

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**HAREKETLİ ISIL CEPHE İLE PLAKALARIN EĞİLME DAVRANIŞININ  
ELEMEN BAĞIMSIZ GALERKİN AĞSIZ YÖNTEMİ İLE MODELLENMESİ**

**DOKTORA TEZİ**

**Makina Yük. Müh. Samet ÇALIŞKAN**

**ŞUBAT 2016**

**TRABZON**



**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**HAREKETLİ ISIL CEPHE İLE PLAKALARIN EĞİLME DAVRANIŞININ**  
**ELEMAN BAĞIMSIZ GALERKİN AĞSIZ YÖNTEMİ İLE MODELLENMESİ**

**Samet ÇALIŞKAN**

**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde**  
**"DOKTOR (MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ)"**  
**Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 26 / 12 / 2015**

**Tezin Savunma Tarihi : 18 / 02 / 2016**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Sami KARADENİZ**

**Trabzon 2016**

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI  
"Samet ÇALIŞKAN Tarafından Hazırlanan"

HAREKETLİ ISIL CEPHE İLE PLAKALARIN EĞİLME DAVRANIŞININ ELEMAN  
BAĞIMSIZ GALERKİN AĞSIZ YÖNTEMİ İLE MODELLENMESİ

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 26 /01 /2016 gün ve 1637 sayılı  
kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda  
DOKTORA TEZİ  
olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

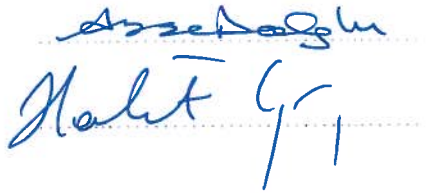
Başkan : Prof. Dr. Erdem KOÇ

Üye : Prof. Dr. Sami KARADENİZ

Üye : Prof. Dr. Burhan ÇUHADAROĞLU

Üye : Prof. Dr. Ayşe DALOĞLU

Üye : Prof. Dr. Halit GÜN



Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ  
Enstitü Müdürü

## ÖNSÖZ

Hareketli Isıl Cephe problemlerinde, Sonlu elemanlar yönteminin istenilen hassasiyette çözüm sunması için geometrinin sayısal modellemeye uygun hale getirilmesi zaman alıcı bir işlemdir. Bu hazırlık aşaması çözüm sürecini karmaşık hale getirdiğinden sonlu elemanlar yöntemi ile çözüm açısından bir dezavantajdır. Bu tür dezavantajların ortadan kaldırılması için ağsız yöntemler, sonlu elemanlar yöntemine alternatif sayısal çözüm süreci olarak araştırılmaktadır. Yapılan bu çalışma sonucunda ağsız yöntemler Hareketli Isıl Cephe problemleri için Sonlu Elemanlar yöntemine alternatif olarak önerilmiştir.

Yapılan çalışmada Hareketli Isıl Cephe problemi Eleman Bağımsız Galerkin Ağsız yöntemi ile incelenmiştir.

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesi sırasında şahsımdan yardımlarını esirgemeyen tez danışmanım sayın Prof. Dr. Sami KARADENİZ'e ve değerli arkadaşlarım Yrd. Doç. Dr. Recep GÜMRÜK ve Yrd. Doç. Dr. Emin TUĞCU'ya teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca bugüne kadar maddi ve manevi desteğini hiç esirgemeyen değerli aileme, gösterdiği sabır, anlayış ve desteği için değerli eşim Berna ÇALIŞKAN'a ve hayatımdaki en değerli varlığım olan evladım Emir ÇALIŞKAN'a bana verdiği güç, sabır ve azim için teşekkür ederim.

Samet ÇALIŞKAN

Trabzon, 2016

## **TEZ ETİK BEYANNAMESİ**

Doktora tezi olarak sunduğum "Hareketli Isıl Cephe ile Plakaların Eğilme Davranışının Eleman Bağımsız Galerkin Ağsız Yöntemi ile Modellenmesi" başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Sami KARADENİZ'in sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 18/02/2016

Samet ÇALIŞKAN

## İÇİNDEKİLER

### Sayfa No

ÖNSÖZ .....	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	IV
ÖZET .....	VII
SUMMARY .....	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	IX
TABLolar DİZİNİ.....	XIV
KISALTMALAR DİZİNİ .....	XV
1. GENEL BİLGİLER .....	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Ağsız Yöntemler .....	1
1.3. Ağsız Yöntemlere Neden İhtiyaç Duyulmaktadır .....	4
1.4. Ağsız Yerel Petrov-Galerkin ve Eleman Bağımsız Galerkin Yöntemleri .....	5
1.5. Termo-Mekanik Şekil Verme .....	7
1.5.1. Hareketli Isıl Cephe ile Şekil Verme (Hat Isıtma).....	8
1.5.1.1. Hareketli Isıl Cephe ile Isıtılacak Hattın Belirlenmesi .....	10
1.5.1.2. Hareketli Isıl Cephe ile Şekil Verme İşleminde Uygulanan Isıtma Kaynakları .....	11
1.5.1.3. Isı Kaynağı İlerleme Hızı .....	18
1.5.1.4. Malzeme Özellikleri.....	19
1.6. Hareketli Isıl Cephe ile Şekil Verme İçin Sonlu Elemanlar Modeli.....	20
1.7. Tezin Konusu .....	27
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR .....	30
2.1. Ağsız Yöntemlerde Şekil Fonksiyonlarının Elde Edilmesi .....	30
2.1.1. Hareketli En Küçük Kareler Yöntemi.....	31
2.1.2. Ağırlık Fonksiyonlarının Seçimi.....	36
2.2.1. Eleman Bağımsız Galerkin Ağsız Yönteminin Formülasyonu.....	46
2.2.2. Sayısal İntegrasyon İşlemi .....	49
2.2.3. Esas ve Doğal Sınır Koşullarının Uygulanması.....	67
2.2.3.1. Dönüşüm Yöntemi .....	67

2.3.	Eleman Bağımsız Galerkin Yönteminin İki Boyutlu Isı Transferi Problemlerine Uygulanması.....	69
2.4.	Zaman İntegrasyon Yöntemleri .....	73
2.4.1.	Newmark Yöntemi .....	74
2.4.2.	Parabolik Denklemler İçin Zaman İntegrasyon Yöntemleri .....	75
2.5.	Parabolik Denklemler ve Eleman Bağımsız Galerkin Ağsız Yöntemi .....	77
2.6.	Plakaların Eğilme Davranışının Matematik Modeli ve Eleman Bağımsız Galerkin Ağsız Yöntemi .....	88
2.6.1.	Plakaların Eğilmesi ve Sayısal Modelleme.....	88
2.6.2.	Klasik Plaka Teorisi ve Birinci Mertebeden Kayma Teorisi Denklemleri İçin Zayıf Formun Tanımlanması .....	102
2.6.2.1.	Klasik Plaka Teorisi İçin Zayıf Formun Elde Edilmesi .....	102
2.6.2.2.	Birinci Mertebeden Kayma Teorisi İçin Zayıf Formun Elde Edilmesi .....	107
2.6.3.	Ağsız Yöntemlerde Zar (Membran) Modelleme, Kabuk (Shell) Modelleme ve Kabuk Modellemede Kayma Kilitlenmesi Hadisesi .....	112
2.6.3.1.	Klasik Plaka Teorisi ile Plaka Eğilme Deformasyonunun İncelemesi .....	112
2.6.3.2.	Birinci Mertebeden Kayma Teorisi ile Plaka Eğilme Deformasyonu İncelemesi .....	116
2.6.3.3.	Birinci Mertebeden Kayma Teorisi ile Plaka Eğilme Deformasyonunun Nonlinear İncelemesi .....	121
2.7.	Hareketli Isıl Cephe Probleminin Sayısal Modelinin Tanımlanması.....	128
2.7.1.	Nonlinear Zaman Bağımlı Isı Transferi Problemi .....	130
3.	SONUÇLAR .....	172
4.	ÖNERİLER .....	174
5.	KAYNAKLAR .....	176
6.	EKLER.....	181
	ÖZGEÇMİŞ	

Doktora Tezi

ÖZET

HAREKETLİ ISIL CEPHE İLE PLAKALARIN EĞİLME DAVRANIŞININ ELEMAN  
BAĞIMSIZ GALERKİN AĞSIZ YÖNTEMİ İLE MODELLENMESİ

Samet ÇALIŞKAN

Karadeniz Teknik Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Makine Mühendisliği Anabilim Dalı  
Danışman: Prof. Dr. Sami KARADENİZ  
2016, 180 Sayfa, Ekler 8 Sayfa

Yapılan tez çalışmasında Eleman Bağımsız Galerkin Yöntemi formüle edilerek, iki boyutlu düzlemde hareketli ısı cephe etkisindeki plakaların eğilme problemlerine uygulanmıştır. Eleman Bağımsız Galerkin Ağsız Yöntemi ile çözüm aşamasında önemli bir yere sahip olan şekil fonksiyonları, dördüncü dereceden spline fonksiyonları kullanılarak hareketli en küçük kareler yöntemi ile elde edilmiştir. Bu çalışmada, sınır değer problemleri olarak, basit sınır koşulu uygulanmış olan, sinüzoidal ve üniform yüzey sıcaklığı dağılımları etkisindeki plaka eğilme davranışı incelenmiştir. Yer değiştirme vektörünün zamana göre ilk türevinin yer aldığı parabolik denklemler ile yer değiştirme vektörünün zamana göre ikinci mertebeden türevini içeren hiperbolik denklemlerin yer aldığı başlangıç sınır değer problemleri de incelenmiştir. Her iki problemin formülasyonu ve çözümünde de zaman integrasyon yöntemleri uygulanmıştır. Hareketli Isıl Cephe Etkisinde Plakaların Eğilme Davranışının Elde Edilmesi Problemi iki alt bölüme ayrılmıştır. Birinci bölüm Hareketli Isıl Cephe etkisinde plaka yüzeyinde oluşan sıcaklık dağılımının elde edildiği ısı transferi analizlerini içermektedir. İkinci alt bölüm ise birinci bölümde elde edilen plaka yüzeyindeki sıcaklık dağılımı nedeniyle plaka üzerinde meydana gelen eğilme deformasyonunun incelendiği elastisite problemini içermektedir. Plaka üzerinde meydana gelen sıcaklık dağılımları, plaka eğilme deformasyonları ve gerilme dağılımları sunulmuştur. Hareketli Isıl Cephe etkisinde plaka üzerinde meydana gelen eğilme deformasyonu davranışı için Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yöntemi ile elde edilen sayısal sonuçların incelenmesi, Eleman Bağımsız Galerkin Ağsız Yönteminin Hareketli Isıl Cephe ve plaka eğilme problemlerinin sayısal çözümünde mevcut sayısal yöntemlere bir alternatif olabileceğini göstermektedir. Sonuç olarak, Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yöntemi ile elde edilen sayısal analiz sonuçlarının literatürde var olan verilerle uyumlu ve güvenilir olduğu ifade edilebilir

**Anahtar Kelimeler:** Ağsız Yöntemler, Hareketli En Küçük Kareler Yöntemi, Eleman Bağımsız Galerkin Yöntemi, Sınır Değer Problemleri, Başlangıç Değer Problemleri, Başlangıç Sınır Değer Problemleri, Zaman İntegrasyon Yöntemleri, Hareketli Isıl Cephe Problemleri, Hat Isıtma.



PhD. Thesis

SUMMARY

INVESTIGATION OF PLATE BENDING UNDER TEMPERATURE LOADS DUE TO  
MOVING HEAT SOURCE WITH ELEMENT FREE GALERKIN METHOD.

Samet ÇALIŞKAN

Karadeniz Technical University  
The Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Mechanical Engineering Graduate Program  
Supervisor: Prof. Dr. Sami KARADENİZ  
2016, 180 Pages, Appendix 8 Pages

In this thesis, The Element Free Galerkin Mesh Free Method formulated and applied to two dimensional plate bending problems due to moving temperature loads. Shape functions, which are very important for solution procedure of the Element Free Galerkin Method are obtained using forth order spline functions with the moving least squares procedure. In this study, as the boundary value problems, the bending behavior of a simply supported plate under sinusoidal and uniform surface temperature distributions are considered. Initial boundary value problems that cover the parabolic equations containing the first derivative of the displacement vector with respect to time and hyperbolic equations which include the second time derivative of the displacement vector are also considered. In the formulation and solution of the both problems time integration schemes are evaluated. The solution of the Plate bending problem due to the Moving Heat Source is divided into two subsections; the first section involves the thermal analyses to predict the temperature distribution on the plate surface due to moving heat source and the second section contains the solution of the elasticity problem to predict the plate bending behavior due surface temperature distribution obtained in the first section. The temperature distributions, the plate bending deformations and the stress distributions on the plate are depicted. Investigating the numerical solutions obtained by using the Element Free Galerkin Method for the plate bending problems under moving temperature loads shows that the Element Free Galerkin Method is an alternative method to the other numerical methods that are available for the numerical solutions of problems including the moving heat source and the plate bending. As a conclusion, it can be said that the numerical solutions obtained with the Element Free Galerkin Method are reliable and compatible with the data available in the literature.

**Key Words :** Meshfree Methods, Moving Least Squares, Element Free Galerkin Method, Boundary Value Problems, Initial Value Problems , Initial Boundary Value Problems, Time Integration Methods, Moving Heat Source Problems, Line Heating.

## ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1. Ağsız Yerel Petrov-Galerkin Yaklaşımı .....	6
Şekil 2. Eleman Bağımsız Galerkin yönteminde gölge hücre .....	7
Şekil 3. Gauss dağılımına sahip ısı kaynağı.....	12
Şekil 4. Hareketli ısı cephe ile şekil verme işleminin uygulanma biçimi ve sonuçları.....	18
Şekil 5. Sonlu elemanlar ile modellenmiş bir hareketli ısı cephe problemi .....	21
Şekil 6. Hareketli ısı cephe problemi için örnek sonlu elemanlar ağı .....	22
Şekil 7. Isı akısının Gauss dağılımı .....	26
Şekil 8. Sonlu elemanlar yönteminde dinamik ısı benzeşim .....	27
Şekil 9. Problemin sayısal modeli için takip edilecek işlem adımları .....	29
Şekil 10. Hareketli en küçük kareler yöntemi ve bölge içindeki yaklaşım .....	31
Şekil 11. Yaklaşım vektörü ve mertebesinin matematiksel ifadesi .....	32
Şekil 12. Ağırlık fonksiyonlarının yapıları ve etkinlik yarıçapları .....	37
Şekil 13. Ağırlık fonksiyonları ve etkinlik yarıçapları .....	38
Şekil 14. Bir boyutlu problemler için ağırlık fonksiyonu ve etkinlik yarıçapı .....	39
Şekil 15. İki boyutlu düzlemde dördüncü dereceden spline fonksiyonu kullanılarak elde edilen $\lambda$ ağırlık fonksiyonu.....	40
Şekil 16. İki boyutlu düzlemde dördüncü dereceden spline fonksiyonu kullanılarak elde edilen $\frac{d\lambda}{dx}$ ağırlık fonksiyonunun $x'$ e göre türevi .....	41
Şekil 17. İki boyutlu düzlemde dördüncü dereceden spline fonksiyonu kullanılarak elde edilen $\frac{d\lambda}{dy}$ ağırlık fonksiyonunun $y'$ ye göre türevi .....	41
Şekil 18. İki boyutlu düzlemde dördüncü dereceden spline fonksiyonu kullanılarak elde edilen $\frac{d^2\lambda}{dx^2}$ ağırlık fonksiyonunun $x'$ e göre ikinci türevi.....	42
Şekil 19. İki boyutlu düzlemde dördüncü dereceden spline fonksiyonu kullanılarak elde edilen $\frac{d^2\lambda}{dy^2}$ ağırlık fonksiyonunun $y'$ ye göre ikinci türevi .....	42
Şekil 20. İki boyutlu düzlemde dördüncü dereceden spline fonksiyonu kullanılarak elde edilen Hermite tipi yer değiştirme ( $w$ ) için şekil fonksiyonu.....	43
Şekil 21. İki boyutlu düzlemde dördüncü dereceden spline fonksiyonu kullanılarak elde edilen Hermite tipi $x$ eksenine için $\theta$ dönme serbestliğine ait şekil fonksiyonu .....	44

Şekil 22.	İki boyutlu düzlemde dördüncü dereceden spline fonksiyonu kullanılarak elde edilen Hermite tipi y eksenini için $\theta$ dönme serbestliğine ait şekil fonksiyonu .....	44
Şekil 23.	İki boyutlu düzlemde dördüncü dereceden spline fonksiyonu kullanılarak elde edilen Hermite tipi yer değiştirme ( $w$ ) şekil fonksiyonu ikinci türevi $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} w$ .....	45
Şekil 24.	İki boyutlu düzlemde dördüncü dereceden spline fonksiyonu kullanılarak elde edilen Hermite tipi yer değiştirme ( $w$ ) şekil fonksiyonu için karma türev $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \theta x$ .....	45
Şekil 25.	Lagrange tipi şekil fonksiyonları .....	46
Şekil 26.	Sayısal integrasyon için bölgenin tanımlanması.....	49
Şekil 27.	Sayısal integrasyon işlemi için koordinat dönüşümü .....	50
Şekil 28.	Sayısal integrasyon işleminde iki boyutlu düzlem için koordinat dönüşümü ..	50
Şekil 29.	Kapsayan bölge (bounding box, çevreleyen kutucuk) yöntemi ile sayısal integrasyon bölgelerinin oluşturulması .....	57
Şekil 30.	Kapsayan bölge (bounding box, çevreleyen kutucuk) yöntemi uygulaması ....	58
Şekil 31.	Isı transferi problemi için iki boyutlu geometri.....	59
Şekil 32.	Isı transferi problemi için $t=2$ saniye' deki analitik çözüm .....	59
Şekil 33.	Manuel olarak oluşturulan 169 sayısal integrasyon bölgesi için $9 \times 9$ düğüm ile elde edilen Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yöntem çözümü.....	60
Şekil 34.	Kapsayan kutucuk yöntemi ile oluşturulan 169 sayısal integrasyon bölgesi için $9 \times 9$ düğüm ile elde edilen Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yöntemi çözümü.....	60
Şekil 35.	Manuel olarak oluşturulan 169 sayısal integrasyon bölgesi için $9 \times 9$ düğüm ile elde edilen Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yöntem çözümündeki bölge içindeki bağıl hata dağılımı .....	61
Şekil 36.	Kapsayan kutucuk yöntemi ile oluşturulan 169 sayısal integrasyon bölgesi için $9 \times 9$ düğüm ile elde edilen Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yöntem çözümündeki bölge içindeki bağıl hata dağılımı .....	62
Şekil 37.	Kapsayan kutucuk ve Manuel kullanılarak 169 adet sayısal integrasyon bölgesinin kullanılması durumunda elde edilen Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yönteminin çözüme yakınsama davranışı.....	63
Şekil 38.	Kapsayan kutucuk ve Manuel yöntem kullanılarak farklı yoğunlukta sayısal integrasyon bölgesi için 7 adet Gauss noktası kullanılarak elde edilen Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yönteminin çözüme yakınsama davranışı ...	64
Şekil 39.	Manuel yöntem ile oluşturulan sayısal integrasyon bölgesi sayısının yakınsama davranışı üzerindeki etkisi .....	65

Şekil 40.	Kronecker delta dönüşüm işlemi .....	67
Şekil 41.	Isı transferi için tanımlanan birim hacim elemanı .....	69
Şekil 42.	Isı transferi probleminin analitik çözümü.....	78
Şekil 43.	(7x5) düğüm ile Eleman Bağımsız Galerkin yöntemi çözümü .....	79
Şekil 44.	(7x5) düğüm ile Sıcaklık dağılımı .....	79
Şekil 45.	(11x7) düğüm ile Eleman Bağımsız Galerkin yöntemi çözümü .....	80
Şekil 46.	(11x7) düğüm ile Sıcaklık dağılımı .....	80
Şekil 47.	Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yöntemi için düğüm sayısının çözüm üzerindeki etkisi.....	81
Şekil 48.	Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yöntemi için yarıçap çarpanının çözüm üzerindeki etkisi .....	82
Şekil 49.	Eleman Bağımsız Galerkin ve Sonlu Elemanlar yöntemleri için karşılaştırma problemi .....	83
Şekil 50.	Membran probleminin $t=2.04$ saniyedeki analitik çözümü .....	86
Şekil 51.	(7x5) düğüm ile $t=2.04$ saniyedeki Eleman Bağımsız Galerkin yöntemi ile eğilme deformasyonu çözümü.....	86
Şekil 52.	(7x5) düğüm ile eğilme deformasyonu.....	87
Şekil 53.	(11x7) düğüm ile Eleman Bağımsız Galerkin yöntemi çözümü ile eğilme Deformasyonu çözümü.....	87
Şekil 54.	(11x7) düğüm ile eğilme deformasyonu.....	88
Şekil 55.	Düzlemde tanımlanmış olan plaka geometrisi.....	91
Şekil 56.	Plaka kesitinde meydana gelen gerilme dağılımı .....	92
Şekil 57.	Birim plaka elemanında kesme kuvveti ve moment dağılımı .....	97
Şekil 58.	Birinci mertebeden kayma teorisi için deformasyon kesiti .....	99
Şekil 59.	Plaka geometrisi ve sınır koşullarının plakaya uygulanış biçimi .....	113
Şekil 60.	Plaka kenarlarında tanımlanan tüm serbestlik derecelerinin kısıtlandırılması .....	115
Şekil 61.	Klasik plaka teorisi için Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yöntem çözümü ..	116
Şekil 62.	Düğüm sayısının Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yöntemi çözümüne etkisi.....	119
Şekil 63.	Yarıçap çarpanı $k'$ nın Eleman Bağımsız Galerkin Ağsız yöntemi çözümüne etkisi.....	119
Şekil 64.	Birinci mertebeden kayma teorisi için Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yöntemi çözümü.....	120
Şekil 65.	Newton-Raphson yöntemi ile değişken tanjant matrisi çözümü .....	131

Şekil 66.	Modifiye edilmiş Newton-Raphson yöntemi ile sabit tanjant matrisi çözümü.....	132
Şekil 67.	Newton-Raphson yöntemi yakınsama davranışı .....	134
Şekil 68.	Plaka üzerinde basit sınır koşulu tanımlaması.....	136
Şekil 69.	Yüzeyde meydana gelen sinüzoidal sıcaklık dağılımı.....	137
Şekil 70.	X=0.5m için Eleman Bağımsız Galerkin ağırsız yöntemi çözümü ve analitik çözüm karşılaştırılması .....	138
Şekil 71.	Plaka üzerinde meydana gelen $\sigma_x$ gerilme dağılımı (Pa).....	138
Şekil 72.	Plaka üzerinde meydana gelen $\sigma_y$ gerilme dağılımı (Pa).....	139
Şekil 73.	Plaka yüzeyinde meydana gelen $\tau_{xy}$ gerilme dağılımı (Pa).....	139
Şekil 74.	Plaka yüzeyinde meydana gelen $M_x$ moment dağılımı (Nm) .....	140
Şekil 75.	Plaka yüzeyinde meydana gelen $M_y$ moment dağılımı (Nm) .....	140
Şekil 76.	Plaka yüzeyinde meydana gelen $M_{xy}$ moment dağılımı (Nm).....	141
Şekil 77.	X=0,5m için Eleman Bağımsız Galerkin ağırsız yöntemler çözümü ve analitik çözümün karşılaştırılması .....	142
Şekil 78.	Farklı güçler kullanılarak yüzeyde meydana gelen ısı akısı dağılımı.....	144
Şekil 79.	Gauss dağılımı için yüzeyde oluşan ısı akısı karşılaştırması.....	144
Şekil 80.	Hareketli ısı cephe için 4367 W güç ve 0.3 m/dk ilerleme hızı etkisinde t=0.3 saniyedeki sıcaklık dağılımı ve eğilme deformasyonu davranışı .....	146
Şekil 81.	Hareketli ısı cephe için 4367 W güç ve 0.3 m/dk ilerleme hızı etkisinde t=40 saniyedeki sıcaklık dağılımı ve eğilme deformasyonu davranışı.....	147
Şekil 82.	Hareketli ısı cephe için 4367 W güç ve 0.3 m/dk ilerleme hızı etkisinde t=80 saniyedeki sıcaklık dağılımı ve eğilme deformasyonu davranışı.....	148
Şekil 83.	Hareketli ısı cephe için 4367 W güç ve 0.3 m/dk ilerleme hızı etkisinde t=120 saniyedeki sıcaklık dağılımı ve eğilme deformasyonu davranışı.....	149
Şekil 84.	Hareketli ısı cephe için 4367 W güç ve 0.3 m/dk ilerleme hızı etkisinde t=160 saniyedeki sıcaklık dağılımı ve eğilme deformasyonu davranışı.....	150
Şekil 85.	Hareketli ısı cephe için 4367 W güç ve 0.3 m/dk ilerleme hızı etkisinde t=200 saniyedeki sıcaklık dağılımı ve eğilme deformasyonu davranışı.....	151
Şekil 86.	t=0,3 saniye için plaka üst ve alt yüzeylerinde meydana gelen $\sigma_x$ gerilme dağılımı .....	152
Şekil 87.	t=0.3 saniye için plaka üst ve alt yüzeylerinde meydana gelen $\sigma_y$ gerilme dağılımı .....	153
Şekil 88.	t=0.3 saniye için plaka üst ve alt yüzeylerinde meydana gelen $\tau_{xy}$ gerilme dağılımı .....	154

Şekil 89.	t=40 saniye için plaka üst ve alt yüzeylerinde meydana gelen $\sigma_x$ gerilme dağılımı .....	155
Şekil 90.	t=40 saniye için plaka üst ve alt yüzeylerinde meydana gelen $\sigma_y$ gerilme dağılımı .....	156
Şekil 91.	t=40 saniye için plaka üst ve alt yüzeylerinde meydana gelen $\tau_{xy}$ gerilme dağılımı .....	157
Şekil 92.	t=80 saniye için plaka üst ve alt yüzeyinde meydana gelen $\sigma_x$ gerilme dağılımı .....	158
Şekil 93.	t=80 saniye için plaka üst ve alt yüzeyinde meydana gelen $\sigma_y$ gerilme dağılımı .....	159
Şekil 94.	t=80 saniye için plaka üst ve alt yüzeyinde meydana gelen $\tau_{xy}$ gerilme Dağılımı .....	160
Şekil 95.	t=120 saniye için plaka üst ve alt yüzeyinde meydana gelen $\sigma_x$ gerilme dağılımı .....	161
Şekil 96.	t=120 saniye için plaka üst ve alt yüzeyinde meydana gelen $\sigma_y$ gerilme Dağılımı .....	162
Şekil 97.	t=120 saniye için plaka üst ve alt yüzeyinde meydana gelen $\tau_{xy}$ gerilme dağılımı .....	163
Şekil 98.	t=160 saniye için plaka üst ve alt yüzeyinde meydana gelen $\sigma_x$ gerilme Dağılımı .....	164
Şekil 99.	t=160 saniye için plaka üst ve alt yüzeyinde meydana gelen $\sigma_y$ gerilme dağılımı .....	165
Şekil 100.	t=160 saniye için plaka üst ve alt yüzeyinde meydana gelen $\tau_{xy}$ gerilme dağılımı .....	166
Şekil 101.	t=200 saniye için plaka üst ve alt yüzeyinde meydana gelen $\sigma_x$ gerilme dağılımı .....	167
Şekil 102.	t=200 saniye için plaka üst ve alt yüzeyinde meydana gelen $\sigma_y$ gerilme dağılımı .....	168
Şekil 103.	t=200 sn. için plaka üst ve alt yüzeyinde meydana gelen $\tau_{xy}$ gerilme dağılımı .....	169
Şekil 104.	1500W güç ve 16 mm ısı kaynağı yarıçapı için Eleman bağımsız Galerkin ağırsız yöntemi çözümü .....	171

## TABLolar LİSTESİ

	<b><u>Sayfa No</u></b>
Tablo 1. Elastodinamik problemler için Eleman Bağımsız Galerkin Ağsız Yöntemi ile Sonlu Elemanlar Yönteminin karşılaştırılması .....	23
Tablo 2. Eleman Bağımsız Galerkin yönteminde yarıçap çarpanının çözüm sürecine etkisi .....	66
Tablo 3. Eleman Bağımsız Galerkin Ağsız Yönteminde çözüme etki eden parametreler.	66
Tablo 4. Eleman Bağımsız Galerkin Ağsız Yöntemi ve Sonlu Elemanlar Çözümlerinin Karşılaştırılması. Çözümlerde Crank-Nicolson Zaman integrasyonu kullanılmıştır .....	84
Tablo 5. Eleman Bağımsız Galerkin Ağsız Yöntemi ve Sonlu Elemanlar Çözümlerinin Karşılaştırılması. Çözümlerde Galerkin integrasyonu kullanılmıştır .....	85
Tablo 6. Sonlu elemanlar Yöntemi ve Ağsız Yöntemler için Hareketli ısı cephe Probleminde Maksimum Sıcaklık Değeri Kıyaslaması .....	145

## KISALTMALAR DİZİNİ

A	: Alan
a	: Öz vektör
A(x)	: Moment matrisi
AY (MM)	: Ağsız Yöntemler ( Meshfree Methods )
AYPGY (MLPG)	: Ağsız Yerel Petrov-Galerkin Yöntemi ( Meshless Local Petrov-Galerkin Method)
B(x)	: Vandermonde matrisi
c	: Sönümlenme katsayısı
D	: Plakalar için Eğilme Rijitliği
E	: Elastisite modülü
EBGAY (EFG)	: Eleman Bağımsız Galerkin Ağsız Yöntemi (Element Free Galerkin Meshfree Method)
f	: Kuvvet
G	: Kayma Modülü
H	: Hermite yaklaşımı için ağırlıklandırılmış yerel artık
h	: Isı taşınım katsayısı
I	: Kesit atalet momenti
J	: Ağırlıklandırılmış yerel artık
k	: Şekil fonksiyonu etkinlik yarıçapı çarpanı
M	: Moment
N	: Düğüm sayısı
P <sup>T</sup>	: Yaklaşım tabanlarının temsil edildiği satır vektörü
Q	: Isı Akısı
R	: Artık terimi
r	: Etkinlik yarıçapı
s	: Yarıçap için bağımsız parametre
SEY (FEM)	: Sonlu Elemanlar Yöntemi ( Finite Element Method )
T	: Sıcaklık
t	: Zaman
$\Delta_t$	: Zaman adımı



$T_n$	: En küçük periyot
$u^h(x)$	: Yaklaşım eğrisi
$u_i$	: Düğüm değerleri
$U_n$	: Bilinen yer değiştirme
$U_u$	: Bilinmeyen yer değiştirme
$W$	: Ağırlık matrisi
$x$	: Kartezyen koordinat
$x_i$	: Düğüm noktaları geometrik yerleri
$y$	: Kartezyen koordinat bağımsız değişkeni
$\nu$	: Poisson Oranı
$\sigma$	: Stefan Boltzman Sabiti
$\psi$	: Artık denklemini ağırlıklandırmak için kullanılan fonksiyon
$\frac{\partial}{\partial a_0}$	: $a_0$ terimine göre türev
$\Omega$	: Çözüm bölgesi
$\Gamma$	: Çözüm bölgesi sınırları
$\zeta$	: Doğal koordinat bağımsız değişkeni
$\theta$	: Dönme Serbestlik Derecesi
$\varphi$	: Dönüştürülmüş şekil fonksiyonu
$[D]$	: Dönüşüm matrisi
$\bar{K}$	: Efektif katılık matrisi
$\bar{M}$	: Efektif kütle matrisi
$\bar{F}$	: Efektif yük terimi
$\left\{ \dot{u} \right\}$	: Hız vektörü
$\left\{ \ddot{u} \right\}$	: İvme vektörü
$\bar{u}_i$	: Kesin düğüm değerleri
$\phi_i$	: Şekil fonksiyonları
$\rho$	: Yoğunluk

$\{u\}$	: Yer değiştirme vektörü
$\{u\}_s$	: s-inci adımdaki yer değiştirme vektörü
$\alpha(x)$	: Malzemeye bağlı parametre
$h_r$	: Radyasyon katsayısı
$M_T$	: Isıl Moment
$M_x$	: x Eksenine göre Moment
$N_T$	: Isıl kuvvet
$Q_x$	: Plaka üzerinde oluşan kesme kuvveti
$T_{ij}$	: Tanjant Matrisi
$\beta_x$	: Dönme Serbestlik Derecesi
$\gamma_{xy}$	: Kayma Şekil Değişimi
$\epsilon_x$	: Şekil Değişimi
$\kappa_x$	: Plakalar için Eğrilik Yarıçapı
$\lambda_x$	: Ağırlık Fonksiyonu
$\sigma_x$	: Normal Gerilme
$\tau_{xy}$	: Kayma Gerilmesi
[C]	: Sönümleme matrisi
[F]	: Yük vektörü
[K]	: Katılık matrisi
[M]	: Kütle matrisi

## **1. GENEL BİLGİLER**

### **1.1. Giriş**

Hareketli ısı cephe ile şekil verme işlemi kullanım alanı açısından oldukça geniş bir yelpazeye sahiptir, otomotiv sanayinde, gemi endüstrisi, metaller ve tüplerin şekillendirilmesi örnek olarak sayılabilir. Hareketli ısı cephe ile şekil verme işleminde yerel bölgeler ısı kaynağı ile doğrudan temasta tutulmakta ve ısınan bölge soğumaya terk edilerek plastik deformasyonların oluşması sağlanmaktadır. Bu işlem literatürde sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak sayısal olarak modellenmiştir. Ancak sonlu elemanlar yöntemi kullanıldığında analiz işlemi süresince bir ağ yenileme aşaması gerekmektedir. Bu da çözüm sürecini uzatmakta ve sonuçları etkilemektedir. Doğrusal bir hatta hareketli bir ısı kaynağının tüm plakayı geçmesi sonucunda meydana gelecek olan sıcaklık dağılımı etkisinde plaka üzerinde meydana gelecek olan eğilme davranışının ağsız yöntemlerle modellenmesiyle bu olumsuzluklardan kaçınmanın mümkün olabilirliliğinin incelenmesi yapılacak olan tezin ana konusudur.

### **1.2. Ağsız Yöntemler**

İleri mühendislik sistemlerinin tasarımının yapılabilmesi için çoğu kez bilgisayar destekli araçlara gereksinim duyulmaktadır ( CAD programı ). Bu tür programlarla, sayısal simülasyon teknikleri fiziksel problemin modellenmesi için gereklidir. Bu simülasyonların oluşturulabilmesi için problemi tanımlayan kompleks yapının veya kısmi diferansiyel denklemlerin çözümüne ihtiyaç duyulmaktadır. Geleneksel olarak diferansiyel denklemlerin çözümünde sonlu elemanlar, sınır elemanları ve sonlu farklar gibi sayısal yöntemler kullanılmaktadır. Bu yöntemlerde çözüm bölgesi ızgara görünümünde olan ağlara ayrılmaktadır. Ağ, düğümlerle bağlantısı olan ve çözüm bölgesindeki bağımlı değişkene yapılan interpolasyon işlemine olanak sağlayan bir yapı olarak tanımlanabilir. Sonlu farklar yönteminde ağlar grid olarak isimlendirilirken, sonlu hacim yönteminde hücre veya hacim, sonlu elemanlar ve sınır elemanları yöntemlerinde ise eleman olarak adlandırılmaktadırlar.

Ağ yapısında kullanılan birimlere verilen isim önem taşımamaktadır. Burada önemli olan bu yapıların çözüm sürecine geçilmeden tanımlanıyor olmasıdır. Bu sayede elemanların veya gridlerin kesişim noktaları, düğümler arasında bağlantı kurulabilmekte ve kullanılacak olan sayısal yöntemin (sonlu elemanlar, sonlu farklar ve sonlu hacim gibi) formülasyonu gerçekleştirilmektedir.

İyi tanımlanmış bir ağ yapısı sayesinde kısmi diferansiyel denklemlerle modellenmiş olan bir problemin çözümü daha gerçekçi sonuçlar sağlamaktadır. Diferansiyel denklemlerin sayısal olarak çözülebilmesi için ağ yapısındaki her birim (eleman, grid vb) için bir dizi denklemin tanımlanması gerekmektedir. Sonlu elemanlar yöntemi dikkate alınırsa her bir eleman için, çözülen problemin yapısına göre değişmekle birlikte, örneğin bir dinamik probleminin çözümünde, katılık matrisinin, kütle matrisinin, sönümlenme matrisinin ve yük vektörünün, bir dizi matrisin oluşturulması gerekmektedir. Daha sonra her bir eleman için elde edilen matrisler birleştirilerek tüm problem tanımlanmış olmakta ve çözüme geçilebilmektedir [1-5].

Ağsız yöntemlerde çözüm bölgesinin modellenmesi ve çözüm aşamasına geçilebilmesi için modelleme aşamasında düğümler kullanılmaktadır. Bu özellik tüm ağsız yöntemler için ortaktır. Yöntemlerin ağsız olarak isimlendirilmesinin sebebi de budur [4, 6]. Bir sayısal yöntemin ağsız olarak isimlendirilebilmesi için gerekli olan koşul; Çözüm bölgesinde bağımlı değişkene yapılacak olan interpolasyon işlemi için çözüm sürecine geçilmeden önce bir ağ yapısının tanımlanmasına ihtiyaç duyulmamasıdır.

Gerekli olan ideal koşul olarak ise; Kısmi diferansiyel denklemlerle modellenmiş olan problemin uygun sınır koşulları altında çözümü yapılırken, çözüm sürecinin hiçbir aşamasında her hangi bir hücre yapısının kullanılmaması, şeklinde ifade edilir [4, 7].

Tarihsel gelişimi incelendiğinde ağsız yöntemler, araştırmacıların bilimsel ve endüstriyel uygulamalarda hayli yaygın kabul gören sonlu elemanlar yönteminin sahip olduğu olumsuzlukların elimine edildiği veya en azından minimuma indirildiği ve bu yönteminin sahip olduğu avantajları ise kendinde muhafaza eden bir yöntemle sahip olma isteğinden doğmuştur.

Bu bağlamda Nayroles ve arkadaşları tarafından 1992 yılında yapılan çalışmada sonlu elemanlar yönteminin bir parçası olarak difüze yaklaşımı geliştirilmiştir. Bu yaklaşımda, sonlu elemanlar interpolasyon fonksiyonları hareketli en küçük kareler yöntemiyle elde edilmiş olan yumuşak ve difüze edilmiş fonksiyonlarla değiştirilmektedir [8, 9]. Hareketli en küçük kareler interpolasyonu çözüm bölgesindeki bağımlı değişkenin

elde edilmesi işleminde yerel olarak ağırlıklandırılmış en küçük kareler fonksiyonu kullanılarak gerçekleştirilmektedir. En küçük kareler fonksiyonunun katsayıları bağımlı değişkenin ve interpolasyon fonksiyonunun düğümlerdeki değerleri arasındaki farkın, karesinin minimize edilmesi ile elde edilmektedir.

Difüze eleman yönteminde tanımlı oldukları düğümden belirli bir uzaklıkta her hangi bir değere sahip olmayan ağırlık fonksiyonları kullanılmaktadır. Nayroles ve arkadaşları tarafından difüze eleman yöntemi için iki önemli avantaj belirtilmiştir. Bunlar;

- Ağ yapısı olmaksızın düğümlerin toplanabilmesi,
- Düğümler arasındaki boşluğun üniform veya üniform olmamasının çözümde elde edilen hassasiyeti etkilememesidir.

Belytschko ve arkadaşları tarafından 1994 yılında yapılan çalışmada yeni bir difüze eleman yöntemi, Eleman Bağımsız Galerkin Yöntemi önermişlerdir. Belytschko ve arkadaşları geliştirdikleri yöntemde hareketli en küçük kareler interpolasyon işleminin sabit olmaması gerektiği sonucuna varmışlardır. Bunun sonucunda hareketli en küçük kareler interpolasyonu ile elde edilen şekil fonksiyonlarının türevi alınırken Nayroles ve arkadaşları (1992) tarafından ihmal edilen terimler çözüme dahil edilmiştir. Bu sayede Eleman Bağımsız Galerkin yöntemi ile, difüze eleman yöntemiyle kıyaslandığında, daha hassas sonuçlar elde edilmiştir. Ek olarak eleman bağımsız Galerkin yönteminde sınır koşullarının uygulanması işleminde Lagrange çarpanları yöntemi ve sistem matrislerinin integrasyon işlemi için gölge hücre yapısı kullanılmıştır. Eleman Bağımsız Galerkin Yönteminde çözüme yakınsama interpolasyon işleminde kullanılan ağırlık fonksiyonlarına bağlıdır [8, 9, 10].

Hareketli en küçük kareler yöntemi ile elde edilen interpolantların, sonlu elemanlar yöntemiyle elde edilen ile kıyaslandıklarında kronecker delta özelliğine sahip olmadıkları tespit edilmiştir. Bu sebeple ağırsız yöntemlerde esas sınır koşullarının uygulanması için net bir yöntem önerilememektedir. Mukherjee ve Mukherjee tarafından 1997 yılında yapılan çalışmayla ağırsız yöntemlerde esas sınır koşullarının uygulanmasına önemli katkılarda bulunulmuştur. Mukherjee ve Mukherjee sınır ile temas halindeki düğümler ve bu düğümlerde tanımlanmış olan bağımlı değişken değerlerinin kesin düğüm değerleri ile değiştirilmesi sonucu esas sınır koşullarının doğru bir biçimde uygulanabileceğini belirtmişlerdir [6]. Böylelikle sistem denklemleri, düğümlerde tanımlanmış olan şekil fonksiyonları ile birlikte kullanılan kesin düğüm değerleri için çözülebilmekte ve problemin sayısal çözümü elde edilebilmektedir.

Eleman bağımsız Galerkin yöntemi için belirtilmiş olan avantaja rağmen yöntemde sayısal integrasyon işleminin gerçekleştirilmesi için gölge hücrenin kullanılması gerekmektedir. Bu durum yöntem için bir dezavantaj teşkil etmektedir.

Atluri ve Zhu tarafından 1998 yılında yapılan çalışmada sayısal integrasyon işlemi için gölge hücreye ihtiyaç duymayan gerçek anlamda bir ağsız yöntem önermişlerdir [11]. Geliştirilen yeni yöntemde yerel zayıf formdan yararlanılmakta, böylelikle hesaplamalara yerel alt bölgelerde başlanmaktadır. Yeni yöntemde esas sınır koşullarının uygulanması işlemi penaltı yöntemi ile gerçekleştirilmektedir. Bu yöntemde, daha önceki yöntemlerde araştırmacıların kullandıkları ağırlık ve şekil fonksiyonlarının aynı uzaydan (ağırlık fonksiyonu olarak şekil fonksiyonlarının kullanımı) seçilmesi ile elde edilen Galerkin formülasyonu yerine farklı uzaydan seçilen Petrov-Galerkin formülasyonu kullanılmıştır. Ağırlık fonksiyonlarının uygun seçilmesiyle yöntem yerelleştirilmektedir. Bu sayede sayısal integrasyon işlemi için herhangi bir hücre yapısının tanımlanmasına ihtiyaç duyulmamaktadır.

### **1.3. Ağsız Yöntemlere Neden İhtiyaç Duyulmaktadır**

Araştırma ve Endüstride en yaygın kullanılan sayısal çözüm yöntemi sonlu elemanlar yöntemidir. Sonlu elemanlar yönteminde çözüm sürecine geçilmeden önce ağ yapısının oluşturulması gerekmektedir. Ağ yapısının oluşturulabilmesi için birbiri ile temas halinde bulunan ve çözüm sürecine geçilmeden önce tanımlanmış olması gereken elemanlara ihtiyaç duyulmaktadır.

Günümüzde mevcut geliştirilmiş hali ile sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak statik, dinamik, lineer ve lineer olmayan pek çok problemin çözümü elde edilebilmektedir. Bu problemlerin çözümünde aşağıda belirtilen sebeplerden dolayı elde edilmek istenen çözüm maliyeti ve doğruluğu önemli ölçüde etkilemektedir [4, 7]. Bu nedenle sonlu elemanlar yönteminin bazı yetersizlikleri şöyle sıralanabilir;

Analizlerde genelde harcanan zamanın çoğu uygun bir ağ yapısının oluşturulmasına harcanmaktadır. Ağ yapısı analiz süresini ve hassasiyetini önemli ölçüde etkilemektedir. Günümüzde sonlu elemanlar yöntemi ile ilgili araştırma konularından bir tanesi bu sürecin mümkün olduğu kadar kısaltılması ve analizin hassasiyetinin artırılmasıdır. Bu da daha az insan emeği ve daha çok bilgisayar kullanımı anlamına gelmektedir.

- Büyük şekil değişimleri söz konusu olduğunda elemanların çarpılmasından dolayı hesaplanan değerlerdeki doğruluk oldukça düşmektedir.
- Çatlak büyümesi probleminin herhangi bir geometri veya kompleks bir geometri için modellenmesi ve faz dönüşümlerinin uygulanması oldukça zordur.
- Sonlu elemanlar yöntemi sürekli ortam mekaniğine dayandığından malzeme kırılmasından doğan süreksizliklerde, elemanlar arasındaki bağların kopması sebebi ile olumsuzluklar ortaya çıkarmaktadır.

Yukarıda bir bölümü belirtilen hataların ve yetersizliklerin en aza indirilebilmesi için çözüm sürecinde ortaya çıkabilen süreksizlik bölgelerinde bir biri ile olan temasını kaybeden elemanların temas etmesini sağlamak amacıyla ağ yapısının yeniden oluşturulması gerekmektedir [12]. Ayrıca çözüm sürecinde bağımlı değişken üzerinde dönüşüm yapılması ihtiyacı ortaya çıkmaktadır. Bu durum işlem hassasiyetini olumsuz etkilemektedir. Bu yüzden çözüm sürecinde daha esnek ve süreksizliğin söz konusu olduğu problemlerde yeni bir ağ yapısının oluşturulmasına ihtiyaç duymayan yöntemlerin geliştirilmesi ihtiyacı ortaya çıkmıştır. Bu nedenle önerilmiş olan ağsız yöntemlerde bu ihtiyaçların çoğu karşılanabilmektedir. Ağsız yöntemlerde geometrinin modellenmesi rasgele dağıtılmış düğümlerle gerçekleştirildiğinden bu düğümler arasında herhangi bir ilişkinin veya bir bağın kurulmasına ve dolayısıyla çözüm sürecinde yeni bir ağ yapısının oluşturulmasına ihtiyaç yoktur.

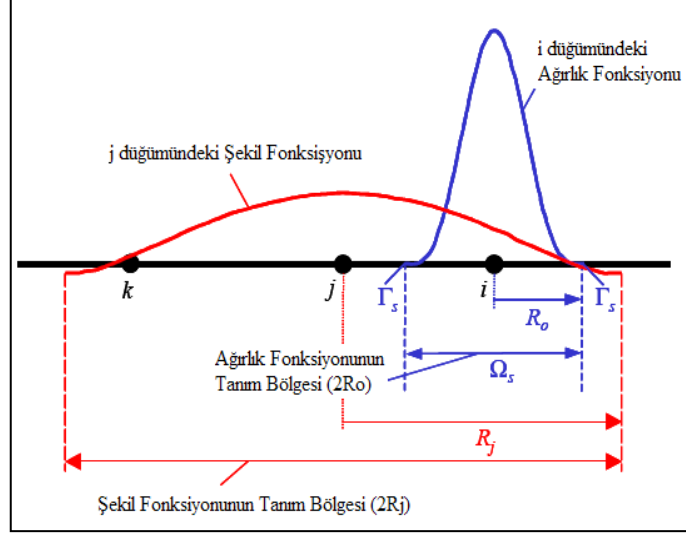
#### **1.4. Ağsız Yerel Petrov-Galerkin ve Eleman Bağımsız Galerkin Yöntemleri**

Ağsız Yerel Petrov- Galerkin Yöntemi Atluri ve Zhu (AYPGY) (Meshless Local Petrov-Galerkin Method) tarafından önerilmiştir [11, 14, 15].

Ağsız Yerel Petrov-Galerkin yönteminde diferansiyel denklemin global zayıf formu yerine yerel zayıf formu kullanılmaktadır. Bu sebeple sayısal integrasyon işlemi uygulanırken bir hücre yapısının tanımlanmasına ihtiyaç duyulmamakta ve analizlerde sadece yerel bölgelerin ve yerel bölge sınırlarının tanımlanması yeterli olmaktadır. Bu sebeple yöntem tamamen ağsız olarak nitelendirilmektedir [15, 16].

Ağsız Yerel Petrov-Galerkin yöntemi, yöntem olarak değil de daha çok bir konsept olarak ele alınmaktadır. Çünkü bu konseptte ağırlık fonksiyonu, şekil fonksiyonu ve integrasyon işleminin uygun olarak seçilmesi durumunda tüm ağsız yöntemlerin formülasyonları elde edilebilmektedir. Bu durum Şekil 1' de ifade edilmiştir. Ağırlık

fonksiyonu olarak şekil fonksiyonlarının kullanılması durumunda Şekil 2' de görülen Eleman Bağımsız Galerkin yöntemi elde edilmektedir [13].



Şekil 1. Ağsız yerel Petrov-Galerkin yaklaşımı [11]

Eleman Bağımsız Galerkin yöntemi (EBGY) (Element Free Galerkin Method) modellenmesi Belytschko, Lu ve Gu tarafından geliştirilmiştir [6]. Yöntem hareketli en küçük kareler yöntemini kullanan alternatif bir yaklaşım olarak sunulmuştur. Eleman bağımsız Galerkin yöntemi difüze eleman yöntemi ile birkaç farklılık dışında temelde aynı yapıdadır. Belytschko, eleman bağımsız Galerkin yönteminde doğruluğu arttırmak için difüze eleman yönteminden farklı olarak üç adet yenilik getirmiştir [4, 6]. Bunlar;

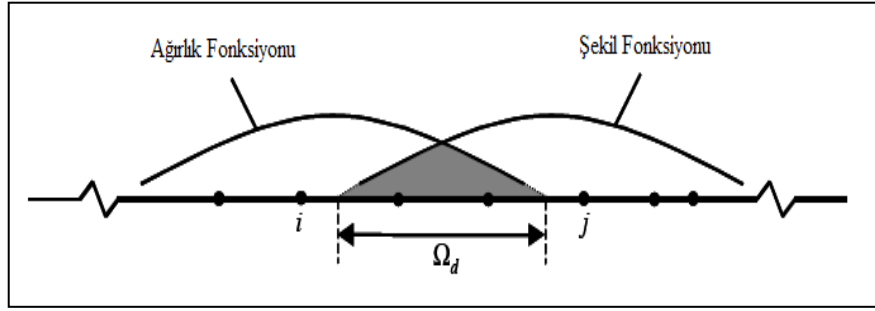
- Esas sınır koşullarının uygulanması için potansiyel enerji fonksiyoneline Lagrange çarpanlarını kullanmıştır.
- Şekil fonksiyonlarının türevleri tam olarak hesaplanmıştır. Difüze eleman yönteminde hareketli en küçük kareler yöntemi yerine ağırlıklandırılmış en küçük kareler yöntemi kullanıldığında şekil fonksiyonlarının türevleri hesaplanırken bazı terimler ihmal edilmiş olmaktadır.
- Çok sayıda integrasyon noktası içeren, düğümlerden bağımsız olan hücre yapıları elde edilmiş ve sayısal integrasyon işlemi bu hücreler kullanılarak gerçekleştirilmiştir.

Eleman Bağımsız Galerkin yöntemi yukarıda belirtilen avantajlara sahip olmasına rağmen sadece çözüm aşamasında düğümlerin oluşturulması ve aralarında bir ilişki



kurulmasına ihtiyaç duymaması bakımından ağırsız bir yöntem olarak nitelendirilmektedir. Ancak katılık matrisi ve yük matrislerinin elde edilmesi aşamasında, geometrisi bilinen ve integrasyon işleminin uygulanabileceği bir hücre yapısının tanımlanmasına ihtiyaç duymaktadır. Bu hücre yapısı gölge hücre (background mesh) olarak bilinmektedir.

Bu yöntemde yukarıda da belirtildiği üzere integrasyon işlemi için önceden tanımlanmış olan ve integrasyon işlemi için daire veya dörtgen gibi geometrisi tanımlı olan bir yapıya ihtiyaç duyulmamaktadır. İntegrasyon işleminin yapılacağı alt bölgeler seçilmiş olan ağırlık fonksiyonları düzgün bir şekle sahip olmakta ve integrasyon işlemi bu yerel alt bölgede gerçekleştirilmektedir. Bu da yönteme yerel yaklaşım uygulama kolaylığı sağlamaktadır. Bu durum Şekil 2’de belirtilmiştir.



Şekil 2. Eleman Bağımsız Galerkin yönteminde gölge hücre [4, 13]

### 1.5. Termo-Mekanik Şekil Verme

Metal şekillendirme işlemi, metal plaklar akma gerilmelerinden daha yüksek gerilmelere maruz kaldıkları ve şekil değişimleri elastik sınırı aştıkları zaman ortaya çıkmaktadır. Çelik plakları eğrisel plaklara dönüştürmek için genel olarak iki farklı yöntem kullanılmaktadır:

- Mekanik şekil verme
- Termo-mekanik şekil verme

Mekanik şekil verme işlemi: Bu şekil verme işleminde metal plakayı derin çekme, haddeleme, eğme, presleme..vb geleneksel şekil verme yöntemleri kullanılarak bir ürün haline dönüştürmek için dışarıdan ek bir yükün uygulanmasına ihtiyaç duyulmaktadır. Şekil verme prosesi değişmesi gerektiğinde komple kalıp veya donanım değişimi

gerekmektedir. Mekanik şekil verme işleminin kullanıldığı yerlerden biri de gemi endüstrisidir.

Tersanelerde gemilerin bileşik eğrisel plakalardan oluşan darbe başlıklarının üretilmesi oldukça zorlu bir işlemdir. Bu üretim süreci en basit başlıkların dahi büyük plakalardan oluştuğu dikkate alındığında çok önemlidir [17, 18].

Tek bir eğriliğe sahip plaklar haddelenerek üretilebilir ancak çift eğriliğe sahip olan plakların üretimi ağır donanımların bakımının yapılmasını ve yetenekli bir işçilik becerisi gerektirir. Çift eğriliğe sahip plaklar kalıp yardımıyla veya kalıp kullanmaksızın kuvvet uygulanarak, çekiçle dövülerek veya dar haddelerden geçirilerek üretilmektedir. Bu yöntemler yaygın olarak kullanılmasına rağmen bazı sakıncaları mevcuttur. Örneğin basınçla şekillendirme işleminde spring-back ( geri yaylanma ) işleminden sonra tasarlanması arzu edilen formun elde edilip edilemeyeceği kestirilememektedir. Çekiçle dövme işleminde ve dar haddeden geçirme işlemlerinde çalışma bölgelerinde plaklarda incelmeye meydana gelmektedir [19].

Termo-mekanik şekil verme işlemi: Bu şekil verme işleminde ise plastik deformasyon metal plaka' nın önce ısıtılması ve hemen ardından soğutulması ile elde edilmektedir. Bir plakanın bir ucu ısıtılırken diğer ucu soğuk tutulduğunda plaka kalınlığı boyunca oluşan sıcaklık gradyanı, kalınlık boyunca farklı genleşmelere yol açmakta böylece metal plaka eğilmeye zorlanmaktadır [18].

Termo-Mekanik şekil verme yöntemlerinin en yaygın olanı “Hareketli ısı cephe ile şekil verme” yöntemidir.

### **1.5.1. Hareketli Isıl Cephe ile Şekil Verme (Hat Isıtma)**

Bu yöntem çift eğrilikli plakların üretilmesi için yerel ısıtmayı kullanan bir yöntemdir. Bu yöntem gemi endüstrisinde, havacılık endüstrisinde, hızlı prototip imalatı ve otomotiv sanayinde sac metallerin şekillendirilmesi işleminde yaygın olarak kullanılmaktadır.

Hareketli ısı cephe ile şekil verme oldukça popüler olmasına rağmen süreç kontrolü oldukça zordur ve en yetenekli işçiler tarafından uygulanması bile zorluklar içerir. En önemli zorluk, sürekli bir üretimin sağlanabilmesi ve düzgün bir geometrinin elde edilebilmesi için plaka' nın hangi bölgeden, hangi doğrultuda ve ne kadar ısıtılması

gerektiği sorularına cevap bulmaktır. Buna rağmen mekanik şekil verme için kullanılan üretim yöntemleriyle kıyaslandığında avantajlara sahiptir.

Genel olarak Hareketli Isıl Cephe ile şekil verme işleminin avantaj ve dezavantajları aşağıda belirtilmiştir.

Hareketli Isıl Cephe ile Şekil Verme Yönteminin avantajları,

- Esnek şekil verme sürecine sahiptir. Ek bir aparat veya kalıp değişimine ihtiyaç duymamaktadır.
- Şekil verme süreci sonrasında geri yaylanma gerçekleşmediğinden oluşacak olan deformasyonu ön görmek mümkündür.
- Şekil verme işlemi temas gerektirmediğinden girilmesi zor olan alanlarda dahi üretim gerçekleştirilebilir.
- Gevrek, sert ve kalın malzemeler şekillendirilebilir.
- Farklı ısıtma hatlarının tatbiki ile yeni geometriler elde edilebilir.
- Hareketli ısı cephe ile şekillendirilen plaklar ısıtma bölgelerinde daha da kalınlaşmaktadır. Böylece tasarımcının kalınlık konusunda bir endişesi kalmamaktadır.
- Bu yöntem için gerekli olan donanım oldukça ucuzdur ve diğer yöntemler içerisinde otomasyona en yakın olan yöntemdir.

Hareketli Isıl Cephe ile Şekil Verme Yönteminin dezavantajları ise şöyle sıralanabilir;

- Geleneksel şekil verme yöntemleri ile kıyaslandığında süreç uzundur.
- Isıtma işlemi için kullanılan enerji kaynaklarındaki kayıplar yüzünden enerji tüketimi yüksek bir süreçtir.
- Isıtma işleminde oksiasetilen kaynağı kullanıldığında aşırı karbon ve yanma artığı olan oksitlerin malzemeye nüfuz ederek malzemede bozunmaların oluşmasına yol açmaktadır [17, 19, 20].

Hareketli ısı cephe ile şekil verme işleminde amaçlanan geometrinin elde edilebilmesi için ısıtma hattının tespiti, uygulanacak olan ısıtma yöntemi, şekil verilecek malzemenin ısıtma sürecinde mekanik özelliklerinin değişimi ve ısı kaynağının yapı üzerindeki ilerleme hızı gibi parametrelerin kontrolü ile sürecin dezavantajları azaltılabilir.

### 1.5.1.1. Hareketli Isıl Cephe ile Isıtılacak Hattın Belirlenmesi

#### a. Yüzey Farklılıklarının Kıyaslanması Yöntemi

Yöntemlerden bir tanesi hedeflenen yüzey ile başlangıçtaki yüzeyin karşılaştırılmasıdır. Bu yöntemde amaç, fark yüzeyi ile tanımlanan hatanın mümkün olduğunca düşük seviyelerde kalmasını sağlamaktır. Bu yöntemde, maksimum farka sahip olan noktalar belirlenir ve her bir nokta ısıtma hattı içine dahil edilmeye çalışılır. Böylece her iterasyonda fark yüzeyi eğimi düzlemsel hale yaklaşacaktır [21, 22].

#### b. Elastik Analiz kullanmak ve Benzerlik ölçümü ile Kıyaslama Yapmak

Bu algoritmada yüzey üzerinde benzer eğrilik değerlerine sahip noktalar aynı ısıtma hattı içinde toplanmaktadır. Böylece noktalar aynı ısı etkisi ile aynı ısı momentine maruz kalmaktadırlar. Böylece hareketli ısı cephe etkisinde elde edilen yüzey ile hedef yüzey arasındaki fark ortak noktalar arasındaki mesafe ölçülerek kıyaslanmaktadır. Hedef yüzey ile analizden elde edilen yüzey arasındaki farkların minimize edilmesi için bir optimizasyon algoritması çalışmaktadır.

#### c. Elastik Analizden Elde Edilen Asal Şekil Değişimi Doğrultularını Kullanmak

- Elastik sonlu elemanlar analizini kullanarak ilk adımdan son adıma kadar deformasyon dolayısıyla meydana gelen şekil değişimi değerlerinin elde edilmesi
- Şekil değişimi değerlerinin düzlem içi ve eğilme şekil değişimleri olarak ayrıştırılması ve bu asal şekil değişimi değerlerinin çizdirilmesi
- Düzlem içi şekil değişimi değerleri kullanılarak maksimum bası şekil değişimi değerinin elde edildiği bölgeler Hareketli Isıl Cephe için kullanılacak olan ısıtma hattının uygulanacağı noktaları belirlemektedir. Hareketli ısı cephe ile şekil verme işleminin doğrultusu olarak da mutlak maksimum şekil değişimi değeri doğrultusuna normal olarak seçilmektedir.
- Ek ısıtma hattının belirlenmesi işleminde de eğilme şekil değişimi değerlerinin maksimum olduğu bölge Hareketli Isıl Cephe bölgesi olarak seçilir. Yeni doğrultu olarak, mutlak maksimum şekil değişimi doğrultusuna dik olarak seçilmektedir.

#### d. Diferansiyel Geometri ile Elde Edilen Normal Şekil Değişimi Doğrultuları

Diferansiyel geometri olarak bilinen ve başlangıç düzlem plaka ile deformasyondan sonraki eğri plaka arasında karşılaştırma yapan bir yöntem kullanılır. Bu yaklaşımda düzlem içi ve eğilmeye asal şekil değişimi değerleri elde edilmektedir. Bu yöntemde en

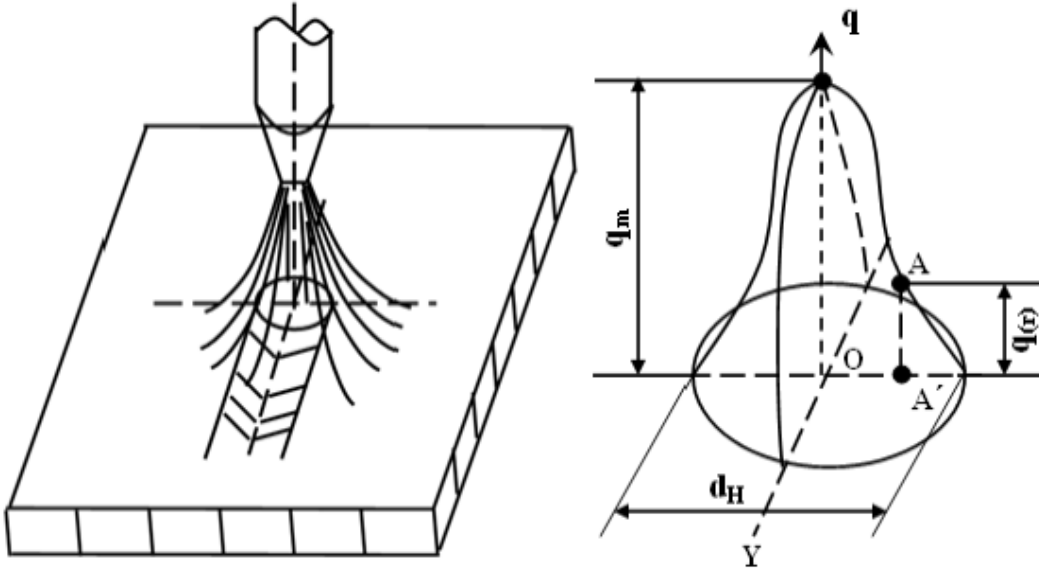
önemli nokta Hareketli Isıl Cephe yöntemi ile en iyi benzeşimi oluşturacak olan eşleşme yönteminin belirlenmesidir.

Literatürde eşleşme yüzeyinin oluşturulması için isometrik ağaç yapısı önerilmiştir. Bu ağaç yapısı büyük bir gövde ve bu gövdeye bağlı olan dallardan meydana gelmektedir. Her bir gövde ve ona bağlı olan dallar yüzey üzerine doğrusallaştırma uygulanmaksızın karmaşık bir halde eşleştirilir. Bu yaklaşım daha sonra jeodezik eğriler kullanılarak geliştirmiştir [17, 19].

### **1.5.1.2. Hareketli Isıl Cephe ile Şekil Verme İşleminde Uygulanan Isıtma Kaynakları**

Hareketli ısı kaynağının analitik modellerinin tanımlanması sürecinde Rosenthal (1941) başlangıç çalışmalarını gerçekleştirmiştir. Rosenthal kaynak havuzu ve kaynak havuzunda düzlemsel ve hacimsel olarak meydana gelecek olan sıcaklık dağılımını elde etmeye çalışan ilk araştırmacılardandır. Başlangıç çalışmalarında ısı transferi denkleminde hareketli bir koordinat takımı ekleyerek noktasal, çizgisel ve yüzeysel ısı kaynaklarının modellenmesi için farklı kaynak parametrelerini içeren araştırmalar gerçekleştirmiştir [23]. Rosenthal gerçekleştirmiş olduğu çalışma kapsamında konsantre ısı kaynağını modellemiştir. Gerçekleştirmiş olduğu analitik model kapsamında malzeme özelliklerinde sıcaklığa bağlı olarak meydana gelen değişimleri, faz değişimini ve artık ısıyı dikkate almamıştır. Bu sebeple ısı etkisinde olan bölge içerisinde sıcaklık dağılımı üzerinde elde edilen yakınsama değerlerinde sapmalar nispetten yüksektir, düşük sıcaklık bölgelerindeki doğruluk oranı çok daha iyi mertebelerdedir [23]. Goldak ve çalışma arkadaşları (1985) hareketli ısı kaynağı için yarı elipsoit bir model önermişlerdir. Önerilen yarı elipsoit modelde ısı kaynağı için maksimum değerler elipsoit' in merkezinde tanımlanmaktadır. Merkezde ısı kaynağının sahip olduğu sıcaklığın %95' ini ihtiva ettiği dikkate alınarak Goldak ve çalışma arkadaşlarının elde ettiği modelde sıcaklık dağılım katsayıları hesaplanarak hareketli ısı kaynağının nümerik modeli oluşturulmaktadır [23-25].

