9835

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ PROGRAMI

ELASTİK YARI SONSUZ DÜZLEME OTURAN BİLEŞİK TABAKALARIN DEĞME PROBLEMİ

İnş. Yük. Müh. Fevzi Lütfü ÇAKIROĞLU

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
« Doktor »
Ünvanının Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 15.5.1990
Tezin Sözlü Savunma Tarihi : 27.7.1990

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ragıp ERDÖL
Jüri Üyesi : Prof. Dr. M. Ruşen GEÇİT
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Aybar ERTEPINAR

Enstitü Müdürü : Doç. Dr. Temel SAVAŞKAN

TEMMUZ - 1990
TRABZON

ÖNSÖZ

Lisans bitirme çalışmasını, Yüksek Lisans tezini ve şimdi de Doktora Tezini hiçbir yardımlarını esirgemeden yöneten ve yürüten danışmanım değerli hocam Sayın Prof. Dr. Ragıp ERDÖL'e en içten saygılarımı sunar teşekkürü bir borç bilirim.

Üniversitede kalma fikrini bana aşılayanlardan değerli hocam Sayın Doç. Dr. Necip YAMAN'ı saygı ve rahmetle anarım.

Tez çalışmamın her aşamasında bana kıymetli zamanlarını ayıran O.D.T.Ü. Mühendislik Bilimleri Bölümü öğretim üyelerinden Prof. Dr. M. Ruşen GEÇİT'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca çalışmalarımın sayısal kısımlarında yardımcı olan K.T.Ü. Bilgi İşlem Merkezi personeline teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER:

SEMBOLLER

E : elastisite modülü

ν : Poisson oranı

$\chi = 3-4\nu$: düzlem şekildeğiştirme halinde

$\chi = (3-\nu)/(1+\nu)$: düzlem gerilme halinde

$\mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$: kayma modülü

$\lambda = \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$: 1. ve 2. bölümlerde Làme sabiti

$\lambda = p_o/\rho_2 g h_2$: 3. ve 4. bölümlerde yük faktörü

σ_x , σ_y : normal gerilmeler

τ_{xy} , τ_{yx} : kayma gerilmeleri

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$$

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

u, v, w : sırasıyla x, y ve z yönlerindeki yer değiştirmeler

X, Y, Z : sırasıyla x, y ve z yönlerindeki kütle kuvvetleri

ρ : yoğunluk

g : yerçekimi ivmesi

ρg : kütle(hacım) kuvveti

ϵ_x , ϵ_y : x ve y doğrultularındaki birim uzamalar

γ_{xy} , γ_{yx} : kayma şekil değiştirmesi

p_o: yayılı yükün şiddeti

P : tekil yükün şiddeti

h_1 , h_2 : tabaka kalınlıkları

$h = h_1+h_2$: toplam tabaka kalınlığı

a : yayılı yük uzunluğu

$f(x)$: açılmayı tarifleyen fonksiyon

b_1 , b_2 : tabakalar arasında oluşan ayrılmanın uçları

c_{cr} : tabaka-zemin arasında oluşan kritik ayrılma uzaklığı

ÖZET

Bu çalışmada, y eksenine göre simetrik düzgün yayılı yük etkisinde ve bütün yüzeylerin sürtünmesiz olduğu kabul edilerek elastik zemine oturan bileşik tabaka problemi elastisite teorisine göre çözülmüştür.

Navier denklemlerine Fourier integral dönüşüm tekniği uygulanarak gerilme ve yerdeğiştirme bileşenleri elde edilmiş, sürekli temasa ilişkin problemin tanımı yapılmış ve sınır şartları altında elde edilen denklem takımı çözülmüştür. Denklem takımının çözümünden elde edilen katsayılar gerilme ve yerdeğiştirme ifadelerinde yerlerine konulmuş, gerilme ve yerdeğiştirmeleri bozan tekil terimler ayıklanmış ve bunların kapalı integralleri hesaplanmıştır. En büyük normal gerilme değerlerinin simetri ekseni üzerinde olduğu bilindiğinden $\sigma_x(x,y)$ ve $\sigma_y(x,y)$ normal gerilmeleri, tekil terimlerin çıkartılıp kapalı integrallerinin normal gerilmelere ilave edilmesi ile bulunmuştur. Dış yüke, malzeme sabitlerinin ve tabaka kalınlıklarının oranlarına çeşitli değerler verilerek kütle kuvvetsiz ve kütle kuvvetli hal için simetri kesitindeki normal gerilme dağılımları hesaplanarak şekilleri çizilmiştir.

Elastik zemine oturan bileşik tabakalar belirli bir dış yüke kadar süreklilik durumunu korumaktadır. Sürekliliğin sınırı olarak tanımlanabilecek ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklığı çeşitli tabaka kalınlıklarının, malzeme sabitlerinin oranları için hesaplanarak tablo şeklinde verilmiştir.

İlk ayrılma yükünden daha büyük yük değerlerinin verilmesi ile elastik zemine oturan bileşik tabakalarda ya iki tabaka arasında veya tabaka-zemin arasında yahut hem tabakalar hem de zemin-tabaka arasında süreksiz temas meydana gelebilir. İki durum için problem, yeni sınır şartları altında çözülmüş ve değişik dış yük, malzeme sabitlerinin ve tabaka kalınlıklarının oranı için temas yüzeylerindeki gerilme dağılımları elde edilmiş, şekilleri çizilmiş ve açılma değerleri tablolaştırılmıştır.

SUMMARY

THE FRICTIONLESS CONTACT PROBLEM FOR TWO ELASTIC LAYERS RESTING ON AN ELASTIC HALF-PLANE

In this study, the frictionless contact problem for two elastic layers resting on an elastic half-plane is solved according to the theory of elasticity.

For the solution, the upper elastic layer is assumed to be subjected to symmetrical distributed or concentrated load and gravity forces are considered to exist for both layers.

This kind of problem is met in various civil engineering structures; such as, highways, railways, etc. The structures are made of asphalt-base-subgrade, concrete-base-subgrade or rail-traverse-subgrade.

This study consists of five chapters. In the first chapter, general expressions of stresses and displacements are given for two-dimensional continuum by using Navier equations and integral transform technique.

In the second chapter, continuous contact problem is studied with or without gravity forces. Ten linear algebraic equations are written under boundary conditions and the unknown coefficents in the expressions of the stresses and displacements are calculated from these equations. The analysis is performed for the symmetry section where the maximum values of the normal stresses occur.

Singular terms which spoil the convergence of the kernel of normal stresses σ_x and σ_y for values of y around h, under concentrated load, are subtracted and their closed integral forms are added.

In the third chapter, initial separation distances and initial separation loads are calculated for the composite

layers which rest on an elastic half-plane. Initial separation distances depend on external loads, geometry of the problem and the kind of materials used.

In the fourth chapter, frictionless and discontinuous contact problem for the two layers resting on an elastic half-plane are studied for two cases. In the first case, discontinuous contact occurs only between the two layers. In the second case discontinuous contact exists only between the layer and the half-plane.

For discontinuous cases, the separation will be between two layers or between layer and half-plane at an interval (b_1, b_2) or (c_1, c_2). The derivation of difference of vertical displacements is considered as an unknown function within the interval. The separation is obtained by the integration of the function within the interval. Using the boundary conditions of the discontinuous contact problem, the singular integral equation of the problem is derived in terms of this function. A numerical solution of this singular integral equation is obtained by using Gauss-Chebyshev Integration Method. Finally, numerical results are analysed.

In the last chapter, conclusions are drawn.

GİRİŞ

Bu çalışmada, bütün yüzeylerin sürtünmesiz yani tam cilalı olduğu kabul edilerek elastik zemine oturan bileşik tabaka problemi elastisite teorisine göre çözülmüştür.

Elastik zemine oturan bileşik tabakalar uygulamada karayolları, demiryolları gibi mühendislik yapılarında görülmektedir. Yapım olarak asfalt-temel-zemin, beton-temel-zemin veya ray-travers-zemin v.s. şeklinde uygulanmaktadır.

Elastik zemine oturan tek tabakayla ilgili problemler üzerinde çok çalışılmış olmasına karşın elastik zemine oturan bileşik tabakalara ilişkin çalışmaların az olduğu görülmektedir.

Elastik zemine oturan tabakalar ve plaklarla ilgili çalışmalar 1872 yılında Winkler tarafından başlatılmıştır. Winkler'in ortaya atmış olduğu ve kendi adı ile anılan hipotez (kirişin zeminden görmüş olduğu reaksiyon çökmelerle orantılıdır) çok tenkitler görmesine karşın birçok mühendislik problemlerinin yaklaşık çözümünü oluşturduğundan bugün de kullanılmaktadır(Hetényi, 1946).

Değme problemlerindeki ilk çalışmayı ise Hertz yapmıştır. Ondan sonra yapılan bu tür çalışmalar "Hertz Değme Problemi" olarak adlandırılmıştır(İnan, 1969).

Elastisite problemlerinde ifadelerin karışık, hesapların uzun olması nedeniyle son kırk yıla kadar bu tür problemler üzerinde çalışan bilim adamlarının azlığı dikkati çekmektedir. Ancak bilgisayar teknolojisinin ve sayısal çözüm yöntemlerinin gelişmesiyle Değme problemleri üzerinde yapılan gerek statik gerekse dinamik yüklemelere ait çalışmalar yoğunluk kazanmıştır. Değme problemleri üzerinde yapılan çalışmalardan bazıları aşağıda verilmiştir.

Çok tabakalı kompozitlerde iç çatlakların gerilme analizi(Erdoğan ve Gupta, 1971 a), tabakalı kompozitlerde iç çatlak(Erdoğan ve Gupta, 1971 b), iki çeyrek elastik düzleme dayandırılmış elastik tabakada temas problemi(Erdoğan ve Ratwani, 1974), elastik bir yarım düzlem üzerinde sonlu bölgede temas eden kirişe sürtünmesiz blok yardımıyla etkiyen yük (Ratwani ve Erdoğan, 1973), sürtünmesiz, çift temas durumu (Civelek ve Erdoğan, 1974), rijid yarı sonsuz düzleme oturan tabakanın sürtünmesiz temas problemi hem tekil yükle kaldırma durumu(Civelek ve Erdoğan, 1975), hem de simetrik tekil yükle kaldırma durumu(Geçit ve Erdoğan, 1978) ve ayrıca tekil yükle bastırma durumu(Civelek ve Erdoğan, 1976) incelenmiştir. Simetrik yüklü elastik tabakada sürtünmesiz temas problemi(Geçit, 1979), yayılı yükle bastırılan ve tekil yükle kaldırılan(Geçit, 1980), yayılı yükle bastırılan ve simetrik tekil yükle kaldırılan elastik zeminin üzerindeki elastik tabakaya ait temas problemi (Geçit, 1981), elastik yarım düzleme oturan bir tabakanın rijid blokla bastırılması(Civelek ve diğ., 1978 ; Çakıroğlu, 1979) konuları incelenmiş olup başka bir çalışma konusu ise elastik yarım düzleme oturan tabakanın elastik silindirle çift temas problemi(Geçit, 1986) dir. Elastik yarım düzlemle plak, aynı şekilde elastik yarım düzlemle kiriş sürtünmesiz temas problemleri olarak Weitsman(1969, 1972) tarafından incelenmiştir. Blok problemi üzerindeki çalışmalar ise elastik zemine oturan elastik çok tabakalılar için blok problemi (Dhaliwal, 1970), rijid blokla ilişkili yarım düzlem problemi(Adams, 1979), simetrik Boussinesq problemi(Rau ve Dhaliwal, 1977) olarak görülmektedir.

Yarı sonsuz tabakalarla ilgili çalışmalardan bazıları ise; yarı sonsuz düzleme oturan yarı sonsuz tabakanın bir ucundan kaldırılması(Keer ve Silva, 1972), yarım düzlem ve yarı sonsuz tabaka için elastik temas problemi(Adams ve Bogy, 1976 ; Adams ve Zeid, 1984), elastik tabaka ile elastik yarım düzlemin belirli bölgede temas problemi(Keer ve diğ., 1972 ; Tsai ve diğ., 1972 ; Tsai ve diğ., 1974).

Elastik tabakalar üzerindeki hareketli yüklerle ilgili çalışmalardan bazıları ise; tabakalı kompozitlerde hareketli yük (Sve ve Hermann, 1974), rijid temele oturan elastik tabakalara uygulanan hareketli yük(Adams, 1976), elastik zemine oturan elastik tabakalara uygulanan sürekli hareketli yük(Adams, 1978 ; Adams, 1979), rijid temele oturan ve bir ucundan hareketli yükle zorlanan elastik kirişin çözümü (Adams ve Bogy, 1975), elastik mesnetlerle bağlı ve trafik yükleri ile zorlanan elastik tabaka problemleri olarak Saito ve Terasawa (1980) ve Houedec (1980) tarafından çözülmüşlerdir.

Elastik zemine oturan bileşik tabakaların temas probleminin çözüldüğü bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde üç boyutlu denge denklemlerinden yararlanılarak iki boyutlu duruma ait genel gerilme ve yerdeğiştirme ifadeleri verilmiştir.

İkinci bölümde sürekli temas problemi incelenmiştir. İnceleme iki aşamada yapılmış olup bunlardan birincisi sürekli temas halinde kütle kuvvetinin olmaması durumu, diğeri ise yine sürekli temas halinde kütle kuvvetinin olması durumudur. Bu bölümde önce problemin tanımı yapılmış sonra problemin çözümünde kullanılacak denklemler verilmiş ve daha sonra sınır şartlarının bu denklemlere uygulanması ile elde edilen on bilinmeyenli on cebrik denklem yazılmıştır. Bu denklem takımının çözümünden gerilme ve yerdeğiştirmelerde kullanılan katsayılar bulunmuştur. Bulunan katsayıların gerilmeler ve yerdeğiştirmelerde yerlerine konulması ile gerilmeler ve yerdeğiştirmelerin sayısal çözümleri yapılmıştır. En büyük normal gerilme değerlerinin simetri ekseni üzerinde olduğu bilinmektedir. Bu nedenle incelemeler simetri ekseni üzerindeki kesitte yapılmıştır. $\sigma_x(x,y)$ ve $\sigma_y(x,y)$ normal gerilme çekirdeklerinin $y \to h$ durumunda yakınsamalarını bozan tekil terimler çıkartılmış bunların yerlerine kapalı integralleri ilave edilmiştir. Yine aynı bölümde kütle kuvvetinin olması durumuna ait sürekli temas problemi de benzer yolla çözülmüştür.

Üçüncü bölümde elastik zemine oturan bileşik tabakanın ilk ayrılma uzaklıkları ve bu uzaklığı meydana getiren ilk ayrılma yükleri hesaplanmıştır.

Dördüncü bölümde elastik zemine oturan bileşik tabakaların süreksiz temas hali iki durum için incelenmiştir. Bunlardan birincisi iki tabaka arasında süreksiz, tabaka-zemin arasında sürekli temas, diğeri ise iki tabaka arasında sürekli, tabaka-zemin arasında süreksiz temas durumudur. Süreksiz temas probleminin tanımı yapılarak her iki duruma ilişkin sınır şartları belirtilmiş ve bu sınır şartları altında elde edilen on bilinmeyenli on denklemin çözümü sonrasında bulunan katsayılar verilmiştir. Bulunan katsayıların kullanılmayan ve süreksizliği belirleyen diğer sınır şartlarında yerlerine konulması ile tekil integral denklem yazılmış ve sayısal çözümün nasıl yapılacağı gösterilmiştir. Sayısal çözüm için Gauss-Chebyshev İntegrasyon Yöntemi kullanılmıştır. Süreksiz temas durumunda yukarda belirtilen her iki süreksiz temas durumuna ilişkin, dış yük, tabaka kalınlıkları ve malzeme sabitlerinin oranlarına sayısal değerler verilerek temas yüzeylerindeki gerilme dağılımlarının şekilleri çizilmiştir.

Sonuç kısmında ise bu çalışmada elde edilen sonuçlar verilmiş ve yorumları yapılmıştır.

BÖLÜM I

GENEL DENKLEMLER

Elastik zemine oturan bileşik tabaka problemi elastisite teorisine göre çözülecektir. Çözümde Navier denkleminden yararlanılacaktır. Üç boyutlu halde, X, Y ve Z hacım (kütle) kuvvetlerini, u, v ve w sırasıyla x, y ve z doğrultularındaki yerdeğiştirmeleri göstermek üzere,

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial e}{\partial x} + \mu\,\nabla^2 u + X = 0 \qquad 1.1.a$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial e}{\partial y} + \mu\,\nabla^2 v + Y = 0 \qquad 1.1.b$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial e}{\partial z} + \mu\,\nabla^2 w + Z = 0 \qquad 1.1.c$$

yazılabilir. Burada

$$e=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} \quad ; \quad \lambda=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad ; \quad \mu=\frac{E}{2(1+\nu)}$$

dir. Yukardaki ifadeler içerisinde geçen E ve ν sırasıyla elastisite modülünü ve Poisson oranını göstermekte olup μ ve λ da Lâme sabitleridir. İki boyutlu problemlerde z ile ilgili terimler kalkacaktır. Ayrıca kütle kuvvetinin olmaması halinde X=Y=Z=0 alınacaktır.

Düzlem hal için uygulanan dış yük x 'e bağlı bir fonksiyon, yük ve sistem y eksenine göre simetrik oluşu nedeniyle çözülecek problemde kolaylık sağlaması açısından simetriden yararlanılabilir (Şekil A1, A.2).

$$u(x,y) = -u(-x,y) \qquad 1.2.a$$

$$v(x,y) = v(-x,y) \qquad 1.2.b$$

Navier denkleminin kısmî türevli diferansiyel denklem oluşu problemin çözümünü zorlaştırmaktadır. u ve v yerdeğiştirmelerine Fourier dönüşümlerini uygulamakla Navier denklemi adi türevli diferansiyel denkleme dönüşür. Dolayısıyla problemin çözümü kolaylaşmış olur. u ve v yer-değiştirmelerinin Fourier dönüşümleri,

$$\emptyset(y,\alpha) = \int_0^\infty u(x,y)\mathrm{Sin}(\alpha x)dx \qquad 1.3.a$$

$$\Omega(y,\alpha) = \int_0^\infty v(x,y)\mathrm{Cos}(\alpha x)dx \qquad 1.3.b$$

ve bunların ters dönüşümleri de

$$u(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \emptyset(y,\alpha)\mathrm{Sin}(\alpha x)d\alpha \qquad 1.4.a$$

$$v(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \Omega(y,\alpha)\mathrm{Cos}(\alpha x)d\alpha \qquad 1.4.b$$

şeklinde yazılabilirler. Yukarda geçen $\emptyset(y,\alpha)$, $\Omega(y,\alpha)$ fonksiyonları bilinmemektedir. Bu fonksiyonların belirlenebilmesi için Navier denklemlerinden (1.1.a) denklemini $\mathrm{Sin}(\alpha x)dx$, (1.1.b) denklemini de $\mathrm{Cos}(\alpha x)dx$ ile çarpıp $(0,+\infty)$ aralığında integre etmekle

$$\int_0^\infty [\mu(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) + (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y})]\mathrm{Sin}(\alpha x)dx=0 \qquad 1.5.a$$

$$\int_0^\infty [\mu(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}) + (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y})]\mathrm{Cos}(\alpha x)dx=0 \qquad 1.5.b$$

elde edilir. (1.3.a) ve (1.3.b) ifadelerinin gerekli türevleri (üsler y ye göre türevleri göstermektedir) alınırsa (1.5) denklemlerinde yerlerine konulması ve düzenlenmesi ile

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{Sin}(\alpha x)dx = -\alpha^2 \emptyset \qquad 1.6.a$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{Sin}(\alpha x)dx = \emptyset'' \qquad 1.6.b$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \text{Sin}(\alpha x)dx = -\alpha\Omega' \qquad 1.6.c$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \text{Cos}(\alpha x)dx = -\alpha^2 \Omega \qquad 1.6.d$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \text{Cos}(\alpha x)dx = \Omega'' \qquad 1.6.e$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \text{Cos}(\alpha x)dx = \alpha\emptyset \qquad 1.6.f$$

olarak bulunur. Kısmî integrasyon uygulanan bu ifadelerde $u(0)=u(\infty)=v(\infty)=\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\infty}=\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=\infty}=\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=0}=0$ sınır şartları dikkate alınmıştır. Yukardaki ifadelerin (1.5) denklemlerinde yerlerine konulması ve düzenlenmesi ile sonuçta

$$-(\lambda+2\mu)\alpha^2\emptyset+\mu\emptyset''-(\lambda+\mu)\alpha\Omega' = 0 \qquad 1.7.a$$

$$(\lambda+2\mu)\Omega''-\alpha^2\mu\Omega+(\lambda+\mu)\alpha\emptyset' = 0 \qquad 1.7.b$$

adi diferansiyel denklem takımı elde edilir. Bu denklemleri çözmek için (1.7.a) denklemini y ye göre iki defa, (1.7.b) denklemini de y ye göre bir defa türetmekle

$$\alpha(\lambda+\mu)\Omega''' = \mu\emptyset''''-(\lambda+2\mu)\alpha^2\emptyset'' \qquad 1.8.a$$

$$(\lambda+2\mu)\Omega''' -\alpha^2\Omega'\mu+(\lambda+\mu)\alpha\emptyset'' = 0 \qquad 1.8.b$$

denklemleri elde edilir. (1.8.a) denklemindeki Ω''' ifadesi (1.8.b) denkleminde yerine konulması ile Ω' bulunur.

$$\Omega''' = \frac{1}{\alpha(\lambda+\mu)}[\mu\emptyset''''-(\lambda+2\mu)\alpha^2\emptyset''] \qquad 1.9.a$$

$$\Omega' = \frac{\lambda+2\mu}{\alpha^3(\lambda+\mu)}\emptyset''''-\frac{2\lambda+3\mu}{\alpha(\lambda+\mu)}\emptyset'' \qquad 1.9.b$$

Bulunan Ω' değerinin (1.7.a) denkleminde yerine konulması ve düzenlenmesi ile $\emptyset$ ye göre dördüncü mertebeden sabit katsayılı, lineer, homojen diferansiyel denklem elde edilir.

$$\emptyset'''' - 2\alpha^2\emptyset'' + \alpha^4\emptyset = 0 \qquad 1.10$$

Bu diferansiyel denklemin çözümü aşağıdaki gibidir.

$$\emptyset(y,\alpha) = A_1 e^{-\alpha y} + A_2 y e^{-\alpha y} + A_3 e^{\alpha y} + A_4 y e^{\alpha y} \qquad 1.11$$

$\Omega(y,\alpha)$ bilinmeyen fonksiyonunun çözümü ise (1.7.a) denkleminin y ye göre gerekli türevleri alınıp (1.7.b) denkleminde yerine yazılması ve aynı yolun izlenmesi sonucunda

$$\Omega(y,\alpha)=[A_1+(\frac{\chi}{\alpha}+y)A_2]e^{-\alpha y}+[-A_3+(\frac{\chi}{\alpha}-y)A_4]e^{\alpha y} \qquad 1.12$$

ifadesi elde edilir. Burada χ ;

düzlem şekildeğiştirme halinde:

$\chi=3-4\nu$

düzlem gerilme halinde :

$\chi=(3-\nu)/(1+\nu)$

olduğu bilinmektedir. χ büyüklüklerinde geçen ν ise Poisson oranını göstermektedir.

u(x,y) ve v(x,y) yerdeğiştirme ifadelerine geçmek için bulunan $\emptyset(y,\alpha)$ ve $\Omega(y,\alpha)$ ifadelerinin (1.4.a) ve (1.4.b) eşitliklerinde yerlerine konulması ile

$$u_h(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty [(A_1+A_2 y)e^{-\alpha y}+(A_3+A_4 y)e^{\alpha y}]\mathrm{Sin}(\alpha x)d\alpha \qquad 1.13.a$$

$$v_h(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left\{[A_1+(\frac{\chi}{\alpha}+y)A_2]e^{-\alpha y}+[-A_3+(\frac{\chi}{\alpha}-y)A_4]e^{\alpha y}\right\} .\mathrm{Cos}(\alpha x)d\alpha \qquad 1.13.b$$

elde edilirler. σ_x, σ_y, τ_{xy} kartezyen gerilme bileşenlerini göstermek üzere u ve v yerdeğiştirme bileşenlerine bağlı olarak

$$\sigma_x = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\frac{\partial v}{\partial y} \qquad 1.14.a$$

$$\sigma_y = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda\frac{\partial u}{\partial x} \qquad 1.14.b$$

$$\tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \qquad 1.14.c$$

yazılırlar. (1.13) ifadelerinde gerekli türevler alınır (1.14) ifadelerinde yerlerine yerleştirilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa gerilme bilesenleri şu şekilde olur.

$$\frac{1}{2\mu}\sigma_{xh}(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left\{ [\alpha(A_1 + yA_2) - \frac{3-\chi}{2}A_2]e^{-\alpha y} + [\alpha(A_3 + yA_4) + \frac{3-\chi}{2}A_4]e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x)\,d\alpha \qquad 1.15.a$$

$$\frac{1}{2\mu}\sigma_{yh}(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left\{ -[\alpha(A_1 + yA_2) + \frac{1+\chi}{2}A_2]e^{-\alpha y} + [-\alpha(A_3 + yA_4) + \frac{1+\chi}{2}A_4]e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x)\,d\alpha \qquad 1.15.b$$

$$\frac{1}{2\mu}\tau_{xyh}(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left\{ -[\alpha(A_1 + yA_2) + \frac{\chi-1}{2}A_2]e^{-\alpha y} + [\alpha(A_3 + yA_4) - \frac{\chi-1}{2}A_4]e^{\alpha y} \right\} \sin(\alpha x)\,d\alpha \qquad 1.15.c$$

Yukardaki ifadelerde geçen h indisi kütle kuvvetsiz haldeki gerilme ve yerdeğiştirmeleri göstermektedir.

Kütle kuvvetinin bulunması halinde gerilme ve yer-degiştirmeler aşağıda verilen şekilde hesaplanırlar.

Yerdeğiştirmelerle sekildeğiştirmeler arasındaki bağıntılar,

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad 1.16.a$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad 1.16.b$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad 1.16.c$$

ayrıca gerilmelerle şekildeğiştirmeler arasındaki bağıntıyı ifade eden Hooke kanunları düzlem gerilme hali için,

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu\sigma_y] \qquad 1.17.a$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu\sigma_x] \qquad 1.17.b$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \qquad 1.17.c$$

olarak yazılabilir. Kütle kuvveti olarak X=0, Y= ρg alınması, yerdeğiştirme fonksiyonlarının seçilmesi ve gerekli türevlerinin alınarak Navier denklemlerinde yerlerine konulması ile;

$$u = u(x) \qquad 1.18$$

$$v = v(y) \qquad 1.19$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0 \qquad 1.20.a$$

$$\frac{du}{dx} = a \qquad 1.20.b$$

$$u = ax + b \qquad 1.20.c$$

benzer şekilde,

$$(\lambda + 2\mu)\frac{d^2v}{dy^2} = \rho g \qquad 1.21.a$$

$$\frac{d^2v}{dy^2} = \frac{\rho g}{(\lambda + 2\mu)} \qquad 1.21.b$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{\rho g y}{(\lambda + 2\mu)} + c \qquad 1.21.c$$

$$v = \frac{\rho g y^2}{2(\lambda + 2\mu)} + c.y + d \qquad 1.21.d$$

bulunur. Kütle kuvveti ρg ve kalınlığı h olan tek tabaka için x ekseni tabaka altından geçmek üzere aşağıdaki sınır şartları yazılabilir.

$$u(o) = 0 \qquad 1.22.a$$

$$v(h) = 0 \qquad 1.22.b$$

$$\sigma_y = \rho g(y-h) \qquad 1.22.c$$

$$\int_o^h \sigma_x dy = 0 \qquad 1.22.d$$

(1.22) sınır şartlarının (1.20) ve (1.21) ifadelerine uygulanması ile bilinmeyenler elde edilir.

$$a = \frac{3-\chi}{8\mu} \cdot \frac{\rho g h}{2} \qquad 1.23.a$$

$$b = 0 \qquad 1.23.b$$

$$c = -\frac{\rho g h}{2\mu}\left[\frac{\chi-1}{\chi+1} + \frac{1+\chi}{8}\right] \qquad 1.24.a$$

$$d = 0 \qquad 1.24.b$$

Sonuçta yerdegiştirme ifadeleri,

$$u_o = \frac{3-\chi}{8\mu} \cdot \frac{\rho g h}{2} x \qquad 1.25$$

$$v_o = \frac{\rho g y}{2\mu}\left[\frac{\chi-1}{\chi+1}(y-h) - \frac{1+\chi}{8} h\right] \qquad 0 \leq y \leq h \qquad 1.26$$

olarak hesaplanır. Şekildegiştirmelerden yararlanarak (1.14) ifadelerinin kullanılmasıyla;

$$\sigma_{xo} = \frac{3-\chi}{\chi+1} \rho g\left(y - \frac{h}{2}\right) \qquad 1.27$$

$$\tau_{xyo} = 0 \qquad 1.28$$

degerleri elde edilir. Genel yerdegiştirme ve gerilme ifadeleri ise homojen çözümlerle özel çözümlerin toplamı olacağından,

$$u(x,y) = u_h(x,y) + u_o(x,y) \qquad 1.29.a$$

NOT: 1) Burada elastik zemine oturan h yüksekliğindeki bir tabaka için özel çözüm yapılmış olup elastik zemine oturan bileşik tabakalar için özel çözüm geniş olarak Bölüm II de verilmiştir.

