756075

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

KARADA VE SU ALTINDA ÇALIŞAN ESNEK KOLLU ROBOTLARIN MODELLENMESİ VE KONTROLÜ

Mak. Müh. Nurhan GÜRSEL

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"Makina Yüksek Mühendisi"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 24.11.2004
Tezin Savunma Tarihi : 17.12.2004

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Levent GÜMÜSEL
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Osman GÜRSOY
Jüri Üyesi : Doç. Dr. Muzaffer DOĞAN

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Emin Zeki BAŞKENT

Trabzon 2004

ÖNSÖZ

Esnek kollu robotlar, hafif oluşları, hareket yeteneklerinin daha fazla oluşu ve daha ekonomik oluşları nedeniyle günümüzde önemli bir araştırma alanı oluşturmuştur. Bu alana yönelik modelleme ve kontrol çalışmaları için pek çok yöntem geliştirilmiştir. Bu çalışma çerçevesinde karada ve su altında esnek kollu robotların dinamiğinin modellenmesi ve kontrolü yapılmıştır.

Bu çalışma, K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsüne ‘‘ Karada ve Su Altında Çalışan Esnek Kollu Robotların Modellenmesi ve Kontrolü ’’ adı altında Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Yüksek lisans tez danışmanlığımı üstlenerek, çalışma alanı hakkında ufkumu açan, bana her konuda yol gösteren ve yardımcı olan sayın hocam Doç. Dr. Levent GÜMÜŞEL ’e yardımlarından ötürü sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek Lisans sırasında tanıştığım ve güzel dostluklar kurduğum sevgili arkadaşlarım Ebru Öztekin, Fatma Nur Pehlivan, Yücel Özmen ve Selçuk Çebi ’ye , çalışmalarım esnasında yaptıkları yardımlar için minnet borçluyum.

Ayrıca yüksek lisans kararımı destekleyen ve bana evini açan sevgili ablam Yrd. Doç. Dr. Fatma Gültekin’e ve maddi manevi her an yanımda olan annem, babam ve tüm aileme yürekten teşekkürlerimi sunuyorum.

Nurhan GÜRSEL

Trabzon, 2004

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Robotların kullanım alanları, teknolojinin gelişmesiyle birlikte her geçen gün artmaktadır. Son yıllarda bu alanda yapılan çalışmalar hız kazanmış, daha ekonomik, daha hafif olan ve hızlı hareket eden robot kollarının önemi artmıştır.

Bu yüksek lisans tez çalışmasında, üç eklemli ilk ikisi katı üçüncüsü esnek robot kolunun karadaki davranışı ve su altında çalışan ilki katı ikincisi esnek iki kollu robota etkiyen direnç kuvvetinin sistem performansına etkisi bilgisayar ortamında modellemesi yapılarak incelenmiş, klasik kontrol yöntemlerinden olan P ve PD kontrol metotları uygulanarak sistemin cevabı değerlendirilmiştir.

Sistemin hareket denklemleri Hamilton Prensibi'nden ve özdeğer problemi yaklaşımından faydalanılarak türetilmiştir. MATLAB dilinde geliştirilen benzetim programı, sistemin dinamiğini tanımlayan doğrusal olmayan adi diferansiyel denklemleri Runge-Kutta algoritmasını kullanarak çözmektedir.

Uygulanan kontrol metotları arasında PD kontrolün daha hızlı cevap verdiği ve uç sapmalarının daha hızlı sönümlendiği görülmüştür. Ayrıca esnek kolun ucundaki yük miktarındaki artmanın, titreşimlerin frekansını azalttığı fakat genliğini artırdığı tespit edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Esnek Kollu Robotlar, Su Altı Robotları, Modelleme, P kontrol, PD Kontrol

SUMMARY

Modelling and Control of Terrestrial and Sub-sea Flexible Manipulators

The usage fields of robots have increased rapidly due to the developing technology. Studies on this field have gained speed recently and the lightweight, fast and economic robots became more important.

In this study, modeling and control of a three link robot manipulator whose first and second link are rigid and the third one flexible is considered and also a two link manipulator whose first link is rigid and the second one flexible working under the water environment is considered. The response of the systems is evaluated by applying some of the classical control methods which are known P and PD control.

Governing equations of the systems are derived from Hamilton Principle and eigenvalue approximation method. The code that is written in MATLAB for system simulation has solved nonlinear ordinary differential equations defining the system dynamics by using Runge - Kutta algorithm.

It is seen that, PD control gives faster response and is more effective in tip position control. In addition to this, it is found that increasing payload causes a decrease in the frequency of vibration meanwhile increasing the amplitude of it.

Key Words: Flexible Manipulators, Sub-sea Robots, Modelling, P Control, PD Control

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa No

SEMBOLLER DİZİNİ

A : Karakteristik alan, (m^2)

b : Esnek kolun kalınlığı, (mm)

C_D : Direnç katsayısı,

C_L : Kaldırma katsayısı,

E : Esnek parçanın Young esneklik modülü, (N/m^2)

E(s):Hata sinyali

F_b : Suyun kaldırma kuvveti (N)

F_D : Direnç kuvveti

F_L : Taşıma kuvveti

h: Esnek kolun genişliği, (mm)

I_a : Esnek parçanın yüzey atalet momenti, (mm^4)

Ih_1: Birinci eklemi süren motorun rotorunun eylemsizlik momenti, (kg/m^2)

Ih_2: İkinci eklemi süren motorun rotorunun eylemsizlik momenti, (kg/m^2)

Ih_3: Üçüncü eklemi süren motorun rotorunun eylemsizlik momenti, (kg/m^2)

K_d : Türevsel kazanç katsayısı

K_P: Oransal Kazanç Değeri

L_1: Birinci kati kolun uzunluğu, (m)

L_2: İkinci kati kolun uzunluğu,(m)

L_3: Esnek kolun uzunluğu, (m)

L_{bo} : Esnek kolun uç noktasının O orijinine uzaklığı, (mm)

m_a: 1. kolun ucunda 2. kolu hareketlendiren motorun kütlesi, (kg)

m_b: 2. kolun ucunda esnek kolu hareketlendiren motorun kütlesi, (kg)

$m_{yük}$: Esnek kolun taşıyacağı yükün kütlesi, (kg)

M_1: Birinci kati kolun kütlesi, (kg)

M_2: İkinci kati kolun kütlesi, (kg)

M_3: Esnek kolun kütlesi, (kg)

M_D : Direnç momenti

$\vec{r}_1(x,t)$: Birinci katı kol üzerindeki x noktasının pozisyon vektörü

$\vec{r}_2(x,t)$: İkinci katı kol üzerindeki x noktasının pozisyon vektörü

$\vec{r}_3(x,t)$: Esnek kol üzerindeki x noktasının pozisyon vektörü

δT : Sistemde oluşan toplam kinetik enerjiler ($T= T_1+T_2+T_3$)

V : Akış hızı, (m/s)

δV : Sistemde oluşan toplam potansiyel enerjiler

V_{ao} : Birinci kol O noktası etrafında sadece $\dot{\theta}_1$ açısal hızıyla döndürüldüğünde birinci kolun A ucunda oluşan çizgisel hız

V_{ba} : Esnek kol A noktası etrafında sadece $\dot{\varphi}$ açısal hızıyla döndürüldüğünde esnek kolun B ucunda oluşan çizgisel hız

V_{bo} : Esnek kol sabitlenip birinci kolla birlikte O noktası etrafında sadece $\dot{\theta}_1$ açısal hızıyla döndürüldüğünde esnek kolun B ucunda oluşan çizgisel hız

W : Sistemde korunmayan kuvvetler tarafından yapılan işler

z(x,t): Esnek parçanın davranışı

Yunan Harfleri

β_1: 1. eklemin yağlı sürtünme katsayısı, (Nms/rad)

β_2 : 2. eklemin yağlı sürtünme katsayısı, (Nms/rad)

β_3: 3. eklemin yağlı sürtünme katsayısı, (Nms/rad)

δ_o : Dirac delta operatörü

$\eta_i(t)$:Deformasyon koordinatları

θ_1: Birinci katı kolun katı hal pozisyonu ile referans arasındaki açı

θ_2: İkinci katı kolun katı hal pozisyonu ile referans arasındaki açı

$\dot{\theta}_1$: Birinci katı kolun katı hal pozisyonu ile referans arasındaki açısal ivmesi

$\dot{\theta}_2$: İkinci katı kolun katı hal pozisyonu ile referans arasındaki açısal ivmesi

λ_i : Sabit

ρ : Suyun yoğunluğu, (kg/m^3)

ρ_1: Birinci kati kolun birim uzunluk başına kütlesi, (kg/m)

ρ_2 : İkinci katı kolun birim uzunluk başına kütlesi, (kg/m)

ρ_3 : Esnek kolun birim uzunluk başına kütlesidir, (kg/m)

φ: Esnek kolun katı hal pozisyonu ile referans arasındaki açı

$\dot{\varphi}$: Esnek kolun katı hal pozisyonu ile referans arasındaki açısal ivmesi

$\phi_i(x)$: Sonsuz sayıdaki mod şekilleri

ς : Herhangi bir *i.* mod şekline ait olan ve doğrudan hesaplanamayan genlik değeri

τ_1 : Birinci ekleme dışardan uygulanan tork

τ_2 : İkinci ekleme dışardan uygulanan tork

τ_3 : Üçüncü ekleme dışardan uygulanan tork

τ(s): Kontrol sinyalindeki değişim

1. GENEL BİLGİLER

1.1.Giriş

Robotik bilimi, robotların temel organizasyon ve çalışmalarını inceleyen ve geleneksel mühendislik sınırlarını aşan bir modern teknoloji alanıdır. Bu bilim dalının oluşmasında makina, elektronik, bilgisayar, endüstri mühendislikleri, ekonomi ve matematik bilimleri gibi birçok bilim dalının koordine çalışması etkilidir. Çünkü robotların ve uygulamalarının çok karmaşık bir yapısı vardır.

Robot terimi ilk olarak 1920 yılında Çek oyun yazarı Karel Capek tarafından '*Rossum'un Evrensel Robotları*' adlı bilimkurgu bir oyunda kullanılmıştır. Yazar angarya – zorunlu iş anlamındaki '*robota*' kelimesi ile işçi anlamına gelen '*robotnik*' kelimelerini birleştirerek '*robotik*' kelimesini türetmiştir. Günümüzde de bu terim otomatik kontrolü olan ve hareket edebilecek serbestlik derecesine sahip makinalar için kullanılmaktadır. Amerikan Robot Enstitüsü'nün tarifine göre; değişik görevler çerçevesinde, çeşitli hareketler için programlanmış malzeme, endüstriyel parça ve özel amaçlı aletleri hareket ettirmek için tasarımı yapılmış tekrar programlanabilir çok fonksiyonlu cihaza '*robot*' denir. Robotların ilkel yapılı malzeme tutucularından, çok gelişmiş antromorfik bilim kurgu makinelere kadar pek çok çeşidi vardır.

İlk endüstriyel robotun 1954 yılında, George C. Devol tarafından programlı bir malzeme tutucusu geliştirilirken ortaya çıktığı kabul edilir. Devol'ün endüstriyel robotlarına öncülük eden teknolojiler, sayısal kontrol ve uzaktan manipülasyondur. Bu yöntemler günümüz robotlarında da kullanılmaktadır.

Sayısal kontrol, bilgisayara daha önceden girilen belirli verileri kullanarak endüstriyel robotun hareketlerini kontrol eden bir sistemdir. Bu veriler cihazın hareket edeceği koordinat noktalarını, başlama ve bitiş aşamalarını ve seçmeli durumlardaki mantık ifadelerini içerir. Tüm işlem adımları ve bileşenleri, köklü donanım değişimlerine gerek kalmadan okunur ve bir hafızada saklanır. Sayısal kontrol günümüzde artan sistem esnekliğinde önemli bir rol oynamaktadır. Endüstriyel robotların bir diğer kullanım yeride uzaktan kumanda gerektiren işlemlerdir. Uzaktan kumanda etmek, işi belli bir mesafeden yapmak demektir. Bunlar daha çok insanların kolaylıkla ve güvenli bir şekilde çalışamadığı, radyo-aktif maddelerin bulunduğu, deniz altı ve uzay çalışmalarının yapıldığı alanlardır. Robotlar uzak veya tehlikeli ortamlarda çok kullanışlıdır. 1979 yılında Amerika'daki Middleton Three Mile Adası'nda gerçekleşen nükleer kazada uzaktan kumanda edilebilen robot kolu sayesinde radyoaktif ortamdaki malzemelere ulaşılmıştır [1].

Sayısal kontrol ve uzaktan kumandalı manipülasyonun birleşmesiyle robotik bilimi oluşmuştur. Mevcut teknolojilerden tamamen farklı olan bu bilim dalı sayesinde tasarım ve kontrol aşamasında pek çok önemli sonuç elde edilmiştir [2].

Robotlar üzerinde yapılan sayısız araştırmaya ve bu konuda çalışan çok sayıda bilim adamına rağmen, robot performansı ile insanlar kıyaslandığında, robotların hala bir hayli geride oldukları söylenebilir. Robotların geleneksel makinalara göre çok daha hızlı ve ustalıklı olması beklenir. Endüstride kullanılan robotların hemen hepsi kontrolcüler ve algılayıcılarla donatılmıştır ama kendi ağırlığı ve taşıdığı yük göz önüne alındığında, bir insan kolunun performansını göstermekten çok uzaktırlar. İnsanın sahip olduğu eş zamanlı geri besleme kabiliyetli kolları, kuvvet ve tork kontrollüne müsait kasları ona robot kollarıyla kıyaslanamayacak üstünlük sağlamaktadır. Fakat, robotların da yorulmama, verilen bir işi defalarca yapabilme, yüksek hassasiyet, yüksek hız, tehlikeli ve insanın gitmesi mümkün olmayan ortamlarda çalışabilme, düşük maliyet gibi üstünlükleri vardır ve bu özellikler onları günümüz endüstrisinin vazgeçilmezleri arasına sokmuştur. Robot kollarından insana özgü ustalık ve hızda hareket edebilme beklentisi, onların mekanik yapısını insan koluna benzeyen bir görünüm almaya zorlamaktadır. Bu nedenle robotların mekanik yapısının birbirlerine bağlı mesnetli kirişlerden meydana geldiği görülür. Böyle bir yapıda doğal olarak bir takım uyumsuzluklar gözlenir. Bu uyumsuzlukların başında titreşim ve konum sapmaları gelir. Bu zorlukların üstesinden gelmek için geliştirilmiş tasarım ve kontrol tekniklerine ihtiyaç vardır [3]. Robot sistemleri yapısal olarak rijit sistemler ve esnek sistemler olarak ikiye ayrılır.

1.1.2.Rijit Robot Kolları

Geçmişte ve hatta günümüzde kullanılan robotların çoğu rijit cisim dinamiğine göre tasarlanmıştır. Rijit sistem, ağır kütle, büyük tahrik kaynağı ve yüksek enerji tüketimi gibi olumsuzluklara neden olduğundan, hafif, esnek uzuvlu manipülatörlere ilgi giderek artmaktadır. Günümüz robotlarından en fazla beklenen performans karakteristiği uç nokta hassasiyetidir. Robotların bağlantı noktaları geniş, rijit ve ağırdır. Bu nedenle bu noktalarda titreşim gözlenir. Kolların ağır olması, motorun gücünün çoğunun bu kolların uzatılmasında ve yerçekimine karşı yukarı kaldırılmasında harcanmasına neden olur. Öte yandan yükler robotun kütlesine oranla oldukça hafif olmalıdır, çünkü büyük yükler bağlantılarda sarkmalara ve titreşimlere neden olur ki bunlar da uç-nokta hassasiyetinde belirsizlik yaratır. Bu da rijit robotların çok yavaş ve verimsiz çalışmasına neden olur. Bu nedenle günümüz robot kollarının (*manipülatörlerin*) hız ve yük kapasitesi sınırlıdır.

Örneğin uzay uygulamalarında robotlar genellikle hareket edebilen araçlar üzerine monte edilmektedir, bu da hacimsel olarak çok büyük bir yapı oluşturmaktadır. Uzay aracının taşıyacağı yükün hacmi ve ağırlığı sınırlı olduğundan rijit kolların uzay araştırmalarında kullanışlı olmadığı açıktır.

1.1.3. Esnek robot kolları

Robot sistemlerinde iki tür esneklik göz önüne alınmalıdır. Bunlar eklem esnekliği ve kol esnekliğidir. Eklem esnekliği, robot kollarının hareketini sağlamak için eklem yerlerinde (*joints*) kullanılan hareketlendiricilerdeki (*actuators*) dişlilerin, taşıyıcıların şekil bozunumu vb. nedenlerle ortaya çıkar. Bu tür esneklik göz önüne alınmadan tasarlanan denetleyiciler genellikle düşük başarıma, istenmeyen bazı salınımların oluşmasına, bazen de kararsızlığa neden olabilmektedir.

Bizim için asıl önemli olan kol esnekliğidir. Rijit robot kollarının hareketlerinin yetersiz kalması kol esnekliğini gündeme getirmiş ve esnek kolların bükülmez olarak modellenememesi sonucunda sistem denklemleri kısmi türevli diferansiyel denklemler olarak ortaya çıkmıştır. Bu kol esnekliği hem modelleme hem de denetleyici tasarımı aşamalarında güçlüklere yol açmaktadır [4].

Endüstride kullanılan robotlar mekanik olarak rijit yapılıdır ve rijit cisim dinamiğine göre kontrol edilmektedir. Bu rijit yapı onların kinematik ve dinamik analizlerini basitleştirmektedir. Aynı zamanda bu tip kollar için kullanılan sensörler ve kontrol sistemleri de daha basit olduğundan, uç titreşimleri motor açıları ölçülerek elde edilebilmektedir. Ne yazık ki bu rijitlik ihtiyacı, eklemleri fazlasıyla ağır ve kalın olan yapılarını da beraberinde getirmektedir. Bu nedenle robotik uygulamalarında daha hafif malzemelere duyulan ihtiyaç artmaktadır. Buna karşın kol yapısındaki hafiflik, manipülatörün daha esnek olmasına ve daha zor kontrol edilmesine neden olmaktadır.

Kontrol güçlüğü şundan kaynaklanır: manipülatör yayılı bir sistem olarak ele alındığından, hareketinin doğru bir şekilde modellenebilmesi için çok sayıda esnek moda ihtiyaç duyulur. Sonuçta sistemin doğrusal olmayan doğasından kaynaklanan çeşitli karmaşıklıklar ortaya çıkmaktadır.

Bu nedenle kollar küçük kesitli ve mevcut görevi yerine getirebilecek esnekliğe sahip olarak tasarlanmalıdır. Esnek kolların dinamik analizinin, rijit kol dinamiği ile karşılaştırıldığında çok daha karmaşık olduğu görülür. Dinamiğin pratik probleme uyarlanmasında ilk adım sistemin dinamik denklemlerinin elde edilmesidir. Esnek kolun deformasyon denklemleri kısmi diferansiyel denklemlerle tanımlandığından, teorik olarak cismin sonsuz sayıda serbestlik derecesi mevcuttur

Elastiklik ve esneklik tüm mekanik elemanların malzemelerine, boyut faktörlerine ve uygulanan kuvvet veya zorlamalara bağlı olarak değişim gösterir. Kolun boyuna göre kalınlığının çok küçük olması işletme esnasında titreşimlere ve uç sapmalarına neden olmaktadır. Uç sapması, esnek kolun rijit kol hareketini referans alarak, rijit durumda alacağı pozisyon ile esnek durumda alacağı pozisyon arasındaki uzaklık olarak ifade edilir.

Esnek kol için dinamik model kurulurken, herhangi bir zorlayıcı dış kuvvet olmasa dahi, kolun hareketi esnasında kütlesi ve taşıdığı yük nedeniyle oluşan atalet kuvvetleri, ve çubuğun kendi malzemesinden kaynaklanan iç sönümün etkisini göz önüne alınarak uç sapması hesaplanmalıdır.

Esnek kolların üstünlükleri şöyledir:

- Küçük tahrik gücüne ihtiyaç duyulması
- Daha yüksek işlem hızları
- Düşük maliyet
- Manipülatörün indirgenmiş ataletinden dolayı daha emniyetli işletim sağlaması
- Sürücülerin taşıyacağı kütlenin azlığı nedeniyle gerekli kalkış kuvvetinin düşüklüğü
- Yükün manipülatör kütlesine oranının daha fazla olması

Esnek kolların işletimindeki en büyük dezavantaj artan hız ve yük miktarının uç sapmasını giderek kötüleştirmesidir. Beklentiler teknoloji geliştikçe bu sorunların aşılacağı ve robot kollarının daha ince ve daha hafif yapılabileceği yönündedir.

Esnek kollu robotların kullanılmasıyla birlikte esnek robot kolu kontrolü de önemli bir araştırma alanı olmuştur. Esnemeden dolayı oluşan sapmaları gidermek için gerekli kontrol yöntemleri de karmaşıktır. Bununla birlikte yüksek performanslı robotlara olan talebin artması, esnek robot kol dinamiği üzerindeki çalışmalara önem verilmesine neden olmuştur. Bu çalışmaların uygulanması mikroişlemcilerin hesaplama yeteneklerindeki gelişmelerle hızlanmıştır.

Teknoloji geliştikçe değişik uygulamalarda esnek kollu robotlara olan ihtiyaç artmaktadır. Çok farklı ortamlarda uzay araştırmaları, deniz dipleri, nükleer araştırmalar, biyomühendislik alanlarında esnek kollu uygulamaların önemi ortaya çıkmaktadır.

1.1.4. Su Altı Robotları

Denizlerin derinlikleri uzay gibi, insanoğlu için yüzyıllar boyunca hep gizemli yerler olarak kalmıştır. Teknolojinin belli bir düzeye eriştiği 1960'lı yıllarda, bu gizemli yerler en sonunda keşfedilmeye başlandı. Denizbilimci Jacques-Yves Cousteau'nun denizlerin derinlikleriyle ilgili yaptığı araştırmalar, bizlere bu dünya hakkında ne kadar az şey bildiğimizi göstermiştir. O yıllardan bu yana deniz araştırmalarında önemli yol kat edilmiştir. Günümüzde denizbilimcileri, araştırmalarını becerikli robotlar sayesinde gemiden yürütebilmekte, ya da günlerce sualtında kalabilen robotlar sayesinde "yerinde" yapabilmektedirler.

Tuzlu deniz suyu, sualtı araçlarının özellikle hareketli olan parçalarına önemli zararlar vermektedir. Hidrodinamik kuvvetlerin tayinindeki güçlükler, derinlikle orantılı artan statik basınca dayanıklı malzeme temini gibi kara robotları için dikkate alınmayan güçlükler nedeniyle, derin deniz ortamlarının araştırılması, en az uzayın araştırılması kadar teknolojik gelişmişlik gerektirmektedir. Kontrol açısından düşünüldüğünde, sualtı robotları bilinmeyen çevrede hareket edebilmesi, mobil tabanı, dış etkiler, düşük duyusal bant genişliği ve dinamik parametrelerin tahminindeki zorluklar gibi nedenlerden dolayı yer yüzeyindeki robotlara göre daha fazla özelliğe sahip olmalıdırlar. Yapılan çeşitli teorik ve deneysel çalışmalara rağmen, uygulamada henüz esnek kollu su altı robotlarına rastlanılmamaktadır. Bununla birlikte deniz diplerinin araştırılmasında, boru hatlarının ve deniz altından geçen kabloların tamirinde, kıyı yapılarının tamir ve bakımında hala insanlı sualtı robotları kullanılmaktadır [5]. Bu tür insanlı yapıların kullanılmasındaki başlıca sakıncalar, maliyetinin çok yüksek olması ve bilinmeyen bir çevrede çalışma zorluğudur. Bu bağlamda, elbette ki otomatik kontrollü araca monte edilen bir manipülatörün rolü çok büyük olacaktır.

Su altı araçlarına takılan robot kollarının kontrolünde bugün kullanılan teknoloji sahip/köle (*master/slave*) yaklaşımıyla sınırlıdır. Sahip/köle yaklaşımında yetenekli bir operatör ana manipülatörü bir joystick gibi hareket ettirir ve köle manipülatör de işi yerine getirir. Bu tür bir tekniğin sınırlamaları şunlardır: operatör iyi eğitilmiş olmalıdır, sualtı iletişimi zordur bu nedenle kontrol esnasındaki önemli bir gecikmeye karşı deneyimli olmalıdır. Ayrıca eğer görev su derinliklerinde yapılıyorsa, gerektiğinde yüksek maliyetli iletişim problemlerinin halledilebilmesi için, içinde insan olan araçlardan biri insansız araca yakın mesafede bulundurulmalıdır. Araştırma merkezlerinin çok az bir kısmında Otomatik Sualtı Araç-Manipülatör Sistemi ile ilgili ekipman mevcuttur [6]. Bu nedenle elbette ki araca monte edilen otomatik kontrollü bir manipülatörün rolü çok büyük olacaktır.

1.2. Literatür Çalışması

Yüksek hızlı, hafif ve az enerji harcayan robot kollarına duyulan ihtiyaçlar yüzünden, esnek robot kollarının kinematik ve dinamik analizi ve kontrolü üzerindeki analitik ve deneysel çalışmalar hız kazanmıştır.

Esnek bağlantılı manipülatörlerin kontrolü hakkında yapılan ilk çalışmalar Cannon ve Schmitz'e aittir [7]. Esnek bir bağlantı ele alınarak, tek bir boyutta esnek olduğu düşünülüp (yerçekimine düşey), Lineer Kuadratik Gaussian (LQG) konum kontrolü yaklaşımı tasarlanmıştır. Robotun hareketini, kirişte artık titreşimler oluşmadan mümkün olduğunca hızlı kılabilmek için uç nokta duyarlılığı kullanılmıştır. Pek çok araştırmacı bu konu üzerinde hala çalışmakta ve değişik esnek kontrol modları kullanmaktadır. Bir bağlantılı esnek robotun uç-nokta kontrolüne ait deneysel çalışmalar da sürmektedir. Bu çalışmalarda bir ucu özenle konumlandırılmış ve diğer ucu da burulmaya maruz bir eleman için kontrol stratejileri geliştirilmiştir. Bu deneyler algılayıcıların sürücülerle birlikte çalıştığı çok esnek manipülatörlerin kontrolünde karşılaşılan zorlukların üstesinden gelmek için yapılmıştır.

Bu nedenle araştırmaların çoğu tek eklemli kollar üzerinde yapılmıştır [8,9,10]. Robot kollarının dinamik eşitliklerinin elde edilmesinde kullanılan iki temel yaklaşım Newton-Euler ve Lagrange yaklaşımlarıdır. Nisar, çalışmasında hafif, tek eklemli esnek kolun kontrol probleminde Direk Model Referanslı Adaptif Kontrol yöntemini kullanmıştır. Matematiksel model Euler- Bernoulli Kiriş Teoremine dayanan Lagrange Farazi modlar metodu kullanılarak türetilmiştir [11].

Yuh ve Young, eksenel hareket eden bir kirişin modellenmesi ve simülasyonu üzerinde çalışmışlardır. Dönme ve öteleme yapan kirişin hareket denklemlerini elde etmek için Newton'un ikinci kanununu kullanarak zaman bağımlı kısmi diferansiyel denklemler elde edilmiş, sınır şartları yerine konarak kirişin yer değiştirmeleri hesaplanmıştır. Çok değişkenli kontrol için indirgenmiş modlar metodu geliştirilmiş, bu metot deneylerle desteklenmiştir. Daha farklı konumlar için bilgisayarda benzetimi hazırlanmıştır. Sonuçların esnek robot kolları için uygulanabilirliği tartışılmıştır [12].

Bir kısım araştırmalar da iki serbestlik dereceli sistemler üzerinde yapılmıştır. Lucibello, Panzieri ve Ulivi' nin yaptığı çalışmada biri esnek diğeri rijit olan iki eklemli bir robot kolu için kontrol metodu geliştirilmiştir. Bu metotta öğrenme stratejili yeniden konum kontrolü geliştirilmiştir. Sabit bir geri besleme kullanılarak, doğrusal olmayan bir sistem, doğrusal sisteme dönüştürülmüştür. Yapılan teorik ve deneysel çalışmalarla, geliştirilen tekniğin etkinliği kanıtlanmıştır [13].

Üç serbestlik dereceli sistemleri ele alan çalışmalar oldukça azdır [14]. Somolinos, Feliu ve Sanchez, endüstriyel uygulamalarda kullanılabilecek üç serbestlik dereceli esnek robot kolunun tasarımı ve dinamik modellemesi üzerinde çalışmışlardır. Tüm kütlenin uçta toplandığı kabul edilerek, sistemdeki titreşimlerini modellemek için uygun bir matris formu oluşturulmuştur. Böylece dinamik denklemler daha sade hale gelmiştir. Kontrol metodu olarak PID kullanılmıştır. Deneysel sonuçlar, toplam kütlenin uç kısımda kabul edilmesiyle oluşturulan sistemin, mevcut endüstriyel robotlardan daha hafif ve hızlı olduğunu göstermiştir [15].

Sakawa [16], esnek bir robot kolu için kısmi diferansiyel denklemler türetmiş ve titreşimle ilgili gerekli sınır koşullarını incelemiştir.

Eksenel yüklemeye maruz ideal narin kiriş problemi ilk olarak (Leonhard Euler, 1744) tarafından çözülmüştür. Euler çözümüne göre, eğilmeden sonra düzlem kesit alanı yine düzlem ve kiriş eksenine dik kalır. Bu kabul Euler-Bernoulli kiriş teorisi olarak bilinir. Bu kabule göre tüm kayma şekil değiştirmeleri sıfırdır. Kirişlerin stabilite analizinde Euler yüküne alternatif olarak Timoshenko ve Gere tarafından iki formülasyon geliştirilmiştir. Karmaşık sistemlerin yaklaşık çözümleri, kabul edilebilir hata sınırları içinde şekil değiştirme enerjisi metoduyla bulunabilmektedir [17]. Timoshenko, nümerik çözüm için küçük artım yöntemini (small increment method) geliştirmiş ve bu konuda yol alınmasına öncülük etmiştir [18].

Esnek kollu robotların titreşim problemlerini çözebilmek için, Wang ve Wei, robot kolunu ince prizmatik bir kiriş gibi kabul ederek modellemişlerdir. Boyu zamanla değişen bir robot kolundaki uzama ve kısalmanın, kolun titreşimi üzerinde dengeleyici ve dengeyi bozucu etkisi araştırılmıştır. Temel hareket denklemlerini elde etmek için Galerkin metodundan faydalanılmıştır. Tipik bir robot kolu için sayısal çözümler elde edilmiştir [19].

İftar ve Doğan, esnek robotik sistemler için gürbüz kontrol tasarımı yaklaşımlarının geliştirilmesi konusunda çalışmışlardır [20].

Doğan, ilki katı ikincisi esnek iki eklemli, ucunda kütlesi bilinmeyen bir yüke sahip robot kolunun modellenmesi ve kontrolünü ele almış, sistemin dinamiğini diferansiyel özdeğer problemi yaklaşımı kullanarak sonsuz boyutlu bir modelle göstermiştir. Esnek parçanın uç sapmasının sönümlenmesi için PD kontrolörler ve PD benzeri kontrolörler ile tekil pertürbasyon metodunu temel alan iki zaman ölçekli bir kontrolör tasarlamıştır [21].

Subuhdi ve Morris, esnek eklem ve kollara sahip bir manipülatör için dinamik denklemleri Euler-Lagrange eşitlikleriyle elde ettikten sonra, esnek eklem ve kollardaki sapma ve titreşimleri kontrol etmeye yönelik iki-zaman ölçekli tekil perturbasyon metoduna göre bir kontrolcü tasarlamışlardır [22].

Matsuno, Asano ve Sakawa, her ikisi de esnek kollara sahip, iki eklemli ve bir yüzeye temas eden robot kolunu incelemişlerdir. Eklem açılarının, esnek kolların titreşiminin ve temas yüzeyinden etkiyen kuvvetin dinamik denklemleri Hamilton Prensibi'ne göre türetilmiş, bazı kabullenmeler ışığında yarı statik denklemler elde edilmiş ve sonuçta esnek kol için hibrid konum-kuvvet kontrolcü tasarlanmıştır [23].

Chen, ardışık sayılarda esnek kollara sahip çok kollu düzlemsel esnek robot kolları için doğrusallaştırılmış bir dinamik model geliştirmiştir. Esnek kollar Euler-Bernolli kirişi gibi farz edilmiş, sistemin dönme ataleti ve kesme deformasyonu ihmal edilmiştir. Robot kol sisteminin toplam hareket denklemlerinin ifade edilmesinde Lagrange yaklaşımından faydalanılmıştır. Önerilen metot hem dinamik simülasyon için hem de kontrolcüler için kullanılabilir olduğunu göstermek için iki kollu esnek manipülatöre ait sayısal benzetimler yapılmıştır [24].

Robotların bir başka kullanım alanı da sualtı araştırmalarıdır. Yeryüzünün üçte ikisi suyla kaplı olmasına rağmen, insanoğlu bugün uzay konusunda, deniz diplerinden daha çok bilgi sahibidir. İnsanoğlunun deniz diplerine olan merakının artması, onları bu konuda araştırma yapmaya itmiştir. Bu konuda da robotlardan faydalanmak için çalışmalar başlatılmıştır.

Farbrother ve Stacey sualtı araçlarına monte edilen kollara etki eden hidrodinamik kuvvetlerin, kolların hareketlerini etkilediğini, bu nedenle gürbüz kontrol sistemlerine ihtiyaç duyulduğunu belirtmişlerdir [25].

Muggeridge ve Hinchey, su altında çalışan bir robot kolunun suda oluşan akıntı ve dalgalara bağlı olarak drag, hidrostatik kuvvetler gibi hidrodinamik yüklere maruz kaldığını ifade etmişlerdir. Su altındaki kolların hareketini durağan gibi kabul ederek analitik çözüm yoluna gitmişlerdir [26].

Hinchey ve Rivera, yalnızca hidrodinamik yüklerin etkisini değil aracın kendisinin veya çevresindeki araçlardan kaynaklanacak türbülansın da kolun dinamiği üzerindeki etkisini araştırmıştır [27].

Sarpkaya ve Isaacson, durağan akış şartlarında Reynolds sayısına bağlı olarak çözüm üretmişlerdir [28].

Liceaga ve Castro, Morison eşitliğini kullanarak bir matematiksel model geliştirmişlerdir [29].

Fukuda ve Hara, hidrodinamik kuvvetlere maruz kalan kollar için bir adaptif kontrol metodu geliştirmişlerdir. Bu modele göre iki eklemli bir robot kolunda toplam drag kuvveti, iki kolun bağlantı yerine etkimektedir [30].

Lapierre, Fraisse ve Dauchez, robot kolu eklenmiş bir sualtı aracı için yeni bir kontrol metodu önermiştir. Bir platform üzerinde bulunan ve hidrodinamik kuvvetlerin etkisi altında kalan robot kolunda oluşan tork, Newton-Euler metoduna göre modellenen ve araçla kol arasına yerleştirilen kuvvet sensörünce tayin edilmektedir. Kontrol metodu konum-kuvvet kontrolüne dayanmaktadır. Elde edilen veriler deneysel sonuçlarla da karşılaştırıldığında yeni kontrol metodunun etkili olduğu görülmektedir [31].

Kato ve Lane, çok kollu sualtı robotlarının kontrolü üzerinde çalışmışlardır. Çok kollu robotlar için koordine kontrol metodu geliştirmişlerdir, bu metot 6 serbestlik dereceli bir ana kol ve 2 serbestlik dereceli yan kollara sahip, suda serbest hareket edebilen bir robota uyarlanmıştır. Çok kollu robotun ters dinamik ve ters kinematik çözümleri yapılmıştır. [32].

Hidrodinamik verilerin saptanması, sualtındaki robot kolunun hareket kontrolünün verimliliğini artırmıştır. Rivera, çalışmasında Morison denkleminden faydalanarak ve boyut analizi yaparak robot kolu üzerindeki hidrodinamik kuvvetlerin matematiksel modelini oluşturmuş ve hidrodinamik kuvvetler Lagrange eşitliği kullanılarak hareket denklemlerinde ifade edilmiştir. Sürtünme kayıpları için teorik model doğru sonuçlar vermemiştir. Sürtünme kayıplarının tespit edilebilmesi için bir deney düzeneği hazırlanmıştır. İki eklemli bir fiziksel model geliştirilerek doğru sonuçlar elde edilmiştir. Parametre sayısının ve veri sayısının fazlalığından kaynaklanan karmaşıklığın çözümü için Neural Network Programı kullanılmıştır [33].

Robot kontrol tekniklerinde son yıllarda yaşanan yenilikler, sualtı araştırmalarına da yeni bir boyut kazandırmıştır. Wang, Rock ve Lee, Kanada'nın Monterey Körfezindeki Araştırma Enstitüsünde, Stanford Üniversitesi işbirliği ile sualtı araştırmalarında kullanılmak üzere OTTER, (Mühendislik Araştırmaları için Okyanus Teknolojileri Deney Aracı) isimli, otomatik kontrol tekniklerinin denenmesine olanak sağlayan bir sualtı deney platformu tasarlamışlardır. Çeşitli araştırmacılar tarafından Otter'ın hem yazılım hem de donanım yapısı çok çeşitli gelişmeleri ve sualtı robotiğinin farklı içeriklerini karşılayacak şekilde düzenlenmiştir. Otter üzerinde kullanılan teknolojiler gerçek zamanlı görüntü algılama sistemleri, kol/araç koordine kontrolü ve 3 boyutlu grafik kullanım ara yüzlerini içermektedir.

MBARI/ARL programı bünyesinde, OTTER sualtı robotunu bir test platformu olarak kullanarak, otomatik kontrol teknolojilerine yönelik pek çok deney yapılmıştır. Görsel algılama ve kontrol, nesne izleme, konum sabitleme ve video mozaikleri oluşturma konularında çalışmalar yapılmıştır. Ayrıca, sualtı robotlarının kontrolüne ve programlanmasına yönelik araştırmalar yapılmıştır [34].

Monterey Körfezindeki Araştırma Enstitüsünde bulunan OTTER aracı üzerinde yapılan çalışmalarda Lee, McLain ve Rocky robot kolun su içindeki hareketine bağlı olarak üzerine etki eden hidrodinamik kuvvetler nedeniyle, robot kolu ile sualtı aracı arasındaki dinamik etkileşimlerin çok önemli olduğunu göstermişlerdir. Bu çalışmada, hidrodinamik etkileşim kuvvetlerinin daha yüksek doğruluğa sahip olan modeli kullanılmış ve ona uygun kol-araç kontrol tekniği geliştirilmiştir. Sonuçta aracı yerinde tutma özelliği büyük ölçüde geliştirilmiş, robot kolunun uç noktadaki izleme hataları ve işlem süresi fark edilir oranda azaltılmıştır [35].

Lee, tek eklemli bir robot kolu için adaptif kontrol uygulamış ve bunu deneysel olarak da göstermiştir. Çalışmasını birkaç dakikalık bir video gösterisi halinde sunmuştur [36].

Antonelli ve Chiaverini, sualtı araçlarının adaptif kontrolü konusunda çalışmalar yapmış ve bunu deneysel olarak göstermişlerdir [37].

Yine Antonelli ve diğerlerinin çalışmasında, su altı araçları için altı serbestlik dereceli bir kontrolcü geliştirilmiştir. Kontrol algoritması adaptif olarak tasarlanmıştır. Hawaii Üniversitesi'nde tasarlanıp inşa edilen çok yöne hareket edebilen akıllı sualtı cihazı olan ODIN üzerinde yapılan deneylerle tasarlanan kontrol algoritmasının geçerliliği kanıtlanmıştır. Deneysel veriler önerilen kontrolcünün başarılı olduğunu ortaya koymaktadır [38].

Antonelli'nin bir diğer çalışmasında, hidrodinamik etkilere maruz su altı araçlarına yönelik bir kontrol metodu önerilmiştir. Adaptif kontrol metodunun kullanıldığı bu kontrolcüde kontrol metodu Lyapunov kuralına dayandırılmıştır. Önerilen kontrol metodunun izleme performansı, literatürdeki diğer kontrol metotlarıyla karşılaştırılmıştır. Elde edilen benzetim sonuçları, önerilen tekniğin etkinliğini göstermektedir [39].

1.3 Tezin Amaç ve Kapsamı

Bu yüksek lisans tez çalışmasında iki farklı robot modeli için benzetim çalışmaları yapılmıştır. Bu modellerden ilki, ikisi rijit sonuncusu esnek olan üç kollu robota ait matematiksel model olup, sadece kara şartlarında çalışacak şekilde tasarlanmıştır. Literatürde esnek kollu robotların su altındaki uygulamalarına ait çalışmalar çok azdır. Bu nedenle ikinci modelde, ilki katı ikincisi esnek olan iki kollu robota ait matematiksel model hem karada hem de su altında çalışacak şekilde tasarlanmıştır. Yapılan bu çalışmanın esnek kollu robotların su altında kullanılmasına örnek teşkil etmesi amaçlanmıştır.

Tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm, robotların yapısıyla ilgili genel bilgileri ve esnek robot kollarına ve su altı robotlarına ilişkin literatür çalışmalarını içeren '*Genel Bilgiler*' bölümüdür.

Sistemin dinamik yapısı ikinci bölümde '*Yapılan Çalışmalar*' başlığı altında incelenerek, her iki modele ait karakteristik denklemler türetilmiştir. Daha sonra MATLAB dilinde hazırlanan bir bilgisayar programı yardımıyla, doğrusal olmayan, zamanla değişen dinamik denklemlerin çözümü 4. dereceden Runge-Kutta algoritması kullanılarak gerçekleştirilmiştir.

Üçüncü bölümde, her iki modele, farklı yük değerleri için açık çevrim, P ve PD kontrol stratejileri uygulanarak, modellerin performans karakteristikleri incelenmiş ve elde edilen benzetim grafikleri *'Bulgular'* başlığı altında verilmiştir.

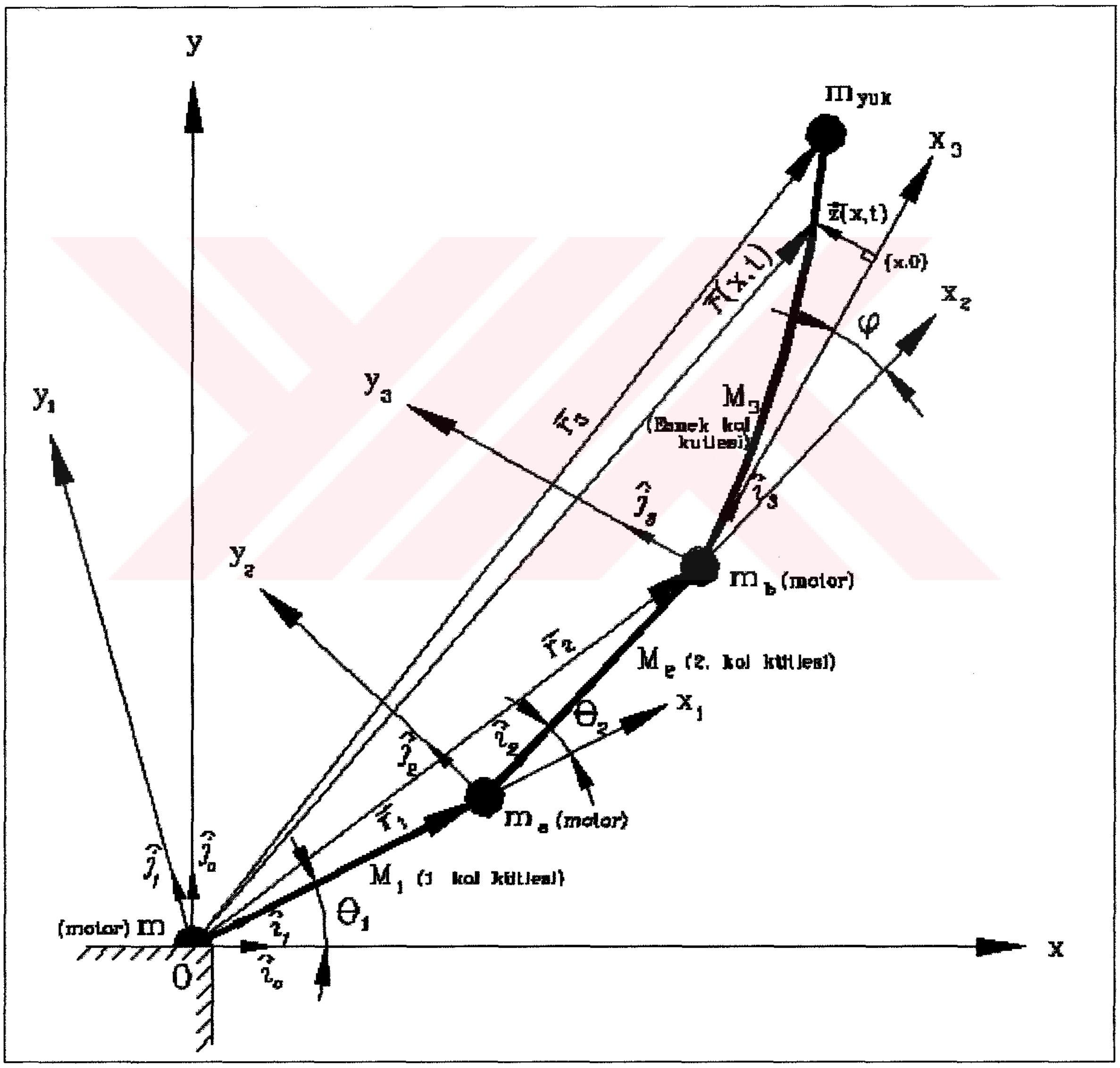
Dördüncü bölüm, elde edilen benzetim grafiklerinin açıklandığı *'İrdeleme'* bölümüdür.

Beşinci bölümde bu tez çalışmasından çıkarılacak sonuçlar, altıncı bölümde ise bu yüksek lisans tezinde karşılaşılan aksaklıklar ve ileride yapılması planlanan çalışmalara yönelik yorumlar ve öneriler mevcuttur.

2.YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Esnek Robot Kolunun Yapısı ve Modellenmesi

Yatay düzlemde hareket eden ilk iki eklemi katı, üçüncüsü esnek olan robotun matematik modeli çıkarılmıştır. Sistemin şematik gösterimi Şekil 1'de verilmektedir.



Şekil 1. Üç eklemli katı-katı-esnek robot kolunun gösterimi

Sistemde kullanılan parametreler; L_1, L_2 birinci ve ikinci katı kolların uzunluğunu, L_3 ise esnek kolun uzunluğunu göstermektedir. M_1 birinci katı kolun kütlesi, M_2 ikinci katı kolun kütlesi ve M_3 de esnek kolun kütlesidir. m_a ikinci eklemdeki motorun kütle değerini ve m_b üçüncü eklemdeki motorun kütle değerini temsil etmektedir. Esnek kolun ucundaki yük ise $m_{yük}$ ile ifade edilmektedir. Robot kollarının katı hal açısal konumları sırasıyla $\theta_1, \theta_2, \varphi$, açısal hızları $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\varphi}$, açısal ivmeleri ise $\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2, \ddot{\varphi}$ olarak verilmektedir. $\vec{r}_1(x,t)$ birinci katı kol üzerindeki x noktasının pozisyon vektörü, $\vec{r}_2(x,t)$ ikinci katı kol üzerindeki x noktasının pozisyon vektörü, $\vec{r}_3(x,t)$ esnek kol üzerindeki x noktasının pozisyon vektörüdür. (i,j) ortogonal birim vektör çiftini göstermektedir. Üç eklemli ilk ikisi katı, üçüncüsü esnek olan robot kol sistemine ait dinamik denklemleri elde etmek için Hamilton Prensibi kullanılacaktır [1].

2.1.1. Hamilton Prensibi

Hamilton prensibi, sistemin t_1 t_2 gibi iki zaman arasındaki tüm hareketini göz önüne almaktadır. Bu yöntemin avantajı, kullanılan koordinat sisteminden bağımsız oluşudur. Bu yöntemle dinamik problemler skaler bir integralin çözümüne dönüşür ve sonuçta sistemin hareket denkleminin en genel formülasyonu elde edilmiş olur.

