KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ TEMEL BİLİMLER FAKÜLTESİ

SONLU GRUPLARIN İNDİRGENEMEZ GÖZTERİMLERİNİN ALTGRUP ÇİFTLERİNİN İNDİRGENEMEZ GÖSTERİMLERİ YARDIMIYLA İNCELENMESİNE YENİ BİR YAKLAŞIM

Karadeniz Teknik Üniversitesi Temel Bilimler Fakültesi
« Fen Doktoru »
ünvanının verilmesi için kabul edilen tezdir.

Ali PANCAR

Tezin Dekanlığa Verildiği Tarih : 25.10.1980
Sözlü Sınav Tarihi : 5.3.1981

Doktorayı yöneten öğretim üyesi : **Prof. Dr. Ergün BAYAR**
Doktora Komisyon Üyesi : **Prof. Dr. Yavuz GÜNDÜZALP**
Doktora Komisyon Üyesi : **Doç. Dr. Turgut BAŞKAN**

Kapak Baskı
KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ BASIMEVİ
TRABZON — 1981

İ Ç İ N D E K İ L E R

Ö N S Ö Z

Doktoramı yönetmeyi kabul ederek bana bu çalışmayı veren,karşılaştığım güçlüklerde değerli yardımlarını ve ikazlarını esirgemeyen Sayın Hocam Prof.Dr. Ergün BAYAR'a en içten saygı ve minnet duygularımı arzetmeyi bir borç bilirim.

Vermiş olduğu doktora dersi ve seminerleri ile çalışmama katkıda bulunan KTÜ, Temel Bilimler Fakültesi Dekanı Sayın Hocam Prof.Dr.Yavuz GONDOZALP'e şükranlarımı sunarım.

Ayrıca tezin yazılmasında büyük emeği geçen Fakültemiz Teknisyenlerinden Muammer ALİYAZICIOĞLU'na teşekkür ederim.

Ali P A N C A R

Trabzon-Kasım 1980

ÖZET

Dört bölümden oluşan bu tezin birinci bölümünde genel grup gösterimi teorisinin temel bilgileri ve teoremleri verilmiştir.

İkinci bölümde primitif idempotentlerle ilgili bazı bilinen lemmalar verildikten sonra E.BAYAR tarafından ispat edilen bir teoreme (bkz. [2] , (II.1)) denk bir teorem,daha kısa ve farklı bir yöntemle ispatlanmıştır. Bu teoremde ifade edilen indirgenemez gösterimler için BAYAR [2] tarafından daha önce ifade edilen bir karakter formülü verilmiştir. Bu bölümün sonunda sonlu iki Abel grubunun çarpımı şeklinde olan bir grubun indirgenemez gösterimlerini üreten primitif idempotentlerinin altgruplarının indirgenemez gösterimlerini üreten primitif idempotentler yardımıyla nasıl elde edilebileceğini gösteren bir teorem verilmiştir.

Üçüncü bölümde 1. nevi Young Dörtlüsü tanımlandıktan sonra farklı tipten 1. nevi Young Dörtlülerine ait normlanmamış primitif idempotentlerin denk olmayan gösterimler ürettiği ifade edilmiş ve buna örnek olarak simetrik grupların adî grup cebirinin primitif idempotentlerinin bir tam sistemi verilmiştir.

Dördüncü bölümde de 2. nevi Young Dörtlüsü tanımlanarak farklı tipten 2. nevi Young Dörtlülerine ait normlanmamış primitif idempotentlerin denk olmayan gösterimler ürettiği ispatlanmıştır. Son olarak iki sonlu Abel grubunun yarı-direkt çarpımının indirgenemez gösterimleri incelenerek sözü geçen grubun grup cebirinin belirli dereceli indirgenemez bir altcebiri için bir üretici sistem elde edilmiştir.

S U M M A R Y

This thesis is written in four chapters. Chapter I presents a résumé of general group representations.

Chapter II deals with the primitive idempotents. After first motivating the discussion by known results on the subject, the proof of BAYAR's theorem [2, II.1], which gives a character formula for the irreducible representations, is shortened. The chapter ends with a theorem that shows how primitive idempotents generating an irreducible representation of a group which is a product form of two finite abelian groups can be obtained by means of primitive idempotents generating an irreducible representation of subgroups.

Chapter III treats of the first kind of Young's four-tuple [quadruple] and shows that unnormed primitive idempotents belonging to different type of first kind of Young's four-tuple generate unequivalent representations. The complete system of primitive idempotents of ordinary group algebra of symmetrical groups is given as an example.

Chapter IV begins with the consideration of the second kind of Young's four-tuple and gives similar result to those of in the previous chapter. The remainder of this chapter is devoted to the irreducible representations of semi-direct product of two abelian groups and a generator system is obtained for the irreducible subalgebra with certain degree of the group algebra of the group under consideration.

GİRİŞ

Bir sonlu grubun primitif idempotentlerini bulma problemiyle ilgili olarak; M.D.BURROW [6], A.YOUNG'ın simetrik grupların primitif idempotentlerini bulma yönteminin bazı sonlu gruplara nasıl teşmil edilebileceğini göstermiştir. BURROW bir sonlu grubun bazı altgrup çiftlerinin bazı lineer gösterimlerini üreten primitif idempotentleri yardımıyla grubun primitif idempotentlerinin elde edilebileceğini göstermiş ve bu çalışması yardımıyla GL(2,q) lineer grubunun mertebesi $q = p^k$ olan Galois cismi üzerindeki gösterim teorisini tetkik etmiştir.

H.J. MUNKHOLM [10], QS_n grup cebirinin YOUNG diyagramları yardımıyla minimal sol ideallerini bulma yöntemini, keyfi sonlu bir grubun indirgenemez gösterimlerini bu grubun altgruplarının lineer gösterimleri yardımıyla elde ederek genelleştirmiş ve bu yöntemi metadevri grupların gösterim teorisine uygulamıştır.

E.BAYAR [1], sonlu bir grubun altgruplarının lineer gösterimleri yardımıyla bu grubun indirgenemez gösterimlerini ifade eden yeni bir yöntem vererek ve bunu S_n simetrik grubuna uygulayarak simetrik grupların primitif idempotentlerinin bir tam sistemini doğrudan doğruya genel gösterim teorisi metodları yardımıyla elde etmiştir. Yine BAYAR [2], [1] deki çalışmasının temelini oluşturan bir teoremi (bkz.[1], (5.4)) genelleştirerek sonlu bir grubun altgruplarının indirgenemez gösterimleri yardımıyla bu grubun indirgenemez gösterimlerini belirleyen bir yöntem vermiş ve daha sonra Young Dörtlüsü tanımını ortaya koyarak, bu tanımı [3] çalışmasıyla simetrik gruplara uygulamıştır.

Bütün bu çalışmaların ışığı altında önce BAYAR'ın [2] çalışmasının temelini teşkil eden ve bizim çalışmamızın da hareket noktasını oluşturan teoremin (bkz.[2], (II.1)) hipotezinde değişiklik yapılarak, ispatı çok daha kısa ve farklı bir şekilde verilmiştir. Daha sonra BAYAR tarafından ifade edilen Young Dörtlüsü (bkz. [3]) tanımı 1.nevi Young Dörtlüsü olarak ifade edilmiş ve 2. nevi Young Dörtlüsü tanımı verilmiştir. İki Young Dörtlüsü tanımının kıyaslanması amacıyla 1. nevi Young Dörtlüleri yardımıyla simetrik grupların primitif idempotentlerinin bir tam sisteminin elde edilişi BAYAR'ın çalışmasında olduğu gibi ifade edilmiştir (bkz.[3]). Son olarak tanımlanan 2. nevi Young Dörtlüleri ve BURROW [6] ile MUNKHOLM [10]'un yöntemleri yardımıyla bir yarı-direkt çarpımın indirgenemez gösterimleri incelenmiştir.

BÖLÜM I.

SONLU GRUPLARIN GÖSTERİM TEORİSİ

Bu bölümde, sonlu grupların gösterim teorisinin bu çalışmada gereksinim duyulan bazı temel bilgi ve teoremleri verilecektir. Burada sözü geçen bütün sonuçlar kaynaklarda sunulan kitaplarda mevcuttur. Bu kitaplardan özellikle CURTIS-REINER [8], BOERNER [5] ve HUPPERT [9] tavsiye olunur.

§ 1. GRUP GÖSTERİMLERİ

K bir cisim ve $M \neq \{0\}$ K üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı olsun. M uzayını kendi üzerine resmeden tersinir lineer transformasyonların teşkil ettiği grubu GL(M) ile gösterelim. Bir G grubunu GL(M) grubu içine (veya GL(M) nin bir altgrubu üzerine) resmeden her δ homomorfizmasına G grubunun bir *K-gösterimi* (veya kısaca *gösterimi*) denir :

$$\delta : G \rightarrow GL(M), \ (g \rightarrow \delta_g, \ g \in G, \ \delta_g \in GL(M)) \ .$$

δ_g tersinir lineer transformasyonları aşağıdaki bağıntıları gerçekler:

$$\delta_{gg'} = \delta_g \delta_{g'} \quad \forall g,g' \in G \tag{1.1}$$

$$\delta_{1_G} = 1_{GL(M)} \ . \tag{1.2}$$

Burada 1_G, G grubunun ve $1_{GL(M)}$ de GL(M) grubunun birim elemanıdır.M uzayına *gösterim uzayı* ve bu uzayın $[M:K] = n$ boyutuna *gösterimin derecesi* denir.

$g \in G$ elemanına tekabül eden tasvirde, $m \in M$ elemanının resmi olarak gm alınırsa, bununla M gösterim uzayı bir *G-solmodül* veya *gösterim modülü* olur. Diğer taraftan M, K üzerinde bir vektör uzayı olarak bir K-modüldür (sol-ve sağmodül: $\kappa m = m\kappa \ \forall \kappa \in K, \forall m \in M$). Ohalde M, biri diğeri ile değişebilen farklı iki operatörlü bir Abel grubudur :

$$g(\kappa m) = \kappa(gm) \ \forall g \in G, \ \forall \kappa \in K, \ \forall m \in M \ .$$

M uzayında bir üretici sistem tesbiti halinde, δ_g transformasyonlarına ve dolayısıyla $g \in G$ grup elemanlarına n sıralı singüler olmayan D(g) matrisleri tekabül eder ve D(g) matrisleri aşağıdaki bağıntıları gerçekler :

$$D(gg') = D(g)D(g') \quad \forall g,g' \in G \tag{1.1'}$$

$$D(1_G) = E_n \ . \tag{1.2'}$$

Burada E_n, n sıralı birim matrisi göstermektedir. Ohalde her δ gösterimine, G grubunu singüler olmayan matrislerin bir grubu üzerine resmeden bir homomorfizma veya bir D *matris gösterimi* tekabül eder. Tersine olarak her matris gösterimi yardımıyla bir gösterim tanımlanır.

M ve M' ile gösterilen gösterim modülleri operatör-izomorf olan D ve D' gösterimlerine *denk* denir. Bu takdirde M uzayını M' üzerine resmeden bir π tersinir lineer tasviri veya (bir üretici sistem tesbiti halinde) singüler olmayan bir P matrisi

$$D'(g) = PD(g)P^{-1} \quad \forall g \in G \tag{1.3}$$

olacak şekilde mevcuttur. D ve D' gösterimlerinin denkliği

$$D \sim D'$$

ile gösterilir.

Benzer şekilde singüler olmayan bir P matrisi (1.3) eşitliğini gerçekleyecek şekilde mevcutsa, ilgili matris gösterimlerine denk denir. İki matris gösteriminden biri, M gösterim modülünde üretici sistem değiştirilerek diğer gösterimden elde edilebiliyorsa, bu iki matris gösterimi denktir. Buna göre her gösterime birbirine denk olan matris gösterimlerinin bir sınıfı tekabül eder.

M gösterim modülü bir $M_1 \neq \{0\}$ altmodülü ihtiva ederse, ilgili gösterime *indirgenebilir*, aksi takdirde *indirgenemez* denir. Böyle bir M_1 altmodülünün mevcut olması halinde, M uzayında uygun bir üretici sistem seçilerek ilgili matris gösterimi

$$D(g) = \begin{bmatrix} D_1(g) & * \\ 0 & D_2(g) \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

formunda yazılabilir. Burada $D_1(g)$ M_1 altmodülüne ait bir matris gösterimi ve $D_2(g)$ de M/M_1 bölüm modülüne ait matris gösterimidir. (1.4) formundaki matris gösterimlerine denk olan matris gösterimlerine indirgenebilir, aksi takdirde indirgenemez denir. (1.4) de $*$ ile gösterilen matris uygun bir üretici sistem seçimiyle sıfır matrisi haline getirilebilir. Bu takdirde gösterime *parçalanabilir* denir. Bu, doğrudan doğruya M_1 altmodülünün direkt toplam terimi olması halidir :

$$M = M_1 \oplus M_2 \ (M_2 \text{ altmodül}) \cdot$$

$*$ matrisinin sıfırdan farklı olması halinde gösterime *parçalanamaz* denir. Gösterimin parçalanabilir olması halinde

$$D(g) = \begin{bmatrix} D_1(g) & 0 \\ 0 & D_2(g) \end{bmatrix} = D_1(g) \dotplus D_2(g) \tag{1.5}$$

yazılır. Diğer taraftan M_i ler indirgenemez gösterim modülleri olmak üzere, gösterim modülü

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots = \oplus \sum_i M_i \tag{1.6}$$

şeklinde olan gösterime *tam indirgenebilir* denir. Bu takdirde sözü geçen tam indirgenebilir gösterime tekabül eden matris gösterimi, $D_i(g)$ ler indirgenemez matris gösterimleri olmak üzere

$$D_1(g) \dotplus D_2(g) \dotplus \cdots = \dotplus \sum_i D_i(g) = \begin{bmatrix} D_1(g) & & 0 \\ & D_2(g) & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

gösterimine denktir.

Bir gösterimin tam indirgenebilir olmaması halinde de, bu gösterime tekabül eden bir D matris gösterimi,

$$D(g) = \begin{bmatrix} D_1(g) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & D_r(g) \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

olmak üzere mevcuttur. Burada $D_i(g)$ ler bir $M = M_r \supset \cdots \supset M_0 = 0$ kompozisyon serisinin M_i/M_{i-1} bölüm modüllerine ait indirgenemez gösterimlerdir. Sözü geçen bölüm modülleri veya D_i gösterimleri, Jordan-Hölder teoremine göre izomorfluk hariç olmak üzere tektürlü olarak belirlidir. Bundan dolayı D_i ler D gösteriminin indirgenemez kısımları olarak alınabilir. Benzer ifade, operatörlü grupların parçalanamayan direkt toplam terimlerinin tekliğine dair Remak-Krull-Schmidt teoremine göre yukarıdakine benzer şekilde tanımlanan bir gösterimin parçalanamayan kısımları için de verilir.

Gösterim cisminin karakteristiği sıfır (KarK = 0) ise, gösterime *adi*, aksi takdirde (KarK = p ≠ 0) *modüler* denir.

Bir indirgenemez K-gösterimi, K cisminin bir cebirsel genişlemesinde genel olarak indirgenebilirdir. Böyle bir cebirsel genişleme mevcut değilse, gösterime *mutlak indirgenemez* denir. Bir G grubunun bütün indirgenemez gösterimleri bir K cismi üzerinde mutlak indirgenemez ise, bu cisme G nin *parçalayıcı cismi* denir. Özellikle cebirsel kapalı cisimler parçalayıcı cisimler olduğundan adi gösterimler söz konusu olduğunda, katsayılar cismi olarak $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismini almak yeterlidir.

Bir G grubunun her elemanına (1) birim matrisini tekabül ettiren gösterime, G nin *birim gösterimi* denir ve EG ile gösterilir:

$$EG(g) = 1 \quad \forall\, g \in G \;.$$

G bir grup ve $N \trianglelefteq G$ indeksi 2 olan bir normal bölen olsun: $G = N \cup gN$. N altgrubunun her elemanına (1) matrisini ve $gN = G-N$ sınıfının her elemanına (-1) matrisini tekabül ettiren gösterime, G grubunun (N e göre) *alterne gösterimi* denir ve AG ile gösterilir:

$$AG(g) = \begin{cases} 1, & g \in N \\ -1, & g \in G-N \;. \end{cases}$$

Derecesi 1 olan gösterimlere, *lineer gösterim* denir. Örneğin yukarıda tanımlanan birim ve alterne gösterimler lineer gösterimdir.

Gösterim teorisinin en önemli ve temel teoremlerinden biri Maschke tarafından verilmiştir:

1.9:

G sonlu bir grup, K karakteristiği (KarK = p) G nin mertebesini (|G|) bölmeyen ($p \nmid |G|$) bir cisim olsun. Bu takdirde G nin K üzerindeki her indirgenebilir gösterimi tam indirgenebilirdir.

Bu halde ($p \nmid |G|$) indirgenebilir parçalanabilir ile ve indirgenemez de parçalanamaz ile eş anlamlıdır.

§ 2. GRUP HALKASI VE REGÜLER GÖSTERİM

G sonlu bir grup ve K karakteristiği sıfır veya grup mertebesini bölmeyen ($p \nmid |G|$) gösterim cismi olsun. Bu takdirde (1.9) Maschke teoremine göre G grubunun her gösterim modülü, sonlu sayıda indirgenemez altmodüllerin direkt toplamı şeklindedir. Dolayısıyla G grubunun herhangi bir gösterimini elde edebilmek için bu grubun bütün indergenemez gösterimlerini belirlemek yeterlidir. Zira her gösterim denklik hariç olmak üzere doğrudan doğruya böyle indirgenemez gösterimler yardımıyla teşkil edilir. Buna göre G grubunun denk olmayan indirgenemez gösterimlerinin belirlenmesi ile grubun bütün gösterimleri elde edilmiş olur. Sonlu grupların indirgenemez gösterimlerinin sayısının sonlu olması ve bu gösterimlerin belirli bir gösterimin *indirgenemez kısımları* olarak ortaya çıkması, bütün indirgenemez gösterimlerin elde edilmesini kolaylaştırır. Bu husus gösterim cisminin karakteristiğine bağlı olmadığından, önce gözönüne alınan G grubunun sonlu olduğunu kabul etmekle yetinelim.

