KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İSTATİSTİK VE BİLGİSAYAR BİLİMLERİ ANABİLİM DALI

MARTİNGALLER ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Menşure CAN

OCAK 2012
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İSTATİSTİK VE BİLGİSAYAR BİLİMLERİ ANABİLİM DALI

MARTİNGALLER ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Menşure CAN

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"YÜKSEK LİSANS (İSTATİSTİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 12/12/2011
Tezin Savunma Tarihi : 06/01/2012

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Zafer KÜÇÜK

Trabzon 2012

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalında

Menşure CAN tarafından hazırlanan

MARTİNGALLER ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 13/12/2011 gün ve 1433 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda

YÜKSEK LİSANS TEZİ

olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Doç. Dr. Türkan ERBAY DALKILIÇ …....……………………………

Üye : Doç. Dr. Zafer KÜÇÜK …....……………………………

Üye : Yrd. Doç. Dr. Tülay KESEMEN …....……………………………

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında, martingaller ile ilgili bazı temel kavramlar ve martingallerin finansta kullanımı ele alınmıştır.

2008-2011 yılları arasında bölümümüzde sözleşmeli yabancı uyruklu öğretim üyesi olarak çalışmış olan Azerbaycan Bakü Devlet Üniversitesi Olasılık Teorisi ve Matematiksel İstatistik Bölümü öğretim üyesi Sayın hocam Doç. Dr. Rovshan ALİYEV'e tez konusunun belirlenmesinde ve çalışmanın bu hale getirilmesindeki her türlü yardımlarından dolayı teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Tez önerisi ve çalışmalar aşamasında, tavsiye ve eleştirileriyle tezin şekillenmesinde emeği geçen Doç. Dr. Zafer KÜÇÜK'e şükranlarımı sunarım.

Sonsuz desteğini esirgemeyen Doç. Dr. Türkan ERBAY DALKILIÇ'a, Yrd. Doç. Dr. Tülay KESEMEN'e yardımlarından dolayı teşekkür ederim. Ayrıca Giresun Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü Arş. Gör. Fatma Zehra DOĞRU, Artvin Çoruh Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü Arş. Gör. Fatma Gül AKGÜL, İstanbul Medeniyet Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü Arş. Gör. Çiğdem GÜNGÖR ile tüm KTÜ İstatistik Bölümü akademik personeline ve hayatım boyunca bana destek olan sevgili aileme sonsuz teşekkür ederim.

Menşure CAN
Trabzon 2012

TEZ BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Martingaller Üzerine Bir Çalışma” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Doç. Dr. Zafer KÜÇÜK’ün sorumluluğunda tamamladığımı, verileri kendim topladığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 12/12/2011

Menşure CAN

İÇİNDEKİLER

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

MARTİNGALLER ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Menşure CAN

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Zafer KÜÇÜK
2012, 81 Sayfa

Ortaya çıkışı bahis stratejilerine dayanan martingal, olasılık teorisinde koşullu beklenen değer temeline dayanan bir stokastik süreçtir. Martingaller birçok uygulama alanında kullanılmaktadır. Bilinen uygulama alanlarından biride hisse senedinin gelecek değerine ilişkin belirsizliğini ortadan kaldırarak finans matematiğinde kullanılmasıdır.

Bu çalışma üç ana bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde çalışmada kullanılacak olan temel kavramlar üzerinde durulmuştur. İkinci bölümde martingallerin genel tanımları ve bazı uygulamaları ele alınmıştır. Son bölümde ise martingallerin finans matematiğine uygulanmasına yer verilmiştir.

Martingal teorisi, modern finans matematiğindeki en önemli teorilerden biridir ve oldukça geniş bir alana sahiptir. Bu yüzden bu çalışmada martingal teorisinin menkul kıymetlerin fiyatlandırılması ile doğrudan ilişkili yönleri üzerinde durulmuştur.

Anahtar Kelimeler : Martingal, Stokastik süreç, Hisse senedi, Bahis stratejileri, Finans matematiği, Menkul kıymet

Master Thesis

SUMMARY

A STUDY ON MARTINGALES

Menşure CAN

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Statistic and Computer Sciences Graduate Program
Supervisor: Assoc. Prof. Zafer KÜÇÜK
2012, 81 Pages

The emergence of Martingales which is a sthocastic process based on conditional expected value in probability theory rely on betting strategies. Martingales are used in various areas. One of the well known application areas of martingales is annihilating the ambiugity of future stock values in financial mathematics.

This study consists of three main sections. In the first part, general information is given about basic concepts that will be used in study. In the second part, general definitions of martingales and some application are discussed. In the last part, martingales are applied to finance mathematics are included.

Matingale theory is one of the most important theories related to financial mathematics and it has a considerably wide study area. Therefore in this study directly related parts of stock pricing in martingale theory has been mentioned.

Key Words : Martingale, Stochastic process, Stock, Bet strategies, Finance mathematics, Instrument

SEMBOLLER DİZİNİ

ΔW_t	: W_t'de ki küçük değişimler
ΔS_t	: S_t'deki küçük değişimler
$\mathrm{d}W_t$	: Sonsuz küçük aralıklar üzerindeki stokastik değişimler
$\mathrm{d}S_t$	: Sonsuz küçük aralıklar üzerindeki stokastik değişimler
Δ	: Küçük bir aralık
dt	: Sonsuz küçük bir aralık
S_t	: Rastgele fiyat süreci
B_t	: T vadeli iskontolu tahvilin $t < T$ zamanındaki fiyatı
$\mathrm{o}(\Delta)$	: Taylor açılımındaki yüksek mertebeli terimler
$e^{-ru}B_{t+u}$	: Tahvil fiyatı
$e^{-ru}S_{t+u}$	: Hisse senedi fiyatı
$E_t^P(.)$	: P olasılığı kullanılarak hesaplanan koşullu beklenti
ΔX_t	: Martingal farkı
N_t^G	: t zamanına kadar ki iyi haberlerin sayısı
N_t^B	: t zamanına kadar ki kötü haberlerin sayısı
$\lambda^G\Delta$	: İyi haberlerin olma olasılığı
$\lambda^B\Delta$	: Kötü haberlerin olma olasılığı
dX_t	: X_t'deki her bir sonsuz küçük değişim anı
α_{t_0}	: Başlangıçta elde tutulan miktar
β_{t_0}	: Başlangıçta elde tutulan miktar
β_{t_i}	: Risksiz menkul kıymetin t_i zamanındaki fiyatını
S_{t_i}	: Riskli menkul kıymetin t_i zamanındaki fiyatı.
$\mathcal{F}_t$	: t zamanına kadar gözlenmiş fiyatlardan elde edilen informasyon

1. GENEL BİLGİLER

Ortaya çıkışı bahis stratejilerine dayanan martingal, olasılık teorisinde koşullu beklenen değer temeline dayanan bir stokastik süreçtir. Martingaller üzerinde işlemler yapabilmek ve martingalleri daha iyi kavrayabilmek için öncelikle bazı kavramlar verilmelidir. Bu kavramlar içinden ilk olarak sınıf kavramı verilmiştir.

Tanım 1.1 (Sınıf). Ω bir deneyde gerçekleşebilecek sonuçlar kümesi olsun. Herhangi bir Ω kümesinin alt kümelerinden oluşan kümeler kümesine sınıf denir. n elemanlı bir kümenin alt kümelerinden oluşan tüm mümkün sınıfların sayısının $2^{2^n} - 1$ olduğu bilinmektedir.

Tanım 1.2 (Cebir). Ω boş olmayan bir küme ve örnek uzay olsun. Ω'da bir U sınıfı,

1. $\Omega \in U$,
2. $\forall A \in U$ kümesi için $\bar{A} \in U$,
3. $A, B \in U \Longrightarrow A \cup B \in U$,

özelliklerine sahipse, U sınıfına Ω'da bir cebir denir.

Tanım 1.3 (σ - Cebir). Ω boş olmayan bir küme ve örnek uzay olsun. Ω'da bir $\mathcal{F}$ sınıfı,

1. $\Omega \in \mathcal{F}$,
2. $\forall A \in \mathcal{F}$ kümesi için $\bar{A} \in \mathcal{F}$,
3. $\forall A_n \in \mathcal{F},\ n = 1, 2, \ldots \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$,

özelliklerine sahipse $\mathcal{F}$ sınıfına Ω'da bir σ - cebir denir.

Ω sonlu sayıda elemana sahip olduğunda Ω'da ki her cebir aynı zamanda bir σ - cebirdir ve her σ - cebir bir cebirdir. Ancak Ω sonsuz sayıda elemana sahip olduğunda Ω'da ki bazı cebirler σ - cebir değildir.

Tanım 1.4 (Borel σ- Cebri). Örnek uzay reel sayılar kümesi ($\Omega = \mathbb{R}$) olsun. Reel sayılar doğrusu üzerindeki açık aralıklar göz önüne alınsın. Reel sayılar doğrusu üzerindeki açık aralıklar, $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere, (a, b) şeklindedir. Buna göre aşağıdaki sınıflar göz önüne alınsın:

- $\mathcal{F}_1 = \{(a, b): a, b \in \mathbb{R}\ ve\ a < b\}$, açık aralıkları sınıfı,
- $\mathcal{F}_2 = \{[a, b]: a, b \in \mathbb{R}\ ve\ a < b\}$, açık aralıkları sınıfı,
- $\mathcal{F}_3 = \{(a, b]: a, b \in \mathbb{R}\ ve\ a < b\}$, açık aralıkları sınıfı.

Burada tanımlanan sınıfların hiç biri σ- cebir değildir. Çünkü $\Omega = \mathbb{R}$ alındığından ve $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ olup ∞ bir reel sayı olmadığından $\Omega \notin \mathcal{F}_1$, $\Omega \notin \mathcal{F}_2$ ve $\Omega \notin \mathcal{F}_3$ 'dür. Bu sınıflar birer σ- cebir olmamasına rağmen, bu sınıfları kapsayan en az bir σ- cebir vardır. $\mathbb{R}$' deki açık aralıkların ürettiği en küçük σ- cebire Borel σ- cebri denir (Akdi, 2010).

Cebir ve σ - cebir kavramlarına ait örnekler aşağıda verilmiştir.

Örnek 1.1. $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ herhangi bir stokastik deneye uygun bir örnek uzay olsun. Ω'nın alt kümelerinden oluşan aşağıdaki sınıflar ele alınsın:

$$\mathcal{F}_1 = \{\{1\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \emptyset, \Omega\},$$
$$\mathcal{F}_2 = \{\{3, 4\}, \{1, 2\}, \emptyset, \Omega\},$$
$$\mathcal{F}_3 = \{\emptyset, \Omega\},$$
$$\mathcal{F}_4 = \{\{1\}, \{3\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \emptyset, \Omega\}.$$

Buradan $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ ve $\mathcal{F}_3$ sınıflarının birer cebir olduğu kolayca görülür. Ω sonlu elemanlı olduğu için aynı zamanda σ - cebirdir. Fakat $\mathcal{F}_4$ sınıfı Ω'da bir cebir değildir. Çünkü örneğin, $\{1\} \cup \{3\} = \{1, 3\} \notin \mathcal{F}_4$'dür. Yani birleşim işlemine göre kapalı değildir. İki σ - cebirin kesişimi her zaman σ - cebir olmalıdır. Fakat iki σ - cebirin birleşimi σ - cebir olmayabilir. Bu özellik aşağıdaki örnekle gösterilebilir.

Örnek 1.2. Örnek 1.1'deki $\mathcal{F}_1$ ve $\mathcal{F}_2$ σ - cebirleri ele alınırsa, $\mathcal{F}_1$ ve $\mathcal{F}_2$ σ - cebirlerinin kesişimi $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega\}$ bir σ - cebir olmasına rağmen, birleşimi

$$\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = \{\{1\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{3,4\},\{1,2,4\},\{2,3,4\},\emptyset,\Omega\}$$

bir σ - cebir değildir.

Bu tanımların yanı sıra çalışmada en çok kullanılan ve temel olan, olasılık ölçüsü, olasılık uzayı ve rastgele değişken kavramları aşağıdaki gibidir.

Tanım 1.5 (Olasılık Ölçüsü). $\mathcal{F}$ sınıfı, Ω'da bir σ - cebir olsun. $\mathcal{F}$ σ - cebrinde tanımlanmış $P(A)$ fonksiyonu,

1. $\forall A \in \mathcal{F}$ için $P(A) \geq 0$,
2. $P(\Omega) = 1$,
3. $\forall A_n \in \mathcal{F},\ n = 1,2,\dots,\ \ A_i \cap A_j = \emptyset\ ,\ i \neq j$ için,

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),$$

özelliklerine sahipse P fonksiyonuna $\mathcal{F}$ üzerinde bir olasılık ölçüsü denir. $P(A)$ değerine A'nın olasılık ölçüsü veya kısaca A'nın olasılığı denir.

Tanım 1.6 (Olasılık Uzayı). Ω boş olmayan bir küme, $\mathcal{F},\ \Omega$'da bir σ - cebir ve P ise $\mathcal{F}$'de tanımlanmış bir olasılık ölçüsü olmak üzere $(\Omega,\mathcal{F},P)$ üçlüsüne olasılık uzayı denir. Olasılık uzayı bir stokastik deneyin matematiksel modelini ifade eder.

Tanım 1.7 (Rastgele Değişken). $(\Omega,\mathcal{F},P)$ bir olasılık uzayı ve $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ olmak üzere, $\forall x \in \mathbb{R}$ için $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$ ise ξ fonksiyonuna bir rastgele değişken denir.

$$\begin{aligned} &\xi\colon \Omega \to \mathbb{R} \\ &\quad \omega \to \xi(\omega) \end{aligned}$$

olmak üzere, $\forall x \in \mathbb{R}$ için $\{\omega \in \Omega\colon \xi(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$, $\Omega \in \mathcal{F}$ ise $\{\omega\colon \xi(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$'nin bir rastgele değişken olduğu gösterilebilir.

Gerçekten de, $\{\xi > x\} = \Omega \cap \overline{\{\xi \leq x\}} \Rightarrow \{\xi \leq x\} \in \mathcal{F}$ olduğundan $\{\xi > x\}$ bir rastgele değişkendir. Benzer şekilde $\{\xi \leq x\}$, $\{\xi < x\}$ ve $\{\xi \geq x\}$ 'de birer rastgele değişkendir.

Bir rastgele değişkene ait dağılım fonksiyonunun matematiksel gösterimi ise aşağıdaki tanımda verildiği gibidir.

Tanım 1.8 (Dağılım Fonksiyonu). $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ bir olasılık uzayı ve ξ bir rastgele değişken olmak üzere, $P_\xi(\mathfrak{B}) = P\{\xi \in \mathfrak{B}\}$ olasılığına ξ rastgele değişkeninin dağılımı denir. $P_\xi(\mathfrak{B})$ dağılımının tanım kümesi $\mathfrak{B}$ Borel cebridir. Bir rastgele değişkenin dağılımında $\mathfrak{B} = (-\infty, x)$ ve $x \in \mathbb{R}$ alınırsa $F_\xi(x) = P\big(\xi \in (-\infty, x)\big) = P(\xi < x)$ fonksiyonuna ξ rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu denir.

Tanım 1.9 (Koşullu Dağılım Fonksiyonu). $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olasılık uzayında ξ bir rastgele değişken, A ise pozitif olasılıklı bir olay olsun. Bu durumda,

$$F(x|A) = P(\xi < x|A) = \frac{P(\xi < x, A)}{P(A)}, \quad x \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

fonksiyonuna A verilmişken ξ rastgele değişkeninin koşullu dağılım fonksiyonu denir. Burada kolaylık bakımından virgül ile kesişim gösterilmektedir. $A \in \mathcal{F}$ ve $\{\xi < x,\ A\} \in \mathcal{F}$ olmak üzere (1.1) fonksiyonu $\forall x \in \mathbb{R}$ için tanımlanmıştır. Bu fonksiyon $\mathbb{R}$'de dağılım fonksiyonudur (Shahbazov, 2005).

Tanım 1.10 (Koşullu Olasılık Fonksiyonu). ξ ve η kesikli rastgele değişkenler olsun. $p(x,y) = P(\xi = x, \eta = y)$ ve her bir $y \in \mathbb{R}$ için, $p_\eta(y) = P(\eta = y) > 0$ olsun. Bu durumda,

$$p(x|y) = \frac{p(x,y)}{p_\eta(y)}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

oranına $\eta = y$ iken ξ rastgele değişkeninin koşullu olasılık fonksiyonu denir (Shahbazov, 2005).

Tanım 1.11 (Koşullu Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu). ξveηrastgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x,y)$ ve her bir $y \in \mathbb{R}$ için $f_\eta(y) > 0$ olsun. Bu durumda

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_\eta(y)}$$

fonksiyonuna $\eta = y$ iken ξ rastgele değişkeninin koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu denir (Shahbazov, 2005).

Tanım 1.12 (Lebesgue İntegrali). $(\Omega, \mathcal{F}, P(.))$ olasılık uzayında reel değerli $\xi(\omega)$ rastgele değişkeni ve $g(x)$ Borel fonksiyonu verildiğinde aşağıdaki integral göz önüne alınsın:

$$\int g(\xi(\omega))P(d\omega). \tag{1.2}$$

Bu integral Lebesgue anlamında bir integraldir. $\xi(\omega)$ rastgele değişkeni reel değerli olduğundan (1.2) formülünde $\xi(\omega) = x \in \mathbb{R}$ olarak alınırsa,

$$\begin{aligned} P(d\omega) &= P\{\omega: \xi(\omega) \in (x, x+dx)\} \\ &= P\{\omega: x < \xi(\omega) < x + dx\} \\ &= P\{\omega: \xi(\omega) < x + dx\} - P\{\omega: \xi(\omega) < x\} \\ &= F_\xi(x+dx) - F_\xi(x) = dF_\xi(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $F_\xi(x)$, $\xi(\omega)$ rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonudur. Buna göre (1.2) integrali,

$$\int_\Omega g(\xi(\omega))P(d\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF_\xi(x).$$

şeklini alır (Nasırova vd., 2009).

Tanım 1.13 (Beklenen Değer). $\big(\Omega, \mathcal{F}, P(.)\big)$ olasılık uzayında reel değerler alan bir $\xi(\omega)$ rastgele değişkeni verildiğinde eğer $\int_\Omega \xi(\omega)P(d\omega)$ integrali varsa, bu integralin değerine $\xi(\omega)$ rastgele değişkenin beklenen değeri denir ve

$$E\big(\xi(\omega)\big) = \int\limits_\Omega \xi(\omega)P(d\omega)$$

şeklinde ifade edilir (Nasırova vd., 2009). Özel halde beklenen değer aşağıdaki gibidir.

ξ , bir rastgele değişken ve $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\forall B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ için $\{x: g(x) \in B\} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ özelliğine sahip bir fonksiyon olmak üzere, $E\big(g(\xi)\big)$ değerine $g(\xi)$ fonksiyonunun beklenen değeri denir. Kesikli ve sürekli rastgele değişken için aşağıdaki gibidir:

1. ξ kesikli bir rastgele değişken ve

$$\sum_x |g(x)|f(x) < \infty$$

olduğunda,

$$E\big(g(\xi)\big) = \sum_x g(x)f(x),$$

2. ξ sürekli bir rastgele değişken ve

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|f(x)dx < \infty$$

olduğunda,

$$E\big(g(\xi)\big) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx.$$

1.1. Beklenen Değerin Özellikleri

1. $P\{\omega: \xi(\omega) = c\} = 1$ ise $E\big(\xi(\omega)\big) = c$‘dir.

İspat. Beklenen değerin ifadesi kullanılarak aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$E\big(\xi(\omega)\big) = \int_{\Omega} \xi(\omega)P(d\omega) = \int_{\Omega} cP(d\omega) = c\int_{\Omega} P(d\omega) = cP(\Omega) = c.$$

2. Eğer $\xi(\omega) \geq 0$ ve $E\big(\xi(\ \omega\ )\big) = 0$ ise h.h.h.y. $\xi(\omega) = 0$’dır.

İspat. $\xi(\omega) > 0$ olduğunda $E\big(\xi(\omega)\big) > 0$ olur. Bu ise $E\big(\xi(\ \omega\ )\big) = 0$ varsayımına zıttır. Buradan h.h.h.y. $\xi(\omega) = 0$ olduğu elde edilir.

3. $a \leq \xi(\omega) \leq b$ ise, a ve b birer sabit olmak üzere, $a \leq E\big(\xi(\omega)\big) \leq b$ olur.

İspat. $a \leq \xi(\omega) \leq b$ olsun. Bu eşitliğin her iki tarafı negatif olmayan $P(d\omega)$ ile çarpılır ve Ω üzerinden integrali alınırsa,

$$\int_{\Omega} aP(d\omega) \leq \int_{\Omega} \xi(\omega)P(d\omega) \leq \int_{\Omega} bP(d\omega)$$

elde edilir. Buradan da

$$a\int_{\Omega} P(d\omega) \leq E\big(\xi(\omega)\big) \leq b\int_{\Omega} P(d\omega)$$

bulunur. Bu ise $a \leq E\big(\xi(\omega)\big) \leq b$ olduğunu gösterir.

4. c bir sabit olmak üzere, $E\big(c\xi(\omega)\big) = cE\big(\xi(\omega)\big)$’dır.

İspat. c bir sabit olmak üzere, beklenen değerin ifadesi kullanılarak aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$E\big(c\xi(\omega)\big) = \int_{\Omega} c\xi(\omega)P(d\omega) = c\int_{\Omega} \xi(\omega)P(d\omega) = cE\big(\xi(\omega)\big).$$

5. a ve b birer sabit olmak üzere, $E(a\xi(\omega) + b) = aE\big(\xi(\omega)\big) + b$ olur.