N parçacıktan oluşan bağımsız bir sistemi ele alalım. Herhangi bir *i.* maddesel nokta için Newton' un ikinci hareket kanunu uygulanırsa;

$$F_i = m_i a_i = m_i \ddot{r}_i \tag{2.1.1}$$

yazılır. Buradaki F ifadesi maddesel noktaya etkiyen tüm kuvvetleri (aktif + bağ) ifade etmektedir. $m_i \ddot{r}_i$ ifadesi ise atalet kuvvetini temsil etmektedir. (2.1.1) dinamik denklemini yeniden düzenleyerek

$$F_i - m_i \ddot{r}_i = 0 \tag{2.1.2}$$

D'Alembert denklemini elde ederiz. Bu denkleme görünen (*virtüel*) işler prensibi uygulanırsa ve bu işlem N adet maddesel nokta için dikkate alınırsa,

$$\sum_{i=1}^{N}(F_i - m_i\ddot{r}_i)\delta r_i = 0 \tag{2.1.3}$$

denklemi elde edilir. Bu ifade sistemin hareketinin herhangi bir anında, sisteme etki eden aktif kuvvetlerin ve atalet kuvvetlerinin yapacağı toplam görünen işin sıfır olacağını belirtmektedir. Bağ kuvvetinin yapacağı iş sıfır olduğundan F sadece sisteme etki eden aktif kuvveti göstermektedir. Yukarıdaki denklemdeki $F_i\delta r$ ve $m_i\ddot{r}_i\delta r$ çarpımları açık şekilde ifade edilerek Hamilton Prensibi'ne şu şekilde ulaşılabilir.

$$\sum_{i}^{N} F_i\delta r_i = \delta\overline{W} \tag{2.1.4}$$

denklemi aktif kuvvetlerin görünen işini ifade etmektedir. Burada $\delta\overline{W}$ gösterimindeki W simgesi üzerindeki çizgi, δ operatörünün işin değişimi (*varyasyonu*) anlamında kullanılmadığını belirtmek için kullanılmıştır. Buna karşın δr_i gösterimindeki δ operatörü r_i' nin değişimini temsil etmektedir. $m_i\ddot{r}_i\delta r$ ifadesi daha da açılırsa;

$$\frac{d}{dt}(m_i\dot{r}_i\delta r_i) = m_i\ddot{r}_i\delta r_i + \delta(\frac{1}{2}m_i\dot{r}_i\dot{r}_i) = m_i\ddot{r}_i\delta r_i + \delta T_i \tag{2.1.5}$$

elde edilir. T sistemin kinetik enerjisidir. Her iki taraf dt ile çarpılıp t_1 t_2 aralığında integre edilirse

$$\int_{t1}^{t2} m_i\ddot{r}_i\delta r\, dt = -\int_{t1}^{t2} \delta T_i\, dt + (m_i\dot{r}_i\delta r_i)\Big|_{t2}^{t1} \tag{2.1.6}$$

elde edilir. $\delta r_i(t_1) = \delta r_i(t_1) = 0$ olduğuna göre, (2.1.6) ve (2.1.4) denklemleri (2.1.3) denkleminde kullanarak (2.1.7) ifadesi elde edilir.

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta T + \delta\overline{W})\, dt = 0 \tag{2.1.7}$$

Bu ifade genelleştirilmiş Hamilton Prensibi'dir. (2.1.7) denklemi kullanılarak sisteme ait tüm hareket denklemleri elde edilir.

Hamilton eşitliğindeki görünen iş ifadesini, konservatif kuvvetler tarafından yapılan ve konservatif olmayan kuvvetler tarafından yapılan olmak üzere ikiye ayırmakta fayda vardır. Konservatif bir alanda iş, potansiyel enerjideki değişimin eksi işaretlisine eşit olduğundan aşağıdaki eşitlik yazılır.

$$\delta\overline{W} = \delta W_c + \delta W_{nc} = -\delta V + \delta W_{nc} \qquad (2.1.8)$$

(2.1.8) ifadesi (2.1.7) denklemine yerleştirilirse (2.1.9) denklemi elde edilir.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V + \delta\overline{W}_{nc})dt = 0, \quad \delta r_i = 0, \quad i=1,2,\ldots,N\ ; \quad t = t_1, t_2 \qquad (2.1.9)$$

T- V farkına yeni bir isim verilirse;

$$L=T-V \qquad (2.1.10)$$

elde edilir. L gösterimi, Lagrange fonksiyonu veya kinetik potansiyel anlamında kullanılmaktadır. Sonuç olarak Hamilton Prensibini şu şekilde ifade ederiz; konservatif sistemlerde, sistem bir andaki konfigürasyonundan bir diğer andakine, Lagrange Fonksiyonu'nun bu aralıktaki zaman integrali ekstremum olacak şekilde hareket eder [40].

Sistemdeki kinetik enerji, potansiyel enerji ve korunmayan kuvvetler tarafından yapılan işler Hamilton ifadesine yerleştirilir.

2.1.2. Sistemde Oluşan Toplam Kinetik Enerjiler

Sistemin matematiksel modeli oluşturulurken aşağıdaki kabullenmeler yapılmıştır :

1. Kollar üniform kütle ve kesite sahiptir.
2. Sistemin hareketi sadece yatay düzlem üzerinde olduğundan yerçekimi etkisi ihmal edilmiştir.

3. Esnek parçanın katı hal pozisyonundan olan dik sapması z(x,t), parçanın boyuna oranla küçüktür.

Kinetik enerji ifadelerinin elde edilebilmesi için, her bir kola ait yer vektörlerinin ve onlara ait türevlerinin elde edilmesi gerekmektedir. Her bir kola ait koordinat sistemindeki birim vektörler ve onların türevleri aşağıda verilmektedir.

$$\hat{i}_1 = cos\theta_1\, \hat{i}_0 + sin\theta_1\, \hat{j}_0$$

$$\hat{j}_1 = -sin\theta_1\, \hat{i}_0 + cos\theta_1\, \hat{j}_0$$

$$\frac{d\hat{i}_1}{dt} = -sin\theta_1\, \hat{i}_0\, \dot{\theta}_1 + cos\theta_1\, \hat{j}_0\, \dot{\theta}_1 = +\hat{j}_1\, \dot{\theta}_1$$

$$\frac{d\hat{j}_1}{dt} = -cos\theta_1\, \hat{i}_0\, \dot{\theta}_1 - sin\theta_1\, \hat{j}_0\, \dot{\theta}_1 = -\hat{i}_1\, \dot{\theta}_1$$

$$\hat{i}_2 = cos(\theta_1+\theta_2)\, i_0 + sin(\theta_1+\theta_2)\, \hat{j}_0$$

$$\hat{j}_2 = -sin(\theta_1+\theta_2)\, i_0 + cos(\theta_1+\theta_2)\, \hat{j}_0$$

$$\frac{d\hat{i}_2}{dt} = +\hat{j}_2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right) \tag{2.1.11}$$

$$\frac{d\hat{j}_2}{dt} = -\hat{i}_2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)$$

$$\hat{i}_3 = cos(\theta_1+\theta_2+\varphi)\, \hat{i}_0 + sin(\theta_1+\theta_2+\varphi)\, \hat{j}_0$$

$$\hat{j}_3 = -sin(\theta_1+\theta_2+\varphi)\, \hat{i}_0 + cos(\theta_1+\theta_2+\varphi)\, \hat{j}_0$$

$$\frac{d\hat{i}_3}{dt} = +\hat{j}_3\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)$$

$$\frac{d\hat{j}_3}{dt} = -\hat{i}_3\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)$$

Sistemde oluşan toplam kinetik enerjiler üç madde halinde sıralanır:

1. Eklemlerdeki motor rotorlarının dönme eksenleri etrafındaki eylemsizliklerinden kaynaklanan kinetik enerjileri;

$$T_1 = \frac{1}{2} I_{h1} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_{h2} \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \right)^2 + \frac{1}{2} I_{h3} \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\varphi} \right)^2 \tag{2.1.12}$$

olup buradaki I_{h1}, I_{h2}, I_{h3} sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü eklemi süren motorların rotorlarının eylemsizlik momentleridir. Bu değerler seçilen motorun kataloglarından elde edilirler.

2. Kolların doğrusal ve dönme hareketlerinden kaynaklanan kinetik enerjileri;

$T_2 = T_{2a} + T_{2b} + T_{2c} =$ (1. kolun K.E.) +(2. kolun K.E.) +(Esnek kolun K.E.)

şeklindedir. Bu enerjilerin açık ifadeleri aşağıda verilmektedir.

- 1. Katı kolun Kinetik Enerjisi:

$$T_{2a} = \int_0^{L_1} \frac{1}{2} \rho_1 \dot{\vec{r}}_1(x,t) \dot{\vec{r}}_1(x,t) dx \tag{2.1.13}$$

- 2. Katı kolun Kinetik Enerjisi:

$$T_{2b} = \int_0^{L_2} \frac{1}{2} \rho_2 \dot{\vec{r}}_2(x,t) \dot{\vec{r}}_2(x,t) dx \tag{2.1.14}$$

- Esnek kolun Kinetik Enerjisi:

$$T_{2c} = \int_0^{L_3} \frac{1}{2} \rho_3 \dot{\vec{r}}_3(x,t) \dot{\vec{r}}_3(x,t) dx \tag{2.1.15}$$

Burada ρ_1, ρ_2 katı kolların birim uzunluk başına kütlesi, ρ_3 esnek kolun birim uzunluk başına kütlesidir. $r_i(x,t)$ ise *i.* kola ait herhangi bir noktanın konum vektörüdür ve bu vektörlerin zamana göre türevleri aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\rho_i = \frac{m_i}{L_i} \tag{2.1.16}$$

$$\vec{r}_1(x,t) = x\,\hat{i} \tag{2.1.17}$$

$$\dot{\vec{r}}_1(x,t) = x\dot{\theta}_1\,\hat{j}_1 \tag{2.1.18}$$

$$\vec{r}_2(x,t) = L_1\,\hat{i}_1 + x\,\hat{i}_2 \tag{2.1.19}$$

$$\dot{\vec{r}}_2(x,t) = L_1\dot{\theta}_1\,\hat{j}_1 + x\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)\hat{j}_2 \tag{2.1.20}$$

$$\vec{r}_3(x,t) = L_1\,\hat{i}_1 + L_2\,\hat{i}_2 + x\,\hat{i}_3 + z(x,t)\,\hat{j}_3 \tag{2.1.21}$$

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}_3(x,t) = {} & L_1\dot{\theta}_1\,\hat{j}_1 + L_2\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)\hat{j}_2 + x\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\varphi}\right)\hat{j}_3 + z_t(x,t)\,\hat{j}_3 \\ & -\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\varphi}\right)z(x,t)\,\hat{i}_3\end{aligned} \tag{2.1.22}$$

Bu vektörlerin karelerinin eldesi EK 2 ‘de verilmektedir. Elde edilen bu değerlerin (2.1.13), (2.1.14), (2.1.15) denklemlerine yerleştirilmesiyle kinetik enerji ifadeleri elde edilir.

$$T_{2a} = \frac{1}{6} m_1 L_1^2\,\dot{\theta}_1^2 \tag{2.1.23}$$

$$T_{2b} = \int_0^{L_2} \frac{1}{2}\rho_2 \left[L_1^2\dot{\theta}_1^2 + x^2\dot{\theta}_1^2 + 2x^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + x^2\dot{\theta}_2^2 + 2L_1 x\dot{\theta}_1^2 \cos\theta_2 + 2L_1 x\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos\theta_2 \right] dx \tag{2.1.24}$$

$$\begin{aligned}T_{2c} = \int_0^{L_3} \frac{1}{2}\rho_3 \Big[& L_1^2\dot{\theta}_1^2 + L_2^2\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right) + x^2\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\varphi} + 2\dot{\theta}_2\dot{\varphi}\right) \\ & + z_t^2(x,t) + 2L_1L_2\dot{\theta}_1\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)\cos\theta_2 + 2L_1 x\dot{\theta}_1\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\varphi}\right)\cos\left(\theta_2 + \varphi\right) \\ & + 2L_1\dot{\theta}_1 z_t(x,t)\cos(\theta_2 + \varphi) - 2L_1\dot{\theta}_1\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\varphi}\right)z(x,t)\sin(\theta_2 + \varphi)\end{aligned}$$

$$+2L_2x\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)cos\varphi+2L_2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)z_t(x,t)cos\varphi$$
$$-2L_2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)z(x,t)sin\varphi+2x\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)z_t(x,t)\Bigg]dx \tag{2.1.25}$$

3. 1. ve 2. katı kolun uç noktasında bulunan motorların kütlelerinin (m_a, m_b) ve esnek kolun ucundaki $m_{yük}$ kütlesinin yer değiştirmesinden (öteleme ve dönme) kaynaklanan kinetik enerjileri;

$$T_3=\frac{1}{2}m_a\vec{\dot{r}}_1\vec{\dot{r}}_1+\frac{1}{2}m_b\vec{\dot{r}}_2\vec{\dot{r}}_2+\frac{1}{2}m_{yük}\vec{\dot{r}}_3\vec{\dot{r}}_3 \tag{2.1.26}$$

olup, bu denklemlerin EK 2'de verilen vektörel çarpımlara göre açılımı yapılır. Buradaki vektörlerin her bir kolun uç noktasının konum vektörleri olduğu unutulmamalıdır.

$$\begin{aligned}
T_3=&\left[\frac{1}{2}m_aL_1^2\dot{\theta}_1^2\right]+\left[\frac{1}{2}m_bL_1^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}m_bL_2^2\dot{\theta}_1^2+m_bL_2^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+\frac{1}{2}m_bL_2^2\dot{\theta}_2^2\right.\\
&\left.+m_bL_1L_2\dot{\theta}_1^2\cos\theta_2+m_bL_1L_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos\theta_2\right]+\left[\frac{1}{2}m_{yük}L_1^2\dot{\theta}_1^2\right.\\
&+\frac{1}{2}m_{yük}L_2^2\left(\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2+2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right)+\frac{1}{2}m_{yük}L_3^2\left(\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2+\dot{\varphi}^2+2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+2\dot{\theta}_1\dot{\varphi}+2\dot{\theta}_2\dot{\varphi}\right)\\
&+\frac{1}{2}m_{yük}z_t^2(L_3,t)+m_{yük}L_1L_2\dot{\theta}_1\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\cos\theta_2\\
&+m_{yük}L_1L_3\dot{\theta}_1\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)\cos(\theta_2+\varphi)+m_{yük}L_1\dot{\theta}_1z_t(L_3,t)\cos\left(\theta_2+\varphi\right)\\
&-m_{yük}L_1\dot{\theta}_1\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)z(L_3,t)\sin(\theta_2+\varphi)\\
&+m_pL_2L_3\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)cos\varphi+m_{yük}L_2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)z_t(L_3,t)cos\varphi\\
&\left.-m_{yük}L_2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)z(L_3,t)sin\varphi+m_{yük}L_3\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)z_t(L_3,t)\right]
\end{aligned} \tag{2.1.27}$$

2.1.3. Sistemde Oluşan Toplam Potansiyel Enerjiler

Sistemin yatay düzlemdeki hareketi incelendiğinde, yerçekimine karşı yapılan iş sıfırdır. Bu nedenle burada sadece esnek kolun esnemesinden kaynaklanan potansiyel enerjisi mevcuttur. Sistemin şekil değiştirme potansiyel enerjisi (2.1.28) numaralı eşitlikte verilmiştir.

$$V=\frac{1}{2}\int_{0}^{L_3} E\, I_a z_{xx}^2(x,t)\,dx \tag{2.1.28}$$

Burada E, esnek parçanın Young esneklik modülüdür. I_a ise esnek parçanın yüzey atalet momenti olup,

$$I_a=\frac{hb^3}{12} \tag{2.1.29}$$

olarak tanımlanmaktadır. h, esnek kolun genişliği, b ise esnek kolun kalınlığını ifade etmektedir.

2.1.4. Sistemde Korunmayan Kuvvetler Tarafından Yapılan İşler

Eklemlere dışardan uygulanan torklar ve eklemlerdeki yağlı sürtünmeden dolayı *i.* eklemde yapılan görünen iş ifadesi ve korunmayan kuvvetler tarafından yapılan toplam görünen iş ifadesi (2.1.30) eşitliğiyle verilmiştir.

$$\delta W_i=\sum_{i=1}^{3}\left(\tau_i-\beta_i\dot{\theta}_i\right)\delta\theta_i \tag{2.1.30}$$

Burada β_1, β_2, β_3 sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü eklemlerin yağlı (*viskoz*) sürtünme katsayılarıdır. τ_i ise her bir ekleme uygulanan torku temsil etmektedir.

Kinetik, potansiyel enerjiler ve korunmayan kuvvetler tarafından yapılan işler Hamilton denklemine konmadan önce kısmi türevleri alınır. Bunlara ait ifadeler EK 2'de yer almaktadır.

(2.1.12), (2.1.23), (2.1.24), (2.1.25), (2.1.27), (2.1.28) ve (2.1.30) ifadeleri (2.1.7) Hamilton denkleminde yerlerine yazılır ve elde edilen denklem δ_o Dirac delta operatörü kullanılarak daha sade ve kısa hale getirilir. Aşağıda δ_o Dirac delta operatörü tanımlanmaktadır [1].

$$f(x),\ x \in [0, L_2)$$

$$f(x),\ x \in [0, L_2] \quad \text{için} \quad \int_0^{L_2} f(x)\delta_o(x-c)\,dx = \begin{cases} 0, & c \notin [0, L_2] \\ f(c), & c \in [0, L_2] \end{cases} \tag{2.1.31}$$

ve

$$f(x),\ x \in [0, L_3] \quad \text{için} \quad \int_0^{L_3} f(x)\delta_o(x-c)\,dx = \begin{cases} 0, & c \notin [0, L_3] \\ f(c), & c \in [0, L_3] \end{cases} \tag{2.1.32}$$

Dirac delta operatörü kullanılarak sistemin dinamiğini temsil eden (2.1.33) denklemi elde edilir.

$$\int_{t_1}^{t_2}\Bigg(\Bigg\{\int_0^{L_2}\Big(\big[\rho_2 + m_b\delta_o(x-L_2)\big]\Big[L_1^2\dot{\theta}_1 + x^2\big(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\big) + L_1 x\big(2\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\big)cos\theta_2\Big]\Big)dx$$

$$+\int_0^{L_3}\Big(\big[\rho_3 + m_{yuk}\delta_o(x-L_3)\big]\Big[L_1^2\dot{\theta}_1 + L_2^2\big(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\big) + x^2\big(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\big)$$

$$+L_1L_2\big(2\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\big)cos\theta_2 + L_1 x\big(2\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\big)cos(\theta_2+\varphi)$$

$$+L_1 z_t(x,t)\cos(\theta_2+\varphi) - L_1\big(2\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\big)z(x,t)\sin(\theta_2+\varphi)$$

$$+L_2 x\big(2\dot{\theta}_1+2\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\big)cos\varphi + L_2 z_t(x,t)\cos(\varphi)$$

$$-L_2\big(2\dot{\theta}_1+2\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\big)z(x,t)\sin(\varphi) + x z_t(x,t)\Big]\Big)dx\Bigg\}\delta\theta_1$$

$$+\Bigg\{\int_0^{L_2}\Big(\big[\rho_2 + m_b\delta_o(x-L_2)\big]\Big[x^2\big(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\big) + L_1 x\dot{\theta}_1 cos\theta_2\Big]\Big)dx$$

$$+\int_0^{L_3}\Big(\big[\rho_3+m_{yuk}\delta_o(x-L_3)\big]\Big[L_2^2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)+x^2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)+L_1L_2\,\dot{\theta}_1\cos\theta_2$$

$$+L_1x\dot{\theta}_1\cos(\theta_2+\varphi)-L_1\,\dot{\theta}_1\,z(x,t)\sin(\theta_2+\varphi)+L_2x\left(2\dot{\theta}_1+2\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)\cos\varphi$$

$$+L_2z_t(x,t)\cos\varphi-L_2\left(2\dot{\theta}_1+2\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)z(x,t)\sin\varphi+xz_t(x,t)\Big]\Big)dx\Big\}\,\delta\dot{\theta}_2$$

$$+\Big\{\int_0^{L_3}\Big(\big[\rho_3+m_{yuk}\delta_o(x-L_3)\big]\big[x^2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)+L_1x\dot{\theta}_1\cos(\theta_2+\varphi)$$

$$-L_1\,\dot{\theta}_1\,z(x,t)\sin(\theta_2+\varphi)+L_2x\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\cos\varphi$$

$$-L_2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)z(x,t)\sin\varphi+xz_t(x,t)\big]\Big)dx\Big\}\,\delta\dot{\varphi}$$

$$+\Big\{\int_0^{L_2}\Big(\big[\rho_2+m_b\delta_o(x-L_2)\big]\Big[-L_1x\dot{\theta}_1\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\sin\theta_2\Big]\Big)\,dx$$

$$+\int_0^{L_3}\Big(\big[\rho_3+m_{y\ddot{u}k}\delta_o(x-L_3)\big]\Big[-L_1L_2\,\dot{\theta}_1\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\sin\theta_2$$

$$-L_1x\dot{\theta}_1\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)\sin(\theta_2+\varphi)-L_1\,\dot{\theta}_1\,z_t(x,t)\sin(\theta_2+\varphi)$$

$$-L_1\,\dot{\theta}_1\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)z(x,t)\cos(\theta_2+\varphi)\Big]\Big)dx\Big\}\,\delta\theta_2$$

$$+\Big\{\int_0^{L_3}\Big(\big[\rho_3+m_{y\ddot{u}k}\delta_o(x-L_3)\big]\Big[-L_1x\dot{\theta}_1\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)\sin(\theta_2+\varphi)$$

$$-L_1\,\dot{\theta}_1\,z_t(x,t)\sin(\theta_2+\varphi)-L_1\,\dot{\theta}_1\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)z(x,t)\cos(\theta_2+\varphi)$$

$$-L_2x\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)\sin\varphi-L_2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)z_t(x,t)\sin\varphi$$

$$-L_2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)z(x,t)\cos\varphi\Big]\Big)dx\Big\}\,\delta\varphi$$

$$+\Big\{\int_0^{L_3}\Big(\big[\rho_3+m_{yuk}\delta_o(x-L_3)\big]\Big[z_t(x,t)+L_1\,\dot{\theta}_1\cos(\theta_2+\varphi)$$

$$+L_2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\cos\varphi+x\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)\Big]\Big)dx\Big\}\,\delta z_t(x,t)$$

$$+\Big\{\int_0^{L_3}\Big(\big[\rho_3+m_{y\ddot{u}k}\delta_o(x-L_3)\big]\Big[-L_1\,\dot{\theta}_1\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)\sin(\theta_2+\varphi)$$

$$
\begin{aligned}
&-L_2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)sin\varphi\Big]\Big)dx\Big\}\,\delta z(x,t) \\
&+\left\{\int_0^{L_3}\left[-EI_a z_{xx}(x,t)\right]dx\right\}\delta z_{xx}(x,t) \\
&+\left[\left(I_{h_1}+I_{h_2}+I_{h_3}\right)\dot{\theta}_1+\left(I_{h_2}+I_{h_3}\right)\dot{\theta}_2+I_{h_3}\dot{\varphi}+\frac{1}{3}m_1L_1^2\dot{\theta}_1+m_aL_1^2\dot{\theta}_1\right]\delta\dot{\theta}_1 \qquad (2.1.33)\\
&+\left[\left(I_{h_2}+I_{h_3}\right)\dot{\theta}_1+\left(I_{h_2}+I_{h_3}\right)\dot{\theta}_2+I_{h_3}\dot{\varphi}\right]\delta\dot{\theta}_2+\left[I_{h_3}\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)\right]\delta\dot{\varphi} \\
&+\left[\left(\tau_1-\beta_1\dot{\theta}_1\right)\delta\theta_1+\left(\tau_2-\beta_2\dot{\theta}_2\right)\delta\theta_2+\left(\tau_3-\beta_3\dot{\varphi}\right)\delta\varphi\right]\Big)dt=0
\end{aligned}
$$

Bu denkleme kısmi integrasyon tekniği uygulanarak eklem açılarının dinamiğini tanımlayan ve sınır şartlarını veren denklem bulunur. Bu teknik sayesinde $\delta\dot{\theta}_1$, $\delta\dot{\theta}_2$, $\delta\dot{\varphi}$, $\delta z_t(x,t)$ çarpanları sırasıyla $\delta\theta_1$, $\delta\theta_2$, $\delta\varphi$, $\delta z(x,t)$ çarpanları haline gelir. $\delta z_{xx}(x,t)$ değişimi ise kısmi integrasyon sonucu $\delta z_x(L_3,t)$, $\delta z_x(0,t)$, $\delta z(L_3,t)$, $\delta z(0,t)$, $\delta z(x,t)$ çarpanları haline gelir. Kısmi integrasyonlara ait açık ifadeler EK 2' de verilmiştir.

$$
\begin{aligned}
&-\int_{t_1}^{t_2}\Bigg\{\Bigg(\int_0^{L_2}\left[\rho_2+m_b\delta_o\left(x-L_2\right)\right]\frac{\partial}{\partial t}\left[L_1^2\dot{\theta}_1+x^2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)+L_1x\left(2\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)cos\left(\theta_2\right)\right]dx \\
&+\int_0^{L_3}\left[\rho_3+m_{yuk}\delta_o\left(x-L_3\right)\right]\frac{\partial}{\partial t}\Big[L_1^2\dot{\theta}_1+L_2^2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)+x^2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right) \\
&+L_1L_2\left(2\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)cos\theta_2+L_1x\left(2\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)cos\left(\theta_2+\varphi\right) \\
&+L_2x\left(2\dot{\theta}_1+2\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)cos\varphi-L_1\left(2\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)z(x,t)sin\left(\theta_2+\varphi\right) \\
&-L_2\left(2\dot{\theta}_1+2\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)z(x,t)\sin\varphi+L_1z_t(x,t)cos\left(\theta_2+\varphi\right)+L_2z_t(x,t)cos\varphi \\
&+x\,z_t(x,t)\Big]dx+\frac{\partial}{\partial t}\Big[\left(I_{h_1}+I_{h_2}+I_{h_3}\right)\dot{\theta}_1+\left(I_{h_2}+I_{h_3}\right)\dot{\theta}_2+I_{h_3}\dot{\varphi} \\
&+\frac{1}{3}m_1L_1^2\dot{\theta}_1+m_aL_1^2\dot{\theta}_1\Big]-\left(\tau_1-\beta_1\dot{\theta}_1\right)\Bigg)\delta\theta_1 \\
&+\Bigg(\int_0^{L_2}\left[\rho_2+m_b\delta_o\left(x-L_2\right)\right]\frac{\partial}{\partial t}\left[x^2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)+L_1x\dot{\theta}_1cos\theta_2\right]dx
\end{aligned}
$$

$$+\int_0^{L_3}\left[\rho_3+m_{yuk}\delta_o\left(x-L_3\right)\right]\frac{\partial}{\partial t}\left[L_2^2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)+x^2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)\right.$$

$$+L_1L_2\dot{\theta}_1 cos\theta_2+L_1x\dot{\theta}_1 cos\left(\theta_2+\varphi\right)+L_2x\left(2\dot{\theta}_1+2\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)cos\varphi$$

$$-L_1\dot{\theta}_1 z\left(x,t\right)sin\left(\theta_2+\varphi\right)-L_2\left(2\dot{\theta}_1+2\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)z\left(x,t\right)\sin\varphi+L_2z_t\left(x,t\right)cos\varphi$$

$$\left.+x z_t\left(x,t\right)\right]+\int_0^{L_2}\left[\rho_2+m_b\delta_o\left(x-L_2\right)\right]\left[L_1x\dot{\theta}_1\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)sin\theta_2\right]dx$$

$$+\int_0^{L_3}\left[\rho_3+m_{y\ddot{u}k}\delta_o\left(x-L_3\right)\right]\left[L_1L_2\dot{\theta}_1\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)sin\theta_2+L_1x\dot{\theta}_1\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)sin\left(\theta_2+\varphi\right)\right.$$

$$\left.+L_1\dot{\theta}_1\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)z\left(x,t\right)\cos\left(\theta_2+\varphi\right)+L_1\dot{\theta}_1 z_t\left(x,t\right)\sin\left(\theta_2+\varphi\right)\right]dx$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(I_{h_2}+I_{h_3}\right)\dot{\theta}_1+\left(I_{h_2}+I_{h_3}\right)\dot{\theta}_2+I_{h_3}\dot{\varphi}\right]-(\tau_2-\beta_2\dot{\theta}_2)\right)\delta\theta_2$$

$$+\left(\int_0^{L_3}\left[\rho_3+m_{yuk}\delta_o\left(x-L_3\right)\right]\frac{\partial}{\partial t}\left[x^2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)+L_1x\dot{\theta}_1 cos\left(\theta_2+\varphi\right)\right.\right.$$

$$+L_2x\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)cos\varphi-L_1\dot{\theta}_1 z\left(x,t\right)sin\left(\theta_2+\varphi\right)$$

$$\left.-L_2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)z\left(x,t\right)sin\varphi+x z_t\left(x,t\right)\right]dx$$

$$+\int_0^{L_3}\left[\rho_3+m_{y\ddot{u}k}\delta_o\left(x-L_3\right)\right]\left[L_1x\dot{\theta}_1\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)sin\left(\theta_2+\varphi\right)\right.$$

$$+L_2x\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)sin\varphi+L_1\dot{\theta}_1\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)z\left(x,t\right)cos\left(\theta_2+\varphi\right)$$

$$+L_2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)z\left(x,t\right)\cos\varphi+L_1\dot{\theta}_1 z_t\left(x,t\right)sin\left(\theta_2+\varphi\right)$$

$$\left.\left.+L_2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)z_t\left(x,t\right)sin\varphi\right]dx+\frac{\partial}{\partial t}\left[I_{h_3}\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)\right]-(\tau_3-\beta_3\dot{\varphi})\right)\partial\varphi$$

$$+\left(\int_0^{L_3}\rho_3\frac{\partial}{\partial t}\left[L_1\dot{\theta}_1 cos\left(\theta_2+\varphi\right)+L_2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\cos\varphi\right.\right.$$

$$\left.+x\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)+z_t\left(x,t\right)\right]dx+\int_0^{L_3}\rho_3\left[L_1\dot{\theta}_1\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)\sin\left(\theta_2+\varphi\right)\right.$$

$$\left.\left.+L_2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)\sin\varphi\right]dx+\int_0^{L_3}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI_a z_{xx}(x,t)\right]dx\right)\delta z(x,t)$$

$$
\begin{aligned}
&+\Bigg(m_{yuk}\frac{\partial}{\partial t}\Big[L_1\dot{\theta}_1 cos(\theta_2+\varphi)+L_2\Big(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\Big)cos\varphi \\
&+L_3\Big(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\Big)+z_t(L_3,t)\Big]+m_{yük}\Big[L_1\dot{\theta}_1\Big(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\Big)\sin(\theta_2+\varphi) \\
&+L_2\Big(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\Big)\Big(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\Big)sin\varphi\Big]\Bigg)\partial z(L_3,t) \qquad (2.1.34)\\
&+\Big(-E\,I_a z_{xxx}(L_3,t)\partial z(L_3,t)+EI_a z_{xxx}(0,t)\partial z(0,t) \\
&+EI_a z_{xx}(L_3,t)\partial z_x(L_3,t)-E\,I_a z_{xx}(0,t)\partial z_x(0,t)\Big)\Big\}\,dt=0
\end{aligned}
$$

θ_1, θ_2, φ, z(x,t), z(L_3,t) ve $z_x(L_3,t)$ sistemin bağımsız değişkenleridir. Esnek parçanın ikinci kola bağlandığı noktada z(x,t) ve z_x(x,t)'nin değişimleri sıfır olduğundan $\delta z(0,t)=0$ ve $\delta z_x(0,t)=0$ alınır. O halde (2.1.34) denkleminin sağlanabilmesi için, $\delta\theta_1$, $\delta\theta_2$, $\delta\varphi$, $\delta z(x,t)$, δz(L_3,t) ve $\delta z_x(L_3,t)$'nin çarpanlarının sıfır değerini vermesi gerekir.

(2.1.34) denklemindeki $\delta\theta_1$'in çarpanı sıfıra eşitlensin;

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{L_2}\big[\rho_2+m_b\delta_o(x-L_2)\big]\frac{\partial}{\partial t}\Big[L_1^2\dot{\theta}_1+x^2\Big(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\Big)+L_1x\Big(2\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\Big)cos(\theta_2)\Big]dx \\
&+\int_0^{L_3}\big[\rho_3+m_{yuk}\delta_o(x-L_3)\big]\frac{\partial}{\partial t}\Big[L_1^2\dot{\theta}_1+L_2^2\Big(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\Big)+x^2\Big(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\Big) \\
&+L_1L_2\Big(2\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\Big)cos\theta_2+L_1x\Big(2\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\Big)cos(\theta_2+\varphi) \\
&+L_2x\Big(2\dot{\theta}_1+2\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\Big)cos\varphi-L_1\Big(2\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\Big)z(x,t)sin(\theta_2+\varphi) \qquad (2.1.35)\\
&-L_2\Big(2\dot{\theta}_1+2\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\Big)z(x,t)\sin\varphi+L_1z_t(x,t)cos(\theta_2+\varphi)+L_2z_t(x,t)cos\varphi \\
&+x\,z_t(x,t)\Big]dx+\frac{\partial}{\partial t}\Big[\big(I_{h_1}+I_{h_2}+I_{h_3}\big)\dot{\theta}_1+\big(I_{h_2}+I_{h_3}\big)\dot{\theta}_2+I_{h_3}\dot{\varphi} \\
&+\frac{1}{3}m_1L_1^2\dot{\theta}_1+m_aL_1^2\dot{\theta}_1\Big]-(\tau_1-\beta_1\dot{\theta}_1)=0
\end{aligned}
$$

Gerekli düzenlemeler yapılarak birinci eklem açısının dinamiğini temsil eden aşağıdaki denklem bulunur.

$$
\begin{aligned}
&\Bigg\{\left(I_{h1}+I_{h2}+I_{h3}\right)+\frac{1}{3}m_1L_1^2+m_aL_1^2+m_2\left[L_1^2+\frac{1}{3}L_2^2+L_1L_2\cos\theta_2\right]\\
&+m_3\left[L_1^2+L_2^2+\frac{1}{3}L_3^2+2L_1L_2\cos\theta_2+L_1L_3\cos(\theta_2+\varphi)+L_2L_3\cos\varphi\right]\\
&+m_b\left[L_1^2+L_2^2+2L_1L_2\cos\theta_2\right]+m_{yük}\Big[L_1^2+L_2^2+L_3^2+2L_1L_2\cos\theta_2\\
&+2L_1L_3\cos(\theta_2+\varphi)+2L_2L_3\cos\varphi\Big]-2\Big[L_1\sin(\theta_2+\varphi)\\
&+L_2\sin\varphi\Big]\left[\rho_3\int_0^{L_3}z(x,t)dx+m_{yük}z(L_3,t)\right]\Bigg\}\ddot{\theta}_1\\
&+\Bigg\{\left(I_{h2}+I_{h3}\right)m_2\left[\frac{1}{3}L_2^2+\frac{1}{2}L_1L_2\cos\theta_2\right]+m_3\Big[L_2^2+\frac{1}{3}L_3^2+L_1L_2\cos\theta_2\\
&+\frac{1}{2}L_1L_3\cos(\theta_2+\varphi)+L_2L_3\cos\varphi\Big]+m_b\left[L_2^2+L_1L_2\cos\theta_2\right]\\
&+m_{yük}\left[L_2^2+L_3^2+L_1L_2\cos\theta_2+L_1L_3\cos(\theta_2+\varphi)+2L_2L_3\cos\varphi\right]\\
&-\left[L_1\sin(\theta_2+\varphi)+2L_2\sin\varphi\right]\left[\rho_3\int_0^{L_3}z(x,t)dx+m_{yük}z(L_3,t)\right]\Bigg\}\ddot{\theta}_2\\
&+\Bigg\{I_{h3}+m_3\left[\frac{1}{3}L_3^2+\frac{1}{2}L_1L_3\cos(\theta_2+\varphi)+\frac{1}{2}L_2L_3\cos\varphi\right]\\
&+m_{yük}\left[L_3^2+L_1L_3\cos(\theta_2+\varphi)+L_2L_3\cos\varphi\right]\\
&-\left[L_1\sin(\theta_2+\varphi)+L_2\sin\varphi\right]\left[\rho_3\int_0^{L_3}z(x,t)dx+m_{yük}z(L_3,t)\right]\Bigg\}\ddot{\varphi}\\
&+\Bigg\{-\left(\frac{1}{2}m_2+m_3+m_b+m_{yük}\right)L_1L_2\dot{\theta}_2\left(2\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\sin\theta_2\\
&-\left(\frac{1}{2}m_3+m_{yük}\right)L_2L_3\dot{\varphi}\left(2\dot{\theta}_1+2\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)\sin\varphi\\
&-\left(\frac{1}{2}m_3+m_{yük}\right)L_1L_3\left(\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)\left(2\dot{\theta}_1+2\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)\sin(\theta_2+\varphi)\Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\left\{-\left[L_1\left(\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)\left(2\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)\cos(\theta_2+\varphi)\right.\right.\\
&\left.\left.+L_2\dot{\varphi}\left(2\dot{\theta}_1+2\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)\cos\varphi\right]\left[\rho_3\int_0^{L_3} z(x,t)dx+m_{yük}z(L_3,t)\right]\right\}\\
&+\left\{-\left[2L_1\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)\sin(\theta_2+\varphi)\right.\right.\\
&\left.\left.+2L_2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)\sin\varphi\right]\left[\rho_3\int_0^{L_3} z_t(x,t)dx+m_{yük}z_t(L_3,t)\right]\right\}\\
&+\left\{\left[L_1\cos(\theta_2+\varphi)+L_2\cos\varphi\right]\left[\rho_3\int_0^{L_3} z_{tt}(x,t)dx+m_{yük}z_{tt}(L_3,t)\right]\right.\\
&\left.+\left[\rho_3\int_0^{L_3} xz_{tt}(x,t)dx+m_{yük}L_3z_{tt}(L_3,t)\right]\right\}+\beta_1\dot{\theta}_1=\tau_1
\end{aligned}
\tag{2.1.36}
$$

(2.1.34) denklemindeki $\delta\theta_2$ 'in çarpanı sıfıra eşitlensin;

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{L_2}\left[\rho_2+m_b\delta_o(x-L_2)\right]\frac{\partial}{\partial t}\left[x^2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)+L_1x\dot{\theta}_1\cos\theta_2\right]dx\\
&+\int_0^{L_3}\left[\rho_3+m_{yuk}\delta_o(x-L_3)\right]\frac{\partial}{\partial t}\left[L_2^2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)+x^2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)\right.\\
&+L_1L_2\dot{\theta}_1\cos\theta_2+L_1x\dot{\theta}_1\cos(\theta_2+\varphi)+L_2x\left(2\dot{\theta}_1+2\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)\cos\varphi\\
&-L_1\dot{\theta}_1z(x,t)\sin(\theta_2+\varphi)-L_2\left(2\dot{\theta}_1+2\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)z(x,t)\sin\varphi+L_2z_t(x,t)\cos\varphi\\
&\left.+xz_t(x,t)\right]+\int_0^{L_2}\left[\rho_2+m_b\delta_o(x-L_2)\right]\left[L_1x\dot{\theta}_1\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\sin\theta_2\right]dx\\
&+\int_0^{L_3}\left[\rho_3+m_{yük}\delta_o(x-L_3)\right]\left[L_1L_2\dot{\theta}_1\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\sin\theta_2+L_1x\dot{\theta}_1\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)\sin(\theta_2+\varphi)\right.\\
&\left.+L_1\dot{\theta}_1\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)z(x,t)\cos(\theta_2+\varphi)+L_1\dot{\theta}_1z_t(x,t)\sin(\theta_2+\varphi)\right]dx\\
&+\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(I_{h_2}+I_{h_3}\right)\dot{\theta}_1+\left(I_{h_2}+I_{h_3}\right)\dot{\theta}_2+I_{h_3}\dot{\varphi}\right]-(\tau_2-\beta_2\dot{\theta}_2)=0
\end{aligned}
\tag{2.1.37}
$$

Gerekli düzenlemeler sonucunda aşağıdaki ikinci eklem açısının dinamiğini tanımlayan denklem elde edilir.

$$
\begin{aligned}
&\Bigg\{\Big(I_{h2}+I_{h3}\Big)+m_2\Big[\frac{1}{3}L_2^2+\frac{1}{2}L_1L_2\cos\theta_2\Big]+m_3\Big[L_2^2+\frac{1}{3}L_3^2+L_1L_2\cos\theta_2\\
&+\frac{1}{2}L_1L_3\cos(\theta_2+\varphi)+L_2L_3\cos\varphi\Big]+m_b\Big[L_2^2+L_1L_2\cos\theta_2\Big]+m_{yük}\Big[L_2^2+L_3^2\\
&+L_1L_2\cos\theta_2+L_1L_3\cos(\theta_2+\varphi)+2L_2L_3\cos\varphi\Big]-\Big[L_1\sin(\theta_2+\varphi)+2L_2\sin\varphi\Big]\\
&\Big[\rho_3\int_0^{L_3}z(x,t)dx+m_{yuk}\,z(L_3,t)\Big]\Bigg\}\ddot{\theta}_1\\
&+\Bigg\{\Big(I_{h2}+I_{h3}\Big)+\frac{1}{3}m_2L_2^2+m_bL_2^2+m_3\Big[L_2^2+\frac{1}{3}L_3^2+L_2L_3\cos\varphi\Big]+m_{yük}\Big[L_2^2+L_3^2\\
&+2L_2L_3\cos\varphi\Big]-\Big[2L_2\sin\varphi\Big]\Big[\rho_3\int_0^{L_3}z(x,t)dx+m_{yuk}\,z(L_3,t)\Big]\Bigg\}\ddot{\theta}_2\\
&+\Bigg\{I_{h3}+m_3\Big[\frac{1}{3}L_3^2+\frac{1}{2}L_2L_3\cos\varphi\Big]+m_{yük}\Big[L_3^2+L_2L_3\cos\varphi\Big]\\
&-\Big[L_2\sin\varphi\Big]\Big[\rho_3\int_0^{L_3}z(x,t)dx+m_{yuk}\,z(L_3,t)\Big]\Bigg\}\ddot{\varphi}\\
&+\Bigg\{\Big(\frac{1}{2}m_2+m_3+m_b+m_{yuk}\Big)L_1L_2\dot{\theta}_1^2\sin\theta_2+\Big(\frac{1}{2}m_3+m_{yuk}\Big)L_1L_3\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_2+\varphi)\\
&-\Big(\frac{1}{2}m_3+m_{yuk}\Big)L_2L_3\dot{\varphi}\Big(2\dot{\theta}_1+2\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\Big)\sin\varphi\Bigg\}+\Bigg\{\Big[L_1\dot{\theta}_1^2 cos\Big(\theta_2+\varphi\Big)\\
&-L_2\dot{\varphi}\Big(2\dot{\theta}_1+2\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\Big)cos\varphi\Big]\Big[\rho_3\int_0^{L_3}z(x,t)dx+m_{yuk}z(L_3,t)\Big]\Bigg\}\\
&+\Bigg\{-\Big[2L_2\Big(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\Big)\sin\varphi\Big]\Big[\rho_3\int_0^{L_3}z_t(x,t)dx+m_{yuk}z_t(L_3,t)\Big]\Bigg\}\\
&+\Bigg\{\Big[L_2cos\varphi\Big]\Big[\rho_3\int_0^{L_3}z_{tt}(x,t)dx+m_{yuk}z_{tt}(L_3,t)\Big]\\
&+\Big[\rho_3\int_0^{L_3}xz_{tt}(x,t)dx+m_{yuk}L_3z_{tt}(L_3,t)\Big]\Bigg\}+\beta_2\dot{\theta}_2=\tau_2
\end{aligned}
\tag{2.1.38}
$$

(2.1.34) denklemindeki $\delta\varphi$ 'nin çarpanı sıfıra eşitlensin;

$$
\begin{aligned}
&+\Bigg(\int_0^{L_3}\left[\rho_3 + m_{yuk}\delta_o\left(x-L_3\right)\right]\frac{\partial}{\partial t}\Bigg[x^2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)+L_1 x\dot{\theta}_1\, cos\left(\theta_2+\varphi\right)\\
&+L_2 x\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)cos\varphi - L_1\,\dot{\theta}_1\, z\left(x,t\right)sin\left(\theta_2+\varphi\right)\\
&-L_2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)z\left(x,t\right)sin\varphi + x\,z_t\left(x,t\right)\Bigg]dx\\
&+\int_0^{L_3}\left[\rho_3 + m_{yük}\delta_o\left(x-L_3\right)\right]\Bigg[L_1 x\dot{\theta}_1\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)sin\left(\theta_2+\varphi\right)\\
&+L_2 x\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)sin\varphi + L_1\,\dot{\theta}_1\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)z\left(x,t\right)cos\left(\theta_2+\varphi\right)\\
&+L_2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)z\left(x,t\right)\cos\varphi + L_1\,\dot{\theta}_1\, z_t\left(x,t\right)sin\left(\theta_2+\varphi\right)\\
&+L_2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)z_t\left(x,t\right)sin\varphi\Bigg]dx + \frac{\partial}{\partial t}\left[I_{h_3}\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)\right]-(\tau_3-\beta_3\,\dot{\varphi})\Bigg)=0
\end{aligned}
\tag{2.1.39}
$$

Buradan üçüncü eklem açısının dinamiğini tanımlayan denklem;

$$
\begin{aligned}
&\Bigg\{I_{h3}+m_3\left[\frac{1}{3}L_3^2+\frac{1}{2}L_1L_3\cos(\theta_2+\varphi)+\frac{1}{2}L_2L_3\cos\varphi\right]\\
&+m_{yük}\left[L_3^2+L_1L_3\cos(\theta_2+\varphi)+L_2L_3\cos\varphi\right]\\
&-\left[L_1\sin(\theta_2+\varphi)+L_2\sin\varphi\right]\left[\rho_3\int_0^{L_3}z(x,t)dx+m_{yuk}z(L_3,t)\right]\Bigg\}\ddot{\theta}_1\\
&+\Bigg\{I_{h3}+m_3\left[\frac{1}{3}L_3^2+\frac{1}{2}L_2L_3\cos\varphi\right]+m_{yük}\left[L_3^2+L_2L_3\cos\varphi\right]\\
&-\left[L_2\sin\varphi\right]\left[\rho_3\int_0^{L_3}z(x,t)dx+m_{yuk}\,z(L_3,t)\right]\Bigg\}\ddot{\theta}_2\\
&+\left\{I_{h3}+\frac{1}{3}m_3L_3^2+m_{yük}L_3^2\right\}\ddot{\varphi}+\Bigg\{\left[\frac{1}{2}m_3+m_{yuk}\right]L_1L_3\dot{\theta}_1^{\,2}\sin(\theta_2+\varphi)\\
&++\left[\frac{1}{2}m_3+m_{yuk}\right]L_2L_3\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)^2\sin\varphi\Bigg\}+\Bigg\{-\Bigg[L_1\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_2+\dot{\varphi})\cos(\theta_2+\varphi)\\
&+L_2\,\dot{\varphi}\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\cos\varphi-L_1\dot{\theta}_1\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)\cos(\theta_2+\varphi)\\
&-L_2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)\cos\varphi\Bigg]\Bigg)\left[\rho_3\int_0^{L_3}z(x,t)dx+m_{yuk}\,z(L_3,t)\right]\Bigg\}\\
&+\left\{\rho_3\int_0^{L_3}xz_{tt}(x,t)dx+m_{yuk}L_3z_{tt}(L_3,t)\right\}+\beta_3\,\dot{\varphi}=\tau_3
\end{aligned}
\tag{2.1.40}
$$

olarak elde edilir.

