

29064

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ PROGRAMI

ÇOK SERBESTLİK DERECELİ TİTREŞİM SİSTEMLERİNİN MODAL ANALİZİ

VE SAYISAL ÇÖZÜMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mak.Müh. MUSTAFA ÇALIŞKAN

AĞUSTOS - 1993

TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ - FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ PROGRAMI

ÇOK SERBESTLİK DERECELİ TİTREŞİM SİSTEMLERİNİN MODAL ANALİZİ

VE SAYISAL ÇÖZÜMLER

Mak.Müh. MUSTAFA ÇALIŞKAN

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
" Makina Yüksek Mühendisi "
Ünvanının Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 30.07.1993
Tezin Sözlü Savunma Tarihi : 09.09.1993

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Muzaffer DOĞAN

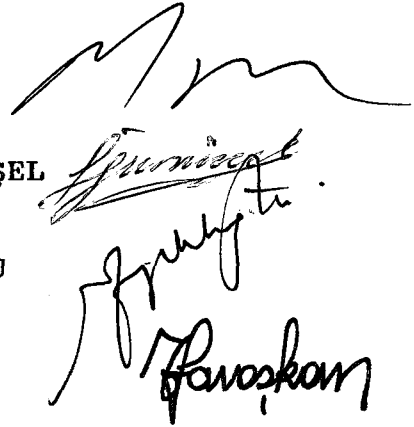
Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. Levent GÜMÜŞEL

Jüri Üyesi : Doç. Dr. Aydın BIYIKLIOĞLU

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Temel SAVAŞKAN

Agustos - 1993

Trabzon



Handwritten signatures of the thesis advisor and jury members. The signatures are in black ink and are located to the right of the text. The signatures are: Muzaffer Doğan, Levent Gümüsel, Aydın Biyıklıoğlu, and Temel Savaşkan.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması , Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Makina Mühendisliği Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programında yapılmıştır.

Bu çalışmada, çok serbestlik dereceli titreşim sistemlerinin dinamik davranışları teorik olarak incelendi ve örnek sayısal çözümler verildi. Sayısal hesaplamalar; bu çalışmada kullanılan bilgisayar programları ile KTÜ Bilgi İşlem Merkezi VAX 6000 - 520 VMS sisteminde yapılmıştır.

Çalışmanın, mekanik titreşimler ve tasarım konusuyla ilgilenen arkadaşlara yararlı olmasını diler ve çalışmalarımı yönlendiren sayın hocam Doç.Dr. Muzaffer DOĞAN 'a teşekkürü bir borç bilirim.

Ağustos 1993

Mustafa ÇALIŞKAN

İÇİNDEKİLER

ÖZET	v
SUMMARY	v1
SEMBOLLER	v11
BÖLÜM 1 GİRİŞ	1
BÖLÜM 2 TITREŞİM SİSTEMLERİNİN MODAL ANALİZİ	4
2.1 Çok Serbestlik Dereceli Sistemler	4
2.2 Serbest Titreşim Sistemlerinin Modal Analizi	6
2.2.1 Sönümsüz Serbest Titreşim, Prensib Modları ..	6
2.2.2 Özdeğer Problemi ve Titreşim (doğal) Modları ..	12
2.2.3 Mod Şekillerinin Normalizasyonu	15
2.2.4 Modal Matris Bulunması	16
2.2.5 Modal Vektörler ve Mod Şekillerinin Bulunmasına Dair Bir Uygulama	18
2.2.6 Özvektörlerin Ortogonallik Özellikleri	22
2.2.7 Genelleştirilmiş Kütle ile Genelleştirilmiş Rijitlik Matrisleri ve Katsayıları	26
2.2.8 Bilgisayar Çözümleri	29
2.3 Zorlanmış Titreşim Sistemlerinin Modal Analizi ..	32
2.3.1 Sönümsüz Zorlanmış Titreşim	32
2.3.2 Sönümlü Zorlanmış Titreşim	36
2.3.2.1 Orantılı Sönüm Elemanlı Sistemler	36

2.3.2.2 Oransal Olmayan Sönüm Elemanlı Sistemler	41
2.3.2.3 Bilgisayar Çözümleri	44
BÖLÜM 3 ZORLANMIŞ SÖNÜMLÜ SİSTEMLERİN FREKANS CEVAP YÖNTEMİ İLE (MEKANİK EMPEDANS) ANALİZİ	46
3.1 Frekans Cevap Yöntemiyle Zorlanmış Sistemlerin Dinamik Davranışlarının Belirlenmesi	46
3.2 Dinamik Titreşim Yutucuların (absorberlerin) Frekans Cevap Yöntemiyle Analizi	49
BÖLÜM 4. NONLINEER TİTREŞİM SİSTEMLERİ	53
4.1 Nonlinear Sistemler	53
4.2 Nonlinear Sistemlerin Sayısal Çözümleri	54
4.3 Bir Rotor Sıkıştırma Etkili Yağ Filmi Yatağı Sisteminin Sayısal Çözümü	56
BÖLÜM 5. SONUÇLAR	60
KAYNAKLAR	62
EKLER	64
EK. A. TRESPUND Program Listesi	65
EK. B. TRES DAM Program Listesi	74
EK. C. FRES PN Program Listesi	84
EK. D. ROTOR Program Listesi	87
EK. E. Alt Programların Tanıtılması	90
ÖZGEÇMİŞ	92

ÖZET

Günümüz mühendislik sistemleri, tasarım ve malzeme bakımından giderek daha karmaşık bir yapı sunmaktadır. Bunun sonucu olarak, böyle çok serbestlik dereceli sistem veya geniş yapıların dinamik davranışlarının daha doğru olarak belirlenmesi için yeni yöntemler geliştirilmektedir. Bir yapının dinamik davranışı diferansiyel denklemlerle tanımlanır ve burada denklemlerin çözümünde karşılaşılan esas güçlük, denklemlerin birbirlerine bağlı olması durumudur. Modal analiz olarak bilinen yöntem, bize bağlı sistem denklemlerinin bağımsız sistem denklemlerine dönüştürülmesi olanakını verir. Böylece, çözüm bir serbestlik dereceli sistem modelinde olduğu gibi doğrudan elde edilebilir.

Bu çalışmada, modal analiz yöntemi iki serbestlik dereceli lineer bir sisteme uygulanarak; özdeğerler, özvektörler ve bunların ortogonallik özellikleri, genelleştirilmiş kütle ve rijitlik, mod şekillerinin normalizasyonu ve prensib koordinatları kavramları verildi. Çok serbestlik dereceli sistemlerin geçici titreşim durumları; sönümsüz sistemler ve sönümlü sistemler için iki kısım altında ele alındı. Sönümlü zorlanmış sistemlerin sürekli titreşim durum cevabını elde etmek için frekans cevap yöntemi kullanıldı. Bu yöntemde hareket denklemlerindeki sinüsoidal fonksiyonlar vektörlerle temsil edildi. Son olarak nonlineer sistemler incelendi. Ele alınan bütün titreşim durumları için bilgisayar programları yazıldı ve bazı sayısal çözümler grafik olarak verildi.

SUMMARY

Present day structures are typically more complex in terms of design and materials. As a result, tools have been developed to accurately determine the dynamic behaviour of such multiple degree of freedom systems or large structures. The dynamic behaviour of a structure is described in terms of differential equations and the major abstacle encountered when trying to solve these equations is the coupling between the equations. The method known as Modal Analysis allows us to reduce coupled system equations to encoupled equations. Thus, the solution becomes strainghtforward just like equation for a single degree of freedom system model.

In this study, modal analysis method was used on a linear two degree of freedom system to illustrate the concept of eigenvalues, eigenvectors, their orthogonal properties, generalized mass and stifness, normalization of mode shapes and principal coordinates. The transient response of multiple degree of freedom system was then dealt with in two sections, one for undamped systems and the other for damped systems. For the steady-state response of forced damped systems, frequency response method was used. In this method, vectors, were used to represent the sinusoidal functions in the equation of motion. Finally, nonlinear systems were considered. For the cases considered, computer programs were written and some numerical solutions were given graphically..

SEMBOLLER

a	: Karakteristik denklemin katsayıları
c	: Sönüm katsayısı (Ns/m)
c_b	: Yatağın radyal boşluğu
e	: Eksantirisite ($e=c_b\epsilon$)
j	: $\sqrt{-1}$
h	: Zaman artımı (s)
k	: Yay katsayısı (N/m)
m	: Kütle (kg)
n	: Serbestlik derecesi sayısı
p_i	: Prensib koordinatlarda yerdeğiştirme
\dot{p}_i	: Prensib koordinatlarda hız
\ddot{p}_i	: Prensib koordinatlarda ivme
s	: Kompleks frekans (değişken)
t	: Zaman (s)
u_i	: Modal vektörün bir elemanı
x	: Yerdeğiştirme (m)
\dot{x}	: Hız (m/s)
\ddot{x}	: İvme (m/s ²)
z_{ii}	: Empedans matrisinin elemanları
A	: Reel yerdeğiştirmenin genliği
C_B	: Yatağın geometrik merkezi
C_i	: Genelleştirilmiş modal sönüm katsayısı
C_j	: Rotorun kütle merkezi
E	: Hata miktarı
$F_i(t)$: Zorlayıcı kuvvet
\bar{F}	: Kompleks zorlayıcı kuvvet genliği
H	: Dinamik matris
Im	: İmajiner kısım
K_i	: Genelleştirilmiş modal rijitlik katsayısı
L	: Yatak boyu
M_i	: Genelleştirilmiş modal kütle katsayısı

$N_i(t)$: Genelleştirilmiş zorlayıcı kuvvet
 P : Statik kuvvet (N)
 P_C : Merkezkaç kuvvet (N)
 Q, Q_C : Bir rotor sıkıştırma etkili yağ filmi yatağı parametreleri
 R^* : Yatak yarıçapı
 R : Büyültme faktörü
 \bar{X} : Kompleks yerdeğiştirmenin genliği
 α : Durum açısı
 β : Yatak parametresi
 τ : Karakteristik denklemin kökü (özdeğer)
 μ : Mutlak viskozite (kgs/m²)
 ϵ : Boyutsuz yatak boşluğu
 \emptyset : Faz açısı
 w_i : i-nci doğal frekans
 Σ : Toplam

 $[C]$: Sönüm matrisi
 $[-C_-]$: Diagonalleştirilmiş sönüm matrisi
 $[I]$: Birim matris
 $[K]$: Rijitlik matrisi
 $[-K_-]$: Diagonalleştirilmiş rijitlik matrisi
 $[M]$: Kütle matrisi
 $[-M_-]$: Diagonalleştirilmiş kütle matrisi
 $\{p\}$: Prensib koordinatlarda yerdeğiştirme vektörü
 $\{\dot{p}\}$: Prensib koordinatlarda hız vektörü
 $\{\ddot{p}\}$: Prensib koordinatlarda ivme vektörü
 $\{u\}$: Mod şekil vektörü
 $\{u\}^T$: Mod şekil vektörünün transpozu
 $[u]$: Modal matris
 $[u]^{-1}$: Modal matrisin tersi
 $[u]^T$: Modal matrisin transpozu
 $\{x\}$: Yerdeğiştirme vektörü
 $\{\dot{x}\}$: Hız vektörü
 $\{\ddot{x}\}$: İvme vektörü
 $[Z_{ij}]$: Empedans matrisi

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Titreşim konusu, dinamik sistemlerin salınımsal hareketlerini incelemekle ilgilenir. Titreşim; bir cismin denge konumu etrafındaki salınımıdır. Bir dinamik sistem, kütlelere sahip elemanların bir düzenlenmesidir. Burada dinamik sistemi oluşturan elemanlar birbirlerine göre izafi hareket yapabilme özelliğine sahiptir. Kütle ve esnekliğe sahip sistemler titreşim yapabilme kapasitesine de sahip olurlar. Bu sistem bir makina, hareketli makina elemanları, veya makinalar grubu, bina ve uçak gibi yapılar da olabilir. Genel olarak bir dinamik sistemde ortaya çıkan titreşimler; istenmeyen, önemsiz büyüklüklerde veya belirli bir görevi yerine getirici nitelikte olabilir.

Tasarımcının amacı titreşimi istenmeyen karakterde olduğu zaman kontrol altında tutmak ve faydalı durumda olduğunda da onu değerlendirmektir. Bununla birlikte genelde bir sistemde titreşimlerin ortaya çıkması istenmez. Çünkü titreşim esnasında sistemde ortaya çıkacak olan aşırı yerdeğiştirmeler ve kuvvetler gürültü, yüksek gerilmeler, aşınma, malzeme yorulması gibi istenmeyen davranışlara ve enerji kaybına sebebiyet verir. Bu nedenle bunların, uygun bir şekilde ortadan kaldırılmaları veya mümkün olduğu kadar azaltılmaları zorunludur.

Titreşim konusunun incelenmesindeki asıl amaç, titreşimin ortaya çıktığı sistemde, bu titreşimlerin sistemin çalışması ve emniyeti üzerindeki etkilerini inceleyip araştırmak ve buna göre gerekli önlemleri almaktır. İyi bir tasarımcı, sistemin dinamik performansının nasıl iyileştirileceği, yapısal yerdeğiştirmelerin nasıl azaltılacağı ve sisteme yay, kütle, sönüm elemanı eklenir veya çıkarılırsa ne gibi sonuçların ortaya çıkacağını çok iyi bilmelidir.

Titreşim sistemleri davranışlarına göre lineer ve non

linear olmak üzere iki grupta incelenirler. Linear bir sistemde, süperpozisyon prensibi uygulanır ve sistemi tanımlayan diferansiyel denklemlerdeki bağımlı değişkenler sadece birinci derecedendirler. Buna karşın tüm sistemler titreşim genliğinin artmasıyla nonlinear davranış gösterirler.

Bir sistemi tanımlamak için gerekli diferansiyel denklemlerin sayısı sistemin serbestlik derecesi sayısı kadardır. Bu denklemler normalde birbirleriyle bağlı olduklarından, çözüme başlamadan önce aralarındaki bağ terimini ortadan kaldırmak gerekir. Bunu yapmak için, prensib modlarının ortogonalite özelliklerinden yararlanılır ve genel diferansiyel denklemler prensib koordinatları cinsinden ifade edilirler.

Genel olarak fiziksel bir sistem, serbest ve zorlanmış olmak üzere iki tür titreşime sahip olabilir. Bir sistem, belli başlangıç şartları etkisi ile titreşiyorsa ve dışarıdan bir kuvvet uygulanmıyorsa serbest titreşim meydana gelir. Böyle bir sistem, harekete geçirildiğinde, kütle ile rijitlik dağılımından belirlenen ve sistemin dinamik bir özelliği olan doğal frekans değerlerinde titreşim hareketi yapacaktır. Sonuç hareket ise belli oranlardaki prensib modlarının toplamı şeklinde olacaktır ve sönüm elemanı olmadığından, hareket sönümlenmeden devam edecektir. Böylece serbest titreşim hareketinin matematiksel olarak incelenmesi, sistemin dinamik özellikleri hakkında bize bir fikir verir.

Fiziksel bir sistem dış kuvvetler etkisi altında titreşime zorlanıyorsa zorlanmış titreşim meydana gelir. Zorlayıcı kuvvet periyodik bir kuvvetse, sistem zorlayıcı frekansa sahip bir hareket yapacak şekilde zorlanır ve davranış gösterir. Eğer zorlayıcı frekans sistemin doğal frekanslarından biri ile aynı değeri alırsa rezonans durumu ortaya çıkar. Rezonans durumunda sistemin yerdeğiştirmesi tehlikeli bir şekilde çok yüksek değerlere ulaşır. Bu durum, sisteme sönüm elemanları ilave edilerek önlenir.

Sistemdeki mevcut enerji, sürtünme veya diğer dirençler üzerinden yayıldığından tüm fiziksel sistemler bir veya birkaç sönüm tipine sahiptirler. Bu dirençler çeşitli formlarda olurlar. Küçük sönüm miktarlarının, sistemin doğal

frekansları üzerine etkisi çok azdır ve ihmal edilirler. Zorlanmış titreşim altındaki dinamik cevabı bulmak için sönüm tipinin belirlenmesi tek başına yeterli olmamaktadır. Bundan başka sönüm dağılımının da (orantılı sönüm veya oransal olmayan sönüm) belirlenmesi gerekir. Oransal olmayan sönüm elemanlı sistemlere çok karmaşık yapılarda rastlanmaktadır ve çözümleri çok daha zor olmaktadır.

Günümüzde yapıların dinamik davranışları üç farklı yaklaşımla belirlenmektedir. Bunlardan ilki deneysel bir yaklaşımdır. Bu yöntemde, sistem kurulur ve gereken zorlayıcı şartlarda test edilir. İkinci yaklaşım deneysel olandan farklı olarak yapılan bir teorik analizdir. Bu analiz, yapının matematiksel bir modeline gereksinim duyar. Modellemedeki en yaygın yöntem sonlu elemanlar yöntemidir. Dinamik davranışı belirlemede kullanılan en yaygın yöntem ise modal analiz yöntemidir. Modal analiz elastik bir yapının titreşim modlarını belirleyerek dinamik özelliklerinin tespit edilmesi işlemidir. Bu metod sönümsüz sistemlere kolayca uygulanabilirken sönümlü sistemlere kolayca uygulanamaz. Modal analiz metodu ilk önce Traill-Nash [1] tarafından önerilmiştir. Foss [2] yöntemi biraz daha geliştirmiştir. Bu metodta, özdeğerler ve özvektörler elde edildikten sonra sistemin dinamik davranışı, modların süperpozisyonundan belirlenir. Frazer [3] özdeğerler ve özvektörlerin bulunması ile ilgili iteratif bir yöntem geliştirmiştir. Sistemdeki sönüm elemanları kütle ve/veya rijitlik matrisleriyle orantılı değilse (modal matris sönüm matrisine göre ortogonal değil) modların süperpozisyonu geçerli olmamakta ve başka yöntemlere gereksinim duyulmaktadır [4].

Günümüz mühendislik sistemleri tasarım ve malzeme bakımından giderek daha karmaşık bir yapı sunmaktadır. Bunun sonucu olarak, bir dinamik sistemin zaman cevabını bulmak için yukarıdaki metodlardan hangisi kullanılırsa kullanılsın, bilgisayar tekniklerinden yararlanmak kaçınılmaz olmaktadır. Bilgisayar programlarının geliştirilmesiyle sistem cevabını verecek çözümlerin daha hızlı bir şekilde elde edilmesi sağlanmış olur.

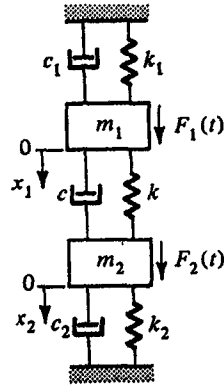
BÖLÜM 2

TITREŞİM SİSTEMLERİNİN MODAL ANALİZİ

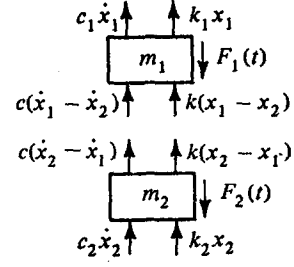
2.1. Çok Serbestlik Dereceli Sistemler

Bir sistemin hareket halinde bulunduğu konum, eğer birden fazla birbirinden bağımsız konum parametresi ile belirleniyorsa, bu tür sistemlere çok serbestlik dereceli sistem adı verilmektedir. Bir sistemin serbestlik derecesi, hareket halindeki konumu tam olarak belirlemek için gerekli ve yeterli bağımsız parametre sayısına eşittir. Bu parametrelere " genelleştirilmiş koordinat" adı verilir. Böyle bir sistem, serbestlik derecesi sayısı kadar bağımsız hareket türüne sahiptir. Tek serbestlik dereceli sistemin dinamik davranışı tek bir diferansiyel denklemle ifade edilebilir. Ancak, çok serbestlik dereceli sistemde birden fazla serbest yerdeğiştirme parametresinin bulunması, hareketi temsil eden diferansiyel denklem sayısının da bu ölçüde artmasını beraberinde getirir. Hareket denklemi; sisteme etkiyen atalet kuvvetleri, sönüm etkileri ve şekil değiştirme sonucu meydana gelen elastik kuvvetlerle beraber dış kuvvetlerin dengesinden ibarettir. Çeşitli yöntemlerle elde edilen hareket denklemlerinin çözümünden, sistemin dinamik davranışı hakkında bir fikir sahibi olunmuş olunur.

Gerçekte yapılar çok serbestlik dereceli sistemlerdir ve çözümleri fazla sayıda denklemlerle daha da karmaşıktır. Bu tür sistemlerde, matris yöntemlerinden yararlanmak çok daha kolay olmaktadır. Yöntemin uygulanmasını ve kullanılan bazı kavramları açıklamak için şekil 2.1 'de gösterilen iki serbestlik dereceli mekanik sistemi ele alalım.



a. Sistem



b. Serbest cisim diyagramları

Şekil 2.1. İki serbestlik dereceli sistem

Şekil 2.1.'de verilen iki serbestlik dereceli sistemdeki kütlelerin herbirine Newton'un ikinci hareket kanunu uygulanır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c+c_1)\dot{x}_1 + (k+k_1)x_1 - c\dot{x}_2 - kx_2 = F_1(t)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - c\dot{x}_1 - kx_1 + (c+c_2)\dot{x}_2 + (k+k_2)x_2 = F_2(t) \quad (2.1)$$

şeklinde hareket denklemleri elde edilir.

Burada; m kütleyi, k yay katsayısını, c sönüm katsayısını ve $F_1(t)$ ile $F_2(t)$ kütlelere uygulanan zorlayıcı kuvvetleri göstermektedir. Hareket denklemleri birbirlerinden bağımsız değildirler, çünkü m_1 kütlesi için yazılan denklem x_2 ve \dot{x}_2 cinsinden terimler içermektedir. Böylece (2.1) eşitliğindeki, birinci denklem için bağı terimleri $-(c\dot{x}_2+kx_2)$ dir. Benzer şekilde, ikinci denklemdeki bağı terimleri ise $-(c\dot{x}_1+kx_1)$ şeklindedir. Bunun fiziksel anlamı, sistemde m_1 kütlelerinin $x_1(t)$ hareketi, m_2 kütlelerinin $x_2(t)$ hareketi tarafından karşılıklı olarak etkileneceğidir.

Kolaylık için (2.1) hareket denklemleri matris formda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c+c_1 & -c \\ -c & c+c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k+k_1 & -k \\ -k & k+k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

veya

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\} \quad (2.3)$$

M, C ve K matrisleri sırasıyla kütle, sönüm ve rijitlik matrisleri olarak adlandırılırlar. Basit matris işlemleri sonucu (2.1) ile (2.2) denklemlerinin birbirlerine eşit oldukları görülebilir.

n serbestlik dereceli mekanik bir sistemin hareket denklemleri, ikinci mertebeden adi, n-tane diferansiyel denklemden oluşan bir takım meydana getirmektedir. Genel halde "bağlı" olmaları dolayısıyla bu n-denklemin eş zamanlı çözülmesi gerekmektedir, ki bu da pek kolay bir iş değildir. Belirli bir lineer koordinat dönüşümü yapmak suretiyle bu bağlı diferansiyel denklemler sistemini, bağımsız diferansiyel denklemlerden oluşan bir sistem haline getirmek mümkündür. Diğer taraftan ise, n-tane bağlı diferansiyel denklemden oluşan bir takım yerine, n-tane bağımsız ikinci mertebe denklemi çözmeye çalışmak daha kolay olacaktır.

2.2. Serbest Titreşim Sistemlerin Modal Analizi

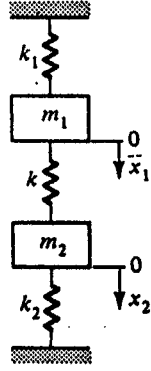
2.2.1. Sönümsüz Serbest Titreşim, Prensip Modları

Dinamik bir sistem, serbestlik derecesi kadar doğal frekansa ve o kadar da titreşim moduna sahiptir. Sistemin genel hareketi ise titreşim modlarının toplamı kadardır. Bu bölümde doğal frekansların ve bu doğal frekanslara karşılık gelen, sönümlenmemiş sistemin titreşim modlarının bulunması incelenecektir.

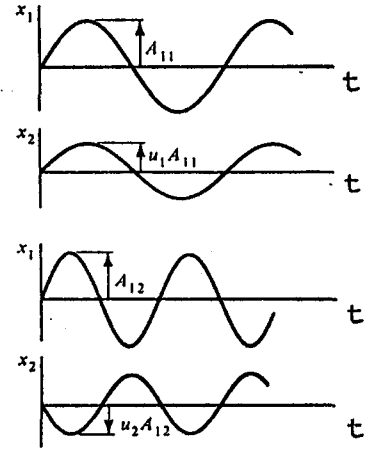
Sistemin mod şekillerini ve doğal frekanslarını belirlemek için ilk önce, sistemin sönümsüz serbest titreşim yaptığı kabul edilir. Sönümsüz serbest titreşim yapan bir mekanik sistemin hareket denklemleri;

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (2.4)$$

formunda olup homojen çözümleri sonucu doğal frekanslar ve modal vektörler bulunur. Bir titreşim modunun frekansı özdeğerler cinsinden tanımlanmaktadır.



a- Titreşim sistemi



b- Prensib modlarında hareketler

Şekil 2.2. Serbest titreşim yapan mekanik bir sistemin titreşim modları

Şekil 2.2. 'de verilen sönümsüz serbest titreşim yapan mekanik sistemin hareket denklemleri (2.2) eşitliğinden aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k+k_1 & -k \\ -k & k+k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Görüldüğü gibi denklemler homojen ve lineer olup yerdeğiştirmeler;

$$x_1 = B_1 \cdot e^{st} \quad (2.6)$$

$$x_2 = B_2 \cdot e^{st}$$

formunda alınabilir.

