KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İSTATİSTİK VE BİLGİSAYAR BİLİMLERİ ANABİLİM DALI

RASTGELE YÜRÜYÜŞ SÜREÇLERİ VE BAZI UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fatma Zehra DOĞRU

AĞUSTOS 2011
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İSTATİSTİK VE BİLGİSAYAR BİLİMLERİ ANABİLİM DALI

RASTGELE YÜRÜYÜŞ SÜREÇLERİ VE BAZI UYGULAMALARI

Fatma Zehra DOĞRU

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"YÜKSEK LİSANS (İSTATİSTİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 20/07/2011
Tezin Savunma Tarihi : 17/08/2011

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Zafer KÜÇÜK

Trabzon 2011

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalında

Fatma Zehra DOĞRU tarafından hazırlanan

RASTGELE YÜRÜYÜŞ SÜREÇLERİ VE BAZI UYGULAMALARI

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 02/08/2011 gün ve 1416 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 17/08/2011 tarihinde yapılan sınavda

YÜKSEK LİSANS TEZİ

olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. İhsan ÜNVER ……..………………………………

Üye : Doç. Dr. Türkan ERBAY DALKILIÇ ……..………………………………

Üye : Yrd. Doç. Dr. Zafer KÜÇÜK ………..……………………………

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında rastgele yürüyüş süreci ile ilgili temel kavramlar ve rastgele yürüyüş sürecinin bazı uygulamaları ele alınmıştır.

2008-2011 yılları arasında bölümümüzde sözleşmeli yabancı uyruklu öğretim üyesi olarak çalışmış olan Azerbaycan Bakü Devlet Üniversitesi Olasılık Teorisi ve Matematiksel İstatistik Bölümü öğretim üyesi Sayın hocam Doç. Dr. Rovshan ALİYEV'e tez konusunun belirlenmesinde ve çalışmanın bu hale getirilmesindeki her türlü yardımlarından dolayı teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Tez önerisi ve çalışmalar aşamasında bizi sabırla dinleyen, tavsiye ve eleştirileriyle tezin şekillenmesinde emeği geçen danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Zafer KÜÇÜK'e şükranlarımı sunarım.

Sonsuz desteğini esirgemeyen Yrd. Doç. Dr. Orhan KESEMEN'e yardımlarından dolayı teşekkür ederim. Ayrıca Arş. Gör. Menşure CAN, Arş. Gör. Fatma Gül AKGÜL ile tüm İstatistik Bölümü akademik personeline ve hayatım boyunca bana destek olan sevgili aileme sonsuz teşekkür ederim.

Her zaman bilim insanın yanında olan Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu'na (TÜBİTAK) verdiği maddi destekten dolayı teşekkür ederim.

Fatma Zehra DOĞRU

Trabzon 2011

TEZ BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Rastgele Yürüyüş Süreçleri ve Bazı Uygulamaları” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Yrd. Doç. Dr. Zafer KÜÇÜK’ ün sorumluluğunda tamamladığımı, verileri kendim topladığımı, analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 20/07/2011

Fatma Zehra DOĞRU

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

RASTGELE YÜRÜYÜŞ SÜREÇLERİ VE BAZI UYGULAMALARI

Fatma Zehra DOĞRU

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Zafer KÜÇÜK
2011, 87 Sayfa, Ek 6 Sayfa

Rastgele yürüyüş süreci, bağımsız ve aynı dağılımlı rastgele değişkenlerin toplamı ile ifade edilen bir stokastik süreçtir. Rastgele yürüyüş süreci birçok uygulama alanında kullanılmaktadır. Bilinen uygulama alanlarından biri de hisse senedi fiyat hareketlerinin değişiminin rastgele yürüyüş süreci ile modellenmesidir.

Bu çalışma üç ana bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde çalışmada kullanılacak olan temel kavramlar üzerinde durulmuştur. İkinci bölümde rastgele yürüyüş sürecinin genel tanımı ve bazı uygulamaları ele alınmıştır. Son bölüm ise yapılan çalışmalara ayrılmış olup binomial ve trinomial model uygulamaları yapılmıştır ve elde edilen sonuçlar irdelenmiştir.

Rastgele yürüyüş süreci opsiyon fiyatlama modeli olan binomial ve trinomial modelin temelini oluşturmaktadır. Binomial model ve trinomial model kesikli zamanlı bir süreçte hisse senedi fiyat hareketlerini belirli bir zaman aralığında inceler. Bu çalışmada modeller ile ilgili örnekler verilerek MATLAB Grafik Kullanıcı Arayüzü (GUI) yardımıyla analiz edilmiştir. Bu analizler sonucunda binomial ve trinomial modele ait sonraki dönemler için fiyat tahminleri, satın alma (Call) ve satma (Put) opsiyonu fiyat tahminleri hesaplanmıştır. Böylece binomial ve trinomial modelin rastgele yürüyüş sürecine uyduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Rastgele Yürüyüş Süreci, Binomial Model, Trinomial Model, Satın Alma Opsiyonu, Satma Opsiyonu, Hisse Senedi Fiyatı

Master Thesis

SUMMARY

RANDOM WALK PROCESSES AND SOME APPLICATIONS

Fatma Zehra DOĞRU

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Statistic and Computer Sciences Graduate Program

Supervisor: Ass. Prof. Dr. Zafer KÜÇÜK
2011, 87 Pages, 6 Pages Appendix

Random walk process is a stochastic process that is expressed with independent and identically distributed random variables. Random walk process is used in many application areas. One of the most known application areas is that change stock price movements are modeling with random walk process.

This study consists of three main sections. On the first part, general information is given about basic concepts that will be used in study. In the second part, general definition and some applications of random walk process are discussed. The last part is allocated for the studies that binomial and trinomial models applications are done and the results are research extensively.

Random walk process is the basis of binomial and trinomial option pricing model. In the discrete time process, binomial and trinomial models examine stock price movements in a specific time period. In this study, there are some examples about these models that are analyzed by using MATLAB Graphical User Interface (GUI). As a result of this analysis, option price forecasts, call and put option price forecasts of binomial and trinomial models are calculated for the next periods. Thus it is shown that binomial and trinomial models fit random walk process.

Key Words: Random Walk Process, Binomial Model, Trinomial Model, Call Option, Put Option, Stock Price

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa No

SEMBOLLER DİZİNİ

C_T	: T anında satın alma opsiyonu fiyatı
d_tS_t	: S_{t+1}'in $1-p_t$ olasılığı ile aldığı değer
$e^{r\Delta t}$	: Hisse senedi fiyatının değişim oranı
$f_{ij}^{(n)}$	: i durumundan j durumuna ilk defa n inci adımda giriş olasılığı
g_{2m}	: $2m$ anında orijine ilk dönüş olasılığı
$N_{a,b}(n,k)$	: (a,b)'den (n,k)'ya uzanan tüm yörünge sayısı
$N_{a,b}^{-}(n,k)$	: (a,b)'den (n,k)'ya uzanan pozitif olmayan yörünge sayısı
$N_{a,b}^{+}(n,k)$	: (a,b)'den (n,k)'ya uzanan pozitif yörünge sayısı
$p_{ij}^{(n)}$	: n adımda i durumundan j durumuna geçiş olasılığı
P_T	: T anında satma opsiyonu fiyatı
$Q_{a,b}^{-}$	: (a,b)'den (n,k)'ya pozitif olmayan yörünge kümesi
$Q_{a,-b}$	: $(a,-b)$'den (n,k)'ya tüm yörünge kümesi
q_k	: İflas etme olasılığı
r_{2m}	: $2m$ anında orijine dönüş olasılığı
S	: Hisse senedinin başlangıç fiyatı
S_n	: n tane rastgele değişkenin toplamı
S_{t+1}	: $t.$ zaman aralığı sonundaki hisse senedi fiyatı
Su	: Hisse senedinin başlangıç fiyatının p olasılığı ile aldığı değer
Sd	: Hisse senedinin başlangıç fiyatının $1-p$ olasılığı ile aldığı değer
$Se^{\mu\Delta t}$	: Birinci zaman aralığı sonunda hisse senedinin fiyatı
T_{ij}	: i durumundan j durumuna ilk varış zamanı
u_tS_t	: S_{t+1}'in p_t olasılığı ile aldığı değer
w_n	: İlk dönüşün n adımdan önce olmaması olasılığı
Δt	: Zaman (gün)
$\mu\Delta t$	: Beklenen getiri
$\sigma^2\Delta t$	: Getirilerin varyansı

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Rastgele yürüyüş ardışık rastgele adımlardan oluşan yörüngelerin matematiksel ifadesidir. Rastgele yürüyüş için, bir molekülün sıvı ya da gaz içerisinde izlediği yol, bir hayvanın yiyecek aramak için takip ettiği yol, bir hisse senedinin bir dönem içerisindeki fiyat hareketleri ve bir kumarbazın oyun esnasında parasının değişim miktarı gibi birçok örnek verilebilir. Rastgele yürüyüş süreci bilgisayar bilimlerinde, fizikte, ekolojide, ekonomide, psikolojide ve diğer alanlarda temel bir model olarak kullanılmaktadır. Rastgele yürüyüş zaman parametresi bakımından farklılık gösterir. Çoğu kez rastgele yürüyüş kesikli zamanlıdır ve $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ rastgele değişkenlerinde olduğu gibi indisler doğal sayıdır (URL-1, 2011).

Rastgele yürüyüş problemi ilk kez Karl Pearson tarafından ortaya atılmıştır. Karl Pearson sarhoş bir adamın yürüyüş problemini ele almıştır. Bu problemde bir adam hareketine orijinde başlamakta ve rastgele yönlerde L uzunluklu bir adım atmaktadır. Bu adımdan sonra rastgele bir açı ile L uzunluklu başka bir adım atar ve bu süreci n defa tekrarlar. Burada n adım sonunda orijinden uzaklığının olasılık dağılımının ne olduğu problemi ortaya çıkıyor. Pearson aslında bu problemi çözememiştir ama 1905 yılında 'The problem of the random walk' adlı yazısını Nature dergisinde yayınlatmıştır. Bir hafta sonra Lord Rayleigh aynı gazetede bu sorun için bir cevap yayınlamıştır. Çünkü, Rayleigh rastgele yürüyüş problemini farklı bir yolla 1880 yılında çözmüştür (URL-2, 2009).

Georege Polya 1921 yılında tamsayılı bir kafes üzerinde rastgele yürüyüş teoremini ispatlamıştır (URL-3, 2002). Polya, adım sayısı büyüdükçe rastgele yürüyüş yapan birinin bir olasılığı ile orijine dönüp dönmeyeceğini araştırmıştır. Bu araştırmanın sonucunda ise yalnızca yürüyüş bir ve iki boyutta gerçekleştirildiğinde orijine bir olasılığı ile dönüşün mümkün olduğunu ancak boyut sayısı üç ve daha fazla olduğunda ise orijine bir olasılığı ile dönüşün mümkün olmadığını ifade etmiştir.

Ekonomide rastgele yürüyüş menkul kıymetlerin fiyatlarının incelenmesinde kullanılmıştır. 1900 yılında Fransız matematikçi Louis Bachlier 'Theory de la Speculation' adlı tezinde menkul kıymet fiyatlarındaki günlük değişimlerin rastgele olduğunu ifade etmiştir. Rastgele Yürüyüş Teorisi, menkul kıymetlerin gelecek fiyatlarının geçmiş fiyatlar kullanılarak tahmin edilemeyeceğini, geçmiş verilerin menkul kıymetin o anki fiyatına yansımış olduğunu ifade etmektedir. Rastgele Yürüyüş Teorisi, bir parçacığın atacağı her yeni adımın önceki adımlarına bakılarak tahmin edilemeyeceği veya havaya atılan hilesiz bir madeni paranın tura gelmesinin bir sonraki atışta da tura geleceği anlamına gelmeyeceğini ifade etmektedir. Aynı şekilde, teori menkul kıymet fiyatlarının geçmiş fiyat hareketlerine dayanılarak tahmin edilemeyeceğini, parçacığın atacağı adımların aynı yönde olmasının veya madeni paranın ard arda tura gelmesinin veya menkul kıymetin fiyatının ard arda yükselmesinin ya da azalmasının sadece rastgele olabileceğini ifade etmektedir. Teori ilk olarak, 1964 yılında Paul H. Cootner tarafından yazılan 'The Random Character of Stock Market Prices' isimli kitapta tanıtılmıştır. 1965 yılında Paul Samuelson tarafından konu üzerine yeni bir çalışma yapılmış ve Bachelier'in 1900'de ortaya koyduğu düşünceler bu çalışmanın sonrasında Rastgele Yürüyüş Teorisi olarak Finans Bilimi'nde ve uygulamada tam olarak yerini almıştır. Bu gelişmenin ardından konu üzerine hız kazanan çalışmaların sonucunda 1970 yılında Fama, Rastgele Yürüyüş Teorisi'ni geliştirmiştir [21].

Rastgele yürüyüş süreci opsiyon fiyatlama modeli olan binomial ve trinomial modelin temelini oluşturmaktadır. İlk kez 1979 yılında John C.Cox, Stephen A.Ross ve Mark Rubinstein [9] tarafından bulunan binomial model rastgele yürüyüş sürecinin özel bir halidir. Çünkü, binomial model sonraki adımda başlangıç fiyatının belli olasılıklarla artacağını ve azalacağını varsaymaktadır. Aynı şekilde ilk kez 1986 yılında Phelim Boyle [6] tarafından ortaya atılan trinomial model de rastgele yürüyüş sürecidir. Trinomial model temelde binomial modele benzemektedir ve binomial modelin genişletilmiş halidir. Binomial modelden farkı ise bir dönem sonra iki fiyat yerine üç farklı fiyat hesaplamaktadır. Trinomial model dönem sonunda fiyatların artacağını, sabit kalacağını ve azalacağını varsaymaktadır.

1.2. Temel Kavramlar

Tanım 1.2.1 (Rastgele Değişken). $(\Omega, \mathfrak{J}, P)$ bir olasılık uzayı ve

$$\begin{aligned} \xi: \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longrightarrow \xi(\omega) \end{aligned}$$

olmak üzere, $\forall a \in \mathbb{R}$ için, $\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) \leq a\} \equiv \{\xi^{-1}(-\infty, a]\} \in \mathfrak{J}$ ise ξ fonksiyonuna Ω'da bir rastgele değişken denir.

Tanım 1.2.2 (Bernoulli Denemesi). Elemanları birbirinden bağımsız bir deneme dizisinde her denemenin:

i) İki olası sonucu varsa ve

ii) Bu sonuçların gerçekleşme olasılıkları denemeden denemeye değişmiyorsa

bu tür denemeye Bernoulli denemesi adı verilir.

Tanım 1.2.3 (Bernoulli Dağılımı). Bir Bernoulli denemesinin sonuçları A ve B ile ve bunların gerçekleşme olasılıkları da $P(A) = p, P(B) = 1 - p = q$ ile gösterilsin ve burada $A = B^c$'dir. A olayı gerçekleştiğinde ξ rastgele değişkeni 1 değerini, B olayı gerçekleştiğinde ise 0 değerini alsın,

$$P(\xi = x) = p^x q^{1-x},\ x = 0,1$$

ile verilen fonksiyon Bernoulli olasılık fonksiyonu olarak bilinir.

Tanım 1.2.4 (Binom Dağılımı). Bir Bernoulli denemesi n kez tekrarlandığında sonuçlardan biri A, diğerini B ve bunların bir denemede gerçekleşme olasılıkları sırasıyla p ve q ile gösterilsin. Burada $p, q > 0$ ve $p + q = 1$'dir. A sonucunun x kez gerçekleşme olasılığı

$$P(\xi = x) = b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x};\ \ x = 0,1,2, \dots, n$$

ile verilir. $b(x; n, p)$'ye binom olasılık fonksiyonu denir. ξ rastgele değişkenine de binom dağılıma sahip rastgele değişkendir denir.

Tanım 1.2.5 (Catalan Sayıları). Çeşitli sayma problemlerinde kullanılan Catalan sayıları Belçikalı matematikçi Eugene Charles Catalan $(1814 - 1894)$ tarafından bulunmuştur. n inci Catalan sayısı binom katsayılarının terimleri ile verilir:

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!}, \qquad n \geq 0\ için.$$

$n = 0,1,2,3,\ldots$ değerleri için Catalan sayıları,

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440,$$
$$9694845, 35357670, 129644790, 477638700, 1767263190, 6564120420,$$
$$24466267020, 91482563640, 343059613650, 1289904147324 \ldots$$

şeklindedir.

Özellikleri:

1. c_n sayısı için alternatif bir gösterim aşağıdaki gibidir:

$$c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}, \qquad n \geq 0 \; için.$$

Bu ifade yukarıda tanımda verilen ifadeye eşdeğerdir, çünkü $\binom{2n}{n+1} = \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n}$'dır.

2. Catalan sayıları aşağıdaki ilişkiyi sağlar,

$$c_0 = 1 \text{ ve } c_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} c_i c_{n-i}\,,\; n \geq 0,$$

ayrıca

$$c_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$$

dır.

3. Benzer şekilde

$$c_0 = 1 \; ve \; c_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} c_n$$

dır. Bu yöntem Catalan sayılarını hesaplamada daha etkilidir.

4. Asimptotik olarak, Catalan sayısı $c_n \approx \frac{4^n}{n^{3/2}\sqrt{\pi}}$ ifadesine yaklaşır. Yani burada

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{\frac{4^n}{n^{3/2}\sqrt{\pi}}} = 1$$

dır.

5. Catalan sayısı c_n sadece $n = 2^k - 1$ olduğunda tektir. Diğer Catalan sayıları ise çifttir.

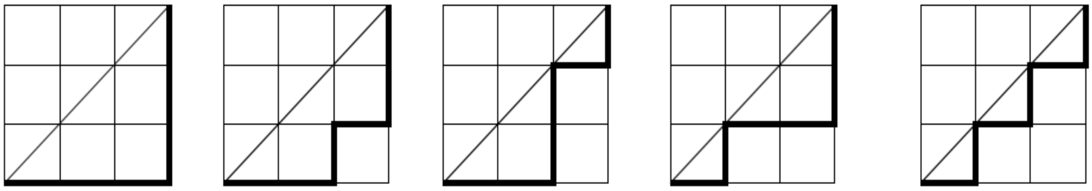
Kombinatorikte çözümleri Catalan sayıları ile verilen birçok sayma problemi vardır. Aşağıda bazı örnekler yer almaktadır.

1. n tane parantez çifti olsun ve onların geçerli grup formu oluşturulsun. Burada, "geçerli" kelimesinin anlamı, her açık parantez kapalı bir parantez ile eşleşmelidir. Örneğin, "$(())$" ifadesi geçerlidir, ama "$())()($" ifadesi geçerli değildir. Yani, bir parantez dizisinde açık ve kapalı parantezler eşit sayıda ise geçerlidir. $0 \leq n \leq 5$ için mümkün gruplar aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

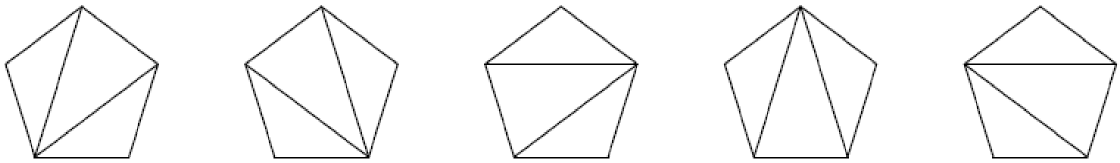
Tablo 1.1. n'in bazı değerleri için oluşturulabilecek mümkün parantez grupları

$n = 0$	*	1 yol
$n = 1$	$()$	1 yol
$n = 2$	$()(), (())$	2 yol
$n = 3$	$()()(), (())(), ()(()), (()()), ((()))$	5 yol
$n = 4$	$()()()(), ()()(()), ()(())(), ()(()()), ()((())),$ $(())()(), (())(()), (()())(), ((()))(),$ $(()()()), (()(())), ((())()), ((()())), (((())))$	14 yol

2. c_n köşegenden yukarı geçmeyen karelere bölünmüş bir nxn'lik kare hücrelerinin kenarları boyunca monoton yolların sayısıdır. Bir monoton yol sol köşenin en altında başlar, sağ köşenin en üstünde biter ve tamamen sağa veya yukarı doğru oklarla gösterilen yönlerde oluşur. Aşağıda $n = 3$ için oluşabilecek mümkün yollar gösterilmiştir.



3. c_n sayısı $n+2$ kenarlı bir konveks çokgenin köşelerini düzgün çizgilerle birleştirerek üçgenlere ayırmanın farklı yollarının sayısıdır. Aşağıdaki şekilde $n=4$ durumu için altıgenler gösterilmiştir (URL-4, 2010).



4. Tümü orijinal çizginin üstünde kalan n tane yukarı çizgi ve n tane aşağı çizgi ile kaç tane "dağ aralığı" oluşturulabilir? Eğer hiç çizgi kullanılmazsa bir tane dağ aralığı elde edilir. Aşağıda $0 \leq n \leq 3$ için oluşturulabilecek dağ aralıklarının listesi verilmiştir.

Tablo 1.2. n'in bazı değerleri için oluşturulabilecek mümkün dağ aralıkları

$n=0$	*	1 yol
$n=1$	/\	1 yol
$n=2$	/\ /\/\, / \	2 yol
$n=3$	/\ /\ /\ /\/\ / \ /\/\/\,/\/ \, / \/\, / \, / \	5 yol

Tanım 1.2.6. Aşağıdaki ifadenin doğru olduğu bilinmektedir:

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2m}{m} x^m.$$

İspat. Maclauren serisine göre açılım aşağıdaki gibidir:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \cdots.$$

Aşağıda $f(x)$ fonksiyonu Maclauren serisine göre açıldığında;

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-4x}}, & f(0) &= 1, \\
f'(x) &= \frac{2}{(1-4x)^{3/2}}, & f'(0) &= 2, \\
f''(x) &= \frac{12}{(1-4x)^{5/2}}, & f''(0) &= 12, \\
f'''(x) &= \frac{120}{(1-4x)^{7/2}}, & f'''(0) &= 120.
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $f(x)$ fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 1 + 2x + 12\frac{x^2}{2!} + 120\frac{x^3}{3!} + \cdots \\
&= 1 + 2x + 6x^2 + 20x^3 + \cdots \\
&= \binom{0}{0}x^0 + \binom{2}{1}x + \binom{4}{2}x^2 + \binom{6}{3}x^3 + \cdots \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\binom{2m}{m}x^m.
\end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

1.3. Opsiyonlarla İlgili Genel Terimler

Tanım 1.3.1 (Opsiyon). Opsiyon latince bir terim olup seçim anlamına gelmektedir. Ekonomi dünyasında opsiyon sözleşmeleri herhangi bir varlığı belirli bir vadede ya da vadeye kadar belirli bir miktarda, belirli bir fiyattan alma ya da satma hakkı veren sözleşmelerdir (URL-5, 2010).

Tanım 1.3.2 (Satın Alma Opsiyonu (Call Option)). Satın alma opsiyonu iki taraf arasında yapılan anlaşmadır. Hisse senedi satın alma opsiyonu, taraflardan birine önceden karar verilmiş bir tarih için belirlenen bir fiyat üzerinden diğer tarafın belli sayıdaki hisse senedini satın alma hakkı vermektedir (Alpan, 1999).

Tanım 1.3.3 (Satma Opsiyonu (Put Option)). Satma opsiyonu iki taraf arasında yapılan bir anlaşmadır. Taraflardan biri diğerine belirlenen miktarda hisse senedini yine belirlenen bir fiyattan belirlenen tarihte satma hakkı vermektedir. Hisse senedini satma hakkını alan taraf için hiçbir zorlama yoktur. Opsiyonun vadesi geldiğinde isterse satma hakkını kullanarak hisse senetlerini karşı tarafa satar eğer istemezse satma hakkını kullanmaz (Alpan, 1999).

Tanım 1.3.4 (Hisse Senedi Opsiyonu). Hisse senedi opsiyonları, sahibine sözleşmenin vadesinde veya vadeye kadar olan süre içerisinde opsiyona konu teşkil eden hisse senetlerini sözleşmede belirtilen fiyat üzerinden ve belirtilen miktarda satın alma veya satma hakkı veren opsiyon türüdür. Kısaca, hisse senedi opsiyonunda opsiyon sözleşmesinde konu olan varlık hisse senedidir (Kırca, 2000).

Tanım 1.3.5 (Avrupa Tipi Opsiyon). Opsiyon sahibine belirli miktar hisse senedini belirlenen fiyat üzerinden sadece vadesinde kullanım hakkı vermektedir.

1.4. Opsiyon Fiyatını Belirleyen Faktörler

Her opsiyon bir başka varlığa bağlı olan bir finansal varlıktır. Hisse senedi opsiyonunun fiyatını etkileyen altı temel faktör vardır. Bu faktörler aşağıdaki gibi ifade edilebilirler:

i) Opsiyonun üzerine yazıldığı varlığın piyasa fiyatı

ii) Opsiyonun kullanım fiyatı

iii) Opsiyonun üzerine yazıldığı varlığın fiyat değişkenliği (volatilite)

iv) Opsiyonun vadesine kalan süre

v) Risksiz faiz oranı

vi) Opsiyonun vadesine kadar olan sürede beklenen ödemeler (hisse senetleri için net nakit kâr payı ödemeleri).

Opsiyon fiyatlama yöntemleri değerlendirilirken dikkat edilmesi gereken en önemli nokta yukarıdaki kriterler kullanılarak elde edilen opsiyon fiyatlarının teorik fiyatlar olduğu gerçeğidir (Kırca, 2000).

Tanım 1.4.1 (Hisse Senedi Piyasa Fiyatı). Opsiyon fiyatını etkileyen diğer faktörler sabit kalmak koşulu ile hisse senedinin fiyatı yükseldikçe ve kullanım fiyatını aştıkça hisse senedi fiyatı ile kullanım fiyatı arasındaki değişim büyük olmaktadır. Hisse senedinin piyasa fiyatının yükselmesi satın alma opsiyonunun talebini ve dolayısıyla fiyatını artırmaktadır. Ancak hisse senedinin piyasa fiyatının yükselmesi satma opsiyonuna olan talebi azaltır ve opsiyonun fiyatını düşürür (Alpan, 1999).

Tanım 1.4.2 (Kullanım Fiyatı). İki hisse senedi opsiyonu aynı vade tarihine ve aynı hisse senedi piyasa fiyatına sahiptir. Bu iki opsiyonun kullanım fiyatı farklıdır. Eğer hisse senedinin fiyatı artarsa küçük kullanım fiyatlı satın alma opsiyonundan elde edilecek kazanç yüksek kullanım fiyatlı olan satın alma opsiyonunun kazancından büyüktür. Bu karşılaştırmadan opsiyonun kullanım fiyatı arttıkça satın alma opsiyonundan elde edilecek kazancın azalacağı ortaya çıkmaktadır.

Eğer hisse senedinin fiyatı artarsa küçük kullanım fiyatlı satma opsiyonundan elde edilecek kazanç yüksek kullanım fiyatlı olan satma opsiyonunun kazancından küçüktür. Bu karşılaştırmadan opsiyonun kullanım fiyatı arttıkça satma opsiyonundan elde edilecek kazancın artacağı ortaya çıkmaktadır (Alpan, 1999).

Tanım 1.4.3 (Volatilite). Volatilite ile kastedilen zaman içinde opsiyona konu olan varlığın peşin piyasadaki fiyatında meydana gelen dalgalanmanın büyüklük ve sıklık derecesidir. Volatilite ne kadar yüksek olursa opsiyon fiyatı da o kadar yüksek olacaktır. Fiyatı büyük ölçüde dalgalanan bir menkul kıymet, onun üzerine opsiyon satın alan kişiye opsiyonun vadeye kadar kalan zaman aralığı içinde fiyata ilişkin tahminlerinin gerçekleşmesi konusunda büyük bir şans vermiş olacaktır. Bu nedenle söz konusu opsiyonu satın alan kişi bu opsiyon için daha yüksek bir fiyat ödemeye razı olur (Yılmaz, 1995).

Tanım 1.4.4 (Vadeye Kalan Süre). Hisse senedi getirilerini standart sapması vadeye kalan zamanın karesi ile doğru orantılı olarak artış gösterir. Opsiyonun fiyatını etkileyen diğer faktörler sabit kalmak koşulu ile vadeye kalan zaman arttıkça hisse senedinin volatilitesi (standart sapması) artmaktadır. Varyansın artması opsiyonun fiyatını artırmaktadır. Opsiyonun ömrü uzadıkça fiyatı da artmaktadır.

Opsiyon sözleşmesinin vadesi opsiyonun fiyatının belirlenmesinde önemli faktördür. Opsiyon sözleşmeleri kısa süreli menkul değerlerdir. Opsiyon vadesinde kullanılmadığı zaman değersiz hale gelmektedir (Alpan, 1999).

Tanım 1.4.5 (Risksiz Faiz Oranı). Risksiz faiz oranı opsiyon fiyatı için belirleyici bir faktördür. Ekonomide risksiz faiz haddi yükseldikçe opsiyon fiyatının yükseleceği, faiz oranlarının düşmesiyle ise opsiyon fiyatlarının düşeceği varsayılmaktadır (Alpan, 1999).

Tanım 1.4.6 (Temettü (Kâr Payı)). Hisse senedinde temettü ödemesi olduğu durumlarda opsiyon alıcısı bundan yararlanamayacaktır. Bu nedenle yüksek bir temettü ödemesi yapılması satın alma opsiyonu fiyatının düşmesine neden olacaktır. Opsiyonun bir satma opsiyonu olması durumunda ise temettü etkisi tam ters yönde olacaktır (Akalın, 2006).

