KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ✱ TEMEL BİLİMLER FAKÜLTESİ

LİNEER MODELLERDE LİNEER PARAMETRİK KISITLAMALAR ALTINDA PARAMETRE KESTİRİMLERİ VE HİPOTEZ TESTLERİ

Karadeniz Teknik Üniversitesi Temel Bilimler Fakültesince
" Fen Doktoru "
Ünvanının verilmesi için kabul edilen tezdir

Cemil YAPAR

Tezin dekanlığa veriliş tarihi : 29 . 8 . 1979
Sözlü sınav tarihi : 28 . 12 . 1979

Doktorayı yöneten öğretim üyesi : **Doç. Dr. Fikri AKDENİZ**
Doktora Komisyonu Üyesi : **Prof. Dr. Cevdet KOÇAK**
Doktora Komisyonu Üyesi : **Doç. Dr. Soner GÖNEN**

Kapak Baskı
KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ BASIMEVİ
T R A B Z O N — 1 9 8 0

Konunun seçiminde ve bu çalışmanın gerçekleşmesinde değerli zamanlarını ayırarak bana yön veren ve yapıcı telkin ve tenkitleriyle severek çalışmamı sağlayan Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Tatbiki Matematik Kürsüsü öğretim üyelerinden yönetici hocam sayın Doç.Dr.Fikri AKDENİZ'e yapmış olduğu yardım ve rehberliğinden dolayı en derin saygı ve şükranlarımı sunarım.

Cemil YAPAR

İ Ç İ N D E K İ L E R

BÖLÜM - V

ÖZET

Bu tezde, lineer modellerde lineer parametrik kısıtlamalar altında parametre kestirimi ve hipotez testi konusu incelendi. M ve W isteksel ranklı iki matris olmak üzere $e \sim N(0, \sigma^2 I)$ normallik vasayımı altında, $MM^{-}\eta=\eta$, $WW^{-}v=v$ ve $[W(I-M^{-}M)][W(I-M^{-}M)]^{-}(v-WM^{-}\eta)=(v-WM^{-}\eta)$ bağdaşabilirlik koşullarını sağlayan, $M\beta=\eta$ ve $W\beta=v$ lineer parametrik kısıtlamalarına bağlı $Y=X\beta+e$ lineer modelindeki β parametre vektörü için en iyi lineer kestirici ve $M\beta=\eta$ kısıtlaması altında $H_0 : W\beta = v$ hipotezini test için gerekli test istatistiği : $T=\begin{bmatrix} M \\ W \end{bmatrix}$ ve $\tau=\begin{bmatrix} \eta \\ v \end{bmatrix}$ yazarak teşkil edilen $T\beta=\tau$ kısıtlaması ve $TT^{-}\tau=\tau$ bağdaşabilirlik koşulu altında daha az hesap gerektiren bir yöntemle yeniden elde edildi.

Yukarıdaki çalışmaya bağlı olarak, raslantıya bağlı bir tam blok tasarım modeli için varyans analizi ve tam olarak raslantıya bağlı bir tasarım modeli için kovaryans analizi iki farklı uygulama olarak sunuldu.

Bundan başka kestirilemez kısıtlamalara bağlı lineer modeldeki normal denklemler varyans-kovaryans matrisinin çeşitli durumlarına göre farklı yapılarda incelendi ve her durum için farklı teoremler sunuldu.

Son olarak, tam ranklı olmayan sabit modelde $L\beta = U$ hipotezini test için verilen test istatistiği incelendi ve L matrisinin isteksel ranklı olması durumunda geliştirildi.

ABSTRACT

In this thesis, under the linear parametric restrictions the subject of parameter estimation and hypotheses testings in the linear models have been discussed. Let M and W are of arbitrary rank two matrices. Under the normality assumption $e \sim N(0, \sigma^2 I)$ the best linear estimator for β in the model $Y=X\beta+e$ subject to linear parametric restrictions $M\beta=\eta, W\beta=v$ which are realizing the consistency conditions $MM^-\eta=\eta, WW^- v=v$ and $[W(I-M^-M)][W(I-M^-M)]^-(v-WM^-\eta)=(V-WM^-\eta)$ and under the restriction $M\beta=\eta$ necessary testing statistic for testing the hypothesis $H_0: W\beta=v$ have been reobtained by a method that requires less computation under the restriction $T\beta=\zeta$ and $TT^-\zeta=\zeta$ consistency condition constituted by writing $T=\begin{bmatrix} M \\ W \end{bmatrix}$ and $\zeta=\begin{bmatrix} n \\ \hdashline v \end{bmatrix}$.

Depending on the above mentioned study, analysis of covariance for a randomized complete block design model and analysis covariance for a completely randomized design model have been presented as two different applications.

Furthermore, the normal equations subject to nonestimable constraints have been discussed in different structures in accordance with various situations of variance-covariance matrix in the linear model and different theorems has been presented for each situation.

Finally, in the fixed model non of full rank, the testing statistic given for testing the hypothesis $L\beta=U$ has been discussed and developed in the case of L matrix of arbitrary rank.

GİRİŞ

Lineer modellerde, lineer parametrik kısıtlamalar altında parametre kestirimi, hipotez testleri ve normal denklemlerin çözümü kaynaklarda; modelin isteksel ranklı, tam ranklı ve varyans-kovaryans matrisinin birim matris veya singüler olması, singüler olmaması durumlarına göre incelenir.

Lineer parametrik kısıtlamalara gelince: Bunlar genel olarak stokastik olmayan ve stokastik kısıtlamalar olarak iki kısma ayrılır. Biz çalışmamazda stokastik olmayan kısıtlamaları ve bunlarla belirlenen hipotez testlerini inceliyeceğiz. Bu sahada verilen bazı çalışmalarda lineer parametrik kısıtlamalar: Lineer eşitlik kısıtlamaları, lineer eşitsizlik kısıtlamalarıve lineer bir kısıtlamaya bir rastgele değişkenin eklenmesiyle elde edilen lineer eşitlik kısıtlaması olarak ele alınır ve incelenirler.

Kısıtlamaların durumlarına göre parametre kestirimi de, rastgele olmayan kısıtlamalarla kestirim veya rastgele kısıtlamalarla kestirim gibi adlandırılır. Regresyon analizinde ise regresyon katsayılarını kestirmek için kullanılan ortak yöntem en küçük kareler (E.K.K) dır.

Genel lineer modelde, bilinmeyen parametre üzerine koyulan kısıtlamalara bağlı olarak hipotez testi geliştirme ve bu test için test istatistiği elde etme sorunu da, modelin tam ranklı, isteksel ranklı ve varyans-kovaryans matrisinin yapı ve rank durumuna bağlı olduğu gibi, parametre vektörü üzerine koyulan lineer parametrik kısıtlamaları belirleyen kasıtlama matrisinin rankına da bağlıdır. Hallum,Lewis ve Boullion (1973); bir pozitif semi definit kovaryans matrisli kısıtlanmış genel lineer modelde kastirimi inceleyerek, bilinmeyen parametre için en iyi lineer kestiriciyi, isteksel ranklı iki kısıtlama matrisini kullanarak koyulan iki kısıtlama altında ortaya koydular. Hallum, Boullionve Odell (1973); ise modelin singüler olmayan varyans kovaryans matrisine sahip olması durumunda bilinmeyen parametre üzerine koyulan isteksel ranklı iki kısıtlama matrisi ile elde edilen iki lineer parametrik kısıtlama altında bu parametre vektörü için en iyi lineer kestiriciyi elde ettiler.

Bu kısıtlamalardan birincisi altında ikincisi H_0 hipotezi kabul edilerek modelin küresel hatalara sahip olması durumunda bu hipotezi test etmek için bir test istatistiği de verdiler. Bu tezde kısıtlama matrislerini bitiştirerek bir tek kısıtlama matrisi durumuna koyduktan sonra, aynı model durumunda kısıtlama matrisleri üzerine koyulan koşullarıda azaltarak onların bulduğu test istatistiğinin tamamen aynısı bulundu. Böylece hem koşullarda, hemde hesaplamada kısalık sağlandı ve verilen bir uygulama ile bu gerçeklendi.

Ayrıca, deneysel tasarım modeli için varyans analizi (etkileşimsiz üç yönlü sınıflama modeli üzerinde) ve kovaryans analizi modeli için kovaryans analizi(başka bir model üzerinde) iki farklı uygulama olarak verildi.

Gerig ve Gallant (1975) in lineer parametrik kısıtlamalara bağlı lineer modeller için hesaplama yöntemlerine kolaylık getiren kestirilemez kısıtlamalara bağlı normal denklemlerin çözümü ile ilgili teoremi; çalışmamızda varyans kovaryans matrisinin sigüler olması ve singüler olmaması durumlarında e hata vektörünün $e \sim N(0, \sigma^2 V)$ olması koşulu altında ayrı ayrı ele alındı ve yeni teoremler biçiminde sunuldu. Bu teoremlerin geçerliliği iki uygulama ile gerçeklendi. Böylece kestirilemez kısıtlamalara bağlı normal denklem çözümleri geliştirildi.

Son olarak, John ve Smith (1974) ün sunduğu "Tam ranklı olmayan genel lineer hipotezdeki kareler toplamı" adlı makalenin ışığı altında Oktaba (1968)de sunulan test istatistiği kısıtlama matrisinin tam ranklı olmaması durumunda uygun bir parçalanışla ele alındı ve bu durumda da yeni test istatistikleri geliştirildi.

BÖLÜM-I

LİNEER MODELLER

1.1. LİNEER MODELİN TANIMI VE LİNEER MODEL TİPLERİ

Lineer model: Tam ranklı veya tam ranktan daha küçük ranklı ve etkilerin sabit, karma veya rastgele etkiler olması durumlarına göre çeşitli tiplerde sınıflandırılır.

Bir değişkenin diğeri ile olan ilişkisinin nasıl olduğunun belirtilmesi "Model kurma" sorunudur. a+bx biçiminde yazılan model, bir lineer modeldir. Lineer denmesinin nedeni a+bx in a veb bilinmeyen parametrelerinin lineer kombinasyonu olarak ifade edilmesidir. Genel olarak lineer model:

$$Y = X\beta + e \qquad (1.1.1)$$

biçiminde tanımlanır. Burada Y: rastgele değişkenlerin nx1 boyutlu bir gözlem vektörüdür. X: bilinenlerin nxp(n>p) boyutlu ve q ranklı ($q\leq p<n$) bir matrisidir. β: bilinmeyen parametrelerin px1 boyutlu bir vektörüdür. e ise gözlenebilir olmayan hataların nx1 boyutlu bir vektörüdür.

Genellikle, e vektörünün 0 ortalamalı ve V kovaryans metrisli bir normal dağılıma sahip olduğu varsayılır ve bu $e\sim N(0,V)$ biçiminde gösterilir. Burada V pozitif definit ve genellikle bilinmeyenlerin bir matrisidir. İlginç bir durumda; V matrisinin $\sigma^2 I_n$ biçiminde ele alınmasıdır. Burada σ^2 bir bilinmeyen parametreyi ve I_n: nxn boyutlu birim matrisi göstermektedir.

Lineer model analizine ilişkin problemler σ^2, β parametrelerinin (veya $A\beta$ kestirilebilir lineer kambinasyonunun) kestiricilerini elde eder ve β nın $A\beta$ biçimindeki çeşitli kestirilebilir lineer kombinasyonları hakkındaki hipotez testlerini geliştirir. Burada A : bilinenlerin uygun boyutlu bir matrisidir.

1.2. TAM RANKLI GENEL-LİNEER MODEL

<u>TANIM 1.2.1</u> (1.1.1) modelinde $E(e) = 0$, $E(ee')=\sigma^2 I_n$ ve $R(X) = p$ olduğunu kabül edelim. Bu koşullar altında (1.1.1) modeli "Tam ranklı" veya "Tam ranklı genel-lineer hipotez nodeli" dir. Burada

σ^2 bilinmeyen fakat kestirilebilir bir parametredir. Ayrıca "'" bir transpoz gösterimi, R(.) bir rank operatörü ve E(.) bir beklenen değer operatörüdür.

1.3. TAM RANKLI OLMAYAN GENEL-LİNEER MODEL

TANIM 1.3.1 $E(e) = 0$ ve Varyans $(e) = E(ee') = \sigma^2 I_n$ olması durumunda (1.1.1) lineer modelini gözönüne alalım. Bu taktirde eğer $R(X:nxp) = q<p$ ise modele "Tam sütun ranklı olmayan genel-lineer hipotez modeli" denir.

Tanım 1.2.1. ve Tanım 1.3.1. ile verilen modellerin her ikisi için de modele ait normal denklemler:

$$X'X\beta = X'Y \tag{1.3.1}$$

biçimindedir. Tanım 1.2.1 durumunda normal denklemler:$\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'Y$ gibi bir tek çözüme sahip olduğu halde; Tanım 1.3.1 durumunda böyle bir tek çözümden söz etmek mümkün olmamaktadır. Çünkü bu durumda X'X matrisi singülerdir. Bu nedenle (1.3.1) denkleminin çözümü için X'X matrisinin genelleştirilmiş inversini kullanacağız.

TANIM 1.3.2 nxp boyutlu ve $R(X:nxp) = q<p$ olan bir X matrisini gözönüne alalım. Aşağıdaki dört koşulu gerçekleyen bir X^-: pxn matrisi varsa X^- matrisine X in genelleştirilmiş inversi denir. [Penrose (1955)].

1) $XX^-X = X$
2) $X^-XX^- = X^-$
3) $(XX^-)' = XX^-$
4) $(X^-X)' = X^-X$ (1.3.2)

Bu dört koşulu gerçekleyen genelleştirilmiş inverse özel olarak Moore-Penrose tipi g- invers (genelleştirilmiş invers) denilir. [Searle (1971) S:16]. Dikkat edelimki X in singüler olmaması durumunda normal inversi olan X^{-1} matrisi özel bir g-inversdir.

Lemma 1.3.1 $AX = g$ lineer denklem sistemini düşünelim. Burada g: mx1 boyutlu bilinenlerin bir vektörüdür. Bu durumda yalnız ve yalnız $AA^-g = g$ ise denklemler bağdaşabilirdirler.

Lemma 1.3.2 $AX = g$ denklemler sistemi bağdaşabilir ise bu durum-elde ederiz. Böylece istenilen sonuç:

$$Y-XH^{-}b = X(I-H^{-}H)\beta + e \qquad (1.6.4)$$

olarak ortaya konur. Bu yeni (1.6.4) modeline "kısıtlanmamış tam lineer model" olarak bakabiliriz. Burada $X(I-H^{-}H)$ çarpım matrisi bu modelin yeni tasarım matrisi olarak alınacaktır. $A\beta$ lineer kombinasyonları yalnız ve yalnız (1.6.2) kısıtlanmamış lineer modeline göre kestirilebilirse ; (1.6.1) kısıtlanmış lineer modeli için de kestirilebilirliği gösterilir.

TEOREM 1.6.2 $A\beta$ lineer kombinasyonlarının (1.6.1) kısıtlanmış lineer modeline göre kestirilebilir olması için gerek ve yeter koşul : A matrisinin satırlarının $X(I-H^{-}H)$ matrisinin satır uzayına ait olmasıdır.

KANITLAMA: Teoremin kanıtı Teorem 1.6.1 den elde edilen bir sonuçtur ve lineer modele göre kestirilebilirlik için alışılmış bir koşuldur.

TEOREM 1.6.3 $A\beta$ lineer kombinasyonları yalnız ve yalnız (1) veya (2) den biri sağlanırsa (1.6.1) modeline göre kestirilebilirler. Burada A bilinen sabitlerin kxp boyutlu ve k ranklı bir matrisidir.

(1) $R\left[X(I-H^{-}H)(I-A^{-}A)\right] = s-k$

Burada $R\left[X(I-H^{-}H)\right] = s$ dir.

(2) $iz^{(*)}\left\{\left[X(I-H^{-}H)(I-A^{-}A)\right]\left[X(I-H^{-}H)(I-A^{-}A)\right]^{-}\right\} = s-k$

KANITLAMA: $A\beta$ lineer kombinasyonları $Z=W\beta+e$ lineer modeline göre yalnız ve yalnız

$$R\left[W(I-A^{-}A)\right] = R(W) - R(A)$$

ise kestirilebilirler. [Milliken (1971)] sonucunu kullanarak kanıtlamayı tamamlarız.

TEOREM 1.6.4 $A\beta$ lineer kombinasyonları (1.6.1) kısıtlanmış lineer modeline göre yalnız ve yalnız,

---

(*) U bir kare matris olmak üzere iz(U): U matrisinin köşegen elemanlarının toplamını göstermektedir.

$$A\left[(I-H^-H)X'X(I-H^-H)\right]^c.\left[(I-H^-H)X'X(I-H^-H)\right] = A$$

$$A(X'X)^cX'X = A$$

ise kestirilebilirler. Burada W^c notasyonu $WW^cW = W$ eşitliğini sağlayan bir pseudo inversi gösterir.

KANITLAMA 1) Lineer kombinasyonlar kestirilebilir olsunlar. Bu taktirde $A = CX$ olacak biçimde bir C matrisi vardır. Bu nedenle $X(X'X)^cX'X = X$ eşitliği kullanılarak:

$A(X'X)^cX'X = CX(X'X)^cX'X = CX = A$ bulunur.

2) $A(X'X)^cX'X = A$ olsun. O zaman $C=A(X'X)^cX'$ alınırsa :

$E(CY) = CE(Y) = A(X'X)^cX'X\beta = A\beta$

bulunur. Şu halde sonuç olarak $A\beta$ kestirilebilir.

BÖLÜM-II

KARESEL FORMLARIN DAĞILIMLARI VE LİNEER MODELLERDE HİPOTEZ TESTİ

Karelerin toplamları karesel formlar olarak lineer modeller kuramında yaygın bir biçimde kullanılır. Yalnız karesel formun form matrisinin elemanlarının sabitler olmaması durumu bundan ayrı tutulur. Yani karesel formun form matrisinin elemanları genişletilmiş lineer model durumunda olduğu gibi rastgele değişkenler olabilir. Niceliğin bu tipi "Pseudo-Karesel Form" olarak adlandırılır. Biz bu bölümde form matrisinin sabitlerden oluşması durumunda karesel formların dağılımlarını inceliyeceğiz ve esas çalışmamızda gerekli olan ilgili teoremleri vereceğiz.

2.1. KARESEL FORMLARIN DAĞILIMI

Lineer modelle ilgili bir karesel formun dağılımı, modele ilişkin rastgele hata vektörünün dağılımı ile tanımlanır. Burada genel olarak e hata vektörünün μ ortalamalı ve V kovaryans matrisli bir çok değişkenli normal dağılıma sahip olduğu kabul edilir.

Y'AY karesel formunda A matrisinin elemanları bilinen sabitler olarak kabül edilecektir. Aşağıdaki teoremler karesel formların dağılım özelliklerini gösterir. Kanıtlamalar Graybill (1961) ve Searle (1971) de verilmiş olduğundan biz burada onları yinelemeyeceğiz.

<u>TEOREM 2.1.1</u> Eğer $Y \sim N(X\beta, V)$ ise bu taktirde Y'AY karesel formu $k = R(A)$ serbestlik dereceli ve $\lambda = \beta'X'AX\beta/2$ merkezi olmama parametreli bir ki-kare(Che-Square) dağılımına yalnız ve yalnız AV idempotent ise sahiptir. Bu dağılım $Y'AY \sim \chi^2(k, \lambda)$ ile gösterilir. Eğer $\lambda = 0$ ise parametre ihmal edilebilir. Bu durumda Y'AY karesel formu k serbestlik dereceli merkezi ki-kare dağılımına sahiptir. Aşağıdaki teorem iki ki-kare rastgele değişkeninin bağımsızlığını verir.

TEOREM 2.1.2 $Y \sim N(0, \sigma^2 I_n)$ olsun. $Y'AY$ ve $Y'BY$ gibi iki reel simetrik kare el formun bağımsız olarak dağılan ki-kare değişkeni olabilmeleri için gerek ve yeter koşul $AB=0, A=A^2, B=B^2$ olmasıdır.

TEOREM 2.1.3 $Y \sim N(0, V)$ olsun. Farzedelimki A sabitlerin nxn boyutlu bir matrisidir. Bu taktirde yalnız ve yalnız $VAVA = VAV$ ve $İZ(AV) = r$ ise; $U = Y'AY \sim \chi^2(r)$ rastgele değişkeni r serbestlik dereceli merkezi ki-kare dağılımına sahiptir. [Searle (1971)]

Aşağıdaki teorem iki bağımsız ki-kare değişkeninin bir oranının dağılımını verir. Bu teorem hipotez testleri için kullanılır.

TEOREM 2.1.4 $Q_1 \sim \chi^2(n, \lambda)$ ve $Q_2 \sim \chi^2(m)$ olarak dağılmış olsunlar

$F = \frac{Q_1}{Q_2} \cdot \frac{m}{n}$ - oranı eğer Q_1 ve Q_2 karesel formları bağımsız olarak dağılmış iseler; n,m serbestlik dereceli ve λ merkezi olmama parametreli merkezi olmayan bir F dağılımına sahiptir.

2.2. LİNEER MODELLERDE HİPOTEZ TESTİ

(1.6.1) lineer modeline göre Y gözlem vektöründen elde edilen bilgiye dayandırılan β vektöründeki bilinmeyen parametreler hakkında hipotezleri test etmek ilginçtir. Test edilebilen hipotezler, Ho : $A\beta = a$ kısıtlamasına göre kestirilebilir olan $A\beta$ lineer kombinasyonları hakkında olacaktır. Burada A: Teorem 1.6.3 de tanıtılan bir matristir. Bundan başka $A\beta = a$ sistemi bağdaşabilirdir. Bağdaşabilirlik lemma 1.3.1 e göre $AA^-a = a$ veya $R(A \vdots a) = R(A)$ koşullarından birisi ile sağlanır. Ho: $A\beta = a$ hipotezi yalnız ve yalnız $A\beta$ kestirilebilirse, -ki bu kestirilebilme A matrisinin satırlarının X matrisinin satırlarıyla gerilmiş satır uzayında olmasını gerektirir-test edilebilir. Bu koşul Milliken (1971) tarafından A ve X in ranklarına göre ifade edilmiştir.

TEOREM 2.2.1 $e \sim N(0, \sigma^2 I_n)$ normallık varsayımı altında (1.1.1) modeline göre Ho: $A\beta = a$ hipotezi yalnız ve yalnız $X(I-A^-A)$ matrisinin rankının [illegible] durumunda test edilebilir.

Burada $R(X) = q$ ve $R(A) = k$ dır.

TEOREM 2.2.2 (1.1.1) lineer modeli için $Y \sim N(X\beta, \sigma^2 I_n)$ olsun

Ho : $A\beta = 0$ hipotezini gözönüne alalım. Burada A : Teorem 1.6.3 de tanıtıldığı gibidir. Bu taktirde:

1) $Q_0/\sigma^2 = Y'(I-XX^-)Y/\sigma^2$ karesel formu n-q serbestlik dereceli merkezi bir ki-kare dağılımına sahiptir.

2) $Q_2/\sigma^2 = 1/\sigma^2 Y'\{XX^- - X(I-A^-A)[X(I-A^-A)]^-\} Y$ karesel formu: $\lambda = \beta'X'\{XX^- - X(I-A^-A)[X(I-A^-A)]^-\}X\beta$ merkezi olmama parametreli ve k serbestlik dereceli merkezi olmayan bir ki-kare dağılımına sahiptir.

3) Q_0 ve Q_2 karesel formları bağımsız olarak dağılırlar.

4) Ho : $A\beta = 0$ hipotezi altında $F = Q_2.(n-q)/Q_0.(k)$ oranı k ve n-q serbestlik dereceli merkezi bir F-dağılımına sahiptir. Eğer hipotez gerçeklenmezse 4) deki oran merkezi olmayan bir F-dağılımına sahip olacaktır.

KANITLAMA: $e \sim N(0, \sigma^2 I_n)$ olmak üzere (1.1.1) modeli için hataların kareleri toplamı $Q_0 = Y'(I-XX^-)Y$ karesel formuyla ifade edilir. HO : $A\beta = 0$ hipotezini test etmek için kısıtlanmış lineer model daha önce ifade edilen 1.6.2 madeli yardımıyla

$$Y = XA^-A\beta + X(I-A^-A)\beta + e \tag{2.2.1}$$

olarak elde edilir. Bu model üzerinde $A\beta = 0$ hipotezinin koyulması ile sınırlanan model:

$$Y = X(I-A^-A)\beta + e \tag{2.2.2}$$

biçimini alır. (2.2.2) kısıtlanmış modeli için hataların kareleri toplamı:

$$Q_1 = Y'\{I - X(IA^-A)[X(I-A^-A)]^-\}Y \tag{2.2.3}$$

bağıntısı ile bulunur. $Q_1 - Q_0$ farkı hipotez nedeni ile hataların kareleri toplamını:

$$Q_2 = Q_1 - Q_0 = Y'\{XX^- - X(I-A^-A)[X(I-A^-A)]^-\}Y \tag{2.2.4}$$

olarak verir.

$e \sim N(0, \sigma^2 I_n)$ normallık varsayımı altında Q_2/σ^2 karesel formu Ho : $A\beta = 0$ hipotezi gerçeklendiğinde k serbestlik dereceli merkezi bir ki-kare rastgele değişkeni olarak dağılır. Q_0/σ^2 ve Q_2/σ^2 karesel formları sırısıyla n-q ve k serbestlik rereceli bağımsız olarak dağılan ki-kare rastgele değişkenleridirler. öyle ise $F = Q_2/Q_0 \cdot \frac{n-q}{k}$ rastgele değişkeni k ve n-q serbestlik dereceli F-dağılımına sahiptir. Bu da teoremi kanıtlar.

