

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



**TRABZON**

**Bu belge güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.**

Doğrulama Kod: eO-FYs9AWh38DBdMWxqjtnQD02dG7TUMZFaZo9L6i2g6NfYGMB9RkQ

Doğrulama Adres: <https://www.turkiye.gov.tr/karadeniz-teknik-universitesi-ebys>





**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde**

**Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : / /**

**Tezin Savunma Tarihi : / /**

**Tez Danışmanı :**

**Trabzon**



## ÖNSÖZ

“Çok Değişkenli Normal Dağılım İçin Yeni Bir Deneysel Uyum İyiliği Testi” isimli bu tez Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı, Doktora Programı’nda hazırlanmıştır.

Tez çalışmam boyunca hiçbir desteğini esirgemeyen ve araştırmacı olma yolundaki ilk adımlarımı atarken kıymetli bilgileriyle yolumu aydınlatan sevgili danışman hocam Sayın Doç. Dr. Orhan KESEMEN’e gönülden teşekkürü borç bilirim. Ayrıca yapıcı eleştirileri ve önerileri ile tezime büyük katkıda bulunan hocalarım Sayın Prof. Dr. Mualla YALÇINKAYA’ya ve Sayın Dr. Öğr. Üyesi Uğur ŞEVİK’e, eğitim öğretim hayatımda katkısı olan tüm hocalarıma ve ortak olarak çalışmalar yürüttüğümüz ve tez çalışması sürecinde de hiçbir yardımdan kaçınmayan arkadaşlarım Arş. Gör. Özge TEZEL’e ve Arş. Gör. Eda ÖZKUL’a teşekkür ederim.

Doktora eğitimim süresince maddi olarak beni destekleyen, TÜBİTAK 2211 Yurt İçi Lisansüstü Burs Programına teşekkür ederim.

Son olarak, onlardan aldığım güç ile hayattaki tüm zorlukları yenebileceğime inandığım, beni hep seven ve destekleyen aileme, hayatımın her alanında olduğu gibi tez çalışmam boyunca da benden desteğini esirgemeyen canım eşim Hilal TİRYAKİ’ye ve son olarak bana hayatımda kazanabileceğim unvanlardan en özelini “baba” olmayı tattıran biricik kızım Duru’ya en derin sevgi ve minnettarlığımı sunarım.

Buğra Kaan TİRYAKİ

Trabzon 2021



## TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Doktora Tezi olarak sunduğum ‘‘Çok Değişkenli Normal Dağılım İçin Yeni Bir Deneysel Uyum İyiliği Testi’’ başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Doç. Dr. Orhan KESEMEN’in sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 17/02/2021

Buğra Kaan TİRYAKİ



## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ .....	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET .....	IX
SUMMARY .....	X
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	XI
TABLolar DİZİNİ.....	XIV
SEMBOLLER DİZİNİ.....	XVI
1. GENEL BİLGİLER .....	1
1.1. Grafıksel ve Korelasyonel Yaklaşımları Kullanan Yöntemler .....	1
1.2. Uyum İyiliği Testlerinin Uyarlanmasıyla Elde Edilen Yöntemler .....	2
1.3. Çarpıklık ve Basıklık Katsayılarını Kullanan Yöntemler .....	3
1.4. Tutarlı Yaklaşımlar Gösteren Yöntemler.....	4
1.5. Diğer Yöntemler .....	4
1.6. Deneysel Dağılım Fonksiyonuna Dayalı Çok Değişkenli Uyum İyiliği Testleri .....	5
1.6.1. Peacock Testi .....	5
1.6.2. Fasano ve Franceschini Testi .....	6
1.6.3. Justel, Peña ve Zamar Testi.....	7
1.7. Çalışmada Kullanılacak Dağılımlar .....	8
1.7.1. Çok Değişkenli Simetrik Dağılımlar.....	8
1.7.1.1. Çok Değişkenli Laplace Dağılımı.....	8
1.7.1.2. Çok Değişkenli Cauchy Dağılımı .....	9
1.7.1.3. Çok Değişkenli Logistik Dağılım .....	10



1.7.1.4.	Çok Değişkenli Üçgen Dağılım .....	11
1.7.1.5.	Çok Değişkenli Düzgün Dağılım .....	12
1.7.1.6.	Çok Değişkenli Normal Dağılım .....	13
1.7.1.7.	Çok Değişkenli Student-t Dağılımı .....	16
1.7.2.	Çok Değişkenli Simetrik Olmayan Dağılımlar .....	17
1.7.2.1.	Çok Değişkenli Üstel Dağılım .....	17
1.7.2.2.	Çok Değişkenli Ki-kare Dağılımı .....	18
1.8.	İstatistiksel Karar ve Hata Olasılıkları .....	18
2.	YAPILAN ÇALIŞMALAR .....	20
2.1.	Kolmogorov-Smirnov Testi .....	21
2.1.1.	Tek Değişkenli Durum .....	21
2.1.2.	Çok Değişkenli Durum .....	22
2.2.	Önerilen Çok Değişkenli KS Test İstatistiğinin Hesaplanması .....	22
2.2.1.	Değişkenlerin Bağımsızlaştırılması .....	23
2.2.2.	Deneysel Dağılım Değerlerinin Hesaplanması .....	25
2.2.3.	Teorik Dağılım Değerlerinin Hesaplanması .....	25
2.2.4.	Önerilen Çok Değişkenli KS Testi .....	26
2.2.5.	Önerilen Çok Değişkenli KS Testinin Algoritması .....	27
3.	BURGULAR VE İRDELEME .....	29
3.1.	Önerilen Çok Değişkenli KS Testinin Kritik Tablo Değerlerinin Hesaplanması .....	29
3.1.1.	Tek Değişkenli Durum İçin Önerilen Çok Değişkenli KS Testinin Kritik Tablo Değerlerinin Hesaplanması .....	31
3.1.2.	İki Değişkenli Durum İçin Önerilen Çok Değişkenli KS Testinin Kritik Tablo Değerlerinin Hesaplanması .....	34
3.1.3.	Üç Değişkenli Durum İçin Önerilen Çok Değişkenli KS Testinin Kritik Tablo Değerlerinin Hesaplanması .....	38
3.1.4.	Beş Değişkenli Durum İçin Önerilen Çok Değişkenli KS Testinin Kritik Tablo Değerlerinin Hesaplanması .....	41



3.1.5.	On Değişkenli Durum İçin Önerilen Çok Değişkenli KS Testinin Kritik Tablo Değerlerinin Hesaplanması.....	45
3.1.6.	İki Değişkenli Durum İçin Önerilen Çok Değişkenli Lilliefors Testinin Kritik Tablo Değerlerinin Hesaplanması .....	49
3.2.	Önerilen Çok Değişkenli KS Testinin I. Tip Hata ve Testin Gücü Bakımından Karşılaştırılması.....	52
3.2.1.	Önerilen Çok Değişkenli KS Testinin I. Tip Hata Bakımından Karşılaştırılması .....	52
3.2.2.	Çok Değişkenli Simetrik Dağılımlar İçin Testin Gücü Karşılaştırılması .....	55
3.2.2.1.	Çok Değişkenli Normal Dağılım İçin Testin Gücü Karşılaştırılması.....	55
3.2.2.2.	Çok Değişkenli Laplace Dağılımı İçin Testin Gücü Karşılaştırılması .....	63
3.2.2.3.	Çok Değişkenli Student-t Dağılımı İçin Testin Gücü Karşılaştırılması .....	64
3.2.2.4.	Çok Değişkenli Cauchy Dağılımı İçin Testin Gücü Karşılaştırılması.....	65
3.2.2.5.	Çok Değişkenli Logistik Dağılımı İçin Testin Gücü Karşılaştırılması.....	66
3.2.2.6.	Çok Değişkenli Üçgen Dağılımı İçin Testin Gücü Karşılaştırılması.....	67
3.2.2.7.	Çok Değişkenli Düzgün Dağılımı İçin Testin Gücü Karşılaştırılması .....	68
3.2.3.	Çok Değişkenli Simetrik Olmayan Dağılımlar İçin Test Gücü Karşılaştırılması .....	71
3.2.3.1.	Çok Değişkenli Üstel Dağılımı İçin Testin Gücü Karşılaştırılması.....	71
3.2.3.2.	Çok Değişkenli Ki-Kare Dağılımı İçin Testin Gücü Karşılaştırılması.....	72
3.3.	Gerçek Veri Setleri İçin Önerilen Çok Değişkenli KS Normallik Testi.....	73
3.3.1.	Iris Veri Seti İçin Önerilen Çok Değişkenli KS Normallik Testi .....	73
3.3.2.	Hematoloji Veri Seti İçin Önerilen Çok Değişkenli KS Normallik Testi.....	76
3.3.3.	Besin Değerleri Veri Seti İçin Önerilen Çok Değişkenli KS Normallik Testi .....	79
3.3.4.	Şirket Veri Seti İçin Önerilen Çok Değişkenli KS Normallik Testi.....	80
3.3.5.	Panel Sertlik Ölçüsü Veri Seti İçin Önerilen Çok Değişkenli KS Normallik Testi.....	81
4.	SONUÇLAR .....	83
5.	ÖNERİLER.....	86



6. KAYNAKLAR ..... 87

ÖZGEÇMİŞ





Doktora Tezi

ÖZET

ÇOK DEĞİŞKENLİ NORMAL DAĞILIM İÇİN YENİ BİR DENEYSEL UYUM  
İYİLİĞİ TESTİ

Buğra Kaan TİRYAKİ

Karadeniz Teknik Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı  
Danışman: Doç. Dr. Orhan KESEMEN  
2021, 94 Sayfa

Doktora tezi olarak sunulan bu çalışmada, çok değişkenli normallik için çok değişkenli Kolmogorov-Smirnov (MVKS) uyum iyiliği testi sunulmuştur. Önerilen test, deneysel dağılım fonksiyonu ile teorik dağılım fonksiyonu arasındaki farka dayanmaktadır. Bu fark hesaplanırken çok değişkenli durumda karşılaşılan sorun, değişkenlerin tek değişkenli durumda olduğu gibi dağılımdan bağımsız olmamasıdır. İlk olarak, bu sorunu çözmek için değişkenler bağımsız hale getirilmiştir ve Rosenblatt dönüşümü değişkenlerin bağımsızlığı için uygulanmıştır. Daha sonra teorik ve deneysel dağılım değerleri hesaplanarak, MVKS test istatistiği hesaplanmıştır. Önerilen bu test, aynı algoritma ve kritik tablo değerlerini kullanarak  $p$  boyutlu veriler için kolay hesaplama sağlamaktadır. Ayrıca bu tezde, MVKS testi kritik tablolarının tek değişkenli KS testi kritik tablo ile karşılaştırılmasını ve MVKS'nin (iki değişkenli durum) mevcut iki değişkenli normallik testleri ile güç karşılaştırmalarını da içeren bir simülasyon çalışması MVKS'nin farklı boyutlarında etkinliğini göstermek için sunulmuştur. Son olarak, MVKS testinin tutarlı, kesin ve doğru sonuçlar elde ettiğini göstermek için beş farklı çok değişkenli veri setlerine uygulanmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Eliptik dağılımlar, Uyum iyiliği testi, Çok değişkenli deneysel dağılım fonksiyonu, Çok değişkenli normallik testi



PhD. Thesis

SUMMARY

A NEW EMPIRICAL GOODNESS OF FIT TEST FOR MULTIVARIATE NORMAL  
DISTRIBUTION

Buğra Kaan TİRYAKİ

Karadeniz Technical University  
The Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Statistical and Computer Science Graduate Program  
Supervisor: Assoc. Prof. Orhan KESEMEN  
2021, 94 Pages

This thesis presents a multivariate Kolmogorov-Smirnov (MVKS) goodness of fit test for multivariate normality. The proposed test is based on the difference between the empirical distribution function and the theoretical distribution function. While calculating them in multivariate case, the problem is that the variables cannot be distribution-free as in the univariate case. Firstly, the variables are made independent to solve this problem and the Rosenblatt transform is applied for independence of variates. Then the theoretical and empirical distribution values are calculated, and the MVKS test statistic is computed. It provides an easy calculation for  $p$ -dimensional data by using the same algorithm and critical table values. This thesis demonstrates the effectiveness of the MVKS for different dimensions with a simulation study which also includes the comparison of the MVKS critical tables with univariate KS critical table and the power comparisons of the MVKS (bivariate case) against with the existing bivariate normality tests. Lastly, the MVKS is applied to five different multivariate data sets to confirm that it achieves consistent, accurate and correct results.

**Key Words:** Elliptical distributions, Goodness of fit test, Multivariate empirical distribution function, Multivariate normality test



## ŞEKİLLER DİZİNİ

### Sayfa No

Şekil 1.	İki değişkenli Laplace dağılımı; (a) grafiği; (b) eş yükselti eğrisi.....	9
Şekil 2.	İki değişkenli standart Cauchy dağılımı; (a) grafiği; (b) eş yükselti eğrisi .....	10
Şekil 3.	İki değişkenli standart Logistik dağılımı; (a) grafiği; (b) eş yükselti eğrisi .....	11
Şekil 4.	İki değişkenli Üçgen dağılımı; (a) grafiği; (b) eş yükselti eğrisi.....	12
Şekil 5.	İki değişkenli Düzgün dağılımı; (a) grafiği; (b) eş yükselti eğrisi.....	13
Şekil 6.	İki değişkenli normal dağılımı; (a)-(b) $\rho = 0$ ; (c)-(d) $\rho = -0.5$ ; (e)-(f) $\rho = 0.5$ ; (g)-(h) $\rho = 0.8$ .....	15
Şekil 7.	İki değişkenli standart Student-t dağılımı; (a) grafiği; (b) eş yükselti eğrisi .....	16
Şekil 8.	İki değişkenli Üstel dağılımı; (a) grafiği; (b) eş yükselti eğrisi.....	17
Şekil 9.	İki değişkenli Ki-kare dağılımı; (a) grafiği; (b) eş yükselti eğrisi .....	18
Şekil 10.	Simülasyondan elde edilen kritik tablo değerleriyle (TS) ile R programıyla elde edilen tek değişkenli KS testi kritik tablo değerlerinin (TC) karşılaştırılması ( $p = 1$ ); (a) $1-\alpha = 0.90$ ; (b) $1-\alpha = 0.95$ ; (c) $1-\alpha = 0.99$ .....	33
Şekil 11.	Tek değişkenli durum için 100 denemede elde edilen MAPE değerlerinin kutu grafiği.....	34
Şekil 12.	Simülasyondan elde edilen kritik tablo değerleriyle (TS) ile R programıyla elde edilen tek değişkenli KS testi kritik tablo değerlerinin (TC) karşılaştırılması ( $p = 2$ ); (a) $1-\alpha = 0.90$ ; (b) $1-\alpha = 0.95$ ; (c) $1-\alpha = 0.99$ .....	36
Şekil 13.	İki değişkenli durum için 100 denemede elde edilen MAPE değerlerinin kutu grafiği.....	37
Şekil 14.	Simülasyondan elde edilen kritik tablo değerleriyle (TS) ile R programıyla elde edilen tek değişkenli KS testi kritik tablo değerlerinin (TC) karşılaştırılması ( $p = 3$ ); (a) $1-\alpha = 0.90$ ; (b) $1-\alpha = 0.95$ ; (c) $1-\alpha = 0.99$ .....	39
Şekil 15.	Üç değişkenli durum için 100 denemede elde edilen MAPE değerlerinin kutu grafiği.....	40



Şekil 16.	Simülasyondan elde edilen kritik tablo değerleriyle (TS) ile R programıyla elde edilen tek değişkenli KS testi kritik tablo değerlerinin (TC) karşılaştırılması ( $p = 5$ ); (a) $1-\alpha = 0.90$ ; (b) $1-\alpha = 0.95$ ; (c) $1-\alpha = 0.99$ .....	43
Şekil 17.	Beş değişkenli durum için 100 denemede elde edilen MAPE değerlerinin kutu grafiği.....	44
Şekil 18.	Simülasyondan elde edilen kritik tablo değerleriyle (TS) ile R programıyla elde edilen tek değişkenli KS testi kritik tablo değerlerinin (TC) karşılaştırılması ( $p = 10$ ); (a) $1-\alpha = 0.90$ ; (b) $1-\alpha = 0.95$ ; (c) $1-\alpha = 0.99$ .....	47
Şekil 19.	On değişkenli durum için 100 denemede elde edilen MAPE değerlerinin kutu grafiği.....	48
Şekil 20.	Simülasyondan elde edilen kritik tablo değerleriyle (TS) ile R programıyla elde edilen tek değişkenli Lilliefors testi kritik tablo değerlerinin (TC) karşılaştırılması ( $p = 2$ ); (a) $1-\alpha = 0.90$ ; (b) $1-\alpha = 0.95$ ; (c) $1-\alpha = 0.99$ .....	51
Şekil 21.	P, FF, J ve MVKS yöntemleri yöntemlerinin ‘ $\Sigma_1$ ’ ve ‘ $\Sigma_2$ ’ için I. tip hata değerleri; (a) İki değişkenli normal dağılım, ‘ $\Sigma_1$ ’ kovaryans matrisi; (b) İki değişkenli normal dağılım, ‘ $\Sigma_2$ ’ kovaryans matrisi. ....	54
Şekil 22.	P, FF, J ve MVKS yöntemlerinin iki değişkenli normal dağılım ( $\Sigma_1$ ) için testin gücü karşılaştırması (a) $n = 15$ (b) $n = 30$ (c) $n = 50$ (d) $n = 100$ .....	57
Şekil 23.	P, FF, J ve MVKS yöntemlerinin iki değişkenli normal dağılım ( $\Sigma_2$ ) için testin gücü karşılaştırması (a) $n = 15$ (b) $n = 30$ (c) $n = 50$ (d) $n = 100$ .....	60
Şekil 24.	P, FF, J ve MVKS yöntemlerinin iki değişkenli normal dağılım ( $\Sigma_3$ ) için testin gücü karşılaştırması (a) $n = 15$ (b) $n = 30$ (c) $n = 50$ (d) $n = 100$ .....	62
Şekil 25.	P, FF, J ve MVKS yöntemlerinin iki değişkenli Laplace dağılımı için testin gücü karşılaştırması .....	63
Şekil 26.	P, FF, J ve MVKS yöntemlerinin iki değişkenli Student-t dağılımı için testin gücü karşılaştırması .....	65
Şekil 27.	P, FF, J ve MVKS yöntemlerinin iki değişkenli Cauchy dağılımı için testin gücü karşılaştırması .....	66
Şekil 28.	P, FF, J ve MVKS yöntemlerinin iki değişkenli Logistik dağılımı için testin gücü karşılaştırması .....	67
Şekil 29.	P, FF, J ve MVKS yöntemlerinin iki değişkenli Üçgen dağılımı için testin gücü karşılaştırması .....	68
Şekil 30.	P, FF, J ve MVKS yöntemlerinin iki değişkenli düzgün dağılımı için testin gücü karşılaştırması (a) $n = 15$ (b) $n = 25$ (c) $n = 50$ (d) $n = 100$ .....	70



- Şekil 31. P, FF, J ve MVKS yöntemlerinin iki değişkenli Üstel dağılımı için testin gücü karşılaştırması ..... 72
- Şekil 32. P, FF, J ve MVKS yöntemlerinin iki değişkenli Ki-kare dağılımı için testin gücü karşılaştırması ..... 73



## TABLULAR DİZİNİ

### Sayfa No

Tablo 1.	İstatistiksel karar ve hata olasılıkları .....	19
Tablo 2.	R programıyla elde edilen tek değişkenli KS testi kritik tablo değerleri.....	30
Tablo 3.	R programıyla elde edilen tek değişkenli Lilliefors testi kritik tablo değerleri .....	31
Tablo 4.	Tek değişkenli KS istatistiğinin 100 000 deneme sonucundaki Monte-Carlo yaklaşımı ile elde edilen yüzdeler değeri .....	32
Tablo 5.	İki değişkenli KS istatistiğinin 100 000 deneme sonucundaki Monte-Carlo yaklaşımı ile elde edilen yüzdeler değeri .....	35
Tablo 6.	Üç değişkenli KS istatistiğinin 100 000 deneme sonucundaki Monte-Carlo yaklaşımı ile elde edilen yüzdeler değeri .....	38
Tablo 7.	Beş değişkenli KS istatistiğinin 100 000 deneme sonucundaki Monte-Carlo yaklaşımı ile elde edilen yüzdeler değeri .....	41
Tablo 8.	On değişkenli KS istatistiğinin 1 000 deneme sonucundaki Monte-Carlo yaklaşımı ile elde edilen yüzdeler değeri .....	45
Tablo 9.	İki değişkenli Lilliefors istatistiğinin 100 000 deneme sonucundaki Monte-Carlo yaklaşımı ile elde edilen yüzdeler değeri.....	49
Tablo 10.	P, FF, J ve MVKS yöntemlerinin ‘Σ1’ ve ‘Σ2’ için I. tip hata değeri.....	53
Tablo 11.	İki değişkenli Normal dağılım ‘Σ1’ için testin gücü değeri .....	56
Tablo 12.	İki değişkenli Normal dağılım ‘Σ2’ için testin gücü değeri .....	58
Tablo 13.	İki değişkenli Normal dağılım ‘Σ3’ için testin gücü değeri .....	61
Tablo 14.	İki değişkenli Laplace dağılımı için testin gücü değeri.....	63
Tablo 15.	İki değişkenli Student-t dağılımı için testin gücü değeri.....	64
Tablo 16.	İki değişkenli Cauchy dağılımı için testin gücü değeri .....	65
Tablo 17.	İki değişkenli Logistik dağılımı için testin gücü değeri.....	66
Tablo 18.	İki değişkenli Üçgen dağılımı için testin gücü değeri .....	67
Tablo 19.	İki değişkenli Düzgün dağılımı için testin gücü değeri.....	69



Tablo 20.	İki değişkenli Üstel dağılım için testin gücü değerleri .....	71
Tablo 21.	İki değişkenli Ki-kare dağılım için testin gücü değerleri .....	72
Tablo 22.	Fisher'in Iris veri seti .....	74
Tablo 23.	Tablo 22'nin devamı .....	75
Tablo 24.	Fisher'in Iris verisi için çok değişkenli normallik testi sonuçları .....	75
Tablo 25.	Royston'un hematoloji veri seti .....	76
Tablo 26.	Tablo 25'in devamı .....	77
Tablo 27.	Tablo 26'nın devamı .....	78
Tablo 28.	Popüler şeker markalarının besin değerleri .....	79
Tablo 29.	Tablo 28'in devamı .....	80
Tablo 30.	Şirketlerin varlıkları ve net gelirleri .....	81
Tablo 31.	Panel sertliğinin dört ölçüsü .....	82



## SEMBOLLER DİZİNİ

FF	: Fasano ve Francheni testi
i.i.d.	: Bağımsız özdeş dağılımlar
J	: Justel testi
KS	: Kolmogorov Smirnov testi
KS	: Kolmogorov Smirnov tablo değeri
$D^{(p)}$	: $p$ boyutlu Kolmogorov Smirnov test istatistiği
MAPE	: Ortalama mutlak yüzde hatası
MVKS	: Önerilen çok değişkenli KS testi
$n$	: Örneklem sayısı
$N_C$	: Hücre sayısı
$p$	: Boyut sayısı
P	: Peacock testi
$T^S$	: Simülasyondan elde edilen kritik tablo değerleri
$T^C$	: R programıyla elde edilen tek değişkenli KS kritik tablo değerleri
$\alpha$	: Anlamlılık düzeyi (I. Tip hata)
$1 - \alpha$	: Güven düzeyi
$\beta$	: II. Tip hata
$1 - \beta$	: Testin gücü
$\mu$	: Ortalama
$\sigma^2$	: Varyans
$\Sigma_x$	: Kovaryans matrisi





## 1. GENEL BİLGİLER

Uyum iyiliği testleri, verilen bir örneklemin verilen bir dağılımdan gelip gelmediğini test etmek için kullanılan istatistiksel bir yöntemdir. Normallik testi en yaygın olarak kullanılan uyum iyiliği testlerindedir. Student-t testi, doğrusal regresyon analizi, diskriminant analizi ve varyans analizi gibi birçok istatistiksel prosedürün temelinde normallik varsayımı yatmaktadır. Normallik varsayımı ihlal edildiğinde, yorumlama ve çıkarımlar güvenilir ya da geçerli olmayabilir (Razali vd., 2011). Uyum iyiliği testleri genellikle tek değişkenli dağılımlar için geliştirilmiştir (Massey Jr, 1951; Lilliefors, 1967). Ancak çok değişkenli dağılımlar için geliştirilen çalışmalar daha çok normallik testleri üzerinde durmaktadır.

Günümüzde çok değişkenli normallik testiyle ilgili birçok çalışma yapılmıştır (Peacock, 1983; Fasano ve Franceschini, 1987; Justel vd., 1997). Mecklin ve Mundfrom (2004) çok değişkenli normallik testlerini dört ana başlık altında toplamıştır. Bazı testler ise dört başlık altına girmediğinden bu tezde çok değişkenli normallik testleri üzerine yapılan çalışmalar beş başlık altında incelenmiştir. Bu başlıklar aşağıdaki gibi listelenmiştir:

- Grafikselle ve korelasyonel yaklaşımları kullanan yöntemler
- Uyum iyiliği testlerinin uyarlanmasıyla elde edilen yöntemler
- Çarpıklık ve basıklık katsayılarını kullanan yöntemler
- Tutarlı yaklaşımlar gösteren yöntemler
- Diğer yöntemler

### 1.1. Grafikselle ve Korelasyonel Yaklaşımları Kullanan Yöntemler

Bir verinin herhangi bir dağılıma uygunluğunu test etmeden önce, verinin grafiğinin çizdirilmesi testin olası sonucu hakkında fikir vermesi açısından önemlidir. Grafik yöntemlerden en çok kullanılan  $Q - Q$  grafikleri, verinin normal dağılıma uygunluğu hakkında bilgi vermektedir.  $Q - Q$  grafikleri sıralanmış veriler ve bunlara karşılık gelen teorik  $z$  değerlerinin çizimiyle elde edilen grafiklerdir. Grafikte veriler,  $y = x$  çizgisi boyunca uzanıyorsa verilerin normal dağılım gösterdiği söylenebilir. Diğer bir deyişle, istenilen dağılıma uygunluk, çizilen noktaların doğrusallığı ile ilgilidir. Çizilen noktaların doğrusallığı arttıkça, araştırılan dağılıma uygunluk da artacaktır. Ayrıca doğrusallıktan



sapmalar çarpıklık, basıklık, aykırı değer gibi durumların olduğunun göstergesidir (Johnson ve Wichern, 2014).  $Q - Q$  grafiği haricinde kullanılan grafik yöntemlerden bazıları  $P - P$ , histogram ve box-plot grafikleridir.

Grafiksel ve korelasyonel yaklaşımları çok değişkenli normallik testi için kullanan çalışmalar Healy (1968), Gnanadesikan ve Kettenring (1972), Andrews vd. (1973), Cox ve Small (1978), Fisher (1983), Porteous (1988), Tsai ve Koziol (1988), Ahn (1992), Koziol (1993), Singh (1993), Dunn (1995), Fang vd. (1998), Beirlant vd. (1999), Liang ve Bentler (1999) tarafından önerilmiştir.

## 1.2. Uyum İyiliği Testlerinin Uyarlanmasıyla Elde Edilen Yöntemler

Tek değişkenli dağılımlar için kullanılan uyum iyiliği testlerinin çok değişkenli dağılımlara uyarlanmasıyla elde edilen testler bu kategoriye girmektedir. Tek değişkenli uyum iyiliği testlerine Ki-kare, Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling, Shapiro-Wilk, Cramer von Mises, Jarque-Bera, Kuiper, Vasicek testleri örnek olarak verilebilir. Bu yaklaşımda, uyum iyiliği testleri deneysel dağılım fonksiyonuna dayanmaktadır. Birçok çalışmada, deneysel dağılım fonksiyonu çok değişkenli normallik testi problemine uyarlanarak çözüm bulunmaya çalışılmıştır.

Machado (1983) ve Fattorini (1986), Kolmogorov-Smirnov ve Cramer von Mises testlerine, çarpıklık-basıklık katsayıları ekleyerek çok değişkenli durum için genişletmişlerdir. Hawkins (1981) ve Paulson vd. (1987), Anderson-Darling testini uyarlayarak çok değişkenli uyum iyiliği testine ilişkin önerilerde bulunmuştur. Koziol (1982) ise Cramer von Mises testini geliştirerek çok değişkenlik normallik için uyarlamıştır. Royston (1983), Srivastava ve Hui (1987), Mudholkar vd. (1995), Shapiro-Wilk testi üzerinde çalışmışlardır. Zhou ve Shao (2014) çarpıklık yerine basıklığı Shapiro-Wilk testi ile birleştirip çok değişkenli bir normallik testi önermiştir. Moore ve Stubblebine (1981), Quiroz ve Dudley (1991) ve Park (1999) ki-kare uyum iyiliği testinin çok değişkenli duruma uyarlanmasıyla ilgili çalışmalar yapmışlardır.

Peacock (1983) iki boyutlu KS testi için Monte Carlo metodunu kullanarak bir test geliştirmiştir. Bu test istatistiğinin dağılımı neredeyse dağılımdan bağımsızdır. Fasano ve Franceschini (1987) iki veya üç boyutta rastgele örneklemelere KS testi uygulanabilmesi için klasik KS testine bir genelleştirme işlemi uygulamışlardır. Bu çalışma aynı zamanda



Peacock'un önerdiği yönteme de bazı iyileştirmeler yapmıştır. Looney (1995) tek değişkenli normallik testlerinin çok değişkenli normalliği test etmek için nasıl kullanılabileceği üzerine bir çalışma yapmıştır. Kolmogorov-Smirnov testi gibi bazı çok iyi bilinen tek değişkenli normallik testlerinin çok değişkenli normallik testine dönüştürmeye yönelik önerilerde bulunmuştur. Cabaña ve Cabaña (1997) çok değişkenli dağılımlar için değiştirilmiş Kolmogorov-Smirnov testini geliştirmiştir. Justel vd. (1997) dağılımdan bağımsız çok değişkenli Kolmogorov-Smirnov testi üzerine bir çalışma yapmıştır. Bu çalışmanın iki boyutta uygulamasına yer verilirken, ikiden fazla boyutlarda hesaplama ana sorun haline dönüşmektedir. Lopes vd. (2007), çok boyutlu veri setleri için Kolmogorov-Smirnov testinin üç değişik varyasyonunu kullanarak karşılaştırma yapmışlardır. Chiu ve Liu (2009) sürekli çok değişkenli dağılımlar için uyum iyiliği testi önermişlerdir. Önerilen istatistik sadece ortak dağılımları değil marjinal dağılımlarının da uyum iyiliğini, genelleştirilmiş çok değişkenli Cramér-von Mises istatistiğiyle test etmişlerdir.

Uyum iyiliği testi yaklaşımını kullanan diğer yöntemler ise Weiss (1958), Wagle (1968), Zhu (1995), Hensler vd. (1977), Gallardo vd. (1979), Gallardo ve Quesenberry (1982), Romeu (1991), Romeu & Ozturk (1993; 1996) ve Quiroz vd. (1998) tarafından önerilmiştir.

### 1.3. Çarpıklık ve Basıklık Katsayılarını Kullanan Yöntemler

Bir dağılımın çarpıklık ve basıklık katsayıları, dağılımın özellikleri hakkında araştırmacıya bilgi vermektedir. Fakat dağılımın çarpıklık ve basıklık katsayı değerleri bazen karar vermede etkili olamamaktadır. Örneğin normal dağılım gösteren bir veride çarpıklık katsayısının değerinin sıfır ve basıklık katsayısı değerinin üç olması beklenmektedir. Diğer yandan, normal dağılım haricinde simetrik dağılım gösteren herhangi bir dağılım için de çarpıklık katsayısının sıfır değerini alması beklenir. Benzer durum normal dağılım ile diğer dağılımlar kıyaslandığında basıklık katsayısı için de geçerli olabilmektedir. Bu yüzden tek değişkenli normallik testlerinde, uyum iyiliği testleri çarpıklık-basıklık yaklaşımlarına göre daha çok tercih edilmektedir (Mecklin ve Mundfrom, 2004). Ancak, çarpıklık ve basıklık katsayıları çok değişkenli normallik testi için yapılan çalışmalar literatürde mevcuttur.

Mardia (1970; 1974; 1975) çarpıklık ve basıklık ölçülerini kullanarak çok değişkenli normallik testi için yeni bir yöntem önermiştir. Mardia'nın önermiş olduğu çok değişkenli normallik testi, yaygın olarak kullanılan testlerden biridir. Bu bölümdeki diğer çalışmalar



Malkovich ve Afifi (1973), Small (1980), Isogai (1982; 1989), Mardia ve Foster (1983), Bera ve John (1983), Srivastava (1984), Koziol (1989), Mardia ve Kent (1991), Henze (1994), Jarque ve McKenzie (1995) ve Bogdan (1999) tarafından önerilmiştir.

#### 1.4. Tutarlı Yaklaşımlar Gösteren Yöntemler

Tutarlı yaklaşım gösteren yöntemler, deneysel karakteristik fonksiyonu kullanmaktadır ve genellikle Normal dağılımın karakteristik fonksiyonu temel alınarak geliştirilmiştir. Deneysel dağılım fonksiyonunu kullanan ilk çalışma Epps ve Pulley (1983) tarafından gerçekleştirilmiştir. Daha sonraları ise Murota ve Takeuchi (1981), Csörgő (1986; 1989), Baringhaus ve Henze (1988), Baringhaus ve Henze (1990), Henze (1997), Fan (1997), Henze ve Wagner (1997), Ghosh ve Ruymgaart (1992), Naito (1996) tarafından deneysel karakteristik fonksiyonunu kullanan çalışmalar önerilmiştir.

#### 1.5. Diğer Yöntemler

Çok değişkenli normallik testlerinde genellikle, çok değişkenli bir verinin her bir bileşeni (boyutu) tek değişkenmiş gibi ayrı ayrı alınmaktadır ve tek değişkenli normallik testi yapılmaktadır. Burada kullanılan tek değişkenli normallik testlerine Kolmogorov-Smirnov ve Shapiro-Wilk testleri örnek olarak verilebilir. Bu yaklaşımda en az bir bileşen normal dağılım göstermiyorsa, veri kümesinin çok değişkenli normal dağılım göstermediği varsayılmaktadır. Fakat bu durumun gerçekleşmesi için çok değişkenli dağılımın her bir tek değişkenli marjinal dağılımlarının normal dağılması gerekmektedir. Aksi halde bu yaklaşımı kullanarak çok değişkenli normallikle ilgili karar vermek yanıltıcı sonuçlara neden olmaktadır (Bilodeau ve Brenner, 2008).

Bazı çalışmalar ise özel koşullar altında örneğin bazı dağılımlar için veya belirli bir veri tipi için önerilmişlerdir. Bunlardan bazıları Loh (1986), Hasofer ve Stein (1990), Richardson ve Smith (1993), Kuwana ve Kariya (1991), Kariya ve George (1995), Kariya vd. (1999), Slate (1999), Liang vd. (2000) tarafından önerilmiştir.

Diğer çalışmalarda ise, Alam vd. (1993) tarafından çok değişkenli verileri dağılımdan bağımsız hale getirmek için istatistiksel eşdeğer bloklar (SEB) teorisinin bir uygulaması gerçekleştirilmiştir ve iki değişkenli durumlar için istatistiksel eşdeğer blokların



uygulanmasını gösterilmiştir. Alam ve Williams (1995) ise istatistiksel eşdeğer bloklara (SEB) dayalı çok değişkenli parametrik olmayan uyum iyiliği testi önermişlerdir.

Székely ve Rizzo (2005) öklid uzaklığını temel alan çok değişkenli dağılımların uyum iyiliğini test etmek için bir yöntem önermiştir. Sürücü (2006) çok değişkenli normal dağılımı test etmek için üç yeni istatistik geliştirmiştir ve bu istatistikleri bilinen test istatistikleriyle karşılaştırmıştır. McAssey (2013) Mahalanobis uzaklığını temel alan bir yaklaşım ortaya koymuş ve çeşitli dağılımlar üzerinde önerilen yöntemin etkinliğini incelemiştir. Zhang vd. (2012) çok değişkenli dağılımlar için veri derinliğine bağlı parametrik olmayan üç çeşit uyum iyiliği testi önermişler ve bu yöntemleri, Anderson–Darling ve Greenwood testleriyle iki değişkenli normal ve düzgün dağılım için simülasyonlarla test etmişlerdir.

## 1.6. Deneysel Dağılım Fonksiyonuna Dayalı Çok Değişkenli Uyum İyiliği Testleri

Literatürde, çok değişkenli normallik testleriyle ilgili birçok çalışma olmasına rağmen, bu tezde deneysel dağılım fonksiyonu ile teorik dağılım fonksiyonu arasındaki farkı temel alan deneysel uyum iyiliği testleriyle ilgilenilmiştir. İlgilenilen uyum iyiliği testleri, Peacock (1983), Fasano ve Franceschini (1987) ve Justel vd. (1997) tarafından önerilen deneysel dağılım fonksiyonuna dayalı çok değişkenli testlerdir.

