KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ * TEMEL BİLİMLER FAKÜLTESİ

YÜKSEK BOYUTLU UZAYLARDA EĞİLİM ÇİZGİLERİ İÇİN KARAKTERİZASYONLAR

Karadeniz Teknik Üniversitesi Temel Bilimler Fakültesince
« Fen Doktoru »
ünvanının verilmesi için kabul edilen tezdir.

Remzi ÖZTÜRK

Tezin Dekanlığa Verildiği Tarih : 5.11.1979
Sözlü Sınav Tarihi : 25.4.1980

Doktorayı yöneten öğretim üyesi : Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU
Doktora Komisyon Üyesi : Prof. Dr. Ergün BAYAR
Doktora Komisyon Üyesi : Doç. Dr. Asuman ILGAZ

Kapak Başkı
KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
1980 — Trabzon

Bana bu çalışmayı verip yöneten,yetiştirdiği bir çok kimseden biri olmaktan gurur,fedakârlıkla yaptığı değerli yardımlarından dolayı minnet duyduğum Sayın Hocam, Prof.Dr.H.Hilmi HACISALİHOĞLU'na şükranlarımı sunarım.

İ Ç İ N D E K İ L E R

B Ö L Ü M . VI

ÖZET

Bu çalışma altı bölüm halinde düzenlenmiştir.İlk dört bölüm temel kavramlara ayrılmıştır.Daha sonraki bölümler,çalışmanın esasını teşkil eden ve sonuçları ihtiva eden bölümlerdir.

WEATHERBURN [5] ve BLASCHKE [3] de E^3, Öklid uzayında bir α eğrisinin eğilim çizgisi olmasına ilişkin bir karakterizasyon verilmiştir. Verilen bu karakterizasyondan yararlanarak ÖZDAMAR ve HACISALİHOĞLU [7], $n>3$ için E^n Öklid uzayında bir α eğrisinin H_i $(1\leq i\leq n-2)$ harmonik eğriliklerini ve ayrıca eğilim çizgilerini tanımlayarak,bu çizgilerin karakterizasyonunu H_i harmonik eğrilikleri cinsinden vermişlerdir.

Eğilim çizgileri için diğer bir karakterizasyon ise FORSYTH [14] ve WEATHERBURN [5] da E^3 Öklid uzayında bir α eğrisinin yay uzunluğuna göre türevleriyle oluşturulan " $\det(\alpha'',\alpha''',\alpha^{(IV)})$ değerinin sıfır olması eğilim çizgileri için bir karakteristiktir " şeklinde ifade edilmiştir.Verilen bu sonuç , ÖZDAMAR ve HACISALİHOĞLU [7] nun çalışmalarının ışığı altında bu çalışma ile $n>3$ için $(n-1)$-boyutlu Öklid uzayındaki eğrilere genelleştirilmiştir.Bu genelleştirmelere ilişkin ifade ve ispatlar verilmiştir.

Ayrıca ÖZDAMAR ve HACISALİHOĞLU [8] nun E^n Öklid uzayında S^{n-1} oskülatör küresinin merkezinin m_i koordinatları ile k_i yüksek mertebeden eğrilikleri arasında buldukları bağıntıdan yararlanarak m_i eğrilik fonksiyonları cinsinden E^{n-1} Öklid uzayında eğilim çizgilerine dair bir diğer karakterizasyon bulunmuştur.

S U M M A R Y

This study consists of six chapters. The first four chapters deal with basic concepts. The following chapters constitute the esential part of this study including the results.

The characterization specifying that a curve α of the 3-dimensional Euclidean space E^3 is an inclined curve. This has been mentioned in WEATHERBURN [5] and BLASCHKE [3]. Using this characterization ÖZDAMAR and HACISALİHOĞLU [7] have defined harmonic curvatures H_i $(1\leq i\leq n-2)$ in addition to the inclined curves of curve α in Euclidean n-space E^n for $n>3$; and have given the characterization of these curves subject to harmonic curvatures.

Another characterization in 3-dimensional Euclidean space E^3 for inclined curves is given by FORSYTH [4] and WEATHERBURN [5] with the following expression, constituted by the derivations of a curve α with respect to its arc-length parameter " If the value of $\det(\alpha'',\alpha''',\alpha^{(IV)})$ is to be vanished, then this is a charecterization for inclined curves ". In this study, the above mentioned result is generalized to include inclined curves in (n-1)-dimensional Euclidean space for $n>3$, using the expression of ÖZDAMAR and HACISALİHOĞLU [7]. Statements and proofs based on these generalizations have been given.

Furthermore, using the relation between the curvature functions m_i of the center of (n-1)-osculating sphere , S^{n-1} , and higher curvatures k_i found by ÖZDAMAR and HACISALİHOĞLU [8], another characterization related to inclined curves in (n-1)-dimensional Euclidean space, E^{n-1} , with respect to the curvature functions m_i has been obtained.

N O T A S Y O N L A R

I ....İndeks cümlesi.

$\langle,\rangle$ .... İç çarpım fonksiyonu.

$\mathbb{R}^n$ .... n-boyutlu reel standard vektör uzayı.

E^n .... n-boyutlu Öklid uzayı.

$\|\vec{xy}\|$ .... $\vec{xy}$ vektörünün normu.

$(P_o,P_1,\ldots,P_n)$ .... Afin çatı veya Öklid çatısı.

$\mathbb{R}$ .... Reel sayılar sistemi, Reelsayılar cismi,

C^k .... k-yıncı sınıftan diferensiyellenebilir.

(ψ,W) .... Koordinat komşuluğu veya harita.

$\{(\psi,W)\}_{\alpha\in A}$ .... Koordinat komşuluğu sistemi veya Atlas.

$T_A(P)$ .... A afin uzayının $P\in A$ noktasındaki tanjant uzayı.

$\mathcal{X}(E^n)$ .... $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir n-boyutlu vektör uzayı(E^n in vektör alanlarının uzayı).

$D_X Y$ .... Y nin X yönündeki kovaryant türevi.

$Sp\{\ldots\}$ .... $\{\ldots\}$ nin gerdiği uzay.

$\vec{V}_1[H_1]$ .... H_1 fonksiyonunun V_1 yönündeki türevi.

$U\subseteq V$ .... U cümlesi V nin alt cümlesidir.

$U\subset V$ .... U cümlesi V nin bir gerçek alt cümlesidir.

.... Arakesit.

.... Birleşim.

S^{n-1} .... (n-1)-boyutlu küre.

H_i .... i-yinci dereceden harmonik eğrilik.

k_i .... i-yinci dereceden eğrilik.

A_{ij} .... k_j ler veya k_j lerle bunların s yay parametresine göre türevleri.

m_i .... Oskülatör kürenin merkezinin koordinatları.

G İ R İ Ş

Diferensiyel geometride, son yılların en önemli çalışma alanları diğer matematik dallarında olduğu gibi genellemelerdir.Genellemeler hem boyutta hem de karakterizasyonların yapısında kendilerini göstermektedirler.

n-boyutlu $(n\geq 3)$ Öklid uzayında yüksek mertebeden eğrilikler bir eğri için en fazla $n-1$ tane olarak tanımlanmış ve geometrik anlamları incelenmiştir.Ancak Hacısalihoğlu ve Özdamar [7] ın tanımladıkları yüksek mertebeden harmonik eğrilikler de bir eğri için bu $(n-1)$ eğriliğe eklendiği zaman bu iki cins eğrilikler arasında hangisinin daha önemli karakterizasyonlara götüreceği akla gelmektedir.

$n=3$ özel halinde bir

$$\alpha : I \longrightarrow E^n$$

eğrisi için iyi bilinen, $\alpha' = \dfrac{d\alpha}{ds}$ olmak üzere,

$$\det(\alpha'',\alpha''',\alpha^{(IV)})$$

değeri $n>3$ genel halinde de ilginç olmalıdır.Yüksek mertebeden eğrilikler ve harmonik eğrilikler ile Frenet formüllerinin ele almak suretiyle bu determinant değerini tartışarak bir

$$\alpha : I \longrightarrow E^n$$

eğrisi için

$$\det(\alpha'',\alpha''',\ldots,\alpha^{(n)})$$

değerini irdeleyebiliriz.Böylece α eğrisinin E^n de bir eğilim çizgisi olmasına dair karakterizasyonlar elde edebiliriz. α nın yay-parametresine göre yüksek mertebeden türevlerini eğrilikleri cinsinden ifade edebiliriz.

Böylece $n=3$ özel halinde bilinen karakterizasyonları tekrar elde edebiliriz. α nın türevlerini oskülatör hiper kürenin merkezinin koordinatları cinsinden de ifade edebiliriz. Böylece benzer sonuçlara varabiliriz.

I . B Ö L Ü M

I.I.AFİN UZAY

I.I.I.TANIM

Boş olmayan bir cümle A ve bir K cismi üstünde bir vektör uzayı V olsun. A nın elemanlarını noktalar olarak adlandıralım.Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir

$$f : AxA \longrightarrow V$$

1^o) $\forall P,Q,R \in A$ için $f(P,Q)+f(Q,R)=f(P,R)$

2^o) $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f(P,Q)=\alpha$

olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır. $K=\mathbb{R}$ reel sayılar cismi olması halinde A ya reel afin uzay denir. boy A = boy V kabul edilir.

I.2.ÖKLİD UZAYI

Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayıda V olsun. V de bir iç çarpım işlemi olarak,

$$\langle , \rangle : VxV \longrightarrow R$$
$$(x,y) \longrightarrow \langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ Öklid iç çarpımı tanımlanırsa,bu işlem yardımı ile A da uzaklık,açı,alan ve hacım gibi metrik kavramlar tanımlanabilir.Böylace A afin uzayı da yeni bir ad olarak ÖKLİD UZAYI adını alır.Biz $V=R^n$ olması halini esas alacağız ve bu durumda A Öklid uzayını STANDARD ÖKLİD UZAYI anlamında diğerlerinden ayırdedebilmek için E^n ile göstereceğiz.

I.2.I.TANIM

$$d : E^n x E^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longrightarrow d(x,y) = \|\vec{xy}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2} \quad , \forall x,y \in E^n ,$$

olarak tanımlanan d fonksiyonuna E^n Öklid uzayında UZUNLUK FONKSIYONU ve d(x,y) reel sayısına da x,y E^n noktaları arasındaki UZAKLIK denir.

I.2.I.TEOREM

E^n de uzunluk fonksiyonu bir metriktir. [1].

I.2.2.TANIM

$$d : E^n x E^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longrightarrow d(x,y) = \|\vec{xy}\| \quad , \quad \forall x,y \in E^n \; ,$$

biçiminde tanımlanan d fonksiyonuna E^n de ÖKLİD METRİĞİ denir.

I.2.3.TANIM

$\forall x,y,z \in E^n$ için $\widehat{xyz}$ açısının ölçüsü,

$$\text{Cos}\theta = \frac{yx,yz}{yx\ yz} \; , \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

den hesaplanan bir θ reel sayısıdır.

I.2.4.TANIM

E^n de sıralı bir $\{P_o, P_1, \ldots, P_n\}$ nokta (n+1)-lisine $\mathbb{R}^n$ de karşılık gelen $\{\vec{P_oP_1}, \vec{P_oP_2}, \ldots, \vec{P_oP_n}\}$ vektör n-lisi $\mathbb{R}^n$ için bir ortonormal baz ise $\{P_o, P_1, \ldots, P_n\}$ sistemine E^n in bir DİK ÇATISI veya ÖKLİD ÇATISI denir.

I.2.5.TANIM

E^n deki $\{E_o, E_1, \ldots, E_n\}$ çatısına STANDARD ÖKLİD ÇATISI denir. $\vec{E_oE_i} = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \ldots, \delta_{in})$.

