

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

139227

SINIR TABAKA AKIŞLARININ FARKLI TÜRBÜLANS
MODELLERİYLE KARŞILAŞTIRMALI ÇÖZÜMÜ

Mak. Yük. Müh. Lütfü NAMLI

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde

"Doktor"

Ünvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 29.07.2002

Tezin Savunma Tarihi : 28.02.2003

139227

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Habip ASAN

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Ahmet Şevket ÜÇER

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Tahir YAVUZ

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Kamil KAYGUSUZ

Jüri Üyesi : Doç. Dr. Burhan ÇUHADAROĞLU

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Yusuf AYVAZ

Trabzon 2003

TRABZON TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÖNSÖZ

Mühendislik uygulamalarında sıkça karşılaşılan türbülanslı akışların, tam eşitliklerinin var olmasına karşın henüz kesin çözümleri bulunmamaktadır. Ancak kesin çözüme yakın sonuçlar verebilen yöntemler mevcuttur. Bunlardan en çok tercih edilen ve kullanılan yöntem; türbülans modelleri ile türbülanslı akışların çözümlenmesidir. Literatürde çok sayıda türbülans modeli olmasına karşın hangisinin tüm akışlar için daha genel olduğu ve daha doğru sonuçlar verdiği hala bir araştırma konusudur.

Bu çalışmada seçilen farklı türbülans modellerinin, sınır tabaka akışlarında ve türbülansın karakterini bozan farklı etkiler altında performansları incelenmiştir.

Bu konuda bana çalışma fırsatı veren ve değerli katkılarını esirgemeyen tez danışmanım Doç. Dr. Habip ASAN' a, tez çalışmam süresince değerli görüşleriyle tez çalışmamda katkıda bulunan tez izleme komitesi üyeleri Prof. Dr. Tahir YAVUZ' a ve Prof. Dr. Kamil KAYGUSUZ' a, benden yardımlarını esirgemeyen tüm arkadaşlarıma ve bu uzun çalışma döneminde bana her zaman destek olan eşim Okt. İlknur NAMLI' ya teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Trabzon, 2003

Lütfü NAMLI

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET.....	V
SUMMARY.....	VI
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	VII
TABLolar DİZİNİ.....	XII
SEMBOLLER DİZİNİ.....	XIII
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Çalışmanın Amacı ve Pratik Önemi.....	6
1.3. Literatür Araştırması.....	8
1.4. Türbülanslı Akışların Yapısı.....	27
1.5. Türbülanslı Sınır Tabaka Akışlarının Modellenmesi.....	31
1.6. Türbülans Modelleri.....	37
1.6.1. Birinci Derece Modeller.....	39
1.6.1.1. Standart $k - \varepsilon$ Modeli.....	47
1.6.1.2. Düşük Reynolds Sayılı (Yakın-Duvar) $k - \varepsilon$ Modelleri.....	51
1.6.1.3. Lineer Olmayan $k - \varepsilon$ Modeli.....	56
1.6.2. İkinci Derece Modeller.....	58
1.6.2.1. Reynolds Gerilme / Türbülans Isı Akısı Modeli (RSM).....	59
1.6.2.2. Launder-Reece-Rodi Modeli (LRR).....	67
1.6.2.3. Cebrik Gerilme / Türbülans Isı Akısı Modeli (ASM).....	69
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	72
2.1. Türbülans Modellerinin Türbülanslı Sınır Tabaka Akışlarına (TSTA) Uygulanması.....	72
2.2. Birinci Derece Modellerin TSTA'ya Uygulanması.....	72
2.2.1. Standart $k - \varepsilon$ Modelinin TSTA'ya Uygulanması.....	72
2.2.2. Düşük Reynolds Sayılı (Yakın-Duvar) $k - \varepsilon$ Modellerinin TSTA'ya Uygulanması.....	74

2.2.3.	Lineer Olmayan $k - \epsilon$ Modelinin TSTA' ya Uygulanması	74
2.3.	İkinci Derece Modellerin TSTA' ya Uygulanması.....	76
2.3.1.	Reynolds Gerilme / Türbülans Isı Akısı Modelinin (RSM) TSTA' ya Uygulanması	76
2.3.2.	Launder-Reece-Rodi (LRR) Modelinin TSTA' ya Uygulanması.....	86
2.3.3.	Cebrik Gerilme / Türbülans Isı Akısı Modelinin (ASM) TSTA' ya Uygulanması	90
2.4.	Sayısal Yöntem ve Temel Denklemlerin Ayırıklaştırılması	92
2.5.	Ele Alınan Türbülanslı Sınır Tabaka Akışlarının Çözümlemesi.....	102
2.5.1.	Düzlem Levha Üzerinde TSTA.....	104
2.5.2.	Dairesel Serbest Jet Akışı.....	106
2.5.3.	Kaldırma Kuvvetinin Etkili Olduğu Yatay ve Dikey Konumda TSTA	108
2.5.3.1.	BDM İle Kaldırma Kuvveti Etkisindeki TSTA' nın Çözümlemesi.....	110
2.5.3.2.	İDM İle Kaldırma Kuvveti Etkisindeki TSTA' nın Çözümlemesi	111
3.	BULGULAR	118
3.1.	Düzlem Levha Üzerinde TSTA' da Elde Edilen Bulgular	118
3.2.	Dairesel Serbest Jet Akışında Elde Edilen Bulgular	136
3.3.	Kaldırma Kuvvetinin Etkili Olduğu TSTA' da Elde Edilen Bulgular.....	148
3.3.1.	Yatay Konumda TSTA' da Elde Edilen Bulgular	148
3.3.2.	Dikey Konumda TSTA' da Elde Edilen Bulgular	168
4.	İRDELEME.....	187
4.1.	Düzlem Levha Üzerinde TSTA' da Elde Edilen Bulguların İrdelenmesi	187
4.2.	Dairesel Serbest Jet Akışında Elde Edilen Bulguların İrdelenmesi	194
4.3.	Kaldırma Kuvvetinin Etkili Olduğu TSTA' da Elde Edilen Bulguların İrdelenmesi.....	197
4.3.1.	Yatay Konumda TSTA' da Elde Edilen Bulguların İrdelenmesi	197
4.3.2.	Dikey Konumda TSTA' da Elde Edilen Bulguların İrdelenmesi	201
5.	SONUÇLAR	205
6.	ÖNERİLER	208
7.	KAYNAKLAR.....	210
8.	EKLER	223
	ÖZGEÇMİŞ.....	224

ÖZET

Modern teknolojide öneme sahip çoğu akışlar türbülanslıdır. Türbülans, dönen, kesikli, oldukça düzensiz, yayılımcı ve yutucu bir fenomendir. Türbülanslı akışların davranışlarını nicel olarak belirleyebilmek, mühendisler için pratik bir öneme sahiptir. Bu amaçla, türbülans modelleme, uygun sayısal yöntemlerle bağlantılı ayrı bir disiplin olarak ortaya çıkmıştır. Ancak çoğu durumlarda, türbülanslı akışların değişken yapısından dolayı türbülansın gerçek fiziğini temsil edecek bir modelin olmaması, mevcut modellerin genelde farklı performanslara sahip olmalarına yol açmıştır. Hatta türbülans modellerinin performansları, sınır koşullarıyla da değişebilmektedir. Bu çalışmada çeşitli türbülanslı sınır tabaka akışları, birinci derece iki eşitlikli (girdap viskozitesi/yayılmı kullanan) ve ikinci derece çok eşitlikli türbülans modelleri kullanılarak çözümlenmiştir. Daha sonra elde edilen karakteristikler, seçilen türbülans modellerinin performanslarını değerlendirmek için DNS (doğrudan sayısal simülasyon) ve deneysel verilerle karşılaştırılmıştır. Diğer taraftan, temel eşitlikler, hesaplamasal ağın sınır tabakanın fiziksel olarak genişlemesine uyması için dönüştürülmüş koordinatlarda ifade edilmiştir. Bu eşitlikler, sonlu farklar tekniğine dayanan kontrol hacmi yöntemi kullanılarak cebrik forma dönüştürülmüş ve kapalı olarak çözülmüştür. Hesaplamalar, sınır tabakanın her bölgesinde parabolik karakterde olduğu kabulü yapılarak gerçekleştirilmiştir.

Bu çalışmada seçilen akışlar; düzlem levha üzerinde basınç gradyanı ve ayrılma olmayan sıkıştırılmaz türbülanslı sınır tabaka akışı, dairesel serbest jet akışı ve kaldırma kuvveti etkisi altında yatay ve dikey konumda düzlem levha üzerindeki türbülanslı sınır tabaka akışlarıdır. Düşük Reynolds sayılı $k - \epsilon$ modelleri, diğer türbülans modelleriyle kıyaslandığında DNS ve deneysel verilerle iyi bir uyum içindedir. Beklenenin aksine, ikinci derece modellerle karşılaştırıldığında, birinci derece modeller tüm akış koşullarında daha iyi sonuçlar vermektedir.

Anahtar Kelimeler: Türbülans Modelleri, Birinci Derece Modeller, İkinci Derece Modeller, Türbülanslı Sınır Tabaka, Dairesel Serbest Jet Akışı, Kaldırma Kuvveti

SUMMARY

Comparative Predictions of Turbulent Boundary Layer Flows with Various Closure Models

Most of the flow phenomena that are important to modern technology involve turbulence that is rotational, intermittent, highly disordered, diffusive and dissipative. There is therefore a practical need for engineers to be able to predict quantitatively the behaviour of turbulent flows. For this purpose, turbulence modeling has emerged as a distinct discipline, in conjunction with suitable numerical methods. However, lack of model to be represented the actual physics of turbulence, in many situations, because of changing turbulence structure present closure models have often different performance, even based on boundary conditions. In this study, variety of turbulent boundary layer flows have been predicted by applying first-order two-equation (eddy viscosity/diffusivity) and second-order multi-equation (the Reynolds stresses) closure models. Then, the obtained characteristics were compared with DNS and experimental data in order to assess the performances of the chosen turbulence closure models. On the other hand, the governing equations have been rewritten in transformed space (here in y -direction) so that the computational grid can expand to match the physical extent of the boundary layer. The equations were solved implicitly using control-volume-based finite-difference techniques that transform the differential equations into algebraic ones. The calculations presume that the flow under consideration is everywhere parabolic.

The flow cases chosen are incompressible turbulent boundary layer flow over a flat plate with zero pressure gradient and no separation, round free jet flow and the turbulent boundary layer flows affected by buoyancy force over horizontal and vertical flat plate. It has been found that the results obtained with low Reynolds number $k - \varepsilon$ models are in better agreement with DNS and experimental data than those obtained using the other turbulence models. Contrary to expect, in comparison with the second order models, the first order models have given better results for all flow cases.

Key Words: Turbulence Closure Models, First Order Models, Second Order Models, Turbulent Boundary Layer, Round Jet Flow, Buoyancy Force

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 1. Bir türbülanslı sınır tabaka akışında büyük girdaplar	30
Şekil 2. Kayma tabakası akışlarına örnekler. a) Paralel akışlar arasında karışma tabakası. b) Bir kanatta sınır tabaka ve dümen suyu. c) Jet akışında karışım tabakası. d) Boru akışında sınır tabaka akışı	32
Şekil 3. Çözüm bölgesinin farklı aralıklara sahip ağlara bölünmesi ($x - \eta$ koordinat sistemi)	94
Şekil 4. Sayısal ağ ve kontrol hacmi	99
Şekil 5. Düzlem bir levha üzerinde gelişen hız ve sıcaklık sınır tabaka	105
Şekil 6. Dairesel serbest jet akışı	107
Şekil 7. Kaldırma kuvvetinin etkili olduğu türbülans sınır tabaka a) Yatay b) Dikey.....	109
Şekil 8. Düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin ortalama hız profilleri ile karşılaştırılması.....	120
Şekil 9. Düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans kayma gerilmesi ile karşılaştırılması ($Re_{\theta} = 670$)	121
Şekil 10. Düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans kayma gerilmesi ile karşılaştırılması ($Re_{\theta} = 1410$).....	122
Şekil 11. Düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin ortalama hız profilleri ile karşılaştırılması ($Re_{\theta} = 670$).....	123
Şekil 12. Düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin ortalama hız profilleri ile karşılaştırılması ($Re_{\theta} = 1410$).....	124
Şekil 13. Düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin sürtünme katsayısının akış doğrultusunda değişimi ile karşılaştırılması	125
Şekil 14. Düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin şekil faktörünün akış doğrultusunda değişimi ile karşılaştırılması.....	126
Şekil 15. Düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin ortalama sıcaklık profilleri ile karşılaştırılması	127
Şekil 16. Düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin akışın normal doğrultusundaki türbülans ısı akışı ile karşılaştırılması ($Re_{\theta} = 990$)	128
Şekil 17. Düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin akışın normal doğrultusundaki türbülans ısı akışı ile karşılaştırılması ($Re_{\theta} = 1410$)	129
Şekil 18. Düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin Stanton sayısının akış doğrultusunda değişimi ile karşılaştırılması	130

Şekil 19. Düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans Prandtl sayısı ile karşılaştırılması ($Re_{\theta} = 670$).....	131
Şekil 20. Düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans kinetik enerji ile karşılaştırılması ($Re_{\theta} = 1410$)	132
Şekil 21. Düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans kinetik enerjinin yutulması ile karşılaştırılması ($Re_{\theta} = 1410$)	133
Şekil 22. Düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans kinetik enerji üretiminin kinetik enerjinin yutulmasına oranı ile karşılaştırılması.....	134
Şekil 23. Düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans kayma gerilmesinin kinetik enerjiye oranı ile karşılaştırılması	135
Şekil 24. Dairesel jet akışı için türbülans modellerinin radyal ortalama hız profili ile karşılaştırılması ($m = 0, x/d_j = 35$).....	137
Şekil 25. Dairesel jet akışı için türbülans modellerinin radyal türbülans kayma gerilmesi ile karşılaştırılması ($m = 0, x/d_j = 50$)	138
Şekil 26. Dairesel jet akışında SKE modeliyle belirlenen radyal ortalama hız profilleri ($U_o = 0, U_j = 5$ m/sn)	139
Şekil 27. Dairesel jet akışında LKE (LB) modeliyle belirlenen radyal ortalama hız profilleri ($U_o = 0, U_j = 5$ m/sn)	139
Şekil 28. Dairesel jet akışında NKE (SP) modeliyle belirlenen radyal ortalama hız profilleri ($U_o = 0, U_j = 5$ m/sn)	140
Şekil 29. Dairesel jet akışında RSM modeliyle belirlenen radyal ortalama hız profilleri ($U_o = 0, U_j = 5$ m/sn)	140
Şekil 30. Dairesel jet akışında LRR modeliyle belirlenen radyal ortalama hız profilleri ($U_o = 0, U_j = 5$ m/sn)	141
Şekil 31. Dairesel jet akışında ASM modeliyle belirlenen radyal ortalama hız profilleri ($U_o = 0, U_j = 5$ m/sn)	141
Şekil 32. Dairesel jet akışı için türbülans modellerinin radyal ortalama sıcaklık profili ile karşılaştırılması ($x/d_j = 35$).....	142
Şekil 33. Dairesel jet akışı için türbülans modellerinin radyal türbülans ısı akışı ile karşılaştırılması ($x/d_j = 35$).....	143
Şekil 34. Dairesel jet akışı için türbülans modellerinin radyal türbülans Prandtl sayısı ile karşılaştırılması ($x/d_j = 30$).....	144
Şekil 35. Dairesel jet akışında SKE modeliyle belirlenen radyal ortalama sıcaklık profilleri ($T_o = 20, T_j = 35$ °C).....	145
Şekil 36. Dairesel jet akışında LKE (LB) modeliyle belirlenen radyal ortalama sıcaklık profilleri ($T_o = 20, T_j = 35$ °C).....	145
Şekil 37. Dairesel jet akışında LKE (SP) modeliyle belirlenen radyal ortalama sıcaklık profilleri ($T_o = 20, T_j = 35$ °C).....	146

Şekil 38. Dairesel jet akışında RSM modeliyle belirlenen radyal ortalama sıcaklık profilleri ($T_o = 20, T_j = 35 \text{ }^\circ\text{C}$).....	146
Şekil 39. Dairesel jet akışında LRR modeliyle belirlenen radyal ortalama sıcaklık profilleri ($T_o = 20, T_j = 35 \text{ }^\circ\text{C}$).....	147
Şekil 40. Dairesel jet akışında ASM modeliyle belirlenen radyal ortalama sıcaklık profilleri ($T_o = 20, T_j = 35 \text{ }^\circ\text{C}$).....	147
Şekil 41. Yatay düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin ortalama hız profili ile karşılaştırılması.....	150
Şekil 42. Yatay düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans kayma gerilmesi ile karşılaştırılması ($Re_\theta = 990, Ri = 0.2$)	151
Şekil 43. Yatay düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans kayma gerilmesi ile karşılaştırılması ($Re_\theta = 1500, Ri = 0.06$)	152
Şekil 44. Yatay düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin sürtünme katsayısının akış doğrultusunda değişimi ile karşılaştırılması	153
Şekil 45. Yatay düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin ortalama sıcaklık profili ile karşılaştırılması	154
Şekil 46. Yatay düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin akışın normali doğrultusundaki türbülans ısı akısı ile karşılaştırılması ($Re_\theta = 990, Ri = 0.2$).....	155
Şekil 47. Yatay düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin akışın normali doğrultusundaki türbülans ısı akısı ile karşılaştırılması ($Re_\theta = 1500, Ri = 0.06$).....	156
Şekil 48. Yatay düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin akış doğrultusundaki türbülans ısı akısı ile karşılaştırılması ($Re_\theta = 990, Ri = 0.2$).....	157
Şekil 49. Yatay düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin akış doğrultusundaki türbülans ısı akısı ile karşılaştırılması ($Re_\theta = 1500, Ri = 0.06$).....	158
Şekil 50. Yatay düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans sıcaklık çalkantı şiddeti ile karşılaştırılması ($Re_\theta = 990, Ri = 0.2$).....	159
Şekil 51. Yatay düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans sıcaklık çalkantı şiddeti ile karşılaştırılması ($Re_\theta = 1500, Ri = 0.06$).....	160
Şekil 52. Yatay düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin radyal türbülans Prandtl sayısı ile karşılaştırılması ($Re_\theta = 990, Ri = 0.2$).....	161
Şekil 53. Yatay düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin radyal türbülans Prandtl sayısı ile karşılaştırılması ($Re_\theta = 1500, Ri = 0.06$).....	162

Şekil 54. Yatay düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin Stanton sayısının akış doğrultusunda değişimi ile karşılaştırılması	163
Şekil 55. Yatay düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans kinetik enerji ile karşılaştırılması ($Re_{\theta} = 1500, Ri = 0.06$)	164
Şekil 56. Yatay düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans kinetik enerjinin yutulması ile karşılaştırılması ($Re_{\theta} = 1500, Ri = 0.06$)	165
Şekil 57. Yatay düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans kinetik enerji üretiminin kinetik enerjinin yutulmasına oranı ile karşılaştırılması.....	166
Şekil 58. Yatay düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans kayma gerilmesinin kinetik enerjiye oranı ile karşılaştırılması	167
Şekil 59. Dikey düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin ortalama hız profilleri ile karşılaştırılması.....	170
Şekil 60. Dikey düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans kayma gerilmesi ile karşılaştırılması ($Re_{\theta} = 670, Ri = 0.05$)	171
Şekil 61. Dikey düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans kayma gerilmesi ile karşılaştırılması ($Re_{\theta} = 1410, Ri = 0.15$)	172
Şekil 62. Dikey düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin sürtünme katsayısının akış doğrultusunda değişimi ile karşılaştırılması	173
Şekil 63. Yatay düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin ortalama sıcaklık profili ile karşılaştırılması	174
Şekil 64. Dikey düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin akışın normali doğrultusundaki türbülans ısı akısı ile karşılaştırılması ($Re_{\theta} = 990, Ri = 0.08$).....	175
Şekil 65. Dikey düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin akışın normali doğrultusundaki türbülans ısı akısı ile karşılaştırılması ($Re_{\theta} = 1500, Ri = 0.16$).....	176
Şekil 66. Dikey düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin akış doğrultusundaki türbülans ısı akısı ile karşılaştırılması ($Re_{\theta} = 990, Ri = 0.08$).....	177
Şekil 67. Dikey düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin akış doğrultusundaki türbülans ısı akısı ile karşılaştırılması ($Re_{\theta} = 1500, Ri = 0.16$).....	178
Şekil 68. Dikey düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans sıcaklık çalkantı şiddeti ile karşılaştırılması ($Re_{\theta} = 990, Ri = 0.08$).....	179
Şekil 69. Dikey düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans sıcaklık çalkantı şiddeti ile karşılaştırılması ($Re_{\theta} = 1500, Ri = 0.16$).....	180

Şekil 70. Dikey düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin radyal türbülans Prandtl sayısı ile karşılaştırılması ($Re_{\theta} = 670$, $Ri = 0.05$).....	181
Şekil 71. Dikey düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin Stanton sayısının akış doğrultusunda değişimi ile karşılaştırılması	182
Şekil 72. Dikey düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans kinetik enerji ile karşılaştırılması ($Re_{\theta} = 1410$, $Ri = 0.15$)	183
Şekil 73. Dikey düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans kinetik enerjinin yutulması ile karşılaştırılması ($Re_{\theta} = 1410$, $Ri = 0.15$)	184
Şekil 74. Dikey düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans kinetik enerji üretiminin kinetik enerjinin yutulmasına oranı ile karşılaştırılması.....	185
Şekil 75. Dikey düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans kayma gerilmesinin kinetik enerjiye oranı ile karşılaştırılması	186
Ek Şekil 1. Bilgisayar programının akış şeması	223



TABLULAR DİZİNİ

	<u>Sayfa no</u>
Tablo 1. Standart $k - \varepsilon$ modelinde kullanılan ampirik sabitlerin değerleri	51
Tablo 2. Chien 'in düşük Reynolds sayılı $k - \varepsilon$ modelinde kullanılan sabitler.....	55
Tablo 3. Reynolds gerilme / akı modelinde kullanılan model sabitleri.....	67
Tablo 4. LRR modelinde kullanılan model sabitleri	68
Tablo 5. Genel diferansiyel eşitlikte BDM' de skaler büyüklüklerin değerleri.....	95
Tablo 6. Genel diferansiyel eşitlikte İDM' de skaler büyüklüklerin değerleri	96
Tablo 7. BDM' de dikey türbülanslı sınır tabaka için kaldırma kuvveti etkisinden dolayı gelen ek kaynak terimleri.....	111
Tablo 8. İDM' de dikey TSTA için kaldırma kuvveti etkisinden dolayı gelen ek kaynak terimleri	117

SEMBOLLER DİZİNİ

A_j, A_{j-}, A_{j+}	Ayrıklaştırılmış cebrik denklemde katsayılar
ASM	Cebrik gerilme / türbülans ısı akısı modeli
BDM	Birinci derece model
B_j	Hacimle çarpılmış kaynak terimi; $\equiv V_v S_\phi$
C_j, D_j	Ayrıklaştırılmış cebrik denklemde katsayılar
C_s	Model katsayısı
C_1, C_2, C_3	Model katsayıları
C'_1, C'_2	Model katsayıları
$C_s, C_{1\varepsilon}, C_{2\varepsilon}$	Model katsayıları
C_{1t}, C_{2t}, C_{3t}	Model katsayıları
C'_{1t}	Model katsayısı
C_E	Model katsayısı
C'_μ, C_D	Model katsayıları
C_μ	Model katsayısı; $\equiv C'_\mu C_D$
$C_{1\varepsilon}, C_{2\varepsilon}, C_{3\varepsilon}$	Model katsayıları
c_f	Duvar sürtünme katsayısı; $= \tau_w / 0.5 \rho U_\infty^2$
d_j	Dairesel jet çıkış çapı
DNS	Doğrudan sayısal benzeşim
D_{ij}	Üretim tensörü
E, D	Düşük Reynolds sayılı (yakın-duvar) modellerinde ek terimler
f_1, f_2, f_μ	Viskoz azaltma fonksiyonları
$f(L/X_n)$	Duvar düzeltmesinin etkisini X_n artıkça azaltan fonksiyon; $= \alpha k^{3/2} / X_n \varepsilon$
g_x, g_y	x ve y doğrultularındaki yerçekimi ivmesi; $= 9.81 \text{ m/s}^2$
g_i	x_i doğrultusundaki yerçekimi ivmesi

G	Türbülans kinetik enerjinin kaldırma kuvveti üretimi
$G_{\bar{v}^2}$	Akışın normali doğrultusundaki kaldırma kuvveti üretimi
G_{ij}	Reynolds gerilmelerinin kaldırma kuvveti üretimi
G_1	$\equiv dy_1 / dx + \eta d\delta / dx$
H	Şekil faktörü
İDM	İkinci derece model
k	Türbülans kinetik enerji; $= 1/2 \overline{u_i u_i}$, Isı iletim katsayısı
k^+	Normalleştirilmiş türbülans kinetik enerjisi; $= k / U_\tau^2$
k_c	y_c^+ 'de kinetik enerjinin değeri
l	Uzunluk ölçeği, Sınır tabaka akış uzunluğu
LES	Büyük girdap benzeşimi
LKE (CH)	Chein' in düşük Reynolds sayılı (yakın-duvar) $k - \varepsilon$ modeli
LKE (LB)	Lam-Bremhorst' un düşük Reynolds sayılı (yakın-duvar) $k - \varepsilon$ modeli
LRR	Lauder-Reece-Rodi modeli
m	$\equiv U_\infty / U_j$, İki eşitlikli türbülans modelinde sabit bir katsayı
n	İki eşitlikli türbülans modelinde sabit bir katsayı
NKE (SP)	Speziale' nin lineer olmayan $k - \varepsilon$ modeli
NY	Sınır tabaka dış sınırındaki sayısal çözüm noktası
NYM1	Sınır tabaka dış sınırındaki sayısal çözüm noktasına en yakın çözüm noktası
p	Çalkantı basıncı
P, \bar{P}	Ortalama statik basınç
P_k	Türbülans kinetik enerjinin gerilme üretimi
P_{ij}	Reynolds gerilmelerinin üretimi
P_t	Ortalama sıcaklık alanıyla üretim
Pr	Moleküler Prandtl sayısı

Pr_t	Türbülans Prandtl sayısı; $= [-\overline{uv}/(\partial U / \partial y)] / [-\overline{vt}/(\partial T / \partial y)]$
PDE	Kısmi diferansiyelli eşitlikler
q_w	Duvar ısı akısı; $= -\alpha (\partial T / \partial y)_{y=0}$
r	Silindirik koordinatlarda akışın normalini doğrultusu
$r_{1/2}$	Dairesel jette yarı çap; $U(r_{1/2}, x) = [U_s(x) + U_\infty] / 2$
R_f	Akı Richardson sayısı; yatay; $\equiv -G / (P_k + G)$, dikey; $\equiv 0$
Ri	Gradyan Richardson sayısı; $= [-\beta g (\partial T / \partial y)] / [(\partial U / \partial y)^2]$ veya Gr / Re^2
Re	Reynolds sayısı; $= U_\infty x / \nu$
Re_θ	Momentum kalınlığı Reynolds sayısı; $= U_\infty \theta / \nu$
R_t	Türbülans Reynolds sayısı; $= k^2 / \nu \epsilon$
R_y	Yakın-duvar türbülans Reynolds sayısı; $= k^{1/2} y / \nu$
R	Sıcaklık ve hız çalkantılarının zaman ölçeklerinin oranı; $\approx 0.5-1$, Dairesel serbest jette belirli bir istasyondaki jet yarı çapı
RSM	Reynolds gerilme / türbülans ısı akısı modeli
RNG	Tekrar normalleştirilmiş grup teorisi
s_{ij}	Çalkantı halinde şekil değiştirme (yada uzama) miktarı
St	Stanton sayısı; $= q_w / U_\infty (T_w - T_\infty)$
S_{ij}	Ortalama şekil değiştirme (yada uzama) miktarı
$\overset{\circ}{S}_{ij}$	S_{ij} 'nin Oldroyd türevi
S_ϕ	ϕ değişkeninin kaynak terimi
SKE	Standart $k - \epsilon$ Modeli
SSG	Speziale-Sarkar-Gatski modeli
t	Türbülans çalkantı sıcaklığı
$\overline{t^2}$	Ortalama türbülans sıcaklık çalkantısı
t'	Ortalama türbülans sıcaklık çalkantısının şiddeti; $\equiv \sqrt{\overline{t^2}}$
t^*	Zaman
T_τ	Sürtünme sıcaklığı; $= q_w / U_\tau$

T_w	Düzlem levhanın yüzey sıcaklığı
T, \bar{T}	Ortalama sıcaklık
T^+	Normalleştirilmiş ortalama sıcaklık; $= (T_w - T) / T_\tau$
T_∞	Serbest akım sıcaklığı
T_c	Dairesel jetin eksenindeki sıcaklığı
T_j	Dairesel jette çıkış sıcaklığı
TSTA	Türbülanslı sınır tabaka akışı
u_i	x_i doğrultusundaki çalkantı hız bileşeni
u, v	x, y doğrultularındaki çalkantı hız bileşenleri
$\overline{u^2}, \overline{v^2}, \overline{w^2}$	x, y ve z doğrultularındaki normal gerilme bileşenleri
\overline{uv}^+	Normalleştirilmiş kayma gerilmesi; $= \overline{uv} / U_\tau^2$
$\overline{u_i u_j}$	Reynolds gerilmesi
$\overline{u_j t}$	Türbülans ısı akısı
\overline{ut}	x – doğrultusundaki türbülans ısı akısı
\overline{ut}^+	Normalleştirilmiş x – doğrultusundaki türbülans ısı akısı; $= \overline{ut} / U_\tau T_\tau$
U, \bar{U}	x doğrultusundaki ortalama hız bileşeni
U_τ	Kayma hızı; $= \sqrt{\tau_w / \rho}$
U^+	Normalleştirilmiş ortalama hız; $= U / U_\tau$
U_i	x_i doğrultusundaki ortalama hız bileşeni
U_∞	Serbest akım hızı
U_j	Dairesel jet çıkış hızı
U_c	Dairesel jetin eksenindeki hızı
\overline{vt}	y – doğrultusundaki (normal) türbülans ısı akısı
\overline{vt}^+	Normalleştirilmiş y – doğrultusundaki türbülans ısı akısı; $= \overline{vt} / U_\tau T_\tau$
V	y doğrultusundaki ortalama hız bileşeni
V_v	Kontrol hacmi; $= r \delta \Delta x \Delta \eta$

\hat{V}	Türbülans hareketin hız ölçęęi
w	Vortisite çalkantılarının zaman ortalamasının karesi
x, y	Akış doğrultusunda ve akışın normali doğrultusundaki koordinatlar
x_u, x_d	Çözüm bölgesinde geri ve ileri istasyonlar
X_n	Duvarın normali doğrultusundaki mesafe
y^+	Akışın normali doğrultusundaki boyutsuz uzunluk; $= U_\tau y / \nu$
y_I, y_E	Sınır tabakanın iç ve dış koordinatları
y_c^+	Viskoz alt sınır tabakanın dışında duvara en yakın düğüm noktası
z	Kinetik enerji uzunluk ölçęęi kombinasyonu; $\equiv k^m l^n$
α	Moleküler ısı yayılım katsayısı; $= k / \rho c_p$, Duvar etkilerini azaltma fonksiyonunda $f(L / X_n)$ bir skaler
α_t	Türbülans ısı yayılım katsayısı
$\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$	Model katsayıları
β	Isıl genişleme katsayısı; ideal gazlarda $\equiv 1 / T$
δ_{ij}	Kronecker deltası; $i = j$ için $\equiv 1$ ve $i \neq j$ için $\equiv 0$
δ, δ_t	Momentum ve ısı sınır tabaka kalınlığı; $\equiv y_E - y_I$
δ^*	Yer değiştirme kalınlığı
ε	Türbülans kinetik enerjinin yutulması
ε^+	Normalleştirilmiş türbülans kinetik enerjinin yutulması; $= \nu \varepsilon / U_\tau^4$
ε_{ij}	Viskoz yutulma
ε_t	Sıcaklık çalkantısı yutulması
ε_c	y_c^+ de kinetik enerjinin yutulmasının değeri
ϕ	Genel bir değişken
γ_k	k 'nın türbülanslı yayılımı; $\equiv \nu_t / \sigma_k$
κ	von Karman sabiti; $\cong 0.41$
ν	Kinematik moleküler viskozite
ν_t	Türbülans (girdap) viskozitesi
η	Dönüştürölmüş koordinatlarda akışın normali doğrultusu

π_{ij}	Basınç-şekil değiştirme terimi; $= \pi_{ij,1} + \pi_{ij,2} + \pi_{ij,3} + \pi_{ij}^w$
$\pi_{ij,1}$	Basınç-şekil değiştirme teriminin yavaş kısmı, izotropiye dönüş
$\pi_{ij,2}$	Basınç-şekil değiştirme teriminin hızlı kısmı
$\pi_{ij,3}$	Basınç-şekil değiştirme terimine kaldırma kuvvetinin katkısı
π_{ij}^w	Basınç-şekil değiştirme ifadesinde duvar düzeltmesi; $= \pi'_{ij,1} + \pi'_{ij,2}$
$\pi'_{ij,1}$	Duvar düzeltme teriminin birinci kısmı
$\pi'_{ij,2}$	Duvar düzeltme teriminin ikinci kısmı
π_{it}	Basınç-sıcaklık gradyanı korelasyonu; $= \pi_{it,1} + \pi_{it,2} + \pi_{it,3} + \pi_{it}^w$
$\pi_{it,1}$	Basınç-sıcaklık gradyanı korelasyonunun türbülans kısmı
$\pi_{it,2}$	Basınç-sıcaklık gradyanı korelasyonunun şekil-değiştirme kısmı
$\pi_{it,3}$	Basınç-sıcaklık gradyanı korelasyonunun kaldırma kuvveti kısmı
π_{it}^w	Basınç-sıcaklık gradyanı korelasyonunun duvar düzeltme terimi
ρ	Yoğunluk
$\sigma_\varepsilon, \sigma_k$	Model katsayıları
θ	Momentum kalınlığı
τ	Kayma gerilmesi; sınır tabaka akışı için $= -\overline{\rho uv}$, Kolmogorov zaman ölçeği
τ_w	Duvar kayma gerilmesi
Γ_ϕ	ϕ değişkeninin yayılım katsayısı
ω_i	Çalkantı vortisitesi

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Mühendislik uygulamalarında, akışkan hareketinin en karmaşık türü olarak türbülanslı akışlar bilinir. Bir akışkan hareketi, eğer dönen (rotasyonel), süreksiz, oldukça düzensiz, yayılımcı (difüzyon) ve yutucu ise, bu türbülanslı akış olarak tanımlanır. Kısaca türbülans, üç boyutlu, zaman bağımlı ve lineer olmayan bir fenomendir. Pratikte karşılaşılan akışların büyük çoğunluğunun türbülanslı akış olduğu bilinmektedir. Bu nedenle, mühendisler için türbülanslı akışların davranışlarının etkin bir şekilde belirlenmesi ihtiyacı ortaya çıkmaktadır. Bilgisayar teknolojisindeki son zamanlarda yaşanan hızlı gelişmelere rağmen, türbülanslı akışlar kesin bir yöntemle günümüzde henüz çözülememektedir. Türbülanslı akışı kontrol eden hareket denklemleri bilinmesine (Navier-Stokes eşitlikleri) ve sayısal yöntemlerin de bu denklemleri çözmek için mevcut olmasına rağmen, bilgisayarların bellek sorunları ve hızlarındaki yetersizlikler bu denklemlerin çözümünün önündeki en büyük engeli oluşturmaktadır. Özellikle pratikte karşılaşılabilen herhangi bir türbülanslı hareketin akış bölgesiyle karşılaştırıldığında çok küçük hareket parçacıkları (girdaplar) içermesi çözümü zorlaştıran etmenlerden biridir. Bu oran 10^{-3} kere daha küçük mertebelerde olabilmektedir [1, 2]. Bu hareket parçacıklarını (girdaplar ve vorteksler) bir sayısal yöntem içinde çözebilmek için, sayısal çözüm bölgesini 10^9 düğüm (grid) noktası oluşturacak şekilde daha küçük bölgelere bölmek gerekmektedir. Bu şekilde üç boyutlu bir akış bölgesini çözmek mümkün olabilmektedir. Bu kadar çok grid noktasına sahip akış büyüklüklerinin değerlerini depolamak günümüz koşullarında bile zordur. Ayrıca bu verilere ulaşmak ve bunlarla işlem yapmak da bilgisayarları altından kalkılamayacak yükün altına sokmak anlamına gelmektedir. Bununla birlikte, bu hareket parçacıklarının, türbülanslı akışı oldukça yutucu yapması ve momentumun da küçük ölçekli çalkantılarla yani küçük girdap hareketleriyle değişmesi kesin çözümü zorlaştıran diğer etmenlerdendir [3]. Aslında kesin çözüme ulaşmada bilgisayarları esas zorlayan unsur, bilgisayar hızının, küçük ölçekli ani etkilerin çözümüne müsaade edecek yeterli hıza henüz ulaşamamasıdır [1].

Yukarıda da bahsi geçen Navier-Stokes denklemlerinin kesin (analitik) çözümlerinin yakın bir zamanda gerçekleştirilebileceğine dair bir gelişme bulunmamaktadır. Bununla birlikte bu denklemlerin mühendisleri ilgilendiren kısmı konusunda ampirik ve yarı ampirik metotlar kullanılmıştır [4]. Boyut analizi yardımıyla deneysel verilerle, karmaşık geometriler için olmasa da basit akışlara uygulanabilen ampirik bağıntılar geliştirilmiştir. Bununla beraber, çözülecek bir akış probleminde belirlenecek parametre sayısı arttığında basit akışlar için geçerli ampirik bağıntılarla bir sonuca ulaşmak mümkün olmamaktadır. Bu nedenle diğer başka bir yöntem takip edilmiş ve bu metotlar, akışkan akışı olaylarının teorik bilgileri kullanılarak geliştirilmiştir. Bu metotlar, kütle, momentumun ve enerjinin korunumu prensibine dayanmaktadır ve bu nedenle de en azından potansiyel olarak ampirik bağıntılardan çok daha büyük bir genelliğe sahiptirler. Mühendisler için çalkantı hareketinin detayları önemli olmadığından dolayı, fiziksel problemleri temsil eden denklemlerin (Navier-Stokes) çözümü amacıyla ilk defa Osborne Reynolds tarafından önerilen istatistiksel bir yaklaşım yöntemi uygulanmıştır. Burada Reynolds, Navier-Stokes eşitliklerini, türbülans hareketiyle karşılaştırıldığında daha büyük olan bir zaman ölçeği üzerinden ortalamalarını alarak yeniden düzenlemiştir. Sonuçta ortaya çıkan Reynolds transport eşitlikleri, ortalama hız, basınç, sıcaklık ve madde konsantrasyonunun dağılımını akış içinde tanımlamaktadır. Ancak, hareket denklemlerinin istatistiksel çalışmaları her zaman, eşitliklerden daha fazla bilinmeyen olduğu durumlara neden olmaktadır. Buna, *türbülans teorisinin kapatma (closure) problemi* adı verilir [5]. Sonuçta bu eşitlikler artık kapalı bir denklem sistemini oluşturmamaktadır. Bu sistemin ampirik ifadelerle (çoğu zaman bunlar *ad hoc* olur: deneysel deneme yanılma) kapatılması gerekmektedir ve böylece hesaplama metodu yarı ampirik olmaktadır.

Ampirik bilgiler, bu eşitlik sistemine iki farklı şekilde girebilir. Bunların birincisi, *integral metottur*. Bu metod, başlıca ince kayma tabakası (sınır tabaka tipi akışlar) için uygulanır. Bu metod esas olarak, kısmi diferansiyel eşitlikleri adi diferansiyel denklemlere indirgeyebilmek için ampirik profil şekillerini sunarlar. Bunlar türbülansın global etkilerini tanımlayabilmek için daha fazla giriş bilgisine ihtiyaç duyarlar. Bu metodun aksine ikinci metod olarak *alan metotları (modelleri)* (field method) diye adlandırılan ve orijinal kısmi diferansiyelli eşitliklere uygulanan metotlar, akış içinde her bir noktada bu eşitliklerde ortaya çıkan türbülans transport terimlerinin hesaplanmasını gerektirirler. Bu işlem, türbülans modelleri olarak adlandırılan türbülans transport süreçlerinin bir matematiksel

modeli ile gerçekleştirilir. Bu nedenle bir türbülans modeli, ortalama akış eşitliklerindeki türbülans transport terimlerini belirleyen bir eşitlikler sistemi (cebrîk veya diferansiyel) olarak tanımlanır. Bu şekilde bu eşitlikler sistemi kapatılır. Türbülansın alan modellerinin alt dallarından biri, *türbülans transport modelleridir*. Burada dikkat edilmesi gereken önemli bir unsur; zaman ortalaması süreci sonunda ortaya çıkan türbülans transport modelleri, türbülansın gerçek fiziksel modlarına (girdaplar, hız dağılımları, yüksek vortisite bölgeleri vs.) uymazlar ve bu modeller temsil ettikleri fiziksel süreçleri genelde gizlerler [1, 2, 4]. Akış gözleme deneyleri, bu noktaları destekler ve kesin belirleme ve modellemenin zorluğunu gösterirler. Bu nedenle, türbülansın gerçek fiziği, transport modellerin hiç bir yerinde görülmez. Bunun en büyük nedeni, matematiğin modellerde fiziksel sürecin temsil edilmesinde nasıl kullanılması gerektiği konusunda yeterli bilginin henüz bulunmamasıdır. Ancak, fiziksel eksiklerine rağmen türbülans transport modelleri kullanılarak çok yararlı sonuçlar elde edilmiş ve bunlar, araştırma ve dizayn çalışmalarında değerli araçlar olmuşlardır [3].

Türbülans modelleri, türbülans süreçleri hakkındaki hipotezlere dayanır ve sabitler veya fonksiyonlar formundaki ampirik ifadeler gerektirirler. Bundan dolayı bunlar, türbülanslı hareketin detaylarını simüle etmezler fakat sadece ortalama akış davranışı üzerinde türbülansın etkisini gösterirler. Diğer taraftan, tasarım ve planlamada pratik hesaplamaları yararlı yapma arzusu, akışın ani değişimlerinin detaylarındaki ilginin olmayışı ve herhangi bir olayda büyük ölçekli olsa bile kesin çözümün pratik olmaması, farklı modellerin geliştirilmesine yönelik türbülans çalışmalarına, bilgisayarların daha henüz hesaplamalarda kullanılmasından önce başlanılmasına neden olmuştur. İlk olarak 19 yy. ' in son kısmında Boussinesq, türbülanslı akışların yerine büyük ölçüde artmış viskoziteye sahip bir laminar akışın konulabileceğini önermiştir. Bu, *girdap viskozitesi* olarak adlandırılır ve bunun hesaplamalarda kullanılan değerleri, deneylerden belirlenen viskozite değerleri olmuştur. Girdap viskozitesini kullanan transport modeller genel olarak *birinci derece modeller* olarak ifade edilmiştir. Girdap viskozitesi modellerinin zayıf yönleri; kaldırma kuvveti, eğrilik, duvara yakınlık gibi fiziksel etkileri dikkate alamamalarıdır. Girdap viskozitesi kullanan birinci derece modeller arasında en yaygın kullanılan $k - \epsilon$ modellerinde bu olumsuzlukları gidermek için çok sayıda yaklaşım değişiklikleri yapılmış olması, bu zayıf yönlere bir kanıt oluşturmaktadır. Patel vd. [6], $k - \epsilon$ modellerinde yapılan düşük Reynolds sayısı ve yakın-duvar yaklaşımlarını geniş bir

şekilde tartışmışlardır. Başka bir yaklaşım ise, Boussinesq ifadesine daha fazla cisim kuvvetlerinin ilave edilmesiyle, lineer olmayan girdap viskozitesi ifadesinin elde edilmesiyle gerçekleştirilmiştir [7]. Ancak bu düzenlemeler, türbülans transportunun akışta baskın fiziksel mekanizma olmadığı sürece uygundur [8]. Bu modellere daha fazla fizik katmak çabalarında Donaldson [9] ve diğerleri [10-12] ikincil momentler için transport eşitlikleri önermişlerdir. Bunlar izotermal akışta altı bağımsız Reynolds gerilmeleri, $-\overline{u_i u_j}$, bileşenlerini içermektedir. Böylece, fiziksel temelde eksikleri bulunan Boussinesq ifadesine gerek duymadan Reynolds gerilmelerini doğrudan belirlemek mümkün olmuştur. Bu amaçla yazılan transport eşitlikleri, ikincil momentleri içerdiğinden bunlar *ikinci derece modeller* olarak adlandırılmışlardır. Umutlu bir şekilde başlayan bu modellemede, her bir Reynolds gerilmesi bileşeni için yazılan transport eşitliklerinde daha fazla fiziğin temsil edilmesi için konulan terimler yeni kapatma problemlerini beraberinde getirmiştir. Bu da yeni hatalara neden olmuştur ve birinci derece modellere göre birçok akış durumlarında üstün sonuçlar vermesine rağmen, bunların bazen daha kötü sonuçlar da verdiği görülmüştür [8, 13, 14]. Diğer taraftan, bu modellerin formülasyonları üzerinde Rodi [1, 15] ve diğerlerinin [16-18] yaptıkları çalışmalar sonucu, dinamik olarak girdap viskozitesi modelinin üstünde küçük bir gelişmeye neden olan Reynolds gerilme tensörleri için cebrik bir eşitlik türetilmiştir. Bu model, *cebrik gerilme modeli* (ASM) olarak adlandırılmaktadır.

Türbülans transport süreçleri, büyük ölçüde probleme bağımlıdır. Bunun yanında bu süreçler; viskoziteye, dönme etkilerine ve kaldırma kuvvetine de bağlıdır. Sadece kesin eşitlikler (Navier-Stokes), tüm mümkün durumlar altındaki süreçleri doğru bir şekilde tanımlayan bir matematiksel modeli oluşturur. Türbülans modelleri ise; sadece yaklaşık bir tanımlama verebilir ve bir özel ampirik sabitler setiyle birlikte geçerlidir. Tabii bir türbülans modelinde arzu edilen, oldukça geniş bir aralıktaki akışlar için tek bir sabitler setiyle iyi bir yaklaşım başarılmasıdır. Akıştan akışa sabitlerin ayarlanmasının zorunlu olduğu bir model, yukarıda bahsedilen ampirik formülasyonlara benzer şekilde, alan metodundan daha az geneldir. Oysa ki iyi bir türbülans modeli, modele girilen ampirik verilerden extrapolasyona müsaade etmelidir [1].

Türbülans modellemenin günümüzde en önemli sorunu hangi modelin hangi akışlar için uygun olduğu veya genel bir türbülans modelinin tüm akışlarda yeterince tatminkar sonuçlar verip veremeyeceğidir. En genel bir türbülans modeli olmak için, bir özel

problemde en uygun bir model olmak yeterli değildir. Pratik uygulamalarda bir modelin ekonomikliliği ve kullanım kolaylığı da önemli faktörlerdendir ve daha genel modeller genellikle daha karmaşık ve bu nedenle de daha fazla hesaplama zamanı gerektirirler. Bu nedenle, her bir problem için, doğru karmaşıklık seviyesi, neredeyse tamamının *ad hoc* olduğu mevcut modeller arasından seçilmesi gerekmektedir.

Bu çalışmada yukarıda bahsi geçen farklı birinci ve ikinci derece türbülans transport modellerin, sınır tabaka akışlarında karşılaştırmalı olarak çözümünün yapılması ve performanslarının belirlenmesi amaçlanmıştır. Bu modeller arasında düşük Reynolds sayılı (yakın-duvar) modeller de bulunmaktadır. Diğer taraftan, duvara yakın bölgede viskozite ve kaldırma kuvveti gibi türbülansın yapısını bozan etkilerin de dikkate alınmasıyla türbülans modellerinin fiziksel performansları da değerlendirilmiştir. Seçilen türbülans modelleri, Hanjalic [14]' in 1994 yılında bir genel gözden geçirme çalışmasında belirttiği gibi; mühendislik uygulamalarında daha yaygın kullanılan ve daha hızlı çözüme ulaşılmasını sağlayan türdendir. Diğer taraftan literatürde yer alan çalışmalarda iyi performans sağlayan türbülans modelleri de dikkate alınmıştır [6]. Seçilen fiziksel problemler ise; kaldırma kuvvetinin ihmal edildiği durumda düzlem levha üzerinde basınç gradyansız sıkıştırılmaz sınır tabaka, kaldırma kuvvetinin olduğu durumda yatay ve dikey konumda basınç gradyansız sıkıştırılmaz sınır tabaka ve dairesel serbest jet akışlarıdır. Seçilen bu akışların hem hız alanı çözümleri hem de sıcaklık alanı çözümleri yapılmıştır. Burada sınır tabaka akışlarının seçilmesinin başlıca nedeni, bu akışların parabolik karakter göstermesidir. Bununla beraber, sınır tabaka akışları, türbülans kinetik enerji seviyesinin, k , nispeten düşük olduğu ve düzgün dağılı (uniform) olmadığı akışlardır. Boru yada kanal akışlarından farklı olarak da, sınır tabaka akışı dış sınırı değişken ve genişleyen yapıdadır [110]. Diğer taraftan, türbülans modeli performans testleri, genellikle, literatürde basit akışlar diye anılan akışlarda yapılır. Bu akışlarda iyi sonuç veren türbülans modellerinin daha karmaşık akışları çözebileceği kabul edilir [123, 124]. Ayrıca, sınır tabaka akışları izotropik ve homojen kayma (shear) akışlarıdır. Bundan başka, parabolik akışların matematiksel formülasyonunun ve çözümleme sürecinin daha basit olmasından dolayı, karmaşık modellerin fiziğinin ortaya konulmasında ve tartışılmasında daha çok yardımcı olacağı açıktır. Modellerin performanslarının değerlendirilmesinde, ilk olarak sınır tabaka akışlarında iyi sonuçlar verdiği bilinen iki eşitlikli birinci derece modeller (girdap viskozitesi kullanan modeller) kullanılmıştır. Daha sonra ikinci derece modellerle

elde edilen çözümler, bunlarla ve literatürden [19, 20] sağlanan DNS (doğrudan sayısal benzeşim) sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Özellikle ikinci derece modellerde ortaya çıkan ve tekrar modellenmesi gereken terimlerin (basınç-şekil değiştirme, yutulma ve yayılım) literatürden elde edilmiş en güncel ve performansı yüksek modelleri kullanılarak çözümler elde edilmiştir.

Ele alınan sınır tabaka akışlarının, momentum transportu çözümlerinin yanında literatürde çok fazla yer alamamış ısı transportu (sıcaklık alanının) çözümleri de yapılmıştır. İki eşitlikli birinci derece modellerde bu, türbülans Prandtl sayısından yararlanılarak yapılırken, ikinci derece modellerde ısı transportu çözümleri doğrudan ısı akısı denklemleri oluşturularak yapılmıştır. Ancak, ısı akısı transport eşitlikleri türbülans modelleri elde edilmesi, Reynolds gerilme eşitlikleri modelleri elde edilmesinden zordur. Bunun yanında ısı akısı için yeterince deneysel ve sayısal verinin bulunmaması da (özellikle duvara yakın bölgede) ısı akısı türbülans modellerinin gelişmesinin yavaş olmasına neden olmuştur [21]. Bu çalışmada yukarıda da belirtildiği gibi kaldırma kuvvetinin etkili olduğu ve olmadığı durumlar için sıcaklık alanı çözümleri de elde edilmiştir ve bu çözümlerden yararlanılarak, seçilen türbülans modellerin performansları değerlendirilmiştir.

1.2. Çalışmanın Amacı ve Pratik Önemi

Yukarıda da bahsedildiği gibi türbülanslı akışların çözümlerine yönelik model çalışmaları literatürde oldukça geniş yer almıştır. Çok sayıda türbülans modeli geliştirilmiş ve bunlar farklı akışlarda test edilerek mühendislerin kullanımına sunulmuştur. Özellikle 1960' lı yılların ortalarına kadar bilgisayarların gelişiminin türbülans transport eşitliklerinin çözümüne destek vermesi, bir çok araştırmacının ortalama akışın temel diferansiyel eşitliklerine dayanan metotları geliştirmesine müsaade etmiştir. 1968 yılında düzenlenen Stanford Konferansının en büyük etkisi, kısmi diferansiyelli eşitliklere (PDE) dayanan metotların, en iyi integral metotlardan daha iyi ve daha genel sonuçlar verdiği karar verilmiş olmasıdır. Kısmi diferansiyelli eşitliklere (PDE) dayanan modellemenin asıl büyük gelişimi bundan sonra gerçekleşmiştir [3]. 1980-81 Stanford konferansında ise; yaklaşık 40 araştırma grubu, önceden belirlenen ve deneysel veriler bulunan akış durumlarında kendi modellerini test etmişlerdir. 1981-82 yıllarında ise, mühendislikle ilgili izotermal akışların hesaplanması için farklı metotlar arasında bir yarışma düzenlenmiş ve

hemen hemen tüm modeller bu yarışmada dikkate alınmıştır. Bu modeller arasında $k - \varepsilon$, cebrik gerilme ve ikinci derece modeller de bulunmaktaydı. Jüri, modellerin tatminkar performans aralıklarının oldukça dar olduğu sonucuna varmıştır [8]. 1990-92 yıllarında ise; Stanford Üniversitesi tarafından araştırmacılara yapılan çağrıyla, "*türbülans modellerinin karşılaştırmalı testleri*" hakkında, araştırmacıların katılımını gerektirmeyen ve posta ile araştırmacılar arası bağlantının sağlandığı bir uluslararası proje gerçekleştirmiştir. Böylece modellerin farklı akış durumları için yapılan testleri, hızlı bir şekilde duyurulabilmiştir. Bu projede testler, deneysel verilerden ziyade doğrudan sayısal benzeşimle (DNS) elde edilen verilerle karşılaştırılması benimsenmiştir [14].

Özellikle süper bilgisayarların kullanılmasıyla birlikte bazı basit akış durumlarında elde edilen DNS ve büyük girdap benzeşimi (LES) gibi ileri modellerden elde edilen sonuçlarla birlikte, birinci ve ikinci derece transport modellerinin test çözümleri yeni bir ivme kazanmıştır. Özellikle duvara yakın bölgelerde deneysel verilerin olmamasından dolayı, yakın-duvar modellerinin test edilmesindeki zorluklar DNS ile birlikte aşılmıştır.

Türbülans modellerinin farklı akış durumları için karşılaştırmalı test çözümleri günümüzde hala devam etmektedir. Ancak;

- Yapılan çalışmaların çoğunda; genellikle, iki farklı türbülans modeli test edilmiştir ve bunların karşılaştırılmasıyla türbülans modellerinin performansları irdelenmiştir. Kullanılan bu modeller de genellikle ya sadece birinci derece modelleri (Boussinesq' in girdap viskozitesi ifadesini kullanan modeller) yada sadece ikinci derece modelleri kapsayan çalışmalardır.

- Literatürde yer alan türbülans modellerinin performanslarının değerlendirildiği çalışmalarda büyük bir çoğunlukla, seçilen akışların momentum (hız alanı) çözümleri yapılarak modeller test edilmiştir. Var olan sınırlı sayıdaki sıcaklık alanı çözümlerine dayanan test çalışmaları ise hem çok az sayıdaki türbülans modeline uygulanmıştır hem de sınırlı sayıda parametre bu çalışmalarda yer almıştır.

- Özellikle duvar akışlarında laminer alt sınır tabakada ortaya çıkan kinematik viskozite ve duvar bloklama etkilerinin türbülans modeline ilave edilmesi için literatürde çok sayıda yaklaşım yapılmıştır. Fiziksel olarak aynı etkilerin modellere ilave ediliyor olmasına karşın birinci derece modellerle ikinci derece modellerde bu etkiler için sunulan yaklaşımlar, yöntem ve matematiksel açıdan birbirlerinden oldukça farklılık göstermektedir. Bu yaklaşımlar günümüzde hala devam etmektedir. Ancak bu en güncel

yaklaşımları içeren çok sayıdaki birinci ve ikinci derece türbülans modellerini içeren performans değerlendirme çalışmaları henüz yapılmamıştır.

- Türbülansın yapısını bozduğu bilinen kaldırma kuvvetinin türbülans modellerinin performansları üzerindeki etkisi yine çok sayıdaki birinci ve ikinci derece modellerin ele alınarak incelenmediği görülmektedir. Kaldırma kuvvetinin, akışın yapısına tesir ederek basit akışlar olarak nitelendirilen akışları karmaşık akışlar karakterine soktuğu bilinmektedir. Bunun yanında kaldırma kuvvetinin türbülans modellerinde bulunan bir çok parametreyi (σ_k ve Pr_t gibi) büyük ölçüde etkilediği de bilinen bir gerçektir.

Bütün bunların ışığında bu çalışmanın amacı:

- DNS ve LES gibi ileri türbülans modellerine kıyasla, mühendisler için daha hızlı ve ekonomik türbülans modelleri olarak bilinen yedi farklı birinci ve ikinci derece türbülans transport modelleri seçilerek, bunların parabolik karakterdeki sınır tabaka akışlarına uygulanması ve böylece daha geniş aralıkta seçilmiş olan türbülans modellerinin performanslarının belirlenmesi.

- Seçilecek dört farklı türbülanslı sınır tabaka akışının momentum (hız alanı) çözümlerinin yanında sıcaklık alanı çözümlerinin de yapılması ve bu çözümlerden elde edilen bulgular ile seçilecek türbülans modellerinin daha genel performans değerlendirmelerinin yapılması.

- Seçilecek yedi farklı birinci ve ikinci derece türbülans modelleriyle duvara yakın bölgedeki viskoz ve duvar bloklama etkilerinin daha geniş türbülans modeli aralığında incelenmesi ve bu etkileri türbülans modeline ilave eden yaklaşımların performanslarının belirlenmesi.

- Kaldırma kuvvetinin etkili olduğu sınır tabaka akışlarında, seçilecek yedi farklı türbülans modellerine bu etkilerin ilave edilmesi ve yine bu etkilerin modellerin performanslarını nasıl değiştirdiğinin belirlenmesi.

1.3. Literatür Araştırması

Türbülanslı akışların modellenmesi, 19. yüzyılın son kısmında Navier-Stokes eşitliklerinin zaman ortalamasının alınmasıyla başlamıştır. Bu işleme literatürde Reynolds ortalaması alınması, ortaya çıkan denklemlere ise; Reynolds denklemleri denilmektedir. Boussinesq ise yine aynı yıllarda, zaman ortalaması alınması sonucunda Reynolds

denklemlerinde ortaya çıkan bilinmeyen terimlerin belirlenmesi için basit bir türbülans modeli olan; *türbülans yada girdap viskozitesi hipotezini* önermiştir. Bununla birlikte, bir girdap viskozitesi modelini kullanılarak, Reynolds ortalamalı Navier-Stokes eşitliklerinin başarılı bir şekilde çözümlenmesi, 1920' li yıllardan sonra Prandtl 'ın çalışmalarıyla gerçekleştirilmiştir. Bu yıllarda Prandtl, girdap viskozitesinin belirlenmesi için bir esas olan; *karışım uzunluğu* bahsini önermiştir. Prandtl' ın karışım uzunluğu bahsine bir çok araştırmacı katkıda bulunmuştur. İkinci dünya savaşına kadar buna en çok katkıyı von Karman sağlamıştır. Yapılan daha detaylı çalışmalar sonucunda; türbülanslı transport süreçleri ile moleküler viskozite süreçleri arasında doğrudan bir benzerlik kuran karışım uzunluğu yaklaşımının, fiziksel olarak aslında doğru olmadığı belirtilmiştir [1, 2, 22]. Bunun başlıca nedeni olarak ise; türbülanslı akışlarda büyük ve küçük ölçekli girdaplar arasında belirgin bir ayırımın bulunmaması olarak gösterilmiştir. Bu durum 1972 yılında Gupta ve Kaplan [23]' ın bir sınır tabaka akışında yaptıkları deneysel çalışmayla da desteklenmiştir. Daha genel modeller geliştirilmesi amacıyla Prandtl, 1945 yılında modellenmiş ayrı bir transport eşitliğinden elde ettiği *türbülans kinetik enerjisini* girdap viskozitesine bağlamıştır. Bu çalışmayla birlikte bir eşitlikli türbülans modelleri ortaya çıkmıştır. Bunlardan ilki; *türbülans uzunluk ölçeği*, l , ampirik olarak tanımlanan ve türbülans kinetik enerjisi, k , modellenmiş bir transport eşitliğinden belirlenen $k-l$ modelidir. Türbülans uzunluk ölçeğinin, özellikle karmaşık akışlar için belirlenmesinde zorluklar dikkate alınarak, bunun bir transport eşitliğinden elde edilmesi yoluna gidilmiştir. Bu işlem; türbülans uzunluk ölçeğinin türbülans kinetik enerjisi ile bir kombinasyon yapması ve elde edilen bu karma büyüklüğün yine bir transport eşitliğinden belirlenmesi şeklinde gerçekleştirilmiştir. Böylece $k - \varepsilon$, $k - w$, $k - \tau$ vs. gibi iki eşitlikli türbülans modelleri elde edilmiştir. Boussinesq' in girdap viskozitesi hipotezini kullanan bu türbülans modelleri, bir eşitlikli modellere göre daha iyi sonuçlar vermesine rağmen bunlarda da her bir Reynolds gerilmesi bileşeninde, eğrilik, cisim kuvvetleri, kaldırma kuvveti ve geçmiş etkileri (history effects) gibi ek etkileri hesaba katmada zorluklarla karşılaşmıştır [1, 24]. Boussinesq' in girdap viskozitesi hipotezini kullanan bir eşitlikli ve iki eşitlikli türbülans modelleri, genel olarak birinci derece modeller olduğu daha önce belirtilmişti. Birinci derece modellerin bu zorluklarını aşmak için, fiziksel olarak doğru olmayan girdap viskozitesi ifadesini (hipotezini) kullanmayan ve her bir Reynolds gerilme bileşeninin ayrı olarak bir transport eşitliğinden belirlenebildiği yeni bir model, 1945 yılında Chou [11] ve

1951 yılında Rotta [10] tarafından önerilmiştir. 1940' lı yıllardan itibaren Kolmogorov' un bazı istatistiksel fikirlerini kullanarak Rotta' nın önerdiği böyle bir model, *ikinci derece model* diye adlandırılmıştır ve Reynolds gerilmelerinin modellenmesinin yönünü tamamen değiştirmiştir. Bu yeni türbülans modeli, girdap viskozitesi ifadesini kullanan birinci derece modellerden farklı olarak, Reynolds gerilme tensörünün hesaplanmasında, önemi uzun zamandan beri bilinen hem geçmiş (history) hem de yerel olmayan etkilerin hesaplanmasını yapabilmıştır [24]. Birinci ve ikinci derece modelleri kapsayan bu yöntem literatürde *ortalama türbülans alanı yöntemi* denilmektedir.

İkinci derece model yaklaşımında, Reynolds gerilme tensörünün her bir bileşeni için bir transport eşitlikle birlikte toplam altı denklemin çözümünün gerekmesi, 1960' lı yılların sonuna kadar özellikle karmaşık akışlar için bu yöntemin hesaplamasal olarak yapılabilirliğini sınırlamıştır. Bu tarihten sonra hızlı bilgisayarların daha geniş uygulama alanı bulmasıyla birlikte, ikinci derece modellerin geliştirilmesinde ve uygulamasında yeni atılımlar başlamıştır. Harlow ve Nakayama [25] ve Daly ve Harlow [26], Chou' nun daha önce önerdiği Reynolds gerilmesi ve enerji yutulması için elde edilen kısmi diferansiyel eşitlikleri kullanarak izotropik olmayan türbülansın genelleştirilmiş bir teorisinin geliştirilmesi üzerinde çalışmışlardır. Bu çalışmalara bir önemli katkı da Donaldson [9] ve Donaldson *vd.* [27] tarafından yapılmıştır. Atmosferik hava akışının dikkate alındığı bu çalışmada tanımlanmış bir uzunluk ölçeği kullanılarak Reynolds gerilme eşitliklerini kapatmak için, değişmez (üniversal, genel) bir modelleme elde edilmeye çalışılmıştır. Bu çalışma bir şekilde, akıştan ve geometriden bağımsız üniversal modelleme çabalarını da başlatmıştır. Çünkü sonraki modelleme çalışmalarında en önemli modelleme zorluğu olarak, belli bir akış için çok iyi sonuç veren türbülans modellerinin ve sabit katsayılarının, başka bir akış çeşidi için beklenen iyi sonuçları verememesiydi. Reynolds gerilme transport modelinin pratikteki ilk uygulamalarından biri; Hanjalic ve Launder [12] tarafından yapılan ve basit bir sınır tabaka akışıyla ilgili çalışmadır. Burada Reynolds gerilmeleri, ilgili transport eşitliklerinden çözümlenirken aynı zamanda *türbülans kinetik enerjinin yutulmasının*, ε , belirlenmesi için bir transport eşitlik daha çözümlenmektedir.

İkinci derece modellemede en önemli atılımlardan biri ve daha sonraki yeni model önerilerine de temel oluşturacak olan çalışmada Launder *vd.* [28], Rotta [10]' nın yaptığı çalışmayı esas alarak, literatüre LRR75 olarak geçen yeni bir Reynolds gerilme transport eşitliğini geliştirmişlerdir. Burada Launder *vd.* [28]; *basınç-şekil değiştirme ve türbülans*

transport terimleri için daha sistematik türbülans modelleri türetmişlerdir. Bu çalışmada da Hanjalic ve Launder [12]' in 1972 yılındaki çalışmalarında olduğu gibi; Reynolds gerilme *transport* eşitlikleriyle bağlantılı olarak, türbülans kinetik enerjinin yutulmasının belirlendiği modellenmiş bir *transport* eşitliği kullanılmıştır. Böylece ikinci derece modellemelerde Reynolds gerilmelerinin bileşenlerini bulmak için kullanılan altı *transport* eşitliğin yanında bir de türbülans kinetik enerjinin yutulmasının değerini belirlemek için bir *transport* eşitlik kullanılması yaygınlaşmıştır. Bu çalışmayla Launder *vd.* [28], ikinci derece modellerin, pratik önemi olan türbülanslı akışların çözümlerine nasıl kalibre edileceğini (uyarlanacağını) ve uygulanabileceğini de göstermiş oldular.

1968 Stanford Konferansına göre; ortalama türbülans alanı yaklaşımının, en iyi integral metottan bile daha iyi olduğu sonucu, daha önceden de bilinen ancak yeni bir ivme kazanan birinci ve ikinci derece türbülans modellerini yukarıda belirtilen aşamalara getirmiştir. 1970' li yıllardan itibaren modelleme konusundaki ilgi alanı; bu türbülans modelleri ile çeşitli etkilere maruz akışların nasıl daha doğru çözülebileceği konusunda olmuştur. Bunlar özellikle duvar akışlarında duvara yakın bölgede ve düşük Reynolds sayılarında kinematik (moleküler) viskozitenin etkileridir. Duvara yakın bölgede kinematik viskozitenin etkisinin yanında duvarın bloklaması etkisi de doğru çözümün bulunmasını engelleyen önemli bir faktördür. Yakın-duvar türbülans modellemesi ile ilgili ilk çalışma 1956 yılında van Driest tarafından, viskoz etkileri hesaba katmak için karışım uzunluğuna ilaveten bir azaltma fonksiyonu (damping function) önerilen çalışmadır [21]. Birinci derece modellerde ilk düşük Reynolds sayılı model, Jones ve Launder [29, 30] tarafından önerilmiştir. Bu çalışmada yüksek Reynolds sayılı formdaki iki eşitlikli türbülans modelinin yutulma eşitliğine azaltma fonksiyonları dahil edilmiştir ve bu şekilde düşük Reynolds sayılı model elde edilmiştir. Diğer önemli düşük Reynolds sayılı modeller sunan çalışmalar; Ng ve Spalding [31], Launder ve Sharma [6], Hofmann [32], Lam ve Bremhorst [33], Chien [34], Nagano ve Hishida [35], Ahn *vd.* [36] ve Abe *vd.* [37] olarak sayılabilir. Bu çalışmalarda genel olarak, birinci derece modellerden $k - \epsilon$ modeli için, Jones ve Launder [29]' in çalışmasını esas alarak, bu modellerin özellikle karmaşık akışlarda daha iyi sonuç verebilmesi için azaltma fonksiyonlarında önemli düzeltmeler ve katkılar yapmışlardır. Patel *vd.* [6]' nin yaptıkları çalışmada; bu modellerin büyük bir kısmı dahil olmak üzere, on farklı düşük Reynolds sayılı türbülans modelleri, düzlem levha sınır tabaka, ters ve düz basınç gradyanına sahip sınır tabaka ve kuyu akışları için test ederek

karşılaştırmışlardır. Bu karşılaştırma sonucunda; Lam ve Bremhorst [33], Chien [34] ve Launder ve Sharma [6]'nin önerdiği düşük Reynolds sayılı birinci derece modellerin diğer önerilenlere kıyasla daha iyi sonuçlar verdiği belirtilmiştir.

Birinci derece modellerin karmaşık akışlarda daha doğru sonuçlar vermesini sağlamak amacıyla başka yaklaşımlar da yapılmıştır. Bunlardan en önemlisi; Reynolds gerilmesi ile ortalama şekil değiştirme oranı arasındaki lineer ilişkinin yeni yaklaşımlarla lineer olmayan forma sokulmasıdır. Bunlardan literatürde en çok kullanılanı; Speziale [7]'nin önerdiği türbülans modelidir. Diğer çalışmalar ise; Nisizima ve Yoshizawa [38]'nin istatistiksel sonuçlara dayanan izotropik olmayan $k - \varepsilon$ modeli ve Rubinstain ve Barton [39]'nun, Yakhot ve Orszag [40] ve Yakhot ve Smith [41]'in *tekrar normalleştirme grup teorisine* (Renormalization Group Theory, RNG) dayanan lineer olmayan $k - \varepsilon$ modelidir. Suga ve Abe [42] yaptıkları çalışmada; kübik bir lineer olmayan $k - \varepsilon - A$ üç eşitlikli girdap viskozitesi türbülans modeli önermişlerdir ve bunu izotropik olmayan yakın-duvar bölgesinde sıcaklık alanına uygulamışlardır. Apsley ve Leschziner [43] ise diğerlerinden farklı olarak, düşük Reynolds sayılı lineer olmayan girdap viskozitesini kullanan bir $k - \varepsilon$ modeli önermişlerdir. Önerilen yeni türbülans modeli bu çalışmada; iki boyutlu karmaşık akışlara uygulanmıştır ve sonuçta elde edilen bulguların diğer lineer ve lineer olmayan türbülans modellerinden daha iyi sonuçlar verdiği belirlenmiştir. Birinci derece modellerin geliştirme çalışmalarında, lineer girdap viskozitesi ifadesini kullanıp farklı transport eşitlikler veya zaman ölçekleri kullanan çalışmalar da bulunmaktadır. Durbin [44], k , ε ve $\overline{v^2}$ transport eşitliklerine dayanan yeni bir yakın-duvar modeli tanımlamıştır. Bu çalışmada, duvar akışlarında katı yüzeyin bloklama etkisinin bir azaltma fonksiyonu yerine, girdap viskozitesine ilave edilen türbülans hızının normal bileşeninin varyansı, $\overline{v^2}$, kullanılmıştır. Benhia vd. [45] ise; Durbin [44]'in önerdiği modelleme yaklaşımının devamında $\overline{v^2} - f$ modelini önermişlerdir. Bu model, $k - \varepsilon$ modeline alternatif bir *eliptik rahatlatma eşitliği* içeren bir türbülans modelidir ve yakın-duvar davranışlarının tanımlanmasında önemli başarılar sağlamıştır. Bu çalışmaların devamında Reif vd. [46], lineer girdap viskozitesine bağlı yakın-duvar türbülans modelini uyarlanmışlar ve duvara yakınlık etkilerini eliptik rahatlatma yaklaşımıyla modellemişlerdir. Birinci derece modellerdeki diğer iyileştirme çabalarında, hem girdap viskozitesinin belirlenmesinde hem de kullanılan transport eşitliklerinde yeni geliştirmeler de mevcuttur. Saffman ve Wilcox

[47], sıkıştırılabilir ve sıkıştırılamaz türbülanslı sınır tabaka akışlarının çözümünde, girdap viskozitesinin iki farklı türbülans yoğunluğunun bir fonksiyonu şeklinde ifade edilmesiyle elde edilmiş bir model kullanılmıştır. Koosinlin ve Locwood [48], geleneksel girdap viskozitesinin genellik göstermediği burgulu (swirling) sınır tabaka akışları için yeni bir model geliştirmişlerdir. Derksen ve Azad [49], silindirik koordinatlarda sıkıştırılamaz bir akışta duvara yakın bölgedeki türbülans kinetik enerjinin davranışını incelemişlerdir. Hwang ve Liou [50], türbülans kinetik enerjinin ve onun yutulmasının duvara yakın bölgedeki dağılımının belirlenmesi için yeni ifadeler (korelasyonlar) geliştirmişlerdir.

İki eşitlikli birinci derece modellerin düşük Reynolds sayılarında veya yakın-duvar bölgelerinde daha genel çözümler vermesi için çabalar sarf edildiği bir dönemde, 1981 yılında düzenlenen Stanford konferansında; ikinci derece modellerin Boussinesq' in girdap viskozitesi hipotezini kullanan birinci derece modellerden daha üstün oldukları duyurulmuştur [13]. İkinci derece model çalışmaları, aslında, So *vd.* [51]' in çalışmalarında belirttikleri gibi; biri, iki eşitlikli modellerle karmaşık yapılu akışlarda daha genel çözümler elde etmek için yapılan düşük Reynolds sayılı (yakın-duvar) modelleme çalışmaları olmak üzere, türbülans modeli iyileştirmesi çalışmalarında iki farklı yoldan biridir. Speziale [24], bir eşitlikli ve iki eşitlikli birinci ve ikinci derece modelleri değerlendirdiği çalışmasında; ikinci derece modellerin diğerlerine kıyasla çok daha iyi sonuçlar verdiğini vurgulamıştır. Diğer taraftan, ikinci derece modellerin üstünlükleri vurgulanmış olmasına rağmen, bu modellerin yakın-duvar bölgelerinde ve karmaşık akışlarda aslında zayıf performanslar gösterebildiği de bir çok çalışmalar sonucu ortaya konmuştur [2, 13, 14]. Bu olumsuzlukları gidermek amacıyla, ikinci derece modeller için de çok sayıda yakın-duvar çalışmaları yapılmıştır. Bu çalışmalar daha çok Reynolds gerilme transport eşitliğinin *basınç-şekil değiştirme* (pressure-strain) terimi üzerinde yoğunlaşmıştır. İkinci derece modellerde, düşük Reynolds sayılı akış bölgesinde kinematik viskozitenin etkisinin belirlendiği ve tüm akışlara uygulanabilecek bir genelliğin kurulduğu ilk çalışmalardan biri; Hanjalic ve Launder [52]' in 1976 yılında yaptıkları çalışmadır. Bundan sonra ikinci derece modellerin geliştirilmesi çalışmalarında duvara yakın bölgedeki veya düşük Reynolds sayılı akışlarda viskoz etkileri çözüme ilave etmek için, yukarıda da belirtildiği gibi basınç-şekil değiştirme teriminin modellenmesinde farklı yaklaşımları öneren bir çok çalışma yapılmıştır. Shih ve Lumley [53] çalışmalarında; basınç-şekil değiştirme terimi üzerindeki duvara yakınlık etkilerinin yeni bir model olarak gerçeğe uygun bir şekilde

türetilmesiyle ilgilenmişlerdir. Shima [54], duvarın hemen yakınındaki türbülans gerilmelerinin izotropik olmayan yapısını ve duvar üzerinde gerçek gerilme eşitliğinin davranışını dikkate alarak, LRR modeli simetrik akışlar için geliştirmiştir. Lai ve So [55], yaptıkları çalışmada; yakın-duvar karakteristiklerini inceleyerek elde ettikleri sonuçları Reynolds gerilme transport eşitliğindeki farklı terimlerin davranışlarının değerlendirmesinde kullanmışlardır. Speziale *vd.* [56], yine yakın-duvar davranışlarının belirlenmesi açısından en önemli terimlerden biri olan basınç-şekil değiştirme teriminin yeni bir yöntemle tekrardan modellenmesini gerçekleştirmişlerdir. Bu yeni türbülans modeli literatürde SSG modeli olarak bilinmektedir. Speziale *vd.* [56] elde ettikleri bu yeni modelin LRR modeline göre bazı akışlarda daha üstün sonuçlar verdiğini saptamışlardır. Durbin [57], yakın-duvar için yeni bir Reynolds gerilme modeli önermiştir. So [58], sıkıştırılabilir türbülanslı akışlar için yakın-duvar modellemesi üzerinde çalışmıştır. Weinstock [59, 60] ve Weinstock ve Burk [61] yaptıkları çalışmada; Reynolds gerilme eşitliğindeki basınç-şekil değiştirme terimini yeniden modellerken, iki zamanlı dördüncü dereceden hız korelasyonunu kullanmışlardır. Amano ve Chai [62] çalışmalarında; izotropik türbülans modellerinden $k-\varepsilon$ modeli gibi modellerin, özellikle ayrılma meydana gelen ve dönen akışlar gibi izotropik olmayan etkileri dikkate alamadıklarını ve Reynolds gerilme modelinin daha iyi sonuçlar verdiklerini bildirmişlerdir. Esas olarak bu çalışmada; basınç-şekil değiştirme teriminin izotropik olmayan etkilerini de dikkate alacak şekilde yeniden geliştirilmesi yapılmaktadır. Bu yapılırken basınç-şekil değiştirme terimi, türbülans ve ortalama şekil değiştirme terimleri olmak üzere iki kısımda ele alınmıştır. Morris [63], yine Reynolds gerilme transport eşitliğinde basınç-şekil değiştirme teriminin, statik basınçta düzgün dağılı (uniform) olmayan elemanlar arası enerji transferinden sorumlu olduğunu vurgulayarak, bu terimi yeniden modellemiştir. Ayrıca bu çalışmada modelde bulunan sabit katsayılar da yeniden tesbit edilmiştir. Basınç-şekil değiştirme teriminin modellenmesi konusunda daha detaylı bir çalışma Speziale [64] tarafından yapılmıştır. Önceki çalışmalarda Reynolds gerilme transport eşitliğinde *basınç gradyanı-hız korelasyonları*, basınç-şekil değiştirme ve basınç yayılımı korelasyonu olarak ikiye ayrılarak modellemeler yapılmıştır. Speziale [64] ise yaptığı çalışmada basınç gradyanı-hız korelasyonlarını, Lumley [65] 'in çalışmasında belirttiği gibi *deviatorik* ve *izotropik* olarak iki kısma ayırarak modellemiştir. Deviatorik kısım, literatürde *izotropiye dönüş* (return-to-izotropy) olarak bilinmektedir. Ancak literatürde bazı çalışmalarda basınç-şekil değiştirme

terimi; *yavaş ve hızlı basınç-şekil değiştirme* terimleri olarak ikiye ayrılmıştır ve yavaş kısım izotropiye dönüş terimi olarak modellenmiştir [2]. İzotropiye dönüş terimi konusundaki önemli çalışmalar, Lumley ve Newman [66] ve Sarkar ve Speziale [67]' in yaptıkları çalışmalar olarak sayılabilir. Özellikle ikinci çalışmada, izotropiye dönüş terimi için lineer olmayan bir model geliştirilerek Rotta' nın lineer, Lumley' in yarı lineer ve Shih' in lineer olmayan modellerinden daha iyi sonuçlar ortaya konulduğu belirtilmiştir. Hızlı basınç-şekil değiştirme terimi, önceleri yavaş kısım ile karşılaştırıldığında ihmal edilmesine rağmen, yukarıda da belirtildiği üzere LRR ve SSG modelleri bu terimin modellenmesine dönük çalışmaları kapsamaktadır. Basınç-şekil değiştirme teriminin incelenmesi konusunda başka bir çalışma; Lesli [68]' nin yaklaşık homojen türbülanslı sınır tabaka akışında yaptığı çalışmadır.

İkinci derece modellerde, Reynolds gerilme transport eşitliklerinde basınç-şekil değiştirme teriminin dışında kalan diğer bir modellenmesi gereken terim; *üçlü hız korelasyonudur*. Bu terimin modellendiği ilk girişim, Daly ve Harlow [26]' un yaptıkları çalışmadır. Bu çalışmada, üçlü hız korelasyonu, türbülans gerilmelerinin gradyanı cinsinden ifade edilerek modellenmiştir ve bu model, en ünlü ve en çok kullanılan modellerden biridir. Diğer en çok kullanılan modellerden biri; Hanjalic ve Launder [12]' in önerdikleri modeldir. Bu model de yine Reynolds gerilmelerinin gradyanı cinsinden bir formda türetilmiştir. Daha genel üçlü hız korelasyonu modelleri elde etme çalışmalarından biri ise; Cormak vd. [69] ' in dört parametrelili bir model önerdikleri çalışmadır. Bu çalışma sonucunda, önerilen modelin diğer modellere göre üstün olduğu bu çalışmada belirtilmesine rağmen, karmaşık akışlara uygulama zorluğu nedeniyle Hanjalic ve Launder [12]' in önerdikleri model tavsiye edilmiştir.

İkinci derece modellerde, Reynolds gerilme transport eşitlikleriyle birlikte *türbülans kinetik enerjinin yutulmasının* da belirlendiği daha önce belirtilmişti. İkinci derece modellerin çözümlerinin başarısının sağlanması, bir ölçüde de yutulmanın yeterince doğru bir şekilde belirlenmesiyle mümkündür. Yutulmanın belirlenmesi, literatürde, cebrik ve diferansiyel eşitlik olarak iki şekilde yapılmıştır. Cebrik eşitliklerin kullanımı kolaydır ancak taşınım ve yayılım etkilerinin tam olarak hesaplanamaması, bunların uygulama alanını sınırlandırmıştır. Yutulmanın diferansiyel formdaki eşitliklerle belirlenmesi ise problemlerin daha da karmaşık bir hale girmesiyle sonuçlanmaktadır. Ancak yapılan çalışmalar, bu eşitliklerin daha basit formlarda ifade edilebileceğini göstermiştir. Bununla

ilgili ilk çalışmalardan biri, Harlow ve Nakayama [25] tarafından yapılmıştır. Daha sonra Hanjalic ve Launder [12] tarafından modellenmiş olarak bugün kullanılan şekliyle türbülans kinetik enerjisinin yutulması transport eşitliği önerilmiştir. Bundan sonraki çalışmalar, bu eşitliğin özellikle karmaşık akışlar için yeniden geliştirilmesi üzerine olmuştur. Bunlardan birisi; Raj [70]' ın bazı üç boyutlu ve dönen akışların, bu eşitlik üzerindeki etkisinin belirlenmesine yöneliktir. Launder ve Reynolds [71], yakın-duvar akışlarında yutulma değerinin belirlenmesi konusunda çalışmışlardır. Hallback *vd.* [72, 73], Reynolds gerilme modelleri için izotropik olmayan akış durumunda yutulma değerinin belirlenmesi için cebrik bir model önermişlerdir. So *vd.* [74] türbülans kinetik enerji eşitliğinin yakın-duvar modellemesini yaparak, bunun asimtotik davranışını bir $k - \epsilon$ modeli kullanarak detaylı bir şekilde incelemişlerdir. Bu inceleme sonucunda; daha önce yakın-duvar için yutulma eşitliği modellerinin doğru bulgular veremediği sonucuna varılmıştır. Bu amaçla bu çalışmada, yutulma için yeni bir eşitlik önerilmiş ve yapılan testler sonucu bu yeni eşitliğin iyi sonuçlar verdiği vurgulanmıştır.

Diğer taraftan karmaşık akışlara Reynolds gerilme transport eşitliklerinin uygulanması zorlukları, bu eşitliklerin cebrik formlarda ifade edilmesi çalışmalarına ivme vermiştir. Reynolds gerilmelerinin, $-\overline{u_i u_j}$, net transportunun (taşınım–yayılm) türbülans kinetik enerjinin transportuyla ilişkilendirilerek elde edilen modeller, ilk defa Rodi [15] tarafından önerilmiştir. Bu modeller *cebrik gerilme modelleri* olarak adlandırılmıştır. Launder [18] ise; Rodi 'nin bu modelini genel formda bir cebrik gerilme modeli olarak ifade etmiştir. Gibson ve Launder [75], sıcaklık alanı çözümü için Rodi 'nin yaptığına benzer şekilde türbülans ısı akısı transport denklemini cebrik formda ifade ederek *cebrik akı modelini* türetmişlerdir. Bu çalışmanın en belirgin sonuçlarından biri, kaldırma kuvveti etkisinin cebrik akı modelinde daha kolay dikkate alınabilmiş olmasıdır. Bu modellerde de, girdap viskozitesi ifadesini kullanmaksızın Reynolds gerilmelerini cebrik eşitliklerden belirlemesinden dolayı, ikinci derece modeller olarak adlandırılmıştır [3, 75, 76].

Yukarıda bahsedildiği gibi hızlı bilgisayarların gelişmesiyle integral metotlara tercih edilen ve ortalama türbülans alan metotları olarak adlandırılan birinci ve ikinci derece modeller, ilk geliştirme aşamalarında daha çok basit akışlara uygulanmıştır. Hatta bugün bile başarılı sonuçlar verebilen model katsayıları bu basit akış koşullarında türetilmiş ve diğer akışlara uyarlanmıştır [1, 2, 4, 5]. 1980' li yılların başından itibaren ise, bu modeller karmaşık akışların çözümü için kullanılmaya başlanmıştır. Bu yapılırken aynı

zamanda kullanılan modellerin de özellikle deneysel sonuçlarla karşılaştırılarak performansları belirlenmiştir. Narayanan ve Raghu [77], Chien 'in düşük Reynolds sayılı $k - \epsilon$ modelini kullanarak bir serbest karışma tabakası akışının dengeli olmayan bölgesini çözmüşlerdir. Speziale [7], kendisinin geliştirdiği lineer olmayan $k - \epsilon$ ve $k - l$ modelleriyle, lineer modellerle belirlenemeyen kare kesitli kanallarda meydana gelen ikincil akışların çözümlerini gerçekleştirmiştir. Thangam vd. [78], Speziale' nin geliştirdiği $k - \tau$ modelini yakın-duvar türbülanslı akışına uygulamışlardır. Inaoka vd. [79], kare bir kütle ile rahatsız edilen bir türbülanslı sınır tabaka akışında, Launder&Sharma' nın düşük Reynolds sayılı $k - \epsilon$ modelini kullanarak çözümler yapılmışlardır. Bu çalışma sonucunda; ısı transferi ile momentum transferinin benzerliğinde bozulmalar olduğunu belirlenmişlerdir. Bu ise daha sonra da bahsedileceği gibi türbülans Prandtl sayısının, Pr , tesbit edilmesini zorlaştırmaktadır. Karmaşık akışların daha doğru bir şekilde çözülebilmesi için, birinci derece modellerde düşük Reynolds sayılı ve lineer olmayan girdap viskozitesi ifadesi değişiklikleri yapılmıştır. İkinci derece modellerin ise, birinci derece modellere göre karmaşık akışları çözmedeki başarısı, yapılan çalışmalarla gösterilmiştir [76]. Gibson ve Launder [16], atmosferik sınır tabaka için Reynolds gerilme ve ısı akısı modeli kullanarak yerçekiminden ve duvar etkilerinden kaynaklanan etkileri incelemişlerdir. Gibson ve Rodi [80], oldukça yüksek eğrilikteki bir karışım tabakasında Reynolds gerilme modeli kullanarak çözümler elde etmişlerdir ve aynı zamanda kullanılan modelin performansını belirlemişlerdir. Gibson vd. [81], dışbükey yüzeyler üzerindeki sınır tabaka akışları için Reynolds gerilme modeli kullanarak çözümler elde etmişlerdir. Kayma gerilmelerinin karmaşık şekil değiştirme alanlarının etkisinde kaldığı veya kaldırma ve dönme gibi cisim kuvvetlerinin etkisinde kaldığı böyle bir çalışmada aynı zamanda kullanılan modelin performansı da belirlenmiştir. Gibson ve Younis [82], basit bir girdap viskozitesi ifadesiyle çözümü mümkün olmayan eğri yüzeydeki bir duvar jeti akışını Reynolds gerilme modeliyle çözümlenmişlerdir. Demuren ve Rodi [83], dairesel olmayan kanallarda *Prandtl' in ikincil hareket ikinci türü* diye adlandırılan ikincil hareketleri, LRR modeli kullanarak belirlemişlerdir. Dekeyser [84], aksenal simetrik ısıtılan bir duvar jetinde Reynolds gerilme ve ısı akısı modellerini kullanarak çözümler elde etmiştir. Ayrıca bu çalışmada farklı *üçlü hız ve hız-sıcaklık korelasyonları* için modeller test edilmiştir. Gibson ve Younis [85], burgulu (dönen) akışların Reynolds gerilme modeliyle çözümünü yapmışlardır. Bu çalışmada, özellikle basınç-şekil değiştirme teriminin üzerinde durularak,

bu tip akışlarda bu terimin daha iyi sonuç verebilmesi için yeni öneriler yapılmıştır. So ve Yoo [86], bir duvarda terleme olduğu ve olmadığı durumda türbülanslı akışın düşük Reynolds sayılı Reynolds gerilme modeliyle çözümünü gerçekleştirmişlerdir. Kim [87], türbülanslı boru ve kanal akışlarının yakın-duvar Reynolds gerilme modeliyle çözümlenmesini yapmıştır. Galperin ve Kantha [88], jeofiziksel akışlarda, dönmenin etkisini belirlemek amacıyla bir Reynolds gerilme modelini kullanmışlardır. Cambon *vd.* [89], dönen akışlarda Reynolds gerilme modeli kullanarak çözümler elde etmişlerdir. Bu çalışmada da ağırlıklı olarak basınç-şekil değiştirme terimi üzerinde durularak bu terim için yeni model önerileri yapılmıştır. Shima [90], akım yönünde eğrilik ve dönme etkisindeki türbülanslı sınır tabaka akışını, Reynolds gerilme modeliyle çözümlenmiştir. Bu çözümle, tam ve kesin gerilme üretim terimleri vasıtasıyla eğrilik ve dönme etkisi hesaba katılabileceği vurgulanmıştır. Tsao ve Lin [91], daha önce $k - \epsilon$ modeliyle çözümler elde edilen bir gaz türbini yakıcısındaki akışın Reynolds gerilme modeliyle çözümlenmesini yapmışlar ve daha iyi sonuçlar elde etmişlerdir.