İspat. a ve b birer sabit olmak üzere, beklenen değerin ifadesi kullanılarak aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\begin{aligned} E(a\xi(\omega) + b) &= \int_{\Omega} (a\xi(\omega) + b)P(d\omega) \\ &= \int_{\Omega} a\xi(\omega)P(d\omega) + \int_{\Omega} bP(d\omega) \\ &= a\int_{\Omega} \xi(\omega)P(d\omega) + b\int_{\Omega} P(d\omega) \\ &= aE\big(\xi(\omega)\big) + bP(\Omega) \\ &= aE\big(\xi(\omega)\big) + b. \end{aligned}$$

6. $\xi(\omega)$ ve $\eta(\omega)$ beklenen değerleri mevcut iki rastgele değişken ise toplamlarının da beklenen değeri vardır ve bu beklenen değer, beklenen değerlerin toplamına eşittir.Yani,

$$E\big(\xi(\omega) + \eta(\omega)\big) = E\big(\xi(\omega)\big) + E\big(\eta(\omega)\big)$$

olur.

İspat. Beklenen değerin ifadesi kullanılarak, $\xi(\omega)$ ve $\eta(\omega)$ rastgele değişkenlerinin toplamının beklenen değeri aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$E(\xi(\omega)+\eta(\omega)) = \int\limits_{\Omega} (\xi(\omega)+\eta(\omega))P(d\omega)$$

$$= \int\limits_{\Omega} (\xi(\omega))P(d\omega) + \int\limits_{\Omega} (\eta(\omega))P(d\omega)$$

$$= E(\xi(\omega)) + E(\eta(\omega))$$

7. Her hangi bir A olayının olasılığı, bu olayın göstergesinin (indikatörünün) beklenen değerine eşittir. Yani $P(A) = E(I_A(\omega))$'dır (Nasırova vd., 2009):

İspat. $I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \in \bar{A} \end{cases}$ olmak üzere,

$$E(I_A(\omega)) = \int\limits_{\Omega} I_A(\omega).P(d\omega)$$

$$= \int\limits_{A} I_A(\omega).P(d\omega) + \underbrace{\int\limits_{\bar{A}} I_A(\omega).P(d\omega)}_{0}$$

$$= 1.P(A) = P(A).$$

Özel halde beklenen değerin özellikleri aşağıda verildiği gibi ifade edilir:

1. a ve b sabitler ve ξ rastgele değişken ise $E(a\xi + b) = aE(\xi) + b$,

a. $a = 0$ ise $E(b) = b$,
b. $a = 1$ ise $E(\xi + b) = E(\xi) + b$

'dir. Yani bir rastgele değişkenin bir sabitle toplamının beklenen değeri, rastgele değişkenin beklenen değeri ile aynı sabitin toplamına eşittir:

c. $b = 0$ ise $E(a\xi) = aE(\xi)$.

Yani bir rastgele değişkenin sabitle çarpımının beklenen değeri, sabit değerle rastgele değişkenin beklenen değerinin çarpımına eşittir:

d. $a = 1,\ b = -E(\xi) = -\mu$ ise $E[\xi - E(\xi)] = E(\xi - \mu) = 0$.

Yani ξ rastgele değişkeninin kendi ortalamasından sapmasının ortalaması sıfırdır.

(ξ, η) iki boyutlu rastgele değişken ve $\zeta = g(\xi, \eta)$ olarak alınsın.

a. (ξ, η) kesikli rastgele değişken ve $p(x, y) = P\big(\xi = x_i,\ \eta = y_j\big), i = 1,2, \dots, m$; $j = 1,2, \dots, n$ ise

$$E(\zeta) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g\big(x_i, y_j\big).p\big(x_i, y_j\big).$$

b. (ξ, η), $f(x, y)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli rastgele değişkense,

$$E(\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y).f(x, y)dxdy.$$

2. Beklenen değerleri $E(\xi)$ ve $E(\eta)$ olan ξ ve η rastgele değişkenlerinin ortak olasılık fonksiyonu $f\big(x_i, y_j\big)$, $i = 1,2, \dots, m$; $j = 1,2, \dots, n$ olsun. Bu takdirde,

$$E(\xi + \eta) = E(\xi) + E(\eta)$$

’dir. Yani iki rastgele değişkenin toplamının ortalaması onların ortalamaları toplamına eşittir.

3. Beklenen değerleri $E(\xi)$ ve $E(\eta)$ olan bağımsız ξ ve η rastgele değişkenlerinin ortak olasılık fonksiyonu $f(x_i, y_j)$; $i = 1,2, \dots, m$; $j = 1,2, \dots, n$ olsun. Bu takdirde $E(\xi\eta) = E(\xi)E(\eta)$’dir. Yani iki bağımsız rastgele değişkenin çarpımının beklenen değeri, beklenen değerlerin çarpımına eşittir (Akdeniz, 2010).

Koşullu beklenen değer ve özellikleri aşağıdaki gibi verilir.

Tanım 1.14 (Koşullu Beklenen Değer). $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olasılık uzayı, $B \in \mathcal{F}$ bu uzayda $P(B) > 0$ olasılıklı bir olay ve η ise bir rastgele değişken olsun. Bu takdir de,

$$E(\eta|B) = \frac{E(\eta; B)}{P(B)}$$

oranına η rastgele değişkeninin B verilmişken koşullu beklenen değeri denir. Burada $E(\eta; B) = E(\eta I_B)$, I_B ise B olayının göstergesidir (indikatörüdür). $E(\eta) < \infty$ ise, $E(\eta; B) < \infty$, buna göre $E(\eta|B) < \infty$. $\eta = I_A$ özel durumu için koşullu beklenen değer koşullu olasılığa çevrilir:

$$E(I_A|B) = \frac{E(I_{AB})}{P(B)} = \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A|B).$$

η ve B bağımsız ise $E(\eta|B) = E(\eta)$ olur. Gerçekten η ve I_B bağımsız tanımlı değişkenler olduğundan,

$$E(\eta I_B) = E(\eta)E(I_B) = P(B)E(\eta)$$

dir. Bu eşitliğin her iki tarafı $P(B)$ ile bölünürse istenen elde edilir (Shahbazov, 2005).

1.2. Koşullu Beklenen Değerin Özellikleri

1. Eğer $E|\eta| < \infty$ ise her bir $x \notin Q$, $P(\xi \in Q) = 0$ için $E(\eta|\xi = x)$ mevcuttur. Burada Q, X'in değer kümesidir. Gerçekten,

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} |y| f(x, y) dy$$

olsun. Bu durumda

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}} yf(x,y)dy\right| \leq \varphi(x), \qquad \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = E|\eta| < \infty$$

olduğundan her bir $x \notin Q$ için

$$\int\limits_{\mathbb{R}} yf(x,y)dy < \infty$$

olacaktır. Buradan ve

$$E(\eta|x) = \sum_{y\in\mathbb{R}_\eta} yp(y|x) = \frac{1}{P_\xi(x)}\sum yP(x,y)$$

formülünden istenen elde edilir.

2. $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel fonksiyonu ve $E(g(\eta)) < \infty$ olsun. Bu durumda

$$E(g(\eta)|\xi = x) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(y)dF(y|x)$$

formülü doğrudur. Buradan kesikli ξ ve η rastgele değişkenleri için

$$E(g(\eta)|\xi = x) = \sum_{y\in\mathbb{R}_\eta} g(y)P(\eta = y|\xi = x),$$

sürekli ξ ve η rastgele değişkenler için ise

$$E(g(\eta)|\xi = x) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(y)f(y|x)dy$$

formülü elde edilir.

3. $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Borel fonksiyonu ve $E(g(\xi,\eta)) < \infty$ olsun. Bu durumda her bir $c \in R_\xi$ için $E(g(\xi,\eta)|\xi = c) = E(g(c,\eta)|\xi = c)$'dir. Gerçekten de,

$$E(g(\xi,\eta)|\xi = c) = \frac{E(g(\xi,\eta); \xi = c)}{P(\xi = c)} = E(g(c,\eta)|\xi = c).$$

4. ξ ve η bağımsız rastgele değişkenleri için aşağıdaki sonuç elde edilir (Shahbazov, 2005).

$$P(\xi + \eta = n|\ \eta = k) = P(\xi + k = n).$$

1.3. σ - cebire Göre Koşullu Beklenen Değer

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olasılık uzayı, $G \subset \mathcal{F}$ bir σ - cebir ve $E|\xi| < \infty$ olsun. Bu takdir de aşağıdaki iki koşulu sağlayan $\hat{\xi} = E(\xi|G)(\omega),\ \ \omega \in \Omega$ rastgele değişkenine ξ rastgele değişkeninin G'ye göre koşullu beklenen değeri denir.

a. $E(\xi|G),\ G$ - ölçülebilirdir.
b. $\forall B \in G$ için,

$$\int_B E(\xi|G)P(d\omega) = \int_B \xi P(d\omega).$$

Bu koşulları sağlayan her bir tanımlı değişkene $E(\xi|G)$'nin versiyonu denir. *b* koşulu şu şekilde de yazılabilir.

$$E(\hat{\xi}; B) = E(\xi; B), \quad B \in G.$$

σ - cebire göre beklenen değer bir rastgele değişken olarak ifade edilir. Her bir $A \in \mathcal{F}$ olayının G'ye göre koşullu olasılığı

$$P(A|G) = E(I_A|G)$$

şeklinde tanımlanır. ξ rastgele değişkeninin η rastgele değişkenine göre koşullu beklenen değeri $E(\xi|\eta)$ ile gösterilir ve

$$E(\xi|\eta) = E(\xi|\sigma(\eta))$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\sigma(\eta) = \sigma\{\{\eta \in B\}: B \in \mathfrak{B}(R)\}$ ile η rastgele değişkeninin ürettiği σ - cebir gösterilmektedir. Dolayısıyla $\sigma(\eta)$, $\{\eta \in B\}$, $B \in \mathfrak{B}(R)$ olaylarını içeren en küçük σ - cebirdir (Shahbazov, 2005).

Örnek 1.3. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ ve $\mathcal{F} = Güç(\Omega)$ olmak üzere, her bir ω 'nın olasılığı $P(\omega_i) = 1/4$ ve $\xi(\omega_k) = k^2$ olarak verilsin. $\mathrm{G} = \{\emptyset, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}, \Omega\}$ olmak üzere $\mathrm{G} \subset \mathcal{F}$ yani G, $\mathcal{F}$ 'nin alt σ-cebri ise $\hat{\xi}(\omega) = E(\xi|G)(\omega)$ aşağıdaki gibi bulunur.

Çözüm. $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ için, ξ rastgele değişkeninin değer kümesi, $D_\xi = \{1,4,9,16\}$ olmak üzere,

$$E(\xi|G)(\omega) = 1^2\frac{1}{2} + 2^2\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{4}{2} = \frac{5}{2}$$

elde edilir. $\omega = (\omega_3, \omega_4)$ için,

$$E(\xi|G)(\omega) = 3^2\frac{1}{2} + 4^2\frac{1}{2} = \frac{9}{2} + \frac{16}{2} = \frac{25}{2}$$

elde edilir. Böylece ξ rastgele değişkeninin G σ - cebrine göre koşullu beklenen değeri,

$$E(\xi|G)(\omega) = \begin{cases} \dfrac{5}{2} & ; \ \omega = (\omega_1, \omega_2) \\ \dfrac{25}{2} & ; \ \omega = (\omega_3, \omega_4) \end{cases}$$

şeklinde gösterilir.

Örnek 1.4. A bir olay olmak üzere A olayının doğurduğu σ - cebir oluşturulsun.

Çözüm. $\sigma(A) = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$, $c = \{c_\alpha\} \subset \mathcal{F}$ herhangi olaylar sınıfı ve bu olaylar sınıfının doğurduğu bir σ - cebir olsun. Yani $\Omega = \{1, 2,3,4\}$ ve $c_1 = \{\{1\}, \{2\}\}$ olsun. Bunun doğurduğu minimal σ - cebir, $\sigma(c_1) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{2,3,4\}, \Omega\}$ olur.

1.4. σ - cebire Göre Koşullu Beklenen Değerin Temel Özellikleri

1. ξ, G - ölçülebilir ise h.h.h.y, $E(\xi|G) = \xi$'dir.

İspat. $\xi \in G$ olduğundan, tanımdan $\forall A \in G$ için,

$$\int_A E(\xi|G)P(d\omega) = \int_A \xi(\omega)\, P(d\omega)$$

olur.

2. $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere, h.h.h.y. $\xi = c$ ise $E(\xi|G) = c$ olur.

İspat. c her G σ - cebrine göre ölçülebilir olduğundan, $\xi = c$ iken her $A \in G$ için σ - cebrine göre koşullu beklenen değerin tanımını göstermek yeterlidir:

$$\int_A \xi(\omega)P(d\omega) = \int_A cP(d\omega)$$

3. Her bir $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sayıları için, h.h.h.y.

$$E[c_1\xi + c_2\eta|G] = c_1E(\xi|G) + c_2E(\eta|G)$$

eşitliği doğrudur.

İspat. $\forall A \in G$ için,

$$\int_A E(c_1\xi + c_2\eta|G)P(d\omega) = \int_A (c_1\xi + c_2\eta)P(d\omega)$$

$$= c_1\int_A \xi(\omega)P(d\omega) + c_2\int_A \eta(\omega)P(d\omega)$$

$$= c_1\int_A E(\xi|G)P(d\omega) + c_2\int_A E(\eta|G)P(d\omega).$$

4. $\xi \leq \eta$ ise, h.h.h.y. $E(\xi|G) \leq E(\eta|G)$ olur.

İspat. $\xi \leq \eta$ iken, $\forall A \in G$ için,

$$\int_A \xi(\omega)P(d\omega) \leq \int_A \eta(\omega)P(d\omega)$$

σ - cebrine göre koşullu beklenen değerin tanımından,

$$\int_A E(\xi|G)P(d\omega) = \int_A \xi(\omega)P(d\omega) \leq \int_A \eta(\omega)P(d\omega) = \int_A E(\eta|G)P(d\omega).$$

5. $\xi,\ G$ - ölçülebilir ise, $E\big(E(\xi|G)\big) = E(\xi)$'dir.

İspat. $\xi,\ G$ - ölçülebilir olduğudan, $\forall A \in G$ ve $A = \Omega$ ise,

$$\int_{A:A=\Omega} E\big(E(\xi|G)\big)P(d\omega) = \int_{A:A=\Omega} E(\xi(\omega)|G)P(d\omega) = \int_{A:A=\Omega} \xi(\omega)\, P(d\omega) = E(\xi)$$

dir.

6. $\eta, \ G$ - ölçülebilir rastgele değişken ve $E|\xi| < \infty, \ E|\xi\eta| < \infty$ ise, h.h.h.y.

$E(\xi\eta|G) = \eta E(\xi|G)$.

İspat. ξ ve η pozitif değerli rastgele değişkenler ve $A \in G$ olsun. $\eta = I_\Gamma$, $\Gamma \in G$, η basit bir rastgele değişken olmak üzere,

$$\int\limits_A \eta E(\xi|G)P(d\omega) = \int\limits_A I_\Gamma E(\xi|G)P(d\omega) = \int\limits_{A\cap\Gamma} E(\xi|G)P(d\omega) + \int\limits_{A\cap\overline{\Gamma}} E(\xi|G)P(d\omega)$$

$$= \int\limits_{A\cap\Gamma} E(\xi|G)P(d\omega) = \int\limits_{A\cap\Gamma} \xi I_\Gamma P(d\omega) = \int\limits_A \xi\eta P(d\omega).$$

7. $|E(\xi|G)| \leq E(|\xi||G)$'dir.

İspat. Bu eşitsizlik önceki özelliği $-|\xi| \leq \xi \leq |\xi|$ eşitsizliğine uygulayarak elde edilir. $\xi = \xi^+ - \xi^-, \ \xi^+ = \max\{0, \xi\}, \xi^- = \min\{0, \xi\}$ olmak üzere, eşitlik doğrulanır:

$$|E(\xi|G)| = |E(\xi^+|G) - E(\xi^-|G)| \leq |E(\xi^+|G) + E(\xi^-|G)| = |E(|\xi||G)|$$
$$= E(|\xi||G).$$

8. $G = \mathcal{F}_* := \{\emptyset, \Omega\}$ en küçük σ - cebri ise, $E(\xi|\mathcal{F}_*) = E(\xi)$'dir.

İspat. 1.3 bölümünde verilen tanımdan, $\forall A \in \mathcal{F}_* = \{\emptyset, \Omega\}$ için,

$$\int\limits_A E(\xi|\mathcal{F}_*)P(d\omega) = \int\limits_A \xi(\omega)P(d\omega) = \int\limits_{A:A=\emptyset} \xi(\omega)P(d\omega) + \int\limits_{A:A=\Omega} \xi(\omega)P(d\omega)$$

$$= \int\limits_{A:A=\Omega} \xi(\omega)P(d\omega) = E(\xi).$$

9. $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}$ ise, h.h.h.y. $E(\xi|\mathcal{F}_0) = E(E(\xi|\mathcal{F}_0)|\mathcal{F}_1) = E(E(\xi|\mathcal{F}_1)|\mathcal{F}_0)$ eşitliği vardır (Pozynak, 2009).

İspat.

$$\int_A E(E(\xi|\mathcal{F}_0)|\mathcal{F}_1)P(d\omega) = \int_A E(\xi|\mathcal{F}_0)P(d\omega) = \int_A \xi(\omega)P(d\omega),\ \ A \in \mathcal{F}_0,$$

$$\int_A E(E(\xi|\mathcal{F}_1)|\mathcal{F}_0)P(d\omega) = \int_A E(\xi|\mathcal{F}_1)P(d\omega) = \int_A \xi(\omega)P(d\omega),\ \ A \in \mathcal{F}_1.$$

Teorem 1.15 (Hemen Hemen Her Yerde Yakınsama). $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ bir olasılık uzayı ve $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ bir rastgele değişkenler dizisi ξ bir rastgele değişken olmak üzere, $P(A) = 0$ olan $A \in \mathcal{F}$ ve $\forall\omega \in \bar{A}$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)$$

oluyorsa (ξ_n) dizisine hemen hemen her yerde ξ' ye yakınsak denir ve

$$\xi_n \xrightarrow{h.h.h.y.} \xi$$

biçiminde gösterilir. Aşağıdaki şekilde de ifade edilir:

$$P\{\omega:\ \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\} = 1$$

veya

$$P\{\omega:\ \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) \neq \xi(\omega)\} = 0.$$

Hemen hemen her yerde yakınsama, bir olasılıkla yakınsama, kesin yakınsama aynı anlama gelmektedir. Bu çalışmada kısaca "h.h.h.y." şeklinde ifade edilmiştir.

Teorem 1.16 (Monoton Yakınsama Teoremi). $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ bir olasılık uzayı ve $\xi_1, \xi_2, \ldots$ fonksiyonları$[0, \infty)$ aralığında her noktada tanımlı azalmayan $\mathcal{F}$- ölçülebilir fonksiyonlar olsun. $\forall\omega \in \Omega$ ve $n \geq 1$ için, $0 \leq \xi_n(\omega) \leq \xi_{n+1}(\omega)$ise yani rastgele değişkenler pozitif ve monoton ise, $n \to \infty$'a yaklaştığında h.h.h.y.,

$$\xi(\omega) = \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega),$$

$$E\left(\lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega)\right) = \lim_{n\to\infty} E\big(\xi_n(\omega)\big).$$

Teorem 1.17 (Baskın Yakınsama Teoremi). ξ ve η rastgele değişkenler olmak üzere, $n \to \infty$ 'a yaklaştığında, h.h.h.y. $\xi_n \to \xi$ ve $E|\xi_n| < \infty$, $n \geq 0$ olsun. Eğer beklenen değeri sonlu η rastgele değişkeni için,

$$sup_{n\geq 0}|\xi_n| \leq \eta$$

koşulu sağlandığında $n \to \infty$ için $E|\xi| < \infty$ ve $E(\xi_n) \to E(\xi)$ olur.

Baskın yakınsama teoremi, η'nın sınırlı olması durumunda, sınırlı yakınsama teoremi olarak da adlandırılır (Önalan, 2010).

Teorem 1.18 (Jensen Eşitsizliği). Bir aralıkta sürekli olan f fonksiyonu bu aralıktan alınmış $\forall x, y$ için,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

eşitsizliğini sağlarsa, bu fonksiyona konveks (dışbükey) fonksiyon,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

eşitsizliğini sağlarsa, bu fonksiyona konkav (içbükey) fonksiyon denir.

Konveks ve konkav fonksiyonlar için Jensen eşitsizliği aşağıdaki gibidir:

- Konveks fonksiyonlar için Jensen eşitsizliği

$$f\big(E(\xi)\big) \leq E\big(f(\xi)\big),$$

- Konkav fonksiyonlar için Jensen eşitsizliği,

$$f\big(E(\xi)\big) \geq E\big(f(\xi)\big).$$

$G \subset \mathcal{F}$ bir alt σ - cebir olmak üzere, konveks ve konkav fonksiyonlar için koşullu Jensen eşitsizliği,

- Konveks fonksiyonlar için koşullu Jensen eşitsizliği

$$f\big(E(\xi|G)\big) \leq E(f(\xi)|G)\ ,$$

- Konkav fonksiyonlar için koşullu Jensen eşitsizliği

$$f\big(E(\xi|G)\big) \geq E(f(\xi)|G).$$

'dir (URL-2, 3 ve 4, 2011).

