

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

ALT TABAKASINDA DÜŞEY BİR ÇATLAĞI BULUNAN VE
RİJİT BİR BLOK ARACILIĞI İLE YÜKLENEN
BİLEŞİK TABAKA PROBLEMİ

İnş. Yük. Müh. Ahmet BİRİNCİ

78101

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

"Doktor"

Ünvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 18.08.1998

Tezin Savunma Tarihi : 23.12.1998

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ragıp ERDÖL

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Mehmet BAKİOĞLU

Jüri Üyesi : Prof. Dr. A. Osman ÇAKIROĞLU

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Asım KADIOĞLU

Trabzon 1998

ÖNSÖZ

Bu çalışma Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalında bir doktora tezi olarak gerçekleştirilmiştir.

Alt tabakasında simetri ekseninde düşey bir çatlağı bulunan ve rijit bir blok aracılığı ile yüklenmiş bileşik tabakada temas ve çatlak problemlerinin incelendiği bu çalışmayı bana önererek, dekanlık gibi önemli görevine rağmen çalışmamı başlangıcından sonuna kadar aralıksız takip edip beni sürekli teşvik eden, tezimin her aşamasında bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım yönetici Hocam Sayın Prof. Dr. Ragıp ERDÖL' e minnet ve şükranlarımı sunmayı zevkli bir görev sayarım.

Öğrenim hayatım boyunca bana emeği geçen tüm hocalarımı saygıyla anar, kendilerine minnettar olduğumu belirtmek isterim.

Tez çalışmam boyunca yardımlarını gördüğüm Sayın Prof. Dr. Osman ÇAKIROĞLU' na, Doç. Dr. Ümit UZMAN' a, Yrd. Doç. Dr. F. Lütfü ÇAKIROĞLU' na, Araş. Gör. T. Şükrü ÖZŞAHİN' e ve Araş. Gör. Volkan KAHYA' ya teşekkür ederim.

Çalışmam boyunca beni sabırla destekleyen ailemin tüm fertlerine müteşekkir olduğumu belirtir, çalışmamın ülkemize yararlı olmasını içtenlikle dilerim.

Ahmet BİRİNCİ

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER	III
ÖZET	VI
SUMMARY	VII
ŞEKİLLER DİZİNİ	VIII
TABLolar DİZİNİ	XIV
SEMBOLLER DİZİNİ	XVI
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Giriş	1
1.2. Konunun Önemi	1
1.3. Çalışmanın Amacı	3
1.4. Temas Problemlerinin Tarihsel Gelişimi	3
1.4.1. Temas Problemleri İle İlgili Daha Önce Yapılmış Çalışmalar	4
1.4.1.1. Elastik Yarım Düzleme Oturan Tabakalarla İlgili Çalışmalar	4
1.4.1.2. Rijit Sürekli Temele Oturan Tabakalarla İlgili Çalışmalar	6
1.4.1.3. Temas Problemleri İle İlgili Yapılmış Diğer Çalışmalar	7
1.5. Çatlak Problemlerinin Tarihsel Gelişimi	8
1.5.1. Çatlak Problemleri İle İlgili Yapılmış Çalışmalar	9
1.6. Çalışmanın Kapsamı	11
1.7. Genel Denklemlerin Elde Edilmesi	13
1.7.1. Üç Boyutlu Halde Elastisite Teorisinin Genel Denklemleri	13
1.7.2. Navier Denklemlerinin İki Boyutlu Hale İndirgenmesi	16
1.7.3. Gerilme ve Yerdeğiştirmelere Ait Genel İfadelerin Elde Edilmesi	18
1.7.3.1. Çatlaksız Tabakada Gerilme ve Yerdeğiştirme İfadeleri	18
1.7.3.1.1. Tabakanın Kütle Kuvvetinin İhmal Edilmesi Halindeki Çözümü	18
1.7.3.1.2. Yalnız Kütle Kuvvetleri Etkisindeki Tabakanın Çözümü	23
1.7.3.2. y Ekseninde Simetrik İki Çatlağı Bulunan Sonsuz Bir Düzlemin Çözümü	26

1.7.3.3.	Çatlaksız Tabaka ve Sonsuz Düzlem Hallerinin Süperpozisyonu	31
2.	YAPILAN ÇALIŞMALAR	33
2.1.	Giriş	33
2.2.	Problemin Tanımı	33
2.3.	Çatlaksız Bileşik Tabakanın Sürekli Temas Durumunun İncelenmesi	35
2.3.1.	Kullanılacak Denklemler	35
2.3.2.	Çatlaksız Bileşik Tabakaya Ait Sınır Şartları	37
2.3.3.	A_i ve B_i ($i = 1, \dots, 4$) Katsayılarının Belirlenmesi	39
2.3.4.	İntegral Denklemin Elde Edilmesi	42
2.3.5.	İntegral Denklemin Sayısal Çözümü	46
2.3.5.1	Rijit Blok Profilinin Dairesel Olması Hali	47
2.3.5.2	Rijit Blok Profilinin Parabolik Olması Hali	48
2.3.5.3	Rijit Blok Profilinin Düz Olması Hali	49
2.3.6.	Gerilme ve Yerdeğiştirmelerin Bulunması	50
2.3.7.	İki Elastik Tabaka Arasındaki İlk Ayrılma Yükleri ve İlk Ayrılma Uzaklıkları	53
2.4.	Çatlaklı Bileşik Tabakanın İncelenmesi	56
2.4.1.	Kullanılacak Denklemler	56
2.4.2.	Çatlaklı Bileşik Tabakaya Ait Sınır Şartları	59
2.4.3.	C_i ve D_i ($i = 1, \dots, 4$) Katsayılarının Belirlenmesi	60
2.4.4.	İntegral Denklemin Elde Edilmesi	64
2.4.5.	İntegral Denklemin Sayısal Çözümü	66
2.4.5.1.	İç Çatlak Halinde İntegral Denklemin Sayısal Çözümü	66
2.4.5.2.	Kenar Çatlak Halinde İntegral Denklemin Çözümü	68
2.4.6.	Çatlak Uçlarındaki Gerilme Şiddet Faktörleri	71
2.4.6.1.	İç Çatlak Halinde Gerilme Şiddet Faktörleri	71
2.4.6.2.	Kenar Çatlak Halinde Gerilme Şiddet Faktörleri	73
2.4.7.	Çatlak Yüzey Yerdeğiştirmeleri	75
2.4.7.1.	İç Çatlak Halinde Çatlak Yüzey Yerdeğiştirmeleri	75
2.4.7.2.	Kenar Çatlak Halinde Çatlak Yüzey Yerdeğiştirmeleri	76
3.	BULGULAR VE İRDELEME	78
3.1.	Giriş	78

3.2.	Temas Yüzeyleri (Alanları) ve Temas Gerilmeleri	79
3.2.1.	Eğri Yüzeyle Rijit Blok Hali	79
3.2.1.1.	Dairesel Rijit Blok Hali	79
3.2.1.2.	Parabolik Rijit Blok Hali	84
3.2.2.	Düz Yüzeyle (Dikdörtgen) Rijit Blok Hali	86
3.3.	σ_x ve σ_y Normal Gerilmeleri	89
3.3.1.	σ_x Normal Gerilmeleri	90
3.3.2.	σ_y Normal Gerilmeleri	97
3.4.	İki Elastik Tabaka Arasındaki İlk Ayrılma Yüğü ve İlk Ayrılma Uzaklığı	102
3.5.	Çatlak Uçlarındaki Gerilme Şiddet Faktörleri	111
3.5.1.	İç Çatlak Halinde Gerilme Şiddet Faktörleri	111
3.5.2.	Kenar Çatlak Halinde Gerilme Şiddet Faktörleri	120
3.6.	Çatlak Yüzey Yerdeğıştirmeleri	126
3.6.1.	İç Çatlak Halinde Çatlak Yüzey Yerdeğıştirmeleri	127
3.6.2.	Kenar Çatlak Halinde Çatlak Yüzey Yerdeğıştirmeleri	130
4.	SONUÇLAR ve ÖNERİLER	133
5.	KAYNAKLAR	140
6.	ÖZGEÇMİŞ	149

ÖZET

Bu çalışmada, elastik sabitleri ve yükseklikleri farklı iki tabakadan oluşan ve alt tabakasında simetri eksenini üzerinde düşey bir çatlak bulunan bileşik tabakada temas ve çatlak problemleri Elastisite teorisine göre incelenmektedir. Bileşik tabaka basit mesnetler üzerine oturmakta olup, üstten rijit bir blok aracılığı ile yüklenmekte ve bütün yüzeylerin sürtünmesiz olduğu kabul edilmektedir. Sözü edilen bu çalışma dört ana bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, konunun öneminden, temas ve çatlak problemleri ile ilgili daha önce yapılmış çalışmalardan ve çalışmanın kapsamından bahsedilmektedir. Bu bölümde ayrıca, Elastisite teorisinin temel denklemleri ve integral dönüşüm teknikleri kullanılarak çatlaksız ve çatlaklı tabaka halinde gerilme ve yerdeğiştirmelerin genel ifadeleri verilmektedir.

İkinci bölümde, problem tanımlanmakta ve bileşik tabakada çatlak bulunmaması ve bulunması halleri ayrı ayrı incelenmektedir. İlk olarak bileşik tabakada çatlak bulunmaması hali ele alınmakta ve bu duruma ait sınır şartları sağlatılarak problem blok altındaki temas gerilmesinin bilinmeyen olduğu bir singüler integral denkleme indirgenmektedir. İntegral denklem çeşitli blok profilleri için sayısal olarak çözülmekte ve blok altındaki temas gerilmeleri hesaplanmaktadır. Blok altındaki temas gerilmelerine bağılı olarak da simetri eksenini üzerindeki normal gerilmeler, iki elastik tabaka arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklıkları belirlenmektedir. İkinci olarak ise, alt tabakada düşey bir çatlak olması hali ele alınmakta ve bu halde çatlak yüzeyine çatlaksız çözümden elde edilen normal gerilmeler zıt yönde, aynı şiddet ve aynı doğrultuda yüklenerek iç ve kenar çatlak durumları ayrı ayrı incelenmektedir. Dış yüklemelerin olmadığı bu duruma ait sınır şartları kullanılarak problem yine bir singüler integral denkleme indirgenmekte ve bu denklemin sayısal olarak çözümü sonucunda iç ve kenar çatlak hallerinde çatlak uçlarındaki gerilme şiddet faktörleri ve çatlak yüzey yerdeğiştirmeleri hesaplanmaktadır.

Üçüncü bölümde, ikinci bölümde verilen problemin çeşitli boyutsuz büyüklükler için sayısal uygulaması yapılmaktadır. Tabaka kalınlıkları, blok yarıçapı, mesnet genişliği, blok ile bileşik tabaka arasındaki temas alanı (blok genişliği) ve malzeme sabitlerinin oranlarına değişik sayısal değerler verilerek sözü edilen bu büyüklüklerin temas gerilmeleri, normal gerilmeler, tabakalar arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklığı, çatlak uçlarındaki gerilme şiddet faktörü ve çatlak yüzey yerdeğiştirmeleri üzerindeki etkileri incelenmekte ve bunlara ait sonuçlar tartışılmaktadır. Bu bölümde ayrıca sayısal uygulamalardan elde edilen grafikler ve tablolar verilmektedir.

Dördüncü bölümde bu çalışmadan çıkartılan sonuçlar ve öneriler verilmektedir.

Anahtar Kelimeler : Elastisite Teorisi, Bileşik Tabaka, Temas Mekaniği, Kırılma Mekaniği, Temas Gerilmesi, İntegral Dönüşüm Tekniği, İntegral Denklem, İlk Ayrılma Yükü, İlk Ayrılma Uzaklığı, İç Çatlak, Kenar Çatlak, Gerilme Şiddet Faktörü.

SUMMARY

The Problem of a Layered Composite Having a Vertical Crack at the Bottom Layer and Loaded by means of a Rigid Stamp

In this study, the crack and the contact problem of a layered composite which consists of two layers having different heights and elastic constants and resting on two simple supports are investigated according to the theory of elasticity. The layered composite has a vertical crack at the bottom layer on the symmetry axis and is loaded by means of a rigid stamp. It is assumed that all surfaces are frictionless. This study consists of five main chapters.

In the first chapter, the importance of subject, its content and the previous studies are mentioned. In addition, using the fundamental equations of theory of elasticity and integral transformation techniques, the general expressions of stresses and displacements for both cracked and uncracked layer cases are given.

In the second chapter, the problem is introduced and the cases of the layered composite with and without a crack are individually examined. Firstly, the case of layered composite without a crack is considered. After the boundary conditions are satisfied, the problem is reduced to a singular integral equation where the contact pressure is the unknown function. The integral equation is numerically solved for various stamp profile and the contact stress distribution under the stamp is obtained. Depending on the contact stresses under the stamp, the normal stresses on the symmetry axis, initial separation load and its distance at the interface of two layers are determined. Secondly, the case of layered composite having a vertical crack at the bottom layer is considered and this case is separately examined for both edge and internal cracks by loading the normal stresses obtained from the previous case, i.e. uncracked case, with the same magnitude but in the opposite direction on the crack surfaces. By using the boundary conditions belonging to this case where there is not any external loading, the problem is examined to a singular integral equation again. As a result of numerically solving this equations, the stress intensity factors at the tips of the crack and the crack surface displacements for the edge and internal crack cases are calculated.

In the third chapter, the numerical applications of the problem given in the previous chapter for various dimensionless quantities are done. By giving different numerical values to the layer thickness, radius of stamp profile, support width, contact area between stamp and layered composite (stamp width) and material constants ratios, the effect of these quantities on the contact stress, normal stress, initial separation load and initial separation distance, stress intensity factor at the tips of crack and crack surface displacements are examined and the results of these are discussed. In this chapter, the tables and graphics which are obtained from numerical applications are also given.

In the fourth chapter, the conclusions drawn from this work and the recommendation are given.

Key Words: Elasticity Theory, Layered Composite, Contact Mechanics, Fracture Mechanics, Contact Stress, Integral Transform Technique, Integral Equation, Initial Separation Load, Initial Separation Distance, Internal Crack, Edge Crack, Stress Intensity Factor

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1. İki halin süperpozisyonu olarak elde edilen çatlaklı bileşik tabaka	34
Şekil 2. Eğri yüzeyli rijit bir blok aracılığı ile yüklenmiş ve basit mesnetlere oturmuş çatlaksız bileşik tabaka	35
Şekil 3. Düz (dikdörtgen) rijit bir blok aracılığı ile yüklenmiş ve basit mesnetlere oturmuş çatlaksız bileşik tabaka	49
Şekil 4. Çatlak yüzeyinin, çatlaksız bileşik tabaka çözümünden elde edilen gerilmelerle yüklenmesiyle oluşan çatlaklı bileşik tabaka	56
Şekil 5. Alt tabakasından iç çatlağı olan ve rijit bir blok aracılığı ile yüklenen bileşik tabaka	71
Şekil 6. Alt tabakasından kenar çatlağı olan ve rijit bir blok aracılığı ile yüklenen bileşik tabaka	73
Şekil 7. Dairesel bloğun yarıçapına bağlı olarak temas yüzeylerinin mesnet genişliği ile değişimi ($\beta = 0.10$, $h_1 / h = 0.20$, $\mathfrak{R} = 0.008$)	80
Şekil 8. Dairesel blok durumunda, elastik sabitlerin oranına bağlı olarak temas yüzeylerinin mesnet genişliği ile değişimi ($R / h = 10$, $h_1 / h = 0.20$, $\mathfrak{R} = 0.01$)	81
Şekil 9. Dairesel blok durumunda, elastik sabitlerin oranına bağlı olarak temas yüzeylerinin tabaka kalınlıkları ile değişimi ($b / h = 1.0$, $R / h = 10$, $\mathfrak{R} = 0.01$)	81
Şekil 10. Dairesel blok durumunda, çeşitli yük oranı (\mathfrak{R}) değerleri için blok altındaki temas gerilme yayılışı ($b / h = 2.0$, $h_1 / h = 0.20$, $\beta = 0.10$, $R / h = 10$)	82
Şekil 11. Dairesel blok durumunda, çeşitli yarıçap değerleri için blok altındaki temas gerilme yayılışı ($b / h = 3.0$, $h_1 / h = 0.20$, $\beta = 0.10$, $\mathfrak{R} = 0.008$)	83
Şekil 12. Dairesel blok durumunda, çeşitli mesnet genişliği değerleri için blok altındaki temas gerilme yayılışı ($R / h = 10$, $h_1 / h = 0.20$, $\beta = 0.10$, $\mathfrak{R} = 0.01$)	83

Şekil 13. Parabolik blok durumunda, çeşitli Gh değerleri için temas yüzeylerinin mesnet genişliği ile değişimi ($\beta = 0.10, h_1 / h = 0.20, \mathfrak{R} = 0.01$)	85
Şekil 14. Parabolik blok durumunda, çeşitli Gh değerleri için blok altındaki temas gerilme yayılımı ($\beta = 0.10, h_1 / h = 0.20, \mathfrak{R} = 0.01, b / h = 2.0$)	85
Şekil 15. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli a / h değerleri için blok altındaki temas gerilme yayılımı ($\beta = 0.01, b / h = 1.0, h_1 / h = 0.80$)	86
Şekil 16. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli a / h değerleri için blok altındaki temas gerilme yayılımı ($\beta = 1.00, b / h = 1.0, h_1 / h = 0.70$)	87
Şekil 17. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli mesnet genişliği değerleri için blok altındaki temas gerilme yayılımı ($\beta = 0.10, a / h = 1.0, h_1 / h = 0.50$)	88
Şekil 18. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, elastik sabitlerin çeşitli oranları için blok altındaki temas gerilme yayılımı ($b / h = 1.0, a / h = 0.25, h_1 / h = 0.50$)	88
Şekil 19. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli tabaka kalınlıkları için blok altındaki temas gerilme yayılımı ($b / h = 1.0, a / h = 0.25, \beta = 0.10$)	89
Şekil 20. Dairesel blok durumunda, çeşitli mesnet genişlikleri için $\frac{\sigma_x(0,y)}{P/h}$ normal gerilme yayılımı ($\beta = 2.50, R / h = 10, h_1 / h = 0.20, \mathfrak{R} = 0.01$)	90
Şekil 21. Dairesel blok durumunda, çeşitli mesnet genişlikleri için $\frac{\sigma_x(0,y)}{P/h}$ normal gerilme yayılımı ($\beta = 0.50, R / h = 10, h_1 / h = 0.80, \mathfrak{R} = 0.01$)	91
Şekil 22. Parabolik blok durumunda, çeşitli mesnet genişlikleri için $\frac{\sigma_x(0,y)}{P/h}$ normal gerilme yayılımı ($\beta = 0.10, Gh = 0.05, h_1 / h = 0.20, \mathfrak{R} = 0.01$)	92
Şekil 23. Dairesel blok durumunda, elastik sabitlerin çeşitli oranları için $\frac{\sigma_x(0,y)}{P/h}$ normal gerilme yayılımı ($b / h = 1.0, R / h = 10, h_1 / h = 0.50, \mathfrak{R} = 0.01$)	93
Şekil 24. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, elastik sabitlerin çeşitli oranları için $\frac{\sigma_x(0,y)}{P/h}$ normal gerilme yayılımı ($b / h = 1.0, a / h = 0.25, h_1 / h = 0.50$)	93

Şekil 25. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli blok genişlikleri için $\frac{\sigma_x(0,y)}{P/h}$ normal gerilme yayılımı ($b/h = 1.0, \beta = 0.05, h_1/h = 0.50$)	94
Şekil 26. Dairesel blok durumunda, çeşitli mesnet genişlikleri için $\frac{\sigma_y(0,y)}{P/h}$ normal gerilme yayılımı ($\beta = 0.10, R/h = 10, h_1/h = 0.20, \mathfrak{R} = 0.001$)	97
Şekil 27. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli blok genişlikleri için $\frac{\sigma_y(0,y)}{P/h}$ normal gerilme yayılımı ($\beta = 0.50, b/h = 1.0, h_1/h = 0.20$)	98
Şekil 28. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli blok genişlikleri için $\frac{\sigma_y(0,y)}{P/h}$ normal gerilme yayılımı ($\beta = 0.01, b/h = 1.0, h_1/h = 0.50$)	99
Şekil 29. Dairesel blok durumunda, elastik sabitlerin çeşitli oranları için $\frac{\sigma_y(0,y)}{P/h}$ normal gerilme yayılımı ($R/h = 10, b/h = 1.0, h_1/h = 0.50, \mathfrak{R} = 0.01$)	99
Şekil 30. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli tabaka kalınlıkları için $\frac{\sigma_y(0,y)}{P/h}$ normal gerilme yayılımı ($\beta = 0.01, b/h = 1.0, a/h = 0.50$)	100
Şekil 31. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, elastik sabitlerin çeşitli oranları için ilk ayrılma yüklerinin tabaka kalınlıkları ile değişimi ($a/h = 0.10, b/h = 1.0$)	102
Şekil 32. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli tabaka kalınlıkları için ilk ayrılma yüklerinin mesnet genişlikleri ile değişimi ($a/h = 0.10, \beta = 0.10$)	103
Şekil 33. Dairesel blok durumunda, çeşitli mesnet genişlikleri için tabakalar arasındaki temas gerilme yayılışları ($\beta = 0.50, R/h = 10, h_1/h = 0.50, \mathfrak{R} = 0.01$)	106
Şekil 34. Dairesel blok durumunda, çeşitli mesnet genişlikleri için tabakalar arasındaki temas gerilme yayılışları ($\beta = 0.10, R/h = 10, h_1/h = 0.20, \mathfrak{R} = 0.001$)	107
Şekil 35. Dairesel blok durumunda, çeşitli tabaka kalınlıkları için tabakalar arasındaki temas gerilme yayılışları ($\beta = 0.50, R/h = 10, b/h = 1.0, \mathfrak{R} = 0.01$)	108
Şekil 36. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, elastik sabitlerin çeşitli oranları için tabakalar arasındaki temas gerilme yayılışları ($b/h = 1.0, a/h = 0.50, h_1/h = 0.40$)	108

- Şekil 37. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli blok genişlikleri için tabakalar arasındaki temas gerilme yayılışları
($b/h = 1.0$, $\beta = 0.05$, $h_1/h = 0.50$) 109
- Şekil 38. Dairesel blok durumunda, çeşitli λ yük değerleri için tabakalar arasındaki temas gerilme yayılışları
($R/h = 10$, $\beta = 0.50$, $h_1/h = 0.50$, $\mathfrak{R} = 0.01$) 109
- Şekil 39. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli λ yük değerleri için tabakalar arasındaki temas gerilme yayılışları
($a/h = 1.0$, $\beta = 0.01$, $h_1/h = 0.40$, $b/h = 1.0$) 110
- Şekil 40. Dairesel blok durumunda, iç çatlakın c ve d uçlarındaki gerilme şiddet faktörlerinin d/h ile değişimi
($c/h = 0.02$, $b/h = 1.0$, $\beta = 0.10$, $R/h = 10$, $h_1/h = 0.20$, $\mathfrak{R} = 0.01$) 112
- Şekil 41. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, iç çatlakın c ve d uçlarındaki gerilme şiddet faktörlerinin d/h ile değişimi
($c/h = 0.10$, $b/h = 2.0$, $\beta = 0.10$, $a/h = 0.25$, $h_1/h = 0.80$) 113
- Şekil 42. Dairesel blok durumunda, çeşitli c/h oranları için iç çatlakın d ucundaki gerilme şiddet faktörünün d/h ile değişimi
($b/h = 2.0$, $\beta = 0.50$, $R/h = 10$, $h_1/h = 0.80$, $\mathfrak{R} = 0.01$) 113
- Şekil 43. Dairesel blok durumunda, elastik sabitlerin çeşitli oranları için iç çatlakın d ucundaki gerilme şiddet faktörünün d/h ile değişimi
($b/h = 1.0$, $c/h = 0.10$, $R/h = 10$, $h_1/h = 0.80$, $\mathfrak{R} = 0.01$) 114
- Şekil 44. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli blok genişlikleri için iç çatlakın d ucundaki gerilme şiddet faktörünün d/h ile değişimi
($b/h = 1.0$, $\beta = 0.10$, $c/h = 0.08$, $h_1/h = 0.70$) 114
- Şekil 45. Dairesel blok durumunda, elastik sabitlerin çeşitli oranları için iç çatlakın c ucundaki gerilme şiddet faktörünün d/h ile değişimi
($b/h = 1.0$, $c/h = 0.10$, $R/h = 10$, $h_1/h = 0.80$, $\mathfrak{R} = 0.01$) 115
- Şekil 46. Dairesel blok durumunda, iç çatlakın c ve d uçlarındaki gerilme şiddet faktörlerinin c/h ile değişimi
($d/h = 0.35$, $b/h = 1.0$, $\beta = 0.10$, $R/h = 10$, $h_1/h = 0.80$, $\mathfrak{R} = 0.01$) 115

- Şekil 47. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, iç çatlağın c ve d uçlarındaki gerilme şiddet faktörlerinin c/h ile değişimi
 $(d/h = 0.15, b/h = 3.0, \beta = 0.10, a/h = 0.20, h_1/h = 0.30)$ 116
- Şekil 48. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, elastik sabitlerin çeşitli oranları için iç çatlağın c ucundaki gerilme şiddet faktörünün c/h ile değişimi
 $(b/h = 0.50, a/h = 0.50, d/h = 0.28, h_1/h = 0.70)$ 116
- Şekil 49. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli blok genişlikleri için iç çatlağın c ucundaki gerilme şiddet faktörünün c/h ile değişimi
 $(b/h = 1.0, \beta = 0.05, d/h = 0.36, h_1/h = 0.80)$ 117
- Şekil 50. Dairesel blok durumunda, çeşitli mesnet genişlikleri için iç çatlağın c ucundaki gerilme şiddet faktörünün c/h ile değişimi
 $(R/h = 10, \beta = 0.10, d/h = 0.08, h_1/h = 0.20, \mathfrak{R} = 0.001)$ 117
- Şekil 51. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli blok genişlikleri için iç çatlağın d ucundaki gerilme şiddet faktörünün c/h ile değişimi
 $(b/h = 1.0, \beta = 0.05, d/h = 0.36, h_1/h = 0.80)$ 118
- Şekil 52. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli mesnet genişlikleri için kenar çatlağın d ucundaki gerilme şiddet faktörünün çatlak uzunluğu ile değişimi $(a/h = 0.50, \beta = 0.05, h_1/h = 0.90)$ 123
- Şekil 53. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli blok genişlikleri için kenar çatlağın d ucundaki gerilme şiddet faktörünün çatlak uzunluğu ile değişimi $(b/h = 1.0, \beta = 0.10, h_1/h = 0.80)$ 124
- Şekil 54. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli blok genişlikleri için kenar çatlağın d ucundaki gerilme şiddet faktörünün çatlak uzunluğu ile değişimi $(b/h = 0.50, \beta = 1.00, h_1/h = 0.70)$ 124
- Şekil 55. Dairesel blok durumunda, elastik sabitlerin çeşitli oranları için kenar çatlağın d ucundaki gerilme şiddet faktörünün çatlak uzunluğu ile değişimi $(b/h = 1.0, R/h = 10, h_1/h = 0.80, \mathfrak{R} = 0.01)$ 125
- Şekil 56. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, elastik sabitlerin çeşitli oranları için kenar çatlağın d ucundaki gerilme şiddet faktörünün çatlak uzunluğu ile değişimi $(b/h = 1.0, a/h = 0.10, h_1/h = 0.50)$ 125

Şekil 57. Dairesel blok durumunda, elastik sabitlerin çeşitli oranları için kenar çatlakın d ucundaki gerilme şiddet faktörünün çatlak uzunluğu ile değişimi ($b/h = 1.0$, $R/h = 10$, $h_1/h = 0.20$, $\mathfrak{R} = 0.01$)	126
Şekil 58. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli çatlak uzunlukları için iç çatlak yüzey yerdeğiştirmeleri ($\beta = 1.0$, $b/h = 1.0$, $a/h = 0.10$, $h_1/h = 0.70$)	127
Şekil 59. Dairesel blok durumunda, çeşitli çatlak uzunlukları için iç çatlak yüzey yerdeğiştirmeleri ($\beta = 0.10$, $b/h = 1.0$, $R/h = 10$, $h_1/h = 0.80$, $\mathfrak{R} = 0.01$)	128
Şekil 60. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli çatlak uzunlukları için iç çatlak yüzey yerdeğiştirmeleri ($\beta = 0.10$, $b/h = 1.0$, $a/h = 0.10$, $h_1/h = 0.30$)	128
Şekil 61. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, elastik sabitlerin çeşitli oranları için iç çatlak yüzey yerdeğiştirmeleri ($c/h = 0.05$, $d/h = 0.15$, $b/h = 0.50$, $a/h = 0.25$, $h_1/h = 0.50$)	129
Şekil 62. Dairesel blok durumunda, çeşitli mesnet genişlikleri için iç çatlak yüzey yerdeğiştirmeleri ($c/h = 0.06$, $d/h = 0.20$, $\beta = 0.50$, $R/h = 10$, $h_1/h = 0.50$, $\mathfrak{R} = 0.01$)	129
Şekil 63. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli çatlak uzunlukları için kenar çatlak yüzey yerdeğiştirmeleri ($b/h = 0.50$, $\beta = 1.00$, $a/h = 0.10$, $h_1/h = 0.60$)	130
Şekil 64. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, elastik sabitlerin çeşitli oranları için kenar çatlak yüzey yerdeğiştirmeleri ($b/h = 1.0$, $d/h = 0.20$, $a/h = 0.05$, $h_1/h = 0.50$)	131
Şekil 65. Dairesel blok durumunda, çeşitli mesnet genişlikleri için kenar çatlak yüzey yerdeğiştirmeleri ($\beta = 0.10$, $d/h = 0.05$, $R/h = 10$, $h_1/h = 0.20$, $\mathfrak{R} = 0.001$)	132
Şekil 66. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli blok genişlikleri için kenar çatlak yüzey yerdeğiştirmeleri ($\beta = 0.05$, $d/h = 0.25$, $b/h = 1.0$, $h_1/h = 0.80$)	132

TABLolar DİZİNİ

Sayfa No

Tablo 1. Dairesel blok durumunda, çeşitli yük oranı (\mathfrak{R}) değerleri için temas yüzeylerinin mesnet genişliği ile değişimi ($\beta = 0.10, h_1/h = 0.20, R/h = 10$)	79
Tablo 2. Parabolik blok durumunda, çeşitli Gh değerleri için temas yüzeylerinin mesnet genişliği ile değişimi ($\beta = 0.10, h_1/h = 0.20, \mathfrak{R} = 0.01$)	84
Tablo 3. Dairesel blok durumunda, çeşitli tabaka kalınlıkları için $\frac{\sigma_x(0,y)}{P/h}$ normal gerilme değerlerinin elastik sabitlerin oranı ile değişimi ($b/h = 1.0, R/h = 10, \mathfrak{R} = 0.01$)	95
Tablo 4. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli tabaka kalınlıkları için $\frac{\sigma_x(0,y)}{P/h}$ normal gerilme değerlerinin mesnet genişlikleri ile değişimi ($\beta = 0.50, a/h = 0.10$)	96
Tablo 5. Dairesel blok durumunda, çeşitli tabaka kalınlıkları için $\frac{\sigma_y(0,y)}{P/h}$ normal gerilme değerlerinin mesnet genişliği ile değişimi ($\beta = 0.50, R/h = 10, \mathfrak{R} = 0.01$)	101
Tablo 6. Dairesel blok durumunda, elastik sabitlerin çeşitli oranları için ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklıklarının tabaka kalınlıkları ile değişimi ($b/h = 1.0, R/h = 10, \mathfrak{R} = 0.01$)	104
Tablo 7. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli tabaka kalınlıkları için ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklıklarının elastik sabitlerin oranları ile değişimi ($b/h = 1.0, a/h = 0.10$)	104
Tablo 8. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, elastik sabitlerin çeşitli oranları için ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklıklarının blok genişliği ile değişimi ($b/h = 1.0, h_1/h = 0.50$)	105

Tablo 9. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli tabaka kalınlıkları için ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklıklarının mesnet genişliği ile değişimi ($a/h = 0.10$, $\beta = 0.10$)	105
Tablo 10. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, $\beta = 0$ ($\mu_1 \rightarrow \infty$) için bulunan ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklıklarının [25] numaralı kaynaktaki sonuçlarla karşılaştırılması	111
Tablo 11. Dairesel blok durumunda, çeşitli mesnet genişlikleri için iç çatlağın c ve d uçlarındaki gerilme şiddet faktörlerinin d/h ile değişimi ($c/h = 0.05$, $\beta = 0.50$, $R/h = 10$, $h_1/h = 0.50$, $\mathfrak{R} = 0.01$)	119
Tablo 12. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli blok genişlikleri için iç çatlağın c ve d uçlarındaki gerilme şiddet faktörlerinin c/h ile değişimi ($d/h = 0.36$, $\beta = 0.05$, $b/h = 1.0$, $h_1/h = 0.80$)	120
Tablo 13. Dairesel blok durumunda, Gauss-Chebyshev integrasyonunda kullanılan çeşitli n nokta sayıları ve üç nokta extrapolasyonu için kenar çatlağın d ucundaki gerilme şiddet faktörünün d/h ile değişimi ($b/h = 2.0$, $\beta = 0.50$, $R/h = 10$, $h_1/h = 0.80$, $\mathfrak{R} = 0.01$)	122

SEMBOLLER DİZİNİ

a	Rijit blok ile bileşik tabaka arasındaki yarım temas uzunluğu
b	Simetri ekseninden mesnete olan uzaklık (mesnet genişliğinin yarım uzunluğu)
c	Bileşik tabakanın alt yüzeyinden çatlak başlangıç noktasına olan uzaklık
d	Bileşik tabakanın alt yüzeyinden çatlak bitim noktasına olan uzaklık
e	Hacim değiştirme oranı
E	Elastisite modülü
$F(x)$	Rijit blok profilini tanımlayan fonksiyon
$f(x)$	$F(x)$ fonksiyonunun x' e göre türevi
F_x, F_y, F_z	x, y ve z doğrultularındaki kütle kuvveti bileşenleri
g	Yerçekimi ivmesi
G	Parabolik bloğun eğriliğini ifade eden bir sabit
h	Bileşik tabakanın toplam yüksekliği
h_1	1 nolu tabakanın yüksekliği
h_2	2 nolu tabakanın yüksekliği
$k(c)$	Çatlak c ucundaki gerilme şiddet faktörü
$k(d)$	Çatlak d ucundaki gerilme şiddet faktörü
n	Gauss-Chebyshev integrasyonunda alınan nokta sayısı
P	Rijit bloğa uygulanan tekil kuvvet
$p(x)$	Rijit blok altındaki temas gerilme fonksiyonu
R	Dairesel bloğun yarıçapı
S, T	Çatlak haline ait ters Fourier dönüşüm fonksiyonları
u	x doğrultusundaki yerdeğiştirme bileşeni
v	y doğrultusundaki yerdeğiştirme bileşeni
w	z doğrultusundaki yerdeğiştirme bileşeni
x, y, z	Kartezyen koordinatlar
x_α	Kritik ayrılma uzaklığı (ilk ayrılma uzaklığı)
α	Çatlaksız hale ait Fourier dönüşüm değişkeni

β	Elastik sabitlerin oranı
∂	Türev operatörü
$\delta(x)$	Dirac delta fonksiyonu
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	x, y ve z doğrultularındaki birim uzamalar
ϕ, ψ	Çatlaksız hale ait ters Fourier dönüşüm fonksiyonları
ξ	Çatlak haline ait Fourier dönüşüm değişkeni
κ	Elastik sabit
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Kayma şekildeğiştirme bileşenleri
λ	Yük faktörü (yük)
λ_{cr}	Kritik yük faktörü (kritik ayrılma yükü)
λ	Lamé sabiti
μ	Kayma modülü
ν	Poisson oranı
∇^2	Laplace operatörü
ω	Elastisite modülü, kayma modülü ve Poisson oranına bağlı bir sabit
ρ	Yoğunluk
\mathfrak{R}	2 nolu tabakanın elastik sabitlerine, tekil yüke ve bileşik tabakanın toplam yüksekliğine bağlı bir oran (yük oranı)
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	x, y ve z eksenlerine paralel doğrultulardaki normal gerilme bileşenleri
σ_0	Çatlaksız tabakada simetri ekseninde $y = 0$ noktasındaki $\sigma_x(0,0)$ normal gerilmesi
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Kayma gerilmesi bileşenleri

Not : Bu listede verilmeyen bazı semboller metin içerisinde ilgili oldukları yerlerde tanımlanmışlardır.

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

İçinde bulunduğumuz yıllarda, Elastisite teorisi mühendislik problemlerinin çözümünde kayda değer bir uygulama alanı bulmuştur. Mühendislik yapılarındaki gerilme, yer ve şekildeğiştirme problemlerinin çözümünde mukavemetin elemanter metotlarının yetersiz kaldığı pek çok durum vardır. Özellikle işaret değıştiren gerilmelere maruz yapılarda içeriye girik köşelerdeki yüksek gerilme yığılmaları sonucunda oluşan çatlaklarda, kiriş ve şaftların enkesitlerindeki ani değışim sonucu ortaya çıkan gerilmelerin araştırılmasında, kayıcı mesnet ruloları ile yatak bilyalarındaki gerilmelerin belirlenmesinde ve kirişlerde tekil yük ve mesnetlere yakın bölgelerdeki gerilmelerin incelenmesinde Elastisite teorisini kullanmak uygun olmaktadır [1].

Elemanter teoriye göre daha kesin sonuç veren Elastisite teorisi yardımıyla problemlerin çözümü, bilgisayar teknolojisi ve sayısal çözüm yöntemlerinin gelişmesine paralel olarak yoğunluk kazanmış ve bu konudaki çalışmaların sayısında önemli ölçüde artış kaydedilmiştir. Özellikle bileşik tabaka problemleri üzerindeki çalışmalarda, uygulamadaki önemine paralel olarak kayda değer ilerlemeler sağlanmıştır.

Elastisite problemlerinde ifadelerin karışık ve hesapların uzun olması nedeniyle son yıllara kadar özellikle bileşik tabaka problemleri üzerinde çalışan bilim adamı sayısı azdı. Ancak bilgisayar teknolojisinin ve sayısal çözüm yöntemlerinin gelişmesi ile bu tür problemler üzerinde çalışmalar yoğunluk kazanmıştır.

Bu çalışmada da, Elastisite teorisinden faydalanılarak elastik sabitleri ve yükseklikleri farklı iki tabakadan oluşan ve alt tabakasında simetri eksenini üzerinde düşey bir çatlağı bulunan bileşik tabaka problemi ele alınmaktadır. Bileşik tabaka, üstten rijit bir blok aracılığı ile yüklenmiş olup basit mesnetler üzerine oturmuştur.

1.2. Konunun Önemi

Bilindiği gibi, yapı elemanları dış yük ve çevre şartlarının etkisiyle gerilme, yer ve şekildeğiştirmelere maruz kalırlar. Mühendislik yapılarının boyutlandırılmasında en önemli adımlardan birisi yapının bu dış yük ve çevre şartları altında görevini yerine getirebilmesi için

en son şekline ve ölçülerine karar vermektir. Bunun için malzemeyi karakterize eden bir parametre ile kritik bir yük faktörü karşılaştırılır. Kritik yük faktörü uygulanan dış yüke, çevre şartlarına ve cismin geometrisine bağlı bir büyüklüktür. Malzeme parametresi ise malzemenin mukavemetinin bir ölçüsüdür. Bu karşılaştırmayı yapabilmek için cismin mukavemetinin hangi halde aşıldığının bilinmesi gerekir. Cismin mukavemetinin aşılmasını etkileyen en önemli faktörler aşağıdaki gibi sıralanabilir [2]:

- a) Malzemenin mekanik davranışı,
- b) Çevre şartları (sıcaklık, rutubet oranı),
- c) Dış yüklerin karakteri (özellikle zamana bağlılıkları),
- d) Cismin geometrisi.

Bu faktörlerden bir veya birkaçının etkisi altında yapının mukavemetinin yok olması ;

- a) Yorulma,
- b) Akma, sünme, aşırı deformasyonlar,
- c) Kimyasal yapının değişmesi, korozyon
- d) Stabilitenin bozulması (burkulma),
- e) Kırılma,

hallerinden birinde olur.

Yapının mukavemetinin yok olmasına neden olan faktörlerden biri de yukarıda belirtildiği gibi kırılmadır. Kırılma, genel olarak aşırı yükler altında malzemede yeni yüzeylerin yaratılmasıdır [50].

Malzeme içinde çeşitli nedenlerle mevcut olan küçük iç kusurlar yukarıda bahsedilen faktörler sebebiyle büyümekte ve malzemenin mukavemetini önemli ölçüde azaltmaktadır. Bu amaçla son seksen yıla yakın süre boyunca dislokasyonlar teorisinde büyük ilerlemeler kaydedilmiş ve bu sayede içinde çatlak bulunan cisimlerin incelenmesi daha kolay hale gelmiştir. Havacılığın süratle ilerlemesi ve uzay endüstrisinin kurulması bu yöndeki çalışmaları daha gerekli hale getirmiştir [60]. Çalışmalar daha çok bir çatlak içeren yapı elemanının taşıyabileceği en büyük yükü bulmak dolayısıyla da çatlağın hangi yükleme şartlarında büyümeye başlayacağını belirleme yönünde olmuştur. Çatlak içeren yapı elemanının taşıyabileceği en büyük yükü bulabilmek için çeşitli teoriler mevcuttur. Bu teorilerin en önemlileri; Griffith teorisi, gerilme şiddeti faktörü, şekildeğiştirme enerjisinin serbest bırakılma oranı ve J integrali olarak sıralanabilir. Bu teorilerin ilk üçü lineer elastik kırılma mekaniği, dördüncüsü ise elastoplastik kırılma mekaniği kriteri olarak kullanılmaktadır [3]. Bu kriterlerden lineer elastik malzemeler için halen en çok kullanılmakta olanı "*gerilme şiddet faktörü*" kriteridir.

Temasta olan iki cisim arasındaki gerilmelerin bilinmesi de cisimler arasında süreksizliklerin olup olmaması açısından önemlidir. Diş yükün belirli bir değeri aşması durumunda temasta olan cisimler arasında ayrılmalar olur. Söz konusu bu ayrılmaların hangi yükte meydana gelebileceğinin belirlenmesi gerekir. Bu durumda da karşılaştırma kriteri olarak "*kritik yük faktörü*" kullanılmaktadır.

Yukarıda anlatılanlardan da anlaşılacağı gibi, karşılaştırma kriteri olarak kullanılan kritik yük faktörünün belirlenmesi son derece önemlidir. Çatlak problemlerinde gerilme şiddet faktörü yardımıyla çatlağın ilerlemeye başlayacağı kritik yükü, temas problemlerinde ise kritik yük faktörü yardımıyla temas eden iki cisim arasındaki kritik ayrılma yükünü belirlemek mümkün olmaktadır.

1.3. Çalışmanın Amacı

Kenarlarına dik bir şekilde iç ve kenar çatlak bulunan uzun şerit (tabaka) problemi lineer kırılma mekaniğinde üzerinde çalışmaların yoğun olduğu bir konudur. Bunun nedeni pek çok yapı elemanının ve standart deney elemanlarının şerit geometrisine yakın olması şeklinde özetlenebilir. Son yıllarda bileşik yapı tarzına olan ihtiyacın artması ve yukarıda bahsedilen durumların da göz önünde bulundurulması ile temas ve çatlak problemlerinin birlikte incelenmesinin önemi daha da artmıştır. İşte bu amaç doğrultusunda alt tabakasında düşey bir çatlağı bulunan ve üstten rijit bir blok vasıtasıyla yüklenen bir bileşik tabakaya ait sürekli temas ve çatlak problemi birlikte incelenmektedir.

1.4. Temas Problemlerinin Tarihsel Gelişimi

Temas problemleri mühendislik yapılarında pek çok uygulama alanına sahiptir. Makine parçalarının birbirine temasları, elastik yarım düzleme oturan kiriş ve tabakalara rijit bloklar yardımıyla uygulanan kuvvetten doğan mühendislik problemleri temas problemlerine örnek verilebilir. Temas problemleri ile ilgili ilk çalışma Hertz [4] tarafından yapılmıştır. Bu nedenle temas problemleri günümüz literatürüne "*Hertz Değme Problemi*" olarak geçmiştir [5]. Hertz' in yapmış olduğu bu çalışma sürtünmesiz yüzey ve tam elastik cisimlerle sınırlandırılmıştı. 1950' li yıllarda değme mekaniğindeki gelişmelerle birlikte bu sınırlamalar kaldırılmış ve aynı yıllarda lineer viskoelastisite ve plastisite teorisindeki gelişmeler sayesinde elastik olmayan cisimlerin birbiriyle temasından doğan gerilme ve yerdeğiştirmeler incelenmiştir [6]. Değme problemlerinin bu tarihe kadar olan literatürü ve çözüm yöntemleri

Galin [7]' in eserinde bulunabilir. Yine bu konudaki problemlerin çözümünde integral dönüşüm tekniklerinin uygulama metotları Ufliand [8]' in eserinde verilmektedir.

1.4.1. Temas Problemleri İle İlgili Daha Önce Yapılmış Çalışmalar

Son yıllarda bilgisayar teknolojisinin ve sayısal çözüm yöntemlerinin gelişmesi ile temas problemleri üzerinde yapılan çalışmalar yoğunluk kazanmıştır. İntegral dönüşüm teknikleri , sonlu elemanlar, sınır elemanları ve sonlu farklar gibi yöntemler kullanılarak temas problemleri ile ilgili pek çok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalarda tabakalar (kirişler) genellikle elastik yarım düzlem ya da rijit sürekli temel üzerine oturmuştur. Ancak elastik tabakaların rijit mesnetlere, elastik çeyrek düzlemlere vs. oturduğu çalışmalar da mevcuttur.

1.4.1.1. Elastik Yarım Düzleme Oturan Tabakalarla İlgili Çalışmalar

Elastik yarım düzleme oturan tabakalarla ilgili çalışmalardan bazıları aşağıdaki gibi özetlenebilir:

Ratwani ve Erdoğan [9], sonlu bölgede elastik yarım düzlem üzerine oturan elastik bir tabakanın (kirişin) sürtünmesiz bir blok aracılığıyla yüklenmesi haline ait temas problemini incelemişlerdir. Çalışmada blok profilinin dikdörtgen ve eğrisel olması durumlarında temas yüzeyi boyunca gerilme yayılımı elde edilmiştir. Yine sonlu bölgede elastik yarım düzlem üzerine oturan elastik bir tabakanın rijit ve elastik bloklar aracılığıyla yüklenmesi durumunda çift temas problemi hali Civelek ve Erdoğan [10] tarafından incelenmiştir. Söz konusu bu çalışmada problem bir singüler integral denkleme indirgenmiş ve çeşitli blok profilleri için integral denklem sayısal olarak çözülerek blok altındaki temas gerilme yayılımı ile blok ile elastik tabaka ve elastik tabaka ile yarım düzlem arasındaki temas alanları (uzunlukları) belirlenmiştir.

Geçit [11,12], elastik zemine oturan bir tabakanın yayılı yüklerle bastırılıp tekil yüklerle kaldırılması ve yayılı yüklerle bastırılıp simetrik tekil yüklerle kaldırılması haline ait temas problemlerini incelemiştir. Bu çalışmaların her ikisinde de tabaka ile elastik zemin arasındaki ilk ayrılma noktası ile ilk ayrılma yükü belirlenmiştir. Adams ve Bogy [13], farklı elastik özelliklere sahip yarım düzlem ile yarı sonsuz tabaka arasındaki düz ve sınırlı temas

durumları için çözümler elde etmişlerdir. Problem ikinci tip bir singüler integral denkleme indirgenmiş ve bu integral denklemin sayısal çözümü sonunda temas yüzeyindeki normal ve kayma gerilmeleri hesaplanmıştır.

Çakıroğlu [14], elastik yarım düzleme oturan ve üzerinde dikdörtgen rijit bir blok bulunan elastik tabakaya ait sürekli ve süreksiz temas problemlerini incelemiştir. Çalışmada, önce sürekli temas durumu ele alınmış ve bu duruma ait singüler integral denklem elde edilmiştir. Bu denklemin sayısal olarak çözümü sonucunda da rijit blok altındaki gerilme yayılımı bulunmuştur. İkinci olarak ise elastik tabaka ile yarım düzlem arasındaki süreksiz temas durumu ele alınmış ve bu hale ait ikinci bir integral denklem elde edilmiştir. Bu integral denklemin çözümü sonucunda da tabaka ile yarım düzlem arasındaki ilk ayrılma noktası ve ilk ayrılma yükü ile temas yüzeyindeki açılmalar incelenmiştir. Üzerinde sonlu genişlikte yayılı yük bulunan bir elastik tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki sürekli ve süreksiz temas durumları Çakıroğlu ve Çakıroğlu [15] tarafından incelenmiştir. Araştırmacılar, yayılı yük genişliğinin tabaka yüksekliğine oranına bağlı olarak ilk ayrılma noktası (uzaklığı) ve ilk ayrılma yükü ile bu yükten daha büyük yükler için temas yüzeyi boyunca gerilme yayılımını elde etmişlerdir. Yine aynı çalışmada, süreksiz temas olması halinde yarım düzlem ile elastik tabaka arasındaki açılmalar hesaplanmıştır.

Çakıroğlu ve Erdöl [16], elastik zemine oturan elastik özellikleri ve yükseklikleri farklı iki tabakanın sürekli temas problemini incelemiştir. Çeşitli yükleme durumları, malzeme özellikleri ve tabaka kalınlıkları oranları için bileşik tabakadaki normal gerilme yayılımları incelenmiştir. Ayrıca iki elastik tabaka arasındaki ilk ayrılma uzaklığı ve ilk ayrılma yükü ile bu yük ve bu yükten daha küçük yükler için temas yüzeyi boyunca gerilme yayılımları elde edilmiştir. Yine aynı araştırmacılardan Çakıroğlu [17], aynı problemin süreksiz temas durumunu da incelemiştir. Bu çalışmada süreksiz temas durumuna ait sınır şartları sağlatılarak iki elastik tabaka ve elastik zemin ile bileşik tabaka arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklıklarından başka temas yüzeylerindeki açılmalar da hesaplanmıştır. Kritik ayrılma yükünden daha büyük yük değerleri için iki elastik tabaka ve elastik zemin ile bileşik tabaka arasındaki temas gerilme yayılımları da belirlenmiştir.

Adams [18], elastik yarım düzleme oturan ve üzerinde sabit bir hızla hareket eden tekil bir yükün etkisindeki elastik tabakaya ait temas problemini incelemiştir. Bu karışık sınır değer problemi bir singüler integral denkleme indirgenerek, değişik hızlarda elastik tabaka

ile elastik yarım düzlem arasındaki temas alanı (uzunluğu) ve temas gerilmeleri hesaplanmıştır. Yarı sonsuz düzlem ile rijit bir blok arasındaki temas problemi de yine aynı araştırmacı [19] tarafından çözülmüştür. Geçit [20], yarısonsuz bir düzlem ile yarı sonsuz bir silindir arasındaki sürtünmesiz temas problemini incelemiştir. Problem ikinci tip bir singüler integral denkleme indirgenerek temas yüzeyindeki gerilme yayılımı ve gerilme şiddet faktörleri elde edilmiştir. Homojen olmayan elastik yarım düzlem ile rijit bir blok arasındaki temas problemi Bakırtaş [21] tarafından ele alınmıştır. Araştırmacı yarısonsuz düzlemde homojenliğin derinlikle değiştiğini kabul ederek problemi bir singüler integral denkleme indirgemiş ve integral denklemin sayısal çözümünü yaparak temas gerilmelerini incelemiştir.

1.4.1.2. Rijit Sürekli Temele Oturan Tabakalarla İlgili Çalışmalar

Elastik tabakaların rijit sürekli temel üzerine oturduğu çalışmalardan bazıları aşağıdaki gibi özetlenebilir:

Keer ve Silva [22], Rijit yarım düzlem üzerine oturan yarı sonsuz elastik bir tabakanın (kirişin) tekil yükü kaldırılması problemini incelemişlerdir. Bu probleme benzer bir çalışma Civelek ve Erdoğan [23,24] tarafından gerçekleştirilmiştir. Araştırmacılar, sürtünmesiz rijit bir düzlem üzerine oturan sabit kalınlıktaki elastik bir tabakanın kütle kuvvetlerinin olması durumunda sürekli ve süreksiz temas durumlarını incelemişlerdir. Elastik tabakanın tekil bir yükü bastırılması ve kaldırılması hallerinde, elastik tabaka ile rijit düzlem arasındaki ilk ayrılma noktası ve ilk ayrılma yükü ile bu yükten daha büyük ve daha küçük yükler için temas yüzeyi boyunca gerilme yayılışları elde edilmiştir.

Civelek, Erdoğan ve Çakıroğlu [25], rijit bir yarım düzlem üzerine oturan elastik tabakanın rijit dikdörtgen bir blok aracılığıyla yüklenmesi durumunda sürekli ve süreksiz temas durumlarını ele almışlardır. Çalışmada ilk olarak sürekli temas durumu incelenerek problem bir singüler integral denkleme indirgenmiş ve bu integral denklemin sayısal çözümü ile sürekli temas durumu belirlenmiştir. Elastik tabaka ile rijit düzlem arasındaki ilk ayrılma noktası ve ilk ayrılma yükü çeşitli boyutsuz büyüklükler için hesaplanmıştır. İkinci olarak ise süreksiz temas durumu ele alınmış ve bu duruma ait ikinci bir integral denklem elde edilerek elastik tabaka ile rijit yarım düzlem arasındaki açılmalar incelenmiştir. Yine rijit yarım düzlem üzerine oturan elastik bir tabakanın tekil yükü kaldırılmasına ait sürtünmesiz temas

problemi Geçit ve Erdoğan [26] tarafından çözülmüştür. Lan, Graham ve Selvadurai [27], rijit düzlem üzerindeki elastik bir tabakanın silindirik iki rijit blok aracılığıyla yüklenmesi durumuna ait temas problemini ele almışlar ve temas yüzeyindeki gerilme yayılışını incelemişlerdir.

1.4.1.3. Temas Problemleri İle İlgili Yapılmış Diğer Çalışmalar

Temas problemlerinde elastik tabakaların rijit mesnetlere ve iki elastik çeyrek düzleme oturduğu çalışmalar da mevcuttur.

Erdoğan ve Ratwani [28], iki elastik çeyrek düzlemle mesnetlenmiş elastik bir tabakanın sürtünmesiz temas problemini incelemişlerdir. Yine aynı problem Aksoğan, Akavcı ve Becker [29] tarafından ele alınarak, üç değişik yöntemle elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Eğri yüzeyli rijit bir mesnete oturan elastik bir tabakanın sürtünmesiz temas problemi Geçit ve Gökpınar [30] tarafından çözülmüştür. Çalışmada, değişik blok profilleri için temas yüzeyindeki gerilme yayılışı ve temas alanı (uzunluğu) ile simetri eksenini boyunca normal gerilmeler hesaplanmıştır. Buna benzer bir başka çalışma da Geçit ve Yapıcı [31] tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada araştırmacılar, rijit dikdörtgen bloklar üzerine oturan elastik tabakanın sürekli ve süreksiz temas durumlarını incelemişlerdir.

Yukarıda bahsedilen çalışmalardan başka, temas problemleri ile ilgili yapılan diğer çalışmalar;

Düzlem elastisitede yapışık olmayan bazı temas problemleri [32], Farklı elastik özelliklere ve farklı genişliklere sahip tabakalar(şeritler) arasındaki düzlem temas problemi [33], İki elastik tabaka ile sıkıştırılan bir rijit silindirin tabakalarla olan teması [34], Tabakalı ortamlarda bazı punch problemlerinin elastik analizleri [35], Sonlu eleman yöntemi ve matematik programlama tekniği yardımıyla elastik cisimlerin sürtünmesiz teması [36], Simetrik iki silindir arasına yerleştirilen ince bir tabaka ile silindirler arasındaki temas problemi[37], Elastik temas problemlerinde sivri noktadaki (köşe noktadaki) singularitelerin (tekilliklerin) incelenmesi [38], Yarı sonsuz bir tabaka ile sonlu genişliğe

sahip bir tabaka arasındaki temas problemi [39], Winkler temeli üzerine oturan elastik bir tabakanın tekil yük, yaylı yük ve rijit bloklar ile simetrik olarak yüklenmesi durumlarına ait temas problemleri [40], Yine Winkler temeli ile mesnetlenmiş elastik bir tabakanın konik, parabolik, ve eliptik rijit bloklar aracılığıyla yüklenmesi durumlarına ait temas problemleri [41], Sürtünmeli rijit punch problemi [42], Çok tabakalı elastik bir yarım düzlem üzerine oturan silindirik rijit bir bloğun temas problemi [43], Çok sayıda izotropik ve ortotropik tabakadan oluşan tabakalı yarım düzlemlerin sürtünmesiz temas problemleri [44,45], Rijit bir tabaka ile tekrarlanan Rayleigh dalgası arasındaki sürtünmesiz düz temas (smooth contact) problemi [46] ve Yine rijit bir tabaka ile yüzey dalgası arasındaki temas problemi [47] olarak özetlenebilir.