Hareketli ısı kaynağı modellenmesi için Rosenthal' ın çalışmaları ışığında Friedman (1975) Gauss dağılımına sahip ısı kaynağı modelini tahmini sıcaklık dağılımını elde edebilmek için önermiştir. Gauss dağılımına sahip olan ısı kaynağı şematik olarak Şekil 3' te gösterilmiştir.



Şekil 3. Gauss dağılımına sahip ısı kaynağı

Şekil 3' te yer alan  $q$  ifadesi kullanılan ısı kaynağı için ısı enerjisini,  $d_h$  ısı kaynağı tesir bölgesi çapını, merkezde oluşan maksimum ısı akısı  $q_m$  ile tanımlanmaktadır. Gauss dağılımına sahip ısı kaynağının uyguladığı ısı yükü yarıçapa bağlı değişimi  $q_r$  ile ifade edilmiştir.

Hareketli ısı cephe ile şekil verme sistemi kullanılan ısı kaynakları dikkate alındığında birkaç gruba ayrılabilir. Isı kaynağı modeli farklı ısı kaynakları ve yakıtlar için kalorimetre ölçümleri gerçekleştirerek incelenmiştir [19]. Isı kaynakları ile ilgili modellemelerde kaynakların çoğunda alev dağılımının Gauss formunda olduğu kabul edilmiştir [19]. Yu, lazer beam modelini, ısı merkezinden dışa taşındığında sıcaklık artışını dikkate alan, gerçekleştirmek için modifiye edilmiş Gauss dağılımını kullanmıştır. Rosenthal tarafından geliştirilen sonlu bir kalınlığa sahip sonsuz bir plaka üzerinde noktasal ısı kaynağı yaklaşımını analitik çözümlerde kullanmışlardır [23].

Hareketli ısı cephe problemlerinde ısı kaynağı etkinlik yarıçapının küçük olması sebebi ile sayısal modelleme gerçekleştirilirken, ısı kaynağından yapı üzerine etkiyecek olan ısı akısı değerinin doğru modellenebilmesi için çözüm bölgesinde yeterli bir ağ yapısının tanımlanmış olmasına ihtiyaç duymaktadır. Sonlu elemanlar yöntemi ile dinamik yerel ağ eniyileme işlemi (Rezoning) kullanılarak gerçekleştirilen Hareketli Isıl Cephe problemi Guoxin Yu tarafından incelenmiştir. Yerel ağ eniyileme işlemi (Rezoning) kullanılarak ısı kaynağı etkinlik yarıçapı altında kalan alan için sayısal ağ oluşturulmuştur ve yarı analitik termal analiz sonuçları kullanılarak basitleştirilmiş bir Hareketli Isıl Cephe

problemi çözümü önerilmiştir. Günlük hayatta Hareketli Isıl Cephe probleminin değerlendirilebilmesi adına önemli kolaylıklar sağlamaktadır. Sayısal olarak Hareketli Isıl Cephe probleminin modellenmesi ve çözümünün elde edilmesi karmaşık işlem adımlarını ihtiva eden bir çözüm süreci olarak bilinmektedir. Yarı analitik model kullanılarak hareketli ısı cephe probleminde kenar etkileri, ısı kaynağı gücü, ısı kaynağı yarıçapı, ısı kaynağı ilerleme hızı gibi parametrelerin etkileri incelenmiştir [26].

Hareketli Isıl Cephe Probleminde ısıtma parametrelerinin plaka üzerinde meydana getireceği etkiler ve deformasyon ilişkisi Henrick Birsgaard Clausen tarafından incelenmiştir [19]. Gerçekleştirilen çalışma kapsamında Hareketli ısı cephe süreci üzerinde, farklı ısıtma parametrelerinin deformasyon üzerindeki etkilerinin belirlenebilmesi için sonlu elemanlar modeli oluşturulmuştur. Alevle ısıtma sistemi için ısı kaynağı etkisinde meydana gelecek olan ısı akısı için sayısal model önerilmiştir. Önerilen sayısal model 27 farklı test ile elde edilen bulgular incelenerek gerçekleştirilmiştir. Isıtma parametreleri ile meydana gelecek olan deformasyon arasındaki ilişkinin tanımlanabilmesi için öneriler sunulmuştur [19].

Wenchuan Lİ [27], hareketli ısı cephe problemi için sabit Hareketli ısı cephe enerjisi kabulü altında plaka üzerinde meydana gelen sıcaklık dağılımına ilerleme hızının etkisi, net ısı girişinin belirlenmesi, şekil değiştirme hızının ve akma gerilmelerinin plaka deformasyonu üzerindeki ve mikro yapı üzerindeki etkilerini incelemiştir. Şekil değiştirme hızının sıcaklığa bağlı etkilerinin araştırılması için sabit maksimum sıcaklık yaklaşımı önermiştir [27].

Lazer ile hareketli ısı cephe ile şekil verme sürecinde mikro yapıdaki değişikliklerin dikkate alınması gerekliliği Jin G Cheng [28], tarafından gerçekleştirilen çalışmada vurgulanmıştır. Lazer ile hareketli ısı cephe problemi deformasyon esnasında meydana gelen pekleşme ve gevşeme süreçlerinin birden fazla sayıda meydana geldiği, hareketli ısı cephe ile şekil verme işleminin hat boyunca ısı kaynağının bir kez geçerek değil birden fazla sayıda aynı veya farklı hattan geçerek meydana gelen bir şekil verme süreci olduğu ifade edilmiştir [28]. Bu sebeple ısı kaynağı etkisinde deformasyon davranışı incelenirken mikro yapıdaki değişikliklerin ihmal edilemeyeceği belirtilmiştir.

Yajun Fan [20], lazer ile hareketli ısı cephe problemini yine mikro yapısal değişiklikleri dikkate alarak sayısal, sonlu elemanlar modelini gerçekleştirmiştir. Termal mikro yapısal ve mekanik bir problem olarak ele alınan hareketli ısı cephe probleminde mikro yapısal değişikliklerin incelenebilmesi için önerilen bu sayısal modelde faz değişimi

ve rekristalizasyon etkileri de dikkate alınmaktadır. Ayrıca hareketli ısı cephe problemi çözümünde lazer ısı kaynağı ve katı yapının etkileşiminde meydana gelen ısıl şok etkisinde plaka malzemesinin davranışı sıvıya yakın olduğu ifade edilmiş ve plaka üzerinde meydana gelecek olan deformasyon değerinin bu ısıl şok ile katı etkileşiminin düzgün modellenmesi ile gerçeğe yakın olarak elde edilebileceği vurgulanmıştır. Gerçekleştirilen çalışma kapsamında ısıl şok yükünün etkisi korunum yasası, durum denklemleri ve malzemenin elasto-plastik davranışı dikkate alınarak sonlu elemanlar modeline taşındığı ifade edilmektedir.

Hyung Chul Jung [17], lazer ile hareketli ısıl cephe ile şekil verme prosesini nonlineer üç boyutlu ısı transferi ve şekil değişimi hızına duyarlı malzeme modeli kullanılarak gerçekleştirmiştir. Gerçekleştirilen hareketli ısıl cephe problemi çözümü literatürde yer alan veriler ışığında değerlendirilmiş olup, hareketli ısıl cephe probleminde nümerik modelin doğrulanması ile prosesi etkileyen parametrelerin optimizasyonu için çalışmalar gerçekleştirilmiş ve önerilmiştir [17].

Edward W. Reutzler hareketli ısıl cephe problemi çözümünde önemli olan noktanın arzulanan deformasyon geometrisinin elde edilmesi için hareketli ısıl cephe ile şekil verme işleminde hangi hattın ısıtılması gerekliliği araştırılmıştır. Gerçekleştirilen çalışma kapsamında hareketli ısıl cephe problemi ile ilgili olarak basit sayısal analiz yöntemleri önerilmiş olup hareketli ısıl cephe ile şekil verme probleminde uygun ısıtma hattının belirlenmesi için diferansiyel geometri yaklaşımı çözüm olarak önerilmiştir [21,22].

Sonlu Elemanlar Yöntemi alternatif ve etkili bir çözüm süreci olarak hareketli ısıl cephe ile şekil verme problemleri kapsamında değerlendirilmektedir. Özellikle ısı kaynağı etkisinde meydana gelen sıcaklık dağılımının ve bu sıcaklık dağılımı etkisinde meydana gelecek olan deformasyon davranışının etkilerinin incelenmesi için testler ile doğrulanmış modellerden etkin bir biçimde faydalandığı görülmektedir.

Literatürde plakaların eğilme davranışı yerel Petrov-Galerkin ağsız yöntemi ile zamana bağlı sıcaklık etkisinde incelenmiştir. Plaka üzerinde tanımlanan zamana bağlı sıcaklık dağılımı zamana bağlı olarak değişen sinüs fonksiyonları kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Ayrıca plaka üzerine uygulanan ısı akısı ifadesi ile de sürekli rejimde sıcaklık dağılımı elde edilmiştir. Plaka kalınlığı boyunca gerçekleşen sıcaklık dağılımı için Legendre fonksiyonları kullanılmıştır. Hareketli bir ısıl cephe söz konusu değildir. Problem çözümünde kullanılan şekil fonksiyonları Lagrange tipidir [29, 30].



Literatürde ağsız yöntemler ile gerçekleştirilen ikinci çalışmada, hareketli ısıl cephe problemi çözümü için ağsız yerel Petrov-Galerkin yöntemi kullanılarak hareketli ısı kaynağı etkisinde plaka üzerindeki ısı iletimi problemi çözümü araştırılmıştır. Çalışma kapsamında hareketli ısı kaynağı dikkate alınarak sonlu elemanlar yöntemindeki yerel ağ eniyileme (Rezoning) işlemine benzer şekilde hareketli bölge için oluşturulan nispetten yoğun bir düğüm yapısına sahip çözüm bölgesi dinamik olarak hareket ettirilmiştir. Çalışma kapsamında ısı transferi problemi çözümünde, sonlu elemanlar yöntemine benzer şekilde özel çözüm ağı oluşturulmuştur. Ancak plaka üzerinde meydana gelen eğilme deformasyonu ve gerilme dağılımı incelenmemiştir [34].

Isıl cephe problemleri için ağsız yöntemler ile gerçekleştirilmiş olan bir diğer çalışma ise ortası delik bir plakanın iç kısmında uygulanan sabit sıcaklık girdisi etkisinde başlangıçta çözdürülen ısı iletimi problemi ve sonrasında meydana gelen sıcaklık dağılımı etkisindeki plakada meydana gelecek olan eğilme deformasyonunun incelendiği çalışmadır. Bu çalışma Ansys ile gerçekleştirilmiştir. Çalışma kapsamında eğilme deformasyonunun elde edilmesi için b-spline fonksiyonlar kullanılmıştır. Ancak ağsız yöntemler şekil fonksiyonları değildir. Çalışma kapsamında önerilen ağsız yöntem Eleman Bağımsız Tarama Çözümü Yöntemidir (Meshfree Scan Solve Method) olarak ifade edilmiştir [35].

Hareketli ısıl cephe ile şekil verme problemleri kapsamında ayrıca ısıtma işleminin malzemenin nonlineer özelliklerini de ihtiva edecek şekilde değerlendirildiği çalışmalar için sadece nonlineer özelliklerin ısı kaynağının birden fazla sayıda tekrar ile plakayı ısıtması durumunda malzemenin mikro mekanik özelliklerinin de deformasyon davranışını etkileyeceği ifade edilmiştir. Aşağıda ısı kaynağı türü, deformasyon mekanizması ve malzeme davranışı ile ilgili genel bilgiler sunulmuştur.

Isı kaynaklarına göre kullanılan hareketli ısıl cephe ile şekil verme yöntemleri aşağıda tanımlanmıştır.

#### a. Gaz Kaynağı ile Isıtma

Donanımı elde edilmesi en kolay ve en ucuz olan yöntemdir. Gaz miktarının sürekli olması ve ısı kaynağının plaktan olan uzaklığının sabit olması şartları dikkate alındığında kontrolü oldukça zordur.

#### b. Yüksek Frekanslı İndüksiyonla Isıtma

Isıtma işlemi indüklenmiş elektrik alanının frekansına bağlı olduğundan ısı nüfuziyetinin kontrolüne olanak sağlamaktadır. Ancak plakaların köşelerden ısıtılması

gereken uygulamalarda aşırı ısınma sebebiyle kullanılamamaktadır. Ayrıca donanımı oldukça ağır olduğundan elle yapılan hareketli ısı cephe ile şekil verme işlemleri uygulamalarında gaz kaynağının yerini tutmamaktadır.

#### c. Lazer ile Isıtma

Isıtma işleminde kullanılan oldukça pahalı yöntemlerden birisi olmasına rağmen en iyi ısı kaynağıdır. Otomasyona en uygun olan ısı kaynağıdır ayrıca koruyucu gaz ile birlikte kullanıldığında yüzeydeki oksidasyonu azaltır.

##### c.1 Sıcaklık Gradyanı Yöntemi

Hareketli Isıl Cephe ile oluşan sıcaklık dağılımı ve sıcaklığa bağlı olarak oluşan eğilme deformasyonu mekanizmasının incelendiği en yaygın yöntemlerden biridir. Sıcaklık gradyanı yönteminin karakteristik özellikleri aşağıda sıralanmıştır.

- Yüksek ilerleme hızı ve küçük ısı tesir yarıçapı ile kalınlık boyunca yüksek sıcaklık dağılımı elde edilmektedir.
- Eğilme ısıtma işlemi esnasında ters doğrultuda meydana gelmektedir.
- Soğutma aşamasında eğilme doğrultusu lazer ısı kaynağı yönündedir.

Sıcaklık gradyanı yöntemi kalın plakaların lazer ısı kaynağı kullanılarak ısıtma hattı doğrultusunda meydana gelen eğilme deformasyonunun incelenmesinde kullanılabilir.

Sıcaklık gradyanı yöntemi için analitik model Vollertsen tarafından önerilmiştir. Vollertsen analitik modelinde, ısı kaynağından alınan enerjinin tamamen mekanik enerjiye dönüştüğü varsayımı yapılmaktadır. Bu sebeple, enerji yaklaşımından elde edilen açı değişimi gerçekte ölçülen değişimin birkaç katı elde edilmektedir [17, 20].

##### c.2 Burkulma Mekanizması

Sıcaklık gradyanı yöntemi ile kıyaslandığında burkulma mekanizması, sıcaklık gradyanı yönteminde olduğu gibi yüzeysel bir sıcaklık gradyanından kaçınmak için ısıtıcı hızı düşürülüp ısı kaynağı yarıçapı artırılarak elde edilebilir. Burkulma mekanizması yönteminde ısı kaynağı yarıçapı ile plaka kalınlığı oranı 10'dur. Sıcaklık gradyanı yönteminde olduğu gibi burkulma mekanizması yönteminde ısıtma ve soğutma safhalarında eğilme doğrultusu değişmemektedir. Burkulma mekanizması yönteminde geometri değişiminin doğrultusu sürece bağlı değildir. Sınır koşullarına, sac plakanın başlangıçtaki eğimine, iç ve dış kuvvetlere ve yer çekimi etkisine bağlıdır. Buna rağmen burkulma mekanizması yöntemi ile sac metal istenilen doğrultuda eğilebilmektedir ki bu da yöntemi esnek olarak tanımlamaktadır.

Bu sebeple burkulma mekanizması yönteminin ince sac metallerin ve hatta tüplerin eğilmesi işlemlerinde kullanılabileceği ifade edilmektedir.

### c.3 Bozma Mekanizması

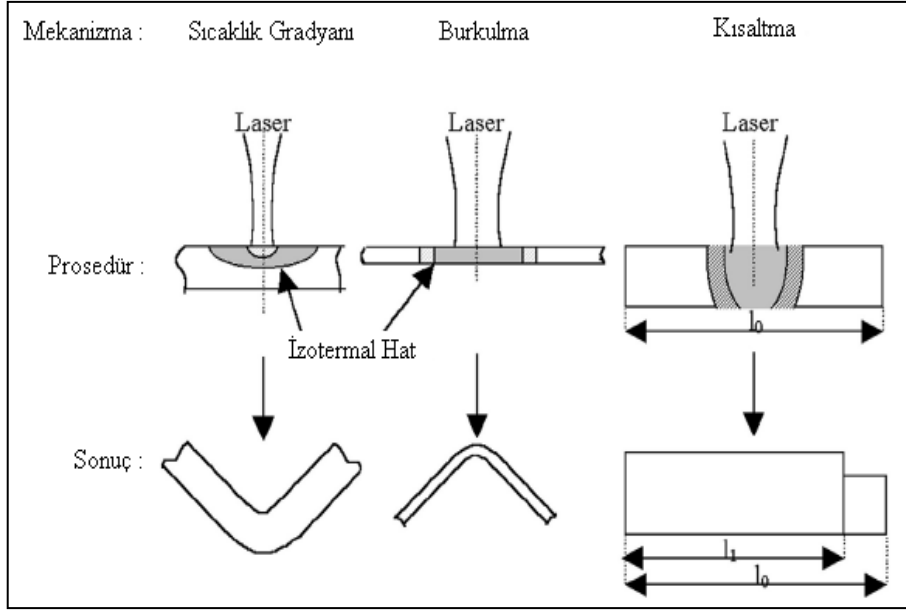
Burkulma mekanizmasındaki parametreler ile kıyaslandığında bozma mekanizması kalın ve rijit (stiff) plakaların burkulmasını önlemek için kullanılmaktadır. Ayrıca daha küçük ısıtıcı yarıçapına ihtiyaç duymaktadır. Bozma mekanizmasında sac metal ısıtma işlemi süresince kalınlık boyunca uzamaktadır ve soğuma işlemi süresince de enine bir daralma meydana gelmektedir. Böylece plakanın kalınlığı artmaktadır. Bu işlem plaka kalınlığının artırılması için tüm plaka üzerinde tekrarlanmaktadır. Bozma mekanizması yöntemi düzlem plakalardan daha dayanımlı bir yapının elde edilmesi için kullanılmaktadır. Ayrıca düzenleme, bağlama ve hızlı prototip için de kullanılabilir.

### d. Kaynak arkı ile ısıtma

Isıtma işlemi için kullanılabilecek olan kaynaklardan biridir. Ancak düşük ısı nüfuziyetinden dolayı malzeme bozularak ergimektedir.

Yukarıda belirtilmiş olan yöntemler kullanılan ısı kaynağına göre hareketli ısıl cephe ile şekil verme işleminin sınıflandırılmasına olanak sağlamıştır.

Hareketli ısıl cephe ile şekil verme yöntemleri için sıcaklık kaynağı etkisi ile gerçekleştirilen sınıflandırma genel hatları ile ifade edilmiştir. Hareketli ısıl cephe ile şekil verme yönteminde termal olarak şekil verme aşamasında sıcaklık dağılımı ve meydana gelen deformasyon davranışı Şekil 4' te ifade edilmiştir.



Şekil 4. Hareketli ısı cephe ile şekil verme işleminin uygulanma biçimi ve sonuçları [31, 32]

### 1.5.1.3. Isı Kaynağı İlerleme Hızı

Tarama hızı (plakanın yerleştirildiği CNC makinasının ısı kaynağı besleme hızı) hareketli ısı cephe ile şekil verme işleminde enerji absorpsiyonunu kontrol etmenin en kolay yoludur. Bu sebeple ısı kaynağı besleme hızı ile ilgili olarak pek çok deneme gerçekleştirilmiştir. Isı kaynağı besleme hızı (ısı kaynağı ilerleme hızı) arttıkça şekil verme işleminde meydana gelen açı değişimi doğrusal olarak azalmaktadır [19]. Bu durum ilerleme hızı arttıkça plaka üzerine birim zamanda daha az enerjinin transfer edilmesi ile açıklanmaktadır. Ancak artan besleme hızına karşılık eğilme açısındaki azalma deneysel olarak tespit edilememektedir. Lazer şekil verme işleminde plakaya girdi olarak verilen enerji sabit olmasına rağmen hat boyunca besleme hızı artması durumunda eğilme açısı da artmaktadır. Bu durumun sebebi farklı ısı kaynağı ilerleme hızları için plaka üzerindeki sıcaklık profilleri' nin değişmesidir.

Isı kaynağının ilerleme hızı düşmesi durumunda plakadaki sıcaklık dağılımı için yeterli zaman olması sebebiyle kalınlık boyunca oluşan sıcaklık dağılımı daha üniform olmaktadır. Bu sebeple ısıtılan bölgede meydana gelen plastik şekil değişimi değeri ile ısıtılmayan bölgedeki plastik şekil değişimi değerleri arasında çok küçük farklar meydana gelmektedir. Yüksek ısı ilerleme hızlarında sıcaklık dağılımı kalınlık boyunca daha

belirgin hale gelmektedir ve bu kalınlık boyunca meydana gelen sıcaklık dağılımı plastik bası şekil değişimi değerlerinin oluşmasına sebep olmaktadır.

Isı kaynağı ilerleme hızının en uygun sıcaklık dağılımının elde edilmesi açısından etkisi incelendiğinde eğilme açısının belirli ısı kaynağı ilerleme hızı değerine kadar artacağını ifade etmiştir [17].

#### **1.5.1.4. Malzeme Özellikleri**

Lazer şekil verme prosesinde sac metal plakanın malzeme özellikleri önemli bir parametreyi oluşturmaktadır. Çünkü lazer şekil verme prosesi lazer ısı kaynağı ile ısıtılan plakada termal genleşmelerin oluşturulmasıyla elde edilmektedir. Önemli olan termal büyüklükler ısı iletim katsayısı, termal genleşme katsayısı, termal kapasite ve yoğunluktur.

Eğilme açısı ile termal genleşmenin hacimsel ısı kapasitesi (özgül ısı ve yoğunluğun çarpımı olarak ifade edilebilir) oranı arasında doğrusal bir ilişkinin olduğu tespit edilmiştir [9]. Termal genleşme sac plaka üzerinde elde edilen sıcaklık dağılımına bağlı olarak meydana gelmektedir.

Isı iletim katsayısı plaka üzerindeki ve kalınlık boyunca meydana gelen sıcaklık dağılımını belirleyen önemli parametrelerden biridir. Termal genleşme katsayısı kalınlık boyunca ulaşılabilecek olan sıcaklığın belirlenmesi ve sıcaklığın etkili olduğu bölgenin belirlenmesi için bilinmelidir. Bu terim özellikle de sıcaklık gradyanı mekanizması için önemli bir büyüklüktür. Termal iletkenlik katsayısı Burkulma mekanizması ve Bozma mekanizması yöntemleri için sıcaklık gradyanı mekanizması yöntemi için olduğundan daha az öneme sahiptir. Çünkü bu iki yöntemde sıcaklık gradyanının etkisi biraz daha azdır [19, 33].

Malzemelerin mekanik özelliklerinin etkisi ise düşük ve yüksek mukavemetli olmak üzere iki grupta sınıflandırılabilir.

Düşük mukavemetli malzemeler akma gerilmesi ile elastisite modülü oranının düşük olduğu malzemelerdir. Akma gerilmesi ile elastisite modülünün oranı malzemenin akma şekil değişimi değerine karşılık gelmektedir. Düşük mukavemetli malzemelerde akma şekil değişimi değeri de düşüktür. Bu sebeple plastik bölgeye geçiş daha hızlı gerçekleşmektedir. Bu durum termal genleşmenin plastik şekil değişimine dönüşümünü daha efektif hale getirmektedir.

Bu durumun tersi olarak yüksek mukavemetli malzemeler için akma gerilmesi değerinin elastisite modülüne oranı daha yüksek olmaktadır. Yüksek mukavemetli malzemeler için düşük mukavemetli malzemeler ile kıyaslandığında akma şekil değişimi değeri neredeyse iki katına yaklaşmaktadır. Bu da yüksek mukavemetli malzemelerin iki kata yakın oranda elastik enerji yutması anlamına gelir ki bu durum açı değişiminin daha düşük olarak elde edilmesine sebep olmaktadır [32, 33].

### 1.6. Hareketli Isıl Cephe ile Şekil Verme İçin Sonlu Elemanlar Modeli

Hareketli Isıl Cephe etkisinde plakların eğilme deformasyonunun incelenmesi iki alt probleme indirgenebilir.

1. Isı iletimi/transferi problemi
2. Elastik-plastik şekil değişimi problemi

Burada birinci problemin çözümü ikinci problem için başlangıç verilerini teşkil etmektedir. Hareketli Isıl Cephe ile şekil verme işlemi kullanılarak plakların şekillendirilmesi problemi nonlineer termo-mekanik bir problemdir. Bu durum modellemeyi daha da zorlaştırmaktadır [21].

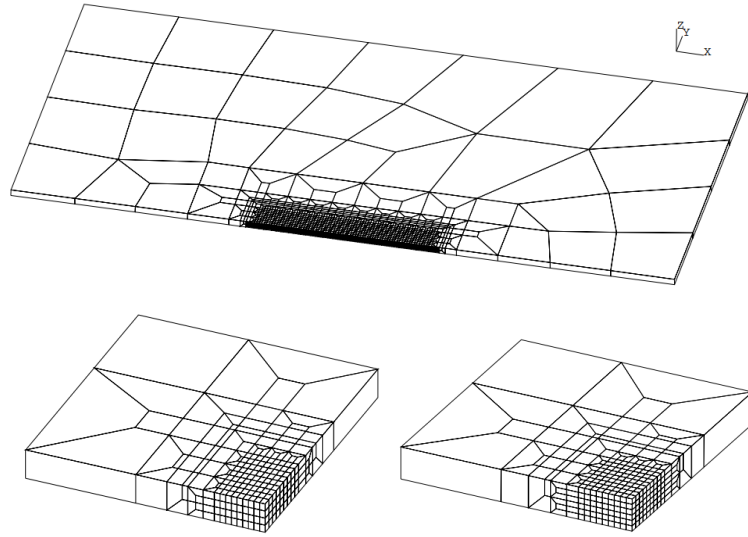
Hareketli Isıl Cephe ile şekil verme yöntemi ile elde edilecek olan şekil değişiminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak modellenmesinde kayda değer başarılar elde edilmektedir. Ancak çözüm süresi oldukça uzun olmaktadır. Bu durum sonlu elemanlar yönteminin gerçek zamanlı analizler için kullanıma uygun olamayan bir hale sokmaktadır [18]. Çoğu zaman sayısal analizler ile kontrollerin gerçekleştirilmesi aşamasında kontrol edilmesi gereken bilinmeyenlerin sayısının fazla olması ve sayısal analiz oluşturulurken yetenekli personel' e ihtiyaç duyulması sonlu elemanlar yönteminin dezavantajları arasında gösterilebilir.

Plakaların hareketli ısı cephe ile şekillendirilmesi sürecinde ısı kaynağı hareketlidir ve sadece ısı kaynağına yakın olan bölge yoğun bir ısı transferine ve plastik şekil değişimine maruz kalmaktadır. Geriye kalan bölgelerde sıcaklık, gerilme ve şekil değişiminde çok küçük değişimler gözlenmektedir. Bu bölgelerde çok seyrek bir ağ kullanımı uygun bir çözüm elde etmek için yeterli olmaktadır [18, 19].

Sonlu elemanlar analizinde tüm ısıtma hattı boyunca düzgün ve üniform bir ağ yapısının kullanılması serbestlik derecesini arttırmaktadır. Bu da çözüm süresini uzatmaktadır. Doğruluğu yüksek olan ve yakınsayan bir çözümün elde edilebilmesi için

sonlu elemanlar yöntemi ile hareketli ısıl cephenin modellenmesi için yerel ağ eniyileme işlemi (Rezoning) olarak adlandırılan ve sonlu elemanlar için ağ oluşturma çalışmaları gerçekleştirmiş deneyimli personelin gerçekleştirebileceği bir sürecin uygulanması gerekir.

Yerel ağ eniyileme (Rezoning); doğrudan ısı kaynağına maruz kalan kısmın oldukça yoğun bir ağ yapısına, geriye kalan bölgelerin ise seyrek bir ağ yapısına sahip olacak şekilde yeniden ağ oluşturulması işlemidir [18, 19]. Belirtilen bu durum Şekil 5 ve Şekil 6' da ifade edilmiştir.

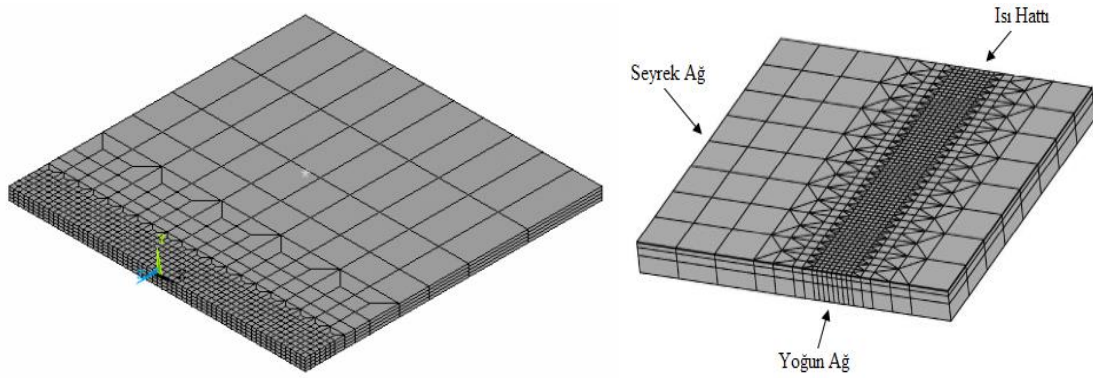


Şekil 5. Sonlu elemanlar ile modellenmiş bir hareketli ısıl cephe problemi [19]

Sonlu elemanlar yönteminde yerel ağ eniyileme işlemi (Rezoning) analiz sürecinde gerçekleştirilebildiği gibi manuel olarak sayısal analiz sürecinin başında sonlu elemanlar modeli oluştururken de hazırlanabilmektedir. Ancak bu süreçte sonlu elemanlar modelini hazırlayan kişinin tecrübesi önem kazanmaktadır. Sonlu elemanlar analizi ile elde edilmesi hedeflenen sonuçların analiz sürecinde oluşturulan eleman ve düğüm yapısından bağımsız hale gelmesi gerekmektedir.

Bu süreç hassasiyet analizleri ile oluşturulan sayısal çözüm ağının bir birini tekrar eden analizlerde gerilme değerinin veya dinamik problemler için rezonans frekanslarının ağ yapısından bağımsız hale geldiği dağılımın elde edilmesini kapsamaktadır. Bu sebeple sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal analiz süreci tanımlanması aşamasında kullanıcı

deneyimi ve bilgisi önem kazanmaktadır. Hareketli ısıl cephe ile şekil verme problemleri çözümünde yerel ağ eniyileme işlemi (Rezoning) işlemi, ısı kaynağı etkinlik yarıçapı içinde yapı üzerine transfer edilen ısı akısı ve sıcaklık dağılımının uygun olarak elde edilebilmesi için gereklidir.



Şekil 6. Hareketli ısıl cephe problemi için örnek sonlu elemanlar ağı [17]

Ağsız yöntemler ile sayısal analiz sürecinde sonlu elemanlar yönteminden farklı olarak ağ oluşturma süreci bulunmamaktadır. Dolayısıyla analiz süreci öncesinde oluşturulacak olan sayısal geometri için kullanıcının herhangi bir tecrübe ve bilgi birikimi olmasına ihtiyaç duyulmamaktadır. Ayrıca ağsız yöntemler, çözümü araştırılan problem için tanımlanan diferansiyel denklem için oluşturulan sistem matrisleri, çözüm sürecinde kullanılan şekil fonksiyonlarının yüksek mertebeden ve karmaşık olması dolayısıyla integrasyon bölgesinde çok sayıda sayısal integral düğümünün tanımlanmasını gerektirmektedir. Bu durum çözüm sürecinde ısı kaynağı etkisindeki bölge için özellikle yoğun bir şekilde tanımlanmış özel ağ yapısına olan ihtiyacı sınırlandırmaktadır ve sonlu elemanlar yöntemi ile kıyaslandığında kullanıcıya avantaj sağlamaktadır.

Ağsız yöntemler için ön görülen bu avantaj kompleks şekil fonksiyonları ve yüksek mertebeden sayısal integrasyonu gerektirmesi açısından çözüm süresini uzatmaktadır. Bu da kullanıcı için çözüm süresinin uzaması olarak geri yansıtacağından bu durum ağsız yöntemlerin bir dezavantajı olarak nitelendirilebilir.

Tablo 1’de Eleman bağımsız Galerkin ağsız yöntemi ile sonlu elemanlar yönteminin mekanik problemlerin çözümü açısından karşılaştırılması yapılmıştır.



Tablo 1. Elastodinamik problemler için Eleman Bağımsız Galerkin Ağsız Yöntemi (EBGAY) ile Sonlu Elemanlar Yönteminin (SEY) karşılaştırılması [36-38]

	EBGAY	SEY
Zayıf Form	Global	Global
Düğümler için Gerekli Bilgi	Yerlerinin bilinmesi Yeterli	Yerleri ve Bağlantıları Bilinmeli
Alt bölgeler	Dairesel veya Dikdörtgen alt bölgelere ihtiyaç duyar.	Poligon şeklinde ve elemanlara ayrılmış şekilde olmalı
Temel Fonksiyonlar	Kompleks ve kapalı formda ifade edilmesi zordur.	Basit polinomlardır
İntegrasyon Kuralı	Yüksek dereceli	Düşük dereceli
Esas sınır koşullarının uygulanması	Ekstra çaba gerektirir	Uygulanması kolaydır
Kütle/Katılık Matrisleri	Simetriktir, bantlı bir yapıya sahiptir. Katılık matrisi sınır koşulları uygulandıktan sonra pozitif definittir.	Simetriktir, bantlı bir yapıya sahiptir. Katılık matrisi sınır koşulları uygulandıktan sonra pozitif definittir.
Kütle matrisi elemanları toplamı açısından	Toplam kütleyle eşit olmayabilir	Toplam kütleyle eşittir
Denklemlerin birleştirilmesi	Gerekli değil	Gerekli
Gerilme/Şekil değiştirme	Her yerde süreklidir	Sadece integrasyon noktalarında süreklidir
Sınırlayıcı problemlerde kilitlenme hadisesi	Yoktur	Vardır
Düğüm eklemesi	Kolaydır	Zordur
Eksplisit algoritmalarda zaman adımına karar verilmesi	Zordur, yapının maksimum frekansının bilinmesi gerekir	Nispetten daha kolaydır
İki malzeme ara yüzünde süreklilik koşulunun uygulanması	Temel fonksiyonlar oluşturulurken dikkate alınmalı veya Lagrange çarpanları yöntemi kullanımını gerektirir	Uygulanması kolaydır
Verilerin hazırlanması için gerekli olan iş yükü	Azdır	Oldukça fazladır

Ağsız yöntemler ile sonlu elemanlar yöntemi çözüm süreci açısından kullandıkları denklem yapıları, çözüme yaklaşım süreci, çözüm matrislerinin oluşturulması açısından bir birine benzerlik göstermektedir. Ancak denklem takımının çözümü esnasında esas sınır koşullarının uygulanması aşamasında temel farklılıklar dikkat edilmesi gereken başlıca unsurlardandır. Ağsız yöntemler problem çözümüne olan yaklaşım anlamında kendi içinde farklılıklar göstermektedir. Ancak tez kapsamında çözüm sürecinde kullanılması ön görülen Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yöntemi ile sonlu elemanlar yöntemi çok benzer çözüm süreçlerini kapsamaktadır. Özellikle sonlu elemanlar çözüm yöntemi artık

denklemin ağırlıklandırılması ve çözüm sürecine geçilmesi aşamasında ağırlık fonksiyonu olarak şekil fonksiyonu ile aynı fonksiyonu kullanmaktadır ki bu yaklaşım literatürde Galerkin yaklaşımı olarak bilinmektedir.

Eleman bağımsız Galerkin ağsız yönteminde, sonlu elemanlar yöntemi ile kıyaslandığında sayısal analize hazırlık sürecinde uzman personele ihtiyaç duyulamamaktadır. Çözüm sürecinde, çözüm araştırılacak olan bölgenin hazırlık aşaması ağsız yöntemler için sadece düğümlerin tanımlanmasını kapsamaktadır. Sonlu elemanlar yönteminde ise çözüm bölgesi elemanlar ve elemanları bir birine bağlayan düğümlerin tanımlanmasını kapsamaktadır. Ayrıca çözümü gerçekleştirilecek olan problemin türüne göre çözüm bölgesinde tanımlaması gerçekleştirilen elemanların sağlaması gereken belli başlı kalite kriterleri söz konusudur ki uzman personel ihtiyacı bu noktada ortaya çıkmaktadır.

Sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal analiz sürecine hazırlanan çözüm bölgesi içinde tanımlanması gereken eleman kalitesi, sayısal çözümden en doğru sonuçların elde edilmesi için gerekli olan işlem adımıdır. Sonlu elemanlar yönteminde eleman kalitesi iç açılarının dağılımı, eleman kenar oranları, çarpılma ve geometrik bozulma olarak sıralanabilir. Sonlu elemanlar yönteminde çözüm sürecinde kullanılacak olan şekil fonksiyonları çözüme başlamadan önce tanımlı olarak bulunmaktadır.

Ağsız yöntemlerde şekil fonksiyonları çözüm süreci ilerlerken elde edilmektedir. Bu da çözüm aşamasında problemin tanımlanması ve çözümü aşamasında ek süre gerektirmektedir. Ayrıca ağsız yöntemler için elde edilen şekil fonksiyonları kompleks ve kapalı formda ifade edilmesi oldukça zordur. Ancak sonlu elemanlar yönteminde şekil fonksiyonları çözüm sürecinde kullanılacak olan eleman tipine bağlı olarak çözümden önce tanımlanmış ve basit polinomlar ile ifade edilebilir durumdadır.

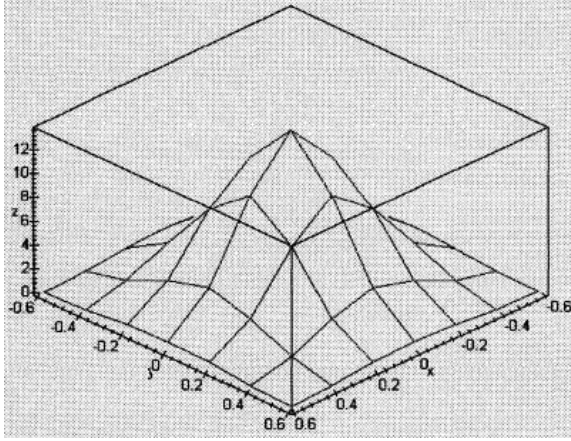
Ağsız yöntemlerde şekil fonksiyonları için gerçekleştirilen kompleks ve kapalı formda ifade edilmesi zor yapılar sayısal integrasyon aşamasında da yüksek mertebeden bir integrasyon işlemini zorunlu kılmaktadır. Ancak sonlu elemanlar yönteminde düşük dereceden integrasyonun tanımlanması çözüm süresi anlamında avantaj sağlamaktadır.

Şekil fonksiyonları açısından sonlu elemanlar yöntemi ve ağsız yöntemler arasındaki önemli farklardan bir tanesi de literatürde “kronecker delta” özelliği olarak bilinen şekil fonksiyonlarının tanımlı oldukları düğümde ‘1’ değerine diğer düğümde ise ‘0’ değerine sahip oldukları özel tanımlama biçimidir. Bu özelliğin şekil fonksiyonlarında bulunması çözüm sürecinde esas sınır koşullarının ilgili düğümde doğrudan uygulanması avantajını

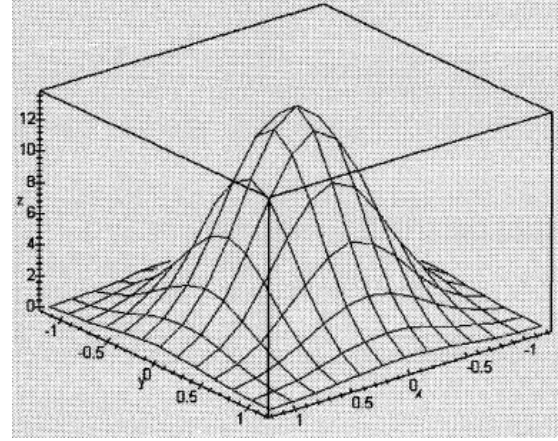
sağlamaktadır. Ağsız yöntemler için tanımlanan şekil fonksiyonları doğrudan bu özelliğe sahip olmadığından esas sınır koşullarının uygulanması aşamasında “Penaltı Çarpanı” ve “Lagrange Çarpanı” gibi yöntemler ile esas sınır koşulları uygulanabilmektedir. Tez çalışması kapsamında elde edilen ağsız yöntemler şekil fonksiyonları kronecker delta özelliğini sağlamamaktadır. Ancak özel dönüşüm yöntemi kullanılarak bu özellik ağsız yöntemler şekil fonksiyonlarına da kazandırılarak esas sınır koşulları sonlu elemanlar yönteminde olduğu haliyle uygulanabilir durumdadır [39].

Özel dönüşüm yöntemi çözüm sürecinde ek işlem adımlarının gerçekleştirilmesi anlamına gelmektedir. Bu durum çözüm sürecinin ağsız yöntemler için ekstradan uzamasına sebep olmaktadır. Ancak çözüm sürecinde sınır koşullarının uygulanması anlamında sonlu elemanlar yönteminin sahip olduğu avantajların ağsız yöntemler bünyesine dahil olması sonlu elemanlar yöntemi için hali hazırda geliştirilmiş çözüm algoritmalarının ağsız yöntemlerde de doğrudan uygulanması aşamasında avantaj sağlamaktadır. Sonlu elemanlar yöntemi ile ağsız yöntemler kıyaslandığında elde edilen veriler için süreklilik kavramı ağsız yöntemlerde tüm çözüm bölgesi için geçerlidir. Ancak sonlu elemanlar yönteminde elde edilen gerilme ve şekil değişimi sonuçları sadece integrasyon noktalarında süreklidir.

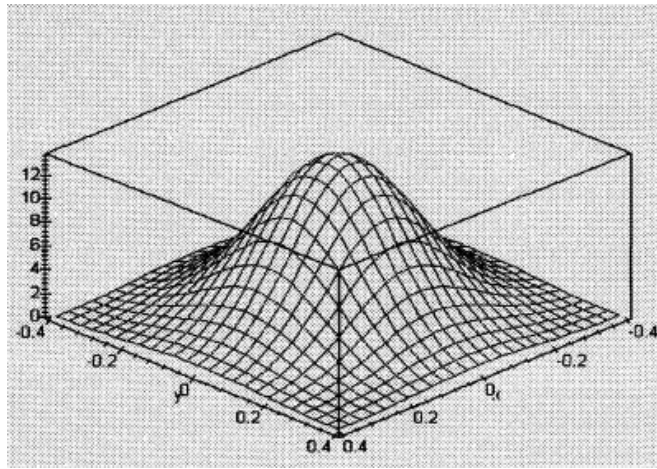
Hareketli ısı cephe ile şekil verme yöntemi ile plaka eğme konusunda sonlu elemanlar yöntemi ile gerçekleştirilmiş olan çok sayıda çalışma mevcuttur [17, 18, 19, 21, 24]. Gerçekleştirilen çalışmalar kapsamında hareketli ısı cephe ile şekil verme probleminin çözüm sürecinin önemli bir aşamasını ısı kaynağı etkisindeki bölge içinde meydana gelen sıcaklık dağılımının uygun olarak belirlenmesi oluşturmaktadır. Hareketli ısı cephe ile şekil verme problemleri için ısı kaynağı etkinlik yarıçapı içinde kalan bölgenin uygun bir biçimde tanımlanması gerekliliği sayısal analiz yöntemleri ile problem çözümü aşamasında uygun sıcaklık dağılımının belirlenmesine yöneliktir. Bu kapsamda literatürde ısı kaynağı türüne yönelik özel modellemelerin geliştirilmesinden ziyade ısı kaynağı etkinlik yarıçapı etki bölgesinde meydana gelen ısı akısı ve sıcaklık dağılımının doğru bir biçimde belirlenmesine yönelik olarak elliptik dağılım, Gauss dağılımı, çift elliptik dağılım... gibi matematik modellemeler ön plana çıkmaktadır [23, 24, 25, 19, 40, 41]. Gauss dağılımına sahip örnek matematiksel model çıktısı şekil 7’de ifade edilmiştir. Tanımlanan matematiksel modeller ile ısı kaynağı için etkinlik yarıçapı tanımı geliştirilmiş ve bu bölge içindeki sıcaklık dağılımları kalorimetre testleri ve termokupl kullanılarak gerçekleştirilen ölçümler ile kontrol edilmiştir [19, 40].



a) 6x6 düğüm dağılımı için ısı akısı



b) 12x12 düğüm dağılımı için ısı akısı



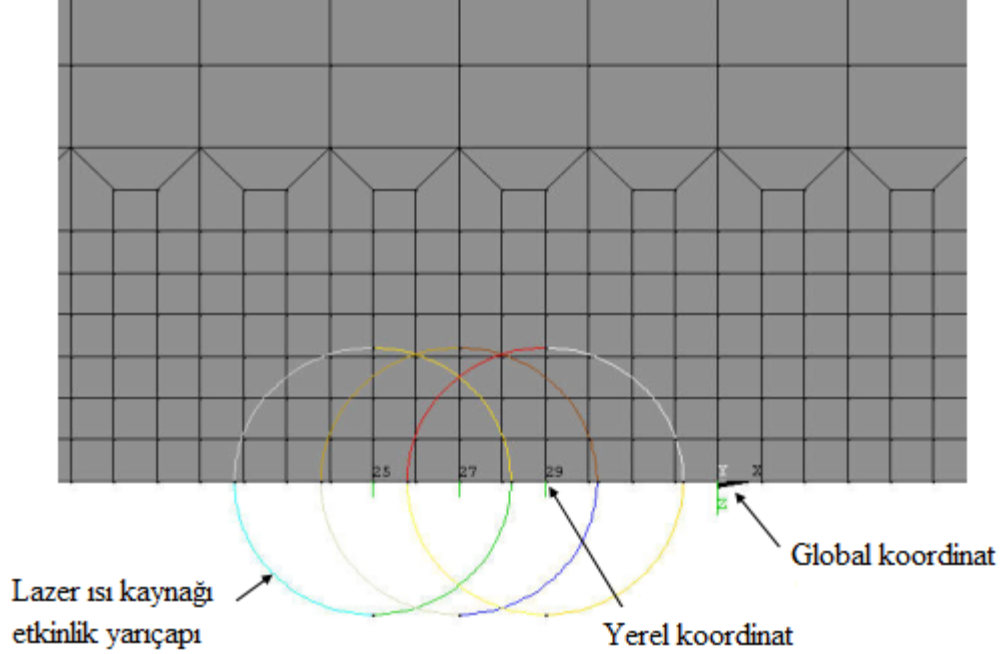
c) Isı akısı analitik dağılımı

Şekil 7. Isı akısının Gauss dağılımı [42]

Ağırsız yöntemler ile hareketli ısı cephe probleminin çözümünde literatürde yer alan ısı kaynağı matematiksel modellerinden Gauss dağılımı referans alınarak çalışmalar gerçekleştirilecektir. Isı kaynağı etkisinde olan bölge referans alınarak etkinlik yarıçapı içerisinde yapı üzerine etkiyecek ısı yüklemeler türünden kullanılan Gauss modelinin geçerliliği kontrol edilecektir.

Sonlu elemanlar yöntemi ile literatürde incelenmiş olan kaynaklardan elde edilen bilgi kapsamında çözülen hareketli ısı cephe problemlerinin çözümünde ısı kaynağı ilerlemesi modellenirken dinamik benzeşim kullanılmıştır. Dinamik benzeşim, problem çözüm sürecinde elemanlar ve düğümler üzerinde yerel koordinat sistemlerinin tanımlanması, tanımlanan lokal koordinat takımı ile birlikte ısıtma için her bir elemanda harcanması gereken ısıtma süresi referans alınarak gerçekleştirilmiştir. Sonlu elemanlar yönteminde kullanılan ısı benzeşim Şekil 8' de ifade edilmiştir.

Hareketli ısı kaynağı plaka merkezinde belirlenen hat boyunca dinamik olarak hareket ettirilmiş ve oluşan sıcaklık dağılımı değerleri literatürde yer alan örnek problem çözümler ile kıyaslanmıştır.



Şekil 8. Sonlu elemanlar yönteminde dinamik ısı benzeşim [17].

### 1.7. Tezin Konusu

Plaka üzerindeki hareketli ısı cephe etkisinde oluşan sıcaklık dağılımını yerel Petrov-Galerkin ağız yöntemi ile incelenmiş olmasına karşın mevcut Literatürde Eleman Bağımsız Galerkin Ağız yöntemi ile hareketli ısı cephe etkisinde oluşan sıcaklık dağılımı ile plaka eğilme deformasyonu incelenmemiştir. Tez kapsamında Eleman Bağımsız Galerkin ağız yöntemi kullanılarak hareketli ısı cephe etkisinde bulunan bir plaka üzerinde sıcaklık etkisiyle meydana gelen lineer elastik eğilme deformasyonu davranışı incelenecektir. İlave olarak, literatürde plaka eğilme deformasyonu davranışı yerel Petrov-Galerkin ağız yöntemi ile Lagrange tipi şekil fonksiyonları kullanılarak incelenmiştir. Tez kapsamında plaka eğilme davranışı hem Lagrange tipi hem de Hermite tipi şekil fonksiyonları kullanılarak Eleman Bağımsız Galerkin ağız yöntemi ile incelenecektir. Tezde, sonlu elemanlar yönteminde kullanılan kabuk eleman modelleme şekil fonksiyonları iki boyutlu düzlemde düzlem kabuk eleman olarak ifade edilerek Eleman

Bağımsız Galerkin Ağsız yönteminin plaka eğilme problemlerine sonlu elemanlar yöntemine alternatif bir çözüm oluşturabileceği ortaya konulmuştur.

Tez kapsamında  $C^0$  sürekliliğe sahip Lagrange veya membran (zar) tipi ve  $C^1$  sürekliliğe sahip Hermite tipi şekil fonksiyonları, Hareketli En Küçük Kareler yöntemi ile dördüncü dereceden spline fonksiyonu kullanılarak elde edilmiştir.

Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yöntemi ile oluşturulan çözüm denklemlerinin sayısal integrasyonu için kullanıcı tarafından istenilen yoğunlukta tanımlanmış nümerik integrasyon bölgesi ve kapsayan bölge (bounding box, çevreleyen kutucuk) yöntemleri kullanılacak ve etkinlikleri araştırılacaktır. Her iki sayısal integrasyon oluşturma yönteminin etkinliği zaman bağımlı ısı transferi problemi referans alınarak incelenmiştir.

Lagrange veya membran (zar) tipi şekil fonksiyonları sayısal çözüm yapan ticari yazılımlarda yaygın bir biçimde kullanıldığından, membran titreşim problemi referans alınarak etkinlikleri incelenecektir. Ayrıca tez kapsamında Birinci Mertebeden Kayma Deformasyonu problemi için Lagrange veya membran (zar) tipi şekil fonksiyonları kullanılmıştır.

Plaka eğilme deformasyonu davranışı Klasik Plaka Teorisi ve Birinci Mertebeden Kayma teorisi kullanılarak incelenecektir. Ayrıca plaka eğilme deformasyonu sayısal modeli büyük deformasyon kabulü etkisinde nonlineer olarak iki boyutlu düzlemde incelenmiştir.

Plaka eğilme deformasyonu gerçekleştirilen nonlineer denklem takımı aynı zamanda düzlem kabuk modeline karşılık gelmektedir. Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yöntemi ile elde edilecek olan deformasyon davranışı düzlem kabuk modeli olarak incelenmiştir.

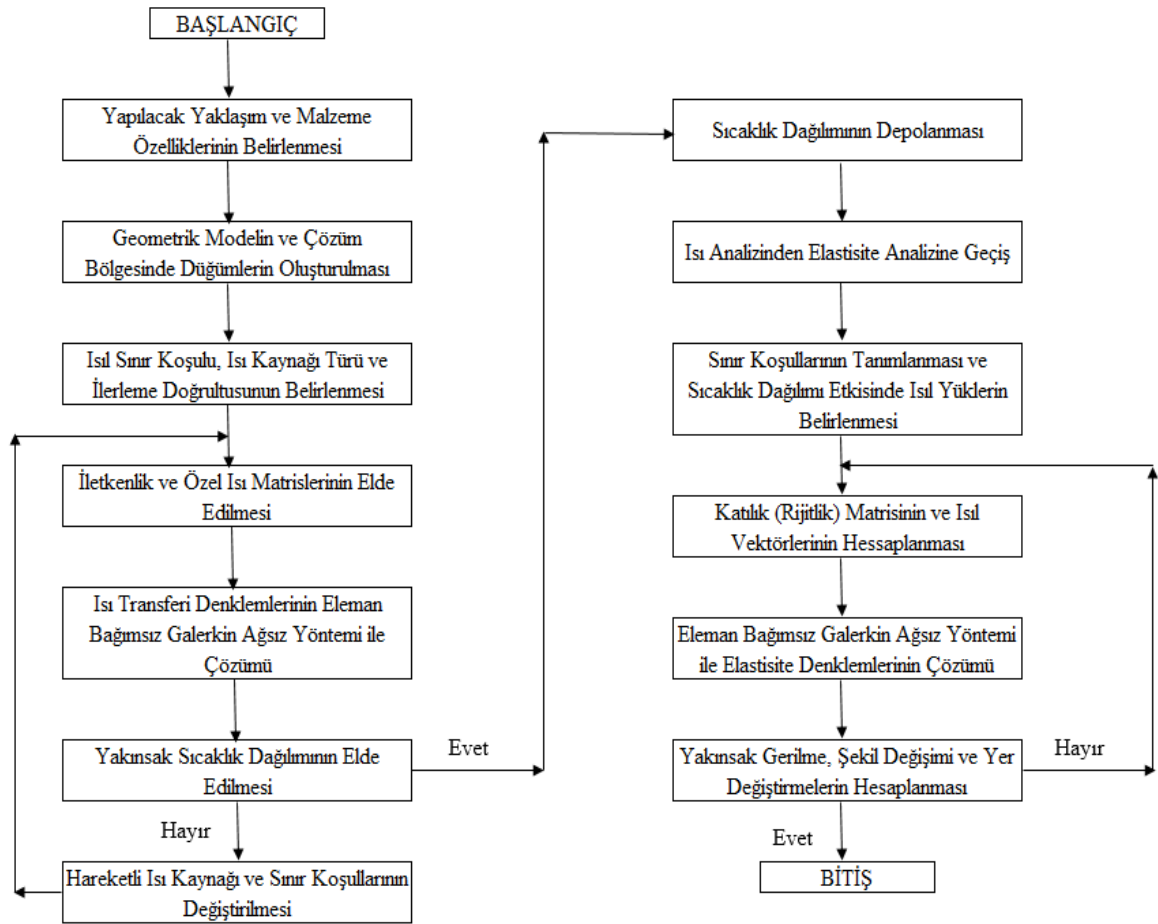
Ağsız yöntemler ile Hareketli Isıl Cephe Probleminin çözümünde literatürde yer alan ısı kaynağı matematiksel modellerinden Gauss dağılımı referans alınarak gerçekleştirilecektir. Isı kaynağı etkisinde olan bölge referans alınarak etkinlik yarıçapı içerisinde yapı üzerine etkiyecek ısı yüklemeler türünden kullanılan Gauss modelinin geçerliliği kontrol edilmiştir.

Plaka üzerinde Hareketli Isıl Cephe etkisinde, lazer ve alevle ısıtma yöntemleri için Gauss dağılımına sahip ısı kaynağı modeli tanımlanacaktır. Hareketli ısı cephe etkisinde zamana bağlı sıcaklık dağılımı elde edilecektir. Plaka kalınlığı boyunca gerçekleşen sıcaklık dağılımı için Legendre fonksiyonları kullanılacaktır. Ayrıca oluşan sıcaklık dağılımı etkisinde plaka üzerinde meydana gelen eğilme deformasyonu ve gerilme dağılımları belirlenmiştir.

Hareketli Isıl Cephe Probleminde ısı kaynağı hareketi tamamen dinamik olarak modellenecek ve incelenecektir. Hareketli ısı kaynağı plaka merkezinde belirlenen hat boyunca dinamik olarak hareket ettirilerek oluşan sıcaklık dağılımı değerleri literatürde yer alan örnek problem çözümleri ile kıyaslanmıştır.

Plaka üzerinde tanımlanan sinüzoidal ve üniform sıcaklık dağılımları etkisinde plaka üzerinde meydana gelecek olan eğilme deformasyonu davranışı analitik çözümü bilinen plaka eğilme problemi için çözdürülecektir. Elde edilen eğilme deformasyonu ve gerilme dağılımı Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yöntemi ile elde edilenlerle karşılaştırılmıştır.

Tezde hareketli ısı cephe ile plaka eğilme işleminin modellenmesinde gerçekleştirilecek olan işlem adımları Şekil 9'da özetlenmiştir.



Şekil 9. Problemin sayısal modeli için takip edilecek işlem adımları [43-46]

## 2. YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR

Tez kapsamında gerçekleştirilen çalışmalarda Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yöntemi kullanılmıştır. Ağsız yöntemlerde şekil fonksiyonları ve şekil fonksiyonlarının elde edilmesi için uygulanacak olan yaklaşım çözüm sürecinde belirlenmektedir. Tez kapsamında ağsız yöntemler çözüm sürecinde genel olarak uygulanan yaklaşım aşağıda özetlenmiştir.

- Çözüm bölgesinin tanımlanan düğümler ile sayısal olarak modellenmesi aşaması
- Çözüm sürecinde kullanılacak olan şekil fonksiyonlarına yapılacak olan yaklaşım mertebesinin belirlenmesi
- Çözülecek probleme ve yapılacak olan yaklaşıma uygun şekil fonksiyonlarının elde edilmesi
- Çözülecek olan fiziksel problem için uygun matematik modelin oluşturulması
- Problemin çözümünde uygulanacak olan çözüm yönteminin belirlenmesi
- Sınır koşullarının uygulanması
- Denklem sisteminin çözülerek uygun çıktıların elde edilmesi

Ağsız yöntemler çözüm sürecinde sonlu elemanlar yönteminden farklı olarak çözüm sürecinde farklılık gösteren iki özellikten birincisi ağsız yöntemler şekil fonksiyonları çözüm sürecinde elde edilmesi, ikincisi ise ağsız yöntemler şekil fonksiyonlarının kronecker delta özelliğini sağlamıyor olmasıdır. Bu durum çözüm sürecinde sınır koşullarının uygulanmasında ağsız yöntemler için Lagrange Çarpanları Yöntemi, Birimin Parçalanması Yöntemi... vb yöntemlerin geliştirilmesine sebep olmuştur. Ancak gerçekleştirilen tez kapsamında ağsız yöntemler şekil fonksiyonları kronecker delta özelliğini sağlayacak şekilde dönüştürülmüş ve sınır koşulları sonlu elemanlar yöntemi ile aynı şekilde uygulanmıştır [39].

### 2.1. Ağsız Yöntemlerde Şekil Fonksiyonlarının Elde Edilmesi

Tez kapsamında ağsız yöntemler için hareketli en küçük kareler yöntemi kullanılarak şekil fonksiyonları  $C^0$  ve  $C^1$  sürekliliği sağlayacak şekilde elde edilmiştir. Ağsız



yöntemlerde şekil fonksiyonlarının elde edilmesinde kullanılan farklı yöntemler mevcuttur [47, 48]. Bu yöntemler;

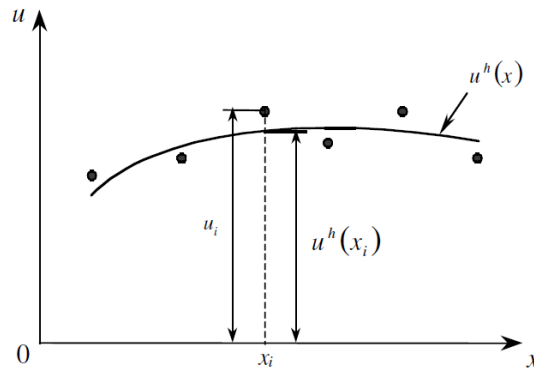
- Çekirdek Yöntemi
- Birimlerin Parçalanması Yöntemi
- Hareketli En Küçük Kareler Yöntemi

dir. Hareketli en küçük kareler yöntemi birimlerin parçalanması ve yeniden üretilen çekirdek parçacığı gibi yöntemler kullanılan ağırlık fonksiyonları açısından benzerlik göstermektedir. Yeniden üretilen çekirdek parçacığı yöntemi için ağırlık fonksiyonları temel çekirdek fonksiyon olarak davranmaktadır. Birimlerin parçalanması yönteminde ise ağırlık fonksiyonu hareketli en küçük kareler yönteminde olduğu gibi şekil fonksiyonu için kullanılan temel yaklaşımı ağırlıklandırmak için kullanılmaktadır.

Tez kapsamında şekil fonksiyonlarının elde edilmesinde Hareketli en küçük kareler yöntemi kullanılacaktır. Hareketli en küçük kareler yönteminde şekil fonksiyonlarına yapılacak olan temel yaklaşım ve istenilen sürekliliğin şekil fonksiyonlarına sağlatılması kontrollü nispetten rahat olduğundan diğer yöntemlere kıyasla avantaj sağlamaktadır.

### 2.1.1. Hareketli En Küçük Kareler Yöntemi

Hareketli en küçük kareler yöntemi matematikçiler tarafından eğri uyumlama ve yüzey nokta bulutunda yüzey oluşturma gibi amaçlarla kullanılmaktadır. Hareketli en küçük kareler yöntemi sonlu seriler ile fonksiyon tanımlanması olarak da ifade edilebilir [48].

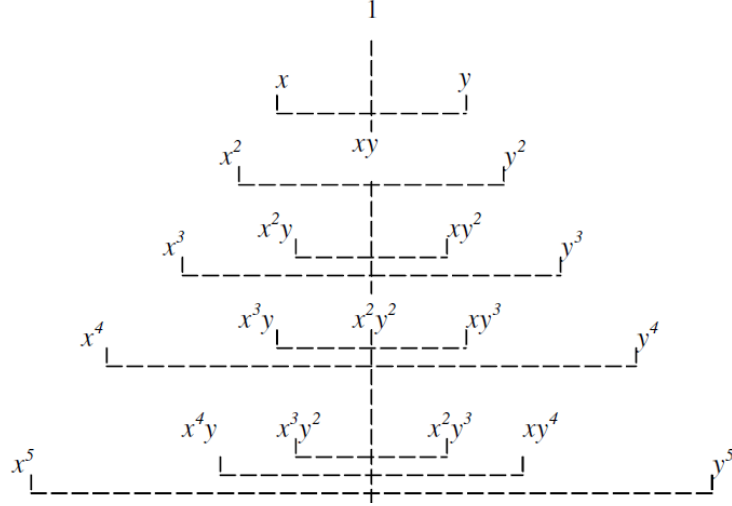


Şekil 10. Hareketli en küçük kareler yöntemi ve bölge içindeki yaklaşım [4, 37, 49].

Hareketli en küçük kareler yöntemi ile ağırsız yöntemler için oluşturulan şekil fonksiyonları bölge içinde sürekli ve yumuşak bir dağılım sergilemektedir. Hareketli en küçük kareler yöntemindeki yaklaşım denklem (1)' de ifade edilmiştir.

$$u^h(x) = \sum_i^m p_i(x)a_i(x) \quad (1)$$

Burada  $m$  yaklaşım için kullanılacak olan vektörde fonksiyon sayısını,  $p_i(x)$  yapılacak olan yaklaşım için oluşturulan vektörü,  $a_i(x)$  ise hareketli değişkeni ifade etmektedirler. Yaklaşım vektörü ve yaklaşım mertebesi şekil 11' de Pascal üçgeni ile ifade edilmiştir.



Şekil 11. Yaklaşım vektörü ve mertebesinin matematiksel ifadesi [4]

Hareketli en küçük kareler yönteminde şekil fonksiyonlarının elde ediliş biçimi denklem (2) ve denklem (3)' te ifade edilmiştir.

$$J = \sum \lambda(x)[u^h(x) - u(x_i)]^2 \quad (2)$$

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0 \equiv 2\lambda(x)[p^T(x)a - u]p(x) \quad (3)$$

Denklem (2) ve (3)' te kullanılan  $\lambda$  terimi, denklemi ağırlıklandırmak için kullanılan ağırlık fonksiyonudur. Minimizasyon işlemi sonrasında elde edilen sonuç denklem (4)' te ifade edilmiştir.

$$A(x)a(x) = B(x)\{u\} \quad (4)$$

Denklem (4)' te yer alan  $A$  matrisi ağırlıklandırılmış moment matrisidir.  $B$  matrisi ise Vandermonde matrisidir.

$$A(x) = P^T(x)\lambda(x)P(x) \quad (5)$$

$$B(x) = P^T(x)\lambda(x) \quad (6)$$

Hareketli en küçük kareler yönteminde yapılacak olan yaklaşımın mertebesi için iki boyutlu düzlemde seçilebilecek fonksiyonlar ve yaklaşım mertebeleri denklem (7)' de ifade edilmiştir.

$$P(x, y) = [1 \ x \ y]$$

$$P(x, y) = [1 \ x \ y \ xy \ x^2 \ y^2] \quad (7)$$

Minimizasyon işlemi sonucunda elde edilen katsayılar temel yaklaşımda yerine yazıldığında hareketli en küçük kareler yöntemi ile şekil fonksiyonları tanımlanmış olmaktadır. Elde edilen şekil fonksiyonları denklem (8)' da ifade edilmiştir.

$$u^h(x) = \sum_i^m \phi_i u_i = P^T(x)A^{-1}(x)B(x)u_i \quad (8)$$

Denklem (8)' de ifade edilen yaklaşımda şekil fonksiyonları sadece doğrusal hareketi temsil eden serbestlik derecesine sahiptir ve Lagrange şekil fonksiyonları olarak bilinmektedir. Lagrange şekil fonksiyonları zar (membran) modeli temsil eden şekil fonksiyonları olarak da ifade edilebilir. Plaka eğilmesi için Lagrange şekil fonksiyonları plaka için tanımlanan serbestlik derecelerinin birbirinden bağımsız olarak interpolasyon işlemi gerçekleştirilmesi aşamasında plakalar için de kullanılabilir.

