

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ PROGRAMI

YÜZEY DOKUSUNUN ve FRAKTAL CİSİMLERİN  
BİGİSAYARLA ÜRETİMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Elk.Müh. Cemal KÖSE

AĞUSTOS - 1990

T R A B Z O N

3820

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI  
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ PROGRAMI

YÜZEY DOKUSUNUN ve FRAKTAL CİSİMLERİN  
BİGİSAYARLA ÜRETİMİ

Elektronik Müh. Cemal KÖSE

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde  
"Elektronik Yüksek Mühendisi"  
Ünvanı Verilmesi için Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 6 Ağustos 1990

Tezin Sözlü Savunma Tarihi : 28 Ağustos 1990

T. C.  
Yükseköğretim Kurulu  
Dokümantasyon Merkezi

Tez Danışmanı : Yrd.Doç.Dr. Rıfat YAZICI

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Mümtaz YILMAZ

Jüri Üyesi : Doç. Dr. Osman TONYALI

Enstitü Müdürü : Doç.Dr. Temel SAVAŞKAN

AĞUSTOS - 1990

T R A B Z O N

## ÖNSÖZ

Bu tez çalışması, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektrik-Elektronik Mühendisliği Programı Elektronik Anabilim Dalı Yüksek Lisans programı, Bilgisayar Grafikleri alanında yapılmıştır.

Çalışma, Bilgisayar Grafikleri biliminin, önemli ve tamamlayıcı konularından olan doku üretimi ve cisim yüzeyine eklenmesi üzerine yapılmıştır. Konunun güncelliği, bilgisayar yardımı ile üretilen görüntülerin, son zamanlarda bir çok tasarım ve üretim alanında kullanılmaya başlanmasına dayanmaktadır. Sergilenen görüntü üretim tekniklerinde amaçlanan önemli hedeflerden biride, üretilen görüntülerin doğallaştırılmasıdır. Doğallaşmayı en iyi şekilde cisme kazandıran, cisim yüzeyine eklenen doku ögesi olmaktadır. Bu konudaki en anlamlı gelişme, fraktal doku üretimi ve kullanımı ile sağlanmıştır. Cisim üretimi, doku üretimi, ve kullanımının amaçlandığı bu çalışmanın, konu üzerinde çalışanlara yararlı olacağı inancındayım.

Çalışmalarım sırasında yardımlarını benden esirgemeyen, tez yöneticim sayın Yrd.Doç.Dr. Rifat YAZICI'ya ve emeği geçen araştırmacı arkadaşlarıma, bölüm çalışanlarına ve diğer ilgililere teşekkürü borç bilir.

Cemal KÖSE

Ağustos 1990

## İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖZET	vi
SUMMARY	vii
<b>BÖLÜM 1 GİRİŞ</b>	<b>1</b>
<b>BÖLÜM 2 DÜZLEM ve UZAY EĞRİLERİNİN OLUŞTURULMASI</b>	<b>4</b>
2.1 Giriş	4
2.2 Yüzeylerin Temsili	5
2.3 Düzlem Yüzeyler	6
2.4 Bilineer Yüzeyler	7
2.5 Lofted veya Ruled Yüzeyler	8
2.6 Lineer Coons Yüzeyi	10
2.7 Bikübik Yüzey Parçası	11
2.8 Bezier Yüzeyleri	14
<b>BÖLÜM 3 ROTASYON, ÖTELEME ve PROJEKSİYON</b>	<b>17</b>
3.1 Giriş	17
3.2 Homojen Koordinatlar	17
3.3 Ölçeklendirme	18
3.4 Kırılma	19
3.5 Yansıma	19
3.6 Öteleme	20
3.7 Rotasyon	21
3.8 Affine, Perspektif Geometri ve Projeksiyon	24
<b>BÖLÜM 4 GÖRÜNMEYEN YÜZEYLERİN YOK EDİLMESİ</b>	<b>28</b>

4.1	Giriş	28
4.2	Z-Bellek Yöntemi	28
4.3	Görünebilir Yüzeyle İçin İçin Çizme Yöntemi	32
<b>BÖLÜM 5</b>	<b>AYDINLATMA MODELİNİN KURULMASI</b>	<b>43</b>
5.1	Giriş	43
5.2	Modelleme	44
5.3	Düzlem Yüzeyle, Yüzey Normalinin Bulunması	49
5.4	Fraktal Cisimlerin Aydınlatılması	51
5.5	Boyama	53
<b>BÖLÜM 6</b>	<b>DOKU ÜRETİMİ ve İZDÜŞÜMÜ</b>	<b>54</b>
6.1	Giriş	54
6.2	İzdüşüm	54
6.3	Doku Eklenmesi	55
6.4	Doku İzdüşümü ve Antialiasing	59
<b>BÖLÜM 7</b>	<b>FRAKTAL GEOMETRİ</b>	<b>66</b>
7.1	Giriş	67
7.2	Örtünme Boyutu	68
7.3	En Basit Fraktal Cisim, Cantor Tozu	72
7.4	Fraktal Cisim Modelleme	74
7.5	Markov Rasgele Süreçlerinin Fraktal Modeli	75
7.6	Fraktal Doku Tanımlama ve Kutulama	79
<b>BÖLÜM 8</b>	<b>KARMAŞIK SİSTEMLERDE DİNAMİK DAVRANIŞ</b>	<b>83</b>
8.1	Giriş	83
8.2	Karmaşık Düzlemde Dinamik	84
8.3	Karmaşık Türev	86

8.4	Karesel Üreteçler	87
8.5	Oransal Polinomlar ve İzdüşümleri	90
8.6	Dinamik Sistemlerde Değişmezlik	92
8.7	Dinamik Sistemlerde Julia Kümesi	93
8.8	Dinamik Sistemlerde, Julia ve Mandelbrot Kümelerinin Özellikleri	94
8.9	Dördüncü Boyutta Karmaşık Sistemleri	95
<b>BÖLÜM 9 SONUÇLAR ve ÖNERİLER</b>		<b>97</b>
<b>KAYNAKLAR</b>		<b>105</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ</b>		<b>108</b>

## ÖZET

Bilgisayar grafiklerinde, üretilen cisimlerin canlı görünümler kazanabilmesi, cismin tanımlanmasında ve kurulmasında kullanılan çeşitli yöntemlerin gücüne bağlıdır. Herhangi bir cisim bir noktalar takımı ile veya matematiksel ifadeyle tanımlanabilir. Matematiksel olarak tanımlanan cismin veya manzaranın şekilsel özellikleri dışında, aydınlatma, boyama, ve yüzey özellikleri gibi cisme doğallık kazandıran unsurların önemi de büyüktür. Diğer taraftan görünmeyen yüzeylerin yok edilmesi yöntemleri, bilgisayar grafiklerinin önemli ara aşamalarından birini oluşturmaktadır.

Bu tez çalışmasında doku üretimi ve izdüşümü değişik şekillerde gerçekleştirilmiştir. Bunlardan doku üretimi fraktal olmayan dokular ve fraktal dokular olmak üzere iki kısımda incelenmiştir. Fraktal olmayan dokular üretildikten sonra, doğrusal veya dorusal olmayan izdüşüm yöntemlerinden biri kullanılarak, cisim yüzeyine eklenirler. Fraktal dokular ise izdüşüm yöntemlerinden herhangi biri kullanılarak cismin yüzeyine eklenebileceği gibi, üretilen cismin yapısal özelliğinden de kaynaklanabilir.

Giriş bölümü dahil olmak üzere dokuz bölümden oluşan bu tez çalışmasının, ikinci bölümünde çeşitli matematiksel modeller yardımı ile, fraktal olmayan cisimlerin, üç-boyutlu uzayda kurulması yöntemlerine değinilmiştir.

Üçüncü bölümde, üretilen bu cisimlerin döndürülmesi, ötelenmesi, ölçeklendirilmesi ve projeksiyonu ile iki-boyutlu ekran düzleminde görüntülenmesi işlemlerine değinilmiştir.

En önemli aşamalardan biri olan, görünmeyen yüzeylerin yok edilmesi probleminin çözüm yöntemlerine dördüncü bölümde değinilmiştir.

Beşinci bölümde, aydınlatma modelleri yansıma türlerine göre kurularak, cisimdeki yüzeysel parlaklık dağılımı hesaplanmıştır. Cisim, daha sonra hesaplanan bu parlaklık dağılımına ve altıncı bölümde anlatılan doku çeşitlerinden biri ile dokulandırılması sonucunda oluşan doku etkisine, bağlı olarak boyanmıştır.

Yedinci bölümde, fraktal cisimlerin ve dokuların üretim yöntemleri incelenmiştir. Ayrıca fraktal cisim için uygun deseninin seçilmesine ve üretilen bu fraktal cisimlerin özelliklerine değinilmiştir.

Daha sonra fraktal özellik taşıyan, karmaşık izdüşümler ve bazı sonuçları gözden geçirilmiştir.

Dokuzuncu ve son bölümde ise, üretilen çeşitli ürünler, sonuçlar, ve sorunlar sergilenmiştir.



## SUMMARY

This thesis is submitted for the M.Sc. degree at the Karadeniz Technical University in Trabzon, TURKEY. The subject of the thesis is based on the generation of texture for featureless surfaces produced by classical methods in computer. The thesis is organized into nine chapters.

Chapter 2 provides an overview of techniques available for producing curves, surfaces and objects. Objects in nature are three-dimensional, and they can be described and constructed effectively by means of points and lines this points become an essential element of objects in computer generation of scenes.

Chapter 3 introduces the concept of computer graphics. Objects in three-dimensional space may undergo three types of transformations: rotation, translation, and perspective projection. These transformation are discussed in detail as a foundation for the subsequent studies.

Chapter 4 provides a detailed introduction to the principles and techniques of hidden surface algorithms. Of these techniques, Z-buffer and Ray tracing algorithms are presented in considerable detail for the reason that they are used in scenes produced throughout this work.

Chapter 5 introduces the illumination problems related to the painting of objects. An illumination model built was based on the intensity of lights reflected specularly and diffusely from the illuminated objects. Many images are produced with this model and they are given into appropriate chapter.

Chapter 6 explains the issues involved in featureless surfaces produced by classical methods, and as a solution it presents a new element to improve their appearances, called texture. Adding a texture pattern to smooth surfaces is

essentially a mapping function which is either linear or nonlinear.

Chapter 7 presents a method to generate roughness patterns, which is based on the fractal geometry. The exact visual effects of applying two-dimensional computer graphics to complex polynomial or rational complex polynomial are depicted. Most but not all the visual effects have fractal structure. This chapter conclude, with a presentation of Fractal construction of objects.

In chapter 9, some results and their pictures are illustrated.



