

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İSTATİSTİK VE BİLGİSAYAR BİLİMLERİ ANABİLİM DALI

KUTUPSAL KOORDİNATLARDA Kİ-KARE VE KOLMOGOROV-SMİRNOV
UYUM İYİLİĞİ TESTLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayşe PAK

Haziran 2017
TRABZON



**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

İSTATİSTİK VE BİLGİSAYAR BİLİMLERİ ANABİLİM DALI

**KUTUPSAL KOORDİNATLARDA Kİ-KARE VE KOLMOGOROV-SMİRNOV UYUM
İYİLİĞİ TESTLERİ**

Ayşe PAK

**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
"YÜKSEK LİSANS (İSTATİSTİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.**

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 15 / 05 / 2017

Tezin Savunma Tarihi : 16 / 06 / 2017

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Orhan KESEMEN

Trabzon 2017

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalında
Ayşe PAK Tarafından Hazırlanan**

**KUTUPSAL KOORDİNATLARDA Kİ-KARE VE KOLMOGOROV-SMİRNOV UYUM
İYİLİĞİ TESTLERİ**

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 16/ 05/2017 gün ve 1702 sayılı
kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Yrd. Doç. Dr. Halil İbrahim ŞAHİN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Orhan KESEMEN

Üye : Yrd. Doç. Fatma Zehra DOĞRU





Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu tez, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Programı'nda hazırlanmıştır. Bu tez, "Kutupsal Koordinatlarda Ki-Kare ve Kolmogorov-Smirnov Uyum İyiliği Testleri" için yapılmıştır.

Tez çalışma süresinde yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren benden yardımlarını, desteğini, sabrını ve bilgisini esirgemeyen değerli danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Orhan KESEMEN'ne, teşekkürü bir borç bilirim. Eğitim hayatım boyunca birinci sınıftan bu zamana kadar bilgilerinden ve tecrübelerinden yararlandığım bütün öğretmenlerime ve arkadaşlarıma, tez sürecim boyunca hiçbir yardımı esirgemeyen araştırma görevlisi hocalarım Arş.Gör. Buğra Kaan TİRYAKİ'ye, Arş.Gör. Özge TEZEL'e, Arş.Gör. Eda ÖZKUL'a, Öğr.Gör. Tuncay ULUYURT'a ve bölümümüzde bulunan diğer araştırma görevlisi hocalarıma teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca yüksek lisans eğitimi boyunca ders aldığım arkadaşlarım Ebru NAZ'a, Sibel ERTÜRK'e ve Elçin AĞAYEV'e de teşekkür ederim.

Çalışmalarım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen her konuda yanımda olan anneme, babama ve kardeşlerime teşekkür ederim. Bu tezin, bundan sonraki çalışmalara katkı sağlamasını temenni ederim.

Ayşe PAK
Trabzon 2017

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Kutupsal Koordinatlarda Ki-Kare ve Kolmogorov-Smirnov Uyum İyiliği Testleri” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Yrd. Doç. Dr. Orhan KESEMEN’in sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 16/06/2017

Ayşe PAK

İÇİNDEKİLER

| | <u>Sayfa No</u> |
|--|-----------------|
| ÖNSÖZ | III |
| TEZ ETİK BEYANNAMESİ..... | IV |
| İÇİNDEKİLER..... | V |
| ÖZET | VII |
| SUMMARY | VIII |
| ŞEKİLLER DİZİNİ..... | IX |
| TABLolar DİZİNİ..... | XII |
| SEMBOLLER DİZİNİ | XIII |
| 1. GENEL BİLGİLER..... | 1 |
| 1.1. Tek Değişkenli Dağılım Fonksiyonları | 1 |
| 1.1.1. Düzgün Dağılım..... | 2 |
| 1.1.2. Üstel Dağılım..... | 4 |
| 1.1.3. Normal Dağılım | 5 |
| 1.1.4. Üçgen Dağılım..... | 6 |
| 1.2. İki Değişkenli Dağılım Fonksiyonları | 8 |
| 1.2.1. Ortak Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu..... | 8 |
| 1.2.2. Ortak Birikimli Dağılım Fonksiyonu..... | 9 |
| 1.2.3. Marjinal Olasılık Yoğunluk Fonksiyonlar..... | 9 |
| 1.2.4. Marjinal Birikimli Dağılım Fonksiyonları..... | 10 |
| 1.2.5. Koşullu Olasılık Yoğunluk Fonksiyonları..... | 10 |
| 1.2.6. Koşullu Birikimli Dağılım Fonksiyonları..... | 11 |
| 1.3. Grafikselsel Veri Özetleme (Histogram) | 11 |
| 1.4. Uyum İyiliği Testleri | 12 |
| 1.4.1. Ki-Kare Uyum İyiliği Testi | 13 |
| 1.4.2. Kolmogorov-Smirnov Uyum İyiliği Testi | 15 |
| 1.1. İki Değişkenli Uyum İyiliği Testleri..... | 16 |

| | | |
|--------|---|----|
| 1.2. | Kutupsal Koordinat Sistemi..... | 16 |
| 2. | YAPILAN ÇALIŞMALAR..... | 19 |
| 2.1. | Kutupsal Dağılım Fonksiyonları..... | 19 |
| 2.1.1. | Kutupsal Düzgün Dağılım Fonksiyonu | 20 |
| 2.1.2. | Kutupsal Üstel Dağılım Fonksiyonu | 26 |
| 2.1.3. | Kutupsal Normal Dağılım Fonksiyonu..... | 32 |
| 2.1.4. | Kutupsal Koordinatlarda Üçgen Dağılım | 38 |
| 2.2. | Kutupsal Koordinatlarda Histogram..... | 43 |
| 2.3. | Kutupsal Dağılım Fonksiyonlarında Rastgele Sayı Oluşturma | 46 |
| 2.3.1. | Kutupsal Düzgün Dağılım Fonksiyonundan Rastgele Sayı Üretmek..... | 47 |
| 2.3.2. | Kutupsal Üstel Dağılım Fonksiyonundan Rastgele Sayı Üretmek..... | 49 |
| 2.3.3. | Kutupsal Normal Dağılım Fonksiyonundan Rastgele Sayı Üretmek..... | 51 |
| 2.3.1. | Kutupsal Üçgen Dağılım Fonksiyonundan Rastgele Sayı Üretmek..... | 53 |
| 2.4. | Kutupsal Koordinatlarda Uyum İyiliği Testi | 56 |
| 2.5. | Kutupsal Ki-Kare Uyum İyiliği Testi | 56 |
| 2.5.1. | İki Değişkenli Dilimli Ki-Kare Testi | 57 |
| 2.5.2. | Marjinal Ki-Kare Testi | 58 |
| 2.6. | Kutupsal Kolmogorov-Smirnov Uyum İyiliği Testi | 59 |
| 3. | BULGULAR VE SONUÇLAR..... | 61 |
| 4. | ÖNERİLER..... | 64 |
| 5. | KAYNAKLAR | 66 |

ÖZGEÇMİŞ

Yüksek Lisans

ÖZET

KUTUPSAL KOORDİNATLARDA Kİ-KARE VE KOLMOGOROV-SMİRNOV UYUM İYİLİĞİ TESTLERİ

Ayşe PAK
Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Orhan KESEMEN
2017, 67 Sayfa

Kutupsal koordinat sistemi, iki boyutlu bir sistemdir. Bu sistem, matematik, fizik, mühendislik, denizcilik, robot teknolojisi, uçak savarlar, insansız hava araçları, telefon vericileri gibi birçok alanda kullanılmaktadır.

Kutupsal koordinat sisteminde, iki koordinat arasındaki ilişkinin açı ve uzaklık değerleri ile daha kolay ifade edildiği durumlarda kullanılır. Böyle bir ilişki de trigonometrik formüller yardımıyla belirlenir.

Bu çalışmada, bazı iki değişkenli dağılım fonksiyonları kutupsal koordinat sisteminde tanımlanmış ve bunlardan rastgele sayılar üretilmiştir. Bu tanımlamalarda, olasılık yoğunluk fonksiyonun açısal değişimi sabit alınırken uzamsal değişimi tek değişkenli olasılık yoğunluk fonksiyonu temel alınarak yapılmıştır.

Kutupsal sistemde üretilen rastgele sayılar için geliştirilen Ki-Kare ve Kolmogorov-Smirnov uyum iyiliği testleri denenmiş ve benzetimlerinin sonuçları tablo halinde verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kutupsal Dağılım Fonksiyonları, Kutupsal Dağılım Fonksiyonlarından Rastgele Sayı Üretme, Kutupsal Verilerde Histogram, Kutupsal Sistemde Ki-Kare Uyum İyiliği Testi, Kutupsal Sistemde Kolmogorov-Smirnov Uyum İyiliği Testi.

Master Thesis

SUMMARY

CHI-SQUARE AND KOLMOGOROV-SMIRNOV GOODNESS OF FIT TESTS IN
POLAR COORDINATES

Ayşe PAK

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Statistical and Computer Science Graduate Program
Supervisor: Assist. Prof. Dr. Orhan KESEMEN
2017, 67 Pages

The polar coordinate system is a two-dimensional system. This system is used in many areas such as mathematics, physics, engineering, maritime, robot technology, airplanes, unmanned aerial vehicles, telephone receivers.

In the polar coordinate system, the relationship between the two coordinates is used in situations where it is more easily expressed with angular and spatial values. Such a relationship is also determined by the help of trigonometric formulas.

In this study, some bivariate distribution functions are defined in the polar coordinate system and random numbers are produced from them. In these definitions, when the angular change of the probability density function is fixed, the spatial variation is made based on univariate probability density function.

In the polar system, developed for random numbers generated Chi-Square and Kolmogorov-Smirnov goodness of fit tests have been tried and the results of the simulations are tabulated.

Key Words: Polar Distribution Functions, Random Number Generation In Polar Distribution Functions, Histogram In Polar Data, Chi-Square Goodness Of Fit Test In Polar System, Kolmogorov Smirnov Goodness Of Fit Tests In Polar System.

ŞEKİLLER DİZİNİ

| | <u>Sayfa No</u> |
|--|-----------------|
| Şekil 1. Düzgün dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği..... | 3 |
| Şekil 2. Düzgün dağılımın dağılım fonksiyonunun grafiği | 4 |
| Şekil 3. Üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği | 4 |
| Şekil 4. Üstel dağılımın dağılım fonksiyonunun grafiği..... | 5 |
| Şekil 5. Normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği | 6 |
| Şekil 6. Normal dağılımın dağılım fonksiyonunun grafiği..... | 6 |
| Şekil 7. Üçgen dağılımın olasılık fonksiyonunun grafiği | 7 |
| Şekil 8. Üçgen dağılımın dağılım fonksiyonunun grafiği..... | 8 |
| Şekil 9. Tek değişkenli verilerin sıklıklarını gösteren grafik (Histogram) | 12 |
| Şekil 10. İki değişkenli verilerin sıklıklarını gösteren grafik (Histogram)..... | 12 |
| Şekil 11. Kartezyen ve kutupsal koordinat sistemleri arasındaki ilişkilerin gösterimi | 18 |
| Şekil 12. Kutupsal en küçük birim alanın gösterimi..... | 20 |
| Şekil 13. $a = 1$ ve $b = 2$ parametrelili kutupsal düzgün dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu | 22 |
| Şekil 14. $a = 1$ ve $b = 2$ parametrelili kutupsal düzgün dağılımın birikimli dağılım fonksiyonu | 23 |
| Şekil 15. $a = 1$ ve $b = 2$ parametrelili kutupsal düzgün dağılımın R 'ye göre marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu | 24 |
| Şekil 16. $a = 1$ ve $b = 2$ parametrelili kutupsal düzgün dağılımın R 'ye göre marjinal birikimli dağılım fonksiyonu..... | 25 |
| Şekil 17. $a = 1$ ve $b = 2$ parametrelili kutupsal düzgün dağılımın Θ 'ya göre marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu ve marjinal birikimli dağılım fonksiyonunun grafiği; (a) Marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu; (b) Marjinal birikimli dağılım fonksiyonu. | 26 |

| | | |
|-----------|--|----|
| Şekil 18. | $\lambda = 2$ parametrelili kutupsal üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu | 28 |
| Şekil 19. | $\lambda = 2$ parametrelili kutupsal üstel dağılımın birikimli dağılım fonksiyonu | 29 |
| Şekil 20. | $\lambda = 2$ parametrelili kutupsal üstel dağılımın R'ye göre marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu | 30 |
| Şekil 21. | $\lambda = 2$ parametrelili kutupsal üstel dağılımın R'ye göre marjinal birikimli dağılım fonksiyonu | 30 |
| Şekil 22. | $\lambda = 2$ parametrelili kutupsal üstel dağılımın Θ 'ya göre marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu ve marjinal birikimli dağılım fonksiyonunun grafiği; (a) Marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu; (b) Marjinal birikimli dağılım fonksiyonu. | 32 |
| Şekil 23. | $\sigma = 1$ parametrelili kutupsal normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu | 33 |
| Şekil 24. | $\sigma = 1$ parametrelili kutupsal normal dağılımın birikimli dağılım fonksiyonu | 34 |
| Şekil 25. | $\sigma = 1$ parametrelili kutupsal normal dağılımın R'ye göre marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu | 35 |
| Şekil 26. | $\sigma = 1$ parametrelili kutupsal normal dağılımın R'ye göre marjinal birikimli dağılım fonksiyonu | 36 |
| Şekil 27. | $\sigma = 1$ parametrelili kutupsal normal dağılımın Θ 'ya göre marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu ve marjinal birikimli dağılım fonksiyonunun grafiği; (a) Marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu; (b) Marjinal birikimli dağılım fonksiyonu. | 37 |
| Şekil 28. | $b = 2$ parametrelili kutupsal üçgen dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu | 39 |
| Şekil 29. | $b = 2$ parametrelili kutupsal üçgen dağılımın birikimli dağılım fonksiyonu | 40 |
| Şekil 30. | $b = 2$ parametrelili kutupsal üçgen dağılımın R'ye göre marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu | 41 |
| Şekil 31. | $b = 2$ parametrelili kutupsal üçgen dağılımın R'ye göre marjinal birikimli dağılım fonksiyonu | 42 |
| Şekil 32. | $b = 2$ parametrelili kutupsal üçgen dağılımın Θ 'ya göre marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu ve marjinal birikimli dağılım fonksiyonunun grafiği; (a) Marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu; (b) Marjinal birikimli dağılım fonksiyonu. | 43 |

| | | |
|-----------|---|----|
| Şekil 33. | Kutupsal ızgaraların gösterimi; (a) Eşit artımlı (aralıklı) yarıçaplara göre ızgaralar; (b) Eşit dilim alanına göre ızgaralar. | 44 |
| Şekil 34 | $a = 1$ ve $b = 2$ parametrelili kutupsal düzgün dağılımdan üretilen 10.000 tane rastgele sayının eşit alanlı kutupsal histogramı..... | 48 |
| Şekil 35 | $a = 1$ ve $b = 2$ parametrelili kutupsal düzgün dağılımdan üretilen 10.000 tane rastgele sayının eşit aralıklı kutupsal histogramı. | 48 |
| Şekil 36. | $\lambda = 2$ parametrelili kutupsal üstel dağılımdan üretilen 10.000 tane rastgele sayının eşit alanlı kutupsal histogramı..... | 51 |
| Şekil 37. | $\lambda = 2$ parametrelili kutupsal üstel dağılımdan üretilen 10.000 tane rastgele sayının eşit aralıklı kutupsal histogramı. | 51 |
| Şekil 38 | $\sigma = 1$ parametrelili kutupsal normal dağılımdan üretilen 10.000 tane rastgele sayının eşit alanlı kutupsal histogramı. | 53 |
| Şekil 39 | $\sigma = 1$ parametrelili kutupsal normal dağılımdan üretilen 10.000 tane rastgele sayının eşit aralıklı kutupsal histogramı..... | 53 |
| Şekil 40. | $b = 2$ parametrelili kutupsal üçgen dağılımdan üretilen 10.000 tane rastgele sayının eşit alanlı kutupsal histogramı. | 55 |
| Şekil 41 | $b = 2$ parametrelili kutupsal üçgen dağılımdan üretilen 10.000 tane rastgele sayının eşit aralıklı kutupsal histogramı..... | 56 |

TABLolar DİZİNİ

Sayfa No

| | | |
|----------|---|----|
| Tablo 1. | Kutupsal düzgün dağılımın marjinal birikimli dağılım fonksiyonu için benzetim sonuçları | 61 |
| Tablo 2. | Kutupsal üstel dağılımın marjinal birikimli dağılım fonksiyonu için benzetim sonuçları | 62 |
| Tablo 3. | Kutupsal normal dağılımın marjinal birikimli dağılım fonksiyonu için benzetim sonuçları | 62 |
| Tablo 4. | Kutupsal üçgen dağılımın marjinal birikimli dağılım fonksiyonu için benzetim sonuçları | 63 |

SEMBOLLER DİZİNİ

| | |
|-----------------------|--|
| r_i | : Yarıçapsal değeri |
| R | : Yarıçapsal değişken |
| θ_i | : Açısal değerler |
| Θ | : Açısal değişken |
| x_i | : Rastgele değerler |
| y_i | : Rastgele değerler |
| X | : Rastgele değişken |
| Y | : Rastgele değişken |
| $f(x)$ | : Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu (PDF) |
| $F(x)$ | : Birikimli Dağılım Fonksiyonu (CDF) |
| $f(x, y)$ | : Kartezyen koordinatlarda iki değişkenli olasılık yoğunluk fonksiyonu |
| $F(x, y)$ | : Kartezyen koordinatlarda iki değişkenli dağılım fonksiyonu |
| $f(r, \theta)$ | : Kutupsal Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu |
| $f_R(r)$ | : Kutupsal R'ye göre marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu |
| $f_\Theta(\theta)$ | : Kutupsal Θ 'ya göre marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu |
| $F(r, \theta)$ | : Kutupsal Dağılım Fonksiyonu |
| $F_R(r)$ | : Kutupsal R'ye göre marjinal birikimli dağılım fonksiyonu |
| $F_\Theta(\theta)$ | : Kutupsal Θ 'ya göre marjinal birikimli dağılım fonksiyonu |
| $X \sim U(0,1)$ | : Düzgün dağılımdan $[0,1)$ aralığında rastgele bir değişken |
| $X \sim N(0,1)$ | : Normal dağılımdan 0 ortalamalı 1 standart sapmalı bir rastgele değişken |
| χ_h^2 | : Ki-kare test istatistiği |
| $\chi_{v,1-\alpha}^2$ | : v serbestlik derecesinde ve $1 - \alpha$ güven katsayısına göre ki-kare tablo değeri |
| D_n | : Kolmogorov-Smirnov test istatistiği |
| $KS_{v,1-\alpha}$ | : Kolmogorov-Smirnov tablo değeri |
| $\max_i()$ | : Verilen dizideki en büyük değeri veren fonksiyon |
| $1B - \chi^2$ | : Tek değişkenli ki-kare uyum iyiliği testi |

$2B - \chi^2$

: İki değişkenli ki-kare uyum iyiliği testi

$1B - KS$

: Tek değişkenli Kolmogorov-Smirnov uyum iyiliği testi



1. GENEL BİLGİLER

İstatistik teorisinin temel dayanağını dağılım fonksiyonları oluşturmaktadır. Dağılım fonksiyonları için daha çok tek değişkenli dağılımlar üzerinde durulmaktadır. İki değişkenli durumlarda iki değişkenin ortak dağılım fonksiyonları kullanılmaktadır. Bu ortak dağılım fonksiyonları bazı hesaplamalarda sorunlara neden olduğundan bu fonksiyonların daha çok marjinal ve koşullu dağılım fonksiyonları tercih edilmektedir. Her dağılım fonksiyonunun temsil ettiği rastgele değişken X , aldığı değerler kümesinin içeriğine göre sürekli ve kesikli olarak incelenmektedir. Bu çalışmada yalnızca sürekli dağılım fonksiyonları üzerinde durulmuştur.

1.1. Tek Değişkenli Dağılım Fonksiyonları

Rastgele değişken, önceden sonucu bilinmeyen bir olayın gerçekleşmesi durumunda ortaya çıkabilecek sonuçları temsil eder. X sürekli rastgele bir değişken olsun. X bir aralıkta ya da birden fazla aralıkta sonsuz değeri alabiliyorsa X 'e sürekli rastgele değişken denir.

$X \in (-\infty, +\infty)$ aralığında tanımlanan bir sürekli rastgele değişken olsun. Eğer X sürekli rastgele değişkenin x 'den küçük olması olasılığı (Ramachandran ve Tsokos, 2014),

$$F_X(x) = \Pr[X \leq x], \quad x \in (-\infty, \infty) \quad (1)$$

biçiminde verilen $F_X(x)$ fonksiyonuna X 'in birikimli dağılım fonksiyonu (CDF) denir. Bu dağılım fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlamalıdır (Hines vd., 2008).

1. $0 \leq F_X(x) \leq 1, \quad -\infty < x < \infty,$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ ve $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1,$
3. $F_X(x)$ azalmayan bir fonksiyondur,
4. Eğer $F_X(x)$ fonksiyonu sürekli ise, $\lim_{\delta \rightarrow 0} [F_X(x + \delta) - F_X(x)] = 0$ eşitliği sağlanmalıdır.

