

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**ELEMAN BAĞIMSIZ GALERKİN VE YEREL PETROV-GALERKİN
AĞSIZ YÖNTEMLERİNİN BİR BOYUTLU MÜHENDİSLİK
PROBLEMLERİNE UYGULANMASI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Makina Müh. Samet ÇALIŞKAN

AĞUSTOS 2006

TRABZON

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**ELEMAN BAĞIMSIZ GALERKİN VE YEREL PETROV-GALERKİN
AĞSIZ YÖNTEMLERİNİN BİR BOYUTLU MÜHENDİSLİK
PROBLEMLERİNE UYGULANMASI**

Mak. Müh. Samet ÇALIŞKAN

**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
“Makina Yüksek Mühendisi”
Ünvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 31.07.2006
Tezin Savunma Tarihi : 23.08.2006**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr Sami KARADENİZ
Jüri Üyesi : Doç. Dr. Hasan SOFUOĞLU
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Ayşe DALOĞLU**

Enstitü Müdürü: Prof. Dr. Emin Zeki BAŞKENT

Trabzon 2006

ÖNSÖZ

Sonlu elemanlar yönteminin çatlak problemleri, gerilme yığılması, büyük şekil değişimleri gibi problemlerde istenilen hassasiyeti sunamaması ve geometrilerin modellenmesi işleminin oldukça zaman alıcı bir işlem olması sonlu elemanlar yöntemi için dezavantaj oluşturmaktadır. Araştırmacılar bu dezavantajların minimuma indirgenmesi açısından yeni yöntemlerin geliştirilmesi üzerinde yoğunlaşmışlardır. Yapılan bu çalışmalar sonucunda ağırsız yöntemler önerilmiştir.

Yapılan çalışmada ağırsız yöntemlerden Eleman Bağımsız Galerkin yöntemi ve Ağırsız Yerel Petrov-Galerkin yöntemleri ayrıntılı bir biçimde incelenmiş ve bir boyutlu problemler için elde edilen çözümler sunulmuştur.

Bu çalışmada şahsımdan yardımlarını esirgemeyen tez danışmanım sayın Prof. Dr. Sami KARADENİZ'e ve değerli arkadaşım Arş. Gör. Emin TUĞCU'ya teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca bugüne kadar maddi ve manevi benden desteğini hiç esirgemeyen değerli aileme çok teşekkür ederim.

Samet ÇALIŞKAN

Trabzon, 2006

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET	V
SUMMARY	VI
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	VII
TABLolar DİZİNİ.....	XI
KISALTMALAR DİZİNİ	XII
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş	1
1.2. Mühendislikte Sayısal Yöntemler	1
1.3. Ağsız Yöntemlerin Tanıtılması ve Tarihi Gelişimi	2
1.4. Ağsız Yöntemlere Neden İhtiyaç Duyulur	5
1.5. Ağsız Yöntemlerin Sınıflandırılması.....	7
1.5.1. Yumuşatılmış Parçacık Hidrodinamiği	7
1.5.2. Difüze Eleman Yöntemi	7
1.5.3. Eleman Bağımsız Galerkin Yöntemi	8
1.5.4. Yeniden Üretilen Çekirdek Parçacığı Yöntemi	8
1.5.5. Birimin Parçalanması Yöntemi	9
1.5.6. Ağsız Yerel Petrov-Galerkin Yöntemi	9
1.6. Ağsız Yöntemlerin Genel Yapısı.....	10
1.7. Çözüm Süreçleri	10
1.7.1. Geometrinin Oluşturulması	11
1.7.2. Düğümlerin Oluşturulması	12
1.8. Tezin Konusu.....	14
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR.....	15
2.1. Ağsız Yöntemlerde Şekil Fonksiyonlarının Elde Edilmesi.....	16
2.1.1. Hareketli En Küçük Kareler Yöntemi	16
2.1.2. Ağırlık fonksiyonlarının Seçimi	25
2.1.3. Şekil Fonksiyonları ve Etkinliklerinin Test Edilmesi.....	28

2.2.	Eleman Bağımsız Galerkin Yöntemi	43
2.2.1.	Eleman Bağımsız Galerkin Yönteminin Formülasyonu.....	43
2.2.2.	Sayısal İntegrasyon İşlemi.....	47
2.2.3.	Esas ve Doğal Sınır Koşullarının Uygulanması	50
2.2.3.1.	Penaltı Yöntemi	50
2.3.	Ağsız Yerel Petrov-Galerkin Yöntemi	53
2.3.1.	Ağsız Yerel Petrov-Galerkin Yönteminin Formülasyonu	53
2.3.2.	Esas ve Doğal Sınır Koşullarının Uygulanması	55
2.3.2.1.	Penaltı Yöntemi	55
2.3.2.2.	Dönüşüm Yöntemi.....	56
2.4.	Ağsız Yerel Petrov-Galerkin ve Eleman Bağımsız Galerkin Yönteminin Bir Boyutlu Problemlere Uygulanması	59
2.4.1.	Sınır Değer Problemleri.....	60
2.4.2.	Öz Değer Problemleri.....	69
2.4.2.1.	Eksenel Yer Değiştirmeye Bağlı Çözüm.....	70
2.4.2.2.	Düşey Yer Değiştirmeye Bağlı Çözüm	79
2.4.3.	Başlangıç Sınır Değer Problemleri	88
2.4.3.1.	Problemin Modellenmesi.....	89
2.4.3.2.	Zaman İntegrasyon Yöntemleri	93
2.4.3.2.1.	Newmark Yöntemi	94
2.4.3.2.2.	Parabolik Denklemler İçin Zaman İntegrasyon Yöntemleri.....	95
2.4.3.3.	Hiperbolik Denklemlerin Çözümü	97
2.4.3.4.	Parabolik Denklemlerin Çözümü	110
3.	İRDELEME	113
4.	SONUÇLAR VE ÖNERİLER	118
4.1.	Sonuçlar	118
4.2.	Öneriler	119
5.	KAYNAKLAR	121
	EKLER	124
	ÖZGEÇMİŞ.....	128

ÖZET

Yapılan tez çalışmasında Eleman Bağımsız Galerkin Yöntemi ve Ağsız Yerel Petrov-Galerkin Yöntemleri formüle edilerek bir boyutlu lineer problemlere uygulanmıştır.

Bu yöntemlerin çözüm aşamasında önemli bir yere sahip olan şekil fonksiyonları, hareketli en küçük kareler yöntemi kullanılarak elde edilmiş ve etkinlikleri önceden belirlenmiş olan fonksiyonlar üzerinde test edilmiştir.

Tezde, Eleman bağımsız Galerkin ve ağsız yerel Petrov-Galerkin yöntemleri bir boyutlu sınır değer problemleri, öz değer problemleri ve başlangıç sınır değer problemlerine uygulanmıştır.

Sınır değer problemleri olarak bir ucu ankastre bağlı çubuğa aksenal yük uygulanması problemi ve rijit cisim yer değiştirmesi problemi incelenmiştir.

Öz değer problemleri olarak bir ucu ankastre bağlı çubuk problemi ve iki ucu ankastre bağlı olan çubuklar için ilk dört modlar ve öz değerler elde edilmiş ve mod şekilleri çizdirilmiştir.

Başlangıç sınır değer problemleri olarak parabolik ve hiperbolik yapıdaki denklemlerin çözümü incelenmiştir. Ayrıca parabolik denklemler için Crank-Nicolson yöntemi ve hiperbolik denklemler için ise Newmark zaman integrasyon yöntemleri kullanılarak sayısal çözümler elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlarla ilgili hata analizleri verilmiştir.

Eleman bağımsız Galerkin ve ağsız yerel Petrov-Galerkin yöntemleri ile elde edilen sayısal çözümler karşılaştırıldığında, ağsız yerel Petrov-Galerkin yönteminin çözülen problemler için daha hassas sonuçlar verdiği belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Ağsız Yöntemler, Hareketli En Küçük Kareler Yöntemi, Eleman Bağımsız Galerkin Yöntemi, Ağsız Yerel Petrov-Galerkin Yöntemi, Sınır Değer Problemleri, Başlangıç Değer Problemleri, Başlangıç Sınır Değer Problemleri, Serbest Titreşim, Zaman İntegrasyon Yöntemleri.

SUMMARY

The Application of the Meshless Element Free Galerkin and Local Petrov-Galerkin Methods to One Dimensional Engineering Problems

In this thesis, The Element Free Galerkin and The Meshless Local Petrov-Galerkin methods are formulated and applied to one dimensional linear problems.

Shape functions, which are very important for solution procedure of the Element Free Galerkin and the Meshless Local Petrov-Galerkin method, are obtained using the moving least squares procedure. The effectiveness of the shape functions are tested over predefined functions.

One dimensional boundary value, Eigenvalue, Initial Boundary value problems are solved with the Element Free Galerkin and Meshless Local Petrov-Galerkin methods.

Boundary value problems considered in this study are a bar fixed at one end and a tip load applied at the other end, and rigid body displacement problems.

Eigenvalue problems considered are a bar fixed at one end and a beam fixed at both ends. For both of the problems the first four eigenvalues and mode shapes are evaluated.

Initial boundary value problems considered in this thesis cover the parabolic equations, which includes the first derivative of the displacement vector with respect to time and hyperbolic equation which includes the second time derivative of the displacement vector. For both methods time integration schemes are evaluated.

Comparison of the numerical solutions obtained by the Element Free Galerkin and the Meshless Local Petrov-Galerkin methods shows that the Meshless Local Petrov-Galerkin method gives rise to more accurate results for at least solved problems.

Key Words : Meshfree Methods, Moving Least Squares, Element Free Galerkin Method, Meshless Local Petrov-Galerkin Method, Boundary Value Problems, Initial Value Problems , Initial Boundary Value Problems, Free Vibration, Time Integration Methods.

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa No.</u>
Şekil 1. Ağsız yöntemlerin tarihi gelişimi	5
Şekil 2. Sonlu elemanlar yöntemi ve ağsız yöntemlerin çözüm süreçleri	11
Şekil 3. Üçgen elemanlarla modellenmiş bir çözüm bölgesi	13
Şekil 4. Dügümler ile modellenmiş bir çözüm bölgesi	13
Şekil 5. Hareketli en küçük kareler yöntemi ile yapılan yaklaşım	17
Şekil 6. Dört düğümlerle modellenmiş olan çözüm bölgesi	17
Şekil 7. Ağırlık fonksiyonlarının yapıları ve etkinlik yarıçapları	25
Şekil 8. Ağırlık fonksiyonları ve etkinlik yarıçapları	26
Şekil 9. Bir boyutlu problemler için ağırlık fonksiyonu ve etkinlik yarıçapı	27
Şekil 10. w Ağırlık fonksiyonları	29
Şekil 11. ϕ Şekil fonksiyonları	29
Şekil 12. $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ Şekil fonksiyonları birinci türevleri	30
Şekil 13. w Ağırlık fonksiyonları	31
Şekil 14. ϕ Şekil fonksiyonları	31
Şekil 15. $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ Şekil fonksiyonları birinci türevi	32
Şekil 16. $\sin(x)$ Fonksiyonu için yapılan birinci yaklaşım	33
Şekil 17. Birinci yaklaşım için çözüm bölgesindeki hata dağılımı	34
Şekil 18. $\sin(x)$ Fonksiyonu için yapılan ikinci yaklaşım	35
Şekil 19. İkinci yaklaşım için çözüm bölgesindeki hata dağılımı	35
Şekil 20. $\sin(x)$ Fonksiyonu için yapılan üçüncü yaklaşım	36
Şekil 21. Üçüncü yaklaşım için çözüm bölgesindeki hata dağılımı	36
Şekil 22. $f(x) = \frac{x^2}{8 + x^5}$ Fonksiyonu için yapılan birinci yaklaşım	38
Şekil 23. Birinci yaklaşım için çözüm bölgesindeki hata dağılımı	38
Şekil 24. $f(x) = \frac{x^2}{8 + x^5}$ Fonksiyonu için yapılan ikinci yaklaşım	39

Şekil 25. İkinci yaklaşım için çözüm bölgesindeki hata dağılımı	40
Şekil 26. $f(x) = \frac{x^2}{8+x^5}$ Fonksiyonu için yapılan üçüncü yaklaşım.....	41
Şekil 27. Üçüncü yaklaşım için çözüm bölgesindeki hata dağılımı	41
Şekil 28. İki boyutlu ağırlık fonksiyonları.....	42
Şekil 29. İki boyutlu şekil fonksiyonları	42
Şekil 30. Sayısal integrasyon işlemi için tanımlı bölge.....	48
Şekil 31. φ Birinci dönüşüm için şekil fonksiyonları	57
Şekil 32. $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ Şekil fonksiyonları birinci türevi	58
Şekil 33. φ ikinci dönüşüm şekil fonksiyonları	59
Şekil 34. $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ Şekil fonksiyonları birinci türevi	59
Şekil 35. Eksenel yük etkisindeki çubuk.....	60
Şekil 36. Eleman bağımsız Galerkin çözümü.....	61
Şekil 37. Eleman bağımsız Galerkin çözümü için hata dağılımı.....	61
Şekil 38. Ağsız yerel Petrov-Galerkin çözümü	62
Şekil 39. Ağsız yerel Petrov-Galerkin çözümü için hata dağılımı	62
Şekil 40. Rijit cisim yer değiştirmesi için birinci yaklaşım.....	63
Şekil 41. Birinci yaklaşım için hata dağılımı	64
Şekil 42. Rijit cisim yer değiştirmesi için ikinci yaklaşım	65
Şekil 43. İkinci yaklaşım için hata dağılımı	65
Şekil 44. İkinci yaklaşım için ağsız yerel Petrov-Galerkin çözümü.....	66
Şekil 45. Ağsız yerel Petrov-Galerkin yöntemi için hata dağılımı.....	66
Şekil 46. Bir boyutlu ısı iletimi için çubuk modeli	67
Şekil 47. Isı iletimi problemi için eleman bağımsız Galerkin çözümü	68
Şekil 48. Eleman bağımsız Galerkin çözümü için hata dağılımı.....	68
Şekil 49. Isı iletimi problemi için ağsız yerel Petrov-Galerkin çözümü	69
Şekil 50. Ağsız yerel Petrov-Galerkin çözümü için hata dağılımı	69
Şekil 51. Eksenel yük etkisindeki çubuk.....	70
Şekil 52. Bir ucu ankastre bağlı çubuk.....	73
Şekil 53. Birinci mod.....	74
Şekil 54. İkinci mod	75

Şekil 55. Üçüncü mod	75
Şekil 56. Dördüncü mod.....	76
Şekil 57. Öz değer probleminde birinci mod için farklı düğüm sayısında hata değerleri	77
Şekil 58. Enine yer değiştirme (Eğim sıfır) birinci mod	77
Şekil 59. İkinci mod (Eğim sıfır).....	78
Şekil 60. Üçüncü mod (Eğim sıfır).....	78
Şekil 61. Dördüncü mod (Eğim sıfır).....	79
Şekil 62. Eğilme etkisindeki çubuk	79
Şekil 63. Her iki ucundan ankastre bağlı çubuk birinci modu.....	83
Şekil 64. İkinci mod	84
Şekil 65. Üçüncü mod	84
Şekil 66. Dördüncü mod.....	85
Şekil 67. Birinci mod (Eğim sıfır).....	85
Şekil 68. İkinci mod (Eğim sıfır).....	86
Şekil 69. Üçüncü mod (Eğim sıfır).....	86
Şekil 70. Dördüncü mod (Eğim sıfır).....	87
Şekil 71. Birinci problem için yaklaşık ve analitik çözüm.....	98
Şekil 72. Birinci problem için hata dağılımı	99
Şekil 73. Örnek problem için ağsız yerel Petrov-Galerkin çözümü	99
Şekil 74. Ağsız yerel Petrov-Galerkin çözümü için hata dağılımı	100
Şekil 75. İkinci örnek probleme yapılan birinci yaklaşım için elde edilen çözüm.....	101
Şekil 76. Birinci yaklaşım için hata dağılımı	101
Şekil 77. İkinci probleme yapılan ikinci yaklaşım için elde edilen çözüm	102
Şekil 78. İkinci yaklaşım için hata dağılımı	102
Şekil 79. İkinci probleme yapılan üçüncü yaklaşım için elde edilen çözüm.....	103
Şekil 80. Üçüncü yaklaşım için hata dağılımı	103
Şekil 81. Ağsız yerel Petrov-Galerkin yöntemi ile yapılan birinci yaklaşım	104
Şekil 82. Birinci yaklaşımda hata dağılımı.....	105
Şekil 83. Ağsız yerel Petrov-Galerkin yöntemi ile yapılan ikinci yaklaşım	105
Şekil 84. İkinci yaklaşımda hata dağılımı	106
Şekil 85. P yükü etkisindeki çubuk	106
Şekil 86. Birinci yükleme	107

Şekil 87. $\alpha = 0.29$ ve $\delta = 0.55$ ile birinci yüklemdeki sönümlenme davranışı	107
Şekil 88. $\alpha = 0.29$ ve $\delta = 0.6$ olması durumunda sönümlenme davranışı.....	108
Şekil 89. Sönümlenme problemi için ikinci tip yükleme	108
Şekil 90. İkinci tip yükleme için sönümlenme davranışı $\alpha = 0.29$ ve $\delta = 0.55$	108
Şekil 91. $\alpha = 0.29$ ve $\delta = 0.6$ olması durumunda sönümlenme davranışı.....	108
Şekil 92. Parabolik denklemin 7 şekil fonksiyonu ile çözümü	111
Şekil 93. Hata dağılımı	111
Şekil 94. Parabolik denklemin 15 şekil fonksiyonu ile çözümü.....	112
Şekil 95. Hata dağılımı	112

TABLO DİZİNİ

Sayfa No

Tablo 1. Bir ucu ankastre bağı aksel titreşimli çubuk için birinci ve ikinci modlar için farklı düğüm sayısı ve yaklaşım derecesiyle elde edilen doğal frekans ve hata değerleri	87
Tablo 2. Her iki ucu ankastre bağı enine titreşimli çubuk için farklı düğüm sayısı ve yaklaşım derecesiyle birinci moda için elde edilen doğal frekans değerleri ve hata değerleri	88

KISALTMALAR DİZİNİ

AY (MM)	: Ağısız Yöntemler (Meshfree Methods)
AYPGY (MLPG)	: Ağısız Yerel Petrov-Galerkin Yöntemi (Meshless Local Petrov-Galerkin Method)
BPY (PofU)	: Birim Parçalanması Yöntemi (Partiton of Unity Method)
DEY (DEM)	: Difüze Eleman Yöntemi (Diffuse Element Method)
EBGY (EFG)	: Eleman Bağımsız Galerkin Yöntemi (Element Free Galerkin Method)
SEY (FEM)	: Sonlu Elemanlar Yöntemi (Finite Element Method)
YÜÇPY (RKPM)	: Yeniden Üretilmiş Çekirdek Parçacığı Yöntemi (Reproducing Kernel Particle Method)
A	: Alan
A(x)	: Moment matrisi
a	: Öz vektör
$\alpha(x)$: Malzemeye bağlı parametre
B(x)	: Vandermonde matrisi
c	: Sönümlenme katsayısı
[C]	: Sönümlenme matrisi
[D]	: Dönüşüm matrisi
Δ_t	: Zaman adımı
E	: Elastisite modülü
f	: Kuvvet
[F]	: Yük vektörü
\bar{F}	: Efektif yük terimi
F ^d	: Düğüm yük terimi
F _n	: Bilinen yük
F ^s	: Sınır yük terimi
F _u	: Bilinmeyen yük
ϕ_i	: Şekil fonksiyonları
φ	: Dönüştürülmüş şekil fonksiyonu
Γ	: Çözüm bölgesi sınırları

I	: Kesit atalet momenti
J	: Ağırlıklandırılmış yerel artık
k_{Al}	: Alüminyum için ısı iletim katsayısı
k_{Cu}	: Bakır için ısı iletim katsayısı
$[K]$: Katılık matrisi
\bar{K}	: Efektif katılık matrisi
K^d	: Düğüm katılık matrisi
K_{nn}	: Katılık matrisi bilinen terimi
K^s	: Sınır katılık matrisi
K_{uu}	: Katılık matrisi bilinmeyen terimi
$[M]$: Kütle matrisi
M	: Moment
\bar{M}	: Efektif kütle matrisi
N	: Düğüm sayısı
θ	: Penaltı parametresi
P^T	: Yaklaşım tabanlarının temsil edildiği satır vektörü
\bar{q}	: Doğal sınır şartı
R	: Artık terimi
r	: Etkinlik yarıçapı
ρ	: Yoğunluk
s	: Yarıçap içinbağımsız parametre
T	: Sıcaklık
t	: Zaman
T_n	: En küçük periyot
\bar{u}	: Esas sınır şartı
$u^h(x)$: Yaklaşım eğrisi
u_i	: Düğüm değerleri
\bar{u}_i	: Kesin düğüm değerleri
U_n	: Bilinen yer değiştirme
$\{u\}_s$: s-inci adımdaki yer değiştirme vektörü
U_u	: Bilinmeyen yer değiştirme

$\{u\}$: Yer değiştirme vektörü
$\{\dot{u}\}$: Hız vektörü
$\{\ddot{u}\}$: İvme vektörü
V	: Kesme kuvveti
W	: Ağırlık matrisi
w_d	: Doğal frekans
w_i	: Ağırlık fonksiyonları
x	: Kartezyen koordinat
x_i	: Dügüm noktaları geometrik yerleri
y	: Kartezyen koordinat bağımsız değişkeni
$\frac{\partial}{\partial a_0}$: a_0 terimine göre türev
Ω	: Çözüm bölgesi
ζ	: Doğal koordinat bağımsız değişkeni
γ	: Birim uzunluk başına kütle

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Mühendislik sistemlerinin tasarımında ve simülasyonlarında bugüne kadar kullanılmış olan sonlu elemanlar yöntemi, sonlu hacim yöntemi gibi geleneksel yaklaşık sayısal yöntemler incelendiğinde kullanılan yöntemler üzerinde yetersizlikler tespit edilmiştir. Bu eksiklerden bir kısmı modelleme eksikleri, çözüm süreçlerinin zorluğu ve insan emeğinin çok olması olarak sıralanabilir. Son yıllarda yapılan çalışmalarla bu eksiklerin giderilmesi tam olarak sağlanamasa da bu doğrultuda önemli mesafeler katedilmiştir. Bu çalışmalar sonucu olarak ağırsız yöntemler olarak bilinen ve yukarıda değinilen eksikliklere olumlu cevap verebilen yöntemler önerilmiştir [1].

1.2. Mühendislikte Sayısal Yöntemler

Mühendislik sistemleri çok sayıda problem içermektedir. Bu problemlerin pek çoğunun matematiksel modelinin kurulması ve simülasyonunun oluşturulması oldukça zordur. Bu zorlukların aşılması açısından sistemin tamamının değil de sadece sistemin performansını etkileyen en önemli parametrelerin modellenmesi çoğu zaman sistem hakkında yeterli bilgi sağlar.

Mühendislikte katı mekaniği, yapı mekaniği, akışkanlar mekaniği gibi pek çok alan mevcuttur ve her bir alanda fiziksel problemler farklı yapılarda ele alınmaktadır. Ancak matematik modeller yaklaşık olarak aynı olmaktadır. Matematik modelleri birbirinden farklı kılan denklemlerde kullanılan parametrelerin ilgili oldukları alanlarda taşıdıkları anlamlardır.

Matematik modeller diferansiyel veya kısmi diferansiyel denklemler kullanılarak oluşturulurlar. Bu modeller çoğu kez sonlu elemanlar yöntemi, sonlu farklar yöntemine sınır elemanları gibi sayısal yöntemler kullanılarak çözümlenir fiziksel problemin simülasyonu gerçekleştirilmektedir [1]. Mevcut durumlarıyla bu sayısal yöntemlerin kullanılmasıyla elde edilen sayısal simülasyon sonuçlarının bazen yeterli hassasiyette olmamasından dolayı ağırsız yöntemler önerilmiştir.

1.3. Ağsız Yöntemlerin Tanıtılması ve Tarihi Gelişimi

İleri mühendislik sistemlerinin tasarımının yapılabilmesi için çoğu kez bilgisayar destekli araçlara gereksinim duyulmaktadır (CAD programı). Bu tür programlarla, sayısal simülasyon teknikleri fiziksel problemin modellenmesi için gereklidir. Bu simülasyonların oluşturulabilmesi için problemi tanımlayan kompleks veya kısmi diferansiyel denklemlerin çözümüne ihtiyaç duyulmaktadır. Geleneksel olarak diferansiyel denklemlerin çözümünde sonlu elemanlar, sınır elemanları ve sonlu farklar gibi sayısal yöntemler kullanılmaktadır. Bu yöntemlerde çözüm bölgesi ızgara görünümünde olan ağlara ayrılmaktadır. Ağ, düğümlerle bağlantısı olan ve çözüm bölgesindeki bağımlı değişkene yapılan interpolasyon işlemine olanak sağlayan bir yapı olarak tanımlanabilir. Sonlu farklar yönteminde ağlar grid olarak isimlendirilirken, sonlu hacim yönteminde hücre veya hacim, sonlu elemanlar yönteminde ise eleman olarak adlandırılmaktadırlar.

Ağ yapısında kullanılan birimlere verilen isim önem taşımamaktadır. Burada önemli olan bu yapıların çözüm sürecine geçilmeden tanımlanıyor olmasıdır. Bu sayede elemanların veya gridlerin kesişim noktaları, düğümler, arasında bağlantı kurulabilmekte ve kullanılacak olan sayısal yöntemin (sonlu elemanlar, sonlu farklar ve sonlu hacim gibi) formülasyonu gerçekleştirilmektedir.

İyi tanımlanmış bir ağ yapısı sayesinde kısmi diferansiyel denklemlerle modellenmiş olan bir problemin çözümü daha hassas sonuçlar sağlamaktadır. Diferansiyel denklemlerin sayısal olarak çözülebilmesi için ağ yapısındaki her birim (eleman, grid vb) için bir dizi denklemin tanımlanması gerekmektedir. Sonlu elemanlar yöntemi dikkate alınırsa her bir eleman için, çözülen problemin yapısına göre değişmekle birlikte, örneğin bir dinamik probleminin çözümünde, katılık matrisinin, kütle matrisinin, sönümleme matrisinin ve yük vektörünün, bir dizi matrisin oluşturulması gerekmektedir. Daha sonra her bir eleman için elde edilen matrisler birleştirilerek tüm problem tanımlanmış olmakta ve çözüme geçilebilmektedir.

Ağsız yöntemlerde çözüm bölgesinin modellenmesi ve çözüm aşamasına geçilebilmesi için modelleme aşamasında düğümler kullanılmakta ve düğümler arasında sonlu elemanlar yöntemi ile kıyaslandığında herhangi bir bağın oluşturulmasına ihtiyaç duyulmamaktadır. Bu özellik tüm ağsız yöntemler için ortaktır. Yöntemlerin ağsız olarak isimlendirilmesinin sebebi de budur [1].

Yöntemlerin ağsız olarak isimlendirilebilmesi için gerekli olan koşul;

- *Çözüm bölgesinde bağımlı değişkene yapılacak olan interpolasyon işlemi için çözüm sürecine geçilmeden önce bir ağ yapısının tanımlanmasına ihtiyaç duyulmamıştır. Gerekli olan ideal koşul olarak ise;*

- *Kısmi diferansiyel denklemlerle modellenmiş olan problemin uygun sınır koşulları altında çözümü yapılırken, çözüm sürecinin hiçbir aşamasında her hangi bir hücre yapısının kullanılmaması,*
şeklinde ifade edilir [1].

Günümüze kadar geliştirilen olan sayısal çözüm yöntemlerinin hiçbiri, bu koşul dikkate alındığında, tam anlamıyla ağsız olarak isimlendirilemez.

Tarihsel gelişimi incelendiğinde ağsız yöntemler, araştırmacıların bilimsel ve endüstriyel uygulamalarda hayli yaygın kabul gören sonlu elemanlar yönteminin sahip olduğu olumsuzlukların elimine edildiği veya en azından minimuma indirildiği ve bu yönteminin sahip olduğu avantajları ise kendinde muhafaza eden bir yöntemle sahip olma isteğinden doğmuştur.

Bu bağlamda Nayroles ve arkadaşları tarafından 1992 yılında yapılan araştırmada sonlu elemanlar yönteminin bir parçası olarak difüze yaklaşımı geliştirilmiştir. Bu yaklaşımda, sonlu elemanlar interpolasyon fonksiyonları hareketli en küçük kareler yöntemiyle elde edilmiş olan yumuşak ve difüze edilmiş fonksiyonlarla değiştirilmektedir [2]. Hareketli en küçük kareler interpolasyonu çözüm bölgesindeki bağımlı değişkenin elde edilmesi işleminde yerel olarak ağırlıklandırılmış en küçük kareler fonksiyonu kullanılarak gerçekleştirilmektedir. En küçük kareler fonksiyonunun katsayıları bağımlı değişkenin ve interpolasyon fonksiyonunun düğümlerdeki değerleri arasındaki farkın, karesinin minimize edilmesi ile elde edilmektedir.

Difüze eleman yönteminde tanımlı oldukları düğümden belirli bir uzaklıkta her hangi bir değere sahip olmayan ağırlık fonksiyonları kullanılmaktadır. Nayroles ve arkadaşları tarafından difüze eleman yöntemi için iki önemli avantaj belirtilmiştir. Bunlar;

- Ağ yapısı olmaksızın düğümlerin toplanabilmesi,
- Düğümler arasındaki boşluğun üniform veya üniform olmamasının çözümde elde edilen hassasiyeti etkilememesidir.

Belytschko ve arkadaşları tarafından 1994 yılında yapılan araştırmada difüze eleman yöntemi geliştirilerek, Eleman Bağımsız Galerkin Yöntemi elde edilmiştir. Belytschko ve arkadaşları geliştirdikleri yöntemde hareketli en küçük kareler interpolasyon işleminin sabit olmaması gerektiği sonucuna varmışlardır. Bunun sonucunda hareketli en küçük kareler

interpolasyonu ile elde edilen şekil fonksiyonlarının türevi alınırken Nayroles ve arkadaşları (1992) tarafından ihmal edilen terimler çözüme dahil edilmiştir. Bu sayede eleman bağımsız Galerkin yöntemi ile, difüze eleman yöntemiyle kıyaslandığında, daha hassas sonuçlar elde edilmiştir. Ek olarak eleman bağımsız Galerkin yönteminde sınır koşullarının uygulanması işleminde Lagrange çarpanları yöntemi ve sistem matrislerinin integrasyon işlemi için gölge hücre yapısı kullanılmıştır. Eleman bağımsız Galerkin yönteminde çözüme yakınsama interpolasyon işleminde kullanılan ağırlık fonksiyonlarına bağlıdır [2].

Hareketli en küçük kareler yöntemi ile elde edilen interpolantların, sonlu elemanlar yöntemiyle elde edilen ile kıyaslandıklarında kronecker delta özelliğine sahip olmadıkları tespit edilmiştir. Bu sebeple ağırsız yöntemlerde esas sınır koşullarının uygulanması için net bir yöntem önerilememektedir. Mukherjee ve Mukherjee tarafından 1997 yılında yapılan çalışmayla ağırsız yöntemlerde esas sınır koşullarının uygulanmasına önemli katkılarda bulunulmuştur.

Mukherjee ve Mukherjee sınır ile temas halindeki düğümler ve bu düğümlerde tanımlanmış olan bağımlı değişken değerlerinin kesin düğüm değerleri ile değiştirilmesi sonucu esas sınır koşullarının doğru bir biçimde uygulanabileceğini belirtmişlerdir.

Böylelikle sistem denklemleri, düğümlerde tanımlanmış olan şekil fonksiyonları ile birlikte kullanılan kesin düğüm değerleri için çözülebilmekte ve problemin sayısal çözümü elde edilebilmektedir.

Eleman bağımsız Galerkin yöntemi için belirtilmiş olan avantaja rağmen yöntemde sayısal integrasyon işleminin gerçekleştirilmesi için gölge hücrenin kullanılması gerekmektedir. Bu durum yöntem için bir dezavantaj teşkil etmektedir.

Atluri ve Zhu tarafından 1998 yılında yapılan çalışmada sayısal integrasyon işlemi için gölge hücreye ihtiyaç duymayan gerçek anlamda ağırsız yöntem önermişlerdir. Geliştirilen yeni yöntem de yerel zayıf formdan yararlanılmakta, böylelikle hesaplamalara yerel alt bölgelerde başlanmaktadır. Yeni yöntemde esas sınır koşullarının uygulanması işlemi penaltı yöntemi gerçekleştirilmektedir. Bu yöntemde, daha önceki yöntemlerde araştırmacıların kullandıkları ağırlık ve şekil fonksiyonlarının aynı uzaydan (ağırlık fonksiyonu olarak şekil fonksiyonlarının kullanımı) seçilmesi ile elde edilen Galerkin formülasyonu yerine farklı uzaydan seçilen Petrov-Galerkin formülasyonu kullanılmıştır. Ağırlık fonksiyonlarının uygun seçilmesiyle yöntem yerelleştirilmektedir. Bu sayede

sayısal integrasyon işlemi için herhangi bir hücre yapısının tanımlanmasına ihtiyaç duyulmamaktadır [3].

Ağsız yöntemlerin tarihsel gelişimi daha ayrıntılı bir biçimde Şekil 1'de verilmiştir[1].

Ağsız Yöntemler			
Yöntem	Referans	Kullanılan Denklem Formu	Kullanılan Fonksiyon Yaklaşımı
Difüze Eleman Yöntemi	Nayroles ve Arkadaşları, 1992	Zayıf Form	HEKY ve Galerkin Yöntemi
Eleman Bağımsız Galerkin Yöntemi	Belytschko ve Arkadaşları, 1994	Zayıf Form	HEKY ve Galerkin Yöntemi
Ağsız Yerel Petrov-Galerkin Yöntemi	Atluri ve Zhu, 1998	Yerel Zayıf Form	HEKY ve Petrov-Galerkin Yöntemi
Sonlu Nokta Yöntemi	Oñate ve arkadaşları,1996; Liszka ve Orkisz,1980; Jensen,1980	Güçlü Form	Sonlu Türev Açılımı (Taylor Serisi), HEKY
Yumuşatılmış Parçacık Hidrodinamiği	Lucy,1977; Gingold ve Monaghan,1977	Güçlü Form	İntegral Açılımı (YÜÇPY) ve HEKY
Yeniden Üretilen Çekirdek Parçacığı Yöntemi	Liu,W.K. ve arkadaşları,1993	Güçlü veya Zayıf Form	İntegral Açılımı (YÜÇPY)
h-p Bulutları	Oden ve Abani,1994; Armando ve Oden,1995	Zayıf Form	Birim Parçalanması, HEKY
Birim Parçalanması Yöntemi	Babuska ve Melenk, 1995	Zayıf Form	Birim Parçalanması, HEKY
Nokta İnterpolasyon Yöntemi	Liu G.R. ve Gu,1999 2000b,2001a,b,c,d	Zayıf Form ve Yerel Zayıf Form	Nokta İnterpolasyonu
Sınır Düğüm Yöntemi	Mukherjee ve Mukherjee,1997a,b	Zayıf Form ve Yerel Zayıf Form	HEKY
Sınır Düğüm İnterpolasyon Yöntemi	Liu G.R. ve Gu,2000d; Gu ve Liu G.R.,2001a,e	Zayıf Form ve Yerel Zayıf Form	Nokta İnterpolasyonu

Şekil 1. Ağsız yöntemlerin tarihi gelişimi [1].

1.4. Ağsız Yöntemlere Neden İhtiyaç Duyulur

Araştırma ve Endüstride en yaygın kullanılan sayısal çözüm yöntemi sonlu elemanlar yöntemidir. Sonlu elemanlar yönteminde çözüm sürecine geçilmeden önce ağ yapısının

oluşturulması gerekmektedir. Ağ yapısının oluşturulabilmesi için birbiri ile temas halinde bulunan ve çözüm sürecine geçilmeden önce tanımlanmış olması gereken elemanlara ihtiyaç duyulmaktadır.

Günümüzde mevcut geliştirilmiş hali ile sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak statik, dinamik, lineer ve lineer olmayan pek çok problemin çözümü elde edilebilmektedir. Bu problemlerin çözümünde aşağıda belirtilen sebeplerden dolayı elde edilmek istenen çözüm maliyeti ve doğruluğu önemli ölçüde etkilemektedir [1,2];

- Analizlerde genelde zamanın çoğu uygun bir ağ yapısının oluşturulmasına harcanmaktadır. Ağ yapısı analiz süresini ve hassasiyetini önemli ölçüde etkilemektedir. Günümüzde sayısal yöntemlerle ilgili araştırma noktalardan bir tanesi bu sürecin mümkün olduğu kadar kısaltılması ve analizin hassasiyetinin artırılmasıdır. Bu da daha az insan emeği ve daha çok bilgisayar kullanımı anlamına gelmektedir.

- Büyük şekil değişimleri söz konusu olduğunda elemanların çarpılmasından dolayı hesaplanan değerlerdeki doğruluk oldukça düşmektedir.

- Çatlak büyümesi probleminin herhangi bir geometri veya kompleks bir geometri için modellenmesi ve faz dönüşümlerinin uygulanması oldukça zordur.

- Sonlu elemanlar yöntemi sürekli ortam mekaniğine dayandığından malzeme kırılmasından doğan süreksizliklerde, elemanlar arasındaki bağların kopması sebebi ile olumsuzluklar ortaya çıkarmaktadır.

Yukarda bir bölümü belirtilen hataların ve yetersizliklerin en aza indirilebilmesi için çözüm sürecinde ortaya çıkabilen süreksizlik bölgelerinde bir biri ile olan temasını kaybeden elemanların temas etmesini sağlamak amacıyla ağ yapısının yeniden oluşturulması gerekmektedir. Ayrıca çözüm sürecinde bağımlı değişken üzerinde dönüşüm yapılması ihtiyacı ortaya çıkmaktadır. Bu durum işlem hassasiyetini olumsuz etkilemektedir. Bu yüzden çözüm sürecinde daha esnek ve süreksizliğin söz konusu olduğu problemlerde yeni bir ağ yapısının oluşturulmasına ihtiyaç duymayan yöntemlerin geliştirilmesi ihtiyacı ortaya çıkmıştır. Bu sebeple önerilmiş olan ağsız yöntemlerde bu ihtiyaçların çoğu karşılanabilmektedir. Ağsız yöntemlerde geometrinin modellenmesi rasgele dağıtılmış düğümlerle gerçekleştirildiğinden bu düğümler arasında herhangi bir ilişkinin veya bir bağın kurulmasına ve dolayısıyla çözüm sürecinde yeni bir ağ yapısının oluşturulmasına ihtiyaç yoktur.

1.5. Ağsız Yöntemlerin Sınıflandırılması

Ağısız yöntemler genel yapıları itibarıyla çözüm bölgesinin düğümlerin tanımlanmasıyla tanımlanması ve bu düğümler arasında her hangi bir ilişkinin tanımlanmasına ihtiyaç duymamaları bakımından ortak bir yapıya sahip olsalar da çözüm süreçleri ve kullandıkları alanlar bakımından birbirinden farklı yapılara sahiptirler [1,2].

1.5.1. Yumuşatılmış Parçacık Hidrodinamiği

Yumuşatılmış parçacık hidrodinamiği (YPH) (Smoothed Particle Hydrodynamics) yöntemi hesaplamalı mekanik için başlangıç noktalarından bir tanesi olarak görülmektedir. Bu yöntemin formülasyonu Lucy, Gingold ve Monaghan tarafından eş zamanlı olarak gerçekleştirilmiştir. Yöntem bağımsız Lagrange yöntemi olarak da bilinmektedir. Yumuşatılmış parçacık hidrodinamiği yöntemi, başlangıçta, galaksilerin dizilimi, oluşumu ve astrofizik problemlerinin modellenmesi için geliştirilmiştir [2].

Yumuşatılmış parçacık hidrodinamiği yöntemi olumlu bir yaklaşım tabanının elde edilmesi için çekirdek tahminine dayanmaktadır. Her hangi bir anda hız ve termal enerji bu çekirdeklerde (noktalarda) bilinmektedir. Ayrıca bu çekirdekler kütleyle sahip olabilmektedirler. Bu sebeple çekirdekler parçacık olarak nitelendirilmektedir [2].