## 1 Giriş

Bilgisayarın bilimsel alanlarda kullanılmaya başlanmasından sonra, bilgisayar grafikleri bilimi ortaya çıkmıştır. Önceleri, kullanılan sistemlerin ilkel ve dar amaçlı olmalarından dolayı grafiksel çalışmalar güçlükle y r t lm st r. Daha sonra bilgisayar grafiklerinin, tasarım alanlarında kullanılmaya başlamasının etkisiyle ve geliŐen teknolojinin ekonomik hale getirdiği donanım imkanlarının yardımı ile, bu yeni bilim dalında büyük ilerlemeler gerçekleştirilmiştir.

Son zamanlarda kullanım alanı geniŐleyen bilgisayar grafikleri biliminde, yazılım ve donanım düzeylerinde bir çok yeni geliŐmeler sağlanmıştır. Bu geliŐmelere en çarpıcı örneklerden biride, grafik iŐlemcilerin tasarımcılara sunulması ile oluşan yeni imkanlardır. Donanım ve yazılım alanlarında sağlanan bu yeni olanaklar, amaçlanan gerçel zamanlı sistemlere, bir adım daha yaklaŐılmıŐ olduğunun yeni göstergeleridir.

Bu çalışmada, bilgisayarla üretilen yalın yüzeyli cisimlere veya manzaralara, doku kazandırılarak yeni doğal görünümlerin elde edilmesi amaçlanmıştır. Doğal görümlü cisim görüntüleri üretmek için kullanılan yöntemler kısaca aşağıdaki sıralamaya uygun olarak incelenmiştir.

ilk olarak üretilecek olan yüzey veya cisim, seçilen üretim tekniği ile matematiksek olarak tanımlanır. Bu aŐamada genellikle Bezier yüzeyi kullanılmıştır. Çünkü Bezier yüzeyinin, çok esnek kullanım imkanları sağlaması ve bulunduğu uzayda nasıl bir Şekil alabileceğinin tahmin edilmesinin çok kolay olması, bu tekniği en çok tercih edilen yöntemlerden biri yapmıŐtır.

Görüntü uzayında tanımlanan cisim, projeksiyon yapılarak görüntüleneceği ekran ayrıntısından daha küçük

ayrıntıda altparçalara bölünür. Bu bölümlene işlemleri, cismin yüzeyini temsil eden parametrelere verilen uygun değerlere bağılı olarak gerçekleşir.

Elde edilen herbir altparça, uygun yüzey eliminasyonu tekniğı ile işlenerek, görünür veya görünmez yüzey olmalarına göre aydınlatmaya tabi tutulur.

Görünen yüzeyler, gözlemcinin bakış doğrultusuna ve ışık kaynağının konumuna bağılı olarak kurulan aydınlatma modeli ile aydınlatılır. Aydınlatma işleminde diğeri göz önüne alınması gereken konu ise, yüzeyin ayrıntısını oluşturan dokulardır. Doku etkisi, aydınlatma modelinde hesaplanan parlaklık değerine katılarak, yüzeyi temsil eden pikselin parlaklık değerini belirlemede kullanılır. Aydınlatma modeli ve doku etkisi ile belirlenen parlaklık değeri temsilci pikselde sergilenir. Böylece aydınlatma modeline ve doku etkisine bağılı olarak cisim ekranda sergilenir.

Yüzey dokusu olarak kullanılan pürüzsüz dokuların, cisme her zaman istenen görünümü verememesinden dolayı pürüzlü doku kullanılması denenmiştir. Denemeler sonucunda, parlaklığın fazla olduğu bölgelerde pürüzlülük etkisinin yok olduğu görülmüştür. Bu durum, yeni yöntemlere ihtiyaç duyulmasına neden olmuştur. Çünkü, bir taş parçası veya pürüzlü bir cisim, aydınlatıldığında görülmüştürki, parlaklığın çok olduğu bölgelerde bile çok düşük parlaklık değerine sahip kısımlar bulunabilmektedir.

Yüzeye doku eklenmesi işlemleri sırasında oluşan antialiasinglerin, yani doku uzayındaki dokunun yanlış örneklenmesi sonucunda oluşan hataların, giderilmesi için, çeşitli yöntemlerin uygulanmasına gerek duyulmuştur. Uygulanan antialiasing giderici yöntemler sonucunda düzgün doku izdüşümleri gözlenmiştir.

Yukarıdaki nedenlerden dolayı fraktal geometrinin getirdiğı yeni imkanlardan yararlanma yoluna gidilmiştir. Bu

yeni düşüncenin getirdiği imkanlar ile doğadaki kırılmış düzensiz yapılı cisimlerin de modelenebileceği gösterilmiştir. Bu yeni kavramın ışığında, basit doğrusal olmayan tekrarlamalar ile elde edilen fraktal cisimlerin, sonsuz ayrıntıya sahip oldukları anlaşılmıştır. Diğer bir özellik ise, seçilen uygun fraktal modeller ile üretilen cisimlerin kırılmış düzensiz yapılı görünümünün, cisim yüzeyinin her noktasında oluşan, farklı parlalık değerlerinden kaynaklandığı gözlenmiştir. Yeni olanakların getirdiği düşüncenin ışığında, fraktal dokular ve cisimler üretilerek, değişik şekillerde ve görünümde bilgisayar ekranında sergilenmiştir.

Son olarak karmaşık dinamik sistemlerden yararlanılarak üretilen fraktal dokuların nasıl şekillendikleri üzerinde durulmuştur. Karmaşık dinamik sistemleri karakterize eden bu görüntülerden bir kaç tanesi dokuzuncu bölümde değişik biçimlerde sergilenmiştir.

## 2 DÜZLEM ve UZAY EĞRİLERİNİN OLUŞTURULMASI

### 2.1 Giriş

Bilgisayar grafiklerinde cisimlerin matematiksel olarak oluşturulup görüntülenmesinin bir çok tasarım ve üretim sürecinde önemli rolü vardır. Örneğin otomobil, gemi, uzay gemisi, makina parçaları ve modada elbise tasarımında kullanıldığı gibi doğal olayların modellenmesinde de kullanılmaktadır.

Karmaşık yapılı cisimler, matematiksel olarak tanımlanabilen basit bir takım yüzeylerin uygun şekilde birleştirilmesinden oluşmuş kabul edilebilirler. Üretimi daha kolay olan bu basit yapılı yüzeyler daha sonra kenarlarından birbirlerine birleştirilerek karmaşık yapılı cisimler inşa edilmektedir.

Diğer bir yöntemde, fraktal yüzey veya cisim üretimidir. Bu teknikte cisim, seçilen uygun modele bağlı olarak yapılmaktadır. Kullanılan bu üretim tekniğine, altıncı bölümde geniş olarak değinilecektir.

Cisimlerin bilgisayar yardımıyla oluşturulmasının ve saklanması bazı zorlukları vardır. Bu zorluklar, cismin veya yüzeyin fazla karmaşık olması ve cisim oluşturan nokta miktarının fazla olmasından kaynaklanmaktadır. Üç-boyutlu uzayda, cisim oluşturmadaki bu gibi zorlukları azaltmak için Parametrik yüzey denklemlerinin kurulması yoluna gidilmiştir. Böylece cisimlerin, Uzayda nokta ağı ile tanımlanmasından kaçınılarak, matematiksel ifadesi belirli olan parametrik yüzey eğrilerinin sağladığı kolaylıklardan yararlanılmıştır. Matematiksel tanımlamanın sağladığı kolaylıklar şöyle sıralanabilir.

a. Matematiksel temsil, bize doğru sonucu verdiği gibi,

cisim hakkındaki daha bir çok bilgiyi de kendinde bulundurmaktadır (eğrilik, daire çapı v.b).

b. Bilgisayarda matematiksel olarak depolanan bir cismin çizimi, nokta ağından oluşan cismin çiziminden daha kolaydır.

c. Eğri matematiksel olarak verildiğinden, ara noktaları hesaplamak için interpolasyon yapılmaz.

d. Eğride sürekli değişiklikler yapılarak , yeni biçimler alması isteniyorsa, bu işi sürekli olarak eğriyi temsil eden noktaları değiştirerek yapmak zor olacaktır.

## 2.2 Yüzeylerin Temsili

Burada değinilecek olan düzlem veya eğrisel yüzey çeşitleri, vektörel ve parametrik denklemlere dayandırılmıştır. Bu yüzeyler değişik parçalardan oluşacak biçimde tanımlanmıştır. Yüzeyler arasındaki uyumluluğun sağlanması için, bir eğri tek veya iki parametrelili vektörel fonksiyon olarak temsil edilebilir. İki parametre ile verilen bir uzay eğrisi ise,  $u$  ve  $w$  parametreler olmak üzere,  $p(u,w)=f[x(u,w),y(u,w),z(u,w)]$  şeklinde bir yüzey tanımlar.

Görüldüğü gibi uzaydaki yüzeyin temsili iki parametre ile gerçekleştirilmiştir. Bunun sonucu olarak, bir yüzeyin iki değişkenli vektörel fonksiyon ile temsil edilebileceği kabul edilmiştir.

Seçilen yüzey üzerindeki bir eğri, yüzey denklemindeki  $u$  veya  $w$  parametrelerinden biri sabit kılınarak temsil edilecektir. Diğer taraftan, yüzey üzerindeki herhangi bir nokta ise, her iki parametre sabit kılınarak tanımlanabilir.

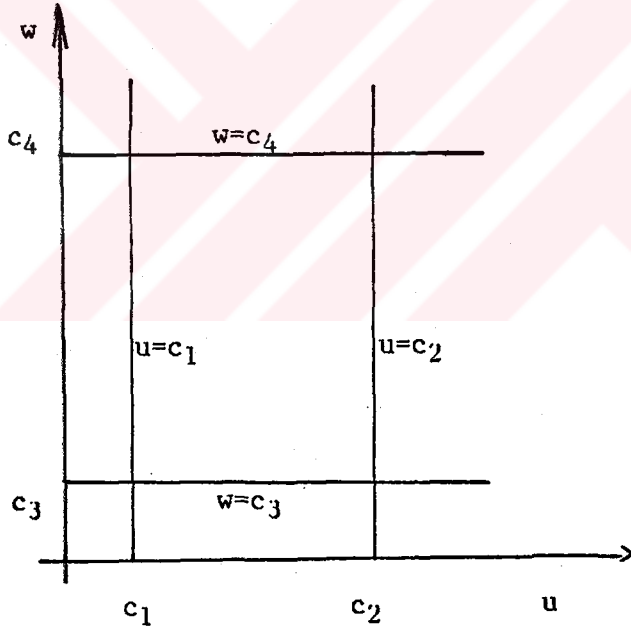
Yüzey parçası bilinen datalardan inşa edilebileceğinden,  $P$  bilinen giriş tasarım datalarından elde edilen bir vektör,  $Q$  ise giriş datası  $P'$ 'den yapılmış yüzeyi belirleyen bir vektör olmak üzere, yüzeyin cinsine bağlı olarak  $P$  ile  $Q$  arasında bir ilişki kurulmalıdır. Burada  $p$  ve

Q, yalnızca belirtilen data noktalarında çakışacaktır.