Teorem 1.19 (Hölder Eşitsizliği). $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ bir olasılık uzayı, ξ ve η rastgele değişkenler olsun. $p + q = pq$ olmak üzere, $p, q \in (1, \infty)$ sayıları için, $E|\xi|^p < \infty$ ve $E|\xi|^q < \infty$ olsun. Bu durumda,

$$E|\xi\eta| \leq (E|\xi|^p)^{\frac{1}{p}}.(E|\eta|^q)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğine Hölder eşitsizliği denir. $G \subset \mathcal{F}$ bir alt σ - cebir olmak üzere, Hölder eşitsizliğinin σ - cebire göre koşullu beklenen değer için gösterimi ise aşağıdaki gibidir:

$$E(|\xi\eta||G\ ) \leq (E|\xi|^p|G)^{\frac{1}{p}}.(E|\eta|^q|G)^{\frac{1}{q}}.$$

Teorem 1.20 (Fatou Lemması). $\xi_n \geq 0$, $n \geq 1$ ise ,

$$\lim_{n\to\infty} E(\xi_n) \geq E\left(\lim_{n\to\infty} \xi_n\right)$$

şeklinde ifade edilir (Shahbazov, 2005).

Tanım 1.21 (Stokastik Süreç). $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ bir olasılık uzayı $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ olsun. Reel değerli $\xi(\omega, t)$ fonksiyonu her $t \in \mathbb{T}$ için Ω örnek uzayında tanımlanmış rastgele değişken ise $\xi(\omega, t)$ fonksiyonuna rastgele fonksiyon denir.

Rastgele fonksiyonlar bazen, $X(\omega, t)$, $Y(\omega, t)$ sembolleri ile bazen ise ω argümanı olmadan, $\xi(t)$, $\eta(t)$ sembolleri ile de gösterilir.

Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$ ise ve t parametresi zamanı ifade ediyorsa bu durumda $\xi(\omega, t)$ rastgele fonksiyonuna stokastik süreç denir.

Bu tanımdan görüldüğü gibi rastgele değişkenden farklı olarak stokastik süreç, ω'nın yanısıra zamana da bağlı bir fonksiyondur (Aliyev, 2009).

Tanım 1.22 (Poisson Süreci). Olasılık teorisinden bilinmektedir ki, Poisson dağılımına sahip rastgele değişkenin beklenen değer ve varyansı birbirine ve λ'ya eşittir. $N(t) \equiv N(\omega, t)$, $\omega \in \Omega$, $t \geq 0$ doğal sayılar kümesinden değerler alabilen bir stokastik süreç olsun. Bu durumda aşağıdaki koşulları sağlayan $N(t)$ sürecine Poisson süreci denir:

1. $N(0) = 0$,
2. $N(t)$'nin artışları bağımsızdır. Yani $0 < t_0 < t_1 < \cdots t_n < \infty$, $n = 1,2, ...$, için $N(t_1) - N(t_0)$, $N(t_2) - N(t_1), \dots$, $N(t_n) - N(t_{n-1})$ artışları bağımsızdır,
3. $\forall s < t$ için $N(t) - N(s)$ artışı, $\lambda(t - s)$ beklenen değerine sahip olan Poisson dağılımına sahiptir (Aliyev, 2009):

$$P\{N(t) - N(s) = n\} = \frac{(\lambda(t-s))^n}{n\,!} e^{-\lambda(t-s)}, \qquad \lambda > 0.$$

Tanım 1.23 (Wiener Süreci). $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olasılık uzayında $\omega \in \Omega$, $t \geq 0$ olmak üzere $W(t) = W(\omega, t)$ sürecinin aşağıdaki koşulları sağladığı varsayılsın:

1. $W(0) = 0,$

2. $W(t)$ sürecinin artışları bağımsızdır. Yani $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$, $n = 1, 2, \dots$ için $W(t_1) - W(t_0),\ W(t_2) - W(t_1), \dots,\ W(t_n) - W(t_{n-1})$ artışları bağımsızdır,

3. Her $0 < s < t$ için $W(t) - W(s)$ artışı $(0,\ t - s)$ parametreli normal dağılıma sahiptir:

$$F_{t-s}(x) = P\{W(t) - W(s) \leq x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2(t-s)}} du$$

Bu durumda $W(t)$ sürecine Wiener süreci denir (Aliyev, 2009).

2. MARTİNGALLER

Olasılık teorisinde, martingal stokastik bir süreçtir (örneğin bir dizi rasgele değişkenler). Daha erken bir zamanı temsil eden s'ye kadar olan gözlemler verilmiş olduğunda, t zamanındaki bir gözlemin koşullu beklenen değeri erken bir zamanı gösteren s 'deki gözleme eşit olur. Martingal adil bir oyunun modelidir.

Martingalin temeli, 18. yüzyıl Fransa'sında popüler olan bir bahis stratejileri sınıfına dayanmaktadır. Bu stratejilerin en basiti, bahsin para tura geldiğinde kazanıldığı yazı geldiğinde kaybedildiği bir oyun için dizayn edilmiştir. Strateji bahisçinin her kayıp üzerine bir önceki bahsini ikiye katladığı ve böylece ilk kazanımla eski kayıpların hepsini geri aldığı ve kar olarak ilk bahisteki miktarı kazandığı bir düzen şeklindedir (URL-5, 2010). Martingal aslında adil kumar oyunları için matematiksel bir modeldir. Bir adil oyunda her bir oyun geçmişten bağımsız olup ne zarar nede kar sağlar.

Martingal teorisi büyük ölçüde Paul Levy (1886-1971) ve J. L. Doob (1911-2002) tarafından geliştirilmiştir. Doob "Stochastic Process" adlı eserinde martingal teorinin kumar problemleri dışında da kullanılabileceğini göstermiştir. Günümüzde martingal teori kumar problemlerinde ileri bir teknik olmasının yanında olasılık teorisindeki temel araçlardan biri olup, stokastik modelleme alanında büyük bir etkiye sahiptir (Önalan, 2010).

Tanım 2.1 (Martingal). Bir $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ olasılık uzayında tanımlı $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ rastgele değişkenler dizisi ve $\{\mathcal{F}_\mathrm{n}\}_{n\geq 0}$ σ - cebirler ailesi $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}_\mathrm{n} \subseteq \mathcal{F}$ olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyor ise, $\{X_n, \mathcal{F}_\mathrm{n}\}_{n\geq 0}$ stokastik dizisine martingal denir:

1. $E|X_n| < \infty, \quad n = 0, 1, \dots,$
2. X_n, $\mathcal{F}_\mathrm{n}$ - ölçülebilirdir,
3. $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_\mathrm{n}) = X_n$ h.h.h.y.

Eğer 3. koşulda $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_\mathrm{n}) = X_n$ yerine $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_\mathrm{n}) \geq X_n$ ifadesi kullanılırsa, bu diziye submartingal, $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_\mathrm{n}) \leq X_n$ ifadesi kullanılırsa süpermartingal denir.

Örnek 2.1. $n = 0, 1, ...$ olmak üzere, $\{\xi_n\}$ bağımsız rastgele değişkenler dizisi ve $X_n = \sum_{i=0}^{n} \xi_i$ olsun. X_n, $\mathcal{F}_n$ - ölçülebilir olduğuna göre, X_n dizisinin,

- $E(\xi_n) = 0$ olduğunda martingal,
- $E(\xi_n) \geq 0$ olduğunda submartingal,
- $E(\xi_n) \leq 0$ olduğunda süpermartingal,

olduğu gösterilsin.

Çözüm.

- $E(\xi_n) = 0$ olduğunda $E(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n) = 0$'dır. Burada $E(X_n|\mathcal{F}_n) = X_n$ olduğundan,

$$\begin{aligned} E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= E(X_n + \xi_{n+1}|\mathcal{F}_n) \\ &= E(X_n|\mathcal{F}_n) + E(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n \end{aligned}$$

dir. Bu durumda X_n dizisi bir martingaldir.

- $E(\xi_n) \geq 0$ olduğunda $E(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq 0$'dır. Burada $E(X_n|\mathcal{F}_n) = X_n$ olduğundan,

$$\begin{aligned} E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= E(X_n + \xi_{n+1}|\mathcal{F}_n) \\ &= E(X_n|\mathcal{F}_n) + E(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq X_n \end{aligned}$$

dir. Bu durumda X_n dizisi bir submartingaldir.

- $E(\xi_n) \leq 0$ olduğunda $E(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq 0$'dır. Burada $E(X_n|\mathcal{F}_n) = X_n$olduğundan,

$$\begin{aligned} E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= E(X_n + \xi_{n+1}|\mathcal{F}_n) \\ &= E(X_n|\mathcal{F}_n) + E(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq X_n \end{aligned}$$

dir. Bu durumda X_n dizisi bir süpermartingaldir.

Örnek 2.2. $n = 0, 1, \ldots$ olmak üzere, $\{\xi_n\}$ bağımsız rastgele değişkenler dizisi ve $E(\xi_n) = 1$ olsun. Π_n, $\mathcal{F}_{\mathrm{n}}$ - ölçülebilir olduğuna göre, $\Pi_n = \Pi_{i=0}^{n} \xi_i$ dizisinin bir martingal olduğu gösterilsin.

Çözüm. $E(\xi_n) = 1$ olduğunda, $E(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n) = 1$ 'dir. Burada $E(\Pi_n|\mathcal{F}_n) = \Pi_n$ olduğundan,

$$
\begin{aligned}
E(\Pi_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= E(\Pi_n \xi_{n+1}|\mathcal{F}_n) \\
&= E(\Pi_n|\mathcal{F}_n)\, E(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n) \\
&= \Pi_n
\end{aligned}
$$

dir. Bu durumda Π_n dizisi bir martingaldir.

Örnek 2.3. $n = 0, 1, \ldots$ olmak üzere, $\{\xi_n\}$ bağımsız rastgele değişkenler dizisi ve $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$ olsun. X_n, $\mathcal{F}_{\mathrm{n}}$ - ölçülebilir olduğuna göre, $E(\xi_n) = 0$ ve $X_0 = \xi_0$ olmak üzere, $n \geq 1$ için

$$
X_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_{k-1}\, \xi_k
$$

dizisinin martingal olduğu gösterilsin.

Çözüm. $E(\xi_n) = 0$ olduğunda, $E(\xi_n|\mathcal{F}_n) = E(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n) = 0$ 'dır. Burada $E(X_n|\mathcal{F}_n) = X_n$ olduğundan,

$$
\begin{aligned}
E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= E(X_n + (\xi_n . \xi_{n+1})|\mathcal{F}_n) \\
&= E(X_n|\mathcal{F}_n) + E((\xi_n . \xi_{n+1})|\mathcal{F}_n) \\
&= E(X_n|\mathcal{F}_n) + E(\xi_n|\mathcal{F}_n) E(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n) \\
&= X_n + E(\xi_n) E(\xi_{n+1}) \\
&= X_n
\end{aligned}
$$

dir. Bu durumda X_n dizisi bir martingaldir.

Örnek 2.4. ξ_1, ξ_2 .... aynı dağılıma sahip bağımsız rastgele değişkenler dizisi ve $E(\xi_i) = 0$ olsun. Z_n, $\mathcal{F}_\mathrm{n}$ - ölçülebilir olduğuna göre, $n \geq 1$ için

$$Z_n = (\sum_{i=1}^{n} \xi_i)^2 - nE({\xi_i}^2) = S_n^2 - nE({\xi_i}^2)$$

dizisinin bir martingal olduğu gösterilsin.

Çözüm. $E(\xi_i) = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ ve $S_{n+1}^2 = (S_n + \xi_{n+1})^2$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} E(Z_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= E\left(S_{n+1}^2 - (n+1)E({\xi_i}^2)|\mathcal{F}_n\right) \\ &= E((S_n + \xi_{n+1})^2 - nE(\xi_i^2) - E(\xi_i^2)|\mathcal{F}_n) \\ &= E(S_n^2 + 2\xi_{n+1}S_n + \xi_{n+1}^2 - nE(\xi_i^2) - E(\xi_i^2)|\mathcal{F}_n) \\ &= E(S_n^2 - nE(\xi_i^2)|\mathcal{F}_n) + 2E(\xi_{n+1}S_n|\mathcal{F}_n) + E(\xi_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) - E(\xi_i^2|\mathcal{F}_n) \\ &= E(S_n^2 - nE(\xi_i^2)|\mathcal{F}_n) \\ &= Z_n \end{aligned}$$

dir. Böylece Z_n dizisi bir martingaldir.

Örnek 2.5. ξ_1, ξ_2 .... aynı dağılıma sahip bağımsız rastgele değişkenler dizisi ve $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ olsun. $\lambda \neq 0$ olmak üzere, $\varphi(\lambda) = E\left(e^{\lambda \xi_1}\right)$ mevcut olsun. Bu durumda, $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_n)$ olmak üzere X_n, $\mathcal{F}_\mathrm{n}$ - ölçülebilir olduğuna göre, $n \geq 1$ için

$$X_n = \frac{e^{\lambda S_n}}{[\varphi(\lambda)]^n}$$

dizisinin martingal olduğu gösterilsin.

Çözüm. Bu durumda,

$$E(X_1) = E\left(\frac{e^{\lambda S_1}}{[\varphi(\lambda)]^1}\right) = \frac{E(e^{\lambda S_1})}{E(e^{\lambda S_1})} = 1$$

olduğunu kolayca görmek mümkündür. Buna göre,

$$\begin{aligned} E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = E\left(\frac{e^{\lambda S_{n+1}}}{[\varphi(\lambda)]^{n+1}}\middle|\mathcal{F}_n\right) &= E\left(\frac{e^{\lambda(S_n+\xi_{n+1})}}{[\varphi(\lambda)]^n[\varphi(\lambda)]}\middle|\mathcal{F}_n\right) \\ &= E\left(\frac{e^{\lambda S_n}e^{\lambda(\xi_{n+1})}}{[\varphi(\lambda)]^n[\varphi(\lambda)]}\middle|\mathcal{F}_n\right) = E\left(\frac{e^{\lambda S_n}}{[\varphi(\lambda)]^n}\middle|\mathcal{F}_n\right)E\left(\frac{e^{\lambda S_1}}{[\varphi(\lambda)]}\middle|\mathcal{F}_n\right) \\ &= E(X_n|\mathcal{F}_n)E(X_1|\mathcal{F}_n) \\ &= X_nE(X_1) \\ &= X_n \end{aligned}$$

elde edilir.

Bir kesikli zamanlı X_n dizisinin tanımı ve örnekleri yukarıda verildi. Şimdi ise bu tanım sürekli zaman durumu için verilsin.

Tanım 2.2 (Süzgeç). $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ olasılık uzayı ve $\mathbb{T}$ kümesi $\mathbb{R}$'nin bir alt kümesi olsun. $\mathcal{F}$'nin alt σ - cebirlerinin bir sistemi $\{\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{T}\}$ artan bir sistemse, yani $\forall s, t \in \mathbb{T}$, $s < t$ için $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ ise $\{\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{T}\}$ sistemine süzgeç denir.

Tanım 2.3 (Süzgeç Uzay). $\{\mathcal{F}_t\}$ süzgecinin oluşturduğu uzay $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{T}\}, \mathrm{P})$ veya kısaca $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathrm{P})$ bir süzgeç uzay olarak adlandırılır. Eğer $\forall t \in \mathbb{T}$ için X_t, $\mathcal{F}_t$ - ölçülebilir ise $\mathrm{X_t}$, $\mathcal{F}_\mathrm{t}$ - uyarlanmıştır denir.

Tanım 2.4 (Martingal). $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathrm{P})$ süzgeç uzayında tanımlı stokastik süreç $X = \{X_t(\omega),\ \omega \in \Omega, t \in \mathbb{T}\}$ aşağıdaki şartları sağlarsa $(\{\mathcal{F}_t\}, \mathrm{P})$'ye göre bir martingal olarak adlandırılır:

i. X, $\mathcal{F}_t$- uyarlanmıştır.
ii. X bir L_1 sürecidir, yani X integrallenebilirdir.
iii. $(\Omega, \mathcal{F}_\mathrm{s}, \mathrm{P})$'de $\forall s, t \in \mathbb{T}$, $s < t$ için h.h.h.y. $E(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$ ise X martingal,
iv. $(\Omega, \mathcal{F}_\mathrm{s}, \mathrm{P})$'de $\forall s, t \in \mathbb{T}$, $s < t$ için h.h.h.y. $E(X_t|\mathcal{F}_s) \geq X_s$ ise X submartingal,
v. $(\Omega, \mathcal{F}_\mathrm{s}, \mathrm{P})$'de $\forall s, t \in \mathbb{T}$, $s < t$ için h.h.h.y. $E(X_t|\mathcal{F}_s) \leq X_s$ ise X süpermartingal.

Burada L_1 sınıfı birinci dereceden kuvveti integrallenebilir fonksiyonlar sınıfıdır ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$L_1 = \left\{ X_t \colon \int_{\Omega} X_t \, P\{d\omega\} < \infty \right\}.$$

Tanımdan da görüldüğü gibi martingaller, submartingaller ve süpermartingaller $s, t \in \mathbb{T}$, $s < t$ için yukarıdaki gibi $E(X_t | \mathcal{F}_s)$ koşullu beklenen değerin durumlarında tanımlanan stokastik süreçlerdir.

Bu özelliklere göre t artarken, bir submartingal ortalama üzerinden artar, bir süpermartingal ortalama üzerinden azalır ve bir martingal sürekli ortalama üzerinde kalır (Yeh, 1995).

Örnek 2.6. Wiener sürecinin bir martingal olduğu gösterilsin.

Çözüm. $\mathcal{F}_{\leq s} = \sigma\{W_u;\ u \in \mathbb{T}; u \leq s\}$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} E(W_t | \mathcal{F}_{\leq s}) &= E(W_t - W_s + W_s | \mathcal{F}_{\leq s}) \\ &= E(W_t - W_s | \mathcal{F}_{\leq s}) + E(W_s | \mathcal{F}_{\leq s}) \\ &= E(W_t - W_s) + W_s \\ &= W_s \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, Wiener sürecinin $E(W_t - W_s) = 0$ özelliğinden yararlanılmıştır.

Örnek 2.7. Poisson sürecinin bir submartingal olduğu gösterilsin.

Çözüm. $\mathcal{F}_{\leq s} = \sigma\{N_u;\ u \in \mathbb{T}; u \leq s\}$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} E(N_t | \mathcal{F}_{\leq s}) &= E(N_t - N_s + N_s | \mathcal{F}_{\leq s}) \\ &= E(N_t - N_s | \mathcal{F}_{\leq s}) + E(N_t | \mathcal{F}_{\leq s}) \\ &= E(N_t - N_s) + N_s \geq N_s \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, Poisson sürecinin $\lambda \geq 0$ ve $s < t$ için $E(N_t - N_s) = \lambda(t-s)$, özelliğinden yararlanılmıştır.

Örnek 2.8. N_t poisson süreci olsun. $N_t{}' = N_t - \lambda t$ sürecinin martingal olduğu gösterilsin.

Çözüm. $\mathcal{F}_{\leq s} = \sigma\{N_u{}';\ u \in \mathbb{T}; u \leq s\}$ olsun. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
E(N_t{}'|\mathcal{F}_{\leq s}) &= E(N_t{}' - N_s{}' + N_s{}'|\mathcal{F}_{\leq s}) \\
&= E(N_t{}' - N_s{}'|\mathcal{F}_{\leq s}) + E(N_s{}'|\mathcal{F}_{\leq s}) \\
&= E(N_t{}' - N_s{}') + N_s{}' \\
&= E(N_t - \lambda t - N_s + \lambda s) + N_s{}' \\
&= E(N_t) - \lambda t - E(N_s) + \lambda s + N_s{}' \\
&= \lambda t - \lambda t - \lambda s + \lambda s + N_s{}' \\
&= N_s{}'
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada, Poisson sürecinin $E(N_t - N_s) = \lambda(t-s)$, $\lambda > 0$ özelliğinden yararlanılmıştır.

Önerme 2.5. $X = \{X_t: t \in \mathbb{T}\}$, $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathrm{P})$ süzgeç uzayında tanımlı stokastik bir süreç olmak üzere,

1. X bir martingal ise, o zaman $\forall t \in \mathbb{T}$ için $E(X_t) =$ sabittir.
2. X bir submartingal ise, o zaman $t \to \infty$ iken $E(X_t)$ artandır.
3. X bir süpermartingal ise, o zaman $t \to \infty$ iken $E(X_t)$ azalandır.
4. Bir submartingal olan X, ancak ve ancak $\forall t \in \mathbb{T}$ için $E(X_t) =$sabit ise bir martingaldir.
5. Bir süpermartingal olan X, ancak ve ancak $\forall t \in \mathbb{T}$ için $E(X_t) =$sabit ise bir martingaldir.

İspat. 1, 2 ve 3 özellikleri sırasıyla Tanım 2.4.'ün iii, iv ve v sonuçlarına yakındır. Bu yüzden 2'nin ispatı için Tanım 2.4.'ün iv'ü aşağıdaki gibi kullanılabilir. X bir submartingal olduğundan, $(\Omega, \mathcal{F}_s, \mathrm{P})$'de h.h.h.y.,

$$E(X_t|\mathcal{F}_s) \geq X_s$$

olmalıdır. Her iki tarafında beklenen değeri alınırsa,

$$E[E(X_t|\mathcal{F}_s)] \geq E(X_s),\ s < t$$

olur. Burada koşullu beklenen değerin özelliğinden,

$$E[E(X_t|\mathcal{F}_s)] = E(X_t)$$

olduğundan,

$$E[E(X_t|\mathcal{F}_s)] = E(X_t) \geq E(X_s)$$

elde edilir. Bu yüzden $E(X_t)$, $t \to \infty$ iken artandır. 1 ve 3 özellikleri de benzer şekilde ispatlanabilir. 4'ü ispatlamak için ise, X'in bir submartingal olduğu varsayılsın ve $t \in \mathbb{T}$ için $E(X_t)$ =sabit olsun. Bu durumda $(\Omega, \mathcal{F}_s, \mathrm{P})$'de $s, t \in \mathbb{T},\ s < t$ için h.h.h.y.

$$E(X_t|\mathcal{F}_s) \geq X_s$$

dir. Diğer taraftan,

$$E[E(X_t|\mathcal{F}_s)] = E(X_t) = E(X_s)$$

dir. Yani,

$$\int_{\Omega} E(X_t|\mathcal{F}_s) P(d\omega) = \int_{\Omega} X_s P(d\omega).$$

Böylece $(\Omega, \mathcal{F}_s, \mathrm{P})$'de h.h.h.y.

$$E(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$$

'dir. Bu ise X'in bir martingal olduğunu gösterir. 5 özelliğinde verilen süpermartingal içinde ispat benzer şekildedir (Yeh, 1995).