TEOREM 2.2.3 $A\beta = a$ hipotezi (1.6.2) modeli için yalnız ve yalnız $R[X(I-H^-H)(I-A^-A)] = s-k$ ve $R(A\vdots a) = R(A)$ ise test edilebilir. Burada $R(X(I-H^-H)) = s'$ dir.

KANITLAMA : Teoremin kanıtlaması teorem (1.6.3) den ve aşağıdaki tanımdan kolayca elde edilir.

TANIM 2.2.1 $A\beta = a$ hipotezi yalnız ve yalnız $A\beta$ lineer kombinasyonları kısıtlanmış lineer model için kestirilebilir ve a bilinen bir vektör olmak üzere $A\beta = a$ denklemler sistemi bağdaşabilir ise (1.6.2) modeli için test edilebilir.

TEOREM 2.2.4 $A\beta = a$; kısıtlanmamış lineer model için testedilebilir bir hipotez olsun. Bu taktirde $A(I-H^-H)\beta = a - AH^-b$ hipotezi (1.6.2) modeli için test edilebilir.

KANITLAMA: Kısıtlanmış lineer model için test edilebilirliği kabül edilen $A\beta = a$ hipotezi $A = CX$ olacak biçimde bir C matrisinin varlığını gerektirir. Böylece, $A(I-H^-H) = CX(I-H^-H)$ olmak üzere ifade edilen $A(I-H^-H)\beta$ lineer fonksiyonları (1.1.1) lineer modeli için kestirilebilir. $A\beta = a$ hipotezi de

$$A\beta = A(I-H^-H+H^-H)\beta = A(I-H^-H)\beta + AH^-H\beta = a \tag{2.2.5}$$

olarak yazılabilir. Kısıtlamalara dayanarak (2.2.5) bağıntısı:

$$A(I-H^-H)\beta + AH^-b = a \tag{2.2.6}$$

veya

$$A(I-H^-H)\beta = a - AH^-b \tag{2.2.7}$$

olarak yazılır. Bu da kanıtlamayı tamamlar.

2.3 TAM SATIR RANKLI OLMIYAN GENEL LİNEER HİPOTEZİ ALTINDA KARELER TOPLAMI.

(1.1.1) Genel lineer modelini $e \sim N(0, \sigma^2 I_n)$ olması durumunda gözönüne alalım. $H_0: L\beta = Z$ hipotezi test edilebilir bir lineer hipotez olsun. Burada L matrisi bilinen sabitlerin mxp boyutlu ve s(s < m < p) ranklı bir matrisidir. Ho hipotezinin testedilebilir bir hipotez olmasından şunlar anlaşılır.

1) $L\beta$ = Z bağdaşabilirdir ve bundan dolayı:

$$LL^{-}Z = Z \tag{2.3.1}$$

dir.

2) $L\beta$ = Z nin kestirilebilir olmasından dolayı da

$$LGX'X = L \tag{2.3.2}$$

dir. Burada Z bilinen sabitlerin mx1 boyutlu bir vektörüdür ve L nin sütun uzayında bulunmaktadır.

Pringle ve Rayner (1971) $\hat{\beta}=(X'X)^{-}X'Y = GX'Y$ olmak üzere Ho hipotezi için kareler toplamının,

$$\begin{aligned} SS(H) &= (L\hat{\beta}-Z)'(LGL')^{-}(LG\ L')\ (LGL')^{-}(L\hat{\beta}-Z) \qquad (2.3.3)\\ &= (L\hat{\beta}-Z)'\ (LGL')^{g_2}\ (L\hat{\beta}-Z) \end{aligned}$$

olduğunu gösterdiler. Burada g_1 ve g_2 sırısıyla (1.3.2) de verilen ilk ve ilk iki özellekleri gerçekleyen g-inverslerdir.

Daha sonra John ve Smith (1974) tarafından (2.3.3) bağıntısındaki g_2 inversinin g_1 inversi ile yer değiştirebileceğini ifade eden aşağıdaki teorem verildi.

<u>TEOREM 2.3.1</u> (1.1.1) modelinde β için en küçük kareler kestirimi $\hat{\beta}$, Ho: $L\beta$ = Z hipotezi altındaki kestirim $\tilde{\beta}$ olmak üzere Ho hipotezi için (2.3.3) denklemiyle verilen kareler toplamı SS(H) aşağıdaki gibidir.

$$SS(H) = (L\hat{\beta}-Z)'\ (LGL')^{g_1}\ (L\hat{\beta}-Z)$$

KANITLAMA : Lagrange çarpanları yöntemiyle

$$(Y-X\tilde{\beta})'(Y-X\tilde{\beta})+\tilde{\lambda}'(L\beta-Z) \tag{2.3.4}$$

fonksiyonunu minimum yapan $\tilde{\beta}$ ve $\tilde{\lambda}$ değerlerini arıyalım.

S=X'X ve G = $(X'X)^{-}$ olsun. Bu taktirde:

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{\beta}}\left[(Y-X\tilde{\beta})'(Y-X\tilde{\beta})+\tilde{\lambda}'(L\tilde{\beta}-Z)\right] = 0 \Rightarrow X'X\tilde{\beta}+L'\tilde{\lambda} = X'Y \tag{2.3.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{\lambda}}\left[(Y-X\tilde{\beta})'(Y-X\tilde{\beta})+\tilde{\lambda}'(L\tilde{\beta}-Z)\right] = 0 \Rightarrow L\tilde{\beta}+0 = Z$$

bağıntısını buluruz. Buradan da :

$$\begin{bmatrix} X'X & L' \\ L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\beta} \\ \tilde{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'Y \\ Z \end{bmatrix} \tag{2.3.6}$$

denklemler sistemini elde ederiz. Bu sistemin çözümü ise

$$\begin{bmatrix} \tilde{\beta} \\ \tilde{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & L' \\ L & 0 \end{bmatrix}^{g_1} \begin{bmatrix} X'Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}-S^{g_1}L'(LS^{g_1}L')^{g_1}(L\hat{\beta}-Z) \\ (LS^{g_1}L')^{g_1}(L\hat{\beta}-Z) \end{bmatrix} \tag{2.3.7}$$

dır. Buraran da:

$$\tilde{\beta} = \hat{\beta}-S^{g_1}L'(LS^{g_1}L')^{g_1}(L\hat{\beta}-Z) \tag{2.3.8}$$

bulunur. Burada S= X'X dır. Böylece;

$$\begin{aligned} (Y-X\tilde{\beta})'(Y-X\tilde{\beta}) &= (Y-X\hat{\beta}+X\hat{\beta}-X\tilde{\beta})'(Y-X\hat{\beta}+X\hat{\beta}-X\tilde{\beta}) \\ &= (Y-X\hat{\beta})'(Y-X\hat{\beta}) + (\hat{\beta}-\tilde{\beta})'X'X(\hat{\beta}-\tilde{\beta}) \\ &= SS(E) \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned} SS(H) &= (Y-X\tilde{\beta})'(Y-X\tilde{\beta}) - (Y-X\hat{\beta})'(Y-X\hat{\beta}) \\ &= (\hat{\beta}-\tilde{\beta})'X'X(\hat{\beta}-\tilde{\beta}) \\ &= (L\hat{\beta}-Z)'(LS^{g_1}L')^{g_1}L\underbrace{(S^{g_1})'SS^{g_1}}_{S^{g_1}}L'(LS^{g_1}L')^{g_1}(L\hat{\beta}-Z) \\ &= (L\hat{\beta}-Z)'(LS^{g_1}L')^{g_1}(L\hat{\beta}-Z) \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

olarak bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} (S^{g_1})' &= (S')^{g_1} = S^{g_1} \\ S^{g_1}SS^{g_1} &= (X'X)^{g_1}(X'X)(X'X)^{g_1} \\ &= (S'S)^{g_1}\underbrace{S'S(S'S)^{g_1}S'}_{S'} \\ &= S^{g_1} \end{aligned}$$

ve

$$(\hat{\beta}-\tilde{\beta})'X'X(\hat{\beta}-\tilde{\beta})=(L\hat{\beta}-Z)'(LS^{g_1}L')^{g_1}LS^{g_1}L'(LS^{g_1}L')^{g_1}(L\hat{\beta}-Z)$$

dır. Burada (2.3.1) bağıntısını kullanırsak bu kez g_2 inversinin g_1 inversi ile yer değiştirebileceğini kanıtlarız. Şöyle ki;

$$\begin{aligned} (\hat{\beta}-\tilde{\beta})(X'X)(\hat{\beta}-\tilde{\beta}) &= (L\hat{\beta}-Z)'(LS^{g_1}L')^{g_1}\underbrace{LS^{g_1}L'(LS^{g_1}L')^{g_1}L}_{L}(\hat{\beta}-L^{-}Z) \\ &= (L\hat{\beta}-Z)'(LS^{g_1}L')^{g_1}L(\hat{\beta}-L^{-}Z) \end{aligned}$$

olur. Cünkü L, X'X nin satır uzayındadır. Bu kez L yi son parantezin içine dahil edersek :

$$SS(H) = (\hat{\beta}-\tilde{\beta})'(X'X)(\hat{\beta}-\tilde{\beta})$$
$$= (L\hat{\beta}-Z)'(IS^{g_1}L')^{g_1}(L\hat{\beta}-Z)$$

elde ederiz. Bu da bize g_2 inversinin g_1 ile yer değiştirebileceğini kanıtlar. Burada SS(H) ve SS(E) sırasıyla, hipotez nedeniyle kareler toplamını ve **hataların** kareleri toplamını ifade eden sembollerdir.

BÖLÜM-III

KISITLANMIŞ LİNEER MODEL

3.1. KISITLANMIŞ LİNEER MODELDE PARAMETRE KESTİRİMİ VE HİPOTEZ TESTİ

$M\beta = \eta$ Lineer eşitlik kısıtlamalarına bağlı $Y = X\beta + e$ lineer modelini gözönüne alalım. Burada sözü edilen Y, X, β matris ve vektörlerinin nitelikleri (1.1.1.) modelinde tanımlandığı gibidir. Yalnız, e hatalar vektörü 0 ortalama ve $\sigma^2 I_n$ varyansına sahip normal dağılımlı bir rastgele vektördür. $M\beta = \eta$ lineer parametrik denklemleri bağdaşabilir yani β ya göre en az bir çözüme sahip olacak biçimde kabul edilecektir.

$Y = X\beta + e$ Lineer modelinde $M\beta = \eta$ lineer kısıtlamalarına bağlı olarak β parametre vektörü için elde edilen en iyi lineer kestirici (E.İ.L.K) :

$$\tilde{\beta} = M^{-}\eta + (X\,Q_M)^{-}\,(Y - XM^{-}\eta) \tag{3.1.1}$$

biçiminde verilir. [Gerig ve Gallant (1975)]. Burada Q_M, (1.3.5) bağıntılarından ilkinde A yerine M alarak elde edilir. Q_M simetrik ve idempotent olduğundan $(Q_M)^{-} = Q_M$ dir. $(XQ_M)^{-}$ genelleştirilmiş inversi ise (1.3.6) bağıntısında 4) e göre :

$$\begin{aligned}(X\,Q_M)^{-} &= \left[(XQ_M)'\,(XQ_M)\right]^{-}(X\,Q_M)' \\ &= \left[(Q_M\,X'XQ_M)\right]^{-}Q_M X' \\ &= (XQ_M)^{-}\,(Q_M\,X')^{-}\,Q_M X' \\ &= (X\,Q_M)^{-}\,(Q_M X')^{-}\,X' \\ &= (Q_M X'X\,Q_M)^{-}\,X'\end{aligned} \tag{3.1.2}$$

dır. Burada $Q_M\,(X\,Q_M)^{-} = (X\,Q_M)^{-}$ bağıntısı nedeniyle ; $(Q_M X')^{-}Q_M = (Q_M X')^{-}$ bulunacağını gözönünde bulundurduk. Böylece, β nın en iyi lineer kestiricisini;

$$\tilde{\beta} = (Q_M X'X\,Q_M)^{-}\,(X'Y - X'XM^{-}\eta) + M^{-}\eta \tag{3.1.3}$$

olarak elde ederiz. Burada $C = (Q_M X'X\,Q_M)$ dersek, bu taktirde (3.1.3) bağıntısı aşağıdaki biçimi alır.

$$\tilde{\beta} = C^{-}\,(X'Y - X'X\,M^{-}\eta) + M^{-}\eta \tag{3.1.4}$$

$\hat{\beta}$, β parametre vektörünün en küçük kareler kestiricisi olmak üzere

(2.3.10) bağıntısından :

$$(Y-X\tilde{\beta})'(Y-X\tilde{\beta}) = (Y-X\hat{\beta})'(Y-X\hat{\beta}) + (M\hat{\beta}-\eta)'(MGM')^{-}(M\hat{\beta}-\eta)$$

bağıntısını elde ederiz. Burada $\hat{\beta} = GX'Y$ dir. (3.1.5)

Şimdi, $M\beta = \eta$ kısıtlaması altında hataların kareleri toplamı aşağıdaki biçimde bulunur.

$X\tilde{\beta} = XM^{-}\eta + XC^{-}X'(Y-XM^{-}\eta)$ olduğundan

$Y - X\tilde{\beta} = Y-XM^{-}\eta - XC^{-}X'(Y-XM^{-}\eta)$

dir. Buradan da :

$$(Y-X\tilde{\beta}) = (I-XC^{-}X')(Y-XM^{-}\eta)$$

elde edilir. Böylece kareler toplamı :

$$(Y-X\tilde{\beta})'(Y-X\hat{\beta}) = (Y-XM^{-}\eta)'(I-XC^{-}X')(Y-XM^{-}\eta) \quad (3.1.6)$$

bağıntısıyla belirlenir. Burada $(I-XC^{-}X')$ matrisi idempotentdir. Çünkü , $XC^{-}X'X\,C^{-}X' = XC^{-}X'$ dır. Şöyleki

$$\begin{aligned} C^{-} &= (C'C)^{-}C' \\ &= (C'C)^{-}Q_M X'X\,Q_M \\ &= (C'C)^{-}C'\,Q_M \\ &= C^{-}Q_M \\ &= C'(CC')^{-}Q_M \\ &= Q_M C'(CC')^{-}Q_M \end{aligned}$$

dir. Yani, $C^{-} = Q_M C^{-} Q_M$ elde edilir. O halde :

$$\begin{aligned} XC^{-}X'\,XC^{-}X' &= XC^{-}Q_M X'X\,Q_M C^{-}X' \\ &= XC^{-}CC^{-}X' \\ &= XC^{-}X' \end{aligned}$$

bulunur. Böylece (3.1.5) ve (3.1.6) bağıntılarından :

$$\begin{aligned} (Y-X\tilde{\beta})'(Y-X\tilde{\beta}) &= (Y-XM^{-}\eta)'(I-XC^{-}X')(Y-XM^{-}\eta) \quad (3.1.7) \\ &= (Y-X\hat{\beta})'(Y-X\hat{\beta}) + (M\hat{\beta}-\eta)'(MGM')^{-}(M\hat{\beta}-\eta) \end{aligned}$$

bağıntısı elde edilir. Buradan da :

$$\begin{aligned} (Y-XM^{-}\eta)'(I-XC^{-}X')(Y-XM^{-}\eta) &= (Y-X\hat{\beta})'(Y-X\hat{\beta}) \quad (3.1.8) \\ &+ (M\hat{\beta}-\eta)'(MGM')^{-}(M\hat{\beta}-\eta) \end{aligned}$$

bulunur.

Biliyoruzki, $e \sim N(0, \sigma^2 I_n)$ olması durumunda (1.1.1) genel lineer modelinde $M\beta = \eta$ ve $W\beta = v$ kısıtlamalarına bağlı olarak

$MM^-\eta = \eta$, $WW^- v = v$ ve $[W(I-M^-M)][W(I-M^-M)]^-(v-WM^-\eta) = (v-WM^-\eta)$ bağdaşabilirlik koşulları altında β nın en iyi lineer kestiricisi $\tilde{\beta}_o$ aşağıdaki gibi belirlenir.

$M\beta = \eta$ denkleminden β, Lemma 1.3.2 ye göre $\beta = M^-\eta + Q_M \cdot u$ olarak elde edilir. Burada u uygun boyutlu isteksel bir vektördür. β nın bulunan bu değeri $W\beta = v$ denkleminde yerine koyulduğunda : $WM^-\eta + W Q_M \cdot u = v$ elde edilir. Buna göre $WQ_M \cdot u = v - WM^-\eta$ olduğundan bu yeni denklemden u vektörü: $[W(I-M^-M)][W(I-M^-M)]^-(v-WM^-\eta) = v-WM^-\eta$ bağdaşabilirlik koşulu altında $u = H^-(v-WM^-\eta) + Q_H \cdot z$ olarak belirlenir. Burada $H = W Q_M$ ve z uygun boyutlu isteksel bir vektördür. Böylece u nun değeri yerine koyulduğunda :

$$\beta = M^-\eta + H^-(v-WM^-\eta) + (I-M^-M-H^-H)\,z \qquad (3.1.9)$$

olarak belirlenir. Burada $Q_M H^- = H^-$ ve $Q_M Q_H = I-M^-M-H^-H$ dır.
(3,1.9) bağıntısını kullanarak $M\beta = \eta$ ve $W\beta = v$ ile kısıtlanan (1.1.1) genel lineer modeli :

$$Y-XM^-\eta - XH^-(v-WM^-\eta) = X(I-M^-M-H^-H)\,z + e \qquad (3.1.10)$$

kısıtlanmamış lineer modeli biçimine getirilir. Buradan da z nin (Y,η ve v ye göre lineer)en iyi lineer kestiricisi :

$$\hat{z} = (P'P)^-P'[Y-XM^-\eta - XH^-(v-WM^-\eta)] \qquad (3.1.11)$$

bağıntısıyla verilir. z için elde edilen bu $\hat{z}$ değerini (3.1.9) bağıntısındaki yerine koyarak ve $(I-M^-M-H^-H)(P'P)^- = (P'P)^-$ olduğunuda dikkate alarak görürüz ki ;

$$\tilde{\beta}_o = M^-\eta + H^-(v-WM^-\eta) + (P'P)^-P'[Y-XM^-\eta - XH^-(v-WM^-\eta)] \qquad (3.1.12)$$

bağıntısıyla belirlenir.Burada $P = X(I-M^-M-H^-H)$ dır.
Böylece elde edilen $\tilde{\beta}_o$, $M\beta = \eta$ ve $W\beta = v$ kısıtlamalarına bağlı olarak yukarıda açıklanan koşullar altında (1.1.1) genel lineer madelindeki β için elde edilen en iyi lineer kestiricidir. [Hallum ve Boullion ve Odell (1973)]. Burada M : mxp boyutlu , isteksel ranklı bilinenlerin bir matrisidir. η : mx1 boyutlu bilinen bir vektördür. W : wxp boyutlu,isteksel ranklı bilinenlerin bir matrisidir. v: wx1 boyutlu bilinen bir vektördür.

Şimdi, $Q_s = (I-M^-M-H^-H)$ olmak üzere (3.1.3) bağıntısından yararlanarak (3.1.12) en iyi lineer kestiricisini :

$$\tilde{\beta}_o = M^-\eta + H^-(v - WM^-\eta) + (Q_s X'X Q_s)^- X' (Y - XM^-\eta - XH^-(v - WM^-\eta)) \quad (3.1.13)$$

biçiminde belirleriz. Burada Q_s simetrik ve idempotent bir matris olduğundan $Q_s = Q_s' = Q_s^2$ ve $Q_s^- = Q_s$ dir.

$A = Y - XM^-\eta - XH^-(v - WM^-\eta)$ dersek bu taktirde :

$\tilde{\beta}_o = M^-\eta + H^-(v - WM^-\eta) + (Q_s X'XQ_s)^- X'A$ yazarız. Buradan da:

$X\tilde{\beta}_o = XM^-\eta + XH^-(v - WM^-\eta) + X(Q_s X'X Q_s)^- X'A$ ve

$Y - X\tilde{\beta}_o = A - X(Q_s X'XQ_s)^- X'A$ **veya**,

$$Y - X\tilde{\beta}_o = \left[I - X(Q_s X'XQ_s)^- X'\right] A \quad (3.1.14)$$

elde ederiz. Böylece, $(Y - X\tilde{\beta}_o)' = A'\left[I - X(Q_s X'XQ_s)^- X'\right]$ olduğunu belirttikten sonra $M\beta = \eta$ kısıtlaması ve $W\beta = v$ hipotezi altında (1.1.1) modeli için hataların kareleri toplamını :

$$(Y - X\tilde{\beta}_o)'(Y - X\tilde{\beta}_o) = A'\left[I - X(Q_s X'X Q_s)^- X'\right] A \quad (3.1.15)$$

olarak buluruz. Burada $I - X(Q_s X'X Q_s)^- X'$ matrisi idempotentdir.

(3.1.15) bağıntısının A' ve A ile çarpımlarını yaparsak :

$$(Y - X\tilde{\beta}_o)'(Y - X\tilde{\beta}_o) = A'A - A'X(Q_s X'X Q_s)^- X'A \quad (3.1.16)$$

bağıntısını elde ederiz. Sağ yandaki birinci kısım ;

$$A'A = (Y - XM^-\eta)'(I - XC^- X')(Y - XM^-\eta) + A'(XC^-X' - PP^-)A + A'PP^-A \quad (3.1.17)$$

bağıntısıyla belirlenir. [Hallum ve Boullion ve Odel (1973)]

Burada, $C = (I - M^-M) X'X (I - M^-M)$ veya $C = Q_M X'X Q_M$ dir. Ayrıca:

$$\begin{aligned}
X(Q_s X'X Q_s)^- X' &= X(X Q_s)^- (Q_s X')^- X' \\
&= X Q_s Q_s X'(X Q_s Q_s X')^-(X Q_s Q_s X')^-(XQ_s Q_s X') \\
&= X Q_s Q_s X' (XQ_s Q_s X')^- XQ_s Q_s X' (X Q_s Q_s X')^- \\
&= (X Q_s Q_s X')(X Q_s Q_s X')^- \\
&= P\underbrace{P'(PP')^-}_{P^-} \\
&= PP^-
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani ;

$$A'X(Q_s X'X Q_s)^- X'A = A' PP^- A \quad (3.1.18)$$

bulunur. Böylece de (3.1.16) bağıntısı:

$$\begin{aligned}
(Y - X\tilde{\beta}_o)'(Y - X\tilde{\beta}_o) &= A'A - A'PP^-A \quad (3.1.19) \\
&= (Y - XM^-\eta)'(I - XC^-X')(Y - XM^-\eta) + A'(XC^-X' - PP^-)A
\end{aligned}$$

biçimine girer. Şimdi sözü edilen kısıtlamalar ve bağdaşabilirlik koşulları altında (3.1.15) kareler toplamı, (3.1.7) bağıntısınında gözönüne alınmasıyla:

$$A'(XC^{-}X'-PP^{-})A=(Y-X\tilde{\beta}_0)'(Y-X\tilde{\beta}_0)-(Y-X\tilde{\beta})'(Y-X\tilde{\beta}) \qquad (3.1.20)$$

olarak bulunur. Burada $\tilde{\beta}$, (3.1.3) ile belirlenen en iyi lineer kestiricidir. (3.1.7) ve (3.1.20) bağıntılarından :

$$A'(XC^{-}X'-PP^{-})A=(Y-X\tilde{\beta}_0)'(Y-X\tilde{\beta}_0)-(Y-X\hat{\beta})'(Y-X\hat{\beta})$$
$$-(M\hat{\beta}-\eta)'(MGM')^{-}(M\hat{\beta}-\eta) \qquad (3.1.21)$$

bağıntısına sahip olunur.

3.2. $H_0 : W\beta = v$ HİPOTEZ TESTİ İÇİN ANALİZ

Burada şunu ilk önce hatırlatalımki, $MM^{-}\eta=\eta$, $WW^{-}v=v$ ve $W(I-M^{-}M)\left[W(I-M^{-}M)\right]^{-}(v-WM^{-}\eta)=(v-WM^{-}\eta)$ bağdaşabilirlik koşulları sağlanmadıkça başka bir düşünce göstermeksizin H_0 hipotezi reddedilir. Böylece bu koşulları gerçekliyen durumu ve $e\sim N(0,\sigma^2 I_n)$ **normallik** varsayımını gözönüne aldığımızda (3.1.4) ve (3.1.12) bağıntılarını sırasıyla kullanarak :

$$\left[Y-XM^{-}\eta-XH^{-}(v-WM^{-}\eta)\right]'\left[Y-XM^{-}\eta-XH^{-}(v-WM^{-}\eta)\right]=A'A$$
$$=(Y-X\tilde{\beta})'(Y-X\tilde{\beta})+(\tilde{\beta}-\tilde{\beta}_0)'C(\tilde{\beta}-\tilde{\beta}_0)+\tilde{\beta}_0'P'P\tilde{\beta}_0 \qquad (3.2.1)$$

özdeşliği :

$$\begin{aligned}(Y-X\tilde{\beta})'(Y-X\tilde{\beta})&=A'(I-XC^{-}X')A\\&=(Y-X\tilde{\beta}_0)'(I-XC^{-}X')(Y-X\tilde{\beta}_0)\\&=(Y-XM^{-}\eta)'(I-XC^{-}X')(Y-XM^{-}\eta),\end{aligned} \qquad (3.2.2)$$

$$\begin{aligned}(\tilde{\beta}-\tilde{\beta}_0)'C(\tilde{\beta}-\tilde{\beta}_0)&=A'(XC^{-}X'-PP^{-})A\\&=(Y-X\tilde{\beta}_0)'XC^{-}X'(Y-X\tilde{\beta}_0)\end{aligned} \qquad (3.2.3)$$

ve $\tilde{\beta}_0'P'P\tilde{\beta}_0=A'PP^{-}A \qquad (3.2.4)$

ek özdeşliklerinden elde edilir. (3.2.1) bağıntısının sol yanı, (3.1.10) modelindeki karelerin genel toplamıdır. (3.2.2) bağıntısının sol yanı, (1.1.1) modelinde $e\sim N(0,\sigma^2 I_n)$ normallik varsayımı ve $M\beta=\eta$ hipotezi altında hataların kareleri toplamıdır. (3.2.3) bağıntısının sol yanı, H_0 hipotezi ile sınırlanmayan parametreler için H_0 hipotezi nedeniyle düzeltilmiş kareler toplamıdır. (3.2.4) bağıntısının sol yanı, H_0 hipotezi ile sınırlanmayan parametrelere göre kareler toplamıdır.