İkinci derece modellerin, birinci derece modellere göre ve bunların düşük Reynolds sayılı veya yakın-duvar uyarlamalarına göre, yüksek Reynolds sayılılarından üstün oldukları, çalışmalar sonucu ortaya konmalarına rağmen, bu türbülans modellerinin uygulamada bir çok zorlukları vardır. En basit olarak; modellerdeki denklem sayıları arttıkça ve bu denklemler karmaşıktıkça çözümü yapılabilecek fiziksel problemin karmaşıklığı da artmasına rağmen, hesaplamasal olarak bilgisayarlarda bellek kullanımının artması ve ekonomikliklerini kaybetmeleri bu modellerin zorluklarını oluşturmaktadır. Cebeci *vd.* [92] çalışmalarında; 1968' deki Stanford Konferansına atıfta bulunarak; bu konferansta ele alınan 14 fiziksel problemin incelemesinde üç temel model olan; cebrik girdap viskozitesi türbülans modelleri, türbülans kinetik enerji ve onun yutulması türbülans modelleri ve Reynolds gerilmesi ve yutulma miktarı türbülans modellerinin ele alındığını belirtmişlerdir. Ancak Cebeci *vd.* [92], diğer modellerin karmaşıklığıyla kıyaslandığında, *cebrik girdap viskozitesi modelinin* iyi bir tanımlamayla daha iyi çözümler verebileceği sonucuna varmışlardır. Cebeci ve Chang [93]' in daha önceki çalışmalarında da; pürüzlü yüzeyler için türbülans sınır tabaka akışlarında, pürüzsüz yüzeyler için türetilmiş Cebeci-Smith modelini uyarlayarak elde ettikleri modellerle yaptıkları çözümlerde iyi sonuçlar elde etmişlerdi. Ölçmen ve Simpson [94], cebrik girdap viskozitesinin geçerliliğini destekler nitelikte bir çalışmayla, üç boyutlu türbülanslı sınır

tabaka akışlarında farklı cebrik gerilme modellerini deneysel sonuçlarla karşılaştırarak değerlendirmişlerdir. Diğer taraftan, model katsayılarının tüm akışlar için aynı doğrulukta çözümler verememesi, sonuçta; modellerin genel (üniversal) olamamasına neden olmaktadır. Pope [95] yaptığı çalışmada; $k - \varepsilon$ modeliyle bir sınır tabaka akışı çözümünde belli katsayılarla iyi sonuçlar elde edilmesine rağmen, eksenel simetrik akışlarda benzer katsayılarla aynı başarının sağlanamadığını belirtmiştir. Bu olumsuzluğu gidermek için Pope [95] çalışmasında, kinetik enerjinin yutulması eşitliğine yeni bir katsayı önermiştir. Bernard [96] ise; bazı yakın-duvar $k - \varepsilon$ modellerinde ortaya çıkan, özellikle duvara yakın bölgede türbülans kinetik enerjinin, k , aşırı yükselmesi problemini incelemiştir. Bu çalışmayla bunun nedeni olarak, k eşitliğinde basınç yayılımı terimi için yaygın olarak kullanılan modelin önemli ölçüde uygunsuzluğu gösterilmiştir. Durbin [44], yakın-duvar modellerinde katı sınırın bloklama etkisini modellemek için kullanılan azaltma fonksiyonunun, f_w , uygun sonuçlar veremeyeceğini belirterek bunun yerine bir eşitlik halinde verilen türbülans hızının normal bileşeninin varyansını, $\overline{v^2}$, kullanmıştır. Launder [97] modellerin zorluklarının aşılmasında yaptığı çalışmada, diğerlerine göre daha farklı bir yaklaşım önermiştir. Bu çalışmada; yakın duvar bölgesinde daha sık ağ (fine-grid) kullanılmasıyla karmaşık yapıdaki akışlarda daha iyi çözümlerin elde edilebileceği belirtilmiştir. Hatta düşük Reynolds sayılı modelle kıyaslandığında bile bu yöntemin daha iyi sonuçlar verdiği belirtilmiştir.

Birinci derece iki eşitlikli modellerde diğer bir öneri, çok zaman ölçekli modellemedir [3, 14]. Wilcox [98], iki eşitlikli modellerde duvara yakın ve duvardan uzak bölgeleri de kapsayacak şekilde tek bir zaman ölçeği tanımlanmasının uygun olamayacağını belirtmiştir. Bunun için Wilcox, türbülans kinetik enerji spektrumunu yüksek ve düşük olarak iki bölgeye ayırarak, bu iki bölge için farklı zaman ölçekleri tanımlamış ve bu zaman ölçekleriyle de Reynolds gerilme tensörünü çok zaman ölçekli olarak ifade etmiştir. Buna benzer bir çalışmada Schiestel [99], tek bir zaman ölçeğinin sakıncalarını göz önüne alarak çalışmasında Reynolds gerilme modeli için çok zaman ölçekli çözümler yapmıştır. Yamamoto [100], yine Reynolds gerilme modeli için homojen izotropik olmayan türbülanslı akışta, çok zaman ölçekli modellemeyi daha çok akışa uygulayabilmek için genişletmiştir. Literatürde daha çok birinci derece modellerin zorluklarını aşmak için yapılan çalışmalar mevcut olmasına rağmen, ikinci derece modeller de bazı zorlukları bulundurmaktadır. Schumann [101] yaptığı çalışmada;

Reynolds gerilmeleri için yazılan diferansiyel eşitlikler cinsinden mevcut türbülans modellerin, gerçekleştirilebilir çözümleri garanti edemeyeceklerini belirtmiştir. Mevcut modelleri gerçekleştirilebilir forma sokmak için değişiklikler yapabilecek bazı araçlar bu çalışmada önerilmiştir. Launder ve Samaraweera [102] yaptıkları çalışmada; ince kayma tabakasında bir ikinci derece modelin uygulamasını yaparak elde edilen bulguları tartışmışlardır. Sonuçta bu çalışmada; bazı üstün özellikleri olmasına rağmen, ikinci derece modellerle elde edilen bulguların deneysel sonuçlarla karşılaştırıldığında bazı zayıf yönlerinin varlığından söz edilmiştir. Speziale [103] ise; bir yapı değişikliğinde ikinci derece modellerin değişmezliğini (varyansını) incelemiştir. Bu çalışmada; Reynolds gerilmelerinin ve daha yüksek türbülans korelasyonlarının yapı bağımsız olmasına rağmen, Reynolds gerilme transport eşitliklerinin yapı bağımlı olması, bu modellerin türbülans çalışmaları için genel (üniversal) bir yapının oluşmasına izin vermemeleriyle sonuçlandırılmıştır. Sonuçta; her ne kadar ikinci derece modellerin diğer modellere göre üstünlükleri belirtilmesine rağmen, bunların türbülansın nihai çözümleri olduğu yargısına, bu çalışmaya göre varılamaz olduğu görülmüştür. Başka bir deyişle; modellenen büyüklüklerin yapı bağımsızlığını bunlar yansıtamazlar.

İleri türbülans modeller olarak adlandırılan birinci ve ikinci derece modellerin fiziksel problemlere uygulanmalarında karşılaşılan zorluklar, modellerin geliştirilmeleri çalışmalarının yanında performanslarının da araştırılmasına yol açmıştır. Performans değerlendirmeleri yapılırken farklı yöntemler kullanılmıştır. Seçilen fiziksel problemin, sadece birinci derece modellerle çözümlenmesi veya sadece ikinci derece modellerle çözümlenmesi ve bunların kendi aralarında karşılaştırılarak değerlendirildiği çalışmalar mevcuttur. Ancak seçilen bir fiziksel problemin hem birinci hem de ikinci derece modellerle çözümlenerek sonuçları kendi aralarında karşılaştırıldığı çalışmalar da mevcuttur. Her iki yöntemde de modellerden elde edilen sonuçların doğruluğunun test edildiği deneysel veya son yıllarda *doğrudan sayısal benzeşim* (DNS) veya *büyük girdap benzeşimi* (LES) sonuçları da kullanılmaktadır. Birinci derece modellerin performanslarının değerlendirildiği çalışmalar şöyle sıralanabilir: Chambers ve Wilcox [104], sınır tabaka akışlarında dört farklı iki eşitlikli modelleri karşılaştırmıştır ve bunlardan Wilcox-Traci ve Ng-Spalding modellerinin deneysel sonuçlarla karşılaştırıldığında daha iyi sonuçlar verdiğini saptamışlardır. Patel ve Scheuerer [105], yakın ve uzak dümen suyu (wake) akışlarında $k - \epsilon$ modellerinin performanslarını

değerlendirmişlerdir. Avva *vd.* [106], beş farklı fiziksel problemde yüksek (standart) ve düşük Reynolds sayılı $k - \varepsilon$ modelleriyle çözümler elde ederek bunları karşılaştırmışlardır. Yapılan performans değerlendirmesi sonucunda; standart $k - \varepsilon$ modeli ile yapılan çözümlerin bazen düşük Reynolds sayılı modellerden daha iyi sonuçlar verebildikleri belirtilmesine rağmen, düşük Reynolds sayılı modellerin karmaşık akışlarda daha uygun oldukları vurgulanmıştır. Mansour *vd.* [107], çalışmalarında türbülans kinetik enerji ve onun yutulmasını inceleyerek yakın-duvar $k - \varepsilon$ modellerinin performanslarını incelemişlerdir. Michelassi ve Shih [108], eliptik bir akışı ele alarak on farklı düşük Reynolds sayılı modeli karşılaştırmışlardır. Speziale *vd.* [109], duvara yakın bölgedeki akışın $k - \varepsilon$ ve $k - \omega$ gibi iki eşitlikli modelleriyle çözümünü asimtotik uygunluk bakımından karşılaştırmışlar ve bu modellerin performanslarını belirlemişlerdir. Sarkar ve So [110], çalışmalarında Couette, kanal ve sınır tabaka akışlarını ele alarak düşük Reynolds sayılı iki eşitlikli modellerle çözümler elde etmişlerdir. Türbülans kinetik enerjinin doğru bir şekilde belirlenmesinde zorluklar bulunan Couette akışında, asimtotik olarak uygun olmayan modellerin, bu büyüklüğü belirlemede yetersiz kaldıkları bu çalışmanın sonucu olarak belirtilmiştir. Ayrıca bu çalışmada elde edilen sonuçların doğruluğu DNS verileriyle belirlenmiştir. Barakos ve Drikakis [111], iki lineer girdap viskoziteli $k - \varepsilon$ ve $k - \omega$ modelleri ile bir lineer olmayan $k - \omega$ modeli, şok sınır tabaka akışında inceleyerek, bu modellerin performanslarını değerlendirmişlerdir. Bu çalışma sonucunda; lineer olmayan türbülans modelinin sayısal belirlemede önemli iyileştirmeler sağlamasına rağmen, hesaplama zamanının diğerlerine göre daha uzun olduğu belirtilmiştir. Pajayakrit ve Kind [112] çalışmalarında; iki eşitlikli dört farklı türbülans modeli, düzlem ve eğrisel türbülanslı duvar jeti akışlarında değerlendirmiştir. Bu çalışma sonucunda; her dört modelin üstün ve zayıf yanları belirtilmiştir ve hiç bir modelin tek başına, hesaplanan parametreler için yüksek performans sağlayamadığı da vurgulanmıştır. İkinci derece modellerin performanslarının değerlendirildiği çalışmalar ise şunlardır: Lumley [8], yaptığı çalışmada tüm ileri türbülans modellerinin genel bir gözden geçirmesini yapmış ve özellikle ikinci derece modellerin performanslarını değerlendirmiştir. Mansour *vd.* [113], bir türbülanslı kanal akışında Reynolds gerilmeleri ve kinetik enerjinin yutulması, ε , için bütçeler (budget) çıkararak deneysel sonuçlarla karşılaştırmışlardır ve böylece ikinci derece modellerin performanslarını değerlendirmişlerdir. So ve Yuan [114], yaptıkları çalışmada yakın-duvar Reynolds

gerilme modellerinin performanslarını değerlendirmişlerdir. Ayrıca bu çalışmada; yakın-duvar değişikliğinden önce geometriden bağımsız olan bu modellerin, bu değişiklikten sonra da geometriden bağımsız olup olamayacakları incelenmiştir. Sonuçta; geometriden bağımsız böyle bir yakın-duvar Reynolds gerilme modelinin var olduğu belirtilmiştir. Launder [13] ise; ikinci derece modellerin daha genel manada bir gözden geçirmesini yapmıştır. Sonuçta; basit bir ikinci derece modelin, herhangi bir girdap viskozitesi kullanan türbülans modelinden daha üstün belirlemeler yaptığını belirtmiştir. Ancak, Launder [13] daha karmaşık yapıdaki ikinci derece modellerin, hem terimlerin modellenmesinde hem de hesaplamasal olarak bazı zorluklara sahip olduklarını vurgulamıştır. Literatürde en çok rastlanan gözden geçirme çalışmaları, hem birinci hem de ikinci derece modellerin birlikte ele alındığı çalışmalardır. Reynolds [115] çalışmasında; ortalama türbülans alanı yöntemini kullanan birinci ve ikinci derece modellerin, integral yöntemlere göre üstünlüklerini vurgulayarak bunların performanslarının genel değerlendirmesini yapmıştır. Buna benzer çok sayıda gözden geçirme çalışmaları mevcuttur. Bunlar; Hanjalic [14], Bradshaw [116], Lumley [8], Markatos [3], Rodi [1, 117], Taulbee [118], Speziale [24], Spalart [119] ve karmaşık akışlar için türbülans modellerinin performanslarını inceleyen Lakshminarayana [76] ve Launder [97, 120] olarak sayılabilir. Chung ve Sung [121], kaldırma kuvvetinin etkisi altında, bir düzlemdeki türbülanslı sınır tabaka akışının, dört eşitlikli bir türbülans modeliyle çözümünü yaparak elde ettikleri bulguları iki eşitlikli modellerle karşılaştırmışlardır. Kullanılan bu dört eşitlikte ortaya çıkan Reynolds gerilmeleri ve türbülans ısı akıları ise; cebrik gerime ve ısı akısı modelleriyle belirlenmiştir. To ve Humphrey [122], yine kaldırma kuvveti etkisindeki akışta $k - \epsilon$ ve cebrik gerilme modelleriyle (ASM) yapılan çözümleri karşılaştırılarak, modellerin performanslarını değerlendirmişlerdir. Martinuzzi ve Pollard [123] ve Pollard ve Martinuzzi [124] yaptıkları iki çalışmayla türbülanslı boru akışı için önce cebrik gerilme ve $k - \epsilon$ modellerinin çözümlerini karşılaştırmışlardır ve sonra da Reynolds gerilme ve yine $k - \epsilon$ modellerinin çözümlerini karşılaştırarak bu modellerin performanslarını değerlendirmişlerdir. Hogg ve Leschziner [125] çalışmalarında; sınırlandırılmış yüksek dönme etkisine sahip burgulu akış için $k - \epsilon$ ve Reynolds gerilme modelleriyle çözümler yaparak bu iki modelin performanslarını değerlendirmişlerdir. Bu değerlendirme sonucunda; Reynolds gerilme modelinin daha iyi sonuçlar verdiği belirlenmiştir. Cooper vd. [126] ve Craft vd. [127] yaptıkları çalışmalarda çarpan jet akışında dört farklı birinci ve

ikinci derece modelleriyle çözümler elde etmişlerdir ve bu çözümleri karşılaştırarak modellerin performanslarını değerlendirmişlerdir. Speziale ve Mhuiris [128] yaptıkları çalışmada; dönen yapıda homojen türbülanslı kayma akışını, bir $k - \epsilon$ ve üç Reynolds gerilme modelleriyle çözmüşler ve elde edilen bulguları karşılaştırarak bu modellerin performanslarını belirlemişlerdir. Çalışma sonucunda ortaya konulan sonuç; yaygın inancın tersine, hiçbir ikinci derece modelin daha basit olan $k - \epsilon$ modelinden elde edilen sonuçların üzerinde önemli bir belirleme iyileştirmesi sağlayamadığıdır. Behnia vd. [129] yaptıkları çalışmada; aksel simetrik türbülanslı çarpan jet akışında normal hız rahatlatma türbülans modeli (V2F) ve $k - \epsilon$ modellerini karşılaştırmışlardır. Bu çalışma sonucunda; V2F'nin daha iyi sonuçlar verdiği vurgulanmıştır. So ve Yuan [130], geri adım (backstep) akışında yakın-duvar iki eşitlikli ve Reynolds gerilme modelleriyle çözümler elde ederek bunları karşılaştırmışlardır. Bu çalışma sonucunda; duvarın normali doğrultusuna bağlı olan veya olmayan asimtotik olarak uygun modeller ve kayma hızına (U_τ) bağlı olmayan azaltma fonksiyonuna sahip modellerin performansları, diğerlerine kıyasla daha iyi olduğu vurgulanmıştır. Dol vd. [131] çalışmalarında, mevcut DNS sonuçlarından yararlanarak türbülanslı doğal taşınımında, ikinci derece ve cebrik modelleri karşılaştırmalı olarak değerlendirmişler ve bu modellerin performanslarını belirlemişlerdir. So vd. [132] yaptıkları çalışmada; bir iki eşitlikli ve biri türbülans ısı akısı modeli olmak üzere altı yakın-duvar Reynolds gerilme modellerinin performanslarını değerlendirmişlerdir. Bauer vd. [133] yaptıkları çalışmada; iki lineer olmayan girdap viskozitesi ve bir cebrik gerilme modellerini, standart $k - \epsilon$ ve Reynolds gerilme modelleriyle karşılaştırılarak, bu lineer olmayan modellerin doğruluk ve hesaplamasal sağlamlık yönünden performanslarını değerlendirilmiştir.

Yukarıda genellikle birinci ve ikinci derece modellerin momentum (hız alanı) çözümlerinin geliştirilmesi ve zorluklarının üstesinden gelinmesi çabalarıyla ilgili çalışmalar verilmiştir. Momentum çözümleri kadar literatürde yer bulamasa da, ısı (sıcaklık alanı) çözümleri de birinci ve ikinci derece modelleri içinde fiziksel problemlere bağlı olarak kendine yer bulmuştur. Daha sonraki bölümlerde verileceği gibi; birinci derece modellerde sıcaklık alanı çözümleri; momentum transportuyla ısı transportu arasında kurulan benzerlikten yararlanılarak yapılmaktadır [134]. Bu aşamada tanımlanan ve momentum transportunun ısı transportuna oranı olan türbülans Prandtl sayısının, Pr_t , değeri birinci derece modeller için önem kazanmaktadır. Reynolds benzerliğinde $Pr_t = 1$

alınmasına rağmen özellikle duvar akışlarında yapılan çalışmalarda bu büyüklüğün, duvara yakın bölgede birden daha büyük ve duvardan uzaklaştıkça birden daha küçük değerler aldığı belirlenmiştir [134, 135]. Buna göre; birinci derece modelleriyle sıcaklık alanı çözümlerinde, özellikle yakın-duvarda doğru olmayan bulgular ortaya çıkmaktadır. Bu ise sıcaklık alanı çözümlerinde birinci derece modellerin en önemli zorluklarından birisidir. Bu zorluğu aşmak için literatürde bir çok çalışma yapılmıştır. Nagano ve Kim [136] bu zorluğu aşmak için ve Pr_t 'nin değerinin bilinmediği akış koşullarında türbülans ısı yayılımı, α_t , için, Pr_t 'nin içinde bulunmadığı farklı bir tanımlama yapmıştır. Bu tanımlamada; türbülans kinetik enerjisi, k , ve onun yutulması, ε , eşitliğine sıcaklık varyansı (çalkantısı), $\overline{t^2}$, ve sıcaklık varyansı yutulması, ε_t , eşitliklerini ilave ederek türbülans ısı yayılımını, α_t , bu dört eşitlikler cinsinden ifade etmiştir. Chua ve Antonia [137], bir dairesel jette türbülans Prandtl sayısının radyal olarak değişimini deneysel olarak belirlemiştir. Bu çalışmaya göre Pr_t değeri; jet merkezinde yaklaşık 0.84 olmak üzere, 0.84 ile 1.6 değerleri arasında dalgalanma göstermektedir. Sommer vd. [138], yaptıkları çalışmada; sıkıştırılabilir ve sıkıştırılmaz türbülanslı sınır tabaka akışlarında, değişken Pr_t kullanıldığında sabit Pr_t kullanılmasına göre sıcaklık varyansı ve normal ısı akısının belirlenmesinde asimtotik olarak daha doğru sonuçlar elde etmişlerdir. So [139], bir türbülanslı sınır tabaka akışında basınç gradyanının Reynolds benzerliği üzerindeki etkilerini incelemiştir. Kawamura vd. [140], bir kanal akışında Reynolds sayısının ve moleküler Prandtl sayısının, Pr_t , sıcaklık varyansı, türbülans ısı akıları, türbülans Prandtl sayısı ve zaman ölçeği gibi istatistiksel büyüklüklere etkisini DNS çözümleriyle incelemiştir. Sonuçta; Pr_t üzerindeki Reynolds sayısının etkisinin, düşük Pr sayılarında çok daha önemli olduğunu belirlenmiştir. Na vd. [141], yine bir kanal akışında Pr sayısının, sıcaklık alanı üzerindeki etkilerini DNS çözümleriyle incelemiştir. Bu çalışmanın sonucuna göre ise; duvara yakın bölgede ($y^+ < 5$ için) $Pr=1$ için türbülans Prandtl sayısı bir olmaktadır. Duvardan daha uzaktaki akışta ise türbülans yayılımı momentum yayılımından büyük olmakta ve Pr_t sınır koşullarına bağlı olmaktadır. Ljuboja ve Rodi [142], kaldırma kuvveti etkisindeki yatay ve dikey duvar jeti akışlarında, sabit bir Pr_t yerine bir fonksiyon olarak yine bu çalışmada elde edilen Pr_t 'yi kullanmışlardır. İkinci

derece modellerde ise; enerji eşitliğinde açığa çıkan türbülans ısı akıları, Reynolds gerilmeleri gibi her bir türbülans ısı akısı için yazılan transport eşitleriyle belirlenerek, bu modelleme zorluğu aşılmıştır. Böylece Lai ve So [143]' nun çalışmalarında belirttiği gibi; sıcaklık alanı çözümlerinde ikinci derece modeller özellikle karmaşık akışlarda daha genel çözümler verebilmektedir.

Türbülans modelleriyle sıcaklık alanı çözümlerinde bir diğer sıklıkla karşılaşılan zorluk; kaldırma kuvvetinin etkili olduğu akış durumlarıdır. Lakshminarayana [76]' nın çalışmasında, türbülans yapısında değişiklikler meydana getiren ve bu nedenle "*basit*" ve "*yarı karmaşık*" kayma akışları (sınır tabaka akışları) için yaygın şekilde kullanılan çoğu türbülans modellerinin doğru sonuçlar veremediğini belirttiği bu modelleme zorluğu da bir çok çalışmanın konusunu teşkil etmiştir. Gibson ve Launder [75], kaldırma kuvvetinin etkili olduğu bir serbest kayma akışında kendilerinin türettiği cebrik akı modelini kullanarak çözümler elde etmişlerdir. Bu çalışmada da kaldırma kuvvetinin türbülans hareketinin iç yapısında etkili olduğu vurgulanmıştır. Launder [144] de, türbülans ısı transportu üzerinde kaldırma kuvvetinin etkilerini Reynolds gerilme modeliyle incelemiştir. Ljuboja ve Rodi [142], yatay ve dikey türbülanslı duvar jeti akışı üzerinde kaldırma kuvvetinin etkisini cebrik gerilme modeli kullanarak incelemiştir. Chung ve Sung [121], ise kaldırma kuvveti etkisindeki bir türbülans sınır tabakanın dört eşitlikli bir modelle çözümünü yapmışlardır. Kullanılan eşitliklerde ortaya çıkan Reynolds gerilmeleri ve türbülans ısı akıları ise, cebrik gerilme modeli ile çözümlenmiştir. Böyle bir yöntemin seçilmesinin nedeni olarak, daha önce Rodi [1] ve Gibson ve Launder [75]' in de çalışmalarında belirttikleri gibi; kaldırma kuvvetinin, cebrik gerilme modeliyle daha kolay bir şekilde modellenmesi gösterilmiştir. Lumley vd. [145], atmosferik sınır tabaka için kaldırma kuvvetinin türbülans transportu üzerindeki etkisini incelemiştir.

Son 35 yıldır türbülansın matematiksel modellenmesinde deneysel verilerle de çoğu zaman desteklenen bir başarı yakalanmasına rağmen, hala araştırma gruplarının modellemede yeterince tatmin olamadıkları fiziksel etkiler mevcuttur [14]. Bunlar arasında yukarıda da bahsedildiği gibi; duvar akışlarında duvara yakın bölgedeki ek şekil değiştirme oranı etkileri ve duvarın bloklama etkisi, düşük Reynolds sayısında moleküler viskozitenin etkileri, türbülansın iç yapısını bozan kaldırma kuvveti etkileridir. Bunların yanında sıcaklık alanı çözümlerinde birinci derece modellerde ortaya çıkan türbülans Prandtl sayısının, Pr_t , özellikle duvara yakın bölgede belirlenmesi de modellemede karşılaşılan

zorluklardandır. Bunun yanında adı geçen etkilerin veya zorlukların farklı akışlarda farklı karakterler gösteriyor olması, modellerin performansları üzerine doğrudan etkide bulunmaktadır. Bir akışta bir türbülans modelin çok iyi sonuçlar vermesi ve dolayısıyla performansının yüksek olması, başka bir akışta da bu türbülans modelin yüksek performans göstereceği anlamını taşımaz. Bunun başlıca nedeni olarak; model katsayılarının her akış için uygun olmaması olabildiği gibi, ek şekil değiştirme veya kaldırma kuvveti gibi ek fiziksel etkileri temsil etmedeki becerinin her model için aynı olmaması da gösterilebilir. Bu aşamada da modellerin genel olamaması zorluğu ortaya çıkmaktadır. Diğer taraftan çözümü yapılacak problem için en az karmaşıklıkta, en iyi sonuçları verebilecek modelin seçilmesi de modelleme çalışmalarında öne çıkan taleplerdendir. Bütün bu sorulara ve taleplere yanıt verebilmek ancak, farklı problemlere, seçilecek farklı modellerin uygulanması ve çıkan bulguların karşılaştırılarak modellerin performanslarının belirlenmesiyle mümkündür. Bundan önce ise, çözümü yapılacak fiziksel problemin gerçek verilerinin bilinmesi gerekmektedir. 1980' li yılların sonuna kadar gerçek veriler, deneysel çalışmalardan türetilmiştir ve modellemeden elde edilen bulgular bu veriler ile doğrulanmıştır. Ancak deneysel verilerin, kullanılan yöntemlere bağlı olarak yüksek hataları içerebilmeleri ve özellikle duvara yakın bölgede deneysel veri alınamaması bunların zorluğunu oluşturmaktadır. Süper bilgisayarların gelişmesi ve/veya paralel işlem yapılabilen bilgisayar sistemlerinin geliştirilmesiyle *doğrudan sayısal benzeşim* (DNS) gibi, analitik çözümlere yakın sonuçlar elde edilmeye başlanmıştır. Bu çalışmalardan en önemlileri olarak; Spalart [19, 146], Moin ve Spalart [147], Moser ve Moin [148], Kim *vd.* [149], Mansour *vd.* [113], Spalart ve Watmuff [150] ve Kawamura *vd.* [140] sayılabilir. Bu çalışmaların neredeyse tamamı, sınır tabaka yada sınır tabaka yaklaşımı uygulanabilecek akışlar gibi, nispeten daha az karmaşık fiziksel problemlerden oluşmaktadır [2]. Bunun başlıca nedenleri olarak; bu yöntemin karmaşık akışlara uygulama zorluğu ve karmaşık akışların çözülebilmesi için daha hızlı ve bellek kapasitesi yüksek bilgisayarlara ihtiyaç duyulması olarak sayılabilir. Bununla birlikte, DNS ile elde edilen verilerin, özellikle duvar akışlarında hemen duvardan başlayarak elde edilmesi, mevcut modellerin performanslarını değerlendirmede önemlidir. Birinci ve ikinci derece modellerin duvara yakın bölgedeki davranışlarını değerlendirmede DNS ile elde edilen veriler önem kazanmaktadır. Bu açıdan bakıldığında mevcut DNS verileri, türbülans modellerin performanslarının değerlendirilmesinde önemli işlev görmektedir. Bu şekilde

deneysel olarak üretilemeyen bazı verilerin DNS ile birlikte üretilmeye başlanmasıyla türbülans modelleri üzerindeki bazı hipotezlerin sınanması imkanı da sağlanmıştır [12]. Bu imkan dikkate alınarak, daha önce performansları değerlendirilen birinci ve ikinci derece modellerin performanslarının son yıllarda yeniden değerlendirilmesi yeniden ivme kazanmıştır. Bu çalışmalardan bazıları; Rodi ve Mansour [20], Sarkar ve So [110], Taulbee *vd.* [151], Na *vd.* [141], Lai ve Yang [152] ve Nagano *vd.* [153] şeklinde sayılabilir.

Yukarıda özet olarak; türbülans modellerin türetilmesi, geliştirilmesi, farklı akışlara uygulanması ve performanslarının değerlendirilmesi aşamaları verilmiştir. Bu çalışmada esas alınan aşama; birinci ve ikinci derece modeller çalışmalarının son aşaması olan farklı modellerin, seçilecek farklı parabolik akışlara uygulanarak performanslarının belirlenmesidir. Bu performans değerlendirmesi hem hız alanı hem de sıcaklık alanı çözümlerinin DNS verileri yardımıyla kendi aralarında karşılaştırılmasıyla yapılmıştır. DNS verilerinin bulunmadığı durumlarda ise; deneysel ve analitik çalışmalar da elde edilen bulguları karşılaştırmada kullanılmıştır. Çalışmalarda türbülansın iç yapısını etkileyen etmenler olarak; yakın-duvarda viskoz etkiler ve duvar bloklama etkileri ve kaldırma kuvveti etkileri dikkate alınmıştır.

1.4. Türbülanslı Akışların Yapısı

Doğada ve mühendislik uygulamalarında meydana gelen akışların çoğu türbülanslıdır. Dünya üzerinde atmosferdeki sınır tabaka, bulutların hareketi, okyanus yüzeyinin altında meydana gelen su akıntıları, bir uçağın kanatları üzerinde gelişen sınır tabaka, bir boru hattındaki doğal gaz yada petrol akışları, nehir ve kanallardaki su akışları doğada karşılaşılabilen türbülanslı akışlara birer örnektir. Aslında, çok geniş uygulama alanına sahip türbülanslı akış çalışmaları, disiplinler arası bir aktivitedir [5, 154].

Türbülansın kesin tanımını verebilmek oldukça zordur. Bu tanıma yardımcı olması açısından türbülansın bazı karakteristikleri aşağıdaki gibi irdelenebilir:

Tüm türbülanslı akışların bir karakteristiği, düzensizlik ve rasgeleliktir. Bu durum, türbülans modellerine belirleyici bakışı imkansız yapar, bunun yerine istatistiksel metotlara dayanılır.

Hızlı karışma ve momentum, ısı ve kütle transferlerinin artmasına neden olan türbülans yayılımı (difüzyonu), türbülanslı akışın diğer bir önemli özeliğidir. Eğer bir akış şekli rasgele fakat akış çevresi boyunca hız çalkantılarının yayılması gözlenmiyorsa, bu

kesin olarak türbülans değildir. Türbülansın yayılımı, uygulamada dikkate alındığı kadarıyla, en önemli tek özelliktir. Türbülans yayılımı, her türlü makinada ısı transferini artırır, boru hatlarında akışın direncinin kaynağıdır ve rüzgar ve okyanus akıntıları arasındaki momentum transferini artırır.

Türbülanslı akış genellikle yüksek Reynolds sayılarında meydana gelir. Türbülans çoğu zaman, eğer Reynolds sayısı çok büyürse laminar akışın stabilitesinin bozulması esasına dayandırılır. Bozuk stabilite, hareket denklemlerindeki viskoz ve lineer olmayan atalet terimlerinin etkileşmesiyle ilgilidir. Bu etkileşim çok karmaşıktır; lineer olmama türbülans eşitliklerini neredeyse kontrol edilemez yapmaktadır.

Türbülans teorisi, etkin güçlü matematik metotların yokluğundan ortaya çıkmıştır. Bu matematiksel araçların yokluğu, türbülanstaki problemlere tüm teorik yaklaşımları tartışmalı ve hatalı yapar. Problemlerin çözümlerinin bulunması için sadece eşitliklere dayanılmamıştır. Bu durum türbülansı hem popüler hem de tartışmalı araştırma yapmıştır [155, 156].

Türbülans, rotasyonel (dönen) ve üç boyutludur ve yüksek seviyeli vortisite çalkantılarıyla karakterize edilir. Bu nedenle, vortisite dinamiği, türbülanslı akışların tanımlanmasında esas bir rol oynar. Türbülansı karakterize eden rasgele vortisite çalkantıları, eğer hız çalkantıları iki boyutlu ise kendi kendini sürdürmez. Bunun nedeni, vorteks gerilmesi olarak bilinen önemli bir vortisite sürdürme mekanizmasının iki boyutlu akışlarda olmamasıdır [157]. Hava durumunu belirleyen atmosferdeki siklonlar gibi; esasta iki boyutlu akışlar, küçük ölçekli türbülans (kayma gerilmesi veya kaldırma kuvveti tarafından herhangi bir yerde üretilir) tarafından karakteristikleri büyük ölçüde etkilenebilmesine rağmen kendi kendilerine türbülanslı değildirler. Özet olarak, türbülanslı akışlar her zaman yüksek seviyelerde çalkalanan vortisite gösterirler. Örneğin, okyanusların yüzeyindeki rasgele dalgalar türbülanslı değildirler, çünkü onlar esas olarak (rotasyonel) dönmeli değildirler [5].

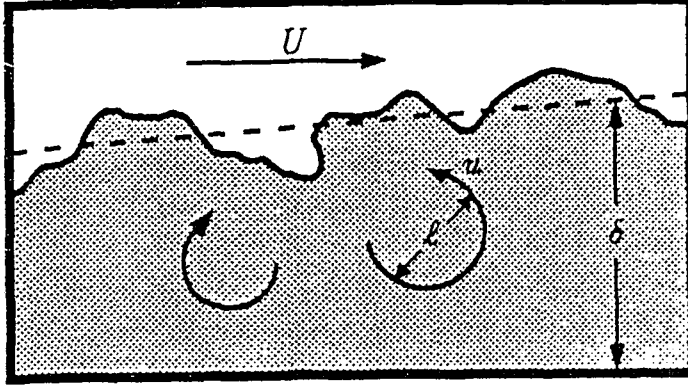
Viskoz kayma gerilmeleri, türbülansın kinetik enerjisinin harcanmasında, akışkanın iç enerjisini artıran deformasyonu gerçekleştirir. Türbülans, bu viskoz kayıpları telafi etmek için sürekli olarak enerji kaynağına ihtiyaç duyar. Eğer enerji kaynağı bulunmaz ise, türbülans hızlı bir şekilde kaybolur (bozulur). Yerküre atmosferindeki yerçekimi dalgaları ve ses dalgaları (akustik gürültü) gibi rasgele hareketler, önemsiz viskoz yutulmalara neden olur ve bunlar türbülanslı değildirler. Diğer bir deyişle; rasgele dalgalarla türbülans

arasındaki en büyük (başlıca) fark, dalgaların esas olarak yutucu olmamasına rağmen (onlar sıkça yayılğan (dispersive) olmasına rağmen) türbülans esas olarak yutucudur (dissipative).

Türbülans sürekli bir fenomendir ve akışkanlar mekaniğinin eşitlikleriyle kontrol edilir. Hatta bir türbülanslı akışta meydana gelen en küçük ölçekler (skalalar), herhangi bir moleküler uzunluk ölçeğinden genellikle daha büyüktür.

Türbülans, akışkanların bir özeliği değil, akışkan akışının bir özeliğidir. Türbülansın çoğu dinamiği, eğer türbülansın Reynolds sayısı yeterince büyükse, sıvı yada gaz fark etmez, tüm akışkanlarda aynıdır. Türbülanslı akışların başlıca karakteristiği, türbülansın meydana geldiği yerde, akışkanın moleküler özellikleri tarafından kontrol edilememesidir. Hareket denklemleri lineer olmadığı için, her bir akış şekli, o akışın başlangıç ve sınır koşulları ile bağlantılı olan belli tek karakteristiğe sahiptir. Navier-Stokes eşitliklerinin genel (kesin) çözümleri bilinmediği için, sonuçta türbülanslı akış problemlerinin genel çözümleri de mevcut değildir. Her akış farklı olduğu için, tüm türbülanslı akışlar çoğu karakteristiklere ortak sahip olmalarına rağmen, bu her türbülanslı akışın farklı olmasını getirir. Türbülansın karakteristikleri, ilgili akışın çevresine bağlıdır. Bundan dolayı türbülans teorisi, genel bir manada akışın tüm çeşitleri ve tipleri ile ilgilenmemiştir. Bunun yerine, teoritisyenler, sınır tabaka akışları, jetler ve dümen suları (wake) gibi oldukça basit sınır koşullarına sahip akışlar üzerinde çalışmalar yapmışlardır [5].

Yukarıda bahsedilen türbülanslı akışların başlıca karakteristiklerine ek olarak, türbülanslı akışların bazı önemli süreçlerini tartışmak, modelleme açısından yararlıdır. Türbülans, yukarıda da belirtildiği gibi; genellikle yüksek Reynolds sayısında ortaya çıkan bir girdaplar hareketidir. Bu girdaplar hareketi, geniş bir girdap büyüklükleri aralığına (spektrumuna) ve buna uygun çalkantı frekansı aralığına sahiptir. Bu girdapların hareketleri genellikle dönmelidir (rotasyonel) ve bunlar, vortisite vektörleri tüm doğrultularda olabilen zaman bağımlı vorteks elemanların bir birbirine geçmiş biçimi şeklinde düşünülebilir [154]. Düşük frekanslı çalkantılardan meydana gelen en büyük girdaplar, ortalama akışın sınır koşullarından belirlenir ve bunların büyüklüğü ortalama akış bölgesiyle aynı genliğe sahiptir. Yüksek frekanslı çalkantılardan ortaya çıkan en küçük girdaplar ise, viskoz kuvvetlerle belirlenir. Reynolds sayısı artıkça aralık (spektrum)



Şekil 1. Bir türbülanslı sınır tabaka akışında büyük girdaplar [2].

artar ve bu nedenle de en büyük ve en küçük girdaplar arasındaki fark artar. Momentumun ve ısının taşınımında ve Reynolds gerilmesi, $-\overline{u_i u_j}$, ve türbülans ısı akısı, $-\overline{u_i t}$, korelasyonlarının ortaya çıkmasında en büyük pay sahibi, Şekil 1' de görüldüğü gibi büyük girdapların oluşturduğu *büyük ölçekli* türbülans hareketidir. Bu nedenle, bir türbülans modelinde $-\overline{u_i u_j}$ ve $-\overline{u_i t}$ 'nun belirlenmesi için *büyük ölçekli* hareketin belirlenmesi gerekir. Zaten, türbülans modellemelerinde önerilen hız ve uzunluk ölçekleri, büyük ölçekli türbülans hareketini tanımlayan parametrelerdir [1].

Büyük girdaplar, benzer ölçeklere sahip olmalarından dolayı, ortalama (ana) akış ile etkileşim içindedirler. Bu şekilde ortalama akıştan açığa çıkan kinetik enerji, büyük ölçekli türbülans hareketini besler. Girdaplar, birbirlerine gerilim uygulayan vorteks elemanlar olarak düşünülebilir. Türbülanslı hareketin temel özelliği olan bu vorteks gerilmeler, viskoz kuvvetler açığa çıkana kadar ve enerji yutuluncaya kadar, enerjinin daha küçük ve daha küçük girdaplara geçmesine neden olur. Bu süreçte *enerji şelalesi* (energy cascade) adı verilir. Türbülanslı hareketi besleyen ortalama akış enerjisinin oranı, büyük ölçekli hareket tarafından belirlenir. Sadece bu enerji oranı, küçük ölçekli girdaplara geçebilir ve sonunda yutulur. Bu nedenle, yutulma, viskoz bir süreç olmasına ve bu sürecin de en küçük girdapta meydana gelmesine rağmen, yutulmuş enerjinin oranı, büyük ölçekli hareket tarafından belirlenir. Burada bir diğer önemli nokta, viskozite, yutulmuş enerjinin miktarını belirlemez fakat yutulmanın olduğu yerdeki en küçük ölçeği belirler. Viskozitenin etkisi ne kadar küçük ise (örneğin büyük Reynolds sayılarında), büyük girdaplarla ilgili yutulmanın

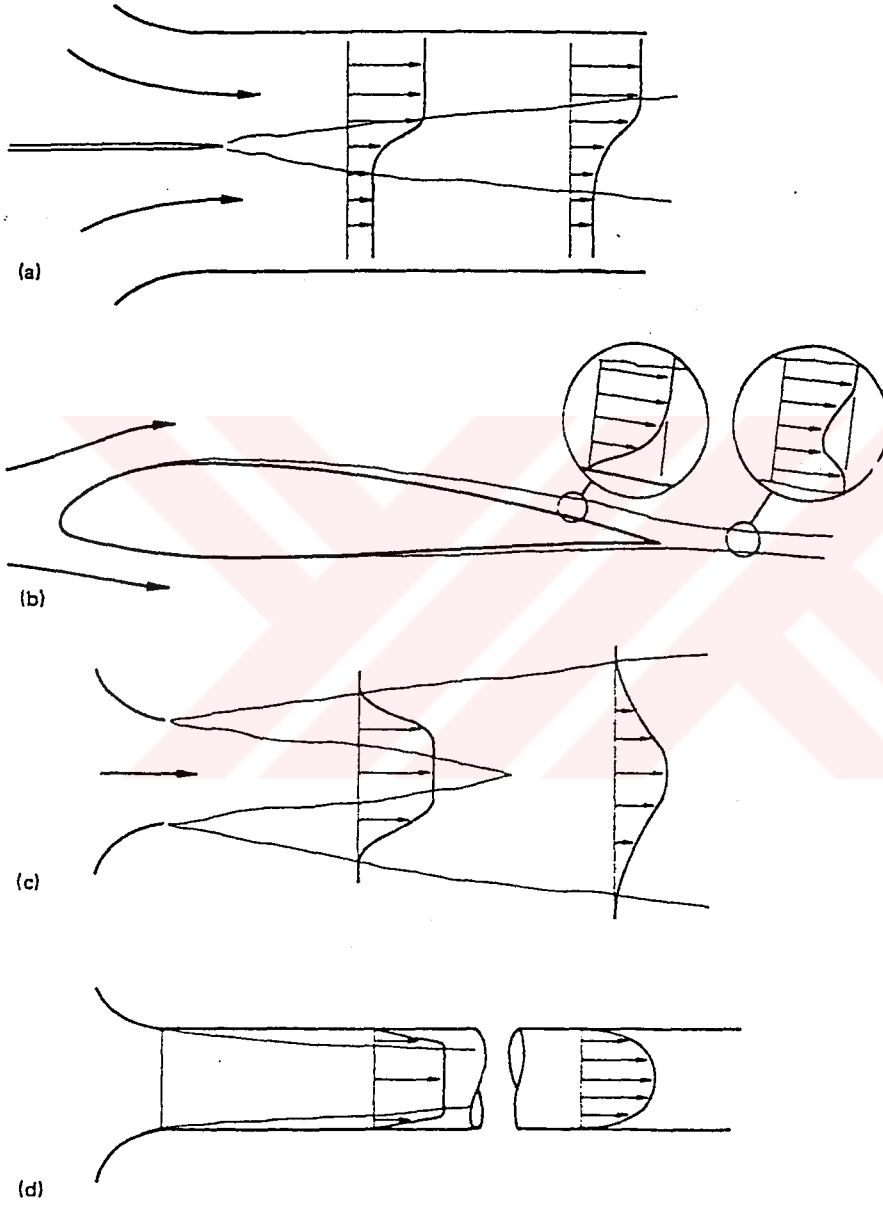
meydana geldiği girdaplar da o kadar küçük olur. Bunun yanında, akışta kaldırma kuvveti de mevcut ise (yada etkiliyse), ortalama akış ile türbülans kinetik enerji arasında potansiyel enerji değişimi de vardır (birbirlerine enerji aktarır). Bu etkileşim, her yönde olabileceği gibi aynı zamanda büyük ölçekli hareket üzerinden de olabilir.

Büyük ölçekli türbülans hareketi, ortalama akış ile sürekli bir etkileşiminden dolayı akış probleminin sınır koşullarından büyük ölçüde etkilenir. Ortalama akış, büyük ölçekli türbülans hareketin de takip ettiği yönü tercih eder. Bu nedenle bu hareket büyük ölçüde izotropik değildir. Bunun sonucu olarak da çalkantıların şiddeti ve onun uzunluk ölçeği her ikisi birden yönden bağımsız yani rasgele davranışlıdır. Vorteks gerilmeleriyle daha küçük girdaplara enerjinin geçtiği enerji şelalesi sürecinde yöne duyarlılık kaybolur. Reynolds sayısının, spektrumda, büyük ölçekli ve küçük ölçekli hareketlerin yeterince bir birlerinden fark oluşturduğu derecede yüksek olması durumunda, yön duyarlılığı tamamen kaybolur ve küçük ölçekli yutulma hareketi izotropik olur. Küçük ölçekli hareket izotropik iken büyük ölçekli hareketin izotropik olmaması olayı *lokal (yerel) izotropi* adını alır ve bu, türbülans modellemede önemli bir konudur [1].

Reynolds sayısındaki bir yükselme, spektrum genişliğini artırır. Örneğin, en büyük girdaplar ile (düşük frekanslı çalkantılar ile bağlantılı) en küçük girdaplar (yüksek frekanslı çalkantılar ile ilgili) arasındaki fark artar. Bu, yüksek Reynolds sayılı türbülanslı harekete, ortalama bir hareket, büyük ölçekli bir hareket ve küçük ölçekli bir hareket şeklinde üç seviyeli bir prosedür ile yaklaşılabileceğini gösterir. Kovasznay tarafından önerilen bu prosedür türbülanslı akışın hesaplanmasında sıkça kullanılır [3].

1.5. Türbülanslı Sınır Tabaka Akışlarının Modellenmesi

Sınır tabaka akışları (STA), daha genel olarak *kayma tabakası* (shear layer) akışlarının bir çeşitidir. Bunlar, kendi hızlarının normal doğrultusunda bir hız değişimine sahip olan akışlar olarak tanımlanır. Büyük kayma gerilmeleri, genellikle bu ince tabakalarda meydana gelir. Kayma tabakası akışlarına bir örnek, Şekil 2a' da görüldüğü gibi; farklı hızlara sahip yaklaşık olarak paralel ayrı iki akışın birleşmesiyle ortaya çıkan *karişim tabakası* (mixing layer) akışı verilebilir. Diğer bir yaygın kayma tabakası tipi, Şekil 2b' de görüldüğü gibi; bir akış ve bir katı yüzey arasında meydana gelen ve büyük bir kayma gerilmesine sahip *sınır tabaka* akışlarıdır. Kaymayan akış koşullarında (no-slip condition) akışkan hızı, katı yüzey üzerinde sıfırdır ve bu kayma



Şekil 2. Kayma tabakası akışlarına örnekler a) Paralel akışlar arasında karışma tabakası b) Bir kanatta sınır tabaka c) Jet akışında karışım tabakası d) Boru akışında sınır tabaka akışı

tabakasının dış kenarında hız asimtotik olarak serbest akım hızına yaklaşmaktadır. Aslında çok ince olan bu katman içinde, hızda büyük değişikliklerin olduğu fakat bu katmanın dışında hızda önemli bir değişikliğin olmadığı yapılan çalışmalardan görülmüştür [158-160]. Sınır tabakanın dışında, akışkan viskoz dahi olsa, hız gradyanının sıfır olmasından dolayı kayma gerilmeleri sıfır olmakta ve bu bölgedeki akış potansiyel kabul edilmektedir. Diğer kayma tabakası akışları ise; Şekil 2c' de görüldüğü gibi yine büyük bir kayma gerilmesine sahip jet akışları ve Şekil 2d' de görüldüğü gibi bir boru içindeki akışlardır. Serbest jet akışları ve boru akışları gibi halka yada dairesel kesitlere sahip akışlar tam olarak kayma tabakası olmamasına karşın, bu akışların fiziksel süreçlerindeki ve hareket denklemlerindeki benzerlikten dolayı bunlar da kayma tabakası akışları sınıfına girerler. Bu akışların hareket denklemlerinde, sadece sınır koşullarında ve detaylarda farklılıklar bulunmaktadır. Serbest jet akışları, bir katı yüzey üzerinden bir akış olmaması nedeniyle *serbest kayma akışları* olarak da ifade edilmektedir. Bu çalışmada yukarıda bahsedilen kayma tabakası akışlarından; sınır tabaka akışları ve serbest jet akışları dikkate alınmıştır. Genel olarak literatürde kayma tabakası akışları, sınır tabaka akışları olarak da tanımlanabilmektedir. Bu nedenle bu çalışmada kayma akışları, *sınır tabaka akışları* (STA) olarak ifade edilecektir.

Mühendislikte karşılaşılan çoğu sınır tabaka akışları türbülanslıdır. Dış akışın daimi ve düzgün bir şekilde zamanla değişimi söz konusu olmasına rağmen, sınır tabaka içindeki hızlar zamanda ve uzayda sürekli bir genlikte ve doğrultuda düzensiz olarak çalkantı yapmaktadırlar. Düzlem bir levha üzerinde gelişen sınır tabakada, başlangıçta laminer olan akış, belli bir akış doğrultusu mesafesinden sonra türbülanslı olmaktadır. Bu, Reynolds sayısının 5×10^5 değerine karşılık gelen mesafedir.

Laminer ve türbülanslı akışlar, her hangi bir an için aynı Navier-Stokes hareket eşitlikleriyle kontrol edilmektedir. Ancak türbülanslı akışlarda, zamanda ve uzayda ani değişen hızlar, çözümün her bir an için tekrarlanmasını gerektirmektedir. Bu ise günümüz teknolojisinde bilgisayarların hızları ve bellekleri açısından altından kalkılamayacak bir durumdur. Ayrıca böyle bir çözümün gerçekleşmesi durumunda bile, bu sonuçların deneysel verilerle karşılaştırılması mümkün olmayacaktır. Bunun nedeni, deneysel olarak ancak ortalama değerlerin, hatta ortalama değerlerden sapmaların da (çalkantıların) ortalama değerleri ölçülebilmesidir [162]. Bu nedenle, daha önce de bahsedildiği gibi

hareket eşitliklerinin zaman ortalaması alınarak, ortalama büyüklükleri içeren denklemler elde edilmiştir.

Genel halde sıkıştırılmaz akışlar için, kütle, momentumun (Navier-Stokes eşitlikleri) ve enerjinin korunumu eşitlikleri kartezyen koordinatlarda tensör formda şu şekilde verilebilir:

Kütle korunumu (Süreklilik eşitliği);

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0. \quad (1)$$

Momentumun korunumu (Navier-Stokes eşitliği);

$$\frac{\partial U_i}{\partial t^*} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (2)$$

Termal enerjinin korunumu eşitliği (Enerji eşitliği);

$$\frac{\partial T}{\partial t^*} + U_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (3)$$

Burada U_i , x_i doğrultusundaki anlık hız bileşeni, P anlık statik basıncı ve T anlık sıcaklığı ifade etmektedir. ν ve α , sırasıyla, moleküler (kinematik) viskoziteyi ve ısı yayılım katsayısını ifade etmektedir. Daha önce de bahsedildiği gibi, yukarıdaki eşitlikler analitik olarak türbülanslı akışlar için günümüzde çözülememektedir. Bu nedenle ilk defa Osborne Reynolds tarafından önerilen istatistiksel bir yaklaşım dikkate alınmıştır. Bu amaçla; hızın U_i , basıncın P ve sıcaklığın T anlık değerleri, ortalama ve çalkantı büyüklükleri olarak aşağıdaki gibi iki kısma ayrılmıştır:

$$U_i = \bar{U}_i + u_i, \quad P = \bar{P} + p, \quad T = \bar{T} + t. \quad (4)$$

Burada \bar{U}_i , \bar{P} ve \bar{T} , büyüklüklerin ortalama değerlerini, u_i , p ve t de büyüklüklerin çalkantı değerlerini ifade etmektedir. Her bir skaler büyüklük için ortalama değerler ise şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$\bar{U}_i = \lim_{t^* \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t^*} \int_{t_o^*}^{t_o^* + \Delta t^*} U_i(t^*) dt^*, \quad (5a)$$

$$\bar{P} = \lim_{t^* \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t^*} \int_{t_o^*}^{t_o^* + \Delta t^*} P(t^*) dt^*, \quad (5b)$$

$$\bar{T} = \lim_{t^* \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t^*} \int_{t_o^*}^{t_o^* + \Delta t^*} T(t^*) dt^*. \quad (5c)$$

Ortalama zaman, Δt^* , türbülanslı hareketin zaman ölçeği ile karşılaştırıldığında daha büyük seçilmektedir. Zaman bağımlı problemlerde ise Δt^* , ortalama hareketin zaman ölçeği ile karşılaştırıldığında daha küçük olmak zorundadır. Bu çalışmada daha sade eşitlik sistemlerinin kullanılması açısından skaler büyüklüklerin üzerlerindeki ortalamayı ifade eden çizgiler kaldırılmıştır. Buna göre Eşitlik 4' de verilen skaler büyüklükler yerine, ortalama ve çalkantı değerleri yazılırsa yine kartezyen koordinatlarda tensör formda Reynolds denklemleri olarak adlandırılan aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

Süreklilik eşitliği:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0. \quad (6)$$

Momentum eşitliği:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t^*} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \overline{u_i u_j} \right). \quad (7)$$

Enerji (sıcaklık) eşitliği:

$$\frac{\partial T}{\partial t^*} + U_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x_j} - \overline{u_j T} \right). \quad (8)$$

Bu eşitlikler ortalama akış büyüklükleri olan; ortalama hızı, U_i , ortalama basıncı, P , ve ortalama sıcaklığı, T , kontrol eden temel eşitliklerdir. Ancak bu eşitlikler artık kapalı eşitlikler sistemini oluşturmazlar. Zaman ortalaması alma sürecinde, Eşitlik 2 ve Eşitlik 3'

ün lineer olmamasından dolayı çalkantı hızları arasında, $-\overline{u_i u_j}$ ve hız ve sıcaklık çalkantıları arasında, $-\overline{u_j t}$ şeklinde bilinmeyen korelasyonlar ortaya çıkar. Fiziksel olarak bu korelasyonlar yoğunluk ρ , ile çarpılmış biçimiyle, türbülanslı hareketin çalkantı yapmasından dolayı meydana gelen momentum ve ısı transportunu temsil eder. $-\rho \overline{u_i u_j}$; x_j doğrultusunda x_i momentumunun transportudur ve akışkanda bir gerilme gibi rol oynar. Bu nedenle bunlar *türbülans* yada *Reynolds gerilmesi* şeklinde adlandırılmıştır. $-\rho \overline{u_j t}$; x_j doğrultusundaki sıcaklığın transportunu ifade eder ve *türbülans ısı akısı* şeklinde adlandırılır. Bir çok akış bölgelerinde, Reynolds gerilmeleri ve türbülans ısı akıları, laminer benzerleri olan $\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$ ve $\alpha \frac{\partial T}{\partial x_j}$ 'den çok büyüktür ve sıkça çözümlerde

bu laminer benzerleri ihmal edilir. Bu çalışmada sınır tabaka akışları çözümleri, düşük Reynolds sayılı ve yakın-duvar modelleriyle de yapılacağından dolayı, bu terimler ihmal edilmemiştir.

Sınır tabaka akışlarında kayma tabakası kalınlığı, δ , ile akışın uzunluğu, l , karşılaştırıldığında, kayma tabakası kalınlığı çok küçüktür. Bu karşılaştırma yerel büyüklükler cinsinden, $d \delta / d l$, de yapılabilir. Bu nedenle sınır tabaka akışı içindeki deformasyonlara neden olan kayma gerilmeleri ve Reynolds gerilmeleri ve bunların gradyanlarının değerleri akış yönüyle karşılaştırıldığında, akışın normali doğrultusundaki değerlerin daha baskın olduğu tespit edilmiştir. İlk defa Ludwig Prandtl tarafından 1904 yılında sunulan bu yaklaşımlara *ince kayma tabakası* (thin-shear-layer, TSL) veya daha yaygın kullanımıyla *sınır tabaka yaklaşımı* denilmektedir. Bu yaklaşımlar yardımıyla Navier-Stokes denklemleri daha da sadeleştirilerek özellikle türbülanslı sınır tabaka akışlarının çözümlerinde önemli kolaylıklar sağlamıştır. Eşitlikler 6, 7 ve 8 sınır tabaka yaklaşımları kullanılarak ($i = 1, j = 2$) açık şekilde aşağıdaki şekilleriyle yazılabilirler:

Süreklilik eşitliği;

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0. \quad (9)$$

x – momentum eşitliği;

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu \frac{\partial U}{\partial y} - \overline{uv} \right]. \quad (10)$$

Enerji eşitliği;

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\alpha \frac{\partial U}{\partial y} - \overline{vt} \right]. \quad (11)$$

Eşitlikler 9-11, düzlem bir levha üzerinde tam gelişmiş, zamandan bağımsız (daimi) türbülanslı sınır tabaka akışlarını yöneten denklemlerdir. Bu denklemlerde bilinmeyen terimler olarak daha önce de belirtildiği gibi; Reynolds kayma gerilmesi, $-\overline{uv}$, ve türbülans ısı akısı, $-\overline{vt}$, terimleri bulunmaktadır. Diğer büyüklükler, U , V , P ve T laminar akışta olduğu gibi ortalama değerlerdir. Bilinmeyen terimlerin ortaya çıkmasıyla, mevcut denklemlerin çözümünün yapılması için, bilinmeyen büyüklük kadar denklem sayısı sağlanamamaktadır. Bu aşamada bilinmeyen her bir terim için ampirik yada diferansiyel *formda kapatma denklemleri* (closure) yazılması gerekmektedir. Bu faaliyetlerin tümüne *türbülans kapatma modelleri* veya kısaca *türbülans modelleri çalışması* adı verilmektedir. Bu amaçla literatürde çok sayıda çalışma mevcuttur. Bu çalışmada, literatürde en yaygın kullanılan, birinci ve ikinci derece modeller, sınır tabaka akışlarının çözümüne uygulanarak karşılaştırmalı olarak çözümler elde edilmiş ve seçilen türbülans modellerin performansları değerlendirilmiştir.

1.6. Türbülans Modelleri

Türbülansın çözümü çalışmaları bir yüzyıldan fazladır devam etmektedir, fakat henüz kesin çözüm yaklaşımı mevcut değildir. Akışla ilgili genel eşitlikler, detaylı bir şekilde analiz edilmiştir fakat ağırlıklı bir şekilde ampirik verilere dayanmaksızın doğru nicel belirlemeler yapmak henüz imkansızdır [5]. Genel denklemler üzerinde yapılan istatistiksel çalışmalar her zaman, eşitliklerden daha fazla bilinmeyen olduğu durumlara neden olmuştur. Buna, *türbülans teorisinin kapatma problemi* adı verilmektedir. Bilinmeyenlerin sayısına eşit eşitlik yapmak için kabuller yapmak (çok sık olarak *ad hoc*)

zorunluluğu vardır. Esas olarak hem bilinen hem de hesaplanabilir büyüklükler cinsinden momentumun korunumu ve enerji eşitliklerinde ortaya çıkan *kapatma (closure)* problemi, Reynolds gerilmelerinin, $-\overline{u_i u_j}$, ve türbülans ısı akılarının, $-\overline{u_j t}$, modellerinin araştırılması olan türbülanslı akışların hesaplanması, Reynolds' un zamanından beri ciddi bir problem olmuştur. Güçlü bilgisayarların geliştirilmesine kadar çoğu sınır tabaka akışları belirleme metotları, tamamen ampiriktir ve adi diferansiyel eşitliklere dayanmaktadır. 1960' lı yılların ortalarına kadar bilgisayarların gelişimi ile birlikte, ortalama akışın temel diferansiyel eşitliklerine dayanan metotların gelişimi, yeni bir ivme kazanmıştır. 1968 Stanford Konferansında alınan, kısmi diferansiyel eşitliklere (PDE) dayanan metotların en iyi integral metotlardan daha doğru ve genel çözüm verdiği dair karar, bu metotların daha yaygın kullanılmasına neden olmuştur [3]. *Ortalama türbülansın alan metotları* olarak da adlandırılan PDE metotlarının; analitik türbülans teorileri, altgrid ölçek (sub-grid scala) modelleri, doğrudan sayısal benzeşim (DNS), türbülans transport modelleri, iki akışkanlı türbülans modelleri ve büyük girdap benzeşimi (LES) gibi farklı yöntemleri mevcuttur. Bunların içinde mühendislik problemlerinde uygulama kolaylığı ve ucuzluğu açısından en yaygın kullanılan yöntem, *türbülans transport modelleridir*.

Son yıllarda DNS ve LES gibi yöntemlerde önemli gelişmeler olmasına rağmen, bunlar henüz sadece basit akışlara uygulanabilmiştir. Bu yöntemlerden elde edilen çözümler de türbülans transport modellerinin performanslarının değerlendirilmesinde önemli araçlar olmuşlardır. Özellikle duvara yakın bölgelerdeki akışların deneysel verilerinin olmaması, DNS ve LES' den bu bölgelerde elde edilen sonuçları daha değerli yapmıştır. Ancak, bu modellerin süper bilgisayarları gerektirmesi, uzun hesaplama zamanına ihtiyaç duyması ve karmaşık mühendislik problemlerine henüz uygulanamaması, türbülans transport modellerinin hala önemli akış belirleme araçları olarak kalmalarını sağlamıştır.

Türbülans transport modellerini iki kategoriye ayırmak mümkündür. Bunlar *birinci ve ikinci derece modellerdir*. Birinci derece modellerde Reynolds gerilmeleri, $-\overline{u_i u_j}$, doğrudan ortalama hız alanlarıyla ilgilidir. İkinci derece modellerde ise, Reynolds gerilmeleri, $-\overline{u_i u_j}$, ve türbülans ısı akıları, $-\overline{u_j t}$, için Navier-Stokes eşitliklerinden faydalanılarak yazılan denge eşitlikleri, ortalama akışın eşitlikleriyle birlikte çözülürler.

1.6.1. Birinci Derece Modeller

Türbülans veya Reynolds gerilmelerini, $-\overline{u_i u_j}$, modellemek için en eski öneri, çoğu türbülans modellerinin önemli bir bölümünü oluşturan ve ilk olarak 1877 de Boussinesq tarafından önerilen *girdap viskozitesi* hipotezidir. Genel olarak *girdap viskozitesi* ifadesini kullanan modeller, *birinci derece modeller* olarak tanımlanmaktadır. Bu ifade, laminer akışlarda viskoz gerilmelere benzer şekilde, türbülans gerilmelerinin, ortalama hız gradyanlarına oranını ifade etmektedir. Genel akış durumları için Boussinesq' in *girdap viskozitesi* hipotezi şu şekilde ifade edilebilir:

$$-\overline{u_i u_j} = \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (12)$$

veya

$$\equiv 2 \nu_t S_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}. \quad (13)$$

Burada;

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (13a)$$

şeklinde ifade edilir ve *ortalama simetrik deformasyon yada şekil değiştirme miktarı* (strain-rate) şeklinde tanımlanır. ν_t , türbülans veya *girdap viskozitesi*dir ve moleküler (kinematik) viskozitenin aksine, akışkanın bir özelliği değil, türbülansın durumuna büyük ölçüde bağlı bir büyüklüktür. ν_t , bir akış içinde bir noktadan başka bir noktaya ve bir akıştan başka bir akışa önemli ölçüde değişebilir. Bu nedenle Eşitlik 12 ile verilen bağıntı tek başına bir türbülans modeli değildir, fakat böyle bir modelin oluşturulması için bir yapıyı sağlamaktadır. Şöyle ki; artık esas problem, akış içinde ν_t dağılımının belirlenmesine indirgenmiştir. Birinci derece modellerde, bundan sonraki bütün çabalar ν_t 'nin belirlenmesine yöneliktir.

δ_{ij} , Kronecker deltası olarak tanımlanır ve Eşitlik 12 'de normal gerilmelere ($i = j$) de uygulanabilmesini sağlamaktadır. $i = j$ için (normal gerilmeler) $\delta_{ij} = 1$ olur

iken, $i \neq j$ için (kayma gerilmeleri) $\delta_{ij} = 0$ değerini almaktadır. Eşitlik 12' nin, hızların gradyanlarını içeren birinci kısmı ile sınır tabaka için normal gerilmeleri elde edebiliriz:

$$\overline{u^2} = -2\nu_i \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \overline{v^2} = -2\nu_i \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \overline{w^2} = -2\nu_i \frac{\partial W}{\partial z}. \quad (14)$$

Bunların toplamı sıkıştırılamaz akışlar için süreklilik eşitliğinden dolayı sıfırdır. Oysaki, tüm normal gerilmeler tanım gereği pozitif büyüklüklerdir ve onların toplamı çalkantı hareketinin kinetik enerjinin, k , iki katıdır:

$$k = \frac{1}{2} \left(\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2} \right). \quad (15)$$

Girdap viskozitesi eşitliğinin ikinci kısmının dahil edilmesi, normal gerilmelerin toplamının $2k$ 'ya eşit olmasını sağlar. Normal gerilmeler basınç kuvvetleri gibi davranır ve basıncın kendisi gibi kinetik enerji, k , de skaler bir büyüklük olduğundan Eşitlik 12' nin ikinci kısmı bir basıncı oluşturur. Bu nedenle Eşitlik 12, momentum eşitliğinde $-\overline{u_i u_j}$ 'yi elimine etmek için kullanıldığında, statik basıncın yerine bilinmeyen büyüklük gibi, $p + \frac{2}{3}k$, geçsin diye, bu ikinci kısım basınç gradyanı tarafından soğurulabilir. Bu nedenle, Eşitlik 12 de k 'nın varolması, k 'nın belirlenmesini gerektirmez. Sınır tabaka akışlarında kayma gerilmesi için ikinci kısım $\delta_{ij} = 0$ olduğundan ($i = 1, j = 2$) bu ifade sıfırdır.

Girdap viskozitesi ifadesi, moleküler hareketle türbülanslı hareket arasında bir benzerliğin var olduğu kabulüne göre oluşturulmuştur. Türbülans girdapları, moleküller gibi birbirleriyle çarpışan ve momentumlarını değiştiren akışkan parçaları (kümeleri) olarak düşünülmüştür. Moleküler viskozite, ortalama hızın, moleküllerin ortalama serbest yoluna oranı şeklindedir. Benzer şekilde girdap viskozitesi de çalkantı hareketini tanımlayan hızın, Prandtl tarafından *karışım uzunluğu* olarak tanımladığı çalkantı hareketinin tipik bir uzunluğuna oranı şeklindedir. Ancak, moleküler ve türbülans hareket arasındaki bu benzerliğin doğru olmadığı sıkça işaret edilmektedir [2, 3, 14]. Çünkü türbülans girdapları rijit bir cisim değildir ve momentumun transfer edilmesinden sorumlu olan büyük girdaplar, kinetik gaz teorisinin gerektirdiği gibi, akış bölgesiyle karşılaştırıldığında küçük değillerdir [1]. Bu kavramsal zorluklara rağmen, Eşitlik 12 ile

verilen girdap viskozitesi ifadesi, pratik hesaplamalarda bir çok akış durumunda çok iyi sonuçlar vermiştir. Eşitlik 12 'de bilinmeyen olarak bulunan girdap viskozitesine, ν_t , çalkantı hızlarının (aynı zamanda büyük girdapların) bir hız ölçeği, \hat{V} , ve büyük ölçekli türbülanslı hareketi tanımlayan (büyük girdapların) bir uzunluk ölçeği, l , aşağıdaki gibi orantılıdır;

$$\nu_t \approx \hat{V} \times l. \quad (16)$$

Eşitlik 16 esas alınarak birinci derece modeller, girdap viskozitesinin tesbit edilmesi metoduna göre aşağıdaki gibi üç gruba ayrılabilirler:

$$\nu_t \approx \begin{cases} l^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \text{ veya } l \Delta U & (\text{cebrik modeller}) \\ l k^{1/2} & (\text{bir eşitlikli modeller}) \\ \frac{k^2}{\varepsilon} & (\text{iki eşitlikli modeller}) \end{cases} \quad (17)$$

Cebrik modellerde, karışım uzunluğu, l , akış şekilleri ile belirlenmiş cebrik bir eşitlikle tanımlanırken, $\partial U / \partial y$ veya ΔU ortalama (ana) akış ile ilgilidir. *Bir eşitlikli modellerde*, daha önce de tanımlanan karışım uzunluğuna, türbülans kinetik enerjinin, k , denge eşitliğinin çözümü ile katkı yapılır. *İki eşitlikli modellerde* ise; girdap viskozitesi, ν_t , kinetik enerjinin, k , denge eşitliğinin ve kinetik enerjinin yutulması, ε , eşitliğinin birlikte çözümüyle elde edilir.

Birinci derece modeller, mühendislikle ilgili uygulamalarda çok sayıdaki türbülanslı akışların çözümünde çok iyi sonuçlar vermiştir. Bununla beraber, bir akış için uygun olan model sabitleri, genellikle diğer bir akışa uygulanamaması nedeniyle, bunlar genel bir model olma özelliğine sahip değildir [163]. Girdap viskozitesi ifadesini kullanan birinci derece modellerin en çok başarılı olduğu akışlar, sınır tabaka akışları olarak bilinmektedir. Bu akışlarda kayma gerilmesi, $\tau = -\rho \overline{uv}$, türbülans gerilmesidir. Bu kayma gerilmesi ifadesi, Eşitlik 12 'den aşağıdaki gibi elde edilir ($i = 1, j = 2$):

$$\tau = \rho \nu_t \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (18)$$

Bu tür sınır tabaka tipi akışlarda bile, girdap viskozitesi ifadesinin bazen kullanılmadığı görülmüştür. Duvar jetleri ve her iki tarafı farklı pürüzlüğe sahip bir dairesel yada kare kesitli halkadaki simetrik duvar sınır tabaka akışlarında kayma gerilmesinin, $-\rho \overline{uv}$, ve hız gradyanının, $\partial U / \partial y$ ters işaretlere sahip olduğu bölgeler vardır. Eşitlik 18 'e göre bu bölgelerde negatif girdap viskozitesi, ν_t , gereklidir. Bu durum matematiksel olarak mümkün olsa da fiziksel olarak mümkün değildir. Çünkü, Eşitlik 16 'da çalkantı hareketinin hız ve uzunluk ölçeklerinin her ikisi birden her zaman pozitif büyüklükler olması gerekmektedir. Bütün bu olumsuzluklara rağmen yukarıda da belirtildiği gibi girdap viskozitesi ifadesi ile bir çok mühendislik uygulamalarında başarılı sonuçlar alınmıştır ve bunlar günümüzde de çoğu türbülans modellerinin hala temelini oluşturmaktadır [1]. Bu çalışmada girdap viskozitesi bahsini kullanan birinci derece modellerden, $k - \varepsilon$ modelleri dikkate alınmıştır. Standart $k - \varepsilon$ modelinin yanı sıra, düşük Reynolds sayılı (yakın-duvar) (Chien ve Lam-Bremhorst) ve lineer olmayan $k - \varepsilon$ (Speziale) modelleri de bu çalışma kapsamında ele alınmıştır.

Diğer taraftan, türbülanslı enerji eşitliğinde ortaya çıkan türbülans ısı akısının, girdap viskozitesi ifadesini kullanan türbülans modellerinde hesaplanması için, Boussinesq' in girdap viskozitesi ifadesine benzer bir eşitlik tensör formda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$-\overline{u_j t} = \alpha_t \frac{\partial T}{\partial x_j}. \quad (19)$$

Burada α_t , türbülanslı ısı yayılım katsayısı olarak adlandırılır ve girdap viskozitesine benzer şekilde bu katsayı da akışkanın bir özelliği değil, türbülansın durumuna bağlıdır. Bu katsayının belirlenmesi için ise; türbülans momentum transportu ile ısı transportu arasında bir benzerlik kurulmuştur. Bu benzerliğe göre; türbülanslı momentum transportunu ifade eden türbülans (girdap) viskozitesinin, ν_t , türbülanslı ısı transportunu ifade eden türbülanslı ısı yayılımı katsayısına, α_t , oranı, türbülans Prandtl sayısı, Pr_t , adı verilen bir orantı sabitiyle ifade edilirse aşağıdaki gibi bir eşitlik yazılabilir:

$$Pr_t = \frac{v_t}{\alpha_t}. \quad (20)$$

Bu eşitliğe göre; birinci derece modellerde, Eşitlik 16 esas alınarak belirlenecek girdap viskozitesi, v_t , değerinden sonra türbülans Prandtl sayısının, Pr_t , da bir şekilde belirlenmesiyle türbülans ısı yayılım katsayısı, α_t , tespit edilebilir. Pr_t ' nin değeri yapılan deneysel çalışmalarla tespit edilmektedir. Bunun literatürde en çok kullanılan değeri, Reynolds benzerliği diye de adlandırılan $Pr_t = 1$ ' dir. Ancak son zamanlarda yapılan deneysel çalışmalar, özellikle duvar akışlarında, bu katsayının akışın normal doğrultusunda sabit bir değer alınamayacağını göstermiştir [134, 135]. Diğer taraftan bu konuda yapılan diğer deneysel çalışmalar, momentum ve ısının türbülanslı yayılımından farklı olarak Pr_t değerinin, akış yönünde konumdan konuma veya akıştan akışa çok az değiştiğini göstermiştir. Bu nedenle türbülans Prandtl sayısı bir çok türbülans modeli için sabit alınabilmektedir. Ancak kaldırma kuvveti ve akış hattı boyunca olan eğriliklerde Pr_t değerinin değiştiğine dikkat edilmelidir [1].

Birinci derece modellerden cebrik girdap viskozitesi modelleri (veya kısaca cebrik modeller), özellikle Prandtl 'ın karışım uzunluğu hipotezi, bir çok sınır tabaka akışları için sürpriz bir şekilde iyi çalışmaktadır. Bu model ile hız, sıcaklık ve konsantrasyon profilleri tatmin edici bir şekilde doğru belirlenebilmektedir. Ancak cebrik modellerde kullanılan sabitler, farklı akışlara göre farklı değerler almaktadır. Yani bu modeller, tüm akışlara uygulanabilen genel bir modeli oluşturamamıştır. Bu genel olamama, gerçek akışların önemli özelliklerinin bazılarının bu modellerde eksik olduğunu göstermektedir. Karışım uzunluğu hipotezleri (cebric modeller), türbülansın enerjisinin ve yutulmasının akışın her yerinde eşit olduğunu kabul eder. Bu nedenle de türbülans enerjinin taşınımı ve yayılımı ihmal edilmiş olur. Bu durumda türbülans büyüklükleri için diferansiyel eşitliklerin kullanılması, bahsi geçen sınırlamaların üstesinden gelmenin tek yolu olarak ortaya çıkmaktadır. Bu şekilde girdap viskozitesi ve türbülans hareketin birleşik karakteristik ölçekleri (skalaları) transport eşitlikler yoluyla hesaplanır [3].

Diğer taraftan kinetik enerji, k , için diferansiyel eşitlik kullanan fakat uzunluk ölçeği için yine cebrik eşitlikler kullanan *bir eşitlikli modeller* de literatürde bir çok çalışmada kullanılmıştır. Eğer hız çalkantıları bir ölçekle tanımlanacaksa, fiziksel olarak en

anamlı ölçek \sqrt{k} ' dir. Kinetik enerji, k , başlıca büyük ölçekli çalkantıları kapsamamasından dolayı, \sqrt{k} büyük ölçekli türbülans hareket için bir hız ölçeğidir. Bu ölçek (skala) dikkate alındığında Eşitlik 16 ile verilen girdap viskozitesi ifadesi aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$v_t = C'_\mu \sqrt{k} l. \quad (21)$$

Burada C'_μ bir ampirik sabittir. Eşitlik 21, Prandtl-Kolmogorov ifadesi olarak adlandırılır. Prandtl ve Kolmogorov, kinetik enerjiyi, k , belirlemek için Navier-Stokes eşitliğinden türettikleri bir transport eşitliğini çözmüşlerdir. Bu eşitlik sıkıştırılamaz akışlarda ($\rho = \text{sabit}$) tensör formda aşağıdaki gibidir:

$$\underbrace{\frac{\partial k}{\partial t^*}}_{\text{değişim oranı}} + \underbrace{U_j \frac{\partial k}{\partial x_j}}_{\text{taşınım ile transport}} = - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left[u_j \left(\frac{u_i u_i}{2} + \frac{p}{\rho} \right) + 2\nu u_i s_{ij} \right]}_{\text{yayımla transport}} - \underbrace{\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}}_{P_x = \text{kayma gerilmesinden gelen üretim}} \quad (22)$$

$$- \underbrace{\beta \overline{g_i u_j t}}_{G = \text{kaldırma kuvvetinden gelen üretim}} - \underbrace{\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{\epsilon_{ij} = \text{viskoz yutulma}}$$

Burada s_{ij} aşağıdaki gibidir:

$$s_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (22a)$$

ve deformasyon yada ikinci derece çalkantı halindeki şekil değiştirme miktarı tensörünün, $\partial u_i / \partial x_j$, simetrik kısmıdır. Eşitlik 22 'de ilk iki terim dışındaki terimler bilinmeyen korelasyonları içerirler. *Yayımla transport* terimi, yayılımla (difüzyonla) kinetik enerjinin, k , türbülanslı transportunu temsil eder ve her hangi akışta temsili hacim üzerinden integral alındığında yok olur. Bunun anlamı ise; bu terim ne türbülans enerjisi oluşturur ne de türbülans enerjisini parçalar (yok eder). Bu terim viskoz yayılım kısmı, $2\nu u_i s_{ij}$, yüksek Reynolds sayılarında ihmal edilebilir. Ancak bu terim, bir katı yüzeye

yakın viskoz bölge gibi, invizid bölgenin dışında ise ihmal edilmesi çözümde hatalara neden olabilir. Bunların dışındaki, yayılımla transport teriminin diğer kısmı ve viskoz yutulma teriminin modellenmeleri gerekmektedir.

Eşitlik 22 'de kinetik enerjinin, k , değişimi, ortalama hareketten meydana gelen taşınım ile transport ile, hız ve basınç çalkantılarından meydana gelen yayılımla transport ile, Reynolds gerilmeleri ve ortalama hız gradyanlarıyla k 'nın üretimi ile ve viskoz davranışlar vasıtasıyla sonuçta ısıya dönüşen k 'nın yutulması ile dengededir. Kaldırma kuvvetinin etkili olduğu akışlarda, kaldırma kuvvetinden dolayı k 'nın üretimi ve yok olması da mevcuttur. Üretim terimi, P_k ; ortalama hareketten türbülanslı harekete kinetik enerji geçişini temsil eder. Bu terim, ortalama hareketin kinetik enerjisi için, $1/2 U_i U_i$, Eşitlik 22 'de kaynak terimi olarak ters (eksi) işaretli ortaya çıkar. Kaldırma kuvveti üretimi, G ; türbülans kinetik enerji, k , ile potansiyel enerji arasında bir enerji değişimini temsil eder. Viskoz yutulma, ε ; akışkanın iç enerjisine kinetik enerji geçişidir ve her zaman kaynak terimidir.

Yukarıda bahsi geçen modellerde de uzunluk ölçeği ifadesi hakkındaki bilgiler sadece basit akışlar için mevcuttur; eliptik akışlar için bu bilgiler mevcut değildir. Bu nedenden dolayı çoğu araştırmacılar, iki veya daha fazla eşitlikli modeller lehinde bir eşitlikli modelleri terk etmişlerdir [3].

Şimdiye kadar dikkate alınan tüm modeller, cebrik bir uzunluk ölçeği kullanılmasına ihtiyaç duyarlar. Deneyler, bu uzunluk ölçeği tanımlarının sınır koşullarıyla değişmesi gerektiğini göstermiştir [1, 3]. *Karışım uzunluğu* olarak adlandırılan ve enerji içeren büyük girdapların büyüklüğüyle (boyutuyla) tanımlanan *uzunluk ölçeği*, l , kinetik enerji, k , ile benzer tarzdaki transport süreçleriyle ilgilidir. Örneğin, bir grid (ızgara) tarafından üretilen girdapların her bir konumdaki (istasyondaki) boyutları, büyük ölçüde kendi başlangıç büyüklüğüne bağlı olabilmesi için, akış doğrultusunda taşınırlar. Uzunluk ölçeğini etkileyen diğer süreçler; küçük girdapları yok eden ve bu nedenle etkin bir şekilde girdap büyüklüğünü artıran yutulma ve girdap büyüklüğünü azaltan enerji şelalesi ile bağlantılı *vorteks* gerilmesidir. Bütün bu süreçlerin dengesi, uzunluk ölçeği, l , için yazılan bir transport eşitlikte (modelde) ifade edilebilir. Bu aşamada bu transport eşitliği, l 'nin dağılımının hesaplanmasında da kullanılabilir. l 'nin belirlenmesi veya hesaplanması için geniş bir aralıkta geçerli formülün belirlenmesindeki zorluklar, böyle bir uzunluk ölçeği transport eşitliğinin kullanılmasını teşvik etmiştir [1].

Bir uzunluk ölçeği eşitliği, bağımlı değişken olarak uzunluk ölçeğinin kendisini buldurması gerekli değildir. Kinetik enerji, k , k eşitliğinin (Eşitlik 22) çözümünden bilindiği için, her hangi bir $z = k^m l^n$ şeklindeki kombinasyon yeterlidir. Aslında şimdiye kadar önerilen çoğu eşitlikler değişken olarak l 'yi kullanmamışlardır [1]. z 'nin literatürde kullanılan formları aşağıdaki gibidir:

$$z = \begin{cases} k^{1/2} / l \equiv f \text{ (Girdap içeren enerjinin türbülans frekansı)} \\ k / l^2 \equiv w \text{ (Vortisite çalkantılarının zaman ortalamasının karesi)} \\ k^{3/2} / l \equiv \varepsilon \text{ (Türbülans kinetik enerjisinin yutulma oranı)} \\ k l \quad \text{(enerji - uzunluk ölçeği üretimi)} \end{cases} . \quad (23)$$

Yukarıda görüldüğü gibi her bir eşitlik farklı bir fiziksel süreci ifade etmektedir. Bu eşitliklerden ε ve kl gibi eşitlikler ilk olarak Navier-Stokes eşitliklerinden çeşitli değişiklikler sonucu türetilmiştir ve daha sonra model yaklaşımlarıyla kolay kullanılabilir forma getirilmiştir.

z için modellenmiş farklı transport eşitliklerin, *yayılm* ve *ikincil kaynak* terimlerinde önemli farklılıklar bulunmaktadır. Özellikle duvara yakın bölgede önemli olan ikincil kaynak terimi göz ardı edilirse, farklı z 'ler için yazılan eşitliklerdeki terimler, modellenmiş durumlarında k eşitliğiyle (Eşitlik 22) denklik gösterir. Bu nedenle esas farklılık yayılım terimine dayanır. Farklı eşitlikler ile yapılan deneyler, bu farklılığın serbest akışlarda önemsiz olduğunu göstermiştir. Ancak duvara yakın bölgede tek bir sabite sahip yayılım terimi için gradyan yaklaşımı diğerlerine nazaran $z = \varepsilon$ için daha iyi çalıştığı görülmüştür. Diğer taraftan, ε eşitliği ikincil kaynak terimi gerektirmez iken diğer bütün değişkenlerin eşitlikleri, bir yakın-duvar düzeltmesi kaynak terimi gerektirir. Bu nedenle, ε eşitliği dikkate değer bir şekilde diğer uzunluk ölçeği terimlerinden daha popüler olmuştur [1, 3].

ε için transport eşitliği, Navier-Stokes eşitliklerinden ilk defa Davidov tarafından ve Harlow ve Nakayama [25] tarafından, birbirlerinden bağımsız olarak, sıkıştırılmaz akışlar için aşağıdaki gibi türetilmiştir:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\frac{\partial \varepsilon}{\partial t^*}}_{\text{değişim oranı}} + \underbrace{u_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}}_{\text{taşınım ile transport}} = & \underbrace{-2\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_m} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \right)}_{\text{ortalama hareketin üretimi}} - 2\nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_m \partial x_j} \overline{u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \\
& - \underbrace{2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_m}{\partial x_j}}_{\text{vorteks elemanların kendi gerilmeleriyle üretim}} - \underbrace{2 \left(\nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_m \partial x_j} \right)^2}_{\text{viskoz yutulma}} \\
& \underbrace{- \nu \left[\frac{\partial}{\partial x_m} \overline{u_m \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2} + \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_m^2} \right]}_{\text{yayımla transport}}
\end{aligned} \quad (24)$$

Eşitlik 24 'de ilk iki terim dışındaki tüm terimlerin modellenmesi gerekmektedir. Bu modelleme, ε eşitliğiyle oldukça yakın benzerlik gösteren, ortalama karesi alınmış çalkantı vortisitesi, $\overline{\omega_i \omega_i}$, için yazılan Chou 'nun vortisite-bozulma (vorticity-decay) eşitliği ile benzerliği kullanılarak gerçekleştirilir. Bir pasif skaler olan ε 'den farklı olarak, çalkantı vortisitesi, ω_i , türbülans enerjisinin çoğunun büyük ölçekli hareketle ilgili olduğu durumda vortisitenin çoğunun küçük ölçekli hareketle ilgili olması nedeniyle, küçük ölçekli türbülansın aktif bir skaler özeliği olarak dikkate alınabilir [5]. Bu ifadeyle birlikte, ε eşitliği, $\overline{\omega_i \omega_i}$ cinsinden anlamak daha kolay görünmektedir. Daha açık bir şekilde, ε eşitliği, türbülans kinetik enerjinin, büyük girdaplardan (veya düşük dalga sayılarından) daha küçük ve daha küçük girdaplara (veya yüksek ve daha yüksek dalga sayılarına) geçen miktarıdır [3].

