

149733

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**İNCE DÜZ KABUK ELEMANLARIN ARTIRILMIŞ SONLU ELEMANLAR
YÖNTEMİYLE İNCELENMESİ**

149733

Mak. Yük. Müh. Hasan GEDİKLİ

**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
“Doktor”
Ünvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 10.08.2005
Tezin Savunma Tarihi : 30.09.2005**

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Hasan SOFUOĞLU

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Sami KARADENİZ

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Ragıp ERDÖL

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Ayşe DALOĞLU

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Tuncer TOPRAK

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Emin Zeki BAŞKENT

Trabzon 2005

ÖNSÖZ

Birçok mühendislik probleminde olduğu gibi, kabuk yapılarda da kapalı analitik çözümler elde etmek bazı durumlarda çok zor hatta imkânsızdır. Analitik çözümlerin yetersiz kaldığı karmaşık geometri, farklı malzeme özellikleri, çeşitli sınır şartları gibi durumlarda yaklaşık fakat yeterli sonuçlar veren sayısal çözüm yöntemleri, özellikle sonlu elemanlar yöntemi kullanılmaktadır.

Kabuk elemanların analizi için pek çok sonlu elemanlar modeli önerilmesine rağmen, şu ana kadar gerek teoriden gerekse pratikten kaynaklanan bütün noksanlıkları gideren yeterince geniş ve genel bir model mevcut değildir.

Son zamanlarda, artırılmış eleman formülasyon yöntemi kullanılarak elde edilen modeller birçok elemanda başarılı sonuçlar vermektedir. Bu çalışmada yaygın olandan farklı bir yolla geliştirilen bu yöntem dört, beş ve yedi düğüm noktalı düz kabuk elemanlardan oluşan ince ve ince-kalın kabuklara genişletilmiştir. Böylece artırılmış eleman formülasyonunun dört, beş ve yedi düğüm noktalı düz kabuk elemanlardaki performansları belirlenerek birbirleriyle kullanılabilirlikleri test edilmiştir.

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesi sırasında değerli fikirleri ve teşvikleriyle her türlü yardımı esirgemeyen danışman hocam sayın Doç. Dr. Hasan SOFUOĞLU'na ve tez izleme komitesi üyeleri Prof. Dr. Ragıp ERDÖL ve Prof. Dr. Sami KARADENİZ'e teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca çalışmamın değişik aşamalarında katkılarını esirgemeyen mesai arkadaşlarıma da teşekkürü bir borç bilirim.

Bu çalışma 2001.112.003.3 kod numaralı proje ile K.T.Ü. Araştırma Fonu tarafından desteklenmiştir. Bu nedenle fon yöneticilerine de teşekkürlerimi sunarım.

Hasan GEDİKLİ

Trabzon 2005

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET.....	VII
SUMMARY.....	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	IX
TABLolar DİZİNİ.....	XIV
SEMBOLLER DİZİNİ.....	XVI
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Literatür Araştırması.....	5
1.3. Tezin Konusu ve Amacı.....	14
1.4. Klasik Plak Teorisi.....	15
1.4.1. Kirchhoff Plak Teorisi.....	15
1.4.2. Reissner/Mindlin Plak Teorisi.....	18
1.5. Sonlu Elemanlar Yönteminde Burulma Serbestlik Dereceli Düz Kabuk Elemanlar.....	20
1.5.1. Membran ve Eğilme Etkileşimini İçeren Düz Kabuk Eleman.....	21
1.5.2. Kabuk Eleman için Kütle Matrisi.....	22
1.5.3. Zaman Bölgesinin Ayrıştırılması ve Dinamik Denklem Çözümü.....	23
1.5.3.1. Newmark Yöntemi.....	24
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	25
2.1. Teorik Çalışmalar.....	26
2.1.1. Eğilme Etkisinde Düz Kabuk (Plak) Eleman.....	26
2.1.2. Kirchhoff Plak Teorisi Kullanılarak Elde Edilen Kabuk Eleman Formülasyonu.....	34
2.1.2.1. Dört Düğüm Noktalı 4 Kenarlı Kabuk Eleman (SKQ).....	34
2.1.2.1.1. Dört Düğüm Noktalı Kabuk Eleman için Membran Eleman (MEQ).....	34
2.1.2.1.2. Dört Düğüm Noktalı 4 Kenarlı Plak Eleman (DKQ).....	37
2.1.2.1.3. Dört Düğüm Noktalı Kabuk Eleman için Rijitlik Matrisi.....	42
2.1.2.2. Beş Düğüm Noktalı 4/5 Kenarlı Kabuk Eleman (SKP).....	43

2.1.2.2.1.	Beş Dügüm Noktalı Kabuk Eleman için Membran Eleman (MEP).....	43
2.1.2.2.2.	Beş Dügüm Noktalı 4/5 Kenarlı Plak Eleman (DKP)	45
2.1.2.2.3.	Beş Dügüm Noktalı Kabuk Eleman için Rijitlik Matrisi	47
2.1.2.3.	Yedi Dügüm Noktalı 4/6 Kenarlı Kabuk Eleman (SKS).....	48
2.1.2.3.1.	Yedi Dügüm Noktalı Kabuk Eleman için Membran Eleman (MES)	49
2.1.2.3.2.	Yedi Dügüm Noktalı 4/6 Kenarlı Plak Eleman (DKS).....	50
2.1.2.3.3.	Yedi Dügüm Noktalı Kabuk Eleman için Rijitlik Matrisi	53
2.1.3.	Reissner/Mindlin Plak Teorisi Kullanılarak Elde Edilen Kabuk Eleman Formülasyonu	54
2.1.3.1.	Dört Dügüm Noktalı 4 Kenarlı Kabuk Eleman (SRMQ)	54
2.1.3.1.1.	Dört Dügüm Noktalı Kabuk Eleman için Membran Eleman (MEQ).....	55
2.1.3.1.2.	Dört Dügüm Noktalı 4 Kenarlı Plak Eleman (DRMQ)	55
2.1.3.1.2.1.	Dört Dügüm Noktalı Kabuk Elemanın Eğilmesi.....	55
2.1.3.1.2.2.	Dört Dügüm Noktalı Kabuk Elemanın Kayma Şekil Değiştirmesi	58
2.1.3.1.3.	Dört Dügüm Noktalı Kabuk Eleman için Rijitlik Matrisi.....	62
2.1.3.2.	Beş Dügüm Noktalı 4/5 Kenarlı Kabuk Eleman (SRMP)	63
2.1.3.2.1.	Beş Dügüm Noktalı Kabuk Eleman için Membran Eleman (MEP).....	63
2.1.3.2.2.	Beş Dügüm Noktalı 4/5 Kenarlı Plak Eleman (DRMP)	63
2.1.3.2.2.1.	Beş Dügüm Noktalı Kabuk Elemanın Eğilmesi	63
2.1.3.2.2.2.	Beş Dügüm Noktalı Kabuk Elemanın Kayma Şekil Değiştirmesi	65
2.1.3.2.3.	Beş Dügüm Noktalı Kabuk Eleman için Rijitlik Matrisi	69
2.1.3.3.	Yedi Dügüm Noktalı 4/6 Kenarlı Kabuk Eleman (SRMS).....	70
2.1.3.3.1.	Yedi Dügüm Noktalı Kabuk Eleman için Membran Eleman (MES)	70
2.1.3.3.2.	Yedi Dügüm Noktalı 4/6 Kenarlı Plak Eleman (DRMS)	70
2.1.3.3.2.1.	Yedi Dügüm Noktalı Kabuk Elemanın Eğilmesi	70
2.1.3.3.2.2.	Yedi Dügüm Noktalı Kabuk Elemanın Kayma Şekil Değiştirmesi	72
2.1.3.3.3.	Yedi Dügüm Noktalı Kabuk Eleman için Rijitlik Matrisi	77
2.2.	Sayısal Çalışmalar.....	77
2.2.1.	Patch Testi	78
2.2.2.	Dügüm Noktası Konumunun Sonuçlara Etkisi	80
2.2.3.	Test Problemleri	81
2.2.3.1.	Ankastre Kiriş Problemi.....	81
2.2.3.2.	Eğri Kiriş Problemi	83
2.2.3.3.	Burulmuş Kiriş Problemi	85

2.2.3.4.	Plak Problemi	86
2.2.3.5.	Scordelis-Lo Çatı Problemi	88
2.2.3.6.	Silindir Problemi.....	90
2.2.3.7.	Yarım Küre Kabuk Problemi	91
2.2.4.	Amaca Yönelik Bazı Problemler	93
2.2.4.1.	Kesiti I-Profil Olan Ankastre Kiriş	93
2.2.4.2.	Kare Plak	94
2.2.4.3.	Dairesel Plak.....	95
2.2.4.4.	Eğik Plak	95
2.2.4.5.	Geçiş Elemanı Problemi.....	96
2.2.4.6.	Dinamik Problem.....	97
3.	BULGULAR VE İRDELEMELER.....	98
3.1.	Patch Testi	98
3.2.	Düğüm Noktası Konumu	100
3.3.	Test Problemleri	102
3.3.1.	Ankastre Kiriş Problemi.....	102
3.3.2.	Eğri Kiriş Problemi	104
3.3.3.	Burulmuş Kiriş Problemi	107
3.3.4.	Plak Problemi	109
3.3.5.	Scordelis-Lo Çatı Problemi.....	111
3.3.6.	Silindir Problemi.....	112
3.3.7.	Yarım Küre Kabuk Problemi	115
3.4.	Amaca Yönelik Problemler	117
3.4.1.	Kesiti I-Profil Olan Ankastre Kiriş.....	117
3.4.2.	Kare Plak	119
3.4.3.	Dairesel Plak.....	124
3.4.4.	Eğik Plak	126
3.4.5.	Geçiş Elemanı (SRMP).....	128
3.4.6.	Dinamik Problem.....	130
3.4.7.	SRMQ ve SRMP Elemanlarının Birbirleriyle Karşılaştırılması	132
4.	SONUÇLAR.....	137
5.	ÖNERİLER	139
6.	KAYNAKLAR.....	140

7.	EKLER.....	151
	ÖZGEÇMİŞ.....	154



ÖZET

Sonlu elemanlar yönteminde, kabuk elemanların analizi için pek çok formülasyon önerilmesine rağmen, şu ana kadar gerek teoriden gerekse pratikten kaynaklanan bütün eksiklikleri gideren tek bir kabuk eleman formülasyonu mevcut değildir. Son zamanlarda, artırılmış eleman yöntemi kullanılarak elde edilen elemanlar birçok problemde başarılı bir şekilde kullanılmaktadır. Bu çalışmada düz kabuk eleman formülasyonları, burulma serbestlik derecesi ilaveli membran eleman ve artırılmış eleman formülasyonu ile üretilmiş plak elemanlarının birleştirilmesiyle elde edilmiştir. Bu artırılmış eleman yöntemi kullanılarak her bir düğüm noktasında 6 serbestlik derecesine sahip dört düğüm noktalı 4 kenarlı (SKQ, SRMQ), beş düğüm noktalı 4/5 kenarlı (SKP, SRMP) ve yedi düğüm noktalı 4/6 kenarlı (SKS, SRMS) düz kabuk elemanları geliştirilmiştir. Kayma ve membran kilitlenmesinden bağımsız bu elemanlarda, ince kabuk için Kirchhoff plak hipotezi ve ince/kalın kabuklar için ise Reissner/Mindlin plak teorileri kullanılmıştır. Sonra, bu tez çalışmasındaki bu düz kabuk elemanları elde etmek için geliştirilen yeni kabuk eleman formülasyonları, FEAP sonlu elemanlar paket programına uyarlanarak sayısal çözümler elde edilmiştir. Geliştirilen bu elemanlar ilk önce patch testine, sonra literatürde standart test problemleri olarak bilinen örneklere ve daha sonra da amaca yönelik seçilen statik ve dinamik problemlere uygulanmıştır. Bu düz kabuk elemanlarla elde edilen çözümler; teorik çözümler, literatürdeki elemanlar ve ANSYS paket programından elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmış ve performansları belirlenmiştir. Elde edilen sonuçlardan dört düğüm noktalı 4 kenarlı SRMQ düz kabuk elemanının gerek Kirchhoff gerekse Reissner/Mindlin plak teorileri için yüksek doğruluğa sahip olduğu görülmüştür. SRMP ve SRMS elemanları SRMQ elemanına yakın değerler vermiştir. Ağ inceltmesi gereken yerlerde SRMP elemanı SRMQ elemanı ile birlikte geçiş elemanı olarak başarılı bir şekilde kullanılmıştır. Yedi düğüm noktalı 6 kenarlı SRMS düz kabuk elemanının, altı kenarlı ağ örgüsünde, beş düğüm noktalı 4/5 kenarlı SRMP düz kabuk elemanı ile birlikte kullanılmasının gerekli olduğu belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Membran Eleman, Kirchhoff Plak, Reissner/Mindlin Plak, Artırılmış Eleman Formülasyonu, Dört Düğüm Noktalı Düz Kabuk Eleman Beş Düğüm Noktalı Düz Kabuk Eleman, Yedi Düğüm Noktalı Düz Kabuk Eleman

SUMMARY

The Investigation of Flat Shell Elements by Using The Refined Finite Element Method

In the finite element method, although many formulations on shell elements are proposed there is no such a unique shell element formulation that provides all the shortages come from both theory and practice. Recently, the shell elements obtained by using the refined element method have been successfully used in many problems. In this study flat shell element formulations are driven to associate the membrane element with drilling degrees of freedom and the plate element obtained from the refined element formulation. 4-node 4-sided (quadrilateral) (SKQ, SRMQ), 5-node 4/5 sided (pentagonal) (SKP, SRMP) and 7-node 4/6 sided (hexagonal) (SKS, SRMS) flat shell elements have been developed with 6-DOF at each node by using the refined element method. In these elements which are free from the shear and membrane locking phenomena Kirchhoff plate theory has been used for thin plates while Reissner/Mindlin plate theory has been used for thick/thin plates. The new element formulations developed in this study by using the refined element method have then been adapted to FEAP finite element program to create the mentioned flat shell elements and the numerical results have been obtained. The elements developed have been applied first to the patch tests, second to the standard test problems given in the literature, and then to some static and dynamic problems selected on purpose. The results obtained using these flat shell elements have been then compared with the theoretical solutions and with those of element given in the literature and in ANSYS commercial program, and their performances have been determined. It has been seen from the results obtained for 4-node quadrilateral element (SRMQ) that it had a high accuracy for both Kirchhoff and Reissner/Mindlin plate theories. SRMP and SRMS elements were provided the closed values to those of SRMQ element. SRMP element along with SRMQ element has been successfully used as a transition element where mesh refinement is necessary. When 7-node hexagonal SRMS flat shell element was used to discrete the domain, it was determined that it had to be used along with 5-node 4/5 sided SRMP flat shell element.

Key words: Membrane element, Kirchhoff Plate, Reissner/Mindlin Plate
Refined Element Method, 4 Node Quadrilateral Flat Shell Element
5 Node Pentagonal Flat Shell Element, 7 Node Hexagonal Flat Shell Element

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 1.1.	Kabuk geometrisi.....	1
Şekil 1.2.	Sonlu elemanlar yöntemindeki modelleme ve ayrıştırma hataları.....	2
Şekil 1.3.	Plaktaki değişkenler ve işaret kabulü.....	15
Şekil 1.4.	Kirchhoff plak teorisinin kinematiği.....	16
Şekil 1.5.	Reissner/Mindlin plak teorisinin kinematiği.....	18
Şekil 1.6.	Düz kabuk elemanların etkileşimi.....	21
Şekil 2.1.	Bir plak elemanı için dönme bileşenleri.....	28
Şekil 2.2.	4 kenarlı plak eğilme elemanı a) dört düğüm noktalı eleman, b) sekiz düğüm noktalı eleman.....	29
Şekil 2.3.	Dört düğüm noktalı 4 kenarlı membran eleman.....	35
Şekil 2.4.	Elemanın herhangi bir (i – j) kenarındaki parametreler.....	36
Şekil 2.5.	Dört düğüm noktalı 4 kenarlı kabuk elemanın eğilme parametreleri.....	38
Şekil 2.6.	Beş düğüm noktalı 4/5 kenarlı a) membran ve b) eğilme etkisine maruz düz bir kabuk eleman.....	43
Şekil 2.7.	Yedi düğüm noktalı 6 kenarlı a) membran ve b) eğilme etkisine maruz düz bir kabuk eleman.....	48
Şekil 2.8.	Dört düğüm noktalı eleman kenarı boyunca kayma şekil değiştirmeler.....	59
Şekil 2.9.	Beş düğüm noktalı eleman kenarı boyunca kayma şekil değiştirmeler.....	66
Şekil 2.10.	Yedi düğüm noktalı eleman kenarı boyunca kayma şekil değiştirmeler.....	74
Şekil 2.11.	Patch testinde kullanılan dört ve beş düğüm noktalı kabuk eleman için sonlu eleman ağı.....	78
Şekil 2.12.	Patch testinde kullanılan yedi düğüm noktalı kabuk eleman için sonlu eleman ağı.....	79
Şekil 2.13.	Beş düğüm noktalı elemanın dizilişi.....	80
Şekil 2.14.	Yedi düğüm noktalı elemanın dizilişi.....	81
Şekil 2.15.	Düzensiz ağ örgülü basit mesnetli kare plak ve sonlu eleman modeli.....	81
Şekil 2.16.	Düz ankastre kiriş problemi.....	82
Şekil 2.17.	Düz kirişin dört düğüm noktalı SKQ/SRMQ sonlu eleman modeli.....	82
Şekil 2.18.	Düz kirişin beş düğüm noktalı SKP/SRMP sonlu eleman modeli.....	82
Şekil 2.19.	Düz kirişin yedi düğüm noktalı SKS/SRMS sonlu eleman modeli.....	83

Şekil 2.20. Eğri ankastre kiriş problemi	83
Şekil 2.21. Eğri kirişin dört düğüm noktalı SKQ/SRMQ sonlu eleman modeli	84
Şekil 2.22. Eğri kirişin beş düğüm noktalı SKP/SRMP sonlu eleman modeli	84
Şekil 2.23. Eğri kirişin yedi düğüm noktalı SKS/SRMS sonlu eleman modeli	84
Şekil 2.24. Burulmuş düz ankastre kiriş problemi	85
Şekil 2.25. Burulmuş kirişin dört düğüm noktalı SKQ/SRMQ sonlu eleman modeli	85
Şekil 2.26. Burulmuş kirişin beş düğüm noktalı SKP/SRMP sonlu eleman modeli	86
Şekil 2.27. Burulmuş kirişin yedi düğüm noktalı SKS/SRMS sonlu eleman modeli	86
Şekil 2.28. Dikdörtgen plak ve sonlu eleman modeli	86
Şekil 2.29. Plak için dört düğüm noktalı SKQ/SRMQ sonlu eleman modeli	87
Şekil 2.30. Plak için kirişin beş düğüm noktalı SKP/SRMP sonlu eleman modeli	87
Şekil 2.31. Plak için kirişin yedi düğüm noktalı SKS/SRMS sonlu eleman modeli	87
Şekil 2.32. Scordelis-Lo çatı problemi	88
Şekil 2.33. Scordelis-Lo çatı için dört düğüm noktalı SKQ/SRMQ sonlu eleman modeli	89
Şekil 2.34. Scordelis-Lo çatı için beş düğüm noktalı SKP/SRMP sonlu eleman modeli	89
Şekil 2.35. Scordelis-Lo çatı için yedi düğüm noktalı SKS/SRMS sonlu eleman modeli	89
Şekil 2.36. Silindir problemi ve sonlu eleman modeli	90
Şekil 2.37. Silindir problem için dört düğüm noktalı SKQ/SRMQ sonlu eleman modeli	90
Şekil 2.38. Silindir problem için beş düğüm noktalı SKP/SRMP sonlu eleman modeli	91
Şekil 2.39. Silindir problem için yedi düğüm noktalı SKS/SRMS sonlu eleman modeli	91
Şekil 2.40. Yarım küre problemi	91
Şekil 2.41. Yarım küre problemi için dört düğüm noktalı SKQ/SRMQ sonlu eleman modeli	92
Şekil 2.42. Yarım küre problemi için beş düğüm noktalı SKP/SRMP sonlu eleman modeli	92
Şekil 2.43. Yarım küre problemi için yedi düğüm noktalı SKS/SRMS sonlu eleman modeli	93
Şekil 2.44. I- profilli ankastre kiriş problemi	93
Şekil 2.45. 2x2 çarpık ağ örgülü kare plak sonlu eleman modeli	94
Şekil 2.46. Ankastre dairesel plak ve sonlu elemanlar modeli	95

Şekil 2.47. 4x4 ağ örgülü ankastre mesnetli eğik plak ve sonlu elemanlar modeli	96
Şekil 2.48. 40° açılı eğik plak ve sonlu elemanlar modeli	96
Şekil 2.49. Basit mesnetli kare plak için yük-zaman grafiği	97
Şekil 3.1. SKQ/SRMQ kabuk elemanı için Z yönündeki yer değiştirme dağılımı	99
Şekil 3.2. SKP/SRMP kabuk elemanı için dönme (θ_y) dağılımı.....	99
Şekil 3.3. SKS/SRMS kabuk elemanı için Y yönündeki yer değiştirme dağılımı.....	100
Şekil 3.4. SRMP elemanı için Z yönündeki yer değiştirme dağılımı.....	101
Şekil 3.5. SRMS elemanı için Z yönündeki yer değiştirme dağılımı.....	101
Şekil 3.6. Ankastre kirişte SKQ/SRMQ elemanı için dönme (θ_x) dağılımı	103
Şekil 3.7. Ankastre kirişte SKP/SRMP elemanı için dönme (θ_x) dağılımı.....	103
Şekil 3.8. Ankastre kirişte SKS/SRMS elemanı için dönme (θ_x) dağılımı.....	103
Şekil 3.9. Eğri ankastre kirişte SKQ/SRMQ elemanı için Z yönündeki yer değiştirme dağılımı	105
Şekil 3.10. Eğri ankastre kirişte SKP/SRMP elemanı için Z yönündeki yer değiştirme dağılımı	106
Şekil 3.11. Eğri ankastre kirişte SKS/SRMS elemanı için Z yönündeki yer değiştirme dağılımı	106
Şekil 3.12. Burulmuş kirişte SKQ/SRMQ elemanı kullanıldığında Y yönündeki yer değiştirme dağılımı	108
Şekil 3.13. Burulmuş kirişte SKP/SRMP elemanı kullanıldığında Y yönündeki yer değiştirme dağılımı	108
Şekil 3.14. Burulmuş kirişte SKS/SRMS elemanı kullanıldığında Y yönündeki yer değiştirme dağılımı	108
Şekil 3.15. Plak probleminde SKQ/SRMQ elemanı kullanıldığında Z yönündeki yer değiştirme dağılımı	110
Şekil 3.16. Plak probleminde SKP/SRMP elemanı kullanıldığında Z yönündeki yer değiştirme dağılımı	110
Şekil 3.17. Plak probleminde SKS/SRMS elemanı kullanıldığında Z yönündeki yer değiştirme dağılımı	111
Şekil 3.18. Çatı probleminde SKQ/SRMQ elemanı kullanıldığında Y yönündeki yer değiştirme dağılımı	111
Şekil 3.19. Çatı probleminde SKP/SRMP elemanı kullanıldığında Y yönündeki yer değiştirme dağılımı	112
Şekil 3.20. Silindir probleminde SKQ/SRMQ elemanı kullanıldığında Y yönündeki yer değiştirme dağılımı	113
Şekil 3.21. Silindir probleminde SKP/SRMP elemanı kullanıldığında Y yönündeki yer değiştirme dağılımı	113

Şekil 3.22. Silindir probleminde SKS/SRMS elemanı kullanıldığında Y yönündeki yer değiştirme dağılımı	114
Şekil 3.23. Yarım küre probleminde SKQ/SRMQ için X yönündeki yer değiştirme dağılımı	115
Şekil 3.24. Yarım küre probleminde SKP/SRMP için X yönündeki yer değiştirme dağılımı	115
Şekil 3.25. Yarım küre probleminde SRMP/SRMS için X yönündeki yer değiştirme dağılımı	116
Şekil 3.26. I-profilli kirişte SKQ/SRMQ kabuk elemanı için Y yönündeki yer değiştirme dağılımı	117
Şekil 3.27. I-profilli kirişte SKP/SRMP kabuk elemanı için Y yönündeki yer değiştirme dağılımı	118
Şekil 3.28. I-profilli kirişte 4 kenarlı SKS/SRMS kabuk elemanı için Y yönündeki yer değiştirme dağılımı	118
Şekil 3.29. I-profilli kirişte 6 kenarlı SKS/SRMS kabuk elemanı için Y yönündeki yer değiştirme dağılımı	118
Şekil 3.30. 4x4 çarpık ağ örgüsüne ve $t = 1.0$ kalınlığa sahip basit mesnetli kare plakta SRMQ elemanı için Z yönündeki yer değiştirme dağılımı.....	119
Şekil 3.31. 4x4 çarpık ağ örgüsüne ve $t = 1.0$ kalınlığa sahip basit mesnetli kare plakta SRMP elemanı için Z yönündeki yer değiştirme dağılımı	120
Şekil 3.32. SRMQ elemanın $t=0.5$ için Z yönünde elde edilen yer değiştirme dağılımı	124
Şekil 3.33. SRMP elemanın $t=0.5$ için Z yönünde elde edilen yer değiştirme dağılımı	124
Şekil 3.34. 40° eğrilikli plakta SRMQ elemanı için Z yönünde elde edilen yer değiştirme dağılımı	127
Şekil 3.35. 40° eğrilikli plakta SRMP elemanı için Z yönünde elde edilen yer değiştirme dağılımı	127
Şekil 3.36. Yayılı yük altındaki eğik plakta Z yönündeki yer değiştirme dağılımı	128
Şekil 3.37. Basit mesnetli kare plakta eleman sayısına göre çökme oranı	130
Şekil 3.38. Ankastre mesnetli kare plakta eleman sayısına göre çökme oranı	130
Şekil 3.39. Basit mesnetli kare plakta Z yönündeki a) $t = 0.5$ ms ve b) $t = 1.0$ ms anındaki yer değiştirmeler.....	131
Şekil 3.40. Basit mesnetli kare plakta Z yönünde zaman bağımlı yer değiştirme	131
Şekil 3.41. Basit mesnetli kare plakta düzgün ağ örgüde yayılı yük etkisinde elde edilen maksimum yer değiştirme oranları.....	132
Şekil 3.42. Basit mesnetli kare plakta çarpık ağ örgüde yayılı yük etkisinde elde edilen maksimum yer değiştirme oranları.....	133

Şekil 3.43. Ankastre mesnetli kare plakta düzgün ağ örgüde yayılı yük etkisinde elde edilen maksimum yer değiştirme oranları.....	133
Şekil 3.44. Ankastre mesnetli kare plakta düzgün ağ örgüde yayılı yük etkisinde elde edilen maksimum yer değiştirme oranları.....	134
Şekil 3.45. Ankastre mesnetli dairesel plakta yayılı yük etkisinde elde edilen maksimum yer değiştirme oranları	134
Şekil 3.46. 20° eğik plakta maksimum çökme değerinin eleman sayısı ile değişimi	135
Şekil 3.47. 40° eğik plakta maksimum çökme değerinin eleman sayısı ile değişimi	135
Şekil 3.48. 60° eğik plakta maksimum çökme değerinin eleman sayısı ile değişimi	136



TABLolar DİZİNİ

Sayfa No

Tablo 1.1. Plak ve kabuk eleman gelişimi	6
Tablo 2.1. Plak elemanda Kirchhoff ve R/M teorileri için farklı katsayı değerleri	27
Tablo 2.2. Dört ve beş düğüm noktalı elemanları için koordinatlar	79
Tablo 2.3. Yedi düğüm noktalı eleman için koordinatlar	79
Tablo 2.4. Patch testi için yükleme ve sınır şartları	80
Tablo 2.5. Düz ankastre kiriş probleminde kullanılan özellikler	82
Tablo 2.6. Eğri ankastre kiriş probleminde kullanılan özellikler	83
Tablo 2.7. Burulmuş dikdörtgen kesitli ankastre kiriş probleminde kullanılan özellikler	85
Tablo 2.8. Plak probleminde kullanılan özellikler	87
Tablo 2.9. Scordelis-Lo çatı probleminde kullanılan özellikler	88
Tablo 2.10. Silindir probleminde kullanılan özellikler	90
Tablo 2.11. Yarım küre çatı probleminde kullanılan özellikler	92
Tablo 2.12. I-kesit profiline sahip ankastre kirişin özellikleri	94
Tablo 2.13. Kare plak probleminde kullanılan özellikler	94
Tablo 2.14. Dairesel plak probleminde kullanılan özellikler	95
Tablo 2.15. Eğik plak probleminde kullanılan özellikler	96
Tablo 2.16. Basit mesnetli kare plak probleminde kullanılan özellikler	97
Tablo 3.1. Kabuk elemanlar için patch testi sonuçları	99
Tablo 3.2. SRMP elemanı için düğüm noktası konumunun sonuçlara etkisi	100
Tablo 3.3. SRMS elemanı için düğüm noktası konumunun sonuçlara etkisi	100
Tablo 3.4. SRMP elemanı için % hata değerleri	102
Tablo 3.5. SRMS elemanı için % hata değerleri	102
Tablo 3.6. Ankastre kirişte farklı yüklemelerde elde edilen yer değiştirmeler	102
Tablo 3.7. Ankastre kiriş için Y yönündeki yer değiştirme oranları	104
Tablo 3.8. Eğri ankastre kiriş için yer değiştirmeler	105
Tablo 3.9. Eğri ankastre kiriş için Y ve Z yönündeki yer değiştirme oranları	107
Tablo 3.10. Burulmuş ankastre kiriş için yer değiştirmeler	107
Tablo 3.11. Burulmuş ankastre kiriş için Z yönündeki yer değiştirme oranları	109

Tablo 3.12. Plak problemi için yer değiştirmeler.....	110
Tablo 3.13. Scordelis-Lo çatı problemi için yer değiştirmeler	111
Tablo 3.14. Scordelis-Lo çatı için Y yönündeki yer değiştirme oranları	112
Tablo 3.15. Silindir çatı problemi için yer değiştirmeler	113
Tablo 3.16. Silindir problemi için Y yönündeki yer değiştirme oranları	114
Tablo 3.17. Yarım küre problemi için yer değiştirmeler	115
Tablo 3.18. Yarım küre kabuk için X yönündeki yer değiştirme oranları.....	116
Tablo 3.19. I- profilli ankastre kiriş için Y yönündeki yer değiştirmeler.....	117
Tablo 3.20. I- profilli ankastre kiriş için hata değerleri.....	119
Tablo 3.21. Yayılı q yüküne maruz basit mesnetli kare plak için merkezdeki boyutsuz yer değiştirme $w_c/(qL^4/100D)$ değerleri.....	120
Tablo 3.22. Yayılı q yüküne maruz ankastre mesnetli kare plak için merkezdeki boyutsuz yer değiştirme $w_c/(qL^4/100D)$ değerleri.....	121
Tablo 3.23. Basit mesnetli kare plak için merkezdeki yer değiştirme oranları $w_c/(qL^4/100D)$	122
Tablo 3.24. Ankastre mesnetli kare plak için merkezdeki yer değiştirme oranları $w_c/(qL^4/100D)$	123
Tablo 3.25. Basit mesnetli kare plak için merkezdeki yer değiştirme oranları $w_c/(qL^4/100D)$	123
Tablo 3.26. Basit mesnetli ince kare plak için merkezdeki yer değiştirme oranları $w_c/(qL^4/100D)$	124
Tablo 3.27. Yayılı q yüküne maruz dairesel plak için merkezdeki boyutsuz yer değiştirme $w_c/(qR^4/D)$ değerleri	125
Tablo 3.28. Yayılı q yüküne maruz ankastre mesnetli dairesel plak için merkezdeki yer değiştirme oranları $w_c/(qR^4/D)$	126
Tablo 3.29. Yayılı q yüküne maruz ankastre mesnetli dairesel plak için merkezdeki yer değiştirmeler	126
Tablo 3.30. Yayılı yüke maruz eğik plakta boyutsuz çökme $w_A/(Et^3/qL^4)$ değerleri	127
Tablo 3.31. Yayılı yüke maruz eğik ankastre plakta çökme oranları $w_A/(Et^3/qL^4)$	128
Tablo 3.32. Eğik plakta Z yönündeki boyutsuz yer değiştirme $w_A/(Et^3/qL^4)$ değerleri	129

SEMBOLLER DİZİNİ

${}^K A_{ndm,i}^{ndf,x(y)}$: Kirchhoff plak için 1 ve 2 doğrultusunda artırılmış şekil fonksiyonların türevleri
${}^{RM} A_{ndm,i}^{ndf,x(y)}$: Reissner/Mindlin plak için 1 ve 2 doğrultusunda artırılmış şekil fonksiyonların türevleri
$F_{Xi}^d, F_{Yi}^d, M_{XYi}^d$: Membran eleman için genel koordinatlardaki yük vektörü
$F_{xi}^d, F_{yi}^d, M_{xyi}^d$: Membran eleman için yerel koordinatlardaki yük vektörü
$[K_D], [K_d]$: Genel ve yerel koordinattaki toplam rijitlik matrisi
$[\bar{B}_d]$: Membran eleman için şekil değiştirme-yer değiştirme matrisi
G_i	: Membran eleman için burulma şekil değiştirme-yer değiştirme matrisi
$F_{Xi}^e, M_{Xi}^e, M_{Yi}^e$: Eğilme elemanı için genel koordinatlardaki yük vektörü
$F_{xi}^e, M_{xi}^e, M_{yi}^e$: Eğilme elemanı için yerel koordinatlardaki yük vektörü
$[{}^K K_E], [{}^K K_e]$: Kirchhoff plak için genel ve yerel koordinattaki rijitlik matrisi
$[{}^K B_e], [{}^{RM} B_e]$: Kirchhoff ve Reissner/Mindlin plak için eğilme şekil değiştirme-yer değiştirme matrisleri
${}^K [K]_T, {}^{RM} [K]_T$: Kirchhoff ve Reissner/Mindlin düz kabuk eleman için rijitlik matrisi
${}^{RM} K_E, {}^{RM} K_e$: Reissner/Mindlin plak için genel ve yerel koordinatta eğilme rijitlik matrisi
${}^{RM} K_K, {}^{RM} K_k$: Reissner/Mindlin plak için genel ve yerel koordinatta kayma şekil değiştirme rijitlik matrisi
M	: $\{M_x, M_y, M_{xy}\}^T$ momentler
N_i^0	: i. düğüm noktası için Lagrangian şekil fonksiyonları
N_i	: i. düğüm noktası için artırılmış eleman formülasyonuna göre tekrar düzenlenmiş Lagrangian şekil fonksiyonları
$f(t)$: Plak elemanın kalınlığına bağlı fonksiyon
δW	: $\{\delta W_{iç}, \delta W_{dış}\}^T$ iç ve dış virtüel iş
ϵ	: $\{\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}\}^T$ şekil değiştirmeler
γ	: Enine kayma şekil değiştirmeler $\{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}^T$

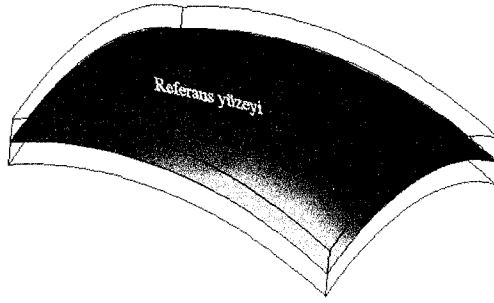
- ${}^K\theta_{ni}$: Kirchhoff plakta normal doğrultudaki i. dönme
 ${}^K\theta_{si}$: Kirchhoff plakta teğet doğrultudaki i. dönme
 ${}^{RM}\theta_{ni}$: Reissner/Mindlin plakta normal doğrultudaki i. dönme
 ${}^{RM}\theta_{si}$: Reissner/Mindlin plakta teğet doğrultudaki i. dönme
 θ_{1i} : 1 doğrultusundaki i. dönme
 θ_{2i} : 2 doğrultusundaki i. dönme
 ${}^K T_{ndf, nen}^x$: Kirchhoff plak için 1 doğrultusundaki artırılmış şekil fonksiyonları
 ${}^K T_{ndf, nen}^y$: Kirchhoff plak için 2 doğrultusundaki artırılmış şekil fonksiyonları
 ${}^{RM} T_{ndf, nen}^x$: Reissner/Mindlin plak için 1 doğrultusundaki artırılmış şekil fonksiyonları
 ${}^{RM} T_{ndf, nen}^y$: Reissner/Mindlin plak için 2 doğrultusundaki artırılmış şekil fonksiyonları
ndf : Artırılmış şekil fonksiyonlarında serbestlik derecesi (w, θ_x, θ_y)
nen : Elemandaki düğüm noktası sayısı
 u_i, v_i, w_i : i. düğüm noktasında X, Y ve Z yönündeki yer değiştirmeler
 $\theta_{Xi}, \theta_{Yi}, \theta_{Zi}$: i. düğüm noktasında X, Y ve Z doğrultusundaki dönmeler
Diğer semboller kullanıldıkları yerlerde tanımlanmıştır.

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Kabuklar iki boyutu yanında üçüncü boyutu (kalınlık) küçük olan ve eğri yüzey geometrisine sahip yapı elemanları olarak tanımlanmaktadır. Modern mühendislik sistemlerinin yük taşıyan parçalarında yaygın bir şekilde kullanılan kabuklar, ağırlık etkili parçaların üretiminde, araçlarda ve diğer mekanik sistemlerde önemli bir rol oynamaktadır. Kabuk yapıların bu önemli rolü; ağırlığına göre yük taşıma kapasitesinin fazlalığı, yük altında nasıl davranacağı bilgisinin belirlenmesi ve üretilen yeni malzemelerden kaynaklanmaktadır (Noor vd., 1993). Bu yapıların farklı sınır şartları altındaki davranışı mühendislik problemlerinden biri olup basınçlı kaplar, uçak gövdesi ve parçaları, borular, füzeler, kubbeler, araç ve gemi karoserleri, kan damarları vb. bu yapılara örnek olarak verilebilir.

Kabuk yapılar kalınlık boyutu diğer boyutları yanında çok küçük olduğundan bir düzlem gerilme problemi olarak ele alınmakta ve Şekil 1.1'de gösterildiği gibi kalınlığı ikiye bölen, tek bir referans yüzeyi tarafından modellenmektedir.



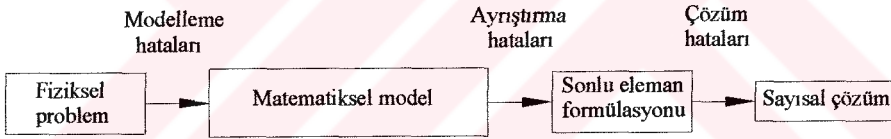
Şekil 1.1. Kabuk geometrisi

Kabuk geometrili yapı elemanlarının teorik doğrusal analizi 19. yüzyıla kadar gitmektedir. Teorik modellerin geliştirilmesinde karmaşık diferansiyel geometri sisteminden yararlanıldığından, denklemleri ele alış ve sayısal çözümleme kolay

olmamaktadır. Simo ve Fox (1989) geliştirdikleri ve uyguladıkları yeni bir yöntemle kabuk denklemlerini sayısal olarak kolay işlenebilir bir hale getirmişlerdir.

Birçok mühendislik probleminde olduğu gibi, kabuk yapılarda da kapalı analitik çözümler elde etmek bazı durumlarda çok zor hatta imkânsızdır. Mevcut çözümler ise kolaylaştırıcı kabullerin uygulandığı basit geometri, sınır ve yükleme şartlarında elde edilmektedir. Analitik çözümlerin yetersiz kaldığı karmaşık geometri, farklı malzeme özellikleri, çeşitli sınır şartları gibi durumlarda yaklaşık fakat yeterli sonuçlar veren sayısal çözüm yöntemleri kullanılmaktadır. Son yıllarda bilgisayar teknolojisindeki gelişmeler, sayısal yöntemlerin mühendislik problemlerine uygulanmasını artırmış ve analizlerde yaygın bir şekilde kullanılmasına sebep olmuştur. Hatta bu yöntemlerin oluşturduğu yeni bir bilim dalı olan *hesaplamalı mekanik* ortaya çıkmıştır.

Günümüzde, fizik ve mühendislikte karşılaşılan birçok problemin çözümünde kullanılan, en yaygın ve etkin sayısal yöntemlerden biri sonlu elemanlar yöntemidir (SEY). Bu yöntemde, gerçek bir fiziksel problemin matematiksel modeli oluşturularak çözülür (Şekil 1.2).



Şekil 1.2. Sonlu elemanlar yöntemindeki modelleme ve ayrıştırma hataları

Matematiksel modelleme işleminin, modelin varyasyonel problem olarak ifade edilmesinden sonraki aşaması, bilgisayarda çözümlenmesi hedeflenen ayırık modelin oluşturulmasıdır. Günümüzde, diferansiyel denklemlerle ilgili matematik modellerin oluşturulması ve elde edilen problemin bilgisayarda çözümlenmesi açısından en kapsamlı ve genel yöntem SEY'dir. Bu yöntemin klasik sonlu farklar yönteminden başlıca farkı, bunun sınır değer problemini değil, varyasyonel problemi temel almasıdır. Bu nedenle SEY, bilimsel ve teknolojik problemlerin sayısal çözümlenmesinde en çok kullanılan yöntemlerin başında gelmektedir. SEY'nin boyutlarının büyüklüğünü göstermek için, bunun hem matematiksel analiz, hem diferansiyel denklemler, hem sayısal yöntemler, hem

bilgisayar bilimleri, hem de ayrıca çeşitli mühendislik bilimleri dallarıyla iç içe olduğunu söylemek yeterlidir.

SEY’de yapı, davranışı daha önce belirlenmiş olan birçok elemana (sonlu eleman) bölünür. Elemanlar "düğüm noktası" adı verilen noktalarda tekrar birleştirilirler. Bu şekilde cebrik bir denklem takımı elde edilir. Gerilme analizinde bu denklemler düğüm noktalarında denge denklemleridir. İncelenen probleme bağlı olarak bu şekilde yüzlerce hatta binlerce denklem elde edilir. Bu denklem takımının çözümü ise bilgisayar kullanımını zorunlu kılmaktadır.

SEY’ni kullanarak yapılan bir analiz işleminde ağ oluşturma işlemi SEY’nin temelini oluşturur. Termal, yapısal, mekanik, akışkan ve elektromagnetik gibi mühendisliğin temel alanlarında sayısal analiz işlemleri esnasında ağ oluşturma işlemi vazgeçilmez bir adımdır. Ağ oluşturma işlemi düğüm noktalarının ve elemanların koordinatlarını belirler. Aynı zamanda kullanıcı tarafından girilen minimum bilgiye karşılık uygun sürede otomatik olarak düğüm noktalarını ve elemanları sıralar ve numaralanmasını sağlar.

SEY’nin günümüzdeki uygulamaları oldukça fazladır ve diferansiyel eşitliklerle ifade edilen tüm fiziksel problemleri kapsar. SEY’ni diğer yöntemlere üstün kılan başlıca unsurlar yaygın olarak kullanılmasına yardımcı olmaktadır. Bunların bazıları aşağıda verilmiştir.

1. Sonlu elemanlar, boyutları ve şekillerinin esnekliği nedeniyle, verilen bir cisimi temsil edebilir, hatta karmaşık şekilli bir cisimde daha güvenilir olabilir.
2. Düzgün olmayan sınırlara sahip şekiller, çok bağlantılı bölgeler (yani bir veya çok delikli cisimler) veya köşeleri olan bölgeler zorluk çekilmeksizin incelenebilir.
3. Değişik malzeme ve/veya geometrik özellikleri bulunan problemler ek bir zorluk çıkarmadan modellenebilir. Geometri ve malzemenin doğrusal olmayan davranışları kalıcı olsa bile (örneğin zamana bağlı) bu özellikler kolaylıkla göz önüne alınabilir.
4. Eleman boyutları kullanıcı tarafından değiştirilebilir. Ayrıca, sonuçların daha fazla etkileneceği bölgelerde daha küçük elemanlar kullanılarak hassas işlemler yapılabilirken, aynı parçanın diğer bölgeleri büyük elemanlara bölünerek işlem hızı arttırılabilir.

5. Sebep-sonuç bağıntılarına ait problemler genel rijitlik matrisi ile birbirine bağlanan genelleştirilmiş "kuvvetler" ve "yer değiştirmeler" cinsinden formüle edilebilir. Sonlu eleman metodunun bu özelliği problemin anlaşılmasını ve çözülmesini hem mümkün kılar hem de basitleştirir.
6. Süreksiz yüzey yüklemeleri gibi sınır şartları, yöntem için zorluk oluşturmaz. Karışık sınır durumları kolaylıkla ele alınabilir.

Doğru eleman tipini seçmek SEY ile modelleme yapma işleminin çok önemli bir başka adımıdır. Bu adım için kullanıcının SEY hakkında yeterince bilgi sahibi olması gerekir. Çözümü istenen cismin geometrisi, analizin tipi (gerilme analizi, ısı transferi, manyetik analiz, vb.) ve sınırları eleman seçimini etkiler. Seçilecek şekil fonksiyonları çözümün doğruluğu üzerine önemli etkilere sahiptir. Şekil fonksiyonları eleman tipleriyle ifade edilip, analize göre bir boyutlu (1-B), iki boyutlu (2-B) ve üç boyutlu (3-B) olabilmektedir. Ticari paket programlarda genelde 1-B sonlu eleman modellerinde 2 ve 3 düğüm noktalı şekil fonksiyonları kullanılarak çizgi elemanlar ve 2-B yüzey modellemelerinde üçgen geometrili 3 düğüm noktalı ve 6 düğüm noktalı elemanlar ve dikdörtgen geometrili dört düğüm noktalı, 8 düğüm noktalı, 9 düğüm noktalı, 12 düğüm noktalı ve 16 düğüm noktalı şekil fonksiyonlarını içeren alan elemanları kullanılmaktadır. 3-B katı modellerde ise dört yüzeye sahip (tetrahedron eleman) dört düğüm noktalı ve 10 düğüm noktalı katı elemanlar ve 6 yüzeye sahip (brick eleman) 8 düğüm noktalı, 20 düğüm noktalı ve 27 düğüm noktalı şekil fonksiyonlarını içeren katı (solid) elemanlar kullanılmaktadır. Bunlar dışında farklı geometri ve şekil fonksiyonlu elemanlar da kullanılabilir.

3-B katı elemanlar, 1-B ve 2-B elemanlara göre daha çok serbestlik derecesi içerdiğinden kabuk elemanlar, kabuk türü yapıların SEY ile analizinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Ancak kabuğun kalınlığı düzlem boyutları yanında çok küçük olduğundan bu tür elemanlar bazen sayısal problemlere sebep olmaktadır. Ayrıca 3-B doğrusal olmayan problemlerin analizinde, serbestlik derecelerinin yüksek olmasından dolayı hesaplama zamanının uzun olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla mevcut hesaplama gücünün verimli kullanımı için eleman seçimi çok önemli faktörlerden biri haline gelmektedir. Bu elemanlar üzerine pek çok formülasyon yöntemi önerilmesine rağmen, şu ana kadar gerek teoriden gerekse pratikten kaynaklanan bütün noksanlıkları gideren tek bir kabuk eleman formülasyonu mevcut değildir (Choi ve Paik, 1996). Kabuk elemanlar ile

yapılan sayısal analizlerde birçok zorluk ortaya çıkmaktadır. Bu zorluklar kabuk elemanın, kabuk geometrisi ve sınır şartlarına bağlı olarak farklı davranmasından kaynaklanmaktadır. Bu nedenle kabuk elemanla analizde etkili bir sonlu elemanlar formülasyonu, kalınlığa bağlı olmaksızın hem membran (düzlem gerilme elemanı) hem de eğilme etkin durumlarını iyi modellemelidir. Böyle genel ve etkili bir SE formülasyonu geliştirmek zordur. Bununla birlikte geliştirilecek bir elemanda temel amaç aşağıdaki gereksinimleri sağlayan bir eleman formülasyonu oluşturmaktır. Bu özellikler; sıkıştırılamaz malzeme için kilitlenmeme, iyi eğilme davranışı, çok ince eleman sınırlarında kilitlenmeme, eleman çarpılmasına duyarsızlık, kaba ağ örgüde doğruluk, doğrusal olmayan davranışta basit uygulanış ve etkinliktir.

Son zamanlarda kabuk eleman formülasyonlarındaki gelişmeler; kabukların mekanik, termal ve elektromanyetik davranışı için hesaplamalı modellerin geliştirilmesi, yapı-sıvı etkileşimi, etkili ayrıştırma teknikleri, hesaplama stratejileri, sayısal algoritmalar, karmaşık kabuk yapılardan oluşan büyük doğrusal olmayan denklem sistemi için çok yönlü ve uygun yazılım sistemleri, stabilizasyon yöntemleri, hibrid ve mixed varyasyonel prensipler, burulma içeren mixed varyasyonel prensipler vb yöntemler üzerine yapılmaktadır (Yang vd., 2000).

1.2. Literatür Araştırması

Kabuk yapıların denge denklemleri ve geometrisi çok karmaşık olup SEY ile formülasyonları da kolay değildir. Bu elemanların ilk oluşturulduğu 1960'lı yıllardan bu yana, doğrusal ve doğrusal olmayan bölgelerde plak ve kabukların modellenmesi üzerine literatürde çok sayıda makale yayımlanmıştır. Hesaplamalı kabuk mekaniğinde yenilikçi aktivitelerin sürmesi, konuyla ilgili çok sayıda araştırmanın yapıldığını göstermektedir. SEY ile kabukların analizi genellikle üç farklı eleman yaklaşımıyla yapılmaktadır (Zhang vd., 2000). Bunlardan ilki bir düzlem membran elemanla düz plak eğilme elemanının birlikte kullanıldığı düz kabuk elemanlar, ikinci yaklaşım klasik kabuk teorilerinin kullanıldığı eğri kabuk elemanlar ve üçüncü yaklaşım 3-B katı elemandan dejenere yöntemle türetilen kabuk elemanlardır. Son 40 yıldan beri önemli teorik modeller geliştirilmiş ve bu modellerde karşılaşılan zorluklar giderilerek çeşitli pratik problemlere uygulanmıştır (Tablo 1.1). Maalesef geliştirilen bu modeller içinde tek bir teori, tam olarak plak ve kabukların uygulama alanı içinde yeterince genel ve geniş olmadığından

çalışmalarda genellikle fiziksel problemleri daha çok doğrulukla ve/veya verimlilikle analiz eden modeller kullanılmaktadır. Bunun yanında modellerin doğruluğu, pratik mühendislik problemleriyle uyuşup uyuşmadığının test edilmesiyle belirlenmektedir.