(1.1.1) genel lineer modelinde $e \sim N(0, \sigma^2 I_n)$ normallik varsayımı altında $M\beta = \eta$ kısıtlamasına bağlı $W\beta = v$ hipotezini test etmek için:

$$F = \frac{(\tilde{\beta} - \tilde{\beta}_o)' \, C \, (\tilde{\beta} - \tilde{\beta}_o)}{(Y - X\tilde{\beta})' \, (Y - X\tilde{\beta})} \cdot \frac{k}{r} \tag{3.2.5}$$

rastgele değişkeni bir test istatistiği olarak kullanılır. Bu rastgele değişken Teorem 2.1.4. nedeniyle r,k serbestlik dereceli ve

$$\lambda_o = \frac{1}{2\sigma^2}\left[\beta - H^- (v - WM^-\eta)\right]' B \left[\beta - H^- (v - WM^-\eta)\right] \tag{3.2.6}$$

$$= \frac{1}{2\sigma^2}\left[(W\beta - v)' \, H^{-'} B H^- \, (W\beta - v)\right] \tag{3.2.7}$$

$$= \frac{1}{2\sigma^2}\left[(\beta - \beta_o)' \, B \, (\beta - \beta_o)\right] \tag{3.2.8}$$

merkezi olmama parametreli bir F- dağılımına sahiptir. Burada,

$$B = Q_M \, X'(XC^-X' - PP^-) \, X \, Q_M = C \, (C^- - P^-) \, C \tag{3.2.9}$$

biçiminde bir matristir. (3.2.5) rastgele değişkeninin paydasının (3.2.2) deki değerinin yerine koyulmasıyla :

$$F = \frac{A'(XC^-X' - PP^-)A}{A'(I - XC^- X')A} \quad \frac{k}{r} \tag{3.2.10}$$

rastgele değişkeni elde edilir. Burada $r = \text{İz}\,(XC^- X' - PP^-) = r_1 - r_2$ ve $k = \text{İz}\,(I - XC^-X') = n - r_1$ dir. Ayrıca (3.1.8) ve (3.1.21) bağıntılarını gözönüne alarak (3.2.10) rastgele değişkeninin de :

$$F = \frac{(Y - X\tilde{\beta}_o)'(Y - X\tilde{\beta}_o) - (Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta}) - (M\hat{\beta} - \eta)' (MGM')^- (M\hat{\beta} - \eta)}{(Y - X\hat{\beta})' (Y - X\hat{\beta}) + (M\hat{\beta} - \eta)' (MGM')^- (M\hat{\beta} - \eta)} \cdot \frac{k}{r} \tag{3.2.11}$$

biçiminde yazılabileceğini belirtelim. [Hallum ve Boullion ve Odell (1973)]

Şimdi, $M\beta = \eta$ ve $W\beta = v$ lineer parametrik kısıtlamalarındaki M ve W kısıtlama matrislerini ve η ve v vektörlerini bitiştirerek $T = \left[\frac{M}{W}\right]$ matrisini ve $\tau = \left[\frac{\eta}{v}\right]$ vektörünü elde etdikten sonra (1.1.1) genel lineer modelinde $T\beta = \tau$ kısıtlamasına bağlı olarak, $e \sim N(0, \sigma^2 I_n)$ normallik varsayımı ve $TT^-\tau = \tau$ bağdaşabilirlik koşulu altında β nın en iyi lineer kestiricisini bulmaya çalışalım. Burada T : $(m + w) \times p$ boyutlu ve işteksel ranklı bilinenlerin bir matrisi ve τ: $(m+w) \times 1$ boyutlu bilinenlerin bir vektörüdür. Bu durumda, β için elde edilen en iyi lineer kestirici (3.1.3) bağıntısına göre,

$$\tilde{\tilde{\beta}}_o = T^-\tau + (Q_T X'X\, Q_T)^- X'(Y - XT^-\tau) \qquad (3.2.12)$$

bağıntısıyle belirlenir. Burada $Q_T = (I - T^- T)$ dir.

İddia ediyoruz ki β nın bu kestiricisi ile (3.1.12) bağıntısında verilen kestiricisi tamamıyla birbirinin aynıdır. Bunu kanıtlamak için ilk adım olarak aşağıdaki iki teoremi verelim.

TEOREM 3.2.1.

$(U \mid V)$ parçalanmış matrisinin genelleştirilmiş inversi :

$$(U \mid V)^- = \begin{bmatrix} U^- - U^- VJ \\ \cdots\cdots \\ J \end{bmatrix} \qquad (3.2.13)$$

dır. Burada ;

$$J = C^- + (I - C^-C)\, KV'U^{-\prime} U^- (I - VC^-),$$

$$C = (I - UU^-)\, V \text{ ve}$$

$$K = \{ I + [U^- V(I - C^-C)]' [U^- V(I - C^-C)]\}^{-1}$$

dir. [Cleine (1964), Albert (1972), Rao ve Mitra (1971)]

(1.3.6) bağıntısından ve Teorem 3.2.1 den yararlanarak aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

TEOREM 3.2.2

$$\begin{bmatrix} U' \\ \hline V' \end{bmatrix}^- = (U^{-\prime} - J'\, V'\, U^{-\prime} \mid J') \qquad (3.2.14)$$

dır. Burada $M = U'$ ve $W = V'$ alınırsa,

$$T^- = \begin{bmatrix} M \\ \hline W \end{bmatrix}^- = (M^- - J'\, WM^- \mid J') \qquad (3.2.15)$$

bağıntısı elde edilir. Buna göre T^- hesaplandığında:

$$T^-\tau = (M^- - J'WM^- \mid J') \begin{bmatrix} \eta \\ \hline v \end{bmatrix} = M^-\eta - J'WM^-\eta + J'v \qquad (3.2.16)$$

olarak bulunur. Burada,

$$J' = (C^-)' + (I - C'^- W)(M^- M'^- W'K')(I - C'C'^-)$$

$$C = (I - M'\, M^{-\prime})\, W'$$

$$= (I - M^- M) W'$$

ve

$$C' = W(I - M^- M)$$

yani ;

$$C' = H \tag{3.2.17}$$

olur. Böylece,

$$\begin{aligned} J'C' &= (C^-)'\, C' \\ &= (C')^-\, C' \\ &= H^-H \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} J'WQ_M &= J'H \\ &= J'C' \\ &= H^-H \end{aligned} \tag{3.2.19}$$

bağıntısı elde edilir.

Şimdi de , $\left[W\,(I-M^-M)\right]\left[\,W\,(I-M^-M)\,\right]^-\,(v-WM^-\eta)=(v-WM^-\eta)$ bağdaşabilirlik koşulunu gözönüne alalım. Bu taktirde (3.2.16) bağıntısı :

$$\begin{aligned} T^-\tau &= M^-\eta + J'\,(v - WM^-\eta) \\ &= M^-\eta + J'\;W(I-M^-M)\,\left[W(I-M^-M)\right]^-\,(v-WM^-\eta) \\ &= M^-\eta + \underbrace{J'\,H}_{H^-H}H^-\,(v-WM^-\eta) \end{aligned} \tag{3.2.20}$$

biçimine girer.

(3.2.19) bağıntısının kullanılmasıyla (3.2.20) bağıntısından :

$$T^-\tau = M^-\eta + H^-\,(v - WM^-\eta) \tag{3.2.21}$$

bağıntısı elde edilir. $Q_T = (I-T^-T)$ matrisinin yazılışında,

$$\begin{aligned} T^-T &= M^-M - J'WM^-M + J'\,W \\ &= M^-M + J'W\,(I-M^-M) \\ &= M^-M + J'\,WQ_M \end{aligned} \tag{3.2.22}$$

olduğu gözönüne alınırsa (3.2.19) ve (3.2.22) nedeniyle

$$T^-T = M^-M + H^-\,H \tag{3.2.23}$$

olarak bulunur. Böylece

$$Q_T = I-T^-T = I-\,M^-M - H^-H \tag{3.2.24}$$

elde edilir. Buradan da :

$$X\,(I-T^-T) = X\,(I-\,M^-M - H^-H) = P \tag{3.2.25}$$

bağıntısı bulunur. (3.2.21) ve (3.2.25) bağıntılarından β nın (3.1.12) ile belirlenen en iyi lineer kestiricisi ve (3.2.12)ile elirlenen en iyi lineer kestiricisinin özdeş oldukları kanıtla-ır. Buna göre,

$$(Y-X\tilde{\tilde{\beta}}_o)'(Y-X\tilde{\tilde{\beta}}_o) = (Y-XT^-\tau)'\left[I-X(Q_T X'XQ_T)^- X'\right](Y-XT^-\tau) \quad (3.2.26)$$

ulunur. Bölüm III ve (3.1.7) bağıntısı gözönüne alındığında ; 3.2.26) bağıntısı:

$$(Y-X\tilde{\tilde{\beta}}_o)'(Y-X\tilde{\tilde{\beta}}_o) = (Y-X\hat{\beta})'(Y-X\hat{\beta}) + (T\hat{\beta}-\tau)'(TGT')^-(T\hat{\beta}-\tau) \quad (3.2.27)$$

içiminde belirlenir. Bu taktirde (3.1.7), (3.1.8) ve (3.2.27) ağıntıları nedeniyle (3.2.11) rastgele değişkenin payı :

$$(T\hat{\beta}-\tau)'(TGT')^-(T\hat{\beta}-\tau) - (M\hat{\beta}-\eta)'(MGM')^-(M\hat{\beta}-\eta) \quad (3.2.28)$$

larak yazılır. Böylece elde edilen yeni,

$$F = \frac{(T\hat{\beta}-\tau)'(TGT')^-(T\hat{\beta}-\tau) - (M\hat{\beta}-\eta)'(MGM')^-(M\hat{\beta}-\eta)}{(Y-X\hat{\beta})'(Y-X\hat{\beta}) + (M\hat{\beta}-\eta)'(MGM')^-(M\hat{\beta}-\eta)} \cdot \frac{k}{r} \quad (3.2.29)$$

astgele değişkeni; (3.2.5), (3.2.10) ve (3.2.11) rastgele değiş-enleri ile özdeştir. Burada $A = Y-XT^-\tau$, $k = \text{İz}(I-XC^-X')$ ve $= \text{İz}\left[XC^-X' - X(Q_T X'X Q_T)^- X'\right]$ dir.

Böylece elde edilen (3.2.29) rastgele değişkeni; (1.1.1) ge-el lineer modelinde $M\beta = \eta$ kısıtlaması ve $e \sim N(0, \sigma^2 I_n)$ normal-ik varsayımı altında $H_o : W\beta = v$ hipotezini test etmek için ıcekisözü geçen bağdaşabilirlik koşulları yerine yalnız $TT^-\tau = \tau$ ağdaşabilirlik koşulunun gerçeklenmesi ile yetinilen ve daha az esaplamayı gerektiren bir test istatistiği olarak kullanılır. ından başka , Oktaba (1957) de sunulan Teorem 4'deki 57 numaralı enklemle verilen test istatistiği T matrisinin tam satır rank lmaması durumunda da yeniden ortaya konur. Bu yöntem aşağıdaki ibi uygulanır.

UYGULAMA 3.2.1. : 4 aylık altı fare, üç farklı düzeyde yağlılık çeren gıda rejimi için kolestrol bakımından karşılaştırılıyor. u amaçla iki teknisyen kullanılıyor. 6 fare yağlılık yüzdelerine öre rastgele seçildi. Her bir düzeydeki iki fare de teknisyenlere astgele dağıtıldı. Elde edilen veriler aşağıdaki gibi belirlendi.

Yüzde	BLOK I	II	$\bar{Y}_{i.}$
0	69.3	70.3	69.8
10	84.8	80.5	82.65
20	85.0	72.6	78.8
$\bar{Y}_{.j}$	79.7	74.467	$\bar{Y}_{..}$=77.0834

Bu verilere uygun model:

$$Y_{ij}=\mu+\alpha_i+\gamma_j+\varepsilon_{ij} \qquad i=1,2,3 \qquad j=1,2 \qquad (3.2.30)$$

biçiminde bir iki-yönlü etkileşimsiz sınıflama modelidir. Böyle modeller için genel açıklama kısım 3.3 de verildi. Bu tip modelleri kullanmak amacıyla aşağıdaki varsayımlar yapılmaktadır.

1) i-yinci işlem ve j-inci bloktaki y_{ij} cevabı normal dağılımlıdır. Görüldüğü gibi burada altı dağılım vardır.

2) Bu altı dağılımın ortalaması $\mu+\alpha_i+\gamma_j$ dir.

3) Altı populasyonun(kitlenin) varyansları biribirine eşittir.

4) ε_{ij} ler istatistiksel olarak bağımsızdırlar.

(3.2.30) modeli $Y=X\beta+e$ matris formunda aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{bmatrix} y_{11}\\ y_{12}\\ y_{21}\\ y_{22}\\ y_{31}\\ y_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&1&0&0&1&0\\ 1&1&0&0&0&1\\ 1&0&1&0&1&0\\ 1&0&1&0&0&1\\ 1&0&0&1&1&0\\ 1&0&0&1&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ 1\\ 2\\ 3\\ 1\\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{12}\\ \varepsilon_{21}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{31}\\ \varepsilon_{32} \end{bmatrix} \qquad (3.2.31)$$

(3.2.31) modelinde modelin yapısından ileri gelen $\sum\alpha_i=0$, $\sum\gamma_j=0$ kısıtlamaları altında $H_0:\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3$ yani yağlılık düzeyleri arasında fark olup olmadığı hipotezini test edelim.

Yukarıda anılan kısıtlamaları ve H_0 hipotezini matris formları ile aşağıdaki gibi yazmak mümkündür.

$$\begin{bmatrix} 0&1&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu\\ \alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \gamma_1\\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3.2.32)$$

ve

$$H_o: \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3.2.33)$$

(3.2.32) ve (3.2.33) kısıtlamaları yerine

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3.2.34)$$

ve

$$H_o: \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3.2.35)$$

kısıtlamaları da alınabilir. Çünkü bu durumda da kısıtlamaların ve H_o hipotezinin anlam ve karakterleri değişmez. Şimdi (3.2.32) kısıtlaması altında (3.2.33) hipotezinin veya (3.2.34) kısıtlaması altında (3.2.35) hipotezinin test edilmesi istenirse (3.2.29) rastgele değişkeni test istatistiği olarak kullanılabilir.

Yukarıdaki kısıtlama matrislerinin ilk ikisi tam ranklı ve son ikisi ise tam ranklı değildir. Her iki durumda da (3.2.29) istatistiğinin geçerliliği kanıtlanmak istendiğinde kısıtlama matrislerinin iki farklı durumu için hesaplar ayrı ayrı yapılır.

Eldeki veriler nedeniyle

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ y_{31} \\ y_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 69.3 \\ 70.3 \\ 84.8 \\ 80.5 \\ 85.0 \\ 72.6 \end{bmatrix} \qquad (3.2.36)$$

olarak belirlenir. (3.2.31) bağıntısından:

$$X'X=\begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad (3.2.37)$$

ve

$$G=(X'X)^{-}=\begin{bmatrix} 0.0496 & 0.0165 & 0.0165 & 0.0165 & 0.0248 & 0.0248 \\ 0.0165 & 0.3388 & -0.1612 & -0.1612 & 0.0083 & 0.0083 \\ 0.0165 & -0.1612 & 0.3388 & -0.1612 & 0.0083 & 0.0083 \\ 0.0165 & -0.1612 & -0.1612 & 0.3388 & 0.0083 & 0.0083 \\ 0.0248 & 0.0083 & 0.0083 & 0.0083 & 0.1791 & -0.1543 \\ 0.0248 & 0.0083 & 0.0083 & 0.0083 & -0.1543 & 0.1791 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. $\hat{\beta}$ en küçük kareler kestiricisi ise (3.2.38)

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_{..} \\ \bar{Y}_{1.} - \bar{Y}_{..} \\ \bar{Y}_{2.} - \bar{Y}_{..} \\ \bar{Y}_{3.} - \bar{Y}_{..} \\ \bar{Y}_{.1} - \bar{Y}_{..} \\ \bar{Y}_{.2} - \bar{Y}_{..} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 77.0834 \\ -7.2834 \\ 5.5666 \\ 1.7166 \\ 2.6166 \\ -2.6164 \end{bmatrix} \qquad (3.2.39)$$

biçimindedir.[Graybill (1961)] Burada $\bar{Y}_{..}$, $\bar{Y}_{i.}$ ve $\bar{Y}_{.j}$ notasyonları kısım 3.3 te açıklandı.

Kısıtlama matrislerinin tam ranklı olması durumunda

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3.2.40)$$

ve

$$\tau = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3.2.41)$$

olarak belirlenir. τ vektörünün yapısı nedeniyle $TT^{-}\tau = \emptyset$ kendiliğinden gerçeklenir. Bu durumda :

$$(TGT')^- = \begin{bmatrix} -1248.741188 & 1253.776435 & 0 & 0 \\ 1253.776435 & -1238.670694 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.333333333 & -0.6666666667 \\ 0 & 0 & -0.6666666667 & 1.333333333 \end{bmatrix} \tag{3.2.42}$$

ve

$$(MGM')^- = \begin{bmatrix} -1248.74111 & 1253.776435 \\ 1253.776435 & -1238.670694 \end{bmatrix} \tag{3.2.43}$$

biçimindedir. Buna göre

$$(M\hat{\beta})'\ (MG\ M')^-\ (M\hat{\beta}) = -1.99799\ E\text{-}04 \tag{3.2.44}$$

$$(T\hat{\beta})'(TGT')^-(T\hat{\beta})-(M\hat{\beta})'\ (MGM')^-(M\hat{\beta}) = 173.963341 \tag{3.2.45}$$

olarak elde edilir. $(Y-X\hat{\beta})'\ (Y-X\hat{\beta})$ çarpımı ise

$$(Y-X\hat{\beta})'\ (Y-X\hat{\beta}) = 45.54333356 \tag{3.2.46}$$

olarak bulunur. Serbestlik dereceleri ise

$$r = \text{İZ}\ (I-XC^-X') = 6-4.0002 = 1.9998 \cong 2 \tag{3.2.47}$$

ve

$$k = \text{İz}\left[XC^-X' - X(Q_TX'X\ Q_T)^-\ X'\right] = 4.0002 - 2.0004 = 1.9998 \cong 2 \tag{3.2.48}$$

dir.

(3.2.44) - (3.2.48) bağıntıları nedeniyle (3.2.29) test istatistiği

$$F = \frac{173.963341}{45.54313376} \cdot \frac{2}{2} = 3.82 \tag{3.2.49}$$

olarak bulunur. $\alpha = 0.05$ alındığında $F_{1-\alpha}(2.2) = 19$ olduğundan $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ yani yağlılık düzeyleri arasında fark olmadığı hipotezi reddedilemez.

Şimdi kısıtlama matrislerinin tam ranklı olmaması yani (3.2.34) ve (3.2.35) durumlarını gözönüne alarak (3.2.29) test istatistiğinin değerini arıyalım.

Bu durumda;

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3.2.50)$$

ve

$$\tau = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3.2.51)$$

dır. Buna göre de $TT^{-}\tau = \emptyset$ kendiliğinden gerçeklenir. Bu durumda

$$(TGT')^{-} = \begin{bmatrix} -1248.74111 & 626.8881772 & -626.8881772 & 0 & 0 & 0 \\ 626.8881772 & -309.6676547 & 309.6676547 & 0 & 0 & 0 \\ -626.888178 & 309.6676547 & -309.667654 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.33\ldots & -0.33\ldots & 0.33\ldots \\ 0 & 0 & 0 & -0.33\ldots & 0.33\ldots & -0.33\ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0.33\ldots & -0.33\ldots & 0.33\ldots \end{bmatrix} \qquad (3.2.52)$$

ve

$$(MGM')^{-} = \begin{bmatrix} -1248.74111 & 626.8881772 & -626.888178 \\ 626.8881772 & -309.6676547 & 309.6676547 \\ -626.888178 & 309.6676547 & -309667654 \end{bmatrix} \qquad (3.2.53)$$

biçiminde belirlenir. Buradan da :

$$(M\hat{\beta})'\,(MGM')^{-}(M\hat{\beta}) = -1{,}99799\ E\text{-}04 \qquad (3.2.54)$$

ve

$$(T\hat{\beta})'(TGT')^{-}(T\hat{\beta}) - (M\hat{\beta})'(MGM')^{-}(M\hat{\beta}) = 173.963341 \qquad (3.2.55)$$

bulunur. Bu durumda da serbestlik dereceleri :

$$\begin{aligned} r = \text{İz}\left[I - X\,C^{-}\,X'\right] &= 6-4.0002 \\ &= 1.9998 \\ &\cong 2 \end{aligned} \qquad (3.2.56)$$

ve

$$k = \text{İz}\left[XC^{-}X' - X\,(Q_T X'X\,Q_T)^{-}\,X'\right] = 4.0002 - 2.004$$
$$= 1.9998 \cong 2 \qquad (3.2.57)$$

olarak elde edilir. (3.2.46), (3.2.54), (3.2.55) , (3.2.56) ve (3.2.57) bağıntıları nedeniyle (3.2.29) test istatistiği :

$$F = 3.82 \qquad (3.2.58)$$

olarak belirlenir. Bu sonucun (3.2.49) bağıntısındaki değere eşit olması esasen beklenilen bir sonuçtur. Çünkü önceden de söylendiği gibi bu durumda ortaya koyulan kısıtlama ve hipotezin anlamı öncekinin tamamen aynısıdır.

Bu uygulama ile (3.2.29) rastgele değişkeninin en genel durumda geçerli bir test istatistiği olduğu sayısal olarak da gerçeklenir.

3.3. VARYANS VE KOVARYANS ANALİZİ VE DENEYSEL TASARIM MODELLERİ İÇİN UYGULAMASI

<u>TANIM 3.3.1</u> Y bir rastgele değişken ve $x_1, x_2, \ldots, x_k$ lar herbirisi 0 veya 1 lerin herbirinden birine eşit olan bağımsız değişkenler olsun. Eğer $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_k$ lar bilinmiyen parametreler ise bu taktirde $Y = x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \ldots + \beta_k x_k + e$ modeli de bir lineer modeldir. Görüldüğü gibi bu model genel olarak :

$$y_{ijk\ldots t} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \ldots + e_{ijk\ldots t}$$

biçiminde yazılabilir. Burada $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k \ldots$ bilinmiyen parametreler ve $e_{ijk\ldots t}$ ler birer rastgele değişkendirler. Böyle modellere "DENEYSEL TASARIM MODELLERİ" denir. [Graybill (1961)] Deneysel tasarım modelleri : Tek-yönlü sınıflama, iki-yönlü sınflama, üç-yönlü sınıflama, ..., N-yönlü sınıflama modelleri olarak kendi aralarında çeşitli tiplere ayrılırlar. Burada $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k, \ldots$ parametreler kümesi gözleme etki eden çeşitli etmenlerle ilgilidirler. Bu etmenlerin etkileşimli veya etkileşimsiz oluşlarına göre yukarıda anılan modellerde kendi aralarında diğer başka sınflama modelleri biçimine girerler.

Bir araştırmacının belirli bir sıvının soğuması üzerinde gözlem yaptığını varsayalım. Araştırmacının bu deneyinde :zaman, deney kabının (beherglass) kalınlığı ve deney ortamı gözlemi etkiliyen etmenler olacaktır.

Başka bir örnek olarak; bir denemecinin belirli bir tipdeki plastik kalıbının uzaması üzerinde bir gözlem yaptığını düşünelim. Böyle bir denemede :Zaman, çekme kuvveti ve ortamın sıcaklığı gözlem sonuçlarını etkileyen etmenler ohacaktır.

Yukarıda verelen her iki örnekten de anlaşıldığı gibi; gözlem sonuçları ile gözlemi etkileyen etmen etkileri arasında bir deneysel tasarım modeli kurmak mümkündür.

Gözlemleri etkileyen etmenler karşılıklı olarak birbirlerini etkilemezlerse üç etmen durumunda "ÜÇ-YÖNLÜ ETKİLEŞİMSİZ SINFLAMA" modeline gereksinmemiz olacaktır. Bu etmenlerin etkileri sabit etkiler ise, bu durumda model "sabit" etkili model olacaktır. Birinci örnekte ifade edildiği gibi; zaman, deney kabının kalınlığı ve deney ortamı karşılıklı olarak birbirlerini etkilemeyen etmenlerdir. İknici örnekteki etmenler için de aynı durum söz konusudur.