2) o indisi kütle kuvvetinin olması haline ait özel çözümü göstermektedir.

$$v(x,y)=v_h(x,y)+v_o(x,y) \qquad 1.29.b$$

$$\sigma_x(x,y)=\sigma_{xh}(x,y)+\sigma_{xo}(x,y) \qquad 1.29.c$$

$$\sigma_y(x,y)=\sigma_{yh}(x,y)+\sigma_{yo}(x,y) \qquad 1.29.d$$

$$\tau_{xy}(x,y)=\tau_{xyh}(x,y)+\tau_{xyo}(x,y) \qquad 1.29.e$$

yazılabilir. İfadeler açık olarak aşağıda verilmistir.

$$u(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty [(A_1+A_2y)e^{-\alpha y}+(A_3+A_4y)e^{\alpha y}]\mathrm{Sin}(\alpha x)d\alpha + \frac{3-\chi}{8\mu}\cdot\frac{\rho gh}{2}x \qquad 1.30.a$$

$$v(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left\{[A_1+(\frac{\chi}{\alpha}+y)A_2]e^{-\alpha y}+[-A_3+(\frac{\chi}{\alpha}-y)A_4]e^{\alpha y}\right\} .\mathrm{Cos}(\alpha x)d\alpha + \frac{\rho gy}{2\mu}[\frac{\chi-1}{\chi+1}(y-h)-\frac{1+\chi}{8}h] \qquad 1.30.b$$

$$\frac{1}{2\mu}\sigma_x(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left\{[\alpha(A_1+yA_2)-\frac{3-\chi}{2}A_2]e^{-\alpha y} + [\alpha(A_3+yA_4)+\frac{3-\chi}{2}A_4]e^{\alpha y}\right\}\mathrm{Cos}(\alpha x)d\alpha + \frac{1}{2\mu}\cdot\frac{3-\chi}{1+\chi}\rho g(y-\frac{h}{2}) \qquad 1.30.c$$

$$\frac{1}{2\mu}\sigma_y(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left\{-[\alpha(A_1+yA_2)+\frac{1+\chi}{2}A_2]e^{-\alpha y} + [-\alpha(A_3+yA_4)+\frac{1+\chi}{2}A_4]e^{\alpha y}\right\}\mathrm{Cos}(\alpha x)d\alpha + \frac{1}{2\mu}\rho g(y-h) \qquad 1.30.d$$

$$\frac{1}{2\mu}\tau_{xy}(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left\{-[\alpha(A_1+yA_2)+\frac{\chi-1}{2}A_2]e^{-\alpha y} + [\alpha(A_3+yA_4)-\frac{\chi-1}{2}A_4]e^{\alpha y}\right\}\mathrm{Sin}(\alpha x)d\alpha \qquad 1.30.e$$

BÖLÜM II

ELASTİK ZEMİNE OTURAN BİLEŞİK TABAKALARDA SÜREKLİ TEMAS PROBLEMİ

II.1.PROBLEMİN TANIMI:

Bütün yüzeylerin sürtünmesiz olduğu kabulü ile elastik zemine oturan ve farklı iki malzemeden yapılmış olan bileşik tabakaların sürekli temas hali elastisite teorisine göre çözülecektir. Çözümler, kütle kuvvetinin etkisinin olmaması ve kütle kuvvetinin etkisinin olması hali için ayrı ayrı yapılacaktır.

Her iki durum için dış yük (-a,+a) aralığında düzgün yayılı yük alınmış olup, tabakalar ve elastik zemin x boyunca (-∞,+∞) arasında uzanmaktadır(Şekil A.1). Dış yük, tabakalar ve elastik zemin y eksenine göre simetrik olduğundan hesaplamalar x ekseni doğrultusunda dış yük için (0,+a), tabakalar ve elastik zemin için ise (0,+∞) arasında yapılacaktır. Elastik zeminin kütle kuvveti her durum için ihmal edilmiştir.

Problem düzlem hal için incelendiğinden z doğrultusundaki kalınlıklar birim olarak alınmıştır (Şekil A.1, A.2).

Gözönüne alınan yükleme biçimlerinden dolayı en büyük σ_x ve σ_y normal gerilmeleri simetri ekseni üzerinde elde edilmiştir. Çeşitli malzeme ve yük parametreleri için σ_x ve σ_y normal gerilmelerine ait sayısal değerler bulunmuştur. Bunlar, kütle kuvvetsiz veya kütle kuvvetli oluşlarına bağlı olarak Tablo(A.1-A.8) ve Şekil(B.1-B.8, C.1-C.4) de verilmiştir.

II.A.KÜTLE KUVVETLERİNİN OLMAMASI DURUMU:

Tabakaların ve elastik zeminin kütle kuvvetlerinin ihmal edilerek yalnız dış yükün olması durumunda çözüm yapılacaktır. Çözümde, Bölüm I deki (1.13) ve (1.15) ifadelerinden yararlanılacaktır.

II.A.1.KULLANILACAK DENKLEMLER:

1 nolu tabakanın yüksekligi h_1 elastik sabitleri μ_1, ν_1 dir. Elastik sabitleri μ_2, ν_2 olan 2 nolu tabakanın yüksekligi ise h_2 dir. $h=h_1+h_2$ olarak alınmıştır. 3 nolu elastik zeminin ise elastik sabitleri μ_3 ve ν_3 dür.

Verilen yükseklik ve elastik sabitlere göre yerdegiştirme ve gerilme ifadelerinin homojen kısmı Bölüm I de elde edilen çözümler kullanılarak aşagıdaki gibi yazılabilir.

1 nolu tabaka için ($0\leq x\leq\infty$, $0\leq y\leq h_1$)

$$u_{1h}(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty[(A_1+A_2y)e^{-\alpha y}+(A_3+A_4y)e^{\alpha y}]\mathrm{Sin}(\alpha x)d\alpha \qquad 2.1.a$$

$$v_{1h}(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left\{[A_1+(\frac{\chi_1}{\alpha}+y)A_2]e^{-\alpha y}+[-A_3+(\frac{\chi_1}{\alpha}-y)A_4]e^{\alpha y}\right\}.\mathrm{Cos}(\alpha x)d\alpha \qquad 2.1.b$$

$$\frac{1}{2\mu_1}\sigma_{x1h}(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left\{[\alpha(A_1+yA_2)-\frac{3-\chi_1}{2}A_2]e^{-\alpha y}+[\alpha(A_3+yA_4)+\frac{3-\chi_1}{2}A_4]e^{\alpha y}\right\}\mathrm{Cos}(\alpha x)d\alpha \qquad 2.1.c$$

$$\frac{1}{2\mu_1}\sigma_{y1h}(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left\{-[\alpha(A_1+yA_2)+\frac{1+\chi_1}{2}A_2]e^{-\alpha y}+[-\alpha(A_3+yA_4)+\frac{1+\chi_1}{2}A_4]e^{\alpha y}\right\}\mathrm{Cos}(\alpha x)d\alpha \qquad 2.1.d$$

$$\frac{1}{2\mu_1}\tau_{xy1h}(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left\{-[\alpha(A_1+yA_2)+\frac{\chi_1-1}{2}A_2]e^{-\alpha y}+[\alpha(A_3+yA_4)-\frac{\chi_1-1}{2}A_4]e^{\alpha y}\right\}\mathrm{Sin}(\alpha x)d\alpha \qquad 2.1.e$$

2 nolu tabaka için($0\leq x\leq\infty$, $h_1\leq y\leq h$):

$$u_{2h}(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty[(B_1+B_2y)e^{-\alpha y}+(B_3+B_4y)e^{\alpha y}]\mathrm{Sin}(\alpha x)d\alpha \qquad 2.2.a$$

$$v_{2h}(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left\{\left[B_1+\left(\frac{\chi_2}{\alpha}+y\right)B_2\right]e^{-\alpha y}+\left[-B_3+\left(\frac{\chi_2}{\alpha}-y\right)B_4\right]e^{\alpha y}\right\}\cdot \mathrm{Cos}(\alpha x)\,d\alpha \tag{2.2.b}$$

$$\frac{1}{2\mu_2}\sigma_{x2h}(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left\{\left[\alpha(B_1+yB_2)-\frac{3-\chi_2}{2}B_2\right]e^{-\alpha y}+\left[\alpha(B_3+yB_4)+\frac{3-\chi_2}{2}B_4\right]e^{\alpha y}\right\}\mathrm{Cos}(\alpha x)\,d\alpha \tag{2.2.c}$$

$$\frac{1}{2\mu_2}\sigma_{y2h}(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left\{-\left[\alpha(B_1+yB_2)+\frac{1+\chi_2}{2}B_2\right]e^{-\alpha y}+\left[-\alpha(B_3+yB_4)+\frac{1+\chi_2}{2}B_4\right]e^{\alpha y}\right\}\mathrm{Cos}(\alpha x)\,d\alpha \tag{2.2.d}$$

$$\frac{1}{2\mu_2}\tau_{xy2h}(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left\{-\left[\alpha(B_1+yB_2)+\frac{\chi_2-1}{2}B_2\right]e^{-\alpha y}+\left[\alpha(B_3+yB_4)-\frac{\chi_2-1}{2}B_4\right]e^{\alpha y}\right\}\mathrm{Sin}(\alpha x)\,d\alpha \tag{2.2.e}$$

3 nolu eleman yani elastik zemin için$(0\leq x\leq\infty\ ,\ -\infty\leq y\leq 0)$

$$u_{3h}(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[(C_1+C_2y)e^{\alpha y}\right]\mathrm{Sin}(\alpha x)\,d\alpha \tag{2.3.a}$$

$$v_{3h}(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[-C_1+\left(\frac{\chi_3}{\alpha}-y\right)C_2\right]e^{\alpha y}\ \mathrm{Cos}(\alpha x)\,d\alpha \tag{2.3.b}$$

$$\frac{1}{2\mu_3}\sigma_{x3h}(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\alpha(C_1+yC_2)+\frac{3-\chi_3}{2}C_2\right]e^{\alpha y}\ \mathrm{Cos}(\alpha x)\,d\alpha \tag{2.3.c}$$

$$\frac{1}{2\mu_3}\sigma_{y3h}(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[-\alpha(C_1+yC_2)+\frac{1+\chi_3}{2}C_2\right]e^{\alpha y}\ \mathrm{Cos}(\alpha x)\,d\alpha \tag{2.3.d}$$

$$\frac{1}{2\mu_3}\tau_{xy3h}(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\alpha(C_1+yC_2)-\frac{\chi_3-1}{2}C_2\right]e^{\alpha y}\ \mathrm{Sin}(\alpha x)\,d\alpha \tag{2.3.e}$$

II.A.2.SINIR ŞARTLARI:

$\sigma_x(x,y)$, $\sigma_y(x,y)$ ve $\tau_{xy}(x,y)$ gerilme bileşenlerini, $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ yerdeğiştirme bileşenlerini göstermek üzere sınır şartları:

$$\tau_{xy_3}(x,0)=0 \qquad 2.4$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[v_1(x,0)-v_3(x,0)]=0 \qquad 2.5$$

$$\tau_{xy_1}(x,0)=0 \qquad 2.6$$

$$\tau_{xy_1}(x,h_1)=0 \qquad 2.7$$

$$\tau_{xy_2}(x,h_1)=0 \qquad 2.8$$

$$\tau_{xy_2}(x,h)=0 \qquad 2.9$$

$$\sigma_{y_1}(x,0)=\sigma_{y_3}(x,0) \qquad 2.10$$

$$\sigma_{y_2}(x,h)=-p(x) \quad 0<x<a \qquad 2.11$$

$$\sigma_{y_1}(x,h_1)=\sigma_{y_2}(x,h_1) \qquad 2.12$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[v_1(x,h_1)-v_2(x,h_1)]=0 \qquad 2.13$$

olarak yazılırlar.

II.A.3.KATSAYILARIN BELİRLENMESİ:

Sınır şartlarının (2.1), (2.2) ve (2.3) denklemlerine uygulanması ile on bilinmeyenli on cebrik denklem elde edilir.

$$2\alpha C_1+(1-\chi_3)C_2=0 \qquad 2.14.a$$

$$\alpha A_1+\chi_1 A_2-\alpha A_3+\chi_1 A_4+\alpha C_1-\chi_3 C_2=0 \qquad 2.14.b$$

$$-2\alpha A_1+(1-\chi_1)A_2+2\alpha A_3+(1-\chi_1)A_4=0 \qquad 2.14.c$$

$$-2\alpha A_1+(1-2\alpha h_1-\chi_1)A_2+2\alpha e^{2\alpha h_1}A_3+(1+2\alpha h_1-\chi_1)e^{2\alpha h_1}A_4=0 \qquad 2.14.d$$

$$-2\alpha B_1+(1-2\alpha h_1-\chi_2)B_2+2\alpha e^{2\alpha h_1}B_3+(1+2\alpha h_1-\chi_2)e^{2\alpha h_1}B_4=0 \qquad 2.14.e$$

$$-2\alpha B_1+(1-2\alpha h-\chi_2)B_2+2\alpha e^{2\alpha h}B_3+(1+2\alpha h-\chi_2)e^{2\alpha h}B_4=0 \qquad 2.14.f$$

$$-2\alpha A_1-(1+\chi_1)A_2-2\alpha A_3+(1+\chi_1)A_4+2\alpha\frac{\mu_3}{\mu_1}C_1-\frac{\mu_3}{\mu_1}(1+\chi_3)C_2=0 \qquad 2.14.g$$

$$2\alpha B_1+(1+2\alpha h+\chi_2)B_2+2\alpha e^{2\alpha h}B_3-(1-2\alpha h+\chi_2)e^{2\alpha h}B_4$$

$$=\frac{e^{\alpha h}}{2\mu_2}\int_0^\infty p(x).\mathrm{Cos}(\alpha x)dx \qquad 2.14.h$$

$$-2\alpha A_1-(1+2\alpha h_1+\chi_1)A_2-2\alpha e^{2\alpha h_1}A_3+(1-2\alpha h_1+\chi_1)e^{2\alpha h_1}A_4$$

$$+2\alpha\frac{\mu_2}{\mu_1}B_1+(1+2\alpha h_1+\chi_2)\frac{\mu_2}{\mu_1}B_2+2\alpha\frac{\mu_2}{\mu_1}e^{2\alpha h_1}B_3-(1-2\alpha h_1+\chi_2)\frac{\mu_2}{\mu_1}e^{2\alpha h_1}B_4=0$$

$$2.14.i$$

$$A_1+(\frac{\chi_1}{\alpha}+h_1)A_2-e^{2\alpha h_1}A_3+(\frac{\chi_1}{\alpha}-h_1)e^{2\alpha h_1}A_4$$

$$-B_1-(\frac{\chi_2}{\alpha}+h_1)B_2+e^{2\alpha h_1}B_3-(\frac{\chi_2}{\alpha}-h_1)e^{2\alpha h_1}B_4=0 \qquad 2.14.j$$

Bu denklem takımının çözülmesi ile bilinmeyenler olan A_j, B_j, $(j=1-4)$ ve C_k $(k=1,2)$ α nın fonksiyonu olarak hesaplanırlar. Katsayılar aşağıda verilmiştir.

$$\alpha A_1=-\frac{P^*}{\Delta}.\frac{e^{-\alpha h}}{2\mu_1}YA3[-\frac{\mu_3}{\mu_1}YA4+\frac{1+\chi_3}{1+\chi_1}YA7] \qquad 2.15.a$$

$$A_2=-2\frac{P^*}{\Delta}.\frac{e^{-\alpha h}}{2\mu_1}YA3[\frac{\mu_3}{\mu_1}(e^{-2\alpha h_1}-1)+\frac{1+\chi_3}{1+\chi_1}YA6] \qquad 2.15.b$$

$$\alpha A_3=\frac{P^*}{\Delta}.\frac{e^{-\alpha h}}{2\mu_1}YA3[\frac{\mu_3}{\mu_1}YA4+\frac{1+\chi_3}{1+\chi_1}YA8] \qquad 2.15.c$$

$$A_4=2\frac{P^*}{\Delta}.\frac{e^{-\alpha h}}{2\mu_1}YA3[\frac{\mu_3}{\mu_1}(e^{-2\alpha h_1}-1)+\frac{1+\chi_3}{1+\chi_1}YA5] \qquad 2.15.d$$

$$\alpha B_1=\frac{P^*}{\Delta}.\frac{e^{-\alpha h}}{2\mu_2}e^{2\alpha h_1}[\frac{\mu_2}{\mu_1}YB2(\frac{\mu_3}{\mu_1}.\frac{1+\chi_1}{1+\chi_2}Y1+\frac{1+\chi_3}{1+\chi_2}Y2)$$

$$+YB4(\frac{\mu_3}{\mu_1}.Y2+\frac{1+\chi_3}{1+\chi_1}Y3)] \qquad 2.15.e$$

$$B_2 = -2\frac{P^*}{\Delta}\cdot\frac{e^{-\alpha h}}{2\mu_2}e^{2\alpha h_1}\Big[\frac{\mu_2}{\mu_1}YB6\Big(\frac{\mu_3}{\mu_1}\cdot\frac{1+\chi_1}{1+\chi_2}Y1+\frac{1+\chi_3}{1+\chi_2}Y2\Big) + (-1+e^{-2\alpha h_2})\Big(\frac{\mu_3}{\mu_1}Y2+\frac{1+\chi_3}{1+\chi_1}Y3\Big)\Big] \qquad 2.15.f$$

$$\alpha B_3 = \frac{P^*}{\Delta}\cdot\frac{e^{-\alpha h}}{2\mu_2}\Big[\frac{\mu_2}{\mu_1}YB8\Big(\frac{\mu_3}{\mu_1}\cdot\frac{1+\chi_1}{1+\chi_2}Y1+\frac{1+\chi_3}{1+\chi_2}Y2\Big) + YB7\Big(\frac{\mu_3}{\mu_1}.Y2+\frac{1+\chi_3}{1+\chi_1}Y3\Big)\Big] \qquad 2.15.g$$

$$B_4 = -2\frac{P^*}{\Delta}\cdot\frac{e^{-\alpha h}}{2\mu_2}\Big[\frac{\mu_2}{\mu_1}YB5\Big(\frac{\mu_3}{\mu_1}\cdot\frac{1+\chi_1}{1+\chi_2}Y1+\frac{1+\chi_3}{1+\chi_2}Y2\Big) + (1-e^{-2\alpha h_2})\Big(\frac{\mu_3}{\mu_1}Y2+\frac{1+\chi_3}{1+\chi_1}Y3\Big)\Big] \qquad 2.15.h$$

$$\alpha C_1 = \frac{P^*}{\Delta}\cdot\frac{e^{-\alpha h}}{2\mu_3}\cdot\frac{\mu_3}{\mu_1}YA3.YB3(1-\chi_3) \qquad 2.15.i$$

$$C_2 = -2\frac{P^*}{\Delta}\cdot\frac{e^{-\alpha h}}{2\mu_3}\cdot\frac{\mu_3}{\mu_1}YA3.YB3 \qquad 2.15.j$$

(2.15) ifadelerinde geçen notasyonlar aşağıda tanımlanmışlardır.

$$\Delta = 4\Big[\frac{\mu_2}{\mu_1}\cdot\frac{1+\chi_1}{1+\chi_2}Y4\Big(\frac{\mu_3}{\mu_1}Y1+\frac{1+\chi_3}{1+\chi_1}Y2\Big)+Y5\Big(\frac{\mu_2}{\mu_1}.Y2+\frac{1+\chi_3}{1+\chi_1}Y3\Big)\Big]$$

$$Y1 = 1-2e^{-2\alpha h_1}+e^{-4\alpha h_1}$$

$$Y2 = 1+2.2\alpha h_1 e^{-2\alpha h_1}-e^{-4\alpha h_1}$$

$$Y3 = 1-(2+2\alpha h_1\ 2\alpha h_1)e^{-2\alpha h_1}+e^{-4\alpha h_1}$$

$$Y4 = 1-(2+2\alpha h_2\ 2\alpha h_2)e^{-2\alpha h_2}+e^{-4\alpha h_2}$$

$$Y5 = 1+2.2\alpha h_2 e^{-2\alpha h_2}-e^{-4\alpha h_2}$$

$$YA1=1-\chi_1-(1-2.2\alpha h_1-\chi_1)e^{-2\alpha h_1}$$

$$YA2=1-\chi_1-2\alpha h_1(2\alpha h_1+\chi_1)e^{-2\alpha h_1}-(1-2\alpha h_1-\chi_1)e^{-2\alpha h_1}$$

$$YA3=2+2\alpha h_2-(2-2\alpha h_2)e^{-2\alpha h_2}$$

$$YA4=1-\chi_1+2\alpha h_1-(1-2\alpha h_1-\chi_1)e^{-2\alpha h_1}$$

$$YA5=-1+(1-2\alpha h_1)e^{-2\alpha h_1}$$

$$YA6=1+2\alpha h_1-e^{-2\alpha h_1}$$

$$YA7=1-2\alpha h_1\chi_1-\chi_1-(1-2\alpha h_1-\chi_1)e^{-2\alpha h_1}$$

$$YA8=1+2\alpha h_1-\chi_1-(1+2\alpha h_1\chi_1-\chi_1)e^{-2\alpha h_1}$$

$$YA9=(1-\chi_1)e^{-2\alpha h_1}-(1+2.2\alpha h_1-\chi_1)$$

$$YA10=1+2\alpha h_1-\chi_1+2\alpha h_1(2\alpha h_1-\chi_1)-(1-\chi_1)e^{-2\alpha h_1}$$

$$YA11=(1+\chi_1)e^{-2\alpha h_1}-(1+2.2\alpha h_1+\chi_1)$$

$$YA12=1+2\alpha h_1+\chi_1+2\alpha h_1(2\alpha h_1+\chi_1)-(1+\chi_1)e^{-2\alpha h_1}$$

$$YB1=-(1-2\alpha h_1-\chi_2)+(1-2\alpha h-\chi_2)e^{-2\alpha h_2}+2\alpha h_2(2\alpha h+\chi_2)e^{-2\alpha h_2}$$

$$YB2=-(1-2\alpha h_1-\chi_2)+(1-2\alpha h-\chi_2)e^{-2\alpha h_2}+2\alpha h_2(2\alpha h_1+\chi_2)$$

$$YB3=2+2\alpha h_1+(-2+2\alpha h_1)e^{-2\alpha h_1}$$

$$YB4=1-2\alpha h_1+2\alpha h_2-\chi_2-(1-2\alpha h-\chi_2)e^{-2\alpha h_2}$$

$$YB5=1-(1-2\alpha h_2)e^{-2\alpha h_2}$$

$$YB6=1+2\alpha h_2-e^{-2\alpha h_2}$$

$$YB7=1+2\alpha h-\chi_2-(1+2\alpha h_1-2\alpha h_2-\chi_2)e^{-2\alpha h_2}$$

$$YB8=1+2\alpha h-X_2-(1+2\alpha h_2-X_2)e^{-2\alpha h_2}+2\alpha h_2(2\alpha h_1-X_2)e^{-2\alpha h_2}$$

$$YB9=1+2\alpha h-X_2+2\alpha h_2(2\alpha h-X_2)-(1+2\alpha h_1-X_2)e^{-2\alpha h_2}$$

$$YB10=-(1+2\alpha h-X_2)-2\alpha h_2(2\alpha h-X_2)+(1+2\alpha h_1-X_2)e^{-2\alpha h_2}$$

$$YB11=1+2\alpha h_1+2\alpha^2 h_1^2-e^{-2\alpha h_1}$$

$$YB12=1+2\alpha h_2+2\alpha^2 h_2^2-e^{-2\alpha h_2}$$

$p(x) = p_o$ = sabit alınırsa, yük fonksiyonunun Fourier dönüşümü

$$P^*=p_o\int_0^a \mathrm{Cos}(\alpha t)dt=p_o\left|\frac{1}{\alpha}\mathrm{Sin}(\alpha t)\right|_0^a=p_o\frac{\mathrm{Sin}(\alpha a)}{\alpha} \quad ; \quad P^*=p_o\frac{\mathrm{Sin}(\alpha a)}{\alpha}$$

olarak elde edilir. (0,+a) aralığındaki düzgün yayılı dış yükün aralığını daraltmakla yani a yı çok küçük almakla; problem, üstten tekil yükle yüklenmiş elastik zemine oturan bileşik tabaka problemine dönüşecektir. Bu durum Şekil A.2 de gösterilmiştir.

II.A.4. ELASTİK ZEMİNE OTURAN TEK TABAKA PROBLEMİNE GEÇİŞ

Elastik zemine oturan bileşik tabaka probleminden elastik zemine oturan tek tabaka problemine geçebilmek için katsayılarda bazı değişiklikler yapmak gerekir. Bu değişiklikler şöyle olacaktır;

i) Eğer $h_2=0$ alınacaksa:

$D_i=A_i/YA3$ $\quad i=1-4$

$E_j=C_j/YA3$ $\quad j=1,2$

$\bar{\Delta}=\Delta/YA3$

Bu işlemler sonrasında sırasıyla $h_2=0$, $\mu_1=\mu_2$, $X_1=X_2$ ve $h_1=h$ konulmalıdır.

ii) Eğer $h_1=0$ alınacaksa:

$D_i=B_i/YB3$ $\quad i=1-4$

$E_j=C_j/YB3$ $\quad j=1,2$

$\overline{\Delta} = \Delta / YB3$

Bu işlemler sonrasında da önceki şıkka benzer olarak $h_1=0$, $\mu_1=\mu_2$, $\chi_1=\chi_2$ ve $h_2=h$ konulmalıdır.

Her iki durum sonrasında katsayılar düzenlenerek şöyle yazılabilir;

$$\alpha D_1 = -\frac{P^* e^{\alpha h}}{2\mu_1}\Big\{[(\chi_1-1-2\alpha h)e^{2\alpha h}-(\chi_1-1+2\alpha h)] - \lambda[(\chi_1-1-2\alpha h)e^{2\alpha h}-(\chi_1-1+2\alpha h)]\Big\} \quad 2.16.a$$

$$D_2 = -2\frac{P^* e^{\alpha h}}{2\mu_1}\Big\{(1-e^{2\alpha h}) + [-1+(1+2\alpha h)e^{2\alpha h}]\Big\} \quad 2.16.b$$

$$\alpha D_3 = \frac{P^* e^{\alpha h}}{2\mu_1}\Big\{[(\chi_1-1+2\alpha h)+e^{2\alpha h}(1-\chi_1+2\alpha h)] + \lambda[(1-\chi_1+2\alpha h)e^{2\alpha h}-(\chi_1-1-2\alpha h\chi_1)]\Big\} \quad 2.16.c$$

$$D_4 = 2\frac{P^* e^{\alpha h}}{2\mu_1}\Big\{(1-e^{2\alpha h}) + [(1-2\alpha h)-e^{2\alpha h}]\Big\} \quad 2.16.d$$

$$\alpha E_1 = -2\frac{P^* e^{\alpha h}}{2\mu_1}(\chi_1-1)[(e^{2\alpha h}-1)+\alpha h(e^{2\alpha h}+1)] \quad 2.16.e$$

$$\alpha E_2 = -4\frac{P^* e^{\alpha h}}{2\mu_1}[(e^{2\alpha h}-1)+\alpha h(e^{2\alpha h}+1)] \quad 2.16.f$$

Burada $\lambda = \dfrac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \dfrac{\chi_2+1}{\chi_1+1}$ dir.

II.A.5.GERİLMELERİN BULUNMASI

Elastik zemine oturan bileşik tabakalara ait hesaplanmış olan katsayıların Bölüm II.A.1 de 2.1, 2.2, 2.3 numaraları ile verilmiş olan gerilme ve yerdeğiştirme ifadelerinde yerlerine yerleştirilerek çekirdeklerin incelenmesi gerekmektedir. Çünkü gerilmelerin ve yerdeğiştirmelerin sağlıklı elde edilebilmeleri için gerilme ve yerdeğiştirme çekirdeklerinin yakınsamalarına ihtiyaç vardır. İncelemeler sonunda yalnız $y \Rightarrow h$ durumunda $\sigma_x(x,y)$, $\sigma_y(x,y)$ gerilmelerine ait çekirdeklerde yakınsama durumunun bozulduğu, diğer yerlerde gerilme ve yerdeğiştirmelere ait çekirdeklerin ise bozulmayıp sürekli olarak sıfıra yaklaştıkları gözlenmiştir.

$\sigma_{x2}(x,y)$, $\sigma_{y2}(x,y)$ gerilmelerine ait çekirdekleri bozan tekil terimler araştırıldığında;

$y \Rightarrow h$ durumunda:

$$\sigma_{x2\infty}(x,y) = \frac{2}{\pi}\frac{p_o}{8a}\int_0^\infty \left(\frac{1}{\alpha}-h+y\right)e^{-\alpha(h-y)}\,\mathrm{Sin}(\alpha a)\mathrm{Cos}(\alpha a)\,d\alpha \qquad 2.17.a$$

$$\sigma_{y2\infty}(x,y) = \frac{2}{\pi}\frac{p_o}{8a}\int_0^\infty \left(\frac{1}{\alpha}+h-y\right)e^{-\alpha(h-y)}\,\mathrm{Sin}(\alpha a)\mathrm{Cos}(\alpha a)\,d\alpha \qquad 2.17.b$$

olarak bulunurlar. Bu tekil terimlerin kapalı integralleri ise

$$\sigma_{x2k}(x,y) = \frac{p_o}{16a}\left\{tg^{-1}\frac{a+x}{h-y} + tg^{-1}\frac{a-x}{h-y} - (h-y)^2\left[\frac{(a+x)}{(h-y)^2+(a+x)^2} + \frac{(a-x)}{(h-y)^2+(a-x)^2}\right]\right\} \qquad 2.18.a$$

$$\sigma_{y2k}(x,y) = \frac{p_o}{16a}\left\{tg^{-1}\frac{a+x}{h-y} + tg^{-1}\frac{a-x}{h-y} + (h-y)^2\left[\frac{(a+x)}{(h-y)^2+(a+x)^2} + \frac{(a-x)}{(h-y)^2+(a-x)^2}\right]\right\} \qquad 2.18.b$$

Sonuçta gerilme ifadeleri:

$$\sigma_{x2g}(x,y) = \sigma_{x2}(x,y) - \sigma_{x2\infty}(x,y) + \sigma_{x2k}(x,y) \qquad 2.19.a$$

$$\sigma_{y2g}(x,y) = \sigma_{y2}(x,y) - \sigma_{y2\infty}(x,y) + \sigma_{y2k}(x,y) \qquad 2.19.b$$

olacaktır.

En büyük normal gerilme değerlerinin tekil veya yayılı yükün altında ve y simetri ekseninde olduğu açıktır. Bu nedenle sürekli temas halinde incelemeler y simetri eksenindeki $\sigma_{x1}(0,y)$ ve $\sigma_{y1}(0,y)$ normal gerilmelerinde yoğunlaştırılmıştır. Boyutsuz hale getirilen σ_x ve σ_y normal gerilmeleri, değişik yük ve malzeme parametrelerine sayısal değerler verilerek y simetri ekseninde kesit boyunca değişimleri elde edilmiştir.

Kütle kuvvetleri ihmal edilmis elastik zemine oturan bileşik tabakaların sürekli temas durumuna ait sayısal degerler Tablo(A.1–A.4) ve Şekil(B.1–B.8, C.1–C.4) de 1 ile verilmişlerdir. Tablo(A.1–A.4) ve Şekil(B.1–B.8, C.1–C.4) de geçen σ_{xi}/p_o ve σ_{yi}/p_o (i=1,2,3) ifadeleri:

i=1 için	σ_{x1}/p_o	σ_{y1}/p_o	1 nolu tabakaya ait
i=2 için	σ_{x2}/p_o	σ_{y2}/p_o	2 nolu tabakaya ait
i=3 için	σ_{x3}/p_o	σ_{y3}/p_o	elastik zemine ait

normal gerilmelerle ilgili oranlardır.