Sonlu bir G grubunun bir K cismi üzerindeki *grup halkası* (veya *grup cebiri*) $K[G]$ ile gösterilir:

$$K[G] = \{\, a = \sum_{g\in G} \alpha(g)g \mid \alpha(g)\in K \,\} \quad . \qquad (2.1)$$

Grup elemanlarının bir üretici sistem teşkil ettiği bu cebirde grup elemanları yardımıyla tanımlanan çarpım distribütiftir.

$$a = \sum_{g\in G} \alpha(g)g \ , \quad b = \sum_{g\in G} \beta(g)g \in K[G]$$

olmak üzere aşağıdaki bağıntılar gerçeklenir:

$$\lambda a = a\lambda \quad \forall\lambda\in K, \quad \forall a\in K[G]$$

$$a+b = \sum_{g\in G} [\, \alpha(g)+\beta(g) \,]g \qquad (2.2)$$

$$ab = \sum_{g\in G} \gamma(g)g, \quad \gamma(g) = \sum_{u\in G} \alpha(gu^{-1})\, \beta(u) \quad .$$

A bir K cismi üzerinde sonlu boyutlu bir cebir olsun. Bu takdirde A cebirini sonlu boyutlu bir M vektör uzayının lineer transformasyonlarının teşkil ettiği cebir üzerine resmeden her cebir homomorfizmasına A cebirinin bir K-*gösterimi* (veya kısaca *gösterimi*) denir. Benzer şekilde A cebirini K üzerindeki n(n=[A:K]) sıralı matrislerin teşkil ettiği cebir üzerine resmeden her D cebir-homomorfizmasına da A cebirinin bir K-*matris gösterimi* (veya kısaca *matris gösterimi*) denir ve D(a) matrisleri aşağıdaki bağıntıları gerçekler:

$$D(ab) = D(a)D(b) \qquad \forall a,b\in A$$
$$D(\lambda a+\mu b) = \lambda D(a)+\mu D(b) \qquad \lambda,\mu\in K \tag{2.3}$$
$$D(1_A) = E_n \ .$$

Burada 1_A A cebirinin birim elemanıdır.

M bir K[G]-solmodül olsun. Grup elemanları K[G] grup halkasının özel elemanları olduğundan, M aynı zamanda bir G-solmodüldür. Bu takdirde K[G] grup halkasının her matris gösterimi G grubunun bir matris gösterimini ihtiva eder. Tersine olarak G grubunun her D(g) matris gösterimine mukabil K[G] grup halkasının bir matris gösterimi vardır ve bu gösterimin G grubu üzerindeki *daraltılmışı* (bkz.s.14) D(g) matris gösterimidir:

$$D(a) = \sum_{g\in G} \alpha(g)D(g) \ , \ a\in K[G] \ . \tag{2.4}$$

Her iki matris gösterimi de aynı zamanda indirgenebilir veya indirgenemezdir ve parçalanabilir veya parçalanamazdır.

K[G] grup halkası K[G]-solmodül ${}_{K[G]}K[G]$ olarak ele alınırsa, bu takdirde sözü geçen sol modüle ait gösterime K[G] nin *regüler gösterimi* denir ve R(a) ile gösterilir:

$$R(a): x \to x'=ax, \quad x\in K[G] \ . \tag{2.5}$$

R(a) gösteriminin G üzerinde daraltılmasıyla elde edilen R(g) gösterimine, G grubunun *regüler gösterimi* denir. K[G] cebirinin altmodülleri doğrudan doğruya K[G] nin sol idealleri ve K[G] nin indirgenemez altmodülleri de K[G] nin minimal sol idealleridir. G grubunun her indirgenemez gösterimi, G nin regüler gösteriminin bir indirgenemez kısmı olarak ortaya çıktığından her indirgenemez K[G]-solmodüle operatör-izomorf olan bir minimal sol ideal K[G] de mevcuttur. Bu özellik grubun sonlu ve gösterim cisminin karakteristiğinin keyfi olması halinde verilir. Aşağıda G grubu sonlu ve K gösterim cisminin p karakteristiği için $p \nmid |G|$ verilsin.

G grubunun indirgenemez K-gösterimlerini belirlemek için bu gösterimlere ait minimal sol idealler $K[G]$ grup halkasında tam olarak ifade edilmelidir. $L \neq \{0\}$, $K[G]$ grup halkasının bir sol ideali olsun.Bu takdirde L idealini üreten bir $e \in K[G]$ *idempotent elemanı* vardır:

$$L = K[G]e \ , \ e^2 = e \neq 0 \tag{2.6}$$

e elemanına kısaca *idempotent* (veya L idealinin *üretici birimi*) denir.

Bir $e \in K[G]$ elemanı

$$e^2 = \kappa e \quad (\kappa \neq 0, \ \kappa \in K) \tag{2.7}$$

özelliğini gerçeklerse, bu e elemanına *normlanmamış idempotent* denir (Bu halde $\frac{e}{\kappa}$ idempotenttir: $\left(\frac{e}{\kappa}\right)^2 = \left(\frac{e}{\kappa}\right)$).

$$e = e' + e'', \ e'e'' = e''e' = 0 \ , \quad e'^2 = e' \neq 0 \ , \ e''^2 = e'' \neq 0 \tag{2.8}$$

şeklinde bir parçalanmayı haiz olmayan e idempotentine *primitif idempotent* denir.

2.9:

Bir primitif idempotent tarafından üretilen bir sol ideal minimaldir. Tersine olarak bir minimal sol idealin her üretici birimi primitiftir.

2.10:

L ve L' minimal sol idealler, e ve e' üretici birimler olsun.Bu takdirde L ve L' minimal sol idealleri ancak ve ancak sıfırdan farklı exe' elemanlarının mevcut olması halinde birbirine denktir.

2.11:

L ve L' minimal sol idealler olsun. Bu takdirde aşağıdaki denklik verilir:

$$LL' = L' \Leftrightarrow L \cong L' \ .$$

2.12:

A iki taraflı bir ideal, L bir minimal sol ideal ve e de L nin üretici birimi olsun. Bu takdirde ya $L \subset A$ dır veya $\forall a \in A$ için $ae = 0$ dır

(Bu durumda A ideali e tarafından sağdan sıfırlaştırılır denir).

2.13:

A iki taraflı ideal ve L de A da bulunan bir minimal sol ideal olsun. Bu takdirde L minimaline denk olan her L' minimal sol ideali de A da bulunur. Dolayısıyla bir minimal sol ideale denk olan bütün minimal sol ideallerin toplamı bir basit iki taraflı idealdir.

2.14:

e primitif idempotent olsun. Bu takdirde $eK[G]e = Ke$ dir. Tersine olarak e bir idempotent ve $eK[G]e = Ke$ ise, e primitiftir.

(1.9) a göre K[G] grup halkası *yarı-basittir*. Dolayısıyla K[G] grup halkası minimal sol ideallerin direkt toplamı şeklindedir:

$$K[G] = \oplus \sum_{\mu,i=1}^{r,f_\mu} L_i^{(\mu)} \quad 1 \leqq i \leqq f_\mu \ , \ 1 \leqq \mu \leqq r \tag{2.15}$$

Burada aynı üst indisi taşıyan sol idealler birbirine denktir.

$$A^{(\mu)} = \oplus \sum_{i=1}^{f_\mu} L_i^{(\mu)} \tag{2.16}$$

basit iki taraflı ideal olduğundan,

$$K[G] = \oplus \sum_{\mu=1}^{r} A^{(\mu)} \tag{2.17}$$

K[G] nin karşılıklı olarak birbirlerini sıfırlaştıran ($A^{(\mu)}A^{(\nu)} = A^{(\nu)}A^{(\mu)} = 0$ $\mu \neq \nu$) basit iki taraflı ideallere göre tek türlü bir parçalanışıdır. Eğer K cismi aynı zamanda cebirsel kapalı ise, *Wedderburn teoremine* (bkz. [8], s.175) göre $A^{(\mu)}$ K üzerinde f_μ mertebeli tam matris halkasına izomorftur. (2.17) ye göre $a = \sum_{\mu=1}^{r} a^{(\mu)}$ olsun. Sözü geçen izomorfizmada a ya a nın $a^{(\mu)}$ bileşenine ait matris tekabül ettirilirse, bu takdirde doğrudan doğruya G nin L_i minimal sol idealine ait indirgenemez gösterimi elde edilir.

$A^{(\mu)}$ idealinin bir K-üretici sistemi $\{ e_{ik}^{(\mu)} \mid 1 \leqq i,k \leqq f_\mu \}$

$$e_{ij}^{(\mu)} e_{km}^{(\mu)} = \delta_{jk} e_{im}^{(\mu)} \tag{2.18}$$

olmak üzere mevcuttur. Burada δ_{jk} Kronecker sembolünü ($\delta_{jk} = 0$, $j \neq k$, $\delta_{kk} = 1$ $\forall k$) göstermektedir. Buradan (2.17) yardımıyla herhangi bir $a \in K[G]$ halka elemanı için

$$a = \sum_{g \in G} \alpha(g) g = \sum_{\mu=1}^{r} \sum_{i,k=1}^{f_\mu} \alpha_{ik}^{(\mu)} e_{ik}^{(\mu)} \qquad (2.19)$$

ifadesi elde edilir. Burada e'_{ik}, e''_{ik},... $K[G]$ grup halkasının bir üretici sistemidir. Her μ için $e_{ik}^{(\mu)}$ üreteçleri kendi aralarında (2.18) bağıntısını gerçekler. Farklı üst indis taşıyan üretici sistem elemanları karşılıklı olarak birbirlerini sıfırlaştırır. (2.15) ve (2.17) ye göre

$$1_{K[G]} = 1_K 1_G = \sum_{\mu=1}^{r} e^{(\mu)} \ , \ e^{(\mu)} = \sum_{i=1}^{f_\mu} e_{ii}^{(\mu)} \qquad (2.20)$$

olsun. Burada $e_{ii}^{(\mu)}$ elemanları $L_i^{(\mu)}$ minimallerini üreten ve birbirlerini sıfırlaştıran primitif idempotentlerdir.

$A^{(\mu)}$ idealleri birbirlerini karşılıklı sıfırlaştırdığından (2.19) a göre a elemanının $A^{(\mu)}$ de bulunup bulunmamasına göre

$$e_{ii}^{(\mu)} a e_{kk}^{(\mu)} = \alpha_{ik}^{(\mu)} e_{ik}^{(\mu)} \qquad (2.21)$$

yazılır. Böylece verilen bir halka elemanına tekabül eden matris elemanları elde edilmiş olur. Özellikle μ ncü indirgenemez gösterimde g grup elemanına tekabül eden $\{\sigma_{ik}\} = D_\mu(g)$ matrisinin elemanları

$$e_{ii}^{(\mu)} g \, e_{kk}^{(\mu)} = \sigma_{ik}^{(\mu)} e_{ik}^{(\mu)} \qquad (2.22)$$

formülü ile hesaplanır.

Tekrar regüler gösterime dönersek, $K[G]$ grup halkasının (2.15) deki parçalanışı, regüler gösterimin diğer bir şekilde ifade edilişinden başka birşey değildir. $K[G]$ grup halkasının μ ncü indirgenemez gösterimine tekabül eden minimal sol ideal (2.15) parçalanısında f_μ defa yer almaktadır. Bu netice aşağıdaki teoremle ifade edilir:

2.23:

Regüler gösterim her indirgenemez gösterimi, bu gösterimin derecesi kadar ihtiva eder.

Diğer taraftan $e^{(\mu)}$ elemanı $A^{(\mu)}$ basit iki taraflı idealinin üretici birimi (merkezi idempotenti) olduğundan, $A^{(\mu)}$ basit iki taraflı idealinin $Z^{(\mu)}$ merkezi $\alpha e^{(\mu)}(\alpha \in K)$ elemanlarından meydana gelir. $K[G]$ grup halkasının merkezi Z, $A^{(\mu)}$ lerin $Z^{(\mu)}$ merkezlerinin direkt toplamına eşit olduğundan, $e^{(\mu)}$ merkezi idempotentleri Z merkezinin bir üretici sistemini teşkil eder. Bundan dolayı denk olmayan indirgenemez gösterimlerin sayısı $K[G]$ grup halkasının Z merkezinin boyutuna eşittir. Z merkezinin diğer bir üretici sistemi, K_ρ G grubunun ρ ıncu eşlenik sınıfı olmak üzere

$$k_\rho = \sum_{g \in K_\rho} g$$

yardımıyla da teşkil edilebilir. Bunun yardımıyla aşağıdaki önemli netice elde edilir:

2.24:

Sonlu bir G grubunun denk olmayan indirgenemez gösterimlerinin sayısı, G nin eşlenik elemanlarının oluşturduğu sınıfların sayısına eşittir.

Dolayısıyla G grubunun eşlenik elemanlarının oluşturduğu sınıfların sayısına eşit sayıda $K[G]$ grup halkasının primitif idempotentlerinin bir sistemi bilinirse, bu idempotentler ikişer tarzda denk olmayan minimal sol idealleri ürettiğinden, bu minimal sol idealler yardımıyla G grubunun indirgenemez K-gösterimlerini üreten, $K[G]$ grup halkasının minimal sol ideallerinin bir tam sistemi elde edilmiş olur.

§ 3. İNDÜKLENMİŞ VE DARALTILMIŞ GÖSTERİMLER

Sonlu bir G grubunun bir $H \leqq G$ altgrubuna göre sol yan sınıflarının bir tam temsilciler sistemi $\{ g_1=1_G, g_2, \ldots, g_t\}$ olsun:

$$G = H \cup g_2 H \cup \cdots \cup g_t H = \bigcup_{i=1}^{t} g_i H \ .$$

D, H altgrubunun bir K-matris gösterimi ve

$$\tilde{D}(g) = \begin{cases} D(g), & g \in H \\ 0 \ , & g \notin H \end{cases} \tag{3.1}$$

olsun. Bu takdirde

$$D_{ik}(g) = \tilde{D}(g_i^{-1} g g_k) \tag{3.2}$$

olmak üzere

$$(D\uparrow G)(g) = (D_{ik}(g)) \quad g \in G, \tag{3.3}$$

G grubunun nt (n = D gösteriminin derecesi) dereceli bir matris gösterimidir. Bu gösterime G grubunun D tarafından *indüklenmiş gösterimi* denir ve $D\uparrow G$ ile gösterilir. $(D\uparrow G)(g)$ indüklenmiş gösteriminin matrislerinin i-nci blok satırında ve k-ncı blok sütununda $\tilde{D}(g_i^{-1} g\, g_k)$ matrisi bulunur.

Gösterimlerin indüksiyonu için aşağıdaki transitiflik özelliği verilir.

3.4:

$H_1 \leqq H_2$ olmak üzere $H_1, H_2 \leqq G$ ve D, H_1 altgrubunun bir gösterimi olsun. Bu takdirde

$$(D\uparrow H_2)\uparrow G \sim D\uparrow G$$

verilir.

G grubunun bir D gösterimi $h \in H \leqq G$ altgrup elemanları üzerinde sınırlanırsa, bu takdirde D(h) matrisleri H altgrubunun bir gösterimini teşkil eder. $D\downarrow H$ ile gösterilen bu gösterime D nin H üzerinde *daraltılmışı* denir. Benzer şekilde bir K[G]-solmodül M aynı zamanda bir K[H]-solmodüldür ve bu daraltılmış sol modül $M\downarrow H$ ile gösterilir.

K gösterim cisminin karakteristiği 0 veya $p \nmid |G|$ olsun. Bu takdirde K aynı zamanda cebirsel kapalı ise, indirgenemez gösterimlerin indüksiyonu ve daraltılması üzerine aşağıdaki önemli *Frobenius Teoremi* verilir:

3.5:

D_i' ler $H \leqq G$ altgrubunun indirgenemez gösterimleri ve D_j ler de G grubunun indirgenemez gösterimleri olsun. Bu takdirde aşağıdaki denklik verilir:

$$D_i'{\uparrow}G \sim \dot{+}\sum_j c_{ij}D_j \Leftrightarrow D_j{\downarrow}H \sim \dot{+}\sum_i c_{ij}D_i' \ , \ c_{ij} \in \mathbb{N} \cup \{0\} \ .$$

Burada $c_{ij}D_j$ (veya $c_{ij}D_i'$) D_j (veya D_i') gösteriminin $D_i'{\uparrow}G$ (veya $D_j{\downarrow}H$) gösteriminde c_{ij} defa bulunduğunu ifade etmektedir.

M, $H \leqq G$ altgrubunun bir D gösterimine ait gösterim modülü olsun. Bu takdirde

$$M{\uparrow}G = K[G] \otimes_{K[H]} M \tag{3.6}$$

tensör-çarpımı $D{\uparrow}G$ indüklenmiş gösterimine ait gösterim modülüdür. Bu halde $M{\uparrow}G$ modülüne *indüklenmiş modül* de denebilir.

İleride kullanacağımız bir lemmayı hatırlatalım:

3.7:

G sonlu bir grup ve $H \leqq G$ bir altgrup, D bu altgrubun bir indirgenemez K-gösterimi ve e bu indirgenemez gösterimi üreten primitif idempotent olsun. Bu takdirde

$$K[G]e \cong K[G] \otimes_{K[H]} K[H]e \qquad (K[G]\text{-solmodül olarak})$$

verilir.

D ve D' bir G grubunun K-gösterimleri, M ve M' sırasıyla bu gösterimlerin modülleri olsun. Bu takdirde

$$(D \otimes D')(g) = D(g)\dot{\times}D'(g) \ (\text{kronecker-çarpımı}) \tag{3.8}$$

ile tanımlanan $D \otimes D'$ G nin bir K-gösterimidir ve gösterim modülü

$$M \otimes_K M' \tag{3.9}$$

($g(m \otimes m') = gm \otimes gm'$, $g \in G$, $m \in M$, $m' \in M'$) olan bu gösterime D ve D' gösterimlerinin *iç direkt çarpımı* denir.

G ve G' sonlu gruplar, D ve D' sırasıyla bu grupların gösterimleri ve M, M' bu gösterimlerin modülleri olsun. Bu takdirde

$$(D \# D')(g,g') = D(g)\dot{x}D'(g') \qquad (3.10)$$

ile tanımlanan D # D',

$$GxG' = \{(g,g') \mid g\in G,\ g'\in G'\}$$

direkt çarpımının bir K-gösterimidir. Gösterim modülü $M \otimes_K M'$ ($(g,g')(m\otimes m') = gm\otimes g'm'$, $(g,g')\in GxG'$) olan D # D' gösterimine D ve D'gösterimlerinin *dış direkt çarpımı* denir.