Parçacıkların hareketi bir sıvının hareketine veya gaz akışına oldukça benzediğinden yöntemin sayısal modelinin oluşturulmasında klasik Newton Hidrodinamiği kullanılabilir. Günümüzde yumuşatılmış parçacık hidrodinamiği yöntemi dinamik akış problemlerinden penetrasyon problemlerine kadar pek çok mühendislik probleminin çözümü yanında süpernovaların modellenmesi, galaksilerin dizilimi, nötron yıldızları ve kara deliklerin birleşmesi ve hatta evrenin modellenmesi için de kullanılmaktadır.

1.5.2. Difüze Eleman Yöntemi

Difüze eleman yöntemi (DEY) (Diffuse Element Method) Nayroles, Touzot ve Villon tarafından geliştirilmiştir. Difüze eleman yöntemi sonlu elemanlar interpolasyon işleminin genelleştirilmiş hali olarak sunulmuştur. Yöntemin genel formülasyonunda hareketli en küçük kareler yönteminden bahsedilmemektedir. Ancak Nayroles tarafından

takip edilen çözüm süreci hareketli en küçük kareler yönteminin tamamen aynısıdır. Difüze eleman yönteminde bir nokta civarında fonksiyonlarla yerel yaklaşım yapılmaktadır.

Galerkin artık denklemlerinin elde edilebilmesi için düğümlerin ve sınırların tanımlanmış olması gerekmektedir [4].

Tanımlanmış olan interpolantlar ağırlıklandırılmış en küçük kareler yaklaşımı ile noktasal değerlere uyumlanmış polinomlardır.

1.5.3. Eleman Bağımsız Galerkin Yöntemi

Eleman bağımsız Galerkin yöntemi (EBGY) (Element Free Galerkin Method) modellenmesi Belytschko, Lu ve Gu tarafından geliştirilmiştir[4]. Yöntem hareketli en küçük kareler yöntemini kullanan alternatif bir yaklaşım olarak sunulmuştur. Eleman bağımsız Galerkin yöntemi difüze eleman yöntemi ile birkaç farklılık dışında temelde aynı yapıdadır. Belytschko, eleman bağımsız Galerkin yönteminde doğruluğu arttırmak için difüze eleman yönteminden farklı olarak üç adet yenilik getirmiştir[2]. Bunlar;

- Esas sınır koşullarının uygulanması için potansiyel enerji fonksiyoneline Lagrange çarpanlarını kullanmıştır.
- Şekil fonksiyonlarının türevleri tam olarak hesaplanmıştır. Difüze eleman yönteminde hareketli en küçük kareler yöntemi yerine ağırlıklandırılmış en küçük kareler yöntemi kullanıldığında şekil fonksiyonlarının türevleri hesaplanırken bazı terimler ihmal edilmiş olmaktadır.
- Çok sayıda integrasyon noktası içeren, düğümlerden bağımsız olan hücre yapıları elde edilmiş ve sayısal integrasyon işlemi bu hücreler kullanılarak gerçekleştirilmiştir.

1.5.4. Yeniden Üretilen Çekirdek Parçacığı Yöntemi

Yeniden üretilmiş çekirdek parçacığı yöntemi (YÜÇPY), (Reproducing Kernel Particle Method) Liu tarafından önerilmiştir. Yöntemdeki temel düşünce düzenleyici bir çekirdeğin oluşturulmasıdır. Başka bir deyişle orijinal çekirdeğin düzenleyici bir fonksiyon yardımıyla oluşturulmasıdır. Bu sayede, YPH interpolantının kararlılığı elde edilmiş olur. Bu işleme yeniden üretilen çekirdek yöntemi denilmektedir [2].

Düzenlenmiş çekirdeklerin oluşturulmasında, çekirdek fonksiyonunun elde edildiği nokta civarındaki tüm noktaların bilinmesi gerekmektedir. Bu durum hesaplama zamanını arttırmaktadır.

Bu yöntemde esas sınır koşullarının uygulanması işleminde bir dönüşüm işleminin uygulanması gerekmektedir. Uygulanan bu dönüşüm sayesinde şekil fonksiyonları Kronecker delta özelliğine sahip olmakta ve sınır koşulları doğrudan uygulanabilmektedir [4].

1.5.5. Birimin Parçalanması Yöntemi

Babuska ve Melenk tarafından önerilen birimlerin parçalanması (BPY) (Partition of Unity) yönteminin temelini, parçalanmış birimin alınıp herhangi bir yaklaşım tabanı ile çarpılması ile yeni ve daha iyi bir yaklaşım tabanının elde edilmesi oluşturmaktadır [2].

Duarte ve Oden birimlerin parçalanması yöntemi ile yeni fonksiyonlar geliştirmeyi arzularken, h-p bulutları yöntemini geliştirmişlerdir. Duarte ve Oden Legendre polinomlarını kullanarak ilk p versiyon (p versiyon: polinom derecesinin yükseltilmesi ile yaklaşımın iyileştirilmeye çalışılmasıdır) ağsız yöntemler interpolantlarını elde etmişlerdir.

1.5.6. Ağsız Yerel Petrov-Galerkin Yöntemi

Ağsız yerel Petrov- Galerkin yöntemi Atluri ve Zhu (AYPGY) (Meshless Local Petrov-Galerkin Method) tarafından önerilmiştir [3].

Ağsız yerel Petrov-Galerkin yönteminde diferansiyel denklemin global zayıf formu yerine yerel zayıf formu kullanılmaktadır. Bu sebeple sayısal integrasyon işlemi uygulanırken bir hücre yapısının tanımlanmasına ihtiyaç duyulmamakta sadece yerel bölgelerin ve yerel bölge sınırlarının tanımlanması yeterli olmaktadır. Bu sebeple yöntem tamamen ağsız olarak nitelendirilmektedir [3].

Ağsız yerel Petrov-Galerkin yöntemi, yöntem olarak değil de daha çok bir konsept olarak ele alınmaktadır. Çünkü bu konsept'te ağırlık fonksiyonu, şekil fonksiyonu ve integrasyon işleminin uygun olarak seçilmesi durumunda tüm ağsız yöntemlerin formülasyonları elde edilebilmektedir. Örneğin ağırlık fonksiyonu olarak şekil fonksiyonlarının kullanılması durumunda eleman bağımsız Galerkin yöntemi elde edilmektedir [4].

1.6. Ağsız Yöntemlerin Genel Yapısı

Ağsız yöntemler bu noktada sonlu elemanlar yönteminde karşılaşılan olumsuzlukları daha aza indirmesi sebebiyle tercih edilmiş ve geliştirilmeye çalışılmıştır.

Ağsız yöntemlerde modelleme işlemi düğümlerle gerçekleştirilmekte ve bu düğümler arasında herhangi bir bağın veya ilişkinin tanımlanmasına ihtiyaç duymamaktadır [1].

Bu durum çözüm sürecinde problemin modellenmesinde kolaylık sağlamak ve istenilen doğruluk değerine bağlı olarak çözüm bölgesine düğümlerin eklenebilmesi ve çıkarılabilmesi konusunda önemli esneklik sunmaktadır. Örneğin bir gerilme yığılması probleminde veya tekillik içeren bir kırılma probleminde analizi yapan kişi bu bölgelerdeki düğümlerin birbiri ile olan ilişkilerini dikkate almadan bu bölgelere düğüm ekleyebilir veya bu bölgelerden düğüm çıkarabilir. Bu durum çözüm sürecini hiçbir şekilde etkilemeyecek sadece elde edilecek olan hassasiyet değerinde ve analiz süresinde değişimlere yol açacaktır [1].

1.7. Çözüm Süreçleri

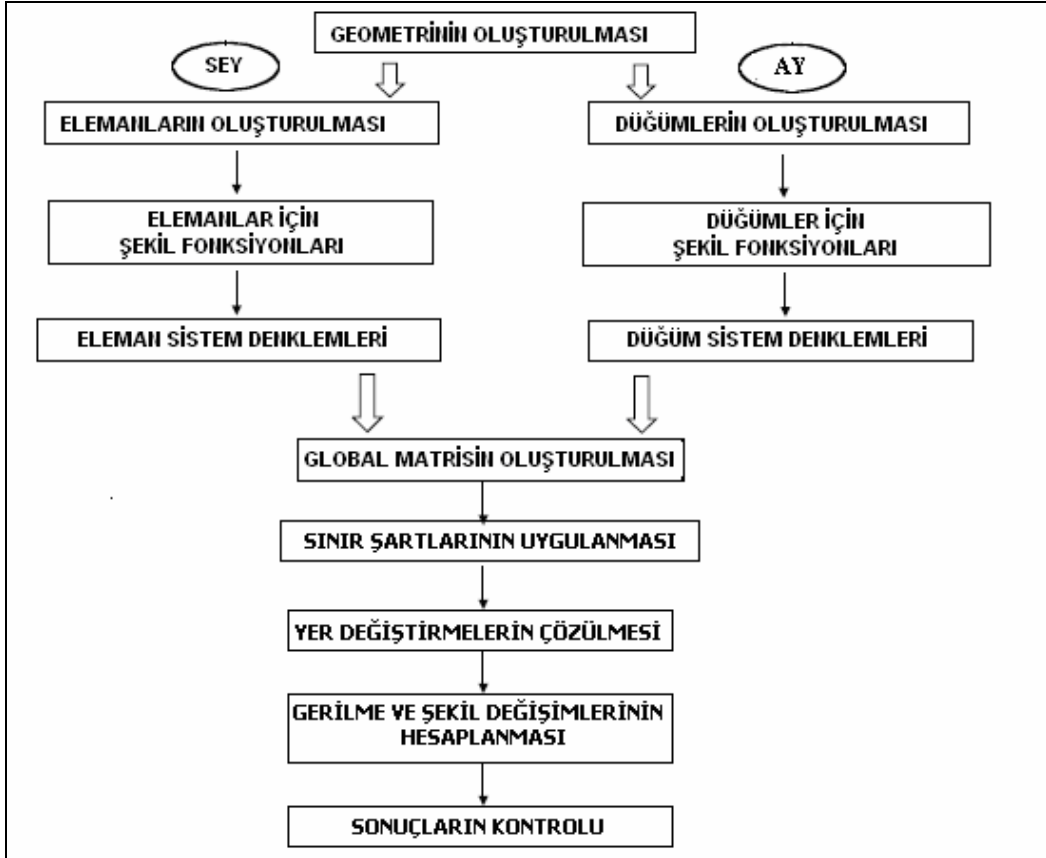
Bu bölümde Ağsız yöntemlerle gerçekleştirilen sayısal çözüm süreci yer yer sonlu elemanlar yöntemindeki ile karşılaştırmalı olarak genel anlamda özetlenecektir.

Sonlu elemanlar ve ağsız yöntemler genel anlamda aynı çözüm sürecini takip etmektedir. Ağsız yöntemleri ve sonlu elemanlar yöntemini birbirinden farklı kılan noktalar;

- Sonlu elemanlar yönteminde geometrinin modellenmesi için elemanlar kullanılırken, ağsız yöntemlerde bu işlem düğümler kullanılarak gerçekleştirilmekte.
- Sonlu elemanlar yönteminde şekil fonksiyonları kullanılacak olan eleman için analize başlamadan önce belirlenmiştir. Ağsız yöntemlerde ise şekil fonksiyonları analiz esnasında elde edilmektedir.

Belirtilen bu farklar dışında her iki yöntem için çözüm süreçlerinde önemli farklılıklar olmadığından sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilebilen tüm çözümler ağsız yöntemler kullanılarak elde edilebilir [1].

Katı cisim mekaniği problemleri için sonlu elemanlar ve ağsız yöntemlere ait çözüm süreçleri Şekil 2’de verilmiştir.



Şekil 2. Sonlu elemanlar yöntemi ve ağsız yöntemlerin çözüm süreçleri [1].

1.7.1. Geometrinin Oluşturulması

Gerçekte yapılar, bileşenler veya bölgeler genellikle karmaşıktır ve sayısal yöntemlerin uygulanabilirliği açısından uygun bir geometriye indirgenmelidir. Sonlu elemanlar yönteminde gerçek geometrinin eğri yüzeyleri ve yüzey sınırları eğrilerle veya eğrilemiş yüzeyli yüksek dereceli elemanlar kullanılarak modellenmektedir. Bununla birlikte sonlu elemanlarda elemanların sıralanıp birleştirilmesi ile geometri oluşturulmaktadır ve eğri yüzeylere sadece eleman yüzeylerinin bir kısmı kullanılarak yaklaşım yapılmaktadır. Örneğin lineer elemanların kullanılmış olması durumunda, eleman yüzeyleri düz çizgiler veya yüzeylerden oluşmaktadır. Bu elemanların kullanıldığı bir model Şekil 3’de görülmektedir.

Eğri yüzeylerin modellenme doğruluğunun kontrolü eleman sayısı ve derecesi ile gerçekleştirilmektedir. İyileştirilmiş bir ağ yapısı daha doğru sonuçlar vermektedir.

Bununla birlikte analiz süresi kullanılan bilgisayar donanımı ve programına bağlı bir parametre olduğundan eleman sayısının sınırlandırılması gerekmektedir. Bu yüzden

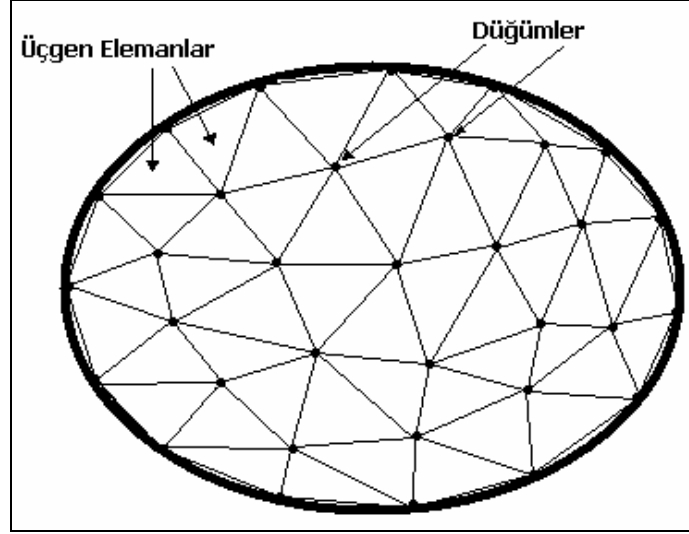
geometrinin detayları sadece bu bölgelerde çok hassas çözümlere ihtiyaç duyulması durumunda çok sayıda eleman kullanılarak modellenmelidir.

Ağızsız yöntemlerde geometri sınırları Şekil 4’de görüldüğü gibi düğümlerle modellenmektedir. Geometri sınırlarındaki herhangi iki düğüm arasında kalan bir noktada şekil fonksiyonları kullanılarak interpolasyon yapılabilir. Ağızsız yöntemlerdeki şekil fonksiyonları hareketli küçük bölgeler kullanılarak oluşturulduğu için, eğri yüzeyler lineer bir polinom tabanı kullanılmış olsa dahi çok iyi modellenmiş olur. Genelde ağızsız yöntemlerde yüksek dereceden polinom tabanları kullanılmaktadır [1].

1.7.2. Düğümlerin Oluşturulması

Sonlu elemanlar yönteminde ağ oluşturma işlemi oldukça önemlidir ve analizi yapan kişiye çok zaman kaybettirebilir. Bölge özel şekillere sahip elemanlarla, örneğin üçgen veya dörtgen elemanlarla, düzgün bir şekilde modellenmelidir. Elemanlar arsında hiçbir boşluğun bulunmaması gerekmektedir. Ayrıca ağ oluşturma işlemi sırasında elemanların sürekliliği sağlanmalıdır. Tüm bu işlemlerin yapılabilmesi için tümüyle otomatik olan ağ oluşturma paket programlarına ihtiyaç duyulmaktadır. Ancak şu anda genel kullanımda olan böyle bir paket program yoktur.

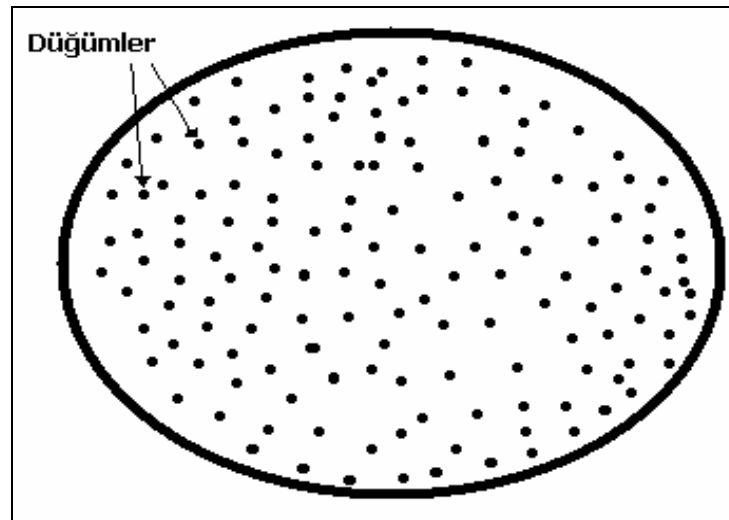
Ayrıca sonlu elemanlar yönteminde ağ oluşturmadaki zorluk çözümlerin daha hassas olması isteğinden kaynaklanmaktadır. Örneğin bir bölgenin üçgen elemanlarla modellendiği dikkate alınırsa üçgen elemanların çözümüyle elde edilen doğruluk oranı aynı yoğunlukta dörtgen elemanlarla modellenmiş olan aynı bölgedeki çözümle kıyaslandığında dörtgen elemanlar üçgen elemanlara nazaran daha hassas sonuçlar sağlamaktadır.



Şekil 3. Üçgen elemanlarla modellenmiş bir çözüm bölgesi

Ağsız yöntemler dikkate alındığında çözüm bölgesi rasgele dağıtılmış olan düğümlerle modellenmektedir. Şekil 4'te düğümlerle modellenmiş olan bir bölge görülmektedir.

Ağsız yöntemlerde ağların veya elemanların kullanımına ve bunlar arasında tanımlanmış olan herhangi bir ilişkiye ihtiyaç duyulmamaktadır. Bu yüzden düğümler üçgenleştirme algoritmalarının kullanımıyla çok rahatlıkla oluşturulabilir.



Şekil 4. Düğümler ile modellenmiş bir çözüm bölgesi

1.8. Tezin Konusu

Yapılan bu tez çalışmasıyla gerçekleştirilmek istenen temel amaç genel anlamda ağsız yöntemleri bir bütün olarak inceleyerek bağımsız Galerkin ve yerel Petrov-Galerkin ağsız yöntemlerinin teorik yapısını öğrenmek ve yöntemin iki ve üç boyutlu problemlere uygulanması için gerekli sayısal deneyim kazanmaktır.

Çalışmada ağsız yöntemler genel yapılarıyla incelenerek bu yöntemlerden Eleman Bağımsız Galerkin ve Ağsız Yerel Petrov-Galerkin yöntemlerinin bir boyutlu sınır değer, başlangıç değer ve başlangıç sınır değer problemleri için formülasyonları verilecektir.

Model oluşturulması aşamasında durum değişkenlerine yapılacak yaklaşım için açık ve uygulaması kolay olduğundan şekil fonksiyonlarının elde edilmesinde hareketli en küçük kareler yöntemi seçilecektir. Hareketli en küçük kareler yöntemi ile elde edilen şekil fonksiyonlarının etkinlikleri seçilen test fonksiyonlarına yapılan yaklaşımlarda test edilecektir.

Tezde eleman bağımsız Galerkin ve ağsız yerel Petrov-Galerkin yöntemlerinin gerektirdiği formülasyonlar ve diğer işlemler programlar şeklinde yazılarak programın gerektirdiği matris işlemler gibi bazı ara işlemler Matlab paket programından da yararlanılarak gerçekleştirilecektir. Geliştirilen program kullanılarak eleman bağımsız Galerkin ve ağsız yerel Petrov-Galerkin yöntemleri yukarıda değinilen türden bir boyutlu mühendislik problemlerine uygulanacaktır.

Eleman bağımsız Galerkin ve yerel Petrov-Galerkin ağsız yöntemiyle elde edilen sonuçlar grafik formda verilerek hata analizleri gerçekleştirilecektir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR

Yapılan çalışmalarda Eleman Bağımsız Galerkin ve ağsız yerel Petrov-Galerkin yöntemleri kullanılmıştır. Bu yöntemlerin uygulanmasında takip edilmesi gereken çözüm süreçleri aşağıda özetlenmiştir.

- Çözüm bölgesinde düğüm değerlerine yapılacak olan interpolasyon işlemi için yapılacak olan yaklaşım derecesinin (sabit, lineer, kuadratik.... gibi) belirlenmesi;

Çözüm bölgesinde uygulanacak olan yaklaşımın derecesi elde edilecek olan çözümün hassasiyetini önemli ölçüde etkilemektedir. Yapılan yaklaşım lineer, kuadratik ve kübik vs. olabilir. Bu yaklaşımın belirlenmesi şekil fonksiyonlarının elde edilmesi açısından önemlidir. Ağsız yöntemlerde şekil fonksiyonları analiz esnasında belirlenmektedir. Bu sebeple bu aşamada uygulanacak olan yaklaşım derecesinin belirlenmesi gerekmektedir.

- Şekil fonksiyonlarının elde edilmesi;

Şekil fonksiyonlarının elde edilebilmesi için pek çok yöntem önerilmiştir. Bu tez çalışmasında şekil fonksiyonlarını elde etmek için hareketli en küçük kareler yöntemi kullanılmıştır.

- Çözülecek olan fiziksel problem için matematiksel modelinin elde edilmesi;

Yaklaşık sayısal çözüm yöntemlerinin uygulanabilmesi için fiziksel problem diferansiyel veya kısmi diferansiyel denklemlerle ifade edilmiş olmalıdır. Daha sonra çözüm için sonlu elemanlar ve ağsız yöntemler gibi uygun bir sayısal yöntem seçilerek çözüme gidilmektedir.

- Uygulanacak olan çözüm yönteminin seçilmesi;

Fiziksel problemin çözümü için kullanılacak olan yaklaşık sayısal yöntem seçilmiş olabilir ancak seçilmiş olan yöntemde uygulanacak formülasyon işlemi elde edilmelidir. Yapılan tez çalışmasında eleman bağımsız Galerkin ve ağsız yerel Petrov-Galerkin formülasyonları kullanılmıştır. Çözüm sürecinde bu iki yöntemden uygulanacak olan formülasyonun elde edilmiş olması gerekmektedir.

- Sınır koşullarının uygulanması;

Sınır koşullarının uygulanması işlemi ağsız yöntemlerde şekil fonksiyonlarının kronecker delta özelliğini sağlamamasından dolayı sonlu elemanlar yönteminden farklı

olmaktadır. Ağsız yöntemler için sınır koşullarının uygulanması işlemi, yaygın olarak, penaltı yöntemi, Lagrange çarpanları yöntemi gibi yöntemler kullanılarak gerçekleştirilmektedir.

Yukarıda belirtilen işlem adımları uygulanarak bir fiziksel problemin çözümü herhangi bir yaklaşık sayısal çözüm yöntemi kullanılarak elde edilebilir.

2.1. Ağsız Yöntemlerde Şekil Fonksiyonlarının Elde Edilmesi

Ağsız yöntemlerde şekil fonksiyonlarını elde edilmesi için kullanılmakta olan bazı yöntemler şu şekilde sıralanabilir [5].

Çekirdek Yöntemi

- Birimlerin Parçalanması Yöntemi
- Hareketli En Küçük Kareler Yöntemi

Bu yöntemler kullanılarak şekil fonksiyonları elde edilmektedir. Belirtilmiş olan yöntemleri birbirinden farklı kılan ağırlık fonksiyonlarının kullanım amaçları olmaktadır.

Çekirdek yönteminde ağırlık fonksiyonları uygun bir çekirdeğin üretilmesi için kullanılmaktadır. Birimin parçalanması yönteminde ağırlık fonksiyonları yeni ve daha iyi bir yaklaşım elde edilmesi için kullanılmaktadır.

Yapılan tez çalışmasında hareketli en küçük kareler yöntemi kullanılmıştır. Hareketli en küçük kareler yönteminde ağırlık fonksiyonları yerel artık denklemlerinin ağırlıklandırılması işlemi kullanılmaktadır.

2.1.1. Hareketli En Küçük Kareler Yöntemi

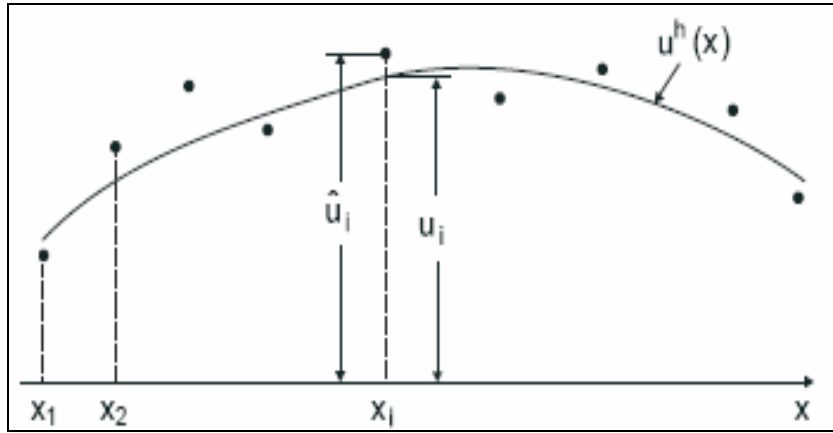
Hareketli en küçük kareler yöntemi Şekil 5'te genel hatlarıyla belirtilmiştir. Bu grafik incelendiğinde hareketli en küçük kareler yöntemi kesin düğüm değerleri ile uyumlanan eğri değerleri arasındaki farkı minimuma indirgemeyi amaçlamaktadır.

Şekil 5'te \bar{u}_i ile belirtilen değerle kesin düğüm değerleri u_j ile belirtilen değerler ise hareketli en küçük kareler yöntemi ile elde edilen değerlerdir.

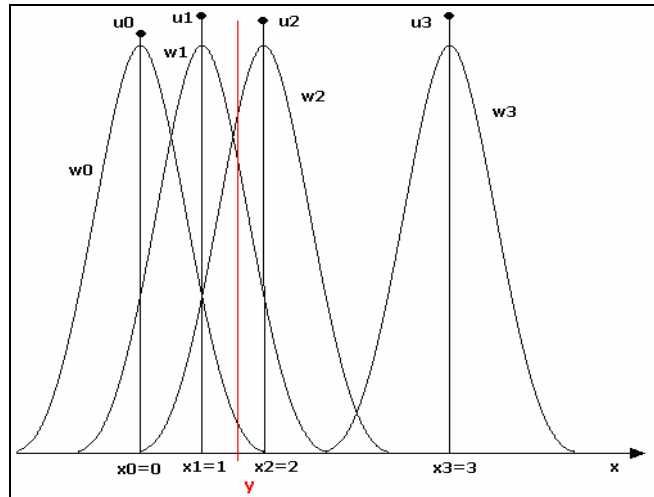
Hareketli en küçük kareler yöntemi ile yapılan yaklaşımın daha açık belirtilmesi amacıyla Şekil 6'da belirtilen örnek incelenmelidir. Bu örnekte yaklaşım yapılmak istenen

değerler u_0 , u_1 , u_2 ve u_3 değerleridir. Bu değerlere yapılacak olan yaklaşım beş basamakta özetlenebilir [5].

- Seçilen herhangi bir nokta için yapılacak yaklaşımın derecesinin belirlenmesi
- Her bir düğüm için yerel artık denklemlerinin oluşturulması
- Ağırlıklandırılmış artık denkleminin elde edilmesi
- Seçilen nokta için yapılan yerel yaklaşımın belirlenmesi
- Yerel yaklaşımın global yaklaşıma dönüştürülmesi



Şekil 5. Hareketli en küçük kareler yöntemi ile yapılan yaklaşım [6]



Şekil 6. Dört düğümle modellenmiş olan çözüm bölgesi [5].

Adım 1 Yerel yaklaşımın belirlenmesi:

Burada yapılacak olan yaklaşımın derecesi belirlenecektir. Bu yaklaşım bir boyutlu problemler için dikkate alındığında aşağıdaki yaklaşımlar söz konusudur.

$$u^h(x) = a_0 \text{ Sabit yaklaşım}$$

$$u^h(x) = a_0 + a_1x \text{ Lineer yaklaşım}$$

$$u^h(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \text{ Kuadratik yaklaşım}$$

$$u^h(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \text{ Kübik yaklaşım}$$

.....

.....

Burada başlangıç olarak sabit yaklaşım seçilecek ve çözümler elde edilip daha sonra lineer yaklaşım için aynı çözüm adımları incelenip sonuçlar elde edilecektir.

A. Sabit Yaklaşım: Şekil 6'da belirtilen y noktası için

$$u^h(y) = a_0(y) \tag{1}$$

ifadesinin seçilmesi ile birinci adım tamamlanmış olur.

Adım 2 Düzgümlerdeki yerel artık denklemlerinin elde edilmesi:

R ifadesiyle artık terimi sembolize edilir ve düğümlerdeki u_0, u_1, u_2 ve u_3 değerlerine yaklaşım (1) denklemi ile belirtildiği formda yapılarak aşağıdaki artık denklemleri elde edilir.

$$R_0(y) = a_0 - u_0 \tag{2}$$

$$R_1(y) = a_0 - u_1 \tag{3}$$

$$R_2(y) = a_0 - u_2 \tag{4}$$

$$R_3(y) = a_0 - u_3 \tag{5}$$

Artık denklemleri elde edildikten sonra ağırlıklandırılmış yerel artık terimi elde edilecektir. Ağırlıklandırılmış yerel artık terimi J ile simgelenmesi durumunda;

$$J = w_0 R_0^2 + w_1 R_1^2 + w_2 R_2^2 + w_3 R_3^2 \quad (6)$$

denklemleri ile ağırlıklandırılmış artık terimini elde edilmiş olur.

Adım 3 Ağırlıklandırılmış artık ifadesinin minimizasyonu:

Bu işlem J ifadesinin a_0 'a göre türevinin alınıp elde edilen ifadenin sıfıra eşitlenmesiyle gerçekleştirilir.

$$\frac{\partial J}{\partial a_0} = 0 \quad (7)$$

veya açık formda

$$2w_0(a_0 - u_0) + 2w_1(a_0 - u_1) + 2w_2(a_0 - u_2) + 2w_3(a_0 - u_3) = 0 \quad (8)$$

yazılabilir. Bu ifadeden a_0 ifadesi;

$$a_0 = \frac{\sum_{i=0,1,2,3} w_i(y)u_i}{\sum w_i(y)} \quad (9)$$

şeklinde elde edilir.

Adım 4 y noktası için yerel yaklaşımın elde edilmesi:

Yapılacak olan yaklaşım (1) denklemi ile belirtmişti. Bundan sonraki aşamada elde edilmiş olan a_0 ifadesi bu denklemde yerine yazılacaktır.

$$u^h(y) = a_0(y) = \frac{\sum w_i(y)u_i}{\sum w_i(y)} \quad (10)$$

(10) denklemi ile y noktasına yapılan yerel yaklaşım elde edilmiş olur.

Adım 5 Global yaklaşımın elde edilmesi:

Bu işlem (10) denkleminde elde edilen ifadede y yerine x in yazılmasıyla gerçekleştirilir.

$$u^h(x) = a_0(x) = \frac{\sum w_i(x)u_i}{\sum w_i(x)} \quad (11)$$

Bu işlemi gerçekleştirildikten sonra hareketli en küçük kareler yaklaşımı tamamlanmış olur. (11) denklemi;

$$u^h(x) = \sum \phi_i u_i \quad (12)$$

formunda yazıldığında şekil fonksiyonları ve şekil fonksiyonlarının tanımlı olduğu düğüm değerleri ile çarpımı elde edilmiş olacaktır. Bu tanımlama yapıldıktan sonra (11) denkleminde u_i ifadesinin çıkarılmasıyla şekil fonksiyonlarının genel yapısı

$$\phi_i = \sum \frac{w_i}{\sum w_i} \quad (13)$$

şeklinde elde edilmiş olur. Bu fonksiyonlara Shepard fonksiyonları denmektedir [7].

B. Lineer Yaklaşım: Lineer yaklaşım için de yine aynı işlem adımları takip edilerek şekil fonksiyonları elde edilebilir.

Adım 1 Yerel yaklaşımın belirlenmesi:

$$u^h(x) = a_0 + a_1 x \quad (14)$$

Adım 2 Düğümlerdeki yerel artık denklemlerinin elde edilmesi:

$$R_0(x) = a_0 + a_1 x_0 - u_0 \quad (15)$$

$$R_1(x) = a_0 + a_1 x_1 - u_1 \quad (16)$$

$$R_2(x) = a_0 + a_1 x_2 - u_2 \quad (17)$$

$$R_3(x) = a_0 + a_1 x_3 - u_3 \quad (18)$$

Ağırlıklandırılmış yerel artık denklemi:

$$J = w_0 R_0^2 + w_1 R_1^2 + w_2 R_2^2 + w_3 R_3^2 \quad (19)$$

Adım 3 Ağırlıklandırılmış yerel artık denkleminin minimizasyonu:

$$\frac{\partial J}{\partial a_0} = 0 \quad (20)$$

$$2w_0(a_0 + a_1x_0 - u_0) + 2w_1(a_0 + a_1x_1 - u_1) + 2w_2(a_0 + a_1x_2 - u_2) + 2w_3(a_0 + a_1x_3 - u_3) = 0 \quad (21)$$

Yaklaşım lineer olduğundan bu ifadenin bir kez de a_1 'e göre türevi alınmalıdır.

$$\frac{\partial J}{\partial a_1} = 0 \quad (22)$$

$$2w_0x_0(a_0 + a_1x_0 - u_0) + 2w_1x_1(a_0 + a_1x_1 - u_1) + 2w_2x_2(a_0 + a_1x_2 - u_2) + 2w_3x_3(a_0 + a_1x_3 - u_3) = 0 \quad (23)$$

(21) ve (23) denklemlerinin ortak çözümünüyle a_0 ve a_1 katsayıları elde edilebilir.

$$A = w_0 + w_1 + w_2 + w_3 \quad (24)$$

$$B = w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 \quad (25)$$

$$C = w_0x_0^2 + w_1x_1^2 + w_2x_2^2 + w_3x_3^2 \quad (26)$$

$$D = u_0w_0 + u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3 \quad (27)$$

$$E = u_0w_0x_0 + u_1w_1x_1 + u_2w_2x_2 + u_3w_3x_3 \quad (28)$$

A, B, C, D ve E katsayıları ifade edildikten sonra (21) ve (23) denklemlerinin çözümünden elde edilecek olan a_0 ve a_1 katsayıları;

$$a_0 = \frac{BE - DC}{B^2 - AC} \quad (29)$$

$$a_1 = \frac{BD - AE}{B^2 - AC} \quad (30)$$

şeklinde elde edilir. Elde edilen a_0 ve a_1 katsayıları genel yaklaşım denkleminde yerlerine yazılırsa lineer formdaki genel yaklaşım ifadesi

$$u^h(x) = a_0 + a_1x \quad (31)$$

elde edilir.

Buradan şekil fonksiyonlarının açık bir biçimde elde edilebilmesi açısından yaklaşım (12) denklemi formunda ifade edilir ve u_i değerleri bu ifadenin dışında bırakıldığında birinci düğüm için şekil fonksiyonunun yapısı

$$\phi_0 = \frac{w_0x_0B - w_0C}{B^2 - AC} + x \frac{w_0B - w_0x_0A}{B^2 - AC} \quad (32)$$

şeklinde elde edilmiş olur.

Burada sabit ve lineer yaklaşım derecesi için yapılmış olan işlemleri daha yüksek serbestlik derecelerinde kapsayacak genel formda ifade edilebilmesi açısından denklemler matris formunda elde edilecektir. Burada belirtilecek olan matris işlemleri çözüm sürecinde yerel artık ifadesinin minimize edilmesinden sonra uygulanacak olan işlem adımlarının bir bölümünü içermektedir[2].

Yerel artık denkleminin minimizasyonundan sonra

$$A(x)a = B(x)u \quad (33)$$

denklemini elde edilmektedir. Elde edilen denklemin a katsayıları için ;

$$a = A^{-1}(x)B(x)u \quad (34)$$

şeklinde çözülmesi gerekmektedir. Böylelikle (34) denklemi ile istenilen katsayılar elde edilmiş olur. Yapılacak olan yaklaşım;

$$u^h(x) = P^T a \quad (35)$$

$$u^h(x) = P^T A^{-1}(x)B(x)u \quad (36)$$

ifadeleriyle elde edilir. Burada P^T ifadesi yapılan yaklaşımın mertebesinin belirtildiği vektördür. Elde edilen katsayı matrisi (35) denkleminde yerine yazılması durumunda (36) denklemi ile yapılmak istenen yaklaşım elde edilmiş olur.

Yapılan yaklaşım, örnek problemde de belirtildiği gibi, düğümlerdeki kesin değerleri içermektedir. Yapılan yaklaşımın (12) denklemindeki formu ile ele alınması durumunda u vektörü haricindeki kısım (37) denkleminde belirtilmiştir. (37) denklemi elde edilmek istenen şekil fonksiyonları vektörüne karşılık gelmektedir.

$$\phi(x) = P^T A^{-1}(x)B(x) \quad (37)$$

Burada bir boyutlu problemler için;

$$P^T = [1] \text{ Sabit yaklaşım}$$

$$P^T = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \text{ Lineer yaklaşım}$$

$$P^T = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \end{bmatrix} \text{ Kuadratik yaklaşım}$$

.....

şeklindedir. İşlemlerde kullanılmak üzere bu matrisin oluşturulması gerekmektedir. Bu matrisin içyapısı incelenen örnek problem ve lineer yaklaşım için aşağıdaki biçimdedir [3].

$$P = \begin{bmatrix} P_0(x_0) & P_1(x_0) \\ P_0(x_1) & P_1(x_1) \\ P_0(x_2) & P_1(x_2) \\ P_0(x_3) & P_1(x_3) \end{bmatrix} \quad (38)$$

Burada P_0 ve P_1 ifadeleri lineer yaklaşım için sırasıyla 1 ve x terimlerine karşılık gelmektedir.

Ağırlık matrisi seçilmiş olan herhangi bir noktada tüm ağırlık fonksiyonlarının o noktadaki değerlerinin toplanmış olduğu matristir. W ağırlık matrisi bir köşegen matristir [3].

$$W = \begin{bmatrix} w_0(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_2(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_3(x) \end{bmatrix} \quad (39)$$

Bir sonraki aşama olarak şekil fonksiyonu vektörleriyle ilgili işlemlere karşılaşılan moment matrisi A ve Vandermonde matrisi B olarak tanımlanan matrislerin içyapıları

$$A_i = [1 \quad x_i] W(x_i) \begin{bmatrix} 1 \\ x_i \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$B_i = \begin{bmatrix} 1 \\ x_i \end{bmatrix} W(x_i) \quad (41)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Bu matrislerin içyapıları sabit yaklaşım dikkate alındığında;

$$A = P^T W P = [w_0 + w_1 + w_2 + w_3] \quad (42)$$

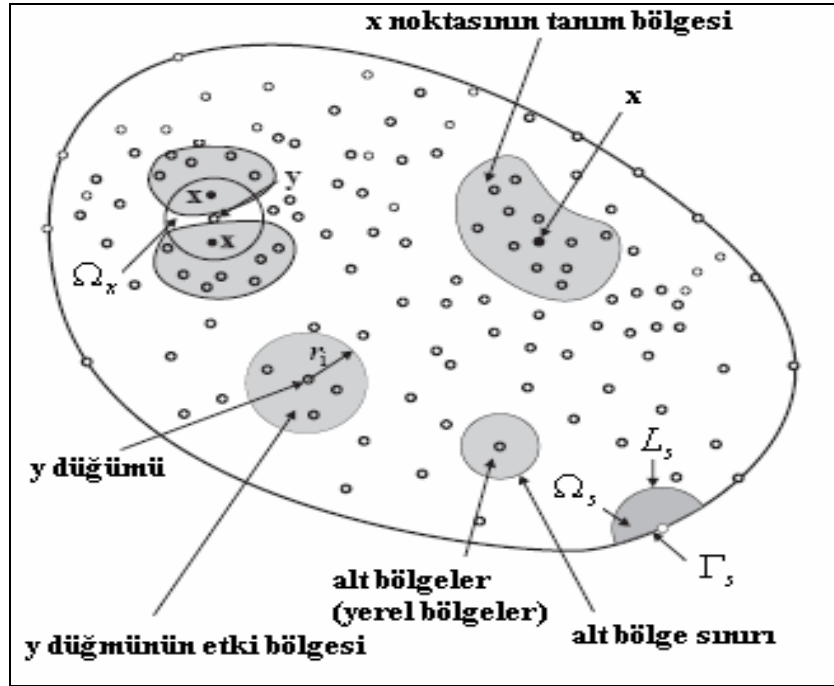
$$B = P^T W = \begin{bmatrix} w_0 & w_1 & w_2 & w_3 \\ w_0 x_0 & w_1 x_1 & w_2 x_2 & w_3 x_3 \end{bmatrix} \quad (43)$$

şeklindedir. Burada belirtilmiş olan A moment matrisinin tersinin alınabilmesi için P^T yaklaşım tabanı vektöründe belirtilen eleman sayısının bir fazlası kadar şekil fonksiyonun çözüm bölgesi içinde yer alan herhangi bir düğüm üzerinde tanımlı olması gerekmektedir.