II.B.KÜTLE KUVVETİNİN OLMASI DURUMU:

Elastik zemine oturan bileşik tabaka problemine ait kütle kuvvetli haldeki gerilme ve yerdeğiştirmelerin özel çözümleri bulunarak kütle kuvvetsiz haldeki gerilme ve yerdeğiştirmelerin homojen kısımları ile toplanacaktır. Böylece bu probleme ilişkin kullanılacak olan gerilme ve yerdeğiştirme ifadeleri elde edilecektir. Bu ifadelere değerler verilerek sayısal çözümler yapılacaktır.

II.B.1.FORMÜLASYON:

Tabakalar ve elastik zemin homojen ve izotrop kabul edilmiş olup herbiri için kütle kuvveti sabittir.

Formülasyonda yerdeğiştirme-şekildeğiştirme ve gerilme-şekildeğiştirme bağıntılarından yararlanılacaktır.

i)Üst tabaka (2 nolu malzeme) için: $(h_1 \leq y \leq h)$

$$u_2 = u_2(x) \qquad 2.20.a$$

$$v_2 = v_2(y) \qquad 2.20.b$$

Yukardaki fonksiyonların seçilmesi ve kütle kuvvetleri olarak $X=0$ ve $Y=\rho_2 g$ alınarak Navier denklemlerinde yerlerine konulması ile

$$\frac{d^2 u_2}{dx^2} = 0 \qquad 2.21.a$$

$$\frac{du_2}{dx} = a \qquad 2.21.b$$

$$u_2(x) = ax + b \qquad 2.21.c$$

$$(\lambda_2 + 2\mu_2)\frac{d^2 v_2}{dy^2} = \rho_2 g \qquad 2.22.a$$

$$\frac{d^2 v_2}{dy^2} = \frac{\rho_2 g}{(\lambda_2 + 2\mu_2)} \qquad 2.22.b$$

$$\frac{dv_2}{dy} = \frac{\rho_2 g y}{(\lambda_2 + 2\mu_2)} + c = \frac{\chi_2 - 1}{\chi_2 + 1} \cdot \frac{\rho_2 g y}{\mu_2} + c \qquad 2.22.c$$

$$v = \frac{\chi_2 - 1}{\chi_2 + 1} \cdot \frac{\rho_2 g y^2}{2\mu_2} + cy + d \qquad 2.22.d$$

bulunur. Şekil A ya göre aşağıdaki sınır şartları yazılabilir.

$$u_2(o) = 0 \qquad 2.23.a$$

$$v_2(h) = 0 \qquad 2.23.b$$

$$\sigma_{y2} = \rho_2 g(y-h) \qquad h_1 \leq y \leq h \qquad 2.23.c$$

$$\int_{h_1}^{h} \sigma_{x2} dy = 0 \qquad 2.23.d$$

Yukardaki sınır şartları altında bilinmeyen katsayılar hesaplanabilir.

$$a = \frac{3-\chi_2}{8\mu_2} \cdot \frac{\rho_2 g h_2}{2} \qquad 2.24.a$$

$$b = 0 \qquad 2.24.b$$

$$c = -\frac{\rho_2 g}{\mu_2}\left[\frac{1+\chi_2}{16}h_2 + \frac{\chi_2-1}{\chi_2+1}\left(h_1+\frac{h_2}{2}\right)\right] \qquad 2.25.a$$

$$d = 0 \qquad 2.25.b$$

Katsayıların yerdegiştirmelerde yerlerine konulması ile yerdegiştirmeler,

$$u_2 = \frac{3-\chi_2}{8\mu_2} \cdot \frac{\rho_2 g h_2}{2} x \qquad 2.26.a$$

$$v_2 = -\frac{\rho_2 g y}{2\mu_2}\left[\frac{1+\chi_2}{8}h_2 + \frac{\chi_2-1}{\chi_2+1}(h_1+h-y)\right] \qquad 2.26.b$$

ve sekildegiştirmelerden yararlanarak da,

$$\sigma_{x2} = \frac{3-\chi_2}{\chi_2+1} \cdot \frac{\rho_2 g}{2}(2y-h-h_1) \qquad 2.26.c$$

$$\tau_{xy2} = 0 \qquad 2.26.d$$

hesaplanır.

ii)Alt tabaka (1 nolu malzeme) için ($0 \leq y \leq h_1$)

Şekil A ya göre aşağıdaki sınır şartları yazılabilir.

$$u_1(o) = 0 \qquad 2.27.a$$

$$v_1(h_1)=0 \qquad 2.27.b$$

$$\sigma_{y1}=-\rho_2 g h_2+\rho_1 g(y-h_1) \qquad 0\leq y\leq h_1 \qquad 2.27.c$$

$$\int_0^{h_1}\sigma_{x1}dy=0 \qquad 2.27.d$$

Üst tabakaya ilişkin çözümler alt tabaka için de benzer şekilde yapıldığında yerdeğiştirme ve gerilme ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$v_1=\frac{\chi_1-1}{\chi_1+1}.\frac{\rho_1 g y}{2\mu_1}(y-h_1)-\frac{1+\chi_1}{8\mu_1}y(\rho_2 g h_2+\rho_1 g\frac{h_1}{2}) \qquad 2.28.a$$

$$u_1=\frac{3-\chi_1}{8\mu_1}[\frac{\rho_1 g h_1}{2}+\rho_2 g h_2]x \qquad 2.28.b$$

$$\sigma_{x1}=\frac{3-\chi_1}{\chi_1+1}.\frac{\rho_1 g}{2}(2y-h_1) \qquad 2.28.c$$

$$\tau_{xy1}=0 \qquad 2.28.d$$

iii)Elastik zemin (3 nolu malzeme) için: ($y\leq 0$)

$$u_3=\frac{3-\chi_3}{8\mu_3}.(\rho_1 g h_1+\rho_2 g h_2)x \qquad 2.29.a$$

$$v_3=-\frac{1+\chi_3}{8\mu_3}(\rho_1 g h_1+\rho_2 g h_2)y \qquad 2.29.b$$

$$\sigma_{y3}=-(\rho_1 g h_1+\rho_2 g h_2) \qquad 2.29.c$$

$$\sigma_{x3}=0 \qquad 2.29.d$$

$$\tau_{xy3}=0 \qquad 2.29.e$$

Gerilme ve yerdeğiştirme ifadelerindeki h indisi kütle kuvvetinin etkisinin olmadığı, o indisi kütle kuvvetinin etkisinin olduğu durumu göstermek üzere gerilme ve yerdeğiştirme ifadeleri

$$u(x,y)=u_h(x,y)+u_o(x,y)$$

$$v(x,y)=v_h(x,y)+v_o(x,y)$$

$$\sigma_x(x,y)=\sigma_{xh}(x,y)+\sigma_{xo}(x,y)$$

$$\sigma_y(x,y)=\sigma_{yh}(x,y)+\sigma_{yo}(x,y)$$

$$\tau_{xy}(x,y)=\tau_{xyh}(x,y)+\tau_{xyo}(x,y)$$

şeklinde olacağı açıktır. Şimdi yerdeğiştirme ve gerilme ifadeleri herbir eleman için ayrı ayrı yazılabilir.

i) Üst tabaka (2 nolu eleman) için ($0 \leq x \leq \infty$, $h_1 \leq y \leq h$):

$$u_2(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty [(B_1+B_2 y)e^{-\alpha y}+(B_3+B_4 y)e^{\alpha y}]\operatorname{Sin}(\alpha x)d\alpha + \frac{3-\chi_2}{8\mu_2}\cdot\frac{\rho_2 g h_2}{2}x \tag{2.30.a}$$

$$v_2(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left\{[B_1+(\frac{\chi_2}{\alpha}+y)B_2]e^{-\alpha y}+[-B_3+(\frac{\chi_2}{\alpha}-y)B_4]e^{\alpha y}\right\} .\operatorname{Cos}(\alpha x)d\alpha + \frac{\rho_2 g y}{2\mu_2}[\frac{\chi_2-1}{\chi_2+1}(y-h-h_1)-\frac{1+\chi_2}{8}h_2] \tag{2.30.b}$$

$$\frac{1}{2\mu_2}\sigma_{x2}(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left\{[\alpha(B_1+yB_2)-\frac{3-\chi_2}{2}B_2]e^{-\alpha y} +[\alpha(B_3+yB_4)+\frac{3-\chi_2}{2}B_4]e^{\alpha y}\right\}\operatorname{Cos}(\alpha x)d\alpha +\frac{1}{2\mu_2}\cdot\frac{3-\chi_2}{\chi_2+1}\cdot\frac{\rho_2 g}{2}(2y-h-h_1) \tag{2.30.c}$$

$$\frac{1}{2\mu_2}\sigma_{y2}(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left\{-[\alpha(B_1+yB_2)+\frac{1+\chi_2}{2}B_2]e^{-\alpha y} +[-\alpha(B_3+yB_4)+\frac{1+\chi_2}{2}B_4]e^{\alpha y}\right\}\operatorname{Cos}(\alpha x)d\alpha + \frac{1}{2\mu_2}\rho_2 g(y-h) \tag{2.30.d}$$

$$\frac{1}{2\mu_2}\tau_{xy2}(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left\{-[\alpha(B_1+yB_2)+\frac{\chi_2-1}{2}B_2]e^{-\alpha y} +[\alpha(B_3+yB_4)-\frac{\chi_2-1}{2}B_4]e^{\alpha y}\right\}\operatorname{Sin}(\alpha x)d\alpha \tag{2.30.e}$$

ii)Alt tabaka (1 nolu malzeme) için $(0 \le x \le \infty \ , \ 0 \le y \le h_1)$

$$u_1(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty [(A_1+A_2y)e^{-\alpha y}+(A_3+A_4y)e^{\alpha y}]\mathrm{Sin}(\alpha x)d\alpha + \frac{3-\chi_1}{8\mu_1}[\frac{\rho_1 g h_1}{2}+\rho_2 g h_2]x \qquad 2.31.a$$

$$v_1(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left\{[A_1+(\frac{\chi_1}{\alpha}+y)A_2]e^{-\alpha y}+[-A_3+(\frac{\chi_1}{\alpha}-y)A_4]e^{\alpha y}\right\} .\mathrm{Cos}(\alpha x)d\alpha + \frac{\chi_1-1}{\chi_1+1}.\frac{\rho_1 g y}{2\mu_1}(y-h_1) - \frac{1+\chi_1}{8\mu_1}y(\rho_2 g h_2+\rho_1 g\frac{h_1}{2}) \qquad 2.31.b$$

$$\frac{1}{2\mu_1}\sigma_{x_1}(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left\{[\alpha(A_1+yA_2)-\frac{3-\chi_1}{2}A_2]e^{-\alpha y} + [\alpha(A_3+yA_4)+\frac{3-\chi_1}{2}A_4]e^{\alpha y}\right\}\mathrm{Cos}(\alpha x)d\alpha + \frac{3-\chi_1}{\chi_1+1}.\frac{\rho_1 g}{4\mu_1}(2y-h_1) \qquad 2.31.c$$

$$\frac{1}{2\mu_1}\sigma_{y_1}(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left\{-[\alpha(A_1+yA_2)+\frac{1+\chi_1}{2}A_2]e^{-\alpha y} + [-\alpha(A_3+yA_4)+\frac{1+\chi_1}{2}A_4]e^{\alpha y}\right\}\mathrm{Cos}(\alpha x)d\alpha + \frac{1}{2\mu_1}[-\rho_2 g h_2+\rho_1 g(y-h_1)] \qquad 2.31.d$$

$$\frac{1}{2\mu_1}\tau_{xy_1}(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left\{-[\alpha(A_1+yA_2)+\frac{\chi_1-1}{2}A_2]e^{-\alpha y} + [\alpha(A_3+yA_4)-\frac{\chi_1-1}{2}A_4]e^{\alpha y}\right\}\mathrm{Sin}(\alpha x)d\alpha \qquad 2.31.e$$

iii)Elastik zemin (3 nolu malzeme) için $(0\leq x\leq\infty\ ,-\infty\leq y\leq 0)$

$$u_3(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty [(C_1+C_2y)e^{\alpha y}]\mathrm{Sin}(\alpha x)d\alpha + \frac{3-\chi_3}{8\mu_3}.(\rho_1gh_1+\rho_2gh_2)x \qquad 2.32.a$$

$$v_3(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty [-C_1+(\frac{\chi_3}{\alpha}-y)C_2]e^{\alpha y}\ \mathrm{Cos}(\alpha x)d\alpha - \frac{1+\chi_3}{8\mu_3}y(\rho_2gh_2+\rho_1gh_1) \qquad 2.32.b$$

$$\frac{1}{2\mu_3}\sigma_{x3}(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty [\alpha(C_1+yC_2)+\frac{3-\chi_3}{2}C_2]e^{\alpha y}\ \mathrm{Cos}(\alpha x)d\alpha \qquad 2.32.c$$

$$\frac{1}{2\mu_3}\sigma_{y3}(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty [-\alpha(C_1+yC_2)+\frac{1+\chi_3}{2}C_2]e^{\alpha y}.\mathrm{Cos}(\alpha x)d\alpha - \frac{1}{2\mu_3}(\rho_2gh_2+\rho_1gh_1) \qquad 2.32.d$$

$$\frac{1}{2\mu_3}\tau_{xy3}(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty [\alpha(C_1+yC_2)-\frac{\chi_3-1}{2}C_2]e^{\alpha y}.\mathrm{Sin}(\alpha x)d\alpha \qquad 2.32.e$$

II.B.2.GERİLMELERİN BULUNMASI:

Kütle kuvvetleri dikkate alınmış olan ve elastik zemine oturan bileşik tabakalardaki sürekli temasa ait gerilme ve yerdeğiştirmeleri bulabilmek için (2.30), (2.31) ve (2.32) ifadelerinden yararlanılacaktır.

(2.15) deki katsayıların (2.30), (2.31) ve (2.32) ifadelerinde yerlerine konulması, kütle kuvvetli hale ait gerilme ve yerdeğiştirme ifadelerini verecektir. Bölüm II.A.5 de verildiği gibi gerilme ifadelerinden tekil terimlerin çıkartılıp bunların yerine kapalı integralleri ilave edilecektir. Artık bu son ifadelerin boyutsuz hale getirilmesi ile gerilme ve yerdeğiştirmelere ait sayısal çözüm yapılabilir.

Herbir malzemeye ait kütle kuvveti sabit olduğundan en büyük normal gerilmeler yayılı yükün altında ve simetri ekseninin üzerinde oluşacaktır. Bu nedenle simetri ekseni üzerindeki normal gerilmeler olan σ_x , σ_y bulunacaktır.

Çeşitli yayılı yük uzunluklarına, malzeme sabitlerine ve kütle kuvvetlerine göre sayısal çözümler yapılmış olup bunlar Tablo(A.5–A.8) ve Şekil(B.1–B.8, C.1–C.4) de 2 ile verilmektedir. Gerilmeler, dış yükün oranları şeklinde verilen tablo ve şekiller karşılaştırma amaçlıdır ve bu nedenle şekiller üst üste çizilmişlerdir.

Tablo(A.5–A.8) ve Şekil(B.1–B.8, C.1–C.4) de geçen σ_{xi}/p_o ve σ_{yi}/p_o (i=1,2,3) ifadeleri:

i=1 için σ_{x1}/p_o ve σ_{y1}/p_o 1 nolu malzemeye ait

i=2 için σ_{x2}/p_o ve σ_{y2}/p_o 2 nolu malzemeye ait

i=3 için σ_{x3}/p_o ve σ_{y3}/p_o 3 nolu malzemeye ait (elastik zemin)

normal gerilme oranlarını göstermektedirler.

BÖLÜM III

ELASTİK ZEMİNE OTURAN BİLEŞİK TABAKALARIN İLK AYRILMA UZAKLIKLARI VE İLK AYRILMA YÜKLERİ

III.1.PROBLEMIN TANIMI:

Elastik zemine oturan bileşik tabakaların ilk ayrılma uzaklıkları ile ilk ayrılma yükleri problemi çözülecektir. Şiddeti p_o olan yayılı yük etkisi altındaki iki tabaka ve tabaka-elastik zeminin ilk ayrılma yüklerinin çözümünde Bölüm II de verilen katsayılardan yararlanılacaktır.

III.2.FORMÜLASYON:

Bölüm II de (2.4-13) sınır şartları altında bulunan (2.15.a-j) numaraları ile verilen A_i, B_i, C_k ($i=1-4$; $k=1,2$) katsayıları Bölüm II deki (2.30-32) ifadelerinde yerlerine konulması ile her bir malzemeye ait yerdeğiştirme ve gerilme bileşenleri bulunur. Ancak, burada ilk ayrılma yükünü ve uzaklıklarını bulabilmek için birleşim yüzeylerindeki σ_{yi} gerilmelerine ihtiyaç vardır. 1 ve 2 nolu malzemelerin temas yüzeylerindeki $\sigma_{y2}(x,y)$ veya $\sigma_{y1}(x,y)$ normal gerilmesini bulabilmek için (2.30.d) veya (2.31.d) ifadelerinde $y=h_1$ almak yeterli olacaktır. 1 ve 3 nolu malzemelerin temas yüzeylerindeki $\sigma_{y1}(x,y)$ veya $\sigma_{y3}(x,y)$ normal gerilmesini bulabilmek için ise (2.31.d) veya (2.32.d) ifadelerinde $y=0$ alınmalıdır. Bu anlatılanların uygulanması ile temas yüzeylerindeki σ_{yi} normal gerilmeleri aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\sigma_{y2}(x,h_1)=-\frac{4}{\pi}\int_o^{\infty}\frac{P^{*}e^{-\alpha h2}}{\Delta}YA3[\frac{\mu_3}{\mu_1}Y2+\frac{1+X_3}{1+X_1}Y3]Cos(\alpha x)d\alpha-\rho_2 gh_2 \qquad 3.1$$

$$\sigma_{y1}(x,0)=-\frac{4}{\pi}\int_o^{\infty}\frac{P^{*}e^{-\alpha h}}{\Delta}.\frac{\mu_3}{\mu_1}YA3.YB3.Cos(\alpha x)d\alpha-(\rho_2 gh_2+\rho_1 gh_1) \qquad 3.2$$

Diğer taraftan temas gerilmeleri de:

$$p_2(x) = -\sigma_{y2}(x, h_1) \qquad 3.3$$

$$p_1(x) = -\sigma_{y1}(x, 0) \qquad 3.4$$

verilebilir. Bu ifadelerin eşitliğinden yararlanılır ve düzenlenirse aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$\frac{p_2(x)}{p_o} = \frac{1}{\lambda} + \frac{4}{\pi}\int_o^{\infty} \frac{Z.e^{-\alpha h_2}}{\Delta}.YA3.[\frac{\mu_3}{\mu_1}.Y2+\frac{1+\chi_3}{1+\chi_1}.Y1].Cos(\alpha x)d\alpha \qquad 3.5$$

$$\frac{p_1(x)}{p_o} = \frac{1}{\lambda}(1 + \frac{\rho_1 g h_1}{\rho_2 g h_2})$$

$$+\frac{4}{\pi}\int_o^{\infty} \frac{Z\ e^{-\alpha h}}{\Delta}.\frac{\mu_3}{\mu_1}.YA3.YB3.Cos(\alpha x)d\alpha \qquad 3.6$$

Burada;

$$\lambda = \frac{p_o}{\rho_2 g h_2} \qquad Z = \frac{Sin(\alpha a)}{\alpha}$$

olarak tanımlanmışlardır. (3.5) ve (3.6) ifadelerinin yürürlükte olabilmesi için $0 \leq \lambda \leq \lambda_{cr}$ olmaları gerekmektedir.

$\lambda > \lambda_{cr}$ olması durumunda artık bu ifadeler geçerli olmayacaktır. Çünki malzemeler arasında ayrılmalar başlamış ve problem süreksiz temas problemine dönüşmüş olacaktır.

İki tabaka ve tabaka-zeminin temas yüzeyleri arasındaki açılmanın çözümünde yani, (3.5) ve (3.6) ifadelerinin çözümünde aşağıdaki cebrik denklemlere ihtiyaç vardır.

$$p_1(x) = 0 \qquad 3.7.a$$

$$p_2(x) = 0 \qquad 3.7.b$$

(3.7.a) ve (3.7.b) ifadelerinden,

NOT:

i. Burada geçen λ yük faktörünü göstermekte olup bundan sonra yük deyimi kullanılacaktır.

ii. λ_{cr} ilk ayrılmayı meydana getiren kritik yük faktörü olup kısaca kritik yük denilecektir.

iii. İntegral içerisinde geçen ifadeler Bölüm II de tanımlanmıştır.

$$\frac{4}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{Z.e^{-\alpha h2}}{\Delta}.YA3.\left[\frac{\mu_3}{\mu_1}.Y2+\frac{1+\chi_3}{1+\chi_1}.Y1\right].Cos(\alpha x)d\alpha+\frac{1}{\lambda}=0 \qquad 3.8.a$$

$$\frac{4}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{Z.e^{-\alpha h}}{\Delta}.\frac{\mu_3}{\mu_1}.YA3.YB3.Cos(\alpha x)d\alpha+\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{\rho_1 g h_1}{\rho_2 g h_2}\right)=0 \qquad 3.8.b$$

yazılırlar. (3.8.a-b) eşitliklerinden yararlanılarak ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklıkları birlikte bulunurlar. İlk ayrılma yükleri ve uzaklıkları için Gauss-Chebyshev İntegrasyon Formülünden yararlanılmıştır.

Çeşitli yayılı yük uzunlukları, tabaka kalınlıkları ve malzeme sabitleri için sayısal çözümler yapılmış olup bunlar Tablo(B.1-B.5) de verilmiştir. Adı geçen tablolar incelendiğinde; ayrılma uzaklığı ve ayrılma yükünün, yayılı yük uzunluğu, kayma modülü, tabaka kalınlıkları ve kütle kuvvetleri ile değişmekte olduğu görülecektir.

Tablo ve şekillerdeki b_1, b_2, c_{cr}, λ_{cr} notasyonları sırasıyla üst tabakanın ayrılma uçlarını, alt tabakanın kritik ayrılma uzaklığını ve alt tabakanın kritik ayrılma yükünü göstermektedir.

Tablo(B.1-B.5) de geçen ifadeler aşağıda açıklanmıştır.

a/h = Yayılı yük uzunluğunun tabakaların toplam kalınlığına oranı

h_1/h = 1 nolu tabaka kalınlığının toplam tabaka kalınlığına oranı

h_2/h = 2 nolu tabaka kalınlığının toplam tabaka kalınlığına oranı

b_1/h, b_2/h = Alt tabakanın kritik ayrılma uzaklığına eriştirdiği kritik yükün üst tabakada oluşturduğu açılma uçları

c_{cr}/h = Alt tabakaya ait ilk ayrılma uzaklığı

$\rho_1 g/\rho_2 g$ = Alt tabakanın kütle kuvvetinin üst tabakanın kütle kuvvetine oranı

λ_{cr} = Alt tabakanın ilk ayrılma yükü

göstermektedir.

BÖLÜM IV

ELASTİK ZEMİNE OTURAN BİLEŞİK TABAKALARDA SÜREKSİZ TEMAS PROBLEMİ

IV.1.PROBLEMİN TANIMI:

Elastik zemine oturan bileşik tabakalarda süreksiz temas problemi çözülürken bütün yüzeylerin tam cilalı olduğu kabulü yapılmıştır. Çözümde elastisite teorisinden yararlanılmıştır. Elastik zeminin kütle kuvveti ihmal edilmiş olup her bir tabakanın kütle kuvveti sabit alınmıştır.

IV.2.SINIR ŞARTLARI:

Uygulanan dış yükün ilk ayrılmayı meydana getiren yükten küçük ($P \leq P_{cr}$) olduğu durumda sürekli temasa ait sınır şartları geçerli idi. $P \geq P_{cr}$ olması durumunda ise iki tabaka ve/veya tabaka-elastik zemin arasındaki sürekli temas durumu ortadan kalkacak, birleşim yüzeylerinin bazı bölgelerinde süreksiz temas durumu ortaya çıkacak ve Bölüm II.A.2 ile verilen sınır şartları artık geçerli olmayacaktır (Şekil D).

İlk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklığına ilişkin Tablo(B.1-B.5) incelendiğinde üç değişik durumla karşılaşılmaktadır. Bu durumlardan birincisi; iki tabaka arasında ayrılmanın başladığı durumda tabaka-zemin arasında sürekliliğin devam ettiği, diğer durum; iki tabaka arasında sürekliliğin devam ettiği, buna karşın tabaka-zemin arasında ayrılmanın başladığı, üçüncü durumda ise hem iki tabaka hem de tabaka-zemin arasında ayrılma oluştuğu görülecektir. Burada problem yalnız iki durum için ayrı ayrı çözülecektir. Yeni sınır şartları şu şekilde olacaktır;

$$\tau_{xy_3}(x,0)=0 \qquad 4.1.a$$

$$\tau_{xy_1}(x,0)=0 \qquad 4.1.b$$

$$\tau_{xy_1}(x,h_1)=0 \qquad 4.1.c$$

$$\tau_{xy_2}(x,h_1)=0 \qquad 4.1.d$$

$$\tau_{xy_2}(x,h)=0 \qquad 4.1.e$$

$$\sigma_{y_1}(x,0)=\sigma_{y_3}(x,0) \qquad 4.1.f$$

$$\sigma_{y_1}(x,h_1)=\sigma_{y_2}(x,h_1) \qquad 4.1.g$$

$$\sigma_{y_2}(x,h)=-p(x) \qquad 0<x<a \qquad 4.1.h$$

a) tabaka-tabaka süreksiz, tabaka-zemin sürekli;

$$\frac{\partial}{\partial x}[v_1(x,h_1)-v_2(x,h_1)]=f_2(x) \qquad b_1<x<b_2 \qquad 4.1.i.a$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[v_1(x,0)-v_3(x,0)]=0 \qquad 0<x<b_1,\ b_2<x<\infty \qquad 4.1.j.a$$

b) tabaka-tabaka sürekli, tabaka-zemin süreksiz;

$$\frac{\partial}{\partial x}[v_1(x,h_1)-v_2(x,h_1)]=0 \qquad 0<x<c_1,\ c_2<x<\infty \qquad 4.1.i.b$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[v_1(x,0)-v_3(x,0)]=f_1(x) \qquad c_1<x<c_2 \qquad 4.1.j.b$$

Sınır şartlarını (2.1), (2.2) ve (2.3) ifadelerine uygulamakla on bilinmeyenli on cebrik denklem elde edilecektir.

$$2\alpha C_1+(1-\chi_3)C_2=0 \qquad 4.2.a$$

$$-2\alpha A_1+(1-\chi_1)A_2+2\alpha A_3+(1-\chi_1)A_4=0 \qquad 4.2.b$$

$$-2\alpha A_1+(1-2\alpha h_1-\chi_1)A_2+2\alpha e^{2\alpha h_1}A_3+(1+2\alpha h_1-\chi_1)e^{2\alpha h_1}A_4=0 \qquad 4.2.c$$

$$-2\alpha B_1+(1-2\alpha h_1-\chi_2)B_2+2\alpha e^{2\alpha h_1}B_3+(1+2\alpha h_1-\chi_2)e^{2\alpha h_1}B_4=0 \qquad 4.2.d$$

$$-2\alpha B_1+(1-2\alpha h-\chi_2)B_2+2\alpha e^{2\alpha h}B_3+(1+2\alpha h-\chi_2)e^{2\alpha h}B_4=0 \qquad 4.2.e$$

$$-2\alpha A_1-(1+\chi_1)A_2-2\alpha A_3+(1+\chi_1)A_4+2\alpha\frac{\mu_3}{\mu_1}C_1-\frac{\mu_3}{\mu_1}(1+\chi_3)C_2=0 \qquad 4.2.f$$

$$-2\alpha A_1-(1+2\alpha h_1+\chi_1)A_2-2\alpha e^{2\alpha h_1}A_3+(1-2\alpha h_1+\chi_1)e^{2\alpha h_1}A_4$$

$$+2\alpha\frac{\mu_2}{\mu_1}B_1+(1+2\alpha h_1+\chi_2)\frac{\mu_2}{\mu_1}B_2+2\alpha\frac{\mu_2}{\mu_1}e^{2\alpha h_1}B_3-(1-2\alpha h_1+\chi_2)\frac{\mu_2}{\mu_1}e^{2\alpha h_1}B_4=0$$

$$4.2.g$$

$$-2\alpha B_1+(1+2\alpha h+\chi_2)B_2+2\alpha e^{2\alpha h}B_3+(1-2\alpha h+\chi_2)e^{2\alpha h}B_4$$
$$=-\frac{e^{\alpha h}}{2\mu_2}\int_0^\infty p(x).\mathrm{Cos}(\alpha x)dx \qquad 4.2.h$$

a) tabaka-tabaka süreksiz, tabaka-zemin sürekli;

$$\alpha A_1+\chi_1A_2-\alpha A_3+\chi_1A_4+\alpha C_1-\chi_3C_2=0 \qquad 4.2.i.a$$

$$\alpha A_1+(\chi_1+\alpha h_1)A_2-\alpha e^{2\alpha h_1}A_3+(\chi_1-\alpha h_1)e^{2\alpha h_1}A_4$$
$$-\alpha B_1-(\chi_2+\alpha h_1)B_2+\alpha e^{2\alpha h_1}B_3-(\chi_2-\alpha h_1)e^{2\alpha h_1}B_4$$
$$=\int_{b1}^{b2}\alpha e^{\alpha h_1}f_2(t)\mathrm{Sin}(\alpha t)dt \qquad 4.2.j.a$$

b) tabaka-tabaka sürekli, tabaka-zemin süreksiz;

$$\alpha A_1+\chi_1A_2-\alpha A_3+\chi_1A_4+\alpha C_1-\chi_3C_2=\int_{c1}^{c2}\alpha f_1(t)\mathrm{Sin}(\alpha t)dt \qquad 4.2.i.b$$

$$\alpha A_1+(\chi_1+\alpha h_1)A_2-\alpha e^{2\alpha h_1}A_3+(\chi_1-\alpha h_1)e^{2\alpha h_1}A_4$$
$$-\alpha B_1-(\chi_2+\alpha h_1)B_2+\alpha e^{2\alpha h_1}B_3-(\chi_2-\alpha h_1)e^{2\alpha h_1}B_4=0 \qquad 4.2.j.b$$

IV.3.KATSAYILARIN BELİRLENMESİ:

(4.2) numara ile verilen on bilinmeyenli on denklemden oluşan denklem takımının çözülmesi ile bilinmeyenler olan A_i, B_i ve C_j (i=1 - 4 ; j=1,2) katsayıları hesaplanabilir.