1.5. Çatlak Problemlerinin Tarihsel Gelişimi

Çatlakla ilgili önceleri yapılmış çalışmalar daha çok bir çatlak ihtiva eden yapı elemanının taşıyabilecek olduğu en büyük yükü bulmak, dolayısıyla da çatlağın hangi yükleme şartlarında büyümeye başlayacağını belirlemek yönünde olmuştur. Bu amaçla çeşitli teoriler ortaya atılmış ve bunların tartışmaları yapılmıştır. Bu konuda en önemli adım Griffith [48,49] tarafından atılmıştır. Griffith'e göre malzeme içindeki mevcut kusurlar mukavemet kaybında önemli rol oynamaktadır. Ancak Griffith'in bu çalışması İkinci Dünya Savaşı sonrasına kadar ihmal edilmiştir. İkinci Dünya Savaşı sırasında kırılma ile ilgili çok pahalı kayıplar olduğu için savaş sonrası kırılma konusunda araştırmalar yoğunlaştırılmış ve mevcut teorilerin yeterli olmadığı görülmüştür [50]. Klasik Elastisite teorisi ile yapılan çözümlerde çatlak uçlarında elde edilen sonsuz gerilmelere itiraz edilmiş ve Barenblatt [51], uçlardaki kohezyon bölgesinin hesaba katılmasını ve singülaritelerin kaldırılmasını önermiştir. Başka bir çalışmada, kinetik enerjinin hesaba katılması gerektiği Mott [52] tarafından ileri sürülmüştür. J integrali adı verilen bir integralin çatlak civarında hesaplanması gerektiği Rice [53] tarafından teklif edilmiş ve daha sonraları Sih [54], çatlağın ilerlemeye başlamasının ancak şekildeğiştirme enerjisinin belirli bir kritik değere ulaşmasıyla mümkün olabileceği görüşünü ileri sürmüştür. Sih, o zamana kadar yapılan çalışmalarda ileri sürülen iddiaların

yalnız Mode 1 (açılma) problemlerine uygulanabildiğini oysa kendi ortaya koyduğu teorisinin her üç Mode için de kullanılabileceğini savunmuştur. Diğer taraftan Orowan [55] ve Orwin [56–58], yapı malzemelerinin kırılma problemleri için yöntemler geliştirmişler ve geliştirmiş oldukları bu yöntemlerin uygulanabilirliğini başarılı bir şekilde ortaya koymuşlardır .

Düzlem elastisite teorisinde çatlak problemlerinin formülasyonu ve çözümü için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Bunlar arasında analitik fonksiyonlar teorisi, integral denklemler, sonlu elemanlar, sınır elemanları, asimptotik metotlar ve transform metotları sayılabilir. Muskhelishvili [59]' nin iki boyutlu denklemlerde kompleks formda yapmış olduğu çalışmalar, çatlak problemlerinin analitik çözümüne önemli derecede katkılar sağlamıştır. Ancak bu sayede geometrik ve yükleme şartlarından ileri gelen singulariteleri görmek ve analiz etmek mümkün olmuştur [60].

1.5.1. Çatlak Problemleri İle İlgili Yapılmış Çalışmalar

1950' li yıllardan sonra bilgisayar ve sayısal hesaplama alanlarında büyük gelişmeler olmuş ve bu sayede sonuçlar daha hassas ve daha hızlı olarak elde edilmiştir. Bu gelişmelere bağlı olarak tabaka problemleri pek çok problemin çözümüne esas teşkil etmesi bakımından bir anahtar problem olarak kabul edilmiş ve çeşitli şekillerde çözülmüştür. Bogy [61], Erdoğan ve Bakioğlu [62], farklı malzemelerden yapılmış tabakaları yan yana getirerek elde ettikleri kompozit sistemlerde çatlak problemlerini incelemişlerdir.

Krenk [63,64], simetri eksenlerine göre içinde eğik bir çatlağı olan elastik tabaka (şerit) problemini ele almıştır. Söz konusu problem bir singüler integral denkleme indirgenmiş ve bu integral denklem sayısal olarak çözümlenerek çatlak uçlarındaki gerilme şiddet faktörleri her üç Mode için de hesaplanmıştır. Elastik tabakada yalnız düşey bir çatlak bulunması halinde, Mode 3 (yırılma)' e ait gerilme şiddet faktörleri hesaplanmış ve bu sonuçlar daha önce yapılmış çalışmalarla karşılaştırılmıştır. Karşılaştırılan sonuçlardaki rölatif hatanın daima 0.001' in altında olduğu tespit edilmiştir.

Ratwani ve Gupta [65], bileşik tabakalarda paralel çatlakların birbirine etkilerini incelemişlerdir. Problemden ilk olarak çatlaksız tabakadaki normal ve kayma gerilmeleri hesaplanmıştır. Daha sonra çatlaksız çözümden elde edilen gerilmelere zıt yönde gerilmeler

çatlak yüzeyine yerleştirilerek malzeme özelliklerinin çatlaklar üzerindeki etkisi araştırılmış ve bu etkilerin dikkate alınması gerektiği sonucuna varılmıştır.

Gupta ve Erdoğan [66], sonsuz bir elastik tabakada serbest kenarlarına dik simetrik iki çatlak problemini incelemiştir. Problem değişik çatlak geometrileri için çözülmüş, iç ve kenar çatlak durumlarında gerilme şiddet faktörleri ve çatlak yüzey yerdeğiştirmeleri hesaplanmıştır. Ayrıca kenar çatlak haline ait sonuçlar yarım düzlem problemindeki sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Erdöl, Erdoğan [67] ve Erdöl [68], basit mesnetlere oturan ve kenarlarına dik simetrik bir çatlağı olan elastik tabakadaki çatlak problemini incelemiştir. Problem iki halin süperpozisyonu olarak ele alınarak iç ve kenar çatlak hallerine ait gerilme şiddet faktörleri hesaplanmıştır. Çok küçük çatlak halinde elde edilen sonucun yarım düzlem için bulunan sonuçla aynı olduğı gösterilmiştir.

Civelek [50], simetrik tekil kuvvetlerle yüklü ve kenarlarına dik bir çatlağı bulunan sonsuz elastik bir tabakada çatlak uçlarında gerilme dağılışını karakterize eden gerilme şiddet faktörünü değişik geometri ve yükleme durumları için hesaplamıştır. Tekil kuvvetler elastik tabakanın içine uygulandığı takdirde gerilme şiddet faktörünün Poisson oranına bağılı olarak değıştiğı ve dolayısıyla düzlem gerilme ve düzlem şekildeğiştirme hallerinde değışik değerler aldığı gösterilmiştir. Tekil kuvvetlerin yüzeye kaydırılması halinde ise çözümün Poisson oranından bağımsız olacağı belirtilmiştir. Yine bu çalışmada çatlağın bir ucunun kenara ulaşması hali için bir nümerik metot önerilmiştir.

Erdöl [69], eksenel simetriye sahip içi boş sonsuz uzun dairesel bir silindirde, halka şeklinde bir çatlak bulunması problemini ele almıştır. Çalışmada, halka şeklindeki çatlağın içte olması durumuyla iç ve dış kenar yüzeyine açılan iç kenar çatlak ve dış kenar çatlak durumları incelenmiştir. Üniform çekme halinde çatlak boyu büyüdükçe gerilme şiddet faktörünün de arttığı belirtilmiştir. Diğer yandan termal gerilmeler altında, içte bulunan kenar çatlak boyu büyüdükçe gerilme şiddet faktörünün sıfıra yaklaştığı tespit edilmiştir [70].

Geçit [71], rijit mesnete bağılı elastik bir tabakadaki çatlak problemini ele almış ve problem iki halin süperpozisyonu olarak düşünölmüştür. Kenar ve iç çatlak hallerine ait gerilme şiddet faktörü ve çatlak yüzey yerdeğiştirmeleri çeşitli boyutsuz büyüklöler için hesaplanmıştır.

Nied ve Erdoğan [72], rijit ya da elastik bir blok arcılığıyla sonsuz elastik bir tabakadaki çatlak problemini incelemişlerdir. Green fonksiyonlarından faydalanılarak problem bir singüler integral denkleme indirgenmiş ve bu denklem sayısal olarak çözülerek mesnetlerdeki sürtünmenin gerilme şiddet faktörüne etkisi tartışılmıştır.

Çatlak problemleri ile ilgili diğer çalışmalardan bazıları; İki boyutlu bir çatlak problemi [73], Bir elastik yarım düzlemde kenar çatlak ucundaki gerilme şiddet faktörü [74], Elastik özellikleri farklı yarım düzlemlere bağlı bir elastik tabakadaki penny (halka) şekilli çatlak problemi [75], Bir elastik yarım düzlemin yüzeyine dik yarısız çatlak problemi [76], Çok tabakalı kompozitlerde iç çatlakların gerilme analizi [77], Tabakalı kompozitlerde iç çatlak [78], İki yarım düzlem arasına yerleştirilmiş kırılmış bir kompozitteki çatlak problemi [79], İki yapışık elastik yarım düzlemin ara yüzeylerindeki çatlak problemi [80], Elastik bir kamadaki çatlak-temas problemleri [81], Residual (artık) gerilmelere maruz bir tabakada çatlak-temas ve serbest yüzey-uç problemi [82], Bir elastik tabakadaki kenar çatlak ve viskoz sönüm problemi [83], Sonsuz elastik bir tabakadaki çatlak etkileşimi [84], Farklı elastik özelliklere sahip malzemelerdeki çatlakların davranışlarını belirlemek için bir sonlu eleman modelinin geliştirilmesi [85], İzotropik elastik bir cisimde penny (halka) şekilli bir çatlak problemi [86], İki yarım düzlemin ara yüzeyine yada bir tabakaya yakın çatlak problemleri [87], Çatlak içeren plakların elastik davranışlarının sonlu eleman yöntemi ile belirlenmesi [88], Normal yük altında dış dairesel çatlak problemi [89], Homojen olmayan bir ara yüzey aracılığıyla bağlanmış elastik özellikleri farklı iki homojen malzemedeki penny (halka) şekilli bir çatlak problemi [90], Tabakalı bir ortamda sabit hızdaki çatlak yayılma problemi [91] ve Kenar çatlağı olan bir yarım düzlem üzerinde bir ucu düz (smooth) diğer ucu keskin kenarlı rijit punch problemi [92] şeklinde özetlenebilir.

1.6. Çalışmanın Kapsamı

Bu çalışmada, basit mesnetlere oturan, elastik özellikleri ve yükseklikleri farklı iki tabakadan oluşan ve üstten rijit bir blok aracılığıyla yüklenen bir bileşik tabaka problemi

Elastisite teorisine göre incelenmektedir. Bileşik tabakayı oluşturan tabakalardan alttaki tabaka bileşik tabakanın kenarlarına dik doğrultuda bir çatlığa sahiptir. Bileşik tabakada bütün yüzeyler sürtünmesiz olup, kütle kuvvetleri sadece ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma noktasının tespitinde göz önünde bulundurulmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümü olup, bu bölümde çatlak ve temas problemleri ile ilgili daha önce yapılmış çalışmalardan bahsedilmektedir. Yine bu bölümde, Elastisite teorisine ait temel denklemler ve integral dönüşüm teknikleri kullanılarak çatlaklı ve çatlaksız hale ait gerilme ve yerdeğiştirmelerin genel ifadeleri verilmektedir.

İkinci bölümde, problemin tanıtımı yapılmakta ve problem bileşik tabakada çatlak bulunması ve bulunmaması halleri için ayrı ayrı çözülmektedir. Bu bölümde, ilk olarak çatlaksız bileşik tabaka ele alınmakta ve bu duruma ait gerilme ve yerdeğiştirme ifadeleri problemin sınır şartlarına uygulanarak problem bir singüler integral denkleme indirgenmektedir. Daha sonra bu integral denklem çeşitli rijit blok profilleri için sayısal olarak çözülmekte ve rijit blok altındaki boyutsuz temas gerilmeleri hesaplanmaktadır. Bu boyutsuz temas gerilmelerinden yararlanılarak simetri eksenine boyunca normal gerilmeler incelenmekte ve iki elastik tabaka arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklığı (noktası) belirlenmektedir. İkinci olarak ise alttaki tabakada düşey bir çatlak olması hali ele alınmakta ve bu halde çatlaklı tabakanın çatlak yüzeyinin çatlaksız çözümden elde edilen gerilmelere zıt yönde aynı şiddet ve aynı doğrultuda yüklenmesi durumunda iç çatlak ve kenar çatlak durumları göz önünde bulundurulmaktadır. Dış yüklemelerin olmadığı bu duruma ait sınır şartları kullanılarak problem yine bir singüler integral denkleme indirgenmekte ve bu denklemin sayısal olarak çözümü sonucunda da iç ve kenar çatlak hallerinde çatlak uçlarındaki gerilme şiddet faktörü ve çatlak yüzey yerdeğiştirmeleri incelenmektedir.

Üçüncü bölüm, ikinci bölümde verilen formülasyonun uygulamasıyla ilgilidir. Tabaka kalınlıkları, mesnet genişliği, rijit bloğun yarıçapı ve temas alanının bileşik tabakanın toplam yüksekliğine oranlarına ve malzeme özelliklerinin oranına değişik sayısal değerler verilerek malzeme özellikleri, tabaka kalınlıkları mesnet genişliği ve temas alanının; temas gerilmeleri, normal gerilmeler, gerilme şiddet faktörü ve çatlak yüzey yerdeğiştirmeleri üzerindeki etkileri belirlenmektedir. Bu bölümde ayrıca yukarıda belirtilen sayısal uygulamalardan elde edilen grafikler ve tablolar verilmekte ve bunlara ait sonuçlar tartışılmaktadır.

Dördüncü bölümde çalışmadan çıkartılan sonuçlar ve öneriler verilmektedir. Bu bölümü kaynaklar ve özgeçmiş izlemektedir.

1.7. Genel Denklemlerin Elde Edilmesi

Bu kısımda, Elastisite teorisinden yararlanılarak gerilme ve yerdeğiştirme bileşenlerinin genel ifadeleri elde edilecektir. Bu amaçla; önce bünye denklemleri ve yerdeğiştirme-şekildeğiştirme bağıntıları kullanılmak suretiyle denge denklemleri, yerdeğiştirmeler cinsinden yazılarak Navier denklemleri elde edilecektir. Yerdeğiştirme bileşenlerinin gerekli türevleri Navier denklemlerinde yerine yazılarak elde edilecek adi diferansiyel denklem takımının çözümü sonucunda da yerdeğiştirme bileşenlerinin genel ifadeleri bulunacaktır. Bu ifadelerin bünye denklemlerinde yerine yazılması ile de gerilme bileşenlerinin genel ifadeleri elde edilecektir.

1.7.1. Üç Boyutlu Halde Elastisite Teorisinin Genel Denklemleri

Üç boyutlu halde F_x, F_y ve F_z hacim (kütle) kuvvetlerini, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ ve τ_{yz} de gerilme bileşenlerini göstermek üzere, denge denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z = 0 \quad (3)$$

Bu denklemleri yerdeğiştirme cinsinden yazabilmek için, şekildeğiştirme bileşenleri ile yerdeğiştirme bileşenleri arasındaki;

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (5)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (6)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (7)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (8)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (9)$$

türev bağıntılarını ve gerilme-şekildeğiştirme (Hooke Kanunları) bağıntılarını kullanmak gerekmektedir. Bu ifadelerdeki u , v ve w sırasıyla x , y ve z doğrultusundaki yerdeğiştirme bileşenlerini, ε_x , ε_y , ε_z , γ_{xy} , γ_{xz} ve γ_{yz} ise yine sırasıyla x , y ve z doğrultusundaki birim uzamaları ve dik koordinatlarda kayma şekildeğiştirme bileşenlerini göstermektedir. Gerilmelerin yerdeğiştirme bileşenlerinin türevleri cinsinden ifadeleri (bünye denklemleri);

$$\sigma_x = \lambda e + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (10)$$

$$\sigma_y = \lambda e + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (11)$$

$$\sigma_z = \lambda e + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \quad (12)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (13)$$

$$\tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (14)$$

$$\tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (15)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadelerde, λ ve μ Lamé sabitlerini göstermekte olup;

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada, e , E ve ν sırasıyla hacim değiştirme oranı, Elastisite modülü ve Poisson oranı olarak bilinmektedir. Ayrıca $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ ve $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ bağıntıları mevcuttur.

(10-15) denklemlerinin (bünye denklemleri) gerekli türevleri alınır ve (1-3) denge denklemlerinde yerine konulursa, Navier denklemleri;

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + F_x = 0 \quad (16)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + F_y = 0 \quad (17)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial z} + \mu \nabla^2 w + F_z = 0 \quad (18)$$

şeklinde elde edilmiş olur. Burada, ∇^2 : Laplace operatörü olup;

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

olduğu bilinmektedir.

1.7.2. Navier Denklemlerinin İki Boyutlu Hale İndirgenmesi

Ele alınan problemin iki boyutlu olması nedeniyle kısım 1.7.1.' de verilmiş olan üç boyutlu hale ait ifadelerin iki boyutlu hale indirgenmesi gerekir. Bunun için z eksenini için yazılmış olan terimlerin sıfır alınması yeterlidir.

Buna göre (16-18) bağıntılarından faydalanılarak düzlem şekilgeçirme halinde Navier denklemleri;

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \nabla^2 u + F_x = 0 \quad (19)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \nabla^2 v + F_y = 0 \quad (20)$$

şeklini alırlar.

Düzlem gerilme halinde ise düzlem şekilgeçirme haline ait ifadelerde,

$$\nu = \frac{\nu}{1 + \nu} \quad \text{ve} \quad E = \frac{E(1 + 2\nu)}{1 + \nu^2}$$

yazmakla, Navier denklemleri;

$$\frac{E}{2(1 - \nu)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \nabla^2 u + F_x = 0 \quad (21)$$

$$\frac{E}{2(1 - \nu)} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \nabla^2 v + F_y = 0 \quad (22)$$

şeklinde ifade edilebilirler.

Eğer kütle kuvvetleri ihmal edilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa Navier denklemleri;

Düzlem şekildeğiştirme halinde :

$$\nabla^2 u + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (23)$$

$$\nabla^2 v + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (24)$$

Düzlem gerilme halinde :

$$\nabla^2 u + \frac{E}{2\mu(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (25)$$

$$\nabla^2 v + \frac{E}{2\mu(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (26)$$

şeklini alırlar. Gerek düzlem şekildeğiştirme ve gerekse düzlem gerilme halleri için elde edilen bu iki diferansiyel denklem sistemi şekil itibariyle birbirine benzediklerinden bir ϖ sabiti yardımıyla bir tek formda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$(1 + \varpi) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varpi \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0 \quad (27)$$

$$(1 + \varpi) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varpi \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \quad (28)$$

Bu ifadeler kullanılırken, düzlem şekildeğiştirme halinde: $\varpi = \frac{\lambda + \mu}{\mu}$ ve düzlem

gerilme halinde ise: $\varpi = \frac{E}{2\mu(1-\nu)}$ alınması gerekmektedir. Bu nedenle ileride yapılacak

olan çözümler belirli bir sabitin değerini değiştirmekle her iki hal için de geçerli olacaktır.

1.7.3. Gerilme ve Yerdeğiştirmelere Ait Genel İfadelerin Elde Edilmesi

Göz önünde bulundurulanan problemin çözülebilmesi için gerekli olan gerilme ve yerdeğiştirmelerin genel ifadelerinin bulunması gerekir. Bunun için izlenecek yol; yukarıdaki (27) ve (28) diferansiyel denklemlerinin, sınır şartlarından bazılarını ve problemin simetri şartlarını sağlayan çözümlerini iki ayrı hal için belirlemek ve bu çözümlerin süperpozisyonunu yapıp en genel halde gerilme ve yerdeğiştirme ifadelerini bulmak olacaktır. Bu iki hale ait formülasyon aşağıdaki gibi yapılabilir.

1.7.3.1. Çatlaksız Tabakada Gerilme ve Yerdeğiştirme İfadeleri

Çatlaksız tabakadaki gerilme ve yerdeğiştirme ifadeleri; tabakanın kütle kuvvetinin ihmal edilmesi halindeki çözümleri ve yalnız kütle kuvvetinin etkisinde bulunan tabakanın çözümleri olmak üzere iki halin süperpozisyonu olarak incelenebilir.

1.7.3.1.1. Tabakanın Kütle Kuvvetinin İhmal Edilmesi Halindeki Çözümü

Problemin y eksenine göre simetrik olması nedeniyle yerdeğiştirme bileşenleri;

$$u^*(x, y) = -u^*(-x, y) \quad (29)$$

$$v^*(x, y) = v^*(-x, y) \quad (30)$$

bağıntılarını sağlarlar. Bu ifadelerdeki "*" üst indisi kütle kuvvetlerinin bulunmadığı çatlaksız hali temsil etmektedir. $u^*(x, y)$ ve $v^*(x, y)$ yerdeğiştirme bileşenleri Fourier sinüs ve Fourier kosinüs dönüşümleri şeklinde aşağıdaki gibi yazılabilirler.

$$u^*(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \phi(\alpha, y) \sin(\alpha x) d\alpha \quad (31)$$

$$v^*(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \psi(\alpha, y) \cos(\alpha x) d\alpha \quad (32)$$

Bunların ters Fourier dönüşümleri ise ;

$$\phi(\alpha, y) = \int_0^{\infty} u^*(x, y) \sin(\alpha x) dx \quad (33)$$

$$\psi(\alpha, y) = \int_0^{\infty} v^*(x, y) \cos(\alpha x) dx \quad (34)$$

olarak ifade edilebilir. Burada, α dönüşüm değişkeni olup; $\phi(\alpha, y)$ ve $\psi(\alpha, y)$ fonksiyonları $u^*(x, y)$ ve $v^*(x, y)$ yerdeğiştirme ifadelerinin ters Fourier dönüşüm fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonların belirlenebilmesi için (27) ifadesini $\sin(\alpha x) dx$ ve (28) ifadesini de $\cos(\alpha x) dx$ ile çarpıp $(0, +\infty)$ aralığında integre etmekle,

$$\int_0^{\infty} \left[(1+\varpi) \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} + \varpi \frac{\partial^2 v^*}{\partial x \partial y} \right] \sin(\alpha x) dx = 0 \quad (35)$$

$$\int_0^{\infty} \left[(1+\varpi) \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} + \varpi \frac{\partial^2 u^*}{\partial x \partial y} \right] \cos(\alpha x) dx = 0 \quad (36)$$

ifadeleri elde edilmiş olur. Bu ifadelerde, $u^* = u^*(x, y)$ ve $v^* = v^*(x, y)$ olduğu bilinmektedir. $u^*(x, y)$ ve $v^*(x, y)$ yerdeğiştirme bileşenlerinin (35) ve (36) denklemlerinde kullanılacak gerekli türevleri[93];

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u^*(x, y)}{\partial x^2} \sin(\alpha x) dx = -\alpha^2 \phi(\alpha, y) \quad (37)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u^*(x, y)}{\partial y^2} \sin(\alpha x) dx = \frac{d^2}{dy^2} [\phi(\alpha, y)] \quad (38)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 v^*(x, y)}{\partial x \partial y} \sin(\alpha x) dx = -\alpha \frac{d}{dy} [\psi(\alpha, y)] \quad (39)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 v^*(x, y)}{\partial x^2} \cos(\alpha x) dx = -\alpha^2 \psi(\alpha, y) \quad (40)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 v^*(x, y)}{\partial y^2} \cos(\alpha x) dx = \frac{d^2}{dy^2} [\psi(\alpha, y)] \quad (41)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u^*(x, y)}{\partial x \partial y} \cos(\alpha x) dx = \alpha \frac{d}{dy} [\phi(\alpha, y)] \quad (42)$$

olarak yazılabilir. Bu ifadeler elde edilirken kısmi integrasyon uygulanmış ve

$$u^*(0, y) = u^*(\infty, y) = v^*(\infty, y) = \left. \frac{\partial u^*(x, y)}{\partial x} \right|_{x=\infty} = \left. \frac{\partial v^*(x, y)}{\partial x} \right|_{x=\infty} = \left. \frac{\partial v^*(x, y)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad \text{sınır}$$

şartları dikkate alınmıştır.

Yukarıdaki türev ifadeleri (35) ve (36) denklemlerinde yerlerine konulur ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$-(1+\varpi)\alpha^2 \phi(\alpha, y) + \frac{d^2}{dy^2} [\phi(\alpha, y)] - \varpi \alpha \frac{d}{dy} [\psi(\alpha, y)] = 0 \quad (43)$$

$$(1+\varpi) \frac{d^2}{dy^2} [\psi(\alpha, y)] - \alpha^2 \psi(\alpha, y) + \varpi \alpha \frac{d}{dy} [\phi(\alpha, y)] = 0 \quad (44)$$

adi diferansiyel denklem takımı elde edilir. Bu diferansiyel denklem takımını daha basit hale getirmek için (43) ifadesi y' ye göre iki defa, (44) ifadesi de y' ye göre bir defa türetilirse ve gerekli düzenlemeler yapılırsa $\phi(\alpha, y)$ ' ye göre dördüncü mertebeden sabit katsayılı, lineer, homojen bir diferansiyel denklem elde edilir.

$$\frac{d^4}{dy^4} [\phi(\alpha, y)] - 2\alpha^2 \frac{d^2}{dy^2} [\phi(\alpha, y)] + \alpha^4 \phi(\alpha, y) = 0 \quad (45)$$

Bu diferansiyel denklemin çözümü $\phi(\alpha, y) = e^{my}$ şeklinde aranır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$m^4 - 2\alpha^2 m^2 + \alpha^4 = 0 \quad (46)$$

karakteristik denklemi elde edilir. Bu karakteristik denklemin kökleri; $m_1 = m_3 = \alpha$, $m_2 = m_4 = -\alpha$ olarak bulunur ve diferansiyel denklemin çözümü,

$$\phi(\alpha, y) = (A_1 + A_2 y) e^{-\alpha y} + (A_3 + A_4 y) e^{\alpha y} \quad (47)$$

olarak elde edilir. Bu ifadenin gerekli türevleri alınıp (43) denkleminde yerine yazılması ve gerekli işlemlerin yapılması sonucunda da $\psi(\alpha, y)$ bilinmeyen fonksiyonu,

$$\psi(\alpha, y) = \left[A_1 + \left(\frac{\kappa}{\alpha} + y \right) A_2 \right] e^{-\alpha y} + \left[-A_3 + \left(\frac{\kappa}{\alpha} - y \right) A_4 \right] e^{\alpha y} \quad (48)$$

olarak elde edilir. Bu ifadelerdeki A_i ($i = 1, \dots, 4$) katsayıları problemin sınır şartlarından belirlenmesi gereken bilinmeyenlerdir. κ ise bir malzeme sabiti olup;

Düzlem şekil değiştirme halinde : $\kappa = 3 - 4\nu$,

Düzlem gerilme halinde : $\kappa = (3 - \nu) / (1 + \nu)$

olduğu bilinmektedir. κ ifadesinde geçen ν ise Poisson oranını göstermektedir.

Yukarıdaki ifadelerle bulunan $\phi(\alpha, y)$ ve $\psi(\alpha, y)$ fonksiyonlarının (31) ve (32) eşitliklerinde yerlerine yazılması ile $u^*(x, y)$ ve $v^*(x, y)$ yer değiştirme bileşenleri;

$$u^*(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[(A_1 + A_2 y) e^{-\alpha y} + (A_3 + A_4 y) e^{\alpha y} \right] \sin(\alpha x) d\alpha \quad (49)$$

$$v^*(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[A_1 + \left(\frac{\kappa}{\alpha} + y \right) A_2 \right] e^{-\alpha y} + \left[-A_3 + \left(\frac{\kappa}{\alpha} - y \right) A_4 \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (50)$$

olarak elde edilirler. $\sigma_x^*(x,y)$, $\sigma_y^*(x,y)$ ve $\tau_{xy}^*(x,y)$ kartezyen gerilme bileşenlerini göstermek üzere gerilme alanı, $u^*(x,y)$ ve $v^*(x,y)$ yerdeğiştirmelerine bağlı olarak

$$\sigma_x^*(x,y) = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u^*(x,y)}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v^*(x,y)}{\partial y} \quad (51)$$

$$\sigma_y^*(x,y) = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v^*(x,y)}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u^*(x,y)}{\partial x} \quad (52)$$

$$\tau_{xy}^*(x,y) = \mu \left(\frac{\partial u^*(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v^*(x,y)}{\partial x} \right) \quad (53)$$

yazılırlar. (49) ve (50) ifadelerinde gerekli türevler alınır (51-53) ifadelerinde yerlerine konular ve gerekli düzenlemeler yapılırsa, gerilme bileşenleri;

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu} \sigma_x^*(x,y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \left[\alpha(A_1 + A_2 y) - \frac{3-\kappa}{2} A_2 \right] e^{-\alpha y} \right. \\ &\quad \left. + \left[\alpha(A_3 + A_4 y) + \frac{3-\kappa}{2} A_4 \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu} \sigma_y^*(x,y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ - \left[\alpha(A_1 + A_2 y) + \frac{1+\kappa}{2} A_2 \right] e^{-\alpha y} \right. \\ &\quad \left. + \left[\alpha(A_3 + A_4 y) - \frac{1+\kappa}{2} A_4 \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu} \tau_{xy}^*(x,y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ - \left[\alpha(A_1 + A_2 y) + \frac{\kappa-1}{2} A_2 \right] e^{-\alpha y} \right. \\ &\quad \left. + \left[\alpha(A_3 + A_4 y) - \frac{\kappa-1}{2} A_4 \right] e^{\alpha y} \right\} \sin(\alpha x) d\alpha \end{aligned} \quad (56)$$

olarak bulunurlar.

1.7.3.1.2. Yalnız Kütle Kuvvetleri Etkisindeki Tabakanın Çözümü

Kütle kuvvetleri $F_x = 0$ ve $F_y = \rho g$ olması halinde gerilme ve yerdeğiştirme ifadeleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

Yerdeğiştirme fonksiyonlarının seçilmesi ve gerekli türevlerin alınarak Navier denklemlerinde yerlerine yazılması ile,

$$u^k(x, y) = u^k(x) \quad (57)$$

$$v^k(x, y) = v^k(y) \quad (58)$$

$$(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u^k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^k}{\partial x \partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u^k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^k}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (59)$$

$$(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u^k}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v^k}{\partial y^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 v^k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^k}{\partial y^2} \right) = \rho g \quad (60)$$

olur. Burada, ρ ve g sırasıyla tabakanın yoğunluğunu ve yerçekimi ivmesini göstermektedir. " k " üst indisi ise kütle kuvvetini temsil etmektedir. (59) ve (60) ifadelerinde $u^k = u^k(x, y)$ ve $v^k = v^k(x, y)$ olduğu unutulmamalıdır. (59) denkleminde,

$$\frac{d^2 u^k(x)}{dx^2} = 0 \quad (61)$$

$$\frac{du^k(x)}{dx} = a \quad (62)$$

$$u^k(x) = ax + b \quad (63)$$

ve (60) denkleminde de,

$$\frac{d^2 v^k(y)}{dy^2} = \frac{\rho g}{\lambda + 2\mu} \quad (64)$$

$$\frac{dv^k(y)}{dy} = \frac{\rho g}{(\lambda + 2\mu)} y + c \quad (65)$$

$$v^k(y) = \frac{\rho g}{2(\lambda + 2\mu)} y^2 + cy + d \quad (66)$$

olarak bulunurlar. Bu ifadelerde geçen a , b , c ve d integrasyon sabitleridir.

Kütle kuvveti ρg ve kalınlığı h olan tek tabaka için x eksenine tabakanın altından geçmek üzere;

$$u^k(0) = 0 \quad (67)$$

$$v^k(0) = 0 \quad (68)$$

$$\sigma_y^k(x, y) = \rho g(y - h) \quad (69)$$

$$\int_0^h \sigma_x^k(x, y) dy = 0 \quad (70)$$

sınır şartları yazılabilir. Yazılan bu sınır şartlarının yukarıdaki yerdeğiştirme ifadelerine uygulanması ile,

$$a = \frac{3 - \kappa}{8\mu} \frac{\rho gh}{2}, \quad b = 0, \quad c = -\frac{\rho gh}{2\mu} \left[\frac{1 + \kappa}{8} + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right] \quad \text{ve} \quad d = 0$$

olarak bulunurlar. Hesaplanan bu integrasyon sabitlerinin (63) ve (66) ifadelerinde yerlerine yazılması sonucunda yerdeğiştirme ifadeleri;

$$u^k(x, y) = \frac{3 - \kappa}{8\mu} \frac{\rho gh}{2} x, \quad (0 \leq x < \infty) \quad (71)$$

$$v^k(x, y) = \frac{\rho g}{2\mu} y \left[\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} (y - h) - \frac{1 + \kappa}{8} h \right], \quad (0 \leq y \leq h) \quad (72)$$

olarak hesaplanırlar. Gerilme-şekildeğiştirme arasındaki bağıntılardan (Hooke kanunları) yararlanılarak gerilme bileşenleri de,

$$\sigma_x^k(x, y) = \frac{3 - \kappa}{\kappa + 1} \rho g \left(y - \frac{h}{2} \right) \quad (73)$$

$$\sigma_y^k(x, y) = \rho g (y - h) \quad (74)$$

$$\tau_{xy}^k(x, y) = 0 \quad (75)$$

olarak elde edilirler.

Çatlaksız tabakaya ait gerilme ve yerdeğiştirme ifadeleri en genel halde, kütle kuvvetsiz ifadelerle yalnız kütle kuvvetinden doğan ifadelerin toplamı olacağından;

$$u^1(x, y) = u^*(x, y) + u^k(x, y) \quad (76)$$

$$v^1(x, y) = v^*(x, y) + v^k(x, y) \quad (77)$$

$$\sigma_x^1(x, y) = \sigma_x^*(x, y) + \sigma_x^k(x, y) \quad (78)$$

$$\sigma_y^1(x, y) = \sigma_y^*(x, y) + \sigma_y^k(x, y) \quad (79)$$

$$\tau_{xy}^1(x, y) = \tau_{xy}^*(x, y) + \tau_{xy}^k(x, y) \quad (80)$$

olarak yazılabilirler. Bu ifadeler daha açık bir şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$u^1(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[(A_1 + A_2 y) e^{-\alpha y} + (A_3 + A_4 y) e^{\alpha y} \right] \sin(\alpha x) d\alpha + \frac{3 - \kappa}{8\mu} \frac{\rho g h}{2} x \quad (81)$$

$$\begin{aligned}
v^1(x,y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[A_1 + \left(\frac{\kappa}{\alpha} + y \right) A_2 \right] e^{-\alpha y} \right. \\
&\quad \left. + \left[-A_3 + \left(\frac{\kappa}{\alpha} - y \right) A_4 \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha \\
&\quad + \frac{\rho g}{2\mu} y \left[\frac{\kappa-1}{\kappa+1} (y-h) - \frac{1+\kappa}{8} h \right]
\end{aligned} \tag{82}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\mu} \sigma_x^1(x,y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[\alpha (A_1 + A_2 y) - \frac{3-\kappa}{2} A_2 \right] e^{-\alpha y} \right. \\
&\quad \left. + \left[\alpha (A_3 + A_4 y) + \frac{3-\kappa}{2} A_4 \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha \\
&\quad + \frac{1}{2\mu} \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \rho g \left(y - \frac{h}{2} \right)
\end{aligned} \tag{83}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\mu} \sigma_y^1(x,y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ - \left[\alpha (A_1 + A_2 y) + \frac{1+\kappa}{2} A_2 \right] e^{-\alpha y} \right. \\
&\quad \left. + \left[\alpha (A_3 + A_4 y) - \frac{1+\kappa}{2} A_4 \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha + \frac{1}{2\mu} \rho g (y-h)
\end{aligned} \tag{84}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\mu} \tau_{xy}^1(x,y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ - \left[\alpha (A_1 + A_2 y) + \frac{\kappa-1}{2} A_2 \right] e^{-\alpha y} \right. \\
&\quad \left. + \left[\alpha (A_3 + A_4 y) - \frac{\kappa-1}{2} A_4 \right] e^{\alpha y} \right\} \sin(\alpha x) d\alpha
\end{aligned} \tag{85}$$

Yukarıdaki ifadelerde geçen "1" üst indisi, çatlaksız tabakada kütle kuvvetinin etkisini de içeren çözümü temsil etmektedir.

1.7.3.2. y Ekseninde Simetrik İki Çatlağı Bulunan Sonsuz Bir Düzlemin Çözümü

Bu durumda y ekseninde x eksenine göre simetrik iki çatlağı bulunan sonsuz bir düzlem ele alınacaktır. Bu halde yerdeğiştirme bileşenleri,

$$u^2(x, y) = u^2(x, -y), \quad (86)$$

$$v^2(x, y) = -v^2(x, -y), \quad (87)$$

bağıntılarını sağlarlar. Yukarıdaki ifadelerdeki "2" üst indisi tabakada yalnız çatlak bulunması halini temsil etmektedir. $u^2(x, y)$ ve $v^2(x, y)$ yerdeğiştirme bileşenlerinin Fourier sinüs ve Fourier kosinüs dönüşümleri,

$$u^2(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} S(x, \xi) \cos(\xi y) d\xi \quad (88)$$

$$v^2(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} T(x, \xi) \sin(\xi y) d\xi \quad (89)$$

şeklinde yazılabilir. Bunların ters Fourier dönüşümleri ise;

$$S(x, \xi) = \int_0^{\infty} u^2(x, y) \cos(\xi y) dy \quad (90)$$

$$T(x, \xi) = \int_0^{\infty} v^2(x, y) \sin(\xi y) dy \quad (91)$$

olarak ifade edilebilir. Bu ifadelerde, ξ dönüşüm değişkeni olup; $S(x, \xi)$ ve $T(x, \xi)$ fonksiyonları $u^2(x, y)$ ve $v^2(x, y)$ yerdeğiştirme ifadelerinin ters Fourier dönüşüm fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonların belirlenebilmesi için (27) ifadesini $\cos(\xi y) dy$, (28) ifadesini de $\sin(\xi y) dy$ ile çarpıp $(0, +\infty)$ aralığında integre etmekle,

$$\int_0^{\infty} \left[(1+\omega) \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^2}{\partial y^2} + \omega \frac{\partial^2 v^2}{\partial x \partial y} \right] \cos(\xi y) dy = 0 \quad (92)$$

$$\int_0^{\infty} \left[(1+\omega) \frac{\partial^2 v^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v^2}{\partial x^2} + \omega \frac{\partial^2 u^2}{\partial x \partial y} \right] \sin(\xi y) dy = 0 \quad (93)$$

eşitlikleri elde edilmiş olur. Bu ifadelerde $u^2 = u^2(x, y)$ ve $v^2 = v^2(x, y)$ olduğu bilinmektedir. $u^2(x, y)$ ve $v^2(x, y)$ yerdeğiştirme bileşenlerinin (92) ve (93) ifadelerinde kullanılacak gerekli türevleri[93];

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u^2(x, y)}{\partial x^2} \cos(\xi y) dy = \frac{d^2}{dx^2} [S(x, \xi)] \quad (94)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u^2(x, y)}{\partial y^2} \cos(\xi y) dy = -\xi^2 S(x, \xi) \quad (95)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 v^2(x, y)}{\partial x \partial y} \cos(\xi y) dy = \xi \frac{d}{dx} [T(x, \xi)] \quad (96)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 v^2(x, y)}{\partial x^2} \sin(\xi y) dy = \frac{d^2}{dx^2} [T(x, \xi)] \quad (97)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 v^2(x, y)}{\partial y^2} \sin(\xi y) dy = -\xi^2 T(x, \xi) \quad (98)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u^2(x, y)}{\partial x \partial y} \sin(\xi y) dy = -\xi \frac{d}{dx} [S(x, \xi)] \quad (99)$$

olarak yazılabilir. Bu türev ifadeleri (92) ve (93) denklemlerinde yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa aşağıdaki adi diferansiyel denklem takımı bulunur.

$$(1 + \varpi) \frac{d^2}{dx^2} [S(x, \xi)] - \xi^2 S(x, \xi) + \varpi \xi \frac{d}{dx} [T(x, \xi)] = 0 \quad (100)$$

$$-(1 + \varpi) \xi^2 T(x, \xi) + \frac{d^2}{dx^2} [T(x, \xi)] - \varpi \xi \frac{d}{dx} [S(x, \xi)] = 0 \quad (101)$$

Bu diferansiyel denklemleri daha basit hale getirmek için (100) ifadesi x' e göre bir defa, (101) ifadesi de x' e göre iki defa türetilirse ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{d^4}{dx^4}[T(x, \xi)] - 2\xi^2 \frac{d^2}{dx^2}[T(x, \xi)] + \xi^4 T(x, \xi) = 0 \quad (102)$$

$T(x, \xi)$ ' ye göre dördüncü mertebeden sabit katsayılı, lineer homojen bir diferansiyel denklem elde edilir.

Bu diferansiyel denklemin çözümü, daha önce yapıldığı gibi $T(x, \xi) = e^{nx}$ şeklinde aranır ve gerekli işlemler yapılırsa;

$$n^4 - 2\xi^2 n^2 + \xi^4 = 0 \quad (103)$$

karakteristik denklemi elde edilir. Bu karakteristik denklemin kökleri; $n_1 = n_3 = \xi$ ve $n_2 = n_4 = -\xi$ olarak bulunur. Diferansiyel denklemin çözümü ise,

$$T(x, \xi) = (B_1 + B_2 x) e^{-\xi x} + (B_3 + B_4 x) e^{\xi x} \quad (104)$$

şeklinde bulunabilir.

Gerilme ve yerdeğiştirmelerin sonsuzda sıfır olacakları düşünülürse, $B_3 = B_4 = 0$ olur. Bu durumda,

$$T(x, \xi) = (B_1 + B_2 x) e^{-\xi x} \quad (105)$$

olur. $T(x, \xi)$ ' nin gerekli türevleri (101) ifadesinde yerlerine yazılır ve aynı ifade x' e göre integre edilirse $S(x, \xi)$ fonksiyonu da,

$$S(x, \xi) = \left[B_1 + \frac{(2 + \varpi)}{\varpi \xi} B_2 + x B_2 \right] e^{-\xi x} \quad (106)$$

şeklinde elde edilmiş olur.

Bulunan bu çözümler simetri nedeniyle $x=0$ ve $y=0$ eksenleri üzerinde kayma gerilmesi bulunmaması şartını sağlamalıdır. Kayma gerilmesinin (13) bağıntısı ile verildiği düşünülürse, $\tau_{xy}^2(x, 0) = 0$ şartının sağlandığı yerdeğiştirme ifadesinden hemen görülebilir. O

halde $\tau_{xy}^2(0, y) = 0$ şartının sağlatılması gerekir. Yukarıda bulunmuş olan $T(x, \xi)$ ve $S(x, \xi)$ ifadeleri yerdeğiştirme ifadelerinde yerine konur ve y ekseninde kayma gerilmesinin sıfır olması şartı yazılırsa,

$$B_1 = -\frac{B_2}{\varpi \xi}$$

olarak elde edilmiş olur. Bu ifade (105) ve (106) denklemlerinde yerine yazılır ve $\varpi = \frac{2}{\kappa - 1}$ olduğu düşünülürse;

$$T(x, \xi) = \frac{B_2}{\xi} \left(\frac{1 - \kappa}{2} + \xi x \right) e^{-\xi x} \quad (107)$$

$$S(x, \xi) = \frac{B_2}{\xi} \left(\frac{\kappa + 1}{2} + \xi x \right) e^{-\xi x} \quad (108)$$

ifadeleri elde edilmiş olur. Bu ifadeler (88) ve (89) denklemlerinde yerlerine yazılır ve $B_2 = \phi(\xi)$ dönüşümü yapılırsa, yerdeğiştirme ifadeleri aşağıdaki gibi olur.

$$u^2(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\phi(\xi)}{\xi} \left(\frac{\kappa + 1}{2} + \xi x \right) e^{-\xi x} \cos(\xi y) d\xi \quad (109)$$

$$v^2(x, y) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\phi(\xi)}{\xi} \left(\frac{\kappa - 1}{2} - \xi x \right) e^{-\xi x} \sin(\xi y) d\xi \quad (110)$$

Yerdeğiştirme ifadelerinin gerekli türevleri bünye denklemlerinde yerine konular ve gerekli düzenlemeler yapılırsa gerilme ifadeleri de,

$$\frac{1}{2\mu} \sigma_x^2(x, y) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \phi(\xi) (1 + \xi x) e^{-\xi x} \cos(\xi y) d\xi \quad (111)$$

$$\frac{1}{2\mu} \sigma_y^2(x, y) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \phi(\xi) (1 - \xi x) e^{-\xi x} \cos(\xi y) d\xi \quad (112)$$

$$\frac{1}{2\mu}\tau_{xy}^2(x,y) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \xi x\phi(\xi)e^{-\xi x}\sin(\xi y)d\xi \quad (113)$$

şeklinde bulunmuş olurlar.

1.7.3.3. Çatlaksız Tabaka ve Sonsuz Düzlem Hallerinin Süperpozisyonu

Çatlaksız tabaka çözümünden bulunan gerilme ve yerdeğiştirme ifadeleri ile y ekseninde x' e göre simetrik çatlak bulunması halinde elde edilen gerilme ve yerdeğiştirme ifadelerinin karşılıklı olarak toplanması sonucu gerilme ve yerdeğiştirme bileşenlerinin genel ifadeleri,

$$u(x,y) = u^1(x,y) + u^2(x,y) \quad (114)$$

$$v(x,y) = v^1(x,y) + v^2(x,y) \quad (115)$$

$$\sigma_x(x,y) = \sigma_x^1(x,y) + \sigma_x^2(x,y) \quad (116)$$

$$\sigma_y(x,y) = \sigma_y^1(x,y) + \sigma_y^2(x,y) \quad (117)$$

$$\tau_{xy}(x,y) = \tau_{xy}^1(x,y) + \tau_{xy}^2(x,y) \quad (118)$$

olarak bulunurlar. Bu süperpozisyon işleminin sonucunda çatlaklı tabakadaki yerdeğiştirme ve gerilme bileşenlerinin açık ifadeleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$u(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty [(A_1 + A_2y)e^{-\alpha y} + (A_3 + A_4y)e^{\alpha y}] \sin(\alpha x) d\alpha + \frac{3-\kappa}{8\mu} \frac{\rho gh}{2} x \\ + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\phi(\xi)}{\xi} \left(\frac{\kappa+1}{2} + \xi x \right) e^{-\xi x} \cos(\xi y) d\xi \quad (119)$$

$$v(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left\{ \left[A_1 + \left(\frac{\kappa}{\alpha} + y \right) A_2 \right] e^{-\alpha y} + \left[-A_3 + \left(\frac{\kappa}{\alpha} - y \right) A_4 \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha$$

$$+\frac{\rho g}{2\mu}y\left[\frac{\kappa-1}{\kappa+1}(y-h)-\frac{1+\kappa}{8}h\right]-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\phi(\xi)}{\xi}\left(\frac{\kappa-1}{2}-\xi x\right)e^{-\xi x}\sin(\xi y)d\xi$$

(120)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\mu}\sigma_x(x,y) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left\{\left[\alpha(A_1+A_2y)-\frac{3-\kappa}{2}A_2\right]e^{-\alpha y}\right. \\ &\quad \left.+\left[\alpha(A_3+A_4y)+\frac{3-\kappa}{2}A_4\right]e^{\alpha y}\right\}\cos(\alpha x)d\alpha + \frac{1}{2\mu}\frac{3-\kappa}{1+\kappa}\rho g\left(y-\frac{h}{2}\right) \\ &\quad -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\phi(\xi)(1+\xi x)e^{-\xi x}\cos(\xi y)d\xi\end{aligned}$$

(121)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\mu}\sigma_y(x,y) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left\{-\left[\alpha(A_1+A_2y)+\frac{1+\kappa}{2}A_2\right]e^{-\alpha y}\right. \\ &\quad \left.+\left[\alpha(A_3+A_4y)-\frac{1+\kappa}{2}A_4\right]e^{\alpha y}\right\}\cos(\alpha x)d\alpha + \frac{1}{2\mu}\rho g(y-h) \\ &\quad -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\phi(\xi)(1-\xi x)e^{-\xi x}\cos(\xi y)d\xi\end{aligned}$$

(122)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\mu}\tau_{xy}(x,y) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left\{-\left[\alpha(A_1+A_2y)+\frac{\kappa-1}{2}A_2\right]e^{-\alpha y}\right. \\ &\quad \left.+\left[\alpha(A_3+A_4y)-\frac{\kappa-1}{2}A_4\right]e^{\alpha y}\right\}\sin(\alpha x)d\alpha \\ &\quad -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\phi(\xi)\xi x e^{-\xi x}\sin(\xi y)d\xi\end{aligned}$$

(123)

Yukarıdaki gerilme ve yerdeğiştirme bileşenleri hem düzlem gerilme ve hem de düzlem şekildeğiştirme halleri için κ 'nin verilen değerlerine göre kullanılabilirler.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Giriş

Bu bölümde, üzerinde rijit bir blok bulunan ve basit mesnetlere oturan bileşik tabaka çatlaklı ve çatlaksız olmak üzere iki kısımda ele alınmaktadır. İlk olarak çatlaksız bileşik tabaka problemi ele alınmakta ve bu hale ait iki elastik tabaka ve bileşik tabaka ile rijit blok arasındaki sürekli temas durumları incelenmektedir. İkinci olarak ise çatlaklı hale ait bileşik tabaka problemi incelenme ve çatlak uçlarındaki gerilme şiddet faktörleri ve çatlak yüzey yerdeğiştirmeleri hesaplanmaktadır.

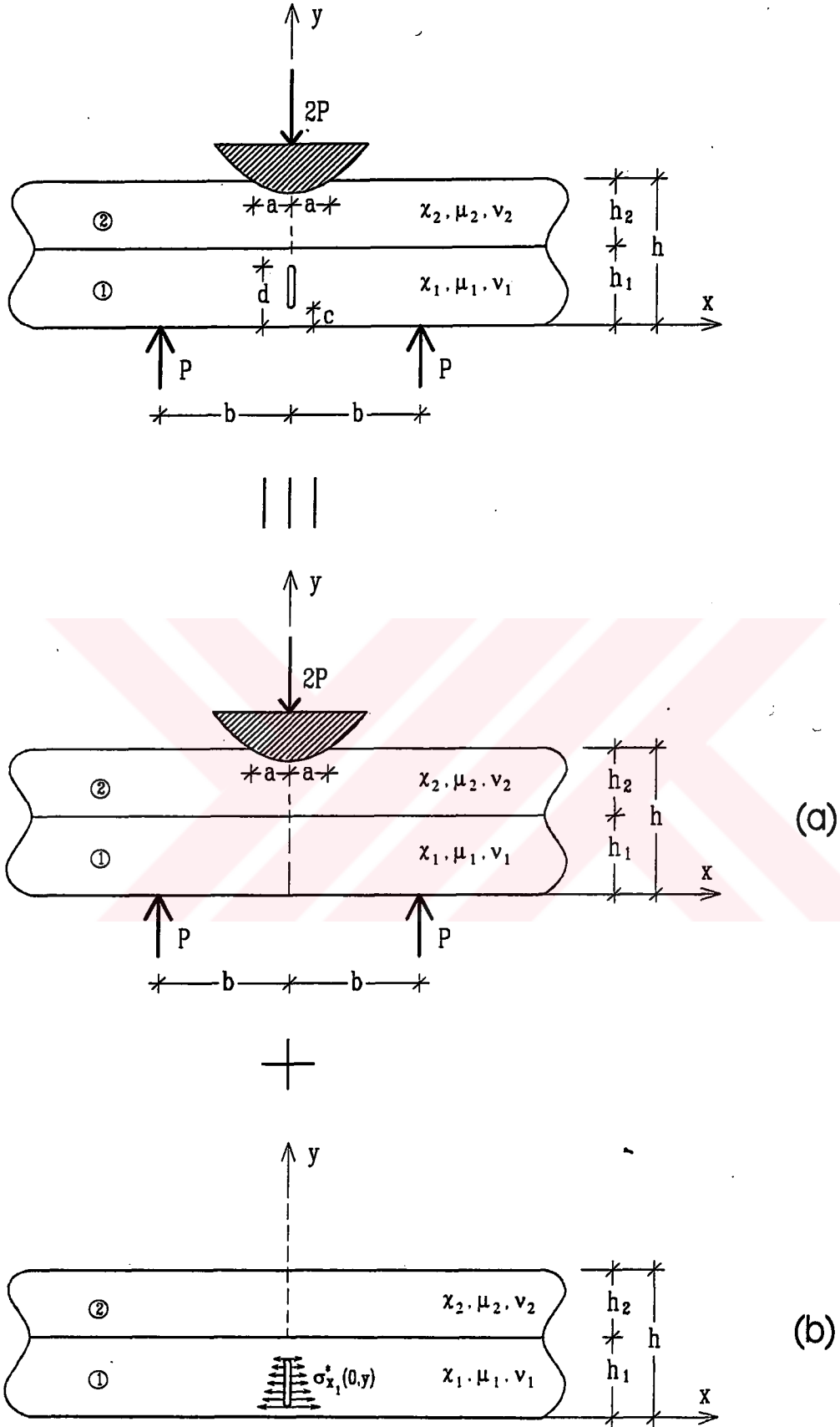
2.2. Problemin Tanımı

İki noktadan mesnetlenmiş, elastik sabitleri ve yükseklikleri farklı iki tabakadan oluşan ve üstten rijit bir blok vasıtasıyla $2P$ şiddetinde tekil bir yükü yüklenmiş bileşik tabaka problemi iki boyutlu Elastisite teorisine göre incelenmektedir. Bileşik tabakayı oluşturan tabakalardan üstte olanın (2 nolu tabaka) kalınlığı h_2 olup $2a$ genişliğinde temas yüzeyine sahip bir rijit blokla sürekli temas halindedir. Alttaki tabaka (1 nolu tabaka) ise y simetri eksenini boyunca düşey bir çatlakla sahip olup kalınlığı h_1 dir. Bileşik tabakanın toplam kalınlığı ise h dir. Problemden bütün yüzeylerin sürtünmesiz olduğu kabul edilmekte ve tabakalar x eksenini boyunca $(-\infty, +\infty)$ arasında uzanmaktadır (şekil 1). Dış yük, rijit blok, mesnetler ve tabakalar y eksenine göre simetrik olduğundan hesaplamalar; rijit blok için $(0, +a)$, mesnetler için $(0, +b)$ ve tabakalar için ise $(0, +\infty)$ arasında yapılmaktadır. Problem düzlem hal için incelendiğinden z doğrultusundaki kalınlıklar birim olarak alınmıştır.

Söz konusu çatlaklı bileşik tabaka şekil 1' de görüldüğü gibi iki halin süperpozisyonu şeklinde düşünülerek çözülebilir :

a) Çatlaksız bileşik tabakanın dış yükler altında sürekli temas durumunun incelenmesi.

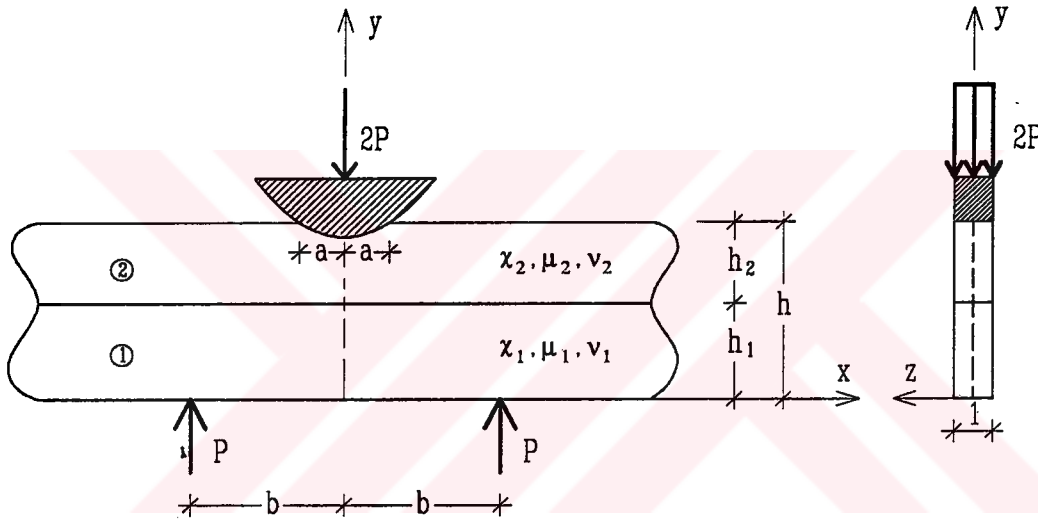
b) Çatlaklı bileşik tabakanın, çatlak yüzeyinin (a) çözümünden elde edilen gerilmelere zıt yönde aynı şiddet ve aynı doğrultuda yüklenmesi halinde incelenmesi. Bu durumda dış yüklemeler yoktur. Bu iki hal süperpoze edilirse söz konusu dış yükleme altında serbest çatlak yüzeyi hasil olur.