(2.1.34) denklemindeki $\delta z(x,t)$'nin çarpanının sıfır olması halinde;

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{L_3} \rho_3 \frac{\partial}{\partial t}\left[L_1 \dot{\theta}_1 \cos\left(\theta_2 + \varphi\right) + L_2\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)\cos\varphi + x\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\varphi}\right) + z_t\left(x,t\right)\right] dx \\
&+ \int_0^{L_3} \rho_3 \left[L_1 \dot{\theta}_1 \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\varphi}\right)\sin\left(\theta_2 + \varphi\right) + L_2\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\varphi}\right)\sin\varphi\right] dx \\
&+ \int_0^{L_3} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI_a\, z_{xx}(x,t)\right] dx = 0
\end{aligned}
\tag{2.1.41}
$$

denklemi elde edilir. Bu integral denkleminin sıfıra eşit olabilmesi ancak integrali alınan denklemin sıfıra eşit olabilmesiyle mümkündür. Söz konusu denklemdeki kısmi türevler alınmak suretiyle aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$
\begin{aligned}
&\rho_3 L_1 \ddot{\theta}_1 \cos\left(\theta_2 + \varphi\right) - \rho_3 L_1 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_2 + \dot{\varphi}) \sin\left(\theta_2 + \varphi\right) + \rho_3 L_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \cos\varphi \\
&- \rho_3 L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\dot{\varphi} \sin\varphi + \rho_3 x(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \ddot{\varphi}) + \rho_3 z_{tt}\left(x,t\right) \\
&+ \rho_3 L_1 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\varphi}) \sin\left(\theta_2 + \varphi\right) + \rho_3 L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\varphi}) \sin\varphi \\
&+ EI_a z_{xxxx}\left(x,t\right) = 0
\end{aligned}
\tag{2.1.42}
$$

(2.1.42) denklemi düzenlenmek suretiyle esnek kolun dinamiğini tanımlayan kısmi diferansiyel denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$
\begin{aligned}
z_{tt}\left(x,t\right) + \frac{EI_a}{\rho_3} z_{xxxx}\left(x,t\right) = &-x\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \ddot{\varphi}\right) - \left[L_1 \cos\left(\theta_2 + \varphi\right) + L_2 \cos\varphi \right]\ddot{\theta}_1 \\
&- L_2 \cos\varphi \ddot{\theta}_2 - L_1 \dot{\theta}_1^2 \sin\left(\theta_2 + \varphi\right) - L_2\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2 \sin\varphi
\end{aligned}
\tag{2.1.43}
$$

2.1.5. Özdeğer Probleminin Çözümü

Özdeğer problemi, esas olarak bir sistemin karakteristik özelliklerini yansıtan bir matematik işlemidir. Burada esnek kolun davranışını ifade edebilmek için esnek kolun dinamiğini tanımlayan kısmi diferansiyel denklem, diferansiyel özdeğer problemi yaklaşımı kullanılarak sonsuz boyutlu adi bir diferansiyel denklemle gösterilecektir. Bu amaçla öncelikle esnek kola ait sınır şartlarının bulunması gerekir. Esnek kol, 2. rijit kola ankastre bağlı olduğundan, bu noktadaki deplasman ve eğim sıfırdır. O halde

$$z(0,t) = z_x(0,t) = 0 \tag{2.1.44}$$

olmalıdır. Bu durumda (2.1.34) denklemindeki $z(0,t)$ ve $z_x(0,t)$'nin değişimleri sıfırdır. E ve I_a parametreleri sıfırdan farklı katsayılar olduğu için, $\delta z(0,t)$ ve $\delta z_x(0,t)$ değişimlerinin katsayıları olan $z_{xxx}(0,t)$ ve $z_{xx}(0,t)$ ifadelerinin sıfırdan farklı olması gerekir.

Esnek kolun diğer ucu serbest olduğundan $z_x(L_3,t)$'nin değişimi serbesttir. Bu durumda (2.1.34) denkleminin sağlanabilmesi için $\delta z_x(L_3,t)$ değişiminin çarpanının sıfır olması gerekir.

$$z_{xx}(L_3,t) = 0 \tag{2.1.45}$$

Bu da esnek kol için gerekli olan 3. sınır şartını verir.

Esnek kolun diğer ucunun serbest olması ayrıca $z_x(L_3,t)$'nin değişiminin de serbest olmasını gerektirir. Bu durumda (2.1.34) denkleminin sağlanması $\delta z_x(L_3,t)$'nin çarpanlarının sıfır olması ile mümkün olacaktır.

$$\begin{aligned} z_{tt}(L_3,t) = -\Big[& L_1\ddot{\theta}_1\cos(\theta_2+\varphi) + L_2\left(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\right)\cos\varphi + L_3\left(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2+\ddot{\varphi}\right) \\ & + L_1\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_2+\varphi) + L_2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)^2\sin\varphi\Big] + \frac{EI_a}{m_{yük}} z_{xxx}(L_3,t) \end{aligned} \tag{2.1.46}$$

Yukarıdaki denklemdeki $z_{tt}(L_3,t)$ ifadesi, (2.1.42) kısmi diferansiyel denklemine yerleştirilerek esnek kolun x $=L_3$'deki 4. sınır koşulu aşağıdaki gibi bulunur.

$$z_{xxx}(L_3,t) = -\frac{m_{yük}}{\rho_3} z_{xxxx}(L_3,t) \tag{2.1.47}$$

Esnek kolun dinamiğini tanımlayan (2.1.43) denklemi, kısmi türevli diferansiyel denklem olup, bu denklemin çözümünde, diferansiyel özdeğer problemi yaklaşımı kullanılacaktır. Esnek kolun yer değiştirmesini ifade eden z(x,t) fonksiyonu, ($0 \leq x \leq L_3$) aralığında esnek kolun mod şekillerini ifade eden $\phi_i(x)$ fonksiyonları ile esnek kolun üzerindeki her bir noktanın zaman içerisindeki yer değişimini ifade eden $\eta_i(t)$ fonksiyonlarının sonsuz toplamı olarak (2.1.48) formülünde gösterildiği gibi yazılır.

$$z(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x)\eta_i(t) \tag{2.1.48}$$

Bir başka ifadeyle esnek bir parçanın serbest titreşimindeki mod sayısı sonsuz olduğundan, esnek parçanın davranışı z(x,t), sonsuz sayıdaki mod şekilleri ($\phi_i(x)$) ile deformasyon koordinatlarının ($\eta_i(t)$) çarpımlarının toplamıdır.

(2.1.43) denklemi homojen olmayan kısmi türevli denklemdir. Denklemin homojen kısmı sistemin doğal davranışının matematiksel gösterimidir.

$$\ddot{z}(x,t) + \frac{\mathrm{EI_a}}{\rho_3} z_{xxxx}(x,t) = 0 \tag{2.1.49}$$

denklemine (2.1.48) denklemi uygulanarak

$$\frac{\ddot{\eta}_i(t)}{\eta_i(t)} = -\frac{EI_a}{\rho_3} \frac{\phi_i''''(x)}{\phi_i(x)} \tag{2.1.50}$$

denklemi elde edilir. Burada gösterim kolaylığı için $\sum$ toplama operatörü yazılmamıştır. Probleme diferansiyel özdeğer yaklaşımı uygulanmaktadır ve (2.1.50) denkleminin sağlanabilmesi için eşitliğin her iki tarafının λ_i sabit değerine eşit olması gerekmektedir. O halde

$$\frac{\ddot{\eta}_i(t)}{\eta_i(t)} = -\frac{EI_a}{\rho_3} \frac{\phi_i''''(x)}{\phi_i(x)} = -\lambda_i \tag{2.1.51}$$

$$\frac{EI_a}{\rho_3}\phi_i''''(x)=\lambda_i\phi_i(x) \tag{2.1.52}$$

elde edilir. Artık problem λ_i özdeğerleri ve bu özdeğerlere karşılık gelen sıfırdan farklı $\phi_i(x)$ öz fonksiyonlarının bulunması problemine dönüşmüş olur. Gerekli düzenlemeler yapılarak

$$k_i^4=\lambda_i\frac{\rho_3}{EI_a} \tag{2.1.53}$$

katsayısı tarif edilir. Bu sayede diferansiyel özdeğer problemi

$$\phi_i''''(x)=k_i^4\phi_i(x) \tag{2.1.54}$$

şeklinde dördüncü dereceden adi bir diferansiyel denkleme dönüşmüş olur. (2.1.44), (2.1.45) ve (2.1.47) sınır şartları (2.1.48) denklemine uygulanarak (2.1.54) denkleminin çözümü için gerekli olan sınır şartlarından ilk üçü

$$\phi_i(0)=\phi_i'(0)=\phi_i''(L_3)=0 \tag{2.1.55}$$

olarak ve 4. sınır şartı da

$$\phi_i'''(\mathrm{L}_3)+\frac{m_{yük}}{\rho_3}\phi_i''''(\mathrm{L}_3)=0 \tag{2.1.56}$$

olarak bulunur. (2.1.54) denkleminin bu sınır şartlarını sağlayan çözümü için aşağıdaki denklem önerilir.

$$\phi_i(x)=C_1\sin(k_ix)+C_2\cos(k_ix)+C_3\sinh(k_ix)+C_4\cosh(k_ix) \tag{2.1.57}$$

$\phi_i(x)$ verilen sınır şartlarını sağlayan ve esnek kolun *i.* doğal frekans ile titreştiği andaki mod şeklinin matematiksel ifadesidir. Bu denkleme (2.1.55) sınır şartları uygulandığında

$$h_i = \frac{\cos(k_i L_3) + \cosh(k_i L_3)}{\sin(k_i L_3) + \sinh(k_i L_3)} \tag{2.1.58}$$

ve

$$\begin{aligned} C_1 &= -h_i C_2 \\ C_4 &= -C_2 \\ C_3 &= -C_1 = h_i C_2 \end{aligned} \tag{2.1.59}$$

bağıntıları elde edilir. Bu değerler (2.1.43) kısmi türevli diferansiyel denklemin verilen sınır şartlarını sağlayacak olan $\phi_i(x)$ fonksiyonuna yerleştirilirse;

$$\phi_i(x) = -C_2 \left\{ \cosh(k_i x) - \cos(k_i x) - h_i[\sinh(k_i x) - \sin(k_i x)] \right\} \tag{2.1.60}$$

denklemi elde edilir. C = - C_2 alınarak $\phi_i(x)$ eşitliği aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\phi_i(x) = C \left\{ \cosh(k_i x) - \cos(k_i x) - h_i[\sinh(k_i x) - \sin(k_i x)] \right\} \tag{2.1.61}$$

Burada C, herhangi bir *i.* mod şekline ait olan ve doğrudan hesaplanamayan genlik değeridir. Diğer bir deyişle sadece mod şekli doğrudan ve kesin bir şeklide belirlenebilir. C değeri ise normalize edilerek bulunur. C= 1 alınarak $\phi_i(x)$ denklemi normalize edilirse,

$$\phi_i(x) = \cosh(k_i x) - \cos(k_i x) - h_i[\sinh(k_i x) - \sin(k_i x)] \tag{2.1.62}$$

denklemi elde edilir. 4. sınır şartı (2.1.56) denkleminde verilmektedir. Bu sınır şartı (2.1.60) denklemine uygulanarak, k_i değerinin bulunmasını sağlayan karakteristik denklem, diğer bir deyişle frekans denklemi elde edilir:

$$1+\cosh(k_iL_3)\cos(k_iL_3)+\frac{m_{yük}}{\rho_3}k_i\left[\cos(k_iL_3)\sinh(k_iL_3)-\cosh(k_iL_3)\sin(k_iL_3)\right]=0 \quad (2.1.63)$$

Esnek kolun dinamiğini tanımlayan denklemi elde etmek için önce (2.1.63) denkleminden k_i'ler ve buna bağlı olarak λ_i özdeğerleri bulunur. k_i ve λ_i değerleri (2.1.43) denklemine yerleştirilerek, (2.1.64) denklemi elde edilir.

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{\infty}\left[\phi_i(x)\ddot{\eta}_i(t)\right]+\frac{EI_a}{\rho_3}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\eta_i(t)\ \phi_i''''(x)\right]=-x(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2+\ddot{\varphi})\\&-\left[L_1\cos(\theta_2+\varphi)+L_2\cos\varphi\right]\ddot{\theta}_1-L_2\cos\varphi\ \ddot{\theta}_2-L_1\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_2+\varphi)-L_2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)^2\sin\varphi\end{aligned} \quad (2.1.64)$$

Yukarıdaki denklem $\phi_j(x)$ fonksiyonu ile çarpılır. (2.1.53) ve (2.1.54) eşitliklerinden faydalanılarak gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra, elde edilen denklem esnek kol boyunca integre edilir,

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{\infty}\left[\int_0^{L_3}\phi_j(x)\phi_i(x)\,dx\right]\ddot{\eta}_i(t)+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\int_0^{L_3}\phi_j(x)\phi_i(x)\,dx\right]\lambda_i\eta_i(t)=\\&-\left(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2+\ddot{\varphi}\right)\left[\int_0^{L_3}x\phi_j(x)dx\right]-\left\{\left[L_1\cos(\theta_2+\varphi)+L_2\cos\varphi\right]\ddot{\theta}_1\right.\\&\left.+L_2\cos\varphi\ddot{\theta}_2+L_1\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_2+\varphi)+L_2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)^2\sin\varphi\right\}\int_0^{L_3}\phi_j(x)dx\end{aligned} \quad (2.1.65)$$

Bu ifadedeki integrallerin sembolik gösterimi ve açık ifadeleri aşağıdaki gibidir.

$$\gamma_j^a=\int_0^{L_3}x\phi_j(x)\,dx=\frac{2}{k_j^2}-\frac{2k_jL_3\left[1+\cosh(k_jL_3)\cos(k_jL_3)\right]}{k_j^2\left[\sinh(k_jL_3)+\sin(k_jL_3)\right]} \quad (2.1.66)$$

$$\gamma_j^b = \int_0^{L_3} \phi_j(x)\,dx = \frac{2\left[\cosh(k_jL_3)+\cos(k_jL_3)-\cosh(k_jL_3)\cos(k_jL_3)-1\right]}{k_j\left[\sinh(k_jL_3)+\sin(k_jL_3)\right]} \qquad (2.1.67)$$

$$\gamma^a = (\gamma_1^a, \gamma_2^a, \gamma_3^a, \ldots)^T \;,\quad \gamma^b \triangleq (\gamma_1^b, \gamma_2^b, \gamma_3^b, \ldots)^T \qquad (2.1.68)$$

(2.1.65) denkleminin sol tarafındaki ilk integralin de sembolik gösterimi ve açık ifadesi aşağıda verilmektedir.

$$a_{ji} = \int_0^{L_3} \phi_j(x)\phi_i(x)dx = -\frac{m_{yük}}{\rho_3}\phi_j(L_3)\phi_i(L_3) \qquad i \neq j \qquad (2.1.69)$$

$$\begin{aligned} a_{ji} = \int_0^{L_3} \phi_i^2(x)dx = {} & L_3 + \frac{h_i^2-1}{k_i}\sinh(k_iL_3)\cos(k_iL_3) - \frac{h_i^2+1}{k_i}\sin(k_iL_3)\cosh(k_iL_3) \\ & + \frac{h_i^2+1}{4k_i}\sinh(2k_iL_3) - \frac{h_i^2-1}{4k_i}\sin(2k_iL_3) + \frac{2h_i}{k_i}\sin(k_iL_3)\sinh(k_iL_3) \qquad i=j \\ & - \frac{h_i}{2k_i}\cosh(2k_iL_3) + \frac{h_i}{2k_i}\cos(2k_iL_3) \end{aligned} \qquad (2.1.70)$$

Bu parametre n x n matris formunda

$$a = [a_{ji}] \triangleq \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \qquad (2.1.71)$$

olarak yazılırsa;. (2.1.65) denklemini vektör-matris formunda ifade edebilmek amacıyla aşağıdaki düzenlemeler yapılır.

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\int_0^{L_3}\phi_j(x)\phi_i(x)dx\right)\ddot{\eta}_i(t)=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_1 \\ \vdots\end{bmatrix}=a\ddot{\eta}(t) \tag{2.1.72}$$

Burada;

$$\begin{aligned}&\eta \triangleq (\eta_1,\eta_2,\eta_3,...)^T \\ &\ddot{\eta} \triangleq (\ddot{\eta}_1,\ddot{\eta}_2,\ddot{\eta}_3)^T\end{aligned} \tag{2.1.73}$$

$$\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}\triangleq diag(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,...) \tag{2.1.74}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\int_0^{L_3}\phi_j(x)\phi_i(x)dx\right)\lambda_i\eta_i(t)=a\Lambda\eta(t) \tag{2.1.75}$$

matematiksel gösterimine sahiptir.

Sonuç olarak esnek kolun dinamiğini tanımlayan (2.1.43) denklemi vektör-matris formunda aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned}&a\ddot{\eta}(t)+a\Lambda\eta(t)+\left(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2+\ddot{\varphi}\right)\gamma^a+\left\{\left[L_1\cos(\theta_2+\varphi)+L_2\cos\varphi\right]\ddot{\theta}_1\right. \\ &\quad \left.+L_2\cos\varphi\ddot{\theta}_2+L_1\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_2+\varphi)+L_2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)^2\sin\varphi)\right\}\gamma^b=0\end{aligned} \tag{2.1.76}$$

Sistemin katı hal dinamiğini tanımlayan (2.1.36), (2.1.38), (2.1.40) denklemlerini vektör-matris formunda ifade edebilmek amacıyla, söz konusu denklemlerdeki integrallerin hesaplanması gerekir. Bu integrallere öncelikle (2.1.48) ve (2.1.67) denklemleri uygulanmak suretiyle aşağıdaki (2.1.77), (2.1.78), (2.1.79), (2.1.80) formuna getirilerek, gerekli işlemler yapılırsa;

$$\rho_3 \int_0^{L_3} z(x,t)dx + m_{yük} z(L_3,t) = \left(\rho_3 \int_0^{L_3} \phi_i(x)dx + m_{yük}\phi_i(L_3) \right) \eta_i(t)$$
$$= \left(\rho_3 \gamma_i^b + m_{yük}\phi_i(L_3) \right) \eta_i(t) = \alpha_i^b \eta_i(t) \tag{2.1.77}$$

$$\rho_3 \int_0^{L_3} z_{tt}(x,t)dx + m_{yük} z_{tt}(L_3,t) = \left(\rho_3 \int_0^{L_3} \phi_i(x)dx + m_{yük}\phi_i(L_3) \right) \ddot{\eta}_i(t)$$
$$= \left(\rho_3 \gamma_i^b + m_{yük}\phi_i(L_3) \right) \ddot{\eta}_i(t) = \alpha_i^b \ddot{\eta}_i(t) \tag{2.1.78}$$

$$\rho_3 \int_0^{L_3} x z_{tt}(x,t)dx + m_{yük} L_3 z_{tt}(L_3,t) = \left(\rho_3 \int_0^{L_3} x\phi_i(x)dx + m_{yük} L_3\phi_i(L_3) \right) \ddot{\eta}_i(t)$$
$$= \left(\rho_3 \gamma_i^a + m_{yük} L_3\phi_i(L_3) \right) \ddot{\eta}_i(t) = \alpha_i^a \ddot{\eta}_i(t) \tag{2.1.79}$$

$$\rho_3 \int_0^{L_3} z_t(x,t)dx + m_{yük} z_t(L_3,t) = \left(\rho_3 \int_0^{L_3} \phi_i(x)dx + m_{yük}\phi_i(L_3) \right) \dot{\eta}_i(t) = \alpha_i^b \dot{\eta}_i(t) \tag{2.1.80}$$

elde edilir. Burada $\alpha_i^a \triangleq (\alpha_1^a, \alpha_2^a, \alpha_3^a, ...)$, $\alpha^b \triangleq (\alpha_1^b, \alpha_2^b, \alpha_3^b, ...)$ olmak üzere

$$\alpha_i^a = \rho_3 \gamma_i^a + m_{yük} L_3 \phi_i(L_3) \tag{2.1.81}$$

$$\alpha_i^b = \rho_3 \gamma_i^b + m_{yük} \phi_i(L_3) \tag{2.1.82}$$

şeklindedir. Bu denklemler elde edildikten sonra, birinci eklem açısının dinamiği (2.1.83) denklemindeki gibi elde edilir.

$$
\begin{aligned}
&\Big\{\Big(I_{h1}+I_{h2}+I_{h3}\Big)+\frac{1}{3}m_1L_1^2+m_aL_1^2+m_2\Big[L_1^2+\frac{1}{3}L_2^2+L_1L_2\cos\theta_2\Big]+m_3\Big[L_1^2+L_2^2\\
&+\frac{1}{3}L_3^2+2L_1L_2\cos\theta_2+L_1L_3\cos(\theta_2+\varphi)+L_2L_3\cos\varphi\Big]+m_b\Big[L_1^2+L_2^2+2L_1L_2\cos\theta_2\Big]\\
&+m_{yük}\Big[L_1^2+L_2^2+L_3^2+2L_1L_2\cos\theta_2+2L_1L_3\cos(\theta_2+\varphi)+2L_2L_3\cos\varphi\Big]\\
&-2\Big[L_1\sin(\theta_2+\varphi)+L_2\sin\varphi\Big]\alpha^b\eta(t)\Big\}\ddot{\theta}_1\\
&\Big\{\Big(I_{h2}+I_{h3}\Big)+m_2\Big[\frac{1}{3}L_2^2+\frac{1}{2}L_1L_2\cos\theta_2\Big]+m_3\Big[L_2^2+\frac{1}{3}L_3^2+L_1L_2\cos\theta_2\\
&+\frac{1}{2}L_1L_3\cos(\theta_2+\varphi)+L_2L_3\cos\varphi\Big]+m_b\Big[L_2^2+L_1L_2\cos\theta_2\Big]+\\
&m_{yük}\Big[L_2^2+L_3^2+L_1L_2\cos\theta_2+L_1L_3\cos(\theta_2+\varphi)+2L_2L_3\cos\varphi\Big]\\
&-\Big[L_1\sin(\theta_2+\varphi)+2L_2\sin\varphi\Big]\alpha^b\eta(t)\Big\}\ddot{\theta}_2\\
&\Big\{I_{h3}+m_3\Big[\frac{1}{3}L_3^2+\frac{1}{2}L_1L_3\cos(\theta_2+\varphi)+\frac{1}{2}L_2L_3\cos\varphi\Big]+m_{yük}\Big[L_3^2+L_1L_3\cos(\theta_2+\varphi)\\
&+L_2L_3\cos\varphi\Big]-\Big[L_1\sin(\theta_2+\varphi)+L_2\sin\varphi\Big]\alpha^b\eta(t)\Big\}\ddot{\varphi}\\
&\Big\{-\Big[\frac{1}{2}m_2+m_3+m_b+m_{yük}\Big]L_1L_2\dot{\theta}_2\Big(2\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\Big)\sin\theta_2\\
&-\Big[\frac{1}{2}m_3+m_{yük}\Big]L_2L_3\dot{\varphi}\Big(2\dot{\theta}_1+2\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\Big)\sin\varphi\\
&-\Big[\frac{1}{2}m_3+m_{yük}\Big]L_1L_3\Big(\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\Big)\Big(2\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\Big)\sin(\theta_2+\varphi)\Big\}\\
&+\Big\{-\Big[L_1\Big(\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\Big)\Big(2\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\Big)\cos(\theta_2+\varphi)+L_2\dot{\varphi}\Big(2\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\Big)\cos\varphi\Big]\alpha^b\eta(t)\Big\}\\
&+\Big\{-\Big[2L_1\Big(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\Big)\sin(\theta_2+\varphi)+2L_2\Big(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\Big)\sin\varphi\Big]\alpha^b\dot{\eta}(t)\Big\}\\
&+\Big\{\alpha^a+\Big[L_1\cos(\theta_2+\varphi)+L_2\cos\varphi\Big]\alpha^b\Big\}\ddot{\eta}(t)+\beta_1\dot{\theta}_1=\tau_1
\end{aligned}
\tag{2.1.83}
$$

İkinci eklem açısının dinamiği de (2.1.84) denklemiyle ifade edilmiştir.

$$
\begin{aligned}
&\Big\{\Big(I_{h2}+I_{h3}\Big)+m_2\Big[\frac{1}{3}L_2^2+\frac{1}{2}L_1L_2\cos\theta_2\Big]+m_3\Big[L_2^2+\frac{1}{3}L_3^2+L_1L_2\cos\theta_2\\
&+\frac{1}{2}L_1L_3\cos(\theta_2+\varphi)+L_2L_3\cos\varphi\Big]+m_b\Big[L_2^2+L_1L_2\cos\theta_2\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+m_{yük}\left[L_2^2+L_3^2+L_1L_2\cos\theta_2+L_1L_3\cos(\theta_2+\varphi)+2L_2L_3\cos\varphi\right]\\
&-\left[L_1\sin(\theta_2+\varphi)+2L_2\sin\varphi\right]\alpha^b\eta(t)\Big\}\ddot{\theta}_1\\
&+\Big\{\left(I_{h2}+I_{h3}\right)+\frac{1}{3}m_2L_2^2+m_bL_2^2+m_3\left[L_2^2+\frac{1}{3}L_3^2+L_2L_3\cos\varphi\right]\\
&+m_{yük}\left[L_2^2+L_3^2+2L_2L_3\cos\varphi\right]-\left[2L_2\sin\varphi\right]\alpha^b\eta(t)\Big\}\ddot{\theta}_2\\
&+\Big\{I_{h3}+m_3\left[\frac{1}{3}L_3^2+\frac{1}{2}L_2L_3\cos\varphi\right]+m_{yük}\left[L_3^2+L_2L_3\cos\varphi\right]\\
&-\left[L_2\sin\varphi\right]\alpha^b\eta(t)\Big\}\ddot{\varphi}\\
&+\Big\{\left[\frac{1}{2}m_2+m_3+m_b+m_{yük}\right]L_1L_2\dot{\theta}_1^2\sin\theta_2\\
&+\left[\frac{1}{2}m_3+m_{yük}\right]L_1L_3\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_2+\varphi)\\
&-\left[\frac{1}{2}m_3+m_{yük}\right]L_2L_3\left(2\dot{\theta}_1+2\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)\dot{\varphi}\sin\varphi\Big\}\\
&+\Big\{\left[L_1\dot{\theta}_1^2\cos(\theta_2+\varphi)-L_2\dot{\varphi}\left(2\dot{\theta}_1+2\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)\cos\varphi\right]\alpha^b\eta(t)\Big\}\\
&+\Big\{-2L_2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)\sin\varphi\,\alpha^b\dot{\eta}(t)\Big\}\\
&+\Big\{\alpha^a+L_2\cos\varphi\;\alpha^b\Big\}\ddot{\eta}(t)+\beta_2\dot{\theta}_2=\tau_2
\end{aligned}
\tag{2.1.84}
$$

Son olarak üçüncü eklem açısının dinamiği (2.1.85) denklemiyle ifade edilmektedir.

$$
\begin{aligned}
&\Big\{I_{h3}+m_3\left[\frac{1}{3}L_3^2+\frac{1}{2}L_1L_3\cos(\theta_2+\varphi)+\frac{1}{2}L_2L_3\cos\varphi\right]+m_{yük}\Big[L_3^2+L_1L_3\cos(\theta_2+\varphi)\\
&+L_2L_3\cos\varphi\Big]-\left[L_1\sin(\theta_2+\varphi)+L_2\sin\varphi\right]\alpha^b\eta(t)\Big\}\ddot{\theta}_1\\
&+\Big\{I_{h3}+m_3\left[\frac{1}{3}L_3^2+\frac{1}{2}L_2L_3\cos\varphi\right]+m_{yük}\left[L_3^2+L_2L_3\cos\varphi\right]-\left[L_2\sin\varphi\right]\alpha^b\eta(t)\Big\}\ddot{\theta}_2\\
&+\Big\{I_{h3}+\frac{1}{3}m_3L_3^2+m_{yük}L_3^2\Big\}\ddot{\varphi}\\
&+\Big\{\left[\frac{1}{2}m_3+m_{yük}\right]L_1L_3\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_2+\varphi)+\left[\frac{1}{2}m_3+m_{yük}\right]L_2L_3(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)^2\sin\varphi\Big\}\\
&+\left[L_1\dot{\theta}_1^2\cos(\theta_2+\varphi)+L_2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)^2\cos\varphi\right]\alpha^b\eta(t)+\alpha^a\ddot{\eta}(t)+\beta_3\dot{\varphi}=\tau_3
\end{aligned}
\tag{2.1.85}
$$

İlk ikisi katı üçüncüsü esnek koldan oluşan sistemin dinamik denklemleri, esnek kolun sadece iki modu dikkate alınarak aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir.

$$\begin{aligned}
m_{11}\ddot{\theta}_1 + m_{12}\ddot{\theta}_2 + m_{13}\ddot{\varphi} + m_{14}\ddot{\eta}_1 + m_{15}\ddot{\eta}_2 &= \tau_1 - f_1 \\
m_{21}\ddot{\theta}_1 + m_{22}\ddot{\theta}_2 + m_{23}\ddot{\varphi} + m_{24}\ddot{\eta}_1 + m_{25}\ddot{\eta}_2 &= \tau_2 - f_2 \\
m_{31}\ddot{\theta}_1 + m_{32}\ddot{\theta}_2 + m_{33}\ddot{\varphi} + m_{34}\ddot{\eta}_1 + m_{35}\ddot{\eta}_2 &= \tau_3 - f_3 \\
m_{41}\ddot{\theta}_1 + m_{42}\ddot{\theta}_2 + m_{43}\ddot{\varphi} + m_{44}\ddot{\eta}_1 + m_{45}\ddot{\eta}_2 &= -f_4 \\
m_{51}\ddot{\theta}_1 + m_{52}\ddot{\theta}_2 + m_{53}\ddot{\varphi} + m_{54}\ddot{\eta}_1 + m_{55}\ddot{\eta}_2 &= -f_5
\end{aligned} \tag{2.1.86}$$

Yukarıdaki denklemdeki katsayılar (2.1.76), (2.1.83), (2.1.84), (2.1.85) denklemlerinden elde edilmektedir. Bu katsayıların açık ifadesi aşağıda verilmektedir.

$$\begin{aligned}
m_{11} =& \left(I_{h1} + I_{h2} + I_{h3}\right) + \frac{1}{3}m_1L_1^2 + m_aL_1^2 + m_2\left[L_1^2 + \frac{1}{3}L_2^2 + L_1L_2\cos\theta_2\right] + m_3\left[L_1^2 + L_2^2 + \frac{1}{3}L_3^2\right.\\
&\left. +2L_1L_2\cos\theta_2 + L_1L_3\cos(\theta_2+\varphi) + L_2L_3\cos\varphi\right] + m_b\left[L_1^2 + L_2^2 + 2L_1L_2\cos\theta_2\right]\\
&+ m_{yük}\left[L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + 2L_1L_2\cos\theta_2 + 2L_1L_3\cos(\theta_2+\varphi) + 2L_2L_3\cos\varphi\right]\\
&-2\left[L_1\sin(\theta_2+\varphi) + L_2\sin\varphi\right]\alpha^b\eta
\end{aligned} \tag{2.1.87}$$

$$\begin{aligned}
m_{12} =& \left(I_{h1} + I_{h3}\right) + m_2\left[\frac{1}{3}L_2^2 + \frac{1}{2}L_1L_2\cos\theta_2\right] + m_3\left[L_2^2 + \frac{1}{3}L_3^2 + L_1L_2\cos\theta_2\right.\\
&\left. + \frac{1}{2}L_1L_3(\cos\theta_2 + \varphi) + L_2L_3\cos\varphi\right] + m_b\left[L_2^2 + L_1L_2\cos\theta_2\right]\\
&+ m_{yük}\left[L_2^2 + L_3^2 + L_1L_2\cos\theta_2 + L_1L_3\cos(\theta_2+\varphi)\right.\\
&\left. + 2L_2L_3\cos\varphi\right] - \left[L_1\sin(\theta_2+\varphi) + 2L_2\sin\varphi\right]\alpha^b\eta
\end{aligned} \tag{2.1.88}$$

$$m_{13} = I_{h3} + m_3\left[\frac{1}{3}L_3^2 + \frac{1}{2}L_1L_3\cos(\theta_2+\varphi) + \frac{1}{2}L_1L_3\cos\varphi\right] + m_{yük}\left[L_3^2 + L_1L_3\cos(\theta_2+\varphi)\right.$$
$$\left. + L_2L_3\cos\varphi\right] - \left[L_1\sin(\theta_2+\varphi) + L_2\sin\varphi\right]\alpha^b\eta \tag{2.1.89}$$

$$[\,m_{141}\quad m_{142}\,] = \alpha^a + [L_1\cos(\theta_2+\varphi) + L_2\cos\varphi]\alpha^b \tag{2.1.90}$$

$$\begin{aligned} f_1 = {} & \beta_1\dot{\theta}_1 - \left[\frac{1}{2}m_2 + m_3 + m_b + m_{yük}\right]L_1L_2\dot{\theta}_2\left(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)\sin\theta_2 \\ & - \left[\frac{1}{2}m_3 + m_{yük}\right]L_2L_3\dot{\varphi}\left(2\dot{\theta}_1 + 2\dot{\theta}_2 + \dot{\varphi}\right)\sin\varphi \\ & - \left[\frac{1}{2}m_3 + m_{yük}\right]L_1L_3\left(\dot{\theta}_2 + \dot{\varphi}\right)\left(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\varphi}\right)\sin(\theta_2+\varphi) \\ & - \left[L_1\left(\dot{\theta}_2 + \dot{\varphi}\right)\left(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\varphi}\right)\cos(\theta_2+\varphi)\right. \\ & \left. + L_2\dot{\varphi}\left(2\dot{\theta}_1 + 2\dot{\theta}_2 + \dot{\varphi}\right)\cos\varphi\right]\alpha^b\eta - \left[2L_1\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\varphi}\right)\sin(\theta_2+\varphi)\right. \\ & \left. + 2L_2\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\varphi}\right)\sin\varphi\right]\alpha^b\dot{\eta} \end{aligned} \tag{2.1.91}$$

$$m_{21} = m_{12} \tag{2.1.92}$$

$$m_{22} = \left(I_{h2} + I_{h3}\right) + \frac{1}{3}m_2L_2^2 + m_bL_2^2 + m_3\left[L_2^2 + \frac{1}{3}L_3^2 + L_2L_3\cos\varphi\right] + m_{yük}\left[L_2^2 + L_3^2\right.$$
$$\left. + 2L_2L_3\cos\varphi\right] - \left[2L_2\sin\varphi\right]\alpha^b\eta \tag{2.1.93}$$

$$m_{23} = I_{h3} + m_3\left[\frac{1}{3}L_3^2 + \frac{1}{2}L_2L_3\cos\varphi\right] + m_{yük}\left[L_3^2 + L_2L_3\cos\varphi\right] - \left[L_2\, sin\varphi\right]\alpha^b\eta \tag{2.1.94}$$

$$[\,m_{241}\quad m_{242}\,] = \alpha^a + L_2\cos\varphi\ \alpha^b \tag{2.1.95}$$

$$f_2 = \beta_2\dot{\theta}_2 + \left[\frac{1}{2}m_2 + m_3 + m_b + m_{yük}\right]L_1L_2\dot{\theta}_1^2\sin\theta_2$$
$$+\left(\frac{1}{2}m_3 + m_{yük}\right)L_1L_3\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_2+\varphi)$$
$$-\left[\frac{1}{2}m_3 + m_{yük}\right]L_2L_3\dot{\varphi}\left(2\dot{\theta}_1 + 2\dot{\theta}_2 + \dot{\varphi}\right)\sin\varphi \tag{2.1.96}$$
$$+\left[L_1\dot{\theta}_1^2\cos(\theta_2+\varphi) - L_2\dot{\varphi}\left(2\dot{\theta}_1 + 2\dot{\theta}_2 + \dot{\varphi}\right)\cos\varphi\right]\alpha^b\eta$$
$$-2L_2\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\varphi}\right)\sin\varphi\,\alpha^b\dot{\eta}$$

$$m_{31} = I_{h3} + m_3\left[\frac{1}{3}L_3^2 + \frac{1}{2}L_1L_3\cos(\theta_2+\varphi) + \frac{1}{2}L_2L_3\cos\varphi\right] + m_{yük}\left[L_3^2\right.$$
$$\left. + L_1L_3\cos(\theta_2+\varphi) + L_2L_3\cos\varphi\right] - \left[L_1\sin(\theta_2+\varphi) + L_2\sin\varphi\right]\alpha^b\eta \tag{2.1.97}$$

$$m_{32} = I_{h3} + m_3\left[\frac{1}{3}L_3^2 + \frac{1}{2}L_2L_3\cos\varphi\right] + m_{yük}\left[L_3^2 + L_2L_3\cos\varphi\right] - \left[L_2\sin\varphi\right]\alpha^b\eta \tag{2.1.98}$$

$$m_{33} = I_{h3} + \frac{1}{3}m_3L_3^2 + m_{yük}L_3^2 \tag{2.1.99}$$

$$[m_{341}\ \ m_{342}] = \alpha^a \tag{2.1.100}$$

$$f_3 = \beta_3\dot{\varphi} + \left[\frac{1}{2}m_3 + m_{yük}\right]L_1L_3\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_2+\varphi) + \left[\frac{1}{2}m_3 + m_{yük}\right]L_2L_3(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2\sin\varphi$$
$$+\left[L_1\dot{\theta}_1^2\cos(\theta_2+\varphi) + L_2\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2\cos\varphi\right]\alpha^b\eta \tag{2.1.101}$$

$$[m_{41}\ m_{51}]^T = \gamma^a + \left[L_1\cos(\theta_2+\varphi) + L_2\cos\varphi\right]\gamma^b \tag{2.1.102}$$

$$[m_{42}\ m_{52}]^T = \gamma^a - L_2\cos\varphi\ \gamma^b \tag{2.1.103}$$

$$[m_{43}\ m_{53}]^T = \gamma^a \tag{2.1.104}$$

$$\begin{bmatrix} m_{44} & m_{45} \\ m_{54} & m_{55} \end{bmatrix} = a \tag{2.1.105}$$

$$[f_4 \ f_5]^T = a\Lambda\eta(t) + \left[L_1\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2+\varphi) + L_2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)^2 \sin\varphi \right]\gamma^b \tag{2.1.106}$$

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} & m_{45} \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} \end{bmatrix}, \tag{2.1.107}$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} & m_{45} \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 - f_1 \\ \tau_2 - f_2 \\ \tau_3 - f_3 \\ -f_4 \\ -f_5 \end{bmatrix} \tag{2.1.108}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

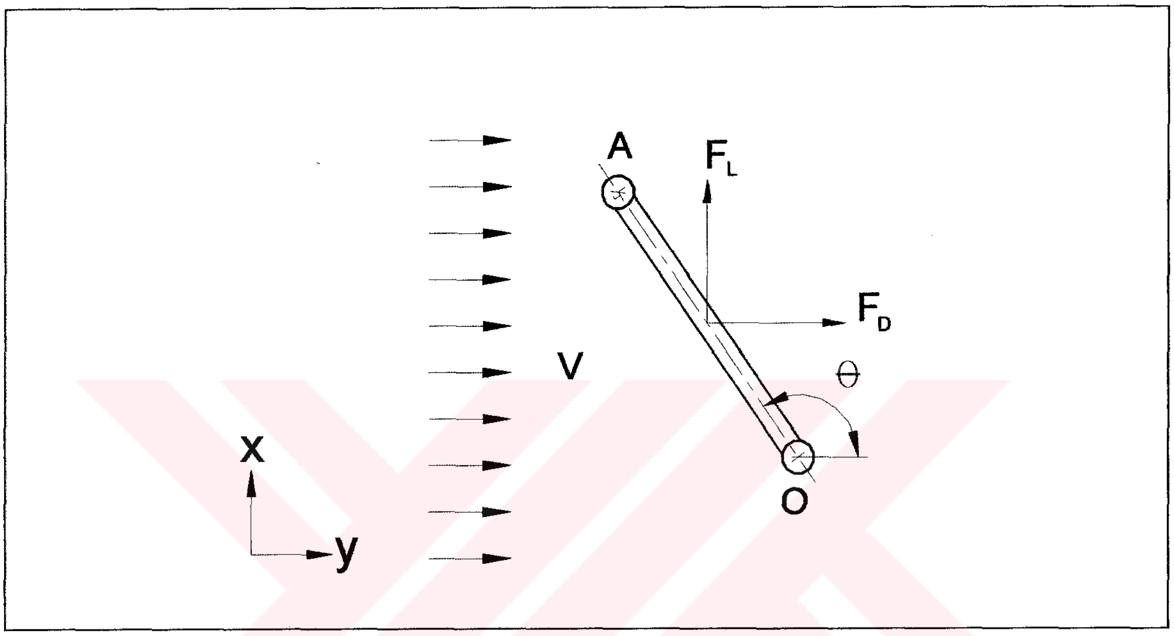
2.2. Su Altında Çalışan Birincisi Katı İkincisi Esnek Kollu Robotun Modellenmesi

Bu çalışmada su altında hareket eden ilki katı ikincisi esnek bir kolun yatay düzlemde yaptığı hareket incelenmektedir. Esnek kolun uç sapması $1*10^{-3}$ mm mertebesinde olduğundan esnek kolun su altındaki davranışı modellenirken katı kol gibi düşünülmüştür. Karada çalışan robotlardan farklı olarak su altında çalışan robotlara suyun kaldırma kuvveti (*buoyant force*), direnç kuvveti (*drag force*) ve taşıma kuvveti (*lift force*) olarak bilinen 3 farklı kuvvet etkimektedir.

Bu kuvvetlerden ilki olan F_b suyun kaldırma kuvveti hidrostatik bir kuvvettir. Etkime noktası her bir kolun hacim merkezinde, doğrultusu düşey eksen üzerinde ve yönü ise daima yukarı doğrudur. Bu kuvvetin değeri ise suya tamamıyla dalmış robot kolu için

F_b= kolun hacmi * suyun yoğunluğu (2.2.1)

olarak verilmektedir. Tezin konusu olan robot kolları suyun içinde yatay düzlemde hareket ettiğinden suyun kaldırma kuvveti, sistemin hareket denklemlerinde yer almamaktadır.



Şekil 2.2. Su altında duran bir cisme etkiyen akışın uyguladığı kuvvetler

Direnç ve taşıma kuvvetleri hidrodinamik kuvvetlerdir. Direnç kuvveti, sürüklenme kuvveti olarak da bilinmektedir. Taşıma kuvveti literatürde kaldırma kuvveti olarak da geçmektedir. Şekil 2.2'de görüldüğü gibi akışa karşı, yerleştirilen sabit bir cisme tesir eden kuvvetin iki bileşeni vardır. Akışa paralel yönde olan bileşen F_D direnç kuvveti ve akışa dik yönde olan bileşen ise F_L taşıma kuvveti olarak adlandırılır. Durgun bir akışkan içinde hareket eden katı cismin akışkana uyguladığı kuvvetler de aynı şekilde ifade edilmektedir. Bu durumda F_D direnç kuvveti cismin hızıyla zıt yönlüdür. Bu kuvvetler

$$F_D = \frac{1}{2} C_D \rho A V^2 \tag{2.2.2}$$

$$F_L = \frac{1}{2} C_L \rho A V^2 \tag{2.2.3}$$

şeklinde ifade edilmektedirler [46,47,48,49].

Burada;

C_D = Direnç katsayısı,

C_L = Kaldırma katsayısı,

ρ = suyun yoğunluğu, (kg/m^3)

A = Karakteristik alan, (m^2)

V = Akış hızı, (m/s)

olarak tanımlanmaktadır.

Direnç katsayısı ve kaldırma katsayısı cisimlerin şekline bağlı olarak değişebilen değerlerdir. Bu katsayılar boyut analizi uygulanarak belirli bir geometrik şekle, Reynolds sayısına ve izafi pürüzlülüğe bağlı bir fonksiyon olarak ifade edilirler. Direnç katsayısı basınç direncinin ve sürtünme direncinin toplamından ibarettir. Akışkan içinde hareket eden cismin ön tarafındaki durma bölgesinde yüksek basınç ve arka tarafındaki ayrılma bölgesindeki düşük basınç arasındaki fark, basınca bağlı bir direnç oluşturmaktadır. Bu dirence basınç direnci denir. Genellikle yüksek Reynolds sayılarında gözlenir. Düşük Reynolds sayılarında ise, kayma gerilmelerinin cismin üzerinde integre edilmesinden elde edilen sürtünme direnci ön plana çıkmaktadır. Bu tez çalışmasında robot kollarını hareket ettiren motorlar düşük hızlarda sürüldüğünden, direnç katsayısı yalnızca sürtünme direncinden oluşmaktadır.

Direnç kuvvetinin ifadesi olan (2.2.2) denkleminde yer alan A karakteristik alanının tarifi için farklı yaklaşımlar mevcuttur. Genelde bu alanın, cismin akış tarafından görüldüğü ön bakış alanı (*frontal area*) olduğu kabulü yaygındır.

Genel olarak kolun O dönme merkezine x mesafede oluşan F_{Dx} direnç kuvvetinin x mesafesiyle çarpımının kolun L boyunca integrasyonundan M_D direnç momenti elde edilmektedir. Kolun hareketi sırasında bu direnç momentinin yenilmesi gerekir. Hareket denklemleri çıkartılan ilki katı ikincisi esnek olan robot kolları su altında yatay düzlemde hareket ettiklerinden, F_L taşıma kuvvetinin etkisi sistemin hareket denklemlerinde yer almamaktadır. Diğer bir deyişle, suyun içinde yatay düzlemde hareket eden kollara sadece F_D direnç kuvvetinin neden olduğu M_D direnç momenti etkimektedir. Bu moment kolun açısal hızına ters yönde oluşmaktadır. O halde kolun matematik modeli hazırlanırken bu direnç momentinin kola uygulanan torktan çıkartılması gerekmektedir. V_x kolun x mesafesindeki çizgisel hızı ve A karakteristik alan da, kolun h genişliği ile x mesafesinin çarpımı ise, M_D direnç momenti aşağıdaki gibi yazılır.

$$M_D = \frac{1}{2} C_D \; \rho \; h \int_0^L x \, V_x^2 \, dx \tag{2.2.4}$$

(2.1.34) nolu hareket denklemi karada çalışan ikisi katı üçüncüsü esnek kolun matematik modelini ifade etmektedir. Bu robotun 2. katı kolu çıkartılırsa, 2 kollu robot haline gelir. Bu denklemdeki 2. kola ait fiziksel ve hesaplanmış parametreler olan θ_2, L_2, ro_2, b_2, m_a, m_2 ve Ih_2 değerleri yerine sıfır yazılarak ve drag momenti de ilave edilerek (2.2.5) nolu denklemi elde edilir. Bu denklem su altında yatay düzlemde hareket eden ilki katı ikincisi esnek olan 2 kollu robotun matematik modelidir.

$$\begin{aligned}
&-\int_{t_1}^{t_2}\Bigg\{\int_0^{L_3}\big[\rho_3 + m_{yuk}\delta_o(x-L_3)\big]\frac{\partial}{\partial t}\Big[L_1^2\dot{\theta}_1 + x^2(\dot{\theta}_1+\dot{\varphi}) + L_1x(2\dot{\theta}_1+\dot{\varphi})cos(\varphi) \\
&+L_1 z_t(x,t)cos(\varphi) - L_1(2\dot{\theta}_1+\dot{\varphi})z(x,t)sin(\varphi) + xz_t(x,t)\Big]dx \\
&+\frac{\partial}{\partial t}\Big[\big(I_{h_1}+I_{h3}\big)\dot{\theta}_1 + I_{h3}\dot{\varphi} + \frac{1}{3}m_1L_1^2\dot{\theta}_1 + m_aL_1^2\dot{\theta}_1\Big] - \big(\tau_1 - \beta_1\dot{\theta}_1 - M_{D1}\big)\Bigg\}\delta\theta_1 \\
&+\Bigg\{\int_0^{L_3}\big[\rho_3 + m_{yuk}\delta_o(x-L_3)\big]\frac{\partial}{\partial t}\Big[x^2(\dot{\theta}_1+\dot{\varphi}) + L_1x\dot{\theta}_1 cos(\varphi) \\
&-L_1\dot{\theta}_1 z(x,t)sin(\varphi) + xz_t(x,t)\Big]dx\Bigg\} \\
&+\Bigg\{\int_0^{L_3}\big[\rho_3 + m_{yük}\delta_o(x-L_3)\big]\Big[L_1x\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1+\dot{\varphi})sin(\varphi) + L_1\dot{\theta}_1 z_t(x,t)sin(\varphi) \\
&+L_1\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1+\dot{\varphi})cos(\varphi)\Big]dx + \frac{\partial}{\partial t}\Big[I_{h3}(\dot{\theta}_1+\dot{\varphi}) - \big(\tau_3 - \beta_3\dot{\varphi} - M_{D2}\big)\Big]\Bigg\}\partial\varphi \\
&+\Bigg\{\int_0^{L_3}\rho_3\frac{\partial}{\partial t}[L_1\dot{\theta}_1 cos(\varphi) + x(\dot{\theta}_1+\dot{\varphi}) + z_t(x,t)cos(\varphi) + x(\dot{\varphi}) + z_t(x,t)\Bigg\}dx \\
&+\Bigg\{\int_0^{L3}\rho_3\Big[L_1\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1+\dot{\varphi})sin(\varphi)\Big]dx + \int_0^{L3}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[EI_a z_{xx}(x,t)]dx\Bigg\}\delta z(x,t) \\
&+\Bigg\{m_{yuk}\frac{\partial}{\partial t}\Big[L_1\dot{\theta}_1 cos(\varphi) + L_3(\dot{\theta}_1+\dot{\varphi}) + z_t(L_3,t)\Big] + m_{yük}\Big[L_1\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1+\dot{\varphi})\sin(\varphi)\Big]\Bigg\}\partial z(L_3,t) \\
&+\Big\{-EI_a z_{xxx}(L_3,t)\partial z(L_3,t) + EI_a z_{xxx}(0,t)\partial z(0,t) \\
&+EI_a z_{xx}(L_3,t)\partial z_x(L_3,t) - EI_a z_{xx}(0,t)\partial z_x(0,t)\Big\}dt = 0
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Burada

M_{D1} : Esnek kol sabitlenip birinci kolla birlikte O noktası etrafında sadece $\dot{\theta}_1$ açısal hızıyla döndüğünde meydana gelen direnç momenti

M_{D2} : İkinci kol A noktası etrafında $\dot{\varphi}$ açısal hızıyla döndüğünde meydana gelen direnç momentidir.