Şekil fonksiyonları için bir düğümde şekil değişimi ile birlikte dönme serbestlik derecesi de tanımlıysa, şekil fonksiyonları Lagrange yaklaşımı yerine Hermite yaklaşımı ile minimizasyon işlemi kullanılarak elde edilmektedir. Hermite yaklaşımı için minimizasyon işlemi denklem (9)' da ifade edilmiştir.

$$H^h(a) = \sum_{j=1}^n \sum_{|\alpha| \leq h} \lambda_j(x) [D^\alpha p^T(x_j) a - D^\alpha \tilde{u}]^2 \quad (9)$$

Denklem (9)' da yer alan  $\alpha$  türevin mertebesini,  $D$  türev operatörünü ifade etmektedir. Hermite tipi yaklaşım ifade edilirken birinci mertebeden türeve kadar tüm değişkenler minimizasyon problemine dâhil edilerek değişkenler hesaplanmaktadır. Denklem (9) birinci mertebeden türevi içerecek şekilde düzenlendiğinde denklem (10) elde edilmektedir.

$$H^1(a) = \sum_{j=1}^n \sum_{|\alpha| \leq 1} \lambda_j(x) [D^\alpha p^T(x_j) a - D^\alpha \tilde{u}]^2 \quad (10)$$

$$H^1(a) = \sum_{j=1}^n \lambda_w(x) [p^T(x_j) a - \tilde{u}]^2 + \lambda_\theta(x) \left[ \frac{dp^T(x_j)}{dx} a - \theta_j \right]^2 \quad (11)$$

Denklem (11)' de yer alan  $\theta$  terimi dönme serbestlik derecesidir. Denklem (11)' de minimizasyon işlemi, denklemi sıfırlayacak olan  $a$  katsayılarının belirlenmesi için daha önce hareketli en küçük kareler yönteminde denklem (3)' te ifade edildiği haliyle uygulanacaktır [11].

$$\frac{\partial H^1(a)}{\partial a} = 0 \equiv 2\lambda_w(x) [p^T(x) a - \tilde{u}] p(x) + 2\lambda_\theta(x) \left[ \frac{dp^T(x)}{dx} a - \theta_j \right] \frac{dp^T(x)}{dx} \quad (12)$$

Minimizasyon işlemi sonrasında elde edilen moment matrisi ve yaklaşım matrisleri daha önce denklem (4)' te ifade edilmiştir. Aralarındaki farklılık Hermite tipi yaklaşımda moment matrisi ve yaklaşım matrisinde yaklaşım vektörünün birinci türevi de dâhil edilmiştir.

$$A(x) = P^T(x) \lambda_w(x) P(x) + \frac{dp^T(x)}{dx} \lambda_\theta(x) \frac{dp}{dx} \quad (13)$$

$$B(x) = [P^T(x) \lambda_w(x), \frac{dp^T(x)}{dx} \lambda_\theta(x)] \quad (14)$$

Denklem (4), denklem (5), denklem (13) ve denklem (14)' te yer alan ağırlık fonksiyonları aynı fonksiyonlardır. Yaklaşım vektörü olarak kullanılan  $p(x)$  vektörü ağırsız yöntemler modellemesinde kullanılan düğümler için koordinat vektörü olarak

tanımlanmaktadır. Bu değişkenlerin matris ve vektör formları denklem (15)' te ifade edilmiştir.

$$\lambda_x(x) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$p(x, y) = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2y \ xy^2 \ y^3 \ \dots]$$

$$\frac{dp(x)}{dx} = [0 \ 1 \ 0 \ 2x \ y \ 0 \ 3x^2 \ 2xy \ y^2 \ 0 \ \dots] \quad (15)$$

Hareketli en küçük kareler yöntemi ile gerçekleştirilen doğrusal ve hermite tipi yaklaşımlar için şekil fonksiyonlarının elde edilmesi işlem adımları tanımlanmıştır. Her iki yaklaşım tipi de kabuk modelleme için kullanılmaktadır. Klasik plaka teorisi ile gerçekleştirilen ağsız yöntemler çözüm sürecinde Hermite tipi yaklaşım kullanılarak elde edilen şekil fonksiyonları kullanılırken, birinci mertebeden kayma teorisi ile plaka modeli oluşturulduğunda doğrusal hareketi temsil eden Lagrange şekil fonksiyonları kullanılmaktadır.

Hermite tipi yaklaşım ile ifade edilen şekil fonksiyonları  $C^1$  sürekliliğine sahiptirler.  $C^1$  sürekliliği çözüm bölgesi içinde tanımlanan bağımsız değişken ile birlikte bağımsız değişkenin birinci mertebeden türevlerinin de sürekli olması anlamına gelmektedir. Çözüm bölgesindeki bağımsız değişken ısı transferi problemi için sıcaklık, plaka eğilme problemleri için ise eğilme deformasyonudur. Hermite tipi yaklaşım ile plaka eğilme problemlerinde eğilme deformasyonu ile birlikte dönme serbestlik dereceleri de bağımsız değişken olarak tanımlanmaktadır.  $C^0$  süreklilik ise şekil fonksiyonlarında çözüm bölgesinde sadece bağımsız değişkenin sürekliliğini ifade etmektedir.  $C^0$  sürekliliğe sahip şekil fonksiyonları literatürde Lagrange tipi fonksiyonlar veya zar (membran ) tipi fonksiyonlar olarak bilinmektedir [50, 51].

Sayısal analiz sürecinde gerçekleştirilen modelleme kapsamında plaka eğilme probleminin çözümünde hem  $C^1$  sürekliliğe sahip şekil fonksiyonları hem de  $C^0$  sürekliliğe sahip şekil fonksiyonları etkin bir biçimde kullanılmaktadır. Isı transferi problemlerinin çözümünde genelde  $C^0$  sürekliliğe sahip şekil fonksiyonları kullanılmaktadır. Bu durum ısı transferi probleminin modellenmesi sürecinde bağımsız değişkenin gradyanı ile ilgili özel bir modelleme ihtiyacının olmamasından kaynaklanmaktadır.

$C^0$  (Lagrange şekil fonksiyonları) sürekliliğe sahip olan şekil fonksiyonları incelendiğinde sadece çözüm bölgesindeki bağımsız değişken olan yer değiştirme için süreklilik gerektirdiğinden çözüm bölgesi içinde yapılan yaklaşım lineer olabilir. Lineer yaklaşımın geçerli olması durumunda şekil fonksiyonları etkinlik yarıçapı en az iki adet şekil fonksiyonunu yayılım bölgesinde kapsayacak şekilde tanımlanmalıdır.

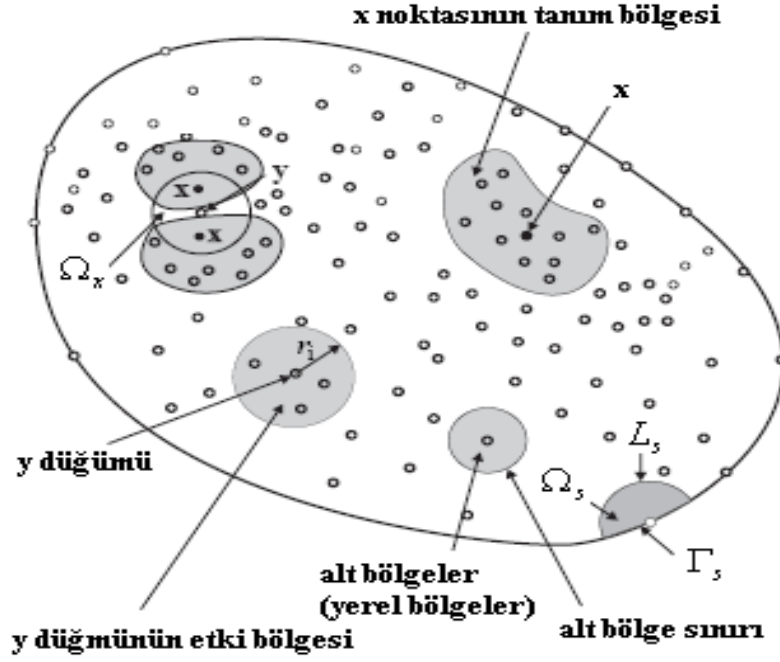
$C^1$  (Hermite şekil fonksiyonları) sürekliliğe sahip olan şekil fonksiyonları dikkate alındığında çözüm bölgesinde yer alan bağımsız değişkenler yer değiştirme ve ilgili düğüm için dönme serbestlik derecesi olduğundan yaklaşım olarak en az ikinci mertebeden bir fonksiyonun seçilmesi gerekli olan sürekliliğin sağlanması için yeterli olmaktadır. İkinci mertebeden fonksiyonun seçilmesi durumunda şekil fonksiyonları etkinlik yarıçapı en az üç adet şekil fonksiyonunu yayılım bölgesinde kapsayacak şekilde tanımlanmalıdır.

Ağırsız yöntemler şekil fonksiyonları yapı itibarı ile sonlu elemanlar yönteminde kullanılan şekil fonksiyonları ile kıyaslandığında oldukça karmaşıktır. Ayrıca ağırlık fonksiyonu mertebesi ve çözüme yapılacak temel yaklaşımdan (lineer, ikinci mertebeden... vb.) doğrudan etkilendiğinden, şekil fonksiyonları meritebe olarak da oldukça yüksektir.

### 2.1.2. Ağırlık Fonksiyonlarının Seçimi

Ağırsız yöntemler için elde edilen şekil fonksiyonları için en önemli etkenlerden biri şekil fonksiyonu üretilirken taban fonksiyonu olarak kullanılan ağırlık fonksiyonlarının seçimi sürecidir. Şekil fonksiyonu ağırsız yöntemler açısından değerlendirildiğinde genel olarak ağırlık fonksiyonu için kullanılan etkinlik yarıçapı değerine bağlı olarak çözüm bölgesi içinde yayılım gösterirken, fonksiyon meritebe olarak da ağırlık fonksiyonundan doğrudan etkilenmektedir. Bu noktada şekil fonksiyonlarının elde edilebilmesi için ağırlık fonksiyonlarının belirlenmesi gerekmektedir. Ağırlık fonksiyonlarının çözüme olan etkilerinin daha etkili bir biçimde anlaşılabilmesi açısından Şekil 12'nin incelenmesi gerekmektedir.

Şekil 12'de düğümlerle modellenmiş olan bir çözüm bölgesi görülmektedir. Bu düğümler arasında önceden tanımlanmış herhangi bir ilişki söz konusu değildir. Burada tanımlanmış olan  $x$  ve  $y$  noktası ele alındığında dikkat edilmesi gereken nokta tanım bölgesi kısmıdır. Tanım bölgesi içinde  $x$  ve  $y$  ifadeleri bu bölgenin içinde bağımsız değişken olarak tanımlanmış olması durumunda iki boyutlu problemler için çözüm bölgesi olmaktadır.

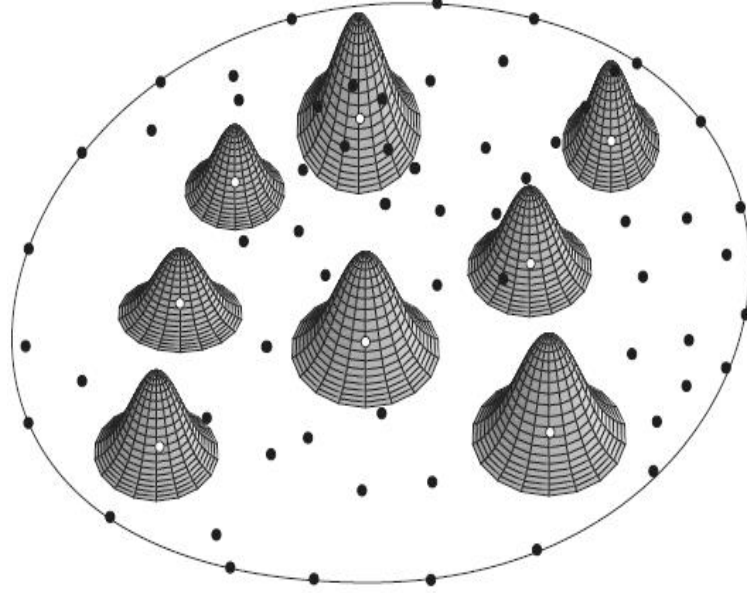


Şekil 12. Ağırılık fonksiyonlarının yapıları ve etkinlik yarıçapları [15].

Ancak  $x$  ve  $y$  ifadeleri bağımsız değişken olmayıp sadece o noktayı belirtmek amacıyla kullanılmış olması durumunda tanım bölgesi  $x$  ve  $y$  noktalarının etki alanını belirtmiş olacaktır. Bu nokta civarındaki her bir düğüm  $x$  ve  $y$  noktaları üzerinde bir etkiye sahip olacaktır. Bu durumda çözüm bölgesi olarak Şekil 12’de gösterilen dairesel alanın tamamı seçilmiş demektir. Etki bölgesinin homojen bir biçimde gösterildiği  $y$  düğümü ele alındığında burada  $r_i$  ifadesi etkinlik yarıçapını belirtmektedir. Ağırılık fonksiyonlarının etkinlik yarıçapının daha iyi bir şekilde ele alınabilmesi açısından Şekil 13 açıklayıcı bir yapıdadır. Tanımlanan her bir ağırılık fonksiyonu gerçekleştirilen yaklaşım dikkate alınarak etkinlik yarıçapı içerisinde belirli sayıda düğümü ihtiva etmek zorundadır. Bu durum şekil fonksiyonlarının tanımlı olması için sağlanması gereken bir koşuldur. Çözüm bölgesi içinde tanımlanan etkinlik yarıçapı ve dolayısıyla şekil fonksiyonunun sahip olduğu yayılım doğrudan denklem (8)’ de yer alan  $A$  moment matrisinin tanımlı olması ile ilgilidir. Çözüm sürecinde  $A$  moment matrisi tanımsız olması durumunda şekil fonksiyonu elde edilememektedir.  $A$  moment matrisinin tanımlı olması için şekil fonksiyonlarının sahip olması istenen mertebeye eşit sayıda düğümün şekil fonksiyonu etkinlik yarıçapı ile tanımlanan bölge içinde yer alması gerekmektedir.

Şekil 13’ te farklı düğümler ve etkinlik yarıçapları için ağırılık fonksiyonlarının yapısı gösterilmiştir. Burada etkinlik yarıçaplarının çözüm bölgesindeki durumu önem

kazanmaktadır. Etkinlik yarıçapının arttırılması durumunda fonksiyonlar daha geniş bir alanı kapsamakta ve kapsadıkları her bir düğüm değeri için bir ağırlık oluşturmaktadır. Bu durum çözümün hassasiyeti açısından olumlu sonuçlar doğurmaktadır.



Şekil 13. Ağırlık fonksiyonları ve etkinlik yarıçapları [52]

Ancak etkinlik yarıçaplarının çok büyük seçilmesi durumunda ağırlıklandırılmak istenen yerel artık ifadesi gereğinden daha büyük bir ağırlık değeri ile çarpılmış olacaktır. Bu durum çözümün arzu edilen hassasiyetten uzaklaşmasına sebep olmaktadır. Şekil 14’te bir boyutlu problemler için ağırlık fonksiyonu ve etkinlik yarıçapı tanımı verilmiştir.

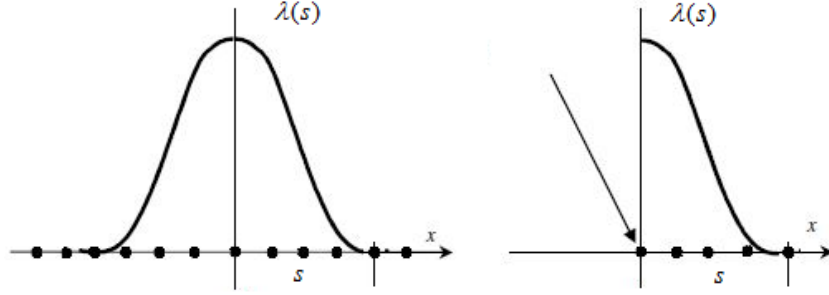
Şekil 14’te de belirtildiği gibi ağırlık fonksiyonu  $s$  parametresine bağlı olarak ifade edilmektedir. Burada  $s$  parametresi;

$$s = \frac{|x - x_i|}{r} \quad (16)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Denklem (16)’ da  $x$  çözüm bölgesi bağımsız değişkeni  $x_i$  ifadesi ise seçilmiş olan düğümlerin çözüm bölgesindeki koordinatlarını belirtmektedir. Paydada yer alan  $r$  ifadesi ise etkinlik yarıçapını temsil etmektedir. Etkinlik yarıçapı  $r$ ’nin değeri tamamen analizi yapan kişi tarafından belirlenmektedir.



Ağırlık fonksiyonları  $s$  parametresine bağlı olarak spline fonksiyonları olarak seçilmiştir. Yapılan tez çalışmasında ağırlık fonksiyonu olarak dördüncü dereceden spline fonksiyonu kullanılmıştır.



Şekil 14. Bir boyutlu problemler için ağırlık fonksiyonu ve etkinlik yarıçapı [4, 47].

Spline fonksiyonları;

Beşinci mertebeden spline fonksiyonu:

$$\lambda(s) = 1 - 10s^2 + 20s^3 - 15s^4 - 4s^5 \quad \text{eğer } s \leq 1$$

$$\lambda(s) = 0 \quad s > 1$$

Dördüncü dereceden spline fonksiyonu:

$$\lambda(s) = 1 - 6s^2 + 8s^3 - 3s^4 \quad \text{eğer } s \leq 1$$

$$\lambda(s) = 0 \quad s > 1$$

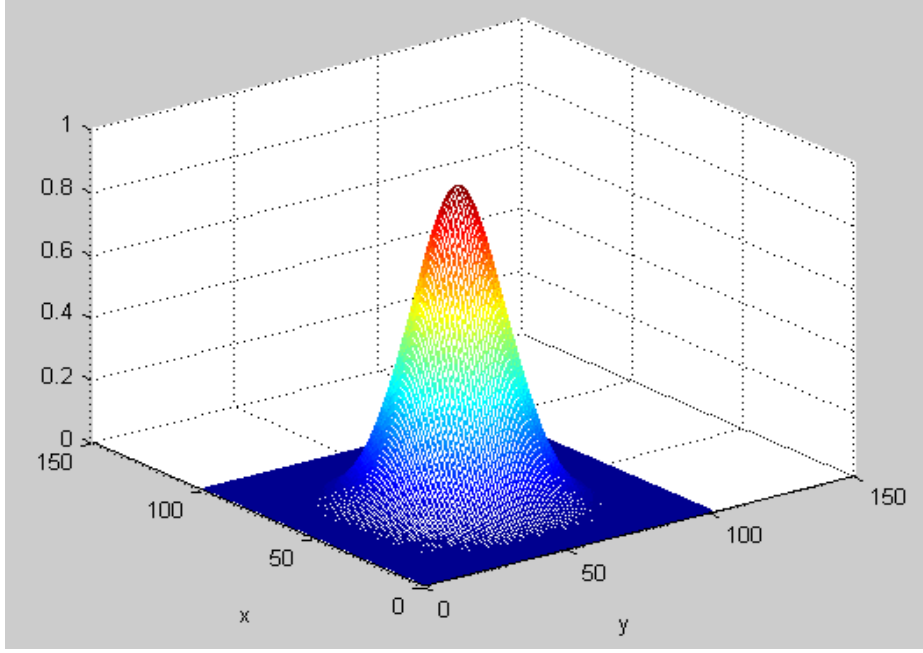
Üçüncü dereceden spline fonksiyonu:

$$\lambda(s) = \frac{2}{3} - 4s^2 + 4s^3 \quad \text{eğer } s \leq \frac{1}{2}$$

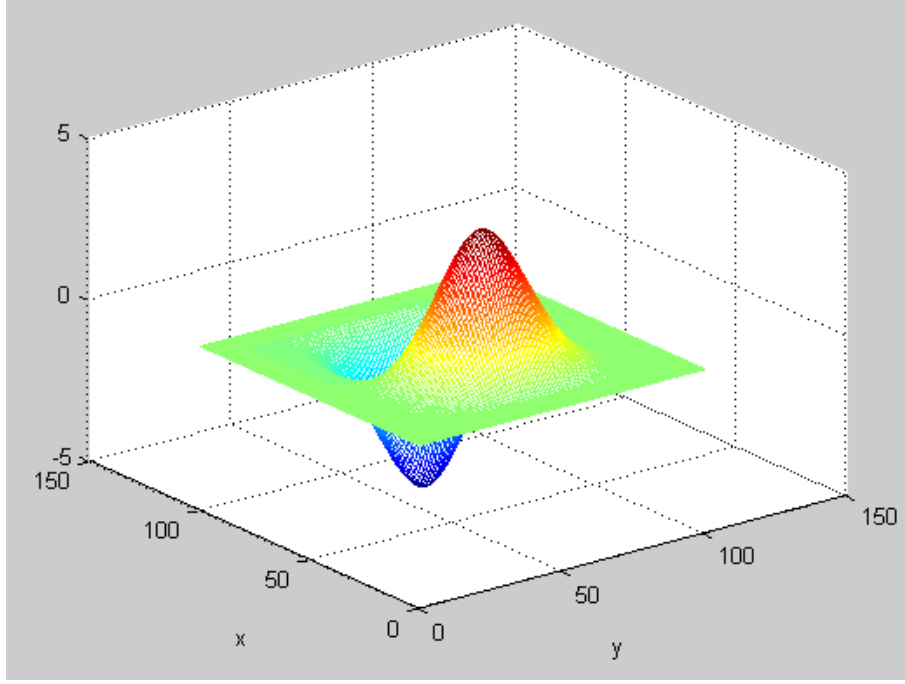
$$\lambda(s) = 4 - 4s + 4s^2 - \frac{4}{3}s^3 \quad \frac{1}{2} < s \leq 1$$

$$\lambda(s) = 0 \quad s > 1 \quad (17)$$

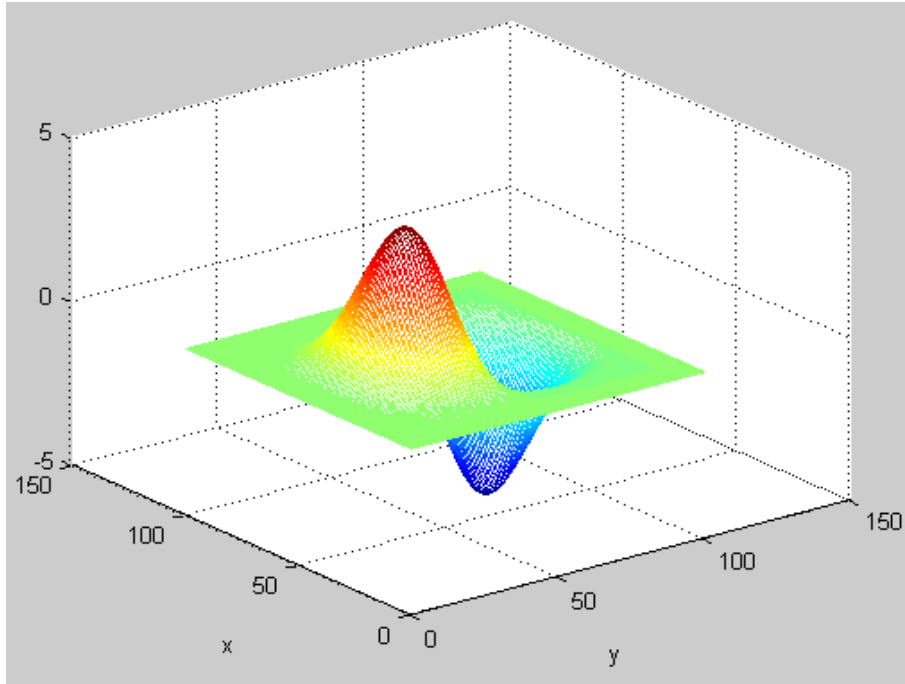
Şekil 15 ile Şekil 19 arasında Matlab yazılımı kullanılarak iki boyutlu düzlemde aynı düğüm için dördüncü mertebeden spline fonksiyonu kullanılarak elde edilen ağırlık fonksiyonu, ağırlık fonksiyonu birinci ve ikinci mertebeden türevleri gösterilmiştir.



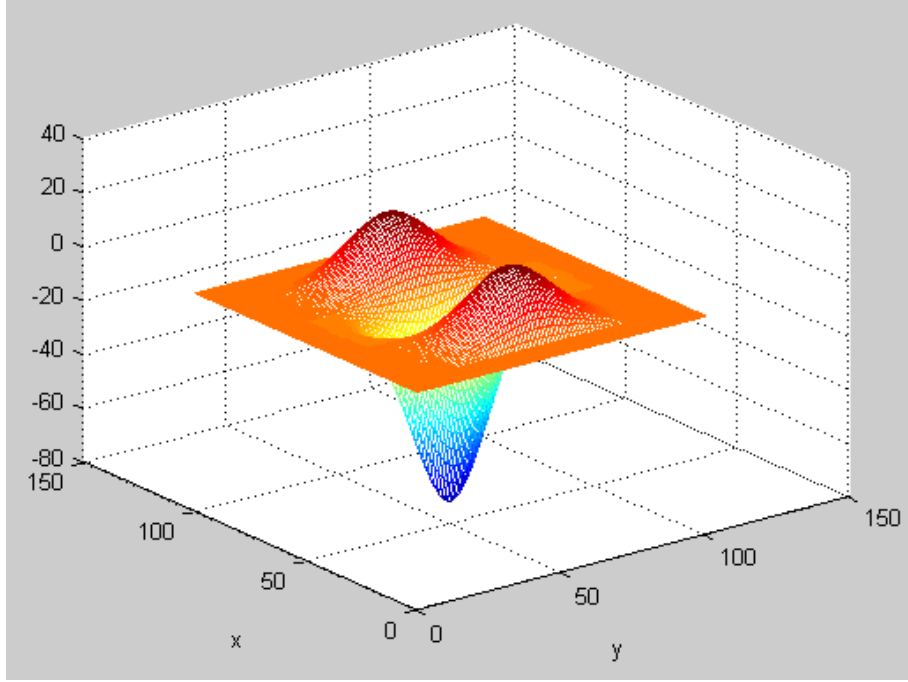
Şekil 15. İki boyutlu düzlemde dördüncü dereceden spline fonksiyonu kullanılarak elde edilen  $\lambda$  ağırlık fonksiyonu



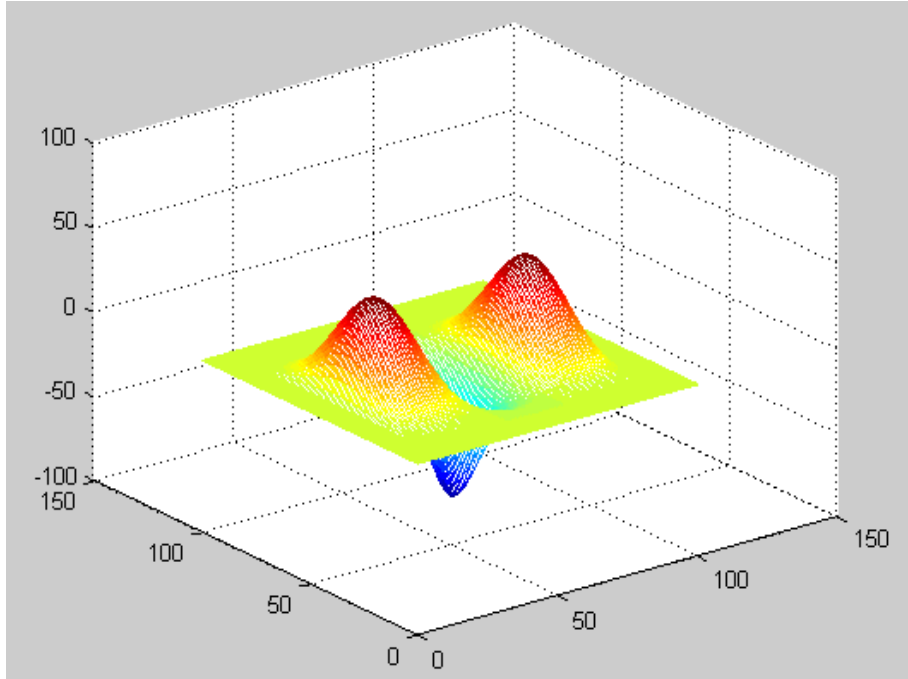
Şekil 16. İki boyutlu düzlemde dördüncü dereceden spline fonksiyonu kullanılarak elde edilen  $\frac{d\lambda}{dx}$  ağırlık fonksiyonunun x' e göre türevi



Şekil 17. İki boyutlu düzlemde dördüncü dereceden spline fonksiyonu kullanılarak elde edilen  $\frac{d\lambda}{dy}$  ağırlık fonksiyonunun y' ye göre türevi

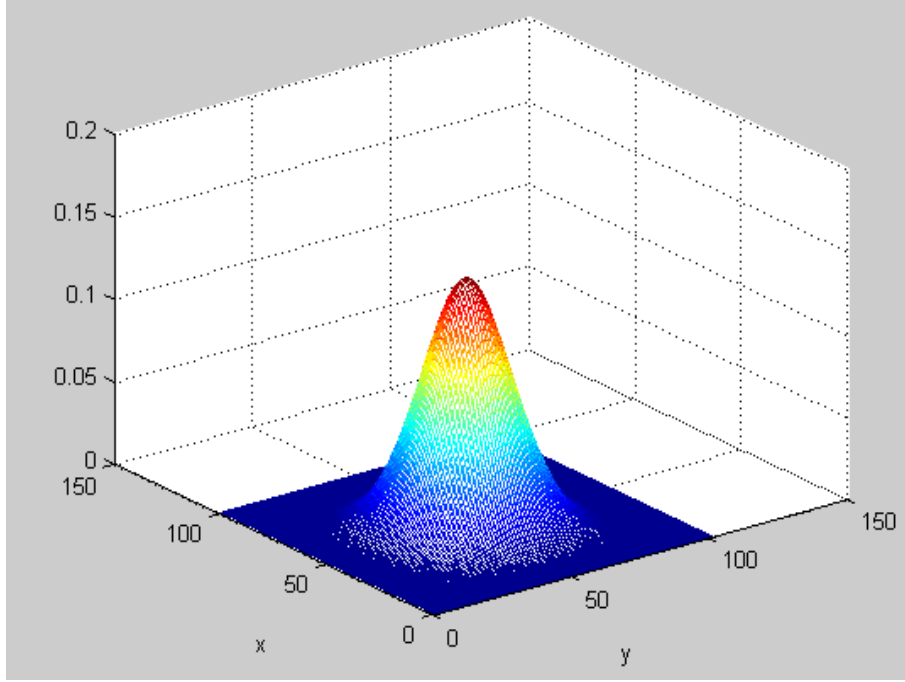


Şekil 18. İki boyutlu düzlemde dördüncü dereceden spline fonksiyonu kullanılarak elde edilen  $\frac{d^2\lambda}{dx^2}$  ağırlık fonksiyonunun x' e göre ikinci türevi

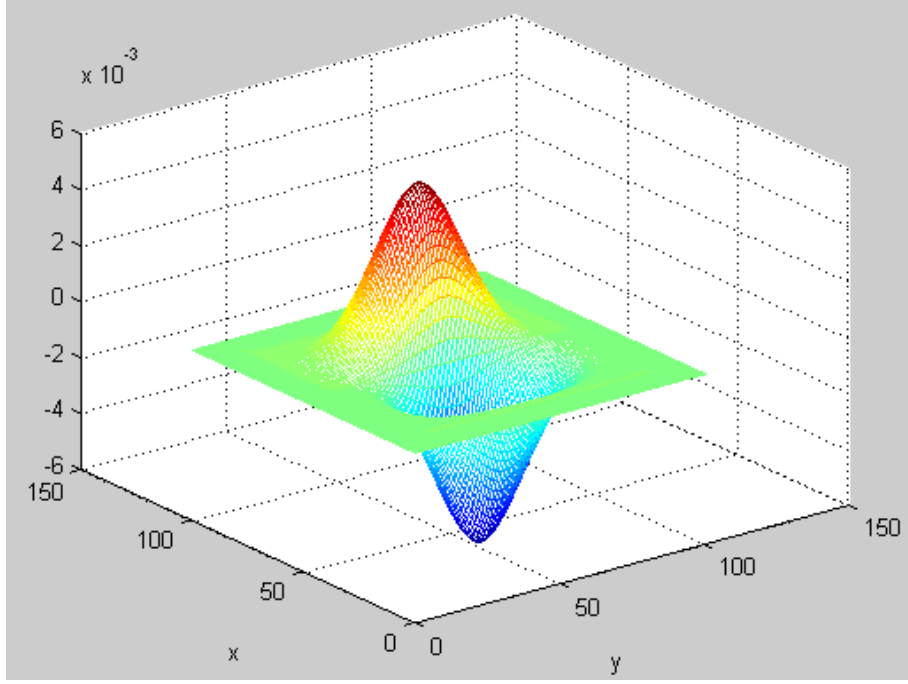


Şekil 19. İki boyutlu düzlemde dördüncü dereceden spline fonksiyonu kullanılarak elde edilen  $\frac{d^2\lambda}{dy^2}$  ağırlık fonksiyonunun y' ye göre ikinci türevi

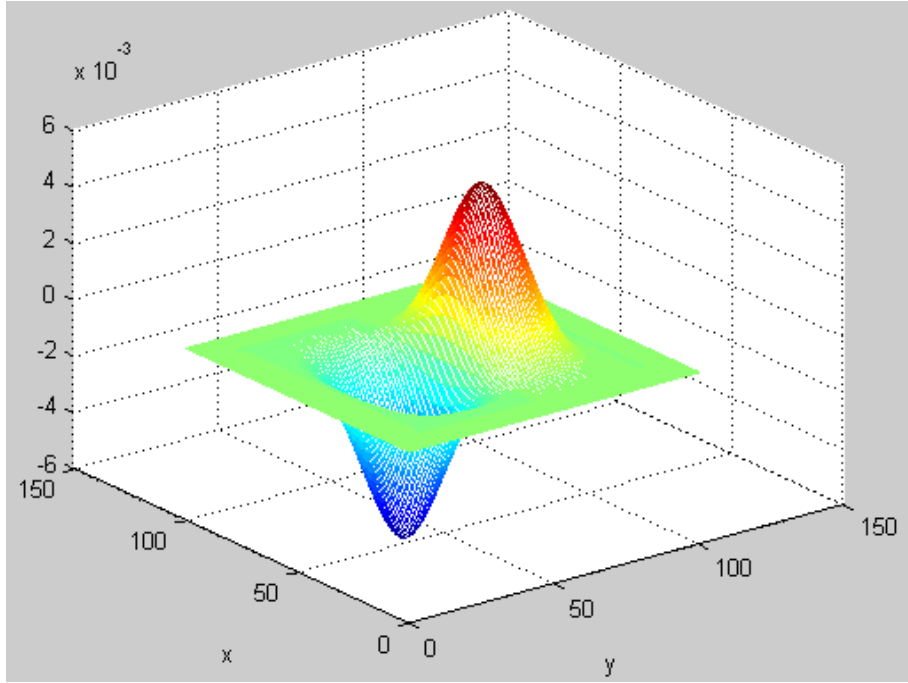
Şekil 20, 21 ve 22’ de Matlab yazılımı kullanılarak iki boyutlu düzlemde aynı düğüm için sırasıyla  $w$  eğilme deformasyonu,  $x$  eksenindeki dönme serbestliği ve  $y$  eksenindeki dönme serbestlik derecesine sahip olan ve Hermite yaklaşımı kullanılarak elde edilen şekil fonksiyonları gösterilmiştir.



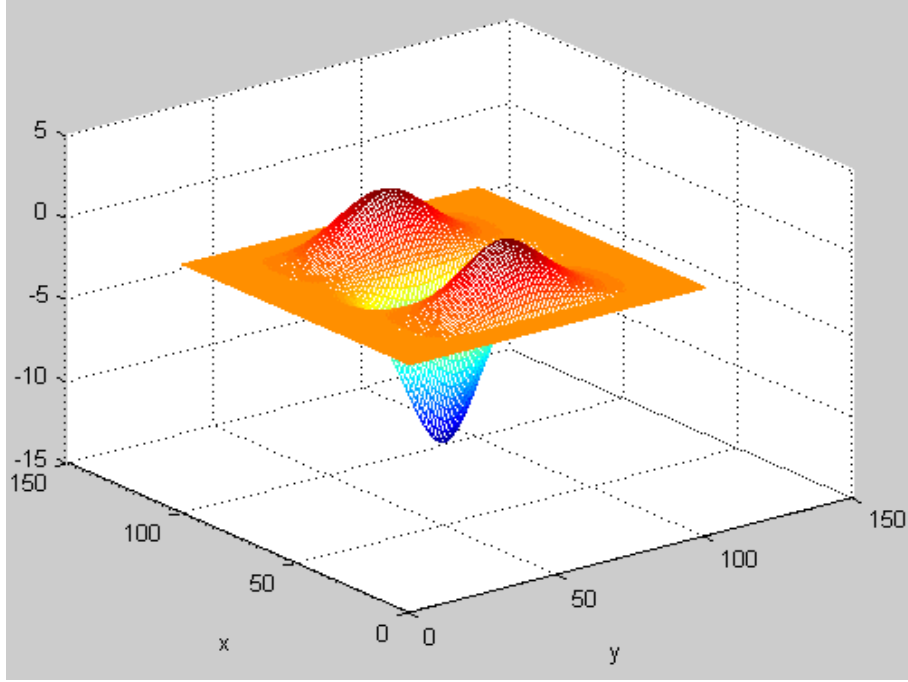
Şekil 20. İki boyutlu düzlemde dördüncü dereceden spline fonksiyonu kullanılarak elde edilen Hermite tipi yer değıştirme ( $w$ ) için şekil fonksiyonu



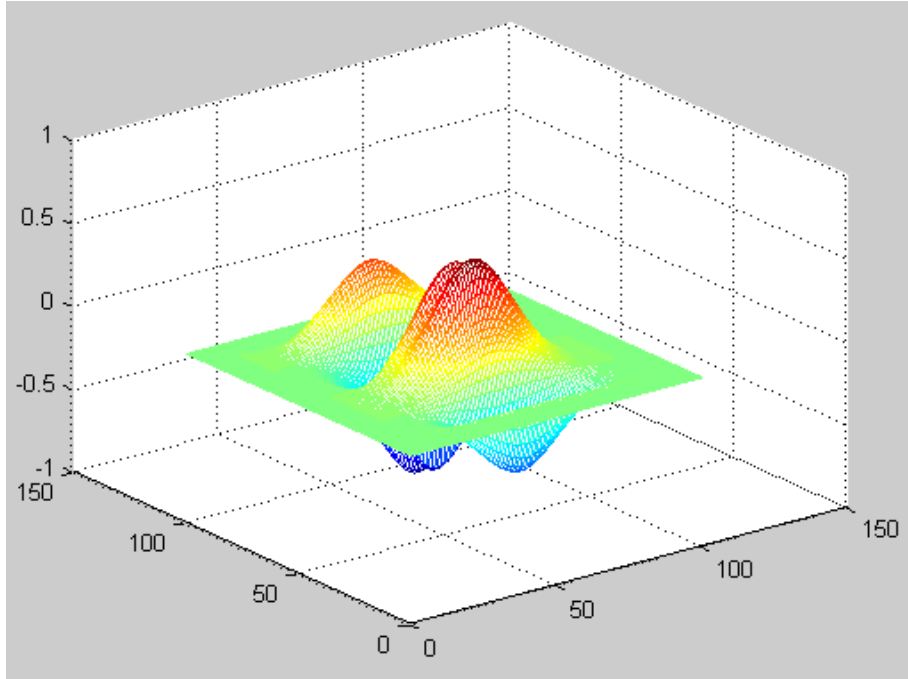
Şekil 21. İki boyutlu düzlemde dördüncü dereceden spline fonksiyonu kullanılarak elde edilen Hermite tipi x eksenine için  $\theta$  dönme serbestliğine ait şekil fonksiyonu



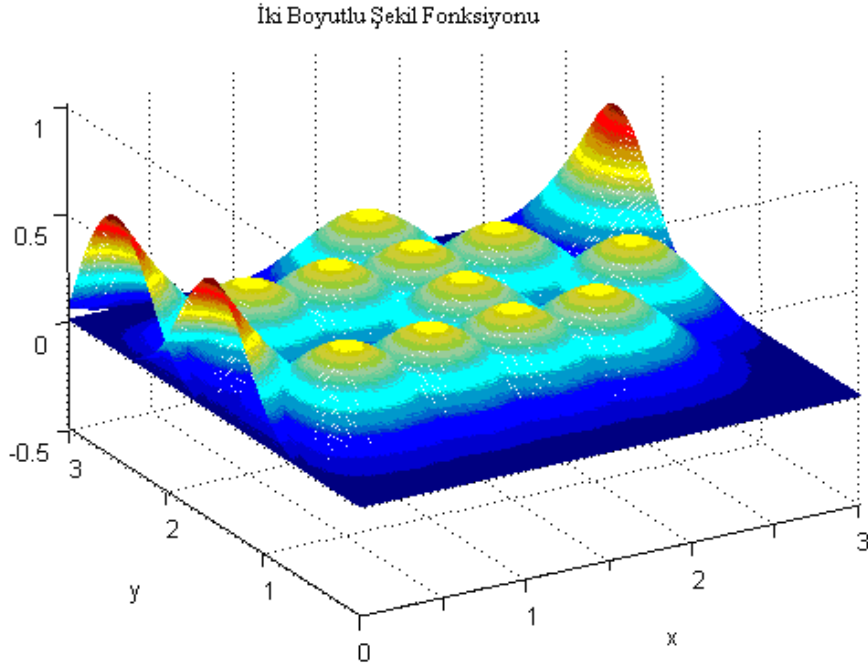
Şekil 22. İki boyutlu düzlemde dördüncü dereceden spline fonksiyonu kullanılarak elde edilen Hermite tipi y eksenine için  $\theta$  dönme serbestliğine ait şekil fonksiyonu



Şekil 23. İki boyutlu düzlemde dördüncü dereceden spline fonksiyonu kullanılarak elde edilen Hermite tipi yer değıştirme ( $w$ ) şekil fonksiyonu ikinci türevi  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} w$



Şekil 24. İki boyutlu düzlemde dördüncü dereceden spline fonksiyonu kullanılarak elde edilen Hermite tipi yer değıştirme ( $w$ ) şekil fonksiyonu için karma türev  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} w$



Şekil 25. Lagrange tipi şekil fonksiyonları

### 2.2.1. Eleman Bağımsız Galerkin Ağsız Yönteminin Formülasyonu

Eleman Bağımsız Galerkin yönteminin formülasyon sürecinin daha kolay bir biçimde algılanabilmesi için bir boyutlu sınır değer problemlerini ifade eden

$$-\frac{d}{dx}\left(\alpha(x)\frac{du(x)}{dx}\right) + \beta(x)u(x) = f(x) \quad (18)$$

denklemini ele alınacaktır [53, 54]. Bu denklemde yer alan  $\alpha, \beta$  katsayıları malzemeye bağlı parametrelerdir. Burada  $\beta$  parametresi sıfır olarak seçilirse (18) denklemini,

$$-\frac{d}{dx}\left(\alpha(x)\frac{du(x)}{dx}\right) = f(x) \quad (19)$$

şeklini alır. Bu yapıdaki bir denklemin çözümü için ağırlıklandırılmış artıklar yönteminin bir parçası olan Galerkin formülasyonu kullanılacaktır [53, 54].

(19) denkleminin çözümünde Galerkin yönteminin uygulanması sonlu elemanlar yöntemi için takip edilen yapıyla oldukça benzerdir. Burada farklı olan şekil



fonksiyonlarının çözüm sürecinde elde edilecek olması ve sınır koşullarının uygulama biçimidir.

Eleman Bağımsız Galerkin yöntemi için takip edilecek olan çözüm prosedürü aşağıda belirtilmiştir.

- Artık denkleminin elde edilmesi:

$$R = -\frac{d}{dx}\left(\alpha(x)\frac{du(x)}{dx}\right) - f(x) \quad (20)$$

- Artık denkleminin ağırlıklandırılarak integre edilmesi:

$$\int wR dx = 0 \quad (21)$$

Burada  $w$  ağırlık fonksiyonudur. (20) artık ifadesinin (21) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$\int w \left[ -\frac{d}{dx}\left(\alpha(x)\frac{du(x)}{dx}\right) - f(x) \right] dx = 0 \quad (22)$$

elde edilir.

- Kısmi integrasyon işleminin uygulanması:

Kısmi integrasyon işleminin amacı (22) denkleminin zayıf formunun elde edilmesidir. Zayıf form ile belirtilen durumda, bir yandan durum değişkeninin türev mertebesini düşürürken öte yandan, (18) denkleminin bir elastisite problemi için elde edildiği dikkate alınır, yer değiştirme için tanımlanması gereken esas sınır koşulları sayısı azaltılarak doğal sınır koşulu sayısı artırılmış olur. Kısmi integrasyon işlemi sonunda uygulanan kısmi integrasyon sayısı kadar doğal sınır koşulu terimi elde edilmektedir. Doğal sınır koşulları sonlu elemanlar yönteminde denklemde doğrudan sayısal değer olarak yerine yazılabildiğinden uygulanması daha kolaydır.

Kısmi integrasyon işleminde sınır koşullarının nasıl oluşturulduğunu görmek için (23) denklemi ile belirtilen yapıdaki bir ifade için kısmi integrasyon işlemi incelenecektir [53, 54].

$$\int \frac{d^{2m}U}{dx^{2m}} \phi_i dx \quad (23)$$

(23) ifadesi 1'den 2m'e kadar arzu edilen miktarda kısmi integrasyona tabi tutulabilmektedir. Bu denklemin m sefer kısmi integrasyona tabi tutulması durumunda

$$\int \frac{d^{2m}U}{dx^{2m}} \phi_i dx = (-1)^m \int \frac{d^m U}{dx^m} \frac{d^m \phi}{dx^m} dx + A \quad (24)$$

elde edilir. (24) denklemindeki A ifadesi U teriminin 2m-1, 2m-2, ..., m 'inci mertebeye kadar olan türevlerini içermektedir. Bu terimler doğal sınır koşullarına karşılık gelmektedir. Kısmi integrasyon işleminden sonra denkleme dikkat edilirse U ifadesinin elde edilebilmesi için tanımlanması gereken esas sınır koşullarının sayısı azaltılmıştır.

Kısmi integrasyon işleminin bir sefer uygulanması durumunda,

$$\int \frac{d}{dx} (fg) dx = \int \frac{df}{dx} g dx + \int \frac{dg}{dx} f dx \quad (25)$$

elde edilen kısmi integrasyon işlemlerinin uygulanabilmesi için  $g = w$  ve  $f = -\alpha(x) \frac{du(x)}{dx}$  olarak seçilmesi durumunda (26) denkleminde bir sefer kısmi integrasyon uygulanarak,

$$\int w \left( -\frac{d}{dx} \left( \alpha(x) \frac{du(x)}{dx} \right) \right) dx - \int w f(x) dx = 0 \quad (26)$$

veya

$$\int \frac{dw}{dx} \left( \alpha(x) \frac{du(x)}{dx} \right) dx + \left[ \left( -\alpha(x) \frac{du(x)}{dx} \right) w \right] - \int w f(x) dx = 0 \quad (27)$$

denklemini elde edilir. (27) denkleminin (18) denkleminin için uygulanan kısmi integrasyon işlemi tamamlanmaktadır. (27) denkleminde yer değiştirme ve ağırlık fonksiyonları ifadeleri kapalı bir biçimde yer almaktadır. Bu ifadelerde w ağırlık fonksiyonu olarak şekil

fonksiyonları kullanılacaktır. Yer değiştirme için yapılacak olan yaklaşım ise daha önce (8) denkleminde belirtilmiş olduğu haliyle dikkate alınacaktır. Bu ifadelerin (27) denkleminde yerlerine yazılmasıyla,

$$\int \frac{d\phi_i(x)}{dx} \alpha(x) \frac{d\phi_j(x)}{dx} u_i dx + \left[ \left( -\alpha(x) \frac{d\phi_i(x)}{dx} u_i \right) \phi_j(x) \right] - \int \phi_i(x) f(x) dx = 0 \quad (28)$$

denklemini elde edilir. (28) denklemini matris formunda;

$$[K]\{u\} = [F] \quad (29)$$

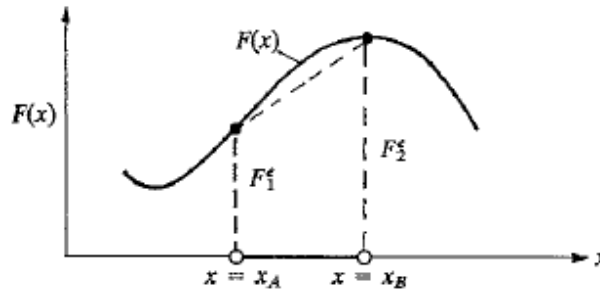
şeklinde yazılabilir.

Bu aşamaya kadar Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yontemi cözüm süreci bir boyutlu problemler için genel aşamaları dahil edecek biçimde özetlenmiştir. Mühendislik problemleri değerlendirilmesi aşamasında fiziksel modelden matematik modele geçiş aşamaları ilgili problemler için detaylandırılacaktır.

### 2.2.2. Sayısal İntegrasyon İşlemi

Sayısal integrasyon işlemi karmaşık yapıdaki denklem sistemlerinin integrasyonunu gercekleştirmek için kullanılmaktadır.

Yapılan tez calışmasında sayısal integrasyon işlemi Gauss integrasyonu kullanılarak gercekleştirilmiştir. Gauss integrasyon işlemi, yontem için belirlenmiş olan noktalar ve bu noktalara özel olarak tanımlanmiş olan ağırlık değerleri kullanılarak gercekleştirilmektedir.

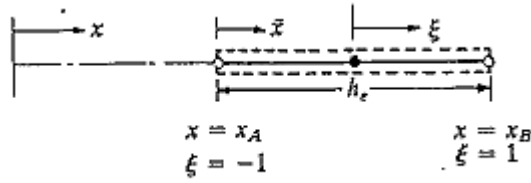


şekil 26. Sayısal integrasyon için bölgenin tanımlanması[3]

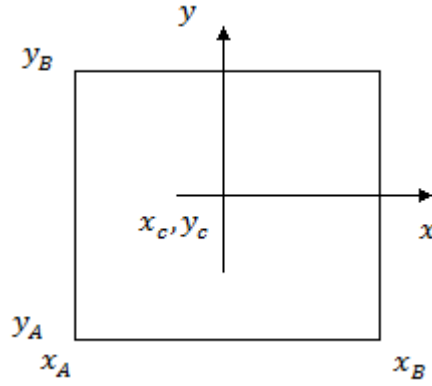
Sayısal integrasyon işlemi matematik formda denklem (30)' da ifade edilmektedir.

$$\int I(\zeta)d\zeta \cong \sum_{l=1}^n W_{nl} I(\zeta_{nl}) \quad (30)$$

Denklem (30)' da ifade edilen sayısal integrasyon işlemlerinin tamamlanabilmesi için integral içindeki tüm terimlerin doğal koordinat sisteminden lokal koordinat sistemine dönüştürülmesi gerekmektedir.



Şekil 27. Sayısal integrasyon işlemi için koordinat dönüşümü [3]



Şekil 28. Sayısal integrasyon işleminde iki boyutlu düzlem için koordinat dönüşümü

Koordinat dönüşümü matematik olarak denklem (31)' de hem  $x$  hem de  $y$  düzlemi için ifade edilmektedir [3, 55].

$$\begin{aligned}
x_c &= \frac{x_A + x_B}{2} \\
y_c &= \frac{y_A + y_B}{2} \\
r_x &= \frac{x_B - x_A}{2} \\
r_y &= \frac{y_B - y_A}{2} \\
x &= x_c + r_x \xi = \frac{x - x_c}{\frac{x_B - x_A}{2}} \\
y &= y_c + r_y \eta = \frac{y - y_c}{\frac{y_B - y_A}{2}}
\end{aligned} \tag{31}$$

Sayısal integrasyon işleminin tamamlanması için karmaşık yapıda ifade edilmiş olan integral içindeki terimler lokal koordinatlarda ifade edilmelidir. İntegral içerisinde yer alan birinci ve ikinci mertebeden türevlerin dönüşümü iki boyutlu düzlem için aşağıda ifade edilmiştir.

$$\int \frac{d\phi}{dx} \frac{d\phi}{dx} dx dy \tag{32}$$

Denklem (32)' de ifade edilmiş olan integral için dönüşüm işlemleri açık olarak:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \tag{33}$$

şeklindedir. Bu denklemde  $\frac{\partial y}{\partial \xi} = 0$  olduğundan denklemde yer alan ikinci terim sıfıra eşit olmaktadır. Böylece x eksenini için lokal koordinatlardaki dönüşüm tamamlanmış olur. İntegral içinde yer alan terimler bu dönüşüme uygun olarak güncellendiğinde sayısal integrasyon işlemi için başlangıç olarak belirtilen integral tipi lokal koordinatlarda tanımlanmış olacaktır.

$$\int \frac{d\phi}{dx} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{d\phi}{dx} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} r_x d\xi r_y d\eta \tag{34}$$

Denklem (34) lokal koordinat dönüşümünü ifade eden denklem (33)' teki ifadeler yerine yazılarak tekrar düzenlendiğinde integral içerisindeki ifade lokal koordinatlarda ifade edilmiş olacaktır.

$$\int \frac{d\phi}{d\xi} \frac{1}{r_x} \frac{d\phi}{d\xi} \frac{1}{r_x} r_x d\xi r_y d\eta = \int \frac{d\phi}{d\xi} \frac{d\phi}{d\xi} \frac{r_y}{r_x} d\xi d\eta \quad (35)$$

Denklem (35) ağsız yöntemler ile elde edilmiş olan şekil fonksiyonlarının sayısal integrasyon işlemi için lokal koordinat dönüşümünü tanımlamaktadır. Denklem (34) incelendiğinde  $x$  düzleminde elde edilmiş olan bir fonksiyonun denklem (31)' de ifade edilmiş olan dönüşümler kullanılarak lokal koordinatlarda nasıl ifade edileceği tanımlanmaktadır.

$$\int \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dx dy \quad (36)$$

Denklem (36) iki boyutlu düzlemde ikinci mertebeden türevlere sahip olan integral yapısını tanımlamaktadır. Bu aşamada denklem (33)' te ifade edilen dönüşüm ikinci mertebeden türevleri de içerecek şekilde genişletilmiş olarak denklem (37)' de ifade edilmiştir.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \quad (37)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (38)$$

Denklem (38)' de eşitliğin sağ tarafında yer alan birinci terim ayrıca değerlendirilecektir.

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) \frac{\partial x}{\partial \xi} \quad (39)$$

Denklem (39)'da elde edilen ifade daha önce denklem (33)' te tanımlanmıştı. Denklem (33)'te tanımlanan türevler denklem (39)'da yerine yazılarak gerekli düzenlemeler ışığında sayısal integrasyon işlemi için gerekli lokal koordinat dönüşümleri ikinci mertebeden türevler için tanımlanmış olacaktır.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \frac{\partial x}{\partial \xi} \quad (40)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \xi} \quad (41)$$

Denklem (41), ikinci mertebeden türevlerin  $x$  koordinatından lokal  $\xi$  koordinat takımına dönüşümü ifade etmektedir. Denklem (36)' da tanımlanmış olan ikinci mertebeden türevlerin yer aldığı integral denklem (41) ifade edilmiş olan dönüşüm uygulanarak düzenlendiğinde sayısal integral lokal koordinatlarda tanımlanmış olacaktır.

$$\int \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} r_x d\xi r_y d\eta \quad (42)$$

$$\int \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} \frac{1}{r_x} \frac{1}{r_x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} \frac{1}{r_x} \frac{1}{r_x} r_x d\xi r_y d\eta = \int \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} \frac{r_y}{r_x^3} d\xi d\eta \quad (43)$$

Sayısal integrasyon için tanımlanabilecek olan ikinci mertebeden türevlerin dahil edildiği son integral tipi denklem (44)' te ifade edilmiştir.

$$\int \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} dx dy \quad (44)$$

Denklem (33)' te tanımlanan dönüşüm karmaşık türevleri de içerecek şekilde güncellenerek denklem (45)' te ifade edilmiştir.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \quad (45)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \quad (46)$$

Denklem (46)' da karma türevlerin sayısal integrasyonunu kolaylaştıran dönüşüm ifade edilmiştir. Denklem (46)' da ifade edilen dönüşüm yapısı denklem (45)' teki her iki terime de uygulandığında denklem (47) elde edilmiştir.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \quad (47)$$

Denklem (47)' de eşitliğin sağ tarafında yer alan ikinci terimde x bağımsız değişkeninin lokal koordinat eksenine bağımsız değişkenine göre ikinci mertebeden türevi dahil edilmiştir. Bu terimin, x bağımsız değişkeni ile lokal koordinat dönüşümü arasındaki eşitliği tanımlayan denklem (31) incelendiğinde sıfıra eşit olduğu görülmektedir. Denklem (47)' de bu tanımlama uygulandığında denklem (48)' de eşitliğin sol tarafındaki integrand elde edilir. İntegrand üzerinde kısmi integrasyon işlemlerinin uygulanması ile birlikte karma türev için lokal koordinat dönüşümü denklem (49)' daki haliyle elde edilmiş olmaktadır.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \right) \quad (48)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (49)$$

Sayısal integral işleminin tamamlanması için integral içerisinde yer alan karmaşık fonksiyon lokal koordinatlar türünden güncellenmelidir.

$$\int \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} r_x d\xi r_y d\eta \quad (50)$$

Denklem (50), denklem (44)' te Kartezyen koordinat sisteminde tanımlanmış olan karma türevleri içeren integrale denklem (49)' da açık olarak ifade edilmiş olan dönüşüm işleminin uygulanması sonucu elde edilen integraldir. Denklem (50)' de sadeleştirme işlemlerinin uygulanması ile sayısal integrasyon için tanımlanması gereken bütün dönüşüm işlemlerinin sonucu denklem (51)' de tanımlanmış olacaktır.

$$\int \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} \frac{1}{r_x} \frac{1}{r_y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} \frac{1}{r_x} \frac{1}{r_y} r_x d\xi r_y d\eta = \int \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} \frac{1}{r_x} \frac{1}{r_y} d\xi d\eta \quad (51)$$

Bu aşamada sayısal integrasyon işlemi için tanımlanması gereken türev ifadeleri birinci ve ikinci mertebeden türevler de tanımlanacak şekilde ifade edilmiş durumdadır.

İntegrasyon işleminde integral içerisinde tanımlanan fonksiyonlar lokal veya global koordinatlarda tanımlanmış olmasına bakılmaksızın her iki eksen takımı için de ayrı ayrı ifade edilmiştir.



Sınır değer ve başlangıç değer problemleri çözüm sürecinde, Gauss yöntemi ile sayısal integrasyon işlemi sürecinde karşılaşılabilecek olan bütün integral terimleri denklem (30) ile denklem (51) arasında açık bir şekilde ifade edilmiştir.

Sayısal integrasyon sürecinde terimlerin bu detayda açıklanmasının temel sebebi, hareketli ısı cephe problemi gibi problemlerde elde edilen birinci çözüm sürecindeki sonuçlar ile analiz sürecine devam edilmesidir. Dönüşüm aşamasında yapılabilecek küçük bir hata sayısal analiz sonucunda elde edilen sonucun yaklaşım olarak doğru ancak çözüm olarak doğruluğunun düşük olmasına sebep olmaktadır. Bu durum çözümü bilinen analitik problemler referans alındığında kolay kontrol edilebilir seviyededir. Ancak analitik çözümü açık bir biçimde ifade edilmemiş olan her hangi bir problem incelenirken elde edilen bulguların sapmasına neden olmaktadır. Hareketli ısı cephe problemini takip eden elastisite problemi çözüm sürecinde, ısı analizler sonucunda oluşan sıcaklık dağılımı değerlerinin çözüm bölgesi içinde meydana getirecekleri ısı yükler, elastisite problemi için girdi olarak kullanılacaktır. Isıl yüklerin sağlıklı bir biçimde elastisite problemine taşınabilmesi için kullanılacak olan dönüşüm algoritmaları daha açık ve net bir biçimde ifade edilmiştir. Ayrıca sayısal integrasyon süreci sayısal analizler için elde edilecek olan sistem denklemlerinin, katılık matrisi, yük matrisi, kütle matrisi... gibi matrisler, sağlıklı bir biçimde ifade edilmesini sağlamaktadır.

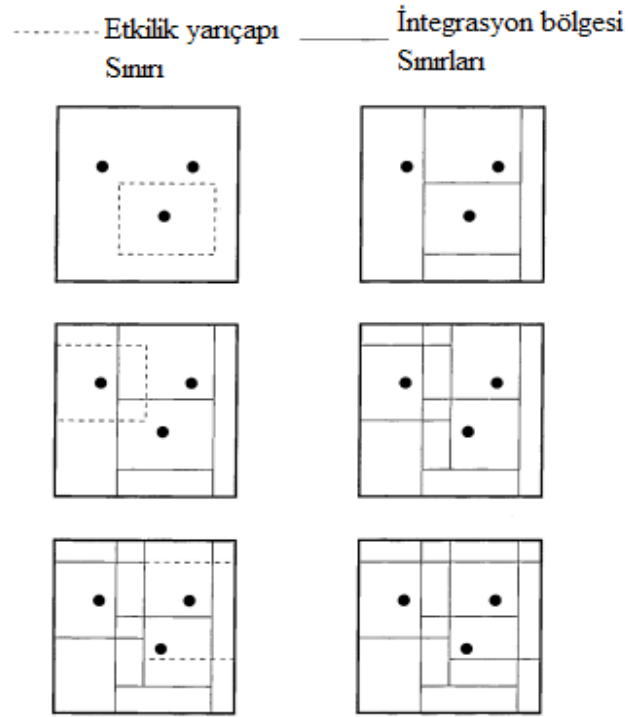
Tez kapsamında sayısal integrasyon işlemi için Gauss yaklaşımı kullanılmıştır. Gauss yaklaşımında sayısal integrasyon işleminin gerçekleştirileceği integrasyon bölgesinde Gauss noktaları tanımlanmaktadır. Her bir Gauss noktasının ifade edildiği koordinat için uygulanan dönüşüm işlemi ile birlikte elde edilen sonuç ilgili noktada tanımlanan ağırlık değeri ile çarpılarak ilgili bölgedeki tüm terimlerin toplanması sonucunda o bölge için integral sonucu elde edilmiş olmaktadır. Bu durumda çözüm bölgesi içinde sayısal integrasyon işleminin uygulanması sonlu elemanlar yönteminde çözüm sürecinde kullanılan elemanlar aynı zamanda Gauss integrasyonu için de kullanılacak olan bölgeyi tanımlamaktadır. Ağsız yöntemler için sayısal integrasyon sürecinde integrasyon bölgelerinin tanımlanması için birbirinden farklı yaklaşımlar literatürde önerilmektedir. Bu yaklaşımlardan şekil fonksiyonlarının kesişimlerinin tanımlanması, manuel olarak çözüm bölgesinin istenilen adette integrasyon bölgesine ayrıştırılması ve kapsayan bölge (bounding box, çevreleyen kutucuk) yöntemleri başlıca örnekler olarak gösterilebilir. Tez kapsamında Gauss integrasyon yöntemi için dönüşüm uygulanacağı sayısal integrasyon bölgelerinin elde edilmesi aşamasında iki farklı yöntem

dikkate alınmıştır. Bu yöntemlerden birincisi manuel olarak sayısal integrasyon bölgelerinin elde edilmesi yöntemi ve ikincisi de kapsayan kutucuk ( çevreleyen kutucuk) yöntemidir. Galerkin yaklaşımı ile sayısal çözüm süreci modellemesi gerçekleştirirken artık denklemini ağırlıklandırılması işleminde, çözüm sürecinde tanımlanan şekil fonksiyonları kullanılmaktadır. İntegrasyon bölgelerinin elde edilmesi sürecinde manuel olarak integrasyon bölgelerinin tanımlanması yönteminde çözüm bölgesi eksenlerinde tanımlanan düğüm sayıları ile eşit miktarda sayısal integrasyon bölgesi tanımlanabilmektedir. Bu durumda, şekil fonksiyonlarının kesişimleri yöntemi ile çözüm bölgesi içinde tanımlanan sayısal integrasyon bölgeleri koordinatları ve sayısı açısından iki yöntem birbirine benzer sonuçlar sunmaktadır. Bu sebeple şekil fonksiyonları kesişimi yöntemi manuel olarak sayısal integrasyon bölgesi oluşturma yönteminin bir alt kümesi olarak değerlendirilmiş ve tez kapsamında kullanılmamıştır. Ayrıca ağsız yöntemlerde şekil fonksiyonlarının hangi bölgeye kadar uzanacağı etkinlik yarıçapı çarpanı ile kontrol edildiğinden birbirinden yeterince uzak iki şekil fonksiyonunun kesişim bölgesi çok küçük olabilir. Bu durum sonsuz küçük alana sahip bir sayısal integrasyon bölgesinin oluşmasına sebep olmaktadır. Sayısal integrasyon işlemi sonsuz küçük alan içinde çözüm için istenilen doğrulukta integrasyon sonucu sağlayamayacaktır.