### 2.3 Düzlem Yüzeyler

Eğer uzayda eğriyi temsil eden vektörel tanım sürekli  $ax+by+cz=d$  matematiksel ifadesiyle verilen düzlem üzerinde bir nokta veriyorsa, bu ifade bir düzlem yüzeyin temsilinin tanımıdır. Bir çok yüzey üretiminin ilk uygulamalarında, kolaylık sağladığı için düzlem yüzeyler kullanılmıştır.

Eğrisel yüzeyler ise, düzlem yüzeylerden çok sayıda kullanılarak kurulabilir.  $u, w$  parametraleriyle belirlenen düzlem yüzeyler, dört köşesi aynı düzlem üzerinde kalacak şekilde ve kenarları doğru veya eğriler ile sınırlanmış olarak temsil edilmektedir.



Şekil 2.1 Dikdörtgenin Yüzeyin Parametrik temsili

Burada,

$$x=f(u,w)$$

$$y=g(u,w)$$



fonksiyonları ve parametrik sınır eğrileri,

$$u=c_1, \quad c_3 \leq w \leq c_4$$

$$u=c_2, \quad c_3 \leq w \leq c_4$$

$$w=c_3, \quad c_1 \leq u \leq c_2$$

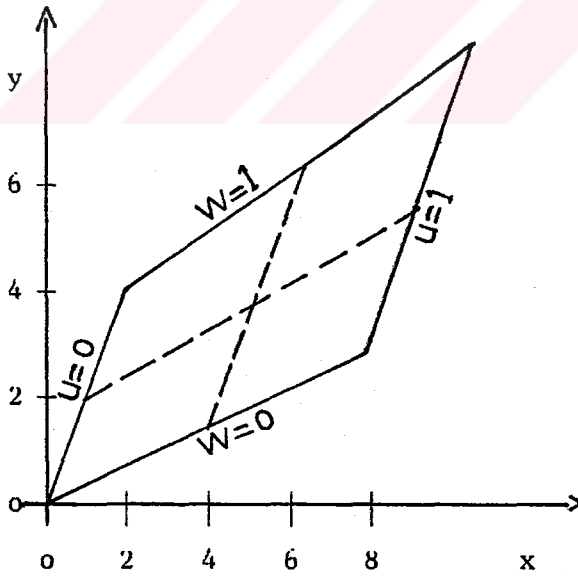
$$w=c_4, \quad c_1 \leq u \leq c_2$$

verilen yüzey şekil 2.1'de gösterilmiştir.

Şekil 2.2'de görüldüğü gibi, gerçek yüzeyi temsil eden fonsiyonlar,  $u, w$  düzlemindeki kareyi,  $x, y$  düzleminde istenen yüzeye izdüştüren fonksiyonlardır.

#### 2.4 Bilineer Yüzeyler

Bu teknikte,  $p(0,0), p(1,0), p(0,1)$  ve  $p(1,1)$  ile birim karenin köşeleri temsil edilmekte ve  $Q(u,w)$  ise bilineer yüzeyin denklemi olmaktadır. Buna göre  $(u,w \in [0,1])$



Şekil 2.2 Düzlem Yüzey

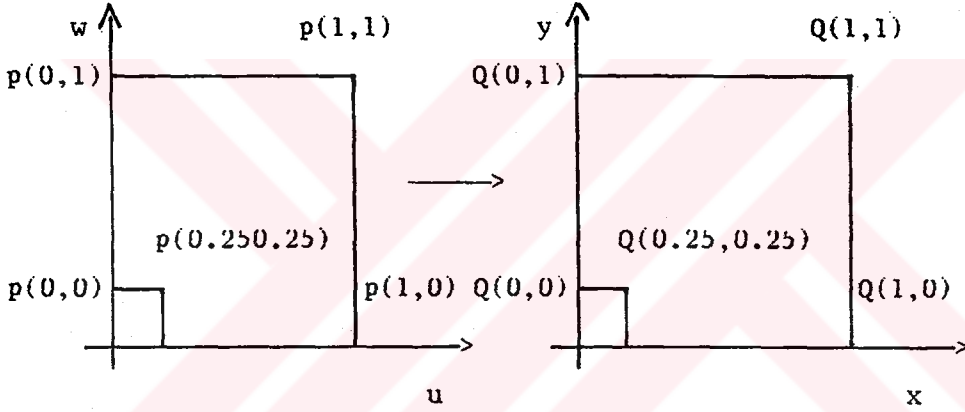
olmak üzere, yüzey üzerinde interpolasyon yapılırsa,

$$Q(u,w)=p(0,0)(1-u)(1-w)+p(0,1)(1-u)w \\ +p(1,0)u(1-w)+p(1,1)uw$$

veya

$$Q(u,w)=\begin{bmatrix} (1-u) & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(0,0) & p(0,1) \\ p(1,0) & p(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-w \\ w \end{bmatrix} \quad 2.1$$

Aynı zamanda  $Q(u,w)$  konum vektörü olarak adlandırılmaktadır.  $Q(u,w)$  vektörünün interpolasyonla oluşturduğu yüzey Şekil 2.3'de verilmiştir.

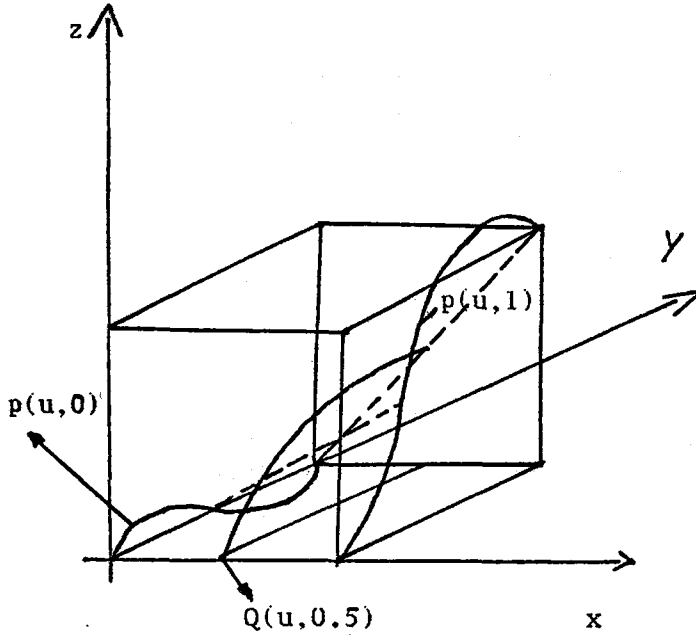


Şekil 2.3 Düzlem Bilineer Yüzey

Eğri sadece dört köşe noktası ile temsil edildiğinden, cisim tasarımında veya oluşturulmasında, bu yöntem fazla esneklik sağlayamamaktadır.

## 2.5 Lofted veya Ruled Yüzeyler

Bu tür yüzeyler daha çok uçak ve gemi tasarım endüstrisinde kullanılmıştır. Böyle bir yüzey, şekil 2.4'de gösterildiği gibi, verilen karşılıklı iki sınır eğrisinin interpolasyonu sonucunda oluşturulabilir.



Şekil 2.4 Loffted Yüzey

iki sınır eğrisi interpolasyon yapılırsa,

$$Q(u,w) = p(u,0)(1-w) + p(u,1)w \quad 2.2$$

$$= \begin{bmatrix} (1-u)(1-w) & (1-u)w & u(1-w) & uw \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(0,0) \\ p(0,1) \\ p(1,0) \\ p(1,1) \end{bmatrix}$$

olur. Bu interpolasyon sonucunda yüzeyin kenarları verilen eğri olacağından

$$Q(u,0) = p(u,0), \quad Q(u,1) = p(u,1)$$

olacaktır. Alternatif olarak  $p(0,w)$  ve  $p(1,w)$ 'yi biliniyor kabul edilirse,

$$Q(u,w) = p(0,w)(1-u) + p(1,w)u \quad 2.3$$

sonucu elde edilir.

## 2.6 Linear Coons Yüzeyi

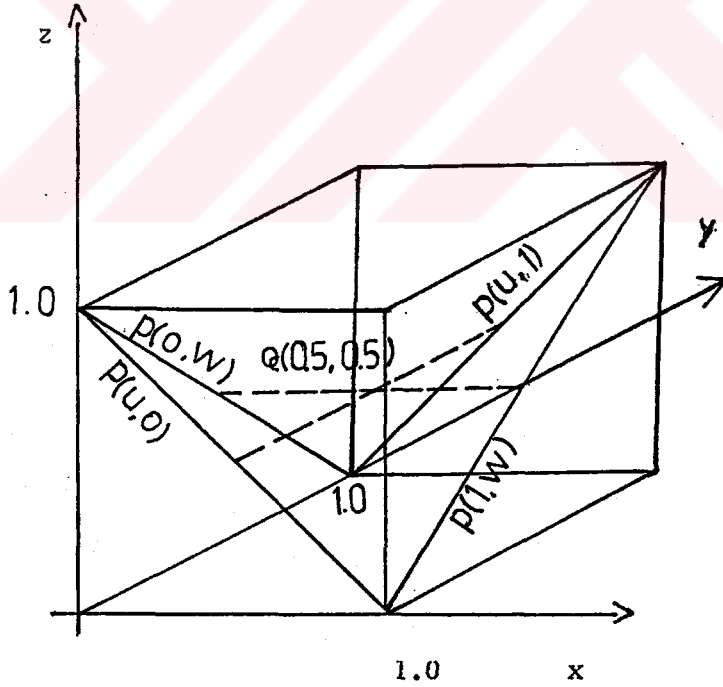
Eğer sınır eğrileri  $p(u,0)$ ,  $p(u,1)$ ,  $p(0,w)$ , ve  $p(1,w)$  biliniyorsa, 2.2 ve 2.3 sonuçları toplanarak,

$$Q(u,w) = p(u,0)(1-w) + p(u,1)w + p(0,w)(1-u) + p(1,w)u \quad 2.4$$

2.4 sonucu elde edilir. Köşe noktaları iki kez toplandığından, gerçek sonuç, eklemeler çıkartılarak elde edilir. Buna göre,

$$\begin{aligned} Q(u,w) = & p(u,0)(1-w) + p(u,1)w + p(0,w)(1-u) + p(1,w)u \\ & - p(0,0)(1-u)(1-w) - p(0,1)(1-u)w \\ & - p(1,0)u(1-w) - p(1,1)uw \end{aligned}$$

oluşur.



Şekil 2.5 Linear Coons Yüzeyi

Yukarıdaki yüzey denklemini incelenirse, köşe ve sınır değerlerinin çakıştığı görülür. Düzeltmeler göz önüne

alınarak, aşağıdaki sade biçim elde edilir.

$$Q(u,w) = [1-u \ u \ 1] \begin{vmatrix} -p(0,0) & -p(0,1) & p(0,w) \\ -p(1,0) & -p(1,1) & p(1,w) \\ p(u,0) & p(u,1) & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1-w \\ w \\ 1 \end{vmatrix} \quad 2.5$$

$(1-u)$ ,  $u$ ,  $(1-w)$  ve  $w$  çakışım fonksiyonları olarak adlandırılır. Şekil 2.5'de Linear Coons yüzeyinin temsili gösterilmiştir (Rogers 1976).