Önerme 2.6. Bir martingal, submartingal ve süpermartingal için Tanım 2.4.'deki monotonluk şartları iii, iv ve v sırasıyla aşağıdaki koşullara denktir.

iii$'$. $$\int_E X_t\, P(d\omega) = \int_E X_s\, P(d\omega), \qquad E \in \mathcal{F}_s, \qquad s,t \in \mathbb{T}, \qquad s < t,$$

iv$'$. $$\int_E X_t\, P(d\omega) \geq \int_E X_s\, P(d\omega), \qquad E \in \mathcal{F}_s, \qquad s,t \in \mathbb{T}, \qquad s < t,$$

v$'$. $$\int_E X_t\, P(d\omega) \leq \int_E X_s\, P(d\omega), \qquad E \in \mathcal{F}_s, \qquad s,t \in \mathbb{T}, \qquad s < t.$$

Önermenin doğruluğunu göstermek için, örnek olarak iv ve iv$'$ koşullarının denkliği ele alınsın. $E(X_t|\mathcal{F}_s)$'nin tanımından,

$$\int_E X_t\, P(d\omega) = \int_E E(X_t|\mathcal{F}_s)\, P(d\omega), \qquad \forall E \in \mathcal{F}_s$$

olduğu bilinmektedir. Böylece eğer iv elde edilirse, iv$'$'de elde edilir. Aynı zamanda iv$'$ elde edilirse, son eşitlikten,

$$\int_E E(X_t|\mathcal{F}_s)\, P(d\omega) \geq \int_E X_s\, P(d\omega), \qquad \forall E \in \mathcal{F}_s$$

olur. Bu durumda hem $E(X_t|\mathcal{F}_s)$'nin hem de X_s'nin $\mathcal{F}_s$ - ölçülebilirliğinden iv elde edilir. iii ile iii$'$'nün ve v ile v$'$'nün denkliğide benzer şekilde ispatlanabilir.

Önerme 2.7. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}^+$ olduğunda, Tanım 2.4'deki iii, iv ve v koşulları sırasıyla aşağıdaki koşullara eşittir. $(\Omega, \mathcal{F}_n, P)$'de h.h.h.y.,

iii$''$. $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n,\ n \in \mathbb{Z}^+,$

iv$''$. $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq X_n,\ n \in \mathbb{Z}^+,$

v$''$. $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq X_n,\ n \in \mathbb{Z}^+.$

İspat. Önermenin ispatı için iv ve iv$''$ ele alınsın. iv'ün ve iv$''$'nü ifade ettiği açıkça görülür. Bunu ifade etmek için $n, m \in \mathbb{Z}^+$ ve $n < m$ olsun. Bu durumda iv$''$'nün tekrarlı uygulamasından, $(\Omega, \mathcal{F}_n, P)$'de h.h.h.y.,

$$
\begin{aligned}
E(X_m|\mathcal{F}_n) &= E[E(X_m|\mathcal{F}_{m-1})|\mathcal{F}_n] \geq E(X_{m-1}|\mathcal{F}_n) \\
&= E[E(X_{m-1}|\mathcal{F}_{m-2})|\mathcal{F}_n] \geq E(X_{m-2}|\mathcal{F}_n) \\
&\vdots \\
&= E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq X_n
\end{aligned}
$$

elde edilir ve iv ispatlanır. iii ile iii$''$'nün ve v ile v$''$'nün eşitliğide benzer şekilde ispatlanabilir.

Önerme 2.8. $X = \{X_t : t \in \mathbb{T}\}$, $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathrm{P})$ süzgeç uzayında tanımlı stokastik bir süreç ve $(\Omega, \mathcal{F}, P)$'nin süzgeci, X'den üretilen $\{\mathcal{F}_t^X\}$, yani $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s : s \in \mathbb{T}, s \leq t\}$, $t \in \mathbb{T}$ olsun. Eğer X, $(\{\mathcal{F}_t\}, P)$'ye göre bir martingal, submartingal veya süpermartingal ise, $(\{\mathcal{F}_t^X\}, P)$'ye göre de bir martingal, submartingal veya süpermartingaldir.

İspat. X, $(\{\mathcal{F}_t\}, P)$'ye göre bir submartingal olduğundan X_t, $\{\mathcal{F}_t\}$ - ölçülebilirdir ve böylece $\forall t \in \mathbb{T}$ için, $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t$'dir. $\mathcal{F}_t^X$'in tanımından X süreci $\{\mathcal{F}_t^X\}$ - uyarlanmıştır. Böylece Önerme 2.7.'ye göre X'in $\left(\{\mathcal{F}_t^{X_t}\}, P\right)$'ye göre bir submartingal olduğunu göstermek için submartingalin tanımını aşağıdaki gibi doğrulamak yeterlidir:

$$\int_E X_t\, P(d\omega) \geq \int_E X_s\, P(d\omega), \qquad E \in \mathcal{F}_s^X, \qquad s,t \in \mathbb{T}, \qquad s < t.$$

$\forall E \in \mathcal{F}_s$ için X, $(\{\mathcal{F}_t\}, P)$'ye göre bir submartingaldir. $\mathcal{F}_s^X \subset \mathcal{F}_s$ olduğundan, yukarıdaki eşitlikte görüldüğü gibi $\forall E \in \mathcal{F}_s^X$ içinde $(\{\mathcal{F}_t^X\}, P)$ 'ye göre X bir submartingaldir. Martingal ve süpermartingal içinde ispat benzer şekildedir.

Önerme 2.9. $Y = \{Y_t : t \in \mathbb{T}\}$ olmak üzere, $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ süzgeç uzayında tanımlı uyarlanmış bir L_1- süreci $X = \{X_t : t \in \mathbb{T}\}$ için aşağıdaki durumlar elde edilir.

1. X, ancak ve ancak hem submartingal hemde süpermartingal ise bir martingaldir.
2. X, ancak ve ancak $-X$ bir süpermartingal ise bir submartingal veya ancak ve ancak $-X$ bir submartingal ise bir süpermartingaldir.
3. X bir martingal ise, $c \in \mathbb{R}$ için cX'de bir martingaldir
4. X bir submartingal ise, $c \geq 0$ için cX 'de submartingaldir. X bir süpermartingal ise, $c \leq 0$ için cX'de bir süpermartingaldir.
5. X ve Y her ikiside bir martingal ise, $X + Y$'de bir martingaldir. X ve Y her ikiside bir submartingal ise, $X + Y$ 'de bir submartingaldir. X ve Y her ikiside bir süpermartingal ise, $X + Y$'de bir süpermartingaldir.
6. X bir martingal ve Y bir submartingal ise, $X + Y$'de bir submartingaldir. X bir martingal ve Y bir süpermartingal ise, $X + Y$'de bir süpermartingaldir.

2.1. Konveks (Dışbükey) Teoremleri

$X = \{X_t : t \in \mathbb{T}\}$, olasılık uzayında tanımlı bir stokastik süreç olmak üzere, $\mathbb{R}$'de tanımlı gerçek değerli bir f fonksiyonu $f(x)$ ile ve $\{f \circ X_t : t \in \mathbb{T}\}$ ise $f \circ X$ ile gösterilsin. Burada $X^+ = \{X_t \vee 0 : t \in \mathbb{T}\}$ ve $X \vee Y = \{X_t \vee Y_t : t \in \mathbb{T}\}$ ile gösterilsin.

Teorem 2.1.1. $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ süzgeç uzayında tanımlı X ve Y stokastik süreçleri submartingaller ise, $X \vee Y$'de submartingaldir. Benzer şekilde, X ve Y stokastik süreçleri süpermartingaller ise, $X \wedge Y$ 'de süpermartingaldir.

İspat. X ve Y submartingaller olmak üzere, $\forall t \in \mathbb{T}$ için X_t ve Y_t , $\mathcal{F}_t$ - ölçülebilir olduğundan, $X_t \vee Y_t$ ‘de $\mathcal{F}_t$ - ölçülebilirdir ve böylece $X_t \vee Y_t$ uyarlanabilir bir süreçtir. $X_t , Y_t \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ ve $|X_t \vee Y_t| \leq |X_t| + |Y_t|$ olduğu için $X_t \vee Y_t \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ ’dir. Böylece $X \vee Y$ bir L_1- sürecidir. $s, t \in \mathbb{T},\ s < t$ için,

$$X_t \vee Y_t \geq X_t ,$$
$$X_t \vee Y_t \geq Y_t$$

ise, $(\Omega, \mathcal{F}_s, P)$’de h.h.h.y.,

$$E(X_t \vee Y_t | \mathcal{F}_s) \geq E(X_t | \mathcal{F}_s) \geq X_s ,$$
$$E(X_t \vee Y_t | \mathcal{F}_s) \geq E(Y_t | \mathcal{F}_s) \geq Y_s$$

olur. Böylece $(\Omega, \mathcal{F}_s, P)$’de h.h.h.y.

$$E(X_t \vee Y_t | \mathcal{F}_s) \geq X_s \vee Y_s$$

dir. Buda $X_t \vee Y_t$ ‘nin bir submartingal olduğunu gösterir. X_t ve Y_t süpermartingaller olduğunda $X_t \wedge Y_t$’nin de bir süpermartingal olduğu benzer şekilde gösterilir.

Sonuç 2.1.2. $X = \{X_t : t \in \mathbb{T}\}$, $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathrm{P})$ süzgeç uzayında, stokastik bir süreç olsun.

1. X bir submartingal ise, o zaman X^+’da bir submartingaldir.
2. X bir süpermartingal ise, o zaman X^-’de submartingaldir.
3. X bir martingal ise, X' ve X'' negatif olmayan submartingaller olduğunda $X = X' - X''$ eşitliği vardır.

İspat.

1. X bir submartingal ise, $Y = 0$ bir martingal olduğundan, Teorem 2.1.1.’den $X^+ = X \vee 0$ bir submartingaldir.

2. X bir süpermartingal ise, $Y = 0$ bir martingal olduğundan, teorem 2.1.1.'den $X_t \wedge 0$ bir süpermartingaldir. Bu durumda $X^- = -(X \wedge 0)$ bir submartingaldir.

3. X bir martingal ise, X^+ bir submartingaldir. X bir süpermartingal ise, X^- bir submartingaldir. $X = X^+ - X^-$ olduğundan, X süreci iki negatif olmayan submartingalin farkıdır.

Teorem 2.1.3. $X = \{X_t : t \in \mathbb{T}\}$, $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ süzgeç uzayında tanımlı uyarlanmış bir L_1- süreci ve f, $\mathbb{R}$'de tanımlı gerçek değerli artan bir fonksiyon olmak üzere, $\forall t \in \mathbb{T}$ için $f \circ X_t \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ olsun.

1. Xbir submartingal ve$f$ bir konveks fonksiyon ise, $f \circ X$ bir submartingaldir.
2. Xbir süpermartingal ve$f$ bir konkav fonksiyon ise, $f \circ X$ bir süpermartingaldir.
3. X bir martingal olduğunda ve f fonksiyonunun monotonluk şartı kaldırıldığında 1 ve 2 özellikleri yine geçerlidir.

İspat.

1. X'in bir submartingal olduğu varsayılsın. f, $\mathbb{R}$'de tanımlı gerçek değerli artan bir fonksiyondur. $f \circ X$ uyarlanmış bir süreçtir. X bir submartingal olduğunda, $s, t \in \mathbb{T}$, $s < t$ için, $(\Omega, \mathcal{F}_s, P)$'de h.h.h.y.,

i. $E(X_t | \mathcal{F}_s) \geq X_s$'dir.
ii. f artan fonksiyon olduğunda, $f\big(E(X_t | \mathcal{F}_s)\big) \geq f(X_s)$'dir.
iii. Koşullu Jensen eşitsizliğinden, $E(f(X_t) | \mathcal{F}_s) \geq f\big(E(X_t | \mathcal{F}_s)\big)$'dir.

ii ve iii'den, $(\Omega, \mathcal{F}_s, P)$'de h.h.h.y.,

$$E(f(X_t) | \mathcal{F}_s) \geq f(X_s)$$

elde edilir. Böylece $f(X)$ bir submartingaldir.

X bir martingal olduğunda i'deki eşitlik elde edilir ve böylece ii'deki eşitlik f'in artan bir fonksiyon olduğunu varsaymadan da elde edilir. Bu durumda $f(X)$, f'in monotonluk şartı ortadan kaldırıldığında bir submartingaldir.

2. X'in bir süpermartingal olduğu varsayılsın. Bu durumda $s, t \in \mathbb{T},\ s < t$ için $(\Omega, \mathcal{F}_s, P)$'de h.h.h.y.,

$$E(X_t|\mathcal{F}_s) \leq X_s$$

dir. f artan bir fonksiyon olduğundan,

$$f\big(E(X_t|\mathcal{F}_s)\big) \leq f(X_s)$$

dir. Eğer f konkav ise, $-f$ konvekstir. Böylece koşullu Jensen eşitsizliğinden,

$$E(-f(X_t)|\mathcal{F}_s) \geq -f\big(E(X_t|\mathcal{F}_s)\big)$$

dir. Bu durumda $(\Omega, \mathcal{F}_s, P)$'de h.h.h.y.,

$$E(f(X_t)|\mathcal{F}_s) \leq f(X_s)$$

dir. Buda $f(X)$'in bir süpermartingal olduğunu gösterir.

2.2. Kesikli Zaman Artan Süreçleri ve Doob Gösterimi

Tanım 2.2.1. Artan bir süreç ifadesiyle $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n : n \in \mathbb{Z}^+\}, P)$ süzgeç uzayında tanımlı aşağıdaki koşulları sağlayan $A_n, n \in \mathbb{Z}^+$ stokastik süreci kastedilmektedir.

1. A, $\{\mathcal{F}_n\}$ - uyarlanmıştır.
2. A bir L_1- sürecidir.
3. $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$'de bir boş küme Λ varsa, $A_0(\omega) = 0$ olmak üzere $\forall \omega \in \Lambda^c$ için $\{A_n(\omega) : n \in \mathbb{Z}^+\}$ artan bir dizidir.

4. $\forall\omega \in \Omega$ için $\{A_n(\omega): n \in \mathbb{Z}^+\}$, $A_0(\omega) = 0$ olmak üzere artan bir dizidir. Eğer A, $1, 2$ ve 3 koşullarını sağlarsa, hemen hemen kesin artan bir süreç olarak adlandırılır.

Hemen hemen kesin artan bir süreç olan A_n , $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için her zaman bir submartingaldir. Bu durumda

$$A_{n+1} \geq A_n$$

olduğundan, $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ olasılık uzayında h.h.h.y.

$$E(A_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq E(A_n|\mathcal{F}_n) = A_n$$

olur. Eğer M bir martingal, A hemen hemen kesin artan süreçse ve bir submartingalse Önerme 2.9.'dan

$$X = A + M$$

bir submartingaldir. Doob Gösterimi teoremi kesikli zamanlı bir submartingalin her zaman bir martingalin ve hemen hemen kesin artan bir sürecin toplamı olduğunu gösterir. Kesikli zamanlı süreçlerin öngörülebilirliği aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.2.2. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $X = \{X_n: n \in \mathbb{Z}^+\}$, $\mathcal{F}_{n-1}$ - ölçülebilir ise, bir $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}, P)$ süzgeç uzayında tanımlı uyarlanmış kesikli zamanlı X_n süreci $\mathcal{F}_n$ - öngörülebilir süreci olarak adlandırılır. X, $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ süzgeç uzayında uyarlanmış bir L_1 süreci ve $Y_0 = 0$ olmak üzere $\forall t \in \mathbb{T}$ için $Y_t = X_t - X_0$ şeklinde tanımlanan bir L_1-süreci ise, X'in martingal, submartingal veya süpermartingal olmasına göre, Y'de sırasıyla martingal, submartingal veya süpermartingaldir.

Teorem 2.2.3 (Doob Gösterimi). X , $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}, P)$ süzgeç uzayında tanımlı uyarlanmış bir L_1 süreci olsun. Bu durumda X'nin Doob gösterimi şöyledir:

$$X = X_0 + M + A.$$

Burada $X_0 = 0$, M, $M_0 = 0$ olan bir martingal ve A ise $A_0 = 0$ olan öngörülebilir bir L_1 sürecidir. $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$'de h.h.h.y., $\forall\omega$ için $M(.,\omega) = M'(.,\omega)$ ve $A(.,\omega) = A'(.,\omega)$ olmak üzere, $X = X_0 + M' + A''$de Doob gösteriminin bir başka benzer gösterimidir. Gösterimde kullanılan A, $A_0 = 0$ olmak üzere öngörülebilir hemen hemen kesin artan bir L_1 - süreci ise, süzgeç uzayda tanımlı uyarlanmış bir L_1 - süreci olan X bir submartingaldir.

İspat.

1. X uyarlanmış bir L_1 - süreci ve $A_0 = 0$ olmak üzere A süreci tanımlansın. $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$A_0 = 0$$
$$A_n = A_{n-1} + E(X_n - X_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1})$$

dir. $\forall n \in \mathbb{N}$ için A_n, $\mathcal{F}_{n-1}$- ölçülebilir olduğunda A öngörülebilir bir süreçtir. $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için A_n integrallenebilirdir. Bu durumda A bir L_1 sürecidir. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $X - A$ süreci elde edilebilir. $(\Omega, \mathcal{F}_{n-1}, P)$ 'de h.h.h.y.,

$$\begin{aligned} E(X_n - A_n | \mathcal{F}_{n-1}) &= E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) - E(A_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) - E(X_n - X_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= X_{n-1} - A_{n-1} \end{aligned}$$

dir. Bu sonuç $X - A$'nın bir martingal olduğunu gösterir. Eğer $M = (X - A) - X_0$ ise, $A_0 = 0$ olduğunda, $M_0 = 0$'dır. Böylece $X = X_0 + M + A$ Doob gösterimi elde edilir.

2. Gösterimin tekliğini ispatlamak için uyarlanmış bir L_1- süreci X aşağıdaki şekilde verilsin.

$$X = X_0 + M + A = X_0 + M' + A'$$

Burada M ve M', $M_0 = 0$ ve $M_0{}' = 0$ olan martingaller, A ve A' öngörülebilir L_1 - süreçleridir.

$$X = X_0 + M + A$$

gösteriminden, M_n 'nin martingal özelliğinden ve A_n 'nin öngörülebilirliğinden, $(\Omega, \mathcal{F}_{n-1}, P)$'de h.h.h.y.,

$$\begin{aligned} E(X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}) &= E\big((M_n + A_n) - (M_{n-1} + A_{n-1})\big|\mathcal{F}_{n-1}\big) \\ &= A_n - A_{n-1} \end{aligned} \tag{2.1}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$X = X_0 + M' + A'$$

gösteriminden $(\Omega, \mathcal{F}_{n-1}, P)$'de h.h.h.y. ,

$$E(X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}) = A_n' - A_{n-1}{}'$$

elde edilir. Böylece $\forall n \in \mathbb{N}$ için, $(\Omega, \mathcal{F}_{n-1}, P)$'de h.h.h.y.,

$$A_n - A_{n-1} = A_n' - A_{n-1}{}' \tag{2.2}$$

dir. Burada A ve A' süreçlerinin her ikiside $A_0 = 0$ ve $A_0{}' = 0$ olduğundan $(\Omega, \mathcal{F}_0, P)$'de h.h.h.y. $A_0 = A_0{}'$'dür. (2.2) eşitliği, $(\Omega, \mathcal{F}_0, P)$'de h.h.h.y. $A_1 = A_1{}'$ olduğunu ifade eder. (2.2)'nin tekrarlı uygulamaları, $\forall n \in N$ için $(\Omega, \mathcal{F}_{n-1}, P)$'de h.h.h.y. $A_n = A_n{}'$eşitliğini verir. Z^+'nın sayılabilirliğinden $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$'de bir boş küme Λ vardır. Öyle ki, $\forall \omega \in \Lambda^c$ için $A(.,\omega) = A'(.,\omega)$ 'dır. $M = X - X_0 - A$ ve $M' = X - X_0 - A'$ iken, son eşitlik $\forall \omega \in \Lambda^c$ için $M(.,\omega) = M'(.,\omega)$'yı ifade eder.

3. X bir submartingal ve $X = X_0 + M + A$ onun Doob gösterimi olsun. M bir martingal iken,

$$A = X - M - X_0$$

bir submartingaldir ve böylece A'nın öngörülebilirliğinden $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(\Omega, \mathcal{F}_{n-1}, P)$'de h.h.h.y.,

$$A_n = E(A_n|\mathcal{F}_{n-1}) \geq A_{n-1}$$

elde edilir. $\mathbb{N}$ sayılabilir bir grup olduğundan $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$'de boş bir küme Λ vardır. Öyle ki $\omega \in \Lambda^c$ olduğunda bütün $n \in \mathbb{N}$ için $A_{n-1}(\omega) \leq A_n(\omega)$ 'dır. Bu A'nın hemen hemen kesin artan bir süreç olduğunu gösterir. Diğer taraftan A'nın hemen hemen kesin artan süreç olduğu varsayıldığında A bir submartingaldir. M bir martingal iken $X = X_0 + M + A$ bir submartingaldir.