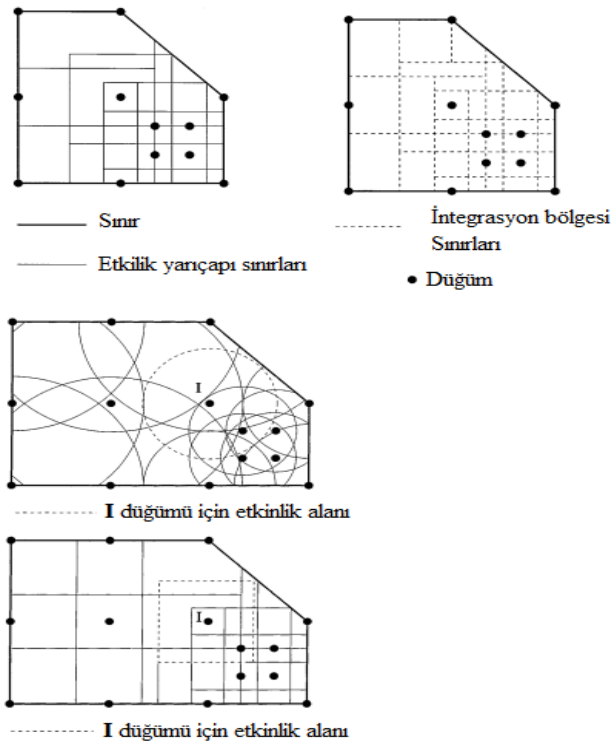
Manuel olarak sayısal integrasyon bölgelerinin oluşturulması yönteminde çözüm bölgesi  $x$  ve  $y$  doğrultularında istenilen yoğunlukta integrasyon bölgesinin tanımlanması ile gerçekleştirilmektedir. Her bir doğrultuda gerçekleştirilen yerel integrasyon bölgesi sayısı  $o$  ekseninde sayısal integrasyon bölgesinin koordinatlarını tanımlamaktadır. Benzer işlem diğer doğrultu için de gerçekleştirildiğinde çözüm bölgesi içinde tanımlanan tüm integrasyon bölgeleri için yerel koordinatlar eşleştirilerek elde edilmiş olmaktadır. Manuel olarak sayısal integrasyon bölgelerinin tanımlanması için kodlama ara yüzü ek 1' de tanımlanmıştır.

Kapsayan bölge (bounding box, çevreleyen kutucuk) yöntemi ile sayısal integrasyon bölgelerinin oluşturulması süreci Şekil 29 ve Şekil 30' da tanımlanmaktadır [56]. Bu yöntemde sayısal integrasyon bölgelerinin yerel koordinatları şekil fonksiyonlarının çözüm bölgesi içinde etkinlik yarıçapı ile ifade edilen yayılımına bağlı olarak elde edilmektedir. Kapsayan kutucuk yönteminde, şekil fonksiyonlarının tamamı çözüm bölgesinde oluşturulacak olan sayısal integrasyon bölgeleri sayısının ve koordinatlarının belirlenmesinde etkili bir biçimde kullanılmaktadır. Her bir şekil fonksiyonunun  $x$  ve  $y$  eksen takımı üzerinde etkinlik yarıçapına bağlı olarak izdüşümleri oluşturulmaktadır. İz

düşüm tanımlaması gerçekleştirildikten sonra çözüm bölgesi dışında kalan yerel koordinatlar temizlenmekte ve geriye kalan koordinatlar, manuel olarak sayısal integrasyon bölgelerinin elde edilmesi aşamasında olduğu gibi eşleştirilerek integrasyon bölgelerinin koordinatları elde edilmektedir. Şekil 29' da bu durum özetlenmiştir. Bu işlem her iki eksen için gerçekleştirildikten sonra eksenler üzerinde tanımlanan tüm koordinatlar eşleştirilerek sayısal integrasyon için bölgeler oluşturulmaktadır. Bu yöntem için kodlama ara yüzü Ek 2' de verilmiştir.

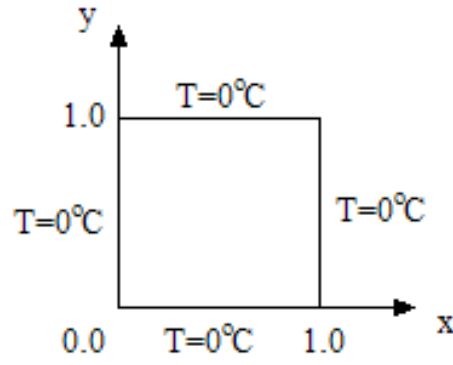


Şekil 29. Kapsayan bölge (bounding box, çevreleyen kutucuk) yöntemi ile sayısal integrasyon bölgelerinin oluşturulması [56]



Şekil 30. Kapsayan bölge (bounding box, çevreleyen kutucuk) yöntemi uygulaması [56]

Manuel olarak sayısal integrasyon bölgelerinin oluşturulması ve kapsayan kutucuk yöntemi ile sayısal integrasyonu bölgelerinin oluşturulması yöntemleri, Şekil 31’ de tanımlanan iki boyutlu ısı transferi problemi referans alınarak çözüm sürecindeki etkinlikleri karşılaştırılmıştır. Her iki sayısal integrasyon bölgesi oluşturma yöntemi Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yöntemi çözümü için ayrı ayrı kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlar ve kıyaslama Şekil 32 ve Şekil 39 arasında gerçekleştirilmiştir. Şekil 33 ve Şekil 36 arasında elde edilen Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yöntemi çözümlerinde önce kapsayan kutucuk yöntemi ile çözüm bölgesi içinde sayısal analiz sonuçları elde edilmiş ve çözüm bölgesinde oluşturulan sayısal integrasyon bölgesi tespit edilmiştir. Manuel olarak sayısal integrasyonu bölgesi oluşturulurken yine aynı miktarda sayısal integrasyon bölgesi çözüm bölgesi içinde tanımlanmıştır.

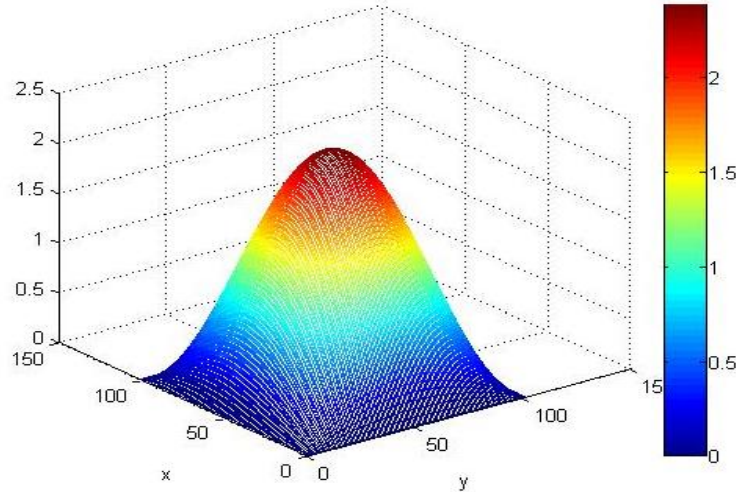


Şekil 31. Isı transferi problemi için iki boyutlu geometri

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\pi^2} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (52)$$

$$T(x, y, t) = \frac{1280}{\pi} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\pi x \sin(2l+1)\pi y}{(2l+1)(2k+1)} e^{-\lambda^2(2l+1)(2k+1)} \right) \quad (53)$$

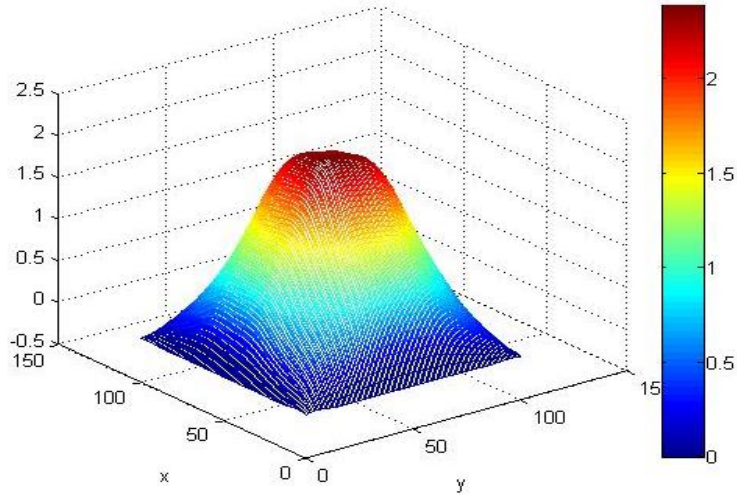
Şekil 31' de tanımlanan problem için analitik çözüm  $t=2$  saniye için Şekil 32' de gösterilmiştir [57].



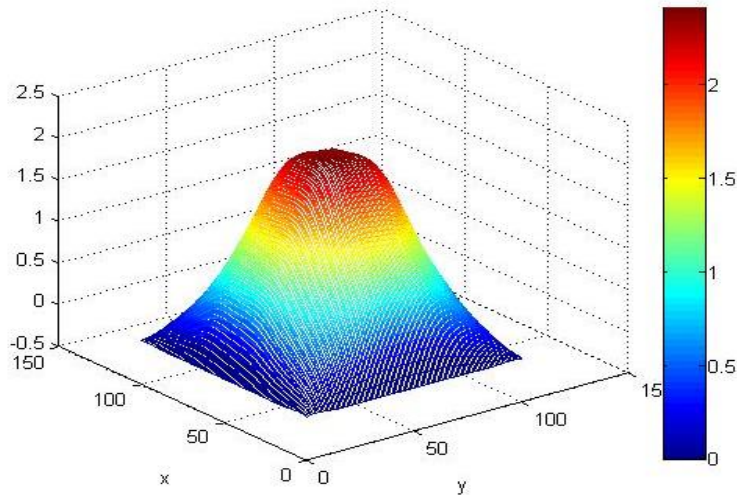
Şekil 32. Isı transferi problemi için  $t=2$  saniye' deki analitik çözüm

Analitik çözüm için  $t=2$  saniye seçilmesinin temel sebebi bölge içinde meydana gelecek olan hata dağılımının küçük değerlerde daha etkili bir biçimde ifade edilmesini

sağlamaktır. Böylece Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yöntemi ile elde edilen sıcaklık değerlerinde meydana gelecek olan  $0.2^{\circ}C$  lik farklılık hata değerlendirmesinde önemli bir parametre olarak karşımıza çıkacaktır. Ayrıca sayısal integrasyon bölgelerinin oluşturulmasında kullanılan her iki yöntemin çözüm bölgesindeki etkinlikleri daha açık bir biçimde ifade edilmiş olacaktır.

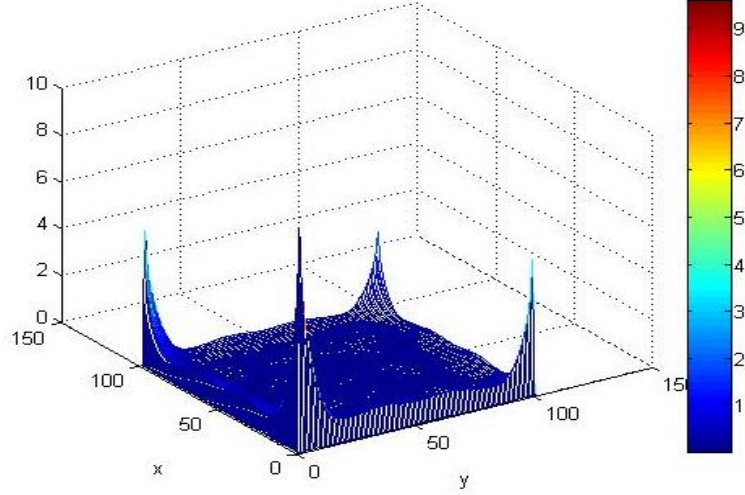


Şekil 33. Manuel olarak oluşturulan 169 sayısal integrasyon bölgesi için  $9 \times 9$  düğüm ile elde edilen Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yöntem çözümü.

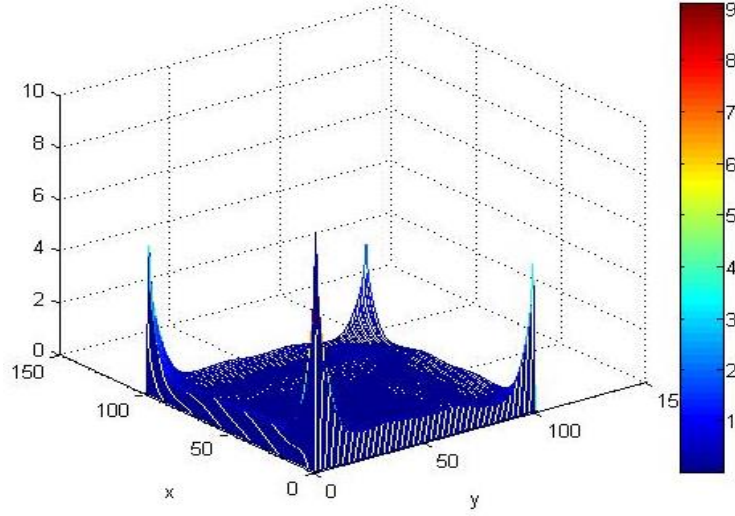


Şekil 34. Kapsayan kutucuk yöntemi ile oluşturulan 169 sayısal integrasyon bölgesi için  $9 \times 9$  düğüm ile elde edilen Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yöntemi çözümü.

Sayısal integrasyon işleminde manuel yöntem ve kapsayan kutucuk yöntemleri ile 169 adet sayısal integrasyon bölgesi oluşturulmuş ve elde edilen Eleman Bağımsız Galerkin çözümleri sırasıyla Şekil 33 ve Şekil 34’ te ifade edilmiştir. Manuel ve kapsayan kutucuk yöntemi kullanılarak oluşturulan sayısal integrasyon bölgeleri ile gerçekleştirilen Eleman Bağımsız Galerkin ağırsız yöntemler çözümünde elde edilen bağıl hata dağılımları arasındaki farklılıklar Şekil 35 ve Şekil 36 ‘ da ifade edilmiştir. Bu grafik incelendiğinde aslında her iki yöntem arasında çözüm sürecinde önemli bir farklılık olmadığı dikkatleri çekmektedir. Ancak önemli olan bir husus çözüm sürecinde önce kapsayan kutucuk yöntemi ile sayısal analiz sonuçları elde edilmiş ve bu yöntem ile çözüm bölgesinde kullanılan integrasyon bölgesi sayısı manuel yöntem ile aynen oluşturulmuştur.



Şekil 35. Manuel olarak oluşturulan 169 sayısal integrasyon bölgesi için 9x9 düğüm ile elde edilen Eleman Bağımsız Galerkin ağırsız yöntem çözümündeki bölge içindeki bağıl hata dağılımı.



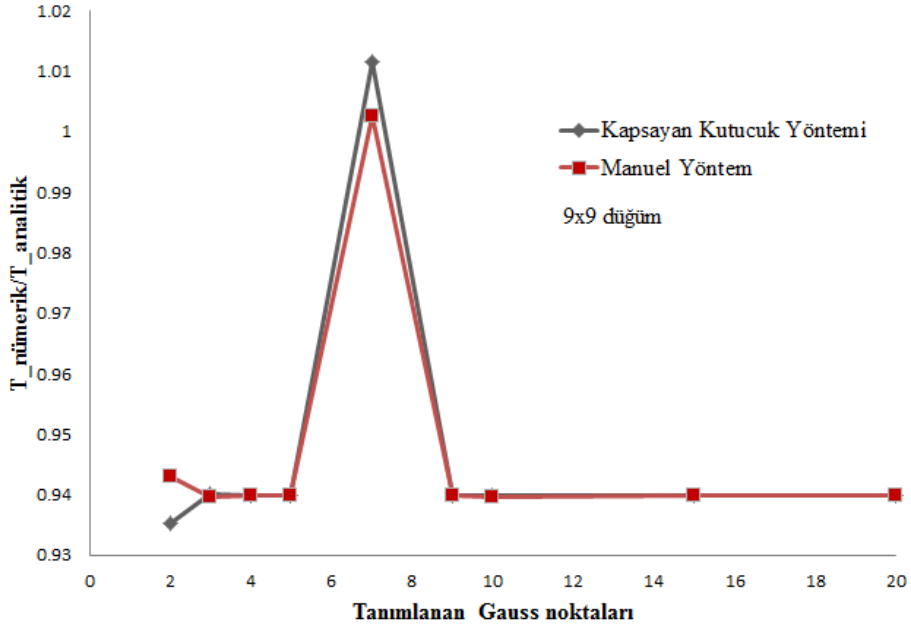
Şekil 36. Kapsayan kutucuk yöntemi ile oluşturulan 169 sayısal integrasyon bölgesi için  $9 \times 9$  düğüm ile elde edilen Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yöntem çözümündeki bölge içindeki bağıl hata dağılımı

Bu da manuel olarak çözüm bölgesi içinde yeterli hassasiyette veya yeterli çözünürlükte integrasyon bölgesinin oluşturulması durumunda elde edilecek çözümlerin istenilen doğruluk değerine sahip olacağını ifade etmektedir. Köşe noktalarında meydana gelen süreksizliğin sebebi ise ilgili bölgede düğümler üzerinde elde edilen çözüm değerlerinin oldukça küçük olmasıdır. Bu da bağıl hata dağılımı ifade edilirken küçük sapmalar meydana gelse bile çözüm üzerindeki etki olarak geri yansımaktadır.

Her iki integrasyon bölgesi oluşturma yöntemi karşılaştırıldığında kapsayan kutucuk yöntemi ile sayısal analiz süreci başlangıcında uzman bir personele ihtiyaç olmaksızın sayısal integrasyon süreci doğru bir biçimde gerçekleştirilebilmektedir. Ancak manuel olarak oluşturulan sayısal integrasyon bölgeleri için integrasyon bölgelerinde tanımlanacak olan kutucuk sayısının kullanıcı tarafından çözüm öncesinde uygun bir biçimde tanımlanması gerekmektedir.

Şekil 37 ve 38' de kapsayan kutucuk yöntemi ve manuel olarak sayısal integrasyon bölgelerinin oluşturulması ile ilgili kıyaslamalar gerçekleştirilmiştir. Şekil 37'de sayısal integrasyon işlemi için kullanılan integrasyon bölgesi sayısı 169 olarak sabitlenmiştir. Çözüm bölgesi içinde tanımlanan Gauss integrasyonu sayıları değiştirilmiştir.

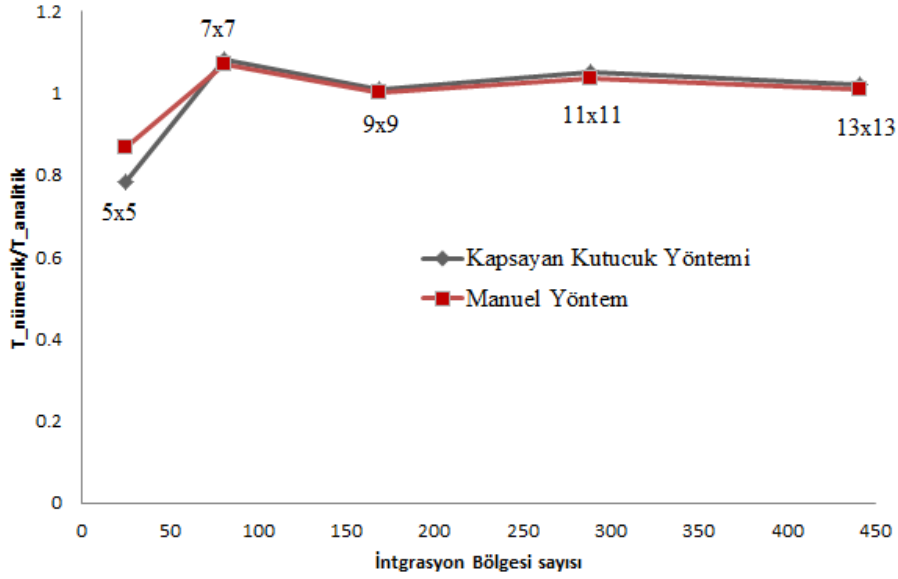




Şekil 37. Kapsayan kutucuk ve Manuel kullanılarak 169 adet sayısal integrasyon bölgesinin kullanılması durumunda elde edilen Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yönteminin çözüme yakınsama davranışı

Çözüm sürecinde elde edilen bulgular Şekil 37’ de verilmiştir. Şekil 37’ de çözüm bölgesi içinde tanımlanan  $2 \times 2$ ’ den yüksek tüm Gauss noktaları için çözüm açısından kabul edilebilecek mertebede yakınsama sağlanmıştır. Şekil 38’ de integrasyon bölgesi içinde kullanılan Gauss noktası sayısı 7’ ye sabitlenerek değişen şekil fonksiyonu sayısına bağlı olarak kapsayan kutucuk yöntemi kullanılarak elde edilen sayısal integrasyon bölgesi sayısının sayısal çözümün yakınsaması üzerindeki etkileri incelenmiştir. Şekil 38’ de Manuel olarak oluşturulan integrasyon bölgeleri sayısı yine kapsayan kutucuk yöntemi ile oluşturulan sayıya eşit olacak şekilde tanımlanmıştır. Bu durumda elde edilen Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yöntemi çözümüne olan yakınsama davranışı incelenmiştir.

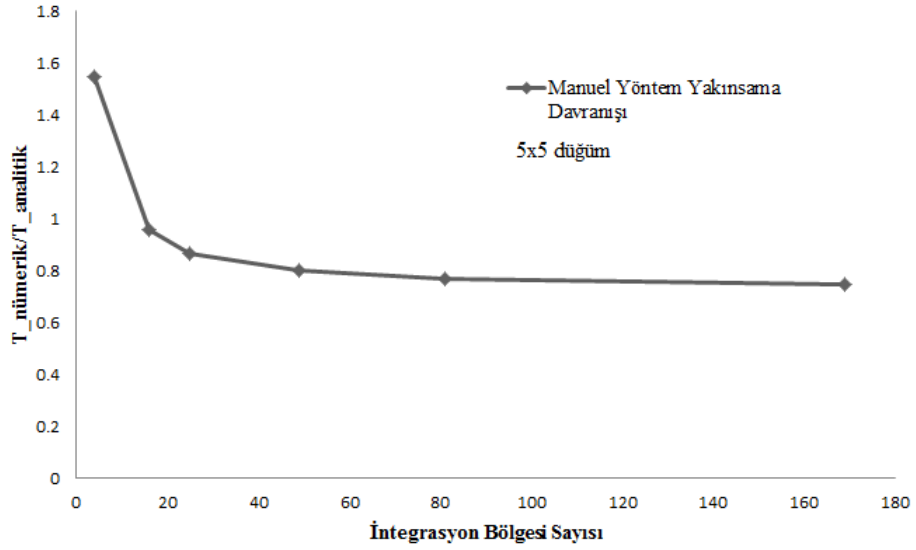
Şekil 37 ve 38’ de elde edilen veriler incelendiğinde çözüm bölgesindeki yeterli çözünürlükte integrasyon bölgesinin tanımlanması durumunda kapsayan kutucuk yöntemi ile manuel olarak integrasyon bölgelerinin oluşturulması arasında çözüm bölgesi üzerinde önemli farklılıkların olmadığı ifade edilebilir.



Şekil 38. Kapsayan kutucuk ve Manuel yöntem kullanılarak farklı yoğunlukta sayısal integrasyon bölgesi için 7 adet Gauss noktası kullanılarak elde edilen Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yönteminin çözüme yakınsama davranışı

Kapsayan kutucuk yönteminde özellikle çözüm bölgesi içinde tanımlanan şekil fonksiyonları sayısı çok olduğunda çözüm bölgesinde tanımlanan sayısal integrasyon bölgelerinin sayısı da artacağından çözüm süresinde uzama meydana gelmektedir. Özellikle de oluşturulacak olan sayısal integrasyon bölgesinin sayısı kullanıcının kontrolünde olmadığından bu durum çözüm sürecinde dezavantaj olarak yansımaktadır. Avantaj olarak ifade edilebilecek olan kısım ise sayısal analizin yakınsama davranışının oluşturulacak olan sayısal integrasyon bölgesi tanımlamasından tamamen bağımsız ve neredeyse sabit olmasıdır. Bu da ağsız yöntemler sürecinde kullanıcının uzman personel olma ihtiyacını ortadan kaldırmaktadır.

Manuel olarak oluşturulan sayısal integrasyon işleminde ise çözüm sürecinde oluşturulacak olan integrasyon bölgesi sayısı kullanıcı kontrolünde olduğundan yeterli yoğunlukta integrasyon bölgesi oluşturulmaması durumunda sonuçlar üzerindeki yakınsama davranışının elde edilememesi söz konusu olabilir. Bu durum Şekil 39' da ifade edilmiştir. Burada, x ve y ekseninde 5' er adet düğüm kullanılmıştır. Yarıçap çarpanı katsayısı değeri 2,05 olarak seçilmiştir.



Şekil 39. Manuel yöntem ile oluşturulan sayısal integrasyon bölgesi sayısının yakınsama davranışı üzerindeki etkisi

Her iki yöntem de sayısal analiz için çözüm bölgesi oluşturulması açısından oldukça etkilidir. Ancak manuel olarak sayısal integrasyon bölgelerinin oluşturulmasında problem üzerinde tecrübeli olunmasını gerektirmektedir. Çözüm sürecinde kapsayan kutucuk yöntemi ile oluşturulan sayısal integrasyon bölgesi sayısı tamamen çözümde kullanılan şekil fonksiyonu sayısı ile orantılı olarak elde edilmektedir. Bu da kullanıcı açısından her hangi bir tecrübe gerektirmediğinden çözüm sürecinde önemli bir avantaj sağlamaktadır. Sayısal analizde şekil fonksiyonu etkinlik yarıçapı ve sayısal integrasyon yönteminin etkileri Tablo 2 ve 3'te ifade edilmiştir.

Tablo 2. Eleman Bağımsız Galerkin Yönteminde yarıçap çarpanının çözüm sürecine etkisi

k: yarıçap çarpanı terimi	k=1.95	k=2.35
X: 5 Y: 5	ri_x=0.4875 ri_y=0.4875 Bağıl Hata:0.1062	ri_x=0.5875 ri_y=0.5875 Bağıl Hata:0.0873
	Sayısal İntegrasyon için Hücre Sayısı:196	Sayısal İntegrasyon için Hücre Sayısı:196
X: 7 Y: 5	ri_x=0.3250 ri_y=0.4875 Bağıl Hata:0.0795	ri_x=0.39167 ri_y=0.5875 Bağıl Hata:0.06021
	Sayısal İntegrasyon için Hücre Sayısı:196	Sayısal İntegrasyon için Hücre Sayısı:196
X: 7 Y: 7	ri_x=0.3250 ri_y=0.3250 Bağıl Hata:0.05431	ri_x=0.39167 ri_y=0.39167 Bağıl Hata:0.03987
	Sayısal İntegrasyon için Hücre Sayısı:196	Sayısal İntegrasyon için Hücre Sayısı:196

Tablo 3. Eleman Bağımsız Galerkin Ağsız Yönteminde çözüme etki eden parametreler

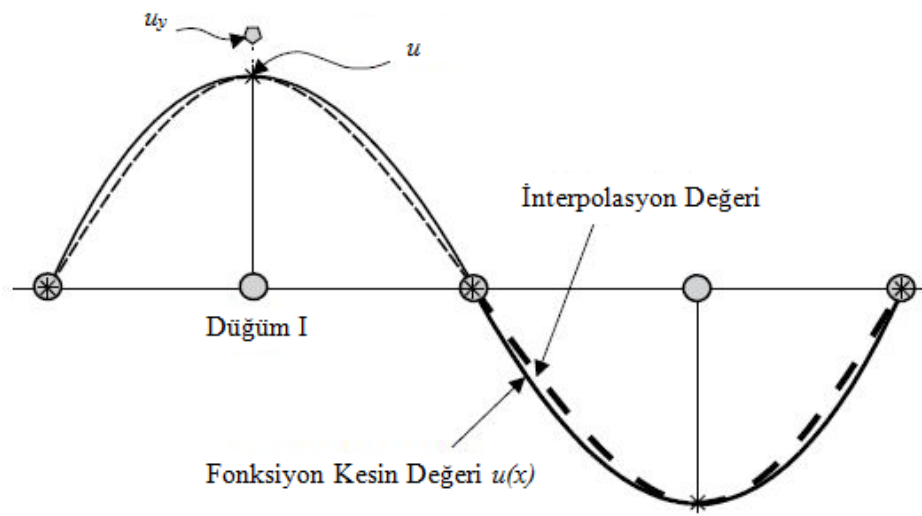
k: yarıçap çarpanı terimi	k=1.95	k=2.35	k=2.75	k=3.05
X: 5 Y: 5	ri_x=0.4875 ri_y=0.4875 Bağıl Hata: 0.1062	ri_x=0.5875 ri_y=0.5875 Bağıl Hata: 0.08731	ri_x=0.6875 ri_y=0.6875 Bağıl Hata: 0.3088	ri_x=0.7625 ri_y=0.7625 Bağıl Hata: 0.8145
	Sayısal İntegrasyon için Hücre Sayısı: 49	Sayısal İntegrasyon için Hücre Sayısı: 25	Sayısal İntegrasyon için Hücre Sayısı: 25	Sayısal İntegrasyon için Hücre Sayısı: 9
X: 7 Y: 5	ri_x=0.3250 ri_y=0.4875 Bağıl Hata: 0.07958	ri_x=0.391667 ri_y=0.5875 Bağıl Hata: 0.0602	ri_x=0.45833 ri_y=0.6875 Bağıl Hata: 0.2731	ri_x=0.50833 ri_y=0.7625 Bağıl Hata: 0.7342
	Sayısal İntegrasyon için Hücre Sayısı: 77	Sayısal İntegrasyon için Hücre Sayısı: 45	Sayısal İntegrasyon için Hücre Sayısı: 81	Sayısal İntegrasyon için Hücre Sayısı: 21
X: 7 Y: 7	ri_x=0.3250 ri_y=0.3250 Bağıl Hata: 0.0543	ri_x=0.39167 ri_y=0.39167 Bağıl Hata: 0.03987	ri_x=0.45833 ri_y=0.45833 Bağıl Hata: 0.2211	ri_x=0.50833 ri_y=0.50833 Bağıl Hata: 0.5871
	Sayısal İntegrasyon için Hücre Sayısı: 121	Sayısal İntegrasyon için Hücre Sayısı: 81	Sayısal İntegrasyon için Hücre Sayısı: 81	Sayısal İntegrasyon için Hücre Sayısı: 69
X: 9 Y: 9	ri_x=0.24375 ri_y=0.24375 Bağıl Hata: 0.02716	ri_x=0.29375 ri_y=0.29375 Bağıl Hata: 0.02474	ri_x=0.34375 ri_y=0.34375 Bağıl Hata: 0.1584	
	Sayısal İntegrasyon için Hücre Sayısı:225	Sayısal İntegrasyon için Hücre Sayısı:169	Sayısal İntegrasyon için Hücre Sayısı:169	

### 2.2.3. Esas ve Doğal Sınır Koşullarının Uygulanması

Ağız yöntemler çözüm sürecinde esas ve doğal sınır koşullarının uygulanması süreci, Hareketli En Küçük Kareler yöntemi ile elde edilen ağız yöntemler şekil fonksiyonlarının kronecker delta özelliğini sağlamaması sebebiyle sonlu elemanlar yönteminden farklı olmaktadır. Ağız yöntemlerde genel olarak statik problemler için penaltı yöntemi ve Lagrange çarpanları yöntemi kullanılarak, dinamik problemler için de tekil değer ayrışımı yöntemi kullanılarak sınır koşulları uygulanmaktadır [11]. Tez kapsamında sınır koşulları sonlu elemanlar yönteminde olduğu haliyle uygulanabilmesi açısından şekil fonksiyonlarının kronecker delta özelliğini sağlayacak şekilde dönüştürülmesi gerekmektedir. Dönüştürülmüş olan şekil fonksiyonları kullanılarak sınır koşulları ilgili düğümlerde doğrudan uygulanabilmektedir.

#### 2.2.3.1. Dönüşüm Yöntemi

Dönüşüm yöntemi şekil fonksiyonlarının kronecker delta özelliğini sağlayacak biçimde bir dönüşüme tabi tutulması esasına dayanmaktadır [39]. Uygulanan dönüşüm işleminde şekil fonksiyonlarının çözüm bölgesi içinde tanımlanan düğüm noktalarındaki değerler kullanılarak yerel dönüşüm matrisi oluşturulmaktadır.



Şekil 40. Kronecker delta dönüşüm işlemi [39]

Yer değiştirme ifadesine yapılan yaklaşım (8) denklemindeki haliyle dikkate alınacaktır.

$$u^h(x) = \sum \phi_i u_i \quad (54)$$

Denklem (54) yaklaşık çözümlü, ağsız yöntemler şekil fonksiyonları türünden tanımlamaktadır. Denklem (55)' te kesin düğüm değerleri  $u$  ile yaklaşım değerleri  $u_y$  arasındaki sayısal ilişki tanımlanmaktadır.

$$u = \sum \phi_i u_{y_i} \quad (55)$$

Yapılan yaklaşımlarda esas amaç düğümlerdeki kesin çözümlü değerlerini elde etmektir. Bu işlem (55) denkleminde belirtilen yapıda gerçekteştirilmektedir. Dönüşüm yönteminde ise kesin düğüm değerleri yaklaşık düğüm değerleri cinsinden ifade edilecektir.

$$u_{y_i} = \sum D_{ij} u \quad (56)$$

Uygulanan dönüşüm işlemi (56) denklemi ile ifade edilmiştir. Bu denklemde belirtilen D matrisi şekil fonksiyonlarının tersini içeren dönüşüm matrisidir [39].

$$D_{ij} = [\phi^j(x_i)]^{-1} \quad (57)$$

Yaklaşık düğüm değerleri için elde edilen (56) denklemi (55) denklemindeki yerine yazıldığında N adet düğüm için,

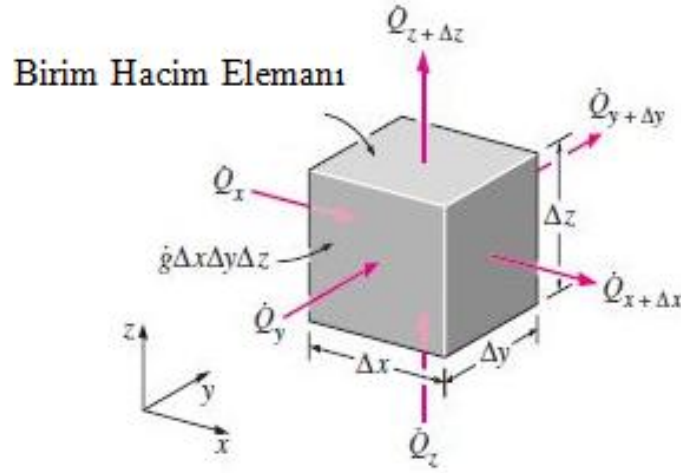
$$u(x) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \phi^i(x) D_{ij} u^j = \sum_{j=1}^N \varphi^j(x) u^j \quad (58)$$

denklemi elde edilir. Yapılan yeni yaklaşım incelendiğinde (8) denklemindeki yapıya oldukça benzemektedir. Bu yapıdan yer değiştirme ifadeleri çıkarılırsa geride kalan kısım şekil fonksiyonlarını temsil etmektedir.

Dönüşüm işlemi uygulanarak elde edilen yeni şekil fonksiyonları  $\varphi$  kronecker delta özelliğini sağlamaktadır.

### 2.3. Eleman Bağımsız Galerkin Yönteminin İki Boyutlu Isı Transferi Problemlerine Uygulanması

İletim ile gerçekleşen ısı transferi enerjisi yüksek olan parçacıklardan enerjisi daha düşük olan parçacıklara, genel olarak parçacıkların hareketli olmaması kabulü söz konusu olması durumunda etkili olan ısı transferi mekanizmasıdır. Isı transferi problemi genel olarak Şekil 41’ de ifade edilmiş olan hacim elemanı değerlendirilerek iki boyutlu ve üç boyutlu düzlem için tanımlamaları gerçekleştirilir [58, 59].



Şekil 41. Isı transferi için tanımlanan birim hacim elemanı

Şekil 41’ de ifade edilmiş olan birim hacim elemanı üzerinde enerji dengesi yazılarak sadeleştirildiğinde ısı transferi problemi üç boyutlu düzlem için ifade edilmiş olacaktır. Birim hacim elemanı için enerji dengesi denklem (59)’ da ifade edilmiştir [58, 59].

$$\begin{aligned}
 & \left( \begin{array}{l} x, y \text{ ve } z \text{ koordinatlarında} \\ \text{ısı iletiminin ifade edilmesi} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{l} x + \Delta x, y + \Delta y \text{ ve } z + \Delta z \\ \text{koordinatlarındaki} \\ \text{ısı iletiminin ifade} \\ \text{edilmesi} \end{array} \right) + \\
 & \left( \begin{array}{l} \text{Hacim elemanındaki} \\ \text{ısı üretimi} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} \text{Birim Hacim elemanındaki} \\ \text{enerji değişimi} \end{array} \right) \quad (59)
 \end{aligned}$$

Denklem (59) matematik formda denklem 60' da ifade edilmiştir.

$$Q_x + Q_y + Q_z - Q_{x+\Delta x} - Q_{y+\Delta y} - Q_{z+\Delta z} + \dot{G} = \frac{\Delta E}{\Delta t} \quad (60)$$

Denklem (60)' da yer alan  $\dot{G}$  hacim içerisinde yer alan ısı üretimini temsil etmektedir. Denklem (60)' da tanımlanan enerji üretimi ve enerji değişimi terimleri denklem (61)' de tanımlanmaktadır.

$$\begin{aligned} \Delta E_{hacim} &= E_{t+\Delta t} - E_t = mc(T_{t+\Delta t} - T_t) = \rho c \Delta x \Delta y \Delta z (T_{t+\Delta t} - T_t) \\ G &= g \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned} \quad (61)$$

Denklem (61)' de tanımlanan ifadeler denklem (60)' ta yerine yazıldığında ve birim hacim elemanı için ifadeler düzenlendiğinde denklem (62) tanımlanmış olacaktır.

$$Q_x + Q_y + Q_z - Q_{x+\Delta x} - Q_{y+\Delta y} - Q_{z+\Delta z} + g \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\rho c \Delta x \Delta y \Delta z (T_{t+\Delta t} - T_t)}{\Delta t} \quad (62)$$

Denklem (62)' de eşitliğin her iki tarafı hacim ifadesine bölüldüğünde

$$\frac{Q_{x+\Delta x} - Q_x}{\Delta x \Delta y \Delta z} + \frac{Q_{y+\Delta y} - Q_y}{\Delta x \Delta y \Delta z} + \frac{Q_{z+\Delta z} - Q_z}{\Delta x \Delta y \Delta z} + g = \frac{\rho c (T_{t+\Delta t} - T_t)}{\Delta t} \quad (63)$$

Denklem (63)' te yer alan  $A_x = \Delta y \Delta z$ ,  $A_y = \Delta x \Delta z$  ve  $A_z = \Delta x \Delta y$  ifadeleri ısı iletiminin gerçekleştiği yüzey alanlarını ifade etmektedir. Denklem (64)' te ifade edilen Fourier yasası ve birim değişim için ısı iletimi ifadesi dikkate alındığında ve gerekli düzenlemeler sonucunda elde edilen ifadeler denklem (63)' te ilgili yerlere yazılıp limit alınarak işlemler tekrar ifade edilmesi durumunda üç boyutlu düzlemde ısı iletimi denklem takımı tanımlanmış olacaktır.

$$\begin{aligned} Q_x &= -k A_x \frac{\Delta T}{\Delta x} \\ Q_{x+\Delta x} &= Q_x + \Delta Q_x \end{aligned} \quad (64)$$



Üç boyutlu düzlemde ısı iletimi denklem takımı denklem (65)' te tanımlanmıştır.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + g = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (65)$$

Denklem (65) tanımlanmış olan ifadelerin tamamı, denklem içerisinde sıcaklığın bağımsız değişken olarak ifade edilmesi dolayısıyla tek değişkenli denklem takımı olarak ifade edilmektedir. Tek değişkenli denklem takımının Eleman Bağımsız Galerkin ağırsız yöntemi ile çözüm aşamaları daha önce bir boyutlu denklem takımı için ifade edilmiş olan denklem (18) ile denklem (28) arasındaki tanımlamaların aynısı kullanılarak gerçekleştirilmektedir.

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (66)$$

Denklem (65)' in Eleman Bağımsız Galerkin ağırsız yöntemi ile modellenmesini kolaylaştırmak için açık formda ifade edebilmek adına iki boyutlu düzlemde ısı üretiminin olmadığı bir sistem için denklem (66)' da ifade edilmiştir. Sayısal çözüm yönteminin oluşturulmasındaki temel adım matematik olarak ifade edilmiş olan çözüm için yaklaşık çözümün kullanılacağı artık denklemin tanımlanmasıdır. Üç boyutlu ısı transferi problemi için artık denklemini denklem (67)' de ifade edilmiştir.

$$R = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (67)$$

Sayısal modellemenin ikinci aşaması artık denkleminin ağırlıklandırılması aşamasıdır. Bu aşamada sayısal modelleme için seçilen Eleman Bağımsız Galerkin ağırsız yöntemi, Galerkin yaklaşımını kullandığından artık denkleminin ağırlıklandırılmasında kullanılacak olan fonksiyonlar şekil fonksiyonlarının aynısıdır.

İki boyutlu düzlemde ifade edilmiş olan ısı transferi problemi için ağırlıklandırılmış integral denklem (68)' de ifade edilmiştir.

$$\iint \phi \left( k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \right) dx dy \quad (68)$$

Denklem (68)' de ağırlıklandırılmış olan artık denklemi için kısmi integrasyon işlemi denklem (69)' da bir boyutlu düzlemde ifade edildiği haliyle iki boyutlu düzlem için genişletilerek uygulanacaktır.

$$\frac{d}{dx}(fg) = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx} \quad (69)$$

Kısmi integrasyon işlemi vasıtasıyla denklem (68)' de sıcaklık gradyanı üzerinde tanımlanan ikinci mertebeden türevin sağlanması için gerek ve yeter şart olan minimum ikinci mertebeden bir fonksiyonun yaklaşım olarak tanımlanması yerine fonksiyon üzerindeki gereklilik birinci mertebeye indirgenmiş olacaktır.

$$\begin{aligned} & - \iint \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial T_j}{\partial x} dx dy - \iint \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial T_j}{\partial y} dx dy + \dots \\ & \dots \iint \frac{\partial(\phi_i \frac{\partial T}{\partial x})}{\partial x} dx dy + \iint \frac{\partial(\phi_i \frac{\partial T}{\partial y})}{\partial y} dx dy - \iint \phi_i \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx dy = 0 \end{aligned} \quad (70)$$

Denklem (70) sayısal çözüm yöntemleri için matematik denklemin zayıf formu olarak nitelendirilmektedir. Denklem (70)' te sıcaklık için uygulanacak olan sınır koşulunun yanında uygulanan kısmi integrasyon işlemi sayısı kadar ısı akısı (flux) terimi çözdürülecek olan denklem takımına dahil olmaktadır. Isı akısı sınır koşulu ifadesi denklem (71)' de diverjans teoremi uygulanarak daha sade bir biçimde elde edilmiştir.

$$\iint \left( \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) dx dy = \oint (Fn_x + Gn_y) ds \quad (71)$$

ve

$$\begin{aligned} & \iint \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial T_j}{\partial x} dx dy + \iint \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial T_j}{\partial y} dx dy - \oint \phi_i \left( \frac{\partial T}{\partial x} n_x + \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) ds - \dots \\ & \dots \iint \phi_i \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx dy = 0 \end{aligned} \quad (72)$$

Denklem (72) ile iki boyutlu düzlemde ısı transferi problemi esas ve doğal sınır koşullarını da içerecek şekilde tanımlaması gerçekleştirilmiştir. Isı transferi problemi için ayrıca dinamik problemler için alt yapıyı tanımlayan katılık matrisi ile birlikte kütle matrisi denklem (72) bünyesinde tanımlanmıştır.

Denklem (72)' de tanımlanmış olan ısı transferi problemi için dinamik çözüm araştırılması durumunda denklem üzerinde parabolik ve hiperbolik zaman integrasyon yöntemleri kullanılmaktadır. Parabolik ve hiperbolik zaman integrasyon yöntemleri denklem (73)' te ifade edilen değişkenlerin ayrıştırılması yönteminden yararlanılarak iki boyutlu düzlemde sıcaklık dağılımının bağımsız değişkenler üzerindeki değişimi şekil fonksiyonları kullanılarak tanımlanırken zamana bağlı değişkenler de sıcaklık üzerinde tanımlanarak gerçekleştirilmektedir.

$$T(x, y, t) = \sum_i \phi_i(x, y) T_i(t) \quad (73)$$

#### 2.4. Zaman İntegrasyon Yöntemleri

Zaman integrasyon yöntemlerini incelemek amacıyla hiperbolik denklemler

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{F\} \quad (74)$$

ve parabolik denklemler

$$[C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{F\} \quad (75)$$

dikkate alınacaktır [60]. Bu yapıdaki denklemleri çözerken direkt integrasyon yöntemleri kullanılacaktır. Burada direkt ifadesinden kasıt integrasyon işlemine başlamadan önce her hangi bir dönüşümün uygulanmaması anlamına gelmektedir.

Direkt integrasyon yöntemi iki temel fikre dayanmaktadır. Birincisi (74) denklemini herhangi bir t zamanı için sağlatmaktansa bu denklemi parçalanmış olan zaman dilimlerinden her hangi bir  $\Delta t$  için sağlamayı amaçlamaktadır. İkinci düşünce ise yer değiştirme, hız ve ivme üzerindeki değişimleri dikkate almaktadır. Bundan sonraki aşamalarda zaman integrasyonu işleminde başlangıç yer değiştirmesi, hız ve ivmesinin bilindiğini varsayarak (65) denkleminin her hangi bir 0 ile T zamanı arasında n adet eşit zaman dilimi için zaman integrasyonu yöntemi uygulanarak çözüm incelenecektir.

### 2.4.1. Newmark Yöntemi

Newmark zaman integrasyon yöntemi lineer ivmelenme yönteminin farklı bir parçası olarak dikkate alınabilmektedir. Newmark zaman integrasyon yönteminde hız ve ivme terimleri için yapılacak olan yaklaşımlar,

$$\dot{U}_{t+\Delta t} = \dot{U}_t + \left[ (1-\delta)\ddot{U}_t + \delta\ddot{U}_{t+\Delta t} \right] \Delta t \quad (76)$$

$$U_{t+\Delta t} = U_t + \dot{U}_t \Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{U}_t + \alpha \ddot{U}_{t+\Delta t} \right] \Delta t^2 \quad (77)$$

denklemleriyle belirtilmiştir [2]. Burada  $\delta$  ve  $\alpha$  parametreleri çözümün dengede ve doğru bir biçimde ilerlemesini sağlamak amacıyla kullanılmaktadır. Burada denge denklemini  $t + \Delta t$  anında ele alınarak çözüm elde edilmektedir. Bu ifadeleri bilgisayar programına uygulayabilmek için aşağıda belirtilen çözüm sürecinin takip edilmesi gerekmektedir [2].

- K, M ve C matrislerinin elde edilmesi
- $U_0$ ,  $\dot{U}_0$  ve  $\ddot{U}_0$  ifadelerinin uygulanması
- Zaman adımının seçilmesi ve sabitlerin belirlenmesi

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}, \quad a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t}, \quad a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}, \quad a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1, \quad a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1, \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\delta}{\alpha} - 2 \right),$$

$$a_6 = \Delta t(1 - \delta), \quad a_7 = \delta \Delta t \quad (78)$$

Burada  $\delta$  ve  $\alpha$  parametrelerinin çözümün uygun olarak elde edilebilmesi amacıyla aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde seçilmesi gerekmektedir.

$$\delta \geq 0.5 \text{ ve } \alpha \geq 0.25(0.5 + \delta)^2$$

- Efektif K matrisinin elde edilmesi

$$\bar{K} = K + a_0 M + a_1 C \quad (79)$$

Her bir zaman adımında yapılması gereken hesaplamalar:

- Efektif yük teriminin elde edilmesi

$$\begin{aligned} \bar{F}_{t+\Delta t} = & F_{t+\Delta t} + M(a_0 U_t + a_2 U_{t-\Delta t} + a_3 U_{t-2\Delta t}) \\ & + C(a_1 U_t + a_4 U_{t-\Delta t} + a_5 U_{t-2\Delta t}) \end{aligned} \quad (80)$$

- Yer değiştirmelerin elde edilmesi

$$\bar{K} U_{t+\Delta t} = \bar{F}_{t+\Delta t} \quad (81)$$

Arzu edilmesi durumunda hız ve ivme terimleri yer değiştirme için elde edilen denklemlerde yerlerine yazılarak belirlenebilmektedir.

#### 2.4.2. Parabolik Denklemler İçin Zaman İntegrasyon Yöntemleri

Parabolik denklemler (75) denkleminde belirtilen yapıdadır. Bu formdaki denklemler için önerilmiş olan zaman integrasyon yöntemlerini birbirinden farklı kılan sadece kullanılan parametrelerdir.

Çözümüne geçmeden önce  $\{u\}_0$ ,  $t=0$  anındaki yer değiştirmeyi belirttiği vurgulanmalıdır. Bu formdaki denklemleri çözmek için kullanılan en yaygın yöntem alfa ailesidir. Alfa ailesinde uygulanan genel yaklaşım;

$$(1-\alpha)\left\{\dot{u}\right\}_s + \alpha\left\{\dot{u}\right\}_{s+1} = \frac{\{u\}_{s+1} - \{u\}_s}{\Delta t_{s+1}} \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \text{ için} \quad (82)$$

denklemini ile belirtilmiştir [28]. Burada  $\{ \}_s$  ifadesi parantez içindeki ifadenin  $t=t_s$  anında aldığı değeri belirtmektedir.  $\Delta t_s = t_s - t_{s-1}$  s.inci zaman adımını ifade etmektedir. Eğer

zaman aralığı eşit parçalara bölünmüş ise o zaman s anındaki zaman  $t_s = s\Delta t$  şeklinde belirlenebilir. Bu durumda (82) denklemi,

$$\{u\}_{s+1} = \{u\}_s + \Delta t \left\{ \dot{u} \right\}_{s+\alpha} \quad (83)$$

$$\left\{ \dot{u} \right\}_{s+\alpha} = (1-\alpha) \left\{ \dot{u} \right\}_s + \alpha \left\{ \dot{u} \right\}_{s+1} \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \text{ için} \quad (84)$$

şekilde ifade edilebilir.

(84) denkleminde yer alan  $\alpha$  'nın farklı değerleri için;

$\alpha = 0.5$  için Crank-Nicolson Yöntemi

$\alpha = 0.66667$  için Galerkin Yöntemi

$\alpha = 1$  Geriye Farklar Yöntemi

zaman integrasyon şemaları elde edilebilir.

(75) denkleminin sırasıyla s anı ve s+1 anı için yazılması durumunda

$$[M] \left\{ \dot{u} \right\}_s + [K]_s \{u\}_s = \{F\}_s \quad (85)$$

$$[M] \left\{ \dot{u} \right\}_{s+1} + [K]_{s+1} \{u\}_{s+1} = \{F\}_{s+1} \quad (86)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler elde edilirken kütle matrisinin zamandan bağımsız olduğu varsayımı yapılmaktadır. Daha sonra (82) denkleminin her iki tarafı  $\Delta t_{s+1}$  ifadesi ve kütle matrisi [M] ile çarpılır ve elde edilen denklemler (85) ve (86) denklemindeki yerlerine yazılırsa zaman integrasyonunun gerçekleştirilebilmesi için aşağıdaki denklem sistemi elde edilmiş olur. Bu denklemlerin herhangi bir t anı için çözülmesiyle istenilen değişkenin (yer değiştirme veya sıcaklık) t anındaki değeri belirlenebilmektedir [3].

$$[K_{eff}]_{s+1} \{u\}_{s+1} = [\bar{K}]_s \{u\}_s + \{\bar{F}\}_{s,s+1} \quad (87)$$

Burada efektif katılık matrisi;

$$[K_{eff}] = [M] + a_1 [K]_{s+1} \quad (88)$$

ve

$$[\bar{K}]_s = [M] - a_2 [K]_s \quad (89)$$

$$\{\bar{F}\}_{s,s+1} = \Delta t_{s+1} [\alpha \{F\}_{s+1} + (1 - \alpha) \{F\}_s] \quad (90)$$

şeklindedir. Efektif yük terimi (90) denklemi ile ifade edilmiştir. Bu denklemlerde yer alan bilinmeyen  $a_1$  ve  $a_2$  katsayıları.

$$a_1 = \alpha \Delta t_{s+1} \quad (91)$$

$$a_2 = (1 - \alpha) \Delta t_{s+1} \quad (92)$$

şeklindedir. Denklem (92)' den yararlanılarak istenilen herhangi bir t anındaki yer değiştirme değeri elde edilebilmektedir.

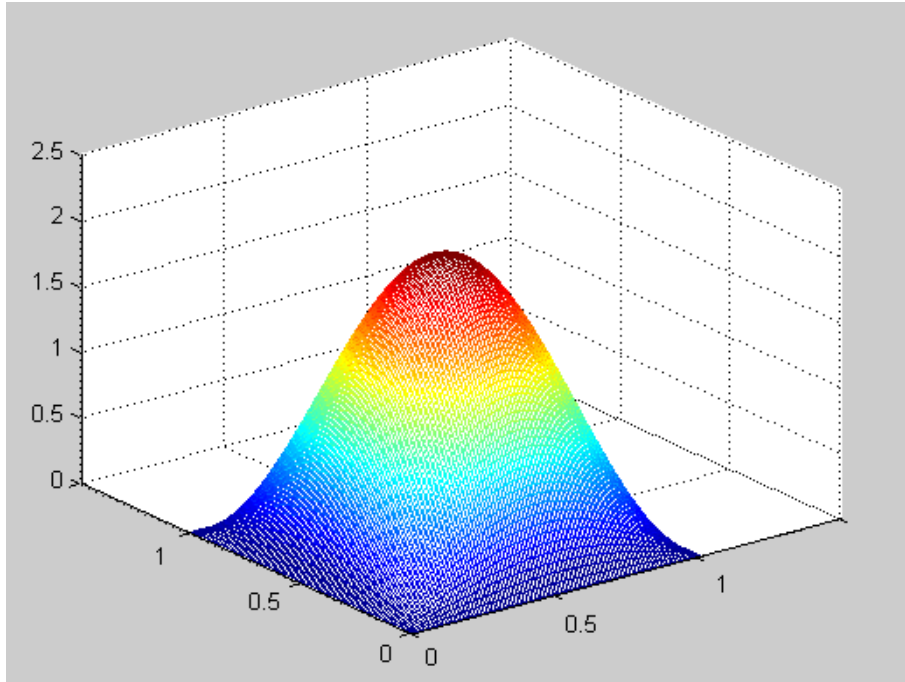
## 2.5. Parabolik Denklemler ve Eleman Bağımsız Galerkin Ağsız Yöntemi

Bu aşamada iki boyutlu düzlemde şekil fonksiyonları, sayısal integrasyon işlemi, zaman integrasyon yöntemleri ve Eleman Bağımsız Galerkin yöntemi sayısal problemlerin çözüm süreçlerini içerecek şekilde ifade edilmiştir. İki boyutlu düzlemde gerçekleştirilen sayısal çözümler için denklem (52) referans alınmıştır [3]. Şekil 31' de denklem (52)' de tanımlanmış olan ısı transferi problemi için sınır koşulları ve geometrik ölçüler ifade edilmiştir. Denklem (53) bu problemin analitik çözümünü tanımlamaktadır.

Problem için verilen analitik çözüm Şekil 42’ de gösterilmiştir. Isı transferi problemi çözümünde Eleman Bağımsız Galerkin yönteminde zar (membran) tipi şekil fonksiyonları kullanılarak çözümler elde edilmiştir. Çözüm süreçlerinde iki farklı çözüm ağı kullanılmıştır. Sayısal modellemede 35 ve 77 adet düğüm kullanılmış olup elde edilen çözümler için şekil fonksiyonu etkinlik yarıçap çarpanı değeri 2.35 olarak alınmıştır.

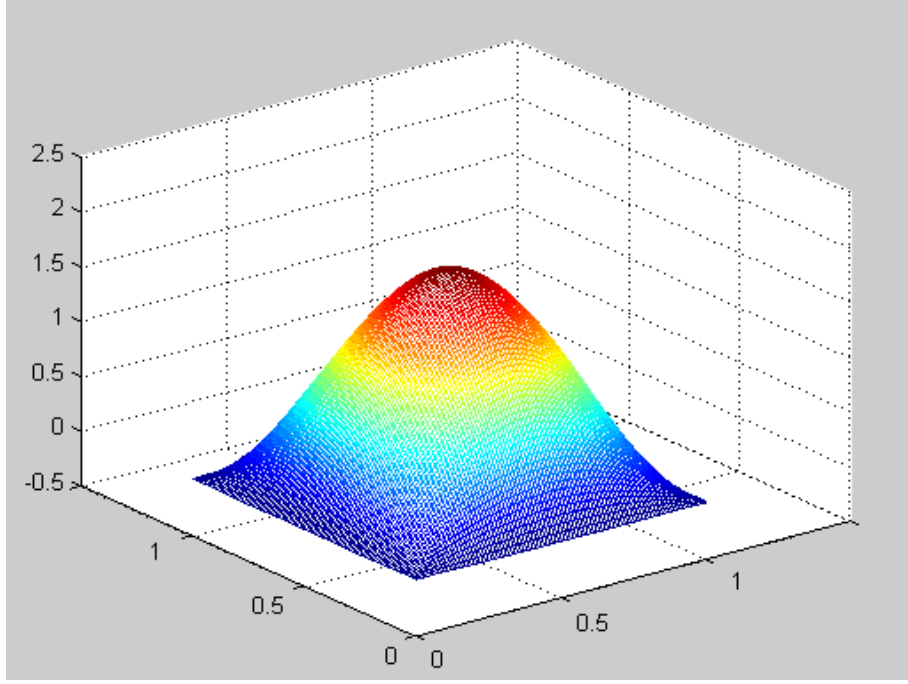
Sayısal çözümler Şekil 43 ve 45’de genel dağılım olarak gösterilmiştir. Ayrıca Şekil 44 ve 46’da merkez eksen üzerindeki değişim ( $y=0.5m$ ) eğri olarak da gösterilmiştir.

Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yöntemi ile gerçekleştirilen çalışmalarda şekil fonksiyonu sayısı düşük tutulmuştur. Bunun sebebi, yöntemin yakınsama etkinliğinin ifade edilmek istenmesidir. Şekil 44’de 35 düğüm için elde edilen çözüm için hata değeri %6 mertebesindedir. Düğüm sayısının iki kata yakın artışı ile hata oranında da benzer davranış elde edilmiş ve hata oranı %3 mertebelerine gerilemiştir.

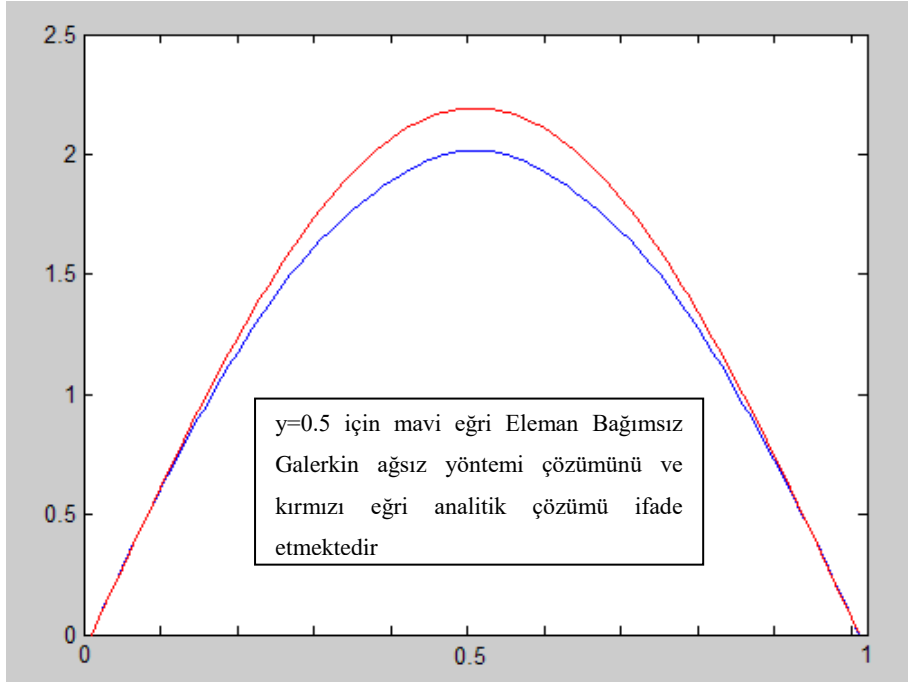


Şekil 42. Isı transferi probleminin analitik çözümü

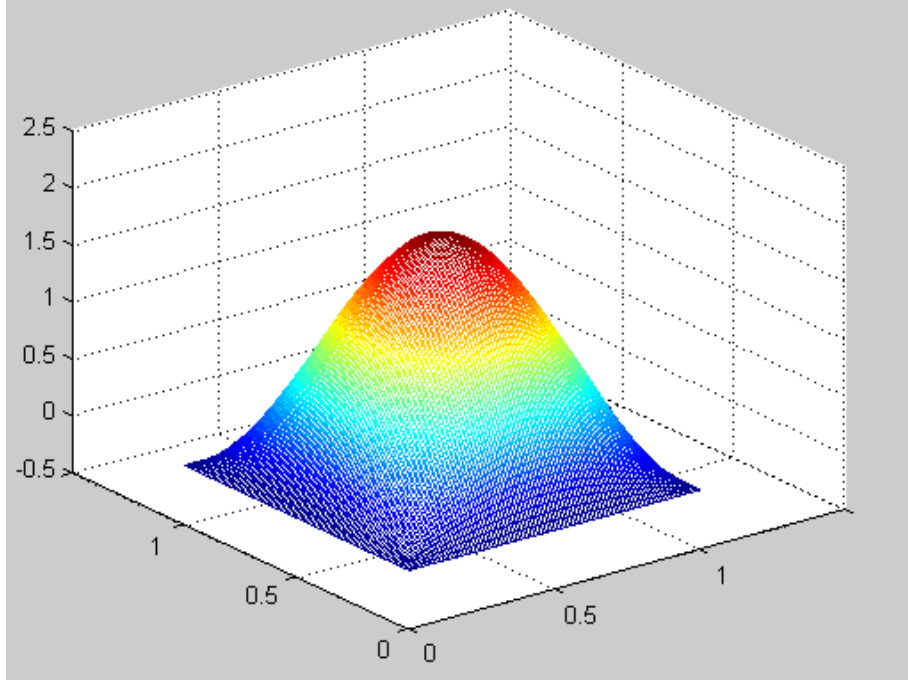




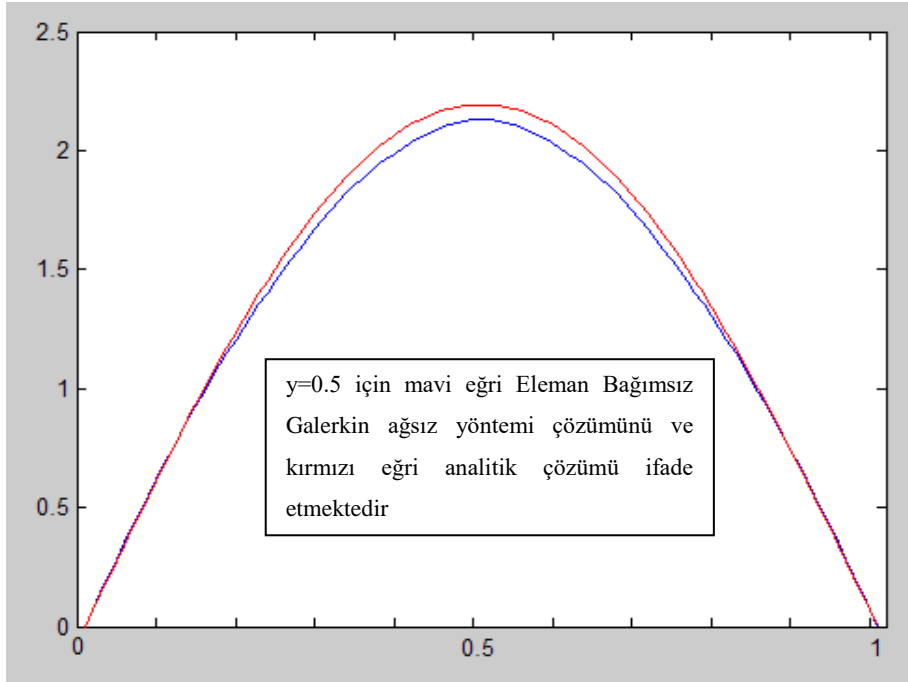
Şekil 43. (7x5) düğüm ile Eleman Bağımsız Galerkin yöntemi çözümü



Şekil 44. (7x5) düğüm ile Sıcaklık dağılımı



Şekil 45. (11x7) düğüm ile Eleman Bağımsız Galerkin yöntemi çözümü



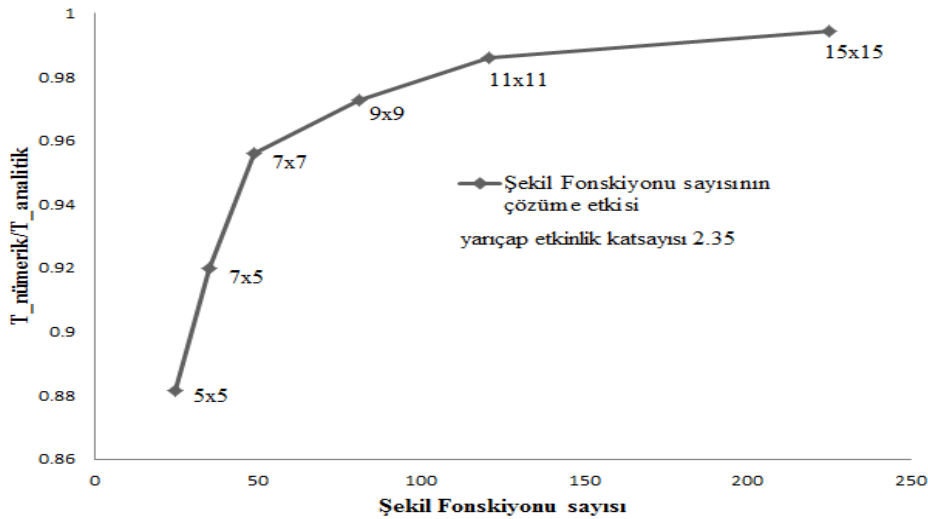
Şekil 46. (11x7) düğüm ile sıcaklık dağılımı

Sayısal analiz sürecinde elde edilen Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yöntemi çözümü ile analitik çözüm arasında hata değerleri denklem (93)' te tanımlanan bağıl hata ifadesi kullanılarak ifade edilir [61].