$$\alpha A_1=-\Big\{4\frac{\mu_3}{\mu_1}.F_1\,[\frac{\mu_2}{\mu_1}(1+\chi_1).YA1.Y4+(1+\chi_2).YA2.Y5]$$
$$+\frac{P^*}{2\mu_1}.(1+\chi_2)e^{-\alpha h}YA3[\frac{\mu_3}{\mu_1}(1+\chi_1)YA4-(1+\chi_3)YA7]$$
$$-4\frac{\mu_2}{\mu_1}.F_2\,e^{-\alpha h_1}Y4[\frac{\mu_3}{\mu_1}(1+\chi_1)YA4-(1+\chi_3)YA7]\Big\}/\Delta \qquad 4.3.a$$

$$A_2=2\Big\{4\frac{\mu_3}{\mu_1}.F_1\,[\frac{\mu_2}{\mu_1}(1+\chi_1)(e^{-2\alpha h_1}-1).Y4+(1+\chi_2).YA5.Y5]$$

$$+\frac{P^{*}}{2\mu_1}.(1+\chi_2)e^{-\alpha h}YA3[\frac{\mu_3}{\mu_1}(1+\chi_1)(e^{-2\alpha h1}-1)+(1+\chi_3)YA6]$$

$$-4\frac{\mu_2}{\mu_1}.F_2\,e^{-\alpha h1}Y4[\frac{\mu_3}{\mu_1}(1+\chi_1)(e^{-2\alpha h1}-1)+(1+\chi_3)YA6]\Big\}/\Delta \qquad 4.3.b$$

$$\alpha A_3=\Big\{4\frac{\mu_3}{\mu_1}.F_1\,e^{-2\alpha h1}[\frac{\mu_2}{\mu_1}(1+\chi_1).YA9.Y4+(1+\chi_2).YA10.Y5]$$

$$-\frac{P^{*}}{2\mu_1}.(1+\chi_2)e^{-\alpha h}YA3[\frac{\mu_3}{\mu_1}(1+\chi_1)YA4+(1+\chi_3)YA8]$$

$$+4\frac{\mu_2}{\mu_1}.F_2\,e^{-\alpha h1}Y4[\frac{\mu_3}{\mu_1}(1+\chi_1)YA4+(1+\chi_3)YA8]\Big\}/\Delta \qquad 4.3.c$$

$$A_4=2\Big\{-4\frac{\mu_3}{\mu_1}.F_1\,e^{-2\alpha h1}[\frac{\mu_2}{\mu_1}(1+\chi_1)(e^{-2\alpha h1}-1).Y4+(1+\chi_2).YA6.Y5]$$

$$+\frac{P^{*}}{2\mu_1}.(1+\chi_2)e^{-\alpha h}YA3[\frac{\mu_3}{\mu_1}(1+\chi_1)(1-e^{-2\alpha h1})-(1+\chi_3)YA5]$$

$$+4\frac{\mu_2}{\mu_1}.F_2\,e^{-\alpha h1}Y4[\frac{\mu_3}{\mu_1}(1+\chi_1)(e^{-2\alpha h1}-1)+(1+\chi_3)YA5]\Big\}/\Delta \qquad 4.3.d$$

$$\alpha B_1=\Big\{4\frac{\mu_3}{\mu_1}.F_1\,(1+\chi_1).YB3.YB1$$

$$-\frac{P^{*}}{2\mu_2}.e^{-\alpha h}e^{2\alpha h1}\Big\{\frac{\mu_2}{\mu_1}(1+\chi_1)YB2[\frac{\mu_3}{\mu_1}(1+\chi_1)Y1+(1+\chi_3)Y2]$$

$$+(1+\chi_2)YB4[\frac{\mu_3}{\mu_1}(1+\chi_1)Y2+(1+\chi_3)Y3]\Big\}$$

$$-4.F_2\,e^{\alpha h1}YB1[\frac{\mu_3}{\mu_1}(1+\chi_1)Y2+(1+\chi_3)Y3]\Big\}/\Delta \qquad 4.3.e$$

$$B_2=-2\Big\{4\frac{\mu_3}{\mu_1}.F_1\,(1+\chi_1).YB3.YB5$$

$$-\frac{P^{*}}{2\mu_2}.e^{-\alpha h}e^{2\alpha h1}\Big\{\frac{\mu_2}{\mu_1}(1+\chi_1)YB6[\frac{\mu_3}{\mu_1}(1+\chi_1)Y1+(1+\chi_3)Y2]$$

$$+(1+\chi_2)(e^{-2\alpha h2}-1)[\frac{\mu_3}{\mu_1}(1+\chi_1)Y2+(1+\chi_3)Y3]\Big\}$$

$$-4.F_2\,e^{\alpha h1}YB5[\frac{\mu_3}{\mu_1}(1+\chi_1)Y2+(1+\chi_3)Y3]\Big\}/\Delta \qquad 4.3.f$$

$$\alpha B_3 = \Big\{ 4\frac{\mu_3}{\mu_1} e^{-2\alpha h} F_1 (1+\chi_1).YB3.YB9$$

$$- \frac{P^*}{2\mu_2}.e^{-\alpha h}\Big\{\frac{\mu_2}{\mu_1}(1+\chi_1)YB8[\frac{\mu_3}{\mu_1}(1+\chi_1)Y1+(1+\chi_3)Y2]$$

$$+(1+\chi_2)YB7[\frac{\mu_3}{\mu_1}(1+\chi_1)Y2+(1+\chi_3)Y3]\Big\}$$

$$+4.F_2 e^{\alpha h1} e^{-2\alpha h} YB10[\frac{\mu_3}{\mu_1}(1+\chi_1)Y2+(1+\chi_3)Y3]\Big\}/\ \Delta \qquad 4.3.g$$

$$B_4 = 2\Big\{-4\frac{\mu_3}{\mu_1} e^{-2\alpha h} F_1 (1+\chi_1).YB3.YB6$$

$$+ \frac{P^*}{2\mu_2}.e^{-\alpha h}\Big\{\frac{\mu_2}{\mu_1}(1+\chi_1)YB5[\frac{\mu_3}{\mu_1}(1+\chi_1)Y1+(1+\chi_3)Y2]$$

$$+(1+\chi_2)(1-e^{-2\alpha h2})[\frac{\mu_3}{\mu_1}(1+\chi_1)Y2+(1+\chi_3)Y3]\Big\}$$

$$+4.F_2 e^{\alpha h1} e^{-2\alpha h} YB6[\frac{\mu_3}{\mu_1}(1+\chi_1)Y2+(1+\chi_3)Y3]\Big\}/\ \Delta \qquad 4.3.h$$

$$\alpha C_1 =(1-\chi_3)\Big\{-4.F_1 [\frac{\mu_2}{\mu_1}(1+\chi_1).Y2.Y4+(1+\chi_2).Y3.Y5]$$

$$- \frac{P^*}{2\mu_3}.(1+\chi_1)(1+\chi_2)e^{-\alpha h} YA3\frac{\mu_3}{\mu_1}YB3$$

$$+4\frac{\mu_2}{\mu_1}.F_2 e^{-\alpha h1} Y4(1+\chi_1)YB3\Big\}/\ \Delta \qquad 4.3.i$$

$$C_2 = 2\Big\{4.F_1 [\frac{\mu_2}{\mu_1}(1+\chi_1).Y2.Y4+(1+\chi_2).Y3.Y5]$$

$$+ \frac{P^*}{2\mu_3}.(1+\chi_1)(1+\chi_2)e^{-\alpha h} YA3\frac{\mu_3}{\mu_1}YB3$$

$$-4\frac{\mu_2}{\mu_1}.F_2 e^{-\alpha h1} Y4(1+\chi_1)YB3\Big\}/\ \Delta \qquad 4.3.j$$

(4.3) ifadelerinde geçen notasyonlar aşağıda tanımlanmışlardır.

$$\Delta =-4\Big\{\frac{\mu_2}{\mu_1}(1+\chi_1)Y4[\frac{\mu_3}{\mu_1}Y1(1+\chi_1)+(1+\chi_3)Y2]$$

$$+(1+\chi_2)Y5[\frac{\mu_3}{\mu_1}(1+\chi_1)Y2+(1+\chi_3)Y3]\Big\}$$

a) tabaka-tabaka süreksiz, tabaka-zemin sürekli;

$$F_1 = 0 \qquad\qquad F_2 = \int_{b_1}^{b_2} f_2(t)\sin(\alpha t)dt$$

b) tabaka-tabaka sürekli, tabaka-zemin süreksiz;

$$F_1 = \int_{c_1}^{c_2} f_1(t)\sin(\alpha t)dt \qquad\qquad F_2 = 0$$

Ayrıca (4.3) ifadelerinde geçen diğer notasyonlar Bölüm II de verilmiştir.

IV.4.İNTEGRAL DENKLEMLERİN ELDE EDİLMESİ:

Bölüm IV.3 deki katsayılar içerisinde geçen her bir süreksizlik problemi için $f_1(t)$ ve $f_2(t)$ fonksiyonları bilinmeyenlerdir. Bu bilinmeyenleri bulabilmek için bazı bölgelerdeki sürekli temas durumundan yararlanılacaktır. Buna ilişkin sınır şartları şöyle yazılabilir;

a) tabaka-tabaka süreksiz, tabaka-zemin sürekli;

$$\sigma_{y_2}(x,h_1)=0 \qquad b_1<x<b_2 \qquad 4.4.a.1$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[v_1(x,h_1)-v_2(x,h_1)]= 0 \qquad 0\leq x<b_1,\ b_2<x<\infty \qquad 4.4.a.2$$

b) tabaka-tabaka sürekli, tabaka-zemin süreksiz;

$$\sigma_{y_1}(x,0)= 0 \qquad c_1<x<c_2 \qquad 4.4.b.1$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[v_1(x,0)-v_3(x,0)]= 0 \qquad 0\leq x<c_1,\ c_2<x<\infty \qquad 4.4.b.2$$

(4.3) ile verilen katsayıların (4.4.a,b) sınır şartlarında yerlerine konulması ve düzenlenmesi ile yeni ifadeler şu şekilde olur.

a) tabaka-tabaka süreksiz, tabaka-zemin sürekli;

$$\frac{\sigma_{y2}(x,h_1)}{p_o} = -\frac{\rho_2 gh}{p_o}\cdot\frac{h_2}{h} + \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{[\frac{\mu_2}{\mu_1}(1+\chi_1)+(1+\chi_2)]}\int_{b_1}^{b_2}(\frac{1}{t+x}+\frac{1}{t-x})f_2(t)$$

$$\cdot\frac{4\mu_2}{p_o}dt+\frac{1}{\pi}\int_{b_1}^{b_2}\frac{4\mu_2}{p_o}f_2(t)k_1(x,t)dt+\frac{1}{\pi}k_2(x) \qquad 4.5.a.1$$

b) tabaka-tabaka sürekli, tabaka-zemin süreksiz;

$$\frac{\sigma_{y1}(x,0)}{p_o}=-\frac{\rho_1 gh}{p_o}\cdot\frac{h_1}{h}-\frac{\rho_2 gh}{p_o}\cdot\frac{h_2}{h}+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\mu_3/\mu_1}{[\frac{\mu_3}{\mu_1}(1+\chi_1)+(1+\chi_3)]}\int_{c_1}^{c_2}\left(\frac{1}{t+x}+\frac{1}{t-x}\right)$$

$$\cdot\frac{4\mu_1}{p_o}f_1(t)dt+\frac{1}{\pi}\int_{c_1}^{c_2}\frac{4\mu_1}{p_o}f_1(t)k_3(x,t)dt+\frac{1}{\pi}k_4(x) \qquad 4.5.b.1$$

Burada geçen $k_i(i=1-4)$ ifadeleri aşağıda tanımlanmıştır.

$$k_1(x,t)=4\int_0^\infty\frac{1-Y4}{\Delta}[\frac{\mu_3}{\mu_1}(1+\chi_1)Y2+(1+\chi_3)Y3]$$

$$.\{Sin[\alpha(t+x)]+Sin[\alpha(t-x)]\}d\alpha$$

$$k_2(x)=4(1+\chi_2)\int_0^\infty\frac{Z.e^{-\alpha h2}}{\Delta}YA3[\frac{\mu_3}{\mu_1}(1+\chi_1)Y2+(1+\chi_3)Y3]Cos\alpha x d\alpha$$

$$k_3(x,t)=4\frac{\mu_3}{\mu_1}\int_0^\infty\frac{e^{-2\alpha h1}}{\Delta}[\frac{\mu_3}{\mu_1}(1+\chi_1)Y4.YA6-(1+\chi_2)Y5.YB11]$$

$$.\{Sin[\alpha(t+x)]+Sin[\alpha(t-x)]\}d\alpha$$

$$k_4(x)=4\frac{\mu_3}{\mu_1}(1+\chi_1)(1+\chi_2)\int_0^\infty\frac{Z.e^{-\alpha h}}{\Delta}.YA3.YB3.Cos\alpha x d\alpha$$

$$Z=\frac{Sin(\alpha a)}{\alpha}$$

Temas probleminin geometrisinden integral denklemlerin indisi -1 dir (Erdoğan ve Gupta, 1972). Zemin-tabaka ve iki tabaka arasındaki ayrılmayı tarifleyen $f_1(t)$ ve $f_2(t)$ bilinmeyen fonksiyonları ayrılmanın başlangıcında ve ayrılmanın sonunda sıfır olacaklardır. Her bir problemde ayrılmanın başlangıcını ve sonunu gösteren b_1, b_2 ve c_1, c_2 bilinmeyenleri (4.5) denklemlerinden yararlanarak bulunacaklardır.

İntegral denklemlerin sayısal çözümü için tek değerlilik ve uygunluk şartları dikkate alınacaktır. Tek değerlilik şartları aşağıda verilmiştir.

a) tabaka-tabaka süreksiz, tabaka-zemin sürekli;

$$f_2(x)=0 \qquad 0\leq x<b_1 \;,\; b_2<x<\infty \qquad 4.6.a.1$$

$$\int_{b_1}^{b_2} f_2(x)dx=0 \qquad 4.6.a.2$$

b) tabaka-tabaka sürekli, tabaka-zemin süreksiz;

$$f_1(x)=0 \qquad 0\leq x<c_1 \;,\; c_2<x<\infty \qquad 4.6.b.1$$

$$\int_{c_1}^{c_2} f_1(x)dx=0 \qquad 4.6.b.2$$

İntegral denklemlerin normalizasyonu için aşağıdaki büyüklükler tariflenebilir.

a) tabaka-tabaka süreksiz, tabaka-zemin sürekli [$(b_1 \;, b_2)$ açılma bölgesi için];

$$t=\frac{b_2-b_1}{2}s+\frac{b_2+b_1}{2} \;;\; x=\frac{b_2-b_1}{2}r+\frac{b_2+b_1}{2} \;;\; dt=\frac{b_2-b_1}{2}ds \qquad 4.7.a.1$$

b) tabaka-tabaka sürekli, tabaka-zemin süreksiz [$(c_1 \;, c_2)$ açılma bölgesi için];

$$t=\frac{c_2-c_1}{2}s+\frac{c_2+c_1}{2} \;;\; x=\frac{c_2-c_1}{2}r+\frac{c_2+c_1}{2} \;;\; dt=\frac{c_2-c_1}{2}ds \qquad 4.7.b.1$$

Diğer taraftan açılmaları tarifleyen fonksiyonlar için ise;

a) tabaka-tabaka süreksiz, tabaka-zemin sürekli;

$$\emptyset_2(s)=f_2(t)\frac{4\mu_2}{p_o} \qquad 4.8.a.1$$

b) tabaka-tabaka sürekli, tabaka-zemin süreksiz;

$$\emptyset_1(s)=f_1(t)\frac{4\mu_1}{p_o} \qquad 4.8.b.1$$

alınır, (4.5) denklemlerinde yerlerine konulur ve düzenlenirse denklemler aşağıdaki gibi olur.

a) tabaka-tabaka süreksiz, tabaka-zemin sürekli;

$$\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\left[\frac{\mu_2}{\mu_1}(1+\chi_1)+(1+\chi_2)\right]}\int_{-1}^{+1}\phi_2(s)\left[\frac{1}{s-r}+\frac{1}{s+r+2\frac{b_2+b_1}{b_2-b_1}}\right]ds$$

$$+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{b_2-b_1}{2h}\int_{-1}^{+1}\phi_2(s)k_1(r,s)ds+\frac{1}{\pi}k_2(r)=\frac{1}{\lambda} \qquad 4.9.a.1$$

b) tabaka-tabaka sürekli, tabaka-zemin süreksiz;

$$\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\mu_3/\mu_1}{\left[\frac{\mu_3}{\mu_1}(1+\chi_1)+(1+\chi_3)\right]}\int_{-1}^{+1}\phi_1(s)\left[\frac{1}{s-r}+\frac{1}{s+r+2\frac{c_2+c_1}{c_2-c_1}}\right]ds$$

$$+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{c_2-c_1}{2h}\int_{-1}^{+1}\phi_1(s)k_3(r,s)ds+\frac{1}{\pi}k_4(r)=\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{\rho_1gh_1}{\rho_2gh_2}\right) \qquad 4.9.b.1$$

Diğer taraftan uygunluk şartları ve tek değerlilik şartlarının normalize edilmiş haldeki ifadeleri sırası ile aşağıdaki şekilde yazılabilir.

a) tabaka-tabaka süreksiz, tabaka-zemin sürekli;

$$\int_{-1}^{+1}\left\{\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\pi}k_2(r)-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\left[\frac{\mu_2}{\mu_1}(1+\chi_1)+(1+\chi_2)\right]}\int_{-1}^{+1}\frac{\phi_2(s)ds}{s+r+2\frac{b_2+b_1}{b_2-b_1}}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{b_2-b_1}{2h}\int_{-1}^{+1}\phi_2(s)k_1(r,s)ds\right\}\cdot\frac{dr}{(1-r^2)^{1/2}}=0 \qquad 4.10.a.1$$

$$\int_{-1}^{+1}\phi_2(s)ds=0 \qquad 4.10.a.2$$

b) tabaka-tabaka sürekli, tabaka-zemin süreksiz;

$$\int_{-1}^{+1}\left\{\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{\rho_1 g h_1}{\rho_2 g h_2}\right)-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\mu_3/\mu_1}{\left[\frac{\mu_3}{\mu_1}(1+\chi_1)+(1+\chi_3)\right]}\int_{-1}^{+1}\frac{\emptyset_1(s)ds}{s+r+2\frac{c_2+c_1}{c_2-c_1}}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\pi}k_4(r)-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{c_2-c_1}{2h}\int_{-1}^{+1}\emptyset_1(s)k_3(r,s)ds\right\}\cdot\frac{dr}{(1-r^2)^{1/2}}=0 \qquad 4.10.b.1$$

$$\int_{-1}^{+1}\emptyset_1(s)ds=0 \qquad 4.10.b.2$$

İfadeler içerisinde geçen k_i ve $\emptyset_i$ terimleri aşağıda tanımlanmıştır.

$$k_i(s,r)=k_i(x,t) \qquad i=1,3 \qquad 4.11$$

$$k_j(r)=k_j(t) \qquad j=2,4 \qquad 4.12$$

a) tabaka-tabaka süreksiz, tabaka-zemin sürekli;

$$\emptyset_2(s)=G_2(s)(1-s^2)^{1/2} \qquad 4.13.a.1$$

b) tabaka-tabaka sürekli, tabaka-zemin süreksiz;

$$\emptyset_1(s)=G_1(s)(1-s^2)^{1/2} \qquad 4.13.b.1$$

(4.9) tekil integral denklemi çözmek için Gauss-Chebyshev integrasyon formülü(Erdogan ve Gupta 1972) (4.10) uygunluk ve tek değerlilik şartları ile birlikte kullanılacaktır.

Yarım düzlem-tabaka ve tabaka-tabaka arasında meydana gelen açılmalar sırasıyla;

a) tabaka-tabaka süreksiz, tabaka-zemin sürekli;

$$\frac{\partial}{\partial x}[v_1(x,h_1)-v_2(x,h_1)]=f_2(x) \qquad b_1<x<b_2 \qquad 4.14.a.1$$

veya

$$\overline{v}_2(x,h_1)=[v_1(x,h_1)-v_2(x,h_1)]=\int_{b_1}^{x_2}f_2(t)dt \qquad b_1<t<b_2 \qquad 4.14.a.2$$

b) tabaka-tabaka sürekli, tabaka-zemin süreksiz;

$$\frac{\partial}{\partial x}[v_1(x,0)-v_3(x,0)]=f_1(x) \qquad c_1<x<c_2 \qquad 4.14.b.1$$

veya

$$\bar{v}_1(x,0)=[v_1(x,0)-v_3(x,0)]=\int_{c_1}^{x_1} f_1(t)\,dt \qquad c_1<t<c_2 \qquad 4.14.b.2$$

$f_1(t)$ degerleri (4.9) dan alınırsa,

a) tabaka-tabaka süreksiz, tabaka-zemin sürekli;

$$\frac{4\mu_2}{p_o h}\bar{v}_2(x,h_1) = \frac{b_2-b_1}{2h}\int_{-1}^{r_2} \emptyset_2(s)\,ds \qquad -1<r_2<1 \qquad 4.15.a.1$$

b) tabaka-tabaka sürekli, tabaka-zemin süreksiz;

$$\frac{4\mu_1}{p_o h}\bar{v}_1(x,0) = \frac{c_2-c_1}{2h}\int_{-1}^{r_1} \emptyset_1(s)\,ds \qquad -1<r_1<1 \qquad 4.15.b.1$$

olarak elde edilirler.

IV.5. TEKİL İNTEGRAL DENKLEMİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

(4.10) tekil integral denklem takımının indisi (-1) olduğundan sayısal çözümün sırası aşağıdaki gibidir(Erdoğan ve Gupta, 1972).

a) tabaka-tabaka süreksiz, tabaka-zemin sürekli;

$$\frac{1}{\left[\frac{\mu_2}{\mu_1}(1+\chi_1)+(1+\chi_2)\right]}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-s_k^2}{n+1}\left[\frac{1}{s_k-r_i}+\frac{1}{s_k+r_i+2\frac{b_2+b_1}{b_2-b_1}}\right]G_2(s_k)$$

$$+\frac{b_2-b_1}{2h}\sum_{k=1}^{n} G_2(s_k)k_1(r_i,s_k)+\frac{1}{\pi}k_2(r_i) = \frac{1}{\lambda}$$

$$i=1,\dots,n+1 \qquad 4.16.a.1$$

b) tabaka-tabaka sürekli, tabaka-zemin süreksiz;

$$\frac{\mu_3/\mu_1}{\left[\frac{\mu_3}{\mu_1}(1+\chi_1)+(1+\chi_3)\right]}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-s_k^2}{n+1}\left[\frac{1}{s_k-r_i}+\frac{1}{s_k+r_i+2\frac{c_2+c_1}{c_2-c_1}}\right]G_1(s_k)$$

$$+\frac{c_2-c_1}{2h}\sum_{k=1}^{n} G_1(s_k)k_3(r_i,s_k)+\frac{1}{\pi}k_4(r_i) = \frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{\rho_1 g h_2}{\rho_2 g h_2}\right)$$

$$i=1,\dots,n+1 \qquad 4.16.b.1$$

Tek değerlilik şartı:

a) tabaka-tabaka süreksiz, tabaka-zemin sürekli;

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1-s_k^2}{n+1} G_2(s_k)=0 \qquad 4.17.a.1$$

b) tabaka-tabaka sürekli, tabaka-zemin süreksiz;

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1-s_k^2}{n+1} G_1(s_k)=0 \qquad 4.17.b.1$$

olarak yazılır. Burada;

$$s_k=\mathrm{Cos}[\pi \frac{k}{n+1}] \qquad k=1,....,n \qquad 4.18$$

$$r_i=\mathrm{Cos}[\frac{\pi}{2}.\frac{2i-1}{n+1}] \qquad i=1,....,n+1 \qquad 4.19$$

dır.

Lineer olmayan 4.16 ve 4.17 denklem takımı $G_2(s_k)$, b_1 ve b_2 ye ait n+2 bilinmeyeni için n+2 sayıda denklemden oluşan denklem takımı elde edilecektir. Denklem takımının çözümünde, Gauss-Chebyshev integrasyon formülü(Erdogan ve Gupta, 1972) kullanılacaktır. Bu formülün kullanılması ile (4.10) uygunluk şartları otomatik olarak sağlanacağından (4.16) denkleminin boyutu (n+1) 'e indirgenir. Diğer taraftan n çift sayı olmak üzere $x_{(1+n/2)}=0$ ve dönüşümü olan $r_{(1+n/2)}=0$ olacağından $r_{(1+n/2)}$ terimleri düşecek dolayısıyla denklemin boyutu (n) olacaktır.

Denklem takımının çözümünde bulunan kritik yükten daha büyük yükler alınır ve iteratif interpolasyon uygulanırsa bilinmeyenler olan b_1 ve b_2 hesaplanırlar.

(4.16.a), (4.17.a) denkleminin çözümünde b_2 sabit tutulur b_1 aranır.

$$|b_{1_{i-1}}-b_{1_i}| \leq \epsilon$$

veya,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1-s_k^2}{n+1} G_1(s_k) = 0$$

oluncaya kadar devam edilir. Bulunan b_1 sabit tutulur ve benzer kontrollar yapılarak b_2 bulunur.

$$|b_{1_{i-1}}-b_{1_i}|\le\epsilon$$

ve

$$|b_{2_{i-1}}-b_{2_i}|\le\epsilon$$

şartı heriki durumda da sağlanınca seçilen yük için b_1 ve b_2 ayrılma uzaklıkları bulunmuş olur.

(4.16.b), (4.17.b) denklem takımı için benzer işlemler yapılırsa c_1 ve c_2 ayrılma uzaklıkları bulunur.

Açılmaları tarifleyen (4.15) ifadelerinin sayısal çözümü ile de herbir problem için açılmalar bulunabilir.

a) tabaka-tabaka süreksiz, tabaka-zemin sürekli;

$$\frac{4\mu_2}{p_o h}\bar{v}_2(x_i,h_1) = \frac{b_2-b_1}{2h}\sum_{k=1}^{i-1}\frac{1-s_k^2}{n+1}G_2(s_k) \qquad i=2,\ldots,n+1 \qquad 4.20.a.1$$

b) tabaka-tabaka sürekli, tabaka-zemin süreksiz;

$$\frac{4\mu_1}{p_o h}\bar{v}_1(x_i,0) = \frac{c_2-c_1}{2h}\sum_{k=1}^{i-1}\frac{1-s_k^2}{n+1}G_1(s_k) \qquad i=2,\ldots,n+1 \qquad 4.20.b.1$$

elde edilecektir. Yukarda geçen s_k ve x_i ifadeleri aşağıda tanımlanmıştır.

$$s_k=\mathrm{Cos}\left[\pi\frac{k}{n+1}\right] \qquad k=1,\ldots,n \qquad 4.21$$

a) tabaka-tabaka süreksiz, tabaka-zemin sürekli;

$$x_i=\frac{b_2-b_1}{2}r_i+\frac{b_2+b_1}{2} \qquad 4.22.a.1$$

b) tabaka-tabaka sürekli, tabaka-zemin süreksiz;

$$x_i=\frac{c_2-c_1}{2}r_i+\frac{c_2+c_1}{2} \qquad 4.22.b.1$$

Her iki durum için;

$$r_i=\mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2i-1}{n+1}\right] \qquad i=1,\ldots,n+1 \qquad 4.23$$

dir.

SONUÇLAR:

Elastik zemine oturan bileşik tabaka probleminin çözüldüğü bu çalışmada elde edilen sonuçlar aşağıda özetlenmiştir:

Egilmeye çalışan bileşik basit kirişlerde etkin olan σ_x normal gerilmesidir. Buna karşın zemine oturan tek tabaka veya bileşik tabakalarda etkin olan gerilme ise σ_y normal gerilmesidir.

Elastik zemine oturan bileşik tabakalara üstten tekil yükün etkimesi durumunda; tekil yükün altında σ_x ve σ_y normal gerilme degerlerinde tekillikler oluşmaktadır. σ_x normal gerilme dağılımı her tabakada kesit boyunca; lineerlik göstermekte yalnız tekil yüke yaklaştıkça tekillikler nedeniyle lineerlik bozulmaktadır. Yayılı yükün etkimesi durumunda σ_x normal gerilme dağılımı kesit boyunca her tabakada yine lineer olup σ_y normal gerilmesi yüzeyde yani yükün altında yükün şiddetine eşit çıkmaktadır. σ_y normal gerilme dağılımı kesit boyunca yüzeyden derine inildikçe; kütle kuvvetinin ihmal edilmesi durumunda azalmakta, kütle kuvvetinin dikkate alınması durumunda ise artmaktadır.

Her durum için τ_{xy} kayma gerilmelerinin çok küçük çıkması nedeniyle asal normal gerilmeler her yerde σ_x ve σ_y normal gerilmelerine çok yakın degerler almaktadır.

Elastik zemine oturan bileşik tabakalarda dış yük, tabaka kalınlıkları ve malzeme sabitlerinin oranlarına yani başka bir tanımlama ile geometriye, malzemeye ve dış yüke bağlı olarak; a) tabaka-zemin arasında süreklilik devam ederken tabakalar arasında, b) tabakalar arasında süreklilik mevcutken tabaka-zemin arasında, c) hem tabakalar hem de tabaka-zemin arasında, olmak üzere ayrılmalar üç şekilde meydana gelebilir.

Son durum bu çalışmada incelenmemiştir.

Kritik yük de denilen ve ilk ayrılmayı meydana getiren yükten daha büyük yüklerin etkimesi durumunda açılmalar olmakta ve sürekli temas problemi süreksiz temas problemine dönüşmektedir. Süreksiz temas probleminin formülasyonundan elde edilen tekil integral denklemlerin sayısal çözümünde Gauss-Chebyshev İntegrasyon Yöntemi kullanmış ve çözüm tekniği verilmiştir. Bu yöntemle iteratif interpolasyon kullanılarak açılma uçları bulunmuş, temas yüzeylerindeki gerilme dağılımları çizilmiş ve ayrılmalar hesaplanmıştır.

Yapılan nümerik çalışmalar sonucu gerek tekil gerekse düzgün yayılı yükün her durumu için alt tabaka kalınlığının toplam tabaka kalınlığına oranının 0.15 den daha büyük değerlerinde ayrılmalar öncelikle iki tabaka arasında meydana gelmektedir. Tabaka-zemin arasında ilk ayrılma uzaklığını meydana getiren kritik yükün etkimesi ile; üst tabaka kalınlığının büyük olması durumunda ayrılma uzaklıkları(b_1-b_2) genelde büyük çıkmakta buna karşılık açılma değerleri küçük, üst tabaka kalınlığının ince seçilmesi durumunda ayrılma uzaklıkları(b_1-b_2) küçük, buna karışılık açılma değerleri ise büyük çıkmaktadır. Aynı dış yük uzunluğu (a/h) ve kalınlıklar (h_1/h) için tabaka-zemin arasında ayrılmaları meydana getirecek olan kritik yüklerin (λ_{cr}) en küçüğü ortadaki malzemenin yumuşak seçilmesi durumunda meydana gelebilir. Aynı dış yük uzunluğu ve kalınlıklar için ayrılmaları meydana getirecek kritik yükler; ortadaki malzemenin rijid ve/veya üst tabakadan zemine doğru gidildikçe daha rijid malzemelerin seçilmesi durumlarında büyük olmaktadır.