2. RASTGELE YÜRÜYÜŞ SÜRECİ İLE İLGİLİ BAZI UYGULAMALAR

2.1. Bir Parçacığın Rastgele Yürüyüşü

Rastgele yürüyüş birçok bilim dalını ilgilendiren bir konu olmuştur, ama özellikle olasılık teorisinin ilgi alanına girer. Bir parçacığın orijinden ayrıldığı ve rastgele olarak p olasılığı ile sağa ve q olasılığı ile sola hareket ettiği farz edilsin. Parçacık her defasında birim adımlarla hareket etsin. Örnek olarak, eğer sola doğru 5 adım hareket ederse, onun konumu -5'de olacaktır. Böyle harekete bir boyutlu kesikli zamanlı rastgele yürüyüş süreci denir. Burada asıl amaç n adım sonra parçacığın orijinden x mesafede olma olasılığını bulmaktır (Monte, 1999).

Şimdi, parçacığın n adım sonra x konumunda olma olasılığı hesaplansın. Parçacığın hareketinin bir Bernoulli süreci ile modellendiği varsayılsın. Parçacığın i inci adımı ξ_i rastgele değişkeni ile gösterilsin. -1 parçacığın sola doğru bir adımını göstermektedir, 1 değeri ise sağa doğru bir adımını göstermektedir. Böylece $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$ rastgele değişkeni n adım sonra parçacığın konumunu vermektedir. S_n rastgele değişkeninin dağılımını bulmak için x ile S_n rastgele değişkeninin aldığı değerler gösterilsin. Sağa doğru adım sayısı r ile sola doğru adım sayısı ise l ile ifade edilsin. O halde, $x = r - l$ ve $n = r + l$'dır. Bunu aşağıdaki ifade takip eder:

$$r = \frac{1}{2}(x + n) \text{ ve } l = \frac{1}{2}(n - x).$$

Verilmiş l adım ile n toplam adım arasında oluşan $\binom{n}{l}$ yol vardır. Bu aynı zamanda x noktasına varma yollarının sayısıdır ve her yolun olasılığı $p^r q^l$'dır. Burada $n - x = 2l$'dir. Bu yüzden, x noktasında olasılık dağılımı aşağıdaki formül ile verilir:

$$P(S_n = x) = \begin{cases} \binom{n}{l} p^r q^l, & eğer\ x = n + 2k, k \in \mathbb{Z}\ ise \\ 0, & diğer\ yerlerde \end{cases}.$$

$p = q = \frac{1}{2}$ olduğu zaman bu yürüyüşe simetrik rastgele yürüyüş denir. n adım sonra x konumunda olma olasılığı $P(S_n = x)$ Tablo.2.1'de gösterilmiştir. Bu tablo açıkça 0'ların serpiştirildiği bir Pascal üçgenidir.

Tablo 2.1. Simetrik rastgele yürüyüş

$n\backslash x$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0						1					
1					$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$				
2				$\frac{1}{4}$	0	$\frac{2}{4}$	0	$\frac{1}{4}$			
3			$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{1}{8}$		
4		$\frac{1}{16}$	0	$\frac{4}{16}$	0	$\frac{6}{16}$	0	$\frac{4}{16}$	0	$\frac{1}{16}$	
5	$\frac{1}{32}$	0	$\frac{5}{32}$	0	$\frac{10}{32}$	0	$\frac{10}{32}$	0	$\frac{5}{32}$	0	$\frac{1}{32}$

Tablodan görmek mümkündür ki parçacık eğer hiç adım atmamışsa 0 konumunda olma olasılığı $P(S_n = 0) = 1$'dır. Eğer parçacık bir adım atmışsa, ya sola doğru ya da sağa doğru bir adım atar. Bu durumda ya -1 konumunda ya da 1 konumunda olur. Yani iki durum vardır. O halde $P(S_n = -1) = \frac{1}{2}$ ve $P(S_n = 1) = \frac{1}{2}$'dır. Böylece parçacığın diğer konumlarda olma olasılıkları da aynı şekilde bulunur. Bu özel durumun olasılık dağılımı aşağıda verilmiştir:

$$P(S_n = x) = \binom{n}{l}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \binom{n}{l}/2^n.$$

Simetrik rastgele yürüyüşte her yol eşit olasılıklı olduğundan, olasılık kombinasyonal olarak yorumlanabilir. Olasılık x'e varmanın farklı yollarının sayısının örnek uzayın boyutuna bölünmesidir. Örnek uzay n uzunluklu tüm olası yolların kümesidir. Parçacığın her noktada iki seçimi olduğu ve parçacık toplam n adımda yol aldığı için toplam olası durumların sayısı 2^n'dir.

Şu andan itibaren rastgele yürüyüşün simetrik, yani $p = \frac{1}{2}$ olduğu varsayılmaktadır. Parçacığın ilk dönüşünün $2n$. adımda olması olasılığı nedir? Bu durumda Catalan sayıları (URL-4, 2010) devreye girer. Şimdi, sadece parçacığın ilk adımının sola doğru olduğu durum düşünülsün, çünkü zaten sağa doğru olan durum sola doğru olan durumun simetriğidir.

Parçacığın ilk dönüş problemi ele alınsın. Parçacık ilk adımını sola doğru atsın. Sonraki $2n-2$ adım da, parçacık $2n-1$ adım da -1'in sağına geçmez böylece -1 konumunda olur. Daha sonra, son adım parçacığı orijine geri götürür. Bu ifade, ilk dönüşün $2n$. adımda olması koşulu ile parçacığın alabileceği farklı yolların toplam sayısını hesaplar. Özetle, aşağıdaki adımlar dizisi gerçekleşir:

Adım 1: Parçacık sola doğru bir adım atsın.

Sonraki $2n-2$ adım: Parçacık $2n-2$ adımda ya -1 noktasında ya da bu noktanın solunda olabilir ve $(2n-1)$. adımın sonunda -1 noktasında olması gerekir.

$2n$ adım: Parçacığın ilk dönüşü ilk adımını sağa ve orijin noktasına attığında meydana gelir.

Dolayısıyla, parçacığın alabileceği yolların sayısı açıkça c_{n-1} Catalan sayısıdır (URL-4, 2010), çünkü kısıtlama sadece $2n-2$ adımın ortası için geçerlidir. n inci Catalan sayısının $c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ ifadesine eşit olduğu bilinmektedir. Bu yüzden $(n-1)$ inci Catalan sayısı açıkça

$$c_{n-1} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

dır. Parçacığın sağa doğru ilk adım atmasına izin verilmesi, parçacığın yolunu ikiye katlayacaktır. Bu yüzden toplam yol $2\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$'dır. İlk dönüş olasılığını hesaplamak için, sadece bu miktarı toplam örnek uzayın büyüklüğüne bölmek yeterlidir. Dönüş $2n$ adımda tamamlandığından, örnek uzayın eleman sayısı 2^{2n}'dir. Bu yüzden, parçacığın $2n$ adım sonra ilk kez orijin noktasına ulaşması olasılığı

$$2\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}: 2^{2n}$$

dır. Buna örnek olarak $2n = 6$ adımdaki ilk dönüş olasılığı elde edilsin. Bu olasılık aşağıdaki gibidir:

$$2\frac{1}{3}\binom{4}{2}: 2^6 = \frac{1}{16}.$$

Parçacığın $2n$ adımda orijin noktasında olduğu verilmiştir, bu durumda ilk dönüşün $2n$. adımda olması olasılığı nedir? Bu problem önceki problem gibidir. Tek fark örnek uzayın küçülmüş olmasıdır. Bütün mümkün yolları düşünmek yerine, şimdi verilen toplam yolların sayısı düşünülsün, sonunda parçacık daha önce geçtiği ya da geçmediği orijin noktasında olacaktır. Parçacığın $2n$ adım sonra orijinde olması olasılığını bulmak için,

$$P(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} p^{\frac{1}{2}(2n)} q^{\frac{1}{2}(2n)}$$

eşitliği kullanılacaktır. $p = q = \frac{1}{2}$ olduğunda, bu ifade $\binom{2n}{n}/2^{2n}$ olur. Bu ifade de pay, eğer parçacık $2n$. adımda orijinde ise aldığı yolların sayısını gösterir. Bu koşullu olasılık için ihtiyaç duyulan örnek uzaydır.

Eğer parçacığın ilk dönüşü $2n$. adımında gerçekleşmiş ise, o zaman parçacığın aldığı yolların sayısı $2\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$'dır. Başka bir deyişle, parçacığı $2n$ adımda orijine geri götüren, parçacığın aldığı yolların sayısı $\binom{2n}{n}$ ifadesine eşittir. Son olarak bu iki sayıyı birbirine bölerek,

$$2\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}:\binom{2n}{n} = \frac{2}{n}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n-1)!}:\frac{(2n)!}{n!\,n!}$$

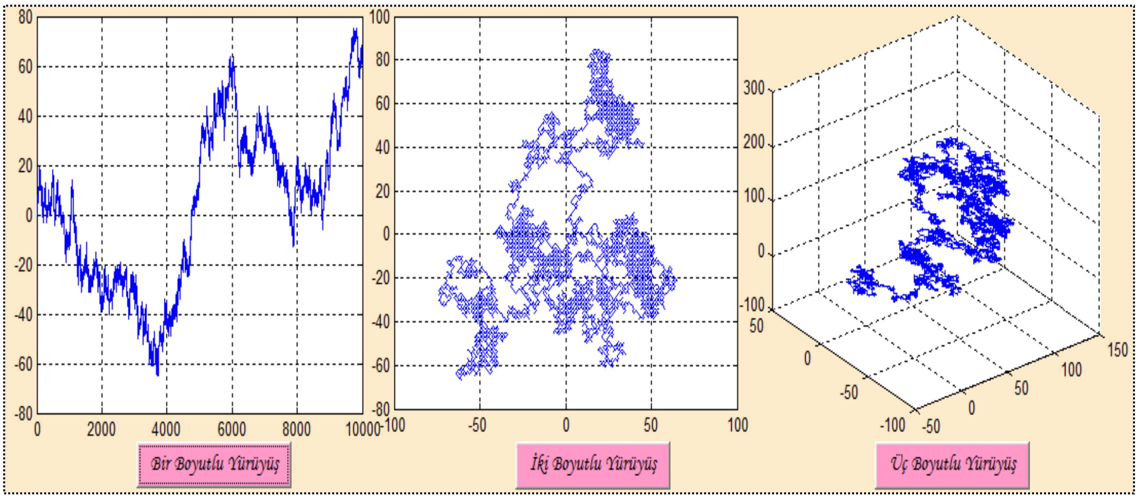
ve sadeleştirerek aşağıdaki sonuç bulunur:

$$\frac{2}{n}:\frac{2n(2n-1)}{n^2} = \frac{2n}{2n(2n-1)} = \frac{1}{2n-1}.$$

2.2. $R^{(m)}$'de Rastgele Yürüyüş

Tanım 2.2.1. $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ bağımsız aynı dağılıma sahip kesikli rastgele değişkenler dizisi olsun. Her pozitif n tamsayısı için rastgele değişkenlerin toplamı S_n ile gösterilsin, yani $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ olsun. $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisine rastgele yürüyüş süreci denir.

Eğer ξ_k'nın değerleri R^m'den ise $\{S_n\}$ dizisine R^m'de bir rastgele yürüyüş süreci denir. Rastgele yürüyüş yapan bir parçacığın $n = 0$ anında R^m'de orijine yerleştirildiği düşünülsün. S_n dizisinin toplamı n saniye sonunda parçacığın konumunu gösterir. Böylece, parçacık $[n-1, n]$ zaman aralığında S_{n-1} konumundan S_n'ye hareket eder (ya da sıçrar). Bu hareketi gösteren vektör ξ_n'ye eşit olan $S_n - S_{n-1}$'dır. Bunun anlamı, bir rastgele yürüyüşte sıçramalar bağımsız ve aynı dağılımlıdır. Örnek olarak, eğer $m = 1$ ise parçacık hareketine orijinde başlar ve her saniye sonunda bir birim sağa ya da sola hareket eder. Eğer $m = 2$ ise parçacık hareketine orijinde başlar ve her saniye sonunda dört mümkün yönden (sağ, sol, yukarı ve aşağı) birine gider. Eğer $m = 3$ ise bir parçacık hareketine orijinde başlayıp herhangi altı yönden (sol, sağ, ileri, geri, yukarı ve aşağı) birine hareket eder. Şekil 2.1'de MATLAB Grafik Kullanıcı Arayüzü (GUI) kullanılarak üç boyut için rastgele yürüyüş süreci elde edilmiştir. Bu yürüyüşlerde sıçramaların olasılıkları ξ_k'nın dağılımı tarafından verilir.



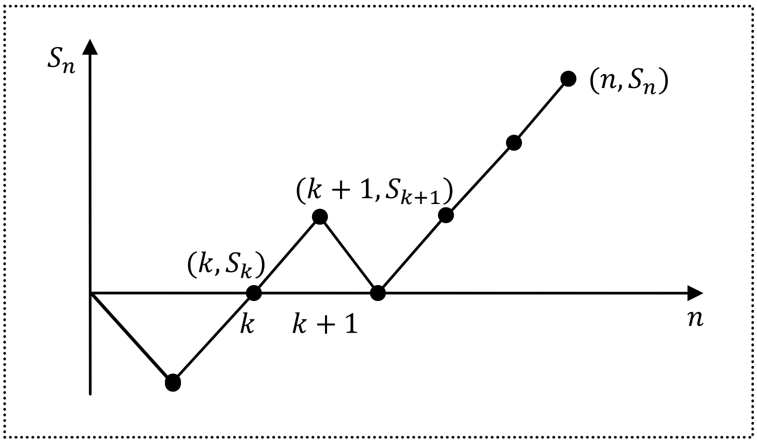
Şekil 2.1. Üç farklı boyutta (bir-iki-üç) gerçekleşen rastgele yürüyüş süreci

2.2.1. Reel Doğru Üzerinde Rastgele Yürüyüş

İlk önce rastgele yürüyüşün R'de gerçekleşen en basit hali, yani ξ_n rastgele değişkenlerinin ortak olasılık fonksiyonunun

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 1/2, eğer\ x = \pm 1\ ise \\ 0, diğer\ durumlarda \end{cases}$$

olduğu düşünülsün. Bu durumda n uzunluklu bütün yolların sayısı aynı olasılığa sahiptir, yani 2^{-n}'dır. Bazen rastgele yürüyüş bir poligonal doğru ya da yol olarak gösterilebilir, düzlemde yatay eksen zamanı ve dikey eksende S_n değerini gösterir. $\{S_n\}$ kısmi toplamların dizisi göz önüne alındığında öncelikle (n, S_n) noktalarının grafiği çizilir ve sonra her $k < n$ için (k, S_k) ve $(k+1, S_{k+1})$ noktaları düzgün bir doğru parçası ile birleştirilir. Yolun uzunluğu, yol üzerindeki başlangıç ve bitiş noktalarının zaman değerleri arasındaki farkına eşittir. Bu durum Şekil 2.2'de gösterilmiştir:



Şekil 2.2. $(0,0)$ ile (n, S_n) arasında gerçekleşen rastgele yürüyüş süreci

2.2.2. Dönüşler ve İlk Dönüşler

Teorem 2.2.1. Orijinde harekete başlayan bir parçacığın her an için sağa ve sola adım atma olasılıkları birbirine eşit olup $1/2$'dir. Bu durumda $2m$ anında parçacığın orijine dönüş olasılığı

$$r_{2m} = \binom{2m}{m}\left(\frac{1}{2}\right)^m \left(\frac{1}{2}\right)^m = \binom{2m}{m} 2^{-2m}$$

dır. Tek numaralı adımlarda orijine dönüş olasılığı 0'dır.

İspat. Eğer $S_n = 0$ ise bir denkleştirme oluştuğu ya da n anında orijine bir dönüş olduğu söylenebilir. Bu sadece n bir çift tamsayı olduğunda gerçekleşir. $2m$ anında orijine dönüş olasılığını hesaplamak için sadece orijinde başlayıp ve orijinde biten $2m$ uzunluklu yolların sayısına gerek duyulur. Açıktır ki, böyle durumların sayısı $\binom{2m}{m}$ ve her durumun olasılığı 2^{-2m}'dır. ❑

Eğer $m > 0$ ve bütün $k < m$ için $S_{2k} \neq 0$ ise rastgele yürüyüşün ilk dönüşünün $2m$ anında olduğu söylenir. Örneğin, Şekil 2.2'de ilk dönüş k anında meydana gelir. Bu olayın olasılığı g_{2m} ile gösterilir (aynı zamanda $g_0 = 0$ olsun). Uç noktalar dışında yatay eksene dokunmayan $(0,0)$ ve $(2m, 0)$ noktaları arasında $2m$ uzunluğundaki yolların sayısı $g_{2m}2^{2m}$'dır.

Teorem 2.2.1'in koşulları altında aşağıdaki teoremi ispatlamak kolaydır.

Teorem 2.2.2. $n \geq 1$ için $\{r_{2k}\}$ ve $\{g_{2k}\}$ olasılıkları arasında

$$r_{2n} = g_0 r_{2n} + g_2 r_{2n-2} + \cdots + g_{2n} r_0$$

ilişkisi vardır.

İspat. $(0,0)$ ve $(2n, 0)$ uç noktalarına sahip olan $2n$ uzunluğunda $r_{2n}2^{2n}$ sayıda yol vardır. Orijine ilk dönüş anına bağlı olarak, böyle bir grup yol n kümeye bölünmüştür. Orijine ilk dönüşü $2k$ anında olan bir yol topluluğu hiçbir iç noktası yatay eksen üzerinde olmayan $(0,0)$'dan $(2k, 0)$'a bir başlangıç parçası içerir. Ayrıca başka bir kısıtlama olmadan bu parça üzerinde $(2k, 0)$'dan $(2n, 0)$'a son bir parça içerir. Böylece, orijine ilk dönüşü $2k$ anında olan yolların sayısı aşağıdaki gibidir:

$$g_{2k}2^{2k} r_{2n-2k} 2^{2n-2k} = g_{2k} r_{2n-2k} 2^{2n}.$$

Eğer bu eşitliğin her iki tarafı k'ya göre toplanırsa,

$$r_{2n}2^{2n} = g_0 r_{2n} 2^{2n} + g_2 r_{2n-2} 2^{2n} + \cdots + g_{2n} r_0 2^{2n}$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı 2^{2n}'e bölündüğünde ispat tamamlanır. ❑

İki dizinin konvolüsyonu benzer bir şekilde tanımlanmıştır. Teorem 2.2.2, $\{r_{2n}\}$ dizisinin, $\{r_{2n}\}$ dizisi ile $\{g_{2n}\}$ dizisinin konvolüsyonuna eşit olduğunu ifade etmektedir. Böylece eğer her bir dizi bir üreten fonksiyon yardımıyla gösterilirse, g_{2n} değerini bulmak için Teorem 2.2.2 kullanılabilir.

Teorem 2.2.3. Teorem 2.2.1'in koşulları altında, $m \geq 1$ için $2m$ anında orijine ilk dönüş olasılığı için aşağıdaki formül doğrudur:

$$g_{2m} = \frac{r_{2m}}{2m-1} = \frac{\binom{2m}{m}}{(2m-1)2^{2m}} \; . \tag{2. 1}$$

İspat. Aşağıdaki üretici fonksiyonlar tanımlansın:

$$R(x) = \sum_{m=0}^{\infty} r_{2m} x^m , \qquad G(x) = \sum_{m=0}^{\infty} g_{2m} x^m .$$

Teorem 2.2.2'den,

$$r_{2m} = \sum_{k=0}^{m} g_{2k}\, r_{2m-2k}$$

olduğu bilinmektedir. Bu ifade m üzerinden toplanarak $R(x)$ değeri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}R(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} r_{2m}\, x^m = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m} g_{2k}\, r_{2m-2k} x^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (g_0 r_{2m} + g_2 r_{2m-2} + \cdots + g_{2m} r_0)\, x^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} g_0 r_{2m} x^m + \sum_{m=1}^{\infty} g_2 r_{2m-2} x^m + \cdots \\ &= (g_0 r_0 + g_0 r_2 x + \cdots + g_0 r_{2m} x^m + \cdots) \\ &\quad +(g_2 r_0 x + g_2 r_2 x^2 + \cdots + g_2 r_{2m-2} x^m) + \cdots.\end{aligned}$$

$R(x)G(x)$ ifadesinin değeri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}R(x)G(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} r_{2m} x^m \sum_{m=0}^{\infty} g_{2m} x^m = \sum_{m=0}^{\infty} r_{2m} x^m\, (g_0 + g_2 x + \cdots + g_{2m} x^m + \cdots) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} g_0 r_{2m} x^m + \sum_{m=0}^{\infty} g_2 r_{2m} x^{m+1} + \cdots \\ &= (g_0 r_0 + g_0 r_2 x + \cdots + g_0 r_{2m} x^m + \cdots) \\ &\quad +(g_2 r_0 x + g_2 r_2 x^2 + \cdots + g_2 r_{2m-2} x^m) + \cdots.\end{aligned}$$

Buradan iki ifadenin de birbirine eşit olduğu görülür. Yani,

$$\sum_{m=0}^{\infty} r_{2m}\, x^m = \sum_{m=0}^{\infty} r_{2m} x^m \sum_{m=0}^{\infty} g_{2m} x^m$$

dır. Ancak teorem $m \geq 1$ için geçerli olduğundan aşağıdaki gibi yazılmalıdır:

$$\sum_{m=0}^{\infty} r_{2m}\, x^m - 1 = \sum_{m=1}^{\infty} r_{2m} x^m \sum_{m=1}^{\infty} g_{2m}\, x^m.$$

Böylece,

$$R(x) = 1 + R(x)G(x) \tag{2.2}$$

eşitliği elde edilmiş olur (sağ taraftaki 1'in varlığı $r_0 = 1$ olmasından dolayıdır ve Teorem 2.2.2 sadece $m \geq 1$ için geçerlidir). Her iki üreten fonksiyon $(-1,1)$ aralığında yakınsaktır çünkü bütün katsayılar mutlak değer olarak en fazla birdir. Böylece (2.2) eşitliğinden yararlanarak

$$G(x) = \frac{R(x) - 1}{R(x)} \tag{2.3}$$

elde edilir. Eğer $R(x)$ fonksiyonu için bir ifade bulunursa, $G(x)$ için de bir ifade bulunabilir. Teorem 2.2.1'den,

$$R(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2m}{m} 2^{-2m} x^m$$

dır. Aşağıdaki ifadenin doğru olduğu Tanım 1.2.6'dan bilinmektedir:

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2m}{m} x^m.$$

Eğer son eşitlikte x yerine $x/4$ yazılırsa,

$$R(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

eşitliği elde edilir. Bundan dolayı (2.3)'den yararlanılarak aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$G(x) = \frac{R(x) - 1}{R(x)} = \frac{(1-x)^{-1/2} - 1}{(1-x)^{-1/2}} = 1 - (1-x)^{1/2}. \tag{2.4}$$

Binom açılımı kullanılarak g_{2m} değerini hesaplamak mümkün olmasına rağmen (2.4) ifadesinin türevi alınarak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$G'(x) = \frac{(1-x)^{-1/2}}{2} = \frac{R(x)}{2}.$$

Bu yüzden g_{2m} katsayıları $R(x)$ serisinin integrali alınarak bulunabilir:

$$\int \frac{R(x)}{2} dx = \int \frac{1}{2} \sum_{m\geq 1} r_{2m-2}\, x^{m-1} dx.$$

Burada $R(x)$ serisi yakınsak olduğu için toplam ifade ile integral ifade yer değiştirebilir. Böylece yukarıdaki ifade aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\int \frac{R(x)}{2} dx = \frac{1}{2} \sum_{m\geq 1} r_{2m-2} \int x^{m-1} dx = \frac{1}{2} \sum_{m\geq 1} r_{2m-2} \frac{x^m}{m}.$$

Buradan,

$$G(x) = \sum_{m\geq 1} g_{2m} x^m = \frac{1}{2} \sum_{m\geq 1} r_{2m-2} \frac{x^m}{m}$$

dır. $m \geq 1$ için,

$$g_{2m} = \frac{r_{2m-2}}{2m} = \frac{\binom{2m-2}{m-1}}{m2^{2m-1}} = \frac{\binom{2m}{m}}{(2m-1)2^{2m}} = \frac{r_{2m}}{2m-1}$$

elde edilir, çünkü $\binom{2m-2}{m-1} = \frac{m}{2(2m-1)} \binom{2m}{m}$'dır. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur. ❑

Dolayısıyla r_{2m} olasılığı g_{2m} olasılığının $(2m-1)$ katına eşittir. Yani ilk kez $2m$ anında orijine dönüş olasılığı daha küçüktür.

2.2.3. Mümkün Dönüş Olasılığı

R^m'de simetrik rastgele yürüyüş sürecinde parçacığın orijine mümkün dönüş olasılığı nedir? Öncelikle bu soru $m = 1$ için ve daha sonra genel durumda incelenecektir.

Örnek 2.2.1 (*R*'de Mümkün Dönüş). Örnek uzay sonlu uzunluktaki bütün yürüyüşlerin kümesi ve bu küme sayılamaz olduğundan mümkün dönüş olasılığı düşüncesi dikkatle ele alınmalıdır. Kolaylık için, w_n parçacığın ilk dönüşünün n adımdan sonra olmaması olasılığı olsun. Böylece, w_n sayısı sonlu bir küme olan n uzunluklu bütün yürüyüşlerin örnek uzayına bağlıdır. w_n sayısına dayanarak parçacığın orijine mümkün dönüş olasılığı $w_* = \lim_{n\to\infty} w_n$ olur. Bu limit vardır ve en büyük değeri birdir çünkü $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi sonlu bir dizidir. g_n olasılıklarına dayanarak,

$$w_{2n} = \sum_{i=1}^{n} g_{2i}$$

olduğu görülebilir. Dolayısıyla,

$$w_* = \lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g_{2i} = \sum_{i=1}^{\infty} g_{2i}$$

dır.

$$G(x) = \sum_{m=0}^{\infty} g_{2m} x^m$$

biçiminde tanımlanan üreten fonksiyonu $x \in (-1,1)$ için yakınsaktır. Aslında,

$$g_{2m} = \frac{r_{2m}}{2m-1}$$

eşitliğinin yardımıyla bu serinin ± 1 içinde yakınsak olduğunu göstermek mümkündür. Aynı zamanda $G(x) = 1 - (1-x)^{1/2}$ olduğu bilindiğinden, $w_* = G(1) = 1$ elde edilir.

Böylece parçacık 1 olasılığı ile orijine döner. Bu ifade aynı zamanda aşağıdaki gibi de gösterilebilir:

$$g_{2m} = \frac{r_{2m}}{2m-1} = \frac{r_{2m-2}}{2m}.$$

Bu eşitlikten yararlanarak $g_{2m} = r_{2m-2} - r_{2m}$ eşitliği elde edilir. Buradan,

$$\sum_{m=1}^{\infty} g_{2m} = \sum_{m=1}^{\infty} (r_{2m-2} - r_{2m}) = r_0 - r_2 + r_2 - r_4 + \cdots + r_{2m-2} - r_{2m} + \cdots$$
$$= r_0 = 1$$

dır. Yani $w_* = 1$ eşitliği doğrudur. ❑

Örnek 2.2.2 (R^m'de Mümkün Dönüş). Şimdi rastgele yürüyüşün birden fazla boyutta gerçekleştiği durum ele alınsın. R^m'de orijine ilk dönüşün $2n$ anında olması olasılığı $g_{2n}^{(m)}$ olsun ve $r_{2n}^{(m)}$ olasılığı da benzer şekilde tanımlansın. $g_{2n}^{(1)}$ ve $r_{2n}^{(1)}$ olasılıkları daha önce tanımlanan g_{2n} ve r_{2n} olasılıklarına eşittir. Ayrıca eğer $r_0^{(m)} = 1$ ve $g_0^{(m)} = 0$ olarak tanımlanırsa, bütün $m \geq 1$ için

$$r_{2n}^{(m)} = g_0^{(m)} r_{2n}^{(m)} + g_2^{(m)} r_{2n-2}^{(m)} + \cdots + g_{2n}^{(m)} r_0^{(m)} \tag{2.5}$$

elde edilir. Önceki ifadeyi genelleştirmek için

$$R^{(m)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r_{2n}^{(m)} x^n, \qquad G^{(m)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_{2n}^{(m)} x^n$$

eşitlikleri tanımlansın. (2.5) eşitliği kullanılarak $R^{(m)}(x) = 1 + R^{(m)}(x) G^{(m)}(x)$ eşitliğinin önceki gibi olduğu görülür. Bu fonksiyon daima $(-1,1)$ aralığında yakınsaktır, çünkü bütün katsayıların en büyük değeri 1 olabilir. Aslında $\forall m$ için

$$w_*^{(m)} = \sum_{n=0}^{\infty} g_{2n}^{(m)} \leq 1$$

eşitsizliği sağlandığından $G^{(m)}$ serisi $x = 1$'de yakınsaktır ve bunun yanı sıra $G^{(m)}(x)$ fonksiyonu ise $x = 1$'de soldan süreklidir:

$$\lim_{x \uparrow 1} G^{(m)}(x) = \lim_{x \uparrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} g_{2n}^{(m)} x^n = G^{(m)}(1).$$

Dolayısıyla,

$$w_*^{(m)} = \lim_{x \uparrow 1} G^{(m)}(x) = \lim_{x \uparrow 1} \frac{R^{(m)}(x) - 1}{R^{(m)}(x)} \tag{2.6}$$

eşitliği elde edilir. $w_*^{(m)}$ sayısı bulmak için $\lim_{x \uparrow 1} R^{(m)}(x)$ ifadesini belirlemek yeterlidir.

$$r^{(m)} = \lim_{x \uparrow 1} R^{(m)}(x)$$

olsun.

$$r^{(m)} = \sum_{n=0}^{\infty} r_{2n}^{(m)}$$

olduğunu göstermek mümkündür. Bunu ispat etmek için $r_{2n}^{(m)}$ katsayılarının negatif olmadığı dikkate alındığında $R^{(m)}(x)$ serisi $[0,1)$ aralığında monoton olarak artar. Böylece $\forall K$ için,

$$\sum_{n=0}^{K} r_{2n}^{(m)} \leq \lim_{x \uparrow 1} R^{(m)}(x) = r^{(m)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} r_{2n}^{(m)}$$

olur. $K \to \infty$ iken,

$$r^{(m)} = \sum_{n=0}^{\infty} r_{2n}^{(m)}$$

olduğu görülür. Bu ise iddianın doğru olduğunu gösterir. (2.6) eşitliğine göre eğer $r^m < \infty$ ise mümkün dönüşün olasılığı

$$\frac{r^{(m)} - 1}{r^{(m)}}$$

ifadesine eşittir ve $r^{(m)}$ ifadesi sonsuza giderken mümkün dönüşün olasılığı ise 1'e eşittir. Yani

$$w_*^{(m)} = \lim_{r^{(m)} \to \infty} \frac{r^{(m)} - 1}{r^{(m)}} = 1$$

dır. Örneği tamamlamak için $\sum_{n=0}^{\infty} r_{2n}^{(m)}$ toplamı tahmin edilmelidir.