2.2.1. M_{D1} ve M_{D2}'nin hesaplanması

M_{D1}'in hesaplanması iki kolun alacağı iki farklı konfigürasyona bağlı olarak yapılmalıdır. Bu durum esnek kolun uç noktasının O orijinine uzaklığı olan L_{bo} mesafesinin L_1 ile mukayesesi sonucunda ortaya çıkmaktadır.

a) $L_{bo} \geq L_1$ hali;

Şekil 2.3'te verilen konfigürasyonda eklem açıları ve kol uzunlukları bilindiğinden esnek kolun uç noktasının koordinatları ve L_{bo} mesafesi şu şekilde hesaplanır.

$x_b = L_1 \cos(\theta) + L_2 \cos(\theta - \varphi)$

$y_b = L_1 \sin(\theta) + L_2 \sin(\theta - \varphi)$ olmak üzere;

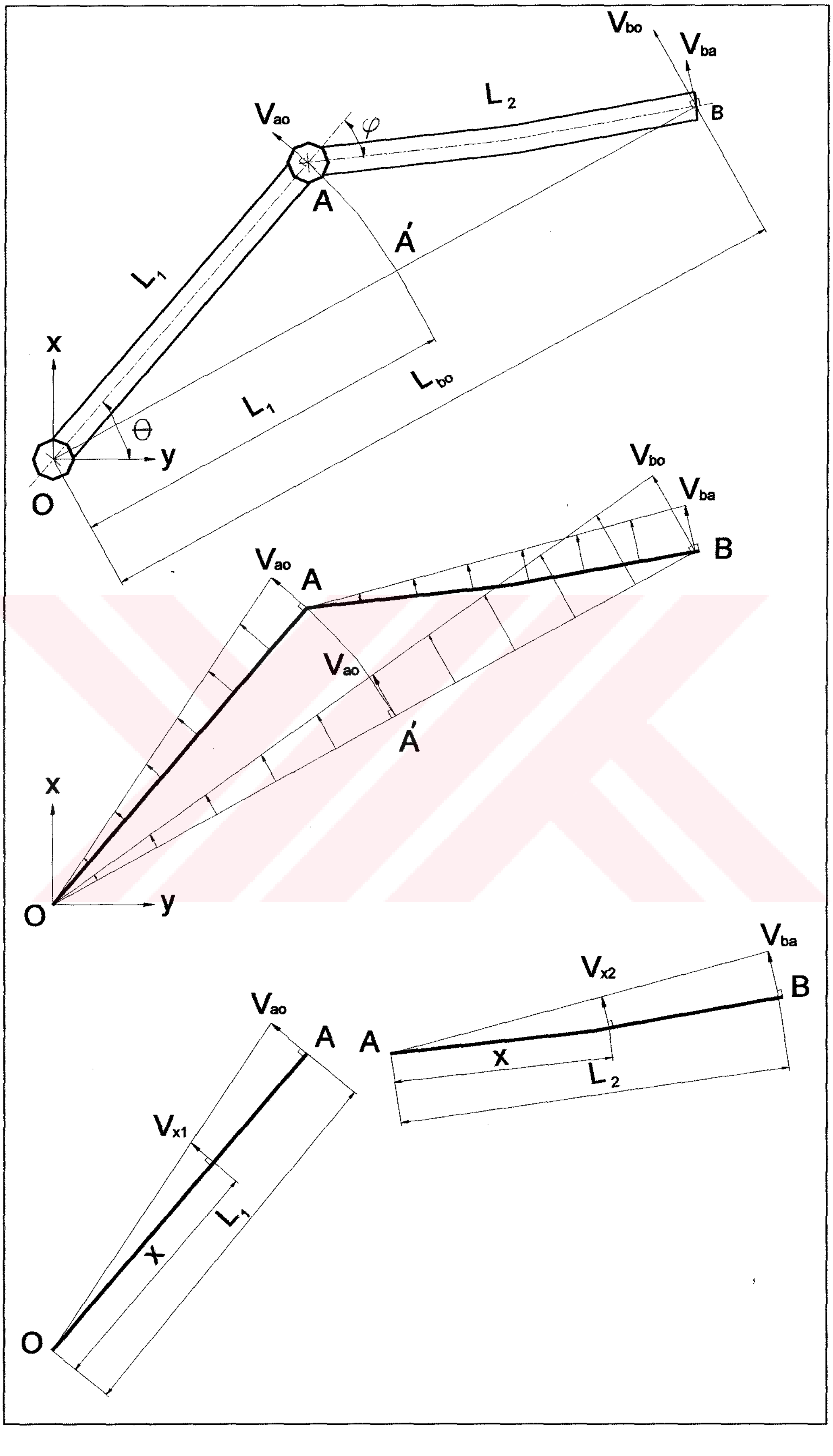
$$L_{bo} = \sqrt{x_b^2 + y_b^2} \tag{2.2.6}$$

şeklinde ifade edilir. Şekilde görülen V_{ao}, V_{ba} ve V_{bo} çizgisel hızları şu şekilde tanımlanır.

V_{ao} : Birinci kol O noktası etrafında sadece $\dot{\theta}_1$ açısal hızıyla döndürüldüğünde birinci kolun A ucunda oluşan çizgisel hızdır. V_{ao} hız vektörü birinci kola A noktasında diktir.

V_{ba} : Esnek kol A noktası etrafında sadece $\dot{\varphi}$ açısal hızıyla döndürüldüğünde esnek kolun B ucunda oluşan çizgisel hızdır. V_{ba} hız vektörü esnek kola B noktasında diktir.

V_{bo} : Esnek kol sabitlenip birinci kolla birlikte O noktası etrafında sadece $\dot{\theta}_1$ açısal hızıyla döndürüldüğünde esnek kolun B ucunda oluşan çizgisel hızdır. V_{bo} hız vektörü OB doğrusuna B noktasında diktir.



Şekil 2.3: Her iki kolun birlikte O noktası etrafında $\dot{\theta}_1$ açısal hızıyla dönmesi durumunda kollara etkiyen hidrodinamik kuvvet profilleri

O halde bu hızlar aşağıdaki şekilde ifade edilirler.

$$\begin{aligned} V_{ao} &= L_1\dot{\theta}_1 \\ V_{ba} &= L_2\dot{\varphi} \\ V_{bo} &= L_{bo}\dot{\theta}_1 \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Esnek kol sabitlenip birinci kol O noktası etrafında sadece $\dot{\theta}_1$ açısal hızıyla döndürüldüğünde sadece birinci kolun akış tarafından görülen karakteristik alan, L_1 mesafesiyle kol genişliği h_1'in çarpılması sonucu ortaya çıkan alandır. Bu alanda oluşan M_{D1a} direnç momentini hesaplamak için o karakteristik alana ait herhangi bir noktadaki hız vektörü aşağıdaki gibi yazılır:

$$V_{x1} = V_{ao}\frac{x}{L_1} \tag{2.2.8}$$

Bu denklem (2.2.4) bağıntısına yerleştirilip L_1 kol uzunluğu boyunca integre edilirse

$$M_{D1a} = \frac{1}{8} C_D \, \rho \, h_1 \, L_1^2 \, V_{ao}^2 \tag{2.2.9}$$

elde edilir. Esnek kolun 1. kolla birlikte yaptığı $\dot{\theta}_1$ açısal hızıyla dönme hareketindeki M_{D2} direnç momentini bulmak için, önce bu birlikte yapılan hareketteki esnek kola ait karakteristik alanın belirlenmesi gereklidir. Bu karakteristik alan L_{bo} hattı üzerinde bulunmaktadır. Bu alanın tespiti amacıyla O noktası merkez olmak üzere L_1 yarıçaplı çember çizilir. Çemberin L_{bo} doğrusunu kestiği A' noktasındaki çizgisel hız V_{ao} hızına eşittir. OA' mesafesi L_1 koluna ait karakteristik alanın uzunluğuna eşittir. $A'B$ mesafesi de L_2 koluna ait aranan karakteristik alanın uzunluğunu vermektedir. M_{D1b} direnç momentini bulabilmek için L_{bo} uzunluğu boyunca ve esnek kolun h_2 genişliğince oluşturulan alanda etkili olan direnç momentinden, OA' mesafesi ve h_2 genişliğince oluşturulan alanda etkili olan direnç momentinin çıkartılması gerekmektedir. Benzer işlemler yapılırsa

$$M_{D1b} = \frac{1}{8} C_D \, \rho h_2 \, (L_{bo}^2 \, V_{bo}^2 - L_1^2 \, V_{ao}^2) \tag{2.2.10}$$

elde edilir. Bu durumda birinci kolu hareket ettiren motorun yenmesi gereken toplam direnç momenti,

$$M_{D1} = M_{D1a} + M_{D1b} \tag{2.2.11}$$

olarak bulunur.

b) $L_{bo} < L_1$ hali;

Şekil 2.4'te verilen konfigürasyonda eklem açıları ve kol uzunlukları bilindiğinden esnek kolun uç noktasının koordinatları ve L_{bo} mesafesi (2.2.6) denklemi kullanılarak hesaplanır. Şekilde görülen V_{ao}, V_{ba} ve V_{bo} çizgisel hızları $L_{bo} \geq L_1$ halinde tarif edildiği gibi alınacaktır. $L_{bo} < L_1$ hali için M_{D1a} direnç momenti (2.2.9) bağıntısından hesaplanır.

M_{D1b} direnç momentini hesaplamak için takip edilecek yol şu şekildedir. $L_{bo} < L_1$ olduğundan, O noktası merkez olmak üzere çizilen L_{bo} yarıçaplı çemberin L_1 doğrusunu kestiği A' noktasındaki çizgisel hız V_{bo} hızına eşittir. Doğal olarak OA mesafesi L_1 koluna ait karakteristik alanın uzunluğunu vermektedir. $A'A$ mesafesi de L_2 koluna ait karakteristik alanın uzunluğunu vermektedir.

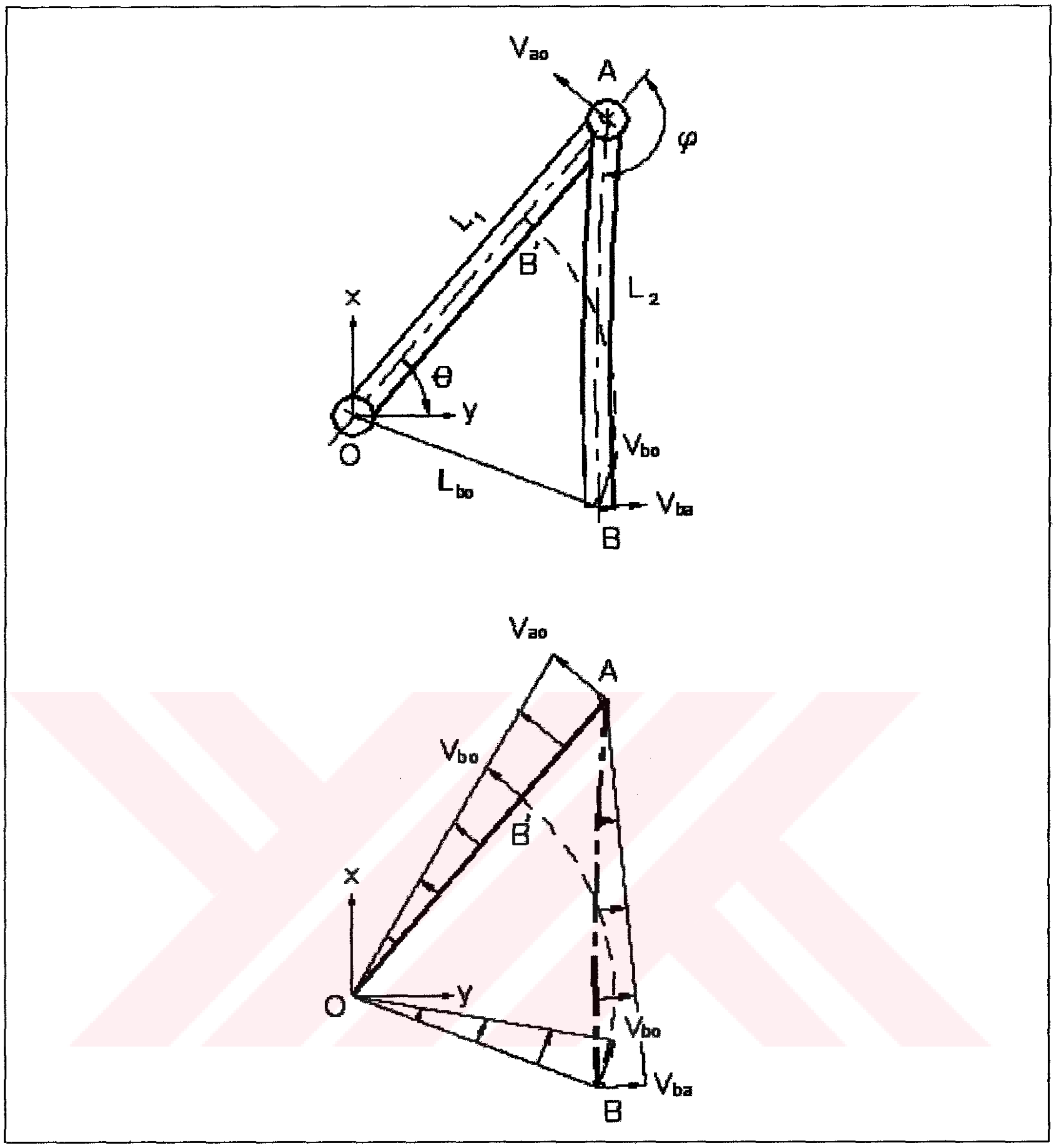
M_{D1b} direnç momenti, L_1 uzunluğu boyunca ve esnek kolun h_2 genişliğince oluşturulan alanda etkili olan direnç momentinden, L_{bo} uzunluğu boyunca ve esnek kolun h_2 genişliğince oluşturulan alanda etkili olan direnç momenti çıkartılarak hesaplanır. Benzer işlemler yapılırsa

$$M_{D1b} = \frac{1}{8} C_D \rho h_2 (L_1^2 V_{ao}^2 - L_{bo}^2 V_{bo}^2) \tag{2.2.12}$$

elde edilir. Bu durumda birinci kolu hareket ettiren motorun yenmesi gereken toplam direnç momenti,

$$M_{D1} = M_{D1a} + M_{D1b} \tag{2.2.13}$$

olarak bulunur. Her iki şık için M_{D2} momentinin hesaplanması amacıyla V_{x2} hızı (2.2.4) denklemine yerleştirilip L_2 uzunluğu boyunca integre edilir.



Şekil 2.4: Esnek kolun A noktası etrafında $\dot{\varphi}$ açısal hızıyla dönmesi durumunda kollara etkiyen hidrodinamik kuvvet profilleri

Böylece;

$$V_{x2} = V_{ba}\frac{x}{L_2} \tag{2.2.14}$$

$$M_{D2} = \frac{1}{8} C_D \ \rho \ h_2 \, L_2^2 \ V_{ba}^2 \tag{2.2.15}$$

bulunur.

2.3. Kontrol Metotları

2.3.1. Esnek Kollu Robotların Kontrolü

Esnek kollu manipülatörlerin kontrolü çalışmalarında karşılaşılan en önemli problem esnek kolun uç noktasına ait doğru konum ve hızın elde edilebilmesi ile ilgili problemdir. Robotların çoğunun katı kollu olarak tasarlanmasının nedeni, esnek parçaların kontrol edilme zorluğundan kaynaklanır. Esnek kollu robotların kontrolünde ana yaklaşım, esnek kolun uç noktasının verilen görevi titreşimler en az olacak şekilde, mümkün olduğunca hızlı yerine getirebilmesidir. Bu kollara ait matematiksel ifadedeki doğrusal olmayan terimlerin hep birlikte neden olduğu belirsizlikler, esnek kolların kontrolünü zorlaştırmaktadır. Robot kolunun esnek yapısı, dıştan gelecek etkilere karşı kolun aşırı hassaslaşmasına neden olur, bu nedenle küçük bir etki dahi esnek kolun şiddetli bir biçimde titreşimini sağlayabilir.

Esnek kolların kontrolüyle ilgili pek çok araştırmacı, muhtelif kontrol yöntemleri üzerinde çalışmaktadır. Kontrol yöntemleri farklı kategorilere ayrılır. İlk kategoride lineer sistem yaklaşımı, lineer minimum-zamanlı kontrol ve PID (orantı+integral+türevsel) kontrol gibi yaklaşım teknikleri yer alır. Konvansiyonel kontrol teknikleri hızlı sonuçlar istendiği zamanlarda tatmin edici sonuçlar vermezler.

İkinci kategori doğrusal olmayan durumları da içeren bazı yeni kontrol metotlarını kapsar. Bunların arasında değişken yapılı kontrol (variable structure control), adaptif kontrol ve evrik dinamik yaklaşım (inverse dynamics approach) teknikleri vardır. Bu metotlarda artık titreşimleri minimuma indirmek ve arzulanan uç konumlarını elde edebilmek için, bir takım kısıtlamalara gidilmektedir. Esnek kolun serbestlik derecesinin kontrol girdisinden fazla olması bu kategorideki kontrol stratejilerinin uygulanabilirliğini tartışmaya açmaktadır.

Üçüncü kategori tipi yapay sinir ağları ve bulanık mantık gibi çeşitli akıllı kontrol yöntemlerini içerir. Modelde var olan pek çok belirsizliğin bulanık mantık veya yapay sinir ağı yöntemleriyle üstesinden gelmek mümkündür. Bunun nedeni bulanık mantık ve sinir ağlarının kontrol yapısı, serbest modellemeye dayandığından, anlaşılmasında ve tanımlanmasında zorluk çekilen dinamik sistemlerin büyük çoğunluğuna uyarlanabilmesidir [45].

Bu çalışmanın üçüncü bölümünde, klasik kontrol metotlarından olan orantı (P) kontrol ve orantı + türevsel (PD) kontrol teknikleri kullanılmaktadır. Dinamik denklemleri elde edilen ve benzetim programı oluşturulan üç eklemli katı-katı-esnek robot kolu için kontrol yöntemleri geliştirilmiştir. Sistemin dinamik yapısı belirlendikten sonra, ona yönelik Orantı (P) Kontrol ve Orantı + Türev (PD) Kontrol yöntemleri uygulanmıştır.

2.3.2 Orantı (P) Kontrol

Bir sistemde, kontrol sinyalindeki değişim, hata sinyali ile orantılıysa bu kontrol metodu orantı kontrol metodu olarak bilinir [44].

P kontrolde hata sinyali E(s), Kp oransal kazanç katsayısı ile çarpılarak sisteme uygulanacak kontrol kuvveti elde edilir. Bu ifadeyi matematiksel olarak aşağıdaki şekilde gösteririz;

$$\tau(s) = K_P E(s) \qquad (2.3.1)$$

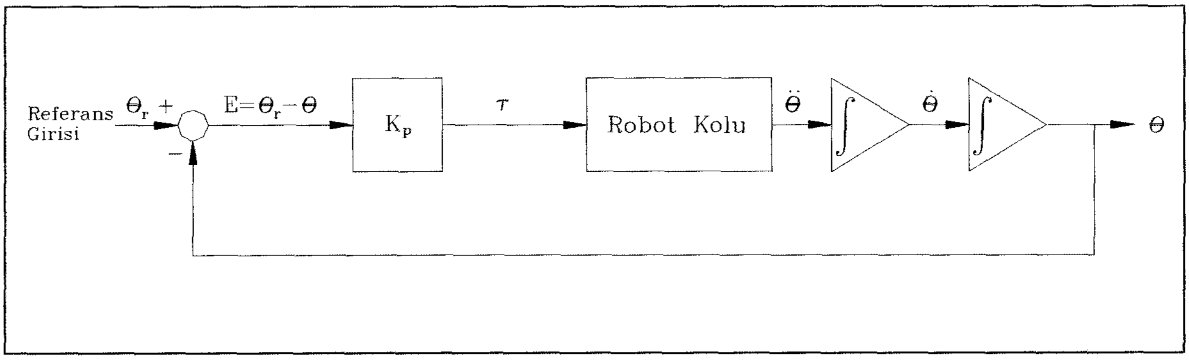
Burada

$\tau(s)$: Kontrol sinyalindeki değişim

K_P: Oransal Kazanç Değeri

E(s):Hata sinyali

anlamına gelmektedir.



Şekil 2.5 : Orantı (P) Kontrol şematik gösterimi

Esnek robot kolu için P kontrolcü tasarlanmıştır. Sistemin $tork_1(\tau_1)$, $tork_2(\tau_2)$, $tork_3(\tau_3)$ olmak üzere üç adet kontrol girdisi vardır.

$\theta_1 r$, $\theta_2 r$ ve φ_r, değerleri, θ_1 , θ_2 ve φ açıları için istenilen referans açı değerleridir. Sisteme

$$\tau_1 = K_p(\theta_1 - \theta_1 r)$$
$$\tau_2 = K_p(\theta_2 - \theta_2 r)$$
$$\tau_3 = K_p(\varphi - \varphi_r) \qquad (2.3.2)$$

şeklinde P kontrol uygulanır.

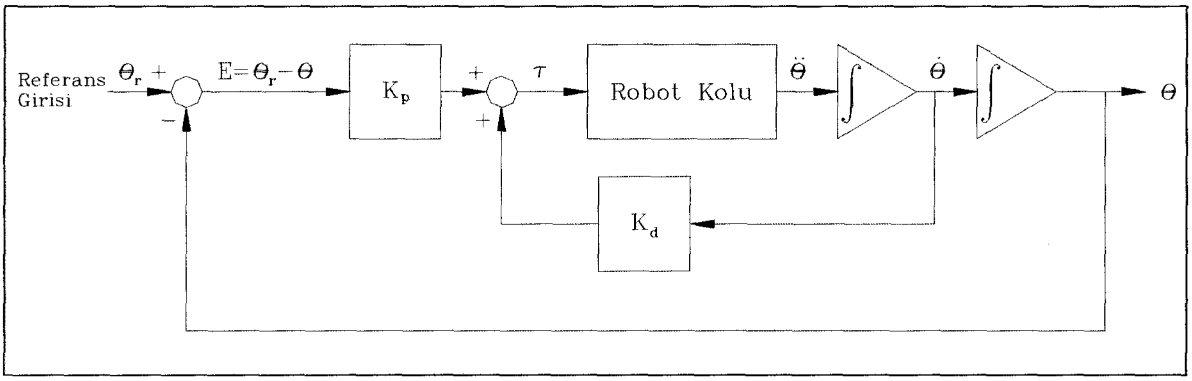
Sistemin tepkisi KKE_kol.m isimli programda, parametrelere bağlı olarak bulunmuştur. $Tork_1(\tau_1)$, $tork_2(\tau_2)$, $tork_3(\tau_3)$ kontrolcülerine ait ifadeler KKE_model.m isimli alt programda yer almaktadır. Ana programda orantı kontrol yöntemini ifade eden kz parametresi 1 seçilir, değişik K_p değerleri alınarak KKE_model.m ve KKE_RK4.m alt programları çağrılır. KKE_kol.m isimli programın koşturulması sonucu elde edilen grafikler yorumlanarak, sistemi kararlı yapacak ve performansını iyileştirecek en uygun K_{p1}, K_{p2}, K_{p3} değerleri orantı kazanç değerleri olarak seçilmiştir.

2.3.3 Orantı + Türev (PD) Kontrol

Orantı + Türev kontrolde, kontrol sinyali hatayla ve aynı zamanda hatanın zamana göre değişimiyle orantılıdır. PD kontrolde, kontrolcünün birinci terimi hata sinyali ile orantı kazanç katsayısı K_P'nin çarpımından, ikinci terimi ise hata sinyalinin türevi veya kontrol büyüklüğünün türevinin ($\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\varphi}$) K_d türevsel kazanç katsayısı ile çarpımından oluşmaktadır. Bu ifadenin matematiksel gösterimi

$$\tau(s) = (K_P + Kd\,s)\,E(s) \qquad (2.3.3)$$

şeklindedir.



Şekil 2.6: Türevsel (PD) Kontrol şematik gösterimi

Katı-katı-esnek robot koluna uygulanan PD kontrol ifadeleri aşağıdaki gibidir.

$$\tau_1 = K_{p1}(\theta_1 - \theta_1 r) - K_{d1}(\dot{\theta}_1)$$

$$\tau_2 = K_{p2}(\theta_2 - \theta_2 r) - K_{d2}(\dot{\theta}_2)$$

$$\tau_3 = K_{p3}(\varphi - \varphi_r) - K_{d3}(\dot{\varphi}) \qquad (2.3.4)$$

KKE_kol.m isimli programda ve bu programla eş çalışan alt programlarda, P kontrolde elde edilen ve sistemin titreşimli davranışına neden olan K_{p1}, K_{p2}, K_{p3} orantı kazanç değerleri sabit tutularak, PD kontrolde sistemi kararlı yapacak ve performansını iyileştirecek K_{d1}, K_{d2}, K_{d3} değerleri deneme yanılma yöntemiyle seçilmiştir.

2.4. Sistemin Benzetim Programının Oluşturulması

Modeli oluşturulan üç eklemli, ilk ikisi katı üçüncüsü esnek robot kolu için elde edilen dinamik denklemler, zamana bağlı ve doğrusal olmadıklarından analitik yöntemlerle çözüm bulmak oldukça zordur. Bundan dolayı, sistemin matematiksel modelini oluşturan adi diferansiyel denklemlerin çözümü için sayısal çözümleme teknikleri kullanılmaktadır. MATLAB programlama dili kullanılarak hazırlanan benzetim programları Ek-1'de verilmektedir. Program KKE_kol.m isimli bir ana ve bu ana program tarafından çağrılan KKE_Newton.m, KKE_model.m, KKE_RK4.m ve KKE_drag.m isimli alt programlardan oluşmaktadır. Ayrıca KKE_Newton.m alt programı çalışması esnasında f.m ve df.m fonksiyonlarını kullanmaktadır. Diğer bir deyişle program toplam yedi üniteden oluşmaktadır. Program esnek kolun iki modu için tasarlanmıştır. Bu nedenle daha yüksek mod sayılarında program koşturulmak istenirse, program üzerinde değişiklikler yapılması gerekecektir.

Ana programda sistemin geometrik ve fiziksel büyüklükleri tanımlandıktan sonra *kol, kz, drg, T, Myük, kp, kd* benzetim parametreleri girilmektedir. Bu parametrelerin görevleri şunlardır:

kol için girilecek parametreler 2 ve 3 olup, 2 değeri programı 2 kollu (*Katı kol1* + *Esnek kol*) robot için çalıştırmakta, 3 değeri ise programı 3 kollu (*Katı kol1* + *Katı kol2* + *Esnek kol*) robot için çalıştırmaktadır.

kz sisteme uygulanacak kontrol metodunun seçilmesini sağlamaktadır. *kz* nin alacağı değerler 0, 1, 2 olup, bunlardan 0 için adim fonksiyonu, 1 için P kontrol ve 2 için PD kontrol uygulanmaktadır.

drg robotun türünün seçilmesini sağlamaktadır. 0 değeri kara robotunu, 1 değeri ise sualtı robotunu temsil etmektedir.

T benzetim süresini *Myük* ise esnek kol ucundaki yükün değerini göstermektedir.

Kolları süren motorların eylemsizlik momentlerini ifade eden parametreler Pittman motorlarının kataloglarından seçilmiştir [50].

Su altında çalışan robot kolları için *ro* ve *cdrag* parametreleri tanımlanmıştır. *ro* suyun yoğunluğu olan 1000 kg/m^3 olarak alınmaktadır. *cdrag* ise drag katsayısını temsil etmektedir ve L3/h3 oranına bağlı olarak kaynaklardan 1.44 olarak seçilmiştir [46,49].

Ayrıca sistemin açısal konumunu belirten θ_1, θ_2, φ değerlerine ait referans girişleri de *tetarr1*, *tetarr2* ve *fiirr* simgeleriyle temsil edilmektedir. Programda bu referans değerlerinin her biri 40^o olarak alınmıştır.

Program koşturulduğunda ilk önce Newton - Raphson metodu kullanılarak, (2.1.62) numaralı frekans denkleminin çözümü olan k değerleri (nx1)‘ lik vektör oluşturacak şekilde elde edilirler. Elde edilen k vektörünün yardımıyla (2.1.57) denklemindeki h_i değeri ve (2.1.68), (2.1.69) denklemlerindeki ifadeler (n×n)’lik a matrisinin elemanları olacak şekilde hesaplanır. Bu hesaplamalar neticesinde esnek kolun dinamiğini tanımlayan (2.1.75) denklemindeki bilinmeyen bütün katsayılar belirlenmiş olur. Bu noktadan itibaren ana program KKE_RK4.m alt programını çağırır.

KKE_RK4.m alt programı, MATLAB bünyesinde hazır bulunan ode45.m fonksiyonu üzerinde değişiklikler yapılarak hazırlanmıştır [41,42,43]. Bu programda 4. mertebeden Runge-Kutta algoritması kullanılarak diferansiyel denklemlerin çözümü elde edilmektedir.

Bu nedenle KKE_RK4.m alt programı, sistemin vektör-matris formundaki dinamik denklemlerinin yer aldığı KKE_model.m alt programını dört kez çağırmaktadır. KKE_model.m alt programı her seferinde $\ddot{\theta}_1$, $\ddot{\theta}_2$, $\ddot{\varphi}$ ve $\ddot{\eta}$ değerlerini hesaplamaktadır. KKE_RK4.m programı dört kez hesaplanan bu değerleri kullanarak, θ_1, θ_2, φ ve η değerlerini elde etmektedir. Bu değerlerin her biri, grafikleri çizdirilmek amacıyla ana programa gönderilmektedir.

Ayrıca sisteme uygulanan kontrol girdisi olan tork1, tork2 ve tork3 değerleri KKE_model.m alt programında hesaplanıp, ana programa grafikleri çizdirilmek üzere gönderilmektedir.

3. BULGULAR

Bu bölümün ilk yarısında ilk iki parçası katı, üçüncüsü esnek olan robot kolunun dinamik modelinin grafiksel sonuçları MATLAB ortamında elde edilerek aktarılmıştır. Üç kollu robota ait ikinci katı kol çıkartılmak suretiyle, önceden elde edilmiş olan matematiksel model, ilki katı ikicisi esnek olan iki kollu robota ait matematiksel modele indirgenmiştir. Bu indirgenmiş modelin MATLAB ortamında yapılan sualtı ve su üstündeki davranışlarının benzetim çalışması ise Bölüm 3.2'de verilmektedir.

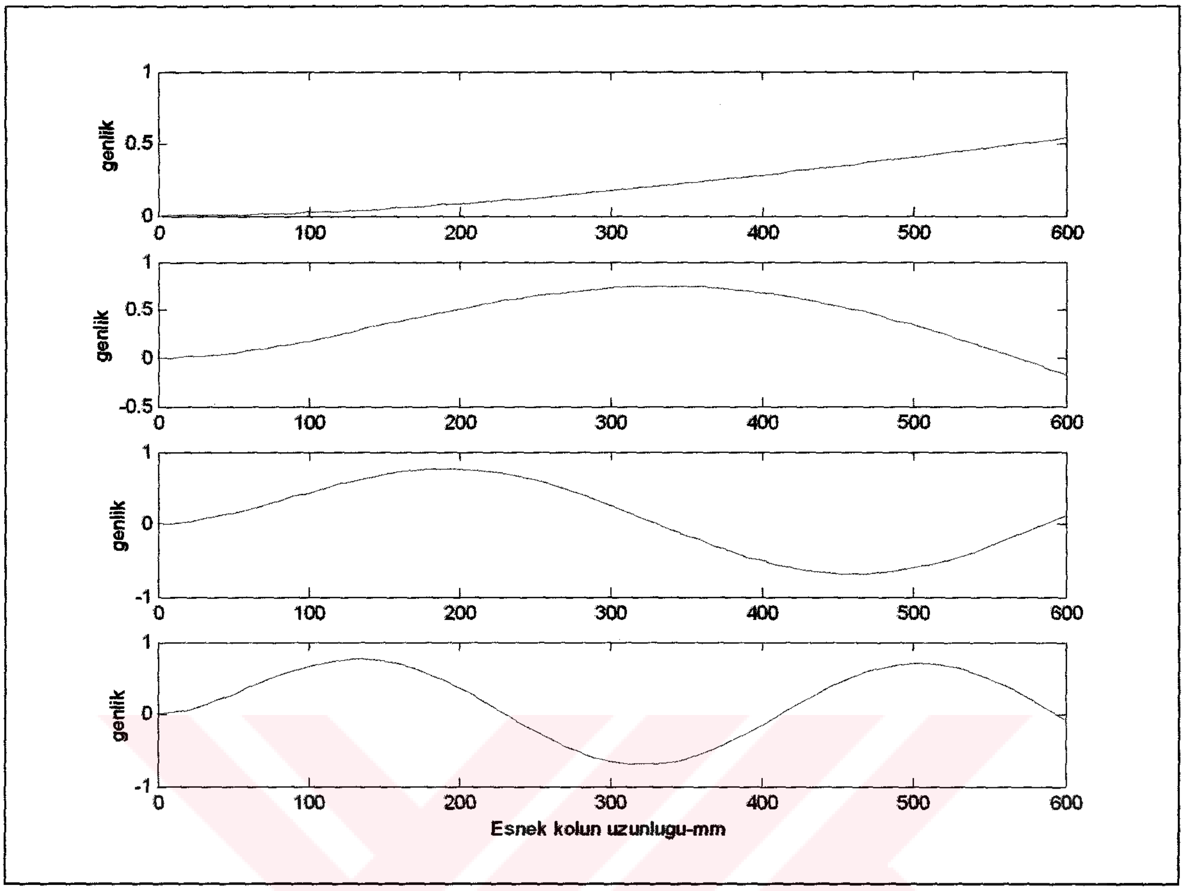
Her iki durumda da matematiksel modelin benzetimi amacıyla üç tür kontrol girişi uygulanmış ve sistemin bu girişlere olan cevabı zaman bölgesinde grafiksel olarak elde edilmiştir. Bunlar sırasıyla adım girişi, orantı (P) kontrol ve orantı + türevsel (PD) kontroldür.

Sistemin fiziksel ve geometrik büyüklükleri Tablo 1'de verilmektedir.

Tablo 1. Sistem parametreleri

	1. Katı Kol	**2. Katı Kol**	**Esnek Kol**
Young Esneklik modülü			$E=7*10^{10}$ kg/mm^2
Yüzey Atalet Momenti			$Ia=10^{-10}$mm^4
Kol Uzunluğu	L1=600 mm	L2= 400mm	L3= 600mm
Kesitin Eni	a_1= 10 mm	a_2 = 10 mm	a_3= 3 mm
Kesitin Boyu	b_1 = 37 mm	b_2 = 37 mm	b_3= 37 mm
Çizgisel Yoğunluk	ρ_1= 1 kg/m	ρ_2= 1 kg/m	ρ_3= 0.5 kg/m
Viskoz Sürtünme Katsayısı	β_1= 0.085	β_2= 0.09	β_3= 0.01
Motor Kütlesi	m_a= 0.25 kg	m_b= 0.25 kg	
Kol Ucundaki Kütle			$m_{yük}$= 0 - 0.25 kg

Esnek kol, ikinci katı kolun ucundaki motorun miline ankastre olarak bağlanmış olup, diğer ucu ise serbesttir. Sistemin esnek kola ait ilk 4 modu Şekil 3.1'de verildiği gibidir.



Şekil 3.1. Ankastre-serbest bağlı esnek kolun mod şekilleri

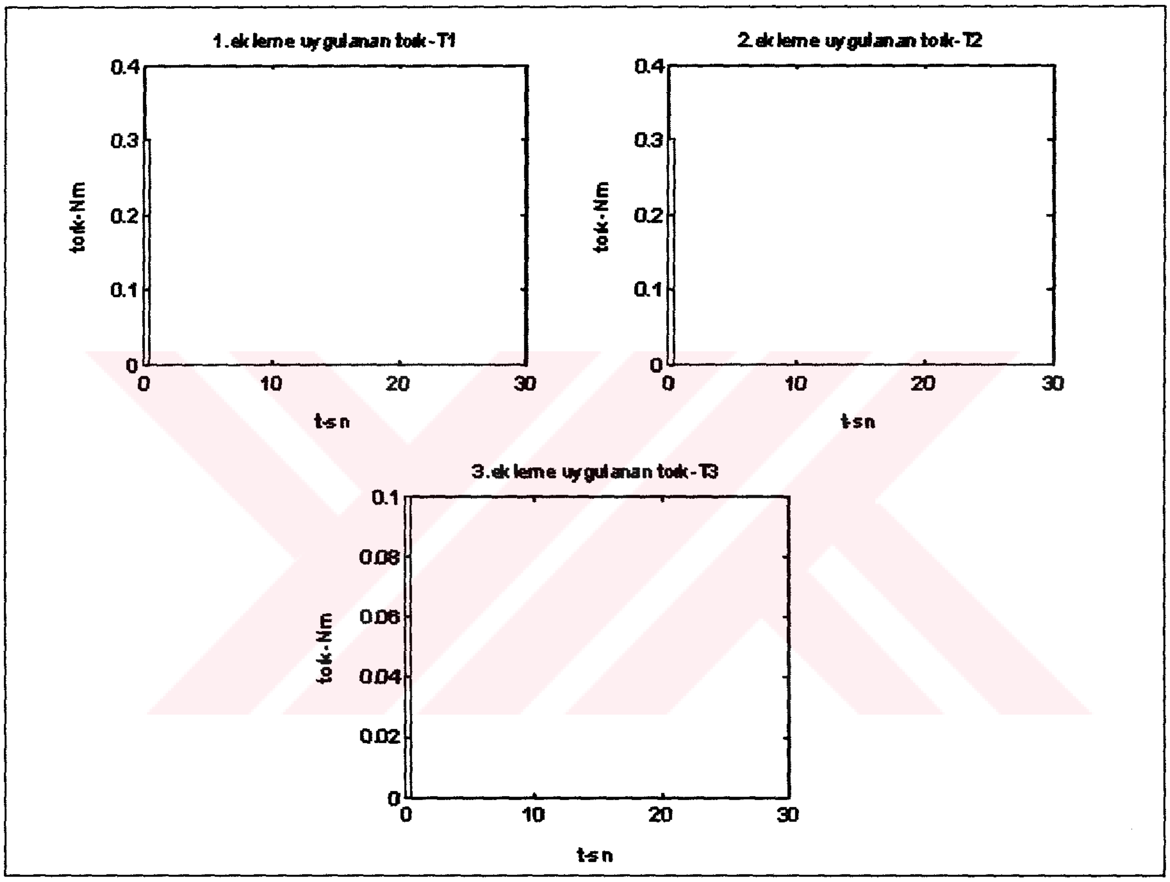
Hesaplamalarda ilk iki modun etkisi göz önüne alınmıştır. Uç sapmasının hesaplanmasında diğer modların etkileri 1. ve 2. mod etkilerine göre önemsenmeyecek oranda olduğundan ihmal edilmiştir. Örneğin üç kollu robota ait benzetim çalışmasında esnek kolun $m_{yük}$= 0.25 kg için adım girişine verdiği cevaptaki maksimum uç sapmaları 1., 2., 3. ve 4. mod için sırasıyla $5.7{*}10^{-3}$, $3.1{*}10^{-5}$, $8{*}10^{-8}$ ve $4.5{*}10^{-8}$ mm 'dir.

3.1. Üç Kollu Robotun Benzetim Çalışması

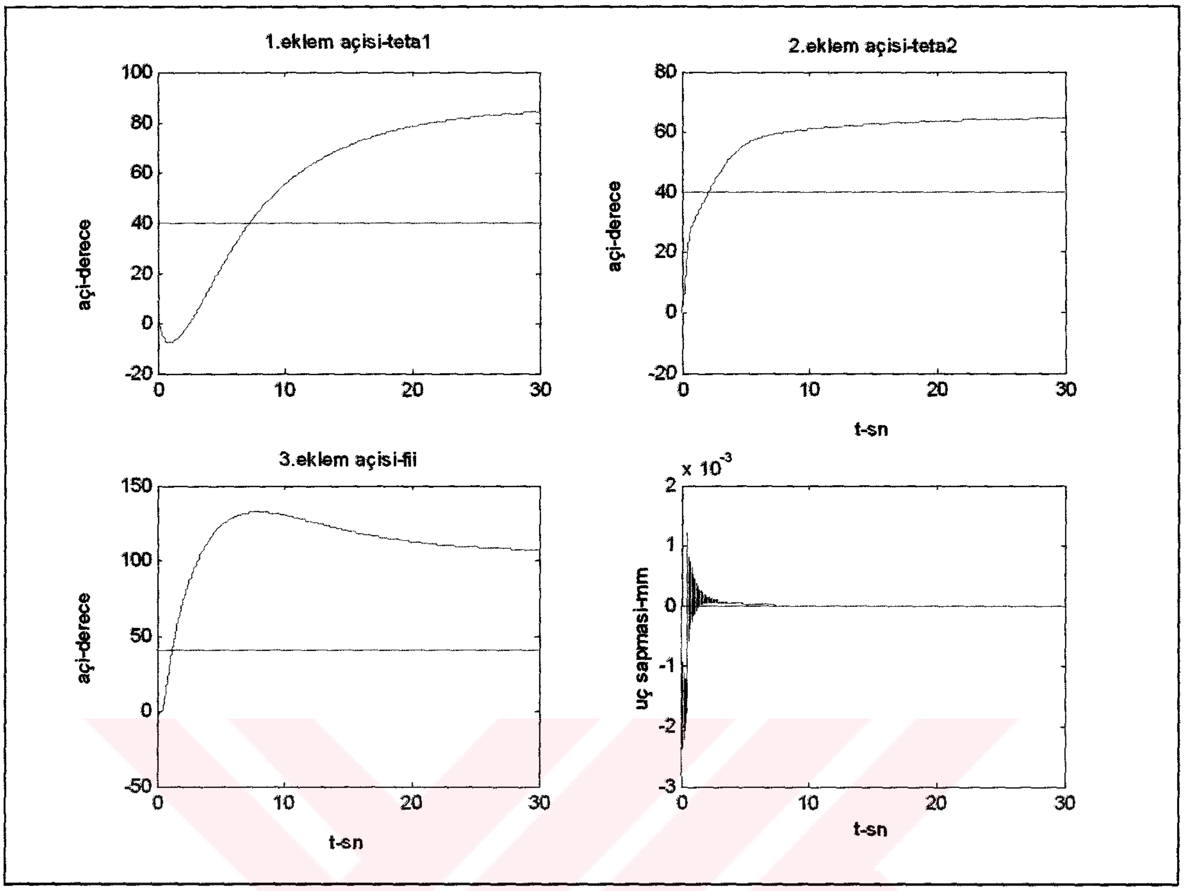
İlki katı üçüncüsü esnek olan robot kolu için yapılan benzetim çalışmaları yalnızca kara ortamıyla sınırlı olup, su altındaki davranışı incelenmemiştir.

3.1.1. Adım Girişi

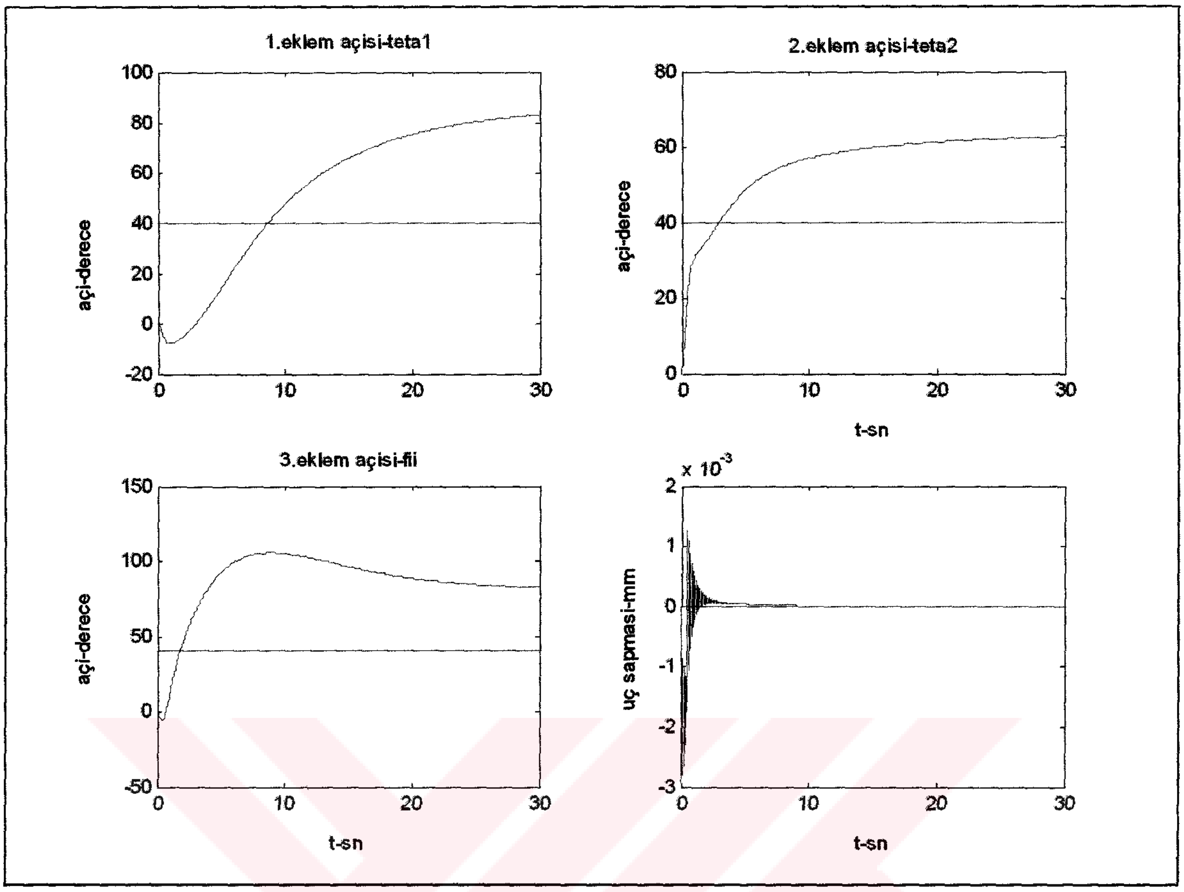
Sisteme Şekil 3.2'de verilen adım girişi uygulanmıştır. Elde edilen sistem cevabı, Şekil 3.3 'de verilmektedir. Sistemin değişik yük taşıma şartlarındaki performansını ölçmek amacıyla yapılan benzetim çalışmaları ise Şekil 3.4, 3.5 ve 3.6 'da görülmektedir.