I.2.6.TANIM

E^n de bir X noktasının E^n deki standard Öklid çatısına göre ifadesi

$$\vec{E_oX} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{E_oE_i}$$

dir.Buradaki

$$x_i^i : E^n \longrightarrow \mathbb{R} , \quad 1 \leq i \leq n ,$$

fonksiyonlarına X noktasının ÖKLİD KOORDİNAT FONKSİYONLARI ve $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ reel değerli fonksiyonlar n-lisine de E^n in ÖKLİD KOORDİNAT SİSTEMİ denir.

I.3.TOPOLOJİK MANİFOLDLAR

I.3.I.TANIM

X $\neq \emptyset$ bir cümle olsun. X in alt cümlelerinin bir $\mathcal{T}$ koleksiyonu aşağıdaki özelikleri sağlıyorsa $\mathcal{T}$ ya X üzerinde bir TOPOLOJİ denir.

i) $X, \emptyset \in \mathcal{T}$,

ii) $\mathcal{T}$ ya ait herhangibir sonlu alt cümle koleksiyonunun arakesiti yine $\mathcal{T}$ ya aittir,

iii) $\mathcal{T}$ ya ait herhangibir alt cümle koleksiyonunun birleşimi yine $\mathcal{T}$ ya aittir.

X in Topolojiye ait olan bütün alt cümlelerine bu topolojinin açık cümleleri denir.

Boş olmayan bir X cümlesi ve bu cümlede tanımlanmış bir $\mathcal{T}$ topolojisinden oluşan $(X, \mathcal{T})$ ikilisine bir TOPOLOJİK UZAY denir [I7].

I.3.2.TANIM

X bir topolojik uzay olsun. X in p ve q gibi herhangi iki farklı noktası için X de sırası ile p ve q noktalarını içine alan A_p ve A_q açık alt cümleleri $A_p \cap A_q = \emptyset$ olacak biçimde bulunabilirse X topolojik uzayına bir HAUSDORFF UZAYI denir. I8 .

I.3.3.TANIM

X ve Y iki topolojik uzay olsun.Bir

$$f : X \longrightarrow Y$$

fonksiyonu aşağıdaki özelikleri sağlıyorsa,bu f fonksiyonuna X den Y ye bir HOMEOMORFİZM denir :

i) f üzerine ve birebir dir,

ii) f süreklidir,

iii) f^{-1} süreklidir.

f , X den Y ye bir homeomorfizm ise X ve Y uzaylarına da Homeomorftur denir [18].

I.3.5.TANIM

Aşağıdaki özelikleri sağlıyan bir M topolojik uzayına n-boyutlu TOPOLOJİK MANİFOLD denir :

i) M bir Hausdorff uzayıdır,

ii) M nin her noktasının E^n nin bir açık alt cümlesine homeomorf bir açık civarı vardır,

iii) M nin açık cümlelerinin sayılabilir bir bazı vardır [20].

I.4.DİFERENSİYELLENEBİLİR MANİFOLDLAR

I.4.I.DİFFEOMORFİZM

E^n , n-boyutlu öklid uzayında bir açık cümle U olmak üzere, bir

$$f : U \longrightarrow E^n$$

fonksiyonu verilmiş olsun. f nin diferensiyellenebilmesi aşağıdaki gibi tanımlanır.

I.4.I.TANIM

E^n de bir açık cümle U olmak üzere bir

$$f: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu k-yıncı mertebeden bütün kısmi türevleri var ve bu kısmi türevler sürekli iseler, f fonksiyonuna E^n de C^k sınıfından diferensiyellenebilirdir denir [2].

$$C^k(U, \mathbb{R}) = \{ f \mid f : U \longrightarrow \mathbb{R} \text{ ve } f \text{ fonksiyonu } C^k \text{ sınıfından} \}$$

$$C^\infty(U, \mathbb{R}) = \{ f \mid f \in C^k(U, \mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{N} \}$$

I.4.2.TANIM

E^n deki bir açık alt cümle U olduğuna göre, bir

$$\psi : U \longrightarrow E^m$$

fonksiyonu verildiğinde, bütün

$$f_i \in C^k(E^m, \mathbb{R}) \ , \ 1 \leqslant i \leqslant m$$

fonksiyonları için

$$f_i \circ \psi \in C^k(U, \mathbb{R})$$

ise

$$\psi \in C^k(U, E^m)$$

dir denir.

$$\overset{\infty}{C}(U, E^m) = \{\psi \mid \psi \in C^k(U, E^m) \ , \ \forall k \in \mathbb{N}\}$$

dir[2].

I.4.3.TANIM

U ve V sırasıyla E^m ve E^n in birer açık alt cümlesi olsun. Bir

$$\psi : U \longrightarrow V$$
$$x \longrightarrow \psi(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$$
$$f_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu için bütün f_i koordinat fonksiyonları

$$f_1, f_2, \ldots, f_n \in C^k(U, \mathbb{R}) \text{ ise}$$

$$\psi \in C^k(U, V)$$

dir denir.

$$\overset{\infty}{C}(U,V) = \{\psi \mid \psi \in C^k(U,V),\ \forall k \in \mathbb{N}\}$$

f_i fonksiyonlarına ψ nin Öklidyen koordinat fonksiyonları denir[2].

I.4.4.TANIM

E^n in iki açık alt cümlesi U ve V olsun.Bir

$$\psi : U \longrightarrow V$$

fonksiyonu aşağıdaki özelikleri sağlıyorsa,bu ψ fonksiyonuna U dan V ye C^k sınıfından bir DİFFEOMORFİZM dir denir :

i) ψ üzerine ve birebir dir ,

ii) $\psi \in C^k(U,E^n)$,

iii) $\psi^{-1} \in C^k(V,E^n)$

dir[19].

I.4.5.TANIM

M bir n-boyutlu topolojik manifold ve U da M nin bir açık cümlesi olsun.Eğer U bir ψ homeomorfizmi ile E^n nin bir W açık alt cümlesine eşlenebiliyorsa :

$$\psi : U \subset M \xrightarrow{\text{Homeomorfizim}} W \subset E^n$$

(U,ψ) ikilisine M de bir KOORDİNAT KOMŞULUĞU veya HARİTA denir[2].

I.4.6.TANIM

M bir n-boyutlu topolojik manifold ve M nin bir açık örtüsü $\{U_\alpha\}$ olsun. U_α açık cümlelerinin α indislerinin cümlesi A olmak üzere $\{U_\alpha\}$ örtüsü için $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ yazalım. E^n de U_α ya ψ_α homeomorfizmi altında homeomorf olan bir açık cümle W_α olsun.Böylece ortaya çıkan (U_α,ψ_α) haritalarının $\{(U_\alpha,\psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ koleksiyonuna bir ATLAS (veya KOORDİNAT KOMŞULUĞU SİSTEMİ) denir[2].

I.4.7.TANIM

M bir topolojik manifold ve M nin bir atlası $S=\{(U_\alpha,\psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ olsun.Eğer S atlası için $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere $\forall\alpha,\beta\in A$ ya karşılık $\emptyset_{\beta\alpha}=\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ ve $\emptyset_{\alpha\beta}=\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}$ fonksiyonları C^k sınıfından diferensiyellenebilir iseler S ye C^k sınıfından "diferensiyellenebilir" dir denir. S atlası M üzerinde C^k sınıfından olduğu zaman S ye M üzerinde C^k sınıfından DİFERENSİYELLENEBİLİR YAPI adı verilir[2].

I.4.8.TANIM

M bir topolojik n-manifold ve M nin bir atlası S olsun.Eğer S atlası C^k sınıfından diferensiyellenebilir ise, M ye k-yıncı sınıftan n-boyutlu DİFERENSİYELLENEBİLİR MANİFOLD denir[2].

I.5.TANJANT VEKTÖRLER VE TANJANT UZAYLAR

I.5.I TANJANT VEKTÖRLER

Tanjant vektör kavramını geometri açısından ele alacağız.

I.5.I.TANIM

V vektör uzayı ile birleşen bir afin uzay A olsun. $P\in A$ ve $\vec{V}\in V$ için $(P,\vec{V})$ sıralı ikilisine A afin uzayının P noktasındaki bir tanjant vektörü denir.

Afin aksiyomlar gereğince her bir $(P,\vec{V})$ tanjant vektörüne bir tek $Q\in A$ noktası karşılık gelir, öyleki $\vec{PQ}=\vec{V}$ dir. Buna göre A afin uzayında iki nokta verildiğinde, bu noktalarla birisi başlangıç noktası olmak üzere, bir tanjant vektör, tek türlü belli olur.

A afin uzayının $P\in A$ noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesini $T_A(P)$ ile göstereceğiz. O halde ;

$$T_A(P) = \{(P,V) \mid \vec{V}\in V\}$$

dir. Bundan sonra $(P,\vec{V})\in T_A(P)$ tanjant vektörünü $\vec{V}_P$ ile göstereceğiz.

n-boyutlu bir A afin uzayında bir afin çatı $\{P_o,P_1,\dots,P_n\}$ olduğuna göre $\vec{V}_P\in T_A(P)$ için $\vec{V}_P = \vec{PQ}$ ise,

$$\vec{V}_P = \vec{PQ} = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i \overrightarrow{P_oP_i}$$

olmak üzere, $\vec{V}_P$ vektörü $(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$ sıralı n-lisine karşılık gelir. Bu sıralı n-liye $\vec{V}_P$ tanjant vektörünün koordinatları diyeceğiz ve

$$\vec{V}_P = (\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)_P$$

şeklinde göstereceğiz.

I.5.2.TANJANT UZAYLAR

$T_A(P)$ de toplama ve skalar ile çarpma işlemleri, sırası ile,

$$\oplus : T_A(P) x T_A(P) \longrightarrow T_A(P)$$
$$((P,\vec{V}),(P,\vec{U})) \longrightarrow (P,\vec{V}) \oplus (P,\vec{U})$$

$$\odot : \mathbb{R} x T_A(P) \longrightarrow T_A(P)$$
$$(\lambda,\vec{V}_P) \longrightarrow \lambda \odot \vec{V}_P$$

biçiminde tanımlıyalım.Burada, $\mathbb{R}$ ile A nın birleştiği V vektör uzayının reel sayılar cismi gösterilmektedir. $\{T_A(P), \oplus , \mathbb{R} , + , \cdot , \odot\}$ altılısının bir vektör uzayı olduğu bilinmektedir I .

I.5.2.TANIM

$\{T_A(P) , \oplus, \mathbb{R} ,+ , \cdot , \odot\}$ vektör uzayına, A afin uzayının $P \in A$ noktasındaki tanjant uzayı denir ve kısaca $T_A(P)$ ile gösterilir.

boy A = boy $T_A(P)$, $P \in A$ olduğunu biliyoruz [1].

I.5.3.VEKTÖR ALANLARI VE VEKTÖR ALANLARININ UZAYI

M bir manifold ve M de bir komşuluk W olsun.Bir $P \in W$ noktasındaki tanjant uzay $T_W(P)$ olsun. W nin bütün P noktaları üzerindeki tanjant uzayların birleşimi $\bigcup_{P \in W} T_W(P)$ ile gösterilsin.Bir

$$\pi : \bigcup_{P \in W} T_W(P) \longrightarrow W$$

dönüşümü $t_P \in T_W(P)$ tanjant vektörü için

$$\pi(t_P) = P$$

biçiminde tanımlansın. O zaman W komşuluğu üzerindeki bir vektör alanını tanımlayabiliriz.

I.5.3.TANIM

$W \subseteq M$ üzerindeki bir vektör alanı operatörü

$$x : W \longrightarrow \bigcup_{P \in W} T_W(P)$$

biçiminde bir fonksiyondur. Öyleki,

$$\pi o x = I : W \longrightarrow W$$

dönüşümü bir özdeşlik fonksiyonudur.