K[G] grup halkasında M ve M' K[G]-solmodülleri olarak M = K[G]e ve M'= K[G]e' sol ideallerini gözönüne alalım. Bu idealler birbirlerine izomorftur veya değildir. M sol idealini M' idealine resmeden bütün homomorfizmaların cümlesini $Hom_{K[G]}(M,M')$ ile gösterelim. $Hom_{K[G]}(M,M')$ cümlesi K cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu uzay için bilinen

$$Hom_{K[G]}(M,M') = Hom_{K[G]}(K[G]e,\ K[G]e') \cong eK[G]e' \qquad (3.11)$$

izomorfizmi verilir. Bu vektör uzayının boyutuna M ve M' K[G]-solmodüllerinin *kenetlenme sayısı* denir ve i(M,M') ile gösterilir:

$$[\ eK[G]e' : K\ ] = [\ Hom_{K[G]}(M,M') : K\ ] = i(M,M')\ . \qquad (3.12)$$

Ayrıca i fonksiyonu aditiftir:

$$i(M_1 \oplus M_2, M') = i(M_1, M') + i(M_2, M')\ . \qquad (3.13)$$

K[G] grup halkasının yarı-basit olması halinde, i(M,M') = i(M',M) verilir.

Kenetlenme sayılarıyla ilgili aşağıdaki önemli teorem verilir:

3.14:

M tam indirgenebilir bir K[G]-solmodül, K cebirsel kapalı bir cisim ve M' indirgenemez bir K[G]-solmodül olsun. Bu takdirde M' modülünün M modülü içindeki katsayısı i(M,M') kenetlenme sayısına eşittir. Tam indirgenebilir bir K[G]-solmodül M, i(M,M) = 1 olması halinde indirgenemezdir.

M tam indirgenebilir bir K[G]-solmodül ve M_k lar M nin indirgenemez altmodülleri ise

$$M = \oplus \sum_k \alpha_k M_k$$

yazılır. Burada α_k lar pozitif tam sayılardır. Bu takdirde tam indirgenebilir M modülüne tekabül eden matris gösterimi (1.7) ye göre

$$D(g) = \dot{+} \sum_k \alpha_k D_k(g)$$

gösterimine denktir. (3.14) e göre kenetlenme sayısı

$$\alpha_k = i(M, M_k)$$

olduğundan, M_k altmodüllerine ait D_k indirgenemez matris gösteriminin M modülüne ait D matris gösterimi içindeki katsayısını

$$\alpha_k = i(D, D_k)$$

gösterirsek, (3.14) de modüller için tanımlanan kenetlenme sayısı ilgili gösterimler için de tanımlanabilir:

$$i(M, M') = i(D, D') \cdot \tag{3.15}$$

Kenetlenme sayılarıyla ilgili önemli bir teorem *Mackey* tarafından verilmiştir:

3.16:

G sonlu bir grup, $H_1, H_2 \leq G$ altgruplar, K cebirsel kapalı ve karakteristiği 0 olan bir cisim, D_1 ve D_2 sırasıyla H_1 ve H_2 altgruplarının indirgenemez K-gösterimleri olsun. Bu takdirde $\{g_1 = 1_G, g_2, \ldots, g_n\}$ G grubunun H_1 ve H_2 altgruplarına göre çift yan sınıflarının bir tam temsilciler sistemi olmak üzere

$$i(D_1 \uparrow G, D_2 \uparrow G) = \sum_{k=1}^{n} i(D_1 \downarrow H_1 \cap H_2^{g_k}, D_2^{g_k} \downarrow H_1 \cap H_2^{g_k})$$

verilir. Burada D_2^g , $g \in G$ tesbit edilmiş bir eleman olmak üzere

$$D_2^g(h_2^g) = D_2(h_2) \qquad h_2 \in H_2 \ , \ h_2^g = g h_2 g^{-1}$$

ile tanımlanan $H_2^g = gH_2g^{-1}$ grubunun bir gösterimidir. D_1 ve D_2 gösterimlerine ait gösterim modülleri sırasıyla M_1 ve M_2 ise, yukarıdaki ifade modüller için aşağıdaki şekilde de yazılabilir:

$$i(M_1 \uparrow G, M_2 \uparrow G) = \sum_{k=1}^{n} i(M_1 \downarrow H_1 \cap H_2^{g_k}, M_2^{g_k} \downarrow H_1 \cap H_2^{g_k}) .$$

Burada M_2^g, D_2^g gösterimine ait gösterim modülüdür.

§ 4. GÖSTERİMLERİN KARAKTERLERİ

G bir grup ve K bir cisim olsun. G nin her D K-matris gösterimine, değerleri gösterim matrislerinin izleri olan bir χ fonksiyonu tekabül ettirilebilir:

$$\chi(g) = \text{İz}D(g) \tag{4.1}$$

fonksiyonuna D gösteriminin *karakteri* denir.

$$\text{İz}D(g) = \text{İz}PD(g)P^{-1} \tag{4.2}$$

eşitliğinden dolayı, singüler olmayan bütün P matrisleri için bir matris gösteriminin karakteri, G grubunun eşlenik elemanlarının oluşturduğu sınıflar üzerinde sabit kalır. Daha açık olarak eşlenik grup elemanlarına tekabül eden karakter değerleri eşittir ve karakter bir üretici sistem transformasyonunda invaryant kalır. Sözü geçen özellik, D gösterimine denk her matris gösterimi için de geçerlidir. Buna göre her karakter, ilgili gösterim ile tektürlü olarak belirlenir. Diğer bir ifade ile, denk gösterimler aynı karakteri haizdir.

Bir grubun indirgenemez gösterimlerine ait karakterlere, bu grubun *indirgenemez karakterleri* denir.

(1.8) e göre bir gösterimin karakteri, bu gösterimin indirgenemez gösterimlerine ait karakterlerinin bir pozitif tam katsayılı lineer kombinezonudur:

$$\chi = \sum_k \alpha_k \chi_k \; . \tag{4.3}$$

4.4:

G sonlu bir grup, χ ve χ' sırasıyla G grubunun indirgenemez D ve D' K-gösterimlerinin karakterleri olsun.

a) (i) D ve D' denk olmayan indirgenemez gösterimler ve K keyfi bir cisim ise

$$\sum_{g\in G} \chi(g)\, \chi'(g^{-1}) = 0$$

verilir.

(ii) K cebirsel kapalı ve KarK $\nmid |G|$ ise

$$\sum_{g\in G} \chi(g)\, \chi(g^{-1}) = |G|$$

verilir.

(iii) KarK = 0 ise

$$\sum_{g\in G} \chi(g)\,\chi(g^{-1})$$

$|G|$ ile bölünebilen pozitif rasyonel bir sayıdır.

b) K cebirsel kapalı ve KarK $\nmid |G|$ ise

$$h_\sigma \sum_{k=1}^{r} \chi^k(g_\rho)\chi^k(g_\sigma^{-1}) = \delta_{\rho\sigma}|G|,\ g_\rho\in K_\rho\ ,\ g_\sigma\in K_\sigma,\ h_\sigma=|K_\sigma|$$

verilir. Burada χ^k lar G grubunun indirgenemez karakterlerini, K_ρ G grubunun eşlenik elemanlarının oluşturduğu ρ-ncu eşlenik sınıfı ve r de G grubunun eşlenik sınıflarının sayısını göstermektedir.

G sonlu bir grup, K cebirsel kapalı ve karakteristiği $|G|$ grup mertebesini bölmeyen bir cisim, Φ ve Φ' G grubu üzerinde K-değerli fonksiyonlar olsun. Bu takdirde

$$(\Phi,\Phi')_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \Phi(g)\,\Phi'(g^{-1}) \tag{4.5}$$

ile tanımlanan $(\Phi,\Phi')_G$ ifadesine Φ ve Φ' fonksiyonlarının *iç çarpımı* denir.

Diğer taraftan χ ve χ' sırasıyla G grubunun indirgenemez D ve D' K-matris gösterimlerinin karakterleri, K cebirsel kapalı bir cisim ve KarK $\nmid |G|$ ise, bu takdirde (4.5) ve(4.4 a) i))ye göre

$$(\chi,\chi') = 0 \tag{4.6}$$

ve(4.4 a) ii))ye göre

$$(\chi,\chi\ ) = 1 \tag{4.7}$$

verilir.

4.8:

KarK = 0 olsun.

a) G grubunun bir D gösteriminin indirgenemez kısımları, D nin χ karakterinin verilmesi ile tektürlü olarak belirlidir. Zira D gösterimi karakteri χ_k olan D_k indirgenemez gösterimini$(\chi,\chi_k)/(\chi_k,\chi_k)$ katsayısı ile ihtiva eder.

b) G grubunun bir χ karakteri için $(\chi,\chi) = 1$ verilirse, χ indirgenemez bir karakterdir.

Şimdi K cebirsel kapalı bir cisim ve $\mathrm{Kar}K \nmid |G|$ olsun. (4.3) e göre χ karakteri χ_k indirgenemez karakterini α_k katsayısı ile ihtiva etmektedir. χ ve χ_k karakterlerine ait K-matris gösterimleri sırasıyla D ve D_k ise bu takdirde D_k indirgenemez matris gösterimi D matris gösterimi içinde α_k katsayısı ile bulunur. Bu durumda (4.7) ve(4.8 a))ya göre

$$\alpha_k = (\chi,\chi_k)$$

yazılabilir. Ohalde sonlu bir G grubunun D ve D' gösterimlerine ait gösterim modülleri sırasıyla M ve M', sözü geçen gösterimlere ait karakterler χ ve χ' ise (3.13) e göre

$$i(M,M') = i(D,D') = (\chi,\chi') \tag{4.9}$$

gerçeklenir.

Sonlu bir G grubunun mertebesi ile bu grubun indirgenemez gösterimlerinin dereceleri arasındaki münasebet aşağıdaki teoremle verilir:

4.10:

G sonlu bir grup, K cebirsel kapalı ve KarK = 0 olsun. Bu takdirde G grubunun indirgenemez gösterimlerinin derecesi, $|G|$ grup mertebesini böler.

Sonlu bir G grubunun adî indirgenemez gösterimlerinin ($K=\mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi) karakter değerleri karakter tablosu adı verilen bir tabloda gösterilebilir. Karakter tablosunda yer alan χ_ρ^k değerinde,k satır indisi G nin adî indirgenemez D_k gösterimlerini ve ρ sütun indisi G nin eşlenik elemanlarının oluşturduğu K_ρ eşlenik sınıflarını gösterir.Bir grubun indirgenemez gösterimlerinin sayısı bu grubun eşlenik sınıflarının sayısına eşit olduğundan, karakter tablosunda satır ve sütun sayısı eşittir. Adî indirgenemez karakterler için aşağıdaki *ortogonallik bağıntıları* verilir:

$$\sum_{\rho=1}^{r} h_\rho \chi_\rho^k \bar{\chi}_\rho^j = \delta_{kj}|G| \tag{4.11}$$

$$\sum_{k=1}^{r} h_\rho \chi_\rho^k \bar{\chi}_\sigma^k = \delta_{\rho\sigma}|G|$$

Burada $\chi(g^{-1}) = \bar{\chi}(g)$ ifadesi, $\chi(g)$ nin eşlenik kompleksidir. Buna göre sonlu bir G grubunun χ^k adî indirgenemez karakterlerinin satırlara göre ortogonallik bağıntıları

$$(\chi^k, \chi^j) = \delta_{kj}$$

ile gösterilir.

(4.11) ortogonallik bağıntılarından doğrudan doğruya; adî indirgenemez karakterlerin lineer bağımsız olduğu, $\mathbb{C}$ üzerindeki bir gösterimin indirgenemez kısımlarının, gösterimin karakterlerinden elde edilebileceği ve tam indirgenebilirlik halinde her gösterimin karakteri ile tam olarak belirlendiği elde edilir.

Bir karakterin derecesi, ilgili gösterimin derecesi olarak tanımlanır. Lineer gösterimlere ait karakterlere *lineer karakter* denir. Bir lineer karakter aynı zamanda bir gösterim olduğundan, sözü geçen karakter için

$$\chi(gg') = \chi(g)\chi(g') = \chi(g')\chi(g) \qquad g, g' \in G$$

verilir.

4.12:

G sonlu bir Abel grubu ve K cebirsel kapalı bir cisim olsun.

(i) G nin her indirgenemez K-gösterimi 1. dereceden (veya lineer)dir.

(ii) KarK $\nmid |G|$ olsun. Bu takdirde G grubu $|G|$ tane denk olmayan indirgenemez K-gösterimine maliktir (1 dereceden gösterimlerde denklik ile eşitlik aynı anlamdadır).

G sonlu bir Abel grubu ve K bir cisim olsun.

$$\hat{G} = \mathrm{Hom}(G, K^+), \ (K^+ = K - \{0\})$$

cümlesi

$$(\chi_1\chi_2)(g) = \chi_1(g)\chi_2(g) \quad \chi_k \in \hat{G}, \ g \in G \qquad (4.13)$$

terkip kuralına göre bir grup teşkil eder. $\hat{G}$ grubuna G nin K üzerindeki *karakter grubu* ve $\hat{G}$ nin elemanlarına da G nin K üzerindeki karakterleri denir. (4.12)ye göre K nın cebirsel kapalı olması halinde $\hat{G}$ nin elemanları doğrudan doğruya G grubunun indirgenemez K-gösterimlerinin karakterleridir. Bir Abel grubunun karakterlerinden daima $\hat{G}$ grubunun elemanları anlaşılır.

4.14:

G sonlu bir Abel grubu, K cebirsel kapalı bir cisim, $H \leq G$ bir altgrup ve $\Psi \in Hom(H,K^+) = \hat{H}$ olsun. Bu takdirde bir $\chi \in Hom(G,K^+)$ lineer karakteri

$$\chi \downarrow H = \Psi$$

olacak şekilde mevcuttur. Bu takdirde

$$\chi \to \chi \downarrow H$$

daraltılmış tasviri, $\hat{G}$ grubunu $\hat{H}$ grubuna resmeden ve çekirdeği

$$H^{\perp} = \{ \chi \mid \chi \in \hat{G} \ , \ \chi(h) = 1_K \ \forall h \in H \}$$

cümlesi olan bir epimorfizmadır. Bu halde

$$\hat{H} \cong \hat{G}/H^{\perp}$$

verilir.

BÖLÜM II

SONLU GRUPLARIN İNDİRGENEMEZ GÖSTERİMLERİNİN ALTGRUP ÇİFTLERİNİN İNDİRGENEMEZ GÖSTERİMLERİ YARDIMIYLA TEŞKİLİ

Bu bölümde çalışmamız için temel teşkil eden bir teorem (5.8)verilecektir. Bu teorem bazı hallerde altgrupların bazı indirgenemez gösterimleri yardımıyla bir sonlu grubun indirgenemez gösterimlerinin nasıl elde edilebileceğini göstermektedir. Daha sonra bir sonlu grubun bu şekilde elde edilen indirgenemez gösteriminin karakteri (5.11) de hesaplanmıştır. Bu arada bazı hallerde altgrupların bazı lineer gösterimleri yardımıyla bir sonlu grubun indirgenemez gösterimlerinin elde edilişiyle ilgili olarak BURROW [6] ve MUNKHOLM [10] tarafından verilen teoremler (5.8) in bir neticesi olarak (5.10) da ifade edilmiştir. Son olarak da iki Abel grubunun çarpımı şeklinde olan bir sonlu grubun indirgenemez gösterimlerini üreten primitif idempotentlerin nasıl elde edileceğini gösteren bir teorem verilmiştir.

§ 5. PRİMİTİF İDEMPOTENTLER VE İNDÜKLENMİŞ GÖSTERİMLER

Önce primitif idempotentlerle ilgili bazı bilinen lemmaları verelim (bkz.BAYAR [2], BOERNER [5]).

(5.1) LEMMA:

G sonlu bir grup, K cebirsel kapalı ve karakteristiği $|G|$ grup mertebesini bölmeyen bir cisim, $D_j(g) = \{ \alpha_{ik}^{(j)}(g) \}$ G grubunun derecesi f_j olan j nci indirgenemez K-matris gösterimi olsun. Bu takdirde belirli bir i $(1 \leq i \leq f_j)$ için

$$e_i^{(j)} = \frac{f_j}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha_{ii}^{(j)}(g^{-1})g \qquad (5.2)$$

elemanı K[G] grup halkasında D_j indirgenemez gösterimini üreten bir primitif idempotenttir.

İSPAT:

(2.19) ifadesi $a \in K[G]$ yerine $g \in G$ için yazılır ve her iki taraf sağdan $e_{hm}^{(j)}$ ile çarpılırsa, (2.18) e göre

$$ge_{hm}^{(j)} = \sum_i \alpha_{ih}^{(j)}(g)e_{im}^{(j)} \ , \ 1 \leq m \leq f_j$$

elde edilir. Bu eşitlikte

$$e_{hm}^{(j)} = \sum_{g \in G} \varepsilon_{hm}^{(j)}(g)g$$

yazılır ve 1_G nin katsayıları karşılaştırılırsa

$$(*) \qquad \varepsilon_{hm}^{(j)}(g^{-1}) = \sum_i \alpha_{ih}^{(j)}(g)\varepsilon_{im}^{(j)}(1_G)$$

elde edilir. Şimdi $\varepsilon_{hm}^{(j)}(1_G)$ katsayısını hesaplayalım. Herhangi bir $a = \sum_{g \in G} \alpha(g)g \in K[G]$ elemanı ile soldan çarpım K[G] grup halkasında bir lineer transformasyon olduğundan sözü geçen lineer transformasyona ait matrisin izi (regüler gösterimdeki karakteri), K[G] nin bilinen ve farklı iki üretici sistemi yardımıyla iki şekilde hesaplanabilir.(2.5) ve (2.23)e göre (2.19) dan

$$|G| \ \alpha(1_G) = \sum_{i,j} f_j \alpha_{ii}^{(j)}$$

yazılabilir. $e_{ik}^{(j)}$ elemanına ait matrisin j nci blokunda, i nci satır ve k ncı sütunundaki elemanı 1 ve diğer elemanları sıfır olan bir matris bulunduğundan (bkz.[5], s.63) özel olarak $e_{ik}^{(j)}$ için yukarıdaki eşitlikten

$$(**) \qquad |G|\ \varepsilon_{ik}^{(j)}(1_G) = \delta_{ik} f_j$$

yazabiliriz. (*) ve (**) karşılaştırıldığında

$$\alpha_{ik}^{(j)}(g) = \frac{|G|}{f_j}\,\varepsilon_{ki}^{(j)}(g^{-1})$$

veya

$$\varepsilon_{ki}^{(j)}(g) = \frac{f_j}{|G|}\,\alpha_{ik}^{(j)}(g^{-1})$$

elde edilir. Bu son eşitlikte i=k yazılır ve bütün g∈G grup elemanları üzerinden toplam alınırsa, belirli bir i ($1 \leq i \leq f_j$) için

$$e_{ii}^{(j)} = e_i^{(j)} = \sum_{g\in G} \varepsilon_{ii}^{(j)}(g)g = \frac{f_j}{|G|} \sum_{g\in G} \alpha_{ii}^{(j)}(g^{-1})g$$

elde edilir.