Bir boyutlu yürüyüş, yani $m = 1$ için $r_{2n}^{(1)} = \binom{2n}{n} 2^{-2n}$ şeklindedir ve Stirling formülü (URL-6, 2010) kullanılarak $r_{2n}^{(1)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ elde edilir. Böylece

$$r^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} r_{2n}^{(1)} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

ıraksak bir seri olduğundan $r^{(1)} = \infty$'dır. Dolayısıyla $w_*^{(1)} = 1$'dır, yani bir boyutlu yürüyüşte orijine mümkün dönüş olasılığı 1'dır. İki boyutlu yürüyüşte, yani $m = 2$ ise

$$r_{2n}^{(2)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{k!\,k!\,(n-k)!\,(n-k)!} \frac{1}{4^{2n}}$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$$r_{2n}^{(2)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{n!\,n!} \frac{n!\,n!}{(n-k)!\,k!\,(n-k)!\,k!} \frac{1}{4^{2n}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^{2n}} \binom{n}{k} \binom{n}{k} \binom{2n}{n} = \frac{1}{4^{2n}} \binom{2n}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

dır. Aşağıdaki eşitlik doğrudur:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Dolayısıyla yukarıda ki eşitlik yardımıyla,

$$r_{2n}^{(2)} = \frac{1}{4^{2n}} \binom{2n}{n}^2$$

eşitliği elde edilir. Stirling formülü kullanılarak

$$\frac{(2n)!}{n!\,n!} \sim \frac{\sqrt{2\pi 2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

ifadesi elde edilir. Yani, $\binom{2n}{n} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$'dır. Böylece,

$$r_{2n}^{(2)} \sim \frac{1}{4^{2n}} \left(\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}\right)^2 = \frac{1}{\pi n}$$

elde edilir. Buradan,

$$r^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} r_{2n}^{(2)} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\pi n}$$

serisinin ıraksak olduğu sonucu çıkar. Bu yüzden $w_*^{(2)} = 1$, R^2'de yani iki boyutlu yürüyüşte mümkün dönüşün olasılığı 1'dir. Üç boyutlu yürüyüşte yani $m = 3$ olduğunda

$$r_{2n}^{(3)} = \sum_{j,k} \frac{(2n)!}{j!\,j!\,k!\,k!\,(n-j-k)!\,(n-j-k)!} \frac{1}{6^{2n}}$$

$$= \frac{1}{6^{2n}} \sum_{j,k} \frac{n!\,n!\binom{2n}{n}}{j!\,j!\,k!\,k!\,(n-j-k)!\,(n-j-k)!}$$

$$= \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \sum_{j,k} \left(\frac{1}{3^n} \frac{n!}{j!\,k!\,(n-j-k)!} \right)^2$$

eşitliği elde edilir. M sayısı $j + k \leq n$ ile j ve k'nın negatif olmayan bütün değerleri için

$$\frac{n!}{j!\,k!\,(n-j-k)!}$$

ifadesinin en büyük değerini göstersin. Stirling formülü kullanılınca, belirli bir c sabiti için $M \sim \frac{c}{n}$'dır. Dolayısıyla,

$$r_{2n}^{(3)} \leq \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \sum_{j,k} \left(\frac{M}{3^n} \frac{n!}{j!\,k!\,(n-j-k)!} \right)$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan sağ taraftaki ifadenin değerinin en çok $\frac{c'}{n^{3/2}}$ olduğu görülür. Burada c' bir sabittir ve

$$r^{(3)} = \sum_{n=0}^{\infty} r_{2n}^{(3)}$$

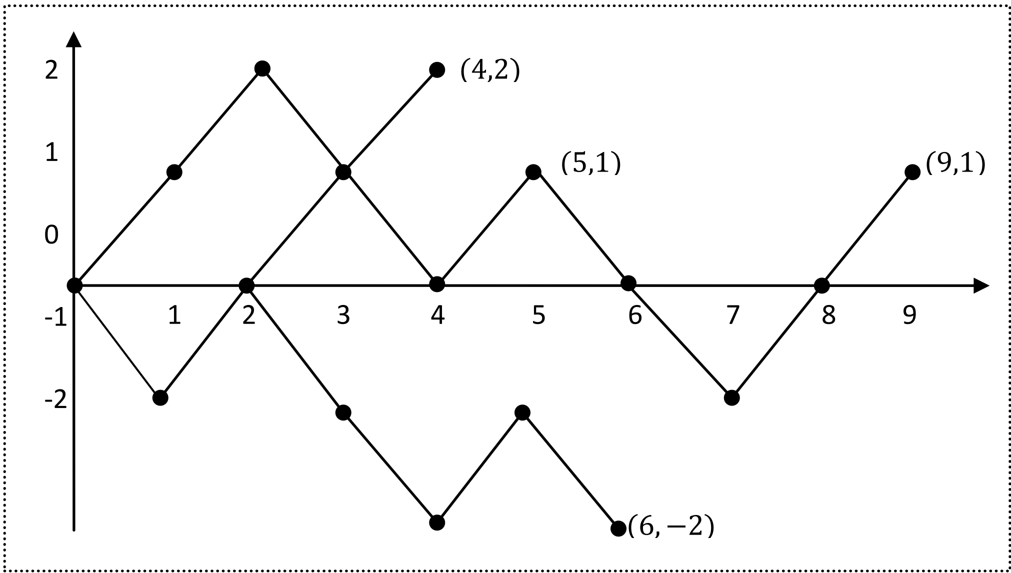
serisi yakınsaktır. Bundan dolayı $w_*^{(3)}$ kesinlikle birden küçüktür. Bunun anlamı R^3'de orijine mümkün dönüşün olasılığı kesinlikle birden küçüktür (aslında yaklaşık olarak 0.65'dır) (Grinstead ve Snell, 1997).

Sonuçları özetlemek gerekirse bir parçacık en fazla iki boyutta rastgele yürüyüş yaptığında orijine dönebilir. Boyut sayısı ikiden fazla olduğunda orijine dönüş olasılığı birden küçük olmaktadır. ❑

2.3. Sınırsız Rastgele Yürüyüş

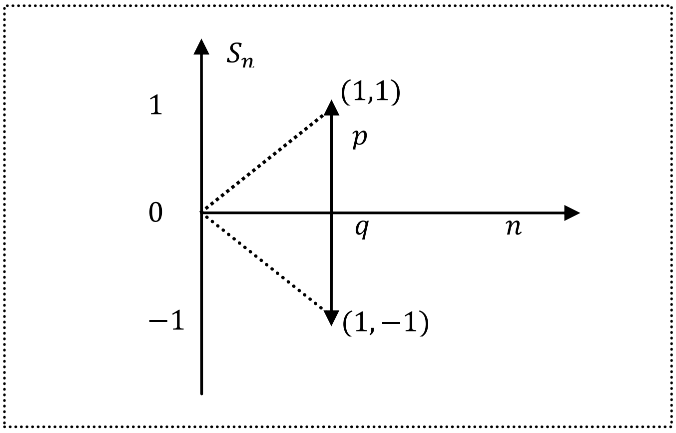
Rastgele yürüyüş, bağımsız ve aynı dağılımlı rastgele değişkenlerin toplamı ile ifade edilen stokastik bir süreçtir. Bu sürecin analizinde üreten fonksiyonlar önemli araç olarak kullanılmaktadır. Kesikli parametreli rastgele yürüyüş ile ilgili çeşitli problemler geometrik kavramlar vasıtası ile daha kolay ifade edilir ve çözülür. Bu nedenle yörünge metodu kullanılmaktadır. Bu metot yardımıyla kombinatorik analiz, olasılık ve istatistik alanlarında önemli sonuçlar elde edilmiştir. Bu bölümde rastgele yürüyüş sürecinin daha genel tanımı, kesikli parametreli rastgele yürüyüş teorisinin temel problemleri ve uygulamaları hakkında gerekli bilgiler verilecektir.

Tanım 2.3.1. $\xi_1, \xi_2, \ldots$ bağımsız rastgele değişkenler ve her bir $P(\xi_k = 1) = p$ ve $P(\xi_k = -1) = q = 1 - p$ olmak üzere $S_0 = 0, S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n\,, n \geq 1$ dizisine sınırsız rastgele yürüyüş, ξ_n'ye ise rastgele yürüyüşün adımı denir. $p = q = 1/2$ ise S_n dizisine simetrik rastgele yürüyüş adı verilir. Rastgele yürüyüşe düzlemdeki dik koordinat sisteminde $(n, S_n), n \geq 0$ noktalarının dizisi gibi bakılabilir. Bu durumda $S_0 = 0$ ve $S_n = x$ olmak üzere $(0, S_0), (1, S_1), \ldots, (n-1, S_{n-1}), (n, S_n)$ noktalarını doğru parçaları ile birleştiren kırık hatta $(0,0)$'dan (n, x)'e yol veya yörünge denir ve $(S_0, \ldots, S_n)$ ile gösterilir. Tanıma göre her bir yörünge köşegen (diagonal) üzerinde aşağıya veya yukarıya yönelmiş birim parçalarından (adımlardan) oluşmaktadır (Şekil 2.3). Kolaylık açısından yukarı (aşağı) yönlü parçaya pozitif (negatif) parça, x-ekseninin üstünde yerleşen yörüngeye ise pozitif yörünge denir. Şekil 2.3'de $(0,0)$ noktasını $(4,2)$ noktası ile birleştiren yörünge pozitif, fakat $(9,1)$ veya $(6, -2)$ noktaları ile birleştiren yörünge pozitif değildir. Tanıma göre $(S_0, \ldots, S_n)$ pozitif yörünge ise her bir $S_k > 0$'dır.



Şekil 2.3. Yörünge örnekleri

$S_k = S_{k-1} + \xi_k$ eşitliğine göre $(S_0, \dots, S_n)$ yörüngesinin her bir (k, S_k) noktası önceki $(k-1, S_{k-1})$ noktasının uzunluk birimi kadar (bir adım) p olasılığı ile yukarıya veya q olasılığı ile bir adım aşağıya hareketi elde edilir. $(S_0, \dots, S_n)$ yörüngesine (0,0) noktasından harekete başlayan bir parçacığın bu yörünge üzerinde rastgele yürüyüşünün (n, S_n) noktasında sonuçlanması gibi bakılabilir. Kolaylık için $S_n = k$ ise rastgele yürüyüş n anında k durumundadır denir. Tanıma göre n anında k durumunda olan parçacık $n+1$ anında p olasılığı ile $k+1$ veya q olasılığı ile $k-1$ durumuna geçer. Mesela başlangıç anında 0 durumundan çıkan parçacık birim zaman sonunda p olasılığı ile $(1,1)$ veya q olasılığı ile $(1,-1)$ durumuna gelecektir (Şekil 2.4).



Şekil 2.4. 0 durumundan çıkan bir parçacığın rastgele yürüyüşü

n ve k'nın her ikisi çift veya tek sayı ise $(0,0)$ noktasından (n,k) noktasına uzanan yörünge sayısı şöyle bulunur:

$$N(n,k) = C(n,(n+k)/2) = \left(\binom{n}{\frac{n+k}{2}}\right). \tag{2.7}$$

Gerçekten x ile $(0,0)$'dan (n,k)'ya geçiş için gereken pozitif adım sayısı gösterilsin. Bu taktirde $x-(n-x)=k$ eşitliğinden $x=(n+k)/2$ bulunur. Böylece $(0,0)$'dan (n,k)'ya her bir yörünge $(n+k)/2$ tane pozitif, $(n-k)/2$ tane de negatif parçadan oluşur. Buna göre böyle yörüngelerin sayısı (2.7)'de gösterilen ifadeye eşit olacaktır. $N_{a,b}(n,k)$ sayısı (a,b) noktasından (n,k) noktasına uzanan tüm yörünge sayısını göstersin. Böyle yörüngelerin kümesi, $(0,0)$ noktasından ve $(n-a,k-b)$ noktasına uzanan yörünge kümesine denktir ve böylece aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

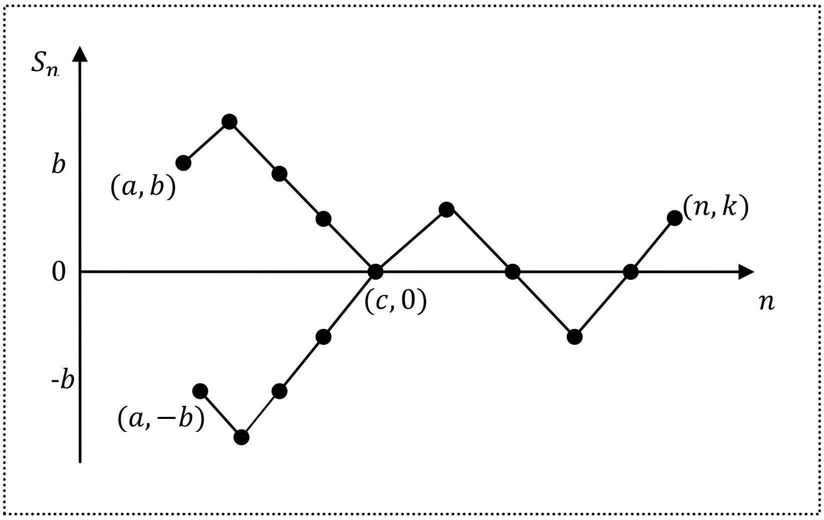
$$N_{a,b}(n,k) = N(n-a,k-b). \tag{2.8}$$

2.3.1. Yansıma Prensibi

$a \geq 0, b > 0, n > a$ ve $k > 0$ tam sayılar olmak üzere (a,b)'den (n,k)'ya uzanan pozitif olmayan yörünge sayısı şöyle bulunur:

$$N_{a,b}^{-}(n,k) = N(n-a,k+b). \tag{2.9}$$

İspat. $Q^{-}_{a,b}$ ile (a,b)'den (n,k)'ya pozitif olmayan yörünge kümesi, $Q_{a,-b}$ ile de $(a,-b)$'den (n,k)'ya tüm yörünge kümesi gösterilsin. Bu kümeler arasında bire bir eşleme mevcuttur.



Şekil 2.5. (a,b)'den (n,k)'ya uzanan yörünge

Gerçekten $T \in Q^{-}_{a,b}$ yörüngesi x-eksenine ilk defa $(c,0)$ noktasında dokunduğu varsayılsın (Şekil 2.5). Bu yörüngenin (a,b) ve $(c,0)$ noktaları arasındaki kolunun x-eksenine göre simetriğini almakla elde edilen yörüngeye (yani $(a,-b)$ noktasından (n,k) noktasına uzanan yörünge) T'ye karşılık getirilsin. Tersine her bir $T^* \in Q_{a,-b}$ yörüngesi $b,k > 0$ olduğundan x-eksenini kesmek zorundadır. Bu yörünge x-eksenini ilk defa $(c,0)$ noktasında kesiyor olsun. Bu durumda T^*'ın $(a,-b)$ ve $(c,0)$ noktaları arasındaki kolunun x-eksenine göre simetriğini almakla elde edilen yörünge ((a,b) ve (n,k) noktasını birleştiren yörünge) T^* yörüngesine karşılık getirilsin. Sözü edilen kümeler denk ve $Q_{a,-b}$ kümesinin de eleman sayısı $N(n-a,k+b)$ olduğundan teoremin ispatı tamamlanır.

Sonuç. Yansıma prensibinin koşulları altında (a,b)'den (n,k)'ya uzanan pozitif yörünge sayısı aşağıdaki eşitlikle verilir:

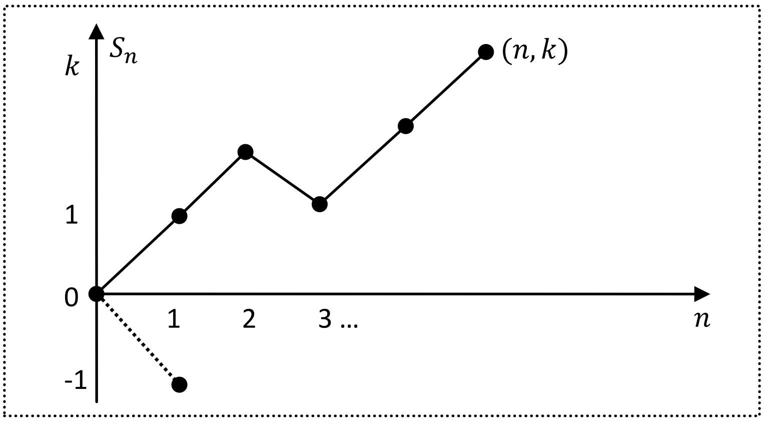
$$N^{+}_{a,b}(n,k) = N(n-a,k-b) - N(n-a,k+b). \qquad (2.10)$$

2.3.2. Oy Teoremi

$(0,0)$'dan (n, k)'ya uzanan pozitif yörünge sayısı $n = 1,2, \dots$ olmak üzere şöyle bulunur:

$$N^{+}(n, k) = (k/n)N(n, k). \tag{2.11}$$

İspat. Teoremden sözü edilen her bir pozitif yörünge Şekil 2.6'da gösterildiği gibi $(1,1)$ noktasından geçer:



Şekil 2.6. $(0,0)$'dan (n, k)'ya uzanan pozitif yörünge

$(1,1)$ noktasından (n, k) noktasına pozitif yörünge sayısı (2.7) ve (2.10) formülleri yardımıyla hesaplanır:

$$\begin{aligned} N^{+}(n, k) &= N(n-1, k-1) - N(n-1, k+1) \\ &= \binom{n-1}{\frac{n+k}{2} - 1} - \binom{n-1}{\frac{n+k}{2}} \\ &= \frac{(n-1)!}{\left(\frac{n+k}{2} - 1\right)!\left(\frac{n-k}{2}\right)!} - \frac{(n-1)!}{\left(\frac{n+k}{2}\right)!\left(\frac{n-k}{2} - 1\right)!} \\ &= (n-1)! \frac{\mathrm{k}}{\left(\frac{n+k}{2}\right)!\left(\frac{n-k}{2}\right)!} = \frac{k}{n}\binom{n}{\frac{n+k}{2}} = \frac{k}{n}N(n, k). \end{aligned}$$

Örnek 2.3.1. Bir seçimde A adayı a tane oy, B adayı ise b tane oy kazanmış olsun. A'nın oy sayısına göre daima B'den ileride olma olasılığı nedir?

Çözüm. Her bir $i = 1,2,\dots,a+b$ sayıları için

$$\xi_k = \begin{cases} 1\,, & k - \text{ıncı oy } A'\text{ya verilirse} \\ -1\,, & k - \text{ıncı oy } B'\text{ye verilirse} \end{cases}$$

ve $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$ olsun. Açıktır ki, $S_{a+b} = a - b$'dır. $(0,0)$'dan $(a+b, a-b)$ noktasına yörünge sayısı $N(a+b, a-b)$'dir. "A adayı B'den daima ileride gelir" olayını gerçekleştiren her bir yörünge $(1,1)$ noktasından geçen pozitif yörüngededir. Bu tür yörünge sayısı Oy Teoremine göre

$$N^+(a+b, a-b) = \frac{a-b}{a+b} N(a+b, a-b)$$

olur. Böylece aranan olasılık aşağıdaki gibidir:

$$p = \frac{N^+(a+b, a-b)}{N(a+b, a-b)} = \frac{a-b}{a+b}.$$

Örnek 2.3.2. Sınırsız rastgele yürüyüşte $(0,0)$ noktasından $(2n, 0)$ noktasına pozitif yörünge sayısı bulunmak istensin. Sözü edilen her bir yörünge $(2n-1,1)$ noktasından geçtiğinden dolayı aranan yörünge sayısı $(0,0)$ noktasından $(2n-1,1)$ noktasına kadar olan pozitif yörünge sayısına eşittir.

Çözüm. Oy Teoreminden ve (2.7) eşitliğinden aranan sayı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} N^+(2n-1,1) &= \frac{1}{2n-1} N(2n-1,1) \\ &= \frac{1}{2n-1}\binom{2n-1}{n} = \frac{1}{2(2n-1)}\binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

2.3.3. Geçiş Olasılıkları

$(S_n), n \geq 1$ sınırsız rastgele yürüyüş olmak üzere $p_{ij}^{(n)} = P(S_n = j/S_0 = i)$ koşullu olasılığına n adımda i durumundan j durumuna geçiş olasılığı denir.

Teorem 2.3.1. k ve n'nin her ikisi çift veya tek sayı ise $p_{ij}^{(n)}$ şöyle bulunur:

$$p_{0k}^{(n)} = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{(n+k)/2} q^{(n-k)/2}, k = 0, \pm 1, \ldots \tag{2.12}$$

İspat. Parçacığın adım atması Bernoulli denemesi ve bu adımın pozitif olması ise başarılı sonuç sayılsın. Bu takdirde $p_{0k}^{(n)}$ olasılığı n denemede başarı sayısının $(n+k)/2$'ye eşit olması olasılığı olur ve binom formülüne göre (2.12) doğrudur.

Ayrıca (2.12) formülü yörünge metodu ile aşağıdaki gibi de ispat edilebilir. Tanıma göre $p_{0k}^{(n)}$ olasılığı $(0,0)$ ve (n,k) arasındaki yörüngelerden birinin gerçekleşme olasılığıdır. Böyle tanımlanmış her yörünge $(n+k)/2$ tane pozitif ve $(n-k)/2$ tane negatif parçadan oluşan yörüngenin gerçekleşme olasılığı $p^{(n+k)/2}q^{(n-k)/2}$'dır. Öte yandan $(0,0)$ noktasından (n,k) noktasına gelen yörünge sayısı ise $\binom{n}{\frac{n+k}{2}}$'dır. Buradan ve olasılığın toplamsallık (aditivlik) özelliğinden (2.12) sonucuna ulaşılır. (2.12) formülünden aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$p_{ij}^{(n)} = p_{0,j-i}^{(n)} = \binom{n}{\frac{n+j-i}{2}} p^{(n+j-i)/2} q^{(n+j+i)/2}, \tag{2.13}$$

$$p_{00}^{(2n+1)} = 0, \qquad p_{00}^{(2n)} = \binom{2n}{n} (pq)^n, \tag{2.14}$$

$$p_{01}^{(2n)} = 0, \qquad p_{01}^{(2n+1)} = \binom{2n+1}{n+1} p^{n+1} q^n. \tag{2.15}$$

Burada $(2n+1)$ adımda 0 durumundan 0 durumuna geçiş olasılığı da 0'dır. Çünkü 0 noktasından harekete başlandığında tek adımda 0 noktasına dönüş mümkün değildir.

Aynı şekilde $(2n)$ adımda 0 durumundan 1 durumuna geçiş olasılığı 0'dır. Çünkü 0 noktasından harekete başlandığında çift adımda 1 noktasına dönülemez.

Örnek 2.3.3. Simetrik rastgele yürüyüşte aşağıdaki eşitlik doğrudur:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{(n)} = \infty. \tag{2.16}$$

Çözüm. (2.14) formülünde $p = 1/2$ alınarak,

$$p_{00}^{(2n)} = \binom{2n}{n} 2^{-2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} 2^{-2n} = \frac{1.3.5.\dots.(2n-1)}{n!\,2^n}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} 1.3.5 \dots (2n-1) &> 1.3(2/3).5(4/5) \dots (2n-1)\,(2n-2)/(2n-1) \\ &= 1.2.4 \dots (2n-2) = 2^{n-1}(n-1)! = 2^n\, n!/(2n) \end{aligned}$$

dır. Bu ifadeden yararlanarak,

$$p_{00}^{(2n)} = \frac{1.3.5.\dots.(2n-1)}{n!\,2^n} > \frac{1}{2n}$$

elde edilir. Bu durumda $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(2n) = \infty$'dır, çünkü bu seri ıraksak seridir. Ayrıca $p_{00}^{(2n+1)} = 0$ olduğundan (2.16) elde edilir.

Teorem 2.3.2. $p_{ij}^{(n)}$'nin üreten fonksiyonu $p_{ij}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} s^n$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler doğrudur:

$$p_{00}(s) = (1 - 4pqs^2)^{-1/2}, \tag{2.17}$$

$$p_{01}(s) = (p_{00}(s) - 1)/(2qs). \tag{2.18}$$

İspat. (2.14) formülü kullanılarak

$$p_{00}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} (pq)^n s^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} (pqs^2)^n.$$

olarak elde edilir. Buradan,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} s^n = (1-4s)^{-1/2}, 0 < 4s < 1$$

eşitliğinde s yerine pqs^2 yazılırsa (2.17) elde edilir. (2.15) formülü kullanılarak ve $x = pqs^2$ alınarak aşağıdaki ifade elde edilir:

$$p_{01}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n+1}{n+1} p^{n+1} q^n s^{2n+1} = ps \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n+1}{n+1} x^n.$$

Yukarıdaki eşitlikten ve $\binom{2n+1}{n+1} = \binom{2n}{n} [2-(n+1)^{-1}]$ eşitliğinden

$$p_{01}(s) = 2ps \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n - \frac{ps}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} (n+1)^{-1} x^{n+1}$$

bulunur. Sol taraftaki ikinci serinin $\left(1-\sqrt{1-4x}\right)/2$'ye eşit olduğu (2.17) fonksiyonunun $(0, x)$ aralığı üzerinde integrali alınarak

$$\int_0^x (1-4u)^{-1/2}\, du = \left.\frac{(1-4u)^{1/2}}{-2}\right|_0^x = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$$

biçiminde bulunur. Buradan da (2.18) eşitliği elde edilir:

$$p_{01}(s) = \frac{2ps}{\sqrt{1-4x}} + \frac{\sqrt{1-4x}-1}{2qs} = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2qs\sqrt{1-4x}} = \frac{1}{2qs}\left[\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1\right]$$
$$= \frac{(1-4pqs^2)^{-1/2}-1}{2qs} = \frac{(p_{00}(s)-1)}{2qs}.$$

2.3.4. İlk Varış Olasılıkları

$(S_n), n \geq 1$ rastgele yürüyüş ve

$$T_{ij} = \min\{n \geq 1 : S_n = j / S_0 = i\}, \tag{2.19}$$
$$f_{ij}^{(n)} = P\{T_{ij} = n\} = P\{S_1 \neq j, \dots, S_{n-1} \neq j, S_n = j / S_0 = i\}$$

olsun. Burada T_{ij} ile i durumundan j durumuna ilk varış zamanı ve $f_{ij}^{(n)}$'de i durumundan j durumuna ilk defa n inci adımda geçiş olasılığıdır. T_{ii}'ye i durumuna dönüş zamanı denir. Rastgele yürüyüşün bir durumdan başka bir duruma ulaşması için bu durumlar arasındaki her bir durumda bulunması gerekir. Buna göre $i < j$ için

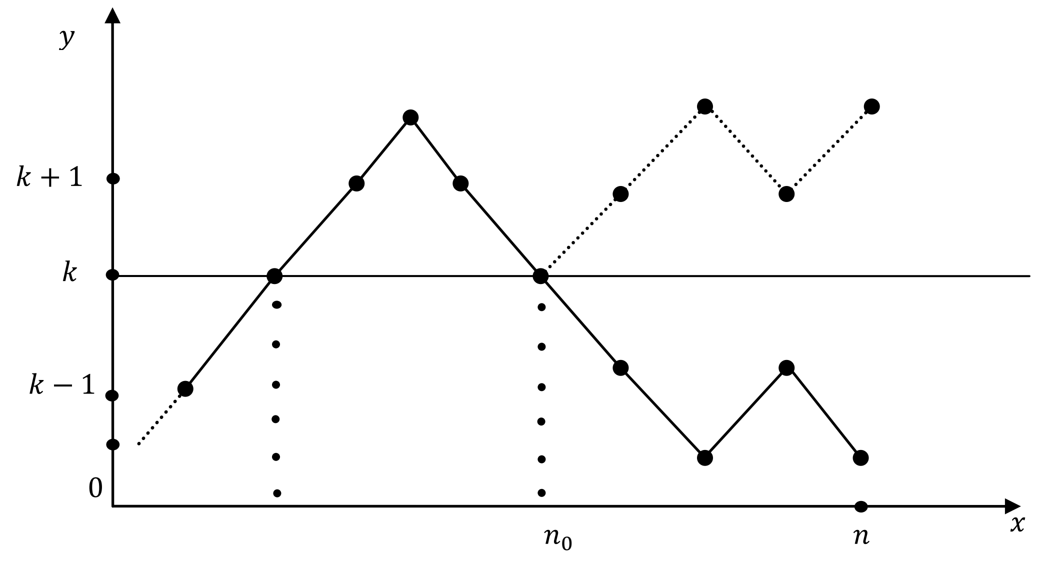
$$T_{ij} = T_{i,i+1} + T_{i+1,i+2} + \cdots + T_{j-1,j} \tag{2.20}$$

biçiminde gösterilebilir, buradaki terimler bağımsız ve aynı dağılımlı rastgele değişkenlerdir. Bu basit bağıntı rastgele yürüyüşün özelliklerini anlamakta önemli rol oynamaktadır. $p_{ij}^{(n)}$ ve $f_{ij}^{(n)}$ olasılıkları birbirinden kesinlikle farklıdır. Bunların her ikisi de i'den j'ye n adımda geçiş olasılığıdır, fakat $f_{ij}^{(n)}$ olasılığında n'den küçük adımda j durumuna geçiş yasaktır. Aşağıdaki teorem $p_{0k}^{(n)}$ ve $f_{0k}^{(n)}$ olasılıkları arasındaki bağıntıyı ifade etmektedir.