Yayılı yükün uzunluğu arttıkça ayrılmayı meydana getirecek dış yükün şiddeti küçülmekte ve ayrılma uzaklıkları da artmaktadır.

Süreksiz temas durumunda üç bölge oluşmaktadır. Bunlar, dış yükün etkisinin büyük olduğu sürekli temas bölgesi, ayrılma bölgesi ve dış yükün etkisinin azalarak kaybolduğu sürekli temas bölgesidir. Dış yükün etkisinin görüldüğü sürekli temas bölgesinde, yükün altından açılmanın başladığı uca kadar gittikçe azalan temas gerilmesi oluşmaktadır. Dış yükün etkisinin azalarak kaybolduğu diğer temas bölgesinde yalnızca kütle kuvvetlerinin etkisi vardır ve temas gerilmesi bu kütle kuvvetlerine eşdeğer alınabilir.

KAYNAKLAR

Abramowitz, M. and Irene A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, 1046 pp. Dover Publications Inc., Newyork, 1965.

Adams, G. G. and D. B. Bogy, A note on a paper by G. D. Gupta, J. of Applied Mec., 224-225, 1975 a.

Adams, G. G. and D. B. Bogy, Steady solutions for moving loads on elastic beams with one-sided constraints, J. of Applied Mec., 800-804, 1975 b.

Adams, G. G. and D. B. Bogy, The plane solution for the elastic contact problem of a semi-infinite strip and half plane, J. of Applied Mec., 43, 603-607, 1976.

Adams, G. G., Moving loads on elastic strip with one-sided constraints, Int. J. Engng Sci., 14, 1071-1083, 1976.

Adams, G. G., The plane symmetric contact problem for dissimilar elastic semi-infinite strips of different widths, J. of Applied Mec., 604-610, 1977.

Adams, G. G., An elastic strip pressed against an elastic half plane by a steadily moving force, J. of Applied Mec. 45, 89-94, 1978.

Adams, G. G., A rigid punch bonded to a half plane, J. of Applied Mec., 46, 844-848, 1979 a.

Adams, G. G., Steady solutions for a moving load on an elastic strip resting on an elastic half plane, Int. J. Solid Structures, 15, 885-897, 1979 b.

Adams, G. G. and I. Zeid, An elastic punch moving across the surface of a semi-infinite solid, J. of Applied Mec., 51, 622-629, 1984.

Civelek, M. B. and F. Erdogan, The axisymmetric double contact problem for a frictionless elastic layer, Int. J. Solids Structures, 10, 639-659, 1974.

Civelek, M. B. and F. Erdogan, The frictionless contact problem for an elastic layer under gravity, J. of Applied Mec., 42, 136-140, 1975.

Civelek, M. B. and F. Erdogan, Interface separation in a frictionless contact problem for an elastic layer, J. of Applied Mec., 43, 175-177, 1976.

Civelek, M. B, F. Erdoğan and A. O. Çakıroğlu, Interface separation for an elastic layer loaded by a rigid stamp, Int. J. Engng. Sci., 16, 669-679, 1978.

Çakıroğlu, A. O., Elastik yarım düzleme oturan plaklarda temas problemi, Doçentlik Tezi, Trabzon, 84 s., 1979.

Çakıroğlu, F. L., Bileşik çubukların eğilme problemi, Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, 73 s., 1985.

Çakıroğlu, F. L. ve R. Erdöl, Bileşik çubukların elastisite teorisine göre çözümü, A. O. İsparta Müh. Fak. Dergisi, 3, (3), 53-60, 1987.

Dhaliwal, R. S., Punch problem for an elastic layer overlying an elastic foundation, Int. J. Engng. Sci., 8, 273-288, 1970.

Dhaliwal, R. S. and I. S. Rau, The axisymmetric Boussinesq problem for a thick elastic layer under a punch of arbitrary profile, Int. J. Engng. Sci., 8, 843-856, 1970.

Dhaliwal, R. S. and B. M. Singh, Annular punch on an elastic layer overlying an elastic foundation, Int. J. Engng. Sci, 15, 263-270, 1977.

Dundurs, J. and M. Stippes, Role of elastic constants in certain contact problem, J. of Applied Mec., 965-970, 1971.

Dundurs, J., K. C. Tsai and L. M. Keer, Some observations on the smooth contact between a layer and half space, J. of Applied Mec., 221-222, 1975.

Erdoğan, F. and G. D. Gupta, The stress analysis of multilayered composites with an interface flaw, Int. J. Solids Structures, 7, 39-61, 1971 a.

Erdoğan, F. and G. D. Gupta, Layered composites with an interface flaw, Int. J. Solids Structures, 7, 1089-1107, 1971 b.

Erdoğan, F. and G. D. Gupta, On the numerical solution of singular integral equations, Quarterly of Applied Math., 525-534, 1972.

Erdoğan, F. and M. Ratwani, The contact problem for an elastic layer supported by two elastic quarter planes, J. of Applied Mec., 41, 673-678, 1974.

Erdoğan, F. and M. B. Civelek, Stress intensity factors in a cracked infinite elastic wedge loaded by a rigid punch, Int. J. Engng. Sci., 17, 973-989, 1979.

Geçit, M. R. and F. Erdoğan, Frictionless contact problem for an elastic layer under axisymmetric loading, Int. J. Solids Structures, 14, 771-785, 1978.

Geçit, M. R., Fracture of a surface layer bonded to half space, Int. J. Engng. Sci., 17, 287-295, 1979.

Geçit, M. R., A tensionless contact without friction between an elastic layer and elastic foundation, Int. J. Solids Structures, 16, 387-396, 1980.

Geçit, M. R., Axisymmetric contact problem for an elastic layer and an elastic foundation, Int. J. Engng. Sci., 19, 747-755, 1981.

Geçit, M. R., The axisymmetric double contact problem for a frictionless elastic layer intented by a elastic cylinder, Int. J. Engng. Sci., 24, 1571-1584, 1986.

Gupta, G. D., The problem of a finite strip compressed between two rough rigid stamps, J. of Applied Mec., 81-87, 1975 a.

Gupta, G. D., A note a paper by G. G. Adams and D. B. Bogy, J. of Applied Mec., 490-491, 1975 b.

Hajji, M. A., Indentation of a membrane on elastic half space, J. of Applied Mec., 45, 320-324, 1978.

Hetényi, M., Beams on Elastic Foundation, University of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan, 225s, 1946,

Houedec, D. Le., Response of roadway lying on elastic foundation to random traffic loads, J. of Applied Mec., 47, 191-192, 1980.

İnan, M., Düzlemde Elastisite Teorisi, Matbaa Teknisyenleri Basımevi, İstanbul, 336s., 1969.

Jones, R. and J. Mazumdar, A note on a behavior of plates on an elastic foundation, J. of Applied Mec., 47, 191-192, 1980.

Kalaba, R. E. and E. A. Zagustin, An improved initial value method for a contact problem with a nonplane punch, Int. J. Engng. Sci., 11, 459-476, 1973.

Keer, L. M. ;J. Dundurs and K. C. Tsai, Problems involving a receding contact between a layer and a half space, J. of Applied Mec., 39, 1115-1120, 1972.

Keer, L. M. and M. A. G. Silva, Two mixed problems for a semi-infinite layer, J. of Applied Mec., 39, 1121-1124, 1972.

Kikuchi, N., A class of rigid punch problems involving forces and moments, Int. J. Engng. Sci., 17, 1129-1140, 1979.

Little, R. WM., Elasticity, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 431s., 1973.

Love, A. E. H., A Treatise on The Mathematical Theory of Elasticity, Dover Publications, New York, 643s., 1944.

Muskhelishvili, N. I., Some Basic Problems of The Mathematical Theory of Elasticity, Noordhoff, Leyden, The Netherlands, 730s., 1975.

Muskhelishvili, N. I., Singular Integral Equations, Noordhoff International Publishing-Leyden, 447s., 1977.

Pao, Y. C.; Wu, T. S. and Chui, Y. P., Bounds on the maximum contact stress of an indented elastic layer, J.of Applied Mec., 608-614, 1971.

Ratwani, M. and F. Erdogan, On the plane contact problem for a frictionless elastic layer, Int. J. Solids Structures, 9, 921-936, 1973.

Rau, I. S. and R. S. Dhaliwal, Further consideration on the axisymmetric Boussinesq problem, Int. J. Engng. Sci., 10, 659-663, 1972.

Saito, H. and T. Terasawa, Steady-state vibrations of a beam on a Pasternak foundation for moving loads, J. of Applied Mec., 47, 879-883, 1980.

Sneddon, Ian N., Fourier Transforms, McGraw-Hill Inc., New York, 542 s., 1951.

Sneddon, Ian N., The Use of Integral Transforms, McGraw-Hill Inc., New York, 539 s., 1972.

Sokolnikoff, I. S., Matematik Elastisite Teorisi, Ç: Suhubi, E. S., Arı Kitabevi,İstanbul, 554 s., 1965.

Sue, C. and L. M. Keer, Indentations of an elastic layer by moving punches, Int. J. Solids Structures, 5, 795-816, 1969.

Sue, C. and G. Herrmann, Moving load on a laminated composite, J. of Applied Mec., 663-667, 1974.

Timoshenko,S. and J. N. Goodier, Elastisite Teorisi, Ç: Kayan, İ. ve E. Şuhubi, Arı Kitabevi, İstanbul, 512 s., 1969.

Tsai, K. C. ; J. Dundurs and L. M. Keer, Contact between an elastic layer with a slightly curved bottom and a substrate, J. of Applied Mec., 821-823, 1972.

Tsai, K. C.; J. Dundurs and L. M. Keer, Elastic layer pressed against a half space, J. of Applied Mec., 41, 703-707, 1974.

Weitsman, Y., On the bounded contact between plates and an elastic half space, J. of Applied Mec., 36,198-202, 1969.

Weitsman, Y., A tensionless contact between a beam and an elastic half space, Int. J. Engng. Sci., 10, 73-81, 1972.

E K L E R

Tablo A.1) $a/h=0.001$, $\mu_2/\mu_1=0.575$, $\mu_3/\mu_1=1.766$, $\nu_1=0.34$, $\nu_2=0.34$, $\nu_3=0.30$ olması durumuna ait $x/h=0$ kesitindeki σ_x ve σ_y normal gerilme değerleri

	$h_1/h=0.2$		$h_1/h=0.5$		$h_1/h=0.8$	
$z=\frac{y}{h}$	$\frac{1}{p_0}\sigma_x$	$\frac{1}{p_0}\sigma_y$	$\frac{1}{p_0}\sigma_x$	$\frac{1}{p_0}\sigma_y$	$\frac{1}{p_0}\sigma_x$	$\frac{1}{p_0}\sigma_y$
0.95	-0.07454	-2.63830	-0.05255	-1.23010	-0.01917	-0.86148
0.90	-0.06582	-0.31607	-0.03826	-0.31635	0.00099	-0.31748
0.85	-0.05673	-0.31377	-0.02397	-0.31441	0.01968	-0.31694
					0.03742	-0.31670
0.80	-0.04805	-0.31102	-0.00967	-0.31221		
					-0.09804	-0.31670
0.75	-0.03898	-0.30801	-0.00003	-0.30994	-0.08506	-0.31607
0.70	-0.02991	-0.30488	0.00970	-0.30777	-0.07208	-0.31442
0.65	-0.02001	-0.30173	0.02401	-0.30585	-0.05910	-0.31206
0.60	0.00954	-0.29866	0.03833	-0.30431	-0.04613	-0.30922
0.55	0.01987	-0.29573	0.05325	-0.30328	-0.03546	-0.30607
			0.06701	-0.30291		
0.50	0.02958	-0.29302			-0.01937	-0.30278
			-0.06698	-0.30291		
0.45	0.03885	-0.29058	-0.05268	-0.30253	-0.09138	-0.29944
0.40	0.04782	-0.28846	-0.03839	-0.30158	0.09247	-0.29616
0.35	0.05664	-0.28670	-0.02410	-0.30024	0.02227	-0.29303
0.30	0.06544	-0.28538	-0.00981	-0.29869	0.03472	-0.29010
0.25	0.07437	-0.28454	-0.00002	-0.29708	0.04676	-0.28745
	0.08357	-0.28424				
0.20			0.00999	-0.29552	0.05858	-0.28513
	-0.02990	-0.28424				
0.15	-0.01417	-0.28415	0.02419	-0.29413	0.07033	-0.28322
0.10	0.00052	-0.28394	0.03840	-0.29301	0.08217	-0.28176
0.05	0.01444	-0.28375	0.05305	-0.29226	0.09428	-0.28083
	0.02775	-0.28366	0.06766	-0.29199	0.10678	-0.28050
0.00						
	-0.28366	-0.28366	-0.29199	-0.29199	-0.28050	-0.28050
-0.05	-0.26240	-0.28329	-0.26914	-0.29156	-0.25972	-0.28013
-0.10	-0.24326	-0.28255	-0.24868	-0.29040	-0.24100	-0.27913
-0.15	-0.22599	-0.28067	-0.23031	-0.28864	-0.22409	-0.27760
-0.20	-0.21035	-0.27866	-0.21376	-0.28640	-0.20877	-0.27565
-0.25	-0.19617	-0.27630	-0.19881	-0.28377	-0.19486	-0.27336
-0.30	-0.18328	-0.27366	-0.18528	-0.28085	-0.18220	-0.27079

Tablo A.2) $a/h=1.000$, $\mu_2/\mu_1=0.575$, $\mu_3/\mu_1=1.766$, $\nu_1=0.34$, $\nu_2=0.34$, $\nu_3=0.30$ olması durumuna ait $x/h=0$ kesitindeki σ_x ve σ_y normal gerilme degerleri

	$h_1/h=0.2$		$h_1/h=0.5$		$h_1/h=0.8$	
$z=\frac{y}{h}$	$\frac{1}{p_0}\sigma_x$	$\frac{1}{p_0}\sigma_y$	$\frac{1}{p_0}\sigma_x$	$\frac{1}{p_0}\sigma_y$	$\frac{1}{p_0}\sigma_x$	$\frac{1}{p_0}\sigma_y$
1.00	-0.05386	-0.99998	-0.04129	-0.99998	-0.01879	-0.99998
0.95	-0.04819	-0.87387	-0.03380	-0.74064	-0.00904	-0.63519
0.90	-0.04230	-0.24957	-0.02615	-0.24972	0.00027	-0.24993
0.85	-0.03638	-0.24909	-0.01830	-0.24943	0.00917	-0.24988
0.80	-0.03032	-0.24847	-0.01015	-0.24907	0.01772	-0.24986
					-0.07039	-0.24986
0.75	-0.02409	-0.24776	-0.00017	-0.24868	-0.06130	-0.24973
0.70	-0.01766	-0.24697	0.01012	-0.24830	-0.05222	-0.24935
0.65	-0.01096	-0.24614	0.01828	-0.24795	-0.04313	-0.24877
0.60	-0.00396	-0.24530	0.02615	-0.24766	-0.03405	-0.24803
0.55	0.00110	-0.24448	0.03380	-0.24747	-0.02627	-0.24717
0.50	0.01767	-0.24369	0.04129	-0.24741	-0.01574	-0.24623
			-0.04458	-0.24741		
0.45	0.02411	-0.24296	-0.03526	-0.24732	-0.00570	-0.24523
0.40	0.03034	-0.24232	-0.02594	-0.24708	0.00391	-0.24422
0.35	0.03639	-0.24179	-0.01661	-0.24674	0.01317	-0.24322
0.30	0.04233	-0.24138	-0.00729	-0.24633	0.02213	-0.24226
0.25	0.04818	-0.24112	-0.00005	-0.24590	0.03085	-0.24138
0.20	0.05399	-0.24103	0.00727	-0.24547	0.03940	-0.24060
	-0.01904	-0.24103				
0.15	-0.00918	-0.24101	0.01658	-0.24508	0.04784	-0.23996
0.10	0.00025	-0.24095	0.02589	-0.24476	0.05621	-0.23944
0.05	0.00930	-0.24089	0.03520	-0.24455	0.06458	-0.23912
0.00	0.01804	-0.24087	0.04451	-0.24447	0.07299	-0.23901
	-0.24087	-0.24087	-0.24447	-0.24447	-0.23901	-0.23901
-0.05	-0.22668	-0.24069	-0.22977	-0.24428	-0.22506	-0.23883
-0.10	-0.21353	-0.24018	-0.21617	-0.24374	-0.21211	-0.23834
-0.15	-0.20133	-0.23938	-0.20357	-0.24290	-0.20010	-0.23755
-0.20	-0.19000	-0.23833	-0.19189	-0.24179	-0.18894	-0.23653
-0.25	-0.17948	-0.23705	-0.18106	-0.24045	-0.17857	-0.23528
-0.30	-0.16969	-0.23559	-0.17100	-0.23891	-0.16892	-0.23386

Tablo A.3) $a/h=0.001$, $\mu_2/\mu_1=1.766$, $\mu_3/\mu_1=0.575$, $\nu_1=0.34$, $\nu_2=0.30$, $\nu_3=0.34$ olması durumuna ait $x/h=0$ kesitindeki σ_x ve σ_y normal gerilme degerleri

	$h_1/h=0.2$		$h_1/h=0.5$		$h_1/h=0.8$	
$z=\frac{y}{h}$	$\frac{1}{p_o}\sigma_x$	$\frac{1}{p_o}\sigma_y$	$\frac{1}{p_o}\sigma_x$	$\frac{1}{p_o}\sigma_y$	$\frac{1}{p_o}\sigma_x$	$\frac{1}{p_o}\sigma_y$
0.95	-0.30394	-2.63780	-0.25508	-1.22950	-0.08100	-0.86104
0.90	-0.25968	-0.31442	-0.19042	-0.31415	0.00098	-0.31609
0.85	-0.21542	-0.31026	-0.12575	-0.30987	0.08150	-0.31460
					0.16218	-0.31392
0.80	-0.17117	-0.30512	-0.06109	-0.30484		
					-0.22201	-0.31392
0.75	-0.12168	-0.29930	0.00445	-0.29949	-0.19356	-0.31311
0.70	-0.07997	-0.29304	0.06803	-0.29423	-0.16512	-0.31095
0.65	-0.03535	-0.28655	0.13147	-0.28945	-0.13667	-0.30779
0.60	0.00815	-0.28002	0.19562	-0.28552	-0.10823	-0.30390
0.55	0.05097	-0.27362	0.26136	-0.28285	-0.08039	-0.29951
			0.32958	-0.28185		
0.50	0.09351	-0.26751			-0.04957	-0.29481
			-0.15725	-0.28185		
0.45	0.13618	-0.26184	-0.12527	-0.28138	-0.02014	-0.28997
0.40	0.17938	-0.25679	-0.09330	-0.28014	0.00827	-0.28511
0.35	0.22352	-0.25252	-0.06132	-0.27836	0.03596	-0.28038
0.30	0.26901	-0.24901	-0.02935	-0.27626	0.06326	-0.27588
0.25	0.31629	-0.24795	0.00263	-0.27402	0.09046	-0.27173
	0.36583	-0.24628				
0.20			0.03477	-0.27181	0.11784	-0.26805
	-0.05731	-0.24628				
0.15	-0.02816	-0.24616	0.06641	-0.26980	0.14570	-0.26495
0.10	0.00032	-0.24590	0.09810	-0.26816	0.17431	-0.26256
0.05	0.02828	-0.24564	0.13020	-0.26705	0.20400	-0.26101
	0.05604	-0.24552	0.16308	-0.26663	0.23508	-0.26045
0.00						
	-0.24552	-0.24552	-0.26663	-0.26663	-0.26045	-0.26045
-0.05	-0.23025	-0.24530	-0.24834	-0.26634	-0.24298	-0.26019
-0.10	-0.21625	-0.24468	-0.23171	-0.26553	-0.22706	-0.25941
-0.15	-0.20339	-0.24372	-0.21655	-0.26428	-0.21254	-0.25823
-0.20	-0.19155	-0.24248	-0.20271	-0.26268	-0.19926	-0.25672
-0.25	-0.18063	-0.24100	-0.19004	-0.26079	-0.18710	-0.25493
-0.30	-0.17054	-0.23932	-0.17843	-0.25865	-0.17592	-0.25291

Tablo A.4) a/h=1.000, μ_2/μ_1=1.766, μ_3/μ_1=0.575, ν_1=0.34, ν_2=0.30, ν_3=0.34 olması durumuna ait x/h=0 kesitindeki σ_x ve σ_y normal gerilme degerleri

	$h_1/h=0.2$		$h_1/h=0.5$		$h_1/h=0.8$	
$z=\frac{y}{h}$	$\frac{1}{p_o}\sigma_x$	$\frac{1}{p_o}\sigma_y$	$\frac{1}{p_o}\sigma_x$	$\frac{1}{p_o}\sigma_y$	$\frac{1}{p_o}\sigma_x$	$\frac{1}{p_o}\sigma_y$
1.00	-0.27287	-0.99998	-0.22271	-0.99998	-0.09871	-0.99998
0.95	-0.23846	-0.87362	-0.17791	-0.74039	-0.04888	-0.63510
0.90	-0.20405	-0.24862	-0.13311	-0.24877	0.00027	-0.24962
0.85	-0.16964	-0.24706	-0.08832	-0.24746	0.04902	-0.24937
					0.09765	-0.24925
0.80	-0.13523	-0.24505	-0.04352	-0.24587		
					-0.16955	-0.24925
0.75	-0.10056	-0.24270	0.00156	-0.24414	-0.14806	-0.24900
0.70	-0.06527	-0.24009	0.04607	-0.24242	-0.12658	-0.24829
0.65	-0.03066	-0.23732	0.09049	-0.24084	-0.10509	-0.24720
0.60	0.00345	-0.23447	0.13510	-0.23954	-0.08361	-0.24580
0.55	0.03724	-0.23163	0.18018	-0.23865	-0.06260	-0.24417
			0.22602	-0.23833		
0.50	0.07090	-0.22889			-0.03997	-0.24236
			-0.11461	-0.23833		
0.45	0.10460	-0.22633	-0.09140	-0.23815	-0.01794	-0.24045
0.40	0.13853	-0.22403	-0.06819	-0.23769	0.00363	-0.23849
0.35	0.17286	-0.22209	-0.04498	-0.23701	0.02488	-0.23654
0.30	0.20780	-0.22058	-0.02177	-0.23619	0.04591	-0.23466
0.25	0.24351	-0.21961	0.00144	-0.23531	0.06686	-0.23291
	0.28021	-0.21927				
0.20			0.02474	-0.23443	0.08784	-0.23135
	-0.04246	-0.21927				
0.15	-0.02095	-0.21922	0.04789	-0.23363	0.10899	-0.23003
0.10	0.00018	-0.21911	0.07090	-0.23297	0.13041	-0.22901
0.05	0.02104	-0.21901	0.09417	-0.23252	0.15224	-0.22836
	0.04174	-0.21896	0.11759	-0.23236	0.17461	-0.22812
0.00						
	-0.21896	-0.21896	-0.23236	-0.23236	-0.22812	-0.22812
-0.05	-0.20749	-0.21883	-0.21929	-0.23220	-0.21555	-0.22797
-0.10	-0.19677	-0.21846	-0.20714	-0.23175	-0.20385	-0.22755
-0.15	-0.18675	-0.21788	-0.19583	-0.23104	-0.19294	-0.22688
-0.20	-0.17737	-0.21710	-0.18529	-0.23011	-0.18276	-0.22599
-0.25	-0.16858	-0.21617	-0.17547	-0.22898	-0.17326	-0.22492
-0.30	-0.16035	-0.21508	-0.16631	-0.22768	-0.16439	-0.22369

Tablo A.5) $a/h=0.001$, $\mu_2/\mu_1= 0.575$, $\mu_3/\mu_1= 1.766$, $\nu_1=0.34$, $\nu_2=0.34$, $\nu_3=0.30$, $\rho_1gh/p_o=0.830$, $\rho_2gh/p_o=0.270$ olması durumuna ait $x/h=0$ kesitindeki σ_x ve σ_y normal gerilme degerleri

	$h_1/h=0.2$		$h_1/h=0.5$		$h_1/h=0.8$	
$z=\frac{y}{h}$	$\frac{1}{p_o}\sigma_x$	$\frac{1}{p_o}\sigma_y$	$\frac{1}{p_o}\sigma_x$	$\frac{1}{p_o}\sigma_y$	$\frac{1}{p_o}\sigma_x$	$\frac{1}{p_o}\sigma_y$
0.95	-0.07581	-2.65180	-0.06721	-1.24360	-0.02068	-0.87493
0.90	-0.06413	-0.34307	-0.05143	-0.34335	0.00101	-0.34448
0.85	-0.05246	-0.35427	-0.03718	-0.35491	0.02120	-0.35774
0.80	-0.04078	-0.36502	-0.02108	-0.36621	0.04045	-0.37070
					-0.14398	-0.37070
0.75	-0.03171	-0.37551	0.00495	-0.37744	-0.12656	-0.41157
0.70	-0.01678	-0.38588	0.02145	-0.38877	-0.11000	-0.45142
0.65	-0.00811	-0.39628	0.03717	-0.40035	-0.09321	-0.49056
0.60	0.00095	-0.40666	0.05243	-0.41231	-0.07689	-0.52922
0.55	0.00723	-0.41723	0.06755	-0.42487	-0.06013	-0.56757
0.50	0.01836	-0.42802	0.08283	-0.43791	-0.04326	-0.60578
			-0.09810	-0.43791		
0.45	0.03261	-0.43908	-0.08021	-0.47903	-0.02635	-0.64394
0.40	0.04340	-0.45046	-0.06166	-0.51958	-0.00922	-0.68216
0.35	0.05388	-0.46220	-0.04227	-0.55974	0.00925	-0.72053
0.30	0.06421	-0.47438	-0.02368	-0.59969	0.02639	-0.75910
0.25	0.07453	-0.48704	0.00450	-0.63958	0.04403	-0.79795
0.20	0.08868	-0.50024	0.02376	-0.67952	0.07720	-0.83713
	-0.03921	-0.50024				
0.15	-0.01883	-0.54165	0.04298	-0.71963	0.09361	-0.87672
0.10	0.00053	-0.58294	0.06180	-0.76001	0.11011	-0.91676
0.05	0.01910	-0.62425	0.08043	-0.80076	0.12686	-0.95733
0.00	0.03706	-0.66566	0.09909	-0.84199	0.14403	-0.99850
	-0.28366	-0.66566	-0.29199	-0.84199	-0.28050	-0.99850
-0.05	-0.26240	-0.66529	-0.26914	-0.84156	-0.25972	-0.99813
-0.10	-0.24826	-0.66425	-0.24868	-0.84040	-0.24100	-0.99713
-0.15	-0.22599	-0.66276	-0.23031	-0.83864	-0.22409	-0.99560
-0.20	-0.21035	-0.66066	-0.21376	-0.83640	-0.20877	-0.99365
-0.25	-0.19617	-0.65830	-0.19881	-0.83377	-0.19486	-0.99136
-0.30	-0.18328	-0.65566	-0.18528	-0.83085	-0.18220	-0.98879

Tablo A.6) a/h=1.000, μ_2/μ_1= 0.575, μ_3/μ_1= 1.766, ν_1=0.34, ν_2=0.30, ν_3=0.34, $\rho_1 gh/p_o$=0.830, $\rho_2 gh/p_o$=0.270 olması durumuna ait x/h=0 kesitindeki σ_x ve σ_y normal gerilme degerleri

	$h_1/h=0.2$		$h_1/h=0.5$		$h_1/h=0.8$	
$z=\frac{y}{h}$	$\frac{1}{p_o}\sigma_x$	$\frac{1}{p_o}\sigma_y$	$\frac{1}{p_o}\sigma_x$	$\frac{1}{p_o}\sigma_y$	$\frac{1}{p_o}\sigma_x$	$\frac{1}{p_o}\sigma_y$
1.00	-0.06396	-0.99998	-0.04630	-0.99998	-0.02182	-0.99998
0.95	-0.05568	-0.88737	-0.03672	-0.75414	-0.01055	-0.64869
0.90	-0.04740	-0.27627	-0.02714	-0.27672	0.00027	-0.27693
0.85	-0.03912	-0.28959	-0.01756	-0.28993	0.01068	-0.29038
					0.02075	-0.30386
0.80	-0.03084	-0.30247	-0.00798	-0.30307		
					-0.10764	-0.30386
0.75	-0.02402	-0.31526	0.00166	-0.31618	-0.09390	-0.34523
0.70	-0.01424	-0.32797	0.01165	-0.32930	-0.08016	-0.38635
0.65	-0.00493	-0.34064	0.02131	-0.34245	-0.06641	-0.42727
0.60	0.00396	-0.35330	0.03069	-0.35566	-0.05267	-0.46803
0.55	0.01249	-0.36598	0.03986	-0.36897	-0.04024	-0.50867
			0.04886	-0.38241		
0.50	0.02070	-0.37869			-0.02505	-0.54923
			-0.06786	-0.38241		
0.45	0.02865	-0.39146	-0.05389	-0.42382	-0.01036	-0.58973
0.40	0.03639	-0.40432	-0.03991	-0.46508	0.00391	-0.63022
0.35	0.04397	-0.41729	-0.02593	-0.50624	0.01083	-0.67072
0.30	0.05141	-0.43038	-0.01194	-0.54733	0.02601	-0.71126
0.25	0.05878	-0.44362	0.00204	-0.58840	0.04082	-0.75188
	0.06611	-0.45703				
0.20			0.01614	-0.62947	0.05403	-0.79260
	-0.02835	-0.45703				
0.15	-0.01383	-0.49851	0.03032	-0.67058	0.06871	-0.83344
0.10	0.00025	-0.53995	0.04425	-0.71176	0.08015	-0.87444
0.05	0.01396	-0.58139	0.05799	-0.75305	0.09617	-0.91562
	0.02736	-0.62287	0.07160	-0.79447	0.11000	-0.95701
0.00						
	-0.24087	-0.62287	-0.24447	-0.79447	-0.23901	-0.95701
-0.05	-0.22668	-0.62269	-0.22977	-0.79428	-0.22506	-0.95683
-0.10	-0.21353	-0.62218	-0.21617	-0.79374	-0.21211	-0.95634
-0.15	-0.20133	-0.62138	-0.20357	-0.79290	-0.20010	-0.95555
-0.20	-0.19000	-0.62033	-0.19189	-0.79179	-0.18894	-0.95453
-0.25	-0.17942	-0.61905	-0.18106	-0.79045	-0.17857	-0.95328
-0.30	-0.16969	-0.61759	-0.17100	-0.78891	-0.16892	-0.95186