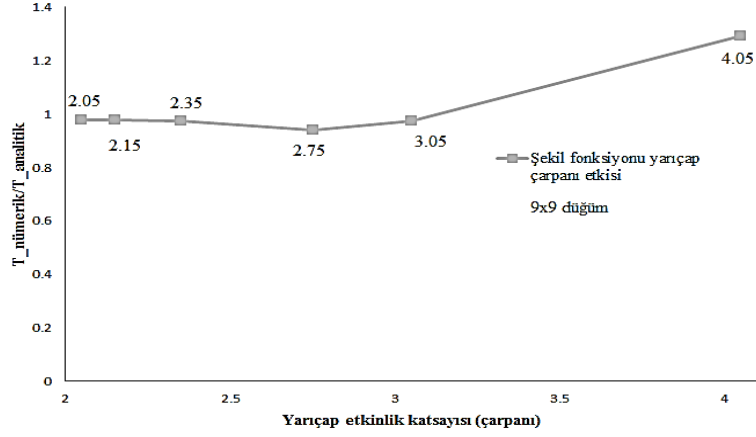
$$Hata = \frac{|Analitik \text{ Çözüm} - Nümerik \text{ Çözüm}|}{Nümerik \text{ Çözüm}} \quad (93)$$

Şekil 43 ve 45’de elde edilen Eleman Bağımsız Galerkin yöntemi çözümleri için bağıl hata değeri 35 ve 77 düğüm için sırasıyla 0.0599 ve 0.0286 olarak elde edilmiştir.

Eleman Bağımsız Galerkin ağırsız yöntemi için ayrıca çözüm bölgesinde tanımlanan şekil fonksiyonu sayısının etkinliği 2,35’ lik sabit etkinlik yarıçapı katsayısı kullanılarak farklı yoğunluktaki şekil fonksiyonu sayısı için kontrol edilmiş ve sonuçlar Şekil 47’ de ifade edilmiştir. Ayrıca etkinlik yarıçap çarpanı ifadesinin sayısal analiz çözümleri üzerindeki etkisi, çözüm bölgesinde tanımlanmış 9x9 düğüm yapısı için farklı katsayılar kullanılarak ifade edilmiştir. Sonuçlar Şekil 48’ de analitik çözümün maksimum değeri ile sayısal analizden elde edilen çözümün maksimum değeri kıyaslanarak ifade edilmiştir. Şekil fonksiyonu etkinlik yarıçapının en düşük değeri ise çözüm sürecine gerçekleştirilmesi düşünülen yaklaşım (lineer, ikinci mertebeden...) ile ilgilidir. Yaklaşımın mertebesi şekil fonksiyonu etkinlik yarıçapı içerisinde tanımlı olması gereken en az sayıdaki düğüm noktasını tanımlamaktadır. Bu yapı kontrol edilmezse yarıçap çarpanı değerlerinin azaltılması sayısal çözümün analitik çözümden iraksamasına neden olacaktır.



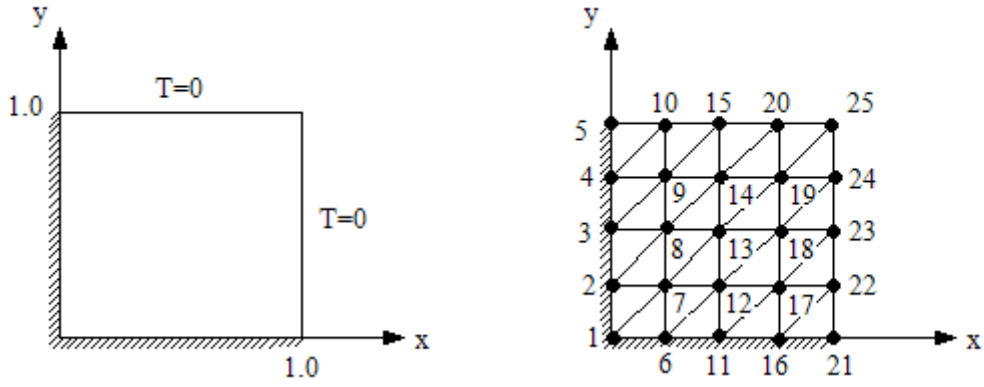
Şekil 47. Eleman Bağımsız Galerkin ağırsız yöntemi için düğüm sayısının çözüm üzerindeki etkisi



Şekil 48. Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yöntemi için yarıçap çarpanının çözüm üzerindeki etkisi

Şekil 48 incelendiğinde ağsız yöntemler çözüm sürecinde Galerkin yaklaşımı ve kapsayan kutucuk yöntemi ile sayısal integrasyonun gerçekleştirilmesi koşulları altında yarıçap çarpanı katsayısı için en uygun değer 2,05 ile 3,05 arasında olduğu görülmektedir. Yarıçap çarpanı katsayısı artırılması durumunda sayısal sonuçların analitik çözümden sapmalar meydana geldiği görülmüştür.

Isı transferi problemi için elde edilen çözümlerin tamamı lineer yaklaşım kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Elde edilen çözümler ikinci mertebeden şekil fonksiyonları kullanılarak 35 (7x5) düğüm kullanılarak güncellenmiştir. İkinci mertebeden şekil fonksiyonlarının kullanıldığı yaklaşım için sayısal integrasyon işleminde 15 adet gauss noktası ve  $k=2.35$  olacak şekilde yarıçap çarpanı değeri kullanılarak sonuçlar güncellenmiştir. İkinci mertebeden şekil fonksiyonlarının kullanımı sonlu elemanlar yaklaşımı ile kıyaslandığında p tipi yaklaşım olarak ifade edilebilir [1]. Bu yaklaşım sonucunda ısı transferi problemi için elde edilen bağıl hata değeri 0.06900211' dir. Bu değer lineer yaklaşım ile elde edilen çözüm için düğüm sayısındaki artış, yani h tipi iyileştirme sayısal çözümü ile kıyaslandığında daha etkili sonuçlar sağlamaktadır [1]. Zaman integrasyon yöntemi olarak da Crank-Nicolson zaman integrasyon yöntemi ile Galerkin zaman integrasyon yöntemleri kıyaslandığında, Crank-Nicolson yöntemi ile hata değeri 0.0602 olarak elde edilirken Galerkin zaman integrasyon yöntemi kullanıldığında hata değeri 0.0459 olarak elde edilmiştir.



Şekil 49. Eleman Bağımsız Galerkin ve Sonlu Elemanlar yöntemleri için karşılaştırma Problemi [3]

Sonlu elemanlar yöntemi ile Eleman Bağımsız Galerkin yöntemi kullanılarak elde edilen çözümler göz önüne alınan problem için verilmiş olan analitik çözüm değerleri ile kıyaslanmıştır. Literatürde problem için kullanılacak olan sınır koşulları ve sonlu elemanlar geometrisi Şekil 49’ da gösterilmiştir. Bu problem için çözümlerin tamamı  $t=1$  saniye dikkate alınarak ifade edilmiştir. Isı transferi problemi için gerçekleştirilen çözümlerde Crank-Nicolson ve Galerkin zaman integrasyon yöntemleri kullanılmıştır. Problem çözümünde yarıçap çarpanı değeri, ağırsız yöntemler şekil fonksiyonlarının tanımlı olması için gereken asgari şartları sağlayacak şekilde seçilerek çözümler gerçekleştirilmiştir.

Tablo 4 ve tablo 5’ te her iki yöntem sonuçlar açısından kıyaslandığında ısı transferi problemi için literatürde verilmiş olan analitik çözüm değerlerine Eleman bağımsız Galerkin ağırsız yöntemi için Crank-Nicholson yöntemi Galerkin yöntemi ile kıyaslandığında daha yakınsak olduğu tespit edilmiştir. En azından seçilen küçük etkinlik yarıçapı çarpanı değerleri için bu durum geçerlidir. Bu sebeple tez çalışması kapsamında zaman integrasyon yöntemi olarak Crank-Nicolson yöntemi tercih edilmiştir.

Eleman Bağımsız Galerkin yöntemi kullanılarak çözüm süreci araştırılan bir diğer problem de zar (membran) titreşimlerinin ifade edildiği denklem takımıdır. Membran titreşimi problemi de genel denklem takımı incelendiğinde ısı transferi problemlerine benzer olarak tek değişkenli diferansiyel denklem takımı grubuna dâhildir. Zar (membran) titreşimleri çözüm bölgesi içinde denklem (94)’ te ifade edilmiştir.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\pi^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (94)$$

Tablo 4. Eleman Bağımsız Galerkin Ağsız Yöntemi ve Sonlu Elemanlar Çözümlerinin Karşılaştırılması. Çözümlerde Crank-Nicolson Zaman integrasyonu kullanılmıştır [3]

Düğüm	Analitik Çözüm	EBGAY (6x6) k=1.688	SEY (Steady)	EBGAY (5x5) k=1.75	EBGAY (5x5) k=1.35	EBGAY (5x5) k=1.25
1	0.2947	0.2926	0.3013	0.2926	0.2941	0.2950
2	0.2789	0.2772	0.2805	0.2774	0.2788	0.2795
3	0.2293	0.2275	0.2292	0.2271	0.2295	0.2300
4	0.1397	0.1402	0.1392	0.1405	0.1403	0.1404
6	0.2789	0.2772	0.2805	0.2774	0.2788	0.2795
7	0.2642	0.2629	0.2645	0.2629	0.2646	0.2651
8	0.2178	0.2165	0.2172	0.2161	0.2183	0.2188
9	0.1333	0.1333	0.1327	0.1329	0.1342	0.1342
11	0.2293	0.2275	0.2292	0.2271	0.2295	0.2300
12	0.2178	0.2165	0.2172	0.2161	0.2183	0.2188
13	0.1811	0.1796	0.1801	0.1789	0.1819	0.1823
14	0.1127	0.1127	0.1117	0.1123	0.1138	0.1139
16	0.1397	0.1402	0.1392	0.1405	0.1403	0.1404
17	0.1333	0.1333	0.1327	0.1329	0.1342	0.1342
18	0.1127	0.1127	0.1117	0.1123	0.1138	0.1139
19	0.0728	0.0742	0.0715	0.0737	0.0746	0.0747

Zar (membran) denklem takımı için verilen analitik çözüm denklem (95)' te ifade edilmiştir. Zar titreşim probleminin analitik çözümü Şekil 50' de gösterilmiştir. Analitik çözüm ile Eleman Bağımsız Galerkin yöntemi kullanılarak gerçekleştirilen sayısal analiz çözüm süreçleri Şekil 51 ve Şekil 53' te ifade edilmiştir [57].

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{64}{\pi^6 (2k+1)^2 (2l+1)^2} \sin((2k+1)\pi x) \sin((2l+1)\pi y) \dots$$

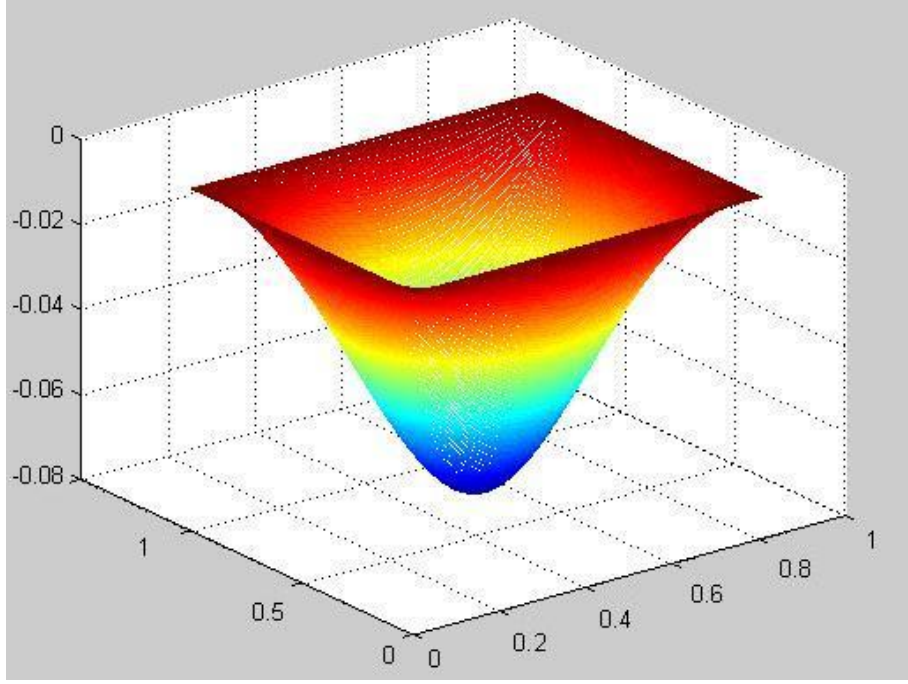
$$\dots \cos(\sqrt{(2k+1)^2 + (2l+1)^2} t) \quad (95)$$

Eleman Bağımsız Galerkin çözüm yöntemi ile zar (membran) problemi 35 (7x5) ve 77 (11x7) düğüm kullanılarak çözümler üretilmiştir. Gerçekleştirilen çözümlerde zaman integrasyon yöntemi olarak Crank-Nicolson yöntemi kullanılmıştır.

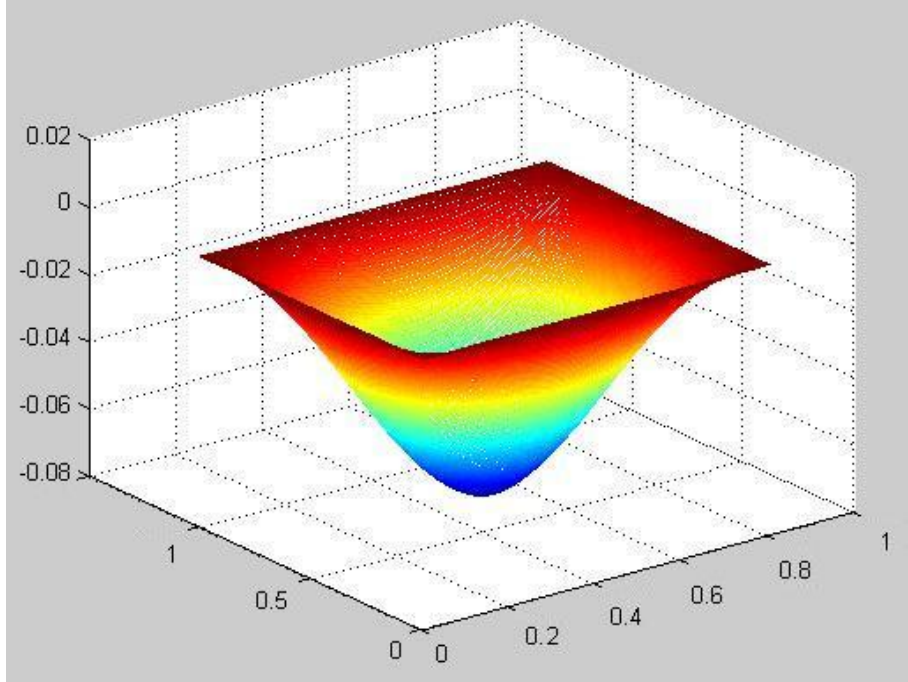
Zar titreşim problemi için verilen analitik çözüm ve sayısal analiz çözümleri  $t=2.04$  saniye için elde edilmiştir. Elde edilen çözümler için çözüm bölgesi merkez ekseninde ( $y=0.5m$ ) hem analitik hem de Eleman Bağımsız Galerkin yöntemi çözümleri Şekil 52' de grafik olarak ifade edilmiştir.

Tablo 5. Eleman Bağımsız Galerkin Ağsız Yöntemi ve Sonlu Elemanlar Çözümlerinin Karşılaştırılması. Çözümlerde Galerkin integrasyonu kullanılmıştır [3]

Düğüm	Analitik Çözüm	EBGAY (6x6) k=1.688	SEY (Steady)	EBGAY (5x5) k=1.35	EBGAY (5x5) k=1.25
1	0.2947	0.2905	0.3013	0.2940	0.2949
2	0.2789	0.2771	0.2805	0.2787	0.2794
3	0.2293	0.2275	0.2292	0.2294	0.2299
4	0.1397	0.1401	0.1392	0.1403	0.1404
6	0.2789	0.2771	0.2805	0.2787	0.2794
7	0.2642	0.2629	0.2645	0.2645	0.2650
8	0.2178	0.2164	0.2172	0.2183	0.2187
9	0.1333	0.1332	0.1327	0.1341	0.1342
11	0.2293	0.2275	0.2292	0.2294	0.2299
12	0.2178	0.2164	0.2172	0.2183	0.2187
13	0.1811	0.1796	0.1801	0.1818	0.1823
14	0.1127	0.1127	0.1117	0.1137	0.1139
16	0.1397	0.1401	0.1392	0.1403	0.1404
17	0.1333	0.1332	0.1327	0.1341	0.1342
18	0.1127	0.1127	0.1117	0.1137	0.1139
19	0.0728	0.0742	0.0715	0.0746	0.0747

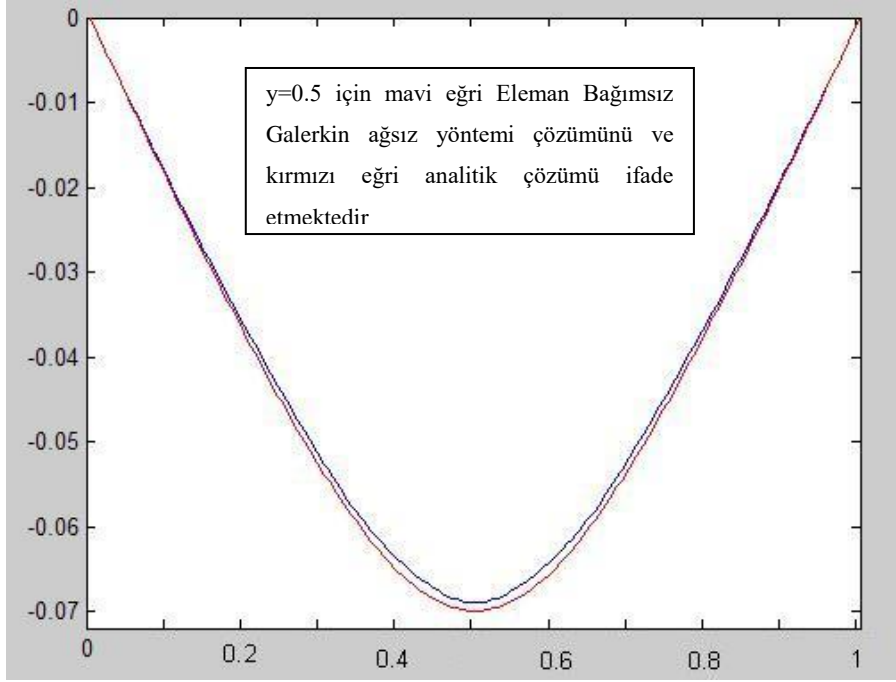


Şekil 50. Membran probleminin  $t=2.04$  saniyedeki analitik çözümü



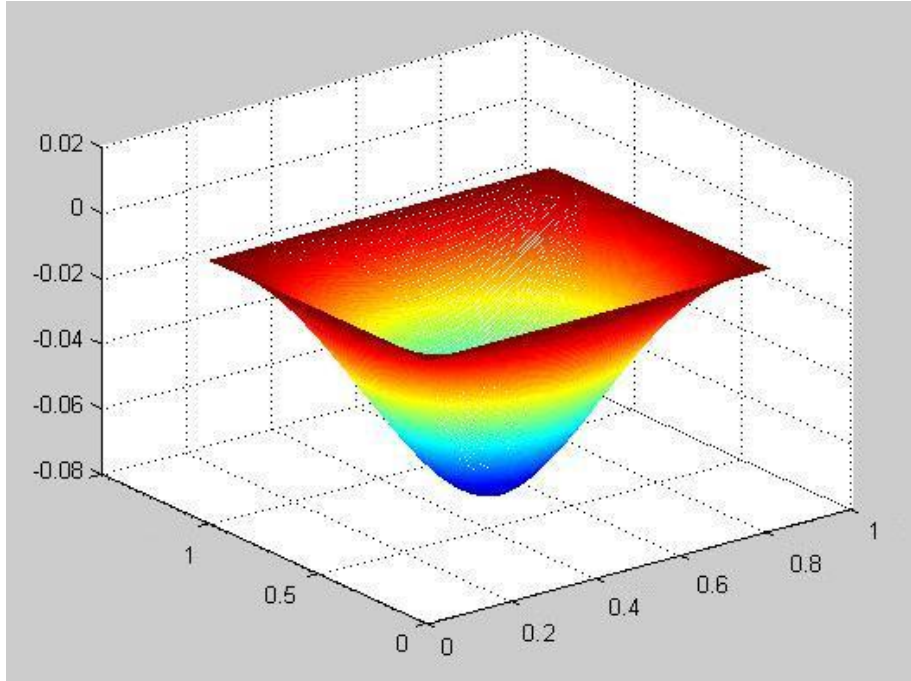
Şekil 51.  $(7 \times 5)$  düğüm ile  $t=2.04$  saniyedeki Eleman Bağımsız Galerkin yöntemi ile eğilme deformasyonu çözümü





Şekil 52. (7x5) düğüm ile eğilme deformasyonu

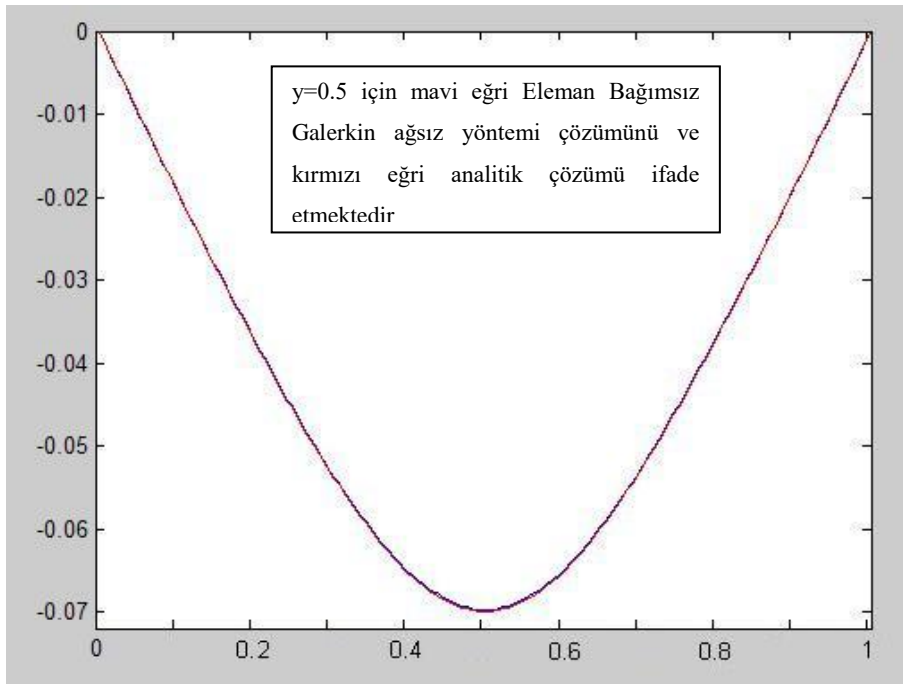
Sayısal analiz sürecinde kullanılan düğüm sayısı 77 (11x7)' ye yükseltildiğinde elde edilen sayısal ve analitik çözüm Şekil 54' te gösterilmiştir.



Şekil 53. (11x7) düğüm ile Eleman Bağımsız Galerkin yöntemi ile eğilme deformasyonu çözümü

Elde edilen çözümler üzerinde hata değerleri sayısal çözüm yöntemlerinde ana hatları ile ifade edilen süreklilik yaklaşımı artan eleman sayısı ile gerçeğe daha yakın bir biçimde ifade edildiğinden sayısal analiz sonucunun da artan eleman sayısı ile orantılı olarak artması beklenmektedir. Zar (membran) titreşimi ve ısı transferi problemleri değerlendirildiğinde artan eleman sayısı ile birlikte sayısal analiz sonuçları üzerindeki hata dağılımı değerleri de beklenenden daha düşük değerlere ulaşmaktadır.

Zar (membran) problemi için 77 düğüm kullanılarak gerçekleştirilen sayısal yaklaşım sonucunda bağıl hata değeri  $4.02522e-004$  olarak elde edilmiştir.



Şekil 54. (11x7) düğüm ile eğilme deformasyonu

## 2.6. Plakaların Eğilme Davranışının Matematik Modeli ve Eleman Bağımsız Galerkin Ağsız Yöntemi

### 2.6.1 Plakaların Eğilmesi ve Sayısal Modelleme

Plaka kelimesi anlam olarak düzlem üzerindeki iki kenarı yanal kenar ile kıyaslandığında daha uzun olan yapıları tanımlamaktadır. Geometrik olarak plakalar düzlem elastik geometriler ile davranış olarak benzer olmasına rağmen düzleme dik doğrultuda yükleri taşımaktadır [3, 5]. Plaka modelleri, çubuk modelinin düzlemsel ifadesi

olarak nitelendirilebilir. Literatürde plakaların sayısal modeli için pek çok yöntem önerilmiştir. Bu yöntemlerden klasik plaka teorisi ve birinci mertebeden kayma deformasyonu teorisi tez kapsamında dikkate alınmıştır. Klasik plaka teorisi Euler-Bernoulli çubuk modelinin düzlemlere ifade edilmiş halidir. Bu yöntem Kirchhoff Plaka Teorisi olarak da bilinmektedir. Birinci mertebeden kayma deformasyonu teorisi ise Timoshenko çubuk teorisinin düzlemde ifade edilmiş halidir ve aynı zamanda Mindlin-Reissner Plaka teorisi olarak da bilinmektedir.

Klasik plaka teorisinde aşağıda ifade edilen kabuller altında plakalar için sayısal model oluşturulmaktadır [3, 62, 64, 65].

- a. Plaka düzlemine başlangıçta dik olan düzlemler, deformasyon sonrasında da plaka düzlemine dik kalacaktır. Bu durumda düzleme dik doğrultudaki kayma şekil değişimi değerleri sıfır olacaktır.
- b. Plaka orta düzleminde meydana gelecek olan deformasyon plaka kalınlığı ile kıyaslandığında çok küçük kalır.
- c. Eğilme deformasyonu sonrasında plaka orta düzleminde herhangi bir şekil değişimi meydana gelmemektedir.
- d. Plaka düzlemine dik doğrultuda meydana gelen gerilme değerleri ihmal edilebilecek düzeyde küçük olmalıdır. Tekil yük uygulanması durumunda yük çevresinde bu durum geçerliliğini yitirmektedir.

Bu kabuller denklem (96)' da belirtilen şekil değişimi ifadelerini tanımlamaktadır [62-64].

$$\varepsilon_z = 0, \gamma_{yz} = 0, \gamma_{xz} = 0 \quad (96)$$

Klasik plaka teorisinde, plaka eğilme probleminin sayısal modelinin oluşturulabilmesi için deformasyon geometrisinin tanımlanması gerekmektedir. Klasik plaka teorisi için yapılan deformasyon kabulleri ışığında plaka üzerinde oluşması beklenen şekil değişimi ve deformasyon arasındaki ilişki denklem (97)' de ifade edilmiştir. Denklem (97) aynı zamanda yapı üzerinde meydana gelen düzlemsel şekil değişimini ifade etmektedir.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\
\gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0
\end{aligned} \tag{97}$$

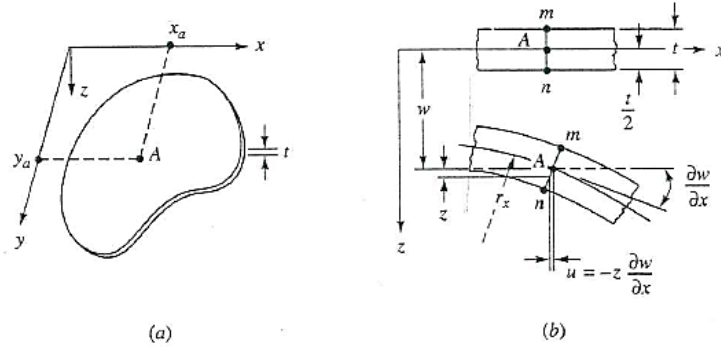
Denklem (97) ile ifade edilen denklem takımı plakalar için kinematik denklemler olarak da bilinmektedir. Kinematik denklem takımı olarak ifade edilmesinin sebebi ise denklemlerde sadece şekil değişimi ifadelerinin tanımlanıp deformasyon sebebine yönelik herhangi bir tanımlamanın yapılmamasıdır [62]. Kinematik denklemlerde düzlem şekil değişimi için tanımlanan koşullar incelendiğinde, plakaların ‘ $w$ ’ eğilme deformasyonu  $z$  eksenindeki deformasyondan bağımsız olup düzlem içinde değişmektedir. Bu durum denklem (98)’ de ifade edilmiştir.

$$w = w(x, y) \tag{98}$$

Denklem (97)’ de belirtilen denklem takımında  $\gamma_{xz}$  ve  $\gamma_{yz}$  ifadelerinin integralleri hesaplandığında  $u$  ve  $v$  deformasyonu için plaka eğilmesi ile ilişkili olarak tanımlama gerçekleştirilmiş olur.

$$\begin{aligned}
u &= -z \frac{\partial w}{\partial x} + c_0 \\
v &= -z \frac{\partial w}{\partial y} + d_0
\end{aligned} \tag{99}$$

Denklem (99)’ da tanımlanmış olan  $c_0$  ve  $d_0$  ifadeleri integrasyon sabitleri olup,  $u$  ve  $v$  yer değiştirmeleri için plaka üzerindeki başlangıç konumunu ifade etmektedir. Matematik model oluşturulurken başlangıç konumu olarak plaka merkezi dikkate alınacaktır ve bu iki değer sıfıra eşit kabul edilecektir.



Şekil 55. Düzlemde tanımlanmış olan plaka geometrisi a) Deformasyon öncesi geometri, b) Deformasyon sonrası geometri [62]

Plaka üzerinde meydana gelen deformasyon ve geometrik ifadesi Şekil 55' te tanımlanmıştır. Denklem (99)' da elde edilen deformasyon davranışı bilgileri kinematik denklemlerde yerine yazıldığında plaka üzerinde meydana gelen şekil değişimi değerleri plaka eğilmesi cinsinden ifade edilmiş olacaktır.

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (100)$$

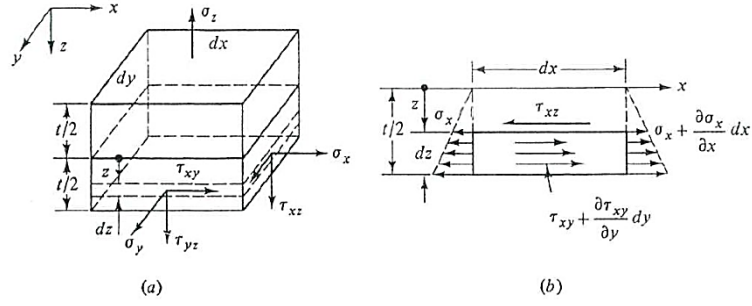
Denklem (100) ile plaka eğilme deformasyonu ' $w$ ' etkisinde plaka üzerinde meydana gelen şekil değişimi ifadeleri elde dilmektedir.

Plaka eğilme deformasyonu için meydana gelen eğrilik yarıçapı ile plaka eğilme deformasyonu arasındaki ilişki denklem (101)' de ifade edilmiştir. Eğrilik yarıçapı plaka eğilme deformasyonu esnasında meydana gelen eğrinin açısı ve uzaklık ile ilişkisini ifade etmektedir.

$$\frac{1}{r_x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \kappa_x$$

$$\frac{1}{r_y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \kappa_y$$

$$\frac{1}{r_{xy}} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \kappa_{xy} \quad (101)$$



Şekil 56. Plaka kesitinde meydana gelen gerilme dağılımı [62]

Denklem (101)' e kadar tanımlanmış olan kinematik denklemler ve deformasyon davranışında herhangi bir malzeme özelliği kullanılmadığından denklem takımları hem lineer hem de lineer olmayan problemler için ortak olarak kullanılabilir.

Eğilme deformasyonu sonucunda plaka üzerinde meydana gelecek olan şekil değişimi ve gerilmeler arasındaki ilişki bünye denklemleri ile tanımlanır.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\
 \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\
 \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_y + \sigma_x)] \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\
 \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}
 \end{aligned} \tag{102}$$

Bünye denklemlerinde kullanılan sembollerden  $E$  malzemenin elastisite modülü,  $\nu$  poisson oranı ve  $G$  de kayma modülü olarak nitelendirilmektedir. Malzemenin elastisite modülü ile kayma modülü arasındaki ilişki denklem (103) ile ifade edilir.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{103}$$

Plakalar için denklem (96)' da ifade edilmiş olan şekil değişimi tanımlamaları uygulandığında yapı üzerindeki gerilme ve şekil değişimi tanımlamaları düzlem üzerinde

ifade edilmiş olmaktadır. Bu durumda gerilme şekil değişimi denklemleri denklem (104)'deki hali almaktadır.

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}\end{aligned}\quad (104)$$

Denklem (104)'te ifade edilen düzlem gerilme hali gerilme ve şekil değişimi ilişkisini tanımlamaktadır. Bu tanımlamada şekil değişimi ifadeleri eğilme deformasyonu türünden ifade edildiğinde gerilme değerleri eğilme deformasyonu cinsinden ifade edilmiş olur.

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{zE}{(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\ \sigma_y &= -\frac{zE}{(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\ \tau_{xy} &= -\frac{zE}{(1+\nu)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)\end{aligned}\quad (105)$$

Meydana gelen gerilme dağılımı sonucunda plaka üzerinde meydana gelecek olan moment ve kesme kuvveti bileşenleri denklem (106)'da ifade edilmiştir.

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z \cdot dz \\ \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} &= \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz\end{aligned}\quad (106)$$

Denklem (106)'da kesme kuvveti için elde edilen reaksiyon kuvvetleri incelendiğinde sayısal modelleme sürecinde denklem (96)'da yapılan düzlem şekil değişimi kabulüne bağlı olarak şekil değişimi ifadeleri sıfırdır. Bu sebeple kesme kuvvetleri de sıfıra eşit olarak elde edilmektedir. Ancak plakalar, plaka düzlemine dik doğrultudaki kuvvetleri taşıdıklarından kesme kuvvetlerinin gerçekçi değerler olarak elde edilebilmesi için denklem (106)'da ifade edildiği gibi  $\tau_{xz}$  ve  $\tau_{yz}$  gerilmeleri sıfır

olmamalıdır. Kesme kuvvetleri elde edilirken kullanılacak olan  $\tau_{xz}$  ve  $\tau_{yz}$  kayma gerilmesi değerleri gerilme denge denklemleri kullanılarak elde edilebilir [3, 65, 66].

x eksenini için gerilme denge denklemi;

Gerilme denge denklemleri yapı üzerine etkiyen herhangi bir hacim kuvveti olmaması durumu için elde edilmiştir.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (107)$$

Denklem (107)' de  $\sigma_x$  ve  $\tau_{xy}$  değerleri bilindiğinden denklemde yerine yazıldığında,

$$-\frac{zE}{(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{zE}{(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (108)$$

elde edilir. Denklem (108)' de düzenleme yaparak plaka üzerinde meydana gelecek  $\tau_{xz}$  kayma gerilmesi değeri için analitik ifade denklem (109)' da ifade edilmiş olur.

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{zE}{(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (109)$$

Denklem (109) integrali hesaplandığında kesme kuvveti için gerekli olan  $\tau_{xz}$  kayma gerilme hesaplanmış olur.

$$\int_z^{t/2} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz = \int_z^{t/2} \frac{zE}{(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dz$$

$$\tau_{xz} \left( \frac{t}{2} \right) - \tau_{xz}(z) = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left( \frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (110)$$

Kayma gerilmesi plakanın üst yüzeyinde sıfır olacağından denklem (110)' da yer alan birinci terim sıfırlanmış olur ve kalınlık boyunca kesitte herhangi bir noktada meydana gelen kayma gerilmesi değeri denklem (110) ile ifade edilmiş olacaktır. Denklem (111) ile kesme kuvveti ve eğilme momentleri arasındaki ilişkiden faydalanarak denklem (110) daha basit bir halde ifade edilecektir [3, 65, 66].



$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$$

$$Q_x = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$$

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (111)$$

Denklem (111)' de tanımlanan D simgesi plakanın eğilme rijitliği olarak tanımlanmaktadır. Eğilme rijitliği matematiksel olarak denklem (112)' de tanımlanmıştır.

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (112)$$

Denklem (110) ve (111) denklem (112)' de yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler gerçekleştirildiğinde kayma gerilmesi için daha basit bir ifade elde edilmiş olacaktır. Kayma gerilmesi için basitleştirilmiş yapı denklem (113)' te ifade edilmiştir.

$$\tau_{xz} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left( \frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) \frac{Q_x}{D}$$

$$\tau_{xz} = \frac{12Q_x}{t^3} \left( \frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right)$$

$$\tau_{xz} = \frac{3Q_x}{2t} \left( 1 - \left( \frac{2z}{t} \right)^2 \right) \quad (113)$$

Gerilme denge denklemleri sırasıyla y ve z doğrultularında da tekrarlanarak benzer işlem adımları takip edilmesi durumunda  $\tau_{yz}$  ve  $\sigma_z$  ifadeleri de basitleştirilmiş formda elde edilebilir.

Burada işlem adımları tekrarlanmadan  $\tau_{yz}$  kayma gerilmesi ve  $\sigma_z$  normal gerilme için elde edilecek sonuçlar sırasıyla denklem (114) ve denklem (115)' te verilecektir.

$$\tau_{yz} = \frac{3Q_y}{2t} \left( 1 - \left( \frac{2z}{t} \right)^2 \right) \quad (114)$$

$$\sigma_z = \frac{3}{4}q\left(\frac{2}{3} + \frac{2z}{t} - \frac{1}{3}\left(\frac{2z}{t}\right)^3\right) \quad (115)$$

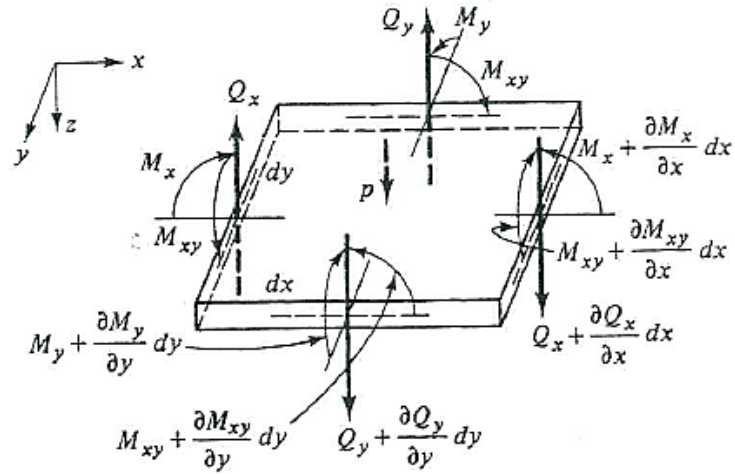
Denklem (115)' te tanımlanan 'q' ifadesi  $\sigma_z(t/2)$  normal gerilmesinin plaka üst yüzeyindeki değerini temsil etmektedir.

Klasik plaka teorisinde başlangıç aşamasında gerçekleştirilen düzlemsel şekil değişimi kabulü ile  $\sigma_z$  normal gerilmesi,  $\tau_{xz}$ , ve  $\tau_{yz}$  kayma gerilmeleri gerilme denge denklemlerinden istifade ederek tanımları denklem (113) ile denklem (115) arasında gerçekleştirilmiştir

Plaka düzleminde kesme kuvveti ve eğilme momentleri eğilme deformasyonu cinsinden denklem (105) ve (106)' dan istifade ederek hesaplanmaktadır. Kesme kuvveti için eğilme deformasyonu cinsinden karşılığı denklem (111)' de tanımlanmıştı. Bu aşamada eğilme momentlerinin eğilme deformasyonu 'w' cinsinden ifadesi denklem (116)' da tanımlanacaktır.

$$\begin{aligned} M_x &= -D(\kappa_x + \nu\kappa_y) = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\ M_y &= -D(\kappa_y + \nu\kappa_x) = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\ M_{xy} &= -D(1-\nu)\kappa_{xy} = -\frac{Et^3}{12(1+\nu)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right) \end{aligned} \quad (116)$$

Plaka üzerinde meydana gelen eğilme momentleri ve kesme kuvvetleri x, y ve z doğrultularında yazılacak olan denge denklemleri kullanılarak ifade edildiğinde plakalar için eğilme davranışı matematik olarak modellenmiş olacaktır. Şekil 57' de plaka düzlemi üzerinde reaksiyon kuvvetlerinin pozitif doğrultuları dikkate alınarak eğilme momentleri ve kesme kuvvetleri ifade edilmiştir.



Şekil 57. Birim plaka elemanında kesme kuvveti ve moment dağılımı [62]

Şekil 57' de yer alan birim plaka elemanı üzerinde düşey doğrultuda ( $z$  doğrultusu) denge denkleminin yazılması durumunda plaka üzerinde kesme kuvvetleri ve yapıya etkileyen yükleme arasındaki ifade elde edilmiş olacaktır.

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} \cdot dx \cdot dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \cdot dx \cdot dy + p \cdot dx \cdot dy = 0 \quad (117)$$

Denklem (117)' de gerekli sadeleştirmeler gerçekleştirildiğinde düşey doğrultudaki kuvvet dengesi elde edilmiş olacaktır

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0 \quad (118)$$

Birim eleman üzerinde  $x$  eksenini için moment dengesi yazıldığında,

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \cdot dx \cdot dy + \frac{\partial M_y}{\partial y} \cdot dx \cdot dy - Q_y \cdot dx \cdot dy = 0 \quad (119)$$

elde edilir. Denklem (119)' da gerekli sadeleştirmeler gerçekleştirildiğinde  $x$  eksenindeki moment dengesi elde edilmiş olacaktır.

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (120)$$

Benzer işlemler  $y$  eksenini için moment dengesi alınarak tekrarlanması durumunda  $y$  eksenini için moment dengesi denklemi elde edilmiş olacaktır.

$$\frac{dM_x}{dx} + \frac{dM_{xy}}{dy} - Q_x = 0 \quad (121)$$

Moment dengesi için oluşturulmuş olan denklem takımında  $Q_x$  ve  $Q_y$  ifadeleri için  $x$  ve  $y$  eksenindeki moment dengeleri dikkate alındığında eğilme momentleri cinsinden denklem (120) ve (121)' de elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar denklem (118)' de yerine yazıldığında plakaların eğilme deformasyonunu tanımlayacak olan diferansiyel denklem klasik plaka teorisi yaklaşımı kullanılarak elde edilmiş olacaktır.

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p \quad (122)$$

Denklem (122) momentler cinsinden eğilme deformasyonunu tanımlamaktadır. Plaka deformasyonu denklem (116)' dan istifade edilerek eğrilik yarıçapları cinsinden ifade edilebilir. Bu durumda eğilme deformasyonu için tanımlanmış olan diferansiyel denklem tamamen eğilme deformasyonu ' $w$ ' cinsinden ifade edilmiş olur.

$$\frac{\partial^2 \kappa_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \kappa_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \kappa_y}{\partial y^2} = \frac{p}{D} \quad (123)$$

Denklem (101)' de tanımlanan eğrilik yarıçapı ifadeleri  $\kappa_x$ ,  $\kappa_y$  ve  $\kappa_{xy}$  denklem (123)' te yerine yazıldığında klasik plaka teorisi ile plakaların eğilme deformasyonu ' $w$ ' türünden denklem (124)' te ifade edilmiş olur.

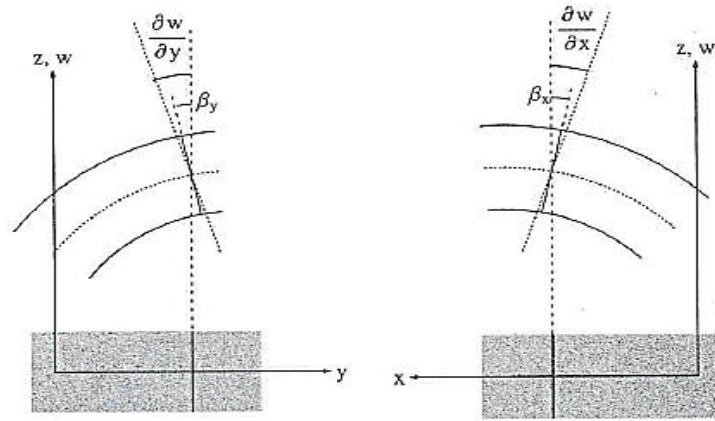
$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \quad (124)$$

Klasik plaka teorisi kabulleri kapsamında plakaların eğilme deformasyonu davranışı denklem (124) ile doğrudan eğilme deformasyonu ' $w$ ' ya bağlı olarak elde edilmiştir. Genel kapsam olarak klasik plaka teorisi (Kirchhoff Plaka Teorisi) kullanıldığında plaka kesitinde meydana gelen kayma gerilmelerinin etkisi dikkate alınmamaktadır. Böylece plaka orta eksenini deformasyon öncesinde dik olan kesitler deformasyon sonrasında dik

kaldığı kabulü yapılmaktadır. Birinci mertebeden kayma deformasyonu teorisinde (Mindlin-Reissner Plaka Teorisi) plaka kalınlığı boyunca meydana gelen kayma gerilmelerinin etkisi ihmal edilmeyip matematik modelde dikkate alınmaktadır. Bu durum Şekil 58’de özetlenmiştir.

Birinci mertebeden kayma deformasyonu teorisi için plaka düzlemindeki deformasyon değerleri denklem (125)’ te ifade edilmiştir.

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= -z\beta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= -z\beta_y(x, y) \\ w &= w(x, y) \end{aligned} \quad (125)$$



Şekil 58. Birinci mertebeden kayma teorisi için deformasyon kesiti [65]

Birinci mertebeden kayma deformasyonu teorisi ile klasik plaka teorisi arasında tanımlanan eğilme deformasyonları birbiri ile aynı kalırken düzlemsel deformasyonlar arasında farklılıklar söz konusudur. Birinci mertebeden plaka teorisinde düzlemsel deformasyonlarda  $\beta_x$  ve  $\beta_y$  kesit dönmeleri de dikkate alınmaktadır [3, 65, 67].

Denklem (125)’ te tanımlanan deformasyon değerlerinden faydalanarak birinci mertebeden plaka teorisi için şekil değişimi deformasyon denklemleri, kinematik denklemler, denklem (126)’ da ifade edilmiştir.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -z \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = -z \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y \right) \\
\gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -z \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \beta_x \right)
\end{aligned} \tag{126}$$

Şekil değişimi gerilme arasındaki ilişki klasik plaka teorisinde olduğu gibi bünye denklemlerinden istifade ederek tanımlanmaktadır. Klasik plaka teorisinde,  $\gamma_{xz}$  ve  $\gamma_{yz}$  kayma şekil değişimi terimleri düzlemsel şekil değişimi kabulü ile ihmal edilmiş ve plakaların eğilme deformasyonunu temsil eden diferansiyel denklem elde edilirken bunların oluşturduğu etkiler dikkate alınmamaktadır. Bu sebeple matematik modelde kayma gerilmelerinin tanımlanabilmesi için üç boyutlu gerilme denge denklemlerinden istifade edilerek kayma gerilmeleri hesaplanmıştır. Birinci mertebeden kayma teorisi için kesit dönmeleri tanımlandığından kesme kuvvetlerinin etkisini denklem takımına dâhil etmek için ek bir işlem yapmaya gerek yoktur. Birinci mertebeden kayma teorisinde şekil değişimleri ile plaka düzleminde meydana gelecek olan gerilme dağılımları arasındaki ilişki denklem (127)' de bünye denklemleri kullanılarak tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \equiv -\frac{zE}{(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right) \\
\sigma_y &= \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \equiv -\frac{zE}{(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial \beta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \right) \\
\tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \equiv -zG \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \\
\tau_{yz} &= kG\gamma_{yz} \equiv kG \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y \right) \\
\tau_{xz} &= kG\gamma_{xz} \equiv kG \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \beta_x \right)
\end{aligned} \tag{127}$$

Denklem (127)' de yer alan 'k' katsayısı kayma gerilmesi düzeltme faktörü olarak tanımlanmaktadır. Plaka kesitinde meydana gelen kayma gerilmesi dağılımı ikinci mertebededir. Ancak eğilme deformasyonu için diferansiyel denklem çözümünden elde edilen kayma gerilmeleri kesitte üniform dağılım göstermektedir. Gerçekte oluşan durum ile sayısal çözüm arasındaki farklılığın giderilmesi için 'k' ile ifade edilen gerilme düzeltme faktörü denklem (127)' deki  $\tau_{xz}$  ve  $\tau_{yz}$  terimlerine ilave edilmiştir. Normal gerilme ve kayma gerilmeleri denklem (127)' de tanımlanmıştır. Elde edilen normal gerilme ve kayma gerilmesi değerleri kullanılarak moment ve kesme kuvveti ifadeleri denklem (128)' de birinci mertebeden kayma teorisi için tanımlanmaktadır.

$$\begin{aligned}
 Q_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} dz \equiv kGt \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \beta_x \right) \\
 Q_y &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz \equiv kGt \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y \right) \\
 M_x &= \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_x dz = -\frac{E}{(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right) \int_{-t/2}^{t/2} z^2 dz \equiv -D \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right) \\
 M_y &= \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_y dz = -\frac{E}{(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial \beta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \right) \int_{-t/2}^{t/2} z^2 dz \equiv -D \left( \frac{\partial \beta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \right) \\
 M_{xy} &= \int_{-t/2}^{t/2} z \tau_x dz = -G \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \int_{-t/2}^{t/2} z^2 dz \equiv -\frac{(1-\nu)D}{2} \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \quad (128)
 \end{aligned}$$

Plaka için denge denklemleri klasik plaka teorisi ve birinci mertebeden kayma gerilmesi teorisi için aynıdır. Plaka denge denklemleri bütünlük olması açısından toplu olarak denklem (129)' da ifade edilmiştir.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q &= 0 \\
 -Q_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} &= 0 \\
 -Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} &= 0 \quad (129)
 \end{aligned}$$

### 2.6.2. Klasik Plaka Teorisi ve Birinci Mertebeden Kayma Teorisi Denklemleri İçin Zayıf Formun Tanımlanması

Plaka deformasyonu denklemi için oluşturulacak olan zayıf form ağırsız yöntemler analizlerinin gerçekleştirilebilmesi aşamasında ilk basamağı teşkil etmektedir. Diferansiyel denklemler için zayıf form elde edilmesi aşamasında denklemin ana değişkeni, plaka eğilme deformasyonu, için sayısal çözümde tanımlanması gereken fonksiyonun mertebesinin düşürülmesini amaçlamaktadır.

#### 2.6.2.1. Klasik Plaka Teorisi İçin Zayıf Formun Elde Edilmesi

Klasik plaka teorisi kullanılarak sadece eğilme deformasyonu cinsinden ifade edilmiş olan denklem (124) referans alınarak zayıf form elde edilecektir. Denklem (124) için artık denklemi, denklem (130) ile ifade edilmiştir.

$$R = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{p}{D} \cong 0 \quad (130)$$

Denklem (130)' da yer alan 'R' ifadesi artık terim olarak ifade edilmektedir. Denklem yaklaşık olarak sifıra eşitlenmiştir. Bu durumun sebebi artık denkleminde eğilme fonksiyonu için sayısal çözümden elde edilecek olan yaklaşık fonksiyonun kullanılmasıdır. Böylece sayısal olarak araştırılan çözümde hata değerinin minimuma yakınsaması sağlanmış olacaktır.

Diferansiyel denklemin zayıf formunun elde edilmesi için uygulanacak olan ikinci aşamada artık denkleminin 'ψ' ağırlık fonksiyonu ile çarparak tüm düzlemde integrali hesaplanarak minimizasyon işlemi gerçekleştirilecektir.

$$\int \psi R dx dy = 0 \quad (131)$$

$$\int \psi \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{p}{D} \right) = 0 \quad (132)$$

$$\int \psi \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) dx dy - \int \psi \frac{p}{D} dx dy = 0 \quad (133)$$



Denklem (133)' te yer alan  $\int \psi \frac{p}{D} dx dy$  terimi plaka düzleminde uygulanan yükü ifade etmektedir.  $\int \psi \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) dx dy$  terimi ise plakanın uygulanan yüke karşı koyacağı mukavemetini temsil etmektedir ve denklemin zayıf formu elde edilirken plaka için elde edilecek olan katılık matrisleri ve sınır koşulları ifadeleri bu terimin kısmi integrasyonu sonucunda elde edilecektir.

$$\int \psi \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) dx dy = 0 \quad (134)$$

Denklem (134)' te yer alan birinci ve üçüncü terimler birbirinin aynısı olduğundan kısmi integrasyon işlemleri ve zayıf form bu terimlerden sadece biri için elde edilerek diğeri için türetilecektir.

*Denklem (136-2)' daki birinci terim için kısmi integrasyon işlemi,*

$$\int \psi \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) dx dy = 0 \quad (135)$$

Kısmi integrasyon işlemi denklem (136)' dan istifade edilerek gerçekleştirilecektir.

$$\int \frac{\partial}{\partial x} (fg) dx = \int \frac{\partial f}{\partial x} g dx + \int f \frac{\partial g}{\partial x} dx \quad (136)$$

Denklem (135)' te yer alan terimler için uygun ifadeler denklem (137)' de belirtilmiştir.

$$f = \psi$$

$$g = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \quad (137)$$

Birinci kısmi integrasyon sonucunda denklem (140-2) elde edilmektedir.

$$\int \frac{\partial}{\partial x} \left( \psi \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) dx = \int \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} dx + \int \psi \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) dx \quad (138)$$

Denklem (138)' de eşitliğin sağ tarafındaki birinci terim yine kısmi integrasyona tabi tutulacaktır.

$$\int \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} dx \quad (139)$$

Denklem (139) için kısmi integrasyon ifadeleri denklem (140)' ta tanımlanmıştır.

$$f = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$g = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (140)$$

Kısmi integrasyon değişkenleri denklem (136)' da yerlerine yazılması sonucunda ikinci kısmi integrasyon işlemi de tamamlanmış olacaktır.

$$\int \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx = \int \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx + \int \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} dx \quad (141)$$

Bu aşamada denklem (141)' de elde edilen sonuç denklem (138)' de yerine yazıldığında birinci terim için zayıf form elde edilmiş olacaktır. Zayıf form tanımlamasındaki temel amaç eğilme deformasyonu 'w' için tanımlanacak yaklaşımda fonksiyon mertebesinin düşürülmesidir. Uygulanan kısmi integrasyonlar sonucunda denklem (134)' te dördüncü mertebeden bir fonksiyon ile tanımlanabilen eğilme deformasyonu, denklem (141)' de ikinci mertebeden bir fonksiyon ile ifade edilebilmektedir. Denklem (142) her iki kısmi integrasyon işleminin toplam sonucunu ifade etmektedir.

$$\int \frac{\partial}{\partial x} \left( \psi \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) dx = \int \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx - \int \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx + \int \psi \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} dx \quad (142)$$

*Denklem (134)' te yer alan ikinci terim için kısmi integrasyon işlemi,*

$$\int \psi \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) dx dy = 0 \quad (143)$$

Kısmi integrasyon işleminde kullanılacak olan değişkenler denklem (144)' te ifade edilmiştir.

$$\begin{aligned} f &= \psi \\ g &= \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \end{aligned} \quad (144)$$

Tanımlanan değişkenler denklem (136)' da yerine yazılarak denklem (145) ile birinci kısmi integrasyonun sonucu elde edilmiş olacaktır.

$$\int \frac{\partial}{\partial x} \left( \psi \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) dx = \int \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} dx + \int \psi \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) dx \quad (145)$$

Denklem (145)' te eşitliğin sağ tarafında yer alan birinci terime ikinci kısmi integrasyon uygulanacaktır.

$$\begin{aligned} f &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ g &= \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (146)$$

Denklem (146)' da ikinci kısmi integrasyon için değişkenler tanımlanmıştır. Elde edilen değişkenler denklem (136)' da yerlerine yazılarak kısmi integrasyon işlemi gerçekleştirilecektir.

$$\int \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dy = \int \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy + \int \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} dy \quad (147)$$

Denklem (147) ile ikinci kısmi integrasyon işlemi de tamamlanmıştır. Elde edilen sonuçlar denklem (145)' te yerine yazılarak integral teriminin açılımı yapılacaktır.

$$\int \frac{\partial}{\partial x} \left( \psi \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) dx = \int \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dy - \int \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy + \int \psi \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) dx \quad (148)$$

Bu aşamada elde edilen tüm sonuçlar denklem (134)' te yerine yazılarak klasik plaka teorisi kullanılarak elde edilmiş olan eğilme deformasyonu kısmi diferansiyel denklemini için zayıf form denklem (149)' da ifade edilmiş olacaktır.

$$\begin{aligned}
& \int \frac{\partial}{\partial x} \left( \psi \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) dx dy - \int \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx dy + \int \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy + \dots \\
& 2 \int \frac{\partial}{\partial x} \left( \psi \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) dx dy - 2 \int \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dx dy + 2 \int \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy + \dots \\
& \int \frac{\partial}{\partial y} \left( \psi \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) dx dy - \int \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy + \int \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy = \int \psi \frac{p}{D} dx dy \quad (149)
\end{aligned}$$

Denklem (149)' da plaka üzerinde tanımlanacak olan sınır koşulları da mukavemeti tanımlayan katılık terimleri ile birlikte elde edilmiş durumdadır. Sınır koşulu terimleri moment ve kesme kuvveti olarak denklem (150)' de ifade edilen diverjans teoremi kullanılarak tanımlanacaktır.

$$\int \left( \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) dx dy = \oint (F n_x + G n_y) ds \quad (150)$$

Diverjans teoreminden faydalanarak gerekli düzenlemelerin yapılması durumunda plakaların çözümü için uygulanması gereken sınır koşulları ile birlikte diferansiyel denklemin zayıf formu denklem (151)' de belirtildiği haliyle ifade edilmiş olur.

$$\begin{aligned}
& \int D \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy + 2 \int D \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy + \int D \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy + \dots \\
& \oint -\psi \left[ \left( \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) n_x + \left( \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \right) n_y \right] ds + \dots \\
& \oint \left[ \frac{\partial \psi}{\partial x} (M_x n_x + M_{xy} n_y) + \frac{\partial \psi}{\partial y} (M_{xy} n_x + M_y n_y) \right] ds = \int \psi p dx dy \quad (151)
\end{aligned}$$

Denklem (151) ağırsız yöntemler çözümünde uygun ağırlık fonksiyonları seçilerek çözüm için kullanılacaktır.

### 2.6.2.2. Birinci Mertebeden Kayma Teorisi İçin Zayıf Formun Elde Edilmesi

Birinci mertebeden kayma teorisi kullanılarak gerçekleştirilecek olan zayıf form için denklem (129)' da tanımlanmış olan denklem sistemi kullanılacaktır. Bu sistemde her bir denklem takımı için ayrı bir ağırlık fonksiyonu kullanılarak artık denklemleri elde edilecek ve kısmi integrasyon işlemi uygulanarak diferansiyel denklem takımı için zayıf form elde edilecektir.

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q \cong 0 \\
 R_2 &= -Q_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \cong 0 \\
 R_3 &= -Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \cong 0
 \end{aligned} \tag{152}$$

Artık denklemleri her bir denklem takımı için ayrı ayrı ifade edilmiştir. Artık denklemleri her bir denklem için ayrı ağırlık fonksiyonları kullanılarak ağırlıklandırılacaktır.

$$\begin{aligned}
 \int \psi_w R_1 dx dy &= 0 \\
 \int \psi_{\beta_x} R_2 dx dy &= 0 \\
 \int \psi_{\beta_y} R_3 dx dy &= 0
 \end{aligned} \tag{153}$$

Denklem (153)' te ifade edilen artık denklemleri ve ağırlıklandırılmış artık denklem takımı klasik plaka teorisi için gerçekleştirildiği biçimde kısmi integrasyon işlemleri gerçekleştirilerek denklem takımı için zayıf form elde edilecektir.

$$\begin{aligned}
 \int \psi_w \left[ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q \right] dx dy &= 0 \\
 \int \psi_{\beta_x} \left[ -Q_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right] dx dy &= 0 \\
 \int \psi_{\beta_y} \left[ -Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \right] dx dy &= 0
 \end{aligned} \tag{154}$$

Denklem (154)' te yer alan kesme kuvveti ve eğilme momentleri denklem (128)' de daha önce tanımlanmıştı. Denklem (128)' de tanımlanan değerler denklem takımlarında ilgili yerlerde ifade edilerek her bir denklem için kısmi integrasyon ayrıca gerçekleştirilecektir.

$$\int \psi_w \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left[ kGt \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \beta_x \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ kGt \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y \right) \right] + q \right] dx dy = 0 \quad (155.a)$$

$$\begin{aligned} & \int \psi_{\beta_x} \left[ - \left( kGt \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \beta_x \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( -D \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right) \right) + \dots \right. \\ & \left. \dots \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{(1-\nu)D}{2} \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \right) \right] dx dy = 0 \end{aligned} \quad (155.b)$$

$$\begin{aligned} & \int \psi_{\beta_y} \left[ - \left( kGt \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{(1-\nu)D}{2} \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \right) + \dots \right. \\ & \left. \dots \frac{\partial}{\partial y} \left( -D \left( \frac{\partial \beta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \right) \right) \right] dx dy = 0 \end{aligned} \quad (155.c)$$

Denklem (155) a, b ve c' de yer alan  $\psi_w$ ,  $\psi_{\beta_x}$  ve  $\psi_{\beta_y}$  ifadeleri sırasıyla eğilme deformasyonu, kesit üzerinde x ekseninde ve y ekseninde meydana gelen dönme değerleri için tanımlanan ağırlık fonksiyonlarını ifade etmektedir.

*Denklem (155.a) için kısmi integrasyon işlemleri,*

Kısmi integrasyon işlemi aşamaları klasik plaka teorisi için uygulanan aşamalarda tekrar edilerek birinci mertebeden kayma teorisi için denklemin zayıf formu elde edilecektir.

Denklem (155.a)' da yer alan birinci terim ele alındığında kısmi integrasyon işlemleri için ara değişkenler ve kısmi integrasyon işlemi uygulanacak olan ifade denklem (156)' da verilmiştir.

$$\begin{aligned} & \int \psi_w \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left[ kGt \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \beta_x \right) \right] \right] dx dy \\ & f = \psi_w \\ & g = kGt \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \beta_x \right) \end{aligned} \quad (156)$$

Kısmi integrasyon işlemi için denklem (136)' da ifade edilen yapı uygulanacaktır.

$$\int \frac{\partial}{\partial x} \left( \psi_w (kGt \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \beta_x \right)) \right) dx = \int \frac{\partial \psi_w}{\partial x} \left( kGt \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \beta_x \right) \right) dx \dots$$

$$\dots + \int \psi_w \frac{\partial}{\partial x} (kGt \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \beta_x \right)) dx \quad (157)$$

Benzer işlem adımları denklem (155.a)' da ifade edilen ikinci terim için de uygulanacaktır.

$$\int \psi_w \left[ \frac{\partial}{\partial y} [kGt \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y \right)] \right] dx dy$$

$$f = \psi_w$$

$$g = kGt \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y \right) \quad (158)$$

Kısmi integrasyon işlemi için değişkenlerin tanımlanmasıyla birlikte denklem (155.a)' da yer alan ikinci terim için kısmi integrasyon işlemi tamamlanmış olacaktır.

$$\int \frac{\partial}{\partial y} \left( \psi_w (kGt \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y \right)) \right) dy = \int \frac{\partial \psi_w}{\partial y} \left( kGt \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y \right) \right) dy \dots$$

$$\dots + \int \psi_w \frac{\partial}{\partial y} (kGt \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y \right)) dy \quad (159)$$

Denklem (157) ve denklem (159)' da elde edilen terimler denklem (155.a)' da yerlerine yazılmasıyla denklem (155.a) için zayıf form ifade edilmiş olacaktır. Denklem (160)' ta kısmi integrasyon işlemleri sonucunda denklem (155.a) için elde edilen zayıf form bütün olarak ifade edilmiştir.

$$\int \frac{\partial}{\partial x} \left( \psi_w (kGt \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \beta_x \right)) \right) dx dy - \int \frac{\partial \psi_w}{\partial x} \left( kGt \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \beta_x \right) \right) dx dy + \dots$$

$$\dots \int \frac{\partial}{\partial y} \left( \psi_w (kGt \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y \right)) \right) dx dy - \int \frac{\partial \psi_w}{\partial y} \left( kGt \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y \right) \right) dx dy \dots$$

$$\dots + \int \psi_w q dx dy = 0 \quad (160)$$

Kısmi integrasyon işlemleri denklem (155.b) için de açık bir biçimde ifade edilecek olup denklem (155.c) için kısmi integrasyon işlemleri tekrarlanmayacak ve denklem takımı için sonuç ifade edilecektir.