Teorem 2.3.3 (İsabet Anı Teoremi). $S_0 = 0$ ve $k \neq 0$ tam sayı olmak üzere aşağıdaki formül doğrudur:

$$f_{0k}^{(n)} = \frac{|k|}{n} p_{0k}^{(n)}, n \geq 1. \tag{2.21}$$

İspat. $k > 0$ olduğunda $T_{0k} = n$ ise $S_{n-1} = k - 1$ ve $X_n = +1$ olur. Burada $N^k(n-1, k-1)$ ifadesiyle $(0,0)$'dan $(n-1, k-1)$'e uzanan yörüngeler içerisinde sonuncu defa k'ya bir n_0 anında varış yapan yörüngelerin sayısı gösterilsin (Şek.2.7). Böyle her yörüngenin gerçekleşme olasılığı $\alpha_{nk} = p^{(n+k)/2} q^{(n-k)/2}$'dır.



Şekil 2.7. $(0,0)$'dan $(n-1, k-1)$'e uzanan yörüngeler

Yansıma prensibine göre $N^k(n-1, k-1) = N(n-1, k+1)$ olur. Buradan ve (2.19) formülünden

$$
\begin{aligned}
f_{0k}^{(n)} &= P\{T_{0k} = n\} = [N(n-1, k-1) - N(n-1, k+1)]\alpha_{nk} \\
&= \left[\binom{n-1}{\frac{n+k}{2} - 1} - \binom{n-1}{\frac{n+k}{2}}\right]\alpha_{nk} \\
&= \left[\frac{(n-1)!}{\left(\frac{n+k}{2} - 1\right)!\left(\frac{n-k}{2}\right)!} - \frac{(n-1)!}{\left(\frac{n+k}{2}\right)!\left(\frac{n-k}{2} - 1\right)!}\right]\alpha_{nk} \\
&= (n-1)!\frac{k}{\left(\frac{n+k}{2}\right)!\left(\frac{n-k}{2}\right)!}\alpha_{nk} = \frac{k}{n}N(n,k)\alpha_{nk} = \frac{k}{n}p_{0k}^{(n)}
\end{aligned}
$$

elde edilir. $k < 0$ için benzer yolla $f_{0k}^{(n)} = -\frac{k}{n} p_{0k}^{(n)}$ elde edilir. Bu ise teoremin ispatını tamamlar. (2.21) formülü kullanılarak T_{0k}'nın beklenen değeri

$$ET_{0k} = \sum_{n=0}^{\infty} nP\{T_{0k} = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{|k|}{n} p_{0k}^{(n)} = |k| \sum_{n=0}^{\infty} p_{0k}^{(n)} \tag{2.22}$$

şeklinde elde edilir. Gerçekten (2.17) ve (2.18) formülleri kullanılarak, yani

$$p_{01}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{01}^{(n)} s^n$$

ifadesinde $s = 1$ alınırsa $p_{01}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{01}^{(n)}$ elde edilir. Bu ifadeden yararlanarak

$$\begin{aligned} ET_{01} &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{01}^{(n)} = p_{01}(1) = (p_{00}(1) - 1)/(2q) \\ &= \frac{1}{2q}\left((1 - 4pq)^{-1/2} - 1\right) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan,

$$\begin{aligned} &(p + q)^2 = 1, \\ &p^2 + q^2 + 2pq = 1, \\ &p^2 + q^2 - 2pq = 1 - 4pq, \\ &(p - q)^2 = 1 - 4pq, \end{aligned}$$

eşitliklerinin yardımıyla $|p - q| = (1 - 4pq)^{1/2}$ eşitliği elde edilir. Böylece,

$$ET_{01} = \frac{1}{2q}\left(\frac{1}{|p - q|} - 1\right) = \frac{1 - |p - q|}{2q|p - q|}$$

dır. $p > q$ durumu için

$$ET_{01} = \frac{1-(p-q)}{2q(p-q)} = \frac{1-p+q}{2q(p-q)} = \frac{2q}{2q(p-q)} = (p-q)^{-1}$$

eşitliği bulunur. Eğer $p = q = \frac{1}{2}$ ise

$$p_{01}^{(2n+1)} = \binom{2n+1}{n+1} 2^{-2n-1} = \frac{(2n+1)!}{n!\,(n+1)!\,2^{2n+1}}$$
$$= \frac{2n+1}{2(n+1)} \frac{1.3.5 \ldots (2n-1)}{n!\,2^n}$$

dır. Örnek 2.3.3'ün çözümünden yararlanılarak,

$$\frac{2n+1}{2(n+1)} \frac{1.3.5 \ldots (2n-1)}{2^n n!} > \frac{2n+1}{2(n+1)} \frac{1}{2n}$$
$$= \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n(2n+2)} = \frac{1}{4n} + \frac{1}{2(2n+2)}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu durumda,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n+4}$$

serisi ıraksaktır, dolayısıyla bu ifadenin toplamı ∞'dır. Bu ise $ET_{01} = \infty$ olduğunu gösterir. Yukarıdaki işlemler sonucunda $k = 1$ için ET_{01} aşağıdaki gibi elde edilir:

$$ET_{01} = \begin{cases} \infty, p = 1/2 \\ (p-q)^{-1}, p > q \end{cases}. \tag{2.23}$$

Örnek 2.3.4. Aşağıdaki eşitliklerin doğru olduğunu gösterelim:

$$f_{01}^{(2n)} = 0, \qquad f_{01}^{(2n+1)} = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n+1} p^{n+1} q^n, \tag{2.24}$$

$$f_{00}^{(2n+1)} = 0, \qquad f_{00}^{(2n)} = \frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n} (pq)^n. \tag{2.25}$$

Çözüm. (2.24) eşitliği (2.15) ve (2.21) formüllerinden elde edilir:

$$f_{01}^{(2n+1)} = \frac{1}{2n+1} p_{01}^{(2n+1)} = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n+1} p^{n+1}q^n,$$
$$f_{01}^{(2n)} = \frac{1}{2n} p_{01}^{(2n)} = 0.$$

Burada tam olasılık formülüne dayanarak (2.25) formülünü, yani ilk defa $2n$. adımda 0 durumundan 0 durumuna geçiş olasılığını bulmak için iki işlem gerçekleştirilir. Öncelikle ya p olasılığı ile 1 durumuna geçilir daha sonra kalan $2n-1$ adımda 1 durumundan 0 durumuna geçilir ya da q olasılığı ile -1 durumuna geçilir ve sonra kalan $2n-1$ adımda -1 durumundan 0 durumuna geçilir. Bu işlem aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned} f_{00}^{(2n)} &= P(T_{10} = 2n-1)p + P(T_{-10} = 2n-1)q \\ &= P(T_{0-1} = 2n-1)p + P(T_{01} = 2n-1)q \\ &= p f_{0-1}^{(2n-1)} + q f_{01}^{(2n-1)}. \end{aligned}$$

Sağ tarafta bulunan olasılıkların (2.21)'deki ifadenin yerine koyup, (2.12) formülü kullanılırsa (2.25) elde edilir:

$$f_{00}^{(2n)} = \frac{p}{2n-1} p_{0-1}^{(2n-1)} + \frac{q}{2n-1} p_{01}^{(2n-1)} = \frac{2}{2n-1}\binom{2n-1}{n}(pq)^n.$$

Teorem 2.3.4. Aşağıda verilen eşitlikler doğrudur:

$$f_{01}(s) = Es^{T_{01}} = \left(1 - \sqrt{1-4pqs^2}\right)/(2qs), \tag{2.26}$$

$$P(T_{01} < \infty) = \frac{1-|p-q|}{2q} = \min(1, p\,/\,q). \tag{2.27}$$

İspat. Aşağıdaki stokastik eşitlik ele alınsın:

$$T_{01} = \begin{cases} 1, & p = P(X_1 = 1) \\ 1 + T_{-11}, & q = P(X_1 = -1). \end{cases}$$

Bu stokastik eşitlikte 0 durumundan 1 durumuna ilk geçiş anı görüldüğü gibi iki şekilde ifade edilebilir. Burada 0 durumundan 1 durumuna ya p olasılığı ile geçilir ya da q olasılığı ile 0 durumundan -1 durumuna geçilir. Daha sonra -1 durumundan 1 durumuna ilk geçiş anı T_{-11} kadardır. Buradan $Es^{T_{01}} = ps + qsEs^{T_{-11}}$ denklemi elde edilir. Diğer taraftan $T_{-11} = T_{-10} + T_{01}$ olarak yazılabilir, burada sağ tarafta bulunan terimler aynı dağılımlı bağımsız rastgele değişkenlerdir, ayrıca $T_{-10} \sim T_{01}$ olduğuna göre

$$f_{01}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P\{T_{01} = n\}\, s^n = Es^{T_{01}} = Es^{T_{-10}}$$

eşitliğinin yardımıyla $Es^{T_{-11}} = Es^{T_{-10}} Es^{T_{01}} = f_{01}(s)^2$ elde edilir. Bu ifade yukarıdaki eşitlikte yerine konulursa $f_{01}(s)$ için $f_{01}(s) = ps + qsf_{01}(s)^2$ kuadratik denklemi elde edilir. Bu denklemin iki kökü vardır:

$$\lambda_{1,2}(s) = \left(1 \pm \sqrt{1 - 4pqs^2}\right)/(2qs).$$

Burada $s \to \infty$ iken $\lambda_1(s) \to \infty$, $\lambda_2(s) \to 0$ olur. Üreten fonksiyon sınırlı olduğundan $\lambda_1(s)$ üreten fonksiyon olamaz. Böylece

$$f_{01}(s) = \lambda_2(s) = \left(1 - \sqrt{1 - 4pqs^2}\right)/(2qs)$$

dır, yani (2.26) eşitliği doğrudur. (2.26) eşitliğinden yararlanarak (2.27) eşitliği aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} f_{01}(1) &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{T_{01} = n\} = \left(1 - \sqrt{1 - 4pq}\right)/2q \\ &= \frac{1 - |p - q|}{2q} = P(T_{01} < \infty). \end{aligned}$$

Buradan $p = q = \frac{1}{2}$ için

$$f_{01}(1) = \frac{1 - \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right|}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 1$$

ve ayrıca $p < q$ için

$$f_{01}(1) = \frac{1 + p - q}{2q} = \frac{p}{q}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla $P(T_{01} < \infty) = \min(1, \frac{p}{q})$'dır. (2.26) formülünde p ve q olasılıklarının yerleri değiştirilerek T_{10}'ın üreten fonksiyonu bulunur:

$$f_{10}(s) = Es^{T_{10}} = \left(1 - \sqrt{1 - 4pqs^2}\right)/(2ps). \tag{2.28}$$

Teorem 2.3.4'den şu ilginç sonuç çıkar: Simetrik rastgele yürüyüşte $P(T_{01} < \infty) = 1$ dır, ancak $ET_{01} = \infty$'dır.

Teorem 2.3.5. Aşağıda verilen eşitlikler doğrudur:

$$f_{00}(s) = 1 - \sqrt{1 - 4pqs^2}, \tag{2.29}$$
$$P(T_{00} < \infty) = 1 - |p - q|, \tag{2.30}$$
$$ET_{00} = \frac{4pq}{|p - q|}. \tag{2.31}$$

İspat. $T_{00} = \begin{cases} 1 + T_{10}, & X_1 = 1\ ise \\ 1 + T_{-10}, & X_1 = -1\ ise \end{cases}$

stokastik eşitliği kullanılarak $Es^{T_{00}} = psEs^{T_{10}} + qsEs^{T_{-10}}$ denklemi bulunur. Bu durumda yukarıdaki denklem ve $T_{-10} \sim T_{01}$ olduğu dikkate alınarak $f_{00}(s) = psf_{10}(s) + qsf_{01}(s)$ denklemi bulunur. f_{01} ve f_{10} fonksiyonlarının (2.26) ve (2.28)'deki ifadeleri burada yerine konulduğunda (2.29) aşağıdaki gibi elde edilir:

$$f_{00}(s) = ps\frac{\left(1-\sqrt{1-4pqs^2}\right)}{2ps} + qs\frac{\left(1-\sqrt{1-4pqs^2}\right)}{2qs}$$
$$= 1-\sqrt{1-4pqs^2}.$$

(2.30) formülü

$$f_{00}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} P\{T_{00}=n\} = 1-\sqrt{1-4pqs^2}$$
$$= 1-|p-q| = P(T_{00}<\infty)$$

eşitliğinden elde edilir ve (2.31) formülü ise

$$f'_{00}(s) = \frac{4pqs}{\sqrt{1-4pqs^2}},$$
$$ET_{00} = f'_{00}(1) = \left.\frac{4pqs}{\sqrt{1-4pqs^2}}\right|_{s=1} = \frac{4pq}{\sqrt{1-4pq}} = \frac{4pq}{|p-q|}$$

eşitliklerinden yaralanılarak bulunur. Bu formüllerden $p = 1/2$ durumu için T_{00}'ın sonlu fakat beklenen değerinin sonsuz olduğu görülür. Ayrıca (2.29) eşitliği (2.25) eşitliğinden de elde edilebilir (Shahbazov, 2005).

2.4. Bir Oyuncunun İflas Problemi

Bir oyuncunun iflas problemi rastgele yürüyüş sürecinin bilinen en iyi uygulamalarındandır. Bu uygulama da rastgele yürüyüşün simetrik olma varsayımı ortadan kalkmaktadır. Bunun yerine p ve q olasılıkları $p+q=1$ olması koşuluyla negatif olmayan reel sayılardır. Rastgele yürüyüşün sıçramalarının ortak olasılık fonksiyonunun

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} p, & eğer\ x = 1\ ise \\ q, & eğer\ x = -1\ ise \end{cases}$$

olduğu varsayılmaktadır. Burada rastgele yürüyüş, tura gelme olasılığı p ve yazı gelme olasılığı q olan düzgün bir paranın atılışının yapıldığı bir deney olarak düşünülebilir. Bu durum için başka bir alternatif formülasyon ise bir oyuncunun her oyunda kazanma olasılığının p olduğu rakibine karşı oynadığı oyundur.

Bu tipteki rastgele yürüyüş 'Bir Oyuncunun İflas Problemi' olarak bilinir. Bir oyuncu s miktar bahis ile oyuna başlasın ve oyuncu kazancı M ya da 0 değerine ulaşana kadar oynamaya devam etsin. Aynı zamanda oyuncu "son derece zengin" bir rakip ile karşı karşıya gelebilir. Bu durumda, oyuncunun ortaya koyduğu para 0 olduğu zaman sadece yutucu bir durum oluşur. Bu varsayım altında oyuncunun en sonunda iflas etmesi olasılığı istenir.

Öncelikle oyuncu $1TL$ ile oyuna başlasın ve iflas etmesi olasılığı q_1 olsun. Bu durumda oyuncu ya q olasılığı ile $1TL$ kaybedip iflas eder ya da p olasılığı ile $1TL$ kazanıp daha sonra q_2 olasılığı ile iflas eder. Yani, $q_1 = q + pq_2$ eşitliği elde edilmiş olur. Bir sonraki adım olarak oyuncu $2TL$ ile oyuna başlasın. Bu durumda ise oyuncu ya q olasılığı ile $1TL$ kaybedip q_1 olasılığı ile iflas eder ya da p olasılığı ile $1TL$ kazanıp daha sonra q_3 olasılığı ile iflas eder. Yani, $q_2 = qq_1 + pq_3$ eşitliği elde edilir. Bu işlem bu şekilde yapılmaya devam edilsin. Oyuncu $k\,TL$ ile oyuna devam etsin. İlk ortaya koyduğu para k olduğunda M'ye ulaşmadan önce oyuncu iflas etsin. Burada oyuncunun ortaya koyduğu paranın 0'a ulaşması olasılığı yani iflas etmesi olasılığı q_k ile gösteriliyor. Bu durumda oyuncu ya p olasılığı ile $1TL$ kazanıp q_{k+1} olasılığı ile iflas eder ya da q olasılığı ile $1TL$ kaybedip q_{k-1} olasılığı ile iflas eder. O halde $q_k,\ 1 \leq k \leq M-1$ için aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$q_k = pq_{k+1} + qq_{k-1}.$$

Burada eğer oyuncunun ortaya koyduğu para k'ya eşit ise o zaman parası ya p olasılığı ile $k+1$ olur ya da aynı şekilde q olasılığı ile $k-1$ olur. İlk durumda mümkün iflas etme olasılığı q_{k+1}'dır ve ikinci durumda bu olasılık q_{k-1}'dır. Burada $q_0 = 1$ ve $q_M = 0$'dır. $p + q = 1$ olduğundan yukarıdaki eşitlik aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$(p+q)q_k = pq_{k+1} + qq_{k-1},$$
$$p(q_{k+1} - q_k) = q(q_k - q_{k-1})$$

veya

$$q_{k+1} - q_k = \frac{q}{p}(q_k - q_{k-1}).$$

Bu eşitlikten aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$q_{k+1} - q_k = \left(\frac{q}{p}\right)^k (q_1 - q_0). \tag{2.32}$$

Tek bilinmeyenin q_1 olduğu bir eşitlik elde etmek için aşağıdaki eşitlikten yararlanılır. Burada $q_0 = 1$ ve $q_M = 0$'dır:

$$\sum_{k=0}^{M-1} (q_{k+1} - q_k) = q_1 - q_0 + q_2 - q_1 + \cdots + q_M - q_{M-1}$$
$$= q_M - q_0 = -1.$$

Böylece,

$$\sum_{k=0}^{M-1} \left(\frac{q}{p}\right)^k (q_1 - q_0) = (q_1 - q_0) \sum_{k=0}^{M-1} \left(\frac{q}{p}\right)^k = -1.$$

eşitliği elde edilir. Eğer $p \neq q$ ise yukarıdaki ifade aşağıdaki şekilde olur:

$$(q_1 - q_0)\frac{(q/p)^M - 1}{(q/p) - 1}.$$

Eğer p ve q değerleri $1/2$'ye giderse,

$$\lim_{(p,q)\to\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} \frac{(q/p)^M - 1}{(q/p) - 1} = M$$

dır. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa

$$(q_1 - q_0)M = -1$$

eşitliği elde edilir. $p \neq q$ olduğu varsayıldığında

$$q_1 - q_0 = -\frac{(q/p) - 1}{(q/p)^M - 1}$$

olur. Herhangi bir z sayısı $(1 \leq z \leq M)$ için aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$q_z - q_0 = \sum_{k=0}^{z-1} (q_{k+1} - q_k) = (q_1 - q_0) \sum_{k=0}^{z-1} \left(\frac{q}{p}\right)^k$$
$$= (q_1 - q_0) \frac{(q/p)^z - 1}{(q/p) - 1} = -\frac{(q/p)^z - 1}{(q/p)^M - 1}.$$

Dolayısıyla,

$$q_z = 1 - \frac{(q/p)^z - 1}{(q/p)^M - 1} = \frac{(q/p)^M - (q/p)^z}{(q/p)^M - 1}$$

eşitliği elde edilir. Son olarak eğer p ve q değerleri $1/2$'ye giderse aşağıdaki ifadenin doğruluğunu göstermek kolaydır:

$$\lim_{(p,q) \to \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} \frac{(q/p)^M - (q/p)^z}{(q/p)^M - 1} = \frac{M - z}{M}.$$

Dolayısıyla $q_z = \frac{M-z}{M}$'dır. Bu formüllerin ikisi de $z = 0$ için geçerlidir.

Oyuncunun ortaya koyduğu paranın 0'a hiç ulaşmadan M'ye ulaşması olasılığının miktarı p_z, $0 \leq z \leq M$ olsun. Oyun süresiz olarak devam ettiğinden her z için $p_z + q_z = 1$ olduğu belli değildir. Bununla beraber yukarıdaki gibi aynı yöntem kullanılırsa, eğer $p \neq q$ ise o zaman aşağıdaki işlemler yapılarak p_z için bir ifade bulunabilir.

Öncelikle oyuncu $1TL$ ile oyuna başlasın. Bu durumda oyuncunun iflas etmemesi için p olasılığı ile $1TL$ kazanıp p_2 olasılığı ile oyuna devam etmesi gerekir. Yani, $p_0 = 0$ ve $p_1 = qp_0 + pp_2 = pp_2$ elde edilir. Aynı şekilde $2TL$ ile oyuna başladığında oyuncunun iflas etmemesi için ya q olasılığı ile $1TL$ kaybedip p_1 olasılığı ile iflas etmeden oyuna devam etmelidir ya da p olasılığı ile $1TL$ kazanıp p_3 olasılığı ile iflas etmeden oyuna devam etmelidir. Yani, $p_2 = qp_1 + pp_3$ eşitliği elde edilir. Bu şekilde devam edilerek k miktar para ile oyun oynanırsa iflas etmeme olasılığı aşağıdaki gibidir:

$$p_k = qp_{k-1} + pp_{k+1}.$$

q_z için yapılan işlemlerden yararlanarak p_z için aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$p_z = \frac{(q/p)^z - 1}{(q/p)^M - 1}.$$

Eğer p ve q değerleri $1/2$'ye giderse o halde

$$\lim_{(p,q)\to\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} \frac{(q/p)^z - 1}{(q/p)^M - 1} = \frac{z}{M}$$

dır. Buradan $p_z = \frac{z}{M}$'dır. Dolayısıyla bu durumda her z için $p_z + q_z = 1$'dır ve böylece oyun 1 olasılığı ile sona erer.

2.4.1. Parasının Miktarı Sonsuz Olan Rakibe Karşı Oynanan Oyun

Eğer oyuncu parasının miktarı sonsuz olan bir rakibe karşı oyun oynarsa oyuncunun mümkün iflas etme olasılığı, yukarıda hesaplanan q_z ifadesinde M yerine ∞ koyarak elde edilir. Eğer $q < p$ ise q_z olasılığı

$$\lim_{M\to\infty} \frac{(q/p)^M - (q/p)^z}{(q/p)^M - 1} = \frac{0 - \left(\frac{q}{p}\right)^z}{0 - 1} = \left(\frac{q}{p}\right)^z$$

dır. Bu durumda q_z olasılığı $\left(\frac{q}{p}\right)^z$ ifadesine yaklaşır. Eğer $q > p$ ise olasılık 1'e yaklaşır. Çünkü,

$$\lim_{M\to\infty} \frac{(q/p)^M - (q/p)^z}{(q/p)^M - 1} = 1$$

dır. p ve q değerleri $1/2$'ye giderse $q_z = 1 - z/M$ olur. Böylece eğer $M \to \infty$ ise mümkün iflas olasılığı 1'e yaklaşır (Grinstead ve Snell, 1997).

2.4.2. Oyuncuların Oyunu Kazanma Olasılıkları

A ve B gibi iki oyuncu olsun ve bir oyunu kazanma olasılıkları sırasıyla p ve q olsun. Oyuncular sırasıyla a ve b bahisleri ile oyuna başlasınlar. P_a ve P_b olasılıkları sırasıyla A ve B oyuncusunun oyunu kazanma olasılığı olmak üzere bu iki değerin birbirine oranı aşağıdaki gibidir:

$$\frac{P_a}{P_b} = \frac{\sum_{i=1}^{a}\left(\frac{q}{p}\right)^i}{\sum_{i=a+1}^{b}\left(\frac{q}{p}\right)^i} = \frac{\left(\left(\frac{q}{p}\right) + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^a\right)}{\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{a+1} + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}\right)}. \tag{2.33}$$

(2.33) ve $P_a + P_b = 1$ eşitlikleri kullanılarak aşağıdaki sonuçlar bulunur:

$$P_a\left(\frac{q}{p}\right)^{a+1}\sum_{i=0}^{b-1}\left(\frac{q}{p}\right)^i = P_b\left(\frac{q}{p}\right)\sum_{i=0}^{a-1}\left(\frac{q}{p}\right)^i,$$

$$P_a\left(\frac{q}{p}\right)^a\frac{(q/p)^b - 1}{(q/p) - 1} = P_b\frac{(q/p)^a - 1}{(q/p) - 1},$$

$$P_a\frac{(q/p)^{a+b} - (q/p)^a}{(q/p)^a - 1} = P_b,$$

$$P_a + P_b = P_a + P_a\frac{(q/p)^{a+b} - (q/p)^a}{(q/p)^a - 1} = P_a\frac{(q/p)^{a+b} - 1}{(q/p)^a - 1} = 1.$$

Bu durumda eğer $p \neq q$ ise

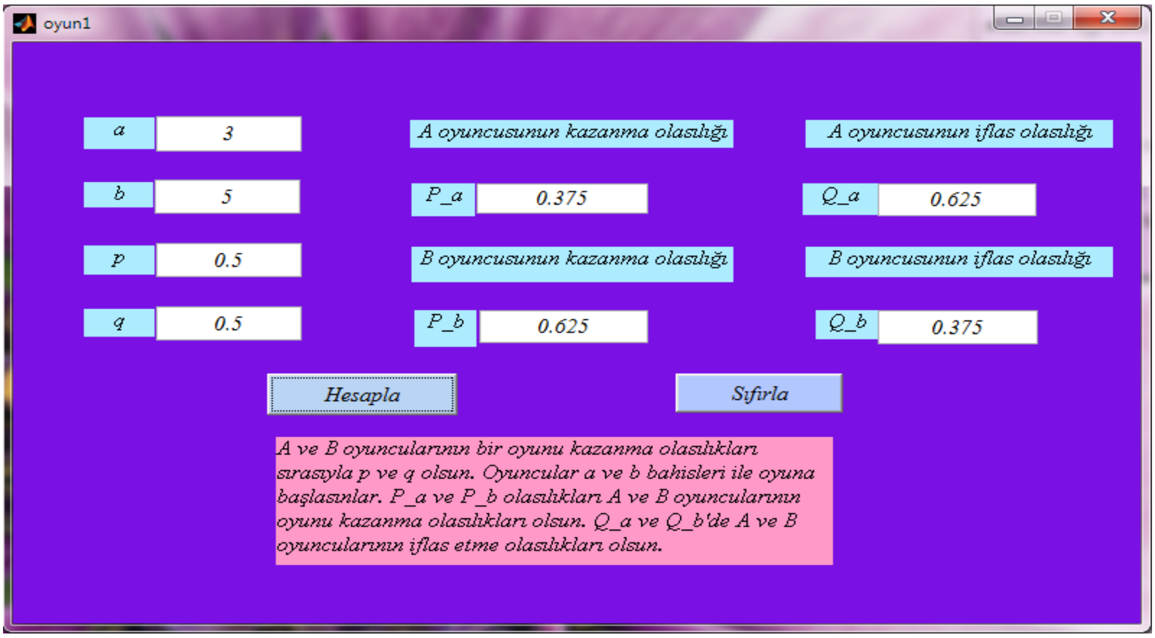
$$P_a = \frac{(q/p)^a - 1}{(q/p)^{a+b} - 1}$$

dır. Eğer p ve q değerleri $1/2$'ye giderse

$$\lim_{(p,q)\to\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} P_a = \lim_{(p,q)\to\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} \frac{(q/p)^a - 1}{(q/p)^{a+b} - 1} = \frac{a}{a+b}$$

dır. Yani A oyuncusunun oyunu kazanma olasılığı $P_a = \frac{a}{a+b}$ ifadesine eşittir. Aynı şekilde B oyuncusunun oyunu kazanma olasılığı ise $P_b = \frac{b}{a+b}$ ifadesine eşittir.

Örnek olarak A oyuncusu $3\,TL$ ve B oyuncusu $5\,TL$ ile oyuna başlasın. Oyunda $p = q = \frac{1}{2}$ olasılıkları bu şekilde seçilmiştir. Bu durumda A oyuncusunun oyunu kazanma olasılığı $P_a = 0.375$ ve oyunu kaybetme olasılığı 0.625'dir. Aynı şekilde B oyuncusunun oyunu kazanma olasılığı $P_b = 0.625$ ve oyunu kaybetme olasılığı 0.375'dir. Bu oyun için sonuçlar aşağıda Şekil 2.8'de gösterilen MATLAB Grafik Kullanıcı Arayüzü (GUI) ile hazırlanan arayüz yardımıyla bulunmuştur.