Şekil 1. İki halin süperpozisyonu olarak elde edilen çatlaklı bileşik tabaka

2.3. Çatlaksız Bileşik Tabakanın Sürekli Temas Durumunun İncelenmesi

Bu kısımda, şekil 2' deki çatlaksız bileşik tabakanın sürekli temas problemi Elastisite teorisine göre incelenmektedir. İlk olarak bileşik tabaka ile rijit blok arasındaki temas gerilmeleri ve temas yüzeyleri (alanları) hesaplanmakta ve y simetri eksenini boyunca $\sigma_x(0, y)$ ve $\sigma_y(0, y)$ normal gerilmeleri incelenmektedir. Daha sonra iki elastik tabaka arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklıkları ile ilk ayrılma yükü ve bu yükten daha küçük yükler için tabakalar arasındaki temas gerilmeleri ele alınmaktadır.



Şekil 2. Eğri yüzeyli rijit bir blok aracılığı ile yüklenmiş ve basit mesnetlere oturmuş çatlaksız bileşik tabaka

2.3.1. Kullanılacak Denklemler

Çatlaksız bileşik tabakanın sürekli temas durumu incelenirken kütle kuvvetleri yalnız iki tabaka arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklığı ile tabakalar arasındaki temas gerilmeleri hesaplanırken dikkate alınmıştır. Kütle kuvvetlerinin ihmal edildiği durumda gerilme ve yerdeğiştirme ifadeleri, bölüm 1' de verilmiş olan (49-50) yerdeğiştirme ve (54-56) gerilme ifadelerinden faydalanılarak her iki tabaka için ayrı ayrı yeniden yazılacaktır.

Kalınlığı h_1 olan 1 nolu tabakanın elastik sabitleri μ_1 ve ν_1 dir. Elastik sabitleri μ_2 ve ν_2 olan iki nolu tabakanın kalınlığı ise h_2 dir. Bileşik tabakanın toplam kalınlığı ise

$h = h_1 + h_2$ olarak verilmektedir. Burada verilmiş olan kalınlık ve elastik sabitlere göre gerilme ve yerdeğiştirme ifadeleri 1 ve 2 nolu tabakalar için aşağıdaki gibi yazılabilir.

1 nolu tabaka için $(0 \leq x < \infty, 0 \leq y \leq h_1)$:

$$u_1(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [(A_1 + A_2 y) e^{-\alpha y} + (A_3 + A_4 y) e^{\alpha y}] \sin(\alpha x) d\alpha \quad (124)$$

$$v_1(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[A_1 + \left(\frac{\kappa_1}{\alpha} + y \right) A_2 \right] e^{-\alpha y} + \left[-A_3 + \left(\frac{\kappa_1}{\alpha} - y \right) A_4 \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (125)$$

$$\frac{1}{2\mu_1} \sigma_{x_1}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[\alpha(A_1 + A_2 y) - \frac{3 - \kappa_1}{2} A_2 \right] e^{-\alpha y} + \left[\alpha(A_3 + A_4 y) + \frac{3 - \kappa_1}{2} A_4 \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (126)$$

$$\frac{1}{2\mu_1} \sigma_{y_1}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ - \left[\alpha(A_1 + A_2 y) + \frac{1 + \kappa_1}{2} A_2 \right] e^{-\alpha y} + \left[\alpha(A_3 + A_4 y) - \frac{1 + \kappa_1}{2} A_4 \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (127)$$

$$\frac{1}{2\mu_1} \tau_{xy_1}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ - \left[\alpha(A_1 + A_2 y) + \frac{\kappa_1 - 1}{2} A_2 \right] e^{-\alpha y} + \left[\alpha(A_3 + A_4 y) - \frac{\kappa_1 - 1}{2} A_4 \right] e^{\alpha y} \right\} \sin(\alpha x) d\alpha \quad (128)$$

2 nolu tabaka için $(0 \leq x < \infty, h_1 \leq y \leq h)$:

$$u_2(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [(B_1 + B_2 y) e^{-\alpha y} + (B_3 + B_4 y) e^{\alpha y}] \sin(\alpha x) d\alpha \quad (129)$$

$$v_2(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[B_1 + \left(\frac{\kappa_2}{\alpha} + y \right) B_2 \right] e^{-\alpha y} + \left[-B_3 + \left(\frac{\kappa_2}{\alpha} - y \right) B_4 \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (130)$$

$$\frac{1}{2\mu_2} \sigma_{x_2}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[\alpha(B_1 + B_2 y) - \frac{3 - \kappa_2}{2} B_2 \right] e^{-\alpha y} + \left[\alpha(B_3 + B_4 y) + \frac{3 - \kappa_2}{2} B_4 \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (131)$$

$$\frac{1}{2\mu_2} \sigma_{y_2}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ - \left[\alpha(B_1 + B_2 y) + \frac{1 + \kappa_2}{2} B_2 \right] e^{-\alpha y} + \left[\alpha(B_3 + B_4 y) - \frac{1 + \kappa_2}{2} B_4 \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (132)$$

$$\frac{1}{2\mu_2} \tau_{xy_2}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ - \left[\alpha(B_1 + B_2 y) + \frac{\kappa_2 - 1}{2} B_2 \right] e^{-\alpha y} + \left[\alpha(B_3 + B_4 y) - \frac{\kappa_2 - 1}{2} B_4 \right] e^{\alpha y} \right\} \sin(\alpha x) d\alpha \quad (133)$$

Yukarıdaki ifadelerde geçen A_i ve B_i ($i = 1, \dots, 4$) bilinmeyen fonksiyonları daha önce belirtildiği gibi bileşik tabakanın alt ve üst yüzeyleri ile tabakalar arasındaki temas yüzeyindeki sınır şartları sağlatılarak elde edilecektir.

2.3.2. Çatlaksız Bileşik Tabakaya Ait Sınır Şartları

Kütle kuvvetleri ihmal edilen bileşik tabakanın alt ve üst yüzeyleri ile tabakalar arasındaki sürekli temas yüzeyi boyunca sınır şartları;

$$\tau_{xy_2}(x, h) = 0, \quad (0 \leq x < \infty), \quad (134)$$

$$\tau_{xy_2}(x, h_1) = 0, \quad (0 \leq x < \infty), \quad (135)$$

$$\tau_{xy_1}(x, h_1) = 0, \quad (0 \leq x < \infty), \quad (136)$$

$$\sigma_{y_2}(x, h_1) = \sigma_{y_1}(x, h_1), \quad (0 \leq x < \infty), \quad (137)$$

$$\tau_{xy_1}(x, 0) = 0, \quad (0 \leq x < \infty), \quad (138)$$

$$\sigma_{y_1}(x, 0) = -P \delta(x - b), \quad (139)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_2(x, h_1) - v_1(x, h_1)] = 0, \quad (0 \leq x < \infty), \quad (140)$$

$$\sigma_{y_2}(x, h) = 0, \quad (a < x < \infty), \quad (141)$$

$$v_2(x, h) = F(x), \quad (0 \leq x < a), \quad (142)$$

şeklinde yazılabilirler. Yukarıdaki ifadelerde, $F(x)$ ve $\delta(x)$ sırasıyla bileşik tabaka üzerindeki rijit blok profilini tanımlayan fonksiyonu ve Dirac delta fonksiyonunu göstermektedir. a ve b ise yine sırasıyla rijit blokla bileşik tabaka arasındaki yarım temas (değme) uzunluğunu ve y simetri ekseninden mesnete olan mesafeyi tarif etmektedir.

(141) ve (142) ifadeleri ile verilmiş olan sınır şartlarının karışık türden sınır şartları olduğuna dikkat edilmelidir. Aynı tip sınır şartlarını elde etmek için (141) ifadesi ile gösterilen sınır şartı,

$$\sigma_{y_2}(x, h) = -p(x), \quad (0 \leq x < \infty), \quad (143)$$

ve (142) ifadesi ile gösterilen sınır şartı da,

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_2(x, h)] = f(x) = \frac{d}{dx} F(x), \quad (0 \leq x < a), \quad (144)$$

olarak yeniden yazılabilir. Burada, $p(x)$ rijit blok altındaki bilinmeyen temas gerilme fonksiyonunu temsil etmektedir. (143) denkleminin gösterilen sınır şartının ancak,

$$p(x) = 0, \quad (a < x < \infty), \quad (145)$$

olması şartı ile sağlanabileceği unutulmamalıdır.

2.3.3. A_i ve B_i ($i = 1, \dots, 4$) Katsayılarının Belirlenmesi

Yukarıda (124-133) denklemleri ile verilmiş olan gerilme ve yerdeğiştirme ifadelerinin (134-140) ve (143) denklemleri ile gösterilen sınır şartlarında yerine yazılması ve ters Fourier dönüşüm alınması sonucunda A_i ve B_i ($i = 1, \dots, 4$) katsayılarını içeren sekiz bilinmeyenli sekiz cebrik denklem elde edilir. Bu denklemler,

$$-2\alpha A_1 - (2\alpha h_1 + \kappa_1 - 1)A_2 + 2\alpha e^{2\alpha h_1} A_3 + (2\alpha h_1 - \kappa_1 + 1)e^{2\alpha h_1} A_4 = 0, \quad (146)$$

$$-2\alpha A_1 - (\kappa_1 - 1)A_2 + 2\alpha A_3 - (\kappa_1 - 1)A_4 = 0, \quad (147)$$

$$-2\alpha A_1 - (1 + \kappa_1)A_2 - 2\alpha A_3 + (1 + \kappa_1)A_4 = -\frac{P}{\mu_1} \cos(\alpha b), \quad (148)$$

$$A_1 + \left(\frac{\kappa_1}{\alpha} + h_1\right)A_2 - e^{2\alpha h_1} A_3 + \left(\frac{\kappa_1}{\alpha} - h_1\right)e^{2\alpha h_1} A_4 - B_1 - \left(\frac{\kappa_2}{\alpha} + h_1\right)B_2 + e^{2\alpha h_1} B_3 - \left(\frac{\kappa_2}{\alpha} - h_1\right)e^{2\alpha h_1} B_4 = 0, \quad (149)$$

$$-2\alpha A_1 - (2\alpha h_1 + \kappa_1 + 1)A_2 - 2\alpha e^{2\alpha h_1} A_3 + (-2\alpha h_1 + \kappa_1 + 1)e^{2\alpha h_1} A_4 + 2\alpha \frac{\mu_2}{\mu_1} B_1 + (2\alpha h_1 + 1 + \kappa_2) \frac{\mu_2}{\mu_1} B_2 + 2\alpha \frac{\mu_2}{\mu_1} e^{2\alpha h_1} B_3 - (1 + \kappa_2 - 2\alpha h_1) \frac{\mu_2}{\mu_1} e^{2\alpha h_1} B_4 = 0, \quad (150)$$

$$-2\alpha B_1 + (1 - 2\alpha h - \kappa_2)B_2 + 2\alpha e^{2\alpha h} B_3 + (2\alpha h - \kappa_2 + 1)e^{2\alpha h} B_4 = 0, \quad (151)$$

$$-2\alpha B_1 - (2\alpha h_1 + \kappa_2 - 1)B_2 + 2\alpha e^{2\alpha h_1} B_3 + (2\alpha h_1 - \kappa_2 + 1)e^{2\alpha h_1} B_4 = 0, \quad (152)$$

$$-2\alpha B_1 - (1 + 2\alpha h + \kappa_2)B_2 - 2\alpha e^{2\alpha h} B_3 + (1 - 2\alpha h + \kappa_2)e^{2\alpha h} B_4 = -\frac{e^{\alpha h}}{\mu_2} \int_0^a p(t) \cos(\alpha t) dt, \quad (153)$$

olarak yazılabilir. Bu denklem takımının çözümü ile A_i ve B_i ($i=1,\dots,4$) katsayıları, oldukça uzun ara işlemler sonucunda bilinmeyen $p(x)$ temas gerilme fonksiyonuna ve integral değişkeni α 'ya bağlı olarak aşağıdaki gibi bulunurlar.

$$\begin{aligned} \alpha A_1 = & \left\{ P^*(\alpha) . DA1 \left\{ (1 - \kappa_1) . DA2 . DA3 + \alpha h_1 \left[DA4 + \kappa_1 \left[-1 - e^{-2\alpha h_1} + e^{-2\alpha h} (3e^{2\alpha h_1} - 1) \right] \right. \right. \right. \\ & + DA5 . (1 - \kappa_1 e^{2\alpha h_1}) \left. \left. \left. \right\} + P^{**}(\alpha) e^{2\alpha h_1} \left\{ (1 + \kappa_2) \left[(1 - \kappa_1) . DA6 + 4\alpha^2 h_1^2 \right] . DA7 \right. \right. \right. \\ & + \frac{\mu_2}{\mu_1} \left[(1 - \kappa_1^2) . DA2 - 4\alpha h_1 (1 + \kappa_1) \right] . DA8 \left. \left. \right\} \right\} / \Delta \end{aligned} \quad (154)$$

$$\begin{aligned} A_2 = & 2 \left\{ P^*(\alpha) . DA1 \left[DA2 . DA3 + \alpha h_1 \left\{ e^{-2\alpha h_1} + e^{-2\alpha h} \left[1 + e^{2\alpha h} (1 + 2\alpha h - 2\alpha h_1) \right. \right. \right. \right. \right. \\ & + e^{2\alpha h_1} (-3 + 2\alpha h - 2\alpha h_1) \left. \left. \left. \right\} \right\} + P^{**}(\alpha) e^{2\alpha h_1} \left[(1 + \kappa_2) . DA6 . DA7 \right. \right. \\ & + \frac{\mu_2}{\mu_1} (1 + \kappa_1) . DA2 . DA8 \left. \left. \right\} \right\} / \Delta \end{aligned} \quad (155)$$

$$\begin{aligned} \alpha A_3 = & \left\{ P^*(\alpha) . DA1 \left\{ (\kappa_1 - 1) . DA2 . DA3 + \alpha h_1 \left[-(1 + \kappa_1) (1 + e^{-2\alpha h}) - DA5 e^{2\alpha h_1} - e^{-2\alpha h_1} \right. \right. \right. \\ & + 3e^{-2\alpha h} e^{2\alpha h_1} + \kappa_1 \left[3e^{-2\alpha h_1} - e^{2\alpha h_1} e^{-2\alpha h} + DA5 \right] \left. \left. \right\} \right\} + P^{**}(\alpha) \left\{ (1 + \kappa_2) DA7 \left[(\kappa_1 - 1) DA9 \right. \right. \right. \\ & + 4\alpha^2 h_1^2 e^{2\alpha h_1} \left. \left. \left. \right\} + \frac{\mu_2}{\mu_1} \left[(1 - \kappa_1^2) DA2 - 4\alpha h_1 (1 + \kappa_1) e^{2\alpha h_1} \right] DA8 \left. \right\} \right\} / \Delta \end{aligned} \quad (156)$$

$$\begin{aligned} A_4 = & 2 \left\{ P^*(\alpha) . DA1 \left[DA2 . DA3 + \alpha h_1 (DA4 + DA5) \right] + P^{**}(\alpha) \left[(1 + \kappa_2) . DA9 . DA7 \right. \right. \\ & - \frac{\mu_2}{\mu_1} (1 + \kappa_1) . DA2 . DA8 \left. \left. \right\} \right\} / \Delta \end{aligned} \quad (157)$$

$$\begin{aligned} \alpha B_1 = & \left\{ P^*(\alpha) e^{-\alpha h} \left\{ DB1 \left[(1 - \kappa_2^2) . DB2 - (1 + \kappa_2) (2\alpha h . DB3 - 4\alpha h_1 e^{-2\alpha h_1}) \right] \right. \right. \\ & + \frac{\mu_2}{\mu_1} (1 + \kappa_1) . DB4 \left[DB2 - 2\alpha h e^{-2\alpha h} + 2\alpha h_1 . DB5 + \kappa_2 (DB5 - e^{-2\alpha h}) \right] \left. \right\} \\ & + 2(1 + \kappa_1) P^{**}(\alpha) \left\{ DA2 \left[(1 - \kappa_2) (2\alpha h e^{-2\alpha h} - DB2) - 4\alpha^2 h^2 e^{-2\alpha h} \right] - \alpha h_1 \left\{ 3e^{-2\alpha h_1} - 1 \right. \right. \\ & + 2\alpha h e^{-2\alpha h} (-1 + 3e^{2\alpha h_1}) - DB6 \left[e^{-2\alpha h} + 2\alpha h_1 e^{-2\alpha h_1} + 2\alpha h . DB7 + \kappa_2 (e^{-2\alpha h_1} + DB7) \right] \\ & \left. \left. \left. \right\} \right\} \right\} / \Delta \end{aligned} \quad (158)$$

$$\begin{aligned}
B_2 = & 2 \left\{ P^*(\alpha) e^{-\alpha h} \left[(1 + \kappa_2) . DB2 . DB1 + \frac{\mu_2}{\mu_1} (1 + \kappa_1) (e^{-2\alpha h} - DB5) . DB4 \right] \right. \\
& + 2 (1 + \kappa_1) P^{**}(\alpha) \left\{ DA2 \left[e^{-2\alpha h_1} - e^{-2\alpha h} (1 - 2\alpha h) \right] - \alpha h_1 \left\{ DB6 \left[e^{-2\alpha h_1} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + e^{-2\alpha h} (2\alpha h - 2\alpha h_1) \right] + e^{-2\alpha h} (1 - 3e^{2\alpha h_1}) \right\} \right\} \left. \right\} / \Delta \quad (159)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha B_3 = & e^{-\alpha h} \left\{ P^*(\alpha) e^{-2\alpha h_1} \left[DB1 \left[(1 - \kappa_2^2) . DB2 + (1 + \kappa_2) (4\alpha h_1 e^{-2\alpha h} - 2\alpha h . DB3) \right] \right. \right. \\
& + \frac{\mu_2}{\mu_1} (1 + \kappa_1) . DB4 \left[2\alpha h e^{-2\alpha h_1} - DB2 - 2\alpha h_1 . DB8 - \kappa_2 (e^{-2\alpha h_1} - DB8) \right] \left. \right\} \\
& + 2(1 + \kappa_1) e^{-\alpha h} P^{**}(\alpha) \left\{ DA2 \left[(1 - \kappa_2) . DB9 - 4\alpha^2 h^2 e^{-2\alpha h_1} \right] + \alpha h_1 \left\{ e^{-2\alpha h} (1 - 3e^{2\alpha h_1}) \right. \right. \\
& + 1 - 2\alpha h + e^{-2\alpha h_1} (1 + 6\alpha h) + DB6 \left[2\alpha h . DB10 - 2\alpha h_1 e^{-2\alpha h} + \kappa_2 (e^{-2\alpha h} - DB10) \right] \\
& \left. \left. \left. + \kappa_2 (1 - 3e^{-2\alpha h_1}) \right\} \right\} \right\} / \Delta \quad (160)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_4 = & 2 e^{-\alpha h} \left\{ P^*(\alpha) e^{-2\alpha h_1} \left[(1 + \kappa_2) (-DB2) . DB1 + \frac{\mu_2}{\mu_1} (1 + \kappa_1) (DB8 - e^{-2\alpha h_1}) . DB4 \right] \right. \\
& + 2 (1 + \kappa_1) e^{-\alpha h} P^{**}(\alpha) \left\{ DA2 . (-DA9) + \alpha h_1 \left[1 - 3e^{-2\alpha h_1} \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + DB6 (e^{-2\alpha h} - DB10) \right] \right\} \right\} / \Delta \quad (161)
\end{aligned}$$

Bu ifadelerde geçen büyüklükler aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$P^*(\alpha) = -\frac{1}{\mu_2} \int_0^a p(t) \cos(\alpha t) dt$$

$$P^{**}(\alpha) = -\frac{P}{\mu_1} \cos(\alpha b)$$

$$\Delta = 4 \left[(1 + \kappa_2) . DA7 . DB1 - (1 + \kappa_1) \frac{\mu_2}{\mu_1} DA8 . DB4 \right]$$

$$DA1 = 2(1 + \kappa_2) \frac{\mu_2}{\mu_1} e^{-\alpha h}$$

$$DA2 = 1 - e^{2\alpha h_1}$$

$$DA3 = e^{-2\alpha h}(1 - \alpha h) - e^{-2\alpha h_1}(1 + \alpha h)$$

$$DA4 = -1 + 3e^{-2\alpha h_1} - e^{-2\alpha h}(1 + e^{2\alpha h_1})$$

$$DA5 = (2\alpha h - 2\alpha h_1)(e^{-2\alpha h} + e^{-2\alpha h_1})$$

$$DA6 = 1 - 2\alpha h_1 - e^{2\alpha h_1}$$

$$DA7 = e^{-4\alpha h_1} - e^{-4\alpha h} + 2e^{-2\alpha h}e^{-2\alpha h_1}(2\alpha h - 2\alpha h_1)$$

$$DA8 = e^{-4\alpha h_1} + e^{-4\alpha h} - e^{-2\alpha h}e^{-2\alpha h_1}(2 + 4\alpha^2 h^2 + 4\alpha^2 h_1^2 - 8\alpha^2 h h_1)$$

$$DA9 = 1 - e^{2\alpha h_1}(1 + 2\alpha h_1)$$

$$DB1 = 1 + e^{2\alpha h_1}(-2 - 4\alpha^2 h_1^2 + e^{2\alpha h_1})$$

$$DB2 = e^{-2\alpha h} - e^{-2\alpha h_1}$$

$$DB3 = e^{-2\alpha h} + e^{-2\alpha h_1}$$

$$DB4 = 1 - e^{2\alpha h_1}(e^{2\alpha h_1} + 4\alpha h_1)$$

$$DB5 = e^{-2\alpha h_1}(1 + 2\alpha h - 2\alpha h_1)$$

$$DB6 = 1 + e^{2\alpha h_1}$$

$$DB7 = e^{-2\alpha h}(2\alpha h - 2\alpha h_1)$$

$$DB8 = e^{-2\alpha h}(1 - 2\alpha h + 2\alpha h_1)$$

$$DB9 = e^{-2\alpha h} - e^{-2\alpha h_1}(1 + 2\alpha h)$$

$$DB10 = e^{-2\alpha h_1}(2\alpha h - 2\alpha h_1)$$

2.3.4. İntegral Denklemin Elde Edilmesi

Rijit blok altındaki $p(x)$ temas gerilme yayılışının bilinmeyen olduğu daha önceki kısımlarda belirtilmişti. Sözkonusu bu gerilme yayılışını elde edebilmek için, katsayıların belirlenmesinde kullanılmayan (144) sınır şartından faydalanılacaktır. Eğer $\frac{\partial}{\partial x}[v_2(x, y)]$ teşkil edilecek olunursa,

$$\frac{\partial}{\partial x}[v_2(x, y)] = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \alpha \left\{ \left[B_1 + \left(\frac{\kappa_2}{\alpha} + y \right) B_2 \right] e^{-\alpha y} \right.$$

$$+ \left[-B_3 + \left(\frac{\kappa_2}{\alpha} - y \right) B_4 \right] e^{\alpha y} \} \sin(\alpha x) d\alpha \quad (162)$$

olarak elde edilir. B_i ($i = 1, \dots, 4$) katsayıları (162) ifadesinde yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa $\frac{\partial}{\partial x} [v_2(x, y)]$ ifadesi en geniş şekliyle teşkil edilmiş olur. Buradan $y \rightarrow h$ limitine geçilirken dikkatli davranmak gerekmektedir. Çünkü $y \rightarrow h$ limitine geçilirken (162) ifadesi ile gösterilen integralde pay ve paydada $e^{4\alpha h}$ 'lı terimler gelmekte, pay payda ile bölününce C bir sabit olmak üzere,

$$C \int_0^{\infty} \sin(\alpha x) d\alpha \quad (163)$$

gibi ıraksak bir integral ortaya çıkmaktadır. Bu durumu gidermek için önce paydaki $e^{3\alpha h}$ 'lı terimleri ayırıp bunların payda ile bölünmesinden ortaya çıkan

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha(h-y)} \sin(\alpha x) d\alpha \quad (164)$$

integralini kapalı formda hesapladıktan sonra limit işlemine geçmek gerekmektedir. Bu anlatılanlar sırasıyla yapılır ve (144) sınır şartında yerine yazılırsa, gerekli düzenlemelerin de yapılması ile,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [v_2(x, h)] &= \frac{1 + \kappa_2}{4\pi\mu_2} \lim_{y \rightarrow h} \int_0^a p(t) dt \int_0^{\infty} e^{-\alpha(h-y)} [\sin \alpha(t+x) - \sin \alpha(t-x)] d\alpha \\ &+ \frac{1}{\pi\mu_2} \int_0^a p(t) dt \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{\Delta} [(1 + \kappa_2)(e^{-4\alpha h_1} + e^{-4\alpha h} - 2e^{-2\alpha h} e^{-2\alpha h_1}) \cdot DB1 \right. \\ &+ (1 + \kappa_1) \frac{\mu_2}{\mu_1} (-DA7) \cdot DB4] - 1 \left. \right\} [\sin \alpha(t+x) - \sin \alpha(t-x)] d\alpha \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{P}{\mu_1} \int_0^{\infty} \frac{4e^{-\alpha h}}{\Delta} (1 + \kappa_1)(1 + \kappa_2) \{ DA2 \cdot (-DA3) + \alpha h_1 [DB6 \cdot (-DA5/2) \\ &+ 2(e^{-2\alpha h} e^{2\alpha h_1} - e^{-2\alpha h_1})] \} [\sin \alpha(b-x) - \sin \alpha(b+x)] d\alpha + f(x) \quad (165) \end{aligned}$$

elde edilmiş olur. Bu ifadede geçen büyüklükler daha önce tanımlanmıştır. (165) ifadesinde geçen integrallerden,

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha(h-y)} [\sin \alpha(t+x) - \sin \alpha(t-x)] d\alpha \\ = \frac{t+x}{(y-h)^2 + (t+x)^2} - \frac{t-x}{(y-h)^2 + (t-x)^2} \quad (166)$$

olduğu düşünülür ve $y \rightarrow h$ limitine geçilirse, gerekli kısaltmaların da yapılması sonucunda (165) ifadesi aşağıdaki gibi bir integral denkleme indirgenmiş olur.

$$\int_0^a \left[\frac{1}{t+x} - \frac{1}{t-x} + K_1(x,t) \right] p(t) dt = K_2(x) + \frac{4\pi\mu_2}{1+\kappa_2} f(x) \quad (0 < x < a) \quad (167)$$

Bu ifadede,

$$K_1(x,t) = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{\Delta^*} \left[(e^{-4\alpha h_1} + e^{-4\alpha h} - 2 e^{-2\alpha h} e^{-2\alpha h_1}) .DB1 + \beta (-DA7) .DB4 \right] - 1 \right\}^* \\ \left[\sin \alpha(t+x) - \sin \alpha(t-x) \right] d\alpha \quad (168)$$

$$K_2(x) = 4P \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta^*} \beta e^{-\alpha h} \left\{ DA2 .(-DA3) + \alpha h_1 \left[DB6 .(-DA5/2) + 2(e^{-2\alpha h} e^{2\alpha h_1} - e^{-2\alpha h_1}) \right] \right\}^* \\ \left[\sin \alpha(b-x) - \sin \alpha(b+x) \right] d\alpha \quad (169)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. (168) ve (169) ifadelerinde geçen Δ^* ve β büyüklükleri ise,

$$\Delta^* = DA7 .DB1 + \beta .DA8 .(-DB4) \quad \text{ve} \quad \beta = \frac{1 + \kappa_1}{1 + \kappa_2} \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

şeklinde verilmektedir. Simetri nedeniyle rijit blok altındaki gerilme yayılışının,

$$p(t) = p(-t) \quad (170)$$

olduğu gözönünde bulundurulur, $\omega = \alpha h$ ve $r = h_1 / h$ değişken dönüşümü yapılırsa tekil integral denklem,

$$\int_{-a}^a \left[\frac{1}{t-x} + k_1(x,t) \right] p(t) dt = -k_2(x) - \frac{4\pi \mu_2}{1 + \kappa_2} f(x) \quad (-a < x < a) \quad (171)$$

şeklinde de yazılabilir. Bu denklemde,

$$\begin{aligned} k_1(x,t) = & \frac{1}{h} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{\Delta^*} \left[(e^{-4\omega r} + e^{-4\omega} - 2 e^{-2\omega} e^{-2\omega r}) [1 + e^{2\omega r} (-2 - 4\omega^2 r^2 + e^{2\omega r})] \right. \right. \\ & \left. \left. + \beta [e^{-4\omega} - e^{-4\omega r} - 2 e^{-2\omega} e^{-2\omega r} (2\omega - 2\omega r)] [1 - e^{2\omega r} (4\omega r + e^{2\omega r})] \right] - 1 \right\} * \\ & \sin \left[(t-x) \frac{\omega}{h} \right] d\omega, \end{aligned} \quad (172)$$

$$\begin{aligned} k_2(x) = & 4 \frac{P}{h} \int_0^\infty \frac{1}{\Delta^*} \beta e^{-\omega} \left\{ (1 - e^{2\omega r}) \left[(1 + \omega) e^{-2\omega r} + (-1 + \omega) e^{-2\omega} \right] \right. \\ & \left. + \omega r \left[(1 + e^{2\omega r}) (e^{-2\omega} + e^{-2\omega r}) (-\omega + \omega r) + 2 (e^{-2\omega} e^{2\omega r} - e^{-2\omega r}) \right] \right\} * \\ & \left[\sin(b-x) \frac{\omega}{h} - \sin(b+x) \frac{\omega}{h} \right] d\omega \end{aligned} \quad (173)$$

olarak verilmektedir. (171) ifadesindeki $k_1(x,t)$, $-a \leq x \leq a$ kapalı aralığında sınırlı olup integral denklemin Fredholm çekirdeğidir.

Ayrıca denge şartından,

$$\int_{-a}^a p(t) dt = 2P \quad (174)$$

olduğu görülebilir. $p(x)$ temas gerilme yayılışının hesaplanabilmesi için (171) integral denklemi ile (174) denge denklemi birlikte çözülmelidir.

2.3.5. İntegral Denklemin Sayısal Çözümü

İntegral denklemin sayısal çözümünü kolaylaştırmak için aşağıdaki boyutsuz büyüklükler tanımlanabilir.

$$x = a\xi, \quad t = a\eta, \quad M(\xi) = \frac{m(a\xi)}{P/h}, \quad g(\eta) = \frac{p(a\eta)}{P/h} \quad (175)$$

Bu ifadede geçen $m(a\xi)$ büyüklüğü,

$$m(a\xi) = -k_2(a\xi) - \frac{4\pi\mu_2}{1+\kappa_2} f(a\xi) \quad (176)$$

olarak tanımlanmaktadır. Tanımlanan bu boyutsuz büyüklükler (171-174) denklemlerinde yerlerine yazılırsa (171) ve (174) ifadeleri ,

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\eta - \xi} + N(\xi, \eta) \right] g(\eta) d\eta = M(\xi), \quad (-1 < \xi < 1) \quad (177)$$

$$\frac{a}{h} \int_{-1}^1 g(\eta) d\eta = 2, \quad (178)$$

şeklinde yazılabilir. (177) ifadesinde,

$$N(\xi, \eta) = a k_1(a\xi, a\eta) \quad (179)$$

olarak verilmektedir.

İntegral denklemin sayısal çözümü için rijit blokun yüzey profilini tanımlayan $F(x)$ fonksiyonunun bilinmesi gerekmektedir. Çünkü her bir rijit blok profiline göre integral denklemin sayısal çözümü farklı olmaktadır. Gözönüne alınan problemin formülasyonu oldukça genel olduğu için herhangi bir blok profili seçilebilir.

Bu çalışmada, üç değişik rijit blok profili gözönüne alınarak integral denklemin sayısal çözümü yapılacaktır. Bunlar sırasıyla aşağıda verilmektedir.

2.3.5.1 Rijit Blok Profilinin Dairesel Olması Hali

Rijit blok profilinin dairesel olması halinde, $F(x)$ fonksiyonu

$$F(x) = -(R^2 - x^2)^{1/2} + R \quad (180)$$

olarak yazılabilir. Bu ifadede, R dairenin yarıçapını göstermektedir. Buna göre,

$$f(x) = \frac{d}{dx} [F(x)] = x(R^2 - x^2)^{-1/2} \quad (181)$$

olarak hesaplanır. Bileşik tabaka ile rijit blok arasındaki temasta, temas bölgesinin uç noktaları yatık (smooth contact) olduğundan $g(\mp 1) = 0$ ve (177) ifadesi ile gösterilen singüler integral denklemin indisi de -1 [94] dir. Buna göre singüler integral denklemin sayısal çözümü aşağıdaki gibi aranabilir [30,94].

$$g(\eta) = G(\eta)(1 - \eta^2)^{1/2}, \quad (-1 < \eta < 1) \quad (182)$$

Burada, $G(\eta)$, $(-1 \leq \eta \leq 1)$ kapalı aralığında sınırlıdır. Uygun Gauss-Chebyshev integrasyon formülü [95,96] kullanılarak, (177) ve (178) denklemleri aşağıdaki hale indirgenebilir.

$$\sum_{i=1}^n (1 - \eta_i^2) \left[\frac{1}{\eta_i - \xi_j} + N(\xi_j, \eta_i) \right] G(\eta_i) = \frac{n+1}{\pi} M(\xi_j), \quad (j = 1, \dots, n+1) \quad (183)$$

$$\frac{a}{h} \sum_{i=1}^n (1 - \eta_i^2) G(\eta_i) = \frac{2(n+1)}{\pi} \quad (184)$$

Bu ifadelerde;

$$\eta_i = \cos\left(\frac{i\pi}{n+1}\right), \quad (i = 1, \dots, n) \quad (185)$$

$$\xi_j = \cos\left(\frac{2j-1}{n+1} \frac{\pi}{2}\right), \quad (j = 1, \dots, n+1) \quad (186)$$

olarak verilmektedir. Eğri yüzeyli rijit blok hallerinde, temas gerilmelerinin yanısıra temas yüzeyi de bilinmeyendir. (183) ve (184) denklem sistemindeki extra denklem (177) ifadesi ile gösterilen orijinal integral denklemin uygunluk şartına karşılık gelir [30,95]. Bu durumda (183) ifadesindeki $(n/2 + 1)$ ' inci denklem otomatik olarak sağlanır. Böylece (183) ve (184) ifadeleri ile verilmiş denklemlerden $G(\eta_i)$, $(i = 1, \dots, n)$, ve temas yüzeyinin yarım uzunluğu olan a ' ya bağlı $n+1$ bilinmeyenli bir denklem takımı elde edilmiş olur. Bu denklem takımının çözümünden, temas gerilme yayılsı ve temas yüzeyinin yarım uzunluğu hesaplanabilir. Ancak bu hesaplar yapılırken interpolasyon işleminin yapılması gerekmektedir. Önce seçilen bir temas bölgesi (a) için (183) denklem takımının çözümünden $G(\eta_i)$ 'ler hesaplanır ve bulunan bu değerler (184) denkleminde yerine yazılarak bu eşitliğin sağlanıp sağlanmadığı kontrol edilir. Eğer eşitlik sağlanmıyorsa a 'ya artımlar verilerek yukarıdaki işlemler tekrarlanır. Bu şekilde yapılacak işlemler sonucunda bulunacak $G(\eta_i)$ değerleri (182) ifadesinde yerine yazılarak, $g(\eta)$ boyutsuz temas gerilmeleri ve temas yüzeyinin yarım uzunluğu a belirlenmiş olur.

2.3.5.2. Rijit Blok Profilinin Parabolik Olması Hali

Rijit blok profilinin parabolik olması halinde $F(x)$ fonksiyonu, G sabit bir sayı olmak üzere;

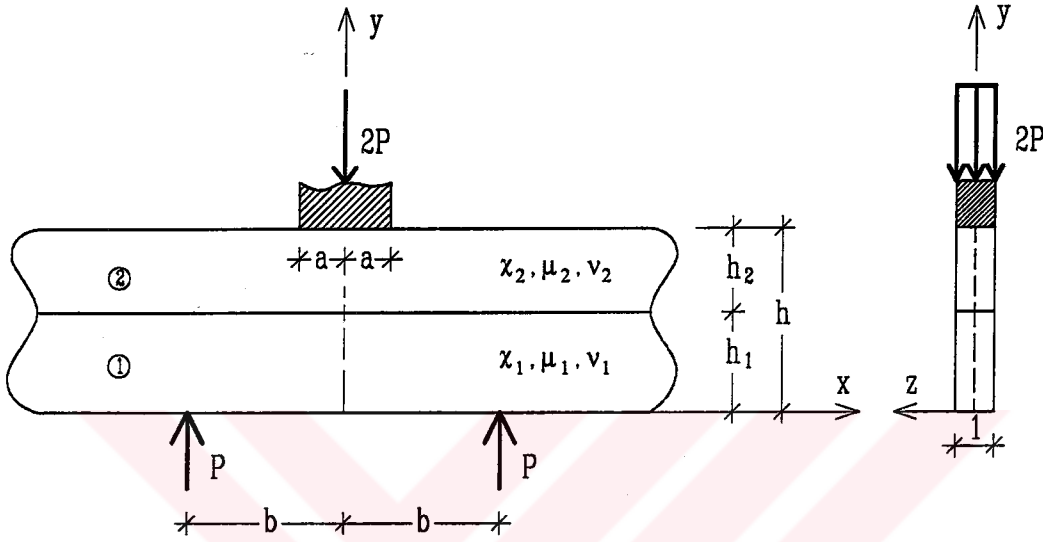
$$F(x) = Gx^2 \quad (187)$$

şeklinde yazılabilir. Buna bağlı olarak,

$$f(x) = \frac{d}{dx}[F(x)] = 2Gx \quad (188)$$

elde edilir. Singüler integral denklemin çözümü ve buna bağlı olarak da rijit blok altındaki boyutsuz temas gerilmesi ile temas yüzeyinin yarım uzunluğu kısım 2.3.5.1'deki ifadelerin kullanılması sonucu aynı yol takip edilerek belirlenebilir.

2.3.5.3. Rijit Blok Profiline Düz Olması Hali



Şekil 3. Düz (dikdörtgen) rijit bir blok aracılığı ile yüklenmiş ve basit mesnetlere oturmuş çatlaksız bileşik tabaka

Rijit bloğun yüzey profilinin düz olması halinde (şekil 3) $F(x)$ fonksiyonu sabit bir değere eşit olduğu için,

$$f(x) = \frac{d}{dx} [F(x)] = 0 \quad (189)$$

olarak yazılabilir. Rijit bloğun kenarlarında temas gerilmeleri singülariteye sahip olduğu için bu durumda (177) ifadesi ile gösterilen integral denklemin indisi +1 [94] dir. Buna göre singüler integral denklemin çözümü,

$$g(\eta) = G(\eta)(1-\eta^2)^{-1/2}, \quad (-1 < \eta < 1) \quad (190)$$

şeklinde aranabilir [9,10,25,31,94]. Burada $G(\eta)$ fonksiyonu $(-1 \leq \eta \leq 1)$ kapalı aralığında sınırlıdır. Yine uygun Gauss-Chebyshev integrasyon formülü [95,96] kullanılarak (177) ve (178) denklemleri,

$$\sum_{i=1}^n W_i \left[\frac{1}{\eta_i - \xi_j} + N(\xi_j, \eta_i) \right] G(\eta_i) = M(\xi_j), \quad (j = 1, \dots, n-1) \quad (191)$$

$$\frac{a}{h} \sum_{i=1}^n W_i G(\eta_i) = 2, \quad (192)$$

şekline indirgenebilir. Bu ifadelerde,

$$W_1 = W_n = \frac{\pi}{2(n-1)}, \quad W_i = \frac{\pi}{n-1}, \quad (i = 2, \dots, n-1) \quad (193)$$

$$\eta_i = \cos\left(\frac{i-1}{n-1}\pi\right), \quad (i = 1, \dots, n) \quad (194)$$

$$\xi_j = \cos\left(\frac{2j-1}{n-1}\frac{\pi}{2}\right), \quad (j = 1, \dots, n-1) \quad (195)$$

olarak verilmektedir. (191) ve (192) ifadelerinden n tane n bilinmeyenli cebrik denklem takımı elde edilir. Bu denklem takımının çözümü sonucunda $G(\eta_i) (i = 1, \dots, n)$ ' ler hesaplanabilir. Hesaplanan bu değerlerin (190) idadesinde yerine konulması ile de $g(\eta)$ boyutsuz temas gerilme yaylışı elde edilmiş olur.

2.3.6. Gerilme ve Yerdeğiştirmelerin Bulunması

Kısım 2.3.3. 'de belirlenmiş olan A_i ve B_i ($i = 1, \dots, 4$) katsayıları ile (177) ve (178) denklemlerinin çözümünden bulunan $p(x)$ temas gerilmesinin kısım 2.3.1' de verilmiş olan gerilme ve yerdeğiştirme ifadelerinde yerlerine konularak çekirdeklerin incelenmesi gerekmektedir. Çünkü gerilme ve yerdeğiştirmelerin doğru olarak hesaplanabilmesi için

gerilme ve yerdeğiştirme çekirdeklerinin yakınsamaları gerekir. Aksi halde integral sınırları doğru olarak belirlenememekte dolayısıyla da gerilme ve yerdeğiştirme ifadelerine ait integraller sağlıklı olarak hesaplanamamaktadır.

Yapılan incelemeler sonucunda 1 nolu tabaka için $y \rightarrow 0$ durumunda ve 2 nolu tabaka için ise $y \rightarrow h$ durumunda $\sigma_x(x,y)$ ve $\sigma_y(x,y)$ normal gerilmelerine ait çekirdeklerde yakınsamanın bozulduğu gözlenmiştir. Diğer durumlarda ise gerilme ve yerdeğiştirmelere ait çekirdeklerin yakınsadığı yani sürekli olarak sıfıra yaklaştıkları belirlenmiştir.

$\sigma_x(x,y)$ ve $\sigma_y(x,y)$ normal gerilmelerine ait çekirdekleri bozan singüler (tekil) terimler araştırıldığında:

1 nolu tabaka için ($y \rightarrow 0, 0 \leq x < \infty, 0 \leq y \leq h_1$):

$$\sigma_{x_1s}(x,y) = \frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} (-1 + \alpha y) e^{-\alpha y} [\cos \alpha(b+x) + \cos \alpha(b-x)] d\alpha \quad (196)$$

$$\sigma_{y_1s}(x,y) = \frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} (-1 - \alpha y) e^{-\alpha y} [\cos \alpha(b+x) + \cos \alpha(b-x)] d\alpha \quad (197)$$

2 nolu tabaka için ($y \rightarrow h, 0 \leq x < \infty, h_1 \leq y \leq h$):

$$\sigma_{x_2s}(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_0^a p(t) dt \int_0^{\infty} [-1 + \alpha(h-y)] e^{-\alpha(h-y)} [\cos \alpha(t+x) + \cos \alpha(t-x)] d\alpha \quad (198)$$

$$\sigma_{y_2s}(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_0^a p(t) dt \int_0^{\infty} [-1 - \alpha(h-y)] e^{-\alpha(h-y)} [\cos \alpha(t+x) + \cos \alpha(t-x)] d\alpha \quad (199)$$

olarak bulunurlar. Bu singüler (tekil) terimlerin kapalı integralleri [93] ise;

1 nolu tabaka için ($0 \leq x < \infty$, $0 \leq y \leq h_1$) :

$$\sigma_{x_1,k}(x,y) = -P y \left\{ \frac{(b+x)^2}{[y^2 + (b+x)^2]^2} + \frac{(b-x)^2}{[y^2 + (b-x)^2]^2} \right\} \quad (200)$$

$$\sigma_{y_1,k}(x,y) = -P y^3 \left\{ \frac{1}{[y^2 + (b+x)^2]^2} + \frac{1}{[y^2 + (b-x)^2]^2} \right\} \quad (201)$$

2 nolu tabaka için ($0 \leq x < \infty$, $h_1 \leq y \leq h$) :

$$\sigma_{x_2,k}(x,y) = -(h-y) \int_0^a \left\{ \frac{(t+x)^2}{[(h-y)^2 + (t+x)^2]^2} + \frac{(t-x)^2}{[(h-y)^2 + (t-x)^2]^2} \right\} p(t) dt \quad (202)$$

$$\sigma_{y_2,k}(x,y) = -(h-y)^3 \int_0^a \left\{ \frac{1}{[(h-y)^2 + (t+x)^2]^2} + \frac{1}{[(h-y)^2 + (t-x)^2]^2} \right\} p(t) dt \quad (203)$$

olarak hesaplanabilirler.

Yakınsamayı bozan (196-199) ifadeleri ile verilen singüler terimlerin normal gerilme ifadelerinden çıkartılarak, bunların yerine (200-203) ifadeleri ile verilen kapalı integrallerinin ilave edilmesi sonucunda gerilme çekirdeklerde meydana gelen bozulmalar giderilmiş olur. Eğer bu işlemler sırasıyla yapılırsa sonuçta $\sigma_x(x,y)$ ve $\sigma_y(x,y)$ normal gerilme ifadeleri aşağıdaki şekilde elde edilmiş olur.

1 nolu tabaka için ($0 \leq x < \infty$, $0 \leq y \leq h_1$) :

$$\sigma_{x_1}^*(x,y) = \sigma_{x_1}(x,y) - \sigma_{x_1,s}(x,y) + \sigma_{x_1,k}(x,y) \quad (204)$$

$$\sigma_{y_1}^*(x,y) = \sigma_{y_1}(x,y) - \sigma_{y_1,s}(x,y) + \sigma_{y_1,k}(x,y) \quad (205)$$

2 nolu tabaka için ($0 \leq x < \infty$, $h_1 \leq y \leq h$) :

$$\sigma_{x_2}^*(x, y) = \sigma_{x_2}(x, y) - \sigma_{x_2,s}(x, y) + \sigma_{x_2,k}(x, y) \quad (206)$$

$$\sigma_{y_2}^*(x, y) = \sigma_{y_2}(x, y) - \sigma_{y_2,s}(x, y) + \sigma_{y_2,k}(x, y) \quad (207)$$

Gerilme ve yerdeğiştirmeleri sayısal olarak hesaplayabilmek için (175) ifadesi ile verilen boyutsuz büyüklükler ile $\omega = \alpha h$ ve $r = h_1 / h$ dönüşümleri kullanılarak ifadelerin boyutsuz hale getirilmesi gerekir. Gerilme ve yerdeğiştirme ifadeleri boyutsuz hale getirildikten sonra Fortran programlama dilinde yazılmış bir bilgisayar programı yardımıyla herhangi bir noktadaki gerilme ve yerdeğiştirmeler hesaplanabilir. Bu çalışmada sadece $\sigma_x(x, y)$ ve $\sigma_y(x, y)$ normal gerilmelerine ait sayısal hesaplamalar yapılmıştır.

2.3.7. İki Elastik Tabaka Arasındaki İlk Ayrılma Yükleri ve İlk Ayrılma Uzaklıkları

İki elastik tabaka arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklığının (noktasının) tayini için ara yüzeydeki $\sigma_y(x, h_1)$ temas gerilmelerinin belirlenmesi gerekmektedir. Temas yüzeyi boyunca $\sigma_y(x, h_1)$ gerilmelerinin belirlenebilmesi için kısım 2.3.2' deki sınır şartları kullanılmalıdır. Bu sınır şartları altında kısım 2.3.3' deki gibi hesaplanmış olan A_i ve B_i ($i = 1, \dots, 4$) katsayılarının (127) veya (132) denklemlerinde yerlerine konulması ve $y = h_1$ alınması durumunda temas yüzeyindeki $\sigma_y(x, h_1)$ normal gerilmesi, kütle kuvvetinin de ilave edilmesi ile;

$$\sigma_y(x, h_1) = -\rho_2 g h_2 - \frac{1}{\pi} \int_0^a k_3(x, t) p(t) dt - \frac{1}{\pi} k_4(x), \quad (0 \leq x < \infty) \quad (208)$$

olarak elde edilir. Bu ifade,

$$k_3(x, t) = \int_0^{\infty} \frac{2}{\Delta^*} e^{-\alpha h} e^{-\alpha h_1} .DB1 \left[e^{-2\alpha h_1} - e^{-2\alpha h} + (\alpha h - \alpha h_1) (e^{-2\alpha h_1} + e^{-2\alpha h}) \right]^* \\ \left[\cos \alpha (t+x) + \cos \alpha (t-x) \right] d\alpha, \quad (209)$$

$$k_4(x) = P \int_0^{\infty} \frac{2}{\Delta^*} \beta e^{\alpha h_1} .DA8 \left[-1 + \alpha h_1 + e^{2\alpha h_1} (1 + \alpha h_1) \right]^* \\ \left[\cos \alpha (b+x) + \cos \alpha (b-x) \right] d\alpha \quad (210)$$

olarak tanımlanmaktadır. (209) ifadesindeki ρ_2 ve g sırasıyla 2 nolu tabakanın yoğunluğunu ve yerçekimi ivmesini göstermektedir.

Simetri nedeniyle $p(t) = p(-t)$ olarak alınır, $\omega = \alpha h$ ve $r = h_1/h$ değişken dönüşümleri yapılırsa temas yüzeyi boyunca $\sigma_y(x, h_1)$ normal gerilmesi,

$$\sigma_y(x, h_1) = -\rho_2 g h_2 - \frac{1}{\pi h} \int_{-a}^a k_3^*(x, t) p(t) dt - \frac{1}{\pi} k_4^*(x), \quad (0 \leq x < \infty) \quad (211)$$

olarak yazılabilir. Burada,

$$k_3^*(x, t) = \int_0^{\infty} \frac{2}{\Delta^*} e^{-\omega} e^{-\omega r} \left[e^{-2\omega r} - e^{-2\omega} + (\omega - \omega r) (e^{-2\omega r} + e^{-2\omega}) \right]^* \\ \left[1 + e^{2\omega r} (-2 - 4\omega^2 r^2 + e^{2\omega r}) \right] \cos \left[\frac{\omega}{h} (t-x) \right] d\omega, \quad (212)$$

$$k_4^*(x) = \frac{P}{h} \int_0^{\infty} \frac{2}{\Delta^*} \beta e^{\omega r} \left[e^{-4\omega r} + e^{-4\omega} - e^{-2\omega} e^{-2\omega r} (2 + 4\omega^2 + 4\omega^2 r^2 - 8\omega^2 r) \right]^* \\ \left[-1 + \omega r + e^{2\omega r} (1 + \omega r) \right] \left[\cos \frac{\omega}{h} (b+x) + \cos \frac{\omega}{h} (b-x) \right] d\omega \quad (213)$$

olarak tanımlanabilir. Kısım 2.3.5' de (175) ifadesi ile tanımlanmış olan boyutsuz büyüklükler (211) denkleminde yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{\sigma_y(x, h_1)}{P/h} = -\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\pi h} \int_{-1}^1 k_3^*(x, a\eta) g(\eta) d\eta - \frac{1}{\pi} k_4^*(x), \quad (0 \leq x < \infty) \quad (214)$$

olarak elde edilir. Burada, λ yük faktörü olup¹,

$$\lambda = \frac{P}{\rho_2 g h h_2} \quad (215)$$

olarak tanımlanmaktadır.

Kısım 2.3.5' de açıklandığı gibi (177) ve (178) denklemlerinin ortak çözümü sonucunda $g(\eta)$ boyutsuz temas gerilmesi hesaplanabilir. Hesaplanan $g(\eta)$ değerlerinin (214) ifadesinde yerine konulması ve Gauss integrasyon formülünün kullanılması ile de iki elastik tabaka arasındaki temas yüzeyi boyunca $\sigma_y(x, h_1) / P / h$ boyutsuz temas gerilmeleri elde edilmiş olur.

(215) ifadesi ile tanımlanmış olan λ yük faktörünün belli bir kritik değere (λ_{cr}) ulaşması halinde iki elastik tabaka arasında ayrılmalar söz konusu olur. Bu nedenle (214) denkleminin geçerli olabilmesi için $\sigma_y(x, h_1)$ temas gerilmesinin temas yüzeyi boyunca her yerde basınç olması gerekir. Bu da ancak $0 \leq \lambda \leq \lambda_{cr}$ olması ile sağlanabilir. $\lambda > \lambda_{cr}$ olması durumunda ise iki elastik tabaka arasında ayrılmalar başlar ve problem süreksiz temas problemine dönüşmüş olur. Dolayısıyla da sürekli temas durumundaki sınır şartları geçersiz olur.

Tabakalar arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklığının belirlenebilmesi için (214) denkleminin sıfıra eşitlenmesi gerekir.

$$-\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\pi h} \int_{-1}^1 k_3^*(x, a\eta) g(\eta) d\eta - \frac{1}{\pi} k_4^*(x) = 0, \quad (0 \leq x < \infty) \quad (216)$$

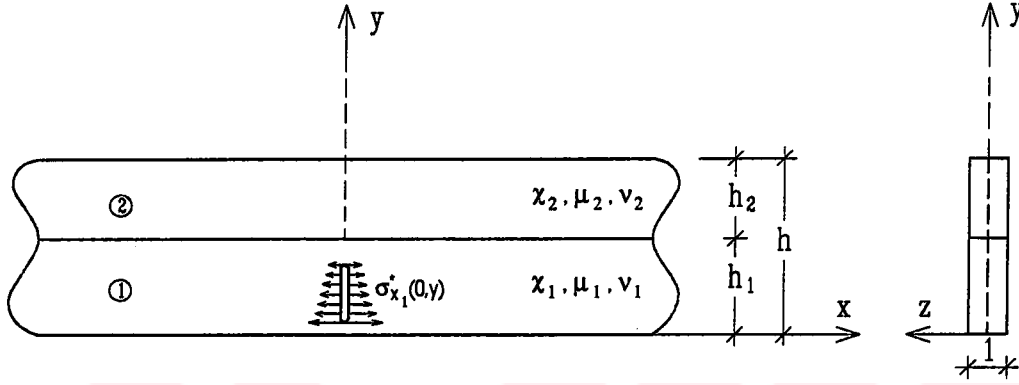
Bu eşitlikten yararlanılarak ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklığı (noktası) birlikte bulunurlar. Bu eşitliği sağlayan x uzaklığı ilk ayrılma noktası (x_{cr}) ve buna karşılık gelen yük faktörü de kritik yük faktörü (λ_{cr}) olarak bulunur. İlk ayrılmayı meydana getiren kritik yük faktörünün¹,

$$\lambda_{cr} = \frac{P_{cr}}{\rho_2 g h h_2} \quad (217)$$

¹ Bundan sonra; yük faktörü yerine kısaca yük, kritik yük faktörü yerine de kritik yük veya ilk ayrılma yükü deyimleri kullanılacaktır.

olduğu açıktır. Bu yük faktöründen daha büyük yük faktörleri için ($\lambda > \lambda_{cr}$) yukarıda belirtildiği gibi tabakalar arasında açılmalar söz konusu olur. Bu durumda problemi süreksiz temas problemi olarak incelemek gerekir.

2.4. Çatlaklı Bileşik Tabakanın İncelenmesi



Şekil 4. Çatlak yüzeyinin, çatlaksız bileşik tabaka çözümünden elde edilen gerilmelerle yüklenmesiyle oluşan çatlaklı bileşik tabaka

Bu kısımda , alt tabakasında y simetri ekseninde düşey bir çatlaklı olan bileşik tabakanın Elastisite teorisine göre çözümü incelenmektedir. Bu halde dış yüklemeler yoktur. Ancak çatlaklı tabakanın çatlak yüzeyinin kısım 2.3' de incelenmiş olan çatlaksız çözümden elde edilen gerilmelere zıt yönde, aynı şiddet ve aynı doğrultuda yüklenmesinden meydana gelecek etkiler gözönüne alınmakta ve çatlak uçlarındaki gerilme şiddet faktörleri incelenmektedir. Söz konusu çatlak, iç çatlak ve kenar çatlak olmak üzere iki şekilde incelenmekte olup çatlak uçlarındaki gerilme şiddet faktörlerinden başka yine her iki hal için çatlak yüzey yerdeğiştirmeleri de incelenmektedir.