### 1.6.1. Peacock Testi

Peacock (1983) çok boyutlu verilerin deneysel dağılım fonksiyonu ile yokluk hipotezinde verilen dağılım fonksiyonu arasındaki tutarlılığı inceleyen yeni bir test istatistiği önermiştir. Bu test istatistiği Kolmogorov-Smirnov istatistiğinin iki boyutta uyarlanmasıyla elde edilmiştir ve dağılımı Monte Carlo simülasyonu ile hesaplanmıştır. Önerilen yöntemin güç-spektrum analizini ise, yokluk hipotezinin düzgün dağılım olmaması durumunda gerçekleştirmiştir.

Tek örneklem Kolmogorov-Smirnov testinde yokluk hipotezi, verilen teorik dağılım fonksiyonu ile örneklemeden elde edilen deneysel dağılım fonksiyonunun farkı hesaplamaktadır. Örneklem sayısı arttıkça, hesaplanan istatistik  $(D_n)$ ,  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  ile orantılı olarak değişmektedir. Bu durumda,  $D_n$  istatistiğinin olasılık fonksiyonu yaklaşık olarak  $Z_n \equiv D_n\sqrt{n}$  değerine denk olmaktadır. Örneklem sayısının az olmasıyla,  $Z_n$  değeriyle ilişkili



verilen güven düzeyi,  $n$  değeri artıkça yavaşça artmaktadır. Büyük örneklem durumunda olasılık dağılımının integrali  $P(> Z_n)$ , Eşitlik (1) ile hesaplanmaktadır (Kendall ve Stuart, 1979).

$$P(> Z_n) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \exp(-2k^2 Z_n) \quad (1)$$

Birnbaum (1952),  $Z_n$  dağılımının farklı  $n$  değerleriyle değişimini inceleyerek bunları tablolaştırmıştır. Peacock, Birnbaum'ın tablolaştırdığı değerlerini kritik tablo değeri ( $Z'_n$ ) olarak alıp test işlemini gerçekleştirmiştir.

### 1.6.2. Fasano ve Franceschini Testi

Fasano ve Franceschini (1987), Peacock'ın geliştirmiş olduğu çok değişkenli normallik testinin eksik yönlerini göstermiş ve bu yöntemi iyileştirerek yeni bir test önermiştir. Önerdikleri test istatistiğinin Peacock testine göre daha hızlı, yeteri kadar dağılımdan bağımsız olduğunu ve üç boyutlu bir veri için hesaplama zamanı açısından da uygulanabilir olduğunu göstermişlerdir.

Fasano ve Franceschini (1987), Peacock'ın çalışmasında çok boyutlu veriler için birikimli dağılım fonksiyonunun hesaplanmasında bir sorun olduğunu fark etmiştir. Bu sorunu çözmek için, iki boyutlu bir uzayda, birikimli dağılım fonksiyonu hesaplanmak istenen noktanın  $(X_i, Y_i)$ , sol-aşağısı, sol-yukarısı, sağ-aşağısı ve sağ-yukarısı olmak üzere dört farklı bölgede birikimli dağılım fonksiyonunun hesaplanması gerektiğini belirtmiştir. Bu bölgeler şu şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{array}{c|c} (x < X_i, y > Y_j) & (x > X_i, y > Y_j) \\ \hline (x < X_i, y < Y_j) & (x > X_i, y < Y_j) \end{array} \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (2)$$

Bu bölgelerdeki her bir  $(X_i, Y_i)$  noktası için gözlem değerleri toplanır ve herhangi iki bölge için mutlak fark değeri maksimum olacak şekilde hesaplanarak  $D_{BKS}$  (Birnbaum Kolmogorov-Smirnov (BKS)) test istatistiği değeri elde edilmektedir. Elde edilen test istatistiği değeri Peacock'ın çalışmasında olduğu gibi  $Z_n \equiv D_{BKS} \sqrt{n}$  tablo değeriyle karşılaştırılarak karar verilmektedir.



### 1.6.3. Justel, Peña ve Zamar Testi

Justel vd. (1997), dağılımdan bağımsız çok değişkenli Kolmogorov-Smirnov uyum iyiliği testini önermişlerdir. Önerilen test istatistiği Rosenblatt (1952) dönüşümü kullanarak elde edilmiştir.

Verilen rastgele bir örnekleme  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  i.i.d. rastgele değişkenleri bir  $F$  dağılımından olsun. Araştırılan hipotez  $H_0: F = F_0$  ve karşıt hipotez ise  $H_1: F \neq F_0$  verilsin. Burada  $F_0$  uygunluğu sorgulanan teorik dağılım fonksiyonudur. Tek değişkenli durumda, Kolmogorov-Smirnov istatistiği,

$$D_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \quad (3)$$

gibi hesaplanmaktadır. Dağılımdan bağımsız bu istatistik aşağıdaki gibi yazılabilmektedir.

$$D_n = \sup_{0 \leq u \leq 1} |G_n(u) - F(u)| \quad (4)$$

Burada,  $G_n(u)$  deneysel dağılım fonksiyonudur ve  $u_i = F_0(x_i)$ ,  $0 - 1$  aralığında düzgün dağılıma dönüşmektedir.  $Y = T(X)$  dönüşümünden;

$$d_n = \sup_y |G_n(y) - y_1 \dots y_p| \quad (5)$$

istatistiği elde edilmektedir. Justel vd. (1997) tarafından önerilen istatistik ise,

$$D_n = \max_{j=1,2,\dots} d_n^j \quad (6)$$

şeklindedir. Burada elde edilen test istatistiği değeri, Justel vd. (1997) tarafından verilen tablo değerleriyle karşılaştırılarak çok değişkenli Kolmogorov-Smirnov testi gerçekleştirilir.



## 1.7. Çalışmada Kullanılacak Dağılımlar

Simülasyon çalışmasında önerilen yöntemin başarısını test etmek için istatistiksel dağılımlardan yararlanılmıştır. Simülasyonda kullanılan dağılımlar çok değişkenli simetrik ve simetrik olmayan dağılımlar olarak iki sınıfta incelenmiştir. Normal ve Student-t dağılımı haricinde diğer dağılımların ortak olasılık yoğunluk fonksiyonları marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarının yardımıyla hesaplanmıştır. Ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ile gösterilirse çok değişkenli istenilen bir dağılım,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n) \quad (7)$$

biçiminde oluşturulmuştur (Forbes vd., 2011).

### 1.7.1. Çok Değişkenli Simetrik Dağılımlar

Ortalama etrafında verilerin eşit dağılarak oluşturduğu dağılımlardır. Bu tezde, simülasyonlarda, testin gücü için simetrik dağılımlardan, Laplace, Cauchy, Logistik, Üçgen, Düzgün, Normal ve Student-t dağılımı kullanılacaktır.

#### 1.7.1.1. Çok Değişkenli Laplace Dağılımı

Tek değişkenli Laplace dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{2\sigma} \exp\left(-\frac{|x - \mu|}{\sigma}\right) \quad (8)$$

biçiminde verilmektedir (Balakrishnan ve Nevzorov, 2004; Krishnamoorthy, 2006; Forbes vd., 2011). Burada  $\mu$  konum parametresini,  $\sigma$  ise ölçek parametresini göstermektedir.

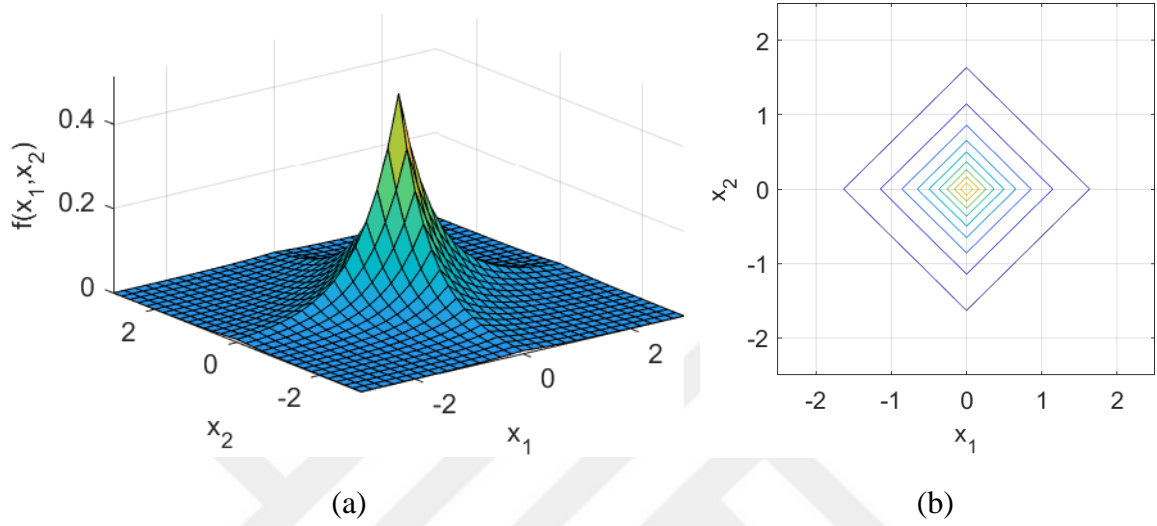
Çok değişkenli Laplace dağılımı Eşitlik (7) yardımıyla oluşturulmuştur. Eşitlik (7)'de  $X_1, X_2, \dots, X_n$  değişkenlerinin her birinin Laplace dağılımıyla çok değişkenli Laplace dağılımı elde edilmiştir. Diğer bir deyişle marjinal dağılımların Laplace dağılımıyla elde edilen dağılım çok değişkenli Laplace dağılımıdır. Burada dikkat edilmesi gereken durum,





bu dağılımdan, marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarının çarpımıyla üretilen rastgele sayıların birbirleriyle ilişkili olmadığıdır. Yani, korelasyon değeri sıfıra yakındır.

Ortalaması '0' ve varyansı '1' olan ilişkisiz iki değişkenli Laplace dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği Şekil 1(a)'da ve eş yükselti eğrisi Şekil 1(b)'de verilmiştir.



Şekil 1. İki değişkenli Laplace dağılımı; (a) grafiği; (b) eş yükselti eğrisi

### 1.7.1.2. Çok Değişkenli Cauchy Dağılımı

Tek değişkenli Cauchy dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu Eşitlik (9)'da verilmiştir (Balakrishnan ve Nevzorov, 2004; Krishnamoorthy, 2006; Forbes vd., 2011). Burada,  $\mu$  konum parametresini,  $\sigma$  ise ölçek parametresini göstermektedir.

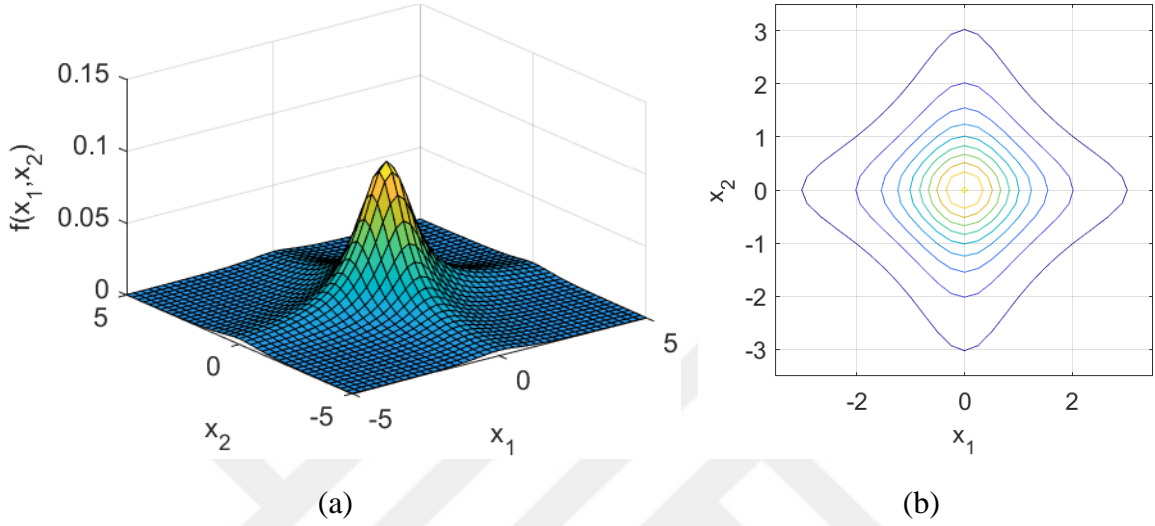
$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\pi\sigma \left[ 1 + \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right]} \quad (9)$$

Çok değişkenli Cauchy dağılımı Eşitlik (7) yardımıyla oluşturulmuştur. Eşitlik (7)'de  $X_1, X_2, \dots, X_n$  değişkenlerinin her birinin Cauchy dağılmasıyla çok değişkenli Cauchy dağılımı elde edilmiştir (Johnson, 2013). Diğer bir deyişle, her bir marjinal dağılımın Cauchy dağılımına sahip olması şartıyla, marjinal dağılımların çarpımıyla elde edilen dağılım çok değişkenli Cauchy dağılımıdır (Forbes vd., 2011). Burada dikkat edilmesi gereken durum,



bu dağılımdan marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarının çarpımıyla üretilen rastgele sayıların birbirleriyle ilişkili olmadığıdır. Yani, korelasyon değeri sıfıra yakındır.

İki değişkenli standart Cauchy dağılımının ( $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ ) olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği Şekil 2(a)'da ve eş yükselti eğrisi grafiği Şekil 2(b)'de gösterilmiştir.



Şekil 2. İki değişkenli standart Cauchy dağılımı; (a) grafiği; (b) eş yükselti eğrisi

### 1.7.1.3. Çok Değişkenli Logistik Dağılım

Tek değişkenli Logistik dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

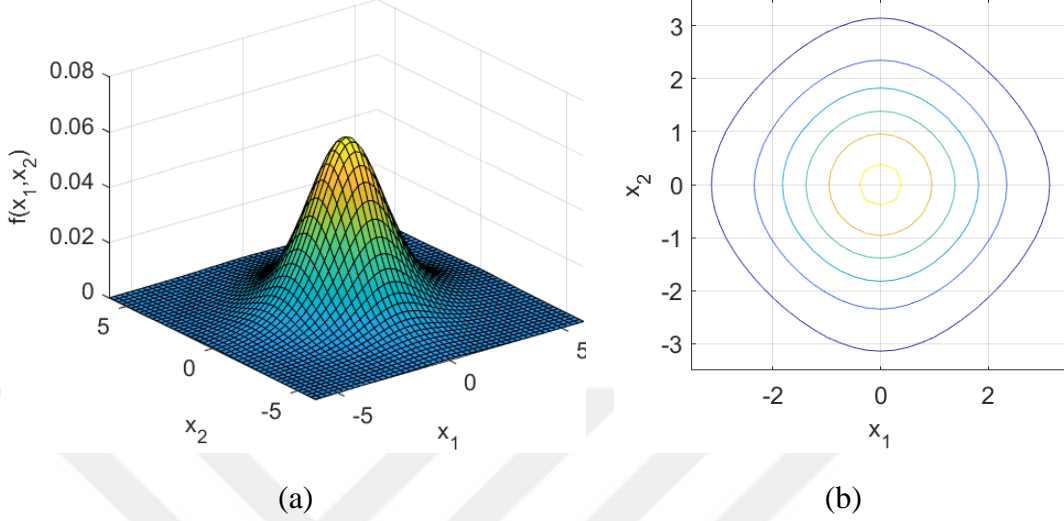
$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{\exp\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)}{\sigma \left(1 + \exp\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)\right)^2} \quad (10)$$

biçiminde verilmektedir (Balakrishnan ve Nevzorov, 2004; Krishnamoorthy, 2006). Burada  $\mu$  konum parametresini,  $\sigma$  ise ölçek parametresini göstermektedir.

Çok değişkenli Logistik dağılım Eşitlik (7) yardımıyla oluşturulmuştur. Eşitlik (7)'de  $X_1, X_2, \dots, X_n$  değişkenlerinin her birinin Logistik dağılmasıyla çok değişkenli Logistik dağılım elde edilmiştir (Johnson, 2013). Çok değişkenli Laplace ve Cauchy dağılımlarına benzer olarak, marjinal dağılımların çarpımından yararlanılarak rastgele sayılar üretilmiştir (Forbes vd., 2011).



İki değişkenli standart Logistik dağılımının ( $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ ) olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği Şekil 3(a)'da ve eş yükselti eğrisi grafiği Şekil 3(b)'de verilmiştir.



Şekil 3. İki değişkenli standart Logistik dağılımı; (a) grafiği; (b) eş yükselti eğrisi

#### 1.7.1.4. Çok Değişkenli Üçgen Dağılım

Tek değişkenli Üçgen dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x; a, b, c) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(c-a)(b-a)} & : a \leq x < b \\ \frac{2(c-x)}{(c-a)(c-b)} & : b < x \leq c \\ 0 & : \text{diğer durumlarda} \end{cases}, a < b < c \quad (11)$$

biçiminde verilebilir (Balakrishnan ve Nevzorov, 2004; Forbes vd., 2011). Burada  $a$  alt sınırı,  $b$  tepe değerini ve  $c$  üst sınırı değerlerini göstermektedir.

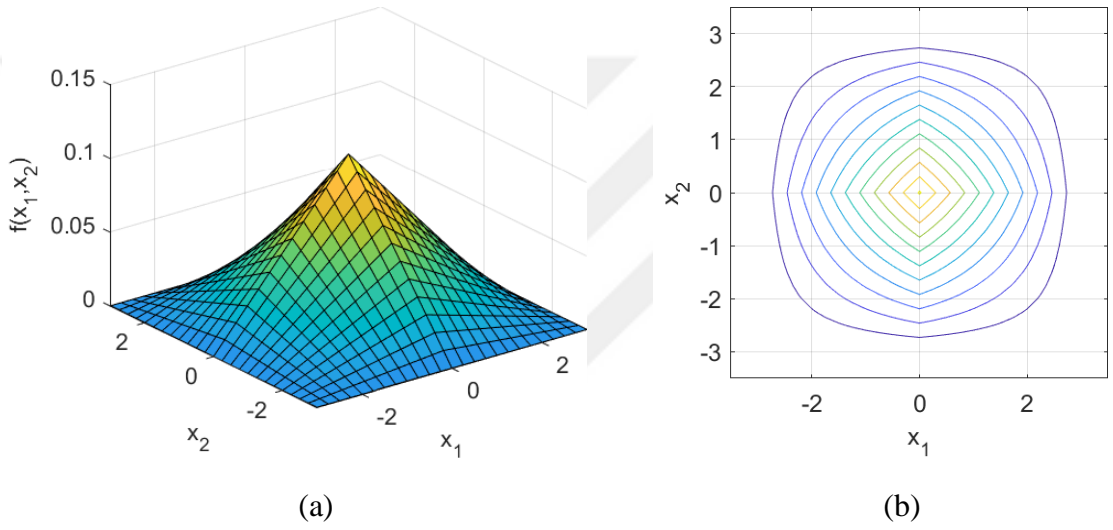
Çok değişkenli Üçgen dağılım Eşitlik (7) yardımıyla oluşturulmuştur. Eşitlik (7)'de  $X_1, X_2, \dots, X_n$  değişkenlerinin her birinin Üçgen dağılıma sahip olmasıyla çok değişkenli Üçgen dağılım elde edilmiştir (Forbes vd., 2011). Çok değişkenli Laplace, Cauchy ve Logistik dağılımlarına benzer olarak marjinal dağılımların çarpımından yararlanılarak rastgele sayılar üretilmiştir.

Üçgen dağılımı sıfır ortalamalı simetrik bir dağılım olarak tanımlanırsa tek parametrelili bir olasılık yoğunluk fonksiyonu,



$$f(x; a) = \begin{cases} \frac{(a+x)}{a^2}, & -a \leq x \leq 0 \\ \frac{a-x}{a^2}, & 0 < x \leq a \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}, a > 0 \quad (12)$$

biçiminde elde edilir. Bu durumda iki değişkenli Üçgen dağılımının ( $a = 3$ ) ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği Şekil 4(a)'da ve eş yükselti eğrisi grafiği Şekil 4(b)'de verilmiştir.



Şekil 4. İki değişkenli Üçgen dağılım; (a) grafiği; (b) eş yükselti eğrisi

### 1.7.1.5. Çok Değişkenli Düzgün Dağılım

Çok değişkenli düzgün dağılım, tek değişkenli düzgün dağılımın iki veya daha fazla değişkenli dağılıma genelleştirilmesidir (Forbes vd., 2011). Çok değişkenli Düzgün dağılım Eşitlik (7) yardımıyla oluşturulmuştur. Eşitlik (7)'de  $X_1, X_2, \dots, X_n$  değişkenlerinin her birinin Düzgün dağılıma sahip olmasıyla çok değişkenli Düzgün dağılım elde edilmiştir (Forbes vd., 2011).

Tek değişkenli düzgün dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

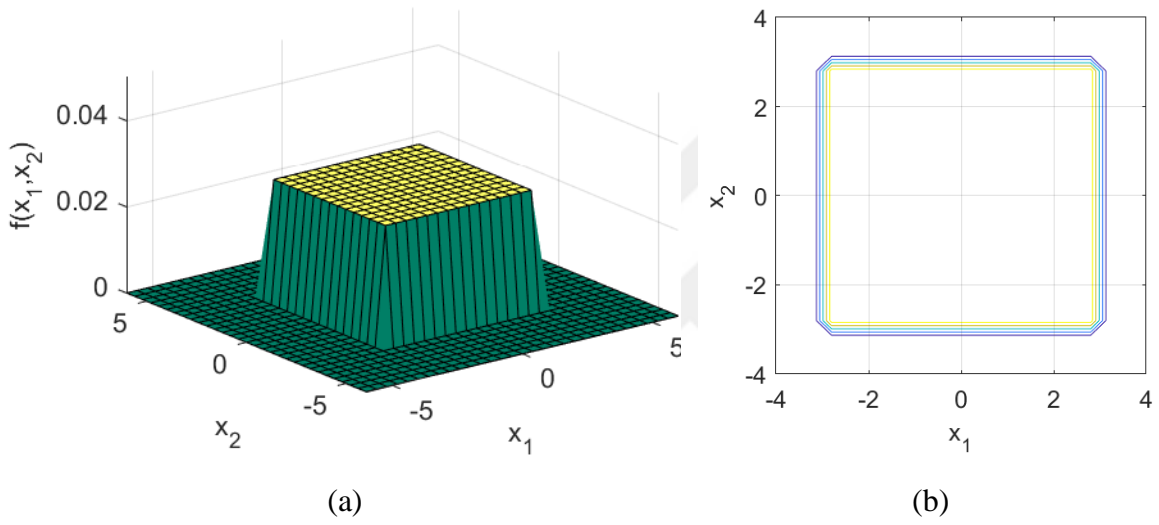
$$f(x; a, b) = \frac{1}{b-a}, \quad a \leq x \leq b \quad (13)$$



biçiminde verilmektedir. Bu eşitliği sıfır ortalamalı simetrik bir dağılım olması için,

$$f(x; a) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & -a < x < a \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}, a > 0 \quad (14)$$

İki değişkenli Düzgün dağılımının ( $\mu = 0, \sigma = 1$ ) olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği Şekil 5(a)'da ve eş yükselti eğrisi grafiği Şekil 5(b)'de verilmiştir.



Şekil 5. İki değişkenli Düzgün dağılım; (a) grafiği; (b) eş yükselti eğrisi

### 1.7.1.6. Çok Değişkenli Normal Dağılım

Çok değişkenli normal dağılım, tek değişkenli normal dağılımın iki veya daha fazla değişkenli dağılıma genelleştirilmesidir. Çok değişkenli normal dağılım Eşitlik (7) yardımıyla marjinal dağılımların çarpımıyla oluşturulduğunda bağımsız (ilişkisiz) bir dağılım elde edilebilmektedir. Eğer ilişkili çok değişkenli bir normal dağılım elde edilmek istenirse, kovaryans matrisi yardımıyla çok değişkenli normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu Eşitlik (15)'deki gibi hesaplanmaktadır (Johnson, 2013; Manly ve Alberto, 2016).

$$f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}|}(2\pi)^p} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})'\right) \quad (15)$$



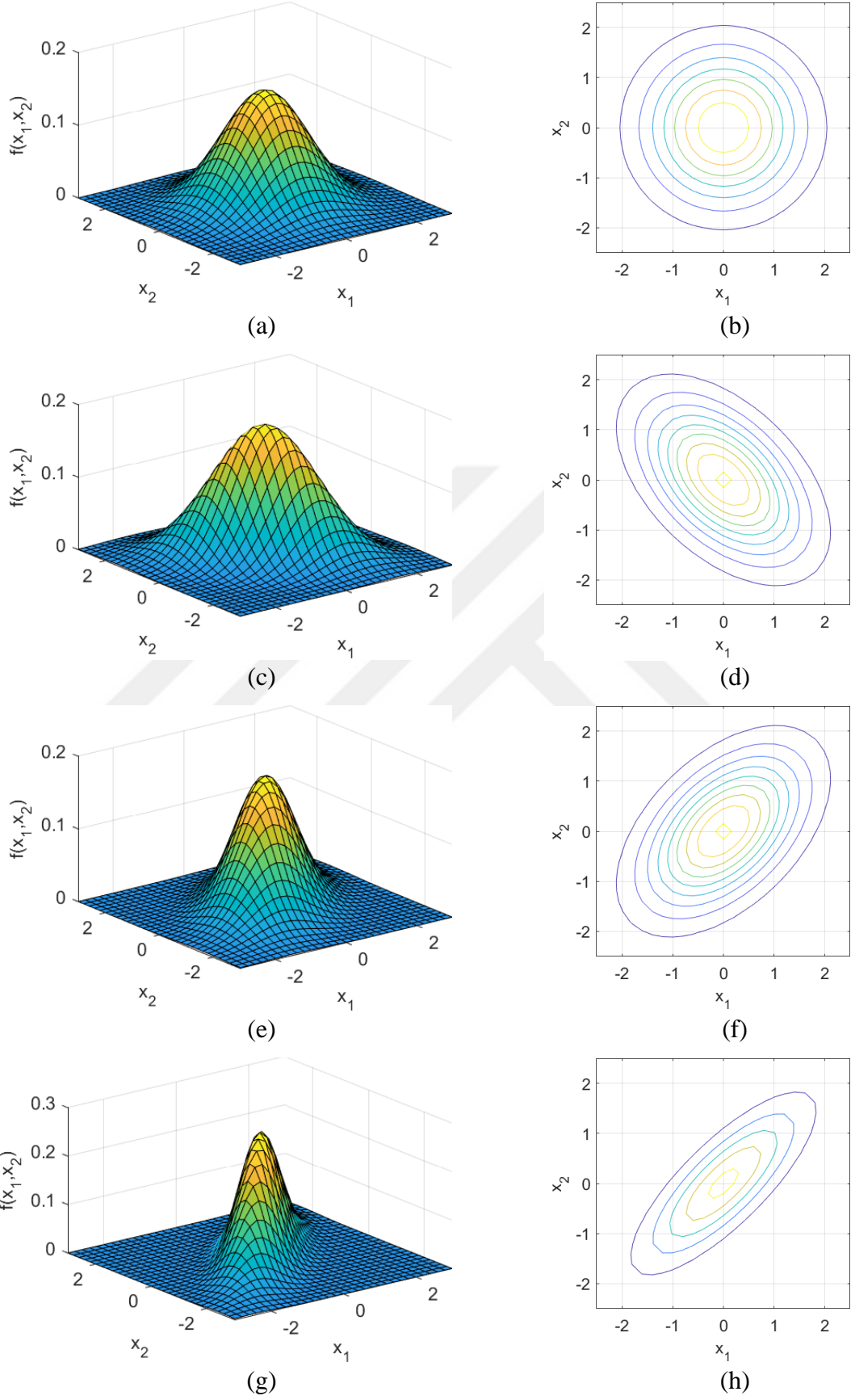
burada  $\boldsymbol{\mu}$  ortalama vektörünü,  $\boldsymbol{\Sigma}$  kovaryans matrisini ve  $p$  boyut sayısını göstermektedir. Kovaryans matrisi simetrik pozitif tanımlı bir matristir ve matrisin köşegen elemanları değişkenlerin varyans değerini, diğerleri ise değişkenlerin birbiriyle oluşturduğu kovaryans değerini vermektedir. Kovaryans matrisi ( $\boldsymbol{\Sigma}$ ),

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 & \dots & \rho\sigma_1\sigma_p \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \dots & \rho\sigma_2\sigma_p \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \rho\sigma_1\sigma_p & \rho\sigma_2\sigma_p & \dots & \sigma_p^2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

biçiminde tanımlanmaktadır (Johnson, 2013; Manly ve Alberto, 2016). Burada  $\sigma_i^2$  varyans değerini,  $\rho$  ise korelasyon değerini göstermektedir.

İki değişkenli normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu Şekil 6'de verilmiştir. Örnek olarak iki değişkenli normal dağılımın ortalamaları  $[0 \ 0]$  ve varyansları  $\sigma_i^2 = 1$ , ( $i = 1,2$ ) olarak alınarak Şekil 6 gösterilmiştir. Aynı ortalama ve varyans durumunda, değişkenler arasındaki ilişkinin olmadığı durum ( $\rho = 0$ ) Şekil 6(a)'da ve eş yükselti eğrisi grafiği Şekil 6(b)'de, orta dereceli ters yönlü ilişki durumu ( $\rho = -0.5$ ) Şekil 6(c)'de ve eş yükselti eğrisi grafiği Şekil 6 (d)'de, orta dereceli aynı yönlü ilişki durumu ( $\rho = 0.5$ ) Şekil 6(e)'de ve eş yükselti eğrisi grafiği Şekil 6(f)'de ve son olarak kuvvetli ilişkinin olduğu ( $\rho = 0.8$ ) durum Şekil 6(g)'de ve eş yükselti eğrisi grafiği Şekil 6(h)'da gösterilmiştir.





Şekil 6. İki değişkenli normal dağılım; (a)-(b)  $\rho = 0$ ; (c)-(d)  $\rho = -0.5$ ; (e)-(f)  $\rho = 0.5$ ; (g)-(h)  $\rho = 0.8$

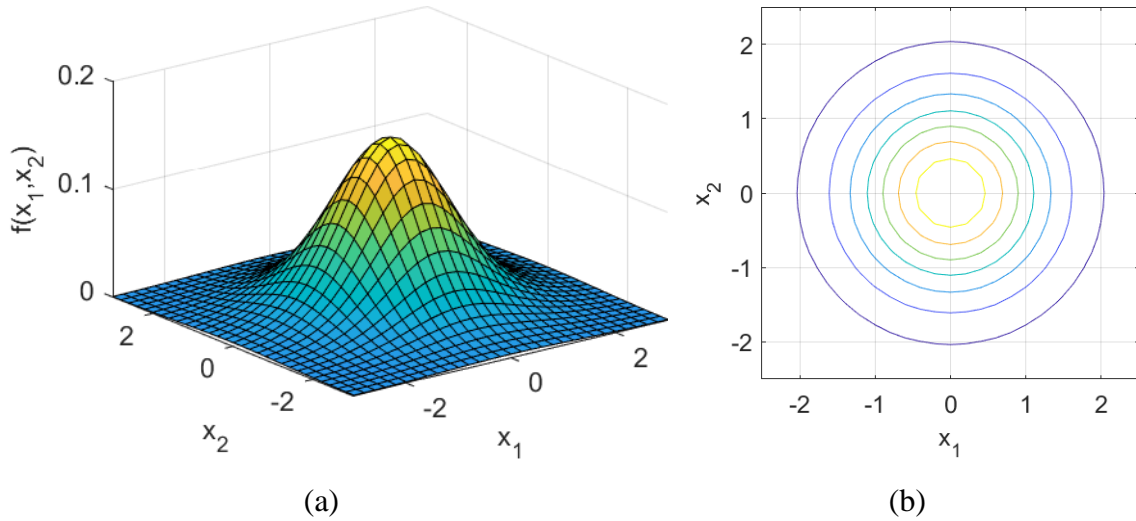


### 1.7.1.7. Çok Değişkenli Student-t Dağılımı

Çok değişkenli Student-t dağılımı, tek değişkenli Student-t dağılımın iki veya daha fazla değişkenli olduğu duruma genelleştirilmesidir (Johnson, 2013). Çok değişkenli Student-t dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu Eşitlik (17)'de verilmiştir (Kotz ve Nadarajah, 2004).

$$f(\mathbf{x}; \Sigma, \nu) = \frac{1}{|\Sigma|^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{(v\pi)^p}} \frac{\Gamma((v+p)/2)}{\Gamma(v/2)} \left(1 + \frac{\mathbf{x}'\Sigma^{-1}\mathbf{x}}{v}\right)^{-(v+p)/2} \quad (17)$$

Burada  $\Gamma(\cdot)$  Gamma fonksiyonunu,  $\nu$  serbestlik derecesini ve  $p$  ise boyut sayısını göstermektedir. Çok değişkenli Student-t dağılımı, kovaryans matrisi ( $\Sigma$ ) ve serbestlik derecesi ( $\nu$ ) olmak üzere iki parametre değerine göre değişmektedir (De Sá, 2007; Krishnamoorthy, 2006). 10 serbestlik dereceli iki değişkenli standart Student-t dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği Şekil 7(a)'da ve eş yükselti eğrisi grafiği Şekil 7(b)'de gösterilmiştir.



Şekil 7. İki değişkenli standart Student-t dağılımı; (a) grafiği; (b) eş yükselti eğrisi





## 1.7.2. Çok Değişkenli Simetrik Olmayan Dağılımlar

Ortalama etrafında verilerin eşit olarak dağılmadığı dağılımlardır. Simülasyonda çok değişkenli simetrik olmayan dağılımlardan Üstel ve Ki-kare dağılımları kullanılmıştır.

### 1.7.2.1. Çok Değişkenli Üstel Dağılım

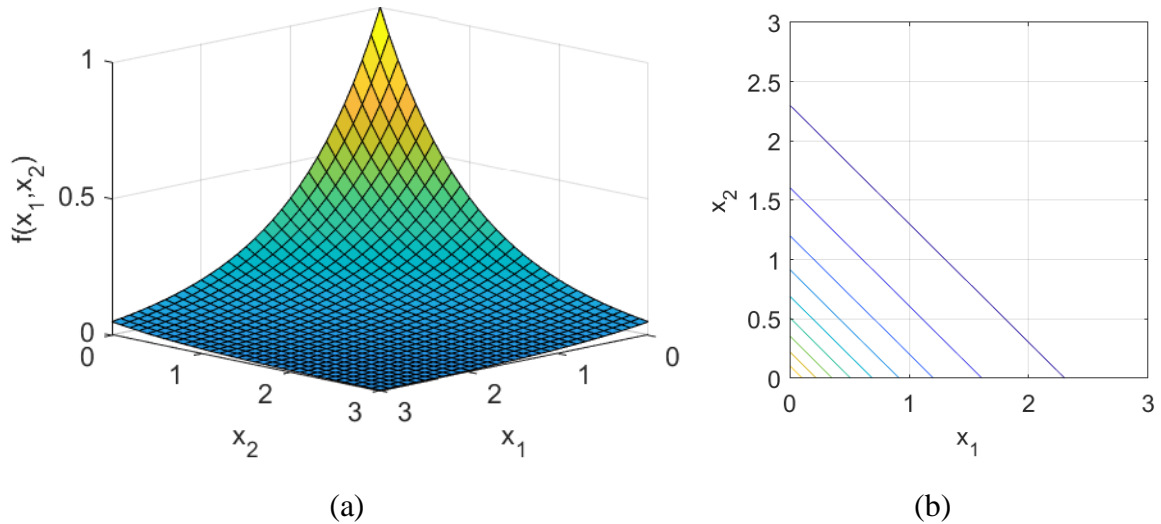
Tek değişkenli Üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x; \mu) = \frac{1}{\mu} \exp\left(-\frac{x}{\mu}\right) \quad (18)$$

biçiminde verilebilir (De Sá, 2007; Krishnamoorthy, 2006). Burada  $\mu$  konum parametresini göstermektedir.

Çok değişkenli Üstel dağılım Eşitlik (7) yardımıyla oluşturulmuştur. Çok değişkenli Laplace, Cauchy, Logistik ve Üçgen dağılımlarına benzer olarak marjinal dağılımların çarpımından yararlanılarak rastgele sayılar üretilmiştir.

İki değişkenli Üstel dağılımının ( $\mu = 1$ ) olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği Şekil 8(a)'da ve eş yükselti eğrisi Şekil 8(b)'de verilmiştir.