TANIM 3.3.2. Üç-yönlü sınıflama modeli :

$$y_{ijk} = \mu_{ijk} + e_{ijk} \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,\ldots,a \\ j=1,2,\ldots,b \\ k=1,2,\ldots,c \end{array} \quad (3.3.1)$$

olarak yazılabilir. Burada, μ_{ijk} : y_{ijk} gözlemine etki eden A etmeninden i elemanının, B etmeninden j elemanının ve C etmeninden k elemanının kombinasyonlarının"gerçek"toplam etkisidir. Eğer,bu gerçek toplam etki : tam A nın i-yinci etkisi olan α_i , B nin j-yinci etkisi olan β_j, C nin k-yinci etkisi olan γ_k ve μ sabitinin toplamı ise bu durumda : $\mu_{ijk} = \mu + \alpha_i + B_j + \gamma_k$ olarak yazılır. Böylece (3.3.1) modeli :

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + e_{ijk} \qquad (3.3.2)$$

biçimini alır. [Graybill (1961), Scheffe (1959)]

TANIM 3.3.3 A,B,C etmenleri etkileşimsiz ise (3.3.2) üç-yönlü sınıflama modeline üç-yönlü etkileşimsiz sınıflama modeli denecektir. Böyle bir model aşağıdaki biçimde verilir.

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + e_{ijk}$$

$$\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0, \quad \sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0 \quad \sum_{k=1}^{c} \gamma_k = 0 \qquad (3.3.3)$$

burada $e_{ijk} \sim \text{IND}(0, \sigma^2 I)$. dır. α_i : i-yinci işlemin etkisi β_j : j-yinci işlemin (blokun) etkisi ve γ_k : k-yıncı işlemin etkisidir. Eğer α_i , β_j, γ_k etkileri sabit etkiler ise, bu taktirde (3.3.3) modeline "Sabit etkili üç-yönlü etkileşimsiz sınıflama modeli" denir. Buna göre :

1) y_{ijk} normal dağılımlıdır ve (a.b.c) tane dağılım vardır.

2) Bu (a.b.c) tane normal dağılımın ortalamaları $\mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k$ biçiminde yazılabilir. Bu özelliğe "etkileşimsiz olma"

özelliği denir.

3)(a.b.c) tane kitlenin varyansları birbirine eşittir.

4) e_{ijk} hataları birbirinden istatistiksel olarak bağımsızdırlar.

Aşağıda vereceğimiz uygulama, böyle bir model üzerinde $M\gamma=\emptyset$ kısıtlamaları altında $H_o : \begin{matrix} \alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_a \\ \beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_b \end{matrix}$ yani $W\gamma=\emptyset$ biçiminde bir hipotez testini kısım 3.1 e uygun olarak veren bir çalışmadır. Burada $\emptyset$: sıfır vektörleri veya elemanlarının tümü birden sıfır olan matrisleri göstermektedir. $\gamma'=[\mu, \alpha_i, \beta_j, \theta_k]$ dir.

Şimdi (3.3.3) sabit etkili üç-yönlü etkileşimsiz sınıflama modelini, matris gösterimini kullanarak $Y = X\gamma + e$ biçiminde yazalım. Burada Y : (abc)x1 boyutlu bir vektör, X : (abc)x(a+b+c+1) boyutlu ve elemanları sıfır ve birlerden oluşan bilinenlerin bir matrisi, γ : (a+b+c+1)x1 boyutlu bilinmeyen parametrelerin bir vektörü ve e : 0 ortalama, $\sigma^2 I_{(a+b+c+1)}$ varyansına sahip (a+b+c+1)x1 boyutlu bir hata vektörüdür. Bu durumda modelin açık bir biçimde yazılışı bir sonraki sayfada verilmiştir.

$$
\begin{bmatrix}
y_{111}\\ y_{211}\\ \vdots\\ y_{a11}\\ y_{121}\\ y_{211}\\ \vdots\\ y_{a21}\\ \vdots\\ y_{1b1}\\ y_{2b1}\\ \vdots\\ y_{ab1}\\ y_{112}\\ y_{212}\\ \vdots\\ y_{a12}\\ y_{122}\\ y_{222}\\ \vdots\\ y_{a22}\\ \vdots\\ y_{1b2}\\ y_{2b2}\\ \vdots\\ y_{ab2}\\ y_{1bc}\\ y_{2bc}\\ \vdots\\ y_{abc}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\
1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \cdots & 0\\
\vdots & & \ddots & & & \vdots & & & & \vdots & &\\
1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\
1 & 1 & 0 \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\
1 & 0 & 1 & \cdots 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & & \ddots & & & \vdots & & & & \vdots & &\\
1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & & & & & & & & & & &\\
1 & 1 & 0 \cdots & 0 & 0 & \cdots & & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\
1 & 0 & 1 \cdots & 0 & 0 & \cdots & & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & & \ddots & & & & & \vdots & \vdots & & &\\
1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\
1 & 1 & 0 \cdots & 0 & 1 & \cdots & & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\
1 & 0 & 1 \cdots & 0 & 1 & \cdots & & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\
\vdots & & \ddots & & \vdots & & & & & \vdots & &\\
1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\
1 & 1 & 0 \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\
1 & 0 & 1 & \cdots 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\
\vdots & & \ddots & & & \vdots & & & & \vdots & &\\
1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\
\vdots & & & & & & & & & & &\\
1 & 1 & 0 & \cdots 0 & 0 & \cdots & & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0\\
1 & 0 & 1 & \cdots 0 & 0 & \cdots & & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0\\
\vdots & & \ddots & & & & & \vdots & & \vdots & &\\
1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0\\
1 & 1 & 0 & \cdots 0 & 0 & \cdots & & 1 & 0 & \cdots & & 1\\
1 & 0 & 1 & \cdots 0 & 0 & \cdots & & 1 & 0 & \cdots & & 1\\
\vdots & & \ddots & & & & & \vdots & & & & \vdots\\
1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & & 1 & 0 & \cdots & & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\mu\\ \alpha_1\\ \\ \alpha_2\\ \vdots\\ \vdots\\ \\ \vdots\\ \vdots\\ \vdots\\ \alpha_a\\ \\ \beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \\ \vdots\\ \vdots\\ \beta_b\\ \\ \theta_1\\ \\ \theta_2\\ \vdots\\ \\ \vdots\\ \vdots\\ \vdots\\ \\ \theta_c
\end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
e_{111}\\ e_{211}\\ \vdots\\ e_{a11}\\ e_{121}\\ e_{221}\\ \vdots\\ e_{a21}\\ \vdots\\ e_{1b1}\\ e_{2b1}\\ \vdots\\ e_{ab1}\\ e_{112}\\ e_{212}\\ \vdots\\ e_{a12}\\ e_{122}\\ e_{222}\\ \vdots\\ e_{a22}\\ \vdots\\ e_{1b1}\\ e_{2b2}\\ \vdots\\ e_{ab2}\\ e_{1bc}\\ e_{2bc}\\ \vdots\\ e_{abc}
\end{bmatrix}
\tag{3.3.4}
$$

Buradan da görüldüğü gibi X matrisi,Kronecker çarpımı yardımıyla

$$X = (j_a \otimes j_b \otimes j_c,\ I_a \otimes j_b \otimes j_c,\ j_a \otimes I_b \otimes j_c,\ j_a \otimes j_b \otimes I_c) \qquad (3.3.5)$$

biçiminde belirlenir. Burada $A \otimes B$; A ve B matrislerinin Kronecker çarpımını göstermektedir. (3.3.3) kısıtlamaları $M\gamma = \eta$ biçiminde yazılınca, $\eta = \emptyset$ olmak üzere :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \dots & 1 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & 1 & 1 \dots & 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & 1 \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_a \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_b \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3.3.6)$$

matris gösterimi elde edilir. Burada M matrisi :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & j'_a & \emptyset_{1xb} & \emptyset_{1xc} \\ 0 & \emptyset_{1xa} & j'_b & \emptyset_{1xc} \\ 0 & \emptyset_{1xa} & \emptyset_{1xb} & j'_c \end{bmatrix} \qquad (3.3.7)$$

bağıntısıyla belirlenir. Burada j_k, elemanları 1 lerden oluşan kxl boyutlu bir vektörü göstermektedir.

Bu durumda, $\tilde{\gamma}$ en iyi lineer kestiricisi (3.1.3) bağıntısına göre :

$$\tilde{\gamma} = \left[X(I-M^{-}M) \right]^{-} Y \qquad (3.3.8)$$

ya da

$\tilde{\gamma} = \left[(I-M^{-}M)\ X'X\ (I-M^{-}M) \right]^{-} X'Y$ bağıntısıyla bulunur. Burada

$$M^{-} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{j_a}{a} & \emptyset_{ax1} & \emptyset_{ax1} \\ \emptyset_{bx1} & \frac{j_b}{b} & \emptyset_{bx1} \\ \emptyset_{cx1} & \emptyset_{cx1} & \frac{j_c}{c} \end{bmatrix}$$

ve

$$M^{-}M = \begin{bmatrix} 0 & \emptyset_{1xa} & \emptyset_{1xb} & \emptyset_{1xc} \\ \emptyset_{ax1} & \frac{J_a}{a} & \emptyset_{axb} & \emptyset_{axc} \\ \emptyset_{bx1} & \emptyset_{bxa} & \frac{J_b}{b} & \emptyset_{bxc} \\ \emptyset_{cx1} & \emptyset_{cxa} & \emptyset_{cxc} & \frac{J_c}{c} \end{bmatrix}$$

olduğu hasaplamalar sonunda elde edilir. Burada $J_k = j_k j_k'$ dır.
Böylece ;

$$\overset{=}{I}_{(a+b+c+1)} \begin{bmatrix} 1 & \phi_{1xa} & \phi_{1xb} & \phi_{1xc} \\ \phi_{ax1} & I_{axa} & \phi_{axb} & \phi_{axc} \\ \phi_{bx1} & \phi_{bxa} & I_{bxb} & I_{bxc} \\ \phi_{cx1} & \phi_{cxa} & \phi_{cxb} & I_{cxc} \end{bmatrix}$$

olduğunu hesaba katarak :

$$I-M^{-}M = \begin{bmatrix} 1 & \phi_{1xa} & \phi_{1xb} & \phi_{1xc} \\ \phi_{ax1} & (I_{\bar{a}} \frac{J_a}{a}) & \phi_{axb} & \phi_{axc} \\ \phi_{bx1} & \phi_{bxa} & (I_{\bar{b}} \frac{J_b}{b}) & \phi_{bxc} \\ \phi_{cx1} & \phi_{cxa} & \phi_{cxb} & (I_c - \frac{J_c}{c}) \end{bmatrix} \tag{3.3.9}$$

buluruz. (3.3.5) ve (3.3.9) bağıntılarından :

$$XQ_M = \left[j_a \otimes j_b \otimes j_c , (I_a - \frac{J_a}{a}) \otimes j_b \otimes j_c , \; j_a \otimes (I_{\bar{b}} \frac{J_b}{b}) \otimes j_c , j_a \otimes j_b \otimes (I_{c_-} \frac{J_c}{c}) \right]$$

bağıntısı elde edilir. Buradan da(3.3.8) deki$[X\ (I-M^{-}M)]^{-}$ matrisi:

$$\left[X(I-M^{-}\ M)\right]^{-} = \begin{bmatrix} \frac{j_a'}{a} \otimes \frac{j_b'}{b} \otimes \frac{j_c'}{c} \\ (I_a - \frac{J_a}{a}) \otimes \frac{j_b'}{b} \otimes \frac{j_c'}{c} \\ \frac{j_a'}{a} \otimes (\ I_b - \frac{J_b}{b}) \otimes \frac{j_c'}{c} \\ \frac{j_a'}{a} \otimes \frac{j_b'}{b} \otimes (I_c - \frac{J_c}{c}\ ) \end{bmatrix} \tag{3.3.10}$$

olarak bulunur.

Şimdi, δ nın (3.3.8) ile belirlenen en iyi lineer kestiricisini aşağıdaki biçimde yazabiliriz

$$\tilde{\gamma}=\left[X(I-M^-M)\right]^-Y=\begin{bmatrix}\bar{Y}\ldots & \\ \bar{Y}1.. & - & \bar{Y}\ldots \\ \bar{Y}2.. & - & \bar{Y}\ldots \\ \bar{Y}a.. & - & \bar{Y}\ldots \\ \bar{Y}.1. & - & \bar{Y}\ldots \\ \bar{Y}.2. & - & \bar{Y}\ldots \\ \bar{Y}.b. & - & \bar{Y}\ldots \\ \bar{Y}..1 & & \bar{Y}\ldots \\ \bar{Y}..2 & - & \bar{Y}\ldots \\ \bar{Y}..c & - & \bar{Y}\ldots\end{bmatrix} \qquad (3.3.11)$$

bulunan bu sonuç ile :

$\mu,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_a;\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_b\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_c$ bilinmeyen parametrelerinin klasik kestiricileri elde edilmiştir. Burada

$$\bar{Y}i.. = \frac{1}{bc}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c} y_{ijk},\quad \bar{Y}.j. = \frac{1}{ac}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c} y_{ijk},$$

$$\bar{Y}..k = \frac{1}{ab}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c} y_{ijk} \quad \text{ve} \quad \bar{Y}\ldots = \frac{1}{abc}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c} y_{ijk}$$

dir. Ayrıca

$$X' = \begin{bmatrix} j_a'\otimes j_b'\otimes j_c' \\ I_a\otimes j_b'\otimes j_c' \\ j_a'\otimes I_b\otimes j_c' \\ j_a'\otimes j_b'\otimes I_c\end{bmatrix} \text{ ve } X'X = \begin{bmatrix} abc & bcj_a' & acj_b' & abj_c' \\ bcj_a & bcI_a & cj_a\otimes j_b' & bj_a\otimes j_c' \\ acj_b & cj_a'\otimes j_b & acI_b & aj_b\otimes j_c' \\ abj_c & bj_a'\otimes j_b & aj_b'\otimes j_c & abI_c\end{bmatrix} \qquad (3.3.12)$$

dir. Buna göre (3.3.9) ve (3.3.12) den

$$C=Q_MX'XQ_M = \begin{bmatrix} abc & \emptyset_{1xa} & \emptyset_{1xb} & \emptyset_{1xc} \\ \emptyset_{ax1} & bc(I_a-\frac{J_a}{a}) & \emptyset_{axb} & \emptyset_{axc} \\ \emptyset_{bx1} & \emptyset_{bxa} & ac(I_b-\frac{J_b}{b}) & \emptyset_{bxc} \\ \emptyset_{cx1} & \emptyset_{cxa} & \emptyset_{cxb} & ab(I_c-\frac{J_c}{c})\end{bmatrix} \qquad (3.3.13)$$

ve C^- genelleştirilmiş inversi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$C^- = \begin{bmatrix} \frac{1}{abc} & \emptyset_{1xa} & \emptyset_{1xb} & \emptyset_{1xc} \\ \emptyset_{ax1} & \frac{1}{bc}(I_a - \frac{J_a}{a})\emptyset_{axb} & & \emptyset_{axc} \\ \emptyset_{bx1} & \emptyset_{bxa} & \frac{1}{ac}(I_b - \frac{J_b}{b})\emptyset_{bxc} & \\ \emptyset_{cx1} & \emptyset_{cxa} & \emptyset_{cxb} & \frac{1}{ab}(I_c - \frac{J_c}{c}) \end{bmatrix} \quad (3.3.14)$$

$$X'XC^- = \begin{bmatrix} 1 & \emptyset_{1xa} & \emptyset_{1xb} & \emptyset_{1xc} \\ \frac{j_a}{a} & (I_a - \frac{J_a}{a}) & \emptyset_{axb} & \emptyset_{axc} \\ \frac{j_b}{b} & \emptyset_{bxa} & (I_b - \frac{J_b}{b}) & \emptyset_{bxc} \\ \frac{j_c}{c} & \emptyset_{cxa} & \emptyset_{cxa} & (I_c - \frac{J_c}{c}) \end{bmatrix} \quad (3.3.15)$$

bulunur.

Buradan da :

$$X'XC^- X'X = \begin{bmatrix} abc & bcj'_a & acj'_b & abj'_c \\ bcj_a & bcI_a & cj_a j'_b & bj_a j'_c \\ acj_b & cj_b j'_a & acI_b & aj_b j'_c \\ abj_c & bcj'_a & aj_c j'_b & abI_c \end{bmatrix} \quad (3.3.16)$$

elde edilir. $j_a\, j'_b = j_a \otimes j'_b$ eşitliği j_a ve j_b vektörlerinin tanımları nedeniyle daima gerçeklenir. O halde C^- matrisi $X'X$ matrisinin genelleştirilmiş inversidir. Yani,

$$X'X\; C^-\; X'X = X'X \quad (3.3.17)$$

dir.

Şimdi de ; (3.3.4) modelinde (3.3.5) kısıtlamaları altında $H_o : \begin{matrix} \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_a \\ \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_b \end{matrix}$ hipotezini; H_o : $W\gamma = \emptyset$ matris formunda yazdıktan sonra test edelim. Burada H_o hipotezinin $W X^- X = W$ test edilebilirlik koşulu daha önce elde ettiğimiz ifadeler yardımıyla kolayca gerçeklenir. Bu bağıntıdaki W matrisi :

$$W = \begin{bmatrix} \emptyset_{(a-1)x1} & I_{a-1} & -j_{a-1} & \emptyset_{(a-1)x(b-1)} & \emptyset_{(a-1)x1} & \emptyset_{(a-1)xc} \\ \emptyset_{(b-1)x1} & \emptyset_{(b-1)x(a-1)} & \emptyset_{(b-1)x1} & I_{b-1} & -j_{b-1} & \emptyset_{(b-1)xc} \end{bmatrix}$$

(3.3.18)

biçiminde seçilirse ; H_o hipotezinin matris formu elde edilir.

(3.3.9) matrisi bir başka formda aşağıdaki gibi yazılır.

$$Q_M = \begin{bmatrix} 1 & \emptyset_{1x(a-1)} & \emptyset_{1x1} & \emptyset_{1x(b-1)} & \emptyset_{1x1} & \emptyset_{1xc} \\ \emptyset_{(a-1)x1} & (I_{a-1} - \frac{J_{a-1}}{a}) & \frac{-j_{a-1}}{a} & \emptyset_{(a-1)x(b-1)} & \emptyset_{(a-1)x1} & \emptyset_{(a-1)xc} \\ \emptyset_{1x1} & -\frac{j'_{a-1}}{a} & (1-\frac{1}{a}) & \emptyset_{1x(b-1)} & \emptyset_{1x1} & \emptyset_{1xc} \\ \emptyset_{(b-1)x1} & \emptyset_{(b-1)x(a-1)} & \emptyset_{(b-1)x1} & (I_{b-1} - \frac{J_{b-1}}{b}) & -\frac{j_{b-1}}{b} & \emptyset_{(b-1)xc} \\ \emptyset_{1x1} & \emptyset_{1x(a-1)} & \emptyset_{1x1} & -\frac{j'_{b-1}}{b} & (1-\frac{1}{b}) & \emptyset_{1xc} \\ \emptyset_{cx1} & \emptyset_{cx(a-1)} & \emptyset_{cx1} & \emptyset_{cx(b-1)} & \emptyset_{cx1} & (I_c - \frac{J_c}{c}) \end{bmatrix}$$

Buna göre;

$$H = WQ_M = \begin{bmatrix} \emptyset_{(a-1)x1} & I_{a-1} & -j_{a-1} & \emptyset_{(a-1)x(b-1)} & \emptyset_{(a-1)x1} & \emptyset_{(a-1)xc} \\ \emptyset_{(b-1)x1} & \emptyset_{(b-1)x(a-1)} & \emptyset_{(b-1)x1} & I_{b-1} & -j_{b-1} & \emptyset_{(b-1)xc} \end{bmatrix}$$

bulunur. Burada $H = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ ve $AB' = \emptyset$ olduğundan $H^- = (A^- \,\vdots\, B^-)$ biçiminde olacaktır. [Graybill (1969)].

$$A = \begin{bmatrix} \emptyset_{(a-1)x1} & I_{a-1} & -j_{a-1} & \emptyset_{(a-1)x(b-1)} & \emptyset_{(a-1)x1} & \emptyset_{(a-1)xc} \end{bmatrix}$$

ve

$$B = \begin{bmatrix} \emptyset_{(b-1)x1} & \emptyset_{(b-1)x(a-1)} & \emptyset_{(b-1)x1} & I_{b-1} & -j_{b-1} & \emptyset_{(b-1)xc} \end{bmatrix}$$

dersek : rank (A)= a-1, rank (B)= b-1 olduğundan (1.3.6)bağıntısının 4.ne göre $A^- = A'(AA')^{-1}$ ve $B^- = B'(BB')^{-1}$ olacaktır. O halde :

$$A^- = A'(I_{a-1}+J_{a-1})^{-1} = \begin{bmatrix} \emptyset_{1x(a-1)} \\ I_{a-1} \\ -J'_{a-1} \\ \emptyset_{(b-1)x(a-1)} \\ \emptyset_{1x(a-1)} \\ \emptyset_{cx(a-1)} \end{bmatrix} (I_{a-1}+J_{a-1})^{-1}$$

elde edilir. Buradan da :

$$A^{-}=\begin{bmatrix} \emptyset_{1x(a-1)} \\ (I_{a-1}+J_{a-1})^{-1} \\ -j_{a-1}(I_{a-1}+J_{a-1})^{-1} \\ \emptyset_{(b-1)x(a-1)} \\ \emptyset_{1x(a-1)} \\ \emptyset_{cx(a-1)} \end{bmatrix} \quad \text{ve } B^{-}=\begin{bmatrix} \emptyset_{1x(b-1)} \\ \emptyset_{(a-1)x(b-1)} \\ \emptyset_{1x(b-1)} \\ (I_{b-1}+J_{b-1})^{-1} \\ -j'_{b-1}(I_{b-1}+J_{b-1})^{-1} \\ \emptyset_{cx(b-1)} \end{bmatrix}$$

bulunur. Buna göre H^{-} aşağıdaki biçimde belirlenir.

$$H^{-}=\begin{bmatrix} \emptyset_{1x(a-1)} & \emptyset_{1x(b-1)} \\ (I_{a-1}+J_{a-1})^{-1} & \emptyset_{1x(b-1)} \\ -j'_{a-1}(I_{a-1}+J_{a-1})^{-1} & \emptyset_{1x(b-1)} \\ \emptyset_{(b-1)x(a-1)} & (I_{b-1}+J_{b-1})^{-1} \\ \emptyset_{1x(a-1)} & -j'_{b-1}(I_{b-1}+J_{b-1})^{-1} \\ \emptyset_{cx(a-1)} & \emptyset_{cx(b-1)} \end{bmatrix}$$

Burada $(I_{a-1}+J_{a-1})^{-1} = I_{a-1} - \frac{Ja-1}{a}$ dır. [Graybill (1969) , Albert (1972)]. Ayrıca A^{-}, B^{-} ve H^{-} dört koşullu g-inverslerdir. Böylece bizim için gerekli olan $H^{-}H$ matrisi aşağıdaki gibi belirlenir.

$$H^{-}H=\begin{bmatrix} \emptyset_{1x1} & \emptyset_{1x(a-1)} & \emptyset_{1x1} & \emptyset_{1x(b-1)} & \emptyset_{1x1} & \emptyset_{1xc} \\ \emptyset_{(a-1)x1} & (I_{a-1}-\frac{J_{a-1}}{a}) & -\frac{j_{a-1}}{a} & \emptyset_{(a-1)x(b-1)} & \emptyset_{(a-1)x1} & \emptyset_{(a-1)xc} \\ \emptyset_{1x1} & -\frac{j'_{a-1}}{a} & \frac{a-1}{a} & \emptyset_{1x(b-1)} & \emptyset_{1x1} & \emptyset_{1xc} \\ \emptyset_{(b-1)x1} & \emptyset_{(b-1)x(a-1)} & \emptyset_{(b-1)x1} & I_{b-1}-\frac{J_{b-1}}{b} & -\frac{j_{b-1}}{b} & \emptyset_{(b-1)xc} \\ \emptyset_{1x1} & \emptyset_{1x(a-1)} & \emptyset_{1x1} & -\frac{j'_{b-1}}{b} & \frac{b-1}{b} & \emptyset_{1xc} \\ \emptyset_{cx1} & \emptyset_{cx(a-1)} & \emptyset_{cx1} & \emptyset_{cx(b-1)} & \emptyset_{cx1} & \emptyset_{cxc} \end{bmatrix} \qquad (3.3.19)$$

(3.3.9) ve (3.3.19) bağıntılarından:

$$I-M^{-}M-H^{-}H = \begin{bmatrix} 1 & \emptyset_{1x(a-1)} & \emptyset_{1x1} & \emptyset_{1x(b-1)} & \emptyset_{1x1} & \emptyset_{1xc} \\ \emptyset_{(a-1)x1} & \emptyset_{(a-1)x(a-1)} & \emptyset_{(a-1)x1} & \emptyset_{(a-1)x(b-1)} & \emptyset_{(a-1)x1} & \emptyset_{(a-1)xc} \\ \emptyset_{1x1} & \emptyset_{1x(a-1)} & \emptyset_{1x1} & \emptyset_{1x(b-1)} & \emptyset_{1x1} & \emptyset_{1xc} \\ \emptyset_{(b-1)x1} & \emptyset_{(b-1)x(a-1)} & \emptyset_{(b-1)x1} & \emptyset_{(b-1)x(b-1)} & \emptyset_{(b-1)x1} & \emptyset_{b-1xc} \\ \emptyset_{1x1} & \emptyset_{1x(a-)} & \emptyset_{1x1} & \emptyset_{1x(b-)} & \emptyset_{1x1} & \emptyset_{1xc} \\ \emptyset_{cx1} & \emptyset_{cx(a-)} & \emptyset_{cx1} & \emptyset_{cx(b-)} & \emptyset_{cx1} & (I_c-\frac{J_c}{c}) \end{bmatrix} \quad (3.3.20)$$

elde edilir.