2.4.1. Kullanılacak Denklemler

Burada kullanılacak gerilme ve yerdeğiştirme ifadeleri, çatlaklı ve çatlaksız tabakalar için ayrı ayrı yazılmalıdır. Çünkü bileşik tabakada yalnız 1 nolu tabaka çatlak ihtiva etmekte , 2 nolu tabakada ise çatlak bulunmamaktadır. 1 nolu tabakada y simetri ekseninde düşey bir çatlak olduğu için (119-123) denklemlerinden, 2 nolu tabakada ise çatlak olmadığı

için (81-85) denklemlerinden yararlanılarak her iki tabaka için gerilme ve yerdeğiştirme ifadeleri yazılacaktır. Ancak burada kütle kuvvetleri ihmal edildiği için sözkonusu denklemlerden kütle kuvvetlerinin etkisi çıkartılmalıdır.

1 nolu tabakanın kalınlığı h_1 , elastik sabitleri μ_1 ve ν_1 dir. Elastik sabitleri μ_2 ve ν_2 olan 2 nolu tabakanın kalınlığı ise h_2 olarak verilmektedir. Bu elastik sabit ve kalınlıklara göre 1 ve 2 nolu tabakalar için gerilme ve yerdeğiştirme ifadeleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

1 nolu tabaka için ($0 \leq x < \infty$, $0 \leq y \leq h_1$):

$$u_1(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [(C_1 + C_2 y) e^{-\alpha y} + (C_3 + C_4 y) e^{\alpha y}] \sin(\alpha x) d\alpha \\ + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\phi(\xi)}{\xi} \left(\frac{\kappa_1 + 1}{2} + \xi x \right) e^{-\xi x} \cos(\xi y) d\xi \quad (218)$$

$$v_1(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[C_1 + \left(\frac{\kappa_1}{\alpha} + y \right) C_2 \right] e^{-\alpha y} + \left[-C_3 + \left(\frac{\kappa_1}{\alpha} - y \right) C_4 \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha \\ - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\phi(\xi)}{\xi} \left(\frac{\kappa_1 - 1}{2} - \xi x \right) e^{-\xi x} \sin(\xi y) d\xi \quad (219)$$

$$\frac{1}{2\mu_1} \sigma_{x_1}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[\alpha(C_1 + C_2 y) - \frac{3 - \kappa_1}{2} C_2 \right] e^{-\alpha y} \right. \\ \left. + \left[\alpha(C_3 + C_4 y) + \frac{3 - \kappa_1}{2} C_4 \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha \\ - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \phi(\xi) (1 + \xi x) e^{-\xi x} \cos(\xi y) d\xi \quad (220)$$

$$\frac{1}{2\mu_1} \sigma_{y_1}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ - \left[\alpha(C_1 + C_2 y) + \frac{1 + \kappa_1}{2} C_2 \right] e^{-\alpha y} \right. \\ \left. + \left[\alpha(C_3 + C_4 y) - \frac{1 + \kappa_1}{2} C_4 \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha \\ - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \phi(\xi) (1 - \xi x) e^{-\xi x} \cos(\xi y) d\xi \quad (221)$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\mu_1}\tau_{xy_1}(x,y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ -\left[\alpha(C_1 + C_2y) + \frac{\kappa_1 - 1}{2} C_2 \right] e^{-\alpha y} \right. \\
&\quad \left. + \left[\alpha(C_3 + C_4y) - \frac{\kappa_1 - 1}{2} C_4 \right] e^{\alpha y} \right\} \sin(\alpha x) d\alpha \\
&\quad - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \phi(\xi) \xi x e^{-\xi x} \sin(\xi y) d\xi
\end{aligned} \tag{222}$$

2 nolu tabaka için ($0 \leq x < \infty$, $h_1 \leq y \leq h$) :

$$u_2(x,y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[(D_1 + D_2y) e^{-\alpha y} + (D_3 + D_4y) e^{\alpha y} \right] \sin(\alpha x) d\alpha \tag{223}$$

$$\begin{aligned}
v_2(x,y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \left[D_1 + \left(\frac{\kappa_2}{\alpha} + y \right) D_2 \right] e^{-\alpha y} \right. \\
&\quad \left. + \left[-D_3 + \left(\frac{\kappa_2}{\alpha} - y \right) D_4 \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha
\end{aligned} \tag{224}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\mu_2}\sigma_{x_2}(x,y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \left[\alpha(D_1 + D_2y) - \frac{3 - \kappa_2}{2} D_2 \right] e^{-\alpha y} \right. \\
&\quad \left. + \left[\alpha(D_3 + D_4y) + \frac{3 - \kappa_2}{2} D_4 \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha
\end{aligned} \tag{225}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\mu_2}\sigma_{y_2}(x,y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ -\left[\alpha(D_1 + D_2y) + \frac{1 + \kappa_2}{2} D_2 \right] e^{-\alpha y} \right. \\
&\quad \left. + \left[\alpha(D_3 + D_4y) - \frac{1 + \kappa_2}{2} D_4 \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha
\end{aligned} \tag{226}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\mu_2}\tau_{xy_2}(x,y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ -\left[\alpha(D_1 + D_2y) + \frac{\kappa_2 - 1}{2} D_2 \right] e^{-\alpha y} \right. \\
&\quad \left. + \left[\alpha(D_3 + D_4y) - \frac{\kappa_2 - 1}{2} D_4 \right] e^{\alpha y} \right\} \sin(\alpha x) d\alpha
\end{aligned} \tag{227}$$

Yukarıdaki ifadelerde geçen $\phi(\xi)$, C_i ve D_i ($i = 1, \dots, 4$) bilinmeyen fonksiyonları çatlaklı bileşik tabakaya ait sınır şartları sağlatılarak elde edilecektir.

2.4.2. Çatlaklı Bileşik Tabakaya Ait Sınır Şartları

Kütle kuvvetlerinin ve dış yüklerin olmadığı ve sadece alttaki tabakadaki düşey çatlak yüzeyindeki $\sigma_{x_1}^*(0, y)$ normal gerilmelerine maruz bileşik tabakaya ait sınır şartları,

$$\tau_{xy_2}(x, h) = 0, \quad (0 \leq x < \infty) \quad (228)$$

$$\sigma_{y_2}(x, h) = 0, \quad (0 \leq x < \infty) \quad (229)$$

$$\tau_{xy_2}(x, h_1) = 0, \quad (0 \leq x < \infty) \quad (230)$$

$$\tau_{xy_1}(x, h_1) = 0, \quad (0 \leq x < \infty) \quad (231)$$

$$\sigma_{y_2}(x, h_1) = \sigma_{y_1}(x, h_1), \quad (0 \leq x < \infty) \quad (232)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_2(x, h_1) - v_1(x, h_1)] = 0, \quad (0 \leq x < \infty) \quad (233)$$

$$\tau_{xy_1}(x, 0) = 0, \quad (0 \leq x < \infty) \quad (234)$$

$$\sigma_{y_1}(x, 0) = 0, \quad (0 \leq x < \infty) \quad (235)$$

$$\sigma_{x_1}(0, y) = -\sigma_{x_1}^*(0, y), \quad (c < y < d) \quad (236)$$

$$u_1(0, y) = 0, \quad (0 \leq y \leq c, \quad d \leq y \leq h_1) \quad (237)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadelerde, $\sigma_{x_1}^*(0, y)$ 1 nolu tabakaya ait çatlaksız çözümden elde edilen gerilme değerlerini temsil etmektedir. c ve d ise sırasıyla düşey çatlak başlangıç ve bitim uzaklıklarını göstermektedir. (237) ifadesi ile verilen karışık sınır şartı yerine,

$$\frac{\partial u_1(0,y)}{\partial y} = \begin{cases} 0 & ; & 0 \leq y \leq c, \quad d \leq y \leq h_1 \\ G(y) & ; & c < y < d \end{cases}, \quad (238)$$

olarak yazılabilir. Ayrıca $u_1(0,y)$ yerdeğiştirme bileşeninin tek değerli olması için,

$$\int_c^d \frac{\partial u_1(0,y)}{\partial y} dy = 0 \quad (239)$$

olmalıdır.

2.4.3. C_i ve D_i ($i = 1, \dots, 4$) Katsayılarının Belirlenmesi

C_i ve D_i ($i = 1, \dots, 4$) bilinmeyen fonksiyonlarının belirlenebilmesi için öncelikle 1 nolu tabakaya ait gerilme ve yerdeğiştirme ifadelerinde geçen $\phi(\xi)$ ' nin bulunması gerekir. $\phi(\xi)$ ' yi bulabilmek için $\partial u_1(0,y)/\partial y$ oluşturulur ve bu ifade (238) denkleminde uygulanırsa ,

$$G(y) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{\kappa_1 + 1}{2} \right) \phi(\xi) \sin(\xi y) d\xi, \quad (c < y < d) \quad (240)$$

ifadesi elde edilmiş olur. Bu ifadede, her iki tarafın ters Fourier dönüşümü alınır,

$$\phi(\xi) = -\frac{2}{1 + \kappa_1} \int_c^d G(t) \sin(\xi t) dt, \quad (c < t < d) \quad (241)$$

olarak bulunmuş olur.

$\phi(\xi)$ ' nin bu şekilde belirlenmesinden sonra kısım 2.4.1' de (218-227) denklemleri ile verilmiş gerilme ve yerdeğiştirme ifadelerinin (228-235) denklemleri ile verilen sınır şartlarında yerine yazılması ve ters Fourier dönüşüm alınması sonucunda C_i ve D_i ($i = 1, \dots, 4$) bilinmeyen katsayılarını içeren sekiz bilinmeyenli sekiz cebrik denklem elde

edilir. Bu cebrik denklem takımı gerekli ara işlemlerin [60] yapılması sonucunda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} & -2\alpha C_1 - (2\alpha h_1 + \kappa_1 - 1)C_2 + 2\alpha e^{2\alpha h_1} C_3 + (2\alpha h_1 - \kappa_1 + 1)e^{2\alpha h_1} C_4 \\ & = -\frac{2}{\kappa_1 + 1} e^{\alpha h_1} HKS(\alpha) \end{aligned} \quad (242)$$

$$-2\alpha C_1 - (\kappa_1 - 1)C_2 + 2\alpha C_3 - (\kappa_1 - 1)C_4 = 0 \quad (243)$$

$$-2\alpha C_1 - (1 + \kappa_1)C_2 - 2\alpha C_3 + (1 + \kappa_1)C_4 = -\frac{4}{1 + \kappa_1} HMS(\alpha) \quad (244)$$

$$-2\alpha D_1 + (1 - 2\alpha h - \kappa_2)D_2 + 2\alpha e^{2\alpha h} D_3 + (2\alpha h - \kappa_2 + 1)e^{2\alpha h} D_4 = 0 \quad (245)$$

$$-2\alpha D_1 - (2\alpha h_1 + \kappa_2 - 1)D_2 + 2\alpha e^{2\alpha h_1} D_3 + (2\alpha h_1 - \kappa_2 + 1)e^{2\alpha h_1} D_4 = 0 \quad (246)$$

$$-2\alpha D_1 - (1 + 2\alpha h + \kappa_2)D_2 - 2\alpha e^{2\alpha h} D_3 + (1 - 2\alpha h + \kappa_2)e^{2\alpha h} D_4 = 0 \quad (247)$$

$$\begin{aligned} & -2\alpha C_1 - (2\alpha h_1 + \kappa_1 + 1)C_2 - 2\alpha e^{2\alpha h_1} C_3 + (-2\alpha h_1 + \kappa_1 + 1)e^{2\alpha h_1} C_4 + 2\alpha \frac{\mu_2}{\mu_1} D_1 \\ & + (2\alpha h_1 + 1 + \kappa_2) \frac{\mu_2}{\mu_1} D_2 + 2\alpha \frac{\mu_2}{\mu_1} e^{2\alpha h_1} D_3 - (1 + \kappa_2 - 2\alpha h_1) \frac{\mu_2}{\mu_1} e^{2\alpha h_1} D_4 \\ & = -\frac{2}{\kappa_1 + 1} e^{\alpha h_1} HNS(\alpha) \end{aligned} \quad (248)$$

$$\begin{aligned} & C_1 + \left(\frac{\kappa_1}{\alpha} + h_1 \right) C_2 - e^{2\alpha h_1} C_3 + \left(\frac{\kappa_1}{\alpha} - h_1 \right) e^{2\alpha h_1} C_4 - D_1 - \left(\frac{\kappa_2}{\alpha} + h_1 \right) D_2 + e^{2\alpha h_1} D_3 \\ & - \left(\frac{\kappa_2}{\alpha} - h_1 \right) e^{2\alpha h_1} D_4 = \frac{e^{\alpha h_1}}{\kappa_1 + 1} \frac{1}{\alpha} HSS(\alpha) \end{aligned} \quad (249)$$

Bu ifadelerde,

$$HKS(\alpha) = \int_c^d \{ [1 - \alpha(h_1 - t)] e^{-\alpha(h_1 - t)} - [1 - \alpha(h_1 + t)] e^{-\alpha(h_1 + t)} \} G(t) dt \quad (250)$$

$$HMS(\alpha) = \int_c^d \alpha t e^{-\alpha t} G(t) dt \quad (251)$$

$$HNS(\alpha) = \int_c^d \left[\alpha(h_1 + t) e^{-\alpha(h_1 + t)} - \alpha(h_1 - t) e^{-\alpha(h_1 - t)} \right] G(t) dt \quad (252)$$

$$HSS(\alpha) = \int_c^d \left\{ \left[\frac{1 - \kappa_1}{2} - \alpha(h_1 - t) \right] e^{-\alpha(h_1 - t)} - \left[\frac{1 - \kappa_1}{2} - \alpha(h_1 + t) \right] e^{-\alpha(h_1 + t)} \right\} G(t) dt \quad (253)$$

olarak tanımlanmaktadır. Yukarıdaki denklem takımının çözümü ile C_i ve D_i ($i = 1, \dots, 4$) bilinmeyen katsayıları oldukça uzun ara işlemler sonucunda α ve t 'nin fonksiyonu olarak bulunurlar. Bu katsayılar,

$$\begin{aligned} \alpha C_1 = & 2 \frac{e^{\alpha h_1}}{1 + \kappa_1} \left\{ (1 + \kappa_2) \cdot DA7 \left\{ HKS(\alpha) \left[1 + \kappa_1 + 2\alpha h_1 + e^{2\alpha h_1} (-1 - \kappa_1 + 2\alpha h_1 \kappa_1) \right] \right. \right. \\ & + HNS(\alpha) \left[1 - \kappa_1 - 2\alpha h_1 - e^{2\alpha h_1} (1 - \kappa_1 - 2\alpha h_1 \kappa_1) \right] - 2 e^{\alpha h_1} HMS(\alpha) \left[(1 - \kappa_1) DA6 \right. \\ & \left. \left. + 4\alpha^2 h_1^2 \right] \right\} - 2 \frac{\mu_2}{\mu_1} DA8 \left\{ HKS(\alpha) \left[2\alpha h_1 + 2\kappa_1 + e^{2\alpha h_1} (1 + \kappa_1^2 - 2\alpha h_1 \kappa_1) \right] \right. \\ & + HSS(\alpha) \left[(1 - \kappa_1) \cdot DA2 - 2\alpha h_1 (1 - \kappa_1 e^{2\alpha h_1}) \right] + e^{\alpha h_1} HMS(\alpha) \left[(1 - \kappa_1^2) DA2 \right. \\ & \left. \left. - 4\alpha h_1 (1 + \kappa_1) \right] \right\} / \Delta \quad (254) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2 = & 4 \frac{e^{\alpha h_1}}{1 + \kappa_1} \left\{ (1 + \kappa_2) \cdot DA7 \left\{ HKS(\alpha) \left[-1 + e^{2\alpha h_1} (1 - 2\alpha h_1) \right] - 2 e^{\alpha h_1} DA6 \cdot HMS(\alpha) \right. \right. \\ & \left. \left. + HNS(\alpha) \cdot DA9 \right\} + 2 \frac{\mu_2}{\mu_1} DA8 \left\{ HKS(\alpha) \left[1 + e^{2\alpha h_1} (\kappa_1 - 2\alpha h_1) \right] \right. \right. \\ & \left. \left. - (1 + \kappa_1) e^{\alpha h_1} DA2 \cdot HMS(\alpha) - DA9 \cdot HSS(\alpha) \right\} \right\} / \Delta \quad (255) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha C_3 = & \frac{2}{1+\kappa_1} \left\{ (1+\kappa_2) \cdot DA7 \left[e^{\alpha h_1} HKS(\alpha) \left[(1+\kappa_1) \cdot DA2 + 2\alpha h_1 (\kappa_1 + e^{2\alpha h_1}) \right] \right. \right. \\
& + 2HMS(\alpha) \left[(1-\kappa_1) \cdot DA9 - 4\alpha^2 h_1^2 e^{2\alpha h_1} \right] + e^{\alpha h_1} HNS(\alpha) \left[(\kappa_1 - 1) \cdot DA2 \right. \\
& \left. \left. + 2\alpha h_1 (e^{2\alpha h_1} - \kappa_1) \right] \right\} - 2 \frac{\mu_2}{\mu_1} DA8 \left\{ e^{\alpha h_1} HKS(\alpha) \left[1 + \kappa_1 (\kappa_1 + 2\alpha h_1) \right. \right. \\
& \left. \left. - (2\alpha h_1 - 2\kappa_1) e^{2\alpha h_1} \right] + HMS(\alpha) \left[(1-\kappa_1^2) \cdot DA2 - 4\alpha h_1 (1+\kappa_1) e^{2\alpha h_1} \right] \right. \\
& \left. \left. + e^{\alpha h_1} HSS(\alpha) \left[2\alpha h_1 (e^{2\alpha h_1} - \kappa_1) - (1-\kappa_1) \cdot DA2 \right] \right\} / \Delta \quad (256)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_4 = & \frac{4}{1+\kappa_1} \left\{ (1+\kappa_2) \cdot DA7 \left[e^{\alpha h_1} HKS(\alpha) (DA2 + 2\alpha h_1) + e^{\alpha h_1} HNS(\alpha) \cdot DA6 \right. \right. \\
& \left. \left. - 2HMS(\alpha) \cdot DA9 \right] - 2 \frac{\mu_2}{\mu_1} DA8 \left[e^{\alpha h_1} HKS(\alpha) (\kappa_1 + 2\alpha h_1 + e^{2\alpha h_1}) + e^{\alpha h_1} HSS(\alpha) DA6 \right. \right. \\
& \left. \left. - (1+\kappa_1) \cdot DA2 \cdot HMS(\alpha) \right] \right\} / \Delta \quad (257)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha D_1 = & 2 \frac{e^{-\alpha h_1}}{1+\kappa_1} DHKN(\alpha) \left\{ (1-\kappa_2) \left[e^{-2\alpha h_1} + e^{-2\alpha h} (2\alpha h - 1) \right] + 2\alpha h_1 \left[-e^{-2\alpha h_1} \right. \right. \\
& \left. \left. + e^{-2\alpha h} (\kappa_2 + 2\alpha h) \right] - 4\alpha^2 h^2 e^{-2\alpha h} \right\} / \Delta \quad (258)
\end{aligned}$$

$$D_2 = -4 \frac{e^{-\alpha h_1}}{1+\kappa_1} DHKN(\alpha) \left[-e^{-2\alpha h_1} + e^{-2\alpha h} (1 - 2\alpha h + 2\alpha h_1) \right] / \Delta \quad (259)$$

$$\begin{aligned}
\alpha D_3 = & \frac{2}{1+\kappa_1} e^{-2\alpha h} e^{-\alpha h_1} DHKN(\alpha) \left[(1-\kappa_2) \cdot DB9 + 2\alpha h \cdot DB10 \right. \\
& \left. + 2\alpha h_1 (e^{-2\alpha h} - \kappa_2 e^{-2\alpha h_1}) \right] / \Delta \quad (260)
\end{aligned}$$

$$D_4 = -\frac{4}{1+\kappa_1} e^{-2\alpha h} e^{-\alpha h_1} DHKN(\alpha) \left[e^{-2\alpha h} + e^{-2\alpha h_1} (-1 - 2\alpha h + 2\alpha h_1) \right] / \Delta \quad (261)$$

olarak tanımlanmaktadır. Yukarıdaki ifadelerde,

$$DHKN(\alpha) = DD1 + DD2 + DD3 + DD4$$

$$DD1 = HKS(\alpha) \left\{ (1 - \kappa_1) \left[1 - e^{2\alpha h_1} (2 - e^{2\alpha h_1}) \right] - 8\alpha^2 h_1^2 e^{2\alpha h_1} \right\}$$

$$DD2 = HNS(\alpha) (1 + \kappa_1) \left[1 - e^{2\alpha h_1} (4\alpha h_1 + e^{2\alpha h_1}) \right]$$

$$DD3 = 4(1 + \kappa_1) e^{\alpha h_1} HMS(\alpha) \left[-1 + \alpha h_1 + e^{2\alpha h_1} (1 + \alpha h_1) \right]$$

$$DD4 = 2 HSS(\alpha) \left[-1 + e^{2\alpha h_1} (2 + 4\alpha^2 h_1^2 - e^{2\alpha h_1}) \right]$$

şeklinde verilmektedir. Yine yukarıdaki denklemlerde olup da burada tanımlanmayan ifadeler kısım 2.3.3 ' de verilmişlerdir.

2.4.4. İntegral Denklemin Elde Edilmesi

İntegral denklemini elde edebilmek için (236) denklemini ile verilmiş olan karışık sınır şartı kullanılacaktır. Söz konusu bu sınır şartı açık olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{x_1}(0, y)}{2\mu_1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \left[\alpha(C_1 + C_2 y) - \frac{3 - \kappa_1}{2} C_2 \right] e^{-\alpha y} \right. \\ &\quad \left. + \left[\alpha(C_3 + C_4 y) + \frac{3 - \kappa_1}{2} C_4 \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha \\ &\quad - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \phi(\xi) (1 + \xi x) e^{-\xi x} \cos(\xi y) d\xi = -\frac{1}{2\mu_1} \sigma_{x_1}^*(0, y) \quad (262) \end{aligned}$$

Bu ifadede geçen C_i ($i = 1, \dots, 4$) ve $\phi(\xi)$ bilinmeyenleri kısım 2.4.3' de daha önce hesaplanmıştı. Yukarıdaki denklemdeki ikinci integral ifadede, $\phi(\xi)$ ' nin yerine yazılması ve gerekli düzenlemelerin yapılması sonucunda,

$$\begin{aligned} &-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \phi(\xi) (1 + \xi x) e^{-\xi x} \cos(\xi y) d\xi \\ &= \frac{2}{\pi(1 + \kappa_1)} \int_c^d \left[\frac{1}{t - y} + \frac{1}{t + y} \right] G(t) dt \quad (263) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. C_i ($i = 1, \dots, 4$) katsayılarının (262) denklemindeki birinci integral ifadede yerine yazılması ve oldukça uzun ara işlemlerin yapılması sonucunda da,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[\alpha(C_1 + C_2 y) - \frac{3 - \kappa_1}{2} C_2 \right] e^{-\alpha y} + \left[\alpha(C_3 + C_4 y) + \frac{3 - \kappa_1}{2} C_4 \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha \\ = \frac{2}{\pi(1 + \kappa_1)} \int_c^d \left[\int_0^{\infty} k_5(y, t, \alpha) d\alpha \right] G(t) dt \end{aligned} \quad (264)$$

şeklinde bulunmuş olur. Bu ifadede geçen $k_5(y, t, \alpha)$ çekirdeği,

$$\begin{aligned} k_5(y, t, \alpha) = \frac{1}{\Delta^*} \left\{ e^{-\alpha(t+y)} \left\{ -DA7 \cdot \left\{ (1 - e^{2\alpha t}) \left\{ 2 \left[1 - e^{2\alpha h_1} (1 - 2\alpha h_1 + 3\alpha^2 h_1^2) \right] \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \alpha y \left[-1 + e^{2\alpha h_1} (1 - 2\alpha h_1 + 4\alpha^2 h_1^2) \right] \right\} + \alpha t \left[-1 - e^{2\alpha t} - e^{2\alpha h_1} (1 - e^{2\alpha t} - 2e^{2\alpha h_1}) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - 2\alpha h_1 e^{2\alpha h_1} (1 + 3e^{2\alpha t} - 2\alpha h_1) + 2\alpha y e^{2\alpha h_1} (1 - e^{2\alpha h_1} + 2\alpha h_1 e^{2\alpha t}) \right] \right\} \right. \\ \left. + \beta \cdot DA8 \left\{ (1 - e^{2\alpha t}) \left\{ 2 \left[1 + e^{2\alpha h_1} (1 - 3\alpha h_1) \right] + \alpha y \left[-1 + e^{2\alpha h_1} (-1 + 4\alpha h_1) \right] \right\} \right. \right. \\ \left. \left. + \alpha t \left[-1 - e^{2\alpha t} - e^{2\alpha h_1} (1 + 2e^{2\alpha h_1} + 3e^{2\alpha t} - 4\alpha h_1) + 2\alpha y e^{2\alpha h_1} (e^{2\alpha t} + e^{2\alpha h_1}) \right] \right\} \right\} \\ - e^{-\alpha(t-y)} \left\{ -DA7 \cdot \left\{ (1 - e^{2\alpha t}) \left\{ 2 \left[-1 + e^{2\alpha h_1} (1 - 2\alpha h_1 + \alpha^2 h_1^2) \right] \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \alpha y \left[-1 + e^{2\alpha h_1} (1 - 2\alpha h_1) \right] \right\} + \alpha t \left\{ (1 - e^{2\alpha h_1}) (1 + 3e^{2\alpha t}) + 2\alpha h_1 e^{2\alpha h_1} (3 + e^{2\alpha t} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - 2\alpha h_1) + 2\alpha y \left[e^{2\alpha t} - e^{2\alpha h_1} (e^{2\alpha t} - 2\alpha h_1) \right] \right\} \right\} + \beta \cdot DA8 \left\{ (1 - e^{2\alpha t}) \left\{ 2 \left[e^{2\alpha h_1} (\alpha h_1 - 1) \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - 1 \right] - \alpha y (1 + e^{2\alpha h_1}) \right\} + \alpha t \left[1 + 3e^{2\alpha t} + e^{2\alpha h_1} (3 + e^{2\alpha t} - 4\alpha h_1) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + 2\alpha y (e^{2\alpha h_1} + e^{2\alpha t}) \right] \right\} \right\} \end{aligned} \quad (265)$$

olarak tanımlanmaktadır. (263) ve (264) ifadeleri (262) denkleminde yerine konular ve gerekli düzenlemeler yapılırsa, singüler integral denklem ,

$$\int_c^d \left[\frac{1}{t-y} + k_5^*(y, t) \right] G(t) dt = -\frac{1 + \kappa_1}{4\mu_1} \pi \sigma_{x_1}^*(0, y), \quad (c < y < d) \quad (266)$$

şeklinde bulunmuş olur. Bu ifadede,

$$k_5^*(y, t) = \frac{1}{t+y} + \int_0^\infty k_5(y, t, \alpha) d\alpha \quad (267)$$

olarak tanımlanmaktadır. Diğer taraftan (238) ve (239) denklemlerinden faydalanılarak uygunluk şartı,

$$\int_c^d G(t) dt = 0 \quad (268)$$

olarak yazılabilir. (266) ifadesi ile verilmiş olan singüler integral denklemde $k_5^*(y, t)$; integral denklemin Fredholm çekirdeği olup, $0 < c < d < h_1$ olmak üzere $c \leq (y, t) \leq d$ kapalı aralığında sınırlı ve süreklidir.

Çatlak yüzeyindeki $\sigma_{x_1}^*(0, y)$ normal gerilmeleri bilindiğinden (266) ifadesi ile verilmiş olan singüler integral denklem (268) ifadesi ile verilen uygunluk bağıntısı ile birlikte çözülerek $G(t)$ bilinmeyenini bulunabilir. Buradan hareket etmek suretiyle de çatlak uçlarındaki gerilme şiddet faktörleri ve çatlak yüzey yerdeğiştirmeleri hesaplanabilir.

2.4.5. İntegral Denklemin Sayısal Çözümü

Alt tabakasında y simetri eksenini üzerinde düşey bir çatlak bulunan bileşik tabakaya ait çatlak problemi iç çatlak ve kenar çatlak olmak üzere iki şekilde incelenebilir. Bu durumda (266) ifadesi ile verilmiş olan singüler integral denklemi bu iki hal için ayrı ayrı çözmek gerekmektedir.

2.4.5.1. İç Çatlak Halinde İntegral Denklemin Sayısal Çözümü

İç çatlak olması durumunda integral denklemin çekirdeği $c \leq (y, t) \leq d$ kapalı aralığında sonlu kalmaktadır ($0 < c < d < h_1$). Bu durumda integral denklem belli sayısal yöntemlerle [50, 63, 66, 71] çözülebilir. Bu amaçla (266) integral denkleminin integral aralığını normalize etmek için aşağıdaki değişken dönüşümleri yapılırsa ,

$$t = \frac{d-c}{2} \zeta + \frac{d+c}{2} \quad (269)$$

$$y = \frac{d-c}{2} \eta + \frac{d+c}{2} \quad (270)$$

ve daha önce yapıldığı gibi $\alpha = \omega h$ ve $r = h_1 / h$ dönüşümleri kullanılırsa ,

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\zeta - \eta} + H(\eta, \zeta) \right] \Phi(\zeta) d\zeta = -\frac{h}{P} \pi \sigma_{x_1}^*(0, \eta), \quad (-1 < \eta < 1) \quad (271)$$

olarak elde edilir. Bu ifadede,

$$H(\eta, \zeta) = \frac{d-c}{2} k_s^* \left(\frac{d-c}{2} \eta + \frac{d+c}{2}, \frac{d-c}{2} \zeta + \frac{d+c}{2} \right) \quad (272)$$

ve

$$\Phi(\zeta) = G \left[\frac{d-c}{2} \zeta + \frac{d+c}{2} \right] \frac{4\mu_1}{1+\kappa_1} \frac{h}{P} \quad (273)$$

olarak tanımlanmaktadır. Aynı değişken dönüşümlerinin kullanılması ile (268) yan şartı,

$$\int_{-1}^1 \Phi(\zeta) d\zeta = 0 \quad (274)$$

şeklini alır. (271) integral denkleminin çözümü $-1 < \zeta < 1$ aralığında Hölder sürekliliğine haiz bir fonksiyon olmak üzere ,

$$\Phi(\zeta) = g(\zeta) (1 - \zeta^2)^{-1/2} \quad (275)$$

şeklinde aranabilir [94]. Burada, $g(\zeta)$ fonksiyonu $(-1 \leq \zeta \leq 1)$ kapalı aralığında sınırlıdır.

(271) ve (274) denklemlerine [95,96]' de verilen uygun Gauss-Chebyshev integrasyon formülü uygulanırsa,

$$\sum_{i=1}^n W_i \left[\frac{1}{\zeta_i - \eta_k} + H(\eta_k, \zeta_i) \right] g(\zeta_i) = -\frac{h}{P} \sigma_{x_1}^*(0, \eta_k), \quad (k = 1, \dots, n-1) \quad (276)$$

$$\pi \sum_{i=1}^n W_i g(\zeta_i) = 0 \quad (277)$$

cebirsel denklem takımına indirgenebilir. Burada,

$$\zeta_i = \cos \left[\frac{2i-1}{2n} \pi \right], \quad W_i = \frac{1}{n}, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (278)$$

$$\eta_k = \cos \left[\frac{k\pi}{n} \right], \quad (k = 1, \dots, n-1) \quad (279)$$

olup, (276) ve (277) denklem takımının çözümünden $g(\zeta_i)$ ($i = 1, \dots, n$) bilinmeyenleri bulunurlar.

2.4.5.2. Kenar Çatlak Halinde İntegral Denklemin Çözümü

Kenar çatlak halinde yani $c = 0$ alınarak çatlak kenara taşınırsa iç çatlak halindeki rahat çözüm imkanı ortadan kalkmaktadır. y ve t , $c = 0$ uç noktasına yaklaştıkça çekirdek singüler kısmı dolayısıyla yakınsamamaktadır. Ayrıca kenar çatlak halinde n nokta sayısına göre de yakınsama iyi olmamaktadır. Yani alınacak n nokta sayısını artırmak gerekmektedir.

İntegral denklemin çekirdeğindeki sözkonusu yakınsamama durumunun ortadan kaldırılması gerekir. Zira çekirdeğin yakınsamaması durumunda sayısal integrasyon işlemi sağlıklı bir şekilde yapılamaz. İntegral denklemin çekirdeğindeki yakınsamayı bozan bu singüler terim araştırıldığında;

$$k_{ss}^*(y, t) = \int_0^{\infty} (-2\alpha t + 2\alpha^2 t y) e^{-\alpha(t+y)} d\alpha \quad (280)$$

olarak elde edilmektedir. Bu terimin kapalı integrali [93] ise ;

$$k_{sk}^*(y, t) = -\frac{2}{t+y} + \frac{6y}{(t+y)^2} - \frac{4y^2}{(t+y)^3} \quad (281)$$

şeklinde hesaplanabilir. Yakınsamayı bozan singüler terim çekirdekten çıkartılır ve kapalı integrali ilave edilirse çekirdeğin değeri değişmez. Ancak sözkonusu yakınsamama problemi bu şekilde ortadan kalkmış olur. Bu işlemler yapıldığında integral denklemin çekirdeği,

$$k_s^{**}(y, t) = k_s^*(y, t) - k_{ss}^*(y, t) + k_{sk}^*(y, t) \quad (282)$$

şekline dönüşmüş olur. Bu yapılan işlemin doğruluğu sayısal olarak tespit edilmiştir.

$c = 0$ alınarak çatlak kenara taşınır ve çekirdekteki yakınsamama problemi yukarıda açıklanan şekilde ortadan kaldırılırsa, (266) integral denklemi;

$$\int_0^d \left[\frac{1}{t-y} + k_s^{**}(y, t) \right] G(t) dt = -\frac{1+\kappa_1}{4\mu_1} \pi \sigma_{x_1}^*(0, y), \quad (0 \leq y < d) \quad (283)$$

şeklinde yazılabilir. Çatlağın kenara açıldığı noktada integral denklemde $y = t = 0$ için bazı terimlerin sonsuza gittiği görülmektedir. İntegral denklemdeki sözkonusu bu terimlere genelleştirilmiş Cauchy çekirdekleri adı verilmektedir.

Kenar çatlak probleminin çözümü için [63] ve [66]' da verilen yol izlenecektir. Bu yöntemde esas amaç integral denklemde bilinmeyen olan $\Phi(\zeta)$ ve çekirdeğin singüler kısmı dahil ζ ' nin bir çift fonksiyonu olarak $-1 < \zeta < 1$ aralığına uzatarak yaklaşık bir çözüm elde etmektir.

Bu amaçla integral aralığını normalize etmek için aşağıdaki değişken dönüşümleri yapılır,

$$t = \zeta d, \quad y = \eta d \quad (284)$$

ve yukarıda sözü edilen uzanım şekli düşünülürse, [63] ve [66]' da verilen yol izlenerek bilinmeyen fonksiyon da,

$$\Phi(\zeta) = g(\zeta)(1 - \zeta^2)^{-1/2} \quad (285)$$

olarak yazılırsa, (283) integral denklemi aşağıdaki şekle dönüşmüş olur.

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{\zeta - \eta} + R(\eta, \zeta) \right] \Phi(\zeta) d\zeta = -\frac{h}{P} \pi \sigma_{x_1}^*(0, \eta), \quad (0 < \eta < 1) \quad (286)$$

Bu ifadedeki $\Phi(\zeta)$ boyutsuz büyüklüğü (273) ifadesinde verilmekte olup,

$$R(\eta, \zeta) = d k_s^{**} \left(\frac{d-c}{2} \eta + \frac{d+c}{2}, \frac{d-c}{2} \zeta + \frac{d+c}{2} \right) \quad (287)$$

olarak tanımlanmaktadır. Yukarıda sözü edilen yöntemin tam olarak uygulanabilmesi için $\zeta = 0$ için $\Omega(\eta, \zeta)$ çekirdeğinin sıfır olması gerektiği unutulmamalıdır. Burada,

$$\Omega(\eta, \zeta) = \frac{1}{\zeta - \eta} + R(\eta, \zeta) \quad (288)$$

olarak tanımlanabilir. (286) denkleminde [95,96]' da verilen uygun Gauss-Chebyshev integrasyon formülü uygulanırsa,

$$\sum_{i=1}^n W_i \left[\frac{1}{\zeta_i - \eta_k} + R(\eta_k, \zeta_i) \right] g(\zeta_i) = -\frac{h}{P} \pi \sigma_{x_1}^*(0, \eta_k), \quad (k = 1, \dots, n) \quad (289)$$

cebirsel denklem takımı elde edilir. Burada,

$$\zeta_i = \cos \left[\frac{2i-1}{4n+2} \pi \right], \quad W_i = \frac{1}{2n+1}, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (290)$$

$$\eta_k = \cos \left[\frac{k\pi}{2n+1} \right], \quad (k = 1, \dots, n) \quad (291)$$

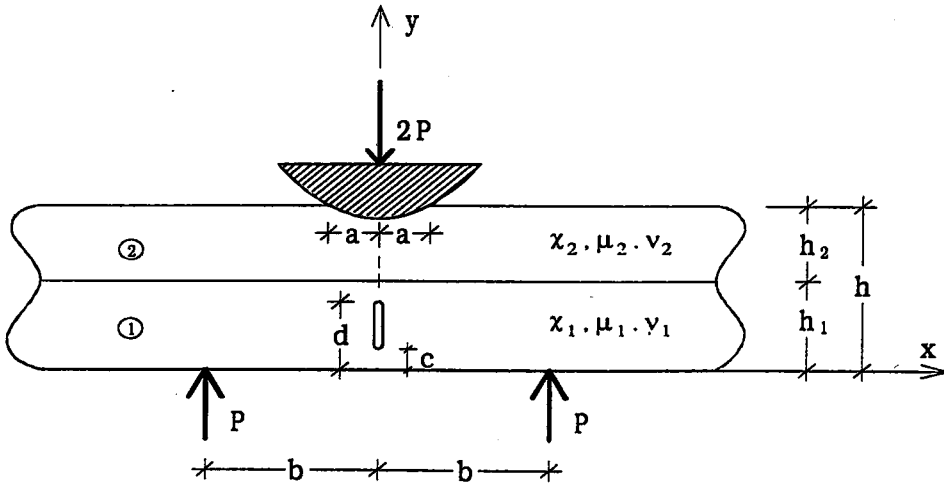
olarak tanımlanmaktadır. (289) ifadesi ile verilmiş olan denklem takımının çözümü sonucunda $g(\zeta_i)$ ($i = 1, \dots, n$) bilinmeyenleri bulunabilir.

Gerek iç çatlak ve gerekse kenar çatlak durumlarının her ikisinde de $\omega = \alpha h$ ve $r = h_1 / h$ değişken dönüşümü uygulanması ile bütün uzunluk boyutundaki büyüklükler h ile bölünmüş olur. $k_s(y, t)$ çekirdeğinin ω ve r integrasyon değişkeni cinsinden alacakları şekil uzun ifadeleri içerdiğinden, tekrar yazılmalarından kaçınılmıştır.

2.4.6. Çatlak Uçlarındaki Gerilme Şiddet Faktörleri

Çatlakların malzeme içerisinde ilerlemeye başlayıp başlamadığını tespit etmek için kullanılan kriterlerin en önemlisi gerilme şiddet faktörüdür. Bununla malzeme içindeki çatlakın ilerlemeye başlayacağı kritik yükü bulmak mümkün olmaktadır. Bu kısımda, hesaplanmak istenen büyüklükler olan gerilme şiddet faktörlerinin tanımı ve kısım 2.4.5 'deki denklem sistemlerinin çözümünden elde edilen bilinmeyenlerin uç noktadaki değerlerine bağlı olarak ifadeler verilmektedir. Sözkonusu bu ifadeler, iç ve kenar çatlak halleri için ayrı ayrı tanımlanmaktadır.

2.4.6.1. İç Çatlak Halinde Gerilme Şiddet Faktörleri



Şekil 5. Alt tabakasında iç çatlaklı olan ve rijit bir blok aracılığı ile yüklenen bileşik tabaka

Şekil 5' deki iç çatlak durumunda çatlak uçlarındaki gerilme şiddet faktörleri, çatlağın c ve d ucu için aşağıdaki limit değerlerle ifade edilebilir [50, 63, 66, 71].

$$k(c) = \lim_{y \rightarrow c} \sqrt{2(c-y)} \sigma_{x_1}(0, y) = \lim_{y \rightarrow c} \frac{4\mu_1}{1+\kappa_1} \sqrt{2(y-c)} G(y) \quad (292)$$

$$k(d) = \lim_{y \rightarrow d} \sqrt{2(y-d)} \sigma_{x_1}(0, y) = -\lim_{y \rightarrow d} \frac{4\mu_1}{1+\kappa_1} \sqrt{2(d-y)} G(y) \quad (293)$$

Bu tanımdan hareketle çatlak uçlarındaki gerilme şiddet faktörlerinin [60] ve [69]' da gösterildiği gibi $g(\zeta_i)$ ($i = 1, \dots, n$)' lerin uç noktalarındaki $g(-1)$ ve $g(1)$ değerleri ile orantılı olduğu düşünülürse,

$$k(c) = g(-1) \sqrt{\frac{d-c}{2}} \frac{P}{h} \quad (294)$$

$$k(d) = -g(1) \sqrt{\frac{d-c}{2}} \frac{P}{h} \quad (295)$$

$k(c)$ ve $k(d)$ ' yi veren ifadeler olarak bulunurlar. Uç noktalarındaki $g(-1)$ ve $g(1)$ değerleri de [97] çalışmasında ispatlandığı gibi ;

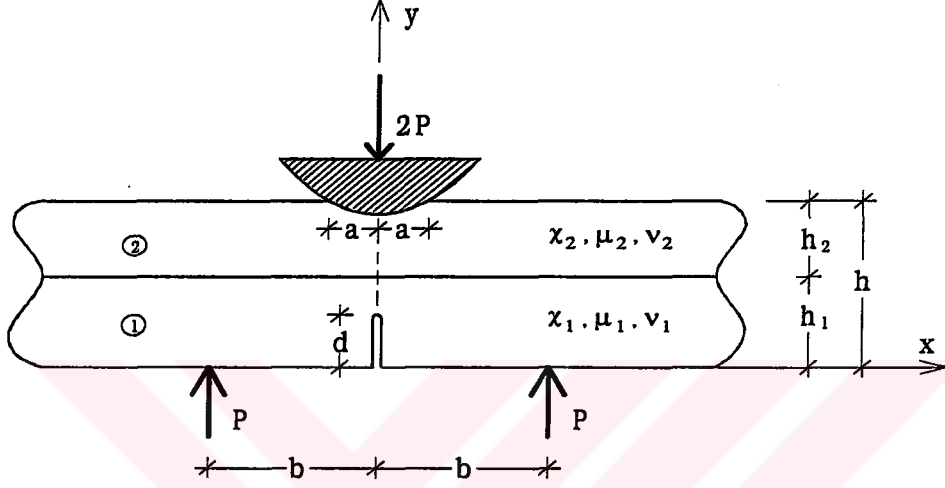
$$g(1) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\sin\left[\frac{2n-1}{4n}(2j-1)\pi\right]}{\sin\left[\frac{2j-1}{4n}\pi\right]} g(\zeta_j) \quad (296)$$

ve

$$g(-1) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\sin\left[\frac{2n-1}{4n}(2j-1)\pi\right]}{\sin\left[\frac{2j-1}{4n}\pi\right]} g(\zeta_{n+1-j}) \quad (297)$$

şeklinde hesaplanabileceklerdir. Burada, n Gauss-Chebyshev integrasyonunda alınacak nokta sayısını göstermekte olup, iç çatlak olması durumunda $n=10$ almak [69] yeterli olmaktadır.

2.4.6.2. Kenar Çatlak Halinde Gerilme Şiddet Faktörleri



Şekil 6. Alt tabakasında kenar çatlaklı olan ve rijit bir blok aracılığı ile yüklenen bileşik tabaka

Şekil 6' daki kenar çatlak durumunda çatlakın d ucundaki gerilme şiddet faktörü iç çatlak halinde verilmiş olan (293) ifadesi ile tanımlanabilir. İç çatlak halinde olduğu gibi çatlakın d ucundaki gerilme şiddet faktörü de $g(1)$ değeri ile orantılı olup [69],

$$k(d) = -g(1) \sqrt{d} \frac{P}{h} \quad (298)$$

şeklinde tanımlanabilir. Çatlak ucundaki gerilme şiddet faktörünü belirlemek için gerekli olan $g(1)$ değeri $g(\zeta_j)$ ($j = 1, \dots, n$)' lere bağlı olarak aşağıdaki gibi tanımlanabilir [97].

$$g(1) = \frac{2}{2n+1} \sum_{j=1}^n \cot \left[\frac{2j-1}{4n+2} \pi \right] \cdot \sin \left[\frac{n}{2n+1} (2j-1) \pi \right] g(\zeta_j) \quad (299)$$

Kenar çatlak olması durumunda daha önce belirtildiği gibi n nokta sayısına göre de yakınsama iyi olmamaktadır. Bu nedenle n nokta sayısının artırılması gerekmektedir. Ancak n nokta sayısının artırılması durumunda da yapılan sayısal hesaplamalarda yakınsama oldukça yavaş olduğundan, gerilme şiddet faktörünün hesabında [63] ve [67]' de olduğu gibi üç nokta extrapolasyonu kullanmak uygun olmaktadır.

Üç nokta extrapolasyonunda, çatlakın d ucundaki gerilme şiddeti faktörü $1/n$ ' nin fonksiyonu olarak düşünülürse,

$$k(d) = A\left(\frac{1}{n}\right)^2 + B\left(\frac{1}{n}\right) + C \quad (300)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade $n \rightarrow \infty$ olması durumunda,

$$k(d) = C \quad (301)$$

olarak elde edilir. Eğer $n = 9, 12$ ve 18 olmak üzere üç değer seçilir ve (300) ifadesinde yerine yazılırsa, üç bilinmeyenli üç denklem elde edilir. Bu denklem takımının çözümü sonunda ;

$$C = 6k_{18} - 8k_{12} + 3k_9 \quad (302)$$

olarak bulunur. Bu ifade (301) denkleminde yerine yazıldığında çatlakın d ucundaki gerilme şiddeti faktörü üç nokta extrapolasyonu yardımıyla,

$$k_{\infty}(d) = 6k_{18} - 8k_{12} + 3k_9 \quad (303)$$

şeklinde bulunmuş olur. Burada, alt indisler n nokta sayısını göstermektedir.

2.4.7. Çatlak Yüzey Yerdeğiştirmeleri

Çatlaklı bileşik tabakaya ait belirlenmesi gereken diğer bir büyüklükte çatlak yüzey yerdeğiştirmeleridir. Çatlak yüzey yerdeğiştirmeleri de gerilme Şiddet faktörlerinin hesabında olduğu gibi iç ve kenar çatlak durumları için ayrı ayrı incelenecektir.

2.4.7.1. İç Çatlak Halinde Çatlak Yüzey Yerdeğiştirmeleri

Şekil 5' deki iç çatlak haline ait çatlak yüzey yerdeğiştirmeleri (238) ifadesinden faydalanılarak [66], [71] ve [80]' de gösterildiği gibi,

$$u_1(0, y) = \int_c^y G(t) dt, \quad (c < t < d) \quad (304)$$

ifadesi ile hesaplanabilir. Bu ifadedeki integral aralığını normalize etmek için kısım 2.4.5.1' deki (269) ve (273) ifadeleri ile verilen değişken dönüşümü kullanılırsa,

$$\frac{4\mu_1}{1+\kappa_1} \frac{u_1(0, y)}{P} = \frac{d-c}{2h} \int_{-1}^{\eta} \Phi(\zeta) d\zeta, \quad (-1 < \eta < 1) \quad (305)$$

ifadesi elde edilmiş olur. Burada,

$$\eta = \frac{2y}{d-c} - \frac{d+c}{d-c} \quad (306)$$

olarak tanımlanmaktadır. Uygun Gauss-Chebyshev integrasyon formülü [95, 96] kullanılarak (275) ifadesinin de gözönünde bulundurulması ile (305) denklemi aşağıdaki hale indirgenebilir [17, 24].

$$\frac{4\mu_1}{1+\kappa_1} \frac{u_1(0, y)}{P} = \frac{d-c}{2h} \sum_{k=1}^j \frac{\pi}{n} g(\zeta_k), \quad (j = 1, \dots, n) \quad (307)$$

Bu ifadede,

$$\zeta_k = \cos \left[\frac{2k-1}{2n} \pi \right], \quad (k = 1, \dots, n) \quad (308)$$

şeklinde tanımlanmıştır. (307) ifadesindeki $g(\zeta_k)$ ($k = 1, \dots, n$) değerleri daha önceden hesaplanmış olduğu için, bu ifadenin çözümünden iç çatlak haline ait çatlak yüzey yerdeğiştirmeleri hesaplanabilir.

2.4.7.2. Kenar Çatlak Halinde Çatlak Yüzey Yerdeğiştirmeleri

Kenar çatlak haline ait yüzey yerdeğiştirmeleri $0 < y < d$ olmak üzere iç çatlak haline benzer şekilde,

$$u_1(0, y) = - \int_y^d G(t) dt, \quad (0 \leq t < d) \quad (309)$$

ifadesi yardımıyla hesaplanabilir [66]. Bu ifadedeki integral aralığını normalize etmek için kısım 2.4.5.2' deki (284) ve (273) ifadeleri ile verilen değişken dönüşümleri kullanılırsa,

$$\frac{4\mu_1}{1+\kappa_1} \frac{u_1(0, y)}{P} = - \frac{d}{h} \int_\eta^1 \Phi(\zeta) d\zeta, \quad (0 < \eta < 1) \quad (310)$$

ifadesi bulunmuş olur. Uygun Gauss-Chebyshev integrasyon formülü [95,96] kullanılması ve (285) ifadesinin de dikkate alınması ile (310) denklemi,

$$\frac{4\mu_1}{1+\kappa_1} \frac{u_1(0, y)}{P} = - \frac{d}{h} \sum_{j=1}^k \frac{\pi}{2n+1} g(\zeta_j), \quad (k = 1, \dots, n) \quad (311)$$

şekline indirgenebilir [17]. Bu ifadede,

$$\zeta_j = \cos \left[\frac{2j-1}{4n+2} \pi \right], \quad (j = 1, \dots, n) \quad (312)$$

olarak tanımlanmaktadır. Daha önce belirlenmiş olan $g(\zeta_j)$ ($j = 1, \dots, n$) değerlerinin (311) ifadesinde yerlerine yazılması ile kenar çatlak haline ait çatlak yüzey yerdeğiştirmeleri hesaplanabilir. Yukarıda uygulanan yöntemde $\Phi(\zeta)$ fonksiyonu ζ ' nın bir çift fonksiyonu olarak $-1 < \zeta < 1$ aralığına uzatılarak kullanılmıştır.

3. BULGULAR VE İRDELEME

3.1. Giriş

Bu bölümde, bir önceki bölümde verilmiş olan formülasyondan faydalanılarak sözkonusu problem eğri ve düz (dikdörtgen) yüzeyli rijit blok profilleri için sayısal olarak çözülmektedir. Tabaka kalınlıkları, mesnet genişliği, rijit bloğun yarıçapı ve temas alanının bileşik tabakanın toplam yüksekliğine oranlarına ve tabakaların elastik sabitlerinin oranlarına değişik sayısal değerler verilerek sözü edilen bu boyutsuz büyüklüklerin; temas gerilmeleri, normal gerilmeler, tabakalar arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklığı, çatlak uçlarındaki gerilme şiddet faktörü ve çatlak yüzey yerdeğiştirmeleri üzerindeki etkileri sırasıyla incelenmektedir. Ayrıca yine bu bölümde, sayısal uygulamalardan elde edilen grafikler ve tablolar verilmekte ve bunlara ait bulgular tartışılmaktadır.

Tablo ve grafiklerde sıkça geçen bazı boyutsuz büyüklükler daha önceki bölümlerde ilk geçtikleri yerde tanımlanmış olmakla birlikte, toplu olarak bir kez daha aşağıda verilmektedirler:

a/h : Rijit blok ile bileşik tabaka arasındaki yarı temas uzunluğunun bileşik tabakanın toplam yüksekliğine oranı (temas alanı).

b/h : Mesnet genişliğinin yarı uzunluğunun bileşik tabakanın toplam yüksekliğine oranı (mesnet genişliği).

$\beta = \frac{1 + \kappa_1}{1 + \kappa_2} \frac{\mu_2}{\mu_1}$: Tabakaların elastik sabitlerinin birbirine oranı.

h_1/h : 1 nolu tabakanın kalınlığının bileşik tabakanın toplam yüksekliğine oranı.

R/h : Dairesel rijit blok yarıçapının bileşik tabakanın toplam yüksekliğine oranı.

$\mathfrak{R} = \frac{1 + \kappa_2}{\mu_2} \frac{P}{h}$: Dış yük ve 2 nolu tabakanın elastik sabitlerine bağlı oran (yük oranı).

c/h : Çatlağın başlangıç uzaklığının bileşik tabakanın toplam yüksekliğine oranı.

d/h : Çatlağın bitim uzaklığının bileşik tabakanın toplam yüksekliğine oranı.

$k(c)$: Çatlağın c ucundaki gerilme şiddet faktörü.

$k(d)$: Çatlağın d ucundaki gerilme şiddet faktörü.

3.2. Temas Yüzeyleri (Alanları) ve Temas Gerilmeleri

Bu kısımda, rijit blok profilinin düz (keskin kenarlı dikdörtgen blok) olması halinde yalnız temas gerilmeleri, eğri yüzeyli olması halinde ise hem temas yüzeyleri ve hem de temas gerilmeleri birlikte incelenmektedir.

3.2.1. Eğri Yüzeyli Rijit Blok Hali

Eğri yüzeyli blok profili hali incelenirken, blok profili dairesel ve parabolik olmak üzere iki kısımda ele alınmaktadır. Gerek dairesel ve gerekse de parabolik blok profilleri durumunda kısım 2.3.5.1 ve 2.3.5.2' de verilen ifadelerden faydalanılarak (177) ifadesi ile verilmiş olan integral denklem (178) denklemiyle birlikte çözülerek temas yüzeyleri ve temas gerilmeleri elde edilmiştir.

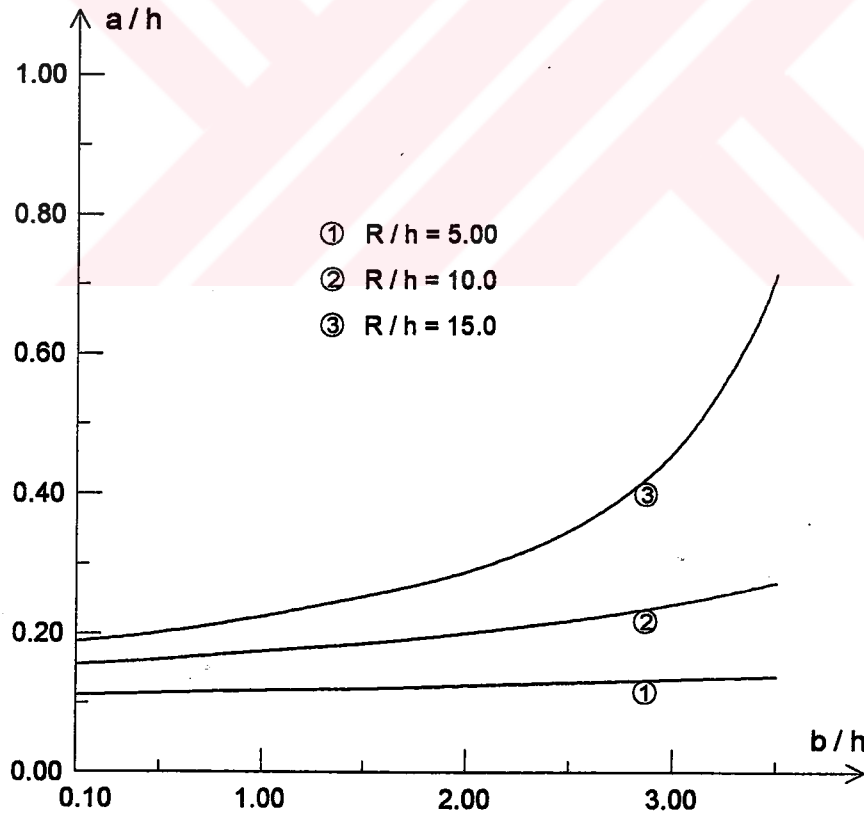
3.2.1.1. Dairesel Rijit Blok Hali

Bu durumda, gerek temas yüzeyi ve gerekse temas gerilme yayılımı çeşitli boyutsuz büyükler ve daha önce (180) ifadesiyle verilmiş olan blok profili için incelenmektedir.