### 2.7 Bikübik Yüzey Parçası

Bu yöntemde  $P(u,0)$ ,  $p(u,1)$ ,  $p(0,w)$  ve  $p(1,w)$  kenar eğrileri ve karıştırma fonksiyonları için, parametrik kübik eğriler kullanılmıştır.

$$p(t) = B_1 + B_2 t + B_3 t^2 + B_4 t^3$$

$$t = u, \quad \text{ve} \quad t = w, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$p'(t) = B_2 + 2B_3 t + 3B_4 t^2$$

$$p(0) = B_1, \quad p(1) = B_1 + B_2 + B_3 + B_4$$

$$p'(0) = B_2, \quad p'(1) = B_2 + 2B_3 + 3B_4$$

Yukarıdaki sınır değerleri kullanılarak,

$$\begin{vmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p'(0) \\ p'(1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B_4 \\ B_3 \\ B_2 \\ B_1 \end{vmatrix} \quad 2.6$$

$$P = M B$$

2.7

$$B=M^{-1} P$$

2.8

$$M^{-1} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

2.9

olmak üzere,

$$p(u) = F_1(u)p(0) + F_2(u)p(1) + F_3(u)p'(0) + F_4(u)p'(1)$$

bulunur.  $t$  parametresi kullanılarak bu bağıntı genelleştirilirse,

$$[F_1(t) \ F_2(t) \ F_3(t) \ F_4(t)] = [t^3 \ t^2 \ t \ 1] \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

2.10

Yukarıdaki  $F(t)$ 'lere skaler parametrik fonsiyonun karıştırma değerleri denir.

Eğer  $u, w$  parametreleri için sonuç genelleştirilirse,

$$p^{a,b}(u,w) = \frac{\partial^{a+b} p(u,w)}{\partial u^a \partial w^b} \quad 2.11$$

ve

$$p^{a,b}(u_i, w_j) = \frac{\partial^{a+b} p(u,w)}{\partial u^a \partial w^b} \Bigg|_{\substack{u=u_i \\ w=w_j}} \quad 2.12$$

olur.

örnek,

$$p^{1,1}(u_i, w_j) = \frac{\partial^2 p(u, w)}{\partial u \partial w} \Bigg|_{\substack{u=u_i \\ w=w_j}}$$

Genel bikübik yüzey denklemini,

$$F(u) = [F_1(u) \ F_2(u) \ F_3(u) \ F_4(u)]$$

olmak üzere yazarsak,

$$Q(u, w) = F(u) \begin{bmatrix} p(0,0) & p(0,1) & p^{0,1}(0,0) & p^{0,1}(0,1) \\ p(1,0) & p(1,1) & p^{0,1}(1,0) & p^{0,1}(1,1) \\ p^{1,0}(0,0) & p^{1,0}(0,1) & p^{1,1}(0,0) & p^{1,1}(0,1) \\ p^{1,0}(1,0) & p^{1,0}(1,1) & p^{1,1}(1,0) & p^{1,1}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1(w) \\ F_2(w) \\ F_3(w) \\ F_4(w) \end{bmatrix}$$

bulunur. Daha sade biçimde,

$$Q(u, w) = [u^3 \ u^2 \ u \ 1] N P N^T [w^3 \ w^2 \ w \ 1]^T \quad 2.13$$

Burada N, daha önce 2.9'da verilen kare matristir. P matrisi 4X4 boyutunda bir matristir. Aynı zamanda P köşe noktalarını, köşe teğetleri ve köşe burma vektörlerini içerir.

Bikübik yüzeylerin tasarım işleminde kullanılmasındaki zorluk, teğet ve burma vektörlerine bağlı olarak, yüzeyin nasıl bir şekil alacağını tahmin etmenin çok zor olmasıdır.

$$p = \begin{array}{|cc|} \hline \text{Köşe} & \text{w-Teğet} \\ \text{koordinatları} & \text{vektörleri} \\ \hline \text{u-Teğet} & \text{Burma} \\ \text{vektörleri} & \text{vektörleri} \\ \hline \end{array}$$

Ancak belirli bir deneyim seviyesinden sonra köşe eğimlerinin ve burma vektörlerinin yüzey üzerindeki etkileri, bir dereceye kadar canlandırılabilir.

## 2.8 Bezier Yüzeyleri

Bezier yüzeyi, cisim temsil eden nokta ağına bağlı olarak şekillendiği için, oluşacak yüzey hakkında önceden kesin tahmin yürütülebilir. İşte Bezier yüzeyinin sağladığı bu kolaylık, tasarım alanlarında daha çok tercih edilmesini sağlamıştır (Rogers 1976)

Bezier poligonları tarafından tanımlanan sınır eğrilerine sahip, dört noktalı bir bezier yüzey parçası 2.14 denklemleri ile,

$$F(u) = [(1-u)^3 \quad 3(1-u)^2 u \quad 3(1-u)u^2 \quad u^3]$$

olmak üzere,

$$p(u, w) = F(u) [B] \begin{array}{|c|} \hline (1-w)^3 \\ \hline 3(1-w)^2 w \\ \hline 3(1-w)w^2 \\ \hline w^3 \\ \hline \end{array} \quad 2.14$$

verilebilir. B matrisine, B tensörü adı verilir. B tensörü

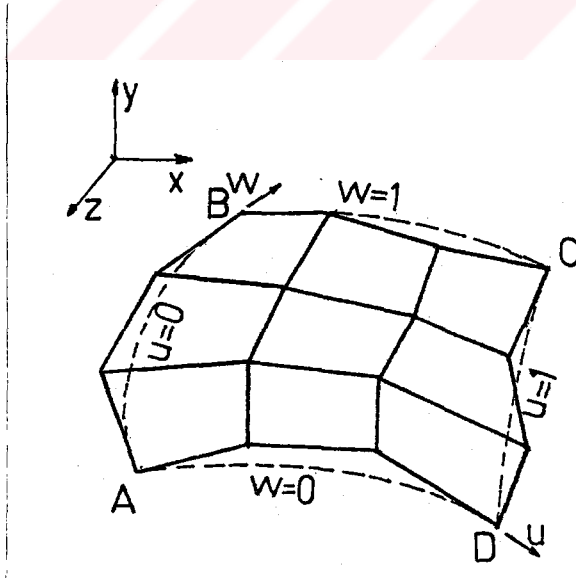


4X4'lük, konum vektörlerinden oluşan bir matristir.

2.14 Bezier denkleminde yalnızca A, B, C, D köşeleri oluşturulan yüzey üzerinde bulunabilir. B(1,2) noktası u yönündeki, birinci bezier poligonunda, birinci noktadan ikinciye doğru bir eğim vektörü tanımlar. B(2,1) nokası ise w yönündeki, birinci bezier poligonunda, yine birinci noktadan ikinciye doğru bir eğim vektörü tanımlar. Benzer şekilde B(1,3), B(2,4), B(3,4), B(4,3), B(4,2) ve B(3,1) ara noktalar arasındaki eğim vektörleridirler. Diğer B(2,2), B(2,3), B(3,3) ve B(3,2) ifadeleri ise A, B, C, D köşe noktalarına ilişkin twist vektörleridir (Rogers 1976).

$$B = \begin{vmatrix} B(1,1) & B(1,2) & B(1,3) & B(1,4) \\ B(2,1) & B(2,2) & B(2,3) & B(2,4) \\ B(3,1) & B(3,2) & B(3,3) & B(3,4) \\ B(4,1) & B(4,2) & B(4,3) & B(4,4) \end{vmatrix} \quad 2.15$$

Şekil 2.6'da örnek bir bezier yüzey parçası çizilmiştir.



Şekil 2.6 Bezier Yüzey Parçası

Bir Bezier yüzeyi Kartezyen çarpım yüzeyi biçiminde aşağıdaki gibi tanımlanabilir (Newman 1979).

$$Q(u,w) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i+1,j+1} J_{n,i}(u) K_{m,j}(w) \quad 2.16$$

Burada  $J_{n,i}$  ve  $K_{m,j}$  karıştırma fonksiyonları adını alır ve

$$J_{n,i} = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} \quad 2.17$$

$$K_{m,j} = \binom{m}{j} w^j (1-w)^{m-j} \quad 2.18$$

biçiminde yazılır.  $B_{i+1,j+1}$  matrisi belirleyen poligon noktalarının konum vektörlerinden oluşur.  $n$  ve  $m$  büyüklükleri sırayla  $u$  ve  $w$  parametreleri yönündeki nokta sayısının bir eksiğine eşittir. Bezier yüzeyinin yerel kontrolü nokta sayısına bağlı olarak iyileşmekte fakat bu kez hesaplama zamanı artmaktadır. Hesaplama zamanının azaltılabilmesi için, cisim, az sayıda noktadan kurulmuş yüzey parçalarının, sıfırinci, birinci veya ikinci dereceden süreklilik koşulunu sağlayacak şekilde birleştirilerek üretilmesi sağlanabilir (Rogers 1976,1985).

## 3 ROTASYON, ÖTELEME ve PROJEKSİYON

### 3.1 Giriş

Dünyadaki cisimler üç-boyutlu olmasına rağmen bilgisayar grafiklerinde görüntüleme olayı iki-boyutlu düzlemde gerçekleşmektedir. Bu sergileme olayının, doğallığını ve esnekliğini sağlayan bu kurallar, dönme, öteleme ve projeksiyon kavramlarına dayanır. Bilindiği gibi insanoğlu, gözünün yapısına bağlı olarak, cisimleri belirli, matematiksel kurallara uygun biçimde görmektedir. Oluşturulan cisimlere yakından veya uzaktan bakma olayı öteleme, dönme veya ölçekleme sonucunda olmaktadır.

İnsanoğlunun üç-boyutlu görmesi, iki ayrı nokta ve açıdan yapılan bakışın sonucunda olmaktadır. Bu bakış açıları ve noktaları karşımıza projeksiyon kavramını çıkarmaktadır. Aynı şekilde, üç-boyutlu görüntüler bilgisayarda üretildikten sonra, ya axonometrik yada perspektif projeksiyon yapılarak, ekran da görüntülenebilir.