Şekil 2.8. Bir oyunda oyuncuların kazanma ve iflas etme olasılıkları

2.5. Rastgele Yürüyüş Süreci İçin Ark Sinüs Kanunu

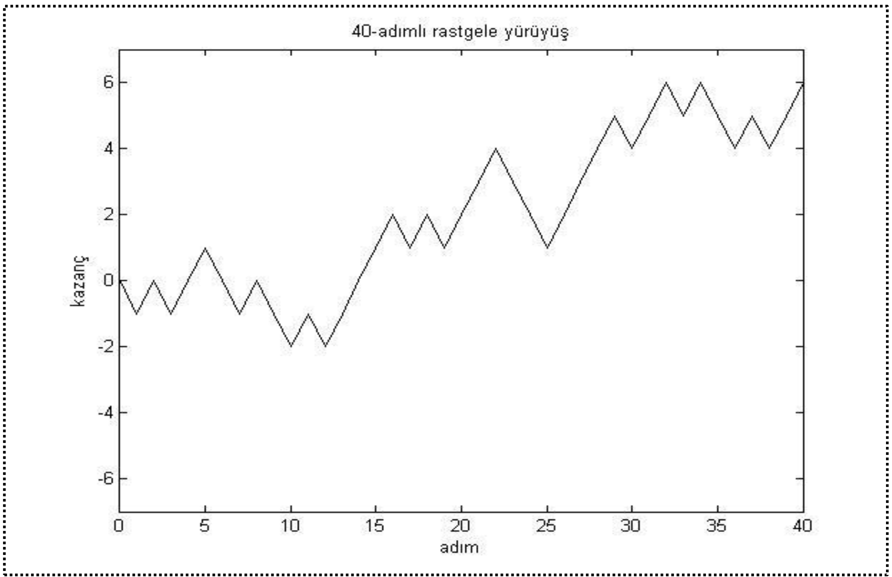
Rastgele yürüyüş sürecinin en bilinen örneklerinden biri olan ark sinüs kanunu ifade etmek için öncelikle bu kanunu en iyi şekilde açıklayan örnek olan yazı-tura oyunu hakkında genel bilgi verilsin.

2.5.1. Yazı-Tura Oyunu

A ve B oyuncuları bir yazı-tura oyunu oynasınlar. Bu oyunda düzgün bir para defalarca atılsın. Her tura atıldığında A oyuncusu B oyuncusundan $1\ TL$ alsın ve her yazı geldiğinde ise A oyuncusu B oyuncusuna $1\ TL$ versin. Örnek olarak bir paranın 40 atılışının sonuçları aşağıdaki gibidir:

$YTYTTYYTYYTYTTTTYTYTTTYYYTTTTYTTYTYYTYTT.$

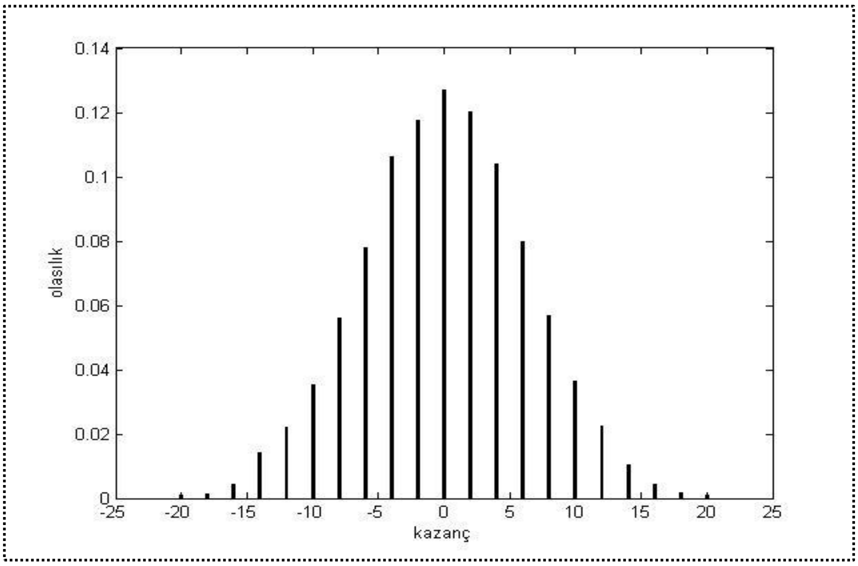
Bu sonuçların grafiği ise aşağıdaki gibi elde edilmiştir:



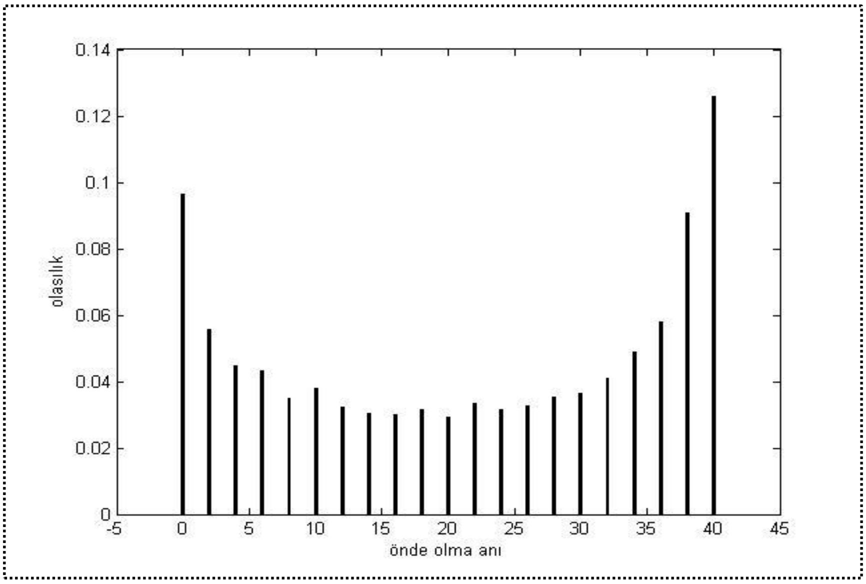
Şekil 2.9. Bir paranın 40 atılışının yapıldığı yazı-tura oyunu sonucunda A oyuncusunun kazancı

Bu oyun sonunda A oyuncusu $6\ TL$ kazanmış olur. O halde A oyuncusunun $j\ TL$ kazanma olasılığı nedir sorusu sorulabilir, burada j sayısı -40 ile 40 arasında her hangi bir çift sayı olabilir. Turaların sayısı yazıların sayısına eşit olduğunda en yüksek olasılıkla j'nin değerini 0 olarak tahmin etmek uygundur. Benzer şekilde en düşük olasılıkla $j = \pm 40$ olarak tahmin edilir. Bu oyunda bir diğer soru ise bir paranın 40 atılışının kaçında A oyuncusu öndedir? Şekil 2.9'a bakarak A oyuncusunun kazançları pozitif olduğu zaman önde olduğu görülmektedir, eğer önde olmasını sağlayan atılışlar öğrenilmek istenirse A oyuncusunun kazancı 0 olduğu zaman bir kural elde edilmelidir. Kural ise şöyledir; A oyuncusunun kazancı 0 olduğu zaman eğer önceki atışta öndeyse ve eğer önceki atışta arkada değilse A oyuncusu öndedir. Bu kurala göre yukarıda verilen 40 atış örneğinde A

oyuncusunun önde olma anları 28’dır. Önseziye dayanarak en yüksek ihtimalle önde olma anlarının 20 olduğu ve en düşük ihtimalle önde olma anlarının ise 0 ya da 40 olduğu söylenebilir. Bu oyun için bir paranın 10000 atılışı yapılmıştır ve MATLAB programı kullanılarak simülasyon elde edilmiştir. Sonuçlar aşağıdaki grafiklerde gösterilmiştir:

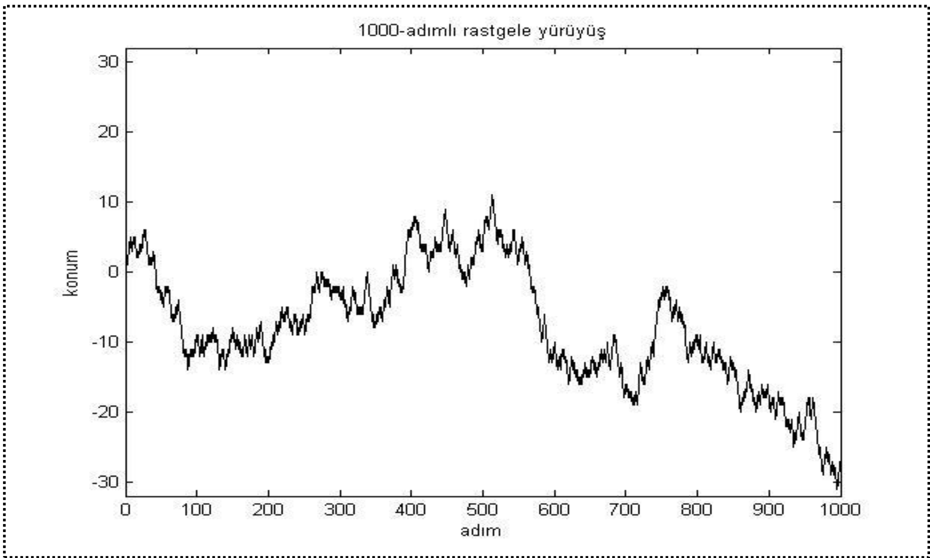


Şekil 2.10. A oyuncusunun kazançlarının dağılımı

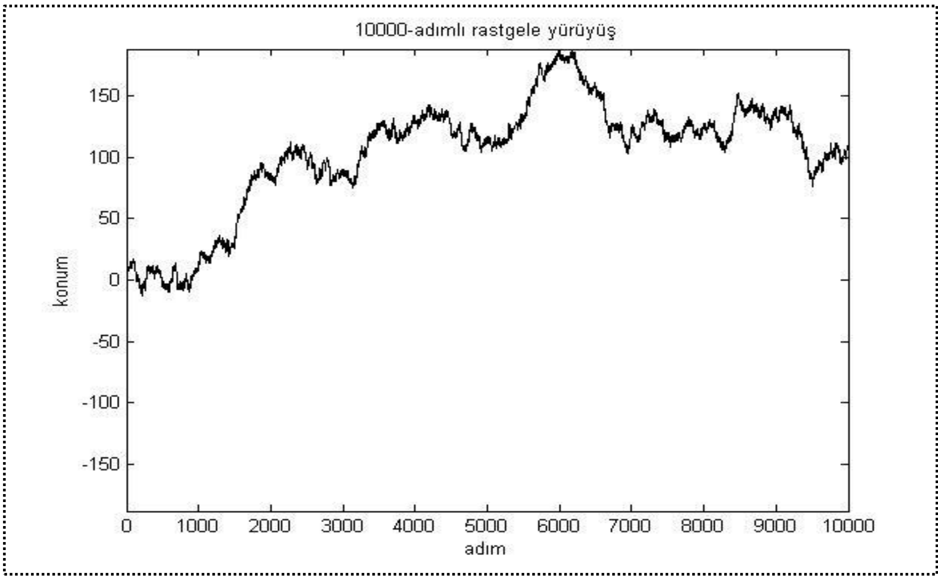


Şekil 2.11. A oyuncusunun önde olma anlarının dağılımı

A oyuncusunun final kazancı hakkındaki önsezi oldukça doğrudur, ancak A oyuncusunun önde olduğu anların sayısı hakkındaki önsezi ise tamamen yanlıştır. Simülasyon en düşük olasılıkla önde olma anlarının sayısının 20 olduğunu ve en yüksek olasılıkla ise 0 ya da 40 olduğunu gösteriyor. Bu aslında doğrudur, A oyuncusunun kazançlarının grafiğine bakarak ve büyük sayıda atışların yapıldığı yazı-tura oyunu oynayarak bunun doğru olduğu gösterilebilir. Şekil 2.12'de bir paranın 1000 atılışının yapıldığı oyun ve benzer şekilde Şekil 2.13'de ise bir paranın 10000 atılışının yapıldığı oyun için MATLAB programı ile simülasyon yapılarak aşağıdaki grafikler elde edilmiştir:



Şekil 2.12. Bir paranın 1000 atılışının yapıldığı yazı-tura oyununda A oyuncusunun kazançları



Şekil 2.13. Bir paranın 10000 atılışının yapıldığı yazı-tura oyununda A oyuncusunun kazançları

Şekil 2.13'de A oyuncusu zamanın çoğunda ileridedir. Bu dikkate değer bir olaydır, ancak oyun yeteri kadar devam ederse A oyuncusunun kazançları 0'a geri gelmeye devam edecektir ama bunun olması için çok uzun bir zamanın geçmesi gerekmektedir.

2.5.2. Ark Sinüs Kanunu

$2m$ uzunluklu bir rastgele yürüyüşün orijine son dönüşünün $2k$ anında olması olasılığı aşağıdaki ifade ile verilsin:

$$\frac{\binom{2k}{k}\binom{2m-2k}{m-k}}{2^{2m}} = r_{2k}r_{2m-2k} \; 0 \leq k \leq m.$$

($k = 0$ durumu hiçbir pozitif anda orijine dönüş olmayan bütün yolların sayısını içerir). Burada son dönüşü $2k$ anında orijinde oluşan bir yol birleştirilmiş iki yoldan meydana gelir. İlki orijinde başlayıp orijinde biten $2k$ uzunluklu bir yoldur ve diğeri ise orijinde başlayan ama hiçbir zaman orijine dönmeyen $2m - 2k$ uzunluklu bir yoldur. Eğer $2k$ anında son dekleştirmeye sahip olan $2m$ uzunluklu bir rastgele yürüyüşün olasılığı $a_{2k,2m}$

olarak gösterilirse $a_{2k,2m} = r_{2k}r_{2m-2k}$ eşitliği elde edilir. a'nın basit bir fonksiyonunun dağılımı için asimptotik denklik aşağıdaki gibidir:

$$r_{2k} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}}.$$

Dolayısıyla $m - k \to \infty$ iken,

$$a_{2k,2m} \sim \frac{1}{\pi\sqrt{k(m-k)}}$$

ifadesi elde edilir. Bu son ifade

$$\frac{1}{\pi m\sqrt{(k/m)(1-k/m)}}$$

olarak yazılabilir. Böylece eğer $0 < x < 1$ için

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$$

tanımlanırsa,

$$a_{2k,2m} \approx \frac{1}{m} f\left(\frac{k}{m}\right)$$

olarak elde edilir. $\approx$ işaretinin sebebi ise artık k'nın büyük değer olarak alınmasının gerekli olmamasıdır. Bunun anlamı $[0,1]$ aralığında sürekli yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ ile $a_{2k,2m}$ kesikli dağılımının yerleri değiştirilebilir ve iyi bir yaklaşım elde edilebilir. Özellikle eğer x sayısı $(0,1)$ aralığında sabit bir reel sayı ise

$$\sum_{k<xm} a_{2k,2m} \approx \int_0^x f(t)\,dt$$

ifadesi elde edilir. Bu $f(x)$'in bir ters türeve sahip olduğu sonucunu verir. Böylece

$$\sum_{k<xm} a_{2k,2m} \approx \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}$$

olarak yazılabilir.

Bu son fonksiyonun grafiğinden bir minimumunu $x = 1 / 2$'de aldığı ve bu nokta civarında simetrik olduğu görülür. İfade edildiği gibi m anından sonra $2m$ uzunluklu yolların yarısı hiçbir denkleştirmeye sahip değildir. Bir rastgele yürüyüş $(0,0)$ ile (m, S_m) arasında bağlantılı olan bir poligonal (çokgen) çizgi üzerinde gösterilebilir. Bu yorum altında uzunluğu $2m$ olan rastgele yürüyüşün $2m$ poligonal çizgi bölmelerinin (segmentinin) $2k$ tanesinin t ekseninin yukarısında olma olasılığı $b_{2k,2m}$'dır.

$b_{2k,2m}$ olasılığı çoğu kez iki oyunculu bir oyuna dayanarak açıklanır (bu oyun hatırlanılacağı gibi yazı-tura oyunudur). Eğer rastgele yürüyüş n anında t-ekseninin yukarısında ya da rastgele yürüyüş n anında t-ekseni üzerinde ama $n-1$ anında t-ekseninin yukarısında ise A oyuncusunun önde olacağı söylenir (0 anında hiçbir oyuncu önde olmayacaktır). Burada $2m$ uzunluklu bir oyunda A oyuncusunun önde olduğu atış sayısı kaç tanedir sorusu sorulabilir. Çoğu kişinin bu soruya cevabı m defadır. Ama sonraki teorem A oyuncusunun en düşük ihtimalle önde olacağı anın m olduğunu ve en yüksek ihtimalle önde olma anının ise 0 ya da $2m$ olduğunu ifade eder.

Teorem 2.5.1. Eğer iki oyuncu $2m$ uzunluklu bir Yazı-Tura oyunu oynarlarsa ilk oyuncunun $2k$ anında önde olma olasılığı $a_{2k,2m}$ sayısına eşittir.

İspat. Teoremi ispat etmek için kullanılan $b_{2k,2m} = \alpha_{2k,2m}$ ifadesinin doğru olduğu tanımlardan görülmektedir. Bu durumda $b_{2m,2m} = r_{2m}$ ve $b_{0,2m} = r_{2m}$ ifadeleri doğru olduğundan $b_{2k,2m} = \alpha_{2k,2m}$ eşitliğini $1 \leq k \leq m-1$ için geçerli olduğunu ispat etmek yeterlidir. Bunun için t-ekseninin yukarısında $1 \leq k \leq m-1$ için $2k$ parçaya sahip olan $2m$ uzunluklu yolların sayısını hesaplayarak b'yi ve g'yi içeren bir yineleme elde edilmelidir. Bu yollar topluluğunu hesaplamak için ilk dönüşün $2j$ anında gerçekleştiği kabul edilir ve burada $1 \leq j \leq m-1$'dır. Burada düşünülecek iki durum vardır. İlk $2j$ sonuçları esnasında yol ya t-ekseninin yukarısında ya da altındadır. İlk durumda yolun tam olarak $t = 2j$ ve $t = 2m$ arasında t-ekseninin yukarısında $(2k - 2j)$ çizgi bölmelerine sahip olduğu doğrudur. İkinci durumda yolun tam olarak $t = 2j$ ve $t = 2m$ arasında t-ekseninin yukarısında $2k$ çizgi bölmelerine sahip olduğu doğrudur.

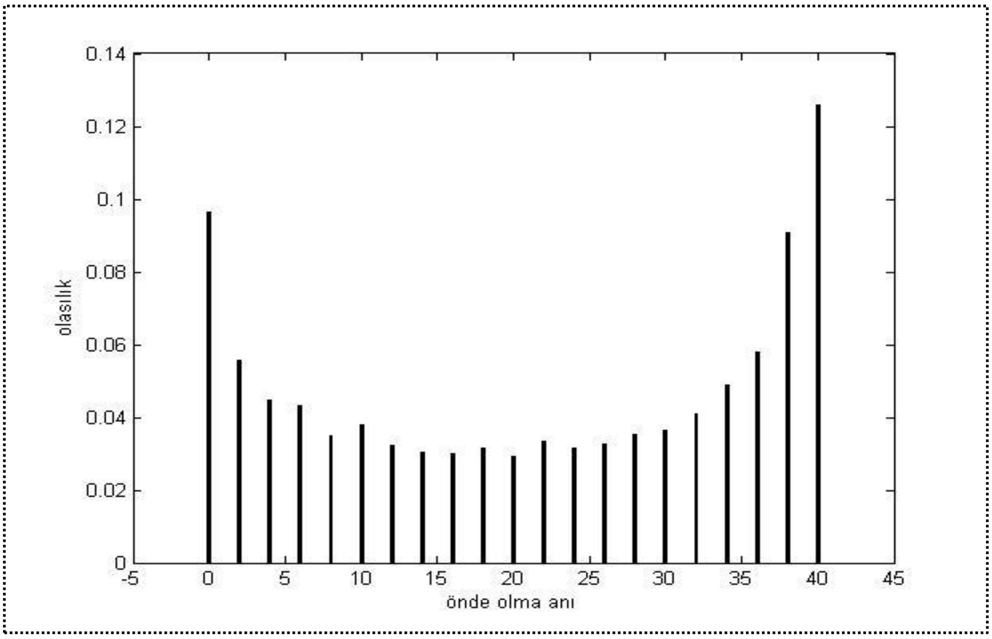
Şimdi yukarıda tanımlanmış çeşitli şekildeki yolların sayısı hesaplanmalıdır. İlk dönüşü $2j$ anında meydana gelen ve t-ekseninin yukarısına uzanan çizgi bölmelerinin hepsinin $2j$ uzunluklu yollarının sayısı $(1/2)2^{2j}g_{2j}$ ifadesine eşittir. Bu aynı zamanda ilk dönüşü $2j$ anında gerçekleşen ve t-ekseninin aşağısına uzanan çizgi bölmelerinin hepsinin $2j$ uzunluklu yollarının sayısına eşittir. t-ekseninin yukarısında tam olarak $(2k - 2j)$ çizgi bölmelerine sahip olan $(2m - 2j)$ uzunluklu yolların sayısı $b_{2k-2j,2m-2j}$'dır. Son olarak, t-ekseninin yukarısında tam olarak $2k$ çizgi bölmelerine sahip olan $(2m - 2j)$ uzunluklu yolların sayısı $b_{2k,2m-2j}$'dır. Böylece aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$b_{2k,2m} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} g_{2j}b_{2k-2j,2m-2j} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-k} g_{2j}b_{2k,2m-2j}.$$

Son olarak, $b_{2k,2m} = \alpha_{2k,2m}$ eşitliğinin $m < n$ için doğru olduğunu göstermeye çalışalım. Teorem 2.2.2'den aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
b_{2k,2n} &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} g_{2j}\alpha_{2k-2j,2m-2j} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-k} g_{2j}\alpha_{2k,2m-2j} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} g_{2j}\, r_{2k-2j}r_{2m-2k} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-k} g_{2j}\, r_{2k}r_{2m-2j-2k} \\
&= \frac{1}{2}r_{2m-2k}\sum_{j=1}^{k} g_{2j}r_{2k-2j} + \frac{1}{2}r_{2k}\sum_{j=1}^{m-k} g_{2j}r_{2m-2j-2k} \\
&= \frac{1}{2}r_{2m-2k}r_{2k} + \frac{1}{2}r_{2k}r_{2m-2k} = r_{2k}r_{2m-2k}.
\end{aligned}$$

Böylece $b_{2k,2n} = \alpha_{2k,2n}$ eşitliği ispatı tamamlar. ❑



Şekil 2.14. A oyuncusunun önde olma anları

Şekil 2.14'de A oyuncusunun önde olma anlarının dağılımı gösterilmektedir. Bu grafik 40 atıştan oluşan bir Yazı-Tura oyununun 10000 defa gerçekleşmesiyle elde edilmiştir. Bu grafiğin simülasyonu MATLAB programı ile yapılmıştır.

Sonraki teorem ark sinüs yoğunluğunun geniş bir alanda geçerli olduğunu ifade etmektedir. Eğer $F(x) = 1 - F(-x)$ ise sürekli dağılım fonksiyonu $F(x)$'in simetrik olduğu bilinmektedir (eğer ξ simetrik dağılım fonksiyonuna sahip bir rastgele değişken ise her hangi bir x için, $P(\xi \leq x) = P(\xi \geq -x)$ yazılabilir). F'nin sürekli ve simetrik olduğu yerlerde $F(x)$ dağılımına sahip her toplanan sayının n uzunluklu bir rastgele yürüyüşe sahip olduğu durumda yürüyüşün ilk maksimum indisi için tek indis k'dır. Burada $S_k > S_0, \dots, S_k > S_{k-1}, S_k \geq S_{k+1}, \dots, S_k \geq S_n$'dır. İlk maksimum indis olarak K_n rastgele değişkeni tanımlanır. Aşağıda K_n rastgele değişkenini içeren teorem verilmiştir.

Teorem 2.5.3. Simetrik ve sürekli dağılım fonksiyonu F ve α ise 0 ile 1 arasında sabit bir reel sayı olsun. Bu durumda $n \to \infty$ iken

$$P(K_n < n\alpha) \to \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\alpha}$$

dır (Grinstead ve Snell, 1997). ❑

3. YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR

3.1. Binomial Rastgele Yürüyüş

Rastgele yürüyüş teorisi hisse senedi fiyatlarının geçmiş fiyat hareketleri ile tahmin edilemeyeceğini ve bu fiyat hareketlerinin rastgele olduğunu belirtmektedir. Çünkü hisse senedi fiyatının ard arda artması ya da azalması rastgeledir, hisse senedi fiyatının bir dönem artması sonraki dönemde artacağı anlamına gelmez. Rastgele yürüyüş sürecinde olduğu gibi bir parçacığın ilk adımını sağa atması sonraki adımını da sağa atacağı anlamına gelmez çünkü adımlar birbirinden bağımsızdır. Dolayısıyla binomial model de bir rastgele yürüyüş sürecidir. Çünkü binomial model hisse senedi fiyatının bir dönem sonra artması ya da azalması gibi iki durumdan oluşması nedeniyle rastgele yürüyüş sürecine uymaktadır. Aynı şekilde trinomial model de binomial modelin genişletilmiş hali olduğundan rastgele yürüyüş sürecidir. Trinomial modelin binomial modelden farkı ise bir dönem sonra iki yerine üç farklı fiyat seçeneği sunmasıdır. Trinomial model, zaman aralığı sonunda veya vadede hisse senedi fiyatının belli olasılıklarla artacağını, sabit kalacağını ve azalacağını varsaymaktadır.

3.2. Hisse Senedi Fiyatının Binomial Model ile Hesaplanması

Bilindiği gibi kesikli zamanlı süreç rastgele bir süreçtir. Bu süreç zaman içinde belirli anlarda hisse senedi fiyatlarının davranışlarını belirlemektedir. Kesikli zamanlı süreçte parametre zamandır. Belirli değerleri alan zaman $T = \{0,1,2,3,\dots,n\}$ şeklinde bir zaman dizisi meydana getirir. Burada T gün, ay, yıl gibi bir zaman aralığını göstermektedir. S hisse senedinin fiyatını ifade eden bir değişken olmak üzere S_t değişkeni de hisse senedinin t anındaki değerini göstermektedir. Örneğin S_0 hisse senedinin başlangıç anındaki değerini göstermektedir. Benzer şekilde zaman parametresi 1 günlük zaman aralıklarını tanımlıyorsa S_1'de 1 günün sonundaki hisse senedinin değeri olacaktır.

Binomial model kesikli zamanlı bir süreçte hisse senedi fiyat hareketlerini inceleyen bir modeldir. Buna göre binomial model hisse senedi fiyatlarını belirlenen zaman aralıklarında hesaplamaktadır. Eğer S_t değişkeni binomial model ile hesaplanan $S_0, S_1, \dots, S_n$ değerlerini $p_0, p_1, \dots, p_n$ olasılıkları ile alıyorsa ve $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ şartı gerçekleşiyorsa binom dağılımına sahiptir denilmektedir. Buna göre binomial modelde S_t

kesikli bir rastgele değişkendir. Olasılık teorisinde binom dağılımı; gerek kendi özellikleri gerekse normal dağılımın esasını oluşturması nedeniyle büyük önem taşımaktadır.

Binom modelinde hisse senedinin fiyatının artması olasılığı p**,** hisse senedinin fiyatının azalması olasılığı $1-p$ olmak üzere hisse senedinin belirlenen zaman aralığında (1 gün vs.) n deneme içinde x kere fiyatının artması olasılığı $q=1-p$ olmak üzere,

$$p(x)=\binom{n}{x}p^{x}q^{n-x}$$

denklemi yardımıyla hesaplanmaktadır (Alpan, 1999).

3.3. Tek Dönemli Binomial Model

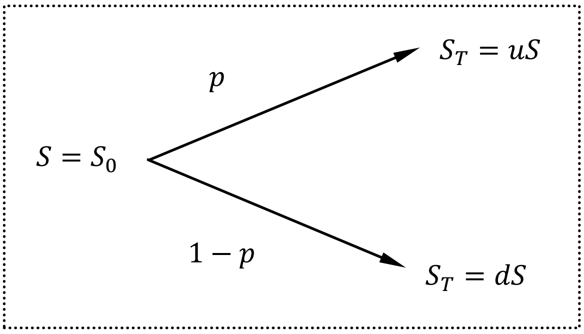
Tek dönemli binomial model, tüm binomial ve hatta terim sayısı daha fazla olan (multinomial) modellerin temelini oluşturmaktadır. Tek dönemli binomial modelde bir menkul kıymetin belirli çok kısa bir zaman aralığının sonundaki fiyatı sadece iki değer alabilmektedir. Modelin adı da bu iki terimlilik durumundan kaynaklanmaktadır. Binomial modelin şekilsel tasviri ise temelde bir karar ağacından ibarettir (Gökçe, 2001).

Cox-Ross-Rubenstein modeli olarak bilinen binomial model farklı zaman aralıklarında hisse senedinin fiyatını iki seçenek dahilinde tahmin eder. Binomial modelde bir zaman aralığından diğer zaman aralığına geçerken hisse senedi fiyatının belli olasılıkla artacağı (p) veya azalacağı $(1-p)$ öngörülür ve ilerideki zaman aralığında bir önceki zaman aralığındaki hisse senedi fiyatına bağlı iki farklı fiyat bulunur. Dolayısıyla hisse senedi fiyat hareketleri kesikli bir dağılım olan binom dağılımının karakterine uymaktadır. Bu modelde zaman aralıklarının uzunluğu mümkün olduğunca kısa tutulmalıdır. Bu şekilde bulunan hisse senedi fiyatının güvenilirliği artırılır.