Sönümsüz serbest titreşim için, bir serbestlik dereceli sistemlerin incelenmesinde olduğu gibi,

$$s = \pm j\omega \quad (2.7)$$

$$e^{\pm j\omega t} = \cos \omega t \pm j \sin \omega t$$

bağıntıları ve x yerdeğiştirmelerinin gerçek olacağı gözönüne alınarak çözümün harmonik olacağı görülür. Yani;

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \sin (wt + \emptyset) \\ x_2 &= A_2 \sin (wt + \emptyset) \end{aligned} \quad (2.8)$$

yazılabilir. Burada A_1 , A_2 ve \emptyset sabitler olup değerleri başlangıç şartlarından bulunur. w ise sistemin bir doğal frekansıdır. (2.8) eşitlikleri (2.5) 'de yerine konursa,

$$(k+k_1 - w^2 m_1) A_1 - k A_2 = 0 \quad (2.9)$$

$$-k A_1 + (k+k_2 - w^2 m_2) A_2 = 0$$

elde edilir. Burada görülen denklemler A_1 ve A_2 bilinmeyenleri cinsinden homojen lineer cebirsel denklemlerdir. A_1 ve A_2 'nin katsayılar determinantına karakteristik determinant denir. Karakteristik determinant,

$$\Delta(w) = \begin{vmatrix} k+k_1-w^2 m_1 & -k \\ -k & k+k_2-w^2 m_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.10)$$

şeklinde yazılınca da frekans denklemi elde edilir. Dolayısıyla frekans denkleminin çözülmesi, w doğal frekanslarını verir. Gerekli işlemler yapılırsa;

$$w^4 - \left[\frac{k+k_1}{m_1} + \frac{k+k_2}{m_2} \right] w^2 + \frac{k_1 k_2 + k_1 k + k_2 k}{m_1 m_2} = 0 \quad (2.11)$$

elde edilir.

Bu denklem w^2 cinsinden kuadratik bir denklemdir. Dolayısıyla w^2 için 2 tane pozitif değer söz konusudur. Bu pozitif kökler w_1 ve w_2 ile gösterilir ve bunlara sistemin doğal frekansları adı verilir. Görüldüğü gibi 2 serbestlik dereceli bir sistemin 2 tane doğal frekansı olmaktadır. n - serbestlik dereceli bir sistemin de n - tane doğal

frekansı olacağı açıktır. Bu durumda x_1 ve x_2 hareketleri w_1 ve w_2 frekanslarına bağlı, iki ayrı harmonik hareketin toplamı şeklinde olacaktırlar.

$$x_1 = A_{11}\sin(w_1t + \phi_1) + A_{12}\sin(w_2t + \phi_2)$$

$$x_2 = A_{21}\sin(w_1t + \phi_1) + A_{22}\sin(w_2t + \phi_2)$$

veya

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} \sin(w_1t + \phi_1) + \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} \sin(w_2t + \phi_2) \quad (2.12)$$

Burada A ve ϕ değerleri keyfi sabitlerdir. Doğal frekanslardan küçük olana doğal frekans, diğerlerine harmonikler denilmektedir. Gösterimlerde çift indislerden birincisi koordinatı, ikinci indis ise doğal frekansı referans alır. Yani, A_{12} ; $x_1(t)$ yerdeğiştirmesinin $w=w_2$ doğal frekansında titreşmesi durumundaki genlik değeridir. (2.12) eşitliğindeki harmonik bileşenlerin $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ izafi genlikleri (2.9) eşitlikleriyle tanımlanmışlardır. (2.9) eşitlikleri w_1 ve w_2 için sırasıyla yazılırsa;

$$(k+k_1 - w_1^2m_1) A_{11} - k A_{21} = 0$$

$$-k A_{11} + (k+k_2 - w_1^2m_2) A_{21} = 0$$

(2.13)

$$(k+k_1 - w_2^2m_1) A_{12} - k A_{22} = 0$$

$$-k A_{12} + (k+k_2 - w_2^2m_2) A_{22} = 0$$

ifadeleri elde edilir. Bu ifadelerden yararlanarak A_{11}/A_{21} ile A_{12}/A_{22} izafi genlikler oranlarını bulalım.

$$\frac{A_{11}}{A_{21}} = \frac{k}{k+k_1 - w_1^2m_1} = \frac{k+k_2 - w_1^2m_2}{k}$$

$$\frac{A_{12}}{A_{22}} = \frac{k}{k+k_1 - w_2^2m_1} = \frac{k+k_2 - w_2^2m_2}{k} \quad (2.14)$$

izafi genlikler oranları, uygunluk bakımından aşağıdaki gibi tanımlanırlar.

$$\frac{A_{11}}{A_{21}} = \frac{u_{11}}{u_{21}} = \frac{1}{u_1} \quad \text{ve} \quad \frac{A_{12}}{A_{22}} = \frac{u_{12}}{u_{22}} = \frac{1}{u_2} \quad (2.15)$$

Buradan, u_1 ve u_2 ; x_1 ile x_2 'nin w_1 ve w_2 doğal frekanslarındaki izafi genlikleri olarak tanımlanırlar. İzafi genlikler cinsinden (2.12) denklemi tekrar yazılırsa;

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ u_1 \end{bmatrix} A_{11} \sin(w_1 t + \theta_1) + \begin{bmatrix} 1 \\ u_2 \end{bmatrix} A_{12} \sin(w_2 t + \theta_2) \quad (2.16)$$

elde edilir.

Burada A_{11}, A_{12}, θ_1 ve θ_2 başlangıç koşullarıyla tayin edilirler. u_1 ve u_2 izafi genlikleri ise başlangıç koşullarından bağımsız olup verilen bir doğal frekans için değerleri sabittir.

Yukarıda ele alınan sistemin bütünü aynı bir frekansta titreşim yaptığında, bu durumda sistem "prensib" veya "doğal" titreşim modunda titreşiyor denir. Örneğin son olarak elde ettiğimiz (2.16) eşitliğinde $A_{12}=0$ için,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ u_1 \end{bmatrix} A_{11} \sin(w_1 t + \theta_1) \quad (2.17)$$

elde edilir. Bu durumda sistem, birinci titreşim biçiminde (modunda) titreşiyor denir. Eğer $A_{11}=0$ ise

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ u_2 \end{bmatrix} A_{12} \sin(w_2 t + \theta_2) \quad (2.18)$$

ifadesi bulunur. Bu durumda ise sistem ikinci titreşim biçiminde (modunda) titreşim hareketi yapıyor denir. Bu titreşim durumları şekil 2.2.b. 'de gösterilmiştir. Şimdi, (2.17) ve (2.18) denklemleri yeni bir tanımlamayla aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned} \{X_1\} &= \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{bmatrix} . P_1(t) \approx \{u\}_1 . P_1(t) \\ \{X_2\} &= \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} . P_2(t) \approx \{u\}_2 . P_2(t) \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \text{Burada, } \{u\}_1 &= \{ u_{11} \ u_{21} \} = \{1 \ u_1\} \\ \{u\}_2 &= \{ u_{12} \ u_{22} \} = \{1 \ u_2\} \end{aligned}$$

şeklindedir. $\{u\}_i$ 'ler modal vektörler (özvektörler) olup iza-fi genliği veya $x_1(t)$ ile $x_2(t)$ titreşim hareketlerinin mod şekillerini (titreşim biçimlerini) temsil eder. Böylece prensib modu, modal vektörlerle tanımlanmış olmaktadır. Diğer

$$\begin{aligned} P_1(t) &= A_{11} \sin(\omega_1 t + \phi_1) \\ P_2(t) &= A_{12} \sin(\omega_2 t + \phi_2) \end{aligned} \quad (2.20)$$

ifadeleri harmonik hareketler olup tüm sistemin bir prensib modunda, eş zamanlı harmonik harekete zorlandığını gösterir. Bu tanımlamalara göre (2.16) denkleminde $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ harmonik hareket fonksiyonları aşağıdaki gibi ifade edilebilirler.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} \sin(\omega_1 t + \phi_1) \\ A_{12} \sin(\omega_2 t + \phi_2) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

veya

$$\{X\} = [u] \{P\} \quad (2.22)$$

Buradaki,

$$[u] = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ u_1 & u_2 \end{bmatrix}$$

veya,

$$[u] = [\{u\}_1 \ \{u\}_2] \quad (2.23)$$

ifadelerine modal matris denilmektedir.

Görüldüğü gibi (2.23) eşitliği ile tanımlanan modal matris, modal vektörlerin basit bir düzenlenmesidir. $\{P\}$ vektörü, ω_1 ve ω_2 doğal frekanslarında bir takım harmonik fonksiyonlardan oluşur ve prensib koordinatlar diye adlandırılırlar. Herbir $P_i(t)$ prensib koordinatı ve onunla ilgili $\{u\}_i$ modal vektörü (2.21) denklemlerinde gösterildiği gibi bir titreşim modunu tanımlar [5].

Yukarıda elde edilen bağıntılar n-serbestlik dereceli sistemlere de kolayca uyarlanabilir. Örneğin; bir mekanik sistemin koordinatları $\{X\}=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ şeklinde tanımlanmış olsun. Bu durumda $x_i(t)$ hareketlerinin herbiri n-tane harmonik kısımdan oluşur. Eğer tüm sistem, doğal frekansların birinde eş zamanlı harmonik harekete zorlanırsa bir prensib modu meydana gelir. Benzer prensib koordinatlar $\{P\}=\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ şeklindedir. $[u]$ modal matrisi n-tane $\{u\}_i$ modal vektörlerden meydana gelmektedir.

$$[u] = [u_{ij}] = [\{u\}_1, \{u\}_2, \dots, \{u\}_n] \quad (2.24)$$

$$i, j=1, 2, 3, \dots, n$$

$\{X\}$ ile $\{P\}$ koordinatları arasındaki dönüşüm (2.22) denkleminde yapılmaktadır.

2.2.2. Özdeğer Problemi ve Titreşim (doğal) Modları

Bir mekanik sistemin mod şekillerini ve doğal frekanslarını belirlemek için ilk önce sistemin sönümsüz serbest titreşim yaptığı kabul edilir. Böyle bir sistem için hareket denklemi;

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = 0 \quad (2.25)$$

formundadır.

Bir titreşim modunun frekansı özdeğerler cinsinden tanımlanır. Özel bir özdeğere karşılık gelen, denklemlerin $\{u\}$ çözüm vektörü bir öz vektör olarak adlandırılır.

Sistemin hareket denklemlerini çözmek için ilk önce bu birbirlerine bağlı denklemleri $[u]$ modal matrisi yardımıyla ayırıp prensib koordinatlarda ifade etmek gerekir. Bunun için kütle ve rijitlik matrisleri, simetrik matrisler olmalıdır. Böylece, ayrılmış denklemlerden herbiri bağımsız, tek serbestlik dereceli bir sistem gibi çözülebilir. Son olarak da $\{X\}=[u]\{P\}$ ve $\{P\}=[u]^{-1}\{X\}$ koordinat dönüşümüyle istenilen $\{P\}$ veya $\{X\}$ koordinatları cinsinden, sistem cevabı elde edilir [6].

Tüm sistem bir w doğal frekansında eş zamanlı harmonik

harekete zorlanıyorsa bir prensib modu ortaya çıkmaktaydı. Böylece x_i yerdeğiştirmesinin ivmesi; $\ddot{x}_i = -w^2 x_i$ olur. Denklem 2.25) 'de \ddot{x} yerine $-w^2 x$ koyarsak;

$$-w^2 [M] \{x\} + [K] \{x\} = 0$$

veya

$$\left[-w^2 [M] + [K] \right] \{u\} = 0 \quad (2.26)$$

elde edilir. Burada $\{u\} = \{x\}$ dir. (2.26) denklemi, $[M]^{-1}$ ile çarpılıp yeniden düzenlenirse;

$$\left[[M]^{-1} [K] - w^2 [I] \right] \{u\} = 0$$

$$\Delta(w^2) = \left[w^2 I - H \right] \{u\} = 0 \quad (2.27)$$

elde edilir. Bu ifade $\tau = w^2$ konarak, aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\left[[M]^{-1} [K] - \tau [I] \right] \{u\} = 0$$

$$\Delta(\tau) = \left[\tau I - H \right] \{u\} = 0 \quad (2.28)$$

elde edilir. Burada τ özdeğer olarak adlandırılır.

$[M]^{-1} [K]$ kare matrisi H ile gösterilip dinamik matris diye adlandırılır. $[M].[M]^{-1} = [I]$ ise birim matrisdir. Elde edilen son denklem eş zamanlı cebirsel lineer homojen bir denklemler takımıdır. Burada katsayılar determinantı sıfır olmalıdır. Böylece;

$$\Delta(\tau) = \left| \tau [I] - [M]^{-1} [K] \right| = 0 \quad (2.29)$$

$$\Delta(\tau) = \left| \tau I - H \right| = 0$$

elde edilir. Açık olarak yazmak gerekirse;

$$\Delta(\tau) = \left| \tau I - H \right| = a_0 + a_1 \tau + a_2 \tau^2 + \dots + a_n \tau^n \quad (2.30)$$

olduğu görülür. Bu ifadeye n-serbestlik dereceli bir sistemin frekans veya karakteristik denklemi denir. Çözümünden, sistemin serbestlik derecesi sayısı kadar $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$

özdeğerler ve bunlara karşılık gelen w_1, w_2, \dots, w_n ile gösterilebilecek serbest titreşim frekansları elde edilir. Karakteristik denklemin kökleri w_i 'ler sistemin sönümlenmemiş doğal frekanslarını ifade eder. $[M]$ ve $[K]$ matrislerinin pozitif oldukları kabulü sonucundan, τ değerlerinin reel ve pozitif oldukları söylenebilir [7]. n -tane w_i doğal frekansları genellikle birbirlerinden farklıdırlar. Ancak bazı özel hallerde iki doğal frekansın aynı olması da mümkündür. Fakat biz incelemelerimizde köklerin farklı olması durumunu esas almak istiyoruz. Bulunan w_i 'leri karakteristik denklemde yerine yazarsak, τ 'lere karşılık gelen doğal veya prensib mod şekli $\{u\}_i$ 'leri elde ederiz ki buna da özvektör veya modal vektör denir. Her sistemin serbestlik derecesi sayısı kadar mod şekli vardır. Buradaki $\{u\}_i$ 'nin elemanları yerdeğiştirmelere karşılık geldiği için mod şekli, sistemin karşılık gelen frekansla titreşimi sırasında aldığı konumu verir.

Örneğin; $\tau_i = w_i^2$ için (2.27) ifadesi;

$$[\tau_i I - H] \{u\}_i = \{0\} \quad ; \quad i=1,2,3,\dots,n \quad (2.31)$$

şeklini alır.

Burada $\{u\}_i$, w_i doğal frekansına karşılık gelen modal vektördür. (2.27) hareket denkleminin genel çözümü harmonik çözümlerin süperpozisyonundan elde edilir. Bu çözüm, tüm titreşim modlarının gözönüne alınmasıyla;

$$\{x\} = \sum_{i=1}^n \{u\}_i \sin(w_i t + \phi_i) \approx \sum_{i=1}^n \{u\}_i \cdot P_i(t)$$

$$\{x\} = [u]\{P\} \quad ; \quad \{P\} = [u]^{-1}\{x\} \quad (2.32)$$

şeklindedir. Bu ise, sistemdeki ayrık kütlelerin $x(t)$ hareketinin bir ifadesidir. (2.32) denklemdeki $[u]$ modal matrisi, lineer bir mekanik sistemin bütün titreşim modlarını tanımlar.

0 halde görmüş olduk ki, sistemimiz n -tane farklı doğal frekansta (2.8) eşitliğinde tanımlanan basit harmonik hareket yapabilmektedir. Şimdi bu harmonik hareketler

esnasında söz konusu olacak $\{u\}_i$ genliklerinin ne değerler alacağını bulmak isteyelim. Örneğin i -nci doğal frekans w_i 'yi gözönüne alalım. Bunu (2.27) denkleminde yerine koyarsak;

$$(\tau [I] - [M]^{-1}[K])\{u\} = 0 \quad (2.33)$$

yazılır. Bu denklem sisteminden bulunacak olan çözüm vektörü $\{u\}_i$ ile gösterilsin, yani;

$$(\tau_i [I] - [M]^{-1}[K])\{u\}_i = 0 \quad (2.34)$$

bağıntısı sağlansın. $\{u\}_i$ vektörüne i -nci özvektör veya karakteristik vektör denir.

$$\{u\}_i = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \quad (2.35)$$

(2.34) denkleminin homojen bir denklem sistemi olması nedeniyle $\{u\}_i$ elemanlarının sadece oranlarını tayin edebileceğimiz ortadadır. Dolayısıyla, belirli bir w_i doğal frekansı için (2.34) 'den elde edilecek $\{u\}_i$, belirli bir forma sahip ve şiddeti keyfi olan bir vektördür. $\{u\}_i$ özvektörlerine modal vektörler, temsil ettikleri şekle de titreşim (doğal) modları adı verilmektedir. Modal vektörler doğal frekanslarıyla birlikte sistemin dinamik bir özelliğidir [5],[6].

2.2.3. Mod Şekillerinin Normalizasyonu

Bir önceki kısımda $\{u\}_i$ modal vektörlerinin ancak oranlarının belli olduğunu söylemiştik. Bunlardan biri için bir değer seçip geriye kalan $(n-1)$ elemanı tayin etmek adet olmuştur. Bu işleme normalizasyon, bu şekilde elde edilen vektörlere de normal modlar denilmektedir. Mod vektörlerinin hesabında elemanların oranı sabit kalmak üzere, değişik çözümler yapılabilir. Şekil aynı olduğu halde farklı genlikler elde edilebilir. Bu keyfilik bir normalize işlemi kabul edilerek ortadan kaldırılır. Pratikte normalizasyon

için genellikle aşağıdaki iki yoldan birisi tercih edilmektedir.

a- Modal vektörler, [M] kütle matrisi veya [K] rijitlik matrislerine göre normalize edilmektedir. Bu metodta kütle matrisini aynı mod vektörüyle sağ ve soldan çarparak sonucun birim olması sağlanır.

$$\{u\}_i^T \cdot [M] \cdot \{u\}_i = I \quad (2.36)$$

b- Modal vektörün en büyük elemanının değeri birim olarak alınmaktadır. Böyle yapılmış diğer elemanlar 1 'den küçük olurlar ki bu da mod şekillerinin çiziminde kolaylık sağlayan bir durumdur.

Normalizasyon işleminin, işlem kolaylığı sağlayan matematiksel bir yöntem olmaktan başka bir özelliği ve bu arada fiziksel bir önemi yoktur. Aynen doğal frekanslar gibi normal modlar da mekanik sistemin birer karakteristiğidirler. Sisteme özgüdürler zira, kütle ve rijitlik özelliklerini yansıtmakta olan m_{ij} ve k_{ij} 'lere bağlıdırlar.

Normal modlarla ilgili olarak şunu da belirtmekte fayda vardır. Herbir normal mod diğerlerinden bağımsız olarak uyarılabilir. Bunun için sistemin kaçınıcı doğal frekansta titreşmesini istiyorsak, o mod şeklini başlangıç şartları vektörü olarak seçmek yeterlidir. Örneğin sistemin w_i doğal frekansıyla titreşmesi için sistemi başlangıçta $\{u\}_i$ i-nci moduna uygun olarak yerdeğiştirme verip serbest bırakmak yeterlidir [8].

2.2.4. Modal Matris Bulunması

Bir özdeğerin bir doğal frekansa karşılık geldiği, öz vektörün (modal vektör) titreşimin prensib modunu temsil ettiği ve modal matrisin, bir sistemin titreşiminin tüm doğal modlarını tanımladığı daha önce açıklanmıştı. Bu kısımda konuya esas teşkil eden modal matrisin bulunması

açıklanacaktır. Bunun için en açık olan yöntem (2.29) ifadesindeki homojen denklemleri çözmektir.

Verilen bir H dinamik kare matrisi için, homojen cebrik denklemler takımının oluşturulmasında $[\tau I - H]\{u\} = 0$ denklemi kullanılır.

Örneğin H dinamik matrisi aşağıdaki gibi tanımlanmış olsun;

$$[M]^{-1}[K] = H = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -8 & 3 & 7 \\ -8 & -1 & 11 \end{bmatrix}$$

Bu matrisi (2.29) denkleminde yerine yazalım.

$$[\tau I - H]\{u\} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \tau - 2 & 1 & -1 \\ 8 & \tau - 3 & 7 \\ 8 & -1 & \tau - 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Buradan karakteristik denklem,

$$\Delta(\tau) = \begin{vmatrix} \tau - 2 & 1 & -1 \\ 8 & \tau - 3 & 7 \\ 8 & -1 & \tau - 11 \end{vmatrix} = (\tau - 2)(\tau - 4)(\tau - 10) = 0$$

Böylece, özdeğerler $\tau_1 = 2$, $\tau_2 = 2$ ve $\tau_3 = 10$ olarak bulunur. Şimdi, herbir τ değeri için homojen denklemler takımını oluşturup $\{u\}$ için çözelim.

$\tau = \omega_1^2$ özdeğeri için;

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 8 & -1 & 7 \\ 8 & 1 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

yazılır ve τ_1 özdeğeri için modal vektör;

$$\{u\}_1 = \{u_{11} \ u_{21} \ u_{31}\} = \{1 \ 1 \ 1\}$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde;

$\tau = \omega_2^2$ özdeğeri için;

$$\{u\}_2 = \{u_{12} \ u_{22} \ u_{32}\} = \{1 \ -1 \ 1\}$$

$\tau=w_3^2$ özdeğeri için;

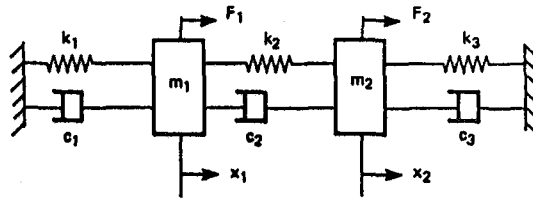
$$\{u_3\}=\{u_{13} \quad u_{23} \quad u_{33}\} = \{0 \quad 1 \quad 1\}$$

elde edilir. Modal matris, modal vektörlerin bir düzenlenmesi olarak aşağıdaki gibi belirlenir.

$$[u]=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2.5. Modal Vektörler ve Mod Şekillerinin Bulunmasına Dair Bir Uygulama

Bir uygulamalı anlatım olmak üzere, şekil 2.3. 'de verilen mekanik sisteme ait modal vektörleri bulup mod şekillerini çizelim. Bunun için ilk önce sistemin sönümsüz serbest titreşim yaptığı kabul edilir. Sistemi tanımlayan hareket denklemleri yazılır ve kütle ile rijitlik marisleri (2.29) denkleminde yerlerine koyularak frekans denklemi bulunur. Frekans denkleminde, serbestlik derecesi kadar özdeğer (doğal frekans) bulunur. Bu doğal frekansların herbirini $[\tau I-H]\{u\} = \{0\}$ denkleminde yerine yazıp $\{u\}$ modal vektörler bulunur. Elde edilen modal vektörlerin bir düzenlenmesi olarak da modal matris elde edilir.



$$\begin{array}{lll} m_1= 5 \text{ kg} & k_1=k_2=2 \text{ N/m} & F_1=F_2=0 \\ m_2=10 \text{ kg} & k_3=4 \text{ N/m} & c_1=c_2=c_3=0 \end{array}$$

Şekil 2.3. İki serbestlik dereceli bir sistem

Sistemin hareket denklemini elde edip matris formda yazalım;

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Buna göre, kütle matrisi ile rijitlik matrislerini (2.28) denkleminde yerine yazabiliriz.

$$\left[\tau \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.8-\tau & -0.4 \\ -0.2 & 0.6-\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bu matris denkleminin determinantı sıfıra eşitlenirse ;

$$\tau^2 - 1.4\tau + 0.4 = 0$$

şeklinde karakteristik denklem elde edilir. Denklem kökleri yani özdeğerler;

$$\tau_1=2/5 \quad \text{ve} \quad \tau_2=1$$

olarak bulunur. Bu özdeğerleri $[\tau I - H]\{u\}=\{0\}$ hareket denklemini ifadesinde yerine yazarsak iki doğal mod şeklini elde ederiz. Böylece,

$\tau_1=2/5$ için mod şekli;

$$\begin{bmatrix} 0.8-0.4 & -0.4 \\ -0.2 & 0.6-0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$0.4 u_1 - 0.4 u_2 = 0$$

$$u_1 = u_2$$

Buradan w_1 doğal frekansı için modal vektör;

$$\{u\}_1 = \{ u_1 \quad u_1 \}$$

dir. Benzer şekilde,

$\tau_2=1$ için mod şekli;

$$\begin{bmatrix} 0.8-1 & -0.4 \\ -0.2 & 0.6-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} -0.2 u_1 - 0.4 u_2 &= 0 \\ u_2 &= -u_1/2 \end{aligned}$$

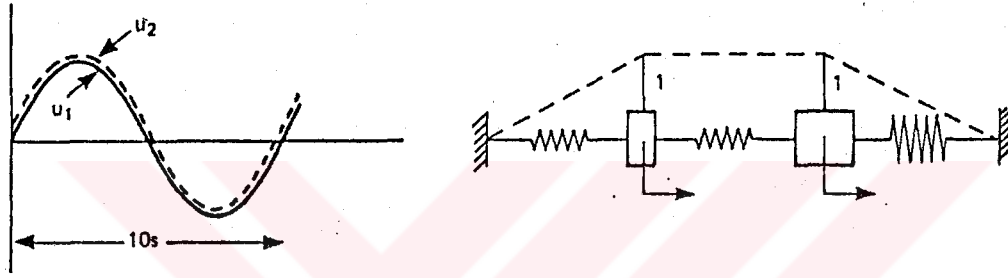
Buradan w_2 doğal frekansı için modal vektör;

$$\{u\}_2 = \{ u_1 \quad -u_1/2 \}$$

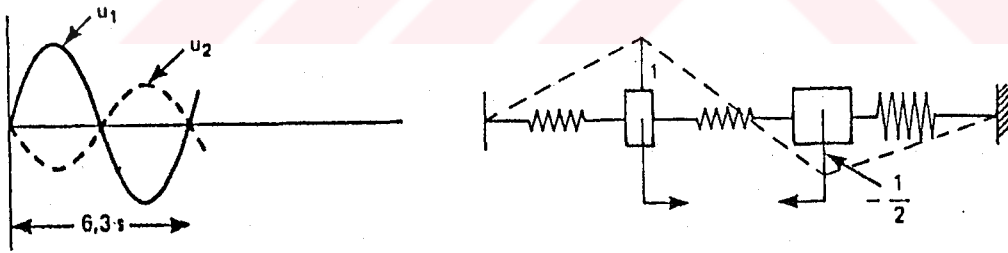
olarak saptanır.

