KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ TEMEL BİLİMLER FAKÜLTESİ

AÇILIM UZUNLUĞU

ve

AÇILIM AÇISI ÜZERİNE

Karadeniz Teknik Üniversitesi Temel Bilimler Fakültesi'nce

"Fen Doktoru"
ünvanının verilmesi için kabul edilen tezdir

Osman GÜRSOY

Tezin Dekanlığa verildiği Tarih	:	23.2.1979
Sözlü Sınavın Tarihi	:	29.6.1979
Doktorayı Yöneten	:	Prof. Dr. H.Hilmi HACISALİHOĞLU
Diğer Komisyon Üyeleri	:	Prof.Dr. Asım ÖZKAN
	:	Doç.Dr. Asuman ILGAZ

Trabzon- 1979

Bu çalışmanın temelini oluşturan doktora derslerini bize en yararlı şekilde sunan, seminerlerimizi özenle seçip yöneten, ayrıca bu çalışmayı bana vererek yol gösteren ve her türlü yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Prof.Dr. H.H. HACISALİHOĞLU'na minnet ve şükranlarımı arzederim.

Osman GÜRSOY

İ Ç İ N D E K İ L E R

Ö Z E T

Bu çalışma dört bölümden ibarettir. I. Bölüm girişe, II. ve III. Bölümler temel kavramlara ayrılmıştır. IV. Bölüm orjinal çalışmalarımdan oluşmaktadır. Bu bölümde, kapalı regle yüzeyler için bir dual integral invaryant olan dual açılım açısı tanımlanmış ve bununla ilgili sonuç teoremler verilmiştir. Ayrıca HACISALİHOĞLU ve HOSCHEK'in, kapalı regle yüzeylerin integral invaryantları arasında buldukları bağıntılar bir tek metotla elde edilmiştir. Böylece A.HOLDITCH ve J. STEINER'in teoremlerine dair HACISALİHOĞLU ve HOSCHEK'in verdiği teoremler bu yeni metod ile ortaya çıkarılmışlardır. Adı geçen çalışmalarda esas olan açılım uzunluğu ve açılım açısı denen iki invaryantın bir dual sayıda eşleştikleri, bu nedenle her iki invaryantın bir tek dual invaryant olarak incelenebileceği gösterilmiştir.

S U M M A R Y

This dissertation consists of four chapters. The first chapter is about the introduction, and the second and third chapters deal with the basic concepts. The fourth chapter covers my original study. In this chapter, the dual angle of pitch (Öffnungswinkel), which is a dual integral invariant for a closed ruled surface, has been defined and the corresponding resulting theorems have been given. Furthermore, the relations which HACISALİHOĞLU and HOSCHEK have found between the integral invariants of the closed ruled surfaces have been obtained by only one method. These theorems that HACISALİHOĞLU and HOSCHEK had given about the theorems of A. HOLDITCH and J. STEINER have been revealed. In the above-mentioned studies it has been indicated that two invariants, which are called pitch (Öfnungsstrecke) and angle of pitch (Öffnungswinkel), are combined in a dual number, and because both of these invariants can be regarded as a unique dual invariant.

NOTASYONLAR

H	Hareketli çizgiler uzayı
H	Sabit çizgiler uzayı
H/H'	H uzayının H' uzayına göre 1-parametreli hareketi
λ_v	(v_1)-kapalı regle yüzeyinin açılım açısı
ℓ_v	(v_1)-kapalı regle yüzeyinin açılım uzunluğu
D-Modül	Dual Sayılar Halkası üzerine kurulan Dual Vektörlerin uzayı
$\langle\ ,\ \rangle$	D-Modülde ve Reel Vektör Uzayında iç çarpım fonksiyonu
$\lVert\ \rVert$	D-Modülde ve Reel Vektör Uzayında Norm fonksiyonu
K	Hareketli Dual Küre
K'	Sabit Dual Küre
K/K'	K dual küresinin, K dual küresine göre 1-parametreli dual hareketi
Λ_{V_1}	$\vec{V}_1 = \vec{V}_1(t)$ kapalı regle yüzeyinin Dual Açılım Açısı

BÖLÜM I.

G İ R İ Ş

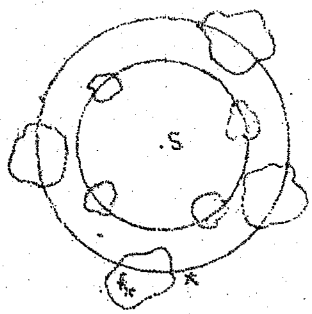
J. STEINER (1796-1863) ve A.HOLDITCH (1858)tekniğe uygulanması bakımından, oldukça önemli görülen iki teorem vermişlerdir. Düzlemsel kinematiğin konusu içinde sayılabilen bu teoremleri, aşağıdaki gibi ifade ebeliriz .

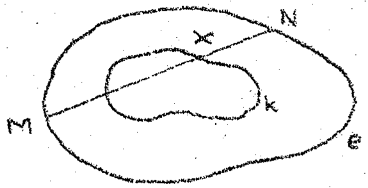
I.1. J.STEINER TEOREMİ

E hareketli ve E' sabit düzlemler olmak üzere, E nin E' ye göre 1-parametreli kapalı hareketini E/E' ile gösterelim. Böyle bir harekette, hareketli düzlemin bütün x noktaları, sabit düzlemde, birbirinden farklı birer kapalı yörüngeler çizerler. Bunların çevrelediği f_x alanları için, şu teorem iyi bilinir [1, s.154] .

TEOREM

1-parametreli E/E' kapalı düzlem hareketinde, E hareketli düzleminin, eş alanlı yüzey parçaları çevreleyen tüm x noktaları, J.STEINER noktası merkez olmak üzere daireler üzerindedirler. Yani, merkezi, J.STEINER noktasında olan bir dairenin bütün noktaları, eş alanlı kapalı yörüngeler çizerler (Şek.I.1)





Şekil I.1. Şekil I.2.

I.2. HOLDITCH TEOREMİ

Uzunluğu sabit bir $\overline{MN}$ doğru parçasının M ve N uç noktaları E' sabit düzleminde seçtiğimiz bir e ovalinin üzerinde hareket ettirirsek, bir 1-parametreli E/E' kapalı düzlemsel hareketi tanımlamış oluruz. Bu hareket esnasında $\overline{MN}$ doğru parçası üzerinde tesbit edilen bir X nok - tası, genellikle konveks olmayan bir k kapalı eğrisi çi - zer. A.HOLDITCH teoremine göre, esas e eğrisi ile bu k eğrisi arasındaki alan,

$$F_x = \pi . \overline{MX} . \overline{XN}$$

dir. Bu ifadeden görüldüğü gibi F_x alanı, yalnız X noktasının $\overline{MN}$ üzerindeki seçilişine bağlıdır. Ohalde bu alan ifadesi, e ovaline, dolayısıyle harekete bağlı değildir [1, s.162].

HOLDITCH ve STEINER teoremleri, düzlemde ve reel küre üzerinde birçok makaleye konu olmuşlardır. Örneğin ; C. LEUDESDORF [2], [3], A.B. KEMPE [4]. E.B. ELLIOT [5], [6], [7], W. BLASCHKE [8] ve H.H. HACISALİHOĞLU'nun [9] çalışmaları bu teoremlerle ilgilidir. Bunlardan yalnız ELLIOT, BLASCHKE ve HACISALİHOĞLU bu teoremleri reel küresel hareketlere uygulamışlardır. Diğerleri sadece düzlemsel hareketlerde kalmışlardır. Daha sonra HACISALİHOĞLU [10] ile verdiği çalışmada, HOLDITCH ve STEINER teoremlerini, dual küre üzerinde ele alarak çizgiler uzayına genelleştirdi ve kapalı regle yüzeylerin açılım uzunlukları arasında bazı sonuçlara vardı. Son olarak J. HOSCHEK [11] ile, dual sabitler kullanmaksızın, HOLDITCH teoremini çizgiler uzayına genelleştirmek amacı ile kapalı regle yüzeyler için açılım açısı kavramını ortaya koymuş ve açılım açıları arasında bir bağıntı bulmuştur.

Bu çalışmamızda biz de D-Modülde kapalı birim dual küresel eğriler için, yeni bir kavram olan dual açılım açısı kavramını tanımladık ve E.STUDY dönüşümünü kullanarak çizgiler uzayında,

i. Dual açılım açısının, kapalı dual küresel eğriler için, bir integral invaryant olduğunu gösterdik ve kapalı regle yüzeylerin integral invaryantları cinsinden oldukça önemli bir ifadesini verdik.

ii. Kapalı birim dual küresel bir eğrinin, sınırladığı alanın, dual açılım açısı cinsinden ifadesini verdik.

iii. Dual açılım açılarını kullanarak, HOLDITCH ve STEINER teoremlerini, çizgiler uzayının kapalı regle yüzeylerine yeni ve yekpare bir metod ile genelleştirdik. Böylece, HACISALİHOĞLU ve HOSCHEK'in bulduğu bağıntıları ve bunlardan başka bazı orjinal teoremleri elde ettik.

Böylece dual açılım açısı adı altında ortaya koyduğumuz kavramın önemi ortaya çıkmış ve bu kavram sayesinde HOLDITCH ve STEINER teroemleri çizgiler uzayına genelleştirilmişlerdir. Ayrıca açılım açısı ile açılım uzunluğu denen reel sayılar birtek dual sayıyı oluşturdukları görülmüştür.

BÖLÜM II.

D-MODÜL

II.1. DUAL SAYILAR

Reel sayılar cümlesi, toplama $\oplus$ ve çarpma $\odot$ işlemlerine göre bir cisimdir. Bu cismi kısaca $\mathbb{R}$ ile gösterelim:

TANIM II.1.1.

$a,a^* \in \mathbb{R}$ olmak üzere (a,a^*) sıralı çiftlerinden oluşan,

$$\mathbb{D}=\{(a,a^*)\ :\ a,a^*\in \mathbb{R}\}$$

cümlesinde iki iç işlem ve bir eşitlik bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlanmış ise bu cümleye dual sayılar cümlesi adını vereceğiz.

TOPLAMA : $A=(a,a^*)$ ve $B=(b,b^*)$ olmak üzere her $A,B\in \mathbb{D}$ için,

$$\oplus : \mathbb{D}\times\mathbb{D}\longrightarrow\mathbb{D}$$

$$(A,B)\longrightarrow A\oplus B=(a+b,\ a^*+b^*)$$

şeklinde tanımlanan $\oplus$ iç işlemine $\mathbb{D}$ de bir toplama denir.

ÇARPMA : Her $A=(a,a^*)$, $B=(b,b^*)\in \mathbb{D}$ için,

$$\odot : \mathbb{D}\times\mathbb{D}\longrightarrow\mathbb{D}$$

$$(A,B)\longrightarrow A\odot B=(ab,ab^*+a^*b)$$

şeklinde tanımlanan $\odot$ iç işlemine $\mathbb{D}$ de bir çarpma işlemi denir.

EŞİTLİK : Her $A=(a,a^*)$, $B=(b,b^*)\in \mathbb{D}$ için,

$$A=B \Leftrightarrow a=b \quad \text{ve} \quad a^*=b^*$$

dir.

Böylece tanımladığımız $\mathbb{D}$ cümlesinin her elemanı, bir dual sayıyı göstermek üzere A, B, C, ..., gibi harflerle gösterilir.

TEOREM II.1.1.

($\mathbb{D}$, $\oplus$, $\odot$) üçlüsü bir, birimli değişimli halkadır [17.s.2].

Bu halkanın toplamaya göre birim elemanı (0,0), çarpmaya göre birim elemanı ise, (1,0) dır.

TEOREM II.1.2.

($\mathbb{D}$, $\oplus$, $\odot$) üçlüsü bir cisim değildir [17.s.4].

TEOREM II.1.3.

Dual sayılar halkası, reel sayılar cümlesine izomorf bir alt cümleyi, alt cisim olarak kapsar [17.s.5].