Örneğin lineer yaklaşım için $P^T=[1 \ x]$ elemanlarından meydana gelmektedir. Yani P^T vektörü iki eleman kullanılarak tanımlanmıştır. A matrisinin tersinin alınabilmesi için bir düğüm üzerinde en az üç adet şekil fonksiyonunun değer alması gerekmektedir.

2.1.2. Ağırlık fonksiyonlarının Seçimi

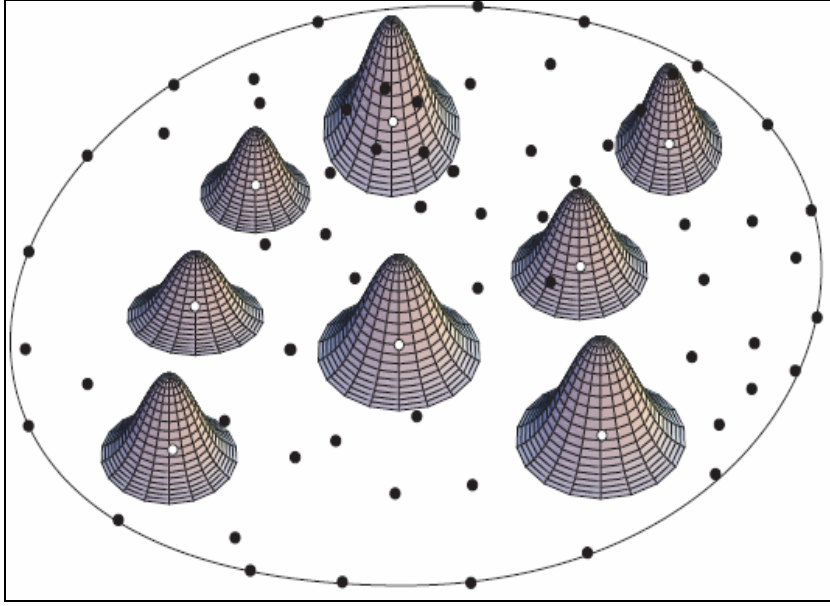
Bu noktada şekil fonksiyonlarının elde edilebilmesi için ağırlık fonksiyonlarının belirlenmesi gerekmektedir. Ağırlık fonksiyonlarının çözüme olan etkilerinin daha etkili bir biçimde anlaşılabilmesi açısından Şekil 7'nin incelenmesi gerekmektedir.



Şekil 7. Ağırlık fonksiyonlarının yapıları ve etkinlik yarıçapları [8].

Şekil 7'de düğümlerle modellenmiş olan bir çözüm bölgesi görülmektedir. Bu düğümler arasında önceden tanımlanmış herhangi bir ilişki söz konusu değildir. Burada tanımlanmış olan x noktası ele alındığında dikkat edilmesi gereken nokta tanım bölgesi kısmıdır. Tanım bölgesi x ifadesi bu bölgenin içinde bağımsız değişken olarak tanımlanmış olması durumunda bir boyutlu problemler için çözüm bölgesi olmaktadır. Ancak x ifadesi

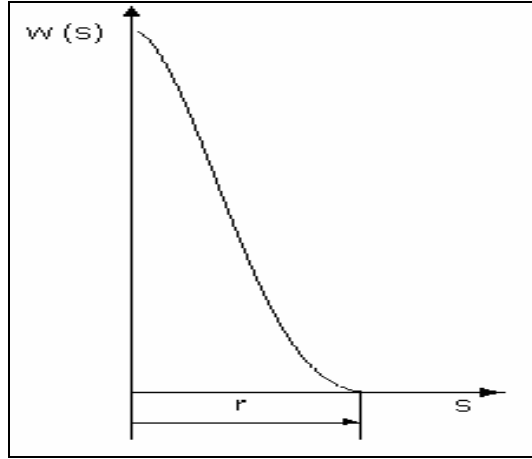
bağımsız değişken olmayıp sadece o noktayı belirtmek amacıyla kullanılmış olması durumunda tanım bölgesi x noktasının etki alanını belirtmiş olacaktır. Bu nokta civarındaki her bir düğüm x noktası üzerinde bir etkiye sahip olacaktır. Bu durumda çözüm bölgesi olarak Şekil 7’de belirtilen dairesel alanın tamamı çözüm bölgesi olarak seçilmiştir. Etki bölgesinin homojen bir biçimde gösterildiği y düğümü ele alındığında burada r_i ifadesi etkinlik yarıçapını belirtmektedir. Ağırlık fonksiyonlarının etkinlik yarıçapının daha iyi bir şekilde ele alınabilmesi açısından Şekil 8 incelenmelidir.



Şekil 8. Ağırlık fonksiyonları ve etkinlik yarıçapları [9]

Şekilde farklı düğümler ve etkinlik yarıçapları için ağırlık fonksiyonlarının yapısı belirtilmiştir. Burada etkinlik yarıçaplarının çözüm bölgesindeki durumu önem kazanmaktadır. Etkinlik yarıçapının artırılması durumunda fonksiyonlar daha geniş bir alanı kapsamakta ve kapsadıkları her bir düğüm değeri için bir ağırlık oluşturmaktadır. Bu durum çözümün hassasiyeti açısından olumlu sonuçlar doğurmaktadır. Ancak etkinlik yarıçaplarının çok büyük seçilmesi durumunda ağırlıklandırılmak istenen yerel artık ifadesi gereğinden daha büyük bir ağırlık değeri ile çarpılmış olacaktır. Bu durum çözümün arzu edilen hassasiyetten uzaklaşmasına sebep olmaktadır.

Şekil 9’da bir boyutlu problemler için ağırlık fonksiyonu ve etkinlik yarıçapı tanımı verilmiştir.



Şekil 9. Bir boyutlu problemler için ağırlık fonksiyonu ve etkinlik yarıçapı [5].

Şekil 9’da da belirtildiği gibi ağırlık fonksiyonu s parametresine bağlı olarak ifade edilmektedir. Burada s parametresi;

$$s = \frac{|x - x_i|}{r} \quad (44)$$

şeklinde tanımlanmıştır. (44) bağıntısında x çözüm bölgesi bağımsız değişkeni x_i ifadesi ise seçilmiş olan düğümlerin çözüm bölgesindeki koordinatlarını belirtmektedir. Paydada yer alan r ifadesi ise etkinlik yarıçapını temsil etmektedir. Etkinlik yarıçapı r 'nin değeri tamamen analizi yapan kişi tarafından seçilmektedir.

Ağırlık fonksiyonları s parametresine bağlı olarak spline fonksiyonları veya gauss fonksiyonları seçilmektedir. Yapılan tez çalışmasında ağırlık fonksiyonu olarak dördüncü dereceden spline fonksiyonu kullanılmıştır.

Spline fonksiyonları;

Dördüncü dereceden spline fonksiyonu:

$$w(s) = 1 - 6s^2 + 8s^3 - 3s^4 \quad \text{eğer } s \leq 1 \quad (45)$$

$$w(s) = 0 \quad s > 1$$

Üçüncü dereceden spline fonksiyonu:

$$\begin{aligned}
 w(s) &= \frac{2}{3} - 4s^2 + 4s^3 & \text{eğer } s &\leq \frac{1}{2} & (46) \\
 w(s) &= 4 - 4s + 4s^2 - \frac{4}{3}s^3 & \frac{1}{2} &< s \leq 1 \\
 w(s) &= 0 & s &> 1
 \end{aligned}$$

Gauss fonksiyonu:

$$\begin{aligned}
 w(s) &= \exp\left(-\left(\frac{s}{\alpha}\right)^2\right) & \text{eğer } s &\leq 1 & (47) \\
 w(s) &= 0 & s &> 1
 \end{aligned}$$

şeklindedir.

2.1.3. Şekil Fonksiyonları ve Etkinliklerinin Test Edilmesi

Yukarda formülasyonları verilen şekil fonksiyonları uygun bir ağırlık fonksiyonu ve yaklaşım tabanının seçilmesiyle (37) bağıntısı kullanılarak elde edilir.

Aşağıda örnek olması bakımından farklı etkinlik yarıçapı ve fonksiyon sayısına sahip şekil fonksiyonları lineer yaklaşım kullanılarak elde edilecektir.

Örnek 1:

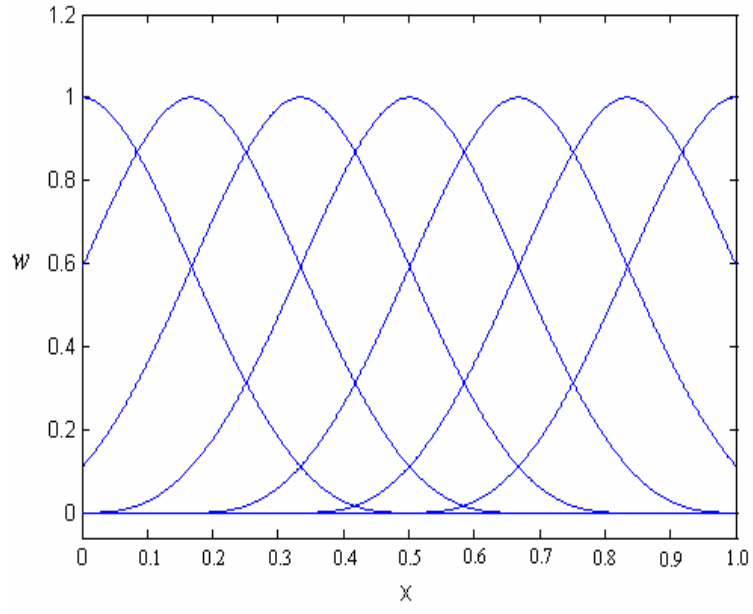
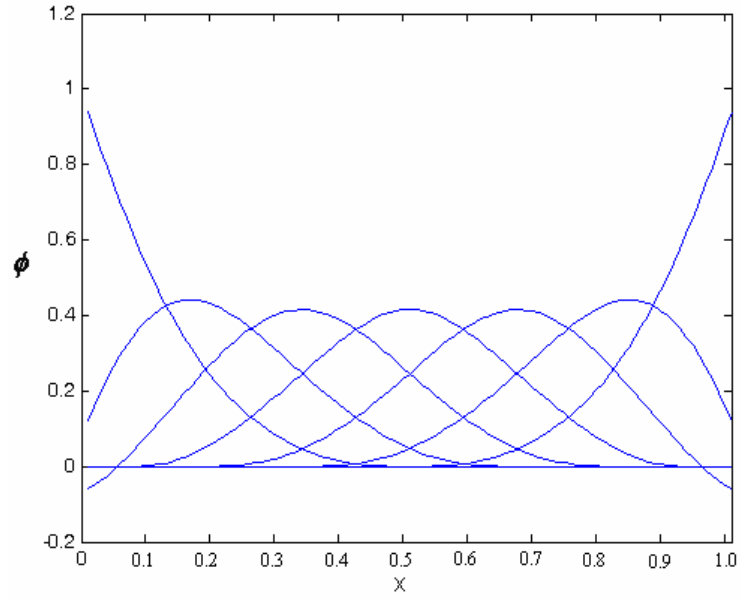
Etkinlik yarıçapı r : 0.5

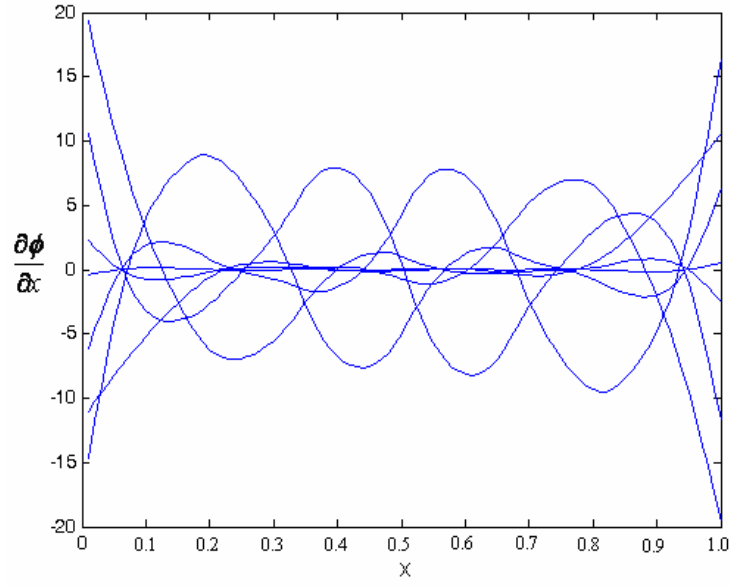
Kullanılan yaklaşım : Lineer

Fonksiyon sayısı : 7

Çözüm bölgesi olarak : $0 \leq x \leq 1$

seçilmiştir. Bu veriler kullanılarak elde edilen ağırlık fonksiyonları Şekil 10'da ve şekil fonksiyonları ise Şekil 11'de belirtilmiştir. Ayrıca elde edilen şekil fonksiyonlarının birinci türevleri de Şekil 12'te belirtilmiştir. Elde edilen şekil fonksiyonları birimin parçalanması olarak adlandırılırken, şekil fonksiyonları türevleri ise sıfırın parçalanması olarak adlandırılmaktadır [10].

Şekil 10. w Ağırlık fonksiyonlarıŞekil 11. ϕ Şekil fonksiyonları



Şekil 12. $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ Şekil fonksiyonları birinci türevleri

Örnek 2:

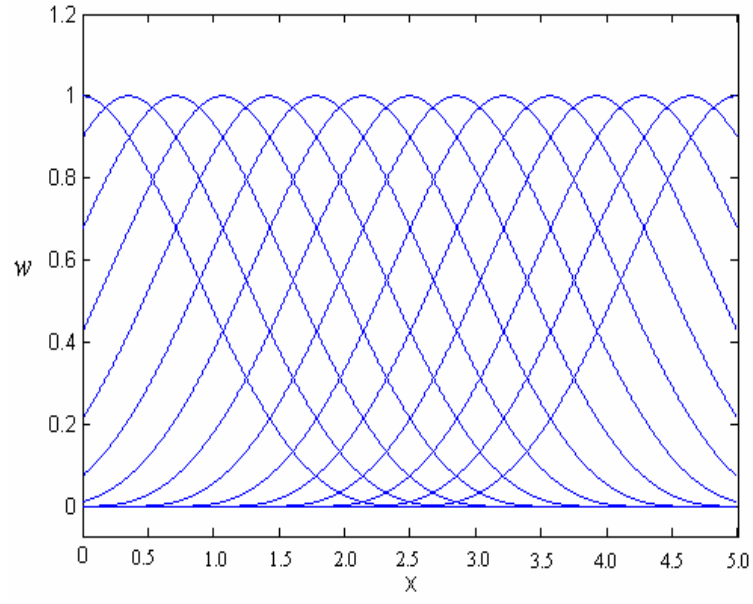
Etkinlik yarıçapı r : 0.25

Kullanılan yaklaşım : Lineer

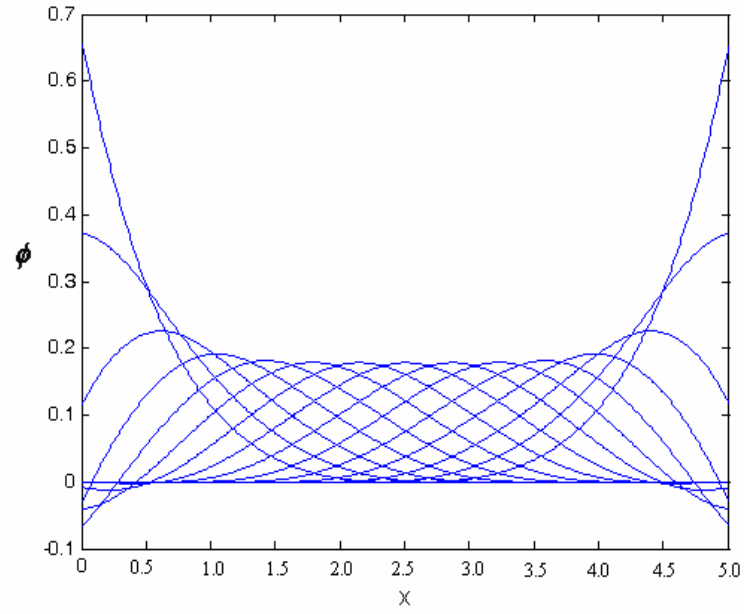
Fonksiyon sayısı : 15

Çözüm bölgesi olarak: $0 \leq x \leq 5$

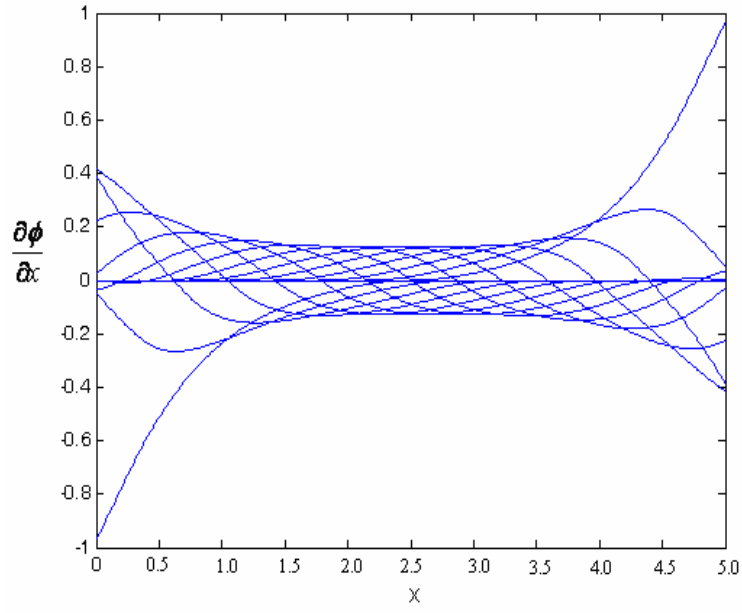
olarak seçilmiştir. Bu verilerin kullanılması ile elde edilen ağırlık fonksiyonları Şekil 13, şekil fonksiyonları Şekil 14 ve şekil fonksiyonları birinci türevleri Şekil 15’de verilmiştir.



Şekil 13. w Ağırlık fonksiyonları



Şekil 14. ϕ Şekil fonksiyonları



Şekil 15. $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ Şekil fonksiyonları birinci türevi

Gelinen Bu aşamada yukarıda belirtilmiş olan şekil fonksiyonlarının etkinliklerinin test edilmesi gerekmektedir. Bu amaçla $\sin(x)$ fonksiyonu ve bir polinom fonksiyonuna yaklaşımlar yapılacaktır. Yapılacak yaklaşımlar şekil fonksiyonu sayısının, etkinlik yarıçapının ve yaklaşım mertebesinin (lineer, kuadratik... gibi) çözüme olan etkilerinin incelenmesine yöneliktir.

Yaklaşım yapılan fonksiyonlar;

$$f(x) = \sin(x) \quad (48a)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{8 + x^5} \quad (48b)$$

şeklinde seçilmiştir.

Burada w_{AY} ağsız yöntemle elde edilen çözüm, w_{Anltk} analitik değer olmak üzere hata değeri;

$$hata = \frac{w_{AY} - w_{Anltk}}{w_{Anltk}} * 100 \quad (49)$$

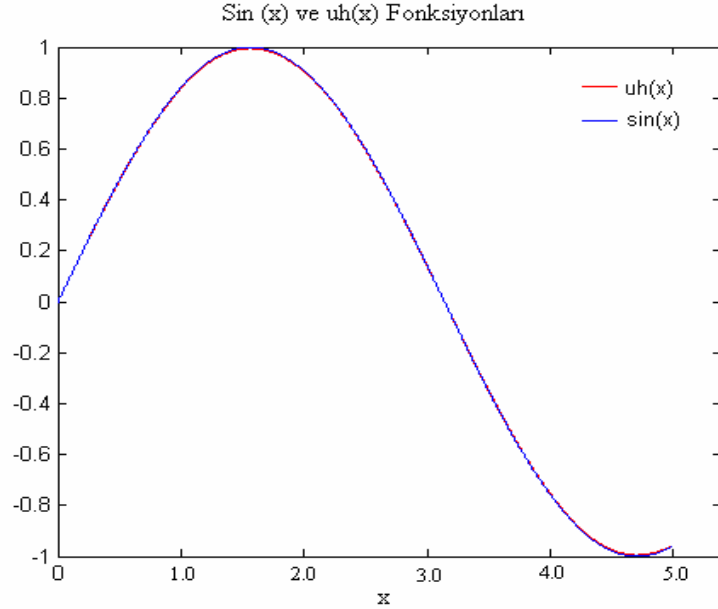
şeklinde tanımlanmıştır.

İlk olarak (48a) denklemi ile belirtilmiş olan $f(x) = \sin(x)$ fonksiyonuna yapılan yaklaşımlar incelenecektir.

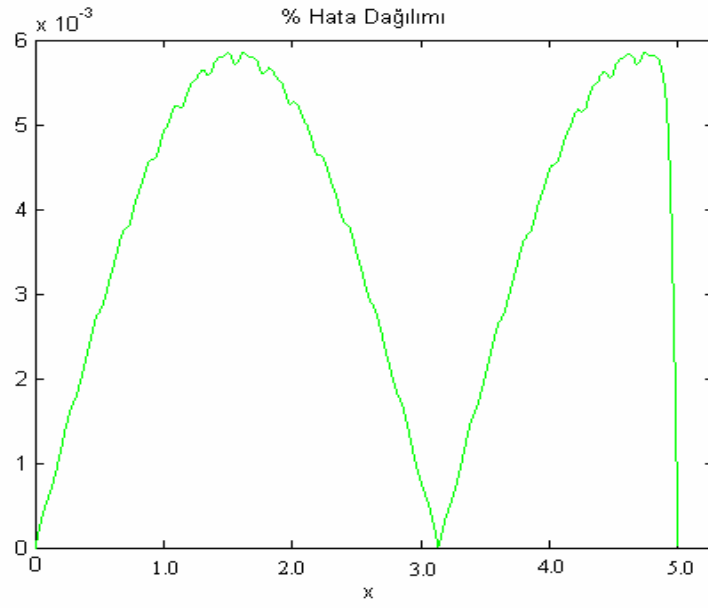
$f(x) = \sin(x)$ fonksiyonuna yapılan birinci yaklaşım için;

Fonksiyon sayısı	: 25
Etkinlik yarıçapı	: 0.35
Yapılan yaklaşım	: Lineer
Çözüm bölgesi	: $0 \leq x \leq 5$

değerleri seçilmiştir. Yapılan yaklaşım için elde edilmiş olan yaklaşık çözüm değerleri ve $f(x) = \sin(x)$ fonksiyonunun değerleri Şekil 16'de verilmiştir. Yapılan yaklaşım için çözüm bölgesi boyunca hata dağılımı Şekil 17'de belirtilmiştir. Hata dağılımı incelendiğinde fonksiyonun yön değiştirdiği noktalarda hata değerlerinde sıçrama meydana gelmektedir. Bunun sebebi olarak seçilen fonksiyon sayısının yetersizliği ve etkinlik yarıçapı değerinin gerekenden çok daha büyük değere sahip olması gösterilebilir.



Şekil 16. $\sin(x)$ Fonksiyonu için yapılan birinci yaklaşım

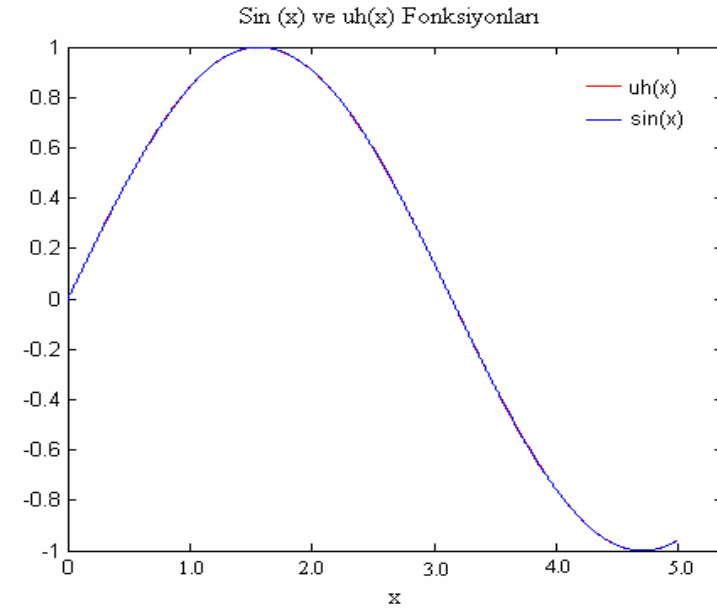


Şekil 17. Birinci yaklaşım için çözüm bölgesindeki hata dağılımı

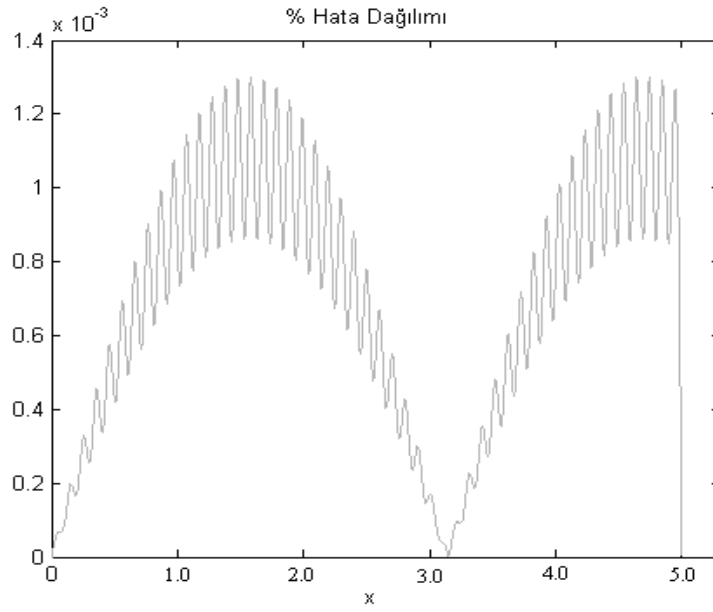
$f(x) = \sin(x)$ fonksiyonuna yapılan ikinci yaklaşım için;

Fonksiyon sayısı : 25
 Etkinlik yarıçapı : 0.15
 Yapılan yaklaşım : Lineer
 Çözüm bölgesi : $0 \leq x \leq 5$

olarak seçilmiştir. İkinci yaklaşım için elde edilen sonuçlar Şekil 18 ve Şekil 19 'da görülmektedir.



Şekil 18. $\sin(x)$ Fonksiyonu için yapılan ikinci yaklaşım



Şekil 19. İkinci yaklaşım için çözüm bölgesindeki hata dağılımı

$f(x) = \sin(x)$ fonksiyonuna yapılan üçüncü yaklaşım için;

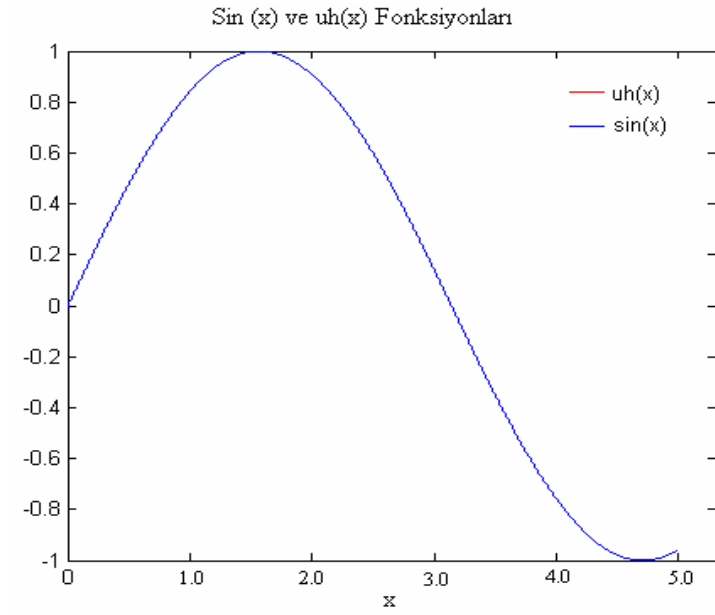
Fonksiyon sayısı : 75

Yapılan yaklaşım : Kuadratik

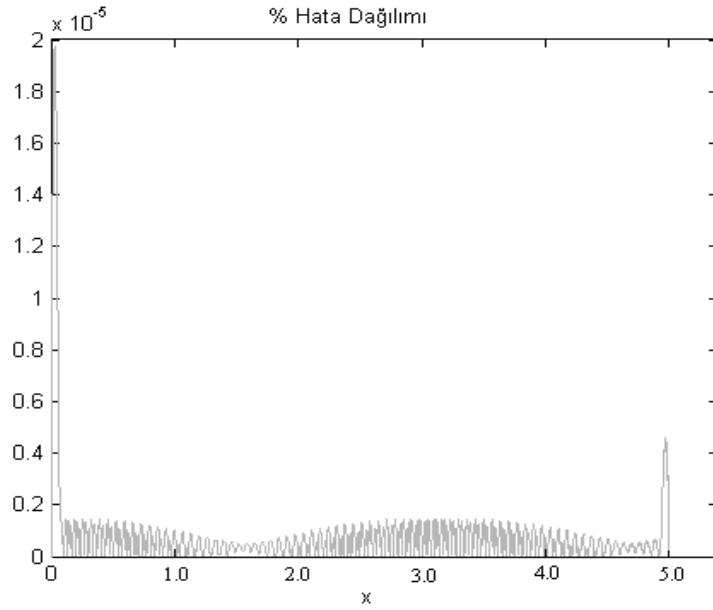
Etkinlik yarıçapı : 0.15

Çözüm bölgesi : $0 \leq x \leq 5$

olarak seçilmiştir. Yapılan yaklaşım için elde edilen sonuçlar Şekil 20 ve Şekil 21'de verilmiştir.



Şekil 20. sin(x) Fonksiyonu için yapılan üçüncü yaklaşım



Şekil 21. Üçüncü yaklaşım için çözüm bölgesindeki hata dağılımı

Yapılan üç yaklaşımın incelenmesinden etkinlik yarıçapının gereğinden fazla büyük seçilmesinin çözümü olumsuz etkilediği görülmektedir. Aynı sayıda şekil fonksiyonun kullanıldığı birinci ve ikinci yaklaşımlarda, yaklaşımları birbirinde farklı kılan etkinlik yarıçaplarının farklı olmasıdır. Her iki çözüm için elde edilen hata dağılımları birinci yaklaşım için Şekil 17’de ve ikinci yaklaşım için Şekil 19’da verilmiştir. Hata dağılımlarının incelenmesinden ikinci yaklaşımda daha iyi çözümler elde edildiği gözlenmektedir.

Yaklaşım mertebesinin kuadratik olması ve düğüm sayısının 75 olarak seçilmesi durumunda elde edilen çözüm Şekil 20’de, hata dağılımı ise Şekil 21’de verilmiştir. Bu yaklaşımda elde edilen hata değerleri oldukça küçüktür. Gerçekleştirilen yaklaşım değerlerinin fonksiyonun analitik çözüm değerleri ile hemen hemen üste düşmektedir. Bu durum elde edilen şekil fonksiyonlarının sinüs fonksiyonu için yapılan etkinlik testini oldukça başarılı bir şekilde geçtiğini belirtmektedir.

Benzer yaklaşımlar (48b) denklemi ile ifade edilmiş olan $f(x) = \frac{x^2}{8+x^5}$ polinom fonksiyonu için tekrarlanacaktır.

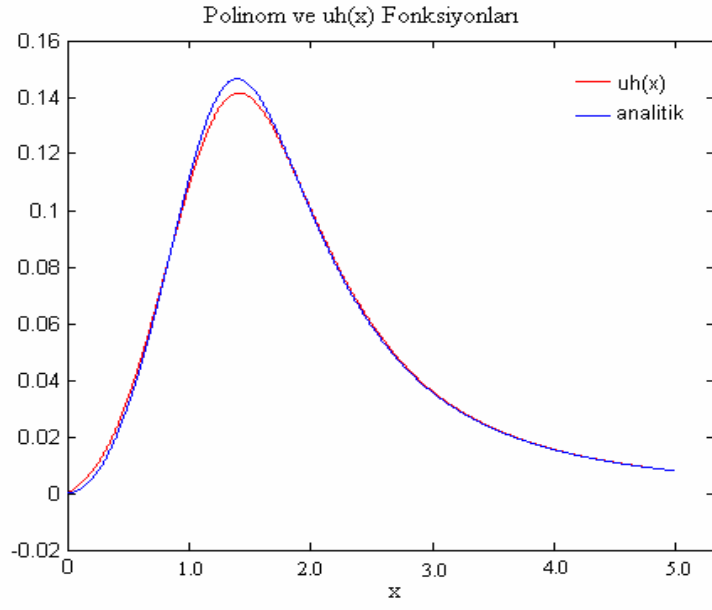
$f(x) = \frac{x^2}{8+x^5}$ fonksiyonuna yapılan birinci yaklaşım için;

Fonksiyon sayısı	: 25
Yapılan yaklaşım	: Lineer
Etkinlik yarıçapı	: 0,5
Çözüm bölgesi	: $0 \leq x \leq 5$

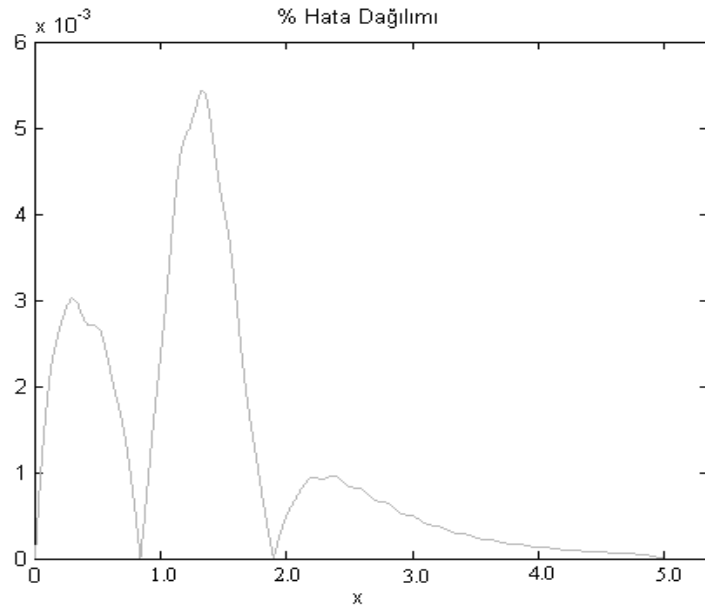
değerleri seçilmiştir.

$f(x) = \frac{x^2}{8+x^5}$ fonksiyonuna yapılan birinci yaklaşımın sonuçları Şekil 22 ve Şekil

23’de verilmiştir.



Şekil 22. $f(x) = \frac{x^2}{8+x^5}$ Fonksiyonu için yapılan birinci yaklaşım

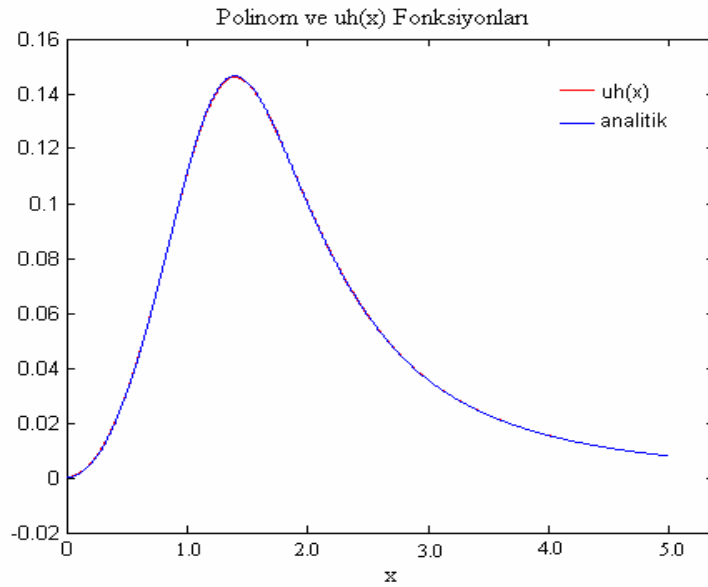


Şekil 23. Birinci yaklaşım için çözüm bölgesindeki hata dağılımı

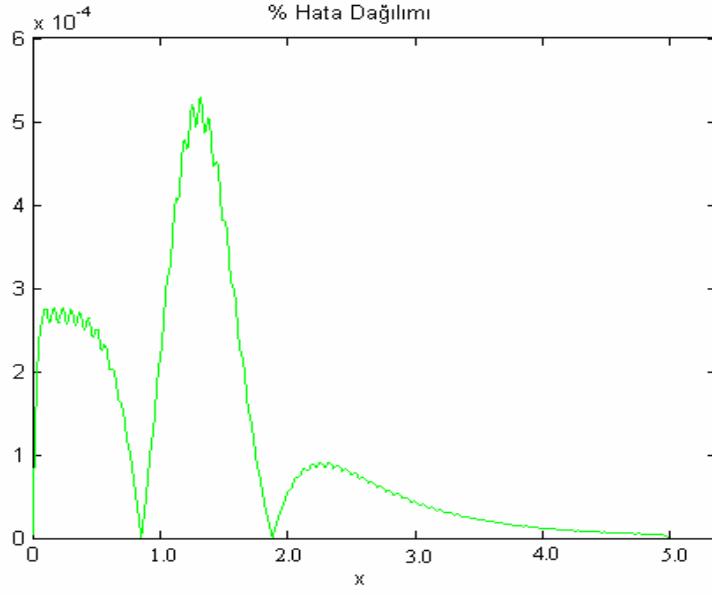
$f(x) = \frac{x^2}{8+x^5}$ fonksiyonuna yapılan ikinci yaklaşım için;

Fonksiyon sayısı : 75
 Yapılan yaklaşım : Lineer
 Etkinlik yarıçapı : 0.15
 Çözüm bölgesi : $0 \leq x \leq 5$

olarak seçilmiştir. İkinci yaklaşım için elde edilen sonuçlar Şekil 24 ve Şekil 25'te verilmiştir.