Sürekli dağılım fonksiyonu için verilen 4. koşula göre X rastgele değişkenin bir değere eşit olması olasılığı,

$$\Pr(X = x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} [F_X(x + \delta) - F_X(x)] = 0, \quad \delta > 0 \quad (2)$$

biçiminde verilmektedir. Dolayısıyla bir noktadaki olasılık 0 olmaktadır. Öte yandan $F_X(x)$ fonksiyonunun bir noktadaki türevi ise,

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) \quad (3)$$

biçiminde verilmektedir. Burada $f_X(x)$, olasılık yoğunluk fonksiyonu (PDF) olarak ifade edilmektedir. Aynı şekilde tersten gidersek birikimli dağılım fonksiyonu,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt \quad (4)$$

biçiminde bulunabilir. Olasılık yoğunluk fonksiyonunun aşağıdaki koşulları sağlaması gerekir (Neter vd., 1988).

1. $f_X(x) \geq 0$,
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$,
3. $f_X(x)$ parçalı süreklidir.

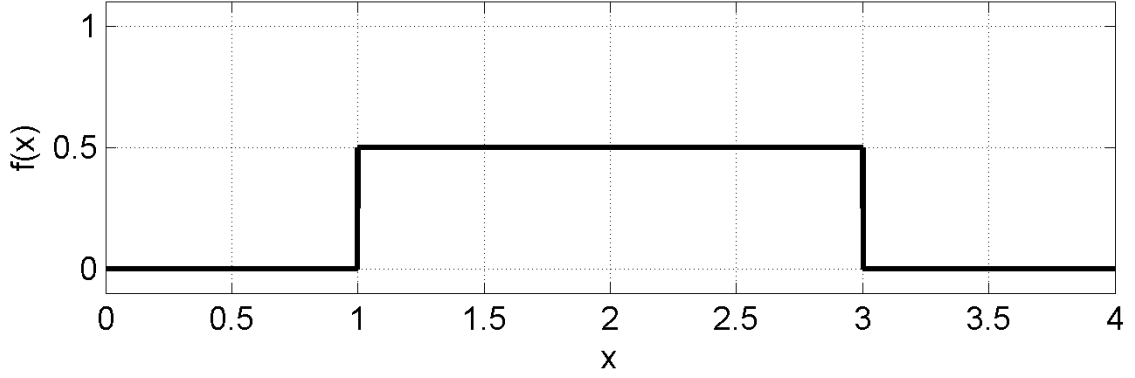
Bazı yaygın dağılım fonksiyonlarının olasılık yoğunluk fonksiyonları ve birikimli dağılım fonksiyonu devam eden bölümlerde verilmiştir.

1.1.1. Düzgün Dağılım

X sürekli rastgele değişkeninin tanım bölgesi sonlu bir $\{a \leq X \leq b\}$ aralığı olsun. Düzgün dağılıma sahip X 'in olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases} \quad (5)$$

biçiminde verilmektedir. Düzgün dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu $[1,3]$ aralığında tanımlı olursa Şekil 1'deki biçimde gösterilir.



Şekil 1. Düzgün dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği

X düzgün rastgele değişkenin dağılım fonksiyonu ise,

$$F_X(x; a, b) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{b-a} dt, \quad a \leq x \leq b \quad (6)$$

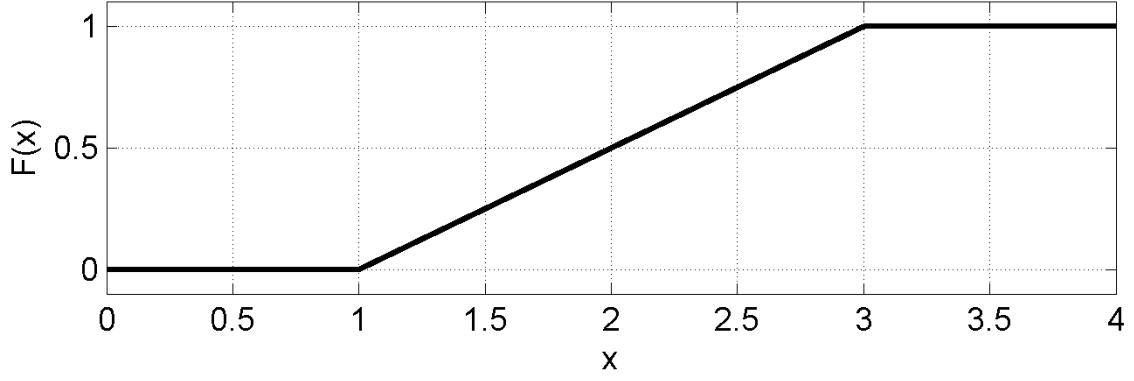
biçiminde tanımlanmaktadır. Bu eşitlikte aralık dışındaki PDF değerleri 0 olduğundan (6) eşitliği,

$$F_X(x; a, b) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt, \quad a \leq x \leq b \quad (7)$$

biçiminde yazılabilir. (7) eşitliğinde integral alınır sınırlar yerine konursa CDF ifadesi,

$$F_X(x; a, b) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases} \quad (8)$$

biçiminde bulunur. Şekil 1'de verilen örnek PDF grafiğinin CDF grafiği Şekil 2'de verilmiştir.



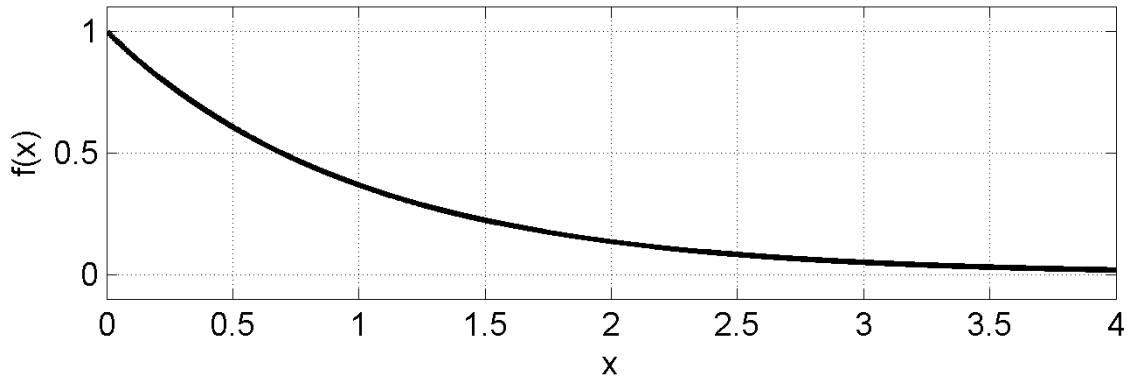
Şekil 2. Düzgün dağılımın dağılım fonksiyonunun grafiği

1.1.2. Üstel Dağılım

Üstel dağılımın PDF ifadesi, $[0, \infty)$ aralığında azalan bir fonksiyon olarak tanımlanmaktadır. X sürekli rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_X(x; \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad \lambda > 0 \quad (9)$$

biçiminde verilmektedir. Üstel dağılımının $\lambda = 1$ parametresine göre PDF grafiği Şekil 3'deki gibidir.



Şekil 3. Üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği

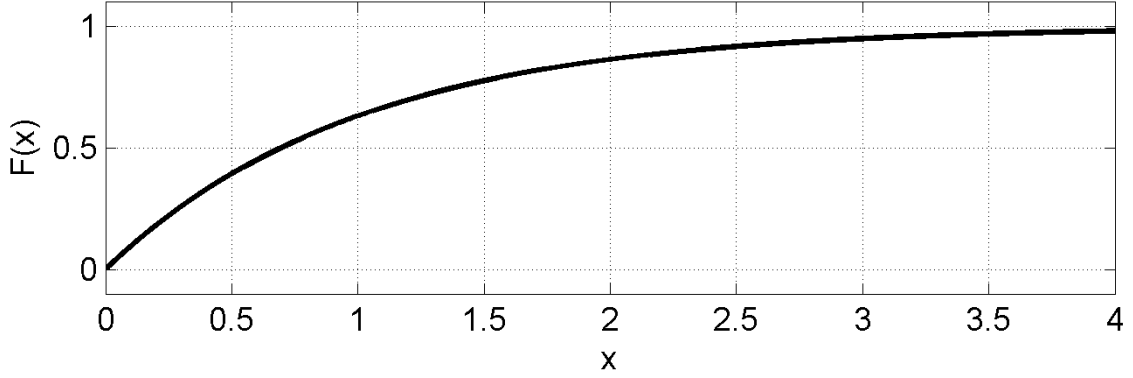
Birikimli dağılım fonksiyonu ise,

$$F_X(x, \lambda) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt, \quad \lambda > 0 \quad (10)$$

biçiminde tanımlanır. Bu tanıma göre üstel dağılımın birikimli dağılım fonksiyonu,

$$F_X(x, \lambda) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases} \quad (11)$$

biçiminde yazılabilir. $\lambda = 1$ parametrelili CDF fonksiyonunun grafiği,



Şekil 4. Üstel dağılımın dağılım fonksiyonunun grafiği

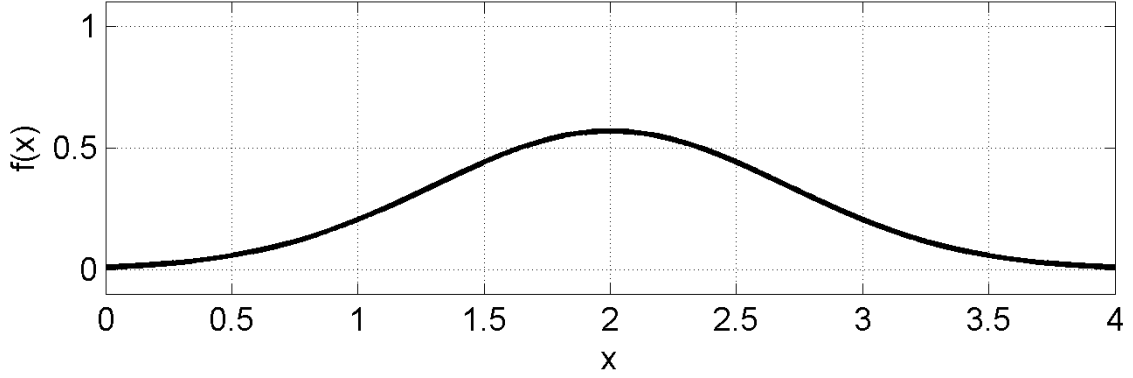
biçiminde verilmektedir.

1.1.3. Normal Dağılım

Olasılık ve istatistik biliminde en önemli dağılım normal dağılımdır. Normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < x < \infty \quad (12)$$

biçiminde verilmektedir. $\mu = 2$ ve $\sigma = 0.7$ parametrelili normal dağılımın PDF grafiği Şekil 5'te verilmiştir.

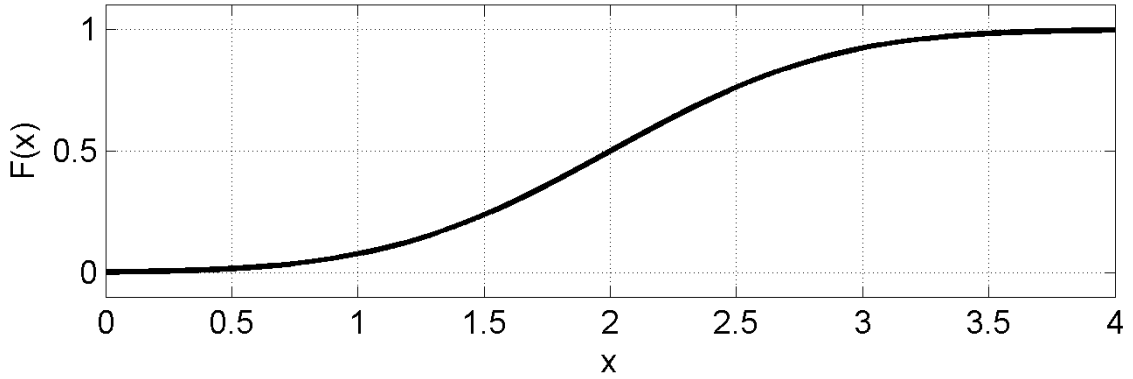


Şekil 5. Normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği

Normal dağılımın CDF ifadesi,

$$F_X(x; \mu, \sigma) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \quad (13)$$

biçiminde tanımlanmaktadır (Ramachandran ve Tsokos, 2014). (13) eşitliğinde integral işlemi analitik olarak gerçekleştirilemediği için sayısal yöntemler kullanılarak tablo değerleri hesaplanmaktadır. Hesaplanan tablo değerlerine göre Şekil 5'te verilen PDF grafiği verilen normal dağılımın CDF grafiği,



Şekil 6. Normal dağılımın dağılım fonksiyonunun grafiği

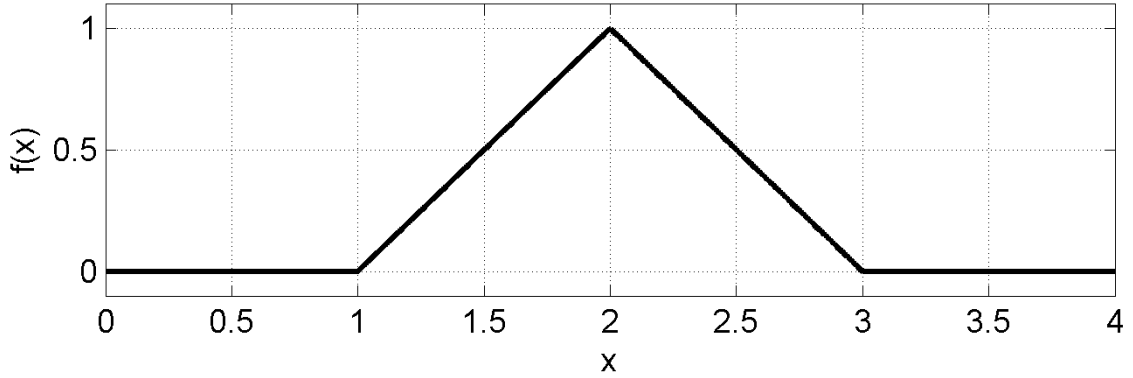
biçiminde verilmektedir.

1.1.4. Üçgen Dağılım

Olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği üçgen şeklinde olan dağılıma üçgen dağılımı denir ve üçgen dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x; a, b, c) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}, & a \leq x \leq c \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(c-a)}, & c \leq x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases} \quad (14)$$

biçimindedir. $\{a = 1, c = 2, b = 3\}$ parametrelü üçgen dağılımın PDF grafiği Şekil 7'de verilmiştir.

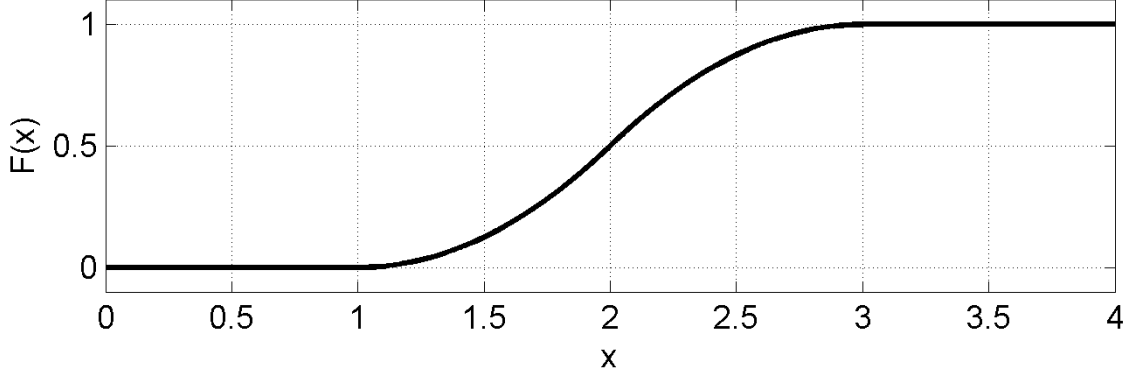


Şekil 7. Üçgen dağılımın olasılık fonksiyonunun grafiği

Üçgen dağılımın birikimli dağılım fonksiyonu ise,

$$F_X(x, a, b, c) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{(x-a)^2}{(b-a)(c-a)} & a \leq x \leq c \\ 1 - \frac{(b-x)^2}{(b-a)(b-c)} & c \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases} \quad (15)$$

biçiminde bulunmaktadır. Şekil 7'de PDF grafiği verilen üçgen dağılımın CDF grafiği,



Şekil 8. Üçgen dağılımın dağılım fonksiyonunun grafiği

biçiminde verilmektedir.

1.2. İki Değişkenli Dağılım Fonksiyonları

Günümüzde iki değişkenli dağılım fonksiyonlarındaki çalışmalar giderek önem kazanmaya başlamıştır (Kesemen vd., 2016). İki değişkenli olasılık fonksiyonları tanımlanırken iki değişkenin ortak olasılık fonksiyonu dikkate alınmaktadır. Ortak olasılık fonksiyonları ile yapılan işlemlerde fonksiyonlar daha karmaşık hale gelmesi işlemlerin yapılmasını zorlaştırmaktadır. Bu durumda ortak olasılık fonksiyonları yerine bu fonksiyonun marjinal ve koşullu olasılık fonksiyonları kullanılmaktadır.

1.2.1. Ortak Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

Olasılık teorisinde, (X, Y) $(-\infty, \infty)$ arasında tüm değerleri alabilen sürekli bir rastgele değişken olsun. Eğer bu rastgele değişkenlerin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu genelde $f_{X,Y}(x, y)$ olarak gösterilir. $f_{X,Y}(x, y)$ fonksiyonun iki değişkenli olasılık yoğunluk fonksiyonu olabilmesi için aşağıdaki koşulları sağlaması gerekir. Bu koşullar,

1. $f(x, y) \geq 0, \forall x, y$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$

biçiminde verilir.

1.2.2. Ortak Birikimli Dağılım Fonksiyonu

(X, Y) iki boyutlu bir rastgele değişken olsun. Bu rastgele değişkenlerin ortak birikimli dağılım fonksiyonu aşağıdaki biçimde hesaplanmaktadır.

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) \quad (16)$$

Olasılık yoğunluk fonksiyonu yardımıyla birikimli dağılım fonksiyonu,

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(u, v) du dv \quad (17)$$

biçiminde bulunur.

1.2.3. Marjinal Olasılık Yoğunluk Fonksiyonlar

Birçok problemde iki değişkenli ortak olasılık yoğunluk fonksiyonları ile yapılan işlemlerde sıkıntılar çıktığı için bu fonksiyonların marjinal fonksiyonları tercih edilmektedir.

(X, Y) iki değişkenli sürekli rastgele değişkenler olsun. X rastgele değişkenin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy \quad (18)$$

biçiminde tanımlanır. Aynı şekilde Y rastgele değişkenin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx \quad (19)$$

biçiminde bulunur.

1.2.4. Marjinal Birikimli Dağılım Fonksiyonları

Marjinal birikimli dağılım fonksiyonları tek değişkenli dağılım fonksiyonlarında olduğu gibi marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları yardımıyla bulunur. X rastgele değişkeninin birikimli dağılım fonksiyonu,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx \quad (20)$$

biçiminde bulunur. Aynı şekilde Y rastgele değişkenin marjinal birikimli dağılım fonksiyonu,

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^y f_Y(y) dy \quad (21)$$

biçiminde bulunur.

1.2.5. Koşullu Olasılık Yoğunluk Fonksiyonları

(X, Y) rastgele değişkenleri birbirinden bağımsız olduklarında ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu iki değişkenin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunun çarpımı şeklinde yazılabilir. Ancak değişkenleri bağımlı olması durumunda ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu marjinal fonksiyonu ile koşullu fonksiyonlarının çarpımı şekilde yazılabilir.

Y rastgele değişkeninin değeri verildiğinde X rastgele değişkeninin koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \quad (22)$$

biçiminde bulunmaktadır. Aynı şekilde X rastgele değişkeninin değeri verildiğinde Y rastgele değişkeninin koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} \quad (23)$$

biçiminde bulunur.

1.2.6. Koşullu Birikimli Dağılım Fonksiyonları

Koşullu birikimli dağılım fonksiyonları, koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonları yardımıyla bulunabilmektedir. X rastgele değişkenin koşullu birikimli dağılım fonksiyonu,

$$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^x f_{X|Y}(x|y) dx \quad (24)$$

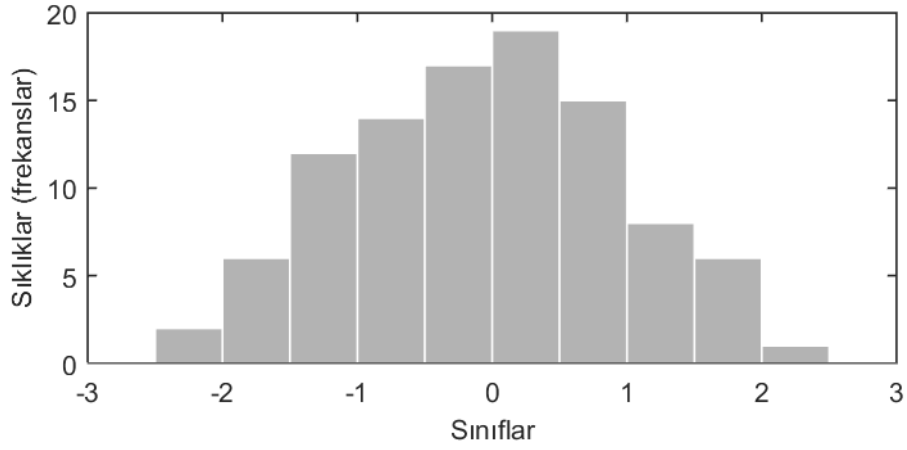
biçiminde bulunur. Benzer şekilde Y rastgele değişkenin koşullu birikimli dağılım fonksiyonu,

$$F_{Y|X}(y|x) = \int_{-\infty}^y f_{Y|X}(y|x) dy \quad (25)$$

biçiminde bulunur.