$P = X(I-M^{-}M-H^{-}H)$ ifadesini hesaplıyabilmemiz için (3.3.20) bağıntısını aşağıdaki biçimde yazmamız gerekir. Şöyleki;

$$I-M^{-}M-H^{-}H = \begin{bmatrix} 1 & \emptyset_{1xa} & \emptyset_{1xb} & \emptyset_{1xc} \\ \emptyset_{ax1} & \emptyset_{axa} & \emptyset_{axb} & \emptyset_{axc} \\ \emptyset_{bx1} & \emptyset_{bxa} & \emptyset_{bxb} & \emptyset_{bxc} \\ \emptyset_{cx1} & \emptyset_{cxa} & \emptyset_{cxb} & (I_c-\frac{J_c}{c}) \end{bmatrix} \quad (3.3.21)$$

dır. (3.3.5) ve (3.3.21) bağıntılarından :

$$P = \left[j_a \otimes j_b \otimes j_c,\ \emptyset_{(abc)xa},\ \emptyset_{(abc)xb},\ j_a \otimes j_b \otimes (I_c - \frac{J_c}{c}) \right]_{(abc)x(a+b+c+1)}$$

olarak bulunur. Bu takdirde,

$$P^{-} = \begin{bmatrix} \frac{j_a'}{a} \otimes \frac{j_b'}{b} \otimes \frac{j_c'}{c} \\ \emptyset_{ax(abc)} \\ \emptyset_{bx(abc)} \\ \frac{j_a'}{a} \otimes \frac{j_b'}{b} \otimes (I_c - \frac{J_c}{c}) \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edilir. (3.1.13) bağıntısı nedeniyle (3.3.4) modelinde (3.3.6) veya $H_0 : W\underset{\sim}{\gamma} = \emptyset$ hipotezi altında γ nın en iyi lineer kestiricisi : $\gamma_0 = P^{-}Y$ bağıntısıyla verilir. O halde

$$\tilde{\gamma}_o = P^-Y = \begin{bmatrix} \bar{Y}\ldots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \bar{Y}_{..1} - \bar{Y}\ldots \\ \bar{Y}_{..2} - \bar{Y}\ldots \\ \vdots \\ \bar{Y}_{..c} - \bar{Y}\ldots \end{bmatrix} \qquad (3.3.22)$$

dir.

(3.3.4) modelinde $M\gamma = \emptyset$ lineer parametrik kısıtlamaları altında $W\gamma = \emptyset$ hipotezi için test istatistiği,(3.2.10) bağıntısına göre

$$F = \frac{Y'(XC^-X'-PP^-)\,Y}{Y'(I-XC^-X')\,Y} \cdot \frac{k}{r} \qquad (3.3.23)$$

biçiminde olacaktır. $C= Q_M X'X\, Q_M$ olduğunda :$XC^-X' = XQ_M(XQ_M)^-$ ve $XC^-X'\,C^-\,X' = XC^-X'$ olduğu kısım 3.1. de gösterilmişti. Bu nedenle $Y'(XC^-X' - PP^-)Y$ (r) ve $Y'\,(I-XC^-X')Y$ (k) dağılımlarına sahiptir. $(XC^-X'-PP^-)\,(I-XC^-X') = \emptyset$ olduğundan (3.3.23) rastgele değişkeninin r,k sarbestlik dereceli F-dağılımına sahip olduğu kanıtlanır. Burada ,$r=\text{İz}(XC^-X'-PP^-)=R(XC^-X'-PP^-)$ ve $k = \text{İz}(I-XC^-X') = R(I-XC^-X')$ dır. Buna göre,

$$XC^-X' = \Big[\frac{J_a}{a} \otimes \frac{J_b}{b} \otimes \frac{J_c}{c} + (I_a - \frac{J_a}{a}) \otimes \frac{J_b}{b} \otimes \frac{J_c}{c} + \frac{J_a}{a} \otimes (I_b - \frac{J_b}{b}) \otimes \frac{J_c}{c}$$

$$+ \frac{J_a}{a} \otimes \frac{J_b}{b} \otimes (I_c - \frac{J_c}{c})\Big]$$

ve

$$PP^- = \Big[\frac{J_a}{a} \otimes \frac{J_b}{b} \otimes \frac{J_c}{c} + \frac{J_a}{a} \otimes \frac{J_b}{b} (I_c - \frac{J_c}{c})\Big]$$

$$XC^-X'-PP^- = \Big[(I_a - \frac{J_a}{a}) \otimes \frac{J_b}{b} \otimes \frac{J_c}{c} + \frac{J_a}{a} \otimes (I_b - \frac{J_b}{b}) \otimes \frac{J_c}{c}\Big]$$

ve

$$I-XC^-X' = \Big[I_{abc} - \frac{J_a}{a} \otimes \frac{J_b}{b} \otimes \frac{J_c}{c} - (I_a - \frac{J_a}{a}) \otimes \frac{J_b}{b} \otimes \frac{J_c}{c} - \frac{J_a}{a} \otimes (I_b - \frac{J_b}{b}) \otimes \frac{J_c}{c}$$

$$+ \frac{J_a}{a} \otimes \frac{J_b}{b} \otimes (I_c - \frac{J_c}{c})\Big]$$

olarak belirlenir. O halde :

$$\dot{I}z(XC^{-}X' - PP^{-}) = \dot{I}z(XC^{-}X') - \dot{I}z(PP^{-})$$
$$= a+b+c-2-c = a+b-2$$

ve $r= a+b-2$ dir diğer taraftan :

$\dot{I}z(I-XC^{-}X') = abc-a-b-c+2$ yani, $k= abc-a-b-c+2$ bulunur.

sonuç olarak :

$$H_0 : \begin{array}{l} \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_a \\ \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_b \end{array}$$ Hipotezini test için kritik bölge :

$$\frac{Y'(XC^{-}X'-PP^{-})Y}{Y'(I-XC^{-}X')Y} \cdot \frac{abc-a-b-c+2}{a+b-2} \geqslant F_{1-\alpha}(a+b-2, abc-a-b-c+2)$$

eşitsizliği ile belirlenir.

3.4. KOVARYANS ANALİZİ İÇİN DENEYSEL TASARIM MODELİ

Aşağıdaki deneysel tasarım modelini gözönüne alalım.

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \theta x_{ijk} + e_{ijk} \qquad \begin{aligned} i &= 1,2,\dots,a \\ j &= 1,2,\dots,b \\ k &= 1,2,\dots,c \end{aligned} \qquad (3.4.1)$$

Bu model matris formunda aşağıdaki biçimde belirlenir.

$$\begin{bmatrix} y_{111} \\ y_{211} \\ \vdots \\ y_{a11} \\ y_{121} \\ y_{221} \\ \vdots \\ y_{a21} \\ \vdots \\ y_{1b1} \\ y_{2b1} \\ \vdots \\ y_{ab1} \\ y_{112} \\ \vdots \\ y_{a12} \\ y_{122} \\ \vdots \\ y_{a22} \\ \vdots \\ y_{1b2} \\ \vdots \\ y_{ab2} \\ \vdots \\ y_{1bc} \\ \vdots \\ y_{abc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \dots 0 & 1\, 0 \dots 0 \\ 1 & 0\, 1 \dots 0 & 1\, 0 \dots 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 \dots 1 & 1\, 0 \dots 0 \\ 1 & 1 \dots 0 & 0\, 1 \dots 0 \\ 1 & 0\, 1 \dots 0 & 0\, 1 \dots 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 \dots 1 & 0\, 1 \dots 0 \\ - & - - - & - - - \\ 1 & 1\, 0 \dots 0 & 0 \dots 1 \\ 1 & 0\, 1 \dots 0 & 0 \dots 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 \dots 1 & 0 \dots 1 \\ 1 & 1\, 0 \dots 0 & 1 \dots 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 \dots 1 & 1 \dots 0 \\ 1 & 1\, 0 \dots 0 & 0\, 1 \dots 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 \dots 1 & 0\, 1 \dots 0 \\ - & - - - & - - - \\ 1 & 1\, 0 \dots 0 & 0 \dots 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 \dots 1 & 0 \dots 1 \\ - & - - - & - - - \\ 1 & 1\, 0 \dots 0 & 0 \dots 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 \dots 1 & 0 \dots 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_a \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_b \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} x_{111} \\ x_{211} \\ \vdots \\ x_{a11} \\ x_{121} \\ x_{221} \\ \vdots \\ x_{a21} \\ \vdots \\ x_{1b1} \\ x_{2b1} \\ \vdots \\ x_{ab1} \\ x_{112} \\ \vdots \\ x_{a12} \\ x_{122} \\ \vdots \\ x_{a22} \\ \vdots \\ x_{1b2} \\ \vdots \\ x_{ab2} \\ \vdots \\ x_{1bc} \\ \vdots \\ x_{abc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{111} \\ e_{211} \\ \vdots \\ e_{a11} \\ e_{121} \\ e_{221} \\ \vdots \\ e_{a21} \\ \vdots \\ e_{1b1} \\ e_{2b1} \\ \vdots \\ e_{ab1} \\ e_{112} \\ \vdots \\ e_{a12} \\ e_{122} \\ \vdots \\ e_{a22} \\ \vdots \\ e_{1b2} \\ \vdots \\ e_{ab2} \\ \vdots \\ e_{1bc} \\ \vdots \\ e_{abc} \end{bmatrix}$$

3.4.1 Modeli $Y = X\gamma + e$ matris formunda yazıldığında:

$X = (A \mid B)$ ve $\gamma' = (\tau' \mid \theta)$ biçiminde düşünülebilir. Burada θ bir parametre, $B' = \{x_{ijk}\}'$ ve $\tau' = (\mu, \alpha_1, \ldots, \alpha_a, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_b)$ dir. A matrisi ise, (3.4.1) yazılışından:

$$A = (j_a \otimes j_b \otimes j_c, j_a \otimes I_b \otimes j_c) \tag{3.4.2}$$

biçiminde belirlenir bu taktirde model :

$$Y = (A \mid B)\begin{bmatrix} \tau \\ --- \\ \theta \end{bmatrix} + e$$

yada $Y = A\tau + \theta B + e$ (3.4.3)

olarak yazılabilir. Modelin yapısından ileri gelen $\sum \alpha_i = 0$ ve $\sum \beta_j = 0$ kısıtlamaları $M = (M_\tau \mid \emptyset)$ olmak üzere $M\gamma = \emptyset$ kısıtlaması ile ifade edilebilir.

Burada ;

$$M_\tau = \begin{bmatrix} \emptyset_{1x1} & j'_a & \emptyset_{1xb} \\ \emptyset_{1x1} & \emptyset_{1xa} & j'_b \end{bmatrix} \text{ alındığında: } M = \begin{bmatrix} 0 & j'_a & \emptyset_{1xb} & 0 \\ 0 & \emptyset_{1xa} & j'_b & 0 \end{bmatrix} \tag{3.4.4}$$

biçiminde olacaktır. M nin genelleştirilmiş inversi :

$$M^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{j_a}{a} & \emptyset_{ax1} \\ \emptyset_{bx1} & \frac{j_b}{b} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } M^-M = \begin{bmatrix} 0 & \emptyset_{1xa} & \emptyset_{1xb} & 0 \\ \emptyset_{ax1} & \frac{J_a}{a} & \emptyset_{axb} & \emptyset_{ax1} \\ \emptyset_{bx1} & \emptyset_{bxa} & \frac{J_b}{b} & \emptyset_{bx1} \\ 0 & \emptyset_{1xa} & \emptyset_{1xb} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.4.5}$$

olduğundan :

$$I - M^-M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \emptyset_{1xa} & \emptyset_{1xb} & 0 \\ \emptyset_{ax1} & (I_a - \frac{J_a}{a}) & \emptyset_{axb} & \emptyset_{ax1} \\ \emptyset_{bx1} & \emptyset_{bxa} & (I_b - \frac{J_b}{b}) & \emptyset_{bx1} \\ \hline 0 & \emptyset_{1xa} & \emptyset_{1xb} & 1 \end{array}\right] \tag{3.4.6}$$

olacaktır. Buna göre :

$$W = A(I - M_\tau^- M_\tau) = \left[j_a \otimes j_b \otimes j_c, \ (I_a - \frac{J_a}{a}) \otimes j_b \otimes j_c, \ j_a \otimes (I_b - \frac{J_b}{b}) \otimes j_c \right]$$

olur.

Burada;

$$M^{-}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \frac{j_a}{a} & \emptyset_{ax1}\\ \emptyset_{bx1} & \frac{j_b}{b}\end{bmatrix},\; M^{-}_{\tau\tau}M=\begin{bmatrix}0 & \emptyset_{1xa} & \emptyset_{1xb}\\ \emptyset_{ax1} & \frac{J_a}{a} & \emptyset_{axb}\\ \emptyset_{bx1} & \emptyset_{bxa} & \frac{J_b}{b}\end{bmatrix}\; Q_M=\begin{bmatrix}1 & \emptyset_{1xa} & \emptyset_{1xb}\\ \emptyset_{ax1} & (I_a-\frac{J_a}{a}) & \emptyset_{axb}\\ \emptyset_{bx1} & \emptyset_{bxa} & (I_b-\frac{J_b}{b})\end{bmatrix}$$

(3.4.7)

dır. $M\gamma=\emptyset$ kısıtlaması altında γ nın en iyi lineer kestiricisi: (3.1.3) bağıntısına göre; $\tilde{\gamma}=G^{-}Y$ ile verilir. [Hallum ve Boullion ve Odell (1973)].

Burada ;

$$G=X(I-M^{-}M)=(A\,\vdots\,B)\begin{bmatrix}1 & \emptyset_{1xa} & \emptyset_{1xb} & 0\\ \emptyset_{ax1} & (I_a-\frac{J_a}{a}) & \emptyset_{axb} & \emptyset_{ax1}\\ \emptyset_{bx1} & \emptyset_{bxa} & (I_b-\frac{J_b}{b}) & \emptyset_{bx1}\\ 0 & \emptyset_{1xa} & \emptyset_{1xb} & 1\end{bmatrix}$$

(3.4.8)

yani,

$$G=\left[A(I-M^{-}\;M)\,\vdots\,B\right]=(W\,\vdots\,B)\text{ olur.}$$

Cleine (1964)'e göre:

$$G^{-}=\begin{bmatrix}W^{-}(I-BZ)\\ \cdots\cdots\\ Z\end{bmatrix} \qquad (3,4.9)$$

dır. Burada; $Z=D^{-}+(I-D^{-}D)\,(K\,B'W^{-\prime}\,W^{-})(I-BD^{-})$,

$D=(I-WW^{-})B$,

$K=\left[I+(I-D^{-}\;D)B'W^{-\prime}W^{-}B\,(I-D^{-}D)\right]^{-1}$

dır ve W matrisi daha önce yazıldığı gibidir. Böylece ;

$$\tilde{\tau}=W^{-}(I-BZ)Y \qquad (3.4.10)$$

$$\tilde{\theta}=ZY$$

olur. Yani;

$$\tilde{\tau}=W^{-}\;(Y-B\,\theta)$$

olarak yazılır.

$$WW^{-}=\left[\frac{J_a}{a}\otimes\frac{J_b}{b}\otimes\frac{J_c}{c}+(I_a-\frac{J_a}{a})\otimes\frac{J_b}{b}\otimes\frac{J_c}{c}+\frac{J_a}{a}\otimes(I_b-\frac{J_b}{b})\otimes\frac{J_c}{c}\right]$$

olduğundan :

$$Z = \left[(I-WW^-)\ B\right]^- = \left[B'(I-WW^-)\ B\right]^-\left[B'(I-WW^-)\right]$$

dır.

Buna göre :

$$Z = \frac{1}{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}(x_{ijk}-\bar{x}_{..k})^2}\ (x_{111}-\bar{x}_{..1};\ x_{211}-\bar{x}_{..1};\ldots x_{a11}-\bar{x}_{..1};$$

$$x_{121}-\bar{x}_{..1};\ x_{221}-\bar{x}_{..1};\ldots;\ x_{a21}-\bar{x}_{..1};\ldots;\ x_{2b1}-\bar{x}_{..1};\ldots;x_{ab1}-\bar{x}_{..1};$$
$$x_{112}-\bar{x}_{..2};x_{212}-\bar{x}_{..2};\ldots;x_{a12}-\bar{x}_{..2};x_{122}-\bar{x}_{..2};x_{222}-\bar{x}_{..2};;\ldots;$$
$$x_{a22}-\bar{x}_{..2};\ldots;x_{1b2}-\bar{x}_{..2};x_{2b2}-\bar{x}_{..2};\ldots;x_{ab2}-\bar{x}_{..2};\ldots;x_{1bc}-\bar{x}_{..c};$$
$$x_{2bc}-\bar{x}_{..c};\ldots;x_{abc}-\bar{x}_{..c}) \qquad (3.4.11)$$

ve

$$\tilde{\theta} = ZY = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c} y_{ijk}\ x_{ijk-ab}\ \sum_{k=1}^{c}(y_{..k})(\bar{x}_{..k})}{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}(x_{ijk}-\bar{x}_{..k})^2} \qquad (3.4.12)$$

elde edilir. Öte yandan W^-B sırasıyla :

$$W^-Y = \begin{bmatrix} j'_{a/a}\otimes j_{b/b}\otimes j_{c/c} \\ (I_{\bar{a}}-\frac{J_a}{a})\otimes j'_{b/b}\otimes j'_{c/c} \\ j'_{a/a}\otimes(I_{\bar{b}}-\frac{J_b}{b})\otimes j'_{c/c} \end{bmatrix} Y \qquad (3.4.13)$$

$$W^-Y = \begin{bmatrix} \bar{Y}_{...} \\ \bar{Y}_{1..}-\bar{Y}_{...} \\ \bar{Y}_{a..}-\bar{Y}_{...} \\ \bar{Y}_{.b.}-\bar{Y}_{...} \\ \bar{Y}_{..1}-\bar{Y}_{...} \\ \bar{Y}_{..2}-\bar{Y}_{...} \\ \bar{Y}_{..c}-\bar{Y}_{...} \end{bmatrix} \text{ ve } W^-B = \begin{bmatrix} \bar{X}_{...} \\ \bar{X}_{1..}-\bar{X}_{...} \\ \bar{X}_{.1.}-\bar{X}_{...} \\ \bar{X}_{.b.}-\bar{X}_{...} \\ \bar{X}_{..1}-\bar{X}_{...} \\ \bar{X}_{..2}-\bar{X}_{...} \\ \bar{X}_{..c}-\bar{X}_{...} \end{bmatrix} \qquad (3.4.14)$$

olarak yazılır.

Böylece:

$$\tilde{\tau} = \begin{bmatrix} \tilde{\mu} \\ \tilde{\alpha}_1 \\ \tilde{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}_a \\ \tilde{\beta}_1 \\ \tilde{\beta}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\beta}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_{...} - \tilde{\theta}(\bar{X}_{...}) \\ \bar{Y}_{1..} - \bar{Y}_{...} - \tilde{\theta}(\bar{X}_{1..} - \bar{X}_{...}) \\ Y_{2..} - \bar{Y}_{...} - \tilde{\theta}(\bar{X}_{2..} - \bar{X}_{...}) \\ \bar{Y}_{a..} - \bar{Y}_{...} - \tilde{\theta}(\bar{X}_{a..} - \bar{X}_{...}) \\ \bar{Y}_{.1.} - \bar{Y}_{...} - \tilde{\theta}(\bar{X}_{.1.} - \bar{X}_{...}) \\ \bar{Y}_{.2.} - \bar{Y}_{...} - \tilde{\theta}(\bar{X}_{.2.} - \bar{X}_{...}) \\ \bar{Y}_{.b.} - \bar{Y}_{...} - \tilde{\theta}(\bar{X}_{.b.} - \bar{X}_{...}) \\ \bar{Y}_{..1} - \bar{Y}_{...} - \tilde{\theta}(\bar{X}_{..1} - \bar{X}_{...}) \\ \bar{Y}_{..c} - \bar{Y}_{...} - \tilde{\theta}(\bar{X}_{..c} - \bar{X}_{...}) \end{bmatrix} \quad (3.4.15)$$

bulunur. Bunlar ise, klasik kestirimlere uygundur. [Graybill (1961), S:386)].

Şimdide ;

$$(M \vdots \emptyset)\begin{bmatrix} \tau \\ --- \\ \theta \end{bmatrix} = \emptyset \text{ yani } M\gamma = \emptyset \text{ kısıtlaması ve } \quad H_0: \begin{array}{l} \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_a \\ \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_b \end{array}$$

hipotezi altında τ ve θ nın kestirimlerini bulalım.

$$W = \begin{bmatrix} \emptyset_{(a-1)x1} & I_{a-1} & -j_{a-1} & \emptyset_{(a-1)(b-1)} & \emptyset_{(a-1)x1} & \emptyset_{(a-1)x1} \\ \emptyset_{(b-1)x1} & \emptyset_{(b-1)x(a-1)} & \emptyset_{(b-1)x1} & I_{b-1} & -j_{b-1} & \emptyset_{(b-1)x1} \end{bmatrix}$$

olmak üzere H_0 hipotesini $W\gamma = \emptyset$ biçiminde yazabiliriz. Kısım 3.1 ve (3.3.18) bağıntısına göre:

$$W = H = W(I - M^- M) \quad (3.4.16)$$

elde edilir. Buradan da önceki bilgilerimize dayanarak;

$$H^- = \begin{bmatrix} \emptyset_{1x(a-1)} & \emptyset_{1x(b-1)} \\ (I_{a-1} + J_{a-1})^{-1} & \emptyset_{(a-1)x(b-1)} \\ j'_{a-1}(I_{a-1} + J_{a-1})^{-1} & \emptyset_{1x(b-1)} \\ \emptyset_{(b-1)x(a-1)} & (I_{b-1} + J_{b-1})^{-1} \\ \emptyset_{1x(a-1)} & j'_{b-1}(I_{b-1} + J_{b-1})^{-1} \\ \emptyset_{1x(a-1)} & \emptyset_{1x(b-1)} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Böylece ;

$$H^{-}H = \begin{bmatrix} 0 & \emptyset_{1xa} & \emptyset_{1xb} & 0 \\ \emptyset_{ax1} & (I_a - \frac{J_a}{a}) & \emptyset_{axb} & \emptyset_{ax1} \\ \emptyset_{bx1} & \emptyset_{bxa} & (I_b - \frac{J_b}{b}) & \emptyset_{bx1} \\ 0 & \emptyset_{1xa} & \emptyset_{1xb} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4.17)$$

elde edilir. (3.4.6) ve (3.4.17) bağıntılarından :

$$I-M^{-}M-H^{-}H = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \emptyset_{1xa} & \emptyset_{1xb} & 0 \\ \emptyset_{ax1} & \emptyset_{axa} & \emptyset_{axb} & \emptyset_{ax1} \\ \emptyset_{bx1} & \emptyset_{bxa} & \emptyset_{bxb} & \emptyset_{bx1} \\ \hline 0 & \emptyset_{1xa} & \emptyset_{1xb} & 1 \end{array}\right] \quad (3.4.18)$$

olduğu görülür. Buradan da görüldüğü gibi :

$$G_o = (A \vdots B) \left[\begin{array}{c|c} I - \underset{\sim}{M}^{-}\underset{\sim}{M} - \underset{\sim}{H}^{-}\underset{\sim}{H} & \emptyset_{(a+b+1)x1} \\ \hline \emptyset_{1x(a+b+1)} & 1 \end{array}\right] \quad (3.4.19)$$

yani ; $G_o = \left[A(I-\underset{\sim}{M}^{-}\underset{\sim}{M} - \underset{\sim}{H}^{-}\underset{\sim}{H}) \vdots B\right]$ olarak bulunur. Burada;

$W_o = A\,(I-\underset{\sim}{M}^{-}\underset{\sim}{M} - \underset{\sim}{H}^{-}\underset{\sim}{H})$ yazılırsa :

$$G_o = (W_o \vdots B)$$

ve

$$G_o^{-} = \left[\begin{array}{c} W_o^{-}\ (I - B Z_o) \\ \hline Z_o \end{array}\right] \quad (3.4.20)$$

elde edilir. Buna göre :

$$\tilde{\tau}_o = W_o^{-}\ (I - B Z_o)\, Y$$

$$\tilde{\theta}_o = Z_o\, Y$$

yani ;

$$\tilde{\tau}_o = W_o^{-}\ (Y - B\tilde{\theta})$$

olur. Burada ;

$$Z_o = \left[(I - W_o W_o^{-}) B\right]^{-} = \left[B'\ (I - W_o W_o^{-}) B\right]^{-} \left[B'\ (I - W_o W_o^{-})\right] \quad (3.4.21)$$

olarak belirlenir. Buna göre ;

$$Z_o=\frac{1}{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}(x_{ijk}-\bar{x}...)^2}(x_{111}-\bar{x}...;x_{211}-\bar{x}...;...x_{121}-\bar{x}...;$$

$$x_{221}-\bar{x}...;\ ...;\ x_{a21}-\bar{x}...;...;x_{1bc}-\bar{x}...;...;x_{abc}-\bar{x}...)$$

dır. O halde :

$$\tilde{\theta}_o=Z_oY=\frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c} y_{ijk}\,x_{ijk}-abc\,\bar{X}...\bar{Y}...}{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}(x_{ijk}-\bar{X}...)^2} \qquad (3.4.22)$$

buluruz. Öte yandan ;

$$\tau_o = W_o^-(I-B\,Z_o)Y = W_o^-Y - W_oB^-\theta$$

olarak verildiğinden :

$$W_o^-Y = A\,(I-M^-M-H^-H)^-\,Y$$

$$= (j_a\otimes j_b\otimes j_c\quad \emptyset_{(abc)xa}\ \emptyset_{(abc)xb})^-\,Y$$

$$W_o^-Y = \begin{bmatrix} j'_{a/a}\otimes j'_{b/b}\otimes j'_{c/c} \\ \emptyset_{ax(abc)} \\ \emptyset_{bx(abc)} \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} \bar{Y}... \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3.4.23)$$

$$\tau_o = W_o^-Y - W_o^-B\,\tilde{\theta}_o = \begin{bmatrix} \bar{Y}...-\tilde{\theta}_o\bar{X}... \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3.4.24)$$

elde edilir. Bu kestirimlerin de **klasik** kestirimlere uygunluğu kolayca görülür.