2.3. Martingal Dönüşümü

Martingal dönüşümü martingallere göre stokastik integralin bir prototipidir. Sürekli zamanda stokastik integralin kesikli zaman analoğudur.

Tanım 2.3.1. $X = \{X_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ bir martingal, submartingal veya süpermartingal ve $C = \{C_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$, $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}, P)$ süzgeç uzayında tanımlı öngörülebilir bir süreç olsun. C'ye göre X'in martingal dönüşümünden $C \bullet X$ stokastik süreci, $n \in \mathbb{N}$ için

$$(C \bullet X)_0 = 0$$
$$(C \bullet X)_n = \sum_{k=1}^{n} C_k (X_k - X_{k-1})$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 2.3.2. C_0, $C \bullet X$'in tanımında rol oynamaz. $k = 1, 2, \dots, n$ için C_k, X_k ve X_{k-1}, bütün $\mathcal{F}_n$- ölçülebilirdir. Bu durumda $C \bullet X$ uyarlanmış bir süreçtir. Eğer C sınırlı bir süreç ise, X bir L_1- süreci olduğunda,

$$\sum_{k=1}^{n} C_k . (X_k - X_{k-1}) \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_{n-1}, P)$$

dir. Böylece $C \bullet X$'de bir L_1 sürecidir. Eğer hem C hem de X, L_2- süreçleri ise, Hölder eşitsizliğinden,

$$\sum_{k=1}^{n} C_k.(X_k - X_{k-1}) \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_{n-1}, P)$$

dir. Böylece $C \bullet X$ bir L_1 - sürecidir.

Teorem 2.3.3 (Martingal Dönüşümü). $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n : n \in \mathbb{Z}^+\}, P)$ süzgeç uzayı olsun.

1. C_n sınırlı öngörülebilir negatif olmayan bir süreç ve X_n süzgeç uzayında bir martingal, submartingal veya süpermartingal ise, $C \bullet X$ martingal dönüşümü $(C \bullet X)_0 = 0$ olmak üzere sırasıyla bir martingal, submartingal veya süpermartingaldir.
2. C_n sınırlı öngörülebilir bir süreç ve X bir martingal ise, $(C \bullet X)_0 = 0$ olmak üzere $C \bullet X$ bir martingaldir.
3. 1 ve 2'de verilen C üzerindeki sınırlılık koşulu hem C'nin hem de X'in L_2-süreçleri olması durumunda yer değiştirilebilirdir.

İspat. Önerme 2.3.2' den, 1, 2 ve 3'ün her birindeki hipotez altında $C \bullet X$ uyarlanmış bir L_1- sürecidir. $\forall n \in \mathbb{N}$ için, C_n'nin $\mathcal{F}_{n-1}$ ölçülebilirliğinden, $(\Omega, \mathcal{F}_{n-1}, P)$'de h.h.h.y.,

$$\begin{aligned} E((C \bullet X)_n | \mathcal{F}_{n-1}) &= E\left(\sum_{k=1}^{n-1} C_k.\{X_k - X_{k-1}\} | \mathcal{F}_{n-1}\right) \\ &\quad + E(C_n.\{X_n - X_{n-1}\} | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} C_k.\{X_k - X_{k-1}\} + C_n.\{E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) - X_{n-1}\} \\ &= (C \bullet X)_{n-1} + C_n.\{E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) - X_{n-1}\} \end{aligned} \tag{2.3}$$

elde edilir (Yeh, 1995).

1. C 'nin sınırlı olduğu ve negatif olmadığı varsayılsın. $C_n \geq 0$ olmak üzere $(\Omega, \mathcal{F}_{n-1}, P)$'de h.h.h.y.,

- X bir martingal ise, $E(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}$ ve $C_n.\{E(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) - X_{n-1}\} = 0$’dır. Bu durumda,

$$E((C \bullet X)_n|\mathcal{F}_{n-1}) = (C \bullet X)_{n-1}$$

elde edilir. Yani $C \bullet X$ bir martingaldir.

- X bir submartingal ise, $E(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) \geq X_{n-1}$ bir submartingal ve $C_n.\{E(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) - X_{n-1}\} \geq 0$’dır. Bu durumda,

$$E((C \bullet X)_n|\mathcal{F}_{n-1}) \geq (C \bullet X)_{n-1}$$

elde edilir. Yani $C \bullet X$ bir submartingaldir

- X bir süpermartingal ise, $E(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) \leq X_{n-1}$ bir submartingal ve $C_n.\{E(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) - X_{n-1}\} \leq 0$’dır. Bu durumda,

$$E((C \bullet X)_n|\mathcal{F}_{n-1}) \leq (C \bullet X)_{n-1}$$

elde edilir. Yani $C \bullet X$ bir süpermartingaldir.

2. C ’nin sınırlı ve X ’in bir martingal olduğu varsayılsın. Bu durumda $(\Omega, \mathcal{F}_{n-1}, P)$’de h.h.h.y.,

$$E(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}$$

dir. Böylece $(\Omega, \mathcal{F}_{n-1}, P)$’de h.h.h.y.,

$$C_n\{E(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) - X_{n-1}\} = 0$$

dır. (2.3) eşitliğinde bu bilgi kullanılarak, $(\Omega, \mathcal{F}_{n-1}, P)$ ‘de h.h.h.y.,

$$E((C \bullet X)_n|\mathcal{F}_{n-1}) = (C \bullet X)_{n-1}$$

elde edilir ve buda $C \bullet X$ ‘in bir martingal olduğunu gösterir.

Tanım 2.3.4. T, $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n : n \in \mathbb{Z}^+\}, P)$ süzgeç uzayında durağan bir süreç olsun. $C^{(T)} = \left\{C_n^{(T)} : n \in \mathbb{Z}^+\right\}$ olmak üzere $C^{(T)}$'nin öngörülebilir olduğu ifade edilir. $n \in \mathbb{Z}^+$ için $C_n^{(T)} = 1_{\{n \leq T(\omega)\}}$ şeklinde gösterilir. Diğer bir deyişle,

$$C_n^{(T)}(\omega) = 1_{\{n \leq T(\omega)\}}(\omega) = \begin{cases} 1, & n \leq T(\omega) \\ 0, & n > T(\omega) \end{cases}$$

Teorem 2.3.5. X bir submartingal, bir martingal veya bir süpermartingal ve T , $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}, P)$ süzgeç uzayında bir durağan süreç olduğunda

$$X^{T\wedge} = X_0 + ({C_n}^{(T)} \bullet X_n)$$

dir. Tanım 2.3.1. ve Tanım 2.3.4.'den $\left(C^{(T)} \bullet X\right)_{\mathbf{0}} = 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned}
\left(C^{(T)} \bullet X\right)_n &= \sum_{k=1}^{n} 1_{\{k \leq T\}}.\{X_k - X_{k-1}\} \\
&= 1_{\{1 \leq T\}}.\{X_1 - X_0\} + 1_{\{2 \leq T\}}.\{X_2 - X_1\} + \cdots + 1_{\{n \leq T\}}.\{X_n - X_{n-1}\} \\
&= -X_0.1_{\{1 \leq T\}} + \sum_{k=1}^{n-1} X_k\,.\{1_{\{k \leq T\}} - 1_{\{k+1 \leq T\}}\} + X_n.1_{\{n \leq T\}}
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Son eşitlikte bulunan ifadeler açılacak olursa,

$$X_0.1_{\{1 \leq T\}} = X_0\left\{1_{\{0 \leq T\}} - 1_{\{T=0\}}\right\} = X_0\left\{1_{\Omega} - 1_{\{T=0\}}\right\} = X_0 - X_0.1_{\{T=0\}}$$

ve

$$1_{\{k \leq T\}} - 1_{\{k+1 \leq T\}} = 1_{\{T=k\}}, \qquad k = 1, \dots, n-1$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan asıl denklem,

$$\left(C^{(T)} \bullet X\right)_n = -X_0 + \sum_{k=0}^{n-1} X_k . 1_{\{T=k\}} + X_n . 1_{\{n \leq T\}}$$
$$= -X_0 + X_{T\wedge n} = -X_0 + X_n^{T\wedge}$$

şeklinde elde edilir. Yani

$$X_n^{T\wedge} = X_0 + \left(C^{(T)} \bullet X\right)_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
$$X_0^{T\wedge} = X_{T\wedge 0} = X_0 = X_0 + \left(C^{(T)} \bullet X\right)_0, \qquad n = 0.$$

Böylece ispat tamamlanmış olur (Yeh, 1995).

Teorem 2.3.6. X bir submartingal, bir martingal veya bir süpermartingal ve T $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}, P)$ süzgeç uzayında bir durağan süreç olduğunda $X^{T\wedge} = \{X_{T\wedge n} : n \in \mathbb{Z}^+\}$ durağan süreci bir submartingal, bir martingal veya bir süpermartingaldir ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için

- $E(X_{T\wedge n}) \geq E(X_0)$ bir submartingal,
- $E(X_{T\wedge n}) = E(X_0)$ bir martingal,
- $E(X_{T\wedge n}) \leq E(X_0)$ bir süpermartingaldir.

İspat. X bir L_1 - süreci ise, $X^{T\wedge}$'da bir L_1 - sürecidir. Teorem 2.3.5'den

$$X^{T\wedge} = X_0 + \left(C^{(T)} \bullet X\right)$$

elde edilir. $C^{(T)}$ sınırlı negatif olmayan öngörülebilir bir süreç olduğundan, Teorem 2.3.3.'e göre, X bir submartingal, bir martingal veya bir süpermartingal ise, $(C^{(T)} \bullet X)_0 = 0$ olmak üzere $C^{(T)} \bullet X$ 'de sırasıyla bir submartingal, bir martingal veya bir süpermartingaldir. Böylece $X^{T\wedge}$ bir submartingal, bir martingal veya bir süpermartingaldir.

2.4. Temel Submartingal Eşitsizlikleri

Bir submartingal ortalama üzerinden artar. Bu monotonluk şartından bir submartingalin örnek fonksiyonlarının davranışını tahmin etmek için bazı basit eşitsizlikler elde edilir.

2.4.1. Seçimsel Durma ve Doob'un Seçimsel Durma Teoremi

X uyarlanmış bir süreç ve T süzgeç uzayda bir durağan süreç ise, o zaman, zaman parametresi kesikli olduğunda da, sürekli olduğunda da X_T her zaman rastgele bir değişkendir. X 'in ölçülebilir bir süreç olduğu varsayılırsa o zaman X_T rastgele değişkendir. X_T'nin integrallenebilirliği dikkate alınmalıdır.

Teorem 2.4.1 (Doob'un Seçimsel Durma Teoremi). X , $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}, P)$ süzgeç uzayında bir submartingal ve T durağan bir süreç olsun. $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$'de h.h.h.y. T'nin sonlu olduğu varsayıldığında aşağıdaki şartların her biri altında,

$$E(X_0) \leq E(X_T) < \infty.$$

a. T sınırlıdır. Yani tüm $\omega \in \Omega$ için $T(\omega) \leq m$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{Z}^+$ mevcuttur.

b. X sınırlıdır. Yani $K \geq 0$ olmak üzere tüm $(n, \omega) \in \mathbb{Z}^+ \times \Omega$ için $|X_n(\omega)| \leq K$ olacak şekilde bir K mevcuttur.

c. T integrallenebilirdir ve X sınırlı artışlara sahiptir. Yani $L \geq 0$ olmak üzere tüm $(n, \omega) \in \mathbb{N} \times \Omega$ için $|X_n(\omega) - X_{n-1}(\omega)| \leq L$ olacak şekilde bir L mevcuttur.

d. $\mathbb{R} \times \Omega$'da $X \leq 0$'dır. Eğer X_n bir martingalse o zaman a, b, c şartlarının her biri altında $E(X_T) = E(X_0)$'dır.

İspat. Eğer X bir submartingal ise, $X^T = \{X_{T \wedge n} : n \in \mathbb{Z}^+\}$ durağan sürecide Teorem 2.3.5.'e göre bir submartingaldir. Bu durumda, $\mathbb{R}$'de tanımlı $E(X_{T \wedge 0}) = E(X_0)$ eşitliği ile $E(X_{T \wedge n})$ alttan sınırlandırılan artan bir dizidir. Eğer bazı $\omega \in \Omega$'lar için $T(\omega) < \infty$ ise, $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $n \geq \mathbb{N}$ için, $T(\omega) \wedge n = T(\omega)$ mevcuttur. Bundan dolayı

$$\lim_{n\to\infty} X_{T\wedge n}(\omega) = \lim_{n\to\infty} X(T(\omega)\Lambda n, \omega) = X(T(\omega), \omega) = X_T(\omega).$$

Böylece eğer T, $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$'de h.h.h.y. sonlu ise, $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$'de h.h.h.y.,

$$\lim_{n\to\infty} X_{T\wedge n} = X_T. \tag{2.4}$$

1) Teorem 2.4.1.'in a'sı kabul edilmiş olduğunda $T \wedge \mathrm{n} = T$'dir. Böylece

$$E(X_0) \leq E(X_{T\wedge m}) = E(X_T)$$

dir. Bu yüzden $E(X_T) < \infty$ 'dur. X bir martingal ise, Teorem 2.3.6.'dan X^T 'de bir martingaldir. Bu ise $E(X_{T\wedge m}) = E(X_0)$ olduğunu gösterir. Böylece $E(X_T) = E(X_0)$ elde edilir.

2) Teorem 2.4.1.'in b 'sı kabul edilmiş olsun. Tüm $(n, \omega) \in \mathbb{Z}^+ \times \Omega$ için $|X_n(\omega)| \leq K$ koşulu, $(n, \omega) \in \mathbb{Z}^+ \times \Omega$ için $\left|X_{T(\omega)\Lambda n}(\omega)\right| \leq K$ olduğunu ifade eder. Bu durumda (2.4)'den, sınırlı yakınsama teoremi uygulanabilir ve

$$E(X_T) = \lim_{n\to\infty} E(X_{T\Lambda n}) \geq E(X_0)$$

elde edilir. $n \in \mathbb{Z}^+$ için $|E(X_{T\Lambda n})| \leq K$ olduğundan

$$E(X_0) \leq E(X_T) \leq K$$

elde edilir. Eğer X bir martingal ise, X_T 'de bir martingaldir. Bu yüzden $n \in \mathbb{Z}^+$ için $E(X_{T\wedge n}) = E(X_0)$'dır. Bu ise $E(X_T) = E(X_0)$ olduğunu ifade eder.

3) Teorem 2.4.1.'in c'sı kabul edilmiş olsun. $\forall (n, \omega) \in \mathbb{Z}^+ \times \Omega$ için

$$X_{T\wedge n}(\omega) - X_0(\omega) = \sum_{k=1}^{T(\omega)\wedge n} \{X_k(\omega) - X_{k-1}(\omega)\}$$

ifadesi elde edilir. Bu durumda $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$|X_{T\wedge n} - X_0| \leq \sum_{k=1}^{T\wedge n} |X_k - X_{k-1}| \leq L(T \wedge n) \leq LT$$

elde edilir.

T'nin integrallenebilirliği $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$'de h.h.h.y. T'nin sonlu olduğunu ifade eder. Bu yüzden (2.4) uygulanabilirdir. Bu durumda $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$'de h.h.h.y.

$$\lim_{n\to\infty}(X_{T\wedge n} - X_0) = X_T - X_0$$

dır. Böylece baskın yakınsama teoreminden $X_T - X_0$ integrallenebilirdir ve

$$E(X_T - X_0) = \lim_{n\to\infty}(X_{T\wedge n} - X_0) = X_T - X_0 \geq 0$$

dır. Bu X_T'nin integrallenebilir ve $E(X_0) \leq E(X_T) < \infty$ olduğunu gösterir. Eğer X bir martingal ise, 2)'de aynı nedenden $E(X_T) = E(X_0)$'dır.

4) Teorem 2.4.1.'in c'sı kabul edilmiş olsun. Bu durumda $(n, \omega) \in \mathbb{Z}^+ \times \Omega$ için $X(n, \omega) \leq 0$ olduğundan,

$$X^T(n, \omega) = X(T(\omega) \wedge n, \omega) \leq 0$$

dır. $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ 'de h.h.h.y. $T < \infty$ olduğunda, $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ 'de h.h.h.y. ω için $X_T(\omega) = X(T(\omega), \omega) \leq 0$'dır. Bu durumda eşitlik (2.4)'den ve pozitif olmayan fonksiyonların bir dizisinin üst sınırı için Fatou's Lemmasından,

$$0 \geq E(X_T) \geq \lim_{n\to\infty} sup E(X_{T\wedge n}) \geq E(X_0)$$

ifadesi elde edilir.

Sonuç 2.4.2. X sınırlı artışlı bir martingal olsun. C sınırlı öngörülebilir bir süreç ve T süzgeç uzay $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}, P)$'de integrallenebilir bir durağan süreç olsun. O zaman C'ye göre, X'in $C \bullet X$ martingal dönüşümü için $E[(C \bullet X)_T] = 0$'dır.

İspat. $K, L \geq 0$ olsun. Böylece $n \in \mathbb{Z}^+$ için $|C_n| \leq K$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $|X_n - X_{n-1}| \leq L$ dir. X bir martingal ve C sınırlı öngörülebilir bir süreç olduğunda, Teorem 2.3.3.'ün 2'sinden $(C \bullet X)_0 = 0$ olmak üzere $C \bullet X$ bir martingaldir. Tanım 2.4.1.'den $n \in \mathbb{N}$ için,

$$|(C \bullet X)_n - (C \bullet X)_{n-1}| = |C_n(X_n - X_{n-1})| \leq KL$$

dir. Bu durumda teorem 2.4.1'in c'si sağlanır ve böylece

$$E[(C \bullet X)_T] = E[(C \bullet X)_0] = 0$$

elde edilir.

Teorem 2.4.3 (Sınırlı Durağan Süreçler İçin Doob'un Seçimsel Örnekleme Teoremi, Kesikli Durum). X bir submartingal olsun. S ve T $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}, P)$ süzgeç uzayında bazı $m \in \mathbb{Z}^+$'ler için $S \leq T \leq m$'koşulunu sağlayan durağan süreçler olsun. Bu durumda $(\Omega, \mathcal{F}_S, P)$'de h.h.h.y.,

$$E(X_T|\mathcal{F}_S) \geq X_S, \tag{2.5}$$

olur. Buradan her iki tarafın beklenen değeri alınırsa

$$E(X_T) \geq E(X_S), \tag{2.6}$$
$$E(X_m) \geq E(X_T) \geq E(X_0), \tag{2.7}$$

elde edilir. Eğer X bir martingal ise, 2.5, 2.6 ve 2.7 eşitlikleri elde edilir.

İspat. S ve T durağan süreçler olduğunda, X_S ve X_T, sırasıyla $\mathcal{F}_S$ ve $\mathcal{F}_T$ ölçülebilirdirler. S ve T'nin sınırlılığı Teorem 2.4.1.'den X_S ve X_T'nin integrallenebilirliğini ifade eder.

Süzgeç uzayda tanımlı $D_n{}^{(S,T]} = \{D_n^{(S,T]}: n \in \mathbb{Z}^+\}$ stokastik süreci, $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$D_n^{(S,T]} = 1_{\{S<n\leq T\}} = 1_{\{n\leq T\}} - 1_{\{n\leq S\}}$$

olarak tanımlanmış olsun. $\{S < n \leq T\} = \emptyset$ olduğunda, $D_0^{(S,T]} = 0$’dır. Böylece süzgeç uzayda sınırlı negatif olmayan bir $D_n{}^{(S,T]}$ süreci tanımlanır. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\{n \leq T\} = \{T < n\}^c = \left(\bigcup_{k=0}^{n-1} \{T = k\}\right)^c \in \mathcal{F}_{n-1}$$

elde edilir. $1_{\{n \leq T\}}$, $\mathcal{F}_{n-1}$ ve benzer şekilde $1_{\{n \leq S\}}$, $\mathcal{F}_{n-1}$ ölçülebilirdir. Böylece $\forall n \in \mathbb{N}$ için $D_n^{(S,T]}$, $\mathcal{F}_{n-1}$ ölçülebilirdir. Bu ise, $D_n{}^{(S,T]}$’nin integrallenebilir bir süreç olduğunu gösterir. $D_n{}^{(S,T]}$ sınırlı negatif olmayan bir süreç olduğundan, $D_n{}^{(S,T]}$’den X_n’nin $D_n{}^{(S,T]} \bullet X_n$ martingal dönüşümü Teorem 2.3.3’den $(D^{(S,T]} \bullet X)_0 = 0$ olmak üzere bir submartingaldir. $n \in \mathbb{N}$ için Tanım 2.3.1.’den,

$$\begin{aligned}
(D^{(S,T]} \bullet X)_n &= \sum_{k=1}^{n} 1_{\{S<k\leq T\}} \, (X_k - X_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} 1_{\{k\leq T\}} \, (X_k - X_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} 1_{\{k\leq S\}} \, (X_k - X_{k-1}) \\
&= (X_{T\wedge \mathrm{n}} - X_0) - (X_{S\wedge n} - X_0) \\
&= X_{T\wedge \mathrm{n}} - X_{S\wedge n}
\end{aligned}$$

dir. Bu sonuç Teorem 2.3.5.’in ispatında yapılan hesaplamadan elde edilir. $S \leq T \leq m$ için

$$(D^{(S,T]} \bullet X)_m = X_T - X_S$$

elde edilir. $D_n{}^{(S,T]} \bullet X_n$ bir submartingal olduğunda,

$$E((D^{(S,T]} \bullet X)_n) \geq E((D^{(S,T]} \bullet X)_0) = E(0) = 0$$

elde edilir ve böylece $E(X_T - X_S) \geq 0$ olur. Buradan (2.6) ispatlanmış olur. (2.5)’in ispatı için aşağıdaki eşitliği göstermek yeterlidir. $E(X_T|\mathcal{F}_S)$ ve X_S her ikiside $\mathcal{F}_S$- ölçülebilir olduğundan,

$$\int_A X_T dP \geq \int_A X_S dP\,, \qquad A \in \mathcal{F}_S \tag{2.8}$$

göstermek için yeterlidir.