Hisse senedinin gelecekteki fiyatını bulmaya çalışan binomial süreci tanımlayan binomial model hisse senedi fiyatının her değeri alabileceğini varsayan fizikteki moleküllerin hareketlerini tanımlayan Brown sürecinin kısıtlandırılmış bir şeklidir. Buna göre binomial modeldeki kısıtlar hisse senedi fiyatının bir sonraki zaman aralığında ya artacağı ya da azalacağı şeklinde sadece iki duruma bağlı olarak tanımlanmaktadır.

Belirli zaman aralıklarında hisse senedinin fiyatını hesaplayabilen binom modeli Şekil 3.1'deki gibi ifade edilir. Burada başlangıçta hisse senedinin fiyatı $S=S_0$

değerindedir. Δt gibi bir zaman sonra hisse senedinin fiyatı p olasılığı ile uS ya da $1-p$ olasılığı ile dS değerine eşit olacaktır.

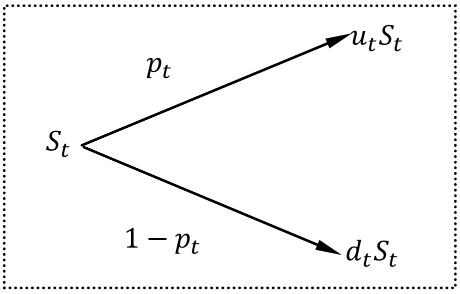


Şekil 3.1. Tek dönem için hisse senedi fiyatını binomial model ile tahmin etme

Binomial modelde belirlenen herhangi bir Δt zaman aralığı içinde hisse senedinin beklenen getiri oranı $\mu\Delta t$ ile ve getiri oranlarının varyansı $\sigma^2\Delta t$ ile hesaplanmaktadır. Bir binomial modelde yer alan u, d ve p değişkenlerine bağlı olarak aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \qquad d = \frac{1}{u}, \qquad p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}.$$

Birinci zaman aralığı sonunda hisse senedinin fiyatı $Se^{\mu\Delta t}$ ile hesaplanmaktadır. Buna göre olasılık değerleri de dikkate alınarak birinci zaman aralığı sonundaki hisse senedi fiyatı bulunur, r yıllık faiz oranı ve $t.$ zaman aralığı sonunda hisse senedi fiyatının değişim oranı $e^{r\Delta t}$ olmak üzere gelecekte ($t.$ zaman aralığı sonunda) riskin olmadığı ortamda hisse senedi fiyatını hesaplayan $S_t e^{\mu\Delta t}$ ifadesi $S_t e^{r\Delta t}$ ifadesine eşit olmaktadır.



Şekil 3.2. Binomial model ile $t.$ zaman aralığı sonunda oluşan hisse senedi fiyatının bulunması

Şekil 3.2 $t.$ zaman aralığı sonunda hisse senedi fiyatını ifade eden S_{t+1}'in p_t olasılıkla u_tS_t değerini ve $1-p_t$ olasılıkla d_tS_t değerini alacağını göstermektedir. $t.$ zaman aralığı sonunda hisse senedi fiyatı binomial model ile aşağıdaki formül yardımıyla bulunur:

$$S_te^{r\Delta t} = E(S_{t+1}) = S_t(p_tu_t + (1-p_t)d_t)\,.$$

Buradan

$$e^{r\Delta t} = p_tu_t + (1-p_t)d_t$$

elde edilir. S_{t+1} değerinin varyansı, dolayısı ile standart sapması aşağıdaki eşitlik ile hesaplanır:

$$\begin{aligned} Var(S_{t+1}) &= E((S_{t+1})^2) - \left(E(S_{t+1})\right)^2 \\ &= (S_t)^2\{p_t(u_t)^2 + (1-p_t)(d_t)^2 - [p_tu_t + (1-p_t)d_t]^2\} \\ &= (S_t)^2(p_t(u_t)^2 + (1-p_t)(d_t)^2 - e^{2r\Delta t}). \end{aligned}$$

$e^{r\Delta t} = p_tu_t + (1-p_t)d_t$ hisse senedi fiyatının bir zaman aralığı sonundaki değişim oranını göstermektedir. Bu eşitliğin başlangıçla vade sonu arasındaki tüm zaman aralıklarında genelleştirebilmesi için $p_t = p,\ u_t = u,\ d_t = d$ eşitlikleri kabul edilir. Bu eşitliklerin kabul edilmesi hisse senedi opsiyonunun fiyatını tahmin etmeden önce hisse senedinin fiyatlarının hesaplandığı başlangıç ile opsiyonun vadesi arasındaki rastgele süreçteki tüm zaman aralıklarında hisse senedi fiyatının artış oranı (u), azalış oranı (d) ve olasılık değerleri (p) sabit kabul edilmektedir. Buna göre aşağıdaki denklem yazılır:

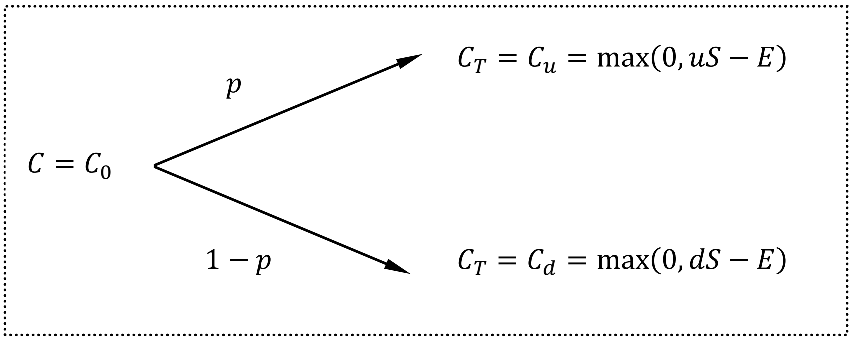
$$pu + (1 - p)d = e^{r\Delta t}.$$

Buradan binomial modelin parametrelerinin en açık formları aşağıdaki gibidir:

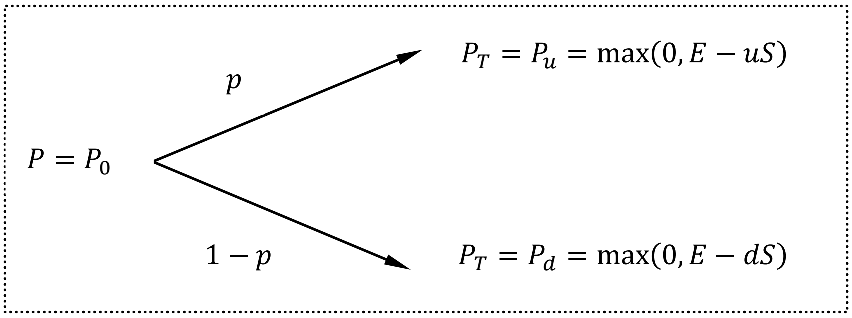
$$p = \frac{e^{r\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}$$

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \qquad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, \qquad u = \frac{1}{d}\cdot$$

Binomial model ile hisse senedinin gelecekteki zaman dilimlerinde fiyatı tahmin edilerek buradan hisse senedine bağlı olarak yazılmış satın alma opsiyonunun bugünkü fiyatı tahmin edilir.



Şekil 3.3. Tek dönem için hisse senedi satın alma opsiyonunun fiyatını tahmin etme



Şekil 3.4. Tek dönem için hisse senedi satma opsiyonunun fiyatını tahmin etme

Ayrıca hisse senedi satma opsiyonunun bugünkü fiyatı yukarıda gösterilen şekildeki gibi tahmin edilir. Bir satın alma (Call) opsiyonunun kullanıldığı andaki kullanım fiyatı hisse senedinin fiyatından büyük ise opsiyon iptal edilecektir. Çünkü opsiyon sahibi hisse senedini piyasadan daha ucuza temin edebilecektir. Bu durumda opsiyon değersizdir ve değeri sıfıra eşittir. Vade sonunda T anında satın alma opsiyonunun fiyatı C_T aşağıdaki denklem ile bulunur:

$$C_T = \max(0, S_T - E).$$

Binomial model ile vade sonuna doğru ve vade içinde bulunan hisse senedi fiyatı S_T olmak üzere vade sonundaki satın alma opsiyonunun fiyatı $C_T = S_T - E$ eşitliği ile hesaplanır. Bu eşitliğin sonucu negatif çıkarsa $C_T = 0$ olur.

Benzer şekilde satma (Put) opsiyonu, opsiyonu alan tarafından ileride hisse senedi fiyatının düşme ihtimalini göz önüne alınarak yapılan bir işlemdir. Satma opsiyonunu alan taraf opsiyonun kullanma zamanı geldiğinde hisse senedi opsiyonundaki kullanım fiyatı bu hisse senedinin piyasadaki fiyatından büyük ise opsiyonu kullanır ve elindeki hisse senetlerini kullanım fiyatından satar. Aksi halde hisse senedi opsiyonunun kullanım fiyatı piyasadan küçükse opsiyonunu kullanıp hisse senetlerini piyasadan daha ucuza satmaz yani opsiyonu kullanmaz. Vade sonunda T anında hisse senedi satma opsiyonunun fiyatı P_T aşağıdaki denklem ile bulunur:

$$P_T = \max(0, E - S_T).$$

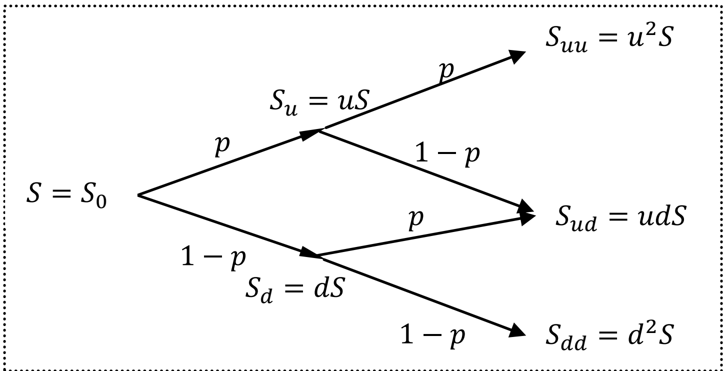
Binomial model ile vade sonuna doğru ve vade içinde bulunan hisse senedi fiyatı S_T olmak üzere vade sonundaki satma opsiyonunun fiyatı $P_T = E - S_T$ eşitliği ile hesaplanır. Bu eşitliğin sonucu negatif çıkarsa $P_T = 0$ olur.

C_T ve P_T sırasıyla bir satın alma ve satma opsiyonunun T anındaki değerleridir. T anında eğer bu opsiyonlar satın alınmak istenirse C_T ve P_T'nin değeri kadar para ödemek gerekir. Buradaki T anı opsiyonun vadesini ifade etse de opsiyonun fiyatının hesaplandığı an t ve opsiyonun vadesi T olmak üzere bu zamanlar arasında herhangi bir anda opsiyonun fiyatı (primi) opsiyon fiyatlandırma modelleri ile hesaplanır. Bu şekilde opsiyonun vadeden önce el değiştirmesi sağlanır.

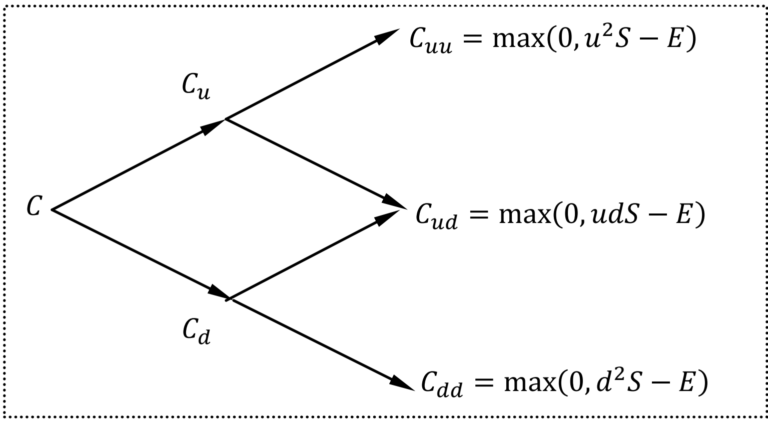
Opsiyon fiyatlandırma modellerinden olan binomial model ile vadeye kadar farklı zaman aralıklarında hisse senedinin belli olasılıklar dahilinde gerçekleşecek olan fiyatları bulunur. Bu tahmin edilen fiyatlara bağlı olarak hisse senedi üzerine yazılmış olan opsiyonun fiyatı bulunur. Binomial model ile başlangıçta opsiyonu satın almak için ödenecek fiyat bulunurken öncelikle hisse senedinin vadedeki ve vadeye kadar olan zaman aralıklarındaki hisse senedi fiyatları bulunur.

3.4. İki Dönemli Binomial Model

İki dönemli binomial model Şekil 3.5'de gösterilmiştir. Görüldüğü gibi ikinci zaman aralığı sonunda üç değişik hisse senedi fiyatı oluşmaktadır. Bu fiyatlar u^2S, udS ve d^2S'dır.



Şekil 3.5. İki dönem için hisse senedi fiyatlarının binomial model ile hesaplanması

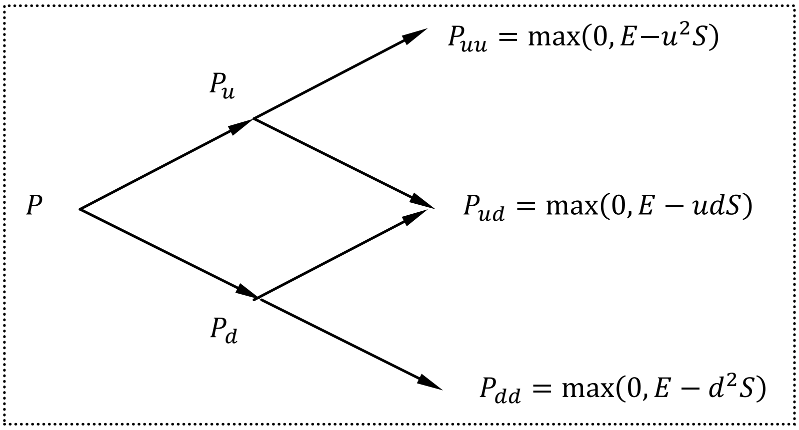


Şekil 3.6. İki dönem için hisse senedi satın alma opsiyonunun fiyatını tahmin etme

Binomial model ile ikinci zaman aralığı sonunda Şekil 3.6'den de görüldüğü gibi hisse senedi satın alma opsiyonu için üç değişik fiyat oluşmaktadır. İlk fiyat vade sonunda hisse senedi fiyatı $S_T = u^2S$ olmak üzere satın alma opsiyonu $C_{uu} = S_T - E$ ifadesine eşit olmaktadır. Bu eşitliğin sonucu negatif çıkarsa $C_{uu} = 0$ olur. Diğer iki fiyatta bu işlem sonucu elde edilir. Bundan sonra başlangıca doğru var olan zaman aralıklarında satın alma opsiyonunun belli olasılıklarla gerçekleşebilecek fiyatları aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$C_u = \big(C_{uu}p + C_{ud}(1-p)\big)e^{-r\Delta t},$$
$$C_d = \big(C_{ud}p + C_{dd}(1-p)\big)e^{-r\Delta t},$$
$$C = \big(C_u p + C_d(1-p)\big)e^{-r\Delta t}.$$

Böylece başlangıç noktasına kadar gelinerek opsiyonun ilk satıldığı ana ilişkin satın alma opsiyonunun fiyatı olan C değeri bulunur. Bu opsiyon fiyatı bir tahmindir.



Şekil 3.7. İki dönem için hisse senedi satma opsiyonunun fiyatını tahmin etme

Binomial model ile ikinci zaman aralığı sonunda Şekil 3.7'den de görüldüğü gibi hisse senedi satma opsiyonu için üç değişik fiyat oluşmaktadır. İlk fiyat vade sonunda hisse senedi fiyatı $S_T = u^2S$ olmak üzere satma opsiyonu $P_{uu} = E - S_T$ ifadesine eşit olmaktadır. Bu eşitliğin sonucu negatif çıkarsa $P_{uu} = 0$ olur. Diğer iki fiyatta bu işlem sonucu elde edilir. Bundan sonra başlangıca doğru var olan zaman aralıklarında satma opsiyonunun belli olasılıklarla gerçekleşebilecek fiyatları aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$P_u = \big(P_{uu}p + P_{ud}(1-p)\big)e^{-r\Delta t},$$
$$P_d = \big(P_{ud}p + P_{dd}(1-p)\big)e^{-r\Delta t},$$
$$P = \big(P_u p + P_d(1-p)\big)e^{-r\Delta t}.$$

Böylece başlangıç noktasına kadar gelinerek opsiyonun ilk satıldığı ana ilişkin satma opsiyonunun fiyatı olan P değeri bulunur. Bu opsiyon fiyatının tahmin değeridir.

Belirlenmiş bir miktardaki hisse senedi, opsiyonun yazıldığı anda belirlenmiş bir fiyat üzerinden ilerideki bir vadede, opsiyon sahibine hisse senedini satın almasını (call) veya satmasını (put) sağlayacak bir hak demek olan satın alma (call) ve satma (put) opsiyonlarının fiyatlandırılmasını içeren örnekler aşağıda verilmiştir:

Örnek 3.4.1. Vadesi bir yıl olan Avrupa tipi hisse senedi satın alma opsiyonunun kullanım fiyatı \$80 olsun. Başlangıçta hisse senedi fiyatının piyasadaki fiyatı \$75 ve yıllık faiz oranı %10, hisse senedinin yıl içindeki fiyat değişim oranlarının standart sapması

%20 olduğuna göre bir yıllık vadeyi üç aylık dört zaman aralığına bölerek binomial model ile hisse senedinin üzerine yazılmış olan satın alma opsiyonun fiyatı tahmin edilmek istensin.

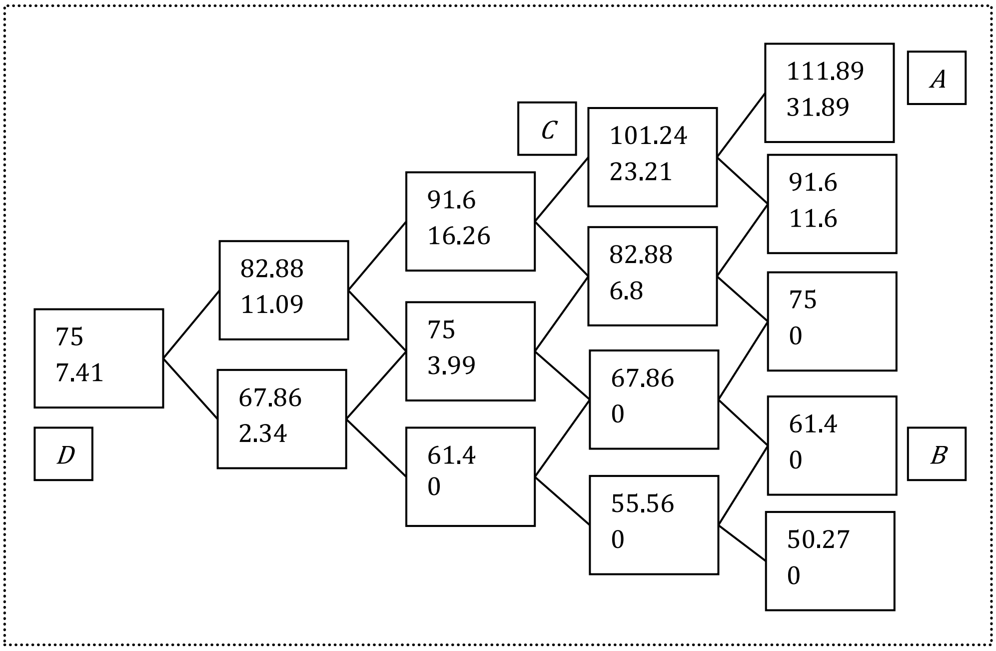
Çözüm. Opsiyon Avrupa tipi olduğu için kesinlikle vadesinde kullanılacaktır. Bu örnekteki satın alma opsiyonu sahibine (satın alana) bir yıl sonunda hisse senedini $80'dan alma hakkı vermektedir. Buna göre opsiyonu satın alan hisse senedinin piyasa fiyatı bir yıl sonunda $80'dan küçükse opsiyonu kullanmaktan vazgeçerek hisse senedini piyasadan $80'ın altında bir fiyattan satın alacaktır. Bu durumda opsiyon kullanılmadığı için değeri sıfır olacaktır. Eğer hisse senedinin piyasa fiyatı $80'ın üzerinde ise opsiyon sahibi satın alma hakkını kullanarak opsiyonu satan kişiden hisse senedini $80 ödeyerek satın alacaktır. Bu durumda hisse senedi satın alma opsiyonunun vade sonundaki değeri, hisse senedinin piyasa fiyatı ile opsiyonun kullanım fiyatı arasındaki farkına eşittir. Problemde verilenler aşağıdaki gibidir:

$$S = \$75, \qquad E = \$80, \quad r = \%10, \quad \sigma = \%20, \quad T = 1\, yıl, \quad \Delta t = 0.25(3/12).$$

Bunlara göre binomial modelin parametreleri aşağıdaki gibidir:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{0.2\sqrt{0.25}} = 1.1052,$$
$$d = \frac{1}{u} = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = 0.9048,$$
$$a = e^{r\Delta t} = 1.0253,$$
$$p = \frac{a-d}{u-d} = \frac{1.0253 - 0.9048}{1.1052 - 0.9048} = 0.6013,$$
$$1 - p = 1 - 0.6013 = 0.3987.$$

Şekil 3.8'de gösterilen binomial modelin düğüm noktalarındaki hisse senedi fiyatları ve hisse senedi satın alma opsiyonu fiyatları MATLAB'da hazırlanan arayüz yardımıyla hesaplanarak aşağıdaki gibi elde edilmiştir:



Şekil 3.8. Bir yıllık Avrupa tipi satın alma (Call) opsiyonu fiyatının dört zaman aralığı için binomial model ile hesaplanması

Düğümlerdeki Hisse Senedi Fiyatları

$\boxed{A}$ düğümündeki hisse senedi fiyatı:

$$S_T = S_t \times u^4 = 75 \times 1.1052^4 \cong 111.89.$$

$\boxed{B}$ düğümündeki hisse senedi fiyatı:

$$S_T = S_t \times u \times d^3 = 75 \times 1.1052 \times 0.9048^3 \cong 61.4.$$

$\boxed{C}$ düğümündeki hisse senedi fiyatı:

$$S_T = S_t \times u^3 = 75 \times 1.1052^3 \cong 101.24.$$

$\boxed{D}$ düğümündeki hisse senedi fiyatı:

$$S_T = 75\ (Başlangıç\ Fiyatı).$$

Düğümlerdeki Hisse Senedi Satın Alma Opsiyonu Fiyatları

$\boxed{A}$ düğümündeki hisse senedi satın alma opsiyonunun fiyatı:

$$E = 80, S_T = 111.89, C_T = \max(0,111.89 - 80) = 31.89.$$

$\boxed{B}$ düğümündeki hisse senedi satın alma opsiyonunun fiyatı:

$$E = 80, S_T = 61.4, C_T = \max(0,61.4 - 80) = 0.$$

$\boxed{C}$ düğümündeki hisse senedi satın alma opsiyonunun fiyatı:

$$C_T = (31.89 \times 0.6013 + 11.6 \times 0.3987) \times e^{-0.25\times 0.1} = 23.21.$$

$\boxed{D}$ düğümündeki hisse senedi satın alma opsiyonunun fiyatı:

$$C_T = (11.09 \times 0.6013 + 2.34 \times 0.3987) \times e^{-0.25\times 0.1} = 7.41.$$

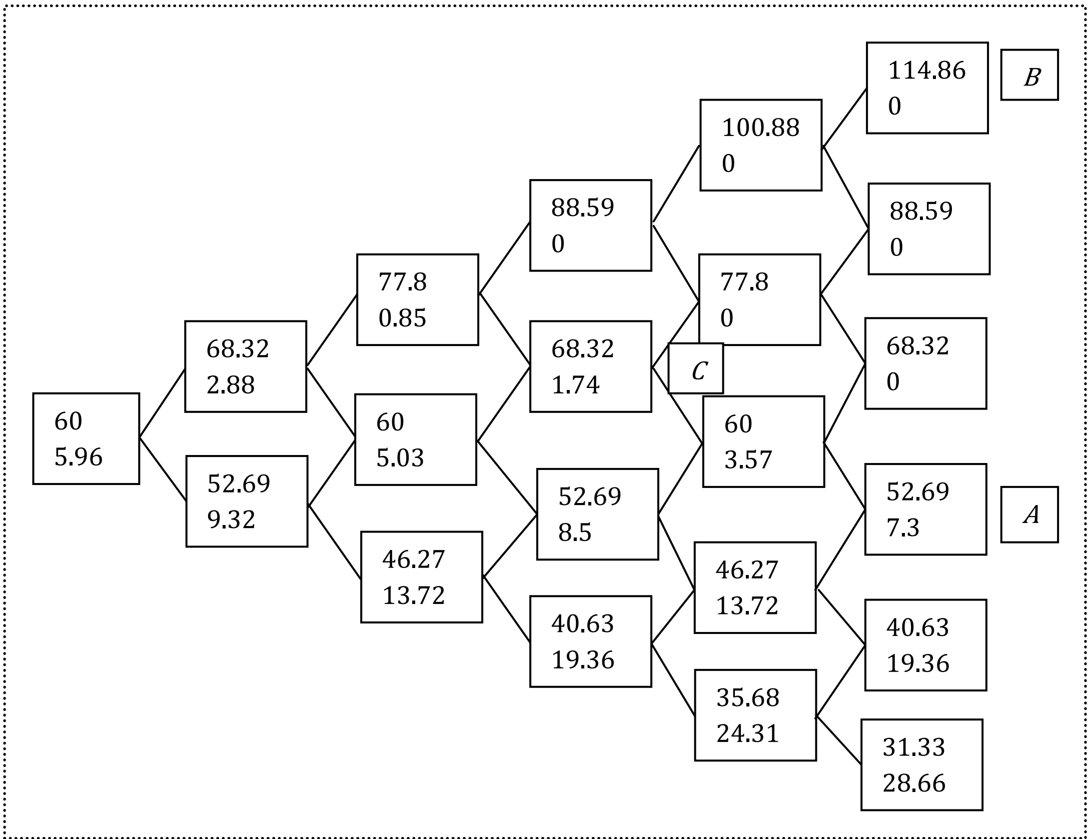
Örnek 3.4.2. 5 aylık temettü ödemeyen Avrupa tipi hisse senedi satma (put) opsiyonu satıldığı zaman hisse senedi piyasa fiyatı \$60 olsun. Opsiyonun kullanım fiyatı yine \$60, yıllık faiz oranı 0.12, hisse senedinin fiyat değişimlerinin yıllık volatilitesi 0.45 ve vade $5/12$ olarak verilmiştir. Binomial modelde zaman aralığını 1 ay olarak kabul edip satma opsiyonunun başlangıçtaki fiyatı bulunsun.

Çözüm. Hisse senedini 5 ay sonunda \$60'dan satma hakkının fiyatını hesaplamak için verileri dikkate alarak binomial modelin parametreleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$S = \$60,\ \ E = \$60,\ \ \ r = \%12(yıllık),\ \ \sigma = \%45(yıllık),$$
$$T - t = 0.4167\ yıl(5\ ay/12\ ay),\ \ \Delta t = 0.0833(1\ ay/12\ ay),$$
$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{0.45\sqrt{0.0833}} = 1.1387,$$
$$d = \frac{1}{u} = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = 0.8782,\ \ a = e^{r\Delta t} = 1.01,$$

$$p = \frac{a-d}{u-d} = 0.506, \quad 1-p = 1-0.506 = 0.494.$$

Şekil 3.9'de gösterilen binomial modelin düğüm noktalarındaki hisse senedi fiyatları ve hisse senedi satma opsiyonu fiyatları MATLAB'da hazırlanan arayüz yardımıyla hesaplanarak aşağıdaki gibi elde edilmiştir:



Şekil 3.9. Beş aylık Avrupa tipi satma (Put) opsiyonu fiyatının beş zaman aralığı için binomial model ile hesaplanması

Düğümlerdeki Hisse Senedi Fiyatları

$\boxed{A}$ düğümündeki hisse senedi fiyatı:

$$S_T = S_t \times u^2 \times d^3 = 60 \times 1.1387^2 \times 0.8782^3 \cong 52.69.$$

$\boxed{B}$ düğümündeki hisse senedi fiyatı:

$$S_T = S_t \times u^5 = 60 \times 1.1387^5 = 114.86.$$

$\boxed{C}$ düğümündeki hisse senedi fiyatı:

$$S_T = S \times u^2 \times d = 60 \times 1.1387^2 \times 0.8782 = 68.32.$$

Düğümlerdeki Hisse Senedi Satma Opsiyonu Fiyatları

$\boxed{A}$ düğümündeki hisse senedi satma opsiyonunun fiyatı:

$$E = 60, S_T = 52.69, P_T = \max(0{,}60 - 52.69) = 7.3.$$

$\boxed{B}$ düğümündeki hisse senedi satma opsiyonunun fiyatı:

$$E = 60, S_T = 114.86, P_T = \max(0{,}60 - 114.86) = 0.$$

$\boxed{C}$ düğümündeki hisse senedi satma opsiyonunun fiyatı:

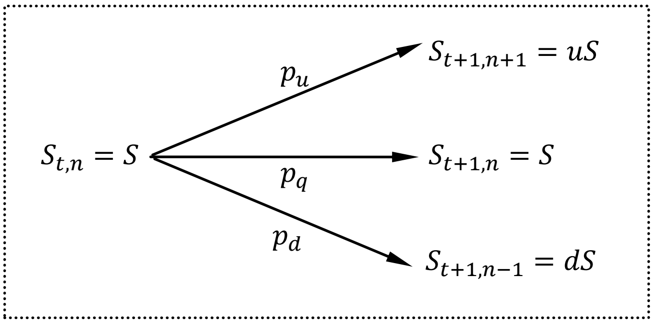
$$P_T = (0 \times 0.506 + 3.57 \times 0.494) \times e^{-0.0883 \times 0.12} = 1.74.$$

3.5. Hisse Senedi Fiyatının Trinomial Model ile Hesaplanması

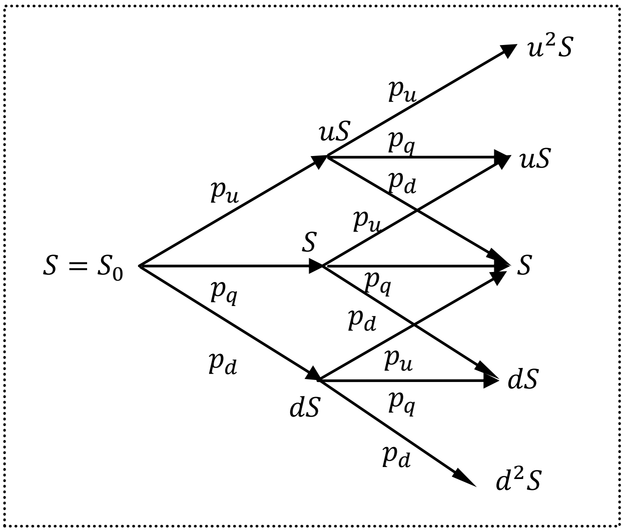
Uygulamada getirdiği kolaylıklar nedeniyle binomial model sıklıkla tercih edilse de daha karmaşık opsiyon problemlerinin çözümünde kullanılabilecek esnekliğe sahip değildir (Figlewski, 1971). Trinomial model, hisse senedi fiyat hareketlerinin modellenmesinde ve opsiyonların değerinin nümerik olarak elde edilmesinde binomial model gibi sıklıkla kullanılmaktadır (Horasanlı, 1997).

