

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

GEMİ İNŞAATI VE GEMİ MAKİNELERİ MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**GEMİ DİRENCİNİN HESAPLAMALI AKIŞKANLAR DİNAMİĞİ YÖNTEMİYLE
HESAPLANMASI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gemi İnşaatı Mühendisi Erhan AKSU

**OCAK 2011
TRABZON**

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

GEMİ İNŞAATI VE GEMİ MAKİNELERİ MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**GEMİ DİRENCİNİN HESAPLAMALI AKIŞKANLAR DİNAMİĞİ YÖNTEMİYLE
HESAPLANMASI**

Gemi İnşaatı Mühendisi Erhan AKSU

**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
"Gemi İnşaatı ve Gemi Makineleri Yüksek Mühendisi"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 03.01.2011
Tezin Savunma Tarih : 19.01.2011**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ercan KÖSE
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Burhan ÇUHADAROĞLU
Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. Betül AYHAN SARAÇ**

Enstitü Müdürü: Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Trabzon 2011

ÖNSÖZ

Hazırlamış olduğum yüksek lisans tezinde tüm iyi niyetiyle yardımlarını esirgemeyen Sayın hocam Prof. Dr. Ercan KÖSE' ye teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Ayrıca tez çalışmam boyunca desteklerinden ve yardımlarından dolayı İTÜ Gemi ve Deniz Teknolojisi Mühendisliği Bölümü öğretim üyesi Prof. Dr. Kadir SARIÖZ' e, KTÜ Makine Mühendisliği Bölümü öğretim üyesi Prof. Dr. Burhan ÇUHADAROĞLU' na, Gemi İnşaatı ve Gemi Makineleri Bölümü öğretim üyesi Yrd. Doç. Dr. Betül AYHAN SARAÇ' a ve araştırma görevlilerine çok teşekkür ederim.

Eğitim ve öğretim hayatım süresi içerisinde maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme sonsuz teşekkürler.

Erhan AKSU

Trabzon 2011

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET.....	V
SUMMARY.....	VI
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	VII
TABLOLAR(ÇİZELGELER) DİZİNİ.....	VIII
SEMBOLLER DİZİNİ.....	IX
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Gemi Hidrodinamiğinde Hesaplamalı Akışkanlar Dinamiği Çalışmaları.....	2
1.3. Amaç ve Kapsam.....	4
1.4. Gemi Direnci ve Bileşenleri.....	5
1.5. Hesaplamalı Akışkanlar Dinamiği.....	6
1.5.1. Akışkan Hareketinin Temel Denklemleri.....	7
1.5.1.1. Reynolds Transport Teoremi.....	7
1.5.1.2. Kütle Korunumu Denklemi.....	7
1.5.1.3. Momentumun Korunumu Denklemi.....	8
1.5.1.4. Navier-Stokes Denklemleri.....	9
1.5.1.5. Herhangi Bir Büyüklüğün Adveksiyon-Difüzyon Denklemi.....	10
1.5.2. Sonlu Eleman Yöntemi Tabanlı Sonlu Hacim Yöntemi.....	11
1.5.3. Türbülans ve Türbülans Modelleri.....	18
1.5.3.1. k- ϵ Türbülans Modeli.....	19
1.5.3.1.1. Reynolds Gerilme Denkleminin Elde Edilmesi.....	22
1.5.3.1.2. Türbülans Kinetik Enerji (k) Denkleminin Elde Edilmesi.....	24
1.5.3.1.3. Modellenmiş Türbülans Kinetik Enerji Denkleminin Elde Edilmesi.....	26
1.5.3.1.4. Yutulma Oranı (ϵ) Denkleminin Elde Edilmesi.....	27
1.5.3.1.5. Modellenmiş Yutulma Oranı Denkleminin Elde Edilmesi.....	29

1.5.4.	Serbest Su Yüzeyinin Modellenmesi.....	31
1.5.5.	Cebirsel Denklem Sisteminin Çözümü	32
2.	YAPILAN ÇALIŞMALAR, BULGULAR VE İRDELEME	35
2.1.	Geometrik Modelleme.....	35
2.2.	Ağ Yapısı.....	37
2.3.	Sınır Şartlarının Tanımlanması ve Akışın Modellenmesi	37
2.4.	Analiz Sonuçları ve Analizlerin Sonuçlarının Deneysel Sonuçlarla Karşılaştırılması.....	38
3.	SONUÇLAR VE ÖNERİLER	46
4.	KAYNAKLAR.....	48
ÖZGEÇMİŞ		

ÖZET

Gemi hidrodinamiğinin temel konularından gemi direncinin belirlenmesi, makine gücünün seçimini etkileyeceği için son derece önemlidir. Diğer endüstriyel alanlarda olduğu gibi gemi inşaatı endüstrisinde hesaplamalı akışkanlar dinamiği yöntemi uygulamalarına artarak yer verilmekte dizayn sürecine dahil edilmektedir.

Bu çalışmada gemi direnci hesaplamalı akışkanlar dinamiği yöntemiyle hesaplanmıştır ve hesaplamalı akışkanlar dinamiğinin her bir adımı ele alınmıştır. Bu bağlamda öncelikle akışkan hareket denklemleri ve sonlu eleman yöntemi tabanlı sonlu hacim yöntemi hakkında bilgi verilmiştir. Hesaplamalı akışkan dinamiğinin en önemli konularından birisi olan türbülanslı akışın çözümü üzerinde durulmuş ve uygulamada kullanılan $k - \varepsilon$ türbülans modeli tanıtılmıştır. Son olarak serbest su yüzeyini modelleyebilmek için akışkan hacmi yöntemi, cebrik denklemlerin çözümü için ILU ayrıklaştırma tekniği ve denklem takımlarının etkili bir şekilde çözümünü sağlayan çoklu ağ yöntemi hakkında bilgi verilmiştir.

Ayrıca bu çalışmada Wigley teknesinin beş farklı Froude sayısında direnci hesaplanmış ve dalga sistemleri gözlemlenmiştir. Bu sonuçlar deneysel sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Hesaplamalı akışkanlar dinamiği, gemi, direnç

SUMMARY

Ship Resistance Calculation With Computational Fluid Dynamics Method

The determination of ship's resistance which is fundamental subject of ship hydrodynamic is very important because of it is influence of ship main engine selection. Computational fluid dynamic methods are carried out increasingly and are inserted into design process in new ship building industry like other industrial areas.

At this study, ship resistance is calculated with computational fluid dynamic method and each steps of computational fluid dynamic are explained comprehensively. In this regard, firstly informations about equations of motions and control volume finite element method are given. Turbulent fluid's solution which is one the most important subject of computational fluid dynamic is emphasized and $k - \varepsilon$ turbulence model which is used in application is introduced. Finally informations about volume of fluid method for modelling of free surface flow , ILU factorization technique for solving of algebraic equation sets and multigrid method which is the effective solution of algebraic equation sets are given.

In addition in this study, resistance of Wigley hull is calculated and wave systems are observed at five different Froude number and results are compared with experimental results.

Key Words: Computational fluid dynamics, hull, resistance

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 1. Çekme tankı deney düzeneği [1]	3
Şekil 2. Direnç bileşenleri [3].....	5
Şekil 3. HAD' ın üç temel aşaması [4].....	6
Şekil 4. Akış alanının ayrıklaştırılması (a) her bir elemanın numaralandırılması (b) [5] ..	11
Şekil 5. Kontrol hacminin yüzeyleri [5]	12
Şekil 6. Türbülanslı akış çözüm yöntemleri [7]	18
Şekil 7. Anlık, ortalama ve çalkantı hız bileşeni [6]	19
Şekil 8. Serbest yüzey ağı yapısı [9].....	31
Şekil 9. Yapısal olmayan ağı birleştirilmesi, iyi ağ(orijinal ağ) (a) 1.kaba ağ (b) 2. kaba ağ (c) [11].....	34
Şekil 10. Wigley teknesi.....	35
Şekil 11. Çözüm bölgesinin oluşturulması.....	36
Şekil 12. Çözüm bölgesinin ağ yapısı	37
Şekil 13. Problemin sınır şartları	38
Şekil 14. $Fr=0.25$ için dalga konturları.....	39
Şekil 15. $Fr=0.267$ için dalga konturları.....	40
Şekil 16. $Fr=0.289$ için dalga konturları.....	40
Şekil 17. $Fr=0.316$ için dalga konturları.....	41
Şekil 18. $Fr=0.354$ için dalga konturları.....	41
Şekil 19. $Fr=0.408$ için dalga konturları.....	42
Şekil 20. $Fr=0.25$ için gemi etrafındaki akım çizgileri.....	42
Şekil 21. $Fr=0.267$ için gemi etrafındaki akım çizgileri.....	43
Şekil 22. $Fr=0.289$ için gemi etrafındaki akım çizgileri.....	43
Şekil 23. $Fr=0.316$ için gemi etrafındaki akım çizgileri.....	44
Şekil 24. $Fr=0.354$ için gemi etrafındaki akım çizgileri.....	44
Şekil 25. $Fr=0.408$ için gemi etrafındaki akım çizgileri.....	45

TABLolar DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 1. Wigley teknesinin ana boyutları.....	36
Tablo 2. Analiz ve deney direnç katsayıları (10^{-3}) [12].....	39

SEMBOLLER DİZİNİ

A	: Tam matris
a^u	: Adveksiyon katsayıları
a^Γ	: Difüzyon katsayıları
F	: Kuvvet
g	: Yerçekimi ivmesi
k	: Türbülans kinetik enerjisi
m	: Kütle
N	: Şekil fonksiyonları
P	: Basınç
$r^{(k)}$: Kalıntı
s_{ij}	: Şekil değiştirme hızı
t	: Zaman
u, v, w	: Hız bileşenleri
u', v', w'	: Çalkantı hızları bileşenleri
$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$: Ortalama hız bileşenleri
\bar{V}	: Hız alanı
V^{ele}	: Elemanın hacmi
Φ	: Yaygın özellik
ϕ	: Yoğun özellik
ρ	: Yoğunluk
$\bar{\nabla}$: Gradyen operatörü
σ_{ij}	: Gerilme tensörü
τ_{ij}	: Viskoz gerilme tensörü
μ	: Dinamik viskozite
Γ	: Difüzite
Q	: Kaynak terimi
q	: Akı terimi

- ν : Kinematik viskozite
 ε : Türbülans yutulma oranı
 μ_t : Türbülans viskozitesi

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Gemilerin hidrodinamik performansları gemi direnci ve sevki, denizcilik ve manevra olmak üzere üç temel konu başlık altında incelenir. Bu performans ölçütlerini belirleyebilmek için temelde üç yaklaşım mevcuttur. Bunlardan birincisi olan istatistiksel yaklaşımda mühendisler benzer gemi veya gemilerin performans ölçütlerini kullanarak üretilen yeni gemi hakkında bilgi sahibi olmaya çalışır. Fakat bu yaklaşım öndizayn bilgileri açısından hala popüler olmasına rağmen performans ölçütleri hakkında detaylı bilgi vermediği için çok güvenilir değildir. Bir diğer yaklaşım ise deney yapmaya dayalıdır. Bu yaklaşımda geminin bir modeli oluşturulur ve bu model üzerinde yapılan deneylerin sonuçlarından gerçek geminin performans ölçütleri hesaplanmaya çalışılır. Bu yaklaşım model-gemi korelasyonu açısından kesin bir bağıntıyı güç kılar. Son olarak nümerik yaklaşımda performans ölçütleri hesaplamalı akışkanlar dinamiği (HAD) metodu kullanılarak hesaplanır. HAD yaklaşık çözümler vermesine rağmen son yıllarda artan bilgisayar kapasiteleri ile birlikte çok popüler hale gelmiştir.

HAD temel alan denklemlerinin belirli sınır koşulları altında cebrik denklemlere dönüştürülmesi ve bu denklemlerin çözülmesi esasına dayanır. HAD' ın temel ayrıklaştırma tekniklerinden sınır elemanları yöntemi (boundary element method BEM) potansiyel akışlar için kullanılır. Potansiyel akışlar için, akış alanının tamamını üzerindeki integraller sınır elemanları üzerindeki integrallere dönüştürülebilir. Problemin boyutsallığını bir derece indirgemesi ağ üretimini basitleştirir ve hesaplamayı hızlandırır. Gemi etrafındaki potansiyel akış için yapılan BEM' in uygulaması panel metotları olarak adlandırılır. Panel metotları gemi yüzeyini ayrı panellere böler. Bu panellerin her birinde Laplace denklemi çözülür. Panel metodu tekne hesaplamalarında kullanılmasına rağmen viskozite ve lineer olmayan etkilerin önemli olduğu problemlerde tercih edilmez. Bir diğer ayrıklaştırma tekniği sonlu elemanlar yönteminde (finite element method FEM) çözüm bölgesi elemanlara ayrılır ve elemanları birbirine bağlayan düğüm noktalarında değişken değeri aranır. FEM daha çok yapısal analizlerde kullanılır. Ayrıklaştırma tekniklerinden sonlu farklar yöntemi (finite difference method FDM) FEM gibi akış alanının tamamını ayrıklaştırır. Korunum denklemindeki bilinmeyen fonksiyon değerinin türev değerleri

sonlu farklar yöntemiyle yazılır. Bu yöntemde ayrıklaştırma hataları kütle ve momentum korunum denkleminin sağlanamamasına yol açabilir. Son olarak sonlu hacim yöntemi (finite volume method) formülasyonu ya sonlu eleman yöntemine ya da sonlu farklar yöntemine dayalı ayrıklaştırma tekniğidir. Karmaşık geometrilere ve yapısal olmayan ağlarda iyi çözümler vermesi ve koordinat dönüşümüne gerek duyulmaması bu yöntemin tercih sebebidir. Bu metotlardan FEM, FDM, FVM akış alanının tamamını ayrıklaştırdığı için alan metotları olarak adlandırılabilir.

Gemi inşaatı endüstrisinde diğer üretim endüstrilerinde olduğu gibi en önemli konulardan birisi de üretim sürecinin kısaltılmasıdır. HAD bu noktada kilit rol oynamaktadır. Model testlerinde HAD çalışmasıyla gerçekleştirilecek optimizasyon sayesinde kayma gerilmeleri, hız ve basınç dağılımları ve akışa ait akım çizgileri gibi akış hakkında ayrıntılı bilgi sahip olmamızı sağlar ve dizayn süresi azaltılır. Ayrıca deney düzeneklerinin hazırlanma süreci ve maliyeti akış problemlerinin HAD ile çözüm aranmasına neden olmuştur.

1.2. Gemi Hidrodinamiğinde Hesaplamalı Akışkanlar Dinamiği Çalışmaları

Gemi hidrodinamiğinde HAD çalışmalarında viskoz etkileri göz önüne alınması açısından son 20 yıl içerisinde önemli gelişmeler olmuştur. 1990 yılında Gothenburg'da gerçekleşen HAD çalıştayında serbest su yüzeyini çözebilen programlar potansiyel akış temeline dayalı iken RANSE (Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations) çözümler ise sadece dümen etrafındaki akışı çözebiliyordu. Gemi dizaynında, dalga direnci hesaplarında viskozitenin etkisi ihmal edilirdi ve aynı şekilde viskoz akış hesaplarında dalga oluşumu göz ardı edilirdi. Fakat araştırmacılar gemi direncinin bütün bileşenlerini hesaplayabilecek tek bir bilgisayar kodu üzerinde araştırmalar yaptılar. Böylece direnç bileşenleri arasında bağıllık ve lineer olmayan etkiler hesaba katılacaktı. İlk olarak viskozitenin etkili olduğu serbest su yüzeyli akışlar 40 yıl öncesinde yapılmıştı. Serbest yüzey yakalama metoduna (free-surface capturing method) dayalı bu hesaplamalar çoğunlukla iç akışlar ve basit durumlar için geçerliydi. Gemi etrafındaki viskozitenin etkili olduğu serbest su yüzeyli akış için önemli bir atılım 1994 yılında Tokyo'daki HAD çalıştayında gerçekleşti. Burada tartışılan on metottan biri hariç hepsi serbest yüzey izleme metodu (free-surface tracking method) kullanmıştı. Bu metot hareketli ağ metodu (moving grids method) olarak da adlandırılır ve bu metotta ağ yapısı serbest su yüzeyi şeklini alır ve dalga deformasyonunu

takip eder. Bir kaç yıl içerisinde karmaşık geometrilerde ve dalga kırılmalarında karşılaşılan zorluklar bu metodun uygulanmasını kısıtlamıştır. Ara yüzey yakalama metodlarından akışkan hacmi (volume of fluid VOF) metodu daha sonra gemi akışları için yeniden keşfedildi pek çok bilgisayar koduyla uygulaması gerçekleştirildi. Bu kodlarla gemi hidrodinamiğinde sıklıkla karşılaşılan dalga kırılmaları ve serpintileri içerisinde bulunduran serbest su yüzeyi çözülmüş oldu. Böylelikle dalga direnç bileşeni ve viskoz dirençle etkileşimi potansiyel akışlarda kullanılan panel metodlarına göre elden edilen sonuçlara göre daha doğrudur. VOF metodunun bir diğer avantajı ise tekne üzerindeki hava direncinin de tanımlanabilir olmasıdır.

Gemi direncini daha doğru hesaplayabilmek için, geminin dalıp çıkma ve baş kışırma hareketi hesaplamalarda göz önünde bulundurulması gerekir. Geminin sığ ve dar sulardaki seyirinde geminin güvenliği açısından bu durum önemlidir. Çekme tanklarında direnç deneyleri modelin bağlandığı düzeneğe göre ya serbest bir şekilde ya da sabit bir şekilde hareket ettirilir. Çekme tanklarında yapılan deneyleri karşılaştırabilmek için bu sınıflandırma kabul edilir. 2000 yılına kadar modelin serbest olduğu hareket koşulları altındaki hesaplamaları panel metoduyla gerçekleştirilirdi. Bu tarihe kadar viskoz akış hesaplamaları ise modelin sabit olduğu hareket koşulları altında yapıldı.