1.6.1.1. Standart $k - \varepsilon$ Modeli

Yukarıda da bahsedildiği gibi; bir eşitlikli modellerden farklı olarak uzunluk ölçeği yerine yazılan ε eşitliği (Eşitlik 24) ile kinetik enerji eşitliğinin birlikte çözülerek, girdap viskozitesinin belirlendiği modele; *standart $k - \varepsilon$ modeli* denilmektedir. Standart $k - \varepsilon$ modeli, diğer iki eşitlikli $k - kl$ ve $k - w$ modelleriyle karşılaştırıldığında; σ_z 'nin uygun bir değer almasına (=1.3) müsaade eden tek modeldir [3]. Diğer taraftan yukarıda da belirtildiği gibi, ε eşitliğinin ikincil kaynak terimlerini gerektirmemesi, bu türbülans

modellerinin problemlere uygulanmasını ve çözümünü kolaylaştırmıştır. Bu nedenle bunlar, literatürde en yaygın kullanılan türbülans modelleri olmuştur [3, 4, 22].

Bu türbülans modelin eşitlikleri yukarıda belirtildiği gibi; Navier-Stokes eşitliklerinden türetilmiştir. Bu eşitlikler, esas olarak değişim oranı, taşınım, yayılım, enerji şelalesi ile bağlantılı olarak vorteks gerilmenin neden olduğu vortisite üretimi ve vortisitenin viskoz yutulması (parçalanması) terimlerinden meydana gelmektedir. Her iki eşitlikte de yayılım, üretim ve yutulma (parçalanma) terimleri model yaklaşımlarıyla modellenmesi gerekmektedir. Kinetik enerji eşitliğinde, yayılım teriminin ikinci kısmı daha önce de belirtildiği gibi yüksek Reynolds sayılarında ihmal edilebilmektedir. Geriye kalan kısmı ise; girdap viskozitesi hipotezine benzer olarak gradyan-yayılım (gradient-diffusion) yaklaşımına göre modellenebilir:

$$-u_j \overline{\left(\frac{u_i u_i}{2} + \frac{p}{\rho} \right)} \cong -u_j \frac{u_i u_i}{2} \cong \gamma_k \frac{\partial k}{\partial x_k}. \quad (25)$$

Burada γ_k , k 'nin türbülanslı yayılım katsayısıdır ve girdap viskozitesine, ν_t , benzer şekilde akışkanın bir özeliği değildir. Bu katsayı, farklı transport yayılım katsayıları arasındaki Reynolds benzerliğinden tespit edilebilir. Bu tespit, türbülans momentum transportunu tanımlayan ν_t ile k 'nin türbülanslı yayılımını tanımlayan γ_k arasında lineer bir ilişki olduğu kabulüyle yapılır. Buna göre;

$$\gamma_k = \frac{\nu_t}{\sigma_k}. \quad (26)$$

Burada σ_k , ampirik bir yayılım katsayısıdır. Deneysel sonuçlardan elde edilen bilgilere göre bu katsayı, türbülans yayılım katsayısı akış boyunca değişse de, her zaman sabit kalmaktadır. Bununla birlikte, kaldırma kuvveti, bu katsayıyı önemli ölçüde değiştirebilmektedir [3].

k eşitliğinde viskoz yutulma terimi, daha önce de belirtildiği gibi, moleküler viskozite tarafından parçalanmış yada yutulan türbülans kinetik enerjisinin miktarını göstermekteydi. Türbülanslı hareketin daha küçük ölçeklerinde yerel izotropinin baskın olduğu yüksek Reynolds sayılarında ε aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\varepsilon = \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \equiv 2\nu s_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \equiv 2\nu \overline{s_{ij} s_{ij}} \quad (27)$$

ve

$$\varepsilon \cong C_D \frac{k^{3/2}}{l}. \quad (28)$$

Burada C_D viskoz yutulma için ampirik bir sabit katsayıdır, s_{ij} ifadesi ise, Eşitlik 22a ile verilmektedir. Eşitlik 28 türbülans viskoz yutulmanın pasif bir süreç olduğunu ve moleküler viskozite içermeyen büyük ölçekli girdaplardan belirlenebileceğini göstermektedir

Yapılan model yaklaşımlarıyla birlikte k (Eşitlik 22) ve ε (Eşitlik 24) eşitlikleri yüksek Reynolds sayılarında sıkıştırılmaz akışlar için kaldırma kuvvetinin de etkili olduğu durumda tensör formda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{\partial k}{\partial t^*} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + P_k + G - \varepsilon, \quad (29)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t^*} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + \frac{\varepsilon}{k} [C_{1\varepsilon} (P_k + G) (1 + C_{3\varepsilon} R_f) - C_{2\varepsilon} \varepsilon]. \quad (30)$$

Bu eşitliklerde:

$$P_k = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \cong \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j}, \quad (31)$$

$$G = \beta g_j \frac{\nu_t}{Pr_t} \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (32)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Bir eşitlikli model için verilen *Prandtl- Kolmogorov* eşitliği (Eşitlik 21), standart $k - \varepsilon$ modeli için, Eşitlik 28 yardımıyla ve $C'_\mu C_D = C_\mu$ olmak üzere aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$v_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (33)$$

Eşitlikler 29, 30 ve 33 'de bulunan σ_k , σ_ε , $C_{1\varepsilon}$, $C_{2\varepsilon}$, $C_{3\varepsilon}$ ve C_μ ampirik model sabitleridir. Kaldırma kuvvetinin etkili olduğu akışlarda gelen R_f ; *akı Richardson sayısı*dır. Homojen türbülans (grid türbülansı) yayılım ve üretim terimleri ($P_k + G$) sıfırdır ve bu nedenle Eşitlik 29 ve Eşitlik 30' da sadece $C_{2\varepsilon}$ ampirik sabiti kalmaktadır. Bu sabit ise; k 'nın bozulması (yutulması) oranının ölçülmesi ile elde edilir ve 1.8 ile 2.0 arasında bir değer alır. Yerel olarak dengede bulunan sınır tabaka akışlarında ($P_k = \varepsilon$), Eşitlik 29 ile Eşitlik 33 'ün birleştirilmesi ile $C_\mu = (\overline{uv}/k)^2$ elde edilir. Bu akışlarda ölçümler sonucunda $\overline{uv}/k \approx 0.3$ değeri elde edilmiştir ve bunun sonucunda yerel olarak dengede bulunan sınır tabaka akışlarında $C_\mu \cong 0.09$ olarak bulunmuştur. Diğer bir ampirik sabit $C_{1\varepsilon}$, duvara yakın bölgede üretim, P_k , ile yutulma, ε , arasındaki yaklaşık dengeden ve bu bölgede ε 'nin taşınımının ihmal edilmesiyle elde edilmiştir [1]. Duvara yakın bölgede logaritmik duvar hız profili geçerli olduğundan P_k yaklaşık olarak ε 'ye eşittir ve ε 'nin taşınımı ihmal edilebilir. Buna göre ε eşitliği (Eşitlik 30) aşağıdaki ifadeye indirgenebilir:

$$C_{1\varepsilon} = C_{2\varepsilon} - \frac{x^2}{\sigma_\varepsilon \sqrt{C_\mu}}. \quad (34)$$

Bu eşitlik, diğer sabitler seçildiğinde sabit $C_{1\varepsilon}$ değerini belirler. σ_k ve σ_ε yayılım katsayıları, bir (1) değerine çok yakın değerler olduğu farz edilir ve bunlar, $C_{2\varepsilon}$ gibi bilgisayar optimizasyonu ile belirlenebilir [1]. Bütün bunlara göre; standart $k - \varepsilon$ modelinde kullanılan ampirik sabitler Tablo 1 'de verilmiştir.

Bu değerler, serbest türbülanslı akışlar için gerçekleştirilmiştir fakat bunlar bir yüzey üzerinden akışların olması durumunda da kullanılabilir. Yapılan alışmalar sonucunda yukarıda bahsedilen katsayılar arasında $C_{\varepsilon 1}$ ve $C_{\varepsilon 2}$ 'nin en hassas değerler olduğu grlmştir [1].

Tablo 1. Standart $k - \varepsilon$ modelinde kullanılan ampirik sabitlerin değerleri [1].

C_{μ}	$C_{1\varepsilon}$	$C_{2\varepsilon}$	σ_k	σ_{ε}
0.09	1.44	1.92	1.0	1.3

Kaldırma kuvvetinin etkili olduğu akışlarda enerji yutulması eşitliğinde (Eşitlik 30) ortaya çıkan R_f , akı Richardson sayısı olarak yukarıda tanımlanmıştı. Bu ifade genellikle, kaldırma kuvveti üretiminin gerilme üretimine negatif oranı ($-G/P_k$) şeklinde tanımlanır. Bu tanımla birlikte $C_{3\varepsilon}$ 'n değeri, kaldırma kuvvetinin etkili olduğu dikey akışlar için yaklaşık sifıra yaklaşırken iken, yatay akışlar için ise bu katsayı bire (1) yaklaşacaktır. Ancak bu katsayılar tartışmalıdır. Bu tartışmayı ortadan kaldırmak için Bradshaw, tarafından R_f tekrar tanımlanmıştır. Bu tanımlamaya göre; $R_f = -1/2 G_{\nu^2} / (P_k + G)$ şeklinde tanımlanmıştır. Bu eşitlikte G_{ν^2} , akışın normali doğrultusundaki kaldırma kuvveti üretimidir. Bu terim, yatay akışlarda $2G$ olur ve buna bağlı olarak $R_f = -G/(P_k + G)$ şeklinde elde edilir. Dikey akışlarda ise; bu terim sifır olur ve $R_f = 0$ şeklinde elde edilir. R_f teriminin yeniden tanımlanmasına göre; $C_{3\varepsilon}$ model katsayısının değeri, hem dikey hem de yatay akışlar için yaklaşık 0.8 olur [1].

1.6.1.2. Düşük Reynolds Sayılı (Yakın-Duvar) $k - \varepsilon$ Modelleri

Reynolds sayısının düşük olduğu akış durumlarında moleküler viskozitenin etkisi büyür. Ortalama harekete katkısının yanında moleküler viskozite, üretim, yutulma ve türbülans transportu süreçlerini de doğrudan etkiler [21]. Düşük Reynolds sayılı türbülans

tanımı, genellikle yerel *türbülans Reynolds sayısının* ($Re_t = k^2 / \nu \varepsilon$) küçük olduğu durumlar için kullanılan bir ifadedir. Bu değer yaklaşık 150 'nin altında olması durumunda düşük Reynolds sayılı türbülans söz konusu olur. Bu tanıma göre düşük Reynolds sayılı türbülans, farklı viskoz sebeplerden ve durumlardan ortaya çıkabilir. Mühendislik uygulamalarında en sıkça rastlanan düşük Reynolds sayılı türbülans, bir cidar yada duvar üzerinde meydana gelen sınır tabaka akışlarıdır. Kaymayan (no-slip) akış sınır koşulunda, duvarın üzerinde çok ince sonlu bir akış bölgesi meydana gelir. Bu bölgede kaymayan sınır koşulundan dolayı, tüm türbülans büyüklükler yok olur. Bu bölgede yutulma oranı, ε , sonlu bir değerde kalırken kinetik enerji, k , sıfır olur ve bu nedenle Re_t duvara yaklaştıkça sıfıra doğru gitme eğilimi gösterir. Sonuçta; moleküler viskozite duvara yakın türbülanslı akışlarda baskın bir rol oynar. Benzer olarak yukarıda da belirtildiği gibi yerel türbülans Reynolds sayısının 150' nin altında olduğu akış durumlarında da moleküler viskozitenin etkisi büyük olur. Bu durumları ifade eden türbülans modellerinin *düşük Reynolds sayılı model* yada *yakın-duvar modeli* olarak adlandırılmaları bu nedenledir.

Standart $k - \varepsilon$ modellerinde moleküler viskozitenin etkili olduğu bu duvara yakın bölgedeki (viskoz alt sınır tabaka) çözümler, *duvar fonksiyonları* adı verilen ifadelerle yapılır. Duvar fonksiyonu yaklaşımı, sınırlardan uzaktaki akışkandaki noktaların yüzey sınır koşullarıyla ilişkilendirilmesi ve bu suretle viskozitenin doğrudan etkisinin modellenmesi probleminden kaçınılmasıdır. Bu çözüm prosedürünün geçerliliği, viskoz etkilerin önemsiz olduğu, Reynolds sayısının yeterince büyük olduğu veya genel duvar fonksiyonlarının çok iyi tanımlandığı akış durumlarıyla sınırlıdır. Bunların dışında pratikte duvar fonksiyonu yaklaşımının geçerli olmadığı çok sayıda durumla karşılaşabilmektedir. Bunlar; düşük Reynolds sayısında ve geçiş bölgesindeki türbülanslı sınır tabaka akışları, zaman bağımlı ve ayrılan akış durumları, kendi eksenini etrafında dönen bir yüzey üzerindeki akış ve bir yüzey üzerinde ısı ve kütle transferinin olduğu durumlar şeklinde sıralanabilir [6].

Yukarıda bahsedilen akış durumlarında türbülans modellerinde bazı değişikliklerin yapılması gerekliliği, bu konuda çok sayıda çalışmanın yapılmasına neden olmuştur. Bir türbülans modeline yakın-duvar değişikliğinin yapılmasına en basit örnek; van Driest 'in karışım uzunluğu için *azaltma (damping) fonksiyonu* tanımlaması yapmasıdır. Buna bağlı olarak daha gelişmiş modeller, orijinal olarak yüksek Reynolds sayısı için türetilmiş türbülans transport eşitliklerindeki ampirik sabitlerde ve fonksiyonlarında, hem duvarın

azaltma etkilerini hem de moleküler viskozitenin doğrudan etkisini veya her ikisini birden içine alırlar.

Düşük Reynolds sayılı veya yakın-duvar $k - \varepsilon$ modelinde, yukarıda bahsedilen viskozite etkilerini denklemlere katmak için f_μ , f_1 ve f_2 olmak üzere azaltma fonksiyonları tanımlanmıştır. f_μ , moleküler viskozitenin kayma gerilmesi üzerinde doğrudan etkisinin ifade edilmesi için önerilmiştir ve girdap viskozitesi ifadesinde C_μ 'nün çarpanıdır. Diğer taraftan duvara yakın bölgedeki kayma gerilmesi, basınç-şekil değiştirme korelasyonu vasıtasıyla çalkantı halindeki basınç alanının etkisiyle de azalır. Bu süreç moleküler viskoziteden bağımsızdır. Oysaki duvara yakın bölgede meydana gelen her iki etkiyi ayırt etmek çok zordur. Bu nedenle f_μ fonksiyonu, esas olarak sadece moleküler viskozitenin etkisi için uygun bir şekilde türetilmesine rağmen, hem viskoz hem de basınç-şekil değiştirme etkilerini modellemeyi amaçlamaktadır [6]. f_μ değeri, $y^+ < 15$ olduğu durumda yaklaşık olarak sabit bir değerde kalır, bu değerden sonra $y^+ = 60$ konumuna kadar lineer olarak artar ve $y^+ > 60$ iken bu değer yavaşça bir (1) değerine yaklaşır. Böylece $y^+ > 60$ için f_μ değerinin birim (1) değere yaklaşmasıyla düşük Reynolds sayılı $k - \varepsilon$ modeli standart forma kavuşmuş olur. f_2 fonksiyonu, ε eşitliğinde yutulma terimindeki düşük Reynolds sayısı etkisini hesaba katar ve $C_{2\varepsilon}$ 'nin çarpanı olarak eşitliğe girer. Bu fonksiyon için fiziksel temel, izotropik türbülansın bozulmasının son periyodundaki deneylerle sağlanır. f_1 fonksiyonu ve E ampirik terimi de ε eşitliğinde uygulanır. f_1 , $C_{1\varepsilon}$ 'nin çarpanı olarak eşitliğe katılır. E ampirik terimi, duvar uzunluğuyla ε 'nin kuadratik (ikilenim) büyümesini elde etmek için verilir. Bu ifadelere ek olarak bazı düşük Reynolds sayılı türbülans modellerinde kinetik enerji eşitliğine ilave olarak gelen D ampirik terimi de bulunmaktadır.

Bu çalışmada literatürde sıkça kullanılan Chien [34] 'in ve Lam-Bremhorst [33] 'un düşük Reynolds sayılı (yakın-duvar) modelleri kullanılmıştır. Düşük Reynolds sayılı $k - \varepsilon$ modeli aşağıdaki şekilde yazılabilir:

Reynolds eşitliklerinde bilinmeyen olarak karşımıza çıkan Reynolds gerilmeleri, Boussinesq ifadesiyle yine bir bilinmeyen olan girdap viskozitesi ifadesine indirgenmişti.

Bu ifade de, Eşitlik 33 ile verilen Prandtl-Kolmogorov bağıntısı olarak tanımlanmıştır. Düşük Reynolds sayılı türbülans modelinde bu ifade aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$v_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (35)$$

Bu eşitlikte bilinmeyenler olarak ortaya çıkan türbülans kinetik enerjisi, k , ve bunun yutulması, ε , aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] + P_k - \varepsilon + D, \quad (36)$$

$$U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(v + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right] + C_{1\varepsilon} f_1 \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{2\varepsilon} f_2 \frac{\varepsilon^2}{k} + E. \quad (37)$$

Eşitlik 22, Eşitlik 24 ve Eşitlik 33 'den farklı olarak, Eşitlik 35 , Eşitlik 36 ve Eşitlik 37 'de bulunan f_μ , f_1 , f_2 azaltma fonksiyonları ile E ve D , ek terimleri farklı düşük Reynolds sayılı terimleri için farklı değerler içerebilmektedir. Bu çalışmada kullanılan Chien [34] 'in ve Lam-Bremhorst [33] 'un düşük Reynolds sayılı modelleri için bu değerler aşağıdaki gibidir:

Chien 'in düşük Reynolds sayılı $k - \varepsilon$ modeli;

$$\left. \begin{aligned} f_\mu &= 1 - \exp(-0.0115 y^+) \\ f_1 &= 1.0 \\ f_2 &= 1 - 0.22 \exp[-(R_t / 6)^2] \end{aligned} \right\}, \quad (38)$$

$$\left. \begin{aligned} D &= -2 v \frac{k}{y^2} \\ E &= -2 v \left(\frac{\varepsilon}{y^2} \right) \exp(-0.0115 y^+) \end{aligned} \right\}. \quad (39)$$

Chien 'in modeline göre yeni sabit katsayılar Tablo 2 'de verilmiştir.

Tablo 2. Chien 'in düşük Reynolds sayılı $k - \varepsilon$ modelinde kullanılan sabitler [34].

C_μ	σ_k	σ_ε	$C_{1\varepsilon}$	$C_{2\varepsilon}$
0.09	1.0	1.3	1.35	1.8

Lam-Bremhorst 'un düşük Reynolds sayılı $k - \varepsilon$ modeli;

$$\left. \begin{aligned} f_\mu &= \left[1 - \exp(-0.0165 R_y) \right]^2 \times \left(1 + \frac{20.5}{R_t} \right) \\ f_1 &= 1 + (0.05 / f_\mu) \\ f_2 &= 1 - \exp(-R_t^2) \end{aligned} \right\}, \quad (40)$$

$$\left. \begin{aligned} D &= 0 \\ E &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (41)$$

Lam-Bremhorst 'un modelinde sabit katsayılar, Tablo 1 ile verilen standart $k - \varepsilon$ modelinde kullanılanlarla aynıdır.

Yukarıda verilen ifadelerde ortaya çıkan R_t ve R_y ifadeleri ise; aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$R_t = \frac{k^2}{\nu \varepsilon}; \quad R_y = \frac{k^{1/2} y}{\nu}; \quad y^+ = \frac{U_\tau y}{\nu}; \quad \text{ve} \quad U_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}. \quad (42)$$

Düşük Reynolds sayılı yada yakın-duvar $k - \varepsilon$ modelleri, standart $k - \varepsilon$ modelinden farklı olarak, hesaplamalara duvardan başlar.

1.6.1.3. Lineer Olmayan $k - \varepsilon$ Modeli

Boussinesq' in girdap viskozitesi yaklaşımı, Reynolds gerilmesi tensörünün, $\tau_{ij} = -\overline{u_i u_j}$, bir türbülans akışta asal ekseninin tüm noktalarında ortalama şekil değiştirme oranı, S_{ij} , ile eşleşmesinin olduğunu kabul eder. Bu kabul laminer akışlar için Stokes'un yaklaşımının benzeridir. Daha önce de belirtildiği gibi, τ_{ij} ve S_{ij} arasındaki orantı katsayısı, girdap viskozitesi, ν_t olarak tanımlanmıştır. Akışkanın bir özelliği olan moleküler viskoziteden farklı olarak, girdap viskozitesi, akışın maruz kaldığı birçok koşulun detaylarından etkilenir. Bu akış detayları; üzerinde akış gerçekleşen katı cismin şekli ve yüzey pürüzlüğü yüksekliği gibi herhangi bir katı sınırının yapısı, serbest akım türbülans şiddeti ve belki de en önemlisi akış tarih (history) etkileridir. Deneyler, τ_{ij} üzerindeki akış tarih etkilerinin bir türbülanslı akışta sıkça, uzun mesafe boyunca sürdüğünü göstermiştir. Bu nedenle, τ_{ij} ve S_{ij} arasındaki basit lineer ilişki üzerinde şüpheler çıkmaktadır [2].

Boussinesq' in girdap viskozitesi yaklaşımına dayanan modeller, mühendisleri ilgilendiren birçok akışlar için mükemmel belirlemeler sağlamışlardır. Ancak böyle modeller, ortalama şekil değiştirme oranında ani değişimlere sahip akışlar için ve Bradshaw'ın *ek şekil değiştirme oranı* olarak ifade ettiği etkiye sahip akışlar için doğru sonuçlar vermediği görülmüştür. Zaten ortalama şekil değiştirme oranında ani değişikliklerin olduğu akışlarda sorun çıkması beklenmektedir. Reynolds gerilmeleri, ortalama akış ve zaman ölçeği ile ilişkili olmayan bir oranda böyle değişikliklere ayarlanır. Benzer şekilde, bir akış, ani genişlemeler veya akış hattı boyunca önemli oranda eğriliğin neden olduğu ek şekil değiştirme oranlarına maruz kaldığında, Boussinesq' in girdap viskozitesi yaklaşımı şüpheli duruma düşer. Ayrıca bu ekstra şekil değiştirme oranları doğru (yeterli) olmayan normal Reynolds gerilmelerine neden olur. Boussinesq' in girdap viskozitesi yaklaşımına dayanan modellerin uygulamada en başarısız oldukları durumlar şunlardır:

- a) Ortalama şekil değiştirme oranı ani değişen akışlar.
- b) Eğrisel yüzeylerin üzerindeki akışlar.
- c) İkincil hareketlere (akışlara) sahip kanallardaki akışlar.
- d) Dönen ve katmanlaşan akışkanların akışları.

- e) Üç boyutlu akışlar.
f) Ayrılmaya maruz kalan sınır tabaka akışları.

Yukarıda sayılan akış şekilleri de dikkate alındığında Boussinesq' in girdap viskozitesi yaklaşımı üzerinde bazı çalışmalar mevcuttur [2, 7, 39]. Bu çalışmalar, Reynolds gerilme tensörünün her hangi bir ek diferansiyel eşitliği gerektirmeden daha uygun tanımlanmasının elde edilmesine dayanmaktadır. Bu işlem Boussinesq yaklaşımının basit olarak seriye açılmasıyla yapılmaktadır. Böylece Boussinesq girdap viskozitesi yaklaşımına ek terimler gelmektedir. Daha önce belirtildiği gibi; τ_{ij} ve S_{ij} arasındaki lineer ilişki de bu şekilde lineer olmayan duruma gelmektedir. Bu nedenle literatürde bu yaklaşımlara *lineer olmayan yapısal bağıntılar* (nonlinear constitutive relations) adı verilmektedir. Bu çalışmada, 1987 yılında Speziale 'nin önerdiği lineer olmayan $k - \varepsilon$ modeli kullanılmıştır. Bu modelde Reynolds gerilmesi ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$-\overline{u_i u_j} = \underbrace{-\frac{2}{3} k \delta_{ij} + 2\nu_t S_{ij}}_I + 4C_D C_\mu^2 \frac{k^3}{\varepsilon^2} \left(S_{ik} S_{kj} - \frac{1}{2} S_{mn} S_{nm} \delta_{ij} \right) + \underbrace{4C_E C_\mu^2 \frac{k^3}{\varepsilon^2} \left(\overset{o}{S}_{ij} - \frac{1}{3} \overset{o}{S}_{mm} \delta_{ij} \right)}_{II} \quad (43)$$

Burada S_{ij} Eşitlik 13a ile daha önce tanımlanmıştı. $\overset{o}{S}_{ij}$ ise aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\overset{o}{S}_{ij} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial t} + U_k \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial U_i}{\partial x_k} S_{kj} - \frac{\partial U_j}{\partial x_k} S_{ki} \quad (44)$$

Burada S_{ij} daha önce de belirtildiği gibi ortalama şekil değiştirme tensörü, $\overset{o}{S}_{ij}$ ise; S_{ij} 'nin Oldroyd türevidir. Eşitlik 43 'de $C_D = C_E = 1.68$ şeklindedir. Ayrıca Eşitlik 43 'de I ile gösterilen kısım, Boussinesq girdap viskozitesi yaklaşımı ifadesi ve II ile verilen de yukarıda bahsedilen ani şekil değiştirme oranını modelleyen ek terimlerdir.

Lineer olmayan $k - \varepsilon$ modelinde hesaplama biçimi, Eşitlik 43 ile verilen Reynolds gerilmeleri ifadesi dışında standart $k - \varepsilon$ modelinde olduğu gibidir.

1.6.2. İkinci Derece Modeller

Birinci derece modeller, türbülansın yerel durumunu, bir hız ölçeği ile ifade edebilmekteydiler ve her bir Reynolds gerilmesi, bu ölçekle ilişkili olabilmekteydi. Bu tip türbülans modelleri, türbülansın yerel olarak izotropik olduğunu kabul eden *ortalama türbülans enerjisi* (mean-turbulence-energy, MTE) modelleri olarak adlandırılmaktadır ve bunlar, kinetik enerji, k , bir transport eşitliğinden hesaplanmak üzere \sqrt{k} şeklinde tanımlanmış, hız çalkantılarının ölçeğine sahip girdap viskozitesi (Prandtl-Kolmogorov) ifadesini kullanırlar. Ancak bu modeller, dönmeli akışlar, şekil değiştirme oranında ani değişimlere sahip akışlar veya ısıtılmakta olan simetrik olmayan duvar jetleri gibi karmaşık akışlarda doğru sonuçlar vermediği görülmüştür [1-3, 21]. Bu zorlukların üstesinden gelebilmek için her bir Reynolds gerilmesi, $-\overline{u_i u_j}$, için açık bir şekilde transport eşitliklerinin kullanıldığı ve *ikinci derece modeller* olarak adlandırılan yeni yaklaşımlar önerilmiştir [3, 13, 14]. Benzer transport eşitlikler, türbülans ısı akıları, $-\overline{u_j t}$, için de sunulmuştur. $-\overline{u_i u_j}$ ve $-\overline{u_j t}$ eşitlikleri, tam bir transport eşitlik olarak türetilenmiştir fakat bunlar, içerilerinde bulundukları bazı terimler nedeniyle kapalı bir eşitlik sistemi oluşması için yeniden modellemeye ihtiyaç duyarlar.

70 'li yıllarda bazı ayrıklaştırma zorluklarından kaynaklanan hataların, 80 'li yıllara doğru hızla azalmasıyla birlikte ikinci derece modellerin, Boussinesq' in girdap viskozitesi ifadesini kullanan birinci derece modellere olan üstünlüğü giderek artmıştır. 1981 yılında Stanford Konferansında, değerlendirme komitesi de ikinci derece modellerin bu üstünlüğünü teyit etmiştir [13]. Diğer taraftan, her bir Reynolds gerilmesi için ve türbülans ısı akısı için yazılan transport eşitliklerinin türevleri, otomatik olarak kaldırma kuvveti, dönme ve diğer özel etkileri hesaplayan terimleri sunmaktadır [1]. Bu da, ikinci derece modellerin birinci derece modellere olan başlıca üstünlüğünden biridir.

Bu çalışmada literatürde sıkça uygulama alanı bulan, *standart Reynolds gerilme/akı modeli* (RSM), *Lauder-Reece-Rodi modeli* (LRR) ve *cebrik gerilme/akı modeli* (ASM) kullanılmıştır.

1.6.2.1. Reynolds Gerilme/ Türbülans Isı Akısı Modeli (RSM)

Reynolds gerilmelerinin, $-\overline{u_i u_j}$, transport eşitlikler kullanılarak doğrudan belirlenmesi fikri ilk olarak 1924 yılında Keller ve Friedmann tarafından önerilmiştir [1]. Fakat bazı kabullerle bu transport eşitliklerinin nasıl türetilbileceğini göstermelerine rağmen bu yazarlar açık bir eşitlik verememişlerdir. Tam bir $-\overline{u_i u_j}$ eşitliğini ilk defa 1945 yılında Chou [11] türeterek önermiştir. Bu işlem kısaca şu şekildedir: Zaman ortalaması alınmış momentum eşitliği (Reynolds eşitliği), zaman bağımlı Navier-Stokes eşitliğinden hem x_i hem de x_j yönündeki momentum için çıkartılır. i bileşeni için çıkan eşitlik çalkantı hızı u_j ile ve j bileşeni için çıkan eşitlik de yine çalkantı hızı u_i ile çarpılır. Bu iki eşitlik toplanır ve zaman ortalaması alınırsa $-\overline{u_i u_j}$ eşitliği elde edilir. Buna göre, moleküler viskoziteden etkilenmeyen büyük ölçekli sıkıştırılmaz bir türbülanslı akış için Reynolds gerilme transport eşitliği tensör formda aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t^*}}_{\text{değişim oranı}} + \underbrace{U_k \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k}}_{\text{taşınımla transport}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(- \left\{ \overline{u_i u_j u_k} + \frac{\overline{u_j p}}{\rho} \delta_{ik} + \frac{\overline{u_i p}}{\rho} \delta_{jk} \right\} \right)}_{\text{yayımla transport}} \\
 - \underbrace{\left\{ \overline{u_k u_i} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \overline{u_k u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right\}}_{P_{ij} = \text{gerilmeyle üretim}} - \underbrace{\beta \left(g_i \overline{u_j t} + g_j \overline{u_i t} \right)}_{G_{ij} = \text{kaldırma kuvvetleriyle üretim}}. \quad (45) \\
 + \underbrace{\frac{p}{\rho} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\}}_{\pi_{ij} = \text{basınç-şekil değiştirme}} + \underbrace{2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}}_{\varepsilon_{ij} = \text{viskoz yutulma}}
 \end{aligned}$$

Eşitlik 45 normal gerilmeler için ($i = j$) elde edilip bunlar toplanırsa türbülanslı kinetik enerji (Eşitlik 15) elde edilir. Böylece türbülanslı kinetik enerji için türetilen eşitlik (Eşitlik 22) ile Reynolds gerilmesi eşitliği benzerlik gösterir. Eşitlik 45 'de bulunan terimlerin fiziksel manaları, eşitlikte de görüldüğü gibi *değişim oranı*, *taşınımla ve yayılımla transport*, *gerilme ve kaldırma kuvvetiyle üretim* ve $-\overline{u_i u_j}$ 'nun *viskoz yutulması* (yada *parçalanması*) şeklindedir. Eşitlik 22 'den farklı olarak, Eşitlik 45 'de bulunan terim ise; çalkantı basıncı ile şekil değiştirme oranı arasındaki ilişkiyi içeren *basınç-şekil*

değiştirme terimidir. Bu terimin toplam enerji dengesine hiçbir katkısının olmaması nedeniyle ve sadece $i = j$ olduğu durumda onun bileşenleri arasında enerjinin yeniden dağıtılmasında rol oynadığından ve kayma gerilmelerinde ($i \neq j$) de ortadan kalktığından, k eşitliğinde bulunmamaktadır. Bu nedenle bu terim türbülansı daha izotropik yapmaya meyyleder [1].

Eşitlik 45 'de *yayılm*, *basınç-şekil değiştirme* ve *yutulma* terimleri, model yaklaşımlarına ihtiyaç duyan korelasyonlar içerirler. Yukarıda da belirtildiği gibi; Reynolds gerilmesi transport eşitlikleri bu bilinmeyenler nedeniyle kapalı bir eşitlik sistemini oluşturamazlar. Bu amaçla yapılan yaklaşımlarla Reynolds gerilmeleri eşitlikleri, daha sade ve akışlara kolay uygulanabilir forma girerler. Yüksek Reynolds sayılı akışlarda türbülans lokal olarak izotropik olduğundan her bir enerji bileşeninde ($\overline{u_i^2}$) aynı oranda enerji yutulur. Bundan başka, yine yerel izotropinin baskın olduğu durumlarda, $i \neq j$ için

yutulma korelasyonu, $\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}$, sıfırdır. Bu nedenle Eşitlik 45 'de yutulma terimi şu

şekilde yazılabilir:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij}. \quad (46)$$

Burada ε , Reynolds gerilmesi modeli için türetilmiş ε eşitliğinden daha önce hesaplanan toplam yutulan enerji oranıdır.

Eşitlik 45 'de π_{ij} ile belirtilen basınç-şekil değiştirme korelasyonu, türbülans modelleme konusunda en çok üzerinde ilgi bulunan terimdir. Bunun iki nedeni vardır: Birincisi; üretim terimi ile aynı büyüklüğe sahip olması nedeniyle bu terim mühendislik uygulamalarında çoğu akışlarda kritik bir rol oynar. İkincisi; bu terim esas olarak ölçülemeyen korelasyonları içermesi nedeniyle, uygun kapatma yaklaşımları kurulması için yüksek seviyede beceri ve yetenek gerektirirler [2]. Bu terimi modellemek için sıkıştırılamaz akışta basınç çalkantıları için yazılan Poisson eşitliğinden faydalanılır. Bu çözüme göre basınç-şekil değiştirme korelasyonunu üç süreci destekler: Birincisi; sadece hızların çalkantıları arasındaki ilişkidir ($\pi_{ij,1}$). Buna, literatürde basınç-şekil değiştirme teriminin, *yavaş basınç-şekil değiştirmesi* (slow pressure strain) kısmı veya izotropiye

dönüş (return-to-isotropy) terimi denilmektedir [2]. Bu terim Rotta [10] tarafından aşağıdaki gibi modellenmiştir:

$$\pi_{ij,1} = -C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right). \quad (47)$$

Burada C_1 , model sabitidir ve $1.4 < C_1 < 1.8$ aralığında değişir. İkincisi; ortalama şekil değiştirme ve çalkantı hızlarının etkileşiminden ortaya çıkar ($\pi_{ij,2}$). Buna literatürde basınç-şekil değiştirme teriminin, *hızlı basınç-şekil değiştirmesi* (rapid pressure strain) kısmı denilmektedir. Bu terim, ilk zamanlar yapılan çalışmalar (Daly ve Harlow [26]) sonucu, yavaş basınç-şekil değiştirmesi ile karşılaştırıldığında ihmal edilebilir olduğu kabul edilmiştir. Fakat daha sonraki çalışmalarda, bu terimin yavaş basınç-şekil değiştirme teriminden daha ağırlıklı olduğu belirlenmiştir [2]. Bu terimin Reynolds tarafından önerilen ve pratikte kullanılan şekli ile aşağıdaki gibi verilebilir [1]:

$$\pi_{ij,2} = -C_2 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P_k \right) \quad (48)$$

Burada C_2 model sabitidir. P_{ij} , Eşitlik 45 'de tanımlanan $-\overline{u_i u_j}$ bileşeninin gerilmeden kaynaklanan üretimidir ve şu şekilde tanımlanabilir:

$$P_{ij} = - \left(\overline{u_i u_m} \frac{\partial U_j}{\partial x_m} + \overline{u_j u_m} \frac{\partial U_i}{\partial x_m} \right) \quad (49)$$

P_k ise; Eşitlik 31 'de tanımlandığı gibi; Eşitlik 22 'de tanımlanan kinetik enerjinin, k , gerilmeden kaynaklanan üretimidir. Basınç-şekil değiştirme teriminin üçüncü kısmı, kaldırma kuvvetinin etkili olması durumunda ortaya çıkar. Bu terim de Launder [144] tarafından önerildiği şekliyle şöyledir:

$$\pi_{ij,3} = -C_3 \left(G_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} G \right). \quad (50)$$

Burada C_3 model sabitidir. G_{ij} , Eşitlik 45 'de tanımlanan $-\overline{u_i u_j}$ 'nin kaldırma kuvvetinden kaynaklanan üretimi ve G de Eşitlik 31 'de tanımlanan k 'nın kaldırma kuvvetinden kaynaklanan üretimidir. Bu ifadeler şu şekilde tanımlanabilir:

$$G_{ij} = -\beta(g_i \overline{u_j t} + g_j \overline{u_i t}) \quad (51)$$

ve

$$G = -\beta g_i \overline{u_j t}. \quad (52)$$

Eşitlikler 51 ve 52 'de görüldüğü gibi kaldırma kuvvetinden kaynaklanan üretim terimi, skaler akıları, $-\overline{u_j t}$, içeriyor ve bunların kaldırma kuvvetinin baskın olduğu akışlarda önceden belirlenmesi gerekmektedir.

Basınç-şekil değiştirme terimine bir diğer ilave ifade; duvar etkilerinin modellendiği terimlerdir. Daha önce düşük Reynolds sayılı (yada yakın-duvar) türbülansın etkilerini modellemek için $k - \varepsilon$ modelinde yapıldığı gibi, Reynolds gerilmesi modelinde de bazı yakın-duvar yaklaşımları kullanılır. Bu etkiler, önce Daly ve Harlow [26] ve sonra Shir [164] tarafından önerildiği gibi; bir duvar düzeltmesi ifadesiyle modellenebilir. Bu aşağıdaki şekildedir:

$$\pi'_{ij,1} = C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u_n^2} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \overline{u_n u_i} \delta_{nj} - \frac{3}{2} \overline{u_n u_j} \delta_{ni} \right) f \left(\frac{L}{X_n} \right) \quad (53)$$

Daha sonra bu eşitliğe Gibson ve Launder [16] tarafından ikinci bir kısım daha eklenerek duvar düzeltmesi ifadesi genişletilmiştir. Bu eşitlik de şu şekildedir:

$$\pi'_{ij,2} = C_2 \left(\pi_{nn,2} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \pi_{ni,2} \delta_{nj} - \frac{3}{2} \pi_{nj,2} \delta_{ni} \right) f \left(\frac{L}{X_n} \right). \quad (54)$$

Eşitlikler 53 ve 54 'de C_1' ve C_2' model sabitleridir. Bu eşitliklerde n , üzerinde akış meydana gelen duvarın normal doğrultusudur ve X_n , duvardan ilgili noktaya alınan

mesafedir. $f(L/X_n)$ fonksiyonu, X_n 'in artması ile yakın-duvar düzeltmesinin etkisini azaltır ve bu lineer bir ifade olan;

$$f\left(\frac{L}{X_n}\right) = \alpha_m \frac{k^{3/2}}{X_n \varepsilon} \quad (55)$$

eşitlikten uygun bir şekilde bulunur [1]. Burada α_m , bir skaler olup değeri, bağımsız değişkenlerin başlangıç değerleri yardımıyla duvara en yakın ağ noktasında f ' nin değeri 1 'e eşitlenerek hesaplanır ve geriye kalan noktalardaki f değerleri, 1 değerini aşmayacak şekilde Eşitlik 55 ile hesaplanabilir.

Duvar düzeltmeleri aşağıdaki gibi yazılırsa;

$$\pi_{ij}^w = \pi'_{ij,1} + \pi'_{ij,2} \quad (56)$$

ve sonuçta oluşan basınç-şekil değiştirme ifadesi toplam olarak yazılırsa;

$$\pi_{ij} = \pi_{ij,1} + \pi_{ij,2} + \pi_{ij,3} + \pi_{ij}^w \quad (57)$$

eşitliği elde edilir.

Eşitlik 45 'de diğer modellenmesi gereken terim *yayılm* terimiydi. Bu terim de Daly ve Harlow [26] 'un önerdiği aşağıdaki gibi modellenenabilir:

$$Yayılm \left\{ \overline{u_i u_j} \right\} = C_s \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_m} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} \right) \quad (58)$$

Reynolds gerilmesi modelinde (RSM), yutulma, yayılım ve basınç-şekil değiştirme terimlerinin modellenmesi ile, türbülans kinetik enerji, k , ve bunun yutulması, ε , terimleri bilinmeyen olarak ortaya çıkmaktadır. Eşitlik 45 her bir normal gerilme için ($i = j$) çözülmesi durumunda, türbülans kinetik enerji, k , Eşitlik 15 'de olduğu gibi belirlenebilir. Yutulma için ise; Eşitlik 24 'den farklı olarak, yayılım terimi daha genel formda, bir eşitlik kullanılmaktadır. Bu eşitlik aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(C_{s,\varepsilon} \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_m} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_m} \right) - C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k}. \quad (59)$$

Burada C_s model sabiti olup değeri 0.18 'dir.

Reynolds gerilmesi modelinin kullanıldığı hesaplamalarda sıcaklık alanı çözümleri, belirlenmesi gereken $-\overline{u_j t}$ bilinmeyeni için yazılacak bir skaler akı eşitliğiyle yapılır. Bu eşitlik, $-\overline{u_i u_j}$ eşitliğinin elde edildiği tarzda türetilebilir. Bu eşitlik viskoz yayılım teriminin ihmal edildiği durum için tensör formda aşağıdaki gibidir:

$$\underbrace{\frac{\partial \overline{u_j t}}{\partial t}}_{\text{değişim oranı}} + \underbrace{U_m \frac{\partial \overline{u_j t}}{\partial x_m}}_{\text{taşınım ile transport}} = - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_m} \left(\overline{u_i u_m t} + \frac{1}{\rho} \delta_{im} p t \right)}_{\text{yayılım ile transport}} - \underbrace{\overline{u_i u_j} \frac{\partial T}{\partial x_j} - \overline{u_j t} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}}_{\text{ortalama alan üretimi}} \quad (60)$$

$$\underbrace{-\beta g_i \overline{t^2}}_{\text{kaldırma kuvveti üretimi}} + \underbrace{\frac{1}{\rho} p \frac{\partial t}{\partial x_i}}_{\pi_{it} = \text{basınç-sıcaklık gradyanı korelasyonu}} - \underbrace{(\alpha - \nu) \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial t}{\partial x_m}}_{\text{viskoz yutulma}}$$

Eşitlik 60 'da *ortalama alan üretimi terimi*, ortalama hız ile ortalama sıcaklık gradyanının etkileşmesinden meydana gelir. Bu eşitlikte de Eşitlik 45 'de olduğu gibi, modelleme yaklaşımlarının uygulanmasına ihtiyaç duyulan terimler bulunmaktadır. Yüksek Reynolds

sayısında ve yerel olarak izotropik türbülansla, $\frac{\partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial t}{\partial x_m}$ korelasyonu ve bundan dolayı

meydana gelen viskoz yutulma terimi sıfırdır. Sonuçta ihtiyaç duyulan model yaklaşımları, *basınç-sıcaklık gradyanı korelasyonu*, π_{it} , ve *yayılım terimidir*. Bu terim de Reynolds gerilme eşitliğinde basınç-şekil değiştirme durumunda olduğu gibi, p için yazılan Poisson eşitliği yardımıyla modellenebilir. π_{it} , aynı şekilde; bir *türbülans kısmına*, $\pi_{it,1}$, bir de *ortalama şekil değiştirme kısmına*, $\pi_{it,2}$, ayrılabilir. Eğer kaldırma kuvveti etkili ise, bu iki terime ilave olarak bir de *kaldırma kuvveti kısmı*, $\pi_{it,3}$, gelir. İlk kısım için en sıklıkla kullanılan yaklaşım Monin 'in önerdiği modeldir [1]. Bu aşağıdaki şekildedir:

$$\pi_{it,1} = -C_{1t} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_i t}. \quad (61)$$

Burada C_{1t} model sabitidir. Bu eşitlik, Eşitlik 47 ile verilen Rotta [10] 'nın basınç-şekil değiştirme terimi için önerdiği *izotropiye dönüş* yaklaşımının karşılığıdır. Buna göre diğer kısımlar Eşitlikler 48 ve 51' e benzerlikten, Launder [144] tarafından aşağıdaki gibi önerilmiştir:

$$\pi_{it,2} = C_{2t} \overline{u_m t} \frac{\partial U_i}{\partial x_m}, \quad (62)$$

$$\pi_{it,3} = C_{3t} g_i \beta \overline{t^2}. \quad (63)$$

Reynolds gerilmesi eşitliğinde olduğu gibi, akışın bir duvarın üzerinde meydana geldiği durumlarda, basınç-sıcaklık gradyanı korelasyonu üzerinde de bir duvar etkisi ortaya çıkacaktır. Bu etki de basınç-şekil değiştirme terimini için duvar düzeltme ifadesine benzer şekilde Gibson ve Launder [16] tarafından aşağıdaki şekilde olduğu gibi önerilmiştir:

$$\pi_{it}^w = -C'_{1t} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_n t} \delta_{in} f\left(\frac{L}{X_n}\right). \quad (64)$$

Burada C'_{1t} model sabitidir. f değeri de Eşitlik 55 'de olduğu gibi hesaplanabilir. Bu duvar düzeltme ifadesinin sunulmasının bir nedeni, bu ifade olmaz ise; deneysel çalışmalardan elde edilen sonuçlara göre; duvara yakın bölgedeki türbülans Prandtl sayısı ($Pr_t \approx 0.9$) ile serbest akımdaki türbülans Prandtl sayısının ($Pr_t \approx 0.5 - 0.7$) arasındaki farkın belirlenememesidir [1].

Eşitlik 60' da yer alan yayılım terimi ise; Launder 'in önerdiği gradyan yaklaşımıyla tensör formda aşağıdaki gibidir [1];

$$Yayılım \{ \overline{u_j t} \} = \frac{\partial}{\partial x_m} \left[C_{st} \frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{u_k u_m} \frac{\partial \overline{u_j t}}{\partial x_k} + \overline{u_k u_j} \frac{\partial \overline{u_m t}}{\partial x_k} \right) \right]. \quad (65)$$

Burada C_{st} model katsayısıdır ve Tablo 3' de değeri verilmektedir.

Kaldırma kuvvetinin etkili olduğu akışlarda kaldırma kuvveti etkisi, Eşitlik 60 'da *kaldırma kuvveti üretimi* terimi ile eşitliğe girer. Bu terimde sıcaklık çalkantısı, $\overline{t^2}$, bilinmeyi, ayrı bir transport eşitlikten bulunabilir. Kaldırma kuvvetinin dolaylı olarak eşitliklere girdiği bir başka yer de; Eşitlik 63 ile ifade edilen *basınç-sıcaklık gradyanı teriminin üçüncü kısmıdır*. Bu eşitlikte de bilinmeyen olarak $\overline{t^2}$ terimi ortaya çıkmaktadır. Bu terimi belirlemek amacıyla yazılacak transport eşitliği; Reynolds gerilme eşitliğinin elde edilmesinde olduğu gibi Eşitlik 3 ve Eşitlik 8 'den türetilir. Viskoz yayılımın ihmal edildiği durum için bu transport eşitliği aşağıdaki gibi olur:

$$\underbrace{\frac{\partial \overline{t^2}}{\partial t}}_{\text{değişim oranı}} + U_j \underbrace{\frac{\partial \overline{t^2}}{\partial x_j}}_{\text{taşınım ile transport}} = - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_j t^2})}_{\text{yayımla transport}} - \underbrace{2u_j t \frac{\partial T}{\partial x_j}}_{P_t = \text{ortalama sıcaklık alanıyla üretim}} - \underbrace{2\alpha \frac{\partial t}{\partial x_j} \frac{\partial t}{\partial x_j}}_{\varepsilon_t = \text{yutulma}}. \quad (66)$$

Bu eşitlik, çalkantının sıcaklık skalasını belirler ve hız skalasını belirleyen k eşitliğinin (Eşitlik 22) karşılığıdır ve her iki eşitlik çok benzer formlara sahiptirler. Bununla beraber, $\overline{t^2}$ eşitliği basınç çalkantıları ve kaldırma kuvveti terimlerini içermez.

Eşitlik 66 da modelleme yaklaşımlarına ihtiyaç duyulan terimler bulundurulur. Bunlardan yayılım terimi, gradyan tip gösterimle aşağıdaki şekilde modellenir:

$$-\overline{u_j t^2} = C_t \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_j u_m} \frac{\partial \overline{t^2}}{\partial x_m}. \quad (67)$$

Burada C_t model sabitidir. Sıcaklık çalkantısının yutulması, ε_t , sıcaklık çalkantılarını tanımlayan zaman ölçeğinin sabit bir oranı R olmak üzere, türbülans enerjinin yutulması, ε , ile genelde ilişkilidir. Bu ilişki aşağıdaki gibidir:

$$\varepsilon_t = \frac{\overline{t^2}}{k R} \varepsilon. \quad (68)$$

Burada R , deneylerden elde edilen sonuçlara göre ve dikkate alınan akışa bağlı olarak 0.5 – 1 aralığında değiştiği tesbit edilmiştir [1].

Eşitlikler 45-68 'de kullanılan model sabitleri , homojen sınır tabaka akışları için Gibson ve Launder [16] tarafından yapılan çalışmadan seçilmiştir. Bu çalışmada önerilmeyen C_s ve C_2 değerleri Launder vd. [28] 'nin çalışmasından alınmıştır. Reynolds gerilme / akı modeli için bu çalışmada kullanılan model katsayıları Tablo 3 'de verilmiştir.

Tablo 3. Reynolds gerilme / akı modelinde kullanılan model sabitleri [16, 28].

C_1	C_2	C'_1	C'_2	C_s	C_ε	$C_{1\varepsilon}$	$C_{2\varepsilon}$	C_t	C_{1t}	C_{2t}	C_{3t}	C_{st}	C'_{1t}	C_3	R
1.8	0.6	0.5	0.3	0.22	0.18	1.45	1.9	0.13	3.0	0.33	0.33	0.11	0.5	0.5	0.8

1.6.2.2. Launder-Reece-Rodi Modeli (LRR)

İkinci derece modellerin en çok tanınanlarından biri; Launder vd. [28] tarafından 1975 yılında önerilen modeldir. Burada da, Reynolds gerilmeleri için bir transport eşitliği yazılır. Bu modelde esas olarak yukarıda bahsi geçen, *basınç-şekil değiştirme teriminin*, *hızlı basınç-şekil değiştirme kısmının* modellenmesidir. Diğer terimler, yayılım terimi dışında Reynolds gerilme modelindekilerle aynıdır (Eşitlik 45). Yayılım terimi olarak bu modellemede; Launder vd. [28] tarafından önerilen daha genel bir yaklaşım kullanılmıştır. Bu modellemede de, lineer olmayan $k-\varepsilon$ modelinde olduğu gibi; özellikle duvar akışlarında, duvara yakın bölgedeki ani gerilme değişimlerinin daha iyi modellenmesi amaçlanmıştır. Ayrıca bu tür modeller duvar etkilerini de içerlerinde bulundurlar. Böylece ek bir duvar azaltma ifadesine gerek kalmaz. Buna göre LRR modelinde *basınç-şekil değiştirme terimi*, π_{ij} , $\tau_{ij} = -\overline{u_i u_j}$ olmak üzere aşağıdaki gibi olur:

$$\pi_{ij} = C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\tau_{ij} + \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) - \hat{\alpha} \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right) - \hat{\beta} \left(D_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right) - \hat{\gamma} k \left(S_{ij} - \frac{1}{3} S_{kk} \delta_{ij} \right) + \left[0.125 \frac{\varepsilon}{k} \left(\tau_{ij} + \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) - 0.015 (P_{ij} - D_{ij}) \frac{k^{3/2}}{\varepsilon X_n} \right]. \quad (69)$$

Burada D_{ij} ise aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$D_{ij} = \tau_{im} \frac{\partial U_m}{\partial x_j} + \tau_{jm} \frac{\partial U_m}{\partial x_i}. \quad (70)$$

LRR modelinde Eşitlik 45 'den farklı olarak, kullanılan yayılım terimi ise aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$Yayılım \left\{ \overline{u_i u_j} \right\} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[C_s \frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{u_i u_m} \frac{\partial \overline{u_j u_k}}{\partial x_m} + \overline{u_j u_m} \frac{\partial \overline{u_i u_k}}{\partial x_m} + \overline{u_k u_m} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_m} \right) \right]. \quad (71)$$

Eşitlikler 69 ve 71 'de model katsayıları Tablo 4 'de verildiği gibidir. Diğer taraftan yutulma oranının, ε , belirlenmesi için yukarıdaki denklemlere ilave olarak aşağıdaki denklemin de çözüme ilave edilmesi gerekmektedir. Yine burada da Reynolds gerilme modelinde (RSM) olduğu gibi yutulma, ε , eşitliğinin yayılım terimi değiştirilmiş formda alınmaktadır.

$$U_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(C_s \frac{k}{\varepsilon} \tau_{km} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_m} \right) + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k}. \quad (72)$$

Tablo 4. LRR modelinde kullanılan model sabitleri [2].

C_1	C_2	C_s	C_ε	$C_{1\varepsilon}$	$C_{2\varepsilon}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$
1.8	0.6	0.11	0.18	1.44	1.92	$\frac{(8+C_2)}{11}$	$\frac{(8C_2-2)}{11}$	$\frac{(60C_2-4)}{55}$

1.6.2.3. Cebrik Gerilme / Türbülans Isı Akısı Modeli (ASM)

En genel halde türbülanslı akış için altı bilinmeyen Reynolds gerilmesi, $-\overline{u_i u_j}$, bileşeni ve üç türbülans ısı akısı, $-\overline{u_j t}$, bileşeni vardır. Tüm bu bileşenler için transport eşitlikler kullanan bir türbülans modeli, ısı çalkantısı, $\overline{t^2}$, ve yutulma, ε , eşitlikleri de dikkate alındığında 11 kısmi diferansiyelli eşitliğin çözümünü gerektirecektir. Bu durum türbülans modelleri için hem istenmeyen hem de ekonomik olmayan bir durumdur. Bu olumsuzlukları gidermek için, temel özelliklerin büyük kısmını bünyesinde taşıyan fakat diferansiyel formdaki gerilme eşitliklerinin cebrik formlara dönüştüğü modeller geliştirilmiştir. Bunlara *cebrik gerilme modelleri* (ASM) adı verilmektedir. Bu modellerin en büyük özelliği bünyesinde kaldırma kuvveti terimini de bulundurmasıdır.

Bir Reynolds gerilme transport eşitliğinde bağımlı değişkenlerin gradyanları, sadece *değişim oranı*, *taşıyım* ve *yayılm* terimlerinde ortaya çıkar. Bu gradyanlar model yaklaşımlarıyla yok edildiğinde, bu diferansiyel transport eşitlikler, cebrik denklemlere dönüşebilecektir. Buna göre en basit model yaklaşımı; *değişim oranı* ve *transport terimlerinin* ihmal edilmesidir [1]. Buna karşılık Rodi [15] önermiş olduğu daha genel bir yaklaşımda; Reynolds gerilmelerinin, $-\overline{u_i u_j}$, transportunun, kinetik enerjiye, k , orantılı olduğunu kabul etmiştir ve $-\overline{u_i u_j} / k$ olarak ortaya çıkan orantıya orantılılık katsayısı demiştir. Sabit olmayan bu katsayıya göre; Reynolds gerilme transport eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{D \overline{u_i u_j}}{D t^*} - Yayılm \left\{ \overline{u_i u_j} \right\} = \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \left(\frac{D k}{D t^*} - Yayılm \{k\} \right) = \frac{\overline{u_i u_j}}{k} (P_k + G - \varepsilon). \quad (73)$$

Burada eşitliğin ikinci terimi kinetik enerji eşitliğinden (Eşitlik 22) gelmektedir. Eşitlik 73, $\overline{u_i u_j} / k$ ifadesinin zamandaki ve uzaydaki değişiminin, $-\overline{u_i u_j}$ ' nin kendisiyle karşılaştırıldığında küçük olması durumunda iyi bir yaklaşımdır. Eşitlik 73, Eşitlik 45 ile belirtilen Reynolds gerilmesi eşitliğiyle, Eşitlikler 47, 48 ve 50 ile ifade edilen *basınç-şekil değiştirme modelleriyle* ve Eşitlik 46 'de verilen yerel izotropi durumunda yutulma ifadesiyle birlikte birleştirilirse aşağıdaki *cebrik gerilme modeli* ortaya çıkar:

$$\overline{u_i u_j} = k \left[\frac{2}{3} \delta_{ij} + \frac{(1-\gamma) \left(\frac{P_{ij}}{\varepsilon} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{P_k}{\varepsilon} \right) + (1-C_3) \left(\frac{G_{ij}}{\varepsilon} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{G}{\varepsilon} \right)}{C_1 + \frac{P_k + G}{\varepsilon} - 1} \right]. \quad (74)$$

Burada C_1 , C_3 ve γ model sabitleridir. P_{ij} , P_k , G_{ij} ve G ifadeleri, sırasıyla, yukarıda Eşitlikler 31, 49, 51 ve 52 'de verildiği gibi; *gerilme ve kaldırma kuvveti üretimidir*. Eşitlik 74, her bir kayma ve normal gerilmenin hesaplanabilmesini sağlamasına rağmen Eşitlik 15 'de verildiği gibi kinetik enerjinin, k , belirlenmesine imkan vermemektedir [1]. Bu nedenle Eşitlik 74 'de ortaya çıkan kinetik enerjinin değerini, Eşitlik 22 'de verildiği gibi bir k eşitliğiyle belirlemek gerekmektedir.

Sıcaklık alanı çözümünde türbülans ısı akısı için cebrik bir model Rodi [15] 'nin cebrik gerilme modeline benzer tarzda, Gibson ve Launder [75] tarafından önerilmiştir. Buna göre türbülans ısı akısı, $-\overline{u_j t}$, için transport eşitlik aşağıdaki gibidir:

$$\frac{D \overline{u_j t}}{Dt^*} - \text{Yayılim} \{ \overline{u_j t} \} = \frac{\overline{u_j t}}{2k} (P_k + G - \varepsilon). \quad (75)$$

Eşitlik 75 ile birlikte, yukarıda verilen Eşitlikler 58, 61, 62, 63, türbülans ısı akısı eşitliği olan Eşitlik 60 'da yerlerine yazılarak aşağıdaki *cebric türbülans ısı akısı* ifadesi elde edilir:

$$\overline{u_j t} = \frac{k \left[\overline{u_i u_m} \frac{\partial T}{\partial x_m} + (1-C_{2t}) \left(\overline{u_m t} \frac{\partial U_i}{\partial x_m} + \beta g_i \overline{t^2} \right) \right]}{C_{1t} + \frac{1}{2} \left[\frac{P_k + G}{\varepsilon} - 1 \right]}. \quad (76)$$

Burada C_{1t} ve C_{2t} model sabitleridir. Eşitlik 76 'da ortaya çıkan sıcaklık çalkantısı, $\overline{t^2}$, için, Eşitlik 66 'da değişim oranı ve transport terimleri ihmal edilerek aşağıdaki ifade elde edilmiştir:

$$\overline{t^2} = -2R \frac{k \overline{u_m t}}{\varepsilon} \frac{\partial T}{\partial x_m}. \quad (77)$$

Bu model, k ve ε eşitlikleriyle birlikte, farklı gerilme ve akı bileşenleri üzerinde etkili olan farklı üretim ve yutulma (parçalanma) süreçlerini hesaplayan bir yaklaşımdır. Bu nedenle, bu izotropik bir girdap viskozitesi ifadesi kullanan standart $k - \varepsilon$ modelinden önemli ölçüde daha genel bir modellemedir. Özellikle, bu modelleme, kaldırma kuvvetinin yöne bağlı etkilerini de göz önünde bulundurur. Aynı zamanda bu model içine, duvar etkileri de *basınç-şekil değiştirme* ve *basınç-ısı gradyanı* ifadeleri yoluyla ilave edilebilir [1]. Bu haliyle cebrik gerilme/akı modeli (ASM), izotropik girdap viskozitesi kullanan birinci derece modelleriyle doğrudan türbülans gerilme ve/veya akıları hesaplayan ikinci derece modelleri arasında faydalı bir modelleme aracıdır. ASM, birinci derece modellere göre daha genel sonuçlar verirken, ikinci derece modellere göre uygulanması daha basit ve ekonomik bir modellemedir.

Yukarıdaki Eşitlikler 74, 76 ve 77' de açığa çıkan model katsayıları Tablo 3' de verilmiştir. Tablo 3' de verilmeyen γ ise; 0.6 alınmıştır.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Türbülans Modellerinin Türbülanslı Sınır Tabaka Akışlarına (TSTA) Uygulanması

Kendi hızlarının normali doğrultusunda bir hız değişimine sahip olmayan veya bu hız değişiminin ihmal edilebilecek seviyede az olduğu akışlar, sınır tabaka akışları (STA) olarak tanımlandığı birinci bölümde belirtilmişti. Bu bölümde türbülanslı sınır tabaka akışlarının yine birinci bölümde ayrıntılarının verildiği; *birinci ve ikinci derece türbülans modelleriyle* çözümleri elde edilmiştir. Bu çözümler, hem momentum sınır tabakayı hem de ısı sınır tabakayı içermektedir.

Türbülanslı sınır tabaka akışlarının (TSTA) çözümü için ($i=1, j=2$) Eşitlik 6 ve 8 ile verilen eşitliklerde bulunan Reynolds gerilmesi, $-\overline{uv}$, ve türbülans ısı akısı, $-\overline{vt}$, bilinmeyenleri, seçilen yedi farklı türbülans modelleri kullanılarak çözümlenmiştir.

2.2. Birinci Derece Modellerin TSTA'ya Uygulanması

2.2.1. Standart $k - \varepsilon$ Modelinin TSTA'ya Uygulanması

Sınır tabaka akışları için süreklilik, momentum ve enerji eşitlikleri birinci bölümde sırasıyla Eşitlikler 9, 10 ve 11 şeklinde verilmişti. Bu eşitliklerde bilinmeyenler olarak ortaya çıkan Reynolds gerilmesi, $-\overline{uv}$, standart $k - \varepsilon$ modelinde, Eşitlik 12' de verilen Boussinesq'in girdap viskozitesi ifadesinden yararlanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$-\overline{uv} = \nu_t \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (78)$$

Birinci bölümde de bahsedildiği gibi; girdap viskozitesi ifadesini kullanan türbülans modellerinde bu aşamada bilinmeyen olarak girdap viskozitesi, $\nu_t (\mu_t / \rho)$, ortaya çıkmaktadır. Eşitlik 78 dikkate alınarak TSTA için $x -$ momentum eşitliği aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \nu_t) \frac{\partial U}{\partial y} \right] - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx}. \quad (79)$$

Standart $k - \varepsilon$ modelinde girdap viskozitesi, ν_t , Eşitlik 33 ile hesaplanır. Eşitlik 33' de türbülans kinetik enerji, k , ve bunun yutulması, ε , TSTA için Eşitlik 22 ve Eşitlik 24' den yararlanılarak aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] + P_k - \varepsilon, \quad (80)$$

$$U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k}. \quad (81)$$

Burada C_μ , σ_k , σ_ε , $C_{1\varepsilon}$ ve $C_{2\varepsilon}$ model katsayılarıdır ve Tablo 1'de bu katsayıların sayısal değerleri verilmiştir. P_k kayma gerilmesinden kaynaklanan üretim terimidir. TSTA için Eşitlik 31' den yararlanılarak ($i=1, j=2$) aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$P_k = -\overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (82)$$

TSTA' da sıcaklık alanı çözümü için Eşitlik 11 ile verilen enerji eşitliğinin çözümü gerekmektedir. Bu eşitlikte bilinmeyen olarak ortaya çıkan *türbülans ısı akısı*, $-\overline{vt}$, Eşitlik 19' dan yararlanılarak aşağıdaki şekilde bulunabilir:

$$-\overline{vt} = \alpha_t \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (83)$$

Bu eşitlikte bulunan türbülans ısı yayılımı, α_t , değerinin belirlenmesi için Eşitlik 20' den yararlanılır. Eşitlik 83 dikkate alınarak, Eşitlik 11 ile verilen enerji eşitliği TSTA için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\alpha + \alpha_t) \frac{\partial T}{\partial y} \right]. \quad (84)$$

Buna göre bu çalışmada standart $k - \varepsilon$ modeliyle türbülanslı sınır tabaka akışlarında hız ve sıcaklık alanları, momentum sınır tabaka için Eşitlikler 9, 78, 79, 80, 81, 82 ve 33' ün birlikte çözülmesiyle, ısı sınır tabaka için ise; yapılan hız alanı çözümlerine ek olarak Eşitlikler 20, 83 ve 84 'ün birlikte çözülmesiyle belirlenmiştir.

2.2.2. Düşük Reynolds Sayılı (Yakın-Duvar) $k - \varepsilon$ Modellerinin TSTA' ya Uygulanması

Düşük Reynolds sayılı (yakın-duvar) $k - \varepsilon$ modellerin sınır tabaka akışlarına uygulanması, standart $k - \varepsilon$ modelinde olduğu gibi Boussinesq' in girdap viskozitesi ifadesini (Eşitlik 78) kullanılarak olur. Ancak girdap viskozitesinin, ν_t , değeri birinci bölümde verilen değiştirilmiş Prandtl-Kolmogorov bağıntısı (Eşitlik 35) ile belirlenir. Bu bağıntıdaki türbülans kinetik enerjinin, k , ve bunun yutulmasının, ε , değeri ise; yine birinci bölümde verilen Eşitlikler 36 ve 37 ile belirlenir.

Bu çalışmada iki farklı düşük Reynolds sayılı $k - \varepsilon$ modeli TSTA' ya uygulanmıştır. Bunlar Chien [34]' in ve Lam-Bremhorst [33]' un önerdikleri *düşük Reynolds sayılı (yakın-duvar) $k - \varepsilon$ modelleridir.*

Eşitlik 36 ve Eşitlik 37' de bulunan *azaltma fonksiyonları* ve diğer ek terimler Chien için Eşitlikler 38 ve 39' da, Lam-Bremhorst için Eşitlikler 40 ve 41' de verilmiştir. Chien' in modelinde ortaya çıkan sabit katsayılar Tablo 2' de verilmiştir. Lam-Bremhorst' un modelinde ortaya çıkan sabit katsayılar ise Standart $k - \varepsilon$ modelinde kullanılanlar ile aynıdır. Ayrıca, hem Chien' in hem de Lam-Bremhorst' un düşük Reynolds sayılı türbülans modelindeki azaltma fonksiyonlarında ve ek terimlerde ortaya çıkan diğer büyüklükleri belirleyen ifadeler de Eşitlik 42 ile verilmiştir.

2.2.3. Lineer Olmayan $k - \varepsilon$ Modelinin TSTA' ya Uygulanması

Lineer olmayan $k - \varepsilon$ modelinin, birinci bölümde belirtildiği gibi, standart $k - \varepsilon$ modelinden farkı, Eşitlik 12 ile verilen Boussinesq' in girdap viskozitesi ifadesine ek terimlerin gelmesidir. Bu ek terimler, Reynolds gerilmesi ifadesinin fiziksel olarak daha uygun tanımlanmasını getirmektedir. Ayrıca bu işlem genelde, seriler açılımıyla yapıldığından herhangi bir ek diferansiyel eşitlik de sunmazlar [2]. Bunun sonucu olarak Reynolds gerilmesiyle, $-\overline{u_i u_j}$, ortalama şekil değiştirme oranı, S_{ij} , arasındaki lineer ilişki

bozulmaktadır. Bu şekilde lineer olmayan bir girdap viskozitesi ifadesinden söz edilmektedir. Bu çalışmada 1987 yılında Speziale [7] tarafından önerilen *lineer olmayan* $k - \varepsilon$ modeli, türbülanslı sınır tabaka akışlarına (TSTA) uygulanmıştır. Buna göre, birinci bölümde verilen Eşitlik 43 dikkate alındığında sınır tabaka akışları için ($i = 1$ ve $j = 2$) $\delta_{ij} = 0$ ($i \neq j$ durumunda) değerini alacak ve bu eşitlik aşağıdaki gibi olur:

$$-\overline{uv} = 2 \nu_t S_{12} + 4 C_D C_\mu^2 \frac{k^3}{\varepsilon^2} (S_{11} S_{12} + S_{12} S_{22}) + 4 C_E C_\mu^2 \frac{k^3}{\varepsilon^2} \overset{\circ}{S}_{12}. \quad (85)$$

Sınır tabaka akışlarında S_{11} ve S_{22} sifıra yakın değerler olduklarından dolayı, her iki değer çarpanları S_{12} ile birlikte ihmal edilir. Buna göre Eşitlik 85 aşağıdaki forma indirgenir:

$$-\overline{uv} = 2 \nu_t S_{12} + 4 C_E C_\mu^2 \frac{k^3}{\varepsilon^2} \overset{\circ}{S}_{12}. \quad (86)$$

Burada $\overset{\circ}{S}_{12}$ birinci bölümde Eşitlik 44 ile verilen eşitlikten faydalanılarak TSTA için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\overset{\circ}{S}_{12} = U \frac{\partial S_{12}}{\partial x} + V \frac{\partial S_{12}}{\partial y}. \quad (87)$$

Burada S_{12} Eşitlik 13a' den yararlanılarak sınır tabaka akışları için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$S_{12} = \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (88)$$

Eşitlik 86' da sabit katsayılar, $C_E = 1.68$ ve $C_\mu = 0.09$ şeklinde sayısal değerler alır.

Lineer olmayan $k - \varepsilon$ modelinde sıcaklık alanı çözümü, standart $k - \varepsilon$ modelinde olduğu gibi Eşitlik 20' den yararlanılarak yapılmıştır.

2.3. İkinci Derece Modellerin TSTA' ya Uygulanması

Birinci derece modellerde kullanılan Boussinesq' in girdap viskozitesi ifadesi, özellikle karmaşık akışlarda fiziksel olarak yetersiz kalmakta veya yanlış sonuçlar vermektedir. Bu nedenle türbülanslı akışta ortaya çıkan her bir *Reynolds gerilmesi* ve *türbülans ısı akısı* için bir transport denklemi yazılmakta ve bu denklemlerden bilinmeyen Reynolds gerilmeleri doğrudan belirlenebilmektedir. Fakat bu transport denklemlerin türetilmesi sırasında yeni bilinmeyenlerin de ortaya çıkması beklenen bir durumdur. Sonuçta; momentum ve enerji eşitliğindeki bilinmeyenleri belirlemek için türetilen türbülans modellerinin kapalı bir eşitlik sistemini oluşturmadıkları görülmüştür. Reynolds gerilmeleri ve türbülans ısı akıları için yazılan her bir transport denkleminin, momentum ve enerji eşitlikleriyle birlikte tekrar bir kapalı eşitlik sistemini meydana getirebilmesi için bu denklemlerdeki bilinmeyenler için de yeni modellerin yazılması gerekmektedir. Buna göre sınır tabaka akışları için bu çalışmada ikinci derece modellerden, standart olarak kullanılan *Reynolds gerilme modeli* (RSM), Launder vd. [28] tarafından 1975 yılında önerilen literatürde *Launder-Reece-Rodi* (LRR) modeli olarak adlandırılan türbülans modeli ve Rodi [15] tarafından önerilen *cebrik gerilme modeli* (ASM) kullanılmıştır.

2.3.1. Reynolds Gerilme / Türbülans Isı Akısı Modelinin (RSM) TSTA' ya Uygulanması

Moleküler viskoziteden etkilenmeyen büyük ölçekli sıkıştırılmaz akışlar için birinci bölümde Eşitlik 45 ile tensör formda verilen Reynolds gerilme eşitliği en sade formda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} \text{Taşınım} \{ \overline{u_i u_j} \} &= \text{Yayılim} \{ \overline{u_i u_j} \} + \text{Üretim} \{ \overline{u_i u_j} \} \\ &+ \text{Basınç - Şekil değiştirme} \{ \overline{u_i u_j} \} - \text{Viskoz Yutulma} \{ \overline{u_i u_j} \} \end{aligned} \quad (89)$$

Birinci bölümde de belirtildiği gibi; Eşitlik 89' da *taşınım* ve *üretim* terimleri dışında kalan terimlerin, yeni bilinmeyen terimlerden dolayı yeniden modellenmesi ihtiyacı ortaya çıkmaktadır. Reynolds gerilmesi modeli için bu modeller *yayılim*, *basınç-şekil değiştirme* ve *viskoz yutulma* terimleri için sırasıyla Eşitlik 58, Eşitlik 57 ve Eşitlik 46 ile verilmektedir. Buna göre türbülanslı sınır tabaka akışlarında, momentum eşitliğinde,

bilinmeyen olarak ortaya çıkan Reynolds gerilmesi (kayma gerilmesi), $-\overline{uv}$, için eşitliğin her bir terimi aşağıdaki gibi belirlenebilir:

Kayma gerilmesi, $-\overline{uv}$;

$$\text{Taşınım } \{\overline{uv}\} \cong U \frac{\partial \overline{uv}}{\partial x} + V \frac{\partial \overline{uv}}{\partial y}, \quad (90)$$

$$\text{Yayılm } \{\overline{uv}\} \cong \frac{\partial}{\partial y} \left(C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{v^2} \frac{\partial \overline{uv}}{\partial y} \right), \quad (91)$$

$$\text{Üretim } \{\overline{uv}\} \cong -\overline{v^2} \frac{\partial U}{\partial y} \equiv P_{12}. \quad (92)$$

Basınç-şekil değiştirme ifadesi modellenmiş şekli ile Eşitlik 47 ve Eşitlik 48 ile verilen eşitliklerin toplamı şeklinde olacağı birinci bölümde belirtilmişti. Ayrıca kaldırma kuvveti ve duvar etlilerinin de dikkate alındığı durumda sırasıyla Eşitlik 50, Eşitlik 53 ve Eşitlik 54 ile verilen ifadelerin de basınç-şekil değiştirme ifadesinin modeline ilave edileceği belirtilmişti. Buna göre sınır tabaka akışlarında basınç-şekil değiştirme ifadesi için ilgili eşitlikler aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\pi_{12,1} = -C_1 \frac{\varepsilon}{k} \overline{uv}, \quad (93)$$

$$\pi_{12,2} = -C_2 P_{12}, \quad (94)$$

$$\pi'_{12,1} = C_1' \frac{\varepsilon}{k} \left(-\frac{3}{2} \overline{uv} \right) f \left(\frac{L}{X_n} \right), \quad (95)$$

$$\pi'_{12,2} = C_2' \left(-\frac{3}{2} \pi_{12,2} \right) f \left(\frac{L}{X_n} \right). \quad (96)$$

Kaldırma kuvvetinin ihmal edildiği durum için gerilme-şekil değiştirme ifadesi, Eşitlik 57 'de de belirtildiği gibi; Eşitlikler 93, 94, 95 ve 96' nın toplamı şeklinde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\text{Basınç - şekil değiştirme } \{\overline{uv}\};$$

$$\pi_{12} = -C_1 \frac{\varepsilon}{k} \overline{uv} - C_2 P_{12} + C_1' \frac{\varepsilon}{k} \left(-\frac{3}{2} \overline{uv}\right) f\left(\frac{L}{X_n}\right) + C_2' \left(-\frac{3}{2} \pi_{12,2}\right) f\left(\frac{L}{X_n}\right). \quad (97)$$

Burada C_1 , C_2 , C_1' ve C_2' model katsayılarıdır ve bunların değerleri Tablo 3' de verilmiştir. $f(L/X_n)$ ifadesi ise; birinci bölümde Eşitlik 55 ile verilmiştir.

Eşitlik 89 ile verilen Reynolds gerilme modelinin son kısmı *viskoz yutulma* ile ilgilidir. Sınır tabaka akışlarında $i \neq j$ ($i=1, j=2$) ve bundan dolayı $\delta_{ij} = 0$ değerini alacaktır. Buna göre birinci bölümde de belirtildiği üzere; viskoz yutulma terimi türbülans sınır tabaka akışlarında Eşitlik 46' dan da yararlanılarak kayma gerilmesi için sıfır bulunabilir.

$$\text{Viskoz Yutulma } \{\overline{uv}\} = 0. \quad (98)$$

Eşitlik 89 ile verilen Reynolds gerilme eşitliği, kayma gerilmesi, $-\overline{uv}$, için Eşitlikler 90-98 'de elde edilen ifadeler yardımıyla aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U \frac{\partial \overline{uv}}{\partial x} + V \frac{\partial \overline{uv}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{v^2} \frac{\partial \overline{uv}}{\partial y} \right) - \overline{v^2} \frac{\partial U}{\partial y} - C_1 \frac{\varepsilon}{k} \overline{uv} - C_2 P_{12} + C_1' \frac{\varepsilon}{k} \left(-\frac{3}{2} \overline{uv}\right) f\left(\frac{L}{X_n}\right) + C_2' \left(-\frac{3}{2} \pi_{12,2}\right) f\left(\frac{L}{X_n}\right). \quad (99)$$

Reynolds gerilmesi modeli (RSM) kullanılarak kayma gerilmesi, $-\overline{uv}$, için elde edilen Eşitlik 99' da dikkat edilirse normal gerilmelerden biri, $\overline{v^2}$, de ortaya çıkmaktadır. Bu durumda ortaya çıkan bu normal gerilme için de Eşitlik 89 ile verilen temel Reynolds gerilmesi transport eşitliğinden hareketle bir eşitlik elde edilmesi gerekmektedir. Daha sonra görülecektir ki; bu eşitlikte de bilinmeyen olarak diğer normal gerilmelerden biri

veya diğer iki bileşen de, $\overline{u^2}$ ve $\overline{w^2}$, ortaya çıkabilmektedir. Bunun yanında, Reynolds gerilmesi modelinde, Eşitlik 15 ile verilen türbülans kinetik enerjisinin değerinin belirlenmesi için normal gerilmelerin de değerlerinin belirlenmesi gerekir. Hatırlanacağı üzere girdap viskozitesi ifadesini kullanan birinci derece modellerde türbülans kinetik enerjisi, k , değeri, Navier-stokes eşitliğinden elde edilen bir eşitliğin çözümlenmesi ile elde ediliyordu. Buna göre Reynolds gerilmesi modeli ile yapılan çözümlere kayma gerilmesi, $-\overline{uv}$, eşitliğinin yanında normal gerilme, $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$ ve $\overline{w^2}$, eşitliklerinin de ilave edilip bunların birlikte çözümlenmesi gerekmektedir. Buna göre normal gerilmeler için Reynolds gerilme eşitlikleri aşağıdaki gibi elde edilebilir:

x-doğrultusundaki normal gerilme, $\overline{u^2}$;

$$\text{Taşınım} \left\{ \overline{u^2} \right\} \cong U \frac{\partial \overline{u^2}}{\partial x} + V \frac{\partial \overline{u^2}}{\partial y}, \quad (100)$$

$$\text{Yayılm} \left\{ \overline{u^2} \right\} \cong \frac{\partial}{\partial y} \left(C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{v^2} \frac{\partial \overline{u^2}}{\partial y} \right), \quad (101)$$

$$\text{Üretim} \left\{ \overline{u^2} \right\} \cong -2 \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} \equiv P_{11}. \quad (102)$$

Kaldırma kuvvetinin bu aşamada ihmal edilip duvar etkilerinin dikkate alındığı durumda basınç-şekil değiştirme terimi Eşitlik 57' den de yararlanılarak, x -doğrultusundaki normal gerilme, $\overline{u^2}$, için aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\pi_{11,1} = -C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u^2} - \frac{2}{3} k \right), \quad (103)$$

$$\pi_{11,2} = -C_2 \left(P_{11} - \frac{2}{3} P_k \right), \quad (104)$$

$$\pi'_{11,1} = C_1' \frac{\varepsilon}{k} \left(-2 \overline{u^2} \right) f \left(\frac{L}{X_n} \right), \quad (105)$$

$$\pi'_{11,2} = C'_2(-2 \pi_{11,2}) f\left(\frac{L}{X_n}\right). \quad (106)$$

Basınç - şekil değiştirme $\{\overline{u^2}\}$;

$$\begin{aligned} \pi_{11} = & -C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u^2} - \frac{2}{3} k \right) - C_2 \left(P_{11} - \frac{2}{3} P_k \right) + C'_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(-2 \overline{u^2} \right) f\left(\frac{L}{X_n}\right) \\ & + C'_2(-2 \pi_{11,2}) f\left(\frac{L}{X_n}\right). \end{aligned} \quad (107)$$

Viskoz yutulma terimi ise; $i = j$ için $\delta_{ij} = 1$ olacağı bilindiğine göre Eşitlik 46' dan yararlanılarak $\overline{u^2}$ için aşağıdaki gibi belirlenebilir:

$$\text{Viskoz Yutulma } \left\{ \overline{u^2} \right\} = \frac{2}{3} \varepsilon. \quad (108)$$

Buna göre $\overline{u^2}$ eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$\begin{aligned} U \frac{\partial \overline{u^2}}{\partial x} + V \frac{\partial \overline{u^2}}{\partial y} = & \frac{\partial}{\partial y} \left(C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{v^2} \frac{\partial \overline{u^2}}{\partial y} \right) - 2 \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} - C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u^2} - \frac{2}{3} k \right) \\ & - C_2 \left(P_{11} - \frac{2}{3} P_k \right) + C'_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(-2 \overline{u^2} \right) f\left(\frac{L}{X_n}\right) \\ & + C'_2(-2 \pi_{11,2}) f\left(\frac{L}{X_n}\right) - \frac{2}{3} \varepsilon. \end{aligned} \quad (109)$$

y-doğrultusundaki normal gerilme, $\overline{v^2}$;

$$\text{Taşınım } \left\{ \overline{v^2} \right\} \cong U \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial x} + V \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial y}, \quad (110)$$

$$\text{Yayılm } \left\{ \overline{v^2} \right\} \cong \frac{\partial}{\partial y} \left(C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{v^2} \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial y} \right), \quad (111)$$

$$\text{Üretim } \left\{ \overline{v^2} \right\} \cong 0 \equiv P_{22}. \quad (112)$$

Kaldırma kuvvetinin ihmal edilip duvar etkilerinin dikkate alındığı durumda basınç-şekil değiştirme terimi, Eşitlik 57' den de yararlanılarak y -doğrultusundaki normal gerilme, $\overline{v^2}$, için aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\pi_{22,1} = -C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{v^2} - \frac{2}{3} k \right), \quad (113)$$

$$\pi_{22,2} = C_2 \frac{2}{3} P_k, \quad (114)$$

$$\pi'_{22,1} = C_1' \frac{\varepsilon}{k} \left(-2 \overline{v^2} \right) f \left(\frac{L}{X_n} \right), \quad (115)$$

$$\pi'_{22,2} = C_2' (-2 \pi_{22,2}) f \left(\frac{L}{X_n} \right). \quad (116)$$

Basınç - şekil değiştirme $\left\{ \overline{v^2} \right\}$;

$$\begin{aligned} \pi_{22} = & -C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{v^2} - \frac{2}{3} k \right) + C_2 \frac{2}{3} P_k + C_1' \frac{\varepsilon}{k} \left(-2 \overline{v^2} \right) f \left(\frac{L}{X_n} \right) \\ & + C_2' (-2 \pi_{22,2}) f \left(\frac{L}{X_n} \right). \end{aligned} \quad (117)$$

Viskoz yutulma terimi ise; Eşitlik 108' de olduğu gibi aşağıdaki şekilde belirlenebilir:

$$\text{Viskoz Yutulma } \left\{ \overline{v^2} \right\} = \frac{2}{3} \varepsilon. \quad (118)$$

Buna göre $\overline{v^2}$ eşitliği, Eşitlik 89' a göre aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial x} + V \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{v^2} \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial y} \right) - C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{v^2} - \frac{2}{3} k \right) + C_2 \frac{2}{3} P_k$$

$$+ C_1' \frac{\varepsilon}{k} (-2 \overline{v^2}) f\left(\frac{L}{X_n}\right) + C_2' (-2 \pi_{22,2}) f\left(\frac{L}{X_n}\right) - \frac{2}{3} \varepsilon. \quad (119)$$

z-doğrultusundaki normal gerilme, $\overline{w^2}$;

$$\text{Taşınım} \left\{ \overline{w^2} \right\} \cong U \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial x} + V \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial y}, \quad (120)$$

$$\text{Yayılm} \left\{ \overline{w^2} \right\} \cong \frac{\partial}{\partial y} \left(C_3 \frac{k}{\varepsilon} \overline{v^2} \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial y} \right), \quad (121)$$

$$\text{Üretim} \left\{ \overline{w^2} \right\} \cong 0 \equiv P_{33}. \quad (122)$$

Kaldırma kuvvetinin ihmal edilip duvar etkilerinin dikkate alındığı durumda basınç-şekil değiştirme terimi, Eşitlik 57' den de yararlanılarak z-doğrultusundaki normal gerilme, $\overline{w^2}$, için aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\pi_{33,1} = -C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{w^2} - \frac{2}{3} k \right), \quad (123)$$

$$\pi_{33,2} = C_2 \frac{2}{3} P_k, \quad (124)$$

$$\pi'_{33,1} = C_1' \frac{\varepsilon}{k} (-2 \overline{w^2}) f\left(\frac{L}{X_n}\right), \quad (125)$$

$$\pi'_{33,2} = C_2' (-2 \pi_{33,2}) f\left(\frac{L}{X_n}\right). \quad (126)$$

Basınç - şekil değiştirme $\left\{ \overline{w^2} \right\}$;

$$\pi_{33} = -C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{w^2} - \frac{2}{3} k \right) + C_2 \frac{2}{3} P_k + C_1' \frac{\varepsilon}{k} (-2 \overline{w^2}) f\left(\frac{L}{X_n}\right)$$

$$+ C_2'(-2 \pi_{33,2}) f\left(\frac{L}{X_n}\right). \quad (127)$$

Viskoz yutulma terimi ise; yine Eşitlik 108' de olduğu gibi aşağıdaki şekilde belirlenebilir:

$$\text{Viskoz Yutulma} \left\{ \overline{w^2} \right\} = \frac{2}{3} \varepsilon. \quad (128)$$

Buna göre $\overline{w^2}$ eşitliği, Eşitlik 89' a göre aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial x} + V \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{v^2} \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial y} \right) - C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{w^2} - \frac{2}{3} k \right) + C_2 \frac{2}{3} P_k \\ + C_1' \frac{\varepsilon}{k} \left(-2 \overline{w^2} \right) f\left(\frac{L}{X_n}\right) + C_2'(-2 \pi_{33,2}) f\left(\frac{L}{X_n}\right) - \frac{2}{3} \varepsilon. \quad (129)$$

Eşitlikler 109, 119 ve 129' da yer alan C_s , C_1 , C_2 , C_1' ve C_2' daha önce de belirtildiği gibi model katsayılarıdır ve Tablo 3' de bu katsayıların sayısal değerleri mevcuttur.

Yukarıda da belirtildiği gibi; Reynolds gerilme eşitliğinde bulunan kinetik enerji, k , Eşitlik 15' de verildiği gibi normal gerilmelerden, $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$, $\overline{w^2}$, belirlenmiştir. Yine Reynolds gerilmesi denklemlerinde geçen kinetik enerjinin yutulması, ε , birinci bölümde Eşitlik 59 ile verilen ve Eşitlik 24' den farklı yayılım terimine sahip bir transport eşitlikle belirlenmiştir. Bu yayılım teriminin daha genel bir formda olması, Reynolds gerilmesi modellerinde kullanılabilmesini mümkün kılmaktadır. Buna göre, TSTA için Eşitlik 59' dan yararlanılarak yutulma eşitliği aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(C_{s,\varepsilon} \frac{k}{\varepsilon} \overline{v^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) - C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k}. \quad (130)$$

Burada $C_{s,\varepsilon}$, $C_{1\varepsilon}$ ve $C_{2\varepsilon}$ model katsayılarıdır ve Tablo 3' de verilmiştir.