Tablo 1.1. Plak ve kabuk eleman gelişimi (MacNeal, 1998-a).

Eleman gelişimi	Tarih
İlk membran eleman	1956
İlk plak eğilme elemanı	1961
Kirchhoff plak elemanlar	1961-1970
Discrete Kirchhoff plak ve kabuk elemanlar	1969
İlk Mindlin kabuk eleman (Sekiz düğüm noktalı 4 kenarlı)	1969
İndirgenmiş integrasyon yöntemiyle türetilen elemanlar	1971
Dört düğüm noktalı 4 kenarlı, üç düğüm noktalı üç kenarlı elemanlar	1976-1982
Dokuz düğüm noktalı 4 kenarlı elemanlar	1985-1990
Yüksek dereceli kabuk elemanlar	1998

Kabuk teorileriyle uyumlu eğri kabuk elemanlar, kabuğun gerçek yapısını iyi bir yaklaşımla modellerler. Ayrıca eleman içindeki membran-eğilme etkileşimini de hesaba katarlar. Ancak bunun yanında, yer değiştirme ve dönme alanları için düşük dereceli şekil fonksiyonları kullanıldığında membran ve kayma kilitlemesi problemi ve rijit cisim hareketinin sağlanamaması gibi zorluklar aşılmalıdır.

Gerçekte, farklı geometriye sahip kabuk elemanlar için pek çok formülasyon çıkarılmış, uygulanmış ve literatürde yer almıştır. Aşağıda, bu formülasyonların bazılarında bahsedilmiş olup daha sonra bu çalışmanın esas temelini oluşturan artırılmış eleman formülasyonlu düz kabuk elemanlar hakkında detaylı bilgi verilmiştir.

Kabuk elemanların geliştirilmesinde kullanılan yöntemlerden biri, kabuk teorilerinin oluşumuna yardımcı olan denge denklemlerinden yararlanmaktır. Böylece teorilere dayanan güçlü sonlu elemanlar formülasyonu geliştirilebilmek mümkündür. Erickson ve Truesdell (1958), kabuğu bir yüzey olarak düşünerek kabuk teorilerinin oluşturulmasına doğrudan bir yaklaşımla başladı. Bu yönde ilk başarılı sonuçlar ise Argyris ve Scharpf

(1968-a; 1968-b; 1969) ve Argyris vd. (1973) tarafından elde edildi. Benzer çalışmalarda Simo ve Fox (1989), Simo vd. (1989; 1990; 1992), Fox ve Simo (1992), Simo (1993) ve Simo ve Tarnow (1994), genişlemez bir Cosserat yüzeyine eşit olan ve gerilme bileşenlerini tam olarak formüle edebilen geometrik tam kabuk modelini literatüre sundular. Simo ve arkadaşlarının çalışmaları, Erickson ve Truesdell, Green ve Laws (1966), Green ve Zerna (1960) ve Cohen ve DeSilva (1966) tarafından ele alınan Cosserat vd. (1909)'ın ilk çalışmasından farklı olarak modern bir yapıya sahiptir. Bu formülasyon hem doğrusal hem de doğrusal olmayan analizler için başarılı bir şekilde kullanılmaktadır. Ancak bu yöntem diğer kabuk elemanlara göre daha güçlü bir matematik alt yapı gerektirir.

Sayısal uygulamalar büyük şekil değiştirmeli deformasyonları içermektedir. Ayrıca büyük elastik şekil değiştirme etkisi altındaki problemler, genelde kauçukta olduğu gibi sıkıştırılmaz malzeme ile sınırlıdır. Geometrisinin basitliğinden dolayı dört düğüm noktalı 4 kenarlı elemanlar genelde böyle uygulamalarda kullanılırlar. Yer değiştirme formülasyonlu elemanda sıkıştırılmazlığın oluşumu kilitlenme problemine yol açar. Bu problemin üstesinden gelmek için birkaç yöntem geliştirilmiştir. Bunlar indirgenmiş teknikler veya karma (hibrid/mixed) yöntemlerdir. Bazı yaklaşımlarda hourglass'a yol açan elemanların integrasyonu altındaki merite noksanlığı, stabilize teknikleriyle atlatılabilmektedir. Daha sonraları doğrusal durumda Simo ve Rifai (1990) veya doğrusal olmayan durumda Simo vd. (1993), Hu-Washizu varyasyonel prensibine dayanan bir eleman ailesi geliştirdiler. Bu elemanlar Taylor vd. (1976) tarafından geliştirilen uyumsuz (incompatible) QM6 elemanının uzantılarıdır. Bu elemanlar, herhangi bir merite noksanlığı görülmeden eğilme ve sıkıştırılmaz durumlarda iyi performans sergilerler. Doğrusal olmayan geometrik analiz için Hueck vd. (1994) ve Hueck ve Wriggers (1995), fiziksel koordinatlarda elemanın temel fonksiyonunun ikinci derece Taylor serisine açılımıyla bir uyumsuz dörtkenarlı QS6 adında bir eleman geliştirdiler. Daha sonra Wrigger vd. (1996), büyük elastik deformasyonlar için Hu-Washizu prensibini QS6 elemanının iyileştirilmesinde kullandılar.

Uyumsuz modlar yöntemi bir yaklaşım olarak, eğilme etkin deformasyon hallerinde düşük dereceli elemanların davranışını düzeltmek için Wilson vd. (1973) tarafından kullanılmıştır. Metodun pratik faydaları; kaba bir ağ için ağ çarpılma duyarsızlığından dolayı yüksek dereceli doğruluk ve hemen hemen sıkıştırılmaz ve doğrusal olmayan malzemelerin analizinde mükemmel performans sergilemeleridir. Bununla birlikte

Wilson'un elemanlarının başlangıç formülasyonunda, çarpılan konfigürasyon oluştuğu zaman bir eksiklik oluşuyordu. Taylor vd. (1976) bu formülasyonu belirli bir düzeyde düzelttiler. Bununla birlikte yöntem hala geniş bir kabul görmedi. Bunun yerine bağımsız değişkenler olarak yer değiştirme ve gerilmelerin düşünüldüğü hibrid formülasyonlar başarılı bir alternatif olarak geliştirildi. İbrahimbegovic ve Wilson (1995) ve İbrahimbegovic ve Kozar (1995), iyi bilinen doğrusal olmayan geometrik 8 düğüm noktalı Wilson brick elemanını geliştirdiler. Eleman, varyasyonel formülasyona dayalıydı ve uyumsuz mod yöntemiyle modifiye edilmişti. Görüldü ki, uyumsuz mod formülasyonu, özellikle hibrid formülasyondaki gibi aynı performansı sergilemektedir.

Uyumsuz mod yöntemi son zamanlarda üç alanlı Hu-Washizu varyasyonel prensip çerçevesinde yeniden denenmektedir. Simo vd. (1993)'nin çalışmasında bu mod yöntemi bırakıldı ve onun yerine zenginleştirilmiş (enhanced) şekil değiştirme alanları kullanıldı. Yer değiştirme ve şekil değiştirme alanlarına ilaveten gerilme alanı ayrıca zenginleştirilmiş şekil değiştirme alanına doğrudan uygulandı.

Kabuk elemanlar, havacılık ve benzer uygulamalarda optimum tasarımı elde etmek için doğrusal olmayan analizlerde önemli ve gereklidir. Büyük yer değiştirmeler veya burkulmadan sonra büyük dönmeler altındaki kabukların doğru olarak modellenmesi için de birçok çalışma yapılmıştır. Geleneksel olarak sonlu elemanlar formülasyonlarına çok büyük dönmelerin uygulanması tek bir modülde elde edilerek büyük dönme problemleri için etkili olmayan kiriş ve kabuk elemanlara uygulandı. Ancak, bu yeni geliştirilen elemanların kullanımında genel bir uzlaşma yoktur. Belytschko ve Hsieh (1973), küçük şekil değiştirmeli büyük dönmeli kiriş elemanı geliştirmek için elemana yerleştirilmiş yerel koordinatlara dayanan bir yöntem önerdi. Elemana yerleştirilmiş koordinatların kullanımı, hareketi, deformasyon ve rijit cisim hareketine ayırmaktadır. Daha sonra bu yöntem, herhangi bir eleman için keyfi büyük yer değiştirme ve dönmelerden şekil değiştirmeleri hesaplamak için bir döndürülmüş koordinat çerçevesinde yukarıdaki ayrıştırma kullanılarak düzenlendi. Bu yöntemin bir avantajı bağımsız olarak eleman formülasyonuna uygulanabilmesidir. Böylece cebirsel operasyonlar takımı tanımlanabilir ve yazılım geliştirmede kullanılabilir olmasıdır. Belytschko'nun çalışmasını takiben Liu vd. (1994; 1999) yeni elemanlar geliştirmişlerdir.

Moita ve Cris (1996), büyük şekil değiştirmeler için zenginleştirilmiş düşük dereceli eleman formülasyonlarını önerdiler. Hareketin dönme ve yer değiştirmeye ayrıştırması Qin ve Chen (1988) tarafından sağlandı. Peng ve Crisfield (1992) corotational tekniği,

alternatif bir yaklaşım olarak tanımladı. Jiang ve Chernuka (1994) ve Jiang vd. (1994), kabukların doğrusal olmayan geometrik analizi için update lagrangian formülasyonunu önerdiler. Wriggers ve Gruttmann (1993) ve Gruttmann vd. (1989), Biot gerilme konseptine dayanan sonlu dönmelere sahip ince kabuk eleman formülasyonunu geliştirdiler.

İlk olarak Ahmad vd. (1970) tarafından önerilen dejenere kabuk elemanları, 30 yıldan fazladır hesaplamalı kabuk analizinde yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Bu elemanların popüler olmalarının nedeni klasik kabuk teorilerinden bağımsız oluşu ve formülasyonlarının basitliğidir. Bunun yanında bu elemanların hesaplama zamanları uzundur ve doğrusal olmayan malzeme davranışını modellemede kullanımı kısıtlıdır. Bu yöntemle kabuk elemanlar doğrudan 3-B katı mekaniğinin temel denklemlerinden elde edilmektedir. Dejenere kabuk elemanları; Ramm (1977), Parisch (1981), Hughes ve Liu (1981-a; 1981-b), Hughes ve Carnoy (1983), Bathe ve Dvorkin (1984), Hallquist vd. (1986), Park ve Stanley (1986) ve Liu vd. (1986)'un çalışmaları ile doğrusal olmayan davranışa genişletilmişlerdir. Literatürdeki birçok çalışmadan görülebileceği gibi bu yaklaşıma indirgenmiş integrasyon, kayma şekil değiştiriminin tekrar düzenlendiği ANS formülasyonları ve hibrid/mixed formülasyonlar başarılı bir şekilde uygulanmaktadır (Wanji ve Cheung, 2005)

Kabuk elemanlarda yer değiştirme formülasyonu ile elde edilen C^0 elemanlarında sıklıkla kilitleme problemleri oluşmaktadır. Bu kilitlemeden kaçınmak için indirgenmiş integrasyon yöntemi kullanılır. Bu teknik, kayma şekil değiştirme terimlerinde teorik gereksinim için olması gerekenden daha düşük dereceli integrasyon kullanılarak uygulanır. Dört düğüm noktalı 4 kenarlı eleman için kayma şekil değiştirme enerjisi tek noktalı Gauss integrasyonu ile elde edilir. Bununla birlikte, elemanda genellikle sıfır enerji modları meydana gelir (Park vd., 1985). Ayrıca bazı kalın plak problemlerinde çözüm sonuçları kararsızlaşır (Zienkiewicz ve Hinton, 1976). Buna ilaveten eleman Kirchhoff ince plak elemanlarının yakınsaması için patch testini geçemez.

Doğrusal olmayan ve zaman bağımlı analizler için sayısal algoritmaların geliştirilmesi ve endüstriyel uygulamalarla ilgili problemlerde basit ve etkili elemanların sonlu elemanlar yöntemiyle geliştirilmesi araştırmacıların ilgi odağı olmaktadır. Bu gelişim, karmaşık doğrusal olmayan temas problemlerinde hızlilik ve ağ üretiminde basitlik için düşük dereceli şekil fonksiyonlu elemanlara ilgiyi artırmıştır. Bu elemanlarda hesaplama verimliliği için seçmeli indirgenmiş integrasyon teknikleri kullanılmaktadır.

Doğrusal olmayan ve zaman bağımlı problemlerde tek integrasyon noktalı bir kabuk elemanı özellikle denklem kurulumu, eleman kinematığı ve bilgisayarda çözüm zamanını düşürmesi açısından istenmektedir. Literatürde bu konuya geniş bir yer ayrılmaktadır. Geliştirme, indirgenmiş integrasyon tekniklerinin uygulanmasıyla başladı. Tek bir integrasyon noktalı Mindlin plak teorisine dayalı 4 kenarlı bir eleman U1 ismi altında Hughes vd. (1978) tarafından tanımlandı. Bununla birlikte bu eleman mertebe noksanlığı üretmekteydi. Bu mertebe noksanlığı bazı ağ örgüsü ve sınır şartları için toplam rijitlik matrisinde tekilliğe veya hemen hemen tekillikle sonuçlanan hourglass desenine neden olmaktaydı. Hughes ve Tezduyar (1981) ve MacNeal (1998)'nin çalışmasından 2x2 integrasyon noktası kullanarak mertebe noksanlığı düzeltildi ve kilitlenmeden bağımsız enine kayma şekil değiştirme interpolasyonunu geliştirildi. Buna rağmen bu şekiller, dört düğüm noktalı elemanın bir potansiyel kaybına neden olmaktadır. Bu elemana diğer bir yaklaşım, Taylor (1979) tarafından yapıldı. Taylor, Kosloff ve Frazier (1978)'in hourglass kontrol şeklinin kullanımını geliştirdiler.

Bir başka gelişme ise orta yüzeyde tek integrasyon noktalı dört düğüm noktalı 4 kenarlı bir kabuk elemanı için Belytschko ve Tsay (1983) tarafından tanımlandı. Bu eleman LS_DYNA, PAMCRASH ve diğer ticari programlarda çarpma problemleri için kullanılmaktadır. Bu elemanın gelişimindeki esas amaç minimum hesaplama zamanı yanında kararlı bir yakınsaklığı bulmaktır. Bu amaç için malzeme elastik olduğu zaman orta düzlemde tek noktalı iki yönde doğrusal (bilineer) izoparametrik eleman kullanıldı. Doğrusal olmayan malzemeler için ise tek bir düzlem noktasında kalınlık boyunca birkaç integrasyon noktası kullanıldı. Bu elemana mertebe noksanlığından ötürü bir hourglass kontrolü ilave edildi. Bu elemanın avantajı çözüm hızının düşük dezavantajı ise eleman çarpık olduğu zaman başarısız olması ve ince plak sınırlarında patch testinden geçememesidir.

Flanagan ve Belytschko (1981) hourglass kontrollü 4 kenarlı ve homojen şekil değiştirmeli bir hexahedron eleman geliştirdiler. Belytschko ve Tsay, tek nokta integrasyon kullanıldığı zaman dört düğüm noktalı 4 kenarlı elemanın kinematik modlarının kontrolü için bir kararlılık yöntemi geliştirdiler. Bu kinematik modlar, toplam rijitliğin tekilliğine veya özel salınışlarla çözümün kararsızlığına neden olurlar. Belytschko ve Wong (1989; 1992), Belytschko ve Leviathan (1994-a; 1994-b) ve Belytschko ve Bindeman (1993) tarafından geliştirilmiş 4 kenarlı elemanın rijit cisim hareketi sağlanmıştır. Benzer çalışmalar Liu vd. (1985; 1986) tarafından yapıldı. Bu çalışmalardan kararlılık vektörünün,

gerçekte, doğal koordinatlara göre kısmi türevlerin alınmasıyla elde edildiği görülmüştür. Bu, sonlu elemanın integrasyonu altında hourglass modunu kontrol etmek için hesaplama doğruluğu üzerine hiçbir olumsuz etki yapmadan hesaplama verimliliğini artırmakta ve malzeme sıkıştırılmaz olduğu zaman herhangi bir kilitlenme fenomeni oluşturmamaktaydı.

Dönel (burulma) serbestlik dereceli elemanlar, çarpık (kırımlı) plak ve kabukların analizinde pratik avantaja sahiptirler. Örneğin burulma serbestlik derecesine sahip membran elemanlı bir plak eğilme elemanı her bir düğüm noktasında 6 serbestlik derecesine sahiptir. Oysa klasik membranın sonlu elemanında her bir düğüm noktasında 5 serbestlik derecesi vardır. Her bir düğüm noktasında yerel olarak tanımlanan 5 serbestlik derecesiyle çalışmak mümkün olmasına rağmen programlamada önemli pratik zorluklar oluşturmaktadır. Burulma serbestlik derecesi ilaveli sonlu elemanlarla bu problemler ortadan kaldırılmaktadır. Bu sebeple bir düğüm noktasında 6 serbestlik derecesinin olması mühendislik açısından çok caziptir. Bu elemanlarda burulma serbestlik dereceleriyle birleştirilmiş başarılı yaklaşımlar tanımlanmıştır. Bu çeşit fikirler ilk olarak Reissner (1965) tarafından önerilmiştir. Hughes ve Brezzi (1989) ve Hughes vd. (1989; 1995-a; 1995-b) mühendislik uygulamaları için pratik kullanışlı bu formülasyonları geliştirmişlerdir.

Son zamanlarda SEY'de zenginleştirilmiş şekil değiştirme alan yaklaşımları aktif bir ilgi alanı olmaktadır. Bu elemanlar hem eğilme durumları hem de sıkıştırılmaz sınırlarda çok iyi performans sergilediklerinden doğrusal olmayan geometrik ve malzeme davranışlı problemlerde kullanılmaktadır. Son yıllarda birkaç yükseltilmiş şekil değiştirme elemanı geliştirilmiş ve bu elemanlar katı mekaniğinde etkili bir şekilde kullanılmaktadır (Yang vd., 2000). Bu elemanlar yapılarından dolayı çok iyi kaba ağ doğruluğuna sahiptirler. Ayrıca elastik olmayan malzeme modellerine de kolayca uygulanabilirler.

Kayma şekil değiştirme terimlerinin yeniden formüle edilmesi yöntemiyle, varsayılan kayma şekil değiştirme (ANS: assumed shear method) adıyla bilinen kabuk elemanları türetilir (Hughes ve Tazduyar, 1981 ve Hughes ve Dvorkin, 1986). Bu yöntemde kayma şekil değiştirmeler (Hughes ve Cohen, 1978) yeni koordinat takımı tanımlanarak tekrar çıkarılır. Problem kayma kilitlenmesinden bağımsızdır. Bu yöntemin etkililiği literatürdeki çok sayıda örneklerle kendini ispatlanmıştır. Hinton ve Huang (1986), Donea ve Lamain (1987) ve Bathe ve Dvorkin (1985) birçok düzeltilmiş 4 kenarlı Mindlin elemanları geliştirdiler. Son zamanlarda parçalı Kirchhoff ve denge şartlarına

dayanan birkaç etkili ayrık kayma elemanları, Batoz ve Lardeur (1989), Batoz ve Katili (1992), Katili (1993-a; 1993-b) ve Ayad vd. (1998) tarafından geliştirildi.

Hibrid ve mixed formülasyonlar eleman içinde yer değiştirme alanı yanında şekil değiştirme veya gerilme alanlarının da bağımsız olarak kullanıldığı formülasyonlardır. Rijitlik matrisi düğüm noktasındaki yer değiştirme parametreleriyle elde edilir. Mixed formülasyonlar plak ve kabuklara ilk olarak Lee ve Pian (1978) tarafından uygulandı. Son yıllarda çoklu bağımsız değişkenli (yer değiştirmeler, şekil değiştirmeler, gerilmeler, vb) mixed ve hibrid eleman modelleri içinde kayma kilitlenmesinden bağımsız birçok etkili elemanlar, Lee ve Pian, Lee ve Wong (1982), Spilker ve Munir (1980-a; 1980-b), Spilker (1982), Saleeb ve Chang (1987), Cheung ve Chen (1989) ve Sze ve Chow (1991), vb tarafından genelleştirilmiş varyasyonel prensipler kullanılarak geliştirilmiştir.

Düz kabuk elemanlar, kabuk yapıların analizi için sonlu elemanlar yönteminde kullanılan ilk elemanlardır. Bu elemanlar membran ve plak eğilme rijitliklerinin eleman seviyesinde toplanmasıyla elde edilmektedir. Formülasyonlarının basitliği, uygulamalardaki esneklik ve hesaplama veriminden dolayı üç ve 4 kenarlı düz kabuk elemanlar mühendislik uygulamalarında yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Kabuk yapıların analizinde bu elemanların kullanılma fikri ilk olarak 1961'de Greene vd. (1961) tarafından önerildi. Ancak böyle kabuk elemanlar, uygun plak eğilme elemanları geliştirilmesine kadar beklemiştir. Çünkü SEY'nde düz kabuk elemanların kullanımı birinci derece plak teorisi kabullerine dayanmaktadır. Membran eleman 1956 yılından beri kullanılmasına rağmen plak eğilme elemanın kullanımı ise ilk olarak 1961 yılında Adini ve Clough (1961) tarafından yapılmıştır. Adini ve Clough'un plak eğilme elemanı, dört düğüm noktalı ve her bir düğüm noktasında üç serbestlik derecesine sahip dikdörtgen bir elemandır. Elemanda, enine kayma şekil değiştirmelerin sıfır olduğu Kirchhoff hipotezi kullanılmıştır.

Üçgen düz kabuk elemanlar T12 (Dawe, 1972), DKT18 (Bathe ve Dvorkin, 1983), DKT27 (Dhatt vd., 1986), HCT18 (Clough ve Johnson, 1968), HSM (Pian ve Chen, 1982) ve TRUNC (Argyris vd., 1986) olarak literatürde sunulmuşlardır. T12 elemanı, Morley (1971) üçgen eğilme elemanı ve sabit şekil değiştirme üçgen elemanın (CST) süperpozisyonuyla elde edilmiş en basit üçgen düz kabuk elemanı olarak gösterilebilir. Morley elemanı Kirchhoff plak teorisine ve quadratik enine yer değiştirme alanına dayanmaktaydı. Bu elemanın rijitlik matrisi, Kirchhoff plak teorisi ve doğrusal yer değiştirme alanlı ve sabit eğilme momenti, mixed/hibrid formülasyonuna dayanan hibrid

elemanının (HSM) rijitlik matrisiyle aynıdır (Batoz ve Dhatt, 1992; Horrigmoe, 1977). DKT12 düz kabuk elemanı CST elemanı ile plak eğilme elemanı (DKT6)'nın süperpozisyonuyla tanımlanır. Dört düğüm noktalı 4 kenarlı DKQ16 (Batoz vd., 2000) düz kabuk elemanı dönme içeren membran eleman (RQ4 (Zhong ve Zeng, 1996)) ile discrete Kirchhoff plak eğilme elemanının DKQ8 (Batoz vd., 1998) birleşimiyle elde edilmiştir. Düz kabuk eleman formülasyonunda membran ve eğilme kısımlarının her ikisi de çok önemlidir ve membran ve eğilme enerjileri arasında hesaplama dengesi olmalıdır. DKT12 (CST + DKT6 veya Morley) elemanı için denge durum söz konusuysen DKT18 (CST + DKT9) elemanında ise eğilme kısmı nispeten membran kısmından daha iyidir.

Argyris vd. (1977) TUP elemanı, Dhatt (1969) DKT elemanı ve Fish ve Belytshko (1992) ve Cook (1993) tarafından 18 serbestlik dereceli başarılı üçgen kabuk elemanları geliştirilmiştir. Sabourin ve Brunet (1995) her bir düğüm noktasında üç yer değiştirme serbestlik derecesi bulunan üçgen kabuk eleman geliştirdiler. Elemanlar arasında süreklilik gereksinimi sağlamak için özel noktasal konfigürasyonlu birkaç Semi-Loof kabuk elemanları birçok yazar tarafından geliştirilmiştir (Irons, 1976; Helen, 1986; Poulsen ve Damkilde, 1996). Son zamanlarda literatürde görülen artırılmış eleman yöntemi, üçgen plak eleman RT9 (Cheung ve Wanji, 1995), 4 kenarlı plak eleman RPQ4 (Wanji ve Cheung, 1997) ve üçgen ve dörtgen discrete Kirchhoff plak elemanlar RDKT (Wanji ve Cheung, 1998) ve RDKQ (Wanji ve Cheung, 1998) artırılmış uyumsuz plak elemanları türetmek için kullanılmaktadır. Bu plak elemanlardan, artırılmış eleman formülasyonu kullanılarak RTS15 ve RTS18 uyumsuz düz kabuk elemanlar türetilmiştir. Literatürde uyumsuz kabuk elemanları TR15 (sabit şekil değiştirme düzlem elemanı ve RT9) ve RT18 (sabit şekil değiştirme düzlem elemanı ve dönel serbestlik dereceli Allmans ın üçgen elemanı) olarak yayımlanmıştır (Wanji ve Cheung, 1999). Literatürde artırılmış eleman formülasyonu üç ve 4 kenarlı dejenere eğri kabuk elemanlara da başarılı bir şekilde uygulanmaktadır (Wanji ve Cheung, 2005)

Artırılmış eleman formülasyonu kullanılarak üç ve 4 kenarlı discrete Kirchhoff plak ve Mindlin plak elemanlar sırasıyla Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş fonksiyonu kullanılarak kilitlemeden bağımsız yüksek doğruluklu elemanlar elde edilmiştir. Daha sonra bu plak elemanlar yukarıda da bahsedildiği gibi üç ve 4 kenarlı düz kabuk elemanlara başarılı bir şekilde genişletilmiştir. Bu formülasyonla elde edilen çözümlerin doğruluğu mixed/hibrid yöntemlerde elde edilenler gibi çok yüksektir. Ayrıca, formülasyon sadece yer değiştirme ifadelerini içerdiğinden mixed veya hibrid yöntemlere

göre daha hızlı çözümler elde edilmektedir. Bundan dolayı bu tezde kilitlenmeden bağımsız artırılmış eleman formülasyonu kullanılmıştır.

1.3. Tezin Konusu ve Amacı

Kabuk yapıların SEY ile analizi, mühendislik uygulamalarında yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Buna rağmen, kabuk yapıların sonlu elemanlar formülasyonu üzerine birçok araştırmacı tarafından daha basit ve etkili yöntemler ve elemanlar geliştirmek için çalışmalar da sürdürülmektedir.

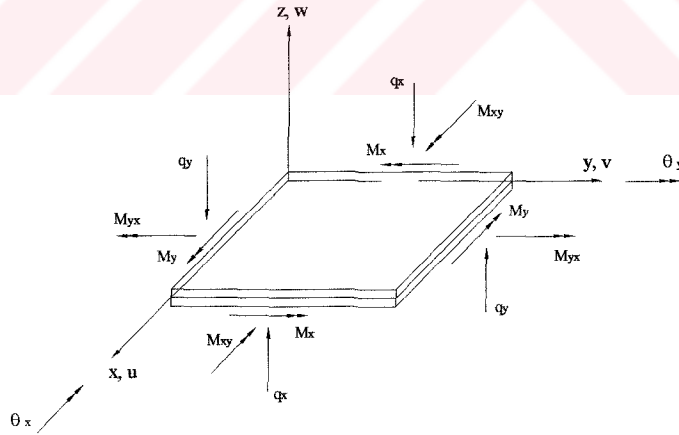
Yüksek doğruluğa sahip ve etkili mixed veya hibrid sonlu elemanlar formülasyonları geliştirilmelerine rağmen bunlar karmaşık yapıya sahiptirler. Bu formülasyonların, yer değiştirme formülasyonu ile karşılaştırıldığında, hesaplama zamanlarının daha fazla olduğu da görülmektedir. Bu nedenle yüksek doğruluklu ve etkili bir yer değiştirme eleman formülasyonunun geliştirilmesi araştırmacılar tarafından çok ilgi görmektedir. Kirchhoff plak teorisi için uyumsuz (NC) eleman formülasyonu olarak adlandırılan sonlu elemanlar formülasyonu, özellikle de düşük dereceli elemanlarda doğruluğu önemli ölçüde düzeltmektedir. Ancak bu yöntemle elde edilen elemanların çoğu yakınsak olmayıp her zaman patch testini geçememektedir (Choi vd., 2002). Son zamanlarda literatürde bu noksanlığı gidermek için artırılmış (veya artırılmış NC) eleman formülasyon yaklaşımı başarılı bir şekilde kullanılmaktadır. Bu yöntemin en büyük avantajı formülasyonunun basit oluşu ve yüksek doğruluklu çözümler vermesidir. Bu yöntem hem Kirchhoff hem de Reissner/Mindlin plak teorilerine başarılı bir şekilde uygulanabilmektedir.

Bu çalışmadaki amaç; her bir düğüm noktasında 6 serbestlik derecesine sahip (3 yer değiştirme ve 3 dönme) dört düğüm noktalı 4 kenarlı, beş düğüm noktalı 4/5 kenarlı ve yedi düğüm noktalı 4/6 kenarlı kabuk elemanları artırılmış eleman formülasyon yöntemiyle geliştirip incelemektir. Bu inceleme yapılırken ince kabuklar için Kirchhoff, ince-kalın kabuklar için ise Reissner/Mindlin plak teorileri kullanılarak iki farklı formülasyon elde edilmiştir. Bu iki formülasyonla geliştirilen bu elemanlar ilk önce patch testine, sonra literatürde standart test problemleri olarak bilinen örnek problemlere ve daha sonra ise amaca yönelik seçilen statik ve dinamik problemlere uygulanmıştır. Bu elemanlarla elde edilen çözümler; analitik, literatürdeki elemanlar ve ANSYS paket programında elde edilen sonuçlarla karşılaştırılıp tüm elemanların performansları belirlenmiştir.

Bu ana amaçların yanında bazı ek çalışmalar da yapılmıştır. Örneğin, beş düğüm noktalı eleman, bölgesel ağ yoğunlaştırmasının yapıldığı yerlerde geçiş elemanı olarak kullanıldığından bu çalışmada beş düğüm noktalı eleman hem 4 kenarlı düzgün hem de 5 kenarlı çarpık ağ örgü hali için formüle edilmiştir. Böylece düzgün ve çarpık ağ örgü hallerinin elemanın performansına etkileri belirlenmiştir. Ayrıca, yedi düğüm noktalı 6 kenarlı elemanın beş düğüm noktalı 4/5 kenarlı elemanla birlikte kullanılıp, bir çözüm alanında altıgen ağ örgünün performansı da belirlenmiştir.

1.4. Klasik Plak Teorisi

Bu çalışmada kullanılan düz kabuk eleman formülasyonu, burulma serbestlik derecesi içeren membran elemanı ile artırılmış eleman formülasyonu içeren plak eğilme elemanının birleşiminden oluşmuştur. Plak eğilme eleman formülasyonunda Kirchhoff ve Reissner/Mindlin teorileri kullanılmıştır. Bu teoriler arasındaki farkın anlaşılması için aşağıda kısa bir ön bilgi verilmiştir. Ayrıca plakta kullanılan işaret kabulü Şekil 1.3'te verilmiştir.

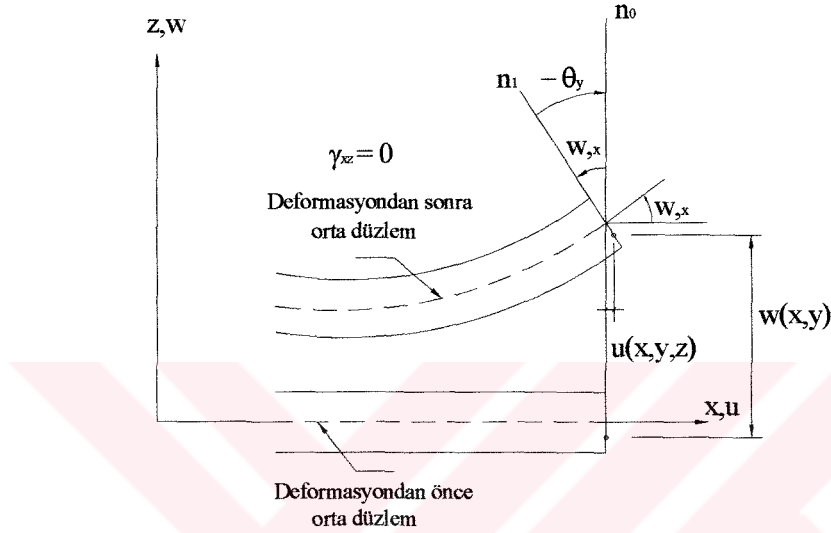


Şekil 1.3. Plaktaki değişkenler ve işaret kabulü

1.4.1. Kirchhoff Plak Teorisi

Kirchhoff plak teorisi, Şekil 1.4'te verildiği gibi “deformasyondan önce orta düzleme dik olan düzlem kesitler (n_o), deformasyondan sonra da orta düzleme dik kalırlar (n_1)”

(n_1) varsayımına dayanmaktadır (Meek, 1991). Teoride enine kayma şekil değiştirmeleri ihmal edilmektedir. Bu ise gerçekte, sadece ince plaklar için geçerlidir. Başka bir deyişle kalın plakların analizinde, enine kayma şekil değiştirmelerin de hesaba katıldığı Reissner/Mindlin teorisi kullanılmalıdır.



Şekil 1.4. Kirchhoff plak teorisinin kinematığı

Kirchhoff plak teorisinde dönmeler ve yer değiştirmeler aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$\begin{aligned}
 u(x,y,z) &= -zw_x(x,y) \\
 v(x,y,z) &= -zw_y(x,y) \\
 w(x,y,z) &= w(x,y) \\
 \theta_y(x,y) &= -w_x(x,y) \\
 \theta_x(x,y) &= -w_y(x,y)
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

burada “ , ” kısmi türevi ifade etmektedir. Yukarıdaki denklemlerden düzlem şekil değiştirmeler ve enine kayma şekil değiştirmeler aşağıdaki gibi oluşturulmaktadır.

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} -w_{,xx} \\ -w_{,yy} \\ -2w_{,xy} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \theta_{y,x} \\ \theta_{x,y} \\ \theta_{y,y} + \theta_{x,x} \end{Bmatrix} \tag{1.2}$$

$$\gamma = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{,x} + \theta_y \\ w_{,y} + \theta_x \end{Bmatrix} = 0 \quad (1.3)$$

Plâğın eğilme deformasyon derecesini ifade eden plâğın eğriliği (κ) aşağıdaki bağıntıyla hesaplanır.

$$\kappa = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -w_{,xx} \\ -w_{,yy} \\ -w_{,xy} \end{Bmatrix} \quad (1.4)$$

Böylece, izotrop bir malzeme için moment eğrilik ilişkisi aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$M = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [D_e] \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.5)$$

Burada $[D_e]$ homojen izotropik bir plâğın elastik eğilme rijitliği olup aşağıdaki bağıntıyla ifade edilebilir.

$$[D_e] = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Kirchhoff plak teorisinde kayma şekil değiştirmeler ihmal edildiğinden enine kesme kuvvetleri q_x ve q_y gerilme şekil değiştirme ilişkisinden ($\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$ ve $\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$) elde edilemezler. Ancak aşağıdaki denklemler yardımıyla kesme kuvvetleri

$$q = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{x,x} + M_{xy,y} \\ M_{y,y} + M_{xy,x} \end{Bmatrix} \quad (1.7)$$

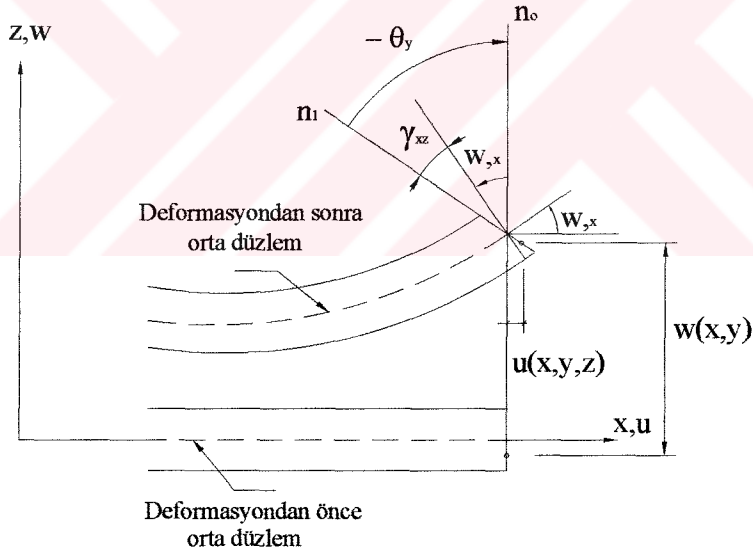
şeklinde elde edilir. Kirchhoff plak teorisi için virtüel iş ifadesi

$$\begin{aligned}
\delta W &= \delta W_{ip} + \delta W_{dis} = 0 \\
-\delta W_{ip} &= \int_A (M_x \delta \kappa_x + 2M_{xy} \delta \kappa_{xy} + M_y \delta \kappa_y) dA \\
\delta W_{dis} &= \int_A P \delta w dA + \text{sınır terimleri}
\end{aligned} \tag{1.8}$$

bağıntılarıyla tanımlanmaktadır.

1.4.2. Reissner/Mindlin Plak Teorisi

Reissner/Mindlin (R/M) plak teorisi Kirchhoff hipotezinin genelleştirilmiş bir halidir. Bu teoride; “plağın deformasyonundan önce, orta düzleme dik olan düzlem kesitler (n_0), deformasyondan sonra da düzlem kalmasına rağmen orta düzleme dik olması gerekmez (n_1)” varsayımı yapılmaktadır (Şekil 1.5) (Meek, 1991).



Şekil 1.5. Reissner/Mindlin plak teorisinin kinematığı

Bu varsayıma dayanarak enine kayma şekil değiştirmeler aşağıdaki gibi yazılabilirler.

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{,x} + \theta_y \\ w_{,y} + \theta_x \end{Bmatrix} \tag{1.9}$$

Burada θ_x ve θ_y , başlangıçta deforme olmamış orta düzleme dik bir çizginin x ve y etrafındaki dönmeleridir. Yer değiştirmeler ise,

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= -z\theta_y(x, y) \\ v(x, y, z) &= -z\theta_x(x, y) \\ w(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (1.10)$$

bağıntılarıyla tanımlanır. Bu denkleme dayanarak düzlem içi ve enine kayma şekil değiştirmeler aşağıdaki gibi verilir.

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \theta_{y,x} \\ \theta_{x,y} \\ \theta_{y,y} + \theta_{x,x} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.11)$$

$$\gamma = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{,x} + \theta_y \\ w_{,y} + \theta_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \theta_y \\ \theta_x \end{Bmatrix} \quad (1.12)$$

R/M plakta eğilme eğrilikleri (κ) ise aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$\kappa = \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_{y,x} \\ \theta_{x,y} \\ \theta_{y,y} + \theta_{x,x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_y \\ \theta_x \end{Bmatrix} \quad (1.13)$$

Homojen malzeme için moment eğrilik ilişkisi Kirchhoff plak teorisinde verilen denklemlerle aynıdır. Kesme kuvvetleri ise denklem (1.12) yardımıyla aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$q = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} = -Gkt \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (1.14)$$

Burada k, kayma düzeltme faktörü olup dikdörtgen kesitli plak için 5/6 değerindedir. Reissner/Mindlin plak teorisi için virtüel iş ifadesi aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$\begin{aligned}\delta W &= \delta W_{iç} + \delta W_{dış} = 0 \\ -\delta W_{iç} &= \int_A (M_x \delta \kappa_x + 2M_{xy} \delta \kappa_{xy} + M_y \delta \kappa_y + q_x \gamma_{xz} + q_y \gamma_{yz}) dA \\ \delta W_{dış} &= \int_A P \delta w dA + \text{sınır terimleri}\end{aligned}\quad (1.15)$$

1.5. Sonlu Elemanlar Yönteminde Burulma Serbestlik Dereceli Düz Kabuk Elemanlar

Daha önce de belirtildiği gibi SEY’de kabuk yapıların analizinde kullanılan elemanlar; düzgün yüzeyli (düz), eğri yüzeyli (eğri) ve dejenere 3-B kabuk elemanlardır. Doğrusal ve doğrusal olmayan kabuk problemlerin çözümünde düzgün yüzeyli kabuk elemanlar daha az hesaplama zamanı gerektirdiği için bu tür elemanlara olan ilgi artmıştır. Bilindiği gibi düzgün yüzeyli kabuk elemanlar, ince kabuk yapıların SEY ile analizinde kullanılan ilk elemanlardır. Kabuk elemanlar, membran ve plak eğilme elemanlarının birleştirilmesinden elde edilmektedir. Formüle edilmelerinin basit oluşu, geometriyi tanımlama ve diğer tip elemanlarla kullanımının kolaylığı, rijit cisim hareketini modellemeleri, karmaşık yük ve sınır şartlarını birleştirmede uygun şartları ve yeterli doğrulukta çözüm sağlaması, bu tür elemanların cazip özellikleri arasında sayılabilir. Ayrıca düzgün yüzeyli kabuk elemana burulma serbestlik derecesinin ilave edilmesi eğri kabuk elemanlardan daha kolaydır. Ancak, bu şekilde oluşturulan formülasyonun dezavantajları arasında; elemanda eğilme ve uzama çiftini (etkileşimini) içermemeleri (kabuklarda ve eğri parçalarda önemlidir), bir noktada karşılaşan bütün elemanlar için aynı düzlemde birleşmelerinin ele alınışının zorluğu, gerçek eğri yapılarda eleman birleşim çizgilerinde eğilme momentlerinin süreksizliği sayılabilir (Yang vd., 1990).

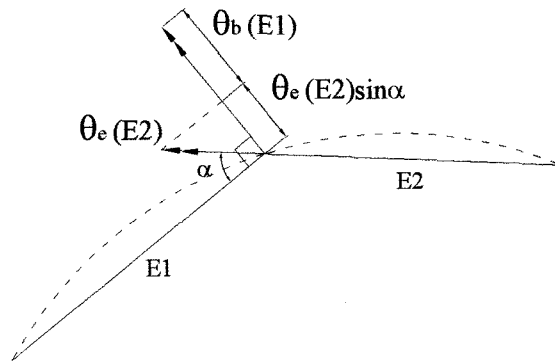
Klasik düz kabuk elemanlar; formülasyondaki basitlik, hesaplama verimliliği ve kabuk yapılara uygulamadaki esnekliğinden dolayı ticari paket programlarda yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Düz kabuk elemanların her bir düğüm noktasında genelde 5 serbestlik derecesi mevcuttur. Bu 5 serbestlik derecesinin ikisi düzlem etkileri (membran eleman), üçü düzlem dışı eğilme etkilerini (plak eleman) modeller. Beş serbestlik dereceli kabuk elemanlar ile modellemede ve programlamada birçok zorluklar ortaya çıkar. Ayrıca bu formülasyonun düzlem içi burulma etkileri (burulma rijitliği) mevcut değildir. Bu eksiklikler bazı durumlarda rijitlik matrisinin yakınsamamasına (singülarite) ve de gerçekte var olan burulma etkisini ihmal ettiğinden gerçek problemlerin eksik modellenmesine

sebeptir. Bazı teknikler kullanılarak bu eksiklikleri gidermek mümkündür. Bu tekniklerden biri ve en yaygın olarak kullanılanı, elemanın membran kısmına burulma serbestlik derecesi ilave etmektir. Böylece oluşturulan 6 serbestlik dereceli kabuk eleman hem burulma etkisini dikkate almakta hem de aynı ağ örgüde kullanılan 6 serbestlik dereceli farklı tip elemanlarla birlikte (3-B katı ve kiriş elemanlar gibi) aynı anda kullanımına imkân vermektedir.

1.5.1. Membran ve Eğilme Etkileşimini İçeren Düz Kabuk Eleman

Bir kabuğu modellemek için düz kabuk elemanlar kullanıldığında eğilme ve membran rijitlikleri sadece eleman sınırları üzerinde birleştirilir. Şekil 1.6'da eleman 1 (E1) ve eleman 2 (E2) düz kabuk elemanları kullanılarak modellenen bir kabuk geometrisinin enine kesiti verilmektedir. E2 elemanının düzlem dışı dönme serbestlik dereceleri (θ_x, θ_y) , E1 elemanının burulma terimlerine (θ_b) ilave bir terim getirmektedir (denklem (1.16)). Cook (1994) tarafından elde edilen bu sonuç, düz elemanlar için membran kilitlenmesinin temelini teşkil etmektedir.

Membran eleman rijitliği kalınlık (h) ile orantılı iken Kirchhoff ve R/M teorisinde eğilme rijitliği kalınlığın küpü ile (h^3) orantılıdır. Bu nedenle kabuk ince olduğu zaman eğilme rijitliği membran rijitliğinden daha çok azalır. Böylece ince kabuk sınırında E1 elemanının büyük membran rijitliği, E2 elemanının dönel serbestlik derecesini (θ^p) kilitleme eğilimi gösterir (Choi ve Lee, 2003).



Şekil 1.6. Düz kabuk elemanların etkileşimi

Burulma serbestlik derecesi (θ_z) aşağıda verildiği gibi plağın eğilme ve membran kısmının dönmesinin toplamı olarak ifade edilir.

$$\theta_z = \theta_b + \theta_e \sin \alpha = \theta_b + (\theta_x + \theta_y) \sin \alpha \quad (1.16)$$

Bu denklem, eğilmeye ortaya çıkan dönmelerin, (θ_x, θ_y) , $\sin(\alpha)$ ile çarpımının burulmaya ilave edilmesiyle oluşturulmuştur. Ağ artırıldığı zaman elemanlar arasındaki açı (α) küçülmekte ve E1, E2 elemanları aynı düzlemde olma eğilimi göstermektedir. Bu durumda eleman arası membran-eğilme etkileşimi kaybolmaktadır. Ancak geçmişte geliştirilen birçok düz kabuk eleman kaba ağ kullanıldığı zaman, membran-eğilme etkileşiminden dolayı kilitlenmeye uğramaktaydı. Bu çalışmada denklem (1.16) daki etkileşim, denklemdeki değişkenler önceden hesaplatılarak eleman denklemlerine ilave edilmiştir.

1.5.2. Kabuk Eleman için Kütle Matrisi

Sonlu elemanlar çözümlerinde kabukların dinamik analizi nispeten sınırlıdır. Genelde kabuk yapıların statik analizinde doğru sonuç veren kabuk sonlu elemanları, uygun kütle karakteristiklerinin kullanılmasıyla, dinamik problemlerin analizinde de doğru sonuçlar vermektedir.

Enerji denklemi, uzay ve zaman bölgesine bağlı olup SEY'ne göre ayrıştırılmış hareket denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir (Zhong, 1993).

$$[K]\{U\} + [M]\{\ddot{U}\} = \{P\} \quad (1.17)$$

Bu denklemde sönüm olmadığı varsayılmıştır. Burada $[K]$ toplam rijitlik matrisi, $[M]$ toplam kütle matrisi iken $\{U\}$ düğüm noktalarındaki yer değiştirme, $\{\ddot{U}\}$ ivme ve $\{P\}$ kuvvet vektörleridir. Burada eleman rijitlik matrisi artırılmış şekil değiştirme matrisinden oluşturulurken düz bir kabuk elemanın kütle matrisi ise membran eleman ve plak eğilme elemanın birleşiminden elde edilmektedir

Sonlu elemanlar analizlerinde, kütle matrisi olarak köşegen kütle matrisi ve düğüm noktası matrisi kullanılmaktadır. Düğüm noktası uyumlu eleman kütle matrisi, eleman

rijitlik matrisinin elde edilmesinde kullanılan interpolasyon fonksiyonlarından yararlanılarak,

$$m = \int_{V^e} \rho N^T N dv \quad (1.18)$$

bağıntısı ile elde edilebilir. Burada ρ malzemenin yoğunluğu ve N yer değiştirme şekil fonksiyonudur.

Dört düğüm noktalı 4 kenarlı 6 serbestlik dereceli düz kabuk elemanı için kütle matrisi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$[m_{ij}] = \begin{bmatrix} m_{11}^d & m_{12}^d & 0 & 0 & 0 & m_{13}^d \\ m_{21}^d & m_{22}^d & 0 & 0 & 0 & m_{23}^d \\ 0 & 0 & m_{11}^e & m_{12}^e & m_{13}^e & 0 \\ 0 & 0 & m_{21}^e & m_{22}^e & m_{23}^e & 0 \\ 0 & 0 & m_{31}^e & m_{32}^e & m_{33}^e & 0 \\ m_{31}^d & m_{32}^d & 0 & 0 & 0 & m_{33}^d \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

Yerel koordinat takımındaki kütle matrisi denklem (1.20) kullanılarak genel koordinat takımına dönüştürülür.

$$[M_{ij}] = [Q]^T [m_{ij}] [Q] \quad (1.20)$$

1.5.3. Zaman Bölgesinin Ayrıştırılması ve Dinamik Denklem Çözümü

Ayrıştırılmış hareket denkleminde, N_d toplam serbestlik sayısı kadar bilinmeyen uzay bölgesinde ve N_d toplam serbestlik sayısı kadar bilinmeyen de zaman bölgesinde mevcuttur. Yani N_d ayrıştırılmış sistemde serbestlik dereceleri ise, N_d yer değiştirme ve N_d ivme olmak üzere toplam $2 \times N_d$ bilinmeyen vardır. Fakat denklem (1.17)'de sadece N_d bilinmeyen mevcuttur. Böylece, hareket denklemlerini çözmek için ilaveten N_d bilinmeyen denklem gereklidir. Bu ilave N_d bilinmeyen denklemleri elde etmek için yer değiştirmeler, hızlar ve ivmeler arasında bağıntılar kurulur. Kurulan bu bağıntılara göre explicit ve implicit çözüm yöntemleri geliştirilmiştir. Bu çözüm yöntemleri, değişik şartlar altında

birbirlerine göre avantaja ve dezavantaja sahiptirler. Bu çalışmada implicit çözüm yöntemi olan Newmark yöntemi kullanılmış ve aşağıda kısaca değinilmiştir.

1.5.3.1. Newmark Yöntemi

Newmark yönteminde t zamanında yer değiştirme, hız ve ivme arasında aşağıdaki bağıntılar vardır.