Şekil 1. Çekme tankı deney düzeneği [1]

2000 yılında Gothenburg'da gerçekleştirilen HAD çalıştayında bir konteyner gemisinin dinamik hareketleri de hesaba katılarak programlarla sonuç elde edilmek istense de bu amaç gerçekleştirilememiştir. Bu dönemde gerçekleştirilen araştırma çalışmalarında genellikle geminin dinamik hareketleri hesaba katılmamıştır. Fakat Orihara ve Miyata (1997) yaptıkları çalışmada geminin hareket halinde dalıp çıkma, yalpa ve baş kıç vurma hareketlerini hesaplayarak araştırma gruplarından daha önce sonuçlar elde etmişlerdir. Son on yıl içerisinde gemi hidrodinamiği alanındaki çalışmalar bu yönde ilerlemiştir ve geminin yalnızca dinamik pozisyonu değil aynı zamanda altı serbest dereceli hareketi RANSE çözücülerle akış alanı ve dinamik hareket denklemlerini elde edecek şekilde tek bir bilgisayar koduyla çözülebilir hale gelmiştir.

1.3. Amaç ve Kapsam

Bu çalışmada parabolik Wigley teknesinin farklı Froude sayılarında basınç direnci, viskoz direnci ve toplam direnci hesaplamalı akışkanlar dinamiği yöntemi ile hesaplanmış ve deneysel verilerle karşılaştırma yapılmıştır. Ayrıca farklı Froude sayılarında oluşan dalga sistemleri ve serbest su yüzeyi hattı gösterilmiştir.

Birinci bölümde öncelikle gemi direnci ve bileşenleri hakkında bilgi verilmiştir. Ardından hesaplamalı akışkanlar dinamiğinin her bir adımı detaylı bir biçimde anlatılmıştır. Bu bağlamda ilk olarak akışkan hareketine ait temel denklemler tanıtılmıştır. Ardından HAD'ın gereği bu denklemlerin CVFEM metodu ile nasıl cebrik denklemlere dönüştürüldüğü anlatılmıştır. Uygulamada akış türbülanslı olduğu için öncelikle türbülanslı akış tanıtılmış ve uygulamada kullanılan $k-\varepsilon$ türbülans modeli hakkında detaylı bilgi verilmiştir. Gemi etrafındaki serbest su yüzey etkili çok fazlı akışı temsil edebilmek için kullanılan VOF metodu tanıtılmıştır. Son olarak elde cebrik denklem takımlarını çözebilmek için kullanılan ILU metodu çözüm işlemini hızlandırmak için kullanılan ACM metodu anlatılmıştır.

İkinci bölümde Wigley teknesi etrafında çözüm bölgesi oluşturularak modellenmiş, bu modele uygun ağ yapısı Ansys ICEM CFD programı ile atanmış ve Ansys CFD paketi içerisinde yer alan Ansys CFX programı ile Wigley teknesinin farklı Froude sayılarda analizleri gerçekleştirilmiştir ve HAD sonuçları ile deneysel veriler karşılaştırılmıştır.

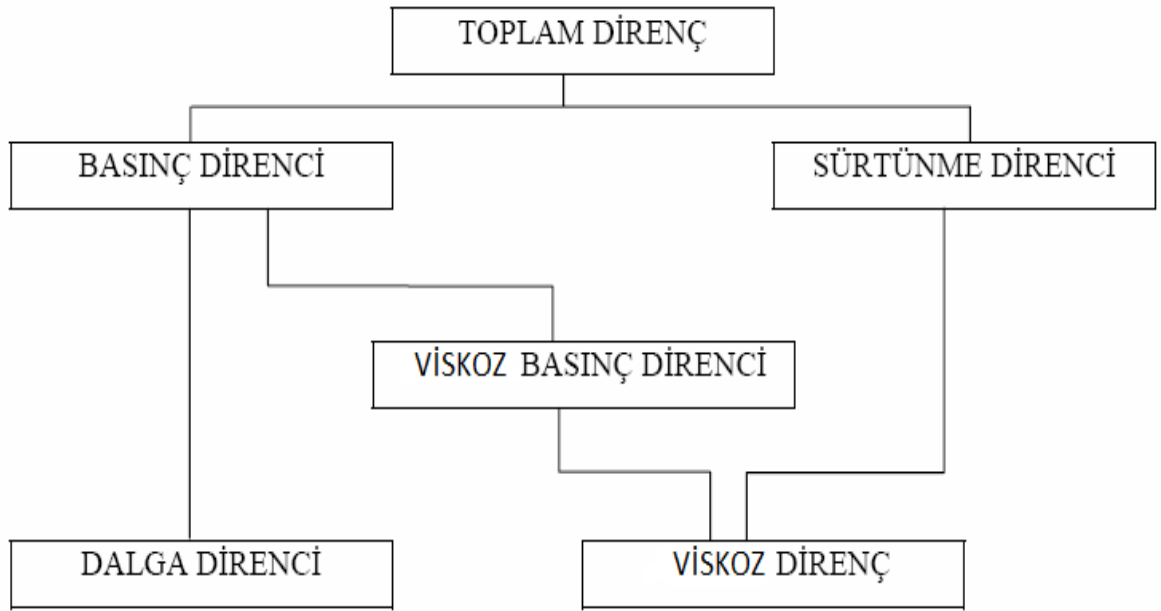
Üçüncü bölümde HAD çalışmalarından çıkartılan sonuçlara ve HAD kullanıcılarına sunulan önerilere yer verilmiştir.

1.4.Gemi Direnci ve Bileşenleri

Bir geminin belirli bir hızda suda hareket etmesinden dolayı, su tarafından geminin hareket yönüne zıt olarak uygulanan kuvvetlerin bileşkesine direnç kuvveti denir. Gemi ıslak yüzeyine etki eden bu kuvvetler, iki grupta toplanmaktadır. Bunlar;

1. Teğetsel kuvvetler
2. Normal kuvvetler

şeklindedir. Söz konusu teğetsel kuvvetlerin bileşkesi gemi direncinin sürtünme direnci bileşenini, normal kuvvetlerin bileşkesi ise, basınç direnci bileşenini oluşturmaktadır. Harcanan enerji açısından bakıldığında ise, bir geminin direncini viskoz direnç ve dalga direnci olarak iki bileşene ayırmak olanaklıdır.[2]



Şekil 2. Direnç bileşenleri [3]

Sürtünme direnci: Gemi ıslak yüzeyi üstündeki teğetsel gerilmelerin gemi hareket yönünde toplanması ile elde edilen direnç bileşenidir.

Basınç direnci: Gemi ıslak yüzeyi üstündeki normal gerilmelerin gemi hareket yönünde toplanması ile elde edilen direnç bileşenidir.

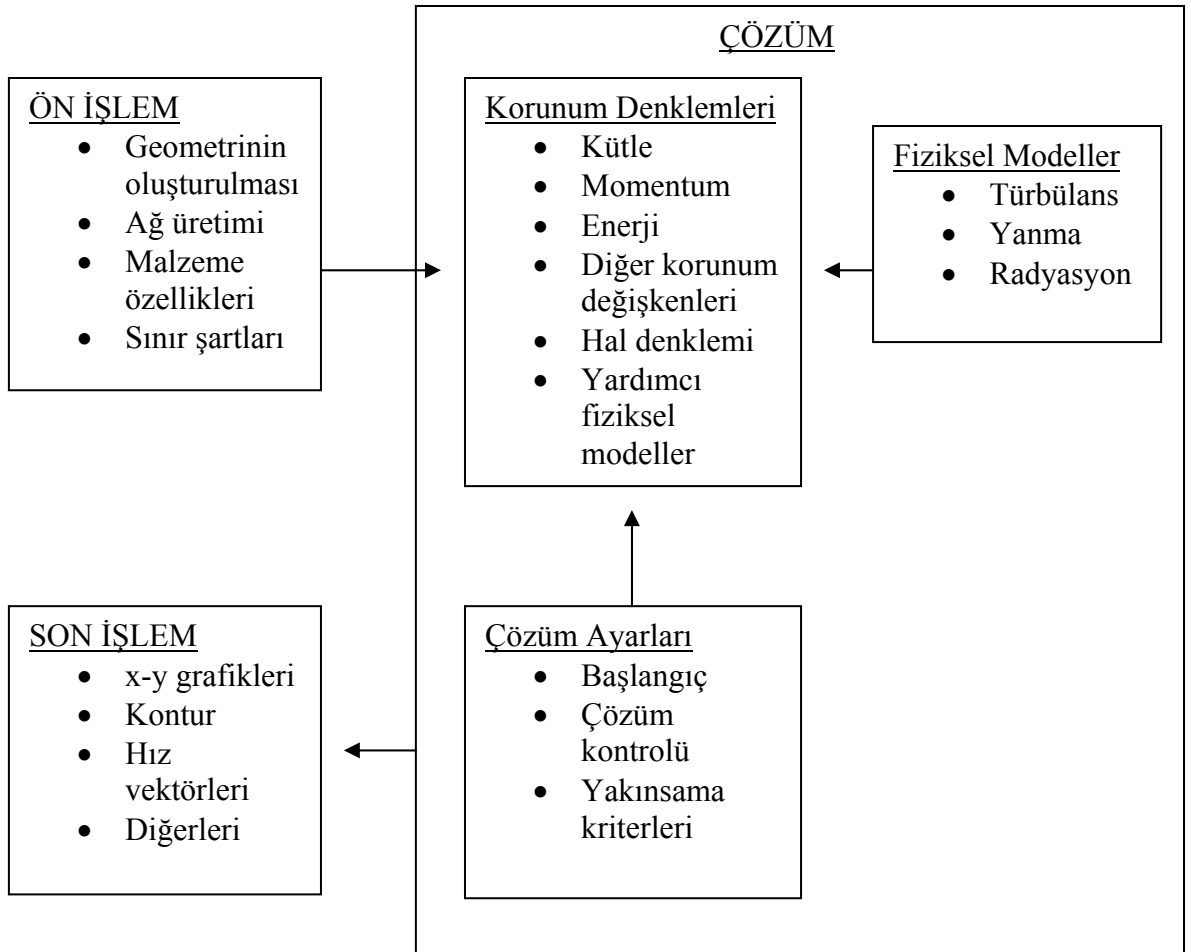
Viskoz direnç: Suyun viskozitesinden dolayı oluşan enerji kayıplarını temsil eden (üç boyutlu gemi formundan dolayı oluşabilen girdaplık, çapraz akım ve akım ayrılmaları da dahil olmak üzere) direnç bileşenidir.

Viskoz basınç direnci: Viskozite ve girdaplardan dolayı normal gerilme bileşenlerinin toplanması ile elde edilen direnç bileşenidir.

Dalga direnci: Gemi etrafındaki dalga sistemini oluşturan kayıp enerjiyi temsil eden direnç bileşenidir.[3]

1.5. Hesaplamalı Akışkanlar Dinamiği

Isı, akış ve kimyasal tepkime problemlerini çözebilmek için geliştirilmiş HAD yazılımları ön işlem, çözüm ve son işlem olmak üzere üç temel aşamada gerçekleşir. Şekil 3' de bu temel aşamalarda gerçekleştirilen işlemler gösterilmektedir.



Şekil 3. HAD' ın üç temel aşaması [4]

1.5.1. Akışkan Hareketinin Temel Denklemleri

1.5.1.1. Reynolds Transport Teoremi

Reynolds transport teoremi bir sistemdeki bir akışkan özelliğinin zamana göre değişim hızı ile, bir kontrol hacmindeki bir akışkan özelliğinin zamana göre değişim hızı arasındaki matematiksel bağıntıdır. Bu teoreme göre sabit bir kontrol hacmi için RTT,

$$\frac{d\Phi_{sis}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \phi dV + \int_A \rho \phi \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (1.1)$$

şeklindedir. Burada Φ kütle, enerji, momentum gibi herhangi bir yaygın özelliği gösterirken, $\phi = \Phi / m$ ise buna karşılık gelen yoğun özelliği göstermektedir. Ayrıca sabit bir kontrol hacmi için Reynolds transport teoreminin alternatif formu aşağıdaki gibidir:

$$\frac{d\Phi_{sis}}{dt} = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) dV + \int_A \rho \phi \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (1.2)$$

1.5.1.2. Kütlelerin Korunumu Denklemi

Reynolds transport teoreminin uygulanmasıyla ($\Phi = m$ için) kontrol hacmi için kütlelerin korunumu denklemi,

$$0 = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_A \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (1.3)$$

yazılabilir. Diverjans teoreminin uygulanmasıyla denklem (1.3),

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) \right] dV = 0 \quad (1.4)$$

dönüşür. Bu denklem yalnızca köşeli parantezin sıfır olmasıyla sağlanır. Böylece kütle korunumu denklemi (süreklilik denklemi),

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (1.5)$$

elde edilmiş olur. Bu denklemin kartezyen koordinatlarda açık şekli aşağıdaki gibidir:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad (1.6)$$

1.5.1.3. Momentumun Korunumu Denklemi

Reynolds transport teoreminin uygulanmasıyla ($\Phi = m\vec{V}$ için) kontrol hacmi için kütle korunumu denklemi,

$$\sum \vec{F} = \int_V \rho \vec{g} dV + \int_A \sigma_{ij} \cdot \vec{n} dA = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}) dV + \int_A (\rho \vec{V}) \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (1.7)$$

yazılabilir. Diverjans teoreminin uygulanmasıyla denklem (1.7),

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) - \rho \vec{g} - \vec{\nabla} \cdot \sigma_{ij} \right] dV = 0 \quad (1.8)$$

dönüşür. Bu denklem yalnızca köşeli parantezin sıfır olmasıyla sağlanır. Böylece doğrusal momentumun korunumu denklemi,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) - \rho \vec{g} - \vec{\nabla} \cdot \sigma_{ij} = 0 \quad (1.9)$$

elde edilmiş olur. Denklem (1.9)' un alternatif formu ise

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \sigma_{ij} \quad (1.10)$$

şeklindedir. Bu denklemin kartezyen koordinatlarda açık şekli aşağıdaki gibidir:

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] = \rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \quad (1.11)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] = \rho g_y + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} \quad (1.12)$$

$$\rho \left[\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] = \rho g_z + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \quad (1.13)$$

1.5.1.4. Navier-Stokes Denklemleri

Momentum denklemindeki gerilme tensörü,

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

şeklinde yazılabilir. Burada yer alan viskoz gerilme tensörü τ_{ij} Newton tipi akışkanlar için

hız alanı ve viskozite gibi ölçülebilir akışkan özellikleri cinsinden yazılırsa,

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} & \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} & \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

eşitliği elde edilmiş olur. Bu bünye denklemleri momentumun korunumu denkleminde yerine yazılıp düzenlenirse sabit viskoziteli sıkıştırılmaz bir akış için Navier-Stokes denklemi elde edilir.

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{g} + \mu\nabla^2\vec{V} \quad (1.16)$$

Navier-Stokes denkleminin kartezyen koordinatlarda açık şekli aşağıdaki gibidir:

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \quad (1.17)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] \quad (1.18)$$

$$\rho \left[\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] \quad (1.19)$$

1.5.1.5. Herhangi Bir Büyüklüğün Adveksiyon-Difüzyon Denklemi

Akış problemlerinde adveksiyonun yanında mutlaka difüzyon olayı da gerçekleşir. Bu bağlamda sıkıştırılmaz akışlar için herhangi bir büyüklüğün integral yapıda adveksiyon-difüzyon denklemi,

$$\frac{d}{dt} \int_V \phi dV + \int_A \phi (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = \int_A \Gamma \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n} dA + \int_V Q dV \quad (1.20)$$

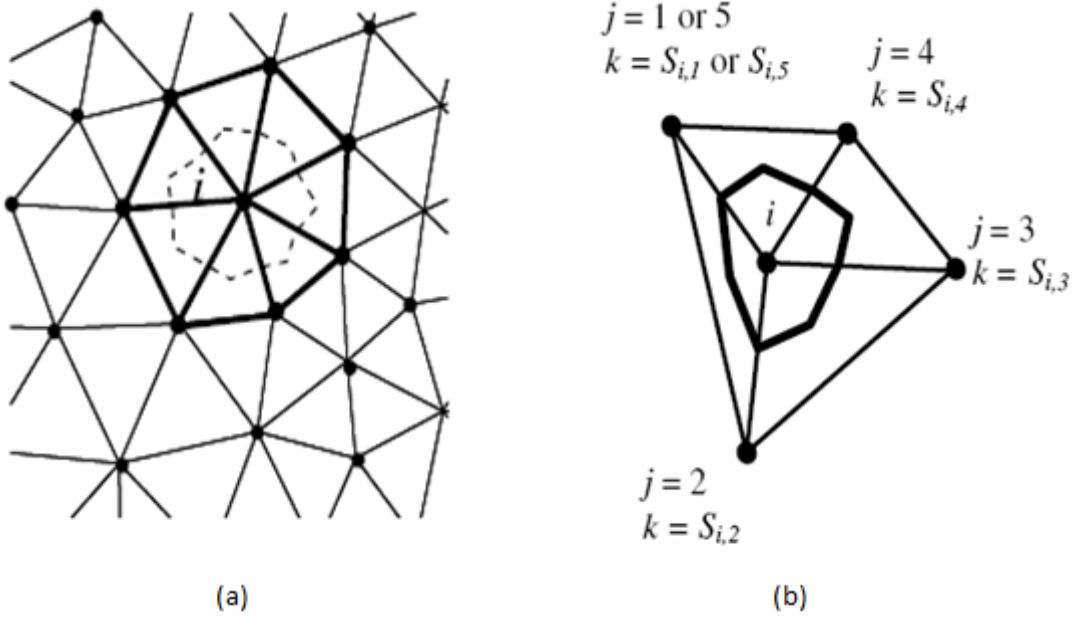
şeklindedir.