Türbülanslı sınır tabaka akışlarında sıcaklık alanı çözümlerinde, Eşitlik 11' de bilinmeyen olarak ortaya çıkan türbülans ısı akısı, $-\overline{vt}$, değerinin, Reynolds gerilme modelinin kullanıldığı çözümlerde, ayrı bir eşitliğin yazılmasıyla elde edildiği birinci

bölümde belirtilmişti. Bu amaçla yazılan transport eşitlik, Eşitlik 60 ile verilmişti. Bu transport eşitlik, Eşitlik 89' a benzer şekilde kaldırma kuvveti ihmal edildiği durum için yazılacak olursa aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned} \text{Taşınım } \left\{ \overline{u}, t \right\} = & \text{Yayılim } \left\{ \overline{u}, t \right\} + \text{Ortalama Alan Üretimi } \left\{ \overline{u}, t \right\} \\ & + \text{Basınç - Sıcaklık Gradyanı Korelasyonu } \left\{ \overline{u}, t \right\} . \quad (131) \\ & - \text{Viskoz Yutulma } \left\{ \overline{u}, t \right\} \end{aligned}$$

Sınır tabaka akışlarında y - doğrultusundaki türbülans ısı akısı, $-\overline{vt}$, için Eşitlik 131 yazıldığında x -doğrultusundaki türbülans ısı akısı, $-\overline{ut}$, da bilinmeyen olarak ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle $-\overline{ut}$ için de Eşitlik 131' in yazılması gerekmektedir. Buna göre;

x - doğrultusundaki türbülans ısı akısı, $-\overline{ut}$;

$$\text{Taşınım } \left\{ \overline{ut} \right\} \cong U \frac{\partial \overline{ut}}{\partial x} + V \frac{\partial \overline{ut}}{\partial y}, \quad (132)$$

$$\text{Yayılim } \left\{ \overline{ut} \right\} \cong \frac{\partial}{\partial y} \left(C_{st} \frac{k}{\varepsilon} \overline{v}^2 \frac{\partial \overline{ut}}{\partial y} \right), \quad (133)$$

$$\text{Ortalama Alan Üretimi } \left\{ \overline{ut} \right\} \cong -\overline{uv} \frac{\partial T}{\partial y} - \overline{vt} \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (134)$$

$$\text{Viskoz Yutulma } \left\{ \overline{ut} \right\} \cong 0 \text{ (yerel izotropiden dolayı),} \quad (135)$$

Basınç - Sıcaklık Gradyanı Korelasyonu } \left\{ \overline{ut} \right\};

$$\pi_{1t,1} = -C_u \frac{\varepsilon}{k} \overline{ut}, \quad (136)$$

$$\pi_{1t,2} = C_{2t} \overline{vt} \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (137)$$

$$\pi'_{1t,1} = 0. \quad (138)$$

Kaldırma kuvveti etkisinin ihmal edildiği durumda *basınç-sıcaklık gradyanı korelasyonu*, Eşitlikler 136, 137 ve 138' in toplamı şeklinde olacaktır:

$$\pi_{1t} = -C_{1t} \frac{\varepsilon}{k} \overline{ut} + C_{2t} \overline{vt} \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (139)$$

Buna göre $-\overline{ut}$ eşitliği, Eşitlik 131' den yararlanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U \frac{\partial \overline{ut}}{\partial x} + V \frac{\partial \overline{ut}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(C_{st} \frac{k}{\varepsilon} \overline{v^2} \frac{\partial \overline{ut}}{\partial y} \right) - \overline{uv} \frac{\partial T}{\partial y} - \overline{vt} \frac{\partial U}{\partial y} - C_{1t} \frac{\varepsilon}{k} \overline{ut} + C_{2t} \overline{vt} \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (140)$$

y- doğrultusundaki türbülans ısı akısı, $-\overline{vt}$;

$$\text{Taşıma} \left\{ \overline{vt} \right\} \cong U \frac{\partial \overline{vt}}{\partial x} + V \frac{\partial \overline{vt}}{\partial y}, \quad (141)$$

$$\text{Yayıma} \left\{ \overline{vt} \right\} \cong \frac{\partial}{\partial y} \left(C_{st} \frac{k}{\varepsilon} \overline{v^2} \frac{\partial \overline{vt}}{\partial y} \right), \quad (142)$$

$$\text{Ortalama Alan Üretimi} \left\{ \overline{vt} \right\} \cong \overline{v^2} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (143)$$

$$\text{Viskoz Yutulma} \left\{ \overline{ut} \right\} \cong 0 \text{ (yerel izotropiden dolayı)}, \quad (144)$$

Basınç - Sıcaklık Gradyanı Korelasyonu $\left\{ \overline{vt} \right\}$;

$$\pi_{2t,1} = -C_{1t} \frac{\varepsilon}{k} \overline{vt}, \quad (145)$$

$$\pi_{2t,2} = 0, \quad (146)$$

$$\pi'_{2t,1} = -C_{1t} \frac{\varepsilon \bar{v}t}{k} - C_{1t} \frac{\varepsilon \bar{v}t}{k} f\left(\frac{L}{X_n}\right). \quad (147)$$

Kaldırma kuvveti etkisinin ihmal edildiği durumda *basınç-sıcaklık gradyanı korelasyonu*, Eşitlikler 145, 146 ve 147' in toplamı şeklinde olacaktır:

$$\pi_{2t} = -C_{1t} \frac{\varepsilon \bar{v}t}{k} - C_{1t} \frac{\varepsilon \bar{v}t}{k} - C_{1t} \frac{\varepsilon \bar{v}t}{k} f\left(\frac{L}{X_n}\right). \quad (148)$$

Buna göre $-\bar{v}t$ eşitliği, Eşitlik 131' den yararlanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U \frac{\partial \bar{v}t}{\partial x} + V \frac{\partial \bar{v}t}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(C_{st} \frac{k \bar{v}^2}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{v}t}{\partial y} \right) + \bar{v}^2 \frac{\partial T}{\partial y} - C_{1t} \frac{\varepsilon \bar{v}t}{k} - C_{1t} \frac{\varepsilon \bar{v}t}{k} - C_{1t} \frac{\varepsilon \bar{v}t}{k} f\left(\frac{L}{X_n}\right). \quad (149)$$

Sıcaklık alanı çözümlerinde kaldırma kuvvetinin etkili olduğu durumlarda sıcaklık çalkantısının, \bar{t}^2 , da belirlenmesi ihtiyacı vardır. Bu amaçla birinci bölümde Eşitlik 66' da verilen sıcaklık çalkantısı eşitliğinin çözümü TSTA için gerçekleştirildi. Bu eşitliğe ek olarak sırasıyla, yayılım teriminin ve viskoz yutulma teriminin modellerini veren Eşitlik 67 ve Eşitlik 68' den de yararlanılarak aşağıdaki eşitlik elde edilmiştir:

$$U \frac{\partial \bar{t}^2}{\partial x} + V \frac{\partial \bar{t}^2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(C_t \frac{k \bar{v}^2}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{t}^2}{\partial y} \right) - 2\bar{v}t \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\varepsilon \bar{t}^2}{k R} \quad (150)$$

Burada R değeri Tablo 3' de de verildiği gibi 0.8 olarak alınarak çözümlere ilave edilmiştir.

2.3.2. Launder-Reece-Rodi (LRR) Modelinin TSTA' ya Uygulanması

Launder-Reece-Rodi (LRR) modeli, birinci bölümde de belirtildiği üzere literatürde en iyi bilinen ikinci derece modellerden biridir. Bu türbülans modelin klasik Reynolds gerilmesi (RSM) modelinden en önemli farkı, *basınç-şekil değiştirme* teriminin ikinci bölümünü oluşturan *hızlı basınç-şekil değiştirme* teriminin, *duvar etkilerini* de kapsayacak şekilde yeniden modellenmiş olmasıdır. Bundaki amaç; daha önce de belirtildiği gibi; duvar akışlarında duvara yakın bölgedeki ani gerilme değişimlerinin daha iyi bir şekilde

türbülans modele ilave edilmesidir. Bu türbülans modelin RSM modelinden bir diğer farkı ise; *yayılm teriminin* farklı bir şekilde tanımlanmış olmasıdır. Ancak bunun sınır tabaka akışları için elde edilen denklemlere bir etkisi olmamıştır [2]. Buna göre Eşitlik 89 ile verilen Reynolds gerilmeleri için temel eşitlik, LRR modeli için de temel eşitlik olarak alınabilir. Bu eşitlikte *basınç-şekil değiştirme* terimi dışındaki terimlerin sınır tabaka için açılmış ve modellenmiş biçimleri RSM modelindekilerin aynı olacaktır. Buna göre kayma gerilmesi ve normal gerilmeler için *basınç-şekil değiştirme* terimleri ve her bir Reynolds gerilmesi için çözülecek eşitlik sınır tabaka akışları için aşağıdaki gibi olur:

Kayma gerilmesi, $-\overline{uv}$;

Basınç - şekil değiştirme $\{\overline{uv}\}$;

$$\begin{aligned} \pi_{12} = & -C_1 \frac{\varepsilon}{k} \overline{uv} - \hat{\alpha} P_{12} - \hat{\beta} D_{12} - \hat{\gamma} \rho k S_{12} \\ & + \left[-0.125 \frac{\varepsilon}{k} \overline{uv} - 0.015 (P_{12} - D_{12}) \right] \frac{k^{3/2}}{\varepsilon X_n}. \end{aligned} \quad (151)$$

Burada üretim terimi, P_{12} , TSTA için Eşitlik 92' de verildiği gibidir. D_{12} ise; birinci bölümde Eşitlik 70 ile verilen üretim tensörü yardımıyla TSTA için aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$D_{12} = -\overline{u^2} \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (152)$$

S_{12} ise yine birinci bölümde verildiği gibi Eşitlik 13a ile verilen ortalama şekil değiştirme tensörü yardımıyla TSTA için elde edilebilir. Bu daha önce Eşitlik 88 ile elde edilmişti. Buna göre Eşitlikler 90, 91, 92 ve 98 'den de yararlanılarak kayma gerilmesi, $-\overline{uv}$, eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} U \frac{\partial \overline{uv}}{\partial x} + V \frac{\partial \overline{uv}}{\partial y} = & \frac{\partial}{\partial y} \left(C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{v^2} \frac{\partial \overline{uv}}{\partial y} \right) - \overline{v^2} \frac{\partial U}{\partial y} \\ & - C_1 \frac{\varepsilon}{k} \overline{uv} - \hat{\alpha} P_{12} - \hat{\beta} D_{12} - \hat{\gamma} \rho k S_{12} \\ & + \left[-0.125 \frac{\varepsilon}{k} \overline{uv} - 0.015 (P_{12} - D_{12}) \right] \frac{k^{3/2}}{\varepsilon X_n}. \end{aligned} \quad (153)$$

x-doğrultusundaki normal gerilme, $\overline{u^2}$;

Basınç - şekil değiştirme $\left\{ \overline{u^2} \right\}$;

$$\begin{aligned} \pi_{11} = & C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(-\overline{u^2} + \frac{2}{3}k \right) - \hat{\alpha} \left(P_{11} - \frac{2}{3}P_k \right) - \hat{\beta} \left(-\frac{2}{3}P_k \right) \\ & + \left[0.125 \frac{\varepsilon}{k} \left(-\overline{u^2} + \frac{2}{3}k \right) - 0.015P_{11} \right] \frac{k^{3/2}}{\varepsilon X_n}. \end{aligned} \quad (154)$$

Burada P_k ve P_{11} ' in TSTA için ifadeleri sırasıyla, Eşitlik 82 ve Eşitlik 102' de verilmiştir. Eşitlikler 100, 101, 102 ve 108 'den de yararlanılarak *x-* doğrultusundaki normal gerilme, $\overline{u^2}$, eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} U \frac{\partial \overline{u^2}}{\partial x} + V \frac{\partial \overline{u^2}}{\partial y} = & \frac{\partial}{\partial y} \left(C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{v^2} \frac{\partial \overline{u^2}}{\partial y} \right) - 2\overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} \\ & + C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(-\overline{u^2} + \frac{2}{3}k \right) - \hat{\alpha} \left(P_{11} - \frac{2}{3}P_k \right) - \hat{\beta} \left(-\frac{2}{3}P_k \right) \\ & + \left[0.125 \frac{\varepsilon}{k} \left(-\overline{u^2} + \frac{2}{3}k \right) - 0.015P_{11} \right] \frac{k^{3/2}}{\varepsilon X_n} - \frac{2}{3}\varepsilon. \end{aligned} \quad (155)$$

y-doğrultusundaki normal gerilme, $\overline{v^2}$;

Basınç - şekil değiştirme $\left\{ \overline{v^2} \right\}$;

$$\begin{aligned} \pi_{22} = & C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(-\overline{v^2} + \frac{2}{3}k \right) - \hat{\alpha} \left(-\frac{2}{3}P_k \right) - \hat{\beta} \left(-\frac{2}{3}P_k \right) \\ & + \left[0.125 \frac{\varepsilon}{k} \left(-\overline{v^2} + \frac{2}{3}k \right) - 0.015(-D_{22}) \right] \frac{k^{3/2}}{\varepsilon X_n}. \end{aligned} \quad (156)$$

Burada D_{22} , Eşitlik 70' den yararlanılarak TSTA için aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$D_{22} = -2\overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (157)$$

Eşitlikler 110, 111, 112 ve 118 'den de yararlanılarak *y-* doğrultusundaki normal gerilme, $\overline{v^2}$, eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}
U \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial x} + V \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(C_s \frac{k \overline{v^2}}{\varepsilon} \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial y} \right) \\
&+ C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(-\overline{v^2} + \frac{2}{3} k \right) - \hat{\alpha} \left(-\frac{2}{3} P_k \right) - \hat{\beta} \left(-\frac{2}{3} P_k \right) \\
&+ \left[0.125 \frac{\varepsilon}{k} \left(-\overline{v^2} + \frac{2}{3} k \right) - 0.015 (-D_{22}) \right] \frac{k^{3/2}}{\varepsilon X_n} - \frac{2}{3} \varepsilon. \quad (158)
\end{aligned}$$

z-doğrultusundaki normal gerilme, $\overline{w^2}$;

Basınç - şekil değiştirme $\left\{ \overline{w^2} \right\}$;

$$\begin{aligned}
\pi_{33} &= C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(-\overline{w^2} + \frac{2}{3} k \right) - \hat{\alpha} \left(-\frac{2}{3} P_k \right) - \hat{\beta} \left(-\frac{2}{3} P_k \right) \\
&+ \left[0.125 \frac{\varepsilon}{k} \left(-\overline{w^2} + \frac{2}{3} k \right) \right] \frac{k^{3/2}}{\varepsilon X_n}. \quad (159)
\end{aligned}$$

Eşitlikler 120, 121, 122 ve 128 'den de yararlanılarak z-doğrultusundaki normal gerilme, $\overline{w^2}$, eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}
U \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial x} + V \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(C_s \frac{k \overline{w^2}}{\varepsilon} \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial y} \right) \\
&+ C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(-\overline{w^2} + \frac{2}{3} k \right) - \hat{\alpha} \left(-\frac{2}{3} P_k \right) - \hat{\beta} \left(-\frac{2}{3} P_k \right) \\
&+ \left[0.125 \frac{\varepsilon}{k} \left(-\overline{w^2} + \frac{2}{3} k \right) \right] \frac{k^{3/2}}{\varepsilon X_n} - \frac{2}{3} \varepsilon. \quad (160)
\end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitliklerde bulunan kinetik enerji, k , RSM modelinde olduğu gibi Eşitlik 15 yardımıyla normal gerilmelerden hesaplanmıştır. Kinetik enerjinin yutulması, ε , ise yine RSM modelinde kullanıldığı gibi yayılım terimi daha genel olan Eşitlik 72 ile belirlenmiştir. Bunun yanında eşitliklerde yer alan, C_s , C_1 , $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$ sabit katsayılarının değerleri birinci bölümde Tablo 4' de verilmiştir.

LRR modeli, sıcaklık alanının çözümüne yeni bir yaklaşım getirmemiştir. Bu nedenle, sıcaklık alanı çözümleri RSM modelinde yapılan sıcaklık çözümleri formülasyonunun aynıdır. Bununla beraber; sıcaklık alanı çözümlerini hız alanı çözümlerinin doğrudan etkilemesi, sıcaklık alanı için LRR modeliyle elde edilen çözümleri de etkilemiştir.

2.3.3. Cebrik Gerilme / Türbülans Isı Akısı (ASM) Modelinin TSTA' ya Uygulanması

Cebrik gerilme modelleri (ASM), temel özelliklerin büyük bir kısmını bünyesinde bulundurmasına karşın, diferansiyel formdaki gerilme eşitliklerinin cebrik formlarda ifade edildiği modellerdir. Buna göre Rodi [1,15] tarafından geliştirilen ve Eşitlik 74 ile verilen ifade, kaldırma kuvvetinin ihmal edildiği durumda türbülanslı sınır tabaka akışlarına uygulanırsa, aşağıdaki Reynolds gerilmeleri elde edilebilir:

Kayma gerilmesi, $-\overline{uv}$;

$$\overline{uv} = k \left[\frac{(1-\gamma) \left(\frac{P_{12}}{\varepsilon} \right)}{C_1 + \frac{P_k}{\varepsilon} - 1} \right] \quad (161a)$$

Burada P_{12} ' nin değeri Eşitlik 92 ile verilmiştir. Eşitlik 92 ile verilen ifade, Eşitlik 161a' da yerine yazılıp eşitlik tekrar düzenlenirse, kayma gerilmesi için aşağıdaki ifade elde edilebilir:

$$-\overline{uv} = \frac{2}{3} (1-\gamma) \frac{\left(C_1 - 1 + \gamma \frac{P_k}{\varepsilon} \right) k^2 \partial U}{\left(C_1 - 1 + \frac{P_k}{\varepsilon} \right)^2 \varepsilon \partial y} \quad (161b)$$

Bu eşitliklerde geçen P_k ifadesi ise TSTA için Eşitlik 82 ile verildiği gibidir.

x-doğrultusundaki normal gerilme, $\overline{u^2}$;

$$\overline{u^2} = k \left[\frac{2}{3} + \frac{(1-\gamma) \left(\frac{P_{11}}{\varepsilon} - \frac{2 P_k}{3 \varepsilon} \right)}{C_1 + \frac{P_k}{\varepsilon} - 1} \right]. \quad (162)$$

Burada P_{11} sınır tabaka akışları için Eşitlik 102 ile verildiği gibidir.

y-doğrultusundaki normal gerilme, $\overline{v^2}$,

$$\overline{v^2} = k \left[\frac{2}{3} + \frac{(1-\gamma) \left(-\frac{2 P_k}{3 \varepsilon} \right)}{C_1 + \frac{P_k}{\varepsilon} - 1} \right]. \quad (163)$$

z-doğrultusundaki normal gerilme, $\overline{w^2}$,

$$\overline{w^2} = k \left[\frac{2}{3} + \frac{(1-\gamma) \left(-\frac{2 P_k}{3 \varepsilon} \right)}{C_1 + \frac{P_k}{\varepsilon} - 1} \right]. \quad (164)$$

Bu eşitlikte görüldüğü gibi cebrik gerilme modelinde kaldırma kuvvetinin ihmal edildiği durumda TSTA için normal gerilmelerden $\overline{v^2}$ ve $\overline{w^2}$ aynı değerleri almaktadır.

Yukarıdaki eşitliklerde C_1 ve γ ile verilen model sabitleri sırasıyla, 1.8 ve 0.6 olarak alınmıştır. Ayrıca ASM, her bir normal gerilmenin, $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$, $\overline{w^2}$, belirlenmesine imkan sağlamasına rağmen, üç normal gerilmenin toplamı kinetik enerjiyi, k , doğru bir şekilde belirlemekten uzaktır. Bu nedenle ASM sadece bir k -denklemlle bağlantılı olarak kullanılabilir [1]. Bu çalışmada kinetik enerjinin belirlenmesi için TSTA için elde edilen ve Eşitlik 80 ile verilen transport eşitliği kullanılmıştır. Bunun yanında kinetik enerjinin yutulması, ε , ifadesinin değerini belirlemek için ise; yine TSTA için türetilmiş bulunan Eşitlik 81 kullanılmıştır.

Sıcaklık alanı çözümü için birinci bölümde Eşitlik 76 ile verilen ve Rodi [15]' nin cebrik gerilme modeline benzer tarzda Gibson ve Launder [75] tarafından önerilen türbülans akı ifadeleri, $-\overline{vt}$ ve $-\overline{ut}$, TSTA için kaldırma kuvvetinin ihmal edildiği durumda aşağıda verildiği gibi elde edilmiştir:

y- doğrultusundaki türbülans ısı akısı, $-\overline{vt}$;

$$\overline{vt} = \frac{\frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial T}{\partial y}}{C_{1t} + \frac{1}{2} \left(\frac{P_k}{\varepsilon} - 1 \right)}. \quad (165)$$

x- doğrultusundaki türbülans ısı akısı, $-\overline{ut}$;

$$\overline{ut} = \frac{\frac{k}{\varepsilon} \left[\left(\frac{\overline{uv}}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + (1 - C_{2t}) \left(\frac{\overline{vt}}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right]}{C_{1t} + \frac{1}{2} \left(\frac{P_k}{\varepsilon} - 1 \right)}. \quad (166)$$

Bu eşitliklere ek olarak sıcaklık çalkantısı, $\overline{t^2}$, TSTA için Eşitlik 77 yardımıyla aşağıdaki gibi türetilmiştir:

$$\overline{t^2} = -2R \frac{k}{\varepsilon} \frac{\overline{vt}}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (167)$$

Yukarıdaki eşitliklerde yer alan, C_{1t} , C_{2t} ve R model sabitleridir ve bu çalışmada bunların değerleri sırasıyla, 3.0, 0.33 ve 0.8 olarak alınmıştır.

2.4. Sayısal Yöntem ve Temel Denklemlerin Ayrıklaştırılması

Yukarıda türbülanslı sınır tabaka akışlarının, hız ve sıcaklık alanlarının çözümleri için ifade edilen eşitliklerin bazılarının cebrik olmasına karşın geneli diferansiyel formdadır. Bu diferansiyel eşitlikler, sınır tabaka yaklaşımları sayesinde parabolik karakterde bulunmaktadırlar. Her biri farklı büyüklüklerin belirlenmesi için elde edilmiş diferansiyel eşitliklerin çözümünde kolaylık sağlamak açısından, tüm bu eşitlikleri temsil edebilecek genel formda bir eşitlik yazılması uygun olacaktır. Aynı zamanda, jet akışları

gibi simetrik dairesel sınır tabaka akışlarının da çözümüne imkan sağlayacak şekilde, bu temel eşitlikler parabolik karakterde aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial rV}{\partial y} = 0, \quad (168)$$

$$U \frac{\partial \phi}{\partial x} + V \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \left(r \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S_{\phi}. \quad (169)$$

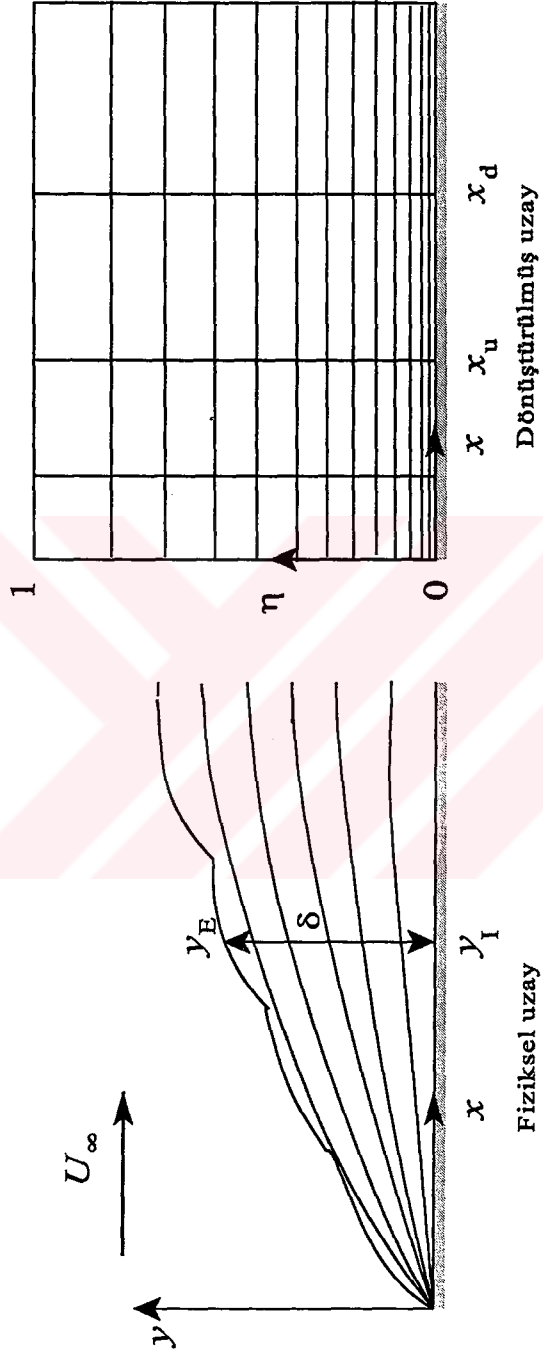
Burada ϕ ile ifade edilen büyüklük; türbülans modellerine göre U , T , k , ε , \overline{uv} , $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$, $\overline{w^2}$, \overline{ut} , \overline{vt} ve $\overline{t^2}$ değişkenlerini temsil etmektedir. Γ_{ϕ} , değişkenlere göre farklı değerler alan yayılım katsayısı olarak tanımlanmıştır. S_{ϕ} ise; her bir değişken için farklı değerler alan kaynak terimidir. Buna göre; Tablo 5 ve Tablo 6' da sırasıyla *birinci ve ikinci derece modellerde* ϕ , Γ_{ϕ} ve S_{ϕ} 'nin aldıkları değerler verilmektedir.

Eşitlik 169, sınırlandırılmış bir bölgede gelişen sınır tabaka akışını iyi bir şekilde tanımlamasına rağmen, akış yönünde genişleyen dış akışların söz konusu olduğu yerlerde daha az kullanışlıdır. Özellikle akışın başlangıç gelişiminde çok daha zayıf çözümler verir ve bilgisayar zamanı ve belleğinin kullanılmasında ekonomik değildir [165]. Bu nedenle Şekil 3' de de görüleceği üzere fiziksel koordinatlar, boyutsuz bir akış kesiti koordinatı, η , olarak tanımlanıp Eşitlik 169 buna göre yeniden türetilmiştir. Boyutsuz akış kesiti koordinatı şu şekilde tanımlanmıştır:

$$\eta \equiv \frac{y - y_I}{y_E - y_I} = \frac{y - y_I}{\delta}. \quad (170)$$

Burada y ; akışın normal (akış kesiti) doğrultusundaki uzunluk, y_I ve y_E ; sırasıyla sınır tabakanın iç ve dış sınırındadır. $\delta (y_E - y_I)$ ise; sınır tabaka kalınlığıdır.

Eşitlik 170' in tanımından η değerinin 0 ile 1 arasında değişeceği görülebilmektedir. Bu tanımlama ile birlikte Şekil 3' de de görüldüğü gibi çözüm bölgesinin başlangıç ve cidara yakın bölgelerinde daha az ağ genişliği seçilmekte, diğer kısımlarda ise yeterli büyüklükte ağ genişliği kullanılmaktadır. Böylece, skaler



Şekil 3. Çözüm bölgesinin farklı aralıklara sahip ağırlara bölünmesi (x - η koordinat sistemi)

Tablo 5. Genel diferansiyel eşitlikte BDM' de skaler büyüklüklerin değerleri

Model	ϕ	Γ_ϕ	S_ϕ
<i>Standart</i> <i>k - ε</i> <i>Modeli</i>	U (Eşit. 79)	$\nu + \nu_t$	$-\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx}$
	k (Eşit. 80)	$\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}$	$P_k - \varepsilon$
	ε (Eşit. 81)	$\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}$	$C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k}$
	T (Eşit. 84)	$\alpha + \frac{\nu_t}{Pr_t}$	-
$-\overline{uv} = \nu_t \frac{\partial U}{\partial y}$			
$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$			
<i>Düşük Reynolds</i> <i>Sayı k - ε</i> <i>Modeli</i>	U (Eşit. 79)	$\nu + \nu_t$	$-\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx}$
	k (Eşit. 36)	$\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}$	$P_k - \varepsilon + D$
	ε (Eşit. 37)	$\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}$	$C_{1\varepsilon} f_1 \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{2\varepsilon} f_2 \frac{\varepsilon^2}{k} + E$
	T (Eşit. 84)	$\alpha + \frac{\nu_t}{Pr_t}$	-
$-\overline{uv} = \nu_t \frac{\partial U}{\partial y}$			
$\nu_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$			
<i>Lineer Olmayan</i> <i>k - ε</i> <i>Modeli</i>	U (Eşit. 79)	$\nu + \nu_t$	$-\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx}$
	k (Eşit. 80)	$\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}$	$P_k - \varepsilon$
	ε (Eşit. 81)	$\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}$	$C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k}$
	T (Eşit. 84)	$\alpha + \frac{\nu_t}{Pr_t}$	-
$-\overline{uv} = 2\nu_t S_{12}$ $+ 4C_E C_\mu^2 \frac{k^3}{\varepsilon^2} S_{12}$			
$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$			

Tablo 6. Genel diferansiyel eşitlikte İDM' de skaler büyüklüklerin değerleri

Model	ϕ	Γ_ϕ	S_ϕ
RSM	U (Eşit. 10)	v	$-\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} - \frac{\partial \bar{uv}}{\partial y}$
	uv (Eşit. 99)	$C_s \frac{k \bar{v}^2}{\varepsilon}$	$-\bar{v}^2 \frac{\partial U}{\partial y} - C_1 \frac{\varepsilon \bar{uv}}{k} - C_2 P_{12} + C_1' \frac{\varepsilon}{k} \left(-\frac{3}{2} \bar{uv}\right) f\left(\frac{L}{X_n}\right)$ $+ C_2' \left(-\frac{3}{2} \pi_{12,2}\right) f\left(\frac{L}{X_n}\right)$
	u^2 (Eşit.109)	$C_s \frac{k \bar{v}^2}{\varepsilon}$	$-2\bar{uv} \frac{\partial U}{\partial y} - C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\bar{u}^2 - \frac{2}{3} k\right) - C_2 \left(P_{11} - \frac{2}{3} P_k\right)$ $+ C_1' \frac{\varepsilon}{k} \left(-2\bar{u}^2\right) f\left(\frac{L}{X_n}\right) + C_2' \left(-2\pi_{11,2}\right) f\left(\frac{L}{X_n}\right) - \frac{2}{3} \varepsilon$
	v^2 (Eşit.119)	$C_s \frac{k \bar{v}^2}{\varepsilon}$	$-C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\bar{v}^2 - \frac{2}{3} k\right) + C_2 \frac{2}{3} P_k + C_1' \frac{\varepsilon}{k} \left(-2\bar{v}^2\right) f\left(\frac{L}{X_n}\right)$ $C_2' \left(-2\pi_{22,2}\right) f\left(\frac{L}{X_n}\right) - \frac{2}{3} \varepsilon$
	w^2 (Eşit.129)	$C_s \frac{k \bar{v}^2}{\varepsilon}$	$-C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\bar{w}^2 - \frac{2}{3} k\right) + C_2 \frac{2}{3} P_k + C_1' \frac{\varepsilon}{k} \left(-2\bar{w}^2\right) f\left(\frac{L}{X_n}\right)$ $C_2' \left(-2\pi_{33,2}\right) f\left(\frac{L}{X_n}\right) - \frac{2}{3} \varepsilon$
	ε (Eşit.130)	$C_\varepsilon \frac{k \bar{v}^2}{\varepsilon}$	$-C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon \bar{uv}}{k} \frac{\partial U}{\partial y} - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k}$
	ut (Eşit.140)	$C_{st} \frac{k \bar{v}^2}{\varepsilon}$	$-\bar{uv} \frac{\partial T}{\partial y} - \bar{vt} \frac{\partial U}{\partial y} - C_{1t} \frac{\varepsilon \bar{ut}}{k} + C_{2t} \bar{vt} \frac{\partial U}{\partial y}$
	vt (Eşit.149)	$C_{st} \frac{k \bar{v}^2}{\varepsilon}$	$\bar{v}^2 \frac{\partial T}{\partial y} - C_{1t} \frac{\varepsilon \bar{vt}}{k} - C_{1t} \frac{\varepsilon \bar{vt}}{k} - C_{1t} \frac{\varepsilon \bar{vt}}{k} f\left(\frac{L}{X_n}\right)$
	t^2 (Eşit.150)	$C_t \frac{k \bar{v}^2}{\varepsilon}$	$-2\bar{vt} \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\varepsilon t^2}{k R}$
	T (Eşit.11)	α	$-\frac{\partial \bar{vt}}{\partial y}$

Tablo 6' nın devamı

LRR	U (Eşit. 10)	v	$-\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} - \frac{\partial \bar{uv}}{\partial y}$
uv (Eşit. 153)	$C_s \frac{k}{\varepsilon} \bar{v}^2$		$-\bar{v}^2 \frac{\partial U}{\partial y} - C_1 \frac{\varepsilon}{k} \bar{uv} - \hat{\alpha} P_{12} - \hat{\beta} D_{12} - \hat{\gamma} \rho k S_{12}$ $+ \left[-0.125 \frac{\varepsilon}{k} \bar{uv} - 0.015 (P_{12} - D_{12}) \right] \frac{k^{3/2}}{\varepsilon X_n}$
u^2 (Eşit.155)	$C_s \frac{k}{\varepsilon} \bar{v}^2$		$-2\bar{uv} \frac{\partial U}{\partial y} + C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(-\bar{u}^2 + \frac{2}{3} k \right) - \hat{\alpha} \left(P_{11} - \frac{2}{3} P_k \right) - \hat{\beta} \left(-\frac{2}{3} P_k \right)$ $+ \left[0.125 \frac{\varepsilon}{k} \left(-\bar{u}^2 + \frac{2}{3} k \right) - 0.015 P_{11} \right] \frac{k^{3/2}}{\varepsilon X_n} - \frac{2}{3} \varepsilon$
v^2 (Eşit.158)	$C_s \frac{k}{\varepsilon} \bar{v}^2$		$C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(-\bar{v}^2 + \frac{2}{3} k \right) - \hat{\alpha} \left(-\frac{2}{3} P_k \right) - \hat{\beta} \left(-\frac{2}{3} P_k \right)$ $+ \left[0.125 \frac{\varepsilon}{k} \left(-\bar{v}^2 + \frac{2}{3} k \right) - 0.015 (-D_{22}) \right] \frac{k^{3/2}}{\varepsilon X_n} - \frac{2}{3} \varepsilon$
w^2 (Eşit.160)	$C_s \frac{k}{\varepsilon} \bar{v}^2$		$C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(-\bar{w}^2 + \frac{2}{3} k \right) - \hat{\alpha} \left(-\frac{2}{3} P_k \right) - \hat{\beta} \left(-\frac{2}{3} P_k \right)$ $+ \left[0.125 \frac{\varepsilon}{k} \left(-\bar{w}^2 + \frac{2}{3} k \right) \right] \frac{k^{3/2}}{\varepsilon X_n} - \frac{2}{3} \varepsilon$
ε (Eşit.130)	$C_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon} \bar{v}^2$		$-C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} \bar{uv} \frac{\partial U}{\partial y} - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k}$
ut (Eşit.140)	$C_{st} \frac{k}{\varepsilon} \bar{v}^2$		$-\bar{uv} \frac{\partial T}{\partial y} - \bar{vt} \frac{\partial U}{\partial y} - C_{1t} \frac{\varepsilon}{k} \bar{ut} + C_{2t} \bar{vt} \frac{\partial U}{\partial y}$
vt (Eşit.149)	$C_{st} \frac{k}{\varepsilon} \bar{v}^2$		$\bar{v}^2 \frac{\partial T}{\partial y} - C_{1t} \frac{\varepsilon}{k} \bar{vt} - C_{1t} \frac{\varepsilon}{k} \bar{vt} - C_{1t} \frac{\varepsilon}{k} \bar{vt} f \left(\frac{L}{X_n} \right)$
t^2 (Eşit.150)	$C_t \frac{k}{\varepsilon} \bar{v}^2$		$-2\bar{vt} \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\varepsilon t^2}{k R}$
T (Eşit.11)	α		$-\frac{\partial \bar{vt}}{\partial y}$

Tablo 6' nın devamı

ASM	U (Eşit. 10)	v	$-\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} - \frac{\partial \bar{uv}}{\partial y}$
	T (Eşit.11)	α	$-\frac{\partial \bar{vt}}{\partial y}$
	k (Eşit. 80)	$v + \frac{v_t}{\sigma_k}$	$P_k - \varepsilon$
	ε (Eşit. 81)	$v + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon}$	$C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k}$

büyükliklerin gradyanlarının büyük olduğu bölgelerde daha hassas çözümler elde edilmesi, diğer bölgelerde ise belleğin daha ekonomik kullanılması imkanı doğmaktadır.

Buna göre Eşitlik 170 dikkate alınarak; Eşitlik 168 ile verilen süreklilik eşitliği ve Eşitlik 169 ile verilen skaler büyüklük eşitliği aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir:

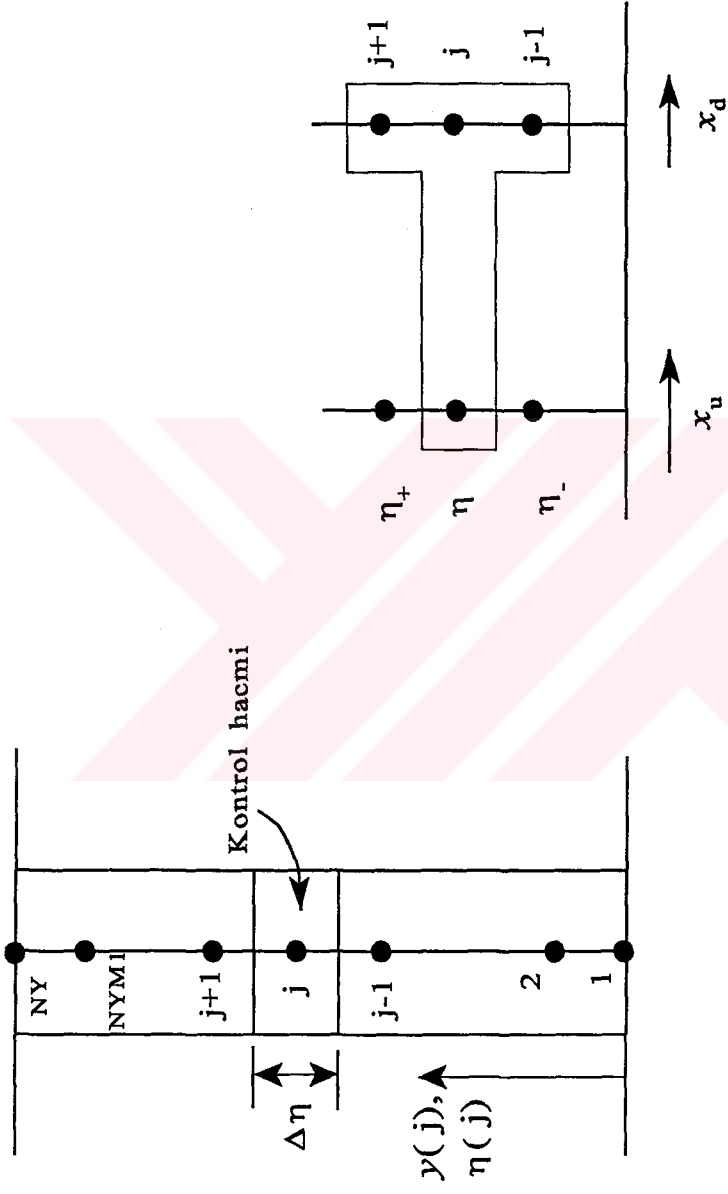
$$\frac{\partial (r\delta U)}{\partial x} + \frac{\partial [r(V - G_1 U)]}{\partial \eta} = 0, \quad (171)$$

$$\frac{\partial (rU\delta\phi)}{\partial x} + \frac{\partial [r(V - G_1 U)\phi]}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(r \frac{\Gamma_\phi}{\delta} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + r \delta S_\phi. \quad (172)$$

Burada G_1 ile temsil edilen terim aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$G_1 \equiv \frac{dy_1}{dx} + \eta \frac{d\delta}{dx}. \quad (173)$$

Bu çalışmada Eşitlik 171, y - doğrultusundaki ortalama hızın, V , belirlenmesinde kullanılmıştır. Eşitlik 172, yukarıda da belirtildiği gibi farklı skaler büyüklüklerin belirlenmesinde kullanılmıştır. Her iki eşitlik de bu çalışmada *kontrol hacmi* yaklaşımına göre integrasyonla ayrıştırılmıştır. Bu yöntemle cebrik forma sokulan eşitlikler TDMA (üç köşegenli matris algoritması) altprogramı yardımıyla implicit (kapalı) olarak çözümlenmiştir. Eşitlik 172, Şekil 4' de görüldüğü gibi sayısal ağ ve kontrol hacmi seçilmesi durumunda, kontrol hacmi yöntemine göre ayrıştırılmıştır ve aşağıdaki cebrik ifade elde edilmiştir:



Şekil 4. Sayısal ağ ve kontrol hacmi

$$A_j^d \phi_j^d = A_j^u \phi_j^u + A_{j+}^d \phi_{j+1}^d + A_{j-}^d \phi_{j-1}^d + B_j. \quad (174)$$

$$\text{Burada; } A_j^u \equiv (\rho r U)_j^u \delta^u \Delta \eta, \quad (175)$$

$$A_{j+}^d \equiv \left\{ \frac{\Gamma_\phi r \Delta x}{\delta \Delta \eta} - \frac{\rho r (V - G_1 U) \Delta x}{2} \right\}_+, \quad (176)$$

$$A_{j-}^d \equiv \left\{ \frac{\Gamma_\phi r \Delta x}{\delta \Delta \eta} - \frac{\rho r (V - G_1 U) \Delta x}{2} \right\}_-, \quad (177)$$

$$A_j^d = A_j^u + A_{j+}^d + A_{j-}^d, \quad (178)$$

ve

$$B_j = S_\phi V_v, \quad (179)$$

şeklindedir. Eşitlik 179' da V_v ile ifade edilen değişken, hacmi temsil etmektedir ve $V_v = r \delta \Delta x \Delta \eta$ şeklinde tanımlanmıştır.

Eşitlik 174' de yer alan A_{j+} ve A_{j-} katsayılarının, j düğüm noktasındaki ϕ değişkeni ile bu düğüm noktasının $j+1$ ve $j-1$ komşuluğundaki düğüm noktalarındaki değerleri arasında bağlantı vardır. Bu katsayılar her zaman pozitif değer almak zorundadır. Aksi halde bu katsayıların negatif değerleri, $j+1$ düğüm noktasındaki ϕ değeri azalması (veya artması) gerektiği durumda, j düğüm noktasındaki bu ϕ değerinin ters yönde değişmesi anlamına gelecektir. Bu nedenle A_{j+} ve A_{j-} katsayılarının her zaman pozitif değer olmasını sağlamak için *hybrid upwind* / merkezi fark yaklaşımı, ϕ' nin kontrol hacmi yüzeyindeki değerleri olan ϕ_+ ve ϕ_- değerlerinin hesaplanmasında kullanıldı. Bu kontrol hacmi yüzeyi değerleri merkezi fark alma işlemiyle aşağıdaki gibi elde edilebilir [166- 171]:

$$\phi_+ = \frac{\phi_j + \phi_{j+1}}{2} \quad (180)$$

ve

$$\phi_- = \frac{\phi_j + \phi_{j-1}}{2}. \quad (181)$$

Aynı değerler *upwind* yaklaşımıyla şu şekilde ifade edilebilir:

$$\phi_+ = \begin{cases} \phi_j & ; V > 0 \text{ için} \\ \phi_{j+1} & ; V < 0 \text{ için} \end{cases} \quad (182)$$

$$\phi_- = \begin{cases} \phi_{j-1} & ; V > 0 \text{ için} \\ \phi_j & ; V < 0 \text{ için} \end{cases} \quad (183)$$

Upwind ve merkezi fark yaklaşımlarının duruma bağlı olarak kullanımı, genel fark eşitliğinde (Eşitlik 174) yer alan A_{j+} ve A_{j-} katsayılarında yapılacak aşağıdaki değişiklikleri beraberinde getirmiştir:

$$A_{j+} = \text{Max} \left(\frac{1}{2} |C_{j+}|, D_{j+} \right) - \frac{1}{2} C_{j+}, \quad (184)$$

$$A_{j-} = \text{Max} \left(\frac{1}{2} |C_{j-}|, D_{j-} \right) - \frac{1}{2} C_{j-}. \quad (185)$$

Eşitlikler 184 ve 185' de bulunan C ve D ifadeleri aşağıda verildiği gibidir:

$$C_j \equiv \rho r (V - G_1 U) \Delta x, \quad (186)$$

$$D_j \equiv \frac{\Gamma_\phi r \Delta x}{\delta \Delta \eta}. \quad (187)$$

Bu çalışmada Younis [165]' un iki boyutlu türbülanslı sınır tabaka akışları için geliştirdiği EXPRESS adlı bilgisayar programı, yedi farklı türbülans modeli için ve dört farklı akış koşulu için uyarlanarak (modifiye edilerek) kullanılmıştır. FORTRAN dilinde yazılan programın akış şeması Ek Şekil 1' de verilmiştir. Program, MAIN, SETUP, UPDATE, PREP, CENTRAL, OUTP ve SOLVE olmak üzere yedi alt programdan meydana gelmektedir. Bu alt programlar arasında veri alışverişi bir COMMON ilave programıyla sağlanmaktadır. Ayrıca bağımlı değişkenlerin ve fiziksel özelliklerin değerleri bir BLOCK DATA program parçasıyla sağlanmaktadır. Programda iç ve dış (ana) olmak üzere iki döngü bulunmaktadır. İç döngüde bir ileri adımda düğüm noktaları için yapılan hesaplamalar 50 kere tekrar edilerek çözümün yakınsaması sağlanırken, dış (ana) döngüde ise çözümün bir sonraki adıma geçirilerek önceden belirlenen belirli mesafedeki bölgenin çözümlenmesi sağlanmaktadır. Dış döngüde bir ileri adımda yapılan hesaplamalardan sonra yukarıda da daha önce bahsedildiği gibi çözüm alanı fiziksel alanla birlikte UPDATE

alt programında genişletilmekte ve bir sonraki ileri adımda genişlemiş ve düğüm noktaları yeniden belirlenmiş ağ ile çözüm gerçekleştirilmektedir. Ayrıca UPDATE alt programında hesaplanan büyüklükler eski adıma atanmaktadır. CENTRAL alt programında ise türbülans büyüklükler hesaplanmaktadır. Her bir türbülans büyüklük için ise SOLVE alt programı çağrılarak TDMA çözümü elde edilmektedir.

Kullanılan program çözümlenecek eşitlikleri, ileri yönde adım yöntemiyle (marching integration) çözmektedir. Bu çözüm sürecinde mekanda kapalı (implicit) çözüm yaklaşımı kullanılmaktadır. Buna göre ileri adımda bilinmeyen üç düğüm noktası kullanılırken geri adımda bir bilinen düğüm noktası kullanılarak cebrik denklemler oluşturulmakta ve bu denklemler son aşamada TDMA matris algoritmasıyla çözümlenmektedir. Her bir ileri yön adımında 34 düğüm noktası için bu cebrik denklemler oluşturulmaktadır. Diğer taraftan çözüm alanının girişinde, bağımlı değişkenlerin dağılımını tanımlayan deneysel olarak elde edilmiş giriş (başlangıç) koşulları kullanılmaktadır. Böylece çözümün daha az iterasyon sayısında yakınsaması sağlanmaktadır. Ancak bu çalışmada çok farklı türbülans modelleri için çözümler elde edildiği için her bir adım için en az 50 iterasyon yapılmıştır. Bu sayıdaki iterasyon bulguları yapılan daha çok sayıdaki iterasyon bulgularıyla karşılaştırıldığında sonuçların tatminkar olduğu görülmüştür.

Her bir adım için seçilen düğüm noktalarının akışın kesitindeki dağılımı ise; düşük Reynolds sayılı türbülans modelleri hariç diğer türbülans modellerde viskoz alt sınır tabakanın dışında olacak şekildedir. Aslında iyi bir çözüm elde etmek için hem hız hem de sıcaklık gradyanının yüksek değerlerde olduğu viskoz alt sınır tabakada en az beş düğüm noktasının bulunması literatürde belirtilmektedir. Ancak düşük Reynolds sayılı türbülans modelleri hariç diğer tüm modeller logaritma kanunu bölgesinde çözüm elde edilmesi için tasarlanmıştır. Bu nedenle de kaymayan sınır koşulunda viskoz alt sınır tabakanın dışında duvara yakın bir nokta seçilecek duvar fonksiyonlarıyla her bir adım için çözüme başlanılmaktadır. Bu duvar fonksiyonları da yine logaritma kanunundan elde edilmiş bağıntılardır.

2.5. Ele Alınan Türbülanslı Sınır Tabaka Akışlarının Çözümlenmesi

Sınır tabaka akışları, akış doğrultusunda yüzeyin başlangıcından itibaren belirli bir bölgeye kadar laminer akış karakterini göstermekte iken belli bir geçiş bölgesinden sonra

($Re_x \geq 5 \cdot 10^5$) türbülanslı olmaktadır. Dolayısıyla, pratik anlamda sınır tabakanın çözümü büyük ölçüde türbülanslı sınır tabakanın çözümü anlamına gelmektedir. Bilindiği gibi türbülanslı akışları ifade eden temel denklemlerde ortaya çıkan Reynolds gerilmelerinin belirlenebilmesinin bir yolu türbülans modellemesidir. Literatürde bir çok türbülans modelleri sunulmasına rağmen bu modellerin hangisinin, farklı akış şartlarında en uygun sonucu verdiği konusu günümüzde hala araştırma konusudur. Daha önce de belirtildiği gibi; ideal bir model, fiziksel olay esasını korurken minimum karmaşıklık sunan model olarak ifade edilebilir [2].

Bu çalışmada, seçilen birinci ve ikinci derece modeller, sınır tabaka yaklaşımıyla çözümü mümkün olan fiziksel problemlere uygulanmıştır. Bunlar; homojen ısıtılan düzlem plaka üzerindeki türbülanslı sınır tabaka akışı, dairesel jet akışı ve homojen ısıtılan yatay ve dikey konumda kaldırma kuvvetinin etkili olduğu sınır tabaka akışı olarak sıralanabilir.

Bu çalışmada parabolik karakterdeki sınır tabaka akışlarının seçilmesinin başlıca nedenlerinden biri; hemen tüm türbülans modellerinin bu akışlara kolaylıkla uygulanabilmesidir. Bir diğer neden ise; modellerin fiziğinin, problemin karmaşıklığı karşısında gölgede kalmaması ve böylece türbülans modelinin yapısının daha çok parametre ile inceleme imkanının elde edilmesidir. Aksi halde karmaşık (eliptik) bir problemin bir türbülans modeliyle çözümünde, modelin yapısının incelemesi oldukça zor olacak veya mümkün olmayacaktır.

Seçilen türbülans sınır tabaka akışlarının çözümü genel olarak aynı olmakla birlikte uygun sınır koşulları bu akışların fiziğinin ayrılmasını sağlayacaktır. Bu çalışmada her bir sınır tabaka akışı için esas olarak iki tip sınır koşulu seçildi. Bunlar sabit değerli ve sabit akılı sınır koşullarıdır. Türbülans büyüklükleri için sınır koşulları belirlenirken birinci ve ikinci derece modellere göre farklılıklar gösterebilmektedir. Sınır tabakanın serbest akış sınırında tüm türbülans büyüklükler sıfır alınmıştır. Sınır tabakanın duvar sınırında eğer seçilen model ikinci derece ise; kinetik enerji, k , ve gerilme değerleri sabit bir değer alınmıştır ve buna uygun olarak tüm türbülans gerilmelerinin akıları sıfır alınmıştır. Bununla beraber kinetik enerji yutulmasının, ϵ , duvar üzerindeki değeri, ikinci derece modeller için tanımlanan ilgili transport eşitliği kullanılarak belirlenmiştir. Birinci derece model seçilmesi durumu için ise; k ve ϵ 'un duvar üzerindeki değerleri yerel denge koşullarına göre değişmekle birlikte genelde, Lam-Bremhorst' un düşük Reynolds sayılı $k - \epsilon$ modeli hariç, sıfır alınmıştır.

2.5.1. Düzlem Levha Üzerinde TSTA

Homojen ısıtılan düzlem levha üzerinde meydana gelen türbülanslı sınır tabaka akışında, Şekil 5' de görüldüğü gibi; birinci ve ikinci derece modeller için aşağıdaki sınır koşulları alınmıştır. [19, 20, 159, 172].

$y = 0$ (düzlem levha üzerinde);

$$U(x,0) = V(x,0) = 0,$$

$$\overline{u^2} = \overline{v^2} = \overline{w^2} = -\overline{uv} = 0,$$

$$k = \varepsilon = 0,$$

$$T(x,0) = T_y.$$

(188)

$y = \delta$ (sınır tabakası sınırında);

$$U(x,\delta) = U_\infty,$$

$$\overline{u^2} = \overline{v^2} = \overline{w^2} = -\overline{uv} = 0,$$

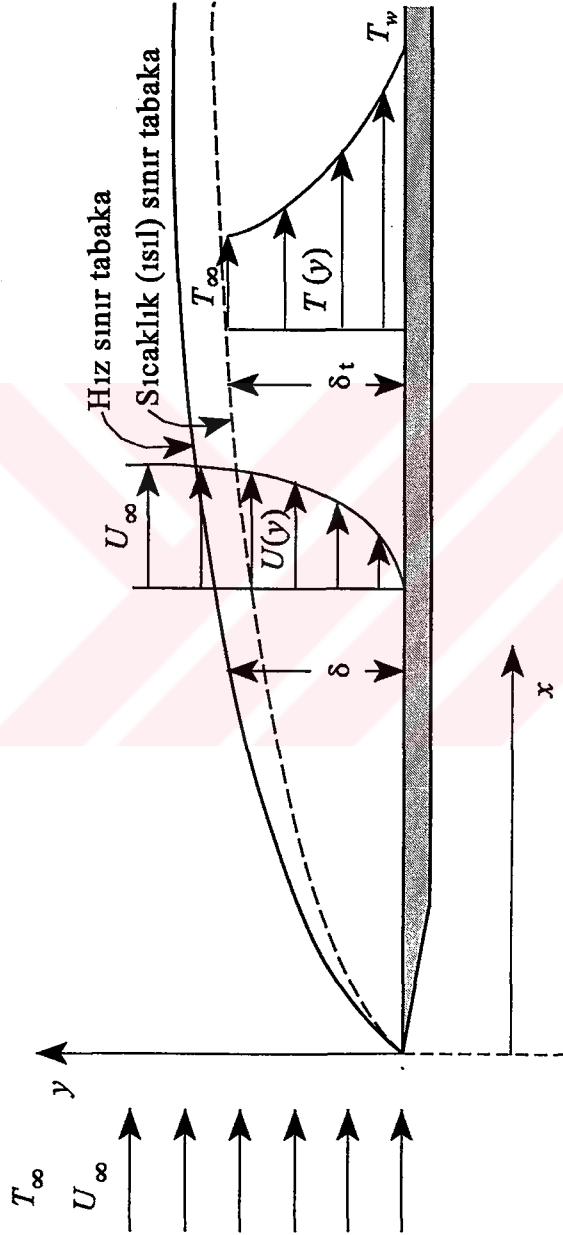
$$k = \varepsilon = 0,$$

$$T(x,\delta) = T_\infty.$$

Lam-Bremhorst' un düşük Reynolds sayılı $k - \varepsilon$ modelinde, diğer modellerden farklı olarak yukarıda da belirtildiği gibi; $\partial\varepsilon/\partial y|_w = 0$ ' dır. Diğer taraftan Eşitlik 188' de k ve ε için duvarda verilen sınır koşulları, sadece düşük Reynolds sayılı (yakın-duvar) modeller (LKE(CH), LKE(LB)) için uygulanabilmektedir. Diğer türbülans modelleri için ise; viskoz alt sınır tabaka dışında kalan duvara en yakın ve $11.63 < y^+ < 50$ aralığındaki olacak şekilde düğüm noktası için yazılan duvar fonksiyonlarıyla çözümler elde edilmiştir.

$$\left. \begin{aligned} k_c &= \frac{U_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}} \\ \varepsilon_c &= \frac{U_\tau^3}{\kappa y_c^+} \end{aligned} \right\} \quad (189)$$

Burada y_c^+ yukarıda belirtilen aralıkta ve viskoz alt sınır tabakasının dışında duvara en yakın düğüm noktasının mesafesidir. Bu noktada $-\overline{uv} = U_\tau^2$ ' dir ve ortalama hız profili



Şekil 5. Düzlem bir levha üzerinde gelişen hız ve sıcaklık sınır tabaka

logaritma kanunu hız profili ile örtüşür [121]. Diğer taraftan duvarda kaymayan sınır koşulunu sağlamak için, duvar kayma gerilmesi logaritma kanunundan hesaplanmıştır [123].

2.5.2. Dairesel Serbest Jet Akışı

Şekil 6' da görüldüğü gibi silindirik simetrik bir serbest jet akışı da sınır tabaka yaklaşımıyla çözümlenebilmektedir. Sınır koşulları tanımlanacak olursa; kullanılan tüm türbülans modelleri için simetri ekseninde ($r=0$) akışa dik koordinatta aksenel hız, sıcaklık, normal gerilmeler, türbülans kinetik enerji ve onun yutulmasının gradyanları sıfır alınmıştır [173-175].

$r = 0$ (simetri ekseninde);

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(x,0)}{\partial r} = \frac{\partial T(x,0)}{\partial r} = 0, \\ \overline{uv} = \frac{\partial \overline{u^2}}{\partial r} = \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial r} = \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial r} = 0, \\ \frac{\partial k}{\partial r} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = 0. \end{aligned} \quad (190)$$

Serbest dairesel jet sınırında ($r=R$) tüm modeller için aksenel hız; serbest akım hızı, sıcaklık; serbest akım sıcaklığı ve türbülans büyüklükler; sıfır alınmıştır.

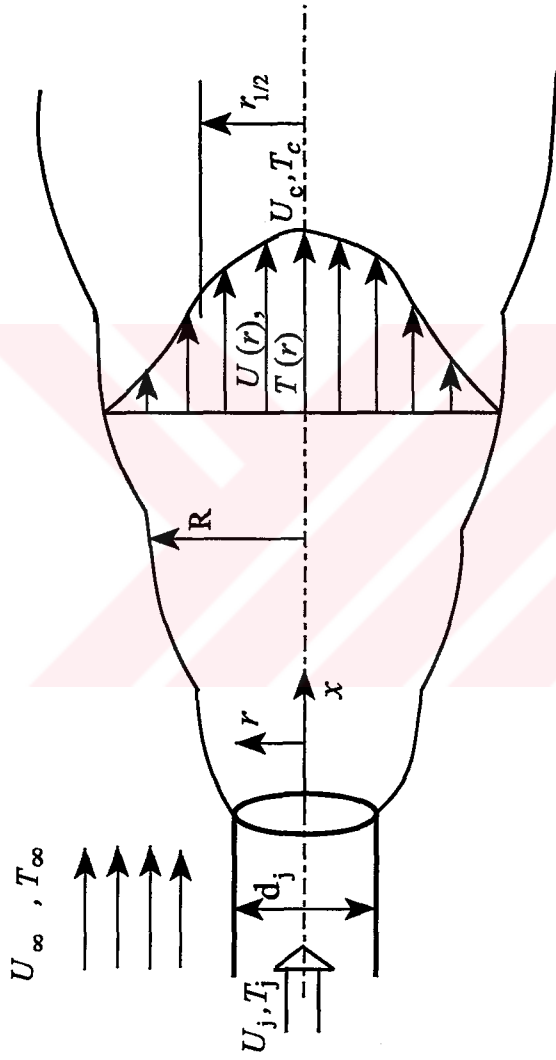
$r = R$ (jet sınırı);

$$\begin{aligned} U(x,R) = U_{\infty}, \\ T(x,R) = T_{\infty}, \\ \overline{uv} = k = \varepsilon = 0. \end{aligned} \quad (191)$$

Serbest jet akışında diğer sınır koşulları; jet çıkış değerleri olarak aşağıdaki gibidir:

$x = 0$ da (jet akışı çıkışında);

$$\begin{aligned} U(0,y) = U_j, \\ T(0,y) = T_j. \end{aligned} \quad (192)$$



Şekil 6. Dairesel serbest jet akışı

Burada serbest jet akışının simetrik olmasından dolayı yapılan çözümler simetri ekseninin sadece bir tarafında (üst) elde edilmiştir. Bu, hesaplama bölgesini daraltmakta, hesaplama süresini kısaltmakta ve bellek kullanımını daha ekonomik hale getirmektedir.

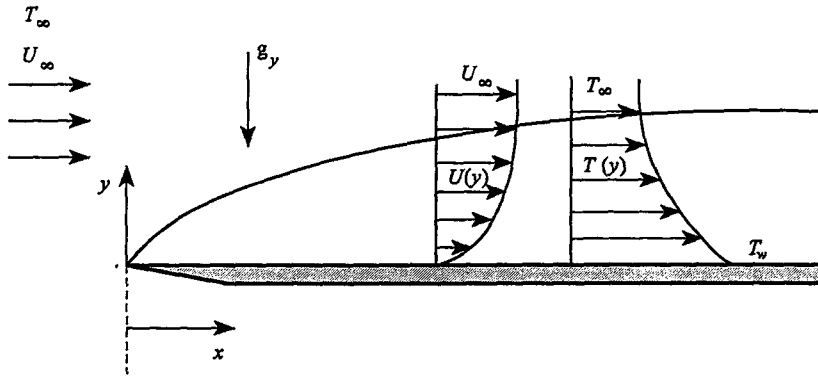
2.5.3. Kaldırma Kuvvetinin Etkili Olduğu TSTA

Zorlanmış taşınımın genellikle etkili olduğu sınır tabaka akışlarında, hızın yeterince düşük ve serbest akış sıcaklığıyla duvar arasında, sıkıştırılmaz akış şartını (Boussinesq yaklaşımı) sağlayacak kadar bir sıcaklık farkı bulunması durumunda serbest taşınımın etkisi yeterince büyük olabilmektedir. Pratikte genellikle zorlanmış bir taşınımında serbest taşınımından bahsetmek için; $Gr_x / Re_x^2 \approx 1$ ($Ri \approx 1$) olması şartı aranır [176, 177]. Bu durum *birlikte doğal ve zorlanmış taşınım* olarak adlandırılır. Yukarıda sıralanan şartlar dikkate alındığında, türbülanslı sınır tabaka akışının çözümü yapılırken kaldırma kuvvetinin etkisi, çözüme önemli katkıda bulunması beklenen bir durumdur. Laminer sınır tabakanın türbülanslı sınır tabakana geçişinden itibaren Gr_x / Re_x^2 büyüklüğü, bu çalışmada seçilen hız ve sıcaklıklar için 0.015 değerinden başlayıp, çözüm bölgesinde kalma şartıyla, ileri istasyonlarda 0.2 değerine kadar çıkabilmektedir. Bu durumda, birlikte doğal ve zorlanmış taşınımından bahsedilemez ancak kaldırma kuvvetinin yeterince etkili olduğu zorlanmış taşınımından bahsetmek mümkündür. Bu durumda Şekiller 7a ve 7b' de yatay ve dikey akış durumunda verilen koordinat eksenleri dikkate alındığında ve kaldırma kuvvetinin de hesaba katıldığı türbülanslı sınır tabaka akışı için, x - doğrultusundaki momentum denklemi ve hal denklemi aşağıdaki gibi olur:

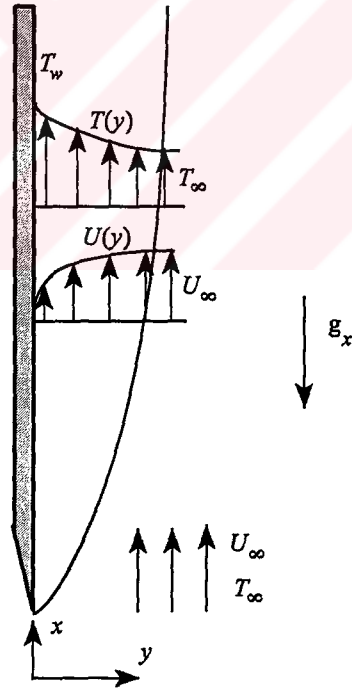
$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu \frac{\partial U}{\partial y} - uv \right] + g \beta (T - T_\infty) \quad (193a)$$

$$\rho = \rho(T) \quad (193b)$$

Burada g ; akışın normali doğrultusundaki yerçekimi ivmesini, β ise; ısıl genleşme katsayısını ifade etmektedir. Sadece dikey akış durumunda $g \beta (T - T_\infty)$ ile ifade edilen kaldırma kuvvetini ifade eden ek terim mevcuttur [121, 142]. Yatay akış durumunda ise kaldırma kuvveti etkileri Boussinesq yaklaşımı göz önüne alındığında, ancak Eşitlik 193b' de ifade edilen hal denklemi ile ve kullanılan türbülans modellerinde eşitlik sistemine dahil



a)



b)

Şekil 7. Kaldırma kuvveti etkisindeki türbülans sınır tabaka, a) Yatay b) Dikey

edilen kaldırma kuvvetiyle ilgi terimlerle dikkate alınabilmektedir [142]. Birinci bölümde Eşitlik 9 ve Eşitlik 11 ile verilen süreklilik ve enerji eşitliklerinde ise; her hangi bir değişiklik yoktur. Ancak Eşitlik 193a' de yer alan sıcaklık, T , değeri, momentum eşitliğini enerji eşitliğine bağımlı kılmaktadır ve bu iki denklemin birlikte çözülmesi zorunluluğunu ortaya koymaktadır.

Kaldırma kuvvetinin etkili olduğu türbülanslı sınır tabaka akışlarının çözümü için kullanılan birinci ve ikinci derece modellerin kullandığı transport eşitliklerinde de, kaldırma kuvvetinden dolayı ek terimler gelmektedir. Bu ek terimler çözümleme aşamasında kaynak terimlerine ilave edilmiştir. Ancak, kaldırma kuvveti, türbülanslı sınır tabaka akışının yatay ve dikey olması durumunda farklı etkilere sahip olur [142]. Dolayısıyla birinci ve ikinci derece modellerle türbülanslı sınır tabaka akışının çözümleme sürecinde, Tablolar 5 ve 6' da verilen kaynak terimlerine ilave edilecek ek terimler de yatay ve dikey akış koşulu için farklı olacaktır. Buna göre Şekiller 7a ve 7b' de verilen yatay ve dikey akış koşulu için koordinat sistemleri dikkate alınarak, bu ek terimler belirlenmiştir.

2.5.3.1. BDM İle Kaldırma Kuvveti Etkisindeki TSTA' nın Çözümlemesi

Birinci derece modellerde kaldırma kuvveti etkisi, Eşitlik 29 ve Eşitlik 30' da verildiği gibi; G ve R_f ifadeleriyle transport eşitliklere girmektedir. Bu ifadeler sırasıyla , Eşitlik 52' de verilen eşitlikten yararlanılarak ve 1.6.1.1 bölümünde bahsedildiği gibi TSTA için aşağıdaki gibi elde edilebilir:

Yatay akış koşulu için (Şekil 7a);

$$G = \beta g_y \overline{vt}, \quad (194)$$

$$R_f = -\frac{G}{(P_k + G)}. \quad (195)$$

Dikey akış koşulu için (Şekil 7b);

$$G = \beta g_x \overline{ut}, \quad (196)$$

$$R_f = 0. \quad (197)$$

Eşitlik 197' de görüldüğü gibi; kaldırma kuvvetinin etkili olduğu dikey türbülanslı sınır tabaka akışlarında *akı Richardson sayısı*, akışın normalı doğrultusunda *kaldırma kuvveti üretimi* olmadığından dolayı sıfır alınmıştır [1].

Düşük Reynolds sayılı (yakın-duvar) ve lineer olmayan $k - \varepsilon$ modellerinde, kaldırma kuvvetinin kinetik enerji, k , ve onun yutulması, ε , eşitliklerinde yer alması, standart $k - \varepsilon$ modelinde olduğu gibidir. Sadece düşük Reynolds sayılı $k - \varepsilon$ modelinde $C_{1\varepsilon}$ model katsayısına çarpan olarak f_1 azaltma fonksiyonu gelmektedir. Buna göre Eşitlikler 194-197' den yararlanarak ,Tablo 5 ile verilen birinci derece modellerdeki (BDM) kaynak terimine (S_ϕ), dikey bir TSTA durumunda gelecek ek terimler Tablo 7' de verilmiştir.

Tablo 7. BDM' de dikey türbülanslı sınır tabaka için kaldırma kuvveti etkisinden dolayı gelen ek kaynak terimler

Model	ϕ	S_ϕ	
		Yatay	Dikey
Standart,	U	–	$g \beta (T - T_\infty)$
Düşük Re Sayılı ve Lineer Olmayan $k - \varepsilon$ modelleri	T	–	–
	k	$\beta g_y \overline{vt}$	$\beta g_x \overline{ut}$
	ε	$C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (1 - C_{3\varepsilon}) \beta g_y \overline{vt}$	$C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} \beta g_x \overline{ut}$
		($C_{1\varepsilon}$ katsayısına, düşük Re sayılı modelinde f_1 çarpanı gelir.)	

2.5.3.2. İDM İle Kaldırma Kuvveti Etkisindeki TSTA' nın Çözümlemesi

İkinci derece modellerden (İDM); RSM ve LRR modellerinde kullanılan transport eşitliklerindeki kaldırma kuvveti terimleri, eşitlik sistemine iki farklı şekilde dahil olmaktadır. Bunlardan birincisi; Eşitlik 45 ile verilen eşitlikte yer alan *kaldırma kuvveti üretimi*, G_{ij} , ve ikincisi de yine Eşitlik 45 de verilen *basınç-şekil değiştirme* teriminin modellenmesiyle gelen ek terimdir, $\pi_{ij,3}$. LRR modelinde ise; basınç-şekil değiştirme

teriminin modellenmesinde, kaldırma kuvveti etkisi dikkate alınmamıştır. Dolayısıyla LRR için şekil-değiştirme teriminden gelen ek kaynak terimleri yoktur. Bu göre; Eşitlikler 50, 51 ve 52' den yararlanılarak TSTA için aşağıdaki ifadeler belirlenmiştir:

Yatay akış koşulu için (Şekil 7a);

Kayma gerilmesi, $-\overline{uv}$ için;

$$\pi_{12,3} = -C_3 \beta g_y \overline{ut}, \quad (198)$$

$$G_{12} = \beta g_y \overline{ut}. \quad (199)$$

x – doğrultusundaki normal gerilme, $\overline{u^2}$, için;

$$\pi_{11,3} = 0, \quad (200)$$

$$G_{11} = 0. \quad (201)$$

y – doğrultusundaki normal gerilme, $\overline{v^2}$, için;

$$\pi_{22,3} = -\frac{4}{3} C_3 \beta g_y \overline{vt}, \quad (202)$$

$$G_{22} = 2 \beta g_y \overline{vt}. \quad (203)$$

z – doğrultusundaki normal gerilme, $\overline{w^2}$, için;

$$\pi_{33,3} = 0, \quad (204)$$

$$G_{33} = 0. \quad (205)$$

Sıcaklık alanı çözümleri için Eşitlik 63' den yararlanılarak kaldırma kuvveti etkisindeki TSTA için aşağıdaki ifadeler elde edilmiştir:

x – doğrultusundaki türbülans ısı akısı, $-\overline{ut}$, için;

$$\pi_{1t,3} = 0, \quad (206)$$

$$G_{11} = 0. \quad (207)$$

y – doğrultusundaki türbülans ısı akısı, $-\overline{vt}$, için;

$$\pi_{21,3} = -C_{3t} \beta g_y \overline{t^2}, \quad (208)$$

$$G_{2t} = \beta g_y \overline{t^2}. \quad (209)$$

Dikey akış koşulu için (Şekil 7b);

Kayma gerilmesi, $-\overline{uv}$ için;

$$\pi_{12,3} = -C_3 \beta g_x \overline{vt}, \quad (210)$$

$$G_{12} = \beta g_x \overline{vt}. \quad (211)$$

x – doğrultusundaki normal gerilme, $\overline{u^2}$, için;

$$\pi_{11,3} = -\frac{4}{3} C_3 \beta g_x \overline{ut}, \quad (212)$$

$$G_{11} = 2 \beta g_x \overline{ut}. \quad (213)$$

y – doğrultusundaki normal gerilme, $\overline{v^2}$, için;

$$\pi_{22,3} = 0, \quad (214)$$

$$G_{22} = 0. \quad (215)$$

z – doğrultusundaki normal gerilme, $\overline{w^2}$, için;

$$\pi_{33,3} = 0, \quad (216)$$

$$G_{33} = 0. \quad (217)$$

Sıcaklık alanı çözümleri için Eşitlik 63' den yararlanılarak kaldırma kuvveti etkisindeki TSTA için aşağıdaki ifadeler elde edilmiştir:

x – doğrultusundaki türbülans ısı akısı, $-\overline{ut}$, için;

$$\pi_{1t,3} = -C_{3t} \beta g_x \overline{t^2}, \quad (218)$$

$$G_{1t} = \beta g_x \overline{t^2}. \quad (219)$$

y – doğrultusundaki türbülans ısı akısı, $-\overline{vt}$, için;

$$\pi_{2t,3} = 0, \quad (220)$$

$$G_{2t} = 0. \quad (221)$$

Yukarıdaki eşitliklerde yer alan sıcaklık çalkantıları, $\overline{t^2}$, ifadesi TSTA için elde edilen Eşitlik 150 ile verilen transport eşitlikten belirlenmiştir.

İkinci derece modellerden; *cebrik gerilme/akı modeli* (ASM), pratikte kaldırma kuvveti etkilerinin çözüme ilave edilmesinin en kolay olduğu türbülans modelidir. Bu türbülans modelinde kaldırma kuvveti etkilerinin çözüme ilave edilmesi, kayma gerilmesi, $-\overline{uv}$, ve normal gerilmeler, $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$, $\overline{w^2}$, Eşitlik 74 yardımıyla kaldırma kuvveti terimlerinin de dikkate alınmasıyla elde edilmiştir. Buna göre kaldırma kuvvetinin etkili olduğu TSTA için ASM' de Reynolds gerilmeleri aşağıdaki gibi elde edilebilir:

Kayma gerilmesi;

$$\overline{uv} = k \left[\frac{(1-\gamma) \left(\frac{P_{12}}{\varepsilon} \right) + (1-C_3) \left(\frac{G_{12}}{\varepsilon} \right)}{C_1 + \frac{P_k + G}{\varepsilon} - 1} \right], \quad (222)$$

Normal gerilmeler;

$$\overline{u^2} = k \left[\frac{2}{3} + \frac{(1-\gamma) \left(\frac{P_{11}}{\varepsilon} - \frac{2 P_k}{3 \varepsilon} \right) + (1-C_3) \left(\frac{G_{11}}{\varepsilon} - \frac{2 G}{3 \varepsilon} \right)}{C_1 + \frac{P_k + G}{\varepsilon} - 1} \right], \quad (223)$$

$$\overline{v^2} = k \left[\frac{2}{3} + \frac{(1-\gamma) \left(-\frac{2P_k}{3\varepsilon} \right) + (1-C_3) \left(\frac{G_{22}}{\varepsilon} - \frac{2G}{3\varepsilon} \right)}{C_1 + \frac{P_k + G}{\varepsilon} - 1} \right], \quad (224)$$

$$\overline{w^2} = k \left[\frac{2}{3} + \frac{(1-\gamma) \left(-\frac{2P_k}{3\varepsilon} \right) + (1-C_3) \left(-\frac{2G}{3\varepsilon} \right)}{C_1 + \frac{P_k + G}{\varepsilon} - 1} \right]. \quad (225)$$

ASM' de kaldırma kuvvetinin etkili olduğu TSTA için türbülans ısı akıları da Eşitlik 76' dan yararlanılarak aşağıdaki gibi belirlenmiştir:

$$\overline{vt} = \frac{\frac{k}{\varepsilon} \left[\left(\overline{v^2} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + (1-C_{2t}) \left(\beta g_y \overline{t^2} \right) \right]}{C_{1t} + \frac{1}{2} \left(\frac{P_k + G}{\varepsilon} - 1 \right)}, \quad (226)$$

$$\overline{ut} = \frac{\frac{k}{\varepsilon} \left[\left(\overline{uv} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + (1-C_{2u}) \left(\overline{vt} \frac{\partial U}{\partial y} + \beta g_x \overline{t^2} \right) \right]}{C_{1u} + \frac{1}{2} \left(\frac{P_k + G}{\varepsilon} - 1 \right)}. \quad (227)$$

Eşitlikler 222-227' de bulunan kaldırma kuvveti üretim terimleri; G , G_{12} , G_{11} ve G_{22} sırasıyla yatay akış durumu için; Eşitlikler 194, 199, 201 ve 203 dikey akış durumu için ; Eşitlikler 196, 211, 213 ve 215 'da verildiği gibidir. Eşitlik 227' de beliren sıcaklık çalkantısı ASM' de Eşitlik 77 yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\overline{t^2} = -2R \frac{k}{\varepsilon} \overline{vt} \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (228)$$

Eşitlikler 198-228' de beliren; C_3 , C_{3t} ve R model sabitleridir ve Tablo 3' de bu sabitlerin değerleri verilmiştir. Isıl genleşme katsayısı, β , aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p. \quad (229)$$

Bu katsayı mükemmel gazlar için (hava da mükemmel kabul edilebilir) yaklaşık $1/T$ şeklinde belirlenebilir. Gerçek gazlar ve sıvılar için ise bu katsayı, özellik tablolarından belirlenmelidir.

ASM' de elde edilen Reynolds gerilmeleri ve türbülans ısı akılarında yer alan kinetik enerji, k , ve onun yutulmasının, ε , değerleri, daha önde de belirtildiği gibi; sırasıyla, Eşitlik 39 ve Eşitlik 30' dan belirlenmelidir. Buna göre, ASM' de kaldırma kuvvetinin etkisi olması durumunda k ve ε eşitliklerinde ortaya çıkacak et kaynak terimleri standart $k-\varepsilon$ modelinde olduğu gibidir. Bütün bunlara göre ikinci derece modellerde kaldırma kuvvetinden dolayı Tablo 6' da verilen kaynak terimlerine ek olarak gelecek kaynak terimleri Tablo 8' de verilmiştir.

Tablo 8. İDM' de dikey TSTA için kaldırma kuvveti etkisinden dolayı gelen ek kaynak terimleri

Model	ϕ	S_ϕ	
		Yatay	Dikey
RSM	U	-	$g \beta (T - T_\infty)$
	T	-	-
	u^2	-	$2 \beta g_x \bar{u}t - \frac{4}{3} C_3 \beta g_x \bar{u}t$
	v^2	$2 \beta g_y \bar{v}t - \frac{4}{3} C_3 \beta g_y \bar{v}t$	-
	w^2	-	-
	uv	$\beta g_y \bar{u}t - C_3 \beta g_y \bar{u}t$	$\beta g_x \bar{v}t - C_3 \beta g_x \bar{v}t$
	ε	$C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (1 - C_{3\varepsilon}) \beta g_y \bar{v}t$	$C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} \beta g_x \bar{u}t$
	ut	-	$\beta g_x \bar{t}^2 - C_{3t} \beta g_x \bar{t}^2$
	vt	$\beta g_y \bar{t}^2 - C_{3t} \beta g_y \bar{t}^2$	-
	\bar{t}^2	-	-
LRR	U	-	$g \beta (T - T_\infty)$
	T	-	-
	u^2	-	$-\frac{4}{3} C_3 \beta g_x \bar{u}t$
	v^2	$-\frac{4}{3} C_3 \beta g_y \bar{v}t$	-
	w^2	-	-
	uv	$-C_3 \beta g_y \bar{u}t$	$-C_3 \beta g_x \bar{v}t$
	ε	$C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (1 - C_{3\varepsilon}) \beta g_y \bar{v}t$	$C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} \beta g_x \bar{u}t$
	ut	-	$\beta g_x \bar{t}^2 - C_{3t} \beta g_x \bar{t}^2$
	vt	$\beta g_y \bar{t}^2 - C_{3t} \beta g_y \bar{t}^2$	-
	\bar{t}^2	-	-
ASM	U	-	$g \beta (T - T_\infty)$
	T	-	-
	k	$\beta g_y \bar{v}t$	$\beta g_x \bar{u}t$
	ε	$C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (1 - C_{3\varepsilon}) \beta g_y \bar{v}t$	$C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} \beta g_x \bar{u}t$

3. BULGULAR

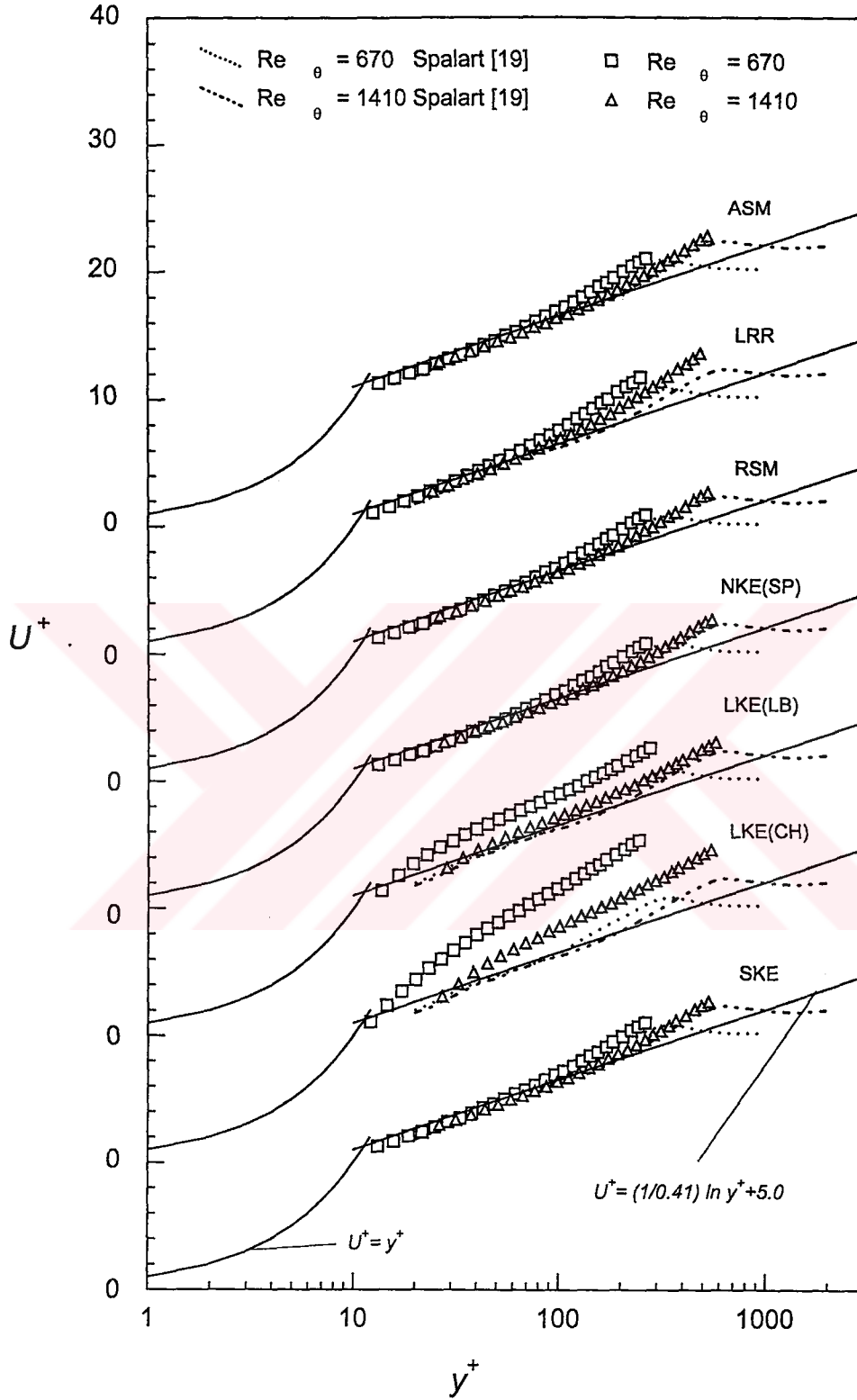
Seçilen türbülanslı sınır tabaka akışlarının yedi farklı birinci ve ikinci derece modellerle çözümlenmesiyle elde edilen bulgular bu bölümde verilmiştir. Bu sınır tabaka akışları; düzlem levha üzerinde kaldırma kuvvetinin ihmal edildiği tam gelişmiş sıkıştırılmaz sınır tabaka akışı, kaldırma kuvvetinin ihmal edildiği sıkıştırılmaz dairesel serbest jet akışı, kaldırma kuvvetinin etkili olduğu yatay ve dikey konumda düzlem levha üzerinde daimi durumda tam gelişmiş türbülanslı sınır tabaka akışlarıdır. Düzlem levha üzerinde meydana gelen TSTA' da ve dairesel serbest jet akışında akış yönünde basınç gradyanı yoktur ($dP/dx = 0$). Düzlem levha üzerindeki TSTA' da sabit yüzey sıcaklığı ısı sınır şartı vardır. Bu akışlara ait diğer sınır koşulları ikinci bölümde verilmiştir.

Sözü edilen akışları çözmek için seçilen türbülans modelleri, birinci ve ikinci derece modeller olmak üzere iki farklı türden seçilmiştir. Birinci derece modeller olarak; standart $k - \varepsilon$ modeli (SKE), Chien' in düşük Reynolds sayılı (yakın-duvar) $k - \varepsilon$ modeli (LKE(CH)), Lam-Bremhorst' un düşük Reynolds sayılı (yakın-duvar) $k - \varepsilon$ modeli (LKE(LB)) ve Speziale' nin lineer olmayan $k - \varepsilon$ modeli (NKE(SP)) seçilmiştir. İkinci derece modeller olarak ise; Reynolds gerilme/türbülans ısı akısı modeli (RSM), Launder-Reece-Rodi modeli (LRR) ve cebrik gerilme/türbülans ısı akısı modeli (ASM) seçilmiştir. Bu türbülans modellerindeki ilgili parametrelere ait sınır koşulları da her bir akış koşulu için ikinci bölümde verilmiştir.