Bu teoremin bir sonucu olarak, reel sayılar cümlesine izomorf olan,

$$\{(a,0)\ ;\ a,0 \in \mathbb{R}\}$$

dual sayılar cümlesinin herbir elemanı, izomorfu olan reel sayı ile gösterilebilir. Kısaca,

$$(a,0) \cong a$$

olarak alınabilir. Buna göre ($\mathbb{D}$, $\oplus$, $\odot$) birimli, değişimli halkasının toplama ve çarpmaya göre birim elemanları, sırasıyla,

$$(0,0) \cong 0$$

ve

$$(1,0) \cong 1$$

olarak alınabilir. Biz genel olarak bu notasyonu kullanacağız, ayrıca kısalığın hatırı için ⊕ ve ⊙ işlemleri yerine "+" ve "." işaretlerini tercih edeceğiz.

$\mathbb{D}$ halkasında, (0,1) dual sayısı dual birim olarak adlandırılır ve,

$$\varepsilon=(0,1)$$

ile gösterilir. Çarpma işleminin tanımına göre,

$$\varepsilon^2=(0,0)\cong 0$$

olduğu kolayca görülebilir.

TEOREM II.1.4.

Her $A=(a,a^*)$ dual sayısı,

$$A=a+\varepsilon a^* \quad , \quad \varepsilon=(0,1)$$

şeklinde yazılabilir [17.s.7].

TEOREM II.1.5.

İki dual sayının çarpımı sıfır ise, çarpanlardan biri sıfır olmak zorunda değildir [17.s.8].

TANIM II.1.2.

$z=x+\varepsilon x^*$ dual sayısının modül değeri diye $|x|$ reel sayısına denir ve,

$$|z|=|x+\varepsilon x^*| \\ =|x|$$

ile gösterilir.

II.2. DUAL VEKTÖRLERİN UZAYI ($\mathbb{D}$-MODÜL)

$$\mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \mathbb{D} = \mathbb{D}^3 = \left\{ (A_1, A_2, A_3) \ ; \ A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{D} \right\}$$

cümlesinin herbir elemanını bir büyük harfle, örneğin ; $A \in \mathbb{D}^3$ elemanını $A = (A_1, A_2, A_3)$ veya $A = (A_i)$, $(i=1,2,3)$, notasyonu ile gösterelim. Bu cümle içinde aşağıdaki tanımları verelim.

TANIM II.2.1.

Her $A=(A_i)$, $B=(B_i) \in \mathbb{D}^3$ için,

$$A=B \Longleftrightarrow A_i=B_i \ , \ i=1,2,3$$

dır.

TANIM II.2.2.

Her $A=(A_i)$, $B=(B_i)$ için bir iç işlem ,

$$+: \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \longrightarrow \mathbb{D}^3$$

$$(A,B) \longrightarrow A+B=(A_i+B_i), \ i=1,2,3$$

ile tanımlanır. A+B ye $\mathbb{D}^3$ de A ile B nin toplamı denir.

TANIM II.2.3.

Her $\lambda \in \mathbb{D}$ ve her $A=(A_i) \in \mathbb{D}^3$ için bir dış işlem,

$$. : \mathbb{D} \times \mathbb{D}^3 \longrightarrow \mathbb{D}^3$$

$$(\lambda, A) \longrightarrow \lambda.A=(\lambda A_i), \ i=1,2,3$$

ile tanımlanır. λA ya, A nın λ skaleri ile çarpımı denir.

TEOREM II.2.1.

($\mathbb{D}^3$,+,.) cümlesi, $\mathbb{D}$ halkası üzerinde bir modüldür [17.s.16].

TANIM II.2.4.

Kısaca, ($\mathbb{D}^3$,+,.) üçlüsüne, $\mathbb{D}$-Modül ve bunun elemanları olan sıralı dual üçlülere, dual vektörler diyeceğiz ve $\vec{A}=(A_i)$ şeklinde göstereceğiz.

TEOREM II.2.2.

$\vec{a},\vec{a}^* \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere, $\mathbb{D}$-Modülün herbir $\vec{A}=(A_i)$ dual vektörünü,

$$\vec{A}=\vec{a}+\varepsilon\,\vec{a}^* \quad , \quad \varepsilon=(0,1)\in\mathbb{D}$$

şeklinde yazabiliriz [17.s.17].

Teorem II.1.3. ile eş anlamlı olarak; $\mathbb{R}^3$ vektör uzayı, $\mathbb{D}$-Modülün elemanları $(\vec{a},\vec{0})=\vec{a}+\varepsilon\,\vec{0}$ şeklinde olan bir alt cümlesine izomorftur.

$\mathbb{D}$-Modülün toplamaya göre birim elemanı,

$$\vec{0}=\vec{0}+\varepsilon\,\vec{0}$$

şeklinde gösterilir. Buna sıfır dual vektörü denir.

$\vec{A}=\vec{a}+\varepsilon\,\vec{a}^*$ ve $\vec{B}=\vec{b}+\varepsilon\,\vec{b}^*$ dual vektörlerinin eşitliği,

$$\vec{A}=\vec{B} \Longleftrightarrow \vec{a}=\vec{b} \text{ ve } \vec{a}^*=\vec{b}^*$$

ile verilir. Bu Tanım II.2.1. ile eş anlamlıdır.

TANIM II.2.5. ($\mathbb{D}$-MODÜLDE İÇ ÇARPIM)

Her $\vec{A},\vec{B}\in\mathbb{D}$-Modül için,

$$\langle\, ,\rangle : \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \longrightarrow \mathbb{D}$$

$$(\vec{A},\vec{B}) \longrightarrow \langle\vec{A},\vec{B}\rangle = \langle\vec{a},\vec{b}\rangle + \varepsilon(\langle\vec{a}^*,\vec{b}\rangle + \langle\vec{a},\vec{b}^*\rangle) \qquad (II.2.1)$$

ile tanımlanan $\langle , \rangle$ fonksiyonu $\mathbb{D}$-Modül için bir iç çarpım fonksiyonudur. Bunun için ; $\langle , \rangle$ fonksiyonu - nun aşağıdaki iç çarpım aksiyomlarını sağladığı kolayca gösterilebilir [17.s.20].

i. Her $\vec{A},\vec{B} \in \mathbb{D}$-Modül için,

$$\langle \vec{A},\vec{B} \rangle = \langle \vec{B},\vec{A} \rangle$$

dir.

ii. Her $\vec{A},\vec{B} \in \mathbb{D}$-Modül ve her $\alpha \in \mathbb{D}$ için,

$$\langle \alpha\vec{A},\vec{B} \rangle = \langle \vec{A}, \alpha\vec{B} \rangle = \alpha\langle \vec{A},\vec{B} \rangle$$

dir.

iii. Her $\vec{A},\vec{B},\vec{C} \in \mathbb{D}$-Modül için,

$$\langle \vec{A}+\vec{B},\vec{C} \rangle = \langle \vec{A},\vec{C} \rangle + \langle \vec{B},\vec{C} \rangle$$

$$\langle \vec{A},\vec{B}+\vec{C} \rangle = \langle \vec{A},\vec{B} \rangle + \langle \vec{A},\vec{C} \rangle$$

dir.

iv. Her $\vec{A} \in \mathbb{D}$-Modül için,

$$\langle \vec{A},\vec{A} \rangle = 0 \Leftarrow \vec{A}=0$$

dir.

TANIM II.2.6. ($\mathbb{D}$-MODÜLDE NORM)

Her $\vec{A} \in \mathbb{D}$-Modül için norm,

$$\| \; \| : \mathbb{D}^3 \longrightarrow \mathbb{D}$$

$$\vec{A} \longrightarrow \|\vec{A}\| = \sqrt{\langle \vec{A},\vec{A} \rangle}$$

$$= \|\vec{a}\| + \varepsilon \frac{\langle \vec{a},\vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|} , \quad \vec{a} \neq \vec{0}$$

fonksiyonu ile tanımlanır.

TANIM II.2.7.

Bir dual vektörün normu, (1,0) dual sayısına eşit ise, bu vektöre birim dual vektör denir.

TEOREM II.2.3.

$\vec{A} \neq \vec{0} + \varepsilon \vec{a}^*$ olmak üzere her $\vec{A} \in$ D-Modül için,

$$\vec{A}_o = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$$

bir birim dual vektördür [17.s.22].

TANIM II.2.8.

$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \in$ D-Modül olmak üzere,

$$\vec{A}_o = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}, \quad \vec{a} \neq \vec{0}$$

birim dual vektörüne, $\vec{A}$ dual vektörünün ekseni denir.

$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, dual vektörünün eksenini, $k = \dfrac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|^2}$ olmak üzere,

$$\vec{A}_o = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} + \varepsilon \frac{\vec{a}^* - k\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

şeklinde yazabiliriz.

TANIM II.2.9.

D-Modülde bir $\vec{A}$ dual vektörü için,

$$k = \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|^2}$$

sayısına, A dual vektörünün <u>adımı</u> veya <u>yükselişi</u> denir.

Bu tanımlarımızdan sonra, bir A dual vektörünü,

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \|\vec{A}\| \; \vec{A}_o \\ &= \left(\|\vec{a}\| + \varepsilon \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|} \right) \vec{A}_o \end{aligned}$$

veya

$$\vec{A} = \|\vec{a}\| \, (1 + \varepsilon k) \, \vec{A}_o$$

şeklinde yazabiliriz. Reel kısmı sıfırdan farklı olan dual vektörlere has dual vektörler adını vereceğiz.

TANIM II.2.10.

$K=\left\{ \vec{X}=\vec{x}+\varepsilon\,\vec{x}^{*}\ ;\ \|\vec{X}\|=(1,0),\quad \vec{x},\vec{x}^{*}\in\mathbb{R}^3 \right\}$

cümlesine, $\mathbb{D}$-Modülde bir birim dual küre denir.

TEOREM II.2.4. (E.STUDY DÖNÜŞÜMÜ).

$\vec{A}=\vec{a}+\varepsilon\,\vec{a}^{*}$, $\vec{a}\neq 0$, olmak üzere D-Modülde denklemi,

$$\|\vec{A}\|=(1,0)$$

ile verilen birim dual kürenin dual noktaları, $\mathbb{R}^3$ deki yönlü doğrulara birebir karşılık gelirler [17. s.23].

Birim dual küre üzerindeki bir A dual noktasını merkeze birleştiren birim dual yer vektörü,

$$\vec{A}=\vec{a}+\varepsilon\,\vec{a}^{*}$$

ise Teorem II.2.4. den dolayı, çizgiler uzayında birtek yönlü doğruya karşılık gelir. Burada $\vec{a}\in\mathbb{R}^3$ vektörü, bu yönlü doğrunun doğrultman vektörü, $\vec{a}^{*}\in\mathbb{R}^3$ vektörü ise ; X bu doğrunun üzerinde bir nokta ve 0 bir başlangıç noktası olmak üzere,

$$\vec{a}^{*}=\vec{0X}\wedge\vec{a}$$

ile belirlenen bir moment vektördür. Bu vektöre, çizgiler uzayındaki doğrunun başlangıca göre vektörel momenti denir.

TANIM II.2.11.(DUAL AÇI)

$\mathbb{D}$-Modülde açı, $\vec{A},\vec{B}$ birer birim dual vektör olmak üzere,

$$\cos\Phi=\langle\vec{A},\vec{B}\rangle$$

ifadesi ile verilir. $\Phi=\varphi+\varepsilon\varphi^{*}$ dual sayısına $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ birim dual vektörleri arasındaki dual açı denir.

Şimdi, iki birim dual vektör arasındaki dual açının, $\mathbb{R}^3$ deki yönlü doğruların uzayı olan çizgiler uzayındaki anlamını araştıralım. Bunun için $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ birim dual vektörlerinin,

$$\langle \vec{A},\vec{B} \rangle = \langle \vec{a},\vec{b} \rangle + \varepsilon(\langle \vec{a}^*,\vec{b} \rangle + \langle \vec{a},\vec{b}^* \rangle)$$

iç çarpımından hareket edelim. E.STUDY teoremi gereğince $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ birim dual vektörleri $\mathbb{R}^3$ de iki yönlü d_1 ve d_2-doğrularına karşılık gelirler. d_1 in yönü $\vec{a}$, yeri (momenti) $\vec{a}^*$; d_2 nin yönü $\vec{b}$, yeri $\vec{b}^*$ ile belli olduğundan, $\vec{a}$ ile $\vec{b}$ arasındaki açı φ ise, yukarıdaki iç çarpımın reel kısmı,

$$\langle \vec{a},\vec{b} \rangle = \cos\varphi$$

dır. Şimdi de dual iç çarpımdaki $\langle \vec{a}^*,\vec{b} \rangle + \langle \vec{a},\vec{b}^* \rangle$ dual kısmin anlamını araştıralım.