Tablo A.7) $a/h=0.001$, $\mu_2/\mu_1= 1.766$, $\mu_3/\mu_1= 0.575$, $\nu_1=0.34$, $\nu_2=0.34$, $\nu_3=0.30$, $\rho_1 gh/p_o=0.270$, $\rho_2 gh/p_o=0.830$ olması durumuna ait $x/h=0$ kesitindeki σ_x ve σ_y normal gerilme degerleri

	$h_1/h=0.2$		$h_1/h=0.5$		$h_1/h=0.8$	
$z=\frac{y}{h}$	$\frac{1}{p_o}\sigma_x$	$\frac{1}{p_o}\sigma_y$	$\frac{1}{p_o}\sigma_x$	$\frac{1}{p_o}\sigma_y$	$\frac{1}{p_o}\sigma_x$	$\frac{1}{p_o}\sigma_y$
0.95	-0.33286	-2.67720	-0.27161	-1.26830	-0.08512	-0.90039
0.90	-0.28447	-0.39318	-0.20281	-0.39284	0.00098	-0.39479
0.85	-0.23608	-0.42831	-0.13402	-0.42792	0.08563	-0.43265
					0.17044	-0.47132
0.80	-0.18769	-0.46252	-0.065225	-0.46224		
					-0.25926	-0.47132
0.75	-0.13858	-0.49605	0.00444	-0.49624	-0.22616	-0.51201
0.70	-0.08823	-0.52914	0.07216	-0.53033	-0.19306	-0.55135
0.65	-0.03948	-0.56200	0.13793	-0.56490	-0.15995	-0.58969
0.60	0.00815	-0.59482	0.20802	-0.60032	-0.12685	-0.62730
0.55	0.05510	-0.62777	0.27783	-0.63700	-0.09436	-0.66441
			0.35023	-0.67535		
0.50	0.10177	-0.66101			-0.05888	-0.70121
			-0.18053	-0.67535		
0.45	0.14858	-0.69469	-0.14390	-0.71638	-0.02480	-0.73787
0.40	0.19591	-0.72899	-0.10727	-0.75664	0.00826	-0.77451
0.35	0.24418	-0.76407	-0.07064	-0.79636	0.04061	-0.81128
0.30	0.29380	-0.80011	-0.03400	-0.83576	0.07257	-0.84828
0.25	0.34521	-0.83730	0.00262	-0.87502	0.10443	-0.88563
	0.39889	-0.87588				
0.20			0.03943	-0.91431	0.13647	-0.92345
	-0.06663	-0.87588				
0.15	-0.03277	-0.91726	0.07572	-0.95380	0.16898	-0.96185
0.10	0.00032	-0.95850	0.11206	-0.99366	0.20225	-1.00100
0.05	0.03293	-0.99974	0.14882	-1.03400	0.23659	-1.04090
	0.06536	-1.04110	0.18636	-1.07510	0.27233	-1.08190
0.00						
	-0.24552	-1.04110	-0.26633	-1.07510	-0.26045	-1.08190
-0.05	-0.23025	-1.04090	-0.24834	-1.07480	-0.24298	-1.08160
-0.10	-0.21625	-1.04030	-0.23171	-1.07400	-0.22706	-1.08080
-0.15	-0.20339	-1.03930	-0.21655	-1.07280	-0.21254	-1.07960
-0.20	-0.19155	-1.03810	-0.20271	-1.07120	-0.19926	-1.07810
-0.25	-0.18063	-1.03660	-0.19004	-1.06930	-0.18710	-1.07630
-0.30	-0.17054	-1.03490	-0.17843	-1.06710	-0.17592	-1.07430

Tablo A.8) $a/h=1.000$, $\mu_2/\mu_1= 1.766$, $\mu_3/\mu_1= 0.575$, $\nu_1=0.34$, $\nu_2=0.30$, $\nu_3=0.34$, $\rho_1 gh/p_o=0.270$, $\rho_2 gh/p_o=0.830$ olması durumuna ait $x/h=0$ kesitindeki σ_x ve σ_y normal gerilme degerleri

	$h_1/h=0.2$		$h_1/h=0.5$		$h_1/h=0.8$	
$z=\frac{y}{h}$	$\frac{1}{p_o}\sigma_x$	$\frac{1}{p_o}\sigma_y$	$\frac{1}{p_o}\sigma_x$	$\frac{1}{p_o}\sigma_y$	$\frac{1}{p_o}\sigma_x$	$\frac{1}{p_o}\sigma_y$
1.00	-0.30592	-0.99998	-0.24337	-0.99998	-0.10697	-0.99998
0.95	-0.26738	-0.91297	-0.19444	-0.77974	-0.05301	-0.67445
0.90	-0.22884	-0.32732	-0.14551	-0.32747	0.00027	-0.32832
0.85	-0.19030	-0.36511	-0.09658	-0.36551	0.05315	-0.36742
					0.10591	-0.40665
0.80	-0.15176	-0.40245	-0.04765	-0.40327		
					-0.20880	-0.40659
0.75	-0.11296	-0.43945	0.00156	-0.44089	-0.18366	-0.44790
0.70	-0.07353	-0.47619	0.05020	-0.47852	-0.15452	-0.48869
0.65	-0.03479	-0.51277	0.09875	-0.51629	-0.12837	-0.52910
0.60	0.00345	-0.54927	0.14750	-0.55434	-0.10223	-0.56920
0.55	0.04137	-0.58578	0.19671	-0.59280	-0.07657	-0609070
			0.24668	-0.63183		
0.50	0.07916	-0.62239			-0.04929	-0.64876
			-0.13789	-0.63183		
0.45	0.11699	-0.65918	-0.11003	-0.67315	-0.02259	-0.68835
0.40	0.15505	-0.69623	-0.08216	-0.71419	0.00364	-0.72789
0.35	0.19352	-0.73364	-0.05429	-0.75501	0.02954	-0.76744
0.30	0.23259	-0.77148	-0.02643	-0.79569	0.05523	-0.80706
0.25	0.27244	-0.80986	0.00144	-0.83631	0.08083	-0.84681
	0.31327	-0.84887				
0.20			0.02940	-0.87693	0.10647	-0.88675
	-0.05177	-0.84887				
0.15	-0.02560	-0.89032	0.05720	-0.91763	0.13227	-0.92693
0.10	0.00018	-0.93171	0.08495	-0.95847	0.15835	-0.96741
0.05	0.02569	-0.97311	0.11280	-0.99952	0.18483	-1.00830
	0.05150	-1.01460	0.14088	-1.04090	0.21186	-1.04950
0.00						
	-0.21896	-1.01460	-0.23236	-1.04090	-0.22812	-1.04950
-0.05	-0.20749	-1.01440	-0.21929	-1.04070	-0.21555	-1.04940
-0.10	-0.19677	-1.01410	-0.20714	-1.04020	-0.20385	-1.04870
-0.15	-0.18675	-1.01350	-0.19583	-1.03950	-0.19294	-1.04830
-0.20	-0.17737	-1.01270	-0.18529	-1.03860	-0.18276	-1.04740
-0.25	-0.16858	-1.11890	-0.17547	-1.03750	-0.17326	-1.04630
-0.30	-0.16035	-1.01070	-0.16631	-1.03620	-0.16439	-1.04510

Tablo B.1 İlk ayrılma yükü-ilk ayrılma uzaklığı tablolarında geçen malzeme sabitlerine ilişkin değişimler.

	μ_2/μ_1	μ_3/μ_1	ν_1	ν_2	ν_3	$\rho_1 g/\rho_2 g$
i)	0.575	1.766	0.34	0.34	0.30	3.074
ii)	1.766	0.575	0.34	0.30	0.34	1.055
iii)	1.741	3.074	0.34	0.34	0.30	0.325
iv)	3.074	1.741	0.34	0.30	0.34	0.343
v)	0.325	0.566	0.30	0.34	0.34	2.915
vi)	1.000	1.000	0.30	0.30	0.30	1.000

Tablo B.2 Tabaka-zemin arasındaki ilk ayrılma yükü-ilk ayrılma uzaklığı ile aynı yük altında iki tabaka arasında oluşan ayrılma uzaklıkları

DEĞİŞİMLER			i	ii	iii	iv	v	vi
a/h=0.001	h_1/h=0.20	λ_{cr}	150.92050	121.18590	92.97126	100.35040	151.99240	113.26150
		b_1/h	1.748500	3.040600	1.953100	2.776700	0.611381	1.306848
		b_2/h	2.378500	3.170600	2.583100	3.306700	2.987044	2.677282
		c_{cr}/h	1.991000	3.112000	2.170800	2.878500	2.120800	2.284100
	h_1/h=0.50	λ_{cr}	302.15640	182.39550	100.18920	110.21380	338.99650	168.05790
		b_1/h	0.965372	1.441176	1.231055	2.009010	0.489500	1.233773
		b_2/h	1.506600	1.978783	1.673465	2.465100	0.919500	1.666541
		c_{cr}/h	1.477300	2.300800	1.612500	2.083300	1.945200	1.843200
	h_1/h=0.80	λ_{cr}	1177.6530	493.59960	194.96630	208.53120	1197.2710	457.82330
		b_1/h	0.548968	0.425425	0.337806	0.933971	0.388474	0.392504
		b_2/h	0.717048	0.872144	0.974271	1.420886	0.892286	0.899549
		c_{cr}/h	2.124500	2.870000	1.674900	2.073700	2.889500	2.553400

Tablo B.3 Tabaka-zemin arasındaki ilk ayrılma yükü-ilk ayrılma uzaklığı ile aynı yük altında iki tabaka arasında oluşan ayrılma uzaklıkları

DEĞİŞİMLER			i	ii	iii	iv	v	vi
a/h=0.50	h_1/h=0.20	λ_{cr}	46.24670	36.63927	28.91346	30.56706	47.14175	34.68991
		b_1/h	0.722817	3.302100	2.191200	2.382412	0.665723	0.836664
		b_2/h	2.893019	3.832100	2.921200	3.170900	2.894466	3.700202
		c_{cr}/h	1.957700	3.316600	2.296200	2.870800	2.149800	2.507800
	h_1/h=0.50	λ_{cr}	99.33058	55.96355	31.89775	34.42876	103.80920	51.78228
		b_1/h	1.322432	2.511448	1.752870	2.194904	0.969330	1.772000
		b_2/h	2.099246	2.643100	2.193765	2.798114	1.396349	2.162312
		c_{cr}/h	1.702100	2.492100	1.820900	2.164200	1.958800	1.955600
	h_1/h=0.80	λ_{cr}	365.48330	149.90760	60.06402	64.34110	363.93570	140.53120
		b_1/h	0.672707	0.949581	0.677851	0.728736	0.720276	0.721178
		b_2/h	1.149263	1.400310	1.149738	1.099696	1.099058	1.101198
		c_{cr}/h	2.100700	2.806600	1.894800	2.104900	2.764200	2.479600

Tablo B.4 Tabaka-zemin arasındaki ilk ayrılma yükü-ilk ayrılma uzaklığı ile aynı yük altında iki tabaka arasında oluşan ayrılma uzaklıkları

DEĞİŞİMLER			i	ii	iii	iv	v	vi
a/h=1.00	h_1/h=0.20	λ_{cr}	24.68168	18.75009	15.23731	15.75067	24.71061	18.04174
		b_1/h	1.835000	3.192400	2.529100	3.035400	2.381800	2.753100
		b_2/h	2.565000	3.934824	2.968514	3.565400	2.711800	3.383100
		c_{cr}/h	2.365300	3.587100	2.642000	3.165000	2.521000	2.854800
	h_1/h=0.50	λ_{cr}	55.12469	29.27892	17.71854	18.46252	55.22486	27.80924
		b_1/h	2.022917	2.551632	1.872719	2.193897	2.106226	2.020619
		b_2/h	2.439054	2.952572	2.599247	2.799392	2.386300	2.437533
		c_{cr}/h	2.146900	2.840000	2.247500	2.540600	2.373600	2.369300
	h_1/h=0.80	λ_{cr}	191.12070	76.92183	32.13432	33.79818	186.70390	72.87074
		b_1/h	1.084075	1.178215	1.226424	1.276744	1.270357	1.401743
		b_2/h	1.800116	1.699967	1.649793	1.599767	1.600927	1.438221
		c_{cr}/h	2.482000	3.119800	2.312300	2.490500	3.092800	2.825600

Tablo B.5 Tabaka-zemin arasındaki ilk ayrılma yükü-ilk ayrılma uzaklığı ile aynı yük altında iki tabaka arasında oluşan ayrılma uzaklıkları

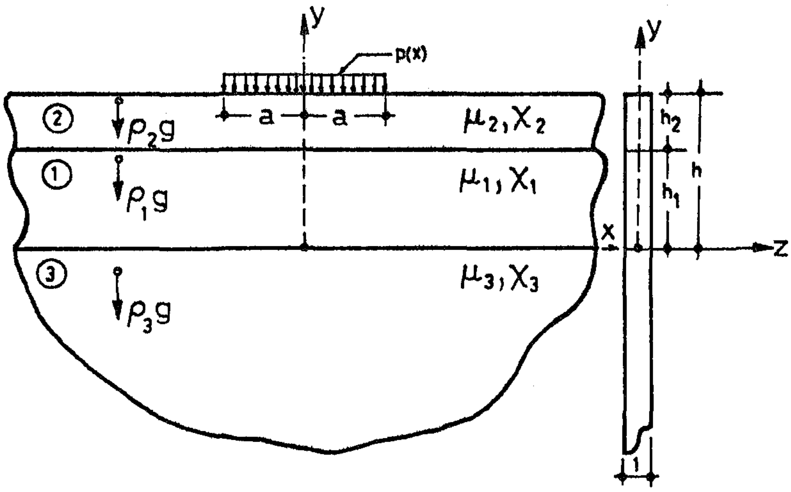
DEĞİŞİMLER			i	ii	iii	iv	v	vi
a/h=2.00	h_1/h=0.20	λ_{cr}	13.33168	9.89635	8.20059	8.37998	13.19331	9.61497
		b_1/h	2.935885	3.897000	3.305270	3.614000	3.232800	3.524300
		b_2/h	3.595374	4.759209	3.789780	4.508907	3.962800	4.069647
		c_{cr}/h	3.344600	4.323800	3.561800	4.034000	3.465300	3.733200
	h_1/h=0.50	λ_{cr}	30.21506	15.69878	9.77550	10.05800	29.67140	15.05009
		b_1/h	2.776923	3.710198	2.971278	2.944458	2.910253	2.768296
		b_2/h	3.257960	3.887220	3.587434	3.617138	3.645396	3.266768
		c_{cr}/h	3.132300	3.741000	3.211400	3.498300	3.352200	3.349600
	h_1/h=0.80	λ_{cr}	101.73710	40.63022	17.34826	18.07132	98.60177	38.64330
		b_1/h	3.135847	3.122554	2.351205	2.304835	2.301749	2.338107
		b_2/h	3.401039	3.419539	2.618730	2.667735	2.668019	2.633100
		c_{cr}/h	3.436100	3.990800	3.292700	3.442000	3.977800	3.688600

TABLO C.1) μ_2/μ_1= 0.575, μ_3/μ_1= 1.766, h_1/h= 0.50, $\rho_1 g/\rho_2 g$= 3.074 için iki tabaka arasında oluşan açılmalar.

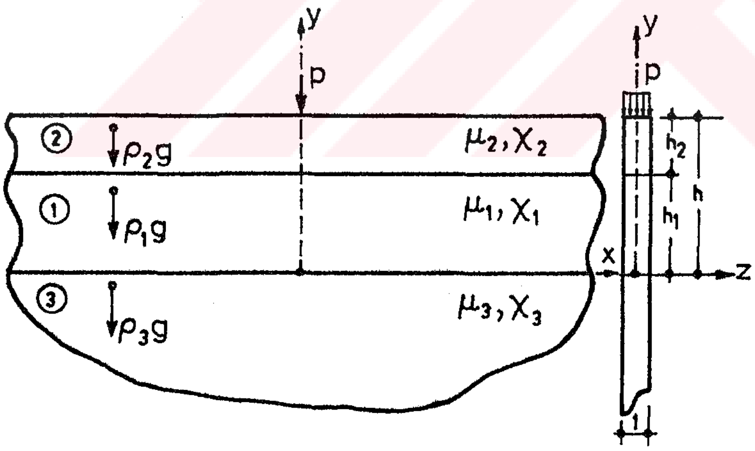
a/h = 0.001		a/h = 1.000	
λ = 302.1564, b_{cr}/h= 1.3966		λ = 55.12469, b_{cr}/h= 2.1496	
b_1/h = 0.965372, b_2/h = 1.50660		b_1/h = 2.022917, b_2/h = 2.439054	
x/h	$\frac{4\mu_2}{p_o h}\overline{v}_2(x,h_1).10^3$	x/h	$\frac{4\mu_2}{p_o h}\overline{v}_2(x,h_1).10^3$
0.965996	0.000014	2.023499	0.000030
0.970962	0.000048	2.028134	0.001422
0.980782	0.000681	2.037300	0.006805
0.995239	0.003606	2.050793	0.025671
1.014007	0.012106	2.068311	0.072187
1.036669	0.031170	2.089463	0.157977
1.062719	0.068022	2.113776	0.281906
1.091573	0.132563	2.140708	0.425832
1.122588	0.232171	2.169656	0.562630
1.155071	0.354426	2.199974	0.668572
1.221521	0.451186	2.261997	0.727010
1.254004	0.354426	2.292315	0.668573
1.285019	0.232171	2.321263	0.562632
1.313874	0.132563	2.348195	0.425837
1.339923	0.068025	2.372508	0.281916
1.362585	0.031177	2.393660	0.157994
1.381354	0.012117	2.411178	0.072211
1.395810	0.003618	2.424671	0.025699
1.405631	0.000695	2.433838	0.006835
1.410597	0.000062	2.438472	0.001452

TABLO C.2) μ_2/μ_1= 1.766, μ_3/μ_1= 0.575, h_1/h= 0.50, $\rho_1 g/\rho_2 g$= 1.055 için iki tabaka arasında oluşan açılmalar.

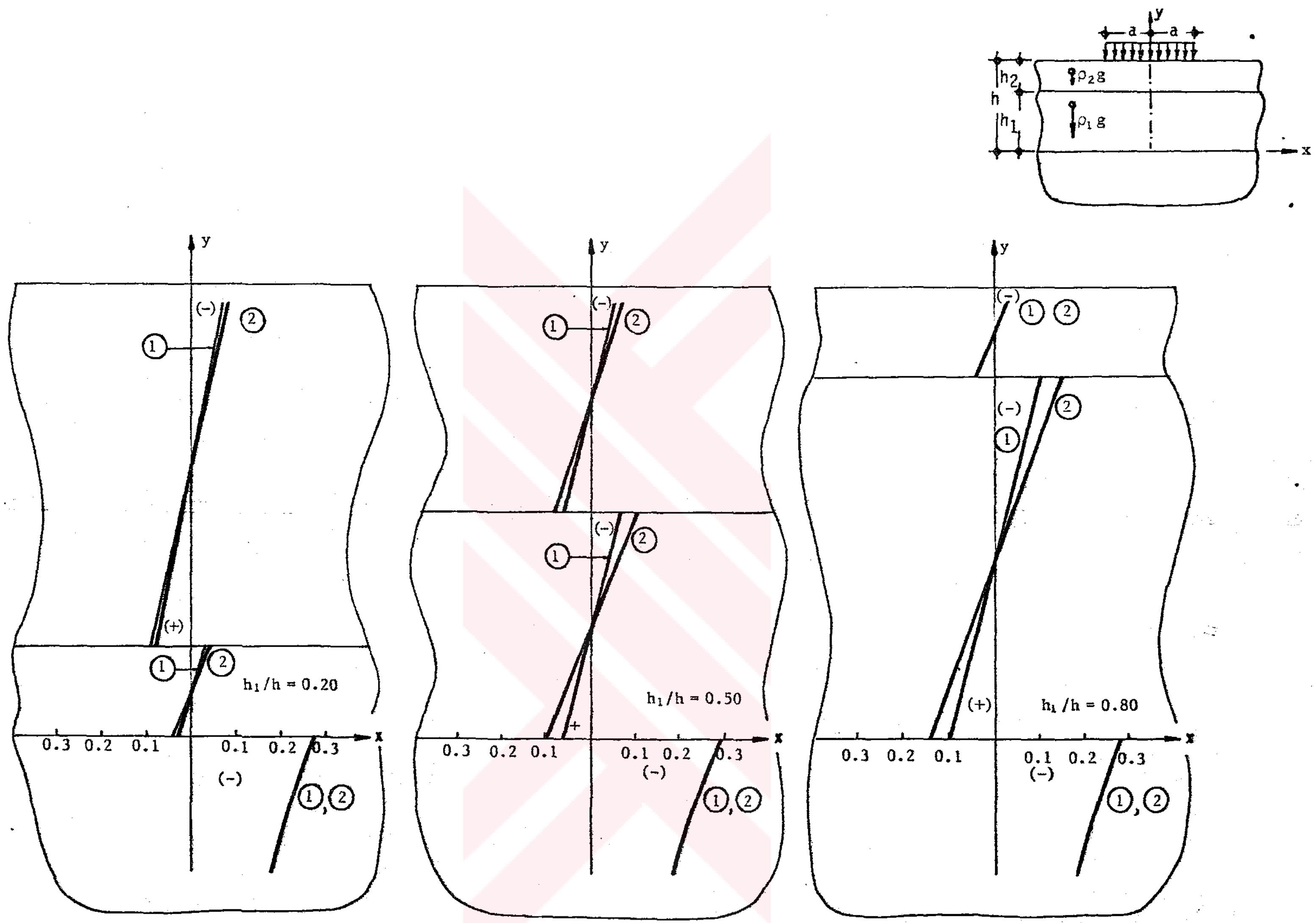
a/h = 0.001 λ = 182.3955, b_{cr}/h= 1.5323 b_1/h = 1.441176, b_2/h = 1.978783		a/h = 1.000 λ = 29.27892, b_{cr}/h= 2.9330 b_1/h = 2.551632, b_2/h = 2.952572	
x/h	$\frac{4\mu_2}{p_0 h}\overline{v}_2(x,h_1).10^3$	x/h	$\frac{4\mu_2}{p_0 h}\overline{v}_2(x,h_1).10^3$
1.441928	0.000020	2.552192	0.000172
1.447916	0.000119	2.556658	0.002443
1.459757	0.001973	2.565489	0.011350
1.477189	0.009655	2.578489	0.041317
1.499821	0.030787	2.595368	0.114363
1.527147	0.075455	2.615747	0.249992
1.558557	0.154840	2.639173	0.450058
1.593350	0.279555	2.665121	0.691182
1.630748	0.452044	2.693012	0.930830
1.669916	0.646253	2.722223	1.123706
1.750043	0.791345	2.781980	1.232264
1.789211	0.646257	2.811191	1.123711
1.826609	0.452063	2.839082	0.930849
1.861402	0.279603	2.865030	0.691230
1.892812	0.154928	2.888456	0.450142
1.920139	0.075585	2.908835	0.250036
1.942770	0.030951	2.925714	0.114511
1.960202	0.009840	2.938714	0.041480
1.972044	0.002167	2.947545	0.011520
1.978031	0.000315	2.952011	0.002615



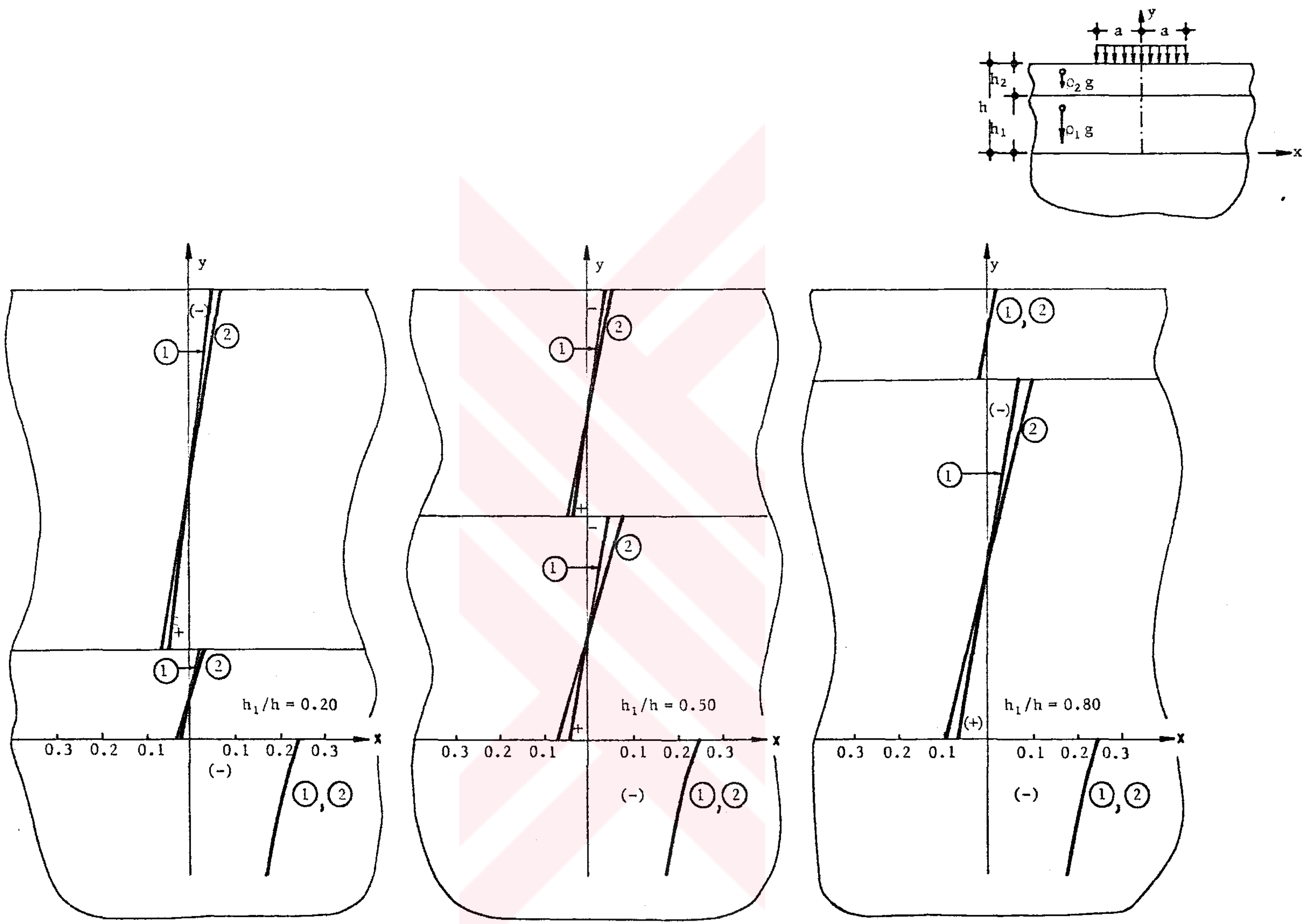
Şekil A.1 Sürekli temas durumunda düzgün yayılı yüklü bileşik tabaka



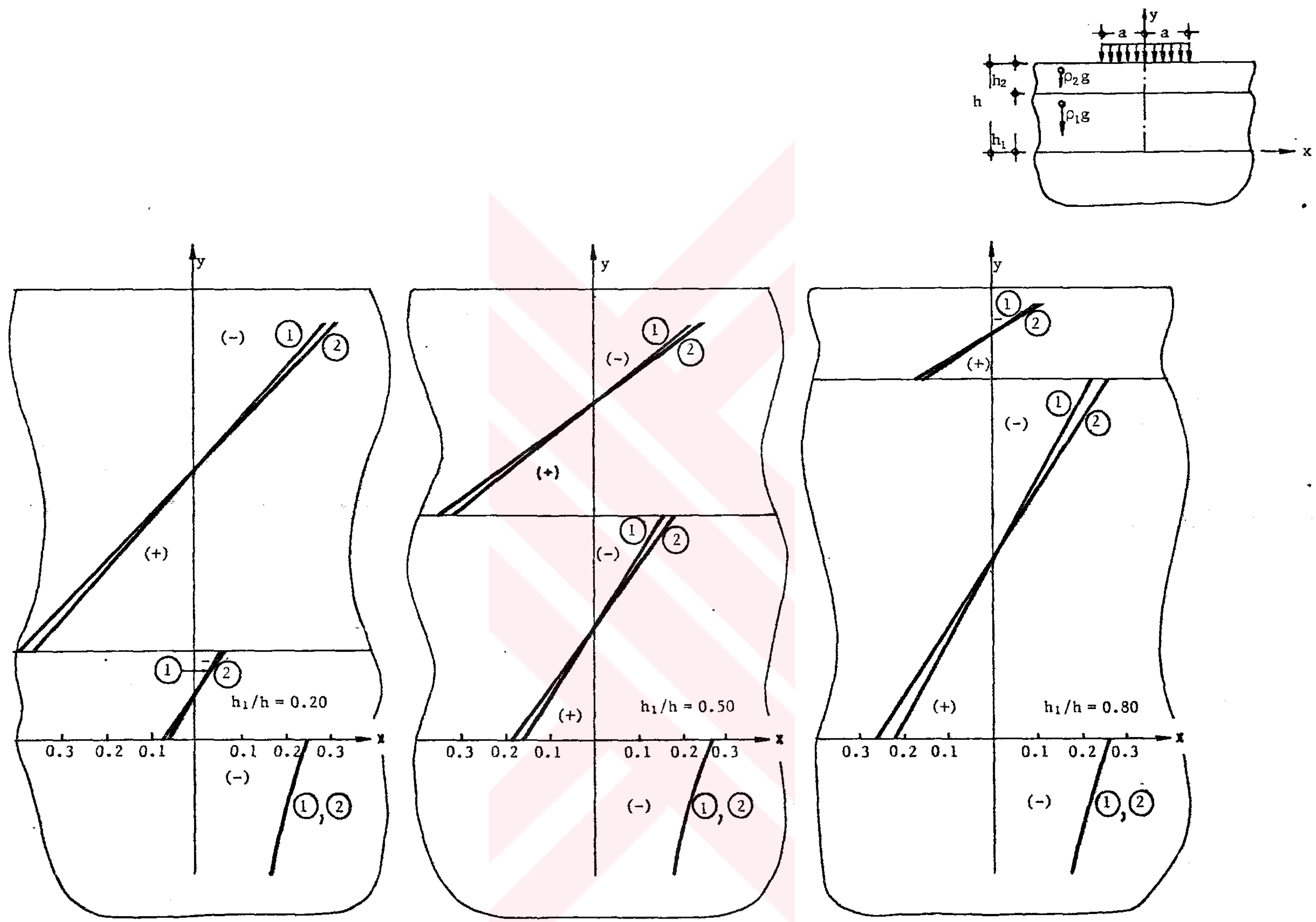
Şekil A.2 Sürekli temas durumunda tekil yüklü bileşik tabaka



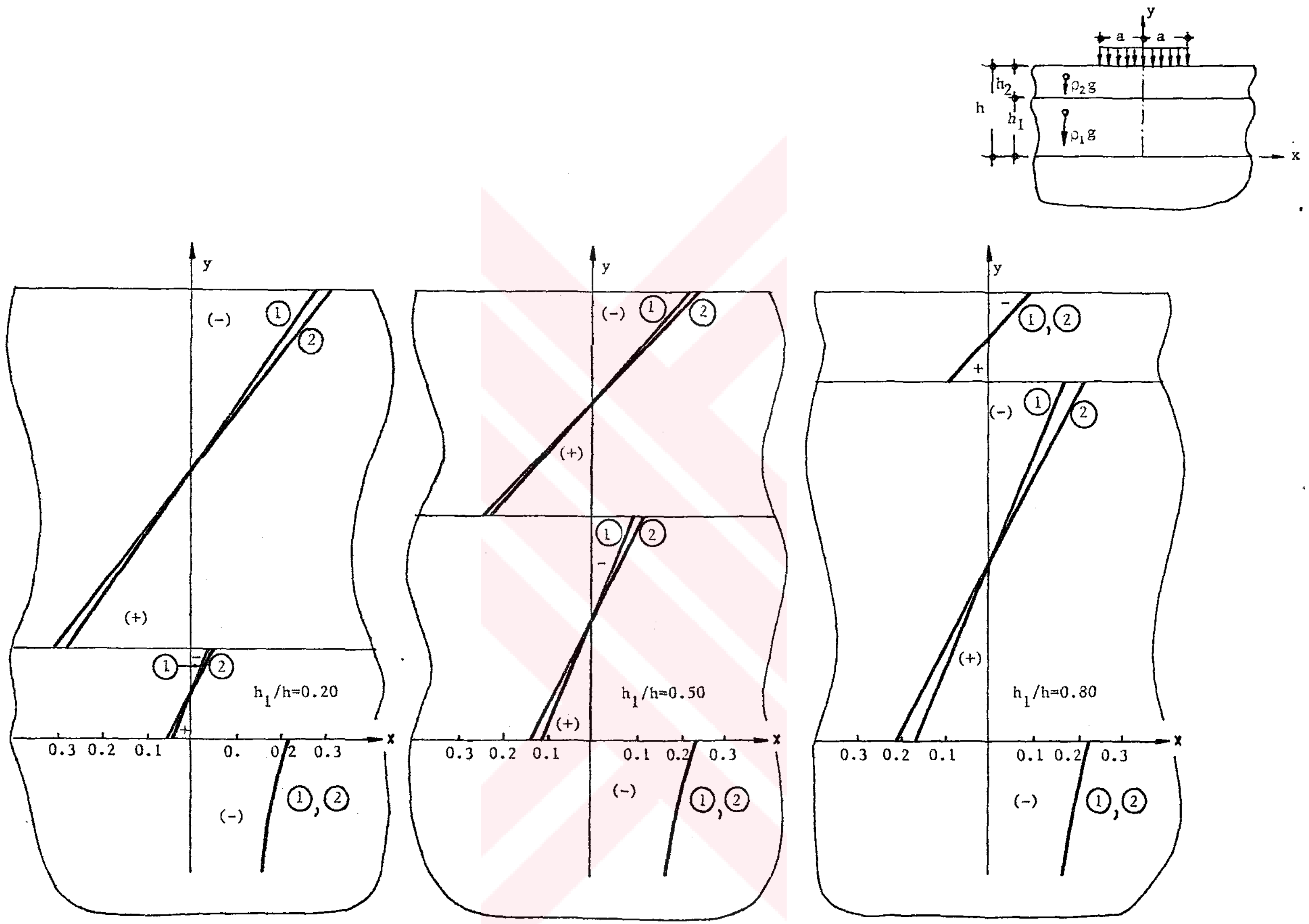
Şekil B.1. $a/h = 0.001$, $\mu_2/\mu_1 = 0.575$, $\mu_3/\mu_1 = 1.766$, $\nu_1 = 0.34$, $\nu_2 = 0.34$, $\nu_3 = 0.30$ için $x/h = 0$ kesitindeki σ_x/p_o gerilme dağılımı. 1 $\rho_1 gh/p_o = 0$, $\rho_2 gh/p_o = 0$, 2 $\rho_1 gh/p_o = 0.830$, $\rho_2 gh/p_o = 0.270$ göstermektedir.