Keyfi bir yerdeğiştirme için $u_1=1$ alalım ve mod şekillerini bulalım.

$$\tau_1=2/5 \text{ için } \{u\}_1 = \{ 1 \quad 1 \}; \quad \tau_2=1 \text{ için } \{u\}_2 = \{ 1 \quad -\frac{1}{2} \}$$



$\tau_1=2/5$ için kütleler aynı fazda hareket ederler.



$\tau_2=1$ için kütleler farklı fazda hareket ederler.

Şekil 2.4. İki serbestlik dereceli sistem için özfrekans ve mod şekilleri

Titreşim modları çizilirken kütlelerin, örneğin sağa doğru olan yerdeğiştirmeleri yataydan yukarıya doğru taşıdık; sola doğru olanları da, yataydan aşağıya doğru gösterdik. Birinci modda her iki kütle ya sağa yada sola doğru hareket ettiği için bir düğüm noktası mevcut değildir. Buna karşılık ikinci modda ise kütlelerin hareketi zıt yönlü olduğu için

aralarındaki bir noktada düğüm noktası ortaya çıkacaktır.

Titreşim modlarının çizilmesiyle sistemin serbest titreşimde nasıl davranacağı anlaşılır. Serbest titreşim modları ancak belirli frekanslardaki hareketlerde ortaya çıkar. Ayrıca serbest titreşimde ancak başlangıç yerdeğiştirmelerinin mod şekline uygun seçilmesi durumunda, titreşim sözkonusu mod şeklinde meydana gelir. Değişik bir şekilde başlangıç koşullarının seçilmesi durumunda ise, serbest titreşim şekli modların belirli bir toplamı olarak ortaya çıkar [4].

Çözülen örnekte $u_1=1$ alınarak normalizasyon işlemi yapılmış ve bundan ötürü modal vektörler bulunmuştur. Aynı normalizasyon işlemi;

$$\{u\}_1^T [M] \{u\}_1 = 1$$

veya

$$\{u\}_2^T [M] \{u\}_2 = 1$$

işlemleriyle de yapılabilir.

$$\{u\}_1^T [M] \{u\}_1 = 1 \quad \text{veya} \quad [u]_1 [M] \{u\}_1 = 1$$

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = 1$$

$$5 u_1^2 + 10 u_1^2 = 1$$

$$u_1 = \pm \sqrt{1/15}$$

Pozitif kök kullanılarak; normalizeleştirilmiş modal vektör $\{u\}_1$,

$$\{u\}_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{1/15} \\ \sqrt{1/15} \end{bmatrix}$$

dir.

Benzer şekilde $\{u\}_2$ için;

$$\{u\}_2^T [M] \{u\}_2 = 1 \quad \text{veya} \quad [u]_2 [M] \{u\}_2 = 1$$

$$\begin{bmatrix} u_1 & -\frac{u_1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ -u_1/2 \end{bmatrix} = 1$$

$$5 u_1^2 + 5 \frac{u_1^2}{2} = 1$$

$u_1 = \sqrt{2/15}$
Normalizelerilmiş modal vektör $\{u\}_2$,

$$\{u\}_2 = \begin{bmatrix} u_1 \\ -u_1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2/15} \\ -\frac{1}{2} \sqrt{2/15} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu son elde edilen $\{u\}_1$ ile $\{u\}_2$ modal vektörleri yardımıyla mod şekilleri çizilirse şekil 2.4 'ün aynısı elde edilir. Buradan, normalizasyon işlemi hangi yöntemle yapılırsa yapılsın mod şeklinin değişmeyeceği sonucunu çıkarabiliriz.

Modal vektörler frekanslarıyla beraber sistemin dinamik bir özelliğidir. Modal vektörlerin genlikleri tamamen keyfidir yani, özel bir modal vektörün bileşenleri arasındaki oranlar tekdir.

Sonuç olarak; modal matrisin elde edilmesiyle karmaşık şekillerde yay ve kütlelerle birbirlerine bağlanmış sistemleri, tek serbestlik dereceli titreşim sistemleri olarak, bileşenlerine ayırarak modelleyebiliriz.

2.2.6. Özvektörlerin Ortogonallık Özellikleri

Sönümsüz bir sistemin hareket denklemlerine ait, özel bir takım zorlayıcı fonksiyonlar ve başlangıç şartlarından dolayı, $x(t)$ sistemin dinamik cevabını bulmaya çalıştığımızda karşılaşılan en büyük engel denklemler arasındaki bağ terimleridir. Kütle ve rijitlik matrislerinin köşegen elemanları dışında sıfır olmayan eleman varsa bir bağ terimi vardır. Eğer (2.4) ifadesindeki hareket denklemleri ayrılabilirse bu denklemlerin herbiri birbirinden bağımsız olarak çözülebilir. Diğer bir ifadeyle; bağsız denklemlerin çözümleri, çok daha kolay elde edilebilen, tek serbestlik dereceli sistemlerin çözümleri gibidir. Bu yüzden, eğer bağlı denklemler takımı bağsız bir sisteme indirgenebilirse çözüm çok daha basit olur.

Bağlı denklemler takımını ayırmak, bağsız hale getirmek

için kullanılan yöntem esas itibariyle bir koordinat dönüşümüdür. Bu koordinat dönüşümü yardımıyla denklemler takımını birbirlerinden ayırarak bağımsız yapıp, sistemin dinamik davranışının belirlenmesine modal analiz denilmektedir. Burada, x genelleştirilmiş koordinatlarını, birdiğer eşdeğer (p) koordinatlar takımına dönüştürmek esastır. Bu yeni (p) koordinatlar takımına prensib koordinatlar veya modal koordinatlar adları verilir.

Bizim bağlı, genel hareket denklemlerini ayırarak olan koordinat dönüşümünü bulmak çok basittir. Modal vektörlerin kütle matrisi $[M]$ ve rijitlik matrisi $[K]$ 'ya göre ortogonallik özelliğinden dolayı istenilen koordinat dönüşümünün mevcut olduğu sonucu ortaya çıkar. Ortogonallik özelliğinden dolayı bağlı hareket denklemleri bağımsız hale getirilebilmektedir.

Sönümsüz serbest titreşim yapan bir sistem için hareket denklemlerimizi tekrar yazalım;

$$[K] \{u\} = \tau [M] \{u\} \quad (2.37)$$

Özdeğer probleminin τ_i , $\{u\}_i$ ve τ_j , $\{u\}_j$ olmak üzere iki çözümünün elimizde olduğunu kabul edelim, yani,

$$\tau_i [M] \{u\}_i = [K] \{u\}_i \quad (2.38)$$

ve

$$\tau_j [M] \{u\}_j = [K] \{u\}_j \quad (2.39)$$

sağlanıyor olsun.

(2.38) denkleminin her iki yanını soldan $\{u\}_j^T$ ile, (2.39) denkleminin ise iki yanını soldan $\{u\}_i^T$ ile çarpalım;

$$\tau_i \{u\}_j^T [M] \{u\}_i = \{u\}_j^T [K] \{u\}_i \quad (2.40)$$

$$\tau_j \{u\}_i^T [M] \{u\}_j = \{u\}_i^T [K] \{u\}_j \quad (2.41)$$

[M] kütle matrisi ile [K] rijitlik matrislerinin simetrik matrisler olduklarını göz önünde bulundurarak (2.41) 'in transpozunu alıp, sonucu (2.40) 'dan çıkarırsak;

$$(\tau_i - \tau_j) \{u\}_j^T [M] \{u\}_i = 0 \quad (2.42)$$

elde ederiz. τ_i ve τ_j öz frekanslarının birbirinden farklı olduğunu kabul edelim. Bu takdirde,

$$\{u\}_j^T [M] \{u\}_i = 0 \quad (i \neq j) \quad (2.43)$$

ifadesi elde edilir, ki bu ise ortogonalite bağıntısıdır. (2.40) ifadesinde ortogonalite bağıntısının,

$$\{u\}_j^T [K] \{u\}_i = 0 \quad (i \neq j) \quad (2.44)$$

şeklinde yazılacağı görülmektedir.

Burada şu önemli noktaya dikkati çekelim; (2.43) ve (2.44) ortogonalite bağıntılarını, [M] ve [K] matrislerinin simetrik matrisler olmalarından yararlanarak elde ettik. Denklem (2.42) 'den, $i=j$ olması durumunda (iki farklı doğal frekans olmama), zorunlu olarak bu iki modun ortogonal olmadığı ve sıfırdan başka sabit bir skalere eşit olduğu görülebilir.

$\{u\}_1, \{u\}_2, \dots, \{u\}_n$ mod vektörlerini sütun vektörleri olarak kabul eden bir matris düşünelim. Bu n boyutlu matris modal matris denildiğini daha önce söylemiştik.

$$[u] = [\{u\}_1, \{u\}_2, \dots, \{u\}_n] \quad (2.45)$$

şimdi, özdeğer problemimizi (2.37) ifadesi ile [u] modal matrisinden yararlanarak,

$$[M][u] = [K][u] \{-w^2\} \quad (2.46)$$

şeklinde yazabileceğimizi gösterelim. (2.46) 'yı doğru kabul edip şöyle yazalım;

$$[K][u] = [M][u] \{-w^2\} \quad (2.47)$$

Açık şekliyle,

$$\begin{aligned} [K\{u\}_1 \dots K\{u\}_n] &= [M\{u\}_1 \dots M\{u\}_n] \begin{bmatrix} w_1^2 & & \\ & w_2^2 & \\ & & \ddots \\ & & & w_n^2 \end{bmatrix} \\ &\equiv [w_1^2 M\{u\}_1 \dots w_n^2 M\{u\}_n] \end{aligned} \quad (2.48)$$

yazılabilir. Buradan, $[K\{u\}_i = w_i^2 [M\{u\}_i$, $(i=1,2, \dots, n)$ olduğu görülmektedir. Bu ise (2.40) 'dan başka bir şey değildir. Sıkça yararlanılan bir bağıntıyı daha verelim. Ortogonal olduğunu bildiğimiz özvektörler (2.36) uyarınca normalize edildiklerinde, $[u]$ modal matrisi,

$$\{u\}^T [M] \{u\} = I \quad (2.49)$$

ifadesini sağlar. (2.47) denklemini soldan $\{u\}^T$ ile çarpıp (2.49) 'u kullanınca, bir diğer bağıntı olarak da,

$$\{u\}^T [K] \{u\} = [-w^2] \quad (2.50)$$

elde edileceği açıktır.

Yapılan hazırlıktan sonra, artık ortogonallik özelliğinden ve ondan çıkarılan bağıntılardan yararlanmak suretiyle, hareket denklemlerinin prensib modlar yardımıyla bağıllıktan kurtarılabilceği gösterilebilir. Bunun için;

$$\{X(t)\} = [u] \{P(t)\} \quad (2.51)$$

lineer dönüşümünü kullanalım. Bu dönüşüm ifadesini (2.25) hareket denkleminde yerine yazar ve ara işlemleri yaparsak p_1, p_2, \dots, p_n prensib koordinatlarındaki hareket denkleminin,

$$\{\ddot{P}\} + [-w^2] \{P\} = \{0\} \quad (2.52)$$

şeklinde olacağını söyleyebiliriz. (2.52) matris denklemini açık yazalım;

$$\ddot{p}_i(t) + w_i^2 p_i(t) = 0 \quad ; \quad (i=1,2, \dots, n) \quad (2.53)$$

w_i , sistemin i -nci doğal frekansı olup, aşağıdaki bağıntı ile belirlidir;

$$w_i^2 = \frac{\{u\}_i^T [K] \{u\}_i}{\{u\}_i^T [M] \{u\}_i} = \{u\}_i^T [K] \{u\}_i \quad (2.54)$$

Bunu görmek için $[K]\{u\}_i = w_i^2[M]\{u\}_i$ bağıntısının her iki yanını $\{u\}_i^T$ ile çarpmak ve (2.36) uyarınca normalize ettiğimizi kabullenmek yeterlidir. (2.53), denkleminin prensib koordinatlar cinsinden çözümü,

$$p_i(t) = A_i \cos(w_i t - \phi_i) \quad ; \quad (i=1,2, \dots, n) \quad (2.55)$$

şeklinde harmonik bir çözüm olacağı ortadadır. Burada A_i ve ϕ_i 'ler genlik ve faz açısı olarak adlandırılan integrasyon sabitleridir.

Bu hazırlıklardan sonra artık çıkış noktamız olan (2.25) hareket denkleminin genel çözümünü yazabiliriz. (2.51) koordinat dönüşüm ifadesi ile (2.55) harmonik çözüm yardımıyla,

$$\{X(t)\} = \{u\}\{P\} = [\{u\}_1, \{u\}_2, \dots, \{u\}_n] \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix}$$

veya açık ifadeyle,

$$\{x(t)\} = \sum_{i=1}^n A_i \{u\}_i \cos(w_i t - \phi_i) \quad (2.56)$$

elde edilir.

Bu sonucu şöyle yorumlayabiliriz: Sistemin serbest titreşimleri, frekansları sistemin doğal frekanslarına eşit, farklı genlik ve faz açılara sahip n -tane harmonik bileşenin toplamı şeklinde olmaktadır.

2.2.7. Genelleştirilmiş Kütle ile Genelleştirilmiş Rijitlik Matrisleri ve Katsayıları

Yukarıdaki kısımda verilen (2.42) denkleminde açıkça görüldüğü üzere, $i=j$ olması durumunda (2.43) denklemini sıfırdan farklı M_i gibi bir sabite eşit olur. Tüm titreşim

modlarını gözönüne alırsak;

$$[u]^T [M] [u] = [-M_-] \quad (2.57)$$

dir. (2.44) denklemi ise;

$$[u]^T [K] [u] = w^2 [-M_-] = [-K_-] \quad (2.58)$$

olur. Kütle ve rijitlik matrisleri, modal matrisler ile çarpıldığından yine matris şeklinde ifadeler elde edilir. Bu $[-M_-]$ ve $[-K_-]$ diagonal matrislerine sırasıyla genelleştirilmiş kütle ve genelleştirilmiş rijitlik katsayılar matrisi adı verilir. Bir sistemin dinamik davranışını, genelleştirilmiş kütle ve genelleştirilmiş rijitlik katsayılarından yararlanarak da belirleyebiliriz. $\{X\}=[u]\{P\}$ koordinat dönüşüm ifadesini (2.25) hareket denkleminde yerine yazalım,

$$[M][u]\{\ddot{P}\} + [K][u]\{P\} = \{0\} \quad (2.59)$$

Bu ifadeyi $[u]^T$ ile çarpalım;

$$[u]^T [M][u]\{\ddot{P}\} + [u]^T [K][u]\{P\} = \{0\} \quad (2.60)$$

elde edilir. (2.57) ve (2.58) genelleştirilmiş kütle ve genelleştirilmiş rijitlik matris ifadelerinden,

$$[-M_-]\{\ddot{P}\} + [-K_-]\{P\} = \{0\} \quad (2.61)$$

ifadesi bulunur ki burada $[-M_-]$ ve $[-K_-]$ köşegen elemanları m_{ii} ve k_{ii} olan birer diagonal matrislerdir. Yani (2.61) ifadesi ;

$$m_{ii}\ddot{P}_i + k_{ii}P_i = 0 \quad ; (i=1,2, \dots ,n) \quad (2.62)$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi $w=w_r$ frekansı için hareket denklemi; $m_{rr}\ddot{P}_r + k_{rr}P_r = 0$ olarak yazılır. Ayrıca $w_r^2=k_{rr}/m_{rr}$ olduğundan (2.62) denklemi,

$$\ddot{p}_r + w_r^2 p_r = 0 \quad (2.63)$$

haline dönüşür. Dikkat edilirse, genelleştirilmiş kütle matrisi $[-M-]$ ve genelleştirilmiş rijitlik matrisi $[-K-]$ ile elde edilen hareket denklemi, (2.53) 'de ortogonalite özelliğinden elde edilen hareket denklemiyle aynıdır. Bu yöntem kullanılarak da hareket denklemleri ayrılmış olmaktadır [5],[9].

Kısım 2.2.5. 'de mod şekillerinin bulunduğu örneğin hareket denklemlerini genelleştirilmiş kütle ve genelleştirilmiş rijitlik katsayıları yardımıyla bağımsız hale getirelim.

Mod şekilleri;

$$\tau_1 = 2/5 \quad \text{için} \quad \{u\}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$\tau_2 = 1 \quad \text{için} \quad \{u\}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

olarak bulunmuşlardı. $\{u\}_1$ modal vektörü (2.57) ifadesinde yerine yazılırsa, birinci mod için M_1 genelleştirilmiş kütlesi bulunur.

$$\{u\}_1^T [M] \{u\}_1 = M_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = M_1 \quad , \quad M_1 = 15$$

Benzer şekilde, $\{u\}_2$ modal vektörü (2.57) ifadesinde yerine yazılırsa, ikinci mod için M_2 genelleştirilmiş kütlesi bulunur.

$$\{u\}_2^T [M] \{u\}_2 = M_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = M_2 \quad , \quad M_2 = 15/2$$

Genelleştirilmiş kütleler M_1 ve M_2 , birinci ve ikinci modlar için sırasıyla 15 ve $15/2$ dir. Burada kütle matrisi modal matrisle değil de sadece bir doğal frekansa karşılık gelen modal vektörle çarpıldığından sonuç bir matris değil, M_1 ve M_2 gibi sabitler olmuştur.

Birinci ve ikinci modlar için genelleştirilmiş rijitlik katsayıları;

$$K_1 = w_1^2 M_1 = \frac{2}{5} \cdot 15 = 6$$

$$K_2 = w_2^2 M_2 = 1 \cdot \frac{15}{2} = \frac{15}{2}$$

şeklinde bulunur. Böylece, şekil (2.3) 'de gösterilen iki serbestlik dereceli sistem, genelleştirilmiş rijitlik katsayıları kullanılarak aşağıdaki gibi birbirinden bağımsız iki ayrı, tek serbestlik dereceli sisteme ayrılmış olur.



şekil 2.5. İki tane ayrı tek serbestlik dereceli sistem

Böylece şekil 2.3.'de verilen iki serbestlik dereceli sistemin dinamik davranışı, birbirinden bağımsız iki tane ayrı, tek serbestlik dereceli sistemin davranışıyla belirlenebilir.

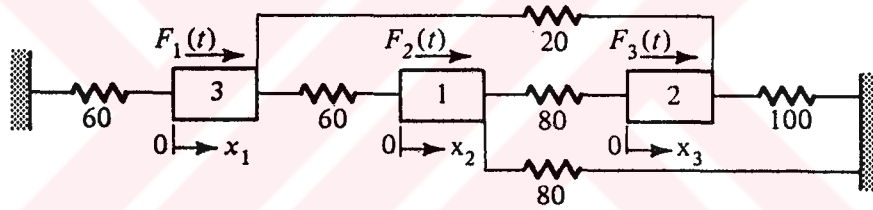
2.2.8. Bilgisayar Çözümleri

Bir mekanik sistemin serbestlik derecesi sayısı arttığında, dinamik davranışı belirlemek için gerekli analitik çözüm daha da karmaşık hale gelmektedir. Böyle

durumlarda bilgisayar programlarını kullanmak kaçınılmaz olmaktadır.

EK.A 'da verilen TRESPOND adlı bilgisayar programı, sönümsüz serbest titreşim yapan ayrık bir sistemin dinamik davranışının modal analiz yöntemiyle belirlenmesinde kullanılmaktadır. Bunun için ilk önce hareket denklemleri, modal matris kullanılarak bağımsız hale getirilir ve $\{p\}$ prensib koordinatları cinsinden ifade edilir. Bu aşamadan sonra bağımsız denklemlerin herbiri, birbirinden bağımsız tek serbestlik dereceli sistem gibi çözülür. Son olarak $\{p\}$ prensib koordinatları cinsinden elde edilen çözümler, genelleştirilmiş $\{x\}$ koordinatlarına dönüştürülür.

Şekil 2.6. 'da gösterilen sönümsüz serbest titreşim yapan mekanik sistemin dinamik davranışını program TRESPOND ile belirleyelim;



Şekil 2.6. Sönümsüz serbest titreşim yapan mekanik bir sistem

Sistem üç serbestlik dereceli olup her bir kütle için Newton 'un 2. hareket kanunu yazılırsa;

$$3\ddot{x}_1 = -60 x_1 - 60(x_1 - x_2) - 20(x_1 - x_3) + F_1(t)$$

$$1\ddot{x}_2 = -80 x_2 - 60(x_2 - x_1) - 80(x_2 - x_3) + F_2(t)$$

$$3\ddot{x}_3 = -100 x_3 - 60(x_3 - x_1) - 20(x_3 - x_2) + F_3(t)$$

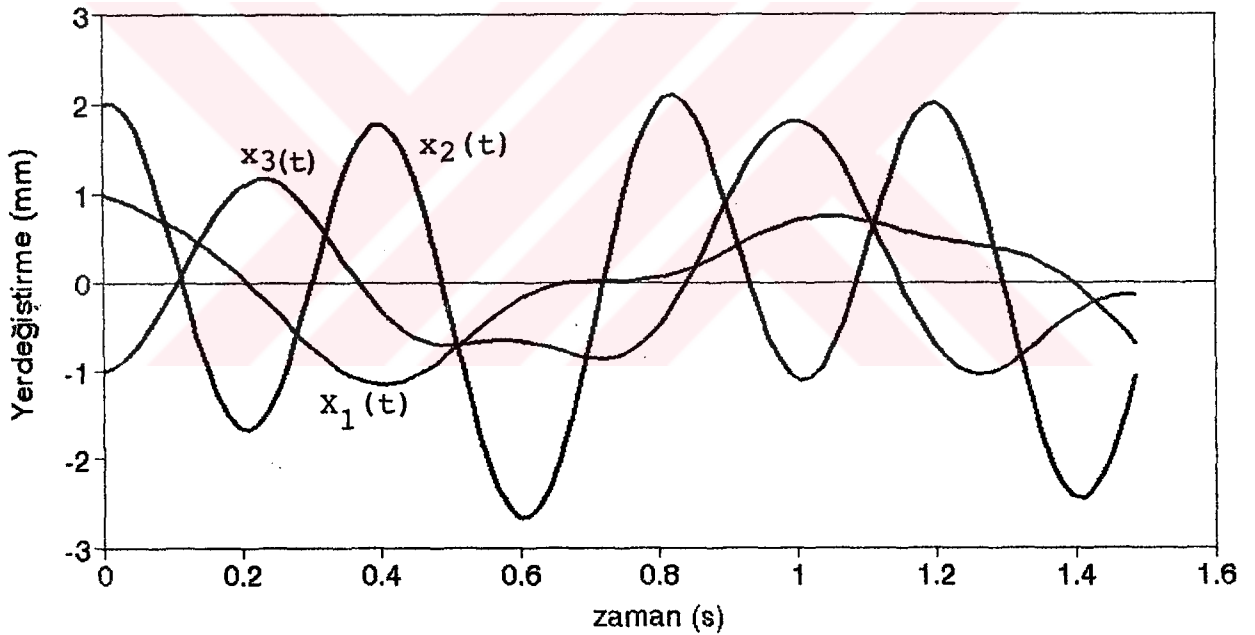
hareket denklemleri elde edilir.

Sistemdeki kütlelere dışarıdan bir kuvvet uygulanmadığından, yani $F_1(t) = F_2(t) = F_3(t) = 0$ olduğundan dolayı hareket denklemleri matris formda aşağıdaki gibi yazılabilmektedir.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 140 & -60 & -20 \\ -60 & 220 & -80 \\ -20 & -80 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Buradaki, [M] kütle matrisi ve [K] rijitlik matrisi simetrik matrisler olduklarından modal analiz yöntemi uygulanabilmektedir.

Hareket denklemlerinden elde edilen, kütle ve yay matrisleri ile birlikte, başlangıç şartları için $\{x(0)\}=\{1 \ 2 \ -1\}$ ve $\{\dot{x}(0)\}=\{-3 \ 4 \ 1\}$ olarak alınarak, sistemin dinamik davranışı program TRESPOND kullanılarak elde edilmiştir. Bilgisayar sonuçları şekil 2.7.'de grafik olarak verilmiştir.



Şekil 2.7. Şekil 2.6.'da verilen sistemin zamana göre geçici davranışları

2.3. Zorlanmış Titreşim Sistemlerinin Modal Analizi

2.3.1. Sönümsüz Zorlanmış Titreşim

Hareket denklemlerini bağımsız bir denklem takımına dönüştürerek, sistemin dinamik davranışını bulma yöntemine modal analiz denildiği daha önceki kısımlarda belirtilmişti. Bağımsız denklem takımını çözmek için, sütunları mod şekil vektörleri olan $[u]$ modal matrisini kullanan bir koordinat dönüşümüne ihtiyaç vardır. Bu dönüşümün $\{X\}=[u]\{P\}$ lineer ifadesiyle yapıldığını biliyoruz.

Çok serbestlik dereceli, sönümlü zorlanmış bir sistemin genel hareket denklemi (2.3) eşitliği ile verildiği gibi,

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{F(t)\} \quad (2.64)$$

formundadır.

Sönümsüz zorlanmış bir sistem için, yani sistemde sönüm olmaması durumunda, hareket denklemindeki $[C]$ sönüm matrisi ortadan kalkar. Böylece hareket denkleminiz aşağıdaki gibi olur.

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} = \{F(t)\} \quad (2.65)$$

Hareket denklemlerini bağımsız yapmak için $\{X\}=[u]\{P\}$ koordinat dönüşüm ifadesi, (2.65) denkleminde yerine yazılırsa;

$$[M][u]\{\ddot{P}\} + [K][u]\{P\} = \{F\} \quad (2.66)$$

elde edilir.

