k}+p^{n+1}+p^{n})$$

dir. Bunlardan çekirdekleri $Z(P)=\langle b^{p^k}\rangle$ da öz olarak içerilenlerin sayısı,

$$p^{m+2n-1}(p+1)-p^{n+k}(p^{n}+p^{2m-2k-1}),$$

çekirdekleri Z(P) yi içeren ve P' de öz olarak içerilenlerin sayısı;

$$p^{2n+2k-1}(p^m+1)-p^{2n+k-1}(p^k+1)$$

ve çekirdekleri P' yi içerenlerin sayısı,

$$|P:P'|=p^{m+2n+2k}$$

dir.

(b) $$\mathbb{C}P \approx \left[\bigoplus_{i=1}^{k}\left(\bigoplus_{j=1}^{s_i} p^{n+k+i}(\mathbb{C}P)e_{ij}\right)\right]\oplus\left[\bigoplus_{i=0}^{n-m-1}\left(\bigoplus_{j=1}^{s_i} p^{n+k-i}(\mathbb{C}P)e_{ij}\right)\right]\oplus \left[\bigoplus_{i=n-m}^{n-k-1}\left(\bigoplus_{j=1}^{s_i} p^{n+k}(\mathbb{C}P)e_{ij}\right)\right]\oplus\left[\bigoplus_{i=0}^{m-1}\left(\bigoplus_{j=1}^{s_i} p^{m+k-i}(\mathbb{C}P)e_{ij}\right)\right]\oplus \left[\bigoplus_{i=0}^{k-1}\left(\bigoplus_{j=1}^{s_i} p^{k-i}(\mathbb{C}P)e_{ij}\right)\right]\oplus\left[\bigoplus_{i=1}^{|P:P'|}(\mathbb{C}P)e_i\right]$$

verilir.

(c) $$\mathbb{C}P \cong \left[\dot{+}_{i=1}^{k}\left(\dot{+}_{j=1}^{s_i} M_{p^{n+k+i}}(\mathbb{C})\right)\right]\dot{+}\left[\dot{+}_{i=0}^{n-m-1}\left(\dot{+}_{j=1}^{s_i} M_{p^{n+k-i}}(\mathbb{C})\right)\right]\dot{+} \left[\dot{+}_{i=n-m}^{n-k-1}\left(\dot{+}_{j=1}^{s_i} M_{p^{n+k}}(\mathbb{C})\right)\right]\dot{+}\left[\dot{+}_{i=0}^{m-1}\left(\dot{+}_{j=1}^{s_i} M_{p^{m+k-i}}(\mathbb{C})\right)\right]\dot{+} \left[\dot{+}_{i=0}^{k-1}\left(\dot{+}_{j=1}^{s_i} M_{p^{k-i}}(\mathbb{C})\right)\right]\dot{+}\underbrace{\mathbb{C}\dot{+}\mathbb{C}\dot{+}\dots\dot{+}\mathbb{C}}_{|P:P'|\ \text{defa}}$$

verilir.

(d) ρ P nin regüler gösterimi olmak üzere;

$$\rho \approx \left[\bigoplus_{i=1}^{k}\left(\bigoplus_{j=1}^{s_i} p^{n+k+i}\,\overline{\pi}^P_{ij}\right)\right]\oplus\left[\bigoplus_{i=0}^{n-m-1}\left(\bigoplus_{j=1}^{s_i} p^{n+k-i}\,\overline{\pi}^P_{ij}\right)\right]\oplus \left[\bigoplus_{i=n-m}^{n-k-1}\left(\bigoplus_{j=1}^{s_i} p^{n+k}\,\overline{\pi}^P_{ij}\right)\right]\oplus\left[\bigoplus_{i=0}^{m-1}\left(\bigoplus_{j=1}^{s_i} p^{m+k-i}\,\overline{\pi}^P_{ij}\right)\right]\oplus \left[\bigoplus_{i=0}^{k-1}\left(\bigoplus_{j=1}^{s_i} p^{k-i}\,\overline{\pi}^P_{ij}\right)\right]\oplus\left[\bigoplus_{i=1}^{|P:P'|}\pi_i\right]$$

verilir.

(e) P nin farklı eşlenik sınıflarının sayısı (a)'da verilen s sayısıdır.

5.12 Teorem

$G_i \in \mathfrak{U}_0$ (i=1,2), $G=G_1 \times G_2$ olsun. Bu taktirde $G \in \mathfrak{U}_0$ verilir.