(5.3) NETİCE:

G sonlu bir grup, D_j G grubunun j nci indirgenemez gösterimi, $\chi^{(j)}$ bu gösterimin karakteri ve $e^{(j)}$ sözü geçen indirgenemez gösterime ait minimal sol ideali ihtiva eden basit iki taraflı ideali üreten merkezi idempotent olsun. Bu takdirde

$$e^{(j)} = \frac{f_j}{|G|} \sum_{g\in G} \chi^{(j)}(g^{-1})g \tag{5.4}$$

verilir. Burada f_j D_j gösteriminin derecesidir.

İSPAT:

İddia (5.2) den bütün i ($1 \leq i \leq f_j$) ler üzerinden toplam alınarak elde edilir.

(5.5) LEMMA:

G sonlu bir grup, $H \leq G$ bir altgrup, D H nın e^D primitif idempotenti tarafından üretilen bir indirgenemez K-matris gösterimi olsun. Bu takdirde H^g grubunun D^g gösterimi (bkz.s.17)

$$e^{D^g} = ge^D g^{-1} = (e^D)^g$$

idempotenti tarafından üretilir.

İSPAT:

(5.2) ye göre belirli bir i ve $g \in G$ için

$$e^{D^g} = \frac{f}{|H|} \sum_{s \in H^g} [\, D^g(s)\,]_{ii} s^{-1} = \frac{f}{|H|} \sum_{h \in H} [\, D^g(h^g)\,]_{ii} (h^g)^{-1}$$

$$= \frac{f}{|H|} \sum_{h \in H} [\, D(h)\,]_{ii} (h^g)^{-1} = (e^D)^g$$

gerçeklenir. Burada f D gösteriminin derecesidir ve $[\, D^g(s)\,]_{ii}$ ile $D^g(s)$ matrisinin i nci satır ve i nci sütunundaki elemanı gösterilmektedir.

(5.6) LEMMA:

G sonlu bir grup, K cebirsel kapalı ve karakteristiği $|G|$ grup mertebesini bölmeyen bir cisim, D G grubunun bir indirgenemez K-matris gösterimi, e D indirgenemez gösterimini üreten normlanmamış primitif idempotent ve E K[G]e minimal sol idealini ihtiva eden iki taraflı basit ideali üreten merkezi idempotent olsun. Bu takdirde f D gösteriminin derecesini göstermek üzere

$$\sum_{g \in G} geg^{-1} = \frac{\kappa |G|}{f} E, \quad (e^2 = \kappa e,\ \kappa \in K,\ \kappa \neq 0)$$

verilir. (KarK $\nmid |G|$ olduğundan $[\, K[G]e : K\,] = f \neq 0$ dır.)

İSPAT:

Önce K[G]e minimal sol idealinin ürettiği D matris gösteriminin $\chi(g)$ karakterini hesaplayalım. $\chi(g)$ karakteri, K[G]e minimal sol idealindeki $x \to x' = gx$ lineer tasvirinin izidir. K[G]e sol idealinde belirli bir üretici sisteme göre bu tasvirin matrisi D(g) dir. Sözü geçen üretici sistemi K[G] grup cebirinin bir üretici sistemine tamamlayalım. K[G] grup cebirindeki

$$x \to x' = gxe$$

lineer tasviri, K[G] nin her elemanına K[G]e minimal sol idealinin bir elemanını tekabül ettirir ve bu tasvire ait matris tamamlanmış üretici sisteme göre

$$\begin{bmatrix} D(g) & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Dolayısıyla sözü geçen tasvire ait matrisin izi $\kappa\chi(g)$ dir.

Şimdi aynı tasvirin izini $K[G]$ grup cebirinin $\{ g | g\in G \}$ doğal üretici sistemine göre hesaplayalım:

$$x = \sum_{t\in G} \xi(t)t, \quad x' = \sum_{t\in G} \xi'(t)t, \quad e = \sum_{t\in G} \varepsilon(t)t$$

olsun. Buradan

$$x' = \sum_{t\in G} \xi'(t)t = gxe = \sum_{t\in G} \{ \sum_{s\in G} \xi(s)\varepsilon(s^{-1}g^{-1}t) \}t$$

ve buradan da

$$\xi'(t) = \sum_{s\in G} \varepsilon(s^{-1}g^{-1}t)\, \xi(s) \ , \quad t\in G$$

yazabiliriz. Dolayısıyla $x \to x' = gxe$ lineer tasvirine doğal üretici sisteme göre tekabül eden matrisin izi olarak

$$\sum_{s\in G} \varepsilon(s^{-1}g^{-1}s) \ , \quad g\in G$$

elde edilir. Bir lineer tasvire farklı üretici sistemlere göre tekabül eden matrislerin izleri eşit olduğundan

$$\chi(g) = \frac{1}{\kappa} \sum_{s\in G} \varepsilon(s^{-1}g^{-1}s) \ , \quad g\in G$$

elde edilir. $\chi(g^{-1})$ karakteri g ile çarpılıp $g\in G$ üzerinden toplam alınırsa (5.3) yardımıyla

$$\sum_{g\in G} \chi(g^{-1})g = \frac{1}{\kappa} \sum_{\substack{s\in G, \\ g\in G}} \varepsilon(s^{-1}gs)g = \frac{1}{\kappa} \sum_{\substack{u\in G, \\ s\in G}} \varepsilon(u)sus^{-1}$$

$$= \frac{1}{\kappa} \sum_{s\in G} s \{ \sum_{u\in G} \varepsilon(u)u \} s^{-1} = \frac{1}{\kappa} \sum_{g\in G} geg^{-1} = \frac{|G|}{f} E$$

elde edilir.

(5.7) LEMMA:

G sonlu bir grup, K cebirsel kapalı ve karakteristiği $|G|$ grup mertebesini bölmeyen bir cisim, $e = \sum_{s\in G} \varepsilon(s)s$ $K[G]$ grup cebirinin bir normlanmamış primitif idempotenti olsun. Bu takdirde $f = [K[G]e:K]$ olmak üzere

$$\varepsilon(1_G) = \frac{f\kappa}{|G|}, \quad (e^2 = \kappa e \ , \kappa\in K \ , \kappa \neq 0)$$

verilir.

İSPAT:

(5.6) ya göre

$$\sum_{\substack{g\in G \\ t\in G'}} \varepsilon(t)gtg^{-1} = \kappa \sum_{u\in G} \chi(u^{-1})u$$

veya

$$\sum_{\substack{g\in G \\ u\in G'}} \varepsilon(g^{-1}ug)u = \kappa \sum_{u\in G} \chi(u^{-1})u$$

yazabiliriz. Bu eşitlikte 1_G nin katsayıları karşılaştırılırsa $\chi(1_G) = [K[G]e:K = f]$ olduğundan

$$|G| \ \varepsilon(1_G) = \kappa f$$

elde edilir.

Şimdi; bazı hallerde altgrupların bazı indirgenemez gösterimleri yardımıyla bir sonlu grubun indirgenemez gösterimlerinin nasıl elde edilebileceğini gösteren ve çalışmamız için temel teşkil eden bir teorem verelim:

(5.8) TEOREM:

G sonlu bir grup, K cebirsel kapalı ve karakteristiği $|G|$ grup mertebesini bölmeyen bir cisim, π ve ρ sırasıyla $P \leqq G$ ve $R \leqq G$ altgruplarının f_π ve f_ρ dereceli indirgenemez K-matris gösterimleri, e^π ve e^ρ sırasıyla π ve ρ indirgenemez matris gösterimlerini üreten $K[P]$, $K[R] \subset K[G]$ altcebirlerinin primitif idempotentleri olsun. Ayrıca

(1) $\quad i(\pi\uparrow G, \rho\uparrow G) = 1$

(2) $\quad i(\pi\downarrow P\cap R \ , \rho\downarrow P\cap R) > 0$

verilsin.

Eğer 1_G elemanının

$$e^{\pi}e^{\rho} = e^{\pi\rho}$$

içindeki katsayısı $\neq 0$ ise, bu takdirde $e^{\pi\rho}$ $K[G]$ grup cebirinin normlanmamış bir primitif idempotentidir ve dolayısıyla $K[G]$ grup cebirinde bir $K[G]e^{\pi\rho}$ minimal sol idealini veya G nin bir indirgenemez K-gösterimini üretir.

İSPAT:

$K[G]$ nin $K[P]$ ve $K[R]$ altcebirlerinde $K[P]e^{\pi}$ ve $K[R]e^{\rho}$ minimal sol ideallerini üreten e^{π} ve e^{ρ} primitif idempotentleri (bkz.3.7) $K[G]$ grup cebirinde G nin $\pi\uparrow G$ ve $\rho\uparrow G$ indüklenmiş gösterimlerine ait $K[G]e^{\pi}$ ve $K[G]e^{\rho}$ sol ideallerini üretir. (1) ve (3.16) ya göre

$$i(\pi\uparrow G\ ,\ \rho\uparrow G) = i(K[G]e^{\pi},\ K[G]e^{\rho}) = \sum_{k=1}^{n} i(\pi\downarrow P\cap R^{g_k},\ \rho^{g_k}\downarrow P\cap R^{g_k}) = 1$$

olduğundan (3.11) e göre

$$(*) \qquad [\ e^{\pi}K[G]e^{\rho} : K\ ] = 1$$

elde edilir. Diğer taraftan $0 \neq e^{\pi\rho} \in e^{\pi} K[G]e^{\rho}$ olduğundan

$$(**) \qquad e^{\pi}K[G]e^{\rho} = Ke^{\pi\rho}$$

yazabiliriz.

(*) ifadesi $\pi\uparrow G$ ve $\rho\uparrow G$ indüklenmiş gösterimlerinin G nin yalnız bir tane indirgenemez gösterimini 1 katsayısıyla ihtiva ettiğini ifade eder . Sözü geçen indirgenemez gösterimi

$$\pi\uparrow G \cap \rho\uparrow G := \delta^{\pi\rho}$$

ile gösterirsek

$$i(\pi\uparrow G,\ \delta^{\pi\rho}) = 1, \quad i(\rho\uparrow G\ ,\ \delta^{\pi\rho}) = 1$$

yazabiliriz.

İzomorf olmayan minimal sol ideallerin çarpımı sıfır olduğundan $(K[G]e^{\pi})(K[G]e^{\rho})$ çarpımı ya sıfır idealidir veya $\delta^{\pi\rho}$ ortak indirgenemez gösterimini üreten minimal sol idealdir. $e^{\pi\rho} \neq 0$ olduğundan (**) ifadesi yardımıyla

$$\{0\} \subset K[G]e^{\pi\rho} = (K[G]e^{\pi})(K[G]e^{\rho})$$

yazabiliriz. Buna göre $K[G]e^{\pi\rho}$ bir minimal sol idealdir. Diğer taraftan (**) ifadesine göre uygun bir $\kappa \in K$ için

$$(e^{\pi\rho})^2 = e^{\pi}(e^{\rho}e^{\pi})e^{\rho} = \kappa e^{\pi}e^{\rho} = \kappa e^{\pi\rho}$$

yazabiliriz. (5.7) ye göre

$$\kappa = \frac{|G|\{e^{\pi\rho} \text{ içinde } 1_G \text{ in katsayısı}\}}{f_{\pi\rho}} \neq 0 \ , \ ([K[G]e^{\pi\rho}:K]=f_{\pi\rho} \neq 0)$$

olduğundan $(e^{\pi\rho})^2 \neq 0$ dır ve dolayısıyla $e^{\pi\rho}$ $\delta^{\pi\rho}$ indirgenemez gösterimini üreten bir normlanmamış primitif idempotenttir.

(5.9) UYARMA:

$e^{\rho}e^{\pi} = e^{\rho\pi}$ $K[G]$ grup cebirinin normlanmamış bir primitif idempotentidir ve

$$K[G]e^{\pi\rho} \cong K[G]e^{\rho\pi}$$

verilir.

İSPAT:

$e^{\pi}e^{\rho} = e^{\pi\rho}$ daki 1_G in katsayısı $\neq 0$ ise, $e^{\rho}e^{\pi} = e^{\rho\pi}$ deki 1_G in katsayısı da $\neq 0$ olduğundan $e^{\rho\pi} \neq 0$ dır. Diğer taraftan (5.8) de sözü geçen $K[G]$ grup cebiri yarı-basit olduğundan

$$i(\pi\uparrow G \ , \ \rho\uparrow G) = i(K[G]e^{\pi} \ , \ K[G]e^{\rho}) = i(K[G]e^{\rho} \ , \ K[G]e^{\pi}) = i(\rho\uparrow G \ , \ \pi\uparrow G) = 1$$

yazabiliriz. Bu takdirde (5.8) deki yöntemle $e^{\rho\pi}$ nin $K[G]$ grup cebirinde bir normlanmamış primitif idempotent olduğu kolaylıkla görülür.

Şimdi $K[G]e^{\pi\rho} \cong K[G]e^{\rho\pi}$ olduğunu gösterelim. Farzedelimki $K[G]e^{\pi\rho}$ ve $K[G]e^{\rho\pi}$ minimal sol idealleri arasında bir izomorfizma mevcut olmasın. Bu takdirde (2.12) ye göre her $x \in K[G]e^{\pi\rho}$ elemanı ile $K[G]e^{\rho\pi}$ minimalinin $e^{\rho\pi}$ üretici birimi ile sağdan çarpımı sıfırdır:

$$xe^{\rho\pi} = xe^{\rho}e^{\pi} \ .$$

Buna göre $e^{\pi\rho} \in K[G]e^{\pi\rho}$ elemanı ile $e^{\rho\pi}$ elemanının çarpımının da sıfır olması gerekir:

$$e^{\pi\rho}e^{\rho\pi} = 0 \ .$$

Diğer taraftan

$$e^{\pi\rho}e^{\rho\pi} = e^{\pi}e^{\rho}e^{\pi} = 0$$

ve buradan da

$$(e^{\pi}e^{\rho})^2 = (e^{\pi\rho})^2 = 0$$

elde edilir. Bu ise $e^{\pi\rho}$ nun normlanmamış bir primitif idempotent olmasıyla çelişkidir. Dolayısıyla $K[G]e^{\pi\rho} \not\cong K[G]e^{\rho\pi}$ elde edilir.

(5.10) NETİCE:

G sonlu bir grup, K cebirsel kapalı ve karakteristiği $|G|$ grup mertebesini bölmeyen bir cisim, π ve ρ sırasıyla $P \leq G$ ve $R \leq G$ altgruplarının lineer K-gösterimleri olsun. Eğer

(i) $\pi{\downarrow}P\cap R = \rho{\downarrow}P\cap R$

(ii) $\forall g \in G-PR$ için $\exists p \in P$, $\exists r \in R$ öyleki $p = r^g$ ve $\pi(p) \neq \rho(r)$ şartları gerçeklenirse, bu takdirde $e^{\pi} = \dfrac{1}{|P|}\sum\limits_{p\in P} \pi(p^{-1})p$ ve

$e^{\rho} = \dfrac{1}{|R|}\sum\limits_{r\in R} \rho(r^{-1})r$ sırasıyla π ve ρ lineer K-gösterimlerini üreten primitif idempotentler olmak üzere

$$e^{\pi}e^{\rho} = e^{\pi\rho} = \frac{1}{|P||R|}\sum_{\substack{p\in P,\\ r\in R}} \pi(p^{-1})\,\rho(r^{-1})pr$$

$K[G]$ grup cebirinin bir normlanmamış primitif idempotentidir ve dolayısıyla $K[G]$ grup cebirinde bir minimal sol ideal veya G grubunun bir indirgenemez K-gösterimini üretir.

İSPAT:

Önce $e^{\pi}e^{\rho} = e^{\pi\rho} \neq 0$ olduğunu gösterelim:

$$e^{\pi\rho} = \frac{1}{|P||R|}\sum_{\substack{p\in P,\\ r\in R}} \pi(p^{-1})\,\rho(r^{-1})pr$$

ifadesinde $g = 1_G \in PR$ şartını sağlayan elemanlar üzerinden toplam alınırsa, $pr = 1_G$ veya $p = r^{-1}$ ve (ii) ye göre $\pi(p) = \rho(r^{-1})$ olmak üzere

$$\{\, e^{\pi\rho} \text{ içinde } 1_G\text{in katsayısı} \,\} = \frac{1}{|P||R|}\sum_{\substack{p,r\\ pr=1_G,\\ p,r^{-1}\in P\cap R}} \pi(p^{-1})\rho(r^{-1})pr$$

$$= \frac{1}{|P||R|}\sum_{\substack{p,r\\ pr=1_G,\\ p=r^{-1}\in P\cap R}} \pi(p^{-1})\pi(p) = \frac{|P\cap R|}{|P||R|} \neq 0$$

olduğundan $e^{\pi\rho} \neq 0$ elde edilir.