(2.66) ifadesinin her iki yanını $[u]^T$ ile çarpalım.

$$[u]^T[M][u]\{\ddot{P}\} + [u]^T[K][u]\{P\} = [u]^T\{F\} \quad (2.67)$$

(2.57) ve (2.58) ifadelerinden yararlanarak, (2.67) denklemi

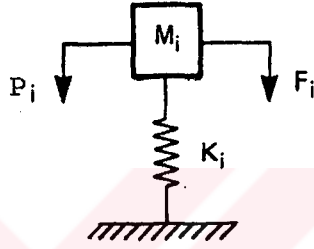
$$[\sim M\sim]\{\ddot{P}\} + [\sim K\sim]\{P\} = [u]^T\{F\} \quad (2.68)$$

şeklinde yazılabilir.

(2.65) denklemi aşağıdaki formda n-tane denklemi ifade eder.

$$M_i \ddot{p}_i + K_i p_i = \{u\}_i^T \{F\} = F_i \quad ; \quad (i=1,2, \dots, n) \quad (2.69)$$

Burada $\{u\}_i$, modal matrisin i-nci mod şeklinin i-nci sütunudur. M_i ve K_i sırasıyla i-nci modal kütle ve i-nci modal rijitlik olarak adlandırılırlar. Böylece (2.69) denklemi i-nci doğal frekansta, şekil 2.8.' de gösterilen tek serbestlik dereceli sistem için bir hareket denklemi olmuştur [4],[6].



şekil 2.8. (2.69) hareket denklemiyle tanımlanan tek serbestlik dereceli sistem

$K_i = w_i^2 M_i$ olduğundan (2.69) denklemi şu şekilde yazılabilir;

$$\ddot{p}_i + w_i^2 p_i = \frac{F_i}{M_i} = \frac{\{u\}_i^T \{F\}}{\{u\}_i^T [M] \{u\}_i} = \{N_i(t)\} \quad (2.70)$$

Burada $\{N_i(t)\}$ genelleştirilmiş zorlayıcı kuvvettir.

Denklem (2.68) 'in çözümü tüm p_i 'ler için yapılar ve $x(t)$ genelleştirilmiş koordinatları cinsinden çözümler, $\{X\} = [u] \{P\}$ lineer dönüşümüyle bulunur.

Kısım 2.2.5 'de çözülen örneğin, kütlelere F_1 ve F_2 zorlayıcı kuvvetlerinin etkimesi durumundaki davranışını modal analiz yöntemiyle elde edelim. Bu durumda hareket denkleminiz matris formunda aşağıda verildiği gibi olacaktır,

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

Daha önce elde edilmiş olan doğal frekanslar ve mod şekilleri gözönüne alınırsa;

$$\tau_1 = 2/5 \quad \text{için} \quad \{u\}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$\tau_2 = 1 \quad \text{için} \quad \{u\}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Buradan, doğal mod şekillerini kullanan $[u]$ modal matrisi;

$$[u] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

şeklinde düzenlenir.

Koordinat dönüşüm ifadesini sistemin hareket denkleminde yerine yazalım.

$$[u]^T \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} [u] \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + [u]^T \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} [u] \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = [u]^T \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

Modal matrisler cinsinden elde edilen hareket denkleminde genelleştirilmiş kütle ve genelleştirilmiş rijitlik katsayılarını bulalım.

$$[-M-] = [u]^T [M] [u] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 15/2 \end{bmatrix}$$

$$[-K-] = [u]^T [K] [u] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 15/2 \end{bmatrix}$$

Genelleştirilmiş kütle ile genelleştirilmiş rijitlik katsayıları değerlerini, denklem (2.68) 'de yerlerine yazarsak;

$$\begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 15/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{p}_1 \\ \ddot{p}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

Böylece, sistemi tanımlayan hareket denklemleri p

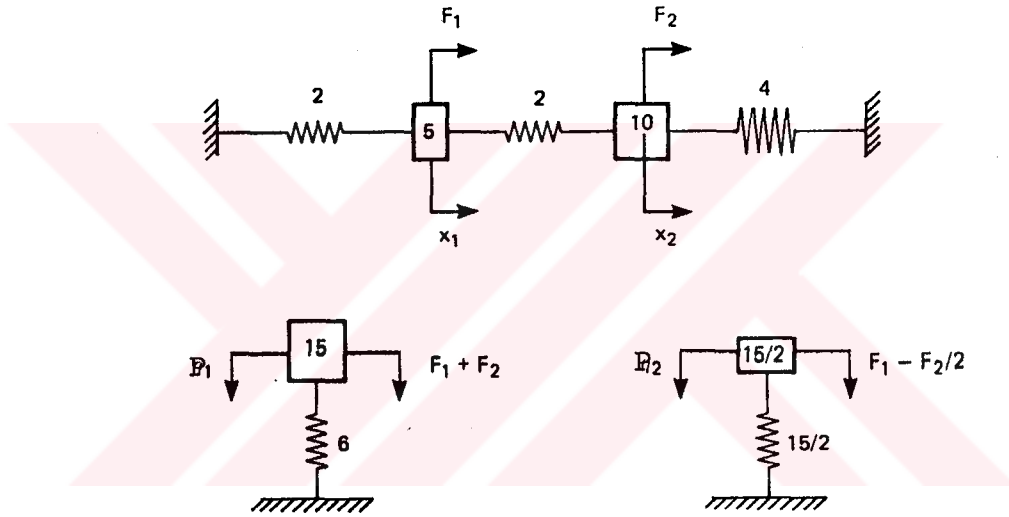
prensib koordinatları cinsinden aşağıda verildiği şekilde,

$$15 \ddot{p}_1 + 6 p_1 = F_1 + F_2$$

$$\frac{15}{2} \ddot{p}_2 + \frac{15}{2} p_2 = F_1 - \frac{F_2}{2}$$

elde edilir.

Böylece [u] modal matrisi kullanılarak, birbirlerine bağlı hareket denklemleri prensib koordinatları cinsinden bağımsız hale getirilmiştir. İki serbestlik dereceli sistem aşağıdaki şekilde olduğu gibi iki tane ayrık tek serbestlik dereceli sisteme indirgenmiştir.



Şekil 2.9. İki serbestlik dereceli sistem ve indirgenmiş bağımsız halleri

Buna göre p_1 ve p_2 için sistemin dinamik davranışı, elde edilen son denklemlerden belirlenir. Dinamik davranışları genel x koordinatları cinsinden ifade etmek için $\{X\} = [u]\{P\}$ lineer koordinat dönüşümü uygulanmalıdır.

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix}$$

$$x_1(t) = p_1(t) + p_2(t)$$

$$x_2(t) = p_1(t) - \frac{1}{2} p_2(t)$$

Her ne zaman $p_i(t)$ ifadeleri bulunursa, $x_i(t)$ ifadeleri de kolayca bulunabilir. Koordinat dönüşümü uygulanarak p prensib koordinatları cinsinden elde edilen hareket denklemleri genelleştirilmiş x koordinatları cinsinden belirlenebilir.

2.3.2. Sönümlü Zorlanmış Titreşim

Gerçek anlamda çok serbestlik dereceli sistemleri değerlendirmek için sönüm elemanının kompleks frekanslar ve modal vektörler üzerine etkisi dikkate alınmalıdır. Mekanik sistemlerde; yapısal, viskoz ve kuru sürtünme gibi sönüm tipleri olabilir. Genelde bir sistemde ne tür sönümün olduğunu belirlemek çok zordur. Gerçekte, bir sistem tüm sönüm tiplerinin birleşmesinden ortaya çıkan bir sönüm karakteristiğine sahip olabilir. Bununla birlikte, bir çok durumlarda sönüm miktarı küçüktür ve belli basitleştirmeler yapılabilir.

Sönümlü zorlanmış sistemlerin davranışlarını belirleyen hareket denklemleri birinci mertebeden diferansiyel denklemler takımına indirgenebilir. İndirgenmiş denklemlerin çözülmesi işlemleri, esas itibariyle sönümsüz sistemler için olanlarla aynıdır. Örneğin, karakteristik denklemi bulmak ve modların ortogonallığını türetmek için benzer yöntemler kullanılır. Bununla birlikte, özdeğerler ve modal vektörler kompleks büyüklüklerdir. Problemin sayısal çözümü için bilgisayar programlarının kullanılması gerekmektedir.

2.3.2.1. Orantılı Sönüm Elemanlı Sistemler

Eğer bir sistem sıradan bir sönüm elemanına sahipse, önceki kısımlarda açıklanan modal analiz yöntemi kullanılamaz, yani hareket denklemleri, sönümsüz sistemlerin modal matrisi tarafından ayrılamaz, bağımsız yapılamaz. Orantılı sönümde, [C] sönüm matrisi rijitlik veya kütle matrisleriyle veyahut ta bu iki matrisin bazı lineer bileşimiyle orantılıdır.

Matematik olarak sönüm matrisi, aşağıdaki şekillerde

tanımlanırsa orantılı sönüm ortaya çıkar [10].

$$\begin{aligned} [C] &= \alpha [M] \\ [C] &= \beta [K] \\ [C] &= \alpha [M] + \beta [K] \end{aligned} \quad (2.71)$$

Burada α ve β sabitlerdir.

Sönümlü zorlanmış bir sistemin hareket denklemleri;

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{F(t)\} \quad (2.72)$$

formunda yazılır. Buradaki kütle matrisi $[M]$, sönüm matrisi $[C]$ ve rijitlik matrisi $[K]$ simetrik matrislerdir. Böyle bir sistemin dinamik davranışını modal analiz yöntemiyle bulmak için sönüm şeklinin viskoz olduğu ve sönüm matrisinin kütle, rijitlik yada bu iki matrisin bazı lineer bileşimiyle orantılı olduğunu kabul etmeliyiz.

Orantılı sönüm varsayımından dolayı kütle ve rijitlik matrislerini diagonal yapan koordinat dönüşümü ayrıca; sönüm matrisini de diagonal yapmaktadır. Bundan dolayı çok serbestlik dereceli, orantılı sönüm elemanlı bir sistem için bağlı hareket denklemleri aşağıda gösterildiği gibi tek serbestlik dereceli sistemlere ayrılabilir. Bunun için önce $\{X\} = [u]\{P\}$ lineer dönüşüm ifadesini (2.72) hareket denkleminde yerine yazılmalıdır.

$$[M][u]\{\ddot{p}\} + [C][u]\{\dot{p}\} + [K][u]\{p\} = \{F\} \quad (2.73)$$

elde edilir. Bu son denklem modal matrisin transpozu $[u]^T$ ile çarpılırsa;

$$[u]^T[M][u]\{\ddot{p}\} + [u]^T[C][u]\{\dot{p}\} + [u]^T[K][u]\{p\} = [u]^T\{F\} \quad (2.74)$$

ifadesi bulunur.

Modal vektörlerin ortogonalite özellikleri;

$$[u]^T[M][u] = [\sim M \sim] \quad \text{ve} \quad [u]^T[K][u] = [\sim K \sim]$$

şeklinde idi. Sönüm matrisinin varsayılan şekli (formu) kütle ve/veya rijitlik matrisiyle orantılı olduğundan bu matrisin de diagonal olacağı açıktır.

$[C] = \alpha [M] + \beta [K]$ şeklinde orantılı sönümün olduğunu kabul edelim. Bu durumda;

$$\begin{aligned} [u]^T [C] [u] &= [u]^T [\alpha [M] + \beta [K]] [u] \\ &= \alpha [u]^T [M] [u] + \beta [u]^T [K] [u] \\ [u]^T [C] [u] &= \alpha [-M-] + \beta [-K-] = [-C-] \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $[-C-]$ diagonal bir matristir. Böylece (2.74) ifadesini tekrar yazarsak;

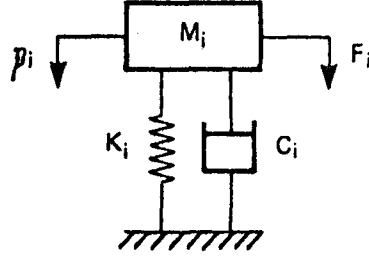
$$\begin{aligned} [-M-] \{\ddot{p}\} + [-C-] \{\dot{p}\} + [-K-] \{p\} &= [u]^T \{F\} \\ [-M-] \{\ddot{p}\} + (\alpha [-M-] + \beta [-K-]) \{\dot{p}\} + [-K-] \{p\} &= [u]^T \{F\} \end{aligned} \quad (2.75)$$

bulunur.

(2.75) denklemi sönümlü tek serbestlik dereceli sistemler için bağımsız bir denklemler takımını temsil eder. Açık olarak yazılırsa, i-nci mod için denkleminiz aşağıda verildiği gibi olacaktır.

$$M_i \ddot{p}_i + C_i \dot{p}_i + K_i p_i = \{u\}_i^T \{F\} = F_i \quad (2.76)$$

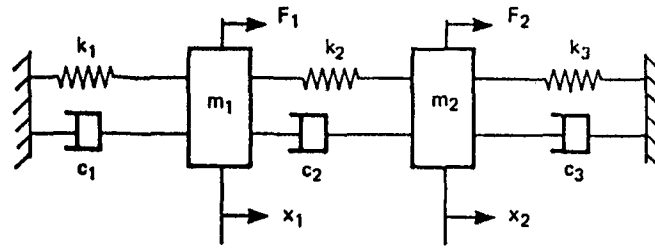
Burada M_i , C_i ve K_i sırasıyla genelleştirilmiş kütle, sönüm ve rijitlik katsayılarıdır. Böylece, zorlanmış sönümlü sistemin dinamik davranışını tanımlayan diferansiyel denklem sistemi, ayrık duruma getirilmiş olmaktadır. Buradan elde edilen her bir denklem, tek serbestlik dereceli sistem için bulunanın benzeridir. i-nci mod için (2.76) denklemi şekil 2.10. 'da gösterilen tek serbestlik dereceli, sönümlü bir sistemin hareket denklemdir.



Şekil 2.10. i -nci mod için bağımsız hareket denklemini temsil eden sistem

Şekildeki tek serbestlik dereceli sistemin dinamik davranışını belirlemekle, buna karşılık gelen, çok serbestlik dereceli sistemin i -nci modundaki dinamik davranışını belirlenmiş olur.

Orantılı sönüm kavramını daha iyi anlamak için Şekil 2.11. 'de gösterilen sistemi, orantılı sönüm için, tek serbestlik dereceli sistemlere indirgeyip hareket denklemlerini bağımsız hale getirelim.



$$\begin{array}{lll}
 k_1 = k_2 = 2 \text{ N/m} & c_1 = c_2 = 1 \text{ Ns/m} & m_1 = 5 \text{ kg} \\
 k_3 = 4 \text{ N/m} & c_3 = 2 \text{ Ns/m} & m_2 = 10 \text{ kg}
 \end{array}$$

Şekil 2.11. Orantılı sönüm elemanlı zorlanmış iki serbestlik dereceli sistem.

Hareket denklemleri matris formda yazılırsa;

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

Görüleceği gibi kütle, sönüm ve rijitlik matrisleri simetriktirler. [C] sönüm matrisi [K] rijitlik matrisiyle orantılıdır. Yani,

$$[C] = \left(\frac{1}{2}\right)[K]$$

Sistemin sönümsüz serbest titreşim yaptığı kabul edilip, özdeğerler ve bunlara karşılık gelen modal vektörler;

$$\{u\}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \{u\}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan modal matris,

$$[u] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Böylece;

$$[M] = [u]^T [M] [u] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[C] = [u]^T [C] [u] = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$$[K] = [u]^T [K] [u] = \begin{bmatrix} 2/5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

genelleştirilmiş kütle, sönüm ve rijitlik katsayıları belirlenir. Modal (prensib) koordinatlar cinsinden dönüştürülmüş sistem;

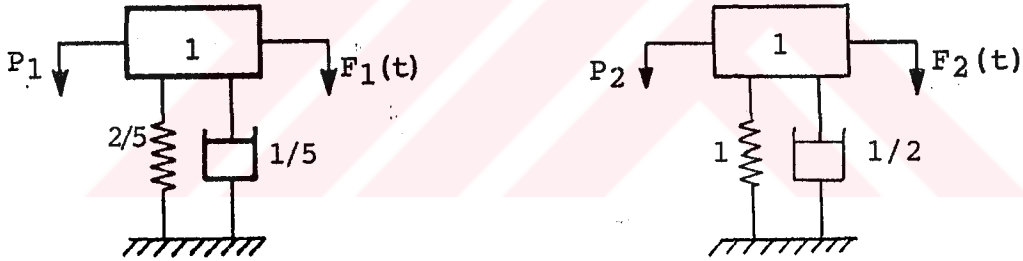
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{p}_1 \\ \ddot{p}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2/5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada,

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = [u]^T \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix}$$

dir.

Görüldüğü gibi; modal matris yardımı ile koordinat dönüşümü yapılarak sistem matrisleri diagonal olmuşlar ve dolayısıyla denklemler arası bağ terimleri ortadan kalkmıştır. Şekil 2.11 'de verilen iki serbestlik dereceli sönümlü zorlanmış sistem, buna eşdeğer tek serbestlik dereceli iki ayrı sistemle gösterilebilir.



Şekil 2.12. Orantılı sönüm elemanlı çok serbestlik dereceli sistemin tek serbestlik dereceli sistemlere indirgenmiş hali.

Buradan; hareket denklemleri p_i , modal (prensib) koordinatları cinsinden ayrı ayrı çözülür ve $\{x_i\} = [u]\{p_i\}$ koordinat dönüşümü ile $x(t)$ genel koordinatları bulunur.

2.3.2.2. Oransal Olmayan Sönüm Elemanlı Sistemler

Genellikle mekanik sistemler, çeşitli şekillerde birbirlerine bağlanmış, birçok farklı sistemlerden oluşmaktadır. Bu farklı sistemler perçin, civata, yay ve sönüm elemanları gibi farklı malzemelerle birbirlerine

tutturulabilir. Tüm bu faktörler sistemin doğal dinamik özelliklerini etkiler. Bu tür sistemler için kütle, sönüm ve rijitlik matrislerinin dağılımı da epeyce karmaşıktır. Genelde bu tür sistemler için, sönüm matrisi ile kütle ve/veya rijitlik matrisi arasında bir oran yoktur. Bundan ötürü böyle mekanik sistemlere oransal olmayan sönüm elemanlı sistemler denilir.

Analitik olarak, oransal olmayan bir sistemin modal analiz ile dinamik davranışını belirlemek, daha önce anlatılan sönümsüz veya orantılı sönüm elemanlı sistemlerde kullanılan yöntemle göre daha farklı olmaktadır.

Bu tür sistemlerin hareket denklemleri, birinci mertebeden diferansiyel denklemlere indirgenerek bağımsız hale getirilebilir. İndirgenmiş denklemlerle yapılan işlemler, esas itibarıyla sönümsüz sistemler için olanlarla aynıdır. Örneğin karakteristik denklemin bulunması ve mod şekillerinin ortogonallliğini belirlemek için yapılan işlemler, sönümsüz sistemlerde yapılanlarla aynıdır. Bununla birlikte, karşımıza kompleks modal matris çıkmakta ve indirgenmiş denklemlerden elde edilmektedir. Oransal olmayan sönüm elemanlı sistemler için hareket denklemi;

$$M \{\ddot{x}\} + C \{\dot{x}\} + K \{x\} = \{F(t)\} \quad (2.77)$$

şeklindedir.

(2.77) hareket denklemi, (2.78) ve (2.79) ifadelerinde görüldüğü gibi birinci mertebeden eş zamanlı denklemler takımına indirgenebilir.

$$\begin{bmatrix} 0 & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

$$A \{\dot{y}\} + B \{y\} = \{E(t)\} \quad (2.79)$$

Burada, $\{y\} = \{\dot{x} \ x\}$ ve $\{E(t)\} = \{0 \ F\}$ şeklinde ifade edilirler.

$\{y\} = [u]\{z\}$ veya $\{z\} = [u]^{-1} \{y\}$ koordinat dönüşümü ifadesi (2.79) 'da yerlerine yazılır ve denklemin her iki

tarafı $[u]^T$ ile çarpılırsa;

$$[u]^T A [u] \dot{z} + [u]^T B [u] z = [u]^T \{E(t)\} \quad (2.80)$$

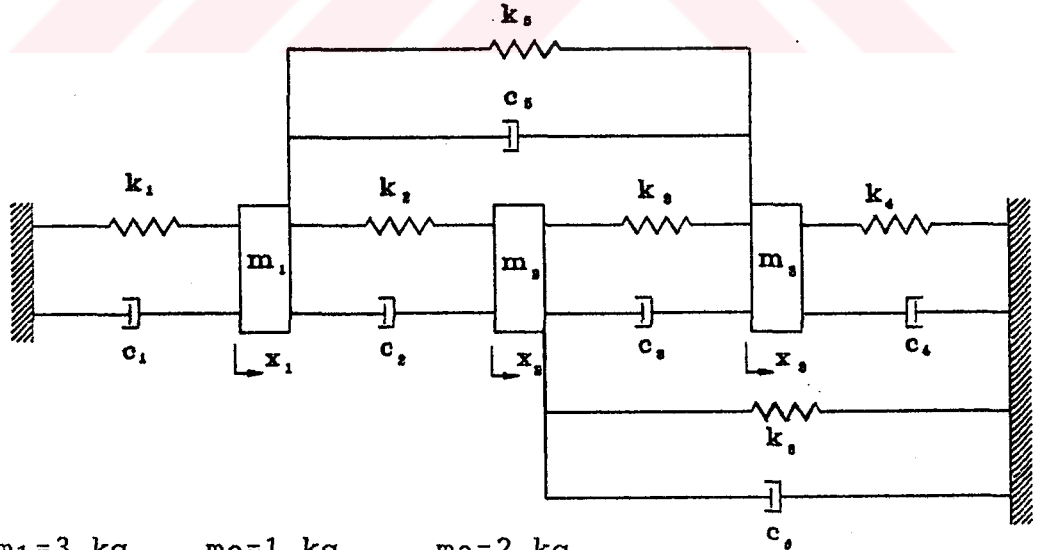
$$[\bar{A}] \{\dot{z}\} + [\bar{B}] \{z\} = \{N(t)\} \quad (2.81)$$

elde edilir. Burada $[\bar{A}]$ ve $[\bar{B}]$ diagonal matrisler olup $\{N(t)\} = [u]^T \{E(t)\}$ şeklindedir.

2.3.2.3. Bilgisayar Çözümleri

Daha önce belirtildiği gibi, dinamik davranışı incelenecek olan sistemin serbestlik derecesi çoksa problemin sayısal çözümü için bilgisayar programlarının kullanılması bir zorunluluk arzeder. Bu amaçla hazırlanan ve Ek.B 'de listelenen TRES DAM adlı program, sönümlü serbest titreşim yapan bir sistemin modal analiz yöntemiyle dinamik davranışının belirlenmesinde kullanılmıştır.

Bir uygulama olmak üzere şekil 2.13. 'de gösterilen sönümlü serbest titreşim yapan mekanik sistemin dinamik davranışını program TRES DAM ile belirleyelim;



$$\begin{aligned} m_1 &= 3 \text{ kg} & m_2 &= 1 \text{ kg} & m_3 &= 2 \text{ kg} \\ k_1 &= 60 \text{ N/m} & k_2 &= 60 \text{ N/m} & k_3 &= 80 \text{ N/m} & k_4 &= 100 \text{ N/m} & k_5 &= 20 \text{ N/m} \\ c_1 &= 5 \text{ Ns/m} & c_2 &= 3 \text{ Ns/m} & c_3 &= 4 \text{ Ns/m} & c_4 &= 1 \text{ Ns/m} & c_5 &= 2 \text{ Ns/m} \end{aligned}$$

Şekil 2.13. Sönüm elemanlarına sahip mekanik bir sistem

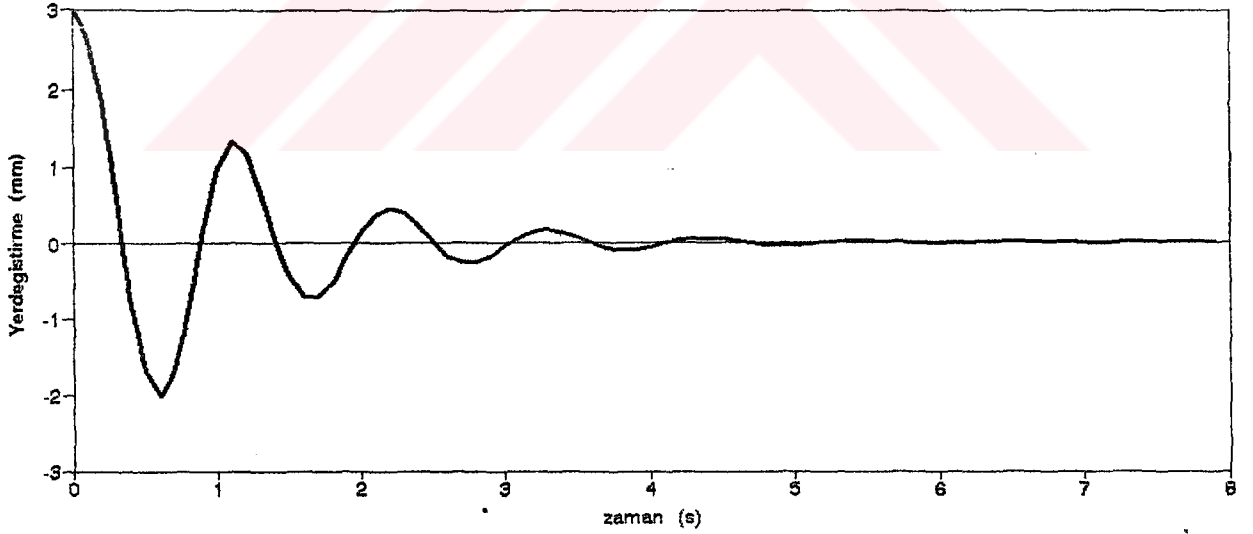
Sistem üç serbestlik dereceli olup herbir kütle için Newton'un 2. hareket kanununu uygular ve denklemleri düzenlersek, hareket denklemleri matris formda;

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & -3 & -2 \\ -3 & 8 & -4 \\ -2 & -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 140 & -60 & -20 \\ -60 & 220 & -80 \\ -20 & -80 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

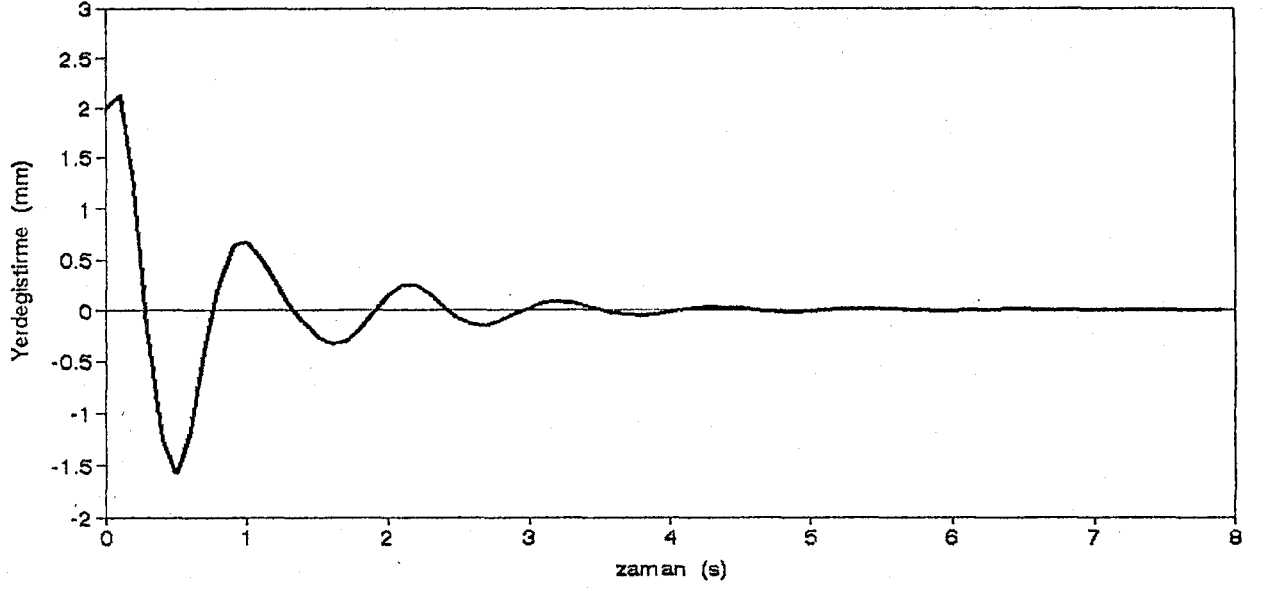
olarak elde edilir.