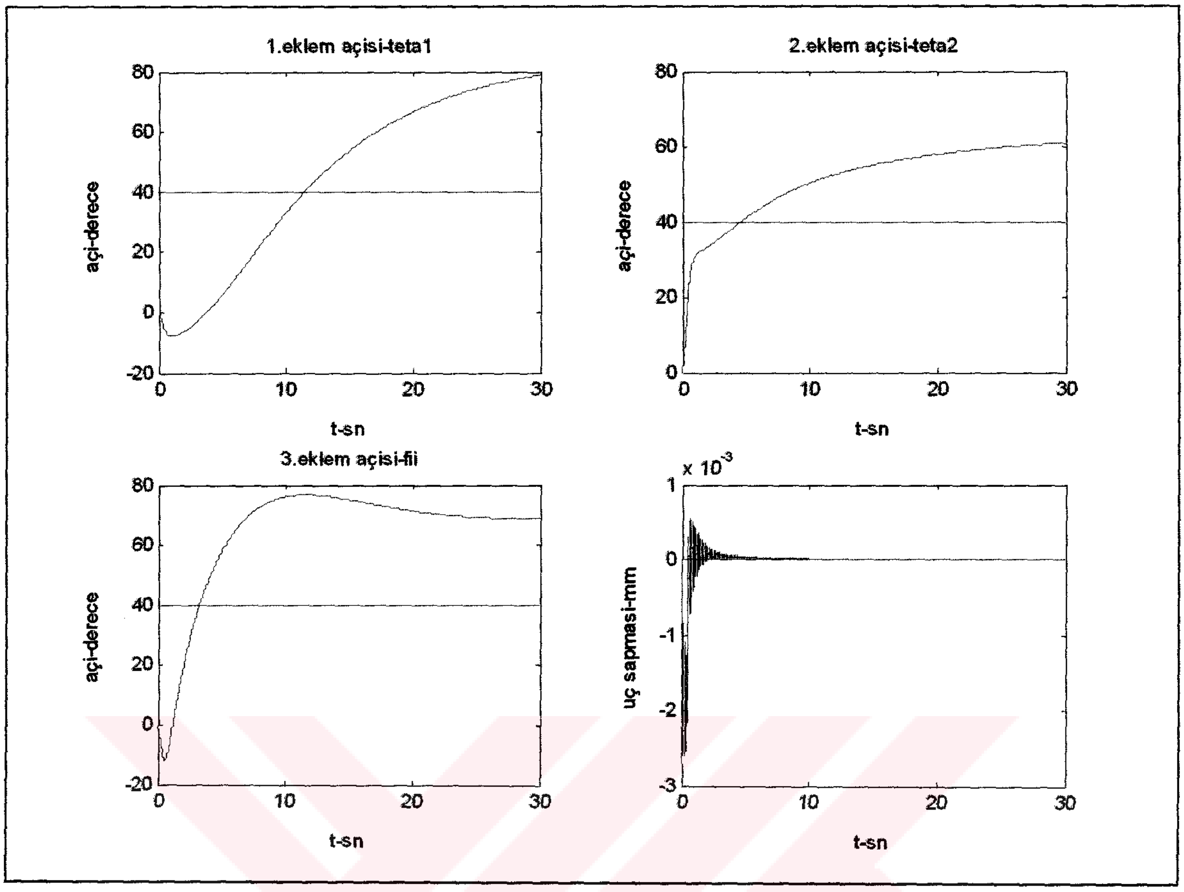
Şekil 3.2. Sisteme uygulanan torklar



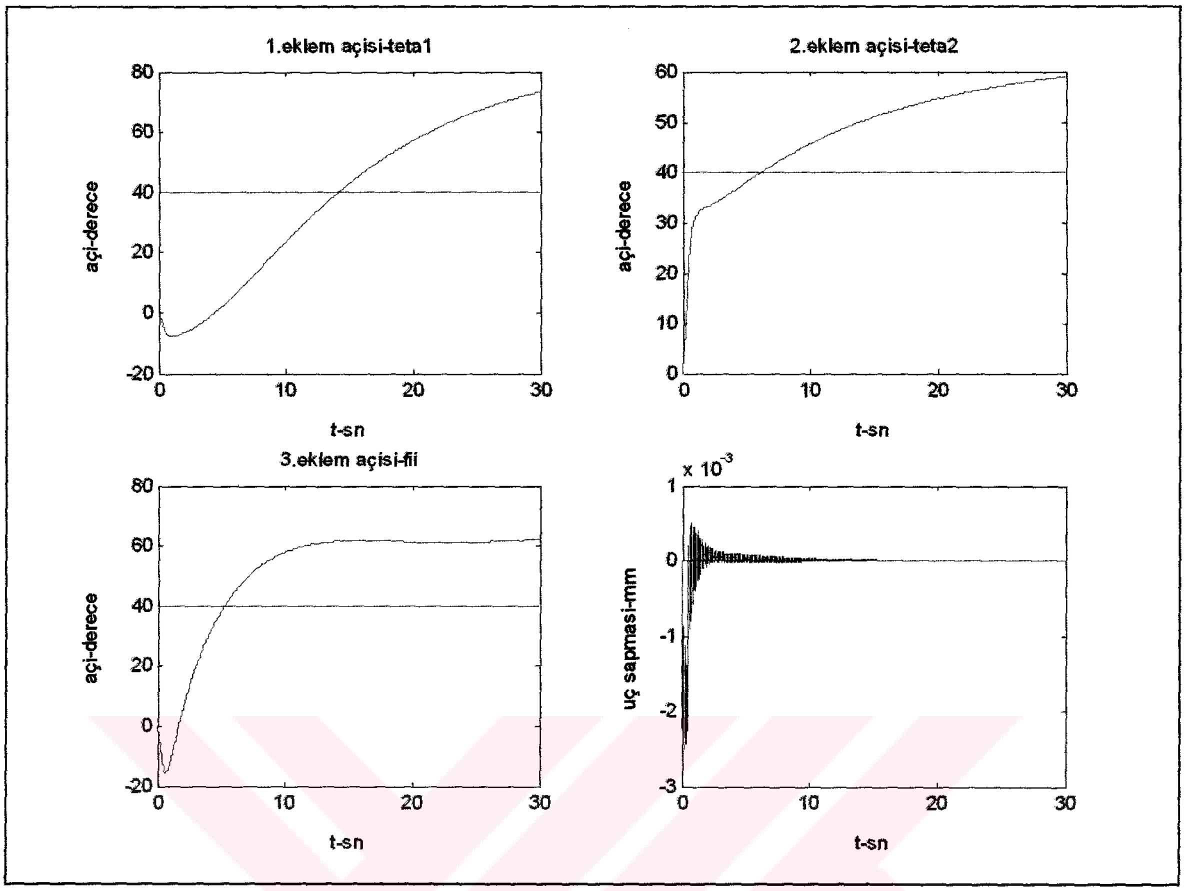
Şekil 3.3. $m_{yük}$= 0 durumunda sistemin adım girişine cevabı



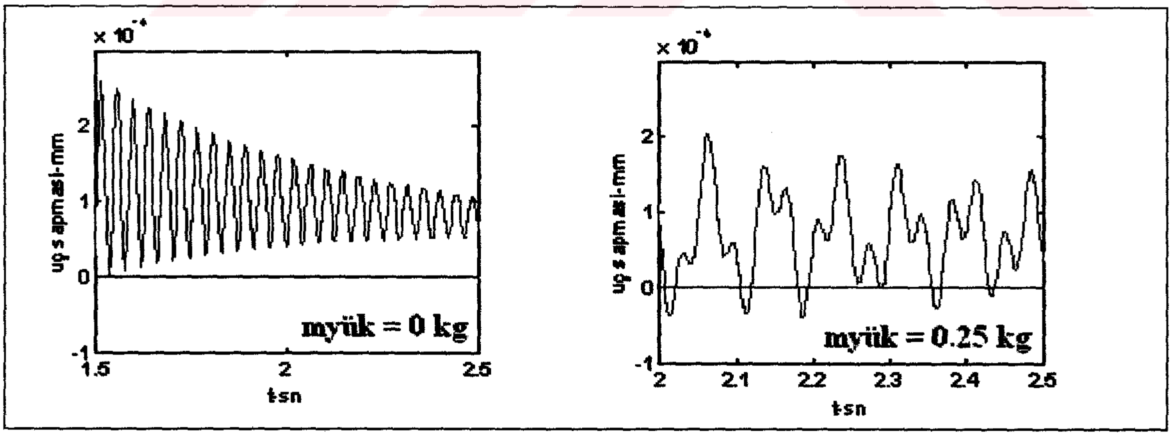
Şekil 3.4. $m_{yük}$= 0.05 kg durumunda sistemin adım girişine cevabı



Şekil 3.5. $m_{yük}$= 0.15 kg durumunda sistemin adım girişine cevabı



Şekil 3.6. $m_{yük}$= 0.25 kg durumunda sistemin adım girişine cevabı



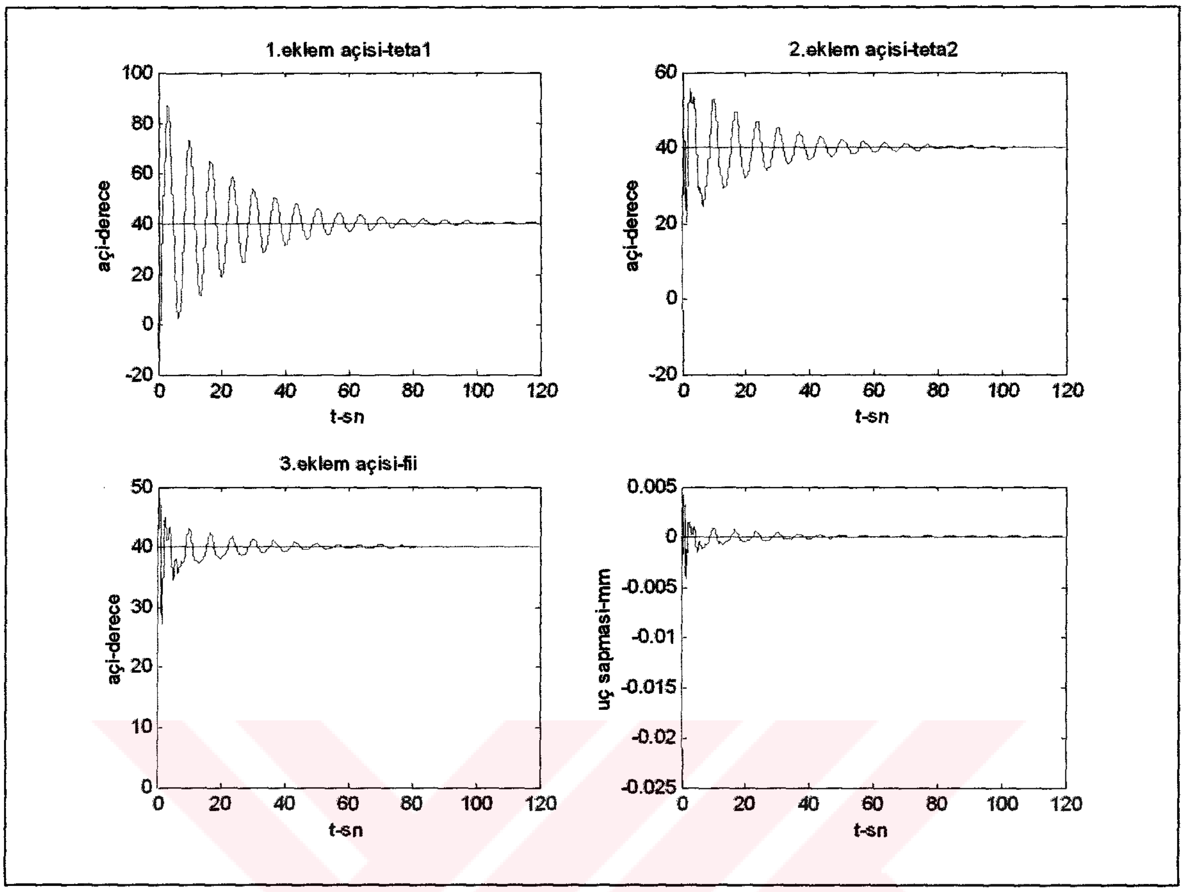
Şekil 3.7. $m_{yük}$ = 0 – 0.25 kg durumları için uç sapması

3.1.2. Orantı (P) Kontrol uygulanmış hal

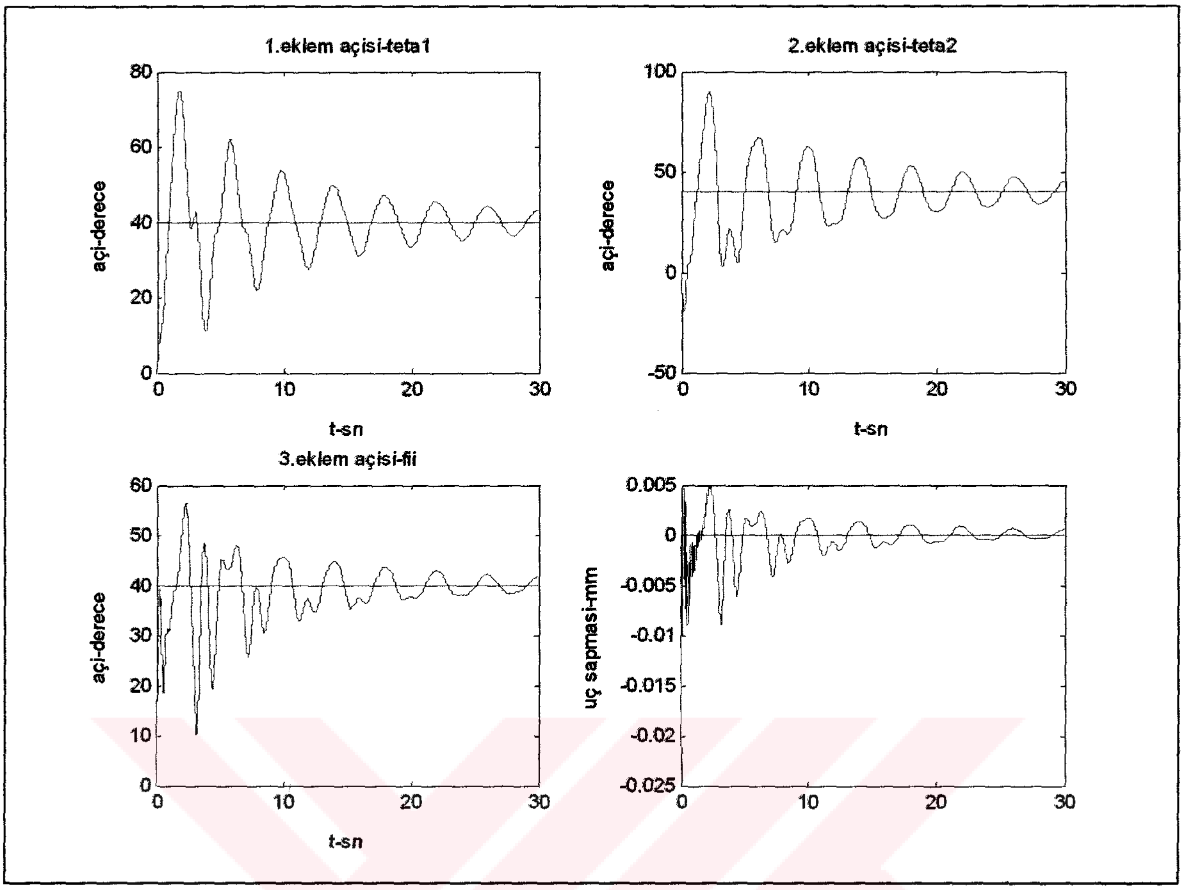
Sisteme $m_{yük}$ = 0, 0.05, 0.15 ve 0.25 kg değerleri için orantı kontrol stratejisi aşağıda verildiği şekilde uygulanmıştır.

$$\tau_1 = K_{p1} * (\theta_1 r - \theta_1)$$
$$\tau_2 = K_{p2} * (\theta_2 r - \theta_2)$$
$$\tau_3 = K_{p3} * (\varphi_r - \varphi)$$

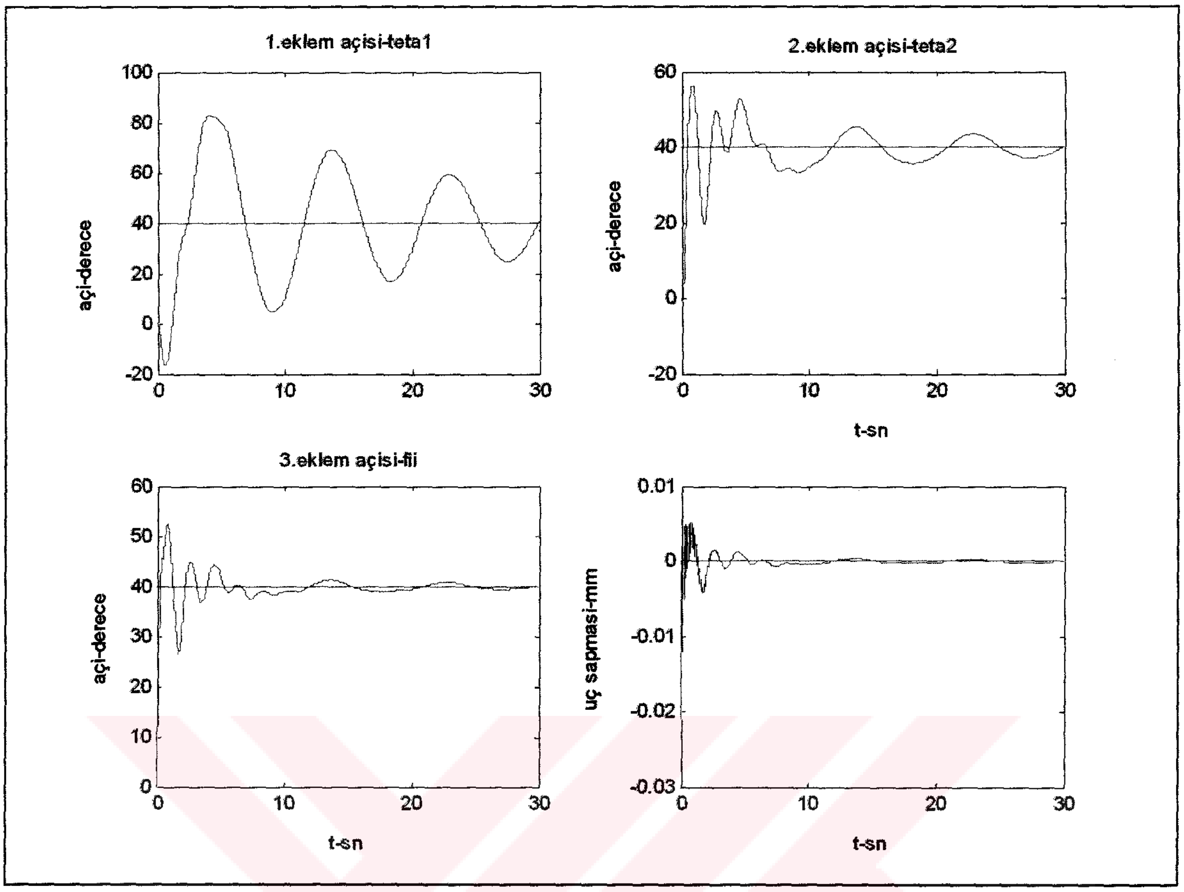
Kazanç değerinin değişiminin sistemin açısal konumuna ve esnek kolun uç sapmasına etkilerini görebilmek amacıyla altı değişik K_p değeri grubuyla sistem test edilmiştir. Bu gruplar [4, 1, 1], [1, 1, 1], [0.5, 1, 1], [0.1, 1, 1], [0.0025, 0.04, 0.0003] olup parantez içindeki değerler sırasıyla K_{p1}, K_{p2} ve K_{p3} değerlerine karşı gelmektedir. Elde edilen açısal konum değişimi ve esnek kolun uç sapma değerleri Şekil 3.8-3.9-3.10-3.11 de verilmektedir.



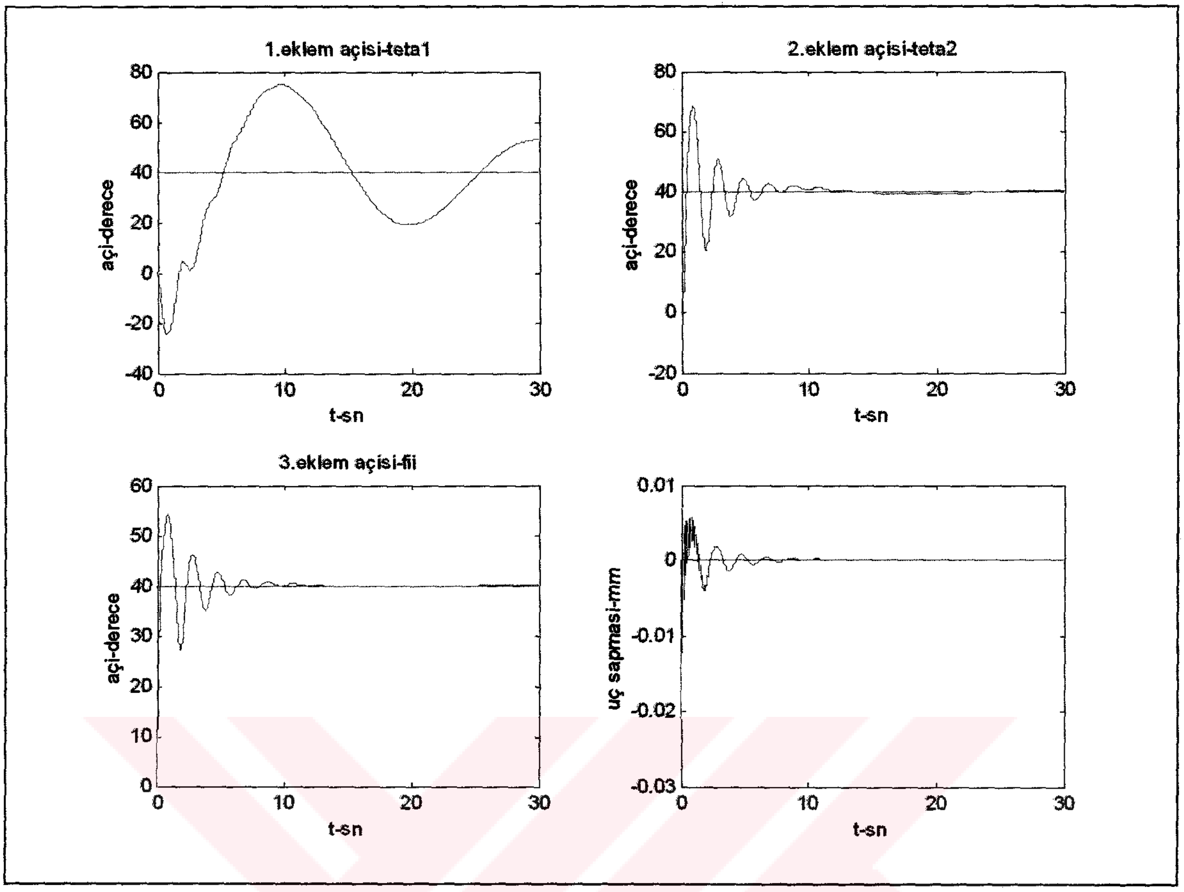
Şekil 3.8. Kp [1, 1, 1] ve $m_{yük}= 0$ değerleri için sistemin orantı kontrole verdiği cevap



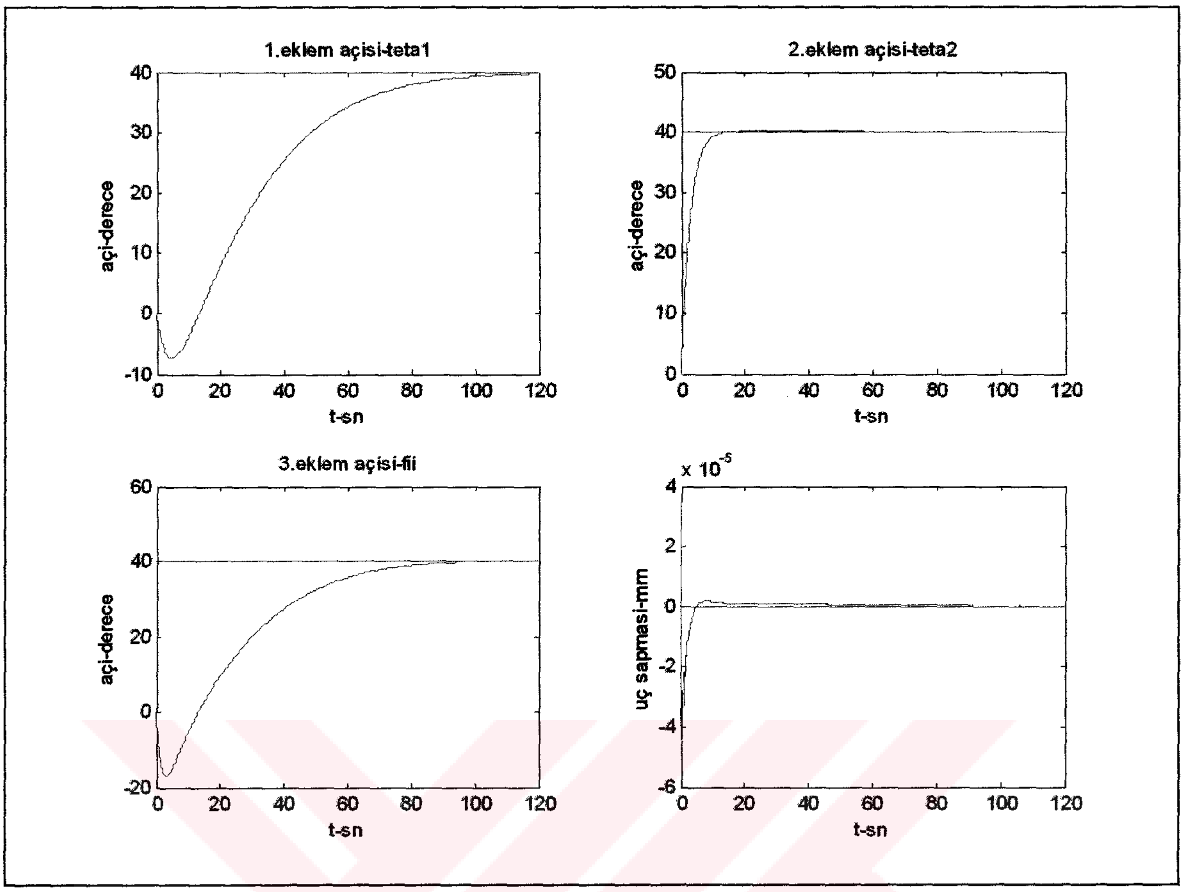
Şekil 3.9. K_p [4, 1, 1] ve $m_{yük}= 0$ değerleri için sistemin orantı kontrole verdiği cevap



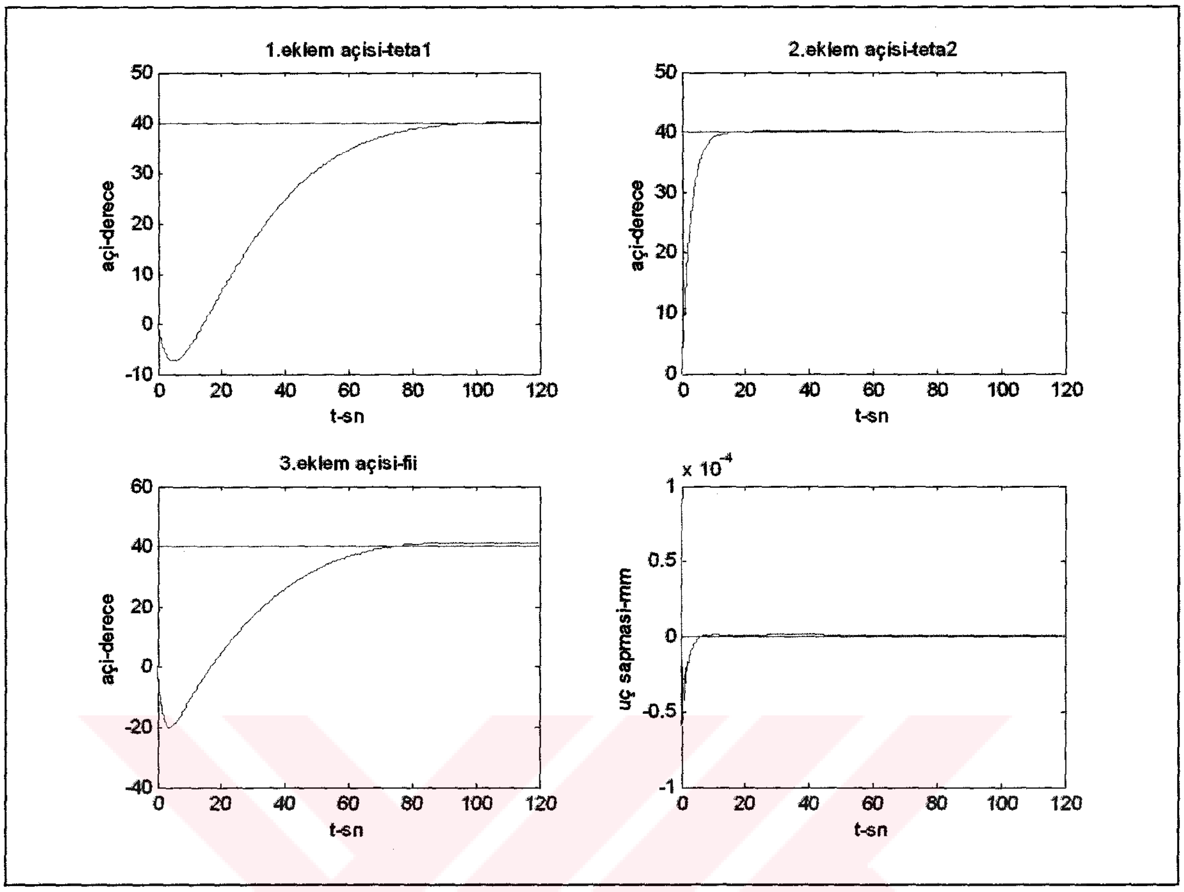
Şekil 3.10. K_p [0.5, 1, 1] ve $m_{yük}= 0$ değerleri için sistemin orantı kontrole verdiği cevap



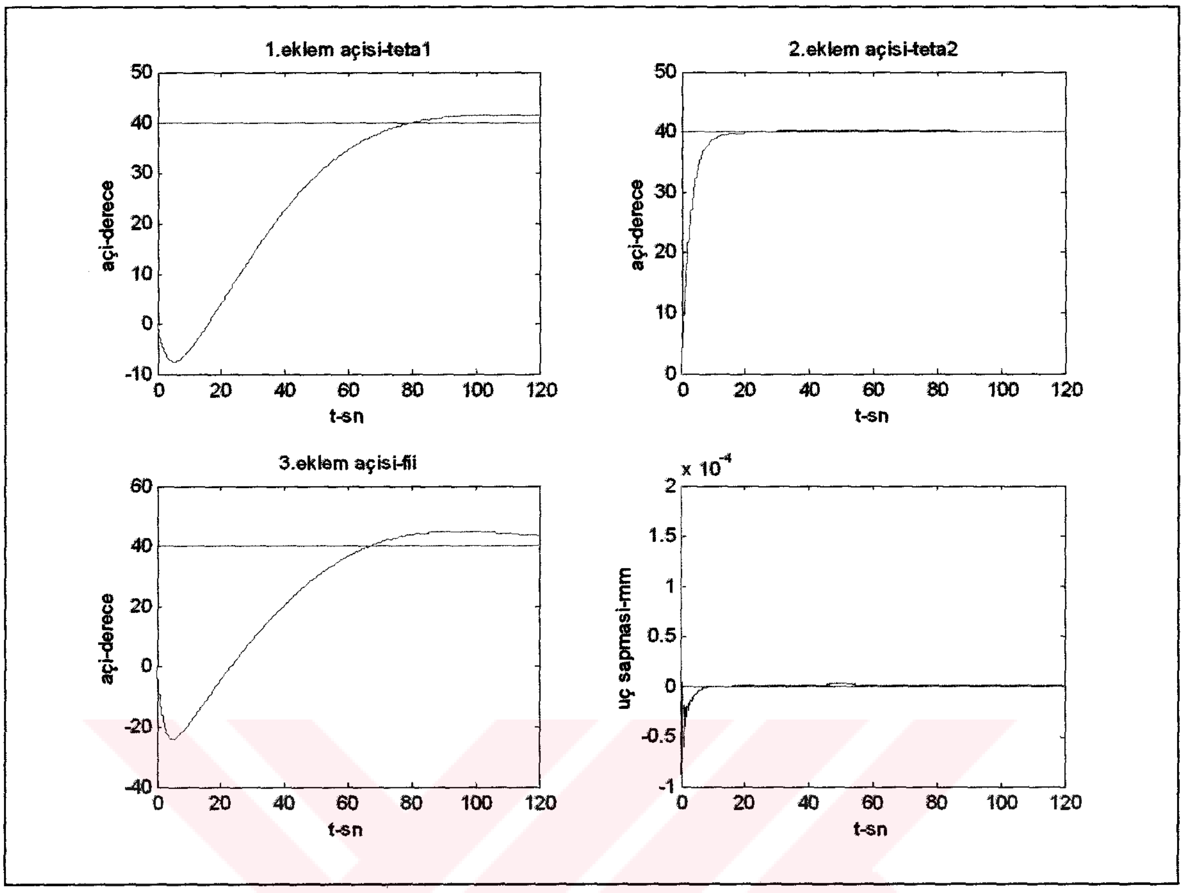
Şekil 3.11. K_p [0.1, 1, 1] ve $m_{yük}$= 0 değerleri için sistemin orantı kontrole verdiği cevap



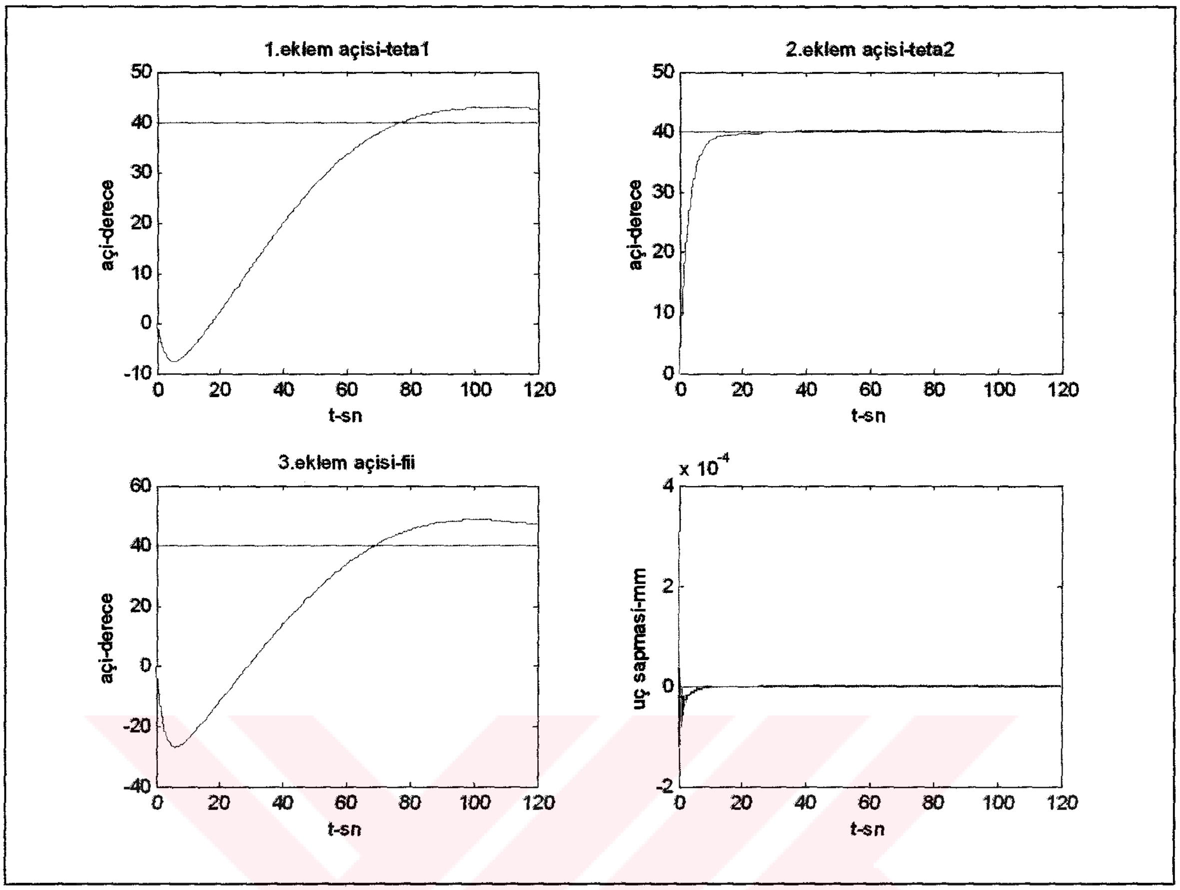
Şekil 3.12. K_p [0.0025, 0.04, 0.0003] ve $m_{yük}$= 0 değerleri için sistemin orantı kontrole verdiği cevap



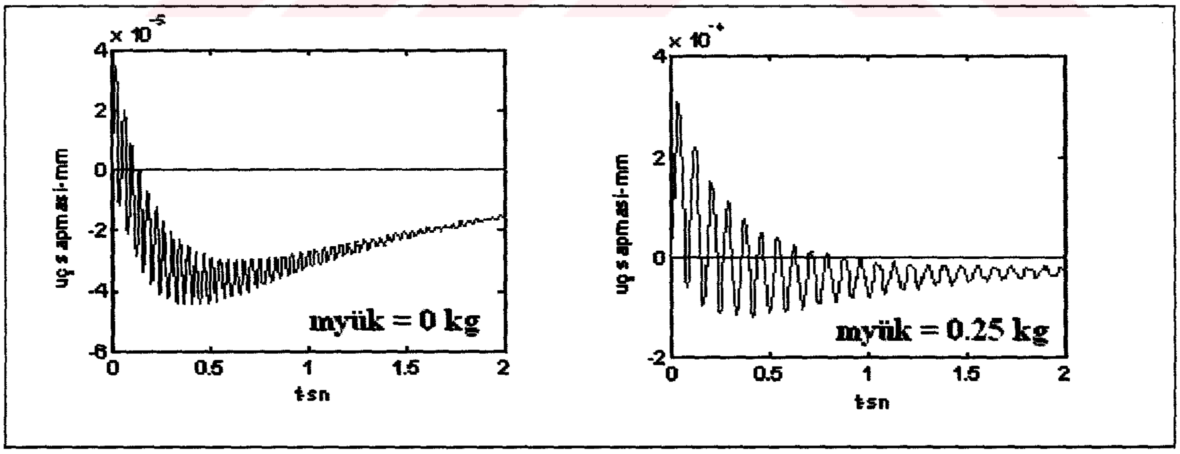
Şekil 3.13. K_p [0.0025, 0.04, 0.0003] ve $m_{yük}$= 0.05 değerleri için sistemin orantı kontrole verdiği cevap



Şekil 3.14. K_p [0.0025, 0.04, 0.0003] ve $m_{yük}$= 0.15 kg değerleri için sistemin orantı kontrole verdiği cevap



Şekil 3.15. K_p [0.0025, 0.04, 0.0003] ve $m_{yük}$= 0.25 kg değerleri için sistemin orantı kontrole verdiği cevap



Şekil 3.16. myük = 0 – 0.25 kg durumları için P kontroldeki uç sapması

3.1.3. Orantı + Türev (PD) Kontrol uygulanmış hal

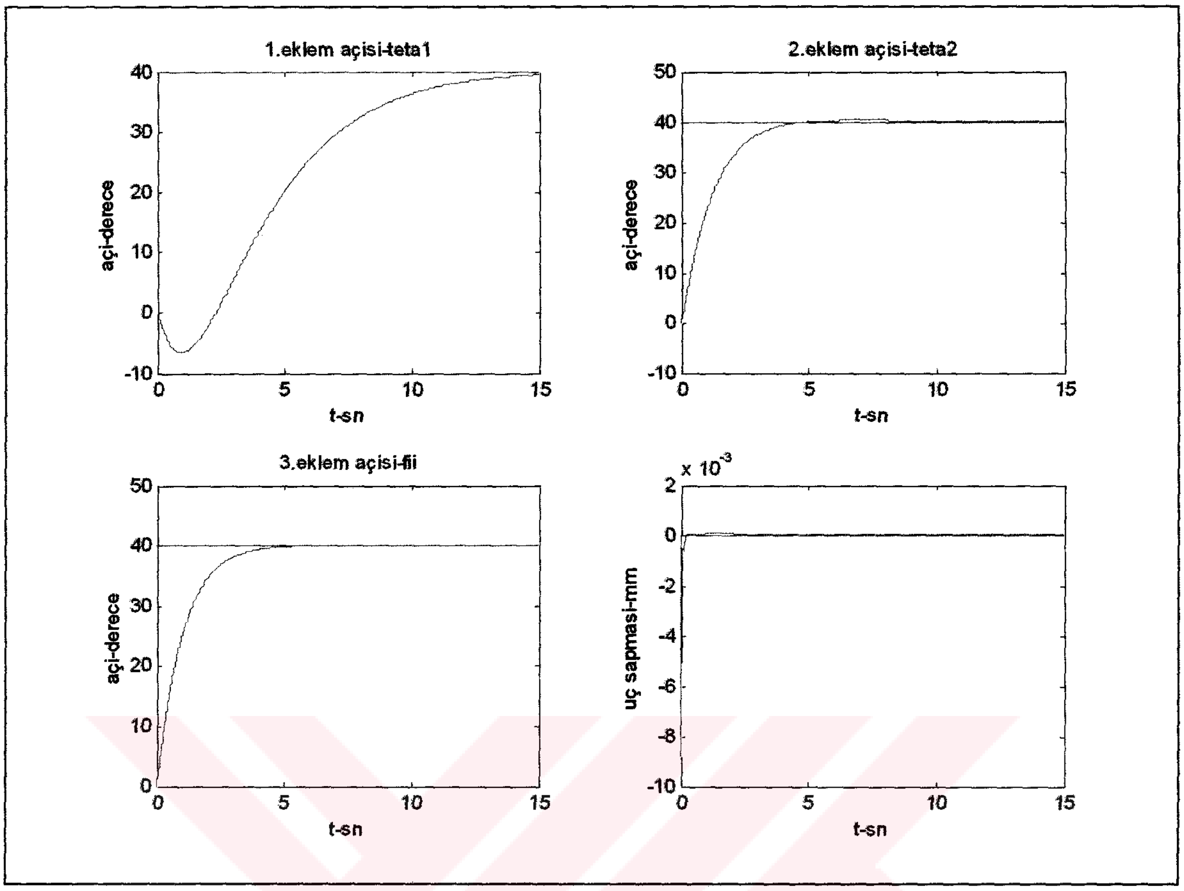
Sisteme $m_{yük}$ = 0, 0.05, 0.15 ve 0.25 kg değerleri için PD kontrol stratejisi aşağıda verildiği şekilde uygulanmıştır.

$$\tau_1 = K_{p1} * (\theta_1 r - \theta_1) - K_{d1} * \dot{\theta}_1$$

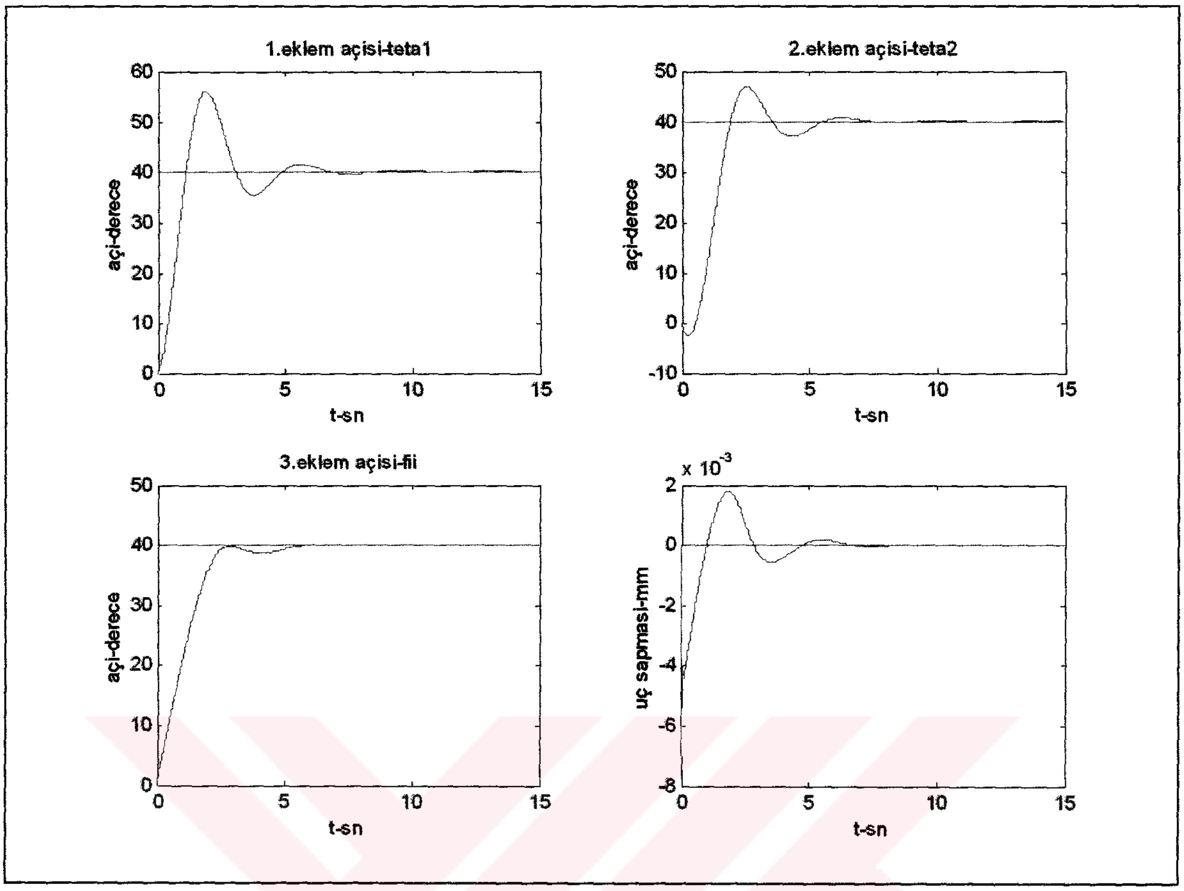
$$\tau_2 = K_{p2} * (\theta_2 r - \theta_2) - K_{d2} * \dot{\theta}_2$$

$$\tau_3 = K_{p3} * (\varphi_r - \varphi) - K_{d3} * \dot{\varphi}$$

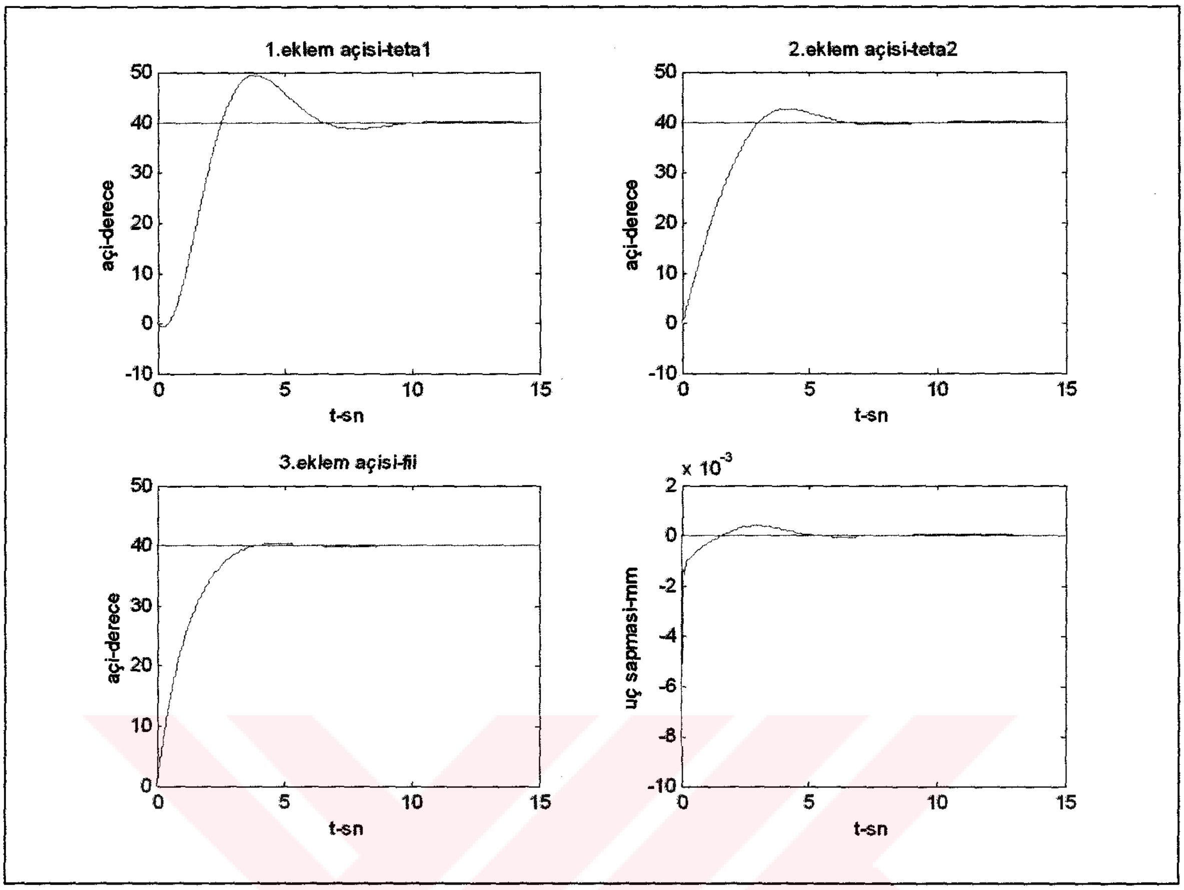
Uygun türevsel kazanç katsayı değerlerini bulmak için, belirlenen bir K_p değeri sabit tutularak, farklı K_d değerlerinin sistem performansına etkisi incelenmiştir. Yerleşme zamanı kısaltılarak sistemin performansının artırılması ve türevsel kazanç değerinin değişiminin sistemin açısal konumuna ve esnek kolun uç sapmasına etkilerinin görülebilmesi amacıyla, K_p [0.1, 1, 1] kazanç değerleriyle eş çalışan [0.5, 1, 1] K_d kazanç değerleri, K_p [4, 1, 1] ve [1, 1, 1] kazanç değerleriyle eş çalışan [1, 1, 1] K_d kazanç değerleri, K_p [1, 1, 1] kazanç değerleriyle eş çalışan [2, 1, 1] ve [2.1, 1.5, 1] K_d kazanç değerleri ile sistemin benzetimi yapılmıştır. Benzetim grafikleri Şekil 3.17, 3.18, 3.19, 3.20 ve 3.21' de verilmektedir. Şekil 3.22, 3.23, 3.24, 3.25 ise sistemin 0.05, 0.15 ve 0.25 kg değerindeki yükleri taşıma durumundaki davranışını sergilemektedir.