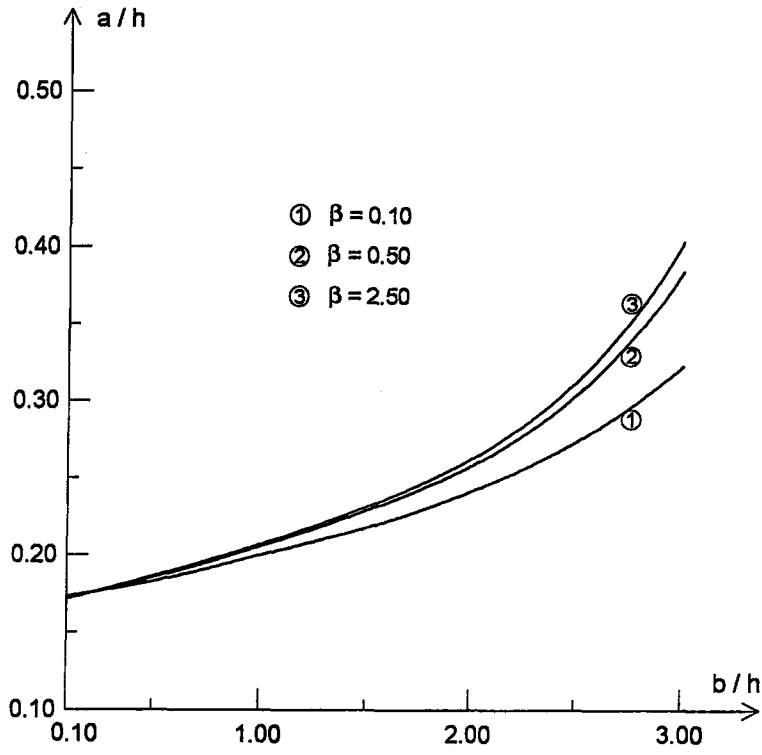
Tablo 1. Dairesel blok durumunda, çeşitli yük oranı (\mathfrak{R}) değerleri için temas yüzeylerinin mesnet genişliği ile değişimi
($\beta = 0.10$, $h_1 / h = 0.20$, $R / h = 10$)

b / h	a / h		
	$\mathfrak{R} = 0.001$	$\mathfrak{R} = 0.008$	$\mathfrak{R} = 0.01$
0.10	0.056252	0.155912	0.173337
0.50	0.056564	0.162722	0.182754
1.00	0.057013	0.174364	0.199673
1.50	0.057384	0.188495	0.221062
2.00	0.057755	0.199765	0.240564
2.50	0.058137	0.217369	0.272942
3.00	0.058524	0.240354	0.322018
3.50	0.058917	0.272131	0.407709
4.00	0.059315	0.319987	0.592777

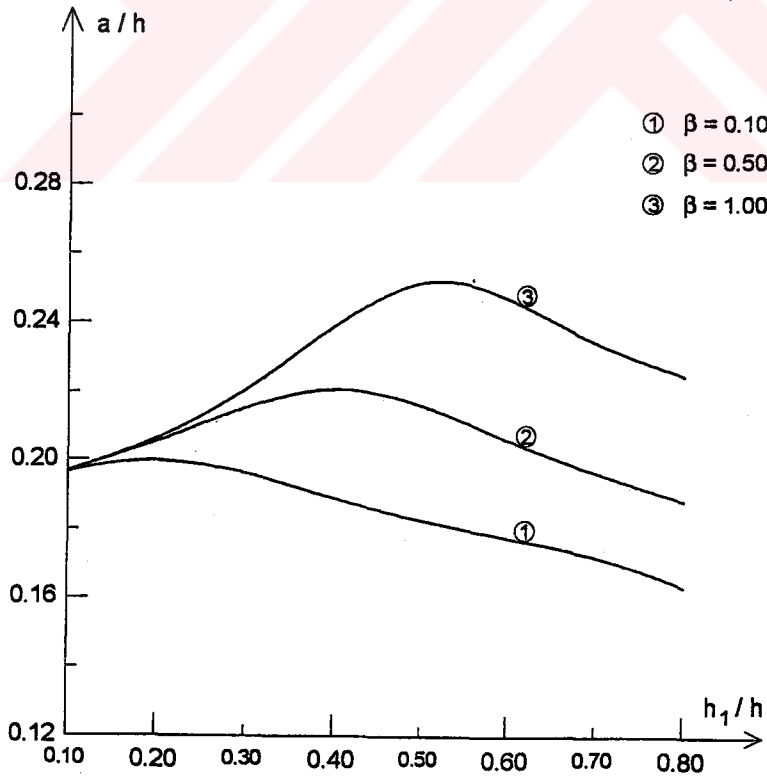
Şekil 7' de rijit blok yarıçapının çeşitli değerleri için temas yüzeyinin (alanının) mesnet genişliği ile değişimi görülmektedir. Temas yüzeyi, beklenildiği gibi hem blok yarıçapının ve hem de mesnet genişliğinin artmasıyla büyümektedir. Ayrıca tabakaların elastik sabitlerinin oranı olan β ' nin çeşitli değerleri için yine temas yüzeyinin mesnet genişliği ile değişimini gösteren şekil 8' de, β ' nin büyümesi durumunda temas yüzeyleri de artmaktadır. Burada β ' nin büyümesi demek, alttaki elastik tabakanın rijitliğinin azalması ya da üstteki tabakanın rijitliğinin artması anlamına gelmektedir. Altındaki tabakanın rijitliğinin azalması ya da yükün artması durumunda temas yüzeyleri büyümektedir. Şekil 9' da da yine bu sonuç doğrulanmakta ve temas yüzeyinin tabaka kalınlıkları ile değişimi görülmektedir. Bu şekilde, maksimum temas yüzeylerinin $\beta = 0.10$ için $h_1 / h \cong 0.20$, $\beta = 0.50$ için $h_1 / h \cong 0.40$ ve $\beta = 1.00$ için $h_1 / h \cong 0.55$ oldukları dikkat çekmektedir. Çeşitli yük oranı değerleri için temas yüzeylerinin mesnet genişlikleri ile değişimleri tablo 1' de verilmektedir. Tablolarda görüldüğü gibi, yük oranı artınca temas yüzeyleri de büyümektedir.



Şekil 7. Dairesel bloğun yarıçapına bağlı olarak temas yüzeylerinin mesnet genişliği ile değişimi ($\beta = 0.10$, $h_1 / h = 0.20$, $\mathcal{R} = 0.008$)



Şekil 8. Dairesel blok durumunda, elastik sabitlerin oranına bağlı olarak temas yüzeylerinin mesnet genişliği ile değişimi ($R/h = 10$, $h_1/h = 0.20$, $\mathfrak{R} = 0.01$)

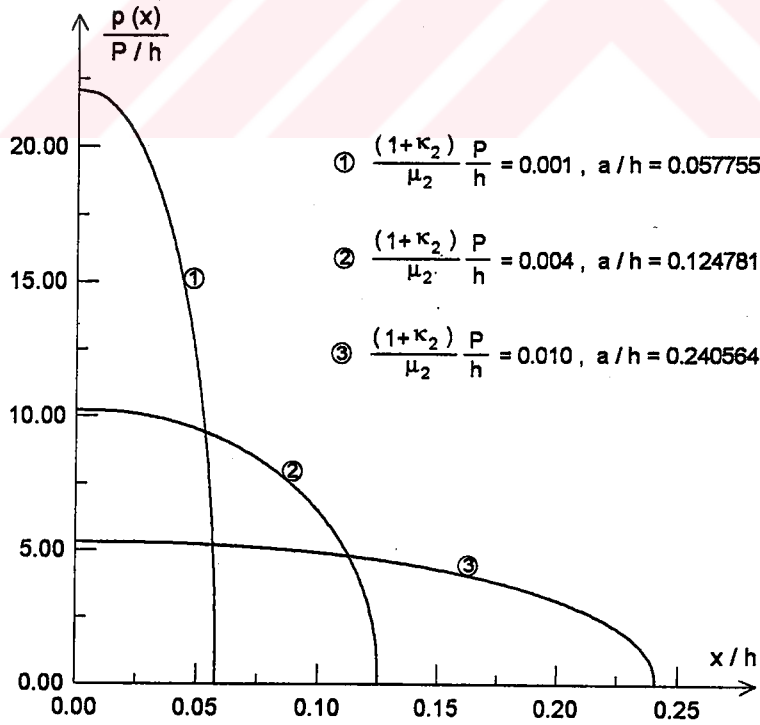


Şekil 9. Dairesel blok durumunda, elastik sabitlerin oranına bağlı olarak temas yüzeylerinin tabaka kalınlıkları ile değişimi ($b/h = 1.0$, $R/h = 10$, $\mathfrak{R} = 0.01$)

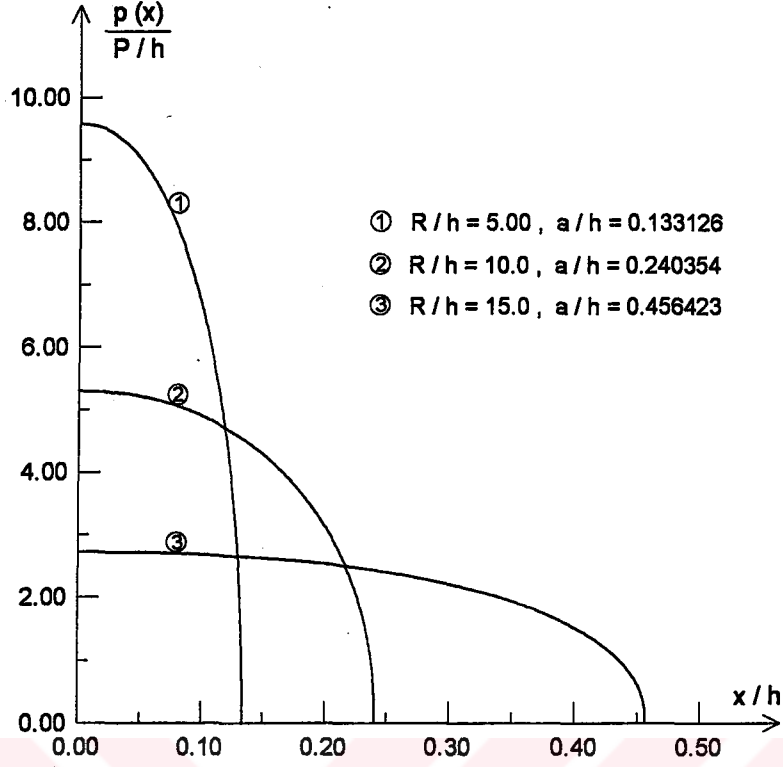
Şekil 10, 11 ve 12' de çeşitli yarıçap, mesnet genişliği ve yük oranı (\mathcal{R}) değerleri için blok altındaki boyutsuz temas gerilme yayılışları verilmektedir. Şekillerden görülebileceği gibi temas yüzeyleri büyüdükçe yük daha geniş bir alana yayıldığından temas gerilmeleri azalmaktadır. Temas gerilmelerinin en büyük değeri $x = 0$ simetri eksenini üzerinde meydana gelmekte ve buradan uzaklaştıkça rijit bloğun eğriliğine benzer bir değişimle azalarak temasın sona erdiği $x = a$ noktasında sıfır olmaktadır. Daha önce de bahsedildiği gibi; blok yarıçapının, yük oranının ve mesnet genişliğinin artmasıyla temas yüzeyleri de büyümekte ve dolayısıyla temas gerilmeleri azalmaktadır. Boyutsuz temas gerilmeleri hernekadar dış yükten (P) bağımsız gibi gözükse de, gerçekte temas gerilmeleri dış yükün artmasıyla büyümektedir. Zira grafiklerde $\frac{p(x)}{P/h}$ oranı ele alınmakta, dolayısıyla gerçek temas gerilmesi olan $p(x)$, P/h oranının büyümesiyle artmaktadır. Temas gerilmeleri ile ilgili verilen grafiklerde (şekillerde),

$$p(x) = -\sigma_{y_2}(x, h), \quad (0 \leq x \leq a),$$

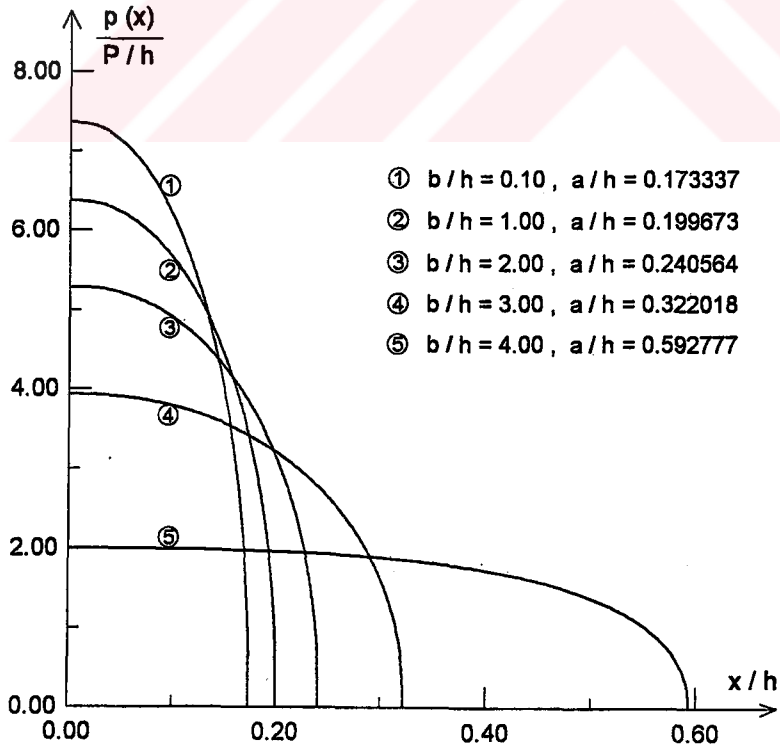
olduğuna dikkat edilmelidir.



Şekil 10. Dairesel blok durumunda, çeşitli yük oranı (\mathcal{R}) değerleri için blok altındaki temas gerilme yayılışı ($b/h = 2.0, h_1/h = 0.20, \beta = 0.10, R/h = 10$)



Şekil 11. Dairesel blok durumunda, çeşitli yarıçap değerleri için blok altındaki temas gerilme yayılımı ($b/h = 3.0$, $h_1/h = 0.20$, $\beta = 0.10$, $\mathfrak{R} = 0.008$)



Şekil 12. Dairesel blok durumunda, çeşitli mesnet genişliği değerleri için blok altındaki temas gerilme yayılımı ($R/h = 10$, $h_1/h = 0.20$, $\beta = 0.10$, $\mathfrak{R} = 0.01$)

3.2.1.2. Parabolik Rijit Blok Hali

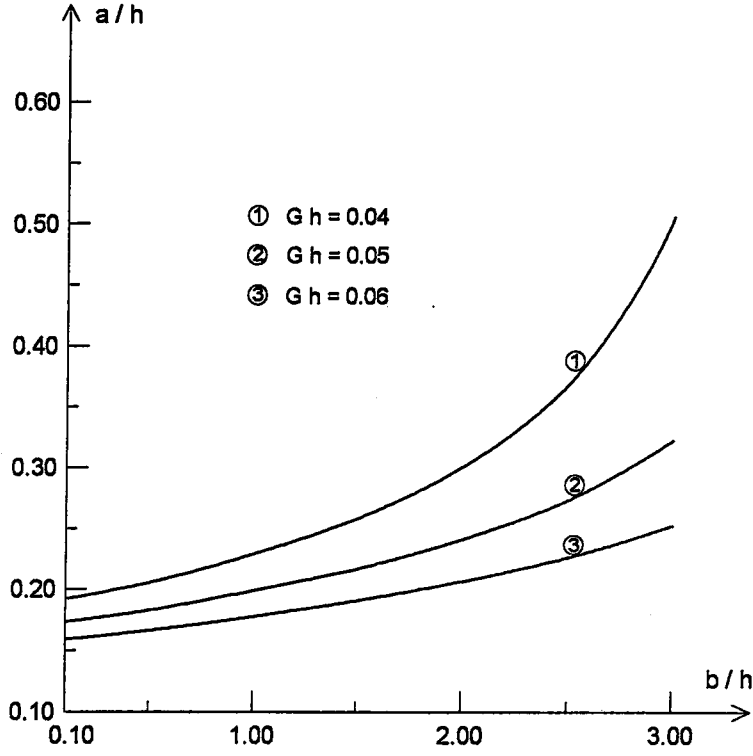
Bu durumda temas yüzeyi (alanı) ve boyutsuz temas gerilme yayılımı parabolün eğrilik yarıçapı ile ilgili bir terim olan Gh' nın çeşitli değerleri için incelenmektedir.

Şekil 13' de Gh' nın çeşitli değerleri için temas yüzeyinin mesnet genişliği ile değişimi verilmektedir. Temas yüzeyi, dairesel blok halinde olduğu gibi mesnet genişliğinin artmasıyla büyümektedir. Gh değeri azaldıkça temas yüzeyi büyümekte ve dolayısıyla da temas gerilmeleri azalmaktadır. Çeşitli Gh değerleri için blok altındaki boyutsuz temas gerilme yayılışları şekil 14' de görülmektedir. Yine Gh' nın aynı değerleri için hesaplanan temas yüzeyleri tablo 2' de verilmektedir.

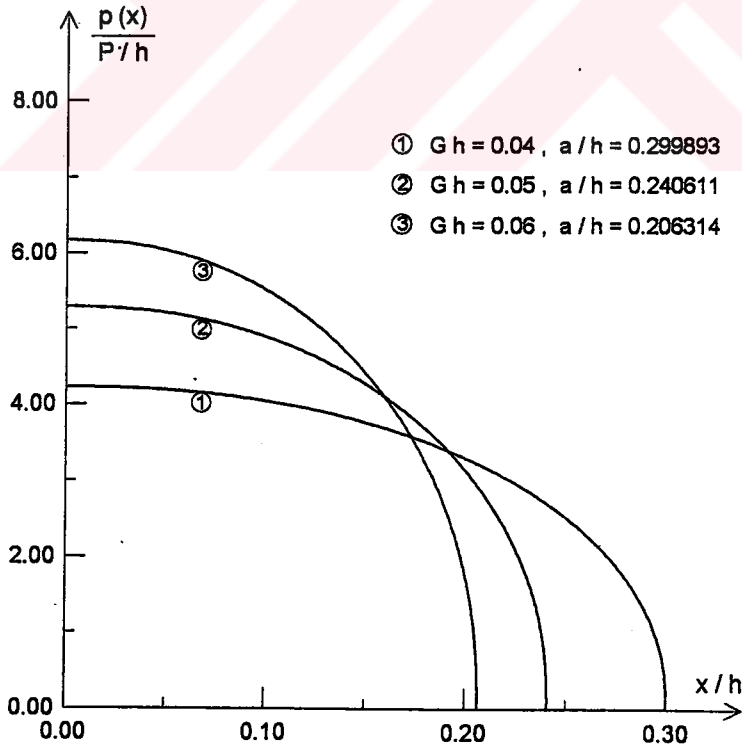
Şekil 10 ve 14 dikkatle incelendiğinde parabolik blok durumunda $Gh = 0.05$ için elde edilen temas yüzeyi ve temas gerilmeleri, dairesel blok durumunda $R/h = 10$ için elde edilen temas yüzeyi ve temas gerilmeleri ile birbirine çok yakın değerler aldığı görülmektedir. Bu sonuç, tablo 1 ve 2' nin birlikte incelenmesiyle daha açık bir şekilde görülebilir.

Tablo 2. Parabolik blok durumunda, çeşitli Gh değerleri için temas yüzeylerinin mesnet genişliği ile değişimi ($\beta = 0.10$, $h_1/h = 0.20$, $\mathcal{R} = 0.01$)

b / h	a / h		
	G h = 0.04	G h = 0.05	G h = 0.06
0.10	0.192471	0.173346	0.158984
0.50	0.205457	0.182766	0.166214
1.00	0.230299	0.199692	0.178675
1.50	0.263816	0.221092	0.193893
2.00	0.299893	0.240611	0.206314
2.50	0.368322	0.273030	0.225865
3.00	0.505469	0.322215	0.251945
3.50	0.826707	0.408323	0.289158
4.00	1.304529	0.596032	0.348080



Şekil 13. Parabolik blok durumunda, çeşitli Gh değerleri için temas yüzeylerinin mesnet genişliği ile değişimi ($\beta = 0.10$, $h_1/h = 0.20$, $\mathfrak{R} = 0.01$)

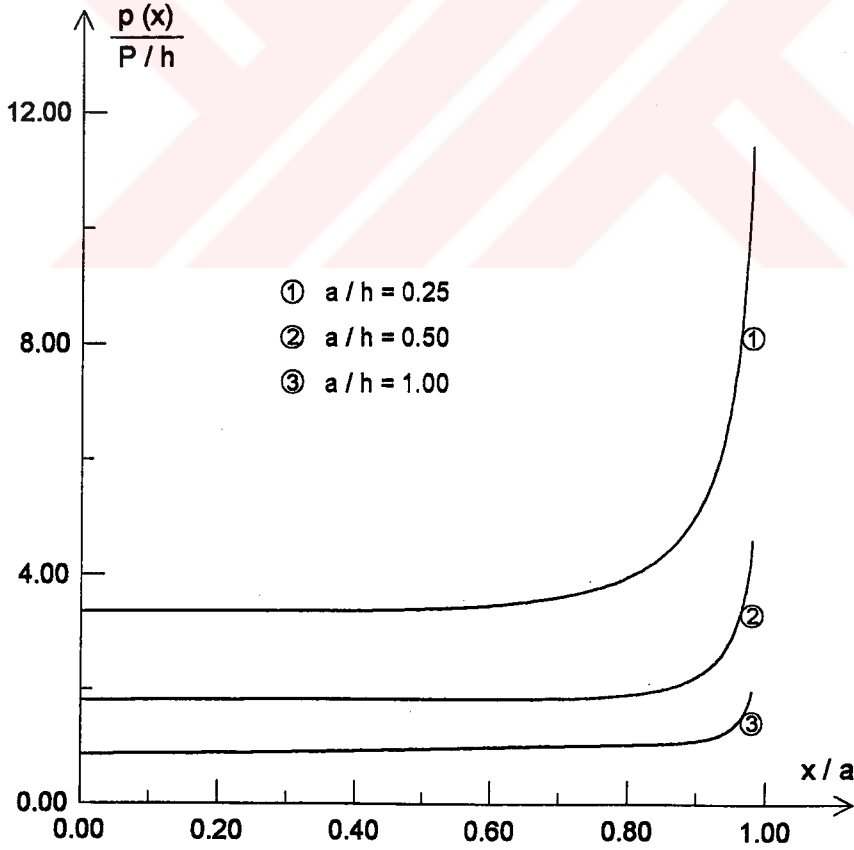


Şekil 14. Parabolik blok durumunda, çeşitli Gh değerleri için blok altındaki temas gerilme yayılımı ($\beta = 0.10$, $h_1/h = 0.20$, $\mathfrak{R} = 0.01$, $b/h = 2.0$)

3.2.2. Düz Yüzeyle (Dikdörtgen) Rijit Blok Hali

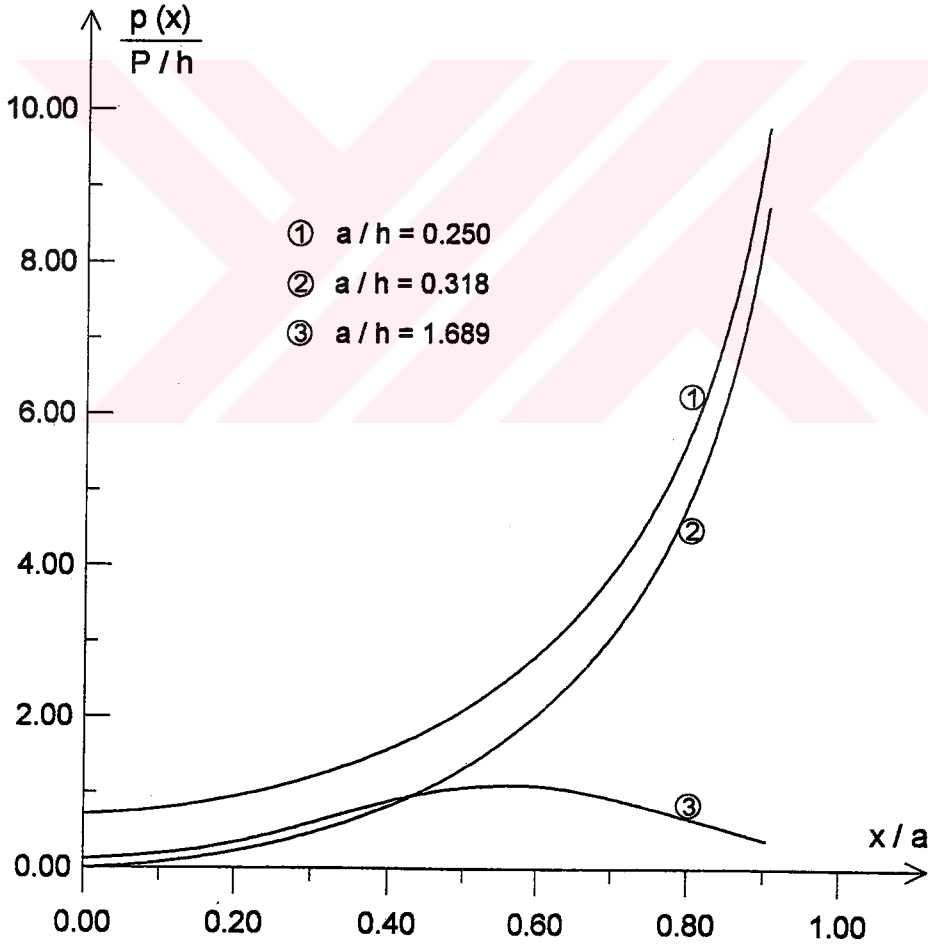
Rijit blok profilinin düz yüzeyle olması nedeniyle burada bilinmeyen sadece temas gerilmeleridir. Kısım 2.3.5.3' de verilmiş olan ifadelerden yararlanılarak (177) integral denklemi (178) ifadesiyle birlikte çözülerek blok altındaki temas gerilmeleri hesaplanmıştır.

Şekil 15-19' da çeşitli tabaka kalınlıkları, blok ve mesnet genişliği ve elastik sabitlerin oranları için blok altındaki temas gerilme yayılışları verilmektedir. Şekillerden de görülebileceği gibi temas gerilmeleri bloğun kenarlarında sonsuza gitmekte, $x = 0$ simetri eksenine yaklaştıkça düzgün bir şekilde azalmaktadır. Bu durum beklenen bir sonuçtur. Zira integral denklem incelendiğinde bloğun kenarlarının gerilme için singüler noktalar olduğu görülebilir. Eğrisel blok halinde olduğu gibi temas yüzeyinin (blok genişliği) artması durumunda temas gerilmeleri azalmakta, tersi durumunda da artmakta olduğu şekil 15' de görülmektedir.

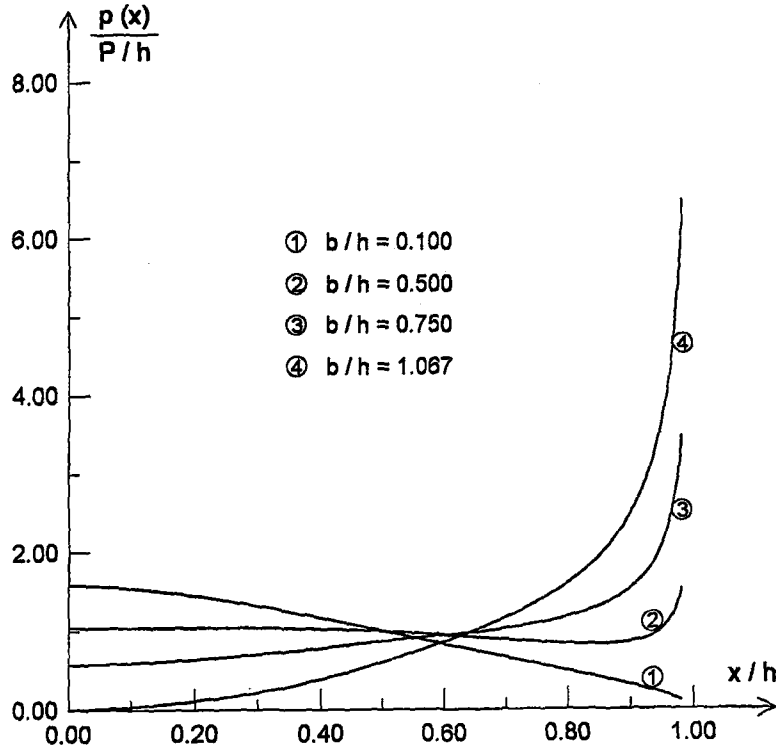


Şekil 15. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli a/h değerleri için blok altındaki temas gerilme yayılışı ($\beta = 0.01$, $b/h = 1.0$, $h_1/h = 0.80$)

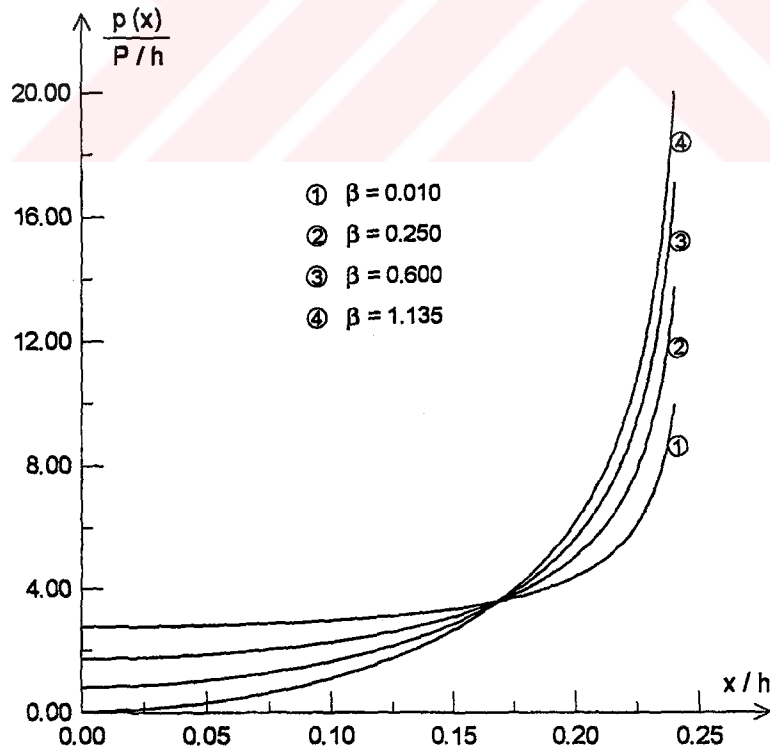
Diğer taraftan şekil 16 ve 17' de olduğu gibi temas yüzeyi (blok genişliği) ve mesnet genişliğinin her ikisinin artması ya da temas yüzeyinin artıp mesnet genişliğinin azalması durumlarında blok ile bileşik tabaka arasında ayrılmalar meydana gelmektedir. Söz konusu bu ayrılmalar, blok genişliğinin mesnet genişliğinden küçük olması durumunda $x = 0$ simetri ekseninden ve blok genişliğinin mesnet genişliğinden büyük olması durumunda da $x = a$ ucundan başlamak üzere meydana gelmektedir. Blok ile bileşik tabaka arasında ayrılma meydana getiren bir başka durum da alttaki elastik tabakanın rijitliğinin üstteki tabakaya göre azalmasıdır (şekil 18). Bir başka deyişle, alttaki tabaka üstteki tabakaya göre yumuşadıkça; blok ile bileşik tabaka arasında $x = 0$ simetri ekseninden başlamak üzere ayrılmalar meydana gelmektedir.



Şekil 16. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli a/h değerleri için blok altındaki temas gerilme yayılımı ($\beta = 1.00$, $b/h = 1.0$, $h_1/h = 0.70$)

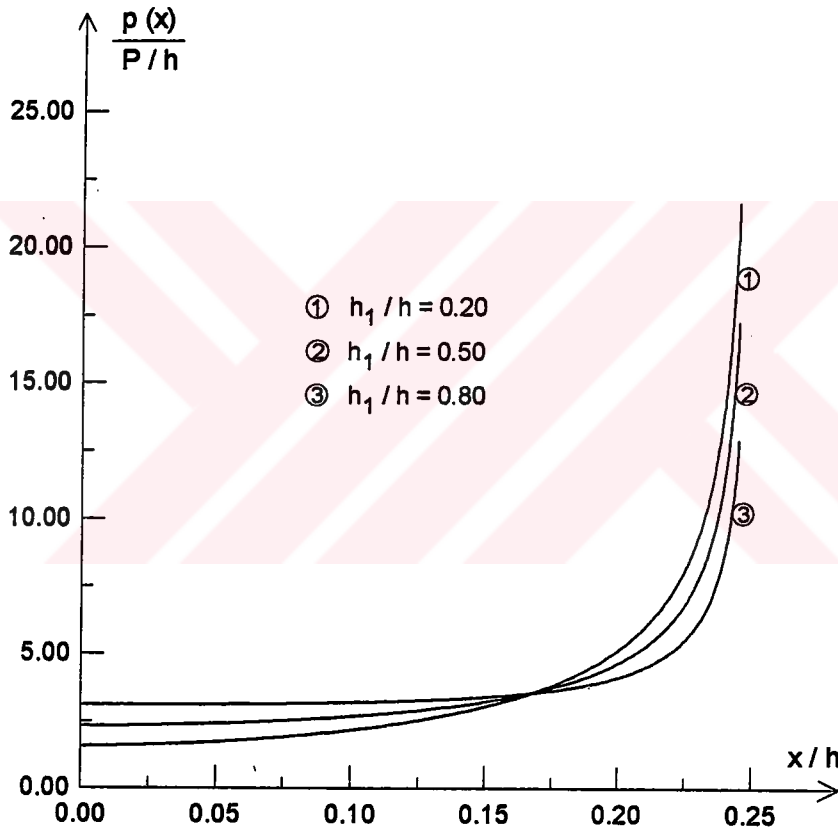


Şekil 17. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli mesnet genişliği değerleri için blok altındaki temas gerilme yayılımı ($\beta = 0.10$, $a/h = 1.0$, $h_1/h = 0.50$)



Şekil 18. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, elastik sabitlerin çeşitli oranları için blok altındaki temas gerilme yayılımı ($b/h = 1.0$, $a/h = 0.25$, $h_1/h = 0.50$)

Temas gerilmesinin tabaka kalınlıkları ile değişimi ise şekil 19' da verilmektedir. Burada dikkat edilirse, üstteki tabakaya göre daha rijit olan alttaki tabakanın kalınlığı arttıkça bileşik tabakanın rijitliği de artmaktadır. Buna bağlı olarak bileşik tabaka daha az düşey yerdeğiştirme yapmakta ve temas gerilmeleri bloğun kenarlarına yaklaştıkça azalmakta, $x = 0$ simetri eksenine yaklaştıkça ise artmaktadır. Bu durum, alttaki tabaka kalınlığı ve rijitliğinin üstteki tabakaya göre daha büyük olması durumunda, blok ile bileşik tabaka arasında meydana gelebilecek bir ayrılmanın daha zor olacağı sonucunu doğurmaktadır.



Şekil 19. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli tabaka kalınlıkları için blok altındaki temas gerilme yayılımı ($b/h = 1.0$, $a/h = 0.25$, $\beta = 0.10$)

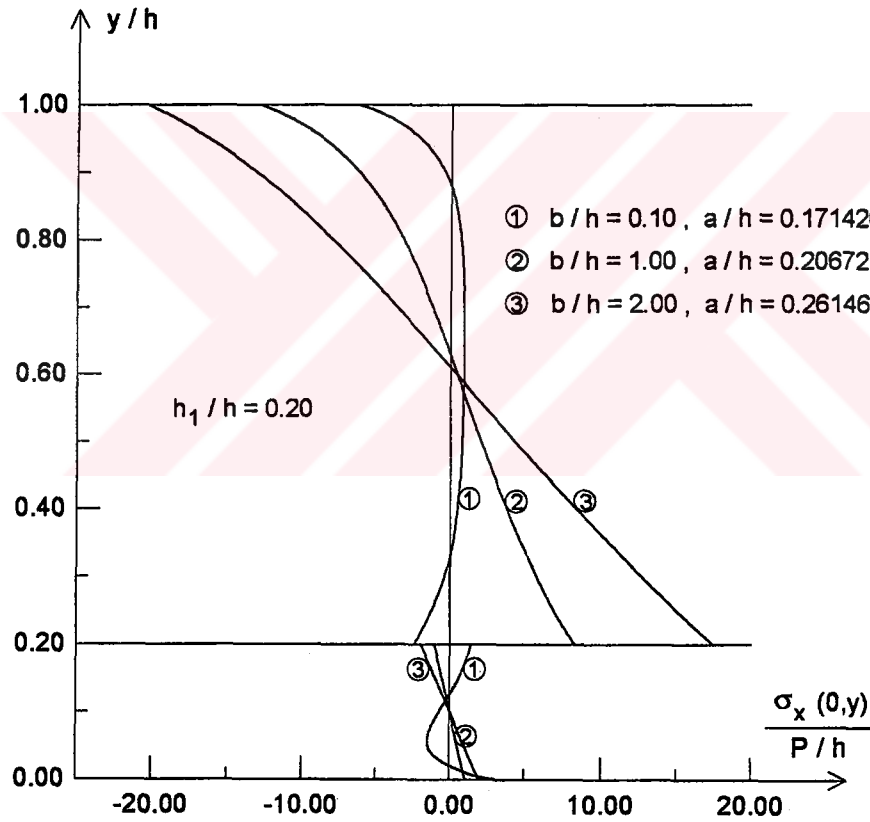
3.3. σ_x ve σ_y Normal Gerilmeleri

Bir önceki kısımda hesaplanmış olan blok altındaki temas gerilmesinin kısım 2.3.1' de verilmiş olan normal gerilme ifadelerinde yerlerine konulması ve kısım 2.3.6' daki ifadelerin de dikkate alınmasıyla bileşik tabakanın herhangi bir noktasındaki normal gerilme değeri

hesaplanabilir. Ancak bileşik tabakadaki en büyük normal gerilmelerin $x = 0$ simetri ekseninde olması (σ_y normal gerilmelerinde düz blok durumu hariç) ve ele alınan çatlakın da bu eksen üzerinde bulunması nedeniyle bu kısımda sadece simetri eksenindeki normal gerilme yayılışları incelenmektedir.

3.3.1. σ_x Normal Gerilmeleri

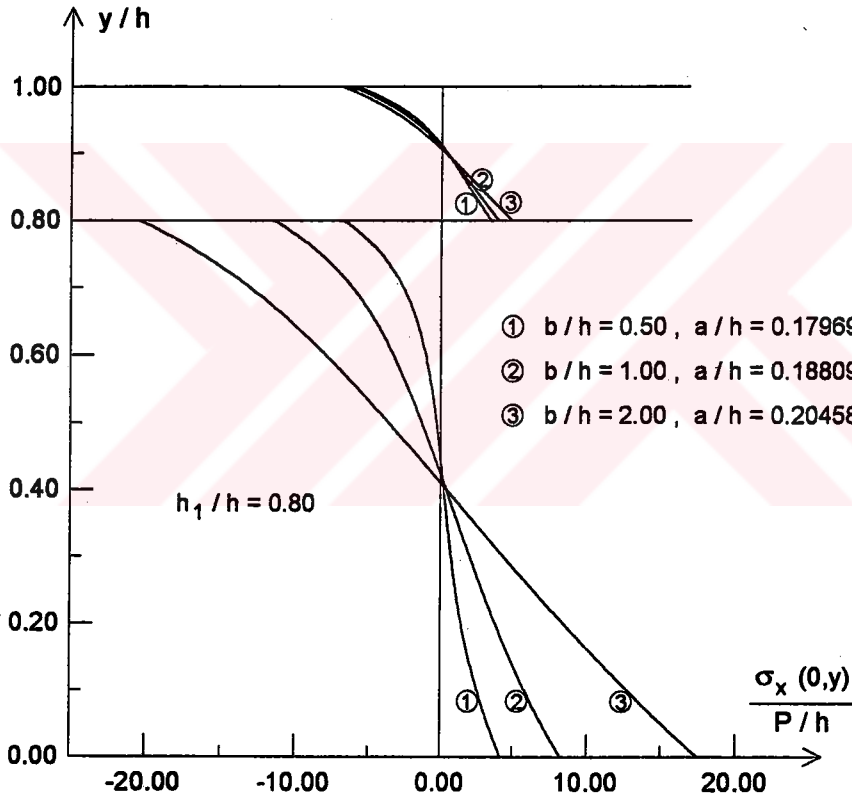
$x = 0$ simetri ekseninde boyunca σ_x normal gerilme değerleri eğri ve düz yüzeyli blok profilleri ve çeşitli boyutsuz büyüklükler için hesaplanmıştır.



Şekil 20. Dairesel blok durumunda, çeşitli mesnet genişlikleri için $\frac{\sigma_x(0,y)}{P/h}$ normal gerilme yayılışı ($\beta = 2.50$, $R/h = 10$, $h_1/h = 0.20$, $\mathfrak{R} = 0.01$)

Şekil 20 ve 21' de dairesel blok, şekil 22' de ise parabolik blok olması hali için σ_x normal gerilmelerinin mesnet genişliği ile değişimleri görülmektedir. Şekillerden de görülebileceği gibi mesnet genişliğinin artması durumunda σ_x normal gerilmeleri

büyümektedir. Şekil 20' de olduğu gibi, $b/h = 0.10$ (mesnet genişliği) olması halinde temas yüzeyi (bloğun bileşik tabaka ile temas alanı) de küçük olacağından bu durumda elde edilen sonuçlar alttan ve üstten tekil yüklerle sıkıştırılan elastik tabakadaki sonuçlara benzer olmaktadır. Zira bu durumda üstteki tabakanın alt ve üst bölgelerinde basınç, orta bölgesinde ise çekme gerilmeleri meydana gelmektedir. Alt tabakada ise üst tabakanın tersine alt ve üst bölgelerde çekme, orta bölgesinde ise basınç gerilmeleri ortaya çıkmaktadır. Ancak mesnet genişliğinin artırılması durumunda kirişlerin eğilme halinde olduğu gibi her iki tabakanın üst bölgelerinde basınç, alt bölgelerinde ise çekme gerilmeleri meydana gelmektedir (şekil 21-25).

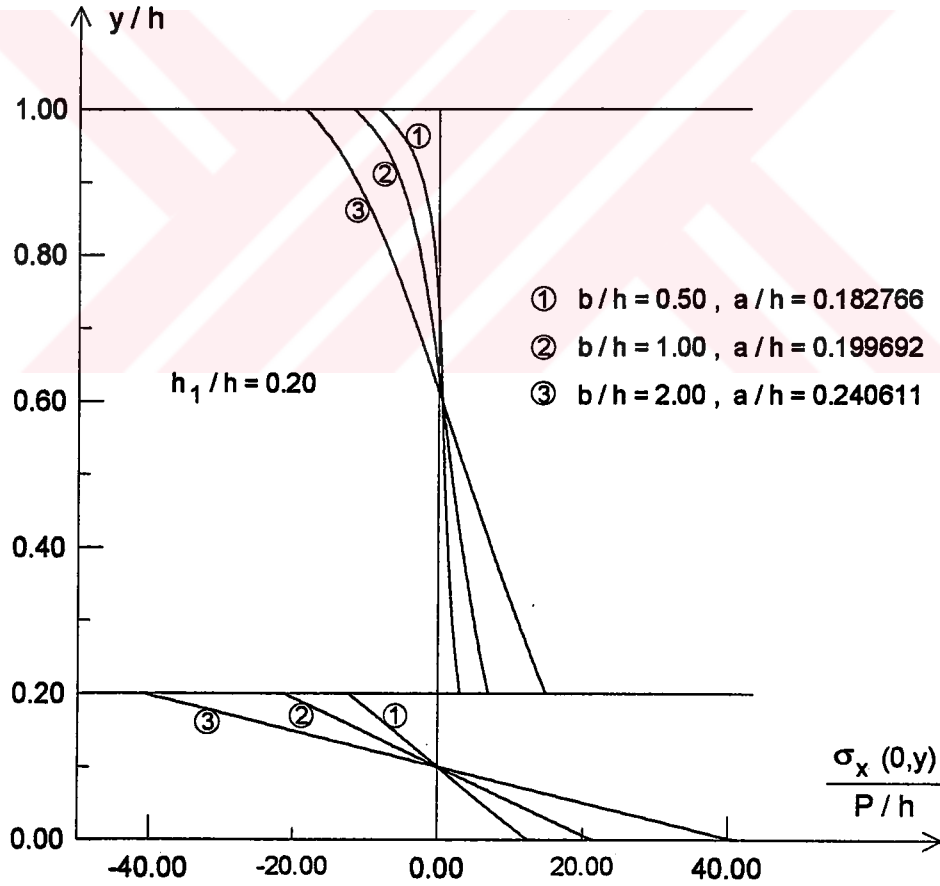


Şekil 21. Dairesel blok durumunda, çeşitli mesnet genişlikleri için $\frac{\sigma_x(0,y)}{P/h}$ normal gerilme yayılımı ($\beta = 0.50$, $R/h = 10$, $h_1/h = 0.80$, $\mathfrak{R} = 0.01$)

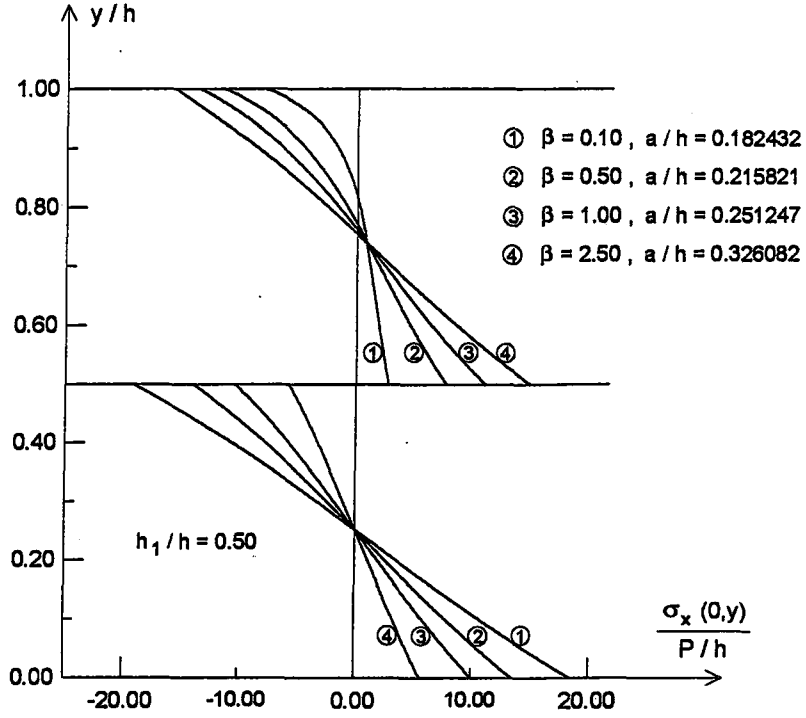
σ_x normal gerilmelerinin elastik sabitlerin oranı (β) ile değişimi dairesel blok için şekil 23' de ve düz (dikdörtgen) blok için ise şekil 24' de verilmektedir. Şekillerden de görülebileceği gibi alttaki tabaka üstteki tabakaya göre yumuşadıkça alttaki tabakadaki σ_x

normal gerilmeleri azalmakta, üstteki tabakadaki gerilmeler ise artmaktadır. Bu sonuç, elastik tabakanın rijitliğinin artması halinde sözkonusu tabakada σ_x normal gerilme değerlerinin de büyüyeceğini, tersi durumunda da azalacağını göstermektedir. Şekil 25 ' de düz yüzeyli blok hali için σ_x normal gerilmesinin blok genişliği ile değişimi verilmektedir. Blok altındaki boyutsuz temas gerilmelerinde olduğu gibi blok genişliğinin artmasıyla σ_x normal gerilmeleri azalmaktadır.

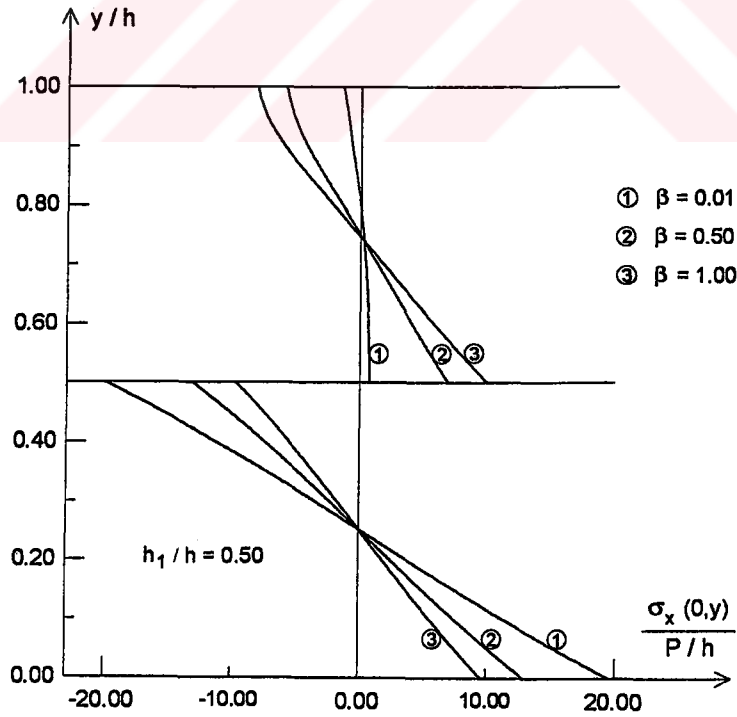
σ_x normal gerilmelerinin değişik tabaka kalınlıklarında elastik sabitlerin oranı ile değişimleri dairesel blok hali için tablo 3' de verilmektedir. Tablo 4' de ise düz (dikdörtgen) blok hali için değişik tabaka kalınlıklarında normal gerilmelerin mesnet genişliği ile değişimleri görülmektedir.



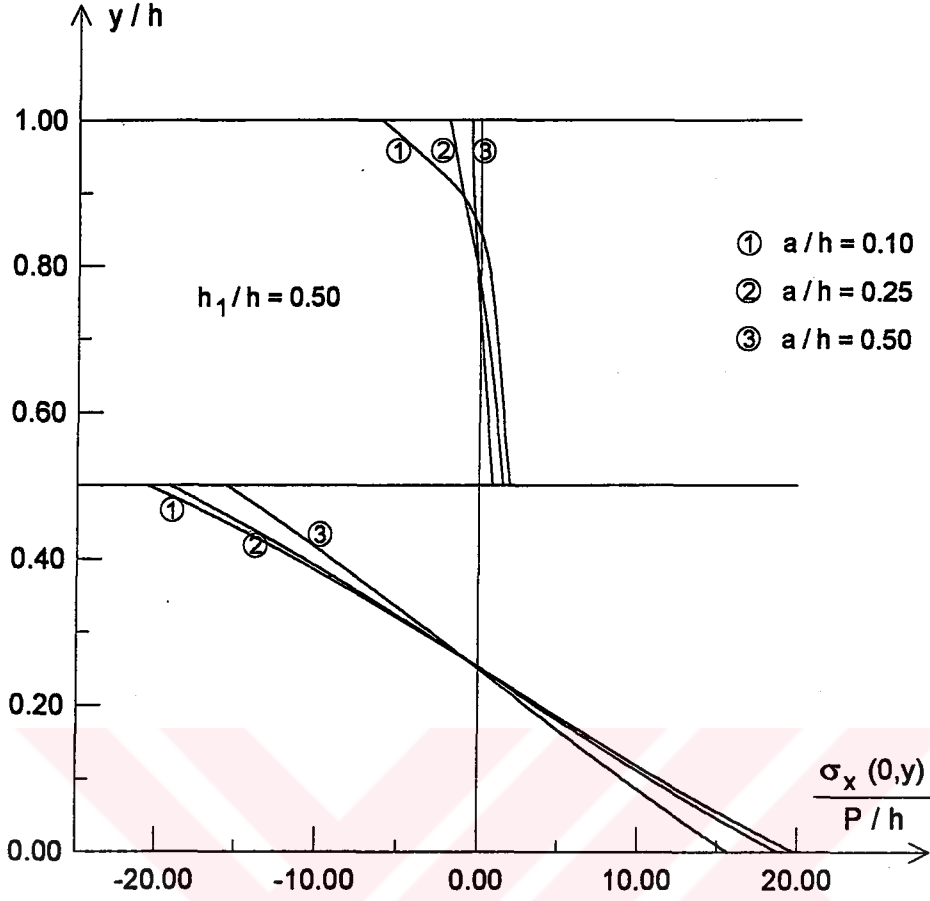
Şekil 22. Parabolik blok durumunda, çeşitli mesnet genişlikleri için $\frac{\sigma_x(0,y)}{P/h}$ normal gerilme yayılımı ($\beta = 0.10$, $Gh = 0.05$, $h_1/h = 0.20$, $\mathfrak{R} = 0.01$)



Şekil 23. Dairesel blok durumunda, elastik sabitlerin çeşitli oranları için $\frac{\sigma_x(0,y)}{P/h}$ normal gerilme yayılımı ($b/h = 1.0$, $R/h = 10$, $h_1/h = 0.50$, $\mathfrak{R} = 0.01$)



Şekil 24. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, elastik sabitlerin çeşitli oranları için $\frac{\sigma_x(0,y)}{P/h}$ normal gerilme yayılımı ($b/h = 1.0$, $a/h = 0.25$, $h_1/h = 0.50$)



Şekil 25. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli blok genişlikleri için $\frac{\sigma_x(0,y)}{P/h}$ normal gerilme yayılımı ($b/h = 1.0$, $\beta = 0.05$, $h_1/h = 0.50$)

Sözkonusu şekiller ve tablolar dikkatle incelenirse, simetri kesiti boyunca elde edilen normal gerilme dağılımlarının çoğu zaman lineerlikten uzaklaştığı görülebilir. Buna neden olarak, yüksek kiriş örneğinde olduğu gibi tabaka kalınlıklarının büyük olması ve bileşik tabakanın rijit bir blok aracılığıyla yüklenmiş olması gösterilebilir. σ_x normal gerilme dağılımında dikkat edilmesi gereken hususlardan biri de çekme ve basınç bölgelerindeki gerilme alanlarının birbirine eşit olmasıdır. Bu eşitliğin sağlanması denge koşulu için önemlidir.