I.5.4. TANIM

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_P = \frac{\partial}{\partial x_1}(P) = (1,0,\ldots,0)\Big|_P \quad , \; P \in E^n$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_P = \frac{\partial}{\partial x_2}(P) = (0,1,0,\ldots,0)\Big|_P$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_P = \frac{\partial}{\partial x_n}(P) = (0,\ldots,0,1)\Big|_P$$

olacak biçimde E^n üzerindeki, her bir P noktasında n tane vektör (tanjant vektör) seçelim. Bunların E^n deki dağılımı ile n tane vektör alanı elde edilir. $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ vektör alanı n-lisine E^n üzerindeki DOĞAL BAZ VEKTÖR ALANLARI SISTEMI veya kısaca DOĞAL BAZ ALAN SİSTEMİ denir.

Demek oluyor ki, $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq n$ vektör alanı pozitif x_i ekseni doğrultusu ve yönündeki birim vektör alanıdır. E^n bir n-manifolddur. E^n üzerindeki bütün vektör alanlarının cümlesini $\mathcal{X}(E^n)$ ile gösterelim. $\mathcal{X}(E^n)$ in de $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir n-boyutlu vektör uzayı olduğunu biliyoruz [I].

$Y \in \mathcal{X}(E^n)$ için vektör uzaylarında baz tanımından,

$$Y = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

ifadesi tek türlüdür. Burada geçen :

$$y_i : E^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

koordinat fonksiyonlarına Y vektör alanının Öklid koordinat fonksiyonları denir.

I.6.YÖNE GÖRE TÜREV

I.6.I.YÖNE GÖRE TÜREVLER

E^n de tanımlı reel değerli fonksiyonların türevlenebilmesi yardımı ile,yöne göre türevi inceleyeceğiz.

Bir $f : E^n \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun türevlenebilmesi ve türevi aşağıdaki gibi tanımlanır.

I.6.I.TANIM

$f : E^n \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin.Eğer bir $a \in E^n$ noktası için,

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h)-f(a)-\lambda(h)|}{\|h\|} = 0 \ , \ h \in E^n$$

olacak şekilde bir

$$\lambda : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{Lineer}} \mathbb{R}$$

fonksiyonu bulunabiliyorsa f ye $a \in E^n$ noktasında türevlenebilirdir denir.ve λ lineer fonksiyonuna da $a \in E^n$ noktasında f nin türevi adı verilir I5 .

Yukarıdaki tanım ile E^n den $\mathbb{R}$ ye fonksiyonlar cümlesinin bir alt cümlesi ayırd edilmiş olur.Daha açık olarak belli bir $a \in E^n$ noktasında türevlenebilen reel değerli fonksiyonlar cümlesi elde edilir.Bu cümleyi,

$$C(a,\mathbb{R})$$

şeklinde göstereceğiz.

I.6.2.TANIM

$\forall a \in E^n$ için $f \in C(a,\mathbb{R})$ ise, f fonksiyonu E^n de türevlenebilirdir denir.

Bundan sonra E^n de türevlenebilir reel değerli fonksiyonların cümlesini

$$C(E^n,\mathbb{R})$$

ile göstereceğiz.

$f : E^n \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir $P\in E^n$ noktasındaki türevini de $f_*|_P$ şeklinde göstermek âdettir.

I.6.I.TEOREM

$\vec{V} = (v_1,v_2,\ldots,v_n)\in\mathbb{R}^n$, $P\in E^n$ ve $f : E^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ~~birtdifereh~~ diferensiyellenebilir fonksiyon olsun.Bu taktirde

$$V_P[f] = \sum_{i=1}^{n} v_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_P$$

dir [13].

I.6.4.TANIM

$X\in \chi(E^n)$ ve $f\in C(E^n,\mathbb{R})$ olsun. $P\in E^n$ için,

$$(X(f))(P) = X_P[f]$$

olmak üzere, $X[f]\in C(E^n,\mathbb{R})$ fonksiyonuna, f nin X yönündeki türev fonksiyonu denir.

X ve $Y\in\chi(E^n)$ için eğer Y vektör alanının bileşenleri C^k sınıfından iseler

$$D_X Y = (X[y_1], X[y_2], \ldots, X[y_n])$$

vektör alanına Y nin X'e göre KOVARYANT TÜREVİ denir, burada $X=(x_1,\ldots,x_n)$

$$y_i : E^n \longrightarrow \mathbb{R} ,\ 1\leq i\leq n ,$$
$$(u_1,\ldots,u_n) \longmapsto y_i(u_1,\ldots,u_n)$$

olmak üzere

$$X[y_i] = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial u_k} x_k \qquad \text{dir.}$$

II. BÖLÜM

II.1.EĞRİLER TEORİSİ

$I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere (I,α) koordinat komşuluğu ile tanımlanan $\alpha(I) \subset E^n$ eğrisini bundan sonra, kısaca α ile göstereceğiz. Demek ki α eğrisi dediğimiz zaman,

$$\alpha : I \longrightarrow E^n \ , \ I \subseteq \mathbb{R}$$

olmak üzere, $\alpha(I) \subset E^n$ anlıyacağız. Buradaki $I \subseteq \mathbb{R}$ aralığına α eğrisinin parametre aralığı diyeceğiz. Ve $t \in I$ değişkenine de α eğrisinin parametresi diyeceğiz.

II.1.1.TANIM

E^n de bir (α) eğrisinin (I,α) ve (J,β) gibi iki koordinat komşuluğu verilsin.

$$h = \alpha^{-1} \circ \beta : J \longrightarrow I$$

diferensiyellenebilir fonksiyonuna (α) nın bir parametre değişimi (daha doğrusu (α) nın I daki parametresinin J deki parametresine değişimi) denir [1].

II.1.2.TANIM

E^n de (α) eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\alpha : I \longrightarrow E^n$ fonksiyonunun Öklidyen koordinat fonksiyonları $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ olmak üzere,

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \quad , \alpha(t) \in (\alpha)$$

ve

$$\alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}\Big|_t \ , \ \frac{d\alpha_2}{dt}\Big|_t , \ldots , \ \frac{dx_n}{dt}\Big|_t \right) \qquad \text{dir.}$$

$\alpha'(t)|_{\alpha(t)} \in T_{E^n}(\alpha(t))$ tanjant vektörüne (α) eğrisinin $t \in I$ parametre değerine karşılık gelen $\alpha(t)$ noktasında (I,α) koordinat komşuluğuna göre HIZ VEKTÖRÜ denir.

II.I3.TANIM

E^n de bir (α) eğrisi verilsin. (α) eğrisinin bir m noktasındaki tanjant uzayı diye, m noktasında (α) nın hız vektörlerini içine alan $T_{(\alpha)}(m)$ vektörrüzayınaldenirm $m \in (\alpha)$ seçilmiş birinokta olmak üzere, E^n in $T_{(\alpha)}(m)$ ile birleşen alt afin uzayına da, (α) eğrisinin $m \in (\alpha)$ noktasındaki teğet doğrusu denir.

$T_{E^n}(m)$ vektör uzayında,

$$\langle , \rangle : T_{E^n}(m) \times T_{E^n}(m) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\langle (v_1,\dots,v_n)_m , (u_1,\dots,u_n)_m \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i u_i$$

şeklinde tanımlı Öklid iç çarpımını göz önüne alalım.Bu iç çarpımın, $T_{(\alpha)}(m)$ alt uzayına kısıtlanması da $T_{(\alpha)}(m)$ da bir iç-çarpımdır.Buna göre $T_{(\alpha)}(m)$ uzayında bir vektörün normundan söz edilebilir.Böylece bir (α) eğrisi için,skalar hız fonksiyonu ve skalar hız tanımı aşağıdaki gibidir.

II.I.4.TANIM

E^n de bir (α) eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\|\alpha'\| : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longrightarrow \|\alpha'\|(t) = \|\alpha'(t)\|$$

şeklinde tanımlı $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna (α) eğrisinin (I,α) koordinat komşuluğuna göre skalar hız fonksiyonu ve $\|\alpha'(t)\|$ reel sayısına da (α) nın (I,α) koordinat komşuluğuna göre $\alpha(t)$ noktasındaki skalar hızı denir.

II.1.5.TANIM

(α) eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Eğer $s \in I$ için,

$$\|\dot{\alpha}'(s)\| = 1$$

ise (α) eğrisi (I,α) ya göre BİRİM HIZLI EĞRİDİR denir. Bu durumda eğrinin $s \in I$ parametresine yay parametresi adı verilir [13].

II.1.6.TANIM

(α) eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. $a,b \in I$ olmak üzere a dan b ye (α) eğrisinin Yay-uzunluğu diye, eğrinin $\alpha(a)$ ile $\alpha(b)$ noktaları arasındaki uzunluğa karşılık gelen

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt \quad , \quad t \in I$$

reel sayısına denir. Kolayca görüleceği gibi, bu değer koordinat komşuluğundan bağımsızdır.

II.1.7.TANIM

Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye REGÜLER EĞRİ denir [16].

II.1.1.TEOREM

Her bir parametrik eğri daima yayı cinsinden parametrik olarak ifade edilebilir [9],[10].

II.2.SERRET-FRENET VEKTÖRLERİ

E^n Öklid uzayında bir (α) eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Eğrinin hız vektörü olan $\alpha'(t)$ tanjant vektörü,

$$\alpha'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\alpha_i}{dt}\Big|_t \frac{\partial}{\partial \alpha_i}\Big|_{\alpha(t)}$$

şeklinde tanımlanır.Şimdi,

$$\alpha' : (\alpha) \longrightarrow \bigcup_{m\in(\alpha)} T_{(\alpha)}(m)$$
$$m = \alpha(t) \dashrightarrow \alpha'(t)$$

dönüşümünü göz önüne alalım.

$$\pi : \bigcup_{m\in(\alpha)} T_{(\alpha)}(m) \dashrightarrow (\alpha)$$
$$\alpha'(t) \dashrightarrow \alpha(t)\in(\alpha)$$

olmak üzere,

$$\pi o \alpha' = I_{(\alpha)} : (\alpha) \longrightarrow (\alpha)$$

olduğu açıktır. O halde, α' , (α) üstünde bir vektör alanıdır. α' vektör alanına (α) eğrisinin (I,α) koordinat komşuluğuna göre TEĞET VEKTÖR ALANI diyeceğiz.Bir eğrinin diferensiyel geometri yönünden incelenmesinde teğet vektör alanının önemi büyüktür.

II.2.I.TANIM

E^n de bir (α) eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda, $\psi = \{\alpha',\alpha'',\ldots,\alpha^{(r)}\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\alpha^{(k)}$ $k>r$ için;

$$\alpha^{(k)} \in Sp\{\psi\}$$

olmak üzere, ψ den elde edilen $\{\vec{V}_1,\vec{V}_2,\ldots,\vec{V}_r\}$ ortonormal sistemine (α) eğrisinin SERRET-FRENET r-AYAKLI ALANI ve $m\in(\alpha)$ için $\{\vec{V}_1(m),\vec{V}_2(m),\ldots,\vec{V}_r(m)\}$ ye ise $m\in(\alpha)$ noktasındaki SERRET-FRENET r-AYAKLISI denir.Her bir $\vec{V}_i$, $1\leq i\leq r$ ye bir SERRET-FRENET VEKTÖRÜ adı verilir [4].

II.2.2.LEMMA

$\alpha : I \longrightarrow E^n$ eğrisi için $\{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots, \vec{V}_r\}$ bir ortonormal sistem ise,

$$\langle \vec{V}_i', \vec{V}_i \rangle = 0$$

ve

$$\langle \vec{V}_i', \vec{V}_j \rangle = -\langle \vec{V}_j', \vec{V}_i \rangle \quad , \quad i \neq j \quad .$$

dir.