1.5.2. Sonlu Eleman Yöntemi Tabanlı Sonlu Hacim Yöntemi

Diferansiyel yapıda korunum denklemlerin ayrıklaştırılması için kullanılan yöntemlerden bazıları sonlu farklar yöntemi, sonlu elemanlar yöntemi ve sonlu hacim yöntemidir. Sonlu hacim yöntemi aslında ya sonlu farklar yöntemi ya da sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak geliştirilen bir yöntemdir. Bu nedenle sonlu hacim yöntemini, kullanılan formülasyona bağlı olarak ya sonlu eleman tabanlı sonlu hacim yöntemi (CVFEM) ya da sonlu farklar tabanlı sonlu hacim yöntemi (CVFDM) şeklinde isimlendirmek daha doğru olur. CVFEM yöntemiyle cebirsel bir denklem elde edebilmek için uygulanması gereken işlem adımları aşağıda sıralanmıştır. Bu bağlamda iki boyutlu zamandan bağımsız adveksiyon-difüzyon denklemi göz önüne alınmıştır.

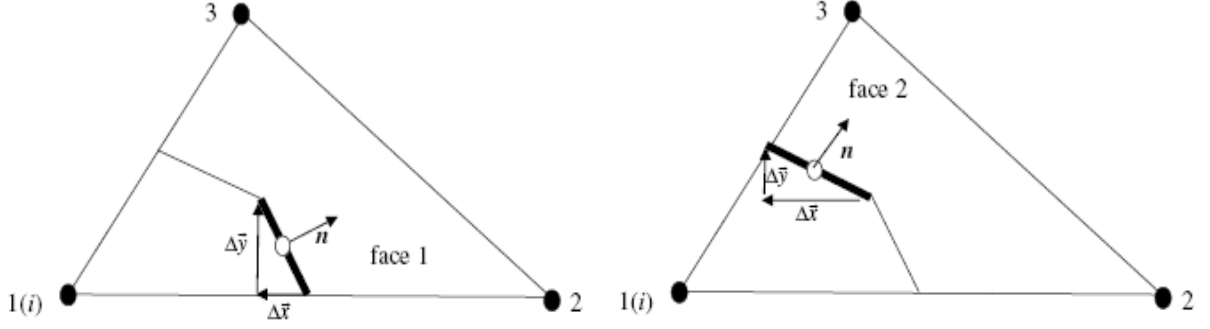
$$-\int_V QdV - \int_A \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{n}dA + \int_A (\vec{V} \cdot \vec{n})\phi dA = 0 \quad (1.21)$$

1.Adım: Sürekli olan akış alanı üçgen yapıda elemanlara ayrılır (başka tipte elemanlara da ayrılabilir) ve bu elemanlar içerisinde kontrol hacimleri oluşturulur. Ayrıca bu üçgen elemanlar numaralandırılır.



Şekil 4. Akış alanının ayrıklaştırılması (a) her bir elemanın numaralandırılması (b) [5]

2. Adım: İntegral yapıda korunum denklemlerinin ayrıklaştırılabilmesi öncelikle seçilen bir elemanda bazı özelliklerin belirlenmesi gerekir.



Şekil 5. Kontrol hacminin yüzeyleri [5]

Elemanın hacmi (birim derinlikte) aşağıdaki gibidir:

$$V^{ele} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{(x_2 y_3 - x_3 y_2) + x_1 (y_2 - y_3) + y_1 (x_3 - x_2)}{2} \quad (1.22)$$

Eleman içerisinde herhangi bir akışkan özelliği basit fonksiyonlar ile yaklaşık olarak ifade edilmeye çalışılır. Bu basit fonksiyonlar değişkenlerin düğüm noktalarındaki değerleri cinsinden ifade edilmektedir. Böylelikle herhangi bir akışkanın yoğun özelliği ϕ düğüm noktaları cinsinden,

$$\phi = N_1 \phi_1 + N_2 \phi_2 + N_3 \phi_3 \quad (1.23)$$

şeklinde yazılır. Burada N alt indis şekil fonksiyonları aşağıdaki gibidir:

$$N_1 = \frac{(x_2 y_3 - x_3 y_2) + x(y_2 - y_3) + y(x_3 - x_2)}{2V^{ele}} \quad (1.24)$$

$$N_2 = \frac{(x_3 y_1 - x_1 y_3) + x(y_3 - y_1) + y(x_1 - x_3)}{2V^{ele}} \quad (1.25)$$

$$N_3 = \frac{(x_1 y_2 - x_2 y_1) + x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1)}{2V^{ele}} \quad (1.26)$$

Şekil fonksiyonlarının türevleri aşağıdaki gibidir:

$$N_{1x} = \frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{(y_2 - y_3)}{2V^{ele}} \quad N_{1y} = \frac{\partial N_1}{\partial y} = \frac{(x_3 - x_2)}{2V^{ele}} \quad (1.27)$$

$$N_{2x} = \frac{\partial N_2}{\partial x} = \frac{(y_3 - y_1)}{2V^{ele}} \quad N_{2y} = \frac{\partial N_2}{\partial y} = \frac{(x_1 - x_3)}{2V^{ele}} \quad (1.28)$$

$$N_{3x} = \frac{\partial N_3}{\partial x} = \frac{(y_1 - y_2)}{2V^{ele}} \quad N_{3y} = \frac{\partial N_3}{\partial y} = \frac{(x_2 - x_1)}{2V^{ele}} \quad (1.29)$$

Böylelikle denklem (1.21)' deki gradyan ifadeleri,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = N_{1x} \phi_1 + N_{2x} \phi_2 + N_{3x} \phi_3 \quad (1.30)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = N_{1y} \phi_1 + N_{2y} \phi_2 + N_{3y} \phi_3 \quad (1.31)$$

şeklinde yazılır. Eleman içerisinde kontrol hacminin her bir yüzeyi için alan ifadeleri aşağıdaki gibidir:

$$A_{f1} = \sqrt{\Delta x_{f1}^{\rightarrow 2} + \Delta y_{f1}^{\rightarrow 2}} \quad (1.32)$$

$$A_{f2} = \sqrt{\Delta x_{f2}^{\rightarrow 2} + \Delta y_{f2}^{\rightarrow 2}} \quad (1.33)$$

$$\Delta \vec{x}_{f1} = \frac{x_3}{3} - \frac{x_2}{6} - \frac{x_1}{6} \quad (1.34)$$

$$\Delta \vec{y}_{f1} = \frac{y_3}{3} - \frac{y_2}{6} - \frac{y_1}{6} \quad (1.35)$$

$$\Delta \vec{x}_{f2} = -\frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{6} + \frac{x_1}{6} \quad (1.36)$$

$$\Delta \vec{y}_{f2} = -\frac{y_2}{3} + \frac{y_3}{6} + \frac{y_1}{6} \quad (1.37)$$

Her bir yüzeydeki birim vektörleri aşağıdaki şekilde yazılır:

$$n_x^{f1} = \frac{\Delta \vec{y}_{f1}}{A_{f1}} \quad n_y^{f1} = -\frac{\Delta \vec{x}_{f1}}{A_{f1}} \quad (1.38)$$

$$n_x^{f2} = \frac{\Delta \vec{y}_{f2}}{A_{f2}} \quad n_y^{f2} = -\frac{\Delta \vec{x}_{f2}}{A_{f2}} \quad (1.39)$$

Ayrıca bu yüzeylerin orta noktalarındaki difüzyon ve hız terimleri düğüm noktaları cinsinden,

$$\Gamma_{f1} = [N_1\Gamma_1 + N_2\Gamma_2 + N_3\Gamma_3]_{f1} = \frac{5}{12}\Gamma_1 + \frac{5}{12}\Gamma_2 + \frac{2}{12}\Gamma_3 \quad (1.40)$$

$$\Gamma_{f2} = [N_1\Gamma_1 + N_2\Gamma_2 + N_3\Gamma_3]_{f2} = \frac{5}{12}\Gamma_1 + \frac{2}{12}\Gamma_2 + \frac{5}{12}\Gamma_3 \quad (1.41)$$

$$V_x^{f1} = \frac{5}{12}V_{x1} + \frac{5}{12}V_{x2} + \frac{2}{12}V_{x3} \quad (1.42)$$

$$V_y^{f1} = \frac{5}{12}V_{y1} + \frac{5}{12}V_{y2} + \frac{2}{12}V_{y3} \quad (1.43)$$

$$V_x^{f2} = \frac{5}{12}V_{x1} + \frac{2}{12}V_{x2} + \frac{5}{12}V_{x3} \quad (1.44)$$

$$V_y^{f2} = \frac{5}{12}V_{y1} + \frac{2}{12}V_{y2} + \frac{5}{12}V_{y3} \quad (1.45)$$

şeklinde yazılır. Sonuç olarak kontrol hacminin yüzeylerindeki akı terimleri aşağıdaki gibidir:

$$q_{f1} = \vec{V} \cdot \vec{n}A \Big|_{f1} = V_x^{f1} \Delta y_{f1} - V_y^{f1} \Delta x_{f1} \quad (1.46)$$

$$q_{f2} = \vec{V} \cdot \vec{n}A \Big|_{f2} = V_x^{f2} \Delta y_{f2} - V_y^{f2} \Delta x_{f2} \quad (1.47)$$

3. Adım: Bu aşamada difüzyon, adveksiyon ve kaynak terimlerinden oluşan integral yapıdaki korunum denkleminin her bir terimi ayrıklaştırılır.

Difüzyon terimi: Öncelikle difüzyon terimi her bir elemandaki kontrol hacmi yüzeyleriyle ilişkilendirilir.

$$\int_A \Gamma \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n} dA = \sum_{j=1}^{n_i} \int_{A_j} \Gamma \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n} dA \quad (1.48)$$

Sağ taraftaki ifade açık bir şekilde yazılır ve orta nokta integrasyon kuralı uygulanırsa,

$$\int_{A^3} \Gamma \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n} dA = \int_{face1} \Gamma \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n} dA + \int_{face2} \Gamma \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n} dA \approx \Gamma \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n}A \Big|_{f1} + \Gamma \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n}A \Big|_{f2} \quad (1.49)$$

eşitliği elde edilmiş olur. Burada her bir terimin açık ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$\Gamma \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n}A \Big|_{f1} = \Gamma_{f1} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta y_{f1} - \Gamma_{f1} \frac{\partial \phi}{\partial y} \Delta x_{f1} \quad (1.50)$$

$$\begin{aligned} \Gamma \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n}A \Big|_{f1} &= \Gamma_{f1} [N_{1x} \phi_1 + N_{2x} \phi_2 + N_{3x} \phi_3] \Delta y_{f1} \\ &\quad - \Gamma_{f1} [N_{1y} \phi_1 + N_{2y} \phi_2 + N_{3y} \phi_3] \Delta x_{f1} \end{aligned} \quad (1.51)$$

$$\Gamma \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n} A \Big|_{f_2} = \Gamma_{f_2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta y_{f_2} - \Gamma_{f_2} \frac{\partial \phi}{\partial y} \Delta x_{f_2} \quad (1.52)$$

$$\begin{aligned} \Gamma \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n} A \Big|_{f_2} &= \Gamma_{f_2} [N_{1x} \phi_1 + N_{2x} \phi_2 + N_{3x} \phi_3] \Delta y_{f_2} \\ &\quad - \Gamma_{f_2} [N_{1y} \phi_1 + N_{2y} \phi_2 + N_{3y} \phi_3] \Delta x_{f_2} \end{aligned} \quad (1.53)$$

Sonuç olarak difüzyon terimi difüzyon katsayıları ve düğüm noktaları cinsinden aşağıdaki gibi yazılır:

$$\int_{A^3} \Gamma \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n} dA \approx -a_1^\Gamma \phi_i + a_2^\Gamma \phi_{Si,3} + a_3^\Gamma \phi_{Si,4} \quad (1.54)$$

Burada difüzyon katsayıları:

$$a_1^\Gamma = -\Gamma_{f_1} N_{1x} \Delta y_{f_1} + \Gamma_{f_1} N_{1y} \Delta x_{f_1} - \Gamma_{f_2} N_{1x} \Delta y_{f_2} + \Gamma_{f_2} N_{1y} \Delta x_{f_2} \quad (1.55)$$

$$a_2^\Gamma = -\Gamma_{f_1} N_{2x} \Delta y_{f_1} - \Gamma_{f_1} N_{2y} \Delta x_{f_1} + \Gamma_{f_2} N_{2x} \Delta y_{f_2} - \Gamma_{f_2} N_{2y} \Delta x_{f_2} \quad (1.56)$$

$$a_3^\Gamma = \Gamma_{f_1} N_{3x} \Delta y_{f_1} - \Gamma_{f_1} N_{3y} \Delta x_{f_1} + \Gamma_{f_2} N_{3x} \Delta y_{f_2} - \Gamma_{f_2} N_{3y} \Delta x_{f_2} \quad (1.57)$$

Adveksiyon terimi: Difüzyon teriminde olduğu gibi adveksiyon terimi her bir elemandaki kontrol hacmi yüzeylerinden geçen akılar şeklinde yazılır.

$$\int_{A^3} (\vec{V} \cdot \vec{n}) \phi dA = \int_{face1} (\vec{V} \cdot \vec{n}) \phi dA + \int_{face2} (\vec{V} \cdot \vec{n}) \phi dA = q_{f_1} \phi_{f_1} + q_{f_2} \phi_{f_2} \quad (1.58)$$

Kontrol hacminin yüzeylerindeki değişken değerleri akışın yönüne bağlı olarak geliştirilen upwind yaklaşımına göre aşağıdaki gibi seçilir:

$$\phi_{f_1} = \phi_1 \text{ eğer } q_{f_1} > 0 \quad ; \quad \phi_{f_1} = \phi_2 \text{ eğer } q_{f_1} < 0$$

$$\phi_{f2} = \phi_1 \text{ eğer } q_{f2} > 0 \text{ ; } \phi_{f2} = \phi_2 \text{ eğer } q_{f2} < 0$$

Sonuç olarak adveksiyon terimi adveksiyon katsayıları ve düğüm noktaları cinsinden aşağıdaki gibi yazılır:

$$\int_{A^3} (\vec{V} \cdot n) \phi dA = a_1^u \phi_i - a_2^u \phi_{Si,3} - a_3^u \phi_{Si,4} \quad (1.59)$$

$$a_1^u = \max[q_{f1}, 0] + \max[q_{f2}, 0] \quad (1.60)$$

$$a_2^u = \max[-q_{f1}, 0] \quad (1.61)$$

$$a_3^u = \max[-q_{f2}, 0] \quad (1.62)$$

Kaynak terimi: Kaynak terimi i noktası etrafındaki elemanlar üzerinde oluşturulan kontrol hacimleriyle ilişkilendirilmesi sonucunda aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\int_{V_i} Q dV = \sum_{j=1}^{element} \int_{V_i^j} Q dV \quad (1.63)$$

Toplam işlemi içerisinde yer alan integral yerine tekil nokta integrasyon kuralı uygulanırsa kaynak terimi aşağıdaki gibi yazılır:

$$\sum_{j=1}^{element} \int_{V_i^j} Q dV \approx Q_i V_i \quad (1.64)$$

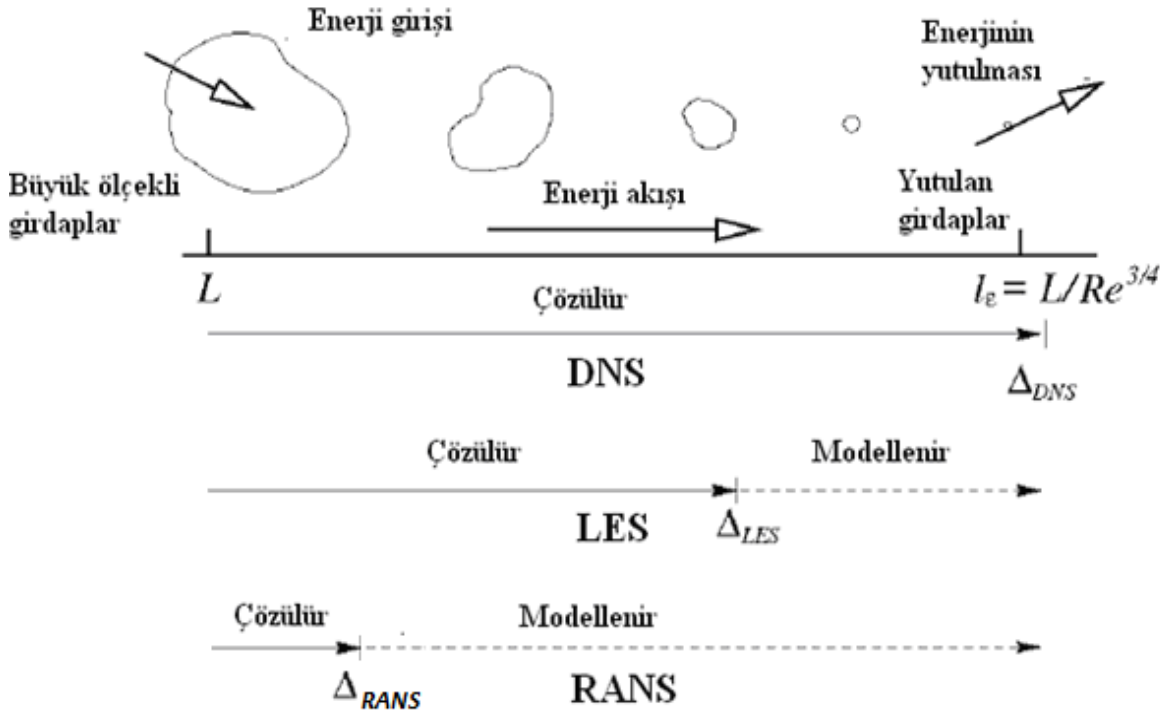
Sonuç olarak iki boyutlu bir problemde korunum denkleminin ayrıklaştırılmış şekli aşağıdaki gibi olur [5]:

$$a_i \phi_i = \sum_{j=1}^{n_i} a_{i,j} \phi_{Si,j} + Q_i V_i \quad (1.65)$$

1.5.3. Türbülans ve Türbülans Modelleri

Mühendislik uygulamalarında karşılaşılan akışların çoğu türbülanslıdır. Türbülanslı akış aşağıda belirtilen özellikleriyle karakterize edilir.