Tablo 3. Dairesel blok durumunda, çeşitli tabaka kalınlıkları için $\frac{\sigma_x(0,y)}{P/h}$ normal gerilme değerlerinin elastik sabitlerin oranı ile değişimi ($b/h=1.0$, $R/h=10$, $\mathfrak{R}=0.01$)

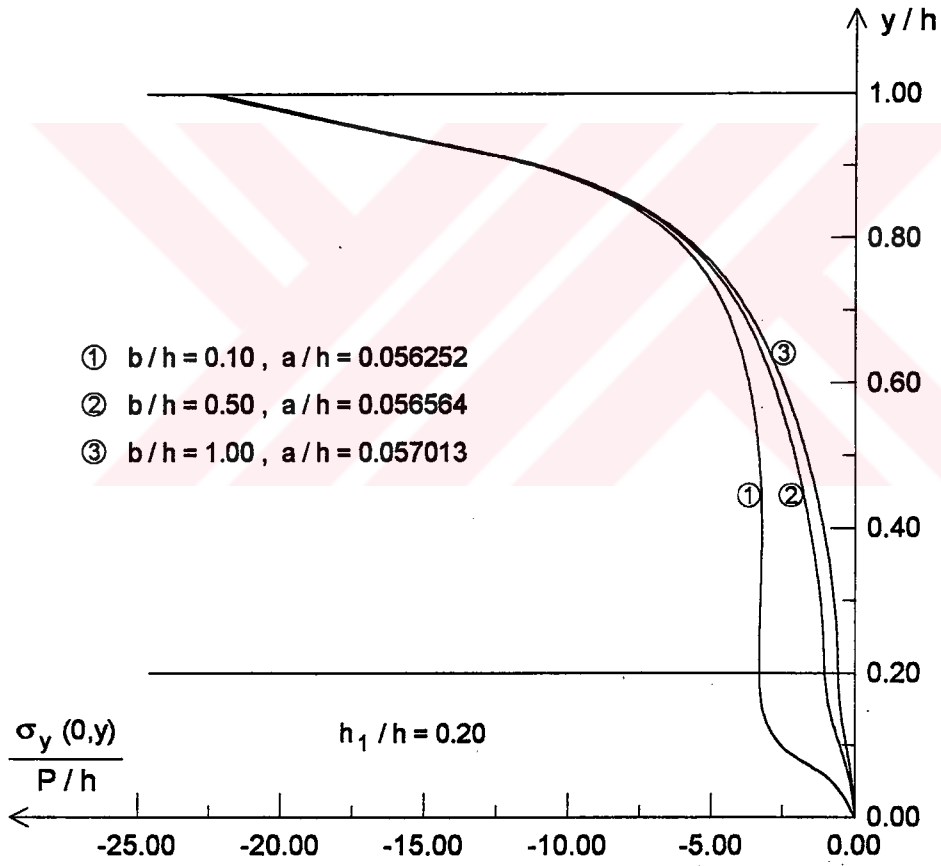
y/h ↓	$h_1/h=0.20$			$h_1/h=0.80$		
	$\beta=0.10$ a/h=0.199673	$\beta=0.50$ a/h=0.205277	$\beta=2.50$ a/h=0.206721	$\beta=0.50$ a/h=0.188097	$\beta=1.00$ a/h=0.224408	$\beta=2.50$ a/h=0.382333
1.00	-11.8794	-12.7063	-12.9099	-6.3256	-7.0664	-7.4332
0.95	-7.6246	-8.4620	-8.6690	-1.9920	-2.8019	-3.8465
0.90	-5.3095	-6.0506	-6.2339	0.3552	0.1949	0.0135
0.85	-3.7278	-4.3468	-4.4996	2.1719	2.8926	3.8508
0.80	-2.5814	-3.0740	-3.1952	3.9668	5.6836	7.7328
				-11.4351	-10.4135	-8.1220
0.75	-1.6770	-2.0473	-2.1377	-8.2864	-7.8759	-6.6521
0.70	-0.9043	-1.1574	-1.2183	-6.1383	-5.9914	-5.3642
0.65	-0.2013	-0.3406	-0.3731	-4.5568	-4.5241	-4.2285
0.60	0.4690	0.4424	0.4376	-3.3065	-3.3230	-3.2145
0.55	1.1310	1.2182	1.2411	-2.2544	-2.2922	-2.2934
0.50	1.8028	2.0074	2.0582	-1.3218	-1.3693	-1.4396
0.45	2.4996	2.8273	2.9071	-0.4587	-0.5117	-0.6310
0.40	3.2353	3.6943	3.8047	0.3690	0.3113	0.1517
0.35	4.0236	4.6248	4.7689	1.1866	1.1232	0.9252
0.30	4.8792	5.6365	5.8196	2.0148	1.9437	1.7049
0.25	5.8178	6.7498	6.9803	2.8716	2.7905	2.5048
0.20	6.8569	7.9874	8.2775	3.7742	3.6805	3.3387
	-21.3589	-5.0767	-1.0604			
0.15	-10.5736	-2.5086	-0.5229	4.7422	4.6309	4.2205
0.10	0.0048	0.0026	0.0008	5.7942	5.6608	5.1647
0.05	10.5761	2.5099	0.5235	6.9545	6.7921	6.1874
0.00	21.3424	5.0689	1.0591	8.2521	8.0515	7.3071

Tablo 4. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli tabaka kalınlıkları için $\frac{\sigma_x(0,y)}{P/h}$ normal gerilme değerlerinin mesnet genişlikleri ile değişimi ($\beta = 0.50$, $a/h = 0.10$)

y/h ↓	$h_1/h = 0.20$			$h_1/h = 0.60$		
	b/h = 0.10	b/h = 0.50	b/h = 1.00	b/h = 0.50	b/h = 1.00	b/h = 2.00
1.00	-5.0898	-7.8868	-12.4506	-6.8314	-9.1889	-13.3640
0.95	-2.7195	-5.2532	-9.4616	-4.1639	-6.1661	-9.7297
0.90	-0.6223	-2.7294	-6.3006	1.5591	-2.9150	-5.3457
0.85	0.3612	-1.3637	-4.2778	-0.0704	-0.7454	-1.9697
0.80	0.7344	-0.6724	-2.9531	0.7970	0.7936	0.7691
0.75	0.8623	-0.2733	-1.9408	1.4451	2.1049	3.2719
0.70	0.8924	-0.0022	-1.0704	2.0678	3.3856	5.7382
0.65	0.8806	0.2124	-0.2650	2.7836	4.7540	8.2869
0.60	0.8475	0.4067	0.5151	3.7053	6.3195	11.0266
				-6.4034	-13.7825	-27.8767
0.55	0.7979	0.6041	1.2950	-4.5892	-10.6882	-22.4378
0.50	0.7276	0.8242	2.0934	-3.2571	-8.0748	-17.4754
0.45	0.6242	1.0877	2.9267	-2.2283	-5.7737	-12.8236
0.40	0.4650	1.4189	3.8106	-1.3868	-3.6757	-8.3745
0.35	0.2109	1.8470	4.7613	-0.6515	-1.7039	-4.0523
0.30	-0.2008	2.4061	5.7968	0.0400	0.1993	0.2005
0.25	-0.8544	3.1338	6.9382	0.7395	2.0810	4.4310
0.20	-1.7633	4.0647	8.2094	1.4929	3.9829	8.6812
	4.1718	-4.0334	-5.2135			
0.15	1.9159	-1.9963	-2.5747	2.3405	5.9444	12.9915
0.10	-0.7435	-0.0105	0.0029	3.3162	8.0062	17.4034
0.05	-2.7333	1.9914	2.5762	4.4469	10.2124	21.9619
0.00	0.1939	4.0784	5.2044	5.7555	12.6143	26.7191

3.3.2. σ_y Normal Gerilmeleri

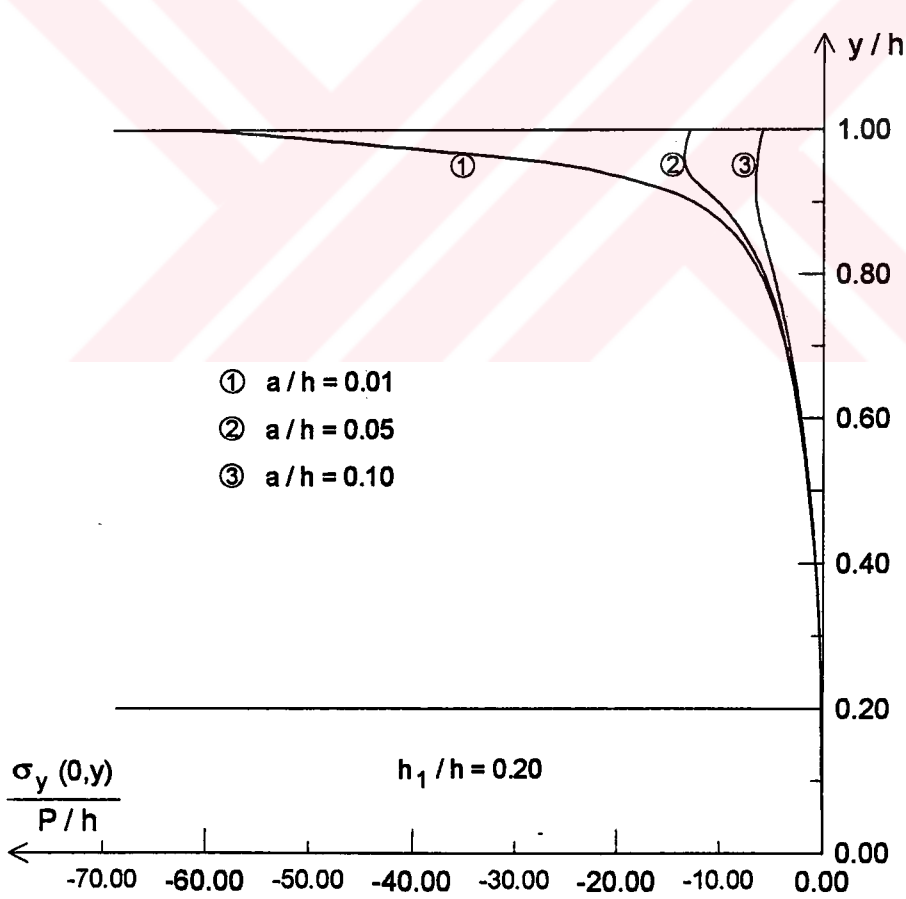
Elastisite teorisinden, tekil yükün altında düşey normal gerilmenin bir singulariteye sahip olduğu bilinmektedir. Çözümü yapılan bu problemde de bileşik tabaka ile blok arasındaki temas yüzeyinin küçük olması halinde temas noktasında tekil yük haline benzer bir singularite nedeniyle temas yüzeyine yaklaştıkça σ_y normal gerilmeleri hızla büyümektedir (şekil 26 ve 27). Kesit boyunca derine inildikçe singularite etkisini kaybetmekte ve gerilme değerleri azalarak bileşik tabakanın alt kısmında sıfıra eşit olmakta dolayısıyla da alt yüzeyde σ_y için koşulan sınır şartı sağlanmaktadır.



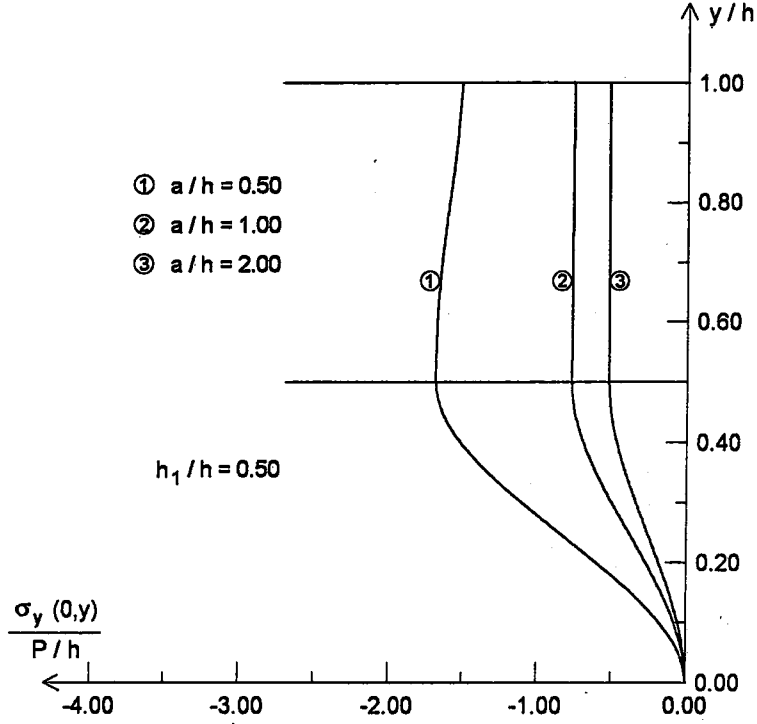
Şekil 26. Dairesel blok durumunda, çeşitli mesnet genişlikleri için $\frac{\sigma_y(0,y)}{P/h}$ normal gerilme yayılımı ($\beta = 0.10$, $R/h = 10$, $h_1/h = 0.20$, $\mathfrak{R} = 0.001$)

Şekil 28 ve 29' dan da görülebileceği gibi, rijit bloğun temas yüzeyi (genişliği) arttıkça σ_y normal gerilmeleri azalmaktadır. Blok genişliği (temas yüzeyi) ne kadar büyük olursa

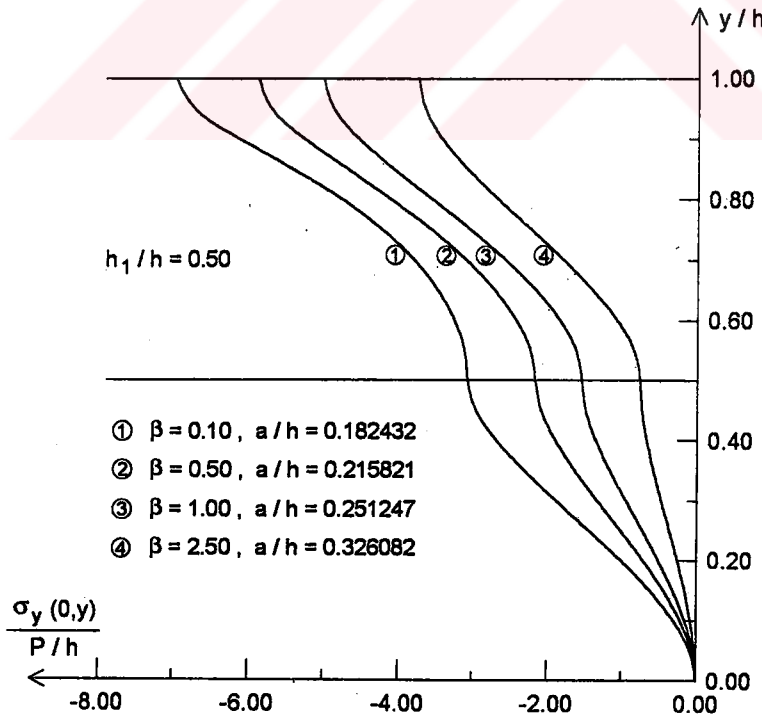
gerilme dağılımının kesit boyunca değişimi lineerliğe daha fazla yaklaşmaktadır. Bu sonuç Saint-Venant ilkesine uygun düşmektedir. Zira özellikle düz (dikdörtgen) blok durumunda blok genişliği ne kadar büyük olursa, simetri ekseninde hesaplanan σ_y normal gerilmeleri blok kenarlarındaki singülariteden o kadar az etkilenmektedir. Singülaritenin etkisi azaldığı için de σ_y normal gerilmeleri kesit boyunca lineere yakın bir dağılım göstermektedir. Şekil 30 ' da düz (dikdörtgen) blok durumunda, simetri ekseninde σ_y normal gerilmelerinin tabaka kalınlıkları ile değişimi verilmektedir. Alttaki tabakanın rijitliği üstteki tabakaya göre daha büyük olduğu için alttaki tabaka kalınlığının artması ile daha önce de bahsedildiği gibi bileşik tabakanın rijitliği artmaktadır. Alttaki tabaka kalınlığının artmasıyla temas yüzeyine yakın bölgelerde σ_y normal gerilmeleri artmakta, kesit boyunca derine inildikçe ise azalmaktadır.



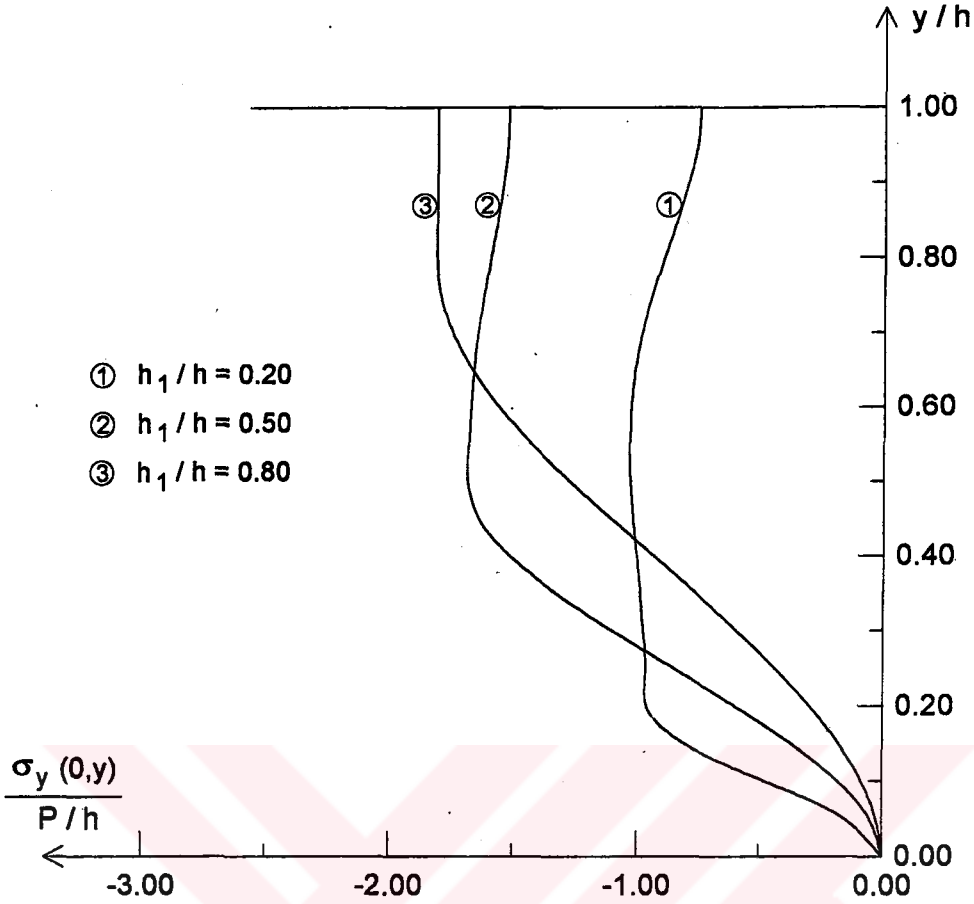
Şekil 27. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli blok genişlikleri için $\frac{\sigma_y(0,y)}{P/h}$ normal gerilme yayılımı ($\beta = 0.50$, $b/h = 1.0$, $h_1/h = 0.20$)



Şekil 28. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli blok genişlikleri için $\frac{\sigma_y(0,y)}{P/h}$ normal gerilme yayılımı ($\beta = 0.01$, $b/h = 1.0$, $h_1/h = 0.50$)



Şekil 29. Dairesel blok durumunda, elastik sabitlerin çeşitli oranları için $\frac{\sigma_y(0,y)}{P/h}$ normal gerilme yayılımı ($R/h = 10$, $b/h = 1.0$, $h_1/h = 0.50$, $\mathfrak{R} = 0.01$)

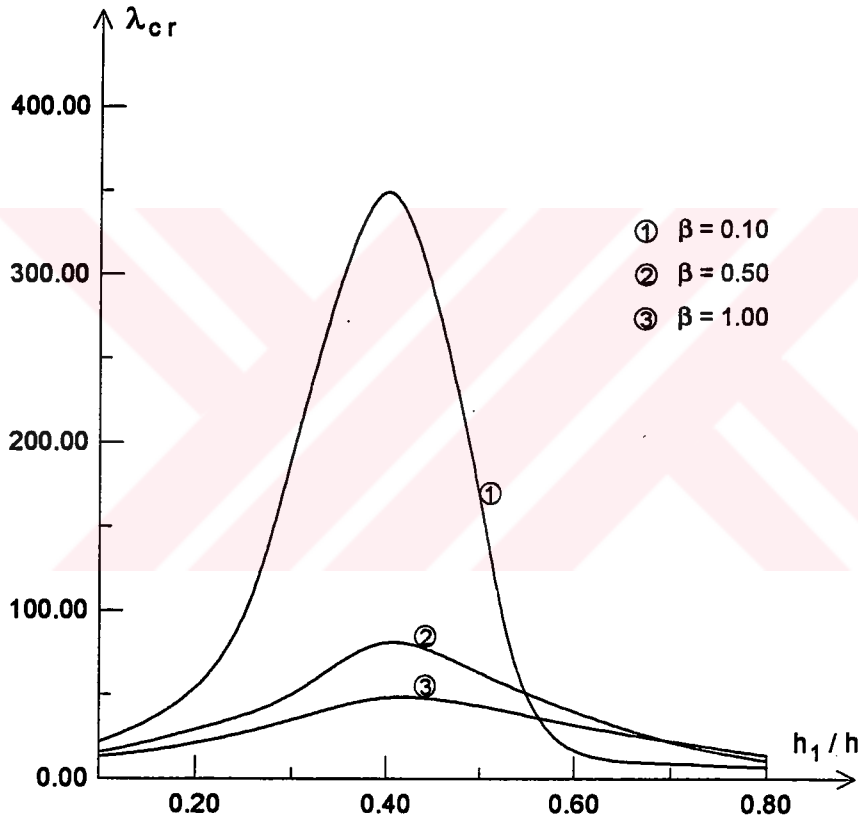


Şekil 30. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli tabaka kalınlıkları için $\frac{\sigma_y(0,y)}{P/h}$ normal gerilme yayılımı ($\beta = 0.01$, $b/h = 1.0$, $a/h = 0.50$)

Yapılan sayısal uygulamalarda dikkati çeken önemli bir nokta da, koşulan sınır şartları bütün yüzeylerde sağlanmış olmasına rağmen simetri kesit boyunca σ_y normal gerilme dağılımını gösteren eğrilerin her iki tabakada farklı eğriliklere sahip olmalarıdır. Bu durum şekil 29 ve 30 ile tablo 5' de belirgin bir şekilde görülmektedir. Buna neden olarak, tabakaların temas yüzeylerinde sürtünmenin ihmal edilmesi, dolayısıyla da tabakaların yükleme altında birbirinden bağımsız olarak çalışması gösterilebilir.

3.4. İki Elastik Tabaka Arasındaki İlk Ayrılma Yüğü ve İlk Ayrılma Uzaklığı

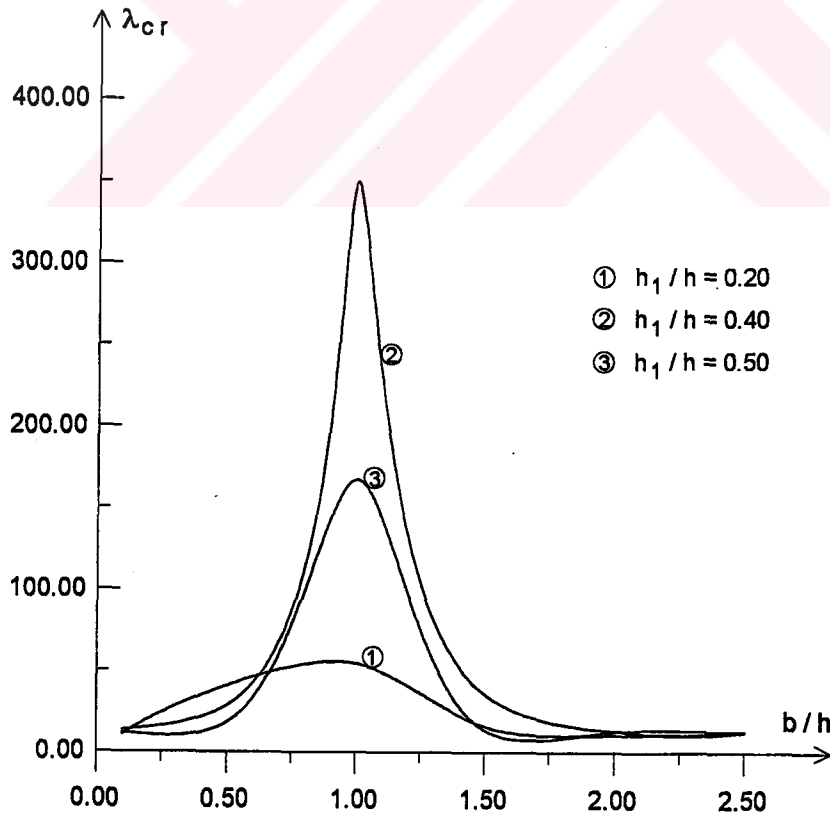
Bu kısımda, (216) ifadesinden faydalanılarak iki elastik tabaka arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklıkları ile ilk ayrılmayı meydana getiren yük ve bu yükten daha küçük yükler için tabakaların temas yüzeyleri boyunca temas gerilme yayılışları çeşitli boyutsuz büyüklükler için incelenmektedir. Blok profilinin dairesel veya düz yüzeyli olması hallerinde benzer sonuçlar elde edildiği için sözkonusu bu iki durum birlikte ele alınmaktadır.



Şekil 31. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, elastik sabitlerin çeşitli oranları için ilk ayrılma yüklerinin tabaka kalınlıkları ile değişimi ($a/h = 0.10$, $b/h = 1.0$)

Gerek dairesel ve gerekse düz (dikdörtgen) blok durumlarında tablo ve grafiklerden de görülebileceği gibi, tabakalar arasındaki ilk ayrılma yükü (kritik yük) ve ilk ayrılma uzaklıklarının en büyük değerleri genellikle alt tabaka kalınlığının bileşik tabaka kalınlığına oranının 0.40' de eşit ($h_1/h = 0.40$) olması halinde elde edilmektedir (şekil 31 ve 32). İlk ayrılma yükleri ile ilgili dikkati çeken diğer bir husus da, elastik sabitlerin oranının (β) ilk

ayrılma yüklerini önemli ölçüde etkilemesidir. Zira, $\beta < 1$ olması durumunda alttaki tabaka üstteki tabakaya göre daha rijit, $\beta > 1$ olması durumunda ise üstteki tabaka alttaki tabakaya göre daha rijit olmaktadır. Altındaki tabakanın üstteki tabakaya göre rijitliği arttıkça (β 'nin azalması) iki elastik tabaka arasındaki ilk ayrılma yükleri de artmaktadır. Ancak özellikle düz (dikdörtgen) blok durumunda üstteki tabaka kalınlığının bileşik tabakanın toplam kalınlığına oranı 0.50'den küçük ($h_1/h \geq 0.5$) ve blok genişliğinin de 1.00'den küçük olması durumunda ise β 'nin azalması ile ilk ayrılma yükleri de genellikle azalmaktadır. İlk ayrılma yükü ve uzaklıkları ile ilgili yukarıda belirtilen özellikler tablo 6, 7 ve 8'de daha açık bir şekilde görülmektedir. Tabaka kalınlıklarının herhangi birinin küçük olması durumunda ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklıkları küçük değerler almakta, dolayısıyla bu durumlarda tabakalar arasındaki ayrılmalar daha kolay olmaktadır. Tabakalar arasındaki ayrılmaların daha büyük yüklerde meydana gelmesini sağlamak için tabaka kalınlıklarını birbirine yakın seçmek ve alttaki tabakanın üstteki tabakaya göre daha rijit olmasını sağlamak gerekmektedir.



Şekil 32. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli tabaka kalınlıkları için ilk ayrılma yüklerinin mesnet genişlikleri ile değişimi ($a/h = 0.10$, $\beta = 0.10$)

Tablo 6. Dairesel blok durumunda, elastik sabitlerin çeşitli oranları için ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklıklarının tabaka kalınlıkları ile değişimi
($b/h = 1.0$, $R/h = 10$, $\mathfrak{R} = 0.01$)

h_1/h ↓	$\beta = 0.10$		$\beta = 0.50$		$\beta = 1.00$	
	x_{cr}/h	λ_{cr}	x_{cr}/h	λ_{cr}	x_{cr}/h	λ_{cr}
0.10	1.5866	22.2417	0.6414	15.6585	0.7096	13.3229
0.20	2.0540	53.7966	1.6864	29.1429	0.4766	22.3961
0.30	2.3208	189.0585	1.9278	49.7134	1.7894	34.7208
0.40	2.1668	340.9607	2.0166	80.2664	1.9144	47.7999
0.50	1.7554	161.7999	1.8614	61.8473	1.8730	42.5766
0.60	0.7254	18.8036	1.7102	45.6265	1.7532	31.4041
0.70	0.6042	9.7119	0.6618	28.7668	1.6700	39.9856
0.80	0.4400	7.7197	0.5360	12.1149	0.6196	17.8543

Tablo 7. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli tabaka kalınlıkları için ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklıklarının elastik sabitlerin oranları ile değişimi
($b/h = 1.0$, $a/h = 0.10$)

β ↓	$h_1/h = 0.20$		$h_1/h = 0.40$		$h_1/h = 0.60$	
	x_{cr}/h	λ_{cr}	x_{cr}/h	λ_{cr}	x_{cr}/h	λ_{cr}
0.05	2.2584	89.9557	2.0544	480.2577	0.7226	12.2966
0.10	2.0546	53.8545	2.1724	348.7025	0.7138	16.7337
0.20	1.8782	38.3389	2.1408	185.8153	0.7000	50.6445
0.50	1.6866	29.1552	2.0182	80.7097	1.7116	45.9921
1.00	0.4756	21.0473	1.9154	47.9538	1.7548	31.7019
2.00	0.5338	16.1080	1.8316	32.4098	1.8134	25.4504
3.00	0.5670	14.2515	1.7956	27.3731	1.8526	23.9474
5.00	0.5980	12.3305	1.7632	23.4136	1.9026	23.3968

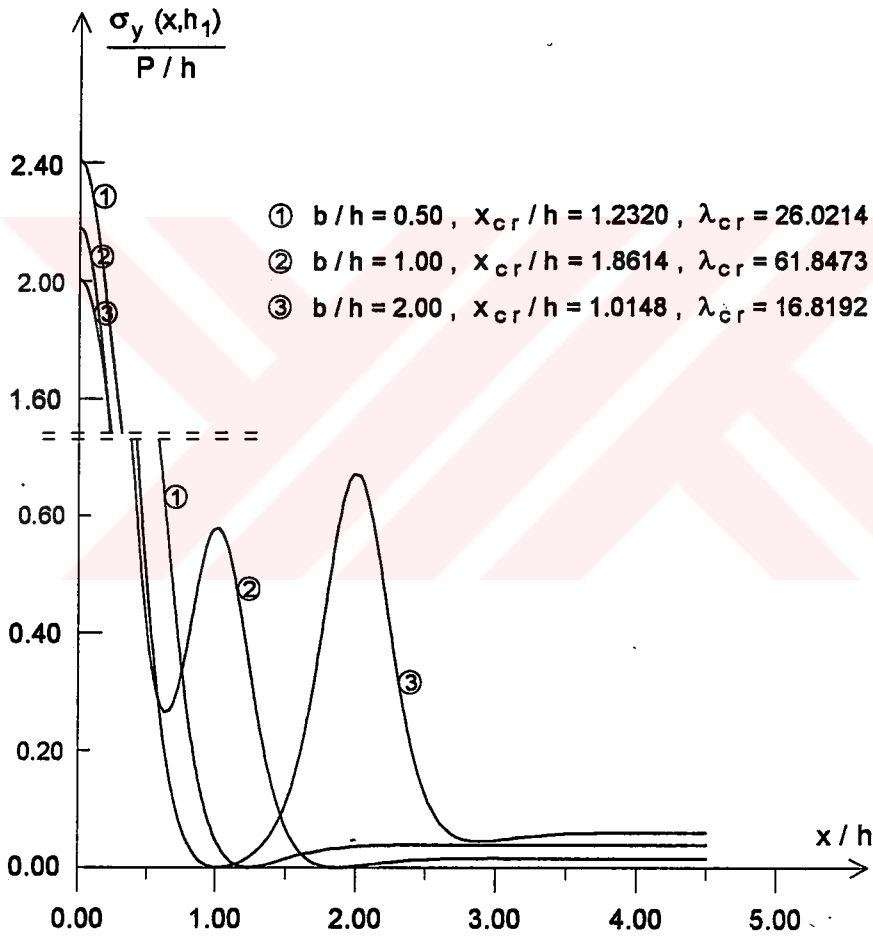
Tablo 8. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, elastik sabitlerin çeşitli oranları için ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklıklarının blok genişliği ile değişimi ($b/h = 1.0$, $h_1/h = 0.50$)

a / h ↓	$\beta = 0.01$		$\beta = 0.05$		$\beta = 0.10$	
	x_{cr} / h	λ_{cr}	x_{cr} / h	λ_{cr}	x_{cr} / h	λ_{cr}
0.01	0.8674	13.4953	0.8048	54.7733	1.7672	173.3901
0.10	0.8890	14.5931	0.8236	106.0154	1.7600	166.3332
0.20	0.9532	17.9908	1.5728	138.8682	1.7388	146.2002
0.50	1.2928	29.9305	1.5156	54.0861	1.6378	61.9632
1.00	1.7526	39.2093	1.7906	32.0034	1.8080	28.3491
1.50	2.2336	56.4459	2.2268	50.6219	2.2118	48.6024
2.00	2.6976	100.0768	2.5970	110.2136	2.4610	89.1942

Tablo 9. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli tabaka kalınlıkları için ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklıklarının mesnet genişliği ile değişimi ($a/h = 0.10$, $\beta = 0.10$)

b / h ↓	$h_1 / h = 0.30$		$h_1 / h = 0.40$		$h_1 / h = 0.50$	
	x_{cr} / h	λ_{cr}	x_{cr} / h	λ_{cr}	x_{cr} / h	λ_{cr}
0.10	1.0754	12.5990	1.0320	13.0527	0.9080	11.7223
0.50	1.4716	50.0877	1.2318	27.7462	1.0314	17.6808
1.00	2.3232	190.2457	2.1724	348.7025	1.7600	166.3332
1.50	2.8366	175.8432	0.8780	35.3186	0.8732	13.4771
2.00	0.9116	10.7251	0.9698	12.6804	0.9112	12.3790
2.50	0.9484	10.2750	0.9892	12.4497	0.9080	12.7969
3.00	0.9446	10.6852	0.9872	12.7017	0.9072	12.8662

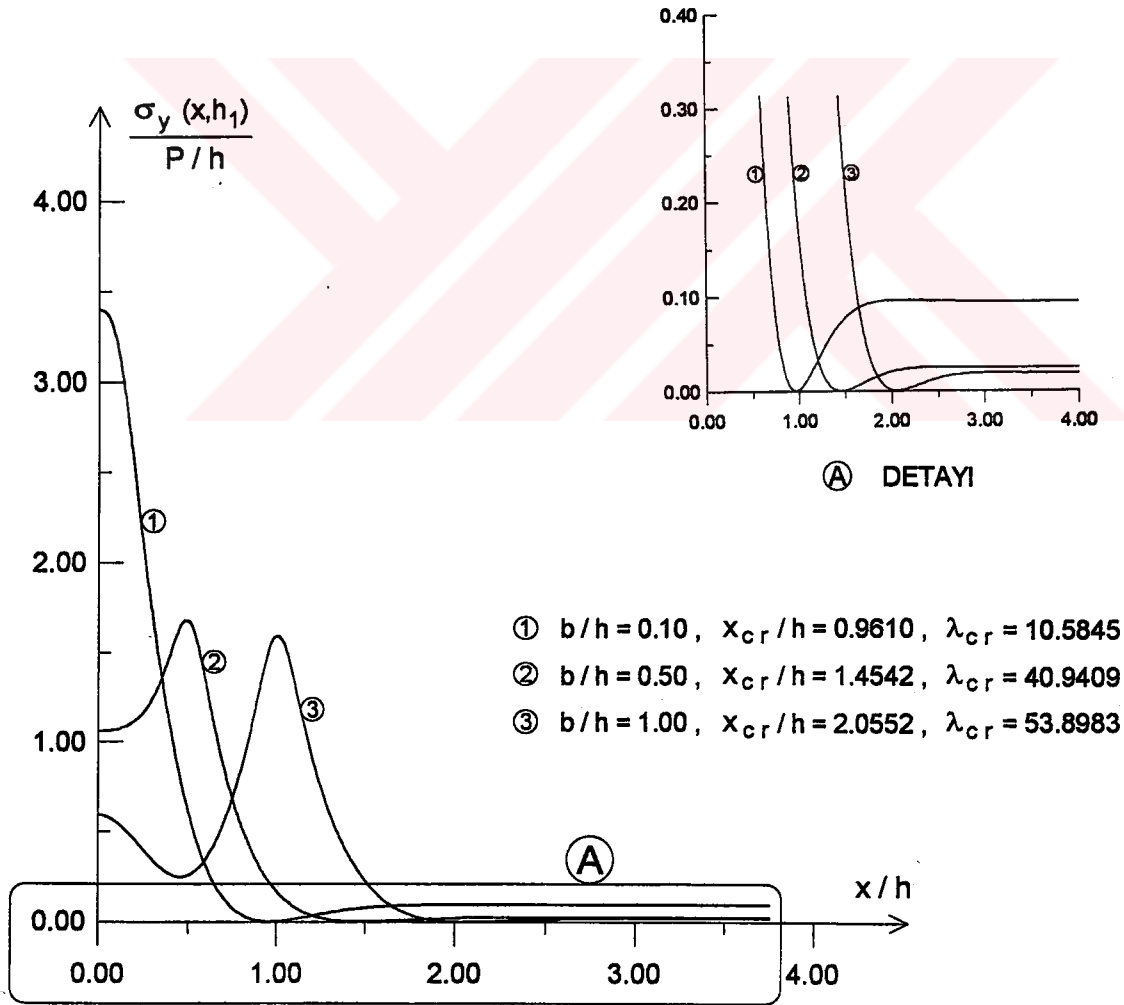
Tablo 9' da düz (dikdörtgen) blok durumunda değişik tabaka kalınlıkları için ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklıklarının mesnet genişliği ile değişimleri verilmektedir. Tablodan da görülebileceği gibi ayrılmalar genelde, mesnet genişliğinin küçük değerlerinde mesnetin dışında, büyük değerlerinde ($\approx b/h \geq 1.5$) ise blok ile mesnet arasında meydana gelmektedir. Mesnet genişliğinin artması durumunda ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklıkları sabit bir değere doğru yaklaşmaktadır. Genel bir kural olmamakla birlikte, ilk ayrılma yükü ve uzaklığının en büyük değeri $a/h = 0.10$ ve $\beta = 0.10$ için $b/h = 1.0$ (mesnet genişliği) olması durumunda elde edilmektedir.



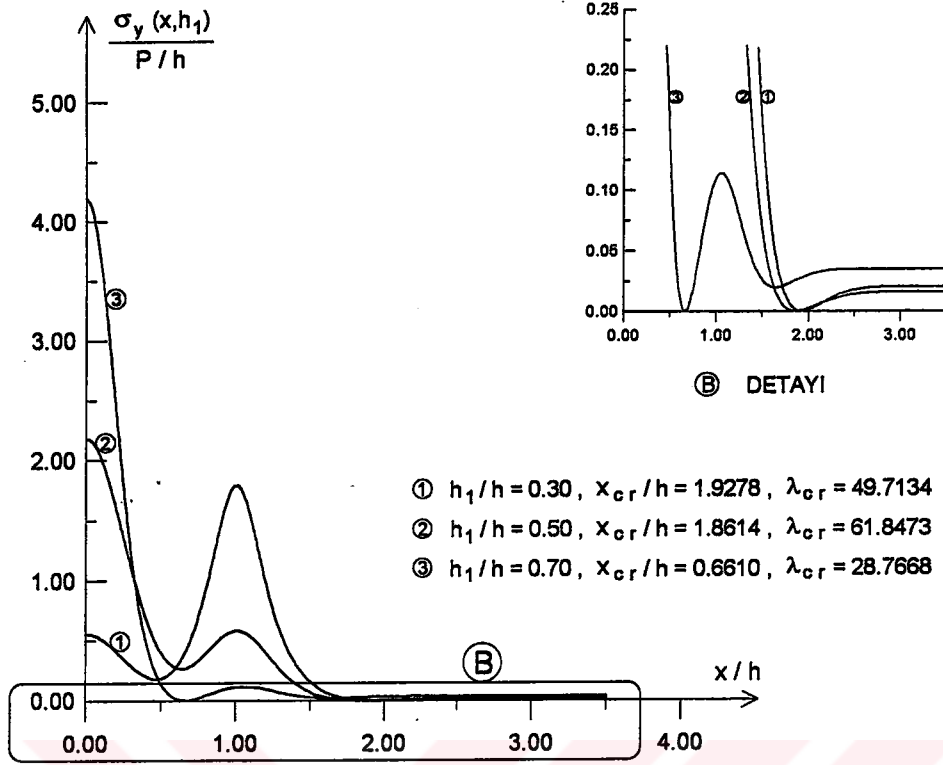
Şekil 33. Dairesel blok durumunda, çeşitli mesnet genişlikleri için tabakalar arasındaki temas gerilme yayılışları ($\beta = 0.50$, $R/h = 10$, $h_1/h = 0.50$, $\mathcal{R} = 0.01$)

Şekil 33-39' da iki elastik tabaka arasındaki ilk ayrılma yükü ve bu yükten daha küçük yük değerleri için tabakaların temas yüzeyleri boyunca boyutsuz temas gerilme yayılışları çeşitli boyutsuz büyüklükler için verilmektedir. Şekillerden de görülebileceği gibi sürekli

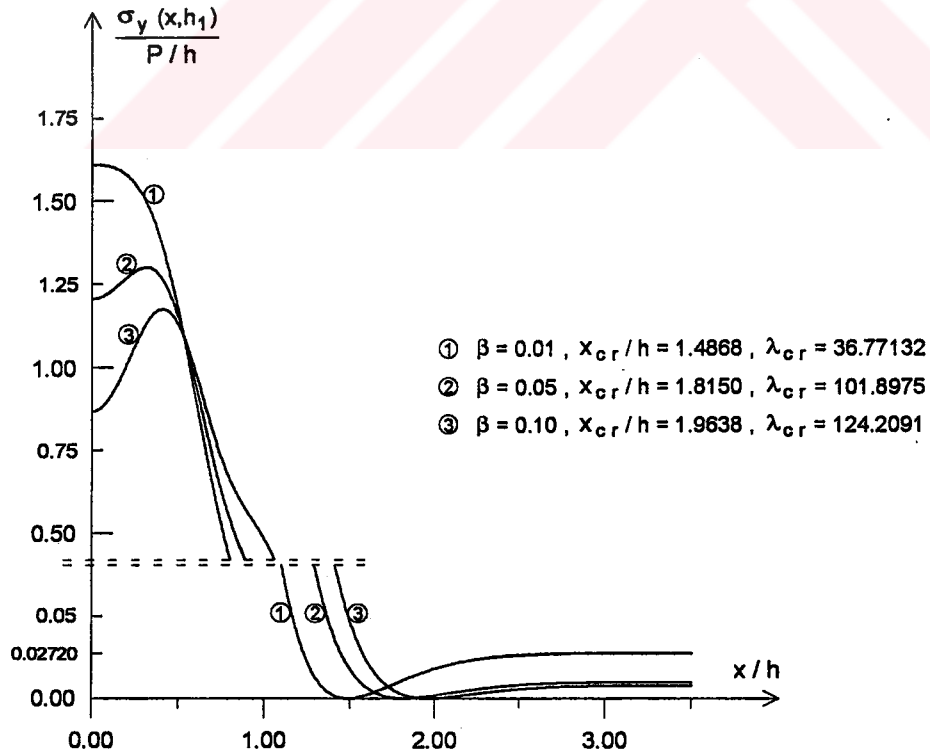
temas durumu, dış yükün etkisinin büyük olduğu ($x < x_{cr}$) temas bölgesi ve dış yükün etkisinin azalarak kaybolduğu ($x > x_{cr}$) temas bölgesi olmak üzere iki bölgeden oluşmaktadır. Dış yükün etkisinin görüldüğü $x < x_{cr}$ temas bölgesinde temas gerilmeleri; $x = 0$ simetri düzleminde, dikdörtgen rijit bloğun kenarlarında ($x = a$) ve mesnetlerde ($x = b$) maksimum değerlerine ulaşmakta dolayısıyla da bu noktalar temas gerilmelerinin tepe noktalarını oluşturmaktadır. Dış yükün etkisinin kaybolduğu $x > x_{cr}$ temas bölgesinde ise yalnızca kütle kuvvetlerinin etkisi görülmekte ve bu bölgedeki temas gerilmeleri kütle kuvvetlerine eşdeğer olmaktadır.



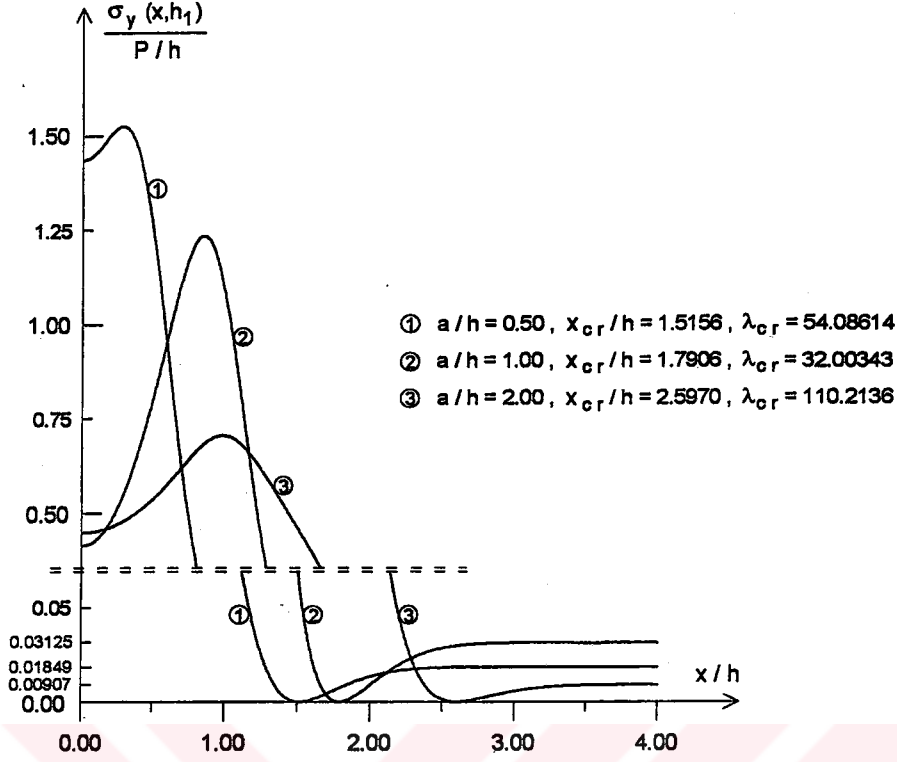
Şekil 34. Dairesel blok durumunda, çeşitli mesnet genişlikleri için tabakalar arasındaki temas gerilme yayılışları ($\beta = 0.10$, $R/h = 10$, $h_1/h = 0.20$, $\mathfrak{R} = 0.001$)



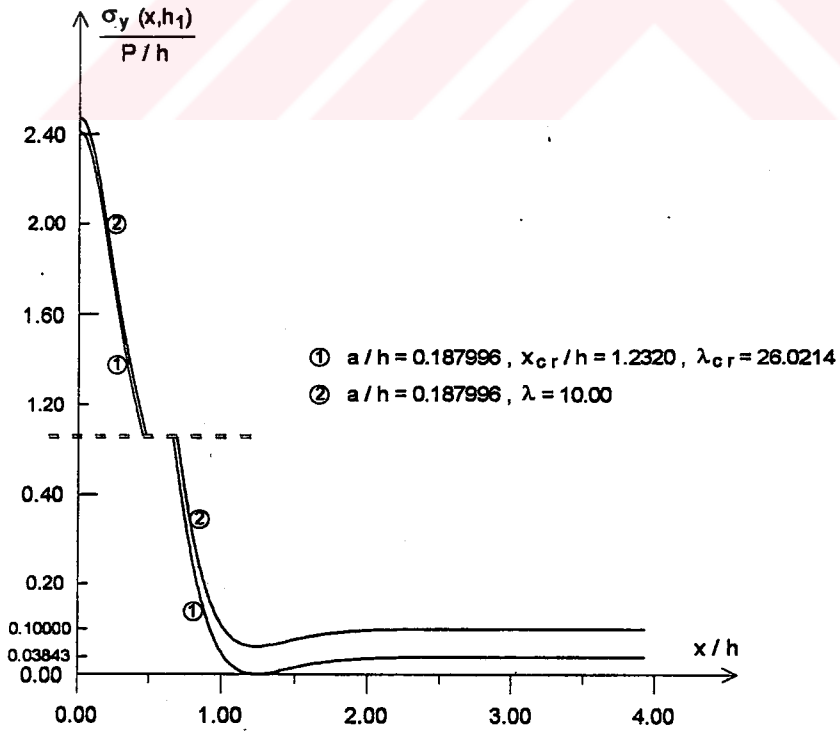
Şekil 35. Dairesel blok durumunda, çeşitli tabaka kalınlıkları için tabakalar arasındaki temas gerilme yayılışları ($\beta = 0.50$, $R/h = 10$, $b/h = 1.0$, $\mathfrak{R} = 0.01$)



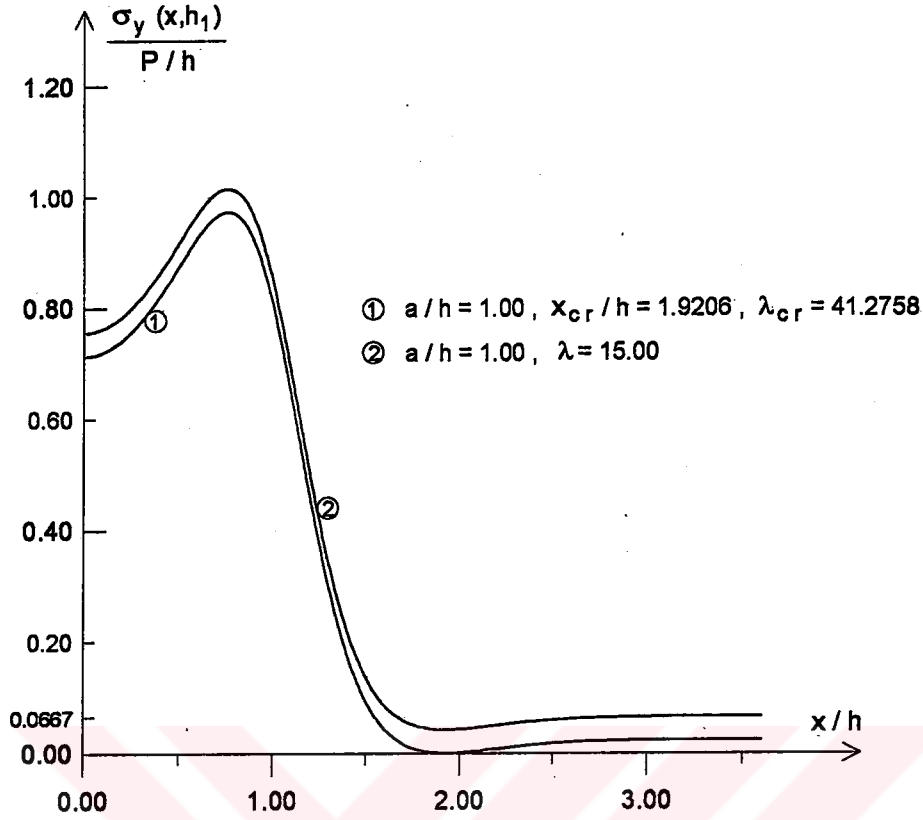
Şekil 36. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, elastik sabitlerin çeşitli oranları için tabakalar arasındaki temas gerilme yayılışları ($b/h = 1.0$, $a/h = 0.50$, $h_1/h = 0.40$)



Şekil 37. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli blok genişlikleri için tabakalar arasındaki temas gerilme yayılışları ($b/h = 1.0, \beta = 0.05, h_1/h = 0.50$)



Şekil 38. Dairesel blok durumunda, çeşitli λ yük değerleri için tabakalar arasındaki temas gerilme yayılışları ($R/h = 10, \beta = 0.50, h_1/h = 0.50, \mathfrak{R} = 0.01$)



Şekil 39. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli λ yük değerleri için tabakalar arasındaki temas gerilme yayılışları
($a/h = 1.0$, $\beta = 0.01$, $h_1/h = 0.40$, $b/h = 1.0$)

Eğer düz (dikdörtgen) blok durumunda, özel bir hal olarak $\beta = 0$ ($\mu_1 \rightarrow \infty$) alınır ve $2P$ tekil yükü de P olarak düşünülürse; ele alınan problem [25] numaralı kaynakta verilmiş olan probleme dönüşmüş olur. Bu hal için elde edilen sonuçlar [25] numaralı kaynaktaki sonuçlarla karşılaştırıldığında gerek ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklığı ve gerekse de rijit blok altındaki gerilme yayılışı bakımından birbirine uymaktadır.

Tablo 10' dan da görülebileceği gibi, blok genişliğinin çeşitli değerleri için elde edilen ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıkları [25] numaralı kaynaktaki değerlerle üst üste düşmektedir. Blok genişliğinin artması ile hem ilk ayrılma yükü ve hem de ilk ayrılma mesafeleri büyümektedir.

Tablo 10. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, $\beta = 0$ ($\mu_1 \rightarrow \infty$) için bulunan ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklıklarının [25] numaralı kaynaktaki sonuçlarla karşılaştırılması

a / h ↓	[25] Numaralı kaynak		Mevcut yapılmış çalışma	
	x_{cr} / h	λ_{cr}	x_{cr} / h	λ_{cr}
0.50	$\cong 2.00$	58.88	1.9924	58.7299
1.00	$\cong 2.45$	92.40	2.4538	92.3136
2.00	$\cong 3.45$	169.57	3.4505	169.5305

3.5. Çatlak Uçlarındaki Gerilme Şiddet Faktörleri

Bilindiği gibi, çatlak uçlarındaki gerilmeler büyük değerler almaktadır. Ancak çatlak ucuna yaklaşırken *gerilme şiddet* faktörü denen boyutlu bir limit büyüklük hesaplamak mümkündür. Bu büyüklük, çatlağın tehlikeli olup olmadığı ve ilerleme durumu hakkında bir fikir vermektedir. Karşılaştırma olarak, deneylerle tespit edilen bir kritik gerilme şiddet faktörü kullanılmaktadır. Bu kritik gerilme şiddet faktörü çatlak uçlarında hesaplanan gerilme şiddet faktörleri ile karşılaştırılarak çatlağın tehlikeli olup olmadığına karar verilmektedir.

Bu kısımda, alt tabakasında düşey bir çatlağı olan bileşik tabaka probleminde çatlak uçlarındaki gerilme şiddet faktörleri kısım 2.4' deki formülasyon yardımıyla iç ve kenar çatlak durumları için ayrı ayrı hesaplanmaktadır. Çatlak problemi, çekme gerilmelerinin olduğu bölgelerde önem kazandığı için bu bölgelerdeki gerilme şiddet faktörleri üzerinde durulmaktadır. Blok profilinin eğri ve düz yüzeyli olması hallerinde benzer sonuçlar elde edildiği için her iki durum birlikte incelenmektedir.

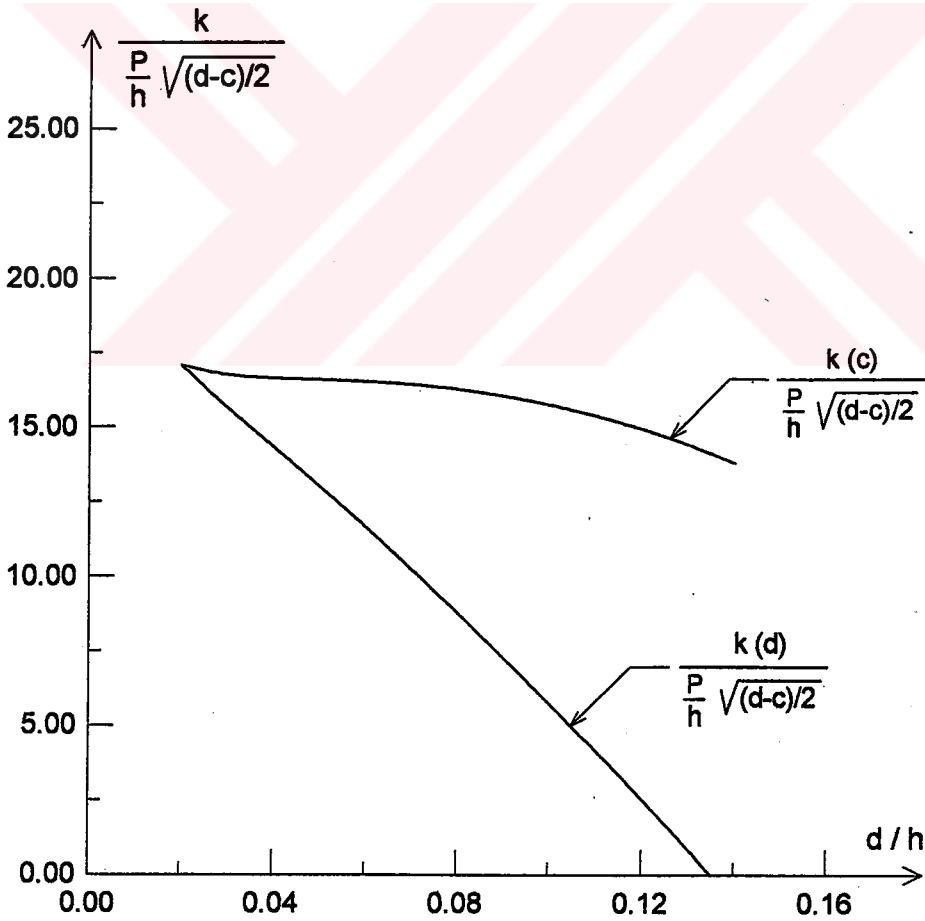
3.5.1. İç Çatlak Halinde Gerilme Şiddet Faktörleri

(266) ifadesiyle verilmiş olan integral denklemin kısım 2.4.5.1' deki ifadeler yardımıyla (268) denklemiyle birlikte çözümü sonucunda $g(\zeta)$ değerleri çeşitli boyutsuz büyüklükler

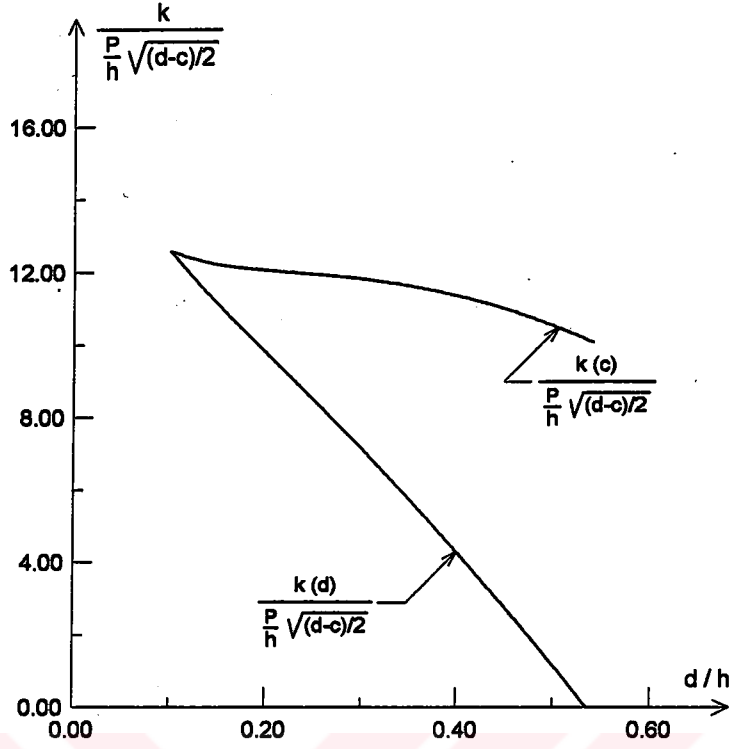
için elde edilmiş ve $g(\zeta)$ 'nin uç noktalarındaki değerler olan $g(-1)$ ve $g(1)$ değerlerine bağlı olarak da $\frac{k(c)}{\frac{P}{h} \sqrt{\frac{d-c}{2}}}$ ve $\frac{k(d)}{\frac{P}{h} \sqrt{\frac{d-c}{2}}}$ boyutsuz büyüklükleri hesaplanmıştır. Bu

boyutsuz büyüklüklerdeki $k(c)$ ve $k(d)$ sırasıyla, çatlakın c ve d uçlarındaki gerilme şiddet faktörleridir. İşte bu kısımda, çatlakın çeşitli geometrik konumlarında bileşik tabakaya ait değişik boyutsuz büyüklüklere bağlı olarak çatlak uçlarındaki gerilme şiddet faktörleri hesaplanmakta ve bunlara ait çeşitli grafikler verilmektedir.