Burada; [M] kütle matrisi, [C] sönüm matrisi ve [K] yay matrisi simetrik matrisler olduklarından modal analiz yöntemi uygulanabilmektedir.

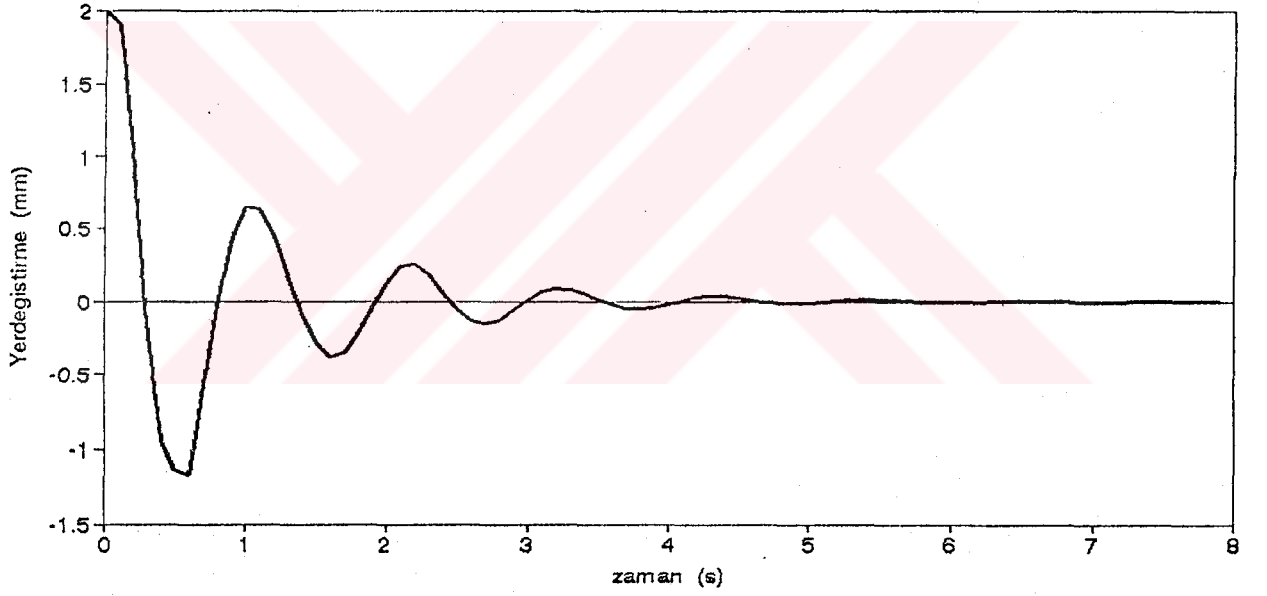
Başlangıç şartlarını; $\{x(0)\} = \{3 \ 2 \ 2\}$ ve $\{\dot{x}(0)\} = \{1 \ 4 \ 7\}$ olarak alıp sistemimizin dinamik davranışını elde edelim. Bilgisayar sonuçları şekil 2.14, 2.15 ve 2.16' da verildiği gibidir.



Şekil 2.14. $x_1(t)$ 'nin zamana göre değişimi



Şekil 2.15. $x_2(t)$ 'nin zamana göre değişimi



Şekil 2.16. $x_3(t)$ 'nin zamana göre değişimi

BÖLÜM 3

ZORLANMIŞ SÖNÜMLÜ SİSTEMLERİN FREKANS CEVAP YÖNTEMİ İLE (MEKANİK EMPEDANS) ANALİZİ

3.1. Frekans Cevap Yöntemiyle Zorlanmış Sistemlerin Dinamik Davranışlarının Belirlenmesi

Frekans cevap yöntemi bir harmonik analizdir. Bu yöntem zorlayıcı kuvvetin harmonik bir kuvvet olması durumunda, sistemin sürekli titreşim durumunun ilgili frekans bölgesinde incelenmesinden ibarettir. Burada, lineer bir sistem için titreştirici kuvvetin harmonik olması durumunda, sistemin sürekli durum cevabının da harmonik ve aynı frekansta olacağı kabulü geçerlidir [11],[12],[13].

Tek serbestlik dereceli bir sistem için hareket denklemi ve yerdeğiştirme ifadesi;

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= F\sin\omega t \\ x &= X\sin(\omega t - \phi) \end{aligned} \quad (3.1)$$

olarak yazılır.

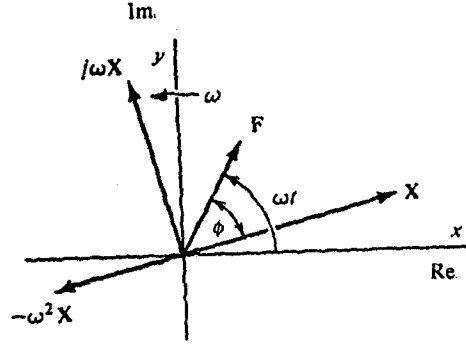
Harmonik hareketlerin vektörel gösterimini kullanırsak, yukarıdaki denklemler,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \bar{F}.e^{j\omega t} \quad (3.2)$$

$$x = \bar{X}.e^{j\omega t} \quad (3.3)$$

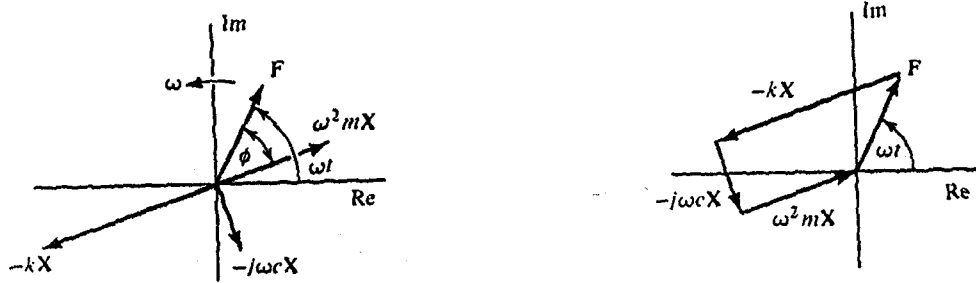
şeklinde yazılabilir.

Burada; $F = \bar{F}.e^{j\omega t}$ kuvvet vektörü, $x = \bar{X}.e^{j\omega t}$ ise yerdeğiştirme vektörüdür. \bar{F} ve \bar{X} sırasıyla F ve X 'lerin fazörleridir. F kuvvet vektörü ile X yerdeğiştirme vektörleri şekil 3.1. 'de gösterildiği gibidir.



şekil 3.1. Yerdeğiştirme, hız ve ivme vektörleri

Hız vektörü $j\omega X$ ve ivme vektörü ise $-\omega^2 X$ şeklindedir. Vektörlerin ilgili konumları şekil 3.1. 'de çizildiği gibidir. Harmonik kuvvetler, bu vektörlerin herbirinin uygun sabitlerle çarpılmasıyla elde edilirler. Yay kuvveti daima yerdeğiştirmeye karşı direnç gösterdiğinden yay kuvvet vektörü $-kX$ dir. Benzer şekilde sönüm ve atalet kuvvet vektörleri sırasıyla $-j\omega cX$ ve $\omega^2 mX$ şeklindedir. Bu vektörler şekil (3.2.a.) 'da gösterilmişlerdir. Gösterilen vektörler dönen vektörler olduklarından ilgili konumları ve faz açıları sabittir. Dinamik denge konumları için; yay, sönüm ve kütlelden dolayı, kuvvetlerin toplamı eşittir ve denklem 3.2.'de yazıldığı gibi uygulanan kuvvete ters yöndedir. Bundan dolayı kuvvet vektörlerinin şekli şekil (3.2.b) 'de gösterildiği gibi kapalı bir poligon oluşturmaktadır.



a. Kuvvet vektörleri

b. Kuvvet vektörlerinin poligon hali

şekil 3.2. Harmonik yay, sönüm, atalet ve zorlayıcı kuvvetleri ifade eden vektörler.

Hareket denkleminin çözümünü yani, $x(t)$ yerdeğiştirmesini elde etmek için (3.3) ifadesini (3.2) 'de yerine yazar ve $e^{j\omega t}$ terimlerini sadeleştirirsek;

$$[(j\omega)^2 m + (j\omega)c + k]\bar{X} = \bar{F} \quad (3.4)$$

veya

$$\bar{X} = \frac{F}{k - \omega^2 m + j\omega c} = \bar{X} e^{-j\phi} \quad (3.5)$$

elde edilir. Burada,

$$\bar{X} = |X| = \frac{\bar{F}}{\sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2}} = \frac{F}{k} \cdot R \quad (3.6)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\omega c}{k - \omega^2 m} \quad (3.7)$$

olup, R büyültme faktörü diye adlandırılır. $(k - \omega^2 m + j\omega c)$ büyüklüğü ise mekanik empedanstır. Kısaca; m , c ve k parametrelerine karşılık gelen mekanik empedans bileşenleri sırasıyla $-\omega^2 m$, $j\omega c$ ve k olmaktadır.

Şimdi yukarıda açıklanan bu yöntemi; çok serbestlik dereceli sistemler için genelleştirmek amacıyla iki serbestlik dereceli bir sistemi tanımlayan (2.3) eşitliğine uygular ve $e^{j\omega t}$ terimlerini sadeleştirirsek,

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

veya,

$$[K - \omega^2 M + j\omega C]\{\bar{X}\} = \{\bar{F}\} \quad (3.9)$$

elde edilir.

Buradaki $[M]$, $[C]$ ve $[K]$ matrisleri kolayca belirlenebilir. Görüleceği gibi (3.9) denklemi, kompleks

linear bir cebrik denklemler sistemidir.

Yukarıdaki denklemleri aşağıdaki şekillerde tekrar yazabiliriz.

$$\begin{bmatrix} k_{11} - w^2 m_{11} + jwc_{11} & k_{12} - w^2 m_{12} + jwc_{12} \\ k_{21} - w^2 m_{21} + jwc_{22} & k_{22} - w^2 m_{22} + jwc_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

veya,

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$Z(w)\{\bar{X}\} = \{\bar{F}\} \quad (3.12)$$

Burada;

$$Z_{ij} = (k_{ij} - w^2 m_{ij} + jwc_{ij}) \quad ; \quad i, j = 1, 2 \quad (3.13)$$

$Z(w) = [Z_{ij}]$ empedans matrisi ve $\{\bar{X}\}$ ise çözüm vektörüdür. $\{\bar{X}\}$ çözümü $\{\bar{F}\}$ zorlayıcı kuvvetine göre dinamik cevabın faz açısı ile genliğini verir. (3.12) ifadesinin her iki tarafını $Z(w)^{-1}$ ile çarparsak,

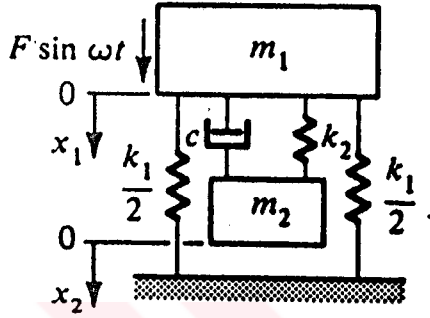
$$\{\bar{X}\} = Z(w)^{-1} \{\bar{F}\} \quad (3.14)$$

elde edilir. Böylece verilen bir w zorlayıcı frekansı için $\{X\}$ çözümü bulunmuş olur.

3.2. Dinamik Titreşim Yutucuların (absorberlerin) Frekans Cevap Yöntemiyle Analizi

Bir serbestlik dereceli sistemlerden bilindiği gibi periyodik zorlanma etkisi altında bulunan bir makinada titreşim hareketinin genliği, makinanın rezonans frekansı yakınında ve özellikle rezonans frekansında aşırı derecede büyük değerler almaktadır. Böyle bir makina üzerine ilave edilecek olan uygun bir yay kütle sistemi "dinamik absorber" olarak adlandırılır ve rezonans bölgesinde makinanın

titreşimini yutar. Ancak bu durumda sistem iki serbestlik dereceli olduğundan iki yeni rezonans frekansı ortaya çıkacaktır. Makinanın titreşimini, bu frekans bölgesini kapsayacak şekilde azaltmak amacıyla bir sönüm elemanı kullanıldığında "sönümlü dinamik absorber" elde edilir [5]. Aşağıdaki şekilde böyle bir titreşim sisteminin modeli gösterilmiştir.



$$m_1/m_2 = 3 \text{ kg}$$

$$k_1 = 300 \text{ N/m}$$

$$k_2 = k_1(m_1 m_2) / (m_1 + m_2)^2 = 56 \text{ N/m}$$

Şekil 3.3. Sönümlü dinamik titreşim absorberi (yutucusu)

Sistemin hareket denklemleri, her bir kütleye Newton'un ikinci hareket kanunu uygulanarak aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_2(x_1 - x_2) - c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + F \sin \omega t$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) - c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \quad (3.15)$$

düzenlenirse,

$$m_1 \ddot{x}_1 + c \dot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - c \dot{x}_2 - k_2 x_2 = F \sin \omega t$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c \dot{x}_2 + k_2 x_2 + c \dot{x}_1 - k_2 x_1 = 0 \quad (3.16)$$

Hareket denklemlerini matris formda yazarsak;

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}$$

veya

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{F\} \quad (3.17)$$

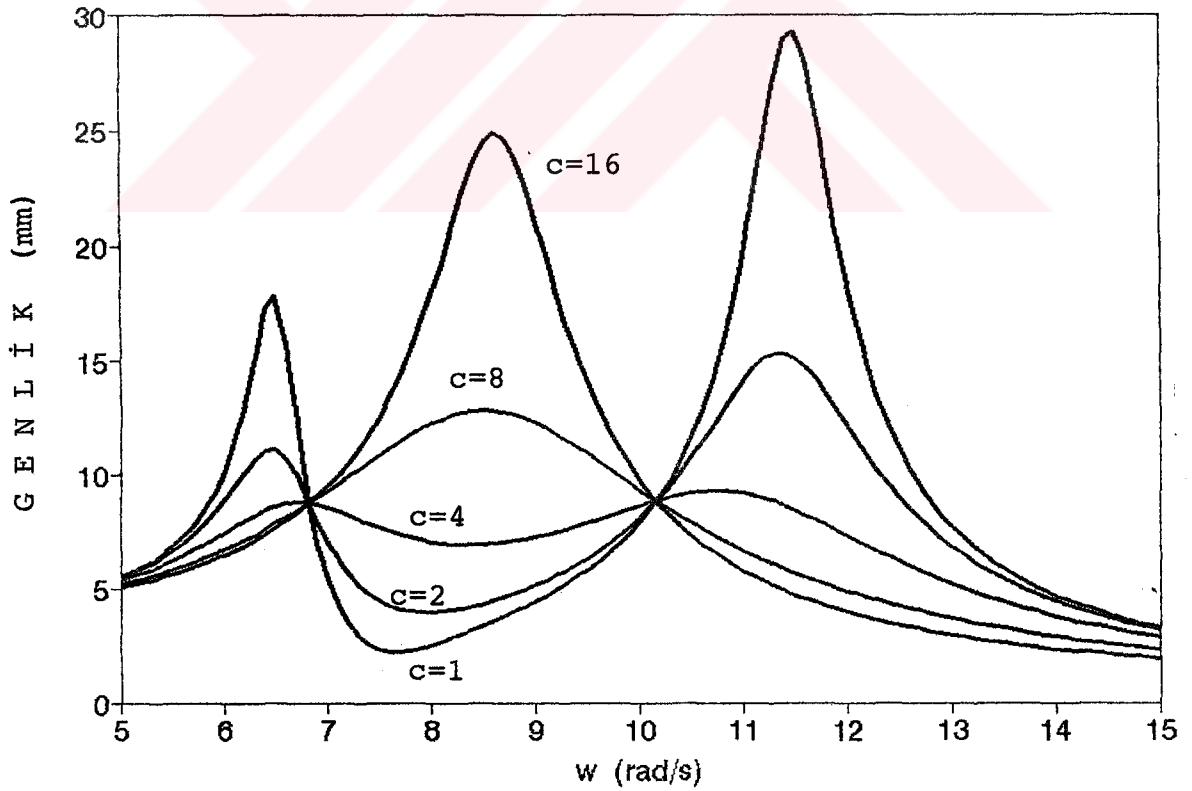
elde edilir.

Sistemin hareket denklemlerini, bu şekilde matris formunda elde ettikten sonra şimdi frekans cevap yöntemi ile çözmek için, elde edilen hareket denklemini (3.9) denkleminde yerine koymak yeterlidir.

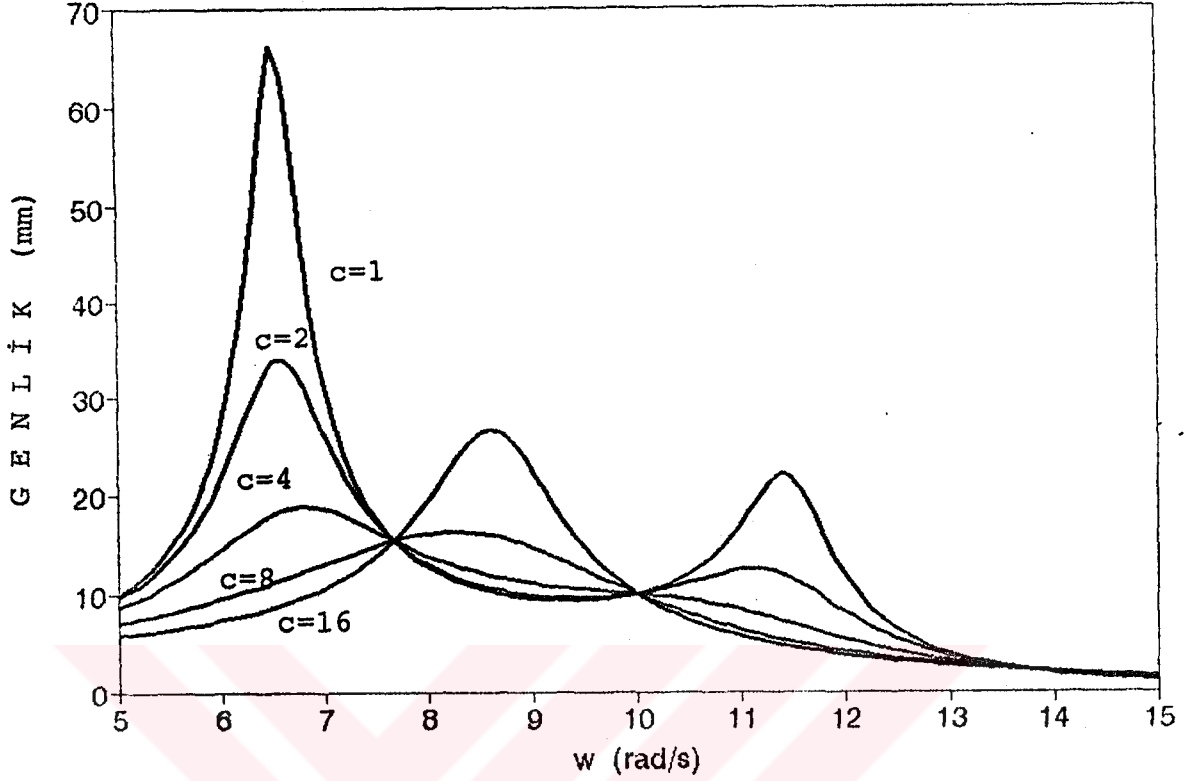
$$\begin{bmatrix} k_1+k_2 - m_1w^2 + jwc & -k_2 - jwc \\ -k_2 - jwc & k_2 - m_2w^2 + jwc \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

(3.18) denklem sistemi çözüldürse şekil 3.3. de verilen, sönümlü dinamik titreşim yutucusu problemi için sistem cevabı bulunur.

Bu amaçla ve ikiden çok serbestlik dereceli sistemlerin de çözümüne imkan verecek şekilde EK.C 'de listelenen FRESPN adlı bilgisayar programı hazırlanmıştır. İncelenen dinamik titreşim yutucusu örneğiyle ilgili sistem cevabı, çeşitli sönüm değerleri için, (c=1, c=2, c=4, c=8 ve c=16) grafik olarak şekil 3.4. ve şekil 3.5 'de verildiği gibidir.



Şekil 3.4. m_1 kütlesine sahip makinanın belli bir frekans bölgesindeki genlik değerleri



Şekil 3.5. m_2 kütleline sahip dinamik absorberin belli bir frekans bölgesindeki genlik değerleri

Grafiklerden görüleceği gibi, $c=4$ Ns/m seçilmesi durumunda, sistemde meydana gelecek yerdeğiştirmeler en az düzeye inmektedir. Ayrıca, esas sistemin (m_1 kütleli makina) yerdeğiştirmesi azaldığında ilave sistemin (m_2 kütleli dinamik absorber) yerdeğiştirmesi artmaktadır. Yani ilave sistem makinanın titreşim genliğini yutmaktadır.

BÖLÜM 4

NONLINEER TITREŞİM SİSTEMLERİ

4.1. Nonlinear Sistemler

Bir sistemin dinamik davranışının belirlenmesi için yapılacak olan bir dinamik incelemedeki işlem adımları; (1) belirli yaklaşımlar ve kabüller yapılarak sistemin fiziksel modelinin kurulması, (2) fizik kanunlarını uygulayarak sistemin matematik modelinin kurulması ve (3) matematik modellerle tanımlanmış olan sistem denklemlerinin çözülmesi ile sistemin zaman cevabının elde edilmesi aşamalarından oluşur.

Dinamik sistemlerin bu şekilde incelenmesinde karşımıza genellikle bir diferansiyel denklem veya denklemler takımı çıkar. Burada eğer sistemi tanımlayan diferansiyel denklemlerin katsayıları sabit veya sadece bağımsız değişkene yani zamana bağlı ise sistem lineer sistem olarak adlandırılır. Önceki bölümlerde ele almış olduğumuz mekanik sistemleri tanımlayan diferansiyel denklemler lineer ve dolayısıyla bu sistemler de lineer sistemlerdi. Lineer sistemlerin en önemli özelliği bu sistemler için "süperpozisyon prensibi" nin geçerli olmasıdır. Bilindiği gibi bu prensip, iki veya daha çok girişe sahip bir lineer sistemin toplam cevabının herbir girişin ayrı ayrı uygulanması halinde elde edilecek cevapların toplamına eşit olacağını ifade eder.

Bir sistemin " matematik modeli" lineer değilse, lineer olmayan yani nonlinear sistemden söz edilir. Bu durumda sistemi tanımlayan diferansiyel denklemler nonlinear denklemlerdir. Açık olarak belirtmek gerekirse diferansiyel denklemler bağıli değişken ve türevlerine göre yüksek dereceli terimler içerirler. Nonlinear sistemlerin en önemli özelliği süperpozisyon prensibinin artık bu sistemler için geçerli olmamasıdır. Ayrıca belirtmek gerekir ki; nonlinear sistem

çalışma şartlarına bağlı olmak üzere birden çok denge konumuna sahip olabilir. Buna karşılık bir lineer sistem ise bir tek denge konumuna sahiptir. Böyle sistemlere ait problemlerin çözümlerinin bulunmasına yarayan yöntemler genel olarak çok karışıktır ve çözümler güçlük doğurabilir. Bu matematik güçlük nedeniyle çoğu kez lineer olmayan sistem yerine çeşitli lineerleştirme yöntemleri kullanılarak eşdeğer lineer sistem düşünülmesi zorunlu olur.