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}U &= {}^tU + {}^t\dot{U}\Delta t + \frac{1}{2}\Delta t^2 \left[(1-2\beta) {}^t\ddot{U} + 2\beta {}^{t+\Delta t}\ddot{U} \right] \\ {}^{t+\Delta t}\dot{U} &= {}^t\dot{U} + \Delta t \left[(1-\alpha) {}^t\ddot{U} + \alpha {}^{t+\Delta t}\ddot{U} \right] \end{aligned} \quad (1.21)$$

Burada β ve α , çözüm parametreleri ve Δt zaman adımı olup Newmark yönteminin kararlılık şartı için aşağıdaki değerleri alırlar.

- Eğer $2\beta \geq \alpha \geq 0.5$ ise, zaman adımı $\Delta t < \infty$ olması durumunda çözüm şartsız kararlıdır.
- Eğer $\beta < 0.5\alpha$ ve $\alpha \geq 0.5$ ise, çözümün kararlı olması için zaman adımı

$\Delta t \leq \left[\frac{T_{\min}}{2\pi(0.5\alpha - \beta)^{0.5}} \right]$ olmalıdır. Burada T_{\min} ayrıştırılmış sistemin en küçük periyotudur.

$t + \Delta t$ zamanında yer değiştirme ve ivmelerin çözümü için denklem (1.21) kullanılarak $t + \Delta t$ anında denklem (1.17) aşağıdaki gibi tekrar yazılır. Bu denklemde sönümlenme matrisi ihmal edilmiştir.

$$[K]^{t+\Delta t} \{U\} + [M]^{t+\Delta t} \{\ddot{U}\} = {}^{t+\Delta t}\{P\} \quad (1.22)$$

Newmark yöntemi için çözüm algoritması Ek 1'de verilmiştir (Bathe, 1996).

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Kabuk yapılar için sonlu elemanlar formülasyonu iki farklı yaklaşımla geliştirilmektedir (Belytschko vd., 2000). Birinci formülasyon momentumun dengesi veya denge denklemleri kullanılarak klasik kabuk denklemlerinin varyasyonel formülasyonundan, ikincisi 3-B genel sonlu elemanlar formülasyonuna kabuk yapı kabullerinin uygulanmasıyla elde edilmektedir. Birinci yaklaşım özellikle doğrusal olmayan kabuklar için zordur ve güçlü matematiksel alt yapı gerektirir. Ayrıca, denklemlere kalınlık değişimini, temas terimlerini ve takviyeli kabuk ifadelerini ilave etmek zordur. Bunun yanında ikinci yaklaşım basittir ve çok iyi sonuçlar vermektedir.

Yirminci yüzyılın ortalarından bu yana doğrusal ve doğrusal olmayan bölgede plakların ve kabukların modellenmesi üzerine literatürde çok sayıda makale yayınlanmaktadır. Hesaplamalı kabuk mekaniğinde yenilikçi çalışmaların hala daha sürmesi, konuyla ilgili çok sayıda araştırmanın yapıldığını göstermektedir. Bu, hem mühendisliğin öneminden hem de karşılaşılan teknik zorluklardan kaynaklanmaktadır. Son 40 yıldan beri önemli teorik modeller geliştirilmiş ve bu modellerde karşılaşılan zorluklar giderilerek çeşitli pratik problemlere uygulanmıştır. Bununla birlikte bu modeller içinde tek bir teori, tam olarak kabukların analizi için yeterince genel ve geniş olamamıştır. Başka bir deyişle kabukların sonlu elemanlar yöntemiyle analizi mühendislikte yaygın bir şekilde kullanılmasına rağmen çok güvenilir kabuk yöntemlerinin geliştirilmesi için araştırmalar sürmektedir. Kabuk analizlerinde karşılaşılan zorluk, farklı kabuk yapıların kabuk geometrisi ve sınır şartlarına bağlı olarak farklı davranmalarından kaynaklanmaktadır. Kabuk analizi için etkili bir SEY, kabuğun kalınlığına bağlı olmaksızın hem membran hem de eğilme etkin durumlarını iyi modellemelidir. Bu nedenle genel ve daimi etkili SEY geliştirmek çok zordur. Genelde fiziksel problemleri daha yüksek doğrulukla ve/veya verimlilikle analiz eden bir model kullanılmaktadır. Diğer yandan modellerin doğruluğu pratik mühendislik problemleriyle uyuşmalıdır. Bu yapılara otomobil vb araç çarpma testleri, levha metal şekillendirme işlemleri, basınçlı kapların analizi, gemilerin denizlerdeki davranışı, kan damarları gibi konular örnek olarak verilebilir.

Yapılan çalışmalar kısmının aşağıdaki bölümlerinde detayları verilen artırılmış eleman formülasyonu, dört düğüm noktalı 4 kenarlı, beş düğüm noktalı 4/5 kenarlı ve yedi düğüm noktalı 4/6 kenarlı kabuk elemanlara uygulanarak onlar için gerekli denklemler

elde edilmiştir. İkinci kısımda ise bu formülasyonların geçerliliğinin kontrolü için çeşitli örneklerle test edilerek uygunlukları gösterilmiştir.

2.1. Teorik Çalışmalar

Klasik düz kabuk eleman formülasyonu plak eğilme elemanını da bünyesine alan düzlem gerilme elemanıdır (Bazeley vd., 1966; Hanssen vd., 1979). Düzlem gerilme probleminde şekil değiştirme terimleri, genelde herhangi bir düğüm noktasında u ve v yer değiştirme terimleriyle tanımlanmaktadır. Bu çalışmada burulma serbestlik derecesi (θ_z) düzlem gerilme problemine ilave edilmiştir. Her bir düğüm noktasında 6 serbestlik derecesine sahip dört düğüm noktalı 4 kenarlı kabuk eleman için artırılmış eleman formülasyonu hem Kirchhoff hem de R/M plak teorisi kullanılarak elde edilmiş ve aşağıdaki bölümlerde detaylı bir şekilde verilmiştir. Bu artırılmış eleman formülasyon yöntemi daha sonra, hem beş düğüm noktalı 4/5 kenarlı hem de yedi düğüm noktalı 4/6 kenarlı kabuk elemanları elde etmek için de kullanılmıştır. Tüm bu çıkarımlarda malzemelerin homojen ve doğrusal elastik davrandığı varsayılmıştır.

2.1.1. Eğilme Etkisinde Düz Kabuk (Plak) Eleman

Bu kısımda, hem Kirchhoff hem de R/M teorisi kullanılarak eğilme etkisindeki düz kabuk eleman için ortak bir formülasyon elde edilmiştir. Bu ortak formülasyon artırılmış eleman formülasyonuna göre çıkarılmış olup, Kirchhoff ve RM teorileri için bazı farklı katsayılar oluşturmuştur. Bu farklılıklar daha sonra tablo halinde verilmiştir (Tablo 2.1).

Daha önce de belirtildiği gibi plak elemanların çıkarımında birçok kilitlenme problemiyle karşılaşılmaktadır. Bunlardan en önemlisi kayma kilitlenmesi problemidir. Bu problemi önlemek için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Bunlardan biri de, bu çalışmada da kullanılan, artırılmış eleman formülasyonudur.

Artırılmış eleman formülasyonu

Normal ve teğetsel doğrultudaki dönme terimleri, Kirchhoff teorisi (Wanji ve Cheung, 1998) (${}^K\theta_{nk}, {}^K\theta_{sk}$) ve R/M teorisi (Wanji ve Cheung, 2000; Soh vd., 2001) (${}^{RM}\theta_{nk}, {}^{RM}\theta_{sk}$) kullanılarak aşağıdaki şekilde verilmektedir.

$${}^K\theta_{nk} = \frac{1}{2}(\theta_{n1} + \theta_{n2}) \quad (2.1)$$

$${}^{RM}\theta_{nk} = \frac{1}{2}(\theta_{n1} + \theta_{n2}) \quad (2.2)$$

$${}^K\theta_{sk} = -\frac{1.5}{L_{ij}}w_i - \frac{1}{4}\theta_{si} + \frac{1.5}{L_{ij}}w_j - \frac{1}{4}\theta_{sj} \quad (2.3)$$

$${}^{RM}\theta_{sk}(t) = -\frac{1.5}{L_{ij}}f(t)w_i - \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)\theta_{si} + \frac{1.5}{L_{ij}}f(t)w_j - \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)\theta_{sj} \quad (2.4)$$

$$\gamma = f(t) \left(\frac{2}{L}(-w_i + w_j) - \theta_{si} - \theta_{sj} \right) \quad (2.5)$$

$$f(t) = \frac{1}{1 + \frac{12t^2}{5L_{ij}^2(1-\nu)}}$$

Yukarıdaki denklemlerden görüldüğü gibi normal doğrultudaki dönme (θ_n) her iki teori için aynı olmakla birlikte teğetsel doğrultudaki dönme (θ_s) bu iki teori için sadece benzerlik göstermektedir. Ancak kalınlık küçüldüğünde denklemler birbirine yakınsamaktadır. Dönme terimleri için bu benzerlikten yararlanarak aşağıdaki genel ifadeler yazılabilir.

$$\theta_{nk} = \frac{1}{2}\theta_{ni} + \frac{1}{2}\theta_{nj} \quad (2.6)$$

$$\theta_{sk} = Aw_i + B\theta_{si} + Hw_j + D\theta_{sj}$$

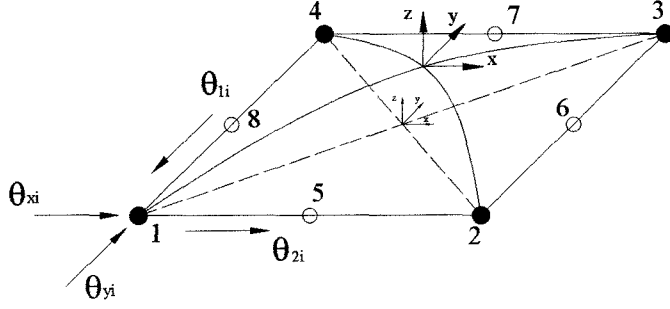
Denklem (2.6)'da verilen katsayılar her iki teori için farklı değerler içermektedir ve bu değerler Tablo 2.1'de verilmiştir.

Tablo 2.1. Plak elemanda Kirchhoff ve R/M teorileri için farklı katsayı değerleri

Katsayılar	Kirchhoff teorisinde	Reissner/Mindlin teorisinde
A	$-1.5/L_{ij}$	$-1.5f(t)/L_{ij}$
B	$-1/4$	$-0.5(1.5f(t)-1)$
H	$1.5/L_{ij}$	$1.5f(t)/L_{ij}$
D	$-1/4$	$-0.5(1.5f(t)-1)$

Ayrıca, programlamada kolaylık olması açısından dönme bileşenleri, aşağıda verilen denklem (2.7) deki gibi dönüşüme tabi tutulmuştur.

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} = \theta_2 \quad \text{ve} \quad \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} = -\theta_1 \quad (2.7)$$



Şekil 2.1. Bir plak elemanı için dönme bileşenleri

Böylece plağın eğriliği dönme bileşenleri cinsinden aşağıdaki gibi tekrar ifade edilir.

$$K = \begin{Bmatrix} -W_{,xx} \\ -W_{,yy} \\ -W_{,xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\theta_{1,x} \\ -\theta_{2,y} \\ -\theta_{1,y} - \theta_{2,x} \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

Ayrıca, plak elemanındaki dönme bileşenleri orta noktaların ilave edilmesiyle de aşağıdaki gibi tanımlanır.

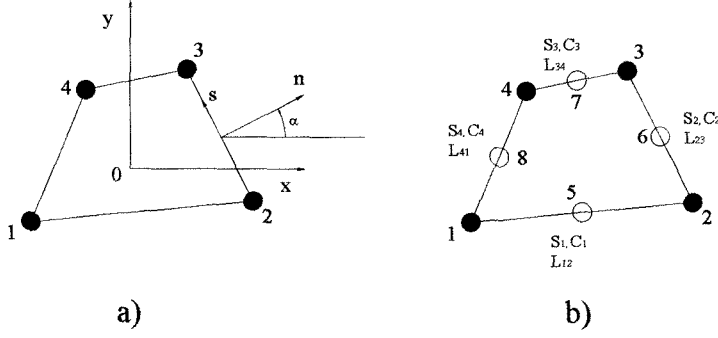
$$\begin{aligned} \theta_1 &= \sum_{i=1}^8 N_i \theta_{1i} = \sum_{i=1}^4 (-N_i) \theta_{yi} + \sum_{k=5}^8 N_k \theta_{1k} \\ \theta_2 &= \sum_{i=1}^8 N_i \theta_{2i} = \sum_{i=1}^4 N_i \theta_{xi} + \sum_{k=5}^8 N_k \theta_{2k} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Bir plak elemanına dönme bileşenlerinin ilavesi

1. Adım: İlk önce eleman köşe düğüm noktalarındaki dönme değerleri, dönüşüm matrisi kullanılarak normal ve teğetsel koordinatlardaki dönme değerlerine dönüştürülür.

$$\begin{cases} \theta_{ni} \\ \theta_{si} \end{cases} = \begin{bmatrix} C_i & S_i \\ -S_i & C_i \end{bmatrix} \begin{cases} \theta_{1i} \\ \theta_{2i} \end{cases}, \text{ veya } \begin{cases} \theta_{ni} = C_i \theta_{1i} + S_i \theta_{2i} \\ \theta_{si} = -S_i \theta_{1i} + C_i \theta_{2i} \end{cases} \quad (2.10)$$

Burada, $S_i = S_{ij}$ ve $C_i = C_{ij}$ olup ($i = 1,2,3,4$) iken ($ij = 12,23,34,41$) dir.



Şekil 2.2. 4 kenarlı plak eğilme elemanı a) dört düğüm noktalı eleman, b) sekiz düğüm noktalı eleman

2. Adım: denklem (2.10) ile elde edilen normal ve teğetsel koordinatlardaki dönme değerleri, denklem (2.6) da yerine yazılırsa orta noktalardaki normal (θ_{nk}) ve teğetsel dönmeler (θ_{sk}) köşe düğüm noktalarındaki dönmeler cinsinden ifade edilmiş olur.

$$\begin{aligned} \theta_{nk} &= \frac{1}{2} \{ C_i \theta_{1i} + S_i \theta_{2i} + C_i \theta_{1j} + S_i \theta_{2j} \} \\ \theta_{sk} &= A w_i + B (-S_i \theta_{1i} + C_i \theta_{2i}) + H w_j + D (-S_i \theta_{1j} + C_i \theta_{2j}) \end{aligned} \quad (2.11)$$

3. Adım: Daha sonra orta noktalardaki normal ve teğetsel bileşenler, x ve y koordinatlardaki dönme bileşenlerine dönüşüm matrisi kullanılarak dönüştürülür.

$$\begin{cases} \theta_{1k} \\ \theta_{2k} \end{cases} = \begin{bmatrix} C_i & -S_i \\ S_i & C_i \end{bmatrix} \begin{cases} \theta_{nk} \\ \theta_{sk} \end{cases}, \text{ veya } \begin{cases} \theta_{1k} = C_i \theta_{nk} - S_i \theta_{sk} \\ \theta_{2k} = S_i \theta_{nk} + C_i \theta_{sk} \end{cases}, \quad i = 1,2,3,4, \quad k = 5,6,7,8 \quad (2.12)$$

Denklem (2.11) ve (2.12) kullanılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

$$\begin{aligned}\theta_{1k} = & -AS_1 w_i + \left(\frac{1}{2}C_1^2 + BS_1^2\right)\theta_{1i} + \left(\frac{1}{2}C_1 S_1 - BS_1 C_1\right)\theta_{2i} \\ & -HS_1 w_j + \left(\frac{1}{2}C_1^2 + DS_1^2\right)\theta_{1j} + \left(\frac{1}{2}C_1 S_1 - DS_1 C_1\right)\theta_{2j}\end{aligned}\quad (2.13)$$

$$\begin{aligned}\theta_{2k} = & AC_1 w_i + \left(\frac{1}{2}C_1 S_1 - BS_1 C_1\right)\theta_{1i} + \left(\frac{1}{2}S_1^2 + BC_1^2\right)\theta_{2i} \\ & +HC_1 w_j + \left(\frac{1}{2}C_1 S_1 - DS_1 C_1\right)\theta_{1j} + \left(\frac{1}{2}S_1^2 + DC_1^2\right)\theta_{2j}\end{aligned}\quad (2.14)$$

4. Adım: Yukarıdaki ifadeler $\theta_1 = -\theta_y$ ve $\theta_2 = \theta_x$ dönüşümü yardımıyla x ve y koordinatlarındaki dönmeler cinsinden aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned}\theta_{1k} = & -AS_1 w_i + \left(\frac{1}{2}C_1 S_1 - BS_1 C_1\right)\theta_{xi} - \left(\frac{1}{2}C_1^2 + BS_1^2\right)\theta_{yi} \\ & -HS_1 w_j + \left(\frac{1}{2}C_1 S_1 - DS_1 C_1\right)\theta_{xj} - \left(\frac{1}{2}C_1^2 + DS_1^2\right)\theta_{yj}\end{aligned}\quad (2.15)$$

$$\begin{aligned}\theta_{2k} = & AC_1 w_i + \left(\frac{1}{2}S_1^2 + BC_1^2\right)\theta_{xi} - \left(\frac{1}{2}C_1 S_1 - BS_1 C_1\right)\theta_{yi} \\ & +HC_1 w_j + \left(\frac{1}{2}S_1^2 + DC_1^2\right)\theta_{xj} - \left(\frac{1}{2}C_1 S_1 - DS_1 C_1\right)\theta_{yj}\end{aligned}\quad (2.16)$$

Böylece orta noktadaki dönme, eleman kenarına ait köşe düğüm noktalarındaki dönmeler cinsinden ifade edilmiş olur.

5. Adım: Denklem (2.15) ve (2.16)'da verilen θ_{1k} ve θ_{2k} ifadeleri; $i, j = 1, 2; 2, 3; 3, 4; 4, 1$ ve $(k = 5, 6, 7, 8)$ değerleri kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$k = 5$ için

$$\begin{aligned}\theta_{15} = & -AS_1 w_1 + \left(\frac{1}{2}C_1 S_1 - BS_1 C_1\right)\theta_{x1} - \left(\frac{1}{2}C_1^2 + BS_1^2\right)\theta_{y1} \\ & -HS_1 w_2 + \left(\frac{1}{2}C_1 S_1 - DS_1 C_1\right)\theta_{x2} - \left(\frac{1}{2}C_1^2 + DS_1^2\right)\theta_{y2}\end{aligned}\quad (2.17)$$

$$\begin{aligned}\theta_{25} = & AC_1 w_1 + \left(\frac{1}{2}S_1^2 + BC_1^2\right)\theta_{x1} - \left(\frac{1}{2}C_1 S_1 - BS_1 C_1\right)\theta_{y1} \\ & +HC_1 w_2 + \left(\frac{1}{2}S_1^2 + DC_1^2\right)\theta_{x2} - \left(\frac{1}{2}C_1 S_1 - DS_1 C_1\right)\theta_{y2}\end{aligned}\quad (2.18)$$

veya matris formunda

$$\begin{cases} \theta_{15} \\ \theta_{25} \end{cases} = \begin{bmatrix} -AS_1 & \left(\frac{1}{2}C_1S_1-BS_1C_1\right) & -\left(\frac{1}{2}C_1^2+BS_1^2\right) & -HS_1 & \left(\frac{1}{2}C_1S_1-DS_1C_1\right) \\ AC_1 & \left(\frac{1}{2}S_1^2+BC_1^2\right) & -\left(\frac{1}{2}C_1S_1-BS_1C_1\right) & HC_1 & \left(\frac{1}{2}S_1^2+DC_1^2\right) \\ -\left(\frac{1}{2}C_1^2+DS_1^2\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{1}{2}C_1S_1-DS_1C_1\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{cases} \quad (2.19)$$

k = 6 için

$$\begin{aligned} \theta_{16} = & -AS_2w_2 + \left(\frac{1}{2}C_2S_2-BS_2C_2\right)\theta_{x2} - \left(\frac{1}{2}C_2^2+BS_2^2\right)\theta_{y2} \\ & -HS_2w_3 + \left(\frac{1}{2}C_2S_2-DS_2C_2\right)\theta_{x3} - \left(\frac{1}{2}C_2^2+DS_2^2\right)\theta_{y3} \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \theta_{26} = & AC_2w_2 + \left(\frac{1}{2}S_2^2+BC_2^2\right)\theta_{x2} - \left(\frac{1}{2}C_2S_2-BS_2C_2\right)\theta_{y2} \\ & +HC_2w_3 + \left(\frac{1}{2}S_2^2+DC_2^2\right)\theta_{x3} - \left(\frac{1}{2}C_2S_2-DS_2C_2\right)\theta_{y3} \end{aligned} \quad (2.21)$$

veya matris formunda

$$\begin{cases} \theta_{16} \\ \theta_{26} \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -AS_2 & \left(\frac{1}{2}C_2S_2-BS_2C_2\right) & -\left(\frac{1}{2}C_2^2+BS_2^2\right) \\ 0 & 0 & 0 & AC_2 & \left(\frac{1}{2}S_2^2+BC_2^2\right) & -\left(\frac{1}{2}C_2S_2-BS_2C_2\right) \\ -HS_2 & \left(\frac{1}{2}C_2S_2-DS_2C_2\right) & -\left(\frac{1}{2}C_2^2+DS_2^2\right) & 0 & 0 & 0 \\ +HC_2 & \left(\frac{1}{2}S_2^2+DC_2^2\right) & -\left(\frac{1}{2}C_2S_2-DS_2C_2\right) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{cases} \quad (2.22)$$

k = 7 için

$$\begin{aligned} \theta_{17} = & -AS_3w_3 + \left(\frac{1}{2}C_3S_3-BS_3C_3\right)\theta_{x3} - \left(\frac{1}{2}C_3^2+BS_3^2\right)\theta_{y3} \\ & -HS_3w_4 + \left(\frac{1}{2}C_3S_3-DS_3C_3\right)\theta_{x4} - \left(\frac{1}{2}C_3^2+DS_3^2\right)\theta_{y4} \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \theta_{27} = & AC_3w_3 + \left(\frac{1}{2}S_3^2+BC_3^2\right)\theta_{x3} - \left(\frac{1}{2}C_3S_3-BS_3C_3\right)\theta_{y3} \\ & +HC_3w_4 + \left(\frac{1}{2}S_3^2+DC_3^2\right)\theta_{x4} - \left(\frac{1}{2}C_3S_3-DS_3C_3\right)\theta_{y4} \end{aligned} \quad (2.24)$$

veya matris formunda

$$\begin{cases} \theta_{17} \\ \theta_{27} \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -AS_3 & \left(\frac{1}{2}C_3S_3 - BS_3C_3\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & AC_3 & \left(\frac{1}{2}S_3^2 + BC_3^2\right) \\ -\left(\frac{1}{2}C_3^2 + BS_3^2\right) & -HS_3 & \left(\frac{1}{2}C_3S_3 - DS_3C_3\right) & -\left(\frac{1}{2}C_3^2 + DS_3^2\right) \\ -\left(\frac{1}{2}C_3S_3 - BS_3C_3\right) & HC_3 & \left(\frac{1}{2}S_3^2 + DC_3^2\right) & -\left(\frac{1}{2}C_3S_3 - DS_3C_3\right) \end{bmatrix} \begin{cases} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{cases} \quad (2.25)$$

$k = 8$ için

$$\begin{aligned} \theta_{18} = & -AS_4 w_4 + \left(\frac{1}{2}C_4S_4 - BS_4C_4\right)\theta_{x4} - \left(\frac{1}{2}C_4^2 + BS_4^2\right)\theta_{y4} \\ & -HS_4 w_1 + \left(\frac{1}{2}C_4S_4 - DS_4C_4\right)\theta_{x1} - \left(\frac{1}{2}C_4^2 + DS_4^2\right)\theta_{y1} \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \theta_{28} = & AC_4 w_4 + \left(\frac{1}{2}S_4^2 + BC_4^2\right)\theta_{x4} - \left(\frac{1}{2}C_4S_4 - BS_4C_4\right)\theta_{y4} \\ & + HC_4 w_1 + \left(\frac{1}{2}S_4^2 + DC_4^2\right)\theta_{x1} - \left(\frac{1}{2}C_4S_4 - DS_4C_4\right)\theta_{y1} \end{aligned} \quad (2.27)$$

veya matris formunda

$$\begin{cases} \theta_{18} \\ \theta_{28} \end{cases} = \begin{bmatrix} -HS_4 & \left(\frac{1}{2}C_4S_4 - DS_4C_4\right) & -\left(\frac{1}{2}C_4^2 + DS_4^2\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ HC_4 & \left(\frac{1}{2}S_4^2 + DC_4^2\right) & -\left(\frac{1}{2}C_4S_4 - DS_4C_4\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -AS_4 & \left(\frac{1}{2}C_4S_4 - BS_4C_4\right) & -\left(\frac{1}{2}C_4^2 + BS_4^2\right) \\ 0 & AC_4 & \left(\frac{1}{2}S_4^2 + BC_4^2\right) & -\left(\frac{1}{2}C_4S_4 - BS_4C_4\right) \end{bmatrix} \begin{cases} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{cases} \quad (2.28)$$

Böylece orta noktadaki dönme bileşenleri, köşe düğüm noktalarındaki dönme bileşenleri cinsinden ifade edilmiş olur ve sonra denklem (2.9) aşağıdaki gibi tekrar yazılır.

$$\begin{aligned} \theta_1 = & \sum_{i=1}^8 N_i \theta_{1i} = \sum_{i=1}^4 (-N_i) \theta_{y1} + \sum_{k=5}^8 N_k \theta_{1k} = [T_{ndf,nen}^x(\xi, \eta)] \begin{cases} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{cases} \\ \theta_2 = & \sum_{i=1}^8 N_i \theta_{2i} = \sum_{i=1}^4 N_i \theta_{xi} + \sum_{k=5}^8 N_k \theta_{2k} = [T_{ndf,nen}^y(\xi, \eta)] \begin{cases} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Burada,

ndf, plak eleman için bir düğüm noktasındaki serbestlik derecesi (w, θ_x, θ_y)

nen, bir elemandaki düğüm noktası sayısı olup şekil fonksiyonları matrisleri $T_{ndf, nen}^x$

ve $T_{ndf, nen}^y$ aşağıdaki gibi formüle edilir.

$$\begin{aligned}
 T_{w,1}^x &= -AS_1N_5 - HS_4N_8 \\
 T_{\theta_x,1}^x &= \left(\frac{1}{2}C_1S_1 - BS_1C_1\right)N_5 + \left(\frac{1}{2}C_4S_4 - DS_4C_4\right)N_8 \\
 T_{\theta_y,1}^x &= -\left(\frac{1}{2}C_1^2 + BS_1^2\right)N_5 - \left(\frac{1}{2}C_4^2 + DS_4^2\right)N_8 - N_1 \\
 T_{w,2}^x &= -AS_2N_6 - HS_1N_5 \\
 T_{\theta_x,2}^x &= \left(\frac{1}{2}C_2S_2 - BS_2C_2\right)N_6 + \left(\frac{1}{2}C_1S_1 - DS_1C_1\right)N_5 \\
 T_{\theta_y,2}^x &= -\left(\frac{1}{2}C_2^2 + BS_2^2\right)N_6 - \left(\frac{1}{2}C_1^2 + DS_1^2\right)N_5 - N_2 \\
 T_{w,3}^x &= -AS_3N_7 - HS_2N_6 \\
 T_{\theta_x,3}^x &= \left(\frac{1}{2}C_3S_3 - BS_3C_3\right)N_7 + \left(\frac{1}{2}C_2S_2 - DS_2C_2\right)N_6 \\
 T_{\theta_y,3}^x &= -\left(\frac{1}{2}C_3^2 + BS_3^2\right)N_7 - \left(\frac{1}{2}C_2^2 + DS_2^2\right)N_6 - N_3 \\
 T_{w,4}^x &= -AS_4N_8 - HS_3N_7 \\
 T_{\theta_x,4}^x &= \left(\frac{1}{2}C_4S_4 - BS_4C_4\right)N_8 + \left(\frac{1}{2}C_3S_3 - DS_3C_3\right)N_7 \\
 T_{\theta_y,4}^x &= -\left(\frac{1}{2}C_4^2 + BS_4^2\right)N_8 - \left(\frac{1}{2}C_3^2 + DS_3^2\right)N_7 - N_4
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

$$\begin{aligned}
T_{w,1}^y &= AC_1 N_5 + HC_4 N_8 \\
T_{\theta_x,1}^y &= \left(\frac{1}{2} S_1^2 + BC_1^2 \right) N_5 + \left(\frac{1}{2} S_4^2 + BC_4^2 \right) N_8 + N_1 \\
T_{\theta_y,1}^y &= - \left(\frac{1}{2} C_1 S_1 - BS_1 C_1 \right) N_5 - \left(\frac{1}{2} C_4 S_4 - BS_4 C_4 \right) N_8 \\
T_{w,2}^y &= AC_2 N_6 + HC_1 N_5 \\
T_{\theta_x,2}^y &= \left(\frac{1}{2} S_2^2 + BC_2^2 \right) N_6 + \left(\frac{1}{2} S_1^2 + BC_1^2 \right) N_5 + N_2 \\
T_{\theta_y,2}^y &= - \left(\frac{1}{2} C_2 S_2 - BS_2 C_2 \right) N_6 - \left(\frac{1}{2} C_1 S_1 - BS_1 C_1 \right) N_5 \\
T_{w,3}^y &= AC_3 N_7 + HC_2 N_6 \\
T_{\theta_x,3}^y &= \left(\frac{1}{2} S_3^2 + BC_3^2 \right) N_7 + \left(\frac{1}{2} S_2^2 + BC_2^2 \right) N_6 + N_3 \\
T_{\theta_y,3}^y &= - \left(\frac{1}{2} C_3 S_3 - BS_3 C_3 \right) N_7 - \left(\frac{1}{2} C_2 S_2 - BS_2 C_2 \right) N_6 \\
T_{w,4}^y &= AC_4 N_8 + HC_3 N_7 \\
T_{\theta_x,4}^y &= \left(\frac{1}{2} S_4^2 + BC_4^2 \right) N_8 + \left(\frac{1}{2} S_3^2 + BC_3^2 \right) N_7 + N_4 \\
T_{\theta_y,4}^y &= - \left(\frac{1}{2} C_4 S_4 - BS_4 C_4 \right) N_8 - \left(\frac{1}{2} C_3 S_3 - BS_3 C_3 \right) N_7
\end{aligned} \tag{2.31}$$

2.1.2. Kirchhoff Plak Teorisi Kullanılarak Elde Edilen Kabuk Eleman Formülasyonu

Bu formülasyonda enine kayma şekil değiştirme terimlerinin ihmal edildiği ince kabuk elemanlar göz önüne alınmıştır.

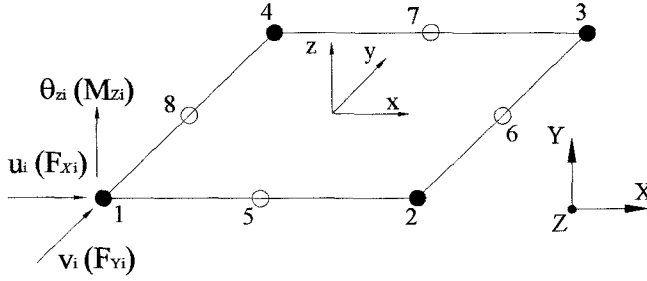
2.1.2.1. Dört Düğüm Noktalı 4 Kenarlı Kabuk Eleman (SKQ)

Daha öncede belirtildiği gibi kabuk eleman, membran eleman ile eğilme etkisindeki plak elemanlardan oluşmuştur. Aşağıda her iki eleman için oluşturulan formülasyonlar detaylarıyla verilmiştir.

2.1.2.1.1. Dört Düğüm Noktalı Kabuk Eleman için Membran Eleman (MEQ)

Bu kısımda elde edilen membran formülasyonu, hem Kirchhoff hem de Reissner/Mindlin teorisi için geçerlidir. Şekil 2.3'te verilen dört düğüm noktalı doğrusal

membran eleman, iki yer değiştirme (u, v) ve bir dönme (θ_z) serbestlik derecesine sahiptir. Membran elemana burulma serbestlik derecesinin ilave edilmesi ilk olarak “vertex dönme” kavramını tanımlayan Allman (1984) ve quadratik elemanların kenar orta noktasında yer değiştirmeyle ilişkili “vertex dönme” nin geometrik interpolasyonunu veren Cook (1986) tarafından yapıldı. Bu tip elemanların iyi bir performans sergiledikleri bu çalışmalar sonucunda ortaya çıkmıştır.



şekil 2.3. Dört düğüm noktalı 4 kenarlı membran eleman

Membran eleman için varyasyonel denklem Hughes ve Brezzi (1989) tarafından aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

$$\Pi_d(u, \theta) = \frac{1}{2} \int_A \varepsilon^T [D_d] \varepsilon dA + \frac{1}{2} p \int_A \theta_b^2 dA - \int_A u \cdot PdA \quad (2.32)$$

Burada u ve θ , A zm bölgesi üzerinde hesaplanacak yer değiştirme ve dnmelerdir. P genel dış kuvvetler ve p penaltı parametresidir.

Burulma serbestlik dereceli kabuk elemanlar, eleman üzerinde yer değiştirme ve bağımsız dönme alanlarını içeren Allman tipi interpolasyonla birleştirilerek aşağıdaki gibi verilmektedir (Jin, 1994).

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 N_i^0(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} + \sum_{k=5}^8 N_k(\xi, \eta) \frac{L_{ij}}{8} (\theta_j - \theta_i) \begin{Bmatrix} C_{ij} \\ S_{ij} \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

Ayrıca şekil 2.4'teki geometriden aşağıdaki bağıntılar yazılır.

$$\begin{aligned}
x_{ij} &= x_i - x_j \\
y_{ij} &= y_i - y_j \\
L_{ij} &= (x_{ij}^2 + y_{ij}^2)^{1/2} \\
\gamma_{ij} &= (x, n_{ij}) \\
C_{ij} &= \cos \gamma_{ij} = -y_{ij}/L_{ij} \\
S_{ij} &= \sin \gamma_{ij} = x_{ij}/L_{ij}
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Yukarıdaki eşitliklerde

L_{ij} , $(i - j)$ kenar uzunluğu,

n_{ij} , $(i - j)$ kenarının dış normal vektörü,

s_{ij} , $(i - j)$ kenar uzunluğu boyunca teğet vektörü,

γ_{ij} , n_{ij} dış normal vektörünün yatayla yaptığı açı,

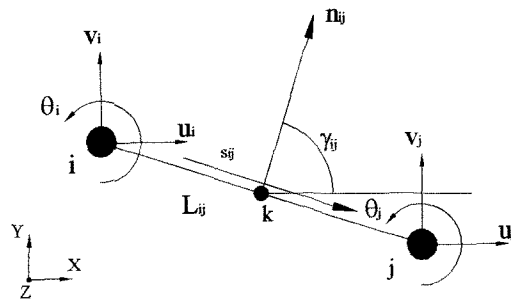
(u_i, v_i, θ_i) , i . düğüm noktasındaki, sırasıyla, X ve Y yönündeki yer değiştirmeler ile Z yönündeki dönme, (u_j, v_j, θ_j) , j . düğüm noktasındaki, sırasıyla, X ve Y yönündeki yer değiştirmeler ile Z yönündeki dönme, N_i^0 köşe düğüm noktasında ve N_k kenarın orta noktadaki Lagrangian şekil fonksiyonlarıdır. Ayrıca $k = 5, 6, 7, 8$ için $i, j = 1, 2; 2, 3; 3, 4; 4, 1$ değerlerini almakta ve şekil fonksiyonları da aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$N_i^0 = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) \tag{2.35}$$

$$N_k = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta_k \eta), \quad k = 5, 7 \tag{2.36}$$

$$N_k = \frac{1}{2}(1 + \xi_k \xi)(1 - \eta^2), \quad k = 6, 8$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) - \frac{1}{2}N_m - \frac{1}{2}N_n, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad m, n = 8, 5; 5, 6; 6, 7; 7, 8 \tag{2.37}$$



Şekil 2.4. Elemanın herhangi bir $(i - j)$ kenarındaki parametreler

Virtüel iş ifadesinde Allman tipi interpolasyon membran kabuk eleman için kullanılırsa, aşağıdaki kuvvet- yer değiştirme bağıntısı elde edilir.

$$\begin{Bmatrix} F_{Xi}^d \\ F_{Yi}^d \\ M_{XYi}^d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q^T F_{xi} \\ Q^T F_{yi} \\ Q^T M_{xyi} \end{Bmatrix} = [Q^T K_d Q] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix} = [K_D] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (2.38)$$

Bu bağıntıda,

$$[K_d] = \int_A [\bar{B}_d]^T [D_d] [\bar{B}_d] dA \quad (2.39)$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix}, \quad [D_d] = \frac{Et}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

$$[\bar{B}_d] = \begin{Bmatrix} \partial N_i^0 / \partial x & 0 & 0 & 0 & 0 & G_i \\ 0 & \partial N_i^0 / \partial y & 0 & 0 & 0 & G_i \\ \partial N_i^0 / \partial y & \partial N_i^0 / \partial x & 0 & 0 & 0 & G_i \end{Bmatrix} \quad (2.41)$$

$$[G_i] = \frac{1}{8} \begin{Bmatrix} L_{ij} C_{ij} \frac{\partial N_1}{\partial x} - L_{ik} C_{ik} \frac{\partial N_m}{\partial x} \\ L_{ij} S_{ij} \frac{\partial N_1}{\partial y} - L_{ik} S_{ik} \frac{\partial N_m}{\partial y} \\ \left(L_{ij} C_{ij} \frac{\partial N_1}{\partial y} - L_{ik} C_{ik} \frac{\partial N_m}{\partial y} \right) - \left(L_{ij} S_{ij} \frac{\partial N_1}{\partial x} - L_{ik} S_{ik} \frac{\partial N_m}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} \quad (2.42)$$

şeklinde verilmiş olup burada E elastisite modülü, t kabuğun kalınlığı, ν poisson oranı, [Q] genel ve yerel kartezyen koordinat takımları arasındaki dönüşüm matrisi, [D_d] düzlem gerilme durumunda elastik malzeme sabiti matrisi ve [K_d] yerel rijitlik matrisidir. Ayrıca {e_{ij}} (i,j=1,2,3) koordinat takımları arasındaki doğrultman kosinüsleridir. [G_i] matrisinde ise indisler i = 1,2,3,4, j = 4,1,2,3, k = 2,3,4,1, l = 8,5,6,7 ve m = 5,6,7,8 değerlerini almaktadır.

2.1.2.1.2. Dört Düğüm Noktalı 4 Kenarlı Plak Eleman (DKQ)

Bu kısımda dört düğüm noktalı kabuk elemanın eğilmesi için şekil değiştirme enerjisinin ayrıştırılmasına dayanan bir formülasyon verilmiştir. Bu formülasyon ile elde

edilen sonuç, daha önce literatürde belirtilen 12 serbestlik dereceli 4 kenarlı discrete Kirchhoff plak elemanı (DKQ) ile aynı olmuştur. Plak eleman için enerji denklemi

$$\begin{aligned}\Pi_e(w) &= \frac{1}{2} \int_A [\kappa]^T [D_e] [\kappa] dA \\ \Pi_e(w) &= \frac{1}{2} \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \int_A \left[(w_{,xx})^2 + \nu 2w_{,xx}w_{,yy} + (w_{,yy})^2 + 2(1-\nu)(w_{,xy})^2 \right] dA\end{aligned}\quad (2.43)$$

şeklinde yazılır. Burada,

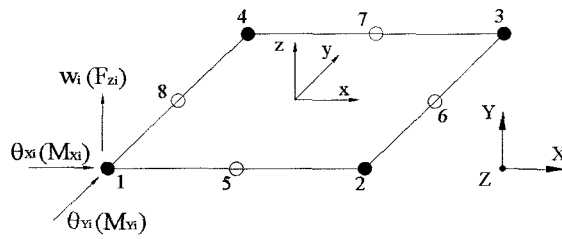
$\Pi_e(w)$, eğilmeden dolayı elemandaki enerji ifadesi,

A , eleman alanı,

w , kalınlık doğrultusundaki yer değiştirme (çökme)'yi göstermektedir.

Plak elemanda dönme serbestlik derecesi polinomu

Bir plak elemanda en azından sabit bir moment değeri elde edilebilmesi için, eleman kenarına dik dönel bileşenler, (Şekil 2.5) eleman kenarı boyunca bir kübik yer değiştirme polinomu tanımlanarak elde edilir. Eleman kenarının orta noktasında tanımlanan parametreler elemanın köşe düğüm noktasına ait parametreler cinsinden ifade edilir. Dört düğüm noktalı 4 kenarlı eleman kenarlarının orta noktalarına ilave düğüm noktaları yerleştirilir.



Şekil 2.5. Dört düğüm noktalı 4 kenarlı kabuk elemanın eğilme parametreleri

Sonra kübik polinom ifadesini de kullanarak dönme bileşenleri ve elemanın geometrik şekli aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \sum_{i=1}^8 N_i \theta_{1i} & x &= \sum_{i=1}^4 N_i^0 x_i \\ \theta_2 &= \sum_{i=1}^8 N_i \theta_{2i} & y &= \sum_{i=1}^4 N_i^0 y_i \end{aligned} \quad \text{ve} \quad (2.44)$$

Burada şekil fonksiyonu $N_i(\xi, \eta)$ parametrik koordinatlarda tanımlanmış olup denklem (2.35) ve denklem (2.36)'da verilmiştir.

Kirchhoff kabulleri köşe düğüm noktaları için x ve y yerel koordinatlarına ve orta noktası için n ve s kenar koordinatlarına uygulanarak aşağıdaki denklemler elde edilir.

1- Köşe düğüm noktasında:

$$\begin{aligned} \theta_{xi} &= \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_i = \theta_{2i} \\ \theta_{yi} &= -\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_i = -\theta_{1i} \end{aligned} \quad , \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (2.45)$$

2- Orta noktada:

$$\begin{aligned} \theta_{nk} &= \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_k \\ \theta_{sk} &= \frac{\partial w}{\partial s} \Big|_k \end{aligned} \quad , \quad k = 5, 6, 7, 8 \quad (2.46)$$

Burada,

- 1- w eleman kenarları boyunca bağımsız olarak değişir. Dört köşe düğüm noktasındaki w , eleman kenarı boyunca kübik yer değiştirme polinomu ile tanımlanır.
- 2- Kirchhoff kabulleri elemanın bütün sınırları boyunca sağlanır.
- 3- Kayma şekil değiştirme enerjisi ihmal edildiğinden bu formülasyon sadece ince plaklar için geçerlidir.
- 4- 12 serbestlik dereceli bu eleman kenarlar boyunca uyumludur.

Eğilme etkisinde düz kabuk eleman için türetilen denklemler (2.30) ve (2.31)'de Tablo 2.1'de verilen katsayılar yerine yazılırsa Kirchhoff plak elemanı için geçerli şekil fonksiyonları bulunur.

Dönmeler,

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \sum_{i=1}^4 (-N_i) \theta_{yi} + \sum_{k=5}^8 N_k \theta_{1k} = \left[{}^K T_{\text{ndf,nod}}^x(\xi, \eta) \right] \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{Xi} \\ \theta_{Yi} \end{Bmatrix} \\ \theta_2 &= \sum_{i=1}^4 N_i \theta_{xi} + \sum_{k=5}^8 N_k \theta_{2k} = \left[{}^K T_{\text{ndf,nod}}^y(\xi, \eta) \right] \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{Xi} \\ \theta_{Yi} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.47)$$

şeklinde gösterilir. Burada ${}^K T_{3,4}^x$ ve ${}^K T_{3,4}^y$ şekil fonksiyonları aşağıda verildiği gibidir.

$$\begin{aligned} {}^K T_{w,1}^x &= \frac{1.5}{L_{ij}} S_1 N_5 - \frac{1.5}{L_{ij}} S_4 N_8 \\ {}^K T_{\theta_x,1}^x &= \left(\frac{3}{4} C_1 S_1 \right) N_5 + \left(\frac{3}{4} C_4 S_4 \right) N_8 \\ {}^K T_{\theta_y,1}^x &= - \left(\frac{1}{2} C_1^2 - \frac{1}{4} S_1^2 \right) N_5 - \left(\frac{1}{2} C_4^2 - \frac{1}{4} S_4^2 \right) N_8 - N_1 \\ {}^K T_{w,2}^x &= \frac{1.5}{L_{ij}} S_2 N_6 - \frac{1.5}{L_{ij}} S_1 N_5 \\ {}^K T_{\theta_x,2}^x &= \left(\frac{3}{4} C_2 S_2 \right) N_6 + \left(\frac{3}{4} C_1 S_1 \right) N_5 \\ {}^K T_{\theta_y,2}^x &= - \left(\frac{1}{2} C_2^2 - \frac{1}{4} S_2^2 \right) N_6 - \left(\frac{1}{2} C_1^2 - \frac{1}{4} S_1^2 \right) N_5 - N_2 \\ {}^K T_{w,3}^x &= \frac{1.5}{L_{ij}} S_3 N_7 - \frac{1.5}{L_{ij}} S_2 N_6 \\ {}^K T_{\theta_x,3}^x &= \left(\frac{3}{4} C_3 S_3 \right) N_7 + \left(\frac{3}{4} C_2 S_2 \right) N_6 \\ {}^K T_{\theta_y,3}^x &= - \left(\frac{1}{2} C_3^2 - \frac{1}{4} S_3^2 \right) N_7 - \left(\frac{1}{2} C_2^2 - \frac{1}{4} S_2^2 \right) N_6 - N_3 \\ {}^K T_{w,4}^x &= \frac{1.5}{L_{ij}} S_4 N_8 - \frac{1.5}{L_{ij}} S_3 N_7 \\ {}^K T_{\theta_x,4}^x &= \left(\frac{3}{4} C_4 S_4 \right) N_8 + \left(\frac{3}{4} C_3 S_3 \right) N_7 \\ {}^K T_{\theta_y,4}^x &= - \left(\frac{1}{2} C_4^2 - \frac{1}{4} S_4^2 \right) N_8 - \left(\frac{1}{2} C_3^2 - \frac{1}{4} S_3^2 \right) N_7 - N_4 \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned}
{}^k T_{w,1}^y &= -\frac{1.5}{L_{ij}} C_1 N_5 + \frac{1.5}{L_{ij}} C_4 N_8 \\
{}^k T_{\theta_x,1}^y &= \left(\frac{1}{2} S_1^2 - \frac{1}{4} C_1^2 \right) N_5 + \left(\frac{1}{2} S_4^2 - \frac{1}{4} C_4^2 \right) N_8 + N_1 \\
{}^k T_{\theta_y,1}^y &= -\left(\frac{3}{4} C_1 S_1 \right) N_5 - \left(\frac{3}{4} C_4 S_4 \right) N_8 \\
{}^k T_{w,2}^y &= -\frac{1.5}{L_{ij}} C_2 N_6 + \frac{1.5}{L_{ij}} C_1 N_5 \\
{}^k T_{\theta_x,2}^y &= \left(\frac{1}{2} S_2^2 - \frac{1}{4} C_2^2 \right) N_6 + \left(\frac{1}{2} S_1^2 - \frac{1}{4} C_1^2 \right) N_5 + N_2 \\
{}^k T_{\theta_y,2}^y &= -\left(\frac{3}{4} C_2 S_2 \right) N_6 - \left(\frac{3}{4} C_1 S_1 \right) N_5 \\
{}^k T_{w,3}^y &= -\frac{1.5}{L_{ij}} C_3 N_7 + \frac{1.5}{L_{ij}} C_2 N_6 \\
{}^k T_{\theta_x,3}^y &= \left(\frac{1}{2} S_3^2 - \frac{1}{4} C_3^2 \right) N_7 + \left(\frac{1}{2} S_2^2 - \frac{1}{4} C_2^2 \right) N_6 + N_3 \\
{}^k T_{\theta_y,3}^y &= -\left(\frac{3}{4} C_3 S_3 \right) N_7 - \left(\frac{3}{4} C_2 S_2 \right) N_6 \\
{}^k T_{w,4}^y &= -\frac{1.5}{L_{ij}} C_4 N_8 + \frac{1.5}{L_{ij}} C_3 N_7 \\
{}^k T_{\theta_x,4}^y &= \left(\frac{1}{2} S_4^2 - \frac{1}{4} C_4^2 \right) N_8 + \left(\frac{1}{2} S_3^2 - \frac{1}{4} C_3^2 \right) N_7 + N_4 \\
{}^k T_{\theta_y,4}^y &= -\left(\frac{3}{4} C_4 S_4 \right) N_8 - \left(\frac{3}{4} C_3 S_3 \right) N_7
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Kirchhoff teorisi için (2.48) ve (2.49) denklemleri ve denklem (2.40)'daki dönüşüm matrisi, denklem (2.43)'te verilen enerji ifadesinde yerine yazılıp minimum enerji ilkesi uygulanırsa, aşağıdaki kuvvet-yer değiştirme bağıntısı elde edilir.

$$\begin{Bmatrix} F_{Xi}^e \\ M_{Xi}^e \\ M_{Yi}^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q^T F_{zi} \\ Q^T M_{xi} \\ Q^T M_{yi} \end{Bmatrix} = [Q^T K K_e Q] \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{Xi} \\ \theta_{Yi} \end{Bmatrix} = [{}^k K E] \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{Xi} \\ \theta_{Yi} \end{Bmatrix} \tag{2.50}$$

$$[{}^k K_e] = \int_A [{}^k B_e]^T [D_e] [{}^k B_e] dA \tag{2.51}$$

$$\begin{aligned}
[{}^k B_e] &= \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -N_{1,i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{2,i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_{2,i} & N_{1,i} & 0 \end{Bmatrix} \\
&+ \begin{Bmatrix} 0 & 0 & {}^k A_{1,i}^{3,x} & {}^k A_{1,i}^{4,x} & {}^k A_{1,i}^{5,x} & 0 \\ 0 & 0 & {}^k A_{2,i}^{3,y} & {}^k A_{2,i}^{4,y} & {}^k A_{2,i}^{5,y} & 0 \\ 0 & 0 & ({}^k A_{2,i}^{3,x} + {}^k A_{1,i}^{3,y}) & ({}^k A_{2,i}^{4,x} + {}^k A_{1,i}^{4,y}) & ({}^k A_{2,i}^{5,x} + {}^k A_{1,i}^{5,y}) & 0 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Burada $[D_e]$, plağın eğilme durumundaki elastik rijitlik matrisidir. ${}^K A_{ndm,i}^{ndf,x(y)}$ fonksiyon değerleri döngü şeklinde olup Ek 2’de verilmiştir.