Şimdi;

$XC^-X' = X(X\,Q_M)^-$ olduğunu düşünerek :

$$XC^-X' = X\left[A(Q_M)\ \vdots\ B\right] = (A\ \vdots\ B)\begin{bmatrix} W^-(I-B\,Z) \\ \cdots\cdots \\ Z \end{bmatrix} \qquad (3.4.25)$$

ve böylece de;

$$XC^-X' = AW^-(I-BZ) + BZ$$
$$= AW^- - AW^-BZ + BZ$$
$$= AW^- + (I-WW^-)BZ$$
$$= AW^- + Z^-Z$$
$$= AW^- + Z'(ZZ')^-Z$$
$$= WW^- + (Z'Z)^-Z'Z$$
$$= WW^- + \left[\frac{1}{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}(x_{ijk}-\bar{X}..k)^2} \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}(x_{ijk}-\bar{X}..k)^2} \cdot \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}(x_{ijk}-\bar{X}..k)^2\right]^{-1} Z'Z$$

$$= W W^- + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c} x_{ijk}-\bar{X}..k)^2 Z'Z \qquad (3.4.26)$$

yani;

$$XC^-X' = I_a \otimes \frac{J_b}{b} \otimes \frac{J_c}{c} + \frac{J_a}{a} \otimes I_b \otimes \frac{J_c}{c} - \frac{J_a}{a} \otimes \frac{J_b}{b} \otimes \frac{J_c}{c} + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}(x_{ijk}-\bar{X}..k)^2 Z'Z$$

elde edilir. Burada:

$AW^- = WW^-$ olduğundan $Z = \left[(I-WW^-)B\right]^-$ ve $Z^- = (I-WW^-)B$ dir.

ayrıca ;

$$PP^- = P(P'P)^-P' = X\left[(I-M^-M-H^-H)X'X(I-M^-M-H^-H)\right]X'$$
$$= X\left[X(I-M^-M-H^-H)\right]^-$$
$$= X G_o^- \begin{bmatrix} W_o^-(I-BZ_o) \\ \cdots\cdots \\ Z_o \end{bmatrix}$$
$$= (A \mid B) \begin{bmatrix} W_o^-(I-BZ_o) \\ \cdots\cdots \\ Z_o \end{bmatrix}$$
$$= AW_o^-(I-BZ_o) + BZ_o \qquad AW_o^- = W_oW_o^-$$
$$= AW_o^- - AW_o^-BZ_o + BZ_o$$
$$= AW_o^- + (I-AW_o^-)BZ_o \qquad Z_o = \left[(I-W_oW_o^-)B\right]^-$$
$$= AW_o^- + (I-W_oW_o^-)BZ_o \qquad Z_o^- = (I-W_oW_o^-)B$$
$$= AW_o^- + Z_o^-Z_o$$
$$= AW_o^- + Z_o'(Z_oZ_o')^-Z_o$$
$$= AW_o^- + (Z_o'Z_o)^-Z_o'Z_o$$

olarak bulunur. Buradan da PP^- aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$PP^- = A\,W_o^- + \left[\frac{1}{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}(x_{ijk}-\bar{X}\ldots)^2}\cdot\frac{1}{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}(x_{ijk}-\bar{X}\ldots)^2}\right.$$

$$\left.\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}(x_{ijk}-\bar{X}\ldots)^2\right]^{-1} Z_o'Z_o$$

yani ;

$$PP^- = \frac{J_a}{a}\otimes\frac{J_b}{b}\otimes\frac{J_c}{c} + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}(x_{ijk}-\bar{X}\ldots)^2 Z_o'Z_o \qquad (3.4.27)$$

dır. Böylece ;

$$XC^-X' - PP^- = (I_a - \frac{J_a}{a})\otimes\frac{J_b}{b}\otimes\frac{J_c}{c} + \frac{J_a}{a}\otimes(I_b - \frac{J_b}{b})\otimes\frac{J_c}{c} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}(x_{ijk}-\bar{X}..k)^2 Z'Z - \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}(x_{ijk}-\bar{X}\ldots)^2 Z_o'Z_o$$

ve

$$\text{İz}\,(XC^-X' - PP^-) = s_1\ ,\quad \text{İz}\,(I - XC^-X') = s_2$$

olarak gösterilir.

Şimdi; H_o hipotezi altında karelerin toplamı :

$$Q_1 = Y'\left[X\,C^-X' - PP^-\right]Y$$

$$=Y'\left[I_a\otimes\frac{J_b}{b}\otimes\frac{J_c}{c} + \frac{J_a}{a}\otimes I_b\otimes\frac{J_c}{c} - \frac{J_a}{a}\otimes\frac{J_b}{b}\otimes\frac{J_c}{c} - \frac{J_a}{a}\otimes\frac{J_b}{b}\otimes\frac{J_c}{c} +\right.$$

$$\left.\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}(x_{ijk}-\bar{X}..k)^2 Z'Z - \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}(x_{ijk}-\bar{X}\ldots)^2 Z_o'Z_o\right]Y$$

$$=Y'\left[(I_a - \frac{J_a}{a})\otimes\frac{J_b}{b}\otimes\frac{J_c}{c} + \frac{J_a}{a}\otimes(I_b - \frac{J_b}{b})\otimes\frac{J_c}{c}\right]Y + \tilde{\theta}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}(x_{ijk}-\bar{X}..k)^2$$

$$-\tilde{\theta}_o^2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}(x_{ijk}-\bar{X}\ldots)^2 \qquad (3.4.28)$$

dır. Ve hataların kareleri toplamı :

$$Q_o = Y'\left[(I - XC^-X')\right]Y$$

$$=Y'\left[I_{abc} - I_a\otimes\frac{J_b}{b}\otimes\frac{J_c}{c} - \frac{J_a}{a}\otimes I_b\otimes\frac{J_c}{c} + \frac{J_a}{a}\otimes\frac{J_b}{b}\otimes\frac{J_c}{c}\right]Y$$

$$-\tilde{\theta}^2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}(x_{ijk}-\bar{X}..k)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}(y_{ijk})^2 - Y'(I_a - \frac{J_a}{a})\otimes\frac{J_b}{b}\otimes\frac{J_c}{c})Y - Y'(\frac{J_a}{a}\otimes I_b\otimes\frac{J_c}{c})Y$$

$$-\tilde{\theta}^2 \quad \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{c} (x_{ijk} - \bar{X}..k)^2 \qquad (3.4.29)$$

olarak bulunur. Diğer taraftan : $(XC^-X'-PP^-)$ ve $I-XC^-X'$ matrisleri idempotentirler. İddianın doğruluğu aşağıdaki biçimde kanıtlanır. Şöyleki :

$$(XC^-X' - PP^-)(XC^-X' - PP^-)=XC^-X'XC^-X'-XC^-X'PP^--PP^-XC^-X'+PP^-$$

eşitliğinde $XC^-X'\ XC^-X' = XC^-X'$ olduğu yani XC^-X' matrisinin idempotentliği kısım 3.1 de gösterilmişti. Diğer taraftan $M^-M(H^-H) = \emptyset$ olduğu gözönüne alınırsa :

$$\begin{aligned} P &= X(I- M^-M- H^-H) \\ &=X\left[(I-M^-M)(I-H^-H)\right] \end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Buna göre :

$$\begin{aligned} XC^-X'\ PP^- &= X(C'C)^-C'X'X(I-M^-M)(I-H^-H)P^- \\ &= XC^-(I-M^-M)'X'X(I-M^-M)(I-H^-H)P^- \\ &= XC^-CP^- \end{aligned}$$

dır. Çünkü :

$$\begin{aligned} P^- &= P'(PP')^- \\ &= (I-M^-M-H^-H)X'(PP') \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (I-H^-H)P^- &= (I-H^-H)(I-M^-M-H^-H)X'(PP')^- \\ &= P^- \end{aligned}$$

dir. Diğer taraftan ;

$$\begin{aligned} C &= (I-M^-M)X'X(I-M^-M) \\ &= \left[X(I-M^-M)\right]^-\left[X(I-M^-M)\right] \end{aligned}$$

$$C^- = (XQ_M)^-\left[(XQ_M)'\right]^-$$

ve

$$CC^-C = C$$

olduğu düşünüldüğünde :

$$\begin{aligned} XC^-CP^- &= X(XQ_M)^-\left[(XQ_M)'\right]^-(XQ_M)'(XQ_M)P^- \\ &= X(XQ_M)^-\left[(XQ_M)(XQ_M)^-\right]'XQ_MP^- \\ &= X(XQ_M)^-(XQ_M)(XQ_M)^-(XQ_M)P^- \\ &= X(XQ_M)^-(XQ_M)P^- \end{aligned}$$

elde edilir. Burada :

$(I-M^-M)(XQ_M)^- = (XQ_M)^-$ olduğundan;

$$\begin{aligned} XC^-CP^- &= X(I-M^-M)(XQ_M)^-(XQ_M)P^- \\ &= (XQ_M)P^- \\ &= X(I-M^-M)P^- \\ &= X(I-M^-M)(I-H^-H)P^- \\ &= PP^- \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $XC^-X'PP^- = PP^-$ eşitliğinin doğruluğu kanıtlanır. Buradan da $(XC^-X'-PP^-)$ matrisinin idempotent olduğu sonucuna varılır. Şu halde;

$$R(XC^-X'-PP^-) = \dot{I}z(XC^-X'-PP^-) \text{ ve } R(I-XC^-X') = \dot{I}z(I-XC^-X')$$

bağıntıları yazılabilir. Buna göre $\frac{Q_1}{Q_2} \cdot \frac{s_2}{s_1}$ rastgele değişkeni, Teorem2.1.4 nedeniyle s_1 ve s_2 serbestlik dereceli bir F-dağılımına sahiptir.

Varyans analizi (ANOVA) tablosu aşağıdaki biçimde verilir.

Varyans Kaynağı	Serbestlik Derecesi	Kareler Toplamı	Kareler Ortalaması
τ ya göre düzeltilmiş	s_1	Q_1	Q_1/s_1
Hata	s_2	Q_0	Q_0/s_2
Genel Toplam	s_1+s_2	Q_1+Q_0	

Böylece H_0 hipotezini test etmek için kritik bölge:

$$\frac{Q_1}{Q_0} \cdot \frac{s_2}{s_1} \geqslant F_{1-\alpha}(s_1, s_2)$$

eşitsizliği ile belirlenir.

BÖLÜM-IV

KESTİRİLEMEZ KISITLAMALARA BAĞLI NORMAL DENKLEMLER

(1.1.1) Modelinde $e \sim N(0, \sigma^2 I_n)$ olmak üzere $M\beta = \eta$ kısıtlaması altında β nın en iyi lineer kestiricisi (3.1.4) ile verilir. Bu kısıtlamada $\eta = \emptyset$ alındığında kısıtlamalara kestirilemez kısıtlamalar denir.

4.1 KESTİRİLEMEZ KISITLAMALARA BAĞLI NORMAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

(1.1.1) Modelinde $e \sim N(0, \sigma^2 I_n)$ normallik varsayımı altında $M\beta = \emptyset$ kestirilemez parametrik kısıtlamalarına bağlı olarak $X'X\beta = X'Y$ normal denklemlerinin çözümü Gerig ve Gallant (1975) de ele alındı.

Onların çalışmasında, kestirilememeden dolayı $\delta' X = \rho' M$ olacak biçimde sıfırdan farklı δ ve ρ vektörlerinin var olmıyacağı söylendikten sonra $M\beta = \emptyset$ kısıtlamalarının kestirilemez olması koşuluyla $C^- = (Q_M X'XQ_M)^-$ matrisinin $X'X$ in genelleştirilmiş inversi olduğu aşağıdaki teoremle verildi.

<u>TEOREM 4.1.1</u> Eğer $\delta' X = \rho' M$ olacak biçimde sıfır olmayan δ ve ρ vektörleri yoksa bu taktirde $(Q_M X'X\, Q_M)^-$ matrisi $(X'X)$ genelleştirilmiş inversidir.

<u>KANITLAMA</u> :

$$T = \left[\begin{array}{c:c} I & -XM^- \\ \hdashline \emptyset & I \end{array}\right] \quad \text{ve} \quad Z = \left[\begin{array}{c} XQ_M \\ \hdashline M \end{array}\right] = T \left[\begin{array}{c} X \\ \hdashline M \end{array}\right] \qquad (4.1.1)$$

olsun. T singüler olmadığından Z ve $\left[\begin{array}{c} X \\ \hdashline M \end{array}\right]$ matrislerinin rankları aynıdır. Mademki X ve M nin satırlarıyla gerilen lineer uzaylar hipotez nedeniyle ayrıktır.

O halde

$$R \left[\begin{array}{c} X \\ \hdashline M \end{array}\right] = R(X) + R(M) \qquad (4.1.2)$$

olarak yazarız. XQ_M ve M nin satırları tarafından gerilen lineer uzaylar ortogonal olduğundan $R(Z) = R(XQ_M) + R(M)$ dir. Böylece rank (XQ_M) = rank (X) bulunur.

Mademki, (XQ_M) nin sütunları X in sütunlarının lineer kombinasyonlarıdırlar ve iki matrisin rankları eşittir, o halde $XQ_M = XS$ olacak şekilde singüler olmayan bir S matrisi mevcuttur. Böylece;

$$\begin{aligned} X'X(Q_MX'XQ_M)^-X'X &= S'^{-1}S'X'XQ_M(Q_MX'XQ_M)^-Q_MX'XSS^{-1} \\ &= S'^{-1}Q_MX'XQ_M(Q_MX'XQ_M)^-Q_MX'XQ_MS^{-1} \\ &= \underbrace{S'^{-1}Q_MX'}_{X'}\underbrace{XQ_MS^{-1}}_{X} \\ &= X'X \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da, teoremin varsayımları altında $(Q_MX'XQ_M)^-$ matrisinin X'X in genelleştirilmiş inversi olduğu kanıtlanır. Buna göre; Bölüm III de sözü geçen $M\beta = \eta$ kısıtlamasındaki η vektörünün sıfıra eşit alınması durumunda $e \sim N(0, \sigma^2 I_n)$ normallik varsayımı altında (1.1.1) modelinden $M\beta = \emptyset$ ve $W\beta = v$ kısıtlamalarına bağlı olarak ortaya konacak (3.2.10) rastgele değişkeninin belirteceği test istatistiği; $C^- = (Q_MX'XQ_M)^- = (X'X)^-$ olması nedeniyle:

$$F = \frac{(Y-XH^-v)'\left[X(X'X)^-X'-PP^-\right](Y-XH^-v)}{Y'\left[I-X(X'X)^-X'\right]Y} \cdot \frac{s}{t} \qquad (4.1.3)$$

ya da

$$F = \frac{(Y-XH^-v)'\left[X(X'X)^-X'-PP^-\right](Y-XH^-v)}{(Y-XH^-v)'\left[I-X(X'X)^-X'\right](Y-XH^-v)} \cdot \frac{s}{t}$$

biçiminde olacaktır. Burada $s = \text{İz}\left[I-X(X'X)^-X'\right]$ ve $\text{İz}\left[X(X'X)^-X'-PP^-\right] = t$ dir.

C^- yi hesaplamak, $(X'X)^-$ yi hesaplamaya göre oldukça güçtür. Bu nedenle (1.1.1) modelinde $e \sim N(0, \sigma^2 I_n)$ normallik varsayımı ve $M\beta = \emptyset$, $W\beta = v$ kısıtlamaları altında (3.2.10) test istatistiğinin kolayca hesaplanabileceği görülür.

Şimdi (1.1.1) modelinde $e \sim N(0, \sigma^2 V)$ normallik varsayımı altında $M\beta = \emptyset$ kestirilemez lineer parametrik kısıtlamalarına bağlı olarak $X'V^{-1}X\beta = X'V^{-1}Y$ normal denklemlerinin çözümü problemini ele alalım. Burada, X: nxp matrisi isteksel ranklı ve V kovaryans matrisi singüler değildir. Bu durumda :

$\Gamma = [Q_M X' V^{-1} X\, Q_M]^-$ matrisinin $(X'V^{-1}X)$ nin genelleştirilmiş inversi olduğunu gösterebilirsek, o taktirde görürüz ki : $\hat{\beta} = \Gamma X' V^{-1} Y$, normal denklemlerin bir çözümüdür.

V matrisi pozitif definit olduğundan $V^{-1} = V^{-\frac{1}{2}} V^{-\frac{1}{2}}$ olarak yazılabilir. Burada $V^{-\frac{1}{2}}$ matrisine V^{-1} matrisinin karekökü denir. Şöyleki; pozitif semi-definit V matrisini gözönüne alalım. V matrisi aşağıdaki gibi köşegenleştirilsin :

$$T' V T = \Lambda \qquad (4.1.4)$$

Burada T ortagonal bir matristir. $B^2 = V$ olan herhangibir B matrisine; V matrisinin karekökü denir. Açık olarak, $T\Lambda^{\frac{1}{2}}T'$ bir karekök olacaktır. Burada; $\Lambda^{\frac{1}{2}}$ köşegen elemanları karşılıklı olarak Λ köşegen matrisinin köşegen elemanlarının karekökü olan bir köşegen matristir. V matrisinin genelleştirilmiş inversi V^- olsun. Bu taktirde $V^- = T\Lambda^- T'$ olarak yazılabilir. Burada; Λ^- matrisi: sıfır olmayan elemanları Λ nın sıfır olmayan köşegen elemanlarının tersinden; sıfır elemanları, Λ nın sıfır köşegen elemanlarından karşılıklı olarak oluşan bir köşegen matristir. Bu taktirde $(V^{-\frac{1}{2}}) = T(\Lambda^-)^{\frac{1}{2}}T'$ matriside V^- matrisinin karekökü olacaktır. Böylece

$$(V^{\frac{1}{2}})^- = (T\Lambda^{\frac{1}{2}}T')^-$$
$$= T(\Lambda^{\frac{1}{2}})^- T'$$
$$= T(\Lambda^-)^{\frac{1}{2}} T'$$

yani, $(V^-)^{\frac{1}{2}} = (V^{\frac{1}{2}})^-$ eşitliğini buluruz. V pozitif **definit** olduğunda :

$$V^{\frac{1}{2}} = T\Lambda^{\frac{1}{2}}T' \text{ ve } V^{-\frac{1}{2}} = T\Lambda^{-\frac{1}{2}}T' \text{ olarak bulunur.}$$

[Kreijger ve Neudecker (1977)]

Şimdi aşağıdaki teoremi verebiliriz.

TEOREM 4.1.2. Eğer $\delta' V^{-\frac{1}{2}} X = \rho' M$ olacak biçimde sıfır olmayan δ, ρ vektörleri yoksa; o zaman :

$(Q_M X' V^{-1} X\, Q_M)^-$ matrisi $X'V^{-1}X$ nin genelleştirilmiş inversidir.

KANITLAMA :

$$T=\left[\begin{array}{c|c} I & -V^{-1/2}XM^{-} \\ \hline 0 & I \end{array}\right] \quad \text{ve} \quad Z=\left[\begin{array}{c} V^{-1/2}XQ_M \\ \hline M \end{array}\right]=T\left[\begin{array}{c} V^{-1/2}X \\ \hline M \end{array}\right] \qquad (4.1.5)$$

olsun. T singüler olmadığından Z ve $\left[\begin{array}{c} V^{-1/2}X \\ \hline M \end{array}\right]$ nin rankları aynıdır. Mademki, $V^{-1/2}X$ ve M nin satırlarıyla gerilen lineer uzaylar hipotez nedeniyle ayrıktırlar. O halde :

$$R\left[\begin{array}{c} V^{-1/2}X \\ \hline M \end{array}\right]=R(V^{-1/2}X)+R(M) \qquad (4.1.6)$$

yazılır. $V^{-1/2}XQ_M$ ve M nin satırları tarafından gerilen lineer uzaylar ortogonal olduğundan $R(Z)=R(V^{-1/2}XQ_M)+R(M)$ dir. Böylece, $R(V^{-1/2}XQ_M)=R(V^{-1/2}X)$ bulunur. Mademki, $(V^{-1/2}XQ_M)$ nin sütunları, $V^{-1/2}X$ nin sütunlarının lineer kombinasyonlarıdırlar ve iki matrisin rankları eşittir. O halde; $V^{-1/2}XQ_M=V^{-1/2}XU$ olacak biçimde singüler olmayan bir U matrisi vardır.

Böylece:

$$\begin{aligned}
&X'V^{-1}X(Q_MX'V^{-1}XQ_M)^{-}X'V^{-1}X=\\
&U'^{-1}U'X'V^{-1/2}V^{-1/2}X(Q_MX'V^{-1}XQ_M)^{-}X'V^{-1/2}V^{-1/2}XUU^{-1}\\
&U'^{-1}\underbrace{U'X'V^{-1/2}}_{Q_MX'V^{-1/2}}V^{-1/2}XQ_M(Q_MX'V^{-1}XQ_M)^{-}Q_MX'V^{-1/2}\underbrace{V^{-1/2}XU}_{V^{-1/2}XQ_M}U^{-1}\\
&=U'^{-1}Q_MX'V^{-1/2}V^{-1/2}XQ_M(Q_MX'V^{-1}XQ_M)^{-}Q_MX'V^{-1/2}V^{-1/2}XQ_MU^{-1}\\
&=\underbrace{U'^{-1}Q_MX'V^{-1/2}}_{X'V^{-1/2}}\underbrace{V^{-1/2}XQ_MU^{-1}}_{V^{-1/2}X} \qquad (4.1.7)\\
&=X'V^{-1/2}V^{-1/2}X\\
&=X'V^{-1}X
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde, $\tilde{\beta}=\Pi X'V^{-1}Y$ normal denklemlerin çözümüdür.

(1.1.1) Genel lineer modelinin isteksel ranklı ve e hata vektörünün 0 ortalama ve V singüler kovaryans matrisli bir normal dağılıma sahip olması durumunda; $M\beta = \eta$ kısıtlamasına bağlı olarak, β için elde edilen en iyi lineer kestiricinin :

$$\tilde{\beta} = M^{-}\eta + (A_1 + A_2)\ (Y - XM^{-}\eta) \tag{4.1.8}$$

bağıntısıyla verildiği bilinmektedir. [Hallum, Lewis, ve Boulion (1973)] Burada ;

$$A_1 = (Q_M X' V^{-} X Q_M)^{-}\ X' V^{-} \tag{4.1.9}$$

ve

$$A_2 = \left[Q_M X'(I - VV^{-})\ X Q_M\ X'\ (I - VV^{-})\right]^{-} \tag{4.1.10}$$

dır. Bundan başka :

$$\text{Kov}\ (\tilde{\beta}) = (Q_M X' V^{-} X Q_M)^{-} \tag{4.1.11}$$

biçimindedir.

Şimdi, $M\beta = \emptyset$ kestirilmez lineer parametrik kısıtlamaları söz konusu olduğunda (1.1.1) genel lineer modeli üzerine koyulan yukarıdaki varsayımlar altında; $(Q_M X' V^{-} X Q_M)^{-}$ matrisinin $X' V^{-} X$ nin genelleştirilmiş inversi olduğunu göstererek yukarıdaki bağıntıların :

$$A_1 = (X' V^{-} X)^{-}\ X' V^{-}\ , \tag{4.1.12}$$

$$A_2 = \left[Q_M X'(I - VV^{-}) X\ Q_M\right]^{-} X'(I - VV^{-}) \tag{4.1.13}$$

ve

$$\text{Kov}\ (\tilde{\beta}) = (X' V^{-} X)^{-} \tag{4.1.14}$$

biçiminde yazılabileceği gösterilir.