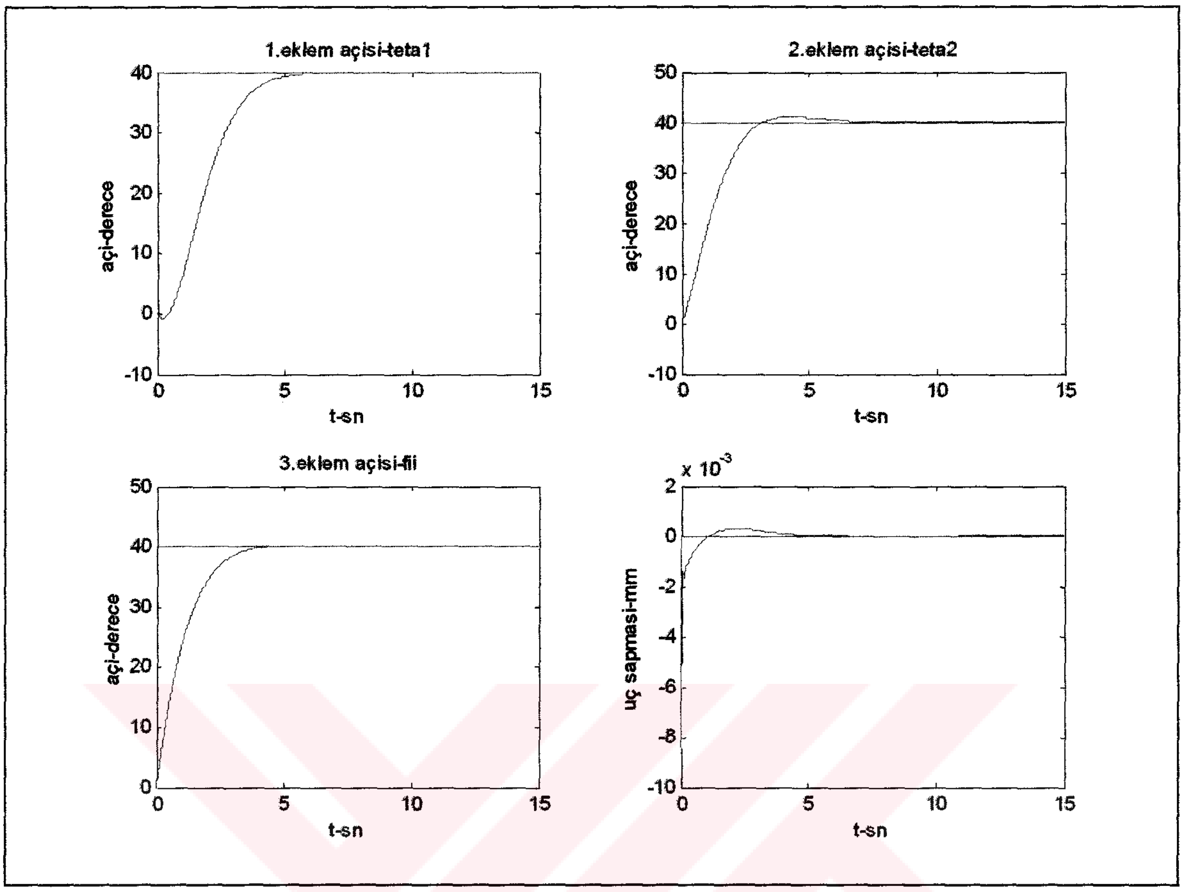
Şekil 3.17. K_p [0.1, 1, 1], K_d [0.5, 1, 1]ve $m_{yük} = 0$ değerleri için sistemin PD kontrole verdiği cevap



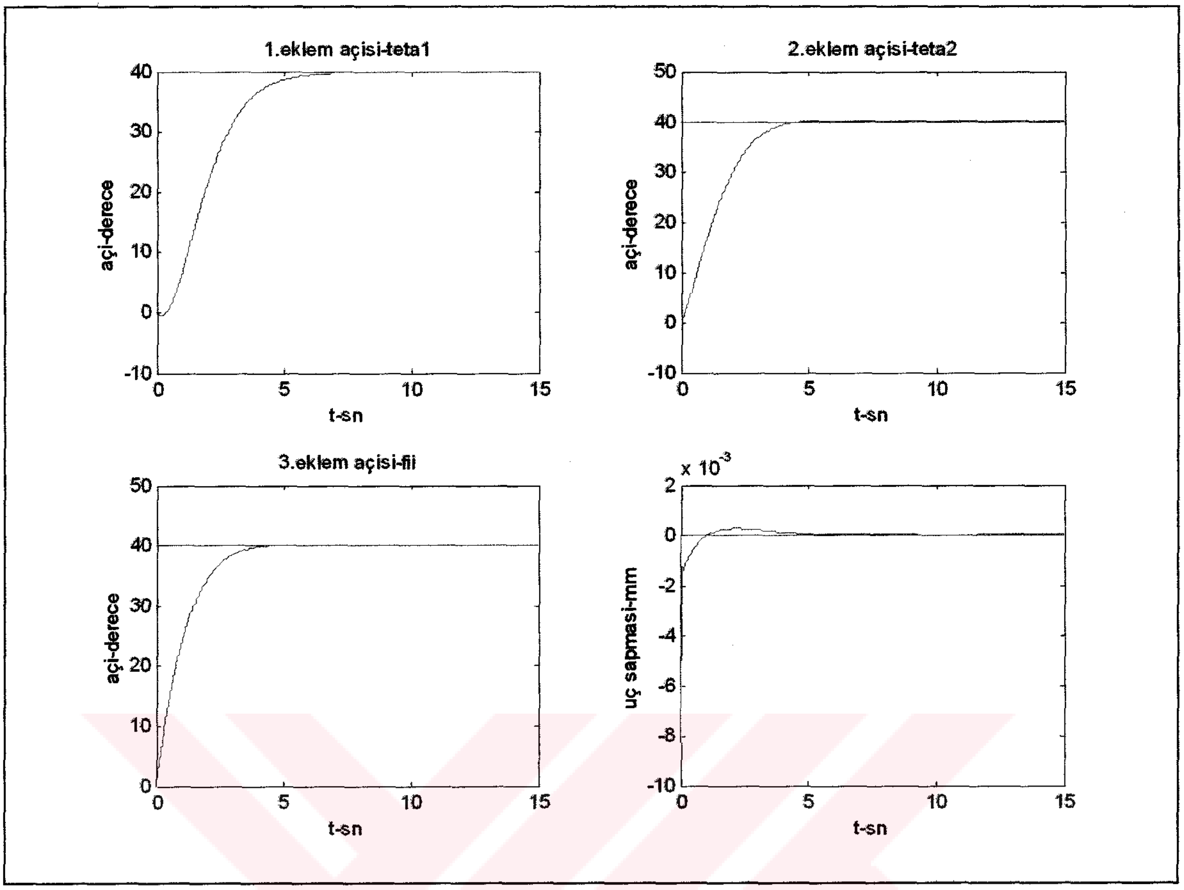
Şekil 3.18. K_p [4, 1, 1], K_d [1, 1, 1] ve $m_{yük}$= 0 değerleri için sistemin PD kontrole verdiği cevap



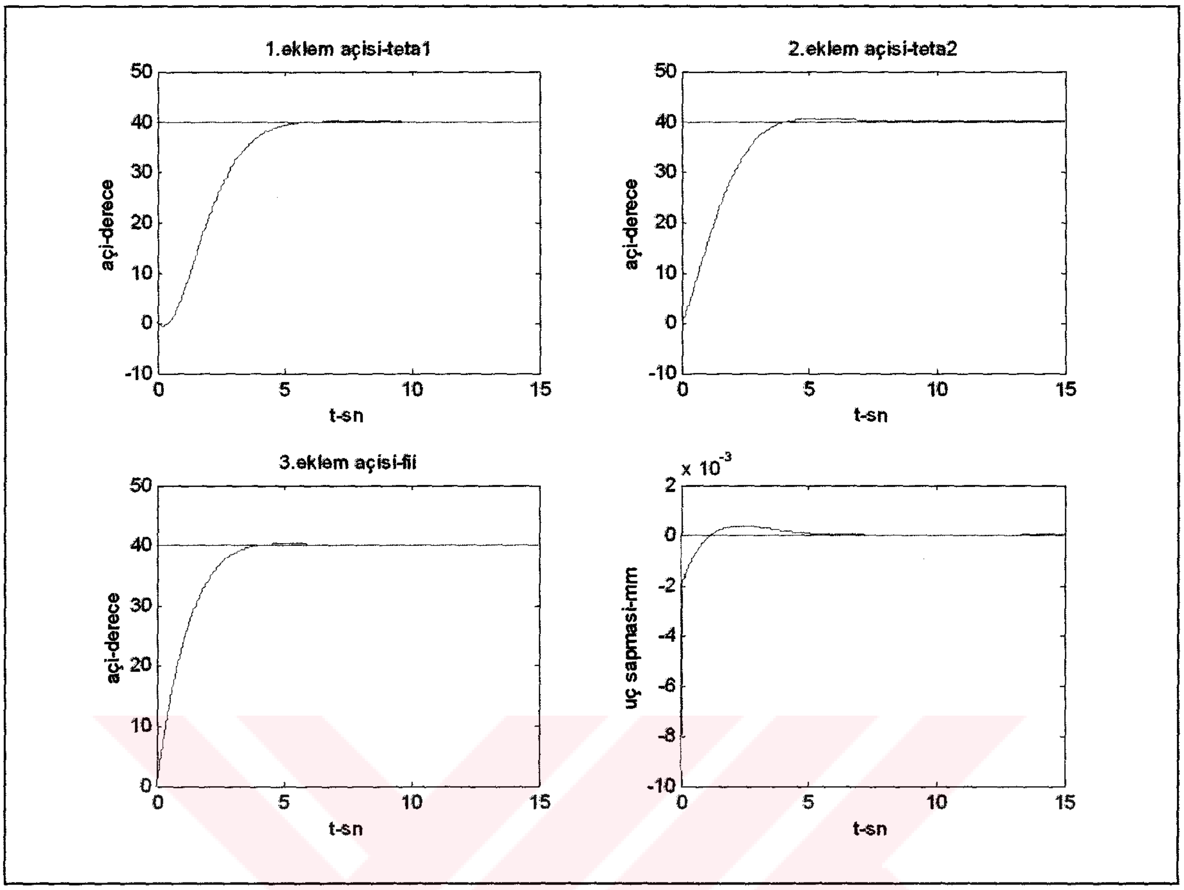
Şekil 3.19. K_p [1, 1, 1], K_d [1, 1, 1] ve $m_{yük}$= 0 değerleri için sistemin PD kontrole verdiği cevap



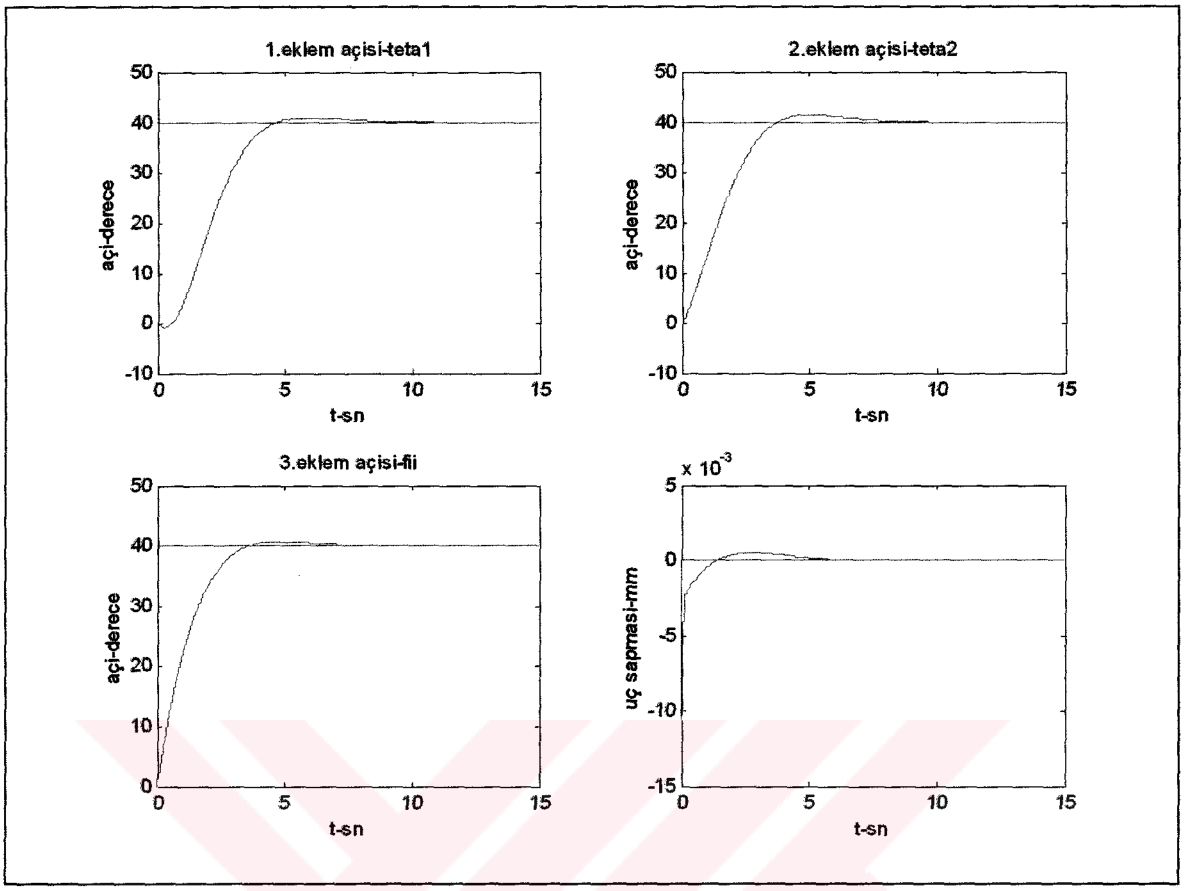
Şekil 3.20. K_p [1, 1, 1], K_d [2, 1, 1] ve $m_{yük}$= 0 değerleri için sistemin PD kontrole verdiği cevap



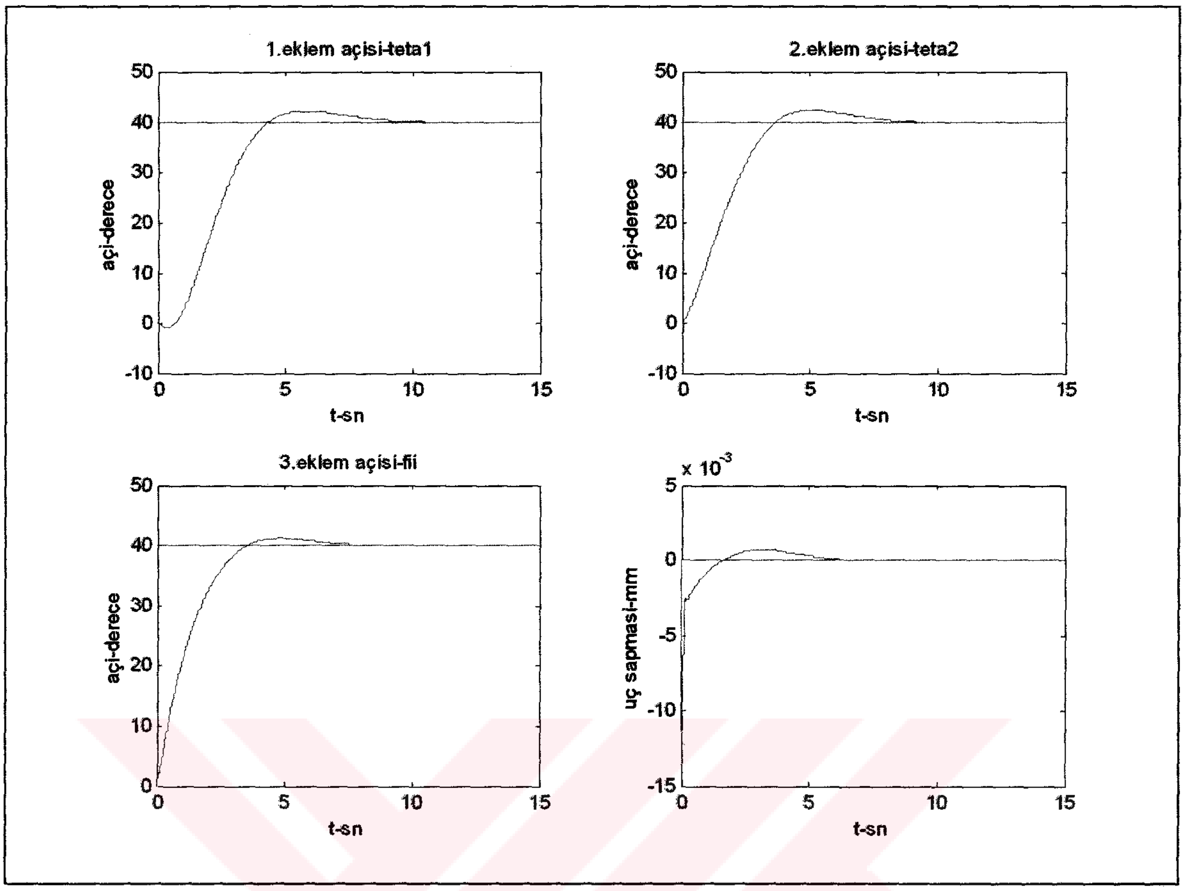
Şekil 3.21. K_p [1, 1, 1], K_d [2.1, 1.3, 1] ve $m_{yük}$= 0 değerleri için sistemin PD kontrole verdiği cevap



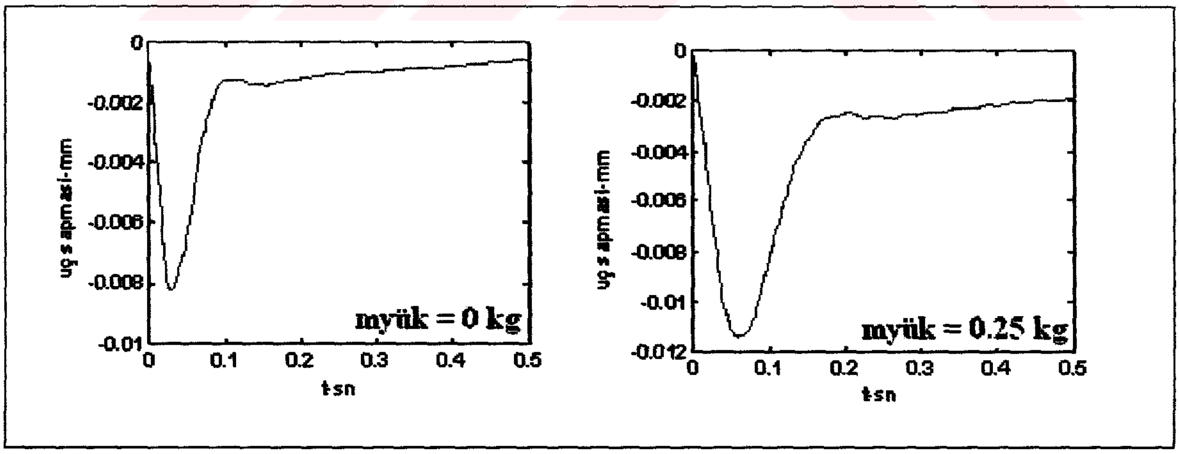
Şekil 3.22. K_p [1, 1, 1], K_d [2.1, 1.3, 1] ve $m_{yük}$ = 0.05 kg değerleri için sistemin PD kontrole verdiği cevap



Şekil 3.23. K_p [1, 1, 1], K_d [2.1, 1.3, 1] ve $m_{yük}$ = 0.15 kg değerleri için sistemin PD kontrole verdiği cevap



Şekil 3.24. K_p [1, 1, 1], K_d [2.1, 1.3, 1] ve $m_{yük}$ = 0.25 kg değerleri için sistemin PD kontrole verdiği cevap



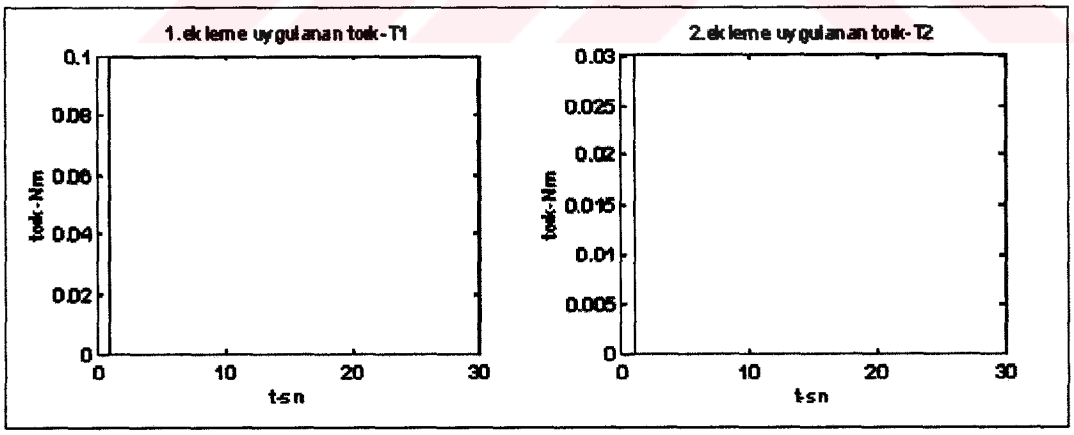
Şekil 3.25. $m_{yük}$ = 0-0.25 kg durumları için PD kontrolde uç sapması

3.2. İki Kollu Robotun Karada ve Sualtındaki Davranışı

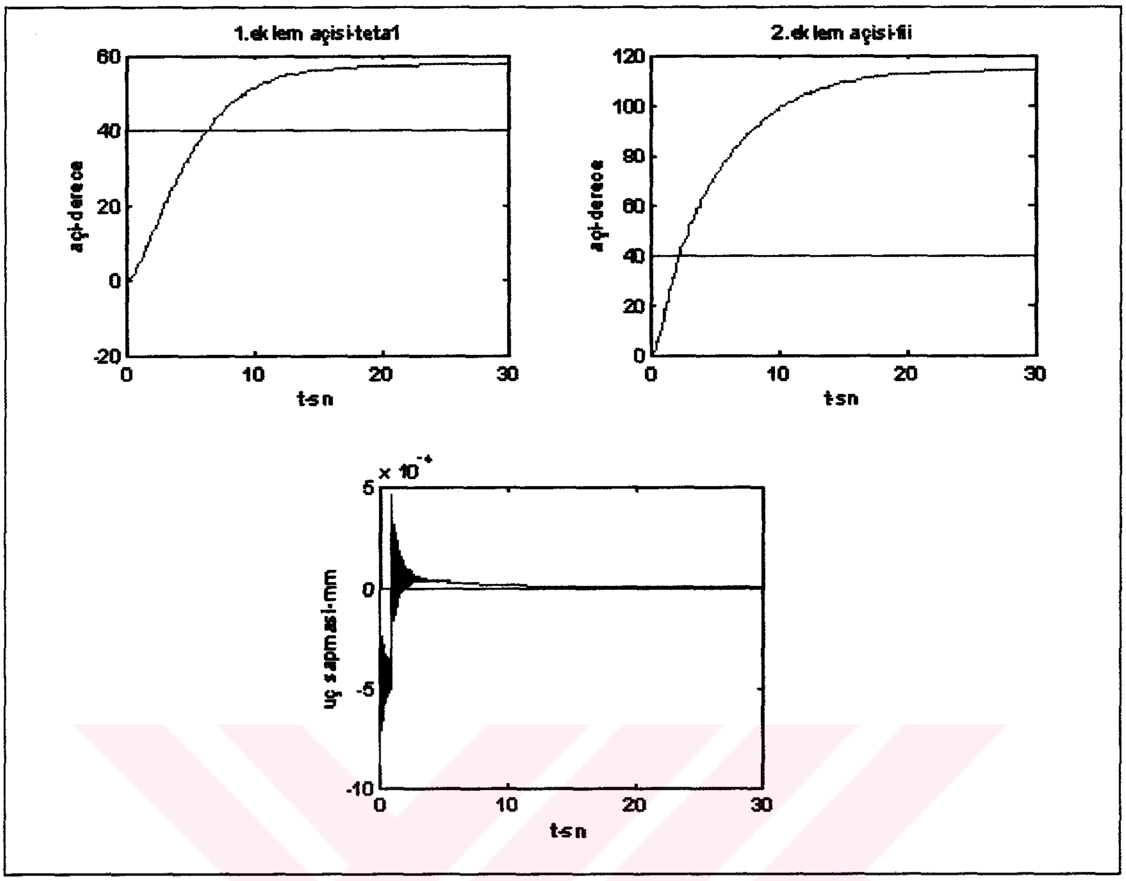
Bu bölümde ilki katı ikincisi esnek olan robot kolunun hem karada hem de su altındaki davranışının mukayesesi amacıyla yapılan benzetim çalışmaları verilmektedir. Bölüm 2.2.1.'de anlatıldığı gibi robot kolu sadece yatay düzlemde hareket ettiği için su altında oluşan direnç kuvvetinin etkisi altında kalmaktadır. Benzetim çalışması esnasında, bu kuvvetin oluşturacağı momentin hesaplanmasında kullanılan parametrelerin Tablo 3.1'de verilen kolun fiziksel ve geometrik özellikleri de dikkate alınarak hesaplanması gereklidir. İki kollu su altı robotu, üç kollu kara robotunun ikinci kolu çıkartılarak oluşturulduğundan esnek kola ait parametrelerde kullanılan indis 3 olarak alınmıştır. Drag katsayısı L_3/h_3 oranına bağlı olarak kaynak [46,49]'dan $C_D = 1.44$ olarak seçilmiştir. Suyun yoğunluğu $\rho_{su} = 1000\ kg / m^3$ olarak alınmıştır.

3.2.1. Adım girişi

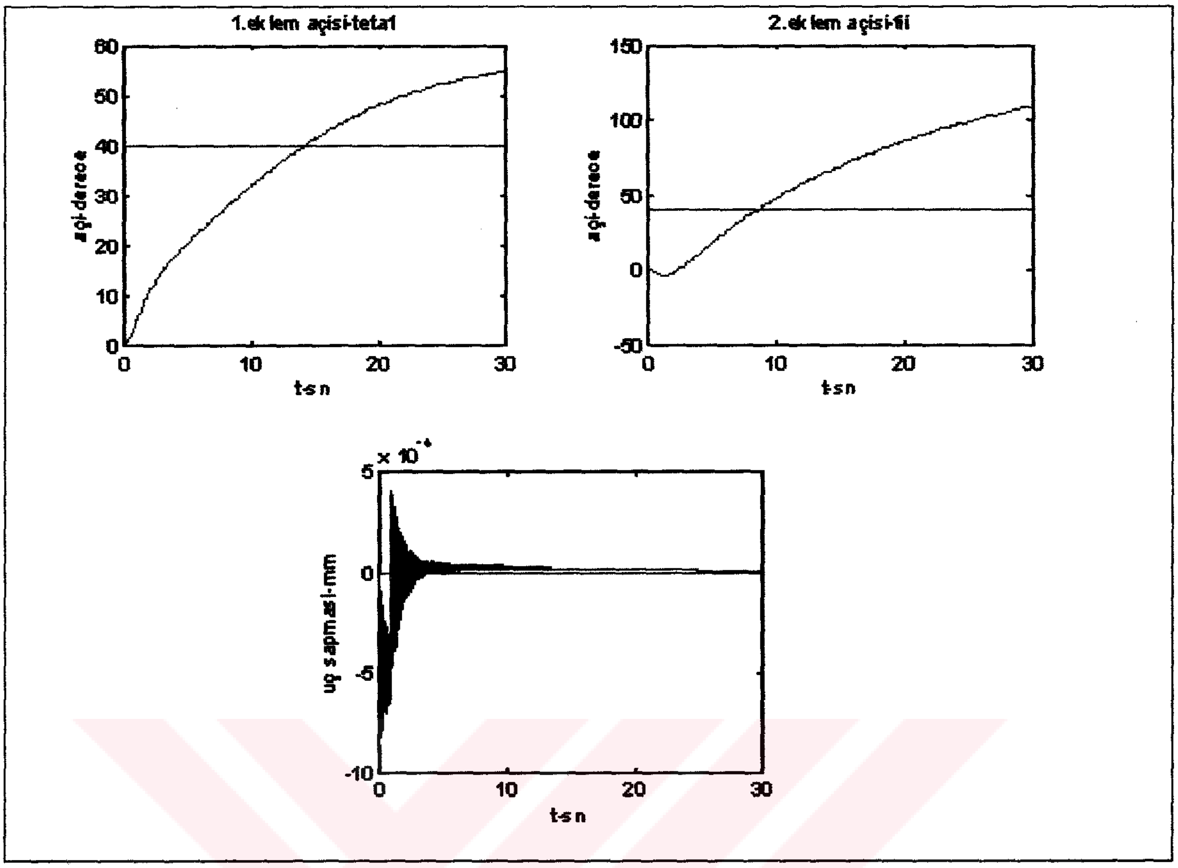
Sistemin su altındaki ve su üstündeki davranışlarının incelenmesi amacıyla Şekil 3.26'da verilen adım girişi uygulanmıştır. Sistemin yüksüz ve yüklü durumlara verdiği cevaplar Şekil 3.27, 3.28, 3.29 ve 3.30 'da görülmektedir.



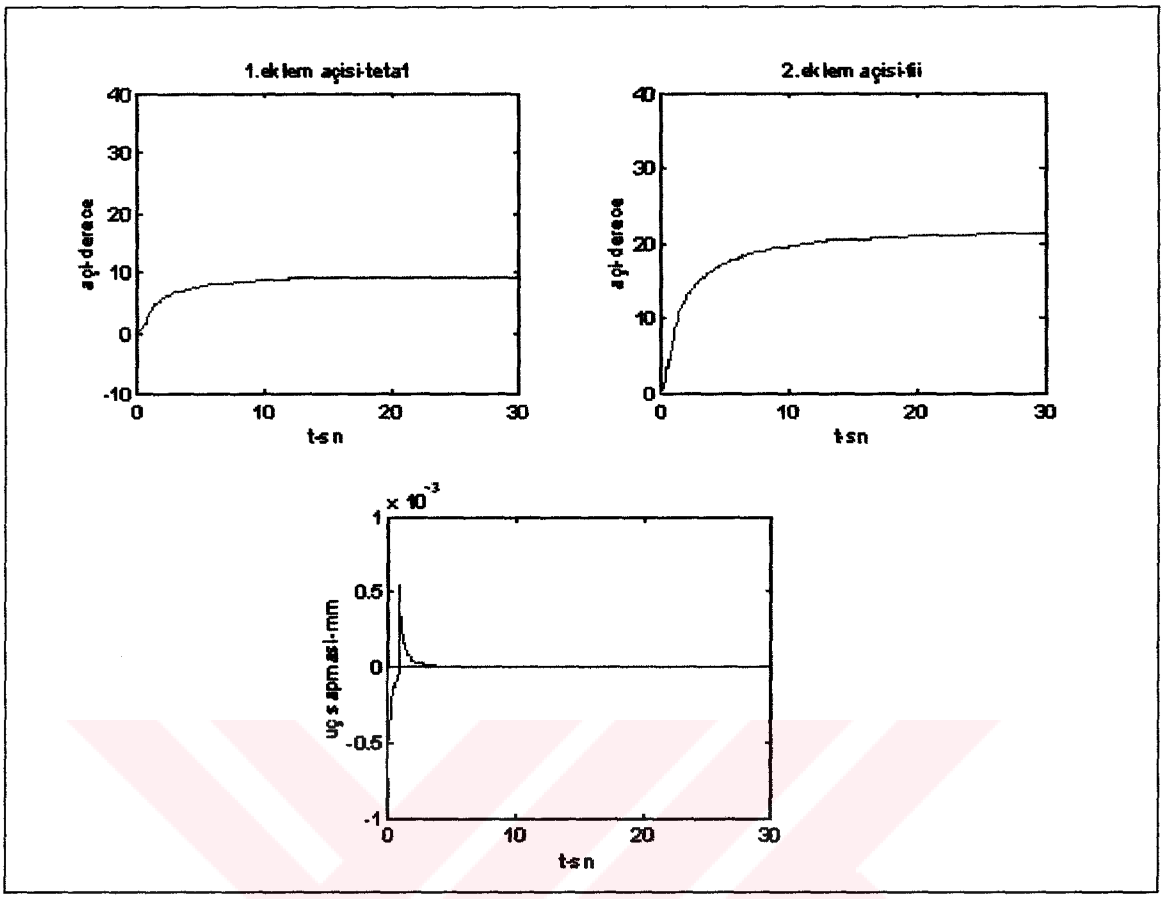
Şekil 3.26. Sisteme uygulanan torklar



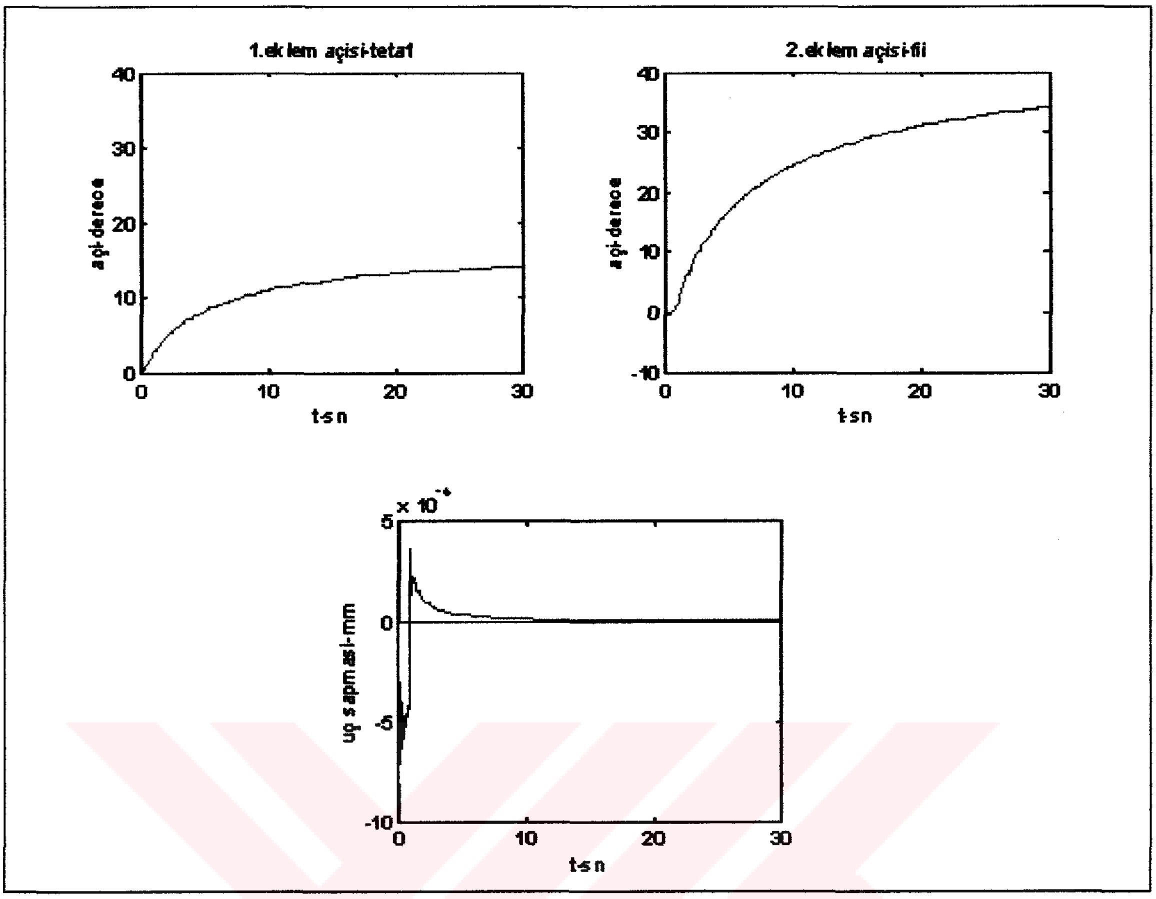
Şekil 3.27. $m_{yük} = 0$ kg durumunda kara robotunun adım girişine cevabı



Şekil 3.28. $m_{yük}$ = 0.25 kg durumunda kara robotunun adım girişine cevabı



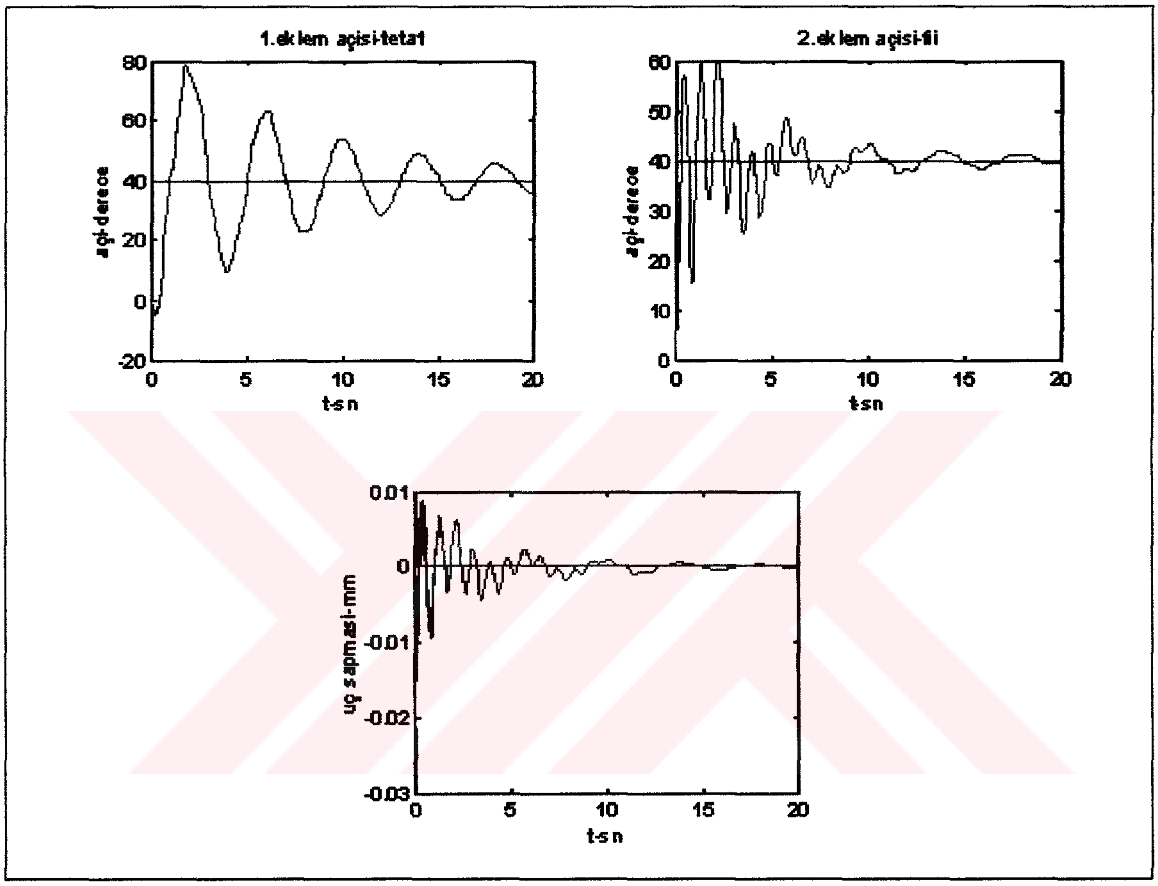
Şekil 3.29. $m_{yük} = 0$ kg durumunda su altı robotunun adım girişine cevabı



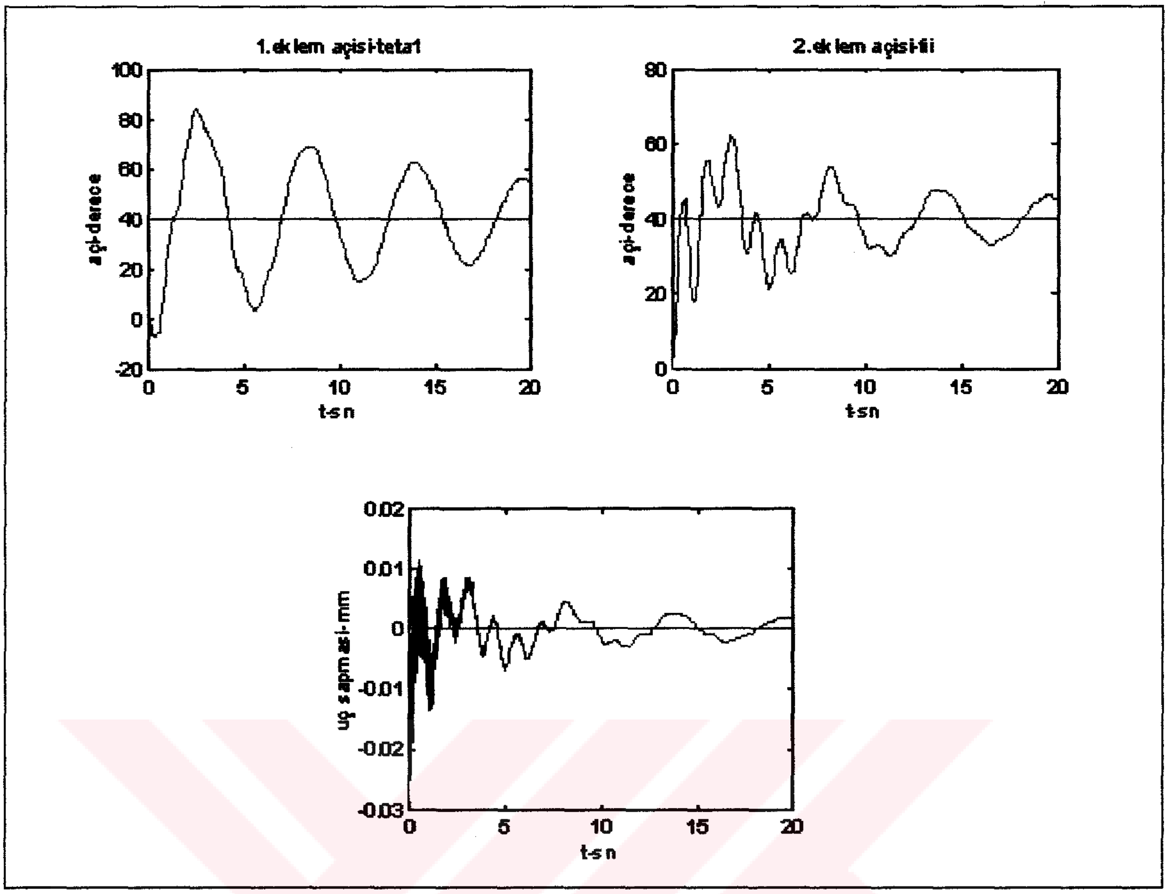
Şekil 3.30. $m_{yük}$ = 0.25 kg durumunda su altı robotunun adım girişine cevabı

3.2.2. P Kontrol hali

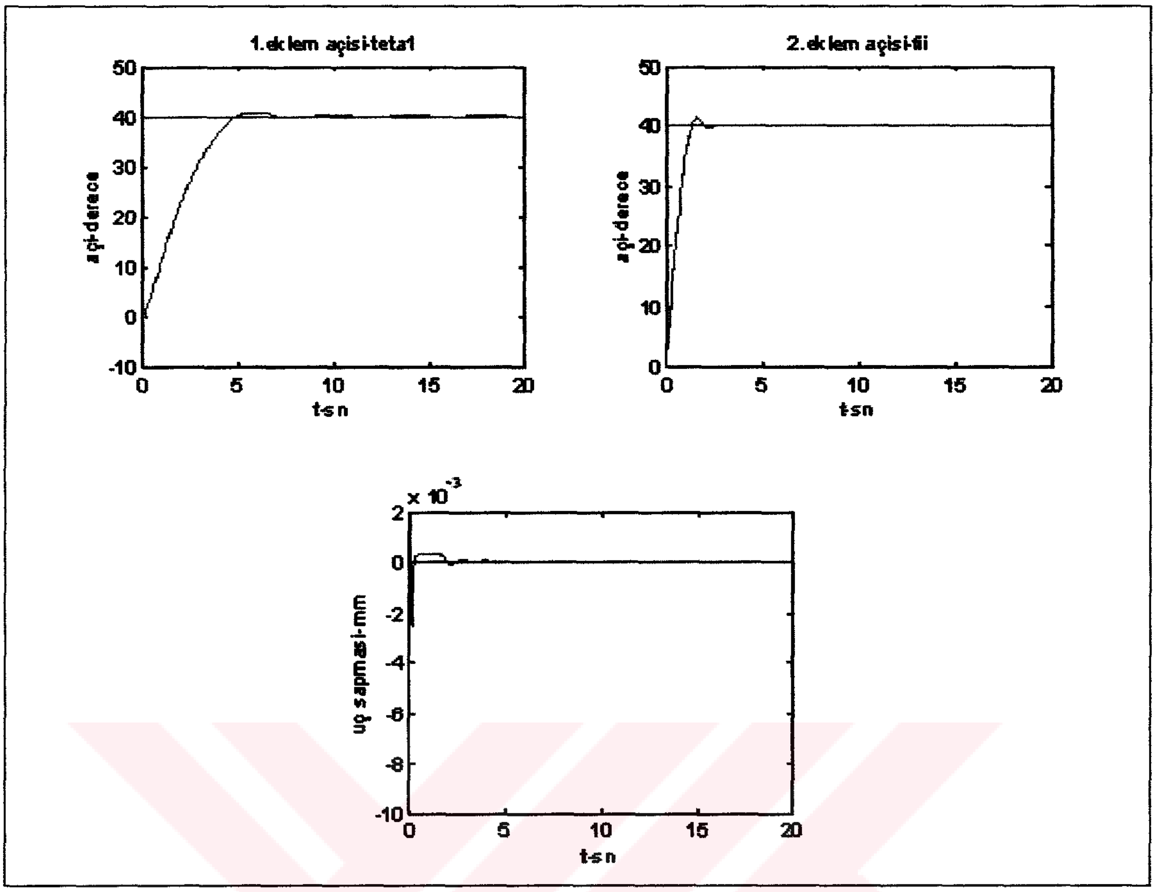
Sisteme uygulanan kazanç değerleri K_p [1, 1] olup, parantez içindeki değerler sırasıyla K_{p1} ve K_{p3} değerlerine karşı gelmektedir. Elde edilen açısal konum değişimleri ve esnek kolun uç sapma değerleri Şekil 3.31, 3.32, 3.33, 3.34' de verilmektedir.