2.1.2.1.3. Dört Düğüm Noktalı Kabuk Eleman için Rijitlik Matrisi

Bu kabuk eleman için eleman rijitlik matrisi, membran eleman rijitlik matrisi ve Kirchhoff plak eğilme eleman rijitlik matrisinin cebirsel toplamı şeklinde elde edilmektedir.

$${}^K [K]_T = [K_D] + [{}^K K_E] \quad (2.53)$$

Denklem (2.53)’ün çözümünde 2x2 Gauss integrasyon noktası kullanılmıştır.

Dört düğüm noktalı kabuk eleman için statik denge denklem çözümü, membran eleman ve plak eğilme eleman çözümlerinin cebirsel toplamıyla aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\{F\} = {}^K [K]_T \{U\}$$

veya

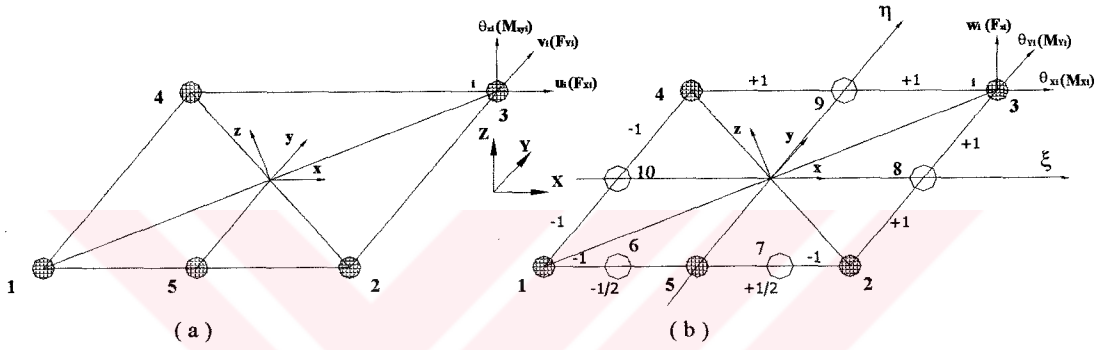
$$\begin{Bmatrix} F_{Xi} \\ F_{Yi} \\ F_{Zi} \\ M_X \\ M_Y \\ M_{XY} \end{Bmatrix} = {}^K [K]_T \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{Xi} \\ \theta_{Yi} \\ \theta_{Zi} \end{Bmatrix}, i = 1, 2, 3, 4 \quad (2.54)$$

Burada her bir elemenda toplam 24 serbestlik derecesi vardır.

$$\{U\}^T = \{u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \theta_{X1} \quad \theta_{Y1} \quad \theta_{Z1} \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad \theta_{X2} \quad \theta_{Y2} \quad \theta_{Z2} \\ u_3 \quad v_3 \quad w_3 \quad \theta_{X3} \quad \theta_{Y3} \quad \theta_{Z3} \quad u_4 \quad v_4 \quad w_4 \quad \theta_{X4} \quad \theta_{Y4} \quad \theta_{Z4}\}$$

2.1.2.2. Beş Düğüm Noktalı 4/5 Kenarlı Kabuk Eleman (SKP)

Şekil 2.6'da beş düğüm noktalı 4/5 kenarlı kabuk eleman, membran (Şekil 2.6a) ve plak eğilme (Şekil 2.6b) elemanına ayrılmış haliyle verilmiştir. Bu şekiller üzerinde genel koordinat takımı (X,Y,Z), eleman üzerine yerleştirilmiş yerel koordinat takımı (x,y,z) ve serbestlik dereceleri (u,v,w,θ_x,θ_y,θ_z) ile gösterilmiştir. u, v ve w sırasıyla X, Y ve Z eksenlerindeki yer değiştirmeleri tanımlarken θ_x,θ_yveθ_z ise aynı eksenler etrafındaki pozitif dönmeleri oluşturmaktadır.



Şekil 2.6. Beş düğüm noktalı 4/5 kenarlı a) membran ve b) eğilme etkisine maruz düz bir kabuk eleman

2.1.2.2.1. Beş Düğüm Noktalı Kabuk Eleman için Membran Eleman (MEP)

Beş düğüm noktalı 4/5 kenarlı elemanın köşe düğüm noktalarının doğal koordinatlardaki Lagrangian şekil fonksiyonları

$$\begin{aligned}
 N_1^0 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) - \frac{1}{2}N_5^0 \\
 N_2^0 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) - \frac{1}{2}N_5^0 \\
 N_3^0 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\
 N_4^0 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \\
 N_5^0 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

olarak ve orta noktaların şekil fonksiyonları ise

$$\begin{aligned}
N_6 &= \frac{4}{3}\xi(1-\xi^2)(\xi-0.5)(1-\eta) \\
N_7 &= \frac{4}{3}\xi(1-\xi^2)(\xi+0.5)(1-\eta) \\
N_8 &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) \\
N_9 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) \\
N_{10} &= \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)
\end{aligned} \tag{2.56}$$

denklemleriyle verilmektedir. Bu elemanın köşe ve orta noktadaki şekil fonksiyonlarına aşağıdaki gibi bir düzenleme yapılarak elde edilen şekil fonksiyonlarının burulma ve eğilme terimlerinde kullanımı kolaylaştırılmış olur.

$$\begin{aligned}
N_1 &= N_1^0 - \frac{3}{8}N_6 + \frac{1}{8}N_7 - \frac{1}{2}N_{10} \\
N_2 &= N_2^0 - \frac{3}{8}N_7 + \frac{1}{8}N_6 - \frac{1}{2}N_8 \\
N_3 &= N_3^0 - \frac{1}{2}(N_8 + N_9) \\
N_4 &= N_4^0 - \frac{1}{2}(N_9 + N_{10}) \\
N_5 &= N_5^0 - \frac{3}{4}(N_6 + N_7)
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Katı mekaniğinde toplam potansiyel enerjinin minimize edilmesiyle veya virtüel iş ifadesinden aşağıdaki klasik formülasyonlar elde edilir.

$$\begin{Bmatrix} F_{Xi}^d \\ F_{Yi}^d \\ M_{XYi}^d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q^T F_{xi} \\ Q^T F_{yi} \\ Q^T M_{xyi} \end{Bmatrix} = [Q^T K_d Q] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix} = [K_D] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix}, i = 1, 2, 3, 4, 5 \tag{2.58}$$

Burada Q , genel ve yerel kartezyen koordinat takımları arasındaki dönüşüm matrisi, $[K_d]$ membran rijitlik matrisidir. Bu elemanda G_i matrisi $i = 1, 2, 3, 4, 5$ değerleri için tanımlıyken diğer indisler $j = 4, 5, 2, 3, 1$, $k = 5, 3, 4, 1, 2$, $l = 10, 7, 8, 9, 6$ ve $m = 6, 8, 9, 10, 7$ değerlerini almaktadır.

2.1.2.2.2. Beş Düğüm Noktalı 4/5 Kenarlı Plak Eleman (DKP)

Beş düğüm noktalı 4/5 kenarlı plak elemanı için denklem (2.56) ve denklem (2.57)'de verilen şekil fonksiyonları alınarak ince kabuk hipotezine uygulandı. Dört düğüm noktalı 4 kenarlı eleman formülasyonunun geliştirilmesinde benzer işlemler yapılarak aşağıdaki bağıntılar elde edildi.

$$\begin{Bmatrix} F_{Zi}^e \\ M_{Xi}^e \\ M_{Yi}^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q^T F_{zi} \\ Q^T M_{xi} \\ Q^T M_{yi} \end{Bmatrix} = [Q^T K_e Q] \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{Xi} \\ \theta_{Yi} \end{Bmatrix} = [{}^K K_E] \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{Xi} \\ \theta_{Yi} \end{Bmatrix}, i = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (2.59)$$

$$[K_e] = \int_A [{}^K B_e]^T [D_e] [{}^K B_e] dA \quad (2.60)$$

$$[{}^K B_e] = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -N_{1,i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{2,i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_{2,i} & N_{1,i} & 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 & {}^K A_{1,i}^{3,x} & {}^K A_{1,i}^{4,x} & {}^K A_{1,i}^{5,x} & 0 \\ 0 & 0 & {}^K A_{2,i}^{3,y} & {}^K A_{2,i}^{4,y} & {}^K A_{2,i}^{5,y} & 0 \\ 0 & 0 & ({}^K A_{2,i}^{3,x} + {}^K A_{1,i}^{3,y}) & ({}^K A_{2,i}^{4,x} + {}^K A_{1,i}^{4,y}) & ({}^K A_{2,i}^{5,x} + {}^K A_{1,i}^{5,y}) & 0 \end{Bmatrix} \quad (2.61)$$

Burada $[D_e]$, plağın eğilme durumundaki rijitlik matrisidir. ${}^K A_{ndm,i}^{ndf,x(y)}$, Ek 2'deki dört düğüm noktalı elemandaki ${}^K A_{ndm,i}^{ndf,x(y)}$ döngüsünde düğüm noktası sayısının ($ncn = 5$) değiştirilmesiyle elde edilen fonksiyonlardır. Fakat dört düğüm noktalı 4 kenarlı elemandan farklı olarak fonksiyondaki ${}^K T_{3,5}^x$ ve ${}^K T_{3,5}^y$ 'ler aşağıda verilen değerleri alırlar.

$$\begin{aligned}
{}^{\kappa}T_{w,1}^x &= \frac{1.5}{L_{ij}} S_1 N_6 - \frac{1.5}{L_{ij}} S_5 N_{10} \\
{}^{\kappa}T_{\theta_x,1}^x &= \left(\frac{3}{4} C_1 S_1 \right) N_6 + \left(\frac{3}{4} C_5 S_5 \right) N_{10} \\
{}^{\kappa}T_{\theta_y,1}^x &= -\left(\frac{1}{2} C_1^2 - \frac{1}{4} S_1^2 \right) N_6 - \left(\frac{1}{2} C_5^2 - \frac{1}{4} S_5^2 \right) N_{10} - N_1 \\
{}^{\kappa}T_{w,2}^x &= \frac{1.5}{L_{ij}} S_3 N_8 - \frac{1.5}{L_{ij}} S_2 N_7 \\
{}^{\kappa}T_{\theta_x,2}^x &= \left(\frac{3}{4} C_3 S_3 \right) N_8 + \left(\frac{3}{4} C_2 S_2 \right) N_7 \\
{}^{\kappa}T_{\theta_y,2}^x &= -\left(\frac{1}{2} C_3^2 - \frac{1}{4} S_3^2 \right) N_8 - \left(\frac{1}{2} C_2^2 - \frac{1}{4} S_2^2 \right) N_7 - N_2 \\
{}^{\kappa}T_{w,3}^x &= \frac{1.5}{L_{ij}} S_4 N_9 - \frac{1.5}{L_{ij}} S_3 N_8 \\
{}^{\kappa}T_{\theta_x,3}^x &= \left(\frac{3}{4} C_4 S_4 \right) N_9 + \left(\frac{3}{4} C_3 S_3 \right) N_8 \\
{}^{\kappa}T_{\theta_y,3}^x &= -\left(\frac{1}{2} C_4^2 - \frac{1}{4} S_4^2 \right) N_9 - \left(\frac{1}{2} C_3^2 - \frac{1}{4} S_3^2 \right) N_8 - N_3 \\
{}^{\kappa}T_{w,4}^x &= \frac{1.5}{L_{ij}} S_5 N_{10} - \frac{1.5}{L_{ij}} S_4 N_9 \\
{}^{\kappa}T_{\theta_x,4}^x &= \left(\frac{3}{4} C_5 S_5 \right) N_{10} + \left(\frac{3}{4} C_4 S_4 \right) N_9 \\
{}^{\kappa}T_{\theta_y,4}^x &= -\left(\frac{1}{2} C_5^2 - \frac{1}{4} S_5^2 \right) N_{10} - \left(\frac{1}{2} C_4^2 - \frac{1}{4} S_4^2 \right) N_9 - N_4 \\
{}^{\kappa}T_{w,5}^x &= \frac{1.5}{L_{ij}} S_2 N_7 - \frac{1.5}{L_{ij}} S_1 N_6 \\
{}^{\kappa}T_{\theta_x,5}^x &= \left(\frac{3}{4} C_2 S_2 \right) N_7 + \left(\frac{3}{4} C_1 S_1 \right) N_6 \\
{}^{\kappa}T_{\theta_y,5}^x &= -\left(\frac{1}{2} C_2^2 - \frac{1}{4} S_2^2 \right) N_7 - \left(\frac{1}{2} C_1^2 - \frac{1}{4} S_1^2 \right) N_6 - N_5
\end{aligned} \tag{2.62}$$

$$\begin{aligned}
{}^K T_{w,1}^y &= -\frac{1.5}{L_{ij}} C_1 N_6 + \frac{1.5}{L_{ij}} C_5 N_{10} \\
{}^K T_{\theta_x,1}^y &= \left(\frac{1}{2} S_1^2 - \frac{1}{4} C_1^2 \right) N_6 + \left(\frac{1}{2} S_5^2 - \frac{1}{4} C_5^2 \right) N_{10} + N_1 \\
{}^K T_{\theta_y,1}^y &= -\left(\frac{3}{4} C_1 S_1 \right) N_6 - \left(\frac{3}{4} C_5 S_5 \right) N_{10} \\
{}^K T_{w,2}^y &= -\frac{1.5}{L_{ij}} C_3 N_8 + \frac{1.5}{L_{ij}} C_2 N_7 \\
{}^K T_{\theta_x,2}^y &= \left(\frac{1}{2} S_3^2 - \frac{1}{4} C_3^2 \right) N_8 + \left(\frac{1}{2} S_2^2 - \frac{1}{4} C_2^2 \right) N_7 + N_2 \\
{}^K T_{\theta_y,2}^y &= -\left(\frac{3}{4} C_3 S_3 \right) N_8 - \left(\frac{3}{4} C_2 S_2 \right) N_7 \\
{}^K T_{w,3}^y &= -\frac{1.5}{L_{ij}} C_4 N_9 + \frac{1.5}{L_{ij}} C_3 N_8 \\
{}^K T_{\theta_x,3}^y &= \left(\frac{1}{2} S_4^2 - \frac{1}{4} C_4^2 \right) N_9 + \left(\frac{1}{2} S_3^2 - \frac{1}{4} C_3^2 \right) N_8 + N_3 \\
{}^K T_{\theta_y,3}^y &= -\left(\frac{3}{4} C_4 S_4 \right) N_9 - \left(\frac{3}{4} C_3 S_3 \right) N_8 \\
{}^K T_{w,4}^y &= -\frac{1.5}{L_{ij}} C_5 N_{10} + \frac{1.5}{L_{ij}} C_4 N_9 \\
{}^K T_{\theta_x,4}^y &= \left(\frac{1}{2} S_5^2 - \frac{1}{4} C_5^2 \right) N_{10} + \left(\frac{1}{2} S_4^2 - \frac{1}{4} C_4^2 \right) N_9 + N_4 \\
{}^K T_{\theta_y,4}^y &= -\left(\frac{3}{4} C_5 S_5 \right) N_{10} - \left(\frac{3}{4} C_4 S_4 \right) N_9 \\
{}^K T_{w,5}^y &= -\frac{1.5}{L_{ij}} C_2 N_7 + \frac{1.5}{L_{ij}} C_1 N_6 \\
{}^K T_{\theta_x,5}^y &= \left(\frac{1}{2} S_2^2 - \frac{1}{4} C_2^2 \right) N_7 + \left(\frac{1}{2} S_1^2 - \frac{1}{4} C_1^2 \right) N_6 + N_5 \\
{}^K T_{\theta_y,5}^y &= -\left(\frac{3}{4} C_2 S_2 \right) N_7 - \left(\frac{3}{4} C_1 S_1 \right) N_6
\end{aligned} \tag{2.63}$$

2.1.2.2.3. Beş Düğüm Noktalı Kabuk Eleman için Rijitlik Matrisi

Beş düğüm noktalı kabuk eleman için eleman rijitlik matrisinin oluşturulma yöntemi dört düğüm noktalı elemandakine benzer şekilde (Denklem (2.53)) olup aradaki fark, sadece düğüm noktası sayısının farklı olmasıdır. Denklem çözümü için bütün terimlerde 3x3 Gauss integrasyon noktası kullanılmıştır. Rijitlik matrisinin oluşturulmasından sonra kuvvet-yer değiştirme bağıntıları

$$\{F\} = {}^K [K]_T \{U\}$$

veya

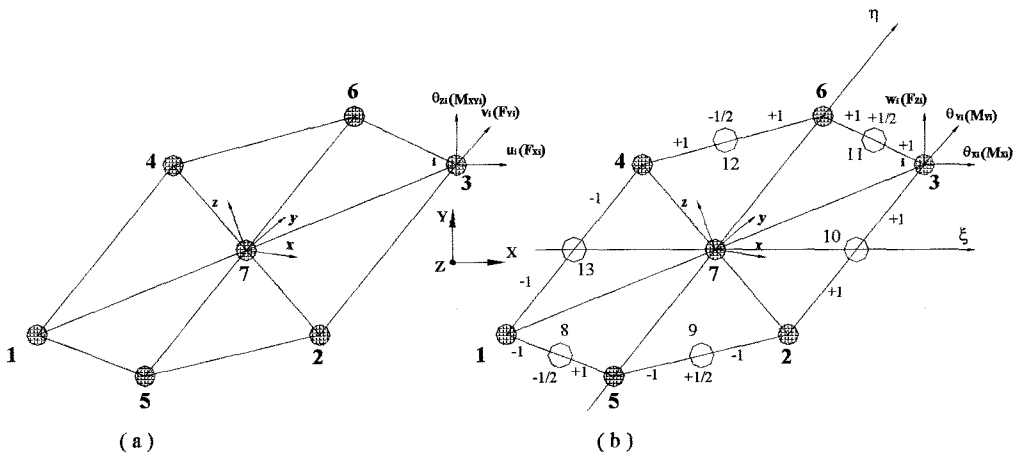
$$\begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = {}^K [K]_T \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{X_i} \\ \theta_{Y_i} \\ \theta_{Z_i} \end{Bmatrix}, i = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (2.64)$$

şeklinde yazılabilir. Burada her bir elemanda 30 serbestlik derecesi vardır.

$$\{U\}^T = \{u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \theta_{X1} \quad \theta_{Y1} \quad \theta_{Z1} \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad \theta_{X2} \quad \theta_{Y2} \quad \theta_{Z2} \\ u_3 \quad v_3 \quad w_3 \quad \theta_{X3} \quad \theta_{Y3} \quad \theta_{Z3} \quad u_4 \quad v_4 \quad w_4 \quad \theta_{X4} \quad \theta_{Y4} \quad \theta_{Z4} \\ u_5 \quad v_5 \quad w_5 \quad \theta_{X5} \quad \theta_{Y5} \quad \theta_{Z5}\}$$

2.1.2.3. Yedi Düğüm Noktalı 4/6 Kenarlı Kabuk Eleman (SKS)

Şekil 2.7'de yedi düğüm noktalı 4/6 kenarlı kabuk eleman, membran elemanı (Şekil 2.7a) ve plak eğilme elemanına (Şekil 2.7b) ayrılmış haliyle verilmiştir. Bu şekiller üzerinde genel eksen takımı (X, Y, Z), eleman üzerine yerleştirilmiş yerel koordinat takımı (x, y, z) ve serbestlik dereceleri (u, v, w, θ_x , θ_y , θ_z) ile verilmektedir. u, v ve w, sırasıyla X, Y ve Z eksenleri yönündeki yer değiştirmeleri tanımlarken θ_x , θ_y ve θ_z ise aynı eksenler etrafındaki pozitif dönmeleri göstermektedir.



Şekil 2.7. Yedi düğüm noktalı 6 kenarlı a) membran ve b) eğilme etkisine maruz düz bir kabuk eleman

2.1.2.3.1. Yedi Dügüm Noktalı Kabuk Eleman için Membran Eleman (MES)

Yedi dügüm noktalı 4/6 kenarlı elemanın köşe dügüm noktalarının doğal koordinatlardaki Lagrangian şekil fonksiyonları

$$\begin{aligned}
 N_1^0 &= \frac{1}{4} \xi(1-\xi)(1-\eta) \\
 N_2^0 &= \frac{1}{4} \xi(1+\xi)(1-\eta) \\
 N_3^0 &= \frac{1}{4} \xi(1+\xi)(1+\eta) \\
 N_4^0 &= \frac{1}{4} \xi(1-\xi)(1+\eta) \\
 N_5^0 &= \frac{1}{2} \eta(\eta-1)(1-\xi^2) \\
 N_6^0 &= \frac{1}{4} \eta(\eta+1)(1-\xi^2) \\
 N_7^0 &= (1-\xi^2)(1-\eta^2)
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

denklemleri ile verilirken orta noktalardaki şekil fonksiyonları ise

$$\begin{aligned}
 N_8 &= \frac{4}{3} \xi(1-\xi^2)(\xi-0.5)(1-\eta) \\
 N_9 &= \frac{4}{3} \xi(1-\xi^2)(\xi+0.5)(1-\eta) \\
 N_{10} &= \frac{1}{2} \xi(1+\xi)(1-\eta^2) \\
 N_{11} &= \frac{4}{3} \xi(1-\xi^2)(\xi+0.5)(1+\eta) \\
 N_{12} &= \frac{4}{3} \xi(1-\xi^2)(\xi-0.5)(1+\eta) \\
 N_{13} &= \frac{1}{2} \xi(\xi-1)(1-\eta^2)
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

bağıntılarıyla tanımlanmaktadır. Beş dügüm noktalı 4/5 kenarlı elemanlarda yapılan işlemlere benzer şekilde düzenlemeler yapılırsa yedi dügüm noktalı 4/6 kenarlı elemanın kenar noktaları ve kenar orta noktaları için elde edilen şekil fonksiyonlarının, burulma ve eğilme terimlerinde kolaylıkla kullanımı sağlanır.

$$\begin{aligned}
N_1 &= N_1^0 - \frac{3}{8}N_8 + \frac{1}{8}N_9 - \frac{1}{2}N_{13} \\
N_2 &= N_2^0 - \frac{3}{8}N_9 + \frac{1}{8}N_8 - \frac{1}{2}N_{10} \\
N_3 &= N_3^0 - \frac{3}{8}N_{11} + \frac{1}{8}N_{12} - \frac{1}{2}N_{10} \\
N_4 &= N_4^0 - \frac{3}{8}N_{12} + \frac{1}{8}N_{11} - \frac{1}{2}N_{13} \\
N_5 &= N_5^0 - \frac{3}{4}(N_8 + N_9) \\
N_6 &= N_5^0 - \frac{3}{4}(N_{11} + N_{12}) \\
N_7 &= N_7^0
\end{aligned} \tag{2.67}$$

Ayrıca yükleme ve yer değiştirme arasındaki bağıntı da aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{Bmatrix} F_{X_i}^d \\ F_{Y_i}^d \\ M_{XY_i}^d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q^T F_{x_i} \\ Q^T F_{y_i} \\ Q^T M_{xy_i} \end{Bmatrix} = [Q^T K_d Q] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_{z_i} \end{Bmatrix} = [K_D] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_{z_i} \end{Bmatrix}, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \tag{2.68}$$

Burada $[Q]$, genel ve yerel kartezyen koordinat takımları arasındaki dönüşüm matrisi ve $[K_d]$ membran rijitlik matrisidir. Bu elemandaki G_i matrisi i 'nin $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ değerleri için tanımlanırken $j = 4, 5, 2, 6, 1, 3$, $k = 5, 3, 6, 1, 2, 4$, $l = 13, 9, 10, 12, 8, 11$ ve $m = 8, 10, 11, 13, 9, 12$ değerlerini almaktadır.

2.1.2.3.2. Yedi Düğüm Noktalı 4/6 Kenarlı Plak Eleman (DKS)

Yedi düğüm noktalı 4/6 kenarlı plak elemanı için türetilen şekil fonksiyonları virtüel iş ifadesinden elde edilen aşağıdaki denklemde kullanılarak DKS elemanı için gerekli bağıntılar elde edilir.

$$\begin{Bmatrix} F_{Z_i}^e \\ M_{X_i}^e \\ M_{Y_i}^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q^T F_{z_i} \\ Q^T M_{x_i} \\ Q^T M_{y_i} \end{Bmatrix} = [Q^T K_e Q] \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{X_i} \\ \theta_{Y_i} \end{Bmatrix} = [K_E] \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{X_i} \\ \theta_{Y_i} \end{Bmatrix}, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \tag{2.69}$$

$$[K_e] = \int_A [K_B] [D_e] [K_B]^T dA \tag{2.70}$$

$$\begin{aligned}
[{}^K B_e] &= \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -N_{1,i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{2,i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_{2,i} & N_{1,i} & 0 \end{Bmatrix} \\
&+ \begin{Bmatrix} 0 & 0 & A_{1,i}^{3,x} & A_{1,i}^{4,x} & A_{1,i}^{5,x} & 0 \\ 0 & 0 & A_{2,i}^{3,y} & A_{2,i}^{4,y} & A_{2,i}^{5,y} & 0 \\ 0 & 0 & (A_{2,i}^{3,x} + A_{1,i}^{3,y}) & (A_{2,i}^{4,x} + A_{1,i}^{4,y}) & (A_{2,i}^{5,x} + A_{1,i}^{5,y}) & 0 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Burada $[D_e]$, plağın eğilme durumundaki rijitlik matrisidir. ${}^K A_{ndm,i}^{ndf,x(y)}$ Ek 2’de düğüm noktası sayısının altı ($nen = 6$) ve $i = 1,2,3,4,5,6$ alınmasıyla elde edilen fonksiyonlardır. Dört düğüm noktalı 4 kenarlı ve beş düğüm noktalı 4/5 kenarlı eleman elde edilğinde elemandaki bütün düğüm noktaları kullanılmıştı. Bu çıkarılıştta ise yedi düğüm noktalı elemanın orta noktası hesaba alınmamıştır. Yani yukarıdaki denklem (2.71) de ilk terimlerde $i = 1,2,3,4,5,6,7$ değerlerini alırken ikinci terimlerde $i = 1,2,3,4,5,6$ olmuştur. Başka bir deyişle, yedi düğüm noktalı elemanda sadece kenar sınırlar üzerinde eleman formülasyonunu artırıcı terimler kullanılmıştır. Bu fonksiyondaki ${}^K T_{3,6}^x$ ve ${}^K T_{3,6}^y$ terimleri de öncekilerden farklı olarak aşağıdaki değerleri almıştır.

$$\begin{aligned}
{}^{\kappa}T_{w,1}^x &= \frac{1.5}{L_{ij}} S_1 N_8 - \frac{1.5}{L_{ij}} S_6 N_{13} \\
{}^{\kappa}T_{\theta_x,1}^x &= \left(\frac{3}{4} C_1 S_1 \right) N_8 + \left(\frac{3}{4} C_6 S_6 \right) N_{13} \\
{}^{\kappa}T_{\theta_y,1}^x &= -\left(\frac{1}{2} C_1^2 - \frac{1}{4} S_1^2 \right) N_8 - \left(\frac{1}{2} C_6^2 - \frac{1}{4} S_6^2 \right) N_{13} - N_1 \\
{}^{\kappa}T_{w,2}^x &= \frac{1.5}{L_{ij}} S_3 N_{10} - \frac{1.5}{L_{ij}} S_2 N_9 \\
{}^{\kappa}T_{\theta_x,2}^x &= \left(\frac{3}{4} C_3 S_3 \right) N_{10} + \left(\frac{3}{4} C_2 S_2 \right) N_9 \\
{}^{\kappa}T_{\theta_y,2}^x &= -\left(\frac{1}{2} C_3^2 - \frac{1}{4} S_3^2 \right) N_{10} - \left(\frac{1}{2} C_2^2 - \frac{1}{4} S_2^2 \right) N_9 - N_2 \\
{}^{\kappa}T_{w,3}^x &= \frac{1.5}{L_{ij}} S_4 N_{11} - \frac{1.5}{L_{ij}} S_3 N_{10} \\
{}^{\kappa}T_{\theta_x,3}^x &= \left(\frac{3}{4} C_4 S_4 \right) N_{11} + \left(\frac{3}{4} C_3 S_3 \right) N_{10} \\
{}^{\kappa}T_{\theta_y,3}^x &= -\left(\frac{1}{2} C_4^2 - \frac{1}{4} S_4^2 \right) N_{11} - \left(\frac{1}{2} C_3^2 - \frac{1}{4} S_3^2 \right) N_{10} - N_3 \\
{}^{\kappa}T_{w,4}^x &= \frac{1.5}{L_{ij}} S_6 N_{13} - \frac{1.5}{L_{ij}} S_5 N_{12} \\
{}^{\kappa}T_{\theta_x,4}^x &= \left(\frac{3}{4} C_6 S_6 \right) N_{13} + \left(\frac{3}{4} C_5 S_5 \right) N_{12} \\
{}^{\kappa}T_{\theta_y,4}^x &= -\left(\frac{1}{2} C_6^2 - \frac{1}{4} S_6^2 \right) N_{13} - \left(\frac{1}{2} C_5^2 - \frac{1}{4} S_5^2 \right) N_{12} - N_4 \\
{}^{\kappa}T_{w,5}^x &= \frac{1.5}{L_{ij}} S_2 N_9 - \frac{1.5}{L_{ij}} S_1 N_8 \\
{}^{\kappa}T_{\theta_x,5}^x &= \left(\frac{3}{4} C_2 S_2 \right) N_9 + \left(\frac{3}{4} C_1 S_1 \right) N_8 \\
{}^{\kappa}T_{\theta_y,5}^x &= -\left(\frac{1}{2} C_2^2 - \frac{1}{4} S_2^2 \right) N_9 - \left(\frac{1}{2} C_1^2 - \frac{1}{4} S_1^2 \right) N_8 - N_5 \\
{}^{\kappa}T_{w,6}^x &= \frac{1.5}{L_{ij}} S_5 N_{12} - \frac{1.5}{L_{ij}} S_4 N_{11} \\
{}^{\kappa}T_{\theta_x,6}^x &= \left(\frac{3}{4} C_5 S_5 \right) N_{12} + \left(\frac{3}{4} C_4 S_4 \right) N_{11} \\
{}^{\kappa}T_{\theta_y,6}^x &= -\left(\frac{1}{2} C_5^2 - \frac{1}{4} S_5^2 \right) N_{12} - \left(\frac{1}{2} C_4^2 - \frac{1}{4} S_4^2 \right) N_{11} - N_6
\end{aligned} \tag{2.72}$$

$$\begin{aligned}
{}^{\kappa}T_{w,1}^y &= -\frac{1.5}{L_{ij}}C_1N_8 + \frac{1.5}{L_{ij}}C_6N_{13} \\
{}^{\kappa}T_{\theta_x,1}^y &= \left(\frac{1}{2}S_1^2 - \frac{1}{4}C_1^2\right)N_8 + \left(\frac{1}{2}S_6^2 - \frac{1}{4}C_6^2\right)N_{13} + N_1 \\
{}^{\kappa}T_{\theta_y,1}^y &= -\left(\frac{3}{4}C_1S_1\right)N_8 - \left(\frac{3}{4}C_6S_6\right)N_{13} \\
{}^{\kappa}T_{w,2}^y &= -\frac{1.5}{L_{ij}}C_3N_{10} + \frac{1.5}{L_{ij}}C_2N_9 \\
{}^{\kappa}T_{\theta_x,2}^y &= \left(\frac{1}{2}S_3^2 - \frac{1}{4}C_3^2\right)N_{10} + \left(\frac{1}{2}S_2^2 - \frac{1}{4}C_2^2\right)N_9 + N_2 \\
{}^{\kappa}T_{\theta_y,2}^y &= -\left(\frac{3}{4}C_3S_3\right)N_{10} - \left(\frac{3}{4}C_2S_2\right)N_9 \\
{}^{\kappa}T_{w,3}^y &= -\frac{1.5}{L_{ij}}C_4N_{11} + \frac{1.5}{L_{ij}}C_3N_{10} \\
{}^{\kappa}T_{\theta_x,3}^y &= \left(\frac{1}{2}S_4^2 - \frac{1}{4}C_4^2\right)N_{11} + \left(\frac{1}{2}S_3^2 - \frac{1}{4}C_3^2\right)N_{10} + N_3 \\
{}^{\kappa}T_{\theta_y,3}^y &= -\left(\frac{3}{4}C_4S_4\right)N_{11} - \left(\frac{3}{4}C_3S_3\right)N_{10} \\
{}^{\kappa}T_{w,4}^y &= -\frac{1.5}{L_{ij}}C_6N_{13} + \frac{1.5}{L_{ij}}C_5N_{12} \\
{}^{\kappa}T_{\theta_x,4}^y &= \left(\frac{1}{2}S_6^2 - \frac{1}{4}C_6^2\right)N_{13} + \left(\frac{1}{2}S_5^2 - \frac{1}{4}C_5^2\right)N_{12} + N_4 \\
{}^{\kappa}T_{\theta_y,4}^y &= -\left(\frac{3}{4}C_6S_6\right)N_{13} - \left(\frac{3}{4}C_5S_5\right)N_{12} \\
{}^{\kappa}T_{w,5}^y &= -\frac{1.5}{L_{ij}}C_2N_9 + \frac{1.5}{L_{ij}}C_1N_8 \\
{}^{\kappa}T_{\theta_x,5}^y &= \left(\frac{1}{2}S_2^2 - \frac{1}{4}C_2^2\right)N_9 + \left(\frac{1}{2}S_1^2 - \frac{1}{4}C_1^2\right)N_8 + N_5 \\
{}^{\kappa}T_{\theta_y,5}^y &= -\left(\frac{3}{4}C_2S_2\right)N_9 - \left(\frac{3}{4}C_1S_1\right)N_8 \\
{}^{\kappa}T_{w,6}^y &= -\frac{1.5}{L_{ij}}C_5N_{12} + \frac{1.5}{L_{ij}}C_4N_{11} \\
{}^{\kappa}T_{\theta_x,6}^y &= \left(\frac{1}{2}S_5^2 - \frac{1}{4}C_5^2\right)N_{12} + \left(\frac{1}{2}S_4^2 - \frac{1}{4}C_4^2\right)N_{11} + N_6 \\
{}^{\kappa}T_{\theta_y,6}^y &= -\left(\frac{3}{4}C_5S_5\right)N_{12} - \left(\frac{3}{4}C_4S_4\right)N_{11}
\end{aligned} \tag{2.73}$$

2.1.2.3.3. Yedi Dügüm Noktalı Kabuk Eleman için Rijitlik Matrisi

Yedi düğüm noktalı kabuk eleman için oluşturulan eleman rijitlik matrisi de beş düğüm noktalı eleman için yapılan işlemlere benzerlik göstermektedir. Aradaki tek fark sadece düğüm noktası sayısının farklı olmasıdır. Denklem çözümü için bütün terimlerde

4x4 Gauss integrasyon noktası kullanılmıştır. Rijitlik matrisinin oluşturulmasından sonra kuvvet-yer değiştirme bağıntıları

$$\{F\}^K = [K]_T \{U\}$$

veya

$$\begin{Bmatrix} F_{Xi} \\ F_{Yi} \\ F_{Zi} \\ M_X \\ M_Y \\ M_{XY} \end{Bmatrix} = {}^K [K]_T \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{Xi} \\ \theta_{Yi} \\ \theta_{Zi} \end{Bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \quad (2.74)$$

şeklinde yazılabilir. Her bir eleman toplam 42 serbestlik dereceli olup bunlar aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\{U\}^T = \{u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \theta_{X1} \quad \theta_{Y1} \quad \theta_{Z1} \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad \theta_{X2} \quad \theta_{Y2} \quad \theta_{Z2} \\ u_3 \quad v_3 \quad w_3 \quad \theta_{X3} \quad \theta_{Y3} \quad \theta_{Z3} \quad u_4 \quad v_4 \quad w_4 \quad \theta_{X4} \quad \theta_{Y4} \quad \theta_{Z4} \\ u_5 \quad v_5 \quad w_5 \quad \theta_{X5} \quad \theta_{Y5} \quad \theta_{Z5} \quad u_6 \quad v_6 \quad w_6 \quad \theta_{X6} \quad \theta_{Y6} \quad \theta_{Z6} \\ u_7 \quad v_7 \quad w_7 \quad \theta_{X7} \quad \theta_{Y7} \quad \theta_{Z7}\}$$

2.1.3. Reissner/Mindlin Plak Teorisi Kullanılarak Elde Edilen Kabuk Eleman Formülasyonu

Bu kısımda R/M plak teorisi kullanılarak hem ince hem de kalın kabuklar için yeni eleman formülasyonları geliştirilmiştir. Bu eleman formülasyonunun Kirchhoff formülasyonundan farkı, eğilme terimlerinde kullanılan θ_s 'nin kabuk kalınlığının bir fonksiyonu olması ve rijitlik matrisine kayma terimlerinin ilave edilmesidir.

2.1.3.1. Dört Düğüm Noktalı 4 Kenarlı Kabuk Eleman (SRMQ)

Bu kısımda, R/M teorisi, hem ince hem de kalın kabukların sonlu elemanlar analizi için kullanılmıştır. R/M teorisinde kabuk formülasyona Timoshenko kiriş fonksiyonu ilave

edilmiş ve dört düğüm noktalı 4 kenarlı eleman için kayma-kilitlenme probleminden bağımsız bir sonlu eleman geliştirilmiştir. Kirchhoff teorisinde olduğu gibi burada da membran eleman ile plak elemanın birleşiminden kabuk eleman oluşturulmuştur. Bu formülasyonda membran eleman kısmı aynen geçerli iken eğilme kısmı bir önceki bölümde Kirchhoff elemanı için elde edilen ifadelere benzerlik göstermektedir.

2.1.3.1.1. Dört Düğüm Noktalı Kabuk Eleman için Membran Eleman (MEQ)

R/M teorisi kullanılarak elde edilen membran eleman formülasyonu Kirchhoff teorisi için elde edilen membran eleman (MEQ) formülasyonu ile aynıdır. Bu formülasyon bölüm 2.1.2.1.1'de detaylarıyla verilmiştir.

2.1.3.1.2. Dört Düğüm Noktalı 4 Kenarlı Plak Eleman (DRMQ)

Daha öncede belirtildiği gibi R/M plak eleman Kirchhoff plak elemandan farklı olarak, eğilme terimlerin yanında kayma terimlerini de kapsamaktadır.

2.1.3.1.2.1. Dört Düğüm Noktalı Kabuk Elemanın Eğilmesi

Plak elemanın eğilmesinde R/M plak teorisi için gerekli katsayı değerleri Tablo 2.1'de verilmiştir. Bu katsayılar (2.30) ve (2.31) denklemlerinde yerine konulursa R/M teorisinde plağın eğilmesi için aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\begin{aligned}
{}^{\text{RM}}T_{w,1}^x(t) &= \frac{1.5}{L_{ij}} f(t) S_1 N_5 - \frac{1.5}{L_{ij}} f(t) S_4 N_8 \\
{}^{\text{RM}}T_{\theta_x,1}^x(t) &= \left(\frac{1}{2} C_1 S_1 + \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_1 C_1 \right) N_5 + \left(\frac{1}{2} C_4 S_4 + \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_4 C_4 \right) N_8 \\
{}^{\text{RM}}T_{\theta_y,1}^x(t) &= - \left(\frac{1}{2} C_1^2 - \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_1^2 \right) N_5 - \left(\frac{1}{2} C_4^2 - \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_4^2 \right) N_8 - N_1 \\
{}^{\text{RM}}T_{w,2}^x(t) &= \frac{1.5}{L_{ij}} f(t) S_2 N_6 - \frac{1.5}{L_{ij}} f(t) S_1 N_5 \\
{}^{\text{RM}}T_{\theta_x,2}^x(t) &= \left(\frac{1}{2} C_2 S_2 + \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_2 C_2 \right) N_6 + \left(\frac{1}{2} C_1 S_1 + \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_1 C_1 \right) N_5 \\
{}^{\text{RM}}T_{\theta_y,2}^x(t) &= - \left(\frac{1}{2} C_2^2 - \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_2^2 \right) N_6 - \left(\frac{1}{2} C_1^2 - \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_1^2 \right) N_5 - N_2 \\
{}^{\text{RM}}T_{w,3}^x(t) &= \frac{1.5}{L_{ij}} f(t) S_3 N_7 - \frac{1.5}{L_{ij}} f(t) S_2 N_6 \\
{}^{\text{RM}}T_{\theta_x,3}^x(t) &= \left(\frac{1}{2} C_3 S_3 + \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_3 C_3 \right) N_7 + \left(\frac{1}{2} C_2 S_2 + \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_2 C_2 \right) N_6 \\
{}^{\text{RM}}T_{\theta_y,3}^x(t) &= - \left(\frac{1}{2} C_3^2 - \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_3^2 \right) N_7 - \left(\frac{1}{2} C_2^2 - \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_2^2 \right) N_6 - N_3 \\
{}^{\text{RM}}T_{w,4}^x(t) &= \frac{1.5}{L_{ij}} f(t) S_4 N_8 - \frac{1.5}{L_{ij}} f(t) S_3 N_7 \\
{}^{\text{RM}}T_{\theta_x,4}^x(t) &= \left(\frac{1}{2} C_4 S_4 + \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_4 C_4 \right) N_8 + \left(\frac{1}{2} C_3 S_3 + \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_3 C_3 \right) N_7 \\
{}^{\text{RM}}T_{\theta_y,4}^x(t) &= - \left(\frac{1}{2} C_4^2 - \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_4^2 \right) N_8 - \left(\frac{1}{2} C_3^2 - \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_3^2 \right) N_7 - N_4
\end{aligned} \tag{2.75}$$

$$\begin{aligned}
{}^{\text{RM}}T_{w,1}^y(t) &= -\frac{1.5}{L_{ij}}f(t)C_1N_5 + \frac{1.5}{L_{ij}}f(t)C_4N_8 \\
{}^{\text{RM}}T_{\theta_x,1}^y(t) &= \left(\frac{1}{2}S_1^2 - \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)C_1^2\right)N_5 + \left(\frac{1}{2}S_4^2 - \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)C_4^2\right)N_8 + N_1 \\
{}^{\text{RM}}T_{\theta_y,1}^y(t) &= -\left(\frac{1}{2}C_1S_1 + \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)S_1C_1\right)N_5 - \left(\frac{1}{2}C_4S_4 + \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)S_4C_4\right)N_8 \\
{}^{\text{RM}}T_{w,2}^y(t) &= -\frac{1.5}{L_{ij}}f(t)C_2N_6 + \frac{1.5}{L_{ij}}f(t)C_1N_5 \\
{}^{\text{RM}}T_{\theta_x,2}^y(t) &= \left(\frac{1}{2}S_2^2 - \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)C_2^2\right)N_6 + \left(\frac{1}{2}S_1^2 - \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)C_1^2\right)N_5 + N_2 \\
{}^{\text{RM}}T_{\theta_y,2}^y(t) &= -\left(\frac{1}{2}C_2S_2 + \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)S_2C_2\right)N_6 - \left(\frac{1}{2}C_1S_1 + \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)S_1C_1\right)N_5 \\
{}^{\text{RM}}T_{w,3}^y(t) &= -\frac{1.5}{L_{ij}}f(t)C_3N_7 + \frac{1.5}{L_{ij}}f(t)C_2N_6 \\
{}^{\text{RM}}T_{\theta_x,3}^y(t) &= \left(\frac{1}{2}S_3^2 - \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)C_3^2\right)N_7 + \left(\frac{1}{2}S_2^2 - \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)C_2^2\right)N_6 + N_3 \\
{}^{\text{RM}}T_{\theta_y,3}^y(t) &= -\left(\frac{1}{2}C_3S_3 + \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)S_3C_3\right)N_7 - \left(\frac{1}{2}C_2S_2 + \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)S_2C_2\right)N_6 \\
{}^{\text{RM}}T_{w,4}^y(t) &= -\frac{1.5}{L_{ij}}f(t)C_4N_8 + \frac{1.5}{L_{ij}}f(t)C_3N_7 \\
{}^{\text{RM}}T_{\theta_x,4}^y(t) &= \left(\frac{1}{2}S_4^2 - \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)C_4^2\right)N_8 + \left(\frac{1}{2}S_3^2 - \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)C_3^2\right)N_7 + N_4 \\
{}^{\text{RM}}T_{\theta_y,4}^y(t) &= -\left(\frac{1}{2}C_4S_4 + \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)S_4C_4\right)N_8 - \left(\frac{1}{2}C_3S_3 + \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)S_3C_3\right)N_7
\end{aligned} \tag{2.76}$$

Denklem (2.75), (2.76) ve (2.40), denklem (1.15)'teki virtüel iş ifadesine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa R/M teorisi için aşağıdaki kuvvet-yer değiştirme bağıntısı elde edilir.

$$\begin{Bmatrix} F_{Zi} \\ M_{Xi} \\ M_{Yi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q^T F_{zi} \\ Q^T M_{xi} \\ Q^T M_{yi} \end{Bmatrix} = [Q^T {}^{\text{RM}}K_e Q] \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{Xi} \\ \theta_{Yi} \end{Bmatrix} = [{}^{\text{RM}}K_E] \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{Xi} \\ \theta_{Yi} \end{Bmatrix} \tag{2.77}$$

$$[{}^{\text{RM}}K_e] = \int_A [{}^{\text{RM}}B_e]^T [D_e] [{}^{\text{RM}}B_e] dA \tag{2.78}$$

$$\begin{aligned}
[{}^{\text{RM}}B_e] &= \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -N_{1,i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{2,i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_{2,i} & N_{1,i} & 0 \end{Bmatrix} \\
&+ \begin{Bmatrix} 0 & 0 & {}^{\text{RM}}A_{1,i}^{3,x} & {}^{\text{RM}}A_{1,i}^{4,x} & {}^{\text{RM}}A_{1,i}^{5,x} & 0 \\ 0 & 0 & {}^{\text{RM}}A_{2,i}^{3,y} & {}^{\text{RM}}A_{2,i}^{4,y} & {}^{\text{RM}}A_{2,i}^{5,y} & 0 \\ 0 & 0 & ({}^{\text{RM}}A_{2,i}^{3,x} + {}^{\text{RM}}A_{1,i}^{3,y}) & (A_{2,i}^{4,x} + {}^{\text{RM}}A_{1,i}^{4,y}) & ({}^{\text{RM}}A_{2,i}^{5,x} + {}^{\text{RM}}A_{1,i}^{5,y}) & 0 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.79}$$

Burada $[D_e]$, plağın eğilme durumundaki elastik rijitlik matrisidir. ${}^{RM}A_{ndm,i}^{ndf,x(y)}$ fonksiyon değerlerini tekrarlayan işlemler şeklinde olup Ek 3'te verilmiştir.

2.1.3.1.2.2. Dört Düğüm Noktalı Kabuk Elemanın Kayma Şekil Değiştirme

R/M teorisinde enine kayma şekil değiştirmenin enerji ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\Pi_k = \frac{1}{2} \int_{A^e} [\gamma]^T [D_k] [\gamma] dA \quad (2.80)$$

Burada $[\gamma]$ kayma şekil değiştirme matrisi ve $[D_k]$ enine kaymada rijitlik matrisi olup aşağıdaki ifadeyle tanımlanır.

$$[D_k] = \frac{5Et}{12(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

Denklem (2.40)'daki dönüşüm matrisi ve denklem (2.95)'teki kayma şekil değiştirme ifadeleri denklem (2.80)'de verilen enerji ifadesinde yerine yazılıp minimum enerji ilkesi uygulanırsa kayma terimleri için aşağıdaki kuvvet-yer değiştirme bağıntısı elde edilir.

$$\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q^T q_x \\ Q^T q_y \end{Bmatrix} = [Q^T {}^{RM}K_k Q] \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{Xi} \\ \theta_{Yi} \end{Bmatrix} = [{}^{RM}K_k] \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{Xi} \\ \theta_{Yi} \end{Bmatrix} \quad (2.82)$$

$$[{}^{RM}K_k] = \int_A [{}^{RM}B_k]^T [D_k] [{}^{RM}B_k] dA \quad (2.83)$$

Burada $[{}^{RM}K_k]$, plağın enine kayma yönündeki rijitlik matrisidir.

Teğetsel doğrultu boyunca her bir kenarın enine kayma şekil değiştirmesi (γ_{sz}) sabittir. Formülasyonda basitlik sağlaması açısından γ_{sz} , γ_s ile ve benzer şekilde γ_{xz} , γ_x ile ve γ_{yz} , γ_y ile gösterilmiştir. Denklem (2.5)'ten kayma şekil değiştirmeler için

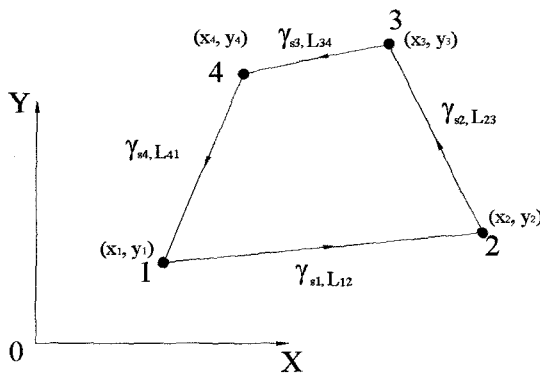
$$\begin{aligned}
\gamma_{s1} &= -\frac{f(t)_1}{L_{12}} \left[2(w_1 - w_2) + (c_1 \theta_{x1} - b_1 \theta_{y1}) + (c_1 \theta_{x2} - b_1 \theta_{y2}) \right], \\
\gamma_{s2} &= -\frac{f(t)_2}{L_{23}} \left[2(w_2 - w_3) + (c_2 \theta_{x2} - b_2 \theta_{y2}) + (c_2 \theta_{x3} - b_2 \theta_{y3}) \right], \\
\gamma_{s3} &= -\frac{f(t)_3}{L_{34}} \left[2(w_3 - w_4) + (c_3 \theta_{x3} - b_3 \theta_{y3}) + (c_3 \theta_{x4} - b_3 \theta_{y4}) \right], \\
\gamma_{s4} &= -\frac{f(t)_4}{L_{41}} \left[2(w_4 - w_1) + (c_4 \theta_{x4} - b_4 \theta_{y4}) + (c_4 \theta_{x1} - b_4 \theta_{y1}) \right],
\end{aligned} \tag{2.84}$$

bağıntıları elde edilir. Burada, Şekil 2.8'de görüldüğü gibi, γ_{si} ($i=1,2,3,4$) i . kenar boyunca kayma şekil değiştirmeler ve L_{ij} ($ij=12,23,34,41$) i . kenar uzunluğudur. Ayrıca $f(t)_i$, b_i ve c_i 'ler,

$$f(t)_i = \frac{(t/L_{ij})^2}{\frac{5}{6}(1-\nu) + 2(t/L_{ij})^2}, \tag{2.85}$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= y_1 - y_2 & c_1 &= x_1 - x_2 \\
b_2 &= y_2 - y_3 & c_2 &= x_2 - x_3 \\
b_3 &= y_3 - y_4 & c_3 &= x_3 - x_4 \\
b_4 &= y_4 - y_1 & c_4 &= x_4 - x_1
\end{aligned}
\quad \begin{aligned}
\cos(s_{ij}, x) &= c_i / L_{ij} \\
\sin(s_{ij}, y) &= -b_i / L_{ij}
\end{aligned}$$

bağıntıları ile verilir.