Şekil 8. İki değişkenli Üstel dağılım; (a) grafiği; (b) eş yükselti eğrisi



### 1.7.2.2. Çok Değişkenli Ki-kare Dağılımı

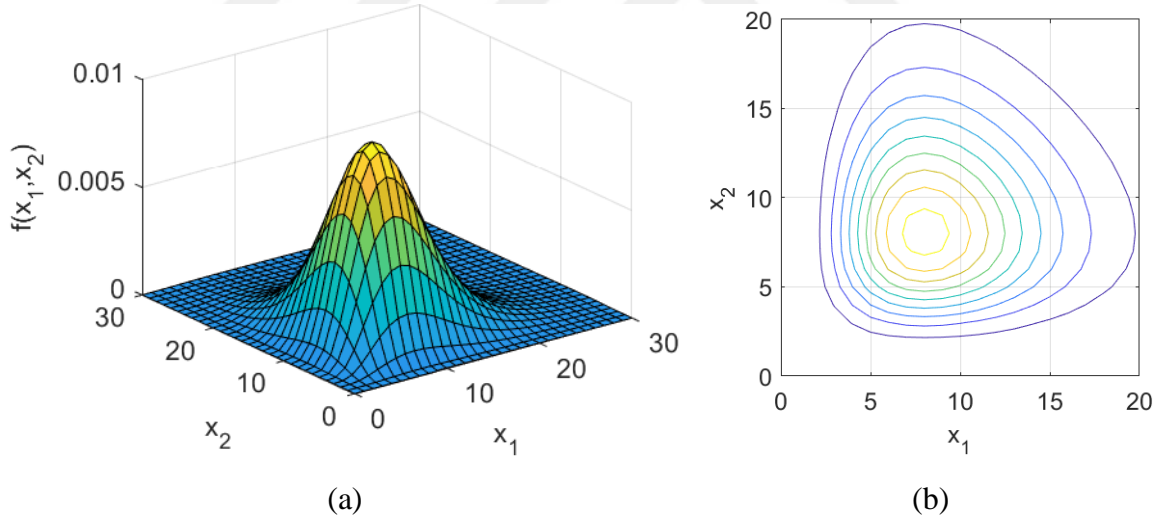
Tek değişkenli Ki-Kare dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x; v) = \frac{x^{\frac{v-2}{2}} \exp\left(-\frac{x}{2}\right)}{2^{\frac{v}{2}} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \quad (19)$$

biçiminde verilebilir (De Sá, 2007; Krishnamoorthy, 2006; Forbes vd., 2011). Burada  $\Gamma(\cdot)$  Gamma fonksiyonunu,  $v$  ise serbestlik derecesini göstermektedir.

Çok değişkenli Laplace, Cauchy, Logistik, Üçgen ve Üstel dağılımlarına benzer olarak marjinal dağılımların çarpımından yararlanılarak rastgele sayılar üretilmiştir.

10 serbestlik dereceli iki değişkenli Ki-kare dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği Şekil 9(a)'da ve eş yükselti eğrisi grafiği Şekil 9(b)'de gösterilmiştir.



Şekil 9. İki değişkenli Ki-kare dağılımı; (a) grafiği; (b) eş yükselti eğrisi

### 1.8. İstatistiksel Karar ve Hata Olasılıkları

İstatistiksel bir testte %100 bir hipotezin doğruluğunu kanıtlamak imkansızdır (Ramachandran ve Tsokos, 2020). Dolayısıyla istatistiksel testlerde belli bir oranda hata payı kabul edilebilir. İstatistiksel hatanın iki tipi vardır. Bunlardan biri, gerçekte  $H_0$  hipotezi doğru olduğunda ve  $H_0$  hipotezi reddedilmişse ortaya çıkan hatadır. Bu hataya I. tip hata



veya anlamlılık düzeyi de denilmektedir. Bununla beraber,  $(1 - \alpha)$  olasılığı güven düzeyi olarak adlandırılmaktadır. Diğeri ise, gerçekte  $H_0$  hipotezi yanlış olduğunda ve  $H_0$  hipotezi reddedilememişse ortaya çıkan hatadır. Bu hataya ise II. tip hata ( $\beta$ ) denilmektedir.  $(1 - \beta)$  olasılığı da testin gücü olarak adlandırılmaktadır (Neter vd., 1993; Crawshaw ve Chambers, 2001; Wackerly vd., 2014). İstatistiksel kararlar ve hatalar Tablo 1’de şematik olarak verilmiştir. Hatalar yanlış kararların bir sonucu olarak ortaya çıktığından ve kararlar rastgele örneklere dayandığından, hataların kendileriyle ilişkili olasılıklara sahip olduğu sonucu ortaya çıkmaktadır (Ramachandran ve Tsokos, 2020).

Tablo 1. İstatistiksel karar ve hata olasılıkları

		Yokluk Hipotezinin Durumu	
		$H_0$ Doğru	$H_0$ Yanlış
İstatistiksel Karar	$H_0$ Reddedilemedi.	Doğru Karar ( $1 - \alpha$ )	II. Tip Hata ( $\beta$ )
	$H_0$ Reddedildi.	I. Tip Hata ( $\alpha$ )	Doğru Karar ( $1 - \beta$ )



## 2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu tezde çok değişkenli normal dağılıma uygunluk için dağılımdan bağımsız, p-boyutlu veri için de aynı tablo değerleri kullanan yeni bir deneysel uyum iyiliği testi önerilmiştir.

Tek değişkenli deneysel uyum iyiliği testlerinin dayandığı temel yaklaşım, deneysel dağılım fonksiyonu ile teorik dağılım fonksiyon değerleri arasındaki farka dayanmaktadır. Bir  $X$  rastgele değişkeni verilen teorik dağılımdan geldiği varsayılırsa  $F_0(X)$  dağılım değerleri  $[0,1]$  arasında düzgün dağılıma sahip olması beklenmektedir.  $F_0(x)$  dağılım fonksiyonu keyfi bir dağılım olmasına rağmen  $F_0(X)$  değerinin düzgün dağılması deneysel uyum iyiliği testin dağılımdan bağımsız olmasını sağlamaktadır.

Mevcut deneysel uyum iyiliği testlerinde tek değişkenli dağılımlar için dağılımdan bağımsızlık koşulunu sağlanırken, çok değişkenli dağılımlar için bu koşul tam olarak sağlanamamaktadır. Dolayısıyla, deneysel dağılım fonksiyonu ile teorik dağılım fonksiyonu arasındaki farka dayanan test istatistiğini, dağılımdan bağımsız bir şekilde hesaplayabilmek için geliştirilen yöntemler (Peacock, 1983; Fasano ve Franceschini, 1987; Justel vd., 1997) ya yaklaşık sonuçlar vermekte ya da karmaşık algoritmalara sahip olmaktadır. Öte yandan, tek değişkenli normallik testleri birden fazla boyutlarda çok değişkenli normallik testine uyarlanırken, birikimli dağılım fonksiyonunun hesaplanması sıralamadan kaynaklanan sıkıntıları ortaya çıkmaktadır (Lopes vd., 2007).

Bu tezde diğer yöntemlere göre dağılımdan bağımsız, tam sonuçlar veren ve birden fazla boyutlarda da basit bir algoritmayla çalışan ve ayrıca her boyutta aynı kritik tablo değerlerini kullanan yeni çok değişkenli deneysel uyum iyiliği testi, çok değişkenli normal dağılıma uygunluk için sunulmuştur.

Kolmogorov-Smirnov (1933; 1939), Lilliefors (1967) Cramér-von Mises (1928; 1931), Kuiper (1960) uyum iyiliği testleri, deneysel dağılım fonksiyonu ile teorik dağılım fonksiyonu arasındaki farkı dayanan yaklaşımlardır. Bu çalışmada önerilen yöntem, fark yaklaşımı temel alan tüm uyum iyiliği yöntemlerinde uygulanabilmesine rağmen Kolmogorov-Smirnov testi üzerinde durulacaktır.



## 2.1. Kolmogorov-Smirnov Testi

### 2.1.1. Tek Değişkenli Durum

Verilen rastgele bir örnekleme  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  i.i.d. rastgele değişkenleri bir  $F$  dağılımından olsun. Araştırılan hipotez  $H_0: F(x) = F_0(x)$  ve karşıt hipotez ise  $H_1: F(x) \neq F_0(x)$  verilsin. Burada  $F_0(x)$ , uygunluğu sorgulanan teorik dağılım fonksiyonudur. Tek değişkenli durumda, Kolmogorov-Smirnov istatistiği,

$$D_n = \sup_x |F_n(x) - F_0(x)| \quad (20)$$

biçiminde verilmektedir. Burada  $F_n$ , örneklemin deneysel dağılım fonksiyonunu göstermektedir ve güncel noktanın ( $x$ ), solunda kalan ( $x_i \leq x$ ) verilerin sayısının toplam veri sayısına bölünmesiyle hesaplanmaktadır (Eşitlik (21)).

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(x_i, x) \quad (21)$$

Burada  $I(\dots)$  gösterge fonksiyonu olup,

$$I(a, b) = \begin{cases} 1, & a \leq b \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (22)$$

biçiminde hesaplanmaktadır. Bu yaklaşımdan elde edilen deneysel dağılım değerleri  $[0,1]$  aralığında eşit aralıktaki değerler olacağından ideal bir düzgün dağılım gösterecektir. Aynı zamanda bu değerler dağılımdan bağımsız olacaktır. Bununla birlikte,  $x_i$  rastgele değerleri  $F_0$  dağılım fonksiyonundan geliyorsa, teorik dağılım fonksiyonunun değerlerinden,

$$u_i = F_0(x_i), \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (23)$$

biçiminde elde edilen bağımsız  $u_i$  değerleri  $[0,1]$  aralığında düzgün dağılımdan rastgele değerlerden oluşacaktır. Dağılım ne olursa olsun elde edilen  $u_i$  değerlerinin düzgün dağılım



göstermesi, teorik dağılım değerlerinin dağılımdan bağımsız olmasını sağlamaktadır. Sonuç olarak hesaplanacak test istatistiği,  $H_0$  doğrusya iki düzgün rastgele değişken arasındaki farktan elde edilecektir.

### 2.1.2. Çok Değişkenli Durum

Tek değişken için verilen istatistiğin çok değişkenli duruma genişletilmesinde verilen rastgele örnekleme  $\mathbf{x} = \{(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{pi}), i = 1, 2, \dots, n\}$ ,  $x \in \mathbb{R}^p$  i.i.d. rastgele değişkeni  $p$  değişkenli  $F$  ortak dağılım fonksiyonundan olsun. Araştırılan hipotez  $H_0: F(\mathbf{x}) = F_0(\mathbf{x})$  ve karşıt hipotez ise  $H_1: F(\mathbf{x}) \neq F_0(\mathbf{x})$  verilsin. Burada  $F_0(\mathbf{x})$  uygunluğu sorgulanan, ortalaması ( $\mu$ ) ve kovaryans matrisi ( $\Sigma$ ) bilinen çok değişkenli normal dağılım fonksiyonudur. Kolmogorov-Smirnov istatistiğini çok değişkenli duruma,

$$\tilde{D}_n^{(p)} = \sup_{\mathbf{x}} |F_n(\mathbf{x}) - F_0(\mathbf{x})| \quad (24)$$

biçiminde genişletilebilir. Ancak Eşitlik (24)'deki deneysel dağılım değerleri ile teorik dağılım değerleri  $[0,1]$  aralığında olmasına rağmen düzgün dağılımdan gelmediği gibi dağılım fonksiyonundan da bağımsız değildir. Bu istatistiği dağılımdan bağımsız bir şekilde hesaplayabilmek için geliştirilen yöntemler (Peacock, 1983; Fasano ve Franceschini, 1987; Justel vd., 1997) ya yaklaşık sonuçlar vermekte ya da karmaşık algoritmalara sahip olmaktadır.

### 2.2. Önerilen Çok Değişkenli KS Test İstatistiğinin Hesaplanması

Çok değişkenli istatistikteki en önemli problem, tek değişkenlide olduğu gibi hesaplanan istatistiğin dağılımdan bağımsız olamamasıdır. Bu sorunu çözmek için Rosenblatt (1952) tarafından basit bir dönüşüm önerilmiştir (Justel vd., 1997). Bu dönüşüme göre  $p$  değişkenli rastgele değerler tek değişkenli düzgün dağılımdan gelen rastgele değerlere dönüşmektedir. Teorem 1 Rosenblatt dönüşümünü vermektedir.

**Teorem 1.(Rosenblatt).**  $X = (X_1, \dots, X_p)$  ortak yoğunluklu rastgele bir vektör olarak alınırsa ortak dağılım fonksiyonu,



$$f_0(x_1, \dots, x_p) = f_1(x_1)f_2(x_2|x_1) \dots f_p(x_p|x_1, \dots, x_{p-1}), \quad (25)$$

biçiminde yazılabilmektedir. Bu yaklaşıma göre dönüşüm tanımlanırsa  $Y = T(X)$ ,

$$\begin{aligned} Y_1 &= F_1(X_1) \\ Y_k &= F_k(X_k|X_1, \dots, X_{k-1}), k = 2, \dots, p \end{aligned} \quad (26)$$

biçiminde verilebilir. Burada  $Y_1, \dots, Y_p$   $[0,1]$  aralığında rastgele değişkenler olmasına rağmen düzgün dağılım göstermezler ve koşullu olasılık yardımıyla bağımsızdır. Ortak dağılım fonksiyonu, koşullu yerine marjinal dağılım fonksiyonu kullanarak,

$$F_0(x_1, \dots, x_p) = F_1(x_1)F_2(x_2) \dots F_p(x_p) \quad (27)$$

biçiminde yazılabılırdi. Marjinal dağılım fonksiyonunda, bir rastgele değişkenin yerine konulmasıyla,

$$U_k = F_k(X_k), \quad (k = 1, \dots, p) \quad (28)$$

biçiminde yeni bir rastgele değişken elde edilir.  $U_k$  rastgele değişkenleri bağımsız ve  $[0,1]$  aralığında düzgün dağılıma sahip olur. Ancak gerçek hayatta değişkenler her zaman bağımsız olmadığından öncelikle bu değişkenlerin bağımsız hale getirilmesi gerekir.

### 2.2.1. Değişkenlerin Bağımsızlaştırılması

Kovaryans rastgele değişkenler arasındaki doğrusal ilişkisinin bir ölçüsüdür (Johnson ve Wichern, 2014). Bu ölçü aşağıdaki eşitlikle verilebilir.

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \dots & \sigma_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \dots \\ Z_p \end{bmatrix} \quad (29)$$



Burada  $Z_k$  değişkenleri beklenen değeri 0, varyansı 1 olan bir dağılımdan gelmektedir.  $p$ , boyut sayısını göstermektedir.  $X_k$  değişkenleri ise  $Z_k$  değişkenlerinin doğrusal ilişkili birleşimidir. Bu birleşimde elde edilen  $X_k$  değişkenlerinin kovaryans matrisi,

$$\Sigma_X = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & \dots & V_{1p} \\ V_{21} & V_{22} & \dots & V_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_{p1} & V_{p2} & \dots & V_{pp} \end{bmatrix} \quad (30)$$

biçiminde verilmektedir. Kovaryans matrisi simetrik pozitif tanımlı bir matristir. Bu matrisin köşegen elemanları değişkenlerin varyans değerini, diğerleri ise değişkenlerin birbiriyle oluşturduğu kovaryans değerini vermektedir (Manly ve Alberto, 2016). Buradaki kovaryans matrisinin hesaplanması,

$$V_{ij} = \sum_{k=1}^p \sigma_{ik} \sigma_{jk}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, p) \quad (31)$$

biçiminde gerçekleşmektedir. Eşitlik (29) ve Eşitlik (31) kullanılarak aşağıdaki eşitlik yazılabilir (Hyvarinen vd., 2001; Bach ve Jordan, 2002).

$$\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \dots \\ Z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & \dots & V_{1p} \\ V_{21} & V_{22} & \dots & V_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_{p1} & V_{p2} & \dots & V_{pp} \end{bmatrix}^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} X_1 - \mu_1 \\ X_2 - \mu_2 \\ \dots \\ X_p - \mu_p \end{bmatrix} \quad (32)$$

Eğer  $(X_1, X_2, \dots, X_p)$ ,  $F_0$  dağılımına sahipse, Eşitlik (32)'deki  $Z_1, Z_2, \dots, Z_p$  değerleri bağımsızdır ve ortak dağılım fonksiyonu  $F_0^*$  ile gösterilen normal dağılıma  $N(0,1)$  sahiptir. Burada,  $z_{1i}, z_{2i}, \dots, z_{pi}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) değerleri, Eşitlik (32) ile elde edilen  $X_{1i}, X_{2i}, \dots, X_{pi}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) gözlem değerlerinin dönüşümüyle elde edilen değerleri göstermektedir. Bu eşitlik yardımıyla bağımlı  $X_k$  değişkenleri yerine Eşitlik (32) ile elde edilen bağımsız  $Z_k$  değişkenleri test amacıyla kullanılabilir.





### 2.2.2. Deneysel Dağılım Değerlerinin Hesaplanması

Bölüm 2.1'deki tek değişkenli deneysel dağılım fonksiyonunun hesaplanması için kullanılan yaklaşım çok değişkenli noktaların deneysel dağılım fonksiyonu için genişletildiğinde,

$$\tilde{F}_n(z_{1i}, z_{2i}, \dots, z_{pi}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \prod_{k=1}^p I(z_{kj}, z_{ki}), \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (33)$$

eşitliği elde edilmektedir. Hesaplanan dağılım değeri dağılıma bağlı olup, yapılan testin geçerliliğini yok etmektedir. Bu sorunu ortadan kaldırmak için, bu çalışmada, çok değişkenli noktaların deneysel dağılım fonksiyonu,

$$F_n^*(\mathbf{z}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I(F_0^*(z_{1j}, z_{2j}, \dots, z_{pj}), F_0^*(\mathbf{z})) \quad (34)$$

biçiminde hesaplanmaktadır. Burada, noktalar yerine dağılım değerleri kullanılmaktadır. Böylece elde edilen değerler, dağılımdan bağımsız,  $[0,1]$  aralığında düzgün dağılıma sahip olmaktadır. Dağılım fonksiyonları monoton artan bir fonksiyon olduklarından Eşitlik (34) yaklaşımı deneysel dağılım fonksiyonunun tek değişkenli olması halinde Eşitlik (28)'le aynı sonucu vermektedir.

### 2.2.3. Teorik Dağılım Değerlerinin Hesaplanması

Eşitlik (32)'le bağımsız hale gelen değişkenler yardımıyla hesaplanacak teorik dağılım fonksiyonu, Eşitlik (27) ve Eşitlik (28)'deki tanımlamalar yardımıyla,

$$F_0^*(\mathbf{z}) = \prod_{k=1}^p U_k \quad (35)$$



biçiminde hesaplanmaktadır.  $U_k$  rastgele değişkenleri bağımsız ve  $[0,1]$  aralığında düzgün dağılımdan rastgele değişkenlerdir.  $p$  tane  $[0,1]$  aralığında düzgün dağılımdan bağımsız rastgele değişkenin çarpımının olasılık yoğunluk fonksiyonu (Dettmann ve Georgiou, 2009),

$$f_U^{(p)}(u) = \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!} \log^{p-1}(u) \quad (36)$$

dağılım fonksiyonu ise,

$$F_U^{(p)}(u) = \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} u \log^{k-1}(u) \quad (37)$$

ile verilmektedir.  $F_0^*$  değeri aşağıdaki gibi  $F_U^{(p)}(u)$  fonksiyonunda yerine konursa,

$$T_0(\mathbf{z}) = F_U^{(p)}(F_0^*(\mathbf{z})) \quad (38)$$

biçiminde  $[0,1]$  aralığında düzgün dağılımdan bağımsız rastgele değerlerin teorik dağılım fonksiyon değerleri elde edilir.

#### 2.2.4. Önerilen Çok Değişkenli KS Testi

Deneysel dağılım değeri ile teorik dağılım değeri hesaplandıktan sonra önerilen çok değişkenli Kolmogorov-Smirnov test istatistiği bu dağılım değerlerinin farkının mutlak değerinin maksimumunu bularak aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$D_n^{(p)} = \sup_{\mathbf{z}} |F_n^*(\mathbf{z}) - T_0(\mathbf{z})| \quad (39)$$

Bu test istatistiği hesaplanırken hipotezler aşağıdaki şekilde kurulmaktadır:

$H_0$ : Veriler çok değişkenli normal dağılımdan gelmiştir.

$H_1$ : Veriler çok değişkenli normal dağılımdan gelmemiştir.



### 2.2.5. Önerilen Çok Değişkenli KS Testinin Algoritması

Önerilen çok değişkenli Kolmogorov-Smirnov testinin uygulanması için bir algoritma geliştirilmiştir. Bu algoritma yardımıyla verilen  $p$ -boyutlu bir veri için çok değişkenli KS istatistiği hesaplanmaktadır. Hesaplanan bu istatistik ile tek değişkenli KS testi kritik tablo değeri karşılaştırılarak araştırma konusu olan  $H_0$  hipotezi için karar kuralı uygulanmaktadır.



---

**Algoritma 1.** Önerilen çok değişkenli KS testinin algoritması
 

---

*Başlangıç Parametresinin belirlenmesi*

- Adım 1.** Verileri ( $x$ ), anlamlılık değerini ( $\alpha$ ), belirle,
- Adım 2.** Eğer Kolmogorov-Smirnov testi kullanılacaksa,  $F_0(x; \theta, \dots)$  dağılımının ortalama vektörünü ve kovaryans matris parametrelerini belirle,  
Değilse, Lilliefors testi için veriden ortalama vektörünü ve kovaryans matris parametrelerini hesapla,

*Değişkenlerin bağımsızlaştırılması*

- Adım 3.** Tüm değerlerden ortalama vektörünü çıkar,
- Adım 4.** Sıfır ortalamalı verileri kovaryans matrisinin karekökünün tersi ile çarp.

*Test istatistiğinin hesaplanması*

- Adım 5.** Her rastgele değer için  $F_0^*$  dağılımındaki değerini sıfır ortalama ve birim kovaryans matris parametreleri yardımıyla hesapla,
- Adım 6.** (34) eşitliği yardımıyla deneysel dağılım fonksiyonunu hesapla,
- Adım 7.** (38) eşitliği ile teorik dağılım değerini düzgün dağılıma çevir,
- Adım 8.** (39) eşitliğindeki çok değişkenli Kolmogorov-Smirnov istatistiğini hesapla,

*Test İstatistiği ile Tablo değerinin karşılaştırılması*

- Adım 9.** Test istatistiği ile tablo değerini karşılaştır,  
Eğer,

$$D_n^{(p)} < K_{n,1-\alpha}$$

ise  $H_0$  hipotezini kabul et, değilse reddet.

---



### 3. BURGULAR VE İRDELEME

Önerilen çok değişkenli KS test istatistiğinin doğruluğunu ve geçerliliğini test etmek için iki farklı simülasyon çalışması ve beş farklı gerçek veri setinde çok değişkenli normallik testi yapılmıştır. Simülasyonun birinci kısmında önerilen çok değişkenli KS test yönteminin Monte Carlo yaklaşımı ile kritik tablo değerleri elde edilmiştir. İkinci kısmında ise, iki boyutlu örneklem için literatürdeki bazı iki değişkenli KS test istatistikleri ile bu çalışmada önerilen iki değişkenli KS test istatistiğinin I. tip hata ve güç bakımından karşılaştırılmaları yapılmıştır. Ayrıca, önerilen çok değişkenli KS testi, beş farklı gerçek hayat problemlerine uygulanmıştır. Tüm işlemler Intel® Core (TM) i7-4740 CPU, 16 GB of RAM özellikli bir bilgisayar ortamında ve MATLAB® R17b ve R® 3.6.1 yazılımları üzerinde kendi geliştirdiğimiz kodlar kullanılarak tüm simülasyonlar gerçekleştirilmiştir.

#### 3.1. Önerilen Çok Değişkenli KS Testinin Kritik Tablo Değerlerinin Hesaplanması

Bu bölümde önerilen çok değişkenli KS testinin Monte Carlo yaklaşımı ile kritik tablo değerleri elde edilmiştir. Tabloların her biri farklı boyutlarda ( $p = 1,2,3,5,10$ ) ve farklı yüzdeler  $\{0.75, 0.80, 0.85, 0.90, 0.95, 0.975, 0.99, 0.995, 0.9975, 0.999\}$  alınarak oluşturulmuştur. Tablo değerleri oluşturulurken, verilerin bağımlı olması göz önünde bulundurularak normal dağılımdan veriler üretilmiştir. Çok değişkenli normal dağılımın ortalama ve kovaryans matrisi rastgele olarak seçilmiştir. Benzer şekilde farklı ortalama ve kovaryans matrisi kullanılarak da aynı tablo değerleri elde edilebilmektedir. Ayrıca her bir tablo için ortalama mutlak yüzde hata (mean absolute percentage error (MAPE)) hesaplanmıştır. MAPE hesaplanmasında Eşitlik (40) kullanılmıştır (Facchinetti, 2009; Mecibah vd., 2014; Novobilski ve Kamangar, 2001).

$$MAPE = \frac{1}{N_C} \sum_{i=1}^{N_C} \left( \frac{|T_i^S - T_i^C|}{T_i^C} \right) \quad (40)$$

Burada,  $N_C$  hücre sayısını,  $T_i^S$  simülasyondan elde edilen  $i$ . tablo değerini ve  $T_i^C$  tek değişkenli KS testi kritik tablo değerinin  $i$ . değerini göstermektedir. MAPE hesaplanırken



tek değişkenli KS testi kritik tablo değerleri, R programındaki “ks.test” fonksiyonu yardımıyla elde edilmiştir. R programından elde edilen tek değişkenli KS testi kritik tablo değerleri Tablo 2’de verilmiştir.

Tablo 2. R programıyla elde edilen tek değişkenli KS testi kritik tablo değerleri

<b>n</b>	<b>0.75</b>	<b>0.80</b>	<b>0.85</b>	<b>0.90</b>	<b>0.95</b>	<b>0.975</b>	<b>0.99</b>	<b>0.995</b>	<b>0.9975</b>	<b>0.999</b>
<b>10</b>	0.3062	0.3226	0.3425	0.3687	0.4092	0.4456	0.4889	0.5187	0.5465	0.5804
<b>11</b>	0.2926	0.3083	0.3273	0.3524	0.3912	0.4261	0.4677	0.4964	0.5231	0.5559
<b>12</b>	0.2807	0.2958	0.3141	0.3382	0.3754	0.4090	0.4490	0.4767	0.5025	0.5342
<b>13</b>	0.2702	0.2847	0.3023	0.3255	0.3614	0.3938	0.4325	0.4592	0.4842	0.5149
<b>14</b>	0.2608	0.2748	0.2918	0.3142	0.3489	0.3802	0.4176	0.4435	0.4677	0.4975
<b>15</b>	0.2523	0.2659	0.2823	0.3040	0.3376	0.3679	0.4042	0.4293	0.4528	0.4818
<b>20</b>	0.2198	0.2316	0.2459	0.2647	0.2941	0.3206	0.3524	0.3745	0.3952	0.4209
<b>25</b>	0.1974	0.2079	0.2208	0.2377	0.2640	0.2879	0.3166	0.3365	0.3552	0.3784
<b>30</b>	0.1807	0.1903	0.2021	0.2176	0.2417	0.2636	0.2899	0.3082	0.3254	0.3467
<b>40</b>	0.1571	0.1655	0.1757	0.1891	0.2101	0.2291	0.2521	0.2680	0.2831	0.3017
<b>50</b>	0.1409	0.1484	0.1575	0.1696	0.1884	0.2055	0.2260	0.2404	0.2539	0.2707
<b>60</b>	0.1289	0.1357	0.1441	0.1551	0.1723	0.1879	0.2067	0.2199	0.2322	0.2476
<b>80</b>	0.1119	0.1179	0.1251	0.1347	0.1496	0.1632	0.1795	0.1909	0.2017	0.2150
<b>100</b>	0.1003	0.1056	0.1121	0.1207	0.1340	0.1462	0.1608	0.1710	0.1807	0.1927
<b>150</b>	0.0822	0.0865	0.0918	0.0988	0.1097	0.1196	0.1316	0.1400	0.1479	0.1577
<b>200</b>	0.0713	0.0750	0.0796	0.0857	0.0952	0.1038	0.1142	0.1214	0.1283	0.1368
<b>300</b>	0.0583	0.0614	0.0651	0.0701	0.0778	0.0849	0.0934	0.0993	0.1049	0.1119

Araştırma konusu olan hipotezde ortalama ve kovaryans matrisinin verilmemesi durumunda eğer ortalama ve kovaryans matrisi örneklemden hesaplanırsa Kolmogorov-Smirnov testi yerine Lilliefors testi tercih edilmektedir. Bu durumda KS tablosu yerine Lilliefors tablosuna bakılması gerekmektedir. Bu tezde, bununla ilgili kritik tablo değerleri sadece verinin iki değişkenli olduğu durumda hesaplanmıştır. Benzer şekilde, Bölüm 2.2.5’te verilen algoritma yardımıyla değişken sayısının 2’den fazla olduğu durumlarda da tablo değerleri tek değişkenli ve iki değişkenlide olduğu gibi hesaplanabilir. R programından elde edilen tek değişkenli Lilliefors testi kritik tablo değerleri Tablo 3’te verilmiştir.



Tablo 3. R programıyla elde edilen tek değişkenli Lilliefors testi kritik tablo değerleri

n	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9975	0.999
10	0.2086	0.2171	0.2276	0.2417	0.2621	0.2804	0.3025	0.3179	0.3325	0.3506
11	0.2003	0.2085	0.2185	0.2321	0.2516	0.2693	0.2906	0.3055	0.3196	0.3371
12	0.1929	0.2008	0.2105	0.2235	0.2423	0.2594	0.2801	0.2945	0.3081	0.3250
13	0.1862	0.1939	0.2032	0.2157	0.2340	0.2506	0.2706	0.2846	0.2978	0.3142
14	0.1802	0.1876	0.1967	0.2086	0.2264	0.2426	0.2620	0.2756	0.2884	0.3044
15	0.1748	0.1819	0.1907	0.2022	0.2196	0.2353	0.2542	0.2674	0.2799	0.2954
20	0.1534	0.1597	0.1674	0.1772	0.1927	0.2067	0.2235	0.2353	0.2463	0.2601
25	0.1383	0.1439	0.1509	0.1596	0.1737	0.1865	0.2018	0.2125	0.2225	0.2350
30	0.1269	0.1321	0.1385	0.1464	0.1594	0.1712	0.1853	0.1952	0.2045	0.2160
40	0.1107	0.1152	0.1207	0.1275	0.1390	0.1493	0.1617	0.1704	0.1786	0.1887
50	0.0994	0.1034	0.1084	0.1144	0.1248	0.1341	0.1453	0.1531	0.1605	0.1696
60	0.0910	0.0947	0.0992	0.1046	0.1142	0.1228	0.1331	0.1402	0.1470	0.1554
80	0.0790	0.0823	0.0862	0.0908	0.0991	0.1067	0.1157	0.1219	0.1278	0.1351
100	0.0708	0.0737	0.0773	0.0813	0.0888	0.0956	0.1037	0.1093	0.1146	0.1212
150	0.0580	0.0604	0.0633	0.0667	0.0728	0.0784	0.0850	0.0896	0.0939	0.0993
200	0.0503	0.0523	0.0549	0.0579	0.0632	0.0681	0.0738	0.0778	0.0816	0.0863
300	0.0411	0.0428	0.0448	0.0475	0.0518	0.0558	0.0605	0.0638	0.0669	0.0707

### 3.1.1. Tek Değişkenli Durum İçin Önerilen Çok Değişkenli KS Testinin Kritik Tablo Değerlerinin Hesaplanması

Önerilen çok değişkenli KS test istatistiğinin tek değişkenli olduğu durumda ( $p = 1$ ), ortalaması ( $\mu = 3$ ) ve varyansı ( $\sigma^2 = 25$ ) olan normal dağılımdan farklı örnek çaplarında örneklemeler üretilerek test istatistikleri hesaplanmıştır. 100 000 deneme sonucunda elde edilen tek değişkenli KS testi kritik tablo değerleri Tablo 4'te verilmiştir. Tablo 4 için MAPE değeri 0.0021 olarak bulunmuştur. Tablo 4'ün R programıyla elde edilen tek değişkenli KS testi kritik tablo değerleriyle benzerliği %99.79'dur.



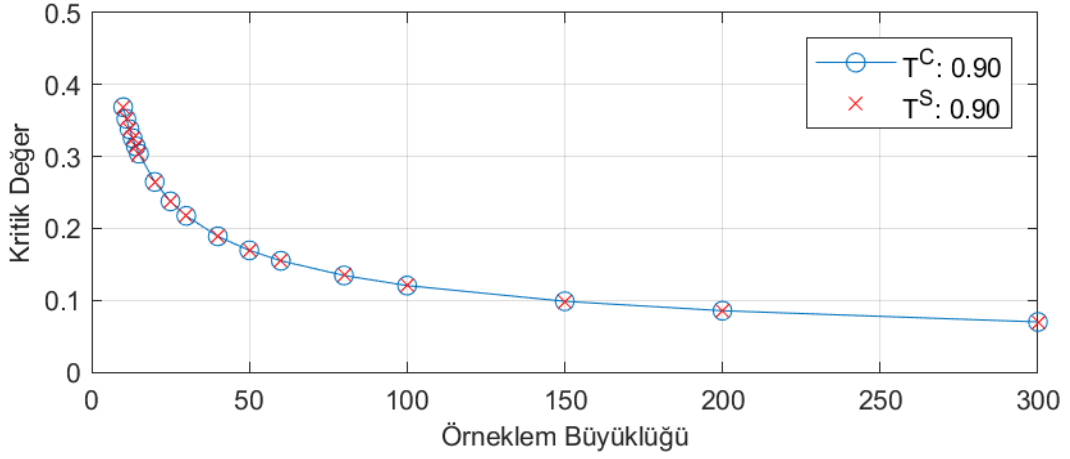
Tablo 4. Tek değişkenli KS istatistiğinin 100 000 deneme sonucundaki Monte-Carlo yaklaşımı ile elde edilen yüzdellik değerleri

<b>n</b>	<b>0.75</b>	<b>0.80</b>	<b>0.85</b>	<b>0.90</b>	<b>0.95</b>	<b>0.975</b>	<b>0.99</b>	<b>0.995</b>	<b>0.9975</b>	<b>0.999</b>
<b>10</b>	0.3056	0.3221	0.3419	0.3678	0.4093	0.4453	0.4874	0.5177	0.5458	0.5829
<b>11</b>	0.2925	0.3081	0.3272	0.3525	0.3915	0.4270	0.4680	0.4969	0.5225	0.5598
<b>12</b>	0.2804	0.2949	0.3134	0.3378	0.3748	0.4083	0.4491	0.4753	0.5004	0.5354
<b>13</b>	0.2707	0.2855	0.3032	0.3261	0.3618	0.3950	0.4343	0.4603	0.4874	0.5180
<b>14</b>	0.2607	0.2748	0.2920	0.3147	0.3486	0.3802	0.4155	0.4432	0.4685	0.4945
<b>15</b>	0.2520	0.2656	0.2817	0.3032	0.3365	0.3675	0.4045	0.4296	0.4541	0.4832
<b>20</b>	0.2193	0.2312	0.2458	0.2647	0.2945	0.3211	0.3527	0.3749	0.3971	0.4229
<b>25</b>	0.1973	0.2079	0.2204	0.2373	0.2637	0.2877	0.3168	0.3367	0.3533	0.3747
<b>30</b>	0.1805	0.1899	0.2018	0.2171	0.2415	0.2637	0.2901	0.3079	0.3272	0.3498
<b>40</b>	0.1574	0.1657	0.1760	0.1893	0.2103	0.2297	0.2526	0.2678	0.2822	0.3004
<b>50</b>	0.1411	0.1486	0.1577	0.1699	0.1883	0.2054	0.2253	0.2402	0.2538	0.2720
<b>60</b>	0.1287	0.1356	0.1438	0.1548	0.1721	0.1877	0.2065	0.2193	0.2310	0.2465
<b>80</b>	0.1120	0.1180	0.1252	0.1347	0.1497	0.1631	0.1794	0.1920	0.2014	0.2140
<b>100</b>	0.1005	0.1058	0.1123	0.1208	0.1341	0.1464	0.1614	0.1709	0.1797	0.1911
<b>150</b>	0.0821	0.0864	0.0917	0.0986	0.1096	0.1195	0.1311	0.1393	0.1472	0.1566
<b>200</b>	0.0713	0.0751	0.0797	0.0857	0.0951	0.1034	0.1142	0.1217	0.1285	0.1372
<b>300</b>	0.0582	0.0613	0.0651	0.0701	0.0779	0.0850	0.0936	0.0997	0.1056	0.1125

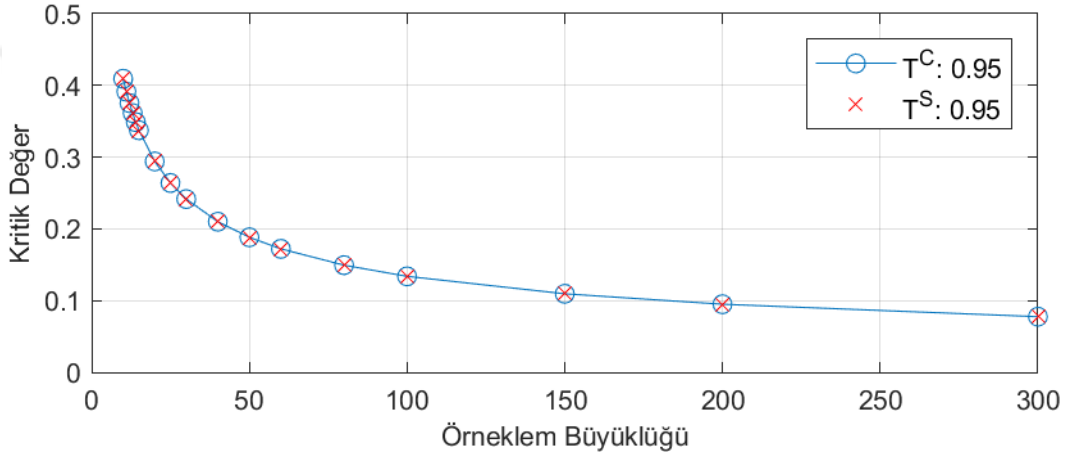
Tek değişkenli durum ( $p = 1$ ) için simülasyondan elde edilen kritik tablo değerleri ( $T^S$ ) ile R programından elde edilen tek değişkenli KS testi kritik tablo değerlerinin ( $T^C$ ) (Tablo 2), 0.90, 0.95 ve 0.99 güven düzeylerinde ( $1 - \alpha$ ) örneklem sayısına göre karşılaştırılması Şekil 10'da verilmiştir. Şekil 10 incelendiğinde her bir güven düzeyinde  $T^S$  ile  $T^C$ 'nin hemen hemen aynı değerlere sahip olduğu görülmüştür.