Denklem (155.b)' de yer alan birinci terime kısmi integrasyon işlemi uygulanmayacak ve denklem takımı ifade edilirken aynen kullanılacaktır. Denklem (155.b)' de yer alan ikinci terim için kısmi integrasyon değişkenleri ve ikinci terim denklem (161)' de ifade edilmiştir.

$$\int \psi_{\beta_x} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( -D \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial x} + v \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right) \right) \right] dx dy$$

$$f = \psi_{\beta_x}$$

$$g = -D \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial x} + v \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right) \quad (161)$$

Kısmi integrasyon işlemi için denklem (136)' da ifade edilen yapı uygulanacaktır.

$$\int \frac{\partial}{\partial x} \left( \psi_{\beta_x} \left( -D \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial x} + v \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right) \right) \right) dx = \int \frac{\partial \psi_{\beta_x}}{\partial x} \left( -D \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial x} + v \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right) \right) dx \dots$$

$$\dots + \int \psi_{\beta_x} \frac{\partial}{\partial x} \left( -D \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial x} + v \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right) \right) dx \quad (162)$$

Benzer işlem adımları denklem (155.b)' de yer alan üçüncü terim için de tekrarlanacaktır. Denklem (155.b)' de üçüncü terim için kısmi integrasyon değişkenleri ve üçüncü terim denklem (163)' te ifade edilmiştir.

$$\int \psi_{\beta_x} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{(1-v)D}{2} \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \right) \right] dx dy$$

$$f = \psi_{\beta_x}$$

$$g = -\frac{(1-v)D}{2} \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \quad (163)$$

Kısmi integrasyon işlemi için denklem (136)' da ifade edilen yapı uygulanacaktır.



$$\begin{aligned}
& \int \frac{\partial}{\partial y} \left( \psi_{\beta_x} \left( -\frac{(1-\nu)D}{2} \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \right) \right) dy = \int \frac{\partial \psi_{\beta_x}}{\partial y} \left( -\frac{(1-\nu)D}{2} \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \right) dy \dots \\
& \dots + \int \psi_{\beta_x} \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{(1-\nu)D}{2} \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \right) dy
\end{aligned} \tag{164}$$

Denklem (162) ve denklem (164)' te elde edilen kısmi integrasyon sonuçları denklem (155.b)' de yerlerine yazıldığında kısmi integrasyon işlemi tamamlanmış ve denklem (155.b) için zayıf form elde edilmiş olacaktır. Denklem (155.b) için elde edilen zayıf form denklem (165)' te ifade edilmiştir.

$$\begin{aligned}
& \int \psi_{\beta_x} \left[ - \left( kGt \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \beta_x \right) \right) \right] dx dy + \dots \\
& \int \frac{\partial}{\partial x} \left( \psi_{\beta_x} \left( -D \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right) \right) \right) dx dy - \int \frac{\partial \psi_{\beta_x}}{\partial x} \left( -D \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right) \right) dx dy + \dots \\
& \int \frac{\partial}{\partial y} \left( \psi_{\beta_x} \left( -\frac{(1-\nu)D}{2} \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \right) \right) dx dy \dots \\
& - \int \frac{\partial \psi_{\beta_x}}{\partial y} \left( -\frac{(1-\nu)D}{2} \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \right) dx dy = 0
\end{aligned} \tag{165}$$

Denklem (155.c) için zayıf form denklem (166)' da ifade edilmiştir.

$$\begin{aligned}
& \int \psi_{\beta_y} \left[ - \left( kGt \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y \right) \right) \right] dx dy + \dots \\
& \int \frac{\partial}{\partial y} \left( \psi_{\beta_y} \left( -D \left( \frac{\partial \beta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \right) \right) \right) dx dy - \int \frac{\partial \psi_{\beta_y}}{\partial y} \left( -D \left( \frac{\partial \beta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \right) \right) dx dy + \dots \\
& \int \frac{\partial}{\partial x} \left( \psi_{\beta_y} \left( -\frac{(1-\nu)D}{2} \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \right) \right) dx dy \dots \\
& - \int \frac{\partial \psi_{\beta_y}}{\partial x} \left( -\frac{(1-\nu)D}{2} \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \right) dx dy = 0
\end{aligned} \tag{166}$$

Birinci mertebeden kayma deformasyonu teorisine bağlı olarak plakaların eğilme deformasyonu davranışı için elde edilmiş olan denklem (155) için zayıf form tüm denklem takımı için ifade edilmiştir.

Diferansiyel denklemler için zayıf form sayısal analiz çözüm yöntemleri kullanıldığında yarar sağlamaktadır. Bu şekilde denklem takımları matris formunda daha

düzenli bir biçimde ifade edilebilmektedir. Ayrıca sayısal analiz sürecinde kullanılacak olan fonksiyonlar için tanımlanması gereken merteye düşmektedir.

### **2.6.3. Ağsız Yöntemlerde Zar (Membran) Modelleme, Kabuk (Shell) Modelleme ve Kabuk Modellemede Kayma Kilitlenmesi Hadisesi**

Sayısal analiz yöntemlerinde, sayısal geometri çözüm süreci başlangıcında tanımlanmaktadır ve çözüm süresini, elde edilen çözümün doğruluğunu belirleyen en önemli etkidir. Numerik analiz için oluşturulacak olan sayısal geometri, katı geometriyi doğrudan temsil ettiğinden üç boyutlu veya iki boyutlu olarak modellenmektedir.

Geometrik modellemenin iki veya üç boyutlu olması tamamen sayısal geometride tanımlanan düğüm sayısını dolayısıyla çözüm süresini ve depolanması gereken deformasyon, şekil değişimi ve gerilme gibi bilgilerin saklanacağı dosya boyutunu doğrudan etkilemektedir.

Bu sebeple sayısal analiz sürecinde üç boyutlu geometri için plaka kalınlığı ' $t$ ' ve kenar en kısa kenar uzunluğu ' $L$ ' dikkate alınarak, klasik plaka teorisi yaklaşımı için  $L/t > 20$ , birinci mertebeden kayma teorisi yaklaşımı için  $L/t < 20$  olması durumunda geometri iki boyutlu modellemeye uygundur denir [3, 64, 65]. Bu durumda üç boyutlu geometri ile sayısal geometri oluşturulması tercih edilmemektedir.

Numerik analiz yöntemlerinde fiziksel modeli temsil eden şekil fonksiyonları sonlu elemanlar yönteminde çözüm süreci başlangıcında bilinirken ağsız yöntemlerde uygulanacak olan sayısal çözüm tipine bağlı olarak numerik analiz aşamasında belirlenmektedir.

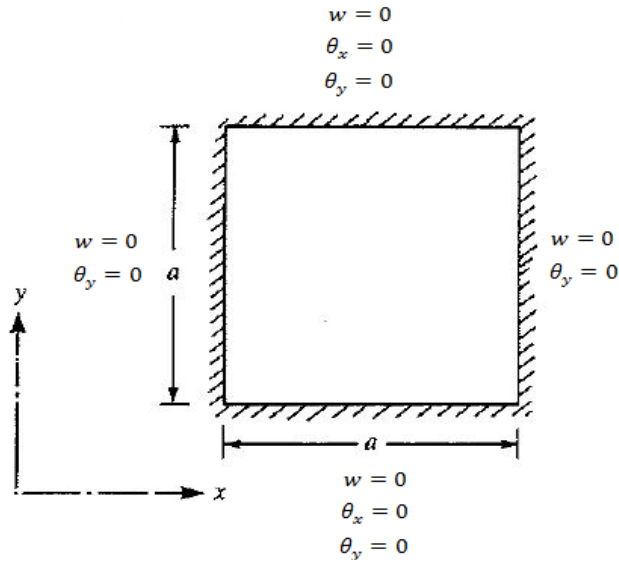
Ağsız yöntemler için iki boyutlu düzlemde zar (membran) ve kabuk (shell) olmak üzere iki farklı tipte şekil fonksiyonu tanımlaması gerçekleştirilmektedir.

#### **2.6.3.1. Klasik Plaka Teorisi ile Plaka Eğilme Deformasyonunun İncelemesi**

Klasik plaka teorisi kullanılarak plakaların eğilme davranışı incelenirken çözüm bölgesinde elde edilen şekil fonksiyonları  $C^1$  sürekliliğe sahip olan Hermite tipi fonksiyonlardır. Hermite tipi şekil fonksiyonlarında, eğilme deformasyonu ile birlikte eğilme deformasyonu birinci mertebeden türevleri de süreklidir ve bağımsız değişken olarak dikkate alınmaktadır. Bu durum çözüm sürecinde elde edilen çözümlerin süreklilik

anlamında düğümler arasında birinci mertebeden türevli ifadelerin de sürekli olması sebebiyle çözüm sonucunda gradyan olarak tanımlanan şekil değişimi, reaksiyon kuvveti... gibi ifadelerin yakınsama davranışlarında avantaj sağlayabilmektedir. Ancak çözüm sürecinde tanımlanması gereken şekil fonksiyonları ve sınır koşullarının sonlu elemanlar yöntemine benzer şekilde uygulanabilmesi için çözüm sürecinde uygulanan dönüşüm işlemleri değerlendirildiğinde sayısal analiz aşamasında çözüm için gereken süre uzayacak ve ayrıca denklem takımlarının elde edilmesi süreci karmaşık bir hal alacaktır.

Klasik plaka teorisi için Hermite tipi yaklaşım ile elde edilen şekil fonksiyonları için örnek problem ve sınır koşulu Şekil 59’ da ifade edilmiştir. Plakalar için basit sınır koşulu tanımlanırken  $w$  eğilme deformasyonu ile birlikte dönme serbestlik derecesi de kısıtlanmaktadır. Hermite tipi şekil fonksiyonlarının kontrol edilmesi için kullanılan örnek plaka için  $y$  eksenine paralel kenarlarda  $\theta_y$  serbestlik derecesi de sınırlandırılmıştır.



Şekil 59. Plaka geometrisi ve sınır koşullarının plakaya uygulanış biçimi [3, 65]

Örnek problem için plaka kenarları  $a = 1 \text{ m}$  ve plaka kalınlığı  $t = 0.1 \text{ m}$  olacak şekilde belirlenmiştir. Plaka üzerinde Şekil 59’ da tanımlanan sınır koşulları etkisinde plaka merkez noktasında meydana gelecek olan eğilme deformasyonu analitik olarak denklem 169’ da ifade edilmiştir [62, 65].

$$w_{analitik} \left( \frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right) = 0.00214pa^4/D \quad (167)$$

Denklem (167)' de yer alan  $D$  plaka için eğilme rijitliği,  $p$  plaka üzerine etki eden yayılı yük,  $a$  plaka kenar uzunluğu olarak ifade edilmektedir. Örnek problem çözümünde Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yöntemi kullanılmıştır. Eleman Bağımsız Galerkin yöntemi ile Ağsız Yerel Petrov-Galerkin Ağsız çözüm yöntemleri arasındaki tek fark artık denklemleri ağırlıklandırılırken Eleman Bağımsız Galerkin yönteminde şekil fonksiyonları kullanılırken Ağsız Yerel Petrov Galerkin Yönteminde şekil fonksiyonları elde edilirken kullanılan ağırlık fonksiyonları kullanılabilir.

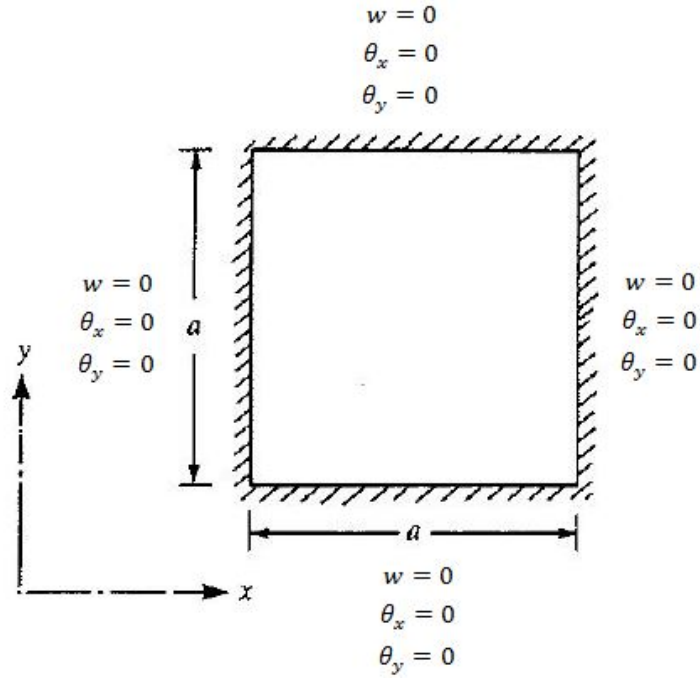
Ağsız yöntemler çözüm sürecinde plaka malzemesi olarak Elastisite modülü  $E = 205 \text{ GPa}$  ve poisson oranı  $\nu = 0.3$  olan çelik malzeme seçilmiştir.

Problem çözümünde  $y$  eksenini için 11 düğüm ve  $x$  eksenini için 13 düğüm kullanılarak çözüm ağı oluşturulmuştur. Kompleks şekil fonksiyonları kullanılması sebebi ile numerik integrasyon aşamasında 9 nokta Gauss integrasyonu kullanılarak numerik integrasyon işlemi gerçekleştirilmiştir. Plaka üzerine uygulanan yayılı yük  $p = 1 \text{ kPa}$   $000 \text{ N/m}^2$  olarak seçilmesi durumunda plaka merkez noktasında meydana gelen eğilme deformasyonu için denklem (167) kullanılarak elde edilen analitik çözüm  $w_{analitik} \left( \frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right) = 1.139941e - 7 \text{ m}$ 'dir. Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yöntemi kullanılarak plaka merkez noktasında elde edilen eğilme deformasyonu değeri  $w_{numerik} \left( \frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right) = 1.20011e - 7 \text{ m}$ 'dir.

Elde edilen çözüm bağıl hata açısından %5 lik hataya, diğer bir söylemlerle %95 doğruluk değerine sahiptir.

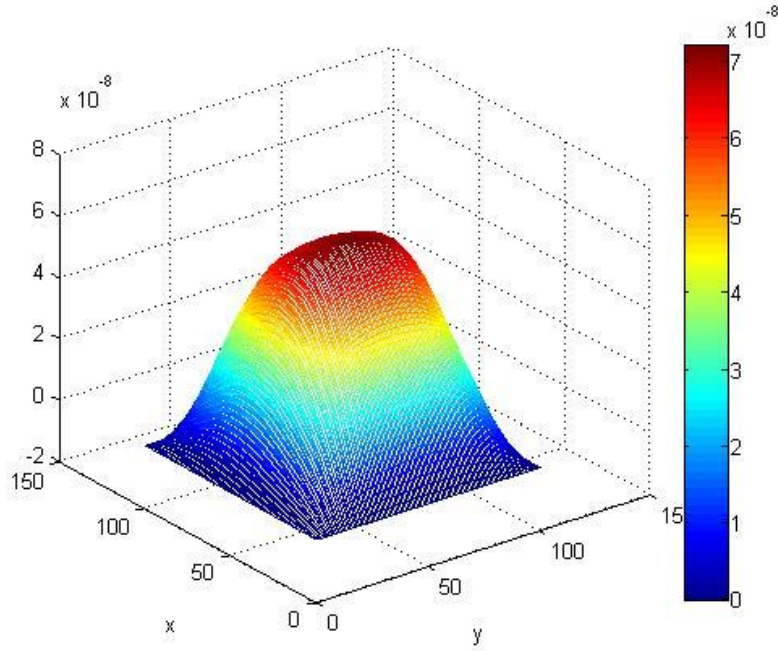
Plaka eğilme deformasyonu plaka kenarlarında tüm serbestlik derecelerinin kısıtlanması durumu için de incelenmiştir. Plaka üzerinde tanımlanan sınır koşulları Şekil 60' da ifade edilmiştir. Şekil 60' da tanımlanan sınır koşulları etkisinde plaka merkezinde meydana gelen eğilme deformasyonu analitik çözümü denklem 168' de ifade edilmiştir [3, 62, 64].

$$w_{analitik} \left( \frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right) = 0.00126pa^4/D \quad (168)$$



Şekil 60. Plaka kenarlarında tanımlanan tüm serbestlik derecelerinin kısıtlandırılması

Şekil 60' da plaka düzleminde tanımlanan sınır koşulu haricinde örnek problem için tanımlanan yük ve malzeme değişkenleri aynen kullanılmıştır. Bu durumda plaka merkez noktasında meydana gelen eğilme deformasyonu için denklem (168) kullanılarak elde edilen analitik çözüm  $w_{analitik} \left( \frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right) = 6.71181e - 8m$ 'dir. Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yöntemi kullanılarak plaka merkez noktasında elde edilen eğilme deformasyonu değeri  $w_{numerik} \left( \frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right) = 7.14023e - 8m$ 'dir. Elde edilen çözüm bağıl hata olarak %95 doğruluk değerine sahiptir. Klasik plaka teorisi çözümü kenarlarda tüm serbestlik derecelerinin tutulmuş hali ile elde edilen eğilme davranışı Şekil 61' de ifade edilmiştir.



Şekil 61. Klasik plaka teorisi için Eleman Bağımsız Galerkin ağırsız yöntem çözümü

Klasik plaka teorisi ile gerçekleştirilen Eleman Bağımsız Galerkin ağırsız yöntemler çözümünde şekil fonksiyonları üzerinde tanımlanması gereken değişken sayısının yüksek olması sebebiyle çözüm süresine harcanan zaman da orantılı olarak artmaktadır. Şekil 61’ de tanımlanan çözüm için x ekseninde 13 düğüm, y ekseninde 11 düğüm tanımlanmıştır. Ayrıca sayısal integrasyon işlemi için manuel olarak 225 adet integrasyon bölgesi ve her bir integrasyon bölgesi içinde 9x9 Gauss noktası kullanılarak sayısal integrasyon işlemi gerçekleştirilmiştir. Bu tanımlamalar ışığında plakanın lineer elastik eğilme davranışının elde edilmesi için gereken süre Windows 7 işletim sistemine sahip, i7 2630 QM CPU ve 2 GHz işlemci hızı ve 8 GB Ram’ e sahip bilgisayarda 2017 saniye sürmektedir.

### 2.6.3.2. Birinci Mertebeden Kayma Teorisi ile Plaka Eğilme Deformasyonu İncelemesi

Birinci Mertebeden Kayma Teorisi için elde edilen şekil fonksiyonları “Zar” tipi veya Lagrange tipi şekil fonksiyonları olarak da nitelendirilen sadece doğrusal hareketi temsil eden deformasyon davranışı için oluşturulan Hareketli En Küçük Kareler şekil fonksiyonlarıdır. Çözüm sürecinde bağımsız değişken olarak gerçekleştirilen fonksiyon tanımlaması eğer bağımsız değişkenin birinci mertebeden türevlerinin de çözüm bölgesi

içinde bağımsız değişken olarak tanımlanmasına gerek duymuyorsa  $C^0$  sürekliliğe sahip fonksiyon kümesi olarak adlandırılabilir. Birinci mertebeden kayma teorisi ile gerçekleştirilen yaklaşım da  $C^0$  sürekliliğe sahiptir ve sayısal analiz sürecinde kullanılan zar tipi ve Lagrange tipi şekil fonksiyonları da bağımsız değişken olarak çözüm bölgesi içinde sadece plaka üzerinde eğilme deformasyonunu kabul etmektedir.

Birinci Mertebeden Kayma Deformasyonu Teorisi kullanılarak elde edilen plaka eğilme deformasyonu davranışının modellenmesi aşamasında, teori kapsamının nispetten kalın plakaları kapsadığından, daha önce denklem (97) ve denklem (127)' de ifade edilen kayma şekil değişimi  $\gamma_{yz}$  ve  $\gamma_{xz}$  ifadeleri özellikle kenar ile plaka kalınlığı oranı büyüdükçe sayısal hesaplamalarda hatalara neden olmaktadır. İnce plakaların modellenmesinde daha önce denklem (97)' de ifade edildiği gibi  $\gamma_{yz}$  ve  $\gamma_{xz}$  ihmal edilmektedir. Bu durum plakalar için elde edilen katılık matrisi olduğundan daha rijit davranmakta ve hatalı sonuçların elde edilmesine sebep olmaktadır. Bu durum literatürde “Kayma Kilitlenmesi” hadisesi olarak bilinmektedir [3, 5, 65]. Sonlu elemanlar yönteminde kayma kilitlenmesi hadisesinin üstesinden gelmek için indirgenmiş sayısal integrasyon yöntemi kullanılarak olduğundan daha rijit hale gelmiş olan katılık matrisi yumuşatılır. Ağsız yöntemlerde ise indirgenmiş sayısal integrasyon yöntemi Sonlu Elemanlar yönteminde olduğu haliyle kullanılamamaktadır. Çünkü ağsız yöntemlerde kullanılan şekil fonksiyonları derece olarak oldukça yüksek mertebelere sahiptir. Dolayısıyla indirgenmiş sayısal integrasyon yöntemi kullanılarak gerçekleştirilen sayısal integrasyon işlemi katılık matrisinin yumuşatılmış halde değil hatalı olarak elde edilmesine sebep olmaktadır [4].

Ağsız yöntemlerde ‘Kayma kilitlenmesi’ hadisesinin çözümünde, eğilme deformasyonu  $w$  şekil fonksiyonları derecesi tanımlandıktan sonra mertebe olarak bir düşük derecede olan şekil fonksiyonları  $\theta_x$  ve  $\theta_y$  dönme serbestlik dereceleri için oluşturulmaktadır. Böylece ‘Kayma kilitlenmesi’ hadisesine, indirgenmiş sayısal integrasyon yöntemi kullanılmadan çözüm sağlanmış olur.

Birinci mertebeden kayma teorisi kullanılarak Şekil 60' da tanımlanan tüm serbestlik derecelerinin sınırlandırıldığı plaka problemi çözümü incelenecektir. Bu durumda plaka orta düzleminde elde edilecek olan çökme miktarı analitik olarak denklem (168)' de ifade edilmiştir.

Eleman Bağımsız Galerkin yöntemi ile çözümü araştırılacak olan plaka problemi için kalınlık değeri 0.05 m ve plaka eni ve boyu da 1 m olacak şekilde tercih edilmiştir. Plaka

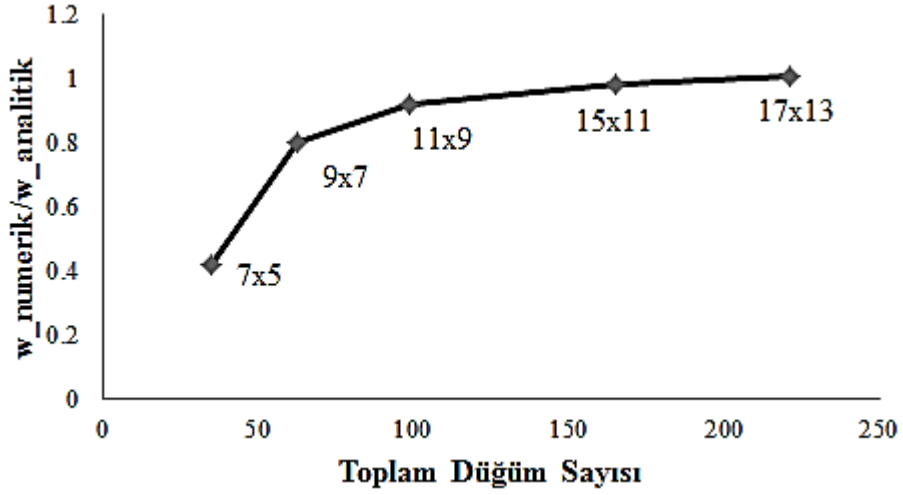
malzemesi olarak Elastisite modülü  $E = 200 \text{ GPa}$  ve poisson oranı  $\nu = 0.3$  olan çelik malzeme kullanılmıştır. Plaka üzerine uygulanan yayılı yük değeri de  $p = 100 \text{ N/m}^2$  olarak seçilmiş ve farklı düğüm sayıları ve yarıçap çarpanı değerleri için elde edilen sonuçlar irdelenmiştir. Tanımlanan malzeme özellikleri, yükleme ve sınır koşulları altında plaka üzerinde meydana gelen eğilme deformasyonu  $w_{analitik} \left( \frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right) = 5.50368e - 8m$  olarak elde edilmektedir.

Eleman Bağımsız Galerkin yöntemi ile elde edilen çözümlerde kullanılan düğüm sayısının çözümün doğruluğu üzerindeki etkisi incelenirken şekil fonksiyonları için yarıçap çarpanı ifadesi  $k=2.15$  olarak belirlenmiştir. Elde edilen çözüm değerleri Şekil 62’ de verilmiştir. Eleman Bağımsız Galerkin ağırsız yöntemi için kullanılan düğüm sayısının, Sonlu elemanlar yöntemi için kullanılan eleman sayısının artması çözümü analitik değere yakınsatmaktadır. Eleman Bağımsız Galerkin çözüm yönteminde yarıçap çarpanı  $k'$  nın çözümün yakınsama davranışı üzerindeki etkisi Şekil 63’ te gösterilmiştir. Şekil fonksiyonları için kullanılacak olan etkinlik yarıçapı ifadesi yöntemin kompakt olmasını kontrol ederken şekil fonksiyonunun çözüm bölgesi içerisindeki etki alanını da tanımlamaktadır. Kullanılan şekil fonksiyonunun mertebesi etkinlik yarıçapını tayin eden önemli bir parametredir. İkinci mertebeden bir şekil fonksiyonu için etkinlik yarıçapı ifadesi en az 2 olacak şekilde seçilmelidir.

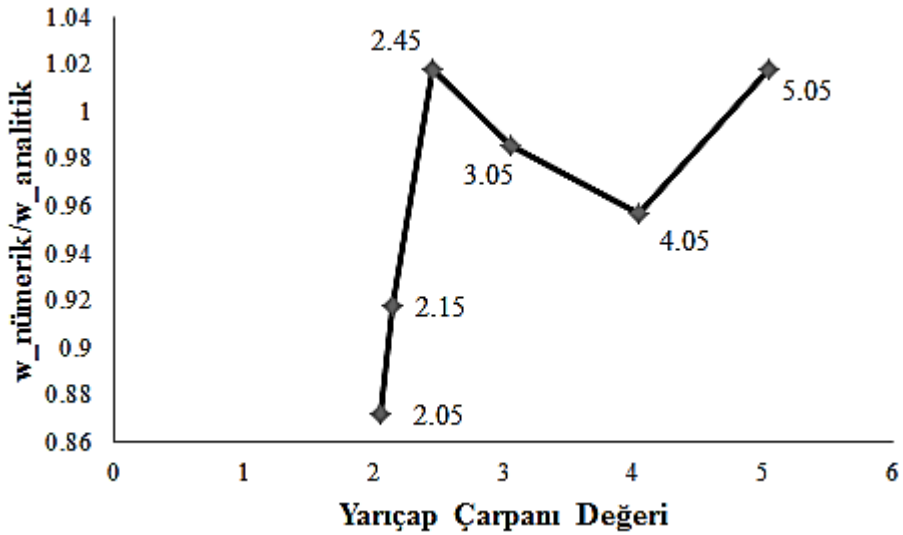
Birinci mertebeden kayma teorisi yaklaşımında kayma kilitlemesi hadisesi sebebiyle ikinci mertebeden şekil fonksiyonlarının da Eleman Bağımsız Galerkin ağırsız yöntemi çözüm sürecinde tanımlı olması, Şekil 63’ te ifade edilen yaklaşım oluşturulurken minimum etkinlik yarıçapı çarpanı değeri olarak 2.05 seçilmesini zorunlu kılmıştır. Elde edilen çözümlerde şekil fonksiyonları için etkinlik yarıçapı olarak 2.45 değeri diğer çözümler ile kıyaslandığında etkili bir çözüm yaklaşımı göstermiştir. Ancak çarpan değerinin çok artması yöntemi kompakt olmaktan uzaklaştırdığından sayısal çözümü olumsuz etkilemektedir. Genel olarak Eleman Bağımsız Galerkin ağırsız yöntemi için şekil fonksiyonları etkinlik yarıçapı değerinin belirli bir mertebede artması çözüm sürecine olumlu olarak yansımaktadır. Tez kapsamında gerçekleştirilen çözümlerde aksi belirtilmediği sürece lineer yaklaşım kullanılmıştır. Hermite tipi şekil fonksiyonları türetilirken yaklaşım mertebesi yükseltilmiştir. Lineer yaklaşım ile elde edilen şekil fonksiyonları için genel davranış kompakt olmalıdır. Şekil fonksiyonu çözüm bölgesi içinde tüm bölgeyi kapsamak yerine denklem (5)’ te tanımlanmış olan moment matrisinin tersinin alınabilmesi ve sağlıklı olması için yeterli bir yarıçap çarpanı ile yerel bir bölgede



tanımlı olması sayısal analiz için hata değeri düşük sonuçların elde edilmesine yardımcı olmaktadır. Tez kapsamında elde edilen bulgularda 2 ile 3 arasında tanımlanan yarıçap çarpanı değerleri için Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yönteminin daha etkin çözümler sunduğunu göstermektedir.



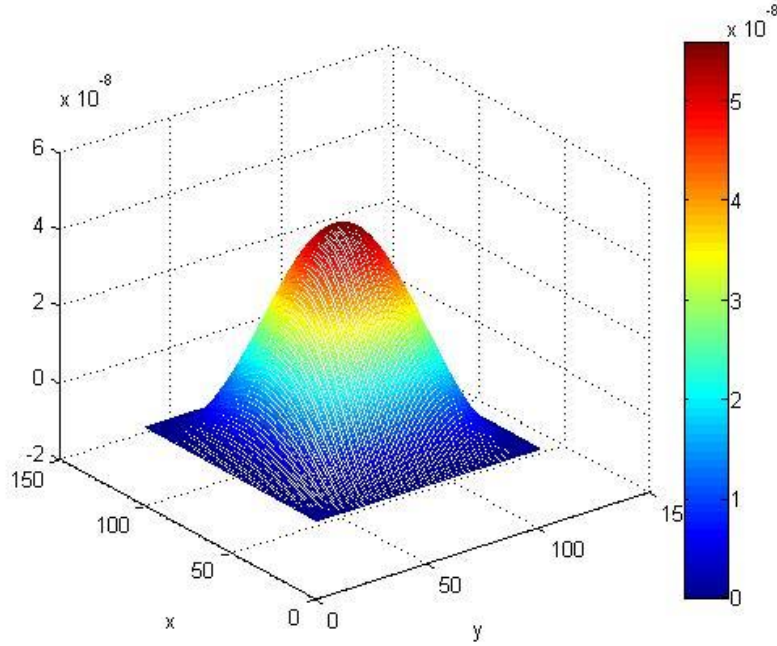
Şekil 62. Düğüm sayısının Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yöntemi çözümüne etkisi



Şekil 63. Yarıçap çarpanı  $k'$  nin Eleman Bağımsız Galerkin Ağsız yöntemi Çözümüne Etkisi

Birinci mertebeden kayma teorisi ile gerçekleştirilen Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yöntemler çözümünde elde edilen deformasyon davranışı Şekil 64' te ifade edilmiştir. Tanımlanan çözüm için klasik plaka teorisinde olduğu gibi x ekseninde 13 düğüm, y ekseninde 11 düğüm tanımlanmıştır. Ayrıca sayısal integrasyon işlemi için manuel olarak 225 adet integrasyon bölgesi ve her bir integrasyon bölgesi içinde 9x9 Gauss noktası kullanılarak sayısal integrasyon işlemi gerçekleştirilmiştir. Bu tanımlamalar ışığında plakanın lineer elastik eğilme davranışının elde edilmesi için gereken süre Windows 7 işletim sistemine sahip, i7 2630 QM CPU ve 2 GHz işlemci hızı ve 8 GB Ram' e sahip bilgisayarda 1108 saniye sürmektedir.

Plakaların eğilme davranışının Eleman Bağımsız Galerkin Ağsız Yöntemi için Birinci Mertebeden Kayma Teorisi yaklaşımı kullanılarak elde edilen toplam çözüm süresi, Klasik Plaka Teorisi kullanılarak elde edilen çözüm süresinin yarısına karşılık gelmektedir. Bu da çözüm sürecinde elde edilen veriler incelendiğinde avantaj sağladığından tezin geride kalan kısmında plaka eğilme davranışı için Birinci Mertebeden Kayma Teorisi kullanılarak çözüm süreçlerine devam edilecektir. Ayrıca Sonlu Elemanlar Yönteminde de plaka eğilme deformasyonu çözüm sürecinde kullanılan şekil fonksiyonları Lagrange veya Membran (Zar) tipidir.



Şekil 64. Birinci mertebeden kayma teorisi için Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yöntemi çözümü

### 2.6.3.3. Birinci Mertebeden Kayma Teorisi ile Plaka Eğilme Deformasyonunun Nonlinear İncelemesi

Plakaların nonlinear eğilme davranışı modelinde tez kapsamında Birinci Mertebeden Kayma Teorisi referans alınmıştır. Birinci mertebeden kayma teorisi kullanılarak şekil fonksiyonları  $C^0$  sürekliliğine sahip olmakla birlikte hem kalın hem de ince plakalar için eğilme deformasyonu modellenmesinde kullanılabilir.

Plakaların nonlinear modellenmesi aşamasında birinci mertebeden kayma teorisi için geliştirilmiş yer değiştirme dağılımı daha önce denklem (125)' te ifade edildiği haliyle aynen geçerliliğini korumaktadır.

Nonlinear problem çözümünde geliştirilmiş yer değiştirme ifadeleri şekil değişimleri türünden ifade edilmektedir. Gerçekleştirilen tanımlama Von Karman şekil değişimleri olarak adlandırılmaktadır.

Von Karman şekil değişimi tanımlamaları genel olarak denklem (169)' da verilmiştir.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \gamma^0_{yz} \\ \gamma^0_{xz} \\ \gamma^0_{xy} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon^1_{xx} \\ \varepsilon^1_{yy} \\ 0 \\ 0 \\ \gamma^1_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \beta_y \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (169)$$

Şekil değişimi ifadeleri genel olarak Euler-Lagrange denklem takımında yerine yazılmasıyla plakaların nonlinear davranışının tespiti için çözülmesi gereken denklem takımları elde edilmiş olacaktır.

Plakalar için nonlinear denklem takımı denklem (170)' te ifade edilmiştir.

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0 \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - Q_y &= 0\end{aligned}\quad (170)$$

Denklem (170) için Eleman Bağımsız Galerkin çözüm yönteminde uygulanan çözüm sürecinde olduğu gibi önce artık denklemleri ağırlıklandırılacak ve genel çözüm süreci sonucunda Galerkin yaklaşımı esas olarak alınacağından ağırlık fonksiyonları aynı uzaydan seçilmiş tek bir fonksiyon olarak düzenlenecektir.

Denklem (171) artık denklem (170) ile ifade edilen genel çözüm denkleminin ağırlıklandırılmış halini ifade etmektedir.

$$\begin{aligned}0 &= \int \left( \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} N_{xx} + \frac{\partial \delta u_0}{\partial y} N_{xy} \right) dx dy - \oint (N_{xx} n_x + N_{xy} n_y) \delta u_0 ds \\ 0 &= \int \left( \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} N_{xx} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} N_{yy} \right) dx dy - \oint (N_{xy} n_x + N_{yy} n_y) \delta v_0 ds \\ 0 &= \int \left[ \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} Q_x + \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} Q_y + \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \left( N_{xx} \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \left( N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \right. \right. \\ & N_{yy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \left. \right) - \delta w_0 + k w_0 q_0 \left. \right] dx dy + \oint \left[ \left( Q_x + N_{xx} \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) n_x + \left( Q_y + N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \right. \right. \\ & \left. \left. \dots N_{yy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) n_y \right] \delta w_0 ds \\ 0 &= \int \left( \frac{\partial \delta \beta_x}{\partial x} M_{xx} + \frac{\partial \delta \beta_x}{\partial y} M_{xy} + \delta \beta_x Q_x \right) dx dy + \oint (M_{xx} n_x + M_{xy} n_y) \delta \beta_x ds \\ 0 &= \int \left( \frac{\partial \delta \beta_y}{\partial x} M_{xy} + \frac{\partial \delta \beta_y}{\partial y} M_{yy} + \delta \beta_y Q_y \right) dx dy + \oint (M_{xy} n_x + M_{yy} n_y) \delta \beta_y ds\end{aligned}\quad (171)$$

Denklem (171) Eleman Bağımsız Galerkin yöntemi için temel çözüm matrislerinin ağırlıklandırılmış ifadesidir. Bu yapı için genelleştirilmiş yer değiştirme değişkenleri için uygulanacak olan ağırsız yöntemler yaklaşımı denklem (172)' de ifade edilmiştir.

$$u_0(x, y) = \sum_{j=1}^m u_j \psi_j^{(1)}(x, y)$$

$$v_0(x, y) = \sum_{j=1}^m v_j \psi_j^{(1)}(x, y)$$

$$w_0(x, y) = \sum_{j=1}^n w_j \psi_j^{(2)}(x, y)$$

$$\beta_x(x, y) = \sum_{j=1}^p S_j^1 \psi_j^{(3)}(x, y)$$

$$\beta_y(x, y) = \sum_{j=1}^p S_j^2 \psi_j^{(3)}(x, y) \quad (172)$$

Denklem (172)' de her değişken için farklı bir yaklaşım fonksiyonu seçilerek genel tanımlama gerçekleştirilmiştir. Çözüm sürecinde 'Kayma Kilitlenmesi' hadisesine dikkat edilmesi gerekmektedir. Bu sebeple  $u_0$ ,  $v_0$  ve  $w_0$  için ikinci mertebeden yaklaşım kullanılarak şekil fonksiyonları elde edilecektir. Dönme serbestlik derecesini tanımlayan  $\beta_x$  ve  $\beta_y$  şekil fonksiyonları için lineer yaklaşım kullanılacaktır.

Ağırlıklandırılmış denklem takımı, genelleştirilmiş yer değiştirme değerleri ve seçilen uygun yaklaşımlar değerlendirilerek matris formunda ifade edilerek çözüm sürecinde kullanılacak olan katılık matrisi elde edilmiş olacaktır. Genelleştirilmiş yer değiştirmeler kullanılarak nonlinear plaka denklemi için katılık matrisinin yapısı denklem (173)' te ifade edilmiştir [68, 69].

$$\begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] & [K^{13}] & [K^{14}] & [K^{15}] & [K^{16}] \\ [K^{21}] & [K^{22}] & [K^{23}] & [K^{24}] & [K^{25}] & [K^{26}] \\ [K^{31}] & [K^{32}] & [K^{33}] & [K^{34}] & [K^{35}] & [K^{36}] \\ [K^{41}] & [K^{42}] & [K^{43}] & [K^{44}] & [K^{45}] & [K^{46}] \\ [K^{51}] & [K^{52}] & [K^{53}] & [K^{54}] & [K^{55}] & [K^{56}] \\ [K^{61}] & [K^{62}] & [K^{63}] & [K^{64}] & [K^{65}] & [K^{66}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{v\} \\ \{w\} \\ \{S^1\} \\ \{S^2\} \\ \{S^3\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F^1\} \\ \{F^2\} \\ \{F^3\} \\ \{F^4\} \\ \{F^5\} \\ \{F^6\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{F^{1T}\} \\ \{F^{2T}\} \\ \{0\} \\ \{F^{4T}\} \\ \{F^{5T}\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (173)$$

Denklem (173)' te çözüm için kullanılacak olan denklem takımı matris formda ifade edilmiştir. Denklem (174) çözüm için kullanılacak denklem sisteminin kapalı formda ifadesidir.

$$[K]\{\Delta\} = \{F\} \quad (174)$$

Katılık matrisi içinde tanımlı elemanlar açık yapıda denklem (175)' te ifade edilmiştir.

$$K_{ij}^{11} = \int \left( A_{11} \frac{\partial \psi_i^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^{(1)}}{\partial x} + A_{66} \frac{\partial \psi_i^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^{(1)}}{\partial y} \right) dx dy$$

$$K_{ij}^{12} = \int \left( A_{12} \frac{\partial \psi_i^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^{(1)}}{\partial y} + A_{66} \frac{\partial \psi_i^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^{(1)}}{\partial x} \right) dx dy$$

$$\begin{aligned}
K_{ij}^{13} &= \frac{1}{2} \int \left[ \frac{\partial \psi_i^{(1)}}{\partial x} \left( A_{11} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^{(2)}}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^{(2)}}{\partial y} \right) + A_{66} \frac{\partial \psi_i^{(1)}}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^{(2)}}{\partial x} \right) \right] dx dy \\
K_{ij}^{22} &= \int \left( A_{66} \frac{\partial \psi_i^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^{(1)}}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial \psi_i^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^{(1)}}{\partial y} \right) dx dy \\
K_{ij}^{23} &= \frac{1}{2} \int \left[ \frac{\partial \psi_i^{(1)}}{\partial y} \left( A_{12} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^{(2)}}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^{(2)}}{\partial y} \right) + A_{66} \frac{\partial \psi_i^{(1)}}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^{(2)}}{\partial x} \right) \right] dx dy \\
K_{ij}^{31} &= \int \left[ \frac{\partial \psi_i^{(2)}}{\partial x} \left( A_{11} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^{(1)}}{\partial x} + A_{66} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^{(1)}}{\partial y} \right) + \frac{\partial \psi_i^{(2)}}{\partial y} \left( A_{66} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^{(1)}}{\partial y} + \dots A_{12} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^{(1)}}{\partial x} \right) \right] dx dy \\
K_{ij}^{32} &= \int \left[ \frac{\partial \psi_i^{(2)}}{\partial x} \left( A_{12} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^{(1)}}{\partial y} + A_{66} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^{(1)}}{\partial x} \right) + \frac{\partial \psi_i^{(2)}}{\partial y} \left( A_{66} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^{(1)}}{\partial x} + \dots A_{22} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^{(1)}}{\partial y} \right) \right] dx dy \\
K_{ij}^{33} &= \int \left( K_s A_{55} \frac{\partial \psi_i^{(e)}}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^{(2)}}{\partial x} + K_s A_{44} \frac{\partial \psi_i^{(2)}}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^{(2)}}{\partial y} + k \psi_i^{(e)} \psi_j^{(2)} \right) dx dy + \frac{1}{2} \int \left\{ \left[ A_{11} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \dots A_{66} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial \psi_i^{(e)}}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^{(2)}}{\partial x} + \left[ A_{66} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + A_{22} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial \psi_i^{(2)}}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^{(2)}}{\partial y} + (A_{12} + \dots A_{66}) \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi_i^{(2)}}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial \psi_i^{(2)}}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^{(2)}}{\partial x} \right) \right\} \\
K_{ij}^{34} &= \int K_s A_{55} \frac{\partial \psi_i^{(2)}}{\partial x} \psi_j^{(3)} dx dy \\
K_{ij}^{35} &= \int K_s A_{44} \frac{\partial \psi_i^{(2)}}{\partial y} \psi_j^{(3)} dx dy \\
K_{ij}^{44} &= \int \left( D_{11} \frac{\partial \psi_i^{(3)}}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^{(3)}}{\partial x} + D_{66} \frac{\partial \psi_i^{(3)}}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^{(3)}}{\partial y} + K_s A_{55} \psi_i^{(3)} \psi_j^{(3)} \right) dx dy \\
K_{ij}^{45} &= \int \left( D_{12} \frac{\partial \psi_i^{(3)}}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^{(3)}}{\partial y} + D_{66} \frac{\partial \psi_i^{(3)}}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^{(3)}}{\partial x} \right) dx dy \\
K_{ij}^{55} &= \int \left( D_{66} \frac{\partial \psi_i^{(3)}}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^{(3)}}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \psi_i^{(3)}}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^{(3)}}{\partial y} + K_s A_{44} \psi_i^{(3)} \psi_j^{(3)} \right) dx dy \\
K_{ij}^{21} &= K_{ji}^{12}, K_{ij}^{43} = K_{ji}^{34}, K_{ij}^{54} = K_{ji}^{45}
\end{aligned} \tag{175}$$

Yük terimleri denklem (176)' da ifade edilmiştir.

$$\begin{aligned}
F_i^1 &= \oint \hat{N}_n \psi_i^{(1)} ds \\
F_i^2 &= \oint \hat{N}_s \psi_i^{(1)} ds \\
F_i^3 &= \int q \psi_i^{(2)} dx dy + \oint \hat{Q}_n \psi_i^{(2)} ds \\
F_i^4 &= \oint \hat{M}_n \psi_i^{(3)} ds \\
F_i^5 &= \oint \hat{M}_s \psi_i^{(3)} ds \\
F_i^{1T} &= \oint \frac{\partial \psi_i^{(1)}}{\partial x} N_{xx}^T ds \\
F_i^{2T} &= \oint \frac{\partial \psi_i^{(1)}}{\partial y} N_{yy}^T ds \\
F_i^{4T} &= \oint \frac{\partial \psi_i^{(3)}}{\partial x} M_{xx}^T ds \\
F_i^{5T} &= \oint \frac{\partial \psi_i^{(3)}}{\partial y} M_{yy}^T ds
\end{aligned} \tag{176}$$

Nonlinear plaka denklem takımının çözüm süreci için ısı transferi probleminde ifade edilmiş olan Newton-Raphson veya modifiye edilmiş Newton-Raphson çözüm yöntemleri değerlendirilecektir. Bu durumda plaka modeli için tanjant matrisi yine katılık matrisine benzer bir yapıda denklem (177)' de açık halde ifade edilmiştir.

$$\begin{aligned}
T_{ij}^{11} &= K_{ij}^{11} \\
T_{ij}^{12} &= K_{ij}^{12} \\
T_{ij}^{13} &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{2} \int \left[ \frac{\partial \psi_i^{(1)}}{\partial x} \left( A_{11} \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^{(2)}}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^{(2)}}{\partial y} \right) + A_{66} \frac{\partial \psi_i^{(1)}}{\partial y} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^{(2)}}{\partial y} + \right. \right. \\
&\left. \left. \dots \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^{(2)}}{\partial x} \right) \right] dx dy + K_{ij}^{13} = 2K_{ij}^{13} \\
T_{ij}^{14} &= K_{ij}^{14}
\end{aligned}$$

$$T_{ij}^{15} = K_{ij}^{15}$$

$$T_{ij}^{21} = K_{ij}^{21}$$

$$T_{ij}^{22} = K_{ij}^{22}$$

$$T_{ij}^{23} = \frac{1}{2} \int \left[ \frac{\partial \psi_i^{(1)}}{\partial y} \left( A_{12} \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^{(2)}}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^{(2)}}{\partial y} \right) + A_{66} \frac{\partial \psi_i^{(1)}}{\partial x} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^{(2)}}{\partial y} + \dots \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^{(2)}}{\partial x} \right) \right] dx dy + K_{ij}^{23} = 2K_{ij}^{23}$$

$$T_{ij}^{24} = K_{ij}^{24}$$

$$T_{ij}^{25} = K_{ij}^{25}$$

$$T_{ij}^{31} = K_{ij}^{31}$$

$$T_{ij}^{32} = K_{ij}^{32}$$

$$T_{ij}^{33} = \int (k_s A_{55} \frac{\partial \psi_i^{(2)}}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^{(2)}}{\partial x} + k_s A_{44} \frac{\partial \psi_i^{(2)}}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^{(2)}}{\partial x} + k \psi_i^{(2)} \psi_j^{(2)}) dx dy$$

$$\dots + \int \left[ (N_{xx} + N^T_{xx}) \frac{\partial \psi_i^{(2)}}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^{(2)}}{\partial x} + (N_{yy} + N^T_{yy}) \frac{\partial \psi_i^{(2)}}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^{(2)}}{\partial y} + N_{xy} \left( \frac{\partial \psi_i^{(2)}}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^{(2)}}{\partial y} + \dots \frac{\partial \psi_i^{(2)}}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^{(2)}}{\partial x} \right) + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \left\{ \left( \frac{\partial \psi_i^{(2)}}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial \psi_i^{(2)}}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^{(2)}}{\partial x} \right) \right\} \right] dx dy \dots$$

$$\dots +$$

$$\int \left[ A_{11} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + A_{66} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial \psi_i^{(2)}}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^{(2)}}{\partial x} + \left[ A_{66} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + A_{22} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial \psi_i^{(2)}}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^{(2)}}{\partial y} dx dy$$

$$T_{ij}^{34} = K_{ij}^{34}$$

$$T_{ij}^{35} = K_{ij}^{35}$$

$$T_{ij}^{44} = K_{ij}^{44}$$

$$T_{ij}^{45} = K_{ij}^{45}$$

$$T_{ij}^{55} = K_{ij}^{55}$$

(177)

Denklem (177) ile plakaların nonlineer eğilme davranışının modellendiği yapı Newton-Raphson veya modifiye edilmiş Newton-Raphson çözüm yöntemleri için uygun büyüklükler cinsinden ifade edilmiş bir denklem takımı için tanjant matrisinin ifade etmektedir.



Plakaların nonlinear deformasyonu için Newton-Raphson veya modifiye edilmiş Newton-Raphson çözüm algoritması uygulanabilmektedir. Her iki yöntem arasındaki tek farklılık Newton-Raphson çözüm yönteminde her iterasyonda tanjant matrisi güncellenirken modifiye edilmiş Newton-Raphson yönteminde tanjant matrisi iki iterasyon arasında sabit kalmaktadır. Sabit tanjant matrisi kullanılarak gerçekleştirilen nonlinear çözüm sürecinde yakınsama için gerekli olan iterasyon sayısı, tanjant matrisinin her iterasyonda güncellenmesi ile kıyaslandığında artmaktadır. Modifiye edilmiş Newton-Raphson yaklaşımı için iterasyon sayısındaki artış, Newton-Raphson yöntemi için her iterasyonda güncellenmesi gereken tanjant matrisi ve nonlinear problemin karmaşık yapısı dikkate alındığında avantaj sağlamaktadır. Birinci mertebeden kayma teorisi kullanılarak plakaların nonlinear eğilme davranışı  $1m \times 1m$ ' lik plaka,  $100N/m^2$  yayılı yük ve Şekil 60' da tanımlanan sınır koşulu dikkate alınarak çözdürülmüştür. Plaka üzerinde x eksenini için 11 adet düğüm, y eksenini için 9 adet düğüm ve yarıçap çarpanı değeri olarak 3.75 seçilmiş ve çözüm araştırılmıştır. Belirtilen yükleme koşulları etkisinde plaka üzerinde meydana gelen eğilme deformasyonu analitik değeri  $1,91656e-5m$  olarak literatürde ifade edilmiştir [63, 64, 70].

Gerçekleştirilen ağırsız yöntemler çözümü sonucunda plaka üzerinde elde edilen maksimum eğilme deformasyonu değeri  $1.75641e-5 m$ ' dir. İki değer arasında gerçekleştirilen kıyaslamada yüzde hata değeri %8.3561 olarak elde edilmiştir. Plaka eğilme deformasyonu davranışı için analizler sonucunda elde edilen eğilme deformasyonu davranışı seçilen çözüm ağı ve hata değeri dikkate alındığında uygun olduğu ifade edilebilir.

Hata değeri çözüm bölgesinde tanımlanacak daha sık bir düğüm ile analitik çözüme yakınsayacağı Şekil 62' de elde edilen bulgular ile ifade edilmiştir. Ayrıca yarıçap çarpanı ifadesi yine çözüm üzerinde etkili bir parametre olduğu Şekil 63' te elde edilen bulgular ile ifade edilmiştir.

## 2.7. Hareketli Isıl Cephe Probleminin Sayısal Modelinin Tanımlanması

Hareketli ısı cephe problemi sayısal modeli için Eleman Bağımsız Galerkin ağırsız yöntemi şekil fonksiyonları Lagrange veya Membran (Zar) tipidir. Lagrange şekil fonksiyonları daha önce ısı transferi problemi ve Birinci Mertebeden Kayma Deformasyonu teorisi ile plaka eğilme deformasyonu problemleri çözümünde de

kullanılmıştır. Eleman Bağımsız Galerkin yöntemi ile Hareketli ısı cephe probleminin değerlendirilmesi aşamasında daha önce elde edilen tüm veriler dikkate alınarak şekil fonksiyonları için yarıçap çarpanı değeri 2.45 olarak seçilmiştir.

Hareketli ısı cephe problemlerinde ısı kaynağı etkisinde olan bölge için sayısal analizler ile gerçekleştirilen yaklaşımlarda en önemli nokta sıcaklık dağılımının doğru ve gerçeğe uygun olarak modellenbilmesidir. Sonlu elemanlar yöntemi ile literatürde gerçekleştirilmiş olan çalışmalar ve bulgular oldukça uygun sonuçlar elde edildiğini özellikle ifade etmektedir. Ancak sonlu elemanlar yöntemini bu noktadaki dezavantajı sıcaklığın doğru modellenbilmesi için ısı kaynağı etkisindeki bölge için özel bir sayısal geometri oluşturulması gerekmektedir. Isı akısının bir bölge içindeki dağılımının farklı yoğunluktaki eleman dağılımı için elde edilen yapısı Şekil 6' da ifade edilmiştir. Bu durumda ısı kaynağı etkisindeki bölgede sıcaklık dağılımının analitik yapıya uygun olarak tanımlanması için belirli çözünürlükte eleman yapısının çözüm bölgesi içinde sadece ısı kaynağı etkinlik yarıçapı içerisinde kalacak şekilde düzenlenmesi gerekmektedir.

Sonlu elemanlar yöntemi ile gerçekleştirilen çalışmalarda karşılaşılan bu problemin kaynağı paket programlar bünyesinde çözüm sürecini hızlandırmak için sayısal integrasyon işleminde özellikle düşürülmüş mertebeden integrasyon (reduced integration) yönteminin seçilmiş olması gösterilebilir. Düşürülmüş mertebeden integrasyon yönteminde eleman içerisinde sayısal integrasyon işleminin gerçekleştirilmesi için bir adet düğüm kullanılmaktadır. Bu durumda elde edilen sayısal integrasyon sonucu da olması gereken değerden düşük çıkmaktadır. Sıcaklık dağılımı gibi ısı transferi denklemi için çözüm bölgesindeki bağımsız değişkenin elde edilmek istenmesi durumunda çözüm bölgesi içinde bu ifadenin mümkün mertebe hassas bir biçimde ifade edilmesi gerekmektedir. Bu da hesaplamaların gerçekleştirileceği bölgede eleman oluşturma işlemi için özel gayret sarf edilmesi gerekliliğini doğurmaktadır. Eleman Bağımsız Galerkin ağız yöntemi ile tanımlanan çözüm sürecinde ise sayısal integrasyon için kullanılacak olan Gauss noktalarının sayısı artırılarak bu hatadan kaçınmak tez kapsamında gerçekleştirilen çalışmalar dikkate alındığında mümkün olduğu ifade edilebilir. Tez kapsamında hareketli ısı cephe probleminin çözümünde düğümler oluşturulurken ısı kaynağı etkisindeki bölge için özel bir çalışma gerçekleştirilmemiş olup üniform yapıdaki düğüm dağılımı ile analizler gerçekleştirilmiştir.

Hareketli ısı cephe problemi temel olarak nonlinear ısı transferi problemi çözümünü takip eden plakaların nonlinear eğilme deformasyonu çözümlerinin birleştirilmesi ile elde edilmektedir.

Hareketli ısı cephe problemi kapsamında temel çözüm süreci aşamaları;

- Nonlinear ısı transferi probleminin çözümü
- Plakalar için nonlinear eğilme davranışının belirlenmesi

şeklinde verilebilir. Her iki problem için matematik modeller ısı transferi problemi denklem (72) ile ve plakaların eğilme deformasyonu için de denklem (166)' da sayısal analize uygun bir biçimde ifade edilmiştir.

Hareketli ısı cephe ile çözümü gerçekleştirilecek olan ısı transferi problemi için yapılan kabuller aşağıda sıralanmıştır.

- Isı kaynağı Gauss dağılımına uygun olacak şekilde modellenmiştir.
- Hareketli ısı cephe probleminde yer nonlinear davranış sadece radyasyon teriminin ısı transferi problemi çözümüne dahil edilmesi ile incelenmiştir.
- Sıcaklık etkisindeki plakada faz değişimi (ergimenin) olmadığı kabul edilmiştir.

Hareketli ısı cephe etkisinde plakaların eğilme deformasyonu analizi için gerçekleştirilen kabuller aşağıda sıralanmıştır.

- Plaka eğilme davranışı küçük şekil değişimi teorisi kabulü kullanılarak modellenmiştir.
- Plaka eğilme davranışındaki nonlinearlik sadece büyük deformasyon teorisi kullanılarak incelenmiştir.
- Malzeme özellikleri tamamen lineer elastiktir. Malzeme ile ilgili nonlinear bir davranış problem çözümü kapsamında dikkate alınmamıştır.

Her iki problem çözümü sürecinde malzeme özellikleri lineer olarak kalmıştır. Nonlinear özellikler olarak ısı transferi probleminde radyasyon teriminin çözüm sürecine dahil edilmiştir. Isı transferi problemi için malzeme özelliklerinin sıcaklığa bağlı olarak tanımlanması da malzeme özellikleri açısından nonlinear bir tanımlama anlamına gelmektedir. Ancak tez kapsamında bu durum dikkate alınmamıştır.

Plakaların eğilme deformasyonu problemi için Von Karman [70] şekil değişimi çözüm sürecine dahil edilmiştir. Ayrıca plaka eğilme deformasyonu probleminde malzeme özelliklerinin sıcaklığa bağlı olması, elasto-plastik malzeme özelliklerinin kullanılması ve malzeme için pekleşme davranışının tanımlanması denklem takımının nonlinear olmasına

sebeptir. Ancak tez kapsamında malzeme ile ilgili herhangi bir nonlineerlik dikkate alınmamıştır.

### 2.7.1. Nonlinear Zaman Bağımlı Isı Transferi Problemi

Lineer zamana bağlı ısı transferi problemi daha önce denklem (72)' de ifade edilmişti. Denklem (72)' de tanımlanan ısı transferi problemi denklem takımı iki boyutlu düzlemde tanımlanmış ve denklem takımında radyasyon etkisini ifade eden denklem (178) ve taşınım ile ısı transferinin tanımlandığı denklem (179) dahil edilmemiştir.

$$\int \sigma \varepsilon (T^4 - T_\infty^4) dS \quad (178)$$

$$\int h(T - T_\infty) dS \quad (179)$$

Denklem (72)' ye denklem (178) ve denklem (179)' un dahil edilmesi ile birlikte nonlineer zamana bağlı ısı transferi denklemini için matematik modeli denklem (180)' deki hali ile tanımlanmaktadır.

$$\begin{aligned} & \iint \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial T_j}{\partial x} dx dy + \iint \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial T_j}{\partial y} dx dy - \oint \phi_i (\sigma \varepsilon (T^4 - T_\infty^4) + h(T - T_\infty)) ds - \dots \\ & \dots \iint \phi_i \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx dy = 0 \end{aligned} \quad (180)$$

Denklem (180) zamana bağlı ısı transferi denklemine taşınım ve radyasyon etkilerinin dahil edilmiş halini ifade etmektedir. Denklem (181)' de denklem (180)' de yer alan her bir terim açık bir biçimde ayrı ayrı ifade edilmiştir.

$$[C] = \iint \phi_i \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx dy \quad \text{Isı transferi problemi için kapasitans matrisi}$$

$$[K] = \iint \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial T_j}{\partial x} dx dy + \iint \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial T_j}{\partial y} dx dy \quad \text{Isı iletimi matrisi}$$

$$[K]_R = \oint \phi_i (\sigma \varepsilon T^4) ds \quad \text{Işınım ile ısı transferi matrisi}$$

$$[F]_R = \oint \phi_i (\sigma \varepsilon T_\infty^4) ds \quad \text{Işınım ile gerçekleşen ısı transferi}$$

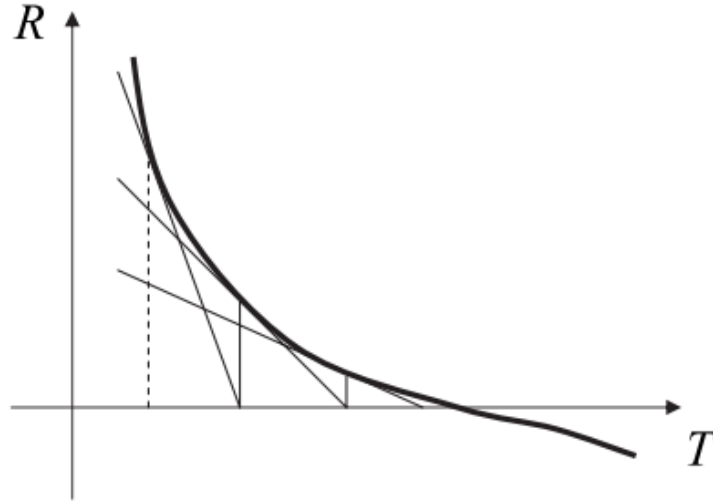
$$[K]_h = \oint \phi_i h T ds$$

Taşınım ile ısı transferi matrisi

$$[F]_h = \oint \phi_i h T_\infty ds$$

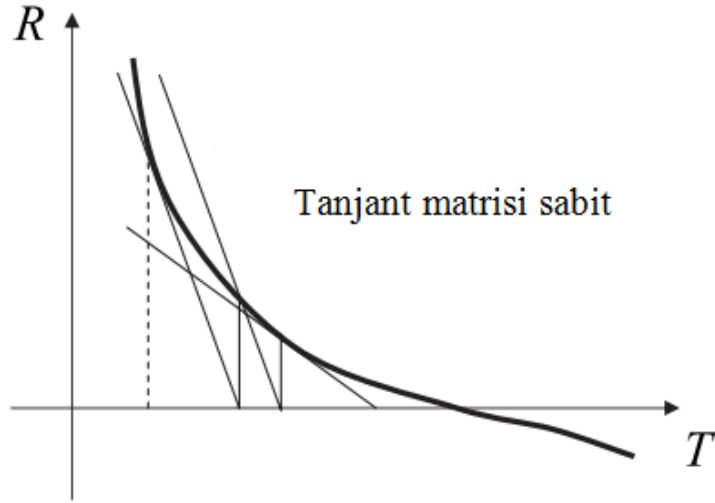
Taşınım ile gerçekleşen ısı transferi (181)

Nonlinear problem olarak ısı transferi ve plaka eğilmesi problemleri tanımlanmıştır. Nonlinear problemler için Newton-Raphson algoritması en yaygın kullanılan çözüm yöntemlerindedir. Newton-Raphson çözüm algoritması genel olarak Şekil 65' te ifade edilmiştir.



Şekil 65. Newton-Raphson yöntemi ile değişken tanjant matrisi çözümü

Newton-Raphson çözüm algoritmasında en önemli nokta her bir iterasyonda artık denkleminin güncellenmesidir. Bu durum hem çözüm olarak hem de iterasyon süreci olarak problemin daha da karmaşık bir hal almasına sebep olmaktadır. Bu sebeple Newton-Raphson yöntemi modifiye edilerek iki iterasyon arasında sabit bir tanjant matrisi kullanılarak da çözüm elde edilebilmektedir. Modifiye edilmiş Newton-Raphson yöntemi Şekil 66' da ifade edilmiştir.



Şekil 66. Modifiye edilmiş Newton-Raphson yöntemi ile sabit tanjant matrisi çözümü

Newton-Raphson yöntemi için genel çözüm adımları denklem (182)' de ifade edilmiştir.

$$\{R\} \equiv \{K\}\{U\} - \{F\} \quad (182)$$

Denklem (182)' de yer alan ifadelerden  $\{R\}$  artık denklemini ifade etmektedir.  $\{R\}$  artık denklemi sonucu bilinen bir  $r$  adımı için Taylor serisi yardımıyla genişletildiğinde denklem (183) elde edilir.

$$\{R(\{U\})\} = \{R(\{U\}^{r-1})\} + \left(\frac{\partial\{R\}}{\partial\{U\}}\right)^{(r-1)} \delta(\{U\}) + \dots \quad (183)$$

Denklem (183)' te ifade edilen Taylor serisi açılımında ikinci mertebeden terimlerin ihmal edilmesi ve artık denkleminin sifıra eşitlenmesi sonucunda denklem (184) elde edilmektedir.

$$-\{R(\{U\}^{r-1})\} = \left(\frac{\partial\{R\}}{\partial\{U\}}\right)^{(r-1)} \delta(\{U\}) \quad (184)$$

$$-\{R(\{U\}^{r-1})\} = [T(\{U\}^{r-1})]\delta(\{U\}) \quad (185)$$

Denklem (185)' te yer alan  $[T(\{U\}^{r-1})]$  ifadesi tanjant matrisi olarak adlandırılmaktadır. Tanjant matrisi açık haliyle denklem (186)' da tanımlanmaktadır.

$$[T(\{U\}^{r-1})] = \left( \frac{\partial \{R\}}{\partial \{U\}} \right)^{(r-1)} \quad (186)$$

Tanjant matrisinin katılık ve yük matrisi üzerindeki dağılımı denklem (187)' de ifade edilmiştir.

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \frac{\partial R_i}{\partial u_j} = \frac{\partial}{\partial u_j} (\sum K_{ij} u_j - F_i) \\ &= \sum \left( \frac{\partial K_{ij}}{\partial u_j} u_j + K_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial u_j} \right) - \frac{\partial F_i}{\partial u_j} \\ T_{ij} &= \sum \left( \frac{\partial K_{ij}}{\partial u_j} u_j + K_{ij} \right) \end{aligned} \quad (187)$$

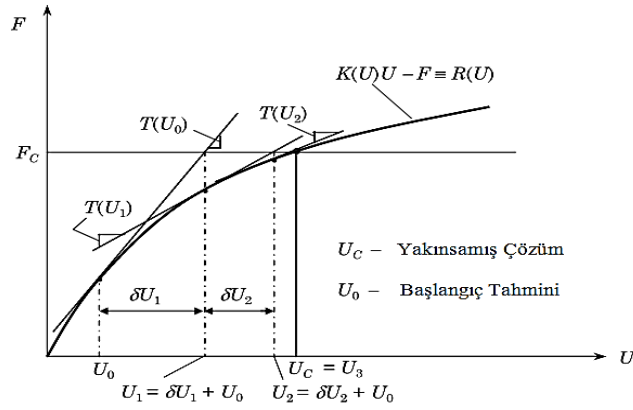
Bu durumda r-1 inci iterasyon sonrasında elde edilecek olan artık denklemini denklem (188) ile tanımlanabilmektedir.

$$-\{R(\{U\}^{r-1})\} = \{F\} - [K(\{U\}^{r-1})]\{U\}^{r-1} \quad (188)$$

Çözüm sürecinde r inci iterasyon için tanımlanacak olan çözüm r-1 iterasyonunda elde edilen yer değiştirme ile delta yer değiştirmenin toplamı olarak ifade edilmektedir. Tanımlanan çözüm denklem (189)' da ifade edilmiştir.

$$\{U\}^r = \{U\}^{r-1} + \{\delta U\} \quad (189)$$

Newton-Raphson yöntemi için yakınsama davranışı şekil 67' de ifade edilmiştir.