Şekil 2.8. Dört düğüm noktalı eleman kenarı boyunca kayma şekil değiştirmeler

Kenarın tamamı için kayma şekil değiştirme değeri,

$$\begin{aligned} \gamma_{si}^* &= L_{ij} \gamma_{sj} \\ \{\gamma_s^*\} &= [\gamma_{s1}^* \quad \gamma_{s2}^* \quad \gamma_{s3}^* \quad \gamma_{s4}^*]^T \end{aligned} \quad (2.86)$$

şeklinde yazılır. Daha sonra aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$\{\gamma_s^*\} = [\Gamma] \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \quad (2.87)$$

Burada,

$$[\Gamma] = \begin{bmatrix} -2\delta_1 & -c_1\delta_1 & b_1\delta_1 & 2\delta_1 & -c_1\delta_1 & b_1\delta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\delta_2 & -c_2\delta_2 & b_2\delta_2 & 2\delta_2 & -c_2\delta_2 & b_2\delta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\delta_3 & -c_3\delta_3 & b_3\delta_3 & 2\delta_3 & -c_3\delta_3 & b_3\delta_3 \\ 2\delta_4 & -c_4\delta_4 & b_4\delta_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\delta_4 & -c_4\delta_4 & b_4\delta_4 \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

Düğüm noktasında kayma şekil değiştirmeler

Geometrik ilişkiden düğüm noktalarındaki kayma şekil değiştirme bağıntıları

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \gamma_{x1} \\ \gamma_{y1} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{b_4c_1 - b_1c_4} \begin{bmatrix} b_4 & -b_1 \\ c_4 & -c_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{s1}^* \\ \gamma_{s4}^* \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \gamma_{x2} \\ \gamma_{y2} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{b_1c_2 - b_2c_1} \begin{bmatrix} b_1 & -b_2 \\ c_1 & -c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{s2}^* \\ \gamma_{s1}^* \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \gamma_{x3} \\ \gamma_{y3} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{b_2c_3 - b_3c_2} \begin{bmatrix} b_2 & -b_3 \\ c_2 & -c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{s3}^* \\ \gamma_{s2}^* \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \gamma_{x4} \\ \gamma_{y4} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{b_3c_4 - b_4c_3} \begin{bmatrix} b_3 & -b_4 \\ c_3 & -c_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{s4}^* \\ \gamma_{s3}^* \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.89)$$

şeklinde elde edilir (Soh vd., 2001). Bu bağıntılardan kayma şekil değiştirmelerin x ve y koordinatlarındaki değerleri aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned} \{\gamma_{xi}\} &= [X_s] \{\gamma_{si}^*\}, \\ \{\gamma_{yi}\} &= [Y_s] \{\gamma_{si}^*\}, \end{aligned} \quad (2.90)$$

Bu ifadeler matris formunda

$$\begin{aligned} \{\gamma_{xi}\} &= [\gamma_{x1} \quad \gamma_{x2} \quad \gamma_{x3} \quad \gamma_{x4}]^T \\ \{\gamma_{yi}\} &= [\gamma_{y1} \quad \gamma_{y2} \quad \gamma_{y3} \quad \gamma_{y4}]^T \end{aligned} \quad (2.91)$$

$$[X_s] = \begin{bmatrix} \frac{b_4}{b_4c_1 - b_1c_4} & 0 & 0 & \frac{-b_1}{b_4c_1 - b_1c_4} \\ \frac{-b_2}{b_1c_2 - b_2c_1} & \frac{b_1}{b_1c_2 - b_2c_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-b_3}{b_2c_3 - b_3c_2} & \frac{b_2}{b_2c_3 - b_3c_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-b_4}{b_3c_4 - b_4c_3} & \frac{b_3}{b_3c_4 - b_4c_3} \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

$$[Y_s] = \begin{bmatrix} \frac{c_4}{b_4c_1 - b_1c_4} & 0 & 0 & \frac{-c_1}{b_4c_1 - b_1c_4} \\ \frac{-c_2}{b_1c_2 - b_2c_1} & \frac{c_1}{b_1c_2 - b_2c_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-c_3}{b_2c_3 - b_3c_2} & \frac{c_2}{b_2c_3 - b_3c_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-c_4}{b_3c_4 - b_4c_3} & \frac{c_3}{b_3c_4 - b_4c_3} \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

şeklinde yazılır.

Eleman içindeki kayma şekil değiştirme alanı için interpolasyon formülasyonu

Eleman içindeki kayma şekil değiştirmeler γ_x ve γ_y , düğüm noktalarındaki kayma şekil değiştirmeler cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$\begin{aligned} \gamma_x &= \gamma_{x1}N_1 + \gamma_{x2}N_2 + \gamma_{x3}N_3 + \gamma_{x4}N_4 \\ \gamma_y &= \gamma_{y1}N_1 + \gamma_{y2}N_2 + \gamma_{y3}N_3 + \gamma_{y4}N_4 \end{aligned} \quad (2.94)$$

Böylece denklem (2.87) ve (2.90), denklem (2.94)'te yerine yazılırsa kayma şekil değiştirme matrisi

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [N_s] & [X_s] & [\Gamma] \\ [N_s] & [Y_s] & [\Gamma] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} = [B_k] \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \quad (2.95)$$

şeklinde elde edilmektedir. Burada kayma şekil değiştirme-yer değiştirme matrisi $[B_k]$,

$$[B_k] = \begin{bmatrix} [N_s] & [X_s] & [\Gamma] \\ [N_s] & [Y_s] & [\Gamma] \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

$$[N_s] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]$$

şeklinde tanımlanır.

2.1.3.1.3. Dört Düğüm Noktalı Kabuk Eleman için Rijitlik Matrisi

Dört düğüm noktalı eleman için eleman rijitlik matrisi, membran eleman rijitlik matrisi, plak elemanın eğilme rijitlik matrisi ve plak elemanın kayma rijitlik matrisinin cebirsel toplamı şeklinde verilmektedir.

$${}^{RM}[K]_T = [K_D] + [{}^{RM}K_E] + [{}^{RM}K_K] \quad (2.97)$$

Denklem (2.97)'nin hesabında membran, eğilme ve kayma terimlerinde teorik gereksinimi sağlamak için 2x2 Gauss integrasyon noktası kullanılmıştır. Dört düğüm noktalı kabuk eleman için statik denge denklemi membran ve eğilme kısmın toplanmasıyla aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\{F\} = {}^{RM}[K]_T \{U\}$$

veya

$$\begin{Bmatrix} F_{Xi} \\ F_{Yi} \\ F_{Zi} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = {}^{RM}[K]_T \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix}, i = 1, 2, 3, 4 \quad (2.98)$$

Bu elemanda da Kirchhoff plak teorisinde olduğu gibi toplam 24 serbestlik derecesi vardır.

2.1.3.2. Beş Dügüm Noktalı 4/5 Kenarlı Kabuk Eleman (SRMP)

Bu eleman için de önce membran eleman MEP, sonra da DRMP plak elemanı geliştirilecektir.

2.1.3.2.1. Beş Dügüm Noktalı Kabuk Eleman için Membran Eleman (MEP)

Beş düğüm noktalı eleman için R/M eleman formülasyonunda kullanılan membran kısım (MEP) bölüm 2.1.2.2.1'de Kirchhoff teorisi için geliştirilen formülasyonla aynıdır. Bu nedenle tekrar çıkarılmamıştır.

2.1.3.2.2. Beş Dügüm Noktalı 4/5 Kenarlı Plak Eleman (DRMP)

2.1.3.2.2.1. Beş Dügüm Noktalı Kabuk Elemanın Eğilmesi

Beş düğüm noktalı 4/5 kenarlı eleman için R/M teorisinde elde edilen denklemler aynı eleman için Kirchhoff teorisi kullanılarak elde edilen denklemlere benzemektedir. Aradaki fark kullanılan fonksiyonların kabuğun kalınlığına da bağlı olmasıdır. Kalınlığa bağlı bu fonksiyonlar aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\begin{aligned}
{}^{\text{RM}}T_{w,1}^x(t) &= \frac{1.5}{L_{ij}} f(t) S_1 N_6 - \frac{1.5}{L_{ij}} f(t) S_5 N_{10} \\
{}^{\text{RM}}T_{\theta_x,1}^x(t) &= \left(\frac{1}{2} C_1 S_1 + \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_1 C_1 \right) N_6 + \left(\frac{1}{2} C_5 S_5 + \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_5 C_5 \right) N_{10} \\
{}^{\text{RM}}T_{\theta_y,1}^x(t) &= - \left(\frac{1}{2} C_1^2 - \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_1^2 \right) N_6 - \left(\frac{1}{2} C_5^2 - \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_5^2 \right) N_{10} - N_1 \\
{}^{\text{RM}}T_{w,2}^x(t) &= \frac{1.5}{L_{ij}} f(t) S_3 N_8 - \frac{1.5}{L_{ij}} f(t) S_2 N_7 \\
{}^{\text{RM}}T_{\theta_x,2}^x(t) &= \left(\frac{1}{2} C_3 S_3 + \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_3 C_3 \right) N_8 + \left(\frac{1}{2} C_2 S_2 + \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_2 C_2 \right) N_7 \\
{}^{\text{RM}}T_{\theta_y,2}^x(t) &= - \left(\frac{1}{2} C_3^2 - \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_3^2 \right) N_8 - \left(\frac{1}{2} C_2^2 - \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_2^2 \right) N_7 - N_2 \\
{}^{\text{RM}}T_{w,3}^x(t) &= \frac{1.5}{L_{ij}} f(t) S_4 N_9 - \frac{1.5}{L_{ij}} f(t) S_3 N_8 \\
{}^{\text{RM}}T_{\theta_x,3}^x(t) &= \left(\frac{1}{2} C_4 S_4 + \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_4 C_4 \right) N_9 + \left(\frac{1}{2} C_3 S_3 + \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_3 C_3 \right) N_8 \\
{}^{\text{RM}}T_{\theta_y,3}^x(t) &= - \left(\frac{1}{2} C_4^2 - \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_4^2 \right) N_9 - \left(\frac{1}{2} C_3^2 - \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_3^2 \right) N_8 - N_3 \\
{}^{\text{RM}}T_{w,4}^x(t) &= \frac{1.5}{L_{ij}} f(t) S_5 N_{10} - \frac{1.5}{L_{ij}} f(t) S_4 N_9 \\
{}^{\text{RM}}T_{\theta_x,4}^x(t) &= \left(\frac{1}{2} C_5 S_5 + \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_5 C_5 \right) N_{10} + \left(\frac{1}{2} C_4 S_4 + \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_4 C_4 \right) N_9 \\
{}^{\text{RM}}T_{\theta_y,4}^x(t) &= - \left(\frac{1}{2} C_5^2 - \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_5^2 \right) N_{10} - \left(\frac{1}{2} C_4^2 - \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_4^2 \right) N_9 - N_4 \\
{}^{\text{RM}}T_{w,5}^x(t) &= \frac{1.5}{L_{ij}} f(t) S_2 N_7 - \frac{1.5}{L_{ij}} f(t) S_1 N_6 \\
{}^{\text{RM}}T_{\theta_x,5}^x(t) &= \left(\frac{1}{2} C_2 S_2 + \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_2 C_2 \right) N_7 + \left(\frac{1}{2} C_1 S_1 + \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_1 C_1 \right) N_6 \\
{}^{\text{RM}}T_{\theta_y,5}^x(t) &= - \left(\frac{1}{2} C_2^2 - \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_2^2 \right) N_7 - \left(\frac{1}{2} C_1^2 - \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_1^2 \right) N_6 - N_5
\end{aligned} \tag{2.99}$$

$$\begin{aligned}
{}^{RM}T_{w,1}^y(t) &= -\frac{1.5}{L_{ij}}f(t)C_1N_6 + \frac{1.5}{L_{ij}}f(t)C_5N_{10} \\
{}^{RM}T_{\theta_x,1}^y(t) &= \left(\frac{1}{2}S_1^2 - \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)C_1^2\right)N_6 + \left(\frac{1}{2}S_5^2 - \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)C_5^2\right)N_{10} + N_1 \\
{}^{RM}T_{\theta_y,1}^y(t) &= -\left(\frac{1}{2}C_1S_1 + \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)S_1C_1\right)N_6 - \left(\frac{1}{2}C_5S_5 + \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)S_5C_5\right)N_{10} \\
{}^{RM}T_{w,2}^y(t) &= -\frac{1.5}{L_{ij}}f(t)C_3N_8 + \frac{1.5}{L_{ij}}f(t)C_2N_7 \\
{}^{RM}T_{\theta_x,2}^y(t) &= \left(\frac{1}{2}S_3^2 - \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)C_3^2\right)N_8 + \left(\frac{1}{2}S_2^2 - \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)C_2^2\right)N_7 + N_2 \\
{}^{RM}T_{\theta_y,2}^y(t) &= -\left(\frac{1}{2}C_3S_3 + \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)S_3C_3\right)N_8 - \left(\frac{1}{2}C_2S_2 + \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)S_2C_2\right)N_7 \\
{}^{RM}T_{w,3}^y(t) &= -\frac{1.5}{L_{ij}}f(t)C_4N_9 + \frac{1.5}{L_{ij}}f(t)C_3N_8 \\
{}^{RM}T_{\theta_x,3}^y(t) &= \left(\frac{1}{2}S_4^2 - \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)C_4^2\right)N_9 + \left(\frac{1}{2}S_3^2 - \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)C_3^2\right)N_8 + N_3 \\
{}^{RM}T_{\theta_y,3}^y(t) &= -\left(\frac{1}{2}C_4S_4 + \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)S_4C_4\right)N_9 - \left(\frac{1}{2}C_3S_3 + \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)S_3C_3\right)N_8 \\
{}^{RM}T_{w,4}^y(t) &= -\frac{1.5}{L_{ij}}f(t)C_5N_{10} + \frac{1.5}{L_{ij}}f(t)C_4N_9 \\
{}^{RM}T_{\theta_x,4}^y(t) &= \left(\frac{1}{2}S_5^2 - \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)C_5^2\right)N_{10} + \left(\frac{1}{2}S_4^2 - \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)C_4^2\right)N_9 + N_4 \\
{}^{RM}T_{\theta_y,4}^y(t) &= -\left(\frac{1}{2}C_5S_5 + \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)S_5C_5\right)N_{10} - \left(\frac{1}{2}C_4S_4 + \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)S_4C_4\right)N_9 \\
{}^{RM}T_{w,5}^y(t) &= -\frac{1.5}{L_{ij}}f(t)C_2N_7 + \frac{1.5}{L_{ij}}f(t)C_1N_6 \\
{}^{RM}T_{\theta_x,5}^y(t) &= \left(\frac{1}{2}S_2^2 - \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)C_2^2\right)N_7 + \left(\frac{1}{2}S_1^2 - \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)C_1^2\right)N_6 + N_5 \\
{}^{RM}T_{\theta_y,5}^y(t) &= -\left(\frac{1}{2}C_2S_2 + \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)S_2C_2\right)N_7 - \left(\frac{1}{2}C_1S_1 + \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)S_1C_1\right)N_6
\end{aligned} \tag{2.100}$$

2.1.3.2.2.2. Beş Dügüm Noktalı Kabuk Elemanın Kayma Şekil Değiştirmesi

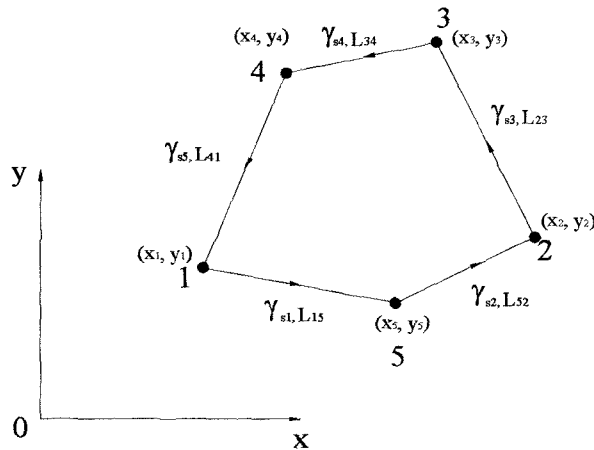
Beş düğüm noktalı 4/5 kenarlı elemanda, her bir kenarın enine kayma şekil değiştirmesi (γ_{sz}) teğetsel doğrultu boyunca sabittir. Formülasyonun geliştirilmesinde basitliğin sağlanması için γ_{sz} , γ_s ile, γ_{xz} , γ_x ile ve γ_{yz} , γ_y ile gösterilmiştir. Böylece denklem (2.5)'te verilen kayma şekil değiştirmeler beş düğüm noktalı eleman için

$$\begin{aligned}
\gamma_{s1} &= -\frac{f(t)_1}{L_{15}} \left[2(w_1 - w_5) + (c_1 \theta_{x1} - b_1 \theta_{y1}) + (c_1 \theta_{x5} - b_1 \theta_{y5}) \right], \\
\gamma_{s2} &= -\frac{f(t)_2}{L_{52}} \left[2(w_5 - w_2) + (c_2 \theta_{x5} - b_2 \theta_{y5}) + (c_2 \theta_{x2} - b_2 \theta_{y2}) \right], \\
\gamma_{s3} &= -\frac{f(t)_3}{L_{23}} \left[2(w_2 - w_3) + (c_3 \theta_{x2} - b_3 \theta_{y2}) + (c_3 \theta_{x3} - b_3 \theta_{y3}) \right], \\
\gamma_{s4} &= -\frac{f(t)_4}{L_{34}} \left[2(w_3 - w_4) + (c_4 \theta_{x3} - b_4 \theta_{y3}) + (c_4 \theta_{x4} - b_4 \theta_{y4}) \right], \\
\gamma_{s5} &= -\frac{f(t)_5}{L_{41}} \left[2(w_4 - w_1) + (c_5 \theta_{x4} - b_5 \theta_{y4}) + (c_5 \theta_{x1} - b_5 \theta_{y1}) \right],
\end{aligned} \tag{2.101}$$

şeklinde elde edilmiştir. γ_{si} ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) Şekil 2.9’da verildiği gibi i . kenar boyunca kayma şekil değiştirmeleri ve L_{ij} ($ij = 15, 52, 23, 34, 41$) i . kenar uzunluğunu temsil etmektedir. Ayrıca $f(t)_i$, b_i ve c_i ’ler aşağıdaki bağıntılarla tanımlanmıştır.

$$f(t)_i = \frac{(t/L_{ij})^2}{\frac{5}{6}(1-\nu) + 2(t/L_{ij})^2}, \tag{2.102}$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= y_1 - y_5 & c_1 &= x_1 - x_5 \\
b_2 &= y_5 - y_2 & c_2 &= x_5 - x_2 \\
b_3 &= y_2 - y_3, & c_3 &= x_2 - x_3, \\
b_4 &= y_3 - y_4 & c_4 &= x_3 - x_4 \\
b_5 &= y_4 - y_1 & c_5 &= x_4 - x_1
\end{aligned} \quad \begin{aligned}
\cos(s_{ij}, x) &= c_i / L_{ij} \\
\sin(s_{ij}, y) &= -b_i / L_{ij}
\end{aligned}$$



Şekil 2.9. Beş düğüm noktalı eleman kenarı boyunca kayma şekil değiştirmeler

Kenarın tamamı için kayma şekil değiştirme değerleri,

$$\begin{aligned} \gamma_{si}^* &= L_{ij} \gamma_{si} \\ \{\gamma_s^*\} &= [\gamma_{s1}^* \quad \gamma_{s2}^* \quad \gamma_{s3}^* \quad \gamma_{s4}^* \quad \gamma_{s5}^*]^T \end{aligned} \quad (2.103)$$

gibi yazılırsa aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$\{\gamma_s^*\} = [\Gamma] \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{Xi} \\ \theta_{Yi} \end{Bmatrix} \quad (2.104)$$

Burada,

$$[\Gamma] = \begin{bmatrix} -2\delta_1 & -c_1\delta_1 & b_1\delta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\delta_1 & -c_1\delta_1 & b_1\delta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 2\delta_2 & -c_2\delta_{21} & b_2\delta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\delta_2 & -c_2\delta_{21} & b_2\delta_2 \\ 0 & 0 & 0 & -2\delta_3 & -c_3\delta_3 & b_3\delta_3 & 2\delta_3 & -c_3\delta_3 & b_3\delta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\delta_4 & -c_4\delta_4 & -b_4\delta_4 & 2\delta_4 & -c_4\delta_4 & b_4\delta_4 & 0 & 0 & 0 \\ 2\delta_5 & -c_5\delta_5 & b_5\delta_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\delta_5 & -c_5\delta_5 & b_5\delta_5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.105)$$

Düğüm noktasında kayma şekil değiştirmeler

Geometrik ilişkiiden yararlanılarak düğüm noktalarındaki kayma şekil değiştirmeler,

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \gamma_{x1} \\ \gamma_{y1} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{b_5c_1 - b_1c_5} \begin{bmatrix} b_5 & -b_1 \\ c_5 & -c_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{s1}^* \\ \gamma_{s5}^* \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \gamma_{x2} \\ \gamma_{y2} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{b_2c_3 - b_3c_2} \begin{bmatrix} b_2 & -b_3 \\ c_2 & -c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{s3}^* \\ \gamma_{s2}^* \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \gamma_{x3} \\ \gamma_{y3} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{b_3c_4 - b_4c_3} \begin{bmatrix} b_3 & -b_4 \\ c_3 & -c_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{s4}^* \\ \gamma_{s3}^* \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \gamma_{x4} \\ \gamma_{y4} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{b_4c_5 - b_5c_4} \begin{bmatrix} b_4 & -b_5 \\ c_4 & -c_5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{s5}^* \\ \gamma_{s4}^* \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \gamma_{x5} \\ \gamma_{y5} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{b_1c_2 - b_2c_1} \begin{bmatrix} b_1 & -b_2 \\ c_1 & -c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{s2}^* \\ \gamma_{s1}^* \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.106)$$

şeklinde elde edilir (Soh vd., 2001). Yukarıdaki bağıntılardan kayma şekil değiştirmelerin x ve y koordinatlarındaki ifadeleri aşağıdaki gibi genelleştirilir.

$$\begin{aligned}\{\gamma_{xi}\} &= [X_s] \{\gamma_{si}^*\}, \\ \{\gamma_{yi}\} &= [Y_s] \{\gamma_{si}^*\},\end{aligned}\quad (2.107)$$

Bu ifadeler matris formunda

$$\begin{aligned}\{\gamma_{xi}\} &= [\gamma_{x1} \ \gamma_{x2} \ \gamma_{x3} \ \gamma_{x4} \ \gamma_{x5}]^T \\ \{\gamma_{yi}\} &= [\gamma_{y1} \ \gamma_{y2} \ \gamma_{y3} \ \gamma_{y4} \ \gamma_{y5}]^T\end{aligned}\quad (2.108)$$

$$[X_s] = \begin{bmatrix} \frac{b_5}{b_5c_1 - b_1c_5} & 0 & 0 & 0 & -\frac{b_1}{b_5c_1 - b_1c_5} \\ 0 & -\frac{b_3}{b_2c_3 - b_3c_2} & \frac{b_2}{b_2c_3 - b_3c_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{b_4}{b_3c_4 - b_4c_3} & \frac{b_3}{b_3c_4 - b_4c_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{b_5}{b_4c_5 - b_5c_4} & \frac{b_4}{b_4c_5 - b_5c_4} \\ -\frac{b_2}{b_1c_2 - b_2c_1} & \frac{b_1}{b_1c_2 - b_2c_1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\quad (2.109)$$

$$[Y_s] = \begin{bmatrix} \frac{c_5}{b_5c_1 - b_1c_5} & 0 & 0 & 0 & -\frac{c_1}{b_5c_1 - b_1c_5} \\ 0 & -\frac{c_3}{b_2c_3 - b_3c_2} & \frac{c_2}{b_2c_3 - b_3c_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{c_4}{b_3c_4 - b_4c_3} & \frac{c_3}{b_3c_4 - b_4c_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{c_5}{b_4c_5 - b_5c_4} & \frac{c_4}{b_4c_5 - b_5c_4} \\ -\frac{c_2}{b_1c_2 - b_2c_1} & \frac{c_1}{b_1c_2 - b_2c_1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\quad (2.110)$$

şeklinde tekrar yazılabilir.

Eleman içindeki kayma şekil değiştirme alanı için interpolasyon formülasyonu

Eleman içindeki kayma şekil değiştirmeler, γ_x ve γ_y düğüm noktalarındaki şekil değiştirmeler cinsinden aşağıdaki bağıntılarla ifade edilir.

$$\begin{aligned}\gamma_x &= \gamma_{x1}N_1 + \gamma_{x2}N_2 + \gamma_{x3}N_3 + \gamma_{x4}N_4 + \gamma_{x5}N_5 \\ \gamma_y &= \gamma_{y1}N_1 + \gamma_{y2}N_2 + \gamma_{y3}N_3 + \gamma_{y4}N_4 + \gamma_{y5}N_5\end{aligned}\quad (2.111)$$

Böylece denklem (2.103) ve (2.107)'deki ifadeler, denklem (2.111)'de yerine yazılırsa kayma şekil değiştirme matrisi

$$\{Y\} = \begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [N_s] & [X_s] & [\Gamma] \\ [N_s] & [Y_s] & [\Gamma] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} = [B_k] \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \quad (2.112)$$

şeklinde elde edilir. Burada kayma şekil değiştirme-yer değiştirme matrisi $[B_k]$,

$$[B_k] = \begin{bmatrix} [N_s] & [X_s] & [\Gamma] \\ [N_s] & [Y_s] & [\Gamma] \end{bmatrix} \quad (2.113)$$

$$[N_s] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5]$$

bağıntısıyla ifade edilir.

2.1.3.2.3. Beş Düğüm Noktalı Kabuk Eleman için Rijitlik Matrisi

Beş düğüm noktalı kabuk eleman için eleman rijitlik matrisi, membran eleman rijitlik matrisi, plak elemanın eğilme rijitlik matrisi ve plak elemanın kayma rijitlik matrisinin aşağıdaki gibi cebirsel toplamından meydana gelmektedir.

$${}^{RM}[K]_T = [K_D] + [{}^{RM}K_E] + [{}^{RM}K_K] \quad (2.114)$$

Denklem (2.114)'in hesabında teorik gereksinimi sağlamak için membran, eğilme ve kayma terimlerinde 3x3 Gauss integrasyon noktası kullanılmıştır. Daha sonra kuvvet-yer değiştirme ilişkisi

$$\{F\} = {}^{RM}[K]_T \{U\}$$

veya

$$\begin{Bmatrix} F_{Xi} \\ F_{Yi} \\ F_{Zi} \\ M_X \\ M_Y \\ M_{XY} \end{Bmatrix} = {}^{RM}[K]_T \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{Xi} \\ \theta_{Yi} \\ \theta_{Zi} \end{Bmatrix}, i = 1,2,3,4,5 \quad (2.115)$$

şeklinde yazılmaktadır. Burada, Kirchhoff plak teorisinde olduğu gibi bir elemanda toplam 30 serbestlik derecesi vardır.

2.1.3.3. Yedi Düğüm Noktalı 4/6 Kenarlı Kabuk Eleman (SRMS)

Bu bölümde yedi düğüm noktalı 4/6 kenarlı kabuk eleman için önce membran eleman MES, sonra da DRMS plak elemanı geliştirilecektir.

2.1.3.3.1. Yedi Düğüm Noktalı Kabuk Eleman için Membran Eleman (MES)

Yedi düğüm noktalı eleman için R/M teorisi kullanılarak oluşturulan membran elemanı (MES), bölüm 2.1.2.3.1'de Kirchhoff teorisi için elde edilen formülasyonla aynıdır. Bu nedenle burada tekrar elde edilmemiştir.

2.1.3.3.2. Yedi Düğüm Noktalı 4/6 Kenarlı Plak Eleman (DRMS)

2.1.3.3.2.1. Yedi Düğüm Noktalı Kabuk Elemanın Eğilmesi

Yedi düğüm noktalı 4/6 kenarlı eleman için R/M teorisinde elde edilen denklemler aynı eleman için Kirchhoff teorisi kullanılarak elde edilen denklemlerle benzerlik göstermektedir. Aradaki fark kullanılan fonksiyonların kabuğun kalınlığına da bağlı olmasıdır. Kalınlığa bağlı bu fonksiyonlar aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\begin{aligned}
{}^{\text{RM}}T_{w,1}^x(t) &= \frac{1.5}{L_{ij}} f(t) S_1 N_8 - \frac{1.5}{L_{ij}} f(t) S_6 N_{13} \\
{}^{\text{RM}}T_{\theta_x,1}^x(t) &= \left(\frac{1}{2} C_1 S_1 + \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_1 C_1 \right) N_8 + \left(\frac{1}{2} C_6 S_6 + \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_6 C_6 \right) N_{13} \\
{}^{\text{RM}}T_{\theta_y,1}^x(t) &= -\left(\frac{1}{2} C_1^2 - \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_1^2 \right) N_8 - \left(\frac{1}{2} C_6^2 - \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_6^2 \right) N_{13} - N_1 \\
{}^{\text{RM}}T_{w,2}^x(t) &= \frac{1.5}{L_{ij}} f(t) S_3 N_{10} - \frac{1.5}{L_{ij}} f(t) S_2 N_9 \\
{}^{\text{RM}}T_{\theta_x,2}^x(t) &= \left(\frac{1}{2} C_3 S_3 + \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_3 C_3 \right) N_{10} + \left(\frac{1}{2} C_2 S_2 + \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_2 C_2 \right) N_9 \\
{}^{\text{RM}}T_{\theta_y,2}^x(t) &= -\left(\frac{1}{2} C_3^2 - \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_3^2 \right) N_{10} - \left(\frac{1}{2} C_2^2 - \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_2^2 \right) N_9 - N_2 \\
{}^{\text{RM}}T_{w,3}^x(t) &= \frac{1.5}{L_{ij}} f(t) S_4 N_{11} - \frac{1.5}{L_{ij}} f(t) S_3 N_{10} \\
{}^{\text{RM}}T_{\theta_x,3}^x(t) &= \left(\frac{1}{2} C_4 S_4 + \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_4 C_4 \right) N_{11} + \left(\frac{1}{2} C_3 S_3 + \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_3 C_3 \right) N_{10} \\
{}^{\text{RM}}T_{\theta_y,3}^x(t) &= -\left(\frac{1}{2} C_4^2 - \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_4^2 \right) N_{11} - \left(\frac{1}{2} C_3^2 - \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_3^2 \right) N_{10} - N_3 \\
{}^{\text{RM}}T_{w,4}^x(t) &= \frac{1.5}{L_{ij}} f(t) S_6 N_{13} - \frac{1.5}{L_{ij}} f(t) S_5 N_{12} \\
{}^{\text{RM}}T_{\theta_x,4}^x(t) &= \left(\frac{1}{2} C_6 S_6 + \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_6 C_6 \right) N_{13} + \left(\frac{1}{2} C_5 S_5 + \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_5 C_5 \right) N_{12} \\
{}^{\text{RM}}T_{\theta_y,4}^x(t) &= -\left(\frac{1}{2} C_6^2 - \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_6^2 \right) N_{13} - \left(\frac{1}{2} C_5^2 - \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_5^2 \right) N_{12} - N_4 \\
{}^{\text{RM}}T_{w,5}^x(t) &= \frac{1.5}{L_{ij}} f(t) S_2 N_9 - \frac{1.5}{L_{ij}} f(t) S_1 N_8 \\
{}^{\text{RM}}T_{\theta_x,5}^x(t) &= \left(\frac{1}{2} C_2 S_2 + \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_2 C_2 \right) N_9 + \left(\frac{1}{2} C_1 S_1 + \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_1 C_1 \right) N_8 \\
{}^{\text{RM}}T_{\theta_y,5}^x(t) &= -\left(\frac{1}{2} C_2^2 - \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_2^2 \right) N_9 - \left(\frac{1}{2} C_1^2 - \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_1^2 \right) N_8 - N_5 \\
{}^{\text{RM}}T_{w,6}^x(t) &= \frac{1.5}{L_{ij}} f(t) S_5 N_{12} - \frac{1.5}{L_{ij}} f(t) S_4 N_{11} \\
{}^{\text{RM}}T_{\theta_x,6}^x(t) &= \left(\frac{1}{2} C_5 S_5 + \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_5 C_5 \right) N_{12} + \left(\frac{1}{2} C_4 S_4 + \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_4 C_4 \right) N_{11} \\
{}^{\text{RM}}T_{\theta_y,6}^x(t) &= -\left(\frac{1}{2} C_5^2 - \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_5^2 \right) N_{12} - \left(\frac{1}{2} C_4^2 - \frac{1}{2} (1.5f(t)-1) S_4^2 \right) N_{11} - N_6
\end{aligned} \tag{2.116}$$

$$\begin{aligned}
{}^{RM}T_{w,1}^y(t) &= -\frac{1.5}{L_{ij}}f(t)C_1N_8 + \frac{1.5}{L_{ij}}f(t)C_6N_{13} \\
{}^{RM}T_{\theta_x,1}^y(t) &= \left(\frac{1}{2}S_1^2 - \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)C_1^2\right)N_8 + \left(\frac{1}{2}S_5^2 - \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)C_6^2\right)N_{13} + N_1 \\
{}^{RM}T_{\theta_y,1}^y(t) &= -\left(\frac{1}{2}C_1S_1 + \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)S_1C_1\right)N_8 - \left(\frac{1}{2}C_6S_6 + \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)S_6C_6\right)N_{13} \\
{}^{RM}T_{w,2}^y(t) &= -\frac{1.5}{L_{ij}}f(t)C_3N_{10} + \frac{1.5}{L_{ij}}f(t)C_2N_9 \\
{}^{RM}T_{\theta_x,2}^y(t) &= \left(\frac{1}{2}S_3^2 - \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)C_3^2\right)N_{10} + \left(\frac{1}{2}S_2^2 - \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)C_2^2\right)N_9 + N_2 \\
{}^{RM}T_{\theta_y,2}^y(t) &= -\left(\frac{1}{2}C_3S_3 + \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)S_3C_3\right)N_{10} - \left(\frac{1}{2}C_2S_2 + \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)S_2C_2\right)N_9 \\
{}^{RM}T_{w,3}^y(t) &= -\frac{1.5}{L_{ij}}f(t)C_4N_{11} + \frac{1.5}{L_{ij}}f(t)C_3N_{10} \\
{}^{RM}T_{\theta_x,3}^y(t) &= \left(\frac{1}{2}S_4^2 - \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)C_4^2\right)N_{11} + \left(\frac{1}{2}S_3^2 - \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)C_3^2\right)N_{10} + N_3 \\
{}^{RM}T_{\theta_y,3}^y(t) &= -\left(\frac{1}{2}C_4S_4 + \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)S_4C_4\right)N_{11} - \left(\frac{1}{2}C_3S_3 + \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)S_3C_3\right)N_{10} \\
{}^{RM}T_{w,4}^y(t) &= -\frac{1.5}{L_{ij}}f(t)C_6N_{13} + \frac{1.5}{L_{ij}}f(t)C_5N_{12} \\
{}^{RM}T_{\theta_x,4}^y(t) &= \left(\frac{1}{2}S_6^2 - \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)C_6^2\right)N_{13} + \left(\frac{1}{2}S_5^2 - \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)C_5^2\right)N_{12} + N_4 \\
{}^{RM}T_{\theta_y,4}^y(t) &= -\left(\frac{1}{2}C_6S_6 + \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)S_6C_6\right)N_{13} - \left(\frac{1}{2}C_5S_5 + \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)S_5C_5\right)N_{12} \\
{}^{RM}T_{w,5}^y(t) &= -\frac{1.5}{L_{ij}}f(t)C_2N_9 + \frac{1.5}{L_{ij}}f(t)C_1N_8 \\
{}^{RM}T_{\theta_x,5}^y(t) &= \left(\frac{1}{2}S_2^2 - \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)C_2^2\right)N_9 + \left(\frac{1}{2}S_1^2 - \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)C_1^2\right)N_8 + N_5 \\
{}^{RM}T_{\theta_y,5}^y(t) &= -\left(\frac{1}{2}C_2S_2 + \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)S_2C_2\right)N_9 - \left(\frac{1}{2}C_1S_1 + \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)S_1C_1\right)N_8 \\
{}^{RM}T_{w,6}^y(t) &= -\frac{1.5}{L_{ij}}f(t)C_5N_{12} + \frac{1.5}{L_{ij}}f(t)C_4N_{11} \\
{}^{RM}T_{\theta_x,6}^y(t) &= \left(\frac{1}{2}S_5^2 - \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)C_5^2\right)N_{12} + \left(\frac{1}{2}S_4^2 - \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)C_4^2\right)N_{11} + N_6 \\
{}^{RM}T_{\theta_y,6}^y(t) &= -\left(\frac{1}{2}C_5S_5 + \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)S_5C_5\right)N_{12} - \left(\frac{1}{2}C_4S_4 + \frac{1}{2}(1.5f(t)-1)S_4C_4\right)N_{11} \tag{2.117}
\end{aligned}$$

2.1.3.3.2.2. Yedi Dügüm Noktalı Kabuk Elemanın Kayma Şekil Değiştirmesi

Yedi düğüm noktalı 4/6 kenarlı elemanın kenarlarında teğetsel yön boyunca her bir kenarın enine kayma şekil değiştirmesi (γ_{sz}) sabittir. Daha önceden de belirtildiği gibi γ_{sz} ,

γ_s ile, γ_{xz} , γ_x ile ve γ_{yz} , γ_y ile gösterilerek ve denklem (2.5) kullanılarak kayma şekil değiştirmeler için

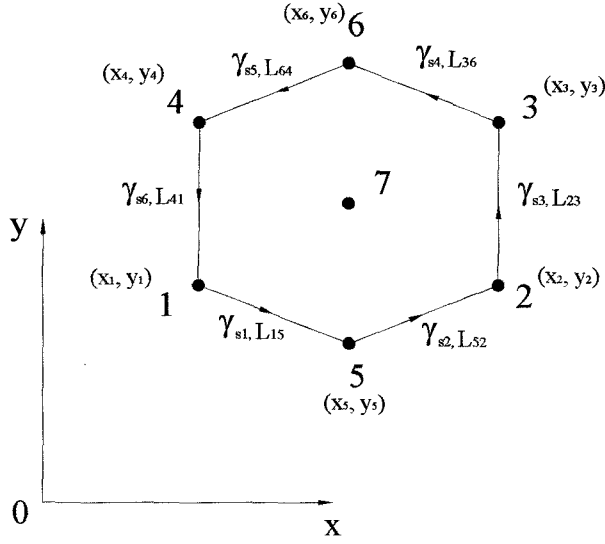
$$\begin{aligned}
 \gamma_{s1} &= -\frac{f(t)_1}{L_{15}} \left[2(w_1 - w_5) + (c_1 \theta_{x1} - b_1 \theta_{y1}) + (c_1 \theta_{x5} - b_1 \theta_{y5}) \right], \\
 \gamma_{s2} &= -\frac{f(t)_2}{L_{52}} \left[2(w_5 - w_2) + (c_2 \theta_{x5} - b_2 \theta_{y5}) + (c_2 \theta_{x2} - b_2 \theta_{y2}) \right], \\
 \gamma_{s3} &= -\frac{f(t)_3}{L_{23}} \left[2(w_2 - w_3) + (c_3 \theta_{x2} - b_3 \theta_{y2}) + (c_3 \theta_{x3} - b_3 \theta_{y3}) \right], \\
 \gamma_{s4} &= -\frac{f(t)_4}{L_{36}} \left[2(w_3 - w_6) + (c_4 \theta_{x3} - b_4 \theta_{y3}) + (c_4 \theta_{x6} - b_4 \theta_{y6}) \right], \\
 \gamma_{s5} &= -\frac{f(t)_5}{L_{64}} \left[2(w_6 - w_4) + (c_5 \theta_{x6} - b_5 \theta_{y6}) + (c_5 \theta_{x4} - b_5 \theta_{y4}) \right], \\
 \gamma_{s6} &= -\frac{f(t)_6}{L_{41}} \left[2(w_4 - w_1) + (c_6 \theta_{x4} - b_6 \theta_{y4}) + (c_6 \theta_{x1} - b_6 \theta_{y1}) \right],
 \end{aligned} \tag{2.118}$$

bağıntıları elde edilir. Burada γ_{si} ($i=1,2,3,4,5,6$) Şekil 2.10'dan kolayca görülebileceği üzere i . kenar boyunca kayma şekil değiştirmeler ve L_{ij} ($ij=15,52,23,36,64,41$) i . kenarın uzunluğudur. Ayrıca $f(t)_i$, b_i ve c_i 'ler,

$$f(t)_i = \frac{(t/L_{ij})^2}{\frac{5}{6}(1-\nu) + 2(t/L_{ij})^2}, \tag{2.119}$$

$$\begin{aligned}
 b_1 &= y_1 - y_5 & c_1 &= x_1 - x_5 \\
 b_2 &= y_5 - y_2 & c_2 &= x_5 - x_2 \\
 b_3 &= y_2 - y_3 & c_3 &= x_2 - x_3 \\
 b_4 &= y_3 - y_6 & c_4 &= x_3 - x_6 \\
 b_5 &= y_6 - y_4 & c_5 &= x_6 - x_4 \\
 b_6 &= y_4 - y_1 & c_6 &= x_4 - x_1
 \end{aligned} \quad \begin{aligned}
 \cos(s_{ij}, x) &= c_i / L_{ij} \\
 \sin(s_{ij}, y) &= -b_i / L_{ij}
 \end{aligned}$$

bağıntıları ile tanımlanmıştır.



Şekil 2.10. Yedi düğüm noktalı elemanın kenarı boyunca kayma şekil değiştirmeler

Eleman kenarının kayma şekil değiştirme değeri,

$$\gamma_{si}^* = L_{ij} \gamma_{si} \quad (2.120)$$

$$\{\gamma_s^*\} = [\gamma_{s1}^* \ \gamma_{s2}^* \ \gamma_{s3}^* \ \gamma_{s4}^* \ \gamma_{s5}^* \ \gamma_{s6}^*]^T$$

ile yazılarak aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$\{\gamma_s^*\} = [\Gamma] \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{X_i} \\ \theta_{Y_i} \end{Bmatrix} \quad (2.121)$$

Burada,

$$[\Gamma] = \begin{bmatrix} -2\delta_1 & -c_1\delta_1 & b_1\delta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\delta_1 & -c_1\delta_1 & b_1\delta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\delta_2 & -c_2\delta_2 & b_2\delta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\delta_2 & -c_2\delta_2 & b_2\delta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\delta_3 & -c_3\delta_3 & b_3\delta_3 & 2\delta_3 & -c_3\delta_3 & b_3\delta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\delta_4 & -c_4\delta_4 & b_4\delta_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\delta_4 & -c_4\delta_4 & b_4\delta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\delta_5 & -c_5\delta_5 & b_5\delta_5 & 0 & 0 & 0 & -2\delta_5 & -c_5\delta_5 & b_5\delta_5 \\ 2\delta_6 & -c_6\delta_6 & b_6\delta_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\delta_6 & -c_6\delta_6 & b_6\delta_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.122)$$

Düğüm noktasında kayma şekil değiştirmeler

Geometrik ilişkiiden yararlanarak düğüm noktalarındaki kayma şekil değiştirmeleri,

$$\begin{cases} \gamma_{x1} \\ \gamma_{y1} \end{cases} = \frac{1}{b_6 c_1 - b_1 c_6} \begin{bmatrix} b_6 & -b_1 \\ c_6 & -c_1 \end{bmatrix} \begin{cases} \gamma_{s1}^* \\ \gamma_{s6}^* \end{cases} \\
\begin{cases} \gamma_{x2} \\ \gamma_{y2} \end{cases} = \frac{1}{b_2 c_3 - b_3 c_2} \begin{bmatrix} b_2 & -b_3 \\ c_2 & -c_3 \end{bmatrix} \begin{cases} \gamma_{s3}^* \\ \gamma_{s2}^* \end{cases} \\
\begin{cases} \gamma_{x3} \\ \gamma_{y3} \end{cases} = \frac{1}{b_3 c_4 - b_4 c_3} \begin{bmatrix} b_3 & -b_4 \\ c_3 & -c_4 \end{bmatrix} \begin{cases} \gamma_{s4}^* \\ \gamma_{s3}^* \end{cases} \\
\begin{cases} \gamma_{x4} \\ \gamma_{y4} \end{cases} = \frac{1}{b_5 c_6 - b_6 c_5} \begin{bmatrix} b_5 & -b_6 \\ c_5 & -c_6 \end{bmatrix} \begin{cases} \gamma_{s6}^* \\ \gamma_{s5}^* \end{cases} \\
\begin{cases} \gamma_{x5} \\ \gamma_{y5} \end{cases} = \frac{1}{b_1 c_2 - b_2 c_1} \begin{bmatrix} b_1 & -b_2 \\ c_1 & -c_2 \end{bmatrix} \begin{cases} \gamma_{s2}^* \\ \gamma_{s1}^* \end{cases} \\
\begin{cases} \gamma_{x6} \\ \gamma_{y6} \end{cases} = \frac{1}{b_4 c_5 - b_5 c_4} \begin{bmatrix} b_4 & -b_5 \\ c_4 & -c_5 \end{bmatrix} \begin{cases} \gamma_{s5}^* \\ \gamma_{s4}^* \end{cases}
\end{cases} \quad (2.123)$$

şeklinde elde edilir (Soh vd., 2001). Bu bağıntılardan kayma şekil değiştirmelerin x ve y koordinatlarındaki ifadeleri aşağıdaki gibi genelleştirilir.

$$\begin{cases} \gamma_{xi} \\ \gamma_{yi} \end{cases} = [X_s] \begin{cases} \gamma_{si}^* \end{cases}, \quad (2.124)$$

Yukarıdaki ifadeler matris formunda

$$\begin{cases} \gamma_{xi} \\ \gamma_{yi} \end{cases} = [\gamma_{x1} \ \gamma_{x2} \ \gamma_{x3} \ \gamma_{x4} \ \gamma_{x5} \ \gamma_{x6}]^T \\
[\gamma_{yi} = [\gamma_{y1} \ \gamma_{y2} \ \gamma_{y3} \ \gamma_{y4} \ \gamma_{y5} \ \gamma_{y6}]^T
\end{cases}$$

$$[X_s] = \begin{bmatrix} \frac{b_6}{b_6 c_1 - b_1 c_6} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{b_1}{b_6 c_1 - b_1 c_6} \\ 0 & -\frac{b_3}{b_2 c_3 - b_3 c_2} & \frac{b_2}{b_2 c_3 - b_3 c_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{b_4}{b_3 c_4 - b_4 c_3} & \frac{b_3}{b_3 c_4 - b_4 c_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{b_6}{b_5 c_6 - b_6 c_5} & \frac{b_5}{b_5 c_6 - b_6 c_5} \\ -\frac{b_2}{b_1 c_2 - b_2 c_1} & \frac{b_1}{b_1 c_2 - b_2 c_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{b_5}{b_4 c_5 - b_5 c_4} & \frac{b_4}{b_4 c_5 - b_5 c_4} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.125)$$

$$[Y_s] = \begin{bmatrix} \frac{c_6}{b_6c_1 - b_1c_6} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{c_1}{b_6c_1 - b_1c_6} \\ 0 & -\frac{c_3}{b_2c_3 - b_3c_2} & \frac{c_2}{b_2c_3 - b_3c_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{c_4}{b_3c_4 - b_4c_3} & \frac{c_3}{b_3c_4 - b_4c_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{c_6}{b_5c_6 - b_6c_5} & \frac{c_5}{b_5c_6 - b_6c_5} \\ -\frac{c_2}{b_1c_2 - b_2c_1} & \frac{c_1}{b_1c_2 - b_2c_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{c_5}{b_4c_5 - b_5c_4} & \frac{c_4}{b_4c_5 - b_5c_4} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.126)$$

şeklinde yazılabilir.

Eleman içindeki kayma şekil değiştirme alanı için interpolasyon formülasyonu

Eleman içindeki kayma şekil değiştirmeleri γ_x ve γ_y , düğüm noktalarındaki şekil değiştirmeleri cinsinden aşağıdaki bağıntılarla ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} \gamma_x &= \gamma_{x1}N_1 + \gamma_{x2}N_2 + \gamma_{x3}N_3 + \gamma_{x4}N_4 + \gamma_{x5}N_5 + \gamma_{x6}N_6 + 0.N_7 \\ \gamma_y &= \gamma_{y1}N_1 + \gamma_{y2}N_2 + \gamma_{y3}N_3 + \gamma_{y4}N_4 + \gamma_{y5}N_5 + \gamma_{y6}N_6 + 0.N_7 \end{aligned} \quad (2.127)$$

Böylece denklem (2.120) ve (2.124), denklem (2.127)'de yerine yazılırsa kayma şekil değiştirme matrisi

$$\{Y\} = \begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [N_s] & [X_s] & [\Gamma] \\ [N_s] & [Y_s] & [\Gamma] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} = [B_k] \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \quad (2.128)$$

şeklinde elde edilir. Burada kayma şekil değiştirme-yer değiştirme matrisi $[B_k]$,

$$\begin{aligned} [B_k] &= \begin{bmatrix} [N_s] & [X_s] & [\Gamma] \\ [N_s] & [Y_s] & [\Gamma] \end{bmatrix} \\ [N_s] &= [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5 \quad N_6] \end{aligned} \quad (2.129)$$

olarak tanımlanır.

2.1.3.3.3. Yedi Dügüm Noktalı Kabuk Eleman için Rijitlik Matrisi

Yedi düğüm noktalı kabuk eleman için eleman rijitlik matrisi, membran eleman rijitlik matrisi, plak elemanın eğilme rijitlik matrisi ve plak elemanın kayma rijitlik matrisinin cebirsel toplamı şeklinde ifade edilebilir.

$${}^{RM}[\mathbf{K}]_T = [\mathbf{K}_D] + [{}^{RM}\mathbf{K}_E] + [{}^{RM}\mathbf{K}_K] \quad (2.130)$$

Denklem (2.130)'un hesabında membran, eğilme ve kayma terimlerinde 4x4 Gauss integrasyon noktası kullanılmıştır. Sonra statik denge denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\{F\} = {}^{RM}[\mathbf{K}]_T \{U\}$$

veya

$$\begin{Bmatrix} F_{Xi} \\ F_{Yi} \\ F_{Zi} \\ M_X \\ M_Y \\ M_{XY} \end{Bmatrix} = {}^{RM}[\mathbf{K}]_T \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{Xi} \\ \theta_{Yi} \\ \theta_{Zi} \end{Bmatrix}, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \quad (2.131)$$

Burada bir eleman, Kirchhoff plak teorisinde olduğu gibi, toplam 42 serbestlik derecesine sahiptir.