İSPAT: $G_i \in \mathfrak{U}_0$, (i=1,2) olduğundan 5.8'e göre;

$$E_i = H_{io} \Delta H_{i1} \Delta \ldots \Delta H_{in_i} \Delta H_{in_i+1} = G_i \quad (i=1,2) \quad (*)$$

Abel faktörlü normal serisi, G_i nin $H_{ij} \subseteq D_{ij} \subsetneqq H_{ij+1}$, $1 \le j \le n_{i-1}$ (i=1,2) ve $H_{in_{i-1}} \subseteq D_{in_i} \subseteq H_{in_i}$, H_{ij}/D_{ij} (i=1,2) devirli olan altgruplar için $K'_{ij} \subseteq D_{ij}$ özelliğinde bir $K_{ij}=K(D_{ij},H_{ij})$ maksimal altgrubu $K_{ij} \Delta G_i$ (i=1,2) olacak şekilde mevcuttur, özelliğini gerçekler. $n_1 \le n_2$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde;

$$E_1 \times E_2 = H_{10} \times H_{20} \Delta H_{11} \times H_{21} \Delta H_{12} \times H_{22} \Delta \ldots \Delta H_{1n_1} \times H_{2n_1} \Delta G_1 \times H_{2,n_1+1} \Delta \ldots \Delta G_1 \times H_{2n_2} \Delta G_1 \times G_2 \quad (**)$$

serisini gözönüne alalım. Her $(h_1,h_2) \in H_{1j} \times H_{2j}$ $(0 \le j \le n_2)$ için

$$(h_1,h_2)^{\Psi} = (h_1 H_{1j}, H_{2j-1})$$

yardımıyla tanımlanan $\Psi: H_{1j} \times H_{2j} \longrightarrow (H_{1j}/H_{1j-1}) \times (H_{2j}/H_{2j-1})$

dönüşümü çekirdeği $H_{1j-1} \times H_{2j-1}$ olan bir epimorfidir. Buna göre

$$H_{1j} \times H_{2j} / H_{1j-1} \times H_{2j-1} \cong (H_{1j}/H_{1j-1}) \times (H_{2j}/H_{2j-1})$$

elde edilir. H_{ij}/H_{ij-1} (i=1,2) Abel olduğundan $H_{1j} \times H_{2j}/H_{1j-1} \times H_{2j-1}$ bir Abel grubudur. $H_{ij} \Delta G_i$, (i=1,2), $(0 \le j \le n_i)$ olduğundan (**) serisi Abel faktörlü bir normal seridir.

$H_{1j-1} \times H_{2j-1} \subseteq D_j \subsetneqq H_{j1} \times H_{2j}$ $(1 \le j \le n_2-1)$ ve $H_{1n_2-1} \times H_{2n_2-1} \subseteq D_n \subseteq H_{1n_1} \times H_{2n_2}$

G nin $D_j \Delta H_{1j} \times H_{2j}$, $H_{1j} \times H_{2j}/D_j$ devirli olan keyfi bir altgrubu olsun. Bu taktirde;

$D_{1j}=\{h_1 \in H_{1j} \mid$ bir $h_2 \in H_{2j}$ için $(h_1,h_2) \in D_j\}$,

$D_{2j}=\{h_2 \in H_{2j} \mid$ bir $h_1 \in H_{1j}$ için $(h_1,h_2) \in D_j\}$

yazalım. Bu taktirde $D_j=D_{1j} \times D_{2j}$ dir ve $D_{ij} \Delta H_{ij}$, $(i=1,2)$ dir.

$$H_{1j} \times H_{2j}/D_j \cong (H_{1j}/D_{1j}) \times (H_{2j}/D_{2j})$$

olduğundan dolayı H_{ij}/D_{ij} $(i=1,2)$ devirlidir.

(*) serisinin özelliğinden dolayı $K'_{ij} \subseteq D_{ij}$, $(i=1,2)$ özelliğinde G_i $(i=1,2)$ nin bir $K_{ij}=K(D_{ij},H_{ij})$ $(i=1,2)$ maksimal altgrubu $K_{ij} \Delta G_i$, $(i=1,2)$ olacak şekilde mevcuttur.

$$K_j=K_{1j} \times K_{2j}$$

yazalım. Bu taktirde K_j, $G=G_1 \times G_2$ nin $K'_j \subseteq D_j$ özelliğindeki bir maksimal altgrubudur. $K_{ij} \Delta G_i$ $(i=1,2)$ olduğundan $K_j \Delta G$ dir. O halde 5.8'e göre $G \in \mathfrak{U}_0$ dir.

q.e.d.

5.13 SONUÇ

$n \in \mathbb{N}$ ve $G_1,G_2,\ldots,G_n \in \mathfrak{U}_0$ olsun. Bu taktirde $G=\overset{n}{\underset{i=1}{X}} G_i$ olmak üzere $G \in \mathfrak{U}_0$ verilir.