### 3.2 Homojen Koordinatlar

Homojen koordinatlarda transformasyon ifadesi,

$$[ X Y Z H ] = [ x y z 1 ] T \quad 3.1$$

$$[ x^* y^* z^* 1 ] = \begin{bmatrix} X & Y & Z \\ H & H & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad 3.2$$

dir. Yukarıdaki T çarpanı, transformasyon matrisidir ve genellikle homojen koodinatlarda 4X4 boyutundadır. Bu T transformasyon matrisi, öteleme, rotasyon, ve projeksiyon

işlemini içerir. T genel transformasyon matrisi 3.3'de verilmiştir.

$$T = \begin{vmatrix} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ h & i & j & r \\ l & m & n & s \end{vmatrix} \quad 3.3$$

verilen genel transformasyon matrisi dört kısımda incelenebilir.

$$\begin{vmatrix} & & 3 \\ & 3X3 & X \\ & & 1 \\ \hline 1X3 & & 1X1 \end{vmatrix}$$

3X3'lük parçayı kapsayan birinci kısım, doğrusal transformasyonu gerçekler. 3X1'lik ikinci parça ise perspektif transformasyonu gerçekleyen elemanlardan oluşur. 1X3'lük kısım ise ötelemeyi gerçekler. Diğer tek eleman ise, tüm cisme, dönüşümlerden sonra yeniden ölçeklendirme uygular.

### 3.3 Ölçeklendirme

Ölçeklendirme görüntülenen cismin büyütülüp küçültülmesini sağlayan matematiksel bir olaydır. Öteleme ve projeksiyon sonucunda cisim kendiliğinden ölçeklenmesine rağmen, transformasyon matrisinde belirtilen ve sadece

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} ax & ey & jz & s \end{bmatrix} \quad 3.4$$

ölçekleme işlemi yapan bileşen de mevcuttur. Buna göre yalnız ölçekleme yapan ifadeler 3.4'de verilmiştir. 3.4 ifadesine göre, her ekseninde, a, e, ve j katsayılarına bağlı olarak, ayrı ayrı ölçekleme yapıldıktan sonra, s ile de bütün cisme tekrar ölçekleme uygulanır.

$$[x \ y \ z \ 1] \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{vmatrix} = [X \ Y \ Z \ S]$$

$$[x^* \ y^* \ z^* \ 1] = \begin{vmatrix} & X & Y & Z \\ & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ & & & 1 \\ S & S & S & \end{vmatrix} \quad 3.5$$

3.5 bağıntısı ile bütün cisme aynı ölçekleme uygulanır.

### 3.4 Kırılma (Shearing)

Eğer transformasyon matrisi uygun seçilmemişse transformasyondan sonra, şekilde oluşan bozulmaya kırılma denir.

$$[x \ y \ z \ 1] \begin{vmatrix} 1 & b & c & 0 \\ d & 1 & f & 0 \\ h & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = [x+dy+hz \ \ bx+y+iz \ \ cx+fy+z \ 1] \quad 3.6$$

Transformasyon matrisinin 3X3'lük kısmı şekilde kırılmayı oluşturmaktadır.

### 3.5 Yansıma

Yansıma x,y düzlemine göre  $T_1$  matrisi, y,z düzlemine göre  $T_2$ , ve x,z düzlemine göre  $T_3$  matrisleri ile aşağıdaki

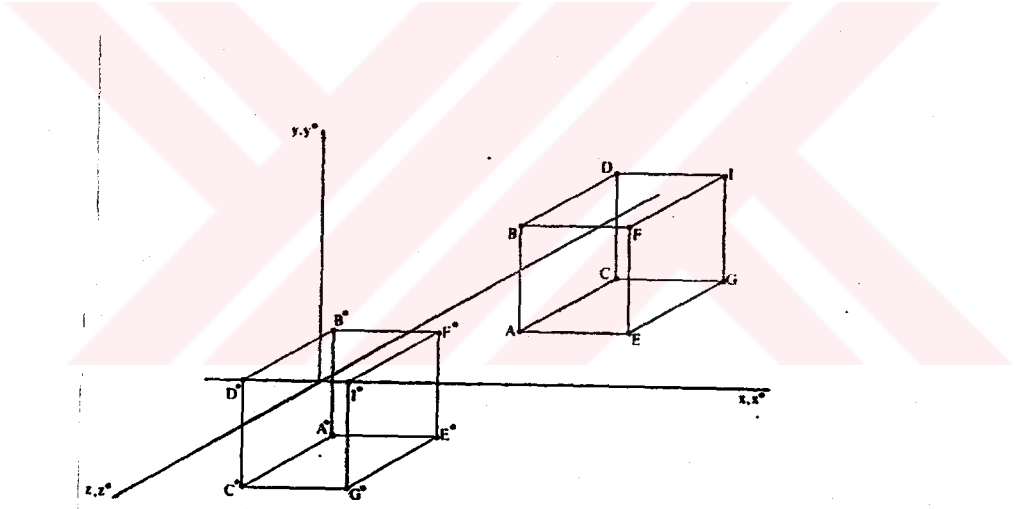
biçimde verilebilir.

$$T_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Benzer şekilde,

$$T_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$T_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$



Şekil 3.1 x,y Düzlemine Göre Yansıma

### 3.6 Öteleme

Öteleme, aşağıdaki matrissel ifadenin sonucundan rahatca görülebilir.

$$[X \ Y \ Z \ H] = [x \ y \ z \ 1] \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & m & n & 1 \end{vmatrix}$$

veya

$$[X \ Y \ Z \ H] = [(x+1) \ (y+m) \ (z+n) \ 1] \quad 3.7$$

buradan,

$$x^* = \frac{X}{H} = x+1 \quad 3.8$$

$$y^* = \frac{Y}{H} = y+m \quad 3.9$$

$$z^* = \frac{Z}{H} = z+n \quad 3.10$$

elde edilir.

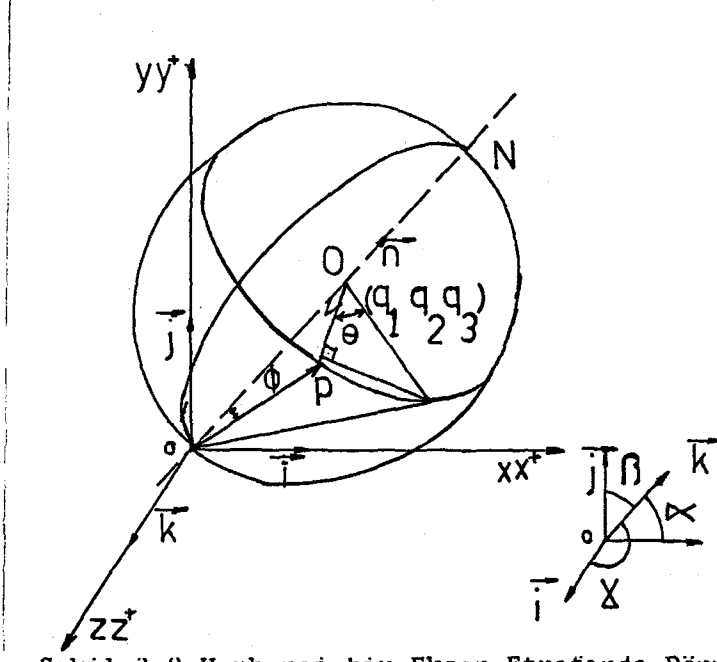
### 3.7 Rotasyon (Dönme)

Bilinen herhangi bir eksen etrafındaki, rotasyonun genel ifadesi 3.11 bağıntısı ile verilebilir. Bu ifade şekil 3.2'ye göre kurulmuştur.

$$[R] = \begin{bmatrix} n_1^2 + (1-n_1^2)\cos\theta & n_1n_2(1-\cos\theta) + n_3\sin\theta & n_1n_3(1-\cos\theta) - n_2\sin\theta & 0 \\ n_1n_2(1-\cos\theta) - n_3\sin\theta & n_2^2 + (1-n_2^2)\cos\theta & n_2n_3(1-\cos\theta) + n_1\sin\theta & 0 \\ n_1n_3(1-\cos\theta) + n_2\sin\theta & n_2n_3(1-\cos\theta) - n_1\sin\theta & n_3^2 + (1-n_3^2)\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.11

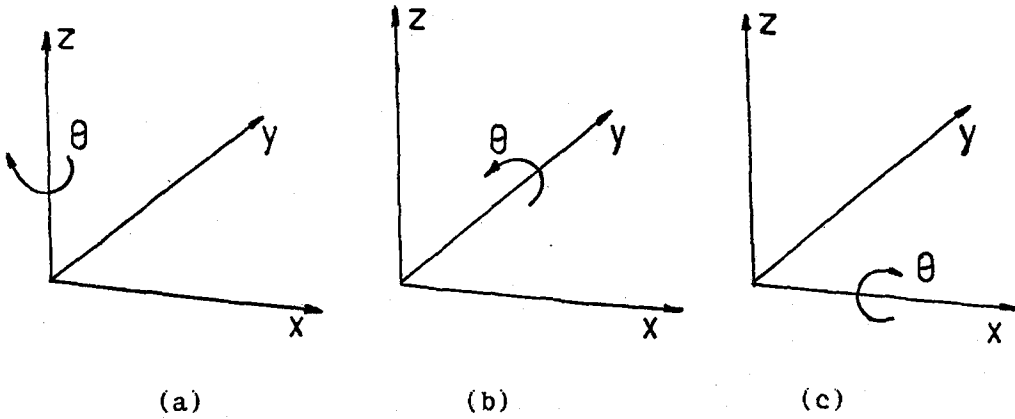
N-0 eksenini etrafında, n birim vektörüne göre oluşturulmuş rotasyon, 3.11 bağıntısı ile gösterilmiştir.



Şekil 3.2 Herhangi bir Eksen Etrafında Dönme

Burada  $n_1$ ,  $n_2$ , ve  $n_3$  rotasyon yapılacak eksene ilişkin, birim vektörlerin  $x$ ,  $y$ , ve  $z$  bileşenleridir.  $\theta$  ise seçilen eksen etrafındaki açı cinsinden dönme miktarıdır.

Rotasyonun özel hallerinden olan,  $x$ ,  $y$ , ve  $z$  eksenleri etrafındaki rotasyon matrisleri, aşağıdaki çizimlere uygun olarak,



Şekil 3.3  $x$ ,  $y$ , ve  $z$  Eksenlerinde Rotasyon

$x$  eksenini etrafında rotasyon matrisi,



$$[R] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad 3.12$$

y eksenini etrafında rotasyon matrisi,

$$[R] = \begin{vmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad 3.13$$

ve z eksenini etrafında rotasyon matrisi,

$$[R] = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad 3.14$$

dir.

Yukarıdaki rotasyon matrislerinin uygulanması sonucunda, sadece rotasyon yapılan ekseninde dönme oluşur. Genel rotasyon matrisi ise, tüm x, y, ve z eksenleri etrafında döndürme gerçekler.

$$\begin{vmatrix} x^* & y^* & z^* & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \end{vmatrix} [R] \quad 3.15$$

Cisimlerin, vektörel nokta ağırları ile yapılandırıldıklarına ikinci bölümde değinilmiştir. Buna göre her hangi bir cismin dönmesi, cisim oluşturan nokta ağırlarındaki her noktanın yeni konumunun, 3.15 bağıntısı ile belirlenmesi sonucunda olur (Rogers, 1976).