(2.8)'i ispat etmek için, $A \in \mathcal{F}_S$ olmak üzere, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$'de iki rastgele değişken S_A ve T_A tanımlanır. A'da $S_A = S$ ve A^c'de $S_A = m$'dir. Benzer şekilde A'da $T_A = S$ ve A^c'de $T_A = m$ olduğunda S_A ve T_A durağan süreçlerdir. Aslında $A \in \mathcal{F}_S$ için,

$$\{S_A \leq n\} = \begin{cases} \Omega \in \mathcal{F}_n & ,\ n \geq m \\ \{S \leq n\} \cap A \in \mathcal{F}_n, & n < m \end{cases}$$

elde ederiz ve benzer şekilde $A \in \mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$ olduğunda T_A içinde öyledir. S_A ve T_A durağan süreçler ve $S_A \leq T_A \leq m$ olmak üzere (2.6) uygulanabilirdir . Böylece

$$E\left(X_{T_A}\right) \geq E\left(X_{S_A}\right) \tag{2.9}$$

dır. Burada

$$E\left(X_{T_A}\right) = \int_A X_T dP + \int_{A^c} X_m P(d\omega)$$

ve benzer şekilde,

$$E\left(X_{S_A}\right) = \int_A X_S dP + \int_{A^c} X_m P(d\omega)$$

dir. Bu iki eşitlikten ve (2.9)'dan

$$\int_A X_T P(d\omega) \geq \int_A X_S P(d\omega)$$

elde edilir. Böylece (2.8) ispatlanır. 0, T ve m sınırlı durağan süreçler ve $0 \leq T \leq m$ olduğunda, (2.6)'dan (2.7) elde edilir. Eğer X bir süpermartingal ise, $-X$ bir subrmartingaldir. Yani süpermartingal için (2.5), (2.6) ve (2.7) eşitsizlikleri ters çevrilecektir. Bir martingal hem bir submartingal hemde bir süpermartingal olduğundan (2.5), (2.6) ve (2.7) eşitsizlikleri elde edilir.

Sonuç 2.4.4. T, bazı $m \in \mathbb{Z}^+$ için $T \leq m$ sınırlılık şartını sağlayan $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}, P)$ süzgeç uzayında tanımlı durağan bir süreç olsun. $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}^+\}$ olmak üzere,

1) Eğer X süzgeç uzayda bir submartingal ise,

$$(|X_T|) \leq -E(X_0) + 2E(X_m^+) \leq 3 \sup_{n=0,\ldots,m} E(|X_n|), \qquad (2.10)$$

2) Eğer X süzgeç uzayda bir süpermartingal ise,

$$E(|X_T|) \leq E(X_0) + 2E(X_m^-) \leq 3 \sup_{n=0,\ldots,m} E(|X_n|), \qquad (2.11)$$

eşitsizlikleri vardır.

İspat.

1) X'in bir submartingal olduğu varsayılsın.

$X_T = X_T^+ - X_T^-$ ve $|X_T| = X_T^+ + X_T^-$

olduğunda,

$$|X_T| + X_T = 2X_T^+$$

elde edilir. Böylece,

$$E(|X_T|) = -E(X_T) + 2E(X_T^+) \tag{2.12}$$

dir. X bir submartingal olduğunda, Sonuç 2.1.2.'den X^+ bir submartingaldir. X ve X^+ için Teorem 2.4.3.'ün (2.7)'sini uygulayarak,

$$-E(X_T) \leq -E(X_0) \text{ ve } E(X_T^+) \leq E(X_m^+)$$

elde edilir. (2.12)'de bunlar kullanılarak (2.10) elde edilir.

2) X bir süpermartingal olduğunda $-X$ bir submartingaldir. $-X$ için (2.10)'u uygulayarak,

$$E(|-X_T|) \leq -E(-X_0) + 2E((-X_m)^+)$$

elde edilir. Yani

$$E(|X_T|) \leq E(X_0) + 2E(X_m^-)$$

'dir.

Sonuç 2.4.5. $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}^+\}$, $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}, P)$ süzgeç uzayında uyarlanmış bir L_1 süreci olsun. X, ancak ve ancak $S \leq T$ olmak üzere $E(X_T) \geq E(X_S)$ olduğunda her ikisi de sınırlı olan S ve T durağan süreçleri için bir submartingaldir. $E(X_T) = E(X_S)$ ise X bir martingaldir.

İspat. Koşulun gerekliliği Teorem 2.4.3.'ün (2.6)'dan kaynaklanmaktadır. Koşulun uygunluğu ispatlanabilir. Ancak $S \leq T$ olmak üzere, iki sınırlı durağan süreç S ve T için $E(X_T) \geq E(X_S)$ olduğu varsayılsın. X uyarlanmış bir L_1 süreci olduğunda, X'in bir submartingal olduğunu göstermek için, $\forall n, m \in \mathbb{Z}^+,\ n < m$ olmak üzere, Önerme 2.6.'ya göre,

$$\int_E X_m P(d\omega) \geq \int_E X_n P(d\omega), \qquad \forall E \in \mathcal{F}_n \tag{2.13}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. $E \in \mathcal{F}_n$'nin verilmesiyle, E'de $S = n$, E^c'de $S = m$ ve Ω'da $T = m$ olmak üzere $(\Omega, \mathcal{F}, P)$'de S ve T rastgele değişkenleri tanmlansın. Bu durumda S her $k \in \mathbb{Z}^+$ için bir durağan süreçtir ve

$$\begin{cases} \emptyset \in \mathcal{F}_k \quad , & k < n \\ E \in \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_k \, , & n \leq k < m \\ \Omega \in \mathcal{F}_k \quad , & m \leq k \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir.

T durağan bir süreçtir. Böylece $S \leq T$ olmak üzere S ve T sınırlı durağan süreçleri ve yukarıdaki varsayımdan $E(X_T) \geq E(X_S)$ elde edilir. Burada,

$$E(X_T) = \int_E X_m P(d\omega) + \int_{E^c} X_m P(d\omega) \, ,$$

$$E(X_S) = \int_E X_n P(d\omega) + \int_{E^c} X_m P(d\omega),$$

dır. Böylece (2.13) elde edilir ve X bir submartingaldir. Eğer X bir submartingal ise, $-X$'de bir submartingaldir. Böylece yukarıdaki sonuçlardan, ancak ve ancak $S \leq T$ olmak üzere S ve T sınırlı durağan süreçleri için $E(X_T) \leq E(X_S)$ ise X bir süpermartingaldir. Bir martingal hem bir süpermartingal hemde bir submartingal olduğundan, ancak ve ancak $S \leq T$ olmak üzere S ve T sınırlı durağan süreçleri için $E(X_T) = E(X_S)$ ise X bir martingaldir.

2.4.2. Maksimum ve Minimum Eşitsizlikler

Bir submartingal $X = \{X_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ için, Doob'un maksimum eşitsizliği, X_m'nin beklenen değerine dayanarak $\{X_0(\omega), \dots, X_m(\omega)\}$'nın maksimumunun pozitif bir λ sayısını aşan olasılığının bir tahminini verir.

Teorem 2.4.6 (Sonlu Durum İçin Doob'un Maksimum ve Minimum Eşitsizlikleri). X, $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}, P)$ süzgeç uzayında bir submartingal olsun. $\forall m \in \mathbb{Z}^+$ ve $\lambda > 0$ için,

$$\lambda P\left\{\max_{n=0,\dots,m} X_n \geq \lambda\right\} \leq \int\limits_{\left\{\max\limits_{n=0,\dots,m} X_n \geq \lambda\right\}} X_m P(d\omega) \leq E(X_m^+) \tag{2.14}$$

ve

$$\begin{aligned}\lambda P\left\{\min_{n=0,\dots,m} X_n \leq -\lambda\right\} &\leq \int\limits_{\left\{\min\limits_{n=0,\dots,m} X_n > -\lambda\right\}} X_m P(d\omega) - E(X_0) \\ &\leq E(X_m^+) - E(X_0)\end{aligned} \tag{2.15}$$

elde edilir.

İspat.

1) (2.14)'i ispat etmek için, Ω'da bir T fonksiyonu tanımlansın:

$$T(\omega) = \begin{cases}\min\{n = 0, \dots, m : X_n(\omega) \geq \lambda\}, \\ m, \qquad yukarıdaki\ küme\ boş\ kümeyse\end{cases}. \tag{2.16}$$

T'nin bir durağan süreç olduğunu göstermek için $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\{T = n\}$'i göstermek yeterli olur.

$$\{T = n\} = \{X_0 < \lambda, \dots, X_{n-1} < \lambda,\ X_n \geq \lambda\} \in \mathcal{F}_n,\ \ n = 0, \dots, m-1\,,$$
$$\{T = m\} = \{X_0 < \lambda, \dots, X_{m-1} < \lambda,\ X_m \geq \lambda\} \cup \{X_0 < \lambda, \dots, X_m < \lambda\} \in \mathcal{F}_m,$$

ve $n > m$ için,

$$\{T = n\} = \emptyset \in \mathcal{F}_n$$

olur. Kısaca

$$A = \{\max_{n=0,\dots,m} X_n \geq \lambda\}$$

olsun. X bir submartingal ve T, m ile sınırlandırılmış bir durağan süreç olduğunda Teorem 2.4.3.'ün (2.13)'den,

$$E(X_m) \geq E(X_T) = \int_A X_T P(d\omega) + \int_{A^c} X_T P(d\omega) \tag{2.17}$$

elde edilir. Eğer $A = \emptyset$ ise, (2.14) elde edilir. Eğer $A \neq \emptyset$ ise, bu kümede, (2.16)'dan $X_T \geq \lambda$ elde edilir. (2.16)'dan A^c'de $T = m$ de elde edilir. Böylece (2.17)'den,

$$E(X_m) \geq \lambda P(A) + \int_{A^c} X_m P(d\omega)$$

olur ve böylece

$$\lambda P(A) \leq E(X_m) - \int_{A^c} X_m P(d\omega) = \int_A X_m P(d\omega) \leq \int_\Omega X_m^+ P(d\omega)$$

dır. Buradan (2.14) eşitsizliği ispatlanmış olur.

2) (2.15) eşitsizliğini ispatlamak için,

$$S(\omega) = \begin{cases} \min\{n = 0, \dots, m : X_n(\omega) \leq -\lambda\} \\ m \quad \textit{yukarıdaki küme boş kümeyse} \end{cases} \tag{2.18}$$

olsun. Aslında S durağan bir süreçtir ve T için yapılanlar S içinde yapılabilir. Kısaca, $B = \{\min_{n=0,\dots,m} X_n \leq -\lambda\}$ olsun. Teorem 2.4.3.'ün (2.7)'den,

$$E(X_0) \leq E(X_S) = \int_B X_S P(d\omega) + \int_{B^c} X_S P(d\omega) \tag{2.19}$$

ifadesi elde edilir. Eğer $B = \emptyset$ ise, (2.15) elde edilir. Eğer $B \neq \emptyset$ ise, bu kümede, (2.18)'den $X_T \leq -\lambda$ elde edilir. (2.16)'dan B^c 'de $S = m$ de elde edilir. Böylece (2.19)'dan,

$$E(X_0) \leq -\lambda P(B) + \int_{B^c} X_m P(d\omega)$$

dır. Böylece

$$\lambda P(B) \leq -E(X_0) + \int_{B^c} X_m P(d\omega) \leq -E(X_0) + \int_{\Omega} X_m^+ P(d\omega).$$

elde edilir. Buradan (2.15) ispatlanmış olur.

Sonuç 2.4.7. X, $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}, P)$ süzgeç uzayında bir süpermartingal ise ve $m \in \mathbb{Z}^+$ ve $\lambda > 0$ ise,

$$\begin{aligned} \lambda P\left\{\max_{n=0,\dots,m} X_n \geq \lambda\right\} &\leq E(X_0) - \int_{\left\{\max_{n=0,\dots,m} X_n < \lambda\right\}} X_m P(d\omega), \\ &\leq E(X_0) + E(X_m^-) \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\lambda P\left\{\min_{n=0,\dots,m} X_n \leq -\lambda\right\} \leq -\int_{\left\{\min_{n=0,\dots,m} X_n \leq -\lambda\right\}} X_m P(d\omega) \leq E(X_m^-).$$

Sonuç 2.4.8. X, $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}, P)$ süzgeç uzayında bir L_2- martingali olsun. O zaman $\forall m \in \mathbb{Z}^+$ ve $\lambda > 0$ için,

$$\lambda^2 P\left\{\max_{n=0,\dots,m} |X_n| \geq \lambda\right\} \leq E(X_m^2)$$

dır.

İspat. X_n bir L_2- martingali olduğunda ${X_n}^2 = \{X_n^2 : n \in \mathbb{Z}^+\}$, Sonuç 2.2.4'den bir submartingaldir. Teorem 2.4.6.'nın (2.14)'nden,

$$\lambda^2 P\left\{\max_{n=0,\dots,m} |X_n| \geq \lambda\right\} \leq E(X_m^2)$$

dir.

X_n'nin, $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}, P)$ süzgeç uzayında negatif olmayan bir submartingal olduğu göz önünde bulundurulduğunda her $m \in \mathbb{Z}^+$ ve $\lambda > 0$ için, iki rastgele değişken $\xi \equiv \max_{n=0,\dots,m} X_n$ ve $\eta \equiv X_m$ negatif olmayandır ve Teorem 2.4.6.'nın (2.14)'ne göre aşağıdaki eşitsizliği sağlar. $\lambda > 0$ için,

$$\lambda P(\xi \geq \lambda) \leq \int_{\{\xi \geq \lambda\}} \eta P(d\omega)$$

dir.

3. MARTİNGALLERİN FİNANS MATEMATİĞİNDE UYGULANMASI

Finans pazarının esas özelliklerinden biri belirsizlik durumu içermesidir. Buna göre herhangi bir hisse senedinin t anındaki değerini önceden kesin olarak tahmin etmek genellikle mümkün olmamaktadır. Bu yüzden de bir hisse senedinin t anındaki değeri bir rastgele değişken olarak düşünülür.

Finans pazarının matematiksel modelini inceleyen finans matematiğinde ilk sonuç 1900 yılında Fransız matematikçi Bachelier tarafından alınmıştır. Bachelier Fransa borsasında hisse senetlerinin değerinin zamanla değişimini incelemiştir. Ayrıca günümüzde Brownian Hareketi olarak adlandırılan stokastik sürecin tanımını vermiştir (1905). Ancak daha sonra Brownian hareketinin daha gelişmiş matematiksel modeli 1923 yılında Nobert Wiener tarafından verilmiştir. Bachelier'in aldığı sonuçlar, zamanında değerini almamış ve uzun süre unutulmuştur.

Finans pazarının incelenmesinde olasılık teorisinin kullanılması 1952 yılında ABD'li bilim adamı Markovits'in çalışmaları ile yeniden gündeme gelmiştir. Onun çalışması portföy teorisi ile ortaya çıkmıştır. Markovits hisse senetlerinin portföyünün oluşturulmasında her bir hisse senedinin gelecek değerine rastgele değişken gibi bakmış ve o rastgele değişkenin beklenen değerini beklenen kar, varyansını ise risk olarak tanımlamıştır. Markovits'in bu çalışması finans matematiğinde bir devrim olarak değerlendirilmiştir ve matematiğin finansta kullanımının temelini oluşturmuştur. Daha sonra diğer ABD'li bilim adamı Tobin, Markovits'in teklif ettiği modeli biraz daha geliştirmiştir. 1965 yılında Samuelson yeniden Bachelier modeline dönerek onu daha da geliştirmiştir. Samuelson geometrik veya ekonomik Brown hareketi kavramını bilime getirmiştir. Olasılık teorisinin finansal uygulamalarından biride Black ve Scholes'in 1973 yılında yaptığı çalışmadır. Black ve Scholes bu çalışmada normal dağılımdan yararlanarak opsiyonlar diye adlandırılan kıymetli kağıtların değerinin bulunması için bir formül ileri sürmüşlerdir.

Martingaller finans matematiği uygulamalarında kullanılmaktadır. Bu uygulamalara girmeden önce finansa ait bazı bilgileri verilmiştir.

Tanım 3.1 (Trend). Belirli bir zaman dilimi aralığında belli bir seyri oluşturan değerlerde ortaya çıkan sürekli artma ya da azalmaları ifade eder. Ekonomik anlamda trend piyasanın gittiği yönü gösterir. Bu yön piyasanın iniş çıkışlarıdır (URL 6 ve 7, 2011).

Tanım 3.2 (Likidite). Döviz, menkul kıymet, gayrimenkul gibi herhangi bir aktifin kısa sürede ve sorunsuz bir şekilde (değer kaybına uğramadan) nakde çevrilebilmesini ifade eder (URL-8, 2011).

Tanım 3.3 (Arbitraj). Farklı ülkelerin piyasalarında kote edilen döviz kurları arasındaki farklılıktan yararlanarak kazanç sağlamak amacıyla bir paranın, ucuz olduğu piyasadan alınıp pahalı olduğu piyasalarda satılması işlemidir.

Menkul kıymetler, kıymetli madenler, kıymetli evrak gibi değerler de, iki piyasa arasındaki fiyat farklarından yararlanmak amacıyla fiyatların düşük olduğu yerlerden alınarak fiyatların yüksek olduğu yerlerde satılabilmektedirler. Turkcell hisseleri menkul kıymet arbitrajına örnek verilebilir. Çünkü hem NewYork borsasında hem de İMKB'de işlem görmektedir (URL-9, 2010).

Tanım 3.4 (Tahvil). Devletin veya anonim ortaklıkların en az 1 yıl ve daha uzun vadeyle, ödünç para bulmak amacıyla, itibari değerleri eşit ve ibareleri aynı olmak üzere çıkardıkları borç senetleridir. Tahviller, elinde bulunduran için alacaklılık hakkı doğuran ve düzenli aralıklarla faiz geliri getiren sabit getirili menkul kıymetlerdir (URL-10, 2011).

Tanım 3.5 (Opsiyon). Ekonomi dünyasında opsiyon sözleşmeleri herhangi bir varlığı belirli bir vadede ya da vadeye kadar belirli bir miktarda, belirli bir fiyattan alma ya da satma hakkı veren sözleşmelerdir.Opsiyonların uygulanabilme vadelerine göre ise iki türü vardır:

- Amerikan tipi opsiyon
- Avrupa tipi opsiyon

Amerikan tipi opsiyonlar vadeden önce herhangi bir tarihte opsiyon alıcısı tarafından kullanılabilirler. Avrupa tipi opsiyonlar ise yalnızca vadesinde kullanılabilirler. Bu yüzden Amerikan tipi opsiyonların değeri genelde Avrupa tipi opsiyonların fiyatlarından yüksektir (URL-11, 2011).

3.1. Stokastik Finansal Modellemede Martingal Metodları

Martingaller, modern finans teorisindeki en önemli araçlardan biridir. Burada martingal teorisinin temel özellikleri verilecektir. Bunun yanında martingal teorisi oldukça geniş olduğundan, sadece teorinin menkul kıymetlerin fiyatlandırılması ile doğrudan ilişkili yönleri üzerinde durulacaktır.

ΔW_t, W_t'de ki küçük değişimler, ΔS_t, S_t'deki küçük değişimler, $\mathrm{d}W_t$ ve $\mathrm{d}S_t$ ise sonsuz küçük aralıklar üzerindeki stokastik değişimleri göstermektedir. Bu diferansiyeller, sürekli bir zamanda gözlenmiş olan sonsuz küçük stokastik değişimler olarak yorumlanabilir. h ve Δ küçük bir aralığı, dt sonsuz küçük bir aralığı göstermektedir.

Martingal teori, gözlenmiş olan zaman serilerini, izlemiş oldukları trendlere göre sınıflandırır. Eğer bir stokastik sürecin yörüngeleri periyodiklik ya da makul trendler göstermiyorsa bu stokastik sürecin martingal gibi davrandığı söylenir. Ortalamanın üzerinde artma gösteren süreç submartingal, ortalamanın altında artan süreç süpermartingal olarak adlandırılır.

Bir t zaman indeksi ile indekslenmiş rastgele değişkenlerin bir topluluğu gözlemlensin. Burada zamanın sürekli olduğu ve sürekli zamanlı stokastik süreçlerle ilgilenildiği kabul edilmektedir. Gözlenmiş olan süreç, $\{S_t: t \in [0, \infty]\}$ ile informasyon kümelerinin bir ailesi $\{\mathcal{F}_t: t \in [0, \infty]\}$ ile gösterilsin. İlgilenilen probleme bağlı olarak $\mathcal{F}_t$ farklı tipteki informasyonu gösterecektir. $\mathcal{F}_t$, finansal piyasalarda t zamanına kadar gözlenmiş fiyatlardan elde edilen informasyonu gösterecektir. $s < t < T$ olmak üzere informasyon kümeleri ailesi $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_T$ özelliğini sağlayacaktır. Daha önceki bölümlerde de belirtildiği gibi $\{\mathcal{F}_t: t \in [0, T]\}$ kümesine süzgeç adı verilir.