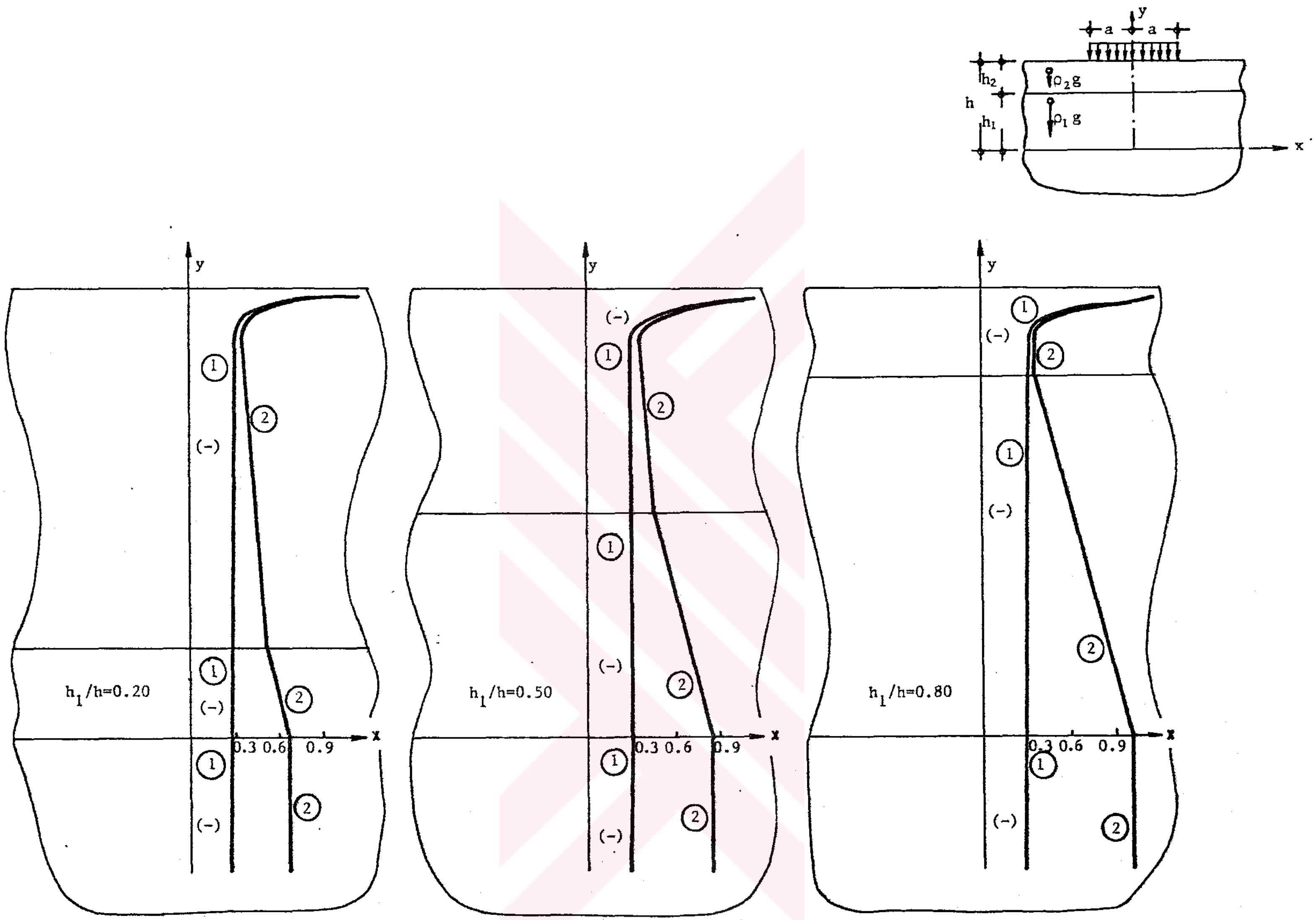
Şekil B.2. $a/h = 1.0$, $\mu_2/\mu_1 = 0.575$, $\mu_3/\mu_1 = 0.766$, $\nu_1 = 0.34$, $\nu_2 = 0.34$, $\nu_3 = 0.30$ için $x/h = 0$ kesitindeki σ_x/p_o gerilme dağılımı. (1) $\rho_1 gh/p_o = 0$, $\rho_2 gh/p_o = 0$, (2) $\rho_1 gh/p_o = 0.830$, $\rho_2 gh/p_o = 0.270$ göstermektedir.



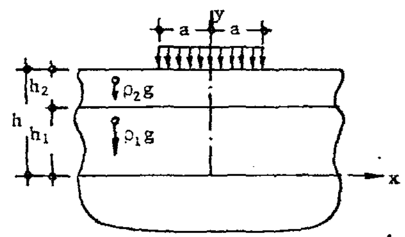
Şekil B.3. $a/h = 0.001$, $\mu_2/\mu_1 = 1.766$, $\mu_3/\mu_1 = 0.575$, $\nu_1 = 0.34$, $\nu_2 = 0.30$, $\nu_3 = 0.34$ için $x/h = 0$ kesitindeki σ_x/p_o gerilme dağılımı. (1) $\rho_1 gh/p_o = 0$, $\rho_2 gh/p_o = 0$, (2) $\rho_1 gh/p_o = 0.270$, $\rho_2 gh/p_o = 0.830$ göstermektedir.

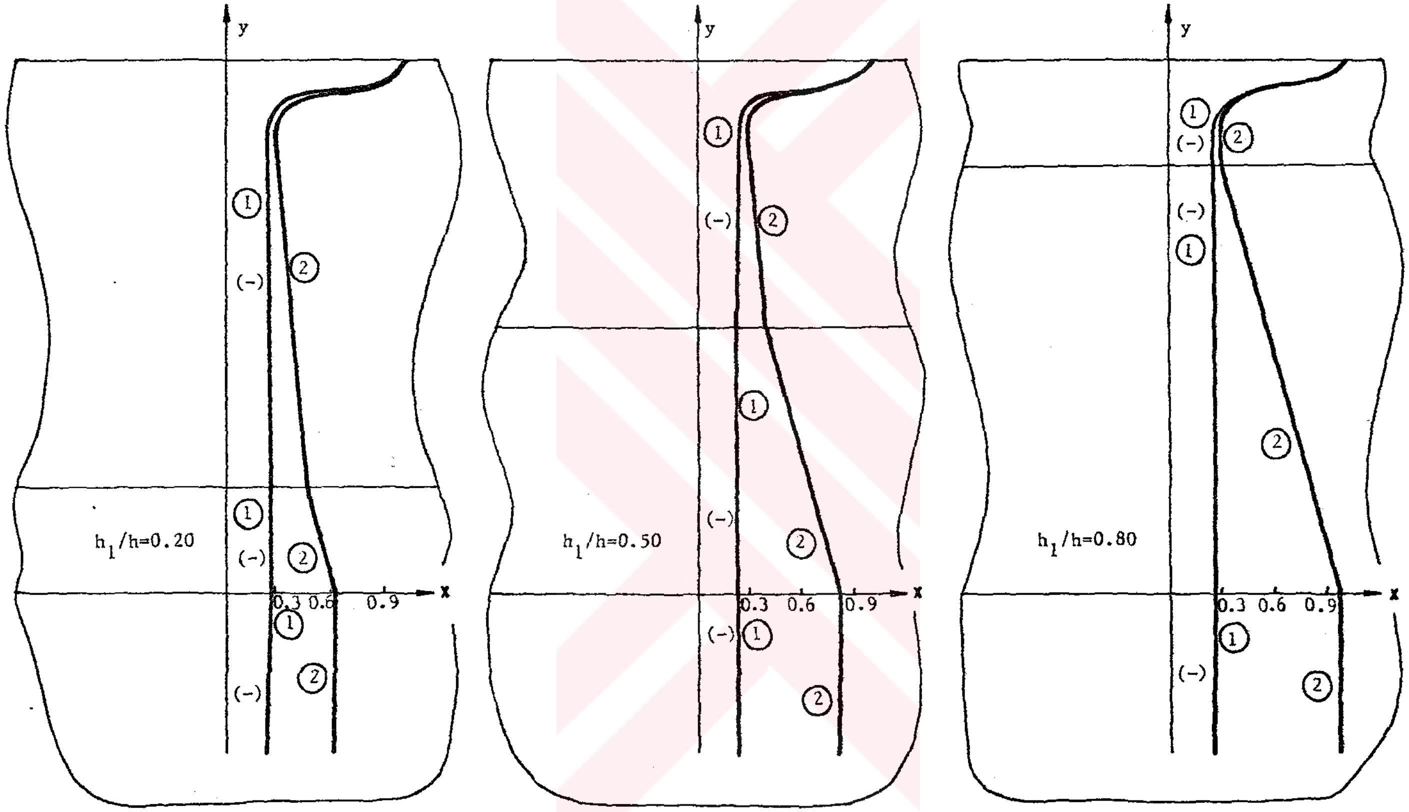


Şekil B.4. $a/h = 1.0$, $\mu_2/\mu_1 = 1.766$, $\mu_3/\mu_1 = 0.575$, $\nu_1 = 0.34$, $\nu_2 = 0.30$, $\nu_3 = 0.34$ için $x/h = 0$ kesitindeki σ_x/p_o gerilme dağılımı. 1 $\rho_1 gh/p_o = 0$, $\rho_2 gh/p_o = 0$, 2 $\rho_1 gh/p_o = 0.270$, $\rho_2 gh/p_o = 0.830$ göstermektedir.

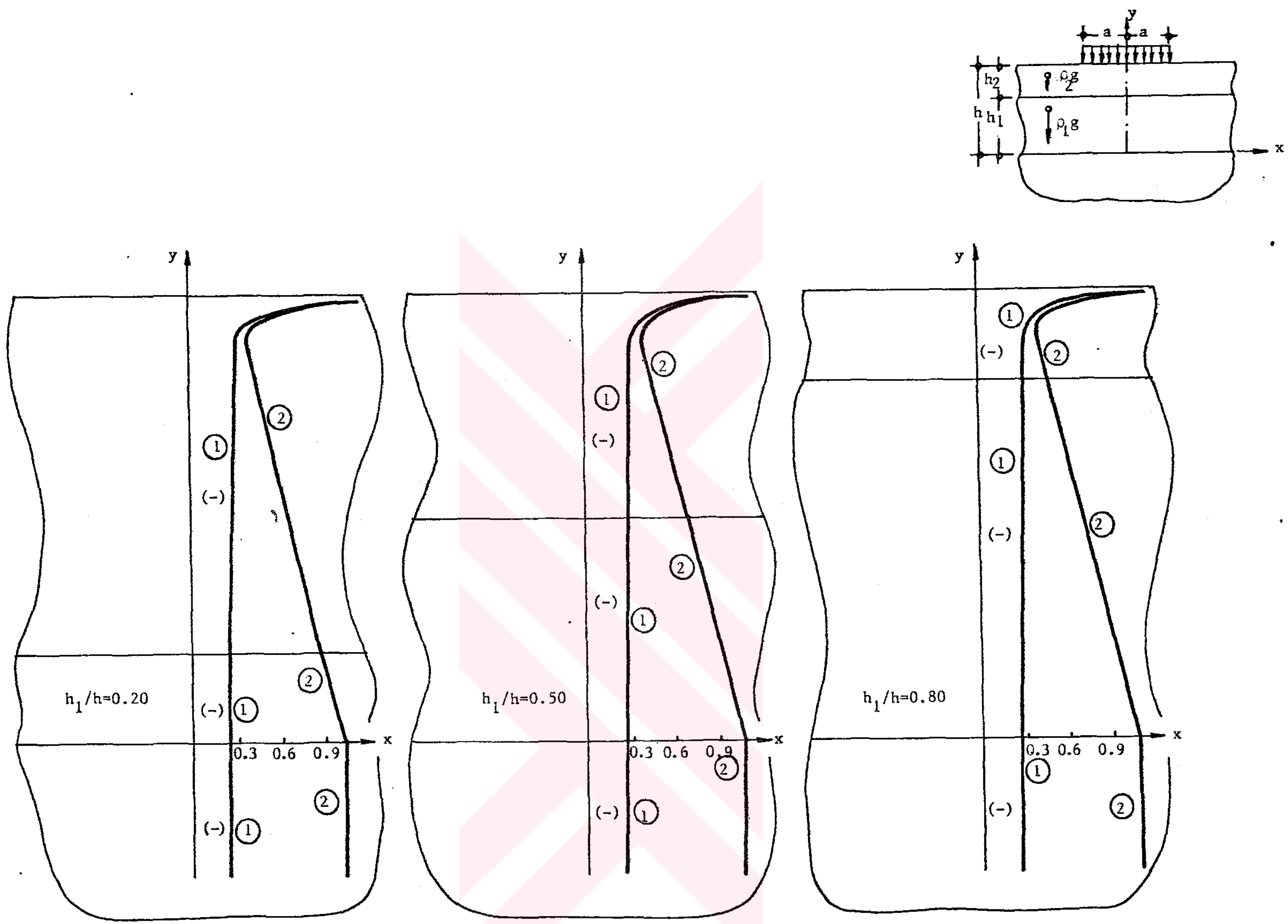


Şekil B.5. $a/h = 0.001$, $\mu_2/\mu_1 = 0.575$, $\mu_3/\mu_1 = 1.766$, $\nu_1 = 0.34$, $\nu_2 = 0.34$, $\nu_3 = 0.30$ için $x/h = 0$ kesitindeki $\sigma y/p_o$ gerilme dağılımı. (1) $\rho_1 gh/p_o = 0$, $\rho_2 gh/p_o = 0$, (2) $\rho_1 gh/p_o = 0.830$, $\rho_2 gh/p_o = 0.270$ göstermektedir.

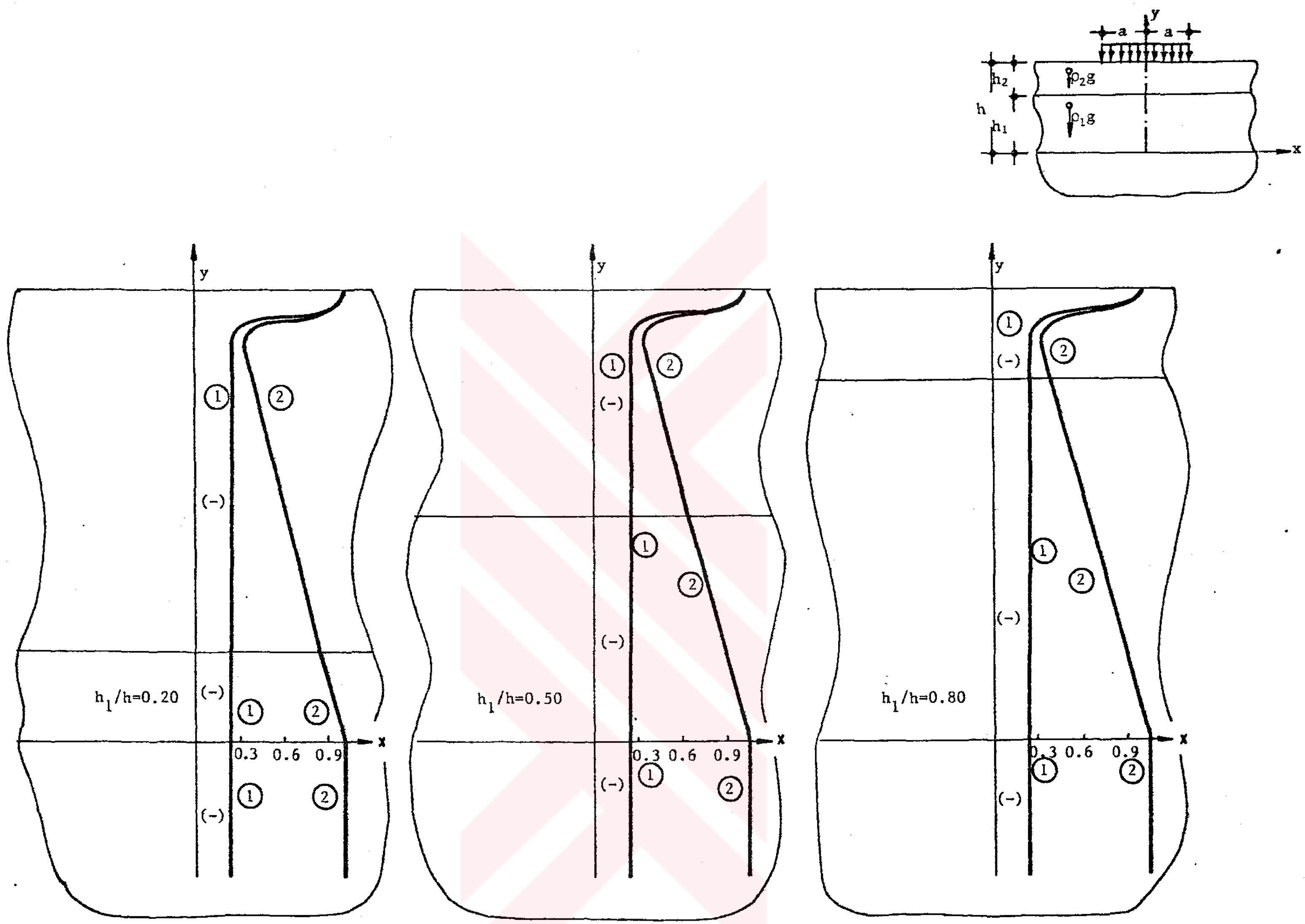




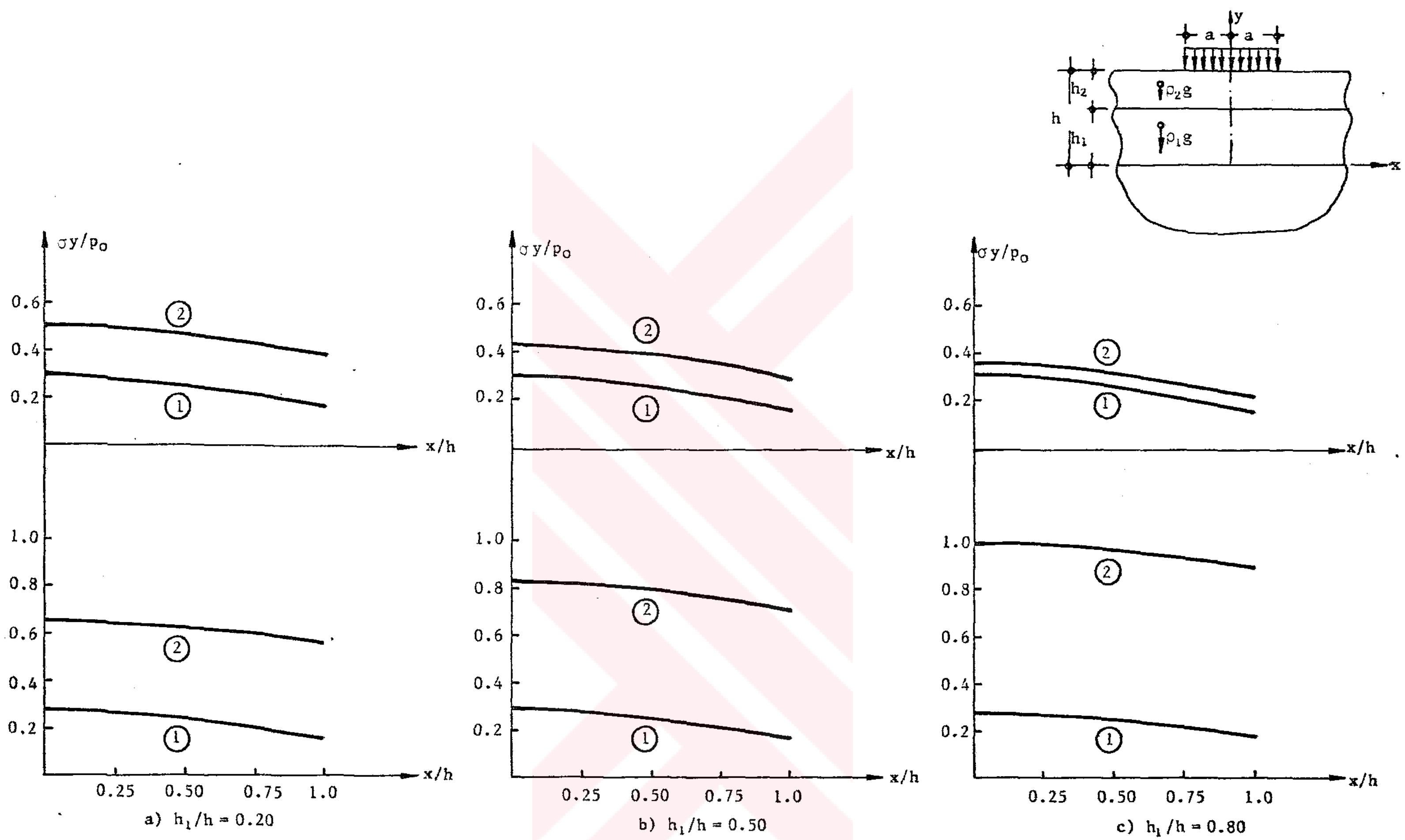
Şekil B.6. $a/h = 1.0$, $\mu_2/\mu_1 = 0.575$, $\mu_3/\mu_1 = 1.766$, $\nu_1 = 0.34$, $\nu_2 = 0.34$, $\nu_3 = 0.30$ için $x/h = 0$ kesitindeki σ_y/p_o gerilme dağılımı. 1 $\rho_1 gh/p_o = 0$, $\rho_2 gh/p_o = 0$, 2 $\rho_1 gh/p_o = 0.830$, $\rho_2 gh/p_o = 0.270$ göstermektedir.



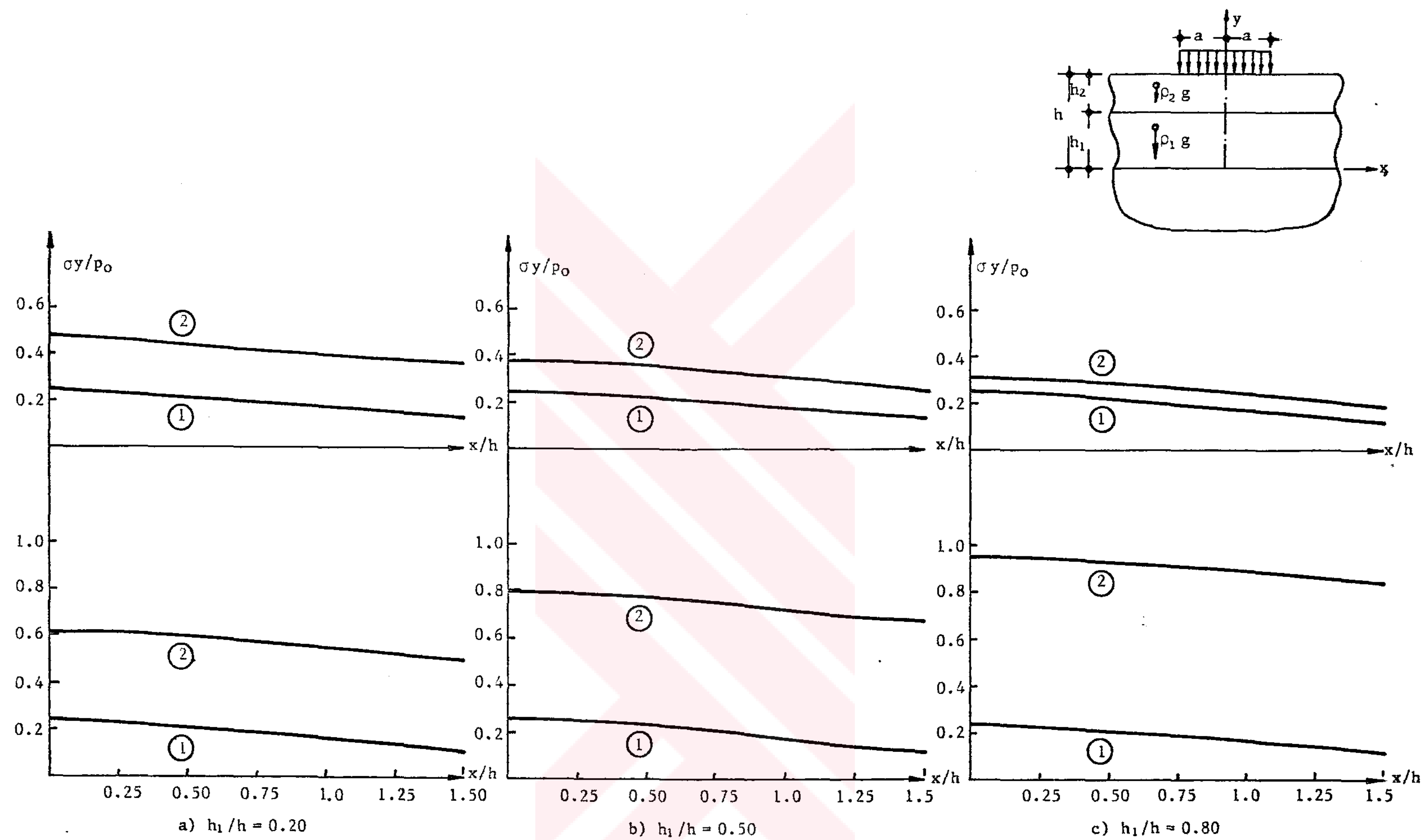
Şekil B.7 $a/h = 0.001$, $\mu_2/\mu_1 = 1.766$, $\mu_3/\mu_1 = 0.575$, $\nu_1 = 0.34$, $\nu_2 = 0.30$, $\nu_3 = 0.34$ için $x/h = 0$ kesitindeki σ_y/p_o gerilme dağılımı . ① $\rho_1 gh/p_o = 0.0$, $\rho_2 gh/p_o = 0.0$, ② $\rho_1 gh/p_o = 0.270$, $\rho_2 gh/p_o = 0.830$ göstermektedir.