- Türbülanslı akışlar düzensizdirler ve bu durum türbülans problemlerinde istatistiksel yaklaşımı gerektirir.
- Türbülanslı akışlarda çok miktarda girdap adı verilen dönen akış bölgeleri vardır.
- Laminer akışta akışkan parçacıkları, yörünge çizgileri boyunca düzgün akar ve momentum ve enerji akım çizgileri arasında moleküler difüzyon ile iletilir. Türbülanslı akışta dönen girdaplar; kütle, momentum ve enerjiyi akışın diğer bölgelerine moleküler difüzyondan daha hızlı bir biçimde taşır [6].
- Türbülanslı akışlar üç boyutludur. Zaman ortalamalı hızlar iki koordinat eksenine bağlı bir fonksiyon olabilir fakat anlık hız çalkantıları üç boyutludur.
- Türbülanslı akış her zaman yüksek Reynolds sayılarında ortaya çıkar ve Reynolds sayısı arttıkça akıştaki düzensizlik artar.

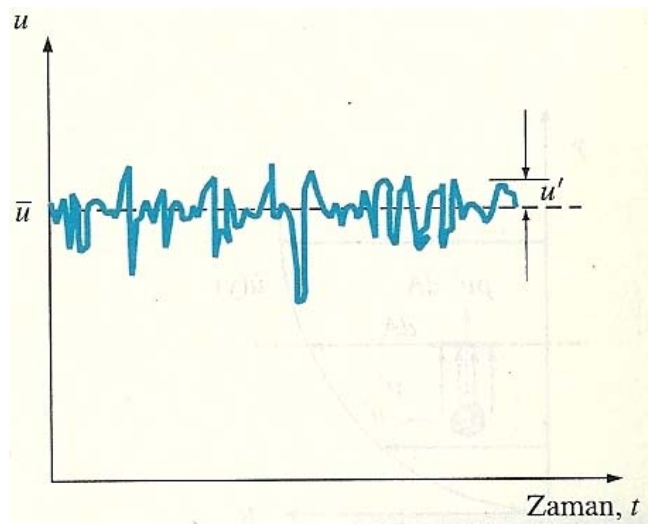


Şekil 6. Türbülanslı akış çözüm yöntemleri [7]

Hesaplamalı akışkanlar dinamiğinde türbülanslı akışın simülasyonunda çeşitli tekniklerden yararlanır. Bunlardan birisi doğrudan sayısal simülasyon (direct numerical simulation DNS) tekniğinde türbülanslı akışın içerisinde yer alan türbülans girdaplarının tümünün simülasyonu gerçekleştirilir. Büyük girdap simülasyonunda (large eddy simulation LES) ise türbülans girdaplarının büyük ölçekli daimi olmayan özellikleri çözülür. Bu arada küçük ölçekli ve yitirgen eğilimli türbülans girdapları ise modellenir. Bunların dışında daha basit bir yaklaşım olan türbülans modelleme tekniği ile türbülans girdapları modellenir. Günümüzde farklı türbülans modelleri kullanılmaktadır ve bu türbülans modelleri kullanılan denklem takımı sayısına bağlı olarak cebirsel, tek denklemlilik, iki denklemlilik ve Reynolds gerilme modeller olmak üzere isimlendirilir. Bu modellerin tümüne birden RANS (Reynolds-averaged Navier-Stokes) denklemlilik modelleri denir. Bu tez çalışmasında iki denklemlilik $k-\epsilon$ türbülans modeli uygulama çalışmasında kullanılacağından bu türbülans modelinin matematiksel alt yapısı hakkında bilgi verilecektir.

1.5.3.1. $k-\epsilon$ Türbülans Modeli

Akış alanı boyunca bir noktadan ölçeceğimiz anlık hız, basınç, sıcaklık gibi büyüklükler gerçekte ortalama bir değer ile çalkantı bileşeninin toplamına eşit olacaktır.



Şekil 7. Anlık, ortalama ve çalkantı hız bileşeni [6]

Bu büyüklükler:

$$u = \bar{u} + u' \quad (1.66)$$

$$v = \bar{v} + v' \quad (1.67)$$

$$w = \bar{w} + w' \quad (1.68)$$

$$P = \bar{P} + P' \quad (1.69)$$

$$\rho = \bar{\rho} + \rho' \quad (1.70)$$

şeklinde yazılabilir. Burada üst çizgi, ilgili büyüklüğün zamana göre ortalamasını gösterirken üsler ise çalkantı bileşenini göstermektedir. Sıkıştırılamaz Newton tipi akışkanlar için Navier-Stokes denklemi indis notasyonları ile aşağıdaki gibidir:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + u_j \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_j} = \rho g_i - \frac{\partial P_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\tau_{ij}) \quad (1.71)$$

Burada τ_{ij} viskoz gerilme tensörü olup şekil değiştirme hızına bağlıdır.

$$\tau_{ij} = 2\mu s_{ij} \quad (1.72)$$

Şekil değiştirme hızı ise

$$s_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (1.73)$$

şeklindedir. Denklem (1.72)' nin denklem (1.71)' de yerine yazılmasıyla,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + u_j \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_j} = \rho g_i - \frac{\partial P_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(2\mu s_{ij}) \quad (1.74)$$

denklemini elde edilir. Sıkıştırılmaz akışta yoğunluk sabit olduğundan ve zincir kuralının uygulanmasıyla,

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} - \rho u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \rho g_i - \frac{\partial P_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(2\mu s_{ij}) \quad (1.75)$$

denklemine dönüşür. Bu denklemin sol tarafında yer alan üçüncü. terim sıkıştırılmazlıktan dolayı sıfırdır. Sonuç olarak denklem,

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = \rho g_i - \frac{\partial P_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(2\mu s_{ij}) \quad (1.76)$$

şeklini alır. Denklem (1.76)' da yer alan anlık büyüklükler yerine ortalama ve çalkantı büyüklükleri yazılırsa,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t}(\bar{u}_i + u'_i) + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} [(\bar{u}_i + u'_i)(\bar{u}_j + u'_j)] &= \rho g_i - \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{P}_i + P'_i) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j} [2\mu(\bar{s}_{ij} + s'_{ij})] \end{aligned} \quad (1.77)$$

denklemini elde edilmiş olur. Bu denklemde zaman ortalama alınırsa ($\bar{u}'_i = 0$; $\overline{\bar{u}'_i u'_j} = 0$; $\overline{u'_i u'_j} \neq 0$ dikkate alınarak),

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}(\bar{u}_i) + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{u}_i \bar{u}_j + \overline{u'_i u'_j}] = \rho g_i - \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{P}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} [2\mu(\bar{s}_{ij})] \quad (1.78)$$

denklemini elde edilir. Her bir terimin açık yazılmasıyla,

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} (\overline{u_i}) + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} [\overline{u_i u_j}] = -\rho \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_i u'_j}) + \rho g_i - \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{P_i}) + \frac{\partial}{\partial x_j} [2\mu (\overline{s_{ij}})] \quad (1.79)$$

denkleminde dönüşür. Bu denklemde yer alan ikinci terim,

$$\rho \frac{\partial}{\partial x_j} [\overline{u_i u_j}] = \rho \overline{u_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \rho \overline{u_i} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_j} \quad (1.80)$$

şeklinde yazılabilir. Sıkıştırılamazlıktan dolayı ikinci terim sıfır olur.

$$\rho \frac{\partial}{\partial x_j} [\overline{u_i u_j}] = \rho \overline{u_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \quad (1.81)$$

Sonuç olarak denklem (1.81)' in denklem (1.79)' da yerine yazılmasıyla,

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} (\overline{u_i}) + \rho \overline{u_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} = \rho g_i - \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{P_i}) + \frac{\partial}{\partial x_j} [2\mu (\overline{s_{ij}}) - \rho \overline{u'_i u'_j}] \quad (1.82)$$

denklemini elde edilir Bu denklemde yer alan $(-\rho \overline{u'_i u'_j})$ Reynolds gerilme tensörüdür. Bu denklem RANS denklemi olarak adlandırılır.

1.5.3.1.1. Reynolds Gerilme Denkleminin Elde Edilmesi

Reynolds gerilme denklemini elde edebilmek için öncelikle sıkıştırılamaz akışlarda Navier Stokes denklemi farklı bir şekilde aşağıdaki gibi yazılır:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \quad (1.83)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mu \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \quad (1.84)$$

Reynolds gerilmelerinin tam türevi aşağıdaki gibidir:

$$\frac{D(\rho u'_i u'_j)}{Dt} = u'_i \frac{D(\rho u'_j)}{Dt} + u'_j \frac{D(\rho u'_i)}{Dt} \quad (1.85)$$

Bu ifade dikkate alınarak denklem (1.83)' ü u'_j ile denklem (1.84)' ü u'_i ile çarpılacak olursa,

$$u'_j \frac{\partial u_i}{\partial t} + u'_j u'_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = u'_j \frac{-1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + u'_j \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \quad (1.86)$$

$$u'_i \frac{\partial u_j}{\partial t} + u'_i u'_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = u'_i \frac{-1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_j} + u'_i \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mu \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \quad (1.87)$$

denklemleri elde edilir. Denklem (1.85)' deki ifadeyi elde edebilmek için denklem (1.86) ve denklem (1.87) taraf tarafa toplanır ve zaman ortalaması alınır.

$$\begin{aligned} \overline{u'_j \frac{\partial u_i}{\partial t} + u'_i \frac{\partial u_j}{\partial t} + u'_j u'_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u'_i u'_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} &= \overline{u'_j \frac{-1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + u'_i \frac{-1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_j}} \\ &+ \overline{u'_j \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) + u'_i \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mu \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right)} \end{aligned} \quad (1.88)$$

Denklemden yer alan her bir terim kendi içerisinde çözümlenip yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\overline{u'_j u'_i})}{\partial t} + u'_k \frac{\partial(\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} + \frac{\partial(\overline{u'_i u'_j u'_k})}{\partial x_k} + \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} &= \\ \frac{1}{\rho} P' \left[\frac{\partial u'_i}{\partial u'_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial u'_i} \right] - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(\overline{P' u'_i}) \delta_{jk} + (\overline{P' u'_j}) \delta_{ik} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \mu \left(\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} \right) & \\ - 2 \frac{1}{\rho} \mu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_k} & \end{aligned} \quad (1.89)$$

içerisinde zaman bağımlı, konveksiyon, basınç ve viskoz terimlerin olduğu denklem elde edilir. Bu denklem $-\rho$ ile çarpılıp yeniden düzenlenirse:

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial(\overline{\rho u'_j u'_i})}{\partial t} - u'_k \frac{\partial(\overline{\rho u'_i u'_j})}{\partial x_k} &= \overline{\rho u'_j u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \overline{\rho u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + \frac{\partial(\overline{\rho u'_i u'_j u'_k})}{\partial x_k} \\
&\quad - P' \left[\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right] + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(\overline{P' u'_i}) \delta_{jk} + (\overline{P' u'_j}) \delta_{ik} \right] \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial x_k} \mu \left(\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} \right) + 2\mu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}
\end{aligned} \tag{1.90}$$

denklemini elde edilir. Bu denklem Reynolds gerilme denklemi olarak bilinir [8]

1.5.3.1.2. Türbülans Kinetik Enerji (k) Denklemi Elde Edilmesi

Birim kütle için çalkantı hızlarının meydana getirdiği türbülans kinetik enerjisi:

$$k = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) \tag{1.91}$$

şeklindedir. Türbülansın izotropik olması durumunda

$$\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2} \tag{1.92}$$

olacağından türbülans kinetik enerjisi,

$$k = \frac{3}{2} \overline{u_i'^2} \tag{1.93}$$

dönüşür. Reynolds gerilme denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial(\overline{u'_i u'_j})}{\partial t} - u'_k \frac{\partial(\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_k} &= \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + \frac{\partial(\overline{u'_i u'_j u'_k})}{\partial x_k} \\
&\quad - \frac{P'}{\rho} \left[\frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x'_i} \right] + \left(\frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(\overline{P' u'_j}) \delta_{jk} + (\overline{P' u'_i}) \delta_{ik} \right] \\
&\quad - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mu \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} \right) + 2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}
\end{aligned} \tag{1.94}$$

Bu denklemde $j=i$ ve $k=j$ yazılacak olursa,

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial(\overline{u_i'^2})}{\partial t} - \overline{u_j} \frac{\partial(\overline{u_i'^2})}{\partial x_j} &= \overline{2u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial(\overline{u_i' u_i' u_j'})}{\partial x_j} - \frac{P'}{\rho} \left[\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right] \\
&+ \left(\frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left[2(\overline{P' u_i'}) \delta_{ij} \right] - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \overline{u_i' u_i'}}{\partial x_j} \right) \\
&+ 2\nu \left(\frac{\partial \overline{u_i'}}{\partial x_j} \right)^2
\end{aligned} \tag{1.95}$$

denklemini elde edilmiş olur. Bu denklemin sağ tarafında yer alan üçüncü terim sıkıştırılmazlıktan dolayı sıfıra eşittir. Ayrıca alt indisler birbirine eşit olduğu zaman ($i=j$) Kronecker delta fonksiyonu sıfıra eşit olmaz. Böylece denklemdeki dördüncü terim,

$$\left(\frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left[2(\overline{P' u_i'}) \delta_{ij} \right] = \left(\frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left[2(\overline{P' u_j'}) \right] \tag{1.96}$$

şeklinde yazılabilir. Denklem (1.96)'nın denklem (1.95)'de yerine yazılması ve her iki tarafın $-1/2$ ile çarpılmasıyla,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{\partial(\overline{u_i'^2})}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{1}{2} \frac{\partial(\overline{u_i'^2})}{\partial x_j} &= -\overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1}{2} (\overline{u_i' u_i' u_j'}) + \frac{1}{\rho} (\overline{P' u_j'}) \right] \\
&+ \frac{1}{2\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i' u_i'}) \right] - \nu \left(\frac{\partial \overline{u_i'}}{\partial x_j} \right)^2
\end{aligned} \tag{1.97}$$

denklemini elde edilir. Türbülans kinetik enerjisinin yutulması ε ise:

$$\varepsilon = \nu \left(\frac{\partial \overline{u_i'}}{\partial x_j} \right)^2 \tag{1.98}$$

şeklinde tanımlanır. Sonuç olarak türbülans kinetik enerji denklemi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} = & -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \varepsilon - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1}{2} (\overline{u'_i u'_i u'_j}) + \frac{1}{\rho} (\overline{P' u'_j}) \right] \\ & + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \end{aligned} \quad (1.99)$$

veya

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \overline{u_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} = & \tau'_{ij} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \rho \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1}{2} (\overline{\rho u'_i u'_i u'_j}) + (\overline{P' u'_j}) \right] \end{aligned} \quad (1.100)$$

Bu denklemin sol tarafında birinci terim kinetik enerjisinin değişimini ikinci terim ise taşınımını göstermektedir. Denklemin sağ tarafındaki birinci terim girdapçığın ortalama akıştan kayma gerilmeleri nedeniyle elde ettiği kinetik enerjiyi ikinci terim en küçük girdapçıkların sahip olduğu kinetik enerjinin moleküler düzeyde ısıl enerjiye geçişini üçüncü terim türbülans enerjisinin yayınımını son olarak dördüncü terim ise üçlü korelasyon türbülanslı çalkantılar yolu ile olan türbülanslı yayınımı ve basınç çalkantıları nedeniyle olan yayınımı göstermektedir [8].

1.5.3.1.3. Modellenmiş Türbülans Kinetik Enerji Denkleminin Elde Edilmesi

Türbülans kinetik enerjisi denkleminde yer alan çalkantı bileşenlerinin deneysel verilerle modellenmesi gerekmektedir. Çalkantı bileşenlerini içeren terimler ayrı ayrı aşağıdaki gibi modellenir:

$$\tau'_{ij} = \mu_t \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (1.101)$$

$$\frac{1}{2} (\overline{\rho u'_i u'_i u'_j}) + (\overline{p' u'_j}) = \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \quad (1.102)$$

Bu eşitliklerin denklem (1.100)' de yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \rho \varepsilon \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (1.103)$$

modellenmiş türbülans kinetik enerji denklemi elde edilmiş olur. Bu denklemde yer alan σ_k kapatılma sayısı için $\sigma_k = 1$ önerilmektedir. Ayrıca türbülans viskozitesi:

$$\mu_t = \frac{\rho C_\mu k^2}{\varepsilon} \quad (1.104)$$

eşit alınır. Diğer kapatılma sayısı için $C_\mu = 0.09$ önerilmektedir [8].

1.5.3.1.4. Yutulma Oranı (ε) Denkleminin Elde Edilmesi

Navier Stokes denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (1.105)$$

Anlık hızların yerine ortalama ve çalkantı büyüklükleri yazılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i + u'_i) + u'_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i + u'_i) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial x_i} \\ + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i + u'_i) \right) \end{aligned} \quad (1.106)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemde zaman ortalama alınırsa:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \quad (1.107)$$

denkleminde dönüşür. Denklem (1.106)' dan denklem (1.107) çıkarılırsa,

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i + u'_i) - \overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) \quad (1.108)$$

denklemini elde edilir.

$$\overline{\frac{\partial}{\partial x_j} (u'_i u'_j)} = \overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} + \overline{u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_j}} \quad (1.109)$$

Denklem (1.109) dikkate alınarak denklem (1.108) yeniden düzenlenir.