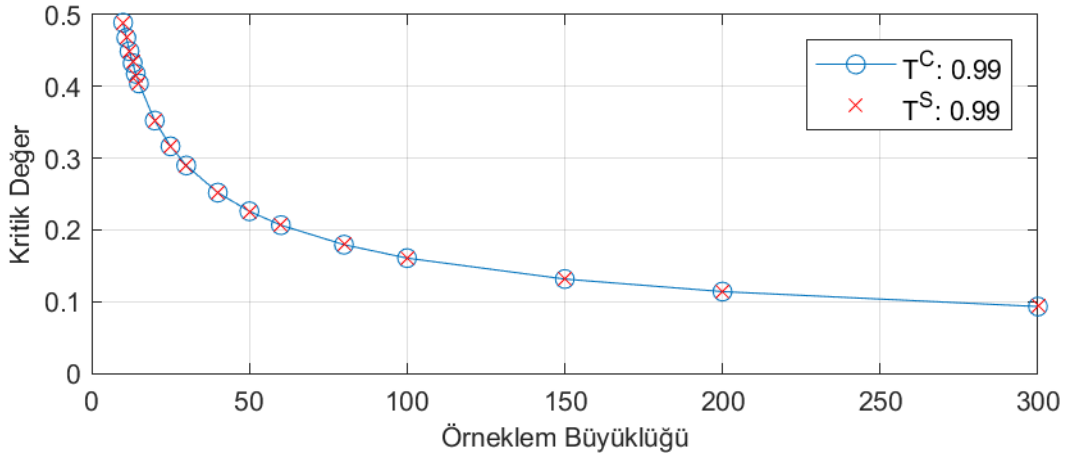




(a)



(b)

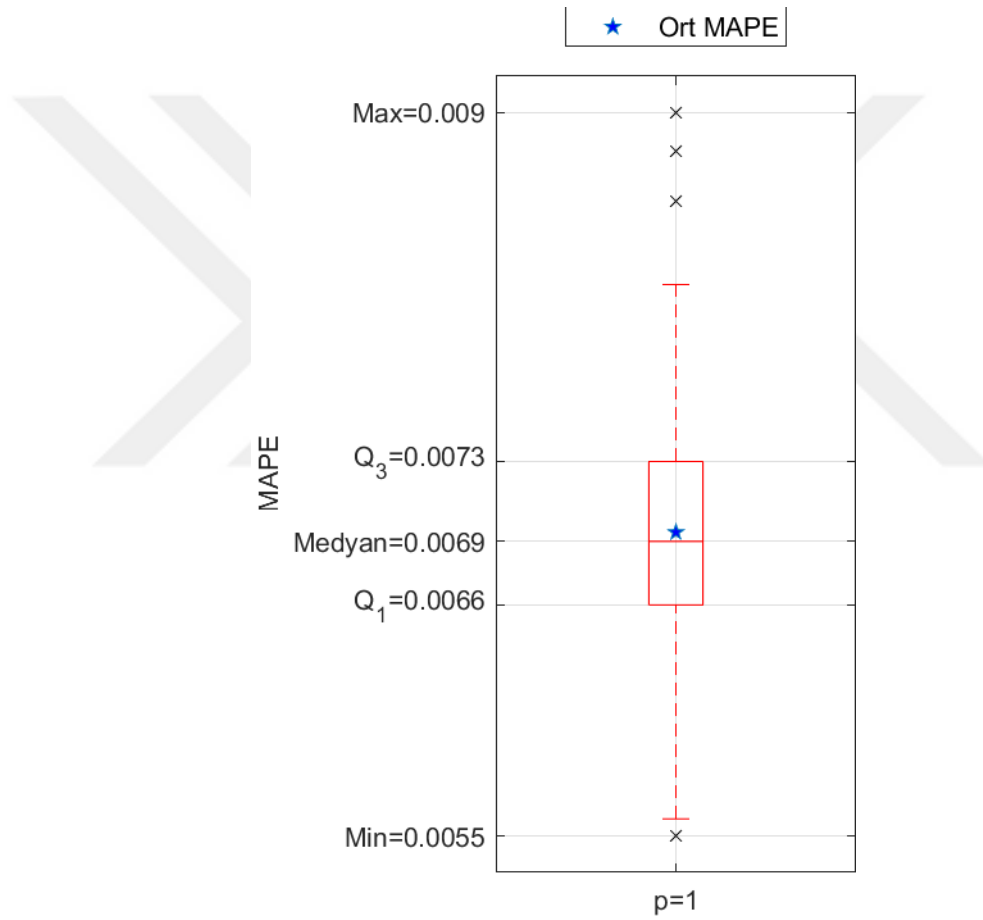


(c)

Şekil 10. Simülasyondan elde edilen kritik tablo değerleriyle ( $T^S$ ) ile R programıyla elde edilen tek değişkenli KS testi kritik tablo değerlerinin ( $T^C$ ) karşılaştırılması ( $p = 1$ ); (a)  $(1 - \alpha) = 0.90$ ; (b)  $(1 - \alpha) = 0.95$ ; (c)  $(1 - \alpha) = 0.99$



Tek değişkenli KS istatistiğinin 100 000 deneme sonucundaki Monte-Carlo yaklaşımı ile elde edilen yzdelik değerlerini farklı ortalama ve varyans değerleri için de hesaplanmıştır. Ortalama değeri ( $\mu$ ) dzygyn dağılımdan  $[-1000, 1000]$  aralığında ve varyans değeri ( $\sigma^2$ ) dzygyn dağılımdan  $[0, 100]$  aralığında rastgele seçilerek kritik tablo değerleri elde edilmiştir. 100 deneme sonundaki ortalama MAPE değeri ise 0.007 olarak hesaplanmıştır. Bu denemelerden elde edilen MAPE değerlerinin kutu grafiği şekil 11’de verilmiştir. şekil 11 incelendiğinde 100 deneme sonucundaki en dzyşuk MAPE değeri 0.0055, en yzyksek MAPE değeri 0.0090, ortanca MAPE değeri ise 0.0069 çıkmıştır.



şekil 11. Tek değişkenli durum için 100 denemede elde edilen MAPE değerlerinin kutu grafiği

### 3.1.2. İki Değişkenli Durum İçin Önerilen ok Değişkenli KS Testinin Kritik Tablo Değerlerinin Hesaplanması

Önerilen çok değişkenli KS test istatistiğinin iki değişkenli olması durumunda ( $p = 2$ ), iki değişkenli normal dağılımın ortalama ( $\mu_1$ ) ve kovaryans matrisi ( $\Sigma_1$ ) sırasıyla,



$$\mu_1 = [-1 \quad 2] \text{ ve } \Sigma_1 = \begin{bmatrix} 3 & -0.9 \\ -0.9 & 1 \end{bmatrix}$$

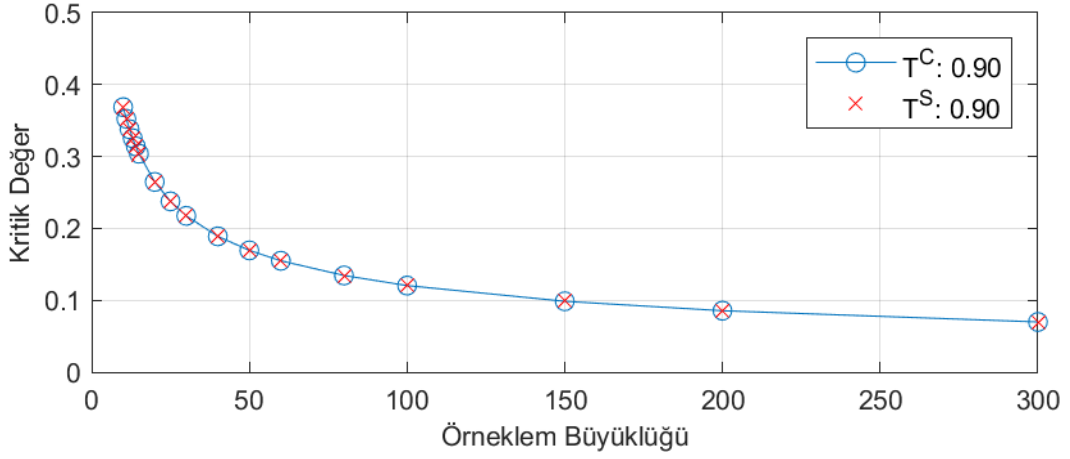
alınarak test istatistikleri hesaplanmıştır. Burada dikkat edilmesi gereken nokta verilerin birbiri ile bağımlı seçildiğidir. 100 000 deneme sonucunda elde edilen iki değişkenli KS testi kritik tablo değerleri Tablo 5'teki gibi elde edilmiştir. Tablo 5 için MAPE değeri 0.0019 olarak bulunmuştur. Tablo 5'in tek değişkenli KS testi kritik tablo değerleriyle benzerliği %99.81 olarak hesaplanmıştır.

Tablo 5. İki değişkenli KS istatistiğinin 100 000 deneme sonucundaki Monte-Carlo yaklaşımı ile elde edilen yüzdelerle değerleri

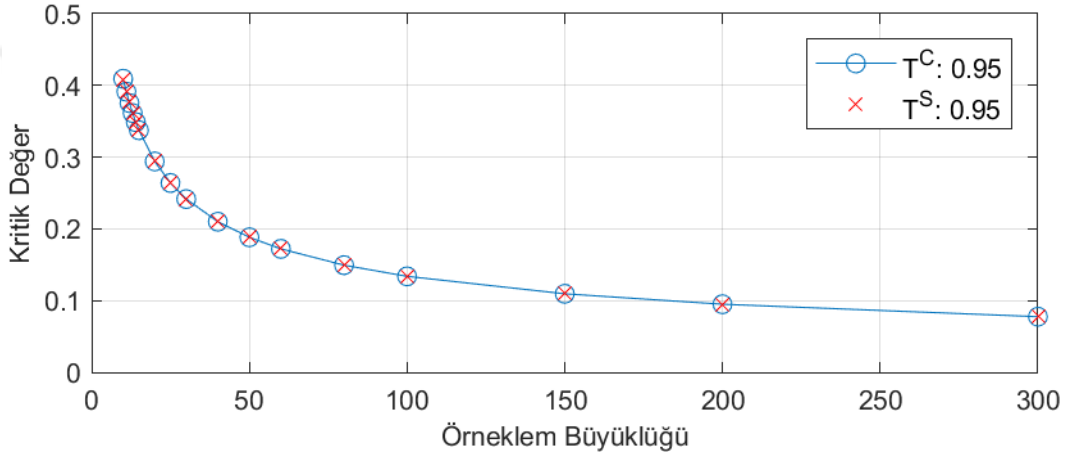
<b>n</b>	<b>0.75</b>	<b>0.80</b>	<b>0.85</b>	<b>0.90</b>	<b>0.95</b>	<b>0.975</b>	<b>0.99</b>	<b>0.995</b>	<b>0.9975</b>	<b>0.999</b>
<b>10</b>	0.3061	0.3228	0.3424	0.3681	0.4084	0.4450	0.4903	0.5201	0.5478	0.5792
<b>11</b>	0.2925	0.3082	0.3272	0.3527	0.3920	0.4277	0.4681	0.4957	0.5221	0.5573
<b>12</b>	0.2808	0.2962	0.3142	0.3386	0.3764	0.4100	0.4498	0.4786	0.5034	0.5341
<b>13</b>	0.2699	0.2847	0.3024	0.3255	0.3610	0.3935	0.4325	0.4577	0.4844	0.5180
<b>14</b>	0.2605	0.2745	0.2915	0.3141	0.3480	0.3784	0.4172	0.4432	0.4703	0.5005
<b>15</b>	0.2519	0.2655	0.2820	0.3037	0.3377	0.3688	0.4064	0.4316	0.4537	0.4819
<b>20</b>	0.2201	0.2318	0.2462	0.2647	0.2948	0.3211	0.3523	0.3749	0.3955	0.4224
<b>25</b>	0.1970	0.2076	0.2207	0.2377	0.2641	0.2879	0.3171	0.3359	0.3559	0.3790
<b>30</b>	0.1806	0.1904	0.2025	0.2180	0.2420	0.2640	0.2908	0.3081	0.3255	0.3482
<b>40</b>	0.1572	0.1657	0.1760	0.1895	0.2105	0.2296	0.2518	0.2684	0.2841	0.3016
<b>50</b>	0.1409	0.1483	0.1575	0.1694	0.1887	0.2062	0.2269	0.2414	0.2547	0.2728
<b>60</b>	0.1289	0.1357	0.1441	0.1553	0.1727	0.1878	0.2061	0.2189	0.2302	0.2463
<b>80</b>	0.1120	0.1180	0.1251	0.1345	0.1500	0.1635	0.1791	0.1899	0.2017	0.2158
<b>100</b>	0.1003	0.1057	0.1122	0.1208	0.1340	0.1464	0.1600	0.1702	0.1798	0.1908
<b>150</b>	0.0821	0.0865	0.0918	0.0989	0.1097	0.1196	0.1319	0.1402	0.1486	0.1593
<b>200</b>	0.0712	0.0750	0.0795	0.0855	0.0948	0.1037	0.1144	0.1214	0.1280	0.1363
<b>300</b>	0.0582	0.0614	0.0652	0.0701	0.0780	0.0851	0.0937	0.0993	0.1060	0.1124

İki değişkenli durum ( $p = 2$ ) için simülasyondan elde edilen kritik tablo değerleri ( $T^S$ ) ile R programından elde edilen tek değişkenli KS testi kritik tablo değerlerinin ( $T^C$ ) (Tablo 2), 0.90, 0.95 ve 0.99 güven düzeylerinde ( $1 - \alpha$ ) örneklem sayısına göre karşılaştırılması Şekil 12'de verilmiştir. Şekil 12 incelendiğinde her bir güven düzeyinde  $T^S$  ile  $T^C$ 'nin hemen hemen aynı değerlere sahip olduğu görülmüştür.

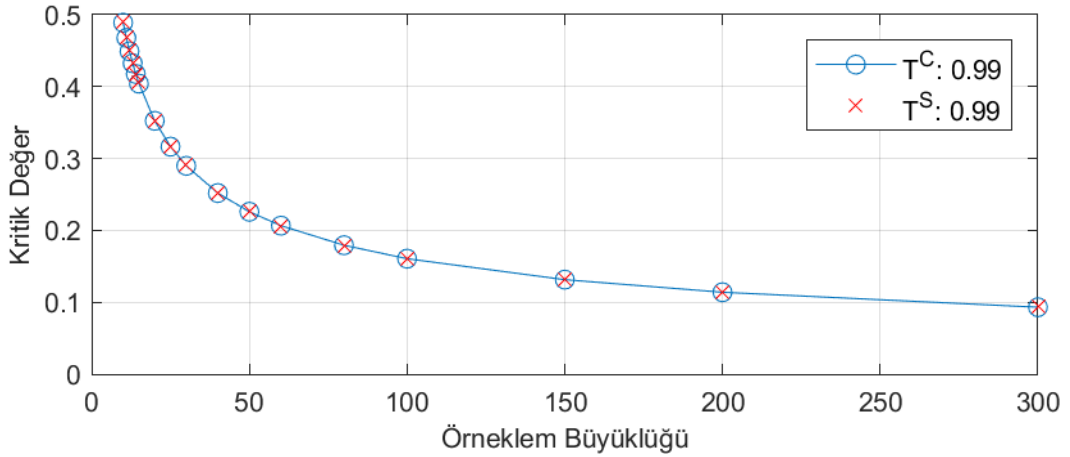




(a)



(b)

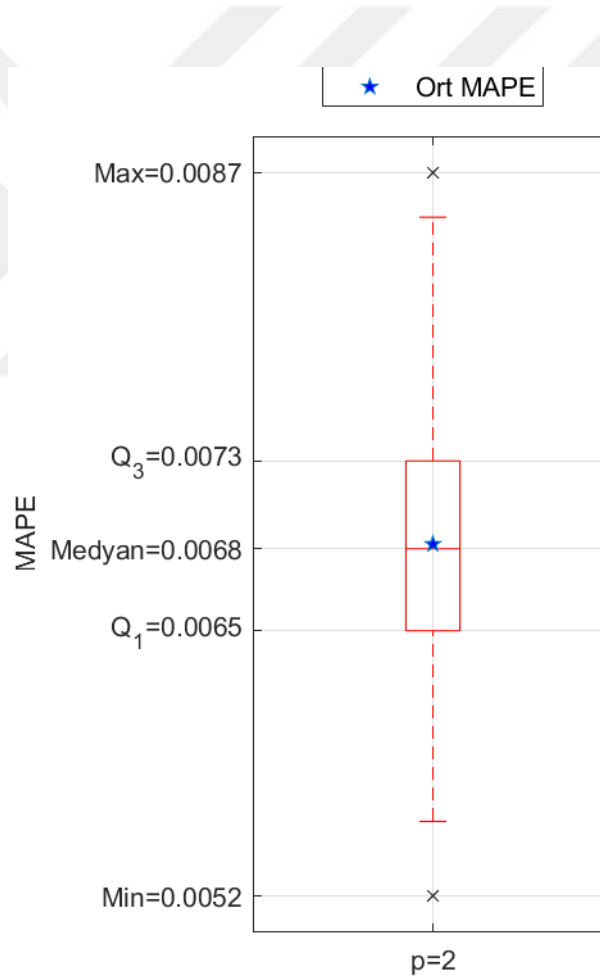


(c)

Şekil 12. Simülasyondan elde edilen kritik tablo değerleriyle ( $T^S$ ) ile R programıyla elde edilen tek değişkenli KS testi kritik tablo değerlerinin ( $T^C$ ) karşılaştırılması ( $p = 2$ ); (a)  $(1 - \alpha) = 0.90$ ; (b)  $(1 - \alpha) = 0.95$ ; (c)  $(1 - \alpha) = 0.99$



İki değişkenli KS istatistiğinin 100 000 deneme sonucundaki Monte-Carlo yaklaşımı ile elde edilen yzdelik değerleri farklı ortalama ve kovaryans matrisi değerleri için de hesaplanmıştır. İki değişkenli ortalama vektörü ( $\mu_1$ ) dözgün dağılımdan  $[-1000, 1000]$  aralığında rastgele olarak seçilmiştir. Ayrıca, kovaryans matrisinin ( $\Sigma_1$ ) köşegen elemanları (varyans değerlerini) dözgün dağılımdan  $[0, 100]$  aralığında ve korelasyon değerleri ise dözgün dağılımdan  $[-1, 1]$  aralığında rastgele seçilerek kritik tablo değerleri elde edilmiştir. 100 deneme sonundaki ortalama MAPE değeri ise 0.0069 olarak hesaplanmıştır. Bu denemelerden elde edilen MAPE değerlerinin kutu grafiği şekil 13'te verilmiştir. şekil 13 incelendiğinde 100 deneme sonucundaki en dözük MAPE değeri 0.0055, en yzsek MAPE değeri 0.0088, ortanca MAPE değeri ise 0.0069 çıkmıştır.



şekil 13. İki değişkenli durum için 100 denemede elde edilen MAPE değerlerinin kutu grafiği



### 3.1.3. Üç Değişkenli Durum İçin Önerilen Çok Değişkenli KS Testinin Kritik Tablo Değerlerinin Hesaplanması

Önerilen çok değişkenli KS test istatistiğinin 3 değişkenli olması durumunda ( $p = 3$ ), üç değişkenli normal dağılımın ortalama ( $\mu_2$ ) ve kovaryans matrisi ( $\Sigma_2$ ) sırasıyla,

$$\mu_2 = [-1 \quad 2 \quad 1] \text{ ve } \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0.9 \\ -0.5 & 2 & -0.1 \\ 0.9 & -0.1 & 3 \end{bmatrix}$$

alınarak test istatistikleri hesaplanmıştır. 100 000 deneme sonucunda elde edilen üç değişkenli KS testi kritik tablo değerleri Tablo 6'daki gibi elde edilmiştir. Tablo 6 için MAPE değeri 0.0023 olarak bulunmuştur. Tablo 6'nın tek değişkenli KS testi kritik tablo değerleriyle benzerliği %99.77 olarak hesaplanmıştır.

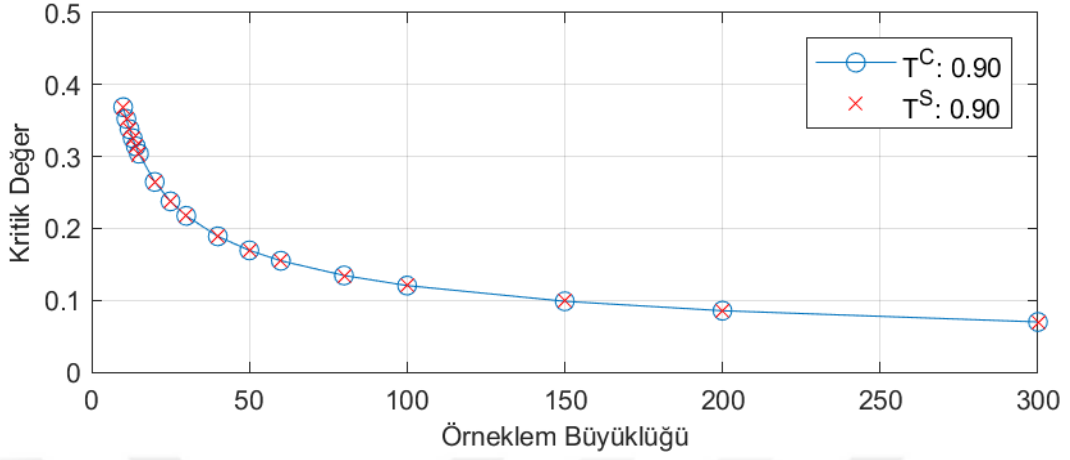
Tablo 6. Üç değişkenli KS istatistiğinin 100 000 deneme sonucundaki Monte-Carlo yaklaşımı ile elde edilen yüzdeler

n	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9975	0.999
10	0.3058	0.3222	0.3423	0.3682	0.4090	0.4453	0.4878	0.5181	0.5482	0.5833
11	0.2924	0.3080	0.3280	0.3527	0.3916	0.4270	0.4673	0.4930	0.5217	0.5506
12	0.2814	0.2965	0.3147	0.3384	0.3754	0.4090	0.4482	0.4764	0.5026	0.5300
13	0.2703	0.2847	0.3022	0.3251	0.3609	0.3933	0.4336	0.4596	0.4837	0.5171
14	0.2611	0.2751	0.2922	0.3147	0.3488	0.3802	0.4182	0.4446	0.4672	0.4991
15	0.2522	0.2659	0.2822	0.3042	0.3378	0.3685	0.4041	0.4302	0.4539	0.4800
20	0.2194	0.2316	0.2460	0.2650	0.2945	0.3212	0.3520	0.3727	0.3936	0.4207
25	0.1972	0.2077	0.2207	0.2375	0.2641	0.2878	0.3157	0.3357	0.3546	0.3775
30	0.1805	0.1901	0.2018	0.2177	0.2424	0.2648	0.2915	0.3100	0.3289	0.3501
40	0.1572	0.1658	0.1762	0.1898	0.2107	0.2291	0.2526	0.2683	0.2831	0.3010
50	0.1405	0.1480	0.1573	0.1691	0.1878	0.2046	0.2256	0.2394	0.2528	0.2692
60	0.1290	0.1360	0.1443	0.1550	0.1721	0.1876	0.2059	0.2187	0.2298	0.2425
80	0.1120	0.1179	0.1250	0.1345	0.1494	0.1631	0.1790	0.1911	0.2014	0.2124
100	0.1001	0.1053	0.1119	0.1203	0.1340	0.1465	0.1612	0.1713	0.1819	0.1942
150	0.0823	0.0866	0.0918	0.0989	0.1100	0.1201	0.1326	0.1409	0.1482	0.1585
200	0.0714	0.0751	0.0797	0.0856	0.0952	0.1039	0.1138	0.1213	0.1282	0.1362
300	0.0583	0.0613	0.0652	0.0701	0.0777	0.0848	0.0929	0.0992	0.1045	0.1118

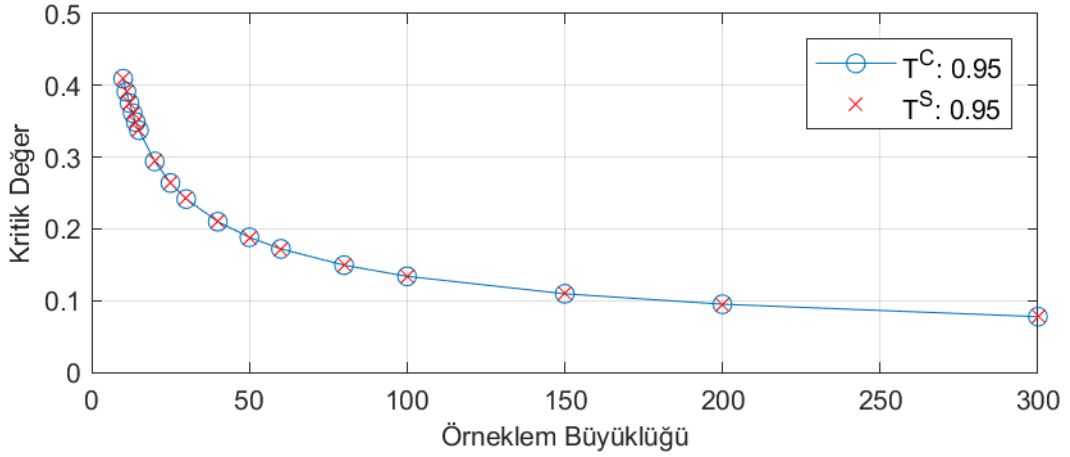
Üç değişkenli durum ( $p = 3$ ) için simülasyondan elde edilen kritik tablo değerleri ( $T^S$ ) ile R programından elde edilen tek değişkenli KS testi kritik tablo değerlerinin ( $T^C$ ) (Tablo 2), 0.90, 0.95 ve 0.99 güven düzeylerinde ( $1 - \alpha$ ) örneklem sayısına göre karşılaştırılması



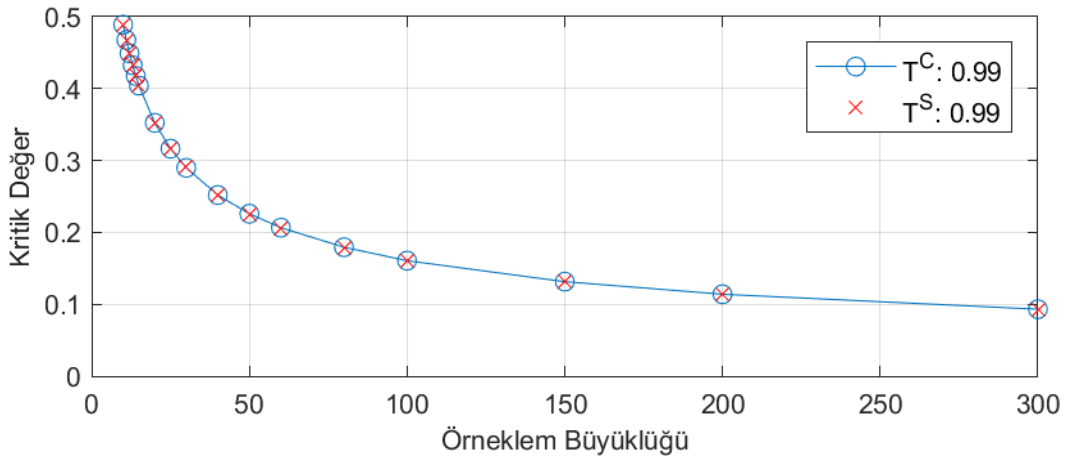
Şekil 14’te verilmiştir. Şekil 14 incelendiğinde her bir güven düzeyinde  $T^S$  ile  $T^C$ ’nin hemen hemen aynı değerlere sahip olduğu görülmüştür.



(a)



(b)

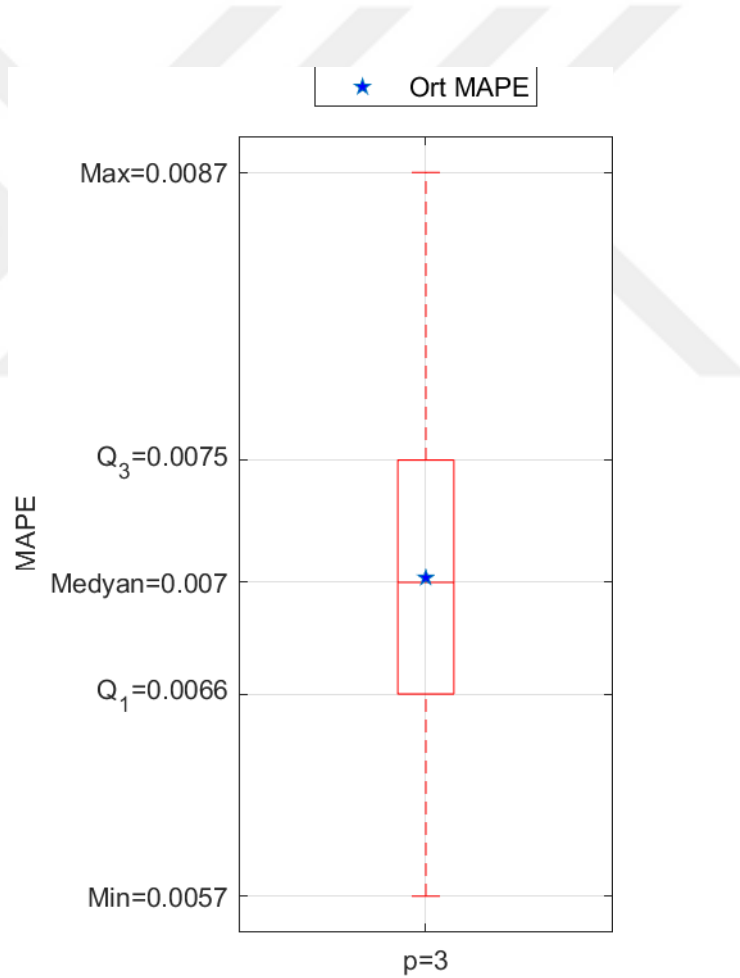


(c)

Şekil 14. Simülasyondan elde edilen kritik tablo değerleriyle ( $T^S$ ) ile R programıyla elde edilen tek değişkenli KS testi kritik tablo değerlerinin ( $T^C$ ) karşılaştırılması ( $p = 3$ ); (a)  $(1 - \alpha) = 0.90$ ; (b)  $(1 - \alpha) = 0.95$ ; (c)  $(1 - \alpha) = 0.99$



Üç değişkenli KS istatistiğinin 100 000 deneme sonucundaki Monte-Carlo yaklaşımı ile elde edilen yüzdelik değerleri farklı ortalama ve kovaryans matrisi değerleri için hesaplanmıştır. Üç değişkenli ortalama vektörünü ( $\mu_2$ ), düzgün dağılımdan  $[-1000, 1000]$  aralığında rastgele olarak seçilmiştir. Ayrıca, kovaryans matrisinin ( $\Sigma_2$ ), köşegen elemanları (varyans değerlerini) düzgün dağılımdan  $[0, 100]$  aralığında ve korelasyon değerleri ise düzgün dağılımdan  $[-1, 1]$  aralığında rastgele seçilerek kritik tablo değerleri elde edilmiştir. 100 deneme sonundaki ortalama MAPE değeri ise 0.0068 olarak hesaplanmıştır. Bu denemelerden elde edilen MAPE değerlerinin kutu grafiği Şekil 15'te verilmiştir. Şekil 15 incelendiğinde 100 deneme sonundaki en düşük MAPE değeri 0.0052, en yüksek MAPE değeri 0.009, ortanca MAPE değeri ise 0.0069 çıkmıştır.



Şekil 15. Üç değişkenli durum için 100 denemede elde edilen MAPE değerlerinin kutu grafiği





### 3.1.4. Beş Değişkenli Durum İçin Önerilen Çok Değişkenli KS Testinin Kritik Tablo Değerlerinin Hesaplanması

Önerilen çok değişkenli KS test istatistiğinin 5 değişkenli olması durumunda ( $p = 5$ ), beş değişkenli normal dağılımın ortalama ( $\mu_3$ ) ve kovaryans matrisi ( $\Sigma_3$ ) sırasıyla,

$$\mu_3 = [-1 \quad 2 \quad 1 \quad 3 \quad 4] \text{ ve } \Sigma_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0.7 & -1 & 0.3 & 0.2 \\ 0.7 & 1 & -0.4 & 0.5 & 0.8 \\ -1 & -0.4 & 2 & -0.2 & 0.9 \\ 0.3 & 0.5 & -0.2 & 5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 & 0.9 & 0.1 & 4 \end{bmatrix}$$

alınarak test istatistikleri hesaplanmıştır. 100 000 deneme sonucunda elde edilen beş değişkenli KS testi kritik tablo değerleri Tablo 7'deki gibi elde edilmiştir. Tablo 7 için MAPE değeri 0.0066 olarak bulunmuştur. Tablo 7'nin tek değişkenli KS testi kritik tablo değerleriyle benzerliği %99.34 olarak hesaplanmıştır.

Tablo 7. Beş değişkenli KS istatistiğinin 100 000 deneme sonucundaki Monte-Carlo yaklaşımı ile elde edilen yüzdeler değeri

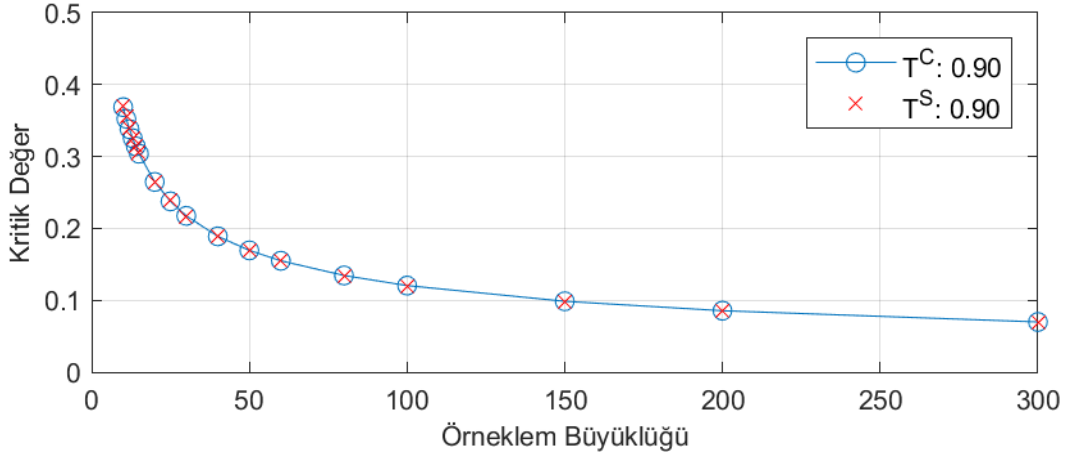
n	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9975	0.999
10	0.3073	0.3231	0.3432	0.3693	0.4082	0.4429	0.4870	0.5178	0.5560	0.5832
11	0.2928	0.3087	0.3298	0.3555	0.3927	0.4288	0.4763	0.5024	0.5258	0.5748
12	0.2821	0.2976	0.3168	0.3398	0.3793	0.4144	0.4585	0.4891	0.5119	0.5461
13	0.2692	0.2844	0.3025	0.3260	0.3648	0.3951	0.4343	0.4689	0.4834	0.5211
14	0.2619	0.2753	0.2933	0.3147	0.3511	0.3846	0.4206	0.4430	0.4628	0.4827
15	0.2515	0.2652	0.2817	0.3049	0.3379	0.3710	0.4074	0.4307	0.4536	0.4775
20	0.2199	0.2314	0.2459	0.2653	0.2952	0.3221	0.3567	0.3796	0.3975	0.4228
25	0.1981	0.2090	0.2219	0.2392	0.2676	0.2921	0.3207	0.3389	0.3560	0.3800
30	0.1807	0.1901	0.2014	0.2169	0.2420	0.2641	0.2908	0.3084	0.3299	0.3448
40	0.1569	0.1652	0.1768	0.1901	0.2116	0.2322	0.2524	0.2672	0.2860	0.3067
50	0.1406	0.1479	0.1573	0.1699	0.1898	0.2077	0.2269	0.2395	0.2529	0.2717
60	0.1293	0.1362	0.1441	0.1554	0.1709	0.1871	0.2079	0.2200	0.2320	0.2475
80	0.1114	0.1175	0.1248	0.1339	0.1473	0.1617	0.1788	0.1902	0.1997	0.2061
100	0.0998	0.1052	0.1117	0.1202	0.1337	0.1460	0.1609	0.1676	0.1759	0.1875
150	0.0830	0.0872	0.0923	0.0986	0.1103	0.1196	0.1311	0.1401	0.1487	0.1600
200	0.0717	0.0755	0.0798	0.0859	0.0953	0.1039	0.1151	0.1217	0.1286	0.1359
300	0.0582	0.0614	0.0650	0.0700	0.0781	0.0852	0.0926	0.0975	0.1038	0.1085

Beş değişkenli durum ( $p = 5$ ) için simülasyondan elde edilen kritik tablo değerleri ( $T^S$ ) ile R programından elde edilen tek değişkenli KS testi kritik tablo değerlerinin ( $T^C$ )

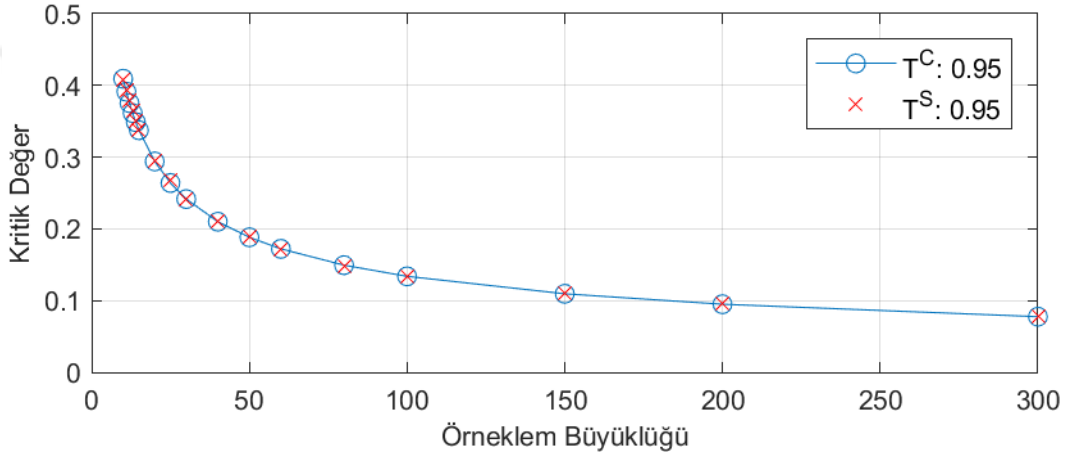


(Tablo 2), 0.90, 0.95 ve 0.99 güven düzeylerinde  $(1 - \alpha)$  örneklem sayısına göre karşılaştırılması Şekil 16'da verilmiştir. Şekil 16 incelendiğinde her bir güven düzeyinde  $T^S$  ile  $T^C$ 'nin hemen hemen aynı değerlere sahip olduğu görülmüştür.