Şekil 24. $f(x) = \frac{x^2}{8+x^5}$ Fonksiyonu için yapılan ikinci yaklaşım



Şekil 25. İkinci yaklaşım için çözüm bölgesindeki hata dağılımı

$f(x) = \frac{x^2}{8+x^5}$ fonksiyonuna yapılan üçüncü yaklaşım için;

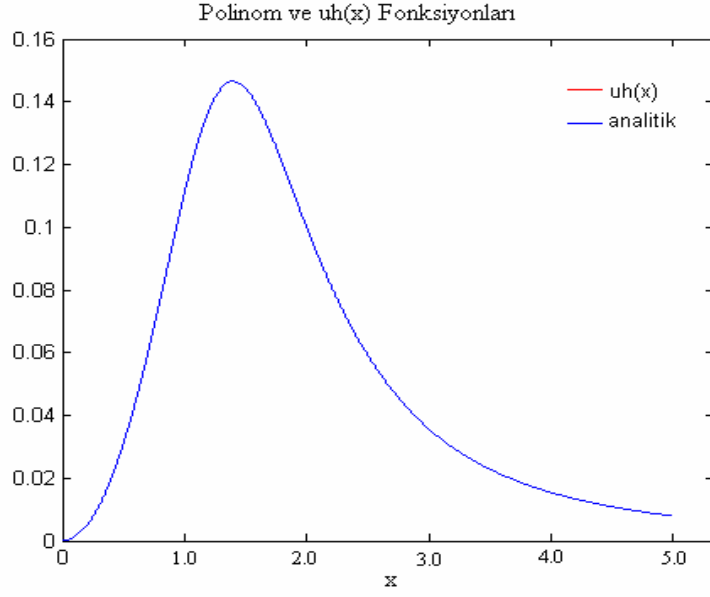
Fonksiyon sayısı : 75

Yapılacak yaklaşım : Kuadratik

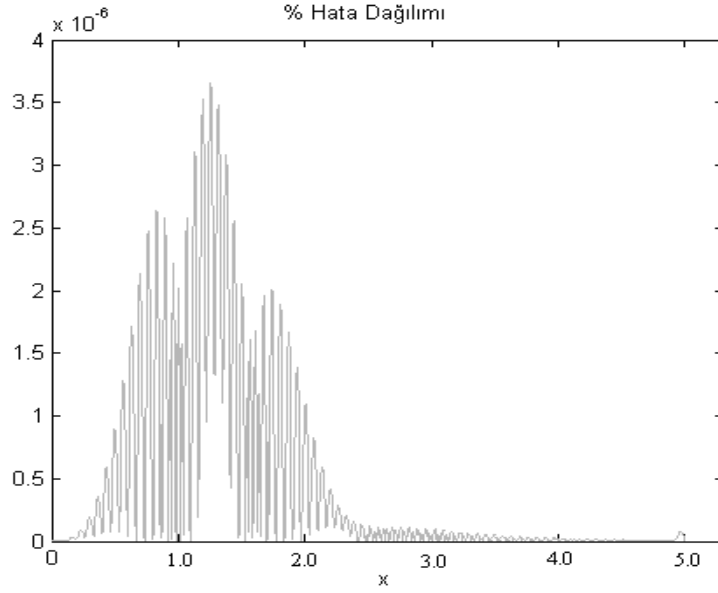
Etkinlik yarıçapı : 0.15

Çözüm bölgesi : $0 \leq x \leq 5$

olarak seçilmiştir. Üçüncü yaklaşım için edilen sonuçlar Şekil 26 ve Şekil 27'de verilmiştir.



Şekil 26. $f(x) = \frac{x^2}{8+x^5}$ Fonksiyonu için yapılan üçüncü yaklaşım



Şekil 27. Üçüncü yaklaşım için çözüm bölgesindeki hata dağılımı

Polinom fonksiyon için elde edilen çözümler incelendiğinde $\sin(x)$ fonksiyonuna yapılan yaklaşım ile benzer sonuçlar elde edilmiştir. Dolayısıyla etkinlik yarıçapı değeri çözüme oldukça etki etmektedir.

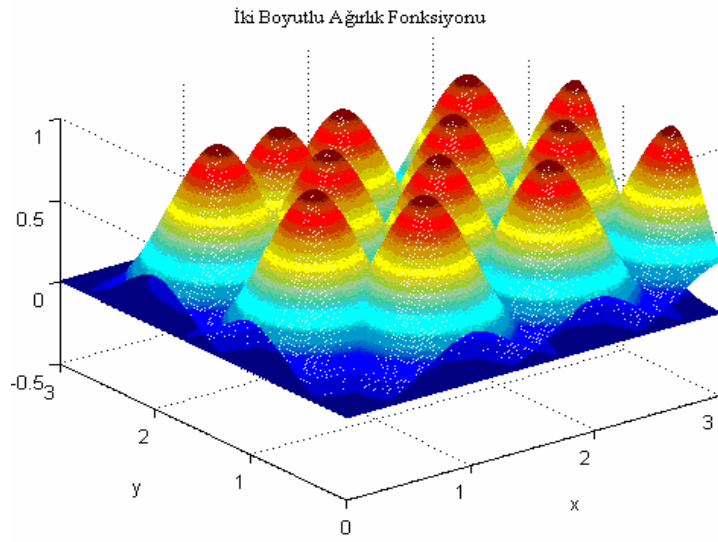
Yukarda elde edilmiş olan şekil fonksiyonlarının tamamı bir boyutlu problemler içindir. İki boyutlu ağırlık fonksiyonlarının ve şekil fonksiyonlarının yapısı Şekil 28 ve

Şekil 29’da görülmektedir. Şekillere çizilen iki boyutlu ağırlık ve şekil fonksiyonları için çözüm bölgesi sınırları;

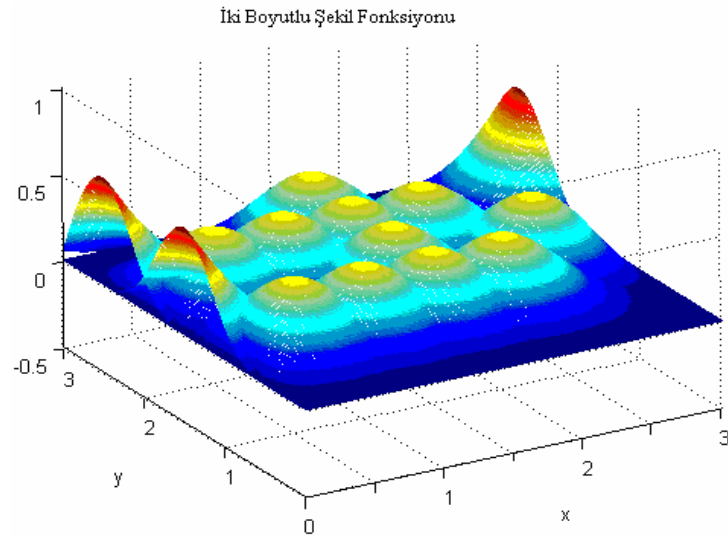
x doğrultusu için $0 \leq x \leq 3$

y doğrultusu için $0 \leq y \leq 3$

olarak seçilmiştir. Şekillerde iki boyutlu ağırlık ve şekil fonksiyonları daha belirli olmaları açısından düğümlerin tamamı için değil de rasgele belirlenmiş olan düğümler için çizilmiştir [11].



Şekil 28. İki boyutlu ağırlık fonksiyonları



Şekil 29. İki boyutlu şekil fonksiyonları

2.2. Eleman Bağımsız Galerkin Yöntemi

Eleman bağımsız Galerkin yöntemi Galerkin formülasyonu kullanılarak gerçekleştirilmektedir. Galerkin formülasyonunun özelliği kullanılan ağırlık fonksiyonları ile şekil fonksiyonlarının aynı olmasıdır. Yani şekil fonksiyonları diferansiyel denklem kullanılarak elde edilen artık denkleminin ağırlıklandırılması işleminde ağırlık fonksiyonu olarak kullanılmaktadır.

Yöntemin eleman bağımsız olarak isimlendirilmesi çözüm sürecinde herhangi bir hücre yapısının kullanılmamasındandır. Sonlu elemanlar ismine dikkat edilirse yöntemin çözüm sürecinde elemanlar kullanılmaktadır. Eleman bağımsız Galerkin yöntemi ismi de bu doğrultuda önerilmiştir [1].

2.2.1. Eleman Bağımsız Galerkin Yönteminin Formülasyonu

Eleman bağımsız Galerkin yönteminin formülasyonunun gerçekleştirilmesi için bir boyutlu sınır değer problemlerini ifade eden

$$-\frac{d}{dx}\left(\alpha(x)\frac{du(x)}{dx}\right) + \beta(x)u(x) = f(x) \quad (50)$$

denklemini ele alınacaktır [12]. Bu denklemde yer alan α, β katsayıları malzemeye bağlı parametrelerdir. Burada β parametresi sıfır olarak seçilirse (50) denklemi,

$$-\frac{d}{dx}\left(\alpha(x)\frac{du(x)}{dx}\right) = f(x) \quad (51)$$

şeklini alır. Bu yapıdaki bir denklemin çözümü için ağırlıklandırılmış artıklar yönteminin bir parçası olan Galerkin formülasyonu kullanılacaktır [12].

(51) denkleminin çözümünde Galerkin yönteminin uygulanması sonlu elemanlar yöntemi için takip edilen yapıyla oldukça benzerdir. Burada farklı olan şekil fonksiyonlarının çözüm sürecinde elde edilecek olması ve sınır koşullarının uygulama biçimidir.

Eleman bağımsız Galerkin yöntemi için takip edilecek olan çözüm prosedürü aşağıda belirtilmiştir.

- Artık denkleminin elde edilmesi:

$$R = -\frac{d}{dx}\left(\alpha(x)\frac{du(x)}{dx}\right) - f(x) \quad (52)$$

- Artık denkleminin ağırlıklandırılarak integre edilmesi:

$$\int wRdx = 0 \quad (53)$$

Burada w ağırlık fonksiyonudur. (52) artık ifadesinin (53) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$\int w\left[-\frac{d}{dx}\left(\alpha(x)\frac{du(x)}{dx}\right) - f(x)\right]dx = 0 \quad (54)$$

elde edilir.

- Kısmi integrasyon işleminin uygulanması:

Kısmi integrasyon işleminin amacı (54) denkleminin zayıf formunun elde edilmesidir. Zayıf form ile belirtilen durumda, bir yandan durum değişkeninin türev mertebesini düşürürken öte yandan, (50) denkleminin bir elastisite problemi için elde edildiği dikkate alınır, yer değiştirme için tanımlanması gereken esas sınır koşulları sayısı azaltılarak doğal sınır koşulu sayısı artırılmış olur. Kısmi integrasyon işlemi sonunda uygulanan kısmi integrasyon sayısı kadar doğal sınır koşulu terimi elde edilmektedir. Doğal sınır koşulları sonlu elemanlar yönteminde denklemde doğrudan sayısal değer olarak yerine yazılabildiğinden uygulanması daha kolaydır.

Kısmi integrasyon işleminde sınır koşullarının nasıl oluşturulduğunu görmek için (55) denklemi ile belirtilen yapıdaki bir ifade için kısmi integrasyon işlemi incelenecektir [12].

$$\int \frac{d^{2m}U}{dx^{2m}} \phi_i dx \quad (55)$$

(55) ifadesi 1'den $2m$ 'e kadar arzu edilen miktarda kısmi integrasyona tabi tutulabilmektedir. Bu denklemin m sefer kısmi integrasyona tabi tutulması durumunda

$$\int \frac{d^{2m}U}{dx^{2m}} \phi_i dx = (-1)^m \int \frac{d^m U}{dx^m} \frac{d^m \phi}{dx^m} dx + A \quad (56)$$

elde edilir. (56) denklemindeki A ifadesi U teriminin $2m-1, 2m-2, \dots, m$ 'inci mertebeye kadar olan türevlerini içermektedir. Bu terimler doğal sınır koşullarına karşılık gelmektedir. Kısmi integrasyon işleminden sonra denkleme dikkat edilirse U ifadesinin elde edilebilmesi için tanımlanması gereken esas sınır koşullarının sayısı azaltılmıştır.

Kısmi integrasyon işleminin bir sefer uygulanması durumunda

$$\int \frac{d}{dx} (fg) dx = \int \frac{df}{dx} g dx + \int \frac{dg}{dx} f dx \quad (57)$$

denklemini elde edilmiştir. (57) denkleminin sol tarafı (58) denkleminde belirtildiği gibi ifade edilmektedir.

$$\int \frac{d}{dx} (fg) dx = [fg] \quad (58)$$

Elde edilen kısmi integrasyon işlemlerinin uygulanabilmesi için $g = w$ ve $f = -\alpha(x) \frac{du(x)}{dx}$ olarak seçilmesi durumunda (59) denkleminde bir sefer kısmi integrasyon uygulanarak,

$$\int w \left(-\frac{d}{dx} \left(\alpha(x) \frac{du(x)}{dx} \right) \right) dx - \int w f(x) dx = 0 \quad (59)$$

veya

$$\int \frac{dw}{dx} \left(\alpha(x) \frac{du(x)}{dx} \right) dx + \left[\left(-\alpha(x) \frac{du(x)}{dx} \right) w \right] - \int w f(x) dx = 0 \quad (60)$$

denklemini elde edilir. (60) denklemi ile (50) denklemi için uygulanan kısmi integrasyon işlemi tamamlanmaktadır. (60) denkleminde yer değiştirme ve ağırlık fonksiyonları ifadeleri kapalı bir biçimde yer almaktadır. Bu ifadelerde w ağırlık fonksiyonu olarak şekil fonksiyonları kullanılacaktır. Yer değiştirme için yapılacak olan yaklaşım ise daha önce (12) denkleminde belirtilmiş olduğu haliyle dikkate alınacaktır. Bu ifadelerin (60) denkleminde yerlerine yazılmasıyla,

$$\int \frac{d\phi_i(x)}{dx} \alpha(x) \frac{d\phi_j(x)}{dx} u_i dx + \left[\left(-\alpha(x) \frac{d\phi_i(x)}{dx} u_i \right) \phi_j(x) \right] - \int \phi_i(x) f(x) dx = 0 \quad (61)$$

denklemini elde edilir. (61) denklemi matris formunda;

$$[K]\{u\} = [F] \quad (62)$$

şeklinde yazılabilir.

- Sistem denklemlerinin elde edilmesi:

Bu ağırsız yöntemde sistem denklemlerinin elde edilmesi işlemi sonlu elemanlar yöntemindeki kadar kolay olmamaktadır. Çünkü sınır koşullarını uygulanması işlemi penaltı yöntemi ile gerçekleştirilmektedir. Penaltı yönteminin uygulanması sistem denklemlerine ek terimler getirmektedir [3].

Burada $q = \alpha(x) \frac{du(x)}{dx}$ olmak üzere sınır koşulları,

$$\text{Esas sınır koşulu : } u = \bar{u} \quad (63)$$

$$\text{Doğal sınır koşulu : } q = \bar{q} \quad (64)$$

olarak tanımlanmaktadır. Daha önce de belirtildiği gibi sınır koşulları penaltı yöntemi ile uygulanacağından (61) denkleminde sınır koşullarının uygulanabilmesini sağlayacak olan

$$\theta(u - \bar{u})w = 0 \quad (65)$$

$$\theta(q - \bar{q})w = 0 \quad (66)$$

denklemleri eklenecektir. Bu denklemlerde θ penaltı parametresidir. Bu durumda (62) denklemi ile belirtilen sistem denklemindeki katılık matrisi terimi düğümlerde tanımlanan K^d ve sınırda tanımlanan K^s matrislerinin toplamından oluşur. Bu terimlerin içyapısı,

$$K^d_{ij} = \int \alpha(x) \frac{d\phi_i(x)}{dx} \frac{d\phi_j(x)}{dx} dx \quad (67)$$

$$K^s_{ij} = [\theta\phi_i(x)\phi_j(x)] - \left[\phi_i(x) \frac{d\phi_j(x)}{dx} \right] \quad (68)$$

şeklindedir. Katılık matrisi ile birlikte yük vektörü de F^d ve F^s olarak ikiye ayrılmıştır. Bu terimler sırasıyla düğümlerde ifade edilen yük vektörü ve sınır yük vektörüdür. Bu iki vektörün içyapıları ise,

$$F^d_i = \int \phi_i(x) f(x) dx \quad (69)$$

$$F^s_i = [\theta\phi_i(x)\bar{u}] + [\phi_i(x)\theta] \quad (70)$$

şeklindedir.

2.2.2. Sayısal İntegrasyon İşlemi

Sayısal integrasyon işlemi karmaşık yapıdaki denklem sistemlerinin integrasyonunu gerçekleştirmek için kullanılmaktadır.

Yapılan tez çalışmasında sayısal integrasyon işlemi gauss integrasyonu kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Gauss integrasyon işlemi, yöntem için belirlenmiş olan noktalar ve bu noktalara özel olarak tanımlanmış olan ağırlık değerleri kullanılarak gerçekleştirilmektedir.

Gauss integrasyon işleminde belirtilen adımların uygulanabilmesi için kartezyen koordinat sisteminden doğal koordinat sistemine geçilmesi gerekmektedir. Bu dönüşüm işlemi;

x_i : düğüm noktalarının geometrik yeri

x : kartezyen koordinat sisteminde çözüm bölgesi bağımsız değişkeni

r : etkinlik yarıçapı

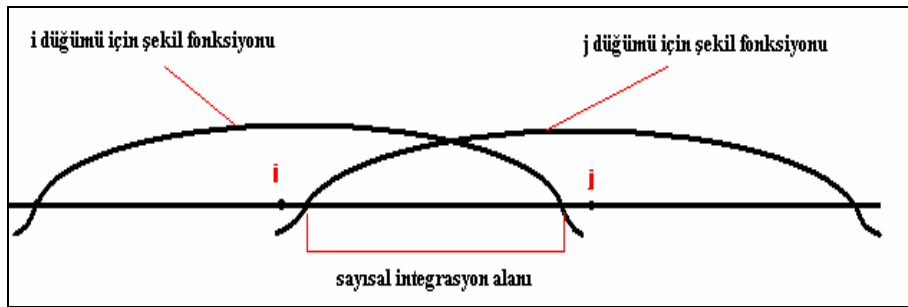
ζ : doğal koordinat sisteminde bağımsız değişken

olmak üzere,

$$x = xi + r\zeta \quad (71)$$

şeklinde yapılır[13].

Eleman bağımsız Galerkin yönteminde sayısal integrasyon işleminin gerçekleştirilebilmesi için gölge hücre kavramı kullanılmaktadır. Bu hücre yapısı Şekil 30'da görülmektedir. Gölge hücre kavramı herhangi iki fonksiyonun ortak kesişim bölgesi olarak tanımlanabilir [3].



Şekil 30. Sayısal integrasyon işlemi için tanımlı bölge

Bu dönüşüm işleminin şekil fonksiyonlarına uygulanması için

$$dx = rd\zeta \quad (72)$$

dönüşümüyle

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = \frac{d\phi(\zeta)}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dx} \quad (73)$$

yazılır. (72) denkleminin (73) denkleminde yerine yazılması ile dönüşüm;

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = \frac{d\phi(\zeta)}{d\zeta} \frac{1}{r} \quad (74)$$

şeklinde elde edilmiş olur. Bu şekilde şekil fonksiyonlarının dönüşüm işlemi gerçekleştirilmiş olur. Bu dönüşüm katılık matrisi ve yük vektörlerine de uygulanacaktır.

Uygulanan bu dönüşüm işleminden sonra katılık matrisleri ve yük vektörlerinin içyapıları aşağıda belirtilmiştir.

$$K_{ij} = \int \frac{1}{r} \frac{d\phi_i(\zeta)}{d\zeta} \alpha(\zeta) \frac{1}{r} \frac{d\phi_j(\zeta)}{d\zeta} r d\zeta \quad (75)$$

$$K_{ij} = [\theta \phi_i(\zeta) \phi_j(\zeta)] - \left[\phi_i(\zeta) \frac{d\phi_j(\zeta)}{d\zeta} \frac{1}{r} \right] \quad (76)$$

$$F_i = \int \phi_i(\zeta) f(\zeta) r d\zeta \quad (77)$$

$$F_i = [\theta \phi_i(\zeta) \bar{u}] + [\phi_i(\zeta) \theta] \quad (78)$$

Dönüşüm işleminin uygulanmasıyla koordinatlar -1 ve +1 arasında değişecektir. Bu dönüşümlerden sonra daha önce tanımlanmış olan gauss sayısal integrasyon işlemleri gerçekleştirilebilmektedir. Tanımlanmış olan integraller için integrasyon işlemi genel formda (79) denklemiyle verilmektedir [12,14].

$$\int I(\zeta) d\zeta \cong \sum_{l=1}^n W_{nl} I(\zeta_{nl}) \quad (79)$$

Buradaki W_{nl} ağırlık değerlerini ve ζ_{nl} ise gauss noktaları koordinatlarını belirtmektedir. Bu iki ifade istenilen gauss nokta sayısına bağlı olarak belirlenmektedir. Gauss noktaları ve bunlara karşılık gelen ağırlık değerleri Ek Tablo 1’de verilmiştir.

2.2.3. Esas ve Doğal Sınır Koşullarının Uygulanması

Esas ve doğal sınır koşullarının eleman bağımsız Galerkin yöntemi ve ağsız yerel Petrov-Galerkin yöntemlerinde uygulanması sonlu elemanlar yöntemindekinden farklıdır. Sonlu elemanlar yönteminde sınır koşulları uygulanırken şekil fonksiyonları kronecker delta ($\delta_{ij} = 1 \quad i = j$ eğer $i \neq j \quad \delta_{ij} = 0$) özelliğini sağladığından uygulanmak istenen sınır koşulları denklemde yerlerine yazılarak uygulanmaktadır.

Ağsız yöntemlerde sınır koşullarının bu şekilde uygulanabilmesi için şekil fonksiyonlarının kronecker delta özelliğini sağlaması gerekmektedir. Ancak hareketli en küçük kareler yöntemi ile elde edilen şekil fonksiyonları kronecker delta özelliğini sağlamamaktadır.

Ağsız yöntemlerde sınır koşullarının uygulanması için önerilmiş olan yöntemlere örnek olarak penaltı yöntemi, Lagrange çarpanları yöntemi gibi yöntemler gösterilebilir.

Yapılan çalışmada sınır koşullarının uygulanması işlemi penaltı yöntemi ile gerçekleştirilmiştir.

2.2.3.1. Penaltı Yöntemi

Penaltı yöntemini ağsız yöntemlere uygulamadan önce sonlu elemanlar yönteminde nasıl uygulandığı ele alınacaktır. Daha sonra benzer işlem adımları ağsız yöntemler için uygulanacaktır.

Sınır koşulları (63) ve (64) denklemlerinde sırasıyla yer değiştirme ve yükleme için belirtilmiştir. Eleman denklemlerinin birleştirilmesi sonucu sistem denklemleri,

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (80)$$

formunda yazılabileceği (62) denklemi ile belirtilmişti. Burada U yer değiştirme vektörünü, K katılık matrisini, F ise yük vektörünü belirtmektedir. Bu ifade sınır koşullarının da uygulanabilmesi açısından bilinen terimleri (n) alt indisyle ve bilinmeyen terimleri (u) alt indis ile ifade ederek tekrar düzenlenecektir. Sonlu elemanlar yönteminde esas sınır koşulları bilinen yer değiştirme değerleri olarak, doğal sınır koşulları ise bilinen kuvvetler olarak sistem denklemlerine uygulanmaktadır. (80) denkleminde,

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{un} \\ K_{un} & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_u \\ U_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_n \\ F_u \end{Bmatrix} \quad (81)$$

veya daha açık olarak,

$$K_{uu}U_u + K_{un}U_n = F_n \quad (82)$$

$$K_{uu}U_u + K_{nn}U_n = F_u \quad (83)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerden (82) denklemi bilinmeyen yer değiştirme ve (83) denklemi ise bilinmeyen kuvvet değerlerinin elde edilmesi için kullanılmaktadır.

Buraya kadar belirtilen işlem adımları sınır koşullarının sonlu elemanlar yönteminde uygulanması işlemini özetlemektedir.

Penaltı yönteminde ise sınır koşullarının uygulanabilmesi için çok büyük değerlere sahip olan sayılar (10^3 ve 10^7) seçilmektedir [15]. Ancak penaltı parametresi değerlerinin daha büyük bir değere sahip olması (10^{20} veya 10^{30}) çözümün daha hassas elde edilmesini sağlamaktadır[3]. Daha sonra sınır koşulunun tanımlanmış olduğu düğüm belirlenmektedir. Örnek olması açısından sınır koşulunun uygulanacağı düğüm olarak i.nci düğüm seçilecek ve işlem adımları bu düğüm üzerinden belirtilecektir.

M serbestlik derecesine sahip olan bir denklemin genel yapısı (84)'te belirtildiği gibi olmaktadır.

$$K_{i1}U_1 + K_{i2}U_2 + \dots + K_{iM}U_M = F_i \quad (84)$$

(84) denkleminde i.nci düğüme sınır koşulu penaltı yöntemiyle uygulanmak istendiğinde bu düğüme karşılık gelen katılık matrisinin K_{ii} elamanı penaltı parametresi ile çarpılarak bu denkleme dahil edilmektedir. Bu işlem uygulandığında (85) denklemi elde edilir.

$$K_{i1}U_1 + K_{i2}U_2 + \dots + \theta K_{ii}U_i + \dots + K_{iM}U_M = \theta K_{ii}\bar{U}_i \quad (85)$$

(85) denklemindeki θ terimi penaltı parametresidir.

Penaltı parametresinin değer olarak çok büyük seçilmesinin sebebi, $\theta K_{ii} U_i$ teriminin diğer terimler ile kıyaslandığında baskın olması gereğindedir. Bu terim ne kadar büyük olursa (85) denkleminin diğer terimleri bu terim yanında ihmal edilebilecek kadar küçük olacaktır.

$$\theta K_{ii} U_i \cong \theta K_{ii} \bar{U}_i \quad (86)$$

Burada esas amaç (85) denklemini (86) denklemine dönüştürmektir. Bu sayede sınır koşulları rahatlıkla uygulanabilecektir.

$$U_i \cong \bar{U}_i \quad (87)$$

Uygulanan bu işlem sonucunda yapılan hata $(\frac{1}{\theta})$ mertebesinde olmaktadır. Bu şekilde uygulanmak istenen sınır koşulu kullanılan penaltı parametresinin büyüklüğü ile orantılı olarak hassasiyet kazanmaktadır.

Ağırsız yöntemler için uygulanan penaltı yönteminde işlem adımları hemen hemen aynıdır. Denklem sistemi yine (80) denklemini ile ifade edilmiş olacak ve yine sınır koşulunun uygulanacağı düğüme karşılık gelen katılık matrisinin köşegen elemanı penaltı parametresi ile çarpılacaktır. Bu durumda gerekli işlem adımları,

$$\theta K_{ii} U_i - \theta K_{ii} \bar{U}_i \cong 0 \quad (88)$$

$$\theta K_{ii} (U_i - \bar{U}_i) \cong 0 \quad (89)$$

$$\theta (U_i - \bar{U}_i) \cong 0 \quad (90)$$

denklemleriyle özetlenmiştir. (90) denklemini sınır koşullarının tam olarak uygulanabilmesi için ağırlıklandırılmalı ve integre edilmelidir. İntegrasyon işlemi bir boyutlu problemler için ele alındığında bir nokta üzerinde belirtileceğinden bu terim integrasyon işleminden sonra (91) denklemini ile belirtilen formda elde edilmiş olacaktır.

$$\left[\theta(U_i - \bar{U}_i) w \right] = 0 \quad (91)$$

Burada w ifadesi ağırlık fonksiyonuna karşılık gelmektedir. Bu terim kullanılan formülasyona (Galerkin veya Petrov-Galerkin) bağlı olarak belirlenmektedir.

2.3. Ağsız Yerel Petrov-Galerkin Yöntemi

Ağısız yerel Petrov-Galerkin yöntemi yapı bakımından diğer ağsız yöntemlerden daha farklıdır. Esasen yöntem olarak değil de daha çok bir konsept olarak ele alınabilir. Konseptin formülasyonunda kullanılan ağırlık fonksiyonu ve integrasyon yönteminin uygun olarak seçilmesi durumunda diğer ağsız yöntem formülasyonları elde edilebilmektedir. Ağırlık fonksiyonu olarak şekil fonksiyonlarının kullanılması ve integrasyon işlemi için gölge hücre kavramının kullanılması durumunda eleman bağımsız Galerkin yönteminin formülasyonu elde edilmektedir.

2.3.1. Ağsız Yerel Petrov-Galerkin Yönteminin Formülasyonu

Ağısız yerel Petrov-Galerkin yönteminin modelinin açıklanabilmesi için (51) denklemi tekrar dikkate alınacaktır [12].

$$-\frac{d}{dx} \left(\alpha(x) \frac{du(x)}{dx} \right) = f(x) \quad (92)$$

Eleman bağımsız Galerkin yönteminde takip edilen prosedür burada da aynen takip edilecektir.

- Artık denkleminin elde edilmesi:

$$R = -\frac{d}{dx} \left(\alpha(x) \frac{du(x)}{dx} \right) - f(x) \quad (93)$$

- Elde edilen artık denkleminin ağırlıklandırılması:

$$\int wRdx = 0 \quad (94)$$

$$\int w \left[-\frac{d}{dx} \left(\alpha(x) \frac{du(x)}{dx} \right) - f(x) \right] dx = 0 \quad (95)$$

$$\int w \left(-\frac{d}{dx} \left(\alpha(x) \frac{du(x)}{dx} \right) \right) dx - \int wf(x)dx = 0 \quad (96)$$

- Kısmi integrasyon işleminin bir sefer uygulanması:

$$\int \frac{d}{dx} (fg) dx = \int \frac{df}{dx} g dx + \int \frac{dg}{dx} f dx \quad (97)$$

ve

$$\int \frac{d}{dx} (fg) dx = [fg] \quad (98)$$

olduğundan

$$\int \frac{dw}{dx} \left(\alpha(x) \frac{du(x)}{dx} \right) dx + \left[\left(-\alpha(x) \frac{du(x)}{dx} \right) w \right] - \int wf(x)dx = 0 \quad (99)$$

bağıntısı elde edilir. Kısmi integrasyon işleminin uygulanması ile genel prosedür tamamlanmış olur.

Yer değiştirmeye yapılacak olan yaklaşım (12) denkleminde belirtildiği gibi ele alınacaktır. Ağsız yerel Petrov-Galerkin formülasyonunda eleman bağımsız Galerkin yönteminden farklı olarak şekil fonksiyonları ağırlık fonksiyonlarının yerine kullanılmamaktadır. Burada ağırlık fonksiyonu olarak daha önce belirtilmiş olan spline veya gauss fonksiyonlarından herhangi biri kullanılmaktadır. Sonuç olarak kullanılan ağırlık fonksiyonu ve şekil fonksiyonları birbirinden farklı olduklarından elde edilen katılık

matrisleri simetrik olmayan bir yapıdadır. Ağsız yerel Petrov-Galerkin formülasyonunda katılık matrisleri ve yük vektörlerinin içyapıları;

$$K^d_{ij} = \int \alpha(x) \frac{dw_i(x)}{dx} \frac{d\phi_j(x)}{dx} dx \quad (100)$$

$$K^s_{ij} = [\theta w_i(x) \phi_j(x)] - \left[w_i(x) \frac{d\phi_j(x)}{dx} \right] \quad (101)$$

$$F^d_i = \int w_i(x) f(x) dx \quad (102)$$

$$F^s_i = [\theta w_i(x) \bar{u}] + [w_i(x) \theta] \quad (103)$$

şeklinde verilir.

2.3.2. Esas ve Doğal Sınır Koşullarının Uygulanması

Esas ve doğal sınır koşullarının uygulanması ağsız yerel Petrov-Galerkin yöntemi için Eleman Bağımsız Galerkin yöntemi ile kıyaslandığında hiçbir fark yoktur. Ağsız yerel Petrov-Galerkin yöntemi için penaltı yöntemi Eleman Bağımsız Galerkin Yöntemi için elde edilen ile tamamen aynıdır. Burada Ağsız Yerel Petrov-Galerkin Yönteminde Atluri tarafından önerilen ve esaslı şekil fonksiyonlarının kronecker delta özelliğini sağlayacak biçimde dönüştürülmesi işlemine dayanan dönüşüm yönteminden bahsedilecektir.

2.3.2.1. Penaltı Yöntemi

Eleman bağımsız Galerkin yöntemi için elde edilen tüm ifadeler aynen geçerliliğini korumaktadır.

2.3.2.2. Dönüşüm Yöntemi

Dönüşüm yöntemi şekil fonksiyonlarının kronecker delta özelliğini sağlayacak biçimde bir dönüşüme tabi tutulması esasına dayanmaktadır. Uygulanan bu dönüşüm işleminden sonra şekil fonksiyonlarının kronecker delta özelliğine sahip olması, sınır koşullarının sonlu elemanlar yönteminde olduğu gibi doğrudan uygulanabilmesi avantajını sağlamaktadır [16].

Yer değiştirme ifadesine yapılan yaklaşım (12) denklemindeki haliyle dikkate alınacaktır.

$$u^h(x) = \sum \phi_i u_i \quad (104)$$

Bu denklem yapılan yeni tanımlamalar uygun olarak tekrar düzenlendiğinde

$$u = \sum \phi_i u_{y_i} \quad (105)$$

denklemindeki yapı elde edilir. Burada u ile düğümlerdeki kesin yer değiştirme değerleri u_y ile düğümlerdeki yaklaşık çözüm değerleri ifade edilmiştir. Yapılan yaklaşımlarda esas amaç düğümlerdeki kesin çözüm değerlerini elde etmektir. Bu işlem (105) denkleminde belirtilen yapıda gerçekleştirilmektedir. Dönüşüm yönteminde ise kesin düğüm değerleri yaklaşık düğüm değerleri cinsinden ifade edilecektir.

$$u_{y_i} = \sum D_{ij} u \quad (106)$$

Uygulanan dönüşüm işlemi (106) denklemi ile ifade edilmiştir. Bu denklemde belirtilen D matrisi şekil fonksiyonlarının tersini içeren dönüşüm matrisidir [16].

$$D_{ij} = [\phi^j(x_i)]^{-1} \quad (107)$$

Yaklaşık düğüm değerleri için elde edilen (106) denklemi (105) denklemindeki yerine yazıldığında N adet düğüm için,

$$u(x) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \phi^i(x) D_{ij} u^j = \sum_{j=1}^N \varphi^j(x) u^j \quad (108)$$

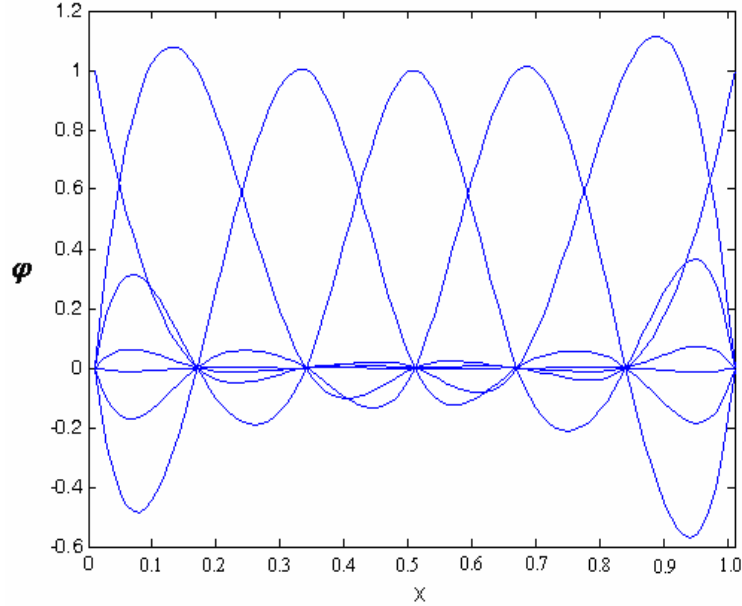
denklemini elde edilir. Yapılan yeni yaklaşım incelendiğinde (12) denklemindeki yapıya oldukça benzemektedir. Bu yapıdan yer değiştirme ifadeleri çıkarılırsa geride kalan kısım şekil fonksiyonlarını temsil etmektedir.

Dönüşüm işlemi uygulanarak elde edilen yeni şekil fonksiyonları φ kronecker delta özelliğini sağlamaktadır.

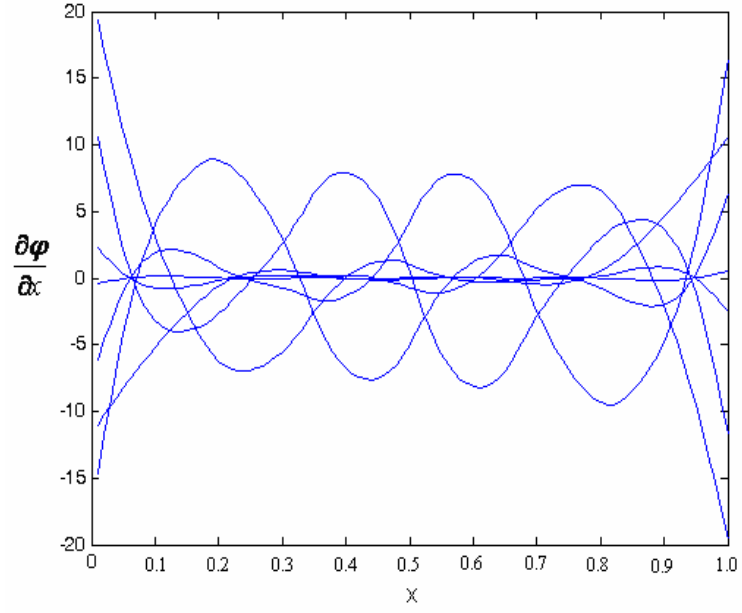
Bu bölümde yukarıda formülasyonu verilen yaklaşımla elde edilen yeni şekil fonksiyonlarının elde edilmesi için örnek 1 (Şekil 11) ve örnek 2 (Şekil 14) 'de kullanılan değerler yeniden göz önüne alınacaktır. Buna göre Şekil 11 'de görülen örnek 1 'e ait şekil fonksiyonları için ;

Fonksiyon sayısı	: 7
Etkinlik yarıçapı	: 0.5
Çözüm bölgesi	: $0 \leq x \leq 1$

seçilmiştir. Bu fonksiyonların dönüşüm uygulandıktan sonraki görünüşleri Şekil 31'de, birinci türevleri ise Şekil 32'de verilmiştir.



Şekil 31. φ Birinci dönüşüm için şekil fonksiyonları



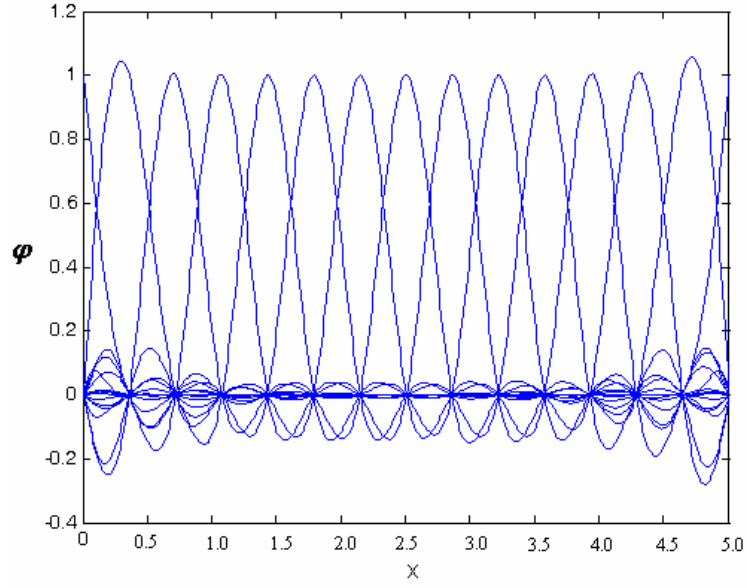
Şekil 32. $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ Şekil fonksiyonları birinci türevi

Benzer şekilde Şekilde Şekil 14'te verilen şekil fonksiyonları için

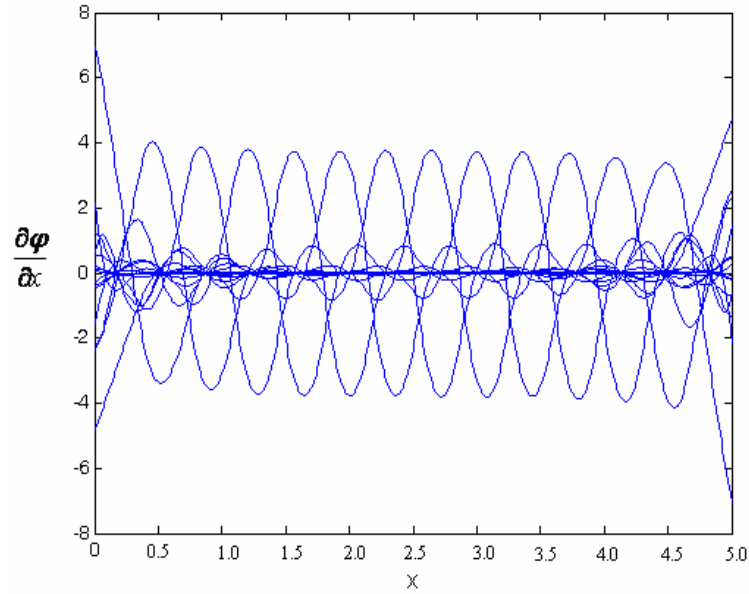
Fonksiyon sayısı : 15

Etkinlik yarıçapı : 0.25

Çözüm bölgesi : $0 \leq x \leq 5$ olarak seçilmiştir. Bu fonksiyonların dönüşüm uygulandıktan sonraki görünüşleri şekil 33'te, birinci türevleri ise Şekil 34'te verilmiştir.