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i + u'_i) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_i u'_j} \quad (1.110)$$

Bu denklemin x_k ' ya göre türevi alınır, $\frac{\partial u'_i}{\partial x_k}$ ile çarpılır ve zaman ortalaması alınır

denklemin son hali aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\begin{aligned} & \overline{\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right)^2 \right]} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}'_j}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_j} \overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} + \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}'_j}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial x_j} \\ & + \overline{u'_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right)^2 \right]} + \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}'_j}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right)^2 \right] \\ & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 P'}{\partial x_k \partial x_i} + \nu \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right) \end{aligned} \quad (1.111)$$

Buradaki son terim,

$$\overline{\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right)} = \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right) \right] - \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right) \quad (1.112)$$

$$\overline{\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right)} = \frac{\nu}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right)^2 \right] - \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} u'_i \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} u'_i \right) \quad (1.113)$$

yazılabilir. $\varepsilon = \nu \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)$ tanımı kullanılarak ve her bir terim $2\nu\rho = 2\mu$ çarpılarak denklem en son halini alır [8].

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho\varepsilon) + \overline{\rho u_j} \frac{\partial}{\partial x_j} (\varepsilon) &= -2\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 P'}{\partial x_k \partial x_i}} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) \\ &\quad - \overline{u'_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right) - 2\nu \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} u'_i \right) \\ &\quad - 2\mu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}} - 2\mu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}} \\ &\quad - 2\mu \overline{u'_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_j} - 2\mu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \end{aligned} \quad (1.114)$$

1.5.3.1.5 Modellenmiş Yutulma Oranı Denkleminin Elde Edilmesi

Denklem (1.114)' deki yutulma oranı ε 'nin bir başka biçimde yazılışı aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{\rho u_j} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} &= -2\mu \left[\overline{u'_{i,k} u'_{j,k}} + \overline{u'_{k,i} u'_{k,j}} \right] \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - 2\mu \overline{u'_k u'_{i,j}} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_j} \\ &\quad - 2\mu \overline{u'_{i,k} u'_{i,m} u'_{k,m}} - 2\mu \overline{\nu u'_{i,km} u'_{i,km}} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} - \overline{\mu u'_j u'_{i,m} u'_{i,m}} - 2\nu \overline{P'_m u'_{j,m}} \right] \end{aligned} \quad (1.115)$$

Bu denklemin sağ tarafındaki ilk iki terim ortalama akış ile türbülans çalkantıları arasındaki etkileşimden kaynaklanan ε 'nin üretimini, sonraki iki terim türbülans hız çalkantılarından kaynaklanan ε 'nin yutulmasını ve son terim viskoz difüzyon, türbülans çalkantıları ve basınç- hız çalkantılarından kaynaklanan transportu gösterir. Çalkantı bileşenlerini içeren terimler ayrı ayrı aşağıdaki gibi modellenir:

$$\begin{aligned} & -2\mu \overline{[u'_{i,k} u'_{j,k} + u'_{k,i} u'_{k,j}]} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - 2\mu \overline{u'_k u'_{i,j}} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_j} \\ & = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \mu_t \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right] \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (1.116)$$

$$-2\mu \overline{u'_{i,k} u'_{i,m} u'_{k,m}} - 2\mu \overline{v u'_{i,km} u'_{i,km}} = -C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (1.117)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} - \overline{\mu u'_j u'_{i,m} u'_{i,m}} - 2\nu \overline{P'_m u'_{j,m}} \right] = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] \quad (1.118)$$

Sonuç olarak modellenmiş yutulma oranı ε denklemi,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho \overline{u'_j} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \mu_t \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right] \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \\ & - C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \end{aligned} \quad (1.119)$$

elde edilmiş olur. Bu denklemdeki türbülans viskozitesi,

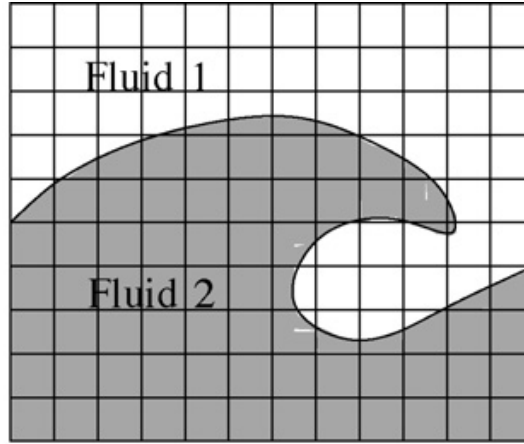
$$\mu_t = \frac{\rho C_{\mu} k^2}{\varepsilon} \quad (1.120)$$

eşittir. Ayrıca bu denklemdeki kapatılma sayıları da standart $k - \varepsilon$ modeli için $C_{\varepsilon 1} = 1.44$, $C_{\varepsilon 2} = 1.92$, $\sigma_{\varepsilon} = 1.3$ eşit alınır [8].

1.5.4. Serbest Su Yüzeyinin Modellenmesi

RANS hesaplamalarında serbest su yüzeyini modelleyebilmek için iki temel yaklaşım vardır. İlk yaklaşım serbest yüzey izleme (free-surface tracking) metodunda çözüm ağı, serbest yüzeye uyarlanır ve çözüm süresince serbest yüzeyin hareketini izler. Diğer yaklaşım serbest yüzey yakalama (free-surface capturing) metodunda, sabit çözüm ağı kullanılır ve serbest yüzeyin bu ağıdaki konumu bulunur.

Yüzey yakalama metotlarından akışkan hacmi metodu (volume of fluid VOF) ilk olarak Hirt ve Nichols (1981) tarafından geliştirildi. VOF metodu dalga kırılmaları gibi yüksek derecede lineer olmayan serbest yüzey problemlerinde doğru sonuçlar vermektedir. Ayrıca ağ üretiminde esneklik ve kolaylık sağladığından dolayı VOF metodu gemi dalga hesaplarında tercih edilmektedir.



Şekil 8. Serbest yüzey ağı yapısı [9]

VOF metodunda momentum denklemi her iki akışkan için geçerli olabilecek bir biçimde yazılır. Sonuç olarak iki fazlı akışı tanımlayan Navier-Stokes denklemi aşağıdaki gibidir:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho^+ u_i) + u_j \frac{\partial(\rho^+ u_i)}{\partial x_j} = \rho^+ g_i - \frac{\partial P_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu^+ \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right] + f_i \quad (1.121)$$

Bu denklemde yer alan yoğunluk ve dinamik viskozite ifadeleri,

$$\rho^+ = c\rho_1 + (1-c)\rho_2 \quad (1.122)$$

$$\mu^+ = c\mu_1 + (1-c)\mu_2 \quad (1.123)$$

şeklindedir. Denklem (1.121)' de yer alan f_i kuvveti ise ara yüzeyi bir arada tutan kuvvet olarak tanımlanır. Denklem (1.122) ve (1.123)' deki c katsayısı ise çözüm ağı içerisinde her bir hücredeki birinci akışkan hacminin ikinci akışkan hacmine oranıdır. Böylece

- $c = 0$ ise hücrenin tamamı akışkan 2 ile dolu
- $c = 1$ ise hücrenin tamamı akışkan 1 ile dolu
- $0 < c < 1$ ise ara yüzey

olduğu anlaşılmaktadır. VOF metodunda ara yüzeyin konumunu (c katsayısının değerini) belirleyebilmek için geliştirilmiş denklem aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial(cu_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (1.124)$$

1.5.5. Cebirsel Denklem Sisteminin Çözümü

Korunum denklemlerinin cebrik denklemlere dönüştürülmesinin ardından denklem takımının etkili, doğru ve hızlı bir şekilde çözülmesi gerekir. Bunun için geliştirilmiş olan çözüm algoritmalarından biri ayrık (segregated) çözümlerde, basıncın tahmin edilmesiyle momentum denklemleri çözülür daha sonra basınç terimi basınç doğrulama denkleminde kontrol edilir. Ansys-CFX programının da kullandığı çözüm algoritmalarından bir diğeri ise birleşik (coupled) çözümlerde tek bir denklem takımı oluşturulup cebrik denklemler eş zamanlı çözülür.

Cebrik denklem takımı büyük boyutta oldukları zaman direk yöntemler yerine iteratif yöntemler kullanılır. İteratif yöntemlerde genel amaç, belirli bir şart sağlanıncaya kadar işlemler tekrar edilir ve kesin çözüme yaklaşık bir değer bulunur. Ansys-CFX programı iteratif yöntemlerden ILU ayrıklaştırılması (incomplete lower upper factorization) yöntemini kullanmaktadır. Bu yöntemin çözüm algoritması aşağıdaki gibidir:

$$Ax = (M-K)x = (LU-K)x = b$$

$$Mx^{(k+1)} = Mx^{(k)} - (Ax^{(k)} - b) = Mx^{(k)} + r^{(k)} \quad \text{öyle ki} \quad \|M\| \gg \|K\|$$

$$M(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = Md^{(k)} = LUd^{(k)} = r^{(k)}$$

$$LUd^{(k)} = L(Ud^{(k)}) = Ly^{(k)} = r^{(k)}$$

Tahmin oluştur

$$k = 0, x^{(k)}$$

$$r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$$

Eğer ($\|r^{(k)}\|_2 \geq \varepsilon_h$) ise

$$r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$$

çöz $Ly^{(k)} = r^{(k)}$ ileri yerine koyma ile

$$y^{(k)} = L^{-1} r^{(k)}$$

çöz $Ud^{(k)} = y^{(k)}$ geri yerine koyma ile

$$d^{(k)} = U^{-1} y^{(k)}$$

çözümü güncelleştir

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + d^{(k)}$$

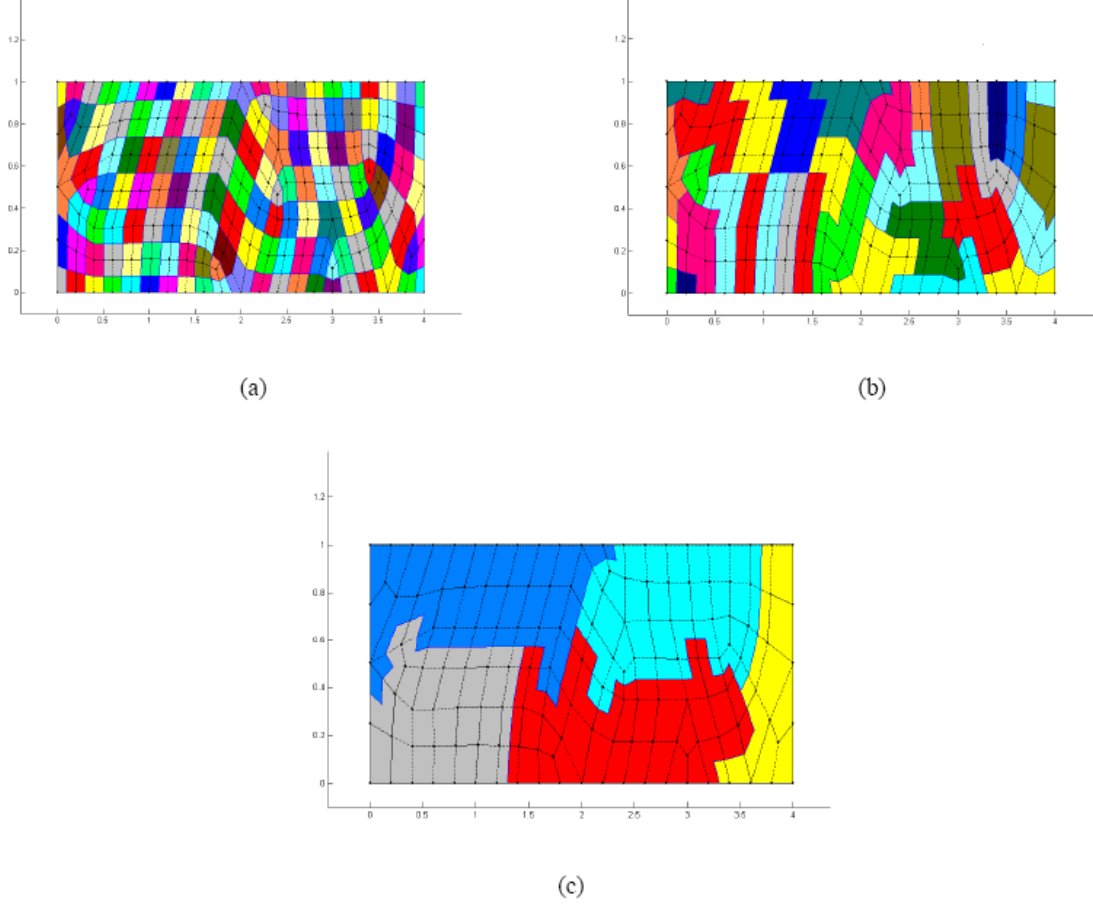
döngüyü bitir [10]

ILU gibi iteratif çözücülerin performansı hesaplanan düğüm noktası sayısı arttıkça azalır. Bu durumda iteratif çözücülerin performansını artırmak için çoklu ağ (multigrid) metodu geliştirilmiştir. Çoklu ağ yaklaşımıyla hataların bütün frekans tipleri düşürülmeye çalışılır. İyi ağda (orijinal ağda) hatanın yüksek frekans tipleri etkili bir şekilde düşürülür fakat hatanın düşük frekans tiplerini düşürmek zordur. Çoklu ağ metodunda daha az hesaplama zamanı harcanarak kaba ağ yaklaşımıyla hatanın düşük frekans tipleri de düşürülür.

Genel olarak çoklu ağ metotlarında ilk iterasyonlar en iyi ağda (orijinal ağda) gerçekleştirilir sonraki iterasyonlar iyi ağdaki elemanların bir araya getirilmesiyle elde edilen kaba ağlarda gerçekleştirilir. Daha sonra kaba ağlarda elde edilen sonuçlar orijinal ağa aktarılır.

Çoklu ağ metodu, geometrik çoklu ağ ve cebrik çoklu ağ olmak üzere iki gruba ayrılır. Ansys CFX programı cebrik çoklu ağ metodunun özel bir uygulaması olan Additive Correction Multigrid metodunu kullanmaktadır. ACM metodu kaba ağ denklemlerinin oluşturulması bakımından diğer çoklu ağ metotlarından farklıdır. ACM metodunda korunum denklemlerinin ayrıklaştırılması sadece orijinal ağda gerçekleştirilir. Bu durum ACM metodunu diğer çoklu ağ metotlarına göre daha az karmaşık yapar. Kaba ağ

denklemleri ise iyi ağıdaki (orijinal ağ) ayrıklaştırılmış denklemlerin toplanmasıyla elde edilir. Sonuç olarak korunum denklemleri iyi ağıdaki hücrelerin bir araya getirilmesiyle elde edilen bloklarda da sağlanır. Böylece fiziksel olarak istenen şart da yerine getirilmiş olur.



Şekil 9. Yapısal olmayan ağı birleştirilmesi, iyi ağ(orijinal ağ) (a) 1.kaba ağ (b) 2. kaba ağ (c) [11]

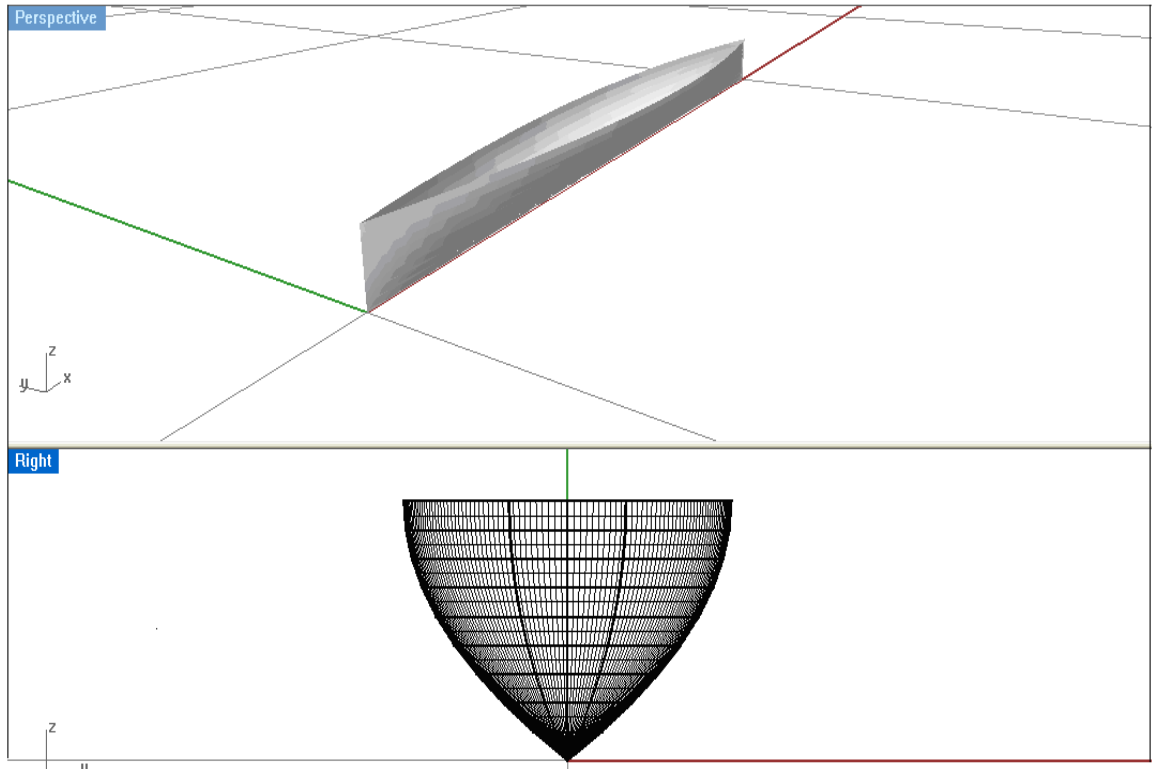
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR, BULGULAR VE İRDELEME

2.1. Geometrik Modelleme

HAD ile direnç hesaplarını yapabilmek için öncelikle matematiksel olarak temsil edilebilen Wigley teknesi modellenmiştir. Wigley teknesine ait matematiksel bağıntı aşağıdaki gibidir:

$$y = \frac{B}{2} \left(1 - \left(\frac{2x}{L} \right)^2 \right) \left(1 - \left(\frac{z}{T} \right)^2 \right) \quad (2.1)$$

Burada B gemi orta kesitindeki genişlik, L su hattı boyu, T su çekimidir. Modelini oluşturduğumuz teknenin formuna ait temel boyutlar Tablo 1' de geometrik formu ise Şekil 10 de gösterilmektedir.