Gerçekte bütün sistemler lineerden çok nonlineerdirler. İncelemiş olduğumuz mekanik titreşim sistemleri için sistem bileşenleri kütle, sönüm ve yay elemanları olmaktadır. Dolayısıyla bu elemanların içereceği nonlineer özellikler sistemi de nonlineer yapacaktır. Nonlineer davranışlar; malzeme nonlineerliliğinden (elastiklik sınırının aşılması), geometrik nonlineerlilikten (elemanlar arası bağ boşlukları) ve kinematik nonlineerlilikten (büyük yerdeğiştirmeler) kaynaklanabilir. Titreşim sistemleri elemanları bakımından, uygulamada en çok karşılaşılan nonlineerlilikler; nonlineer yay (sertleşen veya yumuşayan yay) ve viskoz sönümdür.

4.2. Nonlineer Sistemlerin Sayısal Çözümleri

Bir nonlineer, tek serbestlik dereceli sistemin diferansiyel denklemi;

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}, t) = 0 \quad (4.1)$$

genel formuyla verilir. Bu durumda sistem bir karakteristik denkleme sahip olmayıp, özdeğerlerden de söz edilemez. Dolayısıyla lineer sistemler için uygulanmış olan modal analiz yöntemi de uygulanamaz. Nonlineer sistemlerin zaman cevabını elde etmek için, iyi bilinen bir çok sayısal çözüm yöntemlerinden birini kullanmak gerekir. Bu amaçla (4.1) eşitliği ile verilen ikinci mertebe diferansiyel denklem, aşağıda verildiği şekilde iki eş zamanlı birinci mertebe diferansiyel denklemle ifade edilir.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= f(x, y, t)\end{aligned}\quad (4.2)$$

(4,2) eşitliklerinde; $t=0$ anındaki başlangıç değerleri $x(0)=x_0$ ve $y(0)=y_0$ verilerek her bir $h=\Delta t$ zaman artımı için Δx ve Δy artımları bulunduktan sonra i -nci zaman aralığı için karşılık gelen x_i ve y_i değerleri,

$$\begin{aligned}t_{i+1} &= t_i + h \\ x_{i+1} &= x_i + \Delta x \\ y_{i+1} &= y_i + \Delta y\end{aligned}\quad (4.3)$$

eşitlikleri ile hesaplanırlar. Böylece problem bir "başlangıç değer problemi" olarak ele alınır ve çözüm (4.3) eşitliklerinin tekrarlı uygulanması yoluyla elde edilir. Gerçekte yapılan işlem bir sayısal integrasyon işlemi olmaktadır.

Bizim amacımız sayısal integrasyon yöntemlerini incelemek olmadığından, burada bu yöntemlerden iyi bilinenlerinden ve çok kullanılanlarından birisi olan Runge-Kutta Merson yöntemini vermekle yetineceğiz.[14] Bu yöntem dördüncü mertebe Runge-Kutta yönteminin geliştirilmiş bir şekli olup aşağıdaki formda verilir.

$$x(t+h) = x(t) + \frac{1}{6} (K_1 + 4K_4 + K_5)\quad (4.4)$$

Burada;

$$K_1 = hf(x_0, t)$$

$$K_2 = hf\left[x_0 + \frac{K_1}{3}, t + \frac{h}{3}\right]$$

$$K_3 = hf\left[x_0 + \frac{K_1}{6} + \frac{K_2}{6}, t + \frac{h}{3}\right]$$

$$K_4 = hf\left[x_0 + \frac{K_1}{8} + \frac{3K_3}{8}, t + \frac{h}{2}\right]$$

$$K_5 = hf\left[x_0 + \frac{K_1}{2} + \frac{3K_3}{8} + 2K_4, t + \frac{h}{2}\right]\quad (4.5)$$

Hata ifadesi;

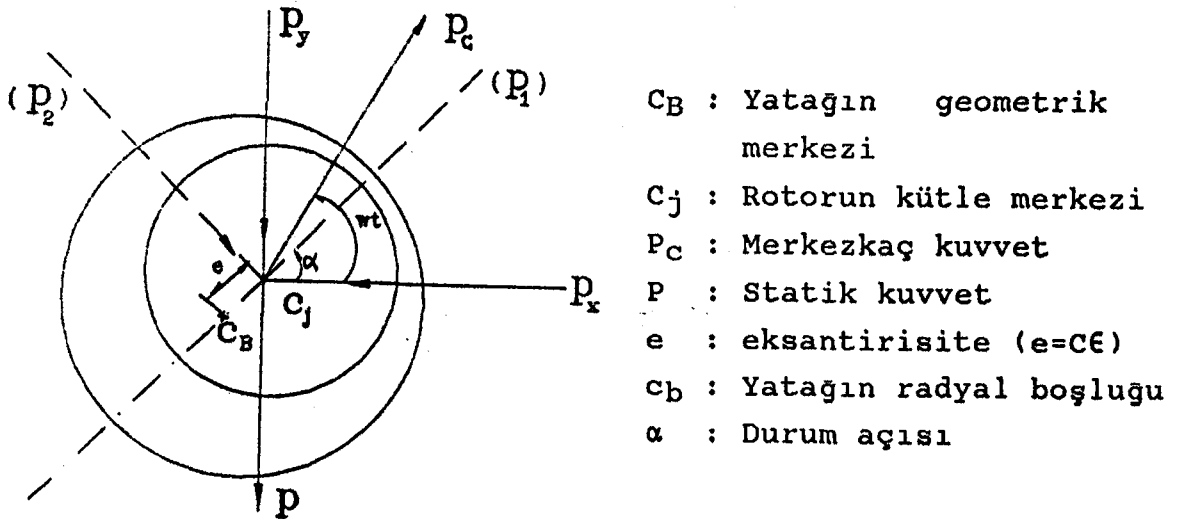
$$E = \frac{1}{30} (2K_1 - 9K_3 + 8K_4 - K_5) \quad (4.6)$$

dır.

Yöntemin avantajlı tarafı hata kontrolüne de olanak sağlamasıdır. Burada hatanın her işlem adımında istenilen minimum bir mertebeye tutulması, h zaman artımının değiştirilmesi yoluyla yapılır.

4.3. Bir Rotor Sıkıştırma Etkili Yağ Filmi Yatağı Sisteminin Sayısal Çözümü

Nonlinear sistemlerin sayısal çözümüne, uygulamadan bir örnek olmak üzere bir rotor sıkıştırma etkili yağ filmi yatağı sistemini ele alalım. Burada sıkıştırma etkili yağ filmi yatağı "viskoz sönüm" ve "nonlinear yay" özelliklerinin her ikisinde sahip bir nonlinear elemandır. Bu eleman özellikle yüksek hızlarda çalışan mil-rotor sistemlerinin titreşimlerini ve yataklarına geçen kuvvetleri azaltmak amacıyla kullanılır. Dinamik bir kuvvet etkisi altında çalışan bu yatakta oluşan hidrodinamik yağ filmi istenilen bu görevi gerçekleştirir. Yatak geometrisi ve etki eden kuvvetler şekil 4.1. 'de gösterilmiştir.



Şekil 4.1. Yatak geometrisi ve etki eden kuvvetler

Sistemin hareket denklemleri, x ve y koordinatlarında;

$$m\ddot{x}_j + P_x = P_C \cos \omega t$$

$$m\ddot{y}_j + P_y = P_C \sin \omega t - P \quad (4.7)$$

olarak yazılırlar. Burada P_x ve P_y bileşke film kuvvetleri olup, P_1 ve P_2 film kuvvetlerine bağlı olarak şekil 4.1.'den görüleceği gibi aşağıdaki şekilde yazılabilirler.

$$P_x = P_1 \cos \alpha - P_2 \sin \alpha$$

$$P_y = P_1 \sin \alpha + P_2 \cos \alpha \quad (4.8)$$

P_1 ve P_2 film kuvvetleri kabul edilecek olan film modeline göre değişirler. Film modelleri için; dolu film, yarım film ve kısmen kaviteyonlu film modelleri söz konusu olmaktadır. Burada yarım film modeli kabul edilerek işlemler yapılacaktır. Bu durumda sırasıyla radyal ve teğetsel doğrultularda tanımlanan P_1 ve P_2 film kuvvetleri aşağıdaki ifadelerle verilirler.[15]

$$P_1 = \frac{\mu R^* L^3}{c_b^2} \left[\pi \frac{(1+2\epsilon^2)}{2(1-\epsilon^2)^{5/2}} \dot{\epsilon} + \frac{2\epsilon^2 \dot{\alpha}}{(1-\epsilon^2)^2} \right]$$

$$P_2 = \frac{\mu R^* L^3}{c_b^2} \left[\frac{2\epsilon}{(1-\epsilon^2)^2} \dot{\epsilon} + \pi \frac{\epsilon \dot{\alpha}}{2(1-\epsilon^2)^{3/2}} \right] \quad (4.9)$$

Şimdi, P_1 ve P_2 'nin yukarıda verilen ifadeleri hareket denklemlerinde yerlerine konur ve denklemler daha uygun bir kullanım sağlamak amacıyla $(mc_b \omega^2)$ 'ye bölünüp boyutsuz yapılırsa;

$$\ddot{\bar{x}}_j + Q_1 \cos \alpha - Q_2 \sin \alpha = Q_C \cos \omega t$$

$$\ddot{\bar{y}}_j + Q_1 \sin \alpha + Q_2 \cos \alpha = Q_C \sin \omega t - Q \quad (4.10)$$

denklemleri elde edilir. Burada,

$$Q_{1,2} = \frac{P_{1,2}}{mc_b w^2} = \frac{\mu R^* L^3}{mwc_b^3} f_{1,2}(\epsilon, \epsilon', \alpha') = \beta f_{1,2}(\epsilon, \epsilon', \alpha')$$

$$Q_c = P_c / mc_b w^2 = u/c_b$$

$$Q = P/mc_b w^2$$

$$(') = d/d(wt) \quad (4.11)$$

dır. Görüleceği gibi denklemler bağlı değişkenler olan ϵ ve α 'nın kendilerini ve birinci mertebeden türevlerini içermektedir. Denklemlerde ikinci mertebeden türevler açık olarak görülmemektedir. Bu durumda denklemlerde,

$$\bar{x}_j = \epsilon \cos \alpha$$

$$\bar{y}_j = \epsilon \sin \alpha \quad (4.12)$$

polar koordinat dönüşümü yapmak gerekir. Bu işlem yapılırsa hareket denklemleri;

$$\epsilon'' = \bar{F}_x \cos \alpha + \bar{F}_y \sin \alpha + \epsilon \alpha'^2$$

$$\alpha'' = (-\bar{F}_x \sin \alpha + \bar{F}_y \cos \alpha - 2\epsilon' \alpha') / \epsilon \quad (4.13)$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$$\bar{F}_x = Q_c \cos wt - Q_1 \cos \alpha + Q_2 \sin \alpha$$

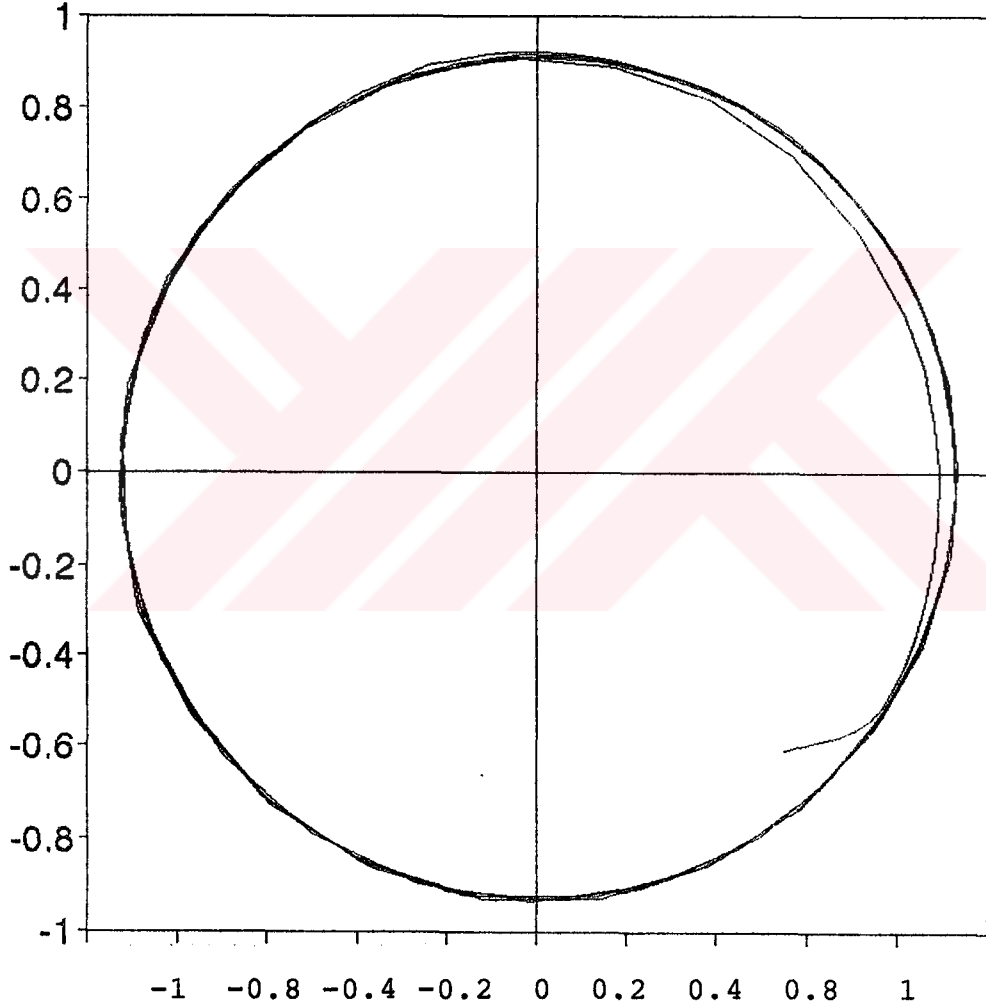
$$\bar{F}_y = Q_c \sin wt - Q_1 \sin \alpha + Q_2 \cos \alpha - Q \quad (4.14)$$

dır. Böylece hareket denklemleri;

$$\epsilon'' = f(\epsilon, \alpha, \epsilon', \alpha')$$

$$\alpha'' = f(\epsilon, \alpha, \epsilon', \alpha') \quad (4.15)$$

formunda elde edildikten sonra sayısal çözüm yöntemi uygulanarak ϵ ve α çözümler. Burada çözüm için Runge-Kutta Merson yöntemi kullanılarak, sistem parametreleri $Q_c=0.7$, $Q=0.25$ ve $\beta=0.018$ değerleri için bir çözüm şekil 4.2 'de verilmiştir. Bu şekil yatak boşluk dairesi referans olmak üzere rotor merkezinin sahip olacağı yörüngesini göstermektedir. İlgili bilgisayar programı (ROTOR) Ek.D 'de verilmiştir.



Şekil 4.2. Rotor titreşim yörüngesi

BÖLÜM 5

SONUÇLAR

Bu çalışmada çok serbestlik dereceli titreşim sistemlerinin dinamik davranışları teorik olarak incelendi ve örnek sayısal çözümler verildi. Genel durumda bir sistem, serbestlik derecesi sayısı kadar doğal frekansa sahip olmaktadır. Bu doğal frekanslar, sistemin karakteristik denkleminin çözümünden bulunurlar. Yine sistem doğal frekansları sayısı kadar ve herbir doğal frekansına karşılık olmak üzere aynı sayıda titreşim biçimine sahip olmaktadır. Bu titreşim biçimleri doğal mod veya prensib modu olarak adlandırılırlar. Bir prensib modunda; denklem (2.14) 'de gösterildiği ve şekil (2.2.b) 'de çizildiği gibi tüm sistem belli bir doğal frekansta eş zamanlı harmonik harekete zorlanır ve kütlelerin izafi genlik oranları sabittir. Genlikler oranı, verilen bir mod için, modal vektörü tanımlamaktadır. En genel hareket ise denklem (2.16) 'da gösterildiği gibi modların toplamı şeklinde olmaktadır.

Eğer bir sistem birden fazla serbestlik derecesine sahipse (2.1) ile (2.5) arasında verilen denklemlerdeki kütle ve rijitlik matrislerinin elemanları, hareket denklemlerindeki bağ terimleri gibi sistemi tanımlamak için seçilen koordinatlara bağlı olmaktadır. Buradan; koordinat bağının, sistemin doğal bir özelliği olmadığı sonucu çıkmaktadır. Denklemleri bağımsız yapacak koordinatlara prensib koordinatlar denir. Prensib koordinatlar ile genelleştirilmiş koordinatlar arasındaki ilişki denklem (2.22) 'de verilmiştir.

Modal matrisin bulunması, bölüm (2.2.4.) 'de açıklandığı gibidir. Hareket denklemleri modal matris yardımıyla bağımsız yapılır ve bağımsız denklemlerden herbiri bağımsız tek serbestlik dereceli sistem gibi incelenebilir. Sonuç hareket ise, istenilen koordinatlar cinsinden, prensib veya genelleştirilmiş koordinatlarda ifade edilir. Uygulanan

yöntem basit olmasına rağmen bilgisayar tekniklerinden yararlanmak sayısal çözümler için gerekli olmaktadır.

Ayrık sistemlerin harmonik cevapları mekanik empedans metoduyla da bulunabilir. Yapılan çalışmada sönümlü zorlanmış titreşimlerin dinamik davranışları bu yöntemle incelenmiştir. Bu yöntemde, hareket denklemlerindeki sinüsoidal fonksiyonları ifade etmek için vektörler kullanılır. Burada belirtmek gerekir ki, bu yöntemle sistemin yalnız sürekli durum cevabı, istenilen frekans bölgesi için elde edilebilmektedir. Ayrıca sistemin geçici titreşim durumunu elde etmek için modal analiz yönteminin uygulanması gerekecektir.

Bir sistemin matematik modeli lineer değilse nonlinear sistemlerden söz edilir. Bu tür sistemlerin diferansiyel denklemleri bağlı değişken ve türevlerine göre yüksek dereceli terimler içerirler. Bu durumda sistem bir karakteristik denkleme sahip olmayıp, özdeğerlerden söz edilemez. Dolayısıyla lineer sistemler için uygulanmış olan modal analiz yöntemi de uygulanamaz. Nonlinear sistemlerin zaman cevabını elde etmek için iyi bilinen, birçok sayısal integrasyon yöntemlerinden birini kullanmak gerekir.

KAYNAKLAR

1. TRAILL - NASH, R.W., "An Analysis of Response of a Damped Dynamical System Subjected to Impressed Forces", Aeronautical Research Laboratories Report SM151, 1950.
2. FOSS, K.A., "Co-ordinates Which Uncouple the Equations of Motion of Damped Linear Dynamic Systems", Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics 25, (1958) 361 - 364.
3. FRAZER, R.A., DUNCAN, W.J., ve COLLAR, A.R., "Elementary Matrices", Cambridge University Press, London, 1960.
4. ZAVERI, K., "Modal Analysis of Large Structures - Multiple Exciter Systems", Brüel and Kjaer DK-2850 Naerum, Denmark, November 1984.
5. TSE, FRANCIS. S., MORSE, IVAN. E., and HINKLE, ROLLAND.T. "Mechanical Vibrations, Theory and Applications" Allyn and Bacon Series in Mechanical Engineering and Applied Mechanics, Second edition, Boston, 1978.
6. FORMENTI, D., "Analytical and Experimental Modal Analysis" Structural Measurement Systems, Inc., Milpitas, California, Jan 1989.
7. HILDEBRAND. F.B., "Methods of Applied Mathematics." Prentice - Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1965.
8. GÜRGÖZE, M., "Analitik Metotlarla Titreşim Etüdü", İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yayın No:1, İstanbul, 1984.
9. POTTER, R., "A General Theory of Modal Analysis for Linear Systems", Hewlett-Packard Company, 1975.
10. RAYLEIGH. L., "The Theory of Sound", Vol.1, Dover, NewYork 1945.
11. MEIROVITCH, L., "Analytical Methods in Vibrations", Macmillan Co., New York, 1967.

12. MEIROVITCH, L., "Elements of Vibration Analysis", Mc.Graw-Hill., New York, 1970.
13. VERNON, J.B., "Linear Vibration Theory", John Willey and Sons, New York, 1967.
14. DIMAROGONAS, A.D., "Vibration for Engineers" Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1992.
15. DOĞAN, M., "Phd. thesis" , University of Sussex, England, 1983.



EKLER



EK-A.

TRESPUND PROGRAM LİSTESİ

```

C     SONUMSUZ AYRIK SİSTEMLERİN GECİCİ DAVRANISLARININ MODAL ANALIZI
C     METOD:(1) MODL ALT PROGRAMI YARDIMIYLA MODAL MATRİSİN BULUNMASI
C           (2) TRESP ALT PROGRAMI KULLANILARAK BAĞIMSIZ DENKLEMLERİN
C           ÇÖZÜLMESİ
C           (3) ÇÖZÜMLERİN PRENSİB KOORDİNATLARINDAN ORJİNAL
C           KOORDİNATLARA DÖNÜSTÜRÜLMESİ
C     GEREKLİ ALT PROGRAMLAR: (1) MODL (2) INVS (3) MPLY (4) SUBN
C                               (5) AROOT (6) HOMO (7) COEF (8) TRESP
C     *** # I. FORMAT AND INPUT. ***
      REAL*8 DT,DUM (10,10),ERROR, FN(10), FORCE(10,100), K(10,10),
+M(10,10), P(10), P0(10), Q(10), Q0(10), ROOT(10), T, U(10,10),
+UINVS(10,10), UT(10,10), WN(10), X(10), X0(10), Y(10), Y0(10),
+Z(10)
      OPEN (5, FILE='VERI1.DAT', STATUS='OLD')
      OPEN (6, FILE='TRESPUND.SON', STATUS='NEW')
      DATA FN, FORCE, P, P0, Q, Q0, T, Z /1061*0.0/
80  FORMAT ( ' SONUMSUZ POZİTİF TANIMLI SİSTEMLERİN FARKLI '
+ ' ÖZDEĞERLER İÇİN DİNAMİK CEVAPLARI.', /)
81  FORMAT ( ' ENTER: (1) N = M VE K MATRİSLERİNİN DERECESİ', /,
+8X, '(2) NDATA = GENELLESTİRİLMİŞ KUVVET İÇİN VERİ SAYISI', /,
+8X, '(3) DT = İNTEGRASYONDAKİ ZAMAN ARTIM MİKTARI', /,
+8X, '(4) ERROR = İTERASYONDAKİ HATA MİKTARI', /,
+8X, '(5) NİTER = HERBİR MOD İÇİN İTERASYON SAYISI')
82  FORMAT ( ' N='I3, ' NDATA = ', I3, ' DT='D12.4, /,
+ ' ERROR='D12.4, ' NİTER='I4)
83  FORMAT ( ' *** VERİLERİNİZ DOĞRU MU? 1=EVET; 2=HAYIR')
84  FORMAT ( ' M - KÜTLE MATRİSİNİ GİRİNİZ: ')
85  FORMAT ( ' K - RİJİTLİK MATRİSİNİ GİRİNİZ: ')
86  FORMAT (6D12.4)
87  FORMAT ( ' (1) BAŞLANGIÇ YERDEĞİSTİRMELERİ GİRİNİZ '
+ ' X0(1) TO X0(N)', /, 8X, '(2) BAŞLANGIÇ HIZLARI GİRİNİZ '
+ ' Y0(1) TO Y0(N)')
88  FORMAT ( ' T(1) İLE T(NDATA) ZAMANLARI ARASINDAKİ N-TANE', /
+ ' DENKLEMİN HERBİRİ İÇİN KUVVET(T) DEĞERLERİNİ GİRİNİZ.')
89  FORMAT (13X, ' *** SONUÇLAR ***')
90  FORMAT (/, ' ZAMAN : ', D12.4)
91  FORMAT ( ' KUVVET : ', 5D12.4, /, 11X, 5D12.4)
92  FORMAT ( ' X1 TO XN: ', 5D12.4, /, 11X, 5D12.4)
93  FORMAT ( ' HIZ : ', 5D12.4, /, 11X, 5D12.4)
      WRITE (6,80)
10  WRITE (6,81)
      READ (5,*) N, NDATA, DT, ERROR, NİTER
      WRITE (6,82) N, NDATA, DT, ERROR, NİTER
      WRITE (6,83)
      READ (5,*) İANS
      IF (İANS.EQ.2) GO TO 10
11  WRITE (6,84)
      READ (5,*) ((M(I,J), J=1, N), I=1, N )
      DO 40 I=1, N
40  WRITE (6,86) (M(I,J), J=1, N)

```

```

WRITE (6,83)
READ (5,*) IANS
IF (IANS.EQ.2) GO TO 11
12 WRITE (6,85)
READ (5,*) ((K(I,J), J=1,N), I=1,N)
DO 41 I=1,N
41 WRITE (6,86) (K(I,J), J=1,N)
WRITE (6,83)
READ (5,*) IANS
IF (IANS.EQ.2) GO TO 12
13 WRITE (6,87)
READ (5,*) (X0(I), I=1,N), (Y0(I), I=1,N)
WRITE (6,86) (X0(I), I=1,N)
WRITE (6,86) (Y0(I), I=1,N)
WRITE (6,83)
READ (5,*) IANS
IF (IANS.EQ.2) GO TO 13
WRITE (6,88)
DO 42 I=1,N
14 READ (5,*) (FORCE(I,J), J=1,NDATA)
WRITE (6,86) (FORCE(I,J), J=1,NDATA)
WRITE (6,83)
READ (5,*) IANS
IF (IANS.EQ.2) GO TO 14
42 CONTINUE
WRITE (6,89)

```

C
C
C

```

*** II. HAREKET DENKLEMLERINI BAGSIZ YAPMAK ICIN
MODAL MATRISIN ELDE EDILMESI. ***
CALL MODL (M,K,U,ROOT,ERROR,NITER,N)
DO 43 I=1,N
DO 43 J=1,N
43 UT(I,J) = U(J,I)
CALL MPLY (UT,M,DUM,N)
CALL MPLY (DUM,U,M,N)
CALL MPLY (UT,K,DUM,N)
CALL MPLY (DUM,U,K,N)
DO 44 I=1,N
44 WN(I) = DSQRT(K(I,I)/M(I,I))