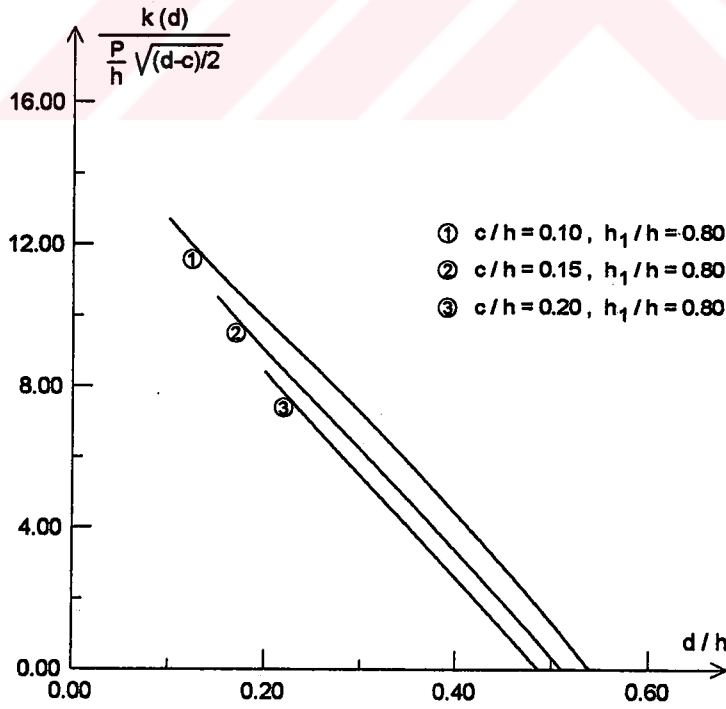
Sayısal uygulamalarda, çatlakın bir ucu sabit tutulup boyu değiştirilerek çeşitli çatlak boyları için gerilme şiddet faktörleri elde edilmiştir. Bunlara ait grafikler şekil 40-51' de verilmektedir.



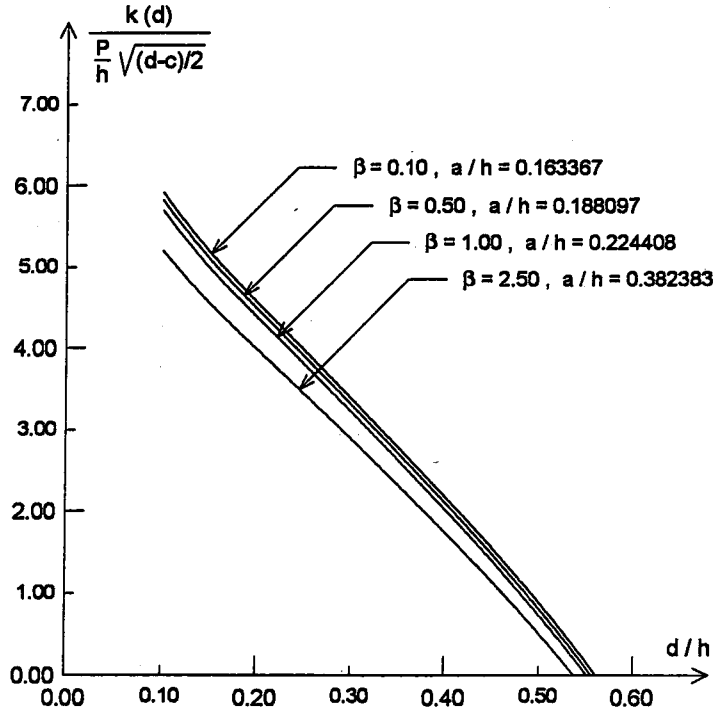
Şekil 40. Dairesel blok durumunda, iç çatlakın c ve d uçlarındaki gerilme şiddet faktörlerinin d/h ile değişimi
($c/h = 0.02$, $b/h = 1.0$, $\beta = 0.10$, $R/h = 10$, $h_1/h = 0.20$, $\mathfrak{R} = 0.01$)



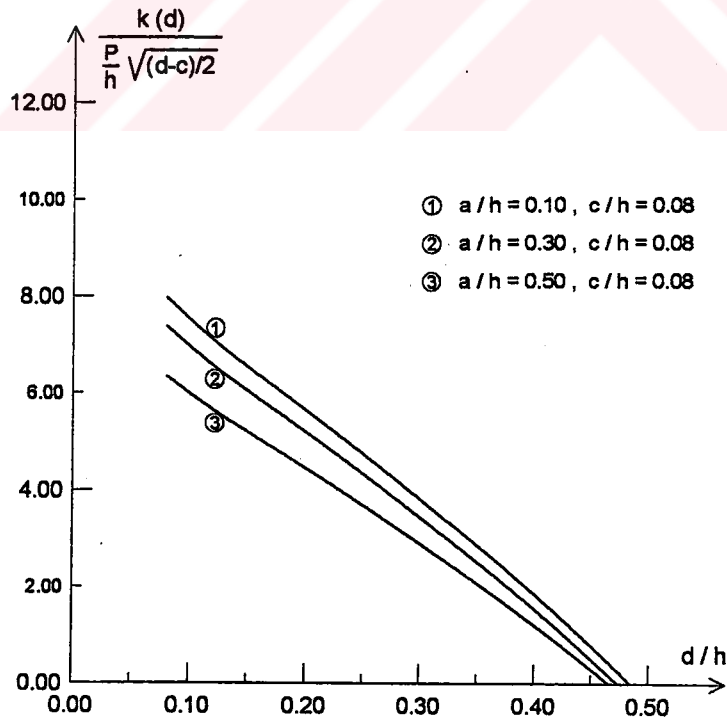
Şekil 41. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, iç çatlakın c ve d uçlarındaki gerilme şiddet faktörlerinin d/h ile değişimi
($c/h = 0.10$, $b/h = 2.0$, $\beta = 0.10$, $a/h = 0.25$, $h_1/h = 0.80$)



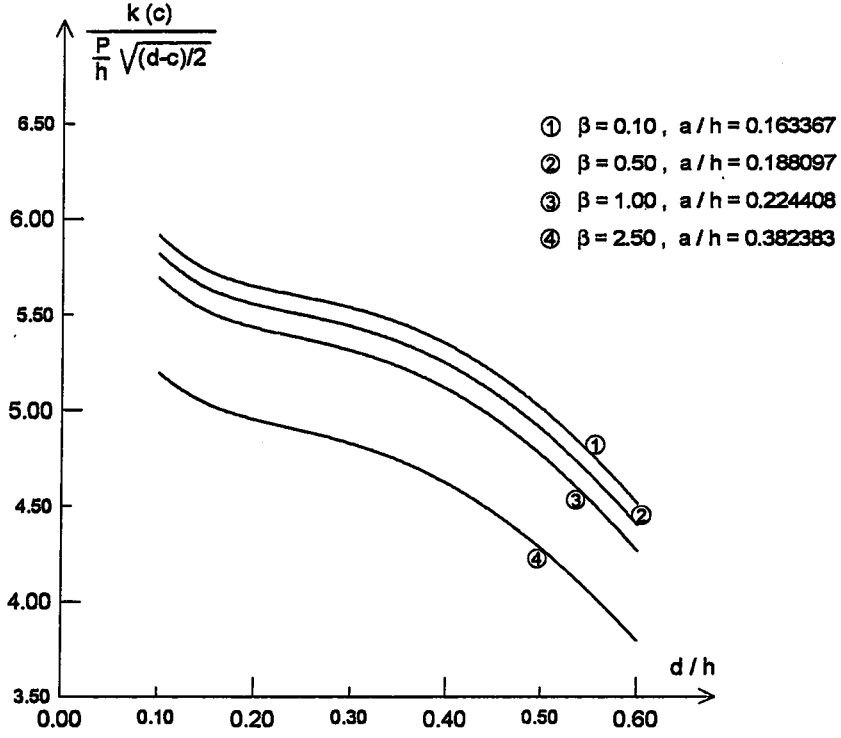
Şekil 42. Dairesel blok durumunda, çeşitli c/h oranları için iç çatlakın d ucundaki gerilme şiddet faktörünün d/h ile değişimi
($b/h = 2.0$, $\beta = 0.50$, $R/h = 10$, $h_1/h = 0.80$, $\mathfrak{R} = 0.01$)



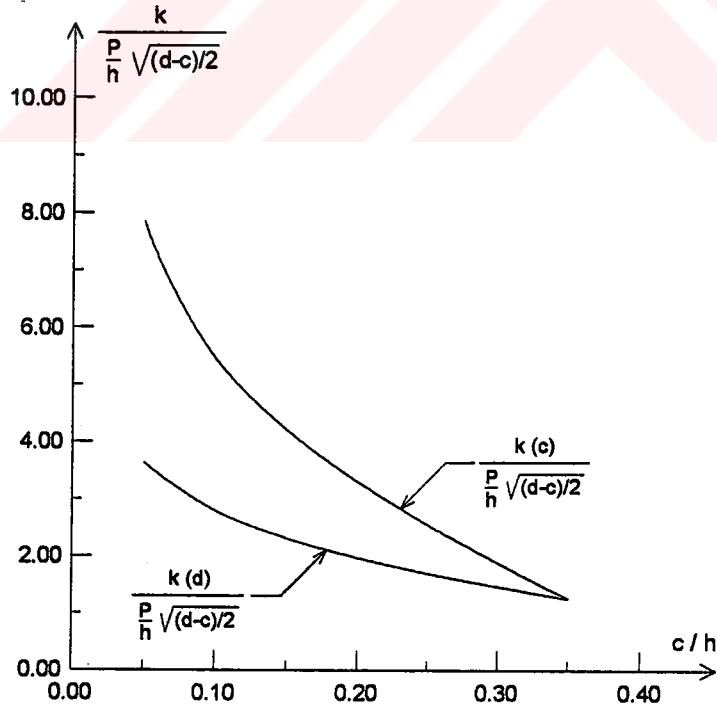
Şekil 43. Dairesel blok durumunda, elastik sabitlerin çeşitli oranları için iç çatlakın d ucundaki gerilme şiddet faktörünün d/h ile değişimi ($b/h=1.0$, $c/h=0.10$, $R/h=10$, $h_1/h=0.80$, $\mathfrak{R}=0.01$)



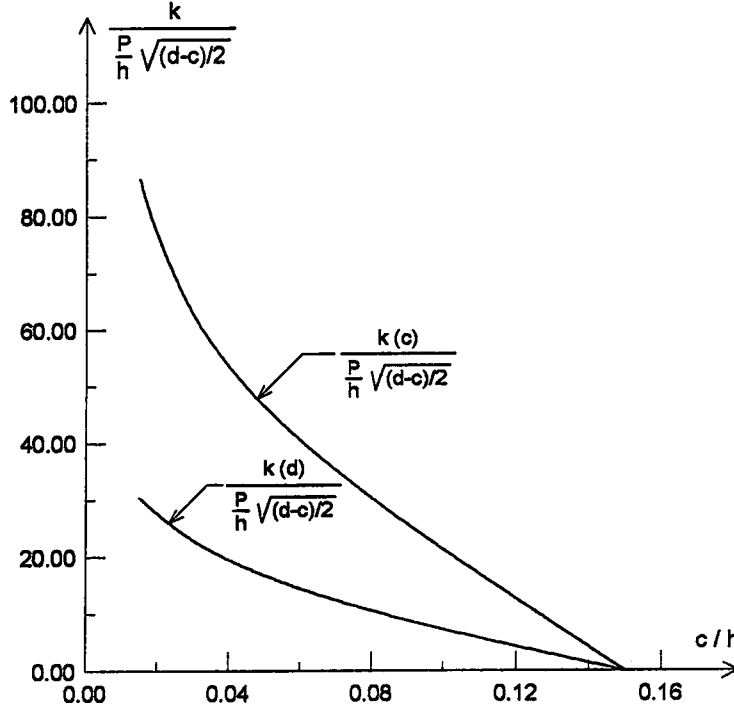
Şekil 44. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli blok genişlikleri için iç çatlakın d ucundaki gerilme şiddet faktörünün d/h ile değişimi ($b/h=1.0$, $\beta=0.10$, $c/h=0.08$, $h_1/h=0.70$)



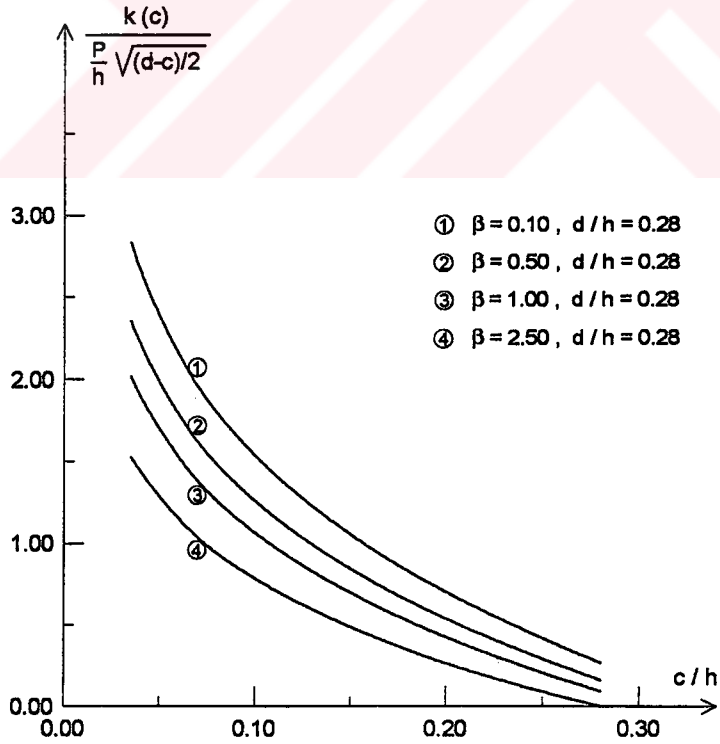
Şekil 45. Dairesel blok durumunda, elastik sabitlerin çeşitli oranları için iç çatlakın c ucundaki gerilme şiddet faktörünün d/h ile değişimi ($b/h = 1.0, c/h = 0.10, R/h = 10, h_1/h = 0.80, \mathfrak{R} = 0.01$)



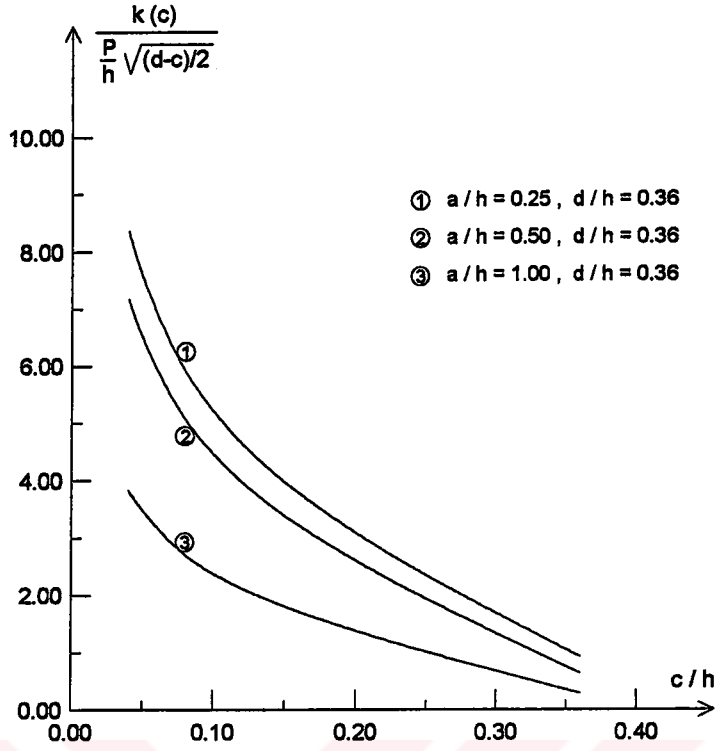
Şekil 46. Dairesel blok durumunda, iç çatlakın c ve d uçlarındaki gerilme şiddet faktörlerinin c/h ile değişimi ($d/h = 0.35, b/h = 1.0, \beta = 0.10, R/h = 10, h_1/h = 0.80, \mathfrak{R} = 0.01$)



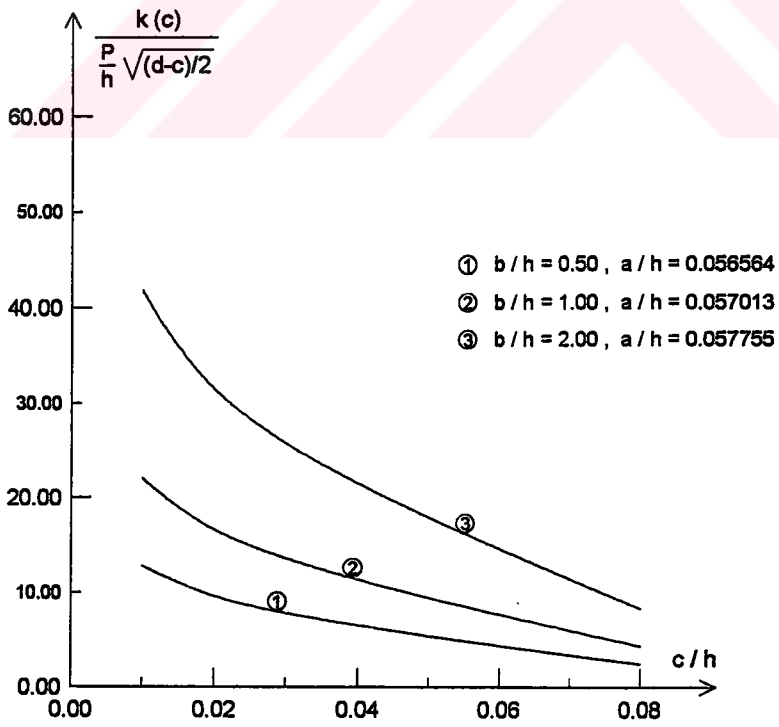
Şekil 47. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, iç çatlakın c ve d uçlarındaki gerilme şiddet faktörlerinin c/h ile değişimi
($d/h = 0.15$, $b/h = 3.0$, $\beta = 0.10$, $a/h = 0.20$, $h_1/h = 0.30$)



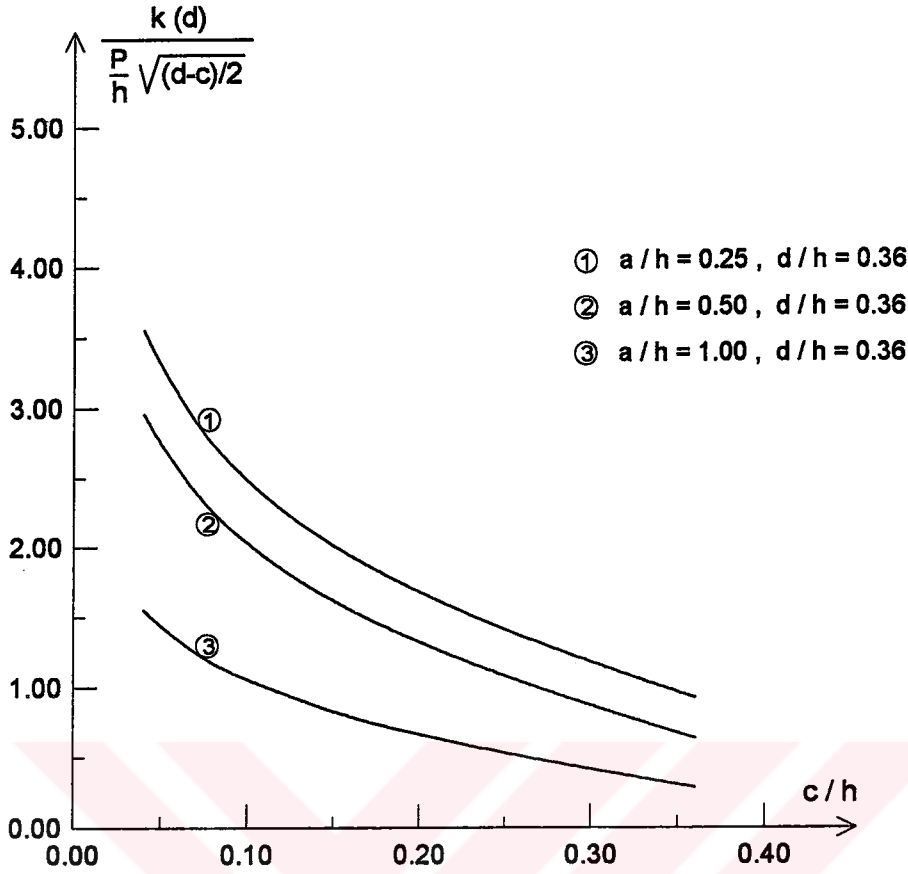
Şekil 48. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, elastik sabitlerin çeşitli oranları için iç çatlakın c ucundaki gerilme şiddet faktörünün c/h ile değişimi
($b/h = 0.50$, $a/h = 0.50$, $d/h = 0.28$, $h_1/h = 0.70$)



Şekil 49. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli blok genişlikleri için iç çatlakın c ucundaki gerilme şiddet faktörünün c/h ile değişimi ($b/h = 1.0$, $\beta = 0.05$, $d/h = 0.36$, $h_1/h = 0.80$)



Şekil 50. Dairesel blok durumunda, çeşitli mesnet genişlikleri için iç çatlakın c ucundaki gerilme şiddet faktörünün c/h ile değişimi ($R/h = 10$, $\beta = 0.10$, $d/h = 0.08$, $h_1/h = 0.20$, $\mathfrak{R} = 0.001$)



Şekil 51. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli blok genişlikleri için iç çatlakın d ucundaki gerilme şiddet faktörünün c/h ile değişimi ($b/h = 1.0$, $\beta = 0.05$, $d/h = 0.36$, $h_1/h = 0.80$)

Şekillerden de görülebileceği gibi basınç bölgesine yaklaştıkça iç çatlakın d ucundaki gerilme şiddet faktörü $k(d)$ hızla azalmakta ve basınç bölgesinde belirli bir yerde negatif değere sahip olmaktadır (şekil 40-44). Çatlakın d ucundaki gerilme şiddet faktörünün negatif bir değere sahip olması demek, çatlakın o bölgede kapanacağı anlamına gelmektedir. Zaten basınç bölgesinde çatlakın kapanması beklenen bir sonuçtur. Zira çatlak çekme gerilmelerinin olduğu bölgelerde önem kazanmaktadır.

Diğer taraftan çatlak uzunluğunun azalması, alttaki tabakanın rijitliğinin üstteki tabakaya göre azalması ve blok genişliğinin artması durumlarında çatlak daha erken kapanmakta ve dolayısıyla da her iki uçtaki gerilme şiddet faktörü de azalmaktadır (şekil 42-45).

Çok küçük çatlak olması halinde, c ve d uçlarındaki gerilme şiddet faktörleri birbirine eşit olup çatlakın bulunduğu noktadaki σ_x normal gerilme değeri ile $\sqrt{(d-c)/2}$ 'nin

çarpımına eşit olmaktadır $\left(k(c) = k(d) = \sigma_{x_1}^* (0, 0 \leq y \leq h_1) * \sqrt{(d-c)/2} \right)$. Çatlağın c ucunun kenara yaklaşması halinde hem $k(c)$ ve hem de $k(d)$ gerilme şiddet faktörleri hızla büyümektedir (şekil 46-51).

Tablo 11. Dairesel blok durumunda, çeşitli mesnet genişlikleri için iç çatlağın c ve d uçlarındaki gerilme şiddet faktörlerinin d/h ile değişimi
($c/h = 0.05$, $\beta = 0.50$, $R/h = 10$, $h_1/h = 0.50$, $\mathfrak{R} = 0.01$)

d/h ↓	$b/h = 0.50$ ($a/h = 0.187996$)		$b/h = 1.00$ ($a/h = 0.215821$)		$b/h = 2.00$ ($a/h = 0.322572$)	
	$k(d)$	$k(c)$	$k(d)$	$k(c)$	$k(d)$	$k(c)$
	$\frac{P}{h} \sqrt{\frac{d-c}{2}}$	$\frac{P}{h} \sqrt{\frac{d-c}{2}}$	$\frac{P}{h} \sqrt{\frac{d-c}{2}}$	$\frac{P}{h} \sqrt{\frac{d-c}{2}}$	$\frac{P}{h} \sqrt{\frac{d-c}{2}}$	$\frac{P}{h} \sqrt{\frac{d-c}{2}}$
0.0501	4.5721	4.5720	10.5663	10.5662	22.9055	22.9054
0.10	3.6889	4.4019	8.7881	10.2761	19.1807	22.3314
0.15	2.9159	4.3335	7.1361	10.2130	15.6240	22.2336
0.20	2.1629	4.2386	5.4097	10.0712	11.8307	21.9460
0.25	1.4082	4.0844	3.5789	9.7646	7.7664	21.2796
0.30	0.6343	3.8608	1.6385	9.2647	3.4530	20.1749
0.35	-0.1917	3.5660	-0.4420	8.5693	-1.1402	18.6336
0.40	-1.1602	3.1942	-2.8215	7.6735	-6.3217	16.6547

Çatlak uçlarındaki gerilme şiddet faktörleri $\sigma_x(0,y)$ normal gerilmelerine bağlı olarak değişmektedir. Kısım 3.3' de bahsedildiği gibi mesnet genişliğinin artması ve blok genişliğinin (temas yüzeyi) azalması durumlarında $\sigma_x(0,y)$ normal gerilmeleri büyümektedir. $\sigma_x(0,y)$ normal gerilmelerini artıran sebepler aynı zamanda çatlak uçlarındaki gerilme şiddet faktörlerini de artırmaktadır. Mesnet ve blok genişliğinin çatlak uçlarındaki gerilme şiddet faktörlerine etkisi şekil 44-51 ile tablo 11 ve 12' de verilmektedir. Tablo 11' de dairesel blok durumunda değişik mesnet genişlikleri için çatlağın c ucu sabit tutulup boyu değiştirilerek, çeşitli çatlak uzunlukları için her iki uçtaki gerilme şiddet

faktörleri görülmektedir. Tablo 12' de ise düz (dikdörtgen) blok durumunda değişik blok genişlikleri için çatlakın d ucu sabit tutulup boyu değiştirilerek, çeşitli çatlak boyları için her iki uçtaki gerilme şiddet faktörleri incelenmektedir. Gerek şekiller ve gerekse tablolar incelendiğinde, çatlakın basınç bölgesinde belirli bir mesafede kapandığı ve çatlak boyu büyüdükçe her iki uçtaki gerilme şiddet faktörlerinin arttığı görülmektedir.

Tablo 12. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli blok genişlikleri için iç çatlakın c ve d uçlarındaki gerilme şiddet faktörlerinin c/h ile değişimi ($d/h=0.36$, $\beta=0.05$, $b/h=1.0$, $h_1/h=0.80$)

c/h ↓	$a/h=0.25$		$a/h=1.00$		$a/h=2.00$	
	$\frac{k(d)}{\frac{P}{h} \sqrt{\frac{d-c}{2}}}$	$\frac{k(c)}{\frac{P}{h} \sqrt{\frac{d-c}{2}}}$	$\frac{k(d)}{\frac{P}{h} \sqrt{\frac{d-c}{2}}}$	$\frac{k(c)}{\frac{P}{h} \sqrt{\frac{d-c}{2}}}$	$\frac{k(d)}{\frac{P}{h} \sqrt{\frac{d-c}{2}}}$	$\frac{k(c)}{\frac{P}{h} \sqrt{\frac{d-c}{2}}}$
0.04	3.5553	8.3683	1.5496	3.8291	0.2151	0.6142
0.08	2.7421	5.8988	1.1719	2.7009	0.1534	0.4179
0.12	2.2679	4.6380	0.9485	2.1169	0.1175	0.3138
0.16	1.9347	3.7699	0.7890	1.7060	0.0925	0.2410
0.20	1.6753	3.0802	0.6630	1.3716	0.0732	0.1834
0.24	1.4585	2.4839	0.5561	1.0763	0.0574	0.1350
0.28	1.2672	1.9395	0.4608	0.8026	0.0437	0.0927
0.32	1.0908	1.4239	0.3721	0.5412	0.0313	0.0547
0.3599	0.9226	0.9227	0.2872	0.2873	0.0198	0.0199

3.5.2. Kenar Çatlak Halinde Gerilme Şiddet Faktörleri

Kenar çatlak halinde, iç çatlak halindeki rahat çözüm imkanı ortadan kalkmaktadır. İntegral denklem çekirdeğinin yakınsaması kenar noktada bozulmakta ve noktasal singularite göstermektedir. Bu nedenle önce integral denklem çekirdeğinin yakınsamasını bozan terimler çekirdekte çıkarılıp bunların yerine kapalı integralleri ilave edilerek sözkonusu yakınsamama problemi ortadan kaldırılmıştır. İntegral denklemin lineer denklem

takımına indirgenmesinde alınan n nokta sayısına göre de iç çatlak halindeki kadar iyi yakınsama elde edilememekte ve dolayısıyla da n nokta sayısının artırılması gerekmektedir. Ancak yapılan sayısal hesaplamalarda, n nokta sayısının artırılması durumunda da yakınsama çok yavaş olmaktadır. Bu nedenle gerilme şiddet faktörünün hesabında kısım 2.4.6.2' de verilmiş olan üç nokta extrapolasyonu kullanılmaktadır.

Yapılan sayısal uygulamalarda, öncelikle (266) ifadesiyle verilmiş olan integral denklem kısım 2.4.5.2' deki ifadeler yardımıyla çözülerek $g(\zeta)$ değerleri elde edilmiş daha sonra $g(\zeta)$ ' nin (299) ifadesiyle verilen uç noktasındaki $g(1)$ değerine bağlı olarak $\frac{k(d)}{\sigma_0 \sqrt{d}}$ boyutsuz büyüklüğü hesaplanmıştır. Bu boyutsuz büyüklükteki σ_0 ; çatlaksız tabakada $y = 0$ noktasındaki σ_x normal gerilmesini göstermektedir $\left(\sigma_0 = \sigma_{x_1}^*(0,0) \right)$.

Kenar çatlak halinde, çatlak boyu küçülürken gerilme şiddet faktörü belli bir limit değere gitmektedir (şekil 52-57). Bu limit değer çok küçük çatlak halinde, $d/h = 0.0001$ için 1.1211 ile 1.1215 arasında bir değer olarak elde edilmekte ve bu değer yarım düzlem için bulunan 1.1215 kesin sonucu ile üst üste düşmektedir. Bu da üç nokta extrapolasyonunun bu tür problemlerin çözümünde ne kadar uygun olduğunu göstermektedir. Tablo 13' de, kenar çatlak halinde çeşitli n nokta sayıları ve üç nokta extrapolasyonu için gerilme şiddet faktörünün çatlak uzunluğu ile değişimi verilmektedir. Çok küçük çatlak halinde, $d/h = 0.0001$ için elde edilen limit değerler n nokta sayısının sırasıyla 9, 12 ve 18 alınması durumunda yine sırasıyla 1.1085, 1.1117 ve 1.1149 olarak elde edilmektedir. Görüldüğü gibi, n nokta sayısının artırılması ile limit durumunda elde edilen değerler yarım düzlem için bulunan değere yaklaşmakta ancak bu yakınsama oldukça yavaş olmaktadır. Yakınsamanın yavaş olması büyük zaman kaybına sebep olduğu için üç nokta extrapolasyonunun kullanılması bu açıdan da oldukça uygun olmaktadır. Zira üç nokta extrapolasyonunun kullanılması halinde, limit durumunda elde edilen 1.1213 değeri yarım düzlemde bulunan sonuçla aynı olmaktadır.

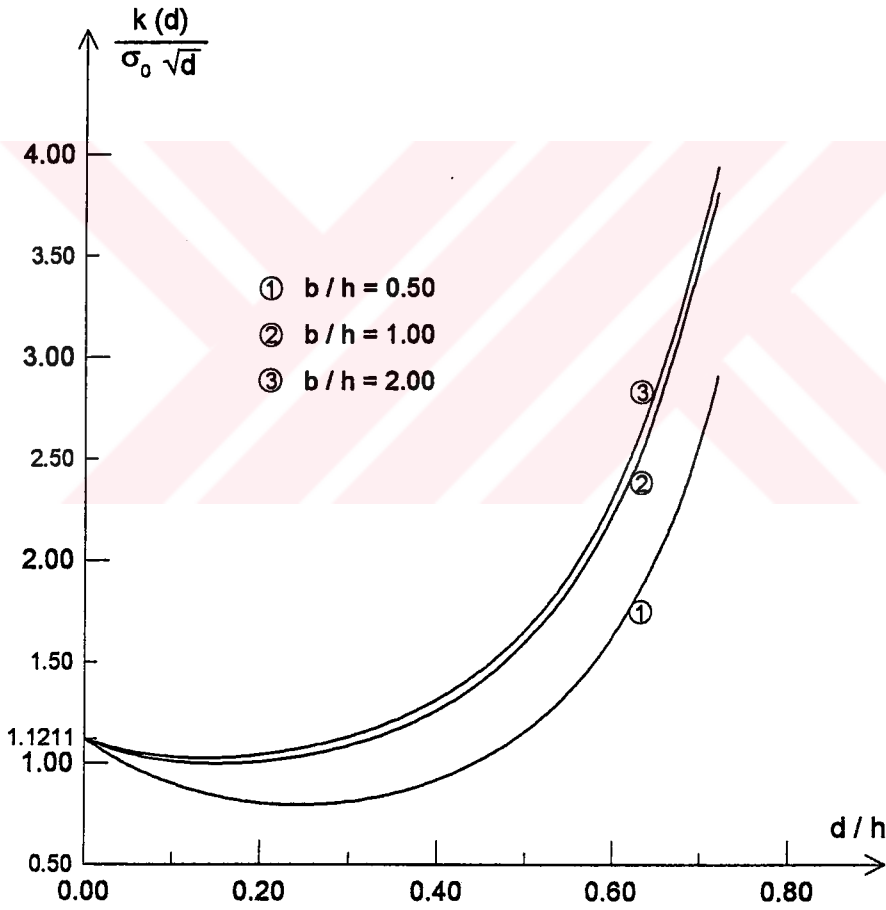
Tablo 13. Dairesel blok durumunda, Gauss-Chebyshev integrasyonunda kullanılan çeşitli n nokta sayıları ve üç nokta extrapolasyonu için kenar çatlağın d ucundaki gerilme şiddet faktörünün d/h ile değişimi
($b/h = 2.$, $\beta = 0.50$, $R/h = 10$, $h_1/h = 0.80$, $\mathfrak{R} = 0.01$)

d/h ↓	$\frac{k(d)}{\sigma_0 \sqrt{d}}$			
	$n = 9$	$n = 12$	$n = 18$	Üç Nokta Extr. $n \rightarrow \infty$
0.0001	1.1085	1.1117	1.1149	1.1213
0.05	1.0369	1.0404	1.0439	1.0509
0.10	1.0054	1.0096	1.0137	1.0216
0.15	1.0010	1.0065	1.0119	1.0224
0.20	1.0180	1.0255	1.0329	1.0474
0.25	1.0537	1.0643	1.0750	1.0967
0.30	1.1071	1.1227	1.1385	1.1707
0.35	1.1778	1.2012	1.2253	1.2756
0.40	1.2646	1.3006	1.3382	1.4182
0.45	1.3636	1.4197	1.4797	1.6114
0.50	1.4639	1.5518	1.6489	1.8707
0.55	1.5408	1.6762	1.8334	2.2132
0.60	1.5471	1.7453	1.9911	2.6255
0.65	1.4115	1.6704	2.0199	2.9907

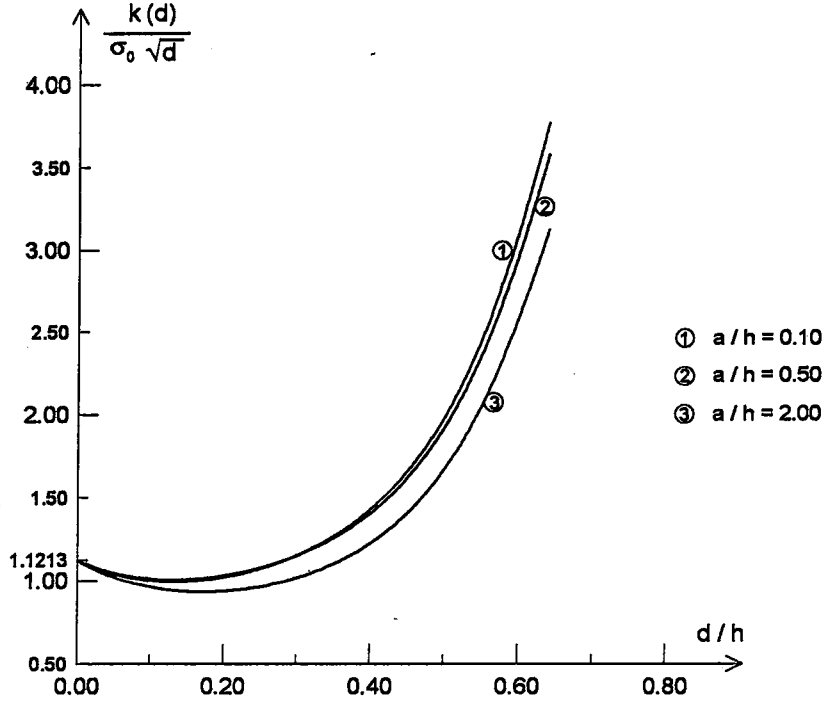
Şekil 52 ve 53' de çeşitli boyutsuz büyüklükler için gerilme şiddet faktörünün mesnet ve blok genişlikleri ile değişimi verilmektedir. Mesnet genişliğinin artması ya da blok genişliğinin azalması ile çatlak bölgesindeki çekme gerilmeleri artacağından gerilme şiddet faktörleri de buna bağlı olarak artmaktadır. Bu artış çatlak boyunun artmasıyla daha da büyümektedir. Ancak çatlağın basınç bölgesine ulaşması durumunda basınç gerilmeleri nedeniyle çatlak belirli bir bölgeden sonra kapanmaya başlayacağı için çatlak boyu artırılabilir gerilme şiddet faktörü azalmaktadır (şekil 54-57). Diğer taraftan çatlak içeren elastik tabakanın rijitliği üstteki tabakaya göre azaldıkça çekme gerilmeleri azalacağından gerilme

şiddet faktörleri de azalmaktadır. Çatlak içeren tabaka kalınlığının azalması durumunda ise çatlak boyu küçüleceği için gerilme şiddet faktörü çekme bölgesinde dahi artmayıp sürekli bir şekilde azalmaktadır. Bu durum şekil 57' de çok açık bir şekilde görülmektedir.

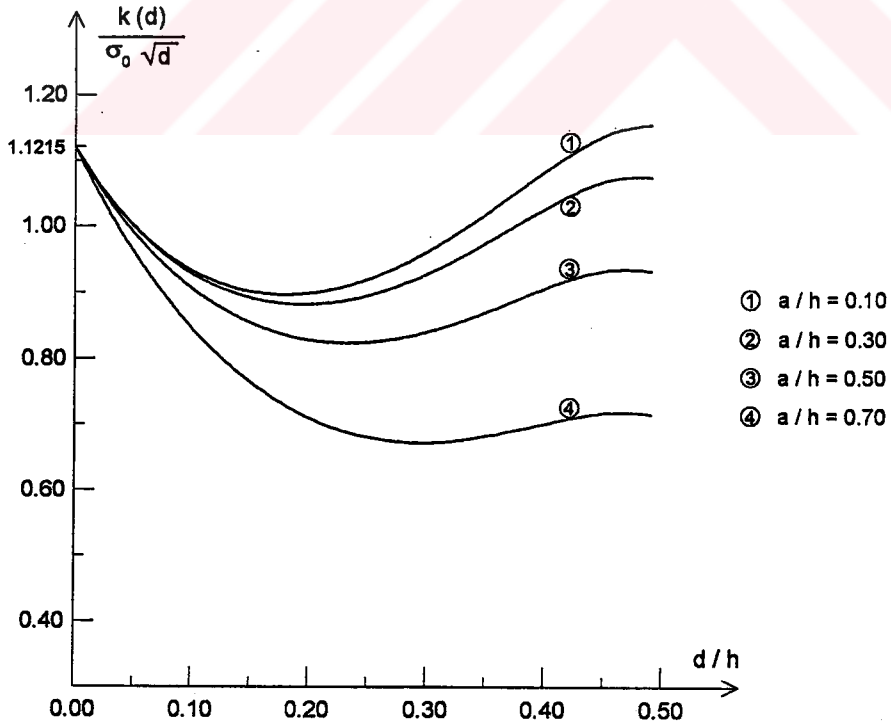
Yapılan sayısal uygulamalar ve buna bağlı olarak elde edilen grafiklerin sonucu olarak, gerek çatlak uzunluğunun ve gerekse çatlak bölgesindeki çekme gerilmelerinin çatlak uçlarındaki gerilme şiddet faktörleri üzerinde önemli rol oynadığı söylenebilir.



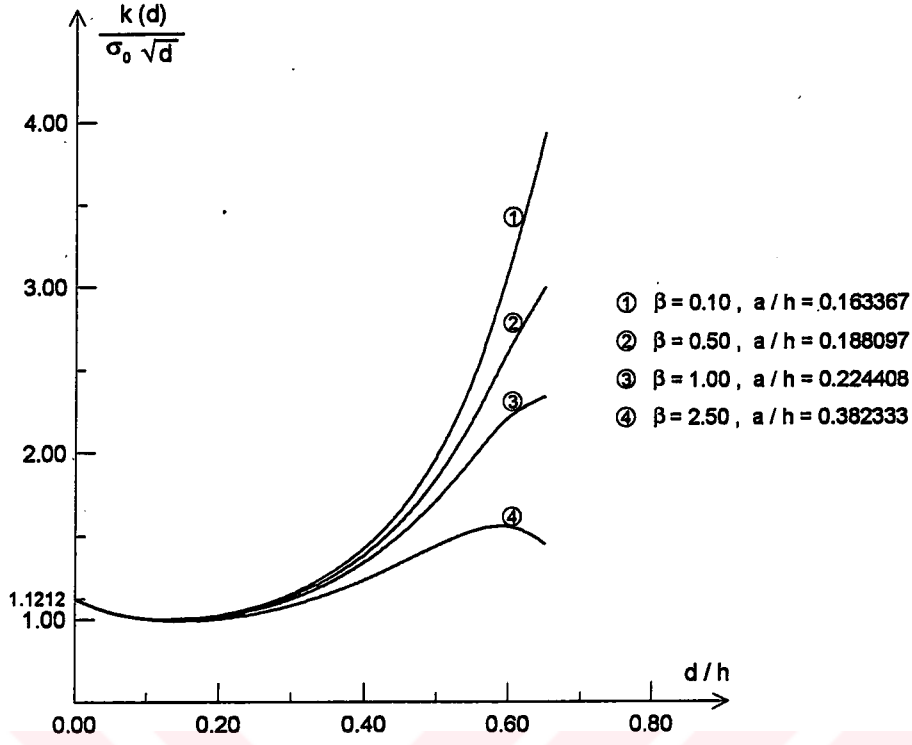
Şekil 52. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli mesnet genişlikleri için kenar çatlakın d ucundaki gerilme şiddet faktörünün çatlak uzunluğu ile değişimi ($a/h = 0.50$, $\beta = 0.05$, $h_1/h = 0.90$)



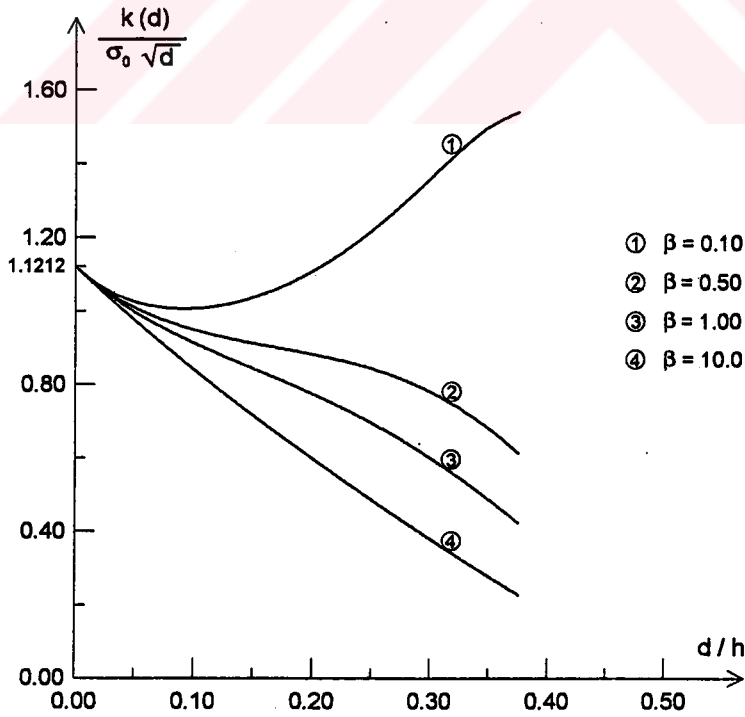
Şekil 53. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli blok genişlikleri için kenar çatlağın d ucundaki gerilme şiddet faktörünün çatlak uzunluğu ile değişimi ($b/h = 1.0$, $\beta = 0.10$, $h_1/h = 0.80$)



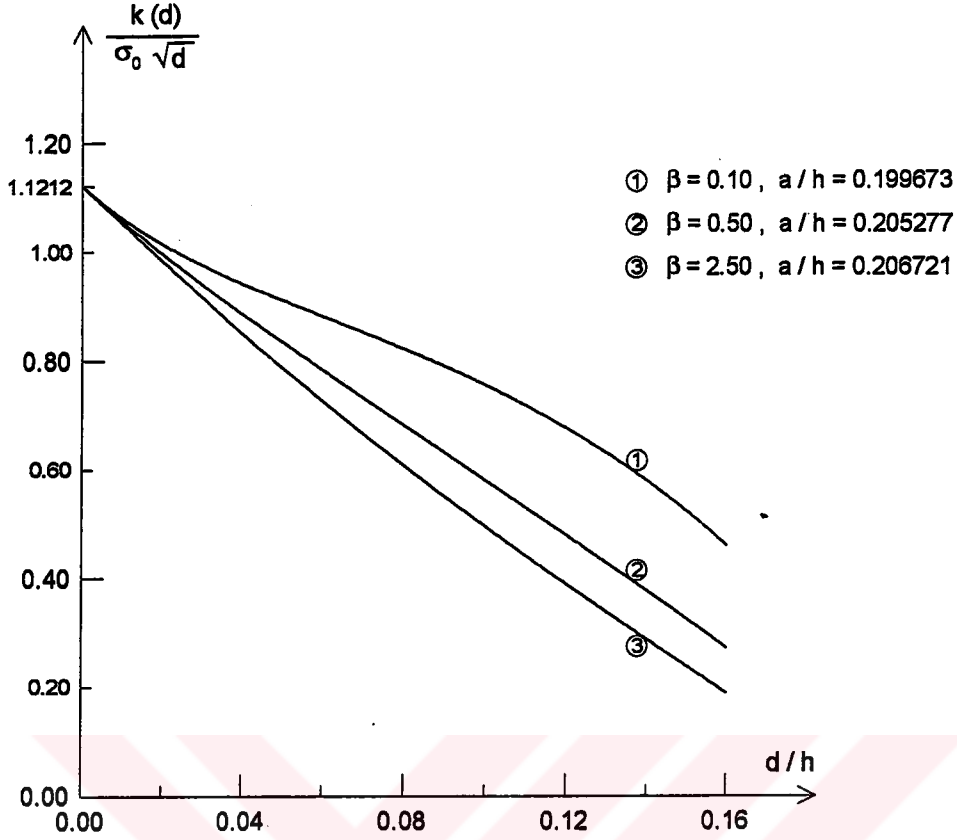
Şekil 54. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli blok genişlikleri için kenar çatlağın d ucundaki gerilme şiddet faktörünün çatlak uzunluğu ile değişimi ($b/h = 0.50$, $\beta = 1.00$, $h_1/h = 0.70$)



Şekil 55. Dairesel blok durumunda, elastik sabitlerin çeşitli oranları için kenar çatlakın d ucundaki gerilme şiddet faktörünün çatlak uzunluğu ile değişimi ($b/h = 1.0$, $R/h = 10$, $h_1/h = 0.80$, $\mathfrak{R} = 0.01$)



Şekil 56. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, elastik sabitlerin çeşitli oranları için kenar çatlakın d ucundaki gerilme şiddet faktörünün çatlak uzunluğu ile değişimi ($b/h = 1.0$, $a/h = 0.10$, $h_1/h = 0.50$)



Şekil 57. Dairesel blok durumunda, elastik sabitlerin çeşitli oranları için kenar çatlakın d ucundaki gerilme şiddet faktörünün çatlak uzunluğu ile değişimi ($b/h = 1.0, R/h = 10, h_1/h = 0.20, \mathfrak{R} = 0.01$)

3.6. Çatlak Yüzey Yerdeğiştirmeleri

Çatlak içeren bileşik tabakada incelenmesi gereken önemli bir büyüklük de çatlak yüzey yerdeğiştirmeleridir. Kısım 2.4.7' deki formülasyon yardımıyla çatlak yüzey yerdeğiştirmeleri iç ve kenar çatlak durumları için ayrı ayrı incelenmektedir. Önceki kısımda incelenmiş olan gerilme şiddet faktörlerinde olduğu gibi, blok profilinin düz ve eğri yüzeyli olması hallerinde benzer sonuçlar elde edildiği için burada her iki durum birlikte ele alınmaktadır. Gerek iç ve gerekse kenar çatlak durumlarında çatlak yüzey yerdeğiştirmeleri için verilen grafiklerde,

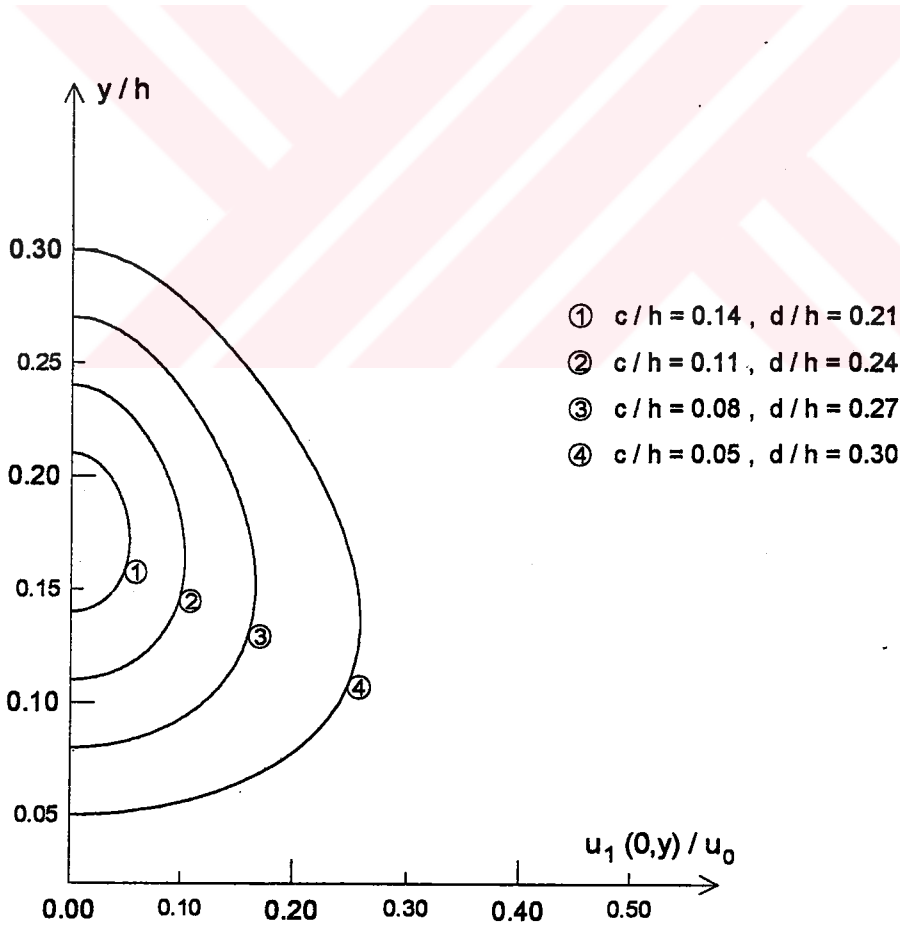
$$u_0 = \pi (1 + \kappa_1) \frac{P}{4\mu_1}$$

olarak tanımlanmaktadır.

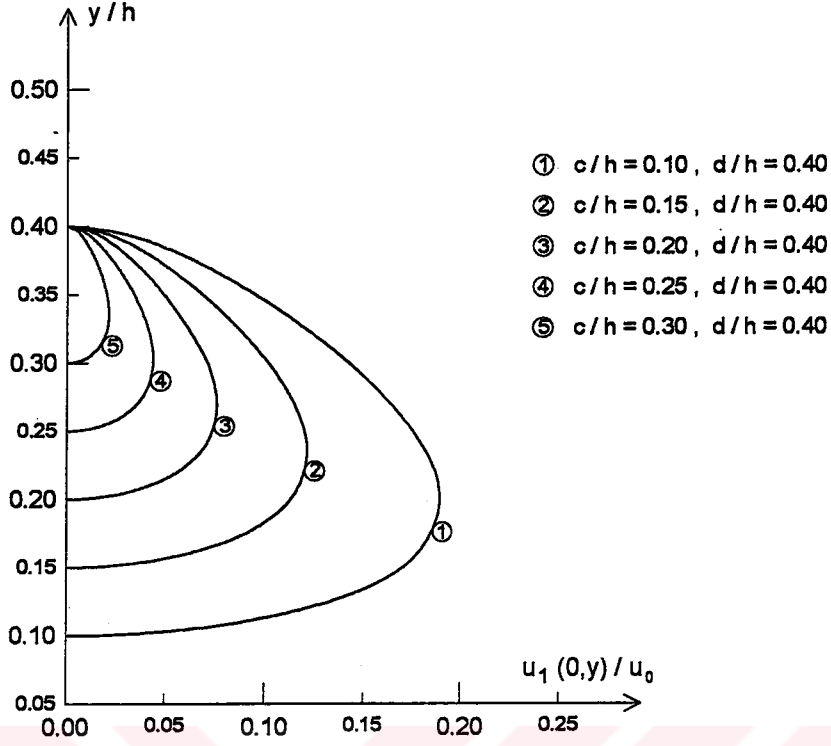
3.6.1. İç Çatlak Halinde Çatlak Yüzey Yerdeğiştirmeleri

Kısım 2.4.7.1' de verilmiş olan (308) ifadesinden faydalanılarak iç çatlak durumunda çatlak yüzey yerdeğiştirmeleri çeşitli boyutsuz büyüklükler için incelenmekte ve bunlara ait çeşitli grafikler aşağıda verilmektedir.