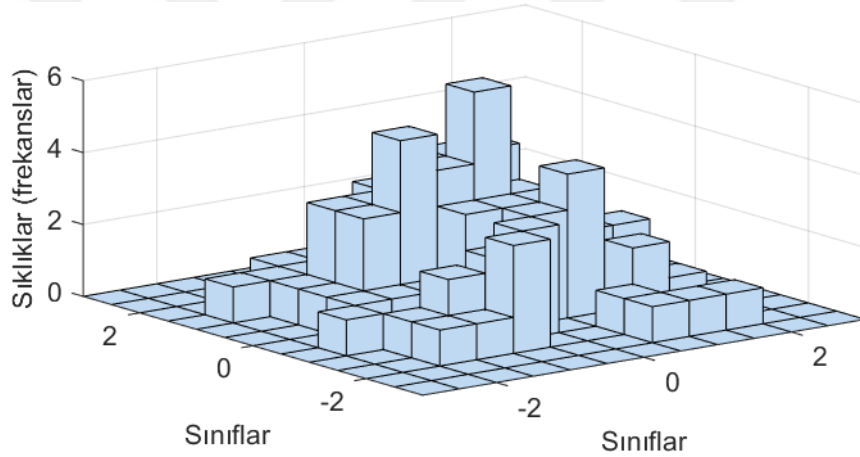
1.3. Grafiksel Veri Özetleme (Histogram)

Histogram, verilerin grafiksel olarak özetlenmesinde en yaygın kullanılan bir gösterim şeklidir. Bu gösterimde önce eşit aralıklarda sınıflar belirlenir. Daha sonra sınıflara düşen verilerin sayıları (frekanslar) bulunur. Bu frekansların gösterildiği sütun grafikler çizilerek histogram elde edilir.



Şekil 9. Tek değişkenli verilerin sıklıklarını gösteren grafik (Histogram)

Histogramların elde edilmesinde kullanılan eşit aralıklar iki değişkenli Kartezyen koordinatlarda eşit alanlar olarak verilmektedir.



Şekil 10. İki değişkenli verilerin sıklıklarını gösteren grafik (Histogram)

Veriler genelde eşit aralıklarda veya alanlardaki sıklıkların gösteriminde kullanıldığı gibi farklı aralıklarda veya alanlarda da gösterilmektedir.

1.4. Uyum İyiliği Testleri

Bir veri kümesinin verilen dağılımdan gelip gelmediğinin araştırılması için kullanılan testlere uyum iyiliği testleri denir. Bu alanda ilk çalışma Pearson tarafından 1900 yılında Ki-kare testi olarak geliştirilmiştir (Gibbons ve Chakraborti, 2011). Bu yöntemin basit ve birçok alana kolayca uygulanabilir olması testin günümüze kadar güncelliğini korumasını sağlamıştır. Ayrıca Ki-kare dağılımının bilinmesi çoğu zaman tercih edilen klasik bir

teknik haline gelmesini sağlamıştır. Daha sonraki yıllarda daha duyarlı teknikler olan deneysel dağılım fonksiyonuna dayalı tekniklerin geliştirilmiştir.

Deneysel dağılım fonksiyonuna dayalı uyum iyiliği testlerinden en yaygın kullanılanı Kolmogorov-Smirnov uyum iyiliği testidir. Bu test yöntemi daha çok normallik testlerinde kullanılmasına rağmen diğer dağılımlar için de kullanılmaktadır. Kolmogorov-Smirnov testi yapılırken kitle parametreleri araştırmacı tarafından bilindiği varsayılır. Ancak çoğu durumda parametreler bilinmez. Bu durumda Lilliefors testi tercih edilmektedir. Fakat, Anderson-Darling testi veya Shapiro-Wilk testi normallik sınaması olarak hem Lilliefors testinden hem de Kolmogorov-Smirnov tek örneklem normallik testinden daha güçlü olduğu gösterilmiştir (Gibbons ve Chakraborti, 2011).

1.4.1. Ki-Kare Uyum İyiliği Testi

Ki-kare testi elde edilen gözlem verilerinin seçilen bir dağılıma uyup uymadığını test etmek için kullanılan basit bir yöntemdir. Bu yöntem, biyoloji, coğrafya, mühendislik, tıp ve psikoloji gibi birçok alanda yaygın bir biçimde kullanılmaktadır.

Bu testin temeli sıfır (yokluk) hipotezi (H_0) ve karşıt hipotez (H_1) şeklinde verilen iki hipoteze dayanmaktadır. Bu hipotezler,

H_0 : Gözlem değerleri $F_0(x)$ dağılımından gelmektedir,

H_1 : Gözlem değerleri $F_0(x)$ dağılımından gelmemektedir,

biçiminde verilmektedir. Burada $F_0(x)$ gözlem değerlerinin geldiği öne sürülen dağılım fonksiyonudur. Ayrıca testlerin yapılmasında bir yanılma payı (α) belirlenerek testler gerçekleştirilir.

Sürekli fonksiyonlarda ki-kare testi yapılabilmesi için öncelikle sınıf sayısının ve sınıf aralığının belirlenmesi gerekir. Sınıf sayısı (c) belirlenmesinde literatürde değişik çalışmalar olmasına rağmen çoğu zaman araştırmacının tercihinin bırakılır. Sınıf genişliği,

$$\Delta x = \frac{x_n - x_1}{c} \quad (26)$$

biçiminde bulunur. Burada x_1 verideki en küçük değeri, x_n ise verideki en büyük değeri göstermektedir. j . sınıfın alt sınırı,

$$L_j = x_1 + (j - 1) \cdot \Delta x, \quad j = 1, 2, \dots, c \quad (27)$$

biçiminde hesaplanırken üst sınırı,

$$U_j = x_1 + j \cdot \Delta x, \quad j = 1, 2, \dots, c \quad (28)$$

biçiminde hesaplanmaktadır.

Her sınıf aralığına düşen gözlem sayısı (gözlenen frekanslar),

$$O_j = \sum_{i=1}^n \begin{cases} 1, & L_j \leq x_i < U_j \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}, \quad j = 1, 2, \dots, c \quad (29)$$

biçiminde hesaplanırken beklenen frekanslar,

$$E_j = n[F_0(U_j) - F_0(L_j)], \quad j = 1, 2, \dots, c \quad (30)$$

biçiminde hesaplanmaktadır. Beklenen ve gözlenen frekanslar yardımıyla ki-kare değeri,

$$\chi_h^2 = \sum_{j=1}^c \frac{(O_j - E_j)^2}{E_j} \quad (31)$$

biçiminde hesaplanır.

Bir sonraki adım verilen yanılma payına göre H_0 hipotezinin gerçekleşmesi için ki-kare dağılımından $(1 - \alpha)$ güven katsayısını veren $\chi_{v,1-\alpha}^2$ değerinin bulunması gerekir. Bu ise ki-kare tablosundan (O'connor vd., 2012) yararlanarak bulunur. Sonuç olarak (32) eşitsizliğinin doğru olması durumunda H_0 kabul edilmiş olur. Aksi durumda karşıt hipotez kabul edilmiş olur.

$$\chi_h^2 < \chi_{v,1-\alpha}^2 \quad (32)$$

Burada v değeri serbestlik derecesini gösterir ve $v = c - 1$ olarak bulunur.

1.4.2. Kolmogorov-Smirnov Uyum İyiliği Testi

Kolmogorov-Smirnov uyum iyiliği testi, Deneysel dağılım fonksiyonlu testler içerisinde en çok bilinenidir.

Kolmogorov-Smirnov testi ilk olarak 1933 yılında Kolmogorov tarafından geliştirilmiştir. Bu test yöntemi rastgele seçilmiş bir örneklem grubuna uygulanmıştır. Smirnov ise 1939 yılında Kolmogorov testini iki bağımsız örneklem grubu için kullanılan uyum iyiliği testine uyarlamıştır. Daha sonraları benzerliklerinden dolayı bu test yöntemi Kolmogorov-Smirnov testi olarak isimlendirilmiştir (Massey Jr, 1951; Sheskin, 2003).

Tek örneklem Kolmogorov-Smirnov testi için $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ örnek değerlerinin bağımsız ve sürekli özdeş bir dağılımdan $F(x)$ elde edildiği varsayalım. Bu dağılım için aşağıdaki yokluk hipotez,

$$H_0: F(x) = F_0(x) \quad (33)$$

ve karşıt hipotez,

$$H_1: F(x) \neq F_0(x) \quad (34)$$

verildiğinde bu dağılımın $F_0(x)$ dağılımına eşit olduğunu sınamak için Kolmogorov-Smirnov testi yapılır. Kurulan hipotezi doğruluğunu test etmek için öncelikle test istatistiğinin belirlenmesi gerekir. Kolmogorov-Smirnov test istatistiği D_n ,

$$D_n = \max_{i=1}^n (|F_n(x_i) - F_0(x_i)|) \quad (35)$$

biçiminde hesaplanır. Burada $F_n(x)$ fonksiyonu deneysel dağılım fonksiyonu olarak tanımlanmakta ve

$$F_n(x_i) = \frac{I(x_i, x)}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (36)$$

biçiminde hesaplanmaktadır. Burada $I(x_i, x)$ fonksiyonu gösterge fonksiyonu olarak tanımlanmakta ve

$$I(x_i, x) = \sum_{k=1}^n \begin{cases} 1, & x_k \leq x_i \\ 0, & x_k > x_i \end{cases} \quad (37)$$

biçiminde hesaplanmaktadır.

1.1. İki Değişkenli Uyum İyiliği Testleri

İki değişkenli uyum iyiliği testlerinde ki-kare testi tek değişkenlide olduğu gibi kullanılmaktadır (Royen, 1991; Morrison, 1998). İki değişkenlide yalnızca sınıf aralığı yerine sınıf alanı tanımlanmaktadır. Bu alanlar eşit olması üç boyutlu histogramların iki değişkenli olasılık yoğunluk fonksiyonuna benzerliğinin görsel olarak ortaya konmasında yararlı olmaktadır.

İki değişkenli ki-kare test istatistiği,

$$\chi_h^2 = \sum_{j=1}^{C_x} \sum_{k=1}^{C_y} \frac{(O_{jk} - E_{jk})^2}{E_{jk}} \quad (38)$$

biçiminde hesaplanmaktadır. Burada C_x ve C_y sırasıyla yatay ve dikey sınıf sayısını vermektedir. Bu teste serbestlik derecesi $v = C_x C_y - 1$ olarak hesaplanmaktadır.

İki değişkenli deneysel dağılım tabanlı (Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling, ...) uyum iyiliği testleri birçok çalışma bulunmaktadır (Bakshaev ve Rudzkis, 2017; Justel vd., 1997). Bu çalışmalar hesaplama alanını 4 parçaya bölerek bunların içerdikleri dağılım fonksiyonlarına göre uyum iyiliği testleri yapmaktadırlar. Ancak bu yöntemler tam anlamıyla oturmadıkları için bu çalışmada yalnızca tek değişkenli marjinal fonksiyonlar için Kolmogorov-Smirnov uyum iyiliği testleri kullanılmıştır.

1.2. Kutupsal Koordinat Sistemi

Kutupsal koordinat sistemi iki boyutlu bir koordinat sistemi olarak bilinmektedir. İki boyutlu bir düzlemde bulunan bir noktanın (x, y) başlangıç noktasına $(0,0)$ doğru uzanan

bir doğru parçasının uzunluğu (r) ve bu doğru parçasının yatayla yaptığı açı (θ) cinsinden ifade edilmesidir.

Kutupsal koordinat sistemi bir nokta açı ve uzaklık ile daha kolay ifade edildiği durumlar için kullanılmaktadır. Kutupsal koordinat sistemlerinin kullanım alanları denizcilik, mühendislik, robot teknolojisi, telefon vericiler, uçak savarlar gibi alanlarda kullanılmaktadır. Örneğin denizcilik alanında radar işlemleri ve hedefi belirleme amacıyla kullanılır, robot teknolojisinde robotun hangi yönde nasıl kullanılacağı belirlemek amacıyla kullanılır.

Kutupsal sistemde açılar, genel olarak ya derece ya da radyan cinsinden ifade edilir. Kullanım alanındaki ihtiyaca göre ya derece seçilir yada radyan seçilir. Örneğin; Denizcilik uygulamalarında derece ölçüsü kullanılırken, Fizik uygulamalarında özellikle de dönüş mekaniği gibi uygulamalarda radyan ölçüsü kullanılmaktadır. Eğer verilen ölçü değeri radyan cinsinden verilmiş ve derece ölçüsüne ihtiyaç var ise radyandan dereceye,

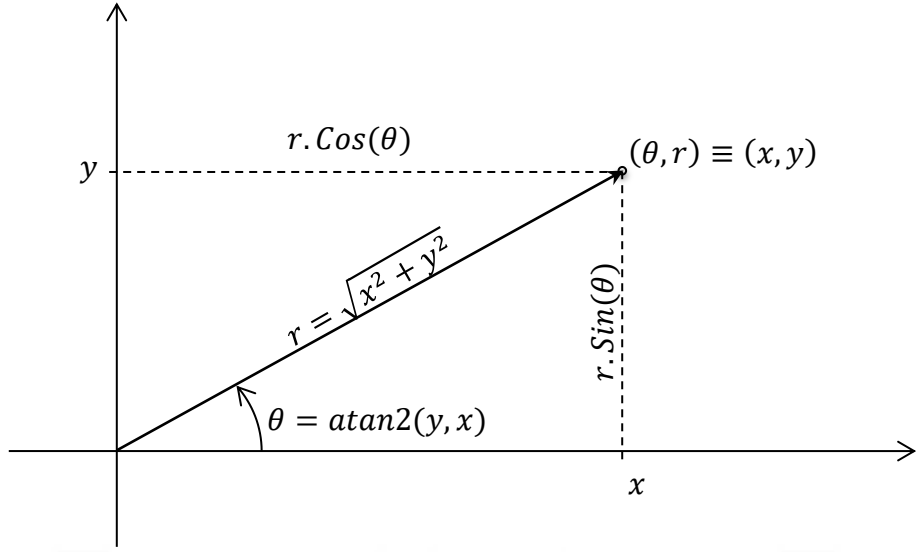
$$\phi^0 = \frac{\theta}{\pi} 180 \quad (39)$$

biçiminde bulunurken, derece ölçüsü verilmiş ise ve radyan ölçüsüne ihtiyaç var ise dereceden radyana,

$$\theta = \frac{\phi^0}{180} \pi \quad (40)$$

biçiminde bulunur.

Kartezyen koordinat sisteminde verilen bir nokta (x, y) ikilisi ile gösterilmektedir. Bu ikilinin kutupsal koordinat sisteminde gösterimi (θ, r) biçiminde gösterilmektedir (Şekil 11).



Şekil 11. Kartezyen ve kutupsal koordinat sistemleri arasındaki ilişkilerin gösterimi

Kartezyen koordinat sisteminden kutupsal koordinat sistemin dönüşüm yapılırken,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (41)$$

ve

$$\theta = \text{atan2}(y, x) \quad (42)$$

eşitlikleri kullanılırken, kutupsal koordinattan kartezyen koordinata dönüşümlerde

$$x = r \cdot \cos(\theta) \quad (43)$$

ve

$$y = r \cdot \sin(\theta) \quad (44)$$

eşitlikleri kullanılmaktadır.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

İki değişkenli dağılım fonksiyonları genelde kartezyen koordinatlarda tanımlanmaktadır. Ancak bazı uygulamalarda kutupsal gösterimin olduğu alanlarda bulunmaktadır. Bu alanlarda yapılacak işlemlerin kutupsal değişkenlerle yapılması daha sağlıklı sonuçlar verecektir. Bu uygulama alanlarına,

- Denizcilikte gemilerin konumlarını belirlenmesinde,
- Savunma sanayisinde radar ile nesne belirlenmesinde,
- Robot Teknolojisinde robot kolunun hareket ettirilmesinde,
- Uçak savarlar hedef belirlemede,
- İnsansız hava araçlarının hedef belirleme ve yönlendirilmesinde,
- Telefon ve televizyon vericilerine göre istatistiklerin elde edilmesi,
- Havaya zehirli gaz yayan bir fabrikanın etkisinin incelenmesi,

biçiminde örnekler verilebilir.

2.1. Kutupsal Dağılım Fonksiyonları

Olasılık teorisinde iki değişkenli olasılık fonksiyonlarının kullanımı giderek artmaktadır (Kesemen vd., 2016). Kartezyen koordinatlarda daha çok kullanım alanı bulan iki değişkenli dağılım fonksiyonları birçok durum için kutupsal koordinat sistemine ihtiyaç duymaktadır. Kutupsal dağılım fonksiyonlarında kutupsal koordinatlar kullanılır. Bu koordinatlar başlangıç noktasından olan uzaklık (r) ve yatay eksenle yaptığı açı (θ) dır.

Kartezyen koordinatlarda kullanılan iki değişkenli birikimli dağılım fonksiyonu,

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f_{X,Y}(x, y) dx dy \quad (45)$$

biçiminde tanımlanırken kutupsal birikimli dağılım fonksiyonu (Papoulis ve Pillai, 2002; Ertel ve Reed, 1999),

$$F_{\Theta,R}(\theta, r) = \int_0^\theta \int_0^r f_{\Theta,R}(\theta, r) r dr d\theta \quad (46)$$

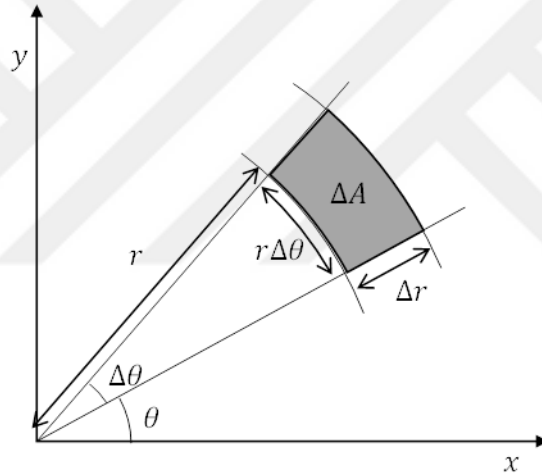
biçiminde tanımlanmaktadır. Burada,

$$f_{X,Y}(x, y) \equiv f_{\Theta,R}(\theta, r) \quad (47)$$

denkliği söz konusu ise,

$$dA = dx dy = r dr d\theta \quad (48)$$

eşitliği ise en küçük hesaplama birimi olarak alınmaktadır (Kreyszig, 1999). Bu birim Şekil 12'de gösterilmiştir.



Şekil 12. Kutupsal en küçük birim alanın gösterimi

2.1.1. Kutupsal Düzgün Dağılım Fonksiyonu

(5) eşitliğinde tek değişkenli kartezyen koordinat sisteminde düzgün dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu gösterilmektedir. Açısal değişim sabit alınarak kutupsal koordinatta düzgün dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(\theta, r; a, b) = c \quad (49)$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Burada olasılık yoğunluk fonksiyonu başlangıç noktası etrafında simetrik bir dağılım göstermektedir. Öte yandan pozitif eksendeki kısım y eksenini

etrafında döndürüldüğünden c ölçek sabitinin ne olacağını bulmak gerekir. Bu işlem için olasılık yoğunluk fonksiyonunun tanım bölgesi içerisinde integrali tanımlanıp 1 eşitlenirse,

$$\int_0^{2\pi} \int_a^b c \rho \, d\rho \, d\theta = 1 \quad (50)$$

eşitliği elde edilir. Burada integral alınırsa,

$$2\pi c \frac{\rho^2}{2} \Big|_a^b = 1 \quad (51)$$

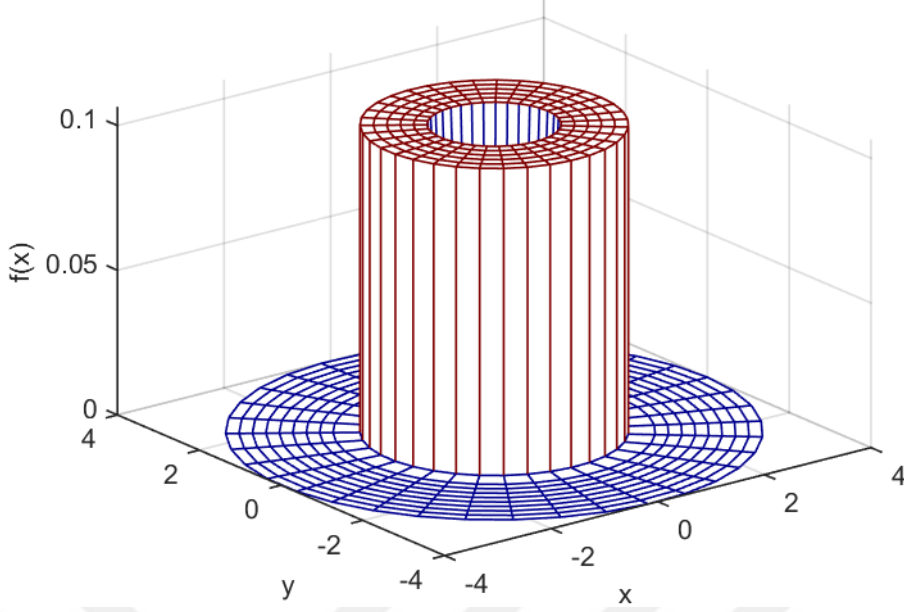
eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten c sabiti çekilirse,

$$c = \frac{1}{\pi(b^2 - a^2)} \quad (52)$$

biçiminde bir eşitlik bulunur. Bu eşitliğe göre (49) eşitliği yeniden düzenlenirse,

$$f_{\Theta,R}(\theta, r; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{\pi(b^2 - a^2)}, & a < r < b \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases} \quad (53)$$

eşitliği elde edilir. Bu fonksiyonun $a = 1$ ve $b = 2$ parametrelili olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği Şekil 13'te verilmiştir.