$\vec{a}^*$ ve $\vec{b}^*$ momentleri, doğrular üzerindeki noktaların seçilişinden bağımsız olduğundan, [17.s.24]. X ve Y noktalarını, d_1 ve d_2-doğrularının ortak dikmesinin ayakları olarak seçebiliriz (Şek.II.1.1). Bu ortak dikme doğrultusundaki birim vektör ;

$$\vec{n} = \mp \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|}$$

ile belirtilebilir. d_1,d_2-doğruları arasındaki en kısa uzaklık φ^* ile gösterilirse;

$$\vec{x}-\vec{y} = \mp\varphi^* \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|}$$

yazılabilir. Vektörel momentler $\vec{a}^* = \vec{x} \wedge \vec{a}$, $\vec{b}^* = \vec{y} \wedge \vec{b}$ olduğundan,

$$\langle \vec{a}^*,\vec{b} \rangle = \langle \vec{x} \wedge \vec{a},\vec{b} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{a} \wedge \vec{b} \rangle$$

$$\langle \vec{a},\vec{b}^* \rangle = \langle \vec{a},\vec{y} \wedge \vec{b} \rangle = -\langle \vec{y}, \vec{a} \wedge \vec{b} \rangle$$

olur. Buradan dual kısım için,

$$\langle \vec{a}^*, \vec{b}\rangle + \langle \vec{a}, \vec{b}^*\rangle = \langle \vec{x}-\vec{y}, \vec{a}\wedge\vec{b}\rangle$$
$$= \mp \langle \varphi^* \frac{\vec{a}\wedge\vec{b}}{\|\vec{a}\wedge\vec{b}\|}, \vec{a}\wedge\vec{b}\rangle$$
$$= \mp \varphi^* \frac{\langle \vec{a}\wedge\vec{b}, \vec{a}\wedge\vec{b}\rangle}{\|\vec{a}\wedge\vec{b}\|}$$
$$= \mp \varphi^* \|\vec{a}\wedge\vec{b}\|$$
$$= \mp \varphi^* \sin\varphi$$

bulunur. Reel ve dual kısımlar için bulduğumuz değerleri, dual iç çarpım ifadesinde yerine koyarsak,

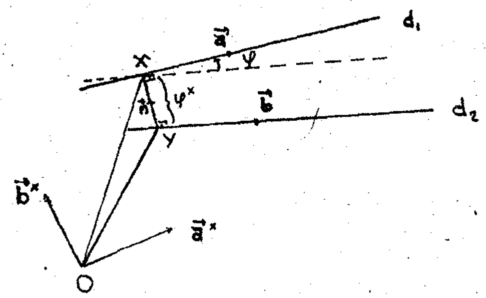
$$\langle \vec{A}, \vec{B}\rangle = \cos\varphi \mp \varepsilon\varphi^* \sin\varphi$$

elde edilir. Bu ifadede (-) işareti gözönüne alınırsa, $\Phi=\varphi+\varepsilon\varphi^*$ bir dual sayı olmak üzere, TAYLOR formülü [17.s.53] gereğince,

$$\langle \vec{A}, \vec{B}\rangle = \cos\Phi \tag{II.2.2}$$

yazılabilir. Ohalde $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ birim dual vektörleri arasındaki $\Phi = \varphi + \varepsilon\varphi^*$ dual açısı, bunların $\mathbb{R}^3$ de temsil ettikleri d_1 ve d_2-yönlü doğruların arasındaki φ açısı ve en kısa uzaklığı gösteren φ^* reel çiftinden oluşur.

Dual açı, aynı zamanda, birim dual küre üzerinde A ve B dual noktalarından geçen büyük dairenin $\widehat{AB}$ dual yay uzunluğu olarak da düşünülebilir.



Şekil II.1.1.

Böylece, E.STUDY dönüşümü yardımıyla, $\mathbb{R}^3$ deki (çizgiler uzayındaki) yönlü doğruların, birbirine göre durumlarını birim dual küre üzerinde inceleyebiliriz.

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ iki birim dual vektör olmak üzere (II.2.2) ifadesinden;

i. $\langle \vec{A},\vec{B} \rangle$ = sırf dual $\Longleftrightarrow$ $\cos\varphi = 0 \Longleftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$, $\varphi^{*} \neq 0$.

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ birim dual vektörlerinin belirttikleri yönlü doğrular dik durumlu, fakat aykırıdırlar.

ii. $\langle \vec{A},\vec{B} \rangle$ = sırf reel $\Longleftrightarrow$ $\varphi^{*} = 0$.

Bu halde yönlü iki doğru kesişir ve,

$$\langle \vec{a},\vec{b}^{*} \rangle + \langle \vec{a}^{*},\vec{b} \rangle = 0$$

ifadesi kesişme koşuludur.

iii. $\langle \vec{A},\vec{B} \rangle = 0 \Longrightarrow \cos\varphi = 0 \Longrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$ ve $\varphi^{*} = 0$.

Yönlü doğrular birbirini dik keserler.

iv. $\langle \vec{A},\vec{B} \rangle = (1,0) \Longrightarrow \varphi = 0$.

Yönlü doğrular paralel ve aynı yönlüdürler. Eğer , $\varphi^{*} = 0$ ise, bu iki doğru aynı zamanda çakışıktır.

v. $\langle \vec{A},\vec{B} \rangle = -(1,0) \Longrightarrow \varphi = \pi$.

Yönlü doğrular paralel ve zıt yönlüdürler. Eğer , $\varphi^{*} = 0$ ise, doğrular çakışıktır.

TANIM II.2.12.($\mathbb{D}$-MODÜLDE DIŞ ÇARPIM)

Her $\vec{A},\vec{B}$ dual vektörleri için $\mathbb{D}$-Modülde,

$$\wedge : \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \longrightarrow \mathbb{D}^3$$

$$(\vec{A},\vec{B}) \longrightarrow \vec{A}\wedge\vec{B} = \vec{a}\wedge\vec{b} + \varepsilon\,(\vec{a}\wedge\vec{b}^{*} + \vec{a}^{*}\wedge\vec{b})$$

şeklinde tanımlanan bir iç işleme, $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ nin dış çarpımı denir.

TEOREM II.2.5.

Her $\vec{A}$ ve $\vec{B} \in \mathbb{D}$-Modül için,

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \|\vec{A}\| \, \|\vec{B}\| \sin\Phi \vec{N}$$

dır [17.s.33].

TEOREM II.2.6.

$\vec{A}, \vec{B}$ has dual vektörlerinin dış çarpımı sıfır ise, bu dual vektörlerin eksenleri çakışıktır [17.s.34] .

TANIM II.2.13.

$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in \mathbb{D}$-Modül has dual vektörler ve $\lambda_i = c_i + \varepsilon c_i^* \in \mathbb{D}$, ($i=1,2,3$), olmak üzere,

$$\lambda_1 \vec{A} + \lambda_2 \vec{B} + \lambda_3 \vec{C} = \vec{0}$$

eşitliği yalnız ve yalnız her $\lambda_i = 0$ için sağlanıyorsa, $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ has dual vektörleri <u>lineer bağımsızdır</u> denir.

TANIM II.2.14.

$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in \mathbb{D}$-Modül ve $\lambda_i = c_i + \varepsilon c_i^* \in \mathbb{D}$, ($i=1,2,3$) için,

$$\lambda_1 \vec{A} + \lambda_2 \vec{B} + \lambda_3 \vec{C} = \vec{0}$$

eşitliği, en az bir $\lambda_i \neq 0$ için sağlanıyorsa, $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ dual vektörleri <u>lineer bağımlıdır</u> denir.

Bu tanımların, reel vektör uzayında karşılığı olan tanımlardan farklı oluşu, $\lambda = o + \varepsilon c^*$ şeklindeki dual sayılarla bölümün tanımsız oluşundandır.

TANIM II.2.15

$\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3$ birim dual vektörlerine, E^3 de karşılık gelen doğrular, bir noktada dik olarak kesişirlerse, $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3$

birim dual vektörlerine, dual ortonormal vektörlerdir denir.

TANIM II.2.16.

$\mathbb{D}$-Modül'ün bir S alt cümlesi, aşağıdaki özelliğe sahip ise, $\mathbb{D}$-Modülün bir bazı adını alır.

i. S lineer bağımsız,

ii. Sp S = $\mathbb{D}$-Modül.

Bunun anlamı, her $A \in \mathbb{D}$-Modül elemanı, S deki elemanların bir lineer kombinezonu olarak yazılabileceğidir.

TANIM II.2.17.

Elemanları dual sayılar olan bir A matrisine dual matris denir ve,

$$A = [A_{ij}] \; , \; A_{ij} = a_{ij} + \varepsilon a^{*}_{ij}, a_{ij}, a^{*}_{ij} \in \mathbb{R}$$

şeklinde gösterilir.

TANIM II.2.18.

$A \in \mathbb{D}^n_n$ (nxn tipi matris) için,

$$AA^T = A^T A = I \text{ (özdeşlik matrisi)}$$

ise A dual matrisine dual ortogonal matris denir.

BÖLÜM III.

D-MODÜLDE ve ÇİZGİLER UZAYINDA 1-PARAMETRELİ HAREKETLER

III.1. K/K' BİRİM DUAL KÜRESEL HAREKETİ

Aynı merkezli, hareketli K ve sabit K' birim dual kürelerini sırasıyla,

$$V=\begin{bmatrix}\vec{V}_1\\ \vec{V}_2\\ \vec{V}_3\end{bmatrix},\ \langle \vec{V}_i,\vec{V}_j\rangle=\delta_{ij},\ \vec{V}_i=\vec{v}_i+\varepsilon\vec{v}_i^{*}$$

ve

$$E=\begin{bmatrix}\vec{E}_1\\ \vec{E}_2\\ \vec{E}_3\end{bmatrix},\ \langle \vec{E}_i,\vec{E}_j\rangle=\delta_{ij},\ \vec{E}_i=\vec{e}_i+\varepsilon\vec{e}_i^{*}$$

dual ortonormal sistemleriyle temsil edelim. Bu sistemler arasında ;

$$A=\left[a_{ij}(t)+\varepsilon a_{ij}^{*}(t)\right],\quad t\in\mathbb{R},\ 1\leq i,j\leq 3$$

bir has dual ortogonal matris ($AA^T=A^TA=1$ ve $\det A=+1$) olmak üzere,

$$V=AE \tag{III.1.1}$$

dönüşümü vardır. Eğer A matrisi t parametresine göre diferansiyellenebiliyorsa, bu dönüşüm, K dual küresinin K' dual küresine göre bir 1-parametreli dual küresel hareketini (dual dönme) tek olarak belirler. K/K' ile göstereceğimiz bu harekete,

$$A(t+T)=A(t),\ T\ \text{periyot} \tag{III.1.2}$$

ise 1-parametreli dual küresel kapalı hareket denir.

(III.1.1) denklemlerinin t parametresine göre diferansiyeli alınırsa,

$$\begin{bmatrix}d\vec{V}_1\\ d\vec{V}_2\\ d\vec{V}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \Omega_1^2 & \Omega_1^3\\ \Omega_2^1 & 0 & \Omega_2^3\\ \Omega_3^1 & \Omega_3^2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{V}_1\\ \vec{V}_2\\ \vec{V}_3\end{bmatrix},\ \Omega_i^j=-\Omega_j^i \tag{III.1.3}$$

bulunur [1.s.252]. Bu ifadeden elde edilen denklemlere 1-parametreli K/K' dual küresel hareketinin türev denklemleri veya E.CARTAN yapı denklemleri denir. Burada,

$$\Omega = dAA^T$$

ile belli olan $\Omega = [\Omega_i^j]$ matrisinin elemanlarına da dual 1-formlar veya E.CARTAN formları denir.