2.2. Sayısal Çalışmalar

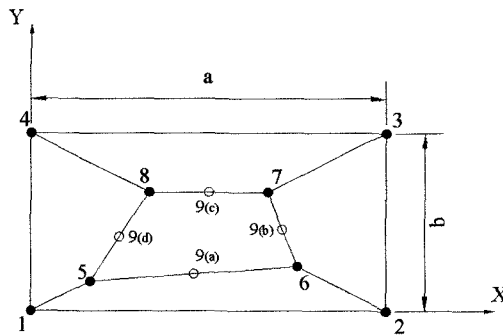
Tezin bu bölümünde geliştirilen elemanların performanslarını denemek için çeşitli testler yapılmıştır. Geliştirilen dört düğüm noktalı 4 kenarlı, beş düğüm noktalı 4/5 kenarlı ve yedi düğüm noktalı 4/6 kenarlı elemanlar ayrı ayrı (düzlem ve plak eleman) veya beraberce (kabuk eleman) test problemlerinde kullanılmıştır. Bu elemanlar ilk önce patch

testine tabi tutulmuş, sonra MacNeal ve Harder (1985) tarafından yayınlanan standart test problemlerine ve daha sonra da amaca yönelik seçilen altı adet probleme uygulanmıştır.

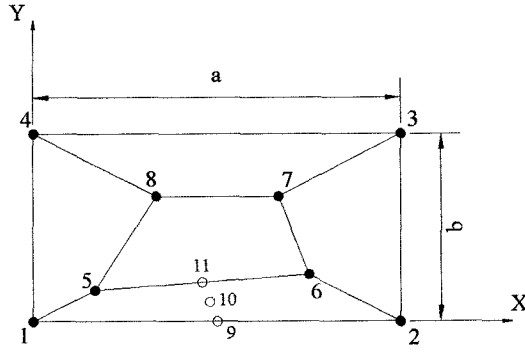
2.2.1. Patch Testi

Patch testi sonlu elemanlar yönteminde elemanın uygunluk ve yakınsama hızını belirlemek için uygulanan basit bir testtir. Şekil 2.11 ve 2.12’de görüldüğü gibi, patch testinde çarpık ağ örgülü elemanlar kullanılmıştır. Patch testleri için problemlerde beş farklı yükleme ve sınır şartları kullanılmıştır. Bunlardan ilk ikisi sırasıyla X ve Y yönündeki sabit şekil değiştirme, üçüncüsü X-Y düzleminde sabit kayma şekil değiştirmesi, son ikisi ise sırasıyla Y yönünde ve X-Y düzleminde sabit eğrilikler elde etmek için kullanıldı.

Şekil 2.11’de dört ve beş düğüm noktalı kabuk eleman ve Şekil 2.12’de ise yedi düğüm noktalı kabuk eleman için patch testinde kullanılan ağ verilmiştir. Patch testleri beş düğüm noktalı eleman için beşinci düğüm noktasının farklı konumları ((a), (b), (c) ve (d) şıkları) ve yedi düğüm noktalı eleman için ise tek bir düğüm noktası konumu kullanılarak ayrı ayrı yapılmıştır. Yedi düğüm noktalı eleman kullanılarak modellenen problemde bu elemana ilave olarak dört ve beş düğüm noktalı eleman kullanılmıştır. Tablo 2.2’de dört ve beş düğüm noktalı elemanın, Tablo 2.3’te ise yedi düğüm noktalı elemanın düğüm noktalarının koordinatları verilirken Tablo 2.4’te gerekli sınır şartları ve yüklemeler listelenmiştir. Bütün patch testlerinde aynı malzeme, $E = 10^6$, $\nu = 0.25$, ve aynı geometrik özellikler, $a = 0.24$, $b = 0.12$ ve $t = 0.001$, kullanılmıştır.



Şekil 2.11. Patch testinde kullanılan dört ve beş düğüm noktalı kabuk eleman için sonlu eleman ağı



Şekil 2.12. Patch testinde kullanılan yedi düğüm noktalı kabuk eleman için sonlu eleman ağı

Tablo 2.2. Dört ve beş düğüm noktalı elemanları için koordinatlar

Düğüm noktası	X	Y	Düğüm noktası	X	Y
1	0.00	0.00	7	0.16	0.08
2	0.24	0.00	8	0.08	0.08
3	0.24	0.12	9(a)	0.11	0.025
4	0.00	0.12	9(b)	0.17	0.055
5	0.04	0.02	9(c)	0.12	0.08
6	0.18	0.03	9(d)	0.06	0.05

Tablo 2.3. Yedi düğüm noktalı eleman için koordinatlar

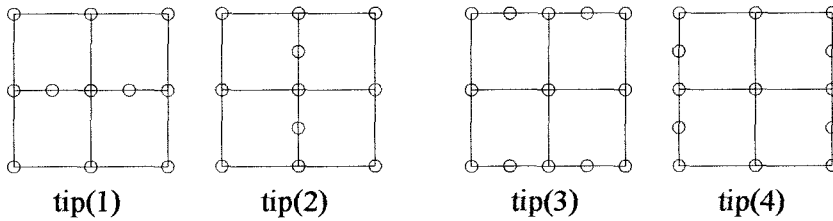
Düğüm noktası	X	Y	Düğüm noktası	X	Y
1	0.00	0.00	7	0.16	0.08
2	0.24	0.00	8	0.08	0.08
3	0.24	0.12	9	0.12	0.00
4	0.00	0.12	10	0.115	0.0125
5	0.04	0.02	11	0.11	0.025
6	0.18	0.03			

Tablo 2.4. Patch testi için yükleme ve sınır şartları

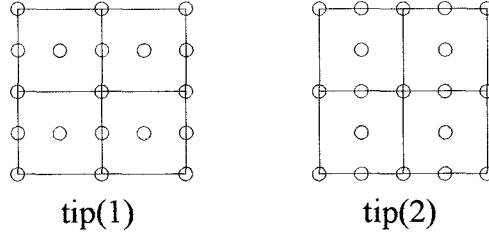
	Düğüm noktalarındaki sınır şartları (1: sabit, 0: serbest)	Düğüm noktalarındaki yüklemeler
X- doğrultusunda sabit şekil değiştirme	1: 1,1,1,0,0,1 2: 0,1,1,0,0,0 4: 1,0,1,0,0,0	2: $F_x = 0.06$; $M_z = -0.0012$ 3: $F_x = 0.06$; $M_z = 0.0012$
Y- doğrultusunda sabit şekil değiştirme	1: 1,1,1,0,0,1 2: 0,1,1,0,0,0 4: 1,0,1,0,0,0	3: $F_y = 0.12$; $M_z = -0.0048$ 4: $F_y = 0.12$; $M_z = 0.0048$ 2: $M_z = 0.0048$
X-Y düzleminde sabit kayma şekil değiştirme	1: 1,1,1,0,1,1 4: 1,0,1,0,0,0	2: $F_x = -0.048$; $F_y = 0.024$ 3: $F_x = 0.048$; $F_y = 0.024$ 4: $F_y = -0.024$
Tek eksenli sabit eğilme	1: 1,1,1,1,1,1 2: 0,0,0,1,0,0 3: 0,0,0,1,0,0 4: 1,0,1,1,1,1	2: $M_y = 5.33 \cdot 10^{-9}$ 3: $M_y = 5.33 \cdot 10^{-9}$
İki eksenli sabit eğilme	1: 1,1,1,1,1,1 2: 0,1,1,0,1,0 4: 1,0,1,1,0,1	2: $M_x = 2 \cdot 10^{-9}$ 3: $M_x = 2 \cdot 10^{-9}$ 3: $M_y = -4 \cdot 10^{-9}$ 4: $M_y = -4 \cdot 10^{-9}$

2.2.2. Düğüm Noktası Konumunun Sonuçlara Etkisi

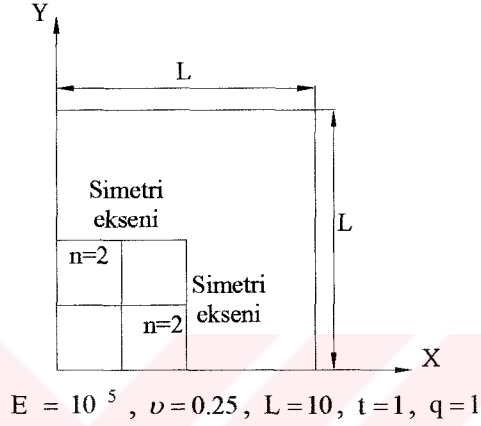
Hem beş düğüm noktalı (Şekil 2.13) hem de yedi düğüm noktalı (Şekil 2.14) kabuk elemanın yöne bağlı bir ağ dizilimine sahip olması sebebiyle yöne bağlı ağ örgüsünün sonuçlara etkisi bir örnek problemle incelenmiştir. Şekil 2.15'te gösterilen plak problemi yayılı yük etkisinde ve basit mesnetli sınır şartlarında dördte biri alınarak modellenmiş ve sonuçlar irdelenmiştir



Şekil 2.13. Beş düğüm noktalı elemanın dizilişi



Şekil 2.14. Yedi düğüm noktalı elemanın dizilişi



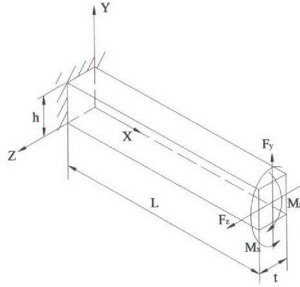
Şekil 2.15. Düzgün ağ örgülü basit mesnetli kare plak ve sonlu eleman modeli

2.2.3. Test Problemleri

Düz kabuk elemanın performansını belirlemek için yedi adet test problemi (MacNeal ve Harder, 1985; Green ve Turkiyyah, 2004) seçilmiş ve denenmiştir. Bunlara ek olarak eleman sayısının, geliştirilen elemanların yakınsama hızlarına etkisi incelenmiştir.

2.2.3.1. Ankastre Kiriş Problemi

Geometri ve yükleme hali Şekil 2.16'da verilen ankastre kirişin serbest ucuna dört farklı yük ayrı ayrı uygulanmıştır. Düzlem içi kuvvet (F_y) ve moment (M_z) düzlem içi kayma şekil değiştirmesi meydana getirirken, düzlem dışı kuvvet (F_z) ve moment (M_x) kabuğun burulmasına sebep olmaktadır. Kiriş problemi için yüklemeler, malzeme ve geometrik özellikler Tablo 2.5'te sunulmuştur.



Şekil 2.16. Düz ankastre kiriş problemi

Tablo 2.5. Düz ankastre kiriş probleminde kullanılan özellikler

Malzeme özellikleri	Geometrik özellikler	Yükleme
$E = 10 \times 10^6$ $\nu = 0.3$	$L = 6$ $h = 0.2$ $t = 0.1$	$F_y = 1$ (a) $F_z = 1$ (b) $M_x = 1$ (c) $M_z = 2$ (d)

Dört düğüm noktalı, beş düğüm noktalı ve yedi düğüm noktalı kabuk elemanlarla oluşturulan ankastre kirişin 6x1 sonlu elemanlar ağı sırasıyla Şekil 2.17, 2.18 ve 2.19'da verilmiştir.



Şekil 2.17. Düz kirişin dört düğüm noktalı SKQ/SRMQ sonlu eleman modeli



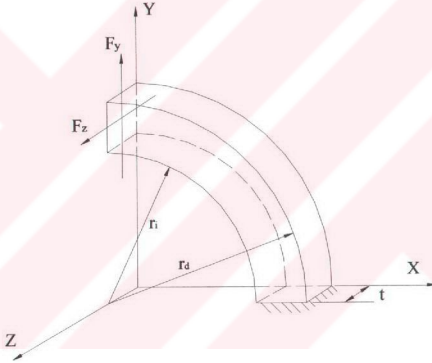
Şekil 2.18. Düz kirişin beş düğüm noktalı SKP/SRMP sonlu eleman modeli



Şekil 2.19. Düz kirişin yedi düğüm noktalı SKS/SRMS sonlu eleman modeli

2.2.3.2. Eğri Kiriş Problemi

Burada sağ ucu ankastre sol ucu serbest olan ve uçları arasında 90° lik açiya sahip kare profilli eğri bir kiriş problemi ele alınmıştır. Yükleme serbest uçtan Y ve Z yönlerinde birim yük şeklinde olup (Şekil 2.20) kirişe ait malzeme ve geometrik özellikler Tablo 2.6'da verilmiştir.

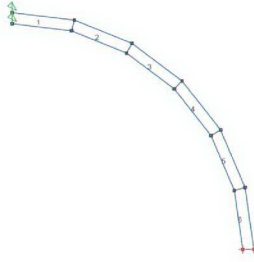


Şekil 2.20. Eğri ankastre kiriş problemi

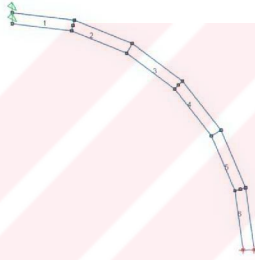
Tablo 2.6. Eğri ankastre kiriş probleminde kullanılan özellikler

Malzeme özellikleri	Geometrik özellikler	Yükleme
$E = 10 \times 10^6$ $\nu = 0.25$	$r_i = 4.12$ $r_d = 4.32$ $t = 0.1$	$F_y = 1$ (a) $F_z = 1$ (b)

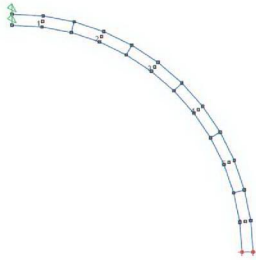
Bu problem için dört düğüm noktalı, beş düğüm noktalı ve yedi düğüm noktalı kabuk elemanlarıyla oluşturulan 6×1 sonlu elemanlar ağı sırasıyla Şekil 2.21, 2.22 ve 2.23'te verilmiştir.



Şekil 2.21. Eğri kirişin dört düğüm noktalı SKQ/SRMQ sonlu eleman modeli



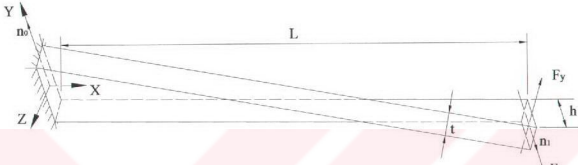
Şekil 2.22. Eğri kirişin beş düğüm noktalı SKP/SRMP sonlu eleman modeli



Şekil 2.23. Eğri kirişin yedi düğüm noktalı SKS/SRMS sonlu eleman modeli

2.2.3.3. Burulmuş Kiriş Problemi

Bu kısımda ele alınan burulmuş kiriş probleminin amacı, çarpık ağ örgülü elemanlar kullanıldığında düzlem şekil değiştirmelerin düzlem içi ve düzlem dışı davranışını incelemektir. Burada ele alınan kirişin boyutları, yükleme durumu ve malzeme özellikleri Şekil 2.24 ve Tablo 2.7’de verilmiştir. Bu testte her bir eleman arasındaki açı 7.5° dir.

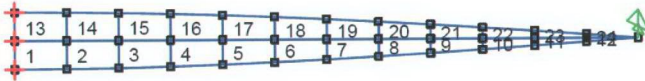


Şekil 2.24. Burulmuş düz ankastre kiriş problemi

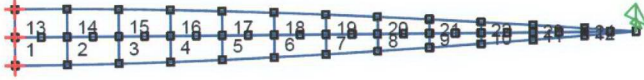
Tablo 2.7. Burulmuş dikdörtgen kesitli ankastre kiriş probleminde kullanılan özellikler

Malzeme özellikleri	Geometrik özellikler	Yükleme
$E = 29 \times 10^6$ $\nu = 0.22$	$L = 12.0$ $h = 1.1$ $t = 0.32$ $\text{Cos}(n_0, n_1) = 90^\circ$	$F_y = 1$ (a) $F_z = 1$ (b)

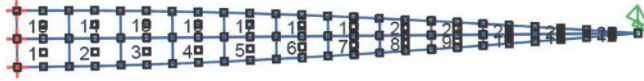
Dört düğüm noktalı, beş düğüm noktalı ve yedi düğüm noktalı kabuk elemanlarıyla burulmuş kiriş problemi için oluşturulan 12x1 sonlu elemanlar ağı, sırasıyla Şekil 2.25, 2.26 ve 2.27’de verilmiştir.



Şekil 2.25. Burulmuş kirişin dört düğüm noktalı SKQ/SRMQ sonlu eleman modeli



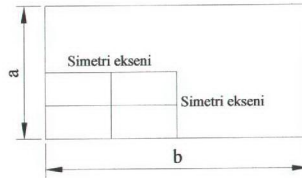
Şekil 2.26. Burulmuş kirişin beş düğüm noktalı SKP/SRMP sonlu eleman modeli



Şekil 2.27. Burulmuş kirişin yedi düğüm noktalı SKS/SRMS sonlu eleman modeli

2.2.3.4. Plak Problemi

Bu testte, dikdörtgen bir plakta (Şekil 2.28) elemanların eğilme davranışının doğruluğu araştırılmıştır. Problemden dikdörtgen bir plağa normal yönünde bir yayılı yük ve merkezi tekil bir yük uygulanmıştır. Ayrıca örnekte, basit mesnet ve ankastre mesnet gibi iki sınır şartı ve iki farklı geometri oranları (t/L) kullanılmıştır. Simetriden dolayı plağın sadece dörtte biri modellenerek, her iki yönde iki eleman kullanılarak toplamda dört elemanla ağ örgüsü kurulmuştur. Tablo 2.8'de bu plak probleminde kullanılan yükleme, geometri ve malzeme özellikleri verilmiştir.

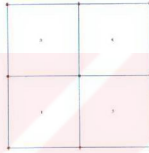


Şekil 2.28. Dikdörtgen plak ve sonlu eleman modeli

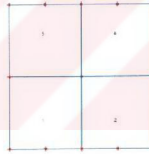
Tablo 2.8. Plak probleminde kullanılan özellikler

Malzeme özellikleri	Geometrik özellikler	Yükleme
$E = 1.742 \times 10^7$ $\nu = 0.3$	$a = 2.0$ $b = 2.0$ (1) $b = 10.0$ (2) $t = 0.0001$	$F_z = 4e-4$ (a) $q = 1e-4$ (b) Basit mesnetli (c) Ankastre mesnetli (d)

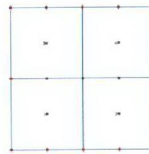
Dört düğüm noktalı, beş düğüm noktalı ve yedi düğüm noktalı kabuk elemanlarıyla oluşturulan 2x2 sonlu elemanlar ağı sırasıyla Şekil 2.29, 2.30 ve 2.31'de verilmiştir.



Şekil 2.29. Plak için dört düğüm noktalı SKQ/SRMQ sonlu eleman modeli



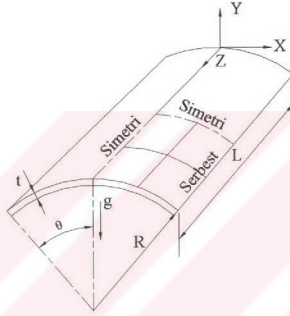
Şekil 2.30. Plak için beş düğüm noktalı SKP/SRMP sonlu eleman modeli



Şekil 2.31. Plak için yedi düğüm noktalı SKS /SRMS sonlu eleman modeli

2.2.3.5 Scordelis-Lo Çatı Problemi

Scordelis-Lo çatı problemi (Şekil 2.32) karmaşık düzlem şekil değiştirmeleri ve eğilmeyi içeren güvenilir bir testtir. Bu problem ayrıca hem düzlem içi hem de düzlem dışı yüklemeleri ihtiva etmektedir. Bu testte ρ yoğunluğundaki yapı kendi ağırlığıyla yüklenmiştir. Çatı her bir uçtan duvarla destekli yan kenarlar ise serbesttir. Bu problem için yükleme, malzeme ve geometrik özellikler Tablo 2.9'da verilmiştir.



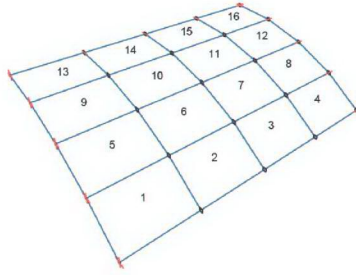
$$u_x = u_y = 0 \text{ eğri kenarlarda}$$

Şekil 2.32. Scordelis-Lo çatı problemi

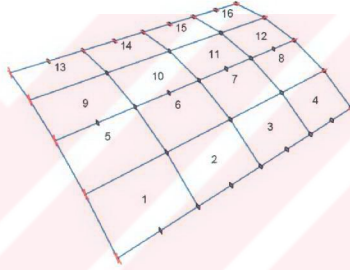
Tablo 2.9. Scordelis-Lo çatı probleminde kullanılan özellikler

Malzeme özellikleri	Geometrik özellikler	Yükleme
$E = 4.32 \times 10^8$ $\nu = 0.0$ $\rho = 36.7347$	$L = 50$ $R = 25$ $t = 0.25$ $\theta = 40^\circ$	$g = 9.8$

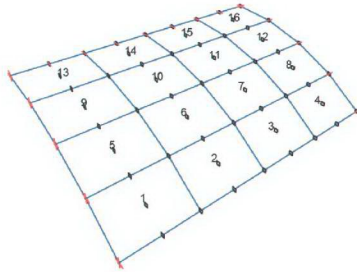
Dört düğüm noktalı, beş düğüm noktalı ve yedi düğüm noktalı kabuk elemanlarıyla oluşturulan 4x4 sonlu elemanlar ağı, sırasıyla Şekil 2.33, 2.34 ve 2.35'te verilmiştir.



Şekil 2.33. Scordelis-Lo çatı için dört düğüm noktalı SKQ/SRMQ sonlu eleman modeli



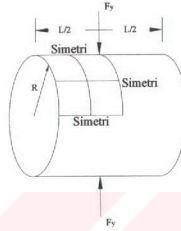
Şekil 2.34. Scordelis-Lo çatı için beş düğüm noktalı SKP/SRMP sonlu eleman modeli



Şekil 2.35. Scordelis-Lo çatı için yedi düğüm noktalı SKS/SRMS sonlu eleman modeli

2.2.3.6. Silindir Problemi

Şekil 2.36'da karşılıklı tekil kuvvet etkisindeki rijit duvarla destekli silindirik bir kabuk problemi verilmektedir. Bu problem eğilme ve düzlem gerilme durumlarını modelleyebilmektedir. Geometrik ve malzeme özellikleri ile yükleme durumu Tablo 2.10'da verilmiştir.

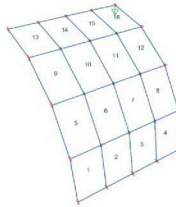


Şekil 2.36. Silindir problemi ve sonlu eleman modeli

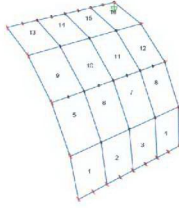
Tablo 2.10. Silindir probleminde kullanılan özellikler

Malzeme özellikleri	Geometrik özellikler	Yükleme
$E = 3.0 \times 10^6$ $\nu = 0.3$	$L = 600$ $R = 300$ $t = 3$	$F_y = 1$

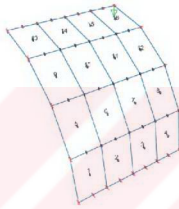
Dört düğüm noktalı, beş düğüm noktalı ve yedi düğüm noktalı kabuk elemanlarıyla oluşturulan 4x4 sonlu elemanlar ağı, sırasıyla Şekil 2.37, 2.38 ve 2.39'da verilmiştir.



Şekil 2.37. Silindir problem için dört düğüm noktalı SKQ/SRMQ sonlu eleman modeli



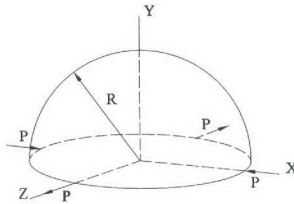
Şekil 2.38. Silindir problem için beş düğüm noktalı SKP/SRMP sonlu eleman modeli



Şekil 2.39. Silindir problem için yedi düğüm noktalı SKS/SRMS sonlu eleman modeli

2.2.3.7. Yarım Küre Kabuk Problemi

Son test problemi olarak Şekil 2.40'ta verilen yarım küre kabuk problemi seçilmiştir. Bu test, çift eğriliğe sahip bir kabuğun çözüm doğruluğunu incelemek için elverişli bir problemdir. Yarım küre kabuğun yükleme durumu ile geometrik ve malzeme özellikleri Tablo 2.11'de verilmiştir.

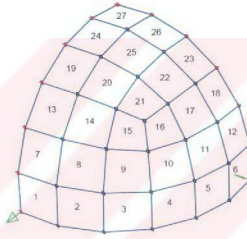


Şekil 2.40. Yarım küre problemi

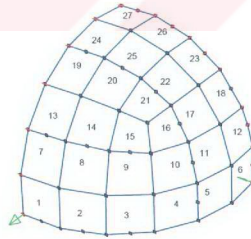
Tablo 2.11. Yarım küre çatı probleminde kullanılan özellikler

Malzeme özellikleri	Geometrik özellikler	Yükleme
$E = 6.825 \times 10^7$ $\nu = 0.3$	$R = 10$ $t = 0.04$	$P = 2$

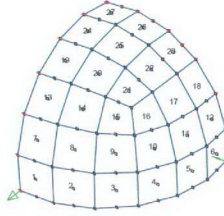
Problemin sonlu elemanlar modeli, simetriden dolayı, yarım kürenin dörtte biri alınarak yapılmıştır. Dört düğüm noktalı, beş düğüm noktalı ve yedi düğüm noktalı kabuk elemanlar oluşturulan 6x6 sonlu elemanlar ağı, sırasıyla Şekil 2.41, 2.42 ve 2.43'te verilmiştir.



Şekil 2.41. Yarım küre problemi için dört düğüm noktalı SKQ/SRMQ sonlu eleman modeli



Şekil 2.42. Yarım küre problemi için beş düğüm noktalı SKP/SRMP sonlu eleman modeli



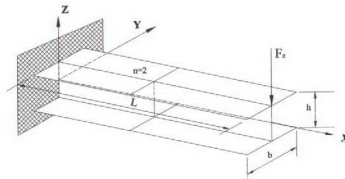
Şekil 2.43. Yarım küre problemi için yedi düğüm noktalı SKS/SRMS sonlu eleman modeli

2.2.4. Amaca Yönelik Bazı Problemler

Buradaki örnek problemlerde bu çalışmada geliştirilen kabuk elemanların, ilk önce kesiti I-profil olan ankastre bir kirişte ağ örgüsünün artmasıyla yakınsama hızları belirlenmiştir. Bu kabuk elemanlar kare, dairesel ve eğri plak örneklerinde kalınlık değişimi, yakınsama hızı, çarpık ağ örgüsü, geçiş elemanlarda ve altıgen ağ örgüsünde test edilmiştir. Daha sonra ise geliştirilen kabuk elemanlar dinamik bir probleme uygulanmıştır.

2.2.4.1. Kesiti I-Profil Olan Ankastre Kiriş

Kesiti I- profil olan ankastre bir kirişe Şekil 2.44'te görüldüğü gibi serbest uçundan tekil yük uygulanmıştır. Bu kirişin yükleme durumu ile geometrik ve malzeme özellikleri Tablo 2.12'de verilmiştir. Ayrıca bölüm sayısı (n) 2, 4 ve 8 olan ağ örgülerinde elemanların yakınsama hızları belirlenmiştir. Bu örnek problemle altıgen ağ örgüsünün performansı da belirlenmiştir.



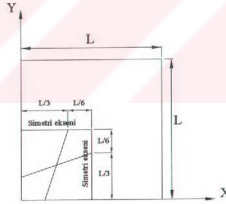
Şekil 2.44. I- profilli ankastre kiriş problemi

Tablo 2.12. I-kesit profiline sahip ankastre kirişin özellikleri

Malzeme özellikleri	Geometrik özellikler	Yükleme
$E = 70 \times 10^9$ $\nu = 0.3$	$L = 1.016$ $t = 6.35 \times 10^{-3}$ $b = 254 \times 10^{-3}$ $h = 127 \times 10^{-3}$ $n = 2$ (bölüm sayısı)	$P = 1780$

2.2.4.2. Kare Plak

Geliştirilen elemanların yakınsama davranışını belirlemek için basit ve ankastre kare bir plak, düzgün birim yayılı yük (q) için incelendi. Bu incelemelerde kabuk elemanların performansı, plağın dörtte biri, düzgün (Şekil 2.15) ve çarpık (Şekil 2.45) ağ örgüsü kullanılarak belirlendi. Plağın merkezindeki yer değiştirmeler, plağın kalınlığına bağlı olarak çok ince (kalınlık/uzunluk: $t/L=10^{-20}$) ve kalın ($t/L=0.30$) plak olması durumları için hesaplanmıştır. Kare plağın geometrik ve malzeme özellikleri ile yükleme durumları Tablo 2.13'te verilmiştir.



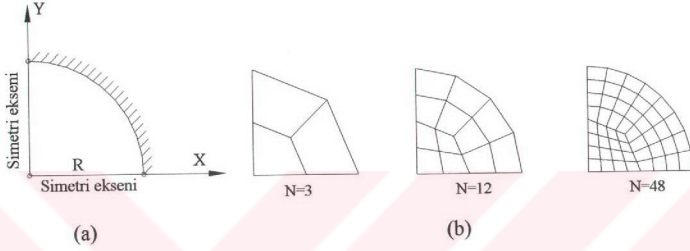
Şekil 2.45. 2x2 çarpık ağ örgülü kare plak sonlu eleman modeli

Tablo 2.13. Kare plak probleminde kullanılan özellikler

Malzeme özellikleri	Geometrik özellikler	Yükleme
$E = 200 \times 10^9$ $\nu = 0.3$	$L = 10$ $t/L = 10^{-20}; 0.001;$ $0.01; 0.1;$ $0.2; 0.3$	$q = -1.0$ (a) $q = -1.0$ (b) (a) : Basit mesnet (b) : Ankastre mesnet

2.2.4.3. Dairesel Plak

Ankastre mesnetli daireysel bir plak (Şekil 2.46a) 3 farklı (eleman sayısı $N=3,12$ ve 48) ağ örgüsünde (Şekil 2.46b) ve düzgün q yayılı yükü altında incelendi. Bu plağın geometrik ve malzeme özellikleri ile yükleme durumu Tablo 2.14'te verilmiştir.



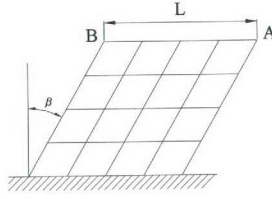
Şekil 2.46. Ankastre daireysel plak ve sonlu elemanlar modeli

Tablo 2.14. Dairesel plak probleminde kullanılan özellikler

Malzeme özellikleri	Geometrik özellikler	Yükleme
$E = 10.92$ $\nu = 0.3$	$R = 5.0$ $t/R = 10^{-20}, 0.001;$ $0.01; 0.1;$ $0.2; 0.3$	$q = -1.0$

2.2.4.4. Eğik Plak

Şekil 2.47'de verilen bir uçundan ankastre ve diğer uçundan düzgün yayılı yük etkisinde olan eğik plak için çözümler, üç farklı eğiklik açısında ($\beta = 20^\circ, 40^\circ$ ve 60°) yapıldı. Örnek problemle ilgili geometrik ve malzeme özellikleri ile yükleme durumu Tablo 2.15'te verilmiştir.



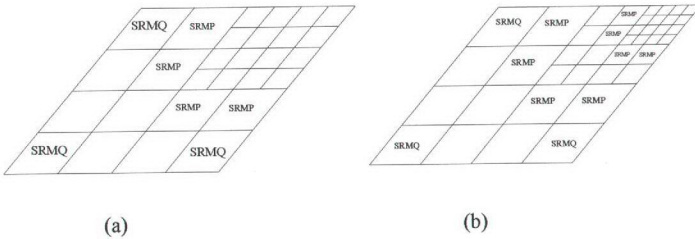
Şekil 2.47. 4x4 ağ örgülü ankastre mesnetli eğik plak ve sonlu elemanlar modeli

Tablo 2.15. Eğik plak probleminde kullanılan özellikler

Malzeme özellikleri	Geometrik özellikler	Yükleme
$E = 200 \times 10^9$ $\nu = 0.3$	$L = 10$ $h = 0.2$ $\beta = 20^\circ, 40^\circ \text{ ve } 60^\circ$	$q = -1.0$

2.2.4.5. Geçiş Elemanı Problemi

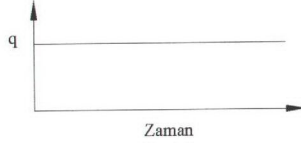
SRMQ elemanı ile 40° 'lik eğik açığa sahip plakta ağ yoğunlaştırılması yapılmıştır. Böylece beş düğüm noktalı SRMP elemanının SRMQ elemanı ile birlikte geçiş elemanı olarak kullanılabilme durumu incelenmiştir. Ağ artırımı maksimum çökmenin olduğu sağ uç noktadan plağın orta noktasına doğru yapılmış ve bu analizlerde kullanılan ağ yapısı Şekil 2.48'de verilmiştir.



Şekil 2.48. 40° açılı eğik plak ve sonlu elemanlar modeli

2.2.4.6. Dinamik Problem

Dinamik problem için SRMQ, SRMP ve SRMS elemanları kullanılarak, Şekil 2.49'da yük- zaman grafiği verilen basit mesnetli kare plak çözümleri yapılmıştır. Problem için yükleme durumu ile geometrik ve malzeme özellikleri Tablo 2.16'da sunulmuştur.



Şekil 2.49. Basit mesnetli kare plak için yük-zaman grafiği

Tablo 2.16. Basit mesnetli kare plak probleminde kullanılan özellikler

Malzeme özellikleri	Geometrik özellikler	Yükleme
$E = 68.947 \times 10^9$ $\nu = 0.3$	$L = 0.254$ $t = 0.0127$	$q = 2.0684 \times 10^6$

3. BULGULAR VE İRDELEMELER

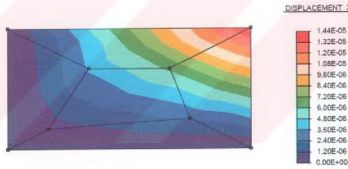
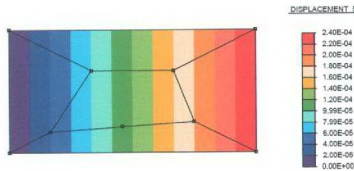
Bu kısımda, bir önceki bölümde belirtilen örnekler çözülmüş ve elde edilen bulgular ve irdelemeleri aşağıda verilmiştir. Eğilme, kayma ve membran rijitlik matrislerinde dört düğüm noktalı eleman için 2×2 , beş düğüm noktalı eleman için 3×3 ve yedi düğüm noktalı eleman için 4×4 Gauss integrasyon noktaları kullanılmıştır. SKQ/SRMQ, SKP/SRMP ve SKS/SRMS ile belirtilen tüm bulgular o problem için sonlu eleman modelinin iki tip formülasyon kullanılarak yapıldığı ve bu iki farklı formülasyonla da aynı sonuçlarının elde edildiğini göstermektedir. Bir başka deyişle R/M plak teorisine göre elde edilen elemanlar, ince plak/kabuk çözümlerinde Kirchhoff plak teorisine yakınsamaktadırlar.

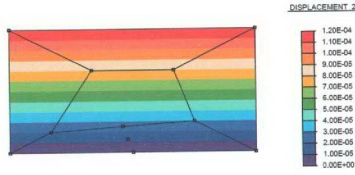
3.1. Patch Testi

Patch testi yeni geliştirilen elemanların yakınsama davranışını ve kararlılığını belirlemek için kullanılan basit bir testtir. Bu test, eleman denklemleri, seçmeli indirgenmiş integrasyon veya artırılmış (yer değiştirme, mixed, hibrid) formülasyonlar içerdiği zaman kullanılmaktadır. Bu çalışmada da yer değiştirme ve artırılmış eleman formülasyonu kullanılarak dört, beş ve yedi düğüm noktalı yeni kabuk elemanlar geliştirildiğinden patch testine tabi tutulmuşlardır. Elde edilen sonuçlardan bütün elemanların patch testini geçtiği görülmüştür. Patch testinde dört düğüm noktalı, beş düğüm noktalı ve yedi düğüm noktalı elemanlar için elde edilen sonuçlar Tablo 3.1'de sunulmuştur. İki eksenli sabit eğilme patch testinde SKQ/SRMQ elemanı için Z yönündeki yer değiştirme dağılımı Şekil 3.1'de ve tek eksenli sabit eğilme durumunda SKP/SRMP elemanı için dönme dağılımı (θ_y) Şekil 3.2'de verilmiştir. Ayrıca sabit şekil değiştirme değeri için SKS/SRMS elemanı kullanıldığında Y yönündeki yer değiştirme dağılımı Şekil 3.3'te sunulmuştur.

Tablo 3.1. Kabuk elemanlar için patch testi sonuçları

	Sabit şekil değiştirme (X-yönü) [$\times 10^{-4}$]	Sabit şekil değiştirme (Y-yönü) [$\times 10^{-4}$]	Sabit kayma şekil değiştirme (XY-düzlemi) [$\times 10^{-4}$]	Tek eksenli sabit eğilme [$\times 10^{-4}$]	İki eksenli sabit eğilme [$\times 10^{-4}$]
SKQ/ SRMQ	u2 = 2.8932 u3 = 2.811 v3 = -1.189	v3 = 1.2 v4 = 1.2	v3 = 2.4	$\theta_{3y} = 2.3985$	$\theta_{3x} = 1.2057$ w3 = 0.144
SKP/ SRMP (a)	u2 = 2.8514 u3 = 2.8109 v3 = -1.159	v3 = 1.2 v4 = 1.2	v3 = 2.4	$\theta_{3y} = 2.3985$	$\theta_{3x} = 1.2064$ w3 = 0.144
SKP/ SRMP (b)	u2 = 2.8933 u3 = 2.8117 v3 = -1.1885	v3 = 1.2 v4 = 1.2	v3 = 2.4	$\theta_{3y} = 2.3985$	$\theta_{3x} = 1.2085$ w3 = 0.144
SKP/ SRMP (c)	u2 = 2.8992 u3 = 2.8475 v3 = -1.2367	v3 = 1.2 v4 = 1.2	v3 = 2.4	$\theta_{3y} = 2.3985$	$\theta_{3x} = 1.2065$ w3 = 0.144
SKP/ SRMP (d)	u2 = 2.8944 u3 = 2.8113 v3 = -1.1875	v3 = 1.2 v4 = 1.2	v3 = 2.4	$\theta_{3y} = 2.3985$	$\theta_{3x} = 1.2097$ w3 = 0.144
SKS/ SRMS	u2 = 3.5045 u3 = 3.480 v3 = -1.3066	v3 = 1.2 v4 = 1.2	v3 = 2.4	$\theta_{3y} = 2.3985$	$\theta_{3x} = 1.210$ w3 = 0.144
ANSYS (Shell 63)	u2 = 2.43614 u3 = 2.36386 v3 = -0.16132	v3 = 1.2 v4 = 1.2	v3 = 2.4	$\theta_{3y} = 2.3985$	$\theta_{3x} = 1.2285$ w3 = 0.144

Şekil 3.1 SKQ/SRMQ kabuk elemanı için Z yönündeki yer
değiştirme dağılımıŞekil 3.2. SKP/SRMP kabuk elemanı için dönme (θ_y) dağılımı



Şekil 3.3. SKS/SRMS kabuk elemanı için Y yönündeki yer değiştirme dağılımı

3.2. Düğüm Noktası Konumu

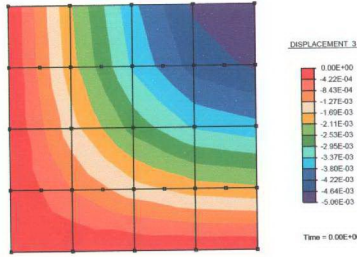
Tablo 3.2 ve 3.3'te sırasıyla beş ve yedi düğüm noktalı kabuk elemanların düğüm noktasının konumuna göre elde edilen yer değiştirme sonuçları sunulmuştur. Ayrıca Şekil 3.4 ve 3.5'te toplam 16 elemanlı tip(1) ve tip(2) için Z yönünde elde edilen yer değiştirme dağılımları verilmiştir. Sonuçlar boyutsuz bir şekilde olup, tablolardan görülebileceği gibi düğüm noktasının konumuna göre önemli bir değişime göstermemektedir.

Tablo 3.2. SRMP elemanı için düğüm noktası konumunun sonuçlara etkisi

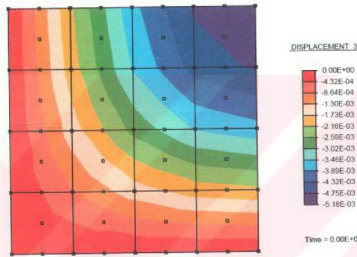
Eleman sayısı	Basit mesnetli kare plakta merkezdeki maksimum çökme oranı (w_{scy} / w_{teo})			
	Tip (1)	Tip (2)	Tip (3)	Tip (4)
4	1.094	1.094	1.074	1.074
16	1.053	1.053	1.053	1.053
36	1.044	1.044	1.046	1.046

Tablo 3.3. SRMS elemanı için düğüm noktası konumunun sonuçlara etkisi

Eleman sayısı	Basit mesnetli kare plakta merkezdeki maksimum çökme oranı (w_{scy} / w_{teo})	
	Tip (1)	Tip (2)
4	1.180	1.180
16	1.077	1.077
36	1.070	1.070



Şekil 3.4. SRMP elemanı için Z yönündeki yer değiştirme dağılımı



Şekil 3.5. SRMS elemanı için Z yönündeki yer değiştirme dağılımı

Bu çalışmada geliştirilen beş ve yedi düğüm noktalı düz kabuk elemanlar (SRMP/SRMS) yön bağımlı olduklarından düğüm noktalarının konumuna göre çözümlerin değişimi incelenmiştir. SRMP ve SRMS elemanlarının beş ve yedi düğüm noktalarının konumlarının çözüme etkisi % hata olarak sırasıyla Tablo 3.4 ve 3.5'te verilmiştir. Sonuçlar, yedi düğüm noktalı düz kabuk elemanın düğüm noktasının konumundan bağımsız olduğunu göstermiştir. Bunun yanında beş düğüm noktalı kabuk eleman içinse Tablo 3.4'ten kolaylıkla görülebileceği gibi, değişimin tip(1) ve tip(2) ile tip(3) ve tip(4) grupları arasında olduğu fakat eleman sayısı arttıkça farkın önemsiz hale geldiği ifade edilebilir. Böylece bu elemanların bu örnek için düğüm noktası konumundan bağımsız oldukları söylenebilir.

Tablo 3.4. SRMP elemanı için % hata değerleri

Eleman sayısı	Hata (%)			
	Tip (1)	Tip (2)	Tip (3)	Tip (4)
4	9.4	9.4	7.4	7.4
16	5.3	5.3	5.3	5.3
36	4.4	4.4	4.6	4.6

Tablo 3.5. SRMS elemanı için % hata değerleri

Eleman sayısı	Hata (%)	
	Tip (1)	Tip (2)
4	18.0	18.0
16	7.7	7.7
36	7.0	7.0

3.3. Test Problemleri

3.3.1. Ankastre Kiriş Problemi

Sağ ucundan yüklenmiş (Şekil 2.16) ve sol ucundan ankastre mesnede sahip kiriş için çarpık 6x1 ağ örgüsü kullanıldığı zaman elde edilen sonuçlar Tablo 3.6'da verilmiştir. Ayrıca Şekil 3.6'da SKQ/SRMQ, Şekil 3.7'de SKP/SRMP ve Şekil 3.8'de SKS/SRMS elemanı kullanıldığında Y yönündeki yer değiştirme dağılımları gösterilmiştir.

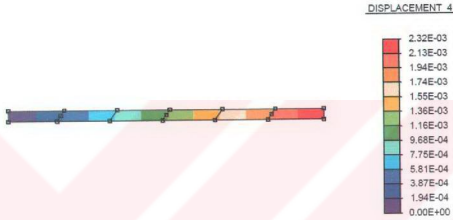
Tablo 3.6'dan görüleceği gibi, Y yönünde, teorik yer değiştirme değerlerine en yakın elemanlar sırasıyla SKS/SRMS (%3.78), SKP/SRMP (%4.01) ve SKQ/SRMQ (%6.12), Z yönünde sırasıyla SKS/SRMS (%0.66), SKP/SRMP (%1.23) ve SKQ/SRMQ (%1.29) olmuşlardır. X yönündeki teorik dönme değerlerine sırasıyla SKS/SRMS (0.236), SKP/SRMP (0.262) ve SKQ/SRMQ (0.270) elemanları daha yakın değerler vermişlerdir. Yani, elemanlardaki düğüm noktası sayısının artmasıyla doğruya daha yakın değerler elde edilmiştir.

Tablo 3.6. Ankastre kirişte farklı yüklemelerde elde edilen yer değiştirmeler

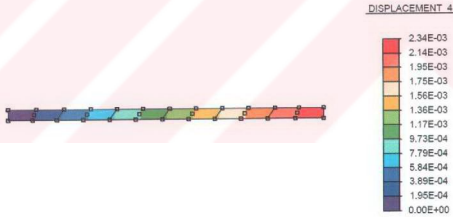
	Teorik	SKQ/SRMQ	SKP/SRMP	SKS/SRMS	ANSYS (Shell 63)	ANSYS (Shell 93)
Y-yönü (F_y)	0.1081	0.10149	0.10377	0.10401	0.0711	0.10736
Y-yönü (M_z)	-0.0054	-0.005161	-0.005297	-0.005240	-0.00403	-0.00537
Z-yönü	0.4321	0.42652	0.42678	0.42924	0.4219	0.4272
Dönme $[\theta_x]$	0.00233	0.0023567	0.0023239	0.0023355	0.002308	0.00298



Şekil 3.6. Ankastré kirişte SKQ/SRMQ elemanı için dönme (θ_x) dağılımı



Şekil 3.7. Ankastré kirişte SKP/SRMP elemanı için dönme (θ_x) dağılımı



Şekil 3.8. Ankastré kirişte SKS/SRMS elemanı için dönme (θ_x) dağılımı

Kirişte Y yönündeki analitik yer değiştirme değeri, F_y kuvvetinden dolayı 0.1081 ($v(F_y)_{teo}$) ve M_z momentinden dolayı -0.0054 ($v(M_z)_{teo}$) dir (Chen, vd., 2004). Bu çalışmada SKQ/SRMQ, SKP/SRMP ve SKS/SRMS elemanları için sayısal olarak elde edilen Y yönündeki yer değiştirme oranları literatürdeki; Q6 (Wilson, vd., 1973), QM6 (Taylor, vd., 1976), P-S (Pian ve Sumihara, 1984), RGD20 (Chen ve Cheugn, 1992), QC6 (Chen ve Tang, 1981), PEAS7 (Andelfinger ve Ramm, 1993), QE2 (Piltner ve Taylor, 1997), B-Q4E (Piltner ve Taylor, 1997), HL (Cook, 1974), PN340 (Bassayya, vd., 2000),

D-type (Ibrahimovic, vd., 1990), Q4S (MacNeal ve Harder, 1988), AQ6-I (Chen, vd., 2004) ve AQ6-II (Chen, vd., 2004), elemanları ile karşılaştırılmış ve Tablo 3.7'de verilmiştir. Tablodaki değerler bu çalışmadaki elemanlar için elde edilen sayısal çözümlerin analitik çözüme oranı şeklinde gösterilmiştir. Tablodan görülebileceği gibi çeşitli elemanlar farklı çözümler sunmaktadır. Bu çalışmada türetilen SKS/SRMS elemanının F_y yükünden dolayı Y yönündeki yer değiştirme değerleri, AQ6-I ve AQ6-II elemanları hariç yine bu çalışmada türetilen SKP/SRMP ve SKQ/SRMQ elemanlarından ve literatürdeki Q6, QM6, P-S, PEAS7, PN340 ve RGD20 elemanlarından daha yüksek doğrulukta olduğu görülmektedir. Literatürdeki AQ6-I ve AQ6-II elemanları moment M_z den dolayı Y yönündeki yer değiştirme değerleri analitik çözümlerle çakışmış, PEAS7, PN340 ve RGD20 elemanları çözüm vermemiş ve bu çalışmada türetilen SKP/SRMP, SKS/SRMS ve SKQ/SRMQ elemanları ise teorik çözüme Q6, QM6 ve P-S elemanlarından daha yakın değerler vermiştir. Bu sonuçlardan görülebileceği gibi SKQ/SRMQ, SKP/SRMP ve SKS/SRMS elemanları literatürdeki AQ6-I ve AQ6-II elemanları hariç diğer elemanlara göre daha doğru sonuçlar vermiştir. Bunun nedeni türetilen elemanlarda burulma rijitlik matrisinin de hesaba katılmış olmasıdır.

Tablo 3.7. Ankastre kiriş için Y yönündeki yer değiştirme oranları

Eleman tipi	$v(F_Y)/v(F_Y)_{teo}$	$v(M_Z)/v(M_Z)_{teo}$
Q6	0.677	0.759
QM6	0.623	0.722
P-S	0.798	0.852
PEAS7	0.795	-
PN340	0.620	-
RGD20	0.625	-
AQ6-I	0.994	1.00
AQ6-II	0.994	1.00
SKQ/SRMQ	0.9389	0.9557
SKP/SRMP	0.9599	0.9810
SKS/SRMS	0.9622	0.9704

3.3.2. Eğri Kiriş Problemi

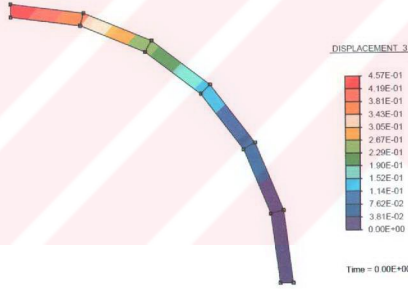
Burada, sağ ucu ankastre ve onunla 90° 'lik açığa sahip sol ucundan Y ve Z yönlerinde birim yük etkisinde kalan kare profilli eğri bir kiriş probleminde elde edilen

bulgular verilmiştir. Bu problemin analizinde 6x1 ağ örgüsü kullanılmış ve dört, beş ve yedi düğüm noktalı elemanlar için analiz sonuçları Tablo 3.8’de sunulmuştur. Şekil 3.9, Şekil 3.10 ve Şekil 3.11’de sırasıyla SKQ/SRMQ, SKP/SRMP ve SKS/SRMS elemanları için Z yönündeki yer değiştirme dağılımları verilmiştir.