Şekil 13. $a = 1$ ve $b = 2$ parametrelili kutupsal düzgün dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu

Bulunan olasılık yoğunluk fonksiyonundan r 'ye bağlı dağılım fonksiyonu,

$$F_{\Theta,R}(\theta, r; \sigma) = \int_0^\theta \int_a^r f_{\Theta,R}(\phi, \rho; \sigma) \rho d\rho d\phi \quad (54)$$

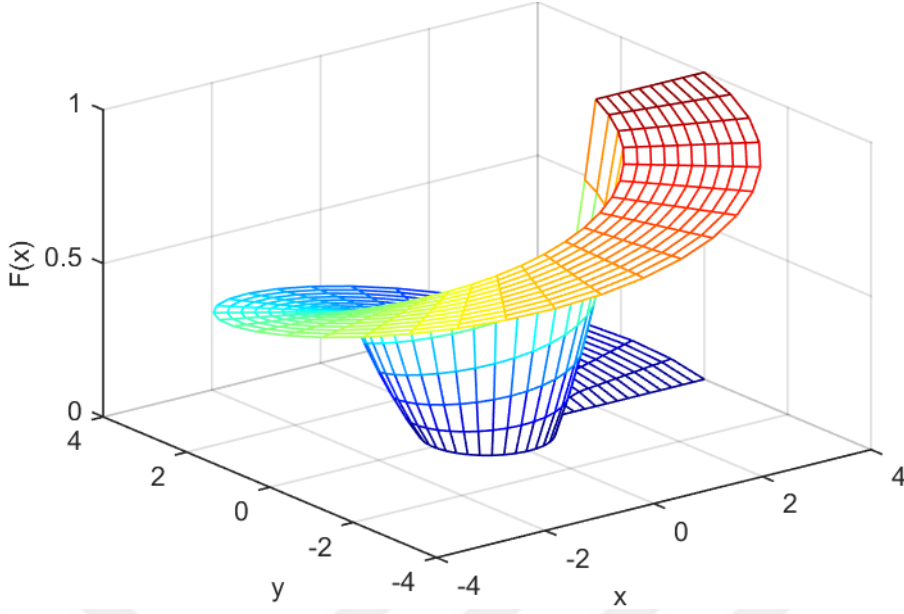
biçiminde tanımlanır ve integrali alınır,

$$\begin{aligned} F_{\Theta,R}(\theta, r; a, b) &= \theta \int_a^r \frac{1}{\pi(b^2 - a^2)} \rho d\rho \\ &= \frac{\theta}{2\pi} \left[\frac{\rho^2}{(b^2 - a^2)} \Big|_a^r \right] \end{aligned} \quad (55)$$

eşitliği elde edilir ve sınırlar yerine konursa birikimli dağılım fonksiyonu,

$$F_{\Theta,R}(\theta, r; a, b) = \frac{\theta}{2\pi} \left[\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right] \quad (56)$$

biçiminde elde edilir. Bu fonksiyonun $a = 1$ ve $b = 2$ parametrelili birikimli dağılım fonksiyonunun grafiği Şekil 14'te verilmiştir.



Şekil 14. $a = 1$ ve $b = 2$ parametrelili kutupsal düzgün dağılımın birikimli dağılım fonksiyonu

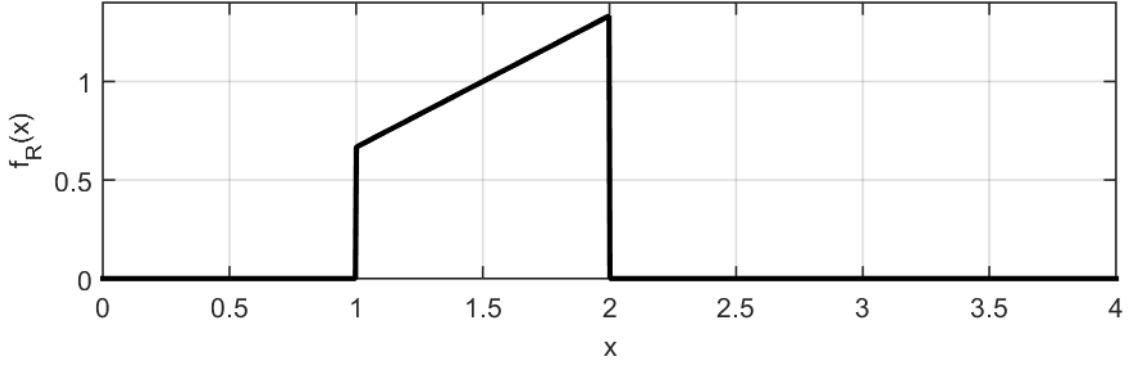
Kutupsal düzgün dağılımın R 'ye göre marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu (53) eşitliği yardımıyla,

$$f_R(r; a, b) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi(b^2 - a^2)} r d\phi \quad (57)$$

biçiminde yazılabilir. Bu eşitlikte integral alınıp sınırlar yerine konursa kutupsal düzgün dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_R(r; a, b) = \frac{2r}{(b^2 - a^2)} \quad (58)$$

biçiminde bulunur. $a = 1$ ve $b = 2$ parametrelili kutupsal düzgün dağılımın R 'ye göre marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği Şekil 15'te verilmiştir.



Şekil 15. $a = 1$ ve $b = 2$ parametrelü kutupsal düzgün dağılımın R 'ye göre marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu

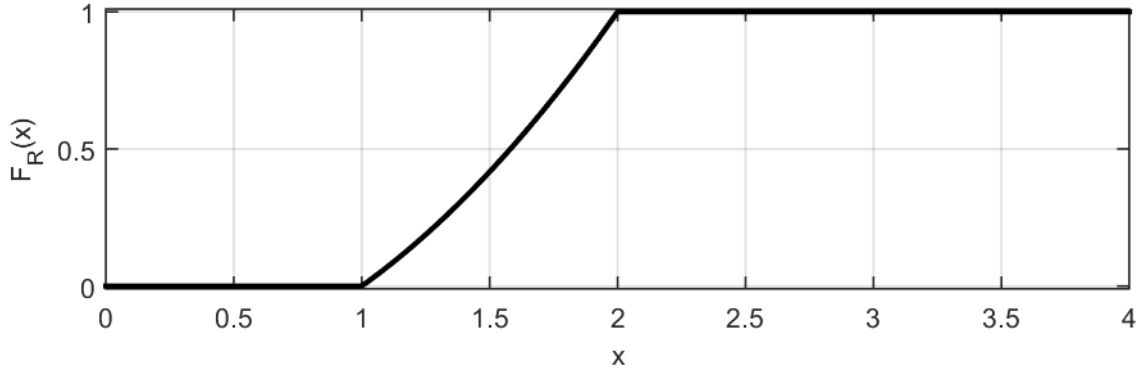
(66) eşitliği $[a, r]$ sınırlarında r 'ye göre integrali alınırsa,

$$\begin{aligned}
 F_R(r; a, b) &= \int_a^r \frac{2\rho}{(b^2 - a^2)} d\rho \\
 &= \frac{\rho^2}{(b^2 - a^2)} \Big|_a^r
 \end{aligned} \tag{59}$$

eşitliği elde edilir ve sınırlar yerine konursa,

$$F_R(r; a, b) = \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \tag{60}$$

biçiminde kutupsal düzgün dağılımın R 'ye göre marjinal birikimli dağılım fonksiyonu bulunmuş olur. $a = 1$ ve $b = 2$ parametrelü kutupsal düzgün dağılımın R 'ye göre marjinal birikimli dağılım fonksiyonunun grafiği Şekil 16'te verilmiştir.



Şekil 16. $a = 1$ ve $b = 2$ parametrelili kutupsal düzgün dağılımın R 'ye göre marjinal birikimli dağılım fonksiyonu

Kutupsal düzgün dağılımın Θ 'ye göre koşullu dağılım marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu (53) eşitliği yardımıyla,

$$f_{\Theta}(\theta; a, b) = \int_a^b \frac{1}{\pi(b^2 - a^2)} r dr \quad (61)$$

biçiminde yazılabilir. Bu eşitlikte integral alınıp sınırlar yerine konursa kutupsal düzgün dağılımın Θ 'ya göre olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{\Theta}(\theta; a, b) = \frac{1}{2\pi} \quad (62)$$

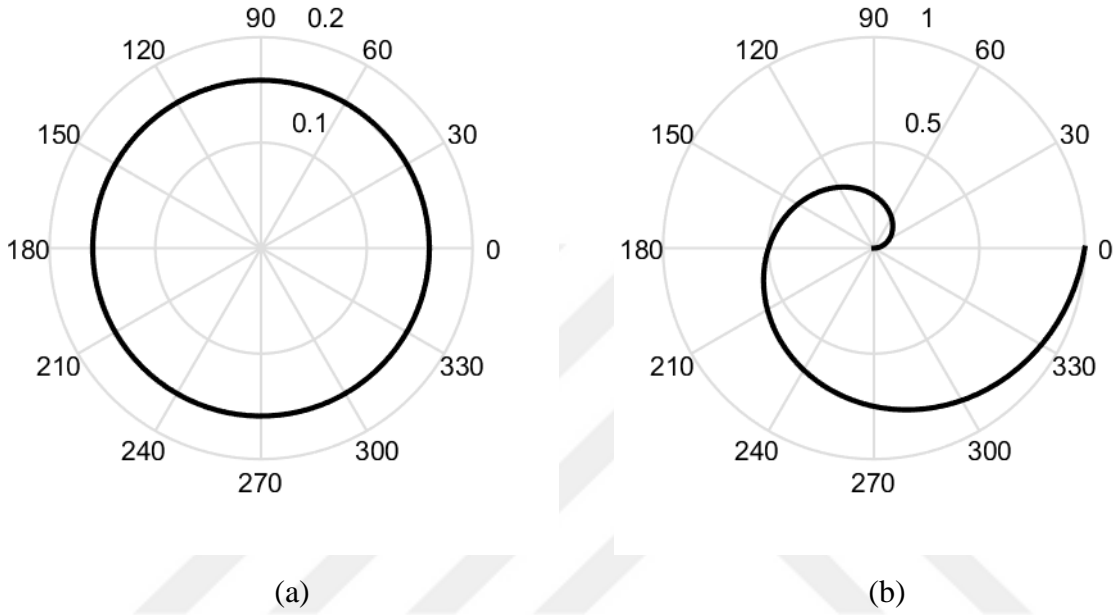
biçiminde bulunur. (70) eşitliği $[0, \theta]$ sınırlarında θ 'ya göre integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} F_{\Theta}(\theta; a, b) &= \int_0^{\theta} \frac{1}{2\pi} d\phi \\ &= \frac{\phi}{2\pi} \Big|_0^{\theta} \end{aligned} \quad (63)$$

eşitliği elde edilir ve sınırlar yerine konursa,

$$F_{\Theta}(\theta; a, b) = \frac{\theta}{2\pi} \quad (64)$$

biçiminde kutupsal düzgün dağılımın θ 'ya göre marjinal birikimli dağılım fonksiyonu bulunmuş olur. $a = 1$ ve $b = 2$ parametrelili kutupsal düzgün dağılımın θ 'ya göre marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu ve marjinal birikimli dağılım fonksiyonunun grafikleri Şekil 17'da verilmiştir.



Şekil 17. $a = 1$ ve $b = 2$ parametrelili kutupsal düzgün dağılımın θ 'ya göre marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu ve marjinal birikimli dağılım fonksiyonunun grafiği; (a) Marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu; (b) Marjinal birikimli dağılım fonksiyonu.

2.1.2. Kutupsal Üstel Dağılım Fonksiyonu

(9) eşitliğinde tek değişkenli kartezyen koordinat sisteminde üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu gösterilmektedir. Açısal değişim sabit alınarak kutupsal koordinatta üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(\theta, r; \lambda) = c\lambda e^{-\lambda r} \quad (65)$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Burada olasılık yoğunluk fonksiyonu başlangıç noktası etrafında simetrik bir dağılım göstermektedir. Öte yandan pozitif eksendeki kısım y eksenini etrafında döndürüldüğünden c ölçek sabitinin ne olacağını bulmak gerekir. Bu işlem için olasılık yoğunluk fonksiyonunun tanım bölgesi içerisinde integrali tanımlanıp 1 eşitlenirse,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} c \lambda e^{-\lambda \rho} \rho \, d\rho \, d\phi = 1 \quad (66)$$

eşitliği elde edilir. Burada integral alınırsa,

$$\frac{2\pi c}{\lambda} e^{-\lambda \rho} (-1 - \lambda \rho) \Big|_0^{\infty} = 1 \quad (67)$$

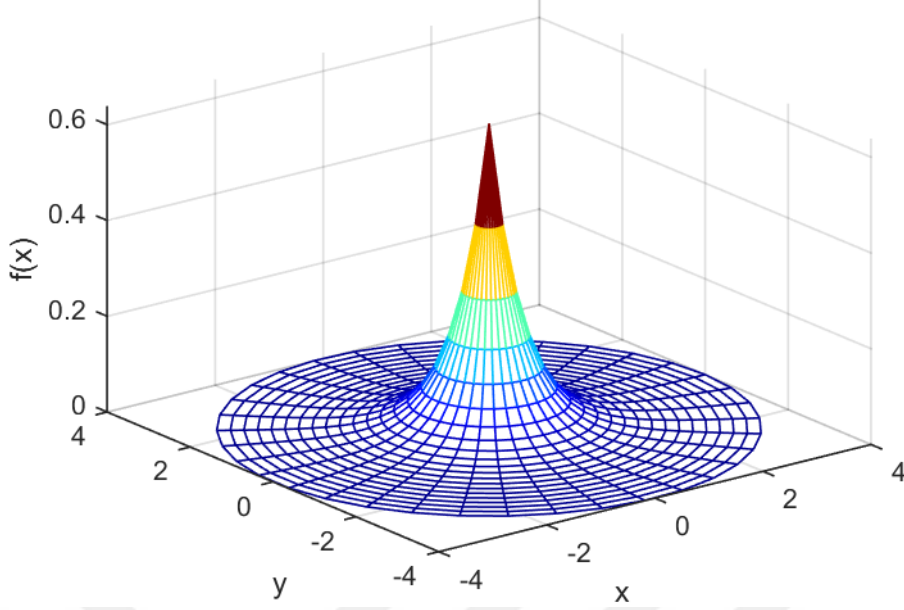
eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten c sabiti çekilirse,

$$c = \frac{\lambda}{2\pi} \quad (68)$$

biçiminde bir eşitlik bulunur. Bu eşitliğe göre (65) eşitliği yeniden düzenlenirse,

$$f_{\Theta, R}(\theta, r; \lambda) = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda r}}{2\pi} \quad (69)$$

eşitliği elde edilir. Bu fonksiyonun $\lambda = 2$ parametrelili olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği Şekil 18'da verilmiştir.



Şekil 18. $\lambda = 2$ parametrelili kutupsal üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu

Bulunan olasılık yoğunluk fonksiyonundan r 'ye bağlı dağılım fonksiyonu,

$$F_{\Theta,R}(\theta, r; \sigma) = \int_0^\theta \int_0^r f_{\Theta,R}(\phi, \rho; \sigma) d\rho d\phi \quad (70)$$

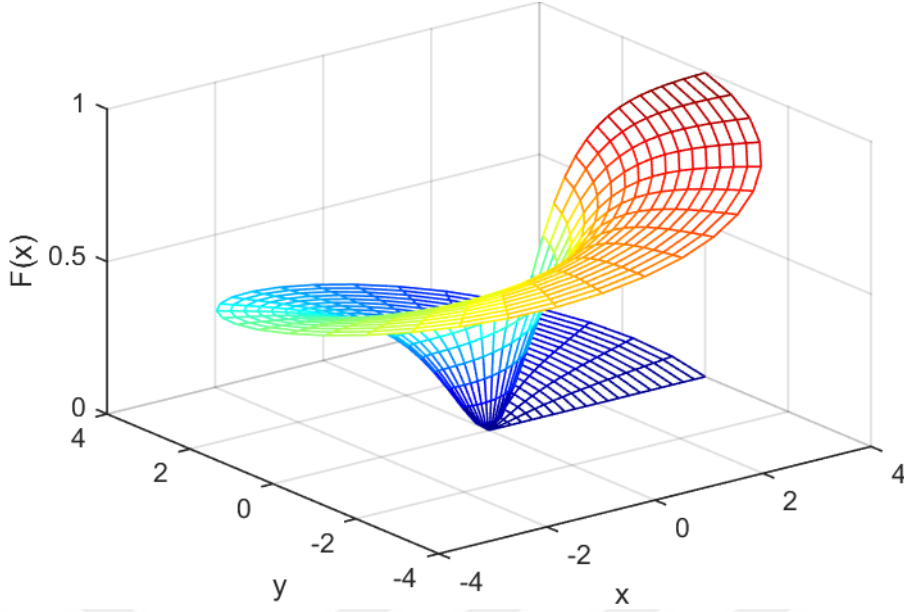
biçiminde tanımlanır ve integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} F_{\Theta,R}(\theta, r; \lambda) &= \frac{\theta}{2\pi} \int_0^r \lambda^2 e^{-\lambda\rho} \rho d\rho \\ &= \frac{\theta}{2\pi} \left[-(1 + \lambda\rho)e^{-\lambda\rho} \Big|_0^r \right] \end{aligned} \quad (71)$$

eşitliği elde edilir ve sınırlar yerine konursa birikimli dağılım fonksiyonu,

$$F_{\Theta,R}(\theta, r; \lambda) = \frac{\theta}{2\pi} \left[1 - (1 + \lambda r)e^{-\lambda r} \right] \quad (72)$$

biçiminde elde edilir. Bu fonksiyonun $\lambda = 2$ parametrelili birikimli dağılım fonksiyonun grafiği Şekil 19'de verilmiştir.



Şekil 19. $\lambda = 2$ parametrelili kutupsal üstel dağılımın birikimli dağılım fonksiyonu

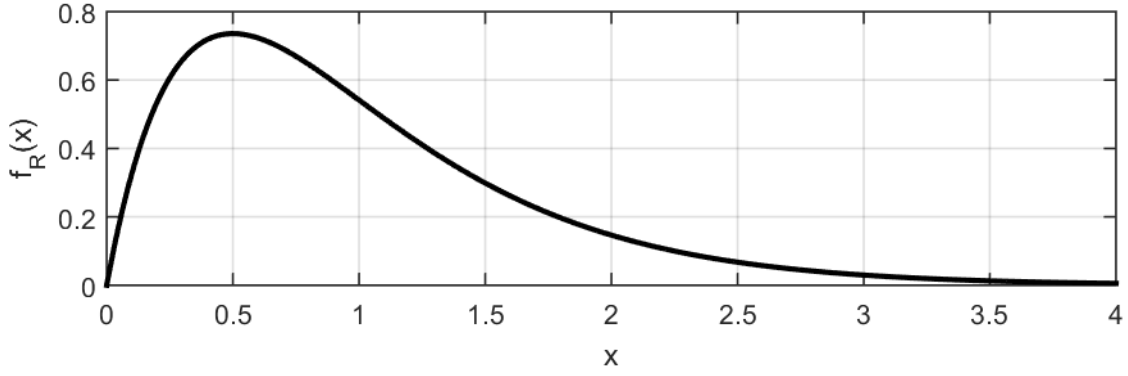
Kutupsal üstel dağılımın R 'ye göre marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu (69) eşitliği yardımıyla,

$$f_R(r; \lambda) = \int_0^{2\pi} \frac{\lambda^2 e^{-\lambda r}}{2\pi} r d\phi \quad (73)$$

biçiminde yazılabilir. Bu eşitlikte integral alınıp sınırlar yerine konursa kutupsal üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_R(r; \lambda) = \lambda^2 r e^{-\lambda r} \quad (74)$$

biçiminde bulunur. $\lambda = 2$ parametrelili kutupsal üstel dağılımın R 'ye göre marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği Şekil 20'de verilmiştir.



Şekil 20. $\lambda = 2$ parametrelı kutupsal üstel dağılımın R 'ye göre marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu

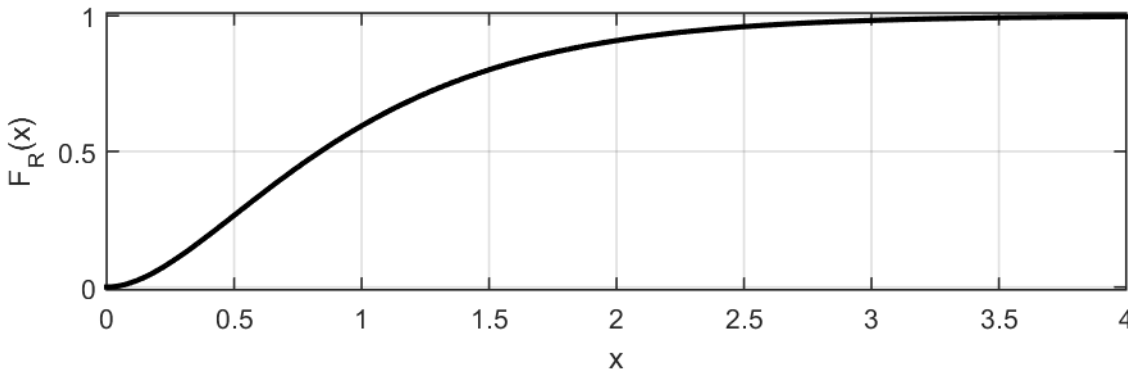
(74) eşitliği $[0, r]$ sınırlarında r 'ye göre integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} F_R(r; \lambda) &= \int_0^r \lambda^2 \rho e^{-\lambda \rho} d\rho \\ &= -(1 + \lambda \rho) e^{-\lambda \rho} \Big|_0^r \end{aligned} \quad (75)$$

eşitliği elde edilir ve sınırlar yerine konursa,

$$F_R(r; \lambda) = 1 - (1 + \lambda r) e^{-\lambda r} \quad (76)$$

biçiminde kutupsal üstel dağılımın R 'ye göre marjinal birikimli dağılım fonksiyonu bulunmuş olur. $\lambda = 2$ parametrelı kutupsal üstel dağılımın R 'ye göre marjinal birikimli dağılım fonksiyonunun grafiği Şekil 21'da verilmiştir.