### 3.8 Affine, Perspektif Geometri ve Projeksiyon

Affine geometrinin teoremleri Euclidean (Rogers, 1976) geometrinin teoremleriyle aynıdır. Affine geometri, transformasyon ve ardından ötelemenin geldiği, doğrusal dönüşümlerin bir kombinasyonudur. Bu geometrinin temel kavramlarından biri de paralelliktir. Affine transformasyonun diğer önemli özelliği de genel transformasyon matrisinin son sütünü,

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}^T$$

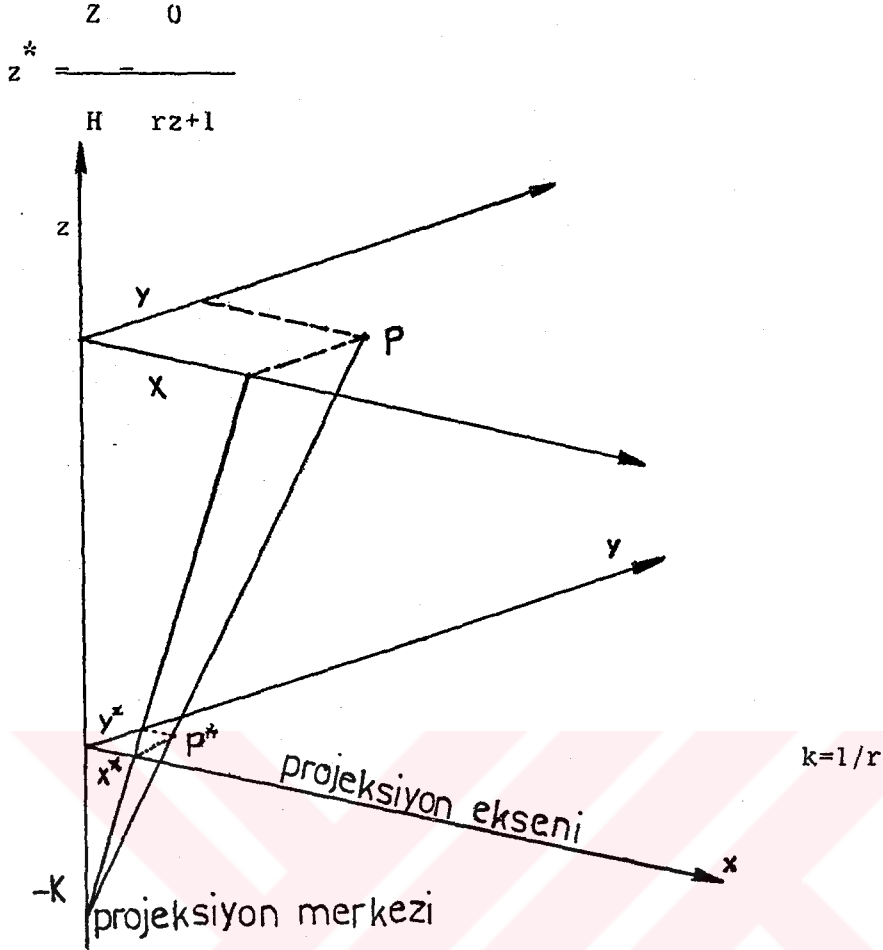
olmasıdır.

Perspektif transformasyon, her hangi bir üç-boyutlu uzaydan diğer bir üç-boyutlu uzaya olan transformasyon gibi düşünülebilir. Genel 4X4'lük transformasyon matrisinde son sütün elemanlarından en az ikisi sıfırdan farklı ise, perspektif transformasyon ortaya çıkar. Perspektif transformasyon ile projektif transformasyonun kombinasyonu, perspektif projeksiyon olarak adlandırılır. Perspektif projeksiyon üç-boyutlu uzaydan iki-boyutlu düzleme olan transformasyonu gerçekleştirir. Şekil 3.4'de r düzlemi üzerine izdüşüm işlemi gösterilmiştir.

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* & z^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad 3.16$$

$$= \begin{bmatrix} x & y & 0 & (rz+1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} X \quad x \\ x^* = \frac{\quad}{H \quad rz+1} \end{array} \quad \begin{array}{c} Y \quad y \\ y^* = \frac{\quad}{H \quad rz+1} \end{array}$$



Şekil 3.4 Bir Noktanın Perspektif Projeksiyonu

Perspektif projeksiyonda, projeksiyon merkezi sonsuza yerleştirilirse, axonometrik projeksiyon oluşur. Diğer bir deyişle, axonometrik projeksiyon determinantı sıfır olan affine transformasyon yardımıyla üretilmektedir. Axonometrik projeksiyonun en önemli özelliği, projeksiyon merkezinin sonsuzda bulunmasıdır.

Trimetrik projeksiyonda, transformasyon matrisi salt rotasyona sebep olur. Bu nedenle koordinat eksenleri projeksiyon yapıldığı zaman ortogonal olarak kalır.

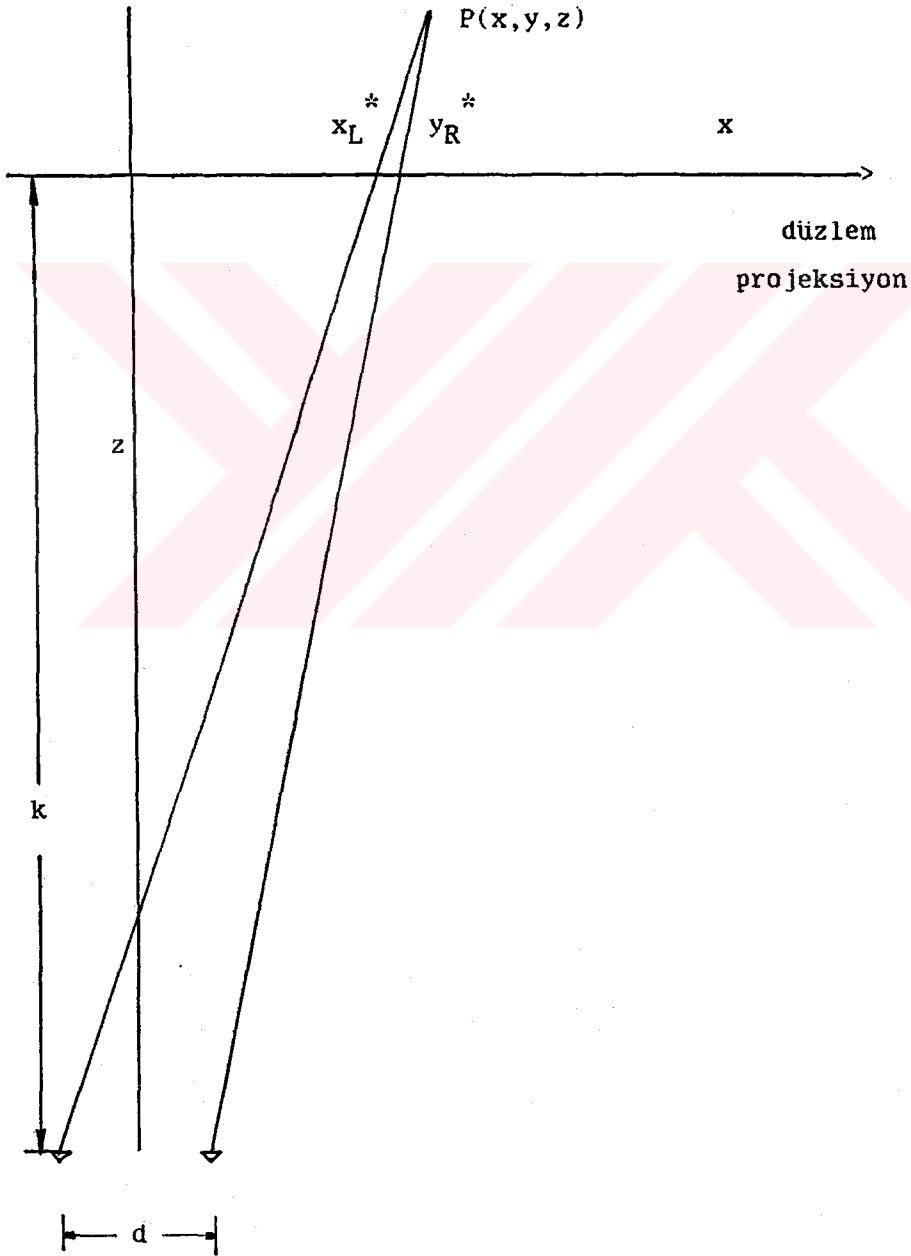
Dimetrik projeksiyonun en önemli özelliği, uygulandığında, üç eksenin ikisinin eşit ölçeklenmesidir.

Dimetrik benzeri olan izometrik projeksiyonda, cisim üç ekseninde de eşit ölçekte kısalmaktadır.

Her hangi bir  $n$  düzlemine yapılan projeksiyon ifadesi 3.16 bağıntısında verilmiştir.

$$[X \ Y \ Z \ 1] = [x \ y \ z \ 1] \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 1 \end{vmatrix} = [x \ y \ n \ 1] \quad 3.17$$

Stereographic projeksiyon ise, mühendislik, fizik, kimya, ve tıp alanlarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Stereographic projeksiyon her bir göz için ayrı ayrı manzara oluşturma prensibine dayanır.



Şekil 3.5 Stereographics Perspektif

İnsan gözü 50 cm uzaklıktaki cisimler için, güçlü stereo etkiler oluşturmaktadır. Buna göre, her iki göz için transformasyon veya projeksiyon matrisi aşağıda verilmiştir.

sağ göz	sol göz
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/k \\ k/20 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/k \\ -k/20 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Şekil 3.5 de ise stereographic perspektif, x,z düzleminde canlandırılmıştı.



## 4 GÖRÜNMEYEN YÜZEYLERİN YOK EDİLMESİ

### 4.1 Giriş

Bilgisayar grafiklerinin problemlerinden biri de görünmeyen yüzeylerin atılması işlemidir. Bu aşamanın gerçekleşmesi hem zor hem de cisimin karmaşıklığına bağlı olarak çok fazla zaman, işlem, ve donanım gerektirmektedir.

Basit olan modellemelerde cisim fazla karmaşık değil ise, en basit yöntem sıralama tekniğidir. İlk önce cisim bir piksel tarafından kaplanan altparçalardan oluşacak şekilde, dilimlere bölünür. Daha sonra bu alt parçalar, gözlemciye en uzak parçadan başlayarak en yakın parçada sona eren, sıralamaya uygun olarak ekrana yapıştırılırlar. Bu işlem, ilk yapıştırılan parçaların üzerlerine yapılan her yeni yapıştırmadan sonra, eski parçalar yerlerini son yapıştırılan parçalara bırakacak şekilde gerçekleşir. Yöntemde cisimlerin karmaşıklığı artıkça işlem zamanı da üstel olarak artmaktadır. Karmaşık cisimlerde çok fazla zaman almasından dolayı yöntemin uygulanması mümkün olamamaktadır. Uygulanabilir iki ayrı yüzey eliminasyonu yöntemi bundan sonraki iki başlık altında incelenecektir.