II.I.I.TEOREM

$\{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots, \vec{V}_r\}$ ortonormal bir sistem ve k_i $(1 \leq i \leq r-1)$ verilen α eğrisinin eğrilik fonksiyonları olmak üzere, bu sistem için türev formülleri aşağıdaki gibidir [4].

$$\vec{V}_1' = k_1 \vec{V}_2$$

$$\vec{V}_2' = -k_1 \vec{V}_1 + k_2 \vec{V}_3$$

$$\vdots$$

$$\vec{V}_{i-1}' = -k_{i-2} \vec{V}_{i-2} + k_{i-1} \vec{V}_i$$

$$\vdots$$

$$\vec{V}_{r-1}' = -k_{r-2} \vec{V}_{r-2} + k_{r-1} \vec{V}_r$$

$$\vec{V}_r' = -k_{r-1} \vec{V}_{r-1}$$

III . B Ö L Ü M

III.1.EĞİLİM ÇİZGİLERİ

III.1.1.TANIM

E^n de bir (α) eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall s\in I$ için $\alpha'(s)$ hız vektörü, bir $\vec{u}$ sabit vektörü ile sabit açı oluşturuyorsa (α) ya bir EĞİLİM ÇİZGİSİ ve $Sp\{\vec{u}\}$ ya karşılık gelen afin uzaya da (α) eğilim çizgisinin EĞİLİM EKSENİ denir.

III.1.2.TANIM

E^n bir (α) eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s\in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)\subset(\alpha)$ noktasında (α) nın 1. ve 2.eğrilikleri $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ ise,

$$H_1 : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$H_1 = \frac{k_1(s)}{k_2(s)}$$

şeklinde tanımlı H_1 fonksiyonuna, (α) nın 1.HARMONİK EĞRİLİĞİ denir.

III.1.1.TEOREM

E^3 de bir (α) eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda :

(α) bir eğilim çizgisidir $\Leftrightarrow$ $\forall s\in I$ için $H_1(s)$ = sabittir[3].

III.2.E^n ÖKLID UZAYINDA EĞILİM ÇIZGİLERİNİN KARAKTERİZASYONLARI

E^n de eğilim çizgisinin tanımını, E^3 de eğilim çizgileri için verilen tanımın bir genelleştirilmesi olarak biliyoruz [7].

şeklinde tanımlı H_i fonksiyonuna, (α) nın i-yinci mertebeden HARMONİK EĞRİLİK FONKSIYONU denir [1].

Bu tanımdaki H_i fonksiyonlarının $\vec{V}_1$ yönündeki kovaryant türevlerini matrisel formda yazmak gerekirse,

$$\begin{vmatrix} \vec{V}_1[H_1] \\ \vec{V}_1[H_1] \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{V}_1[H_{n-3}] \\ \vec{V}_1[H_{n-2}] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & k_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -k_3 & 0 & k_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_{n-2} & 0 & k_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & -k_{n-1} & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ H_{n-3} \\ H_{n-2} \end{vmatrix}$$

dir. Eğilim çizgilerinin harmonik eğrilik fonksiyonları için aşağıdaki teorem geçerlidir.

III.2.1.TEOREM

E^n de bir (α) eğilim çizgisi ve $Sp\{\vec{X}\}$ de (α) nın eğilim ekseni olsun. (α) nın Frenet n-ayaklı alanı :

$$\{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots, \vec{V}_n\}$$

ve harmonik eğrilik fonksiyonları da, H_i $(1 \leq i \leq n-2)$ olmak üzere,

$$\langle \vec{V}_{i+2}, \vec{X} \rangle = H_i \langle \vec{V}_1, \vec{X} \rangle \quad , \quad 1 \leq i \leq n-2$$

dir. [1]

III.2.2.TEOREM

(α), E^n in her $\alpha(s)$ noktasında Frenet n-lisini ihtiva eden bir eğri olsun. s yay parametresine göre, (α) eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki harmonik eğrilik fonksiyonları, H_i $(1 \leq i \leq n-2)$ ise

(α) eğrisi E^n de bir eğilim çizgisidir $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n-2} H_i^2 =$ sabit dir [7]

IV. B Ö L Ü M

IV.I. E^n DE EĞRİLERİN OSKÜLATÖR KÜRELERİ

E^n de her hangi bir eğrinin oskülatör hiperküresinin tanımı, bize eğilim çizgileri için bir diğer karakterizasyon verecektir.

IV.I.I.TANIM

E^n de bir (α) eğrisi ile bir $Q \in (\alpha)$ noktası verilsin. (α) eğrisi ile $Q \in (\alpha)$ nın bir komşuluğunda sonsuz yakın p+2 noktası (α) ile ortak olan ve (p+1)-oskülatör düzlemde kalan S^p p-hiperküresine (α) nın $Q \in (\alpha)$ noktasındaki oskülatör p-küresi denir[8].

IV.I.2.TANIM

E^n de bir (α) eğrisi $\{(I,\alpha)\}$ atlası ile verilsin. (α) eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğrilik fonksiyonları, k_i $(1 \leq i \leq n-1)$, oskülatör küresinin merkezinin koordinatlar m_i $(2 \leq i \leq n)$ ler ve birim teğet vektör alanı da $\vec{V}_1$ olsun. O zaman,

$$m_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\dot{m}_i = \begin{cases} 0 & , \quad i=1 \\ \dfrac{1}{k_1} & , \quad i=2 \\ \left[V_1[m_{i-1}] + m_{i-2}k_{i-2} \right] \dfrac{1}{k_{i-1}} & , \quad 2 < i \leq n \end{cases}$$

şeklinde tanımlı m_i $(2 \leq i \leq n)$ fonksiyonuna (α) nın $\alpha(s)$ noktasındaki oskülatör küresinin merkezinin i-yinci koordinat fonksiyonu denir[8].

IV.I.3.TANIM

E^n de bir (α) eğrisinin bir $Q \in (\alpha)$ noktasının bir komşuluğunda (α) ile sonsuz yakın p+2 ortak noktaya sahip S^p, p-kürelerin merkezlerinin geometrik yeri olan (n-p-1)-hiperdüzleme (α) nın $Q \in (\alpha)$ noktasındaki (n-p-1)-inci mertebeden EĞRİLİK DÜZLEMİ ve p=n-2 halinde de bu eğrilik düzlemine (α) nın $Q \in (\alpha)$ noktasındaki EĞRİLİK EKSENİ denir[8].

V. BÖLÜM

V.I. YÜKSEK MERTEBEDEN EĞRİLİKLERİN HARMONİK EĞRİLİKLER CİNSİNDEN İFADESİ

V.I.I. TEOREM

E^n de bir (α) eğrisi, bir eğilim çizgisi olsun. (α) eğrisinin bir $\alpha(s)$ noktasındaki eğrilikleriyle, harmonik eğrilikleri arasında

$$k_r = \frac{\left(\sum_{i=1}^{r-2} H_i^2\right)'}{2H_{r-1}H_{r-2}} \quad , \quad 2 < r \leq n-2 \, , \qquad \text{(V.I.I)}$$

bağıntısı vardır.

İSPAT :

İspat için, tümevarım yöntemini uygulayacağız. Tanım III.2.2. den

$$k_{i+1} = \frac{H'_{i-1} + H_{i-2}k_i}{H_i} \quad , \quad 1 < i \leq n-2 \; ; \qquad \text{(V.I.2)}$$

bulunur. Bu ifadeden $i=2$ için,

$$k_3 = \frac{H'_1}{H_2} \; , \qquad \text{(V.I.3)}$$

dir. $H_0 = 0$ kabul edilir[7]. O halde, $i=2$ için formül doğrudur. (V.I.3) formülünde, eşitliğin sağ tarafının pay ve paydasını aynı $2H_1$ ile çarparsak eşitlik bozulmayacağından,

$$k_3 = \frac{2H_1H'_1}{2H_1H_2}$$

veya

$$k_3 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{1} H_i^2\right)'}{2H_1H_2} \; , \qquad \text{(V.I.4)}$$

elde edilir. Tümevarım ispat yöntemine göre, $i=p$ için ifade doğru olsun.

yani ;

$$k_{p+1} = \frac{(\sum_{i=1}^{p-1} H_i^2)'}{2H_{p-1} H_p}, \qquad (V.I.5)$$

olsun.

$$k_{p+2} = \frac{(\sum_{i=1}^{p} H_i^2)'}{2H_{p+1} H_p},$$

olduğunu göstereceğiz.(V.I.2) de $i=p+1$ için ,

$$k_{p+2} = \frac{H'_p + H_{p-1} k_{p+1}}{H_{p+1}}, \qquad (V.I.6)$$

olur. (V.I.5) den k_{p+1} in değeri (V.I.6) da yerine konacak olursa,

$$k_{p+2} = \frac{(\sum_{i=1}^{p} H_i^2)'}{2H_{p+1} H_p}, \qquad (V.I.7)$$

bulunur.Şu halde, $r < n$ olmak üzere,

$$k_r = \frac{(\sum_{i=1}^{r-2} H_i^2)'}{2H_{r-2} H_{r-1}}, \qquad (V.I.8)$$

dir.

V.2. E^n ÖKLİD UZAYINDA EĞİLİM ÇİZGİLERİ İÇİN KARAKTERİZASYON

V.2.I. TEOREM

α , $n \geq 4$ ve çift olmak üzere E^n de bir eğri olsun. α nın Frenet vetör alan sistemi $\{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots, \vec{V}_n\}$ olsun.

α eğrisi E^{n-1} de bir eğilim çizgisidir $\Leftrightarrow$ $\det(\vec{V}'_1, \vec{V}'_2, \ldots, \vec{V}'_n) = 0$ dır.

İSPAT :

$\vec{V}'_i$, $1 \leq i \leq n$ lerin determinantlarının katsayılar matrisi antisimetrik bir matristir.Determinant fonksiyonunun temel özeliklerine göre[II], matris antisimetrik ise n nin tek değerlerine göre matrisin determinant değeri sıfır olur. O nedenle, n nin çift değerleri için teoremi ifade ettik, şimdi de ispat edeceğiz.

İspatı tümevarım yöntemiyle yapalım.

Şart gerektir ($\Rightarrow$) : α eğrisi E^{n-1} de bir eğilim çizgisi olsun. Bu durumda, $\det(\vec{V}_1', \vec{V}_2', \ldots, \vec{V}_n') = 0$ olduğunu göstereceğiz.

$n=4$ için gerekliğin ispatı :

$$\det(\vec{V}_1', \vec{V}_2', \vec{V}_3', \vec{V}_4') = \begin{vmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 \end{vmatrix}$$

veya

$$\det(\vec{V}_1', \vec{V}_2', \vec{V}_3', \vec{V}_4') = k_1^2 k_3^2 \ , \qquad \text{(V.2.I)}$$

dır. (V.I.I) teoremden k_3 ün harmonik eğrilikler cinsinden değerini yukarıda yerine koyacak olursak,

$$\det(\vec{V}_1', \vec{V}_2', \vec{V}_3', \vec{V}_4') = \left[\frac{(\sum_{i=1}^{4} H_i^2)'}{2H_1 H_2} \right]^2 k_1^2 \ , \qquad \text{(V.2.2)}$$

bulunur. Hipotezden α eğrisi E^3 de bir eğilim çizgisi olduğundan, $\sum_{i=1}^{4} H_i^2$ = sabit ve dolaysıyla $(\sum_{i=1}^{4} H_i^2)' = 0$ olur. Bu değeri (V.2.2) de eşitliğin sağ tarafında yerine koyacak olursak,

$$\det(\vec{V}_1', \vec{V}_2', \vec{V}_3', \vec{V}_4') = 0$$

bulunur.

Tümevarım ispat yöntemine göre $n=p$ için teorem doğru olsun. O zaman, $n=p+2$ için de ispatı verelim. $n=p$ için teorem doğru olduğundan,

$$\det(\vec{V}'_1,\vec{V}'_2,\ldots,\vec{V}'_p) = \begin{vmatrix} 0 & k_1 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & k_{p-1} \\ 0 & 0 & 0 \ldots & -k_{p-1} & 0 \end{vmatrix}$$

veya

$$\det(\vec{V}'_1,\vec{V}'_2,\ldots,\vec{V}'_p) = k_1^2\, k_3^2 \ldots k_{p-1}^2 \ , \qquad (V.2.3)$$

dir.