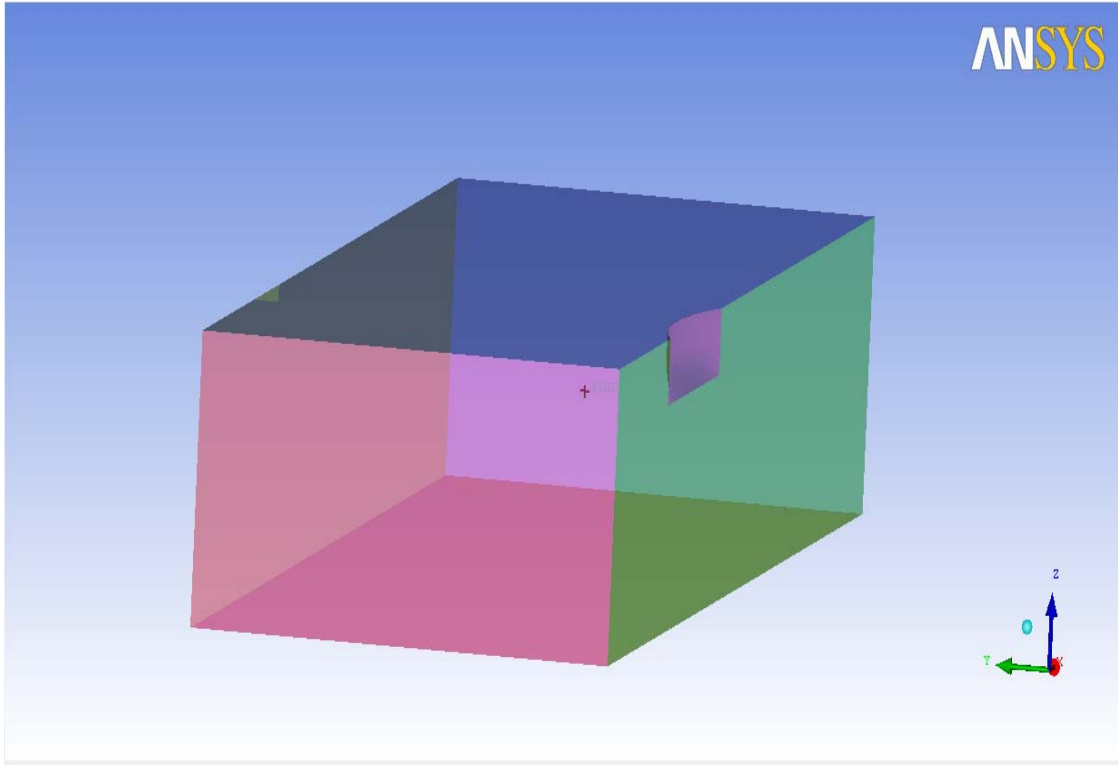


Şekil 10. Wigley teknesi

Tablo 1. Wigley teknesinin ana boyutları

Parametre	Büyükük	Birim
L	1	m
L/B	0.1	-
T/L	0.0625	-
C_B	0.444	-
WSA	0.1486	-

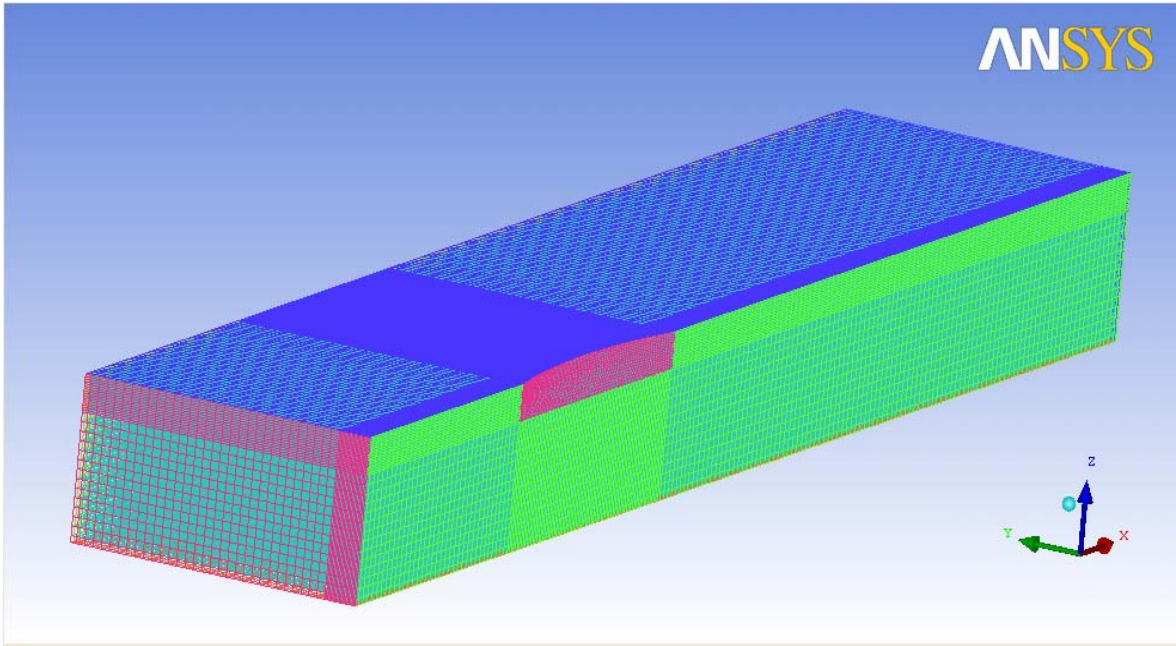
Hesaplamalı akışkanlar dinamiği yöntemiyle teknenin direnç kuvvetini hesaplayabilmek için ya geminin istenen hızda hareket ettirilmesi ya da bir bölge oluşturularak akışın bu bölgeden istenen hızda geçirilmesi gerekmektedir. Bu bağlamda uygulamada boyutları 1 x 0,5 x 5m olan dikdörtgen prizması şeklinde bir çözüm bölgesi oluşturulmuştur. Bu çözüm bölgesinde Wigley teknesi girişten 1 m geride ve derinliği üst duvar ile çıkışacak şekilde konumlandırılmıştır.



Şekil 11. Çözüm bölgesinin oluşturulması

2.2. Ağ Yapısı

HAD'nin birinci aşamasında çözüm bölgesine ağ atanmıştır. Serbest yüzeyli akışlarda daha iyi sonuç elde edebilmek için yapısal ağ tercih edilmiştir. Bu ağda tekne etrafında daha sık ağ kullanılırken tekneden uzak bölgelerde daha seyrek ağ kullanılmıştır. Böylelikle daha fazla eleman kullanılmasının önüne geçilmiştir. Sonuç olarak çözüm bölgesi 322500 hacim elemanından ve 341496 düğüm noktasından oluşmaktadır.

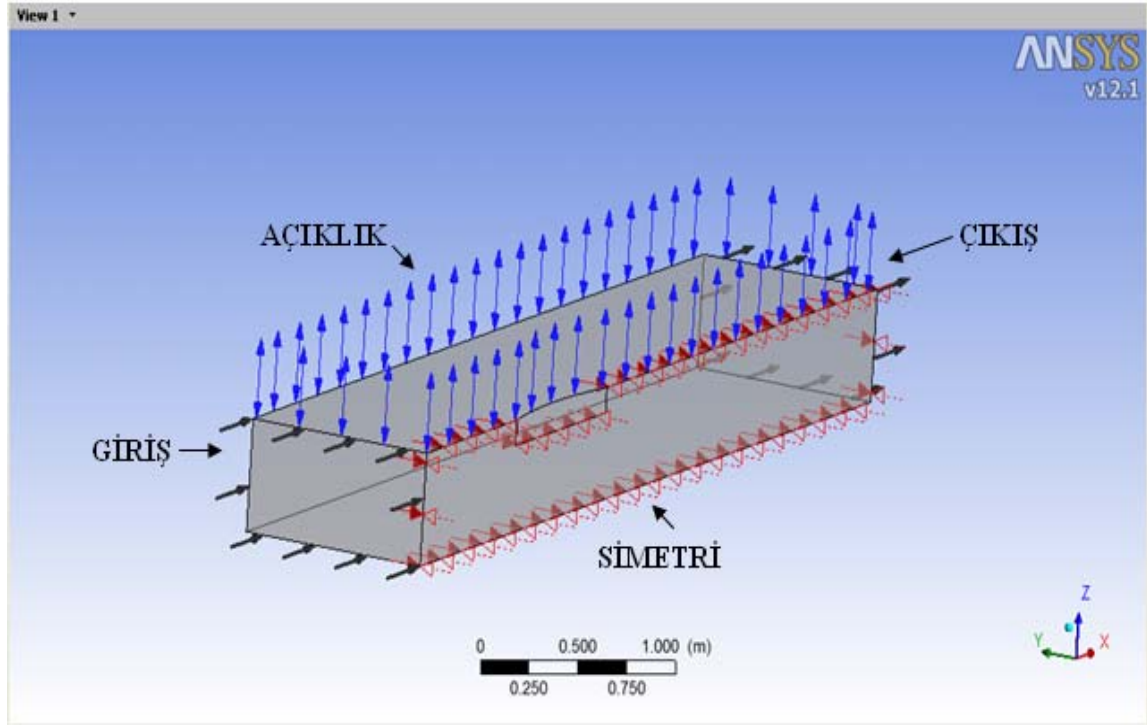


Şekil 12.Çözüm bölgesinin ağ yapısı

2.3. Sınır Şartlarının Tanımlanması ve Akışın Modellenmesi

Ağ yapısı oluşturulduktan sonra bir sonraki aşamada problemin sınır şartlarının belirtilmesi ve akışın gerçek olayı en iyi şekilde temsil edecek şekilde modellenmesi gerekmektedir. İlk olarak sınır şartlarını tanımlayacak olursak girişte her bir Froude sayısına karşılık gelen akış hızıyla hava ve su çözüm bölgesine girmiştir. Suyun ve havanın çözüm bölgesine girişi ayrı ayrı girişler şeklinde yapılmayıp Ansys CFX programı içerisinde yazılan fonksiyonlar sayesinde draft seviyesinin altından su üstünden ise hava geçirilmiştir. Çıkışta ise basınç sınır şartı tanımlanmıştır. Çıkışta hidrostatik basınç dağılımını sağlayabilmek için kullanıcı tanımlı fonksiyonlar komutu kullanılmıştır. Üst

duvara açıklık sınır şartı yan ve alt duvarlara duvar sınır şartı teknenin yapışık olduğu yüzeye hesap süresini kısaltmak için simetri sınır şartı tekneye de duvar sınır şartı konulmuştur.



Şekil 13. Problemin sınır şartları

Problem daimi (steady) akış durumu için çözülmüş olup literatürde de sık kullanılan ve en doğru sonuçların elde edildiği $k-\varepsilon$ türbülans modeli tercih edilmiştir. Ayrıca serbest yüzeyli akışı da temsil edebilmek için volume of fluid metodu kullanılmıştır.

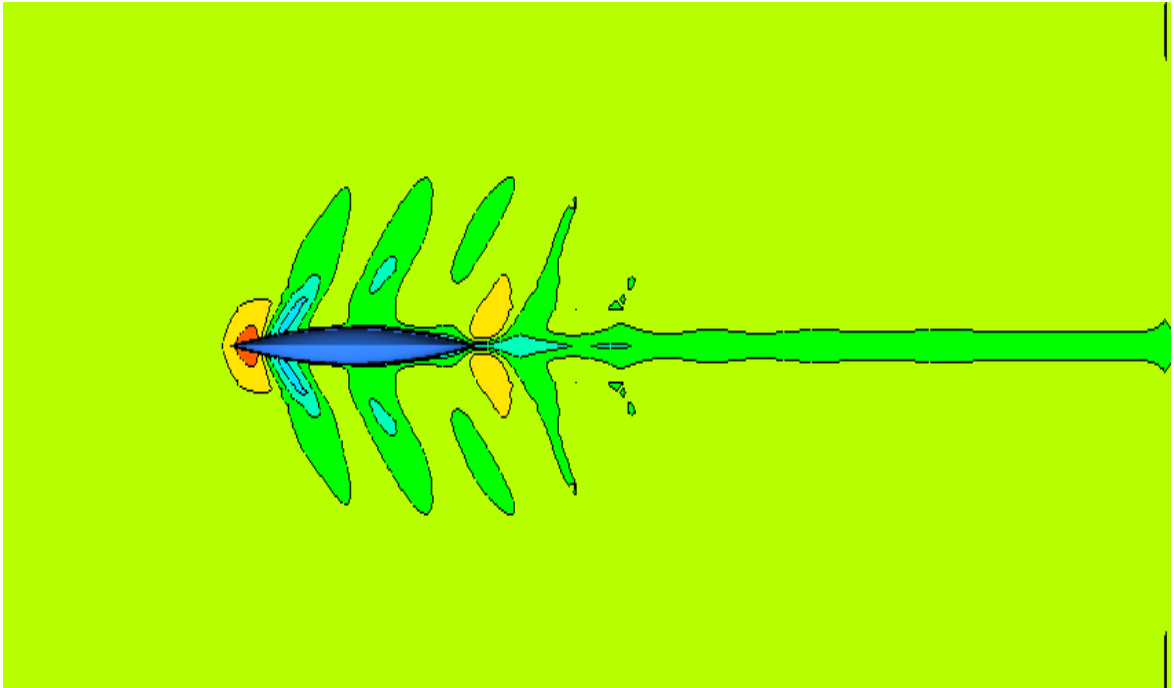
2.4. Analiz Sonuçları ve Analizlerin Sonuçlarının Deneysel Sonuçlarla Karşılaştırılması

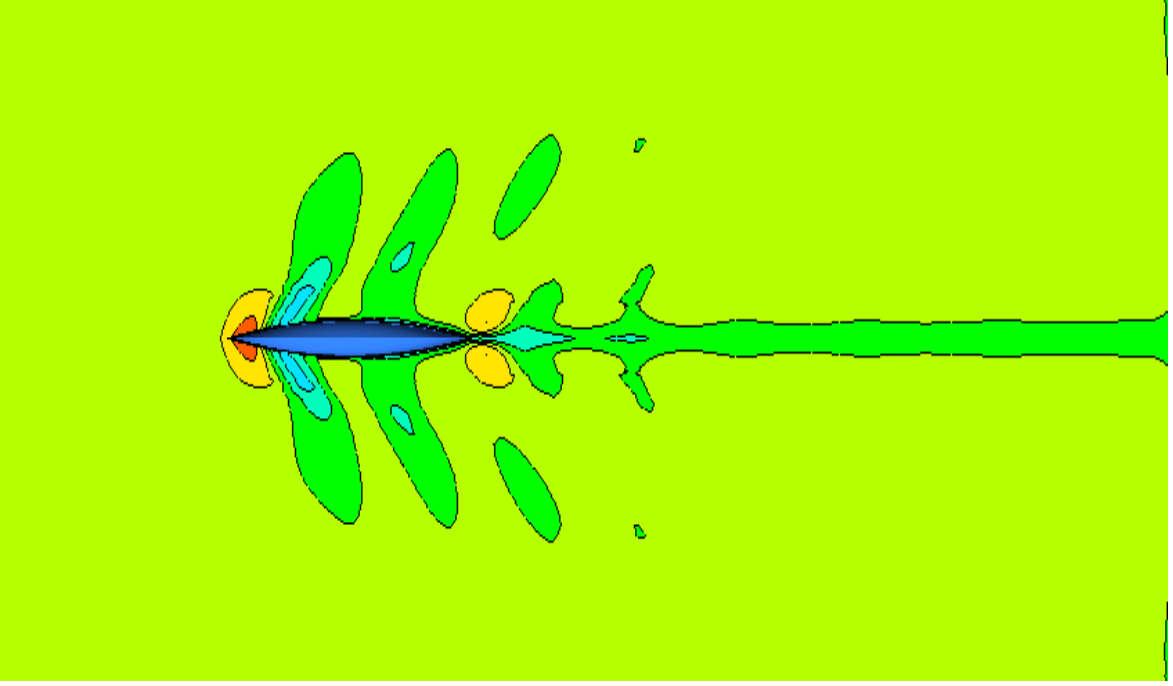
6 farklı hızda yapılan analizler sonucunda toplam direnç katsayısının deneysel toplam direnç katsayılarıyla büyük ölçüde uyduğu Tablo 3' de görülmektedir. Ayrıca düşük Froude sayılarında sürtünme direnci toplam direncin % 80 mertebesinde iken yüksek Froude sayılarında bu oran % 60 seviyesine düşmektedir.