<u>TEOREM 4.1.3.</u> Eğer $\delta'(V^{\frac{1}{2}})^{-} X = \rho' M$ olacak biçimde sıfır olmayan δ ve ρ vektörleri yoksa bu taktirde $(Q_M X_1' V^{-} X\ Q_M)^{-}$ matrisi $X' V^{-} X$,nin genelleştirilmiş inversidir. Burada; $(V^{\frac{1}{2}})^{-}$ matrisi daha önce tanımlandı ve

$$(V^{\frac{1}{2}})^{-}\ (V^{\frac{1}{2}})^{-} = V^{-} \text{ olduğu söylendi.} \tag{4.1.15}$$

<u>KANITLAMA</u> :

$$T = \begin{bmatrix} I & \vdots & -(V^{\frac{1}{2}})^{-} X M^{-} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \emptyset & \vdots & I \end{bmatrix} \text{ ve } Z = \begin{bmatrix} (V^{\frac{1}{2}})^{-}\ X Q_M \\ \cdots \\ M \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} (V^{\frac{1}{2}})^{-} X \\ \cdots \\ M \end{bmatrix}$$

olarak belirlendikten sonra Teorem 4.1.1. nin kanıtlamasındaki yolu izleyerek : $(V^{\frac{1}{2}})^- X Q_M = (V^{\frac{1}{2}})^- X K$ olacak biçimde singüler olmayan bir K matrisinin varlığını ortaya koyarız. Böylece ;

$$X'V^-X(Q_M X'V^-XQ_M)^- X'V^-X = K^{-1}K'KX'(V^{\frac{1}{2}})^- X(Q_M X'V^-XQ_M)^- X'(V^{\frac{1}{2}})^-(V^{\frac{1}{2}})^- XKK^{-1}$$

$$= K^{-1}\underbrace{K'X'(V^{\frac{1}{2}})^-}_{Q_M X'(V^{\frac{1}{2}})^-}(V^{\frac{1}{2}})^- XQ_M(Q_M X'V^-XQ_M)^- Q_M X'(V^{\frac{1}{2}})^- \underbrace{(V^{\frac{1}{2}})^- XK}_{(V^{\frac{1}{2}})^- XQ_M}K^{-1} \qquad (4.1.16)$$

$$= K^{-1} Q_M X'(V^{\frac{1}{2}})^-(V^{\frac{1}{2}})^- XQ_M(Q_M X'V^-XQ_M)^- Q_M X'(V^{\frac{1}{2}})^- XQ_M K^{-1}$$

$$= \underbrace{K^{-1} Q_M X'(V^{\frac{1}{2}})^-}_{X'(V^{\frac{1}{2}})^-} \underbrace{(V^{\frac{1}{2}})^- XQ_M K^{-1}}_{(V^{\frac{1}{2}})^- X}$$

$$= X'V^-X$$

elde ederiz. Bu sonuç $(Q_M X'V^-XQ_M)^-$ matrisinin $X'V^-X$ nin genelleştirilmiş inversi olduğu kıntlanır.

Şimdi (1.1.1) genel lineer modelinde $e \sim N(0, \sigma^2 V)$ normallik varsayımı altında $M\beta = \emptyset$ kestirilemez lineer parametrik kısıtlamalarına bağlı kalarak V kovaryans matrisinin singüler olmaması durumunda $(Q_M X'V^{-1}XQ_M)^-$ matrisinin $X'V^{-1}X$ matrisinin genelleştirilmiş inversi olduğunu, modeli küresel hatalara sahip bir modele dönüştürdükten sonra Teorem 4.1.1. i esas alarak gösterelim. Yani bu durumda da $\beta = \Pi X' V^{-1}Y$ nin normal denklemlerin bir çözümü olduğunu yeniden elde edelim.

V pozitif definit olduğundan (1.1.1) lineer modelinin $P'P=V^{-1}$ olacak biçimde seçilen singüler olmayan bir P dönüşüm matrisiyle küresel rastgele hata vektörüne sahip

$$PY = PX\beta + P e \qquad (4.1.17)$$

modeline dönüştürüldüğünü kısım 1.4'de gösterdik.

Bu yeni modelde :

$$Y^* = PY,\ X^* = PX \text{ ve } e^* = P e$$

alarak dönüşüm modeli :

$$Y^* = X^* \beta + e^* \qquad (4.1.18)$$

biçiminde yazılır. (4.1.18) modelinde $M\beta = \eta$ kısıtlamalarına bağlı olarak bulunan β nın en iyi lineer kestiricisi; (3.1.4) nedeniyle

$$\tilde{\beta}^{*} = C^{*}(X^{*\prime}Y^{*} - X^{*\prime}X^{*}M^{-}\eta) + M^{-}\eta \qquad (4.1.19)$$

biçiminde yazılır. Burada $C^{*} = (Q_M X^{*\prime}X^{*} Q_M)^{-}$ (4.1.20) dır.

TEOREM 4.1.4. Eğer $\delta' X^{*} = \rho' M$ olacak biçimde 0 olmayan δ ve ρ vektörleri yoksa bu taktirde :

C^{*} matrisi $X^{*\prime}X^{*}$ matrisinin genelleştirilmiş inversidir.

KANITLAMA :

$$T^{*} = \left[\begin{array}{c|c} I & -X^{*}M^{-} \\ \hline 0 & I \end{array}\right] \quad \text{ve} \quad Z^{*} = \left[\begin{array}{c} X^{*}Q_M \\ \hline M \end{array}\right] = T^{*}\left[\begin{array}{c} X^{*} \\ \hline M \end{array}\right] \qquad (4.1.21)$$

olsun. T^{*} singüler olmadığından Z^{*} ve $\left[\begin{array}{c} X^{*} \\ \hline M \end{array}\right]$ nin rankları aynıdır. Mademki, X^{*} ve M nin satırlarıyla gerilen lineer uzaylar hipotez nedeniyle ayrıktırlar, o halde :

$$R\left[\begin{array}{c} X^{*} \\ \hline M \end{array}\right] = R(X^{*}) + R(M) \qquad (4.1.22)$$

bağıntısını yazarız. $X^{*}Q_M$ ve M nin satırları tarafından gerilen lineer uzaylar ortogonal olduğundan $R(Z^{*}) = R(X^{*}Q_M) + R(M)$ dir. Böylece $R(X^{*}Q_M) = R(X^{*})$ bulunur. Mademki, $(X^{*}Q_M)$ nin sütunları X^{*} ın sütünlarının lineer kombinasyonlarıdırlar ve iki matrisin rankları eşittir. O halde $X^{*}Q_M = X^{*}S^{*}$ olacak biçimde singüler olmayan bir S^{*} matrisi vardır. Böylece;

$$\begin{aligned}
X^{*\prime}X^{*}(Q_M X^{*\prime}X^{*}Q_M)^{-}X^{*\prime}X^{*} &= S^{*\prime -1} S^{*\prime}X^{*\prime}X^{*}(Q_m X^{*\prime}X^{*}Q_m)^{-}X^{*\prime}X^{*}S^{*}S^{*-1} \\
&= S^{*\prime -1} S^{*\prime}X^{*\prime}X^{*}Q_M(Q_M X^{*\prime}X^{*}Q_M)^{-}Q_M X^{*\prime}X^{*}S^{*}S^{*-1} \\
&= S^{*\prime -1} Q_M X^{*\prime}X^{*}Q_M(Q_M X^{*\prime}X^{*}Q_M)^{-}Q_M X^{*\prime}X^{*}Q_M S^{*-1} \\
&= S^{*\prime -1} Q_M X^{*\prime}X^{*}Q_M S^{*-1} \\
&= X^{*\prime}X^{*} \qquad (4.1.23)
\end{aligned}$$

olur.

uradan da görüldüğü gibi $(Q_M X^{*'}X^{*} Q_M)^-$ matrisinin $X^{*'}X^{*}$ nin genel-
eştirilmiş inversi olduğu sonucu çıkar. Yani;

$(Q_M X'P' PX Q_M)^- = (Q_M X'V^{-1}X Q_M)^-$ matrisi $X'P'PX = X'V^{-1}X$ matrisinin genelleştirilmiş inversidir. Böylece teoremin doğruluğu anıtlanır.

Genel olarak, V kovaryans matrisinin singüler olması yani pozitif semi-definit olması durumunda; eğer V nin sütun uzayı X i htiva ederse, bu taktirde $X = V\varphi$ yazılabilir. Buna göre $\varphi'V'(I-VV^-)$ ifadesi $(VV^-)' = VV^- = (V^-)'V'$ eşitliği nedeniyle

$$\varphi'V'(I-VV^-) = \varphi'V'[I-(V^-)'V']$$
$$= \varphi'[V' - V'(V^-)'V']$$
$$= 0$$

lur. Böylece (4.1.10) bağıntısının sıfıra eşit olduğu sonucu elde dilir. Bu durumda (4.1.18) en iyi lineer kestiricisi :

$$\tilde{\beta} = M^-\eta + A_1(Y - XM^-\eta) = M^-\eta + (X'V^-X)^-X'V^-(Y-XM^-\eta)$$

içimine girer. Burada $M\beta = \emptyset$ alındığında $\tilde{\beta} = A_1 Y$ elde edilir. u da Teorem 4.1.3 e göre :

$$\tilde{\beta} = (X'V^- X)^- X'V^- \text{ olarak belirlenir.}$$

Şimdi yukarıda verdiğimiz teoremlerin en genel hali olan Teorem 4.1.3 ün geçerliliğini göstereceğiz.

4.2. UYGULAMA

$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ij}$ $i=1,2,\ j=1,2$ iki-yönlü etkileşimsiz sınıflama modelini gözönüne alalım. Böyle bir model için genel açıklama kısım 3.3 de verildi. Bu model $W = T\beta + e$ matris formunda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{21} \\ y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ e_{21} \\ e_{22} \end{bmatrix} \qquad (4.2.1)$$

Burada $e \sim N(0, \sigma^2 I)$ biçiminde bir normal dağılıma sahiptir.

(4.2.1) modeli

$$\Psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4.2.2.)$$

matrisini kullanarak $\Psi W = \Psi T\beta + \Psi e$ formundaki başka bir modele dönüştürülürse yeni model:

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ y_{11}+y_{12}+y_{21}+y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ e_{21} \\ e_{22} \end{bmatrix}$$

(4.2.3)

olarak elde edilir. Bu model

$$Y = \Psi W, \quad X = \Psi T \text{ ve } \varepsilon = \Psi e \qquad (4.2.4)$$

olmak koşuluyla $Y = X\beta + \varepsilon$ formunda yazılabilir.

Burada

$$\begin{aligned} V(\varepsilon) &= E(\varepsilon\varepsilon') \\ &= E(\Psi e e' \Psi') \\ &= \Psi E(ee')\Psi' \\ &= \sigma^2 \Psi\Psi' \end{aligned} \qquad (4.2.5)$$

ve $\quad E(\varepsilon) = \Psi E(e) = 0 \qquad (4.2.6)$

dır.

$\Psi\Psi' = V$ denirse $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 V)$ olarak yazılır. Buna göre

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad (4.2.7)$$

biçiminde bir matristir. V matrisinin singüler olduğu determinantının sıfıra eşit olması nedeniyle hemen söylenebilir.

O halde (4.2.3) modeli singüler kovaryans matrisli bir lineer modeldir.

Şimdi (4.2.3) modelinde $\sum \alpha_i = 0$ ve $\sum \beta_j = 0$ kısıtlamaları yani

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 0 \\ \\ 0 \end{matrix} \qquad (4.2.8)$$

lineer parametrik kısıtlamaları altında β parametre vektörünün $\tilde{\beta}$ en iyi lineer kestiricisini arıyalım.

(4.1.8) nedeniyle $\tilde{\beta}$ aşağıdaki biçimde belirlenir.

$$\tilde{\beta} = (A_1 + A_2)\, Y \qquad (4.2.9)$$

Burada A_1 ve A_2 (4.1.9) ve (4.1.10) bağıntılarında verildiği gibidir.

V matrisinin karakteristik (eigen) değerleri 1;1;1;5;0 olduğundan (4.1.4) bağıntısına göre V matrisini

$$T'VT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde köşegenleştiren ortogonal T matrisi:

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{20}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{20}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{20}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{3}{\sqrt{12}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{20}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{20}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \qquad (4.2.10)$$

olarak belirlenir.

Bölüm IV e göre

$$(V^{\frac{1}{2}})^- = T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} T' \qquad (4.2.11)$$

olduğundan

$$
(\overset{1}{\overline{V2}})^{-}=\begin{bmatrix}
(\frac{9}{12}+\frac{1}{10\sqrt{20}}) & (\frac{-3}{12}+\frac{1}{10\sqrt{20}}) & (\frac{-3}{12}+\frac{1}{10\sqrt{20}}) & (\frac{-3}{12}+\frac{1}{10\sqrt{20}}) & \frac{4}{10\sqrt{20}} \\
(\frac{-3}{12}+\frac{1}{10\sqrt{20}}) & (\frac{9}{12}+\frac{1}{10\sqrt{20}}) & (\frac{-3}{12}+\frac{1}{10\sqrt{20}}) & (\frac{-3}{12}+\frac{1}{10\sqrt{20}}) & \frac{4}{10\sqrt{20}} \\
(\frac{-3}{12}+\frac{1}{10\sqrt{20}}) & (\frac{-3}{12}+\frac{1}{10\sqrt{20}}) & (\frac{9}{12}+\frac{1}{10\sqrt{20}}) & (\frac{-3}{12}+\frac{1}{10\sqrt{20}}) & \frac{4}{10\sqrt{20}} \\
(\frac{-3}{12}+\frac{1}{10\sqrt{20}}) & (\frac{-3}{12}+\frac{1}{10\sqrt{20}}) & (\frac{-3}{12}+\frac{1}{10\sqrt{20}}) & (\frac{9}{12}+\frac{1}{10\sqrt{20}}) & \frac{4}{10\sqrt{20}} \\
\frac{4}{10\sqrt{20}} & \frac{4}{10\sqrt{20}} & \frac{4}{10\sqrt{20}} & \frac{4}{10\sqrt{20}} & \frac{16}{10\sqrt{20}}
\end{bmatrix} \tag{4.2.12}
$$

olarak bulunur.(4.2.4) bağıntılarından ikincisi (4.2.12) nedeniyle

$$
X=\psi T=\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
4 & 2 & 2 & 2 & 2
\end{bmatrix} \tag{4.2.13}
$$

olarak belirlenir. (4.2.12) ve (4.2.13) bağıntılarından

$$
(\overset{1}{\overline{V2}})^{-}X=\begin{bmatrix}
\frac{2}{\sqrt{20}} & (\frac{6}{12}+\frac{1}{\sqrt{20}}) & (\frac{-6}{12}+\frac{1}{\sqrt{20}}) & (\frac{6}{12}+\frac{1}{\sqrt{20}}) & (\frac{-6}{12}+\frac{1}{\sqrt{20}}) \\
\frac{2}{\sqrt{20}} & (\frac{6}{12}+\frac{1}{\sqrt{20}}) & (\frac{-6}{12}+\frac{1}{\sqrt{20}}) & (\frac{-6}{12}+\frac{1}{\sqrt{20}}) & (\frac{6}{12}+\frac{1}{\sqrt{20}}) \\
\frac{2}{\sqrt{20}} & (\frac{-6}{12}+\frac{1}{\sqrt{20}}) & (\frac{6}{12}+\frac{1}{\sqrt{20}}) & (\frac{6}{12}+\frac{1}{\sqrt{20}}) & (\frac{-6}{12}+\frac{1}{\sqrt{20}}) \\
\frac{2}{\sqrt{20}} & (\frac{-6}{12}+\frac{1}{\sqrt{20}}) & (\frac{6}{12}+\frac{1}{\sqrt{20}}) & (\frac{-6}{12}+\frac{1}{\sqrt{20}}) & (\frac{6}{12}+\frac{1}{\sqrt{20}}) \\
\frac{8}{\sqrt{20}} & \frac{4}{\sqrt{20}} & \frac{4}{\sqrt{20}} & \frac{4}{\sqrt{20}} & \frac{4}{\sqrt{20}}
\end{bmatrix}
$$

bulunur. (4.2.14)

(4.2.8) bağıntısına göre

$$M=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4.2.15)$$

olarak yazılır. (4.2.14) ve (4.2.15) bağıntılarındaki değerler gözönüne alındığında $\delta'(V^{\frac{1}{2}})^{-}X=\rho' M$ olacak biçimde sıfır olmayan δ ve ρ vektörlerinin bulunamıyacağı görülür. O halde Teorem 4.1.3 ün hipotezi gerçeklenir.

(4.2.14) bağıntısından Transpoz alınarak $X'(V^{\frac{1}{2}})^{-}$ bulunduktan sonra $X'V^{-}X$ hesaplanırsa:

$$X'V^{-}X=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad (4.2.16)$$

matrisi elde edilir. (4.2.15) matrisinin g-inversi hesaplanırsa

$$M^{-}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \qquad (4.2.17)$$

bulunur. Buna göre

$$C^{-}=(Q_M X'V^{-}XQ_M)^{-}=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & -0.25 & 0 & 0 \\ 0 & -0.25 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & -0.25 \\ 0 & 0 & 0 & -0.25 & 0.25 \end{bmatrix} \qquad (4.2.18)$$

dır. (4.2.16) ve (4.2.18) bağıntılarından

$$(X'V^{-}X)\,C^{-}\,(X'V^{-}X)=X'V^{-}X \qquad (4.2.19)$$

bağıntısı gerçeklenir. Böylece C^{-} matrisinin $X'V^{-}X$ nin g-inversi olduğu kanıtlanarak Teorem 4.1.3 doğrulanır.

ayrıca

$$V^- = \begin{bmatrix} 0.76 & -0.24 & -0.24 & -0.24 & 0.04 \\ -0.24 & 0.76 & -0.24 & -0.24 & 0.04 \\ -0.24 & -0.24 & 0.76 & -0.24 & 0.04 \\ -0.24 & -0.24 & -0.24 & 0.76 & 0.04 \\ 0.04 & 0.04 & 0.04 & 0.04 & 0.16 \end{bmatrix} \qquad (4.2.20)$$

olduğundan

$$VV^- = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.2 & -0.2 & -0.2 & 0.2 \\ -0.2 & 0.8 & -0.2 & -0.2 & 0.2 \\ -0.2 & -0.2 & 0.8 & -0.2 & 0.2 \\ -0.2 & -0.2 & -0.2 & 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \qquad (4.2.21)$$

ve

$$(I - VV^-) = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & -0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & -0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & -0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & -0.2 \\ -0.2 & -0.2 & -0.2 & -0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \qquad (4.2.22)$$

olarak belirlenir. (4.2.13) ve (4.2.22) bağıntılarının gözönüne alınmasıyla

$$X'(I - VV^-) = \emptyset \qquad (4.2.23)$$

ve (4.1.10) bağıntısı nedeniyle de $A_2 = 0$ bulunur.

O halde (4.2.9) bağıntısıyla verilen $\tilde{\beta}$ en iyi lineer kestiricisi

$$\tilde{\beta} = A_1 Y$$
$$= (X'V^- X)^- X'V^- Y \qquad (4.2.24)$$

olarak yazılır.

TAM RANKLI OLMAYAN SABİT MODEL

5.1. TAM RANKLI OLMAYAN SABİT MODEL İÇİN HİPOTEZ TESTLERİ

(1.1.1) modeli; Tanım (1.3.1) de ifade olunduğu biçimde tam ranklı olmayan bir model olsun ve w böyle bir modeli göstersin. Bu durumda X matrisi ve β vektörü sırasıyla $X:nxp=(X_1 \vdots X_2)$ ve $\beta':1xp = (\gamma' \vdots \delta')$ gibi parçalansın. Burada X_1 matrisi : nxa boyutlu, X_2 matrisi : nx(p-a) boyutlu bilinenlerin birer alt matrisidirler. γ' : 1xa boyutlu δ' : 1x(p-a) boyutlu kestirilecek parametre vektörleridirler. Bilindiği gibi bu taktirde, w modeli için elde edilen $S\hat{\beta}=X'Y$ normal denklemleri β için tek bir çözüm vermez. Sadece, $U = L\beta$ biçiminde m tane lineer kestirilebilir fonksiyonla tek değere ulaşılır. Yani ; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ parametrelerin böyle fonksiyonlarında $LH = L$ koşulu sağlandığında β için bir tek değere ulaşılır. Burada; $S= X'X, G=S^-$, $H= GS$ ve H matrisi idempotentdir. Ayrıca L matrisi : mxp boyutlu ve isteksel ranklı bilinenlerin bir matrisidir. U vektörü ise : mx1 boyutlu bilinenlerin bir vektörüdür.

Bu açıklamalar altında, w modeli ve $L\beta = U_o$ hipotezi varsayımı nedeniyle :

$$F = \frac{(L\hat{\beta} - U_o)'(LGL')^- (L\hat{\beta}-U_o)}{Y'(I-XX^-)\,Y} \cdot \frac{n-q}{g} \qquad (5.1.1)$$

rastgele değişkeni; Teorem 3.1.4. nedeniyle g ve n-q serbestlik dereceli F dağılımına sahiptir. Burada; $n-q = İz(I-XX^-)$ ve $q=R(XX^-)$ $g = İz\ (XGL')\ (LGL')^-\ (LGX')$ dir.

Gerçekten ;

$LH = L$ koşulunu kullanarak (5.1.1) rastgele değişkeninin payını:

$$\begin{aligned}(L\hat{\beta} - U_o)'\,(LGL')^-\,(L\hat{\beta} - U_o) &= (LGX'Y - U_o)'(LGL')^-(LGX'Y-U_o)\\ &=(LGX'Y-LL^-U_o)'(LGL')^-(LGX'Y-LL^-U_o)\\ &=\left[LGX'(Y-XL^-U_o)\right]'(LGL')^-LGX'\,(Y-XL^-U_o)\\ &=(Y-XL^-U_o)'XGL'(LGL')^-LGX'(Y-XL^-U_o)\end{aligned}$$

(5.1.2)

olarak yazarız. Burada, $L\beta = U_o$ hipotezinin testedilebilir olması varsayımı nedeniyle L; X'X matrisinin satır uzayındadır.

Bu nedenle $LGX'X = L$ dir. Ayrıca, $L\beta = U_o$ nin bağdaşabilirliğinden $LL^- U_o = U_o$ dır. [John ve Smith (1974)]

Paydaya gelince; onu da :

$$Y'(I-XX^-) Y = (Y-XL^- U_o)'(I-XX^-) (Y-XL^- U_o) \quad (5.1.3)$$

biçiminde yazarız.

$$A = XGL' (LGL')^- LGX'$$

ve $\quad B = (I- XX^-) \quad (5.1.4)$

dersek, $A^2 = XGL' (LGL')^- \underbrace{LGX'XGL'}_{L} (LGL')^- LGX'$

$$= XGL'(LGL')^-(LGL') (LGL)^- LGX'$$
$$= XGL'(LGL')^- LGX' \quad (5.1.5)$$
$$= A$$

yani, A matrisinin idempotent olduğunu görürüz. B matrisine gelince:

$$B^2 = (I-XX^-) (I-XX^-) = I-XX^-XX^- + XX^-XX^-$$
$$= I- XX^- \qquad X^- \quad (5.1.6)$$
$$= B$$

dır.Yani,B matrisinin idempotent olduğu görülür. Ayrıca yukarıdan izleneceği üzere $A' = A$ ve $B' = B$ olduğundan A ve B matrisleri simeriktirler.

AB çarpımına gelince; onun da :

$$AB = XGL'(LGL')^-LGX'(I-XX^-) = XGL'(LGL')^-LG(X'-X'XX^-)$$
$$= XGL'(LGL')^-LG(X'-X'(XX^-))$$
$$= XGL'(LGL')^-LG(X'-X'X'^-X')$$
$$= XGL'(LGL')^-LG(0)$$
$$= 0 \quad (5.1.7)$$

olduğu görülür. Böylece, Teorem 2.1.4 ün koşulları bağlandığından iddianın doğruluğu kanıtlanır. Bundan başka, $L\beta$ lineer parametrik fonksiyonları kestirilebilir ve $L\beta = U_o$ denklemi bağdaşabilir olduğundan :

$$E (L\hat{\beta}) = E (LGX'Y)$$
$$= LGX'X\beta$$
$$= L\beta$$

bulunur. Bu taktirde ;

$$
\begin{aligned}
\text{Kov}(L\hat{\beta}) &= E(L\hat{\beta}-L\beta)(L\hat{\beta}-L\beta)' \\
&= E(L\hat{\beta}-LGX'X\beta)(L\hat{\beta}-LGX'X\beta)' \\
&= LE(GX'Y-GX'X\beta)(GX'Y-GX'X\beta)'L' \\
&= LE(GX'(X\beta+e)-GX'X\beta)(GX'(X\beta+e)-GX'X\beta)'L' \qquad (5.1.8)\\
&= LGX'E(ee')XGL' = LGL'\sigma^2
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

Şimdi,

$$
L_{mxp} = \left[\begin{array}{c|c} L1_{txa} & 0_{tx(p-a)} \\ \hline 0_{(m-t)xa} & L_{2(m-t)x(p-a)} \end{array}\right] \qquad (5.1.9)
$$

olarak alalım. Bu durumda :

$$
\text{Kov}(L\hat{\beta}) = L \left[\begin{array}{c|c} E(\hat{\gamma}-\gamma)(\hat{\gamma}-\gamma)' & E(\hat{\gamma}-\gamma)(\hat{\delta}-\delta)' \\ \hline E(\hat{\delta}-\delta)(\hat{\gamma}-\gamma)' & E(\hat{\delta}-\delta)(\hat{\delta}-\delta)' \end{array}\right] L' \qquad (5.1.10)
$$

yazarız. Eğer G matrisi :

$$
G = \left[\begin{array}{c|c} G_{11} & G_{12} \\ \hline G_{21} & G_{22} \end{array}\right] \qquad (5.1.11)
$$

biçiminde parçalanırsa; bu taktirde (5.1.8) bağıntısına göre :

$$
\text{Kov}(L\hat{\beta}) = \left[\begin{array}{c|c} L_1 & 0 \\ \hline 0 & L_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} G_{11} & G_{12} \\ \hline G_{21} & G_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} L_1' & 0 \\ \hline 0 & L_2' \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} L_1G_{11}L_1' & L_1G_{12}L_2' \\ \hline L_2G_{21}L_1' & L_2G_{22}L_2' \end{array}\right]
$$

(5.1.12)

biçiminde yazılır. Böylece, (5.1.10) ve (5.1.12) bağıntılarından :

$$
\text{Kov}(L_1\hat{\gamma}) = \sigma^2 L_1G_{11}L_1', \quad \text{Kov}(L_2\hat{\delta}) = L_2G_{22}L_2'\sigma^2
$$

$$
\text{Kov}(L_1\hat{\gamma}, L_2\hat{\delta}) = \sigma^2 L_1G_{12}L_2', \quad \text{Kov}(L_2\hat{\delta}, L_1\hat{\gamma}) = L_2G_{21}L_1'\sigma^2 \qquad (5.1.13)
$$

bağıntıları elde edilir. Ayrıca, $L\beta = U_0$ denkleminin bağdaşabilirliği nedeniyle yazılan $LL^- U_0 = U_0$ bağıntısıda bu durumda :

$$LL^{-}U_o = \left[\begin{array}{c|c} L_1 & 0 \\ \hline 0 & L_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} L_1^{-} & 0 \\ \hline 0 & L_2^{-} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} U_1 \\ \hline U_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} U_1 \\ \hline U_2 \end{array}\right] \qquad (5.1.14)$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} L_1L_1^{-} & 0 \\ \hline 0 & L_2L_2^{-} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} U_1 \\ \hline U_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} U_1 \\ \hline U_2 \end{array}\right]$$

biçiminde yazılır. Burada $U_o' = (U_1' \vdots U_2')$ olarak parçalandı. Böylece (5.1.14) bağıntısından :

$$L_1L_1^{-}U_1 = U_1 \text{ ve } L_2L_2^{-}U_2 = U_2 \qquad (5.1.15)$$

alt **bağdaşabilirlik koşulları elde edilir.**

Bu açıklamalardan sonra Oktaba, (1968) de L matrisinin tam ranklı matris olması durumunda sunulan Teorem 1 i, L matrisi üzerinde hiçbir rank koşulu koşmaksızın aşağıda sunacağımız iki teoremle genelleştirebiliriz.