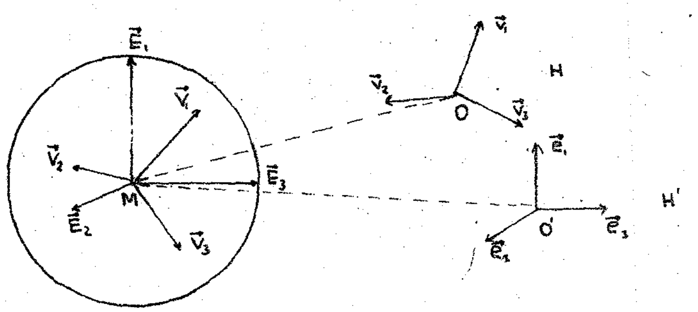
E. STUDY dönüşümünden dolayı, yukarıda verilen hareketli ve sabit dual ortonormal sistemlere, H ve H' çizgiler uzaylarında, sırasıyla;

$$\{0 \,;\, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} \,, \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \delta_{ij} \,, \; \vec{v}_i^* = \vec{MO} \wedge \vec{v}_i$$

ve

$$\{0' ;\, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \,, \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij} \,, \; \vec{e}_i^* = \vec{MO}' \wedge \vec{e}_i$$

sistemleri karşılık gelirler. M dual kürelerin merkezidir (Şek.III.1.1). Böylece, K küresinin K' sabit küresine göre 1-parametleri hareketine, çizgiler uzayında H uzayının H' uzayına göre 1-parametreli uzay hareketi karşılık gelir.



Şekil III.1.1.

K küresi üzerinde tesbit edilmiş bir X dual noktasının K' ye göre hızı (sürüklenme hızı), $\vec{\Psi} = \Omega_2^3 \vec{V}_1 + \Omega_3^1 \vec{V}_2 + \Omega_1^2 \vec{V}_3$ olmak üzere,

$$d\vec{X} = \vec{\Psi} \wedge \vec{X}$$

ile bellidir [1.s.253].

TANIM III.1.1.

K/K' 1-parametreli birim dual küresel hareketinin dual 1-formları $\Omega_i^j = -\Omega_j^i$, $(1 \leq i,j \leq 3)$, olmak üzere,

$$\vec{\Psi} = \Omega_2^3 \vec{V}_1 + \Omega_3^1 \vec{V}_2 + \Omega_1^2 \vec{V}_3$$

dual vektörüne hareketin ani dual pfaff vektörü denir.

TANIM III.1.2.

K/K' hareketinde, bir t anında, hareketli kürede sabit kalan dual noktaya hareketin dual pol noktası denir ve P ile gösterilir. Ayrıca hareket esnasında pol noktasının K daki geometrik yerine hareketli (p)-dual pol eğrisi, K' deki geometrik yerine de (p')-sabit dual pol eğrisi denir.

Hareket esnasında, (p) eğrisinin (p') eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanmasına, bu eğrilere çizgiler uzayında sırasıyla karşılık gelen hareketli pol eksen yüzeyinin, sabit pol eksen yüzeyi üzerindeki bir kayma-yuvarlanma hareketi (yivlenme hareketi) karşılık gelir [1.s.258].

Eğer dual pol noktasının yer vektörünün $P = p + \varepsilon p^*$ ile gösterirsek, bu noktanın sürüklenme hızı Tanım III.I.2. den,

$$\begin{aligned} d\vec{P} &= \vec{\Psi} \wedge \vec{P} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

olur. Buradan Teorem III.2.6. gereğince $\vec{\Psi}$ ile $\vec{P}$ nin çakışık olduğu sonucuna varırız. Ohalde hareketin ani dual pfaff vektörünü, $\Psi = \|\vec{\Psi}\|$ olmak üzere,

$$\vec{\Psi} = \Psi \vec{P} \ , \quad \Psi = \psi + \varepsilon \psi^* \in \mathbb{D}$$

şeklinde yazabiliriz.

Ani dual pfaff vektörü, diferansiyel geometrideki darboux vektörü ile aynı rolü oynamaktadır. Yani, K da sabit bir X dual noktası, hareketin bir t anında, $\vec{\Psi} = \Psi \vec{P}$ ani dual pfaff vektörü etrafında $\Psi = \|\vec{\Psi}\|$ dual açısal hızı ile bir dual dönme hareketi yapar. Bu dual açısal hızın, reel ve dual kısımları olan ψ ve ψ^* değerleri ise, H/H' uzay hareketinde, H' da tesbit edilen bir x-doğrusunun, p-ekseni (ani dönme ekseni) etrafında sırasiyle, sonsuz küçük dönme ve sonsuz küçük kayma miktarlarını gösterir. Bu hareket, uzayin bir dönme ve bir ötelemesinden oluştuğuna göre, ($\psi \neq 0$, $\psi^* \neq 0$ halinde), çizgiler uzayının en genel bir hareketidir [1.s. 254] . Ohalde $\mathbb{D}$-Modüldeki bir K/K' dual küresel hareketine, çizgiler uzayının en genel bir H/H' uzay hareketi karşılık gelir.

İRDELEME : 1-parametreli K/K' dual küresel hareketinin dual açısal hızı $\Psi = \psi + \varepsilon \psi^*$ olmak üzere, K/K' harakettine çizgiler uzayında;

1. $\psi \neq 0$, $\psi^* \neq 0$ ise, ani pfaff vektörüne göre bir dönme ve bir öteleme hareketi (genel helis hareketi) karşılık gelir.
2. $\psi \neq 0$, $\psi^* = 0$ ise, ani pfaff vektörü etrafında bir sırf dönme (küresel hareket) karşılık gelir.
3. $\psi = 0$, $\psi^* \neq 0$ ise, ani pfaff vektörüne paralel bir sırf kayma (doğrusal hareket) karşılık gelir.

TANIM III.1.3.

1-parametreli K/K' küresel hareketinde $\vec{\Psi}$ ani dual pfaff vektörü olmak üzere,

$$\vec{D}=\vec{d}+\varepsilon\,\vec{d}^{*}=\S\,\vec{\Psi}$$

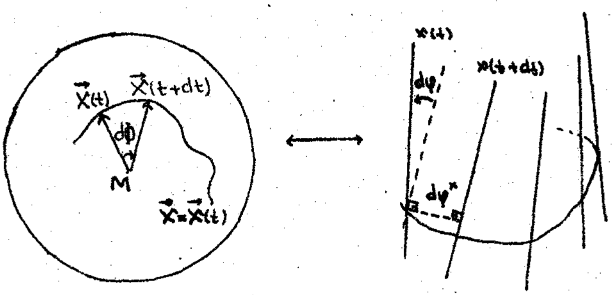
ile tanımlanan $\vec{D}$ vektörüne hareketin <u>dual Steiner vektörü</u> denir.

III.2. REGLE YÜZEYLER

1-parametreli K/K' dual küresel hareketinde, K da tesbit edilmiş bir X dual noktası, K' sabit dual küresi üzerinde $t\in\mathbb{R}$ parametresine bağlı bir,

$$\vec{X}=\vec{X}(t),\quad \|\vec{X}(t)\|=1,$$

eğrisi çizer. t parametresine göre diferansiyellenebilen bu dual küresel eğriye bir regle yüzey olarak bakabiliriz.Çünkü E.STUDY dönüşümüne göre, bu eğriye çizgiler uzayında bir 1-parametreli bir doğru ailesi (Regle yüzey) karşılık gelir. Eğer dual küresel eğri kapalı ise, karşılık gelen regle yüzey de kapalıdır (Şek.III.2.1.).



Şekil III.2.1.

$\vec{X}=\vec{X}(t)$, $t\in\mathbb{R}$ dual küresel eğrisine, çizgiler uzayındaki (x)-regle yüzeyinin dual küresel resmi de denir.

$\vec{X}=\vec{X}(t)$ dual küresel eğrisinin $d\Phi=d\varphi+\varepsilon\, d\varphi^{*}$ dual yay elementi için,

$$d\Phi^2=\langle d\vec{X},d\vec{X}\rangle$$
$$=\langle \dot{\vec{X}},\dot{\vec{X}}\rangle\, dt^2$$

yazılabilir.Buradan;

$$d\varphi^2 = \langle d\vec{x}, d\vec{x} \rangle$$

$$d\varphi . d\varphi^* = \langle d\vec{x}, d\vec{x}^* \rangle$$

elde edilir.

$\vec{X}(t)$ ve $\vec{X}(t+dt)$ dual birim vektörleri arasındaki $d\Phi$ açısı, aynı zamanda bu dual vektörlerin uç noktaları arasındaki dual küresel uzaklık olarak alınabilir.

$d\varphi$ ve $d\varphi^*$ reel büyüklükleri ise, çizgiler uzayında regle yüzeyin $\vec{X}(t)$ ve $\vec{X}(t+dt)$ anadoğruları arasında, sırasıyla, açı ve en kısa uzaklığa karşılık gelirler(Şek.III.2.1.).

Ortogonal koordinat dönüşümlerinde iç çarpım korunduğu (değişmez kaldığı) için,

$$\langle d\vec{X}, d\vec{X} \rangle = \langle d\vec{x}, d\vec{x} \rangle + 2\varepsilon \langle d\vec{x}, d\vec{x}^* \rangle$$

ifadesindeki,

$$\langle d\vec{x}, d\vec{x} \rangle \text{ ve } \langle d\vec{x}, d\vec{x}^* \rangle$$

iç çarpımları da, koordinat dönüşümlerine karşı değişmezdir. Ohalde, bunların oranı, regle yüzeyin en basit birer diferansiyel değişmezidir.

TANIM III.2.1.

$\vec{X}=\vec{X}(t)$, $\|\vec{X}(t)\| = 1$, $t \in \mathbb{R}$ regle yüzeyinde, $\vec{X}(t)$ ve $\vec{X}(t+dt)$ komşu anadoğruları arasındaki dual açı, $d\Phi = d\varphi + \varepsilon\, d\varphi^*$ olmak üzere,

$$\frac{1}{d} = \frac{\langle d\vec{x}, d\vec{x}^* \rangle}{\langle d\vec{x}, d\vec{x} \rangle} = \frac{d\varphi^*}{d\varphi}$$

büyüklüğüne bu yüzeyin X(t) anadoğrusu boyunca dağıtma parametresi veya <u>drall</u>'i denir.

TANIM.III.2.2.

Komşu anadoğruları kesişen regle yüzeylere torslar veya açılabilir yüzeyler denir.

Torslar için drall'ın sıfır olması bir karakteristiktir. Zira ;

$$\frac{1}{d} = \frac{d\varphi^*}{d\varphi} = 0 \Longrightarrow d\varphi^* = 0$$

dır. Bu ise, $\vec{X}(t)$ ve $\vec{X}(t+dt)$ anadoğrularının kesişmesi demektir. Drall'ın bu tanımı silindirler için geçerli değildir. Drall'ı sıfır olmayan bir regle yüzeyde komşu anadoğrular aykırıdır.

TANIM III.2.3.

$\vec{X}=\vec{X}(t)$, $\|\vec{X}(t)\|=1$, $t\in\mathbb{R}$ regle yüzeyinde $\vec{X}(t)$ ve $\vec{X}(t+dt)$ komşu anadoğruların ortak dikmesinin, $\vec{X}(t)$ anadoğrusu üzerindeki ayağına, merkez noktası veya boğaz noktası veya sitriksiyon noktası denir. Bu noktaların geometrik yerine ise, boğaz çizgisi veya sitriksiyon çizgisi denir.

Verilen bir regle yüzeyde, bütün anadoğruları kesen bir (C) eğrisi yüzeyin dayanak eğrisi (Referans eğrisi)olarak alınabilir.

TANIM III.2.4.

$\vec{X}=\vec{X}(t)$, $\|\vec{X}(t)\|=1$, $t\in\mathbb{R}$ regle yüzeyinin bütün anadoğrularını dik kesen eğriye, regle yüzeyin ortogonal yörünge ağının bir eğrisi denir.