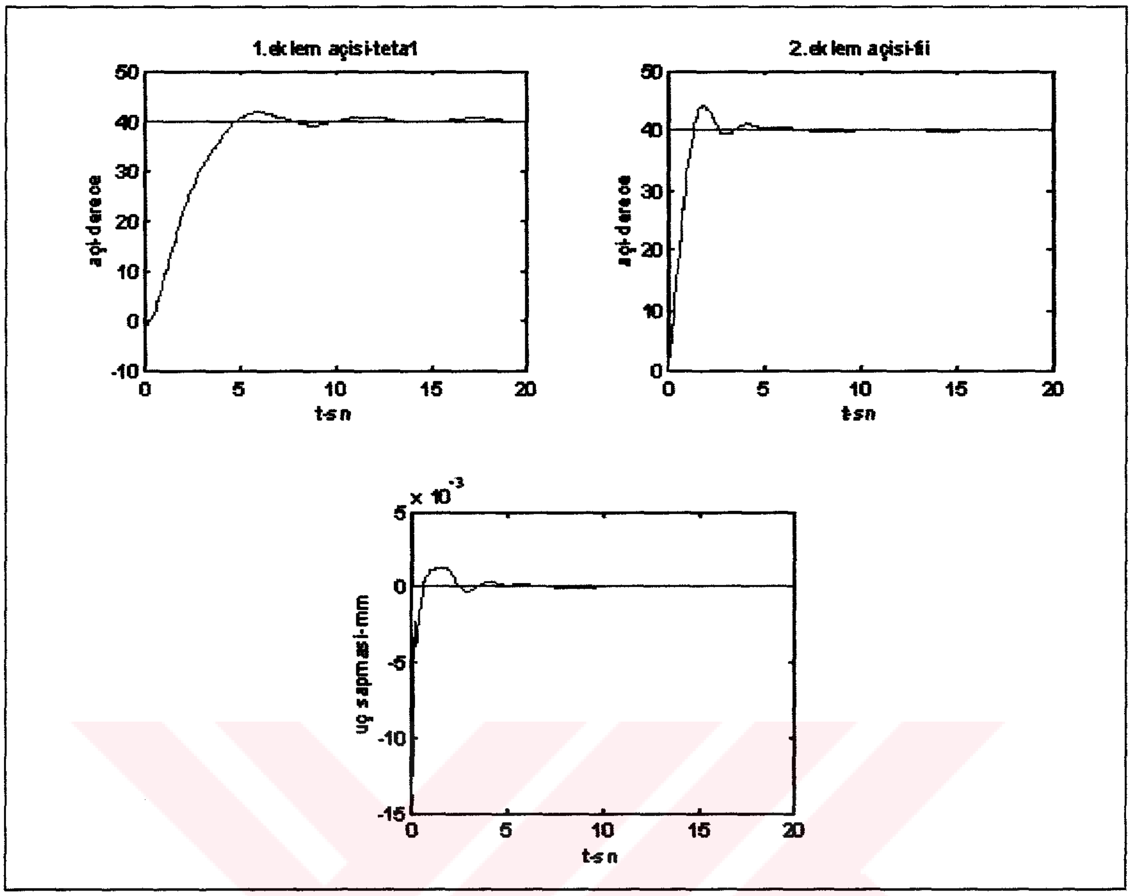
Şekil 3.31. $m_{yük}$ = 0 kg durumunda kara robotunun P kontrole verdiği cevap



Şekil 3.32. $m_{yük}$ = 0.25 kg durumunda kara robotunun P kontrole verdiği cevap



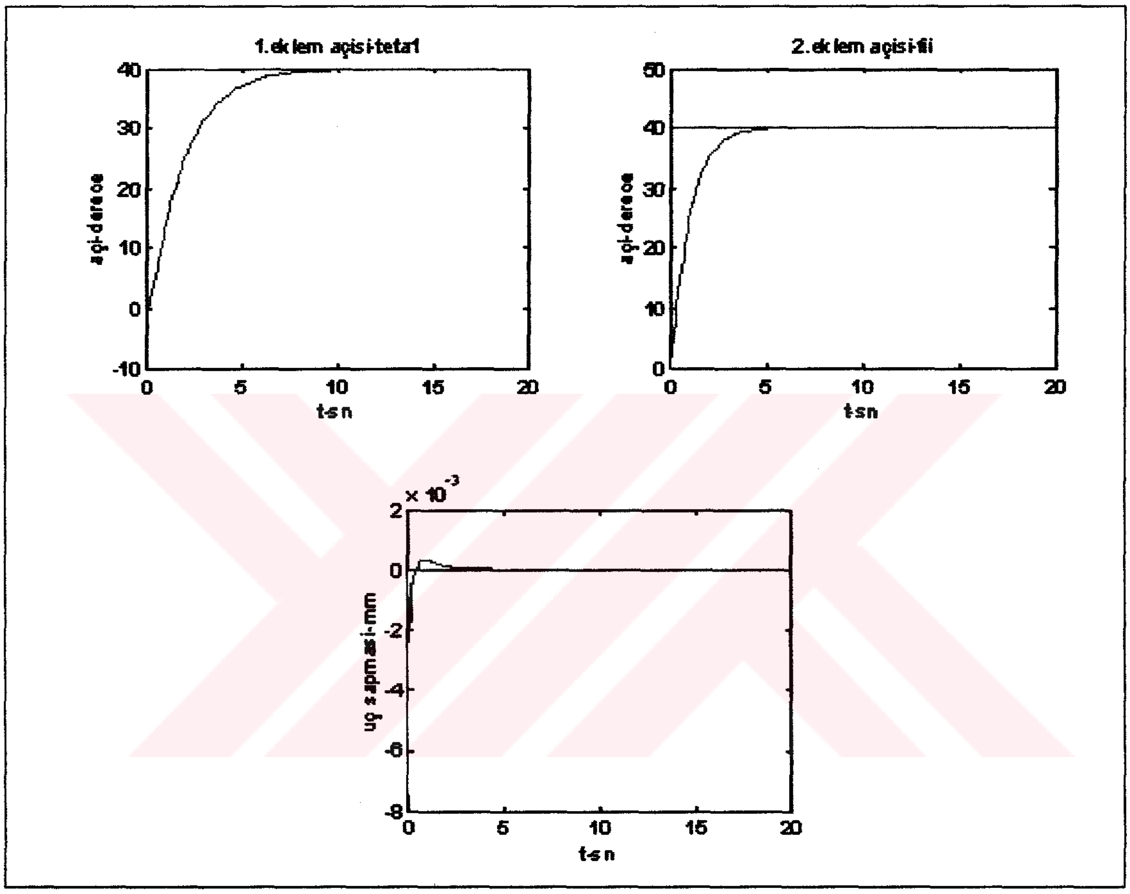
Şekil 3.33. $m_{yük} = 0$ kg durumunda su altı robotunun P kontrole verdiği cevap



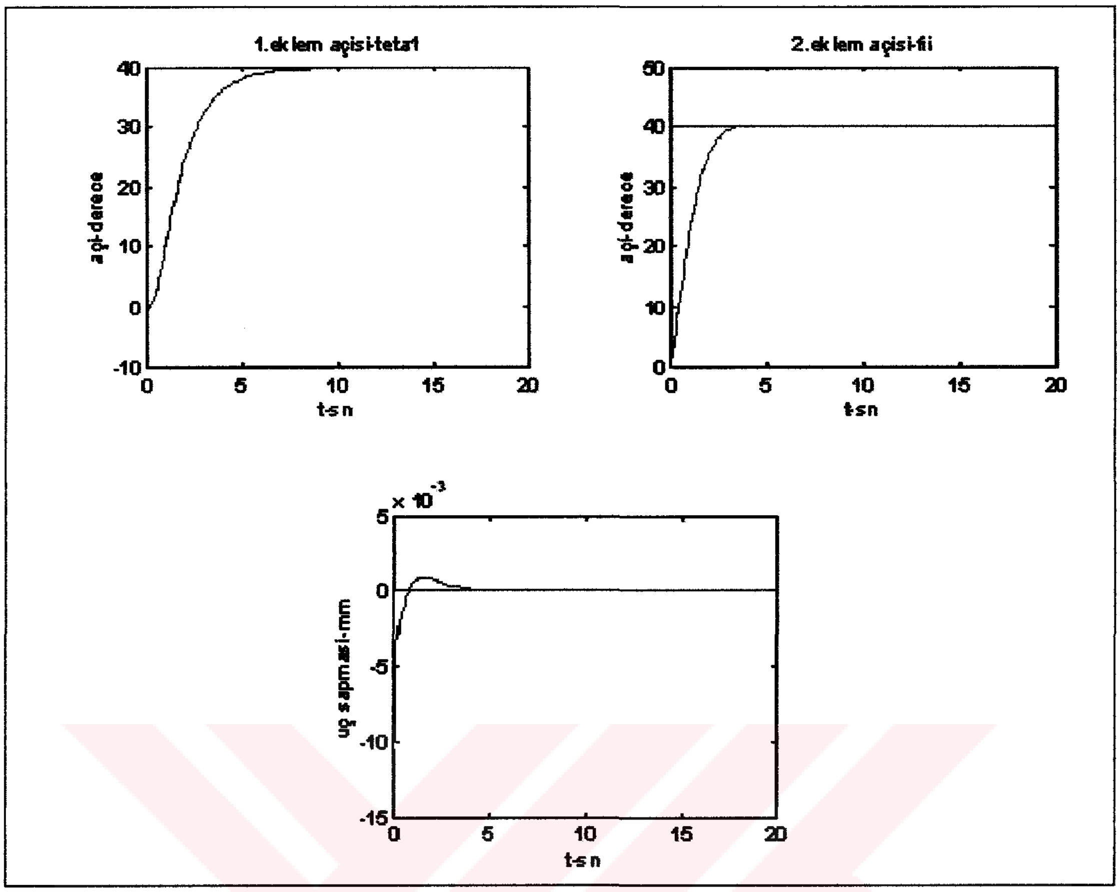
Şekil 3.34. $m_{yük}$ = 0.25 kg durumunda su altı robotunun P kontrole verdiği cevap

3.2.3. PD Kontrol hali

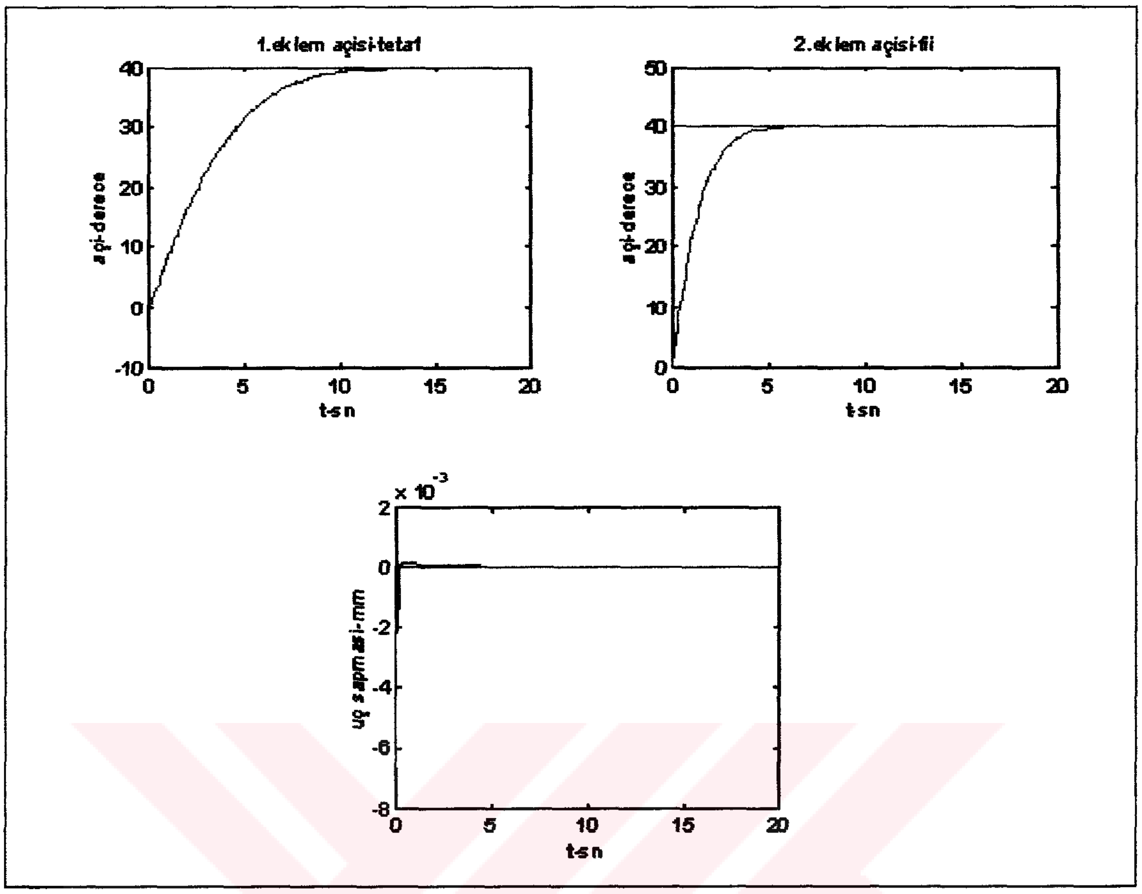
Sisteme K_p [1, 1] kazanç değerleriyle eş çalışan K_d [2, 1] değerleri alınarak benzetim çalışmaları yapılmıştır. Elde edilen açısal konum değişimi ve esnek kolun uç sapma değerleri Şekil 3.35, 3.36, 3.37, 3.38' de verilmektedir.



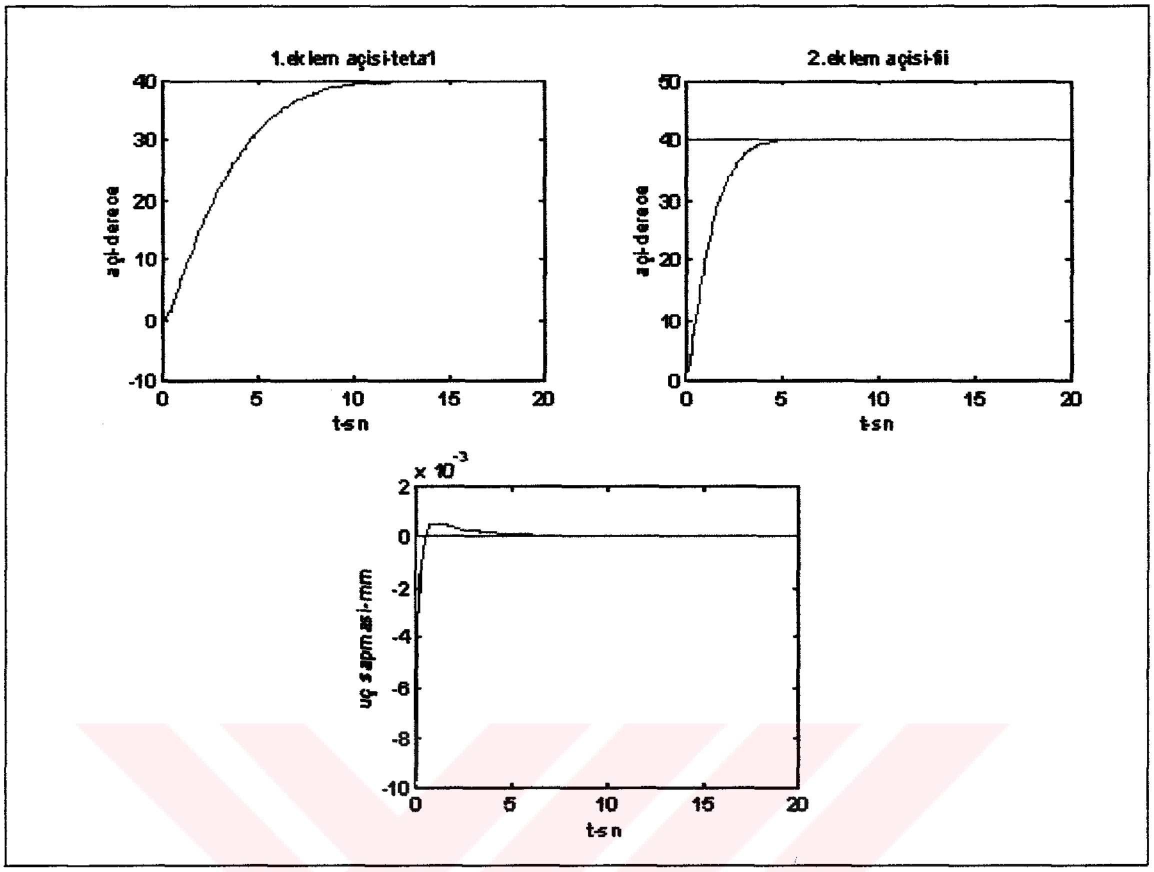
Şekil 3.35. $m_{yük}$ = 0 kg durumunda kara robotunun PD kontrole verdiği cevap



Şekil 3.36. $m_{yük}$ = 0.25 kg durumunda kara robotunun PD kontrole verdiği cevap



Şekil 3.37. $m_{yük}$ = 0 kg durumunda su altı robotunun PD kontrole verdiği cevap



Şekil 3.38. $m_{yük}$ = 0.25 kg durumunda su altı robotunun PD kontrole verdiği cevap

4. İRDELEME

Bu yüksek lisans tezi iki farklı robot modeli için benzetim çalışmalarını içermektedir. Bu modellerden ilki olan üç kollu robota ait matematiksel model, sadece kara şartlarında çalışacak şekilde tasarlanmıştır. İki kollu robota ait matematiksel model ise hem karada hem de su altında çalışacak şekilde tasarlanmıştır. Her iki modele farklı yük değerleri için açık çevrim, P ve PD kontrol stratejileri uygulanarak, modellerin performans karakteristikleri incelenmiş ve elde edilen benzetim grafikleri 3. bölümde bulgular başlığı altında verilmiştir. Bu bölümde ise söz konusu bulguların irdelemesi yapılmaktadır.

4.1. Üç Kollu Robotun Davranış Karakteristiklerinin İrdelenmesi

4.1.1. Sistemin Açık Çevrim Performansı

Modellemesi yapılan ilk ikisi katı üçüncüsü esnek kolun performans karakteristiklerini görebilmek amacıyla, sisteme Şekil 3.2' de verilen adım girişi uygulanmıştır. Birinci kolu hareket ettirmek için başlangıçta 0.5 saniye boyunca +0.3 N/m'lik adım fonksiyonu şeklinde değişen tork uygulanmıştır. Aynı müddet zarfında ikinci kola da +0.3 N/m değerinde tork uygulanmıştır. Esnek kola uygulanan tork değeri ise +0.1 N/m değerinde olup, uygulama süreleri aynı tutulmuştur. Uygulanan tork girdilerinin birbirinden farklı olmasının nedeni, kolların kütlelerinin ve taşıdıkları yüklerin farklı olmasıdır. Örneğin birinci kol, ikinci ve üçüncü kolu ve onları hareketlendiren motorları taşıdığından daha büyük bir tork değeriyle tahrik edilmektedir. Şekil 3.3' te bu girişlere sistemin verdiği cevap incelendiğinde, yüksüz durumda birinci eklem açısı θ_1'in 30 saniye sonunda 84^{o}' ye ulaştığı görülmektedir. İkinci eklem açısı θ_2 için ise 30 saniye sonunda sistemin kalıcı hal davranışı 64^{o} olmaktadır. Esnek kol ise daha hızlı bir şekilde hareket ederek, 30 saniye sonunda 107^{o}' lik açısal konumuna ulaşmaktadır. Esnek kolun uç sapmasının genliği başlangıçta $2.7 \cdot 10^{-3}$ mm dir. Bu genlik 4 saniye sonunda azalarak $1 \cdot 10^{-5}$ değerine düşmektedir. Esnek kolun 0.05, 0.15 ve 0.25 kg yükleri taşıması halinde, elde edilen benzetim sonuçları Şekil 3.4-3.5-3.6-3.7 'de verilmektedir. Grafikler incelendiğinde uç salınımlarının frekansının kolun taşıdığı yük değerinin artmasıyla azaldığı, genliğinin ise kolun taşıdığı yük değerinin artmasıyla arttığı görülmektedir. Yükün artması, kolların ulaşacağı açısal konumun azalmasına neden olmaktadır.

4.1.2. Sistemin P Kontrol Benzetimi

İlk ikisi katı üçüncüsü esnek olan robot kol sistemine P kontrol uygulanarak, sistemin açısal konumundaki ve uç sapmasındaki değişimlerin gözlenmesi amaçlanmıştır. Her bir kolun ulaşacağı referans açısal konumu 40^o olarak alınmaktadır. Bu konuma değişik K_p orantı kazanç değerleri girilerek ulaşmak hedeflenmektedir. Kp [1, 1, 1] değerleri uygulandığında, her üç kolun da referans değeri civarında salınım yaptığı ve en uzun süreli salınım yapan birinci kolun %5 'lik hatayla referans değerine 90 saniyede ulaştığı görülür (Şekil 3.8). Birinci kolun salınımının diğer kollara oranla uzun sürmesi nedeniyle, takip eden grafiklerde, kolların açısal konumu 30 saniyelik zaman dilimi için oluşturulmuştur. Sadece birinci katı kolun orantı kazanç katsayısının büyütülmesi, her bir kolun salınım frekansını artırmaktadır (Şekil 3.9). Birinci katı kolun orantı kazanç katsayısı değerinin 0.5 olması (Şekil 3.10) halinde, her üç kolun salınım frekansı düşmektedir. K_{p1} değerinin 0.1 olması (Şekil 3.11) durumunda ikinci kolun yerleşme zamanının %5 lik hatayla 9 saniye ve esnek kolun yerleşme zamanının yine aynı hata değeriyle 6 saniye olduğu görülmektedir. Birinci kol ise 30 saniye sonunda referans değeri civarında salınımına devam etmektedir. Kollar sırasıyla 35^o , 29^o ve 14^o lik bir aşım sergilemektedir.

Sistemin kritik sönümlü davranış sergilediği en uygun K_p değerleri 0.0025, 0.04 ve 0.0003 olarak bulunmuştur. Şekil 3.12 incelendiğinde, her bir kolun referans değerine yerleşme zamanının sırasıyla birinci katı kol için 120 saniye, ikinci katı kol için 18 saniye, esnek kol için ise 100 saniye olduğu görülmektedir. Yerleşme zamanlarındaki sürenin uzunluğu orantı kontrolün tek başına sistemin performansını iyileştirmekte yeterli olmadığını göstermektedir. Esnek kolun uç noktasındaki salınımların yüksek frekanslı olduğu gözlenmektedir. Bu salınımların frekansının artan yükle azaldığı, esnek kolun 0.05, 0.15 ve 0.25 kg yük taşıması durumunu gösteren Şekil 3.13, 3.14 ve 3.15 'ten anlaşılmaktadır.

P kontrolde esnek kolun uç sapmasının genliği yüksüz hal için başlangıçta $4*10^{-5}$ mm dir, 1.5 saniye sonunda uç sapmasının genliği $5*10^{-6}$ mm değerine düşmektedir. Esnek kolun 0.25 kg yük taşıması halinde uç sapmasının genliği başlangıçta $3*10^{-4}$ mm olup,

$5 \cdot 10^{-6}$ mm değerine 15 saniye sonunda düşmektedir. Bu durum mukayese amacıyla Şekil 3.16' da birlikte verilmektedir.

4.1.3. Sistemin PD Kontrol Benzetimi

Orantı kontrol, tek başına sistemden arzu edilen performansı sağlayamamaktadır. Bu bölümde sistemi hızlandırmak ve aşımı önleyerek referans değerine ulaştırmak için PD kontrol stratejisi irdelenmektedir. Orantı ve türevsel kazanç değerlerinin değişiminin, sistemin performansına etkileri Şekil 3.17, 3.18, 3.19, 3.20, 3.21, 3.22, 3.23, 3.24 ve 3.25 de görülmektedir. Orantı kontrolde olduğu gibi, türevsel kontrolde de birinci katı kolun kazanç katsayıları, sistemin performansını belirleyici bir rol oynamaktadır.

K_p [0.1, 1, 1] kazanç değerleriyle eş çalışan [0.5, 1, 1] K_d kazanç değeri deneme yanılma yöntemiyle bulunan en uygun kazanç katsayı gruplarından biridir (Şekil 3.17). Şekil incelendiğinde her bir kolun referans değerine P kontrol uygulandığı haldekinden daha kısa sürede ulaştığı görülmektedir. Yerleşme zamanı kısaltılarak sistemin performansının artırılması ve aynı zamanda türevsel kazanç değerinin değişiminin sistemin açısal konumuna ve esnek kolun uç sapmasına etkilerinin görülebilmesi amacıyla uygulanan bir dizi benzetim çalışması sonucunda, K_p [1, 1, 1] kazanç değerleriyle eş çalışan [2.1, 1.3, 1] K_d kazanç değerlerinin sistemin en uygun PD kontrol parametreleri olduğu görülmüştür. Konuyla ilgili benzetim grafikleri Şekil 3.17, 3.18, 3.19, 3.20, 3.21' de verilmektedir. Şekil 3.21 incelendiğinde birinci katı kolun yerleşme zamanının 6 saniye, ikinci katı kolun yerleşme zamanının 4 saniye, esnek kolun yerleşme zamanının ise 3.5 saniye olduğu görülmektedir. Şekil 3.22, 3.23, 3.24 ise sistemin 0.05, 0.15 ve 0.25 kg değerindeki yükleri taşıma durumundaki davranışını sergilemektedir. Esnek kolun uç noktasındaki salınımların frekansının artan yükle azaldığı görülmektedir.

PD kontrolde esnek kol referans değerine çok az bir salınımla ulaştığından, uç noktasındaki titreşimler çok hızlı bir şekilde sönümlenmektedir. Esnek kolun uç sapmasının genliği yüklü ve yüksüz hal için kıyaslandığında, yüklü halde her ne kadar bir artış gözlense de, bu artış mertebe bakımından yüksüz haldeki genlik değerine çok yakın değerdedir (Şekil 3.25).

4.2. İki Kollu Robotun Karada ve Sualtındaki Davranışının İrdelenmesi

4.2.1. Adım Girişi

Modellemesi yapılan ilki katı ikincisi esnek kolun performans karakteristiklerini görebilmek amacıyla, sisteme Şekil 3.26 ' da verilen adım girişi uygulanmıştır. Birinci kolu hareket ettirmek için başlangıçta sisteme 1 saniye boyunca +0.1 N/m'lik adım fonksiyonu şeklinde değişen tork uygulanmıştır. Aynı süre zarfında esnek kola +0.03 N/m değerinde tork uygulanmıştır.

Şekil 3.27'de bu girişlere kara robotunun verdiği cevap incelendiğinde, yüksüz durumda birinci eklem açısı θ_1'in 20 saniye sonunda 57^{o}' ye ulaştığı görülmektedir. Esnek kol ise daha yavaş bir şekilde hareket ederek, 25 saniye sonunda 113^{o}' lik açısal konumuna ulaşmaktadır. Aynı girişe sualtı robotunun verdiği cevap Şekil 3.29' da görülmektedir. Yüksüz durumda birinci eklem açısı θ_1' in 13 saniye sonunda 9^{o}, esnek kolun eklem açısı φ'nin 19 saniye sonunda 21^{o}'ye ulaştığı görülmektedir. Robot kolunun aynı girişe karşı kara ve sualtı ortamlarında verdiği cevaplar arasındaki bu büyük farklılığın nedeni, motor torkunun önemli bir kısmının sualtı ortamında varolan sürtünme direncini yenmek için harcanmasıdır.

4.2.2. P Kontrol Benzetimi

Orantı kazanç değeri K_p [1, 1] seçilerek uygulanan P kontrol girişine, iki kollu robotun her iki ortamda vermiş olduğu cevapları tespit etmek amacıyla yapılan benzetim çalışmaları, Şekil 3.31, 3.32, 3.33, 3.34'de verilmektedir. Bu orantı kazanç değerleri için kara robotu, referans değeri civarında az sönümlü hal olarak tabir edilen, genliği giderek azalan bir davranış sergilemektedir. Aynı kazanç değerleri için sualtı robotunun kritik sönümlü hale yakın bir davranış gösterdiği gözlenmektedir. Dolayısıyla uç sapmasının sualtı robotunda önemli ölçüde azalmış olması doğaldır. Şayet kara robotu kritik sönümlü hale yakın bir davranış sergilemiş olsaydı, sualtı robotunun aynı kazanç değerleri için aşırı sönümlü bir davranış sergilemesi orantı kontrolün karakterine uygun bir davranış olacaktır. Bu nedenle orantı kontrole özgü olan bu davranış grafiklerde gösterilmemiştir.

4.2.3. PD Kontrol Benzetimi

Robot kolunun farklı ortam şartlarında kullanılması halinde PD kontrolün yeterli olup olmadığını test etmek amacıyla yapılan benzetim çalışmaları Şekil 3.35, 3.36, 3.37, 3.38' de verilmektedir. Yüksüz durumda orantı kazanç katsayısı K_p [1, 1] ile eş çalışan K_d [2, 1] türevsel kazanç katsayıları seçilerek PD kontrol uygulanmış olup, kara robotunun birinci eklem açısı θ_1 'in 10 saniye sonunda referans açı değerine ulaştığı görülmektedir. Esnek kol ise daha kısa süre olan 5 saniye sonunda referans açı değerine ulaşmaktadır. Aynı şartlar için sualtı robotunun birinci eklem açısı θ_1, 12 saniye sonunda referans açı değerine ulaşmıştır. Esnek kol ise 6 saniye sonunda referans açı değerine ulaşmıştır. PD kontrol, sistemin farklı ortamlarda aynı kazanç değerleriyle kontrol edilmesi halinde, birinci kolu 2 saniye gecikmeyle, esnek kolu ise 1 saniyelik gecikmeyle referans değerine ulaştırmaktadır. Esnek kolun 0.25 kg yük taşıması halinde dahi, aynı K_p ve K_d kazanç değerleri için iki kollu robotun farklı ortamlardaki davranışının, yüksüz haldeki davranışından tolere edilebilir sınırlar içinde farklı olduğu görülmektedir. PD kontrol her iki ortamda da kolları salınımsız bir şekilde referans değerine ulaştırdığından, uç sapmasının önemsenmeyecek derecede az olduğu ve her iki halde de hareketin başlangıcında var olan titreşimin 1 saniye içinde sönümlendiği görülmektedir.

5. SONUÇLAR

Bu yüksek lisans tez çalışmasında karada ve sualtında çalışan robot kolları ele alınmıştır. Kara robotu için üç eklemli ilk ikisi katı üçüncü esnek olan robot kolları modellenmiştir. Sualtı robotu iki eklemli olup, ilki katı ikincisi esnek olarak modellenmiştir. Esnek robot kollarının yapısı, modellenemeyen dinamik yapıyı ve parametre değerlerinin kesin olarak bilinmemesini içerir. Dolayısıyla bu konu araştırmaya açık bir konudur. Son yıllarda esnek robot kollarının değişik ortamlarda kullanımına yönelik çalışmalar hız kazanmış, daha ekonomik, daha hafif olan ve hızlı hareket eden robot kollarının önemi artmıştır. Bu tez çalışması da bu konuda yapılan çalışmalardan biridir. Üç eklemli ilk ikisi katı, üçüncüsü esnek olan robot kolunun istenilen hareketleri yerine getirebilmesi için, dinamik yapısı modellenmiş ve kontrol algoritmaları uygulanmıştır. Ayrıca su altında çalışan ilki katı ikincisi esnek iki kollu robota etkiyen direnç kuvvetinin sistemin performansına etkisi incelenmiş ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

1. Sistemin matematiksel modeli kısmi diferansiyel denklemle ifade edilmektedir. Bu denklem diferansiyel özdeğer problemi yaklaşımı sonucu, dördüncü dereceden adi diferansiyel denklem haline dönüştürülerek, Runge-Kutta çözüm metodu uygulamalarına hazır hale getirilmiştir. Sonuç olarak sistemin dinamik denklemleri vektör-matris formunda ifade edildiğinden MATLAB harici herhangi bir programda da kolayca uygulanabilecek hale getirilmiştir.

2. MATLAB programı her ne kadar üç kollu robotun dinamik denklemlerini çözmek için hazırlanmış olsa da, Newton alt programı istenilen sayıda modun frekans değerini verecek şekilde düzenlenmiştir. Bu sayede her bir moda ait mod şekilleri elde edilebilmektedir.

3. Her iki ortamda çalışan robot kollarına P ve PD kontrol stratejileri uygulanmış olup, P kontrol etkisindeki sistemin referans değerine ulaşma süresinin PD kontrole oranla çok uzun olduğu gözlenmiştir.

4. Esnek kolun uç sapması incelendiğinde, P kontrolde esnek kolun salınımlarının PD kontroldekine nazaran çok fazla olduğu görülmektedir. Bu durum türevsel kontrolün sönümleyici etkisinden kaynaklanmaktadır.

5. Her iki kontrolde de esnek kolun uç noktasındaki salınımların frekansının artan yükle azaldığı görülmektedir.

6. P kontrol uygulandığında farklı yüklerin taşınması durumunda, kolların referans değerlerinden yüksüz duruma nazaran önemli ölçüde saptığı gözlenmektedir. PD kontrolde ise, aynı K_p ve K_d değerleri için çok daha geniş bir yük taşıma aralığında kolların referans değerlerine ulaştığı gözlenmektedir.

7. Su altı ortamında yatay düzlemde hareket eden robot kollarına ortamın uyguladığı drag direncinin modellemesi yapılmıştır. Kara ve sualtı ortamlarında çalışan aynı geometrik özelliklere sahip robot kollarının açık çevrim kontrolü esnasında, aynı değerde tork girişine karşı verdikleri cevaplar arasında büyük farklılık gözlenmektedir. Bunun nedeni motor torkunun önemli bir kısmının sualtı ortamında varolan sürtünme direncini yenmede harcanmasıdır.

6. ÖNERİLER

Bu yüksek lisans tezinin daha da ileriye götürülebilmesi için bir takım öneriler verilebilir.

1. Tez çalışması esnasında maddi olanaksızlıklardan ötürü bilgisayar ortamında tasarlanan ilk ikisi katı ve üçüncüsü esnek robot kolunun yapımı mümkün olmamıştır. Uygun laboratuar koşullarında robot kolunun imali, deneysel veriler elde etmeye olanak tanıyacaktır.

2. Su altında çalışan ilki katı ikincisi esnek iki kollu robotlara örnek teşkil edecek bir çalışma olan su altındaki esnek kollu robota etkiyen kuvvetler ve esnek kolun su altı ortamındaki davranışı, üç kollu model için geliştirilebilir.

3. Esnek robot kolunun davranışını ortaya koyan dinamik denklemler, benzetim programında üç kol için oluşturulmuştur. Bunlar üzerinde çalışmalar yapılarak, bu denklemler n-kollu esnek robotlar için geliştirilebilir.

4. Bu çalışmada yalnızca klasik kontrol metotları kullanılarak uç sapması üzerindeki etkileri gözlenmiştir. Daha gelişmiş kontrol teknikleri kullanarak sistemin tepkisini ölçmek mümkün olabilir.

7. KAYNAKLAR

1. Meirovitch, L., Fundamentals of Vibrations, McGraw - Hill International Edition Singapore, 2001.

2. Asada, H. ve Slotine, J.-J.E, Robot Analysis And Control, MIT, John Wiley & Sons, New York,1986.

3. Fu, K.S., Gonzalez, R.C. ve Lee, L.S.G., Robotics: Control Sensing, Vision and Intelligence, Mc- Graw Hill Inc., New York, 1987.

4. Morgül, Ö., "On The Boundary Control of a Flexible Robot Arm'', Proceedings of the IEEE International Workshop on Intelligent Motion Control, İstanbul, Turkey, August 1990.

5. Antonelli,G. Motion and Force Control of Underwater Vehicle-Manipulator Systems, Tesi di Dottorato di Ricerca in Ingegneria Elettronica e Informatica, Universita' Delgi Studi di Napoli Federico II, November 1999.

6. URL-1, http://www.c-scout.net/, Canadian Self Contained Off-The-Shelf Underwater TestBed, 21 Ekim 2003.

7. Cannon, R.H., E. Schmitz, " Initial Experiments on the End-Point Control of a Flexible One-Link Robot'', International Journal of Robotic Research, 3 (3), Fall1984, 62-75.

8. Nisar, R., Implementation of Direct Adaptive Control on Single- Link Flexible Arm, Master of Science, Texas A&M University, Kingsville, May 2000.

9. Moulin, H.C. ve Bayo, E., Accuracy of Discrete Models for the Solution of the Inverse Dynamics Problem for Flexible Arms, Feasible Trajectories, ASME J Dynamic System , Measurement Control, 119 (9), 1997, 396-404.

10. Theodore, R.J. ve Goshal, A., Modelling of Flexible-link Manipulators with Prismatic Joints, IEEE Trans Systems Man and Cybernetic B, 27 (2), 1997, 296-305.

11. Nisar, R., Implementation of Direct Adaptive Control On Single - Link Flexible Arm, Master of Science, College of Graduate Studies Texas A&M University, Kingsville, May 2000.

12. Yuh, J. ve Young, T., Dynamic Modelling of an Axially Moving Beam in Rotation: Simulation and Experiment, Journal of Dynamic Systems Measurement and Control, 113 (34), March 1991, 34-40.

13. Lucibello, P., Panzieri, S. ve Ulivi, G., Repositioning Control of Two-link Flexible Arm by Learning, Automatica, 33 (4), 1997, 579-590.

14. Yohikawa, T. ve Hosoda, K., Modelling and Control of A Three Degree of Freedom Manipulator with Two Flexible Links, Proceedings of the 1990 IEEE International Conference on Decision and Control, December 1990, Honolulu, Hawaii, 2532-2537.

15. Somolinos, J.A., Feliu, V. ve Sanchez,L., Design, Dynamic Modelling and Experimental Validation of a New Three-Degree-of-Freedom Flexible Manipulator, Mechatronics, 12, 2002, 919-948.

16. Sakawa, Y., Matsuno, F. ve Fukushima, S., Modelling and Feedback Control of A Flexible Arm, Int. Journal Robotics, 2, 1985, 435-456.

17. Gören, B. ve Erim, S., Değişken Kesitli Ankastre Timeshenko Kirişin Statik Stabilite Analizi, Dokuz Eylül Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Fen ve Mühendislik Dergisi, Cilt: 2 Sayı: 2, Mayıs 2000, 75-86.

18. Timoshenko, S., Young, D.H. ve Weawer, W., Vibration Problems in Engineering", Wiley, New York, 1974.

19. Wang, P.K.C. ve Wei, J.D., Vibrations in A Moving Flexible Robot Arm, Journal of Sound And Vibration , 116(1),1987, 149-160.

20. İftar, A., Robust Controller Design for Flexible Robot Manipulators: An Optimal Output Feedback Controller Design Approach, In Proceedings of 3rd IEEE Conference on Control Applications, August 1994, Glasgow, Scotland, 1323-1328.

21. Doğan, A., İki Eklemli Esnek Bir Robot Kolunun Modellenmesi ve Kontrolü, Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, 1997.

22. Subbuhdi, B. ve Morris, A.S., Dynamic modelling ,simulation and control of a manipulator with flexible links and joints, Robotic and Autonomous Systems, 41, 2002, 257-270.

23. Sakawa, Y., Matsuno, F. ve Asano, T. Modelling and Quasi-Static Hybrid Position Force of Constrained Planar Two-Link Flexible Manipulators, IEEE Transactions on Robotics and Automation ,10,(3), June1994.

24. Chen, W., Dynamic Modelling of Multi-link Flexible RoboticManipulators, Computers and Structures, 79, 2001, 183-195.

25. Farbrother, H.N.R. ve Stacey, B.A., Aspects of Remotely Operated Vehicle Control - A Review, Underwater Technology, 19 (1), 1993, 24-36.

26. Muggeridge, K.J. ve Hinchey, M.J., Underwater Robot Control, Faculty of Engineering and Applied Science, Memorial University of Newfoundland, St. John's, NF, Canada, August 1991, 5.

27. Rivera, C. ve Hinchey, M.J., Hydrodinamics of Simple Robot Arm/Body Configurations, Ocean Engineering Research Centre, July 1992.

28. Sarpkaya, T. ve Isaacson, M., Mechanics of Wave Forces on Offshore Structures, Van Nostrand Reinhold co.,1981, New York, USA.

29. Liceaga-Castro, E., Hong, Q. ve Liceaga-Castro, J., Modelling and Control of A Marine Robot Arm, IEEE Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control, 11-13 December,1991, Brighton, England, 704-705.

30. Fukuda, T. ve Hara, F., Motion Control of Underwater Robotic Manipulator, "First Report, Adaptive Compensation Method of One Directional Fluid Force", Department of Engineering, Science University of Tokyo, Tokyo, Japan, 1989, 2702-2706.

31. Lapierre, L., Fraisse, P. ve Dauchez, P., Position /Force Control of an Underwater Mobile Manipulator, Journal of Robotic Systems 20(12), December, 2003, 707-722.

32. Kato, N. ve Lane,D.M., Co-ordinated Control of Multiple Manipulators in Underwater Robots, IEEE Int conference on Robotics and Automation Minneapolis, Minnesota, April, 1996.

33. Rivera,C., Hydrodinamic Loads on Underwater Robot Arms , Master of Engineering Faculty of Engineering and Applied Sciences Memorial University of Newfoundland, March 1995.

34. Wang, H.H., Rock, S.M. ve Lee, M.J., "OTTER: The Design and Development of an Intelligent Underwater Robot." Autonomous Robots 3, 1996, 297-320.

35. Lee, M.J., McLain, T.W. ve Rocky, S.M., Experiments in the Coordination of Underwate Manipulator and Vehicle Control, In Proceedings of San Diego, October,1995.

36. Lee, M., Summary of MBARI / Stanford ARL Joint Underwater Robotics Research Program, Video Proceedings 8th International Symposium of Unmanned Untethered Submersible Technology, University of New Hampshire, September 1993.

37. Antonelli,G., Caccavale, F., Chiaverini, S. ve Fusco, G., A Novel Adaptive Control Law for Underwater Vehicles, IEEE Trans. on Control System Technology, 11 (2), 2003, 221-232.

38. Antonelli, G., Chiaverini, S., Sarkar, N. ve West, M., Adaptive Control of An Autonomous Underwater Vehicle: Experimental Results on ODIN, IEEE Transactions on Control Systems Technology, 9 (5),2001, 756-765.

39. Antonelli, G., Underwater Robots Motion and Force Control of Vehicle-manipulator Systems, Springer Tracts in Advanced Robotics, Springer-Verlag, Heidelberg, D, 2003.

40. Gürgöze,M., İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yayın No:1, 1984.

41. Mathews, J. H. ve Fink K, D., Numerical methods using MATLAB 3rd ed.. Prentice Hall, USA, 1999.

42. Arifoğlu, U.ve Kubat, C., MATLAB ve Mühendislik Uygulamaları, ALFA Yayınları, İstanbul, 2003.

43. Chapra, S.C. ve Canale, R.P., Numerical Methods for Engineers, Third Edition McGraw-Hill, Singapore, 1998.

44. Palm III, W. J., Modelling,Analysis and Control of Dynamic Systems , John Wiley & Sons, Inc., New York, USA,1999.

45. Lewis, F.L.; et. al. " Robotics" Mechanical Engineering Handbook Ed. Frank Kreith, Boca Raton, CRC Press LLC, 1999.

46. Fox, W.,R. ve Mc Donald, T., A., Introduction to Fluid Mechanics fourth Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York,USA,1994.

47. Baumeister, T., Avallone, A., Baumeister III A. ve Marks, T., Standart Handbook for Mechanical Engineers, Eight Edition, McGraw - Hill , New York, USA, 1978.

48. White, M., F., Türkçesi : Kırkköprü, K. ve Ayder, E., Akışkanlar Mekaniği, Literatür Yayınları, İstanbul, 0cak 2004.

49. Munson, R.,B., Young, F. D. ve Okiishi, H., T., Fundamentals of Fluid Mechanics, Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., Canada, 1994.