Şekil 21. $\lambda = 2$ parametrelı kutupsal üstel dağılımın R 'ye göre marjinal birikimli dağılım fonksiyonu

Kutupsal üstel dağılımın Θ 'ye göre koşullu dağılım marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu (69) eşitliği yardımıyla,

$$f_{\Theta}(\theta; \lambda) = \int_0^{\infty} \frac{\lambda^2 e^{-\lambda r}}{2\pi} r dr \quad (77)$$

biçiminde yazılabilir. Bu eşitlikte integral alınıp sınırlar yerine konursa kutupsal üstel dağılımın Θ 'ya göre olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{\Theta}(\theta; \lambda) = \frac{1}{2\pi} \quad (78)$$

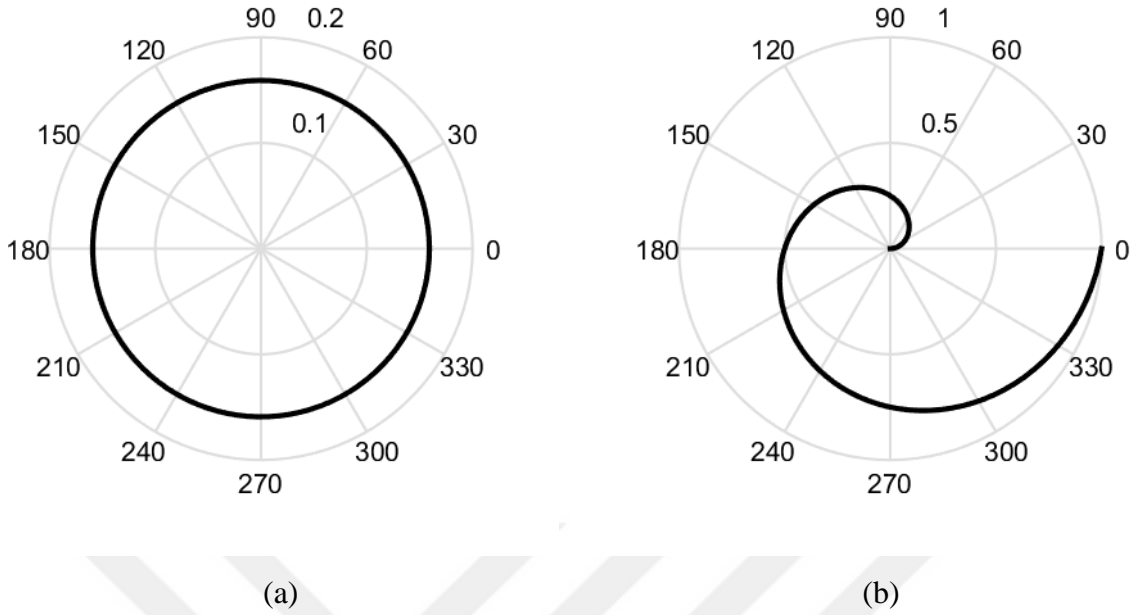
biçiminde bulunur. (78) eşitliği $[0, \theta]$ sınırlarında θ 'ya göre integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} F_{\Theta}(\theta; \lambda) &= \int_0^{\theta} \frac{1}{2\pi} d\phi \\ &= \frac{\phi}{2\pi} \Big|_0^{\theta} \end{aligned} \quad (79)$$

eşitliği elde edilir ve sınırlar yerine konursa,

$$F_{\Theta}(\theta; \lambda) = \frac{\theta}{2\pi} \quad (80)$$

biçiminde kutupsal üstel dağılımın Θ 'ya göre marjinal birikimli dağılım fonksiyonu bulunmuş olur. $\lambda = 2$ parametrelili kutupsal üstel dağılımın Θ 'ya göre marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu ve marjinal birikimli dağılım fonksiyonunun grafikleri Şekil 22'de verilmiştir.



Şekil 22. $\lambda = 2$ parametrelili kutupsal üstel dağılımın Θ 'ya göre marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu ve marjinal birikimli dağılım fonksiyonunun grafiği; (a) Marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu; (b) Marjinal birikimli dağılım fonksiyonu.

2.1.3. Kutupsal Normal Dağılım Fonksiyonu

(12) eşitliğinde tek değişkenli kartezyen koordinat sisteminde normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu gösterilmektedir. Açısal değişim sabit alınarak kutupsal koordinatta normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(\theta, r; \sigma) = c \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \quad (81)$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Burada olasılık yoğunluk fonksiyonu başlangıç noktası etrafında simetrik bir dağılım gösterdiğinden $\mu = 0$ olarak alınmıştır. Öte yandan pozitif eksendeki kısım y eksenini etrafında döndürüldüğünden c ölçek sabitinin ne olacağını bulmak gerekir. Bu işlem için olasılık yoğunluk fonksiyonunun tanım bölgesi içerisinde integrali tanımlanıp 1 eşitlenirse,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} c \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\rho}{2\sigma^2}} \rho \, d\rho \, d\theta = 1 \quad (82)$$

eşitliği elde edilir. Burada integral alınırsa,

$$-\sqrt{2\pi}\sigma c e^{-\frac{\rho}{2\sigma^2}} \Big|_0^{\infty} = 1 \quad (83)$$

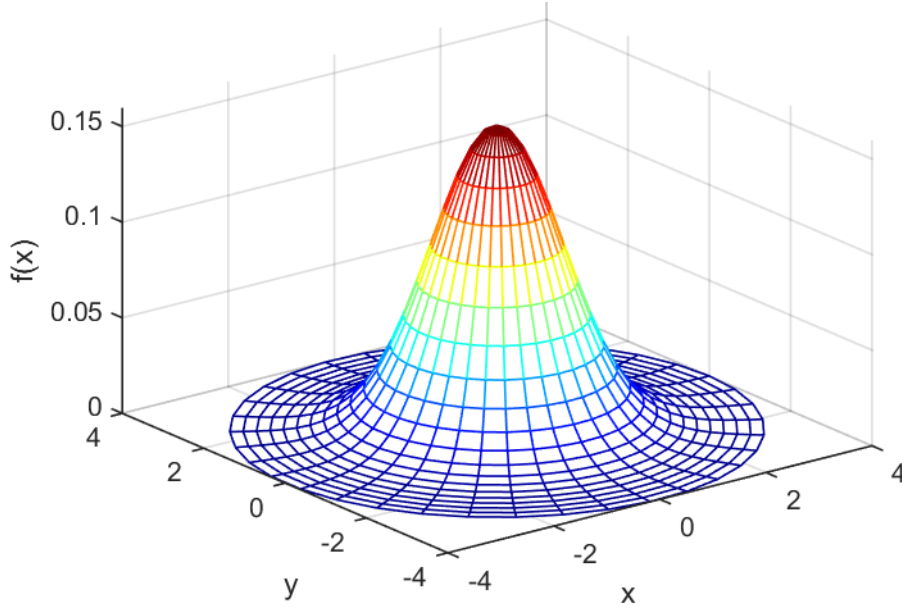
eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte değerler yerine konup c sabiti çekilirse,

$$c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \quad (84)$$

biçiminde bir eşitlik bulunur. Bu eşitliğe göre (81) eşitliği yeniden düzenlenirse,

$$f_{\Theta,R}(\theta, r; \sigma) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \quad (85)$$

eşitliği elde edilir. Bu fonksiyonun $\sigma = 1$ parametrelili olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği Şekil 23'de verilmiştir.



Şekil 23. $\sigma = 1$ parametrelili kutupsal normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu

Bulunan olasılık yoğunluk fonksiyonundan R 'ye bağlı dağılım fonksiyonu,

$$F_{\Theta,R}(\theta, r; \sigma) = \int_0^\theta \int_0^r f_{\Theta,R}(\phi, \rho; \sigma) d\rho d\phi \quad (86)$$

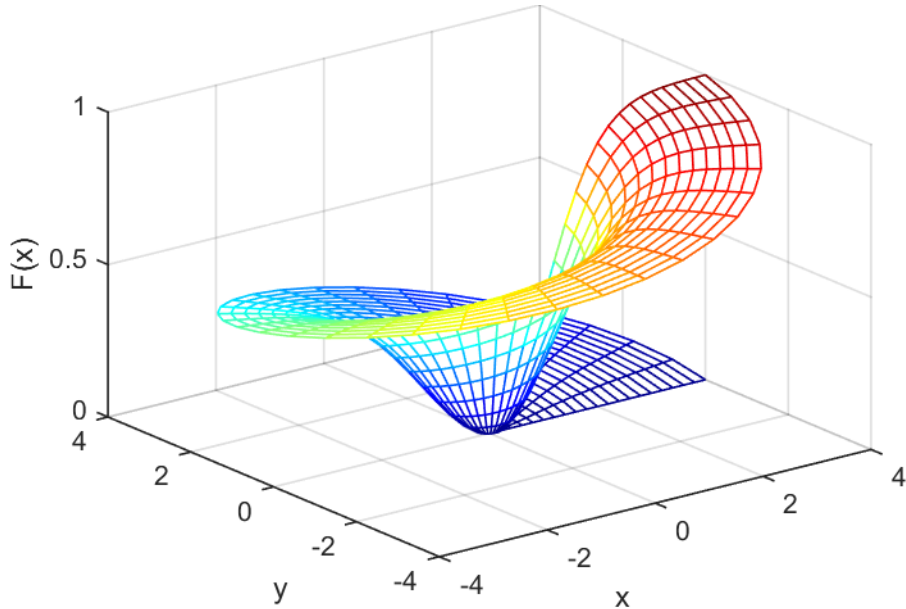
biçiminde tanımlanır ve integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} F_{\Theta,R}(\theta, r; \sigma) &= \frac{\theta}{2\pi} \int_0^r \frac{e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^2} \rho d\rho \\ &= \frac{\theta}{2\pi} \left[-e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} \Big|_0^r \right] \end{aligned} \quad (87)$$

eşitliği elde edilir ve sınırlar yerine konursa birikimli dağılım fonksiyonu,

$$F_{\Theta,R}(\theta, r; \sigma) = \frac{\theta}{2\pi} \left[1 - e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \right] \quad (88)$$

biçiminde elde edilir. Bu fonksiyonun $\sigma = 1$ parametrelili birikimli dağılım fonksiyonunun grafiği Şekil 24'da verilmiştir.



Şekil 24. $\sigma = 1$ parametrelili kutupsal normal dağılımın birikimli dağılım fonksiyonu

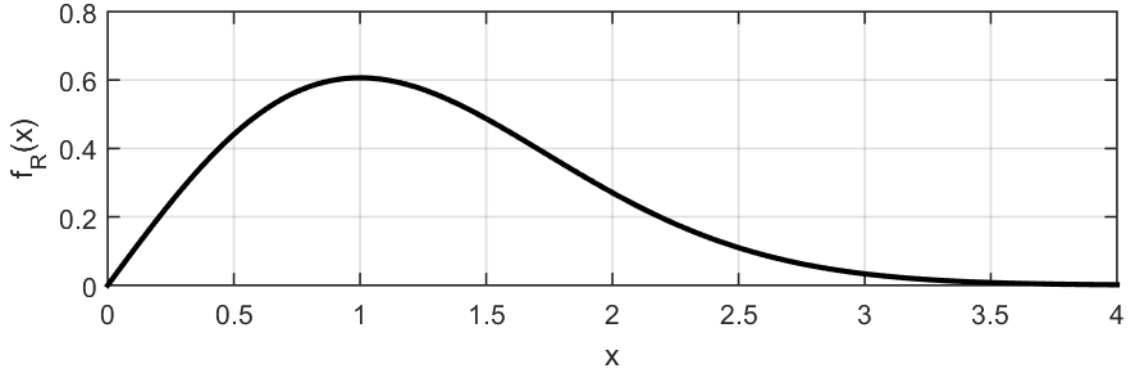
Kutupsal normal dağılımın R 'ye göre marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu (85) eşitliği yardımıyla,

$$f_R(r; \sigma) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} r d\phi \quad (89)$$

biçiminde yazılabilir. Bu eşitlikte integral alınıp sınırlar yerine konursa kutupsal normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_R(r; \sigma) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \quad (90)$$

biçiminde bulunur. $\sigma = 1$ parametrelili kutupsal normal dağılımın R 'ye göre marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği Şekil 29'de verilmiştir.



Şekil 25. $\sigma = 1$ parametrelili kutupsal normal dağılımın R 'ye göre marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu

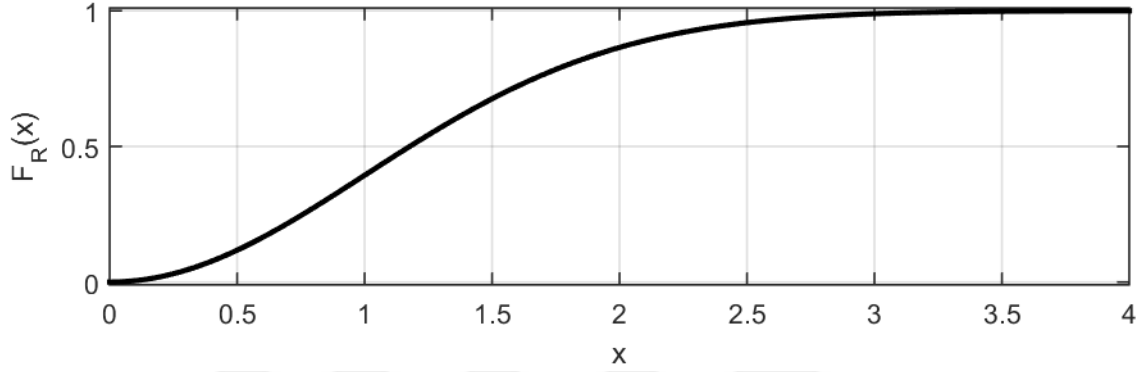
(90) eşitliği $[0, r]$ sınırlarında r 'ye göre integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} F_R(r; \sigma) &= \int_0^r \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} d\rho \\ &= -e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} \Big|_0^r \end{aligned} \quad (91)$$

eşitliği elde edilir ve sınırlar yerine konursa,

$$F_R(r; \sigma) = 1 - e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \quad (92)$$

biçiminde kutupsal normal dağılımın R 'ye göre marjinal birikimli dağılım fonksiyonu bulunmuş olur. $\sigma = 1$ parametrelili kutupsal normal dağılımın R 'ye göre marjinal birikimli dağılım fonksiyonunun grafiği Şekil 26'te verilmiştir.



Şekil 26. $\sigma = 1$ parametrelili kutupsal normal dağılımın R 'ye göre marjinal birikimli dağılım fonksiyonu

Kutupsal normal dağılımın θ 'ye göre koşullu dağılım marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu (85) eşitliği yardımıyla,

$$f_{\theta}(\theta; \sigma) = \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} r dr \quad (93)$$

biçiminde yazılabilir. Bu eşitlikte integral alınıp sınırlar yerine konursa kutupsal normal dağılımın θ 'ya göre olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{\theta}(\theta; \sigma) = \frac{1}{2\pi} \quad (94)$$

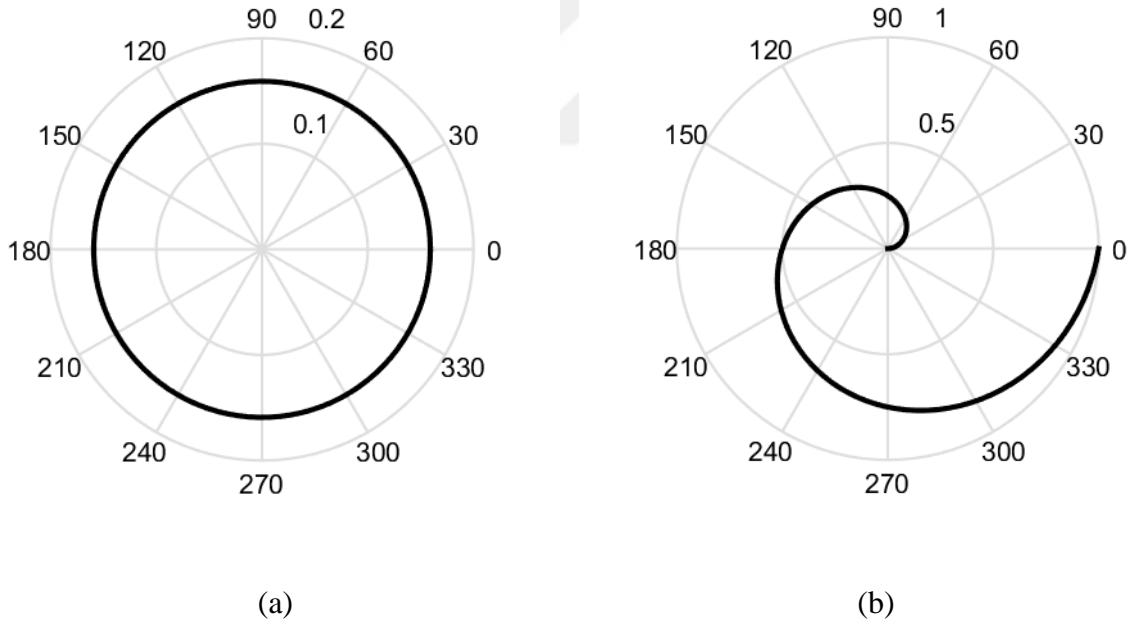
biçiminde bulunur. (94) eşitliği $[0, \theta]$ sınırlarında θ 'ya göre integrali alınırsa,

$$\begin{aligned}
 F_{\Theta}(\theta; \sigma) &= \int_0^{\theta} \frac{1}{2\pi} d\phi \\
 &= \frac{\phi}{2\pi} \Big|_0^{\theta}
 \end{aligned}
 \tag{95}$$

eşitliği elde edilir ve sınırlar yerine konursa,

$$F_{\Theta}(\theta; \sigma) = \frac{\theta}{2\pi}
 \tag{96}$$

biçiminde kutupsal normal dağılımın Θ 'ya göre marjinal birikimli dağılım fonksiyonu bulunmuş olur. $\sigma = 1$ parametrelili kutupsal normal dağılımın Θ 'ya göre marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu ve marjinal birikimli dağılım fonksiyonunun grafikleri Şekil 27'da verilmiştir.



Şekil 27. $\sigma = 1$ parametrelili kutupsal normal dağılımın Θ 'ya göre marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu ve marjinal birikimli dağılım fonksiyonunun grafiği; (a) Marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu; (b) Marjinal birikimli dağılım fonksiyonu.

2.1.4. Kutupsal Koordinatlarda Üçgen Dağılım

(14) eşitliğinde tek değişkenli kartezyen koordinat sisteminde üçgen dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu gösterilmektedir. Bu dağılımda tepe noktası keyfî bir konumda bulunmaktadır. Kutupsal koordinatlarda tepe noktası başlangıç noktası seçildiğinden üçgen dağılımın özel bir biçiminin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x; b) = \begin{cases} \frac{2}{b} - \frac{2x}{b^2}, & 0 < x < b \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases} \quad (97)$$

biçiminde verilmektedir. Bu fonksiyonda b parametresi dağılımın sonlandığı konumu vermektedir. Açısal değişim sabit alınarak kutupsal koordinatta üçgen dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(\theta, r; b) = c \left(\frac{2}{b} - \frac{2r}{b^2} \right) \quad (98)$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Burada olasılık yoğunluk fonksiyonu başlangıç noktası etrafında simetrik bir dağılım gösterdiğinden tepe noktası başlangıçta alınmıştır. Öte yandan pozitif eksendeki kısım y eksenini etrafında döndürüldüğünden c ölçek sabitinin ne olacağını bulmak gerekir. Bu işlem için olasılık yoğunluk fonksiyonun tanım bölgesi içerisinde integrali tanımlanıp 1 eşitlenirse,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^b c \left(\frac{2}{b} - \frac{2\rho}{b^2} \right) \rho \, d\rho \, d\phi = 1 \quad (99)$$

eşitliği elde edilir. Burada integral alınırsa,

$$\frac{4\pi c \rho^2}{2b} - \frac{4\pi c \rho^3}{3b^2} \Big|_0^b = 1 \quad (100)$$

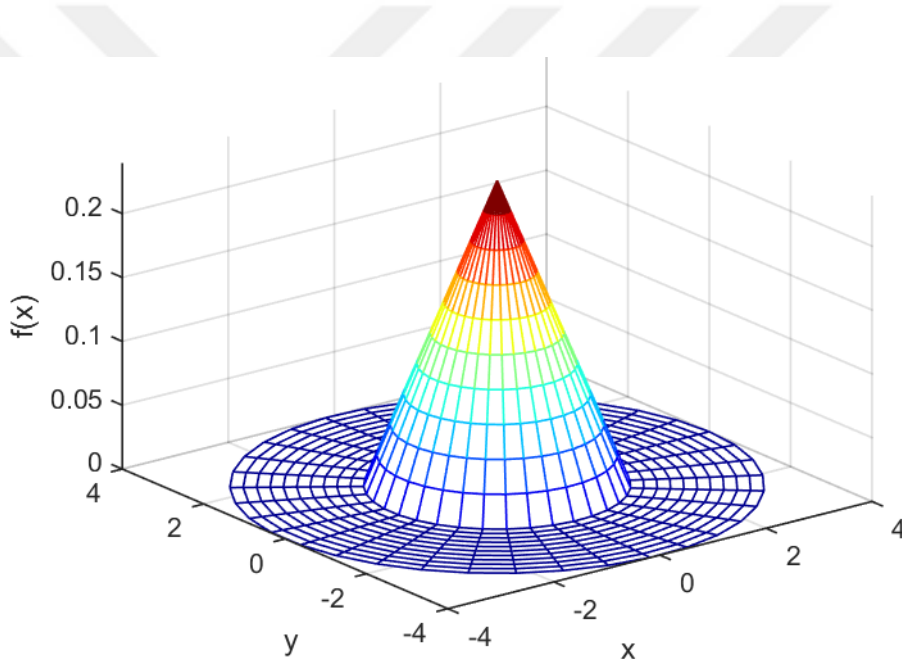
eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten c sabiti çekilirse,

$$c = \frac{3}{2\pi b} \quad (101)$$

biçiminde bir eşitlik bulunur. Bu eşitliğe göre (98) yeniden düzenlenirse,

$$f_{\Theta,R}(\theta, r; b) = \frac{3}{\pi b^2} \left(1 - \frac{r}{b}\right) \quad (102)$$

eşitliği elde edilir. Bu fonksiyonun $b = 2$ parametrelili olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği Şekil 28'de verilmiştir.