III.3. KAPALI REGLE YÜZEY ve İNTEGRAL İNVARYANTLARI

Bir H/H' kapalı uzay hareketinde, hareketli uzayı temsil eden $\{P\ ;\ \vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ üçayaklısının bir,

$$\vec{r}=\vec{r}(t),\quad \vec{r}(t+2\pi)=\vec{r}(t),\quad t\in\mathbb{R}$$

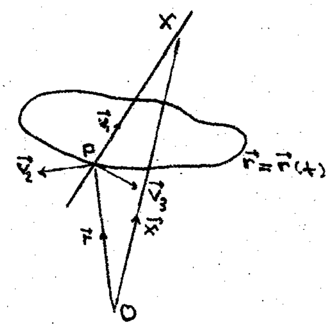
kapalı eğrisi üzerinde hareket ettiğini varsayarak, H uzayının tesbit edilmiş bir doğrusu, H' uzayında kapalı bir <u>kapalı regle yüzey</u> çizerler. Örneğin, v_1-doğrusunun çizdiği kapalı regle yüzey üzerindeki bir noktanın yer vektörü $\vec{x}$ ile gösterirsek, bu yüzeyin denklemini,

$$\vec{x}(t,v)=\vec{r}(t)+v\vec{v}_1(t),\quad t,v\in\mathbb{R} \qquad \text{(III.3.1)}$$

$$\vec{x}(t+2\pi\ ,v)=\vec{x}(t,v)$$

$$\|\vec{v}_1\|=1$$

ile verebiliriz (Şek.III.3.1.). $\vec{v}_1$ vektörüne bu kapalı regle yüzeyin doğuranı denir.



Şekil III.3.1.

Burada v_1-doğrusu, kapalı regle yüzeyin anadoğrusunu, $\vec{r}=\vec{r}(t)$ kapalı eğrisi de dayanak eğrisini göstermektedir. v_1-doğrusunun çizdiği kapalı regle yüzeyi (v_1) ile gösterirsek, (v_1)-kapalı regle yüzeyinin bir P_1 noktasından geçen ortogonal yörüngesinin diferansiyel denklemi ;

$$\langle d\vec{x},\vec{v}_1\rangle=0,\quad \|\vec{v}_1\|=1$$

dır. Burada (III.3.1) ifadesi kullanılarak,

$$dv = -\langle d\vec{r}, \vec{v}_1 \rangle$$

bulunur.

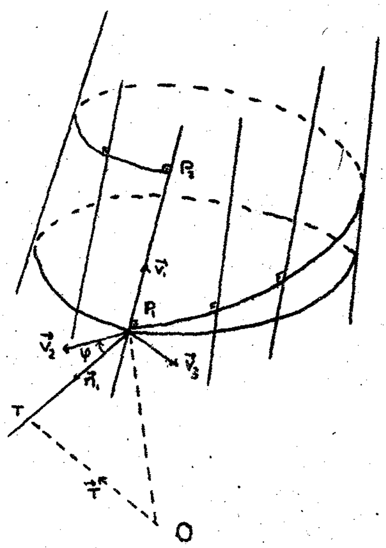
TANIM.III.3.1.

Bir $\vec{x}(t,v)=\vec{r}(t)+v\vec{v}_1(t)$ kapalı regle yüzeyi için,

$$\ell =: \oint dv = -\oint \langle d\vec{r}, \vec{v}_1 \rangle$$

büyüklüğüne bu kapalı regle yüzeyin açılım uzunluğu (Öffnungsstrecke) denir [11].

Bu tanım bize, v_1-anadoğrusunun, $\vec{r}=\vec{r}(t)$ kapalı eğrisine dayanarak kapalı regle yüzeyi çizdiğinde, kendi doğrultusunda $\ell = \oint dv$ kadar ilerleyerek ilk konumu ile çakıştığını gösterir. Bu nedenle, v_1-anadoğrusunun bir P_1 noktasından başlayan ortogonal yörünge, bir periyot sonra aynı v_1-anadoğrusunu P_1 den farklı bir P_2 noktasında keser (Şek. III.3.2.). Ortogonal yörüngeler, çıkış noktasından bağımsız olduğundan, ℓ açılım uzunluğu kapalı regle yüzeyler için bir integral invaryanttır.



Şekil III.3.2.

Şimdi (v_1)-kapalı regle yüzeyi için, ikinci bir integral invaryantı olan açılım açısını tanımlayalım.

TANIM III.3.2.

(v_2, v_3)-düzleminde bir birim vektörü,

$$\vec{n}_1 = \cos\varphi \, \vec{v}_2 + \sin\varphi \, \vec{v}_3$$

olarak seçelim. n_1-doğrusu, kapalı hareket esnasında yüzeyin P noktasından geçen ortogonal yörüngesi boyunca bir tors (açılabilir yüzey) çizsin. Yani torsun denklemi,

$$\vec{r} = \vec{x} + w\vec{n}_1 , \quad w \in \mathbb{R}$$

olsun. Ayrıca bu torsun dayanak eğrisi $\vec{x}(t)$ için ortogonal yörünge olma şartı,

$$\langle d\vec{x}, \vec{v}_1 \rangle = 0$$

sağlansın. n_1-doğrusu bu koşulları sağlamak üzere kapalı hareketi esnasında, hareketin bir fonksiyonu olarak değişen φ açısının bir periyotluk süredeki toplam değişme miktarına (v_1)-kapalı regle yüzeyinin açılım açısı (Öffnungswinkel) denir ve,

$$\lambda_{v_1} = \oint d\varphi$$

eğrisel integrali ile belirtilir [11] .

BÖLÜM IV.

DUAL AÇILIM AÇISI ve ÇİZGİLER UZAYINDA GENELLEŞTİRMELER

IV.1. DUAL AÇILIM AÇISI

K/K' dual küresel kapalı hareketi (III.1.2) ve(III.1.3) türev denklemleri ile verilmiş olsun. E.STUDY dönüşümüne göre bu harekette, hareketli sisteme sıkı surette bağlı bir X dual noktasının çizdiği dual küresel kapalı eğriye, çizgiler uzayında bir kapalı regle yüzey karşılık gelir. Bu dual noktanın yer vektörü $\vec{X}=\vec{x}+\varepsilon\,\vec{x}^{*}$ olmak üzere kapalı regle yüzeyin dual vektörel denklemini,

$$\vec{X}=\vec{X}(t),\quad \|\vec{X}(t)\|=1,\quad t\in\mathbb{R}$$

ile verebiliriz.

Bu tanım bize, çizgiler uzayındaki kapalı regle yüzeyleri, bu uzayın daha geneli olan $\mathbb{D}$-Modülde inceleme imkanı vermektedir. Ayrıca bu metod, birim dual küre üzerinde bulunan sonuçlar E.STUDY dönüşümü ile derhal çizgiler uzayına aktarılabildiği için, daha özlü bir yol olarak benimsenmiştir [10], [8], [13], [16].

TANIM IV.1.1. (DUAL AÇILIM AÇISI)

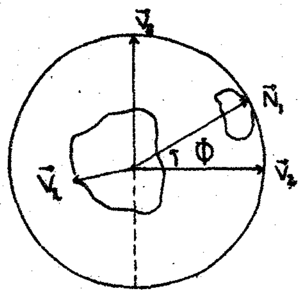
K/K' kapalı dual küresel hareketinde, hareketli sistemin birinci ekseninin çizdiği kapalı regle yüzey $\vec{V}_1=\vec{V}_1(t),\ t\in\mathbb{R}$ olsun. Ayrıca (V_2,V_3)-dual düzleminde $\vec{V}_2$ ile $\Phi(t)=\varphi(t)+\varepsilon\varphi^{*}(t)$ dual açısını yapan,

$$\vec{N}_1=\cos\Phi\vec{V}_2+\sin\Phi\vec{V}_3$$

birim dual vektörünü ele alalım. Öyleki, K/K' hareketinde, hareketli kürenin $\vec{V}_1$ birim dual vektörü $\vec{V}_1=\vec{V}_1(t)$ kapalı regle yüzeyini çizerken, $\vec{N}_1$ birim dual vektörüne karşılık gelen doğru da bu kapalı regle yüzeyin ortogonal yörüngesi boyunca bir tors (açılabilir yüzey) çizsin. Bu takdirde bir periyotluk kapalı dual küresel harekette $\Phi(t)=\varphi(t)+\varepsilon\,\varphi^{x}(t)$ açısının toplam değişme miktarına $\vec{V}_1=\vec{V}_1(t)$ kapalı regle yüzeyinin <u>dual açılım açısı</u> diyelim. Ohalde bu yüzeyin dual açılım açısı Λ_{V_1} ile gösterilirse,

$$\Lambda_{V_1}=\oint d\Phi$$

dır. Burada, integral, $\vec{V}_1=\vec{V}_1(t)$ kapalı eğrisi üzerinden alınan bir dual eğrisel integraldır (Şek.IV.1.1).



Şekil IV.1.1.

Tanım IV.1.1. de verilen Φ açısının $d\Phi$ diferansiyel değişimini, hareketin 1-formları cinsinden şöyle hesaplayabiliriz.

$\vec{N}_1$ birim dual vektörü üzerine kurulan dual ortonormal,

$$N=\begin{bmatrix}\vec{N}_1\\ \vec{N}_2\\ \vec{N}_3\end{bmatrix}$$

sistemi ile hareketli,

$$V = \begin{bmatrix} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \\ \vec{V}_3 \end{bmatrix}$$

ortonormal sistemleri arasındaki has dual ortogonal matris

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere V ile N arasında,

$$V = BN$$

dönüşümü vardır. Buradan t parametresine göre diferansiyel alırsak, V sisteminin N sistemine göre hareketinin denklemleri olarak,

$$dV = dBB^T V$$

buluruz. dBB^T matrisi hesaplanırsa ;

$$dBB^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -d\phi\sin\phi & -d\phi\cos\phi & 0 \\ d\phi\cos\phi & -d\phi\sin\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d\phi \\ 0 & d\phi & 0 \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. Bu sonuç türev denklemlerinde yerine konularak,

$$d\vec{V}_2 = -d\phi \vec{V}_3$$

veya

$$d\phi = -\langle d\vec{V}_2, \vec{V}_3 \rangle = \langle \vec{V}_2, d\vec{V}_3 \rangle \qquad \text{(IV.1.1)}$$

bulunur. (III.1.3) türev denklemleri dikkate alınırsa,

$$d\phi = -\langle \Omega_2^1 \vec{V}_1 + \Omega_2^3 \vec{V}_3, \vec{V}_3 \rangle$$

$$= -\Omega_2^3$$

bulunmuş olur.

TEOREM IV.1.1.

Bir 1-parametreli K/K' birim dual küresel hareketinde hareketli,

$$V=\begin{bmatrix}\vec{V}_1\\ \vec{V}_2\\ \vec{V}_3\end{bmatrix}$$

sistemine sıkı suretle bağlı bir $\vec{X}=\vec{x}+\varepsilon\,\vec{x}^*$ birim dual vektörünün çizdiği kapalı regle yüzeyin dual açılım açısını Λ_X ile gösterirsek,

$$\Lambda_X=-\langle\vec{D},\vec{X}\rangle$$

dir, burada $\vec{D}=\vec{d}+\varepsilon\,\vec{d}^*$; dual küresel hareketin dual Steiner vektörüdür.

İSPAT : $\vec{X}=\vec{X}_1$ alarak, bu birim dual vektör üzerine kurulan dual ortonormal sağ sistemimizi,

$$X=\begin{bmatrix}\vec{X}_1\\ \vec{X}_2\\ \vec{X}_3\end{bmatrix}$$

ile gösterelim. Böylece $\vec{X}=\vec{X}(t)$, $t\in\mathbb{R}$, (veya $\vec{X}_1=\vec{X}_1(t)$) kapalı regle yüzeyimizin dual açılım açısını (IV.1.1) den,

$$\Lambda_X=\Lambda_{X_1}=-\langle d\vec{X}_2,\vec{X}_3\rangle$$

şeklinde ifade edebiliriz. Ayrıca $C=[C_{ij}]$, $1\leq i,j\leq 3$ matrisi bir has dual ortonormal matris olmak üzere,

$$X=CV$$

dönüşümü yazılabilir. Diğer taraftan, bir vektör uzayında ortogonal baz dönüşümlerine karşılık gelen, bu uzayın dual uzayındaki dual baz dönüşümleri ile ilgili bir teorem [12. s.475] $\mathbb{D}$-Modül için de geçerli olacağından,

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\;C\;} & X \\ \Omega\downarrow & & \downarrow\Omega^* \\ dV & \xleftarrow{\;C^T\;} & dX \end{array}$$

diyagramı değişimlidir. Yani ;

$$\Omega^{*}=(C^{T})^{T}\Omega C^{T}$$

veya

$$=C\,\Omega\, C^{T}$$

dir. Burada $\Omega=[\Omega_i^j]$ ve $\Omega^{*}=[\Omega_i^{*j}]$, $1\leq i,j\leq 3$ matrisleri sırasıyle V ve X sistemlerinin E sabit sistemine göre hareketini belirliyen antisimetrik matrislerdir.