<u>TEOREM 6.1.2.</u> X Matrisi ve β vektörünün kısım 5.1.2 deki gibi parçalandığını varsayalım. Bu taktirde, w: $Y=X_1\gamma + X_2\delta + e$ modeli; $L_1\gamma = U_1$ hipotezi varsayımı altında :

$$F = \frac{(L_1\hat{\gamma} - U_1)'\,(L_1G_{11}L_1')^{-}\,(L_1\hat{\gamma} - U_1)}{Y'\,(I-XGX')\,Y} \cdot \frac{n-q}{g_1} \qquad (5.1.16)$$

rastgele değişkeni g_1 ve n-q serbestlik dereceli F- dağılımına sahiptir. Burada, $L_1\gamma$ lineer parametrik fonksiyonlarının $L_1H_{11} = L_1$ ve $L_1H_{12} = 0$ olduğunda kestirilebilir olduğu varsayılmıştır. Ayrıca, $L_1G_{11}L_1$; $L_1\hat{\gamma}$ vektörünün bir kovaryans matrisidir, H_{11} : axa boyutlu bir matris, H_{12} : ax(p-a) boyutlu bir matris,

$$H = GS = \left[\begin{array}{c|c} H_{11} & H_{12} \\ \hline H_{21} & H_{22} \end{array}\right] \text{ ve } G_{11} \text{:axa boyutlu bir matristir} \qquad (5.1.17)$$

<u>KANITLAMA:</u>

$$\hat{\beta}' = [\hat{\gamma}' \vdots \hat{\delta}'] = [GX'Y + (H-I)z]' \qquad (5.1.18)$$

denkleminden $\hat{\gamma}$ ve $\hat{\delta}$ nin sırasıyla, γ ve δ nin kestirimleri olduğu ve bunlarında :

$$\hat{\gamma} = G_{11}X_1'Y + G_{12}X_2'Y + (H_{11} - I_a)z_1 + H_{12}z_2$$

$$\hat{\delta} = G_{22}X_2'Y + G_{21}X_1'Y + (H_{22} - I_{p-a})z_2 \qquad (5.1.19)$$

olarak bulunabileceği hemen görülür. Burada $z' = (z_1' \,\vdots\, z_2')$ alındı.

Şimdi ;

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & \vdots & H_{12} \\ \hline H_{21} & \vdots & H_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & \vdots & G_{12} \\ \hline G_{21} & \vdots & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1'X_1 & \vdots & X_1'X_2 \\ \hline X_2'X_1 & \vdots & X_2'X_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} G_{11}X_1'X_1 + G_{12}X_2'X_1 & \vdots & G_{11}X_2'X_1 + G_{12}X_2'X_2 \\ \hline G_{21}X_1'X_1 + G_{22}X_2'X_1 & \vdots & G_{21}X_1'X_2 + G_{22}X_2'X_2 \end{bmatrix}$$

olacağından; $L_1H_{11} = L_1$ ve $L_1H_{12} = 0$ bağıntıları açık bir biçimde:

$$L_1(G_{11}X_1'X_1 + G_{12}X_2'X_1) = L_1 \text{ ve } L_1(G_{11}X_1'X_2 + G_{12}X_2'X_2) = 0$$

olarak yazılacaktır.

Şimdi (5.1.16) rastgele değişkeninin payını yazacak olursak onun ;

$$(L_1\hat{\gamma} - U_1)'(L_1G_{11}L_1')^-(L_1\hat{\gamma} - U_1) = \{L_1(G_{11}X_1' + G_{12}X_2')(Y - X_1L_1^-U_1)\}'(L_1G_{11}L_1')^- \cdot \{L_1(G_{11}X_1' + G_{12}X_2')(Y - X_1L_1^-U_1)\}$$

$$= (Y - X_1L_1^-U_1)'(X_1G_{11} + X_2G_{12}')L_1'(L_1G_{11}L_1')^-L_1(G_{11}X_1' + G_{12}X_2')(Y - X_1L_1^-U_1) \qquad (5.1.20)$$

biçiminde yazılabileceğini görürüz. Paydasındaki ifadeye gelince :

$$Y'(I - XGX')Y = Y'(I - X(X'X)^-X')Y$$
$$= Y'(I - XX^-)Y$$
$$= (Y - X_1L_1^-U_1)'(I - XX^-)(Y - X_1L_1^-U_1) \qquad (5.1.21)$$

olarak bulunur. Çünkü, $X = (X_1 \,\vdots\, X_2)$ biçiminde parçalandığında:

$$X_1 = (X_1 \,\vdots\, X_2)\begin{bmatrix} I_a \\ \hline 0 \end{bmatrix} = X\begin{bmatrix} I_a \\ \hline 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$X_2 = (X_1 \vdots X_2)\begin{bmatrix} 0 \\ \hdashline I_{p-a} \end{bmatrix} = X \begin{bmatrix} 0 \\ \hdashline I_{p-a} \end{bmatrix} \qquad (5.1.22)$$

biçiminde yazılır. Buradan :

$$X_1' = (I_a \vdots 0)X', \quad X_2' = (0 \vdots I_{p-a})X'$$

elde edilir. Böylece;

$$\begin{aligned} X_1'(I-XX^-) &= X_1'(I-X(X'X)^- X') \qquad (5.1.23)\\ &= (I_a \vdots 0)(X'-X'X(X'X)^-X') \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Yine benzer biçimde :

$$(I-XX^-)X_1 = (I-X(X'X)^-X')X\begin{bmatrix} I_a \\ 0 \end{bmatrix} = (X-X(X'X)^-X'X)\begin{bmatrix} I_a \\ \hdashline 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad (5.1.24)$$

bulunur. Şimdi;

$$A = (X_1G_{11}+X_2G_{12}')L_1'(L_1G_{11}L_1')^- L_1(G_{11}X_1' + G_{12}X_2')$$

ve

$$B = (I-XX^-) \qquad (5.1.25)$$

dersek, $A' = A, B' = B, A^2 = A$ ve $B^2 = B$ olduğunu görürüz. Gerçekten ; simetrilik durumu transpoz almakla görülür. İdempotentlik durumuna gelince ;

$$A^2 = (X_1G_{11}+X_2G'_{12})L_1'(L_1G_{11}L_1')^- L_1(G_{11}X_1'+G_{12}X_2')^2 = A \qquad (5.1.26)$$

bulunur. $B^2 = B$ olduğu daha önce gösterilmişt· .

Burada :

$$\begin{aligned} L_1(G_{11}X_1'+G_{12}X_2')(X_1G_{11}+X_2G'_{12}) &= L_1(G_{11}X_1'X_1G_{11}+G_{11}X_1'X_2G_{12}'+G_{12}X_2'X_1G_{11} \\ &\quad +G_{12}X_2'G_{12}') \\ &= L_1((\underbrace{G_{11}X_1'X_1+G_{12}X_2'X_1}_{H_{11}})G_{11}+(\underbrace{G_{11}X_1'X_2+G_{12}X_2'X_2}_{H_{12}})G_{12}') \\ &= L_1H_{11}G_{11}+\underbrace{L_1H_{12}G_{12}'}_{0} \qquad (5.1.27)\\ &= L_1H_{11}G_{11} \\ &= L_1G_{11} \end{aligned}$$

dır. Böylece; A ve B matrislerinin simetrik ve idempotent olduklarını görüyoruz. A matrisiyle B matrisinin çarpımına gelince ;

$$AB = \left[X_1G_{11}+X_2G'_{12})L'_1(L_1G_{11}L'_1)^-L_1(G_{11}X'_1+G_{12}X'_2)\right](1-XX^-) \quad (5.1.28)$$

dır. Çünkü; $X'_2(I-XX^-)=(0 \mid I_{p-a})X'(I-XX^-)=0$ olduğu açıktır. O halde Teorem (2.1.4) ye göre (5.1.16) rastgele değişkeni g_1 ve n-q serbestlik dereceli F dağılımına sahiptir. Bu da teoremin kanıtlamasını tamamlar. Burada ;

$g_1 = \text{İz}\,(X_1G_{11}+X_2G'_{12})L'_1\,(L_1G_{11}L'_1)^-L_1(G_{11}X'_1+G_{12}X'_2)$ ve $n-q=\text{İz}(I-XX^-)$dır.

<u>TEOREM 6.1.2</u> Teorem 5.1.1. deki varsayımlar altında $L_2\delta = U_2$ hipotezi gerçeklensin. Burada δ : (p-a)x1 boyutlu bir alt parametre vektörü ve U_2: (m-t)x1 boyutlu bilinenlerin bir vektörüdür.Bu taktirde:

$$F = \frac{(L_2\hat{\delta}-U_2)'(L_2G_{22}L'_2)^-(L_2\hat{\delta}-U_2)}{Y'(I-XX^-)Y} \cdot \frac{n-q}{g_2} \quad (5.1.29)$$

rastgele değişkeni g_2 ve n-q serbestlik dereceli F- dağılımına sahiptir. Burada $(L_1G_{22}L'_2)\sigma^2$: $L_2\delta$ vektörünün kovaryans matrisidir. $L_2\delta = U_2$ lineer parametrik fonksiyonları ise; $L_2H_{22}=L_2, L_2H_{21}=0$ eşitlikleri gerçeklendiğinde kestirilebilirdirler.

<u>KANITLAMA :</u> Teorem 5.1.1. in kanıtlamasındaki yöntemle istenen sonuca varılır. Özellikle ; t=1, $U_1=0$ veya m-t =1,U_2=0 durumlarında : (5.1.16) ve (5.1.29) rastgele değişkenleri sırasıyla;

$$F=\frac{(L_1\hat{\gamma})^2}{Var(L_1\hat{\gamma})}:\frac{Y'(I-XGX')Y}{n-q}=\frac{\left[L_1(G_{11}X'_1Y+G_{12}X'_2Y)\right]^2}{(L_1G_{11}L'_1)}:\frac{Y'(I-XX^-)Y}{n-q} \quad (5.1.30)$$

ve

$$F=\frac{(L_2\hat{\delta})^2}{Var(L_2\hat{\delta})}:\frac{Y'(I-XGX')Y}{n-q}=\frac{\left[L_2(G_{21}X'_1Y+G_{22}X'_2Y)\right]^2}{L_2G_{22}L'_2}:\frac{Y'(I-XGX')Y}{n-q} \quad (5.1.31)$$

biçimlerini alırlar. Bunlarda modelin bazı parametrelerinin lineer kombinasyonlarının sıfır olması yani; $L_1\gamma = 0$ veya $L_2\delta = 0$ biçimindeki hipotezlerin test edilmesinde kullanılabilirler.

Şimdi $X = (X_1 \mid X_2)$ olarak parçalandığında $L_1H_{11} = L_1, L_1H_{12} = 0$ ve $L_2H_{22} = L_2$, $L_2H_{21} = 0$ bağıntılarını X matrisinin alt matrisiyle nasıl ifade edebileceğimizi açıklamaya çalışalım. Biliyoruz ki;

$$S = X'X = \begin{bmatrix} X_1' \\ \hdashline X_2' \end{bmatrix} (X_1 \mid X_2) = \begin{bmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 \\ \hdashline X_2'X_1 & X_2'X_2 \end{bmatrix} \quad (5.1.32)$$

ve

$$G=S^{-} = \begin{bmatrix} (X_1'X_1)^{-}+(X_1'X_1)^{-}X_1'X_2A^{-}X_2'X_1(X_1'X_1)^{-} & -(X_1'X_1)^{-}X_1'X_2A^{-} \\ \hdashline -A^{-}X_2'X_1(X_1'X_1)^{-} & A^{-} \end{bmatrix} \quad (5.1.33)$$

dir. Burada; $A= X_2' (I-X_1(X_1'X_1)^{-}X_1')X_2$ dir. [Rohde (1965)]

H matrisi ise, aşağıdaki biçimde yazılır.

$$H=GS=\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ \hdashline G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 \\ \hdashline X_2'X_1 & X_2'X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ \hdashline H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \quad (5.1.34)$$

Çarpımı yapar ve karşılıklı elemanların eşitliklerini gözönüne alırsak :

$$H_{11}=(X_1'X_1)^{-}X_1'X_1+(X_1'X_1)^{-}X_1'X_2A^{-}X_2'X_1(X_1'X_1)^{-}X_1'X_1-(X_1'X_1)^{-}X_1'X_2A^{-}X_2'X_1$$

$$= (X_1'X_1)^{-} X_1'X_1 \quad (5.1.35)$$

$$H_{12} =(X_1'X_1)^{-}X_1'X_2+(X_1'X_1)^{-}X_1'X_2A^{-} X_2'X_1(X_1'X_1)^{-}X_1'X_2-(X_1'X_2)^{-}X_1'X_2A^{-}X_2'X_2$$

$$=(X_1'X_1)^{-}X_1'X_2(I-A^{-} A) \quad (5.1.36)$$

$$H_{21}= -A^{-}X_2'X_1(X_1'X_1)^{-}X_1'X_1+A^{-}X_2'X_1 = 0 \quad (5.1.37)$$

ve

$$H_{22}= -A^{-}X_2'X_1(X_1'X_1)^{-}X_1'X_2+ A^{-}X_2'X_2 = A^{-}A \quad (5.1.38)$$

bağıntılarını elde ederiz. Böylece ; $L_1H_{11}= L_1$ bağıntısı açık bir biçimde :

$$L_1(X_1'X_1)^{-}X_1'X_1 = L_1 \quad (5.1.39)$$

olarak yazarız. Bu da bize L_1 matrisinin $X_1'X_1$ nin satır uzayında bulunduğunu gösterir. $L_1H_{12} = 0$ bağıntısını açık bir biçimde yazarsak :

$$L_1(X_1'X_1)^{-} X_1'X_2 (I-A^{-}A) = 0 \quad (5.1.40)$$

elde ederiz. $L_1H_{21} = 0$ kendiliğinden gerçeklenir. $L_1H_{22}=L_2$ bağıntısını açık bir biçimde yazdığımızda :

$$L_2 A^- A = L_2 \qquad (5.1.41)$$

elde ederiz. Burada da L_2 matrisinin A nın satır uzayında bulunması gerektiğini ortaya koyarız.

Eğer X matrisinin parçalanışında X_1 ve X_2 alt matrisleri ortogonal ise, Yani $X_1'X_2 = 0$ ise; Bu taktirde H matrisi :

$$H = \left[\begin{array}{c|c} (X_1'X_1)^- & 0 \\ \hline 0 & (X_2'X_2) \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} (X_1'X_1) & 0 \\ \hline 0 & (X_2'X_2) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} (X_1'X_1)^- X_1'X_1 & 0 \\ \hline 0 & (X_2'X_2)^- X_2'X_2 \end{array}\right]$$

biçiminde yazılacağından : $L_1H_{11} = L_1, L_1H_{12} = 0$ ve (5.1.42)

$L_2H_{22} = L_2, L_2H_{21} = 0$ bağıntıları; $L_1H_{12} = 0$ ve $L_2\ H_{21} = 0$ bağıntılarının kendiliğinden gerçeklenmesi nedeniyle :

$$\begin{aligned} L_1\ (X_1'X_1)^-\ (X_1'X_1) &= L_1 \\ L_2(X_2'X_2)^-\ (X_2X_2) &= L_2 \end{aligned} \qquad (5.1.43)$$

bağıntılarının gerçeklenmesine indirgenir. Bu durumda bu bağıntılar : L_1 matrisinin $X_1'X_1$ matrisinin satır uzayında, L_2 matrisinin de $X_2'X_2$ matrisinin satır uzayında bulunması gerektiğini kanıtlar.

Şimdi III. Bölümde 3.3. kısmında sunduğumuz uygulamaya dönelim. Eğer, (3.3.4) modelinde :

$\gamma' = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_a, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_b)$ ve $\delta' = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_c)$

dersek, modeli : $X = (X_1 \mid X_2)$ parçalanışı ile; $Y = X_1\gamma + X_2\delta + e$

(5.1.44)

biçiminde yazarız. Bu modelde $H_0 : \theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_c$ hipotezini test etmek istersek ; $L_2\delta = 0$ hipotezi için :

$$L = \left[\begin{array}{cccccc|ccc} \emptyset_{(a-1)x1} & I_{a-1} & -j_{a-1} & \emptyset_{(a-1)x(b-1)} & \emptyset_{(a-1)x1} & & \emptyset_{(a-1)x(c-1)} & \emptyset_{(a-1)x1} \\ \emptyset_{(b-1)x1} & \emptyset_{(b-1)x(a-1)} & \emptyset_{(b-1)x1} & I_{b-1} & -j_{b-1} & & \emptyset_{(b-1)x(c-1)} & \emptyset_{(b-1)x1} \\ \hline \emptyset_{(c-1)x1} & \emptyset_{(c-1)x(a-1)} & \emptyset_{(c-1)x1} & \emptyset_{(c-1)x(b-1)} & \emptyset_{(c-1)x1} & & I_{c-1} & -j_{c-1} \end{array}\right]$$

matrisinin parçalanışından; $L_2 = (I_{c-1} \mid -j_{c-1})$ ve (3.3.15) bağıntısından :

$$H=GS=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & j'_a/a & j'_b/b & j'_c/c \\ \emptyset_{ax1} & (I_a-J_a/a) & \emptyset_{axb} & \emptyset_{axc} \\ \emptyset_{bx1} & \emptyset_{bxa} & (I_b-J_b/b) & \emptyset_{bxc} \\ \hline \emptyset_{cx1} & \emptyset_{cxa} & \emptyset_{cxb} & (I_c-J_c/c) \end{array}\right] \qquad (5.1.45)$$

bulunduktan sonra :

$$H_{22} = (I_c - J_c/c) \qquad (5.1.46)$$

elde edilir. Bu seçilişten ; $L_2H_{22} = L_2$ ve $L_2H_{21} = 0$ olduğu görülür.

S O N U Ç

Bu tezde genel lineer modellerde parametre vektörü üzerindeki kısıtlamalar ile birlikte hipotez testi yapılmak istendiğinde; parametrelerin kestirilebilirliği için bilinen gerekli bağdaşabilirlik koşulları, kısıtlama matrislerinin bitiştirilmesi ile bir tek koşula indirgendi. Buna bağlı olarak kısıtlama matrislerinin en genel halde isteksel ranklı olmaları durumunda anılan hipotez için hesaplamaları en basite indirgeyen bir test istatistiği uygulaması ile birlikte verildi.

Ayrıca, Gerig ve Gallant (1975) in verdiği teorem kovaryans matrisinin $\sigma^2 V$ (V pozitif definit yada pozitif semi definit) olması durumunda ayrı teoremler olarak V nin durumuna göre genişletilerek verildi. Verdiğimiz teoremlerin geçerliliği bir uygulama ile gerçeklendi. X tasarım matrisinin V kovaryans matrisinin sütun uzayında bulunması durumunda, kısıtlanmış modellerde bilinmeyen parametre vektörünün kestiricisi irdelendi.

Son olarak, tam ranklı olmayan lineer modellerde parametre vektörünün istenmeyen elemanlarını dışarıda tutarak geri kalan alt parametre vektörünün ele alınmasıyla düşünülen hipotezler için test istatistikleri verildi.

K A Y N A K L A R

ALBERT, A., (1972) "Regression and the Moore-penrose Pseudoinverse" Academic Press.Newyork and London.

CLEİNE,R.E.,(1964). "Representations for the Generalized inverse of a Partitioned Matrix". SIAM J.Appl.Math.12, 588-600

GERİG,T.M.and Gallant,A.R.,(1975). "Computing Methods for linear Models Subject to Linear Parametric Constraints" J.Statist. Comput-Simul., Vol. 3,pp.283-296

GOLDMAN,A.J. and Zelen, M.,(1964).Weak Generalized Inverses and Minimum Variance Linear Unbiased Estimation".Journal of Research of the National Bureau of Standards, 68 B, 151-72

GRAYBILL,F.A., (1961). "An Introduction to linear Statistical Models", Volume I Mc Graw-Hill Book Company,INC.Newyork.

GRAYBILL,F.A., (1969). "Introduction to Matrices With Applications in Statistics ". Belmont,California Wadsworth Publishing Co.

HALLUM,C.R. and Boullion, T.L. and Odell,P.L.,(1973)."Parameter Estimation and Hypotheses Testing in the Restricted General Linear Model". The Journal of the Industrial Mathematics Society. Vol.23,Part 1.

HALLUM, C.R., Lewis, T.O. and Boullion,T.L., (1973)."Estimation in the Restricted General Linear Model with a positive Semidefinite Covariance Matrix".Communications in Statistics, 1(2),157-166

JOHN,J.A. and Smith,T.M.F.,(1974)."Sum of Squares in Non-full rank General Linear Hypotheses". Journal of the Roy, Stat.Society Series B.Vol. 36,PP. 107-108

KREİJGER, R.G. and Neudecker,H.,(1977). "Exact Linear Restrictions on Parameters in the General Linear Model with a singular Covariance Matrix". JASA Vol.72 Number 358 Theory and Method Section.

LOWERRE, J.M., (1977) "Some Simplifying Results on BLUEs. "JASA Vol 72,Number 358 Theory and Method Section.

MİLLİKEN, G.A.,(1971). "New Criteria for Estımability for Linear Models". Ann.Math.Sta. Vol 42,pp.1558-1594.

OKTABA, W.,(1957). " "On the Linear Hypotheses in the Theory of Normal Regression". Annales Ünver Sıtatıs Mariae Curie-Sklodowska Lublın-Polonia Vol.XI.2 SectioA.

OKTABA, W., (1968). "Test of Hypotheses for the Fixed Model Non Full Rank"., Bulletın De L'Academie Polonaise Des Sciences Math.-Astr.et Phys. Vol.XVI No.5

PENROSE,R., (1955). A.Generalized Inverse for Matrices".proc. Cambridge Philos.Soc.51,PP.406-413.

PRİNGLE,R. and Rayner,A.,(1971). Generalized Inverse Matrices with Applications to Statıstics".Hafner Publishing Co. Newyork.

RAO,C.R. and Mitra,S.K.,(1971). "Generalized Inverse of Matrices and ıts Applications". John Wiley and Sons Inc.Newyork.

ROHDE,A.C., (1965). "Generalized Inverses of Partitioned Matrices". SİAM, J.Appl. Math. 13,1033-1035.

SEARLE, S.R., (1971). "Linear Models". John Wiley and sons,Inc.Newyork.

SCHEFFE,H., (1959) "The Analysis of Variance".John Wiley and Sons, İnc. Newyork.

STEWART.J., (1975). " Regression Analysis with Linear Constraints" Computer Applications, 3, PP.201-216.

ÖZGEÇMİŞİM

1947 Yılında Ordu ilinin Korgan İlçesinin Çamlı Köyünde doğdum. 1955-1960 yılları arasında ilk öğrenimimi köyümde tamamladım. 1961 yılında Samsun-Ladik Akpınar İlköğretmen okuluna girdim. 1966 yılında İstanbul Çapa Yüksek öğretmen okulu Hazırlık lisesine seçildim. 1967 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi matematik-fizik bölümüne girdim. 1971 yılında bu fakülteyi bitirdim. Üç yıl öğretmenliğimden sonra 1974 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Temel Bilimler Fakültesine asistan olarak atandım. Halen bu görevime devam ediyorum. Bölümümüzde okutulan Matematik İstatistik-I ve II derslerinin uygulamalarını ve G.Matematik-I, G.Matematik-II ve Mühendislik Matematiği dersleri ve uygulamalarını, ayrıca Mekanik-I, Mekanik-II, İhtimaller Hesabı-I ve İhtimaller Hesabı-II derslerinin uygulamalarını yürüttüm.