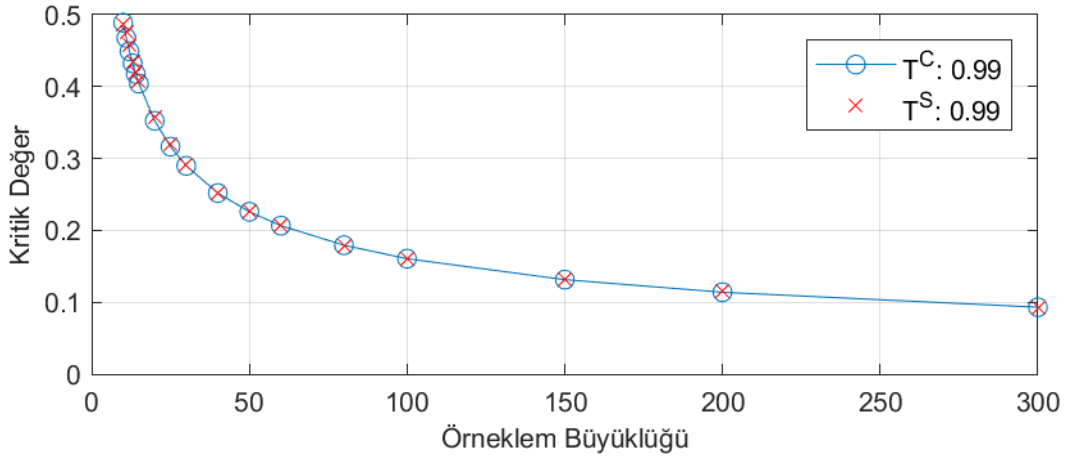




(a)



(b)

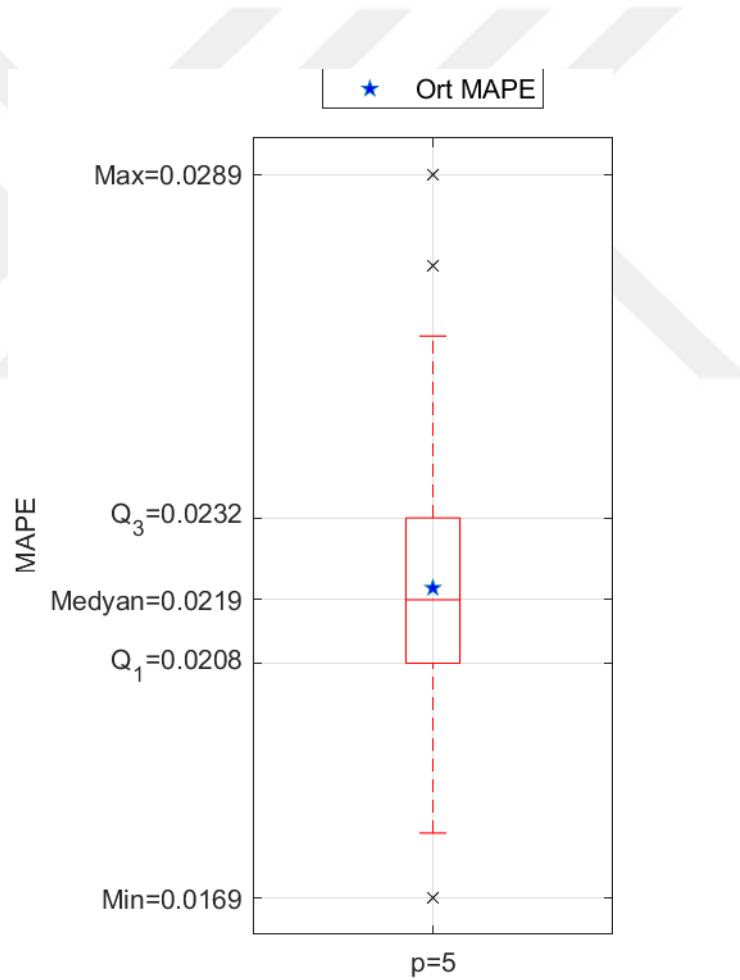


(c)

Şekil 16. Simülasyondan elde edilen kritik tablo değerleriyle ( $T^S$ ) ile R programıyla elde edilen tek değişkenli KS testi kritik tablo değerlerinin ( $T^C$ ) karşılaştırılması ( $p = 5$ ); (a)  $(1 - \alpha) = 0.90$ ; (b)  $(1 - \alpha) = 0.95$ ; (c)  $(1 - \alpha) = 0.99$



Beş değişkenli KS istatistiğinin 10 000 deneme sonucundaki Monte-Carlo yaklaşımı ile elde edilen yüzdelik değerleri farklı ortalama ve kovaryans matrisi değerleri için hesaplanmıştır. Beş değişkenli ortalama vektörü ( $\mu_3$ ), düzgün dağılımdan  $[-1000, 1000]$  aralığında rastgele olarak seçilmiştir. Ayrıca, kovaryans matrisinin ( $\Sigma_3$ ), köşegen elemanları (varyans değerlerini) düzgün dağılımdan  $[0, 100]$  aralığında ve korelasyon değerleri ise düzgün dağılımdan  $[-1, 1]$  aralığında rastgele seçilerek kritik tablo değerleri elde edilmiştir. 100 deneme sonundaki ortalama MAPE değeri ise 0.0221 olarak hesaplanmıştır. Bu denemelerden elde edilen MAPE değerlerinin kutu grafiği Şekil 17’de verilmiştir. Şekil 17 incelendiğinde 100 deneme sonucundaki en düşük MAPE değeri 0.0169, en yüksek MAPE değeri 0.0289, ortanca MAPE değeri ise 0.0219 çıkmıştır.



Şekil 17. Beş değişkenli durum için 100 denemede elde edilen MAPE değerlerinin kutu grafiği



### 3.1.5. On Değişkenli Durum İçin Önerilen Çok Değişkenli KS Testinin Kritik Tablo Değerlerinin Hesaplanması

Önerilen çok değişkenli KS test istatistiğinin 10 değişkenli olması durumunda ( $p = 10$ ), on değişkenli normal dağılımın ortalama ( $\mu_4$ ) ve kovaryans matrisi ( $\Sigma_4$ ) sırasıyla,

$$\mu_4 = [680 \quad 250 \quad -489 \quad 809 \quad 534 \quad 125 \quad 794 \quad -263 \quad -324 \quad 237] \text{ ve}$$

$$\Sigma_4 = \begin{bmatrix} 9.60 & -0.81 & 0.03 & 0.90 & 0.69 & 0.87 & 0.95 & -0.25 & -0.36 & 0.57 \\ -0.81 & 38.17 & -0.58 & 0.92 & 0.86 & -0.27 & -0.31 & 0.39 & 0.43 & 0.60 \\ 0.03 & -0.58 & 19.55 & 0.19 & -0.81 & 0.12 & -0.91 & 0.52 & 0.32 & 0.20 \\ 0.90 & 0.92 & 0.19 & 81.24 & -0.55 & 0.43 & 0.45 & -0.31 & -0.93 & 0.69 \\ 0.69 & 0.86 & -0.81 & -0.55 & 72.6 & 0.54 & 0.02 & 0.41 & 0.58 & -0.34 \\ 0.87 & -0.27 & 0.12 & 0.43 & 0.54 & 67.79 & 0.83 & 0.15 & -0.42 & -0.47 \\ 0.95 & -0.31 & -0.91 & 0.45 & 0.02 & 0.83 & 91.48 & 0.78 & -0.27 & -0.70 \\ -0.25 & 0.39 & 0.52 & -0.31 & 0.41 & 0.15 & 0.78 & 82.28 & 0.89 & 0.30 \\ -0.36 & 0.43 & 0.32 & -0.93 & 0.58 & -0.42 & -0.27 & 0.89 & 55.32 & 0.96 \\ 0.57 & 0.60 & 0.20 & 0.69 & -0.34 & -0.47 & -0.70 & 0.30 & 0.96 & 2.54 \end{bmatrix}$$

alınarak test istatistikleri hesaplanmıştır. 1 000 deneme sonucunda elde edilen beş değişkenli KS testi kritik tablo değerleri Tablo 8'deki gibi elde edilmiştir. Tablo 8 için MAPE değeri 0.0215 olarak bulunmuştur. Tablo 8'in tek değişkenli KS testi kritik tablo değerleriyle benzerliği %97.85 olarak hesaplanmıştır.

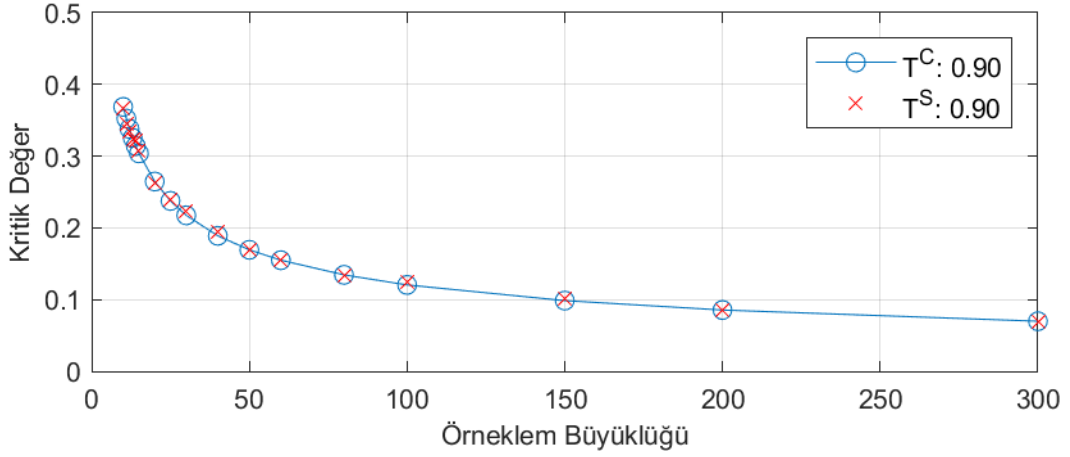
Tablo 8. On değişkenli KS istatistiğinin 1 000 deneme sonucundaki Monte-Carlo yaklaşımı ile elde edilen yüzdelik değerleri

n	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9975	0.999
10	0.3031	0.3229	0.3417	0.3659	0.4096	0.4562	0.4980	0.5275	0.5378	0.5780
11	0.2913	0.3062	0.3186	0.3458	0.3808	0.4260	0.4623	0.4775	0.4926	0.4993
12	0.2731	0.2855	0.3052	0.3337	0.3676	0.4071	0.4714	0.5053	0.5218	0.5652
13	0.2682	0.2826	0.2980	0.3241	0.3584	0.3927	0.4325	0.4769	0.4968	0.5334
14	0.2669	0.2842	0.3015	0.3220	0.3542	0.3786	0.4236	0.4524	0.4622	0.4874
15	0.2530	0.2657	0.2816	0.3068	0.3474	0.3709	0.3978	0.4200	0.4377	0.5044
20	0.2204	0.2335	0.2482	0.2629	0.2919	0.3120	0.3535	0.3913	0.4018	0.4158
25	0.2014	0.2129	0.2256	0.2395	0.2629	0.2871	0.3082	0.3346	0.3393	0.3619
30	0.1832	0.1913	0.2032	0.2227	0.2446	0.2668	0.2905	0.3079	0.3128	0.3242
40	0.1579	0.1665	0.1810	0.1939	0.2139	0.2315	0.2475	0.2573	0.2702	0.2760
50	0.1396	0.1473	0.1552	0.1697	0.1920	0.2046	0.2267	0.2351	0.2433	0.2540
60	0.1264	0.1332	0.1427	0.1548	0.1695	0.1857	0.2112	0.2159	0.2240	0.2666
80	0.1128	0.1182	0.1254	0.1345	0.1464	0.1566	0.1717	0.1871	0.1911	0.1991
100	0.1014	0.1072	0.1145	0.1245	0.1347	0.1476	0.1557	0.1642	0.1741	0.1923
150	0.0842	0.0891	0.0948	0.1015	0.1129	0.1243	0.1377	0.1467	0.1512	0.1602
200	0.0732	0.0768	0.0810	0.0856	0.0935	0.1008	0.1117	0.1179	0.1214	0.1278
300	0.0579	0.0609	0.0649	0.0696	0.0766	0.0835	0.0918	0.1036	0.1053	0.1118

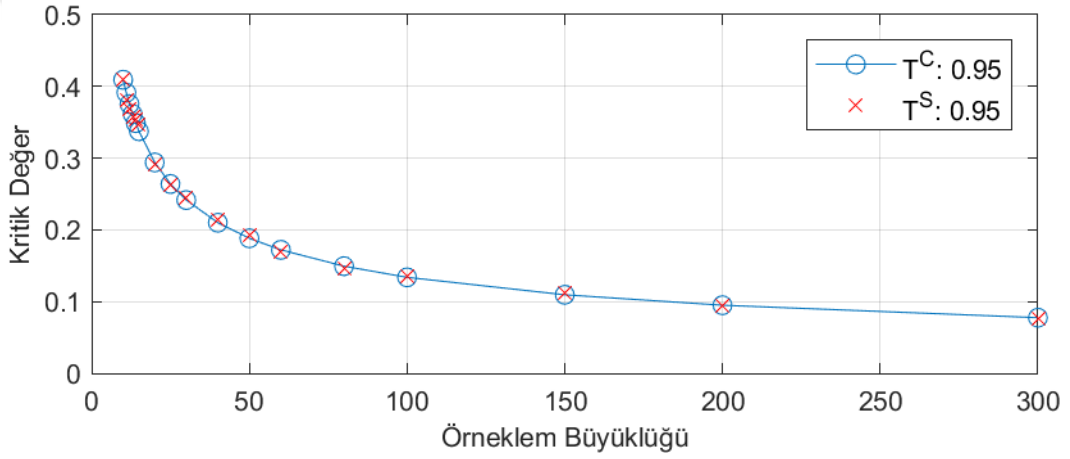


On değişken durum ( $p = 10$ ) için simülasyondan elde edilen kritik tablo değerleri ( $T^S$ ) ile R programından elde edilen tek değişkenli KS testi kritik tablo değerlerinin ( $T^C$ ) (Tablo 2), 0.90, 0.95 ve 0.99 güven düzeylerinde ( $1 - \alpha$ ) örneklem sayısına göre karşılaştırılması Şekil 18’de verilmiştir. Şekil 18 incelendiğinde her bir güven düzeyinde  $T^S$  ile  $T^C$ ’nin hemen hemen aynı değerlere sahip olduğu görülmüştür.

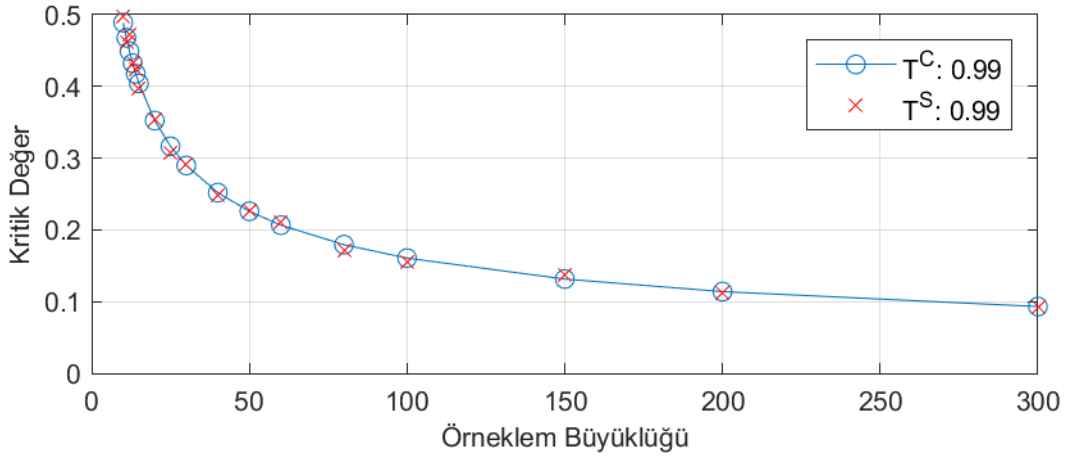




(a)



(b)

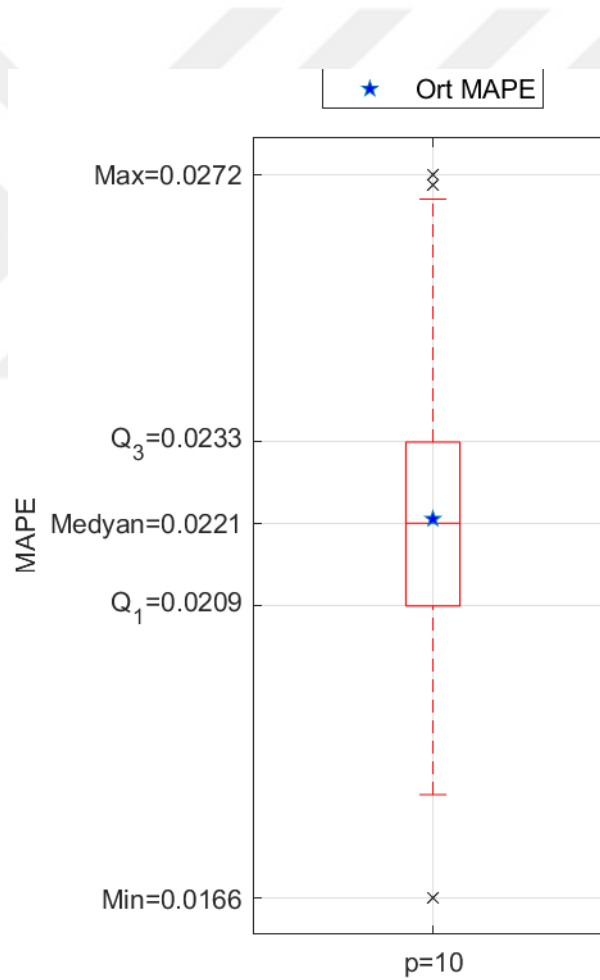


(c)

Şekil 18. Simülasyondan elde edilen kritik tablo değerleriyle ( $T^S$ ) ile R programıyla elde edilen tek değişkenli KS testi kritik tablo değerlerinin ( $T^C$ ) karşılaştırılması ( $p = 10$ ); (a)  $(1 - \alpha) = 0.90$ ; (b)  $(1 - \alpha) = 0.95$ ; (c)  $(1 - \alpha) = 0.99$



On değişkenli KS istatistiğinin 1 000 deneme sonucundaki Monte-Carlo yaklaşımı ile elde edilen yzdelik değerleri farklı ortalama ve kovaryans matrisi değerleri için de hesaplanmıştır. Beş değişkenli ortalama vektörünü ( $\mu_4$ ), düzgün dağılımdan  $[-1000, 1000]$  aralığında rastgele olarak seçilmiştir. Ayrıca, kovaryans matrisinin ( $\Sigma_4$ ), köşegen elemanları (varyans değerlerini) düzgün dağılımdan  $[0, 100]$  aralığında ve korelasyon değerleri ise düzgün dağılımdan  $[-1, 1]$  aralığında rastgele seçilerek kritik tablo değerleri elde edilmiştir. 100 deneme sonundaki ortalama MAPE değeri ise 0.0222 olarak hesaplanmıştır. Bu denemelerden elde edilen MAPE değerlerinin kutu grafiği Şekil 19’da verilmiştir. Şekil 19 incelendiğinde 100 deneme sonucundaki en düşük MAPE değeri 0.0166, en yüksek MAPE değeri 0.0272, ortanca MAPE değeri ise 0.0221 çıkmıştır.



Şekil 19. On değişkenli durum için 100 denemede elde edilen MAPE değerlerinin kutu grafiği





### 3.1.6. İki Değişkenli Durum İçin Önerilen Çok Değişkenli Lilliefors Testinin Kritik Tablo Değerlerinin Hesaplanması

Araştırma konusu olan hipotezde ortalama ve kovaryans matrisinin verilmemesi durumunda eğer ortalama ve kovaryans matrisi örneklemden hesaplanırsa Kolmogorov-Smirnov testi Lilliefors testine dönüşmektedir. Bu durumda KS tablosu yerine Lilliefors tablosuna bakılması gerekmektedir. Bu çalışmada, bununla ilgili kritik tablo değerleri sadece verinin iki değişkenli olduğu durumda hesaplanmıştır. Tablo 9’da farklı anlamlılık düzeylerinde iki değişkenli Lilliefors testi tablosu gösterilmiştir. Tablo 9 elde edilirken, ortalama ve varyans sırasıyla,

$$\mu = [1 \quad 2] \text{ ve } \Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

olan normal dağılım kullanılmıştır. Benzer şekilde, Bölüm 2.2.5’de verilen algoritma yardımıyla değişken sayısının 2’den fazla olduğu durumlarda da tablo değerleri tek değişkenli ve iki değişkenli olduğu gibi hesaplanabilir.

Tablo 9. İki değişkenli Lilliefors istatistiğinin 100 000 deneme sonucundaki Monte-Carlo yaklaşımı ile elde edilen yüzdeler

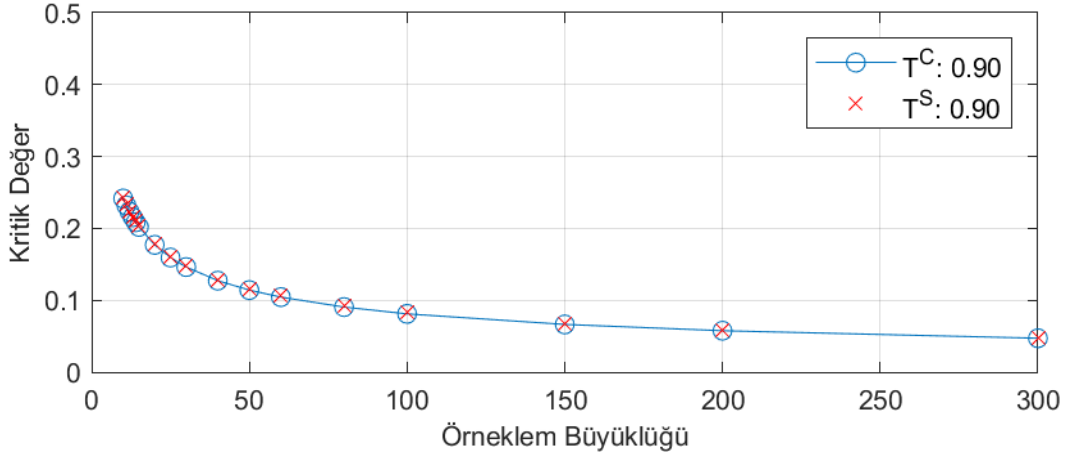
n	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9975	0.999
10	0.2103	0.2189	0.2293	0.2430	0.2637	0.2829	0.3053	0.3208	0.3341	0.3519
11	0.2019	0.2102	0.2202	0.2334	0.2532	0.2713	0.2922	0.3077	0.3221	0.3381
12	0.1943	0.2023	0.2118	0.2240	0.2434	0.2613	0.2823	0.2957	0.3093	0.3269
13	0.1875	0.1952	0.2046	0.2167	0.2352	0.2528	0.2730	0.2879	0.3009	0.3162
14	0.1818	0.1893	0.1982	0.2099	0.2280	0.2441	0.2643	0.2774	0.2904	0.3062
15	0.1757	0.1830	0.1917	0.2033	0.2211	0.2373	0.2563	0.2692	0.2829	0.2966
20	0.1542	0.1607	0.1683	0.1784	0.1943	0.2082	0.2252	0.2368	0.2476	0.2612
25	0.1391	0.1449	0.1519	0.1610	0.1749	0.1881	0.2034	0.2147	0.2237	0.2363
30	0.1278	0.1330	0.1394	0.1477	0.1606	0.1725	0.1866	0.1972	0.2066	0.2186
40	0.1114	0.1159	0.1214	0.1286	0.1399	0.1506	0.1635	0.1724	0.1815	0.1916
50	0.1000	0.1040	0.1090	0.1155	0.1257	0.1355	0.1463	0.1543	0.1613	0.1693
60	0.0917	0.0954	0.1000	0.1060	0.1152	0.1237	0.1338	0.1407	0.1489	0.1581
80	0.0798	0.0831	0.0872	0.0924	0.1007	0.1081	0.1174	0.1234	0.1288	0.1357
100	0.0717	0.0746	0.0782	0.0828	0.0901	0.0968	0.1050	0.1108	0.1162	0.1235
150	0.0589	0.0613	0.0642	0.0680	0.0741	0.0799	0.0865	0.0912	0.0957	0.1013
200	0.0511	0.0532	0.0557	0.0590	0.0642	0.0690	0.0749	0.0791	0.0828	0.0873
300	0.0419	0.0435	0.0456	0.0483	0.0526	0.0564	0.0615	0.0650	0.0684	0.0725



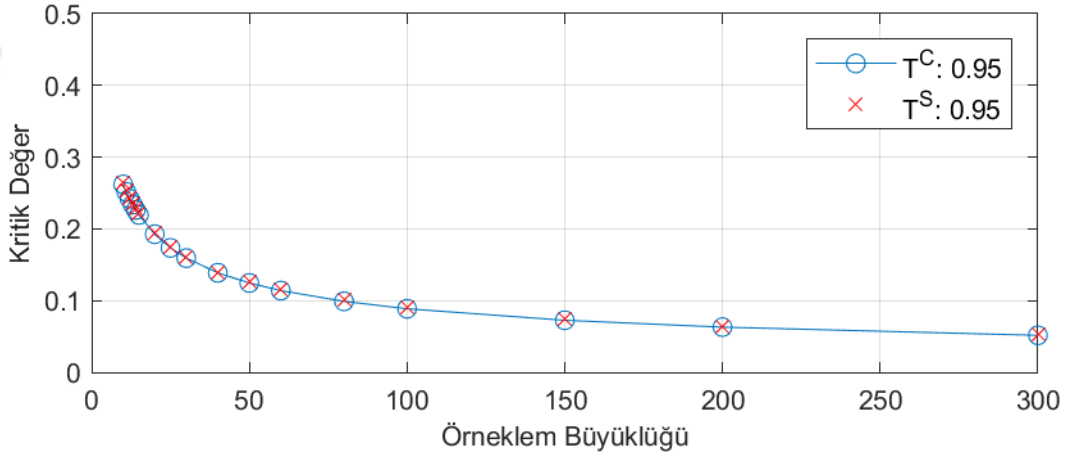
Tablo 9 için MAPE değeri 0.0172 olarak bulunmuştur. Tablo 9'un tek değişkenli Lilliefors testi kritik tablo değerleriyle benzerliği %98.28 olarak hesaplanmıştır. MAPE hesaplanırken literatürdeki tek değişkenli Lilliefors testi tablosundan (Lilliefors, 1967) yararlanılmıştır.

İki değişken durum ( $p = 2$ ) için simülasyondan elde edilen kritik tablo değerleri ( $T^S$ ) ile R programından elde edilen tek değişkenli Lilliefors testi kritik tablo değerlerinin ( $T^C$ ) (Tablo 3), 0.90, 0.95 ve 0.99 güven düzeylerinde ( $1 - \alpha$ ) örneklem sayısına göre karşılaştırılması Şekil 20'de verilmiştir. Şekil 20 incelendiğinde her bir güven düzeyinde  $T^S$  ile  $T^C$ 'nin hemen hemen aynı değerlere sahip olduğu görülmüştür.

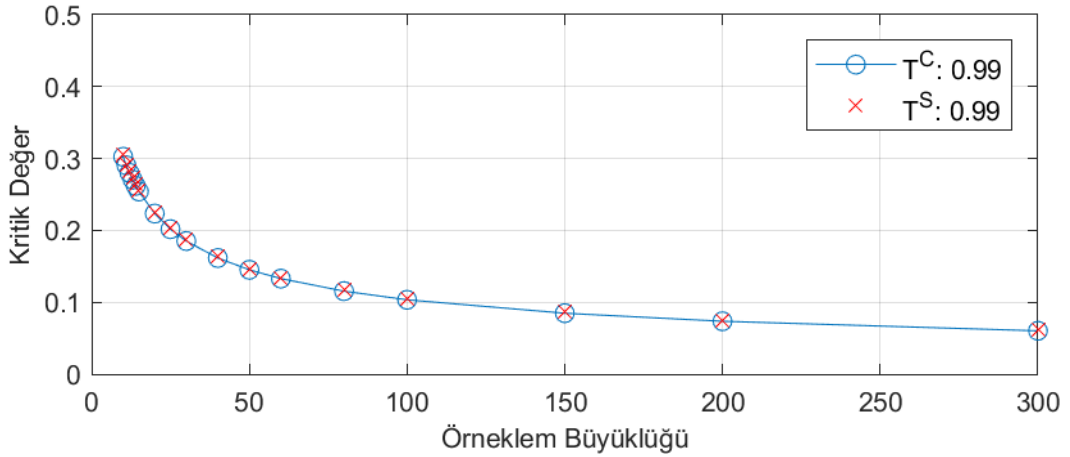




(a)



(b)



(c)

Şekil 20. Simülasyondan elde edilen kritik tablo değerleriyle ( $T^S$ ) ile R programıyla elde edilen tek değişkenli Lilliefors testi kritik tablo değerlerinin ( $T^C$ ) karşılaştırılması ( $p = 2$ ); (a)  $(1 - \alpha) = 0.90$ ; (b)  $(1 - \alpha) = 0.95$ ; (c)  $(1 - \alpha) = 0.99$



### 3.2. Önerilen Çok Değişkenli KS Testinin I. Tip Hata ve Testin Gücü Bakımından Karşılaştırılması

Bu bölümde iki boyutlu örneklem için Peacock (1983), Fasano ve Franceschini (1987) ve Justel vd. (1997) tarafından geliştirilen değişkenli KS test istatistikleri ile önerilen çok değişkenli KS testi (iki değişkenli durum) I. tip hata ve güç bakımından karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmalarda, P (Peacock), FF (Fasano ve Franceschini), J (Justel) ve MVKS (önerilen yöntem) iki değişkenli KS testlerini temsil etmektedir. Bununla beraber, her bir simülasyon 10 000 kez tekrar edilerek I. tip hata ( $\alpha$ ) ve testin gücü değerleri ( $1 - \beta$ ) hesaplanmıştır.

Simülasyon çalışması üç kısımdan oluşmaktadır. Simülasyonun ilk kısmında I. tip hata değerleri farklı örneklem sayıları ( $n = 15, 30, 50, 100, 200, 500$ ) için hesaplanmıştır. Simülasyonun ikinci kısmında yokluk hipotezi iki değişkenli standart normal dağılım olarak belirlenmiştir. Alternatif hipotez de çok değişkenli simetrik (eliptik) dağılımlardan seçilmiş ve güç değerleri hesaplanarak karşılaştırılmıştır. Simülasyonun üçüncü kısmında yokluk hipotezi iki değişkenli standart normal dağılım olarak belirlenmiştir. Alternatif hipotez ise çok değişkenli simetrik olmayan dağılımlardan seçilerek testin gücü karşılaştırmaları yapılmıştır.

#### 3.2.1. Önerilen Çok Değişkenli KS Testinin I. Tip Hata Bakımından Karşılaştırılması

P, FF, J ve MVKS yöntemleri, I. tip hata bakımından farklı örneklem sayılarında ( $n = 15, 30, 50, 100, 200, 500$ ) karşılaştırılmıştır. Yokluk hipotezi iki değişkenli normal dağılım olarak belirlenmiştir. Kovaryans matrisleri ' $\Sigma_1$ ' ve ' $\Sigma_2$ ' ise sırasıyla aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Eğer örneklem iki değişkenli normal dağılım gösteriyorsa, her bir testin yokluk hipotezini %5 seviyesinde reddilmesi beklenmektedir. P, FF, J ve MVKS yöntemlerinin ' $\Sigma_1$ ' ve ' $\Sigma_2$ ' için I. tip hata değerleri Tablo 10'da verilmiştir.

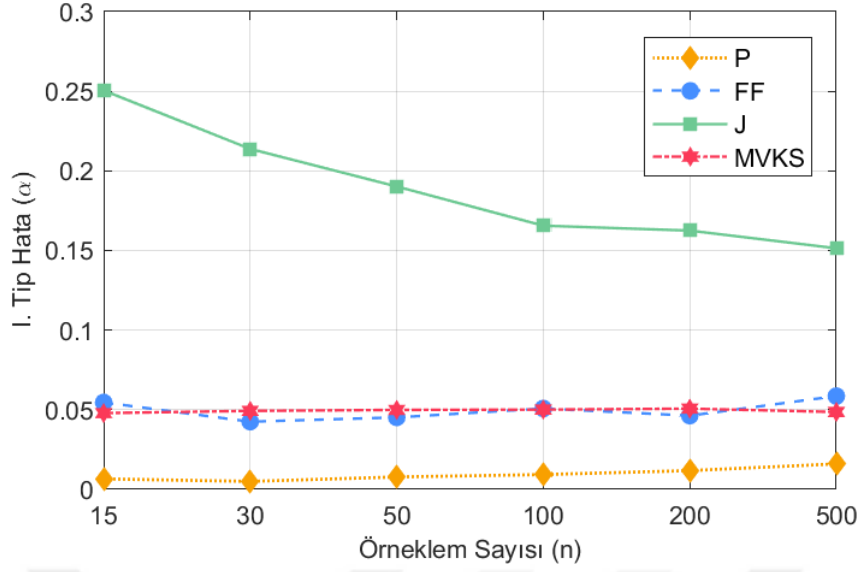


Tablo 10. P, FF, J ve MVKS yöntemlerinin ' $\Sigma_1$ ' ve ' $\Sigma_2$ ' için I. tip hata değerleri

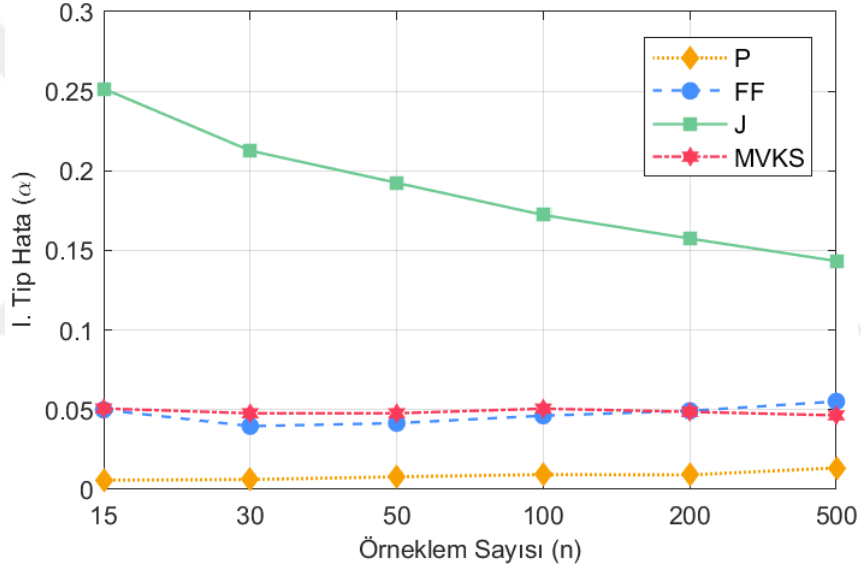
Kovaryans Matrisi	Yöntem	Örneklem Sayısı					
		15	30	50	100	200	500
$\Sigma_1$	P	0.0066	0.005	0.0078	0.0093	0.0118	0.016
	FF	0.0546	0.0425	0.0452	0.0508	0.0463	0.0586
	J	0.2505	0.2138	0.1902	0.1656	0.1625	0.1514
	MVKS	0.0479	0.0493	0.0499	0.0501	0.0507	0.0486
$\Sigma_2$	P	0.0058	0.0062	0.0079	0.0093	0.0091	0.0135
	FF	0.05	0.0397	0.0416	0.0463	0.0493	0.0552
	J	0.2516	0.2127	0.1925	0.1723	0.1575	0.1434
	MVKS	0.0508	0.0478	0.0478	0.0507	0.0487	0.0465

Örneklem sayısı arttıkça P ve J yöntemlerinin I. tip hata değerleri hem  $\Sigma_1$  and  $\Sigma_2$  için artmıştır. Fakat P yönteminde I. tip hata değerleri her bir örneklem için %2'yi geçmezken, J yönteminde ise %5'den oldukça fazla çıkmıştır. Kovaryans matrisleri ' $\Sigma_1$ ' ve ' $\Sigma_2$ ' için I. tip hatalar incelendiğinde bu iki testin tutarlı çalışmadığı görülmektedir. Diğer yandan FF ve MVKS yöntemlerinin I. tip hataları hem  $\Sigma_1$  hem de  $\Sigma_2$  için %5 civarında değişim göstermektedir. Bu durum bu yöntemlerin diğer P ve J yöntemlerine göre daha tutarlı ve doğru çalıştığı söylenebilir. Ayrıca Tablo 10'daki değişim Şekil 21'de gösterilmiştir.