Şimdi yukarıdaki diyagrama göre ;

$$d\vec{X}_2=\sum_{i=1}^{3}(C\Omega C^{T})_{2i}\vec{X}_i$$

veya

$$\begin{aligned} d\vec{X}_2= & \big[C_{11}(C_{22}\Omega_2^1+C_{23}\Omega_3^1)+C_{12}(C_{21}\Omega_1^2+C_{23}\Omega_3^2) \\ & + C_{13}(C_{21}\Omega_1^3+C_{22}\Omega_2^3)\big]\vec{X}_1+\big[C_{21}(C_{22}\Omega_2^1+C_{23}\Omega_3^1) \\ & + C_{22}(C_{21}\Omega_1^2+C_{23}\Omega_3^2)+C_{23}(C_{21}\Omega_1^3+C_{22}\Omega_2^3)\big]\vec{X}_2 \\ & +\big[C_{31}(C_{22}\Omega_2^1+C_{23}\Omega_3^1)+C_{32}(C_{21}\Omega_1^2+C_{23}\Omega_3^2) \\ & + C_{33}(C_{21}\Omega_1^3+C_{22}\Omega_2^3)\big]\vec{X}_3 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned} \langle d\vec{X}_2,\vec{X}_3\rangle = & (C_{31}C_{22}-C_{32}C_{21})\Omega_2^1 \\ & + (C_{33}C_{22}-C_{32}C_{23})\Omega_2^3 \\ & + (C_{31}C_{23}-C_{33}C_{21})\Omega_3^1 \end{aligned}$$

olur. Parantezli ifadeler sırasıyle $-C_{13},C_{11},C_{12}$ elemanlarının kofaktörleridirler. $C=[C_{ij}]$ matrisi has ortogonal olduğu için bunlardan biri diğerinin yerine yazılabilir [12.s.419] . Bu takdirde dual açılım açısı için,

$$\begin{aligned} \Lambda_X &= -\oint\langle d\vec{X}_2,\vec{X}_3\rangle \\ &= -(C_{13}\Omega_1^2+C_{11}\Omega_2^3+C_{12}\Omega_3^1) \end{aligned} \qquad \text{(IV.1.2)}$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\vec{D}=\vec{V}_1\oint\Omega_2^3+\vec{V}_2\oint\Omega_3^1+\vec{V}_3\oint\Omega_1^2$$

dual Steiner vektörü ile,

$$\vec{X}=\vec{X}_1=C_{11}\vec{V}_1+C_{12}\vec{V}_2+C_{13}\vec{V}_3$$

vektörünü iç çarparsak,

$$-\langle\vec{D},\vec{X}\rangle=-(C_{11}\Omega_2^3+C_{12}\Omega_2^1+C_{13}\Omega_1^2) \qquad (IV.1.3)$$

bulunur. Böylece $\vec{X}=\vec{X}(t)$ kapalı regle yüzeyinin dual açılım açısının (IV.1.2) ve (IV.1.3) den,

$$\Lambda_X=-\langle\vec{D},\vec{X}\rangle \qquad (IV.1.4)$$

olduğu gösterilmiş olur.

(IV.1.4) ifadesini dual ve reel kısımlarına ayırır - sak,

$$\Lambda_X=-\langle\vec{D},\vec{X}\rangle$$
$$=-\langle\vec{d},\vec{x}\rangle-\varepsilon(\langle\vec{d}^*,\vec{x}\rangle+\langle\vec{d},\vec{x}^*\rangle) \qquad (IV.1.5)$$

bulunur.

$\mathbb{D}$-Modüldeki K/K' birim dual küresel hareketine, çizgiler uzayında karşılık gelen hareket H/H' ise, hareketli H uzayında tesbit edilmiş bir x-anadoğrusunun çizdiği kapalı regle yüzeyi (x) ile gösterirsek,(x)-kapalı regle yüzeyinin bir integral invaryantı olan açılım uzunluğu HACISALİHOĞLU tarafından,

$$\ell_x=\langle\vec{d}^*,\vec{x}\rangle+\langle\vec{d},\vec{x}^*\rangle$$

olarak hesaplanmıştır [10] . Burada $\vec{d}$ ve $\vec{x}$ vektörleri sırasiyle d ve x-doğrularının koordinat başlangıcına göre vektörel momentleridir. Diğer taraftan çizgiler uzayında (x)-kapalı regle yüzeyinin diğer integral invaryantı olan açılım açısı için,

$$\lambda_x=-\langle\vec{d},\vec{x}\rangle$$

ifadesi geçerlidir [11] . Bu değerler (IV.1.5) de yerine yazılırsa,

$$\Lambda_X=\lambda_x-\varepsilon\,\ell_x$$

bulunur.

Böylece aşağıdaki iki önemli teoremi verebiliriz ;

TEOREM IV.1.2.

$\mathbb{D}$-Modülde bir $\vec{X}=\vec{X}(t)$, $t\in\mathbb{R}$ kapalı regle yüzeyinin dual açılım açısı, bu yüzeyin bir dual integral invaryantıdır.

TEOREM IV.1.3.

$\mathbb{D}$-Modülde bir $\vec{X}=\vec{X}(t)$, $\|\vec{X}(t)\|=1$, $t\in\mathbb{R}$ kapalı regle yüzeyinin dual açılım açısını, bu yüzeyin reel integral invaryantları cinsinden,

$$\Lambda_X=\lambda_x-\varepsilon\,\ell_x \qquad \text{(IV.1.6)}$$

şeklinde ifade edebiliriz. ℓ_x ve λ_x reel sayıları bu yüzeyin, sırasiyle, açılım uzunluğu ve açılım açısıdır.

Çizgiler uzayında bir (x)-kapalı regle yüzeyinin reel integral invaryantları olan ℓ_x ve λ_x reel büyüklükleri arasındaki bağıntıları araştıran birçok çalışma yapılmıştır[15] [11] , [10], [8].

Bu teoremle ispatladığımız (IV.1.6) ifadesi ise,bu integral invaryantlar arasında ilginç bir bağıntının varlığını ortaya koyduğu gibi, kapalı regle yüzeyler için verdiğimiz dual açılım açısı tanımının da son derece anlamlı olduğunu ortaya koymaktadır. Böylece çizgiler uzayında iki integral invaryantı ile karakterize edilen bir kapalı regle yüzeyi , dual küre üzerinde birtek dual integral invaryant (dual açılım açısı) ile karakterize edebiliriz. Ayrıca bu yeni kavram yardımıyla düzlemsel kinematiğin önemli teoremleri çizgiler uzayına daha kolayca genelleştirilebilmektedir(IV.1.,IV.2).

TEOREM IV.1.4.

Bir birim dual küresel kapalı $\vec{X}=\vec{X}(t)$ eğrisinin çevrelediği küresel alan, bu kapalı eğrinin E.STUDY resmi olan kapalı regle yüzeyin açılım açısı ve açılım uzunluğu cinsinden,

$$F_x=2\pi\ (1-n)+(\lambda_x-\varepsilon\ell_x)$$

şeklinde ifade edilebilir.

İSPAT : Bir reel küresel harekette, bir X noktasının çizdiği reel kapalı küresel eğrinin alanı, W.BLASCHKE tarafından,

$$f_x=2\pi\ (1-n)-\langle\vec{d},\vec{x}\rangle$$

formülü ile verilmiştir [8]. Burada $\vec{d}$ vektörü reel küresel hareketin Steiner vektörüdür.

Bu alan ifadesi, dual küresel harekette $X=x+\varepsilon x^*$ dual noktasının kapalı dual yörüngesinin çevrelediği dual küresel alan için HACISALİHOĞLU tarafından,

$$F_x=2\pi\ (1-n)-\langle\vec{D},\vec{X}\rangle$$

ile verilmiştir. $\vec{D}=\vec{d}+\varepsilon\vec{d}^*$ dual vektörü, dual küresel hareketin dual Steiner vektörüdür. n ise harekete bağlı bir reel sayıdır [10].

Bir $\vec{X}=\vec{X}(t)$, ($\|\vec{X}(t)\|=1$, $t\in\mathbb{R}$) dual küresel kapalı eğrisinin sınırladığı dual küresel alan için Teorem IV.1.1. ve Teorem IV.1.3 dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} F_x &= 2\pi\ (1-n)-\langle\vec{D},\vec{X}\rangle \\ &= 2\pi\ (1-n)+\Lambda_X \\ &= 2\pi\ (1-n)+\lambda_x-\varepsilon\ell_x \end{aligned}$$

ifadesi yazılabilir. Ohalde $\vec{X}=\vec{X}(t)$ birim dual küresel kapalı eğrisinin sınırladığı dual alan, bu eğriye çizgiler uzayında karşılık gelen (x)-kapalı regle yüzeyinin sadece açılım açısı ve açılım uzunluğu cinsinden belirtilebilir.

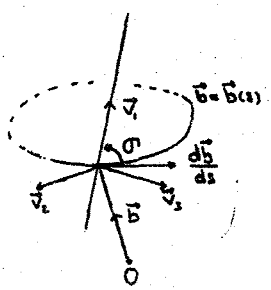
1-parametreli K/K' dual küresel kapalı hareketinde, hareketli dual ortonormal sistemi özel olarak,

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_1$$

$$\vec{V}_2 = \frac{\vec{V}_1'}{\|\vec{V}_1'\|}$$

$$\vec{V}_3 = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3$$

olarak seçebiliriz. Bu harekette, $\vec{V}_1$ birim dual vektörünün küre üzerinde çizdiği, $t \in \mathbb{R}$ parametresine göre diferansiyellenebilir kapalı eğriye, çizgiler uzayında v_1-yönlü doğrusunun çizdiği (v_1)-kapalı regle yüzeyi karşılık gelir. Diğer taraftan $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ birim dual vektörlerinin, çizgiler uzayındaki E.STUDY resmi olan v_1, v_2, v_3-yönlü doğruları (v_1)-kapalı regle yüzeyinin sitriksiyon (merkez) noktasında kesişirler. Öyleki, v_2, v_3-yönlü doğruları, kapalı regle yüzeyin sitriksiyon noktasındaki sırasiyle, normal ve teğet doğrultularıdır[13.s.166] ,(Şek.IV.1.2.).



Şekil IV.1.2.