$n=p+2$ için teoremin doğru olduğunu görelim :

$$\det(\vec{V}'_1,\vec{V}'_2,\ldots,\vec{V}'_{p+2}) = \begin{vmatrix} 0 & k_1 & 0 \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & k_{p-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots & -k_{p-1} & 0 & k_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & -k_p & 0 & k_{p+1} \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 & -k_{p+1} & 0 \end{vmatrix}$$

Bu determinantın değeri hesaplanırsa,

$$\det(\vec{V}'_1,\vec{V}'_2,\ldots,\vec{V}'_{p+2}) = k_{p+1}^2 \det(\vec{V}'_1,\vec{V}'_2,\ldots,\vec{V}'_p) \ , \qquad (V.2.4)$$

olur. (V.2.3) den $\det(\vec{V}'_1,\vec{V}'_2,\ldots,\vec{V}'_p)$ nün k_i ler cinsinden değerini (V.2.4) da yerine koyarsak,

$$\det(\vec{V}'_1,\vec{V}'_2,\ldots,\vec{V}'_{p+2}) = [k_1 k_3 \ldots k_{p-1} k_{p+1}]^2 \ , \qquad (V.2.5)$$

elde edilir. V.I.I.teoremden k_{p+1} in harmonik eğrilikler cinsinden de - ğerleri yukarıda yerlerine konulacak olursa,

$$\det(\vec{V}_1',\vec{V}_2',\ldots,\vec{V}_{p+2}') = \left[k_1 k_3 \ldots k_{p-1} \frac{(\sum_{i=1}^{p-1} H_i^2)'}{2H_{p-1} H_p}\right]^2$$

olur. Hipotezden $\sum_{i=1}^{p-1} H_i^2$ = sabit ve dolayısıyla $(\sum_{i=1}^{p-1} H_i^2)' = 0$ olur. Bu da yukarıda eşitliğin sağ tarafında yerine konacak olursa,

$$\det(\vec{V}_1',\vec{V}_2',\ldots,\vec{V}_{p+2}') = 0$$

bulunur.

Şart yeterdir ($\Leftarrow$) : $\det(\vec{V}_1',\vec{V}_2',\ldots,\vec{V}_n') = 0$ olduğunu biliyoruz. x nın E^{n-1} de bir eğilim çizgisi olduğunu göstereceğiz.

n=2 için teorem doğrudur. Gerçekten, (V.2.2) den,

$$\det(\vec{V}_1',\vec{V}_2',\vec{V}_3',\vec{V}_4') = \left[k_1 \frac{(\sum_{i=1}^{1} H_i^2)'}{2H_1 H_2}\right]^2$$

dir. Hipotezden dolayı,

$$\det(\vec{V}_1',\vec{V}_2',\vec{V}_3',\vec{V}_4') = 0$$

ve dolayısıyla ;

$$k_1 \frac{(\sum_{i=1}^{1} H_i^2)'}{2H_1 H_2} = 0$$

olur. $k_1 \neq 0$ ve $\frac{(\sum_{i=1}^{1} H_i^2)'}{2H_1 H_2} = 0$ veya

$$\sum_{i=1}^{1} H_i^2 = \text{sabit}$$

bulunur ki bu da α nın E^3 de bir eğilim çizgisi olduğunu gösterir.

Tümevarım ispat yöntemine göre, n=p için teoremi doğru kabul edip, n=p+2 için de doğru olduğunu gösterelim : n=p için (V.2.3) den,

$$\det(\vec{V}_1',\vec{V}_2',\ldots,\vec{V}_p') = k_1^2\, k_3^2 \ldots k_{p-1}^2$$

dir ve n=p için teoremin doğru olduğunu kabul ediyoruz.

$n=p+2$ için (V.2.5) den,

$$\det(\vec{V}'_1,\vec{V}'_2,\ldots,\vec{V}'_{p+2}) = k_1^2\, k_3^2 \ldots k_{p+1}^2$$

dir. Hipotezden dolayı,

$$\det(\vec{V}'_1,\vec{V}'_2,\ldots,\vec{V}'_{p+2}) = 0$$

eşitliği

$$k_1^2\, k_3^2 \ldots k_{p-1}^2\, k_{p+1}^2 = 0$$

veya bu da, $k_1 \neq 0$, $k_3 \neq 0, \ldots,$ $k_{p-1} \neq 0$ ve $k_{p+1} = 0$ verir. V.I.I. teoremden k_{p+1} in harmonik eğrilikler cinsinden değerini yukarıda yerine yazarsak,

$$k_{p+1} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{p-1} H_i^2\right)'}{2H_{p-1}\, H_p} = 0$$

ve dolayısıyla

$\left(\sum_{i=1}^{p-1} H_i^2\right)' = 0$ veya $\sum_{i=1}^{p-1} H_i^2 =$ sabitdir. Bu da, α eğrisinin E^{n-1} de bir eğilim çizgisi olduğunu gösterir.

VI. B Ö L Ü M

VI.I. EĞİLİM ÇİZGİLERİ İÇİN DİĞER BİR KARAKTERİZASYON

VI.I.I. E^4 Öklid uzayının Frenet 4-ayaklı alanı $\{\vec{V}_1,\vec{V}_2,\vec{V}_3,\vec{V}_4\}$ olsun. E^4 ün bir $\{\vec{V}_1,\vec{V}_2,\vec{V}_3\}$ vektör sisteminin gerdiği $\chi(E^3)$ 'e esas olan E^3 alt uzayındaki bir α eğrisinin eğilim çizgisi olması için, karakterizasyon

$$\det(\alpha'',\alpha''',\alpha^{(IV)}) = 0$$

dır[14]. Bu karakterizasyonu $n>3$ için genelleştirelim.

Daha önce bir yardımcı teoremin ifade ve ispatını verelim.

VI.I.I. TEOREM

$\alpha : I \longrightarrow E^{n-1}$ regüler bir eğri ve bu eğri için $\{\vec{V}_2,\vec{V}_3,\ldots,\vec{V}_n\}$ de $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet $(n-1)$-ayaklı alanı olsun. Bu taktirde,

$$\alpha^{(n)} = \sum_{j=2}^{n} A_{nj}\vec{V}_j$$

dir. Burada

$$A_{22}=k_1 \,;\; A_{33}=k_1k_2 \,,\; \ldots \,,\; A_{nn}=k_1k_2\ldots k_{n-1}$$

dir. A_{nj}, $2\leq j<n$ ler, k_j ler veya k_j lerle bunların s yay parametresine göre türevlerini kapsıyor.

İSPAT :

Bu teoremde E^{n-1} uzayını E^n deki tanjant uzayların normali $\vec{V}_1$ olan bir alt uzayı olarak düşünüyoruz.

İspatı tümevarım yöntemi ile yapalım. $n=2$ için teorem doğrudur. Gerçekten,

$$\alpha'' = \sum_{j=2}^{2} A_{2j}\vec{V}_j = A_{22}\vec{V}_2$$

veya

$$\alpha'' = A_{22}\vec{V}_2$$

Frenet vektörlerinden [I2].

$$\alpha'' = k_1 \vec{V}_2 \qquad \text{(VI.I.I)}$$

dir.Bu (V.I.I) ile karşılaştırılırsa,

$$A_{22} = k_1$$

olduğu görülür. n=3 için de teorem doğrudur.Bunu da görelim,

$$\alpha''' = \sum_{j=2}^{3} A_{3j}\vec{V}_j$$

$$\alpha''' = A_{32}\vec{V}_2 + A_{33}\vec{V}_3 \qquad \text{(VI.I.2)}$$

dir. $\alpha'' = k_1 \vec{V}_2$ yi s yay parametresine göre türetelim.

$$\alpha''' = k'_1 \vec{V}_2 + k_1 k_2 \vec{V}_3$$

elde edilir.Bu ifade (VI.I.2) ile eşlenirse,

$$A_{32} = k'_1 \quad , \quad A_{33} = k_1 k_2$$

olur.

n=p-1 için teoremin doğru olduğunu kabul edelim. O halde,

$$\alpha^{(p-1)} = \sum_{j=2}^{p-1} A_{(p-1)j}\vec{V}_j \quad , \quad A_{(p-1)(p-1)} = k_1 k_2 \ldots k_{p-2}$$

olur.Eşitliğin iki yanının s yay parametresine göre türevini alacak olursak,

$$\alpha^{(p)} = \sum_{j=2}^{p-1} \{A'_{(p-1)j}\vec{V}_j + A_{(p-1)j}\vec{V}'_j\}$$

$$= \sum_{j=2}^{p-1} (A'_{(p-1)j}\vec{V}_j - k_{j-1} A_{(p-1)j}\vec{V}_{j-1} + k_j A_{(p-1)j}\vec{V}_{j+1})$$

elde edilir. Buradan,

$$\alpha^{(p)} = A'_{(p-1)2}\vec{V}_2 - k_1 A_{(p-1)2}\vec{V}_1 + k_2 A_{(p-1)2}\vec{V}_3$$

$$+A'_{(p-1)3}\vec{V}_3 - k_2 A_{(p-1)3}\vec{V}_2 + k_3 A_{(p-1)3}\vec{V}_4$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+A'_{(p-1)(p-2)}\vec{V}_{p-2} - k_{p-3} A_{(p-1)(p-2)}\vec{V}_{p-3} + k_{p-2} A_{(p-1)(p-2)}\vec{V}_{p-1}$$

$$+A'_{(p-1)(p-1)}\vec{V}_{p-1} - k_{p-2} A_{(p-1)(p-1)}\vec{V}_{p-2} + k_{p-1} A_{(p-1)(p-1)}\vec{V}_p$$

veya

$$\alpha^{(p)} = \left[A'_{(p-1)2} - k_2 A_{(p-1)3}\right]\vec{V}_2$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \left[A'_{(p-1)(p-1)} + k_{p-2} A_{(p-1)(p-2)}\right]\vec{V}_{p-1}$$

$$+ k_{p-1} A_{(p-1)(p-1)}\vec{V}_p$$

ve burada

$$A'_{(p-1)2} - k_2 A_{(p-1)3} = A_{p2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A'_{(p-1)(p-1)} + k_{p-2} A_{(p-1)(p-2)} = A_{p(p-1)}$$

$$k_{p-1} A_{(p-1)(p-1)} = A_{pp}$$

diyecek olursak

$$\alpha^{(p)} = \sum_{j=2}^{p} A_{pj}\vec{V}_j$$

ve

$$A_{pp} = k_1 k_2 \ldots k_{p-1}$$

dir.

E^4 Öklid uzayında verilen bir x eğrisinin $Sp\{\vec{V}_2,\vec{V}_3,\vec{V}_4\} = \chi(E^3)$ olacak şekildeki E^3 alt uzayındaki bir eğilim çizgisi olmasına ait karakterizasyonu, $n \geq 3$ şeklinde esas teoremimiz için de vereceğiz. O halde esas teoremimiz ;

VI.I.2.TEOREM

E^n Öklid uzayında tanjant uzaylarının normalleri $\vec{V}_1$ ler olan E^{n-1} alt Öklid uzayının bir α eğrisini ele alalım. α nın Frenet vektör alan sistemi $\{\vec{V}_2,\vec{V}_3,\ldots,\vec{V}_n\}$ $(n-1)$-lisi dir.

α nın E^{n-1} de bir eğilim çizgisi olması için gerek ve yeter şart ;

$$\det(\alpha'',\alpha''',\ldots,\alpha^{(n)}) = 0$$

dır.

İSPAT :

İspatı tümevarım yöntemiyle yapalım.

Şart gerektir ($\Rightarrow$) : α eğrisinin E^{n-1} de eğilim çizgisi olduğunu biliyoruz. $\det(\alpha'',\alpha''',\ldots,\alpha^{(n)}) = 0$ olduğunu göstereceğiz.