Şekil 28. $b = 2$ parametrelili kutupsal üçgen dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu

Bulunan olasılık yoğunluk fonksiyonundan r 'ye bağlı dağılım fonksiyonu,

$$F_{\Theta,R}(\theta, r; b) = \int_0^\theta \int_0^r f_{\Theta,R}(\phi, \rho; \sigma) d\rho d\phi \quad (103)$$

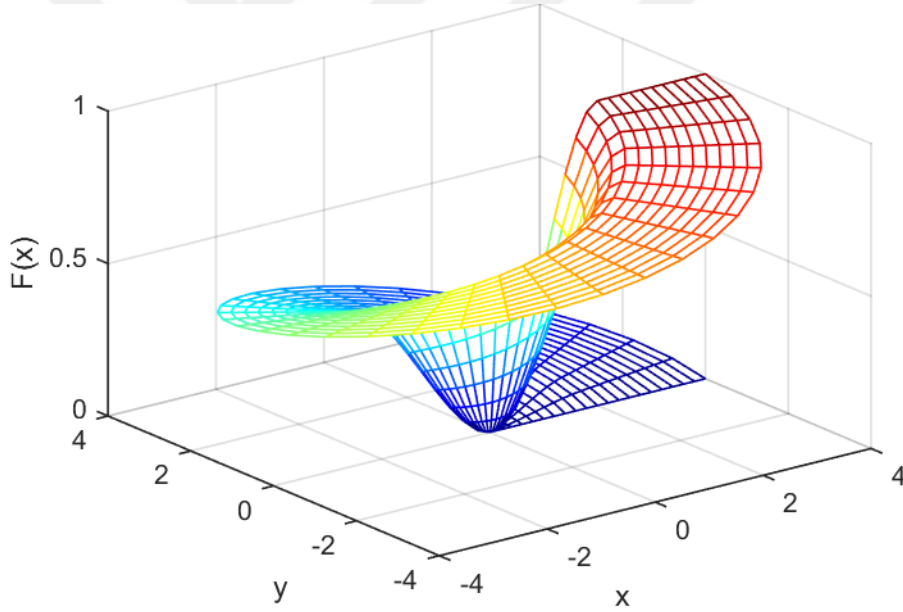
biçiminde tanımlanır ve integrali alınırsa,

$$\begin{aligned}
F_{\Theta,R}(\theta, r; b) &= \theta \int_0^r \frac{3}{\pi b^2} \left(1 - \frac{\rho}{b}\right) \rho d\rho \\
&= \frac{\theta}{2\pi} \left[\frac{r^2}{b^3} (3b - 2r) \right]_0^r
\end{aligned} \tag{104}$$

eşitliği elde edilir ve sınırlar yerine konursa birikimli dağılım fonksiyonu,

$$F_{\Theta,R}(\theta, r; b) = \frac{\theta}{2\pi} \left[\frac{r^2}{b^3} (3b - 2r) \right] \tag{105}$$

biçiminde elde edilir. Bu fonksiyonun $b = 2$ parametrelili birikimli dağılım fonksiyonunun grafiği Şekil 29'de verilmiştir.



Şekil 29. $b = 2$ parametrelili kutupsal üçgen dağılımının birikimli dağılım fonksiyonu

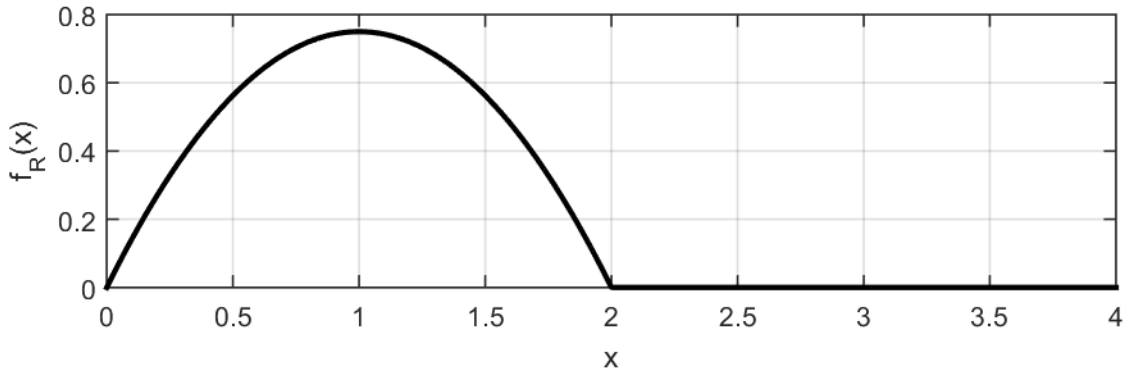
Kutupsal üçgen dağılımının R 'ye göre marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu (102) eşitliği yardımıyla,

$$f_R(r; b) = \int_0^{2\pi} \frac{3}{\pi b^2} \left(1 - \frac{r}{b}\right) r d\phi \tag{106}$$

biçiminde yazılabilir. Bu eşitlikte integral alınıp sınırlar yerine konursa kutupsal üçgen dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_R(r; b) = \frac{6r}{b^2} \left(1 - \frac{r}{b}\right) \quad (107)$$

biçiminde bulunur. $b = 2$ parametrelili kutupsal üçgen dağılımın R 'ye göre marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği Şekil 36'te verilmiştir.



Şekil 30. $b = 2$ parametrelili kutupsal üçgen dağılımın R 'ye göre marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu

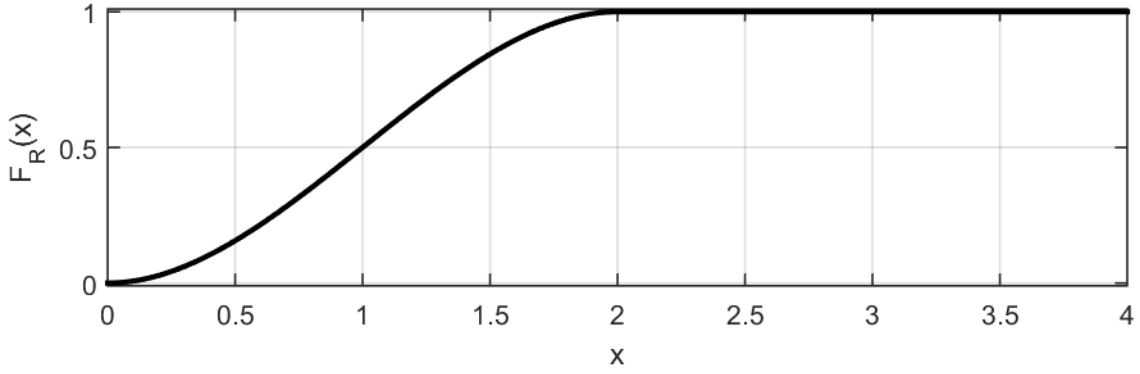
(107) eşitliği $[0, r]$ sınırlarında r 'ye göre integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} F_R(r; b) &= \int_0^r \frac{6\rho}{b^2} \left(1 - \frac{\rho}{b}\right) d\rho \\ &= \frac{r^2}{b^3} (3b - 2r) \Big|_0^r \end{aligned} \quad (108)$$

eşitliği elde edilir ve sınırlar yerine konursa,

$$F_R(r; b) = \frac{r^2}{b^3} (3b - 2r) \quad (109)$$

biçiminde kutupsal normal dağılımın R 'ye göre marjinal birikimli dağılım fonksiyonu bulunmuş olur. $b = 2$ parametrelili kutupsal üçgen dağılımın R 'ye göre marjinal birikimli dağılım fonksiyonunun grafiği Şekil 31'de verilmiştir.



Şekil 31. $b = 2$ parametrelü kutupsal üçgen dağılımın R 'ye göre marjinal birikimli dağılım fonksiyonu

Kutupsal normal dağılımın Θ 'ye göre koşullu dağılım marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu (102) eşitliği yardımıyla,

$$f_{\Theta}(\theta; b) = \int_0^b \frac{3}{\pi b^2} \left(1 - \frac{r}{b}\right) r dr \quad (110)$$

biçiminde yazılabilir. Bu eşitlikte integral alınıp sınırlar yerine konursa kutupsal normal dağılımın Θ 'ya göre olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{\Theta}(\theta; b) = \frac{1}{2\pi} \quad (111)$$

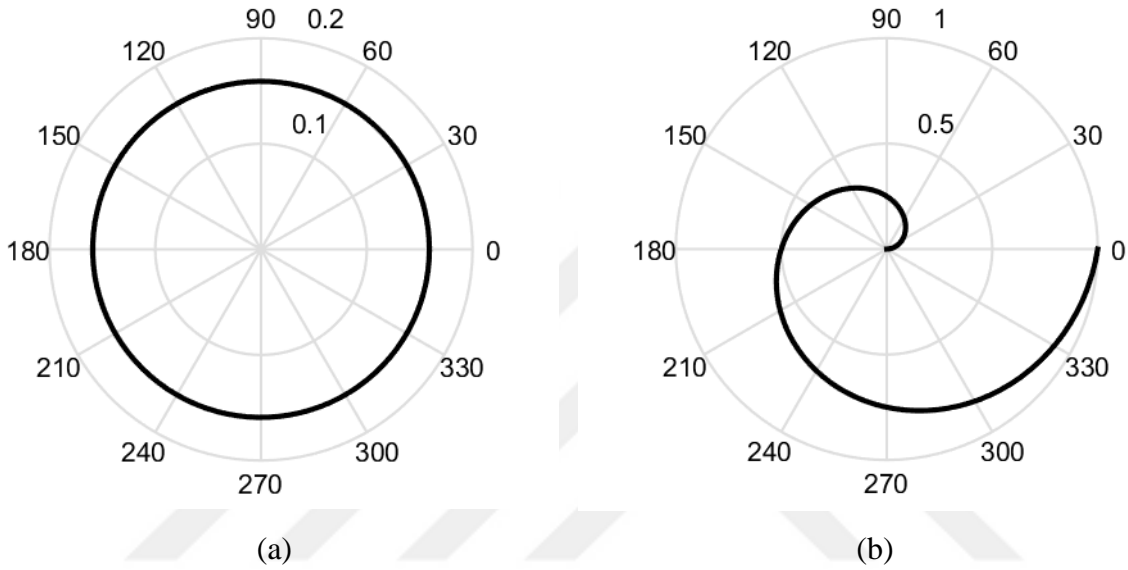
biçiminde bulunur. (111) eşitliği $[0, \theta]$ sınırlarında θ 'ya göre integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} F_{\Theta}(\theta; b) &= \int_0^{\theta} \frac{1}{2\pi} d\phi \\ &= \frac{\phi}{2\pi} \Big|_0^{\theta} \end{aligned} \quad (112)$$

eşitliği elde edilir ve sınırlar yerine konursa,

$$F_{\Theta}(\theta; b) = \frac{\theta}{2\pi} \quad (113)$$

biçiminde kutupsal normal dağılımın Θ 'ya göre marjinal birikimli dağılım fonksiyonu bulunmuş olur. $b = 2$ parametrelili kutupsal üçgen dağılımın Θ 'ya göre marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu ve marjinal birikimli dağılım fonksiyonunun grafikleri Şekil 32'de verilmiştir.



Şekil 32. $b = 2$ parametrelili kutupsal üçgen dağılımın Θ 'ya göre marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu ve marjinal birikimli dağılım fonksiyonunun grafiği; (a) Marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu; (b) Marjinal birikimli dağılım fonksiyonu.

2.2. Kutupsal Koordinatlarda Histogram

Histogramlar verilerin sıklıklarını gösterirken olasılık yoğunluk fonksiyonuna benzemesi için tek değişkenlilerde eşit aralık, iki değişkenlilerde eşit alan kullanılmaktadır. Dolayısıyla iki değişkenli verilerin histogram gösterimi kartezyen koordinatlarda yapıldığında eşit alanlar kullanılırken kutupsal koordinatlarda eşit alanlı dilimler kullanılmalıdır.

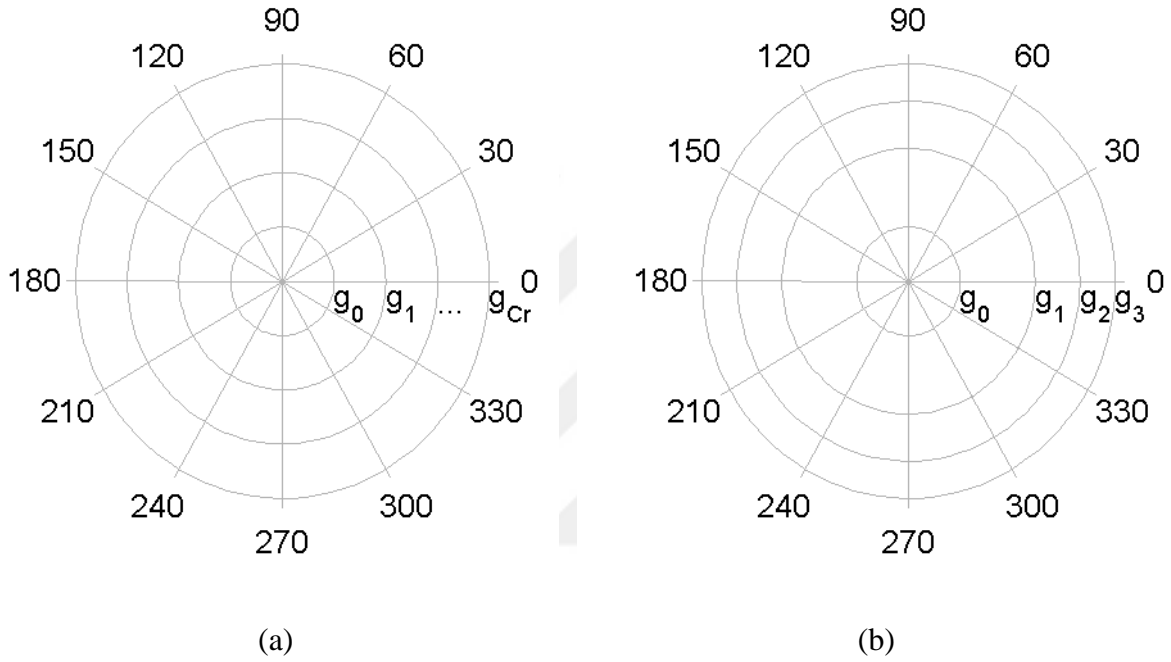
Kutupsal histogram bulunurken açısal değişim eşit aralıkta alınmıştır. Buna göre tüm çember 2π olarak alınıp bu çember C_θ tane dilime bölünürse her dilimin aralığı,

$$\Delta\psi = \frac{2\pi}{C_\theta} \quad (114)$$

olarak bulunabilir. Bu aralığa göre tüm dilimlerin sınırları,

$$\psi_j = j \cdot \Delta\psi, \quad j = 0, 1, 2, \dots, C_\theta \quad (115)$$

biçiminde bulunur. $\Delta\psi = \pi/6$ olduğu duruma göre grafiksel gösterimi Şekil 33'de verilmiştir.



Şekil 33. Kutupsal ızgaraların gösterimi; (a) Eşit artımlı (aralıklı) yarıçaplara göre ızgaralar; (b) Eşit dilim alanına göre ızgaralar.

Kutupsal koordinatları açılar eşit dağıtıldığı için dilim alanların eşitliği için yarıçapların değişken seçilmesi gerekir. Bu durumda iç çember (g_0) ile dış çember (g_{C_r}) arasında C_r tane daire dilimine bölünmesi istenirse her çember diliminin eşit olması için her daire dilim alanının,

$$A_k = \frac{A_{C_r}}{C_r}, \quad k = 1, 2, \dots, C_r \quad (116)$$

olması gerekir. Bu eşitlikten yol çıkarak,

$$A_k = \frac{\Delta\psi}{2\pi} \pi \left(\frac{g_{\tilde{c}_r}^2 - g_0^2}{C_r} \right) \quad (117)$$

eşitliği yazılabilir. $k = 1$ için (117) eşitliği düzenlenirse,

$$\frac{\Delta\psi}{2} (g_1^2 - g_0^2) = \frac{\Delta\psi}{2} \left(\frac{g_{\tilde{c}_r}^2 - g_0^2}{C_r} \right) \quad (118)$$

eşitliği elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapırsa,

$$g_1^2 - g_0^2 = \frac{g_{\tilde{c}_r}^2 - g_0^2}{C_r} \quad (119)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte g_1^2 çekilirse,

$$g_1^2 = \frac{g_{\tilde{c}_r}^2 - g_0^2}{C_r} + g_0^2 \quad (120)$$

eşitliği elde edilir. Aynı şekilde ikinci çemberdeki dilimlerin yarıçapları için alan eşitliği kullanılırsa,

$$g_2^2 - g_1^2 = \frac{g_{\tilde{c}_r}^2 - g_0^2}{C_r} \quad (121)$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlikte g_2^2 çekilirse,

$$g_2^2 = \frac{g_{\tilde{c}_r}^2 - g_0^2}{C_r} + g_1^2 \quad (122)$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlikte g_1^2 yerine (120) eşitliği yazılırsa (122) eşitliği

$$g_2^2 = 2 \frac{g_{\tilde{c}_r}^2 - g_0^2}{C_r} + g_0^2 \quad (123)$$

biçimine dönüşür. İşlem devam edilerek üçüncü çember dilimlerinin yarı çapı,

$$g_3^2 = \frac{g_{C_r}^2 - g_0^2}{C_r} + g_2^2 \quad (124)$$

biçiminde bulunur. Burada g_2^2 yerine (123) eşitliği konursa,

$$g_3^2 = 3 \frac{g_{C_r}^2 - g_0^2}{C_r} + g_0^2 \quad (125)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik genelleştirilirse k. çember diliminin üst yarıçapı,

$$g_k^2 = k \frac{g_{C_r}^2 - g_0^2}{C_r} + g_0^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots, c \quad (126)$$

biçiminde elde edilir.

2.3. Kutupsal Dağılım Fonksiyonlarında Rastgele Sayı Oluşturma

Önceki bölümlerde tanımlanan kutupsal dağılım fonksiyonlarının değişkenleri Θ ve R değişkenlerinin marjinal dağılım fonksiyonları,

$$F_{\Theta, R}(\theta, r) = F_{\Theta}(\theta)F_R(r) \quad (127)$$

koşulunu sağladıkları için bu iki değişken birbirinden bağımsız olarak alınmıştır. İki değişkenli kutupsal dağılım fonksiyonundan rastgele sayı üretirken iki değişkenin ayrı ayrı marjinal dağılım fonksiyonlarından yararlanılmıştır.

Bu çalışmada, marjinal dağılım fonksiyonlarından rastgele sayı üretilirken en yaygın iki yöntem kullanılmıştır. Bu yöntemler;

- Ters Dönüşüm,
- Ret-Kabul

yöntemleridir. Bu yöntemlerden ters dönüşüm yöntemi en sağlam yöntem olmasına rağmen bazen bazı dağılımların tersinin alınmasında sorunlardan dolayı ret-kabul yöntemi kullanılır (Devroye, 1986).

Bu çalışmada, rastgele sayı üretmek için kutupsal düzgün dağılım, kutupsal üstel dağılım, kutupsal normal dağılım ve kutupsal üçgen dağılımdan yararlanılarak rastgele sayı üretilmiştir.