Martingal teorisinde sürecin zamanın belirli noktalarındaki değerini düşünmek gerekecektir. Bu ise $[0, T]$ sürekli zaman aralığında, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = T$ şeklinde çeşitli zaman periyotlarını gösteren bir $\{t_i\}$ dizisi seçilerek yapılabilir. $k \to \infty$'da $(t_i - t_{i-1}) \to 0$ olduğundan $[0, T]$ aralığı gittikçe daha küçük parçalara bölünür. Burada sonlu $[0, T]$ aralığı üzerinde, S_t rastgele fiyat süreci ele alınsın. Belirli bir t_i zamanında, fiyat sürecinin değeri, S_{t_i} olacaktır. Eğer S_t'nin değeri, her bir $t \geq 0$ için $\mathcal{F}_t$ informasyon kümesi tarafından içeriliyorsa, $\{S_t: t \in [0, T]\}$ sürecine, $\{\mathcal{F}_t: t \in [0, T]\}$ informasyon kümesine göre uyarlanmıştır denir. Yani $\mathcal{F}_t$ informasyon kümesi verilmiş olduğunda, S_t değeri bilinir (Önalan, 2004).

Örnek 3.1. S_t'nin bir martingal süreci izlediği kabul edilsin. $u > 0$ uzunluğundaki bir aralık üzerinde S_t'deki değişimin kestirimi düşünülsün:

$$E_t(S_{t+u} - S_t) = E_t(S_{t+u}) - E_t(S_t).$$

$S_t, ,\mathcal{F}_t$ informasyon kümesine göre uyarlanmış olduğundan $E_t(S_t) = S_t$'dir. S_t martingal olduğundan,

$$E_t(S_{t+u}) = E(S_{t+u}|\mathcal{F}_t) = S_t$$

olur. Buradan,

$$E_t(S_{t+u} - S_t) = 0$$

elde edilir. Yani, keyfi bir $u > 0$ aralığı üzerinde, S_t'deki değişimin en iyi tahmin edicisi sıfırdır. Diğer bir deyişle martingal süreçlerinde gelecek hareketlerin yönlerini kestirmek imkansızdır. Bu ise martingal gibi davranan süreçlerin temel karakteristiğidir.

Eğer bir sürecin yörüngeleri uzun veya kısa vadeli trendler gösteriyorsa, süreç bir martingal değildir. (Bir martingalin bir örneklem eğrisi kısa vadeli trendlere benzer kalıplar ihtiva edebilir. Bununla birlikte bu yukarıya veya aşağıya doğru olan trendler tamamen rastgele ve herhangi bir sistematik karaktere de sahip değildirler). Martingal tanımının çok önemli bir özelliğini vurgulamakta fayda vardır.

- Bir martingal süreci her zaman bir informasyon kümesi ve bir olasılık ölçümü ile tanımlanır.

Eğer informasyonun içeriği veya süreçle ilgili olasılıkları değiştirilirse süreç bir martingal olmayabilir. Bunun terside doğrudur. Martingal gibi davranmayan bir X_t süreci verilmiş olsun. Bu durumda, ilgili olasılık ölçümü P değiştirilerek X_t bir martingale dönüştürülebilir.

3.2. Menkul Kıymet Fiyatlamada Martingal Kullanımı

Yukarıdaki tanıma göre, informasyon kümelerinin bir ailesi verilmiş olduğunda, S_t'nin gelecek hareketleri tam olarak kestirilemiyorsa, S_t martingal süreci gibi davranır. Bir iskontolu tahvilin fiyatının zamanla artması beklenir. Genelde aynı şey hisse senedi fiyatları içinde doğrudur. Onlarında ortalamanın üzerinde artması beklenir. Bu durumda, B_t, T vadeli iskontolu tahvilin $t < T$ zamanındaki fiyatını gösteriyorsa,

$$B_t < E_t(B_u), \qquad t < u < T$$

olur. İskontolu tahvilin fiyatının bir martingal gibi hareket etmediği açıkça görülür. Benzer şekilde, S_t hisse senedi fiyatı da, pozitif bir beklenen değere sahip olduğundan bir martingal gibi davranmaz. Küçük bir Δ aralığı için,

$$E_t(S_{t+\Delta} - S_t) \cong \text{ì}\Delta.$$

μ, pozitif beklenen getiri oranıdır. Buradaki yaklaşıklık, $E_t(S_{t+\Delta} - S_t)$'nin Taylor serisi açılımında, Δ'yı içeren daha yüksek mertebeden terimlerin düşürülmesindendir.

$$E_t(S_{t+\Delta} - S_t) = \text{ì}\Delta + \mathrm{o}(\Delta).$$

$\mathrm{o}(\Delta)$, Taylor açılımındaki yüksek mertebeli terimleri göstermektedir ve $\Delta \to 0$ olduğunda $\mathrm{o}(\Delta) \to 0$ olur. Yukarıdakine benzer ifadeler opsiyonlar içinde söz konusudur. Örneğin opsiyonlar zaman değerine sahiptirler. Zaman azaldıkça Avrupa tipi opsiyonun fiyatıda azalır (diğer şartlar aynı kalmak şartıyla). Böyle bir süreç süpermartingal olarak adlandırılır.

Menkul kıymet fiyatları çoğunlukla submartingal veya süpermartingal süreci izliyorsa, neden martingallerle ilgilenilir. Çünkü martingal olmayan birçok menkul kıymet martingallere dönüştürülebilir. Yani risksiz orandan iskonto edilmiş olan tahvil veya hisse senedi fiyatları martingal olacak şekilde bir $\tilde{P}$ olasılık dağılımı bulunabilir. Eğer bu yapılabiliyorsa,

- Tahvil fiyatları için, $E^{\tilde{P}}(e^{-ru}B_{t+u}) = B_t, \quad 0 < u < T - t$
- Hisse senedi fiyatları için, $E^{\tilde{P}}(e^{-ru}S_{t+u}) = S_t, \quad 0 < u.$

Bu eşitlikler türev menkul kıymetlerin fiyatlamasında da çok kullanışlıdır. Önemli bir sorun bu dönüşümün nasıl yapılacağıdır. Submartingal süreçlerini martingal süreçlerine dönüştürmenin iki yolu vardır.

1. $e^{-rt}S_t$ veya $e^{-rt}B_t$ 'den beklenen trendi çıkartmaktır. Bu sayede trend civarındaki sapmalar tamamen kestirilemez yapılmış olur. Böyle dönüştürülmüş değişkenler bir martingal olur. Bu metodoloji martingaller için gösterim sonuçlarını kullanmaya denktir.
2. Bu yöntem biraz daha karmaşık fakat kullanışlıdır. Submartingali doğrudan dönüştürmek yerine onun olasılık dağılımına bir dönüşüm uygulanabilir. Yani,

$$E_t^P(e^{-ru}S_{t+u}) > S_t, \qquad u > 0 \tag{3.1}$$

ise burada $E_t^P(.)$ P olasılığı kullanılarak hesaplanan koşullu beklentidir. Şu halde aşağıdaki eşitliği sağlayacak şekilde denk bir $\tilde{P}$ olasılığı bulunabilir:

$$E_t^{\tilde{P}}(e^{-ru}S_{t+u}) = S_t, \quad u > 0. \tag{3.2}$$

Bu durumda $e^{-rt}S_t$ bir martingal olur. (3.1)'i (3.2)'ye dönüştüren olasılık dağılımlarına denk martingal ölçümleri denir (Önalan, 2004).

3.3. Stokastik Modellemede Martingaller

Arbitraj fırsatlarının yokluğunda, piyasa dengesi tüm iskonto edilmiş menkul kıymet fiyatları S_t'nin martingal gibi davranacak şekilde bir $\tilde{P}$ olasılığı bulunabileceğini ifade eder:

$$E^{\tilde{P}}(e^{-ru}S_{t+u}|\mathcal{F}_t) = S_t, \quad u > 0.$$

Bu yüzden martingaller menkul kıymet fiyatlamada çok önemlidirler. X_t, $\tilde{P}$ olasılığına ve $\{\mathcal{F}_t\}$ informasyonuna göre martingal özelliğine sahip bir menkul kıymet fiyat süreci ise,

$$E^{\tilde{P}}(X_{t+\Delta}|\mathcal{F}_t) = X_t$$

olur. Sürekli zamanda X_t ne tip yörüngelere sahiptir? Bu sorunun cevabını verebilmek için önce, martingal farkları yani ΔX_t'ler tanımlanmalıdır:

$$\Delta X_t = X_{t+\Delta} - X_t.$$

X_t bir martingal olduğundan,

$$E^{\tilde{P}}(\Delta X_t | \mathcal{F}_t) = 0$$

olur. Bu eşitlik, zaman aralığı Δ 'nın ne kadar küçük olduğuna bakılmaksızın bir martingalin artımlarının toplam olarak kestirilemez olması gerektiğini söyler. Fakat sürekli zamanla çalışıldığından çok küçük Δ'lar düşünülebilir. Bu durumda martingaller çok düzensiz yörüngelere sahip olmalıdırlar. Ancak, X_t sonsuz küçük Δ zaman aralıklarında herhangi bir gözle görülebilir trend göstermemelidir. Eğer böyle bir trende sahipse süreç kestirilebilir olmalıdır. Böyle düzensiz yörüngeler iki farklı şekilde olabilir. Yörüngeler sürekli ise sürece sürekli martingal denir. Bu, $\Delta \to 0$'da tüm $\varepsilon > 0$ için $P(\Delta X_t > \varepsilon)$ olması gerektiği anlamına gelir. Yörüngeler sıçramalar gösteriyorsa sürece sağ sürekli martingal adı verilir. Sağ sürekli martingallerde yörüngeler sıçramalarla kesilmiştir. Sıçrama zamanları $t_0, t_1, t_2, \ldots$ 'de martingal sağ süreklidir. Özellikle arbitraj teoremi verilmiş olduğunda, yörüngelerinin düzensiz davranışı ve sıçramaların mümkün olması menkul kıymet fiyatlarının teorik olarak göstermek için istenir.

İkinci momente sahip sürekli bir X_t martingali ile ilgilenilsin.

$$E(X_t^2) < \infty, \qquad t > 0$$

olsun. Böyle bir süreç sonlu varyansa sahip olup sürekli kare integrallenebilir martingal olarak adlandırılır. Diğer bir deyişle sürekli kare integrallenebilir martingaller sınıfı Brownian hareketine çok yakındır. Buradan değişimlerin kestirilemezliği ve sıçramaların yokluğu sürekli zamanda Brownian Hareketi'nin iki özelliğidir. Eğer sürekli kare integrallenebilir martingal bir menkul kıymet fiyatını modellemek için uygunsa, fiyat sürecinin küçük artımlar için normallik varsayımı yapılabilir.

Örnek 3.2. Küçük zaman aralıkları Δ süresince gözlenen iki bağımsız Poisson sürecini kullanarak bir martingal kurulsun. Finansal piyasaların iyi ve kötü haberlerden etkilendiği kabul edilsin. Burada N_t^G, t zamanına kadar ki iyi haberlerin sayısı ve N_t^B, t zamanına kadar ki kötü haberlerin sayısını göstermektedir.

Haberlerin finansal piyasalara gelişi, geçmişle ilişkisiz olup, iyi ve kötü haberler bağımsızdır. Sonuç olarak küçük bir Δ aralığı süresince iyi ve kötü haberlerden en çok bir tanesi olabilir. Her iki tip haber içinde olma olasılığı aynıdır. Böylece Δ süresince $\Delta \mathrm{N}^{\mathrm{G}}$, $\Delta \mathrm{N}^{\mathrm{B}}$ artımlarının olasılıkları yaklaşık olarak aşağıdaki şekilde verilir:

$$P(\Delta N_t^G = 1) = P(\Delta N_t^G = 1) \cong \lambda\Delta.$$

Bu durumda, M_t şu şekilde tanımlanır:

$$M_t = N_t^G - N_t^B$$

bir martingal olacaktır. Bunu görmek için M_t'nin artımları aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\Delta M_t = \Delta N_t^G - \Delta N_t^B.$$

Koşullu beklenti operatörü uygulanırak,

$$E_t(\Delta M_t) = E_t(\Delta N_t^G) - E_t(\Delta N_t^B)$$

yaklaşık olarak,

$$E_t(\Delta N_t^G) \cong 0(1 - \lambda\Delta) + 1.\lambda\Delta \cong \lambda\Delta$$

benzer şekilde,

$$E_t(\Delta N_t^B) \cong 0(1 - \lambda\Delta) + 1.\lambda\Delta \cong \lambda\Delta$$
$$E_t(\Delta M_t) \cong \lambda\Delta - \lambda\Delta = 0.$$

Bu durumda, I_t informasyon kümesi verilmiş olduğundan M_t'deki artımlar kestirilemezdir. Yani M_t bir martingaldir. Δ süresince iyi ve kötü haberlerin olasılıkları aynı ve $\lambda\Delta$ ise M_t bir martingaldir. Eğer iyi haberlerin olma olasılığı kötü haberlerinkinden büyükse,

$$P(\Delta N_t^G = 1) \cong \lambda^G\Delta > P(\Delta N_t^B = 1) \cong \lambda^B\Delta$$

ise M_t, I_t' ye göre bir martingal olmayacaktır. Çünkü,

$$E_t(\Delta M_t) \cong \lambda^G\Delta - \lambda^B\Delta > 0$$

dır. Bazı olasılık ve informasyon kümesi değiştiğinden sürecin martingal karakteristiği değişebilir (Önalan, 2004).

3.4. Martingal Olan Süreçler

3.4.1. Brownian Hareketi

X_t'nin artışlarının normal dağılmış sürekli zamanlı süreç olduğu kabul edilsin. Böyle bir sürece Brownian Hareketi denir. Her t için X_t'nin değeri gözlendiğinde X_t'deki her bir sonsuz küçük değişim anı dX_t ile gösterilsin. X_t 'deki artımsal değişimler bağımsızdır (zamana göre). Bu şartlar altında, eğer Δ küçük bir aralıksa, Δ süresindeki artmalar ΔX_t, $\mu\Delta$ ortalama ve $\sigma^2\Delta$ varyansı ile bir normal dağılıma sahip olacaktır. Bunun anlamı,

$$\Delta X_t \sim N(\mu\Delta, \sigma^2\Delta) \tag{3.3}$$

'dir. Bu artırımların ilişkisizliği aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$E\big((\Delta X_u - \mu\Delta)(\Delta X_t - \mu\Delta)\big) = 0.$$

X_t bir martingal mi? X_t süreci sonsuz küçük artışların birikimidir. Yani,

$$X_{t+T} = X_0 + \int_0^{t+T} dX_u$$

integralinin iyi tanımlanmış olduğu kabul edilsin. Bu durumda beklentileri hesaplanabilir. (3.3)'deki olasılık dağılımına göre beklenen değeri alınsın ve X_t üzerinde t zamanına kadar gözlenmiş informasyon verilmiş olsun.

$$E_t(X_{t+T}) = E_t\left(X_t + \int_0^{t+T} dX_u\right).$$

Fakat t zamanında ΔX_{t+T}'nin gelecek değerleri kestirilebilir. Çünkü küçük Δ aralıkları süresinceki tüm değişimler $\mu\Delta$'ye eşit beklentiye sahiptir. Bunun anlamı şudur:

$$E_t\left(\int_0^{t+T} dX_u\right) = \mu T.$$

Böylece,

$$E_t(X_{t+T}) = X_t + \mu\Delta$$

olur. Açıkça şu anki ve geçmiş X_t üzerindeki informasyona ve (3.3)'deki olasılık dağılımına göre $\{X_t\}$ bir martingal değildir.

Yeni bir $Z_t = X_t - \mu t$ sürecinin martingal olduğunu göstermek kolaydır:

$$\begin{aligned}
E_t(Z_{t+T}) &= E_t\big(X_{t+T} - \mu(t+T)\big) \\
&= E\big(X_t + (X_{t+T} - X_t)\big) - \mu(t+T) \\
&= X_t + E(X_{t+T} - X_t) - \mu(t+T) \\
&= X_t + E_t(X_{t+T}) - X_t - \mu t - \mu T \\
&= X_t + \mu T - \mu t - \mu T \\
&= X_t - \mu T \\
&= Z_t.
\end{aligned}$$

Bu durumda, Z_t bir martingaldir. Böylece bir deterministik fonksiyon çıkararak X_t'yi bir martingale dönüştürmek mümkündür.

3.4.2. Kareler Süreci

Küçük zaman aralıkları Δ süresince, ilişkisiz artmalı bir S_t süreci ele alınsın. Başlangıç noktası $S_0 = 0$ olmak üzere,

$$\Delta S_t \sim N(0, \sigma^2\Delta).$$

Yeni bir süreç tanımlansın:

$$Z_t = S_t^2.$$

Buna göre Z_t, S_t'nin kareköklerinden oluşan negatif olmayan bir süreçtir. Z_t bir martingal mi? Cevap hayırdır. Çünkü Z'nin artmalarının karelerinin toplamı kestirilebilir. Bir küçük Δ aralığı için Z_t'deki artışların beklenen değeri,

$$E_t(S_{t+\Delta}^2 - S_t^2) = E_t((S_t(S_t - S_{t+\Delta})^2 - S_t^2) = E_t(S_{t+\Delta} - S_t)^2$$

dir. S_t'nin geçmişi şu anla ilişkisiz olduğundan çarpım terimleri düşer. Bunun anlamı şudur:

$$E(\Delta Z_t) = \sigma^2\Delta.$$

Yani Z_t 'deki artışlar kestirilebilir olduğundan Z_t bir martingal değildir. Fakat Z_t 'de ortalamayı değiştirerek bir martingal elde edilebilir.

$$E_t\big(Z_{t+T} - \sigma^2(T+t)\big) = Z_t - \sigma^2 t.$$

Z_t'den $\sigma^2 t$ çıkarılarak bir martingal bulunur. Bir stokastik süreç martingal değilse özel bir ortalama $\delta(t)$ çıkararak süreç martingale dönüştürülebilir.

Finansal piyasalarda bir riskli menkul kıymetin gözlenmiş olan piyasa değerinin onun risksiz faiz oranı ile iskonto edilmiş beklentisine eşit olması beklenmeyebilir. Yani bir risk primi vardır. Böylece herhangi bir riskli malın fiyatı, risksiz faiz oranı ile iskonto edildiği zaman bir martingal olmayacaktır. Fakat önceki tartışmadan, böyle menkul kıymet fiyatları belki martingale dönüştürülebilir. Böyle bir dönüşüm finansal malların fiyatlandırılması için çok uygundur.

3.4.3. Sağ Sürekli Martingaller

Tekrar N_t poisson sayma süreci ele alınsın. N_t bir sayma süreci olduğundan ve sıçramalar zamanla büyüyeceğinden N_t zamanla artacaktır. Böylece N_t bir martingal olmayabilir. N_t'nin artan bir trende sahip olduğu açıktır. N_t^* dönüştürülmüş poisson süreci olmak üzere,

$$N_t^* = N_t - \lambda t$$

bir martingal olacaktır. Açıkça N_t^* kestirilemeyen artışlara sahiptir ve bir sağ sürekli martingaldir. Ayrıca varyansı sonludur ve sürekli kare integrallenebilir martingaldir.

3.4.4. Martingal Gösterimi

Sürekli zamanlı süreçlerin büyük bir kısmı uygun ortalamalara çıkarmak suretiyle martingallere dönüştürülebilir. Bu kısımda, bu özel durumları formülize edilerek Doob-Meyer ayrışımı tartışılacaktır. Önce temel bir örnek verilsin. Bu örneğin incelenmesinin nedenleri:

- Sürekli zamanın bir parçalanması ile çalışarak, menkul kıymetleri fiyatlandırmak için pratik bir yöntem sunmaktadır.
- Böyle bir yapı ile başlanarak ito integralinin kompleks yapısını anlamak daha kolay olmaktadır.
- Örnek, menkul kıymet fiyatları ile ilişkili çeşitli yörüngelere nasıl olasılıklar atanacağı ve bir olasılık uzayının tartışılmasını sağlamaktadır (Önalan, 2004).