Şekil 33. φ ikinci dönüşüm şekil fonksiyonları



Şekil 34. $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ Şekil fonksiyonları birinci türevi

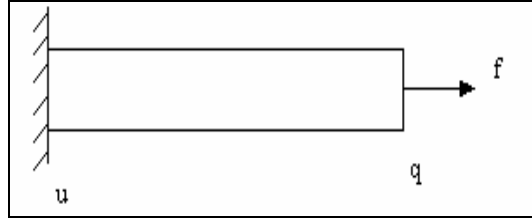
2.4. Ağsız Yerel Petrov-Galerkin ve Eleman Bağımsız Galerkin Yöntemlerinin Bir Boyutlu Problemlere Uygulanması

Bu aşamada yukarıda genel formülasyonları verilen Eleman Bağımsız Galerkin ve Ağsız Yerel Petrov-Galerkin yöntemleri bir boyutlu problemlere uygulanacaktır. Çözümü

incelenecek olan bir boyutlu problemler Sınır Değer Problemleri, Öz Değer Problemleri, Başlangıç Sınır Değer Problemleri olarak belirlenmiştir.

2.4.1. Sınır Değer Problemleri

Sınır değer problemlerinin genel yapısı daha önce eleman bağımsız Galerkin yönteminin modellenmesi esnasında (50) denklemi ile belirtilmiştir. Bu yapıdaki bir denklem ile modellenebilecek problemlere örnek olarak önce Şekil 35'te görülen iki farklı sınır koşulları altındaki bir çubuk problemi seçilmiştir.



Şekil 35. Eksenel yük etkisindeki çubuk [17]

Bu tip problemlerde sınır koşullarından bir tanesi yer değiştirme için tanımlanırken diğeri yükleme için tanımlanmaktadır. Diğer bir söylemle çözüm için bir tane esas sınır koşulu ve bir tane de doğal sınır koşulu tanımlanacaktır. Bu problem Eleman Bağımsız Galerkin ve Ağsız Yerel Petrov-Galerkin Yöntemleri için çözülecektir.

Örnek 1:

Problem için seçilen sınır koşulları;

$$u_{x=0} = 0$$

$$q = \alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x} \text{ olmak üzere } \alpha(x) = 1 \text{ olması durumunda;}$$

$$q_{x=L} = 1$$

olarak ele alınacaktır. Bu durumda elde edilecek olan analitik çözüm $u(x)=x$ olmaktadır.

Yapılacak olan çözümlerde;

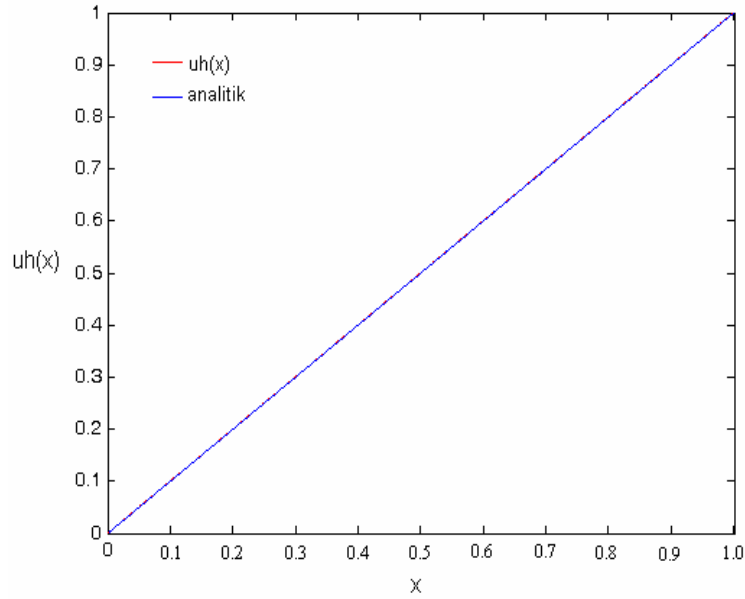
Şekil fonksiyonu sayısı: 15

Etkinlik yarıçapı : 0.55

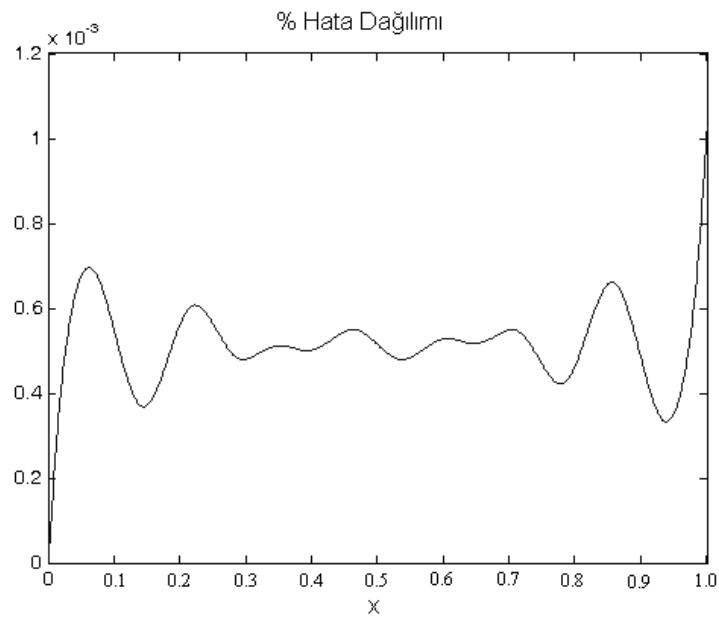
Çözüm bölgesi : $0 \leq x \leq 1$

Yaklaşım derecesi : Lineer

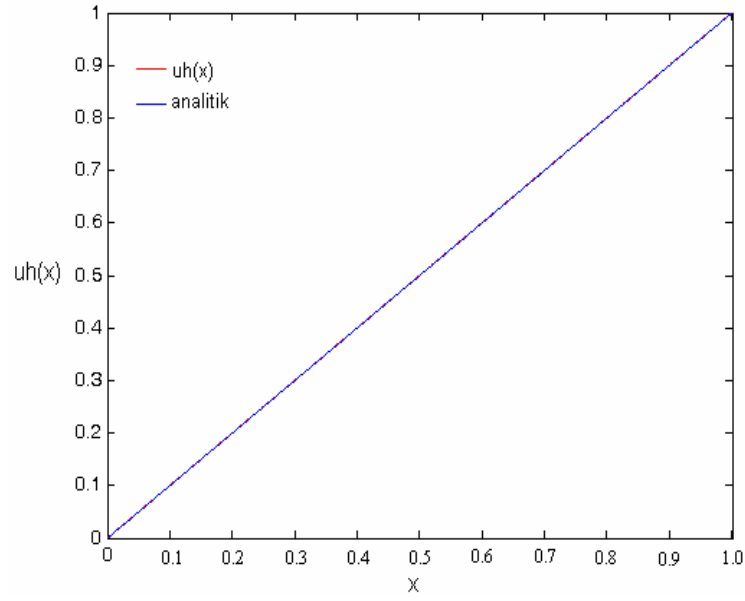
olarak ele alınacaktır. Bu değerler Eleman Bağımsız Galerkin ve Ağsız Yerel Petrov-Galerkin Yöntemleriyle elde edilen çözümlerinde kullanılmıştır. Belirtilen sınır koşulları altında problemin Eleman Bağımsız Galerkin ve Ağsız Yerel Petrov-Galerkin Yöntemleriyle elde edilen çözümleri şekil 36 ve şekil 38 'de hata dağılımları ise şekil 37 ve şekil 39 'da verilmiştir.



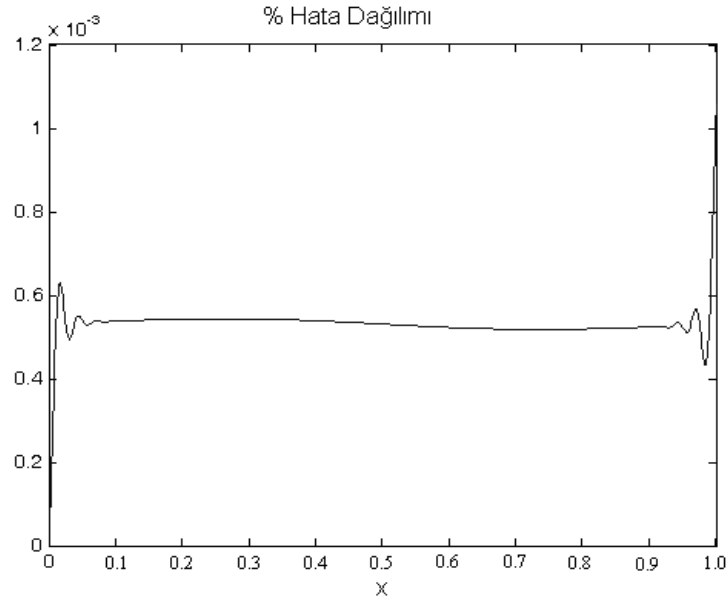
şekil 36. Eleman bağımsız Galerkin çözümlü



şekil 37. Eleman bağımsız Galerkin çözümlü için hata dağılımı



Şekil 38. Ağsız yerel Petrov-Galerkin çözümü



Şekil 39. Ağsız yerel Petrov-Galerkin çözümü için hata dağılımı

Örnek 2:

Çözülen bir diğer sınır değer problemi Şekil 35'deki çubuğun gerilmesiz rijit cisim yer değiştirmesi problemidir. Rijit cisim yer değiştirmesi herhangi bir çubuğun her iki ucunda aynı yer değiştirme değerlerinin sınır koşulu olarak tanımlanması anlamına gelmektedir.

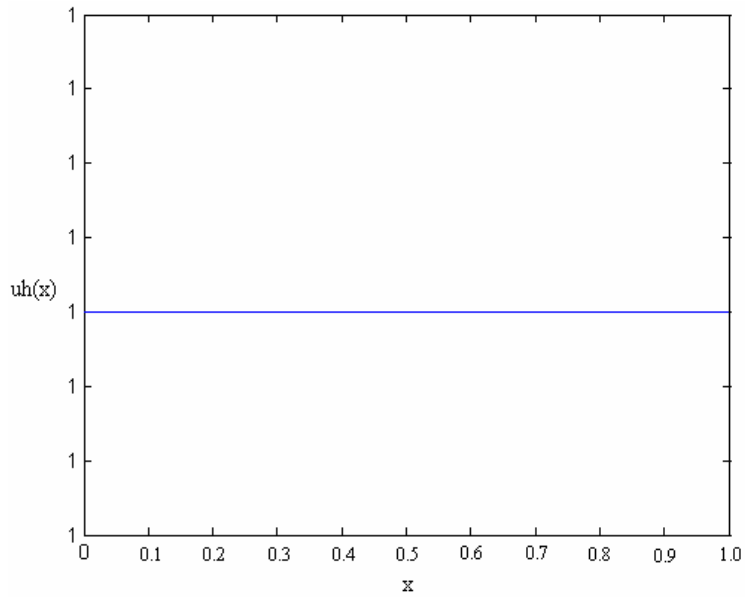
Bu şekilde tanımlanan yer değiştirme sınır koşulları altında problemin çözümlü tüm çözümlü bölgesinde yer değiştirmenin sabit kalması şeklindedir.

Eleman Bağımsız Galerkin Yöntemleriyle çözümlü aramada uygulanan ilk yaklaşımda,

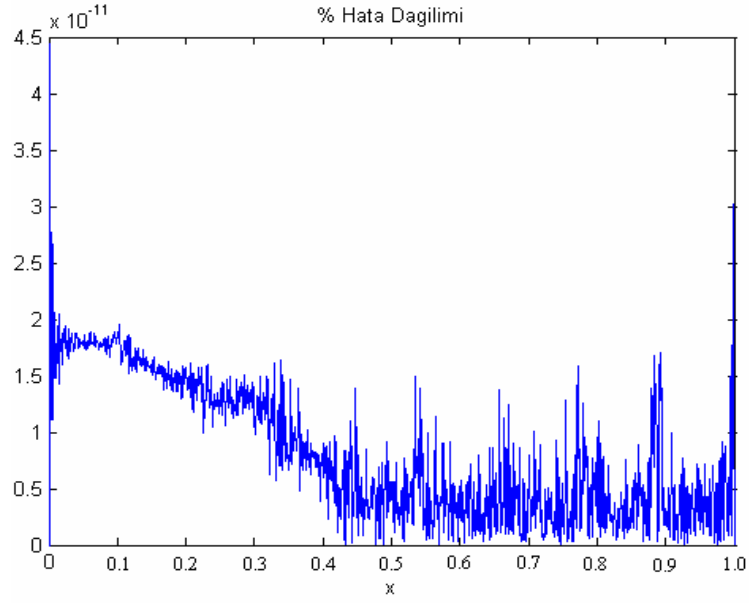
Fonksiyon sayısı : 10
Etkinlik yarıçapı : 0.15
Yaklaşım : Lineer
Çözümlü bölgesi : $0 \leq x \leq 1$

olarak seçilmiştir.

Yukarda listelenen yaklaşım değerleri kullanarak Eleman Bağımsız Galerkin Yöntemleriyle elde edilen yer değiştirme çözümlü Şekil 40 'da, hata dağılımları ise Şekil 41 'de verilmiştir.



Şekil 40. Rijit cisim yer değiştirmesi için birinci yaklaşım



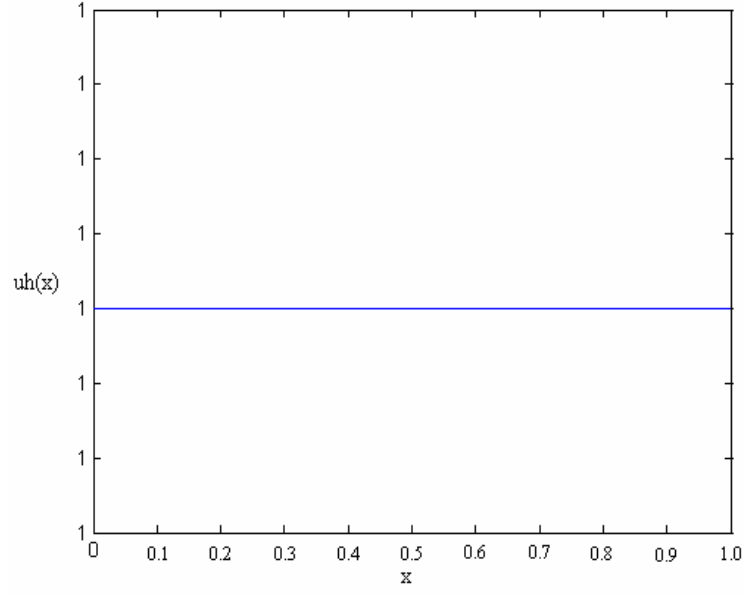
Şekil 41. Birinci yaklaşım için hata dağılımı

Yine Eleman bağımsız Galerkin yöntemi kullanılarak gerçekleştirilen ikinci yaklaşım için;

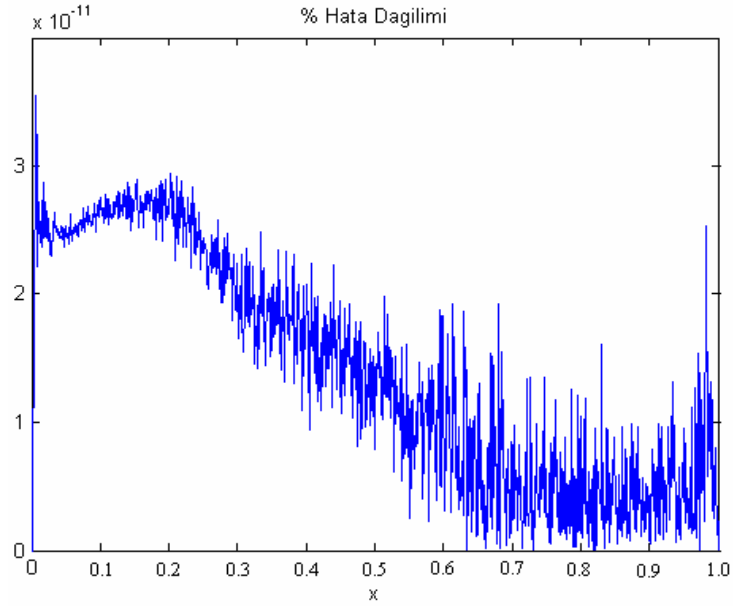
Fonksiyon sayısı : 15
 Etkinlik yarıçapı : 0.15
 Çözüm bölgesi : $0 \leq x \leq 1$

olarak seçilmiştir.

İkinci yaklaşımla elde edilen çözüm Şekil 42’de hata dağılımı ise Şekil 43’de verilmiştir.

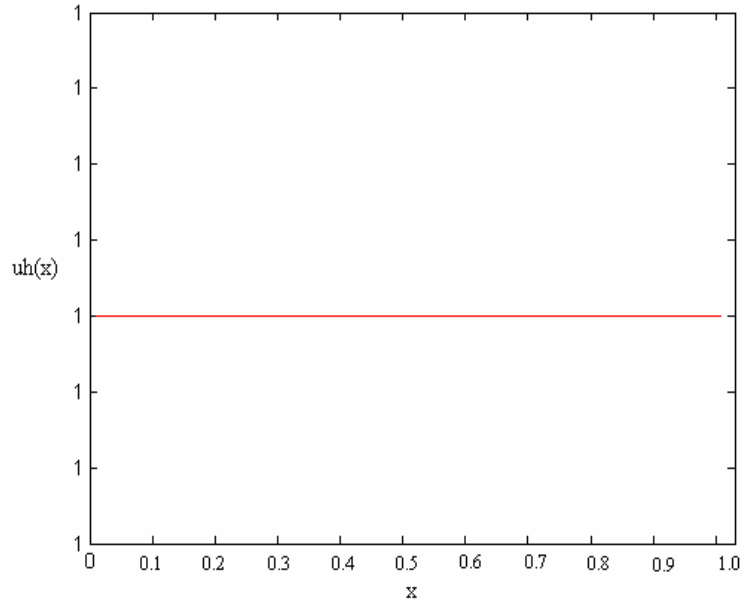


Şekil 42. Rijit cisim yer değiştirmesi için ikinci yaklaşım

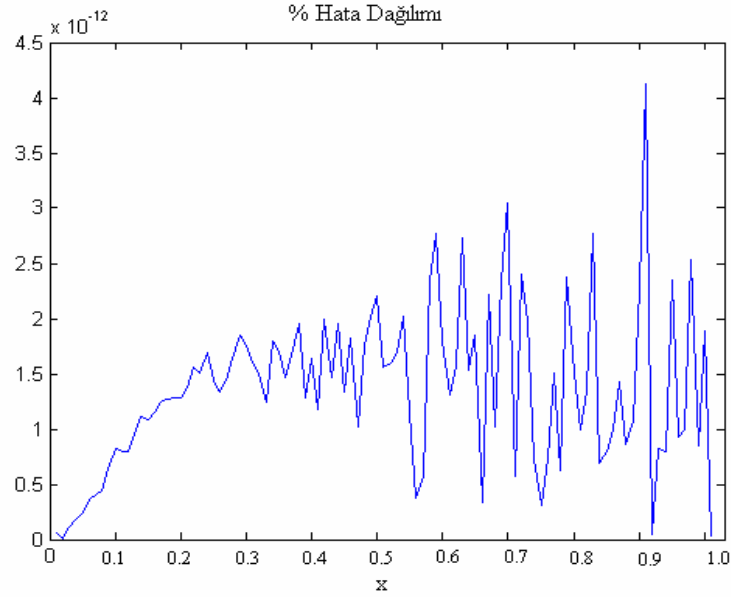


Şekil 43. İkinci yaklaşım için hata dağılımı

İkinci yaklaşımda kullanılan yaklaşım değerleri kullanılarak elde edilen ağsız yerel Petrov-Galerkin çözümleri Şekil 44'de, hata dağılımı ise Şekil 45'te verilmiştir.



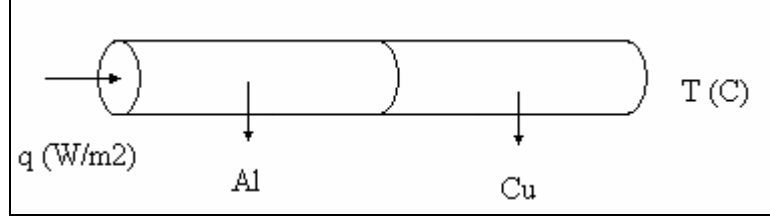
Şekil 44. İkinci yaklaşım için ağsız yerel Petrov-Galerkin çözümü



Şekil 45. Ağsız yerel Petrov-Galerkin yöntemi için hata dağılımı

Örnek 3:

Üçüncü örnek sınır değer problemleri olarak iki farklı malzemeden oluşan bir çubukta ısı iletimi problemi ele alınmıştır. Problemin bir boyutlu olması için çubuğun çevreden tamamen yalıtılmış olduğu ve ayrıca çubuğun içinde herhangi bir ısı üretimi sözü konusu olmadığı kabul edilmiştir. Bu problem Şekil 46'da verilmiştir [18].



Şekil 46. Bir boyutlu ısı iletimi için çubuk modeli

Şekil 46'da görülen çubuk modeli için,

Malzeme özellikleri;

$$k_{Al} = 200 \left(\frac{W}{m^{\circ}C} \right)$$

$$k_{Cu} = 389 \left(\frac{W}{m^{\circ}C} \right)$$

Sınır koşulları;

$$x=0 \text{ da } q = 4000 \left(\frac{W}{m^2} \right)$$

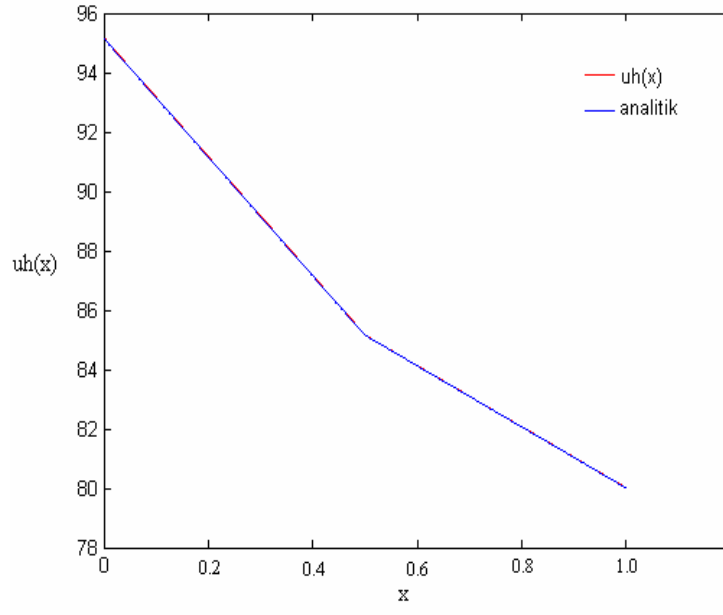
$$x=L \text{ de } T = 80^{\circ}C$$

olarak seçilmiştir. Çubuğun toplam boyu $L=1m$ olarak alınmış ve alüminyumdan bakır'a geçiş noktası olarak $x=0.5m$ seçilmiştir.

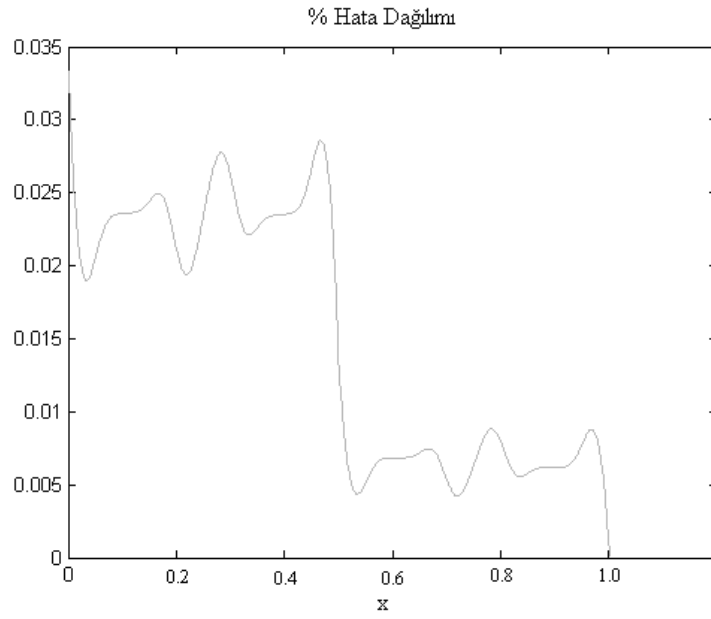
Eleman Bağımsız Galerkin ve Ağsız Yerel Petrov-Galerkin çözümleri 15 adet şekil fonksiyonu ve 0.25 etkinlik yarıçapları için elde edilmiştir.

Problemin Eleman Bağımsız Galerkin ve Ağsız Yerel Petrov-Galerkin yöntemleriyle elde edilen çözümleri ve hata dağılımları Şekil 47–50 'de verilmiştir.

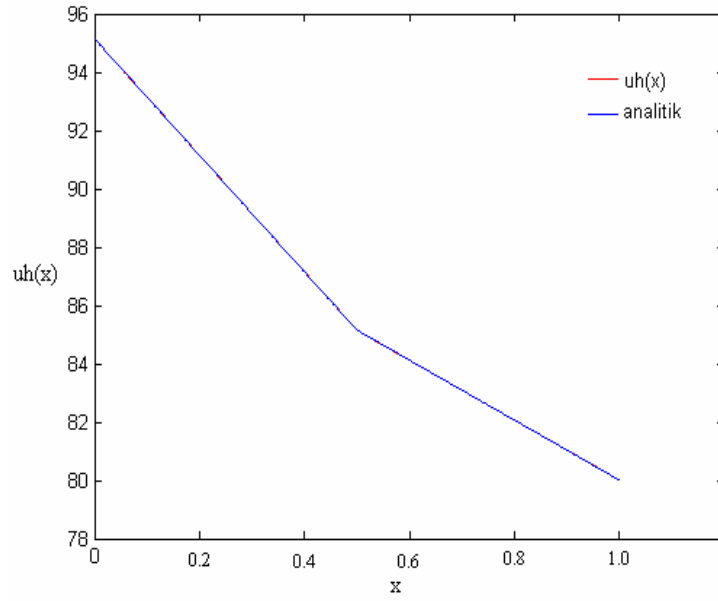
Şekillerin incelenmesinden 15 adet şekil fonksiyonu seçilerek elde edilen çözümlerdeki hata oranlarının oldukça küçük kaldığı ve her iki yöntemle de hemen hemen kesin çözümle [18] çakışan sıcaklık dağılımlarının elde edildiği görülmektedir.



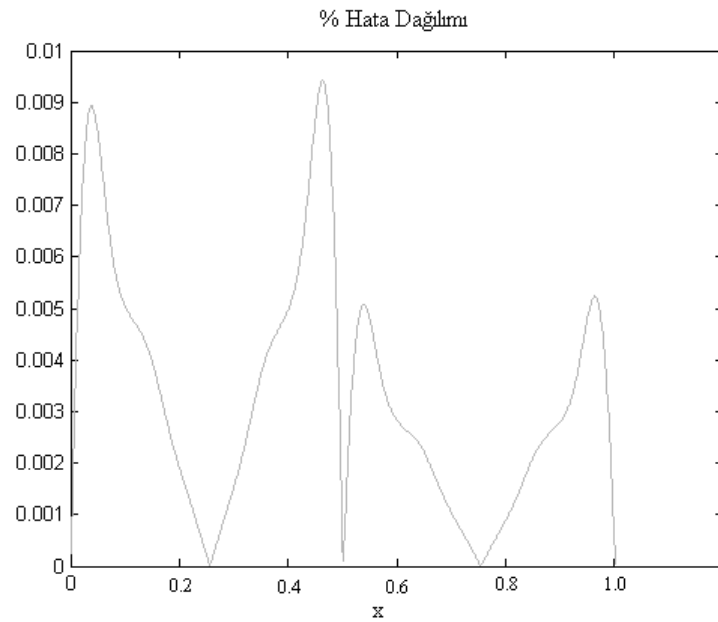
Şekil 47. Isı iletimi problemi için eleman bağımsız Galerkin çözümü



Şekil 48. Eleman bağımsız Galerkin çözümü için hata dağılımı



Şekil 49. Isı iletimi problemi için ağsız yerel Petrov-Galerkin çözümü



Şekil 50. Ağsız yerel Petrov-Galerkin çözümü için hata dağılımı

2.4.2. Öz Değer Problemleri

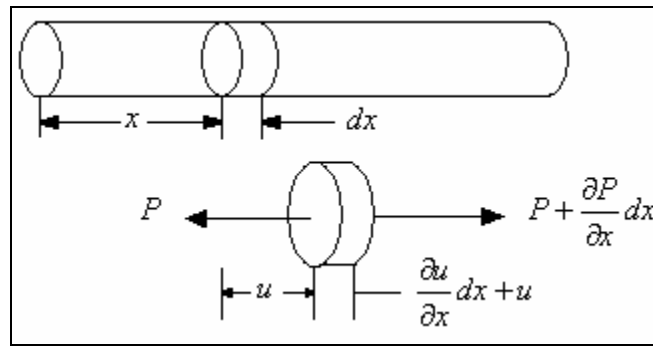
Öz değer problemleri herhangi bir cismin bir dış yük etkisinde olmaksızın kendi kütlesi sebebiyle yapmış olduğu doğal frekans analizleri olarak ele alınmaktadırlar.

Çubuk türü yapıların öz değer problemleri modellenirken iki farklı durum dikkate alınır. Bunlardan biri eksensel yer değiştirmeye bağlı olarak yapılan çözüm, diğeri ise

enine (çubuk eksenine dik) yer değiştirme bağlı olarak yapılan çözümdür. Yapılan bu çalışmada Eleman Bağımsız Galerkin ve Ağsız Yerel Petrov-Galerkin yöntemleri kullanılarak her iki durum için de çözümler üretilmiştir.

2.4.2.1. Eksenel Yer Değiştirmeye Bağlı Çözüm

Eksenel yer değiştirmeye bağlı çözüm için Şekil 51'teki örnek incelenmelidir.



Şekil 51. Eksenel yük etkisindeki çubuk [19]

Şekil 51'de görüldüğü gibi diferansiyel eleman üzerinde denge denklemleri yazılmaktadır. Diferansiyel eleman bir yer değiştirme davranışı gösterdiğinden Newton'un ikinci yasası uygulanabilmektedir [19, 20].

$$\sum F = m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \quad (109)$$

$$P + \frac{\partial P}{\partial x} dx - P = \rho A dx \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \quad (110)$$

Şekil 51'de P ile diferansiyel elemana etkiyen kuvvet belirtilmiştir. Kuvvet terimi $P = EA \frac{\partial u}{\partial x}$ bağıntısı ile ifade edilmektedir. Elde edilen kuvvet ifadesinin (110) denklemindeki yerine yazılmasıyla,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (111)$$

denklemini elde edilir. (111) denklemini çubuk eksenini boyunca gerilme yayılımı denklemini ifade etmektedir.

Bu denklem her hangi bir yükleme terimi içermediğinden bir öz değer problemi olarak ele alınmaktadır.

Öz değer denklemleri önce eleman bağımsız Galerkin yöntemi için belirtilmiş olan çözüm süreci takip edilerek çözülecektir.

Denklemin genel yapısı (112) denkleminde belirtilmiştir [21].

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) = \gamma(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (112)$$

(111) denklemini ile (112) denklemini kıyaslandığında $\alpha = EA$ ve $\gamma = \rho A$ olarak elde edilmektedir.

- Artık denkleminin elde edilmesi:

$$R = \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) - \gamma(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (113)$$

- Artık denkleminin ağırlıklandırılması ve integre edilmesi:

$$\int w \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) - \gamma(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \right] dx = 0 \quad (114)$$

- Kısmi integrasyon işlemi:

(97) denkleminde belirtilen yapıda uygulanmaktadır.

$$\int \frac{dw(x)}{dx} \alpha(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \int w(x) \gamma(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} dx = 0 \quad (115)$$

Burada bilinmeyen yer değiştirme değişkenine ait çözümler bir tanesi zaman ve diğeri konuma bağlı olacak şekilde iki terime ayrılmıştır. Uygulanan bu işlem değişkenlerin ayrıştırılması olarak adlandırılmaktadır [22].

$$u(x,t) = u(x)\sin(w_d t) \quad (116)$$

Yer değiştirme ifadesi için elde edilen yaklaşım (115) denklemindeki yerlerine yazılabilmesi için konuma göre birinci türevinin, zaman bağlı olarak da ikinci türevlerinin elde edilmesi gerekmektedir. Bu ifadeler,

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{du(x)}{dx} \sin(w_d t) \quad (117)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -w_d^2 u(x) \gamma(x) \sin(w_d t) \quad (118)$$

şeklinindedir. (117) ve (118) ifadeleri (115) denkleminde yerlerine yazıldığında,

$$\int \frac{dw(x)}{dx} \alpha(x) \frac{du(x)}{dx} \sin(w_d t) - \int w(x) \gamma(x) w_d^2 u(x) \sin(w_d t) dx = 0 \quad (119)$$

denklemleri elde edilir. Değişkenler ayrıştırıldıktan sonra yer değiştirme değişkenine yapılacak olan yaklaşım yine (12) denkleminde belirtildiği formda uygulanacaktır.

$$u(x) = \sum \phi(x) a \quad (120)$$

Bu ifadeye yer alan a terimi öz vektörlerin katsayılarının biriktirildiği vektörü temsil etmektedir. (120) denklemleri (119) denklemindeki yerine yazılır ve denklem $\sin(w_d t)$ parantezine alınırsa,

$$\left[\int \frac{dw(x)}{dx} \alpha(x) \frac{d\phi(x)}{dx} - \int w(x) \gamma(x) w_d^2 \phi(x) dx \right] a \sin(w_d t) = 0 \quad (121)$$

elde edilir.

(121) denklemi öz değer denkleminin genel yapısını belirtmektedir. Bu denklemi sağlayan w_d^2 ile a değerleri, yani öz değer ve öz vektör çiftlerinin çözülmesi (121) denkleminin çözümü olacaktır. Öz değer denklemlerinin matris biçimde ifadesi ise;

$$[K]\{a\} - w^2[M]\{a\} = 0 \quad (122)$$

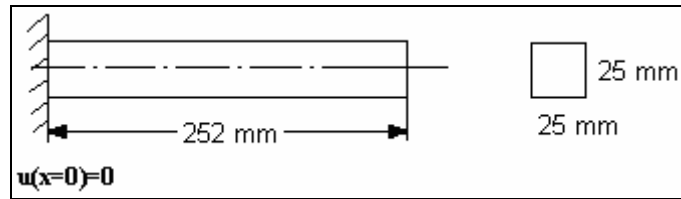
şeklindedir [22, 23]. (122) denkleminde kullanılmış olan K ile katılık matrisi, M ile de kütle matrisi temsil edilmektedir. Bu matrislerin içyapıları,

$$K_{ij} = \int \frac{dw_i}{dx} \alpha \frac{d\phi_j}{dx} dx \quad (123)$$

$$M_{ij} = \int w_i \gamma \phi_j dx \quad (124)$$

şeklinde verilir.

Öz değer problemlerinin genel formülasyonu ve ilgili matrislerin içyapılarının belirtilmesinden sonra örnek problem olarak Şekil 52'de belirtilen bir ucu ankastre bağlı çubuk seçilmiştir [23].



Şekil 52. Bir ucu ankastre bağlı çubuk

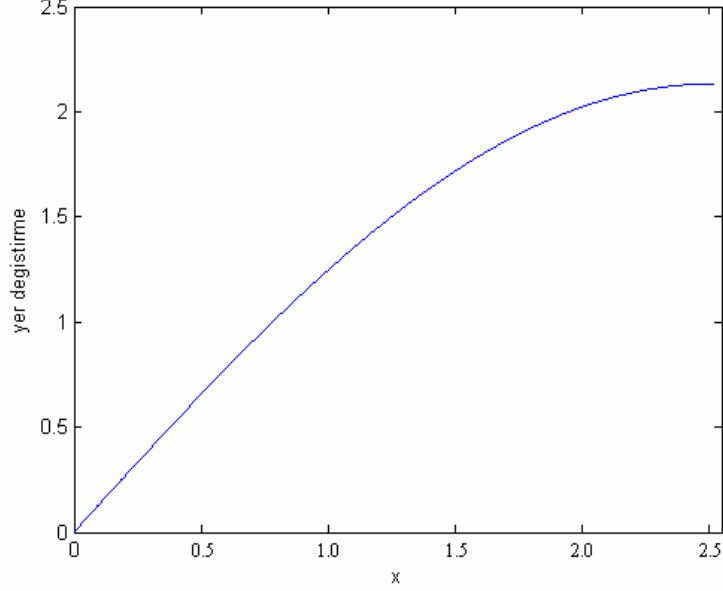
Bu problem için boyutlar şekil üzerinde belirtilmiştir. Malzeme özellikleri ise ;

$$E=73 \text{ GPa}$$

$$\text{Yoğunluk} = 2.79 \text{ Mg/m}^3$$

şeklinde seçilmiştir.

Bu problemin belirtilen sınır koşulları altında Eleman Bağımsız Galerkin yöntemi ile elde edilen çözümlerine ait sonuçlar Şekil 53, Şekil 54, Şekil 55 ve Şekil 56'da verilmiştir.



Şekil 53. Birinci mod

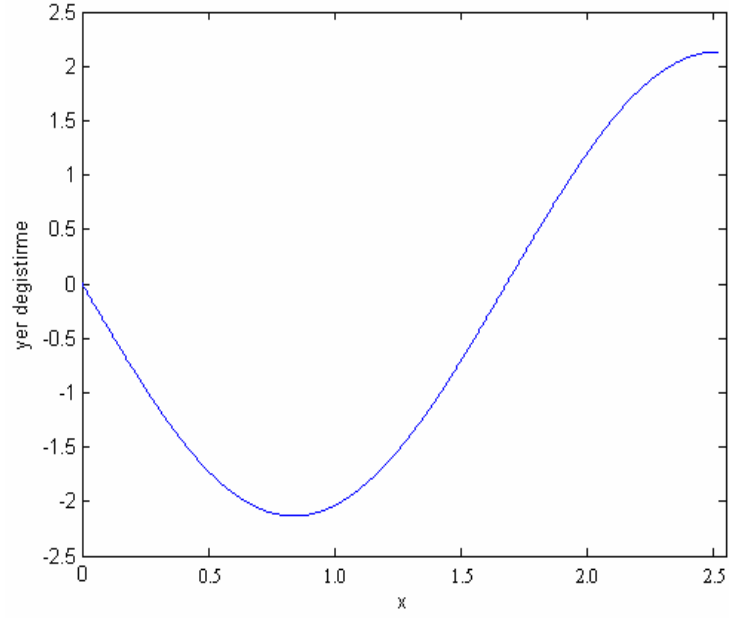
Şekil 53'de çubuk için birinci mod şekli görülmektedir. Birinci mod için elde edilmiş olan doğal frekans değerinin analitik çözümle karşılaştırılabilmesi istenilen mod değerinin elde edilebileceği genel analitik bağıntı ise n mod numarası olmak üzere

$$w_n = \frac{\pi}{2} (2n - 1) \sqrt{\frac{EA}{\rho AL^2}} \quad (125)$$

şeklindedir[18, 25]. Bu bağıntının kullanılması ile seçilen problem için birinci mod analitik doğal frekans değeri 1008.27422 olarak elde edilmiştir. Yapılan çözümden elde edilmiş olan doğal frekans değeri ise 1008.06824 dir. Her iki çözümün arasında % hata değeri $2.04293 \cdot 10^{-2}$ olarak elde edilmiştir. Burada % hata değeri;

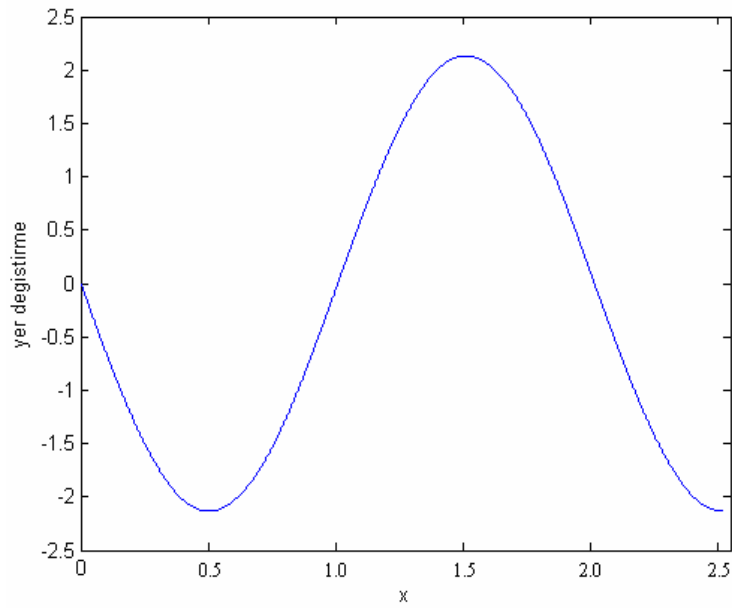
$$hata = \frac{w_{AY} - w_{Anlk}}{w_{Anlk}} * 100 \quad (126)$$

bağıntısı ile hesaplanmaktadır.