Trinomial model başlangıçtan vade sonuna kadar olan zaman periyodunu farklı sayıda zaman aralıklarına böler. Bu zaman aralıklarında hisse senedi fiyatını tahmin edip adım adım ileriye giderek vadedeki hisse senedi fiyatını bulmaktadır. Her adımda yani farklı bir zaman aralığında ortaya üç hisse senedi fiyat seçeneğini öngörmektedir. Trinomial model zaman aralığı sonunda veya vadede hisse senedi fiyatının belli olasılıklarla artacağını, sabit kalacağını ve azalacağını varsaymaktadır. Binomial modelde olduğu gibi trinomial modelde de zaman aralıklarının uzunluğunun mümkün olduğunca kısa alınması zaman aralıkları sonundaki hisse senedinin fiyat tahmininin doğruluk derecesini arttıracaktır (Alpan, 1999).

Trinomial model binomial modelinin genişletilmiş halidir ve binomial modelin parametrelerini kullanmaktadır. Trinomial modelin binomial modelden farkı, hisse senedinin bir zaman aralığı sonunda fiyatının aynı kalacağını varsayarak hisse senedi fiyatının alacağı değerleri üç seçenek halinde incelemesidir. Dolayısıyla hisse senedi fiyat hareketlerini daha iyi modellemektedir. Ancak yapılacak bilgisayar hesaplamalarında trinomial model daha uzun sürede sonuç verecektir (Horasanlı, 1997).

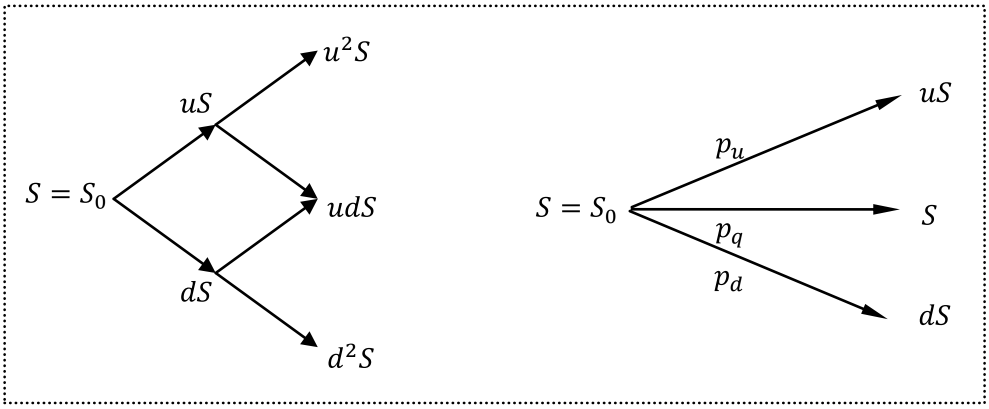


Şekil 3.10. Tek dönem için hisse senedi fiyatının trinomial model ile tahmin edilmesi



Şekil 3.11. İki dönem için hisse senedi fiyatının trinomial model ile tahmin edilmesi

Trinomial modelde başlangıçtan vade sonuna kadar olan zaman aralıklarındaki hisse senedinin fiyatına bağlı olarak hisse senedi üzerine yazılmış opsiyonların vade sonundaki fiyatı bulunur. Bundan sonra vade sonundan başlangıca doğru olan zaman aralıklarında opsiyon fiyatları bulunur. Daha sonra başlangıçta opsiyonun ilk satıldığı an olan başlangıç anındaki opsiyonun fiyatı tahmin edilir.



Şekil 3.12. Binomial model ile trinomial modelin karşılaştırılması

Binomial modelde iki zaman aralığı sonunda üç hisse senedi fiyatına ulaşıldığı halde trinomial modelde bir zaman aralığı sonunda üç ayrı hisse senedi fiyatı elde edilir.

Trinomial modelde başlangıçtaki hisse senedi fiyatı S olduğuna göre bir zaman aralığı sonunda u artış oranı ile hisse senedinin fiyatı uS, q sabit kalma oranı ile S ve d azalma oranı ile dS olarak bulunur.

Hisse senedi fiyat değişim oranları u, q ve d arasında $0 < d < q < u$ gibi bir ilişki vardır. Bir zaman aralığı sonunda trinomial modelde uS, S, dS fiyatlarına sırasıyla p_u, p_q, p_d olasılıkları ile ulaşılır. Bu olasılıkların toplamı 1'e eşit olmalıdır:

$$p_u + p_q + p_d = 1, \quad 0 \leq p_u \leq 1, \quad 0 \leq p_q \leq 1, \quad 0 \leq p_d \leq 1.$$

Lognormal dağılım gösteren değişkenlerde olduğu gibi hisse senedi fiyatının bir zaman aralığı sonundaki artış oranı aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$p_u u + p_q q + p_d d = e^{r\Delta t}.$$

Trinomial modelin parametreleri hisse senedinin veya opsiyonunun fiyatının artma oranı u ve p_u olasılığı, sabit kalma oranı q ve p_q olasılığı, azalma oranı d ve p_d olasılığı aşağıdaki formüller yardımıyla hesaplanır:

$$u = e^{2\sigma\sqrt{\Delta t/2}}, \;\; q = 1, \;\; d = e^{-2\sigma\sqrt{\Delta t/2}},$$

$$p = \frac{e^{r\Delta t/2} - e^{-2\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}{e^{2\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{-2\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}$$

$$p_u = p^2, \;\; p_q = 2p(1-p), \;\; p_d = (1-p)^2.$$

Buraya kadar yapılan tüm hesaplamalar hisse senedi opsiyon anlaşmasının başlangıçtaki fiyatını bulmak için yapılmıştır. Opsiyon şekli Avrupa tipi ise satın alma veya satma opsiyonu diye ayırt etmeden hisse senedi opsiyon anlaşmasının fiyatı V ile gösterilsin. $t.$ zaman aralığındaki hisse senedi opsiyonunun fiyatını $(V_{t,n})$ bulmak için önce $t.$ zaman aralığından bir sonraki aralıktaki opsiyonun fiyatının beklenen değerinin hesaplanması gerekmektedir:

$$E(V_{t+1}) = \left(p_u V_{t+1,n+1} + p_q V_{t+1,n} + p_d V_{t+1,n-1}\right).$$

Buradaki n herhangi bir zaman aralığında ortaya çıkan olası hisse senedi fiyatlarının sayısıdır. $(t+1).$ zaman aralığında beklenen değeri bulunan hisse senedi opsiyonunun $t.$ zaman aralığındaki fiyatı $(V_{t,n})$ bulunmalıdır. Beklenen değer $E(V_{t+1})$ ile $e^{-r\Delta t}$ oranı iskonto edilerek $t.$ zaman aralığındaki hisse senedi opsiyonunun fiyatının bugünkü değeri bulunur:

$$V_{t,n} = e^{-r\Delta t}\left(p_u V_{t+1,n+1} + p_q V_{t+1,n} + p_d V_{t+1,n-1}\right).$$

Burada $V_{t+1,n+1}$, $V_{t+1,n}$, $V_{t+1,n-1}$ değerleri $(t+1).$ zaman aralığındaki hisse senedi opsiyon fiyatları satın alma opsiyon fiyatları olsun. Örneğin $(t+1).$ zaman aralığında $n.$ seçenekte bulunan hisse senedinin fiyatı $S_{t+1,n}$ opsiyonun kullanma fiyatı E'den büyükse opsiyon kullanılacak ve değeri $V_{t+1,n} = S_{t+1,n} - E$ ile hesaplanacaktır. Aksi halde $S_{t+1,n} \leq E$ olursa hisse senedi opsiyonunun değeri 0 olacaktır. Buna göre trinomial modelde $C_{t+1,n}$ değerinin opsiyon satın alma (Call) opsiyonu olarak kabul edilmesi halinde bu değer aşağıdaki eşitlik ile hesaplanır:

$$C_{t+1,n} = \max(S_{t+1,n} - E, 0), \quad n = 0,1,2, \dots, t.$$

Diğer satın alma opsiyonları ise aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$C_{t+1,n+1} = \max(S_{t+1,n+1} - E, 0),$$
$$C_{t+1,n-1} = \max(S_{t+1,n-1} - E, 0).$$

Bu opsiyon fiyatlarından yararlanarak t. zaman aralığında n. seçenekte bulunan hisse senedi satın alma opsiyonu fiyatı

$$C_{t,n} = e^{-r\Delta t}\left(p_u C_{t+1,n+1} + p_q C_{t+1,n} + p_d C_{t+1,n-1}\right)$$

eşitliği ile bulunur. Trinomial modelde eğer $P_{t+1,n}$ değeri opsiyon satma (put) opsiyonu olarak kabul edilirse bu değer aşağıdaki eşitlik ile bulunur:

$$P_{t+1,n} = \max(E - S_{t+1,n}, 0), \quad n = 0,1,2, \dots, t.$$

Diğer satma opsiyonları ise aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$P_{t+1,n+1} = \max(E - S_{t+1,n+1}, 0),$$
$$P_{t+1,n-1} = \max(E - S_{t+1,n-1}, 0).$$

Bu opsiyon fiyatlarından yararlanarak t. zaman aralığında n. seçenekte bulunan hisse senedi satma opsiyonu fiyatı

$$P_{t,n} = e^{-r\Delta t}\left(p_u P_{t+1,n+1} + p_q P_{t+1,n} + p_d P_{t+1,n-1}\right)$$

eşitliği ile bulunur.

Örnek 3.5.1. Vadesi bir yıl olan Avrupa tipi hisse senedi satın alma opsiyonunun kullanım fiyatı \$80 olsun. Başlangıçta hisse senedi fiyatının piyasadaki fiyatı \$75 ve yıllık faiz oranı %10, hisse senedinin yıl içindeki fiyat değişim oranlarının standart sapması %20 olduğuna göre bir yıllık vadeyi üç aylık dört zaman aralığına bölerek Trinomial model ile hisse senedinin üzerine yazılmış olan satın alma opsiyonun fiyatı tahmin edilsin.

Çözüm. Opsiyon Avrupa tipi olduğu için kesinlikle vadesinde kullanılacaktır. Bu örnekteki satın alma opsiyonu sahibine (satın alana) bir yıl sonunda hisse senedini \$80'dan alma hakkı vermektedir.

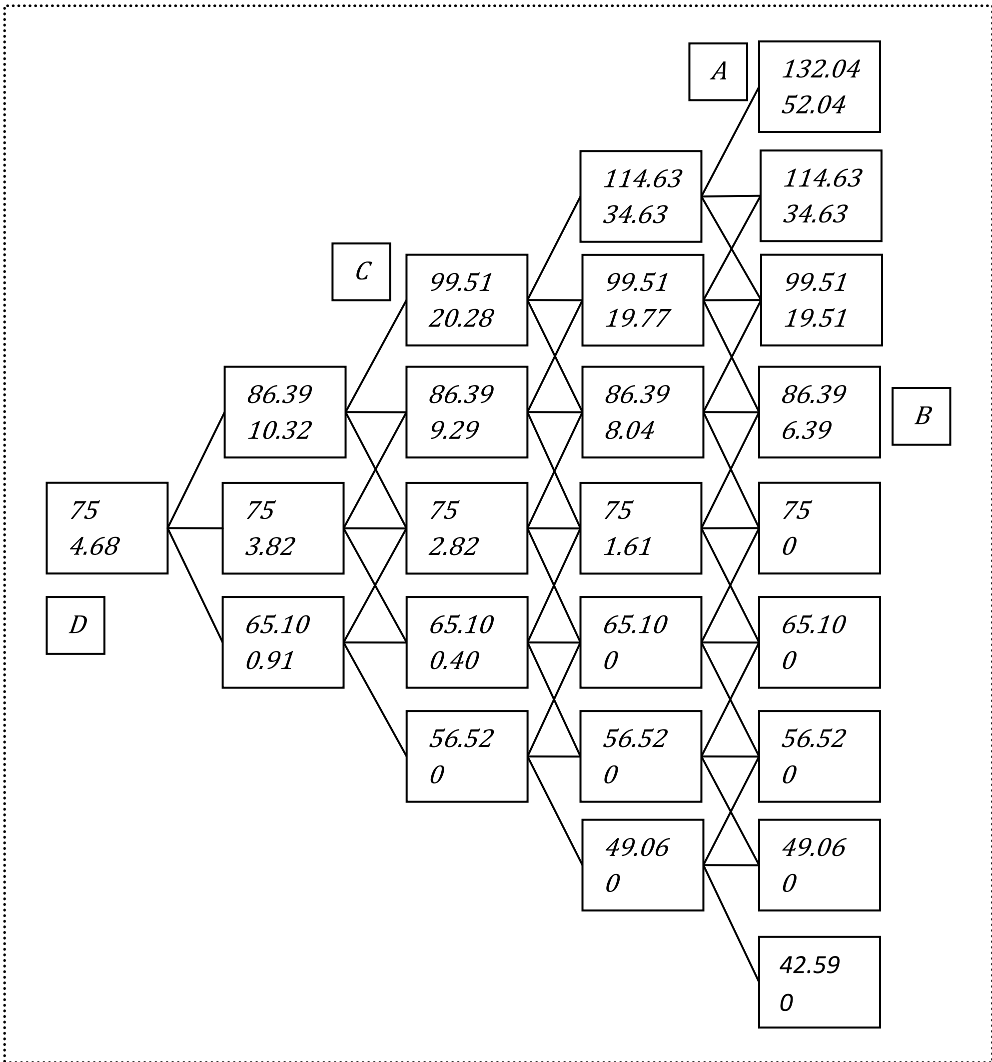
Buna göre opsiyonu satın alan hisse senedinin piyasa fiyatı bir yıl sonunda \$80'dan küçükse opsiyonu kullanmaktan vazgeçerek hisse senedini piyasadan \$80'ın altında bir fiyattan satın alacaktır. Bu durumda opsiyon kullanılmadığı için değeri sıfır olacaktır. Eğer hisse senedinin piyasa fiyatı \$80'ın üzerinde ise opsiyon sahibi satın alma hakkını kullanarak opsiyonu satan kişiden hisse senedini \$80 ödeyerek satın alacaktır. Bu durumda hisse senedi satın alma opsiyonunun vade sonundaki değeri, hisse senedinin piyasa fiyatı ile opsiyonun kullanım fiyatı arasındaki farka eşittir. Problemde verilenler aşağıdaki gibidir:

$$S = \$75, \qquad E = \$80, \quad r = \%10, \quad \sigma = \%20, \quad T = 1\, yıl, \quad \Delta t = 0.25(3/12).$$

Bunlara göre trinomial modelin parametreleri ise aşağıdaki gibidir:

$$u = e^{2\sigma\sqrt{\Delta t/2}} = e^{0.4\sqrt{0.25/2}} = 1.1519,$$
$$d = \frac{1}{u} = e^{-2\sigma\sqrt{\Delta t/2}} = 0.8681, q = 1,$$
$$a = e^{r\Delta t/2} = 1.0126,$$
$$p = \frac{a-d}{u-d} = \frac{1.0126 - 0.8681}{1.1519 - 0.8681} = 0.5092,$$
$$1 - p = 1 - 0.5092 = 0.4908,$$
$$p_u = p^2 = (0.5092)^2 = 0.2593,$$
$$p_q = 2p(1-p) = 2 \times 0.5092 \times 0.4908 = 0.4998,$$
$$p_d = (1-p)^2 = (0.4908)^2 = 0.2409.$$

Şekil 3.13'de trinomial model ile hisse senedi fiyatları ve satın alma opsiyonu fiyatları hesaplanmıştır.



Şekil 3.13. Bir yıllık Avrupa tipi satın alma (Call) opsiyonu fiyatının dört zaman aralığı için trinomial model ile hesaplanması

Düğümlerdeki Hisse Senedi Fiyatları

$\boxed{A}$ düğümündeki hisse senedi fiyatı:

$$S_T = S_t \times u^4 = 75 \times 1.1519^4 \cong 132.04.$$

$\boxed{B}$ düğümündeki hisse senedi fiyatı:

$$S_T = S_t \times u \times q^3 = 75 \times 1.1519 \times 1^3 \cong 86.39.$$

$\boxed{C}$ düğümündeki hisse senedi fiyatı:

$$S_T = S_t \times u^2 \times q = 75 \times 1.1519^2 \times 1 \cong 99.51.$$

$\boxed{D}$ düğümündeki hisse senedi fiyatı:

$$S_t = 75\ (Başlangıç\ Fiyatı).$$

Düğümlerdeki Hisse Senedi Satın Alma Opsiyonu Fiyatları

$\boxed{A}$ düğümündeki hisse senedi satın alma opsiyonunun fiyatı:

$$E = 80, S_T = 132.04, C_T = \max(0,132.04 - 80) = 52.04.$$

$\boxed{B}$ düğümündeki hisse senedi satın alma opsiyonunun fiyatı:

$$E = 80, S_T = 86.39, C_T = \max(0,86.39 - 80) = 6.39.$$

$\boxed{C}$ düğümündeki hisse senedi satın alma opsiyonunun fiyatı:

$$C_T = (34.63 \times 0.0493 + 19.51 \times 0.3454 + 6.39 \times 0.6053) \times e^{-0.25\times 0.1} = 23.21.$$

$\boxed{D}$ düğümündeki hisse senedi satın alma opsiyonunun fiyatı:

$$C_t = (11.09 \times 0.6013 + 2.34 \times 0.3987) \times e^{-0.25\times 0.1} = 7.41.$$

Örnek 3.5.2. 5 aylık temettü ödemeyen Avrupa tipi hisse senedi satma (put) opsiyonu satıldığı zaman hisse senedi piyasa fiyatı \$60 olsun. Opsiyonun kullanım fiyatı yine \$60, yıllık faiz oranı 0.12, hisse senedinin fiyat değişimlerinin yıllık volatilitesi 0.45

ve vade $5/12$ olarak verilmiştir. Trinomial modelde zaman aralığını bir ay olarak kabul edip satma opsiyonunun başlangıçtaki fiyatı bulunmak istensin.

Çözüm. Hisse senedini beş ay sonunda $\$60$'dan satma hakkının fiyatını hesaplamak için verileri dikkate alarak trinomial modelin parametreleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$S = \$60,\;\; E = \$60,\;\;\; r = \%12(yıllık),\;\; \sigma = \%45(yıllık),$$

$$T - t = 0.4167\; yıl(5\,ay/12\;ay),\;\; \Delta t = 0.0833(1\,ay/12\;ay),$$

$$u = e^{2\sigma\sqrt{\Delta t/2}} = e^{0.9\sqrt{0.0833/2}} = 1.2016, \qquad q = 1,$$

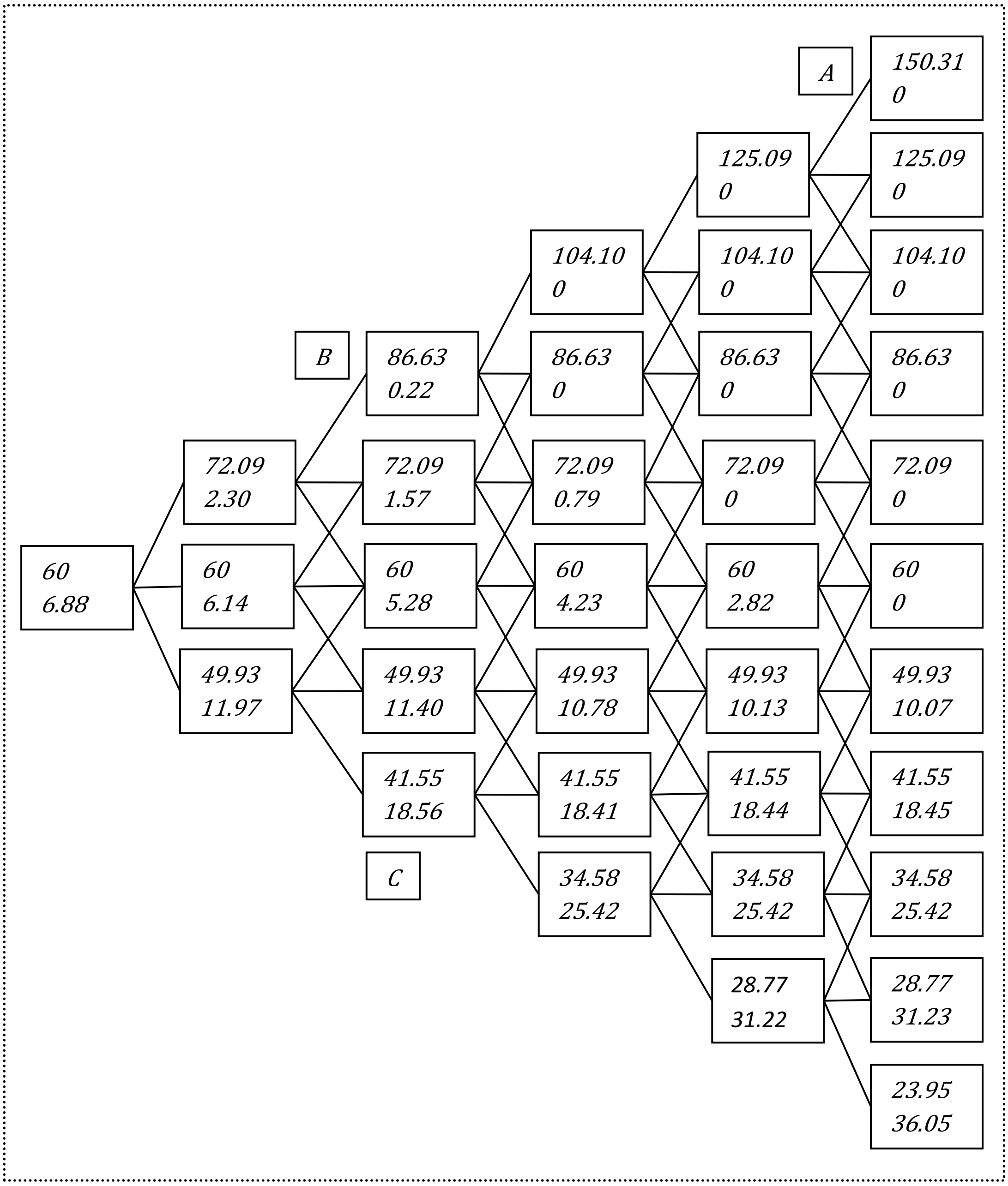
$$d = \frac{1}{u} = e^{-2\sigma\sqrt{\Delta t/2}} = 0.8322,\;\; a = e^{r\Delta t/2} = 1.005,$$

$$p = \frac{a-d}{u-d} = 0.4678,\quad 1 - p = 1 - 0.4678 = 0.5322,$$

$$p_u = p^2 = 0.2188,$$

$$p_q = 2p(1-p) = 0.4979,$$

$$p_d = (1-p)^2 = 0.2833.$$



Şekil 3.14. Beş aylık Avrupa tipi satma (Put) opsiyonu fiyatının beş zaman aralığı için trinomial model ile hesaplanması

Düğümlerdeki Hisse Senedi Fiyatları

$\boxed{A}$ düğümündeki hisse senedi fiyatı:

$$S_T = S_t \times u^5 = 60 \times 1.2016^5 \cong 150.31.$$

$\boxed{B}$ düğümündeki hisse senedi fiyatı:

$$S_T = S_t \times u \times q = 60 \times 1.2016 \times 1 \cong 72.09.$$

$\boxed{C}$ düğümündeki hisse senedi fiyatı:

$$S_T = S_t \times d^2 \times q = 60 \times 0.8322^2 \times 1 \cong 41.55.$$

Düğümlerdeki Hisse Senedi Satma Opsiyonu Fiyatları

$\boxed{A}$ düğümündeki hisse senedi satma opsiyonunun fiyatı:

$$E = 60, S_T = 150.31, P_T = \max(0,60 - 150.31) = 0.$$

$\boxed{B}$ düğümündeki hisse senedi satma opsiyonunun fiyatı:

$$P_T = (0 \times 0.2188 + 0.79 \times 0.4979 + 4.23 \times 0.2833) \times e^{-0.0833 \times 0.12} = 1.57$$

$\boxed{C}$ düğümündeki hisse senedi satma opsiyonunun fiyatı:

$$P_T = (10.13 \times 0.2188 + 18.44 \times 0.4979 + 25.42 \times 0.2833) \times e^{-0.0833 \times 0.12}$$
$$= 18.41.$$

Burada aynı iki örnek hem binomial hem de trinomial model için çözüldü. İlk örnekte binomial modelde dört dönem sonunda beş farklı fiyat seçeneği elde edilirken, trinomial modelde ise dört dönem sonunda dokuz farklı fiyat seçeneği elde edilmiştir. Binomial model hisse senedi başlangıç fiyatı $75 olduğunda dört dönem sonra en yüksek fiyatı 111.89 ve en düşük fiyatı 50.27 olarak tahmin etmektedir. Binomial model opsiyonun ilk satıldığı an olan başlangıç anındaki satın alma opsiyonu fiyatını 7.41 olarak tahmin etmektedir. Aynı şekilde trinomial model ise vade sonunda en yüksek fiyatı 132.04 ve en düşük fiyatı 42.59 olarak tahmin etmektedir. Trinomial model opsiyonun ilk satıldığı an olan başlangıç anındaki satın alma opsiyonu fiyatını 4.68 olarak tahmin etmektedir.

İkinci örnekte binomial modelde beş dönem sonunda altı farklı fiyat seçeneği elde edilirken, trinomial modelde ise beş dönem sonunda on bir farklı fiyat seçeneği elde edilmektedir. Binomial model hisse senedi başlangıç fiyatı $60 olduğunda dört dönem sonra en yüksek fiyatı 111.86 ve en düşük fiyatı 31.30 olarak tahmin etmektedir. Binomial model opsiyonun ilk satıldığı an olan başlangıç anındaki satma opsiyonu fiyatını 5.96 olarak tahmin etmektedir. Aynı şekilde trinomial model ise vade sonunda en yüksek fiyatı 150.31 ve en düşük fiyatı 23.95 olarak tahmin etmektedir. Trinomial model opsiyonun ilk satıldığı an olan başlangıç anındaki satma opsiyonu fiyatını 6.88 olarak tahmin etmektedir.

Dolayısıyla binomial model daha kısa sürede sonuç vermesine rağmen trinomial model daha geniş bir fiyat aralığı tahmin etmektedir. Trinomial model ağaç yapısı nedeniyle binomial modelden daha etkili sonuçlar ortaya çıkarmaktadır.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada rastgele yürüyüş süreci incelendi ve bilinen en temel uygulamaları için MATLAB Grafik Kullanıcı Arayüzü (GUI) yardımıyla arayüzler oluşturuldu. Bu arayüzler rastgele yürüyüş sürecinin teorik yapısını anlamakta kolaylık sağlamıştır.

Binomial ve trinomial modelin rastgele yürüyüş sürecine sahip olduğu örnekler yardımıyla gösterilmiştir. İki model içinde aynı örnekler çözülerek modellerin hesapladığı opsiyon fiyatları karşılaştırılmıştır. Binomial model yaygın olarak kullanılmasına rağmen trinomial model daha etkili sonuçlar ortaya koymaktadır. Bu örnekleri çözmek için MATLAB Grafik Kullanıcı Arayüzü (GUI) kullanılarak binomial ve trinomial model için arayüzler yapılmıştır. Bu arayüzler yardımıyla istenen sonuçlar kolayca elde edilebilmektedir.