Yukarıda tanımlanan hareketli $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ dual ortonormal sistemine, çizgiler uzayında karşılık gelen hareketli $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ ortonormal sisteminin türev denklemlerini(E.CARTAN denklemleri), $s \in \mathbb{R}$ parametresi (v_1)-kapalı regle yüzeyinin sitriksiyon çizgisinin yay parametresi olmak üzere,

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix}\vec{v}_1\\ \vec{v}_2\\ \vec{v}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \varkappa & 0\\ -\varkappa & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{v}_1\\ \vec{v}_2\\ \vec{v}_3\end{bmatrix} \qquad (IV.1.7)$$

ile verilebilir. Diğer taraftan $\vec{b}=\vec{b}(s)$ ile verilen sitriksiyon çizgisinin teğeti ile $\vec{v}_1$ arasındaki açı σ olmak üzere,

$$\frac{d\vec{b}}{ds}=\cos\sigma\ \vec{v}_1+\sin\sigma\ \vec{v}_3$$

yazılabilir. Bu denklemler K/K' 1-parametreli dual küresel harekete, çizgiler uzayında karşılık gelen H/H' hareketini tek türlü olarak belirtirler. Bu denklemlerle karşımıza çıkan $\varkappa$,τ , σ büyüklükleri, (v_1)-kapalı regle yüzeyinin bir invaryant sistemidir [14.s.20]. Sırasiyle, kapalı regle yüzeyin tabii eğriliği, tabii burulması ve sitriksiyonu denilen bu invaryantlar literatürde E.KRUPPA invaryantları olarak da geçer [15]. Eğer $-\frac{\pi}{2}<\sigma<\frac{\pi}{2}$ alırsak, kapalı regle yüzeyi parametrenin artış yönünde yönlendirmiş oluruz [14.s.20]

σ'nın sıfıra yaklaşımı halinde, (v_1)-kapalı regle yüzeyinin sitriksiyon çizgisi sırt eğrisine (edge of regresion) dönüşmüş olurki, bu da regle yüzeyin bir teğetler torsu (açılabilir bir yüzey) olmasını karakterize eder.Ohalde, $\sigma\to 0$ halinde $\varkappa$ ve τ büyüklükleri bir uzay eğrisi (sırt eğrisi veya sitriksiyon çizgisi) nin eğriliği ve burulması olmaktadır [14.s.22]. Bu ifadeden, kapalı regle yüzeylerin tabii geometrisinden, özel bir hal olarak, kapalı uzay eğrilerinin geometrisinin de incelenebileceği sonucu çıkar.

Şimdi (v_1)-kapalı regle yüzeyinin, açılım uzunluğu ve açılım açısı tanımlarını ve (IV.1.7) formüllerini kullanarak,

$$\ell_{v_1} = \oint dv$$

$$\ell_{v_1} = \oint \langle d\vec{b}, \vec{v}_1 \rangle \; ds$$

$$\ell_{v_1} = \oint \cos\sigma \; ds$$

ve

$$\lambda_{v_1} = \oint d\varphi$$

$$\lambda_{v_1} = \oint -\langle d\vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$$

$$\lambda_{v_1} = -\oint \tau \; ds$$

bulunur. Böylece $\vec{V}_1 = \vec{V}_1(s)$ kapalı regle yüzeyinin dual açılım açısını,

$$\Lambda_{V_1} = -\oint \tau \; ds - \varepsilon \oint \cos\sigma \; ds$$

olarak buluruz. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz;

TEOREM IV.1.5.

Kapalı regle yüzeyin toplam tabii torsiyonu, $\oint \tau ds$ ve sitriksiyon çizgisinin çizilme hızının anadoğru üzerindeki toplam izdüşümü $\oint \cos\sigma$ ds olmak üzere (v_1)-kapalı regle yüzeyinin dual açılım açısı E.KRUPPA invaryantları cinsinden,

$$\Lambda_{V_1} = -\oint \tau \; ds - \varepsilon \oint \cos\sigma \; ds$$

şeklinde ifade edilebilir.

IV.2. HOLDITCH TEOREMİNİN BİR GENELLEŞTİRİLMESİ

Giriş bölümünde düzlemsel hareketler için ifade ettiğimiz A.HOLDITCH teoremini, 1-parametreli dual küresel hareketlerde ele alarak, kapalı dual küresel eğrilerin dual açılım açıları arasında bağıntılar bulacağız. Daha sonra bulduğumuz sonuçlara, E.SUTDY dönüşümü ile çizgiler uzayında karşılıklar vereceğiz. Böylece A.HOLDITCH teoreminin çizgiler uzayındaki karşılığını vermiş olacağız.

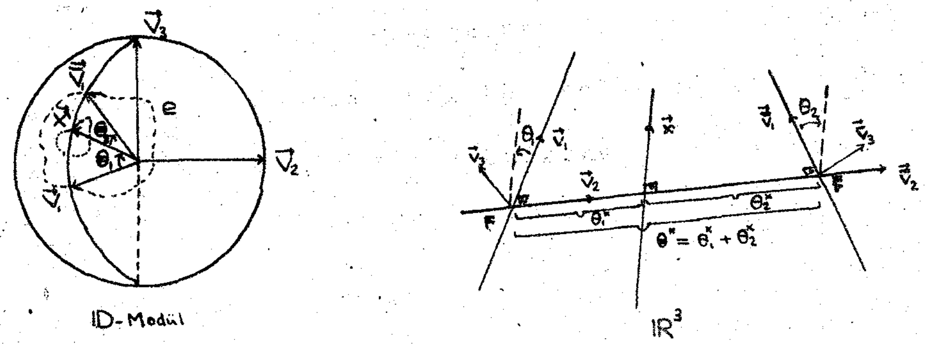
DUAL KÜRESEL HAREKET : K hareketli ve K' sabit birim dual kürelerini sırasiyle,

$$V = \begin{bmatrix} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \\ \vec{V}_3 \end{bmatrix} \quad , \quad E = \begin{bmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 \\ \vec{E}_3 \end{bmatrix}$$

dual ortonormal sistemleriyle temsil edelim. Dual ortogonallık şartları $\langle \vec{V}_i, \vec{V}_j \rangle = \langle \vec{E}_i, \vec{E}_j \rangle = \delta_{ij}$, $1 \leq i,j \leq 3$ dır. Şimdi aşağıdaki gibi bir küresel hareket tanımlıyalım;

K' sabit birim dual küresi üzerinde diferansiyellenebilir bir e kapalı eğrisi seçelim. K hareketli küresinin bir büyük dairesi üzerinde, tesbit ettiğimiz θ=sabit uzunluklu $\widehat{V_1 \bar{V}_1}$ dual yay parçasının, V_1 ve $\bar{V}_1$ uç noktalarını, e eğrisi üzerinde (veya eş alanlı iki kapalı küresel eğri üzerinde) hareket ettirirsek, bir B=K/K' 1-parametreli dual kapalı küresel hareketi tanımlamış oluruz. $\theta = \widehat{V_1 \bar{V}_1}$ dual yay parçasını sabit tuttuğumuza göre, bu hareket yalnız , başlangıçta K' de seçtiğimiz e eğrisine bağlıdır.

B=K/K' hareketinde, θ=sabit uzunluklu dual yay üzerinde, tesbit edeceğimiz bir X dual noktasının hareketini inceleyebiliriz. Hareketimiz kapalı olduğundan, X dual noktasının bir kapalı yörüngeye sahip olduğunu hemen söyleyebiliriz (Şek.IV.2.1.).



Şekil IV.2.1.

UZAY HAREKETİ : Şimdi buraya kadar tanımladığımız $B=K/K'$ hareketinin çizgiler uzayındaki, karşılğı olan $\bar{B}=H/H'$ hareketini verelim.

θ=sabit uzunluklu dual yay parçasının V_1 ve $\bar{V}_1$ uç noktalarının e eğrisi üzerinde (veya eş alanlı iki kapalı küresel eğri üzerinde) hareketine, çizgiler uzayında, bir L dik hiperbolik doğru kongrüansının (iki parametreli doğru ailesi), (v_1)-kapalı regle yüzeyi üzerindeki kapalı hareketi karşılık gelir. Öyleki, bu kongrüansın odak çizgisi, (v_1)-kapalı regle yüzeyinin v_1 ve v_1-anadoğrularına F ve $\bar{F}$ noktalarında diktir.

θ=sabit uzunluklu $\widehat{V_1\bar{V}_1}$ dual yayı üzerinde seçtiğimiz X dual noktasına ise,bu kongrüansın odak çizgisine dik bir x-ışını karşılık gelir. Öyleki, $\vec{V}_1$ ile $\vec{\bar{V}}_1$ dual vektörleri arasındaki $\theta=\theta_1+\theta_2$ dual açısı sabit seçildiği için, x-ışını v_1-anadoğrusu ile θ_1 reel açısını yapar ve ondan θ_1^* uzaklığındadır. Aynı şekilde, v_1-anadoğrusu ile θ_2 açısını yapar ve ondan θ_2^* uzaklığındadır. Burada $\Theta_1=\theta_1+\varepsilon\,\theta_1^*$ ve $\Theta_2=\theta_2+\varepsilon\,\theta_2^*$ $\Theta=(\theta_1+\theta_2)+\varepsilon\,(\theta_1^*+\theta_2^*)$ dır (Şek.IV.2.1.).

Şimdi 1-parametreli kapalı küresel $B=K/K'$ hareketinde, X,V_1 ve $\bar{V}_1$ dual noktalarının çizdikleri kapalı regle yüzeylerin dual açılım açılarını hesabedelim.

$\vec{X}=\vec{X}(t)$ kapalı regle yüzeyinin (veya kapalı küresel eğrinin) dual açılım açısı,

$$\Lambda_X=-\langle\vec{D},\vec{X}\rangle$$

$$\Lambda_X=-\left\langle\vec{V}_1\oint\Omega_2^3+\vec{V}_2\oint\Omega_3^1+\vec{V}_3\oint\Omega_1^2,\ \cos\Theta_1\vec{V}_1+\sin\Theta_1\vec{V}_3\right\rangle$$

$$\Lambda_X=-\cos\Theta_1\oint\Omega_2^3-\sin\Theta_1\oint\Omega_1^2 \qquad \text{(IV.2.1)}$$

dır.

$\vec{V}_1=\vec{V}_1(t)$ kapalı regle yüzeyinin dual açılım açısı,

$$\Lambda_{V_1}=-\langle\vec{D},\vec{V}_1\rangle$$
$$=-\oint\Omega_2^3 \qquad (IV.2.2)$$

dır.

$\vec{\bar{V}}_1=\vec{\bar{V}}_1(t)$ kapalı regle yüzeyinin dual açılım açısı,

$$\Lambda_{\bar{V}_1}=-\langle\vec{D},\vec{\bar{V}}_1\rangle$$
$$\Lambda_{\bar{V}_1}=-\langle\vec{D},\cos(\theta_1+\theta_2)\vec{V}_1+\sin(\theta_1+\theta_2)\vec{V}_3\rangle$$
$$\Lambda_{\bar{V}_1}=\sin(\theta_1+\theta_2)\oint\Omega_2^1-\cos(\theta_1+\theta_2)\oint\Omega_2^3 \qquad (IV.2.3)$$

bulunur. Burada V_1 ve $\bar{V}_1$ dual noktaları, aynı kapalı e eğrisini bir parametre farkıyle çizerler, bunun için $\Lambda_{V_1}=\Lambda_{\bar{V}_1}$ alınabilir. Ayrıca (IV.2.2.) ifadesini (IV.2.1.) ve (IV.2.3) ifadesinde yerine koyarsak,

$$\Lambda_X=\Lambda_{V_1}\cos\theta_1+\sin\theta_1\oint\Omega_2^1, \quad \Omega_i^j=-\Omega_j^i, \; 1\leq i,j\leq 3$$

ve

$$\Lambda_{V_1}=\sin(\theta_1+\theta_2)\oint\Omega_2^1+\Lambda_{V_1}\cos(\theta_1+\theta_2)$$

bulunur. Bu ifadelerde, bizce, bir geometrik anlamı olmayan $\oint\Omega_2^1$ ifadesini yokedebiliriz. Böylece, ikinci ifadeden elde edilen,

$$\oint\Omega_2^1=\frac{\Lambda_{V_1}[1-\cos(\theta_1+\theta_2)]}{\sin(\theta_1+\theta_2)}$$

değeri ikinci denklemde yerine konursa,

$$\Lambda_X=\Lambda_{V_1}\cos\theta_1+\frac{\Lambda_{V_1}[1-\cos(\theta_1+\theta_2)\sin\theta_1]}{\sin(\theta_1+\theta_2)}$$

$$\Lambda_X=\frac{\Lambda_{V_1}\cos\theta_1\sin(\theta_1+\theta_2)-\Lambda_{V_1}\sin\theta_1\cos(\theta_1+\theta_2)+\Lambda_{V_1}\sin\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)}$$

$$\Lambda_X=\Lambda_{V_1}\frac{\sin\theta_1+\sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)} \qquad (IV.2.4)$$

ifadesi bulunur. $\vec{X}=\vec{X}(t)$ ve $\vec{V}_1=\vec{V}_1(t)$ kapalı regle yüzeylerinin dual açılım açıları arasındaki bu bağımtıdan şu teoremi verebiliriz.

TEOREM IV.2.1.