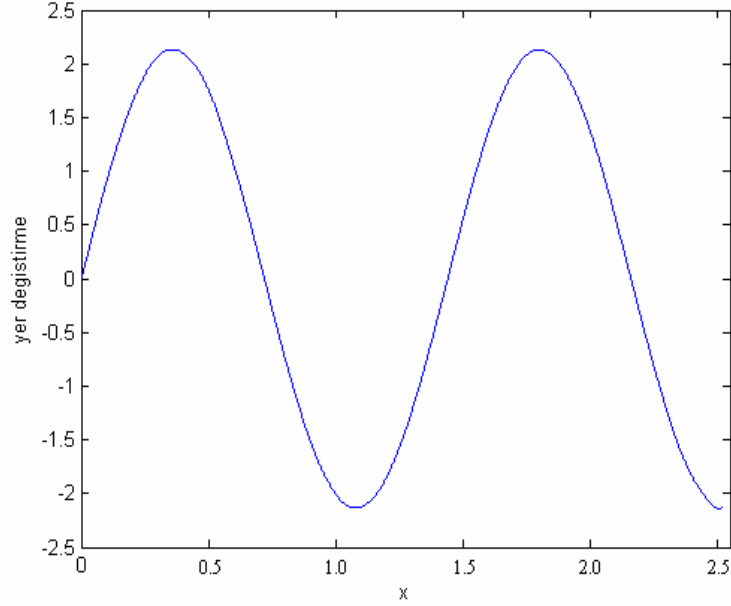
Şekil 54. İkinci mod

İkinci mod için analitik doğal frekans değeri 3024.82267 olarak elde edilmiştir. Yapılan yaklaşım ile elde edilen ikinci doğal frekans değeri 3024.20528 olarak elde edilmiştir. Burada da analitik çözümle sayısal çözüm arasındaki hata değeri $2.04107 \cdot 10^{-2}$ olarak elde edilmiştir. Elde edilen mod şekillerinden birinci ve ikinci mod için şekiller ana hatlarıyla kesin çözümler olarak belirtilebilir[21].



Şekil 55. Üçüncü mod

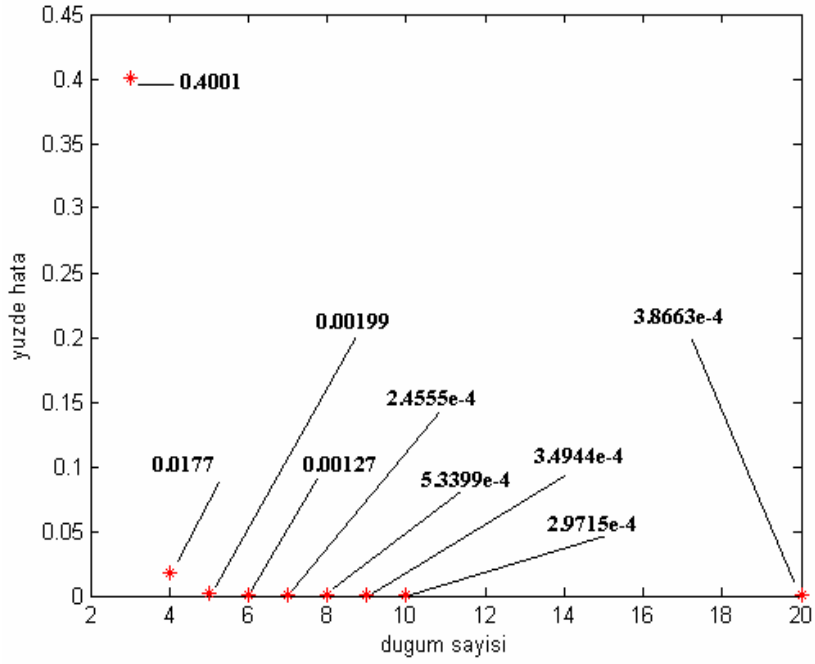
Üçüncü mod için elde edilmiş olan analitik doğal frekans değeri 5041.37111 dir. Yaklaşık çözümlerle elde edilmiş olan doğal frekans değeri 5040.61719 olarak elde edilmiştir. Buradaki yüzde hata değeri ise $1.49547 \cdot 10^{-2}$ 'dir.



Şekil 56. Dördüncü mod

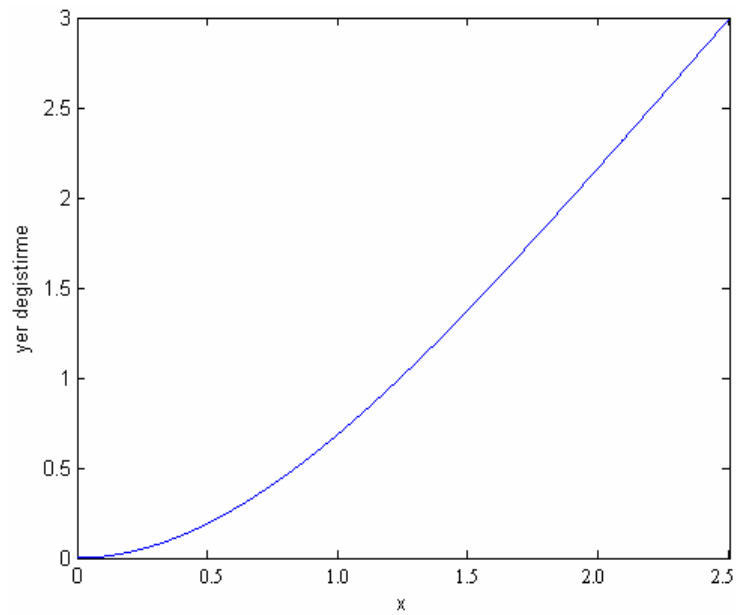
Dördüncü mod için elde edilen analitik doğal frekans değeri 7057.91957'tür. Dördüncü mod için elde edilen yaklaşım değeri ise 7058.21931 şeklindedir. Buradaki yüzde hata değeri ise $4.24689 \cdot 10^{-3}$ olarak elde edilmiştir.

Farklı düğüm sayılarında birinci mod için elde edilen sayısal çözüm değerlerinin analitik değerler[25]'e göre hata değerleri Şekil 57'de verilmiştir.

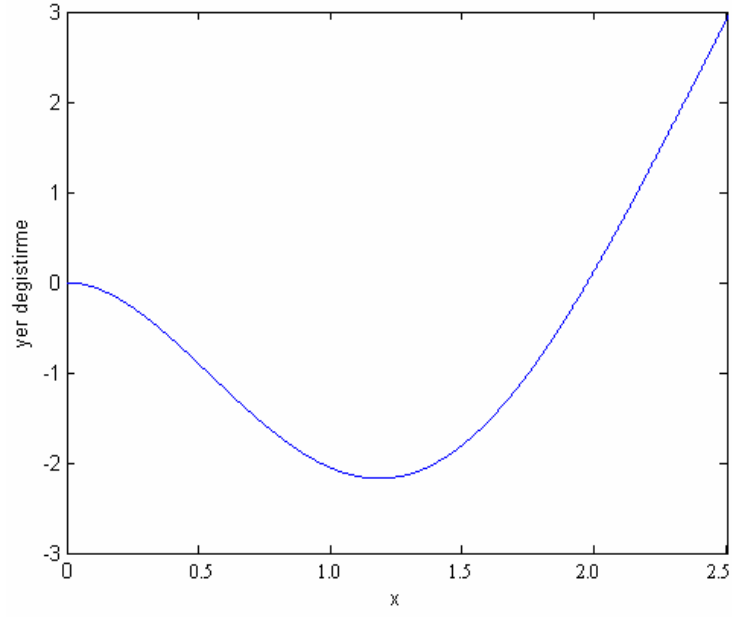


Şekil 57. Öz değer probleminde birinci mod için farklı düğüm sayısında hata değerleri

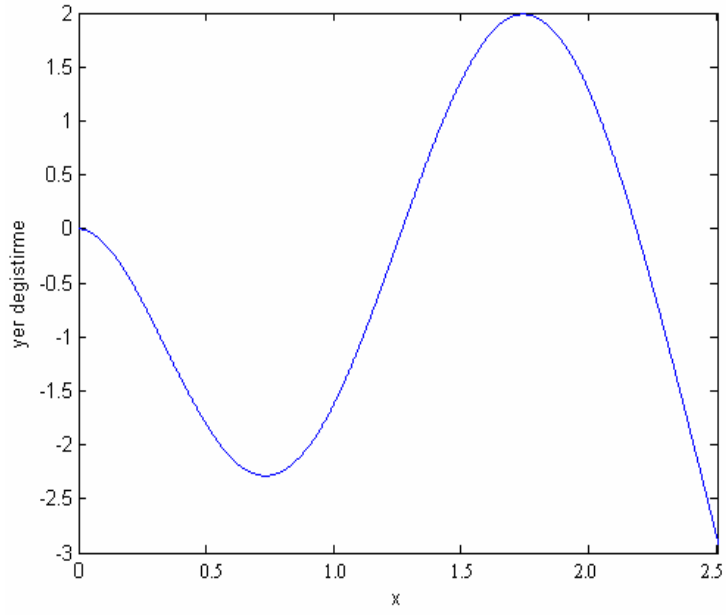
Bir ucu ankastre ve diğer ucu serbest olan çubuk için elde edilen çözümler Şekil 58-61'de verilmiştir. Bu çözümlerin elde edilmesinde Hermite fonksiyonları kullanılarak düğümlerde yer değiştirme ve eğim (dönme) şeklinde iki serbestlik derecesine olanak tanınmıştır.



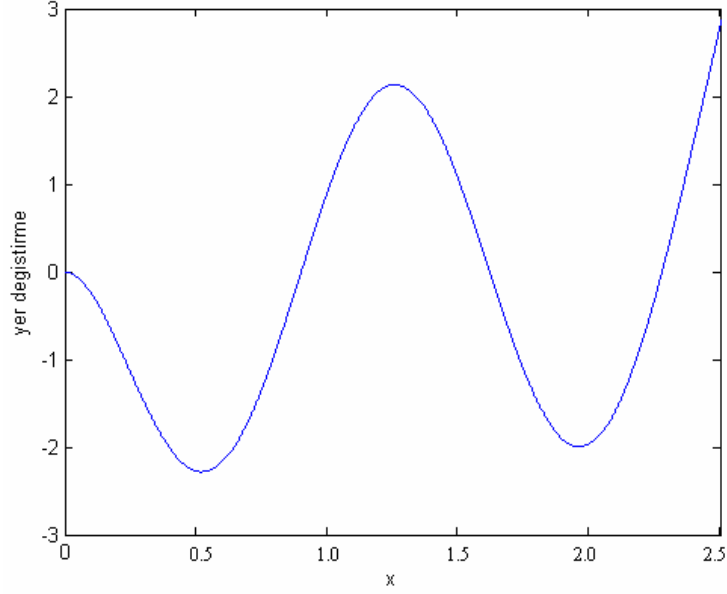
Şekil 58. Enine yer değiştirme (Eğim sıfır) birinci mod



Şekil 59. İkinci mod (Eğim sıfır)



Şekil 60. Üçüncü mod (Eğim sıfır)



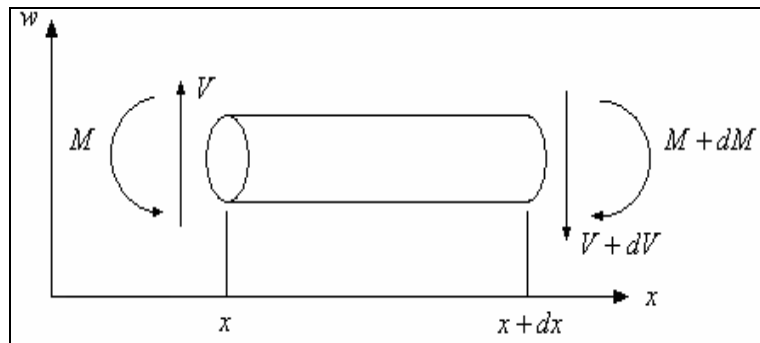
Şekil 61. Dördüncü mod (Eğim sıfır)

2.4.2.2. Düşey Yer Değiştirmeye Bağlı Çözüm

Düşey yer değiştirme olarak kast edilen, yer değiştirmenin eksene dik olmasıdır. Bu durumda sadece yer değiştirme değil açısal dönme değerleri de işleme dâhil edilmiş olacaktır. Bu durumda modellemenin yapılabilmesi için Hermite fonksiyonlarının elde edilmesi gerekmektedir. Bu durumda her bir düğüm bir değil iki serbestlik derecesine sahip olacaktır.

Bu da artık problemimizin sınırlarında elemanın kendisi ve birinci türevinin tanımlı olması gerektiği anlamına gelmektedir, yani problemlerimiz C^1 problemleri olarak tanımlanmaktadır.

Bu problemleri modellemek amacıyla Şekil 62'ten yararlanılacaktır.



Şekil 62. Eğilme etkisindeki çubuk [26]

$$M = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (127)$$

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} \quad (128)$$

Şekil 62'deki eleman üzerinde kuvvet dengesi yazıldığında

$$f_w = -\left(V + \frac{\partial V}{\partial x} dx\right) + V \quad (129)$$

denklemini elde edilmiş olur. (129) denkleminde kesme kuvvetinin birinci türevinin elde edilmesi gerekmektedir. Bu ifade (127) ve (128) denklemlerinden elde edilebilmektedir. Kesme kuvveti ifadesinin (129) denkleminde yerine yazılmasıyla,

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx = f_w \quad (130)$$

denklemini elde edilir.

Yüklemeye terimi için Newton'un ikinci yasasından yararlanarak

$$f_w = \rho A dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (131)$$

ifadesi yazılabilir. Kesme kuvveti ve f_w değerleri (129) denklemindeki yerine yazıldığında,

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (132)$$

denklemini elde edilir. Bu denklem için yine zaman bağımlı bir yüklemeye terimi bulunmamaktadır. Çünkü daha önce de belirtildiği gibi öz değer problemi için zaman bağımlı bir yüklemeye söz konusu olmamaktadır. Elde edilmiş olan (132) denklemini düşey yer değiştirmenin söz konusu olduğu öz değer probleminin genel yapısını belirtmektedir.

Yer değiştirmeye yapılacak olan yaklaşım yine değişkenlerin ayrıştırılması yöntemi ile uygulanacaktır [22].

$$W(x,t) = W(x) \sin(\omega t) \quad (133)$$

Yer değiştirme için yapılacak olan yaklaşım belirlendikten sonra elde edilmiş olan diferansiyel denkleme kaç kez kısmi integrasyon işlemi uygulanması gerektiğinin belirlenmesi gerekmektedir. Bu işlem yk terimi üzerindeki türevin mertebesine bağlı olarak belirlenmektedir. Burada yükleme terimi üzerindeki türevin mertebesi iki olduğundan uygulanacak olan kısmi integrasyon işleminin sayısı da iki olmaktadır.

Kısmi integrasyon işlemine ait bağıntı daha önce (97) denklemi ile verilmişti. Bu işlem burada iki kez tekrarlanacaktır. (132) denklemi için eleman bağımsız Galerkin yöntemi çözüm süreci yine artık denkleminin yazılması ile başlatılacaktır.

Artık denkleminin elde edilmesi:

$$R = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (134)$$

$$\int \phi R dx = 0 \quad (135)$$

Bu ifadelerin elde edilmesinden sonra denklem kısmi integrasyon işlemine tabi tutulacaktır.

$$\int \phi \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] dx = 0 \quad (136)$$

Birinci kısmi integrasyon işleminden sonra,

$$\int \frac{d\phi}{dx} \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx - \left[\phi \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] - \int \rho A \phi \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (137)$$

denklemini elde edilmektedir. Bu denklemin bir kez daha kısmi integrasyon işlemine tabi tutulması gerekmektedir. İkinci kısmi integrasyon işleminden sonra,

$$-\int \frac{d^2\phi}{dx^2} EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx + \left[\frac{d\phi}{dx} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] - \left[\phi \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] - \int \rho A \phi \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (138)$$

yazılabilir. Bu denklemde $\left[\frac{d\phi}{dx} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right]$ ifadesiyle moment için doğal sınır koşulu terimi

elde edilirken, $\left[\phi \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right]$ ifadesiyle de kesme kuvveti için doğal sınır koşulu terimi

elde edilmektedir. Ancak öz değer problemleri incelendiğinden bu iki ifadenin karşılığı, her hangi bir yüklemenin olmamasından dolayı, sıfıra eşittir.

Denklemin kısmi integrasyon işleminin gerçekleştirilmesiyle geride sadece w terimine yapılacak olan yaklaşımın belirlenmesi ve bu yaklaşımın (136) denklemde yerine yazılarak çözüm sürecinin uygulanması kalmıştır.

$$W(x) = \sum \phi(x)a \quad (139)$$

Yapılacak yaklaşımın belirlenmesinden sonra $W(x)$ ifadesinin (138) denklemine uygun hale getirilmesi gerekmektedir.

$$\frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} = \frac{d^2 \phi(x)}{dx} a \sin(\omega t) \quad (140)$$

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} = \omega \phi(x)a \cos(\omega t) \quad (141)$$

$$\frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 \phi(x)a \sin(\omega t) \quad (142)$$

Elde edilen bu denklemler (138) denklemdeki yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\int \frac{d^2 \phi_i(x)}{dx^2} EI \frac{d^2 \phi_j(x)}{dx^2} a \sin(\omega t) - \int \omega^2 \rho A \phi_i(x) \phi_j(x) a \sin(\omega t) dx = 0 \quad (143)$$

denklemini elde edilir. (143) denklemini matris formunda,

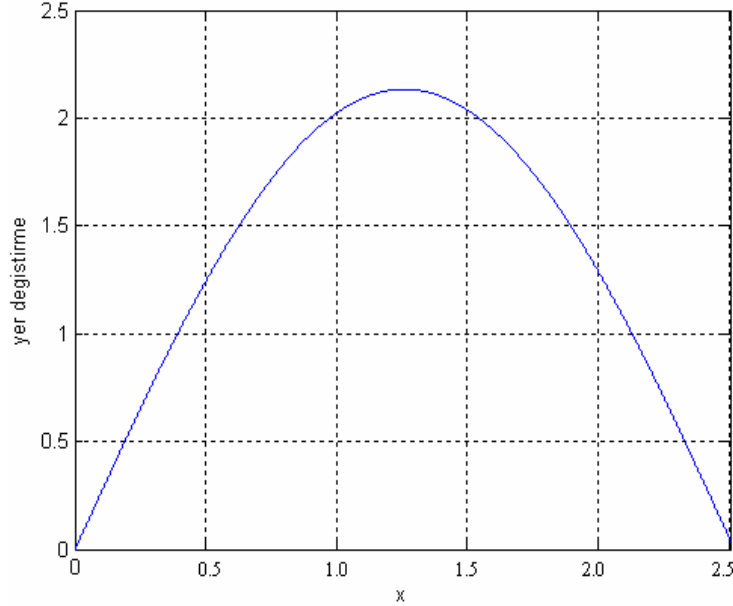
$$[K]\{a\} - \omega^2 [M]\{a\} = 0 \quad (144)$$

şeklinde yazılabilir. (144) denklemin yapısında bulunan ω^2 ve a ifadeleri sırasıyla öz değerler ve öz vektörlerdir. Bu ifadelerin elde edilmesiyle çözümler elde edilebilmektedir.

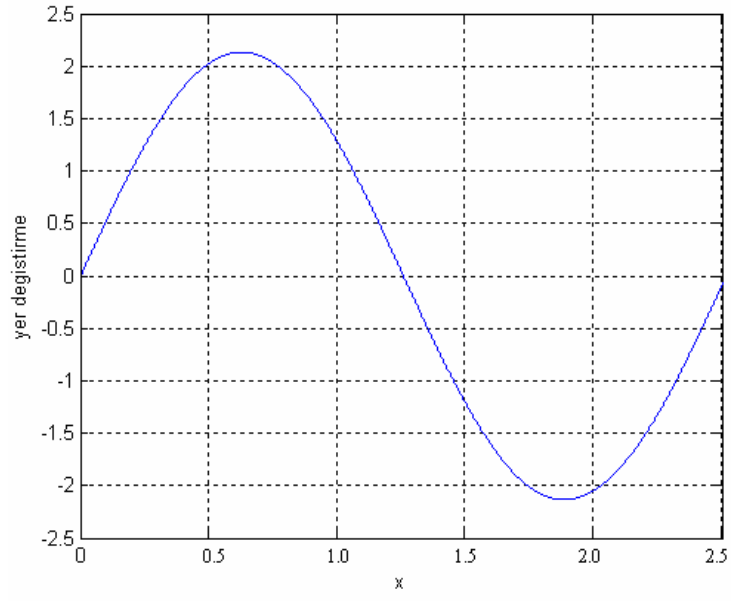
Bu bölümde göz önüne alınan problemlerin çözümlerinin tamamı 15 adet şekil fonksiyonunun kullanılarak elde edilmiştir. Mod şekilleri genel hatları ile [27] kaynağında belirtilmiştir. Enine (çubuk eksenine dik) yer değiştirme için doğal frekans değerleri

$$\omega_n = n^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho L^4}} \text{ bağıntısı ile elde edilebilmektedir [25].}$$

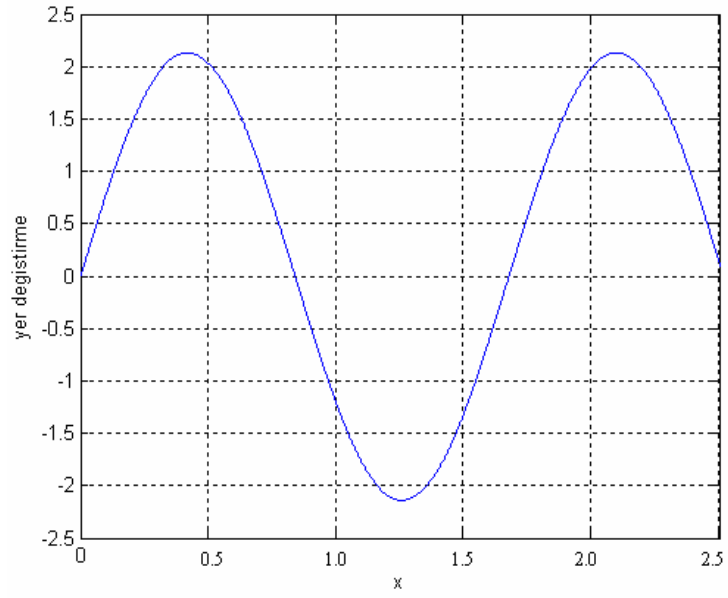
Şekil 52'de görülen çubuk için $E=73\text{GPa}$, $\rho=2.79\text{e-}6$, $I=32552.083$, $A=625$, $L=252$ değerleri seçilerek iki ucu basit bağlı bir çubuğa ait ilk dört moda ait mod şekilleri Şekil 63-66'da verilmiştir.



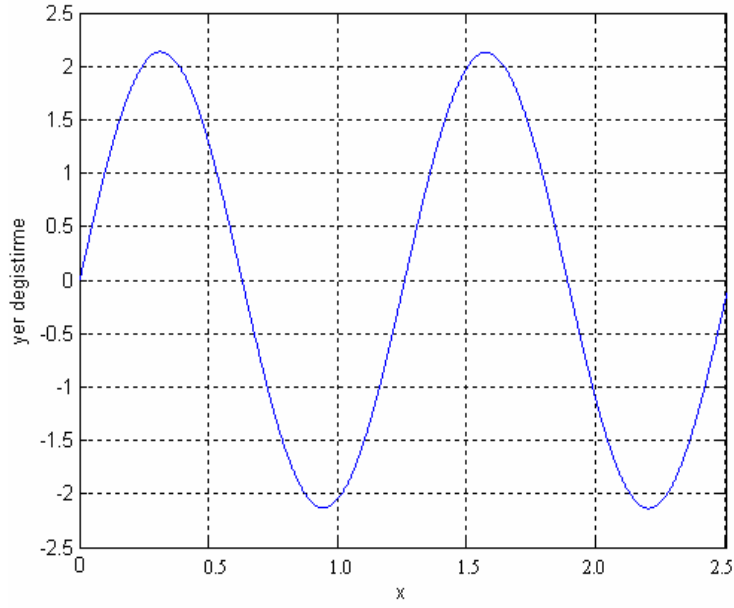
Şekil 63. Her iki ucundan ankastre bağlı çubuk birinci modu



Şekil 64. İkinci mod

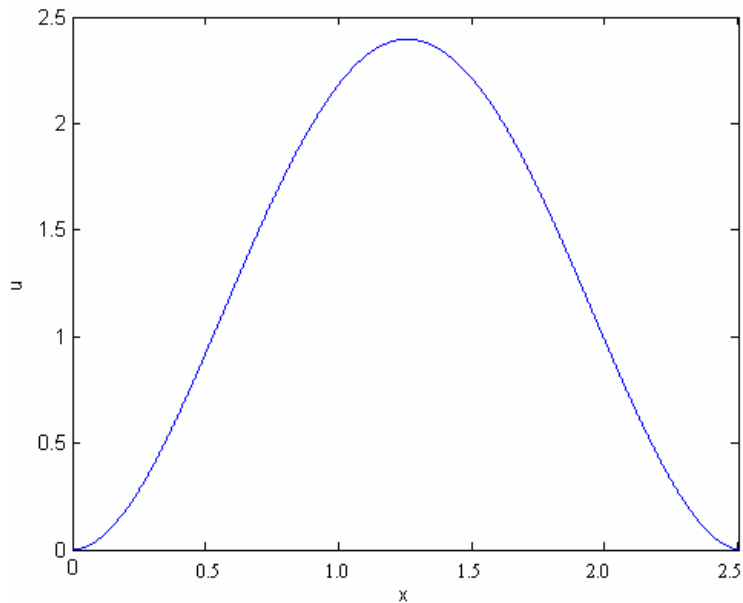


Şekil 65. Üçüncü mod

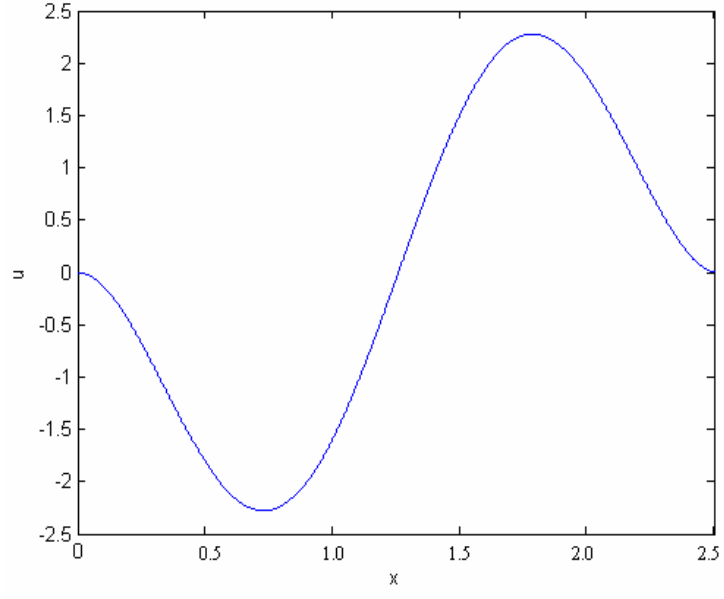


Şekil 66. Dördüncü mod

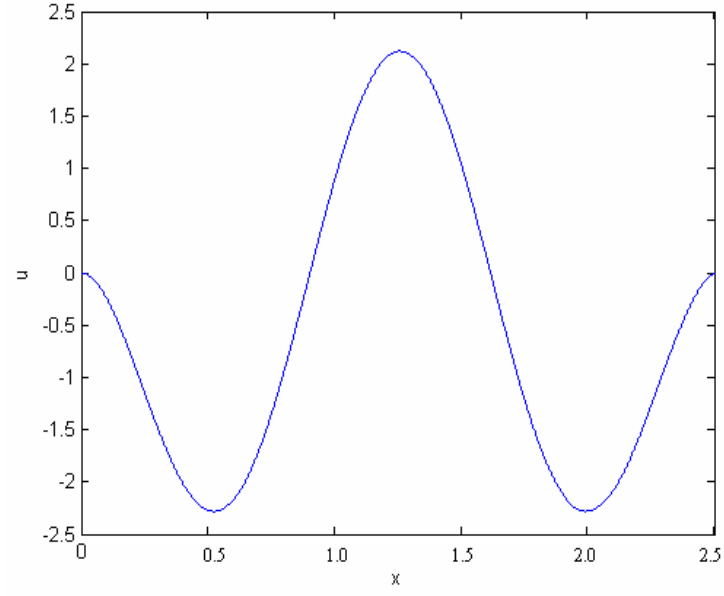
Yukarda geometrik değerleri ve malzeme özellikleri verilen çubukla aynı olan ve uçlarından ankaste bağlı çubuğun Hermite fonksiyonları kullanılarak elde edilen ilk dört moduna ait mod şekilleri Şekil 67-70’de verilmiştir. Her iki ucu ankaste bağlı ve bir ucu ankaste bağlı diğer ucu serbest olan çubuklar için farklı düğüm sayıları ve yaklaşım mertebeleri için elde edilen doğal frekans değerleri ile hata değereleri Tablo 1 ve Tablo 2’de verilmiştir.



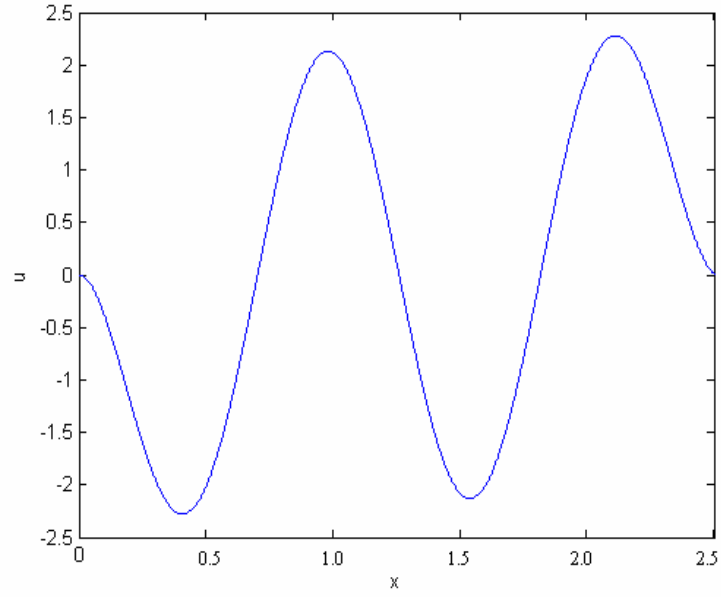
Şekil 67. Birinci mod (Eğim sıfır)



Şekil 68. İkinci mod (Eğim sıfır)



Şekil 69. Üçüncü mod (Eğim sıfır)



Şekil 70. Dördüncü mod (Eğim sıfır)

Tablo 1. Bir ucu ankastre bağlı aksenal titreşimli çubuk için birinci ve ikinci modlar için farklı düğüm sayısı ve yaklaşım derecesiyle elde edilen doğal frekans ve hata değerleri

Düğüm Sayısı	5	15	25	Analitik Çözüm $w_n = (2n-1) \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{EA}{ML^2}}$
Lineer Yaklaşım	1008.39382	1008.07294	1008.07155	1008.274223
Yüzde Hata $\frac{w_{AY} - w_{An}}{w_{An}} 100$	$1.1861 \cdot 10^{-2}$	$1.9967 \cdot 10^{-2}$	$2.0105 \cdot 10^{-2}$	
İkinci Mod İçin	3033.01293	3024.83725	3024.25844	3024.82267
Yüzde Hata $\frac{w_{AY} - w_{An}}{w_{An}} 100$	0.270	$1.0806 \cdot 10^{-2}$	$1.8556 \cdot 10^{-2}$	

Tablo 2. Her iki ucu ankastre bağı enine (çubuk eksenine dik) titeşimli çubuk için farklı düğüm sayısı ve yaklaşım derecesiyle birinci moda için elde edilen doğal frekans değerleri ve hata değerleri

Düğüm Sayısı	5	15	25	75	100	Analitik Çözüm $w_n = n^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho L^4}}$
Lineer Yaklaşım	182.82853	181.46158	181.43768	181.42948	181.42934	181.429048
Hata $\frac{w_{AY} - w_{An}}{w_{An}} 100$	0.77137	0.01793	0.00458	$2.37 \cdot 10^{-4}$	$1.59 \cdot 10^{-4}$	
Kuadratik Yaklaşım	182.08949	181.44043	181.43319	181.42906	181.42903	181.429048
Hata	0.36403	0.00627	0.00229	$4.82 \cdot 10^{-6}$	$1.15 \cdot 10^{-5}$	
Kübik Yaklaşım	181.43648	181.43089	181.43003	181.42940	181.42958	181.429048
Hata	0.0041	0.00102	$5.46 \cdot 10^{-4}$	$1.96 \cdot 10^{-4}$	$2.95 \cdot 10^{-4}$	

2.4.3. Başlangıç Sınır Değer Problemleri

Başlangıç sınır değer problemleri incelendiğinde dikkati çeken husus denklemin genel yapısının öz değer problemleri ile aynı olmasıdır. Burada farkı oluşturan tek nokta öz değer problemlerinde her hangi bir yük teriminin işleme dahil olmamasıdır. Ancak başlangıç sınır değer problemlerinde zaman bağımlı bir yük terimi mevcuttur. Bunun için

yer değiştirme ifadesinin elde edilebilmesi açısından zaman integrasyon yöntemlerinin kullanılması gerekmektedir.

2.4.3.1. Başlangıç Sınır Değer Problemlerinin Modellenmesi

Başlangıç sınır değer problemlerinin incelenmesi açısından Şekil 51’de görülen tek eksenli yükleme altındaki çubuk problemi tekrar göz önüne alınacaktır. Bir boyutlu başlangıç sınır değer problemlerine ait diferansiyel denklemin genel yapısı

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(EA\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x,t) \quad (145)$$

şeklinindedir. Başlangıç sınır değer problemlerine ait çözüm sürecinde (145) denklemini esas alınacaktır. Burada da çözüm yaklaşımı değişkenlerin ayrılması [28]

$$u(x,t) = u(t)\phi(x) \quad (146)$$

şeklinde olacaktır.

(145) diferansiyel denklemine ait artık denklemini

$$R = -\frac{\partial}{\partial x}\left(EA\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - f(x,t) \quad (147)$$

olup bu denkleme ait Galerkin ifadesi,

$$\int wRdx = 0 \quad (148)$$

veya

$$\int \left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(EA\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - f(x,t) \right] wdx = 0 \quad (149)$$

$$\int w \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] dx + \int \rho A w \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \int w f dx = 0 \quad (150)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denkleminin kısmi integrasyon işlemine tabi tutulması durumunda

$$\int \frac{dw}{dx} EA \frac{d\phi(x)}{dx} dx + \left[w \left(EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + \int \rho A w \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx - \int w f dx = 0 \quad (151)$$

yazılabilir. Bu denklem matris formunda,

$$[M] \left\{ \ddot{u} \right\} + [K] \{u\} = \{F\} \quad (152)$$

şeklinde ifade edilebilir. (152) denkleminde her hangi bir sönümlenme terimi yoktur. Sönümlenme teriminin bulunması durumunda ise denklemin genel yapısı,

$$[M] \left\{ \ddot{u} \right\} + [C] \left\{ \dot{u} \right\} + [K] \{u\} = \{F\} \quad (153)$$

şeklini alır. Bu denklemin yapısındaki matrislerin içyapısı eleman bağımsız Galerkin yöntemi için,

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \int \frac{d\phi_i(x)}{dx} EA \frac{d\phi_j(x)}{dx} dx \\ M_{ij} &= \int \phi_i(x) \rho A \phi_j(x) dx \\ C_{ij} &= \int \phi_i(x) c \phi_j(x) dx \end{aligned} \quad (154)$$

şeklinindedir. Burada C_{ij} sönümlenme terimindeki c sönümlenme katsayısıdır.

(153) denkleminin çözümünde ağırsız yerel Petrov-Galerkin yöntemi kullanılacaksa (151) denklemindeki w ağırlık fonksiyonları olarak, eleman bağımsız Galerkin yönteminde olduğunun aksine, şekil fonksiyonlarından farklı fonksiyonlar seçilir.

Bir boyutlu başlangıç sınır değer problemleri uygun sınır ve başlangıç koşulları ile birlikte uygun bir zaman integrasyon yönteminin seçimini gerektirmektedir.

Benzer çözüm süreci düşey yer değiştirmeye ait başlangıç değer problemleri için de elde edilebilir. Düşey yer değiştirme için daha önce elde edilmiş olan (132) denklemine zaman bağlı bir yükleme teriminin ilave edilmesi yeterli olur. Elde edilen yeni denklem

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, t) \quad (155)$$

şeklinde olur. Bu denklemin genel çözüm sürecinin başlangıç noktasını oluşturan artık denkleminin

$$R = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - f(x, t) \quad (156)$$

şeklinde olup Galerkin artık denklemini

$$\int w R dx = 0 \quad (157)$$

veya

$$\int w \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - f(x, t) \right] dx = 0 \quad (158)$$

şeklindedir. Bu denkleminin bir kez kısmi integrasyona tabi tutulması sonucunda

$$\int \frac{dw}{dx} \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx - \left[w \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right] - \int \rho A w \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (159)$$

elde edilir. (159) denkleminin ikinci kez kısmi integrasyon işleminden sonra

$$-\int \frac{d^2 w}{dx^2} EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + \left[\frac{dw}{dx} \left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right] - \left[w \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right] - \int \rho A w \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx = 0 \quad (160)$$

denklemini elde edilmiş olur. Bu denklemin matris formunda,

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{F\} \quad (161)$$

şeklinde yazılır. (161) denkleminin genel yapısı incelendiğinde daha önce aksel yer değiştirme için elde edilen (152) denkleminin aynısı olduğu görülecektir. Burada farklı olan sadece, daha önce belirttiğimiz gib, kullanılan şekil fonksiyonları ve düğümlerin bir yerine iki serbestlik derecesine sahip olmasıdır.

Benzer bir yaklaşımla parabolik bir denklem bir çubuk içindeki sıcaklık değişiminin zamana bağlı olarak ifade edilmesi işlemiyle de elde edilebilir. Bu denklemin genel çözüm süreci aşağıda ayrıntılı olarak incelenecektir [28]. Problemin diferansiyel denklemi,

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(kA \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \rho A \frac{\partial T}{\partial t} = f(x, t) \quad (162)$$

olup bu denkleme ait artık ifadesi;

$$R = -\frac{\partial}{\partial x} \left(kA \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \rho A \frac{\partial T}{\partial t} - f(x, t) \quad (163)$$

şeklindedir. Artık denklemine ait Galerkin denklemi,

$$\int w R dx = 0 \quad (164)$$

veya daha açık olarak

$$\int w \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(kA \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right] dx + \int w \rho A \frac{\partial T}{\partial t} - \int w f dx = 0 \quad (165)$$

yazılabilir.