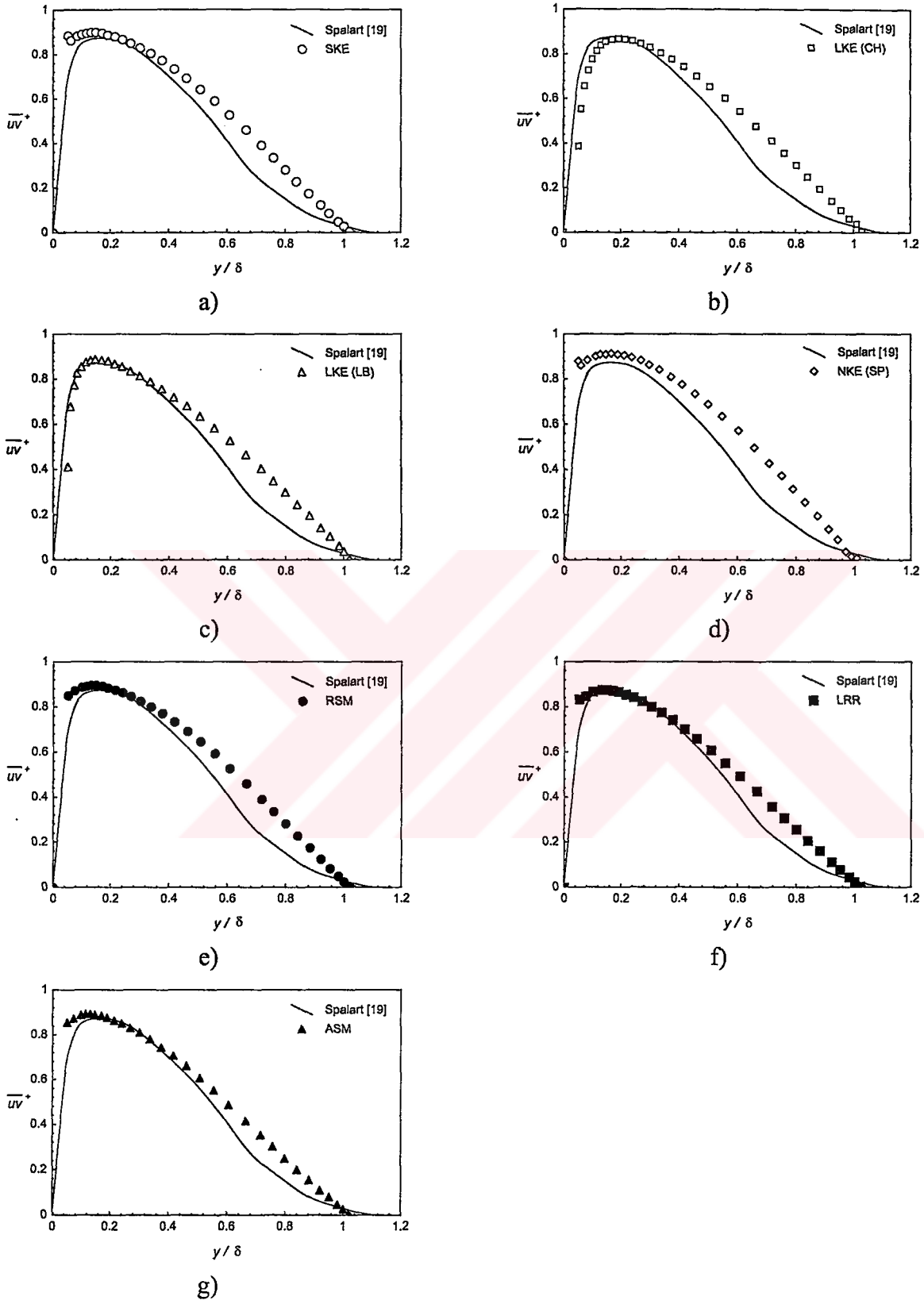
3.1. Düzlem Levha Üzerinde TSTA' da Elde Edilen Bulgular

Bu kısımda kaldırma kuvvetinin ihmal edildiği sıkıştırılmaz ve daimi durumda TSTA' nın yedi farklı birinci ve ikinci derece türbülans modelleri kullanılarak çözümlenmesiyle elde edilen bulgular grafikler halinde verilmiştir. Momentum sınır tabakanın farklı türbülans modelleriyle çözümlenmesiyle elde edilen bulgular; Şekil 8' de U^+ 'nın y^+ ile değişimi, Şekiller 9 ve 10' da \overline{uv}^+ 'nın y/δ ile değişimi, Şekiller 11 ve 12' de U/U_∞ 'un y/δ ile değişimi, Şekil 13' de c_f 'nin Re_θ ile değişimi ve Şekil 14' de H 'nin Re_θ ile değişimi grafikler halinde verilmiştir. Momentum kalınlığı Reynolds sayısı değerleri, literatürdeki mevcut sonuçlar da dikkate alınarak $Re_\theta = 670$ ve

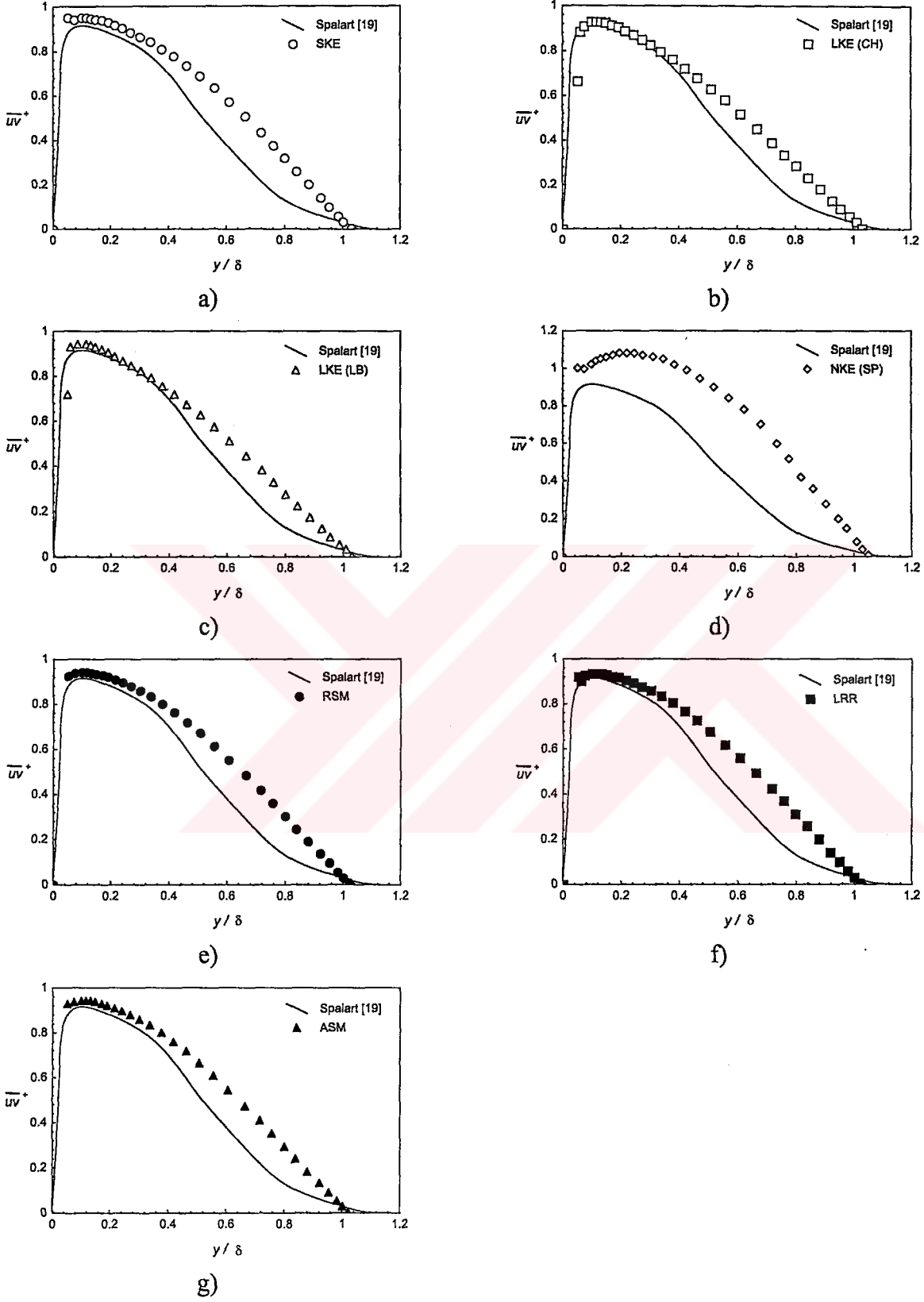
$Re_\theta = 1410$ olarak seçilmiştir. Şekil 8' de verilen ortalama hız; U_τ ile ve Şekiller 9 ve 10' da verilen kayma gerilmeleri; U_τ^2 ile normalleştirilmiştir. Momentum sınır tabakanın çözümlenmesinden elde edilen bulguları karşılaştırmak için Spalart [19]' in doğrudan sayısal benzeşim (DNS) verileri kullanılmıştır. Sıcaklık (ısı) sınır tabakanın farklı türbülans modelleriyle çözümlenmesiyle elde edilen bulgular; Şekil 15' de T^+ ' nin y^+ ile değişimi, Şekiller 16 ve 17' de $\overline{v}t^+$ ' nin y/δ ile değişimi, Şekil 18' de St' ' nin Re_θ ile değişimi ve Şekil 19' da Pr_t' ' nin y^+ ile değişimi grafikler halinde verilmiştir. Şekil 15 ile verilen ortalama sıcaklık; $(T_w - T)/T_\tau$ ifadesiyle normalleştirilmiştir. Şekiller 16 ve 17' de verilen akışın normali doğrultusundaki türbülans ısı akısı; $U_\tau T_\tau$ ile normalleştirilmiştir. Momentum sınır tabakanın çözümlenmesinde seçilen momentum kalınlığı Reynolds sayısı ise; literatür de dikkate alınarak $Re_\theta = 990$ ve $Re_\theta = 1500$ olarak seçilmiştir. Ortalama sıcaklık ve türbülans ısı akısı bulguları, Subramanian ve Antonia [178]' dan alınan deneysel verilerle karşılaştırılmıştır. Stanton sayısının bulguları; Durbin [44]' den alınan ve Reynolds vd' ne ait olan deneysel verilerle ve Prandtl sayısının bulguları, Kays [135]' dan alınan ve Bell vd' ne ait olan DNS verileriyle karşılaştırılmıştır. Diğer taraftan Şekil 8 ve Şekil 15' de farklı türbülans modelleriyle elde edilen bulgular, sırasıyla momentum ve sıcaklık sınır tabaka için verilen, duvar ve logaritma kanunlarıyla da karşılaştırılmıştır. Türbülans sınır tabaka ile ilgili diğer parametreler ise; Şekil 20' de k^+ ' nin y^+ ile değişimi, Şekil 21' de ε^+ ' in y^+ ile değişimi, Şekil 22' de P_k/ε' un y^+ ile değişimi ve Şekil 23' de $-\overline{uv}/k'$ nin y^+ ile değişimi grafikler halinde verilmiştir. Şekil 20' deki türbülans kinetik enerji ve Şekil 21' de verilen türbülans kinetik enerjinin yutulması, sırasıyla, U_τ^2 ve U_τ^4/ν ile normalleştirilmiştir. Bu parametreler için seçilen Re_θ değerleri literatür de dikkate alınarak; k^+ ve ε^+ için $Re_\theta = 1410$, P_k/ε ve $-\overline{uv}/k$ için $Re_\theta = 670$ ve $Re_\theta = 1410$ şeklinde alınmıştır. Ayrıca farklı türbülans modelleri kullanılarak elde edilen bu bulgular; k^+ ve ε^+ için Sarkar ve So [110]' dan alınan ve Spalart' a ait olan DNS verileriyle, P_k/ε ve $-\overline{uv}/k$ için Rodi ve Mansour [20]' dan alınan ve DNS sonuçları kullanılarak elde edilen verilerle karşılaştırılmıştır.



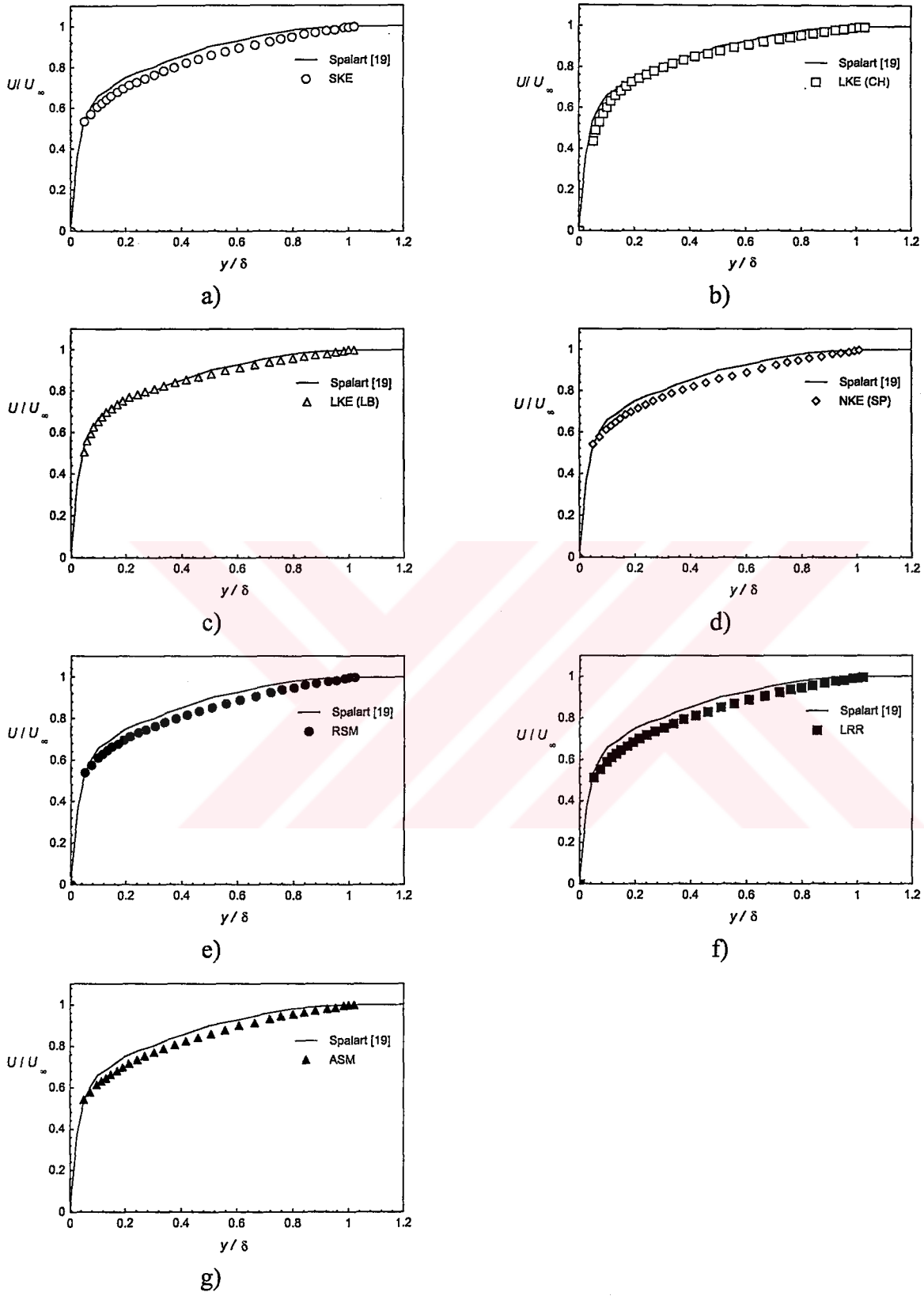
Şekil 8. Düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin ortalama hız profilleri ile karşılaştırılması



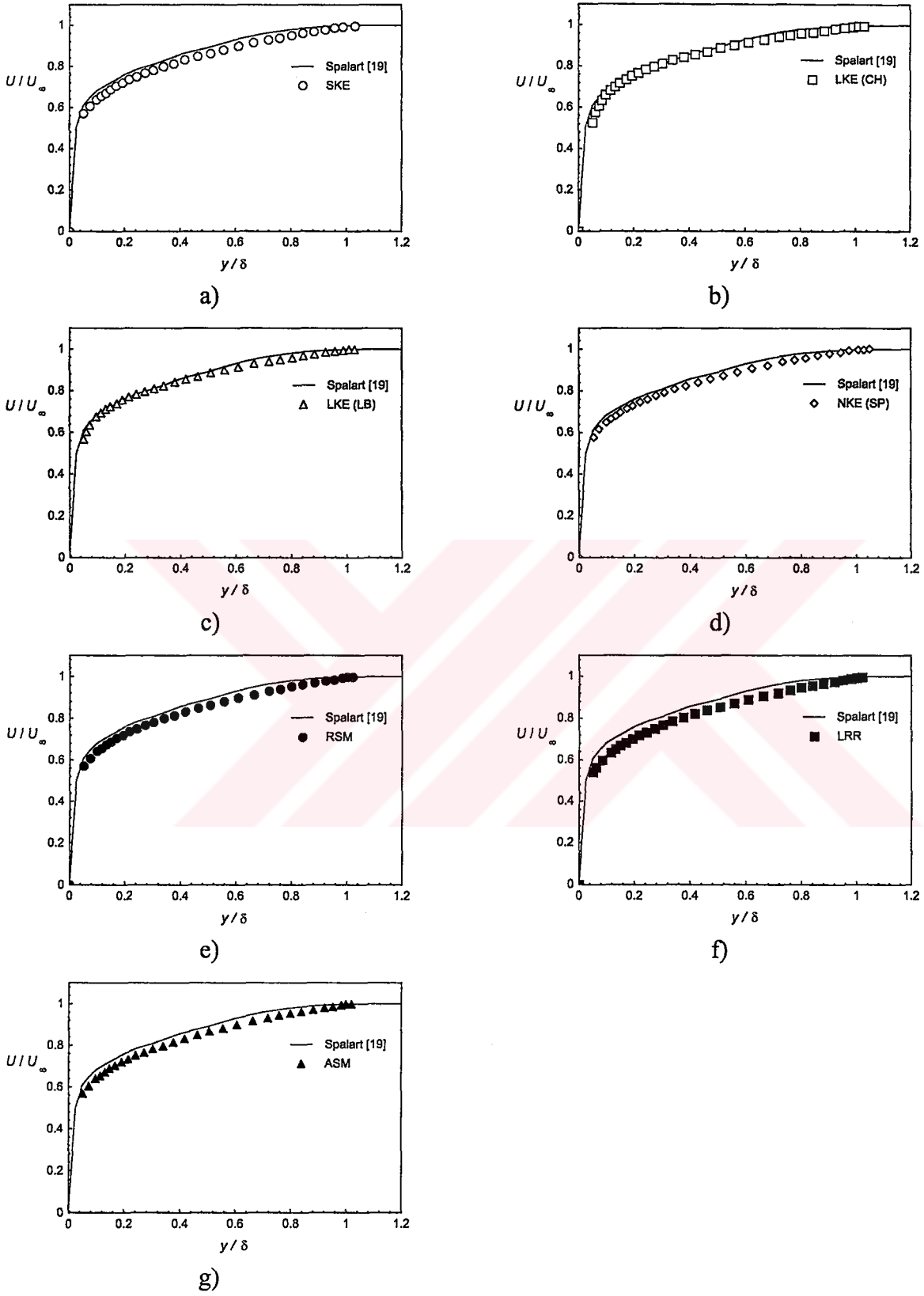
Şekil 9. Düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans kayma gerilmesi ile karşılaştırılması ($Re_\theta = 670$)



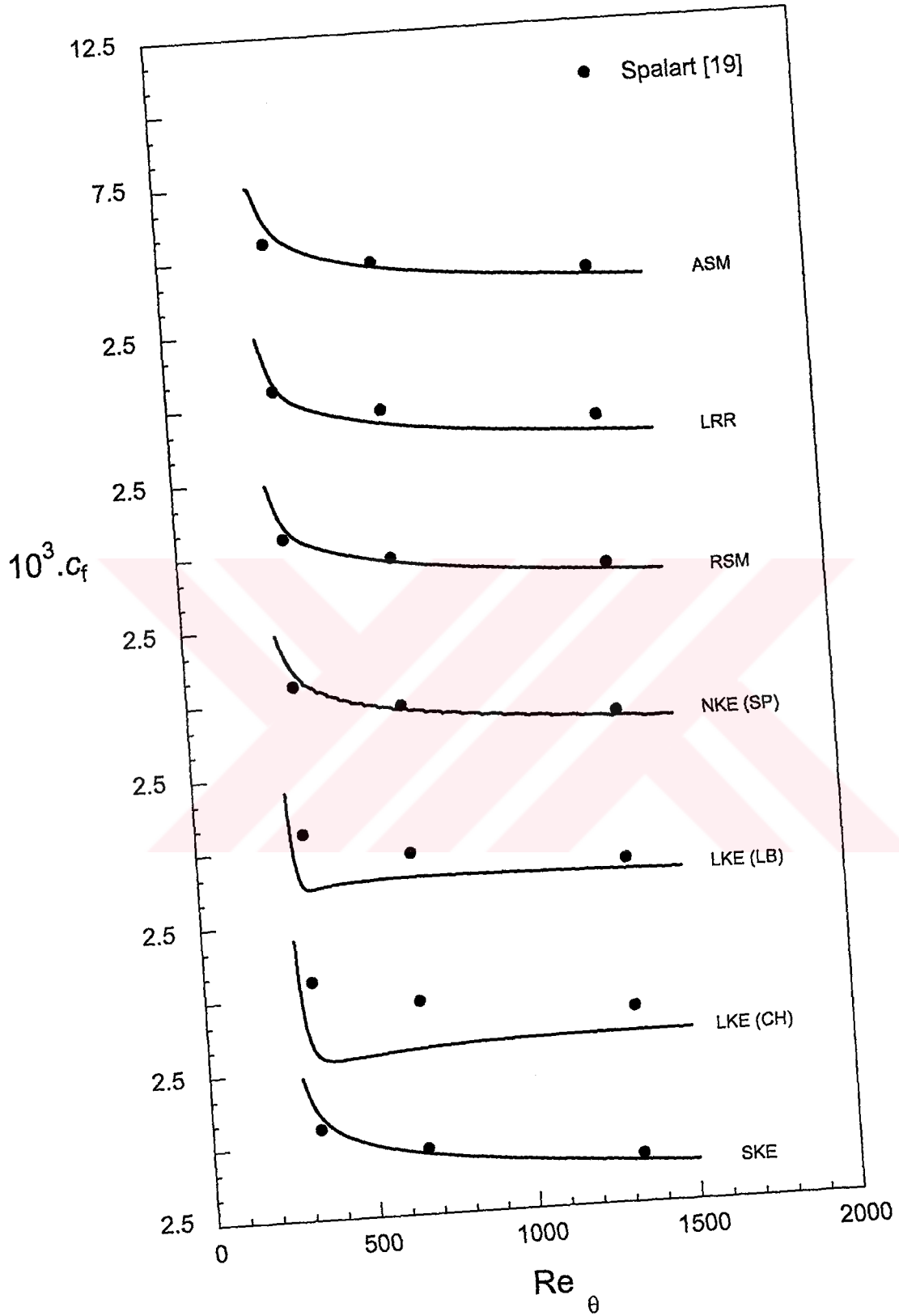
Şekil 10. Düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans kayma gerilmesi ile karşılaştırılması ($Re_\theta = 1410$)



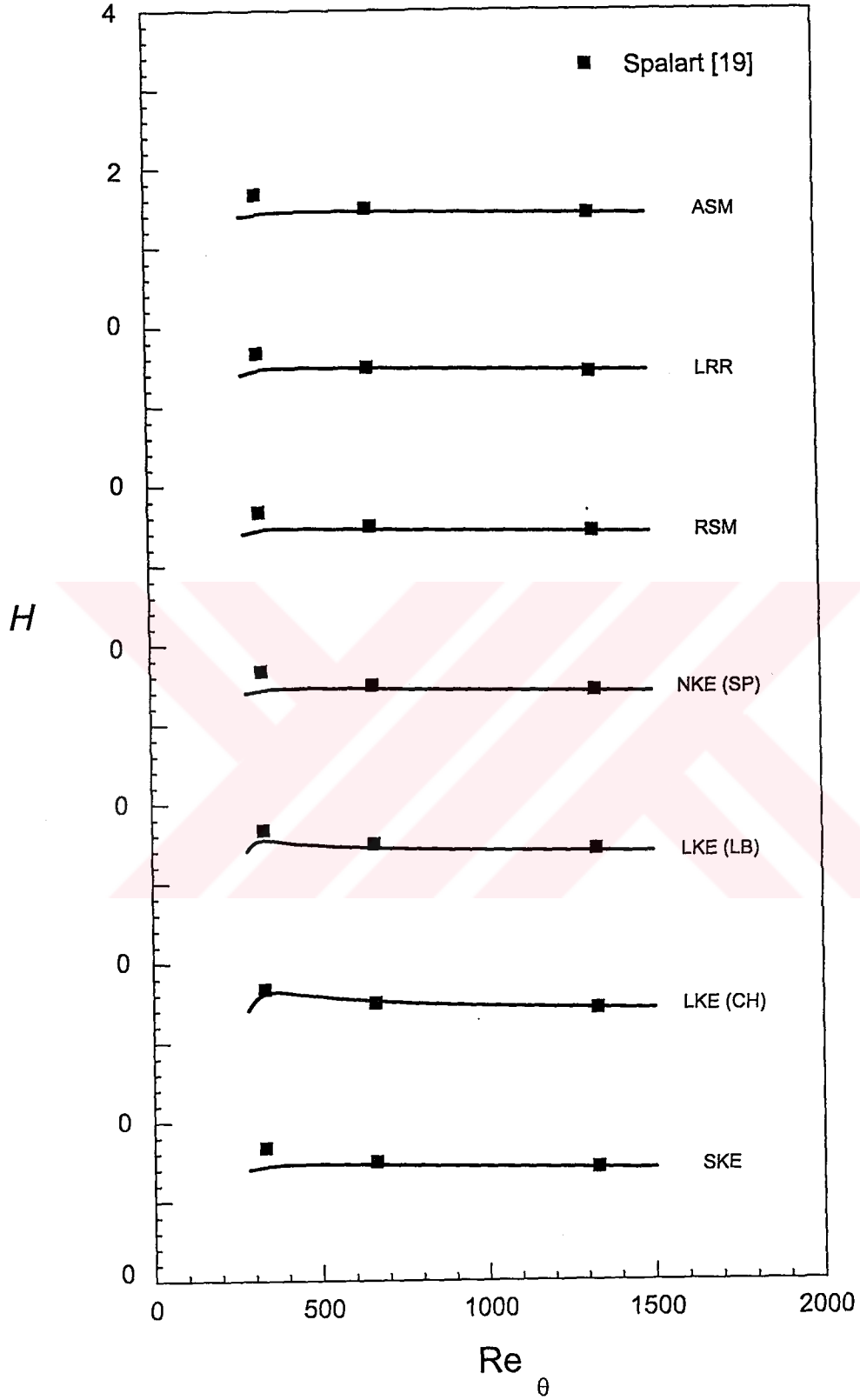
Şekil 11. Düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin ortalama hız profilleri ile karşılaştırılması ($Re_\theta = 670$)



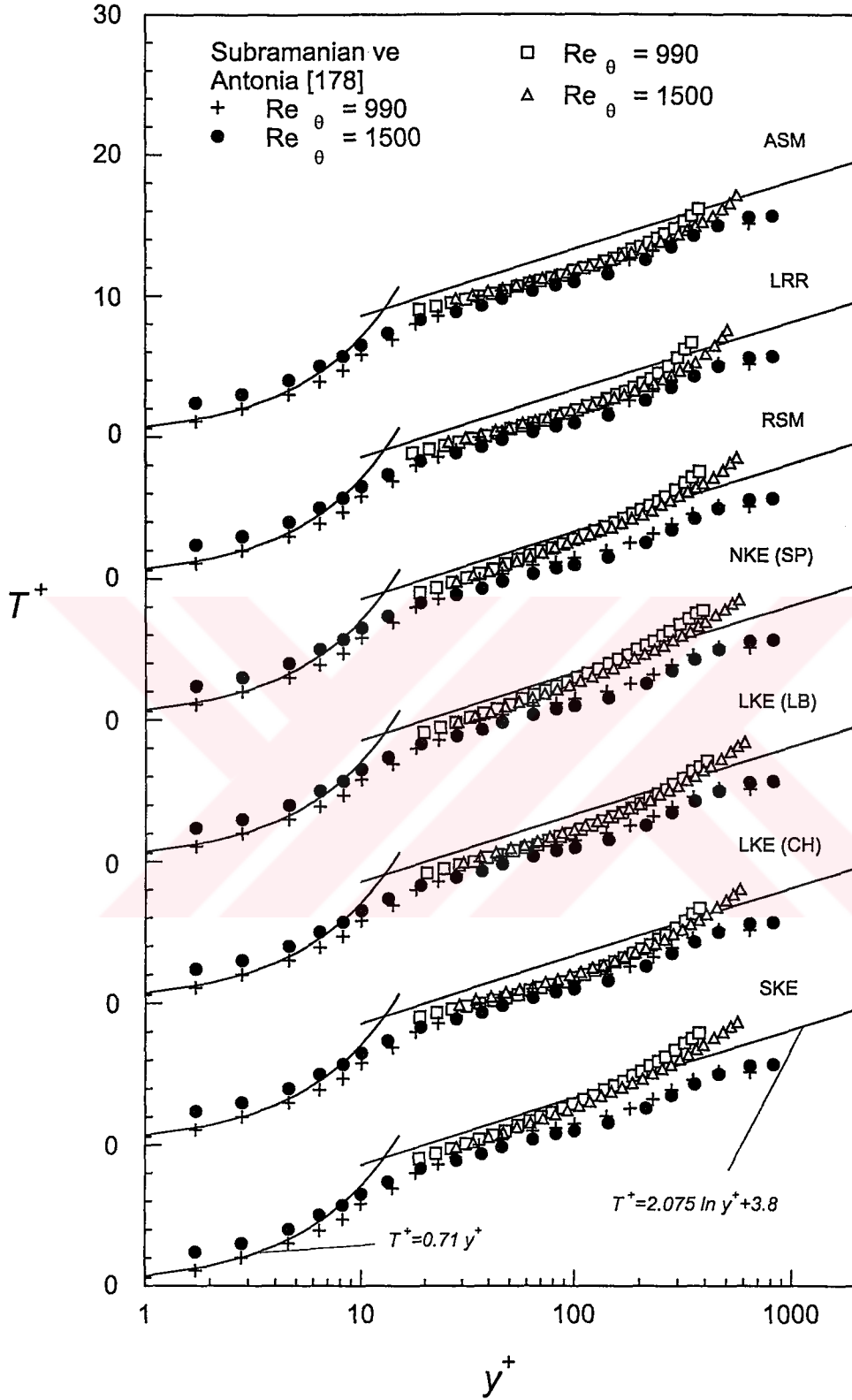
Şekil 12. Düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin ortalama hız profilleri ile karşılaştırılması ($Re_\theta = 1410$)



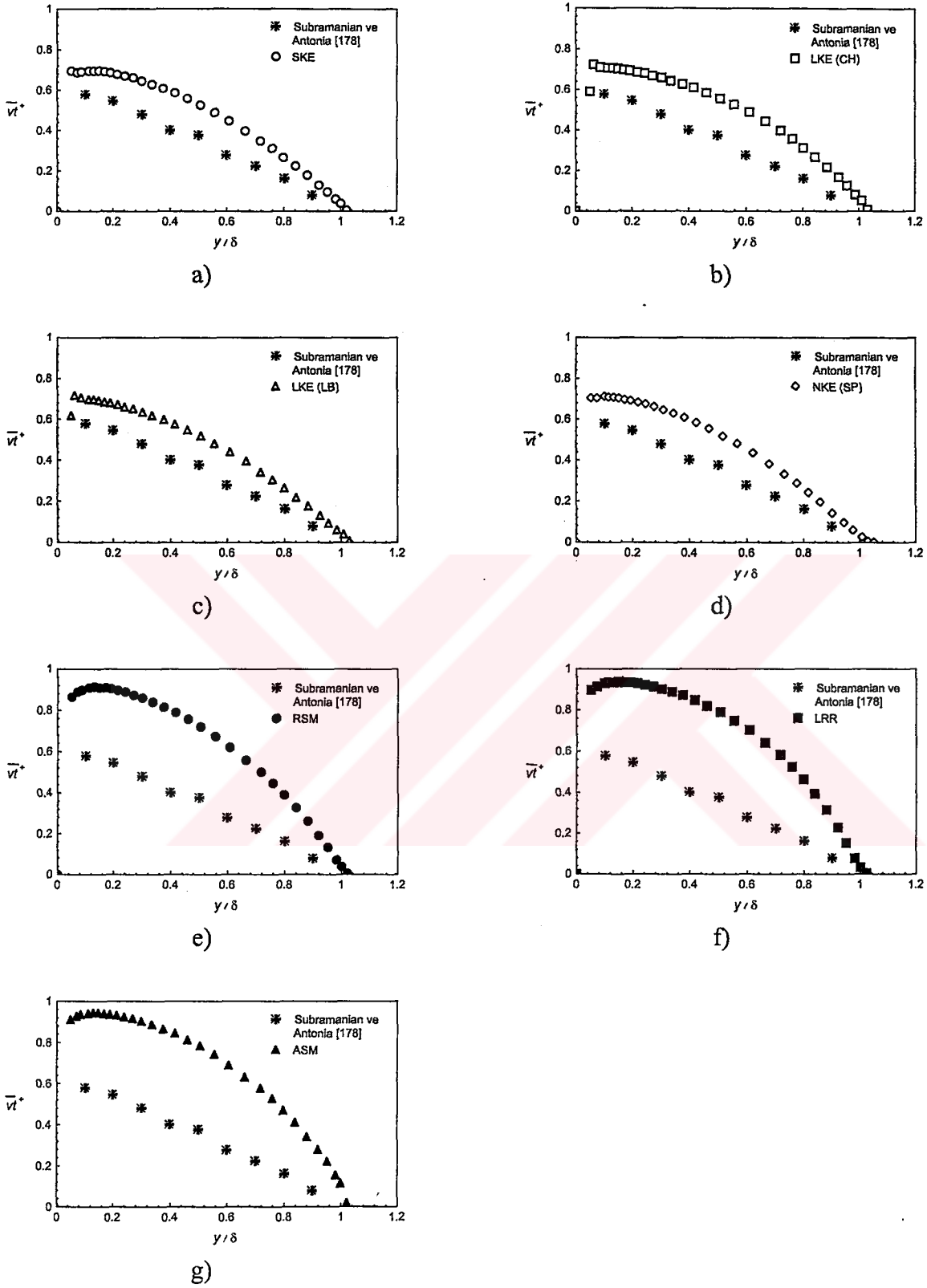
Şekil 13. Düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin sürtünme katsayısının akış doğrultusunda değişimi ile karşılaştırılması



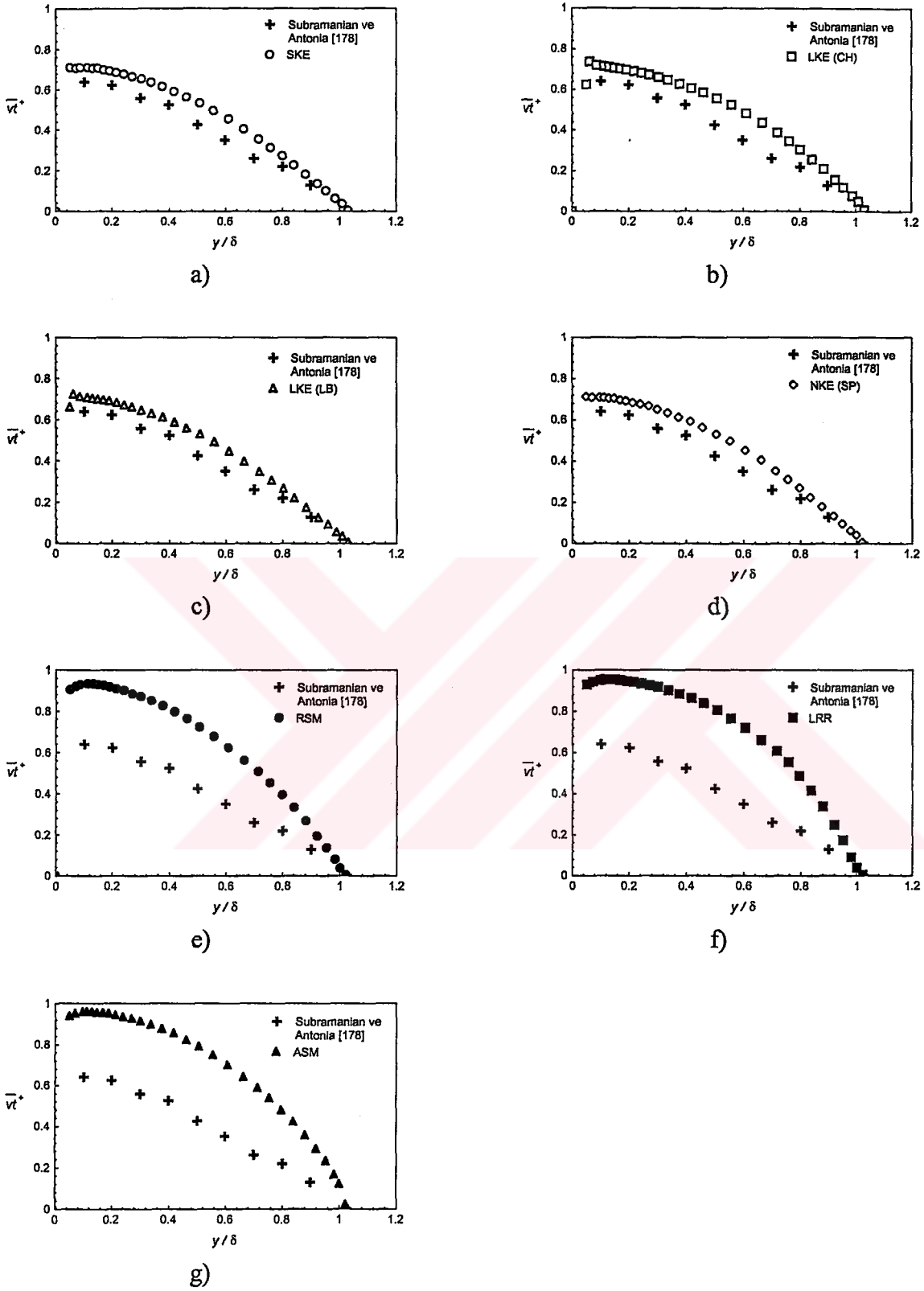
Şekil 14. Düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin şekil faktörünün akış doğrultusunda değişimi ile karşılaştırılması



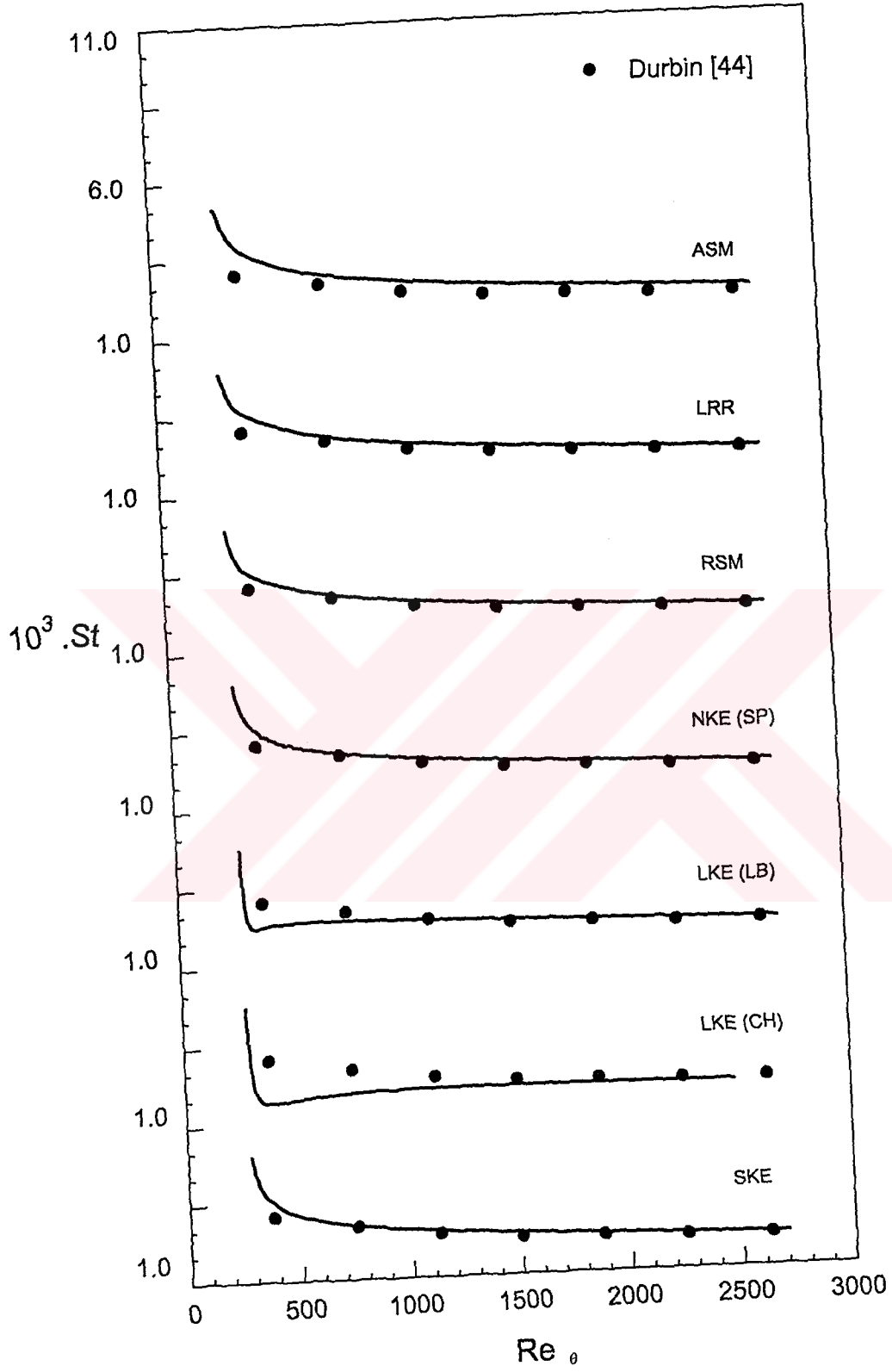
Şekil 15. Düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin ortalama sıcaklık profilleri ile karşılaştırılması



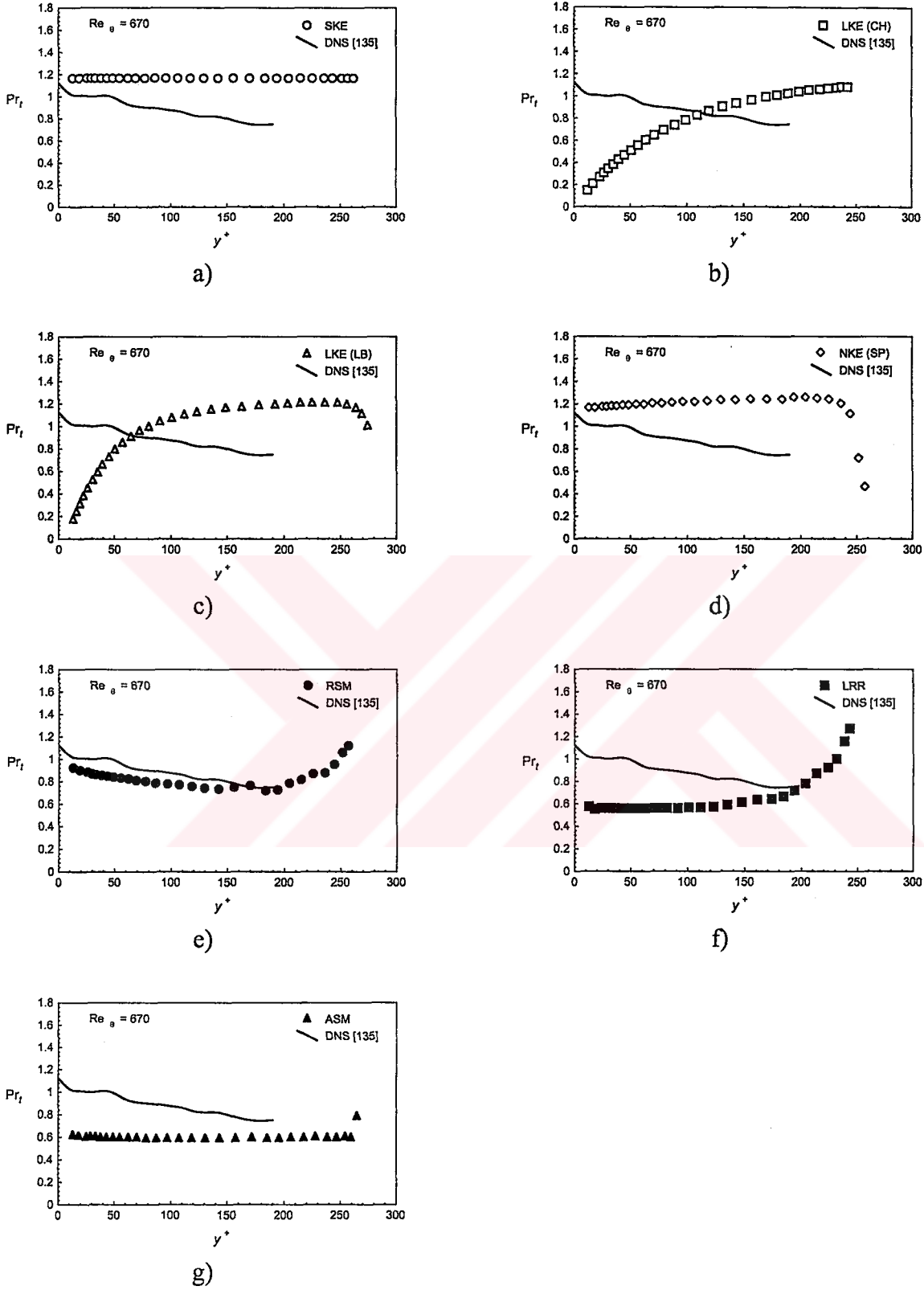
Şekil 16. Düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin akışın normali doğrultusundaki türbülans ısı akısı ile karşılaştırılması ($Re_{\theta} = 990$)



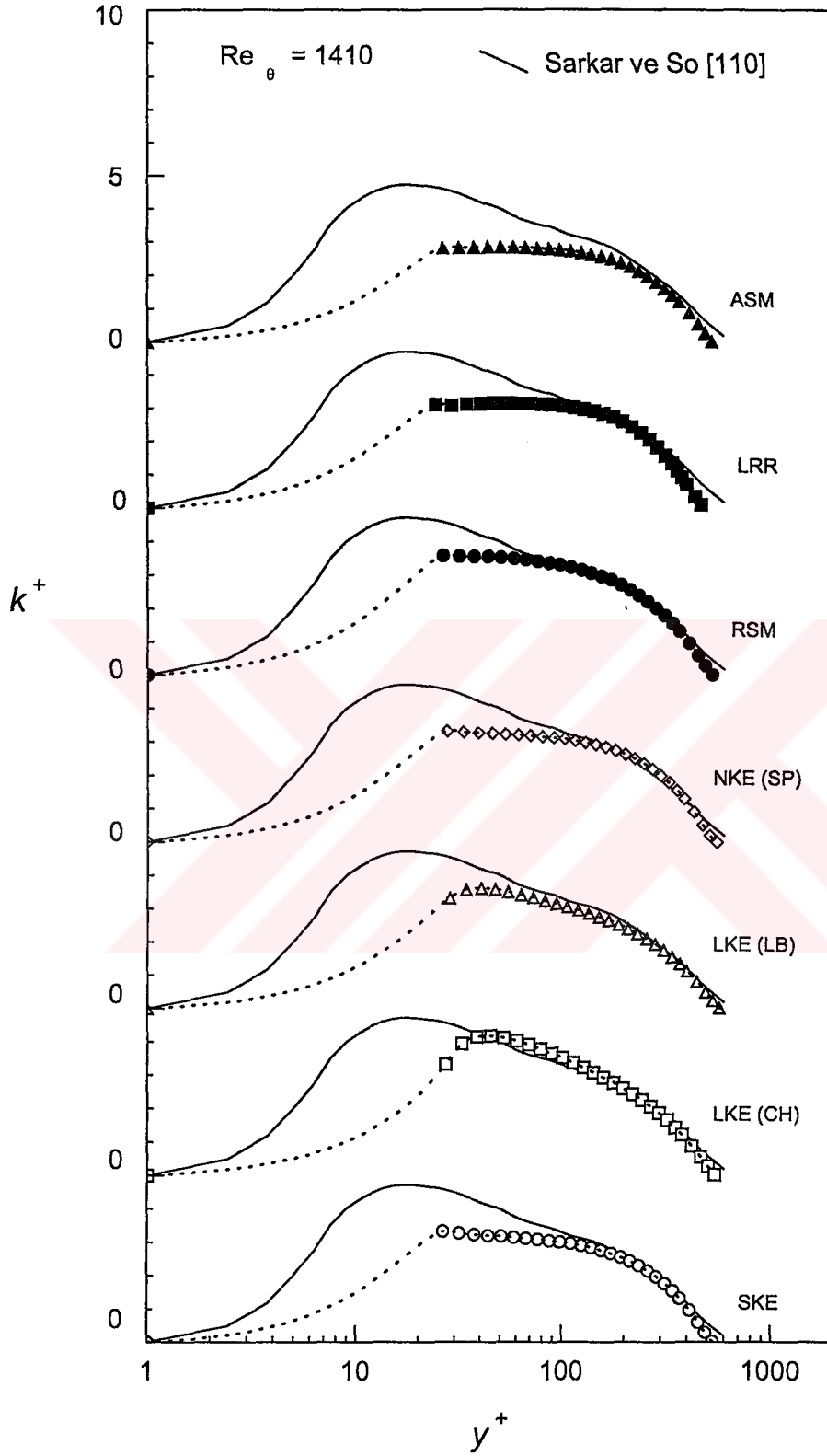
Şekil 17. Düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin akışın normaline doğrultusundaki türbülans ısı akısı ile karşılaştırılması ($Re_\theta = 1500$)



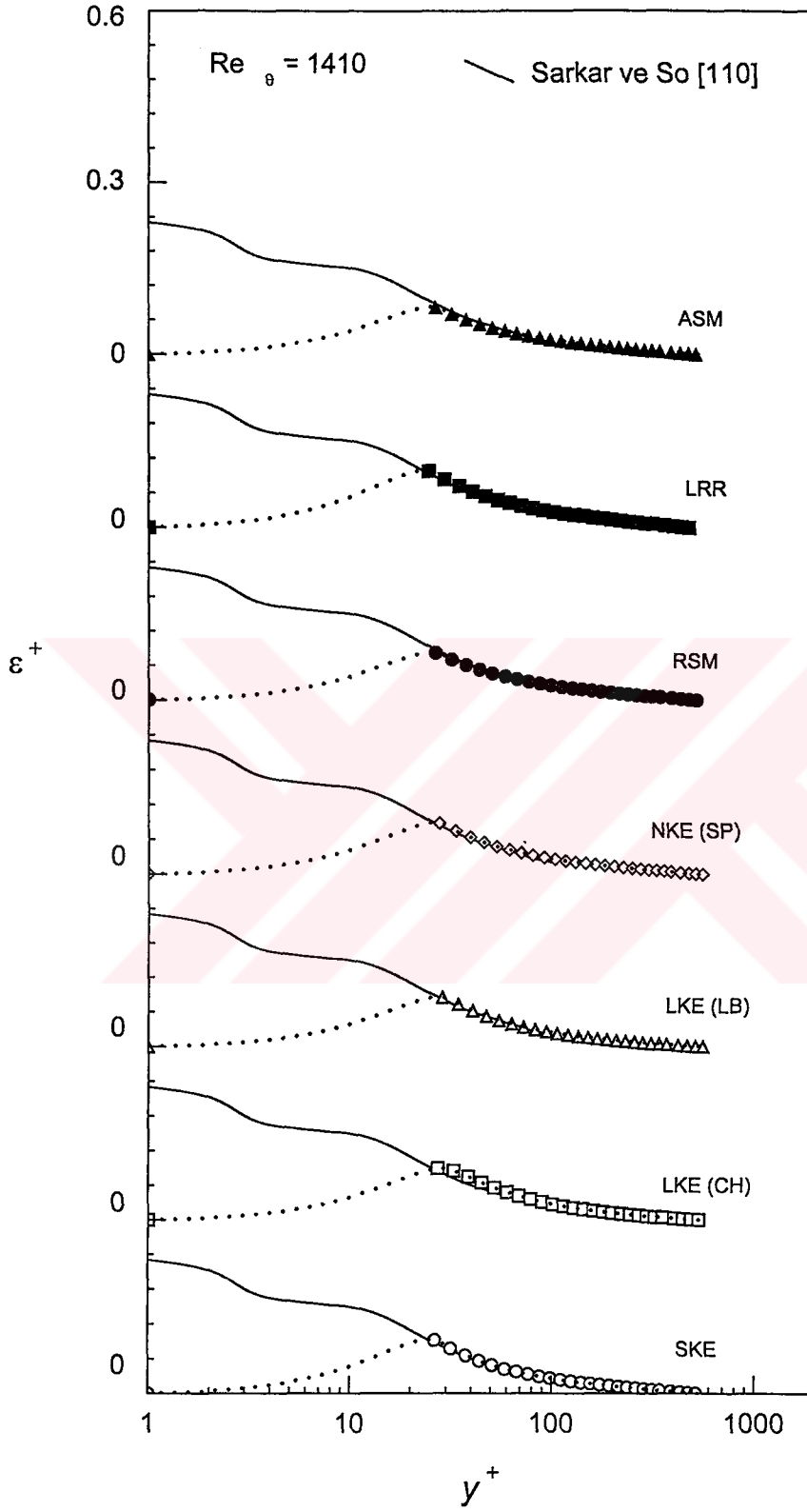
Şekil 18. Düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin Stanton sayısının akış doğrultusunda değişimi ile karşılaştırılması



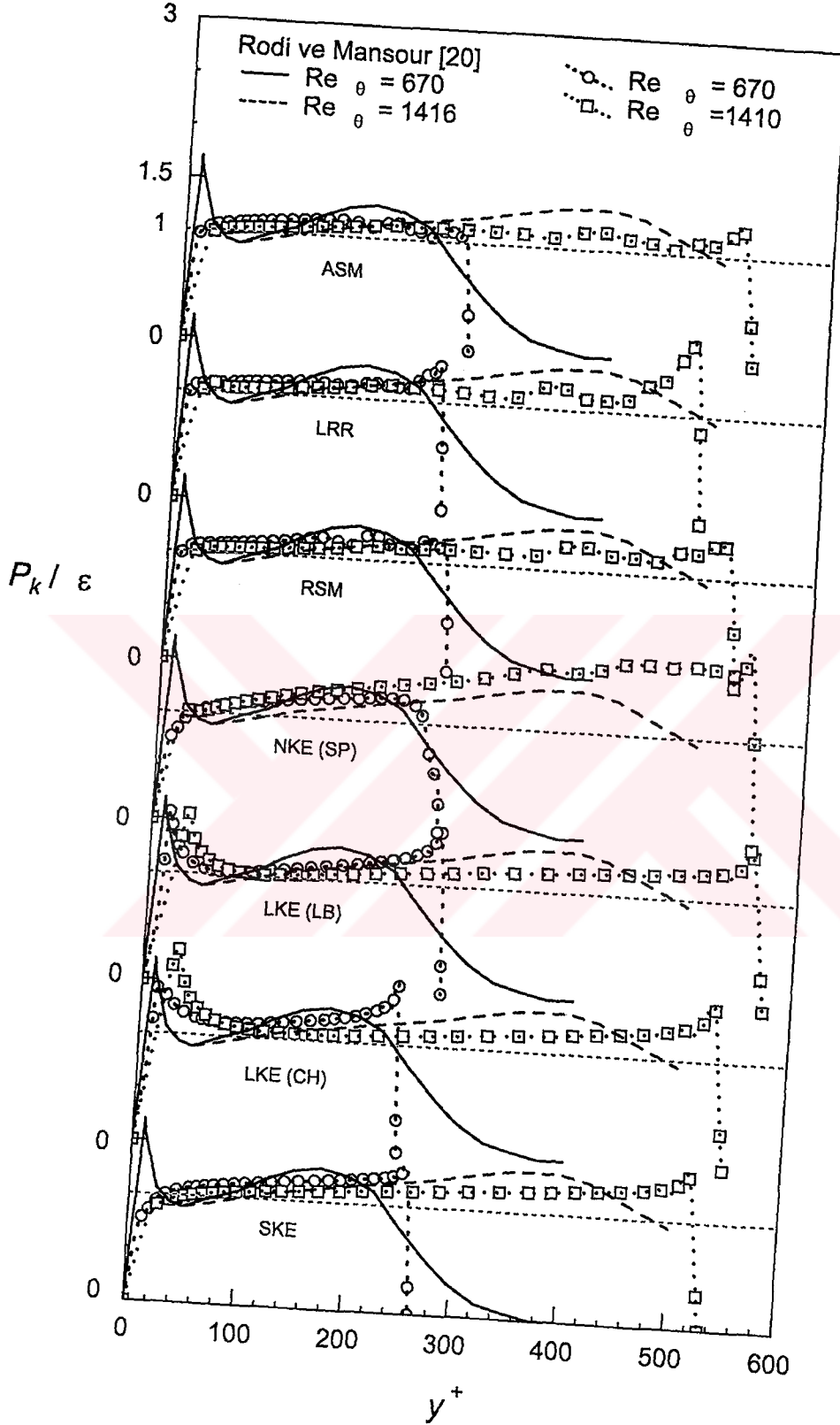
Şekil 19. Düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans Prandtl sayısı ile karşılaştırılması ($Re_\theta = 670$)



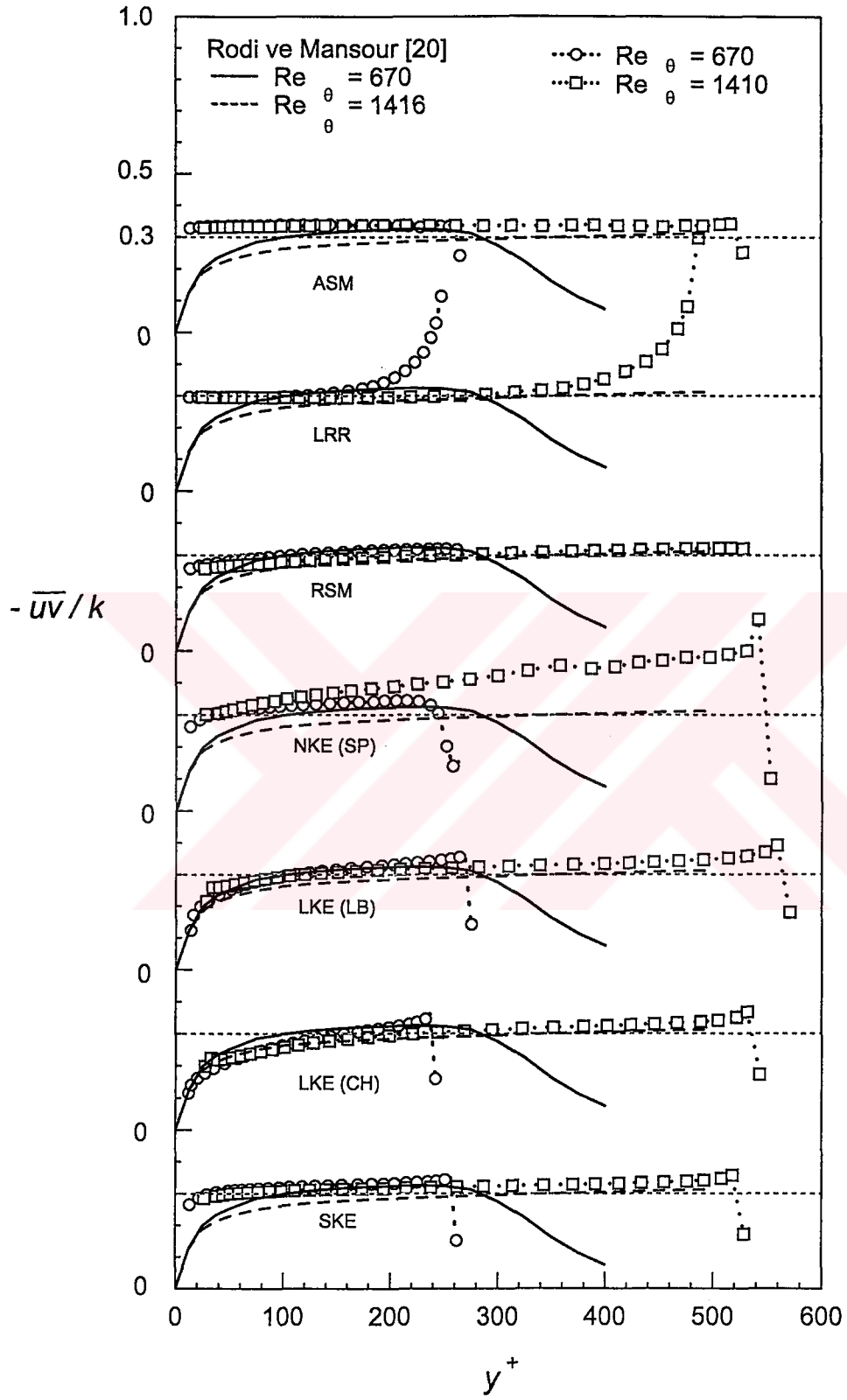
Şekil 20. Düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans kinetik enerji ile karşılaştırılması ($Re_\theta = 1410$)



Şekil 21. Düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans kinetik enerjinin yutulması ile karşılaştırılması ($Re_\theta = 1410$)



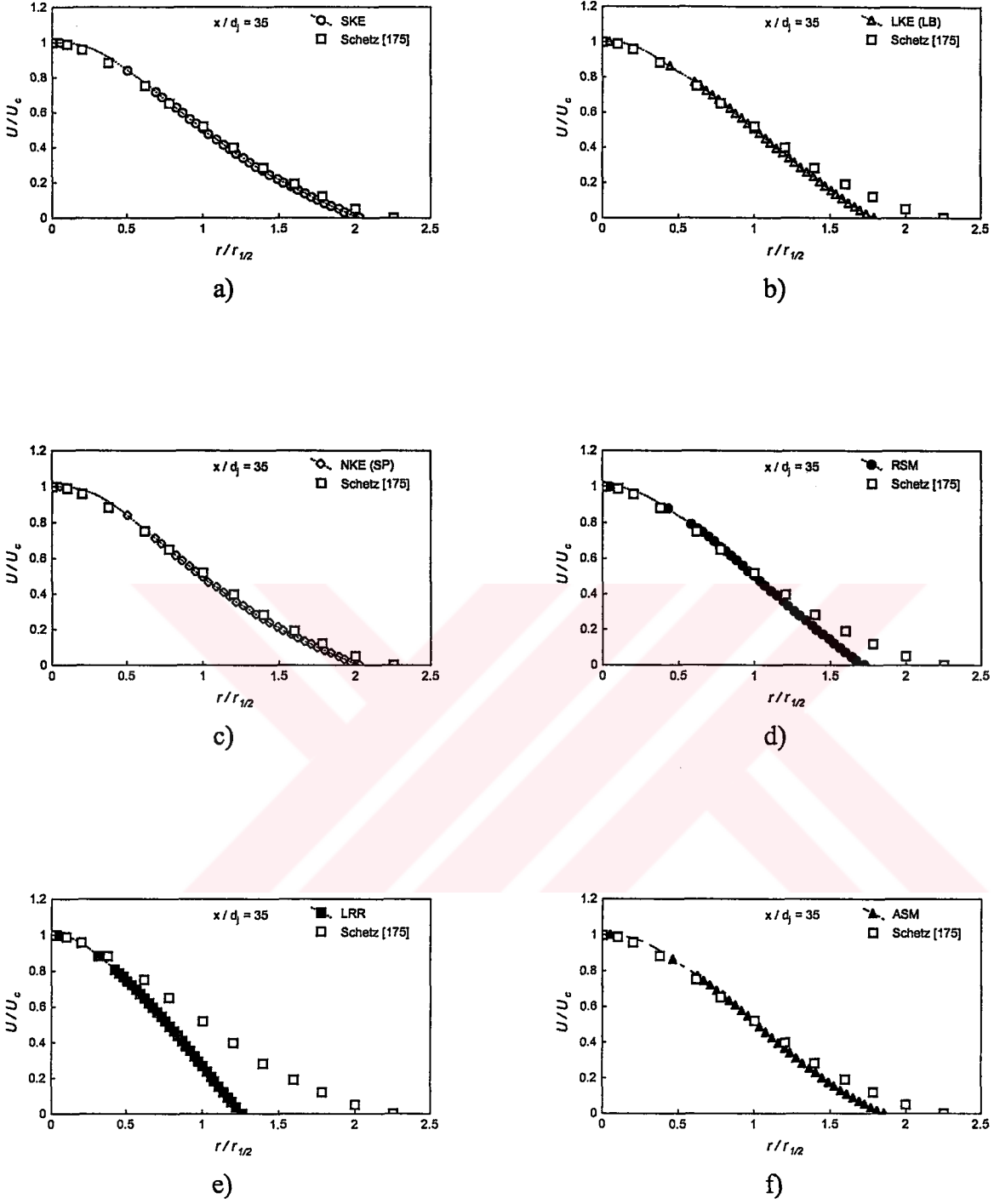
Şekil 22. Düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans kinetik enerji üretiminin kinetik enerjinin yutulmasına oranı ile karşılaştırılması



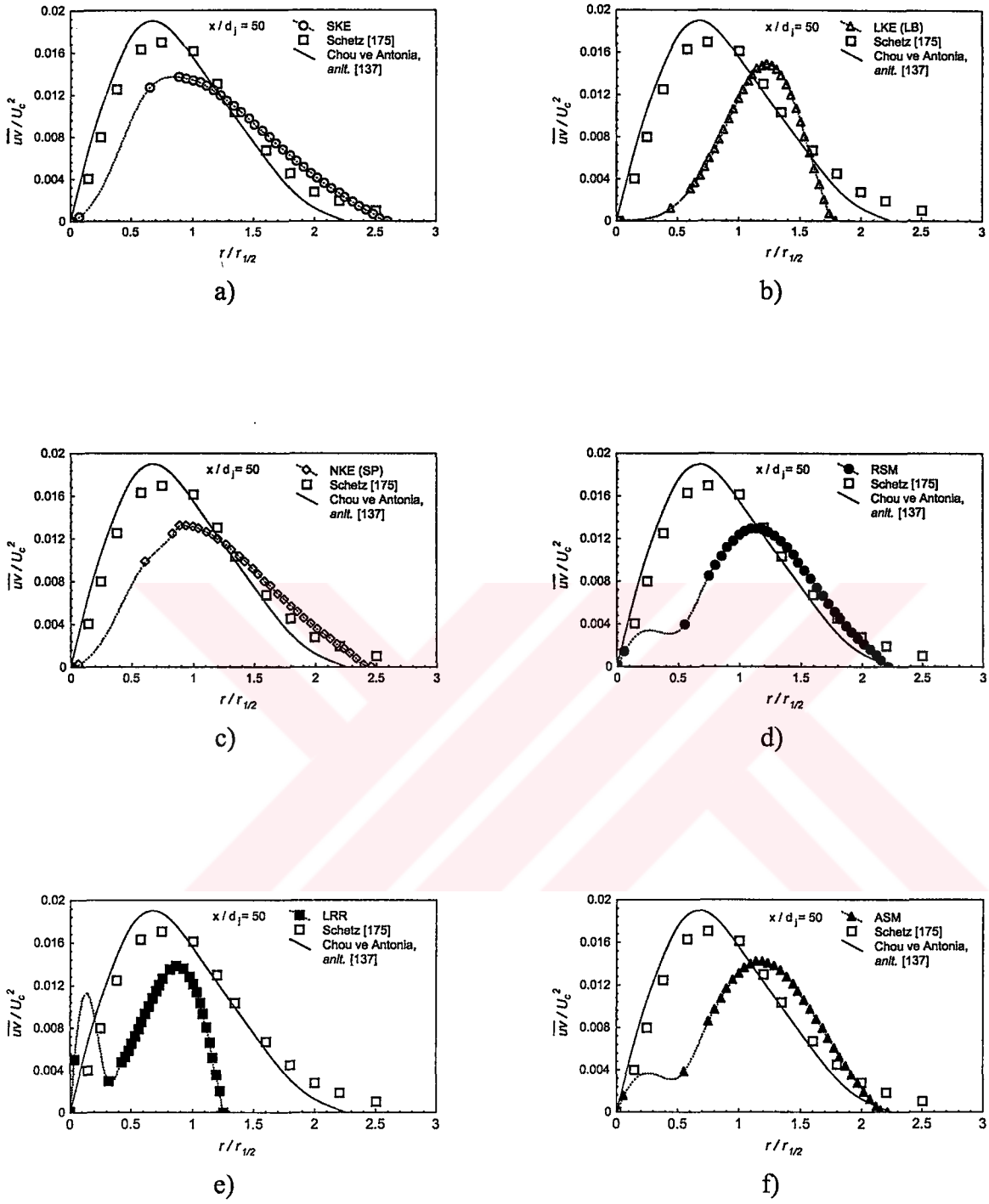
Şekil 23. Düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin kayma gerilmesinin kinetik enerjiye oranı ile karşılaştırılması

3.2. Dairesel Serbest Jet Akışında Elde Edilen Bulgular

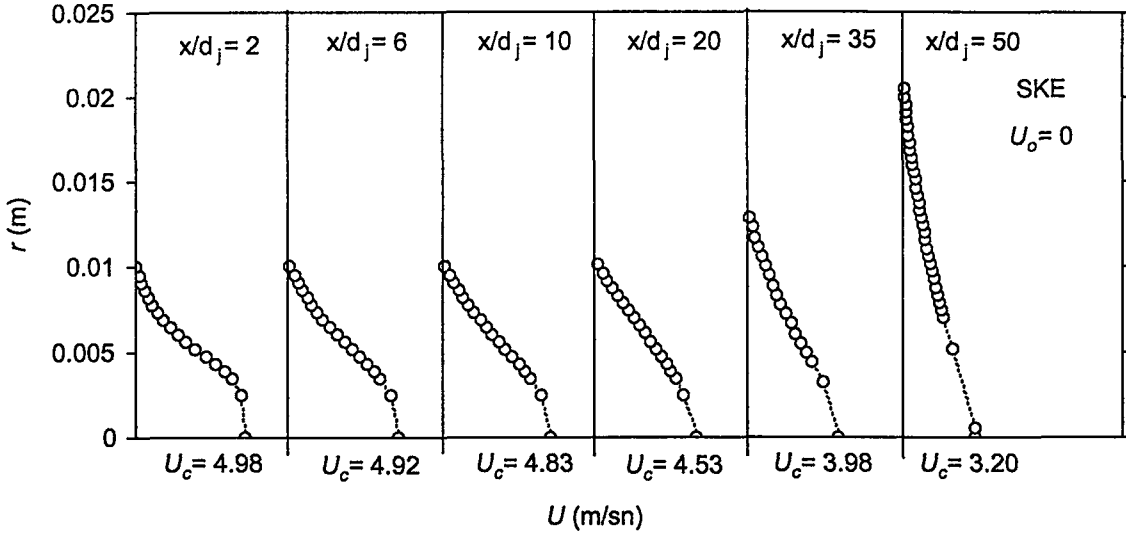
Bu kısımda dairesel serbest jet akışının, altı farklı türbülans modeli kullanılarak elde edilen bulguları verilmiştir. Bu akış koşulu için Chien' in düşük Reynolds sayılı (yakın-duvar) $k - \varepsilon$ modeli, bu modelin azaltma fonksiyonlarında y^+ tanımı bulunmasından dolayı kullanılamamıştır. Momentum sınır tabakanın altı farklı model kullanılarak çözümlenmesiyle elde edilen bulgular; Şekil 24' de U/U_c ' nin $r/r_{1/2}$ ile değişimi, Şekil 25' de \overline{uv}/U_c^2 ' nin $r/r_{1/2}$ ile değişimi ve Şekiller 26-31' de U ' nun r ile değişimleri grafikler halinde verilmiştir. Çözümler için seçilen istasyonlar, literatür de dikkate alınarak U/U_c için; $x/d_j = 35$, \overline{uv}/U_c^2 için; $x/d_j = 50$ ve U için ise; $x/d_j = 2$, $x/d_j = 6$, $x/d_j = 10$, $x/d_j = 20$, $x/d_j = 35$ ve $x/d_j = 50$ şeklindedir. Farklı türbülans modelleriyle elde edilen bulguların literatürle karşılaştırılması, Şekil 24' de verilen radyal yöndeki ortalama hız için; Schetz [175]' den alınan deneysel verilerle ve Şekil 25' de verilen radyal yöndeki kayma gerilmesi için; Schetz [175]' den alınan deneysel verilerle ve Chou ve Antonia [137]' dan alınan analitik verilerle yapılmıştır. Isıl sınır tabakanın altı farklı türbülans modeli kullanılarak çözümlenmesiyle elde edilen bulgular; Şekil 32' de T/T_c ' nin $r/r_{1/2}$ ile değişimi, Şekil 33' de $\overline{vt}/U_c T_c$ ' nin $r/r_{1/2}$ ile değişimi, Şekil 34' de Pr_t ' nin $r/r_{1/2}$ ile değişimi ve Şekiller 35-40' da T ' nin r ile değişimleri grafikler halinde verilmiştir. Isıl sınır tabakanın çözümlenmesi için seçilen istasyonlar ise literatür de dikkate alınarak; T/T_c ve $\overline{vt}/U_c T_c$ için; $x/d_j = 35$, Pr_t için $x/d_j = 30$ ve T için momentum sınır tabakaya benzer şekilde; $x/d_j = 2$, $x/d_j = 6$, $x/d_j = 10$, $x/d_j = 20$, $x/d_j = 35$ ve $x/d_j = 50$ şeklindedir. Çözümlemesi yapılan ısıl sınır tabakanın karakteristiklerinin literatürle karşılaştırılması, Şekil 32' de verilen radyal yöndeki ortalama sıcaklık için; Schetz [175]' den alınan deneysel verilerle, Şekil 33' de verilen radyal yöndeki türbülans ısı akısı için; Chou ve Antonia [137]' dan alınan analitik ve deneysel verilerle ve Şekil 34' de verilen türbülans Prandtl sayısı için; Chou ve Antonia [137]' dan alınan deneysel verilerle yapılmıştır.



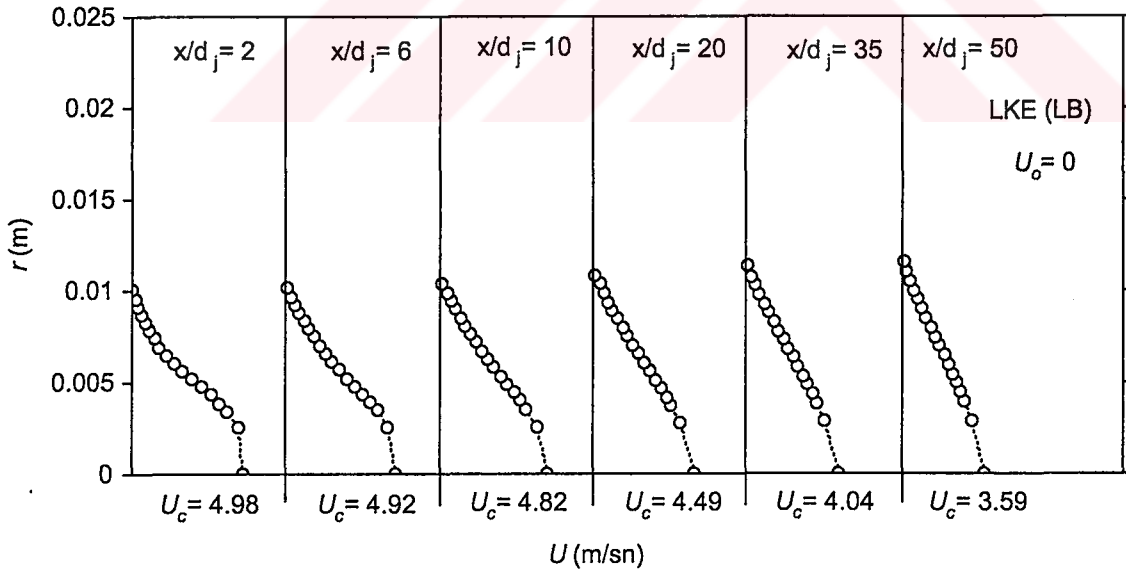
Şekil 24. Dairesel jet akışı için türbülans modellerinin radyal ortalama hız profili ile karşılaştırılması ($m = 0$, $x/d_j = 35$)



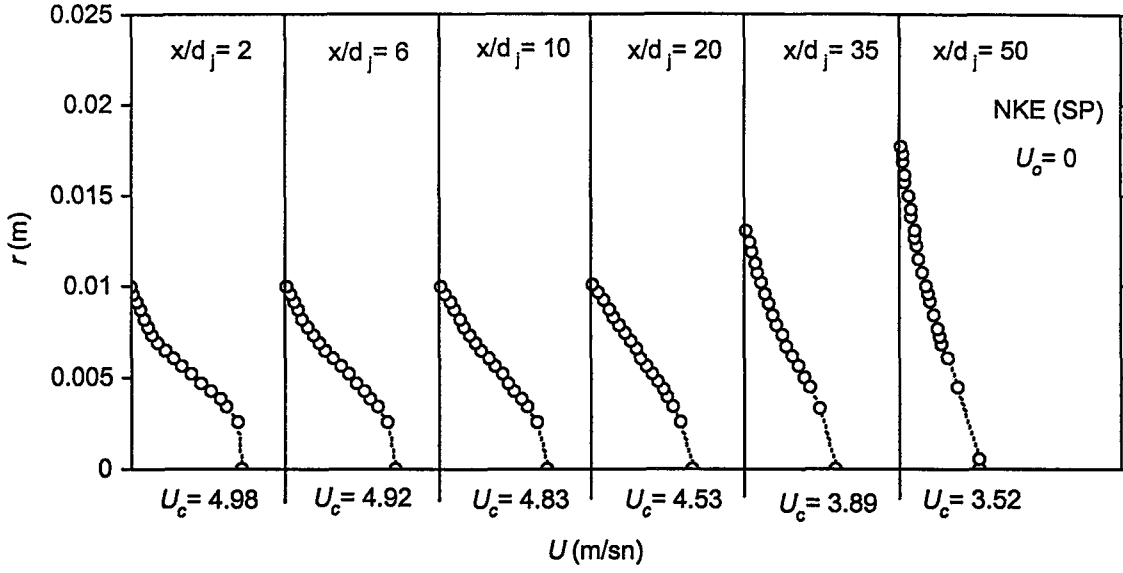
Şekil 25. Dairesel jet akışı için türbülans modellerinin radyal türbülans kayma gerilmesi ile karşılaştırılması ($m = 0$, $x/d_j = 50$)



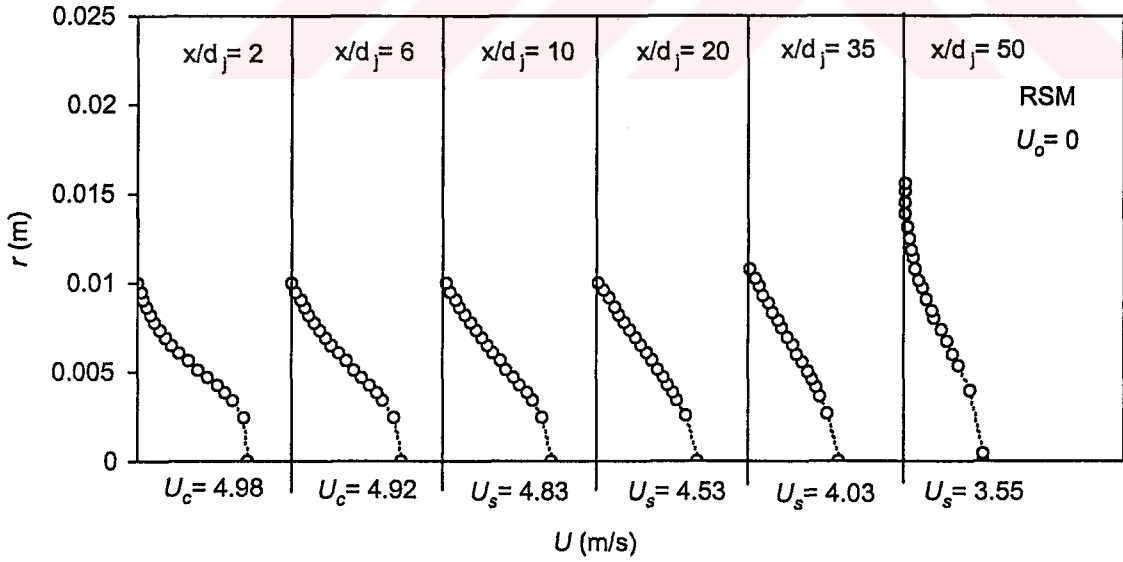
Şekil 26. Dairesel jet akışında SKE türbülans modeliyle belirlenen radyal ortalama hız profilleri ($U_o = 0$, $U_j = 5$ m/sn)



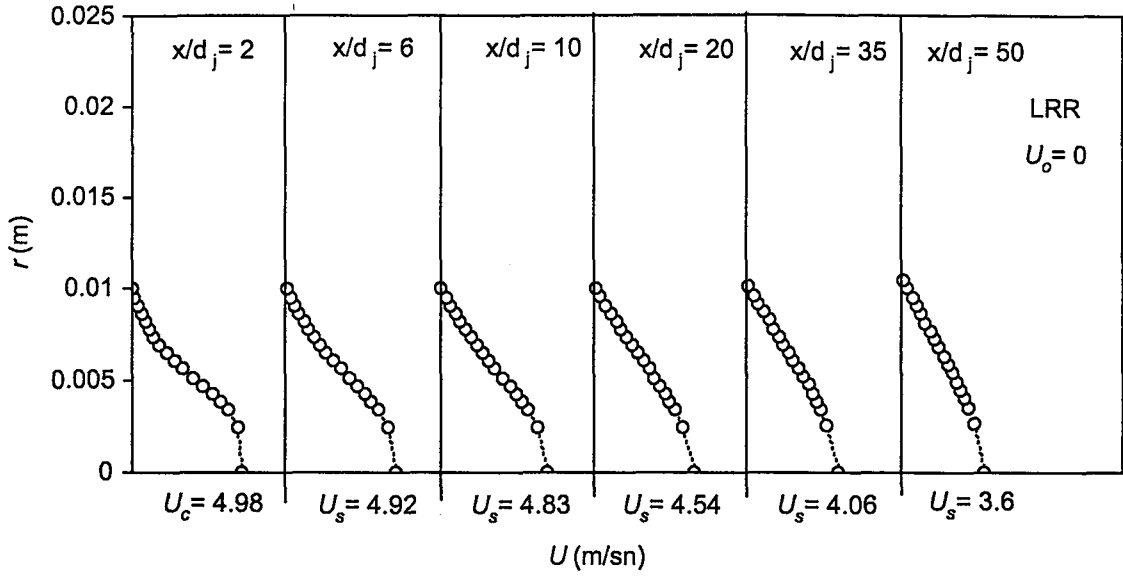
Şekil 27. Dairesel jet akışında LKE (LB) türbülans modeliyle belirlenen radyal ortalama hız profilleri ($U_o = 0$, $U_j = 5$ m/sn)



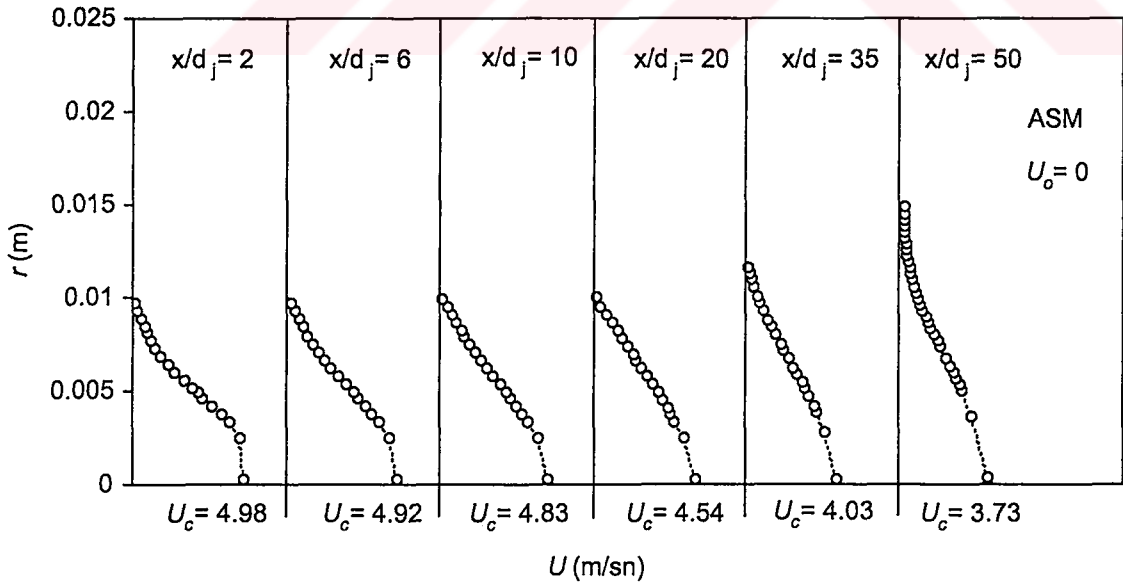
Şekil 28. Dairesel jet akışında NKE (SP) türbülans modeliyle belirlenen radyal ortalama hız profilleri ($U_o = 0$, $U_j = 5$ m/sn)



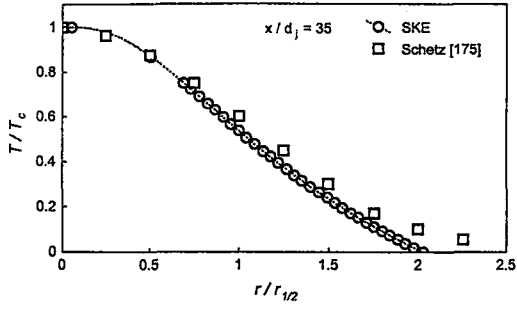
Şekil 29. Dairesel jet akışında RSM türbülans modeliyle belirlenen radyal ortalama hız profilleri ($U_o = 0$, $U_j = 5$ m/sn)



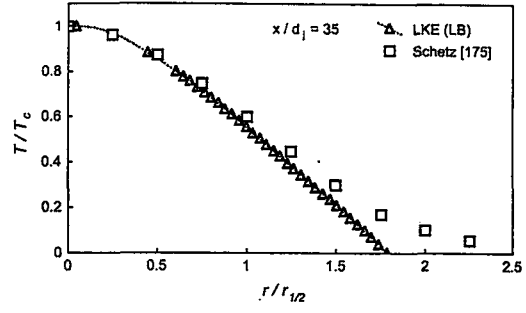
Şekil 30. Dairesel jet akışında LRR türbülans modeliyle belirlenen radyal ortalama hız profilleri ($U_0 = 0$, $U_j = 5$ m/sn)



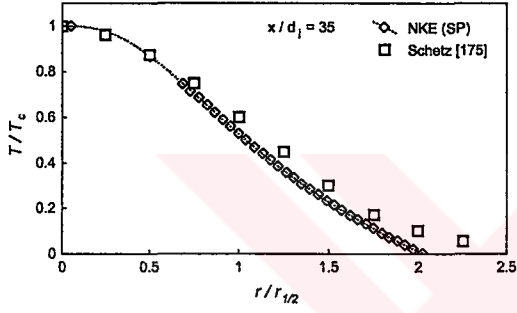
Şekil 31. Dairesel jet akışında ASM türbülans modeliyle belirlenen radyal ortalama hız profilleri ($U_0 = 0$, $U_j = 5$ m/sn)



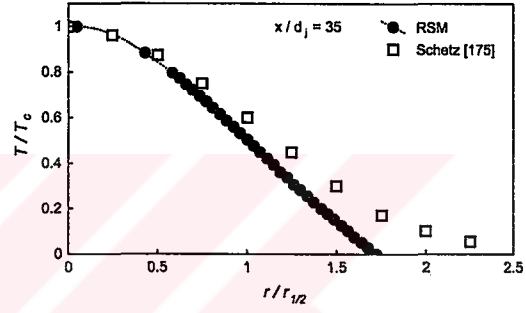
a)



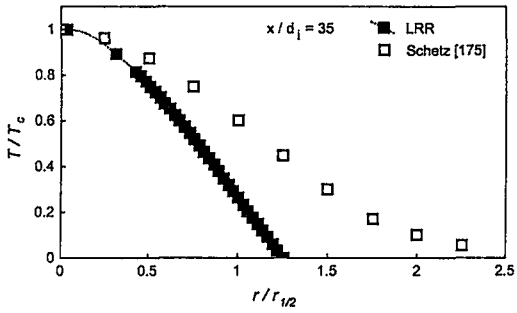
b)



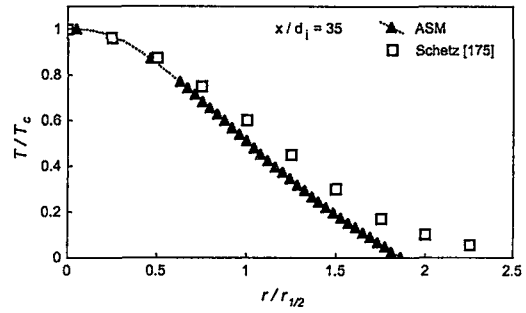
c)



d)