Şimdi (5.8) in (1) ve (2) şartlarının gerçeklenip gerçeklenmediğine bakalım. (i) ifadesinden

$$(*) \qquad i(\pi{\downarrow}P\cap R\ ,\ \rho{\downarrow}P\cap R) = 1 > 0$$

ve (ii) ifadesinden

$$(**) \qquad \forall g\in G\text{-}PR \text{ için } \ i(\pi{\downarrow}P\cap R^g\ ,\ \rho^g{\downarrow}P\cap R^g) = 0$$

yazabiliriz. Dolayısıyla (3.16) ya göre

$$i(\pi{\uparrow}G\ ,\ \rho{\uparrow}G) = \sum_{Pg_kR} i(\pi{\downarrow}P\cap R^{g_k},\ \rho^{g_k}{\downarrow}P\cap R^{g_k}),\ k=1,\ldots,n$$

olduğundan (*) ve (**) yardımıyla

$$i(\pi{\uparrow}G\ ,\ \rho{\uparrow}G) = 1$$

elde edilir. Ohalde (5.8) in (1) ve (2) şartları sağlanır. Dolayısıyla (5.1) ve (5.8) e göre

$$e^{\pi}e^{\rho} = e^{\pi\rho} = \frac{1}{|P||R|} \sum_{\substack{p\in P,\\ r\in R}} \pi(p^{-1})\rho(r^{-1})pr$$

K[G] grup cebirinin bir normlanmamış primitif idempotentidir. Burada $\{\ e^{\pi\rho}$ içinde 1_G in katsayısı $\} = \dfrac{|P\cap R|}{|P||R|} \neq 0$ olduğundan (5.7) ye göre

$$(e^{\pi\rho})^2 = \kappa_{\pi\rho}e^{\pi\rho},\ \kappa_{\pi\rho} = \frac{|G||P\cap R|}{f_{\pi\rho}|P||R|}\ ,\ (K[G]e^{\pi\rho} : K] = f_{\pi\rho})$$

elde edilir.

Şimdi (5.8) de sözü geçen $\delta^{\pi\rho}$ indirgenemez K-gösteriminin karakterini hesaplayalım:

(5.11) TEOREM:

G sonlu grubu Teorem (5.8) in şartlarını gerçeklesin, Bu takdirde G grubunun $\delta^{\pi\rho}$ gösteriminin $\chi^{\pi\rho}$ karakteri için

$$\chi^{\pi\rho} = \frac{f_{\pi}f_{\rho}|G|}{|P||R||C_G(g)|\lambda_{\pi\rho}} \sum_{rP\in C_G(g)} \pi_{jj}(p)\rho_{kk}(r)\ ,\ g\in G$$

verilir. $C_G(g)$ G grubunun $g\in G$ elemanına ait eşlenik elemanlarının sınıfını, $\pi_{jj}(p)$ $\pi(p)$ matrisinin j nci satır ve j ıci sütunundaki elemanı, $\rho_{kk}(r)$ $\rho(r)$ matrisinin k ncı satır ve k ncı sütunundaki elemanı göstermektedir.

İSPAT:

(5.4) ve (5.6) ya göre

$$\sum_{t\in G} te^{\pi\rho}t^{-1} = |G| \frac{\lambda_{\pi\rho}}{f_{\pi\rho}} E^{\pi\rho} = \lambda_{\pi\rho} \sum_{g\in G} \chi^{\pi\rho}(g)g^{-1}$$

yazılabilir. Burada $\chi^{\pi\rho}$ G grubunun $e^{\pi\rho}$ normlanmamış primitif idempotenti tarafından üretilmiş $\delta^{\pi\rho}$ indirgenemez gösteriminin karakteri, $E^{\pi\rho}$ da $\delta^{\pi\rho}$ nun dahil olduğu altcebirin merkezi idempotentidir. Diğer taraftan

$$\lambda_{\pi\rho} \sum_{g\in G} \chi^{\pi\rho}(g)g^{-1} \quad , \lambda_{\pi\rho}\in K$$

sözü geçen altcebirde merkezi idempotent olduğundan

$$\lambda_{\pi\rho} \sum_{g\in G}\chi^{\pi\rho}(g)g^{-1} = \sum_{t\in G} te^{\pi\rho}t^{-1} = \sum_{t\in G} t[\frac{f_\pi}{|P|} \sum_{p\in P} \pi_{jj}(p)p^{-1} \frac{f_\rho}{|R|} \sum_{r\in R} \rho_{kk}(r)r^{-1}] t^{-1}$$

$$= \frac{f_\pi f_\rho}{|P||R|} \sum_{\substack{t\in G,\\ p\in P,\\ r\in R}} \pi_{jj}(p)\rho_{kk}(r)tp^{-1}r^{-1}t^{-1}$$

yazılabilir. Bu eşitlikten

$$\chi^{\pi\rho}(g) = \frac{f_\pi f_\rho}{|P||R|\lambda_{\pi\rho}} \sum \pi_{jj}(p)\rho_{kk}(r)$$

elde edilir. Burada toplam bazı t ler için $trpt^{-1}=g$ olacak şekilde bütün p ve r ler üzerindendir.

Sözü geçen bağıntı belirli bir t elemanı için gerçeklenirse bu takdirde aynı bağıntı $N_G(g)$ $g\in G$ elemanının normalizatörü ve $h\in N_G(g)$ olmak üzere ht elemanı için de gerçeklenir: $trpt^{-1}= g$ ise

$$(ht)rp(ht)^{-1} = htrpt^{-1}h^{-1} = g \ .$$

$C_G(g)$ G grubunun $g\in G$ elemanına ait eşlenik elemanlarının oluşturduğu ve $|C_G(g)| = \frac{|G|}{|N_G(g)|}$ mertebeli sınıf olduğundan

$$\chi^{\pi\rho}(g) = \frac{f_\pi f_\rho}{|P||R|\lambda_{\pi\rho}} |N_G(g)| \sum \pi_{jj}(p)\rho_{kk}(r)$$

elde edilir.

(5.12) NETİCE:

G sonlu grubu Netice (5.10) un şartlarını gerçeklesin. Bu takdirde G grubunun $\delta^{\pi\rho}$ indirgenemez gösteriminin $\chi^{\pi\rho}$ karakteri için

$$\chi^{\pi\rho} = \frac{f_{\pi\rho}}{|C_G(g)|} \sum_{rp \in C_G(g)} \pi(p)\rho(r)$$

verilir.

(5.13) TEOREM:

$P,R \leq G$ sonlu Abel altgrupları olmak üzere $G = PR$ olsun. π ve ρ sırasıyla P ve R nin indirgenemez K-gösterimleri, e^{π} ve e^{ρ} bu gösterimleri üreten primitif idempotentler, $K[P]e^{\pi} \subseteq K[P]$ ve $K[R]e^{\rho} \subseteq K[R]$ bu primitif idempotentlerin ürettiği minimal sol idealler olsun. Bu takdirde

(i) $\pi{\downarrow}P\cap R \neq \rho{\downarrow}P\cap R$ ise, $e^{\pi}e^{\rho} = 0$ dır.

(ii) $\pi{\downarrow}P\cap R = \rho{\downarrow}P\cap R$ ise, $K[G]e^{\pi}e^{\rho} \neq \{0\}$ $K[G]$ nin bir minimal sol idealidir.

(iii) e $K[G]$ nin bir primitif idempotenti ise, $K[P]$ de bir e^{π} primitif idempotenti ve $K[R]$ de bir e^{ρ} primitif idempotenti

$$K[G]e \cong K[G]e^{\pi}e^{\rho}$$

olacak şekilde mevcuttur.

(iv) $K[G]$ grup cebirinde $K[G]e^{\pi\rho}$ ve $K[G]e^{\pi'\rho'}$ minimal sol idealleri için aşağıdaki denklik verilir:

$$e^{\pi\rho}e^{\pi'\rho'} = 0 \Leftrightarrow K[G]e^{\pi\rho} \ncong K[G]e^{\pi'\rho'} .$$

İSPAT:

(i) π ve ρ lineer K-gösterimlerine ait primitif idempotentler (5.2) ye göre sırasıyla $e^{\pi} = \frac{1}{|P|}\sum_{p\in P}\pi(p^{-})p$ ve $e^{\rho} = \frac{1}{|R|}\sum_{r\in R}\rho(r^{-1})r$ dir. (3.16) ya göre

$$i(\pi{\uparrow}G\ ,\ \rho{\uparrow}G) = 0$$

olduğundan, $\pi{\uparrow}G$ ve $\rho{\uparrow}G$ indüklenmiş gösterimleri G nin bir ortak indirgenemez gösterimini haiz değildir veya bu indüklenmiş gösterimleri üreten $K[G]e^{\pi}$ ve $K[G]e^{\rho}$ sol idealleri $K[G]$ nin bir ortak minimal sol idealini ihtiva etmezler. Dolayısıyla $e^{\pi}e^{\rho} = 0$ elde edilir.

(ii) $\pi{\downarrow}P\cap R = \rho{\downarrow}P\cap R$ halinde (3.16) dan $i(\pi{\uparrow}G\ ,\ \rho{\uparrow}G) = 1$ elde edilir.

$$\{\ e^{\pi}e^{\rho}\text{içinde } 1_G \text{ nin katsayısı }\} = \frac{1}{|P||R|}\sum_{\substack{p,r\\ pr=1_G}} \pi(p^{-1})\rho(r^{-1}) = \frac{|P\cap R|}{|P||R|} \neq 0$$

olduğundan $K[G]e^{\pi}e^{\rho} \neq \{0\}$ dır ve $K[G]e^{\pi}e^{\rho}$ $K[G]$ nin bir minimal sol idealidir.

(iii) Şimdi e $K[G]$ nin bir primitif idempotenti, $K[G]e$ bu primitif idempotentin ürettiği minimal sol ideal ve δ G nin $K[G]e$ tarafından üretilen indirgenemez K-gösterimi olsun. Eğer π ve ρ sırasıyla $\delta{\downarrow}P$ ve $\delta{\downarrow}R$ daraltılmış gösterimlerinin herhangi indirgenemez kısımları ise, (3.5) e göre δ gösterimi $\pi{\uparrow}G$ ve $\rho{\uparrow}G$ gösterimlerinin ortak indirgenemez kısmıdır. (3.14) e göre

$$i(\pi{\uparrow}G\ ,\ \rho{\uparrow}G) = i(\pi{\downarrow}P\cap R\ ,\ \rho{\downarrow}P\cap R) > 0$$

yazabiliriz ve (ii) ile ispat elde edilir.

(iv) $e^{\pi\rho}e^{\pi'\rho'} = 0$ olsun. Bu takdirde $G = PR = RP$ olduğundan $\forall g = rp \in G$ için

$$e^{\pi\rho}ge^{\pi'\rho'} = e^{\pi\rho}rpe^{\pi'\rho'} = \rho(r)\pi'(p)e^{\pi\rho}e^{\pi'\rho'} = 0$$

veya $\forall x \in K[G]$ için

$$e^{\pi\rho}xe^{\pi'\rho'} = \sum_{g\in G} \alpha(g)e^{\pi\rho}ge^{\pi'\rho'} = 0$$

elde edilir. Bu ise (2.10) a göre $K[G]e^{\pi\rho} \not\cong K[G]e^{\pi'\rho'}$ olduğunu ifade eder.

Tersine olarak $K[G]e^{\pi\rho} \not\cong K[G]e^{\pi'\rho'}$ olması halinde $e^{\pi\rho}e^{\pi'\rho'} = 0$ olduğunu gösterelim. Farzedelimki $e^{\pi\rho}e^{\pi'\rho'} \neq 0$ olsun. Bu takdirde en az $1_{K[G]} \in K[G]$ elemanı için

$$e^{\pi\rho}\, 1_{K[G]}e^{\pi'\rho'} \neq 0$$

yazılabileceğinden (2.10) a göre

$$K[G]e^{\pi\rho} \cong K[G]e^{\pi'\rho'}$$

elde edilir. Bu netice kabulümüzle çelişki teşkil eder.

BÖLÜM III

1. NEVİ YOUNG DÖRTLÜLERİ VE SİMETRİK GRUPLARIN PRİMİTİF İDEMPOTENTLERİ

Bu bölümde BAYAR'ın [3] çalışmasındaki Young Dörtlüsü tanımı ve bununla ilgili işlemler, Bölüm II de ispat ettiğimiz Teorem (5.8) in şartlarına uygun olarak 1. nevi Young Dörtlüsü adı altında tekrar incelenecek ve 1. nevi Young Dörtlüsü yardımıyla simetrik grupların adî grup cebirinin primitif idempotentlerinin bir tam sistemi verilecektir. Lemma ve teoremleri ispatsız olarak ifade ettiğimiz ve orjinal olmayan bu bölümün verilmesindeki amaç; 1. nevi Young Dörtlüsü ile Bölüm IV de vereceğimiz 2. nevi Young Dörtlüsünün kıyaslanarak, bunlar arasındaki benzerlik ve farklılıkların görülebilmesidir.

§ 6. 1. NEVİ YOUNG DÖRTLÜLERİ

G sonlu bir grup, P,R $\leq$ G altgruplar, K karakteristiği $|G|$ grup mertebesini bölmeyen bir cisim, π ve ρ sırasıyla P ve R altgruplarının lineer K-gösterimleri, e^{π} ve e^{ρ} sözü geçen gösterimlere ait primitif idempotentler olsun. Bu takdirde (5.1) e göre

$$e^{\pi} = \frac{1}{|P|}\sum_{p\in P}\pi(p^{-1})p \quad \text{ve} \quad e^{\rho} = \frac{1}{|R|}\sum_{r\in R}\rho(r^{-1})r$$

yazılabilir.

P ve R altgrup çifti ile π ve ρ lineer K-gösterim çiftinden oluşan (P,R,π,ρ)dörtlüsünü teşkil edelim. P,R altgrupları ve π,ρ lineer gösterimlerinin aşağıdaki şartları sağladığı takdirde, (P,R,π,ρ) dörtlüsüne *1. nevi Young Dörtlüsü* denir ve $Y_1=(P,R,\pi,\rho)$ ile gösterilir:

$$P\cap R = \{1_G\} \tag{6.1}$$

$$i(\pi\uparrow G\ ,\ \rho\uparrow G) = 1\ . \tag{6.2}$$

(3.16) yardımıyla (6.2) şartının aşağıdaki şarta denk olduğunu kolaylıkla ifade edebiliriz:

$$\text{Her } g\in G-PR \text{ için } \pi\downarrow P\cap R^g \neq \rho^g\downarrow P\cap R^g\ ,\ (R^g = gRg^{-1})\ . \tag{6.2*}$$

Ohalde (5.10) a göre $e^{\pi}e^{\rho} = e^{\pi\rho} \neq 0$ dır ve $e^{\pi\rho}$ K[G] grup halkasının K[G]$e^{\pi\rho}$ minimalini dolayısıyla G grubunun bir indirgenemez gösterimini üreten bir normlanmamış primitif idempotenttir. Bu gösterim $\pi\uparrow G$ ve $\rho\uparrow G$ indüklenmiş gösterimlerinin ortak indirgenemez kısmıdır ve bu indirgenemez gösterim $\pi\uparrow G$ ve $\rho\uparrow G$ indüklenmiş gösterimlerinde yalnız bir defa bulunur.

Diğer taraftan

$$e^{\pi}e^{\rho} = e^{\pi\rho} = \frac{1}{|P||R|}\sum_{\substack{p\in P,\\ r\in R}}\pi(p^{-1})\rho(r^{-1})pr\ ,\ (e^{\pi\rho})^2 = \kappa_{\pi\rho}e^{\pi\rho} \tag{6.3}$$

dır. (5.7) ye göre

$$\kappa_{\pi\rho} = \frac{|G|}{f_{\pi\rho}|P||R|}\ ,\quad ([\,K[G]e^{\pi\rho} : K\,] = f_{\pi\rho}) \tag{6.4}$$

verilir.

(6.3) toplamının terimlerini daha yakından tetkik edelim:Her grup elemanı en çok bir türlü pr şeklinde yazılabilir. Zira $pr=p_1r_1$ den $p_1^{-1}p = r_1r^{-1}$ elde edilir. Diğer taraftan aynı anda P ve R altgruplarına ait olan bir grup elemanı (6.1) e göre 1_G olduğundan $p_1=p$ ve $r_1=r$ elde edilir.Ohalde

$$e^{\pi\rho} = \frac{1}{|P||R|} \sum_{pr} \pi(p^{-1})\rho(r^{-1})pr$$

yazılabilir. Burada $\sum_{pr}$ den; toplamın pr şeklinde yazılabilen bütün grup elemanları üzerinden alınacağı anlaşılmalıdır.

Bir $Y_1=(P,R,\pi,\rho)$ 1. nevi Young Dörtlüsü ve bir $s\in G$ grup elemanı verilmiş olsun. sY_1 ile Y_1 den s yardımıyla elde edilen

$$sY_1=(P^s,R^s,\pi^s,\rho^s)$$

dörtlüsü gösterilsin. Bu takdirde $Y_1=(P,R,\pi,\rho)$ 1. nevi Young Dörtlüsü olduğundan (6.1) e göre

$$P^s\cap R^s = (P\cap R)^s = \{1_G\}$$

yazılabilir. Ayrıca (6.2*) ın diğer bir ifadesi

Her $g\in G-PR$ için $\exists p\in P$, $\exists r\in R$ öyleki $p=r^g$ ve $\pi(p) \neq \rho(r)$

şeklinde olduğundan, $p=r^g$ eşitliği yardımıyla her $s\in G$ için

$$p^s=sgrg^{-1}s^{-1}=sgs^{-1}srs^{-1}sg^{-1}s^{-1}=g^sr^s(g^s)^{-1}=(r^s)^{g^s}$$

yazılabilir. Ohalde

her $g^s\in G-(PR)^s = P^sR^s$ için $\exists p^s\in P^s$, $\exists r^s\in R^s$ öyleki $p^s = (r^s)^{g^s}$ ve $\pi^s(p^s) \neq \rho^s(r^s)$

veya

her $g^s\in G-P^sR^s$ için $\pi^s\downarrow P^s\cap (R^g)^s \neq (\rho^s)^{g^s}\downarrow P^s\cap (R^g)^s$

elde edilir. $sY_1= (P^s,R^s,\pi^s,\rho^s)$ dörtlüsü için (6.1) ve (6.2)şartları gerçeklendiğinden sY_1 dörtlüsü de bir 1. nevi Young Dörtlüsüdür. Dolayısıyla sY_1 dörtlüsü de G grubunun bir indirgenemez gösterimini üreten bir normlanmamış primitif idempotent belirtir. Sözü geçen idempotent (5.5)e göre

$$e^{\pi^s} e^{\rho^s} = (e^{\pi}e^{\rho})^s = (e^{\pi\rho})^s$$

dir.

$Y_1=(P,R,\pi,\rho)$ ve $Y_1'=(P',R',\pi',\rho')$ 1. nevi iki Young Dörtlüsü olsun. $Y_1'=sY_1$ olacak şekilde bir $s\in G$ elemanı mevcut ise Y_1 ve Y_1' 1. nevi Young Dörtlülerine *aynı tipten* , şayet her $g\in G$ için

$$\pi\downarrow P\cap R'^{g} \neq \rho'^{g}\downarrow P\cap R'^{g}$$

ise Y_1 ve Y_1' dörtlülerine *farklı tipten* denir.