```

C
C

```

** PRENSIB KOORDINATLARDAKI X0 VE Y0 DEGERLERI.**
CALL INVS (U,UINVS,N)
DO 45 I=1,N
DO 45 J=1,N
P0(I) = P0(I) + UINVS(I,J)*X0(J)
45 Q0(I) = Q0(I) + UINVS(I,J)*X0(J)

```

C
C
C

```

*** # III. GECICI TITRESIM CEVABININ HESABI. ***
PRENSIB KOORDINATLAR CINSINDEN GECICI TITRESIM CEVABI
DO 46 IT=1,NDATA
WRITE (6,90) T
WRITE (6,91) (FORCE (I,IT), I=1,N)
WRITE (6,92) (X0(I), I=1,N)
WRITE (6,93) (Y0(I), I=1,N)

```

```

DO 47 I=1,N
FN(I) = 0
DO 48 J=1,N
48 FN(I) = FN(I) + UT(I,J)*FORCE(J,IT)
47 FN(I) = FN(I)/M(I,I)
DO 49 I=1,N
CALL TRESP (P0(I),Q0(I),FN(I),DT,P(I),Q(I),Z(I),WN(I))
P0(I) =P(I)
49 Q0(I) =Q(I)

```

```

C
C ORJINAL KOORDINATLAR CINSINDEN GECICI TITRESIM CEVABI
DO 50 I=1,N
X0(I) = 0
Y0(I) = 0
DO 50 J=1,N
X0(I) = X0(I) + U(I,J)*P0(J)
50 Y0(I) = Y0(I) + U(I,J)*Q0(J)
46 T = T+ DT
STOP
END

```

```

C
C *** ALT PROGRAMLAR (SUBROUTINES) ***
C
C =====
C TRESP
SUBROUTINE TRESP (X0,Y0,F,DT,X,Y,Z,WN)
REAL *8 K1,K2,K3,K4,L1,L2,L3,L4,A,B,D,DT,
+DX,DY,F,WN,X,X0,Y,Y0,Z
A=WN**2
B=2*Z*WN
D=DT/4
X=X0
Y=Y0
DO 40 I=1,4
K1=D*Y
L1=D*(-B*Y - A*X +F)
K2=D*(Y+L1/2.)
L2=D*(-B*(Y+L1/2.) - A*(X+K1/2.) +F)
K3=D*(Y+L2/2.)
L3=D*(-B*(Y+L2/2.) - A*(X+K2/2.) + F)
K4=D*(Y+L3)
L4=D*(-B*(Y+L3) - A*(X+K3) + F)
DX=(K1 + 2.*K2 + 2.*K3 + K4)/6.
DY=(L1 + 2.*L2 + 2.*L3 + L4)/6.
X=X + DX
40 Y=Y + DY
RETURN
END

```

```

C
C SUBN
SUBROUTINE SUBN (A,B,N)
REAL*8 A(10,10), B(10,10)
DO 40 I=1,N
DO 40 J=1,N
40 B(I,J)=A(I,J)

```

```
RETURN
END
```

```
C   CSUBN
SUBROUTINE CSUBN (A, B, N)
COMPLEX*16 A(10,10), B(10,10)
DO 40 I=1,N
DO 40 J=1,N
40 B(I,J)=A(I,J)
RETURN
END
```

```
C   MPLY
SUBROUTINE MPLY (A,B,C,N)
REAL*8 A(10,10),B(10,10),C(10,10)
DO 40 I=1,N
DO 40 J=1,N
C(I,J) = 0
DO 40 K=1,N
40 C(I,J) = C(I,J) + A(I,K)*B(K,J)
RETURN
END
```

```
C   CMPLY
SUBROUTINE CMPLY (A, B, C, N)
COMPLEX*16 A(10,10), B(10,10),C(10,10)
DO 40 I=1,N
DO 40 J=1,N
C(I,J) = 0
DO 40 K=1,N
40 C(I,J)=C(I,J) + A(I,K)*B(K,J)
RETURN
END
```

```
C   INVG
SUBROUTINE INVG (H, HINVS, N)
REAL*8 A, B, D(10,20),H(10,10),HINVS(10,10),QUOT,TEMP,
+UNIT(10,10)
DATA UNIT /100*0.0/
NT2 = N*2
NP1 = N+1
NM1 = N-1
DO 40 I=1,N
40 UNIT(I,I)=1.
DO 41 I=1,N
DO 41 J=1,N
D(I,J) = H(I,J)
41 D(I,N+J) = UNIT(I,J)
DO 42 J=1,NM1
A = DABS(D(J,J))
JP1 = J + 1
DO 43 I=JP1,N
B=DABS(D(I,J))
IF(A-B) 10, 43, 43
```

```

10 DO 44 K=J,NT2
    TEMP=D(I,K)
    D(I,K) = D(J,K)
44 D(J,K) = TEMP
43 A=B
    DO 42 I=JP1,N
        QUOT=D(I,J)/D(J,J)
        DO 42 K=JP1,NT2
42 D(I,K)=D(I,K) - QUOT*D(J,K)
    K=N
11 I=K-1
12 QUOT = D(I,K)/D(K,K)
    DO 45 J=NP1,NT2
45 D(I,J)=D(I,J)-QUOT*D(K,J)
    IF(I.EQ.1.) GOTO 13
    I=I-1
    GOTO 12
13 IF(K.EQ.2.) GOTO 14
    K=K-1
    GOTO 11
14 DO 46 I=1,N
    DO 46 J=1,N
46 HINVS(I,J) = D(I,N+J)/D(I,I)
    RETURN
    END

```

```

C      INVS
      SUBROUTINE INVS (H,HINVS,N)
      REAL*8 H(10,10),HINVS(10,10), A(10,10),B(10,10),SUM
      CALL SUBN (H,A,N)
      NM1= N-1
      DO 40 I=1,NM1
          SUM=0
          DO 41 K=1,N
41          SUM=SUM + A(K,K)
          SUM=SUM/I
          DO 42 J=1,N
42          A(J,J)=A(J,J)-SUM
          IF (I.EQ.NM1) CALL SUBN (A,HINVS,N)
          CALL MPLY (H,A,B,N)
40          CALL SUBN (B,A,N)
          DO 43 I=1,N
          DO 43 J=1,N
43          HINVS(I,J) = HINVS(I,J)/A(1,1)
      RETURN
      END

```

```

C      CINVS
      SUBROUTINE CINVS (H, HINVS,N)
      COMPLEX*16 H(10,10), HINVS(10,10), A(10,10),B(10,10),SUM
      CALL CSUBN (H, A, N)
      NM1= N-1
      DO 40 I=1,NM1
          SUM=0

```

```

DO 41 K=1,N
41 SUM=SUM + A(K,K)
   SUM=SUM/I
   DO 42 J=1,N
42 A(J,J) = A(J,J) - SUM
   IF (I.EQ.NM1) CALL CSUBN (A, HINVS, N)
   CALL CPLY (H, A, B, N)
40 CALL CSUBN (B, A, N)
   DO 43 I=1,N
   DO 43 J=1,N
43 HINVS(I,J) = HINVS(I,J)/A(1,1)
   RETURN
   END

```

```

C   COEFF
   SUBROUTINE COEFF (H,C,N)
   REAL*8 A(10,10),B(10,10),C(12), H(10,10), SUM
   CALL SUBN (H,A,N)
   NP2=N+2
   C(1)=0
   C(NP2)=1
   DO 40 I=1,N
     SUM=0
     DO 41 K=1,N
41     SUM = SUM + A(K,K)
       C(NP2-I) = -SUM/I
       DO 42 J=1,N
42     A(J,J) = A(J,J) + C(NP2-I)
       CALL MPLY (H, A, B, N)
40     CALL SUBN (B, A, N)
     DO 43 I=2,NP2
43     C(N+4-I) = C(N+4-I)/C(2)
   RETURN
   END

```

```

C   AROOT
   SUBROUTINE AROOT (H,ROOT,ERROR,NITER,N)
   REAL*8 A,B(11),C(12),DA,DBDA(11), ERROR,H(10,10),ROOT(10)
   DATA B(1), DBDA(1)/1.0,0.0/
   CALL COEFF (H,C,N)
   I=N+1
10  A=0
   IM1=I-1
   DO 40 L1=1,NITER
     DO 41 J=2,I
       B(J)=C(J+1) - A*B(J-1)
41     DBDA(J) = -A*DBDA(J-1) - B(J-1)
       DA = -B(I)/DBDA(I)
       A = A + DA
       IF (DABS(DA) -ERROR) 11,11,40
40     CONTINUE
11  DO 42 J1=1,IM1
42     C(J1+1) = B(J1)
   ROOT(I-1) = -1/A

```

```

      IF (I.EQ.2) GO TO 12
      I=I-1
      GOTO 10
12  RETURN
      END

```

```

C      HOMO
      SUBROUTINE HOMO (A, X, N)
      REAL *8 A(10,10),B(10,10),BINVS(10,10),X(10),Y(10)
      X(N)=1
      NM1=N-1
      DO 40 I=1,NM1
      Y(I)=-A(I,N)
      DO 40 J=1,NM1
40  B(I,J)=A(I,J)
      IF(NM1.EQ.1) BINVS(1,1) =1./B(1,1)
      IF (NM1.EQ.1) GO TO 10
      CALL INVS (B, BINVS, NM1)
10  DO 41 I=1,NM1
      X(I)=0
      DO 41 J=1,NM1
41  X(I)=X(I) +BINVS(I,J)*Y(J)
      RETURN
      END

```

```

C      CHOMO
      SUBROUTINE CHOMO (A, X, N)
      COMPLEX*16 A(10,10),B(10,10),BINVS(10,10),X(10),Y(10)
      REAL*8 U,Z
      DATA U,Z /1.0,0.0/
      X(N)=DCMPLX(U,Z)
      NM1=N-1
      DO 40 I=1,NM1
      Y(I)=-A(I,N)
      DO 40 J=1,NM1
40  B(I,J)=A(I,J)
      IF(NM1.EQ.1) BINVS(1,1) =1./B(1,1)
      IF (NM1.EQ.1) GOTO 10
      CALL CINVS (B, BINVS, NM1)
10  DO 41 I=1,NM1
      X(I)=DCMPLX(Z,Z)
      DO 41 J=1,NM1
41  X(I)=X(I) +BINVS(I,J)*Y(J)
      RETURN
      END

```

```

C      MODL
      SUBROUTINE MODL(M,K,U,ROOT,ERROR,NITER,N)
      REAL*8 DUM(10,10),ERROR,H(10,10),K(10,10),M(10,10),
+MINVS(10,10),ROOT(10), U(10,10),X(10)
      CALL INVS (M,MINVS,N)
      CALL MPLY (MINVS,K,H,N)
      CALL AROOT (H,ROOT,ERROR,NITER,N)
      DO 40 L=1,N

```



```

      DO 41 I=1,N
      DO 41 J=1,N
41     DUM(I,J)=- M(I,J)*ROOT(L) + K(I,J)
      CALL HOMO (DUM, X, N)
      DO 40 I1=1,N
40     U(I1,L) = X(I1)
      RETURN
      END

```

C

```

      CMODL
      SUBROUTINE CMODL (M, C, K, U, ERROR, NITER, N)
      REAL *8 C(10,10), ERROR, H(10,10), H1(10,10), H2(10,10),
+K(10,10), M(10,10), MINVS(10,10), UNIT(10,10), ZERO(10,10)
      COMPLEX*16 DUM(10,10), ROOT(2,5), U(10,10), X(10)
      DATA UNIT, ZERO /200*0.0/
      NT2=N*2
      DO 40 I=1,N
40     UNIT(I,I)=1.
      CALL INVS (M, MINVS, N)
      CALL MPLY (MINVS, C, H1, N)
      CALL MPLY (MINVS, K, H2, N)
      DO 41 I=1,N
      DO 41 J=1,N
      H(I,J) = -H1(I,J)
      H(I,N+J) = -H2(I,J)
      H(N+I,J) = UNIT(I,J)
41     H(N+I,N+J) = ZERO(I,J)
      CALL CROOT (H, ROOT, ERROR, NITER, NT2)
      DO 42 JJ=1,N
      DO 42 II=1,2
      DO 43 I=1,N
      DO 43 J=1,N
43     DUM(I,J) = M(I,J)*ROOT(II,JJ)**2+C(I,J)*ROOT(II,JJ)+ K(I,J)
      CALL CHOMO (DUM , X , N)
      J1=2*(JJ-1)+II
      DO 42 L=1,N
      U(N+L,J1) = X(L)
42     U(L,J1) = U(N+L,J1)*ROOT(II,JJ)
      RETURN
      END

```

C

```

      CROOT
      SUBROUTINE CROOT (H, ROOT, ERROR, NITER, N)
      REAL*8 A(2,5), A1, A2, B(12), C(12), DA1, DA2,
+DBDA1(12), DBDA2(12), DET, ERROR, H(10,10), P, Q, Z
      COMPLEX*16 ROOT(2,5)
      DATA B, DBDA1, DBDA2, Z /36*0.0, 0.0/
      B(2) = 1
      CALL COEFF (H, C, N)
      I=N+2
10     L=I/2-1
      A1=0
      A2=0
      DO 40 IT=1, NITER

```

```

DO 41 J=3,I
B(J)=C(J) -A1*B(J-1)-A2*B(J-2)
DBDA1(J) = -A1*DBDA1(J-1) - A2*DBDA1(J-2) - B(J-1)
41 DBDA2(J) = -A1*DBDA2(J-1) - A2*DBDA2(J-2) - B(J-2)
DET=DBDA1(I-1)*DBDA2(I)-DBDA1(I)*DBDA2(I-1)
DA1=(-B(I-1)*DBDA2(I)+B(I)*DBDA2(I-1))/DET
DA2=(+B(I-1)*DBDA1(I)-B(I)*DBDA1(I-1))/DET
A1=A1+DA1
A2=A2+DA2
IF ((DABS(DA1)-ERROR).GE.0) GO TO 40
IF ((DABS(DA2)-ERROR).GE.0) GO TO 40
DO 42 I1=4,I
42 C(I1-2)=B(I1-2)
A(1,L)=A1
A(2,L)=A2
IF (I.EQ.4) GO TO 11
I=I-2
GO TO 10
40 CONTINUE
11 ND2=N/2
DO 43 J=1,ND2
P=A(1,J)**2-4*A(2,J)
Q=DSQRT(DABS(P))
IF (P.GE.0) GO TO 12
ROOT(1,J) = DCMLX(-A(1,J),Q)
ROOT(2,J) = DCMLX(-A(1,J),-Q)
GO TO 13
12 ROOT(1,J) = DCMLX(-A(1,J)-Q,Z)
ROOT(2,J) = DCMLX(-A(1,J)+Q,Z)
13 ROOT(1,J) = ROOT(1,J)/(2*A(2,J))
43 ROOT(2,J) = ROOT(2,J)/(2*A(2,J))
RETURN
END

```

EK-B.

TRES DAM PROGRAM LISTESİ

```

: VIZKOZ SONUMLU,FARKLI OZDEGERLERE SAHIP POZITIF TANIMLI
: SITEMLERIN GECICI DAVRANISLARI.

```

```

: GEREKLI ALT

```

```

: PROGRAMLAR:      (1) COEFF (2) CHOMO  (3) CROOT (4) CINVS
:                  (5) CPLY  (6) CSUBN  (7) CMODL (8) CRKUT
:                  (9) INVS  (10) MPLY  (11) SUBN

```

```

: *** I. FORMAT VE VERILERIN GIRILMESI. ***

```

```

: REAL*8 DT, C(10,10),ERROR, FORCE(10,80),K(10,10),M(10,10),
+ T,V(5),X(5),ZRO

```

```

: COMPLEX*16 A(10,10),B(10,10),DUM(10,10),FN(10),BDA(10),
+ U(10,10),UINVS(10,10),UT(10,10), Y(10),Z(10),Z0(10)

```

```

: DATA FORCE, T, ZRO /802*0.0/

```

```

: DATA A, B, Y, Z0 /220*(0., 0.)/

```

```

: OPEN (5,FILE='TRES DAM.DAT',STATUS='OLD')

```

```

: OPEN (6,FILE='TRES DAM.SON',STATUS='NEW')

```

```

80 FORMAT (' VIZKOZ SONUMLU POZITIF TANIMLI SITEMLERIN GECICI'
+ ' DINAMIK DAVRANISLARI.',/, ' FARKLI OZDEGERLER ICIN.',/)

```

```

81 FORMAT ('      (1) N      = M, C, VE K MATRISLERININ DERECESI'
+ '** N<=5',/,8X,'(3) DT      = INTEGRASYONDAKI ZAMAN ARTIMI',/,
+ 8X'(4) ERROR      =INTEGRASYONDAKI HATA MIKTARI',/,8X'(5)NITER ='
+ ' HERBIR MOD ICIN MAX. ITERASYON SAYISI')

```

```

82 FORMAT (' N =',I3,' NDATA =',I4,' DT =',D12.4,/,
+ ' ERROR =',D12.4,' NITER =',I4)

```

```

83 FORMAT (' VERILER DOGRU MU ? 1 = EVET 2 = HAYIR.')

```

```

84 FORMAT (' M - KUTLE MATRISINI GIRINIZ:-')

```

```

85 FORMAT (6D12.4)

```

```

86 FORMAT (' C - SONUM MATRISINI GIRINIZ:-')

```

```

87 FORMAT (' K - RIJITLIK MATRISINI GIRINIZ:-')

```

```

88 FORMAT (' (1) BASLANGIC YERDEGISTIRMELER : X0(1) TO X0(N)',/,8X,
+ ' (2) BASLANGIC HIZLAR : V0(1) TO V0(N)')

```

```

89 FORMAT (' T(1) ILE T(NDATA) ZAMANLARI ARASINDAKI N-TANE'
+ ' DENKLEMIN HERBIRI ICIN KUVVET(T) DEGERLERINI GIRINIZ.')
```

```

90 FORMAT (13X,'*** SONUCLAR ***')

```

```

91 FORMAT (/, ' ZAMAN      : ',D12.4)

```

```

92 FORMAT ( ' KUVVET      : ',5D12.4)

```

```

93 FORMAT ( ' X1 ILE XN : ',5D12.4)

```

```

94 FORMAT ( ' HIZ        : ',5D12.4)

```

```

WRITE (6,80)

```

```

10 WRITE (6,81)

```

```

READ (5,*) N,NDATA,DT,ERROR,NITER

```

```

WRITE (6,82) N,NDATA,DT,ERROR,NITER

```

```

WRITE (6,83)

```

```

READ(5,*) IANS

```

```

IF (IANS.EQ.2) GOTO 10

```

```

11 WRITE (6,84)

```

```

READ (5,*) ((M(I,J), J=1,N), I=1,N)

```

```

DO 40 I=1,N

```

```

40 WRITE (6,85) (M(I,J), J=1,N)

```

```

WRITE (6,83)

```

```

READ (5,*) IANS

```

```

IF (IANS.EQ.2) GOTO 11
12 WRITE (6,86)
  READ (5,*) ((C(I,J), J=1,N), I=1,N)
  DO 41 I=1,N
41  WRITE(6,85) (C(I,J), J=1,N)
    WRITE (6,83)
    READ (5,*) IANS
    IF (IANS.EQ.2) GOTO 12
13 WRITE (6,87)
  READ (5,*) ((K(I,J), J=1,N), I=1,N)
  DO 42 I=1,N
42  WRITE (6,85) (K(I,J) ,J=1,N)
    WRITE (6,83)
    READ(5,*) IANS
    IF (IANS.EQ.2) GOTO 13
14 WRITE (6,88)
  READ (5,*) (X(I), I=1,N), (V(I), I=1,N)
  WRITE (6,85) (X(I), I=1,N)
  WRITE (6,85) (V(I), I=1,N)
  WRITE (6,83)
  READ (5,*) IANS
  IF (IANS.EQ.2) GOTO 14
  WRITE (6,89)
  DO 43 I=1,N
15  READ (5,*) (FORCE(N+I,J), J=1,NDATA)
    WRITE (6,85) (FORCE(N+I,J), J=1,NDATA)
    WRITE (6,83)
    READ (5,*) IANS
    IF (IANS.EQ.2) GOTO 15
43  CONTINUE
  NT2=N*2
  NP1=N+1

```

C

C

```

*** II. U MODAL MATRISININ ELDE EDILMESI. ***
CALL CMODL (M, C, K, U, ERROR, NITER, N)
DO 44 I=1,N
DO 44 J=1,N
  A(I+N,J)=M(I,J)
  A(I,N+J)=M(I,J)
  A(I+N,J+N) = C(I,J)
  B(I,J)= -M(I,J)
44  B(I+N,J+N)=K(I,J)
DO 45 I=1,NT2
DO 45 J=1,NT2
45  UT(I,J)=U(J,I)
  CALL CPLY (UT, A, DUM, NT2)
  CALL CPLY (DUM, U, A, NT2)
  CALL CPLY (UT, B, DUM, NT2)
  CALL CPLY (DUM, U, B, NT2)
DO 46 I=1,NT2
46  BDA(I)=B(I,I)/A(I,I)
  CALL CINVS (U, UINVS, NT2)
  WRITE (6,90)

```

C

```

C      ** III. GECICI TITRESIM CEVABININ HESAPLANMASI VE SONUCLAR. **
DO 47 IT=1,NDATA
  WRITE (6,91) T
  WRITE (6,92) (FORCE(I,IT), I=NP1,NT2)
  WRITE (6,93) (X(I), I=1,N)
  WRITE (6,94) (V(I), I=1,N)
C
C      *** Z - KOORDINATLARINDAKI GECICI TITRESIM CEVABI. ***
DO 48 I=1,N
  Y(I) = V(I)
48  Y(N+I) = X(I)
DO 49 I=1,NT2
  Z0(I)=DCMPLX(ZR0,ZR0)
  FN(I) = Z0(I)
  DO 50 J=1,NT2
    Z0(I)=Z0(I) + UINVS(I,J)*Y(J)
50  FN(I)=FN(I) + UT(I,J)*FORCE(J,IT)
49  FN(I)=FN(I)/A(I,I)
  CALL CRKUT (FN, Z0, BDA, DT, Z, NT2)
C
C      *** ORJINAL KOORDINATLAR CINSINDEN GECICI TITRESIM CEVABI. **
DO 51 I=1,NT2
51  Z0(I) = Z(I)
DO 52 I=1,NT2
  Y(I) = DCMPLX(ZR0,ZR0)
DO 52 J=1,NT2
52  Y(I) = Y(I) + U(I,J)*Z0(J)
DO 53 I=1,N
  V(I) = Y(I)
53  X(I) = Y(N+I)
47  T = T + DT
STOP
END
C
C      *** ALT PROGRAMLAR (SUBROUTINES) ****
C      =====
C      TRESP
SUBROUTINE TRESP (X0,Y0,F,DT,X,Y,Z,WN)
REAL *8 K1,K2,K3,K4,L1,L2,L3,L4,A,B,D,DT,
+DX,DY,F,WN,X,X0,Y,Y0,Z
A=WN**2
B=2*Z*WN
D=DT/4
X=X0
Y=Y0
DO 40 I=1,4
K1=D*Y
L1=D*(-B*Y - A*X +F)
K2=D*(Y+L1/2.)
L2=D*(-B*(Y+L1/2.) - A*(X+K1/2.) +F)
K3=D*(Y+L2/2.)
L3=D*(-B*(Y+L2/2.) - A*(X+K2/2.) + F)
K4=D*(Y+L3)
L4=D*(-B*(Y+L3) - A*(X+K3) + F)

```

```

DX=(K1 + 2.*K2 + 2.*K3 + K4)/6.
DY=(L1 + 2.*L2 + 2.*L3 + L4)/6.
X=X + DX
40 Y=Y + DY
RETURN
END

```

C
C

```

SUBN
SUBROUTINE SUBN (A,B,N)
REAL*8 A(10,10), B(10,10)
DO 40 I=1,N
DO 40 J=1,N
40 B(I,J)=A(I,J)
RETURN
END

```

C
C

```

CSUBN
SUBROUTINE CSUBN (A, B, N)
COMPLEX*16 A(10,10), B(10,10)
DO 40 I=1,N
DO 40 J=1,N
40 B(I,J)=A(I,J)
RETURN
END

```

C
C

```

MPLY
SUBROUTINE MPLY (A,B,C,N)
REAL*8 A(10,10),B(10,10),C(10,10)
DO 40 I=1,N
DO 40 J=1,N
C(I,J) = 0
DO 40 K=1,N
40 C(I,J) = C(I,J) + A(I,K)*B(K,J)
RETURN
END

```

C
C

```

CMPY
SUBROUTINE CMPY (A, B, C, N)
COMPLEX*16 A(10,10), B(10,10),C(10,10)
DO 40 I=1,N
DO 40 J=1,N
C(I,J) = 0
DO 40 K=1,N
40 C(I,J)=C(I,J) + A(I,K)*B(K,J)
RETURN
END

```

C
C

```

INVG
SUBROUTINE INVG (H, HINVS, N)
REAL*8 A, B, D(10,20),H(10,10),HINVS(10,10),QUOT,TEMP,
+UNIT(10,10)
DATA UNIT /100*0.0/
NT2 = N*2
NP1 = N+1

```

```

      NM1 = N-1
      DO 40 I=1,N
40    UNIT(I,I)=1.
      DO 41 I=1,N
      DO 41 J=1,N
      D(I,J) = H(I,J)
41    D(I,N+J) = UNIT(I,J)
      DO 42 J=1,NM1
      A = DABS(D(J,J))
      JP1 = J + 1
      DO 43 I=JP1,N
      B=DABS(D(I,J))
      IF(A-B) 10, 43, 43
10    DO 44 K=J,NT2
      TEMP=D(I,K)
      D(I,K) = D(J,K)
44    D(J,K) = TEMP
43    A=B
      DO 42 I=JP1,N
      QUOT=D(I,J)/D(J,J)
      DO 42 K=JP1,NT2
42    D(I,K)=D(I,K) - QUOT*D(J,K)
      K=N
11    I=K-1
12    QUOT = D(I,K)/D(K,K)
      DO 45 J=NP1,NT2
45    D(I,J)=D(I,J)-QUOT*D(K,J)
      IF(I.EQ.1.) GOTO 13
      I=I-1
      GOTO 12
13    IF(K.EQ.2.) GOTO 14
      K=K-1
      GOTO 11
14    DO 46 I=1,N
      DO 46 J=1,N
46    HINVS(I,J) = D(I,N+J)/D(I,I)
      RETURN
      END