Tablo 3. Analiz ve deney direnç katsayıları (10^{-3}) [12]

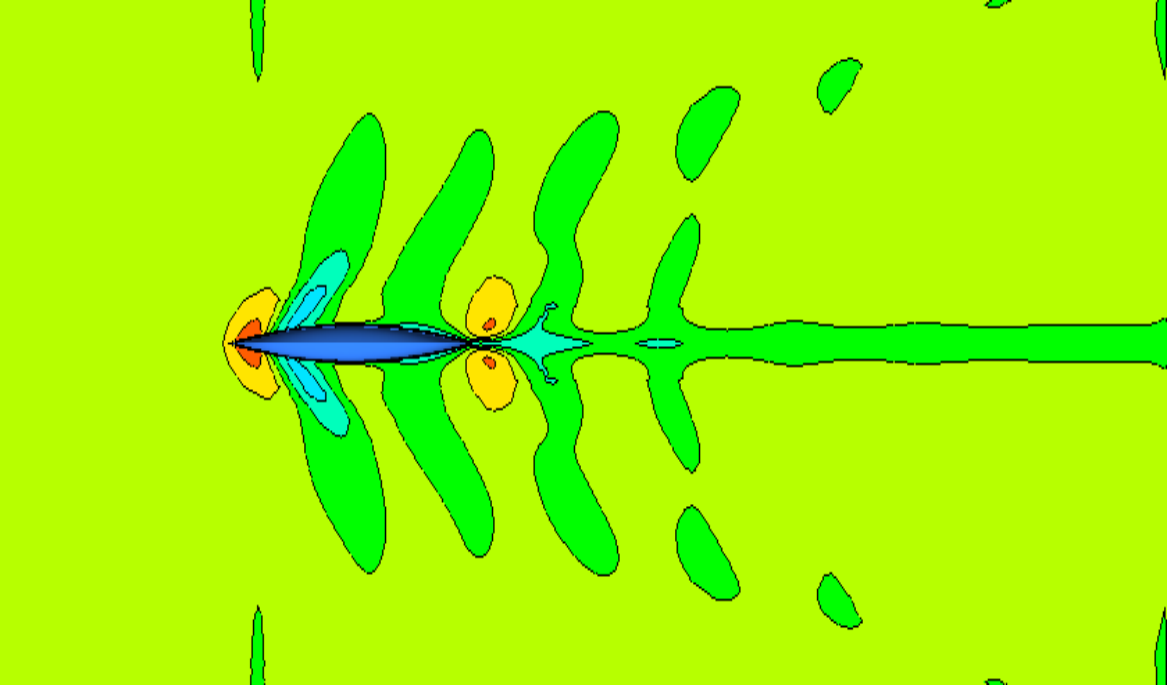
Froude Sayısı	0,25	0,267	0,289	0,316	0,354	0,408
C_P (Basınç direnç kats.)	1,06	1,13	1,46	1,75	1,74	2,69
C_F (Sürtünme direnç kats.)	4,76	4,70	4,63	4,55	4,40	4,34
C_T (Top. direnç kats.)	5,82	5,83	6,09	6,30	6,14	7,03
C_T (Deneysel top. direnç kats.)	5,92	5,84	6,16	6,32	6,12	6,91
Hata (%)	1,6	0,2	1,1	0,3	0,4	1,8

Froude sayısının artmasıyla birlikte tekne tarafından oluşturulan dalga sistemleri büyümektedir. Bu durum teknenin, hız arttıkça dalga direncini yenebilmek için daha fazla enerji harcadığını göstermektedir (Şekil 15 ile Şekil 20 arasında). Ayrıca baş bodoslamının biraz gerisinde dalga tepesiyle başlayan dalga, orta gövde ile baş bodoslama arasında dalga çukuru ile başlayan dalga, kıç bodoslama ile orta gövde arasında dalga çukuru ile başlayan dalga ve kıç bodoslamının biraz gerisinde dalga tepesiyle başlayan dalga oluşumu görülmektedir (Şekil 21 ile Şekil 26 arasında).

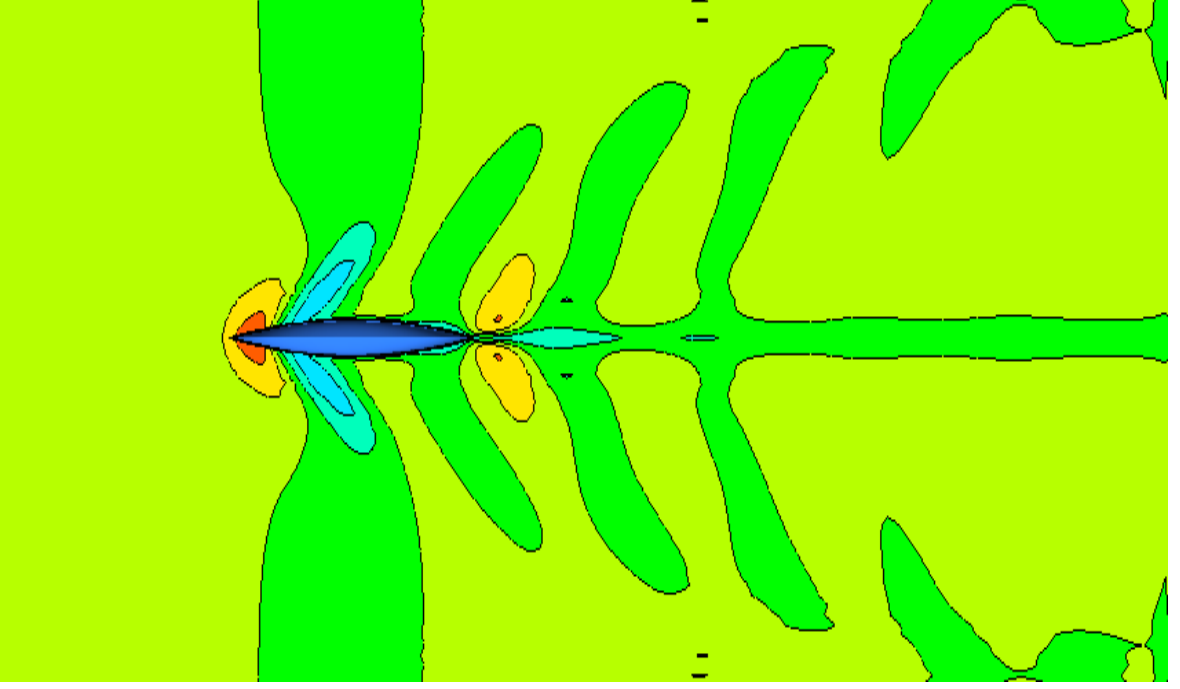
Şekil 14. $Fr=0.25$ için dalga konturları



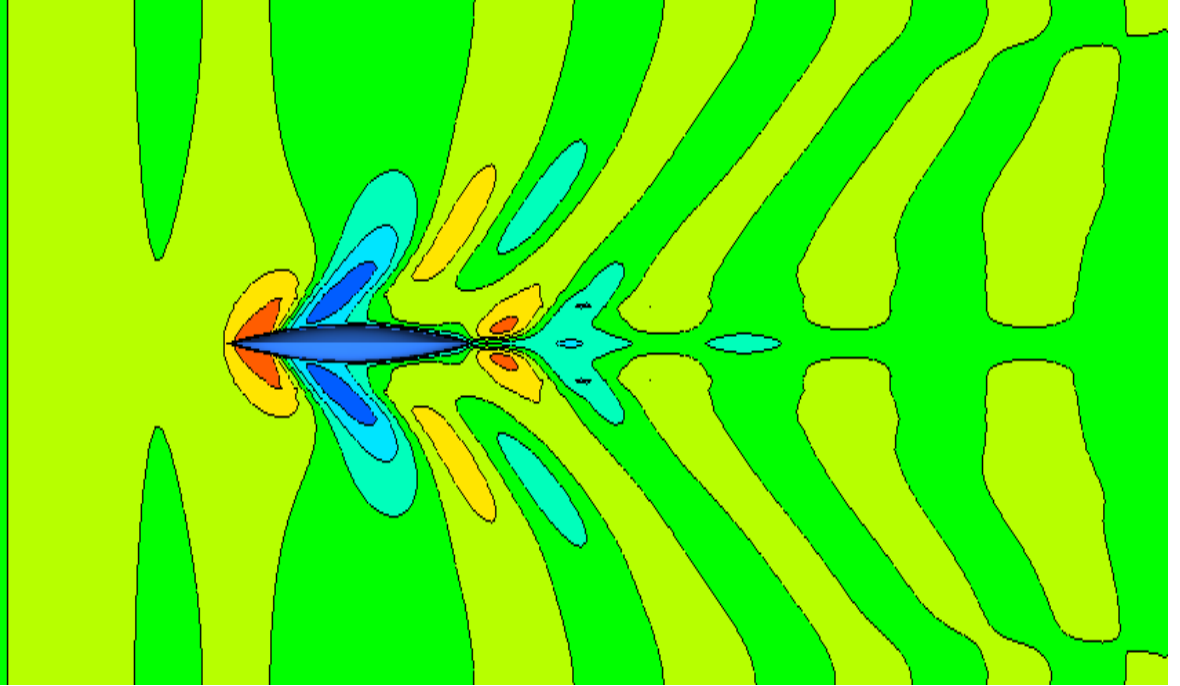
Şekil 15. $Fr=0.267$ için dalga konturları



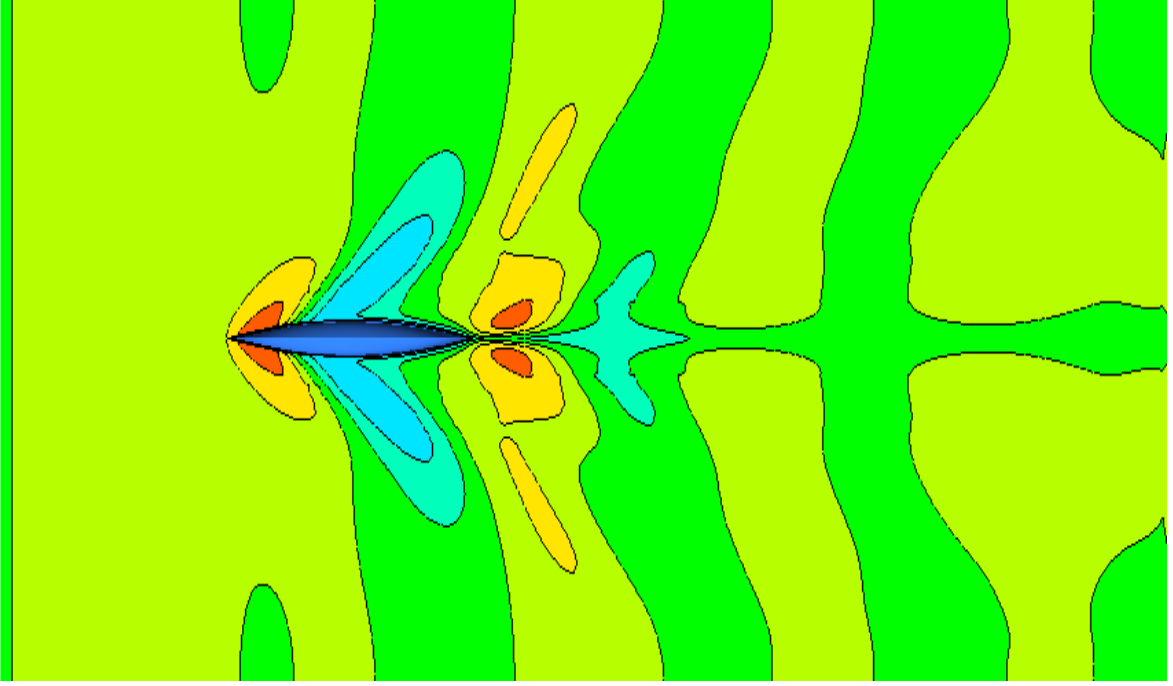
Şekil 16. $Fr=0.289$ için dalga konturları



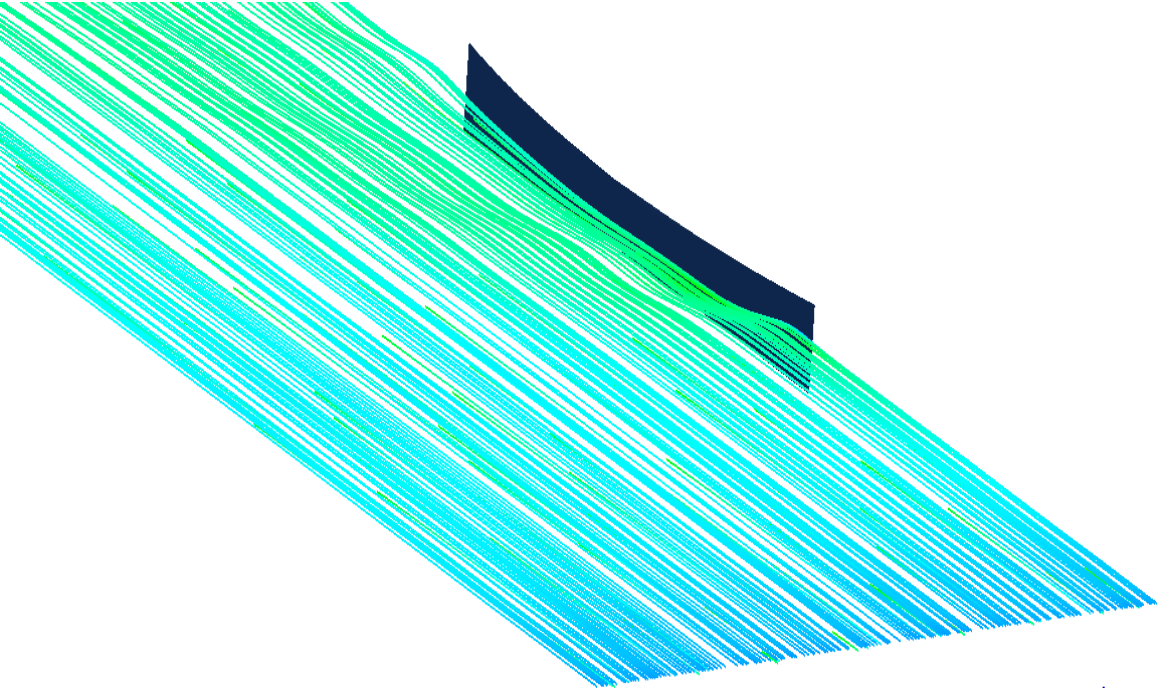
Şekil 17. $Fr=0.316$ için dalga konturları



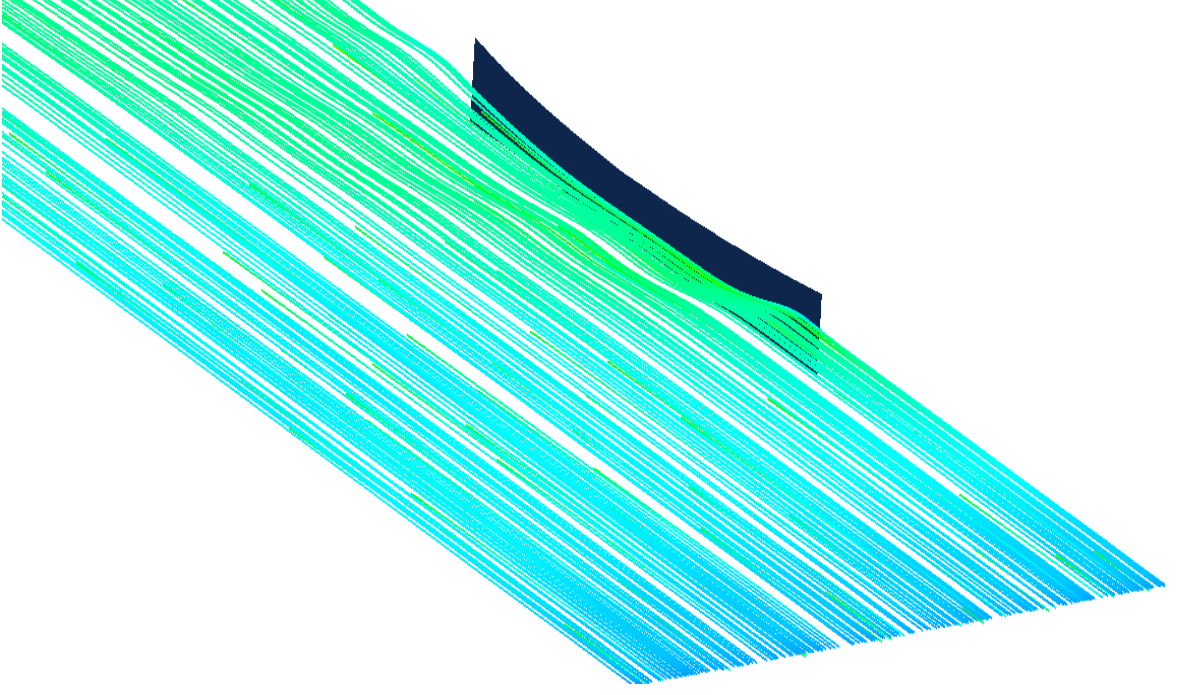
Şekil 18. $Fr=0.354$ için dalga konturları