1. nevi Young Dörtlüleri ile ilgili aşağıdaki lemmalar verilir:

(6.5) LEMMA:

Y_1 ve Y_1' farklı tipten 1. nevi iki Young Dörtlüsü olsun. Bu takdirde $Y_1' = sY_1$ olacak şekilde bir $s\in G$ elemanı mevcut değildir.

(6.6) LEMMA:

Y_1 ve sY_1 $P\cap R^s = \{1_G\}$ şartını sağlayan 1. nevi iki Young Dörtlüsü olsun. Bu takdirde s bir pr (PR ye göre) dir.

(6.7) LEMMA:

$$pe^{\pi} = e^{\pi}p = \pi(p)e^{\pi} \ , \quad \forall p\in P$$
$$re^{\rho} = e^{\rho}r = \rho(r)e^{\rho} \ , \quad \forall r\in R$$
$$pe^{\pi\rho}r = \pi(p)\rho(r)e^{\pi\rho} \ , \quad \forall p\in P \ , \ \forall r\in R$$

eşitlikleri verilir.

(6.8) LEMMA:

$Y_1=(P,R,\pi,\rho)$ ve $Y_1'=(P',R',\pi',\rho')$farklı tipten 1. nevi iki Young Dörtlüsü olsun. Bu takdirde her $g\in G$ için

$$e^{\rho'^{g}}e^{\pi} = 0$$

verilir.

1. nevi Young Dörtlüleri için aşağıdaki önemli teorem verilir:

(6.9) TEOREM:

Aynı tipten 1. nevi Young Dörtlülerine ait normlanmamış primitif idempotentler denk gösterimler, farklı tipten 1. nevi Young Dörtlülerine ait normlanmamış primitif idempotentler denk olmayan gösterimler üretir.

Sonuç olarak her $Y_1=(P,R,\pi,\rho)$ 1. nevi Young Dörtlüsü K[G] grup cebirinin bir normlanmamış $e^{\pi\rho}$ primitif idempotentini belirtir ve farklı tipten 1. nevi Young Dörtlülerine ait normlanmamış primitif idempotentler K[G] cebirinin denk olmayan minimal sol ideallerini üretir.

§ 7. SİMETRİK GRUPLARIN PRİMİTİF İDEMPOTENTLERİNİN BİR TAM SİSTEMİ

Bu paragrafta 1. nevi Young Dörtlüleri yardımıyla, S_n simetrik grubunun $K[S_n]$ grup halkasının denk olmayan minimal sol ideallerini dolayısıyla S_n grubunun denk olmayan indirgenemez gösterimlerini üreten primitif idempotentlerin bir tam sistemi verilecektir.

Sonlu bir $\Omega = \{1,2,\dots,n\}$ cümlesine ait bütün permütasyonların cümlesi (s,t bu permütasyonlardan herhangi ikisi olmak üzere $\forall i \in \Omega$ için $(st)(i) = s(t(i))$ olacak şekildeki çarpım operasyonuna göre) bir grup teşkil eder. Sözü geçen gruba Ω üzerinde *n. dereceden S_n simetrik grubu* denir. S_n grubunun her elemanı, ortak rakam ihtiva etmeyen *devrelerin* çarpımı olarak yazılabilir. S_n grubunun eşlenik elemanlarının oluşturduğu sınıflar, aynı devre yapısına haiz olan permütasyonlardan meydana gelir. Ohalde S_n grubunun eşlenik sınıfları devre uzunluklarının verilmesiyle belirlenir. $\sum_{i=1}^{n} i\rho_i = n$ olmak üzere $i(1 \leq i \leq n)$ uzunluğunda ρ_i tane devre ihtiva eden sınıfı $\rho = (i^{\rho_i})$ ile gösterelim. Sözü geçen ρ sınıfının mertebesi

$$h_\rho = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} i^{\rho_i}\rho_i!} \tag{7.1}$$

ile verilir. Diğer taraftan S_n grubunun bir ρ sınıfına tektürlü ve tersinir olarak n nin bir $(\lambda) = (\lambda_1,\dots,\lambda_h)$ *partisyonu* tekabül ettirilebilir. Burada pozitif tam sayılar olan λ_i ler, ρ dan bir eleman ihtiva eden devrelerin uzunluklarından meydana gelmiştir:

$$\rho = (1^{\rho_1},\dots,n^{\rho_n}) \Leftrightarrow (\lambda) = (\lambda_1,\dots,\lambda_h),\ \lambda_i \geq \lambda_{i+1},\ \sum_{i=1}^{h} \lambda_i = n\ . \tag{7.2}$$

(2.23) e göre S_n grubunun denk olmayan indirgenemez gösterimlerinin sayısı S_n nin eşlenik elemanlarının oluşturduğu sınıfların sayısına eşit olduğundan, (7.2) ye göre n nin partisyonlarının sayısı S_n simetrik grubunun indirgenemez gösterimlerinin sayısına eşit olur.

(λ) ve (μ) n nin farklı iki partisyonu olsun. İlk sıfırdan farklı $\lambda_i - \mu_i$ farkı > 0 ise bu takdirde $(\lambda) > (\mu)$ yazılır. n nin bir $(\lambda) = (\lambda_1,\dots,\lambda_h)$ partisyonu i-nci satırında λ_i tane kutucuk bulunan, h tane satır ve n tane kutucukdan meydana gelen ve bütün satırları aynı sütunla başlayan bir

$R(\lambda)$ diyagramı ile gösterilebilir:

$$R(\lambda): \quad \begin{array}{l} \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \; & \; & \cdot\;\cdot\;\cdot & \; \\ \hline \end{array} \quad \lambda_1 \text{ kutucuk} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \; & \; & \cdot\cdot\cdot & \; \\ \hline \end{array} \quad \lambda_2 \text{ kutucuk} \\ \vdots \\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline \; & \cdots & \; \\ \hline \end{array} \quad \lambda_h \text{ kutucuk} \,. \end{array} \tag{7.3}$$

1 den n e kadar olan sayılar herhangi bir sırada $R(\lambda)$ nın kutucuklarına yazılarak (λ) partisyonuna (veya $R(\lambda)$ diyagramına) ait *$T(\lambda)$ tablosu* tanımlanır:

$$T(\lambda): \quad \begin{array}{l} \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & \cdot\;\;\cdot\;\;\cdot & \lambda_1 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \lambda_1+1 & \lambda_1+2 & \cdot\;\;\cdot\;\;\cdot & \lambda_1+\lambda_2 \\ \hline \end{array} \\ \vdots \\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline \; & \cdot\;\cdot\;\cdot & n \\ \hline \end{array} \quad . \end{array} \tag{7.4}$$

$T(\lambda)$ tablosunun bütün yatay permütasyonlarının grubunu $P_{(\lambda)}$ ve uygun olarak $T(\lambda)$ nın bütün sütun permütasyonlarının grubunu $R_{(\lambda)}$ ile gösterelim. $P_{(\lambda)}$ ve $R_{(\lambda)}$ permütasyon grupları S_n simetrik grubunun altgruplarıdır ve açık olarak aşağıdaki özelliği haizdirler:

$$P_{(\lambda)} \cap R^s_{(\lambda)} = \{1_{S_n}\} \,, \; \forall s \in P_{(\lambda)} R_{(\lambda)} \,. \tag{7.5}$$

Şimdi bir $T(\lambda)$ tablosu ve bir $s \in S_n$ permütasyonu verilmiş olsun. $T(\lambda)$ tablosunun rakamlarına s permütasyonunu tatbik etmekle elde edilen tabloyu $sT(\lambda)$ ile gösterelim. $T(\lambda)$ tablosundan $T'(\lambda)=sT(\lambda)$ tablosuna geçiş bir numaralama değişikliğinden başka birşey değildir. Ohalde sırasıyla $T(\lambda)$ ve $T'(\lambda)$ tablolarından alınan t ve $t'=t^r$ permütasyonlarının birbirleriyle ilişkisi şu şekilde verilir: t' permütasyonu $T'(\lambda)$ tablosunun yerlerine t permütasyonunun $T(\lambda)$ tablosunun yerlerine yaptığı etkinin aynısını yapar. $T(\lambda)$ nin i nci satır ve k ncı sütununda (kısaca (i,k) yerinde)bulunan rakam t permütasyonu ile (i_1,k_1) yerine giderse, $T'(\lambda)$ da (i,k) yerinde bulunan rakam da t' ile (i_1,k_1) e gider. t' permütasyonuna $T'(\lambda)$ için t ye karşılık gelen permütasyon denir.

(7.6) LEMMA:

Bir $T(\lambda)$ tablosu ve bu tabloya ait $P_{(\lambda)}$ ve $R_{(\lambda)}$ grupları verilmiş olsun. Bu takdirde

$$P_{(\lambda)} \cap R^s_{(\lambda)} \neq \{1_{S_n}\} \quad \forall s \in S_n - P_{(\lambda)} R_{(\lambda)}$$

verilir.

(7.6) ya göre $P_{(\lambda)} \cap R^s_{(\lambda)}$ grubu aynı zamanda tek permütasyonlar ihtiva ettiğinden bir alterne grup değildir.

$P_{(\lambda)}$ permütasyon grubunun birim gösterimi $EP_{(\lambda)}$:

$$EP_{(\lambda)}(s) = 1 \quad \forall s \in P_{(\lambda)}$$

ve $R_{(\lambda)}$ permütasyon grubunun alterne gösterimi (A_n alterne grubuna göre) $AR_{(\lambda)}$:

$$AR_{(\lambda)}(s) = \begin{cases} 1 , & s \in A_n \\ -1, & s \in R_{(\lambda)} - A_n \end{cases}$$

olsun. (5.1) e göre

$$e^{EP}(\lambda) = \frac{1}{|P_{(\lambda)}|} \sum_{p \in P_{(\lambda)}} p \quad \text{ve} \quad e^{AR}(\lambda) = \frac{1}{|R_{(\lambda)}|} \sum_{r \in R_{(\lambda)}} \varepsilon_r r$$

($\varepsilon_r = \pm 1$, r nin çift veya tek permütasyon olması halinde)sırasıyla $K[S_n]$ grup halkasında $EP_{(\lambda)}$ ve $AR_{(\lambda)}$ gösterimlerini üreten primitif idempotentlerdir. Diğer taraftan

$$EP_{(\lambda)} \downarrow P_{(\lambda)} \cap R^s_{(\lambda)} = E(P_{(\lambda)} \cap R^s_{(\lambda)})$$

ve

$$(AR_{(\lambda)})^s \downarrow P_{(\lambda)} \cap R^s_{(\lambda)} = A(P_{(\lambda)} \cap R^s_{(\lambda)})$$

olduğundan, $P_{(\lambda)} \cap R^s_{(\lambda)} \neq \{1_{S_n}\}$ olması halinde

$$E(P_{(\lambda)} \cap R^s_{(\lambda)}) \neq A(P_{(\lambda)} \cap R^s_{(\lambda)})$$

gerçeklenir. Bu takdirde (7.6) ya göre her $s \in S_n - P_{(\lambda)} R_{(\lambda)}$ için

$$EP_{(\lambda)} \downarrow P_{(\lambda)} \cap R^s_{(\lambda)} \neq (AR_{(\lambda)})^s \downarrow P_{(\lambda)} \cap R^s_{(\lambda)}$$

elde edilir. Ohalde

$$Y_{(\lambda)} = (P_{(\lambda)}, R_{(\lambda)}, EP_{(\lambda)}, AR_{(\lambda)})$$

bir 1. nevi Young Dörtlüsüdür ve bu dörtlüye ait normlanmamış primitif idempotent

$$e^{(\lambda)} = e^{EP}(\lambda) e^{AR}(\lambda) = \frac{1}{|P_{(\lambda)}||R_{(\lambda)}|} \sum_{pr} \varepsilon_r pr \qquad (7.7)$$

ile verilir. Sözü geçen idempotent $K[S_n]$ grup halkasının $K[S_n]e^{(\lambda)}$ minimal sol idealini üretir ve (6.4) e göre

$$\kappa_{(\lambda)} = \frac{n!}{f_{(\lambda)}|P_{(\lambda)}||R_{(\lambda)}|}, \quad (e^{(\lambda)})^2 = \kappa_{(\lambda)} e^{(\lambda)}$$

verilir.

(7.8) TEOREM:

n nin farklı partisyonlarına ait 1. nevi Young Dörtlüleri farklı tiptendir.

Sonuç olarak n nin her (λ) partisyonu için bir 1. nevi $Y_{(\lambda)}$ Young Dörtlüsü bulunabilir. Sözü geçen dörtlü $K[S_n]$ grup halkasının bir normlanmamış $e^{(\lambda)}$ primitif idempotentini üretir. (6.9) ve (7.8) e göre farklı tipten 1. nevi Young Dörtlülerine ait normlanmamış primitif idempotentler $K[S_n]$ grup halkasının denk olmayan minimal sol ideallerini üretirler. Farklı tipten 1. nevi Young Dörtlülerinin sayısı $K[S_n]$ nin denk olmayan minimal sol ideallerinin sayısına eşittir. Ohalde $K[S_n]$ grup halkasının denk olmayan minimal sol ideallerini dolayısıyla S_n simetrik grubunun denk olmayan indirgenemez gösterimlerini üreten bir tam sistem elde edilmiş olur.

BÖLÜM IV

2. NEVİ YOUNG DÖRTLÜLERİ VE ABEL GRUPLARININ YARI DİREKT ÇARPIMLARININ İNDİRGENEMEZ GÖSTERİMLERİ

Bu bölümde, Bölüm II de ispat edilen Netice (5.10) yardımıyla 2.nevi Young Dörtlüsü tanımı ve bununla ilgili sonuçlar verilecektir. Daha sonra 2. nevi Young Dörtlüsü yardımıyla Abel gruplarının yarı-direkt çarpımlarının indirgenemez gösterimleri araştırılarak belirli dereceli indirgenemez bir altcebir için bir üretici sistem verilecektir.

§ 8. 2. NEVİ YOUNG DÖRTLÜLERİ

G sonlu bir grup, P ve R G nin altgrupları, K karakteristiği $|G|$ grup mertebesini bölmeyen cebirsel kapalı bir cisim.

$$\pi : P \to K \quad \text{ve} \quad \rho : R \to K$$

sırasıyla P ve R altgruplarının e^{π} ve e^{ρ} primitif idempotentleri tarafından üretilen lineer karakterleri olsun. Ayrıca $P \cap R = \{1_G\}$ ve $R \subset N_G(P)$ olmak üzere $G = PR$ olsun. Bu takdirde

$$\phi : R \to Oto(P) \ , \ (r \to \phi_r \ , \ \phi_r(p) = rpr^{-1} = p^r \ , \ p \in P \ , \ r \in R \ ) \qquad (8.1)$$

homomorfizması mevcuttur. Burada $N_G(P)$ $P \leqq G$ altgrubunun normalizatörünü ve $Oto(P)$ P grubunun bütün otomorfizmalarının grubunu göstermektedir. Bu takdirde π P altgrubunun bir lineer karakteri ise, herhangi bir $r \in R$ için $\pi\phi_r = \pi^r$ de P nin bir lineer karakteridir:

$$(\pi\phi_r)(p_1p_2) = \pi(\phi_r(p_1p_2)) = \pi((p_1p_2)^r) = \pi(rp_1p_2r^{-1}) = \pi(rp_1r^{-1}rp_2r^{-1})$$
$$= \pi(p_1^rp_2^r) = \pi(p_1^r)\pi(p_2^r) = [(\pi\phi_r)(p_1)][(\pi\phi_r)(p_2)], \forall p_1, p_2 \in P.$$

Mevcut kabuller altında P,R altgrupları ve π,ρ lineer karakter çifti ile teşkil edilen (P,R,π,ρ) dörtlüsü için (5.10) nun şartları gerçeklenir:

(i) $P \cap R = \{1_G\}$ ve π ile ρ birinci dereceden gösterimler olduğundan

$$i(\pi{\downarrow}P\cap R \ , \ \rho{\downarrow}P\cap R) = i(\pi{\downarrow}\{1_G\} \ , \ \rho{\downarrow}\{1_G\}) = i(E\{1_G\} \ , \ E\{1_G\}) = 1 > 0$$

elde edilir.

(ii) G grubunun P ve R altgruplarına göre bir tane çift yan sınıfı olduğundan (3.16) ve (i) yardımıyla

$$i(\pi{\uparrow}G, \rho{\uparrow}G) = i(\pi{\downarrow}P\cap R \ , \ \rho{\downarrow}P\cap R) = 1$$

elde edilir.

Bu şekilde teşkil edilen ve (5.10) nun şartlarını gerçekleyen (P,R,π,ρ) dörtlüsüne *2. nevi Young Dörtlüsü* diyelim ve $Y_2 = (P,R,\pi,\rho)$ ile gösterelim. Ohalde (5.10) na göre $e^{\pi}e^{\rho} = e^{\pi\rho} \neq 0$ dır ve $e^{\pi\rho}$ $K[G]$ grup halkasının $K[G]e^{\pi\rho}$ minimalini dolayısıyla G grubunun bir indirgenemez gösterimini üreten bir normlanmamış primitif idempotenttir. Bu gösterim aynı zamanda $\pi{\uparrow}G$ ve $\rho{\uparrow}G$ indüklenmiş gösterimin ortak kısmıdır.