Şekil 67. Newton-Raphson yöntemi yakınsama davranışı

Nonlinear denklem takımı çözümünde önemli noktalardan bir tanesi de radyasyon teriminin çözüm sürecine dahil olması durumudur. Radyasyon terimi dördüncü mertebeden ifadeler içermesi dolayısıyla çözüm sürecindeki yaklaşım da parametrik olarak değerlendirilmektedir. Bu aşamada radyasyon denkleminin çözümü için ve parametrik yaklaşımın oluşturulması için izlenecek olan çözüm adımları ayrı olarak değerlendirilmek durumundadır. Çözüm sürecinde yer alan radyasyon terimi tek başına denklem (190)' da ifade edilmiştir.

$$\sigma \varepsilon A (T^4 - T_{\infty}^4) \quad (190)$$

Denklem (190) çarpanlarına ayrılmış olarak ifade edilmiş hali denklem (191)' de ifade edilmiştir.

$$\sigma \varepsilon A (T^2 + T_{\infty}^2)(T + T_{\infty})(T - T_{\infty}) \quad (191)$$

Radyasyon teriminin katsayılara ayrılarak ifade edilmesindeki temel amaç çözüm sürecinde radyasyon teriminin konveksiyon ile gerçekleşen ısı transferine benzer bir biçimde ifade edilmesini sağlamaktır. Denklem (191)' de yer alan ifadeler değerlendirildiğinde radyasyon katsayısı denklem (193)' te açık haliyle ifade edilmiştir.

$$h_r = \sigma \varepsilon (T^2 + T_{\infty}^2)(T + T_{\infty}) \quad (192)$$



Isı transferi problemi çözüm sürecinde radyasyon katsayısı  $h_r$  iteratif olarak elde edilmektedir. İterasyon aşamaları aşağıda tanımlanmıştır.

- İterasyon başlangıcında  $h_r = 0$  kabulü gerçekleştirilir.
- Düğümler bazında tanımlanan radyasyon matrisi ve radyasyondan meydana gelen ısı yük bu katsayı kullanılarak hesaplanır.
- Denklem takımı çözdürülür ve sıcaklık değeri için başlangıç yaklaşımı  $T$  elde edilir.
- Elde edilen sıcaklık dağılımından faydalanarak  $h_r$  katsayısı denklem (192) ile hesaplanır.
- Başlangıç ve hesaplanan sıcaklık dağılımı arasında elde edilen  $h_r$  değerleri arasında kıyaslama yapılır ve hata değeri çözüm sürecinde kabul edilebilir bir mertebeye ulaştığında radyasyon ile gerçekleşen ısı transferi için radyasyon katsayısı hesaplanmış olarak değerlendirilir. Yakınsamış olan radyasyon katsayısı değeri kullanılarak ilgili iterasyonda meydana gelen sıcaklık dağılımı hesaplanarak güncellenir.

$$\frac{[h_r^n] - [h_r^{n-1}]}{[h_r^{n-1}]} \leq \text{hata değeri}$$

- Ayrıca sıcaklık dağılımının da kontrol edilmesi gerekmektedir. Güncellenmiş olan radyasyon katsayısı ile elde edilen güncel sıcaklık değerleri arasında hata değeri kabul edilebilir mertebelerde olmalıdır [68].

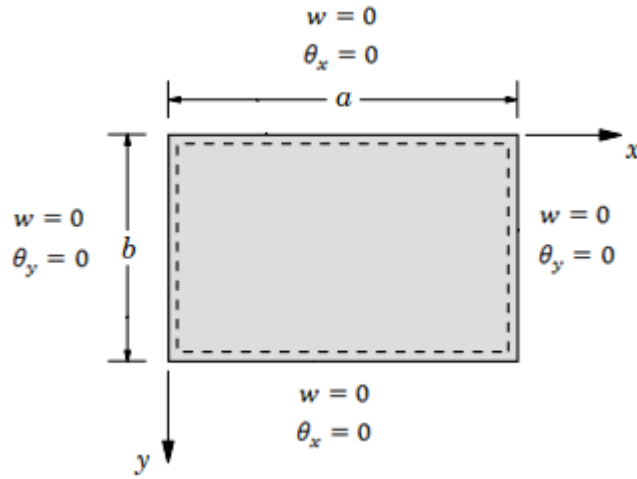
Radyasyon terimi çözüm sürecinde değerlendirilirken taşınım ile gerçekleşen ısı transferi terimine benzer bir şekilde ifade edilerek çözüm sürecinde nispetten avantaj sağlamaktadır. Ancak dezavantaj radyasyon katsayısı çözüm sürecinde iteratif olarak kontrol edilerek belirlenmekte ve sıcaklık dağılımı ifadesi için nihai çözüm radyasyon katsayısı için yakınsama elde edildikten sonra tanımlanabilmektedir.

Isı transferi problemi ile plaka üzerinde elde edilecek olan sıcaklık dağılımının doğru olması elastisite problemi için kullanılacak olan termal yüklerin de doğru olarak elde edilmesi için önemlidir. Sıcaklık etkisinde plaka üzerinde meydana gelecek olan termal eğilme momenti ve eksenel kuvvet denklem (193)' te kalınlığın da etkisi dahil edilerek ifade edilmiştir [63, 64, 70].

$$N_T = \int_{-t/2}^{t/2} E\alpha\Delta T dz$$

$$M_T = \int_{-t/2}^{t/2} E\alpha\Delta T z dz \quad (193)$$

Elastisite problemi için termal yüklemeler etkisinde plaka eğilme deformasyonu davranışı, yüzey üzerinde sinüzoidal ve üniform sıcaklık dağılımına sahip, analitik çözümü bilinen bir plaka problemi ile incelenmiştir. Sayısal analiz çözüm sürecinde plaka üzerinde uygulanan basit sınır koşulu tanımlaması Şekil 68' de ifade edilmiştir.

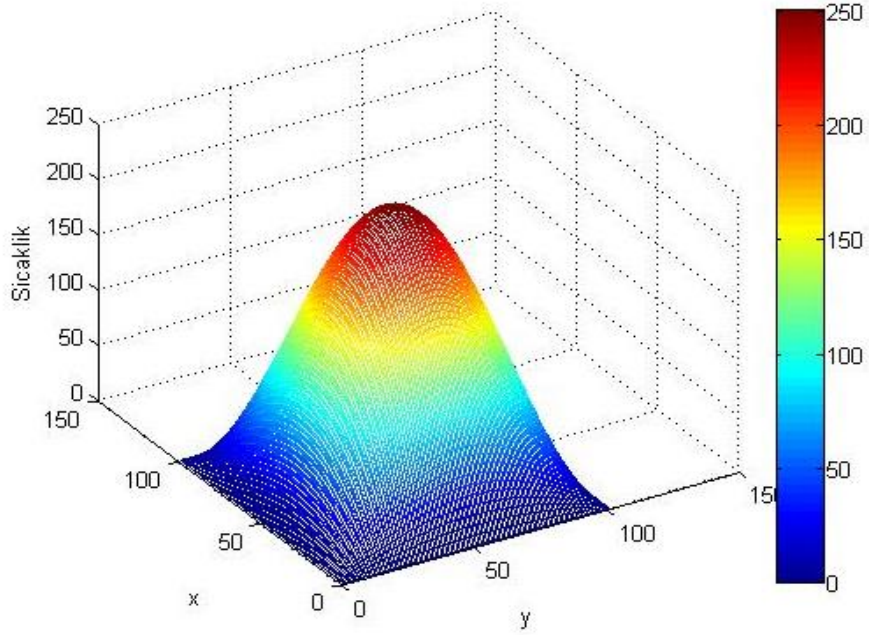


Şekil 68. Plaka üzerinde basit sınır koşulu tanımlaması

Plaka yüzeyinde sinüzoidal sıcaklık dağılımı tanımlaması denklem (194) dikkate alınarak gerçekleştirilmiştir.

$$T(x, y) = T_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (194)$$

Yüzey üzerinde meydana gelen sıcaklık dağılımı  $T_0=250^\circ C$  olarak seçilmesi durumu için Şekil 69' da ifade edilmiştir.



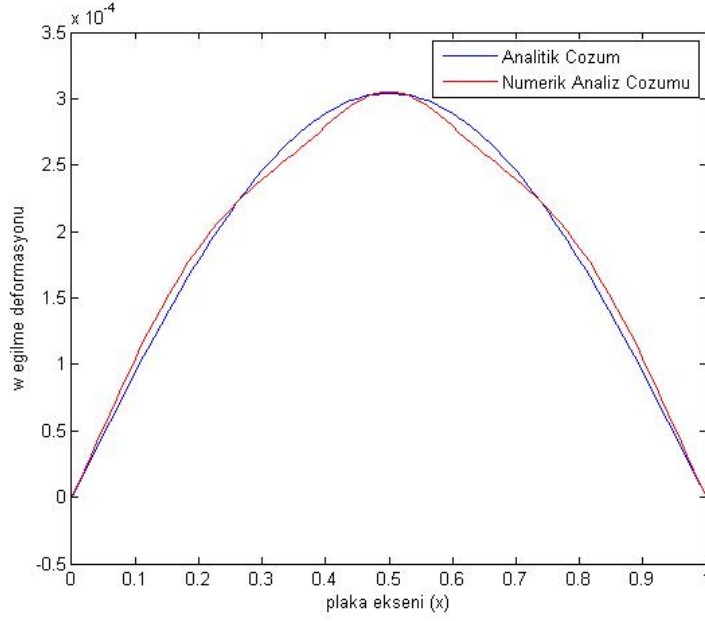
Şekil 69. Yüzeyde meydana gelen sinüzoidal sıcaklık dağılımı

Plaka geometrisi 1m x 1m olacak şekilde seçilmiştir. Sıcaklık dağılımı plaka kalınlığı boyunca lineer olarak değiştiği dikkate alınmış ve lineer değişim Legendre fonksiyonları kullanılarak ifade edilmiştir. Plaka üzerinde meydana gelecek olan eğilme deformasyonu Şekil 69’ da tanımlanan sinüzoidal yüzey sıcaklığı dağılımı kullanılarak incelenecektir.

Plakada meydana gelecek olan eğilme deformasyonu için analitik çözüm denklem (195)’ te ifade edilmiştir [64].

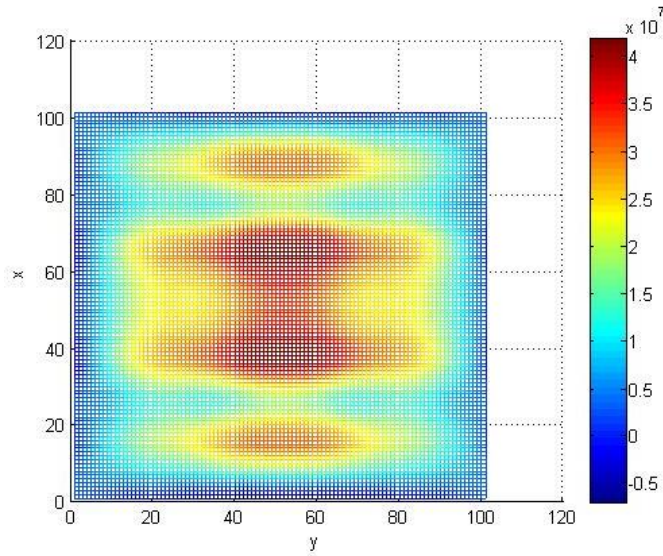
$$w(x, y) = \frac{b^2[(D_{11}+D_{12})\alpha+(D_{12}+D_{22})\alpha]T_0}{\pi^2(D_{11}+2D_{12}+D_{22})} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (195)$$

Plaka merkez eksenini ( $x=0,5$  sabit olacak şekilde) referans alınarak Eleman Bağımsız Galerkin ağız yöntemi çözümü ve analitik çözümün karşılaştırması Şekil 70’ te verilmiştir.

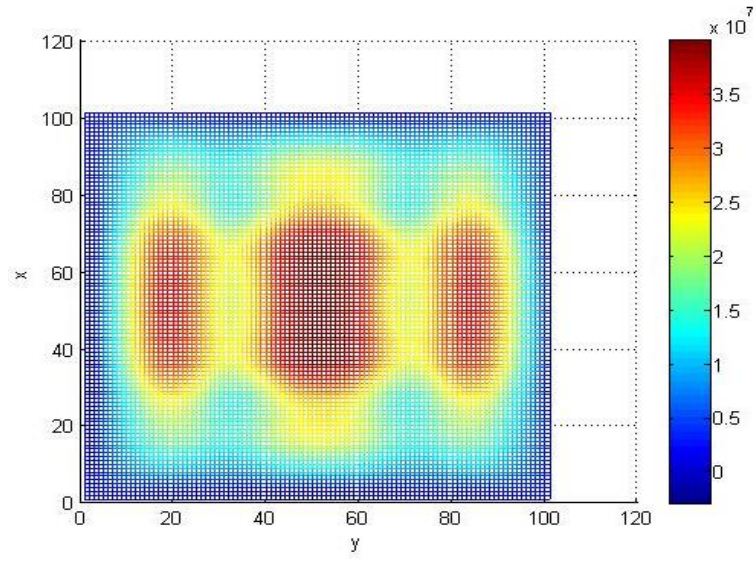


Şekil 70. X=0.5m için Eleman Bağımsız Galerkin ağısız yöntemi çözümü ve analitik çözüm karşılaştırılması

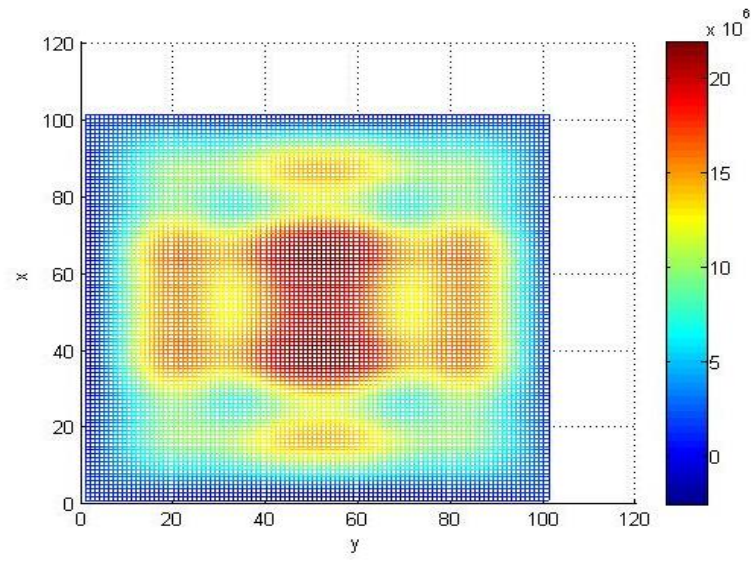
Plaka üzerinde meydana gelen gerilme dağılımı ve eğilme momenti ifadeleri de sırasıyla Şekil 71 ile Şekil 76 arasında ifade edilmiştir. Plakada oluşan maksimum  $\sigma_x$  gerilmesi 40 MPa' dır. Eğilme momenti etkisinde kesitte oluşacak olan maksimum gerilme değeri 38.7 MPa' dır.



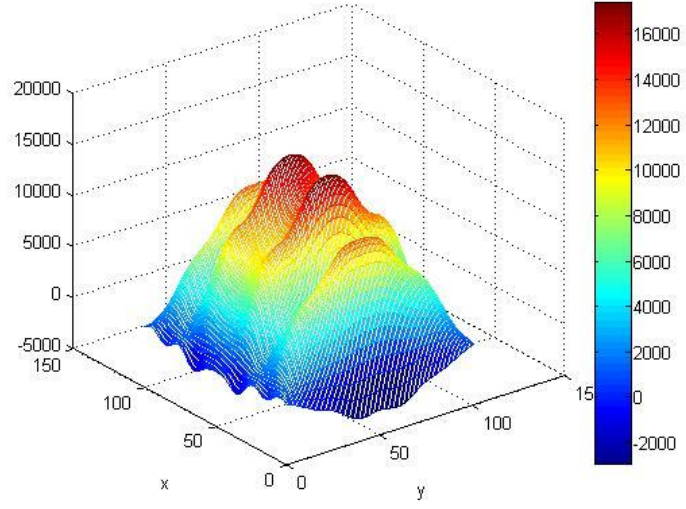
Şekil 71. Plaka üzerinde meydana gelen  $\sigma_x$  gerilme dağılımı (Pa)



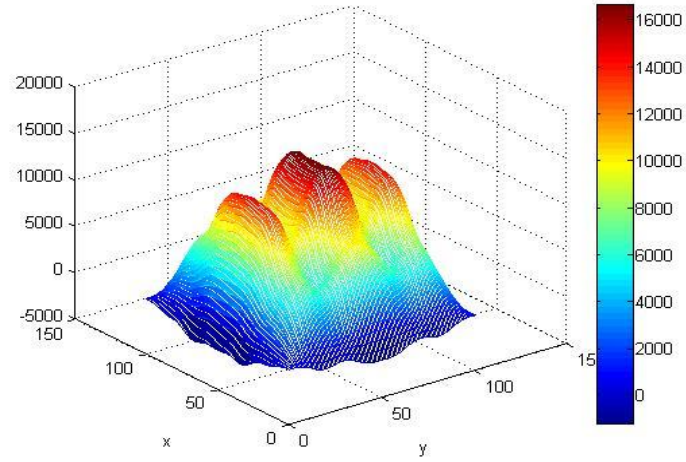
Şekil 72. Plaka üzerinde meydana gelen  $\sigma_y$  gerilme dağılımı (Pa)



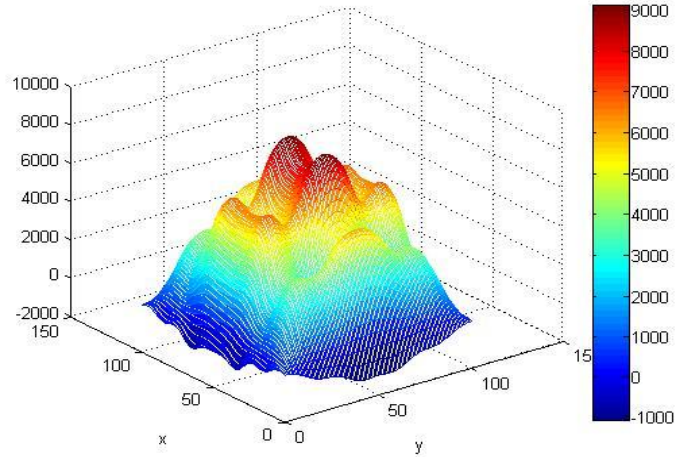
Şekil 73. Plaka yüzeyinde meydana gelen  $\tau_{xy}$  gerilme dağılımı (Pa)



Şekil 74. Plaka yüzeyinde meydana gelen  $M_x$  moment dağılımı (Nm)



Şekil 75. Plaka yüzeyinde meydana gelen  $M_y$  moment dağılımı (Nm)



Şekil 76. Plaka yüzeyinde meydana gelen  $M_{xy}$  moment dağılımı (Nm)

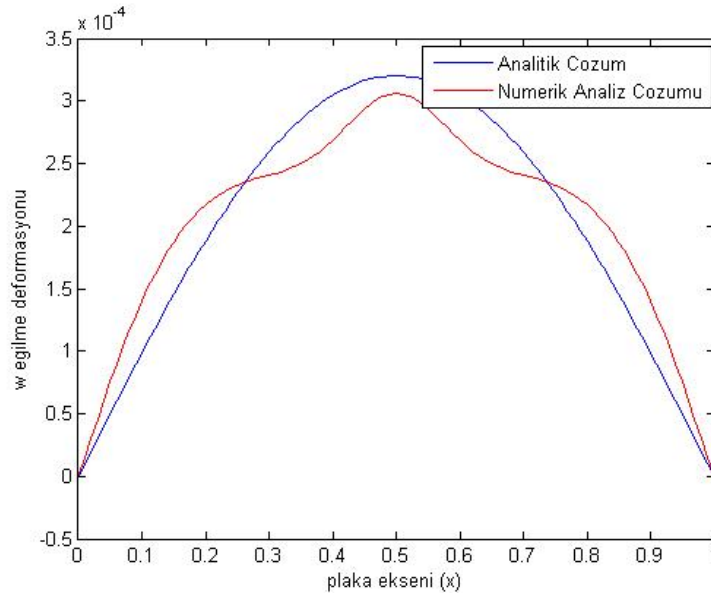
Plaka yüzeyinde üniform sıcaklık dağılımı olması durumunda plaka üzerinde meydana gelen eğilme deformasyonu davranışı analitik olarak denklem (196)' da ifade edilmiştir [64].

$$w(x, y) = \frac{16T_0\alpha(1+\nu)b^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2+n^2)mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (196)$$

Plaka eğilme deformasyonu davranışı, elde edilen Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yöntemi çözümü ve analitik çözüm arasındaki karşılaştırma Şekil 77' de verilmiştir.

Şekil 77' de elde edilen Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yöntemler çözümünde maksimum eğilme değeri  $3.12216e-4m$  iken analitik çözüm için elde edilen maksimum eğilme deformasyonu değeri  $3.20141e-4m$ ' dir.





Şekil 77. X=0,5m için Eleman Bağımsız Galerkin ağısız yöntemler çözümü ve analitik çözümün karşılaştırılması

Plaka üzerinde iki farklı sıcaklık dağılımı için Eleman Bağımsız Galerkin ağısız yöntemi çözümü ile analitik çözümler kıyaslanmıştır. Temel olarak her iki problemin incelenmesindeki amaç, sıcaklık dağılımı etkisi ile plaka üzerine etkiyen termal yüklerin sayısal çözüm sürecine etkisinin tespit edilmesidir. Çünkü hareketli ısı cephe probleminde de aynı termal yükler uygulanarak eğilme deformasyonu, moment ve gerilme dağılımı elde edilecektir. Eleman Bağımsız Galerkin ağısız yöntemi ile termal yükler etkisindeki plaka eğilme deformasyonu davranışı analitik çözümlerle kıyaslandığında maksimum hata değeri Şekil 77' de ifade edilen eğilme davranışı için %2.4755 olarak elde edilmiştir.

Geliştirilen Eleman Bağımsız Galerkin yöntemi ile analitik çözümü bilinen sıcaklık etkisinde bulunan bir plaka üzerinde oluşacak olan termal momentlerin doğru bir biçimde hesaplanabildiği ortaya konulmuştur. Böylece, bu aşamada Hareketli Isıl Cephe problemi çözümü için ısı transferi problemi ve elastisite problemi çözümlerinde geliştirilen yöntemin kullanılması mümkün görülmektedir.

Isı transferi probleminde hareketli ısı kaynağının doğru modellenmesi ve hareketli ısı kaynağının yapı üzerinde meydana getirdiği sıcaklık dağılımının gerçeğe uygun olarak modellenmesi elastisite problemi çözümünü doğrudan etkilediğinden analizde önemli bir aşamadır. Hareketli ısı kaynağı için literatürde yarı elipsoidal dağılıma sahip ısı kaynağı modeli, çift elipsoidal dağılıma sahip ısı kaynağı modeli ve Gauss dağılımına sahip ısı kaynağı modelleri önerilmiştir [23, 24, 25]. Literatürden seçilmiş olan kıyaslama



problemleri kapsamında Gauss dağılımına sahip ısı kaynağı ile ilgili gerçekleştirilmiş olan test sayısal çalışmaların çokluğu sebebiyle tez kapsamında Gauss dağılımına sahip ısı kaynağı modeli ısı transferi problemi çözümünde kullanılmıştır.

Hareketli ısı kaynağı için yüzeyde meydana gelen ısı akısı ve sıcaklık dağılımı için kalorimetrik ölçümler ve testler gerçekleştirerek Clausen tarafından Gauss dağılımına sahip ısı kaynağı modeli önerilmiştir. Isı kaynağı etkinlik yarıçapı içerisinde, ısı kaynağının sağladığı toplam ısı girişine bağlı olarak yüzeyde oluşan ısı akısı dağılımı yarıçapa bağlı olarak Şekil 78' de ifade edilmiştir. Şekil 78' de gerçekleştirilen tanımlamada ısı kaynağı çapı olarak 80 mm kullanılmıştır.

Clausen tarafından tanımlanmış olan Gauss dağılımına sahip ısı kaynağı modelinde ısı kaynağı yarıçapına bağlı olarak yüzeye etkiyen ısı akısı denklem (197)' de ifade edilmiştir [19, 38].

$$Q'' = Q''_{max} \cdot e^{(-\gamma \cdot r^2)} \quad (197)$$

Denklem (197)' de yer alan  $Q''$  ve  $Q''_{max}$  terimleri sırasıyla uygulanan ısı akısının yarıçap' a bağlı olarak değişimi ve merkezdeki maksimum ısı akısı değerini ifade etmektedir,  $\gamma$  ısı akısı genişliğini etkileyen faktör ve  $r$ ' de ısı akısının merkezden olan uzaklığını tanımlamaktadır. Yapı üzerinde meydana gelen maksimum ısı akısı dağılımı kullanılarak yapı üzerine etkiyen toplam ısı  $Q_{tot}$  denklem (198)' de ifade edilmiştir.

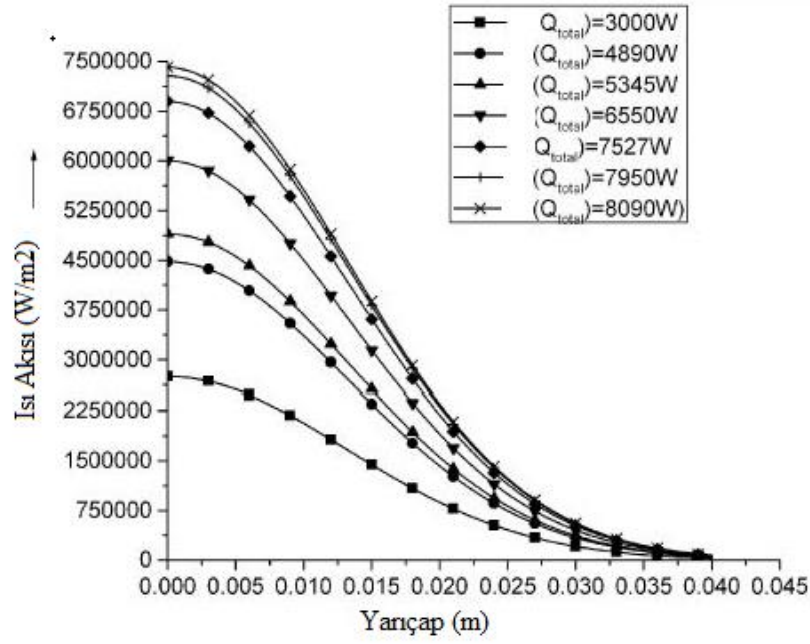
$$Q_{tot} = \int_0^{2\pi} \int_0^r Q'' r dr d\theta = \frac{\pi Q_{max}}{\gamma} \quad (198)$$

Denklem (198)' de yer alan  $\gamma$  terimi,  $Q''_{max}$  ile tanımlanan merkezdeki maksimum ısı akısı teriminin  $Q''$  ısı akısı teriminin 0.01 katına eşit olduğu mesafeyi ısı kaynağı etkinlik yarıçapı olarak tanımlamaktadır. Böylece  $\gamma$  terimi matematiksel olarak denklem (199)' da ifade edilmiştir.

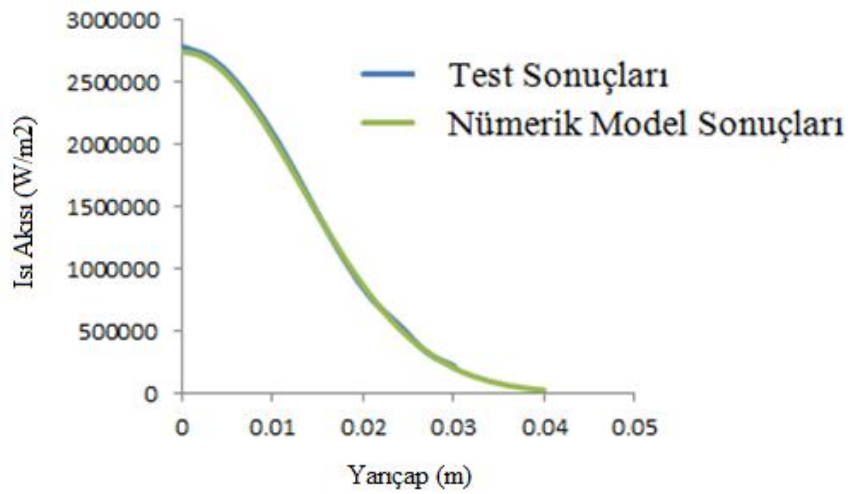
$$0.01 * Q''_{max} = Q''_{max} \cdot e^{(-\gamma \cdot r^2)} \quad (199)$$

$$\gamma = \frac{\ln 100}{r^2} \quad (200)$$

Denklem (197)' de tanımlanan ısı akısı dağılımı ve Şekil 78' de farklı ısı güçleri için tanımlanmış olan ısı akısı dağılımlarından 3kW referans alınarak oluşturulan ısı akısı dağılımı Şekil 79' da ifade edilmiştir.



Şekil 78. Farklı güçler kullanılarak yüzeyde meydana gelen ısı akısı dağılımı [38]



Şekil 79. Gauss dağılımı için yüzeyde oluşan ısı akısı karşılaştırması

Yüzey üzerinde farklı ısı güçleri ve ilerleme hızları dikkate alınarak yüzey üzerinde meydana gelen maksimum sıcaklıkların literatürde gerçekleştirilen ölçümler ve sayısal analiz sonuçları ile kıyaslaması Tablo 6’da ifade edilmiştir.

Burada gerçekleştirilen Eleman Bağımsız Galerkin ağızlı yöntemler çözümlerinde x ekseninde 11, y ekseninde 9 düğüm olacak şekilde gerçekleştirilmiş olup şekil fonksiyonları etkinlik yarıçapı çarpan değeri 3.55 olarak kullanılmıştır.

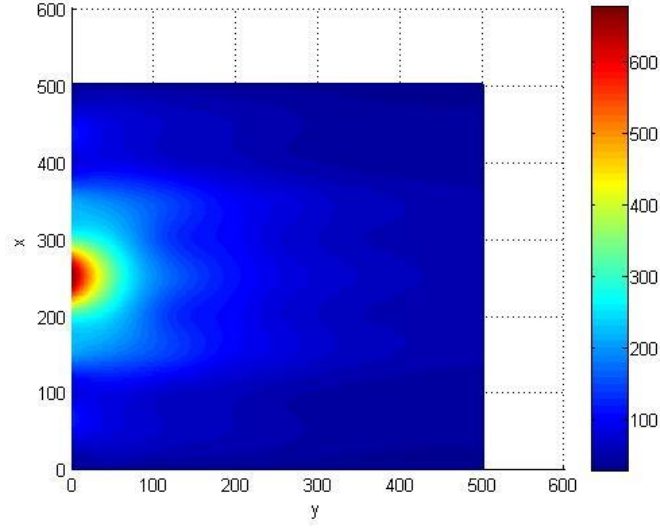
Tablo 6. Sonlu elemanlar Yöntemi ve Ağızlı Yöntemler için Hareketli ısıl cephe Probleminde Maksimum Sıcaklık Değeri Kıyaslaması [19, 38]

Plaka kalınlığı (mm)	Isı Kaynağı İlerleme Hızı (mm/dk)	Isı Kaynağı Gücü (W)	Ölçülen Sıcaklık °C [19]	SEY Sıcaklık Değeri °C [38]	EBGAY (°C)	% Hata Değeri SEY	% Hata Değeri EBGAY
10	0.3	4367	500	508.7	489.33	1.74	2.13
10	0.9	8050	500	493.5	508.65	1.3	1.73
10	0.3	5200	600	621	577.61	3.5	3.68
10	0.6	7850	600	617	632.04	2.833	5.34
10	0.3	6150	700	709.3	678.914	1.33	3.012
10	0.6	8900	700	687	713.24	1.86	1.89
10	0.9	11150	700	711	678.16	1.57	3.12

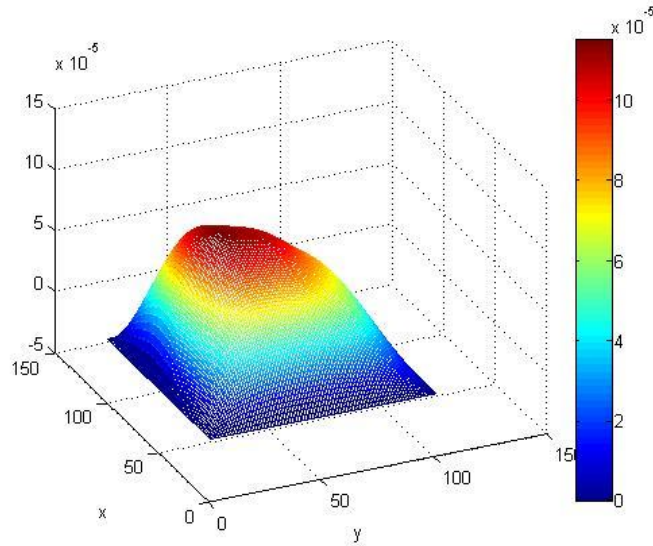
Tablo 6’da verilen karşılaştırma sonuçları plaka üzerinde meydana gelen maksimum sıcaklık dağılımı için gerçekleştirilmiştir. Bu tanımlamada ağızlı yöntemler çözüm değerleri elde edilen hata dağılımı bakımından incelendiğinde uygun sonuçlar verdiği görülmektedir. Sonlu elemanlar yöntemi ile kıyaslanması durumunda hata dağılımı olarak daha kötü sonuçlar elde edilmiştir. Ancak sonlu elemanlar yöntemi ile gerçekleştirilen analizde ısı kaynağı etkisindeki bölgede en az 3 eleman dahil edilerek sıcaklık dağılımı uygun olarak elde edilmiştir [19, 38]. Gerçekleştirilen Eleman Bağımsız Galerkin ağızlı yöntemi çözümünde ise ısı kaynağı etkinlik yarıçapı içerisinde özellikle bir tanımlama yapılmamıştır. Bölge içerisinde üniform bir dağılım kullanılarak çözümler elde edilmiştir.

Ağızlı yöntemlerin, hareketli ısıl cephe problemlerinin çözümünde kullanılması ısı kaynağı etkinlik yarıçapı içerisinde herhangi bir özel tanımlamaya ihtiyaç duymaması bakımından avantaj sağlamaktadır. Bu durum sayısal integrasyon aşamasında ağızlı yöntemler için kullanılan integrasyon noktası sayısının fazla olması ile elde edilen bir avantaj olarak ifade edilebilir.

Tablo 6' da gerçekleştirilen kıyaslamalardan 4367W güç ve 0,3 m/dk ilerleme hızı referans alınarak ısı transferi problemi çözümü  $t=0,3, 40, 80, 120, 160$  ve 200 saniye için elde edilmiştir. Sıcaklık dağılımı ve eğilme deformasyonu davranışları Şekil 80 ile Şekil 85 arasında ifade edilmiştir. Eğilme deformasyonu etkisinde oluşan gerilme dağılımları Şekil 86 ile Şekil 103 arasında ifade edilmiştir.

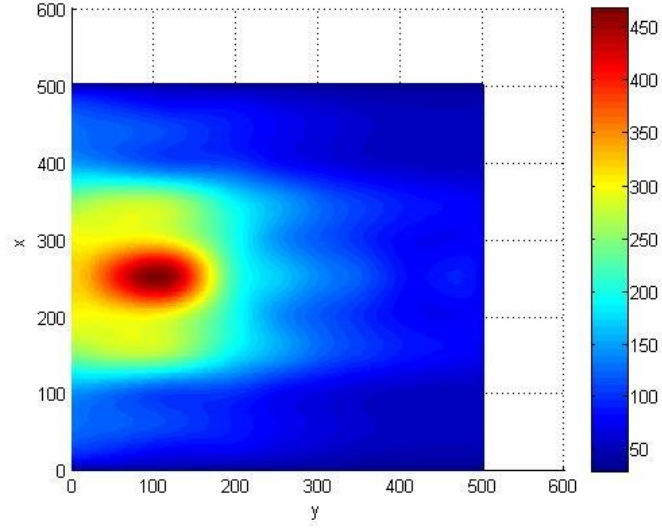


a)  $t=0.3$  saniyedeki sıcaklık dağılımı ( $^{\circ}\text{C}$ )

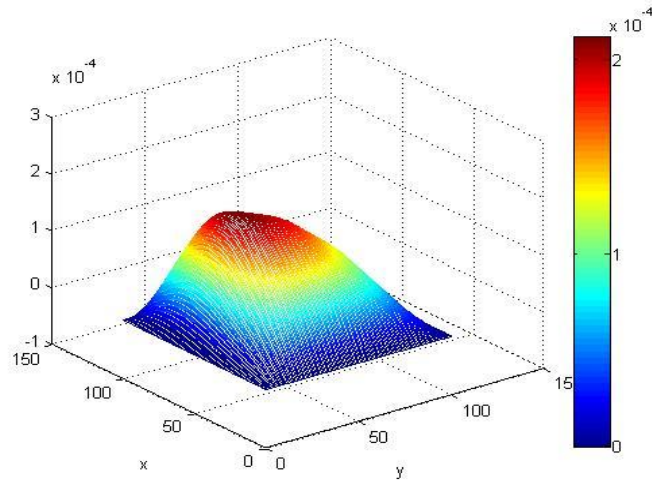


b)  $t=0.3$  saniyedeki sıcaklık dağılımı için elde edilen eğilme deformasyonu (m)

Şekil 80. Hareketli ısı cephe için 4367 W güç ve 0.3 m/dk ilerleme hızı etkisinde  $t=0.3$  saniyedeki sıcaklık dağılımı ve eğilme deformasyonu davranışı

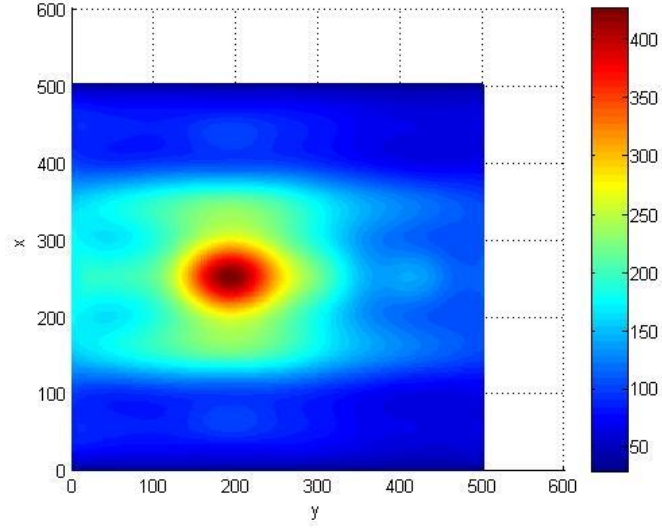


a)  $t=40$  saniyedeki sıcaklık dağılımı ( $^{\circ}\text{C}$ )

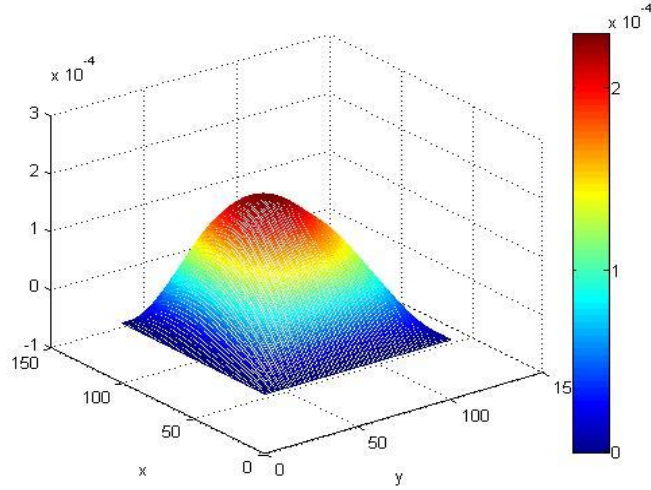


b)  $t=40$  saniyedeki sıcaklık dağılımı için elde edilen eğilme deformasyonu (m)

Şekil 81. Hareketli ısı cephe için 4367 W güç ve 0.3 m/dk ilerleme hızı etkisinde  $t=40$  saniyedeki sıcaklık dağılımı ve eğilme deformasyonu davranışı

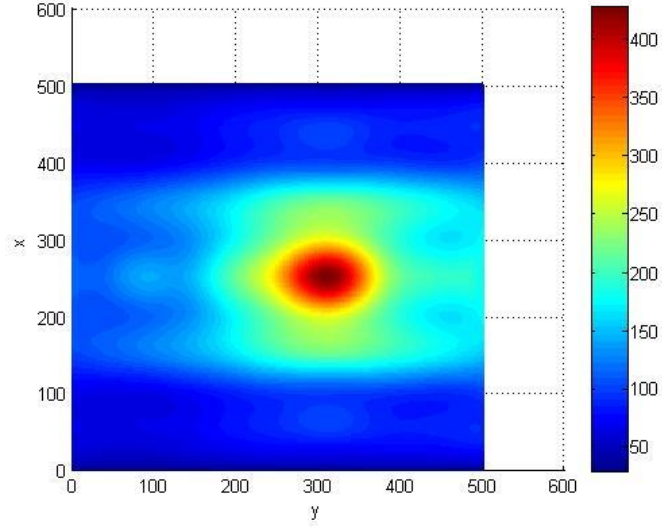


a)  $t=80$  saniyedeki sıcaklık dağılımı ( $^{\circ}\text{C}$ )

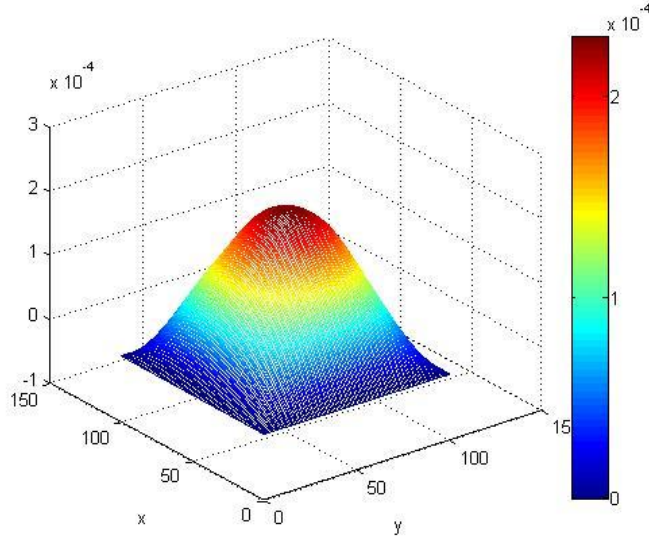


b)  $t=80$  saniyedeki sıcaklık dağılımı için elde edilen eğilme deformasyonu (m)

Şekil 82. Hareketli ısı cephe için 4367 W güç ve 0.3 m/dk ilerleme hızı etkisinde  $t=80$  saniyedeki sıcaklık dağılımı ve eğilme deformasyonu davranışı

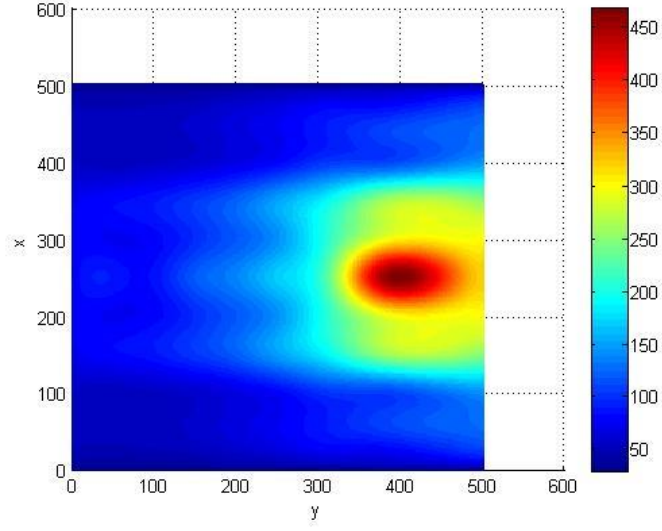


a) 120 saniyedeki sıcaklık dağılımı ( $^{\circ}\text{C}$ )

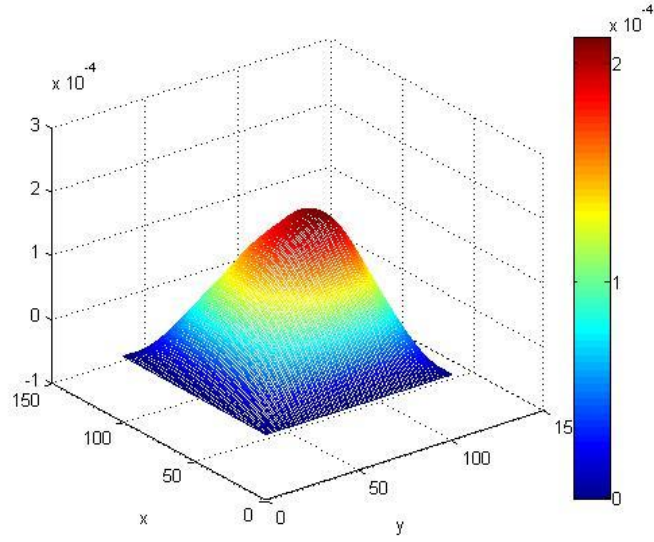


b)  $t=120$  saniyedeki sıcaklık dağılımı için elde edilen eğilme deformasyonu (m)

Şekil 83. Hareketli ısı cephe için 4367 W güç ve 0.3 m/dk ilerleme hızı etkisinde  $t=120$  saniyedeki sıcaklık dağılımı ve eğilme deformasyonu davranışı



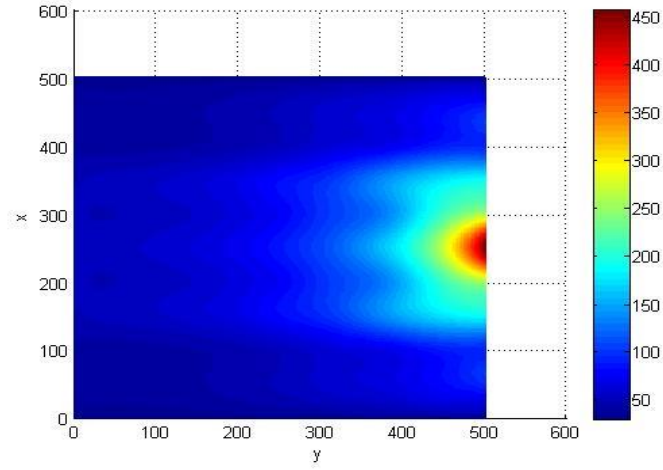
a) 160 saniyedeki sıcaklık dağılımı ( $^{\circ}\text{C}$ )



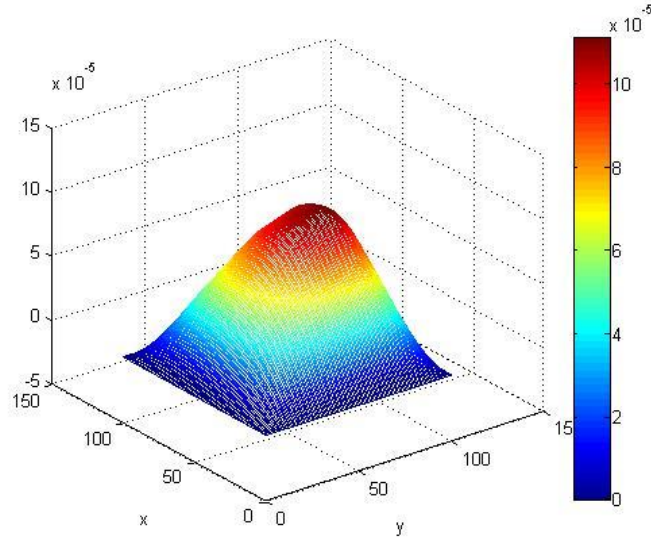
b)  $t=160$  saniyedeki sıcaklık dağılımı için elde edilen eğilme deformasyonu (m)

Şekil 84. Hareketli ısı cephe için 4367 W güç ve 0.3 m/dk ilerleme hızı etkisinde  $t=160$  saniyedeki sıcaklık dağılımı ve eğilme deformasyonu davranışı



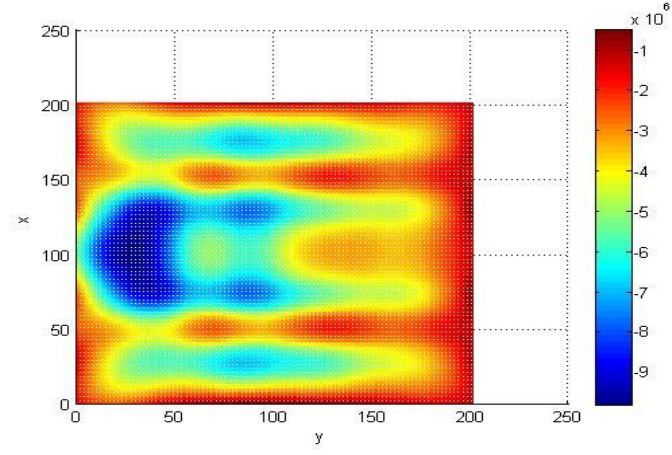


a)  $t=200$  saniyedeki sıcaklık dağılımı ( $^{\circ}\text{C}$ )

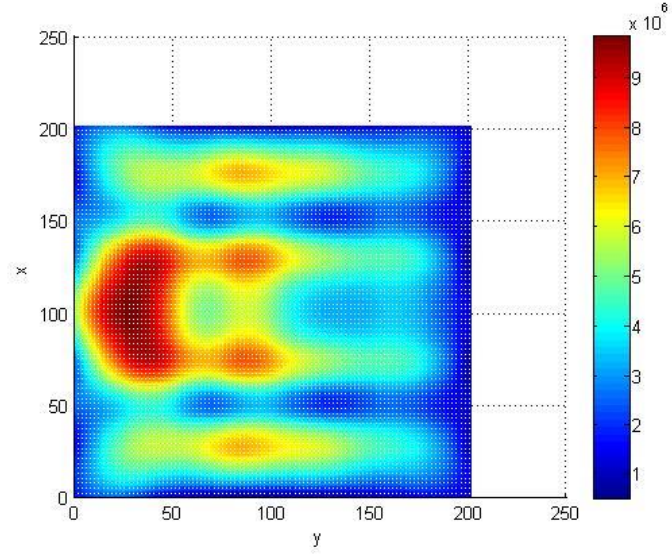


b)  $t=200$  saniyedeki sıcaklık dağılımı için elde edilen eğilme deformasyonu (m)

Şekil 85. Hareketli ısı cephe için 4367 W güç ve 0.3 m/dk ilerleme hızı etkisinde  $t=200$  saniyedeki sıcaklık dağılımı ve eğilme deformasyonu davranışı

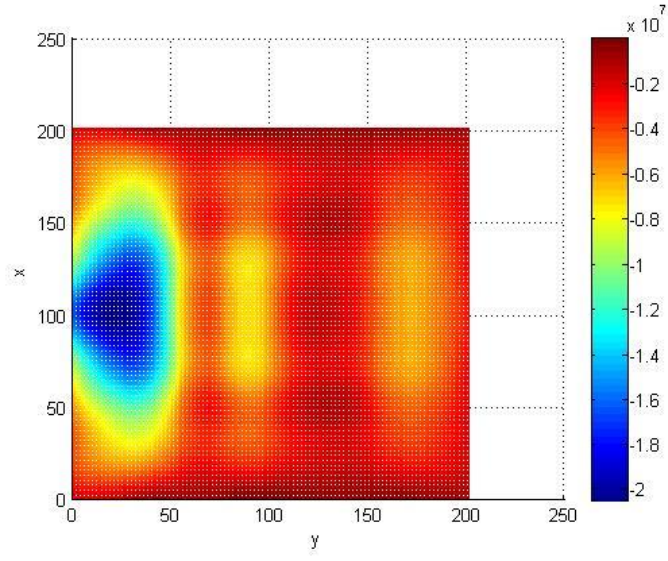


a) Plaka üst yüzeyinde meydana gelen  $\sigma_x$  gerilme dağılımı (Pa)

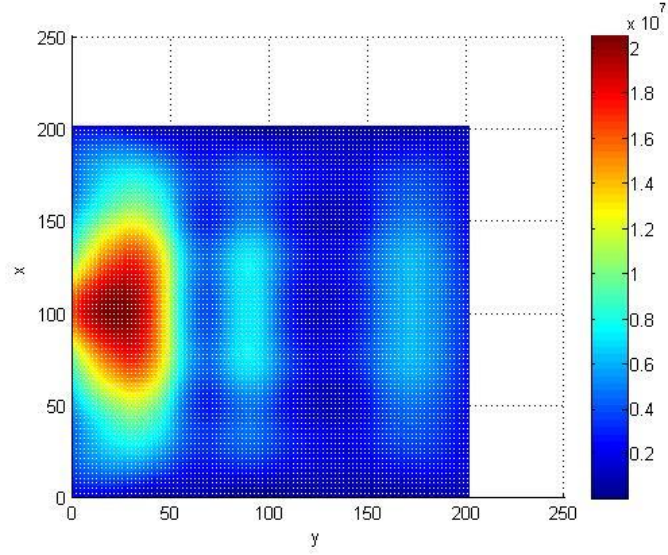


b) Plaka alt yüzeyinde meydana gelen  $\sigma_x$  gerilme dağılımı (Pa)

Şekil 86.  $t=0,3$  saniye için plaka üst ve alt yüzeylerinde meydana gelen  $\sigma_x$  gerilme dağılımı

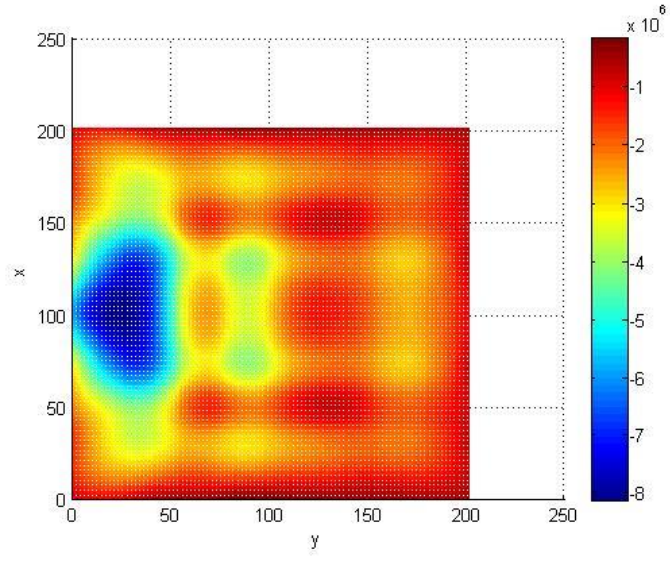


a) Plaka üst yüzeyinde meydana gelen  $\sigma_y$  gerilme dağılımı (Pa)

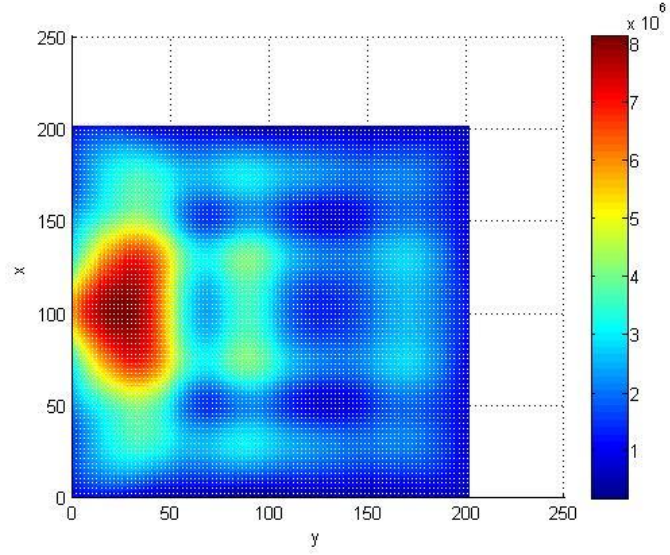


b) Plaka alt yüzeyinde meydana gelen  $\sigma_y$  gerilme dağılımı (Pa)

Şekil 87.  $t=0.3$  saniye için plaka üst ve alt yüzeylerinde meydana gelen  $\sigma_y$  gerilme dağılımı

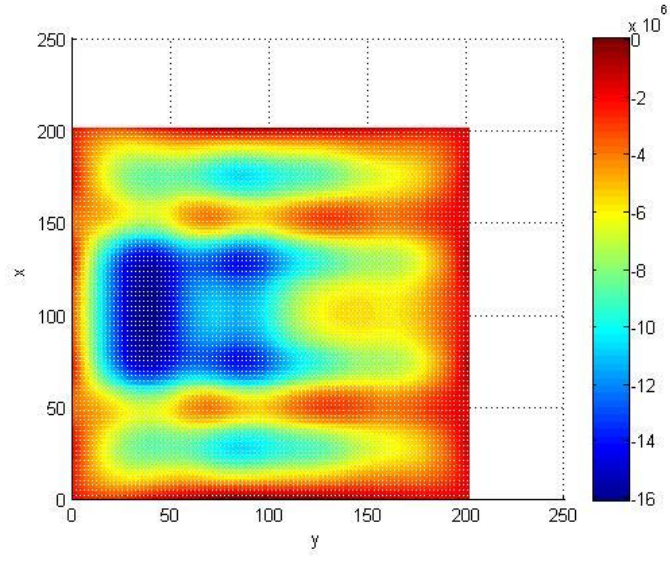


a) Plaka üst yüzeyinde meydana gelen  $\tau_{xy}$  gerilme dağılımı (Pa)

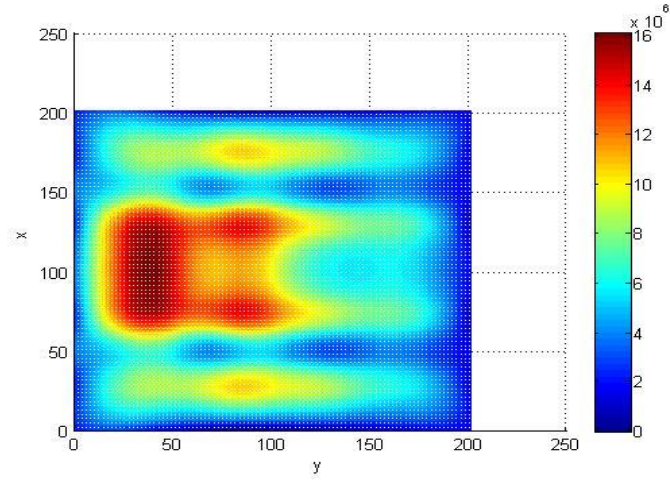


b) Plaka alt yüzeyinde meydana gelen  $\tau_{xy}$  gerilme dağılımı (Pa)

Şekil 88.  $t=0.3$  saniye için plaka üst ve alt yüzeylerinde meydana gelen  $\tau_{xy}$  gerilme dağılımı



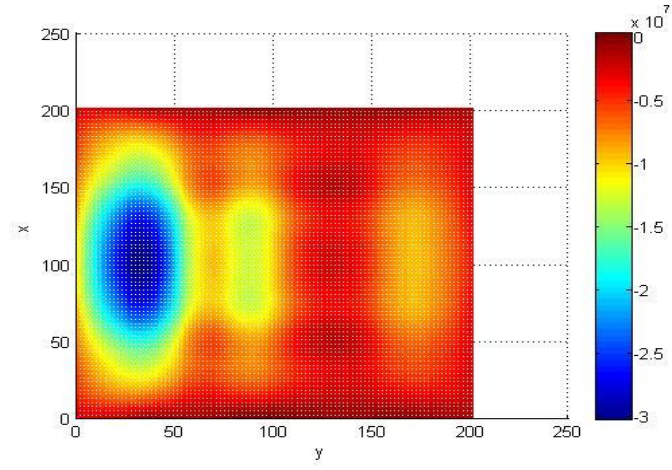
a) Plaka üst yüzeyinde meydana gelen  $\sigma_x$  gerilme dağılımı (Pa)



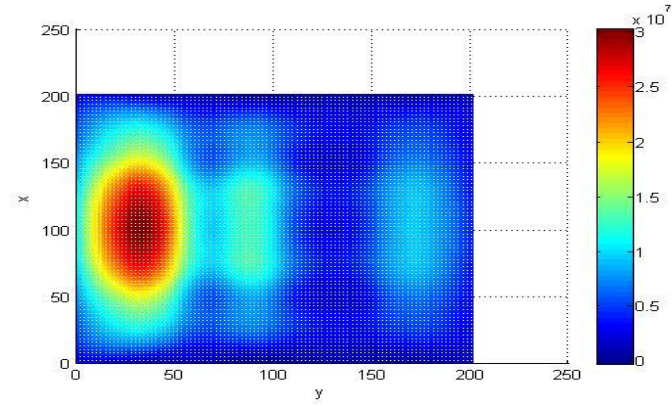
b) Plaka alt yüzeyinde meydana gelen  $\sigma_x$  gerilme dağılımı (Pa)

Şekil 89.  $t=40$  saniye için plaka üst ve alt yüzeylerinde meydana gelen  $\sigma_x$  gerilme dağılımı



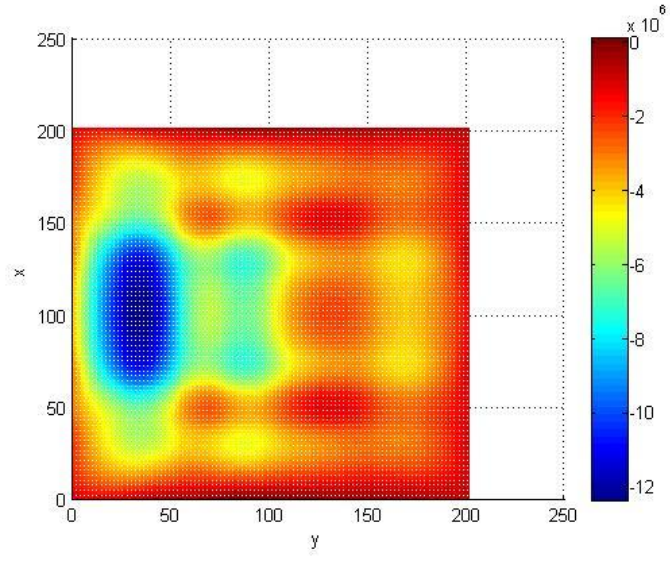


a) Plaka üst yüzeyinde meydana gelen  $\sigma_y$  gerilme dağılımı (Pa)

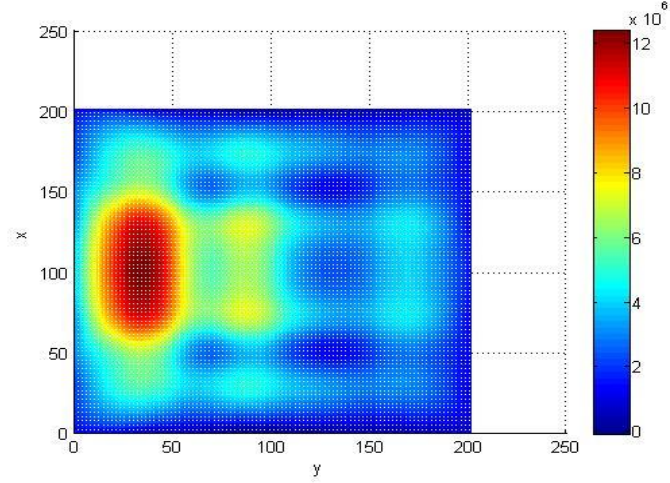


b) Plaka alt yüzeyinde meydana gelen  $\sigma_y$  gerilme dağılımı (Pa)

Şekil 90.  $t=40$  saniye için plaka üst ve alt yüzeylerinde meydana gelen  $\sigma_y$  gerilme dağılımı

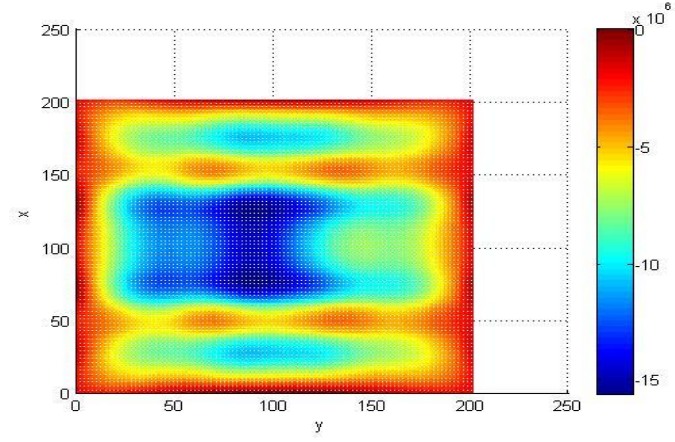


a) Plaka üst yüzeyinde meydana gelen  $\tau_{xy}$  gerilme dağılımı (Pa)

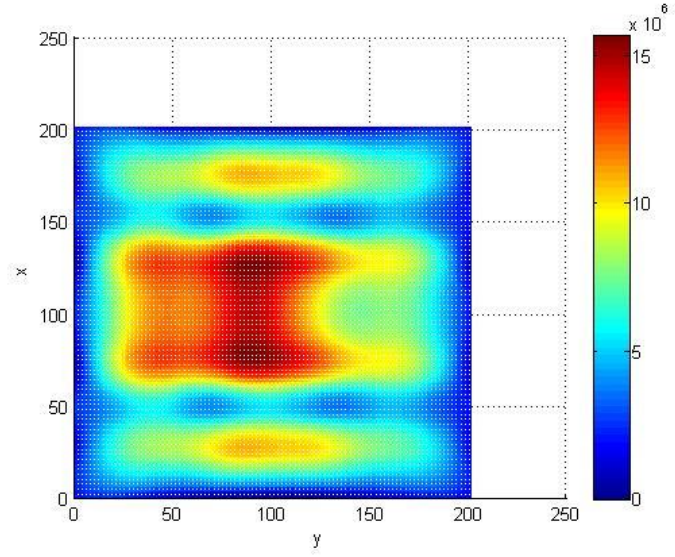


b) Plaka alt yüzeyinde meydana gelen  $\tau_{xy}$  gerilme dağılımı (Pa)