(a)



(b)

Şekil 21. P, FF, J ve MVKS yöntemleri yöntemlerinin ' $\Sigma_1$ ' ve ' $\Sigma_2$ ' için I. tip hata değerleri; (a) İki değişkenli normal dağılım, ' $\Sigma_1$ ' kovaryans matrisi; (b) İki değişkenli normal dağılım, ' $\Sigma_2$ ' kovaryans matrisi.

Kovaryans matrisinin ' $\Sigma_1$ ' olduğu durumda P, FF, J ve MVKS yöntemlerinin I. tip hata değerlerinin değişimi Şekil 21(a)'da gösterilirken, ' $\Sigma_2$ ' olduğu durum da Şekil 21(b)'de gösterilmiştir. FF ve MVKS yöntemlerinin %5 etrafındaki doğrusal değişimleri kolaylıkla görülmektedir. J yönteminin %5'ten fazla olan I. tip hata değerleri, kovaryans matrisi ' $\Sigma_1$ ' olduğunda, örneklem sayısı arttıkça azalırken, I. tip hata değerleri kovaryans matrisi ' $\Sigma_2$ ' olduğunda örneklem sayısı arttıkça daha da artmaktadır. P yöntemi ise doğrusal olarak %1 civarında değişmektedir.



### 3.2.2. Çok Değişkenli Simetrik Dağılımlar İçin Testin Gücü Karşılaştırılması

Çok değişkenli eliptik dağılımlardan Normal, Laplace, Student-t, Cauchy, Logistik, Üçgen ve Düzgün dağılımdan rastgele sayılar üretilerek P, FF, J ve MVKS yöntemlerinin testin gücü  $(1 - \beta)$  değerleri hesaplanmıştır. Testin gücü hesaplanırken yokluk hipotezi iki değişkenli standart normal dağılım olarak belirlenmiştir.

#### 3.2.2.1. Çok Değişkenli Normal Dağılım İçin Testin Gücü Karşılaştırılması

Çok değişkenli Normal dağılımdan rastgele sayılar üretilerek testin gücü  $(1 - \beta)$  hesaplanmıştır. Testin gücü hesaplanırken yokluk hipotezi iki değişkenli standart normal dağılım olarak belirlenmiştir. İlk olarak ortalamaları  $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5)$  ve kovaryans matrisi  $(\Sigma_1)$  sırasıyla,

$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\mu_4$	$\mu_5$
[-1 -1]	[-0.5 -0.5]	[0 0]	[0.5 0.5]	[1 1]

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix}$$

olan iki değişkenli normal dağılım olduğu durumlarda test istatistiğinden elde edilen güç değerleri hesaplanmıştır. P, FF, J ve MVKS yöntemlerinin ' $\Sigma_1$ ' için testin gücü değerleri Tablo 11'de verilmiştir.



Tablo 11. İki değişkenli Normal dağılım ' $\Sigma_1$ ' için testin gücü değerleri

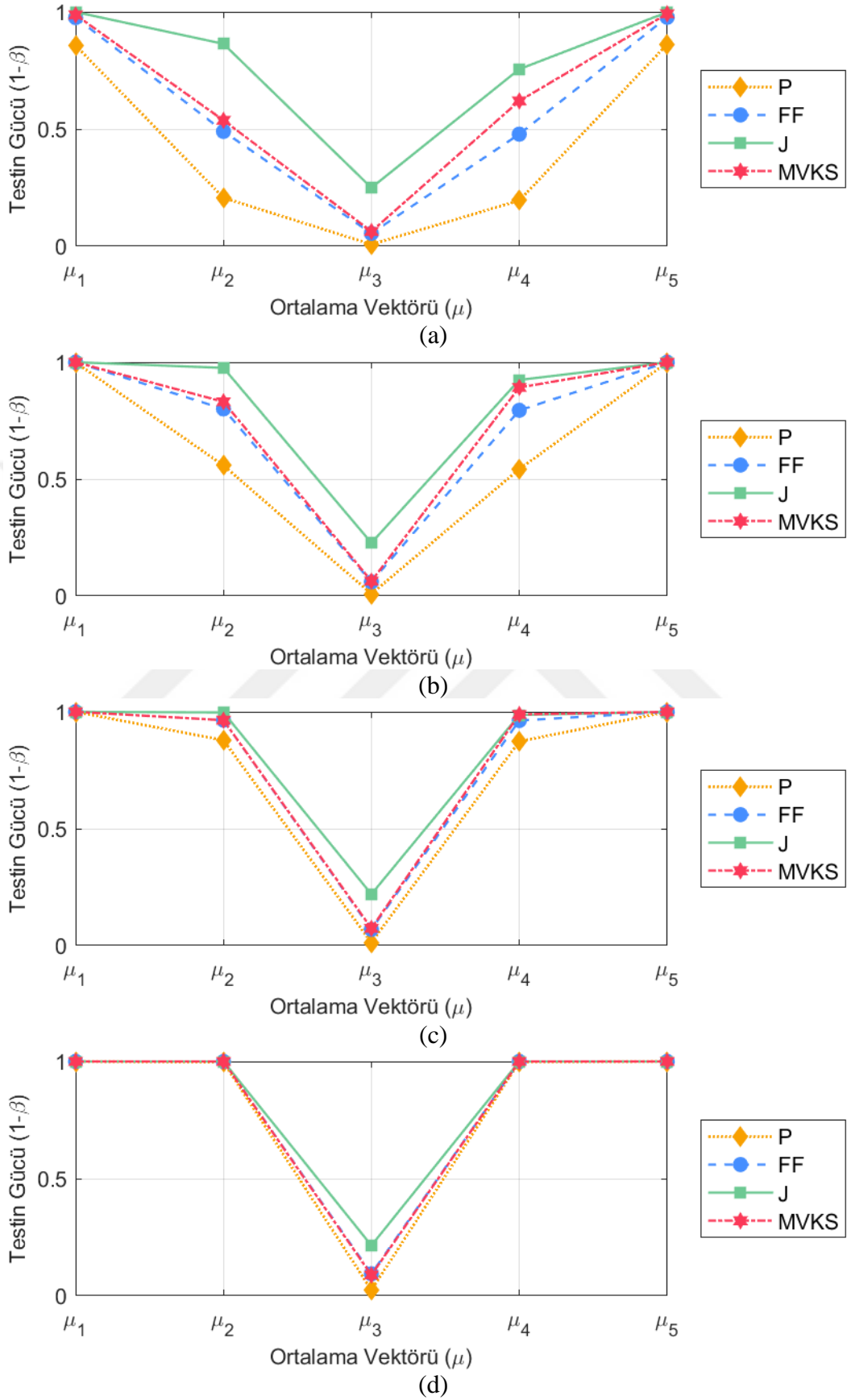
Örneklem Sayısı	Ortalama	Yöntem			
		P	FF	J	MVKS
<b>n = 15</b>	$\mu_1$	0.8565	0.9757	0.9993	0.987
	$\mu_2$	0.2065	0.4898	0.8635	0.537
	$\mu_3$	0.0075	0.0546	0.2493	0.0628
	$\mu_4$	0.1949	0.4781	0.7555	0.6198
	$\mu_5$	0.8617	0.977	0.9984	0.9917
<b>n = 30</b>	$\mu_1$	0.9988	0.9999	1	1
	$\mu_2$	0.5582	0.8002	0.9758	0.8308
	$\mu_3$	0.0088	0.06	0.227	0.0636
	$\mu_4$	0.5427	0.7942	0.9242	0.8921
	$\mu_5$	0.999	1	1	1
<b>n = 50</b>	$\mu_1$	1	1	1	1
	$\mu_2$	0.8784	0.9642	0.9973	0.9643
	$\mu_3$	0.013	0.0691	0.2197	0.0736
	$\mu_4$	0.8734	0.9628	0.9866	0.9889
	$\mu_5$	1	1	1	1
<b>n = 100</b>	$\mu_1$	1	1	1	1
	$\mu_2$	0.9976	0.9998	1	0.9999
	$\mu_3$	0.0242	0.0937	0.2145	0.0885
	$\mu_4$	0.9984	1	1	1
	$\mu_5$	1	1	1	1

İki değişkenli standart normal dağılımın kovaryans matrisi ' $\Sigma_1$ ' sabit kalmak şartıyla ortalama değerlerindeki ( $\mu_3 = [0 \ 0]$ ) değişim arttıkça veya azaldıkça testin gücü P, FF, J ve MVKS metotlarında da artmaktadır. Örneklem sayısı arttıkça testin gücü tüm yöntemler için artmaktadır. Aynı şartlar altında küçük örneklerde P yöntemi testin gücü bakımından düşük çıksa da örneklem büyüklüğü arttıkça tüm yöntemler için testin gücü artmaktadır (Şekil 22).

Ortalama vektörünün  $\mu_3 = [0 \ 0]$  olduğu durumda örneklem sayısı arttıkça, P yönteminin güç değeri anlamlılık düzeyine göre (0.05) düşük, J yönteminin ise yüksek çıkmıştır. FF ve MVKS yöntemlerinin testin gücü değerleri örneklem sayısı ne olursa olsun anlamlılık değerine (0.05) yakın çıkmıştır (Şekil 22). Burada dikkat edilmesi gereken nokta korelasyon değerinin 0.2 olduğudur. Kovaryans matrisindeki korelasyonun derecesi arttıkça, FF, J ve MVKS yöntemlerinin güç değerleri artacaktır. Ayrıca, MVKS yöntemi tüm örneklerde FF yöntemine göre daha yüksek güç değerlerine sahiptir.







Şekil 22. P, FF, J ve MVKS yöntemlerinin iki değişkenli normal dağılım ( $\Sigma_1$ ) için testin gücü karşılaştırması (a)  $n = 15$  (b)  $n = 30$  (c)  $n = 50$  (d)  $n = 100$



Yokluk hipotezi aynı kalmak şartıyla, alternatif hipotezde kovaryans matrisi  $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$  biçimde değiştirilerek test istatistiğinden elde edilen güç değerleri Tablo 12’de verilmiştir.

Tablo 12. İki değişkenli Normal dağılım ‘ $\Sigma_2$ ’ için testin gücü değerleri

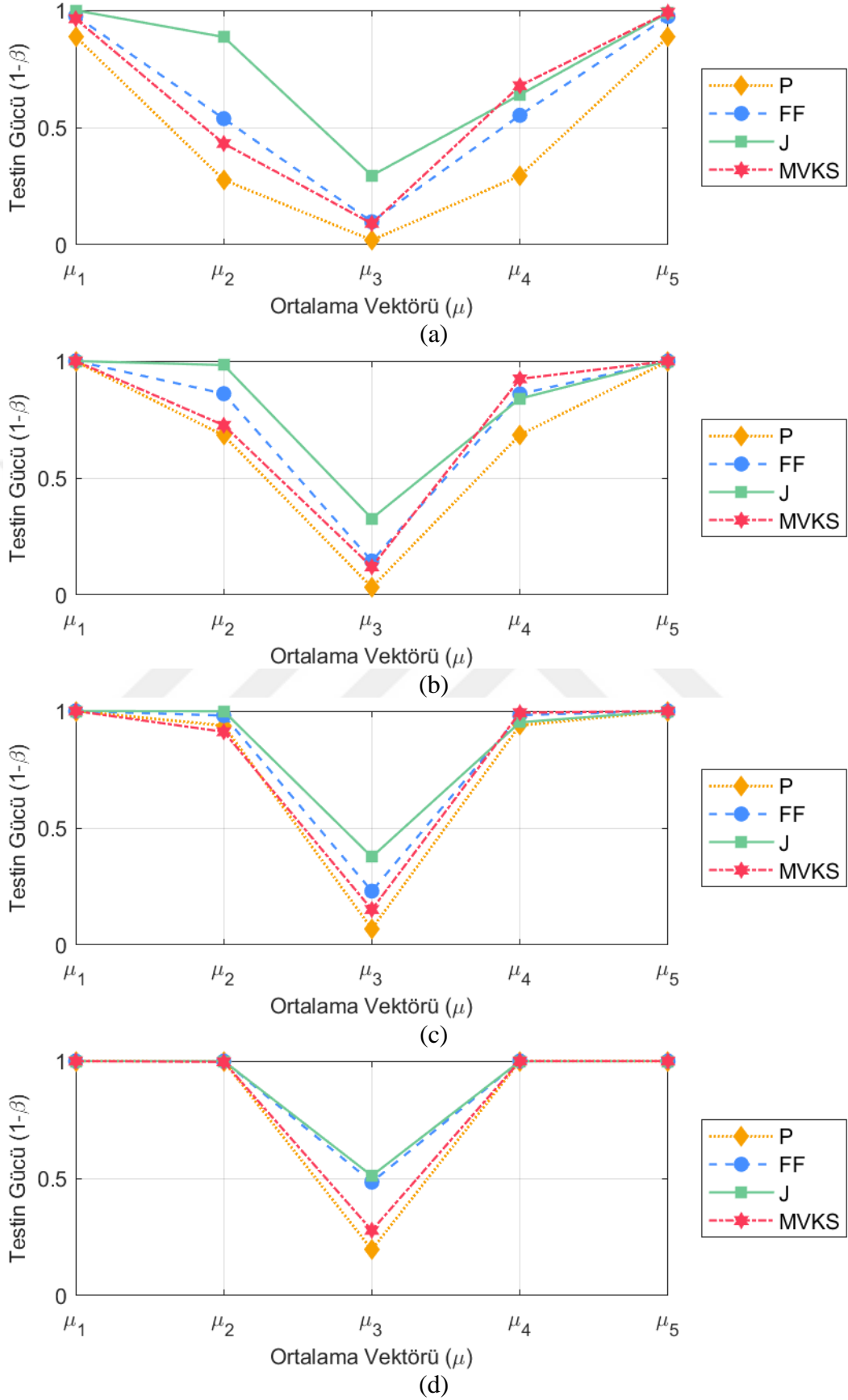
Örneklem Sayısı	Ortalama	Yöntem			
		P	FF	J	MVKS
<b>n = 15</b>	$\mu_1$	0.8873	0.9758	0.9994	0.9638
	$\mu_2$	0.2768	0.5379	0.886	0.4319
	$\mu_3$	0.02	0.0984	0.2954	0.0911
	$\mu_4$	0.2945	0.5522	0.6396	0.6781
	$\mu_5$	0.8861	0.9734	0.9892	0.9914
<b>n = 30</b>	$\mu_1$	0.9989	0.9999	1	0.9999
	$\mu_2$	0.6818	0.8605	0.9828	0.7254
	$\mu_3$	0.0324	0.1453	0.327	0.1202
	$\mu_4$	0.6847	0.8593	0.8394	0.9237
	$\mu_5$	0.9989	1	1	1
<b>n = 50</b>	$\mu_1$	1	1	1	1
	$\mu_2$	0.9377	0.9807	0.9991	0.9112
	$\mu_3$	0.0693	0.2304	0.3763	0.1518
	$\mu_4$	0.9386	0.9826	0.9519	0.9929
	$\mu_5$	1	1	1	1
<b>n = 100</b>	$\mu_1$	1	1	1	1
	$\mu_2$	0.9996	0.9999	1	0.9966
	$\mu_3$	0.1962	0.4839	0.511	0.2782
	$\mu_4$	1	1	0.9992	1
	$\mu_5$	1	1	1	1

İki değişkenli standart normal dağılımın kovaryans matrisi ‘ $\Sigma_2$ ’ sabit kalmak şartıyla ortalama değerlerindeki ( $\mu_3 = [0 \ 0]$ ) değişim arttıkça veya azaldıkça testin gücü P, FF, J ve MVKS metotlarında da artmaktadır. Aynı ortalama ve kovaryans durumunda küçük örneklerde P yöntemi testin gücü bakımından düşük çıksa da örneklem büyüklüğü arttıkça Tablo 11’de olduğu gibi tüm yöntemler için de testin gücü artmaktadır. Kovaryans matrisinin değeri arttıkça, yani iki değişken arasındaki ilişki arttıkça aynı koşullar altında Tablo 11’e göre testin gücü değerleri daha yüksek çıkmıştır. Örneklem sayısı arttıkça testin gücü tüm yöntemler için de arttığı söylenebilir. Ayrıca, ortalama vektörünün  $\mu_3 = [0 \ 0]$  olduğu durumda, yokluk ve alternatif hipotezdeki dağılım yaklaşık olarak aynı olacaktır.



Ortalama vektörünün  $\mu_3 = [0 \ 0]$  olduğu durumda, anlamlılık düzeyine (0.05) göre P yönteminin güç değeri en düşük, J yönteminin ise en yüksek çıkmıştır. FF ve MVKS yöntemlerinin testin gücü değerleri anlamlılık düzeyine (0.05) göre bakıldığında örneklem sayısı arttıkça artmaktadır (Şekil 23).





Şekil 23. P, FF, J ve MVKS yöntemlerinin iki değişkenli normal dağılım ( $\Sigma_2$ ) için testin gücü karşılaştırması (a)  $n = 15$  (b)  $n = 30$  (c)  $n = 50$  (d)  $n = 100$



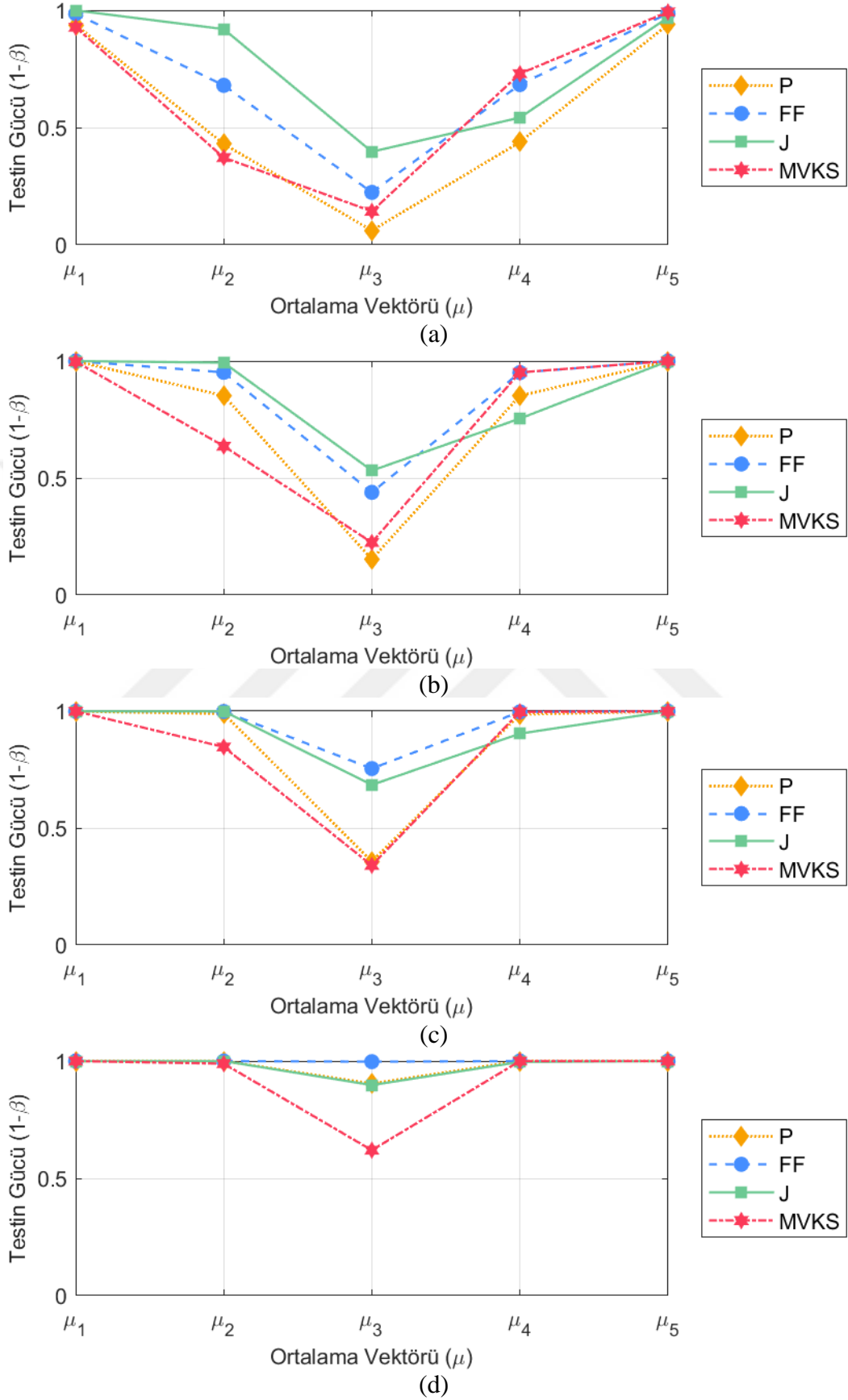
Yokluk hipotezi aynı kalmak şartıyla, alternatif hipotezde kovaryans matrisi  $\Sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 \\ 0.8 & 1 \end{bmatrix}$  biçimde değiştirilerek test istatistiğinden elde edilen güç değerleri Tablo 13'te verilmiştir.

Tablo 13. İki değişkenli Normal dağılım ' $\Sigma_3$ ' için testin gücü değerleri

Örneklem Sayısı	Ortalama	Yöntem			
		P	FF	J	MVKS
<b>n = 15</b>	$\mu_1$	0.9376	0.9853	0.9993	0.9274
	$\mu_2$	0.4295	0.68	0.9196	0.3719
	$\mu_3$	0.0611	0.2237	0.397	0.143
	$\mu_4$	0.4381	0.6834	0.5424	0.7296
	$\mu_5$	0.9391	0.9866	0.969	0.9929
<b>n = 30</b>	$\mu_1$	0.9996	0.9999	1	0.9974
	$\mu_2$	0.8518	0.9516	0.9931	0.6362
	$\mu_3$	0.1532	0.4388	0.5318	0.2247
	$\mu_4$	0.8515	0.9507	0.7541	0.9515
	$\mu_5$	0.9998	1	0.9994	1
<b>n = 50</b>	$\mu_1$	1	1	1	1
	$\mu_2$	0.9895	0.9989	0.9998	0.8471
	$\mu_3$	0.3574	0.7548	0.6851	0.3406
	$\mu_4$	0.987	0.9975	0.9044	0.9976
	$\mu_5$	1	1	1	1
<b>n = 100</b>	$\mu_1$	1	1	1	1
	$\mu_2$	1	1	1	0.9889
	$\mu_3$	0.9036	0.9975	0.8977	0.6201
	$\mu_4$	1	1	0.9963	1
	$\mu_5$	1	1	1	1

İki değişkenli standart normal dağılımın ortalama değerlerindeki değişim arttıkça testin gücü P, FF, J ve MVKS metotlarında Tablo 11 ve Tablo 12'de olduğu gibi Tablo 13'te de artmaktadır. İki değişken arasındaki ilişki arttıkça aynı koşullar altında Tablo 11 ve Tablo 12'ye göre testin gücü değerleri daha yüksek çıkmıştır. Örneklem sayısı arttıkça testin gücü tüm yöntemler için de arttığı söylenebilir. Tablo 11 ve Tablo 12 ile benzer şekilde aynı ortalama ve kovaryans durumunda küçük örneklerde P yöntemi testin gücü bakımından düşük çıksa da örneklem büyüklüğü arttıkça tüm yöntemler için de testin gücü artmaktadır (Şekil 24).





Şekil 24. P, FF, J ve MVKS yöntemlerinin iki değişkenli normal dağılım ( $\Sigma_3$ ) için testin gücü karşılaştırması (a)  $n = 15$  (b)  $n = 30$  (c)  $n = 50$  (d)  $n = 100$



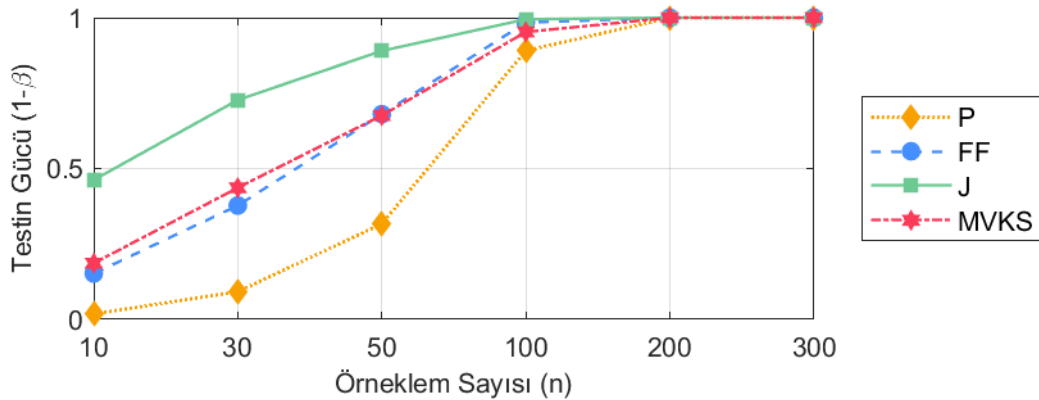
### 3.2.2.2. Çok Değişkenli Laplace Dağılımı İçin Testin Gücü Karşılaştırılması

İki değişkenli Laplace dağılımı kullanılarak testin gücü değerleri P, FF, J ve MVKS yöntemleri için hesaplanmıştır. Testin gücü hesaplanırken yokluk hipotezi iki değişkenli standart normal dağılım olarak belirlenmiştir. Güç değerleri  $n = 10, 30, 50, 100, 200, 300$  örneklem sayılarında hesaplanarak Tablo 14’te verilmiştir.

Tablo 14. İki değişkenli Laplace dağılımı için testin gücü değerleri

Yöntem	Örneklem Sayısı					
	10	30	50	100	200	300
<b>P</b>	0.0181	0.0919	0.3166	0.8905	0.9998	1
<b>FF</b>	0.1522	0.3775	0.6802	0.9839	1	1
<b>J</b>	0.4624	0.7272	0.89	0.9947	1	1
<b>MVKS</b>	0.1862	0.4363	0.6757	0.9526	0.9999	1

İki değişkenli Laplace dağılımı için testin gücü değerleri örneklem sayısı arttıkça tüm yöntemler için de artmaktadır. Peacock (P) yöntemi daha düşük testin gücü değerlerine sahiptir. Justel (J) yöntemi ise her örneklem sayısında diğer yöntemlere göre daha yüksek güç değerine sahiptir. Fakat Peacock (P) ve Justel (J) yöntemlerinin I. tip hata karşılaştırılmalarında tutarsız ve doğru çalışmadığı göz önüne alındığında FF (Fasano ve Franceschini) ve MVKS (önerilen yöntem) arasında testin gücü karşılaştırılmasını yapmak daha doğru olacaktır. Bu durumda küçük örneklerde önerilen yöntem (MVKS) daha yüksek güç değerine sahiptir. Örneklem sayısı arttıkça her iki yöntem için de testin gücü ‘1’ değerine doğru artmaktadır (Şekil 25).



Şekil 25. P, FF, J ve MVKS yöntemlerinin iki değişkenli Laplace dağılımı için testin gücü karşılaştırması



### 3.2.2.3. Çok Değişkenli Student-t Dağılımı İçin Testin Gücü Karşılaştırılması

10 serbestlik dereceli iki değişkenli Student-t dağılımı kullanılarak testin gücü değerleri P, FF, J ve MVKS yöntemleri için hesaplanmıştır. Testin gücü hesaplanırken yokluk hipotezi iki değişkenli standart normal dağılım olarak belirlenmiştir. Güç değerleri  $n = 10, 30, 50, 100, 200, 300$  örneklem sayılarında hesaplanarak Tablo 15’te verilmiştir.

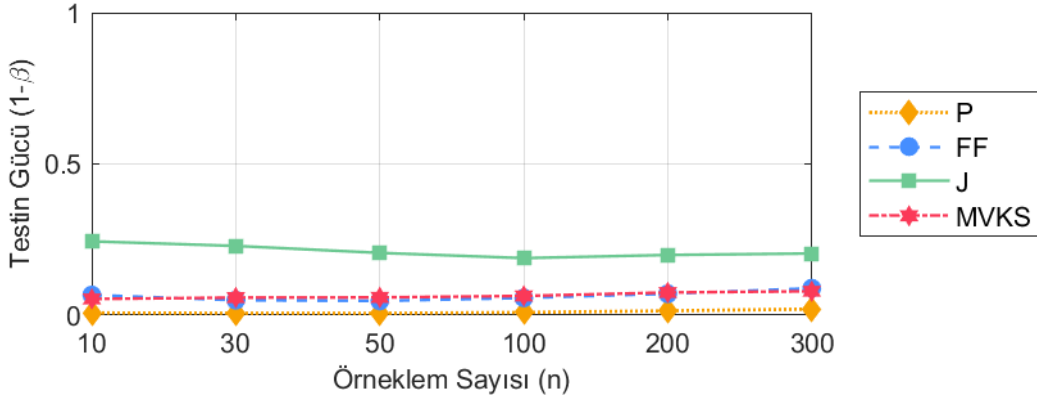
Tablo 15. İki değişkenli Student-t dağılımı için testin gücü değerleri

Yöntem	Örneklem Sayısı					
	10	30	50	100	200	300
<b>P</b>	0.0074	0.0065	0.0061	0.009	0.0145	0.0201
<b>FF</b>	0.0669	0.0495	0.0472	0.057	0.0707	0.0891
<b>J</b>	0.2441	0.229	0.206	0.1887	0.1991	0.204
<b>MVKS</b>	0.0537	0.0582	0.0588	0.0636	0.0751	0.0791

10 serbestlik dereceli iki değişkenli Student-t dağılımı için testin gücü değerleri örneklem sayısı arttıkça tüm yöntemler için de artmaktadır. Peacock (P) yöntemi her örneklem sayısında diğer yöntemlere göre daha düşük testin gücü değerlerine sahiptir. Justel (J) yöntemi, her örneklem sayısında diğer yöntemlere göre daha yüksek güç değerine sahiptir. Fakat Peacock (P) ve Justel (J) yöntemlerinin I. tip hata karşılaştırmalarında tutarsız ve doğru çalışmadığı göz önüne alındığında FF (Fasano ve Franceschini) ve MVKS (önerilen yöntem) arasında testin gücü karşılaştırılmasını yapmak daha doğru olacaktır. Bu durumda önerilen yöntem (MVKS) örneklem sayısı ‘10’ olduğu durum haricinde daha yüksek testin gücü değerlerine sahiptir. Ayrıca, örneklem sayısı arttıkça her iki yöntem için de testin gücü değeri artmaktadır (Şekil 26).







Şekil 26. P, FF, J ve MVKS yöntemlerinin iki değişkenli Student-t dağılımı için testin gücü karşılaştırması

### 3.2.2.4. Çok Değişkenli Cauchy Dağılımı İçin Testin Gücü Karşılaştırılması

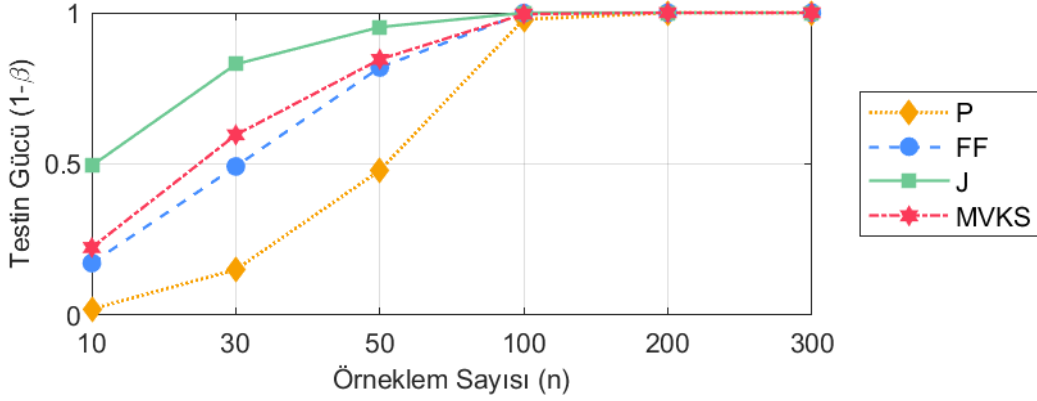
İki değişkenli Cauchy dağılımı kullanılarak testin gücü değerleri P, FF, J ve MVKS yöntemleri için hesaplanmıştır. Testin gücü hesaplanırken yokluk hipotezi iki değişkenli standart normal dağılım olarak belirlenmiştir. Güç değerleri  $n = 10, 30, 50, 100, 200, 300$  örneklem sayılarında hesaplanarak Tablo 16'da verilmiştir.

Tablo 16. İki değişkenli Cauchy dağılımı için testin gücü değerleri

Yöntem	Örneklem Sayısı					
	10	30	50	100	200	300
<b>P</b>	0.0204	0.1505	0.4787	0.9782	1	1
<b>FF</b>	0.1725	0.4917	0.8191	0.9987	1	1
<b>J</b>	0.4945	0.8298	0.9524	0.9997	1	1
<b>MVKS</b>	0.2236	0.5961	0.8458	0.9954	1	1

İki değişkenli Cauchy dağılımı için testin gücü değerleri örneklem sayısı arttıkça tüm yöntemler için de artmaktadır. Justel (J) yöntemi, her örneklem sayısında yukarıdaki dağılımlar için yapılan simülasyon sonuçlarına benzer olarak diğer yöntemlere göre daha yüksek güç değerine sahiptir. Fakat Peacock (P) ve Justel (J) yöntemlerinin I. tip hata karşılaştırılmalarında tutarsız ve doğru çalışmadığı göz önüne alındığında FF (Fasano ve Franceschini) ve MVKS (önerilen yöntem) arasında testin gücü karşılaştırılmasını yapmak daha doğru olacaktır. Bu durumda önerilen yöntem (MVKS), Fasano ve Franceschini (FF) yöntemine göre daha yüksek güç değerine sahiptir. Örneklem sayısı arttıkça tüm yöntemler için de testin gücü '1' değerine doğru artmaktadır (Şekil 27).





Şekil 27. P, FF, J ve MVKS yöntemlerinin iki değişkenli Cauchy dağılımı için testin gücü karşılaştırması

### 3.2.2.5. Çok Değişkenli Logistik Dağılımı İçin Testin Gücü Karşılaştırılması

İki değişkenli Logistik dağılımı kullanılarak testin gücü değerleri P, FF, J ve MVKS yöntemleri için hesaplanmıştır. Testin gücü hesaplanırken yokluk hipotezi iki değişkenli standart normal dağılım olarak belirlenmiştir. Güç değerleri  $n = 10, 30, 50, 100, 200, 300$  örneklem sayılarında hesaplanarak Tablo 17’de verilmiştir.