Θ=sabit uzunluklu dual yay parçasının uç noktaları, bir e dual küresel eğrisi (veya eşalanlı iki dual küresel kapalı eğri) üzerinde B=K/K' hareketini yapsın. Bu takdirde dual yay parçası üzerinde tesbit edilmiş, bir X dual noktası tarafından çizilen kapalı regle yüzeyin dual açılım açısı; e kapalı eğrisine (veya eşalanlı iki dual küresel eğriye) karşılık gelen kapalı regle yüzeyin dual açılım açısı ve $\Theta=\Theta_1+\Theta_2$ sabit dual açısı yardımıyle belirtilebilir.

Bu teorem, A.HOLDITCH teoreminin, çizgiler uzayında J.HOSCHEK [11] tarafından yapılan genelleme olup, burada değişik bir metod olan E.STUDY Dönüşümü ile elde edilmiştir. Şimdi (IV.2.4.) ifadesini,

$$\frac{\wedge_X}{\wedge_{V_1}} = \frac{\sin\Theta_1+\sin\Theta_2}{\sin(\Theta_1+\Theta_2)} \qquad \text{(VI.2.5)}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu oranın hareketten bağımsız olduğunu görüyoruz. Ohalde çizgiler uzayında bizce daha ilginç ve orjinal olan bir diğer A.HOLDITCH teoremini aşağıdaki şekilde verebiliriz.

TEOREM IV.2.2.

B=K/K' hareketinde, Θ=sabit uzunluklu bir dual yay parçasının, tesbit edilmiş bir X dual noktasının K' de çizdiği kapalı regle yüzeyin dual açılım açısı ile, bu dual yayın uç noktalarının çizdiği, e eğrisine karşılık gelen regle yüzeyin dual açılım açısının oranı seçilen e eğrisinden yani hareketten bağımsızdır.

Bu teoremin çizgiler uzayındaki karşılıklarını, E.STUDY dönüşümü yardımıyle hemen verebiliriz. Bunun için (IV.2.5.) formülünü reel ve dual kısımlarına ayırırsak ;

Reel kısımların eşitliğinden,

$$\frac{\lambda_x}{\lambda_{v_1}} = \frac{\sin\theta_1 + \sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)} \qquad (IV.2.6)$$

bulunur. Bu oran ise, hareketten bağımsızdır. Ohalde, çizgiler uzayında şu teoremi verebiliriz.

TEOREM IV.2.3.

$\bar{B}=H/H'$ şeklinde tanımlanan 1-parametreli kapalı uzay hareketinde, H uzayındaki bir L dik hiperbolik kongrüansının, tesbit edilen bir x-doğrusunun H' uzayında çizdiği kapalı regle yüzeyin reel açılım açısı ile, H uzayını temsil eden eksen sisteminin birinci ekseninin (v_1 veya v_1-anadoğrularının) çizdiği kapalı regle yüzeyin reel açılım açısının oranı hareketten bağımsızdır.

(IV.2.5)'in dual kısımlarının eşitliğinden,

$$\ell_x = \ell_{v_1}\frac{\sin\theta_1+\sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)} - \lambda_{v_1}\frac{(\theta_1^{*}\sin\theta_2+\theta_2^{*}\sin\theta_1)(1-\cos(\theta_1-\theta_2))}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)} \qquad (IV.2.7)$$

elde edilir. Buradan, çizgiler uzayında (x)-kapalı regle yüzeyinin açılım uzunluğu için A.HOLDITCH teoreminin bir diğer karşılığı olarak şu teoremi verebiliriz.

TEOREM IV.2.4.

Bir $\bar{B}=H/H'$ hareketinde, H daki bir L dik hiperbolik kongrüansının, tesbit edilmiş bir x-ışınının, H' de çizdiği kapalı regle yüzeyin açılım uzunluğu, H uzayını temsil eden eksen sisteminin, birinci ekseninin çizdiği kapalı regle yüzeyin integral invaryantları ve bu ışınlar arasındaki uzaklık sabitleri cinsinden (IV.2.7.) ifadesiyle belirtilebilir.

A.HOLDITCH teoreminin, çizgiler uzayında HACISALİHOĞLU [10] tarafından yapılan bir genellemesinde, kapalı regle yüzeylerin açılım uzunluklarının ℓ_x/ℓ_y oranının, hareketten bağımsız olduğu gösterilmiştir. Bunun benzeri olan bir diğer hareketten bağımsız oran, kapalı regle yüzeylerin açılım açıları arasında da vardır. Bunu bir teorem olarak ifade ve ispat edebiliriz:

TEOREM IV.2.5.

$B=K/K'$ hareketinde, Θ=sabit uzunluklu dual yay parçasının üzerinde seçilen, X ve Y dual noktalarının çizdiği kapalı yörüngelere, $\bar{B}=H/H'$ uzay hareketinde, karşılık gelen kapalı (x) ve (y)-regle yüzeylerinin açılım açılarının,

$$\frac{\lambda_x}{\lambda_y}$$

oranı hareketten bağımsızdır.

İSPAT : X in V_1 ile $\bar{V}_1$ noktalarına olan dual küresel uzaklıkları Θ_1 ve Θ_2, Y nin V_1 ile $\bar{V}_1$ noktalarına olan dual küresel uzaklıklarını da $\bar{\Theta}_1$ ve $\bar{\Theta}_2$ ile gösterelim. Teorem IV.2.3. ya da IV.2.6. dan (x) ve (y)-kapalı regle yüzeyleri için,

$$\lambda_x = \frac{\sin\theta_1 + \sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)} \lambda_{v_1}$$

ve

$$\lambda_y = \frac{\sin\bar{\theta}_1 + \sin\bar{\theta}_2}{\sin(\bar{\theta}_1+\bar{\theta}_2)} \lambda_{v_1}$$

yazılabilir.

$$\theta_1+\theta_2 = \bar{\theta}_1+\bar{\theta}_2 = \widehat{V_1\bar{V}_1}$$

olduğundan, bunların reel kısımları için,

$$\sin(\theta_1+\theta_2) = \sin(\bar{\theta}_1+\bar{\theta}_2)$$

yazılabilir. Dolayısıyle,

$$\frac{\lambda_x}{\lambda_y} = \frac{\sin\theta_1 + \sin\theta_2}{\sin\bar{\theta}_1 + \sin\bar{\theta}_2}$$

bulunur. Bu ise, λ_x/λ_y oranının sadece X ve Y dual noktalarının $\widehat{V_1\bar{V}_1}$ dual yayı üzerinde seçilişine (yada x ve y-ışınlarının L dik hiperbolik kongrüansındaki seçilişlerine) bağlı olduğunu ve H/H' hareketine bağlı olmadığını gösterir.

IV.3. STEINER TEOREMİNİN ÇİZGİLER UZAYINA GENELLEŞTİRİLMESİ

Bir 1-parametreli kapalı K/K' dual küresel hareketinde, hareketli kürenin tüm noktaları, sabit küre üzerinde, kapalı yörüngeler çizerler. 1-parametreli düzlemsel hareketler için J.STEINER'in ifade ettiği teoreme [1,s.154] karşılık, K/K' 1-parametreli dual küresel hareketinde şu teoremi ifade edebiliriz.

TEOREM IV.3.1.

1-parametreli dual küresel K/K' kapalı hareketinde iki dual noktanın çizdiği kapalı dual yörüngelerin dual açılım açıları eşit ise, bu dual noktalar, birer dual çember üzerinde bulunurlar. Öyleki, bu çemberlerin düzlemleri, J.STEINER vektörüne diktirler. Teoremin karşıtı da doğrudur.

İSPAT : X ve Y dual noktalarının, sabit K' küresi üzerinde çizdiği, kapalı dual yörüngelerin (veya bunlara karşılık gelen kapalı regle yüzeylerin) dual açılım açıları eşit olsun. Bu takdirde ;

$$\Lambda_X = \Lambda_Y \Leftrightarrow \langle \vec{D}, \vec{X} \rangle = \langle \vec{D}, \vec{Y} \rangle$$

$$\langle \vec{D}, \vec{X} - \vec{Y} \rangle = 0$$

bulunur ki, buradan da iddianın doğruluğu anlaşılır.

Bu teoreme, çizgiler uzayında karşılık gelen aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

TEOREM IV.3.2.

X ve Y dual noktaları, bir K/K' kapalı hareketinde eşit dual açılım açılı, kapalı dual küresel yörüngeler çiziyorlarsa, bunlara çizgiler uzayında karşılık gelen x ve y-doğruları, eşit açılım açılı ve eşit açılım uzunluklu kapalı regle yüzeyler çizerler. Teoremin karşıtı da doğrudur.

B İ B L İ Y O G R A F Y A

[1] MÜLLER, H.R.
Kinematik Dersleri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi yayınları, Ankara (1963)

[2] LUEDESDORF, C.
Theorem in Kinematics, The Messenger of Mathematics, 7, 125-127 (March 1878).

[3] LUEDESDORF, C.
Note on the Theorem in Kinematics, The Messenger of Mathematics, 8, 11-12 (1878).

[4] KEMPE, A.B.
Note on Mr. LUEDESDORF's Theorem in Kinematics, The Messenger of Math. 7, 165-167 (March 1878).

[5] ELLIOTT, E.B.
Some Theorem of Kinematics on a sphere, Proc.London Math. Soc. 47-57 (1881).

[6] ELLIOTT, E.B.
A Theorem in areas including Holditch's with its analogue in three dimensions, The Messenger of Math. 7, 150-156 (Feb.1878).

[7] ELLIOTT, E.B.
A Theorem in areas including Holditch's with its analogue in three dimensions. The Messenger of Mathematics 10, 47-57 (Feb.1881).

[8] BLASCHKE, W.
Zur Bewegungsgeometrie auf der Kugel, S.B. Heidelberger Akad. Wiss, Math. Nat. KI.No.2(1948).

[9] HACISALİHOĞLU, H.H.
On closed spherical motions, Quaterly of Applied Math. July 1971, 269-276.

[10] HACISALİHOĞLU, H.H.
On the Pitch of a Closed Ruled Surface, Mechanism and Machine Theory, 1972, vol.7, pp.291-305.

[11] HOSCHEK, J.
Eine Verallgemeinerung des Satzes von Holditch, Monatchefte-Für Math. 80,93-99 (1975).

[12] HACISALİHOĞLU, H.H.
Lineer Cebir, Diyarbakır Ün.Fen Fak.Yayınları(1977).

[13] GUGGENHEIMER, H.W.
Differantial Geometry, Mc-Graw-Hill, New York(1963). pp, 162-169.

[14] HOSCHEK, J.
Linien Geometrie, BI. Zürüch, 1971.

[15] HOSCHEK, J.
İntegralinvarianten von Regelflachen, Arch. Math.Vol. XXIV. 1973, pp. 218-224.

[16] BLASCHKE, W.
Diferansiyel Geometri Dersleri, İstanbul Üniversitesi yayınları, 1949.

[17] HACISALİHOĞLU, H.H.
Hareket Geometrisi ve Kuatermionlar Teorisi ,1976, Trabzon.

Ö Z G E Ç M İ Ş

1947 de Trabzon'un Arsin ilçesinde doğdum. İlk öğrenimimi Arsinde tamamladıktan sonra Erzurum Yavuz Selim İlköğretmen Okulunda 5 yıllık bir öğrenim sonunda Ankara Yüksek Öğretmen Okuluna girmeye hak kazandım. Burada hazırlık sınıfını bitirdikten sonra Üniversite öğrenimimi Ankara Fen Fakültesi Matematik Bölümünde tamamladım. Bu süre içinde ayrıca Yüksek Öğretmen Okulunun öngördüğü mesleki öğrenimimi de tamamladım. Milli Eğitim Bakanlığına olan mecburi hizmetimden dolayı Kayseri Pınarbaşı Lisesinde (1969-1970), Kayseri Teknisyen Okulunda (1970-1972), Trabzon Teknisyen Okulunda (1972-1973) Matematik öğretmenliği yaptım.

1.1.1974 den bu yana KTÜ Temel Bilimler Fakültesi Matematik Bölümünde Asistan olarak görevime devam etmekteyim. Evli ve bir çocuk babasıyım.