50. URL-2, Pitmann- Electric Motors, http:/www.pitmannet.com, 20 Kasım 2003.

8. EKLER

EK 1. Runge- Kutta formüllerini kullanarak katı-katı-esnek robot kolunun benzetimini yapan program

KKE_kol.m

```
%************ Esnek Kollu Robotun Benzetim Programi ************
% Kollarin boyutlari (d * h * L) (kalinlik * genislik * uzunluk)
%************ Tezde her bir kolun kalinligi b harfi ile temsil edilmektedir.
%d1:  1 nolu kati kolun kalinligi,  (m)
%d2:  2 nolu kati kolun kalinligi,  (m)
%d3:  Esnek kolun kalinligi,        (m)
%h1:  1 nolu kati kolun genisligi,  (m)
%h2:  2 nolu kati kolun genisligi,  (m)
%h3:  Esnek kolun genisligi,        (m)
%L1:  1 nolu kati kolun uzunlugu,   (m)
%L2:  2 nolu kati kolun uzunlugu,   (m)
%L3:  Esnek kolun uzunlugu,         (m)
%ro1: Kati parcanin birim uzunluk basina kutlesi,  (kg/m)
%ro2: Kati parcanin birim uzunluk basina kutlesi,  (kg/m)
%ro3: Esnek parcanin birim uzunluk basina kutlesi, (kg/m)
%M1:  1 nolu Kati kolun kütlesi,            (kg)
%M2:  2 nolu Kati kolun kütlesi,            (kg)
%M3:  Esnek Kolun kutlesi,                  (kg)
%Ma:  2. eklemdeki motorun kutle degeri,    (kg)
%Mb:  3. eklemdeki motorun kutle degeri,    (kg)
%Myuk:Esnek parcanin ucundaki yükün degeri,  (kg)
%E:   Esnek kolun Young esneklik modulu,    (N/m^2)
%Ia:  Esnek kolun kesit atalet momenti,     (m^4)
%Ih1: 1. eklemi süren motorun eylemsizlik momenti,  (kg*m^2)
%Ih2: 2. eklemi süren motorun eylemsizlik momenti,  (kg*m^2)
%Ih3: 3. eklemi süren motorun eylemsizlik momenti,  (kg*m^2)
%%%%%% Tezde yagli sürtünme katsayilari beta ile temsil edilmektedir.
%b1:  1. eklemin yagli surtunme katsayisi,   (Nms/rad)
%b2:  2. eklemin yagli surtunme katsayisi,   (Nms/rad)
%b3:  3. eklemin yagli sürtünme katsayisi,   (Nms/rad)

format long e
clear all
clc

% 1. Kati Kol    2. Kati Kol      Esnek Kol
                                  E  =7e+10;
 d1  =0.01;      d2  =0.01;       d3  =0.003;
 h1  =0.037;     h2  =0.037;      h3  =0.037;
 L1  =0.6;       L2  =0.4;        L3  =0.6;
```

```
ro1 =1;         ro2 =1;          ro3 =0.5;
b1  =0.1;       b2  =0.1;        b3  =0.01;
                Ma  =0.25;       Mb  =0.25;

t0=0;  % Benzetimin baslama zamani
n=2;  %  Mod sayisi;

%===== Benzetim degiskenleri =====================

kol=2;   % kol=2 , 2 kollu robot (kati kol1 + Esnek kol), (Kati kol 2 yok)
         % kol=3 , 3 kollu robot (kati kol1 + Kati kol2 + Esnek kol)
kz=2;    % kz=0 adim fonksiyonu, kz=1 P kontrol, kz=2 PD kontrol
drg=1;   % drg=0 kara robotu,  drg=1 sualti robotu
T=20;    % input('Simulasyon suresini giriniz (sn)..? ');
Myuk=0.25;   % input('Esnek kolun ucundaki yükün degerini giriniz (kg)..? ');

%=== Kollari süren motorlarin eylemsizlik momentleri ===

% Bu parametreler motorlarin kataloglarindan seçilmistir
Ih1= 9.8e-7;     Ih2= 9.8e-7;       Ih3= 9.8e-7;

%==== Hesaplanan kol parametreleri ====
%
%Kollarin agirliklari, (kütlesel) ve esnek kolun kesit atalet momenti

M1=ro1*L1;        M2=ro2*L2;          M3=ro3*L3;

%Ih1=(M1*L1^2)/3;  Ih2=(M2*L2^2)/3;    Ih3=(M3*L3^2)/3;

Ia=(0.037)*(0.003)^3/12; % Ia=(h3)*(d3)^3/12

if kol==2,
  L2=0; ro2=0; b2=0; Ma=0; M2=0; Ih2=0;
end


if kol<2 | kol>3 | kz<0 | kz>2 | drg<0  | drg>1
  disp('Yanlis parametre girdiniz')
  break
end

if kol==3 & drg==1
  disp('Bu robot sadece 2 kol için su altinda çalistirilacaktir')
  break
end

%=== Sualtinda çalisan robot kollari için gerekli parametreler =====
```

```
ro    =1000;   % suyun yogunlugu (kg/m3)
cdrag =1.44;   %  Drag katsayisi (L3/h3 oranina bagli olarak kaynak
               %  [46,49]'dan 1.44 olarak seçilmistir.)
drag=[drg;ro;h1;h3;cdrag];

%.............. Kontrol girdileri ...............

%--- Oranti Kontrol Kazanç Katsayilari

if kol==2,
  kp2=1;
  kp=[kp1;kp2];
else
  kp1=.1;
  kp2=1;
  kp3=1;
  kp=[kp1;kp2;kp3];
end

%--- Türevsel Kontrol Kazanç Katsayilari

if kol==2,
  kd1=2;
  kd2=1;
  kd=[kd1;kd2];
else
  kd1=2.1;
  kd2=1.3;
  kd3=1;
  kd=[kd1;kd2;kd3];
end

%**** Referans sinyaller
if kol==2,
  tetarr1=40;
  fiirr=40;
  tetar1=tetarr1*pi/180;
  fiir=fiirr*pi/180;
  tetr=[tetar1;fiir];
else
  tetarr1=40;
  tetarr2=40;
  fiirr=40;
  tetar1=tetarr1*pi/180;
  tetar2=tetarr2*pi/180;
  fiir=fiirr*pi/180;
```

```
  tetr=[tetar1;tetar2;fiir];
end


%*****************************************************************
%***** NEWTON_RAPHSON yontemi ile frekans denkleminin cozumu ******
%*****************************************************************
k= zeros(n,1); eigen0=1.5-pi;

for i=1:n,
  eigen0=eigen0+pi;
   [eigen0]=KKE_newton(M3,Myuk,eigen0,i);
   k(i)=eigen0;
end
k=k/L3;

%*****************************************************************
%****************** Esnek Kolun Katsayilari *********************
%*****************************************************************

for i=1:n
  eigen0=k(i)*L3 ;
  lam(i)=(E*Ia/ro3)*k(i)^4 ;
  hi(i)=(cosh(eigen0)+cos(eigen0))/(sinh(eigen0)+sin(eigen0)) ;
  qi(1,i)=2*(cosh(eigen0)*sin(eigen0)-sinh(eigen0)*cos(eigen0));
  qi(1,i)=qi(1,i)/(sinh(eigen0)+sin(eigen0)) ;
  gama1(i,1)=(2/k(i)^2)-(2*eigen0*(1+cosh(eigen0)*cos(eigen0)))/ ...
          (k(i)^2*(sinh(eigen0)+sin(eigen0)));
  gama2(i,1)=2*(cosh(eigen0)+cos(eigen0)-cosh(eigen0)*cos(eigen0)-1)/...
          (k(i)*(sinh(eigen0)+sin(eigen0)));
  alfa1(1,i)= ro3*gama1(i,1)+ Myuk*L3*qi(1,i);
  alfa2(1,i)= ro3*gama2(i,1)+ Myuk*qi(1,i);

  for j=1:n;
   if i= =j

      A(i,j)= L3+(1/k(i))*(2*hi(i)*sin(eigen0)*sinh(eigen0)-...
          (hi(i)^2+1)*sin(eigen0)*cosh(eigen0)+(hi(i)^2-1)*...
          cos(eigen0)*sinh(eigen0)+(hi(i)^2+1)*sinh(2*eigen0)/4+...
          (1-hi(i)^2)*sin(2*eigen0)/4+hi(i)*cos(2*eigen0)/2-...
          hi(i)*cosh(2*eigen0)/2);
   else
          yy=k(j)*L3 ;
          qj(j,1)=2*(cosh(yy)*sin(yy)-...
          sinh(yy)*cos(yy))/(sinh(yy)+sin(yy));
          A(i,j)=-Myuk*qi(1,i)*qj(j,1)/ro3;
   end
```

```
  end
end
lamda= diag(lam);


%*****************************************************************
%*********************** Sistemin Benzetimi ***********************
%*****************************************************************
%******* Programda kullanilan bazi parametreler ************

kt=0;     % kt toplam iterasyon sayisi
pt=10000; % Her pt iterasyonda program ekrana t süresini yazdirir
if kol==2  %........................................
  x0 = zeros(1,4+2*n); % 2 kollu robot için sistemin baslangic kosullari
else       %........................................
  x0 = zeros(1,6+2*n); % 3 kollu robot için sistemin baslangic kosullari
end        %........................................

disp('Program çalisiyor-Lütfen bekleyiniz')

%.............................................................................................
[t,x,tork,kt,md]=KKE_RK4(t0,T,x0,Ih1,Ih2,Ih3,b1,b2,b3,M1,M2,M3,Ma, ...
                 Mb,Myuk,L1,L2,L3,A,n,lamda,gama1,gama2,alfa1,alfa2, ...
                 tetr,kp,kd,kz,kt,pt,drag,kol);
%.............................................................................................
disp('grafikler çiziliyor')

xn(1)=t0; xn(2)=T;
yn(1)=tetarr1; yn(2)=tetarr1;
%figure(01),plot(xn,yn),hold on;
figure(1),subplot(221),plot(xn,yn),hold on;
plot(t,x(:,1)*180/pi,'r') % 1. eklem acisini ciz
title('1.eklem açisi-teta1'),xlabel('t-sn'),ylabel('açi-derece');
hold off

if kol==2, %........................................
  yn(1)=fiirr; yn(2)=fiirr;
  subplot(222),plot(xn,yn),hold on;
  plot(t,x(:,2)*180/pi,'r') % 3. eklem acisini ciz
  title('2.eklem açisi-fii'),xlabel('t-sn'),ylabel('açi-derece');
  hold off

  az1=qi(1)*x(:,3);
  az2=qi(2)*x(:,4);
  azz=az1+az2;
  yn(1)=0; yn(2)=0;
```

```
  subplot(223),plot(xn,yn),hold on;
  plot(t,azz,'r') % Uc sapmasini ciz
  xlabel('t-sn'),ylabel('uç sapmasi-mm');
  hold off

else      %.......................................

  yn(1)=tetarr2; yn(2)=tetarr2;
  subplot(222),plot(xn,yn),hold on;
  plot(t,x(:,2)*180/pi,'r') % 2. eklem acisini ciz
  title('2.eklem açisi-teta2'),xlabel('t-sn'),ylabel('açi-derece');
  hold off

  yn(1)=fiirr; yn(2)=fiirr;
  subplot(223),plot(xn,yn),hold on;
  plot(t,x(:,3)*180/pi,'r') % 3. eklem acisini ciz
  title('3.eklem açisi-fii'),xlabel('t-sn'),ylabel('açi-derece');
  hold off

  uc_mod1=qi(1)*x(:,4);
  uc_mod2=qi(2)*x(:,5);
  ucsapmasi=uc_mod1+uc_mod2;
  yn(1)=0; yn(2)=0;
  subplot(224),plot(xn,yn),hold on;
  plot(t,ucsapmasi,'r') % Uc sapmasini ciz
  xlabel('t-sn'),ylabel('uç sapmasi-mm');
  hold off

end
if kol==2,

  figure(2),subplot(221),plot(t,tork(:,1),'r') % Birinci ekleme uygulanacak olan torku ciz
  title('1.ekleme uygulanan tork-T1'),xlabel('t-sn'),ylabel('tork-Nm');
  subplot(222),plot(t,tork(:,2),'r') % Esnek ekleme uygulanacak olan torku ciz
  title('2.ekleme uygulanan tork-T2'),xlabel('t-sn'),ylabel('tork-Nm');

  figure(3),subplot(221),plot(t,md(:,1),'r') % Birinci ekleme uygulanacak olan drag
momenti
  title('1.ekleme gelen DRAG torku-Md1'),xlabel('t-sn'),ylabel('tork-Nm');
  subplot(222),plot(t,md(:,2),'r') % Esnek ekleme uygulanacak olan drag momenti
  title('2.ekleme gelen DRAG torku-Md2'),xlabel('t-sn'),ylabel('tork-Nm');

else

  figure(2),subplot(221),plot(t,tork(:,1),'r') % Birinci ekleme uygulanacak olan torku ciz
  title('1.ekleme uygulanan tork-T1'),xlabel('t-sn'),ylabel('tork-Nm');
  subplot(222),plot(t,tork(:,2),'r') % Ikinci ekleme uygulanacak olan torku ciz
```

```
  title('2.ekleme uygulanan tork-T2'),xlabel('t-sn'),ylabel('tork-Nm');
  subplot(223),plot(t,tork(:,3),'r') % Esnek ekleme uygulanacak olan torku ciz
  title('3.ekleme uygulanan tork-T3'),xlabel('t-sn'),ylabel('tork-Nm');

end

disp('Program sonlandi-Toplam iterasyon sayisi kt=')
kt
```

KKE_model.m

```
function [xdot,tork,md]=KKE_Model(t,x,Ih1,Ih2,Ih3,b1,b2,b3,M1,...
                        M2,M3,Ma,Mb,Myuk,L1,L2,L3,A, ...
                        n,lamda,gama1,gama2,alfa1,...
                        alfa2,tetr,kp,kd,kz,drag,kol)

nn=zeros(n,1); TEMP=nn; etadd=nn;

% drag=[drg;ro;d1;d3;cdrag];
drg=drag(1);
ro=drag(2);
d1=drag(3);
d3=drag(4);
cdrag=drag(5);

if kol==2
   %**** x= (teta1,fii,eta,teta1d,fiid,etd)^T,
   teta1= x(1); fii= x(2); eta=x(3:2+n);
   teta1d= x(3+n); fiid= x(4+n);etad=x(5+n:4+2*n);

   teta2=0; teta2d=0; tetar2=0;

   tetar1=tetr(1);
   fiir=tetr(2);

   kp1=kp(1);
   kp2=kp(2);

   kd1=kd(1);
   kd2=kd(2);

   md1=0; md2=0; %Drag kuvvetlerinin olusturdugu momentler
   md=[0;0];

else
   %**** x= (teta1,teta2,fii,eta,teta1d,teta2d,fiid,etd)^T,
```

```
  teta1= x(1); teta2= x(2);  fii= x(3); eta=x(4:3+n);
  teta1d= x(4+n); teta2d=x(5+n); fiid= x(6+n);etad=x(7+n:6+2*n);

  tetar1=tetr(1);
  tetar2=tetr(2);
  fiir=tetr(3);

  kp1=kp(1);
  kp2=kp(2);
  kp3=kp(3);

  kd1=kd(1);
  kd2=kd(2);
  kd3=kd(3);

  md=[0;0;0];

end

if drg==1

 der=180/pi;  % x açisi radyan ise x*der derece verir

 xb=L1*cos(teta1)+L3*cos((teta1+fii));
 yb=L1*sin(teta1)+L3*sin((teta1+fii));
 Lbo=sqrt(xb^2+yb^2);

 Vao=L1*teta1d; % Birinci kol O noktasi etrafinda sadece teta1d
             % açisal hiziyla döndürüldügünde birinci kolun A
             % ucunda olusan çizgisel hiz. Vao vektörü birinci
             % kola A noktasinda diktir.

 Vba=L3*fiid;   % Esnek kol A noktasi etrafinda sadece fiid açisal
             % hiziyla döndürüldügünde esnek kolun B ucunda
             % olusan çizgisel hiz. Vba vektörü esnek kola B
             % noktasinda diktir.

 Vbo=Lbo*teta1d;% Esnek kol sabitlenip birinci kol O noktasi
             % etrafinda sadece teta1d açisal hiziyla
             % döndürüldügünde esnek kolun B ucunda olusan
             % çizgisel hiz. Vbo vektörü OB dogrusuna B
             % noktasinda diktir.

 Vao=abs(Vao); Vba=abs(Vba); Vbo=abs(Vbo);

 [md1,md2]=KKE_drag(Vao,Vba,Vbo,cdrag,L1,L3,Lbo,d1,d3,ro);
 md=[md1;md2];
```

```
end

if (kz==0)
  %**** Acik dongu sistemin benzetimi icin uretilen kontrol girdisi,
  if kol==2,
    if (t<=1),
      tork1=.1;
        tork2=.03;
    else
      tork1=0;
        tork2=0;
    end
   else
    if (t<=.5),
      tork1=.3;
        tork2=.3;
      tork3=.1;
    else,
      tork1=0;
        tork2=0;
      tork3=0;
    end
  end
elseif (kz==1)
  %**** (P) Oranti Kontrol ****

  if kol==2,
    tork1= kp1*(tetar1-teta1);
    tork2= kp2*(fiir-fii);
  else
    tork1= kp1*(tetar1-teta1);
    tork2= kp2*(tetar2-teta2);
    tork3= kp3*(fiir-fii);
  end
elseif (kz==2)

%**** (PD) Türevsel Kontrol ****

  if kol==2,
    tork1= kp1*(tetar1-teta1)-kd1*teta1d;
    tork2= kp2*(fiir-fii)- kd2*fiid;
  else      tork1= kp1*(tetar1-teta1)-kd1*teta1d;
    tork2= kp2*(tetar2-teta2)- kd2*teta2d;
    tork3= kp3*(fiir-fii)- kd3*fiid;
  end
end
```

```
if kol==2,
  tork3=tork2;
  tork2=0;
  tork=[tork1;tork3];
else        tork=[tork1;tork2;tork3];
  md=[0;0;0];
end
%****** kontrol burada biter ******

TEMP1=alfa2*eta;
TEMP2=alfa2*etad;



m11= Ih1+Ih2+Ih3+M1*L1^2/3+Ma*L1^2+M2*(L1^2+L2^2/3+...
    L1*L2*cos(teta2))+M3*(L1^2+L2^2+L3^2/3+2*L1*L2*...
    cos(teta2)+L1*L3*cos(teta2+fii)+L2*L3*...
    cos(fii))+Mb*(L1^2+L2^2+2*L1*L2*cos(teta2))+...
    Myuk*(L1^2+L2^2+L3^2+2*L1*L2*cos(teta2)+2*L1*L3*...
    cos(teta2+fii)+2*L2*L3*cos(fii))-...
    2*(L1*sin(teta2+fii)+L2*sin(fii))*TEMP1;

m12= Ih2+Ih3+M2*(L2^2/3+L1*L2/2*cos(teta2))+M3*(L2^2+...
    L3^2/3+L1*L2*cos(teta2)+L1*L3/2*cos(teta2+fii)+...
    L2*L3*cos(fii))+Mb*(L2^2+L1*L2*cos(teta2))+...
    Myuk*(L2^2+L3^2+L1*L2*cos(teta2)+L1*L3*...
    cos(teta2+fii)+2*L2*L3*cos(fii))-...
    (L1*sin(teta2+fii)+2*L2*sin(fii))*TEMP1;

m13= Ih3+M3*(L3^2/3+L1*L3/2*cos(teta2+fii)+L2*L3/2*...
    cos(fii))+Myuk*(L3^2+L1*L3*cos(teta2+fii)+...
    L2*L3*cos(fii))-(L1*sin(teta2+fii)+...
    L2*sin(fii))*TEMP1;

m21= m12;

m22= Ih2+Ih3+M2*L2^2/3+Mb*L2^2+M3*(L2^2+L3^2/3+L2*L3*...
    cos(fii))+Myuk*(L2^2+L3^2+2*L2*L3*cos(fii))-...
    2*L2*sin(fii)*TEMP1;

m23= Ih3+M3*(L3^2/3+L2*L3/2*cos(fii))+...
    Myuk*(L3^2+L2*L3*cos(fii))-L2*sin(fii)*TEMP1;

m31= Ih3+M3*(L3^2/3+L1*L3/2*cos(teta2+fii)+L2*L3/2*...
    cos(fii))+Myuk*(L3^2+L1*L3*cos(teta2+fii)+...
    L2*L3*cos(fii))-(L1*sin(teta2+fii)+L2*...
    sin(fii))*TEMP1;
```

```
m32= Ih3+M3*(L3^2/3+L2*L3/2*cos(fii))+...
   Myuk*(L3^2+L2*L3*cos(fii))-L2*sin(fii)*TEMP1;

m33= Ih3+M3*L3^2/3+Myuk*L3^2 ;

FF1= b1*teta1d-(M2/2+M3+Mb+Myuk)*L1*L2*teta2d*(2*teta1d+...
   teta2d)*sin(teta2)-(M3/2+Myuk)*L2*L3*fiid*...
   (2*teta1d+2*teta2d+fiid)*sin(fii)-(M3/2+Myuk)*...
   L1*L3*(teta2d+fiid)*(2*teta1d+teta2d+fiid)*...
   sin(teta2+fii)-(L1*(teta2d+fiid)*(2*teta1d+...
   teta2d+fiid)*cos(teta2+fii)+L2*fiid*...
   (2*teta1d+2*teta2d+fiid)*cos(fii))*TEMP1-...
   (2*L1*(teta1d+teta2d+fiid)*sin(teta2+fii)+...
   2*L2*(teta1d+teta2d+fiid)*sin(fii))*TEMP2;
FF11   = tork1-FF1;

FF2= b2*teta2d+(M2/2+M3+Mb+Myuk)*L1*L2*teta1d^2* ...
   sin(teta2)+(M3/2+Myuk)*L1*L3*teta1d^2*...
   sin(teta2+fii)-(M3/2+Myuk)*L2*L3*(2*teta1d+...
   2*teta2d+fiid)*fiid*sin(fii)+(L1*teta1d^2*...
   cos(teta2+fii)-L2*fiid*(2*teta1d+2*teta2d+...
   fiid)*cos(fii))*TEMP1-(2*L2*(teta1d+teta2d+...
   fiid)*sin(fii))*TEMP2;
FF21   = tork2-FF2;

FF3= b3*fiid+(M3/2+Myuk)*L1*L3*teta1d^2*sin(teta2+...
   fii)+(M3/2+Myuk)*L2*L3*(teta1d+teta2d)^2*...
   sin(fii)+(L1*teta1d^2*cos(teta2+fii)+L2*...
   (teta1d+teta2d)^2*cos(fii))*TEMP1;
FF31   = tork3-FF3;

if drg==1,

  FF11   = FF11-sign(teta1d)*md1;
  FF31   = FF31-sign(fiid)*md2;
end

Tet=A*lamda;
TEMP=Tet*eta;

%  m(1,4) ve m(1,5)
nn=alfa1+(L1*cos(teta2+fii)+L2*cos(fii))*alfa2;
m14=nn(1);
m15=nn(2);
%  m(2,4) ve m(2,5)
nn=alfa1+L2*cos(fii)*alfa2;
```

```
m24=nn(1);
m25=nn(2);
%    m(3,4) ve m(3,5)
nn=alfa1;
m34=nn(1);
m35=nn(2);
%    m(4,1) ve m(5,1)
nn=gama1+(L1*cos(teta2+fii)+L2*cos(fii))*gama2;
m41=nn(1);
m51=nn(2);
%   m(4,2) ve m(5,2)
nn=gama1+L2*cos(fii)*gama2;
m42=nn(1);
m52=nn(2);
%   m(4,3) ve m(5,3)
nn=gama1;
m43=nn(1);
m53=nn(2);
%    m(4,4), m(4,5) ve m(5,4), m(5,5)
m44=A(1,1);
m45=A(1,2);
m54=A(2,1);
m55=A(2,2);

%    FF(4,1) ve FF(5,1)
for i=1:n
  nn(i,1)=-(L1*teta1d^2*sin(teta2+fii)+L2*(teta1d+...
         teta2d)^2*sin(fii))*gama2(i,1)-TEMP(i,1);
end
FF41=nn(1);
FF51=nn(2);

if kol==2,
  N=[m11 m13 m14 m15 ;...
    m31 m33 m34 m35 ;...
    m41 m43 m44 m45 ;...
    m51 m53 m54 m55];
  F=[FF11;FF31;FF41;FF51];
  XZ=inv(N)*F;
  teta1dd =XZ(1);
  fiidd   =XZ(2);
  etadd(1)=XZ(3);
  etadd(2)=XZ(4);
  xdot= [teta1d;fiid;etad;teta1dd;fiidd;etadd];
else
  N=[m11 m12 m13 m14 m15 ;...
    m21 m22 m23 m24 m25 ;...
```

```
    m31 m32 m33 m34 m35 ;...
    m41 m42 m43 m44 m45 ;...
    m51 m52 m53 m54 m55];
  F=[FF11;FF21;FF31;FF41;FF51];
  XZ=inv(N)*F;
  teta1dd =XZ(1);
  teta2dd =XZ(2);
  fiidd   =XZ(3);
  etadd(1)=XZ(4);
  etadd(2)=XZ(5);
  xdot= [teta1d;teta2d;fiid;etad;teta1dd;teta2dd;fiidd;etadd];
end
```

KKE_RK4.m

```
function [tout,yout,torkout,kt,mdout]= KKE_RK4(t0,tfinal,y0,Ih1,Ih2,Ih3,...
                                        b1,b2,b3,M1,M2,M3,Ma,Mb,Myuk,L1,L2,L3, ...
                                        A,n,lamda,gama1,gama2,alfa1,alfa2,tetr,...
                                        kp,kd,kz,kt,pt,drag,kol)

%**** Katsayilar ve ilk degerleri
ktt    = 1;
dikkat = 0;
pow    = 1/3;
tol    = 1.e-6;
t      = t0;
kk     = 1;
hmax   = (tfinal - t)/32;
h      = hmax/32;
y      = y0(:);
boyut  = 100;
tout   = zeros(boyut,1);
yout   = zeros(boyut,length(y));
torkout= zeros(boyut,kol);
tout(kk)   = t;
yout(kk,:) = y.';

drg=drag(1);
mdout=zeros(boyut,kol);

% ** ** ** ** ** **  Ana Döngü Baslangici  ** ** ** ** ** **

while (t < tfinal) % & (t + h > t)
  if t + h > tfinal,
  h = tfinal - t;
```

```
end

%**** 4 adim Runge-Kutta hesabi

[s1,inp,md]=KKE_Model(t,y,Ih1,Ih2,Ih3,b1,b2,b3,M1,M2,M3,Ma,Mb,Myuk,L1,L2,L3,...
            A,n,lamda,gama1,gama2,alfa1,alfa2,tetr,kp,kd,kz,drag,kol);
s1 = s1(:);

[s2,tork,md]=KKE_Model(t+h/2,y+h*s1/2,Ih1,Ih2,Ih3,b1,b2,b3,M1,M2,M3,Ma,Mb,Myuk
                       ,L1,L2,L3,
            A,n,lamda,gama1,gama2,alfa1,alfa2,tetr,kp,kd,kz,drag,kol);
s2 = s2(:);

[s3,tork,md]=KKE_Model(t+h/2,y+h*s2/2,Ih1,Ih2,Ih3,b1,b2,b3,M1,M2,M3,Ma,Mb,Myuk
,L1,L2,L3,...
            A,n,lamda,gama1,gama2,alfa1,alfa2,tetr,kp,kd,kz,drag,kol);
s3 = s3(:);

[s4,tork,md]=KKE_Model(t+h,y+h*s3,Ih1,Ih2,Ih3,b1,b2,b3,M1,M2,M3,Ma,Mb,Myuk,L1,
L2,L3,...
            A,n,lamda,gama1,gama2,alfa1,alfa2,tetr,kp,kd,kz,drag,kol);
s4 = s4(:);


% **** Hata hesabi ve kabul edilebilir hata degeri ****

delta=norm(h*(2*s2-s3-s4)/6,'inf');
tau = tol*max(norm(y,'inf'),1.0);

% **** Hata uygun ise y vektörünün hesaplanmasi ****

if delta <= tau,
  t = t + h;
  y = y + h*(s1 + 2*s2 + 2*s3 + s4)/6;
  kk = kk+1;
  if kk > length(torkout),
    tout    = [tout; zeros(boyut,1)];
    yout    = [yout; zeros(boyut,length(y))];
    torkout = [torkout; zeros(boyut,kol)];
    mdout = [mdout; zeros(boyut,kol)];
  end
  tout(kk)      = t;
  yout(kk,:)    = y.';
  torkout(kk,:) = inp.';
  mdout(kk,:)= md.';
end
```

```
 %**** adimin belirlenmesi*****
 if delta ~= 0.0
  h = min(hmax, 0.9*h*(tau/delta)^pow);
 end

  kt=kt+1;
  ktu=kt/pt;
  if ktu==1,
    ktt=ktt+1;
    t
    pt=10000*ktt % Her pt iterasyonda program t süresini yazdirir
    if t==tson
      dikkat=dikkat+1
    end

  end

  tson=t;
  if dikkat==3
    t=tfinal
    disp('Muhtemel Tekil durum mevcuttur.')
  end
end

% ** ** ** ** ** **  Ana döngü burada biter  ** ** ** ** ** **

tout    = tout(1:kk);
yout    = yout(1:kk,:);
torkout = torkout(1:kk,:);
mdout   = mdout(1:kk,:);

%save data1.dat yout /ascii;
```

KKE_newton.m

```
function [eigen1]=KKE_newton(M3,Myuk,eigen0,i)
%Input   - f esas fonksiyon
%        - df esas fonksiyonun türevi
%        - x ,frk in sifira yakinsayan ilk degeri
%        -tol x için tolerance degeri
%        -epsilon y fonksiyonun tolerans degeri
%        -i max iterasyon sayisi
%Output  -x0 0'a  Newton Raphson yakinsamasi
%        -err x0 a atanan hata degeri
%        -i iterasyon sayisi
%        - y f(x0) fonksiyonunun degeri
```

```
tol=1e-7;
epsilon=1e-7;
eigen1=eigen0-feval('KKE_f',eigen0,M3,Myuk)/feval('KKE_df',eigen0,M3,Myuk);
err=abs(eigen1-eigen0);
relerr=2*err/abs((eigen1)+tol);
y=feval('KKE_f',eigen0,M3,Myuk);
eigen0=eigen1;

for j=1:20;
  if(err<tol)|(relerr<tol)|(abs(y)<epsilon),
     break
  else,
    eigen1=eigen0-feval('KKE_f',eigen0,M3,Myuk)/feval('KKE_df',eigen0,M3,Myuk);
    err=abs(eigen1-eigen0);
    relerr=2*err/abs((eigen1)+tol);
    y=feval('KKE_f',eigen0,M3,Myuk);
    eigen0=eigen1;
 end
 %eigen0=eigen1+pi
end
```

KKE_drag.m

```
function [md1,md2]=KKE_drag(Vao,Vba,Vbo,cdrag,L1,L3,Lbo,h1,h3,ro);

md1a=cdrag*ro*h1*L1^2*Vao^2/8;

if Lbo>L1,
  md1b=cdrag*ro*h3*(Lbo^2*Vbo^2-L1^2*Vao^2)/8;
else
  md1b=cdrag*ro*h3*(L1^2*Vao^2-Lbo^2*Vbo^2)/8;
end

md1=md1a+md1b;
md2=cdrag*ro*h3*L3^2*Vba^2/8;
```

KKE_f.m

```
function t=KKE_f(x0,M3,Myuk)
%Newton-Raphson metodu icin bir script dosyasi

t=1+cos(x0)*cosh(x0)+(Myuk/M3)*x0*(sinh(x0)*cos(x0)-...
     cosh(x0)*sin(x0));
```

KKE_df.m

```
function z=KKE_df(x0,M3,Myuk)
%Newton-Raphson metodu icin bir script dosyasi
z=(1+Myuk/M3)*sinh(x0)*cos(x0)-cosh(x0)*sin(x0)-...
    2*(Myuk/M3)*x0*sinh(x0)*sin(x0);
```

KKE_nmodshapes.m

```
%************ Esnek Robot Kolu Benzetim Programi ************
%*****************************************************************
%ro3: Esnek parcanin birim uzunluk basina kutlesi, (kg/m)
%L3:  Esnek parcanin uzunlugu, (m)
%M3:  Esnek parcanin  kutlesi, (kg)
%MYUK:Esnek parcanin ucundaki cismin kutle degeri (Payload), (kg)

format long e
clear all
clc


%********* VERILER *****

L3=.6;
ro3=0.5;
Myuk=0.25;
M3=ro3*L3;

n=8;

%^****************************************************************
%***** NEWTON_RAPHSON yontemi ile frekans denkleminin cozumu ******
%*****************************************************************
k= zeros(n,1); eigen0=1.5-pi;

for i=1:n,
  eigen0=eigen0+pi;
   [eigen0]=KKE_newton(M3,Myuk,eigen0,i);
   k(i)=eigen0;
end
k=k/L3;

%*****************************************************************
%******************* Dinamik modelin Katsayilari *******************
%*****************************************************************
for i=1:n
```

Ek 2. Yapılan Çalışmalar bölümünde kullanılan matematiksel ifadelerin açılımları

**** Konum vektörlerinin türevlerinin karelerinin eldesi**

$$\dot{\vec{r}}_1\dot{\vec{r}}_1 = \left(x\dot{\theta}_1\hat{j}_1\right)^2 = x^2\dot{\theta}_1^2 \tag{E.1}$$

$$\dot{\vec{r}}_2\dot{\vec{r}}_2 = \left[L_1\dot{\theta}_1\hat{j}_1 + x\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\hat{j}_2\right]^2 = L_1^2\dot{\theta}_1^{2} + x^2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)^2 + 2L_1x\dot{\theta}_1\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)cos\theta_2$$

$$= L_1^2\dot{\theta}_1^2 + x^2\dot{\theta}_1^2 + 2x^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + x^2\dot{\theta}_2^2 + 2L_1x\dot{\theta}_1^2\,cos\theta_2 + 2L_1x\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\,cos\theta_2 \tag{E.2}$$

$$\dot{\vec{r}}_3\dot{\vec{r}}_3 = \left[L_1\dot{\theta}_1\hat{j}_1 + L_2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\hat{j}_2 + x\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)\hat{j}_3 + z_t(x,t)\hat{j}_3 - \left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)z(x,t)\hat{i}_3\right]^2$$

$$= L_1\dot{\theta}_1^2 + L_2^2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right) + x^2\left(\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2+\dot{\varphi}^2+2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+2\dot{\theta}_1\dot{\varphi}+2\dot{\theta}_2\dot{\varphi}\right) + z_t^2(x,t)$$

$$+ 2L_1L_2\dot{\theta}_1\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)cos\theta_2 + 2L_1x\dot{\theta}_1\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)cos\left(\theta_2+\varphi\right)$$

$$+ 2L_1\dot{\theta}_1 z_t(x,t)cos\left(\theta_2+\varphi\right) - 2L_1\dot{\theta}_1\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)z(x,t)\,sin\left(\theta_2+\varphi\right)$$

$$+ 2L_2x\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)cos\varphi + 2L_2\dot{\theta}_1\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)z_t(x,t)cos\varphi$$

$$- 2L_2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)z(x,t)sin\varphi + 2x\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)z_t(x,t) \tag{E.3}$$

**** Hamilton denklemindeki ifadelerin varyasyonları**

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta T_1 dt = \int_{t_1}^{t_2}\left[I_{h1}\dot{\theta}_1\delta\dot{\theta}_1 + I_{h2}\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\left(\delta\dot{\theta}_1+\delta\dot{\theta}_2\right) + I_{h3}\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi}\right)\left(\delta\dot{\theta}_1+\delta\dot{\theta}_2+\delta\dot{\varphi}\right)\right]dt \tag{E.4}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta T_{2a} dt = \int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{3}m_1L_1^2\dot{\theta}_1\delta\dot{\theta}_1\,dt \tag{E.5}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T_{2b}\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\int_{0}^{L_2} \rho_2 \Big[L_1^2\,\dot{\theta}_1\,\delta\dot{\theta}_1 + x^2\,\dot{\theta}_1\,\delta\dot{\theta}_1 + x^2\,\dot{\theta}_2\,\delta\dot{\theta}_1 + x^2\,\dot{\theta}_1\,\delta\dot{\theta}_2 + x^2\,\dot{\theta}_2\,\delta\dot{\theta}_2$$

$$+ 2L_1 x\dot{\theta}_1\, cos\theta_2 \delta\dot{\theta}_1 - L_1 x\dot{\theta}_1^2\, sin\theta_2 \delta\theta_2 + L_1 x\dot{\theta}_2\, cos\theta_2\delta\dot{\theta}_1$$

$$+ L_1 x\dot{\theta}_1\, cos\theta_2 \delta\dot{\theta}_2 - L_1 x\dot{\theta}_1\,\dot{\theta}_2\, sin\theta_2 \delta\theta_2 \Big] dxdt \tag{E.6}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta V dt = \int_{t_1}^{t_2}\int_{0}^{L_3} EI_a z_{xx}(x,t)\,\delta z_{xx}(x,t)\,dxdt \tag{E.7}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = \int_{t_1}^{t_2}\Big[\Big(\tau_1 - \beta_1\,\dot{\theta}_1\Big)\delta\theta_1 + \Big(\tau_2 - \beta_2\,\dot{\theta}_2\Big)\delta\theta_2 + \Big(\tau_3 - \beta_3\,\dot{\varphi}\Big)\delta\varphi\Big]dt \tag{E.8}$$

**** Tork 1 eşitliğinin eldesi:**

$$\int_{0}^{L_2}\big[\rho_2 + m_b\delta_o(x-L_2)\big]\big[L_1^2\ddot{\theta}_1 + x^2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + 2L_1 x(2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)cos\theta_2 - L_1 x\dot{\theta}_2(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\sin\theta_2\big]dx$$

$$+\int_{0}^{L_3}\big[\rho_3 + m_{yuk}\delta_o(x-L_3)\big]\big[L_1^2\ddot{\theta}_1 + L_2^2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + x^2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \ddot{\varphi}) + L_1L_2(2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)cos\theta_2$$

$$-L_1L_2\,\dot{\theta}_2(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\sin\theta_2 + L_1 x(2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \ddot{\varphi})cos(\theta_2+\varphi) - L_1 x(\dot{\theta}_2 + \dot{\varphi})(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\varphi})sin(\theta_2+\varphi)$$

$$+L_2 x(2\ddot{\theta}_1 + 2\ddot{\theta}_2 + \ddot{\varphi})cos\varphi - L_2 x\dot{\varphi}(2\dot{\theta}_1 + 2\dot{\theta}_2 + \dot{\varphi})\sin\varphi - L_1(2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \ddot{\varphi})z(x,t)\,sin(\theta_2+\varphi)$$

$$-L_1(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\varphi})z_t(x,t)\sin(\theta_2+\varphi) - L_1(\dot{\theta}_2 + \dot{\varphi})(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\varphi})z(x,t)\cos(\theta_2+\varphi)$$

$$-L_2(2\ddot{\theta}_1 + 2\ddot{\theta}_2 + \ddot{\varphi})z(x,t)sin\varphi - L_2\dot{\varphi}(2\dot{\theta}_1 + 2\dot{\theta}_2 + \dot{\varphi})z(x,t)\cos\varphi$$

$$-L_2(2\dot{\theta}_1 + 2\dot{\theta}_2 + \dot{\varphi})z_t(x,t)\sin\varphi + L_1 z_{tt}(x,t)cos(\theta_2+\varphi) - L_1\big(\dot{\theta}_2 + \dot{\varphi}\big)z_t(x,t)\sin(\theta_2+\varphi)$$

$$+L_2 z_{tt}(x,t)cos\varphi - L_2\,\dot{\varphi}\,z_t(x,t)\sin\varphi + xz_{tt}(x,t)\Big]dx$$

$$+\Big[(I_{h1} + I_{h2} + I_{h3})\ddot{\theta}_1 + (I_{h2} + I_{h3})\ddot{\theta}_2 + I_{h3}\ddot{\varphi} + \frac{1}{3}m_1 L_1^2\ddot{\theta}_1 + m_a L_1^2\ddot{\theta}_1\Big] + \beta_1\,\dot{\theta}_1 = \tau_1 \tag{E.9}$$

**** Tork 2 eşitliğinin eldesi:**

$$\int_0^{L_2}[\rho_2 + m_b\delta_o(x-L_2)][x^2\ddot{\theta}_1 + x^2\ddot{\theta}_2 + L_1x\ddot{\theta}_1\cos\theta_2 - L_1x\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin\theta_2]dx$$

$$+\int_0^{L_3}[\rho_3 + m_{yuk}\delta_o(x-L_3)][L_2^2(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2)+x^2(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2+\ddot{\varphi})+L_1L_2\ddot{\theta}_1\cos\theta_2$$

$$-L_1L_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin\theta_2 + L_1x\ddot{\theta}_1\cos(\theta_2+\varphi) - L_1x\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_2+\dot{\varphi})\sin(\theta_2+\varphi)$$

$$+L_2x(2\ddot{\theta}_1+2\ddot{\theta}_2+\ddot{\varphi})\cos\varphi - L_2x\dot{\varphi}(2\dot{\theta}_1+2\dot{\theta}_2+\dot{\varphi})\sin\varphi - L_1\ddot{\theta}_1 z(x,t)\sin(\theta_2+\varphi)$$

$$-L_1\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_2+\dot{\varphi})z(x,t)\cos(\theta_2+\varphi) - L_1\dot{\theta}_1 z_t(x,t)\sin(\theta_2+\varphi)$$

$$-L_2(2\ddot{\theta}_1+2\ddot{\theta}_2+\ddot{\varphi})z(x,t)\sin\varphi - L_2\dot{\varphi}(2\dot{\theta}_1+2\dot{\theta}_2+\dot{\varphi})z(x,t)\cos\varphi$$

$$-L_2(2\dot{\theta}_1+2\dot{\theta}_2+\dot{\varphi})z_t(x,t)\sin\varphi + L_2z_{tt}(x,t)\cos\varphi - L_2\dot{\varphi}z_t(x,t)\sin\varphi + xz_{tt}(x,t)]dx$$

$$+\int_0^{L_2}[\rho_2+m_b\delta_o(x-L_2)][L_1x\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\sin\theta_2]dx$$

$$+\int_0^{L_3}[\rho_3+m_{yuk}\delta_o(x-L_3)][L_1L_2\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\sin\theta_2 + L_1x\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi})\sin(\theta_2+\varphi)$$

$$+L_1\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi})z(x,t)\cos(\theta_2+\varphi)+L_1\dot{\theta}_1 z_t(x,t)\sin(\theta_2+\varphi)]dx$$

$$+[(I_{h2}+I_{h3})\ddot{\theta}_1+(I_{h2}+I_{h3})\ddot{\theta}_2+I_{h3}\ddot{\varphi}]+\beta_2\dot{\theta}_2=\tau_2 \qquad \text{(E.10)}$$

**** Tork 3 eşitliğinin eldesi :**

$$\int_0^{L_3}[\rho_3+m_{yuk}\delta_o(x-L_3)][x^2(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2+\ddot{\varphi})+L_1x\ddot{\theta}_1\cos(\theta_2+\varphi)-L_1x\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_2+\dot{\varphi})\sin(\theta_2+\varphi)$$

$$+L_2x(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2)\cos\varphi - L_2x\dot{\varphi}(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\sin\varphi - L_1\ddot{\theta}_1z(x,t)\sin(\theta_2+\varphi)$$

$$-L_1\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_2+\dot{\varphi})z(x,t)\cos(\theta_2+\varphi) - L_1\dot{\theta}_1z_t(x,t)\sin(\theta_2+\varphi)-L_2(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2)z(x,t)\sin(\varphi)$$

$$-L_2\dot{\varphi}(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)z(x,t)\cos\varphi - L_2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)z_t(x,t)\sin\varphi + xz_{tt}(x,t)]dx$$

$$+\int_0^{L_3}[\rho_3+m_{yuk}\delta_o(x-L_3)][L_1x\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi})\sin(\theta_2+\varphi)+L_2x(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi})\sin\varphi$$

$$+L_1\,\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi})z(x,t)\cos(\theta_2+\varphi)+L_2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\varphi})z(x,t)\cos\varphi$$

$$+L_1\,\dot{\theta}_1\,z_t(x,t)\sin(\theta_2+\varphi)+L_2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)z_t(x,t)\sin\varphi\Big]dx$$

$$+\left[I_{h3}(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2+\ddot{\varphi})\right]+\beta_3\dot{\theta}_2=\tau_3 \qquad \text{(E.11)}$$

**** (2.1.32) denkleminin kısmi integrasyon tekniği uygulanarak çözümü:**

$$A=\rho_2+m_b\delta_0(x-L_2) \qquad \text{(E.12)}$$

$$B=\rho_3+m_p\delta_0(x-L_3) \qquad \text{(E.13)}$$

$$f(q)=f(\theta_1,\theta_2,\varphi,\dot{\theta}_1,\dot{\theta}_2,\dot{\varphi},z,z_t,....) \qquad \text{(E.14)}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\Bigg[\Bigg\{\int_0^{L_2}Af_1(q)\delta\dot{\theta}_1dx+\int_0^{L_3}Bf_2(q)\delta\dot{\theta}_1dx+\int_0^{L_2}Af_3(q)\delta\dot{\theta}_2dx+\int_0^{L_3}Bf_4(q)\delta\dot{\theta}_2dx+\int_0^{L_3}Bf_5(q)\delta\dot{\varphi}dx$$

$$+\int_0^{L_2}Af_6(q)\delta\theta_2dx+\int_0^{L_3}Bf_7(q)\delta\theta_2dx+\int_0^{L_3}Bf_8(q)\delta\varphi dx+\int_0^{L_3}Bf_9(q)\delta z_t(x,t)dx$$

$$+\int_0^{L_3}Bf_{10}(q)\delta z(x,t)dx+\int_0^{L_3}(-EI_a)z_{xx}(x,t)\delta z_{xx}(x,t)dx\Bigg\}+\Bigg\{\;g_1(q)\delta\dot{\theta}_1+g_2(q)\delta\dot{\theta}_2$$

$$+g_3(q)\delta\dot{\varphi}+g_4(q)\delta\theta_1+g_5(q)\delta\theta_2+g_6(q)\delta\varphi\;\Bigg\}\Bigg]dt=0 \qquad \text{(E.15)}$$

Her bir ifadede sınır şartlarını ayrı ayrı yerine koyulur.

$$\int_0^{L_2}\left[\int_{t_1}^{t_2}Af_1(q)\delta\dot{\theta}_1dt\right]dx=\int_0^{L_2}\left[Af_1(q)\delta\theta_1\Big|_{t_1}^{t_2}dx-\int_{t_1}^{t_2}A\frac{\partial f_1(q)}{\partial t}\delta\theta_1dt\right]dx$$

$$=-\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^{L_2}A\frac{\partial f_1(q)}{\partial t}\delta\theta_1dx\right]dt \qquad \text{(E.16)}$$

$$\int_0^{L_3}\left[\int_{t_1}^{t_2} Bf_2(q)\delta\dot{\theta}_1 dt\right]dx = -\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^{L3} B\frac{\partial f_2(q)}{\partial t}\delta\theta_1 dx\right]dt \tag{E.17}$$

$$\int_0^{L_2}\left[\int_{t_1}^{t_2} Af_3(q)\delta\dot{\theta}_2 dt\right]dx = -\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^{L_2} A\frac{\partial f_3(q)}{\partial t}\delta\theta_2 dx\right]dt \tag{E.18}$$

$$\int_0^{L_3}\left[\int_{t_1}^{t_2} Bf_4(q)\delta\dot{\theta}_2 dt\right]dx = -\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^{L3} B\frac{\partial f_4(q)}{\partial t}\delta\theta_2 dx\right]dt \tag{E.19}$$

$$\int_0^{L_3}\left[\int_{t_1}^{t_2} Bf_5(q)\delta\dot{\varphi} dt\right]dx = -\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^{L_3} B\frac{\partial f_5(q)}{\partial t}\delta\varphi dx\right]dt \tag{E.20}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{L_3}\left[\int_{t_1}^{t_2} Bf_9(q)\delta z_t(x,t) dt\right]dx &= \int_0^{L_3}\left[Bf_9(q)\delta z_t(x,t)\Big|_{t_1}^{t_2} dx - \int_{t_1}^{t_2} B\frac{\partial f_9(q)}{\partial t}\delta z(x,t)dt\right]dx \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^{L_3} B\frac{\partial f_9(q)}{\partial t}\delta z(x,t)dx\right]dt\end{aligned} \tag{E.21}$$

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^{L_3}(-EI_a)z_{xx}(x,t)\delta z_{xx}(x,t)dx\right]dt &= \int_{t_1}^{t_2}(-EI_a)z_{xx}(x,t)\delta z_{xx}(x,t)\Big|_0^{L_3} dt \\ &- \int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^{L_3}\frac{\partial}{\partial x}(-EI_a z_{xx})\delta z_x(x,t)dx\right]dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\Big\{EI_a z_{xx}(L_3,t)\delta z_{xx}(L_3,t) - EI_a z_{xx}(0,t)\delta z_x(0,t) \\ &- EI_a z_{xxx}(L_3,t)\delta z(L_3,t) + EI_a) z_{xxx}(0,t)\delta z(0,t) \\ &+ \int_0^{L_3}\frac{\partial^2}{\partial x^2}EI_a z_{xx}\delta(x,t)dx\}dt + \int_0^{L_3}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(EI_a z_{xx})\delta z(x.t)dx\Big\}dt\end{aligned} \tag{E.22}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} g_1(q)\delta\dot{\theta}_1 dt = g_1(q)\delta\theta\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial g_1(q)}{\partial t} \quad \delta\theta_1 dt = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial g_1(q)}{\partial t}\delta\theta_1 dt \qquad \text{(E.23)}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} g_2(q)\delta\dot{\theta}_2 dt = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial g_1(q)}{\partial t}\delta\theta_2 dt \qquad \text{(E.24)}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} g_3(q)\delta\dot{\varphi} dt = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial g_3(q)}{\partial t}\delta\varphi dt \qquad \text{(E.25)}$$

ÖZGEÇMİŞ

Nurhan Gürsel 1978 yılında Ardanuç'ta doğdu. 1996 yılında Trabzon Anadolu Lisesi'ni bitirdi. 1997 yılında girdiği Balıkesir Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Makina Mühendisliği Bölümü'nden 2001 yılında Makine Mühendisi ünvanı ile mezun oldu. 2001 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makina Mühendisliği Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimine başladı. 2002 yılında Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladı. Nurhan Gürsel iyi derecede İngilizce bilmektedir.