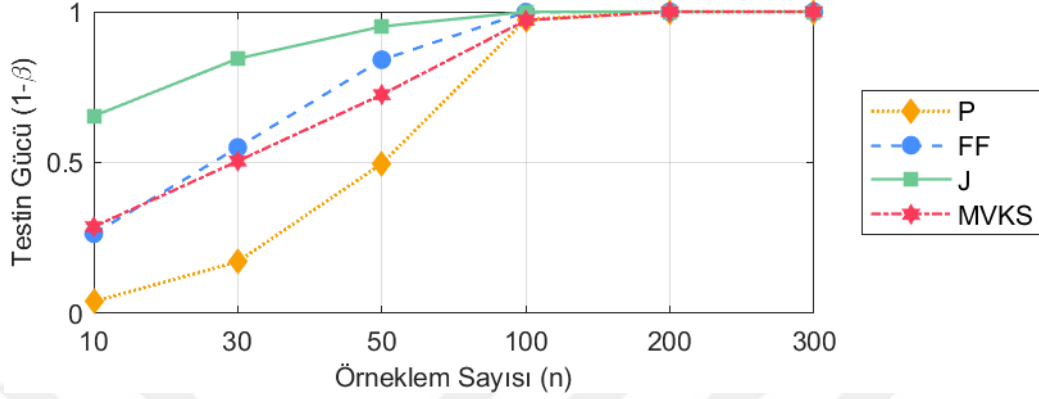
Tablo 17. İki değişkenli Logistik dağılımı için testin gücü değerleri

Yöntem	Örneklem Sayısı					
	10	30	50	100	200	300
<b>P</b>	0.0391	0.1713	0.4963	0.9744	1	1
<b>FF</b>	0.2641	0.55	0.8408	0.9983	1	1
<b>J</b>	0.6542	0.8444	0.951	0.9993	1	1
<b>MVKS</b>	0.2874	0.5048	0.7251	0.9716	1	1

İki değişkenli Logistik dağılım için testin gücü değerleri örneklem sayısı arttıkça tüm yöntemler için de artmaktadır. Justel (J) yöntemi, her örneklem sayısında yukarıdaki dağılımlar için yapılan simülasyon sonuçlarına benzer olarak diğer yöntemlere göre daha yüksek güç değerine sahiptir. Fakat Peacock (P) ve Justel (J) yöntemlerinin I. tip hata karşılaştırılmalarında tutarsız ve doğru çalışmadığı göz önüne alındığında FF (Fasano ve Franceschini) ve MVKS (önerilen yöntem) arasında testin gücü karşılaştırılmasını yapmak daha doğru olacaktır. Bu durumda önerilen yöntem (MVKS), Fasano ve Franceschini (FF) yöntemine göre ‘30, 50, 100’ örneklem sayılarında daha düşük, diğer örneklem sayılarında



ise aynı ya da daha yüksek güç değerine sahiptir. Diğer yandan, örneklem sayısı arttıkça tüm yöntemler için de testin gücü '1' değerine doğru artmaktadır (Şekil 28).



Şekil 28. P, FF, J ve MVKS yöntemlerinin iki değişkenli Logistik dağılımı için testin gücü karşılaştırması

### 3.2.2.6. Çok Değişkenli Üçgen Dağılımı İçin Testin Gücü Karşılaştırılması

İki değişkenli Üçgen dağılımı kullanılarak testin gücü değerleri P, FF, J ve MVKS yöntemleri için hesaplanmıştır. Testin gücü hesaplanırken yokluk hipotezi iki değişkenli standart normal dağılım olarak belirlenmiştir. Güç değerleri  $n = 10, 30, 50, 100, 200, 300$  örneklem sayılarında hesaplanarak Tablo 18'de verilmiştir.

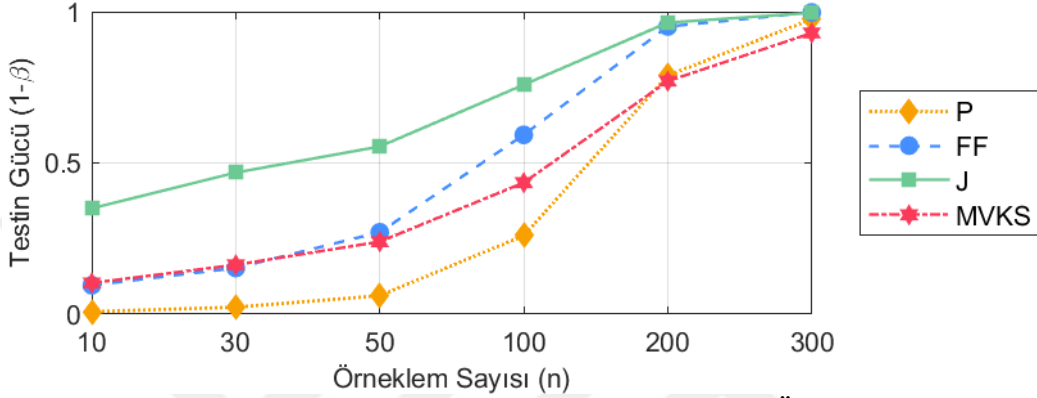
Tablo 18. İki değişkenli Üçgen dağılım için testin gücü değerleri

Yöntem	Örneklem Sayısı					
	10	30	50	100	200	300
<b>P</b>	0.0083	0.0231	0.0612	0.2599	0.789	0.9757
<b>FF</b>	0.0957	0.1526	0.271	0.593	0.9513	0.9976
<b>J</b>	0.3499	0.4682	0.5544	0.7586	0.9639	0.9964
<b>MVKS</b>	0.1033	0.1632	0.2397	0.4348	0.7706	0.9299

İki değişkenli Üçgen dağılım için testin gücü değerleri örneklem sayısı arttıkça tüm yöntemler için de artmaktadır. Peacock (P) yöntemi her örneklem sayısında diğer yöntemlere göre daha düşük güç değerlerine sahiptir. Ayrıca Justel (J) yöntemi, her örneklem sayısında yukarıdaki dağılımlar için yapılan simülasyon sonuçlarına benzer olarak diğer yöntemlere göre daha yüksek güç değerine sahiptir. Fakat Peacock (P) ve Justel (J) yöntemlerinin I. tip hata karşılaştırılmalarında tutarsız ve doğru çalışmadığı göz önüne alındığında FF (Fasano



ve Franceschini) ve MVKS (önerilen yöntem) arasında testin gücü karşılaştırılmasını yapmak daha doğru olacaktır. Bu durumda önerilen yöntem (MVKS), Fasano ve Franceschini (FF) yöntemine göre '50, 100, 200, 300' örneklem sayılarında daha düşük, diğer örneklem sayılarında ise daha yüksek güç değerine sahiptir. Diğer yandan, örneklem sayısı arttıkça tüm yöntemler için de testin gücü '1' değerine doğru artmaktadır.



Şekil 29. P, FF, J ve MVKS yöntemlerinin iki değişkenli Üçgen dağılım için testin gücü karşılaştırması

### 3.2.2.7. Çok Değişkenli Düzgün Dağılımı İçin Testin Gücü Karşılaştırılması

İlk durumda, alternatif hipotez iki değişkenli düzgün dağılımın farklı parametrelerinden seçilerek belirlenmiştir. İki değişkenli düzgün dağılımın farklı parametreleri herhangi bir aralık olarak tanımlanmayıp, ortalamaları ( $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ ) ve kovaryans matrisi ( $\Sigma_4$ ) sırasıyla,

$$\begin{array}{cccc} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \\ \hline [0.5 \ 0.5] & [0.5 \ 1] & [1 \ 1] & [-1 \ -1] \end{array}$$

$$\Sigma_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak belirlenmiştir. Bu durumda P, FF, J ve MVKS test istatistiklerinden elde edilen güç değerleri Tablo 19'da verilmiştir.

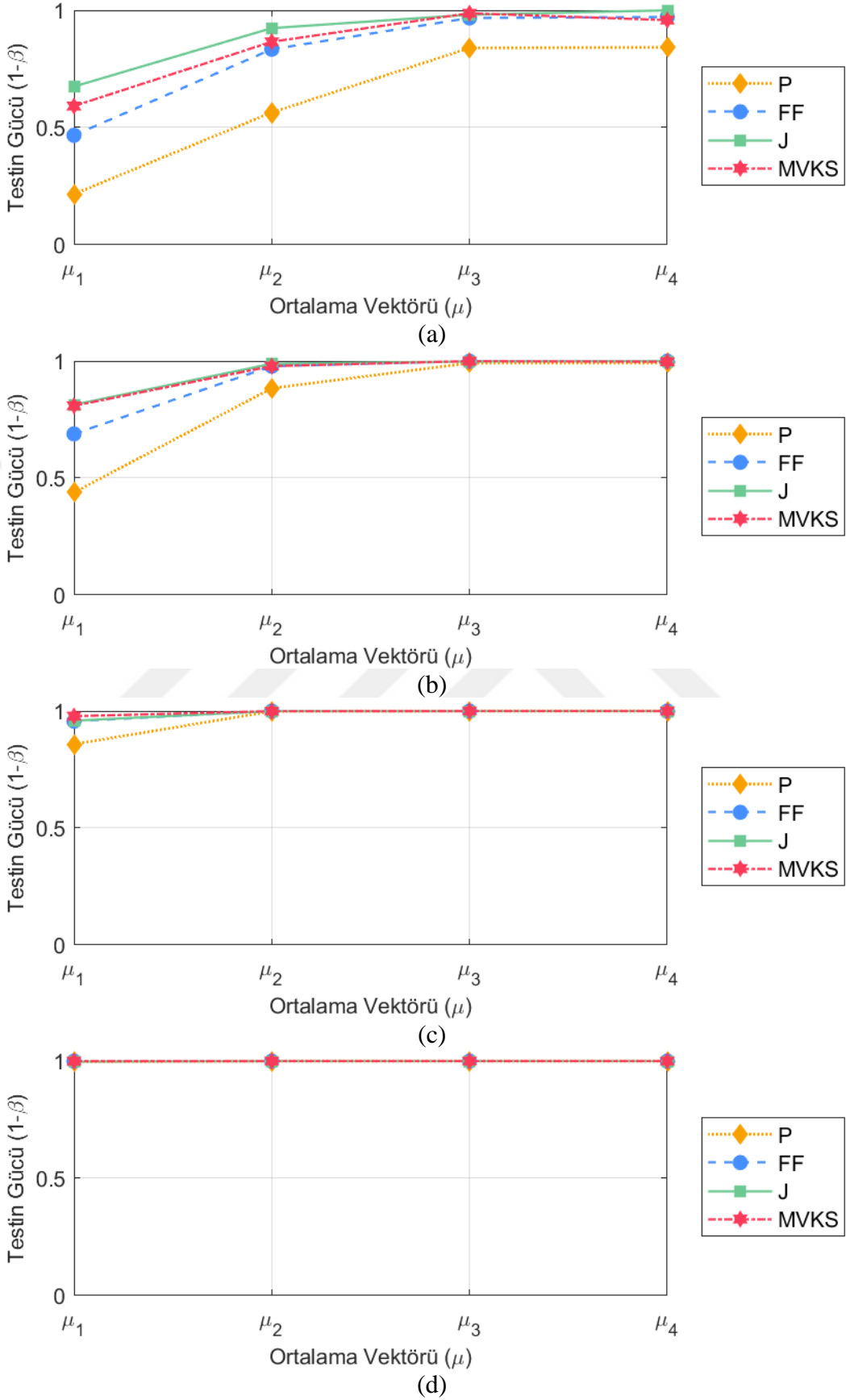


Tablo 19. İki değişkenli Düzgün dağılım için testin gücü değerleri

Örneklem Sayısı	Yöntem	Ortalama			
		$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\mu_4$
<b><i>n</i> = 15</b>	P	0.2154	0.564	0.8391	0.8419
	FF	0.4666	0.8337	0.9673	0.9714
	J	0.6746	0.9239	0.9813	0.9998
	MVKS	0.5913	0.8658	0.9875	0.958
<b><i>n</i> = 25</b>	P	0.4382	0.8837	0.9915	0.9917
	FF	0.6883	0.978	0.9995	0.9995
	J	0.8133	0.9886	0.9982	1
	MVKS	0.8087	0.9785	0.9999	0.9972
<b><i>n</i> = 50</b>	P	0.8583	0.9992	1	1
	FF	0.9566	1	1	1
	J	0.959	0.9999	1	1
	MVKS	0.9783	0.9997	1	1
<b><i>n</i> = 100</b>	P	0.9976	1	1	1
	FF	0.9999	1	1	1
	J	0.9985	1	1	1
	MVKS	0.9999	1	1	1

İki değişkenli düzgün dağılımın kovaryans matrisi sabit kalmak şartıyla ortalama değerlerindeki değişim arttıkça testin gücü P, FF, J ve MVKS metotlarında da artmaktadır. Örneklem sayısı arttıkça testin gücü tüm yöntemler için de artmaktadır. Aynı şartlar altında küçük örneklerde P ve FF yöntemleri testin gücü bakımından diğer yöntemlere göre düşük çıksa da örneklem büyüklüğü arttıkça tüm yöntemler için de testin gücü artmaktadır. Tablo 19 incelendiğinde sadece  $\mu_4$  ortalamalı ve küçük örneklem sayılarında ( $n = 15$  ve  $n = 25$ ) FF yöntemi, MVKS yönteminden testin gücü bakımından daha yüksek çıkmıştır. Diğer durumlarda MVKS ya daha yüksek ya da aynı testin gücü değerlerine sahiptir (Tablo 19).





Şekil 30. P, FF, J ve MVKS yöntemlerinin iki değişkenli düzgün dağılım için testin gücü karşılaştırması (a)  $n = 15$  (b)  $n = 25$  (c)  $n = 50$  (d)  $n = 100$



### 3.2.3. Çok Değişkenli Simetrik Olmayan Dağılımlar İçin Test Gücü Karşılaştırılması

Çok değişkenli simetrik olmayan dağılımlardan Üstel ve Ki-kare dağılımlarından rastgele sayılar üretilerek P, FF, J ve MVKS yöntemlerinin testin gücü  $(1 - \beta)$  hesaplanmıştır. Testin gücü hesaplanırken yokluk hipotezi iki değişkenli standart normal dağılım olarak belirlenmiştir.

#### 3.2.3.1. Çok Değişkenli Üstel Dağılımı İçin Testin Gücü Karşılaştırılması

İki değişkenli Üstel dağılım kullanılarak testin gücü değerleri P, FF, J ve MVKS yöntemleri için hesaplanmıştır. Testin gücü hesaplanırken yokluk hipotezi iki değişkenli standart normal dağılım olarak belirlenmiştir. Güç değerleri  $n = 10, 11, 12, 13, 14, 15$  örneklem sayılarında hesaplanarak Tablo 20’de verilmiştir.

Tablo 20. İki değişkenli Üstel dağılım için testin gücü değerleri

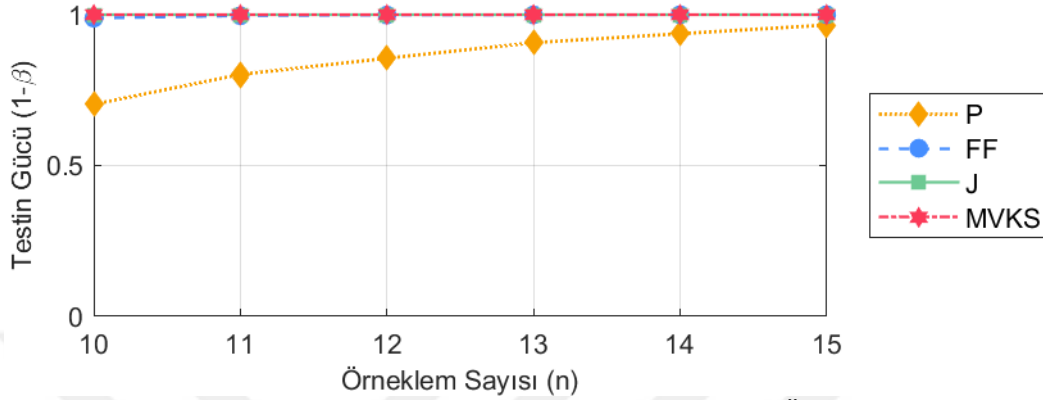
Yöntem	Örneklem Sayısı					
	10	11	12	13	14	15
<b>P</b>	0.703	0.802	0.8557	0.9072	0.937	0.9657
<b>FF</b>	0.9885	0.9966	0.9988	0.9993	0.9999	1
<b>J</b>	1	1	1	1	1	1
<b>MVKS</b>	1	1	1	1	1	1

İki değişkenli Üstel dağılım için testin gücü değerleri küçük örneklem sayılarında hesaplanmıştır. Çünkü Tablo 20’de verilen örneklem sayılarından daha büyük örneklem sayısı durumunda tüm yöntemler için testin gücü değeri ‘1’ çıkmaktadır. Diğer testin gücü karşılaştırmalarından farklı olarak testin gücü değerleri çok daha yüksek olarak ortaya çıkmıştır. Bunun nedeni alternatif hipotezdeki dağılımın eliptik (simetrik) yerine simetrik olmayan bir dağılım seçilmesinden kaynaklanmaktadır.

Diğer testin gücü hesaplamalarında olduğu gibi Peacock (P) yöntemi her örneklem sayısında daha düşük ve Justel (J) yöntemi, her örneklem sayısında diğer yöntemlere göre daha yüksek güç değerine sahiptir. Fakat Peacock (P) ve Justel (J) yöntemlerinin I. tip hata karşılaştırmalarında tutarsız ve doğru çalışmadığı göz önüne alındığında FF ve MVKS arasında testin gücü karşılaştırılmasını yapmak daha doğru olacaktır. Bu durumda önerilen



yöntem, Fasano ve Franceschini yöntemine göre daha yüksek güç değerine sahiptir. Örneklem sayısı arttıkça her iki yöntem için de testin gücü '1' değerine doğru artmaktadır (Şekil 31).



Şekil 31. P, FF, J ve MVKS yöntemlerinin iki değişkenli Üstel dağılımı için testin gücü karşılaştırması

### 3.2.3.2. Çok Değişkenli Ki-Kare Dağılımı İçin Testin Gücü Karşılaştırılması

'1' serbestlik dereceli iki değişkenli Ki-kare dağılımını kullanarak testin gücü değerleri P, FF, J ve MVKS yöntemleri için hesaplanmıştır. Testin gücü hesaplanırken yokluk hipotezi iki değişkenli standart normal dağılım olarak belirlenmiştir. Güç değerleri  $n = 10, 11, 12, 13, 14, 15$  örneklem sayılarında hesaplanarak Tablo 21'de verilmiştir.

Tablo 21. İki değişkenli Ki-kare dağılımı için testin gücü değerleri

Yöntem	Örneklem Sayısı					
	10	11	12	13	14	15
<b>P</b>	0.5793	0.601	0.7198	0.7862	0.8477	0.8663
<b>FF</b>	0.9524	0.9667	0.987	0.9933	0.9978	0.9982
<b>J</b>	1	1	1	1	1	1
<b>MVKS</b>	1	1	1	1	1	1

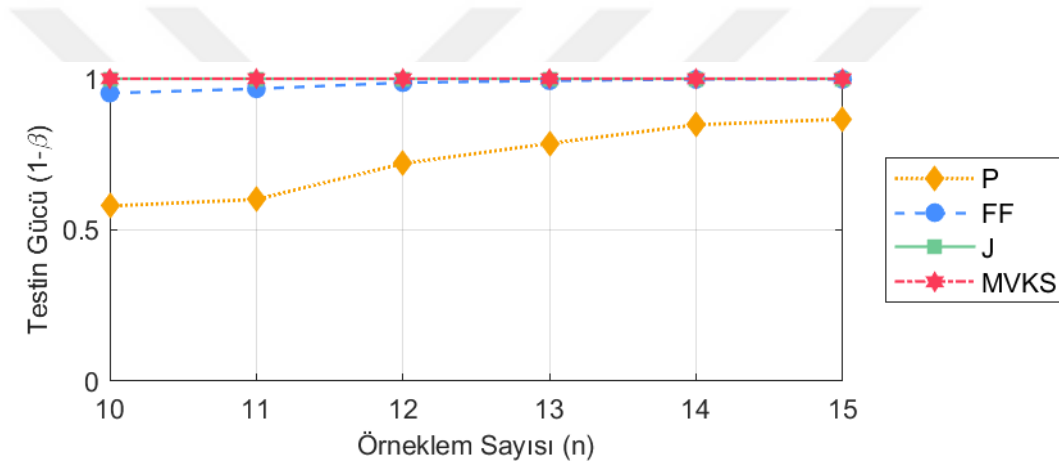
İki değişkenli Ki-kare dağılımı için testin gücü değerleri küçük örneklem sayılarında hesaplanmıştır. Büyük örneklerde tüm yöntemlerin de testin gücü değerleri '1' çıktığından bu dağılımdaki farkındalığı ortaya koymak için küçük örneklem sayıları incelenmiştir. İki değişkenli Üstel dağılım için yapılan testi gücü simülasyonuna benzer





olarak testin gücü değerleri yüksek yüzdelerde ortaya çıkmıştır. Bunun nedeni alternatif hipotezdeki dağılımın eliptik (simetrik) yerine simetrik olmayan bir dağılım seçilmesinden kaynaklanmaktadır.

Peacock (P) yöntemi her örneklem sayısında daha düşük ve Justel (J) yöntemi ise her örneklem sayısında testin gücü değeri '1' olarak hesaplanmıştır. Fakat Peacock (P) ve Justel (J) yöntemlerinin I. tip hata karşılaştırılmalarında tutarsız ve doğru çalışmadığı göz önüne alındığında Fasano ve Franceschini (FF) ve önerilen yöntem (MVKS) arasında testin gücü karşılaştırılmasını yapmak daha doğru olacaktır. Bu durumda önerilen yöntem (MVKS), Fasano ve Franceschini (FF) yöntemine göre daha yüksek güç değerine sahiptir. Hatta önerilen yöntem tüm örneklem sayılarında '1' değerini almıştır (Şekil 32).



Şekil 32. P, FF, J ve MVKS yöntemlerinin iki değişkenli Ki-kare dağılımı için testin gücü karşılaştırması

### 3.3. Gerçek Veri Setleri İçin Önerilen Çok Değişkenli KS Normallik Testi

Önerilen yöntemin uygulanabilirliğini göstermek için beş farklı gerçek veri seti seçilmiştir. Bu veriler Fisher'in Iris veri seti (Bibby vd., 1979), Royston'un hematoloji veri seti (Royston, 1983), besin değerleri veri seti (Zelterman, 2015), şirket bilgileri veri seti (Marcoulides ve Hershberger, 2014) ve panel sertlik ölçüsü veri setidir (Johnson ve Wichern, 2014).

#### 3.3.1. Iris Veri Seti İçin Önerilen Çok Değişkenli KS Normallik Testi

Fisher'in Iris veri setine önerilen çok değişkenli normallik testi uygulanmıştır. Fisher'in Iris veri seti 3 bitki türünden oluşmaktadır. Bunlar 'Setosa', 'Versicolor' ve 'Virginica'



türleridir ve her bir türün 4 farklı özelliği vardır (Bibby vd., 1979). Bu özellikler çanak yaprak uzunluğu (ÇYU), çanak yaprak genişliği (ÇYG), taç yaprak uzunluğu (TYU) ve taç yaprak genişliğidir (TYG). Fisher'in Iris veri seti Tablo 22 ve Tablo 23'de verilmiştir.

Tablo 22. Fisher'in Iris veri seti

No	Iris Setosa				Iris Versicolour				Iris Virginica			
	ÇYU	ÇYG	TYU	TYG	ÇYU	ÇYG	TYU	TYG	ÇYU	ÇYG	TYU	TYG
1	5.1	3.5	1.4	0.2	7	3.2	4.7	1.4	6.3	3.3	6	2.5
2	4.9	3	1.4	0.2	6.4	3.2	4.5	1.5	5.8	2.7	5.1	1.9
3	4.7	3.2	1.3	0.2	6.9	3.1	4.9	1.5	7.1	3	5.9	2.1
4	4.6	3.1	1.5	0.2	5.5	2.3	4	1.3	6.3	2.9	5.6	1.8
5	5	3.6	1.4	0.2	6.5	2.8	4.6	1.5	6.5	3	5.8	2.2
6	5.4	3.9	1.7	0.4	5.7	2.8	4.5	1.3	7.6	3	6.6	2.1
7	4.6	3.4	1.4	0.3	6.3	3.3	4.7	1.6	4.9	2.5	4.5	1.7
8	5	3.4	1.5	0.2	4.9	2.4	3.3	1	7.3	2.9	6.3	1.8
9	4.4	2.9	1.4	0.2	6.6	2.9	4.6	1.3	6.7	2.5	5.8	1.8
10	4.9	3.1	1.5	0.1	5.2	2.7	3.9	1.4	7.2	3.6	6.1	2.5
11	5.4	3.7	1.5	0.2	5	2	3.5	1	6.5	3.2	5.1	2
12	4.8	3.4	1.6	0.2	5.9	3	4.2	1.5	6.4	2.7	5.3	1.9
13	4.8	3	1.4	0.1	6	2.2	4	1	6.8	3	5.5	2.1
14	4.3	3	1.1	0.1	6.1	2.9	4.7	1.4	5.7	2.5	5	2
15	5.8	4	1.2	0.2	5.6	2.9	3.6	1.3	5.8	2.8	5.1	2.4
16	5.7	4.4	1.5	0.4	6.7	3.1	4.4	1.4	6.4	3.2	5.3	2.3
17	5.4	3.9	1.3	0.4	5.6	3	4.5	1.5	6.5	3	5.5	1.8
18	5.1	3.5	1.4	0.3	5.8	2.7	4.1	1	7.7	3.8	6.7	2.2
19	5.7	3.8	1.7	0.3	6.2	2.2	4.5	1.5	7.7	2.6	6.9	2.3
20	5.1	3.8	1.5	0.3	5.6	2.5	3.9	1.1	6	2.2	5	1.5
21	5.4	3.4	1.7	0.2	5.9	3.2	4.8	1.8	6.9	3.2	5.7	2.3
22	5.1	3.7	1.5	0.4	6.1	2.8	4	1.3	5.6	2.8	4.9	2
23	4.6	3.6	1	0.2	6.3	2.5	4.9	1.5	7.7	2.8	6.7	2
24	5.1	3.3	1.7	0.5	6.1	2.8	4.7	1.2	6.3	2.7	4.9	1.8
25	4.8	3.4	1.9	0.2	6.4	2.9	4.3	1.3	6.7	3.3	5.7	2.1
26	5	3	1.6	0.2	6.6	3	4.4	1.4	7.2	3.2	6	1.8
27	5	3.4	1.6	0.4	6.8	2.8	4.8	1.4	6.2	2.8	4.8	1.8
28	5.2	3.5	1.5	0.2	6.7	3	5	1.7	6.1	3	4.9	1.8
29	5.2	3.4	1.4	0.2	6	2.9	4.5	1.5	6.4	2.8	5.6	2.1
30	4.7	3.2	1.6	0.2	5.7	2.6	3.5	1	7.2	3	5.8	1.6
31	4.8	3.1	1.6	0.2	5.5	2.4	3.8	1.1	7.4	2.8	6.1	1.9
32	5.4	3.4	1.5	0.4	5.5	2.4	3.7	1	7.9	3.8	6.4	2
33	5.2	4.1	1.5	0.1	5.8	2.7	3.9	1.2	6.4	2.8	5.6	2.2
34	5.5	4.2	1.4	0.2	6	2.7	5.1	1.6	6.3	2.8	5.1	1.5
35	4.9	3.1	1.5	0.2	5.4	3	4.5	1.5	6.1	2.6	5.6	1.4
36	5	3.2	1.2	0.2	6	3.4	4.5	1.6	7.7	3	6.1	2.3
37	5.5	3.5	1.3	0.2	6.7	3.1	4.7	1.5	6.3	3.4	5.6	2.4
38	4.9	3.6	1.4	0.1	6.3	2.3	4.4	1.3	6.4	3.1	5.5	1.8



Tablo 23. Tablo 22'nin devamı

No	Iris Setosa				Iris Versicolour				Iris Virginica			
	ÇYU	ÇYG	TYU	TYG	ÇYU	ÇYG	TYU	TYG	ÇYU	ÇYG	TYU	TYG
39	4.4	3	1.3	0.2	5.6	3	4.1	1.3	6	3	4.8	1.8
40	5.1	3.4	1.5	0.2	5.5	2.5	4	1.3	6.9	3.1	5.4	2.1
41	5	3.5	1.3	0.3	5.5	2.6	4.4	1.2	6.7	3.1	5.6	2.4
42	4.5	2.3	1.3	0.3	6.1	3	4.6	1.4	6.9	3.1	5.1	2.3
43	4.4	3.2	1.3	0.2	5.8	2.6	4	1.2	5.8	2.7	5.1	1.9
44	5	3.5	1.6	0.6	5	2.3	3.3	1	6.8	3.2	5.9	2.3
45	5.1	3.8	1.9	0.4	5.6	2.7	4.2	1.3	6.7	3.3	5.7	2.5
46	4.8	3	1.4	0.3	5.7	3	4.2	1.2	6.7	3	5.2	2.3
47	5.1	3.8	1.6	0.2	5.7	2.9	4.2	1.3	6.3	2.5	5	1.9
48	4.6	3.2	1.4	0.2	6.2	2.9	4.3	1.3	6.5	3	5.2	2
49	5.3	3.7	1.5	0.2	5.1	2.5	3	1.1	6.2	3.4	5.4	2.3
50	5	3.3	1.4	0.2	5.7	2.8	4.1	1.3	5.9	3	5.1	1.8

Her bir Iris türünden 50 gözlem değeri bulunmaktadır. Türlerin her bir özelliğinin marjinal normallik testleri ve her bir türün 4 değişkenli normallik testi sonuçları Tablo 24'te verilmiştir. Ortalama ve kovaryans matrisi bilinmediğinden bu değerler veriden elde edilmiştir. Bu yüzden, KS testi kritik tablosu yerine Lilliefors testi kritik tablosu kullanılmıştır. Tablo 9'da %95 değerine karşılık gelen kritik tablo değeri 0.1257'dir. '\*' ile gösterilen değerler %5 seviyesinde anlamlı çıkan değerlerdir.

Tablo 24. Fisher'in Iris verisi için çok değişkenli normallik testi sonuçları

Tür (Iris)	MVKS	Özellik	MVKS
Setosa	0.0779	Çanak yaprak uzunluğu	0.1149
		Çanak yaprak genişliği	0.1047
		Taç yaprak uzunluğu	0.1534*
		Taç yaprak genişliği	0.3488*
Versicolor	0.0637	Çanak yaprak uzunluğu	0.0962
		Çanak yaprak genişliği	0.1207
		Taç yaprak uzunluğu	0.1171
		Taç yaprak genişliği	0.1477*
Virginica	0.0708	Çanak yaprak uzunluğu	0.1150
		Çanak yaprak genişliği	0.1279*
		Taç yaprak uzunluğu	0.1136
		Taç yaprak genişliği	0.1208

Tablo 24'e göre 'Setosa', 'Versicolor' ve 'Virginica' türleri çok değişkenli normal dağılıma ( $p = 4$ ) sahiptir. Aynı sonuçlar Mardia ve Kent (1991) ve Looney (1995)



çalışmalarında da elde edilmiştir. Looney (1995) çalışmasında Small (1980), Srivastava (1984) ve Srivastava ve Hui (1987) tarafından önerilen yöntemleri kullanarak Fisher Iris verisindeki bitki türlerinin çok değişkenli normal dağılıma sahip olduğunu söylemiştir. Ayrıca Tablo 24'e göre, Setosa türünün taç yaprak uzunluğu ve genişliği, Versicolor türünün taç yaprak genişliği ile Virginica türünün çanak yaprak genişliği tek değişkenli normallik varsayımını sağlamamaktadır. Bununla beraber Looney (1995) çalışmasında Setosa türünün özellikleri üzerinde bir normallik testi yapmıştır. Setosa türünün sadece taç yaprak genişliğinin tek değişkenli normal dağılmadığı söylemiştir. Diğer bir çalışmada ise Sürücü (2006), Setosa türünün taç yaprak uzunluğu ve genişliği özelliklerinin tek değişkenli normal dağılmadığını belirtmiştir.

### 3.3.2. Hematoloji Veri Seti İçin Önerilen Çok Değişkenli KS Normallik Testi

Royston'un hematoloji veri seti 6 değişkenden oluşmaktadır (Royston, 1983). Bu değişkenler hemoglobin konsantrasyonu (HB), dolgulu hücre hacmi (DHH), beyaz kan hücre sayısı (BKHS), akyuvar sayısı (AS), nötrofil sayısı (NS) ve serum kurşun konsantrasyonudur (SKK). Bu veri setinde her bir değişken için 103 gözlem bulunmaktadır. Royston'un hematoloji veri seti Tablo 25, Tablo 26 ve Tablo 27'de verilmiştir.

Tablo 25. Royston'un hematoloji veri seti

No	HB	DHH	BKHS	AS	NS	SKK
1	13,4	39	4100	14	25	17
2	14,6	46	5000	15	30	20
3	13,5	42	4500	19	21	18
4	15	46	4600	23	16	18
5	14,6	44	5100	17	31	19
6	14	44	4900	20	24	19
7	16,4	49	4300	21	17	18
8	14,8	44	4400	16	26	29
9	15,2	46	4100	27	13	27
10	15,5	48	8400	34	42	36
11	15,2	47	5600	26	27	22
12	16,9	50	5100	28	17	23
13	14,8	44	4700	24	20	23
14	16,2	45	5600	26	25	19
15	14,7	43	4000	23	13	17
16	14,7	42	3400	9	22	13
17	16,5	45	5400	18	32	17



Tablo 26. Tablo 25'in devamı

No	HB	DHH	BKHS	AS	NS	SKK
18	15,4	45	6900	28	36	24
19	15,1	45	4600	17	29	17
20	14,2	46	4200	14	25	28
21	15,9	46	5200	8	34	16
22	16	47	4700	25	14	18
23	17,4	50	8600	37	39	17
24	14,3	43	5500	20	31	19
25	14,8	44	4200	15	24	19
26	14,9	43	4300	9	32	17
27	15,5	45	5200	16	30	20
28	14,5	43	3900	18	18	25
30	14,6	44	4700	23	21	27
31	15,3	45	7900	43	23	23
32	14,9	45	3400	17	15	24
33	15,8	47	6000	23	32	21
34	14,4	44	7700	31	39	23
35	14,7	46	3700	11	23	23
36	14,8	43	5200	25	19	22
37	15,4	45	6000	30	25	18
38	16,2	50	8100	32	38	18
39	15	45	4900	17	26	24
40	15,1	47	6000	22	33	16
41	16	46	4600	20	22	22
42	15,3	48	5500	20	23	23
43	14,5	41	6200	20	36	21
44	14,2	41	4900	26	20	20
45	15	45	7200	40	25	25
46	14,2	46	5800	22	31	22
47	14,9	45	8400	61	17	17
48	16,2	48	3100	12	15	18
49	14,5	45	4000	20	18	20
50	16,4	49	6900	35	22	24
51	14,7	44	7800	38	34	16
52	17	52	6300	19	21	16
53	15,4	47	3400	12	19	18
54	13,8	40	4500	19	23	21
55	16,1	47	4600	17	28	20
56	14,6	45	4700	23	22	27
57	15	44	5800	14	39	21
58	16,2	47	4100	16	24	18
59	17	51	5700	26	29	20
60	14	44	4100	16	24	18
61	15,4	46	6200	32	25	16
62	15,6	46	4700	28	16	16
63	15,8	48	4500	24	20	23
64	13,2	38	5300	16	26	20



Tablo 27. Tablo 26'nin devamı

No	HB	DHH	BKHS	AS	NS	SKK
65	14.9	47	5000	22	25	15
66	14.9	47	3900	15	19	16
67	14	45	5200	23	25	17
68	16.1	47	4300	19	22	22
69	14.7	46	6800	35	25	18
70	14.8	45	8900	47	36	17
71	17	51	6300	42	19	15
72	15.2	45	4600	21	22	18
73	15.2	43	5600	25	28	17
74	13.8	41	6300	25	27	15
75	14.8	43	6400	36	24	18
76	16.1	47	5200	18	28	25
77	15	43	6300	22	34	17
78	16.2	46	6000	25	25	24
79	14.8	44	3900	9	25	14
80	17.2	44	4100	12	27	18
81	17.2	48	5000	25	19	25
82	14.6	43	5500	22	31	19
83	14.4	44	4300	20	20	15
84	15.4	48	5700	29	26	24
85	16	52	4100	21	15	22
86	15	45	5000	27	18	20
87	14.8	44	5700	29	23	23
88	15.4	43	3300	10	20	19
89	16	47	6100	32	23	26
90	14.8	43	5100	18	31	19
91	13.8	41	8100	52	24	17
92	14.7	43	5200	24	24	17
93	14.6	44	9899	69	28	18
94	13.6	42	6100	24	30	15
95	14.5	44	4800	14	29	15
96	14.3	39	5000	25	20	19
97	15.3	45	4000	19	19	16
98	16.4	49	6000	34	22	17
99	14.8	44	4500	22	18	25
100	16.6	48	4700	17	27	20
101	16	49	7000	36	28	18
102	15.5	46	6600	30	33	13
103	14.3	46	5700	26	20	21

Ortalama ve kovaryans matrisi bilinmediğinden bu değerler veriden elde edilmiştir. Bu yüzden, KS testi kritik tablosu yerine Lilliefors testi kritik tablosu kullanılmıştır. Bu veri seti için 6 değişkenli KS-Lilliefors test istatistiği sonucu 0.1870 olarak hesaplanmıştır.



Kritik tablo değeri Tablo 9'dan yaklaşık 0.0901 olarak hesaplanabilir ya da yaklaşık değer Lilliefors'un (1967) çalışmasındaki kritik değer tablosundan da hesaplanabilir. Burada hesaplanan test istatistiğinin değeri kritik tablo değerinden büyük olduğundan Royston'un veri setinin %95 güven düzeyinde çok değişkenli ( $p = 6$ ) normal dağılım gösterdiği söylenemez. Aynı sonuçlar Looney'in (1995) çalışmasında kullanılan Royston (1983), Small (1980), Srivastava (1984) ve Srivastava ve Hui (1987) tarafından da gösterilmiştir.