Örnek 3.3. Yatırımcının S_t finansal malının fiyatını;

$$t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = T$$

zamanlarında gözlendiği kabul edilsin. Eğer t_{i-1} ve t_i zamanları arasındaki aralıklar çok küçükse ve piyasa likit ise malın fiyatı, $t_i - t_{i-1}$ süresince en çok yukarıya veya aşağıya hareket edecektir. Bu, her bir t_i anında sadece iki mümkün değer vardır diye formülize edilsin.

$$\Delta S_{t_i} = \begin{cases} 1, & p \ olas\text{ılığı} \ ile \\ -1, & (1-p) \ olas\text{ılığı} \ ile \end{cases}$$

Bu değişimlerin birinin diğerinden bağımsız olduğu kabul edilsin. Ayrıca eğer $p = \frac{1}{2}$ ise ΔS_{t_i}'nin beklenen değeri sıfır olacaktır. Aksi takdirde fiyat değişimlerinin ortalaması sıfırdan farklıdır. Bu şartlar verilmiş olduğunda önce baz olasılık uzayı kurulsun. k farklı zaman noktasında ΔS_t gözlensin. S_{t_i}'deki değişimin olasılığı $\{p, (1-p)\}$ sadece bir marjinal olasılık dağılımıdır. İlgilenilen şey fiyat değişimlerinin bir dizisinin olasılığıdır. Diğer bir deyişle çeşitli yörüngelerle ilişkili olasılıklar tartışılacaktır (örneğin yatırımcı mal fiyatlarında şu an yükselen veya düşen trendin uzunluğu ile ilgilenebilir). Bunun yapılması bir olasılık uzayının kurulmasını gerektirir. İlk önce fiyat değişimlerinin tüm mümkün örneklem eğrilerinin kurulmasına ihtiyaç vardır. Bu uzaya örnek uzay denir. Onun elemanları $+1$'lerin ve -1'lerin dizileridir. Tipik bir örneklem eğrisi,

$$\left\{\Delta S_{t_i} = -1, \dots, \Delta S_{t_k} = +1\right\}$$

şeklindedir. k sonlu S_{t_0} başlangıç noktası olduğundan, artımsal değişimler eklenerek, mal fiyatları tarafından izlenen yörünge kolayca belirlenebilir. Bu şekilde, tüm mümkün yörüngelerin kümesi kurulabilir. Yani örnek uzay kurulabilir. Sonra bu yörüngelerle ilişkili bir olasılık tanımlanır. Fiyat değişimleri bağımsız (ve k sonlu) olduğu zaman bunu yapmak kolaydır. Belirli bir dizinin olasılığı her bir fiyat değişiminin olasılıkları çarpılarak bulunur ki t_0'da $+1$ ile başlayan, sonra t_k'ya kadar değişen,

$$\Delta S^* = \{\Delta S_{t_1} = 1, \Delta S_{t_2} = -1, \dots, \Delta S_{t_k} = -1\}$$

aşağıdaki olasılığa sahip olacaktır (k olay olduğu kabul edilerek);

$$P(\Delta S^*) = p^{\frac{k}{2}}(1-p)^{\frac{k}{2}}.$$

Bir yörüngenin olasılığı, ilk $k/2$ periyot süresince sürekli artar ve t_k zamanına kadar sürekli azalır. k sonlu olduğundan örnek uzayda sonlu sayıda yörünge vardır. Bu yörüngelerin her birine bir olasılık atanır.

$$S_{t_k} = S_{t_0} + \sum_{i=1}^{k} (S_{t_i} - S_{t_{i-1}}) \tag{3.4}$$

S_{t_k} için en yüksek mümkün değer $S_{t_0} + k$'dır. Eğer tüm değişimler $\Delta S_{t_i}, i = 1,2, \dots, k,\ +1$ ise bu sonuç elde edilecektir. Bu sonucun olasılığı,

$$P(S_{t_k} = S_{t_0} + k) = p^k.$$

S_{t_k}'nın en küçük değeri $S_{t_k} - k$'dır. Bunun olasılığı,

$$P(S_{t_k} = S_{t_0} - k) = (1-p)^k$$

ile verilir. Bu ekstrem durumlarda, $S_{t_k} = S_{t_0} + k$ veya $S_{t_k} = S_{t_0} - k$ olan sadece bir yörünge vardır. Burada k, gözlenmiş olan artımsal değişimler sayısını, $m, +1$'lerin sayısını ve $m < k$ olmak üzere $k - m, -1$'lerin sayısını göstermektedir:

$$S_{t_k} = S_{t_0} + m - (k - m),$$
$$P(S_{t_k} = S_{t_0} + 2m - k) = C_k^{k-m} p^m (1-p)^{k-m}. \tag{3.5}$$

Burada,

$$C_k^{k-m} = \frac{k!}{m!\,(k-m)!}$$

ile verilen binom dağılımı $k \to \infty$' da bu dağılım normal dağılıma yakınsar.

3.4.5. Hisse Senedi Fiyatının Martingal Olmasının Gösterilmesi

(3.4) denklemi ile tanımlanmış olan $\{S_{t_k}\}$, ΔS_{t_k} geçmiş fiyat değişimlerinin artmalarından ibaret informasyon kümesine göre bir martingal mi? (3.5)'de verilmiş olan olasılıklar altında beklentiler düşünülsün:

$$E^p\left(S_{t_k} \middle| S_{t_0}, \Delta S_{t_1}, \dots, \Delta S_{t_{k-1}}\right) = S_{k-1} + \big((+1)p + (-1)(1-p)\big).$$

Sağ taraftaki ikinci terim ΔS_{t_k}' nın beklentisidir. $p = 1/2$ ise bu terim sıfırdır.

$$E^p\left(S_{t_k} \middle| S_{t_0}, \Delta S_{t_1}, \dots, \Delta S_{t_{k-1}}\right) = S_{k-1}.$$

$p \neq 1/2$ ise $\{S_{t_k}\}$, $\{I_{t_k}\}$ informasyon kümesine göre martingal olmayacaktır. Z_{t_k} aşağıdaki şekilde tanımlansın ki buda I_{t_k}'ya göre tekrar martingal olacaktır.

$$Z_{t_k} = \big(S_{t_0} + (1-2p)\big) + \sum_{i=0}^{k} \big(\Delta S_{t_i} + (1-2p)\big),$$

$$Z_{t_k} = S_{t_k} + (1-2p).(k+1).$$

3.4.6. Doob-Meyer Gösterimi

Burada herhangi bir t_i zamanında bir yukarı hareketin olasılığının bir aşağıya hareketin olasılığından daha büyük olduğu durumu düşünülsün. Bu durumda gözlenmiş olan yörüngelerle genel bir yukarıya doğru trend beklenir.

$$\frac{1}{2} < p < 1 \tag{3.6}$$

Daha önce gösterildiği gibi,

$$E^p\left(S_{t_k} \middle| S_{t_0}, S_{t_1}, \dots, S_{t_{k-1}}\right) = S_{t_{k-1}} + (1 - 2p),$$
$$E^p\left(S_{t_k} \middle| S_{t_0}, S_{t_1}, \dots, S_{t_{k-1}}\right) > S_{t_{k-1}} \, .$$

(3.6)'ya göre $2p > 1$ olduğundan $\{S_{t_k}\}$ bir martingaldir.

$$S_{t_k} = \underbrace{-(1 - 2p).(k + 1)}_{değişken} + \underbrace{Z_{t_k}}_{martingal} \tag{3.7}$$

Burada Z_{t_k} bir martingaldir. Böylece bir submartingali artan deterministik bir değişken ve bir martingale ayrılmış olur. (3.7)'deki ifade Doob-Meyer ayrışımının basit bir durumudur. Bu terim çoğunlukla sürekli zamanlı martingaller için kullanılır. Burada bir sürekli zamanlı aralığın bir kesikli zamana parçalanması ile çalışılacaktır.

Bir yükselen trendli submartingalin bir deterministik trend ve bir martingale ayrışımı, sürekli zamanda sonlu sayıda noktada gözlenmiş bir süreç için yapılmıştır.

Eğer $\{X_t, \ 0 < t < \infty\}$, $\{I_t\}$ ailesine göre bir sağ sürekli submartingal ise ve eğer tüm t için $E(X_t) < \infty$ ise o zaman X_t aşağıdaki gibi ayrıştırılabilir:

$$X_t = M_t + A_t$$

Burada M_t , sağ sürekli martingali ve A_t , I_t 'ye göre ölçülebilir artan bir süreci göstermektedir.

Bu teorem şunu gösterir. Eğer sürekli bir şekilde gözlenen mal fiyatları sıçramalar ve aynı zamanda da yukarıya doğru trende sahipse, o zaman onlar, t zamanına kadar gözlenmiş olan bir süreç çıkartılarak martingale dönüştürülebilir. Eğer orijinal sürekli zamanlı süreç herhangi bir sıçrama göstermiyor fakat sürekli ise, o zaman sonuçtaki martingalde sürekli olacaktır.

3.4.7. Doob Gösteriminin Kullanımı

$t \in [0, T]$ ve bir S_t baz malı üzerine yazılmış bir alım opsiyonunun değeri C_t aşağıdaki fonksiyonla verilmiş olsun:

$$C_T = \max(S_T - K, 0).$$

Burada T, opsiyonun vadesini gösterir. $t < T,\ t$ zamanında C_T'nin tam değeri bilinmez. Fakat t zamanına kadar elde edilebilir informasyon I_t'yi kullanılarak onun için bir tahminci hesaplanabilir:

$$E^P(C_T|I_t) = E^P(\max(S_T - K, 0)|\, I_t).$$

Buradaki beklenti, fiyat hareketlerini idare eden, dağılım fonksiyonuna göre alınmıştır. Bu kestirici verilmiş olsun. Bu durumda C_t adil piyasa değeri $E^P(\max(S_T - K, 0)|I_t)$'nin özel bir şekilde iskonto edilmiş değerine eşit olacak mıdır?

İskonto için, sabit risksiz faiz oranı r kullanılsın:

$$C_t = e^{-r\,(T-t)}E^P(\max(S_T - K, 0)\,|I_t).$$

Bu denklemin C_t'nin adil piyasa değerini verip vermediği $e^{-rt}C_t$'nin bir martingal olup olmamasına bağlıdır. Eğer öyle ise,

$$E^P(e^{-rt}C_T|C_t) = e^{-rt}C_t.$$

Eşitliğin her iki tarafıda e^{-rt} ile çarpılırsa,

$$E^P\big(e^{-r(T-t)}C_T\big|C_t\big) = C_t\,, \quad t < T$$

olur ve $e^{-rt}C_t$ bir martingal olur.

Yatırımcıların riski sevmedikleri varsayımı altında bir riskli menkul kıymet için şu yazılabilir:

$$E^P\left(e^{-r(T-t)}S_T \middle| S_t\right) > S_t.$$

Yani $e^{-rt}S_t$ bir submartingal olacaktır. Fakat Doob-Meyer ayrışımına göre, $e^{-rt}S_t$ ayrıştırılırsa,

$$e^{-rt}S_t = A_t + Z_t \tag{3.8}$$

Burada A_t, I_t'ye göre artan bir süreç ve Z_t, I_t'ye göre bir martingaldir. Eğer A kolayca elde edilebiliyorsa, (3.8)'deki ayrışım kullanılabilir.

3.5. Stokastik İntegral

Buraya kadar elde edilen sonuçlar yeni bir martingal M_{t_i}'yi tanımlamak için kullanılabilir. Burada $H_{t_{i-1}}$, $I_{t_{i-1}}$'e göre uyarlanmış herhangi bir süreçtir. Z_t'de P ölçümü ve I_t'ye göre herhangi bir martingal olduğunda süreç aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$M_{t_k} = M_{t_0} + \sum_{i=1}^{k} H_{t_{i-1}}\left(Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}}\right)$$

ve I_t'ye göre bir martingal olacaktır. Bu gösterimin arkasında yatan temel fikir şudur. Z_t bir martingaldir ve artışları kestirilemezdir. $H_{t_{i-1}}$, $I_{t_{i-1}}$'e göre uyarlanmıştır. Bunun anlamı şudur. $I_{t_{i-1}}$'ler verilmiş olduğunda $H_{t_{i-1}}$'ler sabitlerdir. O zaman Z_{t_i}'deki artışlar $H_{t_{i-1}}$ ile ilişkisiz olacaktır. Bu gözlemler kullanılarak aşağıdaki hesaplanabilir:

$$E_{t_0}\left(M_{t_k}\right) = M_{t_0} + E_{t_0}\left(\sum_{i=1}^{k} E_{t_{i-1}}\left(H_{t_{i-1}}\left(Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}}\right)\right)\right).$$

Fakat Z_{t_i}' deki artışlar t_{i-1} zamanlarında kestirilemezdir.

$$\left(E_{t_0}\left(E_{t_{i-1}}(.)\right)\right) = E_{t_0}(.).$$

Bu durumda, $H_{t_{i-1}} E_{t_{i-1}}(Z_{t_i}) = 0$'dır. Bu da

$$E_{t_0}(M_{t_k}) = M_{t_0}$$

olduğunu gösterir. M_t martingal özelliğine sahiptir. Bu şekilde tanımlanmış M_t bir stokastik integralin ilk örneğidir.
$\sup_i(t_i - t_{i-1}) \to 0$' da benzer bir sonuç bulunabilir mi? Şöyle bir ifade bulunabilir.

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_u dZ_u \tag{3.9}$$

Burada, dZ_u, sıfır ortalamalı bir sonsuz küçük stokastik artmayı gösteriyor.

3.5.1. Finansal Uygulama (Ticaret Kazançları)

Stokastik integraller finans teorisinde ilginç uygulamalara sahiptirler. Bu uygulamalardan bir tanesini vermek için, t_i ticaret zamanlarında bir risksiz ve bir riskli menkul kıymete yatırım yapan bir yatırımcı düşünülsün.

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T$$

Burada $\alpha_{t_{i-1}}$, t_i'de ticaret başlamadan elde tutulan risksiz menkul kıymetin hisselerinin sayısını ve $\beta_{t_{i-1}}$, t_i'de ticaret başlamadan elde tutulan riskli menkul kıymetin hisselerinin sayısını göstermektedir. Bu rastgele değişkenler I_t - uyarlanmış olacaktır (yani t_i zamanında yatırımcı elde tuttuğu riskli ve risksiz menkul kıymet miktarını bilir). α_{t_0} ve β_{t_0} başlangıçta elde tutulan miktar olup rastgele değildir. Burada β_{t_i}, risksiz menkul kıymetin t_i zamanındaki fiyatını ve S_{t_i}, riskli menkul kıymetin t_i zamanındaki fiyatıdır.

Ticaret stratejilerinin kendini finanse eden olduğu kabul edilsin. Yani t_i zamanındaki yatırımlar sadece t_{i-1} zamanındaki yatırımlar ile finanse edilmektedir. Diğer bir deyişle;

$$a_{t_{i-1}} \beta_{t_i} + \beta_{t_{i-1}} S_{t_i} = a_{t_i} \beta_{t_i} + \beta_{t_i} S_{t_i} \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{3.10}$$

Bu stratejiye göre yatırımcının bugünkü yatırım tam olarak onun önceki periyottaki yatırımı ile finanse edilmiştir. (3.10)'un sol tarafı için tekrarlı olarak dönüşüm ve aşağıdaki tanımlar uygulanırsa,

$$\beta_{t_i} = \beta_{t_{i-1}} + \left(\beta_{t_i} - \beta_{t_{i-1}}\right),$$
$$S_{t_i} = S_{t_{i-1}} + \left(S_{t_i} - S_{t_{i-1}}\right),$$

aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned} &at_0\beta t_0 + \beta_{t_0}B_{t_0} + \sum_{j=1}^{i-1}\left(a_{t_j}\left(\beta_{t_{j+1}} - \beta_j\right) + \beta_{t_j}\left(S_{t_{j+1}}S_{t_j}\right)\right) \\ &\qquad = a_{t_i}\beta_{t_i} + \beta_{t_i}S_{t_i}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Burada sağ taraf t_i zamanından sonra karar vericinin servetidir. (3.11)'in sağ tarafı stokastik integralin kurgusu ile aynıdır. Şu halde, stokastik integraller yatırımcıların bütçe kısıtlarını modellemek için doğal modellerdir (Önalan, 2004).

4. YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR

Bu çalışmada temeli bahis stratejilerine dayanan martingal teorisi üzerinde durulmuştur. Martingal teorisine giriş yapılmadan önce sigma cebire göre koşullu beklenen değerin özellikleri ve bu özelliklerin temelini oluşturan olasılık teorisinin kavramları ayrıntılı olarak verilmiştir.

Martingallerin özellikleri ayrıntılı olarak incelenmiştir. Bunun yanında submartingaller ve süpermartingaller üzerinde durulmuştur Martingal teorisinin, martingaller, submartingaller ve süpermartingaller olmak üzere tanımları ve teoremleri incelenmiş olup, bunlara ait sonuçlar ispatlarıyla verilmiştir.

Ayrıca finans matematiğine ait temel kavramlar verilmiştir. Martingal teorisinin finans matematiğinde kullanılmasıyla ilgili gerekli tanımlar incelenmiştir. Bunun yanında martingal teorisi oldukça geniş olduğundan, bu çalışmanın finans kısmında sadece teorinin menkul kıymetlerin fiyatlandırılması ile doğrudan ilişkili yönleri üzerinde durulmuştur.

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada martingaller ve temel özellikleri üzerinde durulmuştur. Verilen tanımlar ve teoremler martingallerin yapısınını anlamakta kolaylık sağlamıştır.

Submartingallerden ya da süpermartingallerden martingallerin elde edilebildiği ve martingal süreçlerinde gelecek hareketlerin yönlerini kestirmenin imkansız olduğu görülmüştür. Yani bir sürecin gelecek hareketi kestirilemiyorsa martingal olarak adlandırılır. Bunun yanı sıra menkul kıymet fiyatları çoğunlukla submartingal veya süpermartingal olmasına rağmen, martingalin daha çok kullanılmasının nedeninin, martingal olmayan bir çok menkul kıymetin martingale dönüştürülebilmesinden kaynaklandığı görülmüştür.

6. KAYNAKLAR

Akdeniz, F., 2010, Olasılık ve İstatistik, Genişletilmiş 15. baskı, Nobel Kitabevi, Adana.

Akdi, Y., 2010, Matematiksel İstatistiğe Giriş, Genişletilmiş 2. Baskı, Gazi Kitabevi, Ankara.

Aliyev, R., 2010, Stokastik Süreçler Teorisine Giriş, KTÜ Matbaası, Trabzon.

Bezandry, P.H. ve Diagana, T., 2011, Almost Periodic Stochastic Process, Springer, Washington.

Bobrowski, A., 2005, Functional Analysis For Probability and Stochastic Processes, Cambridge Univesity Press, New York.

Cerit, C. ve Yüksel, M., 2004, Olasılık, Alfa Basım Yayım Dağıtım, İstanbul.

Chow, Y.S. ve Teicher, H., 1998, Probability Theory: Independence, Interchangeability, Martingales, Second Edition, Springer-Verlag.

Feller, W., 1971, An Introduction to Probability Theory and Its Applications,1, 2, John Wiley, New York.

Hunsberger, D.V. ve Bilingsley, P., 1973, Elements of Statistical Inference, Ally and Bacon, Inc. Boston.

İnal, C. ve Günay, S., 1982, Olasılık ve Matematiksel İstatistik, Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Basımevi, Ankara.

Klebaner, F. C., 2005, Introduction to Stochastic Calculus with Applications, Second Edition, Imperial College Press, London.

Larsen, R.J. ve Marx, M.L., 2004, , Introduction to Mathematical Statistics and Its Applications, Third Edition, Prentice Hall.

Nasirova, T., Khaniyev, T., Yapar, C., Ünver, İ. ve Küçük, Z., 2009, Olasılık, KTÜ Matbaası, Trabzon.

Önalan, Ö., 2010, Stokastik Süreçler, Avcıol Basım Yayın, İstanbul.

Önalan, Ö., 2004, Finans Mühendisliğinde Matematiksel Modelleme, Avcıol Basım Yayın, İstanbul.

Öztürk, F., 1993, Matematiksel istatistik, A. Ü. F. F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, Ankara.

Pozynak, A. S., 2009, Advanced Mathematical Tools for Automatic Control Engineers Stochastic Techniques, Elsevier, Oxford.

Revuz, D. and Yor, M., 1999, Continuous Martingales and Brownian Motion, 3nd Ed., Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Germany.

Shahbazov, A. A., 2005, Olasılık Teorisine Giriş, Birsen Yayınevi, İstanbul.

Shiryayev, A. N., 2006, Probability, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo.

Shigekawa, I., 1998, Stochastic Analysis, American Mathematical Society, United States of America.

Williams, D., 1991 Probability with Martingales, Cambridge University Press, United Kingdom.

Yeh, J., 1995, Martingales and Stochastic Analysis, World Scientific, Singapore.

Yıldırak, K., Çalışkan, N. ve Çetinkaya, Ş., 2008, Türev Ürün Fiyatlama Teknikleri, Literatür Yayınları, İstanbul.

URL-1, http://en.wikipedia.org/wiki/Monotone_convergence_theorem, 18 Ekim 2011.

URL-2, http://en.wikipedia.org/wiki/Jensen%27s_inequality, 15 Ekim 2011.

URL-3, http://en.wikipedia.org/wiki/Convex_function, 15 Ekim 2011.

URL-4, http://en.wikipedia.org/wiki/Concave_function, 15 Ekim 2011.

URL-5, http://en.wikipedia.org/wiki/Martingale_%28probability_theory%29 10 Eylül 2010.

URL-6,http://muhasebeturk.org/ecopedia/405-t/3646-trend-nedir-ne-demek-anlami tanimi.html, 18 Ekim 2011.

URL-7, http://www.teknikyorum.com/borsanedir.asp, 18 Ekim 2011.

URL-8, http://borsa.terimleri.com/Likidite.html, 30 Kasım 2011.

URL-9, http://ekonomiturk.blogspot.com/2010/03/arbitraj-nedir.html, 18 Ekim 2011.

URL-10, http://www.imkb.gov.tr/products/BondsMain.aspx, 30 Kasım 2011.

URL-11, http://tr.wikipedia.org/wiki/Opsiyon_%28finans%29, 10 Nisan 2011.

URL-12, Chen H.C. and İsmail M.M., http://www.cs.rpi.edu/~magdon/ps/conference/martingaleNIPS05.pdf, 25 Ocak 2011.

URL-13, http://galton.uchicago.edu/~lalley/Courses/313/Martingales.pdf, 27 Eylül 2011.

ÖZGEÇMİŞ

Menşure CAN, 3 Ağustos 1986 tarihinde Konya'nın Ereğli ilçesinde doğdu. 2000 yılında Şehit Kamil Atalay İlköğretim Okulu'ndan mezun oldu. 2004 yılında Ereğli Lisesi'nden (YDA) mezun oldu. Aynı yıl girdiği üniversite sınavında Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü'nü kazandı. 2008 yılında bu bölümden mezun oldu. Aynı yıl Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalında tezli yüksek lisans programına başladı ve halen Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalında eğitimine devam etmektedir.

Aralık 2009 tarihinde Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Ana Bilim Dalında 2547 Sayılı Yüksek Öğretim Kanunun 50-d maddesi kapsamında araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı. Halen bu görevine devam etmektedir. Ayrıca iyi derecede İngilizce bilmektedir.