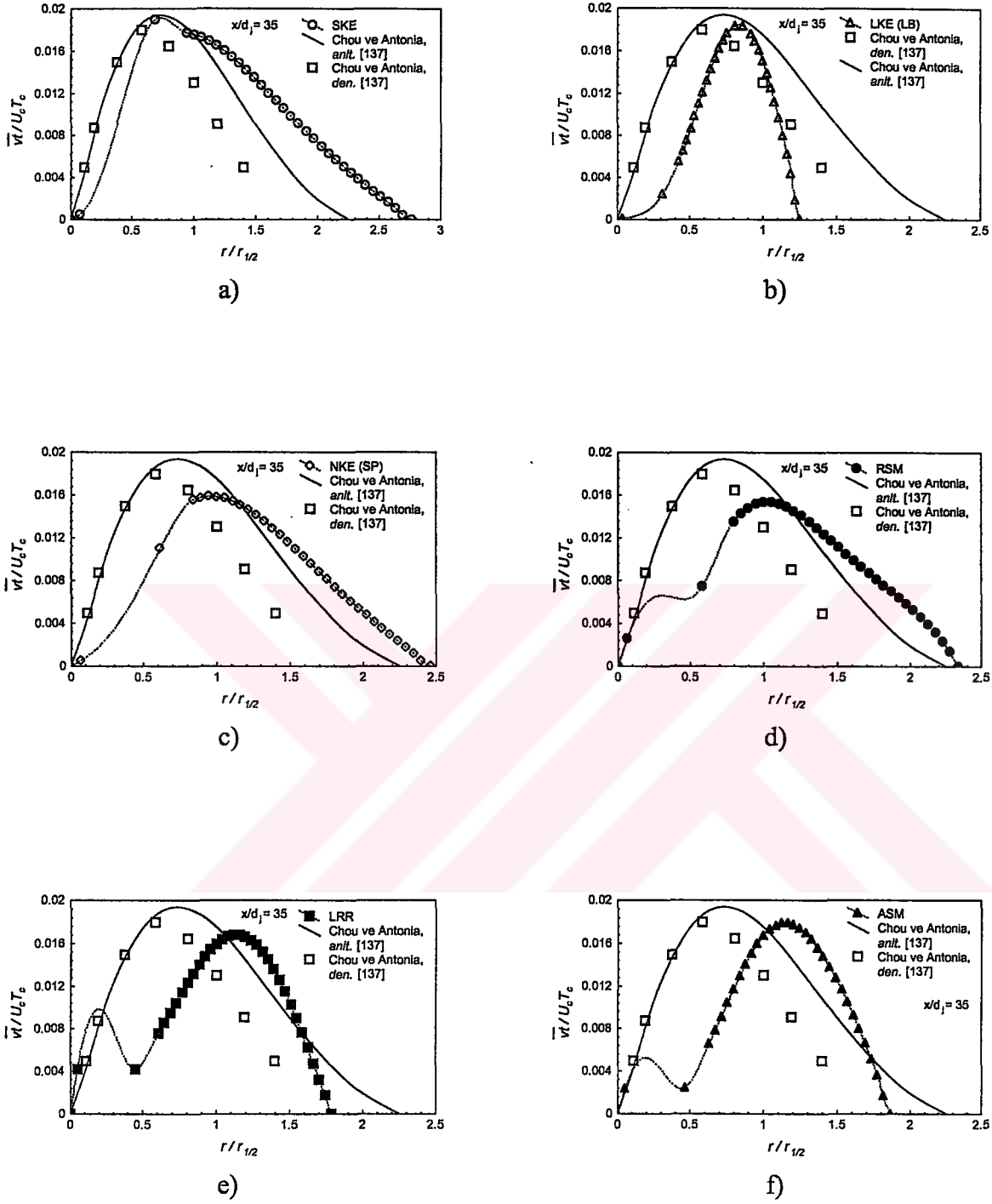


e)

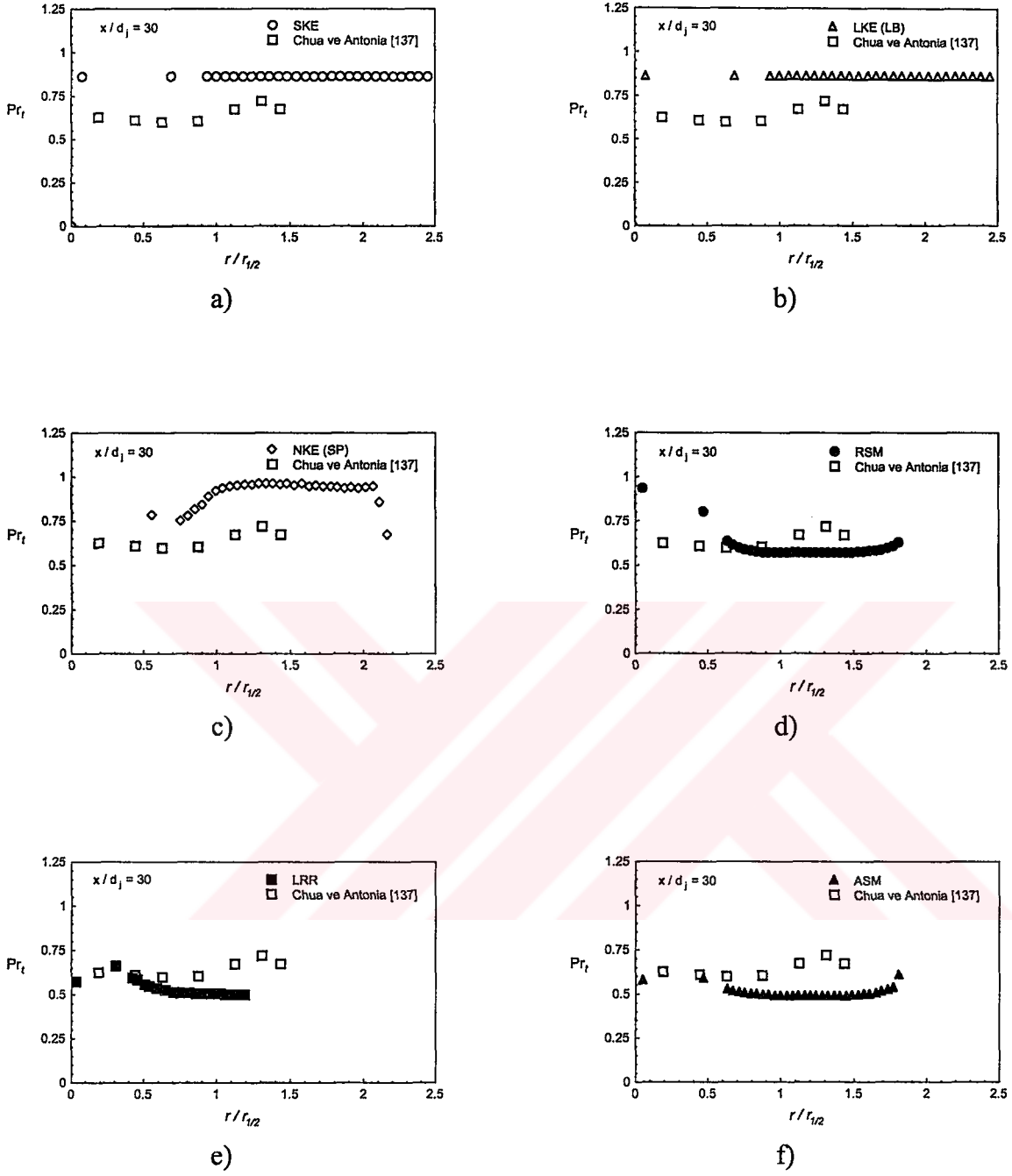


f)

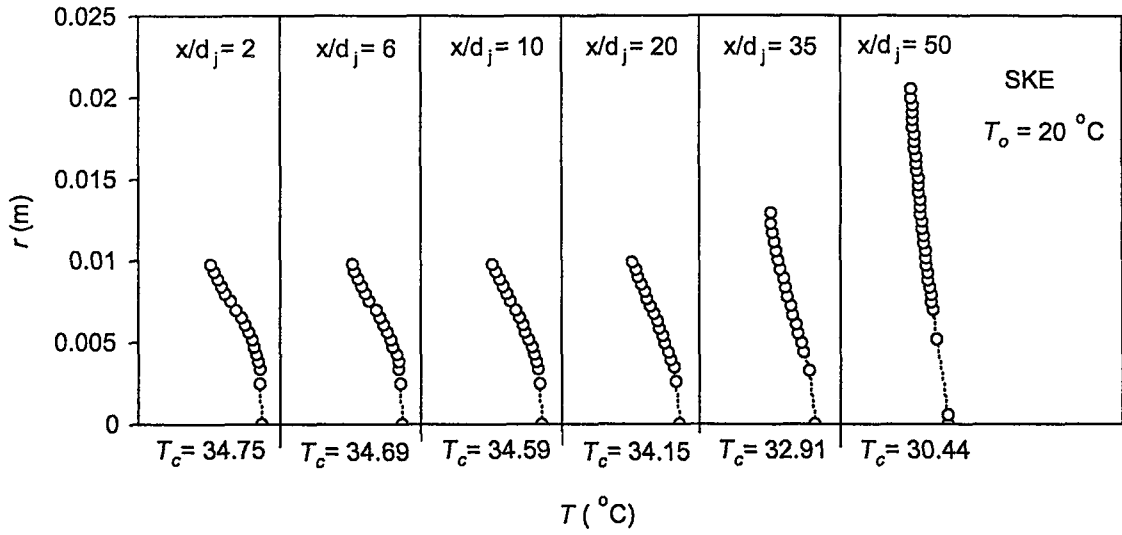
Şekil 32. Dairesel jet akışı için türbülans modellerinin radyal ortalama sıcaklık profili ile karşılaştırılması ($x/d_j = 35$)



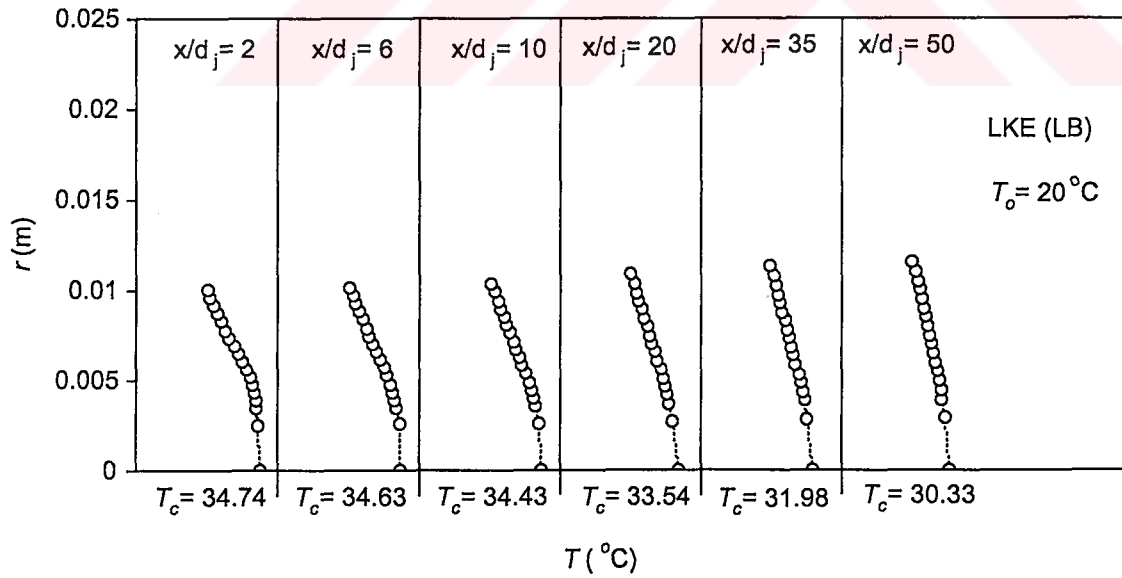
Şekil 33. Dairesel jet akışı için türbülans modellerinin radyal türbülans ısı akısı ile karşılaştırılması ($x/d_j = 35$)



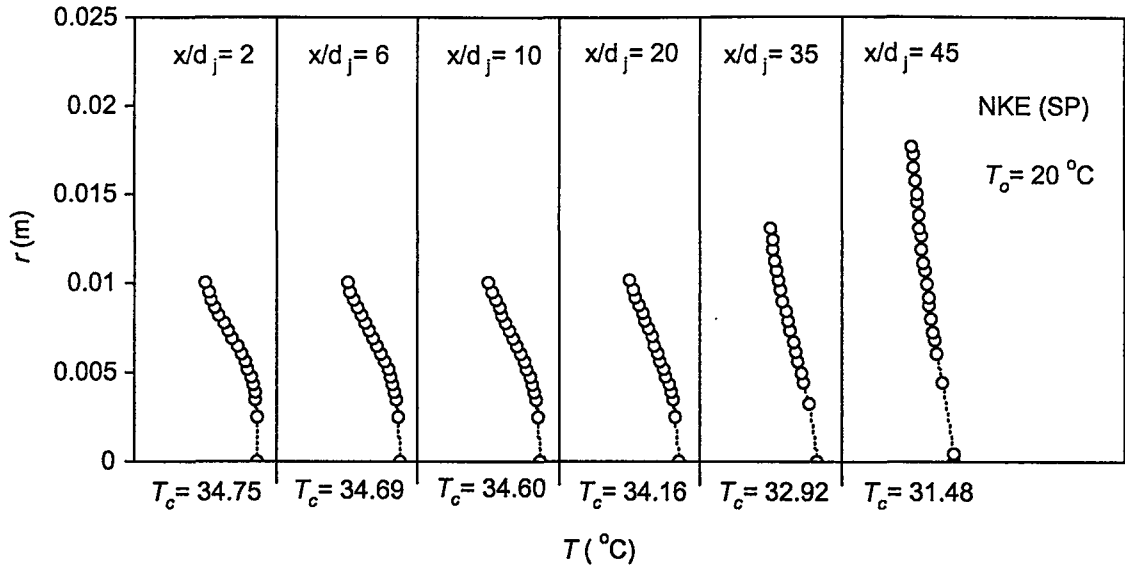
Şekil 34. Dairesel jet akışı için türbülans modellerinin radyal türbülans Prandtl sayısı ile karşılaştırılması ($x/d_j = 30$)



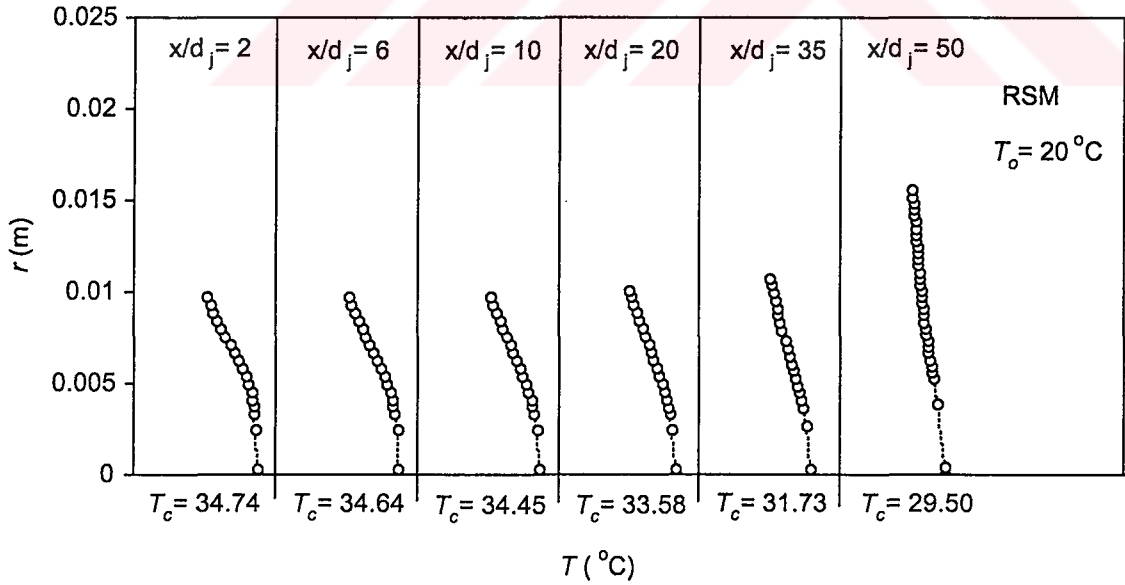
Şekil 35. Dairesel jet akışında SKE türbülans modeliyle belirlenen radyal ortalama sıcaklık profilleri ($T_o = 20$, $T_j = 35$ °C)



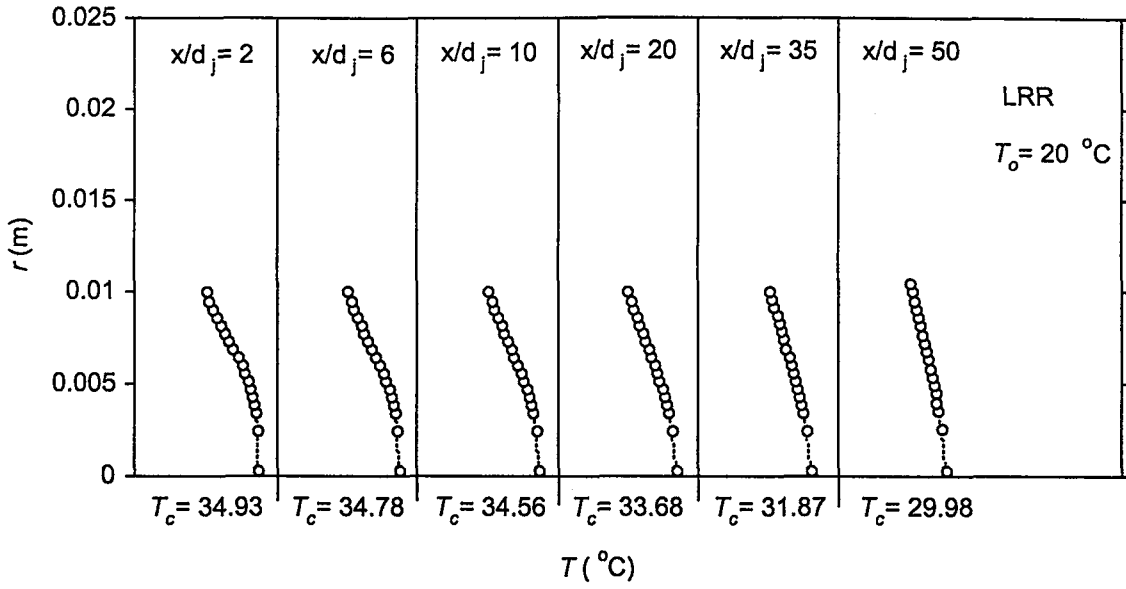
Şekil 36. Dairesel jet akışında LKE (LB) türbülans modeliyle belirlenen radyal ortalama sıcaklık profilleri ($T_o = 20$, $T_j = 35$ °C)



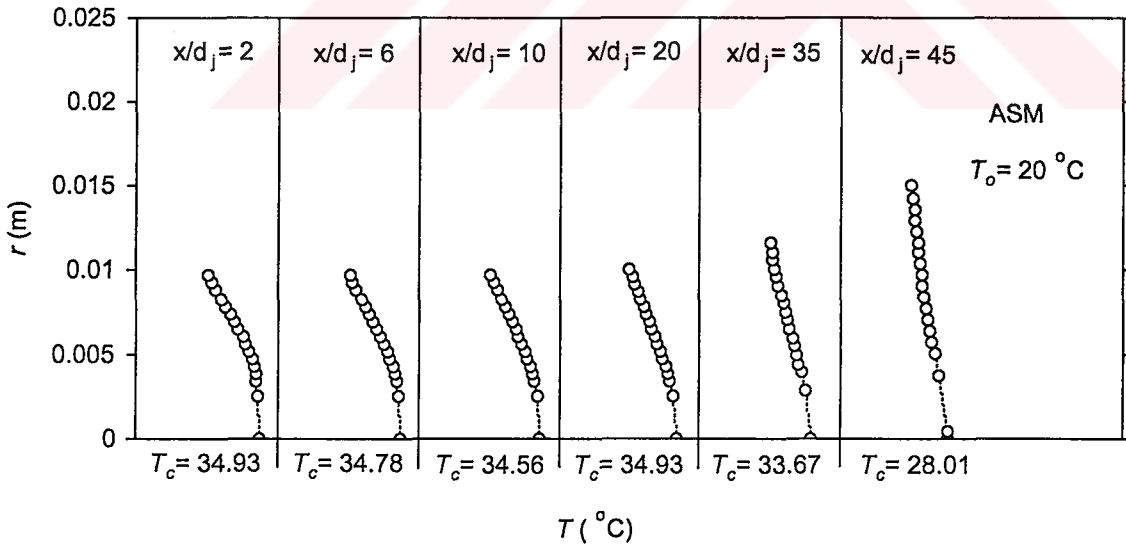
Şekil 37. Dairesel jet akışında LKE (SP) türbülans modeliyle belirlenen radyal ortalama sıcaklık profilleri ($T_o = 20$, $T_j = 35$ °C)



Şekil 38. Dairesel jet akışında RSM türbülans modeliyle belirlenen radyal ortalama sıcaklık profilleri ($T_o = 20$, $T_j = 35$ °C)



Şekil 39. Dairesel jet akışında LRR türbülans modeliyle belirlenen radyal ortalama sıcaklık profilleri ($T_o = 20$, $T_j = 35$ °C)



Şekil 40. Dairesel jet akışında ASM türbülans modeliyle belirlenen radyal ortalama sıcaklık profilleri ($T_o = 20$, $T_j = 35$ °C)

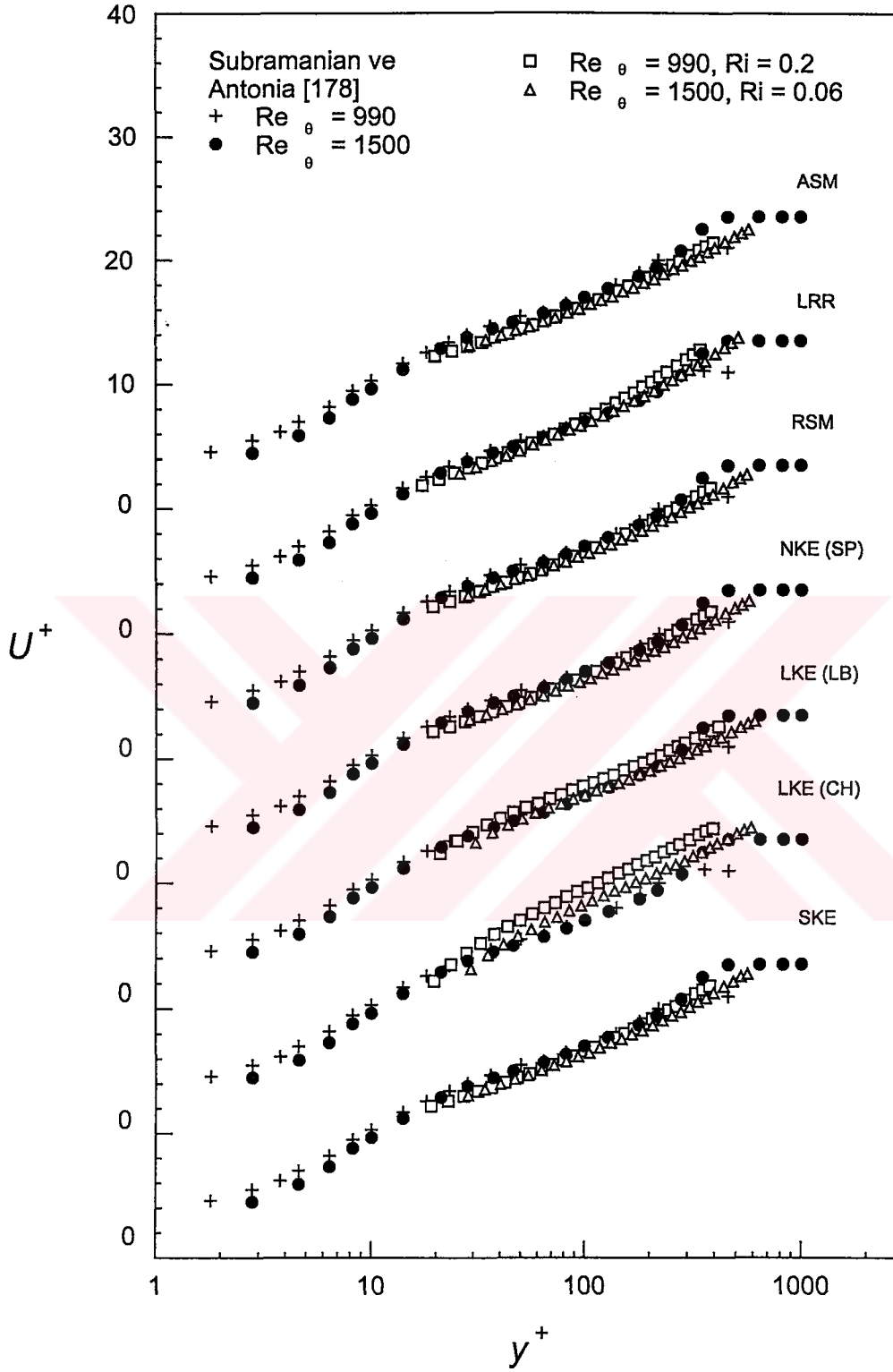
3.3. Kaldırma Kuvvetinin Etkili Olduğu TSTA' da Elde Edilen Bulgular

3.3.1. Yatay Konumda TSTA' da Elde Edilen Bulgular

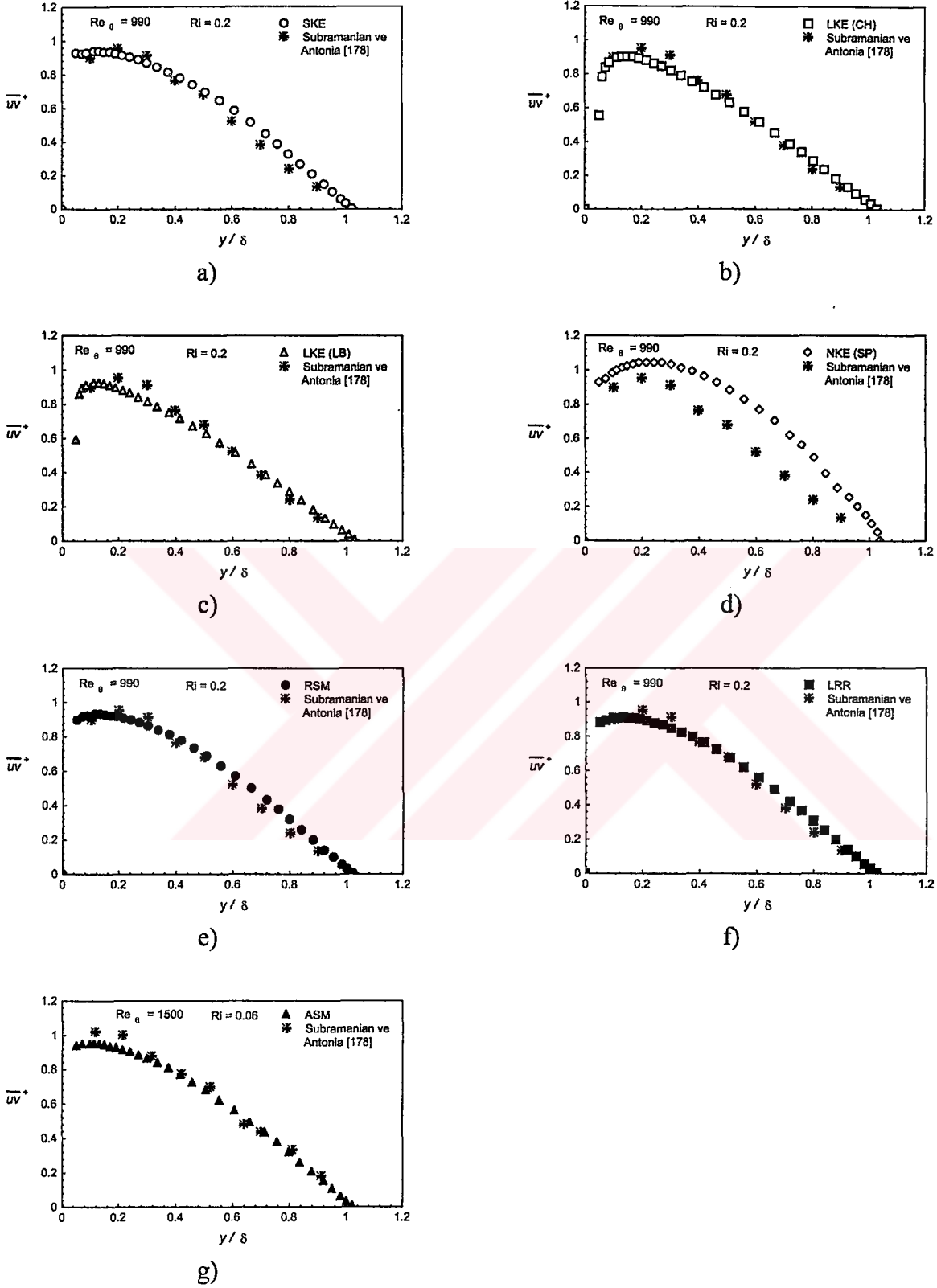
Bu kısımda, yatay konumda bulunan düzlem levha üzerinde kaldırma kuvvetinin etkili olduğu tam gelişmiş türbülanslı momentum ve ısı sınır tabakanın, yedi farklı birinci ve ikinci derece modelleri kullanılarak elde edilen bulguları grafikler halinde verilmiştir. Burada kaldırma kuvvetinin etkisi, Richardson sayısı (Ri) ile ifade edilmektedir. Bu çalışmada literatür de dikkate alınarak seçilen Re_0 ve Ri sayıları; $Re_0 = 990$ için $Ri = 0.2$ ve $Re_0 = 1500$ için $Ri = 0.06$ şeklindedir. Momentum sınır tabakanın çözümlenmesiyle elde edilen bulgular; Şekil 41' de U^+ ' nin y^+ ile değişimleri, Şekiller 42 ve 43' de \overline{uv}^+ ' nin y/δ ile değişimleri ve Şekil 44' de c_f ' nin Re_0 ile değişimi grafikler halinde verilmiştir. Isıl sınır tabakanın çözümlenmesiyle elde edilen bulgular ise; Şekil 45' de T^+ ' nin y^+ ile değişimleri, Şekiller 46 ve 47' de \overline{vt}^+ ' nin y/δ ile değişimleri, Şekiller 48 ve 49' de \overline{ut}^+ ' nin y/δ ile değişimleri, Şekiller 50 ve 51' de t'/T_τ ' nin y^+ ile değişimleri, Şekiller 52 ve 53' de Pr_t ' nin y/δ ile değişimleri ve Şekil 54' de St ' nin Re_0 ile değişimi grafikler halinde verilmiştir. Türbülans sınır tabaka ile ilgili farklı türbülans modelleriyle çözümlenen diğer parametreler ise; Şekil 55' de k^+ ' nin y^+ ile değişimi, Şekil 56' da ε^+ ' nin y^+ ile değişimi, Şekil 57' de P_k/ε ' nin y^+ ile değişimi ve Şekil 58' de $-\overline{uv}/k$ ' nin y^+ ile değişimi grafikler halinde verilmiştir. Şekil 41' de verilen ortalama hızlar; U_τ ile, Şekiller 42 ve 43' de verilen kayma gerilmeleri ve Şekil 55' de verilen türbülans kinetik enerjisi; U_τ^2 ile ve Şekiller 48-49' da verilen akışın normali doğrultusundaki ve akış doğrultusundaki türbülans ısı akıları; $U_\tau T_\tau$ ile normalleştirilmiştir. Şekil 45' de verilen ortalama sıcaklıklar; $(T_w - T)/T_\tau$ şeklinde ve Şekil 56' da verilen türbülans kinetik enerjinin yutulması; $\nu\varepsilon/U_\tau^4$ şeklinde normalleştirilmiştir. Elde edilen bulguların karşılaştırılması, genelde Subramanian ve Antonia [178]' dan alınan deneysel verilerle yapılmıştır. Şekil 44' de verilen farklı türbülans modelleriyle belirlenen sürtünme katsayısının karşılaştırılması ise; literatürde kaldırma kuvvetinin etkisinin mevcut olması durumu için veri bulunmamasından dolayı Spalart [19]' ın DNS verileriyle yapılmıştır. Benzer şekilde, Şekil 54' de verilen Stanton sayısının karşılaştırılması Durbin [44]' den

alınan ve Reynolds $vd.$ ' ne ait olan deneysel verilerle, Şekiller 55 ve 56' da verilen türbülans kinetik enerji ve onun yutulması, Sarkar ve So [110]' dan alınan ve Spalart' a ait olan DNS verileriyle ve Şekiller 57 ve 58' de verilen, sırasıyla, P_k / ϵ ve $-\overline{uv} / k$, Rodi ve Mansour [20]' dan alınan ve DNS sonuçlarıyla elde edilmiş verilerle karşılaştırılmıştır.

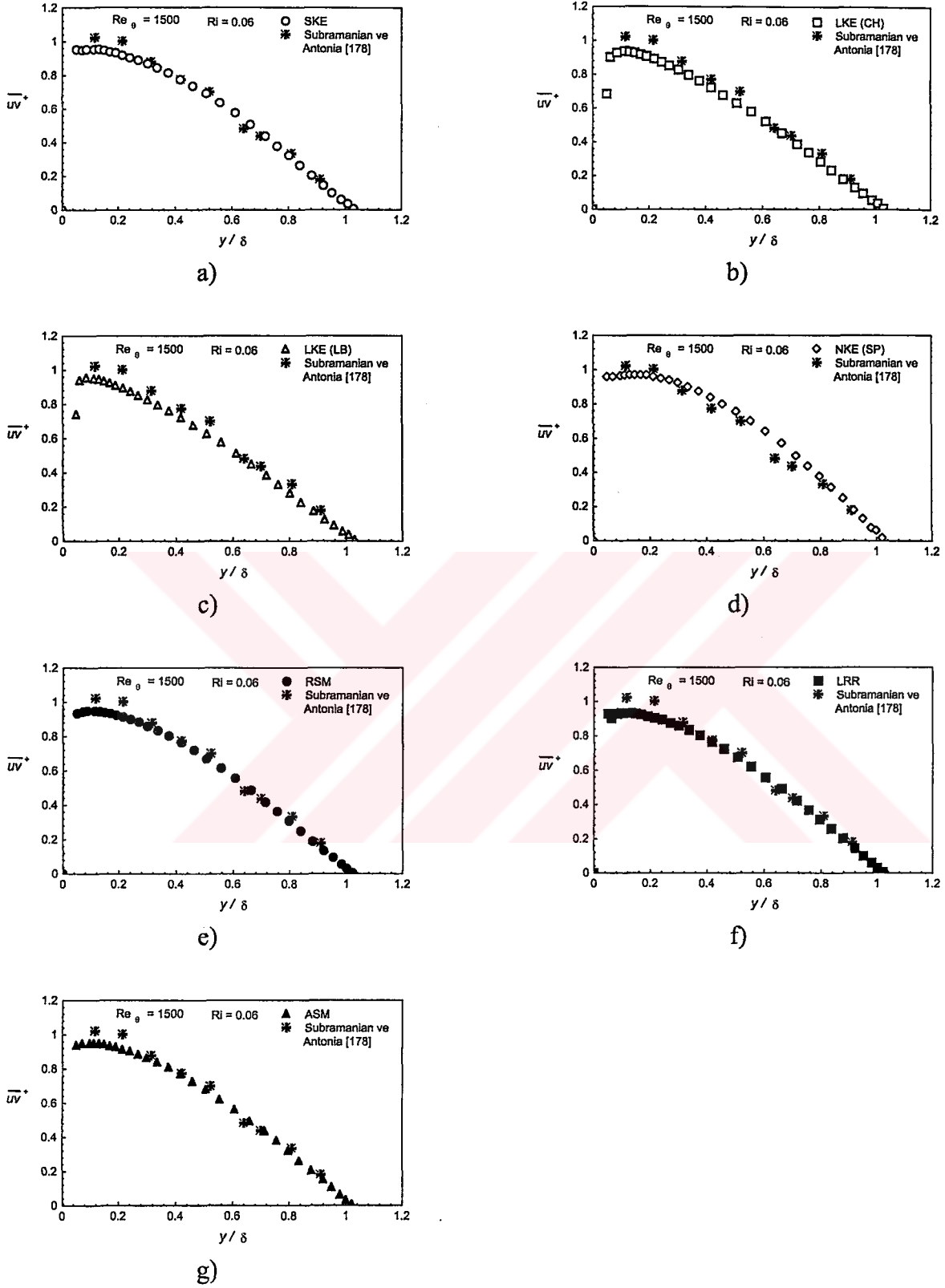




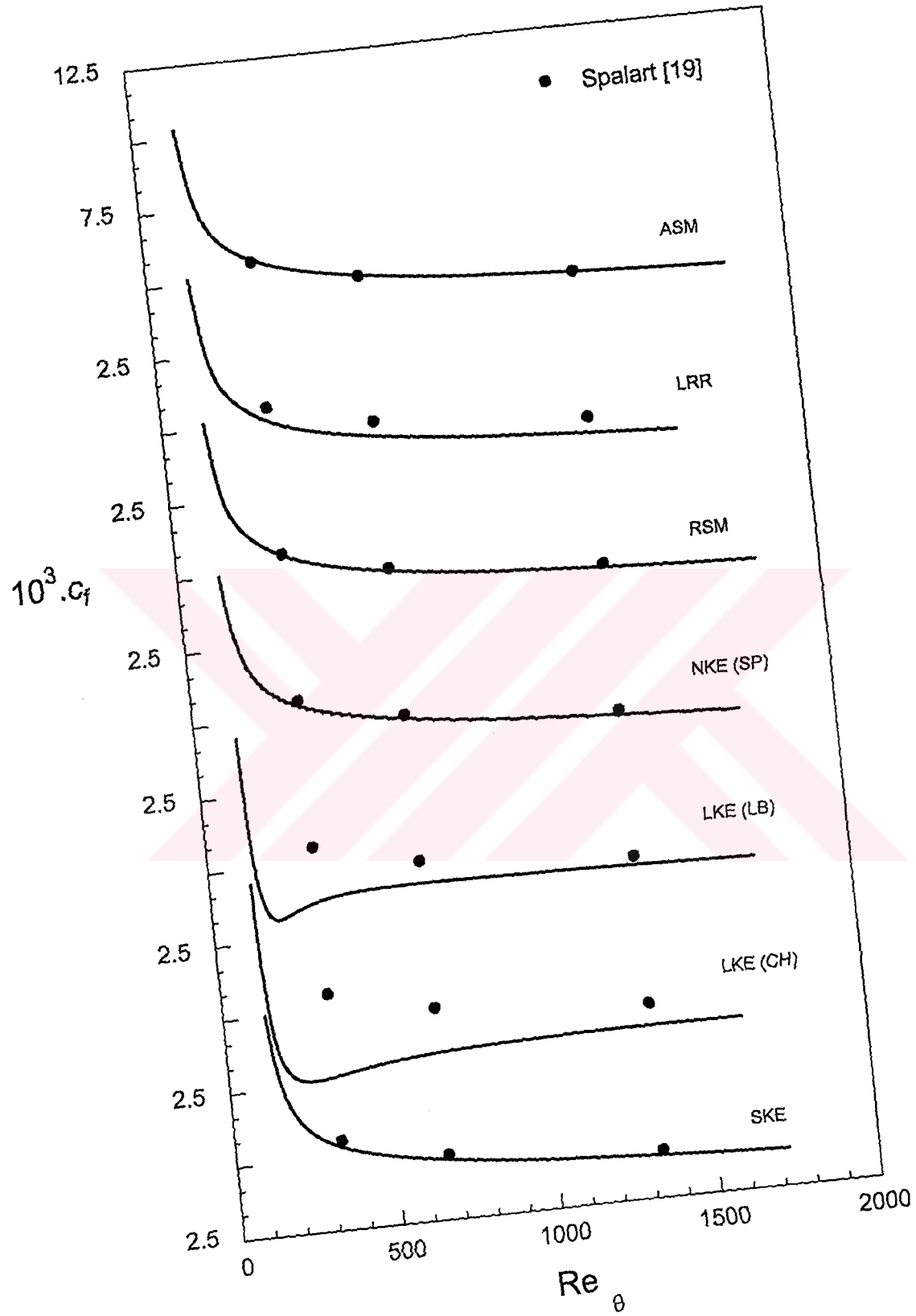
Şekil 41. Yatay düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin ortalama hız profili ile karşılaştırılması



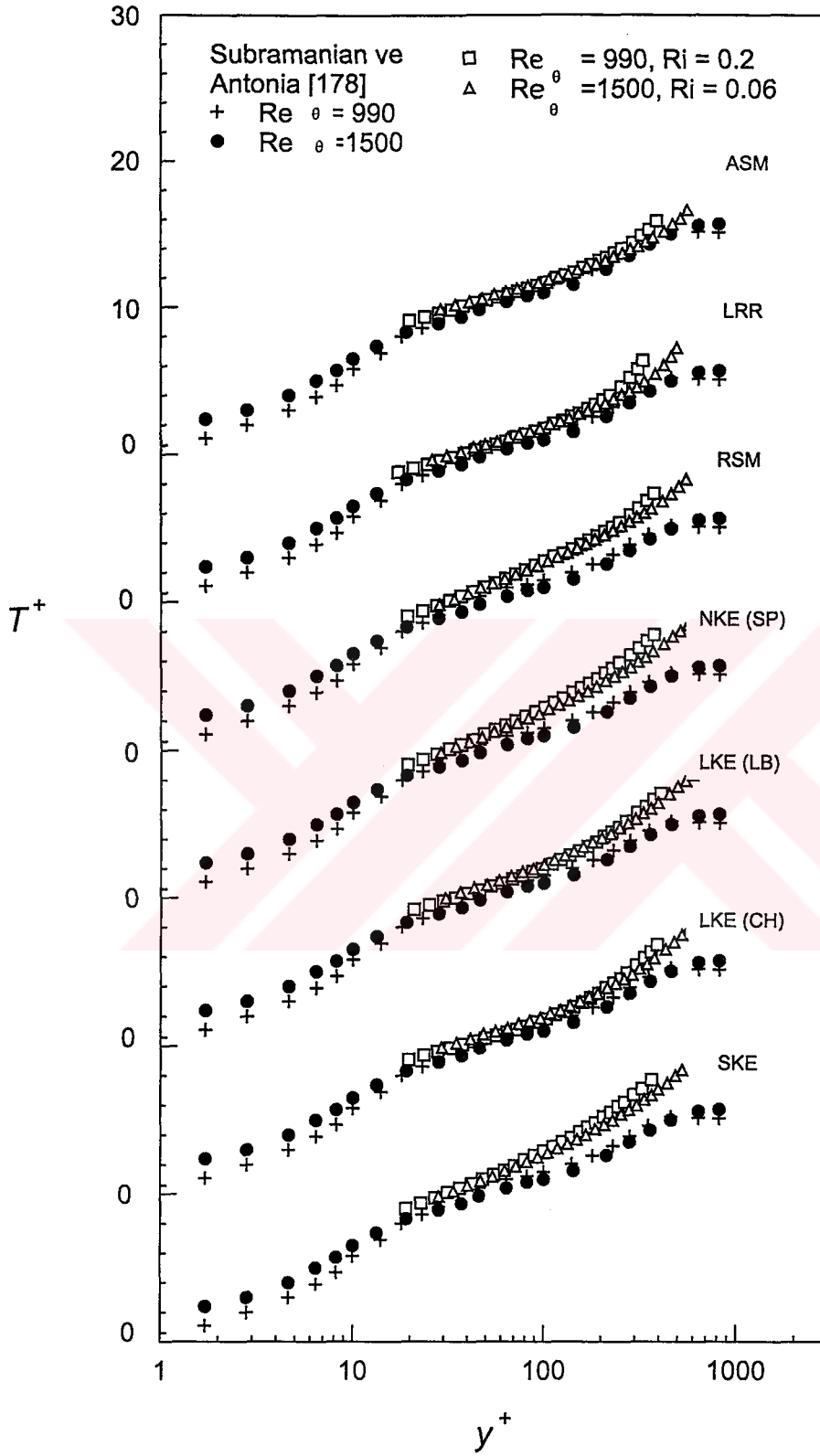
Şekil 42. Yatay düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans kayma gerilmesi ile karşılaştırılması ($Re_\theta = 990$, $Ri = 0.2$)



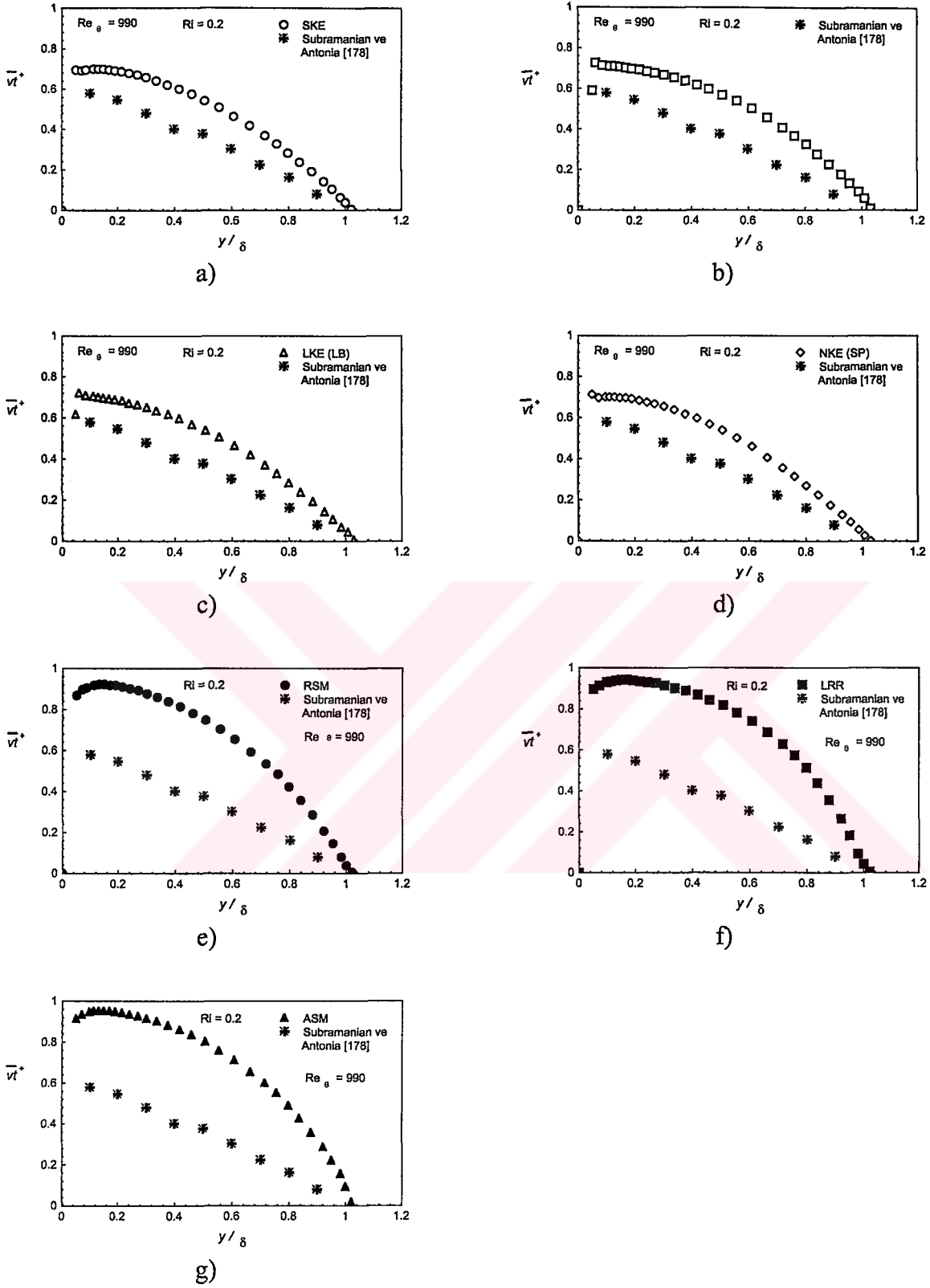
Şekil 43. Yatay düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans kayma gerilmesi ile karşılaştırılması ($Re_\theta = 1500$, $Ri = 0.06$)



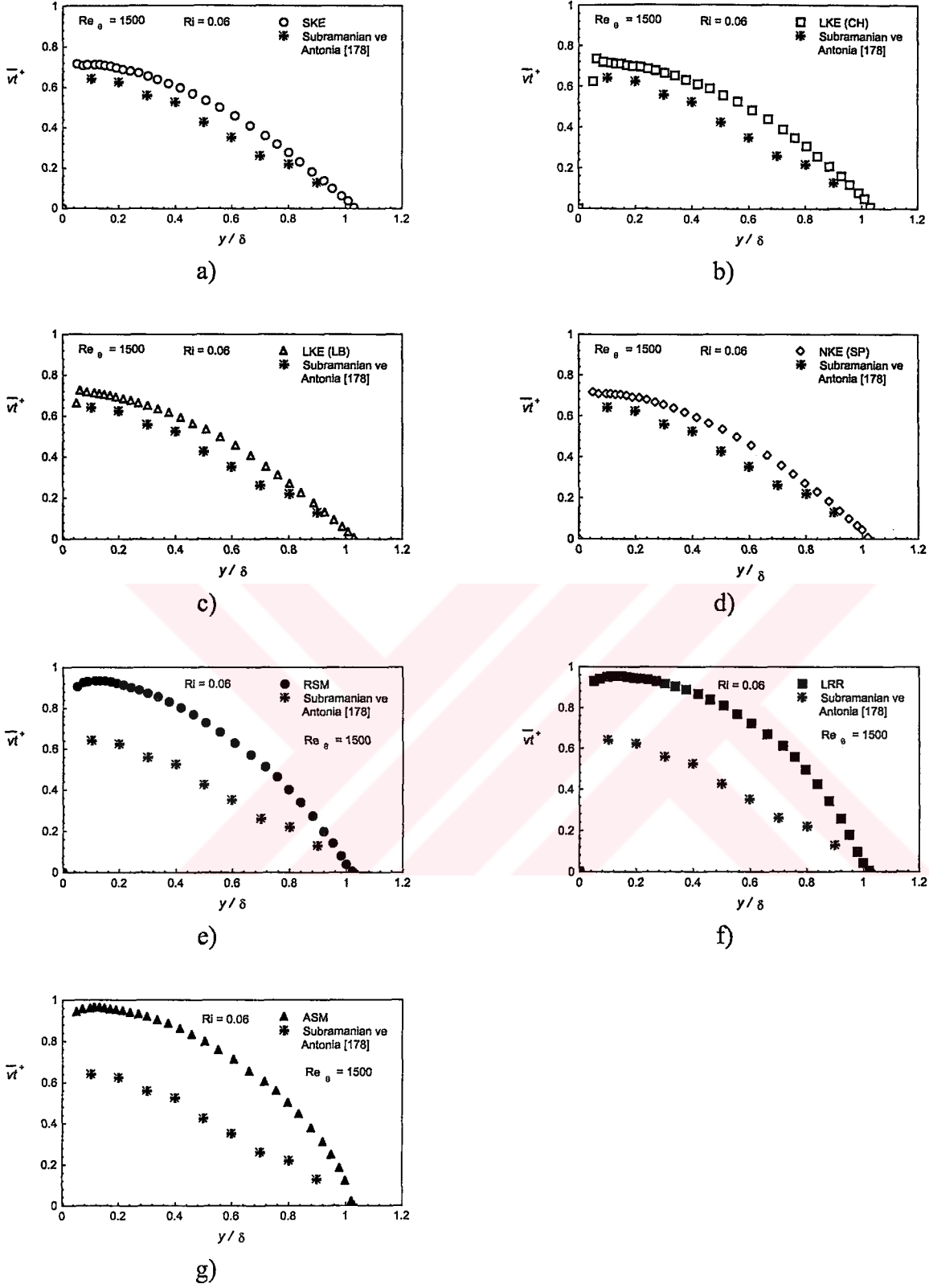
Şekil 44. Yatay düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin sürtünme katsayısının akış doğrultusunda değişimi ile karşılaştırılması



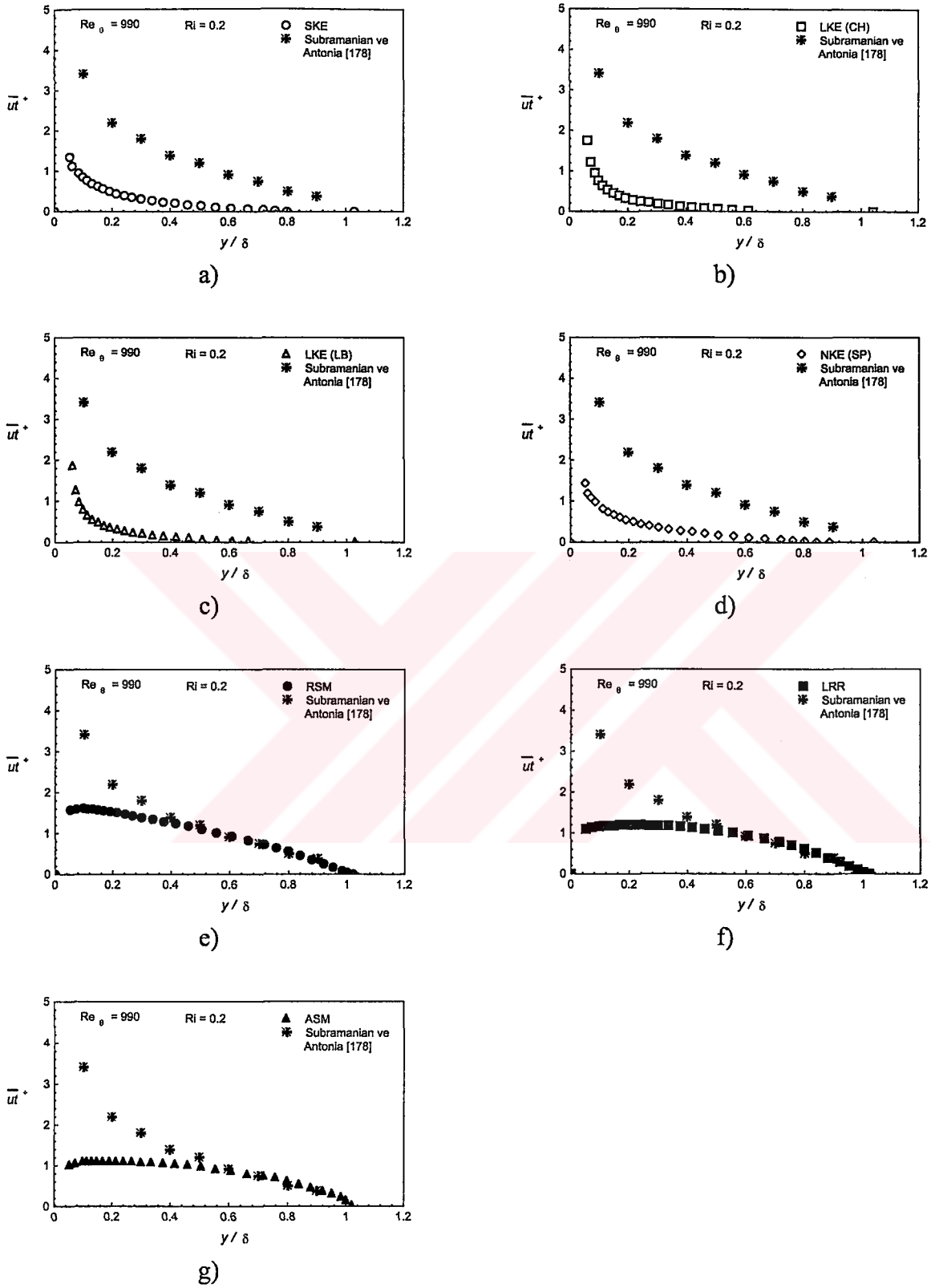
Şekil 45. Yatay düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin ortalama sıcaklık profili ile karşılaştırılması



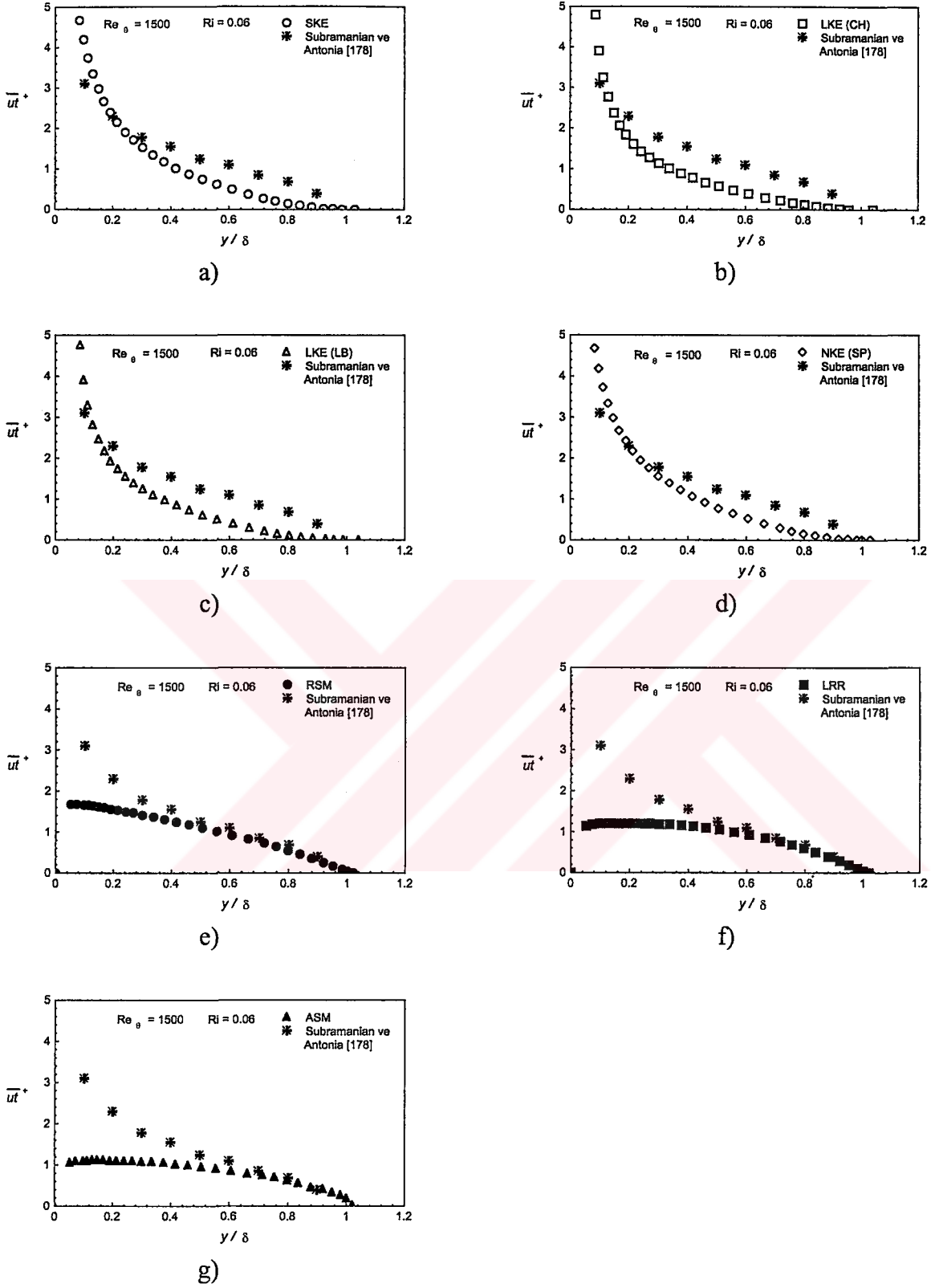
Şekil 46. Yatay düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin akışın normali doğrultusundaki türbülans ısı akısı ile karşılaştırılması ($Re_\theta = 990$, $Ri = 0.2$)



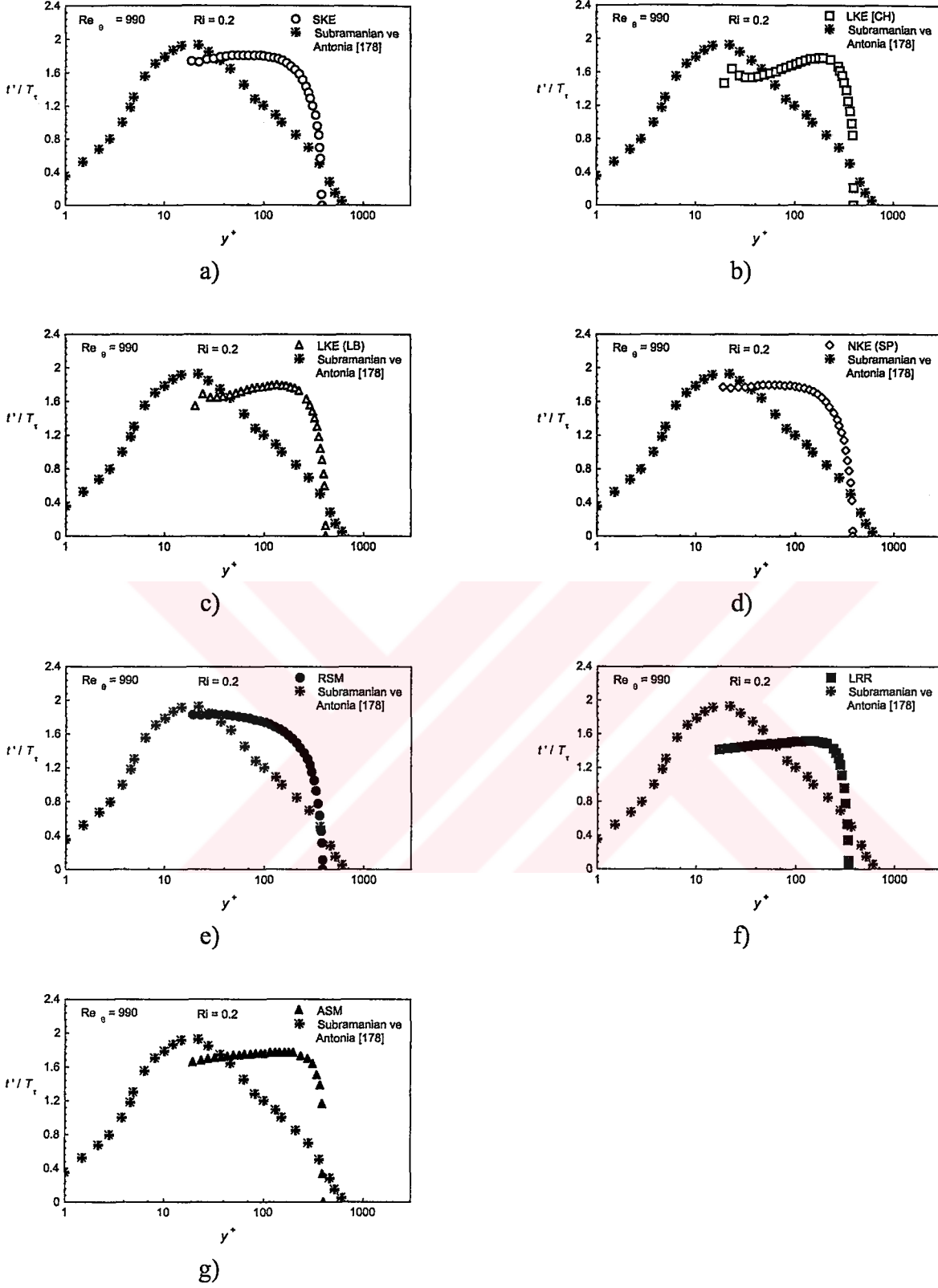
Şekil 47. Yatay düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin akışın normali doğrultusundaki türbülans ısı akısı ile karşılaştırılması ($Re_\theta = 1500$, $Ri = 0.06$)



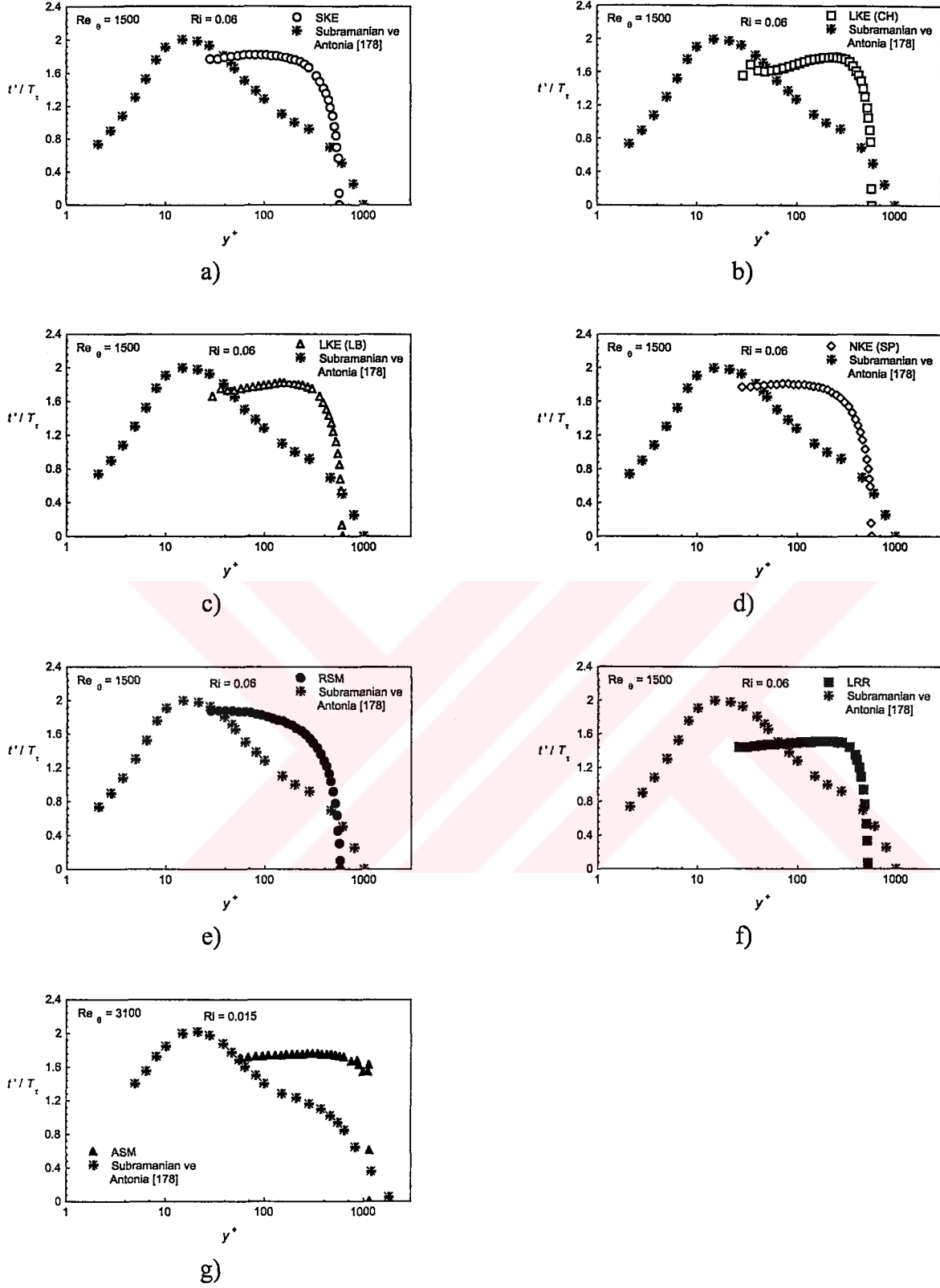
Şekil 48. Yatay düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin akış doğrultusundaki türbülans ısı akısı ile karşılaştırılması ($Re_\theta = 990$, $Ri = 0.2$)



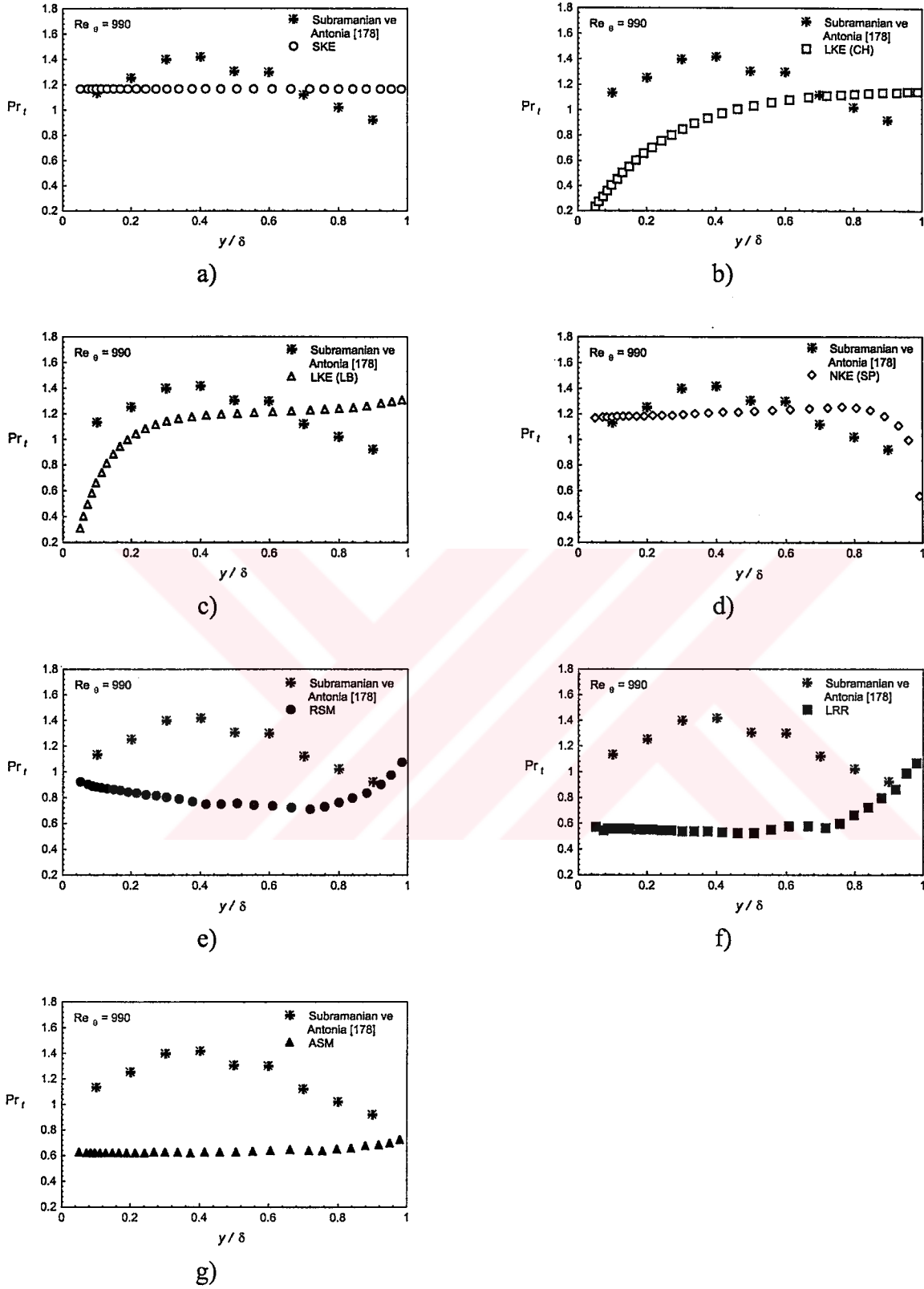
Şekil 49. Yatay düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin akış doğrultusundaki türbülans ısı akısı ile karşılaştırılması ($Re_\theta = 1500$, $Ri = 0.06$)



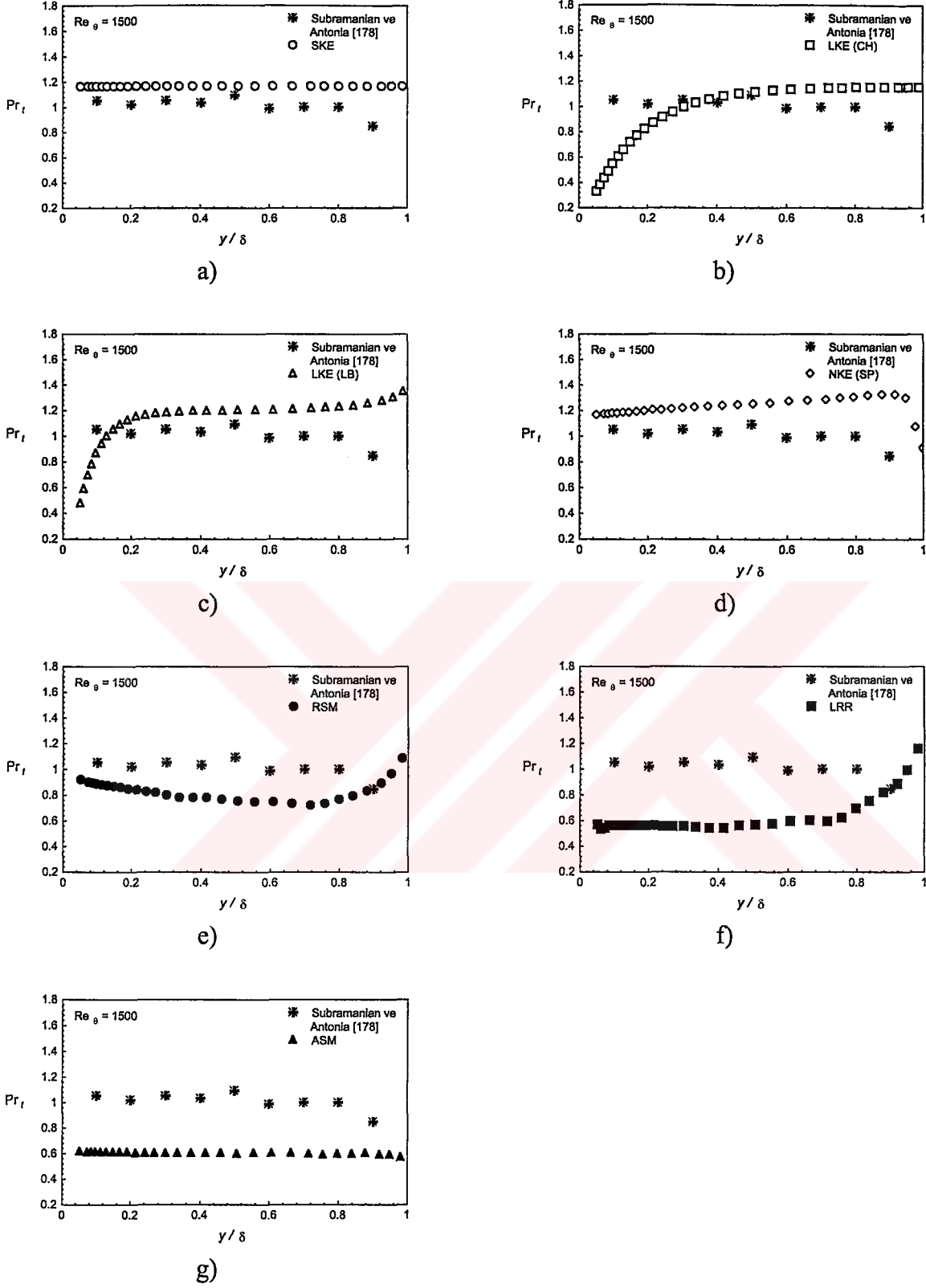
Şekil 50. Yatay düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans sıcaklık çalkantısı şiddeti ile karşılaştırılması ($Re_0 = 990$, $Ri = 0.2$)



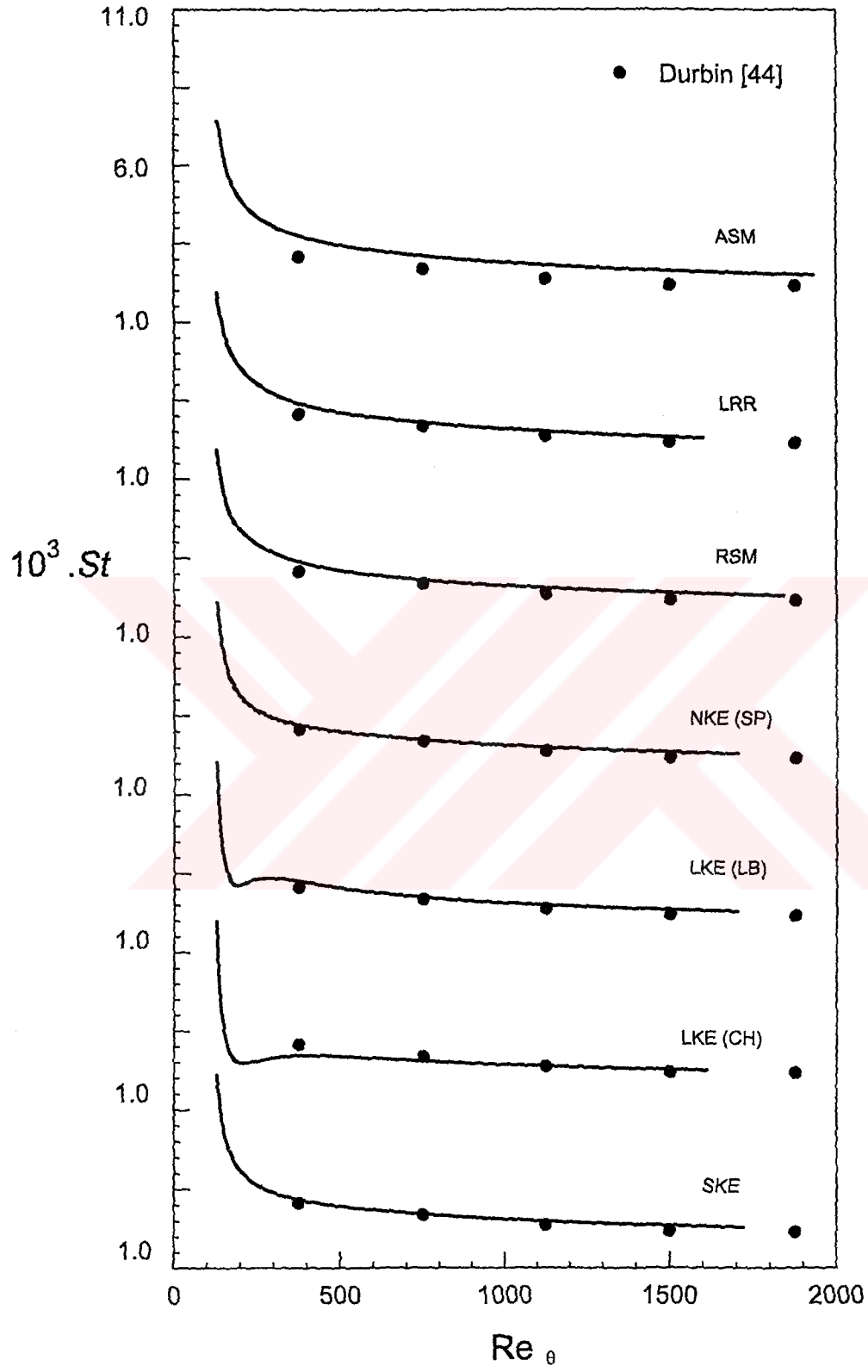
Şekil 51. Yatay düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans sıcaklık çalkantısı şiddeti ile karşılaştırılması ($Re_\theta = 1500$, $Ri = 0.06$)



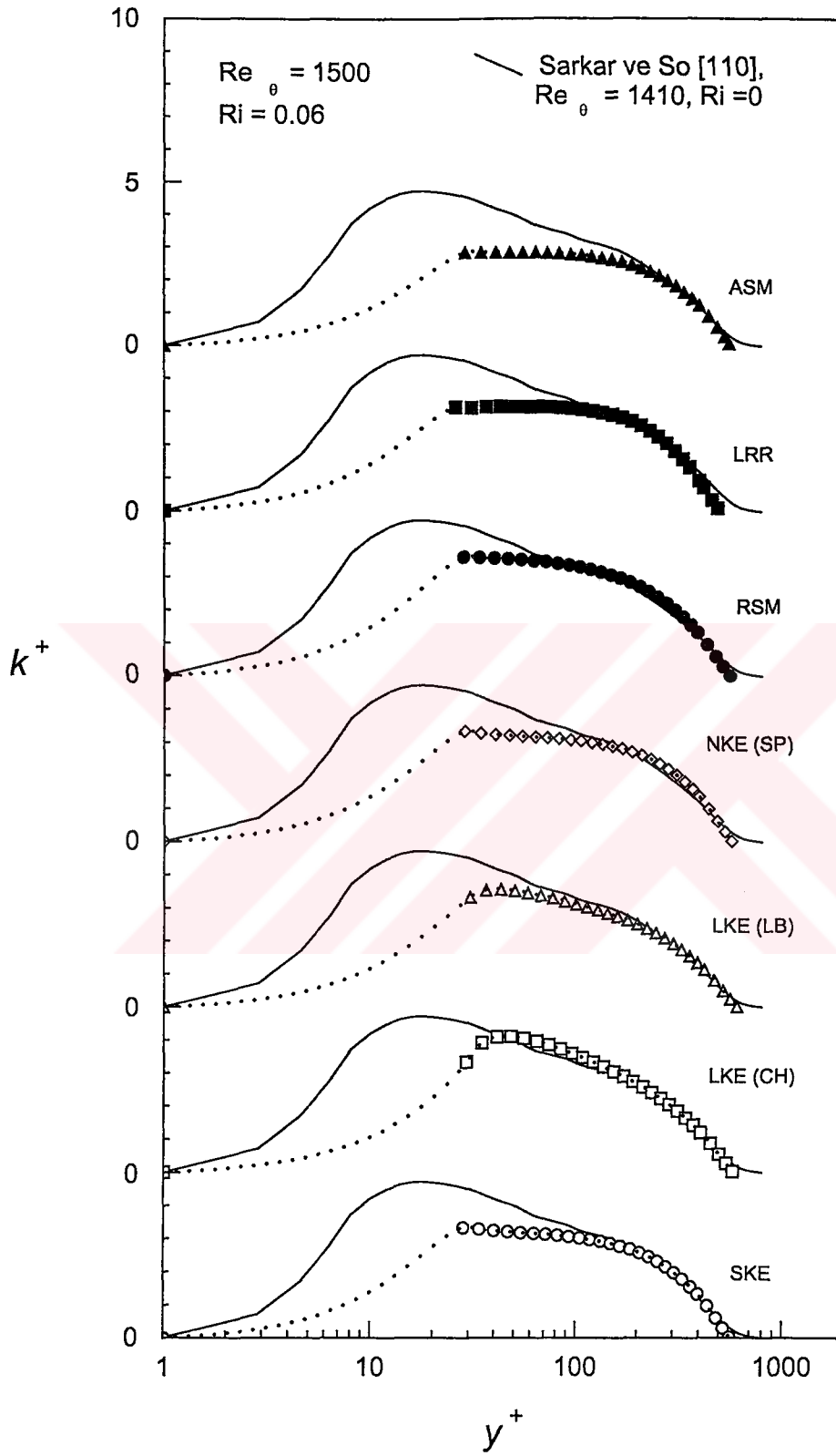
Şekil 52. Yatay düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin radyal türbülans Prandtl sayısı ile karşılaştırılması ($Re_0 = 990$, $Ri = 0.2$)



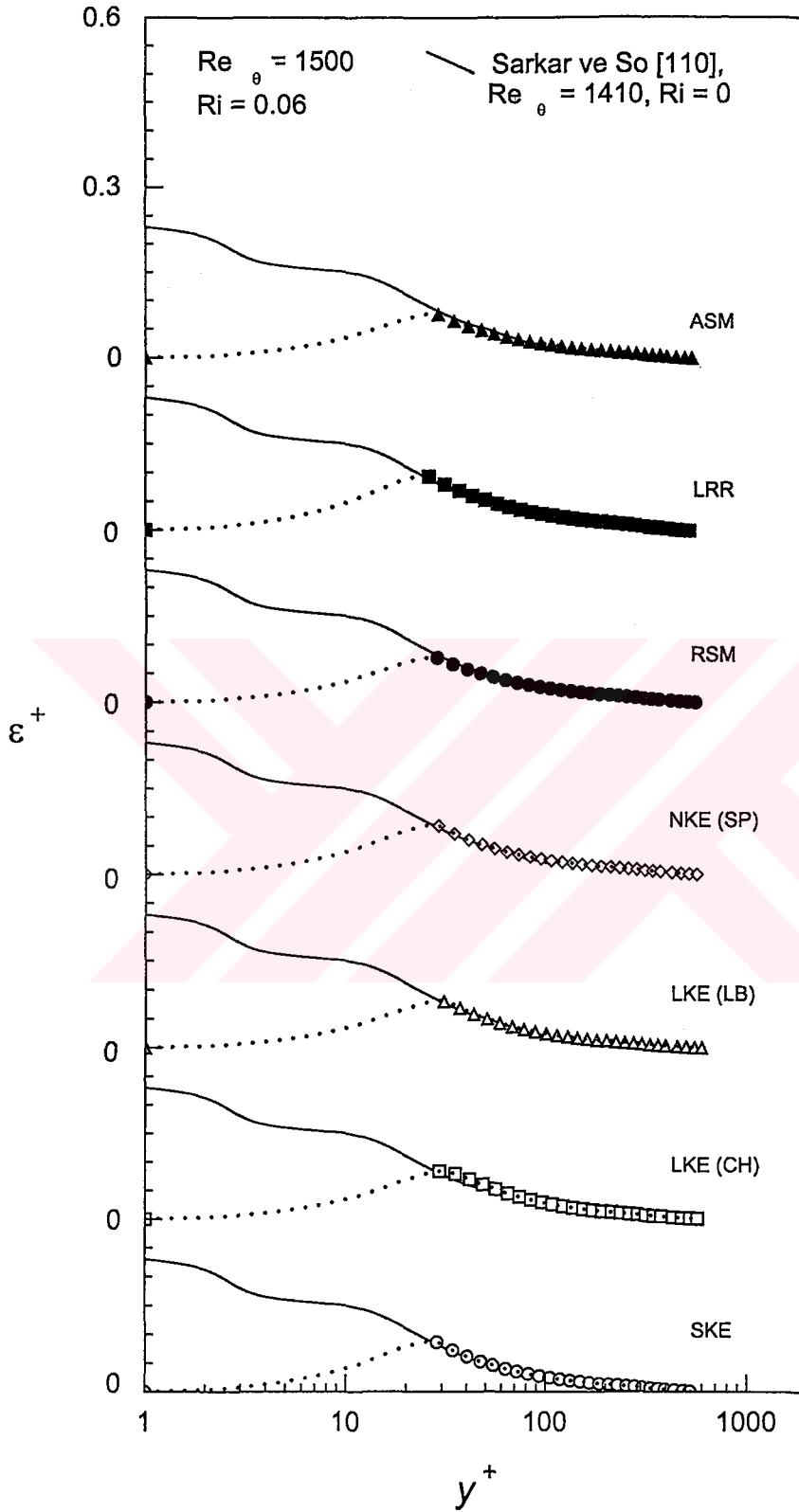
Şekil 53. Yatay düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin radyal türbülans Prandtl sayısı ile karşılaştırılması ($Re_\theta = 1500$, $Ri = 0.06$)



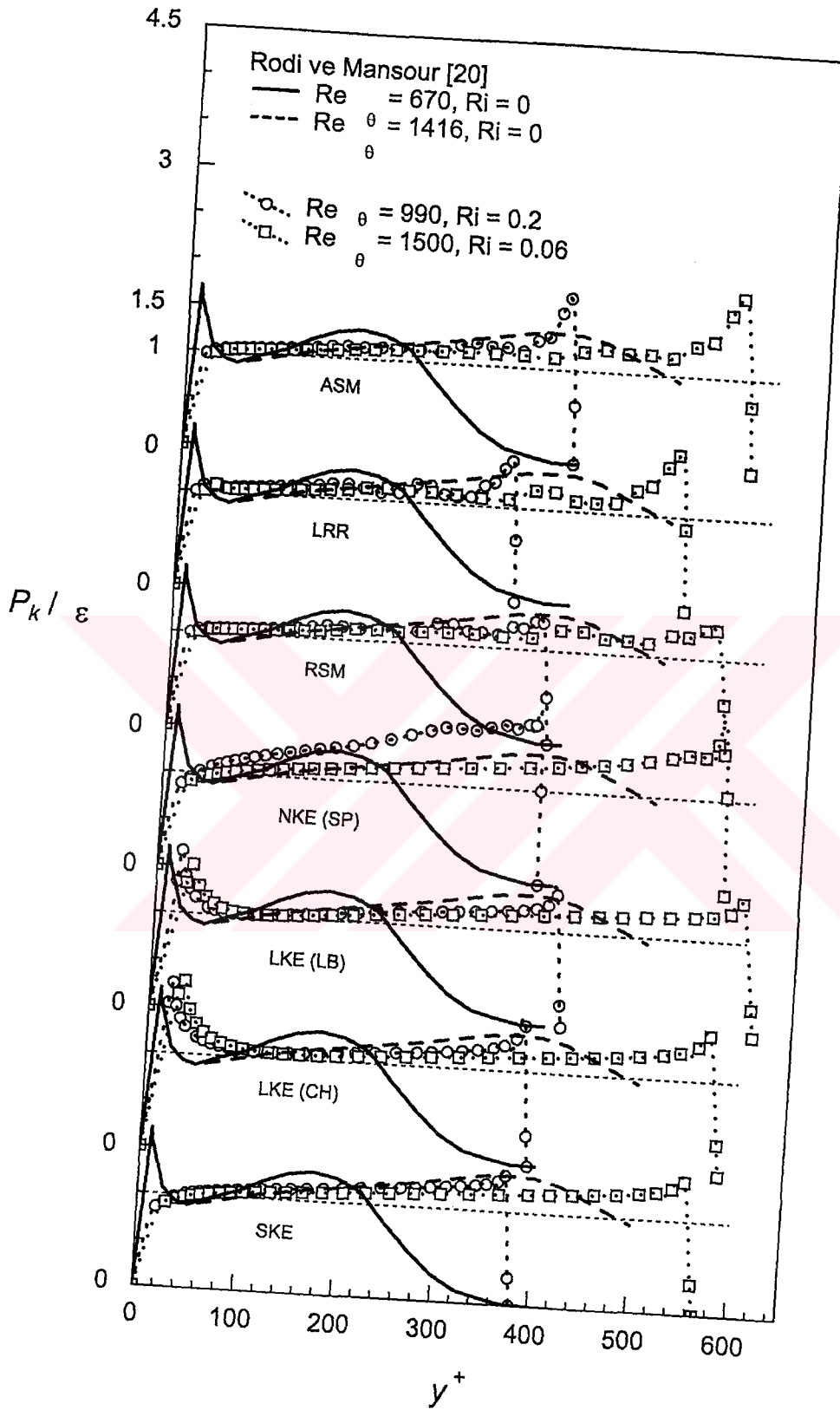
Şekil 54. Yatay düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin Stanton sayısının akış doğrultusunda değişimi ile karşılaştırılması