Bir $Y_2 = (P,R,\pi,\rho)$ 2. nevi Young Dörtlüsü ve bir $r \in R$ verilmiş olsun . π^r P altgrubunun bir lineer karakteri olduğundan P,R altgrupları ve π^r,ρ

lineer karakter çifti ile teşkil edilen dörtlüyü

$$r\gamma_2=(P,R,\pi^r,\rho) \tag{8.2}$$

ile gösterelim. Bu takdirde e^{π^r} π^r lineer karakterini üreten primitif idempotent olmak üzere $r\gamma_2$ dörtlüsü de açık olarak (5.10) nun şartlarını gerçeklediğinden bir 2. nevi Young Dörtlüsüdür (bkz.s.39)

Şimdi P altgrubunun bütün lineer karakterlerinin cümlesinde aşağıdaki şekilde bir „ $\sim$ " denklik bağıntısı tanımlayalım:

$$\pi \sim \pi' \Leftrightarrow \pi'=\pi\phi_r=\pi^r \ , \ \phi_r \in Oto(P) \ . \tag{8.3}$$

$\pi'=\pi\phi_r$ eşitliğini gerçekleyen ve $r\in R$ elemanlarının cümlesini $R_{\pi\pi'}$ ile gösterelim:

$$R_{\pi\pi'}=\{r\in R \mid \pi'=\pi\phi_r\}\subset R \ . \tag{8.4}$$

Diğer taraftan $\pi=\pi\phi_r$ eşitliğini sağlayan $r\in R$ elemanlarının cümlesini $R_{\pi\pi}=R_\pi$ ile gösterecek olursak, sözü geçen cümle R nin bir altgrubudur :

$$R_{\pi\pi}=R_\pi=\{r\in R \mid \pi=\pi\phi_r\}\leqq R \ . \tag{8.5}$$

Ohalde P nin π ve π' lineer karakterlerinin denkliği ile $R_{\pi\pi'}\subset R$ altcümlesinin boş cümleden farklı olması aynı anlamlıdır:

$$\pi \sim \pi' \Leftrightarrow R_{\pi\pi'}\neq\emptyset \ . \tag{8.6}$$

Benzer şekilde

$$\pi \not\sim \pi' \Leftrightarrow R_{\pi\pi'}=\emptyset \tag{8.6'}$$

verilir.

(8.7) LEMMA:

P altgrubunun π ve π' lineer karakterleri denk olsun. Bu takdirde

$$R_{\pi\pi'}=R_\pi r=rR_{\pi'} \ , \ \forall r\in R$$

verilir.

İSPAT:

(8.3) ve (8.5) yardımıyla

$$R_\pi r=\{r_0 r \mid \pi=\pi\phi_{r_0}\}=\{r_1 \mid \pi=\pi\phi_{r_1 r^{-1}}\}=\{r_1 \mid \pi=\pi\phi_{r_1}\phi_{r^{-1}}\}$$

$$=\{r_1 \mid \pi'=\pi\phi_{r_1}\}=R_{\pi\pi'}$$

elde edilir. Benzer şekilde $R_{\pi\pi'}=rR_{\pi'}$ gösterilir.

(5.1) e göre

$$e^{\pi} = \frac{1}{|P|}\sum_{p\in P}\pi(p^{-1})p \text{ ve } e^{\rho} = \frac{1}{|R|}\sum_{r\in R}\rho(r^{-1})r$$

sırasıyla P ve R altgruplarının π ve ρ lineer karakterlerini üreten primitif idempotentlerdir. $e^{\pi\rho}$ $Y_2=(P,R,\pi,\rho)$ 2. nevi Young Dörtlüsüne ait normlanmamış primitif idempotent olmak üzere aşağıdaki lemmalar verilir:

(8.8) LEMMA:

$$pe^{\pi} = e^{\pi}p = \pi(p)e^{\pi}, \quad \forall p\in P$$
$$re^{\rho} = e^{\rho}r = \rho(r)e^{\rho}, \quad \forall r\in R$$
$$re^{\pi\rho} = \rho(r)e^{\pi^{r^{-1}}\rho}, \quad \forall r\in R$$

verilir.

İSPAT:

$\forall p\in P$ için

$$pe^{\pi} = \frac{1}{|P|}\sum_{p_1\in P}\pi(p_1^{-1})pp_1 = \frac{1}{|P|}\sum_{u\in P}\pi(u^{-1})\pi(p)u = \pi(p)e^{\pi}$$

ve

$$e^{\pi}p = \frac{1}{|P|}\sum_{p_1\in P}\pi(p_1^{-1})p_1p = \frac{1}{|P|}\sum_{u\in P}\pi(p)\pi(u^{-1})u = \pi(p)e^{\pi}$$

yazabiliriz. Benzer şekilde $\forall r\in R$ için

$$re^{\rho} = e^{\rho}r = \rho(r)e^{\rho}$$

gösterilir. Son olarak $\forall r\in R$ için

$$re^{\pi\rho} = \frac{1}{|P||R|}\sum_{p_1\in P, r_1\in R}\pi(p_1^{-1})\rho(r_1^{-1})rp_1r_1$$

$$= \frac{1}{|P||R|}\sum_{p_1\in P, r_1\in R}\pi(p_1^{-1})\rho(r_1^{-1})rp_1r^{-1}rr_1$$

$$= \frac{1}{|P||R|}\sum_{p\in P, u\in R}\pi\phi_{r^{-1}}(p^{-1})\rho(u^{-1})\rho(r)pu$$

$$= \rho(r)e^{\pi\phi_{r^{-1}}\rho} = \rho(r)e^{\pi^{r^{-1}}\rho}$$

elde edilir.

(8.9) LEMMA:

$Y_2=(P,R,\pi,\rho)$ ve $Y_2' = (P,R,\pi',\rho')$ 2. nevi Young Dörtülerine ait normlanmamış primitif idempotentler sırasıyla $e^{\pi\rho}$ ve $e^{\pi'\rho'}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler verilir:

(i) $\pi \not\sim \pi'$ ise $e^{\pi\rho}e^{\pi'\rho'}=0$.

(ii) $\pi \sim \pi'$ ise

$$e^{\pi\rho}e^{\pi'\rho'} = \frac{|R_{\pi'}|}{|R|}(\rho{\downarrow}R_{\pi'},\ \rho'{\downarrow}R_{\pi'})\rho(r_0^{-1})\rho'(r_0)e^{\pi\rho'} .$$

İSPAT:

(i) (4.5) ve (8.8) yardımıyla

$$e^{\pi\rho}e^{\pi'\rho'} = \frac{1}{|P||R|}\sum_{p\in P,r\in R}\pi(p^{-1})\rho(r^{-1})pre^{\pi'\rho'}$$

$$= \frac{1}{|P||R|}\sum_{p\in P,r\in R}\pi(p^{-1})\rho(r^{-1})\rho'(r)pe^{\pi'^{r^{-1}}\rho'}$$

$$= \frac{1}{|P||R|}\sum_{p\in P,r\in R}\pi(p^{-1})\rho(r^{-1})\rho'(r)\pi'^{r^{-1}}(p)e^{\pi'^{r^{-1}}\rho'}$$

$$= \frac{1}{|R|}\left[\frac{1}{|P|}\sum_{r\in R}\sum_{p\in P}\pi(p^{-1})\pi'^{r^{-1}}(p)\right]\rho(r^{-1})\rho'(r)e^{\pi'^{r^{-1}}\rho'}$$

$$(*)\quad e^{\pi\rho}e^{\pi'\rho'} = \frac{1}{|R|}\sum_{r\in R}(\pi'^{r^{-1}},\pi)\rho(r^{-1})\rho'(r)\,e^{\pi'^{r^{-1}}\rho'}$$

yazılabilir. (4.6), (4.7) ve (8.6) ya göre P altgrubunun π ve π' lineer karakterlerinin iç çarpımı için

$$(**)\qquad (\pi,\pi') = \begin{cases} 0\ , & \pi \not\sim \pi' \quad (R_{\pi\pi'}=\emptyset) \\ 1\ , & \pi \sim \pi' \quad (\pi'=\pi^r\ ,\ r\in R_{\pi\pi'}) \end{cases}$$

verilir. Ohalde (*) ve (**) a göre $\pi \not\sim \pi'$ ise

$$e^{\pi\rho}e^{\pi'\rho'}=0$$

elde edilir.

(ii) $\pi \sim \pi'$ olduğuna göre (i) deki (*) ve (**) dan

$$e^{\pi\rho}e^{\pi'\rho'} = \frac{1}{|R|}\sum_{r\in R_{\pi\pi'}}\rho(r^{-1})\rho'(r)e^{\pi\rho'}$$

yazılabilir. Diğer taraftan (8.7) yardımıyla

$$e^{\pi\rho}e^{\pi'\rho'} = \frac{1}{|R|}\sum_{r\in r_0R_{\pi'}} \rho(r^{-1})\rho'(r)e^{\pi\rho'}$$

$$= \frac{1}{|R|}\sum_{r'\in R_{\pi'}} \rho(r'^{-1})\rho(r_0^{-1})\rho'(r_0)\rho'(r')e^{\pi\rho'}$$

$$= \frac{|R_{\pi'}|}{|R|}(\rho+R_{\pi'},\rho'+R_{\pi'})\rho(r_0^{-1})\rho'(r_0)e^{\pi\rho'}$$

elde edilir.

(8.10) NETİCE:

$$(e^{\pi\rho})^2 = \kappa_{\pi\rho}e^{\pi\rho} = \frac{|R_\pi|}{|R|}e^{\pi\rho}\ ,\quad \kappa_{\pi\rho} = \frac{1}{f_{\pi\rho}}$$

verilir.

Şimdi (5.13) ifadesini gözönünde bulundurmak şartıyla 2. nevi Young Dörtlüleriyle ilgili olarak aşağıdaki tanımı verelim:

Y_2 ve Y_2' 2. nevi Young Dörtlüleri verilmiş olsun. Bu takdirde $e^{\pi\rho}$ ve $e^{\pi'\rho'}$ sırasıyla Y_2 ve Y_2' 2. nevi Young Dörtlülerine ait normlanmamış primitif idempotentler olmak üzere

$$e^{\pi\rho}e^{\pi'\rho'} \neq 0$$

ise Y_2 ve Y_2' 2. nevi Young Dörtlülerine *aynı tipten*, aksi takdirde *farklı tipten* denir. Bu takdirde (5.13(iv)) e göre farklı tipten olan Y_2 ve Y_2' 2. nevi Young Dörtlülerine ait $e^{\pi\rho}$ ve $e^{\pi'\rho'}$ normlanmamış primitif idempotentleri sırasıyla denk olmayan $K[G]e^{\pi\rho}$ ve $K[G]e^{\pi'\rho'}$ minimal sol ideallerini üretir.

Bu tanım ve (8.2) nin neticesi olarak aşağıdaki lemma verilir:

(8.11) LEMMA:

Y_2 ve Y_2' 2. nevi Young Dörtlüleri farklı tipten olsun. Bu takdirde $Y_2' = rY_2$ olacak şekilde bir $r\in R$ elemanı mevcut değildir.

İSPAT:

Farzedelimki $Y_2' = (P,R,\pi',\rho') = rY_2 = (P,R,\pi^r,\rho)$ olacak şekilde bir $r\in R$ mevcut olsun. Bu takdirde $\pi' = \pi^r$ olduğundan (8.3) e göre π ve π' lineer karakterleri denktir ve (8.9(ii)) ye göre $e^{\pi\rho}e^{\pi'\rho'} \neq 0$ elde edilir. Bu ise Y_2 ve Y_2' 2. nevi Young Dörtlülerinin aynı tipten olduğunu ifade eder. Halbuki Y_2 ve Y_2' 2. nevi Young Dörtlüleri farklı tiptendir. Ohalde kabulümüz yanlıştır.

2. nevi Young Dörtlüleri için aşağıdaki önemli teorem verilebilir:

(8.12) TEOREM:

Aynı tipten 2. nevi Young Dörtlülerine ait normlanmamış primitif idempotentler denk gösterimler, farklı tipten 2. nevi Young Dörtlülerine ait normlanmamış primitif idempotentler denk olmayan gösterimler üretir .

Sonuç olarak her $Y_2=(P,R,\pi,\rho)$ 2. nevi Young Dörtlüsüne karşılık K[G] grup cebirinin bir normlanmamış primitif idempotenti bulunabilir ve farklı tipten 2. nevi Young Dörtlülerine ait normlanmamış primitif idempotentler K[G] nin denk olmayan minimal sol ideallerini dolayısıyla G grubunun denk olmayan indirgenemez gösterimlerini üretir.

§ 9. ABEL GRUPLARININ YARI DİREKT ÇARPIMLARININ İNDİRGENEMEZ GÖSTERİMLERİ

P ve R sonlu Abel grupları olmak üzere G=PR yarı-direkt çarpım (G=PR, $P \cap R = \{1_G\}$, $P \trianglelefteq G$, (bkz.[8], s.21)) ve K karakteristiği |G| grup mertebesini bölmeyen cebirsel kapalı bir cisim olsun. Ayrıca

$$\pi_i : P \to K \ , \ i=1,\ldots,|P|$$

ve

$$\rho_j : R \to K \ , \ j=1,\ldots,|R|$$

sırasıyla P ve R Abel altgruplarının e^{π_i} ve e^{ρ_j} primitif idempotentleri tarafından üretilen lineer karakterleri olsun. Bu takdirde P, R altgrupları ve π_i, ρ_j ($i=1,\ldots,|P|$; $j=1,\ldots,|R|$) lineer karakter çiftleri ile teşkil edilen her (P,R,π_i,ρ_j) dörtlüsü için (5.10) nun şartları gerçeklenmektedir. Buna göre her (P,R,π_i,ρ_j) dörtlüsü § 8. de sözü geçen bir 2. nevi Young Dörtlüsüdür. Diğer taraftan yarı-direkt çarpım şartlarından dolayı § 8. de verilen P grubunun lineer karakterleri arasındaki denklik tanımı ve buna bağlı netice, lemma ve teoremler burada da aynen gerçeklenir. Ohalde her (P,R,π_i,ρ_j) dörtlüsüne karşılık K[G] grup halkasının bir normlanmamış $e^{\pi_i\rho_j}$ primitif idempotenti mevcuttur.

π ve π' P Abel altgrubunun, ρ ve ρ' R Abel altgrubunun herhangi iki lineer karakteri ve bunlarla teşkil edilen (P,R,π,ρ) ve (P,R,π',ρ') 2. nevi Young Dörtlülerine ait normlanmamış primitif idempotentler sırasıyla $e^{\pi\rho}$ ve $e^{\pi'\rho'}$ olsun. Ayrıca normlanmamış $e^{\pi\rho}$ primitif idempotenti (8.10) yardımıyla normlanabilir:

$$\frac{e^{\pi\rho}}{\kappa_{\pi\rho}} = f_{\pi\rho}e^{\pi\rho} = \hat{e}^{\pi\rho} \ . \qquad (9.1)$$

Bu takdirde aşağıdaki lemmalar verilir:

(9.2) LEMMA:

e^{π} , e^{ρ} ve $\hat{e}^{\pi\rho}$ idempotentleri için aşağıdaki özellikler verilir:

$$e^{\pi}\hat{e}^{\pi\rho} = \hat{e}^{\pi\rho}$$
$$\hat{e}^{\pi\rho}e^{\rho} = \hat{e}^{\pi\rho}$$
$$p\hat{e}^{\pi\rho} = \pi(p)\hat{e}^{\pi\rho} \ , \ \forall p \in P$$
$$r\hat{e}^{\pi\rho} = \rho(r)\hat{e}^{\pi^{r^{-1}}\rho}, \ \forall r \in R$$

(9.3) LEMMA:

$\hat{e}^{\pi\rho}$ ve $\hat{e}^{\pi'\rho'}$ primitif idempotentleri için aşağıdaki ifadeler verilir:

(i) $\pi \not\sim \pi'$ $(R_{\pi\pi'} = \emptyset)$ ise $\hat{e}^{\pi\rho}\hat{e}^{\pi'\rho'} = 0$.

(ii) $\pi \sim \pi'$ $(R_{\pi\pi'} \neq \emptyset)$ ise

$$\hat{e}^{\pi\rho}\hat{e}^{\pi'\rho'} = f_{\pi\rho}\frac{|R_{\pi'}|}{|R|}(\rho'{\downarrow}R_{\pi'}, \rho{\downarrow}R_{\pi'})\rho(r_0^{-1})\rho'(r_0)\hat{e}^{\pi\rho'}, \quad R_{\pi\pi'} = r_0 R_{\pi'}$$

$$= f_{\pi\rho}\frac{|R_{\pi}|}{|R|}(\rho'{\downarrow}R_{\pi}, \rho{\downarrow}R_{\pi})\rho(r_0^{-1})\rho'(r_0)\hat{e}^{\pi\rho'}, \quad R_{\pi\pi'} = R_{\pi} r_0 .$$

İSPAT:

(8.9), (9.1) ve (9.2) yardımıyla kolaylıkla elde edilir.

(9.4) NETİCE:

$\hat{e}^{\pi\rho}\hat{e}^{\pi'\rho'} \neq 0 \Leftrightarrow \pi \sim \pi'$, $\rho'{\downarrow}R_{\pi'} = \rho{\downarrow}R_{\pi'}$.

π ve π' lineer karakterlerinin eşit olması halinde, $R_{\pi} = r_0 R_{\pi}$ eşitliğinden $r_0 \in R_{\pi}$ olduğu görülür. Bu takdirde (9.3 (ii)) ye göre

$$\hat{e}^{\pi\rho}\hat{e}^{\pi\rho'} = f_{\pi\rho}\frac{|R_{\pi}|}{|R|}\left[\frac{1}{|R_{\pi}|}\sum_{r\in R}\rho(r^{-1})\rho'(r)\right]\rho(r_0^{-1})\rho'(r_0)\hat{e}^{\pi\rho'}$$

$$= f_{\pi\rho}\frac{|R_{\pi}|}{|R|}\left[\frac{1}{|R_{\pi}|}\sum_{r\in R_{\pi}}\rho(rr_0)^{-1})\rho'(rr_0)\right]\hat{e}^{\pi\rho'}$$

$$= f_{\pi\rho}\frac{|R_{\pi}|}{|R|}(\rho{\downarrow}R_{\pi}, \rho'{\downarrow}R_{\pi})\hat{e}^{\pi\rho'} = (\rho{\downarrow}R_{\pi}, \rho'{\downarrow}R_{\pi})\hat{e}^{\pi\rho'} \qquad (9.5)$$

elde edilir.

Şimdi P nin π lineer karakterinin sabit ve ρ lineer karakterinin R nin bütün lineer karakterlerini dolaştığını kabul edelim. Bu takdirde (9.5) e göre

$$\hat{e}^{\pi\rho_i}\hat{e}^{\pi\rho_j} = (\rho_i{\downarrow}R_{\pi}, \rho_j{\downarrow}R_{\pi})\hat{e}^{\pi\rho_j}, \quad (i,j=1,\dots,|R|) \qquad (9.6)$$

yazılabilir. Bu durumda (9.6) ifadesinin sağ tarafındaki iç çarpımı sıfırdan farklı yapan R altgrubunun lineer karakter çiftlerini araştıracak olursak (4.14) e göre

$$|R_\pi^\perp| = \frac{|R|}{|R_\pi|} = [R:R_\pi] = f_{\pi\rho} \tag{9.7}$$

ve

$$R_\pi^\perp = \{ \rho_i \mid i=1,\dots,f_{\pi\rho} , \quad \rho_i(r) = 1 , \ \forall r \in R_\pi \}^*$$

olduğundan her ρ_i , $\rho_j \in R_\pi^\perp$ $(i,j=1,\dots,f_{\pi\rho})$ çifti için

$$(\rho_i + R_\pi , \rho_j + R_\pi) = 1$$

sağlanır. Ohalde $\rho_i \neq \rho_j$ olmak üzere her $\rho_i, \rho_j \in R_\pi^\perp$ $(i,j=1,\dots,f_{\pi\rho})$ lineer karakter çifti için (9.6) dan

$$\hat{e}^{\pi\rho_i}\hat{e}^{\pi\rho_j} = \hat{e}^{\pi\rho_j} , \ (i,j=1,\dots,f_{\pi\rho}) \tag{9.8}$$

elde edilir.