### 3.3.3. Besin Değerleri Veri Seti İçin Önerilen Çok Değişkenli KS Normallik Testi

Popüler şeker markalarının besin değerlerinden oluşan 6 değişkenli bir veri seti seçilmiştir (Zelterman, 2015). Bu değişkenler kalori, yağ, doymuş yağ, karbonhidrat, şeker ve sodyumdur. Bu veri setinde her bir değişken için 38 değer bulunmaktadır. Popüler şeker markalarının besin değerleri Tablo 28 ve Tablo 29'da verilmiştir.

Tablo 28. Popüler şeker markalarının besin değerleri

Marka	Kalori	Yağ	D.Yağ	Karbonhidrat	Şeker	Sodyum
100 Grand	190	8	5	30	22	90
3 Musketeers	240	7	5	42	36	90
5th Avenue	260	12	5	38	29	120
Almond Joy	220	13	8	26	20	50
Andes Mints	200	13	11	22	20	20
Baby Ruth	275	13	7	39	32	138
Butterfinger	270	11	6	43	29	135
Cadbury Dairy Milk	260	15	9	28	28	0
Charleston Chew	230	6	5	43	30	30
DoveSmooth Milk Choc.	220	13	8	24	22	25
Goobers	200	13	5	20	17	15
Heath Toffee	210	13	7	24	23	135
Hershey's bar	210	13	8	26	24	35
Hershey's Skor	200	12	7	25	24	130
Junior Mints	220	4	3	45	42	35
Kit Kat	207	10	7	26	20	22
M&M's, peanut	250	13	5	30	25	25
M&M's, plain	230	9	6	34	31	35
Milk Duds	230	8	5	38	27	135
Milky Way	240	9	7	37	31	75
Mounds	240	13	10	29	21	55
Mr Goodbar	250	16	7	25	22	50
Nestle Crunch	220	11	7	30	24	60
Oh Henry!	280	17	7	36	32	65



Tablo 29. Tablo 28'in devamı

Marka	Kalori	Yağ	D.Yağ	Karbonhidrat	Şeker	Sodyum
Payday	240	13	3	27	21	120
Raisinets	190	8	5	32	28	15
Reese's Fast Break	260	12	5	35	30	190
Reese's Nutrageous	260	16	5	28	22	100
Reese's Peanut Butter cups	210	13	5	24	21	150
Reese's Pieces	200	9	8	25	21	55
Reese's Sticks	220	13	5	23	17	130
Rolo	220	10	7	33	29	80
Snickers	230	11	4	32	27	115
Symphony	223	13	8	24	23	42
Twix	250	12	7	33	24	100
Whatchamacalit	237	11	8	30	23	144
Whoppers	190	7	7	31	24	100
Zero Candy Bar	200	7	5	34	29	105

Ortalama ve kovaryans matrisi bilinmediğinden bu değerler veriden elde edilmiştir. Bu yüzden, KS testi kritik tablosu yerine Lilliefors testi kritik tablosu kullanılmıştır. Bu veri seti için 6 değişkenli KS-Lilliefors test istatistiği sonucu 0.26 olarak hesaplanmıştır. Kritik tablo değeri Tablo 9'dan yaklaşık 0.1399 olarak hesaplanabilir ya da yaklaşık değer Lilliefors'un (1967) çalışmasındaki kritik değer tablosundan da hesaplanabilir. Burada hesaplanan test istatistiğinin değeri, kritik tablo değerinden büyük olduğundan popüler şeker markalarının besin değerleri veri setinin %95 güven düzeyinde çok değişkenli ( $p = 6$ ) normal dağılım gösterdiği söylenemez.

Zelnerman'ın kitabında Shapiro-Wilk testinin genelleştirilmesiyle elde edilen test sonucunda bu veri setinin 6 değişkenli normal dağılıma uymadığını gösterilmiştir. Yine aynı kitapta çok değişkenli normallik testi olan Energy testine göre 6 değişkenli normal dağılıma uyduğunu belirtilmiştir (Zelnerman, 2015).

### 3.3.4. Şirket Veri Seti İçin Önerilen Çok Değişkenli KS Normallik Testi

Rastgele seçilen bazı Yunan şirketlerinin bilgilerinden oluşan 2 değişkenli bir veri seti seçilmiştir (Marcoulides ve Hershberger, 2014). Bu değişkenler şirketlerin varlıkları ve net gelirleridir. Bu veri setinde her bir değişken için 10 değer bulunmaktadır. Şirketlerin varlıkları ve net gelirleri verisi Tablo 30'da verilmiştir.





Tablo 30. Şirketlerin varlıkları ve net gelirleri

Şirket	Varlık (Milyon Dolar)	Net Gelir (Milyon Dolar)
Cyprus Cement	22.49	1.99
Hanseatic Shipping	17.33	1.17
Amathus Navigation	16.05	1.29
Hellenic Chemical	16.63	0.94
Elma Holdings	22.14	1.05
Cyprus Pipes	24.13	1.17
F. W. Woolworth	9.02	0.23
Zako Ltd.	22.25	3.16
Vassiliko Cement	31.27	3.86
Keo Ltd.	44.98	2.81

Ortalama ve kovaryans matrisi bilinmediğinden bu değerler veriden elde edilmiştir. Bu yüzden, KS testi kritik tablosu yerine Lilliefors testi kritik tablosu kullanılmıştır. Bu veri seti için 2 değişkenli KS-Lilliefors test istatistiği sonucu 0.2117 olarak hesaplanmıştır. Kritik tablo değeri Tablo 9'dan 0.2637 olarak hesaplanabilir ya da Lilliefors'un (1967) çalışmasındaki kritik değer tablosundan da hesaplanabilir. Burada hesaplanan test istatistiğinin değeri, kritik tablo değerinden büyük olmadığından şirketlerin varlıkları ve net gelirleri veri setinin %95 güven düzeyinde çok değişkenli ( $p = 2$ ) normal dağılım gösterdiği söylenebilir.

Marcoulides ve Hershberger'in kitabında genelleştirilmiş uzaklıkların ki-kare grafiği ile elde edilen test sonucunda bu veri setinin 2 değişkenli normal dağılıma uyduğunu söylemişlerdir (Marcoulides ve Hershberger, 2014).

### 3.3.5. Panel Sertlik Ölçüsü Veri Seti İçin Önerilen Çok Değişkenli KS Normallik Testi

Bir panelin sertliğini ölçen ve 4 değişkenden oluşan bir veri seti elde edilmiştir (Johnson ve Wichern, 2014). Bu değişkenler panele gönderilen ilk şok dalgasının ölçümü ( $x_1$ ), tahta titrerken elde edilen ölçüm ( $x_2$ ) ve statik testlerden elde edilen ölçümlerdir ( $x_3$  ve  $x_4$ ). Bu veri setinde her bir değişken için 30 değer bulunmaktadır. Panel sertliğinin dört ölçüm değerleri Tablo 31'de verilmiştir.



Tablo 31. Panel sertliğinin dört ölçüsü

Panel No	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	Panel No	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
1	1889	1651	1561	1778	16	1954	2149	1180	1281
2	2403	2048	2087	2197	17	1325	1170	1002	1176
3	2119	1700	1815	2222	18	1419	1371	1252	1308
4	1645	1627	1110	1533	19	1828	1634	1602	1755
5	1976	1916	1614	1883	20	1725	1594	1313	1646
6	1712	1712	1439	1546	21	2276	2189	1547	2111
7	1943	1685	1271	1671	22	1899	1614	1422	1477
8	2104	1820	1717	1874	23	1633	1513	1290	1516
9	2983	2794	2412	2581	24	2061	1867	1646	2037
10	1745	1600	1384	1508	25	1856	1493	1356	1533
11	1710	1591	1518	1667	26	1727	1412	1238	1469
12	2046	1907	1627	1898	27	2168	1896	1701	1834
13	1840	1841	1595	1741	28	1655	1675	1414	1597
14	1867	1685	1493	1678	29	2326	2301	2065	2234
15	1859	1649	1389	1714	30	1490	1382	1214	1284

Ortalama ve kovaryans matrisi bilinmediğinden bu değerler veriden elde edilmiştir. Bu yüzden, KS testi kritik tablosu yerine Lilliefors testi kritik tablosu kullanılmıştır. Bu veri seti için 4 değişkenli KS-Lilliefors test istatistiği sonucu 0.0867 olarak hesaplanmıştır. Kritik tablo değeri Tablo 9'dan 0.1606 olarak hesaplanabilir ya da Lilliefors'un (1967) çalışmasındaki kritik değer tablosundan da hesaplanabilir. Burada hesaplanan test istatistiğinin değeri, kritik tablo değerinden büyük olmadığından panel sertliğinin ölçüsü veri setinin %95 güven düzeyinde çok değişkenli ( $p = 4$ ) normal dağılım gösterdiği söylenebilir.

Johnson ve Wichern kitabında genelleştirilmiş uzaklıkların ki-kare grafiği ile elde edilen test sonucunda bu veri setinin 4 değişkenli normal dağılıma uyduğunu söylemişlerdir (Johnson ve Wichern, 2014).



#### 4. SONUÇLAR

Bu tezde deneysel dağılım fonksiyonuna dayanan, dağılımdan bağımsız, tam sonuçlar veren, birden fazla boyutlarda da basit bir algoritmayla çalışan ve ayrıca her boyutta aynı kritik tablo değerlerini kullanan yeni çok değişkenli deneysel uyum iyiliği testi, çok değişkenli normal dağılıma uygunluk için önerilmiştir. Ayrıca ki-kare ve Kolmogorov-Smirnov uyum iyiliği testleri tek değişkenli uyum iyiliği testlerinden en çok kullanılan ve en çok bilinen iki testtir. Bu tezde de tek değişkenli Kolmogorov-Smirnov testinin çok değişkenli duruma uyarlanmasıyla ilgilenilmiştir.

Önerilen test yönteminin dağılımdan bağımsız olması, doğru ve tutarlı çalışması, testin gücü bakımından diğer yöntemlere göre yüksek çıkması, çok boyutlu verilerde basit bir algoritmayla çalışması ve de çok boyutlu verilerde de aynı kritik tablo değerlerini kullanması önerilen testin diğer çok değişkenli normallik testlerine göre tercih edilebilirliğini göstermektedir.

Önerilen çok değişkenli KS test istatistiğinin doğruluğunu ve geçerliliğini test etmek için iki farklı simülasyon çalışması yapılmıştır. Simülasyonun birinci kısmında önerilen çok değişkenli KS test yönteminin Monte Carlo yaklaşımı ile tablo değerleri elde edilmiştir. Tabloların her biri farklı boyutlarda ( $p = 1,2,3,5,10$ ) ve farklı yüzdelikler  $\{0.75, 0.80, 0.85, 0.90, 0.95, 0.975, 0.99, 0.995, 0.9975, 0.999\}$  alınarak oluşturulmuştur. Tablo değerleri oluşturulurken, verilerin bağımlı olması göz önünde bulundurularak normal dağılımdan veriler üretilmiştir. Ayrıca her bir tablo için ortalama mutlak yüzde hata (mean absolute percentage error (MAPE)) hesaplanmıştır.

Tablolardan elde edilen tüm MAPE değerleri incelendiğinde 0.0215'den küçük olduğu ve tek değişkenli KS testi tablosuyla benzerliğinin en az %97.85 olarak hesaplandığı görülmüştür. Ayrıca her bir tablo farklı parametrelerle 100 kez tekrar elde edilmiştir ve MAPE değerleri hesaplanmıştır. MAPE değerlerindeki değişim kutu grafiği ile gösterilmiştir. Kutu grafikleri incelendiğinde önerilen çok değişkenli KS testinin kritik tablosunun tek değişkenli KS testi kritik tablosuyla benzerliğinin rastgele olmadığı ispatlanmıştır. Nitekim çok değişkenli normal dağılımın ortalama ve kovaryans matrisi rastgele olarak seçilmiştir. Benzer şekilde farklı ortalama ve kovaryans matrisi kullanılarak da aynı tablo değerleri elde edilebilmektedir. Dolayısıyla önerilen MVKS testi için tüm boyutlarda aynı kritik tabloyla çok değişkenli normallik testi gerçekleştirilebilecektir.



Diğer yandan araştırma konusu olan hipotezde ortalama ve kovaryans matrisinin verilmemesi durumunda eğer ortalama ve kovaryans matrisi örneklemeden hesaplanırsa Kolmogorov-Smirnov test yerine Lilliefors testi kullanılmaktadır. Bu durumda KS tablosu yerine Lilliefors tablosuna bakılması gerekmektedir. Bu tezde, bununla ilgili tablo değerleri sadece verinin iki değişkenli olduğu durumda hesaplanmıştır. İki değişkenli Lilliefors kritik tablosu incelendiğinde MAPE değeri 0.0172 olarak bulunmuştur ve tek değişkenli Lilliefors testi tablosuyla benzerliği %98.28 olarak hesaplanmıştır. Dolayısıyla önerilen MVKS testi Lilliefors testi için de çalışmaktadır.

Simülasyonun ikinci kısmında, iki boyutlu örneklem için Peacock, Fasano ve Franceschini ve Justel vd.'in önermiş oldukları iki değişkenli KS test istatistikleri ile MVKS testinin (iki değişkenli durum) I. tip hata ve güç bakımından karşılaştırmaları yapılmıştır. I. tip hata değerleri farklı örneklem sayılarında ( $n = 15, 30, 50, 100, 200, 500$ ) tüm yöntemler için hesaplanmıştır. I. tip hata karşılaştırması incelendiğinde, örneklem sayısı arttıkça P ve J yöntemlerinin I. tip hata değerleri hem  $\Sigma_1$  and  $\Sigma_2$  için artmıştır. Fakat P yönteminde I. tip hata değerleri her bir örneklem için %2'yi geçmezken, J yönteminde ise %5'den oldukça fazla çıkmıştır. Kovaryans matrisleri ' $\Sigma_1$ ' ve ' $\Sigma_2$ ' için I. tip hatalar incelendiğinde bu iki testin tutarlı çalışmadığı görülmektedir. Diğer yandan FF ve MVKS yöntemlerinin I. tip hata değerleri hem  $\Sigma_1$  hem de  $\Sigma_2$  için %5 civarında değişim göstermektedir. Bu durumda bu yöntemlerin diğer P ve J yöntemlerine göre daha tutarlı ve doğru çalıştığı söylenebilir.

Testin gücü karşılaştırmalarında ilk olarak yokluk hipotezi iki değişkenli standart normal dağılım olarak belirlenmiştir. Alternatif hipotez de çok değişkenli simetrik (eliptik) dağılımlardan seçilmiş ve güç değerleri hesaplanarak karşılaştırılmıştır. Daha sonra, yokluk hipotezi iki değişkenli standart normal dağılım olarak belirlenmiştir. Alternatif hipotez ise çok değişkenli simetrik olmayan dağılımlardan seçilmiş ve testin gücü karşılaştırmaları yapılmıştır. Testin gücü karşılaştırmaları, simetrik çok değişkenli (Normal, Laplace, Student-t, Cauchy, Logistik, Üçgen ve Düzgün) ve simetrik olmayan çok değişkenli (Üstel ve Ki-kare) dağılımlarından rastgele sayılar üretilerek yapılmıştır. Simetrik dağılımlar için yapılan testin gücü karşılaştırmalarında örneklem sayısı arttıkça testin gücü tüm yöntemler için de artmaktadır. Aynı şartlar altında küçük örneklerde P yöntemi testin gücü bakımından düşük çıksa da örneklem büyüklüğü arttıkça tüm yöntemler için de testin gücü artmaktadır. Genel olarak P yönteminin güç değeri düşük, J yönteminin ise yüksek çıkmıştır. FF ve MVKS yöntemlerinin testin gücü değerleri örneklem sayısı ne olursa olsun birbirine



yakın çıkmış ve çoğu durumda MVKS testi FF testine göre daha yüksek güç değerlerine sahip çıkmıştır. Simetrik olmayan dağılımlar için yapılan testin gücü karşılaştırılmalarında örneklem sayısı arttıkça testin gücü tüm yöntemler için de artmaktadır. Aynı şartlar altında küçük örneklerde P yöntemi testin gücü bakımından diğer yöntemlere göre düşük çıksa da örneklem büyüklüğü arttıkça tüm yöntemler için de testin gücü artmaktadır. Hatta örneklem sayısı arttıkça J ve MVKS testlerinin testin gücü değeri '1' değerine doğru artmaktadır. Sonuç olarak, P ve J yöntemlerinin I. tip hata karşılaştırılmalarında tutarsız ve doğru çalışmadığı göz önüne alındığında FF ve MVKS arasında testin gücü karşılaştırılmasını yapmak daha doğru olacaktır. Bu durumda MVKS, FF yöntemine göre daha yüksek güç değerine sahip çıkmıştır.

Son olarak önerilen çok değişkenli KS testi beş farklı gerçek hayat problemlerinde uygulanmıştır. Gerçek verilerden elde edilen çok değişkenli normallik testi sonuçları ile literatürdeki deneysel ve teorik dağılımlar arasındaki farkı kullanmayan diğer çok değişkenli normallik testleri ile elde edilen sonuçlar karşılaştırıldığında oldukça benzer sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçla beraber önerilen MVKS testinin tutarlı, kesin ve doğru sonuçlar elde ettiği söylenebilir.



## 5. ÖNERİLER

Doktora tezi olarak sunulan bu çalışmada, çok değişkenli normallik için çok değişkenli Kolmogorov-Smirnov (MVKS) uyum iyiliği testi sunulmuştur. Bu tez konusu ile ilgili çalışma yapmak isteyen araştırmacı ve uygulayıcılara iletmek istenilen öneriler aşağıdaki gibi belirtilmiştir:

- Önerilen test, deneysel dağılım fonksiyonu ile teorik dağılım fonksiyonu arasındaki farka dayanmaktadır. Bu farka dayanan diğer tek değişkenli normallik testleri de çok değişkenli durum için uyarlanabilir.
- Bu tezde Lilliefors testinin sadece iki değişkenli olduğu durumda kritik tablo değeri hesaplanmıştır. İki'den fazla boyut için diğer tabloların MAPE ve güç karşılaştırmalarını içeren bir çalışma yapılabilir.
- Bu tezde sadece çok değişkenli normal dağılım için uyum iyiliği testi sonuçları verilmiştir. Diğer çok değişkenli dağılımlar için de uyum iyiliği testi gerçekleştirilebilir.
- Değişkenler bağımsızlaştırılırken çok değişkenli normal dağılımın simetrik olmasından yararlanılarak matrisin ters alma işlemi gerçekleştirilmiştir. Diğer dağılımlar için bu bağımsızlaştırma işlemi Rosenblatt teoremi yardımıyla geliştirilebilir.



## 6. KAYNAKLAR

- Ahn, S. K., 1992. F-probability plot and its application to multivariate normality, Communications in Statistics-Theory and Methods, 21, 4, 997-1023.
- Alam, K., Abernathy, R. ve Williams, C. L., 1993. Multivariate goodness-of-fit tests based on statistically equivalent blocks, Communications in Statistics-Theory and Methods, 22, 6, 1515-1533.
- Alam, K. ve Williams, C. L., 1995. A Multivariate Goodness-of-Fit Test for Stochastically Ordered Distributions, Biometrical journal, 37, 8, 945-956.
- Andrews, D., Gnanadesikan, R. ve Warner, J. 1973. "Methods for assessing multivariate normality." 95-116 in *Multivariate Analysis--III*. Elsevier.
- Bach, F. R. ve Jordan, M. I., 2002. Kernel independent component analysis, Journal of machine learning research, 3, Jul, 1-48.
- Balakrishnan, N. ve Nevzorov, V. B., 2004. A primer on statistical distributions, John Wiley & Sons.
- Baringhaus, L. ve Henze, P. D. N., 1988. A consistent test for multivariate normality based on the empirical characteristic function, Metrika, 35, 1, 339-348.
- Beirlant, J., Mason, D. ve Vynckier, C., 1999. Goodness-of-fit analysis for multivariate normality based on generalized quantiles, Computational statistics & data analysis, 30, 2, 119-142.
- Bera, A. ve John, S., 1983. Tests for multivariate normality with Pearson alternatives, Communications in Statistics-Theory and Methods, 12, 1, 103-117.
- Bibby, J., Kent, J. ve Mardia, K. 1979. "Multivariate analysis." Academic Press, London.
- Bilodeau, M. ve Brenner, D., 2008. Theory of multivariate statistics, Springer Science & Business Media.
- Birnbaum, Z. W., 1952. Numerical tabulation of the distribution of Kolmogorov's statistic for finite sample size, Journal of the American Statistical Association, 47, 259, 425-441.
- Bogdan, M., 1999. Data driven smooth tests for bivariate normality, Journal of Multivariate Analysis, 68, 1, 26-53.
- Cabaña, A. ve Cabaña, E. M., 1997. Transformed empirical processes and modified Kolmogorov-Smirnov tests for multivariate distributions, the Annals of Statistics, 2388-2409.



- Chiu, S. N. ve Liu, K. I., 2009. Generalized Cramér-von Mises goodness-of-fit tests for multivariate distributions, Computational Statistics & Data Analysis, 53, 11, 3817-3834.
- Cox, D. ve Small, N., 1978. Testing multivariate normality, Biometrika, 65, 2, 263-272.
- Cramér, H., 1928. On the composition of elementary errors: First paper: Mathematical deductions, Scandinavian Actuarial Journal, 1928, 1, 13-74.
- Crawshaw, J. ve Chambers, J., 2001. A concise course in advanced level statistics: with worked examples, Nelson Thornes.
- Csorgo, S., 1986. Testing for normality in arbitrary dimension, The Annals of Statistics, 14, 2, 708-723.
- Csörgő, S., 1989. Consistency of some tests for multivariate normality, Metrika, 36, 1, 107-116.
- De Sá, J. P. M., 2007. Applied statistics using SPSS, Statistica, Matlab and R, Springer Science & Business Media.
- Dettmann, C. P. ve Georgiou, O., 2009. Product of n independent uniform random variables, Statistics & probability letters, 79, 24, 2501-2503.
- Dunn, C. L., 1995. Critical values and powers for tests of uniformity of directions under multivariate normality, Communications in Statistics-Theory and Methods, 24, 10, 2541-2560.
- Epps, T. W. ve Pulley, L. B., 1983. A test for normality based on the empirical characteristic function, Biometrika, 70, 3, 723-726.
- Facchinetti, S., 2009. A procedure to find exact critical values of Kolmogorov-Smirnov test, Statistica Applicata, 21, 337-359.
- Fan, Y., 1997. Goodness-of-fit tests for a multivariate distribution by the empirical characteristic function, Journal of Multivariate Analysis, 62, 1, 36-63.
- Fang, K.-T., Li, R.-Z. ve Liang, J.-J., 1998. A multivariate version of Ghosh's T3-plot to detect non-multinormality, Computational statistics & data analysis, 28, 4, 371-386.
- Fasano, G. ve Franceschini, A., 1987. A multidimensional version of the Kolmogorov-Smirnov test, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 225, 1, 155-170.
- Fattorini, L., 1986. Remarks on the use of Shapiro-Wilk statistic for testing multivariate normality, Statistica, 46, 2, 209-217.
- Fisher, N. I., 1983. Graphical methods in nonparametric statistics: A review and annotated bibliography, International Statistical Review/Revue Internationale de Statistique, 25-58.





- Forbes, C., Evans, M., Hastings, N. ve Peacock, B., 2011. Statistical distributions, John Wiley & Sons.
- Gallardo, S. R. ve Quesenberry, C. P., 1982. Testing multivariate normality using several samples: applications techniques, Communications in Statistics-Theory and Methods, 11, 4, 343-358.
- Ghosh, S. ve Ruymgaart, F. H., 1992. Applications of empirical characteristic functions in some multivariate problems, Canadian Journal of Statistics, 20, 4, 429-440.
- Gnanadesikan, R. ve Kettenring, J. R., 1972. Robust estimates, residuals, and outlier detection with multiresponse data, Biometrics, 81-124.
- Hasofer, A. ve Stein, G., 1990. Testing for multivariate normality after coordinate transformation, Communications in Statistics-Theory and Methods, 19, 4, 1403-1418.
- Hawkins, D. M., 1981. A new test for multivariate normality and homoscedasticity, Technometrics, 23, 1, 105-110.
- Healy, M., 1968. Multivariate normal plotting, Applied Statistics, 157-161.
- Hensler, G., Mehrotra, K. ve Michalek, J., 1977. A goodness of fit test for multivariate normality, History and Philosophy of Logic, 6, 1, 33-41.
- Henze, N., 1994. On Mardia's kurtosis test for multivariate normality, Communications in statistics-theory and methods, 23, 4, 1031-1045.
- Henze, N., 1997. Extreme smoothing and testing for multivariate normality, Statistics & probability letters, 35, 3, 203-213.
- Henze, N. ve Wagner, T., 1997. A new approach to the BHEP tests for multivariate normality, Journal of Multivariate Analysis, 62, 1, 1-23.
- Henze, N. ve Zirkler, B., 1990. A class of invariant consistent tests for multivariate normality, Communications in Statistics-Theory and Methods, 19, 10, 3595-3617.
- Hyvarinen, A., Karhunen, J. ve Oja, E., 2001. Independent Component Analysis, John Wiley & Sons, NY.
- Isogai, T., 1982. On a measure of multivariate skewness and a test for multivariate normality, Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 34, 1, 531-541.
- Isogai, T., 1989. On using influence functions for testing multivariate normality, Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 41, 1, 169-186.
- Jarque, C. ve McKenzie, C., 1995. Testing for multivariate normality in simultaneous equations models, Mathematics and computers in simulation, 39, 3-4, 323-328.
- Johnson, M. E., 2013. Multivariate statistical simulation: A guide to selecting and generating continuous multivariate distributions, John Wiley & Sons.



- Johnson, R. A. ve Wichern, D. W., 2014. Applied multivariate statistical analysis, Pearson Prentice Hall.
- Justel, A., Peña, D. ve Zamar, R., 1997. A multivariate Kolmogorov-Smirnov test of goodness of fit, Statistics & Probability Letters, 35, 3, 251-259.
- Kariya, T. ve George, E., 1995. Locally best invariant tests for multivariate normality, Sankhya, Series A, 57, 440-451.
- Kariya, T., Tsay, R. S., Terni, N. ve Li, H., 1999. Tests for multinormality with applications to time series, Communications in Statistics-Theory and Methods, 28, 3-4, 519-536.
- Kendall, M. ve Stuart, A., 1979. Functional and structural relationship, The advanced theory of statistics, 2, 399-343.
- Kolmogorov, A. N., 1933. Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione, na.
- Kotz, S. ve Nadarajah, S., 2004. Multivariate t-distributions and their applications, Cambridge University Press.
- Koziol, J. A., 1982. A class of invariant procedures for assessing multivariate normality, Biometrika, 69, 2, 423-427.
- Koziol, J. A., 1989. A note on measures of multivariate kurtosis, Biometrical journal, 31, 5, 619-624.
- Koziol, J. A., 1993. Probability plots for assessing multivariate normality, The Statistician, 161-173.
- Krishnamoorthy, K., 2006. Handbook of statistical distributions with applications, Chapman and Hall/CRC.
- Kuiper, N. H., 1960. Tests concerning random points on a circle, Indagationes Mathematicae (Proceedings), 63, 38-47.
- Kuwana, Y. ve Kariya, T., 1991. LBI tests for multivariate normality in exponential power distributions, Journal of multivariate analysis, 39, 1, 117-134.
- Liang, J.-J. ve Bentler, P. M., 1999. A t-distribution plot to detect non-multinormality, Computational statistics & data analysis, 30, 1, 31-44.
- Liang, J., Li, R., Fang, H. ve Fang, K.-T., 2000. Testing multinormality based on low-dimensional projection, Journal of Statistical Planning and Inference, 86, 1, 129-141.
- Lilliefors, H. W., 1967. On the Kolmogorov-Smirnov test for normality with mean and variance unknown, Journal of the American Statistical Association, 62, 318, 399-402.
- Loh, W.-Y., 1986. Testing multivariate normality by simulation, Journal of Statistical Computation and Simulation, 26, 3-4, 243-252.



- Looney, S. W., 1995. How to use tests for univariate normality to assess multivariate normality, The American Statistician, 49, 1, 64-70.
- Lopes, R. H., Reid, I. ve Hobson, P. R., 2007. The two-dimensional Kolmogorov-Smirnov test.
- Machado, S., 1983. Two statistics for testing for multivariate normality, Biometrika, 70, 3, 713-718.
- Malkovich, J. F. ve Afifi, A., 1973. On tests for multivariate normality, Journal of the American Statistical Association, 68, 341, 176-179.
- Manly, B. F. ve Alberto, J. A. N., 2016. Multivariate statistical methods: a primer, Chapman and Hall/CRC.
- Marcoulides, G. A. ve Hershberger, S. L., 2014. Multivariate statistical methods: A first course, Psychology Press.
- Mardia, K. V., 1970. Measures of multivariate skewness and kurtosis with applications, Biometrika, 57, 3, 519-530.
- Mardia, K. V., 1974. Applications of some measures of multivariate skewness and kurtosis in testing normality and robustness studies, Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series B, 115-128.
- Mardia, K., 1975. Assessment of multinormality and the robustness of Hotelling's T<sup>2</sup> test, Applied Statistics, 163-171.
- Mardia, K. V. ve Foster, K., 1983. Omnibus tests of multinormality based on skewness and kurtosis, Communications in Statistics-theory and methods, 12, 2, 207-221.
- Mardia, K. V. ve Kent, J., 1991. Rao score tests for goodness of fit and independence, Biometrika, 78, 2, 355-363.
- Massey Jr, F. J., 1951. The Kolmogorov-Smirnov test for goodness of fit, Journal of the American Statistical Association, 46, 253, 68-78.
- McAssey, M. P., 2013. An empirical goodness-of-fit test for multivariate distributions, Journal of Applied Statistics, 40, 5, 1120-1131.
- Mecibah, M. S., Boukelia, T. E., Tahtah, R. ve Gairaa, K., 2014. Introducing the best model for estimation the monthly mean daily global solar radiation on a horizontal surface (Case study: Algeria), Renewable and Sustainable Energy Reviews, 36, 194-202.
- Mecklin, C. J. ve Mundfrom, D. J., 2004. An appraisal and bibliography of tests for multivariate normality, International Statistical Review, 72, 1, 123-138.
- Moore, D. S. ve Stubblebine, J. B., 1981. Chi-square tests for multivariate normality with application to common stock prices, Communications in Statistics-Theory and Methods, 10, 8, 713-738.



- Mudholkar, G. S., Srivastava, D. K. ve Thomas Lin, C., 1995. Some p-variate adaptations of the Shapiro-Wilk test of normality, Communications in Statistics-Theory and Methods, 24, 4, 953-985.
- Murota, K. ve Takeuchi, K., 1981. The studentized empirical characteristic function and its application to test for the shape of distribution, Biometrika, 68, 1, 55-65.
- Naito, K., 1996. On weighting the studentized empirical characteristic function for testing normality, Communications in Statistics-Simulation and Computation, 25, 1, 201-213.
- Neter, J., Wasserman, W., Whitmore, G. A. ve Neter, John, 1993. Applied statistics, Allyn and Bacon Boston.
- Novobilski, A. ve Kamangar, F., 2001. Absolute Percent Error Based Fitness Functions for Evolving Forecast Models., FLAIRS Conference, 36, 591-595.
- Park, C., 1999. A note on the chi-square test for multivariate normality based on the sample Mahalanobis distances, Journal of the Korean Statistical Society, 28.
- Paulson, A., Roohan, P. ve Sullo, P., 1987. Some empirical distribution function tests for multivariate normality, Journal of Statistical Computation and Simulation, 28, 1, 15-30.
- Peacock, J., 1983. Two-dimensional goodness-of-fit testing in astronomy, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 202, 3, 615-627.
- Porteous, B., 1988. Plotting squared radii: improving the  $\chi^2$  approximation, Journal of Statistical Computation and Simulation, 29, 1, 35-41.
- Quiroz, A. J. ve Dudley, R., 1991. Some new tests for multivariate normality, Probability Theory and Related Fields, 87, 4, 521-546.
- Quiroz, A. J., Trabucco, J. C. ve de Venezuela, C. A. N. T., 1998. Kolmogorov-Smirnov type statistics for testing multivariate normality, Publ. Mat. Urug, 7, 67-82.
- Ramachandran, K. M. ve Tsokos, C. P., 2020. Mathematical statistics with applications in R, Academic Press.
- Razali, N. M., Wah, Y. B. ve Razali, Nornadiah Mohd, 2011. Power comparisons of shapiro-wilk, kolmogorov-smirnov, lilliefors and anderson-darling tests, Journal of statistical modeling and analytics, 2, 1, 21-33.
- Richardson, M. ve Smith, T., 1993. A test for multivariate normality in stock returns, Journal of Business, 295-321.
- Rincon-Gallardo, S., Quesenberry, C. ve O'Reilly, F. J., 1979. Conditional probability integral transformations and goodness-of-fit tests for multivariate normal distributions, The Annals of Statistics, 1052-1057.



- Romeu, J. L., 1991. A new multivariate normality goodness of fit test with graphical applications, Computers & industrial engineering, 21, 1-4, 191-195.
- Romeu, J. L. ve Ozturk, A., 1993. A comparative study of goodness-of-fit tests for multivariate normality, Journal of Multivariate Analysis, 46, 2, 309-334.
- Romeu, J. L. ve Ozturk, A., 1996. A new graphical test for multivariate normality, American Journal of Mathematical and Management Sciences, 16, 1-2, 5-48.
- Rosenblatt, M., 1952. Remarks on a multivariate transformation, The annals of mathematical statistics, 23, 3, 470-472.
- Royston, J., 1983. Some techniques for assessing multivariate normality based on the Shapiro-Wilk W, Applied Statistics, 121-133.
- Singh, A., 1993. Omnibus robust procedures for assessment of multivariate normality and detection of multivariate outliers, Multivariate environmental statistics, 445-488.
- Slate, E. H., 1999. Assessing multivariate nonnormality using univariate distributions, Biometrika, 86, 1, 191-202.
- Small, N., 1980. Marginal skewness and kurtosis in testing multivariate normality, Applied Statistics, 85-87.
- Smirnov, N. V., 1939. On the estimation of the discrepancy between empirical curves of distribution for two independent samples, Bull. Math. Univ. Moscou, 2, 2.
- Srivastava, M. S., 1984. A measure of skewness and kurtosis and a graphical method for assessing multivariate normality, Statistics & Probability Letters, 2, 5, 263-267.
- Srivastava, M. ve Hui, T., 1987. On assessing multivariate normality based on Shapiro-Wilk W statistic, Statistics & Probability Letters, 5, 1, 15-18.
- Sürücü, B., 2006. Goodness-of-fit tests for multivariate distributions, Communications in Statistics-Theory and Methods, 35, 7, 1319-1331.
- Székel, G. J. ve Rizzo, M. L., 2005. A new test for multivariate normality, Journal of Multivariate Analysis, 93, 1, 58-80.
- Tsai, K.-T. ve Koziol, J. A., 1988. A correlation type procedure for assessing multivariate normality, Communications in Statistics-Simulation and Computation, 17, 2, 637-651.
- Von Mises, R., 1931. Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre anwendung in der statistik und theorestischen physik, Franz Deuticke.
- Wackerly, D., Mendenhall, W. ve Scheaffer, R. L., 2014. Mathematical statistics with applications, Cengage Learning.
- Wagle, B., 1968. Multivariate beta distribution and a test for multivariate normality, Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), 511-516.



- Weiss, L., 1958. A test of fit for multivariate distributions, The Annals of Mathematical Statistics, 595-599.
- Zelterman, D., 2015. Applied multivariate statistics with R, Springer.
- Zhang, C., Xiang, Y. ve Shen, X., 2012. Some multivariate goodness-of-fit tests based on data depth, Journal of Applied Statistics, 39, 2, 385-397.
- Zhou, M. ve Shao, Y., 2014. A powerful test for multivariate normality, Journal of applied statistics, 41, 2, 351-363.
- Zhu, L.-X., Wong, H. L. ve Fang, K.-T., 1995. A test for multivariate normality based on sample entropy and projection pursuit, Journal of statistical planning and inference, 45, 3, 373-385.



## ÖZGEÇMİŞ

Lisans öğrenimini Gazi Üniversitesinde, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümünü 2012 yılında üçüncülükle tamamladı. 2013 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimler Enstitüsü, İstatistik ve Bilgisayar Anabilim dalında tezli yüksek lisans programına başladı. 2015 yılında “Çokgensel Alan İçerisinde İki Değişkenli Keyfi Bir Dağılımdan Rastgele Sayı Üretilmesi” başlıklı yüksek lisans tezini sunmasının ardından doktora eğitimine başladı. 2013 yılından beri Karadeniz Teknik Üniversitesi İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü’nde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır. İyi derece İngilizce bilmektedir.

### SCI-Expanded İndeksli Yayınlar:

Kesemen, O., Tiryaki, B.K., Tezel, Ö. ve Özkul, E., 2021. A new goodness of fit test for multivariate normality, Hacettepe journal of mathematics and statistics.