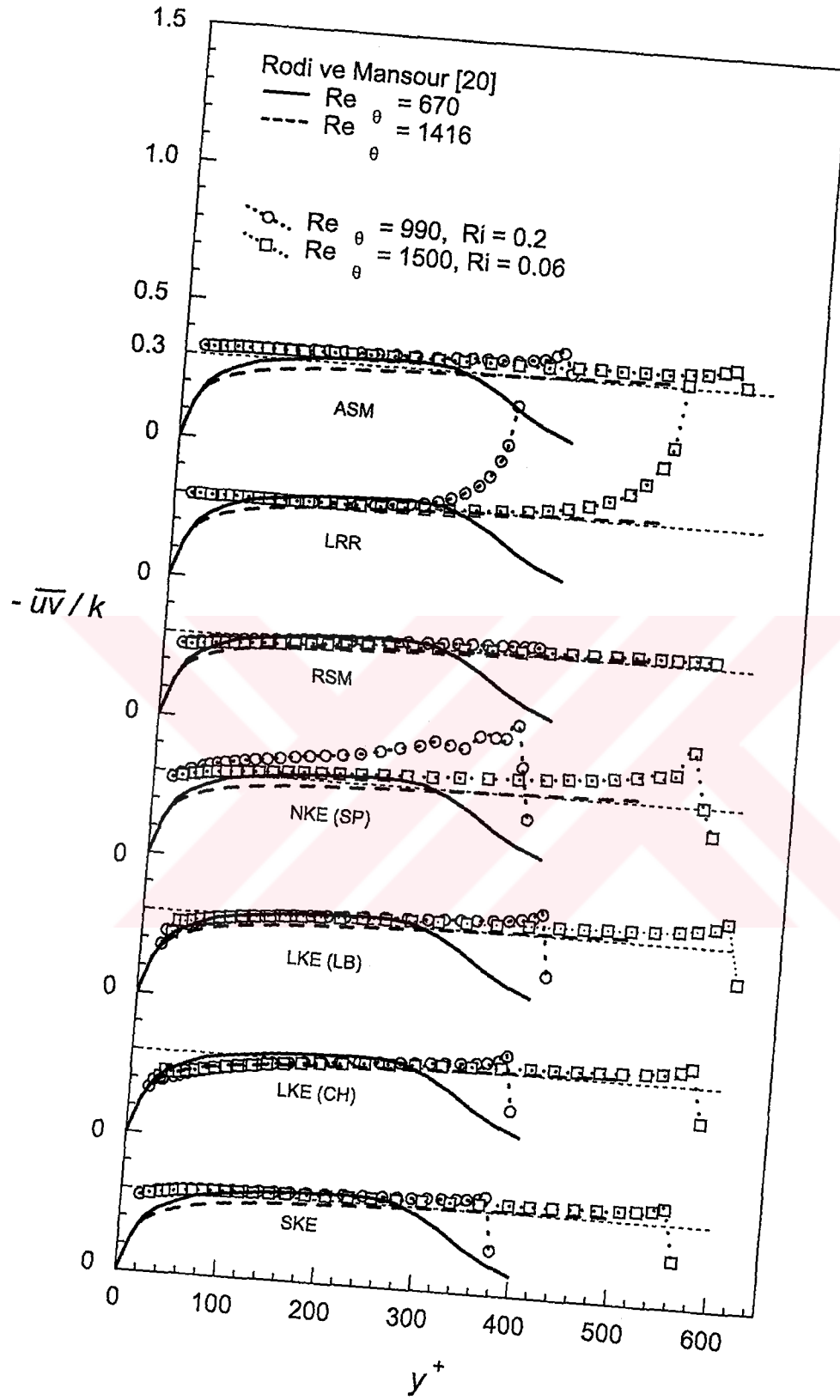
Şekil 55. Yatay düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans kinetik enerji ile karşılaştırılması ($Re_\theta = 1500$, $Ri = 0.06$)



Şekil 56. Yatay düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans kinetik enerjinin yutulması ile karşılaştırılması (Re_θ = 1500, Ri = 0.06)



Şekil 57. Yatay düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans kinetik enerji üretiminin kinetik enerjinin yutulmasına oranı ile karşılaştırılması



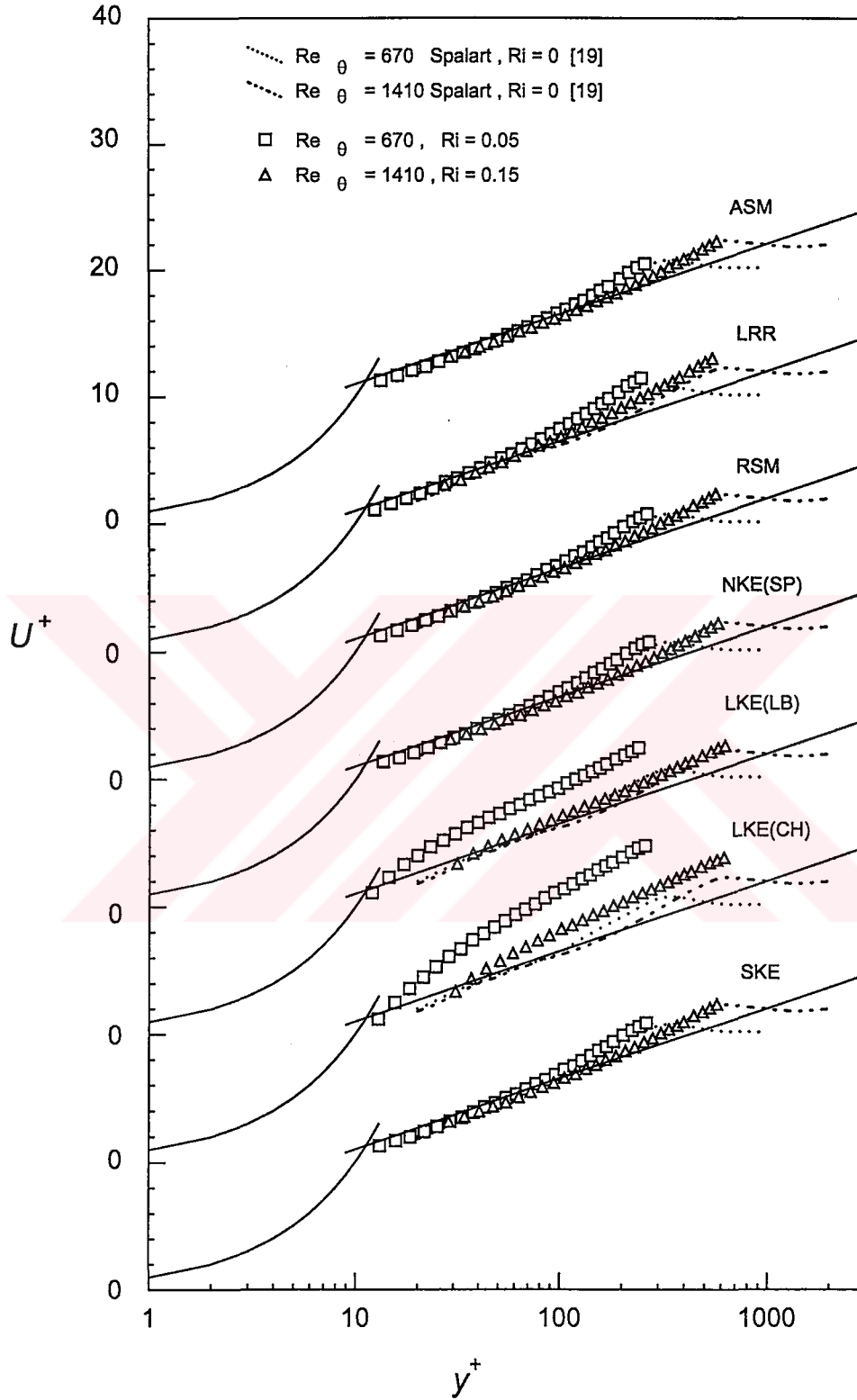
Şekil 58. Yatay düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans kayma gerilmesinin kinetik enerjiye oranı ile karşılaştırılması

3.3.2. Dikey Konumda TSTA' da Elde Edilen Bulgular

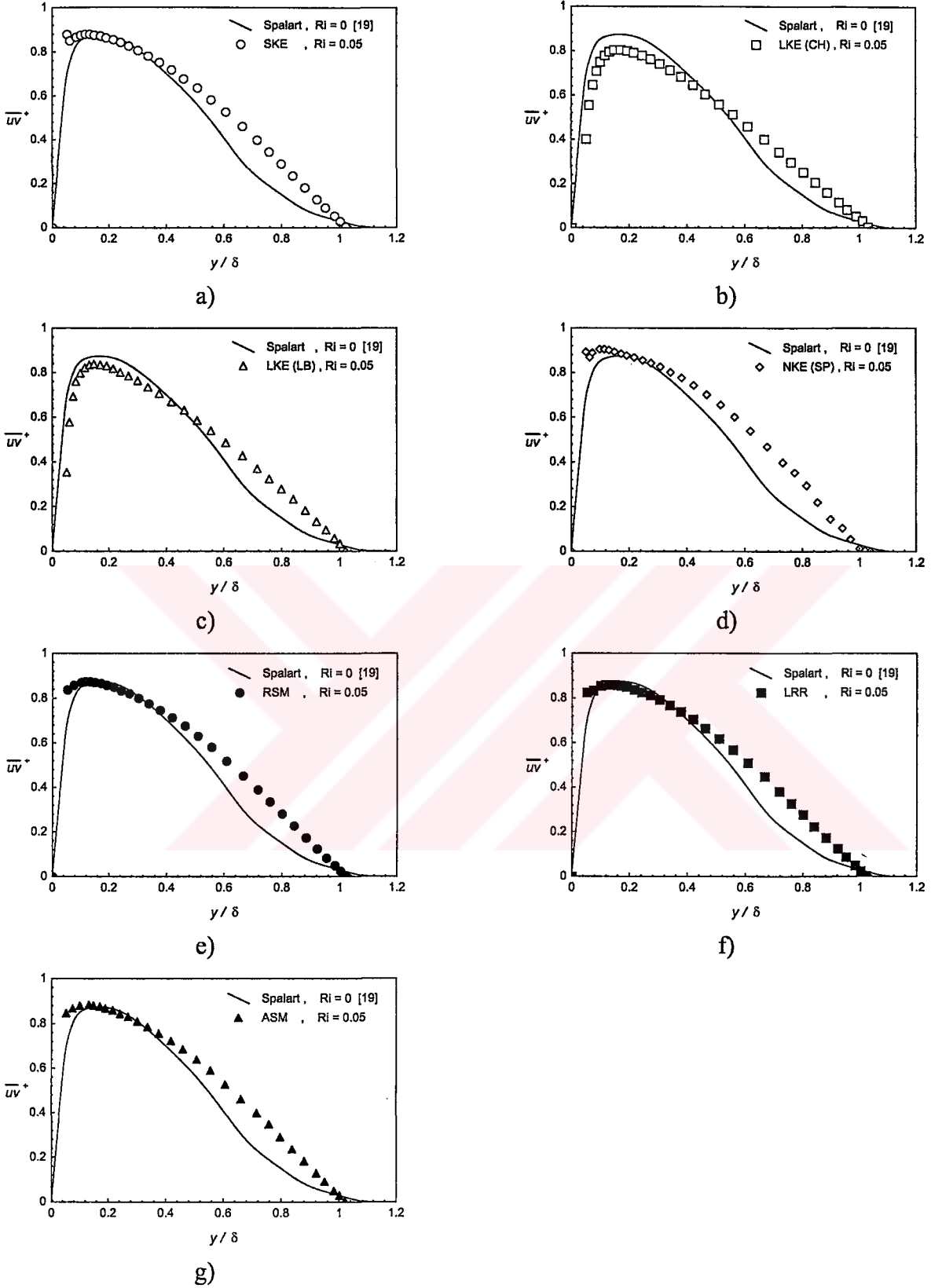
Bu kısımda, dikey konumda bulunan düzlem levha üzerinde kaldırma kuvvetinin etkili olduğu tam gelişmiş türbülanslı momentum ve ısı sınır tabakanın, yedi farklı birinci ve ikinci derece modeller kullanılarak elde edilen bulguları grafikler halinde verilmiştir. Bu akış koşulu için literatür de dikkate alınarak seçilen Re_θ ve Ri sayıları; $Re_\theta = 670$ için $Ri = 0.05$ ve $Re_\theta = 1410$ için $Ri = 0.15$ şeklindedir. Momentum sınır tabakanın farklı türbülans modelleri kullanılarak çözümlenmesiyle elde edilen bulgular; Şekil 59' da U^+ ' nin y^+ ile değişimi, Şekiller 60 ve 61' de \overline{uv}^+ ' nin y/δ ile değişimleri ve Şekil 62' de c_f ' nin Re_θ ile değişimi grafikler halinde verilmiştir. Isıl sınır tabakanın farklı türbülans modelleri kullanılarak çözümlenmesiyle elde edilen bulgular ise; Şekil 63' de T^+ ' nin y^+ ile değişimi, Şekiller 64 ve 65' de \overline{vt}^+ ' nin y/δ ile değişimleri, Şekiller 66 ve 67' de \overline{ut}^+ ' nin y/δ ile değişimleri, Şekiller 68 ve 69' da t'/T_τ ' nin y^+ ile değişimleri, Şekil 70' de Pr_t ' nin y/δ ile değişimi ve Şekil 71' de St ' nin Re_θ ile değişimi grafikler halinde verilmiştir. Türbülans sınır tabaka ile ilgili farklı türbülans modelleriyle çözümlenen diğer parametreler ise; Şekil 72' de k^+ ' nin y^+ ile değişimi, Şekil 73' de ε^+ ' nin y^+ ile değişimi, Şekil 74' de P_k/ε ' nin y^+ ile değişimi ve Şekil 75' de $-\overline{uv}/k$ ' nin y^+ ile değişimi grafikler halinde verilmiştir. Şekil 59' da verilen ortalama hız; U_τ ile, Şekiller 60 ve 61' de verilen kayma gerilmeleri ve Şekil 72' de verilen türbülans kinetik enerjisi; U_τ^2 ile ve Şekiller 64-67' de verilen akışın normal doğrultusundaki ve akış doğrultusundaki türbülans ısı akıları; $U_\tau T_\tau$ ile normalleştirilmiştir. Şekil 63' de verilen ortalama sıcaklıklar; $(T_w - T)/T_\tau$ şeklinde ve Şekil 73' de verilen türbülans kinetik enerjinin yutulması; $\nu\varepsilon/U_\tau^4$ şeklinde normalleştirilmiştir. Momentum sınır tabakanın çözümlenmesinden elde edilen bulguların karşılaştırılması, literatürde dikey konumda kaldırma kuvvetinin etkili olduğu TSTA verileri bulunamadığından dolayı Spalart [19]' dan alınan DNS verileriyle yapılmıştır. Şekil 63' de verilen ortalama sıcaklık bulgularının karşılaştırılması ise; ısıl sınır tabaka için verilen duvar ve logaritma kanunundan yararlanılarak yapılmıştır. Şekiller 64-67' de verilen akışın normal doğrultusundaki ve akış doğrultusundaki türbülans ısı

akılarının ve Şekiller 68 ve 69' da verilen sıcaklık çalkantılarının karşılaştırılması, Subramanian ve Antonia [178]' dan alınan yatay konumdaki düzlem üzerinde meydana gelen TSTA için deneysel olarak belirlenmiş verilerle yapılmıştır. Yine literatürde bu akış koşuluna uygun veri bulunamamasından dolayı, Şekil 70' de verilen türbülans Prandtl sayısının karşılaştırılması, Kays [135]' dan alınan ve Bell *vd.*' ne ait olan DNS verileriyle, Şekil 71' de verilen Stanton sayısının karşılaştırılması, Durbin [44]' den alınan ve Reynolds' a ait olan deneysel verilerle, Şekiller 72 ve 73' de verilen türbülans kinetik enerjinin ve onun yutulmasının karşılaştırılması, Sarkar ve So [110]' dan alınan ve Spalart' a ait olan DNS verileriyle ve Şekiller 74 ve 75' de verilen, sırasıyla, P_k / ε ve $-\overline{uv} / k$ ' nin karşılaştırılması, Rodi ve Mansour [20]' dan alınan ve DNS sonuçlarıyla elde edilmiş verilerle yapılmıştır.

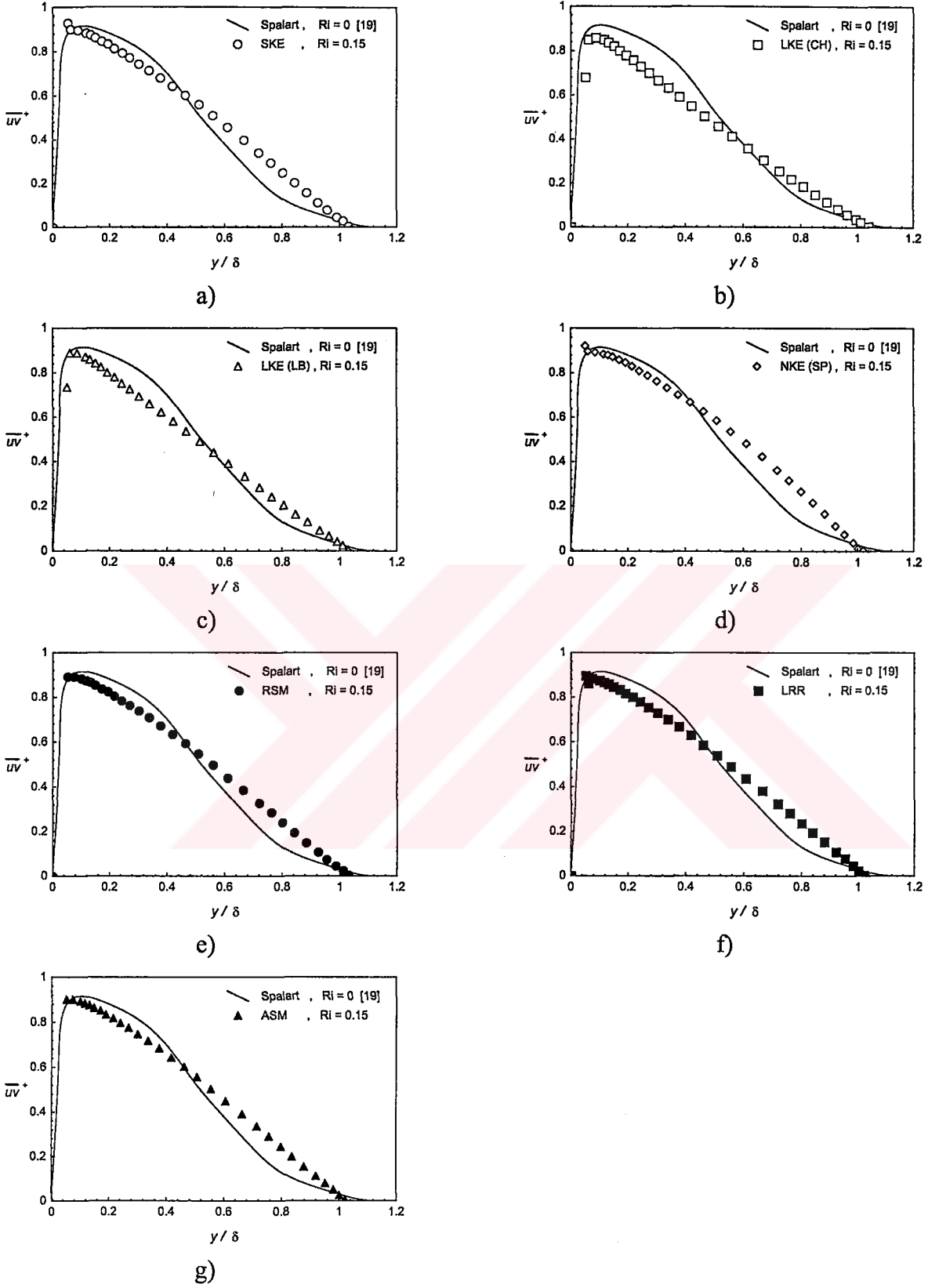




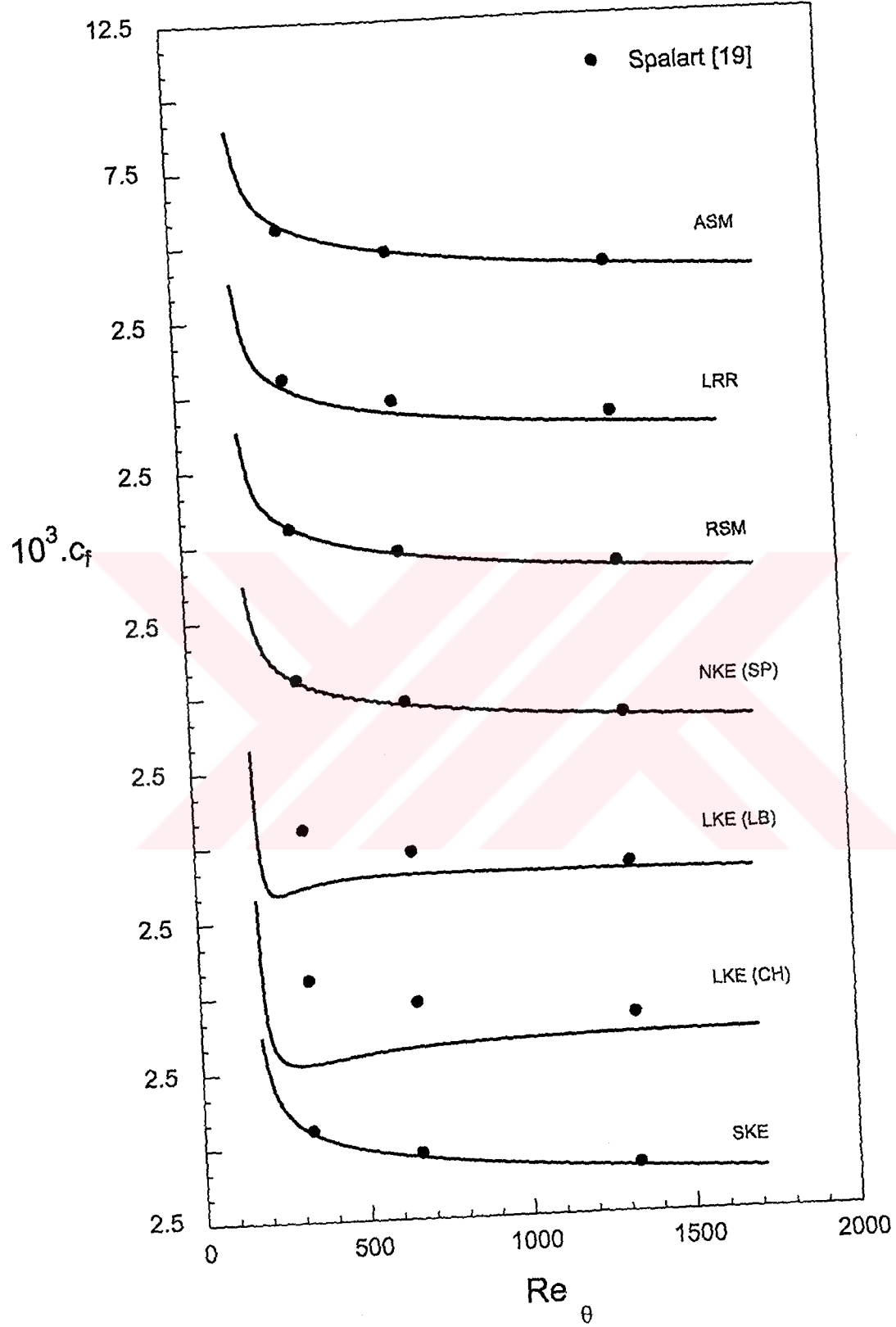
Şekil 59. Dikey düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin ortalama hız profilleri ile karşılaştırılması



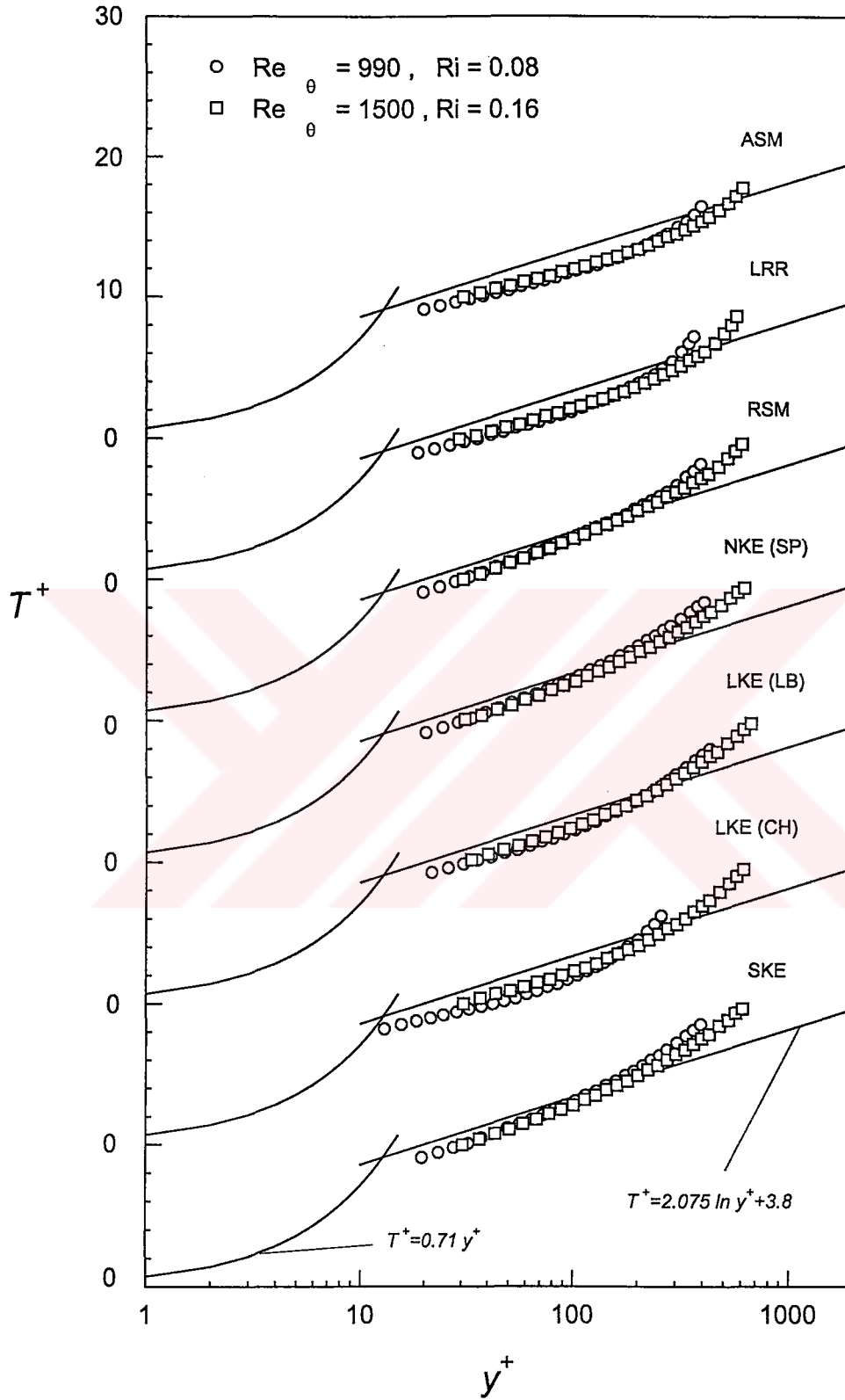
Şekil 60. Dikey düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans kayma gerilmesi ile karşılaştırılması ($Re_\theta = 670$, $Ri = 0.05$)



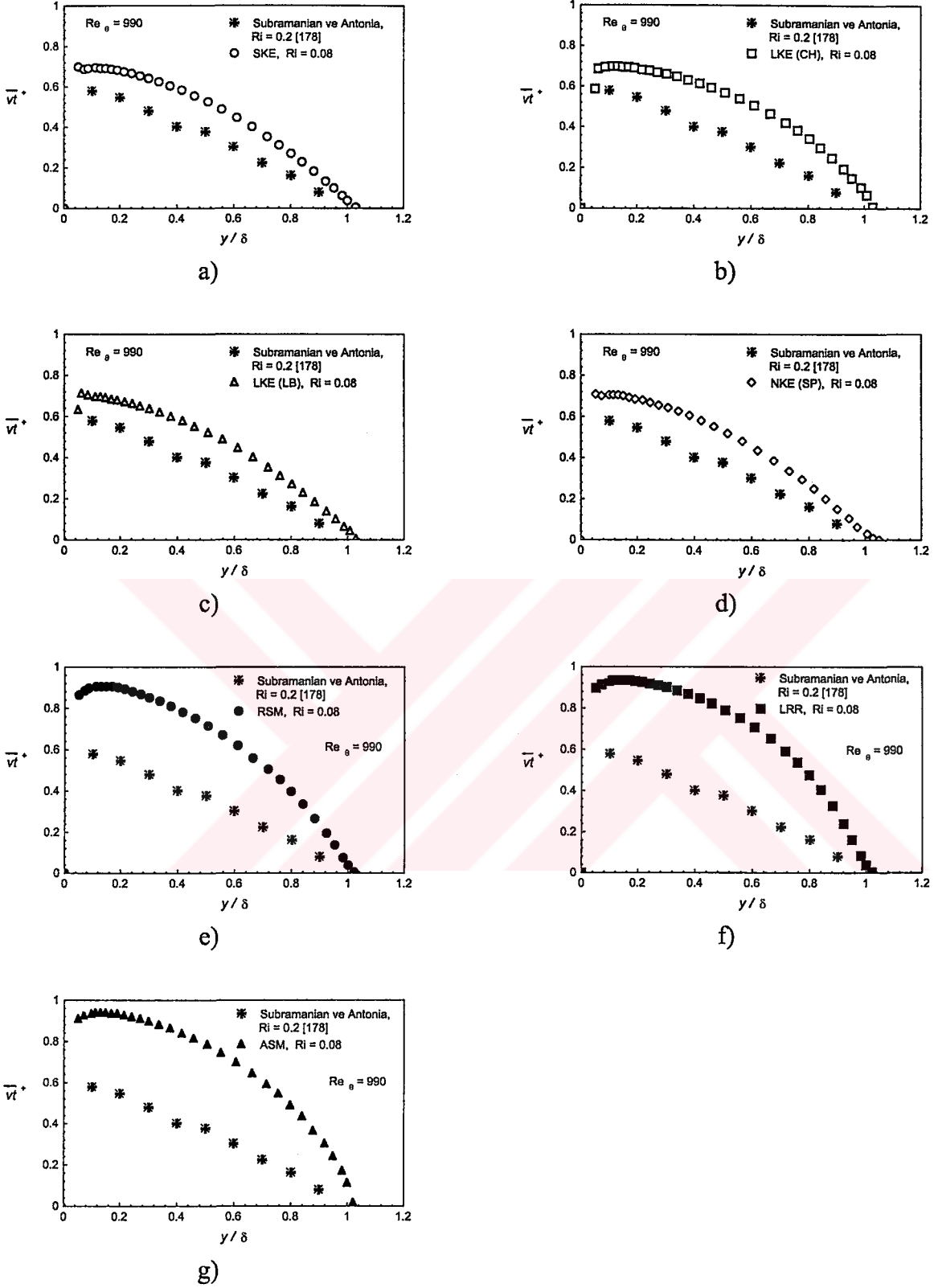
Şekil 61. Dikey düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans kayma gerilmesi ile karşılaştırılması ($Re_\theta = 1410$, $RI = 0.15$)



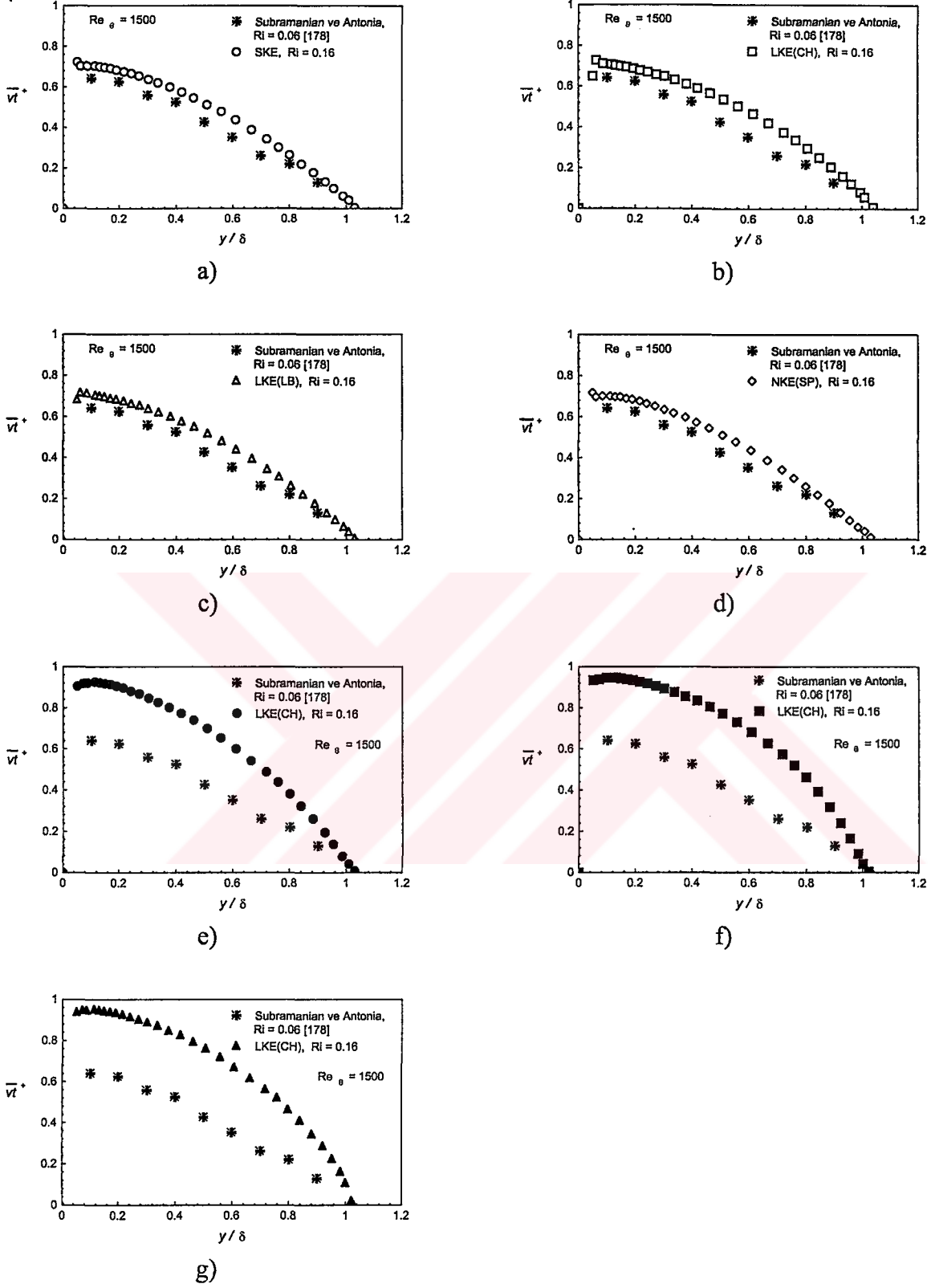
Şekil 62. Dikey düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin sürtünme katsayısının akış doğrultusunda değişimi ile karşılaştırılması



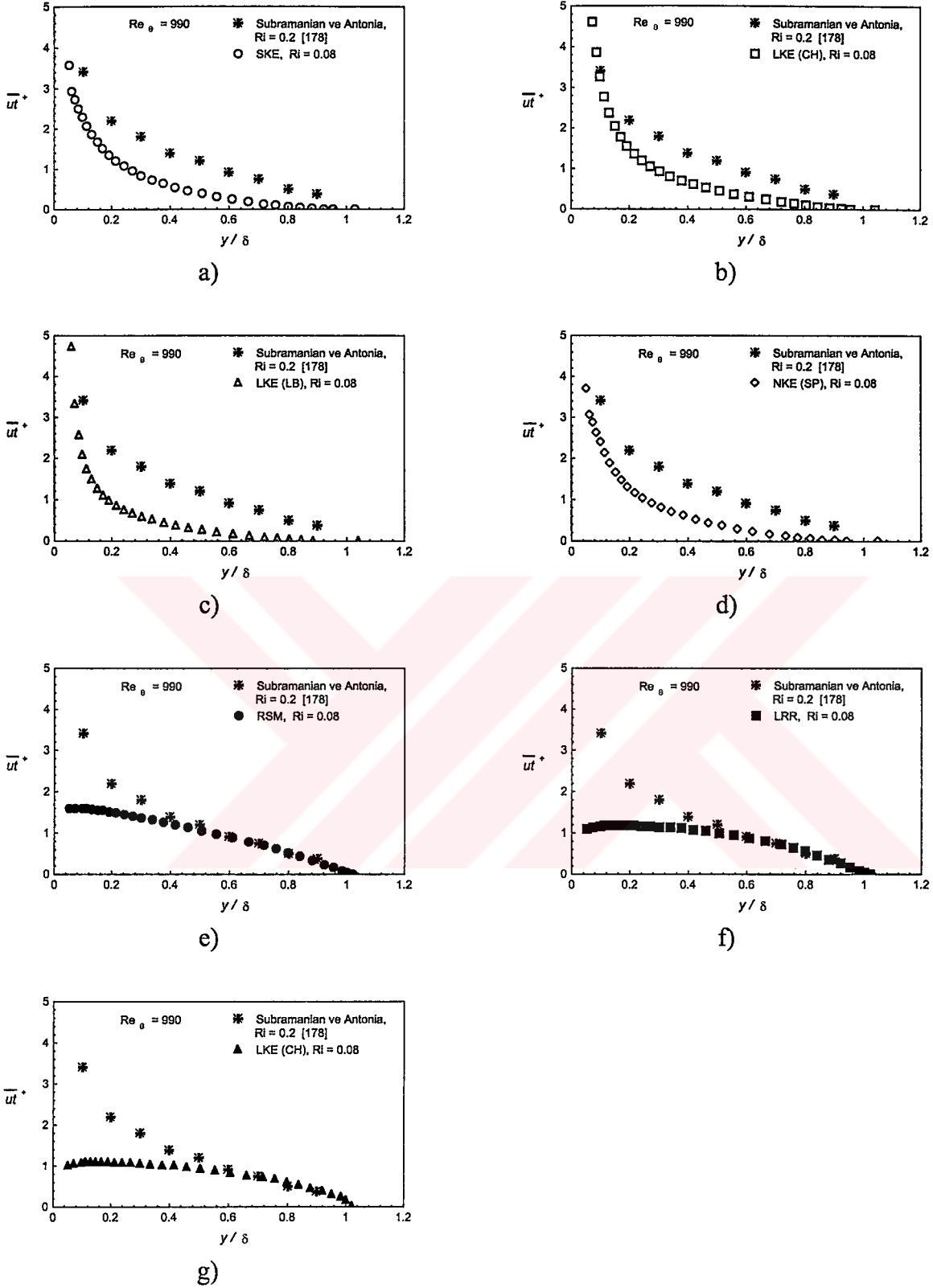
Şekil 63. Yatay düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin ortalama sıcaklık profili ile karşılaştırılması



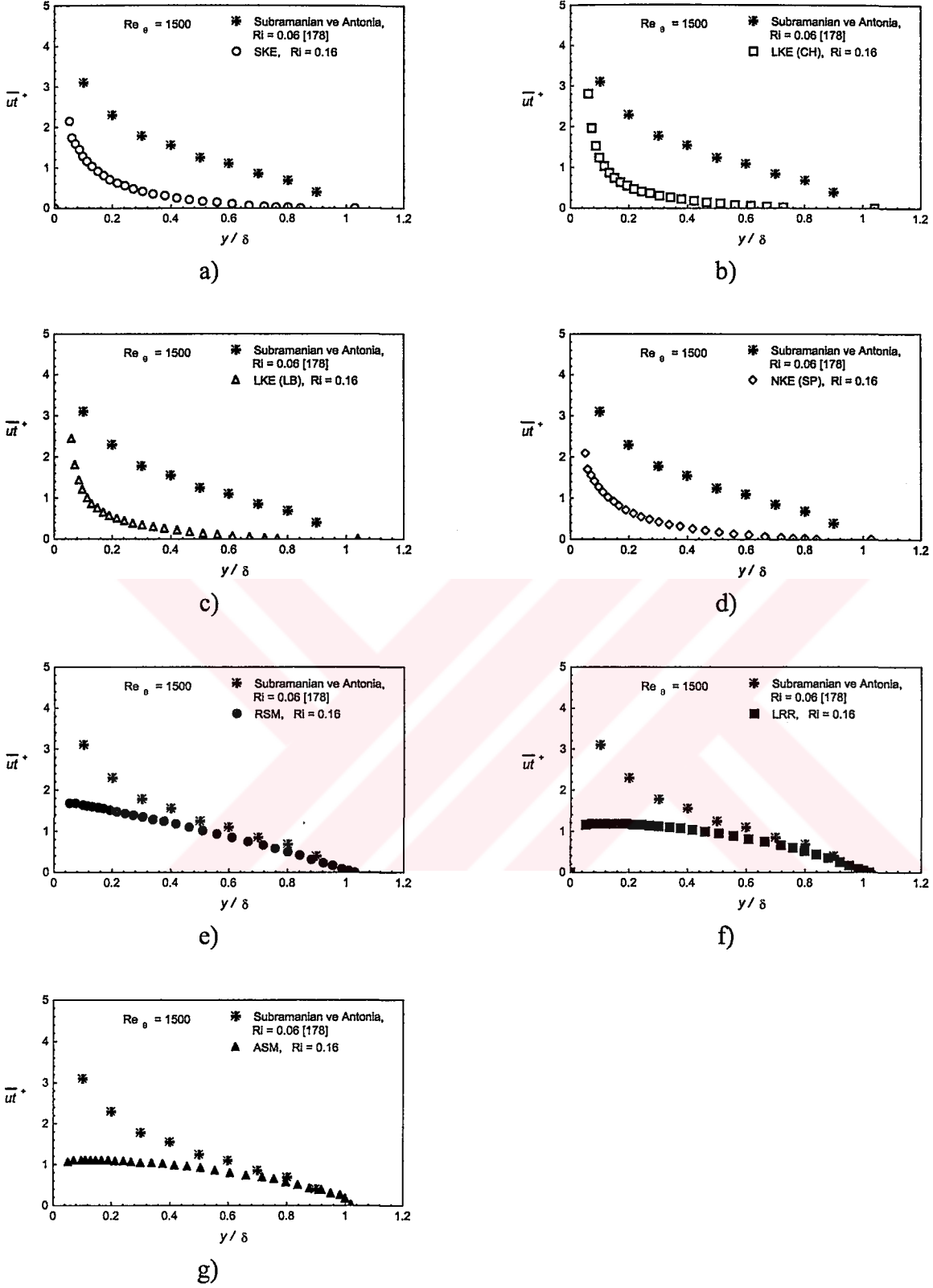
Şekil 64. Dikey düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin akışın normaline doğrultusundaki türbülans ısı akısı ile karşılaştırılması ($Re_\theta = 990$, $Ri = 0.08$)



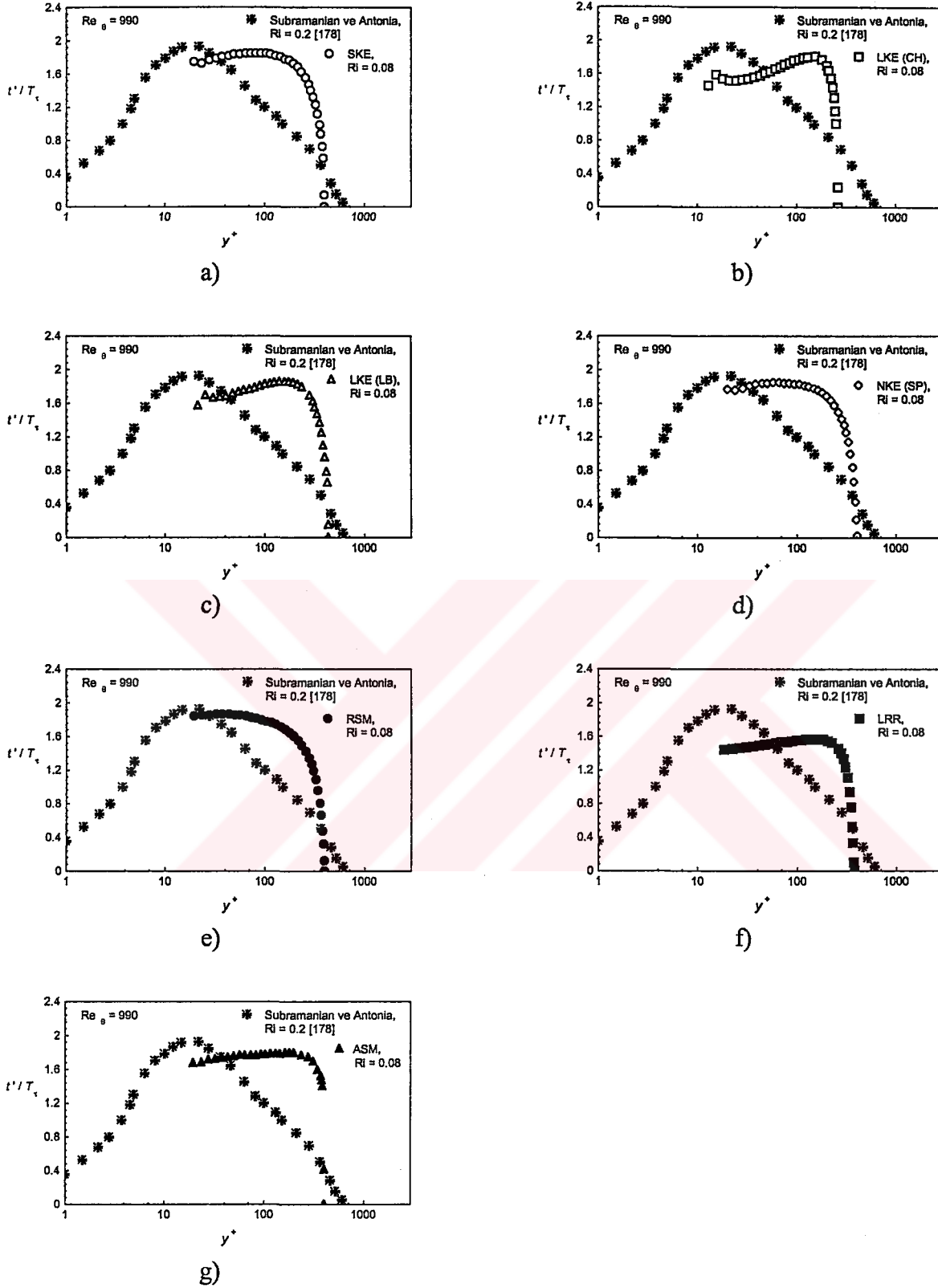
Şekil 65. Dikey düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin akışın normaline doğrultusundaki türbülans ısı akısı ile karşılaştırılması ($Re_\theta = 1500$, $Ri = 0.16$)



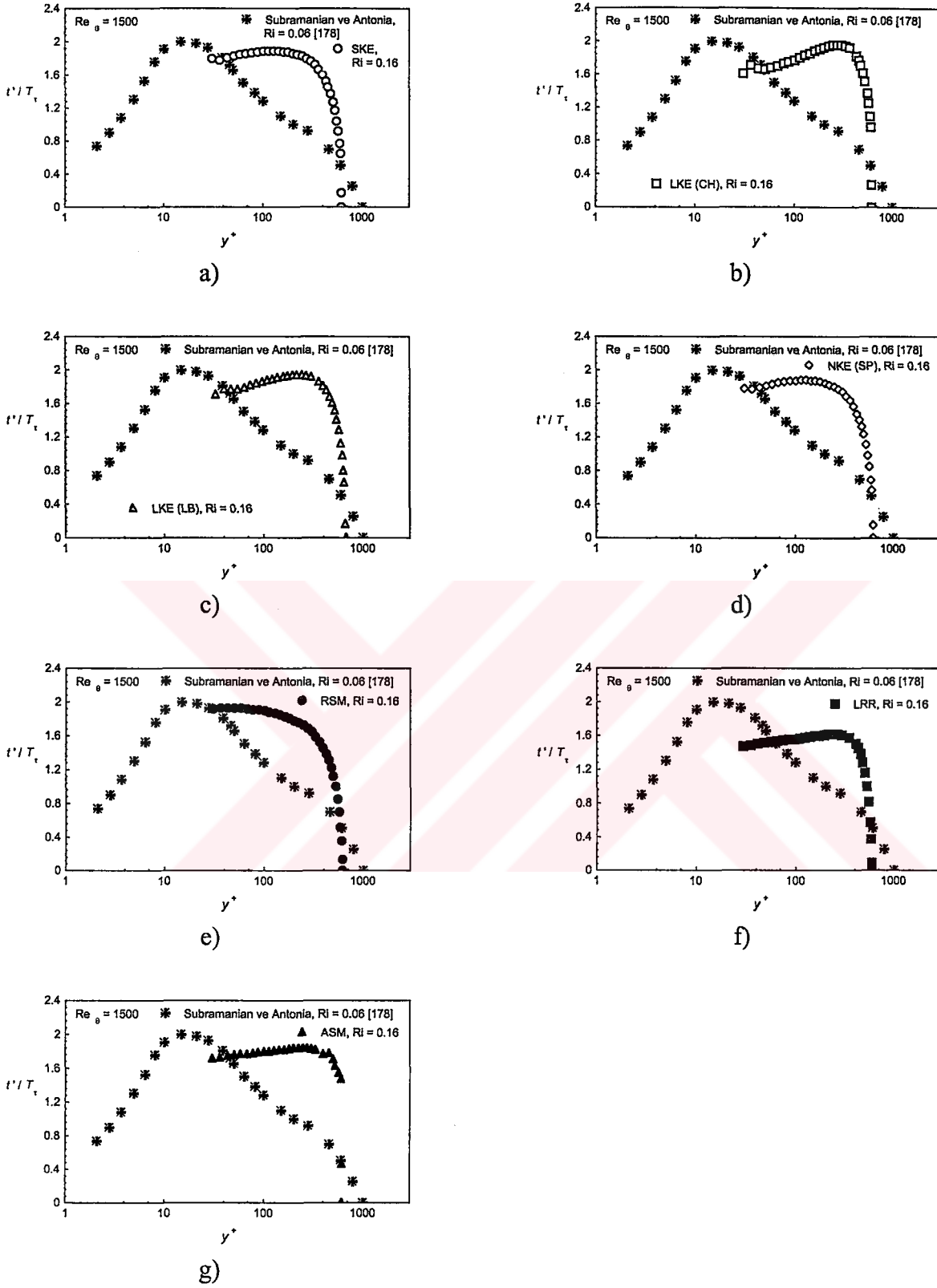
Şekil 66. Dikey düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin akış doğrultusundaki türbülans ısı akısı ile karşılaştırılması ($Re_0 = 990$, $Ri = 0.08$)



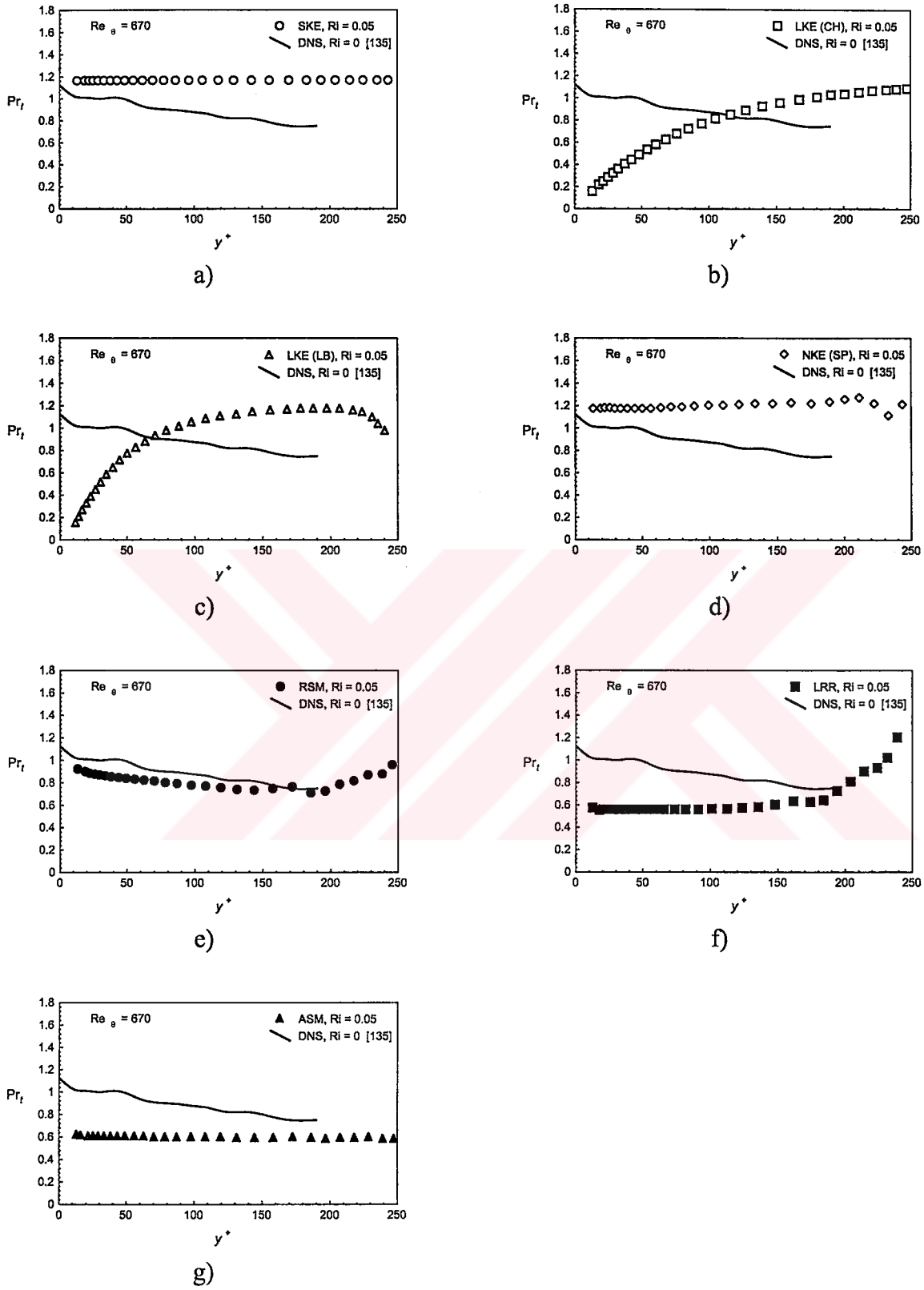
Şekil 67. Dikey düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin akış doğrultusundaki türbülans ısı akısı ile karşılaştırılması ($Re_\theta = 1500$, $Ri = 0.16$)



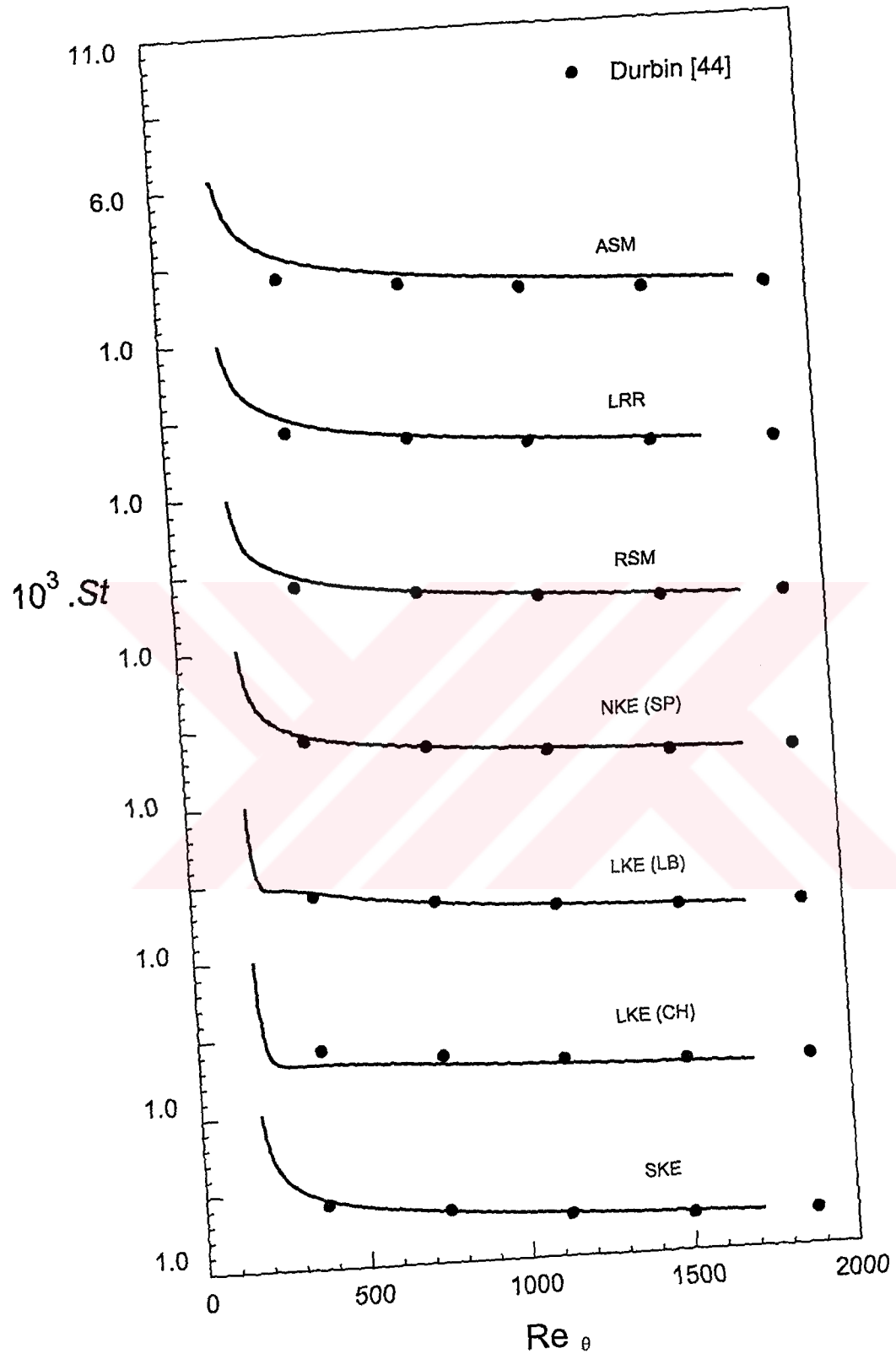
Şekil 68. Dikey düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans sıcaklık çalkantı şiddeti ile karşılaştırılması ($Re_0 = 990$, $Ri = 0.08$)



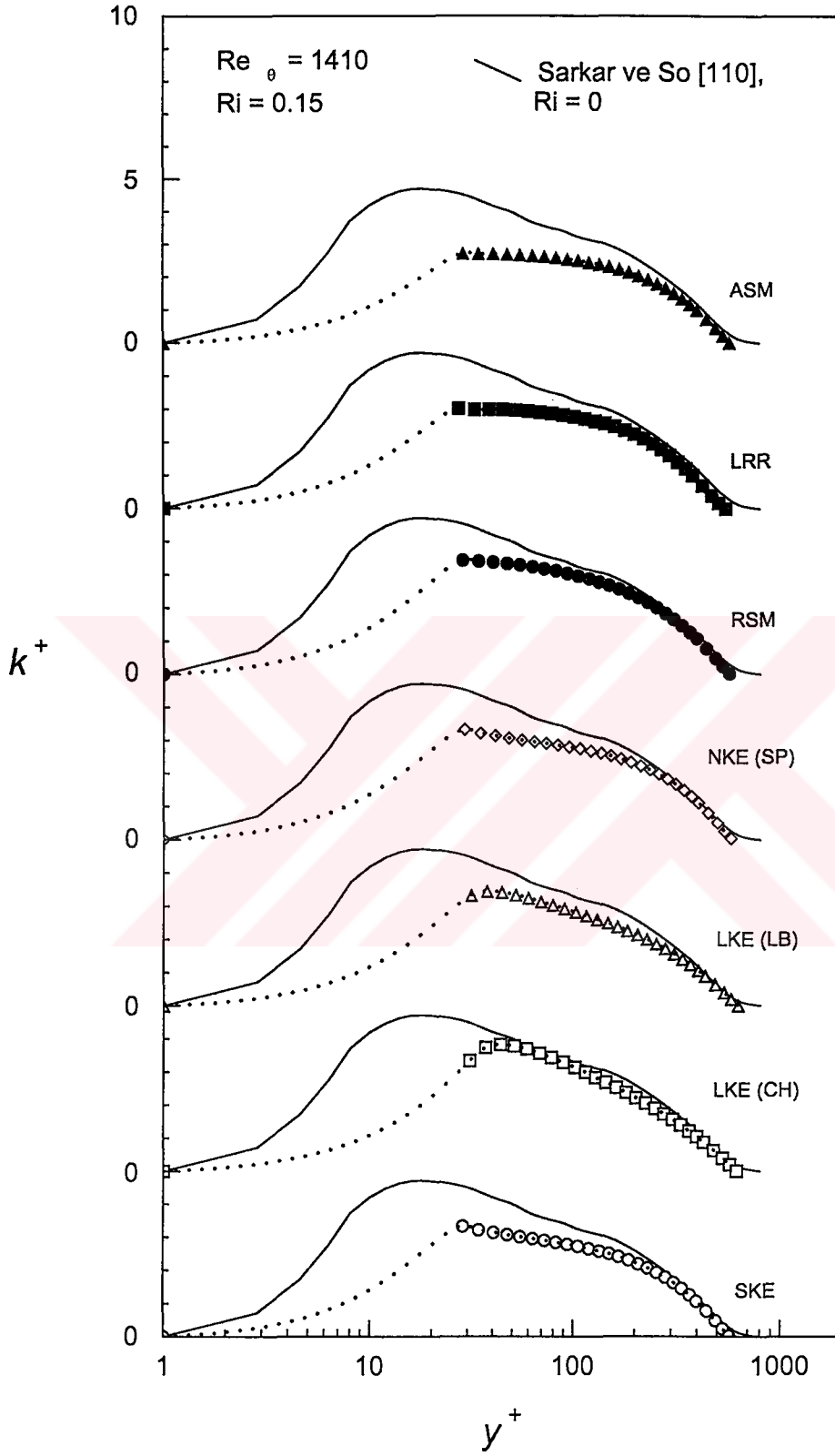
Şekil 69. Dikey düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans sıcaklık çalkantı şiddeti ile karşılaştırılması ($Re_{\theta} = 1500$, $Ri = 0.16$)



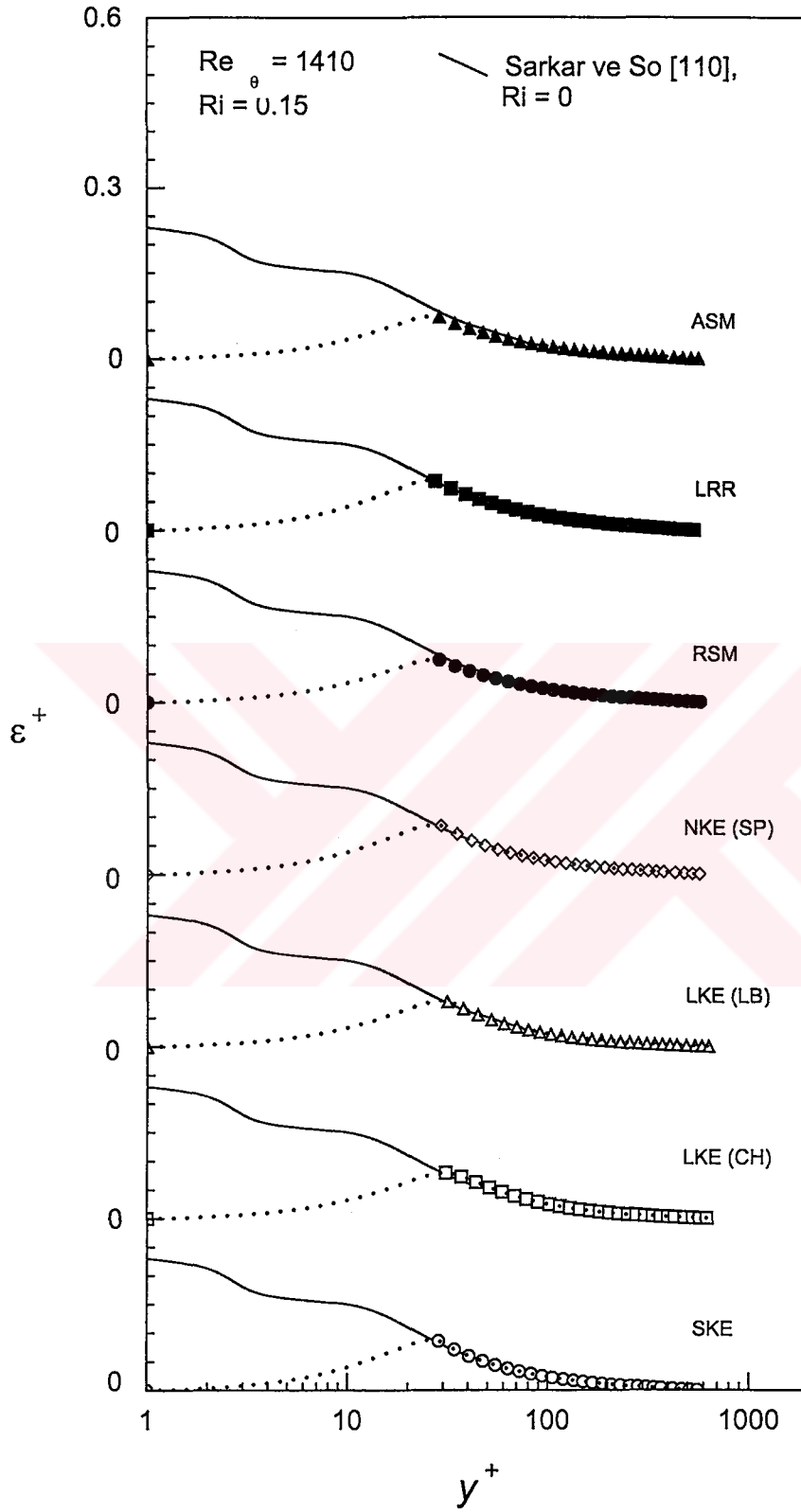
Şekil 70. Dikey düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin radyal türbülans Prandtl sayısı ile karşılaştırılması ($Re_\theta = 670$, $Ri = 0.05$)



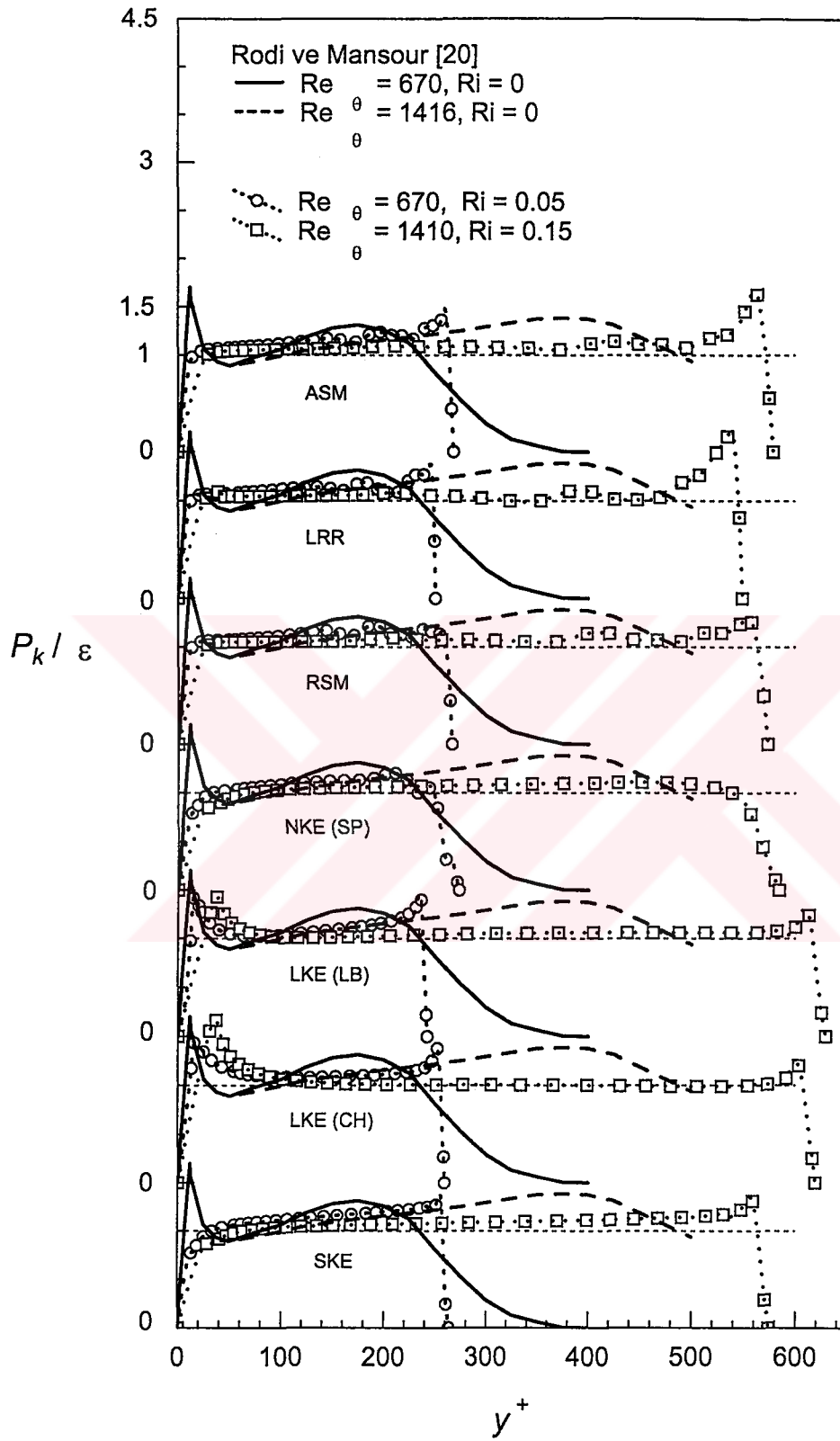
Şekil 71. Dikey düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin Stanton sayısının akış doğrultusunda değişimi ile karşılaştırılması



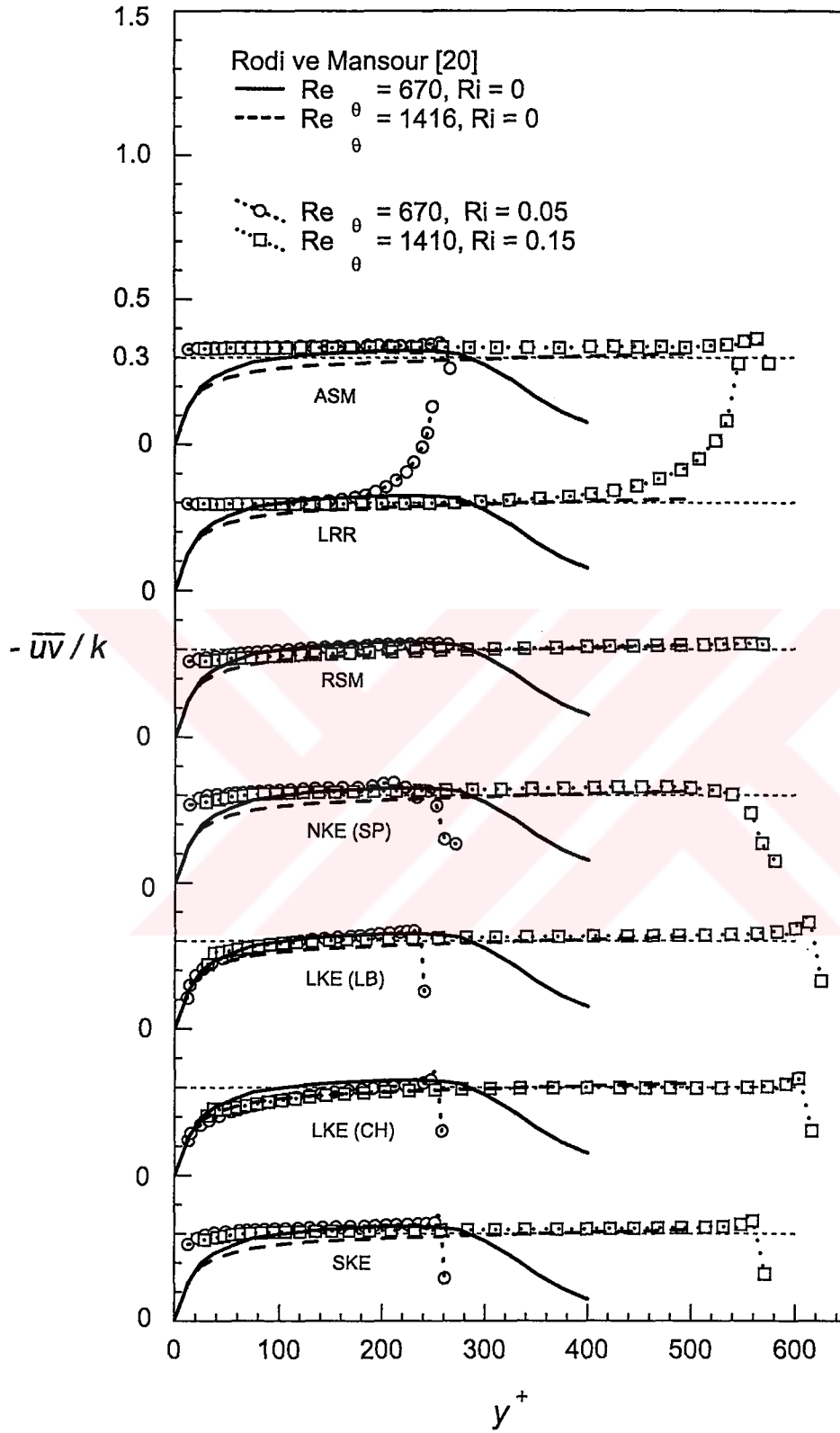
Şekil 72. Dikey düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans kinetik enerji ile karşılaştırılması ($Re_{\theta} = 1410$, $Ri = 0.15$)



Şekil 73. Dikey düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans kinetik enerjinin yutulması ile karşılaştırılması ($Re_0 = 1410$, $Ri = 0.15$)



Şekil 74. Dikey düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans kinetik enerji üretiminin kinetik enerjinin yutulmasına oranı ile karşılaştırılması



Şekil 75. Dikey düzlem levha üzerindeki TSTA için türbülans modellerinin türbülans kayma gerilmesinin kinetik enerjiye oranı ile karşılaştırılması

4. İRDELEME

4.1. Düzlem Levha Üzerinde TSTA' da Elde Edilen Bulguların İrdelenmesi

Burada, düzlem levha üzerinde meydana gelen, kaldırma kuvvetinin ihmal edildiği durumda ve sıkıştırılmaz TSTA' nın, seçilen yedi farklı birinci ve ikinci derece modellerle çözümlenerek, elde edilen sınır tabaka karakteristikleri, literatür verilerinden de yararlanılarak irdelenmiştir. Böylece her bir türbülans modelinin performansı belirlenmeye çalışılmıştır. Bu amaçla belirlenen temel karakteristikler şu şekilde sıralanabilir: Momentum sınır tabaka için; U , \overline{uv} , $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$, $\overline{w^2}$, k , ε , c_f , H ve ısı sınır tabaka için; T , \overline{vt} , St , Pr_t ' dir. Normal gerilmeler, $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$, $\overline{w^2}$, sadece ikinci derece modellerle (RSM, LRR) çözüm yapıldığında hesaplandığından, bu çalışmada bu parametrelerin değişimleri verilmemiştir. Bunun yerine bu çalışmada, $k = 1/2(\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2})$ olduğu bilindiğine göre, tüm modeller için normal gerilmeler yerine sadece kinetik enerjinin değişimi, k , verilmiştir. Bu akış koşulunda yukarıda bahsedilen karakteristikler, yedi farklı türbülans modeli ve $Re_\theta = 670$ ve 1410 değerleri için 14 farklı durumda çözümlenmiştir. Isıl sınır tabakadaki ilgili karakteristikler, yedi farklı türbülans modeli ve $Re_\theta = 990$ ve 1500 değerleri için yine 14 farklı durumda çözümlenmiştir. Elde edilen bulgular, önce literatürde yer alan uygun verilerle karşılaştırılmıştır. Daha sonra farklı türbülans modelleriyle elde edilen bu bulgular kendi aralarında karşılaştırılmış ve türbülans modellerinin performansları belirlenmiştir.

Şekil 8' de yedi farklı türbülans modeli ile $Re_\theta = 670$ ve 1410 değerlerinde elde edilen ortalama hız profilleri verilmektedir. Bu grafik üzerinde aynı zamanda, Spalart [19]' dan alınan DNS verileri ve duvar ve logaritma kanunlarının eğrileri de bulunmaktadır. Belirlenen ortalama hız profilleri, literatürle ve kendi aralarında karşılaştırıldığında SKE, NKE (SP), RSM ve ASM modelleriyle elde edilen bulguların her iki Re_θ değeri için iyi sonuçlar verdiği görülmektedir. LKE(CH) ve LKE(LB) modellerinin ise; umulanın aksine, Spalart [19]' a kıyasla beklenenden daha yüksek değerler verdiği görülmektedir. Bu durum, azaltma fonksiyonunun, f_μ , etkisiyle duvar kayma gerilmesinin, τ_w , beklenenden daha

düşük değerlerde hesaplanmasıyla açıklanabilir. Sadece LKE(LB), $Re_0 = 1410$ değeri için iyi sonuçlar verdiği görülmektedir.

Şekiller 9 ve 10' da akışın normali doğrultusunda, sırasıyla, $Re_0 = 670$ ve 1410 değerlerinde farklı türbülans modelleri ile belirlenen kayma gerilmeleri verilmektedir. Bu kayma gerilmeleri her iki Re_0 değeri için Spalart [19]' in verileriyle karşılaştırıldığında, ortalama hız bulgularının aksine, Şekiller 9b, 9c, 10b ve 10c' de verilmiş olan LKE(CH) ve LKE(LB)' nin diğer türbülans modellerine oranla daha uyumlu bulgular verdiği görülmektedir. Özellikle yakın-duvar bölgesinde ($0 \leq y/\delta \leq 0.3$), viskoz alt sınır tabaka hariç ($0 \leq y/\delta \leq 0.05$), bu iki modelin çok iyi sonuçlar verdiği görülmektedir. Ancak sınır tabakanın dış bölgesinde, diğer türbülans modelleri de dahil olmak üzere bu modellerin yaklaşık %20' ler mertebesinde beklenenden daha yüksek değerler vermektedir. Bu bölgenin her ne kadar tam türbülanslı bölge olduğu kabul edilse de, burada sınır tabaka sınırının süreklilik göstermemesi (kesikli), bu bölgede türbülans yayılımının, viskoz yayılım karşısında zayıflamasına neden olabilir. Bu nedenle bu bölgede de bu etkileri modelleyecek viskoz alt sınır tabakada uygulanan azaltma fonksiyonuna benzer çözümler geliştirilebilir. Diğer taraftan LKE(CH) ve LKE(LB) dışındaki diğer modeller $0.05 \leq y/\delta \leq 0.1$ aralığında benzer oranda beklenenden daha yüksek (testere ağzı biçiminde) değerler vermektedir. Kayma gerilmelerinin karşılaştırılmasına göre; kullanılan türbülans modellerinden en kötü performansı, Şekiller 9d ve 10d' de verilen NKE(SP) vermektedir. Bu model, özellikle, $Re_0 = 1410$ değerinde yaklaşık %35' lere varan mertebelerde beklenenden daha yüksek değerler verdiği görülmektedir. Bu ise, NKE(SP) modeli için beklenmeyen bir durumdur. Diğer taraftan düşük Re_0 değerlerinde türbülans modellerinin performansları, LKE(CH) ve LKE(LB) hariç, yüksek Re_0 değerlerine göre daha iyi olduğu gözlenebilmektedir. Bu da, türbülans modellerinin performanslarının Re_0 değerlerine oldukça bağımlı olduğunu göstermektedir.

Şekiller 11 ve 12, $Re_0 = 670$ ve 1410 değerlerinde yedi farklı türbülans modeli kullanılarak belirlenen ortalama hız profillerinin, U/U_∞ , bulgularını vermektedir. Her iki Re_0 değerleri için, viskoz alt sınır tabaka hariç, kullanılan tüm türbülans modelleri ile belirlenen hız profillerinin, Spalart [19]' in DNS verileriyle %5' lik bir oran aralığı içinde uyumlu olduğu görülmektedir. Ancak Şekiller 11b, 12b, 11c ve 12c' de verilen, sırasıyla,

LKE (CH) ve LKE (LB) modellerinin özellikle logaritma kanunu bölgesinde olmak üzere literatür ile iyi bir uyum içinde oldukları görülebilmektedir.

Şekiller 13 ve 14, yedi farklı birinci ve ikinci derece modellerle belirlenen sürtünme katsayısının, c_f , ve şekil faktörünün, H , Re_0 ile değişimlerini vermektedir. Belirlenen bu sınır tabaka karakteristikleri, Spalart [19]' in DNS verileriyle karşılaştırıldığında, c_f ' nin belirlenmesinde en iyi performansı veren modellerin; SKE, NKE (SP), RSM ve ASM oldukları görülmektedir. Dikkat edilebileceği gibi; LKE(CH) modeli, ortalama %25 mertebesinde ve LKE(LB) modeli ortalama %15 mertebesinde beklenenden daha düşük değerler vermektedirler. Bu durum, düşük Re_0 değerlerinde ($Re_0 < 500$) daha da yüksek mertebelere çıkmaktadır. Bunun nedeni olarak, daha önce Şekil 8' de verilen ortalama hız profilleri değerlendirilirken de belirtildiği gibi; azaltma fonksiyonunun, f_μ , etkisiyle duvar kayma gerilmesinin, τ_w , daha düşük belirlenmesi gösterilebilir. Burada azaltma fonksiyonunun, özellikle LKE(CH) ' da olmak üzere, viskoz etkiyi abartması söz konusudur. Bu etkinin özellikle LKE(LB) modelinde $Re_0 > 1500$ için azaldığı veya hemen hemen ortadan kalktığı görülmektedir. Aynı durumu LKE(LB) için Şekil 8' de de açıkça görmek mümkündür. Şekil 14' de verilen yedi farklı türbülans modeli ile belirlenen şekil faktörü, Spalart [19]' in DNS verileriyle karşılaştırıldığında, tüm türbülans modellerinin uyumlu değerler verdiği görülmektedir. Ancak LKE(CH) ve LKE(LB) modelleri dışındaki türbülans modellerinin, $Re_0 < 500$ için şekil faktöründe beklenenden daha düşük değerler verdiği görülmektedir. Bunun en önemli sebebi olarak; özellikle düşük Re_0 değerlerinde önem kazanan viskoz alt sınır tabakadaki moleküler viskozite etkisini ve duvarın bloklama etkisini LKE(CH) ve LKE(LB) modelleri dışındaki türbülans modellerinin dikkate alamamaları gösterilebilir. Oysaki, RSM modelinde; π_{ij}^w terimi ile ve LRR modelinde ise; π_{ij} teriminin içinde bulunan terimlerle duvar bloklama etkileri ve bununla birlikte viskoz etkiler modellenmeye çalışılmıştı. Şu ana kadar yukarıda verilen modellerle elde edilen bulgulardan, düşük Reynolds sayılı (yakın-duvar) $k - \epsilon$ modelleri (LKE(CH), LKE(LB)) hariç, bu modellerle sınır tabaka akışlarında bu etkilerin modellenmesinin yetersiz kaldığını görülmektedir. SKE ve ASM ile kıyaslandığında, daha karmaşık ve problemlere uygulanması daha zor olan RSM ve LRR, sınır tabaka akışları için kötü bir performans göstermektedir. Burada ASM modeli, cebrik bir eşitlik sistemine

sahip olmasından dolayı diğer türbülans modellerinden daha sadedir. Buna rağmen bu modelin performansı, oldukça karmaşık ve fiziksel problemlere uygulanması zor olan diğer ikinci derece modellere (RSM, LRR) göre daha iyidir.

Şekil 15' de kaldırma kuvvetinin ihmal edildiği durumda düzlem levha üzerinde meydana gelen ısı sınır tabakanın yedi farklı türbülans modeli kullanılarak belirlenen ortalama sıcaklık profilleri verilmiştir. Verilen ortalama sıcaklık profillerinin karşılaştırılması amacıyla aynı grafikte, Subramanian ve Antonia [178]' dan alınan deneysel veriler ve ısı sınır tabaka için duvar ve logaritma kanunlarının profilleri verilmiştir. Elde edilen bulgular, sözü edilen literatürlerle karşılaştırıldığında özellikle logaritma kanunu bölgesinde ($11.63 \leq y^+ \leq 200$) uyum içinde bulunan türbülans modellerin; LKE(CH), LKE(LB), LRR ve ASM olduğu görülmektedir. Bu modellerin, ısı sınır tabakanın dış bölgesinde ($y^+ \geq 200$) Subramanian ve Antonia [178]' nın deneysel verilerine göre beklenenden daha yüksek değerler verdiği görülmektedir. Ancak sözü edilen deneysel verilerin $\pm\%5-7$ oranında belirsizlikleri olduğu Subramanian ve Antonia [178] tarafından çalışmalarında belirtildiğine göre, genel olarak yukarıda sıralanan dört türbülans modelin performanslarının iyi oldukları söylenebilir. Geriye kalan diğer üç türbülans modeli (SKE, NKE(SP) ve RSM) ise, birbirlerine yakın performanslar göstermektedir. Burada en dikkat çeken türbülans modeli ASM' dir. Bu model, sadeliğine ve uygulama kolaylığına rağmen en iyi performansı veren türbülans modellerinden biridir.