(9.9) LEMMA:

(i) $\hat{e}^{\pi\rho_i}\hat{e}^{\rho_j\pi} = 0$, $i \neq j$

(ii) $\hat{e}^{\pi\rho_i}\hat{e}^{\rho_i\pi} \neq 0$

(iii) $\hat{e}^{\rho_i\pi}\hat{e}^{\pi\rho_j} \neq 0 \quad \forall i,j=1,\dots,f_{\pi\rho}$.

İSPAT:

(i) (9.1) e göre

$$\hat{e}^{\pi\rho_i}\hat{e}^{\rho_j\pi} = f_{\pi\rho}^2 e^{\pi\rho_i} e^{\rho_j\pi} = f_{\pi\rho}^2 e^{\pi}(e^{\rho_i}e^{\rho_j})e^{\pi}$$

yazılabilir. e^{ρ_i} ve e^{ρ_j} $K[R]$ altcebirinin merkezi idempotentleri olduğundan $i \neq j$ için $e^{\rho_i}e^{\rho_j} = 0$ dır. Dolayısıyla

$$\hat{e}^{\pi\rho_i}\hat{e}^{\rho_j\pi} = 0 \quad , \ i \neq j$$

elde edilir.

(ii) $\hat{e}^{\pi\rho_i}\hat{e}^{\rho_i\pi} = f_{\pi\rho}^2 e^{\pi\rho_i}e^{\rho_i\pi} = f_{\pi\rho}^2 e^{\pi}(e^{\rho_i})^2 e^{\pi} = f_{\pi\rho}^2 e^{\pi}e^{\rho_i}e^{\pi} = f_{\pi\rho}^2 e^{\pi\rho_i}e^{\pi}$

olur. Her $i(i=1,\dots,|R|)$ için $e^{\pi\rho_i}e^{\pi} \neq 0$ dır. Aksi takdirde $e^{\pi\rho_i}e^{\pi} = 0$ dan

$$(e^{\pi\rho_i}e^{\pi})e^{\rho_i} = 0$$

veya

$$(e^{\pi\rho_i})^2 = \kappa_{\pi\rho} e^{\pi\rho_i} = \frac{1}{f_{\pi\rho}} e^{\pi\rho_i} = 0$$

ve son eşitlikten de

$$e^{\pi\rho_i} = 0$$

elde edilir.

---

*) ρ_i *lineer karakterlerinden* $R_\pi^\perp$ *altgrubunda bulunanlar* $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{f_{\pi\rho}}$ *ile gösterilmektedir.*

(iii) $\hat{e}^{\rho i \pi}\hat{e}^{\pi\rho j} = f^2_{\pi\rho} e^{\rho i \pi} e^{\pi\rho j} = f^2_{\pi\rho} e^{\rho i}(e^{\pi})^2 e^{\rho j} = f^2_{\pi\rho} e^{\rho i} e^{\pi} e^{\rho j}$

$= f^2_{\pi\rho} e^{\rho i} e^{\pi\rho j}$

dir. Her i,j $(i,j=1,\dots,f_{\pi\rho})$ için $f^2_{\pi\rho} e^{\rho i} e^{\pi\rho j} \neq 0$ dır. Aksi takdirde

$f^2_{\pi\rho} e^{\rho i} e^{\pi\rho j} = 0$ dan

$$f^2_{\pi\rho} e^{\pi}(e^{\rho i} e^{\pi\rho j}) = f^2_{\pi\rho} e^{\pi\rho i} e^{\pi\rho j} = \hat{e}^{\pi\rho i}\hat{e}^{\pi\rho j} = \hat{e}^{\pi\rho j} = 0$$

elde edilir.

(9.10) LEMMA:

$\tilde{e}_i = \hat{e}^{\rho i \pi}\hat{e}^{\pi\rho i}$ $(i=1,\dots,f_{\pi\rho})$ $K[G]$ grup halkasında bir normlanmamış primitif idempotenttir ve

$$K[G]e^{\pi\rho i} \cong K[G]\tilde{e}_i \ , \ i=1,\dots,f_{\pi\rho}$$

verilir.

İSPAT:

(5.9) dan $K[G]e^{\pi\rho i} \cong K[G]e^{\rho i \pi}$ olduğunu biliyoruz. Önce $\tilde{e}_i$ nin idempotent olduğunu gösterelim:

$$\tilde{e}_i^2 = (\hat{e}^{\rho i \pi}\hat{e}^{\pi\rho i})^2 = f^4_{\pi\rho}(e^{\rho i \pi} e^{\pi\rho i})^2 = f^4_{\pi\rho} e^{\rho i \pi} e^{\pi\rho i} e^{\rho i \pi} e^{\pi\rho i} = f^4_{\pi\rho} e^{\rho i} e^{\pi} e^{\rho i} e^{\pi} e^{\rho i}$$

$$= f^4_{\pi\rho}(e^{\rho i \pi})^2 e^{\rho i} = f^4_{\pi\rho} f^{-1}_{\pi\rho} e^{\rho i \pi} e^{\rho i} = f^3_{\pi\rho} e^{\rho i \pi} e^{\pi\rho i} = f_{\pi\rho} [\, f^2_{\pi\rho} e^{\rho i \pi} e^{\pi\rho i} \,]$$

$$= f_{\pi\rho}\hat{e}^{\rho i \pi}\hat{e}^{\pi\rho i} = f_{\pi\rho}\tilde{e}_i$$

elde edilir. Diğer taraftan (2.14) e göre

$$\tilde{e}_i K[G]\tilde{e}_i = \hat{e}^{\rho i \pi}\hat{e}^{\pi\rho i}\{ \ K[G]\hat{e}^{\rho i \pi} \ \}\hat{e}^{\pi\rho i} = \hat{e}^{\rho i \pi} K\hat{e}^{\pi\rho i} = K\hat{e}^{\rho i \pi}\hat{e}^{\pi\rho i} = K\tilde{e}_i$$

sağlanır. Ohalde $\tilde{e}_i$ aynı zamanda bir primitif idempotenttir ve $K[G]\tilde{e}_i$, $K[G]$ grup halkasının bir minimal sol idealidir. Ayrıca

$$K[G]e^{\rho i \pi} K[G]\tilde{e}_i = K[G]e^{\rho i \pi} K[G]\hat{e}^{\rho i \pi}\hat{e}^{\pi\rho i} = K[G]\{e^{\rho i \pi} K[G] e^{\rho i \pi}\} f_{\pi\rho}\hat{e}^{\pi\rho i}$$

$$= K[G]\{K e^{\rho i \pi} f_{\pi\rho}\}\hat{e}^{\pi\rho i} = K[G]\hat{e}^{\rho i \pi}\hat{e}^{\pi\rho i} = K[G]\tilde{e}_i$$

olduğundan (2.11) e göre

$$K[G]e^{\rho i \pi} \cong K[G]\tilde{e}_i \cong K[G]e^{\pi\rho i}$$

elde edilir.

$\tilde{e}_i = \hat{e}^{\rho i \pi}\hat{e}^{\pi\rho i}$ $(i=1,\ldots,f_{\pi\rho})$ K[G] grup halkasında bir normlanmamış primitif idempotent ($\tilde{e}_i^2 = f_{\pi\rho}\tilde{e}_i$) olduğuna göre

$$E_i = \frac{1}{f_{\pi\rho}}\tilde{e}_i = \frac{1}{f_{\pi\rho}}\hat{e}^{\rho i \pi}\hat{e}^{\pi\rho i} = f_{\pi\rho}e^{\rho i \pi}e^{\pi\rho i} \qquad (9.11)$$

yazmak suretiyle K[G] nin E_i primitif idempotenti normlanır.

(9.12) TEOREM:

G sonlu grubunun $f_{\pi\rho}$ dereceli indirgenemez gösterimini üreten $K[G]e^{\pi\rho}$ minimali için bir üretici sistem(matris bazı)

$$E_{ij} = f_{\pi\rho}e^{\rho i \pi}e^{\pi\rho j} \qquad i,j=1,\ldots,f_{\pi\rho}$$

ile verilir.

İSPAT:

$E_{ii} = f_{\pi\rho}\, e^{\rho i \pi}e^{\pi\rho i} = E_i$ olduğundan E_i; $K[G]e^{\pi\rho i}$ minimalini üreten primitif idempotenttir. E_{ij} elemanlarının (2.18) şartını gerçeklediğini gösterelim:

$$E_{ij}E_{km} = f_{\pi\rho}^2 e^{\rho i \pi}e^{\pi\rho j}e^{\rho k \pi}e^{\pi\rho m} = f_{\pi\rho}^2 e^{\rho i \pi}e^{\pi}(e^{\rho j}e^{\rho k})e^{\pi}e^{\pi\rho m}$$

yazılabilir. $e^{\rho j}$ ve $e^{\rho k}$ K[R] altcebirinin merkezi idempotentleri olduğundan her $j\neq k$ için $e^{\rho j}\, e^{\rho k} = 0$ dır. Dolayısıyla

$$E_{ij}E_{km} = 0 \quad , \quad j\neq k$$

olur. Diğer taraftan

$$E_{ij}E_{jm} = \frac{1}{f_{\pi\rho}^2}\hat{e}^{\rho i \pi}\hat{e}^{\pi\rho j}\hat{e}^{\rho j \pi}\hat{e}^{\pi\rho m} = \frac{1}{f_{\pi\rho}^2}\hat{e}^{\rho i \pi}(f_{\pi\rho}^3 e^{\pi\rho j}e^{\rho j \pi}e^{\pi\rho m})$$

$$= \frac{1}{f_{\pi\rho}^2}\hat{e}^{\rho i \pi}(f_{\pi\rho}^3 e^{\pi\rho j}e^{\pi\rho m}) = \frac{1}{f_{\pi\rho}^2} f_{\pi\rho}\hat{e}^{\rho i \pi}\hat{e}^{\pi\rho j}\hat{e}^{\pi\rho m}$$

$$= \frac{1}{f_{\pi\rho}}\hat{e}^{\rho i \pi}\hat{e}^{\pi\rho m} = \frac{1}{f_{\pi\rho}}\tilde{e}_{im} = E_{im}$$

sağlanır.

(9.13) TEOREM:

Sonlu bir G grubunun 2. nevi Young Dörtlüleri yardımıyla teşkil edilen

$$E^k_{ij} = f_{\pi_k\rho} e^{\rho i \pi k} e^{\pi k \rho j} \ , \ (k=1,\ldots,|P| \ ; \ i,j=1,\ldots,f_{\pi_k\rho})$$

K[G] cebir elemanları için

$$E^k_{ij} E^p_{\ell m} = \delta_{kp} \delta_{j\ell} E^k_{im}$$

verilir.

İSPAT:

(9.12), (9.11) ve (9.1) e göre

$$E^k_{ij} E^p_{\ell m} = \left(\frac{1}{f_{\pi_k\rho}} \hat{e}^{\rho i \pi k} \hat{e}^{\pi k \rho j} \right) \left(\frac{1}{f_{\pi_k\rho}} \hat{e}^{\rho \ell \pi p} \hat{e}^{\pi p \rho m} \right)$$

$$= \frac{1}{f^2_{\pi_k\rho}} \hat{e}^{\rho i \pi k} (\hat{e}^{\pi k \rho j} \hat{e}^{\rho \ell \pi p} \hat{e}^{\pi p \rho m})$$

$$= \frac{1}{f^2_{\pi_k\rho}} \hat{e}^{\rho i \pi k} (f^3_{\pi_k\rho} e^{\pi k \rho j} e^{\rho \ell \pi p} e^{\pi p \rho m})$$

$$= \frac{1}{f^2_{\pi_k\rho}} \hat{e}^{\rho i \pi k} \left[f^3_{\pi_k\rho} e^{\pi k} (e^{\rho j} e^{\rho \ell}) e^{\pi p} e^{\pi p} e^{\rho m} \right]$$

yazılabilir. $e^{\rho j}$ ve $e^{\rho \ell}$ K[R] altcebirinin merkezi idempotentleri olduğundan her j,ℓ çifti için

$$e^{\rho j} e^{\rho \ell} = \delta_{j\ell} e^{\rho j}$$

sağlanır. Ayrıca (9.3), (9.6) ve (9.8) gözönünde bulundurulursa

$$E^k_{ij} E^p_{\ell m} = \frac{\delta_{j\ell}}{f^2_{\pi_k\rho}} \hat{e}^{\rho i \pi k} (f^3_{\pi_k\rho} e^{\pi k} e^{\rho j} e^{\pi p} e^{\rho m}) = \frac{\delta_{j\ell}}{f^2_{\pi_k\rho}} \hat{e}^{\rho i \pi k} (f^3_{\pi_k\rho} e^{\pi k \rho j} e^{\pi p \rho m})$$

$$= \frac{\delta_{kp} \delta_{j\ell}}{f^2_{\pi_k\rho}} \hat{e}^{\rho i \pi k} (f_{\pi_k\rho} \hat{e}^{\pi k \rho j} \hat{e}^{\pi k \rho m}) = \frac{\delta_{kp} \delta_{j\ell}}{f_{\pi_k\rho}} \hat{e}^{\rho i \pi k} \hat{e}^{\pi k \rho m}$$

$$= \delta_{kp} \delta_{j\ell} f_{\pi_k\rho} e^{\rho i \pi k} e^{\pi k \rho m} = \delta_{kp} \delta_{j\ell} E^k_{im}$$

elde edilir.

S O N U Ç

Bu tezde, sonlu bir grubun altgruplarının indirgenemez gösterimleri yardımıyla bu grubun indirgenemez gösterimlerini belirleyen bir teorem ispat edildi (5.8). Bu arada bazı hallerde altgrupların bazı lineer gösterimleri yardımıyla bir sonlu grubun indirgenemez gösterimlerinin elde edilişiyle ilgili olarak BURROW [6] ve MUNKHOLM [10] tarafından verilen teoremler (5.8) in bir neticesi olarak (5.10) da ifade edildi. Daha sonra sonlu iki Abel grubunun çarpımı şeklinde olan bir grubun indirgenemez gösterimlerini üreten primitif idempotentlerinin, altgrupların indirgenemez gösterimlerini üreten primitif idempotentler yardımıyla nasıl elde edilebileceğini gösteren bir teorem verildi (5.13).

[3] deki Young Dörtlüsü tanımı ve bununla ilgili olarak yapılanlar, ispat ettiğimiz teorem (5.8) in şartlarına uygun olarak 1. nevi Young Dörtlüsü adı altında kısaca özetlendi.

2. nevi Young Dörtlüsü tanımı verilerek bunlar üzerine bazı bağıntı ve lemmalar elde edildikten sonra, farklı tipten 2. nevi Young Dörtlülerine ait normlanmamış primitif idempotentlerin denk olmayan gösterimler ürettiğini ifade eden bir teorem verildi (8.12). Ayrıca 2. nevi Young Dörtlüleri yardımıyla Abel gruplarının yarı-direkt çarpımlarının indirgenemez gösterimleri araştırılarak, belirli dereceli indirgenemez bir altcebir için bir üretici sistem (matris bazı) elde edildi (9.12).

K A Y N A K L A R

[1] E. BAYAR
Eine neue Einführung in die Darstellungstheorie symmetrischer Gruppen. Mitt. Math. Sem. Univ. Giessen 81 (1969), 1-45 (Zbl 197, MR 39).

[2] Über die Konstruktion von irreduziblen Darstellungen einer endlichen Gruppe. Journal of the Fac. Sc. of the KTÜ, Vol. I. (1977)Fasc.12. pp. 135-146.

[3] Youngsche Quadrupel und primitive idempotente symmetrischer Gruppen. Journal of the Fac. Sc. of the KTÜ, Vol. I.(1977) Fasc. 13. pp. 147-157.

[4] Simetrik Grupların Adî Gösterim Teorisi (Doçentlik Tezi). KTÜ, Tem. Bil. Fak. Mat. Böl. Yayınları, No.1 (1971), 1-55.

[5] H. BOERNER
Representations of Groups second revised edition. North - Holland Publishing Company, Amsterdam, 1970.

[6] M. BURROW
A generalization of the Young diagram. Can. J. Math. 6 (1954), 498-508, (Zbl56, MR 16).

[7] Representation theory of finite groups, Academic Press, New - York-London, 1965.

[8] C. W. CURTIS. - I. REINER
Representation theory of finite groups and associative algebras. Interscience Publishers, New York, 1962.

[9] B. HUPPERT
Endliche Gruppen I. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen- Heidelberg-New York, 1967.

[10] H. J. MUNKHOLM
Induced monomial representations, Young elements, and metacyclic groups. Proc. Amer. Math. Soc. 19, (1968), 453-458 (Zbl 155, MR 36).

ÖZGEÇMİŞİM

1951 yılında Merzifon'un Karamustafa Paşa Köyünde doğdum. 1962 yılında kendi köyümdeki ilkokulu bitirdikten sonra, aynı yıl Akpınar İlköğretmen Okuluna girdim. 1968 yılında İstanbul Yüksek Öğretmen Okulu Hazırlık Lisesini bitirdim ve aynı yıl İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi'ne girdim.

1972 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi'nin Matematik-Astronomi Lisans öğrenimini ve Yüksek Öğretmen Okulu'nu bitirdikten sonra 16 Eylül 1972 de Nevşehir Kız İlköğretmen Okuluna Matematik öğretmeni olarak atandım. 21.5.1974 tarihinde KTÜ, Temel Bilimler Fakültesi Matematik Bölümü'ne Uzman olarak girdim. Açılan Asistanlık sınavını kazanarak 15.7.1976 tarihinde aynı bölüme Asistan olarak atandım.

Halen aynı görevime devam etmekteyim. Evliyim, 2 çocuğum var.