2.3.1. Kutupsal Düzgün Dağılım Fonksiyonundan Rastgele Sayı Üretmek

Kutupsal düzgün dağılımdan rastgele sayı üretmek için (60) eşitliğini U gibi $[0,1]$ aralığında düzgün dağılımdan üretilmiş bir rastgele değişkene eşitlenirse,

$$\frac{R^2 - a^2}{b^2 - a^2} = U \quad (128)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte R değişkeni çekilirse,

$$R = \sqrt{a^2 + U(b^2 - a^2)} \quad (129)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik yardımıyla kutupsal düzgün dağılım için R bileşenin rastgele sayısı üretilmiş olur. Kutupsal düzgün dağılımın Θ bileşeni için (64) eşitliğini U gibi $[0,1]$ aralığında düzgün dağılımdan üretilmiş bir rastgele değişkene eşitlenirse,

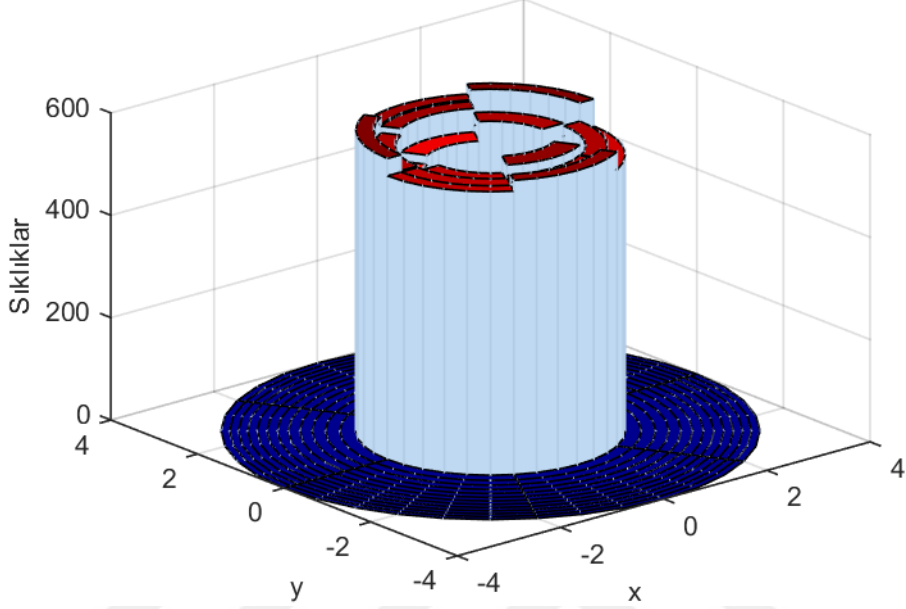
$$\frac{\Theta}{2\pi} = U \quad (130)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte Θ çekilirse,

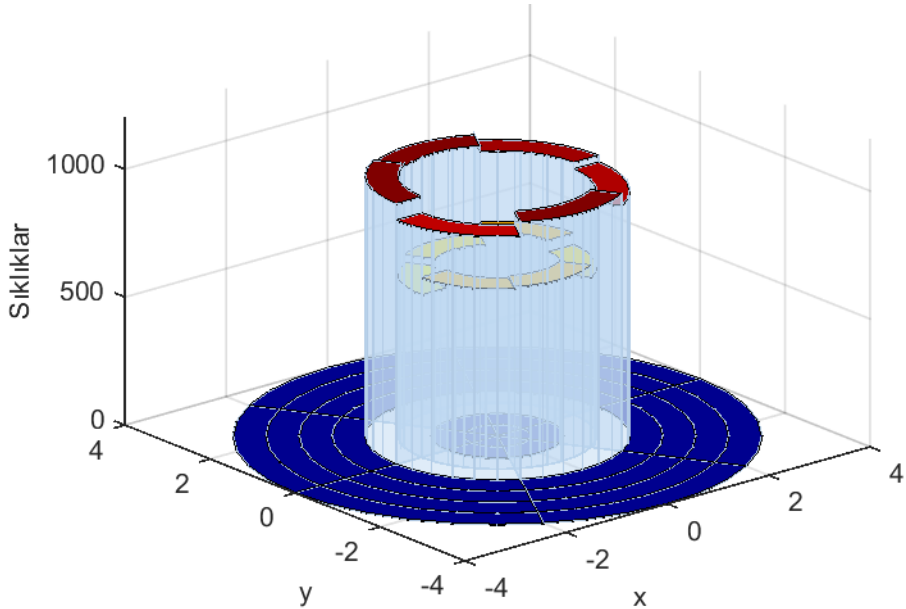
$$\Theta = 2\pi U \quad (131)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik kullanılarak Θ bileşenin rastgele sayısı üretilir.

Örnek $a = 1$ ve $b = 2$ parametrelili kutupsal düzgün dağılımdan 10.000 tane rastgele sayı üretilip bunları eşit alanlı kutupsal histogramı Şekil 34'te ve eşit aralıklı kutupsal histogram ise Şekil 35'te verilmiştir.



Şekil 34 $a = 1$ ve $b = 2$ parametrelili kutupsal düzgün dağılımdan üretilen 10.000 tane rastgele sayının eşit alanlı kutupsal histogramı.



Şekil 35 $a = 1$ ve $b = 2$ parametrelili kutupsal düzgün dağılımdan üretilen 10.000 tane rastgele sayının eşit aralıklı kutupsal histogramı.

2.3.2. Kutupsal Üstel Dağılım Fonksiyonundan Rastgele Sayı Üretmek

Kutupsal üstel dağılımdan rastgele sayı üretmek için (76) eşitliğini U gibi $[0,1)$ aralığında düzgün dağılımdan üretilmiş bir rastgele değişkene eşitlenirse,

$$1 - (1 + \lambda R)e^{-\lambda R} = U \quad (132)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte R değişkeni analitik olarak çekilemediği için bu kutupsal dağılımdan R bileşeni için rastgele sayı üretimi Ret-kabul yöntemi yardımıyla yapılmıştır. Ret-kabul yöntemine göre seçilen yardımcı fonksiyonu,

$$g(r) = \lambda e^{-\lambda r} \quad (133)$$

olarak verilsin. Bu fonksiyondan rastgele sayı üretimi için

$$V = -\frac{1}{\lambda} \log(1 - U) \quad (134)$$

eşitliği kullanılabilir. (133) eşitliği yardımıyla,

$$\frac{f(r)}{g(r)} \leq c \quad (135)$$

koşulunu sağlıyorsa en küçük c değeri ne olmalıdır. Bu eşitsizlikte (74) ve (133) yerine konursa,

$$\frac{\lambda^2 r e^{-\lambda r}}{\lambda e^{-\lambda r}} \leq c \quad (136)$$

eşitliği elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$c \geq \lambda r \quad (137)$$

eşitsizliği elde edilir.

Algoritma 1. Ret-kabul ile rastgele sayı üretimi.

-
- Adım 1. V rastgele değerini $g(r)$ 'nin dağılım fonksiyonundan üret,
 Adım 2. U , $[0,1)$ aralığında düzgün dağılımdan rastgele sayı üret,
 Adım 3. Eğer $U \leq \frac{g(V)}{c.f(V)}$ ise $R = V$ atamasını yap; Değilse Adım 1'e git.
-

Yukarıda verilen algoritma yardımıyla kutupsal üstel dağılım için R bileşenin rastgele sayısı üretilmiş olur. Kutupsal üstel dağılımın Θ bileşeni için (80) eşitliğini U gibi $[0,1)$ aralığında düzgün dağılımdan üretilmiş bir rastgele değişkene eşitlenirse,

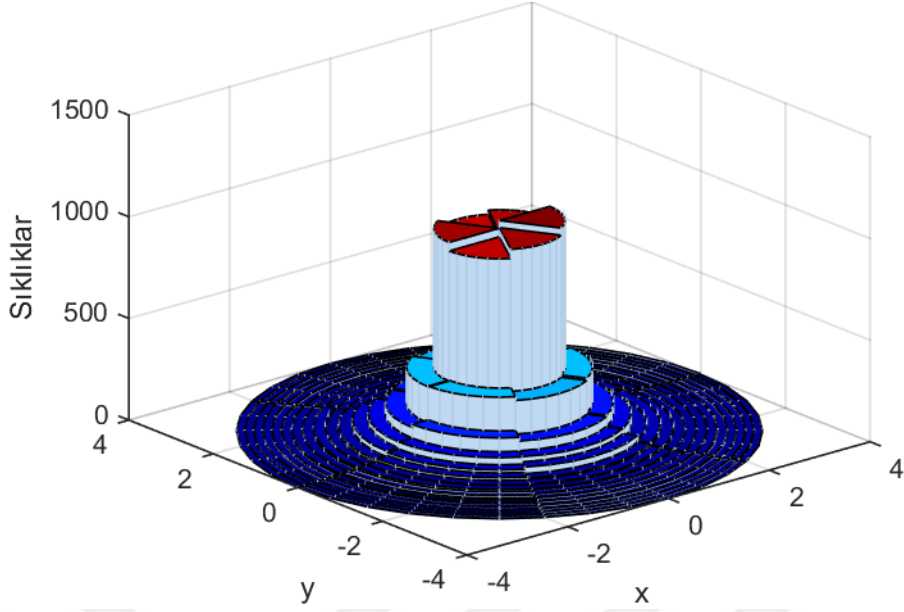
$$\frac{\Theta}{2\pi} = U \quad (138)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte Θ çekilirse,

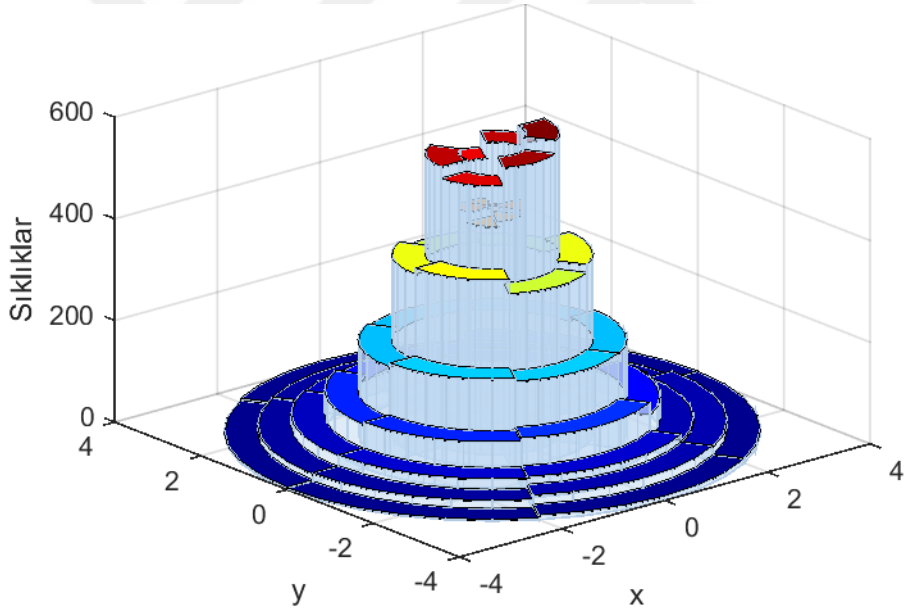
$$\Theta = 2\pi U \quad (139)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik kullanılarak Θ bileşenin rastgele sayısı üretilebilir.

Örnek $\lambda = 1$ parametrelili kutupsal üstel dağılımdan 10.000 tane rastgele sayı üretilip bunları eşit alanlı kutupsal histogramı Şekil 36'da ve eşit aralıklı kutupsal histogram ise Şekil 37'de verilmiştir.



Şekil 36. $\lambda = 2$ parametrelili kutupsal üstel dağılımdan üretilen 10.000 tane rastgele sayının eşit alanlı kutupsal histogramı.



Şekil 37. $\lambda = 2$ parametrelili kutupsal üstel dağılımdan üretilen 10.000 tane rastgele sayının eşit aralıklı kutupsal histogramı.

2.3.3. Kutupsal Normal Dağılım Fonksiyonundan Rastgele Sayı Üretmek

Kutupsal normal dağılımdan rastgele sayı üretmek için (92) eşitliğini U gibi $[0,1)$ aralığında düzgün dağılımdan üretilmiş bir rastgele değişkene eşitlenirse,

$$1 - e^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}} = U \quad (140)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte R değişkeni çekilirse,

$$R = \sigma\sqrt{-2\log(1 - U)} \quad (141)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik yardımıyla kutupsal düzgün dağılım için R bileşenin rastgele sayısı üretilmiş olur. Kutupsal normal dağılımın Θ bileşeni için (96) eşitliğini U gibi $[0,1)$ aralığında düzgün dağılımdan üretilmiş bir rastgele değişkene eşitlenirse,

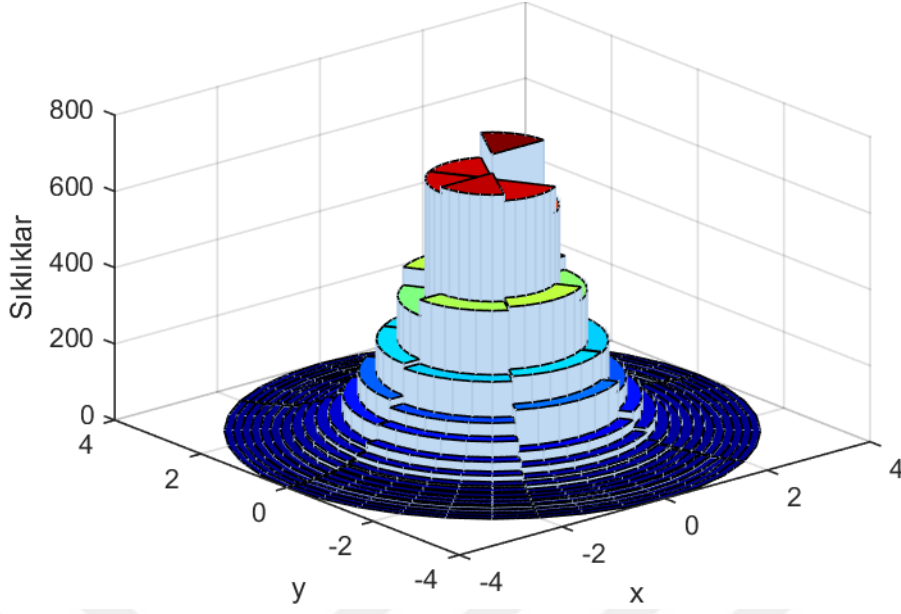
$$\frac{\Theta}{2\pi} = U \quad (142)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte Θ çekilirse,

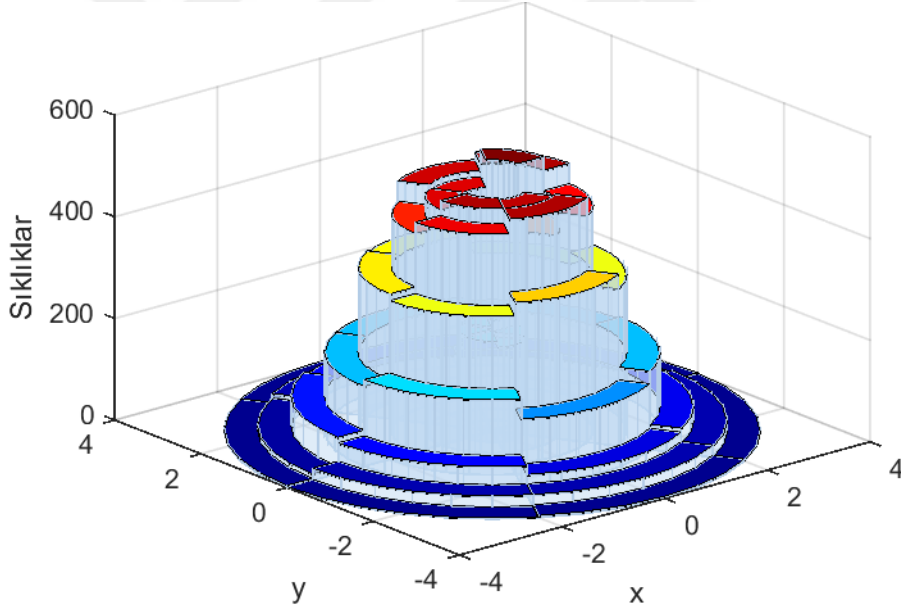
$$\Theta = 2\pi U \quad (143)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik kullanılarak Θ bileşenin rastgele sayısı üretilebilir.

Örnek $\sigma = 1$ parametrelili kutupsal normal dağılımdan 10.000 tane rastgele sayı üretilip bunları eşit alanlı kutupsal histogramı Şekil 38'de ve eşit aralıklı kutupsal histogram ise Şekil 39'da verilmiştir.



Şekil 38 $\sigma = 1$ parametrelı kutupsal normal dağılımdan üretilen 10.000 tane rastgele sayının eşit alanlı kutupsal histogramı.



Şekil 39 $\sigma = 1$ parametrelı kutupsal normal dağılımdan üretilen 10.000 tane rastgele sayının eşit aralıklı kutupsal histogramı.

2.3.1. Kutupsal Üçgen Dağılım Fonksiyonundan Rastgele Sayı Üretmek

Kutupsal üçgen dağılımdan rastgele sayı üretmek için (109) eşitliğini U gibi $[0,1)$ aralığında düzgün dağılımdan üretilmiş bir rastgele değişkene eşitlenirse,

$$\frac{R^2}{b^3}(3b - 2R) = U \quad (144)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte R değişkeni çekilirse çok uzun bir eşitlik elde edilir. İşlem kısılalığı için, bu kutupsal dağılımdan R bileşeni için rastgele sayı üretimi Ret-kabul yöntemi yardımıyla yapılmıştır.

Ret-kabul yöntemine göre seçilen yardımcı fonksiyonu,

$$g(r) = \frac{2}{b} \left(1 - \frac{r}{b}\right) \quad (145)$$

olarak verilsin. Bu fonksiyondan rastgele sayı üretimi için,

$$V = b - b\sqrt{1 - U} \quad (146)$$

eşitliği kullanılabilir. (145) eşitliği yardımıyla,

$$\frac{f(r)}{g(r)} \leq c \quad (147)$$

koşulunu sağlıyorsa en küçük c değeri ne olmalıdır. Bu eşitsizlikte (107) ve (145) yerine konursa,

$$\frac{\frac{6r}{b^2} \left(1 - \frac{r}{b}\right)}{\frac{2}{b} \left(1 - \frac{r}{b}\right)} \leq c \quad (148)$$

eşitliği elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$c \geq \frac{3r}{b} \quad (149)$$

eşitsizliği elde edilir.

Algoritma 1. yardımıyla kutupsal üçgen dağılım için R bileşenin rastgele sayısı üretilmiş olur. Kutupsal üçgen dağılımın Θ bileşeni için (113) eşitliğini U gibi $[0,1)$ aralığında düzgün dağılımdan üretilmiş bir rastgele değişkene eşitlenirse,

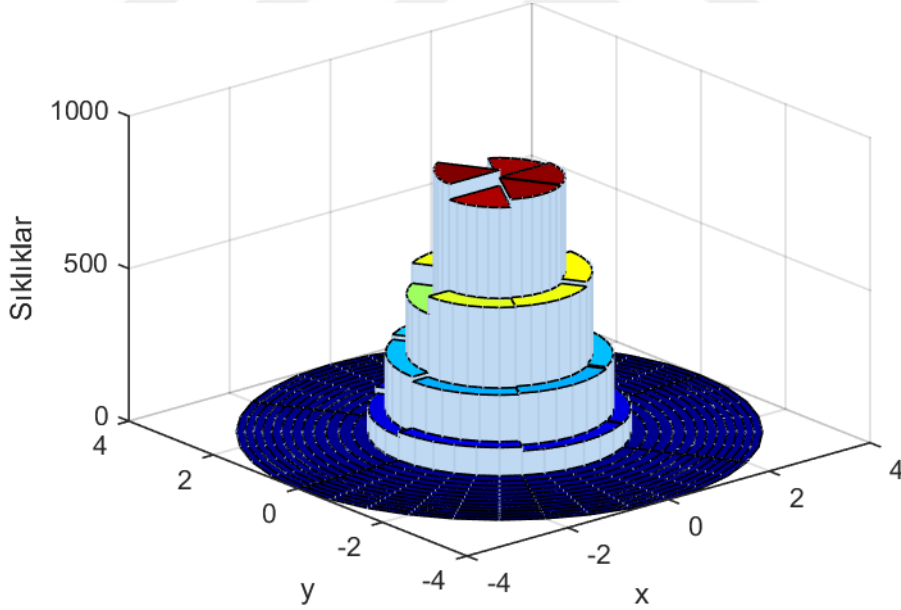
$$\frac{\Theta}{2\pi} = U \quad (150)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte Θ çekilirse,

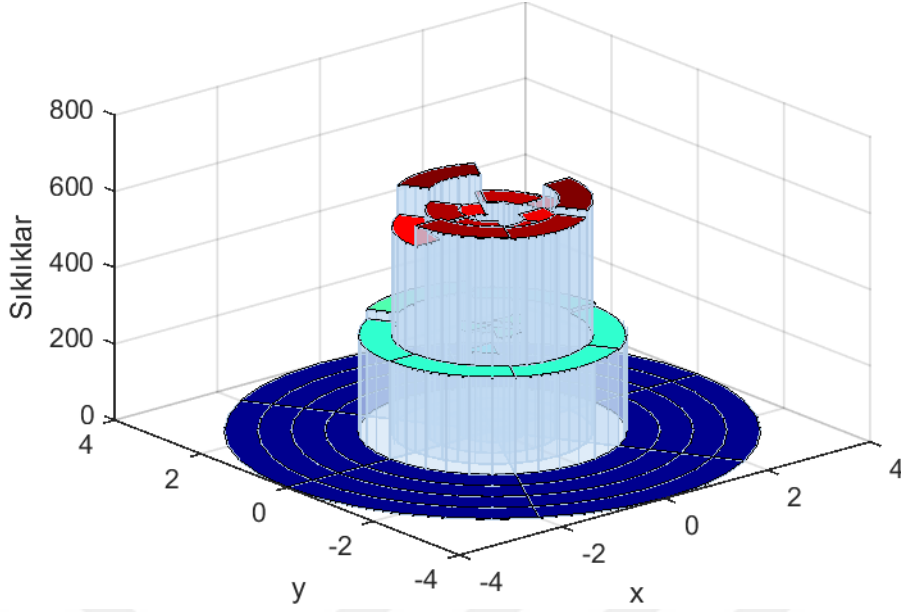
$$\Theta = 2\pi U \quad (151)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik kullanılarak Θ bileşenin rastgele sayısı üretilebilir.