Şekiller 16 ve 17' de akışın normali doğrultusundaki türbülans ısı akıları, sırasıyla, $Re_\theta = 990$ ve 1500 değerleri için verilmiştir. Bu grafiklerde aynı zamanda, elde edilen bulguların karşılaştırılmasının yapılması için Subramanian ve Antonia [178]' dan alınan deneysel veriler de bulunmaktadır. Her iki Re_θ değeri için bulgular deneysel verilerle karşılaştırıldığında, birinci derece modellerin (SKE, LKE(CH), LKE(LB), NKE (SP)) ortalama $\%10-15$ oranında, ikinci derece modellerin (RSM, LRR, ASM) ise ortalama $\%35-40$ oranında beklenenden daha yüksek değerler verdiği görülmektedir. Subramanian ve Antonia [178] çalışmalarında, türbülans ısı akıları (\overline{vt} , \overline{ut}) için deneysel çalışmalarında $\pm\%7$ mertebesinde belirsizlik olduğunu belirtmişlerdir. Buna göre türbülans ısı akısı bulgularına göre; her iki Re_θ değeri için de birinci derece modellerin performanslarında ikinci derece modellere göre belirgin bir üstünlük olduğu görülmektedir. Diğer taraftan $0 \leq y/\delta \leq 0.1$ aralığında türbülans ısı akılarının belirlenmesinde tüm türbülans

modelleri için bir zorluk olduğu görülmektedir. Hatta düşük Reynolds sayılı (yakın-duvar) modellerin (LKE(CH), LKE(LB)) de aynı zorluklara sahip oldukları görülmektedir. Belirtilen bu bölgenin büyük bir kısmı logaritma kanunu bölgesinin içinde kalmaktadır. Ancak literatürde momentum sınır tabakanın çözümünde olduğu gibi ısı sınır tabakanın çözümünde de düşük Reynolds sayısında veya yakın-duvar bölgesinde viskoz etkileri ve duvar bloklama etkilerini belirlemek için gerekli yaklaşımlar, türbülans modellerinin bir çoğunda bulunmamaktadır. RSM modelinde Eşitlik 64 ile verilen ısı sınır tabaka için duvar etkilerinin belirlendiği eşitlik de sınır tabaka akışları için etkisiz kalmaktadır. Bu bulgularda beklenmeyen durum ise; her üç ikinci derece modelin de önemli ölçüde hatalı değerler vermesidir. Oysaki ikinci derece modeller, fiziksel tanım olarak birinci derece modellere göre daha ileri bir konumda bulunmaktadır. İkinci derece modellerde her bir türbülans ısı akısı için bir transport eşitliği oluşturulmaktadır. Birinci derece modellerde ise; bugün bile sahip oldukları değer veya değerler konusunda tartışmalar olan türbülans Prandtl sayısı, Pr_t , tanımı ile türbülans ısı akısı, Eşitlik 20' de verildiği gibi belirlenmektedir. İkinci derece modellerdeki bu zorlukların en önemli sebebi; her bir türbülans ısı akısı transport eşitliği oluşturulurken bilinmeyen yeni terimlerin ortaya çıkması ve bu terimlerin de modellenmeye ihtiyaç duymalarıdır. Bu yeni bilinmeyen terimler modellenirken yeni hataları beraberinde getirmeleri de kaçınılmazdır.

Şekil 18' de yedi farklı türbülans modeli kullanılarak belirlenen Stanton sayısının, St , Re_θ ile değişimi verilmektedir. Elde edilen bu bulguların karşılaştırılması için Durbin [44]' den alınan ve Reynolds *vd.*' ne ait olan deneysel veriler de aynı grafik üzerinde gösterilmiştir. Elde edilen bulgular literatürle karşılaştırıldığında en iyi performansı veren türbülans modellerinin; SKE, NKE(SP), RSM ve LRR oldukları görülmektedir. Normal doğrultudaki türbülans ısı akılarının belirlenmesinde iyi performans gösteren LKE(CH) modeli, $Re_\theta \cong 1500$ değerine kadar ve LKE(LB) modeli ise; $Re_\theta \cong 1000$ değerine kadar ortalama %10-15 mertebesinde beklenenden daha düşük değerler vermektedir. Şekil 13' de de açıklandığı üzere, bu modellerde f_μ ' nün etkisiyle daha düşük τ_w ' nin belirlenmesi söz konusuydu. Buna bağlı olarak, birinci derece modeller kullanılarak ısı sınır tabaka karakteristiklerinin belirlenmesinde, momentum sınır tabaka ile ısı sınır tabaka benzerliğinin kullanılması sonuçta, St sayısının da daha düşük belirlenmesi gerçeğini ortaya çıkarmaktadır. Bu da göstermektedir ki; özellikle birinci

derece modellerde momentum sınır tabakanın karakteristiklerinin belirlenmesi, ısı sınır tabakanın karakteristiklerini doğrudan ve büyük oranda etkilemektedir. Bu durum ikinci derece modellerde daha az seviyelerde olmaktadır.

Şekil 19' da yedi farklı türbülans modeli kullanılarak belirlenen türbülans Prandtl sayısının, Pr_t , değişimi verilmektedir. Elde edilen bu bulguların karşılaştırılması amacıyla, Kays [135]' tan alınan ve Bell *vd.*' ne ait olan DNS verileri de aynı grafikler üzerinde verilmiştir. Burada türbülans Prandtl sayısı Eşitlik 20' den de faydalanılarak; $[-\overline{uv}/(\partial U/\partial y)]/[-\overline{vt}/(\partial T/\partial y)]$ şeklinde belirlenmiştir. SKE, LKE(CH), LKE(LB) ve NKE (SP) modelleri başlangıç değeri olarak $Pr_t = 0.86$ almasına rağmen Şekiller 19a, 19b, 19c ve 19d' de görüldüğü gibi; Pr_t ' nin değerinde sayısal süreç sonunda değişimler meydana gelmektedir. Pr_t değerindeki bu değişimlere en çarpıcı örnekler, LKE(CH) ve LKE(LB) modellerinde rastlanmaktadır. Bu iki türbülans modelinde Pr_t ' nin değerinin yakın-duvar bölgesinde önemli oranda düştüğü görülmektedir. Bu durumun özellikle düşük Re_θ değerlerinde ortaya çıktığı, Şekil 18' de St' nin irdelenmesi sırasında da vurgulanmıştı. Şekil 19e' de verildiği gibi Pr_t değişiminin literatürle en uyumlu olduğu türbülans modeli RSM olarak görülmektedir. Buna rağmen Şekiller 16e ve 17e' de görüldüğü gibi RSM, normal doğrultudaki türbülans ısı akısının belirlenmesinde en kötü performansı veren türbülans modellerinden biridir.

Şekiller 20 ve 21' de, sırasıyla, $Re_\theta = 1410$ değerinde türbülans kinetik enerjinin, k^+ , ve onun yutulmasının, ε^+ , değişimleri verilmektedir. Bu bulguların karşılaştırılması amacıyla aynı grafiklerde Sarkar ve So [110]' dan alınan ve Spalart' a ait olan DNS verileri de bulunmaktadır. Büyük girdapların (büyük ölçekli türbülans hareketin) hız ölçeğini ifade eden k^+ ve bu girdapların uzunluk ölçeğini ifade eden ε^+ ' nin dağılımlarının doğru bir şekilde belirlenebilmesi, kullanılan türbülans modellerinin performanslarını doğrudan etkilemektedir. Şekil 20' de görüldüğü gibi elde edilen bulgular, Spalart' ın DNS verileriyle karşılaştırıldığında logaritma kanunu bölgesinde hiçbir türbülans modelinin doğru bir belirleme yapamadığı görülmektedir. Ancak; LKE(CH) ve LKE(LB) modellerinin, logaritma kanunu bölgesinde diğer türbülans modellerine göre daha doğru değerler verdiği söylenebilir. Dış bölgede ise; tüm türbülans modellerinin literatür ile genelde uyum içinde olduğu görülmektedir. LKE(CH) ve LKE(LB) dışındaki diğer modeller; logaritma kanunu

bölgesinde literatür değerlerinden %50' lere varan oranlarda beklenenden daha düşük değerler verdiği görülmektedir. Bu durum ise; türbülans modellerinden c_f ve St gibi nihai olarak elde edilmek istenen karakteristikleri olumsuz olarak etkilemesi sonucunu beraberinde getirecektir. Şekil 21' de verilen ε^+ 'nin farklı türbülans modelleri kullanılarak elde edilen bulguları, Spalart' ın DNS verileriyle karşılaştırıldığında k^+ 'dan daha iyi bir sonuç ortaya çıkmaktadır. Tüm türbülans modelleri logaritma kanunu bölgesi ve dış bölgede literatürle oldukça iyi bir uyum sağlamaktadır. Diğer taraftan ε^+ 'nin, Spalart' ın DNS verilerinde duvarda sıfırdan farklı sonlu bir değer göstermesine rağmen, tüm modellerde bu değer sıfır olmaktadır. Aslında LKE(LB) dışındaki türbülans modellerinde ε^+ 'nin duvardaki sınır koşulu sıfırdır. Sadece LKE(LB) modelinde ε^+ 'nin sınır koşulu $(\partial\varepsilon/\partial y)_w = 0$ şeklindedir. Ancak bu sınır koşuluna rağmen LKE (LB) modelinde de ε^+ 'nin duvardaki değeri hesaplamalar sonucu sıfıra yaklaşmaktadır. Diğer taraftan ε^+ , kinetik enerjinin yutulması olduğu düşünülürse, k^+ 'nin sıfır değerini aldığı duvarda ε^+ 'nin de sıfır değerini alması gerektiği açıktır.

Şekil 22 ve 23' de, sırasıyla, $Re_\theta = 670$ ve 1410 değerlerinde P_k/ε ve $-\overline{uv}/k'$ 'nin sınır tabakanın normaline doğrultusundaki değişimleri verilmektedir. Yedi farklı türbülans modeli ile elde edilen bu bulguların karşılaştırılması amacıyla aynı grafiklerde, Rodi ve Mansour [20]' dan alınan ve DNS sonuçlarıyla elde edilmiş veriler de verilmiştir. Daha önce birinci bölümde bahsedildiği gibi; sınır tabaka akışları, özellikle logaritma kanunu bölgesinde, yerel olarak dengede olan ($P_k = \varepsilon$) akışlar olarak kabul edilir. Birinci derece modellerde önemli bir model katsayısı olan C_μ , yerel olarak dengede bulunan akışlarda $C_\mu = (-\overline{uv}/k)^2$ eşitliğiyle belirlendiği de daha önce belirtilmişti. Buna bağlı olarak sınır tabaka akışlarında yapılan deneylerde; $-\overline{uv}/k \approx 0.3$ olduğu tespit edilmiştir [1]. Bununla birlikte $-\overline{uv}/k'$ 'nin yaklaşık olarak sabit kalması veya yavaş bir şekilde değişmesi yine daha önce birinci bölümde bahsedildiği gibi akışın yerel olarak izotropik olduğunu sağlaması açısından önemlidir. Akışın yerel olarak izotropik olması, kullanılan transport eşitliklerinin yayılım ve yutulma terimlerinin modellenmesi açısından önemlidir. Çünkü bu terimler modellenirken, akışın yerel olarak izotropik olduğu kabulü yapılmaktadır. Bütün bunlara göre, sınır tabaka akışında özellikle logaritma kanunu

bölgesinde olmak üzere; $P_k / \varepsilon \approx 1$ ve $-\overline{uv}/k \approx 0.3$ olması gerekmektedir. Diğer taraftan bu parametrelerin viskoz alt sınır tabakada ve dış bölgede hangi değerleri alabileceği Rodi ve Mansour [20]' dan alınan verilerle değerlendirilebilir. Şekil 22' de verilen P_k / ε literatürle karşılaştırıldığında; özellikle yakın-duvar bölgesinde (viskoz alt sınır tabaka ve logaritma kanunu bölgesi) LKE(CH) ve LKE(LB) modellerinin diğer türbülans modellerine göre daha iyi performans gösterdikleri görülmektedir. Diğer türbülans modellerinin de hemen hemen hepsi logaritma kanunu bölgesinde yaklaşık %10' luk sınırlar içinde Rodi ve Mansour [20]' un verileriyle uyumludur. Ancak sınır tabakanın dış bölgesinde NKE(SP) ve LRR, literatürden önemli sapmalar göstermektedir. Şekil 23' de verilen $-\overline{uv}/k$ ' nin değişimleri, Rodi ve Mansour [20]'un verileriyle karşılaştırıldığında yine LKE(CH) ve LKE(LB) logaritma kanunu bölgesinde ve dış bölgede literatür ile iyi bir uyum içinde olduğu görülmektedir. Diğer türbülans modellerinin ise, NKE(SP) ve LRR hariç, logaritma kanunu bölgesinde ve dış bölgede literatürle uyumlu oldukları görülmektedir.

4.2. Dairesel Serbest Jet Akışında Elde Edilen Bulguların İrdelenmesi

Çalışmanın bu kısmında, kaldırma kuvvetinin ihmal edildiği durumda ve sıkıştırılamaz akış koşulunda dairesel jet akışının, birinci ve ikinci derece altı farklı türbülans modeli kullanılarak çözümlenmesiyle elde edilen bulguların irdelenmesi ve türbülans modellerinin performanslarının belirlenmesi mevcuttur. Daha önce ikinci bölümde de belirtildiği üzere; dairesel serbest jet akışları uygun sınır koşulları tanımlandıktan sonra sınır tabaka temel eşitlikleriyle çözülebilen bir akış türüdür. Çözümleme sonunda dairesel jet akışıyla ilgili belirlenen temel karakteristikler şu şekilde sıralanabilir: Momentum çözümleri için; U , \overline{uv} , $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$, $\overline{w^2}$, k , ε ve ısı çözümleri için T , \overline{vt} , Pr_t ' dir. Dairesel serbest jet akışının çözümlenmesinde LKE(CH) modeli kullanılmamıştır. Bunun nedeni bu modelin boru akışları için geliştirilmiş olmasından dolayı azaltma fonksiyonlarının bünyesinde y^+ tanımını bulundurmasıdır. Dolayısıyla bu türbülans modeli, bir katı yüzey üzerinden geçen akışlar için geçerlidir. Diğer taraftan, daha önce ikinci bölümde de bahsedildiği gibi burada hız ve sıcaklık çözümleri, simetriden dolayı sadece simetri ekseninin bir tarafı için (bu çalışmada üst tarafı) elde edilmiştir.

Şekil 24' de altı farklı türbülans modeliyle $x/d_j = 35$ istasyonu için belirlenen radyal hız profilleri, U/U_c , verilmiştir. Burada U_c dairesel jetin merkezinde akışkanın sahip olduğu hızdır. Bu bulguların karşılaştırılması amacıyla aynı grafikler üzerinde, Schetz [175]' den alınan deneysel veriler de bulunmaktadır. Şekil 24' de sunulan bulgular incelendiğinde; en iyi performansı, Şekiller 24a ve 24c' de verilen, sırasıyla, SKE ve NKE(SP) modellerinin gösterdikleri görülmektedir. En kötü performansı ise; LRR' nin gösterdiği görülmektedir. Geriye kalan diğer LKE(LB), RSM ve ASM modellerinin benzer performansları gösterdiği görülmektedir. Bu bulgular, genelde, LKE(LB) dışındaki birinci derece modellerin, dairesel simetrik jet akışının çözümlenmesi konusunda bazı zorluklara sahip olmalarına rağmen ikinci derece modellerden daha yüksek performansa sahip olduklarını göstermektedir. Dairesel jet akışlarında bahsedilen zorlukların en önemlisi; model katsayılarının belirlenmesine ilişkindir. Birinci derece modellerde C_μ , $C_{1\varepsilon}$ ve $C_{2\varepsilon}$ model katsayılarının dairesel simetrik jet akışları için sabit değerler alması %20' lere varan hatalara yol açabileceği bilinmektedir. Buna ilave olarak, C_μ model katsayısının, P_k/ε oranıyla ve $C_{1\varepsilon}$ ve $C_{2\varepsilon}$ model katsayılarının da, eksenel hız gradyanıyla, dU_c/dx , değiştiği bilinmektedir. Buna bağlı olarak sözü edilen katsayılar için fonksiyonlar tanımlanmıştır [1, 95]. Birinci derece modellerin genelde iyi performans göstermesine karşın, LKE(LB)' nin kötü bir performans göstermesi beklenmeyen bir durumdur. Bu da, birinci derece modellerden $k-\varepsilon$ modelinde düşük Reynolds sayısı için yapılan değişikliklerin bu akış koşulu için uygun olmadığı sonucunu çıkarmaktadır. Düşük Reynolds sayılı bu modellerin, genellikle duvar akışları için geliştirilmiş olması ve türbülans modellerinde yer alan azaltma fonksiyonlarının da (f_μ, f_1, f_2) deneysel verilerden türetilmesi bu durumu açıklamaktadır.

Şekil 25' de radyal kayma gerilmesinin $x/d_j = 50$ istasyonunda değişimleri verilmektedir. Elde edilen bulguların karşılaştırılması için aynı grafikler üzerinde, Schetz [175]' den alınan deneysel veriler ve Chou ve Antonia [137]' dan alınan analitik veriler de verilmiştir. Tüm türbülans modellerinin $0 \leq r/r_{1/2} \leq 1.25$ aralığında ortalama %10 mertebesinde beklenenden daha düşük değerler verdiği görülmektedir. Dolayısıyla simetri eksenine yakın bu bölgede tüm türbülans modellerinin hesaplama zorluklarına sahip oldukları söylenebilir. $r \geq 1.25$ için ise en iyi performansı veren türbülans modelleri yine,

Şekiller 25a ve 25c' de verilen, sırasıyla, SKE ve NKE(SP)' dir. Şekiller 25d ve 25f ' de verilen, sırasıyla, RSM ve ASM' nin de $r \geq 1.25$ için literatür ile uyumlu bulgular verdiği söylenebilir.

Yukarıda bahsedilen bulguların boyutlu büyüklüklerle desteklenmesi için Şekiller 26-31'de altı farklı türbülans modeli kullanılarak; $x/d_j = 2$, $x/d_j = 6$, $x/d_j = 10$, $x/d_j = 20$, $x/d_j = 35$ ve $x/d_j = 50$ istasyonlarında elde edilen boyutlu radyal hız profillerinin değişimleri verilmiştir. Burada jet çıkış hızı; $U_j = 5 \text{ m/sn}$, jet çıkış çapı; $d_j = 15 \text{ mm}$, jet çevre hızı; $U_o = 0$ olarak seçilmiştir. Verilen bu grafiklerdeki radyal hız profillerinin aksel ve radyal yöndeki gelişiminin incelenmesiyle, önceki bulgularda da belirtildiği gibi Şekil 26' da verilen SKE ve Şekil 28' de verilen NKE(SP) modelinin daha uygun bulgular verdiği söylenebilir. Radyal hız profillerinin aksel ve radyal gelişiminde uygun olmayan hız profilleri ise; Şekil 27' de verilen LKE(LB) ve Şekil 30' da verilen LRR modelleriyle elde edilmiş bulgular olarak görülmektedir.

Şekil 32' de dairesel jet akışının $x/d_j = 35$ istasyonundaki radyal ortalama sıcaklık profilleri, T/T_c , grafikler halinde verilmektedir. Elde edilen bulguların karşılaştırılması amacıyla yine Schetz [175]' den alınan deneysel verilerden yararlanılmıştır. Burada da momentum çözümlerine benzer şekilde, Şekiller 32a ve 32c' de verilen, sırasıyla, SKE ve NKE(SP) modelleri, literatürle iyi bir uyum içindedir. LKE(LB), RSM ve ASM modelleri, radyal ortalama sıcaklık profillerine göre jetin dış kısmında ($r/r_{1/2} \geq 1$) benzer performanslar ortaya koymaktadırlar. Diğer taraftan simetri eksenine yakın bölgede ($r/r_{1/2} \leq 1$) LRR dışındaki tüm modeller Schetz [175]' den alınan deneysel verilerle uyum içindedir.

Şekil 33' de $x/d_j = 35$ istasyonunda radyal türbülans ısı akışının değişimi verilmektedir. Elde edilen bulguların karşılaştırılması amacıyla, Chou ve Antonia [137]' dan alınan deneysel ve analitik veriler de aynı grafikler üzerinde verilmiştir. Elde edilen bulgular literatürle karşılaştırıldığında; Şekiller 33a ve 33c' de verilen bulgular belli ölçüde literatürle uyumlu olduğu söylenebilir. Bu durum momentum çözümündeki durumla örtüşmektedir. Diğer taraftan tüm modeller için simetri eksenine yakın bölgede ($r/r_{1/2} \leq 1$) bir hesaplama zorluğu görülmektedir.

Şekil 34' de dairesel jet akışında $x/d_j = 30$ istasyonunda radyal Türbülans Prandtl sayısının, Pr_t , değişimi verilmiştir. Bu bulguları karşılaştırmak için Chou ve Antonia [137]' dan alınan deneysel veriler de aynı grafik üzerinde verilmiştir. Bu bulgular incelendiğinde dairesel jet akışıyla ilgili diğer bulguların aksine Pr_t ' nin ikinci derece modeller ile elde edilen değerleri literatürle ortalama %15 oranında bir aralıkta uyumlu olduğu söylenebilir.

Yine dairesel jet akışının ısı çözümüde kullanılan altı farklı modelin değerlendirilmesiyle ilgili yukarıda bahsedilen ifadelere boyutlu parametrelerle destek olmak için Şekiller 35-40' da verilen boyutlu radyal ortalama sıcaklık profilleri verilmiştir. Bu sıcaklık profilleri momentum çözümünde olduğu gibi; $x/d_j = 2$, $x/d_j = 6$, $x/d_j = 10$, $x/d_j = 20$, $x/d_j = 35$ ve $x/d_j = 50$ istasyonlarında elde edilmiştir. Burada jet çıkış sıcaklığı; $T_j = 35^\circ C$, jet çevre sıcaklığı; $T_o = 20^\circ C$ ve diğer sınır şartları momentum çözümünde olduğu gibidir. Şekil 35' de verilen SKE ve Şekil 36' da verilen NKE(SP)' nin diğer türbülans modellerine göre daha uygun sıcaklık profilleri verdiği görülmektedir. RSM ve ASM' nin de bir ölçüde verdikleri profiller uygun olmasına karşın, LKE(LB) ve LRR modellerinin momentum çözümünde olduğu gibi uygun sıcaklık profilleri vermediği görülmektedir. Oysaki bu iki model de akış içinde meydana gelen etkileri modellemek için geliştirilmiş türbülans modelleridir.

4.3. Kaldırma Kuvvetinin Etkili Olduğu TSTA' da Elde Edilen Bulguların İrdelenmesi

4.3.1. Yatay Konumda TSTA' da Elde Edilen Bulguların İrdelenmesi

Bu kısımda, yatay konumdaki düzlem levha üzerinde oluşan TSTA' nın, kaldırma kuvvetinin de etkili olduğu durumda, yedi farklı birinci ve ikinci derece modeller kullanılarak belirlenen karakteristikleri irdelenerek modellerin performansları değerlendirildi. Bu amaçla belirlenen, kaldırma kuvvetinin etkili olduğu sınır tabakanın temel karakteristikleri şu şekilde sıralanabilir: Momentum sınır tabaka için; U , \overline{uv} , $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$, $\overline{w^2}$, k , ε , c_f ve ısı sınır tabaka için; T , \overline{vt} , \overline{ut} , $\overline{t^2}$, St , Pr_t ' dir. Kaldırma kuvvetinin etkili olduğu durumda bu karakteristikler, yedi farklı türbülans modeli kullanılarak, literatür de dikkate alınarak $Re_o = 990$ ve buna karşılık gelen $Ri = 0.2$ ve

$Re_\theta = 1500$ ve buna karşılık gelen $Ri = 0.06$ değerlerinde toplam 14 farklı durumda belirlendi. Yine yukarıda bahsedildiği gibi momentum sınır tabaka için belirlenen normal gerilmelerin, $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$, $\overline{w^2}$, değişimleri, birinci derece modellerde ve ASM' de belirlenmediğinden dolayı burada verilmemiştir. Bunun yerine tüm türbülans modellerinde belirlenen ortak bir karakteristik olan kinetik enerji, k , burada model performanslarının değerlendirilmesi amacıyla irdelenmiştir. Diğer taraftan, Burada sadece düzenli durum ($Ri > 0$) incelenmiştir.

Şekil 41' de $Re_\theta = 990$ ve buna karşılık gelen $Ri = 0.2$ ve $Re_\theta = 1500$ ve buna karşılık $Ri = 0.06$ olmak üzere iki farklı koşulda elde edilen ortalama hız profilleri verilmiştir. Bu bulguların karşılaştırılması amacıyla Subramanian ve Antonia [178]' dan alınan deneysel veriler de aynı grafik üzerinde verilmiştir. Bu ortalama hız profilleri literatürle karşılaştırıldığında, hem kaldırma kuvveti etkisinin yüksek olduğu ($Ri = 0.2$) ve hem de kaldırma kuvveti etkisinin düşük olduğu durum ($Ri = 0.06$) için LKE(CH) dışındaki tüm türbülans modellerinin özellikle logaritma kanunu bölgesinde ($11.63 \leq y^+ \leq 200$) olmak üzere oldukça iyi bir uyum içinde oldukları görülmektedir. LKE (CH) türbülans modelinde bu durumun çıkmasının nedeni olarak, yine kaldırma kuvvetinin ihmal edildiği duruma benzer şekilde f_μ ' nin etkisiyle τ_w ' nin düşük belirlenmesi gösterilebilir. Aynı şekilde, Şekil 44' de c_f ' nin değişiminde verildiği gibi; Re_θ değerinin yükselmesiyle ($Re_\theta \geq 1500$) birlikte bu zorluk da ortadan büyük ölçüde kalkmaktadır. Kaldırma kuvvetinin, kaldırma kuvveti çalkantılarıyla türbülans üretimini artırdıkları ve türbülans gerilme/akı büyüklüklerinin ($\overline{u_i u_j}$ ve $\overline{u_j t}$) transportlarını etkilediği bilinmektedir [121, 142]. Kaldırma kuvvetinin bu etkilerine rağmen sınır tabaka için tüm türbülans modellerinin ortalama hız profillerinin belirlenmesinde, düşük Re_θ değerinde LKE(CH) hariç, türbülans modellerinin performanslarının oldukça iyi olduğu söylenebilir.

Şekiller 42 ve 43' de kayma gerilmelerinin değişimleri verilmiştir. Elde edilen bulguların Subramanian ve Antonia [178]' dan alınan deneysel verilerle karşılaştırılmasında, Şekil 42d' de verilen NKE (SP)' nin, $Re_\theta = 990$ ve $Ri = 0.2$ değerlerindeki bulgusu dışında, tüm türbülans modellerinin her iki Re_θ (veya Ri)

değerlerinde genelde uyumlu bulgular verdiği görülmektedir. Ancak özellikle logaritma kanunu bölgesinde LKE (CH) ve LKE (LB)' nin diğer türbülans modellerine göre literatürle daha iyi uyum sağladıkları görülmektedir. Kayma gerilmesi bulgularında, kaldırma kuvvetinin ihmal edildiği durumla kıyaslandığında en ilginç bulgu NKE (SP)' de ortaya çıkmaktadır. Kaldırma kuvveti etkisinin yüksek olduğu ($Re_0 = 990, Ri = 0.2$) durumda literatürle kötü bir uyum sağlayan bu türbülans modeli, kaldırma kuvveti etkisinin az olduğu ($Re_0 = 1500, Ri = 0.06$) durumda literatürle, yakın-duvar bölgesi hariç, oldukça uyumludur. Oysaki kaldırma kuvvetinin ihmal edildiği durumda Re_0 değerinin artmasıyla bu türbülans modelinin performansı belirgin bir şekilde düşmekteydi.

Şekil 44' de verilen sürtünme katsayısının, c_f , değişimi, Spalart [19]' dan alınan DNS verileriyle karşılaştırıldığında, özellikle LKE(CH) ve LKE(LB) modellerinde $Re_0 \leq 1250$ için olmak üzere, kaldırma kuvvetinin ihmal edilmesiyle elde edilen bulgulardan bazı farklılıklar göstermektedir. Tüm türbülans modelleri için c_f değerinin %10' a varan oranda beklenenden daha düşük değerler verdiği görülmektedir. LKE(CH) ve LKE(LB)' de ise bu aranın $Re_0 \leq 1250$ olduğu bölgede %25' ler civarında olduğu görülmektedir.

Şekil 45' de ortalama sıcaklık profilleri verilmektedir. Bu bulguların Subramanian ve Antonia [178]' dan alınan deneysel verilerle karşılaştırılması sonucunda, özellikle logaritma kanunu bölgesi baz alındığında LKE(CH), LKE(LB), LRR ve ASM modellerinin iyi performanslar gösterdikleri görülmektedir. Genel olarak bakıldığında kaldırma kuvvetlerinin ortalama sıcaklık profillerine önemli bir etkisinin olmadığı görülmektedir. Benzer durum Şekiller 46 ve 47' de, sırasıyla, $Re_0 = 990, Ri = 0.2$ ve $Re_0 = 1500, Ri = 0.06$ için verilen normal doğrultudaki türbülans ısı akılarında da, \overline{vt} , görülmektedir. Kaldırma kuvvetinin ihmal edildiği durum ile bu bulgular arasında belirgin bir farklılık görülmemektedir. Kaldırma kuvvetinin etkili olduğu durumda da normal doğrultudaki türbülans ısı akısının belirlenmesinde birinci derece modellerin performansının, ikinci derece modellerin performansına göre daha iyi olduğu görülmektedir.

Şekiller 48 ve 49' da verilen akış doğrultusundaki türbülans ısı akısı, \overline{ut} , ve Şekiller 50 ve 51' de verilen sıcaklık çalkantı şiddeti, $\sqrt{t^2}$ ($\equiv t'$), kaldırma kuvvetinin türbülans

modelleri üzerindeki etkisinin belirlenmesi için önemli parametrelerdir. Ayrıca, $\overline{t^2}$ 'nin, ısı sınır tabakada, momentum sınır tabakadaki kinetik enerjiye, k , karşılık gelen değer olduğu daha önce belirtilmişti. Dolayısıyla, özellikle bu değerlerin sınır tabakadaki dağılımının doğru bir şekilde belirlenmesi, ısı sınır tabakanın doğru bir şekilde çözümlenmesine büyük katkısı olacaktır. Diğer taraftan, bilindiği gibi; kaldırma kuvveti, türbülans modellerine birinci derece modellerde; kaldırma kuvveti üretimi teriminden, G (k eşitliğinde), ve üretim-yutulma teriminden (ε eşitliğinde), ikinci derece modellerde ise; kaldırma kuvveti üretimi teriminden, G_y , ve basınç-şekil değiştirme teriminden, $\pi_{ij,3}$, girmektedir. Bu terimlerin hesaplanmasında \overline{vt} 'nin yanında \overline{ut} ve $\overline{t^2}$ terimleri de önemli rol oynamaktadır. Dolayısıyla kaldırma kuvvetinin doğru bir şekilde belirlenebilmesi bu terimlerin de doğru bir şekilde belirlenebilmesine bağlı olacağı açıktır. Ancak Şekil 48' de görülmektedir ki; kaldırma kuvveti etkisinin yüksek olması ($Ri = 0.2$), öncelikle \overline{ut} 'nin belirlenmesini etkilemektedir. Tüm türbülans modelleri özellikle logaritma kanunu bölgesinde oldukça kötü bir performans göstermektedirler. İkinci derece modeller (RSM, LRR, ASM), sınır tabakanın dış bölgesinde Subramanian ve Antonia [178]'nin deneysel sonuçlarıyla uyumlu olsa da ve logaritma kanunu bölgesinde de birinci derece modellere göre daha yüksek bir performans gösteriyor gibi gözükseler de bunun böyle olmadığı Şekil 49' dan anlaşılmaktadır. Şekil 49' da $Ri = 0.06$ durumu için ikinci derece modellerin performanslarında bir değişiklik olmamasına karşın birinci derece modellerin literatürle iyi bir uyum içinde oldukları görülmektedir. Şekiller 50 ve 51' de verilen sıcaklık çalkantısı şiddeti, $\sqrt{\overline{t^2}}$, için özellikle logaritma kanunu bölgesi literatürle karşılaştırıldığında tüm türbülans modellerinin %40' lara varan beklenenden daha yüksek değerler vermesi zorluğu ile karşı karşıya kaldıkları görülmektedir. Bu durumun Re_θ ve Ri değerleriyle de değişmediği görülmektedir. Bunun nedeni olarak şunu göstermek mümkündür: Yukarıda kaldırma kuvveti etkilerinin türbülans modellerinin eşitlik sistemlerine başlıca iki şekilde girdiği belirtilmişti. Aslında türbülans modellerinin eşitlik sistemlerinde, kaldırma kuvvetinin katkısının olduğu üçüncü bir yer (ifade) daha vardır. Burası, literatürde *üçüncü mertebe transport terimi* olarak da adlandırılan, türbülanslı yayılım terimidir. Bu terimin modellenmesi sırasında genellikle kaldırma kuvveti katkıları ihmal edilir. Bu ihmal, türbülans yayılımının oldukça etkin olduğu logaritma kanunu bölgesinde, yukarıda

bahsedilen bir hataya neden olabilmektedir. Bunun için bazı çalışmalarda bu terimlerin klasik tanımının yerine, kaldırma kuvvetinin de dahil edildiği türbülans yayılım terimleri kullanılmıştır [121].

Şekiller 52 ve 53' de , sırasıyla, $Re_0 = 990$, $Ri = 0.2$ ve $Re_0 = 1500$, $Ri = 0.06$ değerleri için türbülans Prandtl sayısının, Pr_t , değişimi verilmektedir. Burada da diğer parametrelerde olduğu gibi; kaldırma kuvvetinin, türbülans modellerinin performansları üzerinde büyük bir etkisinin olmadığı görülmektedir. Şekil 54' de ise Stanton sayısının, St , Re_0 ile değişimi verilmektedir. Elde edilen bulgular, Durbin [44]' den alınan ve Reynolds *vd.*' ne ait olan deneysel verilerle karşılaştırıldığında; LKE(CH) ve LKE(LB) dışındaki modellerin kaldırma kuvvetinin ihmal edildiği durumdakilerle hemen hemen benzer değerleri verdiği görülmektedir. LKE(CH) ve LKE(LB) modellerinde, özellikle $Re_0 \leq 1250$ için, kaldırma kuvvetinin ihmal edildiği durumda görülen hesaplama zorluğu, kaldırma kuvveti etkilerinin türbülans modeline ilave edilmesiyle ortadan kalktığı veya bu zorluğun daha küçük Re_0 değerlerine (≤ 350) doğru kaydığı görülmektedir. Re_0 ' nın bu küçük değerleri için de zaten tam gelişmiş türbülanslı akıştan bahsetmek mümkün değildir.

Şekiller 55-58' de, sırasıyla, k^+ , ε^+ , P_k / ε ve $-\overline{uv} / k$ ' nin değişimleri verilmiştir. Elde edilen bu bulgular literatür ile karşılaştırıldığında, özellikle logaritma kanunu bölgesinde kaldırma kuvvetinin ihmal edildiği durumdaki bulgulardan önemli bir farklılık göstermediği görülmektedir.

Yukarıda yatay konumda kaldırma kuvvetinin etkili olduğu TSTA' da belirlenen bulguların irdelenmesinden anlaşılacağı üzere; kaldırma kuvveti etkileri, türbülans modelleri üzerinde momentum sınır tabaka için önemli bir farklılık ortaya çıkarmamakta, ısı sınır tabakada da düşük Reynolds sayılı türbülans modelleri hariç (LKE(CH) ve LKE(LB)) diğer modeller üzerinde önemli bir farklılık ortaya çıkarmamaktadır.

4.3.2. Dikey Konumda TSTA' da Elde Edilen Bulguların İrdelenmesi

Bu kısımda, dikey konumdaki düzlem levha üzerinde oluşan TSTA' nın, kaldırma kuvvetinin de etkili olduğu durumda, yedi farklı birinci ve ikinci derece model kullanılarak belirlenen karakteristikleri irdelenerek modellerin performansları belirlendi. Bu amaçla hesaplanan sınır tabaka karakteristikleri: Momentum sınır tabaka için; U , \overline{uv} , $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$,

$\overline{w^2}$, k , ε , c_f ve ısı sınırlama tabaka için; T , \overline{vt} , \overline{ut} , $\overline{t^2}$, St , Pr_t ' dir. Yukarıda da bahsedildiği gibi normal gerilmeler yerine burada sadece türbülans kinetik enerji incelenmiştir. Belirlenen sınır tabaka karakteristiklerinin literatürle karşılaştırılabilmesi amacıyla, literatürde mevcut verilere uygun Re_θ değerleri seçilmiştir. Ancak literatürde dikey konumda kaldırma kuvvetinin etkili olduğu TSTA için uygun veriler bulunamamıştır. Bu nedenle bu akış koşulunda yukarıda da kullanılan Spalart [19]' ın DNS verilerine uygun Re_θ değerleri seçilerek hesaplamalar yapılmıştır. Bunlar; $Re_\theta = 670$ ve 1410 değerleridir.

Şekil 59' da, $Re_\theta = 670$ ve buna bağlı olarak $Ri = 0.05$ ve $Re_\theta = 1410$ ve buna bağlı olarak $Ri = 0.15$ olmak üzere ortalama hız profillerinin, U^+ , değişimleri verilmiştir. Yedi farklı türbülans modeli ile elde edilen bulgular, Spalart [19]' dan alınan DNS verileriyle karşılaştırıldığında, bunların kaldırma kuvvetinin ihmal edildiği durumdaki bulgularla hemen hemen aynı olduğu görülmektedir. Bu akış koşulunda da SKE, NKE(SP), RSM ve ASM modellerinin performanslarının oldukça iyi oldukları görülmektedir. Şekiller 60 ve 61' de yine aynı Re_θ ve Ri değerlerinde türbülans kayma gerilmelerinin değişimleri verilmektedir. Elde edilen bu bulgular da Spalart [19]' dan alınan DNS verileriyle karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma sonucunda, kaldırma kuvvetinin ihmal edildiği durumdaki gibi; LKE(CH) ve LKE(LB)' nin diğer türbülans modellerine göre özellikle logaritma kanunu bölgesi olmak üzere performanslarının daha yüksek olduğu görülmüştür. Diğer taraftan kaldırma kuvveti etkisinin türbülans modellerine ilave edilmesiyle tüm modeller için ve her iki Re_θ ve Ri değerlerinde, kayma gerilmelerinin en yüksek değerlerinde ortalama %10' a varan düşmeler meydana geldiği gözlenmektedir. Bunun yanında $Ri = 0.15$ olduğu durumda Şekil 61' de de verildiği gibi; tüm türbülans modelleri için kayma gerilmesi en yüksek değerinden sonra, logaritma bölgesi ve sınır tabakanın dış bölgesinde daha keskin bir düşme göstermektedir. Bu keskin düşme LKE(CH) ve LKE(LB)' de daha belirgindir. Diğer taraftan, kaldırma kuvvetinin etkili olduğu yatay konumdaki düzlem levha üzerindeki TSTA' da NKE (SP) ile kayma gerilmesinin belirlenmesinde karşılaşılan benzer bulgular burada da ortaya çıkmaktadır. Bu, Şekil 61d' de de verildiği gibi, kaldırma kuvvetinin ihmal edildiği durumda, kayma gerilmesinde %35' lere varan oranda beklenenden daha yüksek değerlerin ortaya çıkması, kaldırma kuvvetinin türbülans modeline ilave edilmesiyle ortadan kalkmasıdır. Bunu sayısal süreçle

açıklamak mümkün olabilir: NKE (SP), girdap viskozitesi ifadesine ek cisim kuvvetlerinin ilave edilmesiyle elde edilen bir türbülans modelidir. Bu ek cisim kuvvetlerinin içinde muhtemelen kaldırma kuvveti de bulunmaktadır. Bu terimler kaldırma kuvvetinin ihmal edildiği durumda bir şekilde sayısal çözümler için karşılıksız kalabilmekte ve sayısal süreçte bu terimlerin sayısal yayılımı nedeniyle alabileceği her hangi bir değer, bahsedilen hataya yol açmış olabilir. Kaldırma kuvvetinin tanımlanmasıyla bu ek terimlerin belli değerlerde kontrol altında tutulması, bu hatayı ortadan kaldırmış olabilir. Momentum sınır tabaka ile ilgili diğer bir parametre olan c_f , Şekil 62' de verilmiştir. Elde edilen bulgular Spalart [19]' dan alınan DNS verileriyle karşılaştırıldığında, burada da kaldırma kuvvetinin ihmal edildiği durumdaki c_f değerinden önemli bir farklılık göstermediği tespit edilmiştir.

Şekil 63' de, $Re_\theta = 990$ ve buna bağlı olarak $Ri = 0.08$ ve $Re_\theta = 1500$ ve buna bağlı olarak $Ri = 0.16$ değerlerinde ortalama sıcaklık profilinin, T^+ , değişimi verilmiştir. Burada da görülmektedir ki; $Re_\theta = 990$ için LKE(CH) ile belirlenen ortalama sıcaklık profili hariç diğer türbülans modellerinin belirlediği ortalama sıcaklık profilleri, kaldırma kuvvetinin ihmal edildiği durumda elde edilen sıcaklık profilleri ile büyük ölçüde benzeşmektedir. Buna göre logaritma kanunu bölgesi baz alındığında en iyi performansı veren türbülans modelleri: SKE, LKE(LB), NKE(SP) ve RSM olarak görülmektedir. Şekiller 64 ve 65' de verilen ve aynı Re_θ ve Ri değerlerinde belirlenen \overline{vt} bulguları incelendiğinde ise; yine kaldırma kuvvetinin ihmal edildiği durumdakine benzer bulgular elde edildiği görülmektedir. Kaldırma kuvvetinin etkisinin görülmediği bu bulgulardan da, birinci derece modellerin, ikinci derece modellere göre daha iyi performans gösterdiği söylenebilir. Yine aynı Re_θ ve Ri değerleri için yedi farklı türbülans modeli ile belirlenen ve TSTA için kaldırma kuvveti etkilerinin türbülans modellerine ilave edilmesi durumunda hesaplamalara dahil olan \overline{ut} ve $\sqrt{t^2}$, Şekiller 66-69' da verilmiştir. Bu bulguların incelenmesinden de görüleceği üzere, yatay konumda olduğu gibi dikey konumda da Ri sayısının artması, \overline{ut} ' nin beklenenden daha düşük değerlerde belirlenmesine neden olmaktadır. \overline{vt} ' nin belirlenmesinde olduğu gibi \overline{ut} ' nin belirlenmesinde de, birinci derece modellerin ikinci derece modellere karşı, özellikle logaritma kanunu bölgesinde, belirgin bir üstünlüğü vardır. $\sqrt{t^2}$ ' nin belirlenmesinde ise;

hemen hemen tüm türbülans modelleri, her iki Ri değerinde birbirlerine yakın bulgular vermektedir. Buna göre; $\sqrt{t^2}$ ' nin belirlenmesinde tüm türbülans modellerinin, özellikle logaritma bölgesinde Subramanian ve Antonia [178]' dan alınan deneysel verilerle karşılaştırıldığında, %40' lara varan beklenenden daha yüksek değerler verdiği görülmektedir. Bu ise kaldırma kuvvetinin doğru ve yeterli biçimde modellenmesini engellemektedir. Isıl sınır tabakanın diğer parametrelerinden Pr_t ve St sırasıyla Şekiller 70 ve 71' de verilmiştir. Şekil 70' de verilen Pr_t sayısı, Kays [135]' dan alınan ve Bell *vd.*' ne ait olan DNS verileriyle karşılaştırıldığında, kaldırma kuvvetinin ihmal edildiği durum ile hemen hemen örtüştüğü görülmektedir. Şekil 71' de verilen St sayısı, Durbin [44]' den alınan ve Reynolds *vd.*' ne ait olan deneysel verilerle karşılaştırıldığında ise; burada da yatay konumda kaldırma kuvvetinin etkili olduğu durumdaki gibi bir sonuç ortaya çıkmaktadır. Bu sonuç; LKE(CH) ve LKE(LB) dışındaki tüm türbülans modellerinin, kaldırma kuvvetinin ihmal edildiği durum ile hemen hemen aynı bulguları vermesidir. Kaldırma kuvvetinin ihmal edildiği durumda LKE(CH) ve LKE(LB) modeli kullanılarak belirlenen St ' nin, $Re_0 \leq 1250$ için literatürle uyumlu olmadığı daha önce belirtilmişti. Bu türbülans modelleri için, dikey konumda kaldırma kuvvetinin etkili olması durumunda da, yatay konumda kaldırma kuvvetinin etkili olduğu durumdaki gibi; bu uyumsuzluk, sadece $Re_0 \leq 350$ için geçerli olmaktadır. Daha önce de belirtildiği gibi; $Re_0 \leq 350$ için akışın türbülanslı olmaması bu uygunsuzluğun çok önemli olmadığını göstermektedir.

Şekiller 72-75' de, sırasıyla, k^+ , ε^+ , P_k / ε ve $-\overline{uv} / k$ ' nin değişimleri verilmiştir.

Elde edilen k^+ , ε^+ bulguları da literatür ile karşılaştırıldığında, özellikle logaritma kanunu bölgesinde kaldırma kuvvetinin ihmal edildiği durumdaki bulgulardan önemli bir farklılık göstermediği görülmektedir. P_k / ε ve $-\overline{uv} / k$ parametrelerinde ise; NKE(SP) dışında, kullanılan tüm türbülans modellerinden elde edilen bulguların, yine kaldırma kuvvetinin ihmal edildiği durumda elde edilen bulgularla örtüştüğü görülmektedir. NKE(SP)' nin ise önceki çözümlerin aksine, dikey konumda kaldırma kuvvetinin etkili olduğu akış durumunda, özellikle logaritma bölgesinde yerel denge şartının ($P_k \cong \varepsilon$) sağladığı görülmektedir.

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada, seçilen yedi farklı birinci ve ikinci derece modeller, farklı sınır koşulları ve etkiler altında bulunan türbülanslı sınır tabaka akışlarına uygulanmıştır ve kullanılan bu türbülans modellerinin performansları test edilmiştir. Bu amaçla yapılan çalışmadan elde edilen bulguların irdelenmesiyle aşağıdaki sonuçlar çıkarılmıştır:

1) Düşük Reynolds sayılı (yakın-duvar) $k - \epsilon$ modelleri (LKE(CH), LKE(LB)) momentum sınır tabaka karakteristiklerinin belirlenmesinde, diğer türbülans modellerine göre daha iyi sonuçlar vermektedir. Ancak $Re_\theta \leq 1500$ için bu türbülans modellerine ait azaltma fonksiyonunun, f_μ , etkisiyle duvar kayma gerilmesinin, τ_w , düşük hesaplanması, U^+ ' in beklenenden daha yüksek belirlenmesine, c_f' ' nin de beklenenden daha düşük belirlenmesine neden olmaktadır. Bu durum, özellikle LKE(CH) modelinde olmak üzere, modellenen viskoz etkinin ve duvar bloklama etkilerinin f_μ tarafından gereğinden daha fazla dikkate alınmasından kaynaklanmaktadır.

2) Sınır tabakanın dış bölgesinde ($y^+ \geq 200$) kullanılan tüm türbülans modelleri, Re_θ' ya bağlı olmaksızın, %20' ler mertebesinde beklenenden daha yüksek değerler vermektedir. Bu bölgede tam türbülanslı akış mevcut olmasına rağmen, sınır tabakanın kesikli (parçalı) sınıra sahip olması, bu yüksek değerlere neden olabilmektedir. Bu durum, kesikli sınır tabaka sınırından dolayı bu bölgede moleküler yayılımın karşısında türbülans yayılımının zayıflaması şeklinde açıklanabilir.

3) NKE(SP), RSM ve LRR modellerinde, yakın-duvarda ($0 \leq y^+ \leq 200$) meydana gelebilecek viskoz etki ve duvarın bloklama etkisi gibi ek etkileri modellemek için ilave terimler bulunmasına rağmen, bu türbülans modellerinin performanslarının yakın-duvarda oldukça yetersiz yada etkisiz olduğu görülmüştür. Hatta bahsedilen etkileri modellemek için hiçbir ek terim bulundurmayan SKE' nin performansının, bu modellerin performanslarına çok yakın olduğu görülmüştür. Bunun muhtemel iki nedeni olabilir: Birincisi; bahsedilen türbülans modellerinin duvar fonksiyonlarını kullanmalarından dolayı belirlenen değerlerde yetersiz hassasiyet ve ikincisi de viskoz alt sınır tabakada düğüm noktası olmamasından dolayı bu bölgenin yeterince doğru çözülememesidir.

4) Isıl sınır tabakada, $0 \leq y/\delta \leq 0.1$ aralığında türbülans ısı akılarının çözümünde zorluklar yaşanmaktadır. Bu aralıkta, düğüm noktalarının tamamının logaritma kanunu bölgesine düşmesine ($y/\delta \geq 0.05$) ve LKE(CH), LKE(LB) ve RSM gibi duvar bloklama etkisini ve viskoz etkileri modelleyen yaklaşımların kullanılmasına rağmen bu zorluk aşılamamaktadır. Bu zorluklar, viskoz alt sınır tabakada yeni model yaklaşımları kullanılmasıyla aşılabılır.

5) Isıl sınır tabakanın çözümünde en önemli parametrelerden biri olan $\overline{v't}$ ' nin belirlenmesinde, birinci derece modellerin, ikinci derece modellere göre belirgin bir şekilde üstün olduğu görülmektedir.

6) Birinci derece modellerde momentum sınır tabaka karakteristiklerinin ısı sınır tabaka karakteristiklerine etkisi, ikinci derece modellerden daha büyüktür. Bu, birinci derece modellerde momentum sınır tabakanın çözümlemesinde yapılabilecek bir hatanın ısı sınır tabaka karakteristiklerini çok daha fazla etkilemesine neden olmaktadır. Bu durum ikinci derece modellerde daha sınırlı olmaktadır.

7) Türbülans modellemede hız ölçeğini ifade eden türbülans kinetik enerji, k , özellikle logaritma bölgesi baz alındığında, makul bir hata aralığında düşük Reynolds sayılı modeller hariç (LKE(CH) ve LKE(LB)), hiç bir türbülans modeli tarafından doğru belirlenmemektedir. Türbülans modellerinin en önemli parametrelerinden biri olan k ' nin doğru belirlenememesi, hesaplamalara önemli bir hata kaynağı oluşturmaktadır.

8) Dairesel jet akışında, çözümlemelerde kullanılan model katsayılarında (C_{μ} , $C_{\epsilon 1}$, $C_{\epsilon 2}$) var olan zorluklara rağmen, birinci derece modeller, LKE (LB) hariç, ikinci derece modellerden daha yüksek performans göstermektedirler.

9) Düşük Reynolds sayılı $k - \epsilon$ modelleri genellikle boru yada kanal akışları için geliştirildiğinden, bu türbülans modelleri dairesel jet akışı gibi serbest akışlarda (bir duvar üzerinden akmayan akışlarda) iyi bir performans sağlayamamaktadırlar. Bu tür türbülans modellerinin azaltma fonksiyonlarında genellikle y^+ tanımı bulundurması da bunların serbest jet akışları gibi akışlara uygulanmalarını imkansız hale getirmektedir.

10) Kaldırma kuvveti etkisi, sınır tabaka akışında \overline{ut} ' nin belirlenmesi ve LKE(CH) ve LKE(LB) modelleriyle St sayısının belirlenmesi dışında diğer hiç bir sınır tabaka karakteristiğinde önemli bir farklılık oluşturmamaktadır.

11) Kaldırma kuvveti etkisi, türbülans modellerinin eşitlik sistemlerine, birinci derece modellerde; kaldırma kuvveti üretimi (G) ve üretim-yutulma terimlerinden, ikinci derece modellerde ise; kaldırma kuvveti üretimi (G_{ij}) ve basınç-şekil değiştirme ($\pi_{ij,3}$) terimleriyle girdiği bilinmektedir. Ancak bunların dışında kaldırma kuvveti eşitlik sistemlerine, türbülans yayılımı terimi marifetiyle girmektedir. Türbülans yayılımı teriminde kaldırma kuvveti etkisinin ihmal edilmesi, özellikle, kaldırma kuvveti etkisinin modellenmesinde önemli rol oynayan sıcaklık çalkantısının, $\overline{t^2}$, logaritma bölgesinde doğru bir şekilde belirlenmesini zorlaştırmaktadır.

12) LKE(CH), LKE(LB) ve NKE(SP) gibi, Reynolds sayısının düşük olmasından veya yakın-duvardan kaynaklanan ek etkileri modelleyen türbülans modellerinde kaldırma kuvvetinin ihmal edilmesi, özellikle düşük Reynolds sayılarında hatalara neden olabilmektedir.

13) ASM, ısı sınır tabakanın bazı karakteristiklerinin belirlenmesinde uygun olmayan sonuçlar vermesine karşın, LKE(CH) ve LKE(LB)' den sonra performansı en yüksek türbülans modelidir. Diğer taraftan kaldırma kuvvetinin türbülans modeline kolayca ilave edilmesi ve diferansiyel eşitliklere göre oldukça sade olması, ASM' nin problemlere uygulanmasını kolaylaştırmaktadır.

14) Bu çalışmada kullanılan türbülans modellerinin, tüm akış koşullarında genellikle Re_θ ' ya bağlı oldukları görülmüştür. Bazı türbülans modelleri yüksek Re_θ değerlerinde yüksek performans gösterirken (LKE(CH), LKE(LB)), bazıları ise düşük Re_θ değerlerinde yüksek performans göstermektedirler (NKE(SP)).

6. ÖNERİLER

1) Bu çalışmada viskoz alt sınır tabaka bölgesinde ($0 < y^+ \leq 11.63$) sınır tabaka karakteristikleri için çözümler yapılmamıştır. Bunun nedeni, türbülans modellerinin viskoz alt sınır tabaka bölgesinde geçerli olmamasındandır. Oysaki bu bölgenin doğru bir şekilde çözümlenmesi bütün sınır tabakayı etkilediği görülmektedir. Düşük Reynolds sayılı (yakın-duvar) modeller (LKE(CH), LKE(LB)) bu bölgede geçerli olsalar da, yine de τ_w ' nin belirlenmesinde zorluklar yaşandığı belirlenmiştir. Bu bölgede τ_w ' nin hesaplanması için literatürde bazı model çalışmaları bulunsa da bunlar, ne yeterince tatmin edici sonuçlar verebilmiştir ne de bunlar, tüm akışlar için geçerli genel (üniversal) bir model oluşturmuşlardır. Bu nedenle viskoz alt sınır tabaka bölgesinde ve τ_w ' nin belirlenmesinde yeni universal model yaklaşımları geliştirilebilir.

2) Düşük Reynolds sayılı $k - \varepsilon$ modellerinde (LKE(CH), LKE(LB)) kullanılan azaltma fonksiyonları (f_μ, f_1, f_2), düşük Reynolds sayılarında ($Re_0 \leq 1250$) viskoz etkileri ve duvar bloklama etkilerini olduklarından daha yüksek hesaplamaktadırlar. Bunlar genellikle deneysel verilerden türetilmektedir. Son yıllarda bu azaltma fonksiyonları DNS verilerinden de türetilmektedir. Ancak bunlardan da yeterince tatmin edici sonuçlar alınamamıştır. Bu azaltma fonksiyonlarının geliştirilmesi konusunda yeni çalışmalar yapılabilir.

3) ASM' nin oldukça sade ve problemlere uygulanmasının kolay olmasına karşın, bir çok durumda diğer daha karmaşık ikinci derece modellerden (RSM, LRR) daha iyi performans verdiği görülmüştür. Ancak bu modelin, duvar etkilerini modellemede zorlukları bulunmaktadır. Bu türbülans modellerine duvar etkilerinin ilave edilmesi konusunda yeni yaklaşımlar geliştirilebilir.

4) Kullanılan tüm birinci derece modellerde bir momentum zaman ölçeği ($\tau = k/\varepsilon$) ve bir de sıcaklık zaman ölçeği ($\tau_t = R(k/\varepsilon)$) kullanılmaktadır. Literatürde, yakın-duvar ve tam türbülanslı dış bölge olmak üzere sınır tabakanın ikiye bölünerek, bu bölgelere farklı iki momentum ölçeği uygulanan çalışmalar bulunmaktadır. Ancak hem bunlar sınırlı akışlar için mevcuttur hem de ısı sınır tabaka için benzer bir çalışmaya rastlanamamıştır. Özellikle yakın-duvar bölgesi için farklı zaman ölçekleri kullanmak, özellikle duvara yakın bölgede çözümleri iyileştirebilir.

5) Bu çalışmada parabolik karakterdeki sınır tabaka akışları çözümlenmiştir. Lineer olmayan $k - \varepsilon$ modeli (NKE(SP) ve ikinci derece modeller (RSM; LRR, ASM) gibi nispeten daha karmaşık modellerin çözümler üzerindeki etkileri yeterince belirgin bir şekilde görülememiştir. Kullanılan bu türbülans modelleri fiziksel olarak daha karmaşık eliptik akışlara uygulanıp, bunların performansları daha ayrıntılı incelenebilir.



7. KAYNAKLAR

1. Rodi, W., Turbulence Models and Their Application in Hydraulics - A State of The Art Review, Second Revised Edition, University of Karlsruhe, Karlsruhe, 1984.
2. Wilcox, D. C., Turbulence Modeling for CFD, DCW Industries, Inc., California, 1993.
3. Markatos, N. C., The Mathematical Modeling of Turbulent Flows, Appl. Math. Modeling, 10 (1986) 190-220.
4. Gatski, T. B., Hussaini, M.Y., Lumley, J. L. , Simulation and Modeling of Turbulent Flows, Oxford University Press, Inc., New York, 1996.
5. Tennekes, H., Lumley, J. L., A First Course in Turbulence, Eighth Printing, The MIT Press, Cambridge, 1982.
6. Patel V. C., Rodi, W., Scheuerer, G., Turbulence Models for Near-Wall and Low Reynolds Number Flows: A Review, AIAA Journal, 23, 9 (1985) 1308-1319.
7. Speziale, C. G., On Nonlinear K-1 and K- ϵ Models of Turbulence, Journal of Fluid Mechanics, 178 (1987) 459-475.
8. Lumley, J. L., Turbulence Modeling, ASME Trans. J. Applied Mech., 50 (1983) 1097-1103.
9. Donaldson, C. DuP., Calculation of Turbulent Shear Flows for Atmospheric and Vortex Motions, AIAA Journal, 10 ,1 (1972) 4-12.
10. Rotta, J. C., Statistische Theorie Nichthomogener Turbulenz, Zeitschrift für Physik, 129 (1951) 547-572.
11. Chou, P. Y., On Velocity Correlations and The Solutions of The Equations of Turbulent Fluctuation, Quart. J. Appl. Math., 3 (1945) 38-54.
12. Hanjalic, K., Launder, B. E., A Reynolds Stress Model of Turbulence and its Application to Thin Shear Flows, Journal of Fluid Mechanics, 52,4 (1972) 609-638.
13. Launder, B. E., Second-moment Closure: Present.... and Future?, Int. J. Heat and Fluid Flow, 10 , 4 (1989) 282-300.
14. Hanjalic, K., Advanced Turbulence Closure Models: A View of Current Status and Future Prospects, Int. J. Heat and Fluid Flow, 15 ,3 (1994) 178-203.

15. Rodi, W., A New Algebraic Relation for Calculating The Reynolds Stresses, ZAMM, 56 (1976) 219-221.
16. Gibson, M. M., Launder, B. E., Ground Effects on Pressure Fluctuations in The Atmospheric Boundary Layer, Journal of Fluid Mechanics, 86, 3 (1978) 491-511.
17. Ahmad, Q. A., Luxton, R. E., Antonia, R. A., Characteristics of a Turbulent Boundary Layer with an External Turbulent Uniform Shear Flow , Journal of Fluid Mechanics, 73, 2 (1976) 369-396.
18. Launder B. E., A Generalized Algebraic Stress Transport Hypothesis, AIAA Journal, 20, 3 (1982) 436-437.
19. Spalart, P. R., Direct Simulation of a Turbulent Boundary Layer up to $Re_\theta=1410$, Journal of Fluid Mechanics, 187 (1988) 61-98.
20. Rodi, W., Mansour, N. N., Low Reynolds Number $k - \epsilon$ modeling with The Aid of Direct Numerical Data, Journal of Fluid Mechanics, 250 (1993) 509-529.
21. Lai, Y. G., Near-Wall Modeling of Complex Turbulent Flows, Ph.D. Thesis, Arizona State University, Arizona, 1990.
22. Bradshaw, P., Cebeci, T., Whitelaw, J. H., Engineering Calculation Methods for Turbulent Flow, Academic Press, London, 1981.
23. Gupta, A. K., Kaplan, R. E., Statistical Characteristics of Reynolds Stress in a Turbulent Boundary Layer, The Physics of Fluids, 15, 6 (1970) 981-985.
24. Speziale, C. G., Analytical Methods for The Development of Reynolds-Stress Closures in Turbulence, Ann. Rev. Fluid Mech., 23 (1991) 107-157.
25. Harlow, F. H., Nakayama, P. I., Turbulence Transport Equations, The Physics of Fluids, 10, 11 (1967) 2323-2332.
26. Daly, R. J., Harlow, F. H., Transport Equations in Turbulence, The Physics of Fluids, 13, 11 (1970) 2634-2649.
27. Donaldson, C. DuP., Sullivan, R. D., Rosenbaum, H., A Theoretical Study of the Generation of Atmospheric-Clear Air Turbulence, AIAA Journal, 10, 2 (1972) 162-170.
28. Launder, B. E., Reece, G. J., Rodi, W., Progress in The Development of a Reynolds-Stress Turbulence Closure, Journal of Fluid Mechanics, 68, 3 (1975) 537-566.
29. Jones, W. P., Launder, B. E., The Prediction of Laminarization with a Two-Equation Model of Turbulence, Int. J. Heat and Mass Transfer, 15 (1972) 301-314.

30. Jones, W. P., Launder, B. E., The Calculation of Low-Reynolds-Number Phenomena with a Two-Equation Model of Turbulence, Int. J. Heat and Mass Transfer, 16 (1973) 1119-1130.
 31. Ng, K. H., Spalding, D. B., Turbulence Model for Boundary Layers near Walls, The Physics of Fluids, 15, 1 (1972) 20-30.
 32. Hoffman, G. H., Improved Form of The Reynolds Number k - ϵ Turbulence Model, The Physics of Fluids, 18, 3 (1975) 309-312.
 33. Lam, C. K. G., Bremhorst, K., A Modified Form of The k - ϵ Model for Predicting Wall Turbulence, ASME Trans. J. Fluids Engineering, 103 (1981) 456-460.
 34. Chien K. Y., Predictions of Channel and Boundary-Layer Flows with a Low-Reynolds-Number Turbulence Model, AIAA Journal, 20, 1 (1982) 34-38.
 35. Nagano, Y., Hishida, M., Improved Form of The k - ϵ Model for Wall Turbulent Shear Flows, ASME Trans. J. Fluids Engineering, 109 (1987) 156-160.
 36. Ahn, J. W., Park, T. S., Sung, H. J., Application of a Near-Wall Turbulence Model to The Flows over a Step with Inclined Wall, Int. J. Heat and Fluid Flow, 18 (1997) 209-217.
 37. Abe, K., Kondoh, T., Nagano, Y., A New Turbulence Model for Predicting Fluid Flow and Heat Transfer in Separating and Reattaching Flows-I. Flow Field Calculations, Int. J. Heat and Mass Transfer, 37, 1 (1994) 139-151.
 38. Nisizima, S., Yoshizawa, A., Turbulent Channel and Couette Flows Using an Anisotropic k - ϵ Model, AIAA Journal, 25, 3 (1987) 414-420.
 39. Rubinstein, R., Barton, J. M., Nonlinear Reynolds Stress Models and The Renormalization Group, The Physics of Fluids, A2, 8 (1990) 1472-1476.
 40. Yakhot, V., Orszag, S. A., Renormalization Group Analysis of Turbulence. I. Basic Theory, J. Scientific Computing, 1, 1 (1986) 3-51.
 41. Yakhot, V., Smith, L. M., Renormalization Group, The ϵ -Expansion and Derivation of Turbulence Models, J. Scientific Computing, 7, 1 (1992) 35-61.
 42. Suga, K., Abe, K., Nonlinear Eddy Viscosity Modelling for Turbulence and Heat Transfer near Wall and Shear-Free Boundaries, Int. J. Heat and Fluid Flow, 21 (2000) 37-48.
 43. Apsley, D. D., Leschziner, M. A., A New Low-Reynolds-Number Nonlinear Two-Equation Turbulence Model for Complex Flows, Int. J. Heat and Fluid Flow, 19 (1998) 209-222.
-

44. Durbin, P. A., Application of a Near-Wall Turbulence Model to Boundary Layers and Heat Transfer, Int. J. Heat and Fluid Flow, 14, 4 (1993) 316-323.
45. Behnia, M., Parneix, S., Shabany, Y., Durbin, P. A., Numerical Study of Turbulent Heat Transfer in Confined and Unconfined Impinging Jets, Int. J. Heat and Fluid Flow, 20 (1999) 1-9.
46. Reif, B. A., Durbin, P. A., Ooi, A., Modeling Rotational Effects in Eddy-Viscosity Closures, Int. J. Heat and Fluid Flow, 20 (1999) 563-573.
47. Saffman, P.G., Wilcox, D.C., Turbulence-Model Predictions for Turbulent Boundary Layers, AIAA Journal, 12, 4 (1974) 541-546.
48. Koosinlin M. L., Lockwood F.C., The Prediction of Axisymmetric Turbulent Swirling Boundary Layers, AIAA Journal, 12, 4 (1974) 547-554.
49. Derksen, R. W., Azad, R. S., Behavior of the Turbulent Energy Equation at a Fixed Boundary, AIAA Journal, 19, 2 (1981) 238-239.
50. Hwang, Y. H., Liou, T. M., Expressions for k and ε Near Walls, AIAA Journal, 29, 2 (1991) 477-479.
51. So, R. M. C., Lai, Y. G., Zhang H. S., Hwang, B. C., Second-Order Near-Wall Turbulence Closures: A Review, AIAA Journal, 29, 11 (1991) 1819-1835.
52. Hanjalic, K., Launder B. E., Contribution towards a Reynolds-Stress Closure for Low-Reynolds-Number Turbulence, Journal of Fluid Mechanics, 74, 4 (1976) 593-610.
53. Shih, T. H., Lumley, J. L., Second-Order Modeling of Near-Wall Turbulence, The Physics of Fluids, 29, 4 (1986) 971-975.
54. Shima, N., A Reynolds-Stress Model for Near-Wall and Low-Reynolds-Number Regions, ASME Trans. J. Fluids Engineering, 110 (1993) 38-44.
55. Lai, Y. G., So, R. M. C., On Near-Wall Turbulent Flow Modeling, Journal of Fluid Mechanics, 221 (1990) 641-673.
56. Speziale, C. G., Sarkar, S., Gatski, T. B., Modeling the Pressure-strain Correlation of Turbulence: An Invariant Dynamical Systems Approach, Journal of Fluid Mechanics, 227 (1991) 245-272.
57. Durbin, P. A., A Reynolds Stress Model for Near-wall Turbulence, Journal of Fluid Mechanics, 249 (1993) 465-498.
58. So, R. M. C., Near-Wall Modelling of Compressible Turbulent Flows, NASA-CR-137731, Arizona State University, Tempe, 1990.

59. Weinstock, J., Theory of Pressure-Strain-Rate Correlation for Reynolds-Stress Turbulence Closures. Part 1. Off-Diagonal Element, Journal of Fluid Mechanics, 105 (1981) 369-396.
60. Weinstock, J., Theory of Pressure-Strain Rate. Part 2. Diagonal Element, Journal of Fluid Mechanics, 116 (1982) 1-29.
61. Weinstock, J., Burk, S., Theoretical Pressure-Strain Term, Experimental Comparison, and Resistance to Large Anisotropy, Journal of Fluid Mechanics, 154 (1985) 429-443.
62. Amano, R. S., Chai, J. C., Improvement of The Reynolds-Stress Model by a New Pressure-Strain Correlation, NASA-CR-182699, University of Wisconsin-Milwaukee, Wisconsin, Milwaukee, 1988.
63. Morris, P. J., Modeling the Pressure Redistribution Terms, The Physics of Fluids, 27, 7 (1984) 1620-1623.
64. Speziale, C. G., Modeling The Pressure Gradient-Velocity Correlation of Turbulence, The Physics of Fluids, 28, 1 (1985) 69-71.
65. Lumley, J. L., Pressure- Strain Correlation, The Physics of Fluids, 18, 6 (1975) 750.
66. Lumley, J. L., Newman, G. R., The Return to Isotropy of Homogeneous Turbulence, Journal of Fluid Mechanics, 82, 1 (1977) 161-178.
67. Sarkar, S., Speziale, C. G., A Simple Nonlinear Model for The Return to Isotropy in Turbulence, The Physics of Fluids, A2, 1 (1990) 84-93.
68. Leslie, D. C., Analysis of a Strongly Sheared, Nearly Homogeneous Turbulent Shear Flow, Journal of Fluid Mechanics, 98, 2 (1980) 435-448.
69. Cormack, D. E., Leal, L. G., Seinfeld, J. H., An Evaluation of Mean Reynolds Stress Turbulence Models: The Triple Velocity Correlation, ASME Trans. J. Fluids Engineering, 100 (1978) 47-54.
70. Raj, R., Form of The Turbulence Dissipation Equation as Applied to Curved and Rotating Turbulent Flows, The Physics of Fluids, 18, 10 (1975) 1241-1244.
71. Launder, B. E., Reynolds, W. C., Asymptotic Near-Wall Stress Dissipation Rates in a Turbulent Flow, The Physics of Fluids, 26, 5 (1983) 1157-1158.
72. Hallback, M., Groth, J., Johansson, A. V., An Algebraic Model for Nonisotropic Turbulent Dissipation Rate in Reynolds Stress Closures, The Physics of Fluids, A2,10 (1990) 1859-1866.

73. Hallback, M., Groth, J., Johansson, A. V., Anisotropic Dissipation Rate - Implications for Reynolds Stress Models, Advances in Turbulence , 3 (1991) 414-421.
74. So, R. M., Zhang, H. S., Speziale, C. G., Near-Wall Modeling of the Dissipation Rate Equation, AIAA Journal, 30 (1992) 2069-2076.
75. Gibson, M. M., Launder, B. E., On The Calculation of Horizontal, Turbulent, Free Shear Flows under Gravitational Influence, ASME Trans. J. Heat Transfer, (1976) 81-87.
76. Lakshminarayana, B., Turbulence Modeling for Complex Shear Flows, AIAA Journal, 24, 12 (1986) 1900-1917.
77. Narayanan, M. A. B., Raghu, S., The Non-equilibrium Region of a Mixing Layer, AIAA Journal, 23, 7 (1985) 981-987.
78. Thangam, S., Abid, R., Speziale, C. G., Application of a New $K-\tau$ Model to Near Wall Turbulent Flows, AIAA Journal, 30, 2 (1992) 552-554.
79. Inaoka, K., Yamamoto, J., Suzuki, K., Dissimilarity Between Heat Transfer and Momentum Transfer in a Disturbed Turbulent Boundary Layer with Insertion of a Rod-Modeling and Numerical Simulation , Int. J. Heat and Fluid Flow, 20 (1999) 290-301.
80. Gibson, M. M., Rodi, W., A Reynolds- Stress Closure Model of Turbulence Applied to The Calculation of a Highly Curved Mixing Layer, Journal of Fluid Mechanics, 103 (1981) 161-182.
81. Gibson, M. M., Jones, W. P., Younis, B. A., Calculation of Turbulent Boundary Layers on Curved Surfaces, The Physics of Fluids, 24, 3 (1981) 386-395.
82. Gibson, M. M., Younis, B. A., Modeling the Curved Turbulent Wall Jet, AIAA Journal, 20, 12 (1982) 1707-1712.
83. Demuren, A. O., Rodi, W., Calculation of Turbulent-Driven Secondary Motion in Non-Circular Ducts, Journal of Fluid Mechanics, 140 (1984) 189-222.
84. Dekeyser, I., Numerical Prediction of an Asymmetrical Heated Plane Jet with a Second-Moment Turbulence Closure, Int. J. Heat and Mass Transfer, 28, 3 (1985) 653-662.
85. Gibson, M. M., Younis, B. A., Calculation of Swirling Jets with a Reynolds Stress Closure, The Physics of Fluids, 29, 1 (1986) 38-48.
86. So, R. M. C., Yoo, G. J., Low Reynolds Number Modeling of Turbulent Flows with and without Wall Transpiration, AIAA Journal, 25, 12 (1987) 1556-1564.

87. Kim, S. W., A Near-Wall Turbulence Model and Its Application to Fully Developed Turbulent Channel and Pipe Flows, NASA Technical Memorandum 101399; ICOMP-88-20, Cleveland, 1988.
 88. Galperin, B., Kantha L. H., Turbulence Model for Rotating Flows, AIAA Journal, 27, 6 (1989) 750-757.
 89. Cambon, C., Jacquin, L., Lubrano, J. L., Toward a New Reynolds Stress Model for Rotating Turbulent Flows, The Physics of Fluids, A4, 4 (1992) 812-824.
 90. Shima, N., Prediction of Turbulent Boundary Layers with a Second-Moment Closure: Part II - Effects of Streamline Curvature and Spanwise Rotation, ASME Trans. J. Fluids Engineering, 115 (1993) 64-69.
 91. Tsao, J. M., Lin, C. A., Reynolds Stress Modelling of Jet and Swirl Interaction Inside a Gas Turbine Combustor, Int. J. for Numerical Meth. in Eng., 29 (1999) 451-464.
 92. Cebeci, T., Chang, K.C., Li, C., Whitelaw, J. H., Turbulence Models for Wall Boundary Layers, AIAA Journal, 24, 3 (1986) 359-360.
 93. Cebeci, T., Chang, K. C., Calculation of Incompressible Rough-Wall Boundary-Layer Flows, AIAA Journal, 16, 7 (1978) 730-735.
 94. Ölçmen, M. S., Simpson, R. L., Evaluation of Algebraic Eddy-Viscosity Models in Three-dimensional Turbulent Boundary Layer Flows, AIAA Journal, 31, 9 (1993) 1545-1554.
 95. Pope, S. B., An Explanation of the Turbulent Round-Jet Anomaly, AIAA Journal, 16, 3 (1978) 279-281.
 96. Bernard, P. S., Limitations of the Near-Wall $k-\epsilon$ Turbulence Model, AIAA Journal, 24, 4 (1986) 619-622.
 97. Launder, B. E., Numerical Computation of Convective Heat Transfer in Complex Turbulent Flows: Time to Abandon Wall Functions?, Int. J. Heat and Mass Transfer, 27, 9 (1984) 1485-1491.
 98. Wilcox, D. C., Multiscale Model for Turbulent Flows, AIAA Journal, 26, 11 (1988) 1311-1320.
 99. Schiestel, R., Multiple-Time-Scale Modeling of Turbulent Flows in One Point Closures, The Physics of Fluids, 30, 3 (1987) 722-731.
 100. Yamamoto, M., Investigation of Multiple-Time-Scale Reynolds Stress Model in Homogeneous Anisotropic Turbulence, Int. J. Heat and Fluid Flow, 16 (1995) 417-428.
-

101. Schumann, U., Realizability of Reynolds-Stress Turbulence Models, The Physics of Fluids, 20, 5 (1977) 721-725.
102. Launder, B. E., Samaraweera, D. S. A., Application of a Second-Moment Turbulence Closure to Heat and Mass Transport in Thin Shear Flows—I. Two-dimensional Transport, Int. J. Heat and Mass Transfer, 22 (1979) 1631-1643.
103. Speziale, C. G., Invariance of Turbulent Closure Models, The Physics of Fluids, 22, 6 (1979) 1033-1037.
104. Chambers, T. L., Wilcox, D. C., Critical Examination of Two-Equation Turbulence Closure Models for Boundary Layers, AIAA Journal, 15, 6 (1977) 821-828.
105. Patel, V. C., Scheuerer, G., Calculation of Two-dimensional Near and Far Wakes, AIAA Journal, 20, 7 (1982) 900-907.
106. Avva, R. K., Smith, C. E., Singhal, A. K., Comparative Study of High and Low Reynolds Number Version of $k-\epsilon$ Models, CFD Research Corporation, Huntsville.
107. Mansour N. N., Kim, J., Moin, P., Near-Wall $k-\epsilon$ Turbulence Modeling, AIAA Journal, 27, 8 (1989) 1068-1073.
108. Michelassi, V., Shih, T. H., Elliptic Flow Computation by Low Reynolds Number Two-Equation Turbulence Models, NASA Technical Memorandum 105376; ICOMP-91-28; CMOTT-91-11, Cleveland, 1991.
109. Speziale, C. G., Abid, R., Anderson, E. C., Critical Evaluation of Two-Equation Models for Near-Wall Turbulence, AIAA Journal, 30, 2 (1992) 324-331.
110. Sarkar, A., So, R. M. C., A Critical Evaluation of Near-Wall Two-Equation Models against Direct Numerical Simulation Data, Int. J. Heat and Fluid Flow, 18 (1997) 197-208.
111. Barakos, G., Drikakis, D., Investigation of Nonlinear Eddy-Viscosity Turbulence Models in Shock/Boundary-Layer Interaction, AIAA Journal, 38, 3 (2000) 461-469.
112. Pajayakrit, P., Kind, R. J., Assessment and Modification of Two-Equation Turbulence Models, AIAA Journal, 38, 6 (2000) 955-963.
113. Mansour, N. N., Kim, J., Moin, P., Reynolds-stress and Dissipation-rate Budgets in a Turbulent Channel Flow, Journal of Fluid Mechanics, 194 (1988) 15-44.
114. So, R. M. C., Yuan, S. P., A Geometry Independent Near-Wall Reynolds-Stress Closure, Int. J. Engineering Science, 37 (1999) 33-57.

115. Reynolds, W. C., Computation of Turbulent Flows, Ann. Rev. Fluid Mech., 8 (1976) 183-208.
116. Bradshaw, P., Understanding and Prediction of Turbulent Flow-1996, Int. J. Heat and Fluid Flow, 18 (1997) 45-54.
117. Rodi, W., Examples of Turbulence Models for Incompressible Flows, AIAA Journal, 20, 7 (1982) 872-879.
118. Taulbee, D. B., Engineering Turbulence Models, Advances in Turbulence, (1989) 75-125.
119. Spalart, P.R., Strategies for Turbulence Modeling and Simulations, Int. J. Heat and Fluid Flow, 21 (2000) 252-263.
120. Launder, B. E., On The Computation of Convective Heat Transfer in Complex Turbulent Flows, ASME Trans. J. Heat Transfer, 110 (1988) 1112-1128.
121. Chung, M. K., Sung, H. J., Four-Equation Turbulence Model for Prediction of the Turbulent Boundary Layer Affected by Buoyancy Force over a Flat Plate, Int. J. Heat and Mass Transfer, 27, 12 (1984) 2387-2395.
122. To, W. M., Humphrey, J. A. C., Numerical Simulation of Buoyant, Turbulent Flow-I. Free Convection along a Heated, Vertical, Flat Plate, Int. J. Heat and Mass Transfer, 29, 4 (1986) 573-592.
123. Martinuzzi, R., Pollard, A., Comparative Study of Turbulence Models in Predicting Turbulent Pipe Flow, Part I: Algebraic Stress and $k-\epsilon$ Models, AIAA Journal, 27, 1 (1989) 29-36.
124. Pollard, A., Martinuzzi, R., Comparative Study of Turbulence Models in Predicting Turbulent Pipe Flow, Part II: Reynolds Stress and $k-\epsilon$ Models, AIAA Journal, 27, 12 (1989) 1714-1721.
125. Hogg, S., Leschziner, M. A., Computation of Highly Swirling Confined Flow with a Reynolds Stress Turbulence Model, AIAA Journal, 27, 1 (1989) 57-63.
126. Cooper, D., Jackson, D. C., Launder, B. E., Liao, G. X., Impinging Jet Studies for Turbulence Model Assessment-I. Flow-field Experiments, Int. J. Heat and Mass Transfer, 36, 10 (1993) 2675-2684.
127. Craft, T. J., Graham, J. W., Launder, B. E., Impinging Jet Studies for Turbulence Model Assessment-II. An Examination of The Performance of Four Turbulence Models, Int. J. Heat and Mass Transfer, 36, 10 (1993) 2685-2697.
128. Speziale, C. G., Mhuiris, N. M. G., On the Prediction of Equilibrium States in Homogeneous Turbulence, Journal of Fluid Mechanics, 209 (1989) 591-615.

129. Behnia, M., Parneix, S., Durbin, P. A., Prediction of Heat Transfer in an Axisymmetric Turbulent Jet Impinging on a Flat Plate, Int. J. Heat and Mass Transfer, 41, 12 (1998) 1845-1855.
130. So, R. M. C., Yuan, S. P., Near-Wall Two-Equation and Reynolds-Stress Modeling of Backstep Flow, Int. J. Engineering Science, 36, 3 (1998) 283-298.
131. Dol, H. S., Hanjalic, K., Kenjeres, S., A Comparative Assessment of The Second-Moment Differential and Algebraic Models in Turbulent Natural Convection, Int. J. Heat and Fluid Flow, 18 (1996) 4-14.
132. So, R. M. C., Sommer, T. P., Zhao, C.Y., Effects of Near-Wall Reynolds-Stress Modelling on The Calculation of The Turbulent Thermal Field, Int. J. Heat and Fluid Flow, 21 (2000) 164-175.
133. Bauer, W., Haag, O., Hennecke, D. K., Accuracy and Robustness of Nonlinear Eddy Viscosity Models, Int. J. Heat and Fluid Flow, 21 (2000) 312-319.
134. Kays, W. M., Crawford, M. E., Convective Heat and Mass Transfer, Second Edition, McGraw-Hill Publishing Company, New York, 1980.
135. Kays, W. M., Turbulent Prandtl Number-Where are We?, ASME Trans. J. Heat Transfer, 116 (1994) 284-295.
136. Nagano, Y., Kim, C., A Two-Equation Model for Heat Transport in Wall Turbulent Shear Flows, ASME Trans. J. Heat Transfer, 110 (1988) 583-589.
137. Chua, L. P., Antonia, R. A., Turbulent Prandtl Number in a Circular Jet, Int. J. Heat and Mass Transfer, 33, 2 (1990) 331-339.
138. Sommer, T. P., So, R. M. C., Zhang, H. S., Near-Wall Variable-Prandtl-Number Turbulence Model for Compressible Flows, AIAA Journal, 31, 1 (1993) 27-35.
139. So, R. M., Pressure Gradient Effects on Reynolds Analogy for Constant Property Equilibrium Turbulent Boundary Layers, Int. J. Heat and Mass Transfer, 37, 1 (1994) 27-41.
140. Kawamura, H., Abe, H., Matsuo, Y., DNS of Turbulent Heat Transfer in Channel Flow with Respect to Reynolds and Prandtl Number Effects, Int. J. Heat and Fluid Flow, 20 (1999) 196-207.
141. Na, Y., Papavassiliou, D. V., Hanratty, T. J., Use of Direct Numerical Simulation to Study the Effect of Prandtl Number on Temperature Fields, Int. J. Heat and Fluid Flow, 20 (1999) 187-195.
142. Ljuboja, M., Rodi, W., Prediction of Horizontal and Vertical Turbulent Buoyant Wall Jets, ASME Trans. J. Heat Transfer, 102 (1981) 343-349.

143. Lai, Y. G., So, R. M. C., Near-Wall Modeling of Turbulent Heat Fluxes, Int. J. Heat and Mass Transfer, 33, 7 (1990) 1429-1440.
144. Launder, B. E., On The Effect of a Gravitational Field on The Turbulent Transport of Heat and Momentum, Journal of Fluid Mechanics, 67 (1975) 569-581.
145. Lumley, J. L., Zeman, O., Siess, J., The Influence of Buoyancy on Turbulent Transport, Journal of Fluid Mechanics, 84, 3 (1978) 581-597.
146. Spalart, P. R., Numerical Study of Sink-Flow Boundary Layers, Journal of Fluid Mechanics, 172 (1986) 307-328.
147. Moin, P., Spalart, P. R., Contributions of Numerical Simulation Data Bases to The Physics, Modeling, and Measurement of Turbulence, Advances in Turbulence, (1989) 11-38.
148. Moser, R. D., Moin, P., The Effects Curvature in Wall-Bounded Turbulent Flows, Journal of Fluid Mechanics, 175 (1987) 479-510.
149. Kim, J., Moin, P., Moser, R., Turbulence Statistics in Fully Developed Channel Flow at Low Reynolds Number, Journal of Fluid Mechanics, 177 (1987) 133-166.
150. Spalart, P. R., Watmuff, J. H., Experimental and Numerical Study of a Turbulent Boundary Layer with Pressure Gradients, Journal of Fluid Mechanics, 249 (1993) 337-371.
151. Taulbee, D. B., Mashayek, F., Barre, C., Simulation and Reynolds Stress Modeling of Particle-Laden Turbulent Shear Flows, Int. J. Heat and Fluid Flow, 20 (1999) 368-373.
152. Lai, J. C. S., Yang, C. Y., Numerical Simulation of Turbulence Suppression: Comparisons of The Performance of Four $k - \epsilon$ Turbulence Models, Int. J. Heat and Fluid Flow, 18 (1997) 575-584.
153. Nagano, Y., Kondoh, M., Shimada, M., Multiple Time-Scale Turbulence Model for Wall and Homogeneous Shear Flows Based on Direct Numerical Simulation, Int. J. Heat and Fluid Flow, 18 (1996) 346-359.
154. Hinze, J. O., Turbulence, Second Edition, McGraw-Hill Publishing Company, New York, 1975.
155. Lumley, J. L., The State of Turbulence Research, Advances in Turbulence, (1989) 1-10.
156. Orszag, S. A., Analytical Theories of Turbulence, Journal of Fluid Mechanics, 41, 2 (1970) 363-386.

157. Speziale, C. G., Some Interesting Properties of Two-dimensional Turbulence, The Physics of Fluids, 24, 8 (1981) 1425-1427.
158. Schlichting, H., Boundary Layer Theory, McGraw-Hill Publishing Company, New York, 1969.
159. Cebeci, T., Bradshaw, P. Momentum Transfer in Boundary Layers, Hemisphere Publishing Corporation, Washington, 1977.
160. Rashko, A., Structure of Turbulent Shear Flows: A New Look, AIAA Journal, 14, 10 (1976) 1349-1357.
161. Schlichting, H., Recent Progress in Boundary-Layer Research, AIAA Journal, 12, 4 (1974) 427-440.
162. Örs, H., Akışkanlar Mekaniği, Boğaziçi Üniversitesi Yayinevi, İstanbul, 1999.
163. Arpacı, V. S., Larsen, P. S., Convection Heat Transfer, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1984.
164. Shir, C. C., A Preliminary Numerical Study of Atmospheric Turbulent Flows in The Idealized Planetary Boundary Layer, J. The Atmospheric Sciences, (1973) 1327-1339.
165. Younis, B. A., Express: A Computer Program for Two Dimensional Turbulent Boundary Layers Flows, City University, London, 1987.
166. Anderson, D. A., Tannehill, J. C., Pletcher, R. H., Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1984.
167. Patankar, S. V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere Publication Corporation, New York, 1980,
168. Patankar, S. V., Spalding, D. B., A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows, Int. J. Heat and Mass Transfer, 15 (1972) 1787-1806.
169. Cakmakci, S. R., Hankey, W. L., Parabolic Numerical Method for Investigating Free Surface Flows, Int. J. Heat and Fluid Flow, 16 (1995) 178-185.
170. Fletcher, C. A. J., Computational Techniques for Fluid Dynamics 1., Second Edition, Springer-Verlag, New York, 1991.
171. Hoffmann, K. A., Computational Fluid Dynamics for Engineering, The University of Texas at Austin, Austin, 1989.

172. Murlis, J., Tsai, H. M., Bradshaw, P., The Structure of Turbulent Boundary Layers at Low Reynolds Numbers, Journal of Fluid Mechanics, 122 (1982) 13-56.
173. Wagnanski, I., Fiedler, H., Some Measurements in The Self-Preserving Jet, Journal of Fluid Mechanics, 38, 3 (1969) 577-612.
174. Ribeiro, M. M., Whitelaw, J. H., Statistical Characteristics of a Turbulent Jet, Journal of Fluid Mechanics, 70, 1 (1975) 1-15.
175. Schetz, J. A., Injection and Mixing in Turbulent Flow, Progress in Astronautics and Aeronautics, Volume 18, New York University, New York, 1980.
176. Incropera, F. P., De Witt, D. P., Fundamentals of Heat and Mass Transfer, Third Edition, John Wiley & Sons, New York, 1990.
177. Cebeci, T., Bradshaw, P., Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer, Springer - Verlag, New York, 1984.
178. Subramanian, C. S., Antonia, R. A., Effect of Reynolds Number on a Slightly Heated Turbulent Boundary Layer, Int. J. Heat and Mass Transfer, 24, 11 (1981) 1833-1846.

ÖZGEÇMİŞ

Lütfü Namlı; 1971 yılında Rize' nin Fındıklı ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini aynı yerde tamamladı. 1989-1993 yılları arasında Karadeniz Teknik Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Makina Mühendisliği Bölümü' nde Lisans öğrenimi gördü. Bu sırada üç yıl boyunca Türkiye Çimento ve Toprak Sanayii T.A.Ş ' den burs aldı. Bu bölümü tamamladıktan sonra aynı yıl K.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü Makina Mühendisliği Anabilim Dalı' nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı. 1994 yılında K.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü' ne araştırma görevlisi olarak atandı. 1996 yılında Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı ve aynı enstitüde Doktora öğrenimine başladı. 2001 yılında Beşikdüzü Meslek Yüksekokulu' na öğretim görevlisi olarak atandı. Halen aynı yerde öğretim görevlisi olarak çalışmaya devam etmektedir. Evli ve bir çocuk babasıdır. İngilizce bilmektedir.