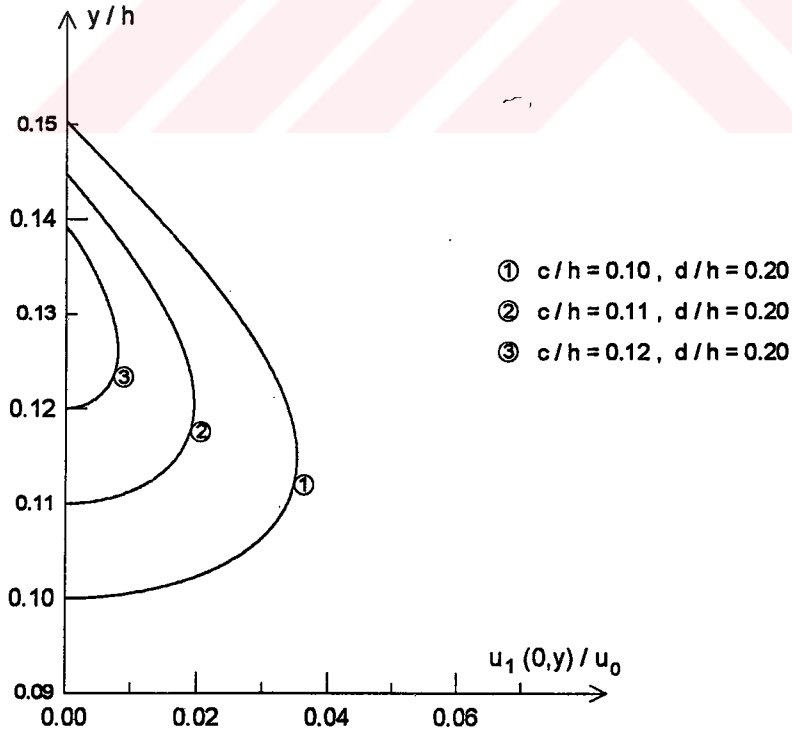
şekil 58-60' da çeşitli boyutsuz büyüklükler için çatlak yüzey yerdeğiştirmelerinin çatlak boyu ile değişimleri verilmektedir. şekillerden de görülebileceği gibi çatlak boyu büyüdükçe yüzey yerdeğiştirmeleri de büyümektedir. Gerilme şiddet faktörlerinin incelenmesinde de belirtildiği gibi, çatlak basınç bölgesinin belirli bir yerinde kapanmaktadır. Örneğin şekil 60' da olduğu gibi, $d/h = 0.20$ alınmış olmasına rağmen çatlak bu noktaya ulaşmadan kapanmaktadır. Çatlak boyu kısaldıkça kapanma noktası da basınç bölgesinin başladığı noktaya yaklaşmaktadır.



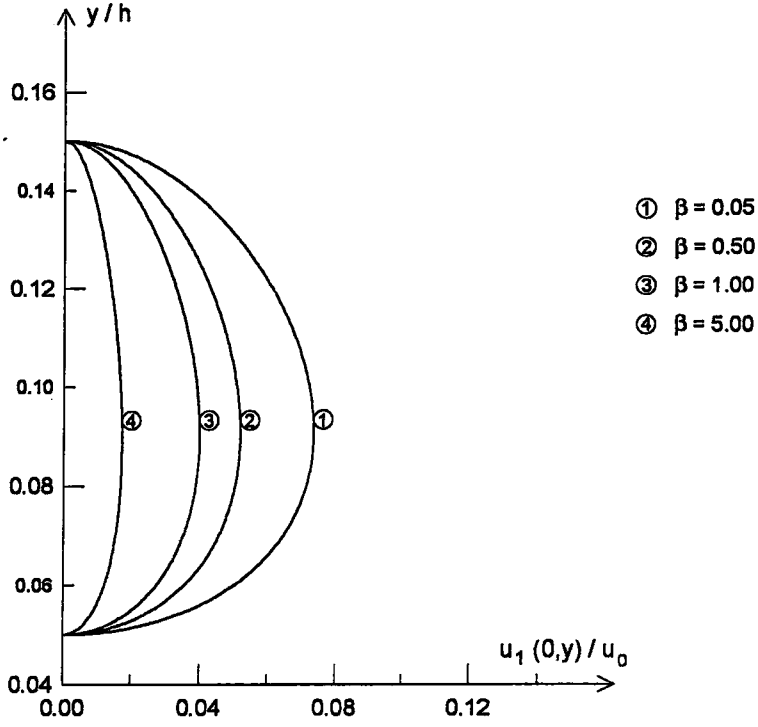
şekil 58. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli çatlak uzunlukları için iç çatlak yüzey yerdeğiştirmeleri ($\beta = 1.0$, $b/h = 1.0$, $a/h = 0.10$, $h_1/h = 0.70$)



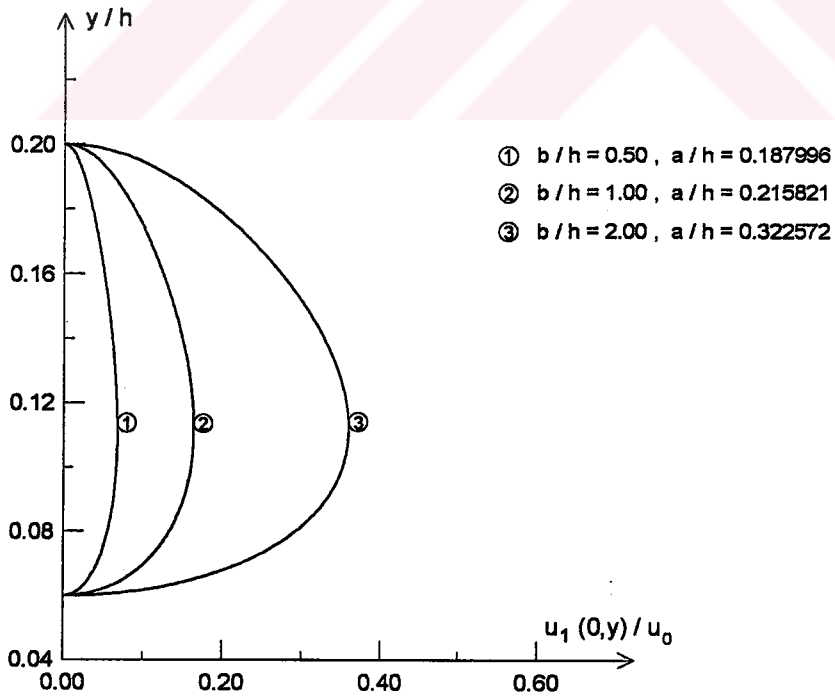
Şekil 59. Dairesel blok durumunda, çeşitli çatlak uzunlukları için iç çatlak yüzey yerdeğiştirmeleri ($\beta = 0.10, b/h = 1.0, R/h = 10, h_1/h = 0.80, \mathfrak{R} = 0.01$)



Şekil 60. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli çatlak uzunlukları için iç çatlak yüzey yerdeğiştirmeleri ($\beta = 0.10, b/h = 1.0, a/h = 0.10, h_1/h = 0.30$)



Şekil 61. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, elastik sabitlerin çeşitli oranları için iç çatlak yüzey yerdeğiştirmeleri
 ($c/h = 0.05$, $d/h = 0.15$, $b/h = 0.50$, $a/h = 0.25$, $h_1/h = 0.50$)

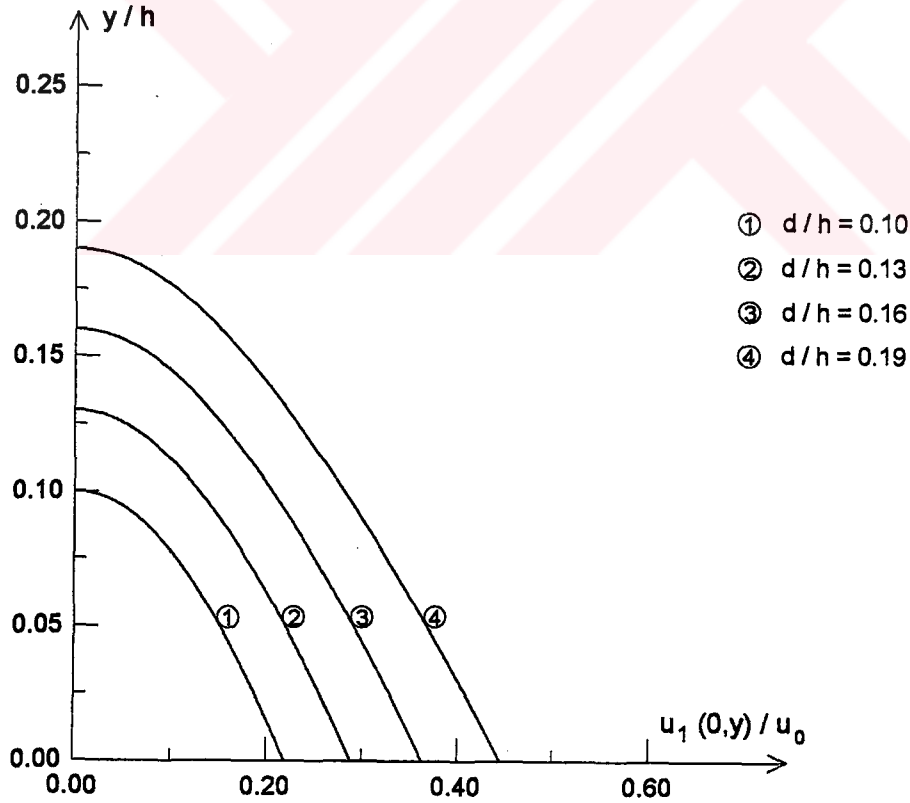


Şekil 62. Dairesel blok durumunda, çeşitli mesnet genişlikleri için iç çatlak yüzey yerdeğiştirmeleri
 ($c/h = 0.06$, $d/h = 0.20$, $\beta = 0.50$, $R/h = 10$, $h_1/h = 0.50$, $\mathfrak{R} = 0.01$)

Şekil 61, çatlak içeren elastik tabakanın rijitliğinin üstteki tabakaya göre azalması durumunda yüzey yerdeğıştirmelerinin de azaldığını göstermektedir. Bu durum gerilme şiddet faktörleri incelenirken bahsedildiği gibi çatlak bölgesindeki çekme gerilmelerinin azalmasından kaynaklanmaktadır. Şekil 62' de ise çeşitli boyutsuz büyüklükler için yüzey yerdeğıştirmelerinin mesnet genişliği ile değışimi görülmektedir. Mesnet genişliğinin artırılması halinde çekme gerilmeleri de büyüyeceğinden çatlak yüzey yerdeğıştirmeleri artmaktadır.

3.6.2. Kenar Çatlak Halinde Çatlak Yüzey Yerdeğıştirmeleri

Kenar çatlak halinde yüzey yerdeğıştirmeleri, iç çatlak haline benzer şekilde kısım 2.4.7.2' de verilmiş olan (312) ifadesinden faydalanılarak çeşitli boyutsuz büyüklükler için incelenmektedir.

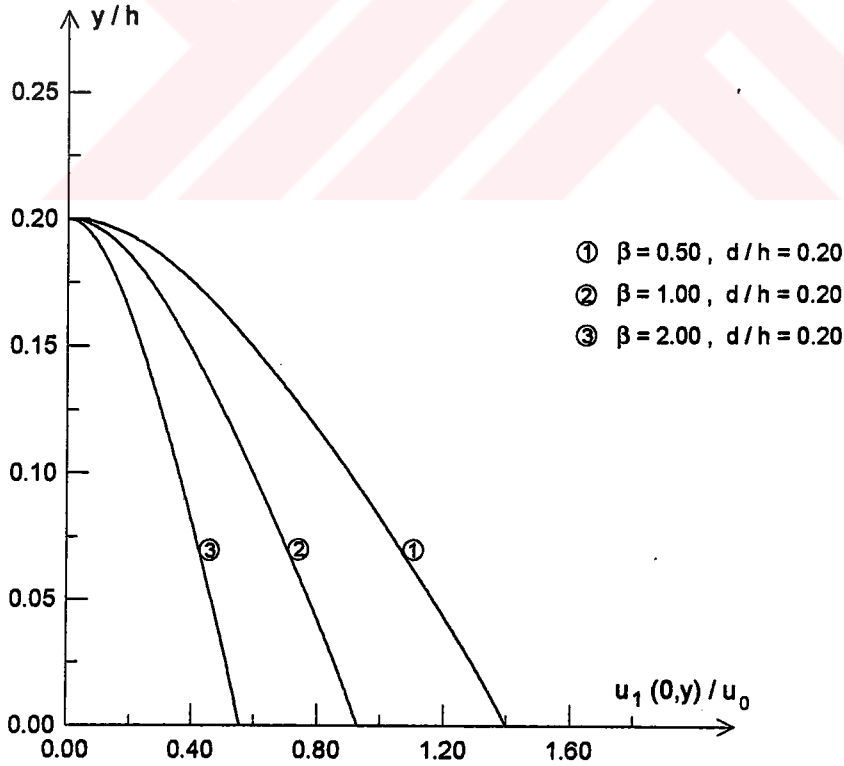


Şekil 63. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli çatlak uzunlukları için kenar çatlak yüzey yerdeğıştirmeleri
($b/h = 0.50$, $\beta = 1.00$, $a/h = 0.10$, $h_1/h = 0.60$)

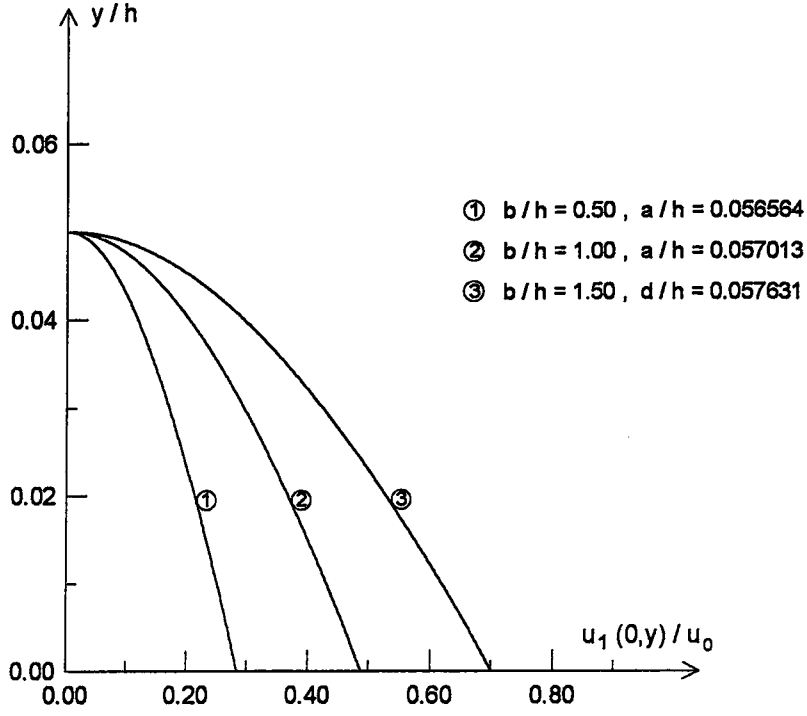
İç çatlak halinde olduğu gibi, kenar çatlak halinde de çatlak boyunun ve çekme gerilmelerinin artması durumlarında çatlak yüzey yerdeğiştirmeleri büyümektedir. Şekil 63' de çeşitli boyutsuz büyüklükler için çatlak yüzey yerdeğiştirmelerinin çatlak boyu ile değişimleri verilmektedir. Şekilden de görülebileceği gibi çatlak boyu büyüdükçe yüzey yerdeğiştirmeleri de büyümektedir.

Şekil 64-66' da çatlak yüzey yerdeğiştirmelerinin elastik sabitlerin oranı, mesnet genişliği ve blok genişlikleri ile değişimleri görülmektedir. Gerek elastik sabitlerin oranı ve gerekse de mesnet genişliğinin büyümesi durumlarında yüzey yerdeğiştirmeleri de büyümektedir (şekil 64 ve 65). Blok genişliğinin (temas yüzeyi) artması durumunda ise çekme gerilmeleri azalacağından yüzey yerdeğiştirmeleri küçülmektedir (şekil 66).

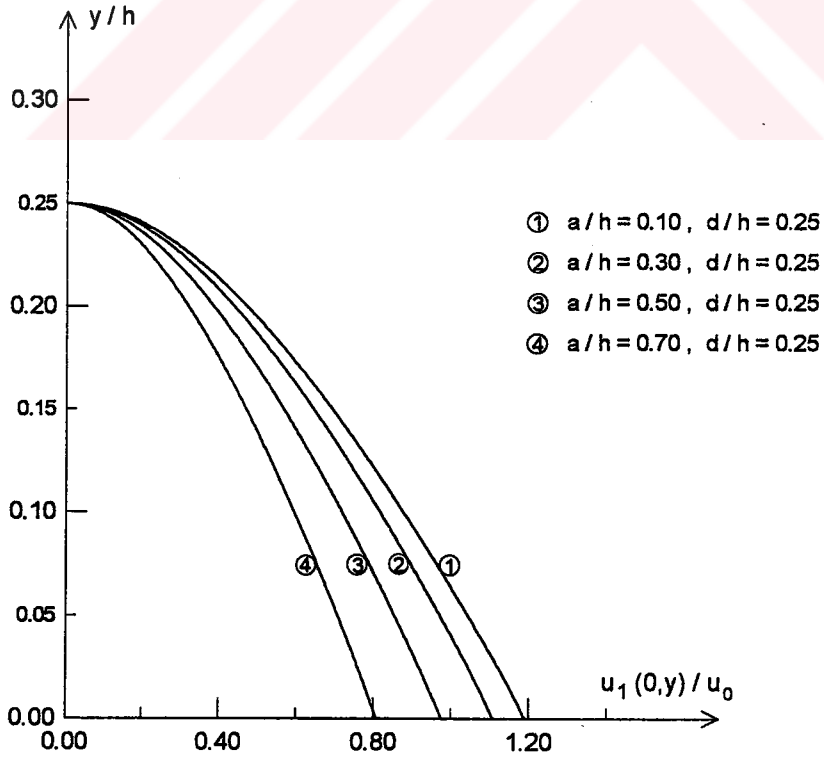
Kenar çatlak halinde yüzey yerdeğiştirmeleri için verilen şekillerde göze çarpan ortak özellik, çatlak yüzey yerdeğiştirmelerinin kenara yaklaştıkça artmasıdır. Zira kenara yaklaştıkça hem çekme gerilmeleri ve hem de çatlak uzunluğu artmakta, dolayısıyla da bu bölgede yerdeğiştirmeler en büyük olmaktadır.



Şekil 64. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, elastik sabitlerin çeşitli oranları için kenar çatlak yüzey yerdeğiştirmeleri
 ($b/h = 1.0$, $d/h = 0.20$, $a/h = 0.05$, $h_1/h = 0.50$)



Şekil 65. Dairesel blok durumunda, çeşitli mesnet genişlikleri için kenar çatlak yüzey yerdeğiştirmeleri ($\beta = 0.10$, $d/h = 0.05$, $R/h = 10$, $h_1/h = 0.20$, $\mathfrak{R} = 0.001$)



Şekil 66. Düz (dikdörtgen) blok durumunda, çeşitli blok genişlikleri için kenar çatlak yüzey yerdeğiştirmeleri ($\beta = 0.05$, $d/h = 0.25$, $b/h = 1.0$, $h_1/h = 0.80$)

4. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu çalışmada; rijit bir blok aracılığı ile yüklenmiş, elastik sabitleri ve yükseklikleri farklı iki tabakadan oluşan ve alt tabakasında simetri eksenini üzerinde düşey bir çatlak bulunan ve basit mesnetler üzerine oturtulmuş bileşik tabaka problemi incelenmiştir. Söz konusu problemin çözümü, iki halin süperpozisyonu olarak ele alınmıştır. İlk olarak çatlaksız, sadece dış yüklerin etkisinde bulunan bileşik tabakada sürekli temas problemi incelenmiştir. Sürekli temas probleminin incelenmesinde, öncelikle rijit blok altındaki bilinmeyen temas gerilmeleri ve temas yüzeyleri hesaplanmış, buna bağlı olarak da simetri eksenini üzerindeki σ_x ve σ_y normal gerilmeleri ile iki tabaka arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklıkları tespit edilmiştir. İlk ayrılmayı meydana getiren yük ve bu yükten daha küçük yük değerleri için iki tabaka arasındaki temas gerilmeleri de çeşitli boyutsuz büyüklükler için hesaplanmıştır. İkinci olarak ise, dış yük olarak çatlak yüzeyi boyunca etki eden ve çatlaksız durumda elde edilen gerilmeler; zıt yönde aynı şiddet ve aynı doğrultuda çatlak yüzeyi boyunca yüklenmiş ve çatlak içeren bileşik tabakanın çözümü süperpoze edilmiştir. Çatlak içeren bileşik tabakada, çatlak uçlarındaki gerilme şiddet faktörleri ile çatlak yüzey yerdeğiştirmeleri iç ve kenar çatlak durumları için ayrı ayrı incelenmişlerdir. Gerek ilk halde ve gerekse ikinci halde yapılan sayısal uygulamalardan elde edilen sonuçlar aşağıda verilmektedir.

Bileşik tabaka probleminin incelenmesinde karşılaşılan en önemli sorunlardan birisi, özellikle rijit bloğun temas yüzeyini ve blok altındaki temas gerilmelerini hesaplamak için elde edilen integral denklem çekirdeklerinin $(0, +\infty)$ arasındaki integrallerinin hesaplanmasıdır. Zira söz konusu bu çekirdeklerin integralleri hesaplanırken, alt sınır sıfır civarında integrasyon çok hızlı bir değişim göstermektedir. Bu nedenle özellikle alt sınır civarında integrasyon işlemi yapılırken integrasyon aralığı mümkün mertebe çok küçük tutulmalıdır. Bunu yapabilmek için değişik integrasyon formülleri olmakla birlikte, bu tür problemlere en uygun geleni Simpson kuralıdır. Bu nedenle karşılaşılan bu tür problemlerde Simpson kuralının kullanılması önerilmektedir.

a) *Yalnız dış yüklerin etkisi altında bulunan çatlaksız bileşik tabakada; rijit bloğun temas yüzeyi, blok altındaki temas gerilmeleri, simetri eksenini boyunca σ_x ve σ_y , normal gerilmeleri ve iki elastik tabaka arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklıkları ile ilk ayrılma yükü ve bu yükten daha küçük yük değerleri için iki tabaka arasındaki temas gerilmeleri için elde edilen sonuçlar:*

Dairesel blok profili durumunda; blok yarıçapı, mesnet genişliği ve yük oranının artması durumlarında bloğun bileşik tabaka ile olan temas yüzeyi artmakta, buna bağlı olarak da temas gerilmeleri azalmaktadır. Alttaki tabakanın rijitliğinin üstteki tabakaya göre azalması (β' nın büyümesi) yani alttaki tabakanın üstteki tabakaya göre yumuşaması durumunda da yine bloğun temas yüzeyi artmaktadır. Bloğun temas yüzeyi büyüdükçe, yük daha geniş bir alana yayıldığından blok altındaki temas gerilmeleri azalmaktadır. Temas gerilmeleri $x = 0$ noktasında en büyük değerine ulaşmakta, bloğun eğrilğine benzer bir değişimle azalarak temasın sona erdiği $x = a$ noktasında sıfır olmaktadır.

Parabolik blok profili durumunda da daireysel blok profili durumuna benzer sonuçlar elde edilmektedir. Parabolik blok durumunda $Gh = 0.05$ için bulunan temas yüzeyleri ve temas gerilmeleri ile daireysel blok durumunda $R/h = 10$ için elde edilen temas yüzeyleri ve temas gerilmeleri birbirine çok yakın değerler almaktadır.

Düz (dikdörtgen) blok profili durumunda ise; blok altındaki temas gerilmeleri bloğun kenarlarında ($x = a$) sonsuza gitmekte, $x = 0$ simetri eksenine yaklaştıkça düzgün bir şekilde azalmaktadır. Eğrisel blok halinde olduğu gibi, temas yüzeyinin artması ile temas gerilmeleri azalmaktadır. Blok genişliği (temas yüzeyi) ve mesnet genişliğinin her ikisinin artması ya da temas yüzeyinin artıp mesnet genişliğinin azalması durumlarında, blok ile bileşik tabaka arasında ayrılmalar meydana gelmektedir. Söz konusu bu ayrılmalar blok genişliğinin mesnet genişliğinden küçük olması durumunda $x = 0$ simetri ekseninden ve blok genişliğinin mesnet genişliğinden büyük olması halinde de $x = a$ ucundan başlamak üzere meydana gelmektedir. Diğer taraftan yine düz (dikdörtgen) blok durumunda, blok genişliğinin 0.1' den büyük olması ve alttaki tabakanın üstteki tabakaya göre yumuşaması halinde de blok ile bileşik tabaka arasında $x = 0$ simetri ekseninden başlamak üzere ayrılmalar meydana gelmektedir. Sözü edilen bu ayrılmaların meydana gelmemesi için blok ve mesnet genişliğinin küçük seçilmesi ($a/h \leq 1, b/h \leq 2$), alttaki tabakanın üstteki tabakaya göre daha rijit ve alttaki tabakanın yüksekliğinin daha büyük olması gerekmektedir.

Bileşik tabakadaki en büyük normal gerilmelerin $x=0$ simetri eksenini boyunca meydana gelmesi (σ_y , normal gerilmelerinde düz blok durumu hariç) ve ele alınan çatlağın da bu eksen üzerinde olması nedeniyle yalnız bu eksen boyunca σ_x ve σ_y , normal gerilmeleri hesaplanmıştır. Simetri eksenini üzerinde kayma gerilmeleri her yerde sıfır olduğu için kayma gerilmeleri üzerinde durulmamıştır. Düz ve eğri yüzeyli blok profili durumlarında normal gerilmeler için benzer sonuçlar elde edilmiştir.

Dairesel ve parabolik blok durumlarında, mesnet genişliğinin küçük olması ($b/h \leq 0.10$) durumunda bloğun bileşik tabaka ile olan temas yüzeyini de küçük olacağından bileşik tabaka alttan ve üstten tekil yüke eşdeğer özellikte iki kuvvete maruz kalmaktadır. Bu nedenle üstteki tabakanın alt ve üst bölgelerinde basınç, orta bölgesinde çekme gerilmeleri meydana geldiği halde; alt tabakada ise üst tabakanın tersine alt ve üst bölgelerde çekme, orta bölgede ise basınç gerilmeleri meydana gelmektedir (σ_x). Mesnet genişliğinin artması durumunda ise σ_x normal gerilmeleri büyümekte ve kirişlerin eğilme halinde olduğu gibi; her iki tabakanın üst bölgelerinde basınç, alt bölgelerinde de çekme gerilmeleri oluşmaktadır. Alttaki tabakanın rijitliği üstteki tabakaya göre azaldıkça alttaki tabakadaki σ_x normal gerilmeleri azalmakta, üstteki tabakadaki gerilmeler ise artmaktadır. Bu durum, elastik tabakanın rijitliğinin artması halinde sözkonusu tabakadaki σ_x normal gerilmelerinin de artacağı sonucunu doğurmaktadır. Diğer taraftan σ_x normal gerilme dağılımı özellikle kalınlığı büyük olan tabakalarda çoğu zaman lineerlikten uzaklaşmaktadır. Buna neden olarak, yüksek kiriş örneğinde olduğu gibi tabaka kalınlığının büyük olması ve bileşik tabakanın rijit bir blok aracılığı ile yüklenmesi gösterilebilir. σ_x normal gerilme dağılımlarında dikkati çeken diğer önemli bir sonuç da, çekme ve basınç bölgelerindeki gerilme alanlarının birbirine eşit olmasıdır. Bu eşitliğin sağlanması denge koşulu için önemlidir.

Blok ile bileşik tabaka arasındaki temas yüzeyinin küçük olması halinde temas bölgesinde tekil yük haline benzer bir singularite nedeniyle σ_y , normal gerilmeleri temas bölgesine yaklaştıkça hızla büyümektedir. Kesit boyunca derine inildikçe singularite etkisini kaybetmekte ve σ_y , normal gerilmeleri azalarak bileşik tabakanın alt yüzeyinde sıfıra eşit olmakta, dolayısıyla da alt yüzeyde koşulan sınır şartı sağlanmaktadır. Diğer taraftan rijit bloğun genişliği (temas yüzeyi) arttıkça, σ_y , normal gerilmeleri azalmaktadır. Bloğu bileşik

tabaka ile olan temas yüzeyi (blok genişliği) arttıkça, gerilmelerin kesit boyunca değişimi lineerliğe daha fazla yaklaşmaktadır. Bu durum Saint-Venant ilkesinin bir sonucu olarak ortaya çıkmaktadır. Zira özellikle düz (dikdörtgen) blok durumunda, blok genişliği ne kadar büyük olursa simetri eksenini üzerinde hesaplanan σ_y normal gerilmesi blok kenarlarındaki singülariteden o kadar az etkilenmektedir. Singülaritenin etkisi azaldığı için de σ_y normal gerilmeleri kesit boyunca lineere yakın bir dağılım göstermektedir. σ_y normal gerilme dağılımlarında dikkati çeken önemli bir sonuç da; σ_y için koşulan sınır şartları bütün yüzeylerde sağlanmış olmakla birlikte, gerilme dağılımını gösteren eğrilerin her iki tabakada farklı eğriliklere sahip olmasıdır. Bu sonuca neden olarak; elastik tabakaların temas yüzeylerindeki sürtünme kuvvetinin ihmal edilmesi, dolayısıyla da tabakaların yüklemeye altında birbirinden bağımsız olarak çalışmaları gösterilebilir.

Gerek dairesel ve gerekse düz (dikdörtgen) blok durumlarında iki elastik tabaka arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklıklarının en büyük değerleri, alttaki tabakanın üstteki tabakaya göre daha rijit veya her iki tabakanın rijitliklerinin eşit olması hallerinde $h_1 / h = 0.40$ değerinde elde edilmektedir. Elastik sabitlerin oranı (β), tabakalar arasındaki ilk ayrılma yüklerini önemli ölçüde etkilemektedir. Altta tabakanın üstteki tabakaya göre rijitliği arttıkça (β 'nin azalması) iki elastik tabaka arasındaki ilk ayrılma yükleri de artmaktadır. Ancak özellikle düz (dikdörtgen) blok durumunda, üstteki tabaka kalınlığının bileşik tabakanın toplam kalınlığına oranının 0.5' den küçük ($h_1 / h \geq 0.50$) ve blok genişliğinin de 1.00' den küçük olması durumlarında β 'nin azalması ile ilk ayrılma yükleri de genellikle azalmaktadır. Tabaka kalınlıklarının herhangi birinin küçük olması durumunda ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklıkları küçük değerler almakta, dolayısıyla da bu durumlarda tabakalar arasındaki ayrılmalar daha kolay olmaktadır. Tabakalar arasındaki ayrılmalar genelde; mesnet genişliğinin küçük değerlerinde mesnetin dışında, büyük değerlerinde ise mesnet ile blok arasında meydana gelmektedir. Tabakalar arasındaki ayrılmaların daha büyük yüklerde meydana gelmesi yani ayrılmanın daha zor olması için tabaka kalınlıklarının birbirine yakın seçilmesi ve alttaki tabakanın rijitliğinin üstteki tabakaya göre daha büyük olması gerekmektedir.

Tabakalar arasındaki sürekli temas durumu, dış yükün etkisinin büyük olduğu ($x < x_c$) temas bölgesi ve dış yükün etkisinin azalarak kaybolduğu ($x > x_c$) temas bölgesi olmak üzere iki bölgeden oluşmaktadır. Dış yükün etkisinin görüldüğü $x < x_c$ sürekli temas

bölgesinde temas gerilmeleri; $x = 0$ simetri düzleminde, dikdörtgen rijit bloğun kenarlarında ($x = a$) ve mesnetlerde ($x = b$) maksimum değerlerine ulaşmakta, dolayısıyla da bu noktalar tabakalar arasındaki temas gerilmelerinin tepe noktaları olmaktadır. Dış yükün etkisinin azalarak kaybolduğu $x > x_c$ sürekli temas bölgesinde ise sadece kütle kuvvetinin etkisi görülmekte ve bu bölgedeki temas gerilmeleri kütle kuvvetlerine eşdeğer olmaktadır.

b) Alt tabakasında düşey bir çatlak bulunan bileşik tabakada, çatlak uçlarındaki gerilme şiddet faktörleri ve çatlak yüzey yerdeğiştirmeleri için elde edilen sonuçlar:

Blok profilinin gerek eğri yüzeyli ve gerekse de düz yüzeyli olması durumlarında benzer sonuçlar elde edildiği için sonuçlar eğri ve düz yüzeyli blok profili ayırımı yapılmadan aşağıda verilmektedir.

İç çatlak halinde; iç çatlakın d ucundaki gerilme şiddet faktörü $k(d)$, basınç bölgesine yaklaştıkça hızla azalmakta ve basınç bölgesinin belirli bir yerinden sonra negatif değerlere sahip olmaktadır. Gerilme şiddet faktörünün negatif değere sahip olması çatlak o bölgede kapanacağı anlamına gelmektedir. Zaten basınç bölgesinde çatlakın kapanması beklenen bir sonuçtur. Çatlakın kapanma noktası olarak $\frac{d}{h_1} = 0.60 - 0.70$ civarında bir değer elde edilmektedir. İç çatlakın c ucundaki gerilme şiddet faktörü $k(c)$, çatlak boyunun değişmesi ile büyük bir değişim göstermemekle birlikte çatlak basınç bölgesine yaklaştıkça azalmaktadır. Diğer taraftan iç çatlak uzunluğunun azalması, çatlak içeren bileşik tabakanın rijitliğinin üstteki tabakaya göre azalması (β 'nin artması) ve blok genişliğinin artması durumlarında çatlak daha erken kapanmakta, dolayısıyla da her iki uçtaki gerilme şiddet faktörleri azalmaktadır. Çok küçük iç çatlak olması halinde; c ve d uçlarındaki gerilme şiddet faktörleri birbirine eşit olup, çatlakın bulunduğu noktada çatlaksız çözümden bulunan σ_x normal gerilme değeri ile $\sqrt{(d-c)/2}$ 'nin çarpımına eşit olmaktadır $(k(c) = k(d) = \sigma_x^* (0,0 \leq y \leq h_1) * \sqrt{(d-c)/2})$. İç çatlakın c ucunun kenara yaklaşması halinde ise hem $k(c)$ ve hem de $k(d)$ gerilme şiddet faktörleri hızla büyümektedir.

Kenar çatlak halinde, iç çatlak halindeki kadar rahat çözüm imkanı yoktur. Zira integral denklem çekirdeğinin yakınsaması kenar noktada ($c = 0$) bozulmakta ve noktasal singularite göstermektedir. Bunun için integral denklem çekirdeğinin yakınsamasını bozan terimler çekirdekten çıkartılarak bunların yerine kapalı integralleri ilave edilmiş ve

sözkonusu yakınsamama problemi ortadan kaldırılmıştır. Diğer taraftan, integral denklemin lineer denklem takımına indirgenmesinde alınan n nokta sayısına göre de yakınsama iyi olmamaktadır. Bu nedenle n nokta sayısının artırılması gerekmektedir. Ancak yapılan sayısal uygulamalarda, n nokta sayısının artırılması durumunda da yakınsamanın çok yavaş olduğu tespit edilmiştir (tablo 13). Yakınsamanın yavaş olması büyük zaman kaybına ve yapılacak işlemlerin uzamasına neden olduğundan, kenar çatlak halinde gerilme şiddet faktörünün hesabında üç nokta extrapolasyonu kullanılmıştır. Üç nokta extrapolasyonun kullanılması ile hem limit durumdaki kesin sonuçlara oldukça çok yakın sonuçlar elde edilmekte ve hem de zaman kaybı ortadan kalkmaktadır.

Kenar çatlak halinde, çatlak boyu küçülürken çatlak ucundaki gerilme şiddet faktörü belli bir limit değere gitmektedir. Bu limit değer çok küçük çatlak halinde, $d/h = 0.0001$ için çeşitli boyutsuz büyüklüklerde 1.1211 ile 1.1215 arasında bir değer olarak elde edilmektedir. Bulunan bu limit değer, yarım düzlem için bulunan 1.1215 kesin sonucu ile üst üste düşmektedir. Bu da, üç nokta extrapolasyonunun bu tür problemlerin çözümünde ne kadar uygun olduğunu açık bir şekilde göstermektedir. Kenar çatlak uzunluğu arttıkça çatlak ucundaki gerilme şiddet faktörü de artmaktadır. Ancak kenar çatlağın basınç bölgesine ulaşması durumunda, basınç gerilmeleri nedeniyle çatlak belirli bir bölgeden sonra kapanmaya başlayacağı için çatlak boyu artırılsa bile gerilme şiddet faktörü azalmaktadır. Çatlak içeren tabaka kalınlığının azalması durumunda çekme bölgesi ve çatlak boyu kısalmakta, gerilme şiddet faktörü çekme bölgesinde dahi artmayıp sürekli azalmaktadır. Çatlak içeren tabakanın rijitliğinin üstteki tabakaya göre azalması durumunda da kenar çatlak ucundaki gerilme şiddet faktörü çekme bölgesinin belirli bir yerine kadar büyümekte ve daha sonra küçülmektedir.

Çatlak yüzey yerdeğiştirmeleri; gerek iç çatlak ve gerekse kenar çatlak hallerinde, çatlak boyunun ve çatlak bölgesindeki çekme gerilmelerinin artmasıyla büyümektedir. Daha önce de bahsedildiği gibi, çatlak basınç bölgesinin belirli bir yerinde kapanmaktadır. Çatlak boyu kısaldıkkça, kapanma noktası da basınç bölgesinin başladığı (tarafsız eksen) noktaya yaklaşmaktadır. Kenar çatlak halinde, çatlak yüzey yerdeğiştirmeleri kenara yaklaştıkça ($c = 0$) artmaktadır. Zira bu noktada, çekme gerilmesi de en büyük değerine ulaşmaktadır.

Yapılan sayısal uygulamalardan; gerek çatlak uzunluğunun ve gerekse çatlak bölgesindeki çekme gerilmelerinin çatlak uçlarındaki gerilme şiddet faktörleri ve çatlak yüzey yerdeğiştirmeleri üzerinde önemli rol oynadıkları söylenebilir. Çatlak bölgesindeki

çekme gerilmelerinin artmasına neden olan faktörler, gerilme şiddet faktörleri ve yüzey yerdeğıştirmelerinin de artmasına sebep olmaktadır. Çatlak uzunluğunun artması da, hem gerilme şiddet faktörlerini ve hem de çatlak yüzey yerdeğıştirmelerini artırmaktadır.



5. KAYNAKLAR

1. Timoshenko, S., Goodier, J. N., Elastisite Teorisi, Ç: Kayan, İ. ve Şuhubi, E., Arı Kitabevi, İstanbul, 1969.
2. Knott, J. I., Met, B., A. I. M., Fundamentals of Fracture Mechanics, First Edition, Butterworth and Co Ltd., London, 1973.
3. Ewalds, H. L., Wanhill, R. J. H., Fracture Mechanics, First Edition, Edward Arnold Ltd., London, 1984.
4. Hertz, H., Gesammelte Werke von Heinrich Hertz, Volume 1, Leipzig, 1985.
5. İnan, M., Düzlemde Elastisite Teorisi, İ T Ü Yayınları, İstanbul, 1969.
6. Johnson, K. L., Contact Mechanics, First Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
7. Galin, L. A., Contact Problems in the Theory of Elasticity, North Carolina State College Articles on the Application Series, Raleigh, N.C., 1961.
8. Ufliand, I. S., Survey of Articles on the Applications of Integral Transforms in the Theory of Elasticity, North Carolina State College Translation Series, Raleigh, N.C., 1965.
9. Ratwani, M., Erdoğan, F., On the Plane Contact Problem for a Frictionless Elastic Layer, International Journal of Solids and Structures, 9 (1973) 921-936.
10. Civelek, M. B., Erdoğan, F., The Axisymmetric Double Contact Problem for a Frictionless Elastic Layer, International Journal of Solids and Structures, 10 (1974) 639-660.
11. Geçit, M. R., A Tensionless Contact without Friction between an Elastic Layer and an Elastic Foundation, International Journal of Solids and Structures, 16 (1980) 387-396.
12. Geçit, M. R., Axisymmetric Contact Problem for an Elastic Layer and an Elastic Foundation, International Journal of Engineering Science, 19 (1981) 747-755.

13. Adams, G. G., Bogy, D. B., The Plane Solution for the Elastic Contact Problem of a Semi-Infinite Strip and Half Plane, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, 43 (1976) 603-607.
14. Çakıroğlu, A. O., Elastik Yarım Düzleme Oturan Plaklarda Temas Problemi, Doçentlik Tezi, K.T.Ü., İnşaat Mühendisliği Bölümü, Trabzon, 1979.
15. Çakıroğlu, A. O., Çakıroğlu, F. L., Continuous and Discontinuous Contact Problems for Strips on an Elastic Semi-Infinite Plane, International Journal of Engineering Science, 29, 1 (1991) 99-111.
16. Çakıroğlu, F. L., Erdöl, R., Elastik Zemine Oturan Bileşik Şeritte Sürekli Temas Problemi, 6. Ulusal Mekanik Kongresi, Eylül 1989, Bursa, Bildiriler Kitabı, Cilt I, 243-248.
17. Çakıroğlu, F. L., Elastik Yarısız Düzleme Oturan Bileşik Tabakaların Değme Problemi, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 1990.
18. Adams, G. G., An Elastic Strip Pressed Against an Elastic Half Plane by a Steadily Moving Force, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, 45, (1978) 89-94.
19. Adams, G. G., A Rigid Punch Bonded to a Half Plane, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, 46, (1979) 844-848.
20. Geçit, M. R., Axisymmetric Contact Problem for a Semi-Infinite Cylinder and a Half Space, International Journal of Engineering Science, 24, 8 (1986) 1245-1256.
21. Bakırtaş, İ., The Problem of a Rigid Punch on a Non-Homogeneous Elastic Half Space, International Journal of Engineering Science, 18, (1980) 597-610.
22. Keer, L. M., Silva, M. A. G., Two Mixed Problems for a Semi-Infinite Layer, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, 39, 94 (1972) 1121-1124.
23. Civelek, M. B., Erdoğan, F., The Frictionless Contact Problem for an Elastic Layer under Gravity, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, 42, 97 (1975) 136-140.

24. Civelek, M. B., Erdoğan, F., Interface Separation in a Frictionless Contact Problem for an Elastic Layer, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, 43, 98 (1976) 175-177.
25. Civelek, M. B., Erdoğan, F., Çakıroğlu, A. O., Interface Separation for an Elastic Layer Loaded by a Rigid Stamp, International Journal of Engineering Science, 16 (1978) 669-679.
26. Geçit, M. R., Erdoğan, F., Frictionless Contact Problem for an Elastic Layer under Axisymmetric Loading, International Journal of Solids and Structures, 14 (1978) 771-785.
27. Lan, Q., Graham, G. A. C., Selvadural, A. P. S., Certain Two-Punch Problems for an Elastic Layer, International Journal of Solids and Structures, 33, 19 (1996) 2759-2774.
28. Erdoğan, F., Ratwani, M., The Contact Problem for an Elastic Layer Supported by two Quarter Planes, , Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, 41, 96 (1974) 673-678.
29. Aksoğan, O., Akavcı, S., Becker, A. A., A Comparative of the Contact Problem for an Elastic Layer Supported by two Elastic Quarter Planes, Çukurova Üniversitesi Mühendislik Dergisi, 1997.
30. Geçit, M. R., Gökpinar, S., Frictionless Contact between an Elastic Layer and a Rigid Rounded Support, The Arabian Journal for Science and Engineering, 10, 3 (1985) 243-251.
31. Geçit, M. R., Yapıcı, H., Contact Problem for an Elastic Layer Resting on Rigid Flat Supports, The Arabian Journal for Science and Engineering, 11, 3 (1986) 235-242.
32. Gladwell, G. M. L., On some Unbounded Contact Problems in Plane Elasticity Theory, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, (1976) 263-267.
33. Adams, G. G., Bogy, D. B., The Plane Symmetric Contact Problem for Dissimilar Elastic Semi-Infinite Strips of Different Widths, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, (1977) 604-610.
34. Gladwell, G. M. L., The Contact Problem for a Rigid Cylinder Pressed between two Elastic Layers, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, (1977) 36-40.

35. King, R. B., Elastic Analysis of some Punch Problems for a Layered Medium, International Journal of Solids and Structures, 23, 12 (1987) 1657-1664.
36. Hung, N. D., Saxce, G., Frictionless Contact of Elastic Bodies by Finite Element Method and Mathematical Programming Technique, Computers and Structures, 11, (1980) 55-67.
37. Nowell, D., Hills, D. A., Contact Problems Incorporating Elastic Layers, International Journal of Solids and Structures, 24, 1 (1988) 105-115.
38. Fabrikant, V. I., Sankar, T. S., Singularities at Angular Points in Elastic Contact Problems, Communications in Applied Numerical Methods, 4, 2 (1988) 173-178.
39. Loboda, V. V., Plane Solution for Elastic Contact Problem of a Strip and Semi-Infinite Strip, Mechanics of Solids, 22, 1 (1987) 62-71.
40. Dempsey, J. P., Zhao, Z. G., Minnetyan, L., Li, H., Plane Contact of an Elastic Layer Supported by a Winkler Foundation, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, 57, (1990) 974-980.
41. Dempsey, J. P., Zhao, Z. G., Li, H., Axisymmetric Indentation of an Elastic Layer Supported by a Winkler Foundation, International Journal of Solids and Structures, 27, 1 (1991) 73-87.
42. Klarbring, A., Mikelic, A., Shillor, M., The Rigid Punch Problem with Friction, International Journal of Engineering Science, 29, 6 (1991) 751-768.
43. Gao, H., Chiu, C., Lee, J., Elastic Contact versus Indentation Modeling of Multi-Layered Materials, International Journal of Solids and Structures, 29, 20 (1992) 2471-2492.
44. Pindera, M. J., Lane, M. S., Frictionless Contact of Layered Half-Planes, Part I : Analysis, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, 60, (1993) 633-639.
45. Pindera, M. J., Lane, M. S., Frictionless Contact of Layered Half-Planes, Part II : Numerical Results, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, 60, (1993) 640-645.

46. Zharii, O. Y., Ulitko, A. F., Smooth Contact between the Running Rayleigh Wave and a Rigid Stamp, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, 62, (1995) 362-367.
47. Zharii, O. Y., Adhesive Contact between the Surface Wave and a Rigid Stamp, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, 62, (1995) 368-372.
48. Griffith, A. A., The Phenomena of Rupture and Flow in Solids, Phil. Trans. Roy. Soc., London, Series A, Vol 221, (1920) 163-198.
49. Griffith, A. A., The Theory of Rupture, Proc. 1st Int. Cong. Applied Mechanics, 55, Delft, 1924.
50. Civelek M. B., Simetrik Tekil Kuvvetlerle Yüklü Sonsuz Şeritte Çatlak Problemi, Doçentlik Tezi, İ.T.Ü., İstanbul, 1978.
51. Barenblatt, G. I., Mathematical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture, Advances in Applied Mechanics, Vol 7, Academic Press, 1962.
52. Mott, N. F., Fracture of Metals, Theoretical Considerations, Engineering, Vol 165, 1948.
53. Rice, J. R., A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Nothes and Cracks, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, 35, (1968) 379-386.
54. Sih, G. C., Methods of Analysis and Solutions to Crack Problems, W. Noordhoff Pub., Leyden, The Netherlands, 1972.
55. Orowan, E., Fatigue and Fracture of Metals, MIT Press, Cambridge, 1950.
56. Irwin, G. R., Fracturing of Metals, ASM, Cleveland, Ohio, 1950.
57. Irwin, G. R., Relation of Stresses Near a Crack to the Crack Extension Force, IX th. Int. Cong. Applied Mechanics, Brussels, 1956.
58. Irwin, G. R., Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, 24, (1957) 361-372.

59. Muskhelishvili, N. I., Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, Noordhoff, Groningen, The Netherlands, 1953.
60. Yaman, N., Simetri Eksenleri Üzerinde Çatlaklar Bulunan Elastik Bir Sonsuz Şerit Çözümü, Doçentlik Tezi, K. T. Ü., İnşaat Mühendisliği Bölümü, Trabzon, 1976.
61. Bogy, D. B., The Plane Elastostatic Solution for a Symmetrically Loaded Crack in a Strip Composite, International Journal of Engineering Science, 11, (1973) 985-996.
62. Erdoğan, F., Bakioglu, M., Fracture of Composite Plates Containing Periodik Buffer Strips, NASA Technical Report, Lehigh University, 1974.
63. Krenk, S., The Problem of an Inclined Crack in an Elastic Strip, Report IFSM-73-52, Lehigh University, 1973.
64. Krenk, S., On the Elastic Strip with an Internal Crack, International Journal of Solids and Structures, 11, (1975) 693-708.
65. Ratwani, M., Gupta, G. D., Interaction between Parallel Cracks in Layered Composites, International Journal of Solids and Structures, 10, (1974) 701-708.
66. Gupta, G. D., Erdoğan, F., The Problem of Edge Cracks in an Infinite Strip, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, 41, (1974) 1001-1006.
67. Erdöl, R., Erdoğan, F., A Note on the Bending of a Cracked Strip, Report NGR 39-007-011, Lehigh University, 1976.
68. Erdöl, R., Kenarlarına Dik İç ve Kenar Çatlak Bulunan Sonsuz Şerit Problemi, K. T. Ü. Müh.-Mim. Fakültesi İnşaat Bölümü Dergisi, Cilt I, 1 (1982) 65-74.
69. Erdöl, R., İçi Boş Dairesel Silindirde Halka Şeklinde İç ve Kenar Çatlak Problemi, Doçentlik Tezi, K. T. Ü., İnşaat Mühendisliği Bölümü, Trabzon, 1978.
70. Erdöl, R., Erdoğan, F., A Thick-Walled Cylinder with an Axisymmetric Internal or Edge Crack, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, 45, (1978) 281-286.
71. Geçit, M. R., A Cracked Elastic Strip Bonded to a Rigid Support, International Journal of Fracture, 14, 6 (1978) 575-584.

72. Nied, H. F., Eroğan, F., A Cracked Beam or Plate Transversely Loaded by a Stamp, International Journal of Solids and Structures, 15, (1979) 951-965.
73. Lowengrub, M., A Two Dimensional Crack Problem, International Journal of Engineering Science, 4, (1966) 289-299.
74. Sneddon, I. N., Das, S. C., The Stress Intensity Factor at the Tip of an Edge Crack in an Elastic Half-Plane, International Journal of Engineering Science, 9, (1971) 25-36.
75. Arın, K., Eroğan, F., Penny-Shaped Crack in an Elastic Layer Bonded to Dissimilar Half Spaces, International Journal of Engineering Science, 9, (1971) 213-232.
76. Stallybrass, M. P., A Semi-Infinite Crack Perpendicular to the Surface of an Elastic Half-Plane, International Journal of Engineering Science, 9, (1971) 133-150.
77. Eroğan, F., Gupta, G., The Stress Analysis of Multi-Layered Composites with a Flaw, International Journal of Solids and Structures, 7, (1971) 39-61.
78. Eroğan, F., Gupta, G., Layered Composites with an Interface Flaw, International Journal of Solids and Structures, 7, (1971) 1089-1107.
79. Gupta, G. D., A Layered Composite with a Broken Laminate, International Journal of Solids and Structures, 9, (1973) 1141-1154.
80. Eroğan, F., Biricikoğlu, V., Two Bonded Half Planes with a Crack Going Through the Interface, International Journal of Engineering Science, 11, (1973) 745-766.
81. Eroğan, F., Gupta, G. D., Contact and Crack Problems for an Elastic Wedge, International Journal of Engineering Science, 14, (1976) 155-164.
82. Bakioğlu, M., Eroğan, F., The Crack-Contact and the Free-End Problem for a Strip under Residual Stress, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, (1977) 41-46.
83. Cardew, G. E., Howard, I. C., An Edge-Crack in an Elastic Strip and Related Problems in Fracture Mechanics and Viscous Flow, International Journal of Engineering Science, 14, (1976) 403-414.

84. Adams, G. G., Crack Interaction in an Infinite Elastic Strip, International Journal of Engineering Science, 18, (1980) 455-462.
85. Vander, Z. H. D., Grootenboer, H. J., A Finite Element Approach to Interface Cracks, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, 53, (1986) 573-578.
86. Selvadurai, A. P. S., Singh, B. M., Axisymmetric Problems for an Externally Cracked Elastic Solid I. Effect of a Penny-Shaped Crack, International Journal of Engineering Science, 25, 8 (1987) 1049-1057.
87. Lu, H., Landner, T. J., Mechanics of Subinterface Cracks in Layered Material, International Journal of Solids and Structures, 29, 6 (1992) 669-688.
88. Minguéz, J. M., Study of Elastic Behaviour of Plates Containing Cracks by Finite Element Analysis, Computers and Structures, 47, 6 (1993) 917-925.
89. Fabrikant, V. I., Rubin, B. S., Karapetian, E. N., External Circular Crack under Normal Load : A Complete Solution, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, 61, (1994) 809-814.
90. Öztürk, M., Erdoğan, F., Axisymmetric Crack Problem in Bonded Materials with a Graded Interfacial Region, International Journal of Solids and Structures, 33, 2 (1996) 193-219.
91. Ma, C. C., Ing, Y. S., Dynamic Crack Propagation in a Layered Medium under Antiplane Shear, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, 64, (1997) 66-72.
92. Hasebe, N., Qian, J., Circular Rigid Punch with one Smooth and Another Sharp Ends on a Half-Plane with Edge Crack, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, 64, (1997) 73-78.
93. Sneddon, I. N., The Use of Integral Transforms, Mc Graw-Hill Inc., New York, 1972.
94. Muskhelishvili, N. I., Singular Integral Equations, Noordhoff Int. Pub., Leyden, The Netherlands, 1958.
95. Erdoğan, F., Gupta, G. D., On the Numerical Solution of Singular Integral Equations, Quarterly Journal of Applied Mathematics, 29, (1972) 525-534.

96. Erdoğan, F., Gupta, G. D., Cook, T. S., Numerical Solution of Singular Integral Equations, Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems, G. C. Sih (ed.) Noordhoff Int. Publ., Leyden, (1973) 368-425.
97. Krenk, S., A Note on the Use of the Interpolation Polynomial for Solutions of Singular Integral Equations, Report IFSM-73-48, Lehigh University, 1973.



6. ÖZGEÇMİŞ

Ahmet BİRİNCİ, 1968 yılında Çaykara' da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini 1972-1983 yılları arasında Çaykara' da tamamlayarak 1983-1984 öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Gümüşhane Meslek Yüksek Okulu İnşaat Bölümü' ne başladı. 1984-1985 öğretim yılında bu bölümden birincilik derecesi ile mezun oldu. 1985-1988 yılları arasında İstanbul' da özel bir şirkette çalıştıktan sonra 1988-1989 öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü 2. sınıfına dikey geçişle kayıt yaptırdı. 1990-1991 öğretim yılında bu bölümden de birincilik derecesi ile mezun olduktan sonra aynı yıl mezun olduğu bölümde yüksek lisans öğrenimine başladı. Aralık 1991' de mezun olduğu bölümün Mekanik Anabilim Dalı' na Araştırma Görevlisi olarak atandı. Yüksek lisans öğrenimini "Elastik Mesnete Oturan Çift Şerit Problemi" konusunda hazırladığı tezle Temmuz 1994' de tamamlayarak, aynı yıl doktora çalışmalarına başladı. Evli ve üç çocuğu olan Araş. Gör. Ahmet BİRİNCİ, İngilizce bilmekte ve halen K.T.Ü. İnşaat Mühendisliği Bölümündeki görevine devam etmektedir.