İSPAT: 5.12 den n üzerinden indüksiyonla kolaylıkla elde edilir.

5.14 SONUÇ

$n \in \mathbb{N}$, $p_1,p_2,\ldots,p_n \in \mathbb{P}$ ve P_i bir Blackburn p_i-grubu, $(1 \le i \le n)$

$$G=P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n$$

yazalım. Bu taktirde

(a) G nin üretenleri ve tanımlı bağıntıları aşağıdaki gibi verilir.

$$G=\langle x_r,y_r,z_r,a_r,b_r \mid 1 \le r \le n\rangle ,$$

$$x_r^{p_r^{m_r}}=y_r^{p_r^{n_r+k_r}}=z_r^{p_r^{n_r+k_r}}=a_r^{p_r^{m_r}}=b_r^{p_r^{n_r+k_r}}=1,\ 0 \le 2k_r \le m_r \le n_r,\ (1 \le r \le n)$$

ve her bir r için x_r, y_r, z_r, a_r, b_r 5.9 daki komutasyon bağıntılarını gerçekler. Ayrıca

$$[x_r,y_\ell]=[x_r,z_\ell]=[x_r,a_\ell]=[x_r,b_\ell]=[y_r,z_\ell]=[y_r,a_\ell]=[y_r,b_\ell]=[z_r,a_\ell]=[z_r,b_\ell]$$

$$=[a_r,b_\ell]=1 \quad , \quad r\neq\ell \; , \; (1\leq r,\ell\leq n) \quad \text{verilir.}$$

(b) G bir genelleştirilmiş metabelyen gruptur, $G\in\mathfrak{U}_0$ dir.

(c) $\mathfrak{M}_0(P_r)$ $(1\leq r\leq n)$ 5.11 deki gibi tanımlanan P_r in denk olmayan indirgenemez gösterimlerinin tam sistemi olsun. Bu taktirde

$$\mathfrak{M}_0(G) = \{ \bigotimes_{1\leq r\leq n} \bar{\pi}^{P_r}_{i_r j_r} \mid \bar{\pi}^{P_r}_{i_r j_r} \in \mathfrak{M}_0(P_r)\} \qquad \text{verilir.}$$

İSPAT:

(a) 5.9 ve direkt çarpımın tanımından kolaylıkla elde edilir.

(b) 5.13 de $G_i=P_i$ $i=1,\ldots,n$ alınarak elde edilir.

(c) 5.6 dan kolaylıkla elde edilir.

q.e.d.

KAYNAKLAR

BASMAJI,B.G. (1969) Monomial Representation and Metabelian Groups, Nagoya Math.J.35, 99-107

BLACKBURN,N. (1957) On Prime Power Groups in Which The Derived Group Has Two Generators.Proc.Cakbridge Philo.Soc. 53,19-27

CURTIS,C.W., REINER,I. (1962 a) Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras Wiley-İnterscience, New York

.............(1983 b) Methods of Representation Theory With Aplications to Finite Groups and Orders, Wolüme I,Wiley-Interscience New York

DORNHOFF,L. (1967 a) M-Groups and 2-Groups,Math.Zeitschi, 100, 226-256

.... (1971 b) Group Representation Theory PART A, Marcel Dekker, Inc, New York

HUPPERT,B.M. (1967) Endliche Gruppen-I,Springer-Verlag Berlin-New York

WINTER,D.L., PAUL,F.M. (1972) Groups All of Whose Subgroups Are M-Groups, Mat.Z. 124, 73-78

ÖZGEÇMİŞ

1957 yılında Rize'nin Yeni Selimiye Köyünde doğdum. İlkokulu aynı köyde 1968'de bitirdim. Orta tahsilimi 1974'de Rize Lisesi'nde tamamladım. 1975'de Karadeniz Teknik Üniversitesi Temel Bilimler Fakültesi Matematik Mühendisliği Bölümüne girdim. Sağlığımın bozulması nedeniyle iki yıl izin aldım ve bu bölümden 1981 Yaz Yarıyılında mezun oldum.

Aynı yıl Karadeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Programına kayıt oldum. 28 Nisan 1982 de Yüksek Lisans öğrencisi olarak Matematik Bölümü Araştırma Görevliliği kadrosuna atandım. 1984'de Lisansüstü programını bitirdim ve Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Doktora programına kayıt oldum. Aynı yıl Cebir ve Sayılar Teorisi Anabilim Dalında açılan Araştırma Görevliliği sınavını kazanarak bu kadroya atandım.

Halen aynı göreve devam etmekteyim. Evli olup 4 çocuğum vardır.