T sıcaklık değerine yapılacak olan yaklaşım

$$T(x,t) = T(t)\phi(x) \quad (166)$$

formunda olup bu çözüm yaklaşımı yukarda yer değiştirme için yapılan yaklaşım ile tamamen aynı yapıdadır. (165) denkleminde uygulanan kısmi integrasyon işleminden sonra (166) denkleminin uygun değerleri bu denklemde yerine yazılarak,

$$\int \frac{dw}{dx} kA \frac{d\phi(x)}{dx} T(t) dx + \left[w \left(kA \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right] + \int \rho A w \phi(x) \frac{\partial T}{\partial t} dx - \int w f dx = 0 \quad (167)$$

elde edilir. Bu denklem matris formunda,

$$[C] \left\{ \dot{T} \right\} + [K] \{T\} = \{F\} \quad (168)$$

şeklinde yazılır. Yer değiştirme veya sıcaklık dağılımı (168) denklemi uygun bir zaman integrasyon işleminin seçilmesi ile zamana bağlı olarak belirlenebilir.

2.4.3.2. Zaman İntegrasyon Yöntemleri

Zaman integrasyon yöntemlerini incelemek amacıyla hiperbolik denklemler

$$[M] \left\{ \ddot{U} \right\} + [C] \left\{ \dot{U} \right\} + [K] \{U\} = \{F\} \quad (169)$$

ve parabolik denklemler

$$[C] \left\{ \dot{U} \right\} + [K] \{U\} = \{F\} \quad (170)$$

dikkate alınacaktır [29]. Bu yapıdaki denklemleri çözerken direkt integrasyon yöntemleri kullanılacaktır. Burada direkt ifadesinden kasıt integrasyon işlemine başlamadan önce her hangi bir dönüşümün uygulanmaması anlamına gelmektedir.

Direkt integrasyon yöntemi iki temel fikre dayanmaktadır. Birincisi (169) denklemini herhangi bir t zamanı için sağlamaktansa bu denklemi parçalanmış olan zaman dilimlerinden her hangi bir Δt anı için sağlamayı amaçlamaktadır. İkinci düşünce ise yer değiştirme, hız ve ivme üzerindeki değişimleri dikkate almaktadır. Bundan sonraki aşamalarda zaman integrasyonu işleminde başlangıç yer değiştirmesi, hız ve ivmesinin bilindiğini varsayarak (167) denkleminin her hangi bir 0 ile T zamanı arasında n adet eşit zaman dilimi için zaman integrasyonu yöntemi uygulanarak çözüm incelenecektir.

2.4.3.2.1. Newmark Yöntemi

Newmark zaman integrasyon yöntemi lineer ivmelenme yönteminin farklı bir parçası olarak dikkate alınabilmektedir. Newmark zaman integrasyon yönteminde hız ve ivme terimleri için yapılacak olan yaklaşımlar,

$$\dot{U}_{t+\Delta t} = \dot{U}_t + \left[(1-\delta)\ddot{U}_t + \delta\ddot{U}_{t+\Delta t} \right] \Delta t \quad (171)$$

$$U_{t+\Delta t} = U_t + \dot{U}_t \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{U}_t + \alpha \ddot{U}_{t+\Delta t} \right] \Delta t^2 \quad (172)$$

denklemleriyle belirtilmiştir [29]. Burada δ ve α parametreleri çözümün dengede ve doğru bir biçimde ilerlemesini sağlamak amacıyla kullanılmaktadır. Burada denge denklemini $t + \Delta t$ anında ele alınarak çözüm elde edilmektedir. Bu ifadeleri bilgisayar programına uygulayabilmek için aşağıda belirtilen çözüm sürecinin takip edilmesi gerekmektedir [30].

- K, M ve C matrislerinin elde edilmesi
- U_0 , \dot{U}_0 ve \ddot{U}_0 ifadelerinin uygulanması
- Zaman adımının seçilmesi ve sabitlerin belirlenmesi

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}, \quad a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t}, \quad a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}, \quad a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1, \quad a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1, \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right),$$

$$a_6 = \Delta t(1 - \delta), \quad a_7 = \delta \Delta t \quad (173)$$

Burada δ ve α ifadeleri için çözümün uygun olarak elde edilebilmesi amacıyla aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde seçilmesi gerekmektedir.

$$\delta \geq 0.5 \text{ ve } \alpha \geq 0.25(0.5 + \delta)^2$$

- Efektif K matrisinin elde edilmesi

$$\bar{K} = K + a_0 M + a_1 C \quad (174)$$

Her bir zaman adımında yapılması gereken hesaplamalar:

- Efektif yük teriminin elde edilmesi

$$\begin{aligned} \bar{F}_{t+\Delta t} = & F_{t+\Delta t} + M(a_0 U_t + a_2 U_{t-\Delta t} + a_3 U_{t-2\Delta t}) \\ & + C(a_1 U_t + a_4 U_{t-\Delta t} + a_5 U_{t-2\Delta t}) \end{aligned} \quad (175)$$

- Yer değiştirmelerin elde edilmesi

$$\bar{K} U_{t+\Delta t} = \bar{F}_{t+\Delta t} \quad (176)$$

Arzu edilmesi durumunda hız ve ivme terimleri yer değiştirme için elde edilen denklemlerde yerlerine yazılarak belirlenebilmektedir.

2.4.3.2.2. Parabolik Denklemler İçin Zaman İntegrasyon Yöntemleri

Parabolik denklemler (170) denkleminde belirtilen yapıdadır. Bu formdaki denklemler için önerilmiş olan zaman integrasyon yöntemlerini birbirinden farklı kılan sadece kullanılan parametrelerdir.

Çözüme geçmeden önce $\{u\}_0$, $t=0$ anındaki yer değiştirmeyi belirttiği vurgulanmalıdır. Bu formdaki denklemleri çözmek için kullanılan en yaygın yöntem alfa ailesidir. Alfa ailesinde uygulanan genel yaklaşım

$$(1-\alpha)\left\{\dot{u}\right\}_s + \alpha\left\{\dot{u}\right\}_{s+1} = \frac{\{u\}_{s+1} - \{u\}_s}{\Delta t_{s+1}} \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \text{ için} \quad (177)$$

denklemleri ile belirtilmiştir [28]. Burada $\{u\}_s$ ifadesi parantez içindeki ifadenin $t=t_s$ anında aldığı değeri belirtmektedir. $\Delta t_s = t_s - t_{s-1}$ s.inci zaman adımını ifade etmektedir. Eğer zaman aralığı eşit parçalara bölünmüş ise o zaman s anındaki zaman $t_s = s\Delta t$ şeklinde belirlenebilir. Bu durumda (177) denklemi,

$$\{u\}_{s+1} = \{u\}_s + \Delta t \left\{\dot{u}\right\}_{s+\alpha} \quad (178)$$

$$\left\{\dot{u}\right\}_{s+\alpha} = (1-\alpha)\left\{\dot{u}\right\}_s + \alpha\left\{\dot{u}\right\}_{s+1} \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \text{ için} \quad (179)$$

şekilde ifade edilebilir.

(179) denkleminde yer alan α 'nın farklı değerleri için ;

$\alpha = 0.5$ için Crank-Nicolson Yöntemi

$\alpha = 0.66667$ için Galerkin Yöntemi

$\alpha = 1$ Geriye Farklar Yöntemi

zaman integrasyon şemaları elde edilebilir.

(170) denkleminin sırasıyla s anı ve s+1 anı için yazılması durumunda

$$[M]\left\{\dot{u}\right\}_s + [K]_s \{u\}_s = \{F\}_s \quad (180)$$

$$[M]\left\{\dot{u}\right\}_{s+1} + [K]_{s+1} \{u\}_{s+1} = \{F\}_{s+1} \quad (181)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler elde edilirken kütle matrisinin zamandan bağımsız olduğu varsayımı yapılmaktadır. Daha sonra (177) denkleminin her iki tarafı Δt_{s+1} ifadesi ve kütle matrisi [M] ile çarpılır ve elde edilen denklemler (180) ve (181) denklemindeki yerlerine yazılırsa zaman integrasyonun gerçekleştirilebilmesi için aşağıdaki denklem

sistemi elde edilmiş olur. Bu denklemlerin herhangi bir t anı için çözülmesiyle istenilen değişkenin (yer değiştirme veya sıcaklık) t anındaki durumu belirlenebilmektedir [28].

$$[K_{eff}]_{s+1} \{u\}_{s+1} = [\bar{K}]_s \{u\}_s + \{\bar{F}\}_{s,s+1} \quad (182)$$

Burada efektif katılık matrisi;

$$[K_{eff}] = [M] + a_1 [K]_{s+1} \quad (183)$$

ve

$$[\bar{K}]_s = [M] - a_2 [K]_s \quad (184)$$

$$\{\bar{F}\}_{s,s+1} = \Delta t_{s+1} [\alpha \{F\}_{s+1} + (1 - \alpha) \{F\}_s] \quad (185)$$

şeklindedir. Efektif yük terimi (185) denklemi ile ifade edilmiştir. Bu denklemlerde yer alan bilinmeyen a_1 ve a_2 katsayıları.

$$a_1 = \alpha \Delta t_{s+1} \quad (186)$$

$$a_2 = (1 - \alpha) \Delta t_{s+1} \quad (187)$$

şeklindedir. (182) denkleminde yararlanılarak istenilen herhangi bir t anındaki yer değiştirme değeri elde edilebilmektedir.

2.4.3.3. Hiperbolik Denklemlerin Çözümü

Bu başlık kapsamında (169) denklemi ile belirtilen problemlerin çözümü incelenecek ve elde edilen çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması yapılacaktır. Yapılan çalışmalarda Newmark zaman integrasyon yöntemi uygulanmıştır.

Sayısal çözüm üretilen ilk örnek problem;

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (188)$$

denklemini

$$u(x,0) = 0 \quad (189)$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0 \quad (190)$$

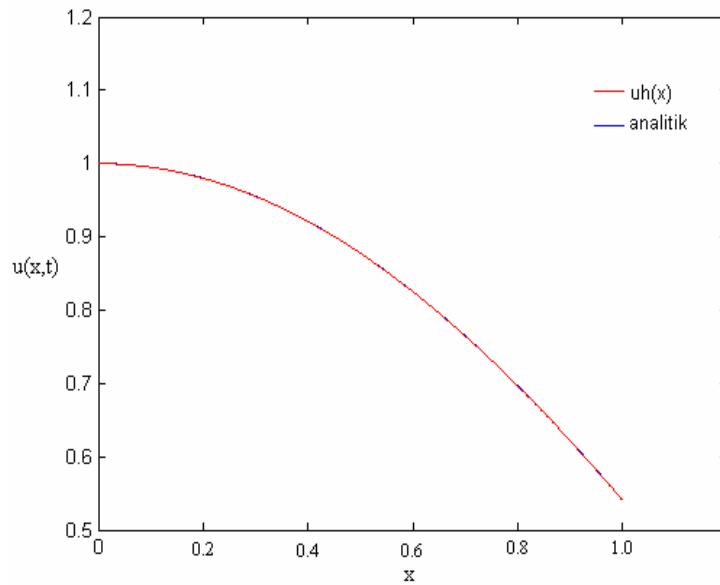
ve başlangıç ve sınır koşulları ile verilmiştir.

Bu problemin analitik çözümü;

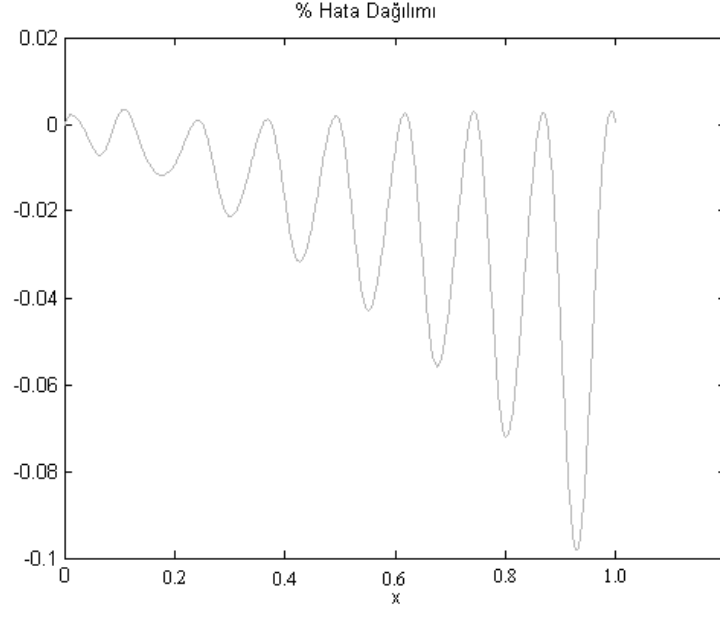
$$f(x,t) = \cos(t) \cos(x) + 2t + \frac{5}{3} \sin(3t) \sin(3x) \quad (191)$$

şeklindedir [31].

Problemin eleman bağımsız Galerkin yöntemi ile elde edilen çözümü ve hata değeri Şekil 71 ve Şekil 72’te verilmiştir.

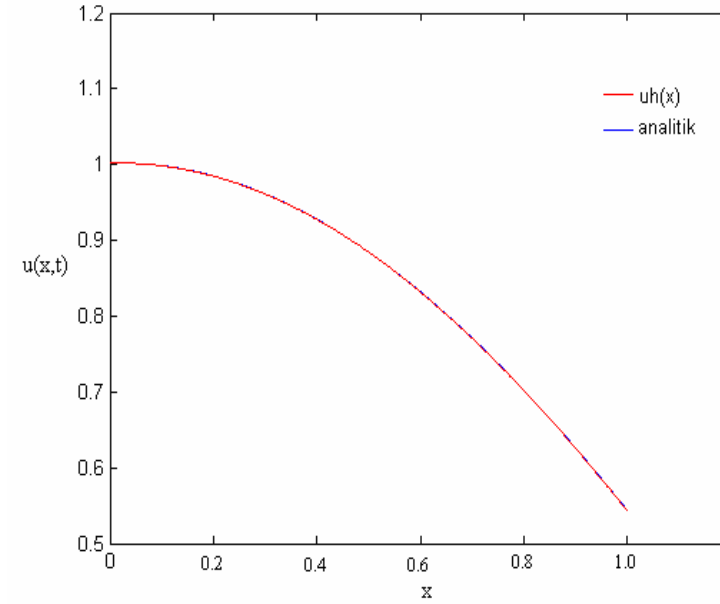


Şekil 71. Birinci problem için yaklaşık ve analitik çözüm

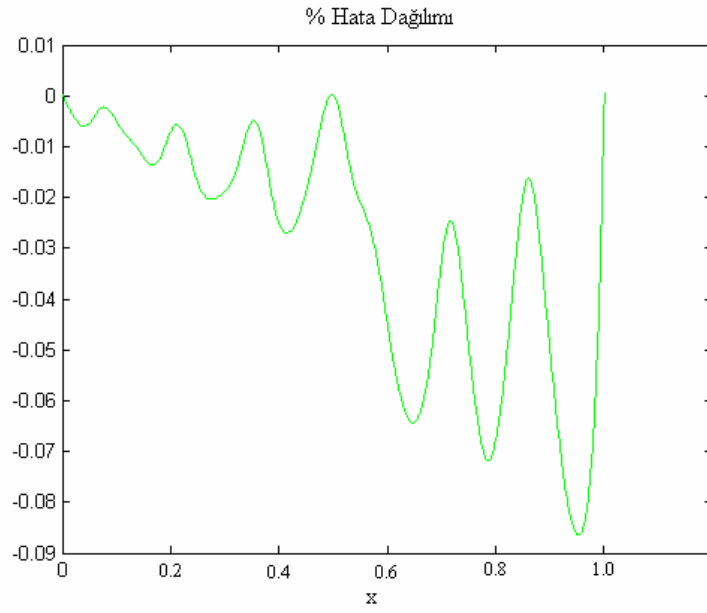


Şekil 72. Birinci problem için hata dağılımı

Bu örnek problemin ağsız yerel Petrov-Galerkin çözümü Şekil 73 ve Şekil 74'te verilmiştir.



Şekil 73. Örnek problem için ağsız yerel Petrov-Galerkin çözümü



Şekil 74. Ağsız yerel Petrov-Galerkin çözümü için hata dağılımı

İkinci örnek problem olarak,

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - 4 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \sin(t) + e^{-x} \quad (192)$$

denklemini ve

$$u(x,0) = 0 \quad (193)$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0 \quad (194)$$

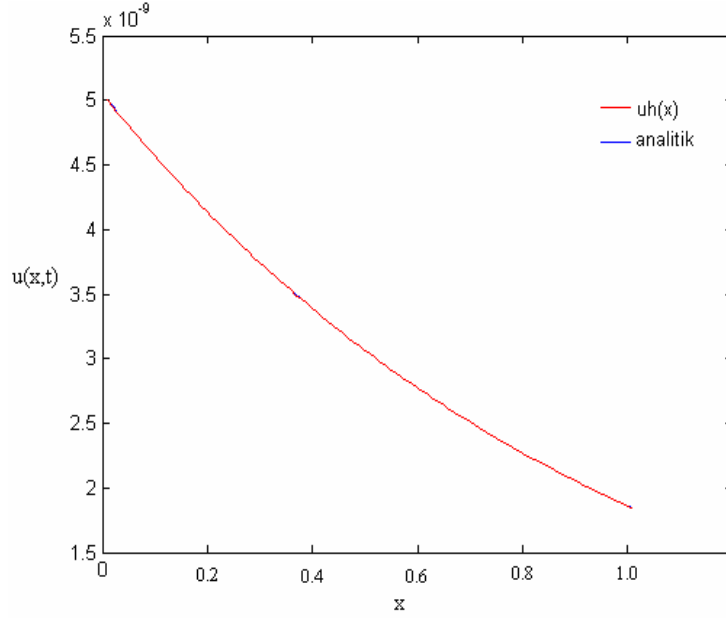
başlangıç ve sınır koşulları seçilmiştir.

Bu problemin çözümünde şekil fonksiyonu sayısının ve etkinlik yarıçapının çözüme olan etkileri incelenecektir.

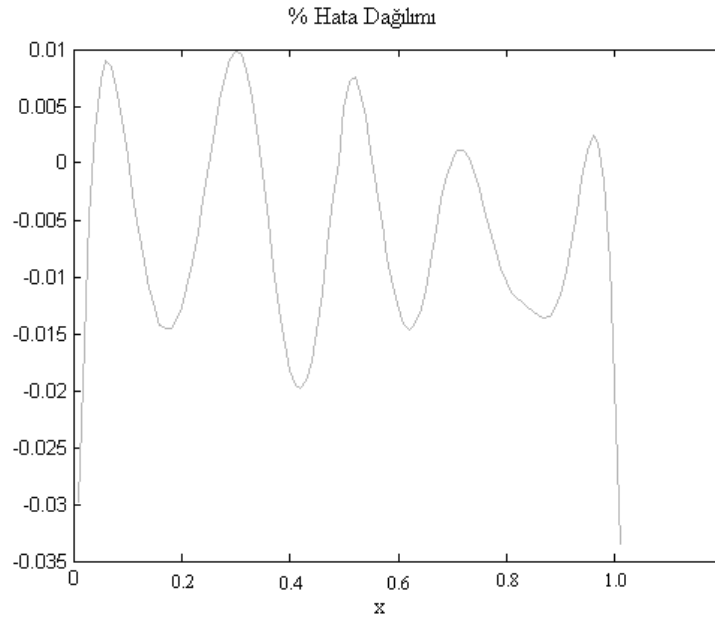
Problemin analitik çözümü,

$$f(x,t) = t - \sin(t) - \frac{1}{8} \left(-e^{-(x+2t)} - e^{-(x-2t)} + 2e^{-x} \right) \quad (195)$$

olarak verilmiştir[31]. Problemin eleman bağımsız Galerkin yöntemi ile yapılan ilk çözüm yaklaşımında 7 adet şekil fonksiyonu ve 0.5 etkinlik yarıçapı değerleri kullanılmıştır. Elde edilen çözüm Şekil 75’de ve hata değeri Şekil 76’da verilmiştir.



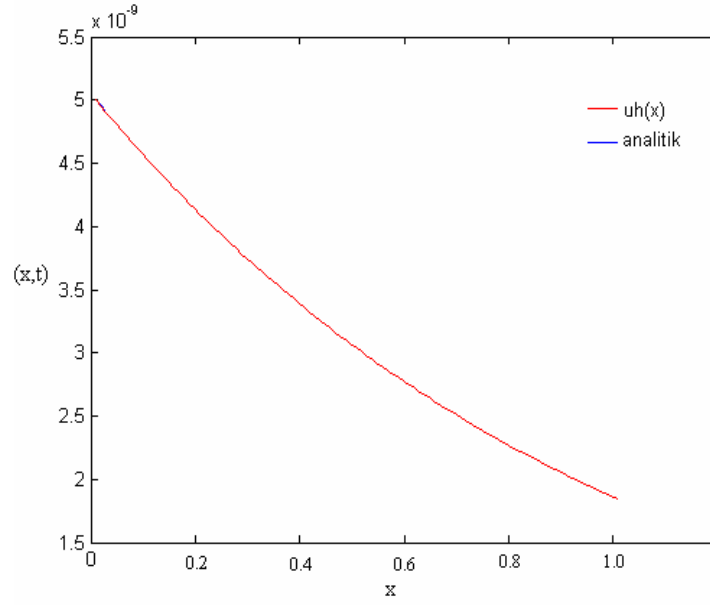
Şekil 75. İkinci örnek probleme yapılan birinci yaklaşım için elde edilen çözüm.



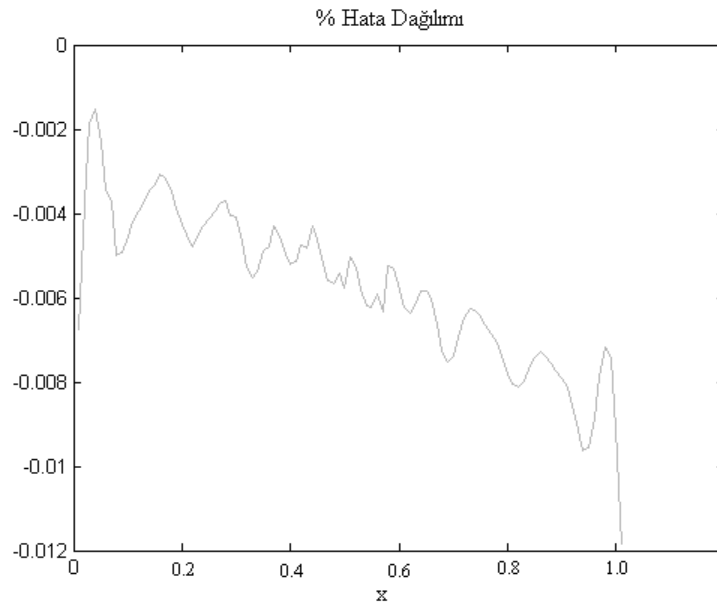
Şekil 76. Birinci yaklaşım için hata dağılımı

İkinci ve üçüncü yaklaşımlar olarak aynı problem 15 adet şekil fonksiyonu ve 0.35 ve 0.5 etkinlik yarıçapları kullanılarak çözülmüştür.

Yapılan ikinci yaklaşım için elde edilen çözüm Şekil 77'de, hata dağılımı ise Şekil 78'de verilmiştir.

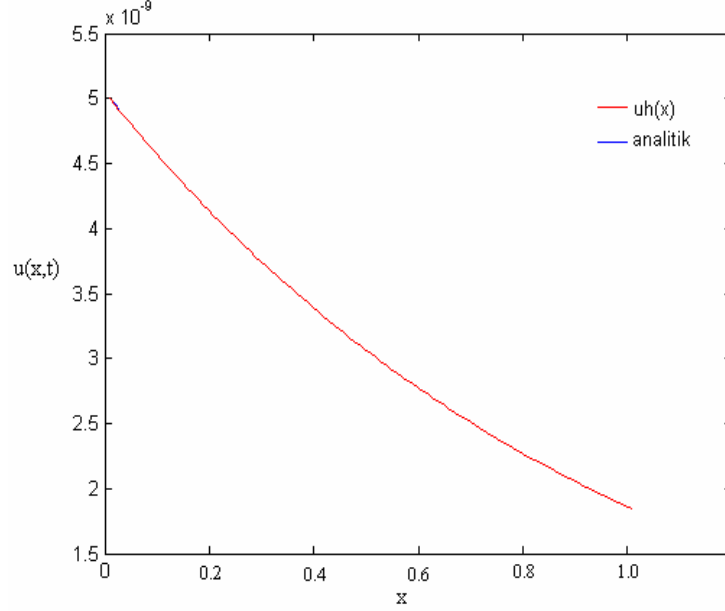


Şekil 77. İkinci probleme yapılan ikinci yaklaşım için elde edilen çözüm

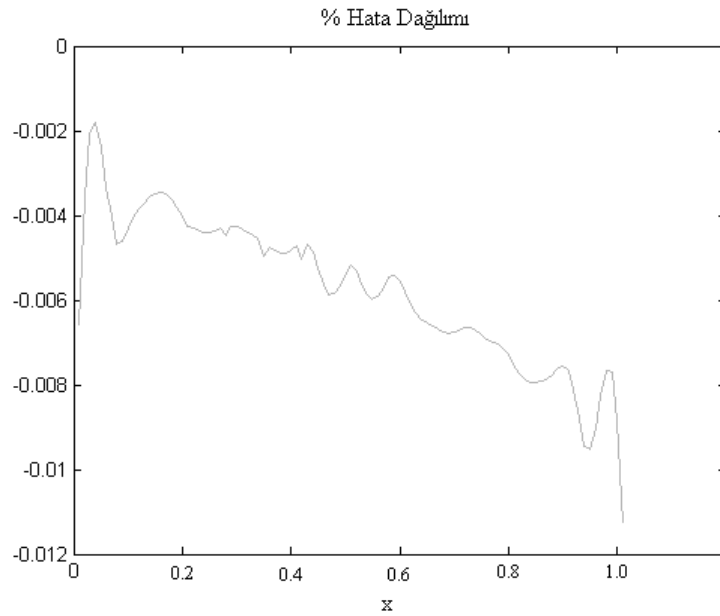


Şekil 78. İkinci yaklaşım için hata dağılımı

Etkinlik yarıçapı olarak 0.5 seçilerek, yani üçüncü yaklaşımda, elde edilen çözüm ve hata dağılımı sırasıyla Şekil 79 ve Şekil 80’de görülmektedir.



Şekil 79. İkinci probleme yapılan üçüncü yaklaşım için elde edilen çözüm



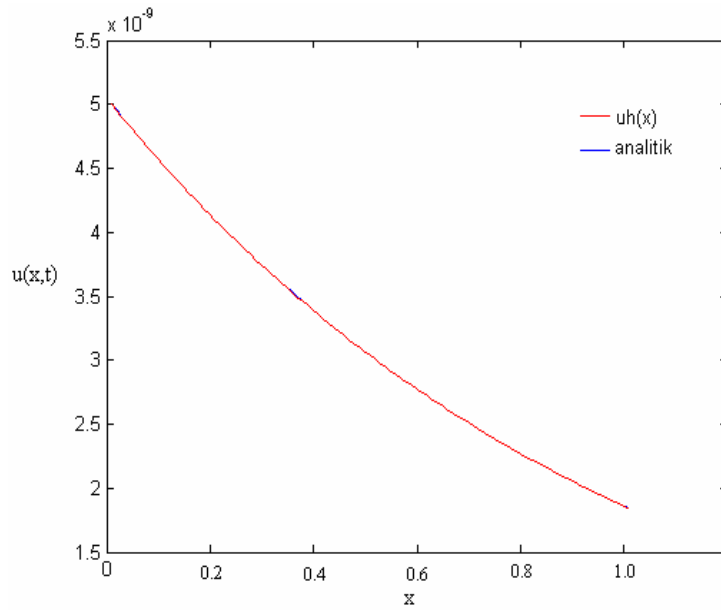
Şekil 80. Üçüncü yaklaşım için hata dağılımı

Hiperbolik denkleme ait çözümler Şekil 71, Şekil 73, Şekil 75, Şekil 77 ve Şekil 79’da verilmiştir. Bu çözümlere karşılık gelen hata dağılımları Şekil 72, Şekil 74, Şekil 76,

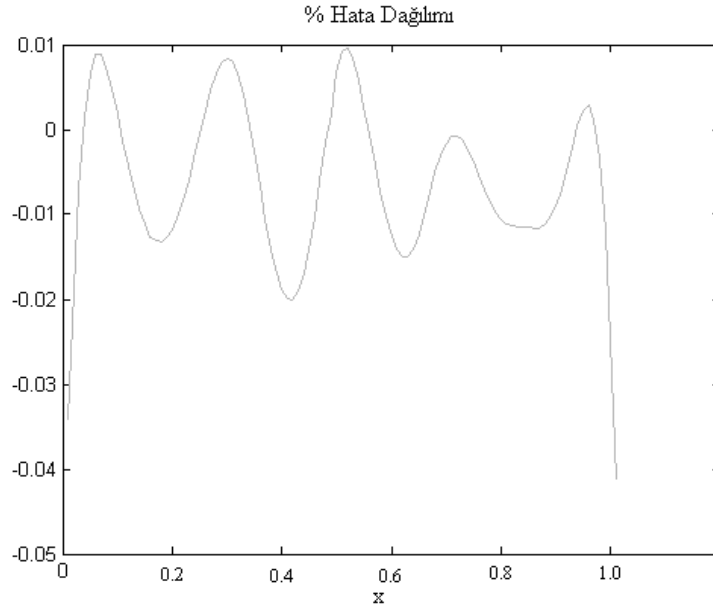
Şekil 78 ve Şekil 80’de verilmiştir. Bu çözümler incelendiğinde fonksiyon sayısının artması çözüm hassasiyeti üzerinde önemli bir katkı sağlamaktadır. Şekil 78 ve Şekil 80’de elde edilen hata dağılımları 15 tane şekil fonksiyonu kullanılarak elde edilmiştir. Bu çözümleri birbirinden farklı kılan kullanılan olan etkinlik yarıçapı değerleridir.

Benzer şekilde ikinci problem için ağsız yerel Petrov-Galerkin yöntemi ile yapılan çözümde birinci yaklaşımda şekil fonksiyonu sayısı 7 ve etkinlik yarıçapı olarak 0.5 seçilmiştir.

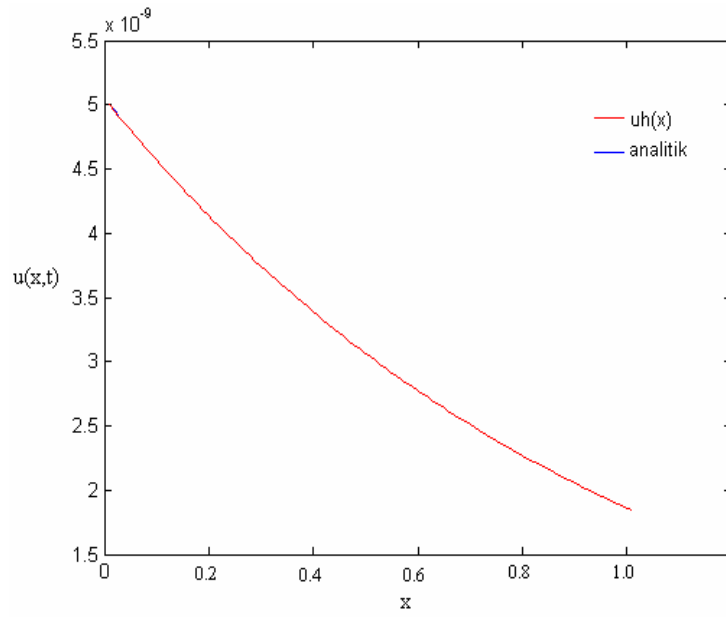
Ağsız yerel Petrov-Galerkin yöntemi ile yapılacak olan ikinci yaklaşım için fonksiyon sayısı 15 ve etkinlik yarıçapı değeri 0.35 olarak seçilmiştir. Elde edilen sayısal çözümler ve hata dağılımı birinci yaklaşım için Şekil 81 ve Şekil 82’de ikinci yaklaşım için Şekil 83 ve Şekil 84’te verilmiştir.



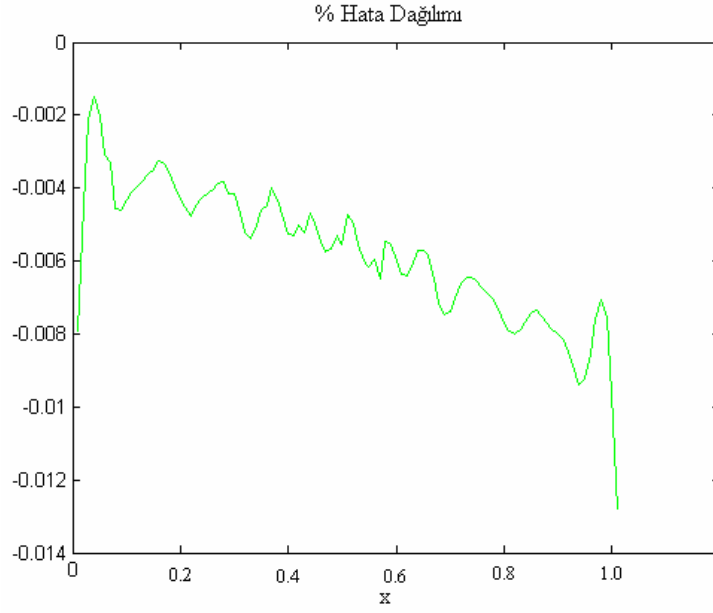
Şekil 81. Ağsız yerel Petrov-Galerkin yöntemi ile yapılan birinci yaklaşım



Şekil 82. Birinci yaklaşımda hata dağılımı

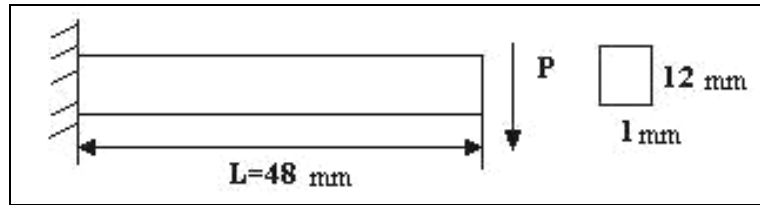


Şekil 83. Ağsız yerel Petrov-Galerkin yöntemi ile yapılan ikinci yaklaşım



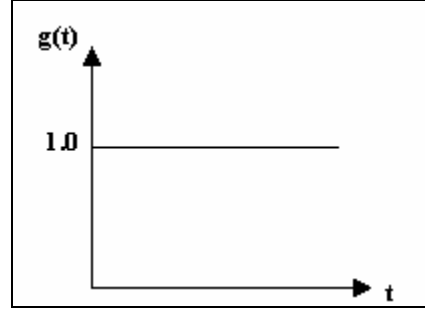
Şekil 84. İkinciyaklaşımında hata dağılımı

Yukarda çözümlü verilen örnek problemde sönümleme terimi yer almamıştı. Bu bölümde sönümlemeyi de içeren Şekil 85'deki problem farklı yüklemeler için incelenecektir.



Şekil 85. P yükü etkisindeki çubuk [32]

Bu çubuğa etkiyen P yükünü $P=1000g(t)$ olacak şekilde zamana bağlı olarak ifade edilecektir. Çözüm üretilecek örnek uygulamalarda yüklemeler Şekil 86 ve Şekil 89'da görüldüğü şekilde oldukları kabul edilmiştir.



Şekil 86. Birinci yükleme

Çözümde malzeme özellikleri;

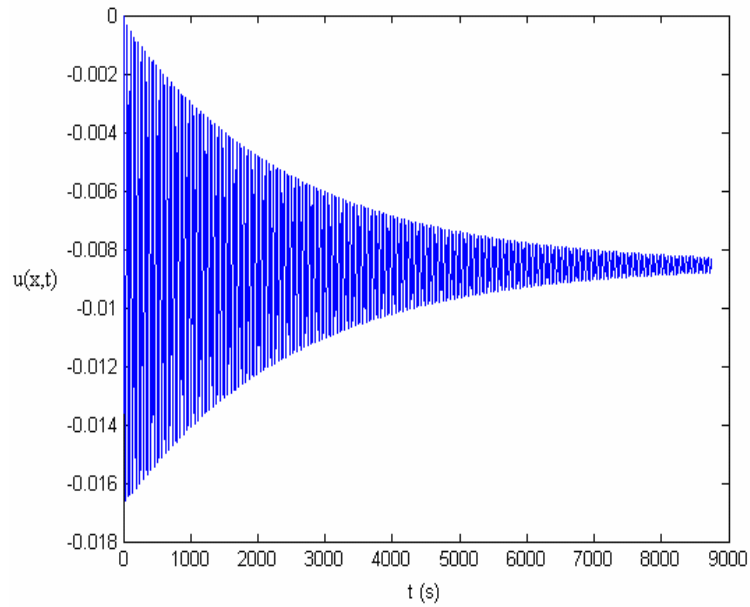
Sönüm katsayısı : 0.4

Elastisite modülü : $3 \cdot 10^7$

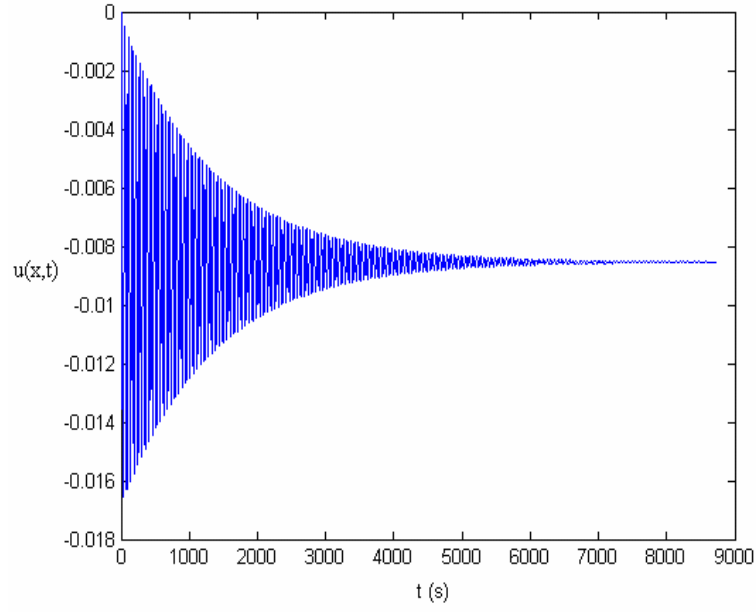
Zaman adımı : 0.004

olarak seçilmiştir.

Çözümde zaman integrasyon yöntemi olarak Newmark yöntemi kullanılmıştır. Şekil 87'de elde edilen sönümlenme davranışında $\alpha = 0.29$ ve $\delta = 0.55$ olarak seçilmiştir. Bu değerlerden $\delta = 0.6$ ifadesini olarak seçersek elde edilecek sönümlenme davranışı Şekil 88'de görülmektedir[32].



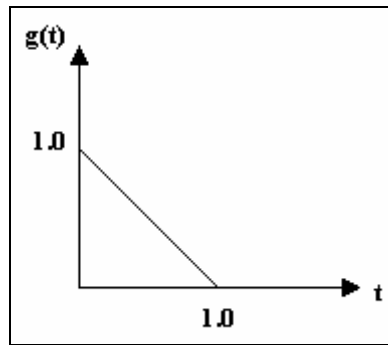
Şekil 87. $\alpha = 0.29$ ve $\delta = 0.55$ ile birinci yüklemdeki sönümlenme davranışı



Şekil 88. $\alpha = 0.29$ ve $\delta = 0.6$ olması durumunda sönümlenme davranışı

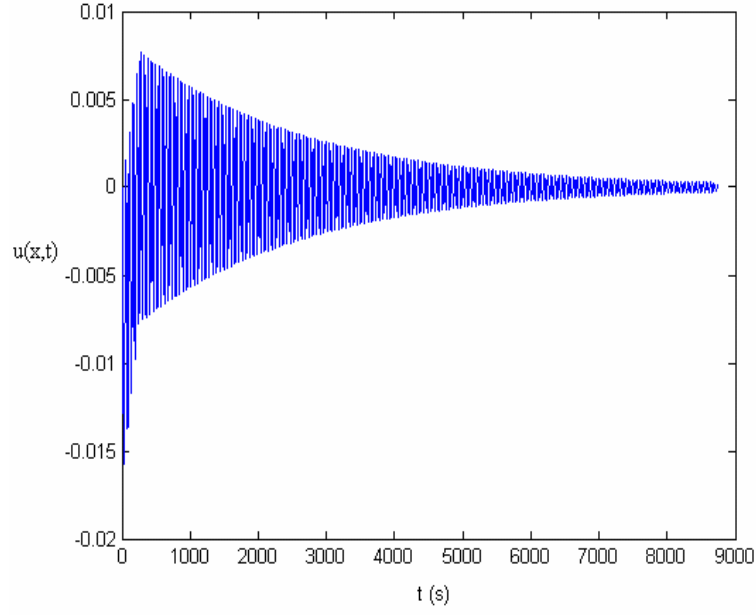
Bu değerler statik çözüm değeri $\frac{PL^3}{3EI}$ formülü ile elde edilen 0.0085333 değerine yakınsama gösterdiği için yapılan analizin sonuçları uygundur.