```

C
C

```

      INVS
      SUBROUTINE INVS (H,HINVS,N)
      REAL*8 H(10,10),HINVS(10,10), A(10,10),B(10,10),SUM
      CALL SUBN (H,A,N)
      NM1= N-1
      DO 40 I=1,NM1
      SUM=0
      DO 41 K=1,N
41    SUM=SUM + A(K,K)
      SUM=SUM/I
      DO 42 J=1,N
42    A(J,J)=A(J,J)-SUM
      IF (I.EQ.NM1) CALL SUBN (A,HINVS,N)
      CALL MPLY (H,A,B,N)
40    CALL SUBN (B,A,N)

```

```

DO 43 I=1,N
DO 43 J=1,N
43 HINVS(I,J) = HINVS(I,J)/A(1,1)
RETURN
END

```

```

:
:

```

```

CINVS
SUBROUTINE CINVS (H, HINVS,N)
COMPLEX*16 H(10,10), HINVS(10,10), A(10,10),B(10,10),SUM
CALL CSUBN (H, A, N)
NM1= N-1
DO 40 I=1,NM1
SUM=0
DO 41 K=1,N
41 SUM=SUM + A(K,K)
SUM=SUM/I
DO 42 J=1,N
42 A(J,J) = A(J,J) - SUM
IF (I.EQ.NM1) CALL CSUBN (A, HINVS, N)
CALL CPLY (H, A, B, N)
40 CALL CSUBN (B, A, N)
DO 43 I=1,N
DO 43 J=1,N
43 HINVS(I,J) = HINVS(I,J)/A(1,1)
RETURN
END

```

```

C
C

```

```

COEFF
SUBROUTINE COEFF (H,C,N)
REAL*8 A(10,10),B(10,10),C(12), H(10,10), SUM
CALL SUBN (H,A,N)
NP2=N+2
C(1)=0
C(NP2)=1
DO 40 I=1,N
SUM=0
DO 41 K=1,N
41 SUM = SUM + A(K,K)
C(NP2-I) = -SUM/I
DO 42 J=1,N
42 A(J,J) = A(J,J) + C(NP2-I)
CALL MPLY (H, A, B, N)
40 CALL SUBN (B, A, N)
DO 43 I=2,NP2
43 C(N+4-I) = C(N+4-I)/C(2)
RETURN
END

```

```

C
C

```

```

AROOT
SUBROUTINE AROOT (H,ROOT,ERROR,NITER,N)
REAL*8 A,B(11),C(12),DA,DBDA(11), ERROR,H(10,10),ROOT(10)
DATA B(1), DBDA(1)/1.0,0.0/
CALL COEFF (H,C,N)
I=N+1

```



```

10 A=0
   IM1=I-1
   DO 40 L1=1,NITER
     DO 41 J=2,I
       B(J)=C(J+1) - A*B(J-1)
41   DBDA(J) = -A*DBDA(J-1) - B(J-1)
     DA = -B(I)/DBDA(I)
     A = A + DA
     IF (DABS(DA) -ERROR) 11,11,40
40   CONTINUE
11 DO 42 J1=1,IM1
42   C(J1+1) = B(J1)
     ROOT(I-1) = -1/A
     IF (I.EQ.2) GO TO 12
     I=I-1
     GOTO 10
12 RETURN
   END

```

C
C

```

HOMO
SUBROUTINE HOMO (A, X, N)
REAL *8 A(10,10),B(10,10),BINVS(10,10),X(10),Y(10)
X(N)=1
NM1=N-1
DO 40 I=1,NM1
Y(I)=-A(I,N)
DO 40 J=1,NM1
40 B(I,J)=A(I,J)
IF(NM1.EQ.1) BINVS(1,1) =1./B(1,1)
IF (NM1.EQ.1) GO TO 10
CALL INVS (B, BINVS, NM1)
10 DO 41 I=1,NM1
X(I)=0
DO 41 J=1,NM1
41 X(I)=X(I) +BINVS(I,J)*Y(J)
RETURN
END

```

C
C

```

CHOMO
SUBROUTINE CHOMO (A, X, N)
COMPLEX*16 A(10,10),B(10,10),BINVS(10,10),X(10),Y(10)
REAL*8 U,Z
DATA U,Z /1.0,0.0/
X(N)=DCMPLX(U,Z)
NM1=N-1
DO 40 I=1,NM1
Y(I)=-A(I,N)
DO 40 J=1,NM1
40 B(I,J)=A(I,J)
IF(NM1.EQ.1) BINVS(1,1) =1./B(1,1)
IF (NM1.EQ.1) GOTO 10
CALL CINVS (B, BINVS, NM1)
10 DO 41 I=1,NM1
X(I)=DCMPLX(Z,Z)

```

```

DO 41 J=1,NM1
41 X(I)=X(I) +BINVS(I,J)*Y(J)
RETURN
END

```

3
3

```

MODL
SUBROUTINE MODL (M,K,U,ROOT,ERROR,NITER,N)
REAL*8 DUM(10,10),ERROR,H(10,10),K(10,10),M(10,10),
+MINVS(10,10),ROOT(10), U(10,10),X(10)
CALL INVS (M,MINVS,N)
CALL MPLY (MINVS,K,H,N)
CALL AROOT (H,ROOT,ERROR,NITER,N)
DO 40 L=1,N
DO 41 I=1,N
DO 41 J=1,N
41 DUM(I,J)=- M(I,J)*ROOT(L) + K(I,J)
CALL HOMO (DUM, X, N)
DO 40 I1=1,N
40 U(I1,L) = X(I1)
RETURN
END

```

3
3

```

CMODL
SUBROUTINE CMODL (M, C, K, U, ERROR, NITER, N)
REAL *8 C(10,10), ERROR, H(10,10), H1(10,10),H2(10,10),
+K(10,10), M(10,10), MINVS(10,10), UNIT(10,10),ZERO(10,10)
COMPLEX*16 DUM(10,10),ROOT(2,5),U(10,10),X(10)
DATA UNIT,ZERO /200*0.0/
NT2=N*2
DO 40 I=1,N
40 UNIT(I,I)=1.
CALL INVS (M,MINVS,N)
CALL MPLY (MINVS, C,H1,N)
CALL MPLY (MINVS,K,H2,N)
DO 41 I=1,N
DO 41 J=1,N
H(I,J) = -H1(I,J)
H(I,N+J) = -H2(I,J)
H(N+I,J) = UNIT(I,J)
41 H(N+I,N+J) = ZERO(I,J)
CALL CROOT (H, ROOT, ERROR, NITER, NT2)
DO 42 JJ=1,N
DO 42 II=1,2
DO 43 I=1,N
DO 43 J=1,N
43 DUM(I,J) = M(I,J)*ROOT(II,JJ)**2+C(I,J)*ROOT(II,JJ)+ K(I,J)
CALL CHOMO (DUM ,X ,N)
J1=2*(JJ-1)+II
DO 42 L=1,N
U(N+L,J1) = X(L)
42 U(L,J1) = U(N+L,J1)*ROOT(II,JJ)
RETURN
END

```

C

```

C      CROOT
      SUBROUTINE CROOT (H,ROOT,ERROR,NITER,N)
      REAL*8 A(2,5), A1, A2, B(12),C(12),DA1,DA2,
+DBDA1(12),DBDA2(12),DET,ERROR,H(10,10),P,Q,Z
      COMPLEX*16 ROOT(2,5)
      DATA B,DBDA1,DBDA2,Z /36*0.0,0.0/
      B(2) = 1
      CALL COEFF (H,C,N)
      I=N+2
10  L=I/2-1
      A1=0
      A2=0
      DO 40 IT=1,NITER
      DO 41 J=3,I
      B(J)=C(J) -A1*B(J-1)-A2*B(J-2)
      DBDA1(J) = -A1*DBDA1(J-1) - A2*DBDA1(J-2) - B(J-1)
41  DBDA2(J) = -A1*DBDA2(J-1) - A2*DBDA2(J-2) - B(J-2)
      DET=DBDA1(I-1)*DBDA2(I)-DBDA1(I)*DBDA2(I-1)
      DA1=(-B(I-1)*DBDA2(I)+B(I)*DBDA2(I-1))/DET
      DA2=(+B(I-1)*DBDA1(I)-B(I)*DBDA1(I-1))/DET
      A1=A1+DA1
      A2=A2+DA2
      IF ((DABS(DA1)-ERROR).GE.0) GO TO 40
      IF ((DABS(DA2)-ERROR).GE.0) GO TO 40
      DO 42 I1=4,I
42  C(I1-2)=B(I1-2)
      A(1,L)=A1
      A(2,L)=A2
      IF (I.EQ.4) GO TO 11
      I=I-2
      GO TO 10
40  CONTINUE
11  ND2=N/2
      DO 43 J=1,ND2
      P=A(1,J)**2-4*A(2,J)
      Q=DSQRT(DABS(P))
      IF (P.GE.0) GO TO 12
      ROOT(1,J) = DCMPLX(-A(1,J),Q)
      ROOT(2,J) = DCMPLX(-A(1,J),-Q)
      GO TO 13
12  ROOT(1,J) = DCMPLX(-A(1,J)-Q,Z)
      ROOT(2,J) = DCMPLX(-A(1,J)+Q,Z)
13  ROOT(1,J) = ROOT(1,J)/(2*A(2,J))
43  ROOT(2,J) = ROOT(2,J)/(2*A(2,J))
      RETURN
      END

```

```

C      CRKUT
      SUBROUTINE CRKUT (F,Z1,C,DT,Z,N)
      REAL*8 A,DT
      COMPLEX*16 K1,K2,K3,K4,C(10),F(10),Z(10),Z1(10)
      A=DT/4.
      DO 40 I=1,N
      DO 41 J=1,4

```

```
      K1=A*(-C(I)*Z1(I)+F(I))
      K2=A*(-C(I)*(Z1(I)+K1/2.)+F(I))
      K3=A*(-C(I)*(Z1(I)+K2/2.)+F(I))
      K4=A*(-C(I)*(Z1(I)+K3)+F(I))
41     Z1(I)=Z1(I)+(K1+2.*K2+2.*K3+K4)/6.
40     Z(I)=Z1(I)
      RETURN
      END
```



EK-C.

FRESPN PROGRAM LISTESI

```

C      N-SERBESTLIK DERECELI SISTEMLERIN FREKANS CEVABI
C      GEREKLI ALT PROGRAMLAR: (1) CINVS (2) CPLY (3) CSUBN
C      C      *** # I. FORMAT VE INPUT ***
      REAL AMP(10), C(10,10), K(10,10), M(10,10), PHASE(10)
      COMPLEX F(10), X(10), Z(10,10), ZINVS(10,10)
      OPEN (5,FILE='FRESPN5.DAT',STATUS='OLD')
      OPEN (6,FILE='FRESPN5.SON',STATUS='NEW')
80     FORMAT (' N-SERBESTLIK DERECELI SISTEMLERIN FREKANS CEVABI',/,
+ ' HARMONIK ZORLAYICI KUVVETLER AYNI FREKANSLI.',/, ' MEKANIK '
+ ' EMPEDANS METODU ',/, ' HAREKET DENKLEMLERINDEKI ZAMAN TUREVLERI '
+ ' YERINE (JW) YAZILIR ',/, ' SON OLARAK CEBRIK ES ZAMANLI '
+ ' DENKLEMLER COZULUR.',/)
81     FORMAT (' N - SERBESTLIK DERECESINI GIRINIZ ** N <=10')
82     FORMAT (' N =', I3, ' DEGERLERINIZ DOGRU MU? 1=EVET; 2=HAYIR')
83     FORMAT (' M - KUTLE MATRISINI GIRINIZ:')
84     FORMAT ( 5E14.5)
85     FORMAT (' VERILERINIZ DOGRU MU ? 1=EVET; 2=HAYIR.')
86     FORMAT (' C - SONUM MATRISINI GIRINIZ:')
87     FORMAT (' K - RIJITLIK MATRISINI GIRINIZ:')
88     FORMAT (' ENTER : WMIN WMAX DW KOMPLEKS KUVVET VEKTORU ')
89     FORMAT (' WMIN =',E13.5, ' WMAX =',E13.5, ' DW =',E13.5)
90     FORMAT (' KOMPLEKS ZORLAYICI KUVVET VEKTORU:-',/, (6E12.4))
91     FORMAT (12X, '*** SONUCLAR ***')
92     FORMAT (/, ' FREQ      :',E12.4,/, ' AMP(I)   :', 5E12.4,/, 10X, 5E12.4)
93     FORMAT (' PHASE(I):', 5E12.4,/, 10X, 5E12.4)
94     FORMAT (/, ' * PROGRAMI TEKRAR CALISTIRAYIM MI ? 1=EVET; 2=HAYIR')
      WRITE (6,80)
10     WRITE (6,81)
      READ (5,*) N
      WRITE (6,82) N
      READ (5,*) IANS
      IF (IANS.EQ.2) GOTO 10
11     WRITE (6,83)
      READ (5,*) ((M(I,J), J=1,N), I=1,N)
      DO 40 I=1,N
40     WRITE (6,84) (M(I,J), J=1,N)
      WRITE (6,85)
      READ (5,*) IANS
      IF (IANS.EQ.2) GOTO 11
12     WRITE (6,86)
      READ (5,*) ((C(I,J), J=1,N), I=1,N)
      DO 41 I=1,N
41     WRITE (6,84) (C(I,J), J=1,N)
      WRITE (6,85)
      READ (5,*) IANS
      IF (IANS.EQ.2) GOTO 12
13     WRITE (6,87)
      READ (5,*) ((K(I,J), J=1,N), I=1,N)
      DO 42 I=1,N
42     WRITE (6,84) (K(I,J), J=1,N)

```

```

WRITE (6,85)
READ (5,*) IANS
IF (IANS.EQ.2) GOTO 13
14 WRITE (6,88)
  READ (5,*) WMIN, WMAX, DW, ( F(I), I=1,N)
  WRITE (6,89) WMIN, WMAX, DW
  WRITE (6,90) ( F(I), I=1,N)
  WRITE (6,85)
  READ (5,*) IANS
  IF (IANS.EQ.2) GOTO 14
  WRITE (6,91)

```

C
C
C

```

*** # II. HESAPLAMALAR VE SONUCLAR. ***

```

```

W = WMIN
DO 43 L=1,1000
  DO 44 I=1,N
    DO 44 J=1,N
44   Z(I,J) = CMPLX(-M(I,J)*W**2 + K(I,J), C(I,J)*W)
      CALL CINVS (Z, ZINVS, N)
      DO 45 I=1,N
        X(I) = CMPLX(0., 0.)
        DO 46 J=1,N
46   X(I) = X(I) + ZINVS(I,J)*F(J)
      IF (ABS(REAL(X(I))).LT.1.E-20) X(I) = CMPLX(1.E-20,AIMAG(X(I)))
      AMP(I) = CABS(X(I))
45  PHASE(I) = 57.269*ATAN2 (AIMAG(X(I)), REAL(X(I)))
      WRITE (6,92) W, (AMP(I), I=1,N)
      WRITE (6,93) (PHASE(I), I=1,N)
      W = W + DW
      IF (W.GT.WMAX) GOTO 15
43  CONTINUE
15  WRITE (6,94)
      READ (5,*) IRUN
      IF (IRUN.EQ.1) GOTO 14
      STOP
      END

```

C
C
C
C
C

```

*** ALT PROGRAMLAR (SUBROUTINES) ***
=====

```

```

CSUBN
SUBROUTINE CSUBN (A, B, N)
COMPLEX A(10,10), B(10,10)
DO 40 I=1,N
DO 40 J=1,N
40 B(I,J)=A(I,J)
RETURN
END

```

C
C

```

CMPLY
SUBROUTINE CMPLY (A, B, C, N)
COMPLEX A(10,10), B(10,10),C(10,10)

```

```

DO 40 I=1,N
DO 40 J=1,N
C(I,J) = 0
DO 40 K=1,N
40 C(I,J)=C(I,J) + A(I,K)*B(K,J)
RETURN
END

```

3
C

```

CINVS
SUBROUTINE CINVS (H, HINVS, N)
COMPLEX H(10,10), HINVS(10,10), A(10,10),B(10,10),SUM
CALL CSUBN (H, A, N)
NM1= N-1
DO 40 I=1,NM1
SUM=0
DO 41 K=1,N
41 SUM=SUM + A(K,K)
SUM=SUM/I
DO 42 J=1,N
42 A(J,J) = A(J,J) - SUM
IF (I.EQ.NM1) CALL CSUBN (A, HINVS, N)
CALL CPLY (H, A, B, N)
40 CALL CSUBN (B, A, N)
DO 43 I=1,N
DO 43 J=1,N
43 HINVS(I,J) = HINVS(I,J)/A(1,1)
RETURN
END

```

EK-D.

ROTOR PROGRAM LISTESI

```

C   BIR SIKISTIRMA ETKILI YAG FILMI YATAGI-ROTOR SISTEMININ
C   RUNGE-KUTTA MERSON YONTEMIYLE COZUMU
    IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
    DIMENSION XA(450),YA(450)
    DOUBLE PRECISION K,K1,K2,K3,K4,K5,L,L1,L2,L3,L4,L5
    DOUBLE PRECISION M,M1,M2,M3,M4,M5,N,N1,N2,N3,N4,N5
    AH=0.1
    STEP1=1.1
    STEP2=1.05
    ERR=0.00001
    TMAX=32
C   SISTEM PARAMETRELERI
    BETA=0.018
    QC=0.7
    Q=0.25
C   BASLANGIC KOSULLARI
    ER=0.814
    DER=0.012
    AL=5.414
    DAL=0.22
C   HAREKET DENKLEMLERI
    J=1
    JJ=0
10  ER2=ER*ER
    TEMO1=1.-ER2
    T1=((1.+2.*ER2)/(TEMO1**2.5))/2.
    T2=(2.*ER2/TEMO1**2.)
    T3=(2.*ER/TEMO1**2.)
    T4=(ER/TEMO1**1.5)/2.
    Q1=BETA*(T1*DER*3.1416+T2*DAL)
    Q2=BETA*(T3*DER*3.1416+T4*DAL)
    CAL=COS(AL)
    SAL=SIN(AL)
    FX=QC*COS(T)-Q1*CAL+Q2*SAL
    FY=QC*SIN(T)-Q1*SAL-Q2*CAL-Q
    DDER=FX*CAL+FY*SAL+DAL*DAL*ER
    DDAL=(-FX*SAL+FY*CAL-2.*DER*DAL)/ER
    GO TO (40,50,60,70,80),J
40  DERA1=DER
    ERA1=ER
    DALA1=DAL
    ALA1=AL
    DDERA1=DDER
    DDALA1=DDAL
    H=AH/3.
    K1=H*DER
    L1=H*DDER
    M1=H*DAL
    N1=H*DDAL
    DER=DERA1+L1
    ER=ERA1+K1

```



```

DAL=DALA1+N1
AL=ALA1+M1
J=2
GO TO 10
50 K2=H*DER
L2=H*DDER
M2=H*DAL
N2=H*DDAL
DER=DERA1+L1/2.+L2/2.
ER=ERA1+K1/2.+K2/2.
DAL=DALA1+N1/2.+N2/2.
AL=ALA1+M1/2.+M2/2.
J=3
GO TO 10
60 K3=H*DER
L3=H*DDER
M3=H*DAL
N3=H*DDAL
DER=DERA1+0.375*L1+1.125*L3
ER=ERA1+0.375*K1+1.125*K3
DAL=DALA1+0.375*N1+1.125*N3
AL=ALA1+0.375*M1+1.125*M3
J=4
GO TO 10
70 K4=H*DER
L4=H*DDER
M4=H*DAL
N4=H*DDAL
DER=DERA1+1.5*L1-4.5*L3+6*L4
ER=ERA1+1.5*K1-4.5*K3+6*K4
DAL=DALA1+1.5*N1-4.5*N3+6*N4
AL=ALA1+1.5*M1-4.5*M3+6*M4
J=5
GO TO 10
80 K5=H*DER
L5=H*DDER
M5=H*DAL
N5=H*DDAL
K=(K1+4*K4+K5)/2.
L=(L1+4*L4+L5)/2.
M=(M1+4*M4+M5)/2.
N=(N1+4*N4+N5)/2.
J=1
EE=(K1-4.5*K3+4*K4-0.5*K5)/5.
EE2=EE*EE
ERR2=ERR*ERR
ERRA=ERR/32.
ERRA2=ERRA*ERRA
IF(EE2-ERR2) 210,210,211
210 IF(EE2-ERRA2) 212,212,213
212 AH=AH*STEP1
ER=ERA1
DER=DERA1
AL=ALA1

```

```
DAL=DALAI
GO TO 10
211 AH=AH/STEP2
ER=ERA1
DER=DERA1
AL=ALAI
DAL=DALAI
GO TO 10
213 ER=ERA1+K
DER=DERA1+L
AL=ALAI+M
DAL=DALAI+N
T=T+AH
PRINT 155,T,AH,ER,AL
155 FORMAT(4(2X,F10.5))
JJ=JJ+1
XA(JJ)=ER*COS(AL)
YA(JJ)=ER*SIN(AL)
IF(T.LT.TMAX) GO TO 10
NDATA=JJ
PRINT *, 'NDATA=', NDATA
250 FORMAT(2X,I3)
WRITE(2,350)(XA(JJ),YA(JJ) ,JJ=1,NDATA)
350 FORMAT(4(2X,E13.6))
END
```

EK-E.**ALT PROGRAMLARIN TANITILMASI**

Aşağıda tanıtımı yapılacak olan alt programlar Ek.A, Ek.B, Ek.C 'de listelenen ana programlar için kullanılmaktadır.

TRESP Alt Programı:

Tek serbestlik dereceli lineer sistemlerin gecici davranışlarını, başlangıç şartları x_0 ve y_0 alınıp 4.ncü dereceden Runge-Kutta metodunun uygulanmasıyla bulunmasını sağlayan bir alt programdır. F zorlayıcı kuvveti, Δt zaman artımı için sabit kabul edilir. $\xi(z)$ sönüm faktörü ile w_n (WN) doğal frekansları, sistemin parametreleridir. $D=DT/4$ olduğundan alt program her $\Delta t/4$ için gerekli hesaplamaları yapıp, verilen Δt için X ve Y değerlerini oluşturur.

SUBN ve CSUBN Alt Programları:

SUBN alt programı verilen bir A reel matrisini B matrisine atar. CSUBN alt programı ise aynı işlemi, kompleks matrisler olması durumunda yapar.

MPLY ve CMPLY Alt Programları:

MPLY alt programı reel A ve B matrislerinin çarpımını bulup C matrisine atanmasını sağlar. CMPLY alt programı ise aynı işlemin kompleks matrisler olması durumunda kullanılır.

INVG Alt Programı:

INVG alt programı ile reel matrislerin tersi alınır. Bunun için Gauss eliminasyon metodu kullanılır. N boyutlu bir H matrisi verildiğinde H 'ın tersi HINVS elde edilir.

INVS ve CINVS Alt Programları:

Reel ve kompleks matrislerin tersini almak için INVS ve CINVS alt programları kullanılır. Alt programlar N-nci mertebeden H kare matrisini alır ve H 'ın tersine (HINVS)

atar. Bunun için Faddeev-Leverrier metodu kullanılmaktadır.

COEFF Alt Programı:

Mekanik bir sistemi ifade eden karakteristik denklemin katsayılarının bulunmasında COEFF alt programı kullanılır. n boyutlu bir H reel matrisi için program Faddeev-Leverrier metodunu kullanır.

$$|\tau I - H| = a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + \dots + a_n\tau^n$$

COEFF bu denklemdeki a katsayıları bulan bir alt programdır.

ROOT ve CROOT Alt Programları:

Karakteristik denklemin köklerini iteratif bir yöntemle bulan alt programlardır. n-nci dereceden verilen bir H matrisi için $|w^2I - H| = 0$ denkleminin köklerinin bulunması için COEFF alt programından yararlanılır. Viskoz sönümlü pozitif tanımlı sistemler için, karakteristik denklemin kompleks kökleri ise CROOT ile belirlenir.

HOMO ve CHOMO Alt Programları:

Homojen cebrik denklemler takımının çözümü bu alt programlar tarafından yapılır. Verilen n-boyutlu A katsayılar matrisi için, $AX = 0$ formundan X çözüm vektörü bulunur.

MODL ve CMODL Alt Programları:

Farklı kökler olması durumunda, sönümsüz ayırık sistemlerin modal matrisini bulan alt programlardır. Verilen M, C ve K matrisleri için karakteristik denklemin köklerini ve buradan da modal matrisin bulunmasını sağlarlar. Özdeğerler kompleks değerli ise CMODL alt programı kullanılır.

CRKUT Alt Programı:

CRKUT alt programı, birinci dereceden n-tane diferansiyel denklemin $(\dot{z} + Cz = F)$ çözümünde kullanılır. Bunun için 4. dereceden Runge-Kutta metodu her $\Delta t/4$ için z değişkenini bulur.

ÖZGEÇMİŞ

Mustafa Çalışkan; 1970 yılında Samsun'da doğdu. 1985-86 öğretim yılında Samsun 19 Mayıs lisesini bitirerek KTÜ Mühendislik Mimarlık Fakültesi Makina Mühendisliği Bölümünü kazandı ve 1989-90 öğretim yılında da Makina Mühendisi ünvanıyla mezun oldu. Mezun olduğu yıl KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Makina Mühendisliği Anabilim Dalında yüksek lisans sınavını kazandı. İngilizce hazırlık okuduktan sonra Ocak 1992'de KTÜ Makina Mühendisliği Bölümü Makina Teorisi ve Dinamiği Bilim dalına araştırma görevlisi olarak atandı. Halen aynı göreve devam etmektedir.