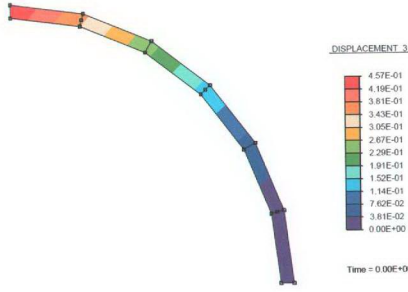
Tablo 3.8’deki sonuçlardan teorik çözüme en yakın değerler Y yönünde sırasıyla SKP/SRMP (%4.14), SKQ/SRMQ (%6.28) ve SKS/SRMS (%11.68) elemanları kullanılarak, Z yönünde ise sırasıyla SKS/SRMS (%6.17), SKP/SRMP (%8.94) ve SKQ/SRMQ (%8.98) elemanları kullanılarak elde edilmiştir.

Tablo 3.8. Eğri ankastre kiriş için yer değiştirmeler

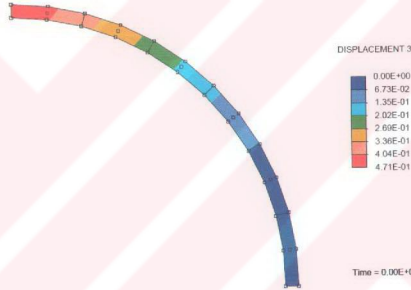
	Teorik	SKQ/SRMQ	SKP/SRMP	SKS/SRMS	ANSYS (Shell 63)	ANSYS (Shell 93)
Y-yönü	0.0873	0.08182	0.08362	0.0771	0.07751	0.08791
Z-yönü	0.5022	0.4571	0.4573	0.4712	0.44853	0.46068



Şekil 3.9. Eğri ankastre kirişte SKQ/SRMQ elemanı için Z yönündeki yer değiştirme dağılımı



Şekil 3.10. Eğri ankastre kirişte SKP/SRMP elemanı için Z yönündeki yer değiştirme dağılımı



Şekil 3.11. Eğri ankastre kirişte SKS/SRMS elemanı için Z yönündeki yer değiştirme dağılımı

Eğri kiriş probleminde kullanılan SKQ/SRMQ, SKP/SRMP ve SKS/SRMS kabuk elemanları literatürdeki DISP (Zienkiewicz ve Lefebvre, 1988) ve ANS6S (Sze ve Zhu, 1999) elemanları ile karşılaştırılmış ve sonuçlar Tablo 3.9'da verilmiştir. DISP ve ANS6S elemanları üçgen elemanlar olup analizlerde toplam 12 eleman kullanılmıştır. Tablodan da kolayca görülebileceği gibi ANS6S elemanının Y ve Z yönündeki yer değiştirme oranları SKQ/SRMQ, SKP/SRMP, SKS/SRMS ve DISP elemanlarından daha yüksek çıkmıştır. SKQ/SRMQ ve SKP/SRMP elemanlarının Y yönündeki yer değiştirmeleri ise DISP elemanın aynı değerinden daha yüksek çıkmış, SKS/SRMS elemanının aynı değeri ise hepsinden düşük çıkmıştır. Z yönündeki yer değiştirme değerlerine gelince, bu çalışmada geliştirilen elemanlarla elde edilen değerler DISP ve ANS6S elemanlarından daha düşük

değerler vermiş, ancak SKS/SRMS elemanı ile SKQ/SRMQ ve SKP/SRMP elemanlarına göre daha yaklaşık sonuçlar bulunmuştur.

Tablo 3.9. Eğri ankastre kiriş için Y ve Z yönündeki yer değiştirme oranları

Eleman tipi	v/v_{teo}	w/w_{teo}
DISP	0.951	0.954
ANS6S	1.000	0.963
SKQ/SRMQ	0.9372	0.9102
SKP/SRMP	0.9579	0.9106
SKS/SRMS	0.8832	0.9383

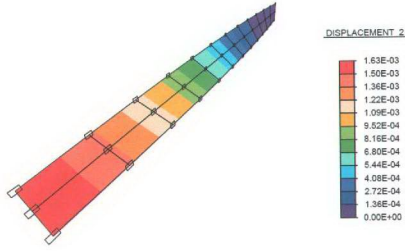
3.3.3. Burulmuş Kiriş Problemi

Bu problemde, burulmuş uçları arasında 90° 'lik açığa sahip dikdörtgen kesitli ankastre kiriş, Y ve Z yönünde birim yükleme ile yüklenmiş ve 12×2 ağ örgüsü için elde edilen bulgular Tablo 3.10'da verilmiştir. Ayrıca, Şekil 3.12, Şekil 3.13 ve Şekil 3.14'te sırasıyla SKQ/SRMQ, SKP/SRMP ve SKS/SRMS elemanı kullanıldığında Y yönündeki yer değiştirme dağılımlarını göstermektedir.

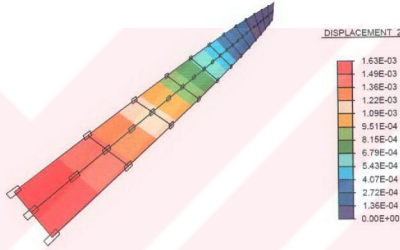
Tablo 3.10'daki sonuçlardan Y yönündeki yer değiştirme değerleri, sırasıyla SKS/SRMS (%2.56), SKQ/SRMQ (%7.11) ve SKP/SRMP (%7.27) elemanları kullanıldığında Z yönündeki yer değiştirme değerleri ise sırasıyla SKS/SRMS (%22.85), SKP/SRMP (%31.95) ve SKQ/SRMQ (%33.62) elemanları kullanıldığında teorik çözüme daha yakın değerler vermektedir.

Tablo 3.10. Burulmuş ankastre kiriş için yer değiştirmeler

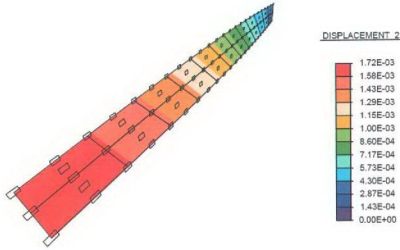
	Teorik [$\times 10^{-3}$]	SKQ/SRMQ [$\times 10^{-3}$]	SKP/SRMP [$\times 10^{-3}$]	SKS/SRMS [$\times 10^{-3}$]	ANSYS (Shell 63) [$\times 10^{-3}$]	ANSYS (Shell 93) [$\times 10^{-3}$]
Y-yönü	1.754	1.6293	1.6265	1.7091	1.699	1.691
Z-yönü	5.424	3.6792	3.7714	4.2762	5.495	5.514



Şekil 3.12. Burulmuş kirişte SKQ/SRMQ elemanı kullanıldığında Y yönündeki yer değiştirme dağılımı



Şekil 3.13. Burulmuş kirişte SKP/SRMP elemanı kullanıldığında Y yönündeki yer değiştirme dağılımı



Şekil 3.14. Burulmuş kirişte SKS/SRMS elemanı kullanıldığında Y yönündeki yer değiştirme dağılımı

Bu örnek çözümünde ise SKQ/SRMQ, SKP/SRMP ve SKS/SRMS elemanları literatürdeki SRI (Hughes ve Liu, 1981), RSDS (Lam ve Liu, 1986), MITCA4 (Bathe ve Dvorkin, 1986), URI (Lam ve Liu, 1986), TRIC (Argyris vd., 2000), Simo vd. (1989-b), Taylor (1988) ve Sauer (1998) ve Gruttmann ve Wagner (2005) elemanları ile Z yönündeki yer değiştirme oranları alınarak karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma sonuçları 12x2 ağ örgüsü için Tablo 3.11’de verilmiştir. Tablodan SRI ve RSDS elemanlarının çözüm vermediği, SKQ/SRMQ, SKP/SRMP ve SKS/SRMS elemanların MITCA4, URI, TRIC, Simo, Taylor, Sauer ve Gruttmann elemanlarına göre daha düşük değerler verdiği görülebilir. Farklı çözümlerin elde edilmesi formülasyonların farklı olması ve amaca yönelik türetilmesinden kaynaklanmaktadır. Bu çalışmada türetilen SKS/SRMS elemanı yine bu çalışmada türetilen SKQ/SRMQ ve SKP/SRMP elemanlarından daha doğru sonuçlar sunmuştur.

Tablo 3.11. Burulmuş ankastre giriş için Z yönündeki yer değiştirme oranları

Eleman tipi	w/w _{teo}
SRI	-
RSDS	-
MITCA4	0.993
URI	1.009
TRIC	0.986
Simo	1.000
Taylor	1.002
Sauer	0.997
Gruttmann	1.006
SKQ/SRMQ	0.678
SKP/SRMP	0.695
SKS/SRMS	0.788

3.3.4. Plak Problemi

Bu testte plak, iki farklı kenar uzunluğunda, iki farklı yükleme durumunda ve iki farklı sınır şartlarında analiz edilmiş ve bulgular % hata cinsinden Tablo 3.12’de verilmiştir. Z yönündeki yer değiştirme dağılımları ise Şekil 3.15, 3.16 ve 3.17’de basit mesnetli, yayılı yük altında, a/b=5 oranında ve 2x2 ağ örgüsüne sahip plak için sırasıyla SKQ/SRMQ, SKP/SRMP ve SKS/SRMS elemanları için gösterilmiştir.

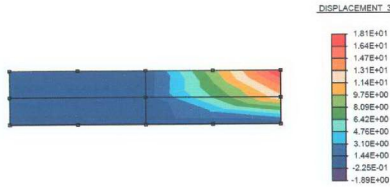
Tablo 3.12'den görüldüğü gibi yer değiştirme sonuçları, $a/b=1$ ve ankastre mesnetli SKS/SRMS plak elemanı dışındaki şartlar için kaba çıkmıştır. Dört ve beş düğüm noktalı SKQ/SRMQ ve SKP/SRMP elemanları için elde edilen çözümler ise birbirlerine yakın hata değerleri vermişlerdir. Özellikle SKQ/SRMQ elemanı, genelde daha doğru sonuçlar vermiştir. ANSYS ticari programında 8 düğüm noktalı 6 serbestlik dereceli Shell 93 kabuk elemanı, aynı programda 4 düğüm noktalı 6 serbestlik dereceli Shell 63 kabuk elemanından ve bu çalışmada türetilen kabuk elemanlarından daha yüksek doğruluklu çözümler vermiştir.

Tablo 3.12. Plak problemi için yer değiştirmeler

Sınır şartı	a/b	Yükleme	Teorik	SKQ/SRMQ	SKP/SRMP	SKS/SRMS	ANSYS (Shell63)	ANSYS (Shell93)
Basit mesnet	1	Yayıllı	4.06	4.057	4.2455	2.556	3.844	4.072
		Tekil	11.6	12.722	12.902	15.072	12.083	11.54
	5	Yayıllı	12.97	12.7	14.12	17.09	12.857	12.937
		Tekil	16.96	17.2	18.1	28.17	15.09	16.956
Ankastre mesnet	1	Yayıllı	1.26	1.46	1.47	1.09	1.37	1.086
		Tekil	5.60	6.42	6.43	9.13	5.997	4.853
	5	Yayıllı	2.56	2.47	2.47	5.05	3.208	3.071
		Tekil	7.23	6.07	6.07	11.3	4.88	6.372



Şekil 3.15. Plak probleminde SKQ/SRMQ elemanı kullanıldığında Z yönündeki yer değiştirme dağılımı



Şekil 3.16. Plak probleminde SKP/SRMP elemanı kullanıldığında Z yönündeki yer değiştirme dağılımı



Şekil 3.17. Plak probleminde SKS/SRMS elemanı kullanıldığında Z yönündeki yer değiştirme dağılımı

3.3.5. Scordelis-Lo Çatı Problemi

Her iki dairesel ucundan basit mesnetli, kendi ağırlığıyla yüklü ve 4x4 ağ örgüsü kullanılarak modellenen Scordelis-Lo çatı çözümleri Tablo 3.13'te verilmiştir. SKQ/SRMQ ve SKP/SRMP elemanları için Y yönündeki yer değiştirme dağılımları Şekil 3.18 ve 3.19'da elde edildiği gibidir. SKS ve SRMS elemanı ile çözüm elde edilememiştir.

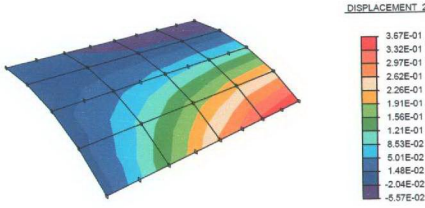
Tablo 3.13'te Y yönünde yer değiştirme değerleri verilen problemde, en iyi çözüm SKQ/SRMQ (%11.35) elemanı kullanılarak alınmıştır.

Tablo 3.13. Scordelis-Lo çatı problemi için yer değiştirmeler

	Teorik	SKQ/SRMQ	SKP/SRMP	SKS/SRMS	ANSYS (Shell 63)	ANSYS (Shell 93)
Y-yönü	0.3086	0.3481	0.3673	-	0.3039	0.30419



Şekil 3.18. Çatı probleminde SKQ/SRMQ elemanı kullanıldığında Y yönündeki yer değiştirme dağılımı



Şekil 3.19. Çatı probleminde SKP/SRMP elemanı kullanıldığında Y yönündeki yer değiştirme dağılımı

Scordelis-Lo çatı örneğinde Y yönündeki yer değiştirme oranları SKQ/SRMQ, SKP/SRMP ve SKS/SRMS elemanları ile literatürdeki SRI, MITCA4, TRIC, Mixed (Simo ve Fox, 1989-bl) ve QPH (Belytshko ve Leviathan, 1994) elemanlarıyla karşılaştırılmış ve sonuçlar Tablo 3.14'te verilmiştir. SKS/SRMS elemanının rijitlik matrisi yakınsamadığından çözüm vermemiştir. Bu çalışmada geliştirilen SKQ/SRMQ ve SKP/SRMP elemanları ise TRIC elemanından daha yüksek, diğer SRI, MITCA4, Mixed ve QPH elemanlarından daha düşük değerler vermişlerdir. Bunun nedenleri arasında farklı formülasyonların ve indirgenmiş integrasyon gibi tekniklerin elemanlarda kullanılması verilebilir.

Tablo 3.14. Scordelis-Lo çatı için Y yönündeki yer değiştirme oranları

Eleman tipi	v/v_{teo}
SRI	0.964
MITCA4	0.940
Mixed	1.083
QPH	0.940
TRIC	0.697
SKQ/SRMQ	1.128
SKP/SRMP	1.190
SKS/SRMS	-

3.3.6. Silindir Problemi

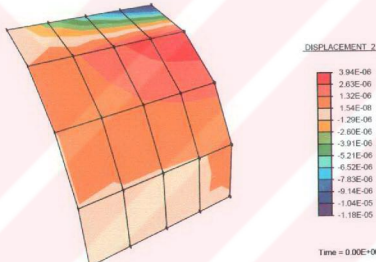
Karşılıklı tekil birim kuvvet etkisinde rijit duvarla destekli silindirik bir kabuk probleminin analiz sonuçları 4x4 ağ örgüsü için Tablo 3.15'te verilmiştir. Ayrıca Şekil

3.20, 3.21 ve 3.22'de sırasıyla SKQ/SRMQ, SKP/SRMP ve SKS/SRMS elemanları için Y yönündeki yer değiştirme dağılımları sunulmuştur.

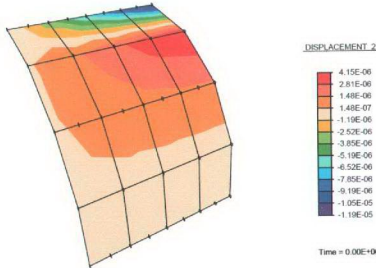
Bu problemde analitik çözüme en yakın değer SKS/SRMS (%21.86) elemanında elde edilmiştir. SKQ/SRMQ, SKP/SRMP ve ANSYS (Shell 63) değerleri birbirlerine yakın çıkmıştır. Tablo 3.15'ten doğruya en yakın değer ANSYS (Shell 93) kabuk elemanı kullanılarak elde edilmiştir.

Tablo 3.15. Silindir çatı problemi için yer değiştirmeler

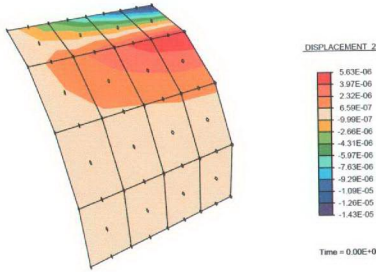
	Teorik [$\times 10^{-5}$]	SKQ/SRMQ [$\times 10^{-5}$]	SKP/SRMP [$\times 10^{-5}$]	SKS/SRMS [$\times 10^{-5}$]	ANSYS (Shell 63) [$\times 10^{-5}$]	ANSYS (Shell 93) [$\times 10^{-5}$]
Y-yönü	-1.8248	-1.1751	-1.1852	-1.4259	-1.1491	-1.4406



Şekil 3.20. Silindir probleminde SKQ/SRMQ elemanı kullanıldığında Y yönündeki yer değiştirme dağılımı



Şekil 3.21. Silindir probleminde SKP/SRMP elemanı kullanıldığında Y yönündeki yer değiştirme dağılımı



Şekil 3.22. Silindir probleminde SKQ/SRMS elemanı kullanıldığında Y yönündeki yer değiştirme dağılımı

Silindir probleminde SKQ/SRMQ, SKP/SRMP ve SKS/SRMS elemanları için Y yönündeki yer değiştirme oranları ile literatürdeki ANS6S, SRI, RSDS, MITCA, Mixed, QPH ve TRIC elemanlarıyla karşılaştırılmış ve sonuçlar Tablo 3.16’da sunulmuştur. SKS/SRMS, SKP/SRMP ve SKQ/SRMQ elemanları literatürdeki SRI, RSDS, MITCA4, Mixed, QPH, TRIC ve ANS6S elemanlarından daha yüksek doğruluklu çözümler vermişlerdir. Bu karşılaştırmalardan da görülebileceği gibi literatürdeki bu elemanlar diğer örnek tiplerinde yüksek doğruluklu çözümler göstermişlerdi. Bu da, elemanların amaca yönelik geliştirildiğinde daha doğru sonuçlar verdiği görüşümüzü doğrulamaktadır. Geliştirilen elemanlar içinde ise, yedi düğüm noktalı SKS/SRMS elemanı daha yüksek doğruluklu çözüm değeri vermiştir. Bunun nedeni elemandaki düğüm noktası sayısının fazla olması gösterilebilir. Çünkü eleman sayısı artmasıyla formülasyona giren şekil fonksiyonlarının derecesi çok artmaktadır. Başka bir deyişle şekil fonksiyonları çok küçük iki nokta arasında çok hızlı değişmektedir. Bu ise şekil fonksiyonlarının kararlılığını bozmaktadır.

Tablo 3.16. Silindir problemi için Y yönündeki yer değiştirme oranları

Eleman tipi	v/v_{teo}	Eleman tipi	v/v_{teo}
SRI	0.373	TRIC	0.412
RSDS	0.469	ANS6S	0.502
MITCA4	0.370	SKQ/SRMQ	0.644
Mixed	0.399	SKP/SRMP	0.650
QPH	0.370	SKS/SRMS	0.782

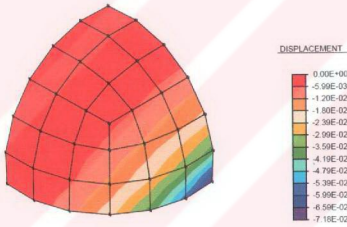
3.3.7. Yarım Küre Kabuk Problemi

Tablo 3.17’de yarım küre probleminde 6x6 ağ örgüde elde edilen sonuçlar sunulmuştur. Şekil 3.23, 3.24 ve 3.25’te ise sırasıyla SKQ/SRMQ, SKP/SRMP ve SKS/SRMS elemanları için X yönündeki yer değiştirme dağılımları verilmiştir.

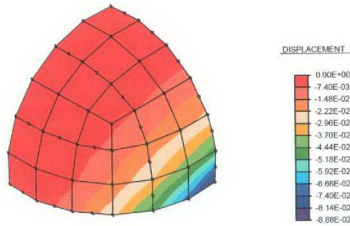
Yarım küre probleminde SKP/SRMP elemanı analitik çözüme en yakın değeri % 5.53 hata ile vermiştir. Diğer SKQ/SRMQ ve SKS/SRMS elemanları sırasıyla % 23.62 ve % 21.38 ile birbirlerine yakın hata değerleri vermişlerdir.

Tablo 3.17. Yarım küre problemi için yer değiştirmeler

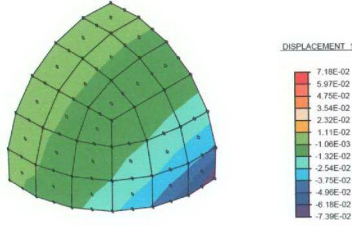
	Teorik	SKQ/SRMQ	SKP/SRMP	SKS/SRMS	ANSYS (Shell 63)	ANSYS (Shell 93)
X-yönü	-0.0924	-0.0718	-0.0888	-0.0739	-0.0932	-0.0901



Şekil 3.23. Yarım küre probleminde SKQ/SRMQ için X yönündeki yer değiştirme dağılımı



Şekil 3.24. Yarım küre probleminde SKP/SRMP için X yönündeki yer değiştirme dağılımı



Şekil 3.25. Yarım küre probleminde SKP/SRMP ve SKS/SRMS için X yönündeki yer değiştirme dağılımı

Bu çalışmada geliştirilen elemanlar yarım küre problemi için Tablo 3.18’de verilen diğer elemanlarla karşılaştırılmıştır. Sonuçlardan görülebileceği gibi en yüksek doğruluklu çözüm TRIC elemanı vermiştir. Yeni geliştirilen SKQ/SRMQ, SKP/SRMP ve SKS/SRMS elemanları, SRI, MITCA4, Mixed ve QPH elemanlarından daha yüksek doğrulukta çözüm üretmiştir. Geliştirilen elemanlar arasında ise SKP/SRMP elemanı SKQ/SRMQ ve SKS/SRMS elemanından daha yüksek doğruluk göstermiştir.

Tablo 3.18. Yarım küre kabuk için X yönündeki yer değiştirme oranları

Eleman tipi	u/u_{TRIC}
SRI	0.412
RSDS	0.965
MITCA4	0.390
Mixed	0.651
QPH	0.280
TRIC	1.022
SKQ/SRMQ	0.777
SKP/SRMP	0.961
SKS/SRMS	0.7998

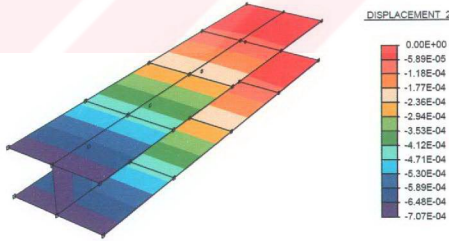
3.4. Amaca Yönelik Problemler

3.4.1. Kesiti I-Profil Olan Ankastre Kiriş

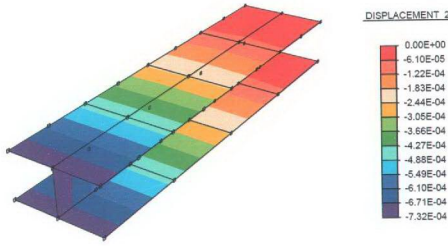
I-kesit alanlı ankastre kirişin serbest ucundan tekil yükü yüklenmesi halinde kirişte meydana gelen yer değiştirmeler, artan eleman sayısı için Tablo 3.19'da verilmiştir. Y yönündeki yer değiştirme dağılımları ise Şekil 3.26'de dört düğüm noktalı 4 kenarlı, Şekil 3.27'de beş düğüm noktalı 4 kenarlı, Şekil 3.28'de yedi düğüm noktalı 4 kenarlı ve Şekil 3.29'da yedi düğüm noktalı 6 kenarlı kabuk eleman için gösterilmiştir.

Tablo 3.19. I-profilli ankastre kiriş için Y yönündeki yer değiştirmeler

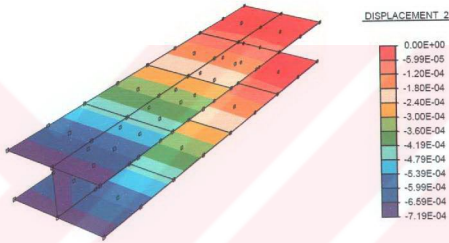
Bölümlene sayısı [n]	Y- yönü [$\times 10^{-4}$]		
	2	4	8
SKQ/SRMQ	-6.8418	-7.0651	-7.1958
SKP/SRMP	-6.7694	-7.3004	7.3961
SKS/SRMS_ 4 kenar	-7.1397	-7.1932	-7.2059
SKS/SRMS_ 6 kenar	-6.7374	-7.2350	-7.2489
Teorik	-7.4025		



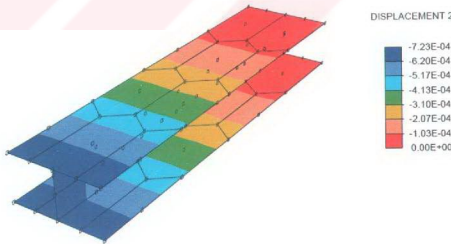
Şekil 3.26. I-profilli kirişte SKQ/SRMQ kabuk elemanı için Y yönündeki yer değiştirme dağılımı



Şekil 3.27. I-profilli kirişte SKP/SRMP kabuk elemanı için Y yönündeki yer değiştirme dağılımı



Şekil 3.28. I-profilli kirişte 4 kenarlı SKS/SRMS kabuk elemanı için Y yönündeki yer değiştirme dağılımı



Şekil 3.29. I-profilli kirişte 6 kenarlı SKS/SRMS kabuk elemanı için Y yönündeki yer değiştirme dağılımı

Altıgen ağ örgüsü için Tablo 3.20'den eleman sayısının artmasıyla yedi düğüm noktalı 6 kenarlı düz kabuk elemanın yedi düğüm noktalı 4 kenarlı elemandan daha doğru

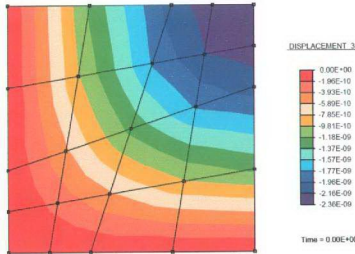
sonuçlar verdiği görülmektedir. Altıgen ağ örgüde SKP/SRMP (SKQ/SRMQ) ve SKS/SRMS elemanının beraber kullanıma zorunluluğu vardır. Çünkü çözüm alanı altı kenarlı ağ örgüyle örüldüğü zaman 4 kenarlı elemanların kullanımı geometriden dolayı zorunludur.

Tablo 3.20. I- profilli ankastre kiriş için hata değerleri

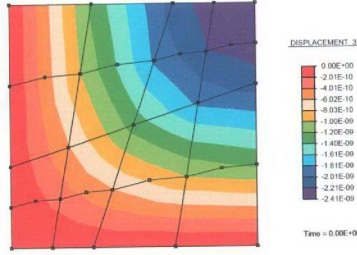
Bölümleme sayısı [n]	Hata (%)		
	2	4	8
SKQ/SRMQ	7.58	4.56	2.79
SKP/SRMP	8.55	1.38	0.0865
SKS/SRMS_4 kenar	3.55	2.83	2.66
SKS/SRMS_6 kenar	8.98	2.26	2.08

3.4.2. Kare Plak

Kare plak analizleri, düzgün (A) ve çarpık (B) ağ örgüler için yapıldı. Şekil 3.30 ve 3.31'de 4x4 çarpık ağ örgülü ve kalınlığın 1.0 olması durumunda sırasıyla SKQ/SRMQ ve SKP/SRMP elemanı ile elde edilen Z yönündeki yer değiştirme dağılımları gösterilmiştir. Kalınlığın yer değiştirmelere etkisi ise Tablo 3.21'de basit mesnetli ve Tablo 3.22'de ankastre mesnetli kare plak için verilmiştir.



Şekil 3.30. 4x4 çarpık ağ örgüsüne ve $t = 1.0$ kalınlığa sahip basit mesnetli kare plakta SRMQ elemanı için Z yönündeki yer değiştirme dağılımı



Şekil 3.31. 4x4 çarpık ağ örgüsüne ve $t = 1.0$ kalınlığa sahip basit mesnetli kare plakta SRMP elemanı için Z yönündeki yer değiştirme dağılımı

Tablo 3.21. Yayılı q yüküne maruz basit mesnetli kare plak için merkezdeki boyutsuz yer değiştirme $w_c/(qL^4/100D)$ değerleri

t/L	Ağ örgü tipi	Eleman tipi	2x2	4x4	8x8	Teorik
10^{-20}	A	SKQ/SRMQ	0.4045	0.4060	0.4062	0.4062
		SKP/SRMP	0.4286	0.4112	0.4075	
	B	SKQ/SRMQ	0.4324	0.4131	0.4080	
		SKP/SRMP	0.4552	0.4185	0.4093	
0.001	A	SKQ/SRMQ	0.4045	0.4060	0.4062	0.4062
		SKP/SRMP	0.4286	0.4112	0.4075	
	B	SKQ/SRMQ	0.4324	0.4131	0.4080	
		SKP/SRMP	0.4552	0.4185	0.4093	
0.01	A	SRMQ	0.4047	0.4062	0.4063	0.4064
		SRMP	0.4295	0.4112	0.4075	
	B	SRMQ	0.4326	0.4132	0.4082	
		SRMP	0.4552	0.4185	0.4093	
0.10	A	SRMQ	0.4228	0.4255	0.4267	0.4273
		SRMP	0.4506	0.4387	0.4305	
	B	SRMQ	0.4326	0.4132	0.4082	
		SRMP	0.4726	0.4411	0.4396	
0.20	A	SRMQ	0.4567	0.4889	0.4900	0.4906
		SRMP	0.5172	0.5121	0.5002	
	B	SRMQ	0.5099	0.4945	0.4913	
		SRMP	0.5473	0.5105	0.5017	
0.30	A	SRMQ	0.5950	0.5953	0.5956	0.5956
		SRMP	0.6221	0.6169	0.6068	
	B	SRMQ	0.6212	0.6021	0.5972	
		SRMP	0.6722	0.6223	0.6169	

Tablo 3.22. Yayılıq yüküne maruz ankastré mesnetli kare plak için merkezdeki boyutsuz yer değıştirme $w/(qL^4/100D)$ değeri

t/L	Ağ örgü tipi	Eleman tipi	2x2	4x4	8x8	Teorik
10 ⁻²⁰	A	SKQ/SRMQ	0.1460	0.1319	0.1279	0.1265
		SKP/SRMP	0.1676	0.1383	0.1300	
	B	SKQ/SRMQ	0.1700	0.1383	0.1273	
		SKP/SRMP	0.1832	0.1429	0.1309	
0.001	A	SKQ/SRMQ	0.1460	0.1319	0.1279	0.1265
		SKP/SRMP	0.1676	0.1383	0.1300	
	B	SKQ/SRMQ	0.1700	0.1383	0.1273	
		SKP/SRMP	0.1832	0.1429	0.1309	
0.01	A	SRMQ	0.1462	0.1322	0.1281	0.1265
		SRMP	0.1676	0.1383	0.1300	
	B	SRMQ	0.1702	0.1385	0.1297	
		SRMP	0.1832	0.1429	0.1309	
0.10	A	SRMQ	0.1678	0.1548	0.1515	0.1499
		SRMP	0.1932	0.1694	0.1666	
	B	SRMQ	0.1917	0.1609	0.1530	
		SRMP	0.2069	0.1722	0.1666	
0.20	A	SRMQ	0.2348	0.2217	0.2183	0.2167
		SRMP	0.2613	0.2381	0.2297	
	B	SRMQ	0.2598	0.2281	0.2199	
		SRMP	0.2772	0.2466	0.2352	
0.30	A	SRMQ	0.3464	0.3300	0.3259	0.3227
		SRMP	0.3726	0.3452	0.3376	
	B	SRMQ	0.3758	0.3387	0.3288	
		SRMP	0.3977	0.3578	0.3453	

Dört düğüm noktalı 4 kenarlı SRMQ elemanı için elde edilen sonuçlar literatürdeki, ARS-Q12 (Soh vd., 2001), PQI (Ibrahimbegovic, 1993), Q4BL (Zienkiewicz vd., 1993) ve DKQ (Batoz ve Tahar, 1982) plak elemanlarıyla karşılaştırılmıştır.

SKQ/SRMQ düz kabuk elemanları için elde edilen değeri, Tablo 3.23 ve 3.24'te ARS-Q12 elemanı ile Tablo 3.25 ve 3.26'da ise PQI, Q4BL ve DKQ elemanları ile birlikte verilmiştir. Karşılaştırmalardan görüleceği gibi SKQ/SRMQ düz kabuk elemanları yüksek doğruluğa sahip olup ARS-Q12 elemanı çözümlerine çok yakın değeri vermişlerdir. Bu derece doğru değeri vermesinin sebebi; SKQ/SRMQ elemanının geliştirilmesinde kullanılan formülasyonun ASR-Q12 elemanı için kullanılan formülasyonla (kayma

terimleri) aynı olmasıdır. Böylece, yüksek doğruluklu ARS-Q12 plak elemanı gibi yüksek doğruluklu SRMQ kabuk elemanı geliştirilmiş oldu. Aşağıdaki tablolardan plağın kalınlığının değişmesiyle teorik ve sayısal çözüm sonuçlarının değiştiği ve ince plak sınırında R/M eleman formülasyonlu SRMQ elemanının, Kirchhoff eleman formülasyonlu SKQ elemanı ile aynı değeri verdikleri görülmüştür.

Tablo 3.23. Basit mesnetli kare plak için merkezdeki yer değiştirme oranları $w_c/(qL^4/100D)$

t/L	Ağ örgü tipi	Eleman tipi	2x2	4x4	8x8	Teorik
10 ⁻²⁰	A	SKQ/SRMQ	0.40452	0.40600	0.40619	0.4062
		ARS-Q12	0.4045	0.4060	0.4062	
	B	SKQ/SRMQ	0.43239	0.41311	0.40797	
		ARS-Q12	0.4324	0.4131	0.4080	
0.001	A	SKQ/SRMQ	0.40452	0.40600	0.40619	0.4062
		ARS-Q12	0.4045	0.4060	0.4062	
	B	SKQ/SRMQ	0.43239	0.41311	0.40797	
		ARS-Q12	0.4324	0.4131	0.4080	
0.01	A	SRMQ	0.40469	0.40615	0.40634	0.4064
		ARS-Q12	0.4047	0.4062	0.4063	
	B	SRMQ	0.43255	0.41324	0.40817	
		ARS-Q12	0.4325	0.4132	0.4081	
0.10	A	SRMQ	0.42282	0.42553	0.42672	0.4273
		ARS-Q12	0.4228	0.4255	0.4267	
	B	SRMQ	0.44901	0.43141	0.42795	
		ARS-Q12	0.4490	0.4314	0.4280	
0.20	A	SRMQ	0.4567	0.48889	0.49001	0.4906
		ARS-Q12	0.4857	0.4889	0.4900	
	B	SRMQ	0.50986	0.49452	0.49134	
		ARS-Q12	0.5099	0.4945	0.4913	
0.30	A	SRMQ	0.59499	0.59533	0.59558	0.5956
		ARS-Q12	0.5950	0.5953	0.5956	
	B	SRMQ	0.62119	0.60206	0.59721	
		ARS-Q12	0.6206	0.6008	0.5984	

Tablo 3.24. Ankastrе mesnetli kare plak için merkezdeki yer değiştirme oranları $w_o/(qL^4/100D)$

t/L	Ağ örgü tipi	Eleman tipi	2x2	4x4	8x8	Teorik
10 ⁻²⁰	A	SKQ/SRMQ	0.14606	0.13195	0.12792	0.1265
		ARS-Q12	0.1460	0.1319	0.1279	
	B	SKQ/SRMQ	0.17019	0.13827	0.12952	
		ARS-Q12	0.1700	0.1383	0.1273	
0.001	A	SKQ/SRMQ	0.14606	0.13195	0.12792	0.1265
		ARS-Q12	0.1460	0.1319	0.1279	
	B	SKQ/SRMQ	0.17019	0.13828	0.12952	
		ARS-Q12	0.1700	0.1383	0.1273	
0.01	A	SRMQ	0.14628	0.13217	0.12814	0.1265
		ARS-Q12	0.1462	0.1322	0.1281	
	B	SRMQ	0.17040	0.13849	0.12974	
		ARS-Q12	0.1702	0.1385	0.1297	
0.10	A	SRMQ	0.16796	0.15484	0.15151	0.1499
		ARS-Q12	0.1678	0.1548	0.1515	
	B	SRMQ	0.19196	0.16092	0.15299	
		ARS-Q12	0.1917	0.1609	0.1530	
0.20	A	SRMQ	0.23499	0.22169	0.21833	0.2167
		ARS-Q12	0.2348	0.2217	0.2183	
	B	SRMQ	0.25999	0.22806	0.21993	
		ARS-Q12	0.2598	0.2281	0.2199	
0.30	A	SRMQ	0.34654	0.33004	0.32594	0.3227
		ARS-Q12	0.3464	0.3300	0.3259	
	B	SRMQ	0.37585	0.33766	0.32786	
		ARS-Q12	0.3758	0.3387	0.3288	

Tablo 3.25. Basit mesnetli kare plak için merkezdeki yer değiştirme oranları $w_o/(qL^4/100D)$

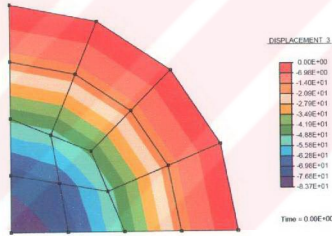
t / L	Eleman sayısı	SRMQ	PQI	Q4BL	Teorik (Reissmann, 1988)
0.1	4	0.42282	0.4471	0.4269	0.4273
	16	0.42553	0.4323	0.4274	
	64	0.42672	0.4285	0.4273	
0.01	4	0.40469	0.4251	0.4038	0.4064
	16	0.40615	0.4113	0.4061	
	64	0.40634	0.4076	0.4064	

Tablo 3.26. Basit mesnetli ince kare plak için merkezdeki yer değiştirme oranları $w_c/(qL^4/100D)$

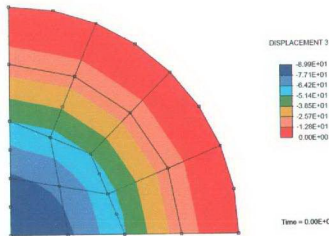
t / L	Eleman sayısı	SKQ/SRMQ	DKQ	Q4BL	Teorik (Reissmann, 1988)
0.001	4	0.40452	0.4046	0.4035	0.4062
	16	0.4060	0.4060	0.4058	
	64	0.4062	0.4062	0.4062	

3.4.3. Dairesel Plak

Yayıllı yüke maruz ankastre mesnetli dairesel plak için Şekil 3.32 ve 3.33'te 12 eleman ve kalınlığın 0.5 olması durumunda sırasıyla SKQ/SRMQ ve SKP/SRMP elemanlarıyla modellenmesiyle elde edilen yer değiştirme dağılımları verilmiştir. Bu örnekte 3, 12 ve 48 eleman kullanılarak elde edilen analiz bulguları ise Tablo 3.27'de sunulmuştur.



Şekil 3.32. Dairesel plakta SRMQ elemanı ve $t=0.5$ için Z yönünde elde edilen yer değiştirme dağılımı



Şekil 3.33. Dairesel plakta SRMP elemanı ve $t=0.5$ için Z yönünde elde edilen yer değiştirme dağılımı

Tablo 3.27. Yayılı q yüküne maruz dairesel plak için merkezdeki boyutsuz yer değiştirme $w_c/(qR^4/D)$ değerleri

t/R	Eleman tipi	3 eleman	12 eleman	48 eleman	Teorik
10 ⁻²⁰	SKQ/SRMQ	0.01721	0.016101	0.0157498	0.015625
	SKP/SRMP	0.0195	0.0171	0.01597	
0.001	SKQ/SRMQ	0.01721	0.016101	0.0157498	0.015625
	SKP/SRMP	0.0195	0.0171	0.01597	
0.01	SRMQ	0.01722	0.016107	0.15756	0.015632
	SRMP	0.0195	0.0171	0.01597	
0.10	SRMQ	0.01782	0.016748	0.016430	0.016339
	SRMP	0.02040	0.01798	0.01708	
0.20	SRMQ	0.01975	0.018814	0.018559	0.018482
	SRMP	0.0223	0.01928	0.0191	
0.30	SRMQ	0.02311	0.022327	0.022119	0.022054
	SRMP	0.0259	0.0245	0.02331	

Ankastre mesnetli dairesel plak problemi için SKQ/SRMQ elemanları literatürdeki ARS-Q12, DKMQ (Katili, 1993) ve MITC4 (Bathe ve Dvorkin, 1985) elemanları ile karşılaştırılmıştır. Tablo 3.28'den görülebileceği gibi SKQ/SRMQ elemanları ARS-Q12 elemanına çok yakın değerler vermişlerdir. Ancak bu yakınlık t/L oranıyla pek değişmezken eleman sayısının artması sonuçları teorik çözümlere daha da yaklaştırmıştır. Tablo 3.29'da ise SRMQ elemanının DKMQ ve MITC4 elemanları ile karşılaştırılması sunulmuştur. Bu tablodan görüldüğü gibi MITC4 elemanı, eleman sayısının artmasıyla SRMQ, ARS-Q12 ve DKMQ elemanlarından daha doğru sonuçlar vermiştir. Bunun yanında, SRMQ, ARS-Q12 ve DKMQ elemanları birbirlerine yakın değerler göstermiştir. Bunun nedeni MITC4 eleman formülasyonunun farklı olması ve SRMQ, ARS-Q12 ve DKMQ eleman formülasyonlarının benzer olmasıdır.

Tablo 3.28. Yayılı q yüküne maruz ankastre mesnetli dairesel plak için merkezdeki yer değiştirme oranları $w_c/(qR^4/D)$

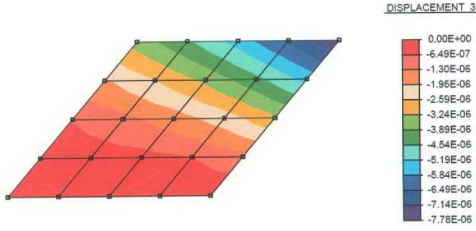
t/R	Eleman tipi	12 eleman	48 eleman	Teorik
10 ⁻²⁰	SKQ/SRMQ	0.016101	0.0157498	0.015625
	ARS-Q12	0.016101	0.015750	
0.001	SKQ/SRMQ	0.016101	0.0157498	0.015625
	ARS-Q12	0.016101	0.015750	
0.01	SRMQ	0.016107	0.15756	0.015632
	ARS-Q12	0.016107	0.015756	
0.10	SRMQ	0.016748	0.016430	0.016339
	ARS-Q12	0.016747	0.016430	
0.20	SRMQ	0.018814	0.018559	0.018482
	ARS-Q12	0.018813	0.018558	
0.30	SRMQ	0.022327	0.022119	0.022054
	ARS-Q12	0.022326	0.022119	

Tablo 3.29. Yayılı q yüküne maruz ankastre mesnetli dairesel plak için merkezdeki yer değiştirmeler

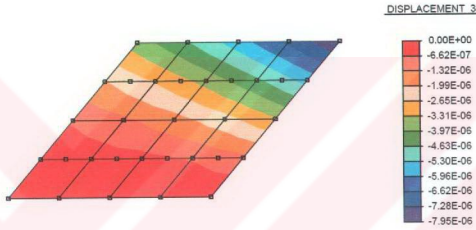
R/t	Eleman sayısı	SRMQ	ARS-Q12	DKMQ	MITC4	Teorik (Batoz ve Dhatt, 1990)
50	3	10771	10768.5	10771	9067.9	9783.51
	12	10078	10078.1	10093	9699.3	
	48	9858.8	9858.73	9865	9766.6	
5	3	12.346	12.3434	12.303	10.755	11.551
	12	11.759	11.7584	11.762	11.432	
	48	11.599	11.5989	11.601	11.526	
2	3	1.3634	1.3628	1.332	1.243	1.339
	12	1.3452	1.3452	1.339	1.320	
	48	1.3408	1.3408	1.339	1.335	

3.4.4. Eğik Plak

Bir ucundan ankastre mesnetli ve diğer ucundan q yayılı yükü etkisindeki eğik plak, üç farklı eğiklik açısında analizlere tabii tutulmuştur. Şekil 3.34 ve 3.35'te 40° eğikliğe sahip plaktaki yer değiştirme dağılımları sunulmuştur. Tablo 3.30'da ise eğiklik açısı $\beta = 20^\circ$, 40° ve 60° 'de SRMQ ve SRMP elemanları için analitik ve sayısal sonuçlar verilmiştir.



Şekil 3.34. 40° eğik plakta SRMQ elemanı için Z yönünde elde edilen yer değiştirme dağılımı



Şekil 3.35. 40° eğik plakta SRMP elemanı için Z yönünde elde edilen yer değiştirme dağılımı

Tablo 3.30. Yayılı yüke maruz eğik plakta boyutsuz çökme $w_{\Lambda}/(Et^3/qL^4)$ değerleri

Açı	Eleman tipi	2x2	4x4	8x8	Teorik (Reissner ve Stein, 1951)
20°	SRMQ	1.61766	1.47296	1.43757	1.4327
	SRMP	1.70317	1.50758	1.45030	
	ANSYS (Shell 63)	1.550	1.444	1.4254	
40°	SRMQ	1.46368	1.24557	1.18997	0.9894
	SRMP	1.48864	1.27123	1.20960	
	ANSYS (Shell 63)	1.2728	1.1592	1.1549	
60°	SRMQ	1.09574	0.89933	0.82675	0.3276
	SRMP	1.08710	0.90318	0.84857	
	ANSYS (Shell 63)	0.8998	0.7741	0.7748	

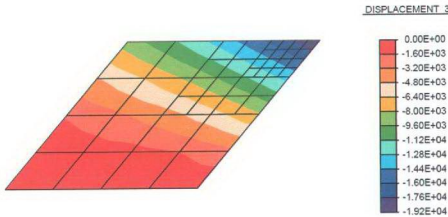
Bu problemde ise, yayılı yük altında ankastre mesnetli eğik plağın, SRMQ ve SRMP elemanları kullanılarak analizleri yapılmış ve ARS-Q12 ve Q4BL plak elemanlarıyla karşılaştırılmıştır. Tablo 3.31'den görülebileceği gibi Q4BL plak elemanı SRMQ ve ARS-Q12 elemanından daha iyi sonuç vermiştir. SRMQ ve ARS-Q12 elemanları benzer formülasyonla türetildiklerinden birbirlerine yakın değerler göstermişlerdir. Ayrıca en doğru sonuçlar 8x8 ağ örgüsü ve 20° eğiklik açısında elde edilmiştir.

Tablo 3.31. Yayılı yüke maruz eğik ankastre plakta çökme oranları
 $w_A/(Et^3/qL^4)$

Açı	Eleman tipi	4x4	8x8	Teorik (Reissner ve Stein, 1951)
20°	SRMQ	1.47296	1.43757	1.4327
	ARS-Q12	1.47285	1.43758	
	Q4BL	1.39141	1.42064	
40°	SRMQ	1.24557	1.18997	0.9894
	ARS-Q12	1.24461	1.19064	
	Q4BL	1.10490	1.15583	
60°	SRMQ	0.89933	0.82675	0.3276
	ARS-Q12	0.89563	0.84121	
	Q4BL	0.76308	0.80559	

3.4.5. Geçiş Elemanı (SRMP)

Şekil 3.36'da SRMP elemanının SRMQ elemanı ile birlikte ağ artırmasının uygulandığı örnekte elde edilen çökme dağılımı verilmiştir. Ayrıca ağ artırımı yapılan örnek problem için Tablo 3.32'de karşılaştırmalı sonuçlar da verilmiştir.



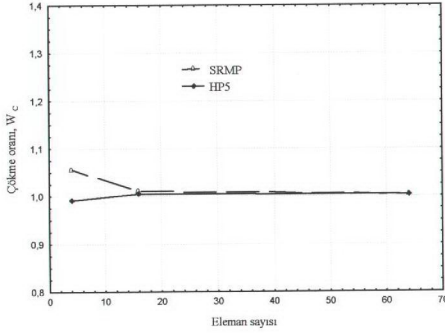
Şekil 3.36. Yayılı yük etkisindeki eğik plakta Z yönündeki yer değiştirme dağılımı

Tablo 3.32. Eğik plakta Z yönündeki boyutsuz yer değiştirme $w_A/(Et^3/qL^4)$ değerleri

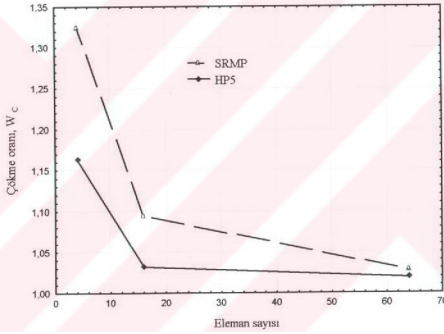
Eleman sayısı	Yer değiştirme W_A	Hata (%)	Teorik (Reissner ve Stein, 1951)
4	1.4437 (SRMQ)	46.42	0.9894
16	1.2284 (SRMQ)	24.16	
64	1.1778 (SRMQ)	19.04	
28	1.1141 (SRMQ/SRMP)	12.64	
40	1.1125 (SRMQ/SRMP)	12.44	

SRMP elemanı 40° açılı eğik plakta geçiş elemanı olarak SRMQ elemanı ile birlikte kullanılmıştır. Tablo 3.32’de verilen sonuçlardan görülebileceği gibi eğri plakta ağ artırımını yapmadan toplam 64 elemanla (SRMQ) elde edilen çözümde hata % 19.0 iken, sadece 28 elemanlı (SRMQ/SRMP) çözümde hata % 12.64’e düşmüştür. Bu örnekten görülebileceği gibi SRMP düz kabuk elemanı SRMQ düz kabuk elemanı ile beraber başarılı bir şekilde kullanılabilir. Böylece gerek SRMQ elemanı ile gerekse de SRMS düz kabuk elemanı ile kullanılabilen SRMP düz kabuk geçiş elemanı yüksek doğruluklu çözümler sergilemektedir.