İkinci örnek olarak yükleme durumu Şekil 89'da gösterilen cubuk probleminin sönümlenme davranışı incelenecektir.



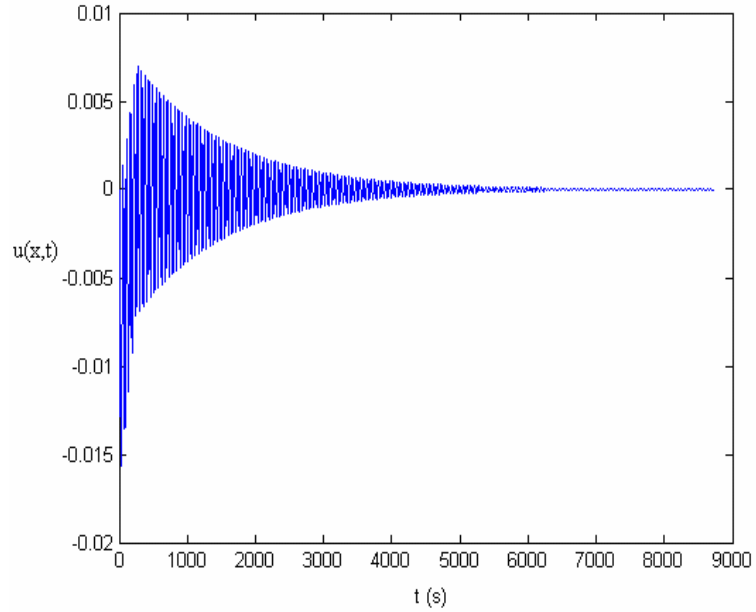
Şekil 89. Sönümlenme problemi için ikinci tip yükleme

Bu yükleme durumunda çubuğun sönümlenme davranışı Şekil 90'da verilmiştir[32].



Şekil 90. İkinci tip yükleme için sönümlenme davranışı $\alpha = 0.29$ ve $\delta = 0.55$

Şekil 90'da belirtilen çözüm yine Newmark zaman integrasyon yöntemiyle elde edilmiştir. Burada $\alpha = 0.29$ ve $\delta = 0.55$ olarak seçilmiştir. Bu değerlerden alfanın sabit ve $\delta = 0.6$ olarak seçilmesi durumunda elde edilen sönümlenme davranışı Şekil 91'de görülmektedir.



Şekil 91. $\alpha = 0.29$ ve $\delta = 0.6$ olması durumunda sönümlenme davranışı

2.4.3.4. Parabolik Denklemlerin Çözümü

Parabolik denklemler yer değiştirme ifadesinin zamana göre birinci türevini içeren denklemler olduğu daha önce belirtilmişti. Yapılacak olan çözümlerde zaman integrasyon yöntemi olarak Crank-Nicolson yöntemi kullanılmıştır.

Parabolik denklem için örnek olarak

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = t \sin(x) \quad (196)$$

denklemini seçilmiştir [31]. Bu denklem için sınır koşulları ve başlangıç koşulları;

$$u(x,0) = 0 \quad (197)$$

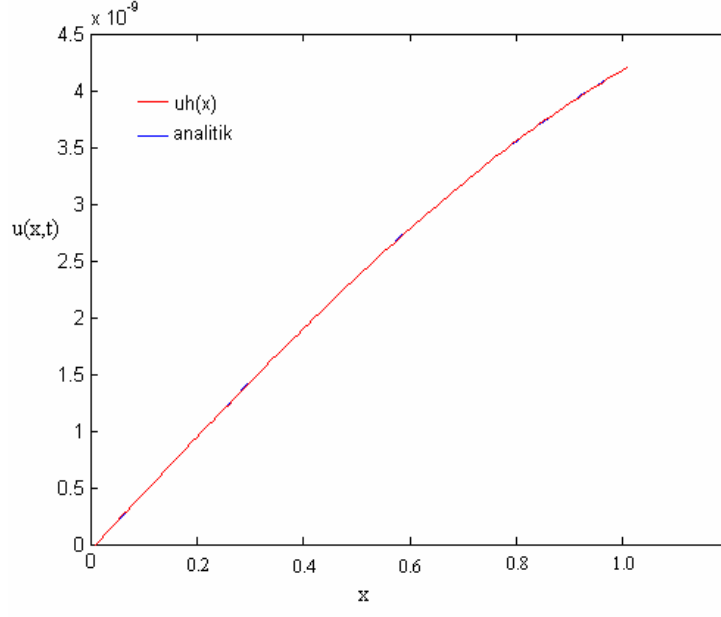
$$u(0,t) = 0 \quad (198)$$

alınmıştır. Denklemin analitik çözüümü ise

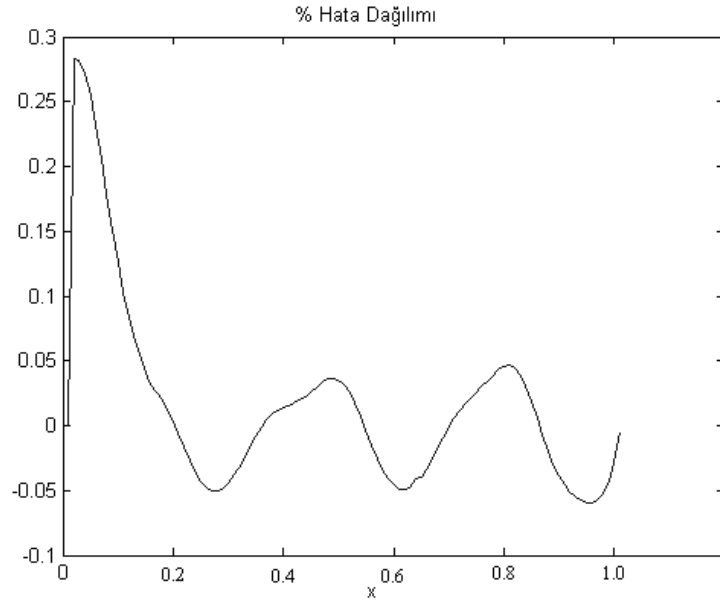
$$f(x,t) = \sin(x)(t - 1 + e^t) \quad (199)$$

olarak verilmektedir [31].

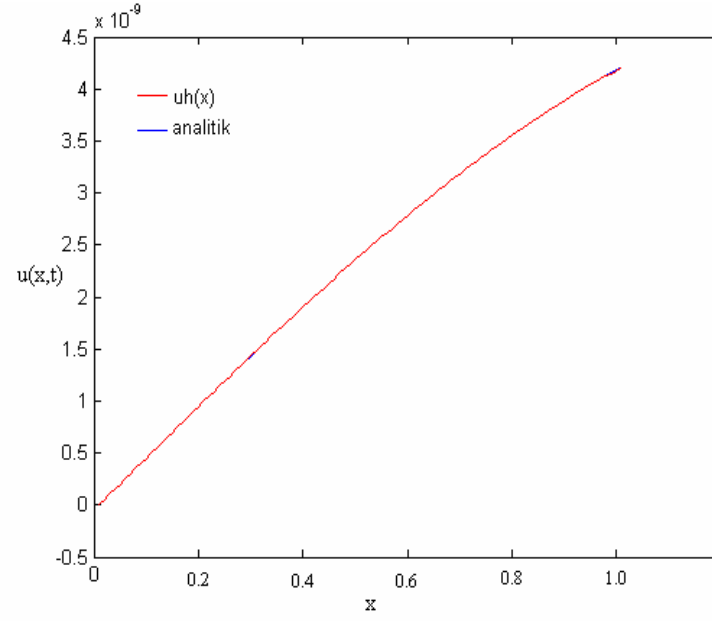
Problemin eleman bağımsız Galerkin yöntemi ve etkinlik yarıçapı 0.35 olan 7 şekil fonksiyonu ile elde edilen çözüümü ve hata dağılımı Şekil 92–93 te, 15 şekil fonksiyonu kullanılarak elde edilen çözüüm ve hata dağılımı Şekil 94 -95'te verilmiştir.



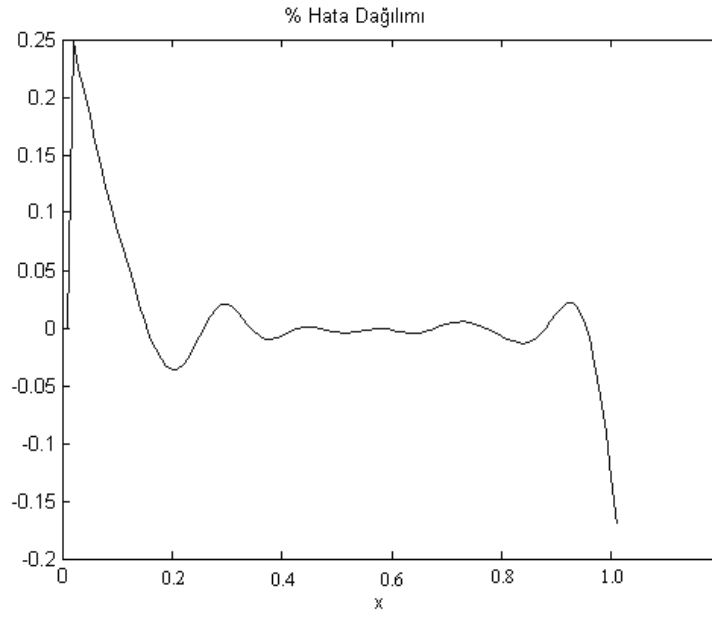
Şekil 92. Parabolik denklemin 7 şekil fonksiyonu ile çözümü



Şekil 93. Hata dağılımı



Şekil 94. Parabolik denklemin 15 şekil fonksiyonu ile çözümü



Şekil 95. Hata dağılımı

3. İRDELEME

Ağsız yöntemlerde modelleme işlemi düğümler kullanılarak gerçekleştirilmektedir. Düğümlerin kullanılması modelleme işleminin gerçekleştirilmesinde önemli bir avantaj sağlamaktadır. Daire biçimindeki bir alanın modellenmesi işlemi Şekil 3 ve Şekil 4'te verilmiştir. Bu şekiller incelendiğinde modelleme işlemi ağsız yöntemlerde düğümler kullanılarak oldukça rahat bir şekilde gerçekleştirilebilmektedir. Sonlu Elemanlar yönteminde aynı rahatlıktan söz edilemez. Çünkü kullanılan elemanlar çoğu durumda doğrusal hatlara sahiptir. Bu yüzden dairesel alanın eğri yüzeylerinin istenilen hassasiyette modellenmesi daha zor ve yorucu bir işlemdir. Sonlu elemanlar yöntemi için bu eksikliğin giderilmesi kullanılan elemanların boyutlarının küçültülmesi veya kullanılan elemanların derecesinin artırılması ile sağlanabilmektedir. Bu işlemler de çözüm süresinin artmasına sebep olmaktadır. Ağsız yöntemlerde ise bu tür zorluklar yoktur. Modelleme işlemi düğümlerle gerçekleştirilmektedir. Bu durum bize çözüm sürecinde kullanılacak olan yaklaşımdan bağımsız olarak çözüm bölgesinin modellenmesi işleminde önemli bir avantaj sağlamaktadır.

Çözüm sürecinde ağsız yöntemlerde sonlu elemanlar yönteminden farklı olarak şekil fonksiyonları analizden önce belirli olmayıp tamamen analiz esnasında seçilen yaklaşımın derecesine bağlı olarak belirlenmektedir. Şekil fonksiyonlarının elde edilmesi işleminde tabanı ağırlık fonksiyonları oluşturmaktadır. Ağırlık fonksiyonları olarak spline fonksiyonları ve gauss fonksiyonu kullanılmaktadır. Bu fonksiyonların derecesi yüksek olduğundan yapılacak olan yaklaşımın lineer olarak seçilmiş olması durumunda dahi elde edilen şekil fonksiyonları pek çok durumda oldukça yeterli sonuçlar sağlamaktadırlar. Şekil fonksiyonları için Şekil 10 ve Şekil 13'te belirtilen ağırlık fonksiyonlarını kullanılarak elde edilen çözümler Şekil 11 ve Şekil 14'te verilmiştir. Şekillere dikkat edildiğinde bu fonksiyonlar için yapılan yaklaşım lineer olmasına rağmen şekil fonksiyonları tabanda kullanılmış olan ağırlık fonksiyonunun özelliklerini taşımaktadır.

Elde edilen şekil fonksiyonlarının etkinlikleri $f(x) = \sin(x)$ ve $f(x) = \frac{x^2}{8 + x^5}$

fonksiyonları için test edilmiştir. Elde edilen çözümlerde kullanılan şekil fonksiyonu sayısının artması ve yapılan yaklaşım tabanın iyileştirilmesi sonuçlar üzerinde önemli bir etkiye sahiptir. Ancak ağsız yöntemlerde şekil fonksiyonları kronecker delta özelliğini

sağlamamaktadır. Kronecker delta özelliği S. N. Atluri, H.G. Kim ve Y.J. Cho [16] tarafından önerilmiş olan bir dönüşüm işleminin şekil fonksiyonlarına uygulanması durumunda elde edilebilmektedir. Şekil fonksiyonlarının kronecker delta özelliğine sahip olması ağsız yöntemlerde sınır koşullarının, sonlu elemanlar yönteminde olduğu gibi, uygulanabilmesi kolaylığını sağlamaktadır. Sınır koşullarının uygulanması konusunda elde edilen bu kolaylıkla sonlu elemanlar yöntemi ile çözülmüş olan hemen tüm problemler ağsız yöntemler kullanılarak ta rahatlıkla çözülebilir. Burada ödenmesi gereken bedel şekil fonksiyonlarına uygulanan dönüşüm işleminin gerektirdiği hesaplama zamanıdır.

Yapılan tez çalışmasında ağsız yöntemlerden Eleman Bağımsız Galerkin ve Ağsız Yerel Petrov-Galerkin yöntemleri kullanılmıştır. İki yöntem birbirinden kullanılan formülasyon işleminde ayrılmaktadır. Eleman bağımsız Galerkin yöntemi sonlu elemanlar yönteminde de kullanılan Galerkin yöntemini kullanırken ağsız yerel Petrov-Galerkin yöntemi ise Petrov-Galerkin yöntemini kullanmaktadır. Galerkin ve Petrov-Galerkin formülasyonlarını farklı kılan artık denkleminin ağırlıklandırılması işleminde kullanılan ağırlık fonksiyonlarıdır.

Galerkin formülasyonunda artık denklemini ağırlıklandırılması şekil fonksiyonları kullanılarak gerçekleştirilmektedir. Petrov-Galerkin formülasyonunda bu işlem şekil fonksiyonlarından farklı bir fonksiyonla gerçekleştirilmektedir (ağsız yöntemler için Petrov-Galerkin formülasyonunda spline veya gauss fonksiyonları kullanılmaktadır).

Ağsız yerel Petrov-Galerkin yönteminde artık denkleminin ağırlıklandırılması işlemi için ağırlık fonksiyonları şekil fonksiyonlarından bağımsız olarak seçilebildiğinden bu yöntem daha çok bir konsept olarak ele alınmaktadır. Çünkü ağırlık fonksiyonunun uygun seçilmesi durumunda herhangi bir ağsız yöntemin formülasyonu elde edilebilmektedir [10]. Petrov-Galerkin formülasyonunda artık denkleminin ağırlıklandırılması işleminde ağırlık fonksiyonu olarak şekil fonksiyonunun seçilmesi durumunda yöntem Galerkin formülasyonuna dönüşmektedir.

Eleman bağımsız Galerkin ve ağsız yerel Petrov-Galerkin yöntemlerinin sonlu elemanlar yönteminden farklı oldukları noktalar;

- Çözüm bölgesinin aralarında herhangi bir ilişkinin tanımlanması gerekli olmayan düğümler kullanılarak modellenmesi
- Şekil fonksiyonlarının çözüm esnasında elde edilmesi
- Sistem denklemlerinin elde ediliş biçimi

- Sınır koşullarının uygulanması işlemi (dönüşüm işleminin uygulanmadığı dikkate alındığında bu durum söz konusudur.)

olarak belirtilebilir.

Yapılan tez çalışmasında ağırsız yerel Petrov-Galerkin yönteminin bir konsept olarak ele alınabilmesinden yararlanılarak ağırsız yerel Petrov-Galerkin yönteminin simetrik hali olarak ele alınabilen eleman bağımsız Galerkin yöntemi yer yer tercih edilmiş ve çözümler her iki yöntemde de gerçekleştirilmiştir.

Verilen formülasyonlar ve Matlab Programlama dilinde yazılan programların doğruluğunun test edilmesi amacıyla yöntemler öncelikle sınır değer problemlerine uygulanmıştır.

Eksenel yük etkisinde bulunan çubuk için elde edilen sonuçlar eleman bağımsız Galerkin yöntemi için Şekil 36'da, ağırsız yerel Petrov-Galerkin çözümü için de Şekil 38'de sunulmuştur. Elde edilen hata değerleri birbirinden çok farklı olmayıp ağırsız yerel Petrov-Galerkin yöntemi için hata dağılımı biraz daha dengeli olmaktadır. Bunun sebebi olarak yöntemin esnekliği belirtilebilir. Artık denkleminin ağırlıklandırılması işleminde ağırlık fonksiyonlarının kullanımı yöntemi daha esnek kılmaktadır.

Yapılan çözümler incelendiğinde ağırsız yöntemler için

- Problem çözümünde kullanılan düğüm sayısının artırılması
- Yapılan yaklaşım derecesinin artırılması

olumlu sonuçlar elde edilmesi açısından önemlidir.

Yapılan tez çalışmasında bir boyutlu problemler olarak sınır değer problemleri, öz değer problemleri ve başlangıç sınır değer problemleri incelenmiştir.

Sınır değer problemi olarak eksenel yük etkisindeki bir çubuğun eksenel yük altındaki davranışı ve rijit cisim yer değiştirmesi problemleri ele alınmıştır.

Eksenel yük etkisindeki çubuk için sınır koşulları $u_{x=0} = 0$, $q_{x=L} = 1$ olarak ele alınmıştır. Bu problem için $f = 0$ olarak seçilmiştir. Bu koşullar altında denklemin analitik çözümü $u(x)=x$ olarak elde edilmektedir. Elde edilen yaklaşık ve analitik çözümler incelendiğinde sayısal çözümlerle analitik kesin çözüm değerleri tam olarak elde edilmiştir.

Rijit cisim yer değiştirmesi için sınır koşulları $u_{x=0} = u_1$, $u_{x=L} = u_1$ olarak ele alınmaktadır. Bu durumda rijit cisim yer değiştirmesi için analitik çözüm $u(x)=u_1$ olarak elde edilmektedir. Rijit cisim yer değiştirmesi için eleman bağımsız Galerkin çözümleri Şekil 40 ve Şekil 42'de hata dağılımları ise Şekil 41 ve Şekil 43'te verilmiştir.

Rijit cisim yer değiştirmesi problemine ağsız yerel Petrov-Galerkin yöntemiyle yapılan yaklaşım Şekil 44’de hata dağılımı ise Şekil 45’de görölmektedir.

Sonuçlara dikkat edilirse rijit cisim yer değiştirmesi her iki yöntemle de neredeyse kusursuz olarak elde edilmiştir. Yine de bu sonuçlar incelendiğinde ağsız yerel Petrov-Galerkin yönteminin eleman bağımsız Galerkin yöntemine kıyasla daha etkili olduğu söylenebilir.

Sınır değer problemi olarak bir boyutlu ısı iletimi problemi de ele alınmıştır. Bu problem için elde edilen eleman bağımsız Galerkin çözümü Şekil 47’de ve hata dağılımı Şekil 48’de verilmiştir. Eleman bağımsız Galerkin yöntemine benzer bir yaklaşım ağsız yerel Petrov-Galerkin yöntemiyle de yapılmıştır. Ağsız yerel Petrov-Galerkin yöntemi için elde edilen çözüm Şekil 49’da ve hata dağılımı Şekil 50’de verilmiştir. Şekil 48 ve Şekil 50 incelendiğinde yine ağsız yerel Petrov-Galerkin yönteminin eleman bağımsız Galerkin yöntemi ile kıyaslandığında daha hassas sonuçlar sağladığı görölmektedir.

Öz değer problemleri için ise bir ucu ankastre bağlı olan çubuk ve iki ucu ankastre bağlı olan çubuk problemleri ele alınmıştır. Yapılan analizler iki bölüme ayrılmıştır.

Birinci bölümde aksenal yer değiştirme etkisinde bulunan ve sınır koşulları olarak tanım bölgesinde (bir boyutlu problemler için bu bölge bir noktadır) dönmenin olması ve olmaması durumları incelenmiştir. Dönmenin olması durumu Hermite fonksiyonları kullanılarak modellenmiştir.

İkinci bölümde ise eğilme etkisinde bulunan ve sınır koşulu olarak tanım bölgesinde yine dönmenin olması ve olmaması durumları incelenmiştir.

Öz değer problemlerinden bir ucu ankastre bağlı çubuk için elde edilmiş olan ilk dört mod Şekil 46-49’da verilmiştir. Yapılan çözümler için hata dağılımının ayrıntılı olarak incelenebilmesi açısından farklı düğüm sayılarında problemin birinci moduna karşılık gelen öz değerler üzerinde hata analizi Şekil 50’de verilmiştir. Şekil 50’de çözüm bölgesinde 3 adet düğüm kullanılması durumunda % 0.4’lük bir hata elde edilirken düğüm sayısının artmasıyla birlikte hata değeri de önemli ölçüde azalmaktadır. Üç düğüm için hata değerinin göreceli olarak yüksek olmasının sebebi ise çözüm bölgesinin modellenmesi açısından üç düğümün kullanılmasının yeterli olmamasıdır. Şekil 50’de elde sunulan çözümler [25] verilen sonuçlara göre çok daha düşük hata değerlerini içermektedir.

A moment matrisinin tersinin alınabilmesi için çözüm bölgesi içinde belirli sayıda şekil fonksiyonunun kesişmesi gerekmektedir. Kesişmesi gereken şekil fonksiyonu sayısı için minimum sayı, P^T vektörü ile belirtilen yaklaşım tabanında bulunan eleman sayısının

bir fazlası olarak elde edilebilmektedir. Örneğin $P^T=[1 \ x]$ olduğu dikkate alınırsa çözüm bölgesi içindeki bir düğüm üzerinde en az üç adet şekil fonksiyonunun tanımlı olması gerekmektedir. Bu sebeple üç adet düğüm bu koşulun sağlanması için yetersiz olmaktadır.

Yapılmış olan bir ucu ankastre bağlı ve iki ucu ankastre bağlı çubukların birinci modları için farklı düğüm sayılarındaki çözümler Tablo 1 ve Tablo 2’de özetlenmiştir.

Elde edilen mod değerleri analitik çözümler ile karşılaştırıldığında hata değerleri oldukça küçüktür. Eleman bağımsız Galerkin çözümü birinci modlar için kesin çözüme oldukça iyi bir yakınsama sağlamıştır.

Başlangıç sınır değer problemlerini yansıtan denklemler içerdikleri zamana bağlı türev mertebesine göre hiperbolik ve parabolik olarak sınıflandırılır.

Hiperbolik denklemler yer değiştirmenin zamana göre ikinci türevini yani ivme terimini içeren denklemlerdir. Parabolik denklemler ise yer değiştirmenin zaman göre birinci türevini içermektedir. Parabolik denklemlere ivme terimini içermeyen denklemler de denilmektedir.

Her iki denklem grubu için tanımlanmış olan zaman integrasyon yöntemleri mevcuttur.

Hiperbolik denklemler için zaman integrasyon yöntemlerinden bazıları;

- Merkezi farklar yöntemi
- Houbolt yöntemi
- Wilson teta yöntemi
- Newmark yöntemi

olarak sıralanabilir. Yapılan tez çalışmasında Newmark zaman integrasyon yöntemi kullanılmıştır.

Parabolik denklemler için önerilmiş olan zaman integrasyon yöntemlerinden bazıları

- Crank-Nicolson yöntemi
- Galerkin yöntemi

olarak belirtilebilir. Yapılan tez çalışmasında parabolik denklemler için Crank-Nicolson zaman integrasyon yöntemi kullanılmıştır.

Başlangıç sınır değer problemlerinde ağsız yöntemler sadece sistem denklemlerinin oluşturulmasında ve katılık matrisi, kütle matrisi ve sönüm matrisinin elde edilmesi işlemlerinde kullanılmaktadır. Dolayısıyla çözüm üzerinde çok fazla bir etkiye sahip olmamaktadır. Başlangıç sınır değer problemleri için hassas çözümler ancak zaman adımının küçük seçilmesi ile elde edilebilir.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

4.1. Sonuçlar

Yapılan tez çalışmasında;

- Ağırlık fonksiyonları spline ve gauss fonksiyonları olarak seçilmiştir.
- Ağırlık fonksiyonları için etkinlik yarıçapının önemi ve etkinlik yarıçapına bağlı olarak ağırlık fonksiyonu yapıları incelenmiştir.
- Hareketli en küçük kareler çözüm süreci formüle edilerek, hareketli en küçük kareler şekil fonksiyonları elde edilmiştir.
- Elde edilen şekil fonksiyonlarının etkinlikleri uygun fonksiyonlar seçilerek test edilmiştir.
- Hareketli en küçük kareler şekil fonksiyonları kronecker delta özelliğine sahip olmadıklarından şekil fonksiyonları için kaynak [16]'da önerilmiş olan dönüşüm yöntemi kullanılmıştır. Bu sayede dönüştürülen şekil fonksiyonları kronecker delta özelliğini sağlamaktadır.
- Sınır koşulları dönüşüm işlemi ile elde edilen yeni şekil fonksiyonları kullanılarak sonlu elemanlar yönteminde olduğu gibi uygulanmıştır.
- Sınır koşulları yer yer penaltı yöntemi kullanılarak, eleman bağımsız Galerkin ve ağırsız yerel Petrov-Galerkin yöntemlerine ait formülasyonlar verilerek bu formülasyonlar matlab hazır program kütüphanesinden de yararlanılarak bir boyutlu çeşitli mühendislik problemlerinin çözümlerinde kullanılmıştır.
- Sınır değer problemleri olarak eksenel yük etkisinde bulunan bir çubuk problemi ve rijit cisim yer değiştirmesi problemleri çözülmüştür. Elde edilen sonuçlar analitik değerler ile tam olarak örtüşmektedir.
- Eleman bağımsız Galerkin ve ağırsız yerel Petrov-Galerkin yöntemlerinin kompozit yapıdaki problemlere rahatlıkla uygulanabileceği gösterilmiştir.
- Öz değer problemleri, eksenel yer değiştirmeye bağlı çözüm ve enine (çubuk eksenine dik) yer değiştirmeye bağlı çözüm olarak iki grupta incelenmiştir. Enine (çubuk eksenine dik) yer değiştirmenin modellenebilmesi için Hermite fonksiyonları elde edilmiş ve kullanılmıştır. Öz değer problemleri için Eleman

Bağımsız Galerkin yöntemi ile elde edilen sonuçlar analitik değerlerle tam olarak örtüşmektedir.

- Eleman bağımsız Galerkin ve ağsız yerel Petrov-Galerkin yöntemleri ile bir boyutlu başlangıç sınır değer problemleri için analitik çözüme oldukça yakın sonuçlar üretilebileceği görülmüştür.
- Parabolik denklemlerin zaman integrasyonu için Crank-Nicolson yöntemi kullanılmıştır.
- Hiperbolik denklemlerin çözümünde Newmark zaman integrasyon yöntemi kullanılmıştır.
- Seçilen ağsız yöntemlerle sönümlenme etkisinde bulunan sistemlerin davranışları incelenmiştir.
- Gerçekleştirilen bu işlemler sonucunda Eleman Bağımsız Galerkin ve Yerel Petrov-Galerkin ağsız yöntemlerinin uygulanmasının kolay ve bu tez çalışmasında incelenen problemler için oldukça doğru sonuçlar ürettikleri belirlenmiştir.
- Bu özellikleri ile pek çok mühendislik probleminin çözümünde ağsız yöntemlerin diğer sayısal yöntemlere alternatif oluşturabileceği gibi bu yöntemlerle birlikte de kullanılabilecekleri sonucuna varılmıştır.

4.2. Öneriler

- Yapılan tez çalışmasında bir boyutlu problemler ele alınmıştır. Formülasyon ve geliştirilen yazılım iki ve üç boyutlu pek çok problemlere genişletilebilir.
- Bu çalışmada şekil fonksiyonları hareketli en küçük kareler yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Şekil fonksiyonları çekirdek yöntemi ve birimlerin parçalanması yöntemleri kullanılarak ta elde edilebilir
- Ağsız yöntemlerden eleman bağımsız Galerkin ve ağsız yerel Petrov-Galerkin yöntemleri için çözüm süreçleri oluşturulmuştur. Diğer ağsız yöntemlerden nokta interpolasyon yöntemi (Point Interpolation Method), yerel sınır integral eşitliği (Local Boundary Integral Equation) gibi yöntemler için çözüm süreçleri elde edilebilir.
- Eleman bağımsız Galerkin ve ağsız yerel Petrov-Galerkin yöntemleri iki boyutlu problemler için uygun hale getirilebilir.

- Yapılan tez çalışmasında hiperbolik denklemler için sadece Newmark Yöntemi için çözümler elde edilmiştir. Merkezi farklar, Houbolt yöntemi ve Wilson teta yöntemi gibi zaman integrasyon yöntemleri için çözümler elde edilebilir.
- Yapılan tez çalışmasında sadece lineer problemler ele alınmıştır. Non-lineer problemler incelenebilir.

5. KAYNAKLAR

1. Liu G.R., Meshfree Methods: Moving Beyond The Finite Element Method, CRC Pres, 2003.
2. Kambur Ç., Assessment of Mesh-Free Methods in LS-DYNA: Modeling of Barriers in Crash Simulation. MSc Thesis, Institute for Structural Mechanics, Stuttgart, 2004.
3. Dawn R.P. ve Ivatury S.R., Meshless Local Petrov-Galerkin Method for Bending Problems. Langley Research Center Hampton, Paper No: NASA/TM 2002-211936, Virginia, 2002.
4. Ching H.K., Solution of Linear Elastostatic ve Elastodynamic Plane Problems by the Meshless Local Petrov-Galerkin Method, PhD Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 2002.
5. De.S. Generalized Finite Element Method, Lecture 3 Approximation (LS ve MLS) [http:// rpi.edu/~des/Teaching.html](http://rpi.edu/~des/Teaching.html) spring 2003.
6. Zhu T. ve Atluri S.N., A Modified Collocation Method ve A Penalty Formulation for Enforcing the Free Galerkin Method, Computational Mechanics, 21 (1998) 211-222.
7. Atluri S.N. ve Shen S., The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method: A Simplified & Less Costly Alternative to the Finite Element and Boundary Element Methods, CMES, 1 (2002) 11-51.
8. T. Zhu, J.D. Zhang ve S.N. Atluri. A Local Boundary İntegral Equation (LBIE) Method in Computational Mechanics ve A Meshless Discretization Approach, Computational Mechanics, 21 (1998) 223–235.
9. Atluri S.N. ve Zhu T., A New Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Approach in Computational Mechanics, Computational Mechanics, 22 (1998) 117-127.
10. Fries T.P. ve Matthies H.G., Classification ve Overview of Meshfree Methods, [http://bib1lp1.rz.tubs.de/docportal/servlets/MCRFileNodeServlet/DocPortal_derivate_0001418/ Document.pdf;jsessionid=0000sSLpGS9IHECA1O-3HdgGFvt?hosts=local](http://bib1lp1.rz.tubs.de/docportal/servlets/MCRFileNodeServlet/DocPortal_derivate_0001418/Document.pdf;jsessionid=0000sSLpGS9IHECA1O-3HdgGFvt?hosts=local), spring, 2004.
11. Duflo M. ve Dang H.N., A Truly Meshless Galerkin Method Based on a Moving Least Squares Quadrature, Communications in Numerical Methods in Engineering, 6 (2002) 441-449.
12. Karadeniz S., Mühendislikte Sonlu Elemanlar Yöntemi, Yayınlanmamış Ders Notları Karadeniz Teknik Üniversitesi, 1991.

13. Raju I.S. ve Phillips D.R., A Local Coordinate Approach in the MLPG Method for the Beam Problems, Langley Research Center, Hampton, Paper No: NASA/TM 2002-211463, Virginia, 2002.
14. Zienkiewicz O.C. ve Taylor R.L., The Finite Element Method, McGraw-Hill Book Company, Volume I, Berkshire, 1967.
15. Li S. ve Liu W.K., Meshfree and Particle Methods and Their Applications, Applied Mechanics Rev., 55, 1 (2002).
16. Atluri S.N., Kim H.G. ve Cho J.Y., A Critical Assessment of The Truly Meshless Local Petrov-Galerkin Method ve Local Boundary Integral Equation Methods, Computational Mechanics, 24 (1999) 348-372.
17. Schembri P., A 3D Meshless Computational Procedure for Nonlinear Analysis of Structures, PhD Thesis. Texas A&M University, San Antonio, 2002.
18. Hutton D.V., Fundamentals of Finite Element Analysis, McGraw-Hill Book Company, First Edition, New York, 2004.
19. Dimarogonas A., Vibration For Engineers, Second Edition, Prentice-Hall International Edition, New Jersey, 1996.
20. Rao S.S., Mechanical Vibrations, Third Edition, Addison-Wesley Publishing Company, USA, 1995.
21. Petyt M., Introduction To Finite Element Vibration Analysis, Cambridge University Press, New York, 1990.
22. Karadeniz S., Uygulamalı Sonlu Elemanlar Analizi, Yayınlanmamış Ders Notları, Karadeniz Teknik Üniversitesi , 1991.
23. Cheung Y.K. ve Leung A.Y.T., Finite Element Methods in Dynamics, Kluwer Academic Publishers, Hong Kong, 1991.
24. S. Karadeniz., Uygulamalı Sonlu Elemanlar Analizi, Yayınlanmamış Ders Notları II Karadeniz Teknik Üniversitesi, 2005.
25. Tiago C.M. ve Leitao V.M.A., Analysis of Free Vibration Problems with the Element Free Galerkin Method, Numerical Methods in Continuum Mechanics, 2003.
26. Steidel R.F. Jr., An Introduction to Mechanical Vibrations, John-Wiley & Sons, Inc, Third Edition, Canada, 1989.
27. Clough R.W. ve Penzien J., Dynamics of Structures, Second Edition, McGraw-Hill International Editions, Singapore, 1993.
28. Reddy J.N., An Introduction to The Finite Element Method, Second Edition, McGraw-Hill International Editions, Singapore, 1993.

29. Bathe K.J. ve Wilson E.L., Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice Hall, Inc, 1976.
30. Bathe K.J., Finite Element Procedures for Engineering Analysis, Prentice-Hall, Inc, 1982.
31. Kewei Z., 2004, Parial Differential Equations Course Material. <http://maths.sussex.ac.uk/Staff/KZ/PDE/>
32. Liu G.R. ve Gu Y.T., An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming, Springer, Netherlands, 2005.

EKLER**EK 1.**

Ek Tablo 1. Gauss integrasyonunda kullanılacak olan Gauss noktaları ve bu noktalara karşılık gelen ağırlık değerleri

n=1

ζ	w
0	2.0000000000000000

n=2

ζ	w
0.577350269189626	1.0000000000000000
-0.577350269189626	1.0000000000000000

n=3

ζ	w
0.774596669241483	0.5555555555555556
0.0000000000000000	0.8888888888888889
-0.774596669241483	0.5555555555555556

n=4

ζ	w
0.861136311594953	0.347854845137454
0.339981043584856	0.652145154862546
-0.339981043584856	0.652145154862546
-0.861136311594953	0.347854845137454

n=5

ζ	w
0.906179845938664	0.236926885056189
0.538469310105683	0.478628670499366
0.0000000000000000	0.5688888888888889
-0.538469310105683	0.478628670499366
-0.906179845938664	0.236926885056189

Ek Tablo 1 'in devamı

n=6

ζ	w
0.932469514203152	0.171324492379170
0.661209386466265	0.360761573048139
0.238619186083197	0.467913934572691
-0.238619186083197	0.467913934572691
-0.661209386466265	0.360761573048139
-0.932469514203152	0.171324492379170

n=7

ζ	w
0.949107912342759	0.129484966168870
0.741531185599394	0.279705391489277
0.405845151377397	0.381830050505119
0.000000000000000	0.417959183673469
-0.405845151377397	0.381830050505119
-0.741531185599394	0.279705391489277
-0.949107912342759	0.129484966168870

n=8

ζ	w
0.960289856497536	0.101228536290376
0.796666477413627	0.222381034453374
0.525532409916329	0.313706645877887
0.183434642495650	0.417959183673469
-0.183434642495650	0.417959183673469
-0.525532409916329	0.313706645877887
-0.796666477413627	0.222381034453374
-0.960289856497536	0.101228536290376

n=9

ζ	w
0.968160239507626	0.081274388361574
0.836031107326636	0.180648160694857
0.613371432700590	0.260610696402935
0.324253423403809	0.312347077040003
0.000000000000000	0.330239355001260
-0.324253423403809	0.312347077040003
-0.613371432700590	0.260610696402935
-0.836031107326636	0.180648160694857
-0.968160239507626	0.081274388361574

Ek Tablo 1'in devamı

n=10

ζ	w
0.973906528517172	0.066671344308688
0.865063366688985	0.149451349150581
0.679409568299024	0.219086362515982
0.433395394129247	0.269266719309996
0.148874338891631	0.295524224714753
-0.148874338891631	0.295524224714753
-0.433395394129247	0.269266719309996
-0.679409568299024	0.219086362515982
-0.865063366688985	0.149451349150581
-0.973906528517172	0.066671344308688

n=15

ζ	w
0.98799251802	0.030753241995
0.937273392401	0.0703660474883
0.84820658341	0.107159220467
0.72441773136	0.139570677926
0.570972172609	0.166269205817
0.394151347078	0.186161000016
0.201194093997	0.198431485327
0	0.202578241966
-0.201194093997	0.198431485327
-0.394151347078	0.186161000016
-0.570972172609	0.166269205817
-0.72441773136	0.139570677926
-0.84820658341	0.107159220467
-0.937273392401	0.0703660474883
-0.98799251802	0.030753241995

n=20

ζ	w
0.993128599185	0.0176140070678
0.963971927278	0.0406014298819
0.912234428251	0.0626720482976
0.839116971822	0.0832767415506
0.74633790646	0.101930119826
0.636053680727	0.118194531969
0.510867001951	0.131688638458
0.373706088715	0.142096109327
0.227785851142	0.149172986482
0.0765265211335	0.15275338714
-0.0765265211335	0.15275338714
-0.227785851142	0.149172986482
-0.373706088715	0.142096109327

Ek Tablo 1'in devamı

-0.510867001951	0.131688638458
-0.636053680727	0.118194531969
-0.74633790646	0.101930119826
-0.839116971822	0.0832767415506
-0.912234428251	0.0626720482976
-0.963971927278	0.0406014298819
-0.993128599185	0.0176140070678

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Bulgaristan'ın Kırçali kentinde doğdu. Lise öğrenimini Bursa da tamamladı. 1999 yılında K.T.Ü Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Makine Mühendisliği Bölümünü kazandı. 1999 yılında kaydını dondurdu. 2000 yılında eğitime geri döndüğü K.T.Ü Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Makine Mühendisliği Bölümünden 2004 yılında mezun oldu. 2004 yılında K.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Mühendisliği Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimine başladı. Aralık 2005'te Fen Bilimleri Enstitüsü kadrosunda Araştırma Görevlisi olarak atandı. Halen bu görevine devam etmektedir.