Şekil 91.  $t=40$  saniye için plaka üst ve alt yüzeylerinde meydana gelen  $\tau_{xy}$  gerilme dağılımı



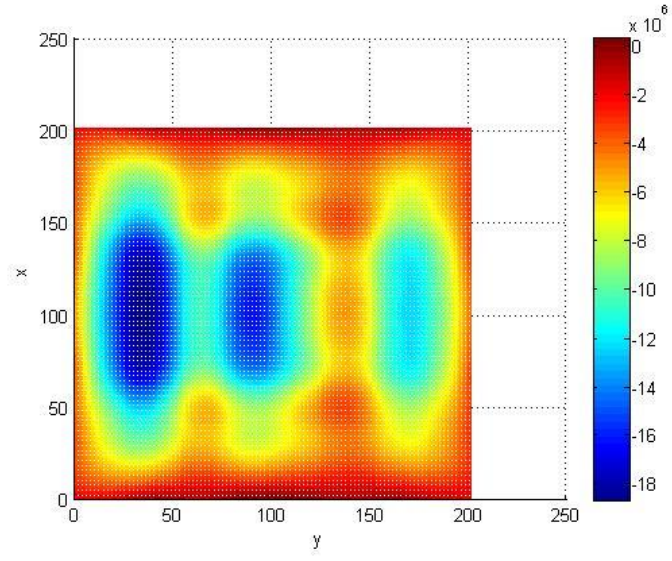
a) Plaka üst yüzeyinde meydana gelen  $\sigma_x$  gerilme dağılımı (Pa)



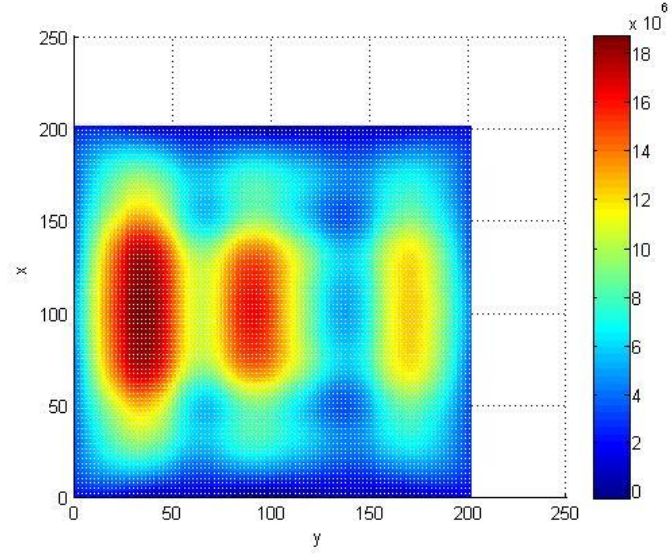
b) Plaka alt yüzeyinde meydana gelen  $\sigma_x$  gerilme dağılımı (Pa)

Şekil 92.  $t=80$  saniye için plaka üst ve alt yüzeyinde meydana gelen  $\sigma_x$  gerilme dağılımı



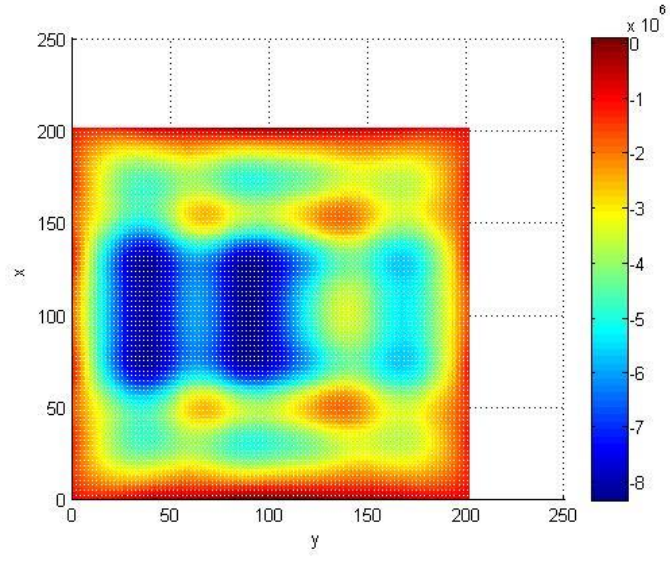


a) Plaka üst yüzeyinde meydana gelen  $\sigma_y$  gerilme dağılımı (Pa)

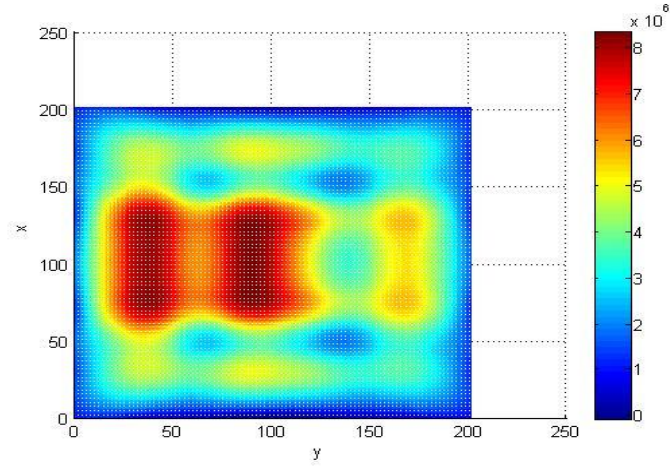


b) Plaka alt yüzeyinde meydana gelen  $\sigma_y$  gerilme dağılımı (Pa)

Şekil 93.  $t=80$  saniye için plaka üst ve alt yüzeyinde meydana gelen  $\sigma_y$  gerilme dağılımı

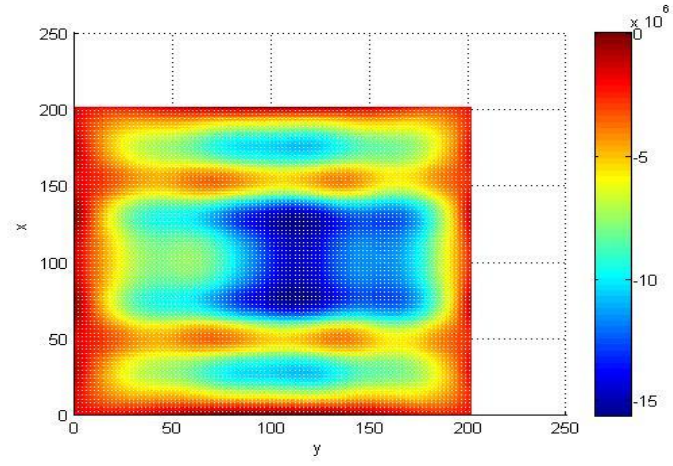


a) Plaka üst yüzeyinde meydana gelen  $\tau_{xy}$  gerilme dağılımı (Pa)

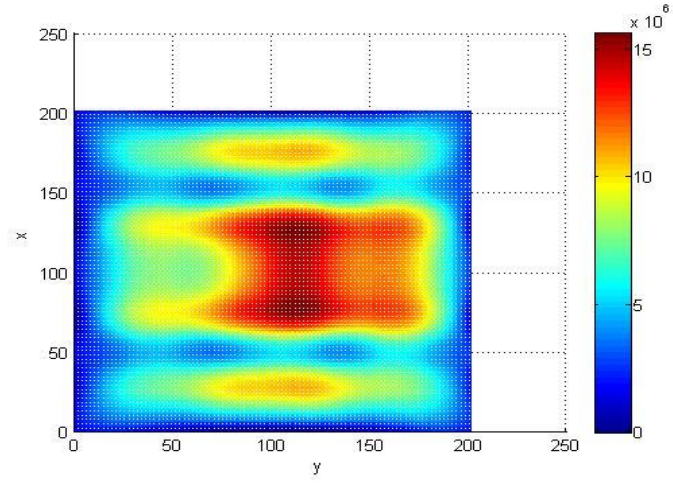


b) Plaka alt yüzeyinde meydana gelen  $\tau_{xy}$  gerilme dağılımı (Pa)

Şekil 94.  $t=80$  saniye için plaka üst ve alt yüzeyinde meydana gelen  $\tau_{xy}$  gerilme dağılımı

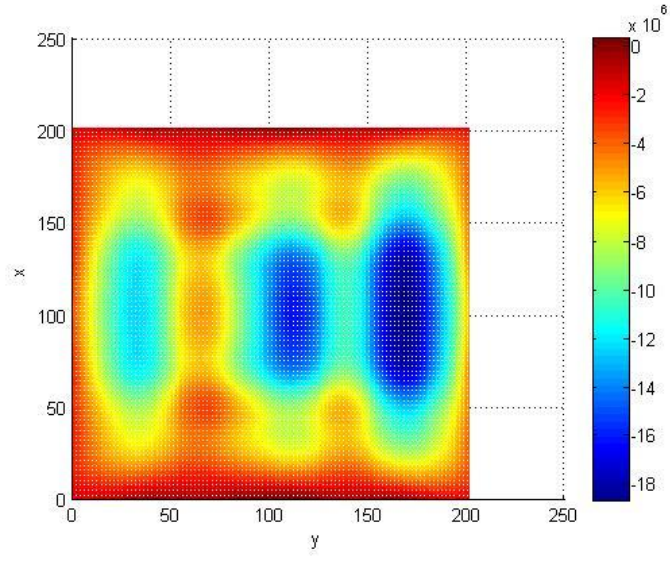


a) Plaka üst yüzeyinde meydana gelen  $\sigma_x$  gerilme dağılımı (Pa)

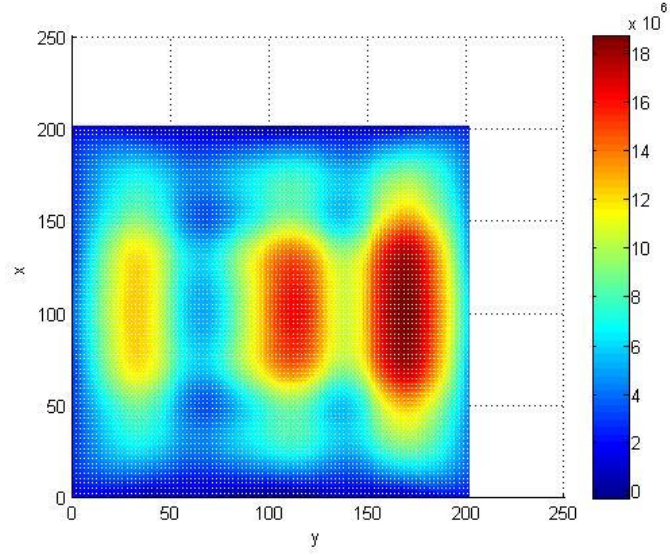


b) Plaka alt yüzeyinde meydana gelen  $\sigma_x$  gerilme dağılımı (Pa)

Şekil 95.  $t=120$  saniye için plaka üst ve alt yüzeyinde meydana gelen  $\sigma_x$  gerilme dağılımı



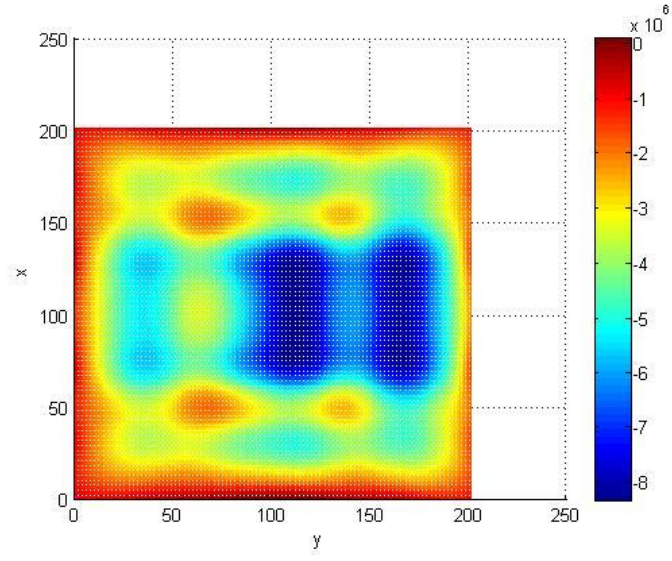
a) Plaka üst yüzeyinde meydana gelen  $\sigma_y$  gerilme dağılımı (Pa)



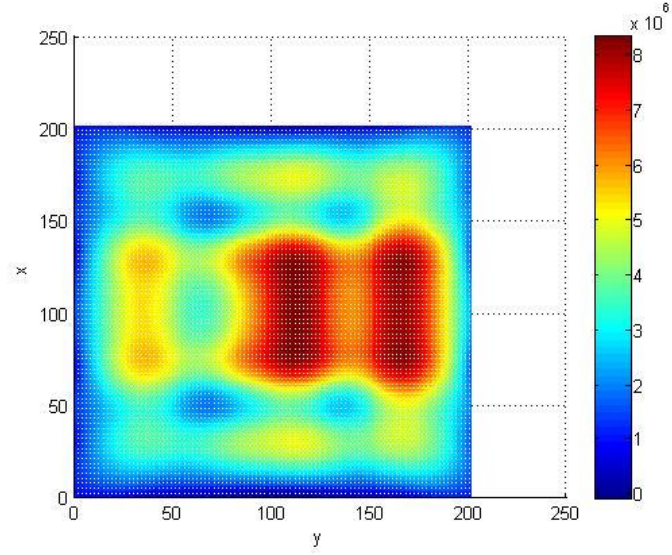
b) Plaka alt yüzeyinde meydana gelen  $\sigma_y$  gerilme dağılımı (Pa)

Şekil 96.  $t=120$  saniye için plaka üst ve alt yüzeyinde meydana gelen  $\sigma_y$  gerilme dağılımı



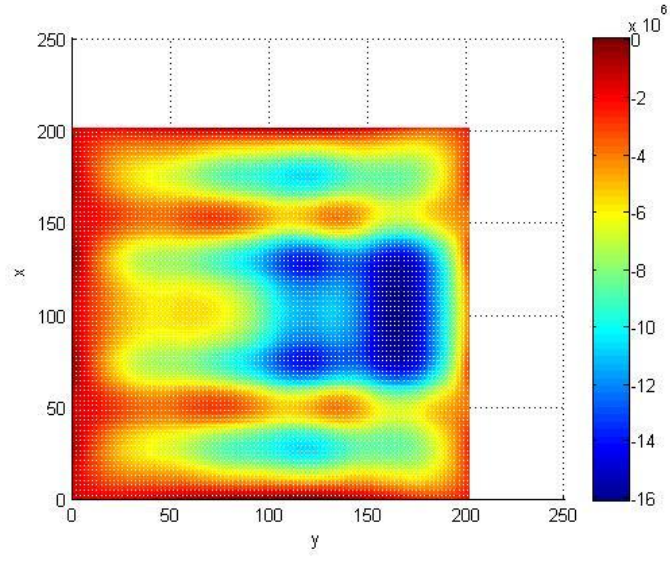


a) Plaka üst yüzeyinde meydana gelen  $\tau_{xy}$  gerilme dağılımı (Pa)

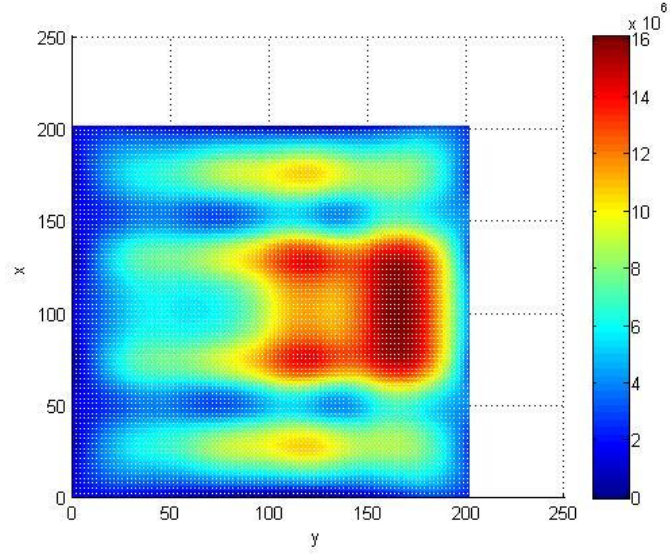


b) Plaka alt yüzeyinde meydana gelen  $\tau_{xy}$  gerilme dağılımı (Pa)

Şekil 97.  $t=120$  saniye için plaka üst ve alt yüzeyinde meydana gelen  $\tau_{xy}$  gerilme dağılımı

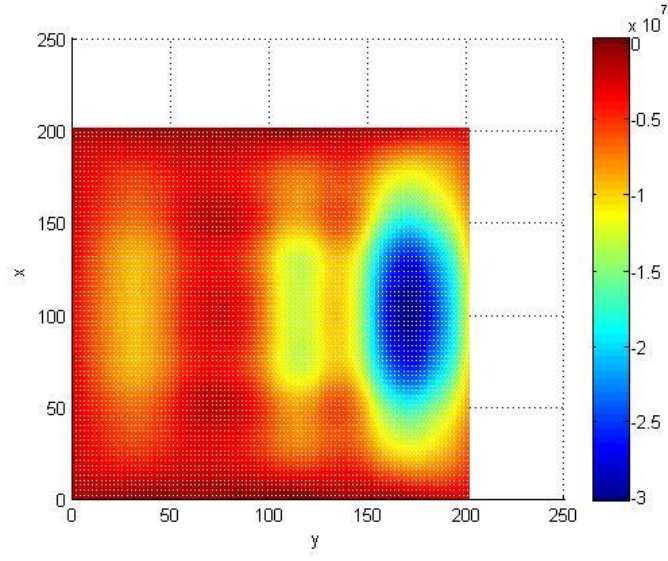


a) Plaka üst yüzeyinde meydana gelen  $\sigma_x$  gerilme dağılımı (Pa)

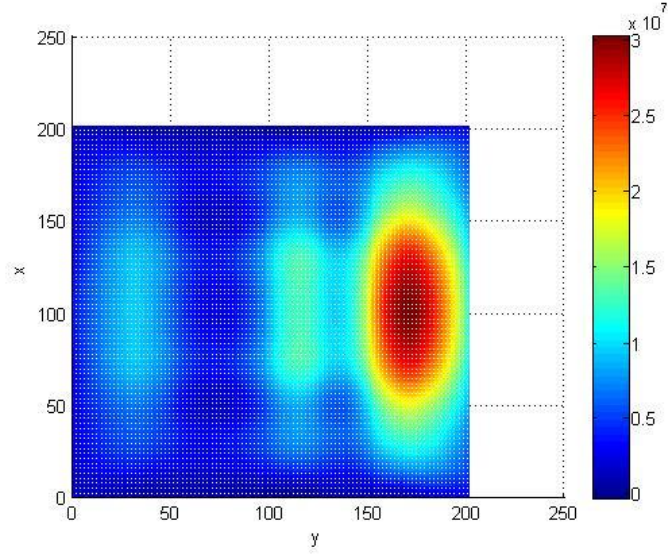


b) Plaka alt yüzeyinde meydana gelen  $\sigma_x$  gerilme dağılımı (Pa)

Şekil 98.  $t=160$  saniye için plaka üst ve alt yüzeyinde meydana gelen  $\sigma_x$  gerilme dağılımı

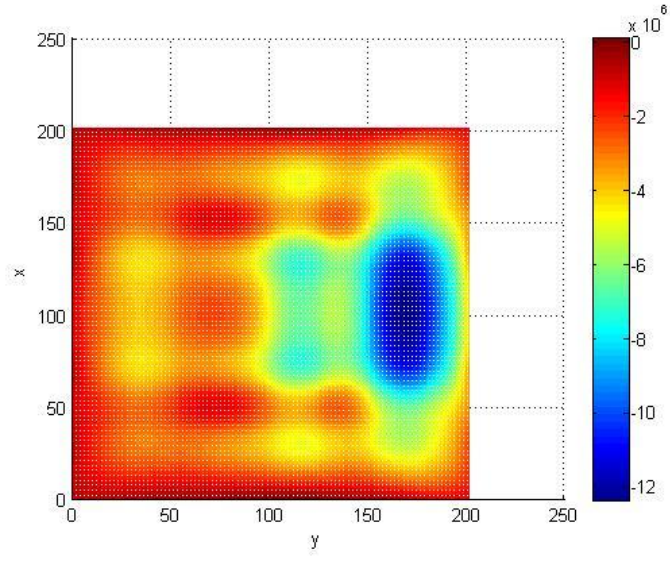


a) Plaka üst yüzeyinde meydana gelen  $\sigma_y$  gerilme dağılımı (Pa)

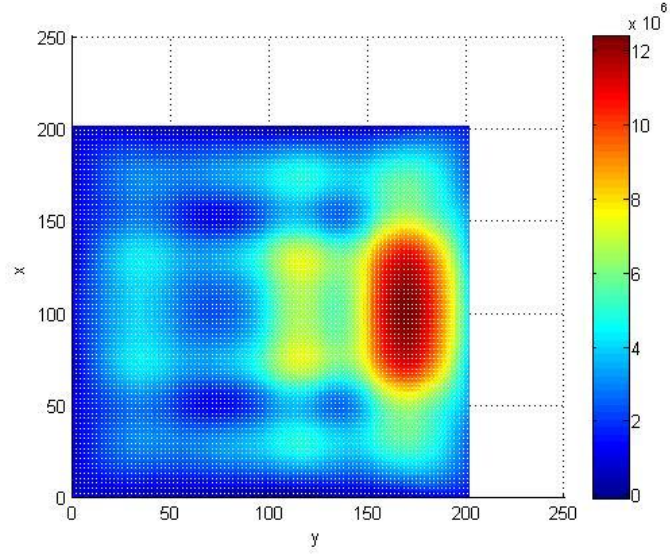


b) Plaka alt yüzeyinde meydana gelen  $\sigma_y$  gerilme dağılımı (Pa)

Şekil 99.  $t=160$  saniye için plaka üst ve alt yüzeyinde meydana gelen  $\sigma_y$  gerilme dağılımı



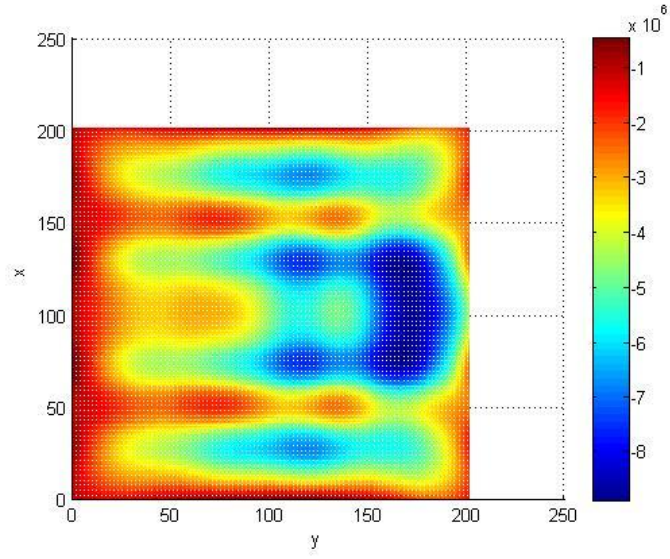
a) Plaka üst yüzeyinde meydana gelen  $\tau_{xy}$  gerilme dağılımı (Pa)



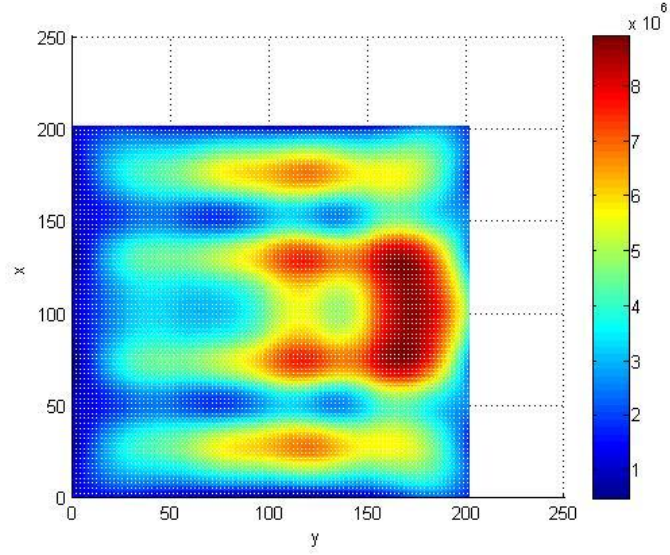
b) Plaka alt yüzeyinde meydana gelen  $\tau_{xy}$  gerilme dağılımı (Pa)

Şekil 100.  $t=160$  saniye için plaka üst ve alt yüzeyinde meydana gelen  $\tau_{xy}$  gerilme dağılımı



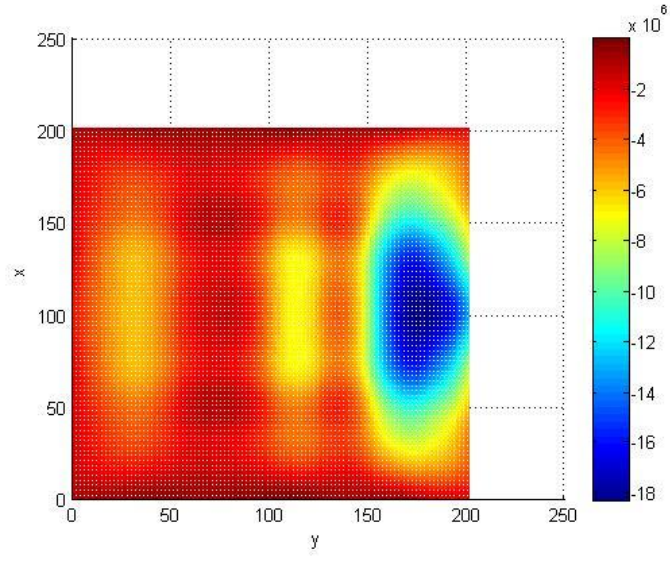


a) Plaka üst yüzeyinde meydana gelen  $\sigma_x$  gerilme dağılımı (Pa)

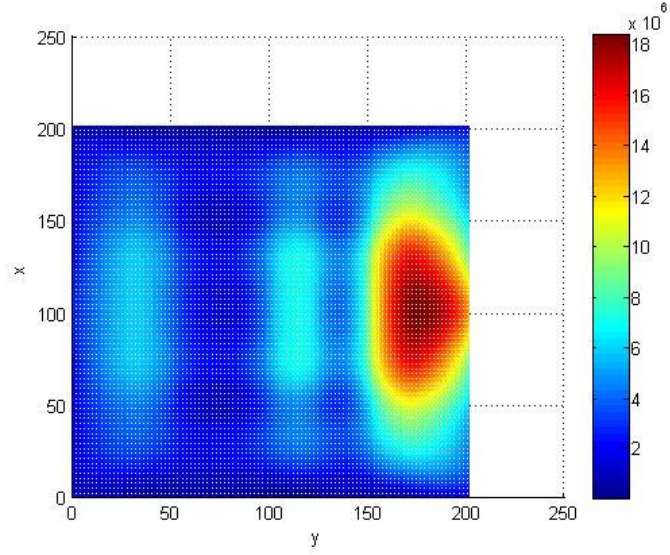


b) Plaka alt yüzeyinde meydana gelen  $\sigma_x$  gerilme dağılımı (Pa)

Şekil 101.  $t=200$  saniye için plaka üst ve alt yüzeyinde meydana gelen  $\sigma_x$  gerilme dağılımı

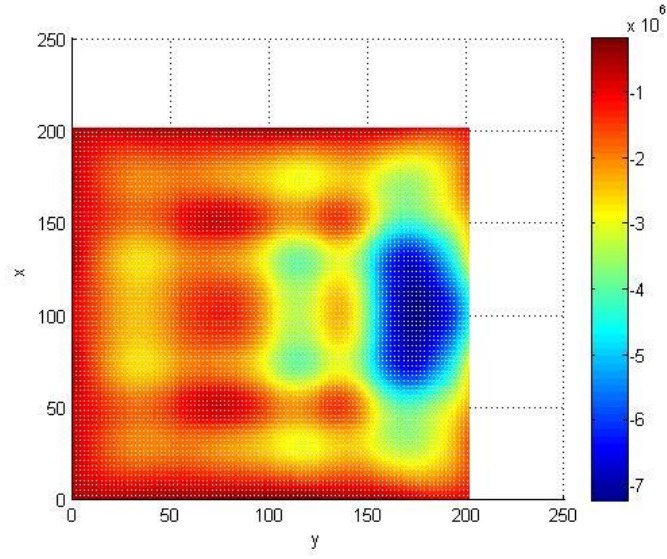


a) Plaka üst yüzeyinde meydana gelen  $\sigma_y$  gerilme dağılımı (Pa)

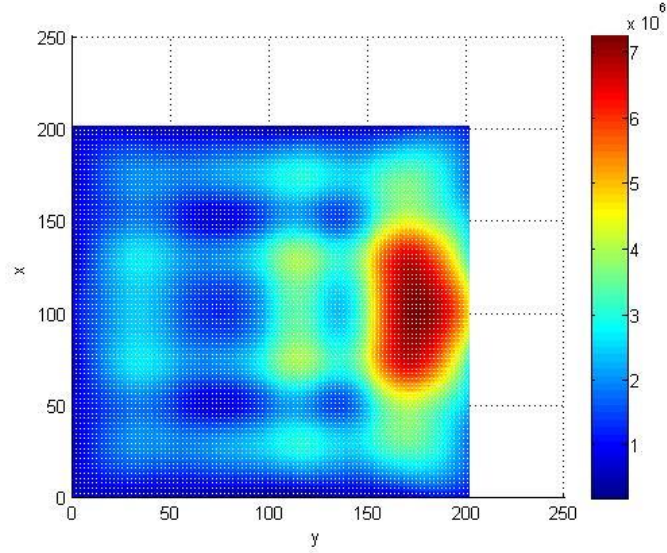


b) Plaka alt yüzeyinde meydana gelen  $\sigma_y$  gerilme dağılımı (Pa)

Şekil 102.  $t=200$  saniye için plaka üst ve alt yüzeyinde meydana gelen  $\sigma_y$  gerilme dağılımı



a) Plaka üst yüzeyinde meydana gelen  $\tau_{xy}$  gerilme dağılımı (Pa)



b) Plaka alt yüzeyinde meydana gelen  $\tau_{xy}$  gerilme dağılımı (Pa)

Şekil 103.  $t=200$  sn. için plaka üst ve alt yüzeyinde meydana gelen  $\tau_{xy}$  gerilme dağılımı

Hareketli ısı cephe problemi olarak lazer ısı kaynağı hareketli olarak modellenmiştir. Lazerhmm ısı kaynağı gücü 1500W, ısı kaynağı ilerleme hızı 5mm/s ve ısı kaynağı yarıçapı 16 mm olarak seçilmiştir. Plaka ebatları 150x300 mm' dir. Bu yükleme koşulları etkisinde plaka üzerinde meydana gelen maksimum sıcaklık değeri  $728^{\circ}C$  olarak literatürde sayısal analizler ile elde edilmiştir [17]. Isı kaynağı modeli olarak çözümü gerçekleştirilen bu örnek çalışmada yine Gauss dağılımına sahip model tercih edilmiştir. Ancak bu modelde tercih edilen dağılım daha önce denklem (197)' de belirtilen yapıdan farklı olarak denklem

(201)' de olduğu haliyle ifade edilmiştir. Çünkü denklem (197)' de tanımlanan Gauss dağılımına sahip ısı akısı denklemi alevle ısıtma işleminin gerçekleştirildiği ısıtma işleminin sonucudur. Ancak denklem (201)' de ifade edilen ısı akısı denklemi doğrudan lazer ısı kaynağı için çok daha küçük ısı kaynağı etkinlik yarıçapının söz konusu olması durumunda kullanılmaktadır.

$$q_{(r)} = \frac{2\eta P}{\pi r^2} \exp\left(-2 \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (201)$$

Denklem (201)' de yer alan büyüklükler;

$\eta$  : ısı transferi verimliliği (0.6-0.8)u

P: ısı kaynağı gücü

R: ısı kaynağı etkinlik yarıçapı

r: ısı kaynağı yarıçap üzerindeki dağılımını kontrol eden anlık yarıçap

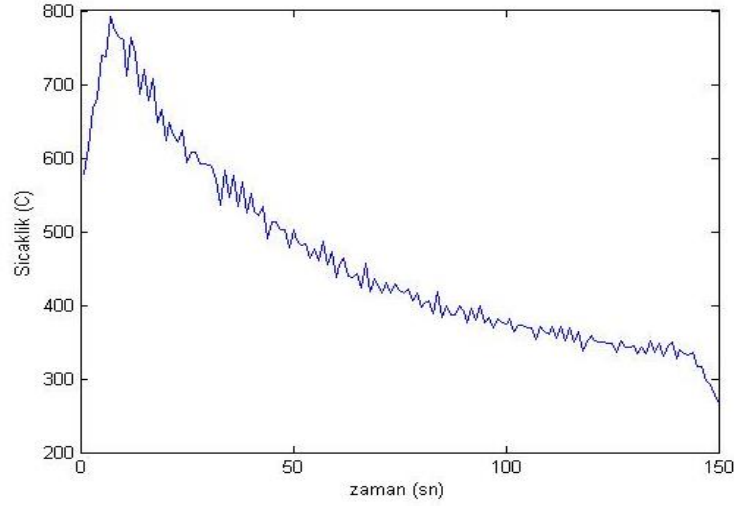
olarak ifade edilmektedir. Denklem (201) alan üzerinde ortalama ısı akısı türünden ifade edilerek analize dahil edilmektedir. Ortalama ısı akısı, ısı kaynağı etkinlik yarıçapı içerisinde yer alan toplan ısının etkinlik yarıçapı ile kapsanan alana oranı olarak hesaplanmaktadır. Analiz sürecinde kullanılacak olan ortalama ısı akısı değeri denklem (202)' de ifade edilmiştir.

$$\bar{q}_{(r)} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R q_{(r)} \cdot 2\pi r \cdot dr = \frac{2\pi}{\pi R^2} \int_0^R \frac{2\eta P}{\pi R^2} \exp\left(-2 \frac{r^2}{R^2}\right) r dr \quad (202)$$

Denklem (202) ifade edilen integral hesaplandığında n elde edilecek olan sonuç etkinlik yarıçapı üzerine etkiyen ortalama ısı akısı değerini tanımlamış olacaktır. Denklem (203)' te ortalama ısı akısı değeri matematiksel olarak ifade edilmiştir.

$$\bar{q}_{(r)} = \frac{0.865\eta P}{\pi R^2} \quad (203)$$

Eleman Bağımsız Galerkin ağırsız yöntemi ve denklem (203)' te tanımlanan ortalama ısı akısı değeri kullanılarak elde edilen maksimum sıcaklık değeri ve dağılımı Şekil 104' te ifade edilmiştir.



Şekil 104. 1500W güç ve 16 mm ısı kaynağı yarıçapı için Eleman bağımsız Galerkin ağsız yöntemi çözümü

Şekil 104' te ifade edilen çözümde elde edilen maksimum sıcaklık değeri  $792.15^{\circ}\text{C}$ ' dir. Literatürde elde edilen sonuç daha önce de ifade edildiği gibi  $728^{\circ}\text{C}$ ' dir. Elde edilen her iki çözüm için kıyaslama yapıldığında hata değeri % 8.8118 olarak elde edilmektedir. Bu hata değeri çözüm için kullanılan üniform ağ yapısı dikkate alındığında yakınsama değeri olarak iyi durumda olduğu ifade edilebilir. Ancak sıcaklık maksimum değeri incelendiğinde elde edilen fark sıcaklığı yaklaşık olarak  $60^{\circ}\text{C}$  mertebelerinde olduğundan yüksek sıcaklığın etkisi ile hata değeri düşük olarak elde edilmiştir. Bu durumun sebebi olarak lazer ısı kaynağı için tanımlanan ısı kaynağı etkinlik yarıçapının küçük olması gösterilebilir. Fark sıcaklığının yüksek olma sebebi, problem çözümünde kullanılan üniform ağ yapısının küçük ısı kaynağı yarıçapı değerinde, ısı kaynağını yeterince doğru bir şekilde sayısal modele yansıtılamamasıdır. Lazer gibi ısı kaynağı yarıçapı nispetten düşük olan ısı kaynağı Eleman bağımsız Galerkin ağsız yöntemi ile sayısal olarak modellenirken bu tür hatalar söz konusu olabilir. Bu hata sayısal çözüm sürecinde kullanılan ağ yapısının yoğunlaştırılması veya sonlu elemanlar yönteminde olduğu gibi lokal olarak yoğun bir ağ yapısı ile kontrol edilebilir.

### 3. SONUÇLAR

Yapılan tez çalışmasında;

- Ağırlık fonksiyonları için dördüncü dereceden spline fonksiyonları seçilmiştir.
- Hareketli en küçük kareler çözüm süreci formüle edilerek,  $C^0$  sürekliliğe sahip, Lagrange tipi ve  $C^1$  sürekliliğe sahip Hermite tipi hareketli en küçük kareler şekil fonksiyonları elde edilmiştir.
- Sayısal integrasyon süreci için Manuel yöntem ve Kapsayan kutucuk yöntemi olmak üzere iki farklı sayısal integrasyon bölgesi oluşturma yöntemi önerilmiştir.
- Kapsayan kutucuk yöntemi ile sayısal integrasyon bölgesi oluşturularak gerçekleştirilen Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yöntemi çözümlerinde problem çözümüne olan yakınsama oldukça iyi mertebelerde ve kararlı olduğu tespit edilmiştir.
- Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yöntemler çözüm sürecinde kapsayan kutucuk yöntemi ile sayısal integrasyon işleminin gerçekleştirilmesi sürecinde uzman personel ihtiyacını olmadığı tespit edilmiştir.
- Şekil fonksiyonlarının etkinlikleri iki boyutlu düzlemde zamana bağlı ısı transferi, membran titreşim problemi, Klasik plaka teorisi ile plaka eğilme deformasyonu problemi, Birinci Mertebeden Kayma Teorisi ile plaka eğilme deformasyonu problemi ve Büyük deformasyonlar etkisindeki plaka eğilme davranışının incelenmesi problemleri ile kontrol edilmiştir.
- Hareketli en küçük kareler şekil fonksiyonları kronecker delta özelliğine sahip olmadıklarından şekil fonksiyonları için kaynak [39]'de önerilmiş olan dönüşüm yöntemi kullanılmıştır. Bu sayede dönüştürülen şekil fonksiyonları kronecker delta özelliğini sağlamaktadır.
- Sınır koşulları dönüşüm işlemi ile elde edilen yeni şekil fonksiyonları kullanılarak sonlu elemanlar yönteminde olduğu gibi uygulanmıştır.
- Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yöntemi çözümleri iki boyutlu düzlemde, düzlemsel kabuk modeli kullanılarak gerçekleştirilmiştir.
- Gauss dağılımına sahip hareketli ısı cephe, Lazer ve Alevle ısıtma yöntemleri için elde edilmiş ve literatürde elde edilen veriler ile kıyaslanmıştır.

- Hareketli ısı cephe etkisinde plaka üzerinde meydana gelen sıcaklık dağılımı Lazer ve Alevle ısıtma yöntemleri için ayrı ayrı çözdürülmüştür.
- Hareketli ısı cephe etkisindeki plaka problemlerinin çözümünde Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yönteminin kullanılması ile ısı kaynağı altındaki bölgede özel bir sayısal ağ yapısının tanımlanmasına ihtiyaç duyulmadığı tespit edilmiştir.
- Plaka üzerinde ve Plaka kalınlığı boyunca meydana gelen sıcaklık dağılımı etkisinde oluşan eğilme deformasyonu ve gerilme dağılımı elde edilmiştir.
- Parabolik denklemlerin zaman integrasyonu için Crank-Nicolson ve Galerkin yöntemi kullanılmıştır.
- Hiperbolik denklemlerin çözümünde Newmark zaman integrasyon yöntemi kullanılmıştır.

Gerçekleştirilen tez çalışması ile literatüre dahil edilmiş olan yenilikler şu şekilde ifade edilebilir:

- Plaka eğilme davranışı modellenirken kabuk (düzlemsel Shell) kavramı ağsız yöntemler çerçevesinde önerilmiştir. Kabuk (düzlemsel Shell) model düzlem içi yer değiştirme ifadesi ile birlikte plaka eğilme deformasyonu ve dönme serbestlik derecelerini bünyesinde barındıran bir formülasyon ile tanımlanmaktadır. Tez kapsamında, Lagrange tipi şekil fonksiyonları ile bu modelleme gerçekleştirilmiştir.
- Eleman Bağımsız Galerkin Ağsız yöntemi ile birlikte  $C^0$  ve  $C^1$  sürekliliğe sahip şekil fonksiyonları kullanılarak kabuk (düzlemsel Shell) modellemesi gerçekleştirilmiştir.
- Hareketli ısı cephe problemi iki boyutlu düzlemde Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yöntemi ile modellenerek incelenmiştir.
- Eleman Bağımsız Galerkin Ağsız yöntemi ile hareketli ısı cephe etkisindeki plakanın eğilme davranışı incelenmiştir.
- Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yöntemi için sayısal çözümlerin istenilen hassasiyette gerçekleştirilebilmesi için optimum etkinlik yarıçapı çarpanı değeri ifade edilmiştir.
- Sayısal integrasyon işleminde Kapsayan Kutucuk yöntemi ile ağsız yöntemlerde kullanıcı deneyiminden bağımsız, istenilen doğrulukta çözümlerin elde edilebilmesi için çalışma gerçekleştirilmiştir. Yöntemin avantaj ve dezavantajları tespit edilmiştir.

#### 4. ÖNERİLER

- Tez kapsamında Hareketli ısı cephe etkisindeki plakaların eğilme deformasyonu davranışı Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yöntemi kullanılarak incelenmiştir. Ağsız yöntemler çözüm süreci yerel Petrov-Galerkin ağsız yönteminin kullanılmasına olanak sağlayacak şekilde düzenlendiğinden gelecek süreçler içerisinde bu yöntem de Hareketli ısı cephe problemi sayısal modeli oluşturulmasında alternatif olarak değerlendirilebilir.
- Tez kapsamında birinci mertebeden kayma teorisi kullanılarak Hareketli ısı cephe problemi çözümü gerçekleştirilmiştir. Klasik plaka teorisi için de Hareketli ısı cephe problemi çözümü ağsız yöntemler ile araştırılabilir.
- Hareketli ısı cephe problemi için geliştirilmiş olan Eleman Bağımsız Galerkin ağsız yöntem çözücüsü literatürde yaygın olarak kullanılan kapalı çözüm algoritmasına sahip ANSYS gibi yazılımlar için genişletilerek ağsız yöntemler çözücüsü bu tarz programlarda alternatif çözücü olarak değerlendirilebilir. Literatürde ağsız yöntemler çözücülerini açık çözüm yapan LS Dyna ve Radioss gibi yazılımlarda mevcuttur.
- Tez kapsamında gerçekleştirilen ağsız yöntemler çözüm süreci için sayısal integrasyon işlemi etkili bir parametredir. Dolayısıyla çözüm sürecinde avantaj sağlayacak alternatif sayısal integrasyon yöntemleri tez kapsamında geliştirilen çözücüde değerlendirilerek araştırılabilir. Gerçekleştirilen çalışma kapsamında Gauss sayısal integrasyon yöntemi kullanılmıştır. Gauss integrasyon yöntemi iki farklı yaklaşım ile sayısal integrasyon için yerel hücre tez kapsamında oluşturulmuştur. Bu yöntemlerden bir tanesi çözüm bölgesinin manuel olarak yerel hücrelere ayrıştırılması iken ikincisi de kapsayan kutucuk (Bounding Box) yöntemi ile yerel hücrelerin oluşturulmasıdır. Monte-Carlo, yapay sinir ağları gibi alternatif sayısal integrasyon yöntemleri ağsız yöntemler için araştırılabilir ve geliştirilebilir.
- Tez kapsamında elastisite probleminin çözümünde malzeme modelleri lineer elastiktir. Lineer elastik malzeme modeli yerine nonlineer malzeme modellerinin



artık gerilmeler ve pekleşmenin dahil edilmesi ile geliştirilen kod daha ileri mertebelere taşınabilir.

- Elasto-Plastik Plaka analizleri ile plaka eğilmesi tekrarlanan ısı cephelerle elde edilebilir.
- Hareketli ısı cephe problemler için deneysel düzenek hazırlanarak sayısal analizlerle ifade edilen teorilerin doğrulanması sağlanabilir.
- Hareketli ısı cephe problemleri literatürde metal malzemeler için araştırılmış durumdadır. Plastik malzemelerin hareketli ısı cephe etkisindeki davranışı araştırılabilir.

## 5. KAYNAKLAR

1. Zienkiewicz, O., C. ve Taylor, R., L., The Finite Element Method, McGraw-Hill Book Company, Volume I, Berkshire, 1967.
2. Bathe, K., J., Finite Element Procedures for Engineering Analysis, Prentice-Hall, 1982.
3. Reddy, J., N., An Introduction to The Finite Element Method, Second Edition, McGraw-Hill International Editions, Singapore, 1993.
4. Liu, G., R., Meshfree Methods: Moving Beyond The Finite Element Method, CRC Pres, 2003.
5. Cook, R., D., Malkus, D., S. ve Plesha, M., E., Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Third Edition, John Wiley & Sons, New York, 1989.
6. Fries, T., P. ve Matthies, H., G., Classification ve Overview of Meshfree Methods, [http://bib1p1.rz.tubs.de/docportal/servlets/MCRFileNodeServlet/DocPortal\\_derivate\\_00001418/Document.pdf;jsessionid=0000sSLpGS9IHECA1O-3HdgGFvt?hosts=local,spring,2004](http://bib1p1.rz.tubs.de/docportal/servlets/MCRFileNodeServlet/DocPortal_derivate_00001418/Document.pdf;jsessionid=0000sSLpGS9IHECA1O-3HdgGFvt?hosts=local,spring,2004).
7. Liu, G., R. ve Gu, Y., T., An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming, Spinger, Netherlands, 2005.
8. Dolbow, J. ve Belytschko, T., An Introduction to Programming the Meshless Element Free Galerkin Method, Archives of Computational Methods in Engineering, 5, 3 (1998) 207-241.
9. Most, T. ve Bucher, C., An Enhanced Moving Least Squares Interpolation for The Element Free Galerkin Method, III European Conference on Computational Mechanics, Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering, Lisbon, 2006.
10. Xiang, X., Element Free Galerkin Method in Structural Mechanics, PhD. Thesis, Arlington, 1997.
11. Dawn, R., P. ve Ivatury, S., R., Meshless Local Petrov-Galerkin Method for Bending Problems. Langley Research Center Hampton, Paper No: NASA/TM 2002-211936, Virginia, 2002.
12. Organ, D., J., Numerical solutions to Dynamic Fracture Problems Using the element Free Galerkin Method, PhD. Thesis, Illinois, 1996.
13. Ching, H., K., Solution of Linear Elastostatic ve Elastodynamic Plane Problems by the Meshless Local Petrov-Galerkin Method, PhD Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 2002.

14. Zhu, T. ve Atluri, S., N., A Modified Collocation Method ve A Penalty Formulation for Enforcing the Free Galerkin Method, Computational Mechanics, 21 (1998) 211-222.
15. Zhu, T., Zhang, J., D.ve Atluri, S., N., A Local Boundary İntegral Equation (LBIE) Method in Computational Mechanics ve A Meshless Discretization Approach, Computational Mechanics, 21 (1998) 223–235.
16. Atluri, S., N. ve Shen, S., The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method: A Simplified & Less Costly Alternative to the Finite Element and Boundary Element Methods, CMES, 1 (2002) 11-51.
17. Jung, H., C., A Study on Laser Forming Processes with Finite Element Analysis, PhD Thesis, Christchurch, 2006.
18. Guoxin, Y., Koichi, M., Takashi, M. ve Nicholas, M., P., A Finite Element Model For Metal Froming By Laser Line Heaitng, Cambridge, MA, 2000.
19. Henrik, B., C., Plate Formning by Line Heating. PhD Thesis, Technical University of Denmark, Denmark, 2000.
20. Fan, Y., Simulation and Characterization of Laser Induced Deformation Processes, PhD. Thesis, New York, 2006.
21. Zhang, L., Reutzel, E., W. ve Michaleris, P., Finite Element Modelling Discretization Requirements For The Laser Forming Process, International Journal of Mechanical Sciences, 46 (2004) 623–637.
22. Reutzel, E., W., Deformation Analysis and Path Planning For Thermal Forming of Complex Shapes. PhD Thesis, Pennsylvania, 2007.
23. Chen, B., Prediction of Heating Induced Temperature Fields and Distortions in Steel Plates, MSc. Thesis, Lisbon, 2011.
24. Patel, B., G., Thermo Elasto-Plastic Finite Element Formulation of Deformations and Residual Stresses Due to Welds, PhD. Thesis, Ottawa, 1985.
25. Goldak, J., Chakravarti, A. ve Bibby, M., A New Finite Element Model for Welding Heat Sources, <http://link.springer.com/article/10.1007/BF02667333#page-2>, 1983.
26. Guoxin, Y., Modeling of Shell forming by Line Heating, PhD. Thesis, Cambridge MA, 2000.
27. Li, W., Numerical and Experimental Investigations of Laser Forming Processes, PhD Thesis, New York, 2000.
28. Cheng, J., G., Analysis and Synthesis of Multiscan Laser Forming Processes, PhD. Thesis, New York, 2002.

29. Qian, L., F. ve Batra, R., C., Transient Thermoelastic Deformations of A thick Functionally Graded Plate, *Journal of Thermal Stresses*, 27 (2004) 705–740, ISSN: 0149-5739.
30. Qian, L., F. ve Batra, R., C., Three Dimensional Transient Heat Conduction in a Functionally Graded Thick Plate With a Higher Order Plate Theory and Meshless Local Petrov-Galerkin Method, *Computational Mechanics* 35 (2004) 214-226.
31. Dearden, G. ve Edwardson, S., P., Laser Assisted Forming For Ship Building, Laser Group, Department of Engineering, The University of Liverpool, Liverpool UK, SAIL, 2003.
32. Dearden, G. ve Edwardson, S., P., Some Recent Developments In Two and Three Dimensional Laser Forming For Macro and Micro Applications, *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, Pure Appl. Opt. 5 (2003) S8–S15.
33. Cheng, P., Effects of Non-Uniform Properties and Geometry on Laser Forming, PhD. Thesis, New York, 2006.
34. Shibahara, M. ve Atluri, S., N., 2011. The Meshless Local Petrov-Galerkin Method for The Analysis of Heat Conduction due to A Moving Heat Source, in *Welding, International Journal of Thermal Sciences*, Article in Press.
35. Mejia, H., Modelling of A Heat Induced Buckling of Plates Using the Mesh-Free Method, MSc. Thesis, Miami, Florida, 2014.
36. Schembri, P., A 3D Meshless Computational Procedure for Nonlinear Analysis of Structures, PhD. Thesis, Texas, 2002.
37. Mendez, S., F., Meshfree Methods and Finite Elements: Friend or FOE, PhD. Thesis, Barcelona, 2001.
38. Huerta, A., Belytschko, T., Mendez, S., F. ve Rabczuk, T., Meshfree Methods, *Encyclopedia of Computational Mechanics*, 2004.
39. Atluri, S., N., Kim, H., G. ve Cho, Y., J., A Critical Assessment of The Truly Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) and Local Boundary Integral Equation (LBIE) Methods, *Computational Mechanics*, 24 (1999) 348-372.
40. Biswas, M., Mandal, N., R. ve Sha, O., P., Three Dimensional Finite Element Prediction of Transient Thermal History and Residual Deformation Due to Line Heating, *Engineering for Maritime Environment*, Proc. IMechE Vol. 221 Part M, 2007.
41. Darmadi, D., Norrish, J. ve Tieu, A., K., Analytic and Finite Element Solutions for Temperature Profiles in Welding Using Varying Heat Source Models, *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 81 (2011) 154-162.
42. Hsiao, Y., C., Finite Element Analysis of Laser Forming, MSc. Thesis, Cambridge, Massachussets, 1997.

43. Yanjin, G., Sheng, S., Guoqun, Z. ve Yiguo, L., Finite Element Modelling of Laser Bending of Pre-Loaded Sheet Metals, *Journal of Materials Processing Technology*, 142 (2003) 400-407.
44. Hu, Z., Labudovic, M., Wang, H., ve Kovacevic, R., Computer Simulation and Experimental Investigation of Sheet Metal Bending using Laser Beam Scanning, *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, 41 (2001) 589-607.
45. Shen, H., Shi, Y., Yao, Z. ve Hu, J., An analytical Model for Estimating Deformation in Laser forming, *Computational Materials Science*, 37 (2006) 593-598.
46. Kyrzanidi, K., A., Kermanidis, T., B. ve Pantelakis, G., S., Numerical and Experimental Investigation of the Laser Forming Process, *Journal of Materials Processing Technology*, 87 (1999) 281-290.
47. Suvranu, D., Generalized Finite Element Method, Lecture 3 Approximation (LS ve MLS) [http:// rpi.edu/~des/Teaching.html](http://rpi.edu/~des/Teaching.html), 2003.
48. Lancaster, P. ve Salkauskas, K., Surfaces Generated by Moving Least Squares, *Mathematics of Computation*, 37 (1981) 155, 141-158.
49. Raju, I., S., Phillips, D., R. ve Krishnamurthy, T., A Meshless Method Using Radial Basis Functions for Beam Bending Problems, Langley Research Center Hampton, Paper No: NASA/ TP 2004-212996, 2004.
50. Tiago, C. ve Leitao, V., GMLS Approximations in the EFG Method: Applications to C1 Structural Methods, *International Workshop on Meshfree Methods*, 2003.
51. Krysl, P. ve Belytschko, T., ESFLIB: A Library to Compute Element Free Galerkin Shape Functions, Elsevier Pre-print, 1999.
52. Atluri, S., N. ve Zhu, T., A New Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Approach in Computational Mechanics, *Computational Mechanics*, 22 (1998) 117-127.
53. Karadeniz, S., Mühendislikte Sonlu Elemanlar Yöntemi, Yayınlanmamış Ders Notları Karadeniz Teknik Üniversitesi, 1991.
54. Karadeniz, S., Uygulamalı Sonlu Elemanlar Analizi, Yayınlanmamış Ders Notları, Karadeniz Teknik Üniversitesi, 1991.
55. Raju, I., S. ve Phillips, D., R., A Local Coordinate Approach in the MLPG Method for the Beam Problems, Langley Research Center, Hampton, Paper No: NASA/TM 2002-211463, Virginia, 2002.
56. Dolbow, J. ve Belytschko, T., Numerical Integration of Galerkin Weak Form in Meshfree Methods, *Computational Mechanics*, 23 (1999) 219-230.
57. Pala, Y., Modern Uygulamalı Diferansiyel Denklemler, Nobel Yayın, Birinci Baskı, 2006.

58. Incropera, F., P. ve Dewitt, D., P., Fundamentals of Heat and Mass Transfer, Forth Edition, John Wiley & Sons, New York, 2001.
59. Cengel, Y., Heat Transfer: A Practical Approach,, McGraw Hill Book Company, Second Edition, New York, 2003.
60. Bathe, K., J. ve Wilson, E., L., Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice Hall, Inc., 1976.
61. Yang, W., Y., Cao, W., Chung, T. ve Morris, J., Applied Numerical Methods Using Matlab, John-Wiley & Sons, Inc., 2005.
62. Ugural, A., C., Stresses in Plates and Shells, McGraw Hill Book Company, 1981.
63. Timoshenko, S. ve Krieger, S., W., Theory of Plates and Shells, McGraw Hill Book Company, 1959.
64. Reddy, J., N., Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells, CRC Press Taylor and Francis Group, Second Edition, 2007.
65. Bhatti, A., M., Advanced Topics in Finite Element Analysis of Structures: with Mathematica and Matlab Computations, John Wiley & Sons, New York, 2006.
66. Bhatti, A., M., Fundamental Finite Element Analysis and Applications: with Mathematica and Matlab Applications, John Wiley & Sons, New York, 2005.
67. Zienkiewicz, O., C. ve Taylor, R., The Finite Element Method: Volume 2 Solid Mechanics, Butterworth Heinemann, Fifth Edition, 2000.
68. Liu, G., R. ve Quek, S., S., The Finite Element Method A Practical Course, Butterworth Heinemann, First Edition, 2003.
69. Rao, S., S., The Finite Element Method in Engineering, Elsevier Science & Technology, Fourth Edition, 2004.
70. Reddy, J., N., An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis, Oxford University Press, Second Edition, 2005.

## 6. EKLER

### EK 1. Manuel nümerik integrasyon bölgelerini tanımlanması için program

```
%===== Integration boxes are identified manually =====  
box_x=input('number of boxes in x direction :');  
box_y=input('number of boxes in y direction :');  
  
num_box=box_x*box_y;  
  
koor_x=linspace(x_ilk,x_son,box_x+1);  
koor_y=linspace(y_ilk,y_son,box_y+1);  
  
sayac_box=1;  
for i=1:box_x  
    for j=1:box_y  
        box(sayac_box).dat(1)=koor_x(i);  
        box(sayac_box).dat(2)=koor_x(i+1);  
        box(sayac_box).dat(3)=koor_y(j);  
        box(sayac_box).dat(4)=koor_y(j+1);  
        sayac_box=sayac_box+1;  
    end  
end  
%=====
```

**EK 2.** Kapsayan bölge (bounding box, çevreleyen kutucuk) yöntemi ile nümerik integrasyon bölgelerinin oluşturulması

BOUNDING BOX YONTEMİ İLE NUMERİK İNTEGRASYON (GAUSS QUADRATURE) VE KATILIK MATRİSLERİNİN ELDE EDİLMESİ

```
%===== boxlarn koordinatlarının belirlenmesi =====
m=0;
for i=1:length(xi)
    if (xi(i)>x_ilk+ri_x)
        m=m+1;
    end
end

k=length(xi)-m;

n=0;
for i=1:length(yi)
    if (yi(i)>y_ilk+ri_y)
        n=n+1;
    end
end

p=length(yi)-n;

%=====boxlarn x koordinatları elde ediliyor=====
for i=1:m
    a(i)=xi(i)+ri_x;
end

for i=k+1:length(xi)
    b(i-k)=xi(i)-ri_x;
end

karsilastirma_alt=0;
for i=1:length(a)
    if (b(i)<a(1))
        karsilastirma_alt=karsilastirma_alt+1;
    end
end
karsilastirma_ust=0;
for i=1:length(b)
    if (b(length(b))<a(i))
        karsilastirma_ust=karsilastirma_ust+1;
    end
end

ad=length(a)+length(b);

c=zeros(1,ad);

for i=1:karsilastirma_alt
    c(i)=b(i);
end

bak=ad-karsilastirma_ust;

karsilastirma=karsilastirma_ust;
```



```

for i=bak+1:ad
    c(i)=a(length(a)-karsilastirma+1);
    karsilastirma=karsilastirma-1;
end

kk=karsilastirma_alt+1;
m=length(a)-karsilastirma_alt;
for i=1:m
    c(kk)=a(i);
    c(kk+1)=b(karsilastirma_alt+i);
    kk=kk+2;
end
%===== boxlarn y koordinatları elde ediliyor=====
for j=p+1:length(yi)
    e(j-p)=yi(j)-ri_y;
end

for j=1:n
    d(j)=yi(j)+ri_y;
end

karsilastirma_alty=0;
for i=1:length(e)
    if (e(i)<d(1))
        karsilastirma_alty=karsilastirma_alty+1;
    end
end

karsilastirma_usty=0;
for i=1:length(d)
    if (e(length(e))<d(i))
        karsilastirma_usty=karsilastirma_usty+1;
    end
end

ady=length(e)+length(d);

g=zeros(1,ady);

for i=1:karsilastirma_alty
    g(i)=e(i);
end

baky=ady-karsilastirma_usty;

karsilastirmay=karsilastirma_usty;
for i=baky+1:ady
    g(i)=d(length(d)-karsilastirmay+1);
    karsilastirmay=karsilastirmay-1;
end

kky=karsilastirma_alty+1;
my=length(d)-karsilastirma_alty;
for i=1:my
    g(kky)=d(i);
    g(kky+1)=e(karsilastirma_alty+i);
    kky=kky+2;
end
% =====koordinatlar elde edildi =====

```

```
c=[x_ilk c x_son]
g=[y_ilk g y_son]

box_x=length(c)-1;
box_y=length(g)-1;

num_box=box_x*box_y;

sayac=1;
for i=1:length(c)-1
    for j=1:length(g)-1

        box(sayac).dat(1)=c(i);
        box(sayac).dat(2)=c(i+1);
        box(sayac).dat(3)=g(j);
        box(sayac).dat(4)=g(j+1);

        sayac=sayac+1;
    end
end
```

**EK 3.** Isı transferi problemi için kod içerisinde tanımlanması gereken girdiler

```

x_ilk=input('x için bir baslangic degeri giriniz :');
y_ilk=input('y için bir baslangic degeri giriniz :');
x_son=input('x için bir bitis degeri giriniz :');
y_son=input('y için bir bitis degeri giriniz :');
x_artis=input('x için bir artis degeri giriniz :');
y_artis=input('y için bir artis degeri giriniz :');
fonk_say_x=input('x için kullanılacak olan dugum sayisini giriniz :');
fonk_say_y=input('y için kullanılacak olan dugum sayisini giriniz :');
derece=input('yaklasimin derecesini giriniz :');

xi_artis=(x_son-x_ilk)/(fonk_say_x-1);
katsayi_r=input('yarıçap çarpanı için 2 ile 3 arasında bir degeri giriniz :');
gauss=input('numerik integrasyon için nokta sayisi giriniz :');
delta_t=input('zaman adımı için bir deger giriniz :')
t_son=input('zaman bitis degeri için bir deger giriniz :')

m=input('secmek istediginiz zaman integrasyon yontemi için bir deger giriniz :');

if m==1
    disp('Crank-Nicolson Yontemini sectiniz')
    alfa=1/2;
elseif m==2
    disp('Galerkin Yontemini sectiniz')
    alfa=2/3;
elseif m==3
    disp('Geriye Fark Yontemini sectiniz')
    alfa=1;
else
    break
end

```

**EK 4.** Isı transferi probleminden elde edilen çıktılar

İlgili zaman dilimi için düğümlerdeki sıcaklık değerleri ( $^{\circ}\text{C}$  türünden ifade edilmiştir.)

1.063713383696056  
1.614780044959655  
1.820690446962774  
1.490841733574356  
0.818449240949022  
1.614780044959681  
2.437096811222325  
2.743984244022353  
2.250070708417175  
1.242207516919643  
1.820690446962618  
2.743984244021738  
3.091176192367831  
2.533219899254766  
1.401163562024739  
1.490841733574142  
2.250070708416873  
2.533219899254724  
2.077408750483439  
1.146921553960299  
0.818449240948917  
1.242207516919559  
1.401163562024630  
1.146921553960307  
0.629752648239636

**EK 5.** Plaka eğilme problemi için kod içinde tanımlanması gereken bilgiler

```
x_ilk=input('x için bir baslangic degeri giriniz :');
y_ilk=input('y için bir baslangic degeri giriniz :');
x_son=input('x için bir bitis degeri giriniz :');
y_son=input('y için bir bitis degeri giriniz :');
x_artis=input('x için bir artis degeri giriniz :');
y_artis=x_artis;
fonk_say_x=input('x için kullanılacak olan dugum sayisini giriniz :');
fonk_say_y=input('y için kullanılacak olan dugum sayisini giriniz :');

katsayi_r=input('yariçap çarpımı için bir deger giriniz :');
disp('=====');
disp('Lineer Elastik Malzeme Ozellikleri Tanimlanmalidir');
disp('=====');

disp('=====');
disp('Plaka Kalinligi Tanimlanmalidir');
disp('=====');
```

**Ek 6.** Plaka eğilme deformasyonu kodundan elde edilen çıktılar

Eğilme deformasyonlarıdır. Deformasyon değerleri (m) cinsinden ifade edilmiştir.

1.0e-03 \*

-0.000000000000133  
0.000000000000697  
0.000000000000179  
0.000000000000278  
0.000000000000237  
-0.000000000001047  
-0.000000000000571  
0.000000000000164  
0.027786853267644  
0.053313107355528  
0.064402124053796  
0.056833870355858  
0.034431092613383  
-0.000000000000095  
-0.000000000000007  
0.055375674554261  
0.103051417141506  
0.121919717557008  
0.106479438947518  
0.059331293470226  
0.000000000000010  
-0.000000000000032  
0.078845779645192  
0.140233695117266  
0.161704321158863  
0.136657021255720  
0.075117251007502  
-0.000000000000006  
0.000000000000006  
0.082980166539441  
0.143061931678546  
0.162365643671648  
0.141346428667293  
0.079753612039609  
-0.000000000000003  
-0.000000000000003  
0.053915962971704  
0.086159592044645  
0.100338422045118  
0.093163979022627  
0.061353716371489  
-0.000000000000000  
-0.000000000000000  
-0.000000000000000  
-0.000000000000000  
0.000000000000000  
0.000000000000000

## ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Bulgaristan'ın Kırcaali kentinde doğdu. Lise öğrenimini Bursa da tamamladı. 1999 yılında K.T.Ü Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Makine Mühendisliği Bölümünü kazandı. 1999 yılında kaydını dondurdu. 2000 yılında eğitime geri döndüğü K.T.Ü Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Makine Mühendisliği Bölümünden 2004 yılında mezun oldu. 2004 yılında K.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Mühendisliği Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimine başladı. Aralık 2005-2008 yılları arasında Fen Bilimleri Enstitüsü kadrosunda Araştırma Görevlisi olarak çalıştı. Askerlik görevini 2009 yılında tamamladı. FİGES A.Ş. (Fizik ve Geometri Bilgisayar Simülasyonu Hizmet A.Ş.) 2009 yılında çalışmaya başladı. 2010 Yılında FİGES A.Ş. Bursa Yerleşkesi Bilgisayar Destekli Mühendislik grubu Sorumlusu oldu. Eylül 2011' e kadar FİGES' teki görevini devam ettirdi. Eylül 2011' de FARBA A.Ş.' de Bilgisayar Destekli Mühendislik ekibine Titreşim ve Çarpışma analizleri sorumlusu olarak başladı. Halen bu görevine devam etmektedir. Evli ve bir çocuk babasıdır.