$n=3$ için ispat doğrudur. Gerçekten, VI.I.I. teoremden

$$\alpha'' = A_{22}\vec{V}_2 , \quad A_{22} = k_1$$
$$\alpha''' = A_{32}\vec{V}_2 + A_{33}\vec{V}_3 , \quad A_{33} = k_1 k_2$$
$$\alpha^{(IV)} = A_{42}\vec{V}_2 + A_{43}\vec{V}_3 + A_{44}\vec{V}_4 , \quad A_{44} = k_1 k_2 k_3$$

$$\det(\alpha'',\alpha''',\alpha^{(IV)}) = \begin{vmatrix} A_{22} & 0 & 0 \\ A_{32} & A_{33} & 0 \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} \qquad \text{(VI.I.3)}$$

buradan

$$\det(\alpha'',\alpha''',\alpha^{(IV)}) = A_{22}\,A_{33}\,A_{44} \;, \qquad \text{(VI.I.4)}$$

veya A_{ij} lerin eğrilikler cinsinden değerleri (VI.I.4) de yerlerine yazılacak olursa,

$$\det(\alpha'',\alpha''',\alpha^{(IV)}) = k_1^3\,k_2^2\,k_3 \;, \qquad \text{(VI.I.5)}$$

elde edilir. V.I.I.teoremden k_3 ün harmonik eğrilikler cinsinden değerleri (VI.I.5) de yerlerine konacak olursa,

$$\det(\alpha'',\alpha''',\alpha^{(IV)}) = k_1^3\,k_2^2\,\frac{(\sum_{i=1}^{1} H_i^2)'}{2H_1H_2} \;, \qquad \text{(VI.I.6)}$$

bulunur. Hipotezden,

$\sum_{i=1}^{1} H_i^2$ = sabit olduğundan, $(\sum_{i=1}^{1} H_i^2)' = 0$ ve dolaysıyla

$$\det(\alpha'',\alpha''',\alpha^{(IV)}) = 0$$

bulunur. Bu $n=3$ için teoremin doğru olduğunu gösterir.

Tümevarım ispat yöntemine göre $n=p-1$ için teoremin doğru olduğunu kabul edip $n=p$ için de doğru olduğunu gösterelim :

$$\det(\alpha'',\ldots\ldots,\alpha^{(p-1)}) = \begin{vmatrix} A_{22} & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ A_{32} & A_{33} & 0 \ldots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \ldots \cdot & \cdot \\ A_{(p-1)2} & A_{(p-1)3} & A_{(p-1)4} \ldots A_{(p-1)(p-2)} & A_{(p-1)(p-1)} \end{vmatrix}$$

veya

$$\det(\alpha'',\alpha''',\ldots,\alpha^{(p-1)})=A_{22}A_{33}\ldots A_{(p-1)(p-1)} \quad , \qquad \text{(VI.I.7)}$$

bulunur. VI.I.I.teoremden A_{ij} lerin değerleri (VI.I.7) de yerlerine konacak olursa,

$$\det(\alpha'',\alpha''',\ldots,\alpha^{(p-1)}) = k_1^{p-1}\, k_2^{p-2} \ldots\ldots k_{p-2} \quad , \qquad \text{(VI.I.8)}$$

elde edilir.

Şimdi $n=p$ için de teoremin doğru olduğunu ispat edelim.

$$\det(\alpha'',\ldots,\alpha^{(p)}) = \begin{vmatrix} A_{22} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ A_{32} & A_{33} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{(p-1)2} & A_{(p-1)3} & A_{(p-1)4} & \ldots & A_{(p-1)(p-2)} & A_{(p-1)(p-1)} & 0 \\ A_{p2} & A_{p3} & A_{p4} & \ldots & A_{p(p-2)} & A_{p(p-1)} & A_{pp} \end{vmatrix}$$

veya

$$\det(\alpha'',\ldots,\alpha^{(p)})=(-1)^{2p-2}A_{pp}\begin{vmatrix} A_{22} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ A_{32} & A_{33} & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ A_{(p-1)2} & A_{(p-1)3} & \ldots & A_{(p-1)(p-2)} & A_{(p-1)(p-1)} \end{vmatrix}$$

veya

$$\det(\alpha'',\alpha''',\ldots,\alpha^{(p)}) = A_{pp}\,\det(\alpha'',\alpha''',\ldots,\alpha^{(p-1)})$$

elde edilir. VI.I.I.teoremden A_{pp} nin değerleri yukarıda yerine konacak olursa ve (VI.I.8) den dolayı,

$$\det(\alpha'',\alpha''',\ldots,\alpha^{(p)}) = k_1^{p-1}\, k_2^{p-2} \ldots k_{p-2}^{2} k_{p-1} \quad , \qquad \text{(VI.I.9)}$$

elde edilir. V.I.I.teoremden k_{p-1} in harmonik eğrilikler cinsinden değerleri (VI.I.9) da yerlerine konacak olursa,

$$\det(\alpha'',\alpha''',\ldots,\alpha^{(p)}) = k_1^{p-1} \ldots k_{p-2}^2\left[\frac{(\sum_{i=1}^{p-3} H_i^2)'}{2H_{p-3}H_{p-2}}\right], \qquad (VI,I.IO)$$

elde edilir. Hipotezden,

$(\sum_{i=1}^{p-3} H_i^2)$ = sabit ve dolaysıyla $(\sum_{i=1}^{p-3} H_i^2)' = 0$ olur. Bu değer (VI.I.IO) da yerine konursa,

$$\det(\alpha'',\alpha''',\ldots,\alpha^{(p)}) = 0$$

olur.

Şart yeterdir ($\Leftarrow$) :

$\det(\alpha'',\alpha''',\ldots,\alpha^{(n)}) = 0$ olduğunu biliyoruz. α eğrisinin E^{n-1} de eğilim çizgisi olduğunu göstereceğiz.

n=3 için (VI.I.6) dan,

$$\det(\alpha'',\alpha''',\alpha^{(IV)}) = k_1^3\, k_2^2\left[\frac{(\sum_{i=1}^{1} H_i^2)'}{2H_1H_2}\right]$$

dir. Hipotezden dolayı,

$$\det(\alpha'',\alpha''',\alpha^{(IV)}) = 0$$

O halde

$$k_1^3\, k_2^2\left[\frac{(\sum_{i=1}^{1} H_i^2)'}{2H_1H_2}\right] = 0$$

dır. Burada

$$k_1 \neq 0\ , \ k_2 \neq 0 \quad \text{ve} \quad \frac{(\sum_{i=1}^{1} H_i^2)'}{2H_1H_2} = 0$$

dır. Dolaysıyla

$(\sum_{i=1}^{1} H_i^2)' = 0$ olur, ve buradan $\sum_{i=1}^{1} H_i^2$ = sabit bulunur ki, bu da α eğrisinin E^3 de bir eğilim çizgisi olmasına ait bir karakterizasyondur.

Tümevarım ispat yöntemine göre $n=p-1$ için teoremi doğru kabul edelim. O halde (VI.I.8) den,

$$\det(\alpha'',\alpha''',\ldots,\alpha^{(p-1)}) = k_1^{p-2}\, k_2^{p-3} \ldots k_{p-2}$$

$n=p$ için de teoremin doğru olduğunu gösterelim. (VI.I.10) dan,

$$\det(\alpha'',\alpha''',\ldots,\alpha^{(p)}) = k_1^{p-1} \ldots k_{p-2}^{2} \left[\frac{(\sum_{i=1}^{p-3} H_i^2)'}{2H_{p-3}H_{p-2}}\right]$$

dir. Hipotezden dolayı,

$$\det(\alpha'',\alpha''',\ldots,\alpha^{(p)}) = 0$$

olduğundan

$$k_1^{p-1}\, k_2^{p-2} \ldots k_{p-2}^{2} \left[\frac{(\sum_{i=1}^{p-3} H_i^2)'}{2H_{p-3}H_{p-2}}\right] = 0$$

elde edilir. Buradan,

$$k_1 \neq 0 \,,\ \ldots\ldots,\ k_{p-2} \neq 0 \quad \text{ve} \quad \frac{(\sum_{i=1}^{p-3} H_i^2)'}{2H_{p-3}H_{p-2}} = 0$$

ve dolayısıyla;

$$\sum_{i=1}^{p-3} H_i^2 = \text{sabit}$$

dir. Bu ise E^n de verilen α eğrisinin $(n-1)$-boyutlu Öklid uzayında bir eğilim çizgisi olduğunu gösterir.

VI.2. OSKÜLATÖR HİPERKÜRE VE EĞİLİM ÇİZGİLERİ İÇİN KARAKTERİZASYONLAR

Bölümün bu kısmında E^{n+1} Öklid uzayında yatan bir α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğrilikleri, ilharmonik eğrilikleri ile oskülatör küresinin merkezinin koordinatları arasında bulduğumuz bağıntılardan yararlanarak, eğilim çizgileri için yeni karakterizasyonlar vereceğiz.

VI.2.I. TEOREM

α, E^{n+1} Öklid uzayında bir eğri olsun. α nın bir $\alpha(s)$ noktasındaki k_i eğrilik fonksiyonları ile, oskülatör kürenin merkezinin m_i koordinatları arasında, V.I.I. teoremden,

$$k_p = \frac{\left(\sum_{i=2}^{p} m_i^2\right)'}{2m_p m_{p+1}}, \quad 2 \leqslant p \leqslant n+1 , \qquad \text{(VI.2.I)}$$

bağıntısı vardır.

İSPAT :

İspatı tümevarım yöntemiyle yapalım.

IV.I.2. tanımdan, $i = j+1$ için

$$m_{j+1} = \left[m_j' + m_{j-1} k_{j-1}\right] \frac{1}{k_j}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$k_j = \frac{m_j' + k_{j-1} m_{j-1}}{m_{j+1}}, \qquad \text{(VI.2.2)}$$

elde edilir.

Tümevarım ispat yöntemine göre, $j=2$ için teorem doğrudur. Gerçekten,

$$k_2 = \frac{m_2' + k_1 m_1}{m_3}$$

dür. $m_1 = 0$ dır[8]. O halde,

$$k_2 = \frac{m'_2 +}{m_3} , \qquad (VI.2.3)$$

veya eşitliğin sağ tarafında pay ve paydayı $2m_2$ ile çarparsak, eşitlik bozulmayacağından,

$$k_2 = \frac{2m_2 m'_2}{2m_2 m_3} ,$$

veya

$$k_2 = \frac{(\sum_{j=1}^{2} m_j^2)'}{2m_2 m_3} , \qquad (VI.2.4)$$

elde edilir. O halde $j=2$ için teorem doğrudur. $j=3$ için de teoremin doğru olduğunu görelim ; (VI.2.2) formülünde $j=3$ için

$$k_3 = \frac{m'_3 + k_2 m_2}{m_4} , \qquad (VI.2.5)$$

dir. (VI.2.4) den k_2 nin değeri yukarıda yerine yazılırsa,

$$k_3 = \frac{(\sum_{j=2}^{3} m_j^2)'}{2m_3 m_4} , \qquad (VI.2.6)$$

elde edilir. Tümevarım ispat yöntemine göre $j=p-1$ için teorem doğrudur. O halde,

$$k_{p-1} = \frac{(\sum_{j=2}^{p-1} m_j^2)'}{2m_{p-1} m_p} , \qquad (VI.2.7)$$

dir. $j=p$ için de teoremin doğru olduğunu ispat edelim : $j=p$ için (VI.2.2) formülünden,

$$k_p = \frac{m'_p + k_{p-1} m_{p-1}}{m_{p+1}} , \qquad (VI.2.8)$$

elde edilir. (VI.2.7) den k_{p-1} in değeri yukarıda yerine yazılırsa,

$$k_p = \frac{(\sum_{j=2}^{p} m_j^2)'}{2m_p m_{p+1}} , \qquad (VI.2.9)$$

olur.

VI.2.2.TEOREM

α , $n \geq 4$ ve n çift olmak üzere, E^{n+1} Öklid uzayında bir eğri olsun. α nın $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet vektör alan sistemi $\{\vec{V}_1, \vec{V}_2, .., \vec{V}_{n+1}\}$ ve bu sisteme göre bir $\alpha(s)$ noktasındaki S^n oskülatör küresinin merkezinin koordinatları m_i $(1 \leq i \leq n+1)$ olsun. Bu durumda $m_i' = \frac{dm_i}{ds}$ dir.