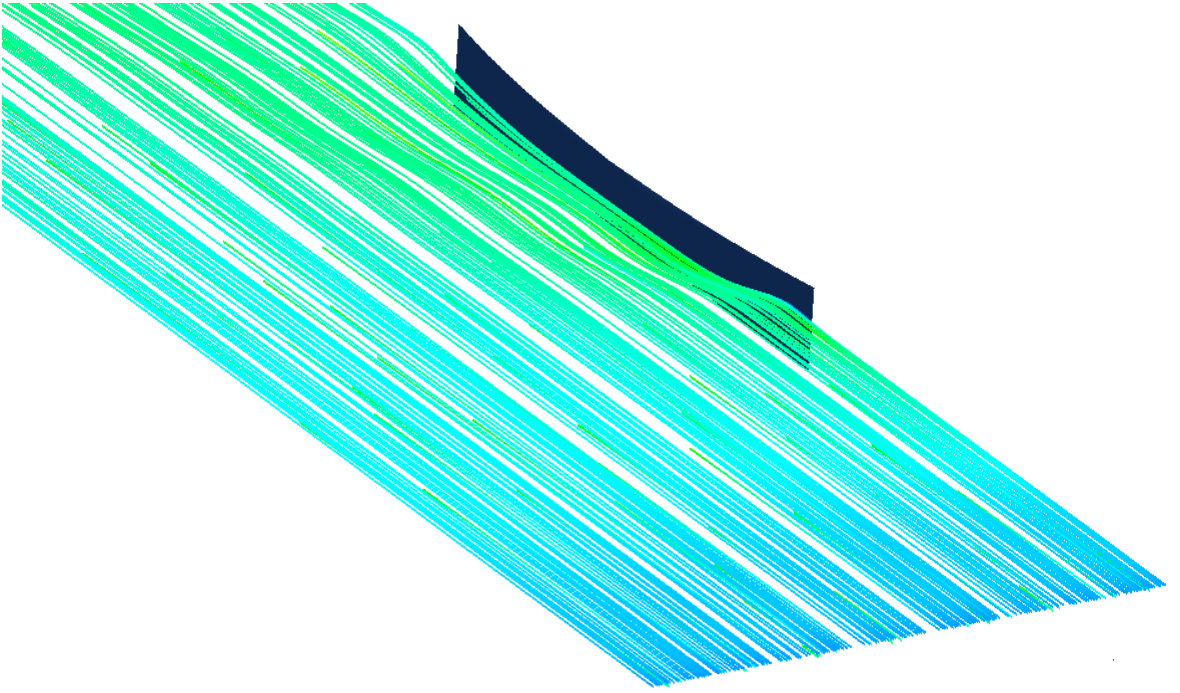
Şekil 19. $Fr=0.408$ için dalga konturları



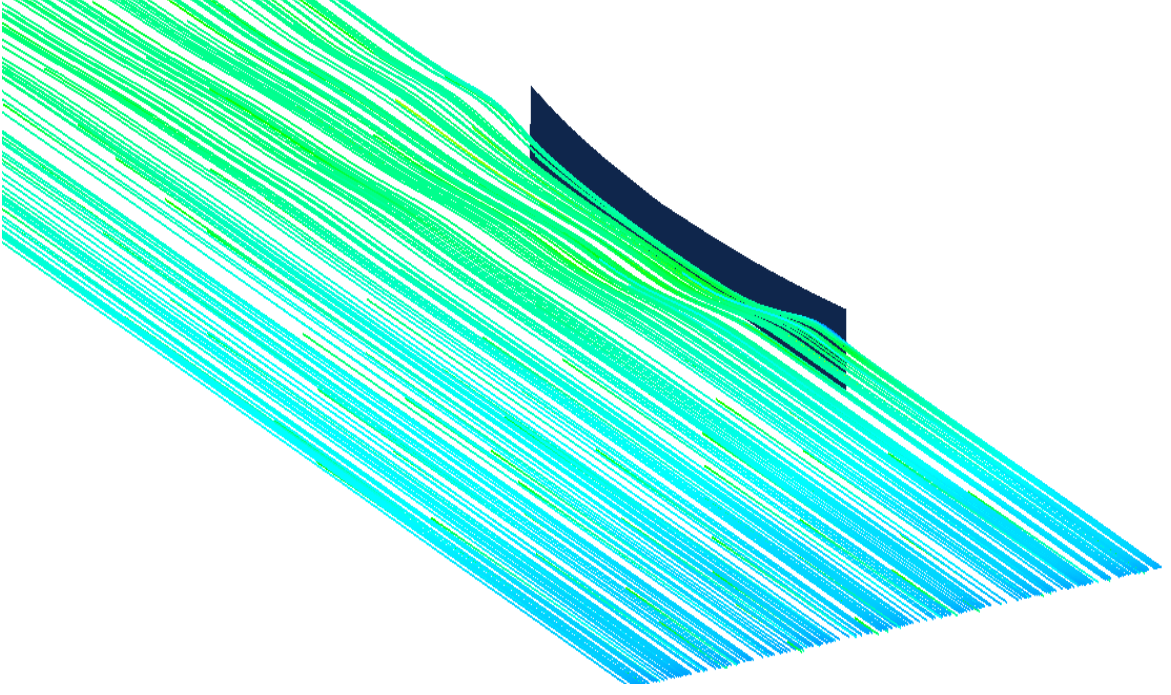
Şekil 20. $Fr=0.25$ için gemi etrafındaki akım çizgileri



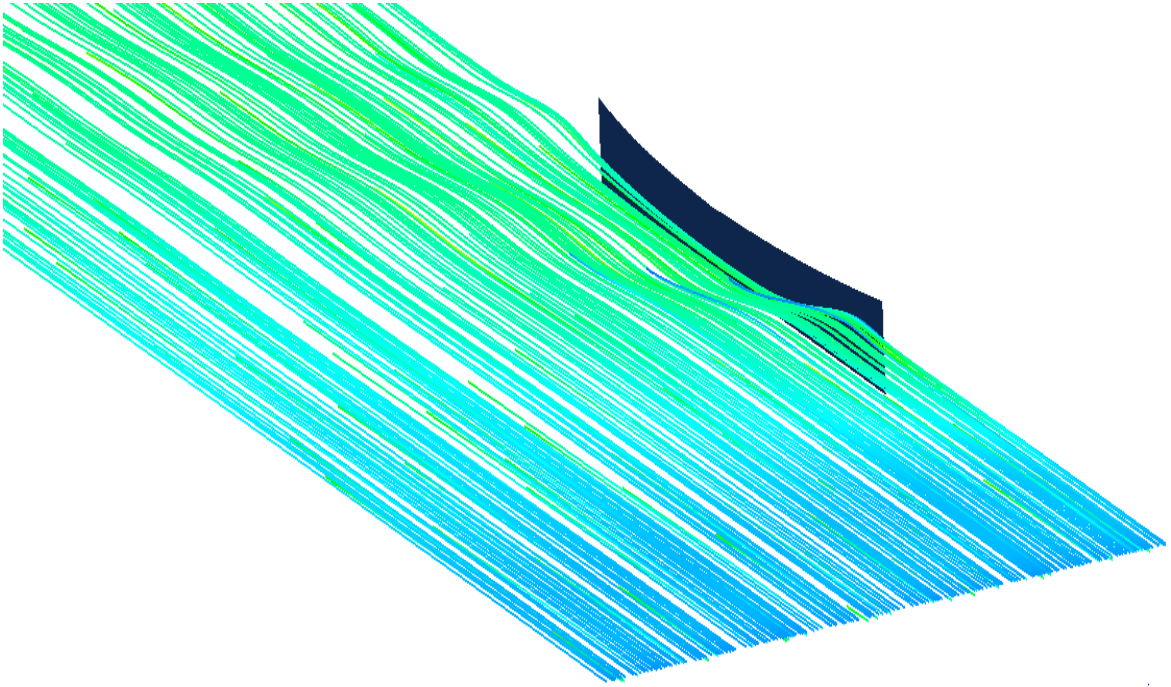
Şekil 21. $Fr=0.267$ için gemi etrafındaki akım çizgileri



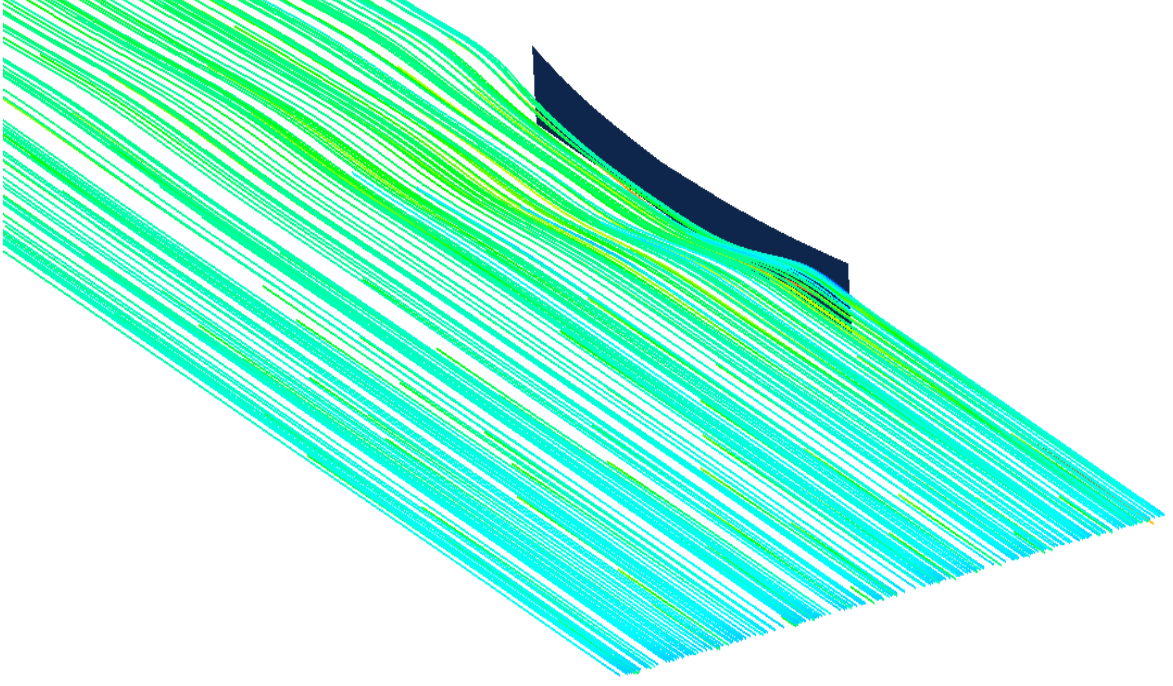
Şekil 22. $Fr=0.289$ için gemi etrafındaki akım çizgileri



Şekil 23. $Fr=0.316$ için gemi etrafındaki akım çizgileri



Şekil 24. $Fr=0.354$ için gemi etrafındaki akım çizgileri



Şekil 25. $Fr=0.408$ için gemi etrafındaki akım çizgileri

3. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada HAD yöntemiyle Wigley teknesinin farklı Froude sayılarında direnç kuvveti hesaplanmış ve tekne etrafında oluşan dalga sistemleri gözlemlenmiştir.

Çalışma kapsamında ilk olarak gerçekleştirilen teknenin etrafındaki dikdörtgen prizması şeklinde çözüm bölgesinin boyutları doğru sonuçlar elde edilebilmesi açısından son derece önemlidir. Eğer tekne dibinin alt duvara olan mesafesi kısa seçilirse sığ su etkisi görülecektir. Böylece teknenin etrafındaki basınç dağılımı değişecek, daha büyük dalgalar oluşacak ve gemi direnci artacaktır. Ayrıca teknenin yan duvar olan mesafesi de kısa seçilmesi durumunda tekne direnci sığ sularda olduğu gibi artacaktır. Son olarak teknenin girişten olan mesafesi akışın gelişmesi açısından teknenin çıkışa olan mesafesi dalgaların sönümleşmesi açısından önemlidir.

HAD' ın ilk adımı olan ağ yapısının oluşturulması son derece önemlidir. İlk olarak kullanılan programın akış türlerine göre, en iyi sonucu elde edebilmek için oluşturulması gereken ağ yapısının araştırılması gerekir. Bu bağlamda serbest su yüzeyi olan bir akış modellendiği için yapısal ağ tercih edilmelidir. Ağ üretiminde dikkat edilmesi gereken ilk esas tekne yüzeyi eğrileri oldukları için ağ yapısının bu eğriliği en iyi şekilde temsil etmesidir. Serbest su yüzeyini doğru bir şekilde hesaplayabilmek için draft seviyesinin altına ve üstüne daha sık ağ atanmalıdır. Ayrıca teknenin yakınında ağ yapısı sıklaştırılması teknedeki uzaklaştıkça ağ yapısının seyrekleştirilmesi gerekir. Çünkü hem eleman sayısı azaltılarak hesap süresi düşürülür hem de tekne etrafındaki akım çizgilerinin değişimi doğru bir şekilde elde edilir.

Sınır şartlarının problemde uygun şekilde tanıtilamaması istenen sonucun elde edilememesinde çok sık rastlanan bir durumdur. Örneğin yan ve alt duvarda, duvar sınır şartı tanıtilmıştır. Fakat bu yan ve alt duvar gerçekte kaygan olmamasına rağmen kaygan olarak seçilmiştir. Çünkü kaygan duvar şartında akış yavaşlayacağı için kayma gerilmeleri sıfır olur, duvar normal doğrultusundaki hız bileşeni sıfırlanır paralel doğrultusundaki hız bileşeni çözüm süresince hesaplanır. Eğer kaygan duvar sınır şartı seçilmezse duvarların etkilerini azaltmak için daha büyük bir çözüm bölgesi oluşturmak gerekir. Bu durum daha fazla eleman daha fazla işlem süresi demektir.

HAD' in en önemli konularından birisi türbülans modelinin seçimidir. Problemden $k-\omega$, $k-\varepsilon$, RNG $k-\varepsilon$ türbülans modelleri denenmiştir. Fakat literatürde olduğu gibi $k-\varepsilon$ türbülans modeli daha doğru sonuçlar vermiştir.

HAD' da bir başka konu ise çözüm algoritmalarında yapılacak ayarlamalardır. Bunlardan fiziksel zaman adımı daimi akışlarda problemin yakınsaması için denklemlerin lineer olmayan etkilerini azaltmada son derece etkilidir. Özellikle kötü ağ yapısında, yüksek hızlı akışlarda, serbest su yüzeyli akışlarda ve çok fazlı akışlarda fiziksel zaman adımının küçük seçilmesi gerekir. Adveksiyon teriminin etkili olduğu akışlarda fiziksel zaman adımı uzunluk skalasının hız skalasına bölünmesiyle bulunur. Dış akışlarda uzunluk skalası karakteristik geometrik uzunluk olarak tanımlandığından tekne uzunluğu alınmıştır. Küçük fiziksel zaman adımı seçebilmek için fiziksel zaman adımının değeri tekne uzunluğunun akış hızına oranının üçte biri olmalıdır. Programda her bir iterasyon sonunda kalıntı eğrileri çizilmektedir. Bu kalıntı eğrilerinden su ve havaya ait olan kalıntı değerleri u, v, w hız bileşenlerine ait kalıntı değerlerine göre daha hızlı ulaşması gerekmektedir. Çünkü serbest su yüzeyinin konumundaki hatalar daha hızlı düşürülürse akışkanlara ait hız bileşenleri doğru sonuçlar verir. Aksi durumda problem yakınsamayacaktır ıraksayacaktır. Son olarak kalıntı değeri olarak 10^{-4} olarak seçilmiştir. Bu seçimde etkili olan düşünce ise aranan kuvvet büyüklüklerinin, kalıntı değerinin daha fazla azalması durumunda bile değişmeyecek olmasıdır.

Sonuç olarak HAD' da problemin modelinin oluşturulması, ağ yapısının hazırlanması, sınır şartının tanıtılması, türbülans modeli seçimi, çözüm algoritmasında fiziksel zaman adımının ve kalıntı değerinin belirlenmesi gibi pek çok konu istenen sonucu elde edebilmek için kilit rol oynamaktadır. Analiz süresince herhangi bir hata ile karşılaşıldığında bütün işlem adımlarının gözden geçirilmesi unutulmamalıdır.

4. KAYNAKLAR

1. www.ncl.ac.uk/marine/about/facilities/towingtank.html Newcastle University. 24 Aralık 2010.
2. Aydın, M., Türkiye Sularına Uygun Balıkçı Gemilerinin Bilgisayar Destekli Dizaynı, Doktora Tezi, İ.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 2002.
3. Odabaşı, Y., Gemi Direncinin Bileşenleri, <http://www.gidb.itu.edu.tr/staff/odabasi/gmg/WEEK6.PDF>, 27 Aralık 2010.
4. Tu, J., Yoo G.H. and Liu, C., Computational Fluid Dynamics A Practical Approach, First Edition, Elsevier Inc., UK, 2008.
5. Voller V.R., Basic Control Volume Finite Element Methods For Fluids And Solids, First Edition, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2009.
6. Çengel, Y.A. ve Cimbala J.M., Akışkanlar Mekaniği Temelleri Ve Uygulamaları, Engin T., Birinci Baskıdan Çeviri, İzmir Güven Kitabevi, İzmir, 2008.
7. Sodja, J., Turbulence models in CFD, <http://www-f1.ijs.si/~rudi/sola/Turbulence-models-in-CFD.pdf>, 27 Aralık 2010.
8. Çelik, İ.B., Introductory Turbulence Modeling, http://www.fem.unicamp.br/~im450/palestras&artigos/ASME_Turbulence/cds13workbook.pdf, 27 Aralık 2010.
9. Gopala, V., and Wachem, B., Volume of fluid methods for immiscible-fluid and free-surface flows, Chemical Engineering Journal, 141 (2008), 204–221.
10. Acosta, J.M., Numerical Algorithms For Three Dimensional Computational Fluid Dynamic Problems, Tesis Doctoral, Universidad Politecnica de Catalunya, Terassa, 2001.
11. Keller, S., Cordazzo J., Hinckel H. and Maliska C., Additive Correction Multigrid Method Applied To Difusion Problems With Unstructured Grids, Proceedings of the 10. Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering, 2008.
12. Kajitani, H., The Summary of the Cooperative Experiments on Wigley Parabolic Model in Japan. 1983.

ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında Trabzon'un Sürmene ilçesinde doğdu. Lise öğrenimini Sürmene Hasan Sadri Yetmişbir Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 2004 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Sürmene Deniz Bilimleri Fakültesi Gemi İnşaatı Mühendisliği Bölümü'nü kazandı. 2008 Haziran ayında Gemi İnşaatı ve Gemi Makineleri Mühendisi olarak dereceyle mezun oldu. 2008–2009 Eğitim ve Öğretim Güz Yarıyılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Gemi İnşaatı ve Gemi Makineleri Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. 2009 Ocak ayından itibaren Karadeniz Teknik Üniversitesi Sürmene Deniz Bilimleri Fakültesi Gemi İnşaatı ve Gemi Makineleri Mühendisliği Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır. İyi seviyede İngilizce bilmektedir.