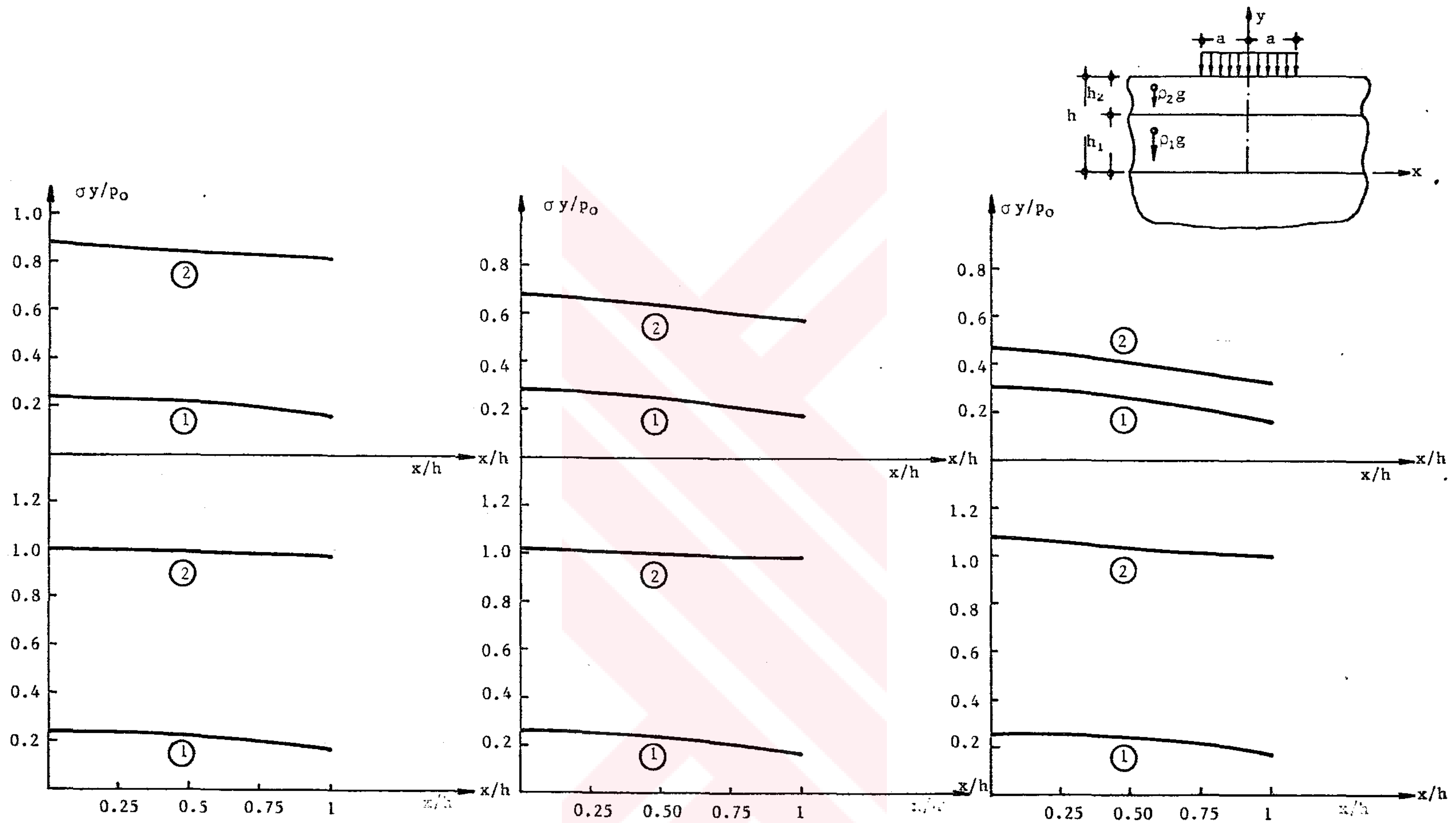
Şekil B.8. $a/h = 1.0$, $\mu_2/\mu_1 = 1.766$, $\mu_3/\mu_1 = 0.575$, $\nu_1 = 0.34$, $\nu_2 = 0.30$, $\nu_3 = 0.34$ için $x/h = 0$ kesitindeki $\sigma y/p_o$ gerilme dağılımı. (1) $\rho_1 gh/p_o = 0$, $\rho_2 gh/p_o = 0$, (2) $\rho_1 gh/p_o = 0.270$, $\rho_2 gh/p_o = 0.830$ göstermektedir.



Şekil C.1. $a/h = 0.001$, $\mu_2/\mu_1 = 0.575$, $\mu_3/\mu_1 = 1.766$, $\nu_1 = 0.34$, $\nu_2 = 0.34$, $\nu_3 = 0.30$ için temas yüzeylerindeki gerilme dağılımı.
(1) Kütle kuvvetsiz hal, (2) $\rho_1 gh/p_0 = 0.830$, $\rho_2 gh/p_0 = 0.270$

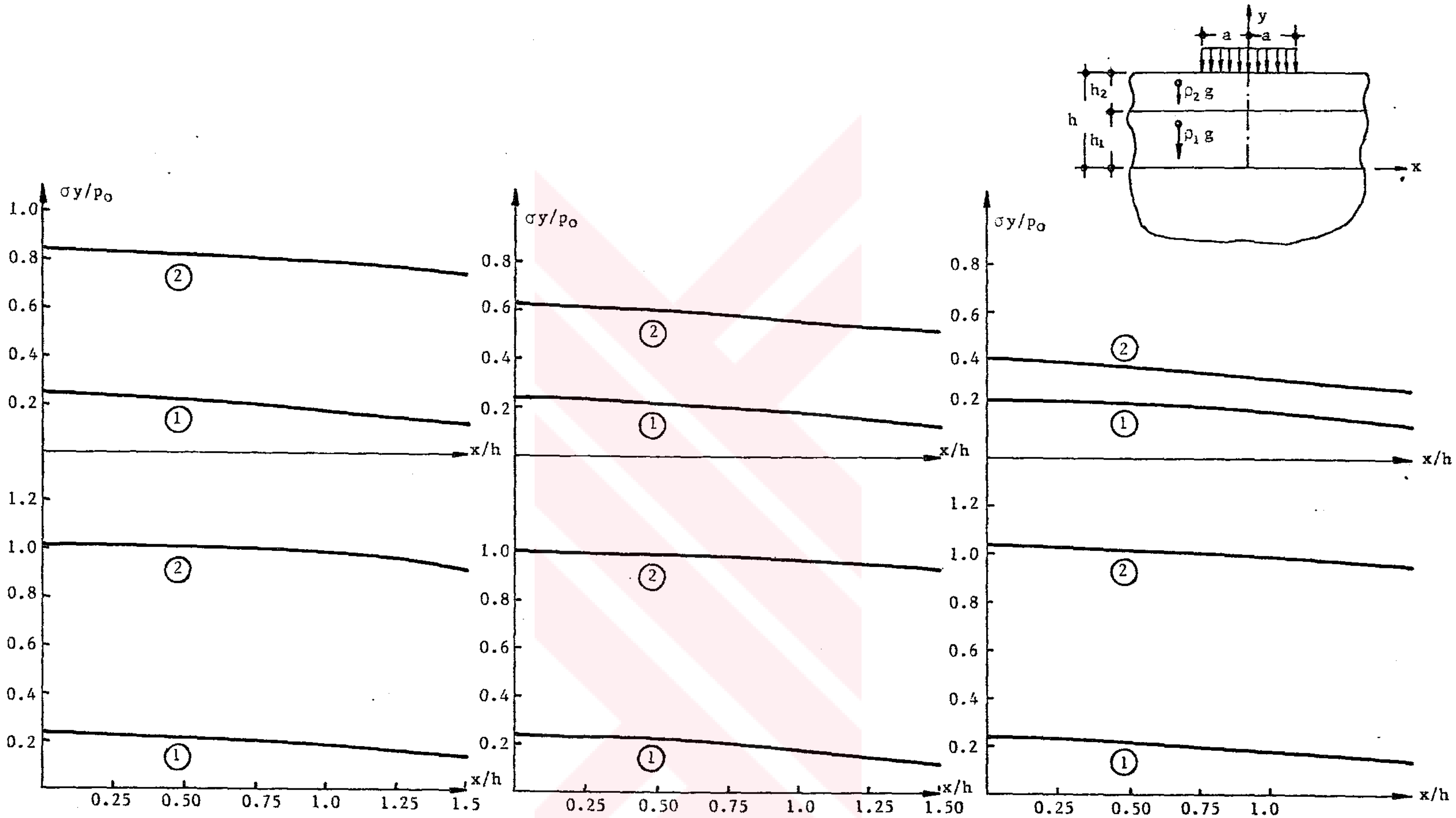


Şekil C.2. $a/h = 1.00$, $\mu_2/\mu_1 = 0.575$, $\mu_3/\mu_1 = 1.766$, $\nu_1 = 0.34$, $\nu_2 = 0.34$, $\nu_3 = 0.30$ için temas yüzeylerindeki gerilme dağılımı.
(1) Kütle kuvvetsiz hal, (2) $\rho_1 gh/p_o = 0.830$, $\rho_2 gh/p_o = 0.270$



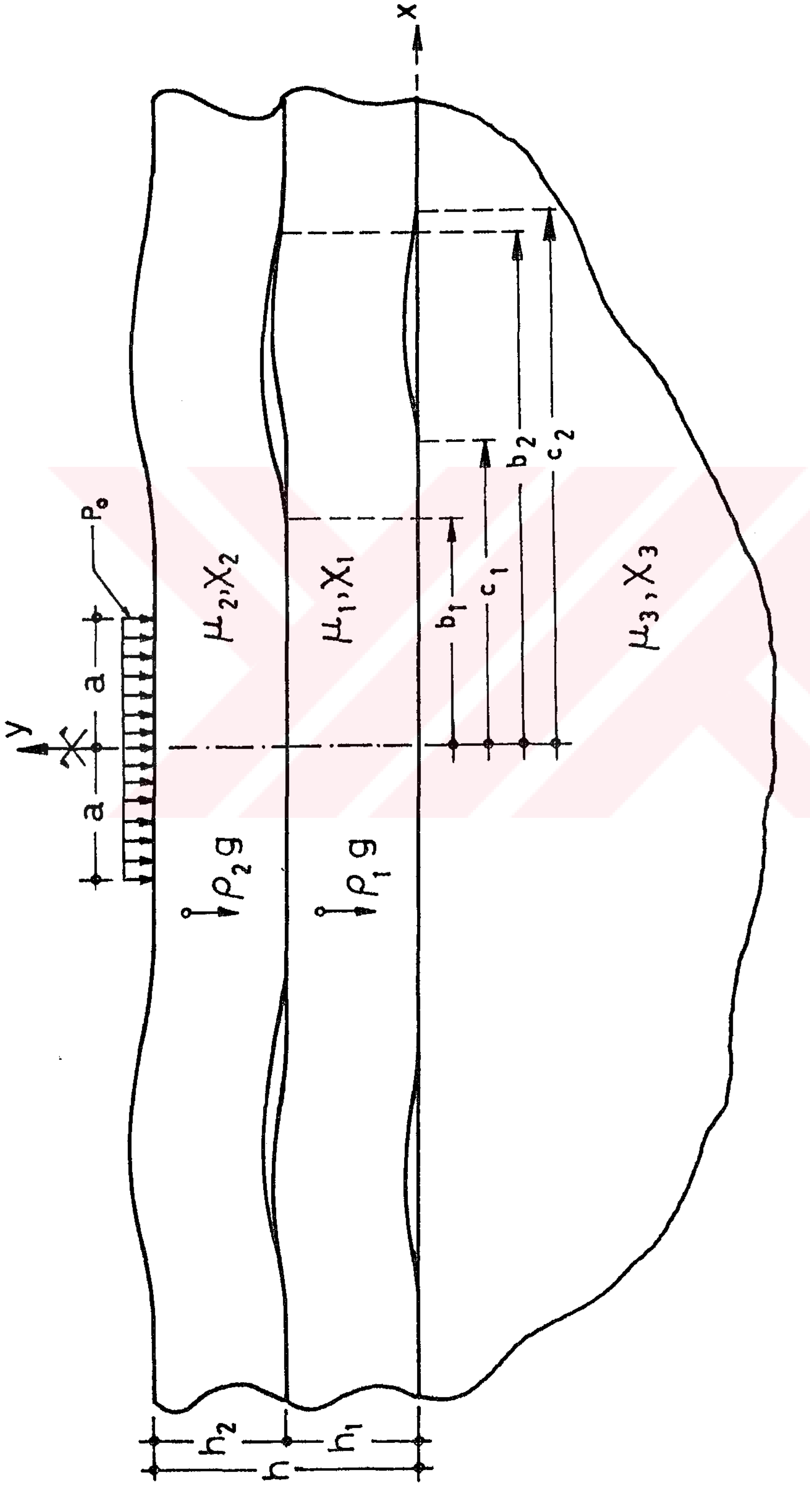
a) $h_1/h = 0.20$ b) $h_1/h = 0.50$ c) $h_1/h = 0.80$

Şekil C.3. $a/h = 0.001$, $\mu_2/\mu_1 = 1.766$, $\mu_3/\mu_1 = 0.575$, $\nu_1 = 0.34$, $\nu_2 = 0.30$, $\nu_3 = 0.34$ için temas yüzeylerindeki gerilme dağılımı.
① Kütle kuvvetsiz hal, ② $\rho_1 gh/p_o = 0.830$, $\rho_2 gh/p_o = 0.787$

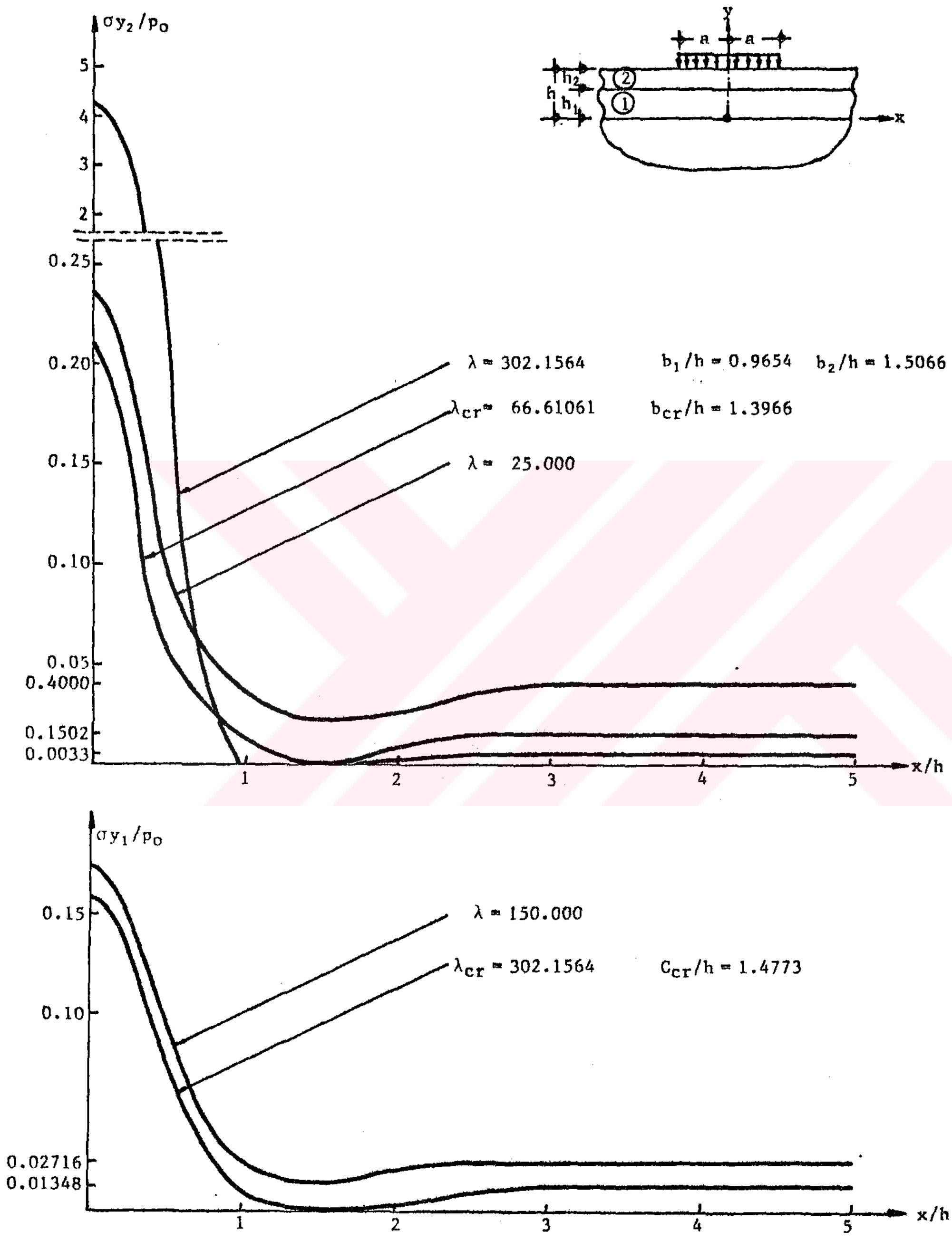


a) $h_1/h = 0.20$ b) $h_1/h = 0.50$ c) $h_1/h = 0.80$

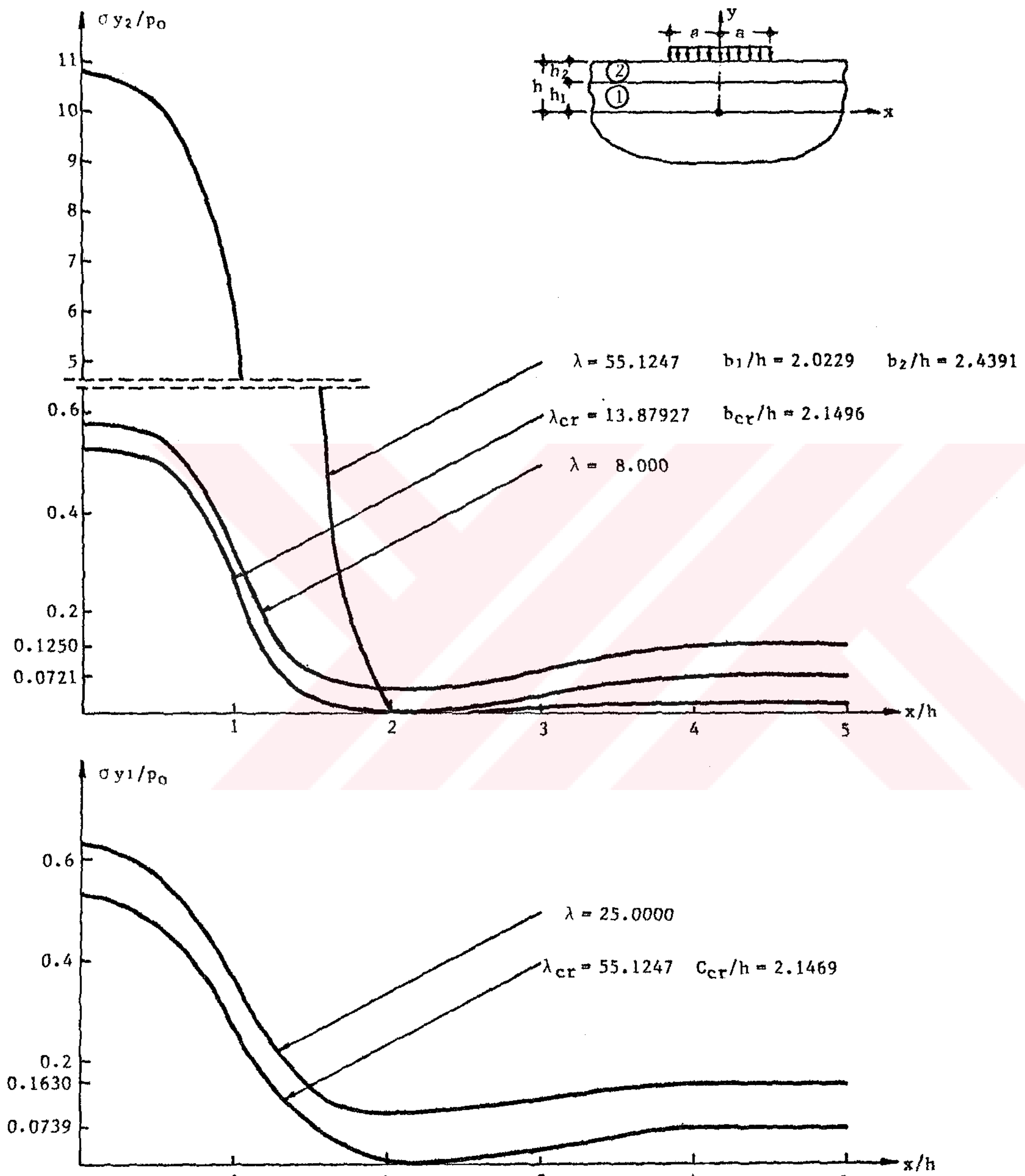
Şekil C.4. $a/h = 1.0$, $\mu_2/\mu_1 = 1.766$, $\mu_3/\mu_1 = 0.575$, $\nu_1 = 0.34$, $\nu_2 = 0.30$, $\nu_3 = 0.34$ için temas yüzeylerindeki gerilme dağılımı. 1 Kütle kuvvetsiz hal, 2 $\rho_1 gh/p_o = 0.830$, $\rho_2 gh/p_o = 0.787$



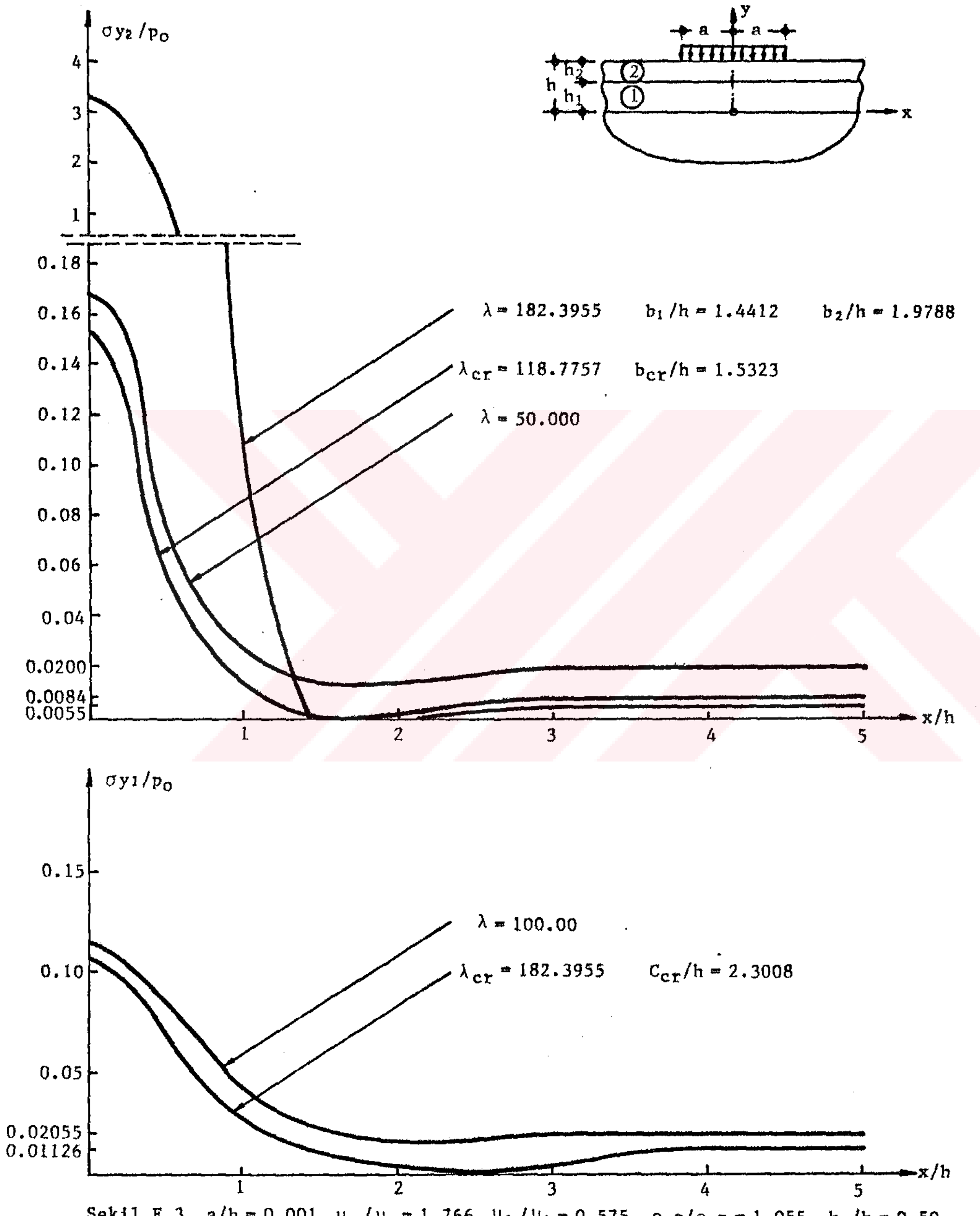
Şekil D. Süreksiz temas durumunda düzgün yayılı yüklü bileşik tabaka.



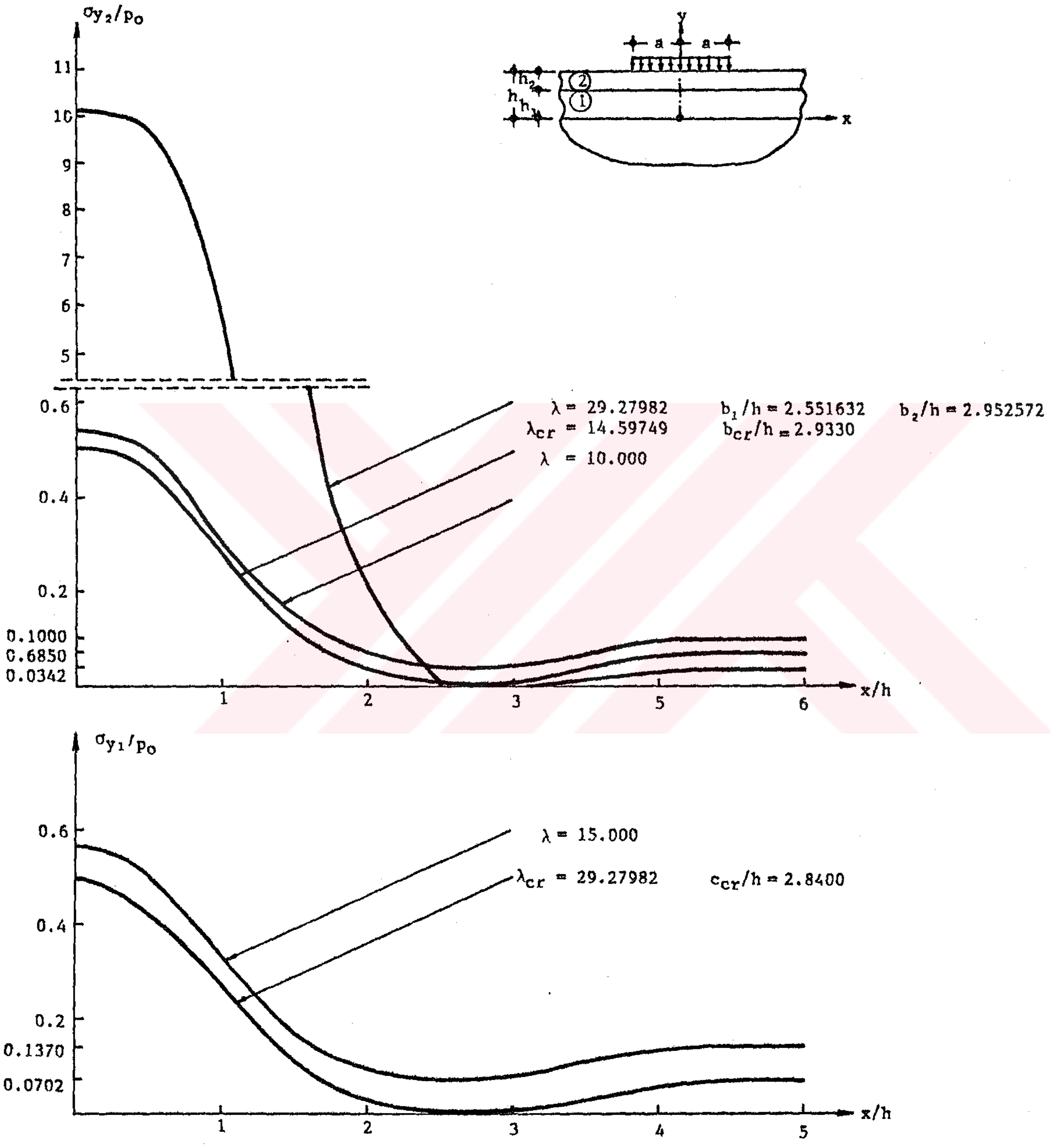
Şekil E.1. $a/h = 0.001$, $\mu_2/\mu_1 = 0.575$, $\mu_3/\mu_1 = 1.766$, $\rho_1 g/\rho_2 g = 3.074$, $h_1/h = 0.50$ için iki tabaka ve tabaka-zemin arasındaki gerilme dağılımları.



Şekil E.2. $a/h = 1.000$, $\mu_2/\mu_1 = 0.575$, $\mu_3/\mu_1 = 1.766$, $\rho_1 g/\rho_2 g = 3.074$, $h_1/h = 0.50$ için iki tabaka ve tabaka-zemin arasındaki gerilme dağılımları.



Şekil E.3. $a/h = 0.001$, $\mu_2/\mu_1 = 1.766$, $\mu_3/\mu_1 = 0.575$, $\rho_1 g/\rho_2 g = 1.055$, $h_1/h = 0.50$ için iki tabaka ve tabaka-zemin arasındaki gerilme dağılımları.



Şekil E.4. $a/h = 1.0$, $\mu_2/\mu_1 = 1.766$, $\mu_3/\mu_1 = 0.575$, $\rho_1 g/\rho_2 g = 1.055$, $h_1/h = 0.50$ için iki tabaka ve tabaka-zemin arasındaki gerilme dağılımları.

ÖZGEÇMİŞ

1953 yılında Şalpazarı'nda doğan Fevzi Lütfü Çakıroğlu öğrenimine 1959 yılında Elazığ'da başlamış, 1960 sonlarından itibaren Trabzon'da devam ederek Orta ve Lise öğrenimlerini tamamlamış ve 1971 yılında Trabzon Lisesinden mezun olmuştur. 1975 yılında K.T.Ü. İnşaat Mühendisliği Bölümünü kazanmış ve 1979 yılında İnşaat Mühendisi ünvanı ile mezun olmuştur. 1973-1981 yılları arasında Karayolları Genel Müdürlüğünün Trabzon ve Elazığ Bölge Müdürlüklerinde çalışmıştır.

1982 yılında K.T.Ü. İnşaat Mühendisliği Bölümüne Yüksek Lisans öğrencisi ve Mekanik Anabilim Dalına Araştırma Görevlisi olarak girmiştir. Askerlik görevini 1983 yılında kısa dönem olarak yapmış ve aynı göreve geri dönmüştür. 1985 yılında Yüksek Lisans tezini tamamlayarak İnşaat Yüksek Mühendisi ünvanı ile mezun olmuştur.

Evli ve iki çocuk babasıdır. Halen aynı anabilim dalındaki görevine devam etmektedir.