1^o) $\det(m_2', m_3', ..., m_{n+1}') = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=2}^{n} m_i^2 =$ sabitdir.

2^o) $\det(m_2', m_3', ..., m_{n+1}') = 0 \Leftrightarrow \alpha : I \longrightarrow E^n$ bir eğilim çizgisidir.

İSPAT : 1^o)

İspatı tümevarım yöntemiyle yapalım. m_i' $(2 \leq i \leq n+1)$ lerin determinantlarının katsayılar matrisi antisimetrik bir matristir. Determinant fonksiyonunun temel özeliklerine göre [II], matris antisimetrik ise, n nin tek değerlerine göre matrisin değeri sıfır olur. O nedenle n nin çift değerleri için teoremi ifade ettik, şimdide ispatlayacağız.

Şart gerektir ($\Rightarrow$) : $\det(m_2', m_3', ..., m_{n+1}') = 0$ olduğunu biliyoruz. $\sum_{i=2}^{n} m_i^2 =$ sabit olduğunu göstereceğiz. $n=4$ için teorem doğrudur. Gerçekten,

$$\det(m_2', m_3', m_4', m_5') = \begin{vmatrix} 0 & k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & 0 & k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & 0 \end{vmatrix}$$

veya

$$\det(m_2', m_3', m_4', m_5') = k_2^2 \, k_4^2 \quad , \qquad \text{(VI.2.10)}$$

buluruz. Hipotezden,

$$\det(m_2', m_3', m_4', m_5') = 0$$

dır. Dolaysıyla (VI.2.10) dan,

$$k_2 k_4 = 0 , \tag{VI.2.11}$$

bulunur. VI.2.1. teoremden k_4 ün m_i ler cinsinden değeri (VI.2.11) de yerine konacak olursa,

$$k_2 \frac{(\sum_{i=2}^{4} m_i^2)'}{2m_4 m_5} = 0 ,$$

ve buradan,

$$\sum_{i=2}^{4} m_i^2 = \text{sabit}$$

bulunur. O halde $n=4$ için teorem ispat edilmiş olur.

Tümevarım ispat yöntemine göre $n=p$ için teoremi doğru kabul edip $n=p+2$ için de doğruluğunu gösterelim :

O halde,

$$\det(m_2', m_3', \ldots, m_{p+1}') = \begin{vmatrix} 0 & k_2 & 0 \ldots 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & k_3 \ldots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & k_p \\ 0 & 0 & 0 \ldots -k_p & 0 \end{vmatrix}$$

veya

$$\det(m_2', m_3', \ldots, m_{p+1}') = k_2^2 k_4^2 \ldots k_p^2 , \tag{VI.2.12}$$

dir. $n=p+2$ için de teoremin doğru olduğunu ispat edelim.

$$\det(m_2',\ldots,m_{p+3}') = \begin{vmatrix} 0 & k_2 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & k_3 \ldots 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & k_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots -k_p & 0 & k_{p+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & -k_{p+1} & 0 & k_{p+2} \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & -k_{p+2} & 0 \end{vmatrix}$$

veya

$$\det(m_2',m_3',\ldots,m_{p+3}') = k_{p+2}^2 \det(m_2',m_3',\ldots,m_{p+1}') , \qquad (VI.2.13)$$

dır. Hipotezden dolayı,

$$\det(m_2',m_3',\ldots,m_{p+1}') = 0$$

olduğundan

$$k_{p+2} \det(m_2',m_3',\ldots,m_{p+1}') = 0$$

olur. $\det(m_2',m_3',\ldots,m_{p+1}')$ için doğru kabul ettiğimizden,

$$k_{p+2} = 0 \;, \qquad (VI.2.14)$$

olur. VI.2.1. teoremden k_{p+2} nin m_i ($2 \leq p \leq n$) cinsinden değerini yukarıda yerine yazarsak,

$$\sum_{i=2}^{p+2} m_i^2 = \text{sabit}$$

bulunur.

Şart yeterdir ($\Leftarrow$) : $\sum_{i=2}^{n} m_i^2$ = sabit olduğunu biliyoruz. $\det(m_2',m_3',\ldots,m_{n+1}') = 0$ olduğunu göstereceğiz.

$n=4$ için teorem doğrudur, çünki (VI.2.I0) dan,

$$\det(m_2',m_3',m_4',m_5') = k_2^2 \left[\frac{(\sum_{i=2}^{4} m_i^2)'}{2m_4 m_5} \right]^2$$

dir. Hipotezden dolayı,

$\sum_{i=2}^{4} m_i^2$ = sabit ve dolaysıyla $(\sum_{i=2}^{4} m_i^2)' = 0$ olur. Bu değer yukarıda yerine konacak olursa,

$$\det(m_2',m_3',m_4',m_5') = 0$$

bulunur. Bu da $n=4$ için teoremin doğru olduğunu gösterir.

$n=p$ için teoremi doğru kabul edip, $n=p+2$ için de doğru olduğunu görelim.

Tümevarım ispat yöntemine göre $n=p$ için teoremi doğru kabul ettik. O halde $n=p$ için (VI.2.I2) den,

$$\det(m_2',m_3',\ldots,m_{p+1}') = k_2^2\, k_4^2 \ldots k_p^2$$

için teorem doğrudur. $n=p+2$ için (VI.2.I3) den,

$$\det(m_2',m_3',\ldots,m_{p+3}') = k_{p+2}^2 \det(m_2',m_3',\ldots,m_{p+1}')$$

dir. k_{p+2} nin m_i ler cinsinden değerleri VI.2.I. teoremden yukarıda yerine yazarsak,

$$\det(m_2',m_3',\ldots,m_{p+3}') = \left[\frac{(\sum_{i=2}^{p+2} m_i^2)'}{2m_{p+2}\, m_{p+3}} \right]^2 \det(m_2',\ldots,m_{p+1}')$$

olur. Hipotezden dolayı,

$\sum_{i=2}^{p+2} m_i^2$ = sabit vedolaysıyla $(\sum_{i=2}^{p+2} m_i^2)' = 0$ olur. Bu değer yukarıda yerine konursa,

$$\det(m_2',m_3',\ldots,m_{p+3}') = 0$$

bulunur.

İSPAT : 2^o)

İspatı tümevarım yöntemiyle yapalım. m'_i $(2 \leq i \leq n+1)$ lerin determinantlarının katsayılar matrisi antisimetrik bir matristir. Determinant fonksiyonunun temel özeliklerine göre [II], matris antisimetrik ise n nin tek değerlerine göre matrisin değeri sıfır olur. O nedenle n nin çift değerleri için teoremi ifade ettik, şimdi de ispatlayacağız.

Şart gerektir ($\Rightarrow$) : α nın E^n Öklid uzayında bir eğilim çizgisi olduğunu biliyoruz. $\det(m'_2, m'_3, \ldots, m'_{n+1}) = 0$ olduğunu göstereceğiz.

$n=4$ için teorem doğrudur. Gerçekten, $n=4$ için (VI.2.10) dan,

$$\det(m'_2, m'_3, m'_4, m'_5) = k_2^2\, k_4^2$$

dir. V.I.I. teoremden,

$$k_4 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{2} H_i^2\right)'}{2H_2H_3} ,$$

dir. Bu değer yukarıda yerine konursa,

$$\det(m'_2, m'_3, m'_4, m'_5) = k_2^2 \left[\frac{\left(\sum_{i=1}^{2} H_i^2\right)'}{2H_2H_3}\right]^2 ; \qquad \text{(VI.2.15)}$$

dir. Hipotezden dolayı,

$\sum_{i=1}^{2} H_i^2$ = sabit ve dolaysıyla $\left(\sum_{i=1}^{2} H_i^2\right)' = 0$ olur. Bu değeri (VI.2.15) de yerine yazacak olursak,

$$\det(m'_2, m'_3, m'_4, m'_5) = 0$$

olur ki bu $n=4$ için teoremin doğru olduğunu gösterir.

Tümevarım ispat yöntemine göre $n=p$ için teorem doğru olsun. $n=p+2$ için de ispatı verelim. $n=p$ için teorem doğru olduğundan, (VI.2.12) den,

$$\det(m'_2, m'_3, m'_4, \ldots, m'_{p+1}) = [k_2\, k_3 \ldots k_p]^2$$

dir. $n=p+2$ için de teoremin doğru olduğunu görelim. Yine VI.2.2.teorem de (VI.2.I3) den $n=p+2$ için,

$$\det(m_2',m_3',\dots,m_{p+3}') = k_{p+2}^2 \det(m_2',m_3',\dots,m_{p+1}') , \qquad (VI.2.I3)$$

dir. $\det(m_2',m_3',\dots,m_{p+1}')$ nün yukarıdaki değerini (VI.2.I3) de yerine yazılacak olursa,

$$\det(m_2',m_3',\dots,m_{p+3}') = \left[k_2k_4 \dots k_pk_{p+2}\right]^2 , \qquad (VI.2.I6)$$

olur. V.I.I.teoremden,

$$k_{p+2} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{p} H_i^2\right)'}{2H_pH_{p+1}} ,$$

değeri yukarıda yerine yazılırsa,

$$\det(m_2',m_3',\dots,m_{p+3}') = \left[k_2k_4 \dots k_p \frac{\left(\sum_{i=1}^{p} H_i^2\right)'}{2H_pH_{p+1}}\right]^2 , \qquad (VI.2.I7)$$

olur.Hipotezden dolayı,

$\sum_{i=1}^{p} H_i^2 =$ sabit ve dolaysıyla $\left(\sum_{i=1}^{p} H_i^2\right)' = 0$ olur.Bu değeri yukarıda yerine yazacak olursak,

$$\det(m_2',m_3',\dots,m_{p+3}') = 0$$

olur.

Şart yeterdir ($\Leftarrow$) : $\det(m_2',m_3',\dots,m_{n+1}') = 0$ olduğunu biliyoruz. α nın E^n de bir eğilim çizgisi olduğunu göstereceğiz.

$n=4$ için teorem doğrudur. Gerçekten, (VI.2.I5) den,

$$\det(m_2',m_3',m_4',m_5') = \left[k_2 \frac{\left(\sum_{i=1}^{2} H_i^2\right)'}{2H_2H_3}\right]^2$$

dir.Hipotezden dolayı,

$$\det(m_2', m_3', m_4', m_5') = 0$$

ve dolayısıyla,

$$k_2 \frac{(\sum_{i=1}^{2} H_i^2)'}{2H_2 H_3} = 0$$

olur. Buradan,

$k_2 \neq 0$ ve $(\sum_{i=1}^{2} H_i^2)' = 0$ veya $\sum_{i=1}^{2} H_i^2 =$ sabit olur ki bu α nın E^4 de bir eğilim çizgisi olduğunu gösterir.

Tümvarım ispat yöntemine göre $n=p$ için teoremi doğru kabul edip. $n=p+2$ için de doğru olduğunu gösterelim : $n=p$ için (VI.2.I2) den,

$$\det(m_2', m_3', \ldots, m_{p+1}') = \left[k_2 k_4 \ldots k_p\right]^2$$

dir. $n=p+2$ için (VI.2.I7) den,

$$\det(m_2', m_3', \ldots, m_{p+3}') = \left[k_2 k_4 \ldots k_p \frac{(\sum_{i=1}^{p} H_i^2)'}{2 H_{p+1} H_p}\right]^2$$

dir. Hipotezden dolayı,

$$\det(m_2', m_3', \ldots, m_{p+3}') = 0$$

ve dolayısıyla,

$$k_2 k_4 \ldots k_p \frac{(\sum_{i=1}^{p} H_i^2)'}{2H_p H_{p+1}} = 0$$

dır. Buradan,

$$k_2 \neq 0, \ldots, k_p \neq 0 \quad \text{ve} \quad \frac{(\sum_{i=1}^{p} H_i^2)'}{2H_p H_{p+1}} = 0$$

dır. Buradan, $\sum_{i=1}^{p} H_i^2 =$ sabit bulunur ki bu da α eğrisinin E^n de bir eğilim çizgisi olduğunu gösterir.