### 4.2 Z-Bellek Yöntemi

Z-bellek gizli yüzey algoritmalarının en basitlerinden biridir. Bu teknik ilk defa Catmull tarafından önerilmiş olan, bir görüntü uzayı algoritmasıdır. Z-bellek, çerçeve bellek düşüncesinin basit bir genişletilmiş halidir. Görüntü uzayındaki her bir pikselin özelliklerini saklamak için bir çerçeve bellek kullanılır. Z-bellek ise, görüntü uzayındaki görünebilen her bir pikselin z koordinatlarını

veya derinliğini saklamak için kullanılan bir bellektir.

Kullanımda, çerçeve belleğe yazılacak yeni pikselin derinlik veya  $z$  değeri,  $Z$ -belleğe saklanmış olan o pikselin derinlik değeri ile karşılaştırılır. Bu karşılaştırma yeni pikselin, çerçeve bellekte daha önceden saklanmış olan pikselin önünde olduğunu gösterirse, o zaman yeni piksel çerçeve belleğe yazılır ve  $Z$ -bellek yeni  $z$  derinlik bilgisi ile güncelleştirilir. Eğer yeni piksel önde değil ise, herhangi bir işlem yapılmaz. Kavramsal olarak, bu algoritma en büyük  $Z(x,y)$  için  $x$  ve  $y$  değerlerini araştırmaktadır.

Algoritmanın basitliği en büyük üstünlüğüdür. Ayrıca, bu algoritma gizli yüzey problemini ve karmaşık yüzey kesişimlerini de gerçekler. Manzaralar herhangi bir karmaşıklıkta olabilirler. Görüntü uzayı sabit boyutlu olduğundan, manzaranın karmaşıklığına bağlı olarak hesaplamada meydana gelen artma en fazla lineer olur.

Bir manzara veya resimdeki elemanlar, çerçeve belleğe veya  $Z$ -belleğe keyfi sırada yazılacağından, derinlik öncelik sırasına sokulmasına gerek yoktur. Bundan dolayı, derinlik sırasına ilişkin hesaplama zamanı yok edilmiştir.

Kullanılacak saklayıcı miktarı, bu algoritmanın ilkesel sakıncasını oluşturur. Eğer manzara,  $z$  koordinatlarının sabit bir alanına göre transform edilir ve kırılırsa, o zaman sabit doğruluklu bir  $Z$ -bellek kullanılabilir. bu durumda derinlik bilgisi  $x,y$  bilgisinden daha yüksek doğrulukta tutulmalıdır, 20 bit genellikle yeterlidir.  $512 \times 512 \times 24$  bitlik bir düzlem çerçeve bellek,  $512 \times 512 \times 20$  bitlik  $Z$ -bellek ile birlikte, hemen hemen 1.5 Megabyte'lık bir saklayıcı gerektirir. Bellek maliyetlerinin düşürülmesi, dedicated  $Z$ -bellek ve ona ilişkin donanımı pratik yapacaktır.

Dedicated  $Z$ -belleğin bir alternatifi,  $Z$ -bellek için ya ana belleği veya ana saklayıcıyı kullanmaktır. En küçük saklayıcı miktarı, görüntü uzayını 4,16 veya daha çok alt karelere veya bantlara bölerek elde edilir. Limit durumunda

tek bir satırlık Z-bellek kullanılabilir. İkinci durumda, kesişen satır algoritması ortaya çıkar. Her bir manzara elemanı çok kere işlemde geçirildiğinden Z-bellek segmentlenmesi genellikle bir manzarayı işlemek için gerekli zamanı artırır. Bu artışı azaltmak, her bir alt kare veya band için tüm poligonları işleme sokmayacak olan alan tasnifi yöntemi kullanılır.

Z-belleğin başka bir sakıncası antialiasing, saydamlık, ve yarı saydamlığı gerçeklemenin zor ve pahalı oluşudur. Bu algorithmada çerçeve belleğe pikseller keyfi sırada yazıldığından, önceden filitreleme 'antialiasing' teknikleri için gerekli bilgi kolay bir şekilde elde edilemez. Saydamlık ve yarı saydamlık etkileri için pikseller çerçeve bellek yerel hatalara kadar varan, doğru olmayan bir sırada yazılabilir.

Önceden filitreleme antialiasing tekniklerinin mümkün olmasına rağmen, uygulamaları zordur. Ama soradan filitreleme yani alt piksel ortalaması alma tekniklerinin uygulaması nispeten daha kolaydır.

Sonradan filitreleme antialiasing teknikleri, display ayrıntısından daha büyük ayrıntıda, görüntü uzayında manzara hesaplandığı hatırlanırsa, sonradan filitreleme antialiasing tekniğinin iki yaklaşımı mümkün olmaktadır.

Birincisi, görüntü düzlem çerçeve belleğinden ve Z-bellekten daha büyük bir display uzay ayrıntısı kullanılır. Görüntünün derinliği, yalnız ortalaması alınacak alt pikseller grubunun merkezinde hesaplanır. Eğer gözlemciden olan uzaklığı göstermek için parlaklık ölçeklenmesi kullanılacak olursa, bu teknik uygun olmayabilir.

İkinci teknik, hem artırılmış görüntü uzayı yüksek ayrıntılı çerçeve belleğini ve hemde Z-belleği korur. Görüntü display yapılacağı zaman hem piksel hemde derinlik bilgisinin ortalaması alınır. Bu teknik çok büyük miktarda saklayıcı gerektirir. Örneğin, hem x ve hemde y yönünde iki faktörlük artımla hesaplanmış ve uygun ortalama alma tekniği



kullanılarak antialize yapılmış 20 bitlik Z-belleğe sahip  $512 \times 512 \times 24$  bitlik düzlem görüntü hemen hemen 6 megabytlık saklayıcı gerektirir.

En formal şekilde ifade edilirse, Z-bellek algoritması şöyledir.

- a. Çerçeve bellekleri, zemin parlaklığına veya rengine setlenir.
- b. Z-bellek minimum z değerine setlenir.
- c. Her bir poligona, keyfi sırada satır-dönüşümü yapılır.
- d. Poligondaki her bir  $(x,y)$  pikseli için, o pikseldeki  $z(x,y)$  değerini hesaplanır.
- e. Derinlik  $z(x,y) > Z\text{-bellek}(x,y)$  ise, o zaman poligon özelliklerini "parlaklık, renk, v.b " çerçeve belleğe yazılır ve Z-bellek  $(x,y)$ 'nin yerine  $z(x,y)$  koyulur.
- f. Diğer hallerde herhangi bir işlem yapılmaz.

Ayrıca arka yüz elemesinin, uygun olduğu yerlerde Z-bellek yöntemi bir ön adım olarak uygulanabilir.

Eğer her bir poligon için düzlem denklemleri mevcut ise, bir satır üzerindeki her pikseldeki derinlik hesabı, artımlı olarak yapılır (Rogers 1985).

$$ax+by+cz+d=0$$

$$z=-(ax+by+d)/c=0$$

Yukarıda verilen düzlem denkleminde bir satır üzerinde y sabit kalacaktır. Bu yüzden bu satır boyunca  $X_1=x+\delta d$  deki piksel derinliği,

$$Z_1-z=-(aX_1+d)/c+(ax+d)/c=a(x-x_1)/c$$

veya

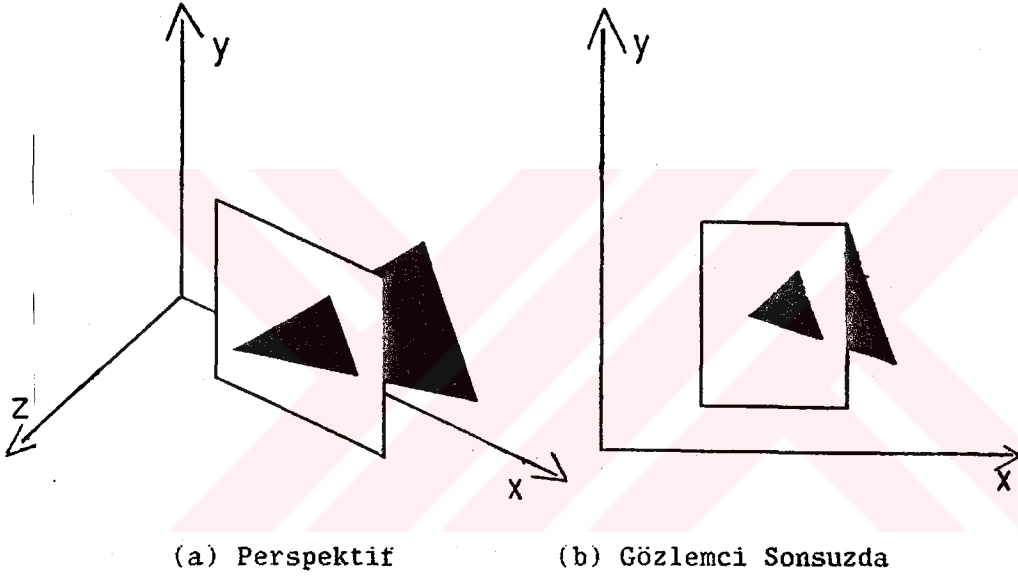
$$Z_1=z-(a/c)\delta x$$

$\delta x=1$  olacağından

$$Z_1 = z - (a/c)$$

4.1

olur. Yukarı da anlatılan Z-bellek yöntemine basit temel çizimler hem perspektif uzayda hemde görüntü düzleminde verilmiştir.



Şekil 4.1 Üçgen ve Dikdörtgenin Görünümleri

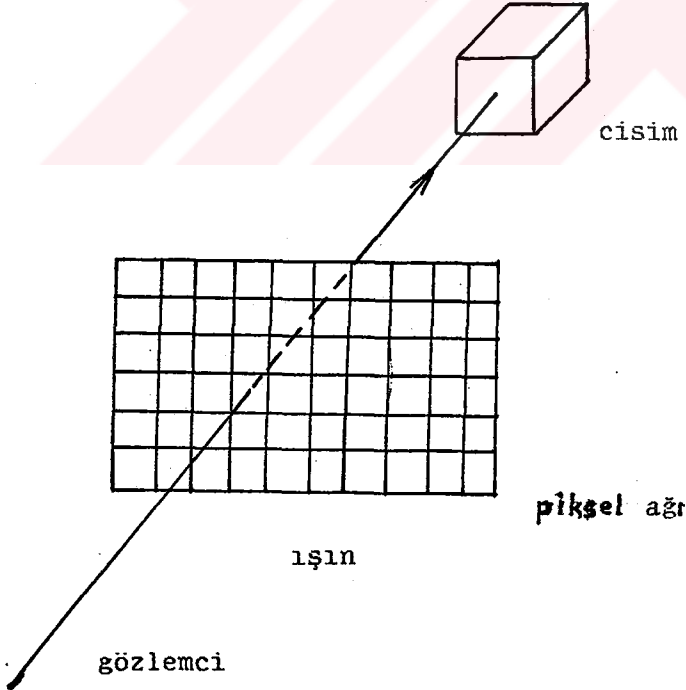
#### 4.3 Görünebilir Yüzeyler İçin Işın Çizme Yöntemi

Z-bellek yöntemi ile temelde benzer özelliklere sahip olan ışın gönderme veya çizme yöntemi bir kaba kuvvet tekniğidir. Bu tekniği belirleyen temel düşünce, ışık kaynağından çıkan ışığın cisme ve daha sonra her hangi bir şekilde gözlemciye ulaşmasına dayanır.