Ayrıca SRMP elemanı, hibrid/mixed SEY ile türetilen 4 kenarlı beş düğüm noktalı HP5 (Duan vd., 1999) plak elemanı ile karşılaştırılmıştır. Basit mesnetli ve ankastre mesnetli kare plakta eleman sayısına göre Z yönündeki çökme oranları Şekil 3.37 ve 3.38’de verilmiştir. Şekil 3.37’den görülebileceği gibi basit mesnetli kare plak çözümlerinde toplam 16 eleman için elde edilen değerlerde SRMP ve HP5 elemanlarında birbirlerine çok yaklaşmakta ve artan eleman sayısı ile da aralarındaki fark yok denecek kadar azalmaktadır. Ankastre mesnetli kare plakta ise çözümler arasındaki fark biraz daha belirgin olup eleman sayısının artmasıyla SRMP ve HP5 elemanları arasındaki bu fark Şekil 3.38’den de görüldüğü gibi hızlı bir şekilde azalır kapanmaktadır.



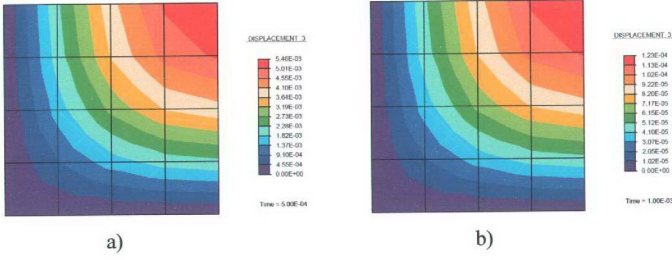
Şekil 3.37. Basit mesnetli kare plakta eleman sayısına göre çökme oranı



Şekil 3.38. Ankastré mesnetli kare plakta eleman sayısına göre çökme oranı

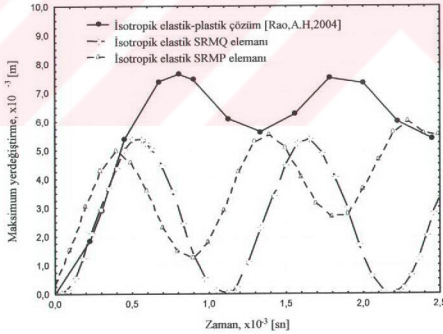
3.4.6. Dinamik Problem

Basit mesnetli 4x4 ağ örgülü kare plak için dinamik çözümler Newmark implicit zaman integrasyon yöntemi kullanılarak elde edilmiş ve yer değiştirme dağılımları Şekil 3.39a ve 3.39b'de sırasıyla 0.5 ve 1.0 ms için verilmiştir. Çözümlerde toplam zaman 2.5 ms ve zaman adımı olarak da $\Delta t = 1.10^{-5}$ ms alınmıştır.



Şekil 3.39. Basit mesnetli kare plakta Z yönünde a) $t=0.5$ ms ve b) $t=1.0$ ms anındaki yer değiştirmeler

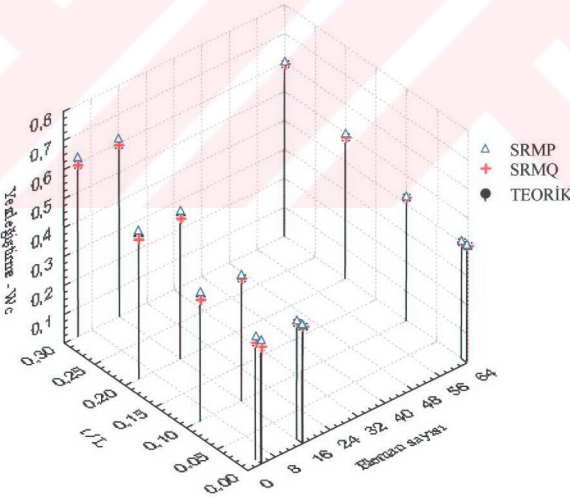
Dinamik problemde SRMQ ve SRMP elemanları kullanılarak Z yönünde elde edilen zaman bağımlı yer değiştirme çözümleri literatürdeki isotropik elastik-plastik (Mohanrao vd., 2004) çözümlerle karşılaştırılmış ve elde edilen zaman bağımlı maksimum yer değiştirme değerleri Şekil 3.40'da gösterilmiştir. Şekilden de görülebileceği gibi doğrusal elastik bölgede çözülen SRMQ ve SRMP elemanları literatürde doğrusal olmayan elasto-plastik çözümden daha düşük değerler vermişlerdir.



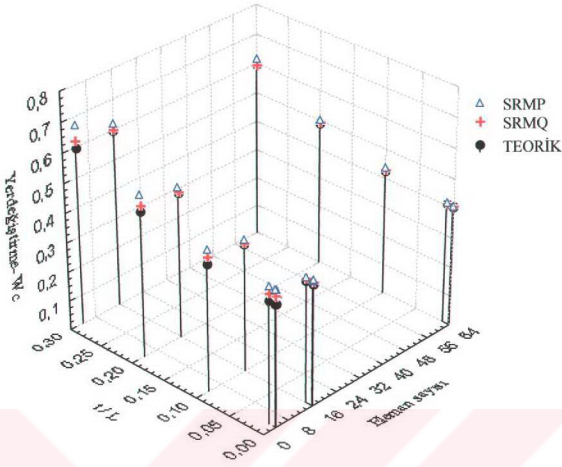
Şekil 3.40. Basit mesnetli kare plakta Z yönünde zaman bağımlı yer değiştirme

3.4.7. SRMQ ve SRMP Elemanlarının Birbirleriyle Karşılaştırılması

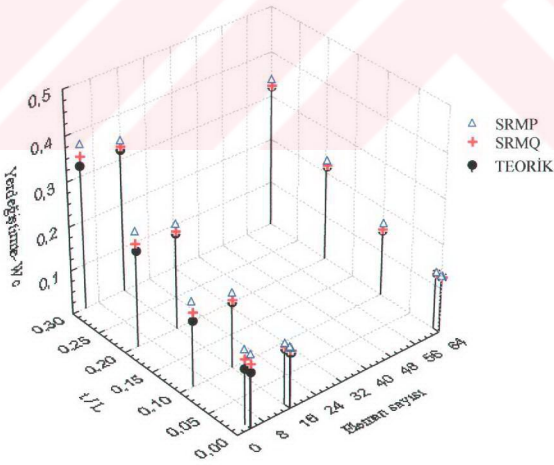
Bu kısımda 4 kenarlı SKQ/SRMQ ve SKP/SRMP elemanları karşılaştırılmıştır. Bir önceki bölümde SKQ/SRMQ ile SKP/SRMP elemanları literatürdeki elemanlarla karşılaştırılmış ve yüksek doğruluklu çözümlere sahip oldukları belirlenmişti. Burada ise bu elemanları birbirleriyle karşılaştırmak için basit ve ankastre mesnetli kare plağın düzgün ve çarpık ağ örgüsünde elde edilen sonuçlar incelenmiştir. Eleman sayısının ve kalınlığının etkisini bir arada görmek için sonuçlar üç boyutlu grafikler şeklinde verilmiştir. Basit mesnetli kare plak için elde edilen sonuçlar düzgün ağ örgüsü için Şekil 3.41'de verilirken çarpık ağ örgülü için Şekil 3.42'de gösterilmiştir. Benzer değerler ise ankastre kirişte düzgün ağ örgüsü için Şekil 3.43'te ve çarpık ağ örgüsü için Şekil 3.44'te sunulmuştur. Şekil 3.45'te ise ankastre mesnetli dairesel plağın teorik yer değiştirme oranları, eleman sayısı ve kalınlığa göre SRMQ ve SRMP elemanları kullanılarak elde edilen yer değiştirme oranlarıyla karşılaştırmalı olarak verilmiştir.



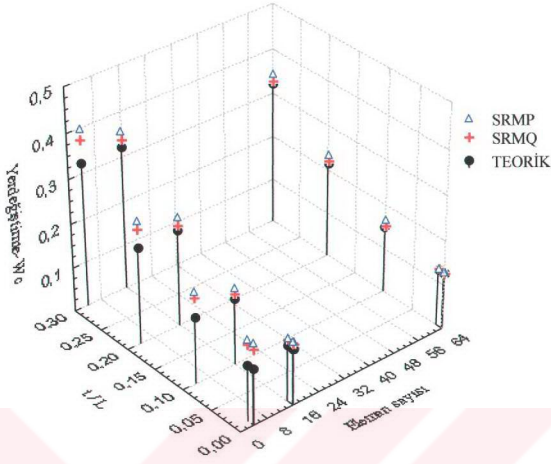
Şekil 3.41. Basit mesnetli kare plakta düzgün ağ örgüde yayılı yük etkisinde elde edilen maksimum yer değiştirme oranları



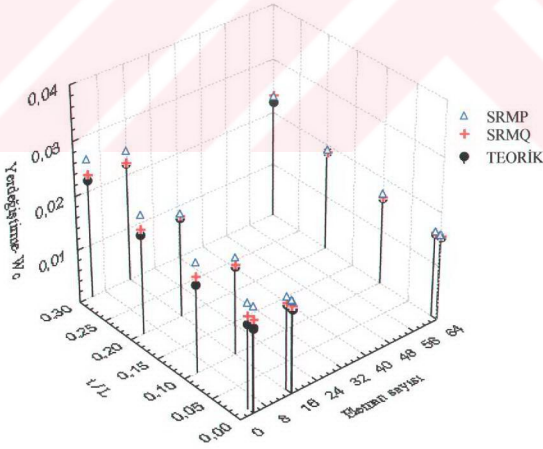
Şekil 3.42. Basit mesnetli kare plakta çarpık ağ örgüde yayılı yük etkisinde elde edilen maksimum yer değiştirme oranları



Şekil 3.43. Ankastre mesnetli kare plakta düğün ağ örgüde yayılı yük etkisinde elde edilen maksimum yer değiştirme oranları

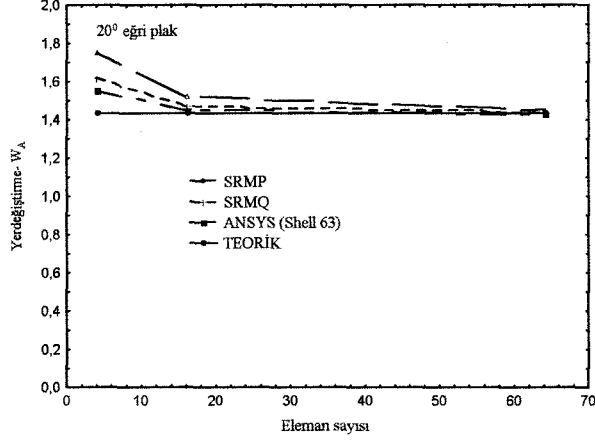


Şekil 3.44. Ankastre mesnetli kare plakta çarpık ağ örgüde yayılı yük etkisinde elde edilen maksimum yer değiştirme oranları

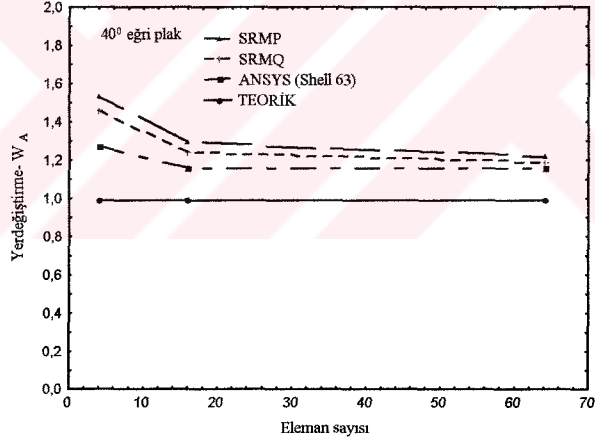


Şekil 3.45. Ankastre mesnetli dairesel plakta yayılı yük etkisinde elde edilen maksimum yer değiştirme oranları

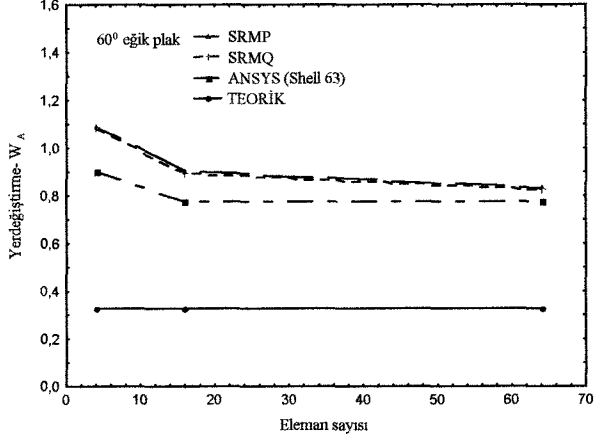
Ayrıca Şekil 3.46, 3.47 ve 3.48’de eleman sayısının eğik plak üzerindeki etkisi sunulmaktadır.



Şekil 3.46. 20° eğik plakta maksimum çökme değerinin eleman sayısı ile değişimi



Şekil 3.47. 40° eğik plakta maksimum çökme değerinin eleman sayısı ile değişimi



Şekil 3.48. 60° eğik plakta maksimum çökme değerinin eleman sayısı ile değişimi

Bütün bu şekillerden görülebileceği gibi SRMQ elemanı ile SRMP elemanı birbirlerine çok yakın değerler vermektedir. Ayrıca, eleman sayısının artmasıyla bu çalışmada elde edilen sonuçların teorik çözüme yaklaştığı kolaylıkla görülmektedir. Buna ilaveten elemanların çarpık ağ örgüde bile performanslarını korudukları Şekil 3.42 ve 3.44'ten anlaşılmaktadır. Bu sonuçlardan SRMP elemanının SRMQ elemanı ile güvenilir bir şekilde kullanılabilmesi kolaylıkla ifade edilebilmektedir.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada artırılmış eleman formülasyonu kullanılarak hem Kirchhoff plak teorisi hem de Reissner/Mindlin plak teorisi için dört, beş ve yedi düğüm noktalı yeni düz kabuk elemanlar geliştirilmiştir. Bu elemanlarla yapılan sayısal analizlerin değerlendirilmesinden aşağıdaki sonuçlar çıkarılmıştır:

1. SKQ ve SRMQ elemanları düşük integrasyon derecesine sahip (2x2) literatürdeki elemanlarla karşılaştırıldığında yüksek doğruluğa sahip, formülasyonu basit ve anlaşılabilir.
2. Bu tezde R/M plak teorisi kullanılarak geliştirilen düz kabuk elemanların (SRMQ, SRMP ve SRMS) plak kısmı için, eğilme ve kayma terimleri farklı yolla elde edilmesine rağmen literatürdeki yüksek doğruluklu ARS-Q12 plak elemanı ile aynı değerleri vermiştir. Bu sonuç da, bu çalışmada önerilen yöntemin ve geliştirilen elemanların doğruluğunu göstermektedir.
3. Sayısal analiz sonuçları Reissner/Mindlin plak teorisi kullanılarak elde edilen formülasyonun ince kabuk analizlerinde Kirchhoff plak formülasyonuna yakınsadığını göstermektedir. Bu da R/M plak teorisine dayanan formülasyonun hem ince hem de kalın kabuklar için geçerli bir yöntem olduğunu göstermektedir.
4. Artırılmış eleman formülasyonuna göre geliştirilen beş düğüm noktalı uyumsuz SKP ve uyumlu SRMP düz kabuk elemanları dört düğüm noktalı SKQ ve SRMQ elemanları ile başarılı bir şekilde kullanılmaktadır. Ayrıca I-profilli ankastre giriş örneğinde görüldüğü gibi beş düğüm noktalı SKP ve SRMP düz kabuk elemanları, yedi düğüm noktalı SKS ve SRMS düz kabuk elemanları ile birlikte kullanılabilir. Bu ise, beş düğüm noktalı elemanların ağ yoğunlaştırılması sırasında gerekli olan geçiş elemanı olma özelliğine sahip olduğunu göstermektedir.
5. SKP ve SRMP düz kabuk elemanlarının doğruluk derecesi SKQ ve SRMQ elemanlarına yakın çıkmıştır. Eleman sayısının artmasıyla bu fark kapanmıştır.
6. Yapılan karşılaştırmalardan görüldüğü gibi (Şekil 3.41-Şekil 3.45) SRMQ ve SRMP düz kabuk elemanları hem ince hem de kalın kabukların (Tablo 3.21, Tablo 3.22, Tablo 3.27, Tablo 3.30) analizinde kullanılabilir.

7. Artırılmış eleman formülasyonu çarpık ağ örgüsünde yüksek doğruluğa sahiptir. Yani bu eleman formülasyonu ağ çarpılmasına duyarsızdır.
8. Artırılmış eleman formülasyonu, eleman kenarı ortasında yer alan düğüm noktasının (beşinci ve yedinci) konumundan bağımsızdır.
9. Bu çalışmada önerilen yöntem ile geliştirilen SRMQ ve SRMP düz kabuk elemanlarının dinamik problemlerin analizi için kullanılmasının uygun olduğu görülmüştür.
10. Hem SKQ ve SRMQ elemanları hem de literatürdeki elemanlar problem tiplerine göre farklı sonuçlar vermektedir. Bununla birlikte artırılmış eleman formülasyonu diğer formülasyonlar içerisinde yüksek kararlılığa sahiptir (Tablo 3.7, Tablo 3.9, Tablo 3.14, Tablo 3.16- Tablo 3.29)



5. ÖNERİLER

Bu çalışmada elde edilen sonuçlar neticesinde aşağıdaki önerilerde bulunulmuştur.

1. Bu çalışmada geliştirilen elemanlarda kullanılan artırılmış eleman formülasyonuna, mixed veya mixed/hibrid formülasyonları da ilave edilerek sonuçların daha da iyileştirilmesi sağlanabilir.
2. Bütün bu elemanlarda uygun seçmeli indirgenmiş integrasyon ve literatürdeki stabilize teknikleri kullanılabilir.
3. Bu çalışmadaki elemanlar, doğrusal olmayan geometrik ve malzeme davranışları ve hasar analizlerini modellemek için genişletilebilir.
4. Burada önerilen artırılmış eleman formülasyonu beş ve yedi düğüm noktalı dejenere eğri kabuk elemanların geliştirilmesi için kullanılabilir.
5. Beş ve yedi düğüm noktalı elemanların geçiş elemanı olma özellikleri değişik formülasyonlar uygulanarak da incelenebilir.

6. KAYNAKLAR

- Adini, A. ve Clough, R.W., 1961. Analysis of plate bending by the finite element method and report to Natl.Sci. Foundation/USA, G7337.
- Ahmad,S., Irons, B.M. ve Zienkiewicz, O.C., 1970. Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements, Int. J. Numer. Meth. Engng., 2, 419-451.
- Alman, D.J., 1984. A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis, Computers and Structures, 19, 1-8.
- Andelfinger, U. ve Ramm, E., 1993. EAS-elements for two-dimensional, three dimensional, plate and shell structures and their equivalence to HR-elements, Int. J. Numer. Meth. Engng., 36, 1311-1337.
- Argyris, J.H. ve Scharpf, D.W., 1968-a. The SHEBA family of shell elements for the matrix displacement method. Part I. Natural definition of geometry and strain, Journal of the Royal Aeronautical Society, 71, 873-878.
- Argyris, J.H. ve Scharpf, D.W., 1968-b. The SHEBA family of shell elements for the matrix displacement method. Part II. Natural definition of geometry and strain, Journal of the Royal Aeronautical Society, 72, 878-883.
- Argyris, J.H. ve Scharpf, D.W., 1969. The SHEBA family of shell elements for the matrix displacement method. Part III. Natural definition of geometry and strain, Journal of the Royal Aeronautical Society, 73, 423-426.
- Argyris, J.H., Haase, M. ve Malejannakis, G.A., 1973. Natural geometry of surfaces with specific reference to the matrix displacement analysis of shells, Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademik van Wetenschappen Serie B, 76(5).
- Argyris, J.H., Dunner, P.C., Malejannakis, G.A. ve Schelke, E.A., 1977 A simple triangular facet shell element with applications to linear and nonlinear equilibrium and elastic stability problems, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 10, 371-403.
- Argyris, J.H., Haase, M., Mlejnek, H.P. ve Schmolz, P.K., 1986. TRUNC for shell-an element possibility to the taste of Bruce Irons, Int. J. Numer. Meth. Engng., 22, 93-115.
- Ayad, R., Dhatt, G. ve Batoz, J.L., 1998. A new hybrid-mixed variational approach for Reissner-Mindlin plate. The MiSP model, Int. J. Numer. Meth. Engng., 42, 1149-1179.
- Bassayya, K., Bhattacharya, K. ve Shrinivasa, U., 2000. Eight-node brick, PN340, representing constant stress fields exactly, Comput. Struct., 74, 441-460.

- Bathe, K.J. ve Dvorkin, E., 1983. Our discrete Kirchhoff and isoparametric shell elements for nonlinear analysis, An assessment. Comput. Struct., 16, 89-98.
- Bathe, K.J. ve Dvorkin, E.H., 1985. A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and mixed interpolation, Int. J. Numer. Meth. Engng., 21, 367-383.
- Bathe, K.J. ve Dvorkin, E.N., 1986. A formulation of general shell elements-the use of mixed interpolation of tensorial components, Int. J. Numer. Meth. Engng., 22, 697-722.
- Bathe, K.J., 1996. Finite element procedures, Prentice-Hall, New Jersey, USA.
- Bazeley, G.P., Cheung, Y.K., Irons, B.M. ve Zienkiewicz, O.C., 1966. Triangular elements in plate bending-conforming and nonconforming solutions, 1st Conf. On Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDL-TR-66-80, Air Force Institutur of Technology, Dayton, Ohio, 547-584.
- Batoz, J.L. ve Tahar, M.B., 1982. Evaluation of a new quadrilateral thin plate bending element, Int. J. Numer. Meth. Engng., 18, 1655-1677.
- Batoz, J.L. ve Lardeur, P.A., 1989. A discrete shear triangular nine d.o.f. element for the analysis of thick to very thin plates, Int. J. Numer. Meth. Engng., 29, 533-560.
- Batoz, J.L. ve Dhatt, G., 1990. Modelisation des structures par element finis –Vol 1: Solides elastiques, Vol 2: Poutre et plaques, Edition Hermes, Paris.
- Batoz, J.L. ve Katili, I., 1992. On a simple triangular Reissner/Mindlin plate element based on incompatible modes and discrete constraints, Int. J. Numer. Meth. Engng., 35, 1603-1632.
- Batoz, J.L. ve Dhatt, G., 1992. Modelisation des structures par element finis, Coques, Hermes, Paris.
- Batoz, J.L., Hammadi, F., Zheng, C.L. ve Zhong, W.X., 1998. A new discrete Kirchhoff 8 DOF quadrilateral element for plate bending analysis, Intnal Report, UTC, LGZMS.
- Belytschko, T. ve Hsieh, B.J., 1973. Nonlinear finite element analysis with convected cordinates, Int. J. Numer. Meth. Engng., 7, 255-271.
- Belytschko, T. ve Tsay, C., 1983. A stabilization procedure fort he quadrilateral plate element with one-point quadrature, Int. J. Numer. Meth. Engng., 19, 405-419.
- Belytschko, T. ve Wong, B.L., 1989. Assumed strain stabilization procedure for the 9-node Lagrange shell element, Int. J. Numer. Meth. Engng., 28, 385-414.
- Belytschko, T., Wong, B.L. ve Chiang, H.Y., 1992. Advances in one-point quadrature shell elements, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 96, 93-103.

- Belytschko, T. ve Bindeman, L.P., 1993. Assumed strain stabilization of the eight node hexahedral element, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 105, 225-260.
- Belytschko, T. ve Leviathan, I., 1994-a. Physical stabilization of the 4-node shell element with one point quadrature, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 113, 321-350.
- Belytschko, T. ve Leviathan, I., 1994-b. Projection schemes for one-point quadrature shell elements, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 115, 277-286.
- Belytschko, T., Liu, W.K. ve Moran, B., 2000. *Nonlinear finite element for continua and structures*, John Wiley&Sons Ltd., England.
- Chen, W.J. ve Tang, L.M., 1981. Isoparametric quasi-conforming element, *J. Dalian Univ. Technol*, 20(1), 63-74.
- Chen, W.J. ve Cheung, Y.K., 1992. Three dimensional 8-node and 20-node refined hybrid isoparametric element, Int. J. Numer. Meth. Engng., 35, 1871-1889.
- Chen, X.M., Cen, S., Long, Y.Q. ve Yao, Z.H., 2004. Membrane elements insensitive to distortion using the quadrilateral area coordinate method, Computers and Structures, 82, 35-54.
- Cheung, Y.K. ve Chen, W.J., 1989. Hybrid quadrilateral element based on Mindlin/Reissner plate theory, Computers and Structures, 32(2), 327-339.
- Cheung, Y.K. ve Wanji, C., 1995. Refined nine-parameter triangular thin plate bending element by using refined direct stiffness method, Int. J. Numer. Meth. Engng., 38, 283-298.
- Choi, C.K. ve Paik, J.G., 1996 An effective four node degenerated shell element for geometrically nonlinear analysis, Thin-Walled Structures, 24, 261-283.
- Choi, C.K, Lee, T.Y. ve Chung, K.Y., 2002. Direct modification for non-conforming elements with drilling DOF, Int. J. Numer. Meth. Engng. 55, 1463-1476.
- Choi, C.K. ve Lee, T.Y, 2003. Efficient remedy for membrane locking of 4-node flat shell elements by non-conforming modes, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 192, 1961-1971.
- Clough, R.W. ve Johnson, C.P., 1968. A finite element approximation for the analysis of thin shell, Int. J. Solids Struct., 4, 43-60.
- Cohen, H. ve DeSilva, C.N., 1966. Nonlinear theory of elastic directed surface, *Journal of Mathematical Physics*, 7, 906-966.

- Cook, R., 1974. Improved two-dimension finite element, J. Struct. Div., ASCE, 100ST9, 1851-1863.
- Cook, R.D., 1986. On the Alman triangle and a related quadrilateral element, Computers and Structures, 22, 1065-1067.
- Cook, R.D., 1993. Further development of a three-node triangular shell element, Int. J. Numer. Meth. Engng., 36, 1413-1425.
- Cook, R.D., 1994. Four-node flat shell element:drilling degree of freedom, membrane-bending coupling, warped geometry, and behavior, Comput. Struct., 50, 549-555.
- Cosserat, E. ve Cosserat, F., 1909. Theorie des corps deformables, In traite de Physique (2nd edn), Chwolson(2nd.ed), Paris.
- Dawe, D.J., 1972. Shell analysis using a simple facet element, J. Strain Analysis, 7, 226-270.
- Dhatt, G., 1969. Numerical analysis of thin shells by curved triangular elements based on discrete Kirchhoff hypothesis, ASCE Symposium on Application of FEM in Civil Engineering, Vandebilt university, Nashville.
- Dhatt, G. Marcotte, L. ve Matte, Y., 1986. A new triangular discrete Kirchhoff plate shell element, Int. J. Numer. Meth. Engng., 23, 453-470.
- Donea, J. ve Lamain, L.G., 1987. A modified representation of transverse shear in C^0 quadrilateral plate elements, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 63, 183-207.
- Duan, M, Miyamoto, Y., Iwasaki, S. ve Deto, H., 1999. 5-node hybrid/mixed finite element for Reissner-Mindlin plate, Finite element in analysis and design, 33, 167-185.
- Dvorkin, E.N. ve Bathe, K.J., 1984. A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis, Engng Comp., 1, 77-88.
- Erickssen, J.L. ve Trusdell C., 1958. Exact theory of stress and strain in rods and shells, Archive for rotational mechanics and analysis, 1(4), 295-323.
- Fish, J. ve Belytschko, T., 1992. Stabilized rapidly convergent 18-degree-of-freedom flat shell triangular element, Int. J. Numer. Meth. Engng., 33, 149-162.
- Flanagan, D.P. ve Belytschko, T., 1981. A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control, Int. J. Numer. Meth. Engng., 17, 679-706.
- Fox, D.D. ve Simo, J.C., 1992. A drill rotation formulation for geometrically exact shells, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 98, 329-343.

- Greene, B.E., Strome, D.R. ve Weikel, R.C., 1961. Application of the stiffness method to the analysis of shell structures, In Proc. Aviation Conference of ASME, Los Angeles. CA.
- Green, S. ve Turkiyyah, G., 2004 Second Order Accurate Constraint Formulation for Subdivision Finite Element Simulation of Thin Shells, Int. J. Numer. Meth. Engng., 61(3), 380-405.
- Gren, A.E. ve Zerna, W., 1960. Theoretical Elasticity (2nd edn), Clarendon Pres, Oxford.
- Gren, A.E. ve Laws, N., 1966. A general theory of rods, Proceedings of the Royal Society of London Series A, 293, 145-155.
- Gruttmann, F., Stein, E. ve Wriggers, P., 1989. Theory and numeric of thin elastic shells with finite rotations, Ingenieur Archiv, 59, 54-67.
- Hallquist, J.O., Benson, D.J. ve Goudreau, G.L., 1986. Implementation of a modified Huges-Liu shell into a fully vectorized explicit finite element code, In Finite Element Methods for Nonlinear Problems, Springer, 465-479, Berlin.
- Hanssen, L., Bergan, P.G. ve Syversten, T.J., 1979. Stiffness derivation based on element convergence requirements, The mathematics of finite elements and applications-vol III, Academic pres, London.
- Helen, T.K., An assessment of the Semi-Loof shell element, Int. J. Numer. Meth. Engng., 22, 133-151.
- Hinton, E. ve Huang, H.C., 1986. A family of quadrilateral Mindlin plate elements with substitute shear strain fields, Computers and Structures, 23, 409-431.
- Horrigmoe, G., 1977. Finite element instability analysis of free form shells, Report No 77-2, NIT, University of Trondheim, Norway.
- Hueck, U., Reddy, B.D. ve Wriggers, P., 1994. One the stabilization of the rectangular 4-node quadrilateral element, Communications in Numerical Methods in Engineering, 10, 555-563.
- Hueck, U. ve Wriggers, P., 1995. A formulation for the four-node quadrilateral element, Int. J. Numer. Meth. Engng., 38, 3007-3037.
- Hughes, T.J.R., Cohen, M. ve Haroun, M., 1978. Reduced and selective integration techniques in finite element analysis of plates, Nuclear Engineering and Design, 46, 203-222.
- Hughes, T.J.R. ve Cohen, 1978. The heterosis finite element for plate bending, Computers and Structures, 9, 445-450.

- Hughes, T.J.R. ve Liu, W.K., 1981-a. Nonlinear finite element analysis of shells part I: three-dimensional shells, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 26, 331-362.
- Hughes, T.J.R. ve Liu, W.K., 1981-b. Nonlinear finite element analysis of shells part II: two-dimensional shells, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 27, 167-182.
- Hughes, T.J.R. ve Tezduyar, T.E., 1981. Finite element based on Mindlin plate theory with particular reference to the four-node bilinear isotropic element, Journal of Applied Mechanics, 48, 587-596.
- Hughes, T.J.R. ve Carnoy, E., 1983. Nonlinear finite element shell formulation accounting for large membrane strains, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 39, 62-89.
- Hughes, T.J.R. ve Brezzi, F., 1989. On drilling degrees of freedom, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 72, 105-121.
- Hughes, T.J.R., Brezzi, F., Masud, A. ve Harari, I., 1989. Finite elements with drilling degrees of freedom: theory and numerical evaluations, In Proceedings of the fifth international symposium on numerical methods in engineering, vol 1, Gruber R(eds), Springer, Berlin, 3-17.
- Hughes, T.J.R., Masud, A. ve Harari, I., 1995-a. Numerical assessment of some membrane elements with drilling degrees of freedom, Computer and Structures, 55(2), 297-314
- Hughes, T.J.R., Masud, A. ve Harari, I., 1995-b. Dynamic analysis with drilling degrees of freedom, Int. J. Numer. Meth. Engng., 38(19), 3193-3210.
- Ibrahimovic, A., Taylor, R.L. ve Wilson, E.L., 1990. A robust quadrilateral membrane element with rotational degrees of freedom, Int. J. Numer. Meth. Engng., 30, 445-457.
- Ibrahimovic, A., 1993. Quadrilateral finite elements for analysis of thick and thin plates, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 110, 195-209.
- Ibrahimovic, A. ve Wilson, E.L., 1995. A modified method of incompatible modes, Communications in Numerical Methods in Engineering, 11, 655-664.
- Ibrahimovic, A. ve Kozar, I., 1995. Non-linear Wilson's brick element for finite element deformations of three-dimensional solid, Communications in Numerical Methods in Engineering, 11, 655-664.
- Irons, B.M.R., 1976. The semi-Loof shell elements, In finite elements for thin and curved membranes, Ashwell D.G. (eds), Wiley, London.

- Jiang, L. ve Chernuka, M.W., 1994. A simple four-noded corotational shell element for arbitrarily large rotations, Computers and Structures, 53(5), 1123-1132.
- Jiang, L., Chernuka, M.W. ve Pegg, N.G., 1994. A co-rotational, update Lagrangian formulation for geometrically nonlinear finite element analysis of shell structures, Finite Element in Analysis and Design, 18, 129-140.
- Jin, L., 1994. Analysis and evaluation of a shell finite element with drilling degree of freedom, Master thesis, University of Maryland at College Park, Maryland.
- Katili, I., 1993-a. A new discrete Kirchhoff-Mindlin element based on Mindlin-Reissner plate theory and assumed shear strain fields-part I: an extended DKT element for thick-plate bending analysis, Int. J. Numer. Meth. Engng., 36, 1859-1883.
- Katili, I., 1993-b. A new discrete Kirchhoff-Mindlin element based on Mindlin-Reissner plate theory and assumed shear strain fields-part II: an extended DKQ element for thick-plate bending analysis, Int. J. Numer. Meth. Engng., 36, 1885-1908.
- Kosloff, D. ve Frazier, G., 1978. Treatment of hourglass patterns in low order finite element codes, Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2, 52-72.
- Lee, W. ve Pian, T.H.H., 1978. Improvement of plate and shell element by mixed formulation, AIAA Journal, 16, 29-34.
- Lee, W. ve Wong, C., 1982. Mixed formulation finite elements for Mindlin theory plate bending, Int. J. Numer. Meth. Engng., 18, 1297-1311.
- Liu, W.K., Ong, J.S.J. ve Uras, R.A., 1985. Finite element stabilization matrices-a unification approach, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 53, 13-46.
- Liu, W.K., Law, E.S., Lam, D. ve Belytschko, T., 1986. Resultant-stress degenerated-shell element, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 55, 259-300.
- Liu, W.K., Hu, Y.K. ve Belytschko, T., 1994. Multiple quadrature underintergrated finite element, Int. J. Numer. Meth. Engng., 37, 3263-3289.
- Liu, W.K., Guo, Y., Tang, S. ve Belytschko, T., 1999. A multiple-quadrature eight-node hexahedral finite element for large deformation elastoplastic analysis, Communications in Numerical Methods in Engineering, 11, 655-664.
- MacNeal, R.H. ve Harder R.L., 1985. A proposed standard set of problems to test finite element accuracy, Finite Element Analysis and Design, 1, 3-20.
- MacNeal, R.H. ve Harder, R.L., 1988. A refined four-noded membrane element with rotation degrees of freedom, Computers and Structures, 28(1), 75-84.
- MacNeal, R.H., 1998-a. Perspective on finite elements for shell analysis, Finite Element in Analysis and Design, 30, 175-186

- MacNeal, R.H., 1998-b. A simple quadrilateral shell element, Computer and Structures, 8, 175-183
- Meek, J.L., 1991. Computer methods in structural analysis, Fong&Sons Printers Pte.Ltd, First edition, USA.
- Mohanrao, A., Rao,T. ve Dutaguru, B., 2004. Comparative efficiencies of three paralel algoritms for nonlinear implicit transient dynamic analysis, Sadhana, 29, 57-81.
- Moita, G.F. ve Crisfield, M.A., 1996. Finite element formulation for 3-D continua using the co-rotational technique, Int. J. Numer. Meth. Engng., 39, 3775-3792.
- Noor, A.K., Belytschko,T. And Simo,J., 1989. Analytical and Computational Models of Shells, Americal Society of Mechanical Engineering,3
- Parisch, H., 1981. Nonlinear analysis of shells using isoparametric elements, In Non-linear finite element analysis of plates and shells ASME AMD, vol. 48, 47-63.
- Park, K.C., Stanley, G.M. ve Flaggs, D.L., 1985. A uniformly reduced four-noded C^0 -shell element with consistent rank corrections, Computers and Structures, 20, 129-139.
- Park, K.C. ve Stanley, C.M., 1986. A curved C^0 shell element based on assumed natural-coordinate strains, J. Appl. Mech., ASME, 53, 278-290.
- Peng, X. ve Crisfield, M.A., 1992. A consistent co-rotational formulation for shells using the constant stres/constant moment triangle, Int. J. Numer. Meth. Engng., 35, 1829-1847.
- Pian, T.H.H. ve Sumihara, K., 1984. Rotional approach for assumed stress finite elements, Int. J. Numer. Meth. Engng., 20, 1685-1695.
- Piltner, R. ve Taylor, R.L., 1997. A systematic constructions of B-bar functions for linear and nonlinear mixed-enhanced finite elements for plane elasticity problems, Int. J. Numer. Meth. Engng., 44, 615-639.
- Poulsen, P.N.ve Damkilde, L., 1996. Flat triangular shell element with Loof nodes, Int. J. Numer. Meth. Engng., 39(22), 3867-3887.
- Qin, Z. ve Chen, Z., 1988. Large deformation analysis of shells with finite element method based on the S-R Decomposition theorem, Computers and Structures, 30(4), 957-961.
- Ramm, E., 1977. A plate/shell element for large deflections and rotations, In. Proc. Symposium on Formulations and Computational Algorithms in Finite element Analysis, MIT Pres, Cambridge, MA
- Reissmann, H., 1988. Elastic plates: Theory and Applications, Wiley, New York.

- Reissner, E. ve Stein, M., 1951. Torsion and transverse bending of cantilever plates, TN2369, NACA.
- Reissner, E., 1965. A note on variational theorems in elasticity, Int. Journal of Solid and Structures, 1, 93-95.
- Rifai, M., 1993. Static and dynamic finite element analysis of finite deformation geometrically exact shell models, PhD, Stanford University, Stanford.
- Sabourin, F. ve Brunet, M., 1995. Analysis of plate and shell with a simplified three node triangular element, Thin-Walled Structures, 21, 209-223.
- Saleeb, A.F. ve Chang, T.Y., 1987. An efficient quadrilateral element of plate bending analysis, Int. J. Numer. Meth. Engng., 24, 1123-1155.
- Sauer, R., 1998. ein einheitliche finite element formulierung für stab-und Schalentragwerke mit endlichen rotationen, Bericht 4, Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe (TH).
- Simo, J.C. ve Fox, D.D., 1989. On a Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part I: Formulation and Optimal Parametrization, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 72, 267-304.
- Simo, J.C. ve Fox, D.D. ve Rifai, M.S., 1989. On a Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part II, The linear theory; computational aspects, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 73, 53-92.
- Simo, J.C., Fox, D.D. ve Rifai, M.S., 1990. On a Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part III, Computational aspects of the non-linear theory, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 79, 21-70.
- Simo, J.C. ve Rifai, M.S., 1990. A class of mixed assumed strain method of incompatible modes, Int. J. Numer. Meth. Engng., 29, 1595-1638.
- Simo, J.C., Rifai, M.S. ve Fox, D.D., 1992. On a Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part VI, Conserving algorithms for non-linear dynamics, Int. J. Numer. Meth. Engng., 34, 117-164.
- Simo, J.C., 1993. On a Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part VII, Shell intersections with 5/6 DOF finite element formulations, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 108, 319-333.
- Simo, J.C., Armero, F. ve Taylor, R.L., 1993. Improved versions of assumed enhanced strain tri-linear element 3D finite deformation problems, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 110, 359-386.
- Simo, J.C. ve Tarnow, N.A., 1994. A new energy and momentum conserving algorithm for the non-linear dynamics of shells, Int. J. Numer. Meth. Engng., 37, 2527-2549.

- Soh, A.K., Cen, S., Long, Y.O. ve Long, Z.F., 2001. A new twelve DOF quadrilateral element for analysis of thick and thin plates, Eur. J. Mech. A/Solids, 20, 299-326.
- Spilker, R.L. ve Munir, N.I., 1980-a. A hybrid-stress quadratic serendipity displacement Mindlin plate bending element, Computers and Structures, 12, 11-12.
- Spilker, R.L. ve Munir, N.I., 1980-b. A serendipity cubic-displacement hybrid-stress for thin and moderately thick plate, Int. J. Numer. Meth. Engng., 15, 1261-1278.
- Spilker, R.L., 1982. Invariant 8-node hybrid-stress element for thin and moderately thick plates, Int. J. Numer. Meth. Engng., 18, 1153-1178.
- Sze, Y.K. ve Chow, C.L., 1991. A mixed formulation of 4-node Mindlin/Reissner shell/plate element with interpolated transverse shear strain, Computers and Structures, 40, 775-784.
- Sze, K.Y ve Zhu, D., 1999. A quadratic assumed natural strain curved triangular shell element, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 174, 57-71.
- Taylor, R.L., Beresford, P.J. ve Wilson, E.L., 1976. A non-conforming element for stress analysis, Int. J. Numer. Meth. Engng., 10, 1211-1219.
- Taylor, R.L., 1979. Finite element for general shell analysis, 5th Int. Seminar on Computational Aspects of the finite element method, Berlin.
- Taylor, R.L., 1987. Finite element analysis of linear shell problems, J.R. Whiteman (ed.), Academic Pres, London, 191-204.
- Wanji, C. ve Cheung, Y.K., 1997-a. Refined non-conforming quadrilateral thin plate bending element, Int. J. Numer. Meth. Engng., 40, 3919-3935.
- Wanji, C. ve Cheung, Y.K., 1997-b. Refined quadrilateral discrete Kirchhoff thin plate bending element, Int. J. Numer. Meth. Engng., 40, 3937-3953.
- Wanji, C. ve Cheung, Y.K., 1997-c. Refined triangular discrete Kirchhoff plate element for thin plate bending, vibration and buckling analysis, Int. J. Numer. Meth. Engng., 41, 1507-1525.
- Wanji, C. ve Cheung, Y.K., 1999. Refined non-conforming triangular elements for analysis of shell structures, Int. J. Numer. Meth. Engng., 46, 433-445.
- Wanji, C. ve Cheung, Y.K., 2000. Refined quadrilateral element based on Mindlin/Reissner plate theory, Int. J. Numer. Meth. Engng., 47, 605-627.
- Wanji, C. ve Cheung, Y.K., 2005. Refined discrete quadrilateral degenerated shell element by using Timoshenko's beam function, Int. J. Numer. Meth. Engng., 63, 1203-1227.

- Wilson, E.L., Taylor, R.L., Doherty, W.P. ve Ghaboussi, J., 1973. Incompatible displacement models, In numerical and computer models in structural mechanics, Fenves SJ, Perrone N, Robinson AR (eds), Academic Pres,43-57, New York.
- Wriggers, P. ve Gruttmann, F., 1993. Thin shell with finite rotations formulated in biot stresses: theory and finite element formulation, Int. J. Numer. Meth. Engng., 36, 2049-2071.
- Wriggers, P. ve Hueck, U., 1996. A formulation of the QS6 element for large elastic deformation, Int. J. Numer. Meth. Engng., 39, 1437-1454.
- Yang, H.T.Y, Saigal, S. ve Liaw, D.G., 1990. Advances of thin shell finite element and some applications-version I, Computers and Structures, 3(4), 481-504.
- Yang, H.T.Y, Saigal, S., Masud, A. ve Kapania, R.K.,2000. A survey of recent shell finite elements, Int. J. Numer. Meth. Engng., 47, 101-127.
- Zhang, Y.X., Cheung, Y.K. ve Chen, W.J., 2000. Two refined non-conforming quadrilateral flat shell elements, Int. J. Numer. Meth. Engng., 49, 355-382.
- Zhong, Z.Z., 1993. Finite element procedures for contact-impact problems, Oxford university pres, Oxford.
- Zhong, W.X. ve Zeng, J., 1996. Rotational finite elements, J. Comp. Struct. Mech. Appl, 13, 1-8
- Zienkiewicz, C. ve Hinton, E., 1976. Reduced integration, function smooting and non-conforming in finite elment analysis, Journal of the Franklin Institute, 302, 443-461.
- Zienkiewicz, O.C. ve Lefebvre, D., 1988. A robust triangular plate bending element of the Reissner-Mindlin type, Int. J. Numer. Meth. Engng., 26, 1169-1184.
- Zienkiewicz, O.C., Xu, Z., Ling, F.Z., Samuelsson, A. ve Wilberg, N.E., 1993. Linked interpolation for Reissner-Mindlin plate element: part I-a simple quadrilateral, Int. J. Numer. Meth. Engng., 36, 3043-3056.

7. EKLER

Ek 1

Bu ekte, sönüm içermeyen Newmark implicit zaman integrasyon yöntemi için algoritma verilmiştir.

A. Başlangıç hesaplamaları

1. $[K]$ ve $[M]$ rijitlik matrisleri hesaplanır.
2. ${}^0\{U\}$, ${}^0\{\dot{U}\}$ ve ${}^0\{\ddot{U}\}$ başlangıç sınır şartları tanımlanır.
3. Zaman adımı Δt , α, β parametreleri seçilir ve aşağıdaki integrasyon sabitleri hesaplanır.

$$\beta \geq 0.50$$

$$\alpha \geq 0.25(0.5 + \beta)^2$$

$$a_0 = 1/\alpha \Delta t^2$$

$$a_2 = 1/\alpha \Delta t$$

$$a_3 = 1/2\alpha - 1$$

$$a_6 = \Delta t(1 - \beta)$$

$$a_7 = \beta \Delta t$$

4. Toplu rijitlik matrisi aşağıdaki gibi tekrar hesaplanır.

$$[\bar{K}] = [K] + a_0 [M]$$

B. Her bir adım için aşağıdaki işlemler yapılır

1. $t + \Delta t$ zaman anında yükler hesaplanır.

$${}^{t+\Delta t}\{\bar{P}\} = {}^{t+\Delta t}\{\bar{P}\} + [M] \left(a_0 {}^t\{U\} + a_2 {}^t\{\dot{U}\} + a_3 {}^t\{\ddot{U}\} \right)$$

2. $t + \Delta t$ zamanında yer değiştirmeler çözülür.

$$[\bar{K}] {}^{t+\Delta t}\{U\} = {}^{t+\Delta t}\{\bar{P}\}$$

3. $t + \Delta t$ anında hız ve ivmeler aşağıdaki gibi hesaplanır.

$${}^{t+\Delta t}\{\dot{U}\} = {}^t\{\dot{U}\} + a_6 {}^t\{\ddot{U}\} + a_7 {}^{t+\Delta t}\{\ddot{U}\}$$

$${}^{t+\Delta t}\{\ddot{U}\} = a_0 \left({}^{t+\Delta t}\{U\} - {}^t\{U\} \right) - a_2 {}^t\{\dot{U}\} - a_3 {}^t\{\ddot{U}\}$$

Ek 2

Kirchhoff plak için rijitlik matrisinde kullanılan şekil fonksiyonları ${}^K A_{ndm,i}^{ndf,x(y)}$ aşağıdaki gibi tanımlanmıştır. Virgül doğal koordinatlara göre kısmi türevleri ifade etmektedir.

do $i=1, nen$ (nen elemandaki maksimum düğüm noktası sayısıdır)
do $j=1, ndm$ ($ndm=2$ boyut olup sırasıyla $\xi(j=1)$ ve $\eta(j=2)$ ' ye göre türevdir)

$${}^K A_{j,i}^{3,x} = ({}^K T_{w,i}^x)_{,j}$$

$${}^K A_{j,i}^{4,x} = ({}^K T_{\theta_x,i}^x)_{,j}$$

$${}^K A_{j,i}^{5,x} = ({}^K T_{\theta_y,i}^x)_{,j} + N_i$$

$${}^K A_{j,i}^{3,y} = ({}^K T_{w,i}^y)_{,j}$$

$${}^K A_{j,i}^{4,y} = ({}^K T_{\theta_x,i}^y)_{,j} - N_i$$

$${}^K A_{j,i}^{5,y} = ({}^K T_{\theta_y,i}^y)_{,j}$$

end do

end do

Ek 3

Reissner/Mindlin plak için rijitik matrisinde kullanılan şekil fonksiyonları ${}^{RM}A_{ndm,i}^{ndf,x(y)}$ aşağıdaki gibi tanımlanmıştır. Virgül doğal koordinatlara göre kısmi türevleri ifade etmektedir.

do $i=1, nen$ (nen , elemandaki maksimum düğüm noktası sayısıdır)

do $j=1, ndm$ ($ndm=2$ boyut olup sırasıyla $\xi(j=1)$ ve $\eta(j=2)$ ' ye göre türevdir)

$${}^{RM}A_{j,i}^{3,x} = \left({}^{RM}T_{w,i}^x \right)_{,j}$$

$${}^{RM}A_{j,i}^{4,x} = \left({}^{RM}T_{\theta_x,i}^x \right)_{,j}$$

$${}^{RM}A_{j,i}^{5,x} = \left({}^{RM}T_{\theta_y,i}^x \right)_{,j} + N_i$$

$${}^{RM}A_{j,i}^{3,y} = \left({}^{RM}T_{w,i}^y \right)_{,j}$$

$${}^{RM}A_{j,i}^{4,y} = \left({}^{RM}T_{\theta_x,i}^y \right)_{,j} - N_i$$

$${}^{RM}A_{j,i}^{5,y} = \left({}^{RM}T_{\theta_y,i}^y \right)_{,j}$$

end do

end do

ÖZGEÇMİŞ

Hasan Gedikli, 1972 yılında Trabzon'un Akçaabat ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini Akçaabat'ta tamamladıktan sonra, Akçaabat Lisesi'nden 1990 yılında mezun oldu. 1992 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Makina Mühendisliği Bölümüne girdi. 1996 yılında Makina Mühendisi olarak mezun oldu. Aynı yıl Batı-Söke Çimento A.Ş. fabrika montajında şantiye şefliği yaptı ve 2000 yılında K.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü Makina Mühendisliği Anabilim Dalında Yüksek Lisansını tamamlayarak Makina Yüksek Mühendisi ünvanını aldı. Aynı yıl da K.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü Makina Mühendisliği Anabilim Dalında doktora programına başladı. 2000 yılında Araştırma Görevlisi olarak atanıp halen K.T.Ü Makina Mühendisliği Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak görevini sürdürmektedir. Yabancı dil olarak İngilizce bilmektedir.