5. KAYNAKLAR

Akalın, O. İ., 2006. Hisse Senedi Üzerine Opsiyon Sözleşmeleri ve Türkiye Uygulaması, Yüksek Lisans Tezi, Marmara Üniversitesi, Bankacılık ve Sigortacılık Enstitüsü, İstanbul.

Akdeniz, F., 2010. Olasılık ve İstatistik, Genişletilmiş 15. baskı, Nobel Kitabevi, Adana.

Aliyev, R., 2010. Stokastik Süreçler Teorisine Giriş, KTÜ Matbaası, Trabzon.

Alpan, F., 1999. Örneklerle Futures Anlaşmalar ve Opsiyonlar, Literatür Yayınları, İstanbul.

Bailey, N. T. J., 1964. The Elements of Stochastic Processes: With Applications to the Natural Sciences, Wiley, New York.

Boyle, P., 1986. "Option Valuation Using a Three-Jump Process", International Options Journal, 3, 7-12.

Cerit, C., Yüksel M., 2004. Olasılık, Alfa Basım Yayım Dağıtım, İstanbul.

Clifford, P. ve Zaboronski O., Pricing Options Using Trinomial Trees. http://www2.warwick.ac.uk/fac/sci/maths/people/staff/oleg_zaboronski/fm/trinomial_tree_2008.pdf 25 Şubat 2011.

Cox, J., Ross, S. ve Rubinstein, M., 1979. "Option Pricing: A Simplified Approach", Journal of Financial Economics, 7, 3, 229-263.

Feller, W., 1971. An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Vol. 1, 2, John Wiley, New York.

Figlewski, S. ve Gao, B., 1999. "The Adaptive Mesh Model: A New Approach to Efficient Option Pricing", Journal of Financial Economics, 53, 3, 313-351.

Grinstead, M. G. ve Snell, J. L., 1997. Introduction to Probability, 2nd Revised Edition, United States of America.

Gökçe, A. G., 2001. Opsiyon Değerlemenin Temelleri ve Temel Opsiyon Değerleme Modelleri ile Stokastik Değişkenliğin İMKB Hisse Senedi Piyasaları'nda Geçerliliklerinin Araştırılması, Doktora Tezi, İstanbul Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, İstanbul.

Harris, T. E., 1960. "A Lower Bound for the Critical Probability in a Certain Percolation Process", Proc. Camb. Phil. Soc., 56, 1, 13-20.

Higham, D. J., 2002. "Nine Ways to Implement the Binomial Method for Option Valuation in MATLAB", Society for Industrial and Applied Mathematics, 44, 4, 661-677.

Horasanlı, M., 1997. “Binomial Model ve Trinomial Modelin Yakınsaklık Davranışlarının Karşılaştırılması”, İMKB Dergisi, 9, 34, 18-35.

Hughes, B. D., 1995. Random Walks and Random Environments, Oxford University Press, New York.

Hull, J. C., 1998. Introduction to Futures and Options Markets, 3nd Ed., Prentice-Hall, New Jersey.

Jiang, L., 2005. Mathematical Modeling and Methods of Option Pricing, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore.

Kırca, İ., 2000. Hukuki Yönüyle Borsa Opsiyon İşlemleri, Banka ve Ticaret Hukuku Araştırma Enstitüsü, Türkiye İş Bankası Vakfı, Hukuk Fakültesi, Ankara.

Köse, S., 2009. Rassal Yürüyüş Teorisi ve İstanbul Menkul Kıymetler Borsası’nda Sınanması, Yüksek Lisans Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, İzmir.

Kwok, Y., 2008. Mathematical Models of Financial Derivatives, 2nd Ed., Springer, Berlin.

Lawler, G. F. ve Limic, V., 2010. Random Walk: A modern Introduction, Cambridge Universty Press, New York.

Lopez, D., 2010. MATLAB with Applications to Engineering, Physics and Finance, CRC Press, USA.

Monte, A. R., 1999. “The Random Walk For Dummies”, The MIT Undergraduate Journal of Mathematics, 1, 143-147.

Nagy, K., 2002. “Symmetric Random Walk in Random Environment in One Dimension”, Periodica Mathematica Hungarica, 45, 1-2, 101-120.

Nasirova, T., Khaniyev, T., Yapar, C., Ünver, İ. ve Küçük, Z., 2009. Olasılık, KTÜ Matbaası, Trabzon.

Öztürk, F., 1995. Kombinatorik (Sayma Problemleri), A. Ü. F. F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, Ankara.

Ross, S. M., 1999. An Introduction to Mathematical Finance, Cambridge University Press, Cambridge.

Ross, S. M., 2007. Introduction to Probability Models, 9th Ed., Elsevier Inc., California.

Shahbazov, A. A., 2005. Olasılık Teorisine Giriş, Birsen yayınevi, İstanbul.

Sigman, K., Lecture Notes on Stochastic Modelling I. http://www.columbia.edu/~ks20/stochastic-I/stochastic-I.html 17 Kasım 2010.

Wilf, H. S., 1992. Generating Functionology, 2nd Ed., Acedemic Press, Philadelphia.

URL-1, http://en.wikipedia.org/wiki/Random_walk, Random Walk, 1 Mart 2011.

URL-2, http://telescoper.wordpress.com/2009/10/24/a-random-walk/, A Random Walk, 24 Mart 2011.

URL-3, http://www.gap-system.org/~history/Biographies/Polya.html, George Polya, 24 Mart 2011.

URL-4, http://en.wikipedia.org/wiki/Catalan_number, Catalan Number, 4 Kasım 2010.

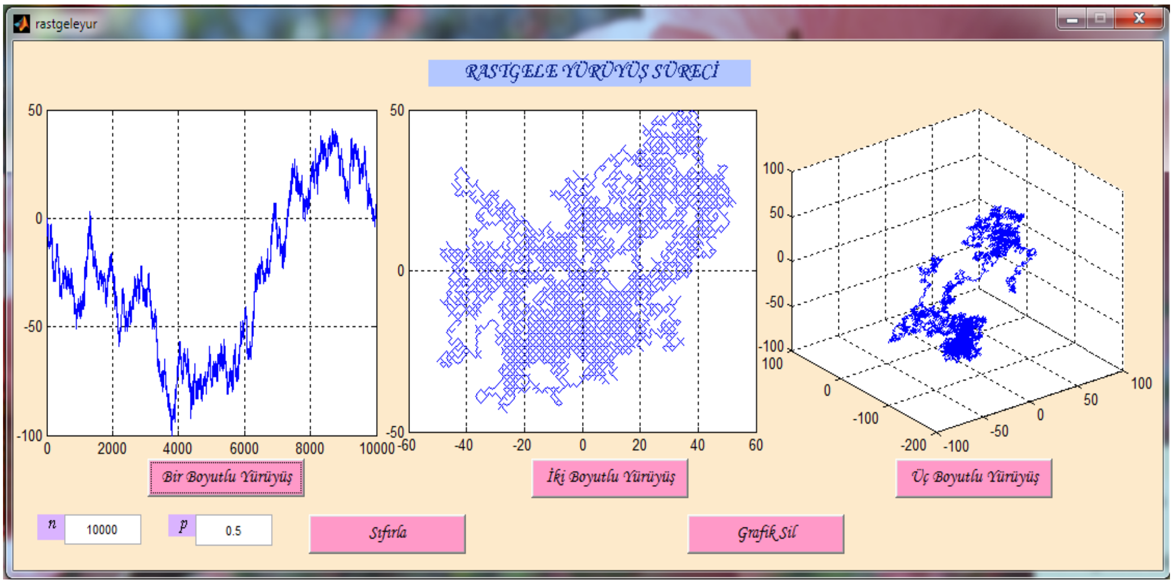
URL-5, http://tr.wikipedia.org/wiki/Opsiyon_(finans), Opsiyon, 29 Kasım 2010.

URL-6, http://planetmath.org/encyclopedia/StirlingsApproximation.html, Stirling's Appr., 3 Kasım 2010.

Yılmaz, M. K., 1995. Menkul Kıymetler Piyasasında Vadeli İşlemler ve Opsiyonlar Kullanılarak Oluşturulan Bazı Temel Stratejiler, IMKB Yayınları, İstanbul.

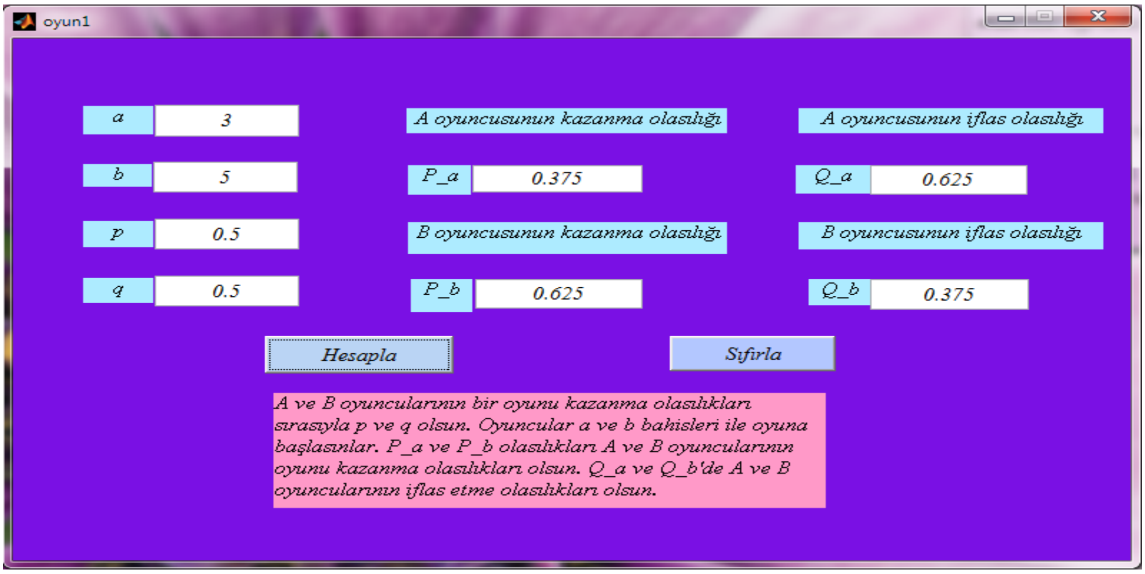
6. EKLER

Bu tez çalışmasında MATLAB Grafik Kullanıcı Arayüzü (GUI) yardımıyla yukarıda bahsi geçen konularla ilgili arayüzler oluşturulmuştur.



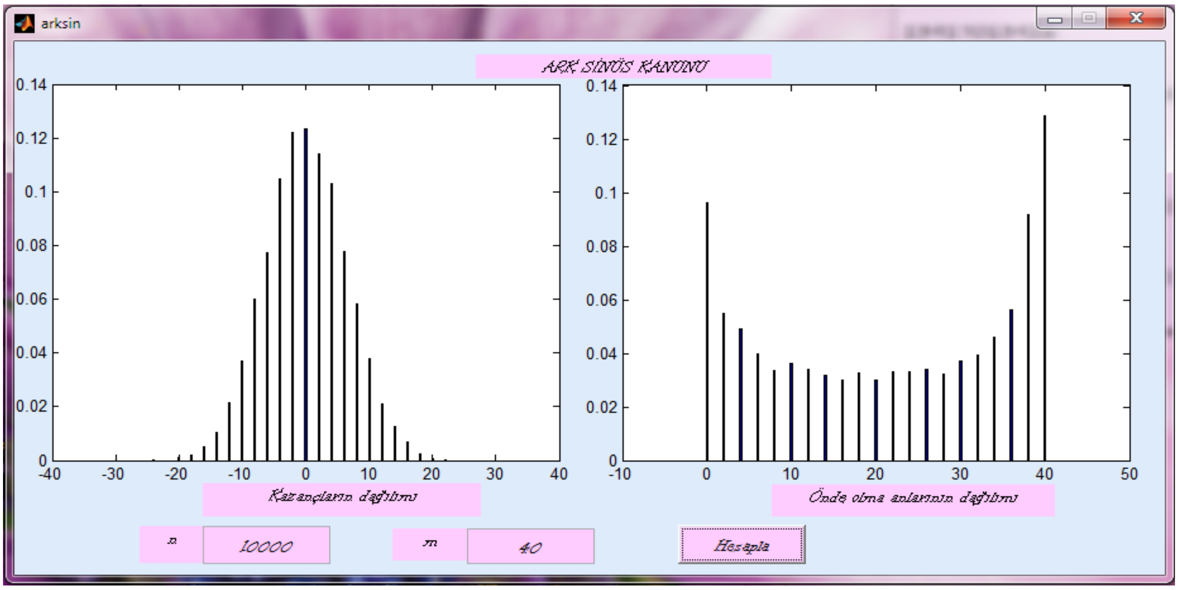
Ek Şekil 1. Rastgele yürüyüş süreci için MATLAB Grafik Kullanıcı Arayüzü

Ek Şekil 1'de 10000 uzunluklu simetrik rastgele yürüyüş için grafikler yukarıdaki arayüz yardımıyla elde edilmiştir. Burada adım sayısı ve olasılık değeri değiştirilerek çeşitli şekillerde rastgele yürüyüş sürecinin grafiklerini elde etmek mümkündür.



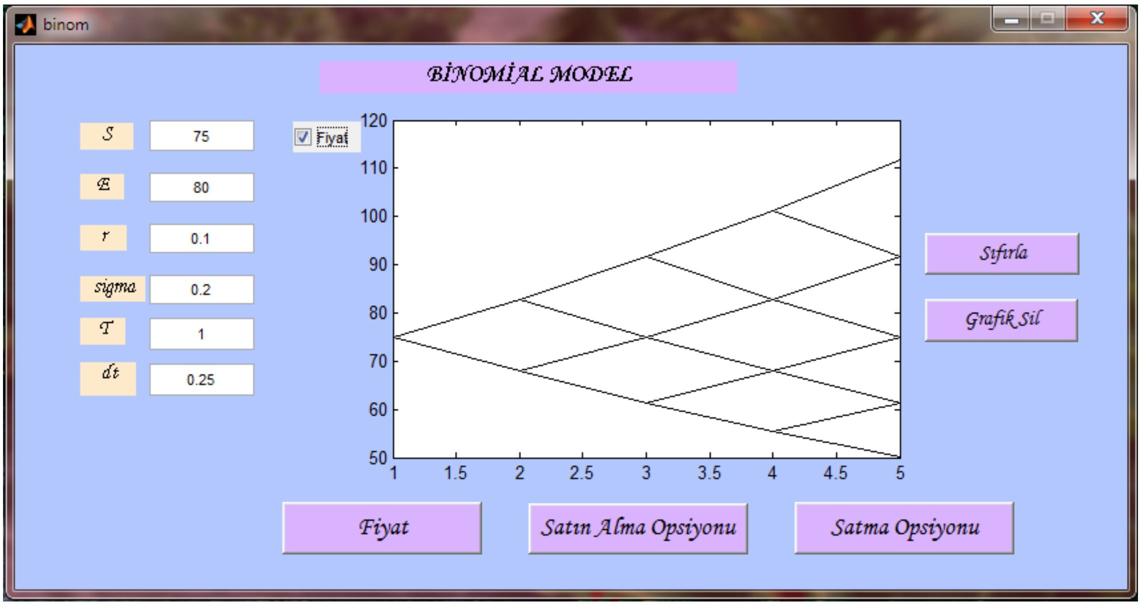
Ek Şekil 2. Bir oyunda oyuncuların kazanma ve kaybetme olasılıkları için MATLAB Grafik Kullanıcı Arayüzü

Ek Şekil 2'de iki oyuncunun oynadıkları bir oyun sonunda oyunu kazanma ve kaybetme olasılıkları yukarıdaki arayüz yardımıyla hesaplanmaktadır.



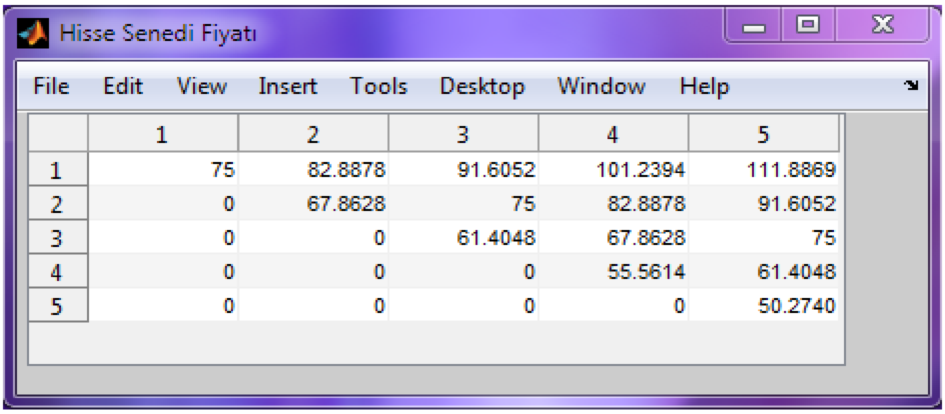
Ek Şekil 3. Ark sinüs kanunu için MATLAB Grafik Kullanıcı Arayüzü

Ek Şekil 3'de bir paranın 40 atılışının 10000 defa tekrarlandığı bir oyun için grafikler yukarıdaki arayüz yardımıyla elde edilmiştir. Burada ilk grafik ilk oyuncunun kazançlarının dağılımını vermektedir. İkinci grafik ise ilk oyuncunun önde olduğu anların dağılımını vermektedir.



Ek Şekil 4. Binomial Model İçin MATLAB Grafik Kullanıcı Arayüzü

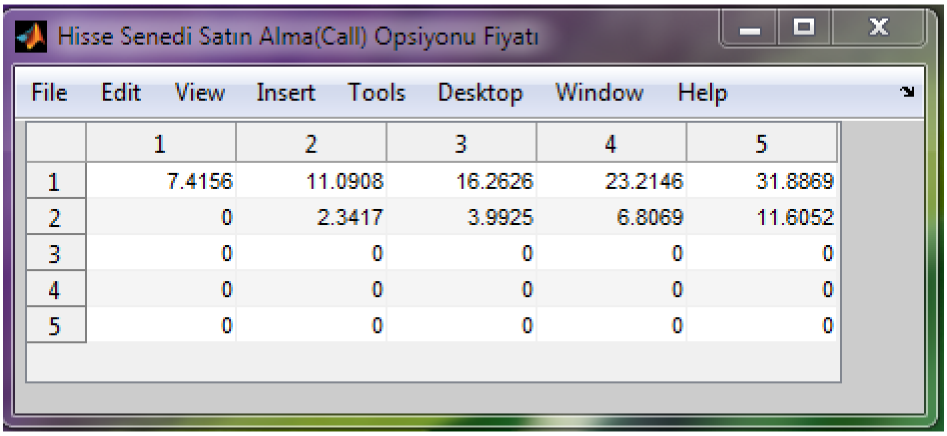
Ek Şekil 4 binomial model için hazırlanmış arayüzdür. Burada hisse senedi opsiyonu için başlangıç fiyatı, kullanım fiyatı, risksiz faiz oranı, volatilite, vade, dönem sayısı ve opsiyon tipi verildiğinde yukarıdaki arayüzden yararlanarak opsiyon tahmin değerleri ve fiyatları hesaplanmaktadır.



	1	2	3	4	5
1	75	82.8878	91.6052	101.2394	111.8869
2	0	67.8628	75	82.8878	91.6052
3	0	0	61.4048	67.8628	75
4	0	0	0	55.5614	61.4048
5	0	0	0	0	50.2740

Ek Şekil 5. Hisse senedi fiyatı için MATLAB Grafik Kullanıcı Arayüzü

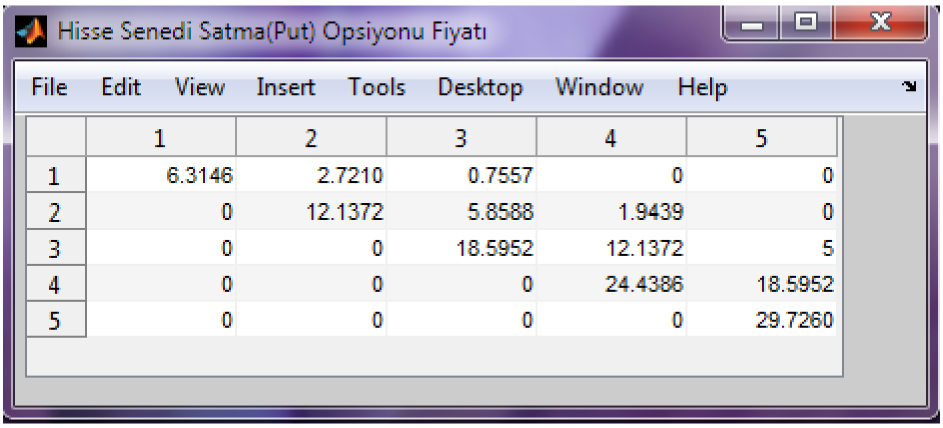
MATLAB Grafik Kullanıcı arayüzünde fiyat butonuna basıldığında Ek Şekil 5 ile gösterilen tablo elde edilmektedir. Bu tablo sonraki dönemlere ait binomial model ile hesaplanan hisse senedi fiyatlarının tahmin değerlerini göstermektedir.



	1	2	3	4	5
1	7.4156	11.0908	16.2626	23.2146	31.8869
2	0	2.3417	3.9925	6.8069	11.6052
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0

Ek Şekil 6. Hisse senedi satın alma opsiyonu için MATLAB Grafik Kullanıcı Arayüzü

MATLAB Grafik Kullanıcı arayüzünde satın alma opsiyonu butonuna basıldığında Ek Şekil 6 ile gösterilen tablo elde edilmektedir. Bu tablo sonraki dönemlere ait binomial model ile hesaplanan hisse senedi satın alma opsiyonunun fiyatlarının tahmin değerlerini göstermektedir.



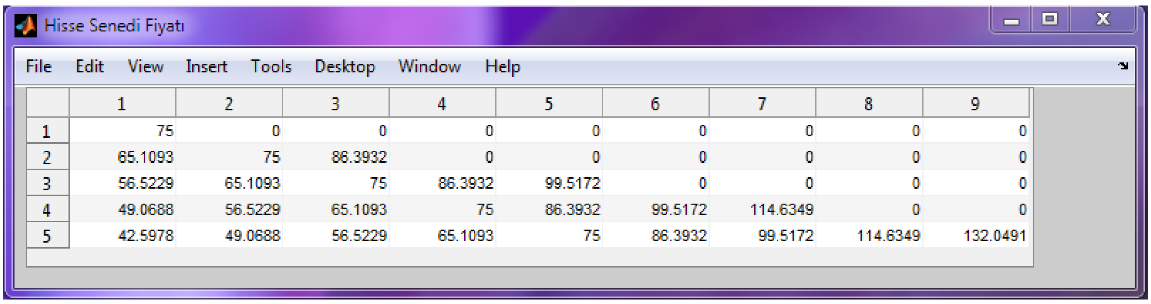
	1	2	3	4	5
1	6.3146	2.7210	0.7557	0	0
2	0	12.1372	5.8588	1.9439	0
3	0	0	18.5952	12.1372	5
4	0	0	0	24.4386	18.5952
5	0	0	0	0	29.7260

Ek Şekil 7. Hisse senedi satma opsiyonu için MATLAB Grafik Kullanıcı Arayüzü

MATLAB Grafik Kullanıcı arayüzünde satma opsiyonu butonuna basıldığında Ek Şekil 7 ile gösterilen tablo elde edilmektedir. Bu tablo sonraki dönemlere ait binomial model ile hesaplanan hisse senedi satma opsiyonunun fiyatlarının tahmin değerlerini göstermektedir.

Ek Şekil 8. Trinomial Model İçin MATLAB Grafik Kullanıcı Arayüzü

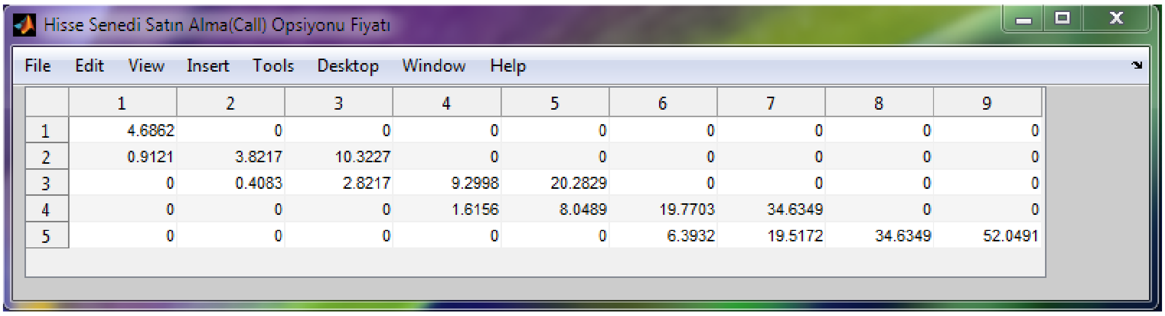
Ek Şekil 8 trinomial model için hazırlanmış arayüzdür. Burada hisse senedi opsiyonu için başlangıç fiyatı, kullanım fiyatı, risksiz faiz oranı, volatilite, vade, dönem sayısı verildiğinde opsiyon fiyatı trinomial modele göre tahmin edilmektedir. Aynı zamanda opsiyon tipine göre (satma ya da satın alma) yukarıdaki arayüz yardımıyla fiyatlar hesaplanmaktadır.



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	75	0	0	0	0	0	0	0	0
2	65.1093	75	86.3932	0	0	0	0	0	0
3	56.5229	65.1093	75	86.3932	99.5172	0	0	0	0
4	49.0688	56.5229	65.1093	75	86.3932	99.5172	114.6349	0	0
5	42.5978	49.0688	56.5229	65.1093	75	86.3932	99.5172	114.6349	132.0491

Ek Şekil 9. Hisse senedi fiyatı için MATLAB Grafik Kullanıcı Arayüzü

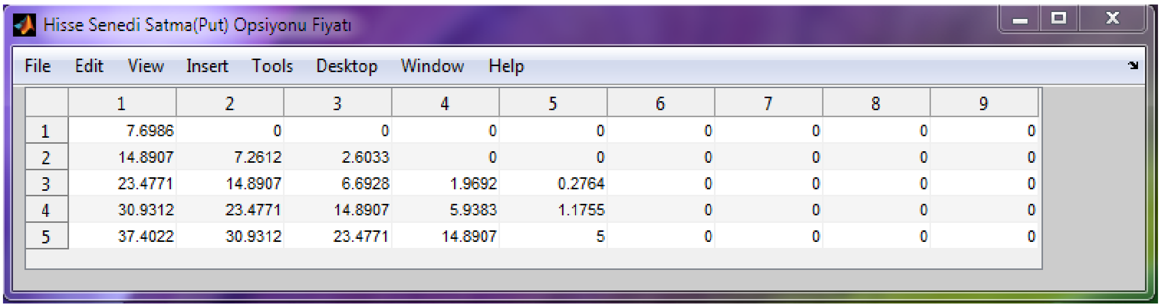
MATLAB Grafik Kullanıcı arayüzünde fiyat butonuna basıldığında Ek Şekil 9 ile gösterilen tablo elde edilmektedir. Bu tablo sonraki dönemlere ait trinomial model ile hesaplanan hisse senedi fiyatlarının tahmin değerlerini göstermektedir.



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4.6862	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0.9121	3.8217	10.3227	0	0	0	0	0	0
3	0	0.4083	2.8217	9.2998	20.2829	0	0	0	0
4	0	0	0	1.6156	8.0489	19.7703	34.6349	0	0
5	0	0	0	0	0	6.3932	19.5172	34.6349	52.0491

Ek Şekil 10. Hisse senedi satın alma opsiyonu için MATLAB Grafik Kullanıcı Arayüzü

MATLAB Grafik Kullanıcı arayüzünde satın alma opsiyonu butonuna basıldığında Ek Şekil 10 ile gösterilen tablo elde edilmektedir. Bu tablo sonraki döneme ait trinomial model ile hesaplanan hisse senedi satın alma opsiyonunun fiyatlarının tahmin değerlerini göstermektedir.



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	7.6986	0	0	0	0	0	0	0	0
2	14.8907	7.2612	2.6033	0	0	0	0	0	0
3	23.4771	14.8907	6.6928	1.9692	0.2764	0	0	0	0
4	30.9312	23.4771	14.8907	5.9383	1.1755	0	0	0	0
5	37.4022	30.9312	23.4771	14.8907	5	0	0	0	0

Ek Şekil 11. Hisse senedi satma opsiyonu için MATLAB Grafik Kullanıcı Arayüzü

MATLAB Grafik Kullanıcı arayüzünde satma opsiyonu butonuna basıldığında Ek Şekil 11 ile gösterilen tablo elde edilmektedir. Bu tablo sonraki döneme ait trinomial model ile hesaplanan hisse senedi satma opsiyonunun fiyatlarının tahmin değerlerini göstermektedir.

ÖZGEÇMİŞ

Fatma Zehra DOĞRU, 1 Ocak 1987 tarihinde Erzurum'un Oltu ilçesinde doğdu. 2005 yılında Bayburt Lisesinden (YDA) mezun oldu. Aynı yıl girdiği üniversite sınavında Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümünü kazandı. 2009 yılında bu bölümden bölüm birincisi olarak mezun oldu. Aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim dalında tezli yüksek lisans programına başladı.

Kasım 2009 tarihinde Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Ana Bilim Dalında 2547 Sayılı Yüksek Öğretim Kanunun 50-d maddesi kapsamında araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı. Halen bu görevine devam eden Fatma Zehra DOĞRU Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu'ndan (TÜBİTAK) yurt içi yüksek lisans bursu almaktadır. Ayrıca iyi derecede İngilizce bilmektedir.