VI.2.3. TEOREM

$n \geq 4$ ve n çift olmak üzere E^{n+1} de tanjant uzaylarının normalleri $\vec{V}_1$ ler olan bir E^n alt uzayının ele alalım. E^n deki bir α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki oskülatör küresinin merkezinin koordinatları m_i ler, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet n-lisi $\{\vec{V}_2,\ldots,\vec{V}_{n+1}\}$, k_i ler i-yinci dereceden eğrilikler ve α eğrisinin harmonik eğrilikleri H_i lerdir. m_i ve V_i lerin s yay parametresine göre oluşan ;

$$\vec{V}_i' = -k_{i-1}\,\vec{V}_{i-1} + k_i\,\vec{V}_{i+1} \ , \quad 2 \leq i \leq n+1 \ , \qquad \text{(VI.2.18)}$$

ve

$$m_j' = -k_{j-1}\, m_{j-1} + k_j\, m_{j+1} \ , \quad 2 \leq j \leq n+1 \ , \qquad \text{(VI.2.19)}$$

sistemlerinin katsayılar determinantları aynı yapıdadır. Yani birincisininki

$$\det(\vec{V}_2',\vec{V}_3',\ldots,\vec{V}_{n+1}') = \left[\prod_{\nu=2}^{n} k_\nu\right]^2 \ , \quad \nu = 2,4,\ldots,n$$

ve ikincisininki,

$$\det(m_2',m_3',\ldots,m_{n+1}') = \left[\prod_{\nu=2}^{n} k_\nu\right]^2 \ , \quad \nu = 2,4,\ldots,n$$

dir.

İSPAT :

Önce (VI.2.18) nin katsayılar determinantlarını bulalım. Bu determinant antisimetrik bir matristir. Determinant fonksiyonunun temel özelliklerinden [11], dolayı n nin çift değerleri için çözüm arayacağız.

İspatı tümevarım yöntemi ile yapalım. $n=4$ için ispat doğrudur. Gerçekten,

$$\det(\vec{V}_2',\vec{V}_3',\vec{V}_4',\vec{V}_5') = \begin{vmatrix} 0 & k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & 0 & k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & 0 \end{vmatrix}$$

veya

$$\det(\vec{V}_2',\vec{V}_3',\vec{V}_4',\vec{V}_5') = [k_2 k_4]^2 , \qquad \text{(VI.2.20)}$$

bulunur.

Tümevarım ispat yöntemine göre $n=p$ için teorem doğrudur. O halde,

$$\det(\vec{V}_2',\vec{V}_3',\ldots,\vec{V}_{p+1}') = \begin{vmatrix} 0 & k_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & k_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & k_p \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -k_p & 0 \end{vmatrix}$$

veya

$$\det(\vec{V}_2',\vec{V}_3',\ldots,\vec{V}_{p+1}') = [k_2\, k_4 \ldots k_p]^2 , \qquad \text{(VI.2.2I)}$$

bulunur. $n=p+2$ için de teoremin doğru olduğunu ispat edelim.

$$\det(\vec{V}_2',\vec{V}_3',\ldots,\vec{V}_{p+3}') = \begin{vmatrix} 0 & k_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & k_3 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & k_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -k_p & 0 & k_{p+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -k_{p+1} & 0 & k_{p+2} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -k_{p+2} & 0 \end{vmatrix}$$

veya

$$\det(\vec{V}_2',\vec{V}_3',\ldots,\vec{V}_{p+3}') = k_{p+2}^2 \det(\vec{V}_2',\vec{V}_3',\ldots,\vec{V}_{p+1}') , \qquad \text{(VI.2.22)}$$

bulunur. $\det(\vec{V}_2',\vec{V}_3',\ldots,\vec{V}_{p+1}')$ nün (VI.2.2I) deki değeri (VI.2.22) de yerine konacak olursa,

$$\det(\vec{V}'_2,\vec{V}'_3,\dots,\vec{V}'_{p+3}) = \left[k_2\ k_4\ \dots\ k_{p+2}\right]^2$$

veya

$$\det(\vec{V}'_2,\vec{V}'_3,\dots,\vec{V}'_{p+3}) = \left[\prod_{\nu=2}^{p+2} k_\nu\right] \quad ,(= 2,4,\dots,p+2) \qquad \text{(VI.2.23)}$$

elde edilir.

Şimdi de (VI.2.I9) in katsayılar determinantını araştıralım: Bunun için de tümevarım ispat yöntemini uyguluyalım. (VI.2.I9) in de katsayılar determinantı antisimetriktir. O halde n=çift olacak.

Tümevarım ispat yöntemine göre n=4 için teorem doğrudur. Hakikaten,

$$\det(m'_2,m'_3,m'_4,m'_5) = \begin{vmatrix} 0 & k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & 0 & k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & 0 \end{vmatrix}$$

veya

$$\det(m'_2,m'_3,m'_4,m'_5) = k_2^2\ k_4^2 \quad , \qquad \text{(VI.2.24)}$$

bulunur.

Tümevarım ispat yöntemine göre n=p için teorem doğrudur. O halde,

$$\det(m'_2,m'_3,\dots,m'_{p+1}) = \begin{vmatrix} 0 & k_2 & 0\ .\ .\ 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & k_3\ .\ .\ 0 & 0 \\ . & . & . \quad . & . \\ 0 & 0 & 0\ .\ .\ 0 & k_p \\ 0 & 0 & 0\ .\ .\ -k_p & 0 \end{vmatrix}$$

veya

$$\det(m_2',m_3',\ldots,m_{p+1}') = \left[k_2\, k_4 \,\ldots\, k_p\right]^2 \quad , \qquad \text{(VI.2.25)}$$

olur. $n=p+2$ için de teoremin doğru olduğunu görelim:

$$\det(m_2',m_3',\ldots,m_{p+3}') = \begin{vmatrix} 0 & k_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & k_3 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & k_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -k_p & 0 & k_{p+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -k_{p+1} & 0 & k_{p+2} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -k_{p+2} & 0 \end{vmatrix}$$

veya

$$\det(m_2',m_3',\ldots,m_{p+3}') = k_{p+2}^2 \det(m_2',m_3',\ldots,m_{p+1}') \quad , \qquad \text{(VI.2.26)}$$

elde edilir. Ve (VI.2.25) den dolayı yukarıdaki ifade,

$$\det(m_2',m_3',\ldots,m_{p+3}') = \left[\prod_{\nu=2}^{p+2} k_\nu\right]^2 \quad , \qquad \text{(VI.2.27)}$$

dir.

SONUÇ

Özdamar ve Hacısalihoğlu [7] nun yapmış oldukları çalışmanın ışığı altında :

1°) Yüksek mertebeden eğrilikler, harmonik eğrilikler cinsinden ifade edildi,

2°) Forysth [14] ın E^3 Öklid uzayında bir α eğrisinin eğilim çizgisi olmasına dair vermiş olduğu karakterizasyon E^{n-1} Öklid uzayına genelleştirildi.

Ayrıca, Özdamar ve Hacısalihoğlu [8] nun çalışmalarından faydalanılarak E^{n+1} de verilen bir α eğrisinin eğrilikleri, harmonik eğrilikleri ve oskülatörküresinin merkezinin koordinatları arasında bağıntılar bulundu. Bu bağıntılardan yararlanılarak, eğilim çizgileri için yeni bir karakterizasyon verildi.

B İ B L İ Y O G R A F Y A

[1] HACISALİHOĞLU,H.H.

Diferensiyel Geometri,

Baskıya hazır. pp : 4-5.

[2] HACISALİHOĞLU,H.H.

Yüksek Diferensiyel Geometri,

Fırat Üniv.Fen Fakültesi (Baskıda).

[3] BLASCHKE,W.

Zur Bewegungsgeometrie auf der Kugel,

S.B.Heidelberger Akad.wiss.Math.not.KI.N.2.(1948).

[4] GLUCK,H.

Higher Curvatures of Curves in Euclidean Space,

Amer.Math.Month.Vol 73 (1966) pp : 699-704.

[5] WEATHERBURN,C.E.

Differential Geometry of Three Dimension,

Cambridge,at the University Press.(1961) pp : 20-21.

[6] HACISALİHOĞLU,H.H.

Yüksek Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometriler,

A.Ü.Fen Fakültesi.(1978) pp : 1-9.

[7] ÖZDAMAR,E. ve HACISALİHOĞLU,H.H.

A Characterization of Inclined Curves in Euclidean n-Space,

Communications,Fac.Des Sciences de I'Université d'Ankara.

Tome 24.(1975) pp : 15-22.

[8] ÖZDAMAR,E. ve HACISALİHOĞLU,H.H.

Characterizations of Sphericalcurves in Euclidean n-Space,

Communications,Fac.des Sciences de I'Université d'Ankara.

Tome 23 A (1974) pp : 109-124.

[9] WILLMORE,T.J.

An Introduction to Differential Geometry,

Oxford University Press.(1959) pp : 5-7.

[10] AUSLENDER,L.

Differential Geometry,

Harper and Row,New York.(1967) pp : 84-85.

[11] HACISALİHOĞLU,H.H.

Lineer Cebir,

Diyarbakır Üniv.Fen Fak.yayınları (1977).pp : 391-401.

[12] STRUIK,D.J.

Differential Geometry,

Addison-Wesley Pub.Comp.İnc.(1950) pp : 13-14.

[14] O'NEILL,B.

Elementary Differential Geometry,

Academic Press,İnc.Ltd.(1966) pp : 12-13.

[14] FORSYTH,A.R.

Differential Geometry,

Cambridge (1912) pp : 28.

[15] SPIVAK,M.

Calculus on Manifolds,

W.A.Benjamin,İnc.New York,Amsterdam,1965.

[16] GOETZ, A.

Introduction to Differential Geometry,

Addison-Wesley Pub.Comp.(1970) pp : 29.

[17] ULUÇAY, C.

Fonksiyonlar Teorisi ve Riemann Yüzeyleri,

Karadeniz Teknik Üniv.Temel Bilimler Fak.Yayınları.(1978).

[18] GEMIGNANI, M.C.

Elementary Topology,

London, Addison-Wesley Pub.Comp.(1967).

[19] MATSUSHIMA, Y.

Differentiable Manifolds,

Marcel Dekker, İnc.New York.(1972).

[20] BOOTHBY, W.M.

An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian,

Geometry,

Academic Press New York.(1975).

Ö Z G E Ç M İ Ş

II-3-I944	Ev kadını Firdevs ile memur Harun Öztürk'ün ilk çocuğu olarak Sivas İlinin Şarkışla kazasının Alaçayır köyünde doğdum.
I952-I957	Sivas İlinin Şarkışla kazasının Bozkurt köyünde ilk okula,
I957-I960	Ankara'da Mimar Kemal orta okuluna,
I960-I963	Ankara'da Atatürk Lisesine devam ettim.
I963	Lise diploması aldım.
I963-I978	A.Ü.Fen Fakültesinde Matematik lisans öğrenimi yaptım.
I968-I969	Ankara Aydınlıkevler Lisesinde ücretli Matematik Fizik öğretmeni olarak çalıştım.
I969-I970	İstanbul Tuzla Piyade okulunda 97.dönem yedek subay adayı, Ankara'da 226.Piyade Alayında takım komutanı, Asker - alma dairesinde daire başkanının emir subay'ı Asteğmen olarak vatani görevimi yaptım.
I970-I976	dan itibaren K.T.Ü.Temel Bilimler Fakültesi Matematik Bölümünde uzman,
I976-I979	K.T.Ü.Temel Bilimler Fakültesi Matematik Bölümünde asistan olarak çalışmaktayım.