Örnek $\lambda = 1$ parametrelili kutupsal üçgen dağılımdan 10.000 tane rastgele sayı üretilip bunları kutupsal histogramı Şekil 40'te verilmiştir.



Şekil 40. $b = 2$ parametrelili kutupsal üçgen dağılımdan üretilen 10.000 tane rastgele sayının eşit alanlı kutupsal histogramı.



Şekil 41 $b = 2$ parametrelili kutupsal üçgen dağılımdan üretilen 10.000 tane rastgele sayının eşit aralıklı kutupsal histogramı.

2.4. Kutupsal Koordinatlarda Uyum İyiliği Testi

Bu çalışmada kutupsal koordinatlarda tanımlanmış dağılımlar için uyum iyiliği testleri için ki-kare ve Kolmogorov-Smirnov testleri kullanılmıştır. Bu testler uyum iyiliği testleri arasında en yaygın iki yöntem oldukları için tercih edilmiştir.

Uyum iyiliği testlerinde marjinal dağılım fonksiyonlarının kullanımı ile yapılacak olan testlerde uzamsal ve açısal değişkene göre yapılacak iki ayrı testin sonuçlarının aynı anda her ikisinin de H_0 hipotezinin kabul edilebilirliği $(1 - \alpha)^2$ eşitliğine (Marques de Sa, 2007) göre hesaplanır. Bu durumda yanılma payını $(\hat{\alpha} = 1 - (1 - \alpha)^2)$ artacağı için istenmeyen sonuçlar elde edilecektir. Soruna geçici bir çözüm olarak açısal değişkenin düzgün dağıldığı varsayımı yapılarak uzamsal değişkenin uyum iyiliği testi yapılmıştır.

2.5. Kutupsal Ki-Kare Uyum İyiliği Testi

Ki-kare uyum iyiliği testi hem iki değişkenli dilimli alan yapıda hem de marjinal fonksiyonları kullanılarak yapılmıştır.

2.5.1. İki Değişkenli Dilimli Ki-Kare Testi

İki değişkenli tek örneklem ki-kare testi için $(\theta, r) = \{(\theta_i, r_i), i = 1, 2, \dots, n\}$ örnek değerlerinin bağımsız ve sürekli özdeş bir dağılımdan $F(\theta, r)$ elde edildiği varsayılınsın.

Bu testte sıfır (yokluk) hipotezi (H_0) ve karşıt hipotez (H_1) aşağıdaki gibi iki hipoteze dayanmaktadır. Bu hipotezler,

H_0 : Gözlem değerleri $F_0(\theta, r)$ dağılımından gelmektedir ($F(\theta, r) = F_0(\theta, r)$),

H_1 : Gözlem değerleri $F_0(\theta, r)$ dağılımından gelmemektedir ($F(\theta, r) \neq F_0(\theta, r)$),

biçiminde verilmektedir. Burada $F_0(\theta, r)$ gözlem değerlerinin geldiği öne sürülen dağılım fonksiyonudur. Ayrıca testlerin yapılmasında bir yanılma payı (α) belirlenerek testler gerçekleştirilir.

Sürekli fonksiyonlarda ki-kare testi yapılabilmesi için öncelikle sınıf sayılarının ve sınıf alanlarının belirlenmesi gerekir. Sınıf sayıları (C_θ, C_r) belirlenmesinde literatürde değişik çalışmalar olmasına rağmen çoğu zaman araştırmacının tercihinin bırakılır. Açısal ve uzamsal sınıf sınırları (115) ve (126) eşitliklerinde verilmiştir. Bu eşitliklere göre her sınıf bölgesine düşen gözlem sayısı (gözlenen frekanslar),

$$O_{jk} = \sum_{i=1}^n \begin{cases} 1, & (\psi_{j-1} \leq \theta_i < \psi_j) \wedge (g_{k-1} \leq r_i < g_k), \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases} \quad (152)$$

$(j = 1, 2, \dots, C_\theta; k = 1, 2, \dots, C_r)$

biçiminde hesaplanırken beklenen frekanslar,

$$E_{jk} = n[F_0(\psi_j, g_k) - F_0(\psi_j, g_{k-1}) - F_0(\psi_{j-1}, g_k) + F_0(\psi_{j-1}, g_{k-1})], \quad (153)$$

$(j = 1, 2, \dots, C_\theta; k = 1, 2, \dots, C_r)$

biçiminde hesaplanmaktadır. Beklenen ve gözlenen frekanslar yardımıyla ki-kare değeri,

$$\chi_h^2 = \sum_{j=1}^{C_\theta} \sum_{k=1}^{C_r} \frac{(O_{jk} - E_{jk})^2}{E_{jk}} \quad (154)$$

biçiminde hesaplanır.

Bir sonraki adım verilen yanılma payına göre H_0 hipotezinin gerçekleşmesi gereken ki-kare dağılımından $(1 - \alpha)$ güven katsayısını veren $\chi_{v,1-\alpha}^2$ değerinin bulunması gerekir. Bu ise ki-kare tablosundan (O'connor vd., 2012) yararlanarak bulunur. Sonuç olarak (155) eşitsizliğinin doğru olması durumunda H_0 kabul edilmiş olur. Aksi durumda karşıt hipotez kabul edilmiş olur.

$$\chi_h^2 < \chi_{v,1-\alpha}^2 \quad (155)$$

Burada v değeri serbestlik derecesi olup $v = C_\theta C_r - 1$ eşitliği ile bulunur.

2.5.2. Marjinal Ki-Kare Testi

Marjinal dağılım fonksiyonlarına göre uyum iyiliği testi yapıldığında açışal değişkenin düzgün dağıldığı varsayımı yapılarak ki-kare testi yapılmıştır. Tek değişkenli tek örneklem kutupsal ki-kare testi için $r = \{r_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ örnek değerlerinin bağımsız ve sürekli özdeş bir marjinal dağılımdan $F_R(r)$ elde edildiği varsayılımsın.

Bu testte sıfır (yokluk) hipotezi (H_0) ve karşıt hipotez (H_1) aşağıdaki gibi iki hipoteze dayanmaktadır. Bu hipotezler,

$$H_0: \text{Gözlem değerleri } F_0(r) \text{ dağılımından gelmektedir } (F_R(r) = F_0(r)),$$

$$H_1: \text{Gözlem değerleri } F_0(r) \text{ dağılımından gelmemektedir } (F_R(r) \neq F_0(r)),$$

biçiminde verilmektedir. Burada $F_0(r)$ gözlem değerlerinin geldiği öne sürülen dağılım fonksiyonudur. Ayrıca testlerin yapılmasında bir yanılma payı (α) belirlenerek testler gerçekleştirilir.

Sınıf sayısı (C_r) belirlenmesinde literatürde değişik çalışmalar olmasına rağmen çoğu zaman araştırmacının tercihinin bırakılır. Sınıf genişliği iki biçimde bulunur. Birincisi en büyük değer ile en küçük değerin eşit aralıklara bölünmesi, ikincisi ise keyfi alt ve üst sınırların eşit aralıklara bölünmesidir.

$$\Delta g = \frac{r_n - r_1}{C_r} \quad (156)$$

biçiminde bulunur. Burada r_1 verideki en küçük değeri, r_n ise verideki en büyük değeri göstermektedir. j . sınıfın üst sınırı ,

$$g_j = r_1 + (j - 1) \cdot \Delta g, \quad j = 1, 2, \dots, C_r \quad (157)$$

biçiminde hesaplanmaktadır.

Her sınıf aralığına düşen gözlem sayısı (gözlenen frekanslar),

$$O_j = \sum_{i=1}^n \begin{cases} 1, & g_{j-1} \leq r_i < g_j \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}, \quad j = 1, 2, \dots, C_r \quad (158)$$

biçiminde hesaplanırken beklenen frekanslar,

$$E_j = n[F_0(g_j) - F_0(g_{j-1})], \quad j = 1, 2, \dots, C_r \quad (159)$$

biçiminde hesaplanmaktadır. Beklenen ve gözlenen frekanslar yardımıyla ki-kare değeri,

$$\chi_h^2 = \sum_{j=1}^c \frac{(O_j - E_j)^2}{E_j} \quad (160)$$

biçiminde hesaplanır. Hesaplanan ki-kare istatistiğini χ_h^2 ile $(1 - \alpha)$ güven düzeyinde ve $v = C_r - 1$ serbestlik derecesindeki ki-kare tablo değeri karşılaştırılması,

$$\chi_h^2 < \chi_{v, 1-\alpha}^2 \quad (161)$$

biçiminde yapılır. Test istatistiği tablo değerinden küçük ise H_0 hipotezi kabul edilir. Aksi durumda karşıt hipotez H_1 kabul edilir.

2.6. Kutupsal Kolmogorov-Smirnov Uyum İyiliği Testi

Marjinal dağılım fonksiyonlarına göre uyum iyiliği testi yapıldığında açısız değişkenin düzgün dağıldığı varsayımı yapılarak Kolmogorov-Smirnov testi yapılmıştır. Tek değişkenli tek örneklem kutupsal Kolmogorov-Smirnov testi için

$r = \{r_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ örnek değerlerinin bağımsız ve sürekli özdeş bir marjinal dağılımdan $F_R(r)$ elde edildiği varsayılınsın.

Bu testte sıfır (yokluk) hipotezi (H_0) ve karşıt hipotez (H_1),

H_0 : Gözlem değerleri $F_0(r)$ dağılımından gelmektedir ($F_R(r) = F_0(r)$),

H_1 : Gözlem değerleri $F_0(r)$ dağılımından gelmemektedir ($F_R(r) \neq F_0(r)$),

biçiminde verilmektedir. Burada $F_0(r)$ gözlem değerlerinin geldiği öne sürülen dağılım fonksiyonudur. Ayrıca testlerin yapılmasında bir yanılma payı (α) belirlenerek testler gerçekleştirilir.

Kurulan hipotezi doğruluğunu test etmek için öncelikle test istatistiğinin belirlenmesi gerekir. Kolmogorov-Smirnov test istatistiği D_n ,

$$D_n = \max_{i=1}^n (|F_n(r_i) - F_0(r_i)|) \quad (162)$$

biçiminde hesaplanır. Burada $F_n(r)$ fonksiyonu marjinal deneysel dağılım fonksiyonu olarak tanımlanmakta ve

$$F_n(r_i) = \frac{I(r_i, r)}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (163)$$

biçiminde hesaplanmaktadır. Burada $I(r_i, r)$ fonksiyonu gösterge fonksiyonu olarak tanımlanmakta ve

$$I(r_i, r) = \sum_{k=1}^n \begin{cases} 1, & r_k \leq r_i \\ 0, & r_k > r_i \end{cases} \quad (164)$$

biçiminde hesaplanmaktadır.

3. BULGULAR VE SONUÇLAR

Bu bölümde kutupsal dağılım fonksiyonları için geliştirilen ki-kare ve Kolmogorov-Smirnov uyum iyiliği testlerinin başarımının ölçülmesi amaçlanmıştır. Bu işlem için dört farklı dağılım fonksiyonu seçilmiştir. Her dağılımdan sırasıyla 50,100,200,300 ve 500 örnek boyutunda örneklemeler alınmıştır. Bu örneklemeler 2 boyutlu ki-kare ($2B - \chi^2$), 1 boyutlu ki-kare ($1B - \chi^2$) ve 1 boyutlu Kolmogorov-Smirnov ($1B - KS$) testleri kullanılmıştır. Her örneklem boyutu için bu işlem 10,000 kez tekrar edilerek H_0 kabul yüzdeleri bulunmuştur. Tüm benzetimlerde yanılma payı $\alpha = 0.05$ kullanılmıştır.

$a = 1$ ve $b = 2$ parametrelili kutupsal düzgün dağılımdan üretilen rastgele sayılarının yüzde başarımları Tablo 1’de verilmiştir. Tablo 1’deki tüm değerler %95 civarında olduğu görülmektedir.

Tablo 1. Kutupsal düzgün dağılımın marjinal birikimli dağılım fonksiyonu için benzetim sonuçları

| n | $2B - \chi^2$ (%) | $1B - \chi^2$ (%) | $1B - KS$ (%) |
|-----|----------------------|----------------------|------------------|
| 50 | 94.14 | 94.79 | 96.17 |
| 100 | 94.43 | 94.84 | 95.81 |
| 200 | 95.12 | 95.20 | 96.13 |
| 300 | 95.10 | 95.05 | 94.95 |
| 500 | 95.13 | 94.73 | 95.33 |

$\lambda = 2$ parametrelili kutupsal üstel dağılımdan üretilen rastgele sayılarının yüzde başarımları Tablo 2’de verilmiştir. Tablo 2’de $2B - \chi^2$ sütunu dışındakiler %95 civarında bir başarımlar gösterirken $2B - \chi^2$ sütunu %95’den küçük değerler göstermektedir. Ancak örnek boyutu arttıkça bu oran %95’e yaklaşmaktadır. Bunun nedeni her sınıfa düşen beklenen frekans değerinin 5’ten küçük olmasıdır. Bu durumda beklenen frekans 5’ten küçük sınıflar komşu sınıflar ile birleştirilerek yeniden sınıflandırma yapılabilir. Diğer bir yaklaşım ise her sınıf eşit beklenen değere sahip olacak biçimde sınıflandırma yapmaktır.

Tablo 2. Kutupsal üstel dağılımın marjinal birikimli dağılım fonksiyonu için benzetim sonuçları

| n | $2B - \chi^2$ (%) | $1B - \chi^2$ (%) | $1B - KS$ (%) |
|-----|----------------------|----------------------|------------------|
| 50 | 89.54 | 94.67 | 96.16 |
| 100 | 91.42 | 95.04 | 95.91 |
| 200 | 92.60 | 94.97 | 96.12 |
| 300 | 93.16 | 95.09 | 95.91 |
| 500 | 93.85 | 95.06 | 95.39 |

$\sigma = 1$ parametrelili kutupsal normal dağılımdan üretilen rastgele sayılarının yüzde başarımları Tablo 3'te verilmiştir. Tablo 3'te $2B - \chi^2$ sütunu dışındakiler %95 civarında olmasına rağmen $2B - \chi^2$ sütunu aynen Tablo 2'de olduğu gibi örnek boyutu artıkça %95' yaklaşmaktadır.

Tablo 3. Kutupsal normal dağılımın marjinal birikimli dağılım fonksiyonu için benzetim sonuçları

| n | $2B - \chi^2$ (%) | $1B - \chi^2$ (%) | $1B - KS$ (%) |
|-----|----------------------|----------------------|------------------|
| 50 | 91.98 | 94.95 | 96.61 |
| 100 | 92.65 | 95.38 | 95.97 |
| 200 | 93.44 | 95.14 | 95.55 |
| 300 | 93.91 | 94.95 | 95.73 |
| 500 | 94.24 | 95.03 | 95.51 |

$b = 2$ parametrelili kutupsal düzgün dağılımdan üretilen rastgele sayılarının yüzde başarımları Tablo 4'te verilmiştir. Tablo 4'teki sonuçlar Tablo 2'de ve Tablo 3'tekilere benzer şekilde çıkmıştır. Bu sonuçlar göre kutupsal dağılımlar için marjinal uyum iyiliği

testlerinin çalıştığı söylenebilir. İki değişkenli ki-kare testi ise beklenen frekansları yeteri düzeyde ayarlanabilirse kullanılabilir.

Tablo 4. Kutupsal üçgen dağılımın marjinal birikimli dağılım fonksiyonu için benzetim sonuçları

| n | $2B - \chi^2$ (%) | $1B - \chi^2$ (%) | $1B - KS$ (%) |
|-----|----------------------|----------------------|------------------|
| 50 | 92.90 | 95.11 | 96.33 |
| 100 | 94.04 | 95.04 | 96.26 |
| 200 | 94.75 | 95.00 | 95.77 |
| 300 | 94.71 | 95.16 | 95.79 |
| 500 | 94.56 | 95.26 | 95.44 |

4. ÖNERİLER

- Bu çalışmada açısız değişimin dağılım fonksiyonu düzgün dağılım olarak seçilmiştir. Diğer dağılım çeşitleri seçilip bunlardan rastgele sayı üretilip bunların uyum iyiliği testleri uygulamaları geliştirilebilir.
- Bu çalışmada iki değişkenli kutupsal dağılım fonksiyonları tanımlanırken değişkenlerin birbirinden bağımsız olması koşulu getirilmiş ve buna göre uyum iyiliği testleri geliştirilmiştir. Bu testlerin değişkenlerinin bağımlı olması durumu içinde yöntemler geliştirilebilir.
- İki değişkenli kutupsal dağılım fonksiyonlarından elde edilen verilere doğrudan ki-kare testi uygulanabilirken Kolmogorov-Smirnov testleri doğrudan kullanılamamaktadır. Dolasıyla iki değişkenli kutupsal dağılım fonksiyonlarına doğrudan Kolmogorov-Smirnov testinin uygulanabilmesi için yeni yaklaşımlar geliştirilebilir.
- Bu çalışmada kartezyen koordinat sisteminde tanımlanan dağılımların kutupsal koordinat sistemindeki denklikleri tanımlanmıştır. Kutupsal dağılım fonksiyonlarının marjinal dağılım fonksiyonları tanımlanarak bunlardan kutupsal koordinatlarda rastgele sayılar üretilmiştir. Bu sayılara uyum iyiliği testleri uygulanarak başarımları ölçülmüştür. Aynı çalışmalar silindirik ve küresel koordinat sistemleri için de geliştirilebilir.
- Bu çalışmada ret-kabul ve ters dönüşüm yöntemi kullanılarak rastgele sayı üretilmiştir. Diğer rastgele sayı üretme algoritmaları kullanılarak bunların kullanılan yöntemlere göre başarımları karşılaştırılabilir.
- Bu çalışmada yapay veriler üretilerek teorik çalışmaların başarımları ölçülmüştür. Gerçek yaşam verileri kullanılarak yöntemin uygulamaları yapılabilir. Kartezyen koordinat sistemine göre üstünlükleri ve kesiklikleri belirlenebilir.
- Bu çalışmada uyum iyiliği testi olarak ki-kare ve Kolmogorov-Smirnov testleri üzerinde durulmuştur. Diğer uyum iyiliği testleri üzerinde de durulabilir ve başarımları karşılaştırılabilir.
- Bu çalışmada kutupsal koordinatlar için uyum iyiliği testleri geliştirilmiştir. Kutupsal koordinatlar için parametrik testler de geliştirilebilir.

- Bu çalışmada marjinal dağılım fonksiyonları kullanılarak yapılan uyum iyiliği testlerinde açısal değişken için düzgün dağıldığı varsayılarak uzamsal değişkenin marjinal dağılımına göre uyum iyiliği testi uygulanmıştır. Ancak bu varsayımın geçerli olmadığı durumlarda iki değişkenli kutupsal dağılımlar için Kolmogorov-Smirnov testi geliştirilebilir.



5. KAYNAKLAR

- Bakshaevev, A. ve Rudzkis, R., 2017. Goodness-of-fit tests based on the empirical characteristic function, Lithuanian Mathematical Journal, 1-16.
- Devroye, L., 1986. Non-Uniform Random Variate Generation, Springer.
- Ertel, B. R. ve Reed, H. J., 1999. Angle and time of arrival statistics for circular and elliptical scattering models, IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 17, 11, 1829-1840.
- Gibbons, J. D. ve Chakraborti, S., 2011. Nonparametric statistical inference, Springer.
- Hines, W. W., Montgomery, D. C., Goldman, D. M. ve Borror, C. M., 2008. Probability and statistics in engineering, John Wiley & Sons.
- Justel, A., Pena, D. ve Zamar, R., 1997. A multivariate Kolmogorov-Smirnov test of goodness of fit, Statistics and Probability Letters, 35, 3, 251-259.
- Kesemen, O., Tiryaki, B. K. ve Tuncay, U., 2016. A Novel Approximation for Computation Bivariate Distribution Functions in Polygonal Area, 5th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA-2016), Belgrade. 191.
- Kreyszig, E., 1999. Advanced engineering mathematics, John Willey & Sons Inc., New York.
- Marques de Sa, J., 2007. Applied Statistics using SPSS, STATISTICA, MATLAB and R, Springer.
- Massey Jr, F. J., 1951. The Kolmogorov-Smirnov test for goodness of fit, Journal of the American statistical Association, 46, 253, 68-78.
- Morrison, D. F., 1998. Multivariate analysis, overview, Wiley Online Library.
- Neter, J., Wasserman, W. ve Whitmore, G. A., 1988. Applied statistics, Allyn and Bacon.
- O'connor, P. D., O'Connor, P. ve Kleyner, A., 2012. Practical reliability engineering, John Wiley & Sons.
- Papoulis, A. ve Pillai, S. U., 2002. Probability, random variables, and stochastic processes, Tata McGraw-Hill Education.
- Ramachandran, K. M. ve Tsokos, C. P., 2014. Mathematical statistics with applications in R, Elsevier.

Royen, T., 1991. Expansions for the multivariate chi-square distribution, Journal of Multivariate Analysis, 38, 2, 213-232.

Sheskin, D. J., 2003. Handbook of parametric and nonparametric statistical procedures, crc Press.



ÖZGEÇMİŞ

Ayşe PAK, 3 Haziran 1991 tarihinde Trabzon'da doğdu. Liseyi 2005-2009 yılları arasında Akçaabat Lisesi'nde okudu. 2010 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri bölümüne yerleşti. Aynı bölümü 2014 yılında başarıyla tamamladı. Aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim dalında tezli yüksek lisans programına başladı. Uluslararası sempozyumda sunulmuş bir bildirisi bulunmaktadır.

Kesemen, O., Tezel, Ö., Pak, A. (2016). Comparison of the Directional Fuzzy Clustering Algorithms via Cluster Centers obtained the Directional Hierarchical Clustering. Xth International Statistics Days Conference, 734-742.