Işık kaynağından gelen ışın yüzeyden yansyarak, kırılarak, veya yüzey üzerinden geçerek gözlemciye ulaşır. Kaynaktan çıkan ışınlar çizilirse, pek azı gözlemciye

ulaşacaktır. Sonuç olarak, bu işlem hesaplama açısından verimli olmayacaktır. Appel Işınların Şekil 4.2'de gösterildiği gibi, zıt yönde yani gözlemciden cisme doğru, çizilmesi gerektiğini önerdi. Bu teknik MAGI tarafından katı model display sistemlerinde başarılı bir şekilde gerçekleştirildi. Orijinal MAGI gerçeklemede, ışınlar, saydam olmayan görünebilir bir cismin yüzeyini kestiği zaman sona ermiş olurlar; yani MAGI yöntemi yalnızca gizli veya görünebilir yüzey işlemcisi gibi kullanmıştır.

Daha sonra Kay ve Whitted global aydınlatma modeliyle bağlantılı, ışın çizme algoritmaları gerçekleştirdiler. Bu algoritmalar bir cismin, diğer bir cismin yüzeyi üzerine yansımalarını, kırılmayı, saydamlığı ve gölge etkilerini hesaba katar. Elde edilen görüntülerde aliasing yoktur. Bu etkileri içeren bir algoritma (Rogers 1985) de incelenmiştir. Buradaki inceleme, gizli veya görünebilir bir yüzey tekniği olarak ışın çizimini ele alır.



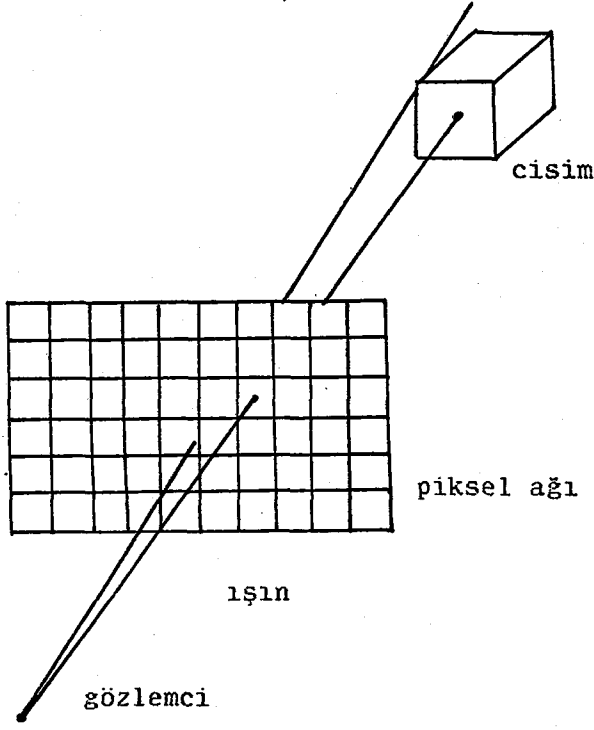
Şekil 4.2 Basit Işın Çizme

Şekil 4.2 en basit ışın çizme algoritmasını göstermektedir. Bu algoritma, manzaranın görüntü uzayına transform edildiğini varsaymaktadır. Gözleme noktası veya gözlemcinin pozitif z ekseninde sonsuzda bulunduğu varsayılmaktadır. Bundan dolayı, tüm ışınlar z eksenine paraleldir. Her bir ışın gözlemciden çıkıp piksel ağındaki bir pikselin merkezinden geçerek manzaraya ulaşır. Herbir ışının yolu, manzaradaki hangi cismin 'eğer varsa', bu ışın tarafından kesildiğini tayin etmek için çizilir. Manzaradaki her cisim ışın için incelenmelidir. Eğer bir ışın bir cismi keserse, ışın ile cismin tüm muhtemel kesişimleri belirlenir. Bu iş, birden çok cisim olması durumunda birden çok kesişim verebilir. Bu kesişimler derinliğe göre tasnif edilir. Maksimum z değerine sahip kesişim, o piksel için görünebilen yüzeyi temsil eder. Bu cismin özellikleri pikselin karakteristiğini belirlemek için kullanılır.

Gözlem noktası sonsuza yerleştirilmediği zaman, Bu algoritma biraz daha karmaşık hale gelir. Burada, gözlemcinin pozitif z eksenine üzerine yerleştirildiği kabul edilir. Görüntü düzlemi, yani raster, şekil 4.3'de z eksenine diktir. Bu etki, görüntü düzlemi üzerinde tek-noktalı perspektif projeksiyon gerçekleştirmektedir.

Görünebilir yüzeyler için ışın çizme algoritmasının en önemli elemanı kesişme döngüsüdür. Kendisi için kesişme döngüsü yazılabilecek herhangi bir cisim bir manzara tarafından kapsatılabilir. Manzaradaki cisimler düzlem poligonların, polihedral hacimlerin, quadric veya bipolinomsal parametrik yüzeyler tarafından sınırlandırılmış veya belirlenmiş hacimlerin karışımından ibaret olabilir. Uzaydaki bir keyfi doğrunun, belirli bir cisim ile kesişimlerinin tayini, hesaplama açısından zor olabilir. Bundan dolayı ışın çizme algoritması, kendi gücünün %75-95 kesişimleri tayin etmek için harcadığından, kesişme döngüsünün verimliliği algoritmanın verimliliğine etki eder.

Gereksiz kesişimleri elimine etmek için, cismi kuşatan



Şekil 4.3 Perspektif Işın Çizme

hacim ile ışının kesişimi incelenir. Eğer bir cisim kuşatan hacim ile bir ışın kesişmezse, o zaman bu cisim o ışın için daha incelenmemelidir. Kuşatan hacim olarak ya kuşatan kutu veya kuşatan küre kullanılabilir. Şekil 4.4'de gösterildiği gibi, kuşatan küre verimsiz olmasına rağmen, üç-boyutlu bir ışının bir küreyi kesip kesmeyeceğinin tayini basittir. Özellikle, kuşatan kürenin merkezinden ışına olan uzaklığı kürenin çapından daha büyük ise, o zaman ışın, kuşatan küreyi kesmez. Bundan dolayı ışın cismi de kesmez.

Bu yüzden kuşatan küre testi, bir noktadan üç-boyutlu bir doğruya 'yani ışına' olan uzaklığın belirlenmesine dönüşür.  $P(x_1, y_1, z_1)$  ve  $P(x_2, y_2, z_2)$  noktaları arasındaki doğrunun parametrik temsilini kullanarak yani

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t = x_1 + at$$

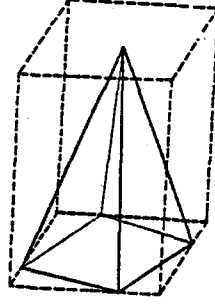
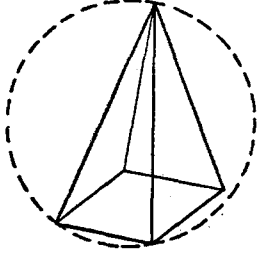
$$y = y_1 + (y_2 - y_1)t = y_1 + bt$$

$$z = z_1 + (z_2 - z_1)t = z_1 + ct$$

bileşenlerine sahip,

$$P(t) = P_1 + (P_2 - P_1)t$$

4.2



(a) kuşatan küre

(b) kuşatan kutu

Şekil 4.4 Kuşatan Hacimler

parametrik ifadeyi kullanarak, bu doğrudan  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  noktasına olan minimum  $d$  mesafesi

$$d^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \quad 4.3$$

dir, burada minimum mesafe için  $P(t)$  üzerindeki noktayı belirleyen  $t$  parametresi

$$t = \frac{a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)}{a^2 + b^2 + c^2} \quad 4.4$$

dır. Eğer  $d^2 > R^2$  ise, "burada  $R$  kuşatan kürenin yarı çapıdır" ışın cismi kesmez.

Kuşatan kutu testinin üç boyutlu ortamda gerçekleşmesi

hesaplama açısından zor olmaktadır. Genelde kuşatan kutuyu biçimlendiren en azından üç tane sonsuz düzlenim, ışın ile kesişimi test edilmelidir. Işının kesişimi, kuşatan kutunun yüzünün dışında meydana gelebileceğinden, her kesişim için kapsama veya içerde olma testide gerçekleştirilmelidir. Sonuç olarak, üç-boyutluda gerçekleştirdiği zaman, kuşatan kutu testi, kuşatan küre testinden daha yavaştır.

Basit bir yöntem kuşatan kutu testini işaret karşılaştırmaya indirgeyerek cisim için kesişme hesabını basitleştirir, ve kesişimler arasında derinlik karşılaştırmasını da basitleştirir. Bu yöntem ışını z eksenineyle çakıştırmak için, koordinat eksenleri etrafında rotasyonlar ve ötelemeler kullanır. Aynı transformasyonlar kutu testi için cismi kuşatan kutuya da uygulanır. Eğer ötelenmiş ve döndürülmüş koordinat sisteminde,  $x_{min}$  ile  $x_{max}$ 'in işareti ve  $y_{min}$  ile  $y_{max}$ 'in işaretleri, şekil 4.5'de gösterildiği gibi, ters iseler, ışın kuşatan kutuyu keser.

Kesişme hesabının basitleştirilişi, genel quadric yüzey tarafından gösterilmiştir. Kartezyen koordinat sisteminde, genel quadric yüzey aşağıdaki ifade ile verilen noktaların geometrik yeridir.

$$Q(x,y,z)=a_1x^2+a_2y^2+a_3z^3+b_1yz+b_2xz+b_3xy+c_1x+c_2y+c_3z+d=0$$

4.5

Işını z eksenineyle çakıştırmak için kullanılan birleşik öteleme ve rotasyon uygulandıktan sonra, eğer varsa ışın ile yüzeyin kesişimi  $x=y=0$  da meydana gelir. Bu yüzden, genel olarak kesişme noktaları,

$$a'_3z^2+c'_3z+d'=0$$

bağıntısının çözümüyle,

$$z = \frac{-c_3 \pm \sqrt{c_3^2 - 4a_3 d}}{2a_3}$$

4.6

bulunur.

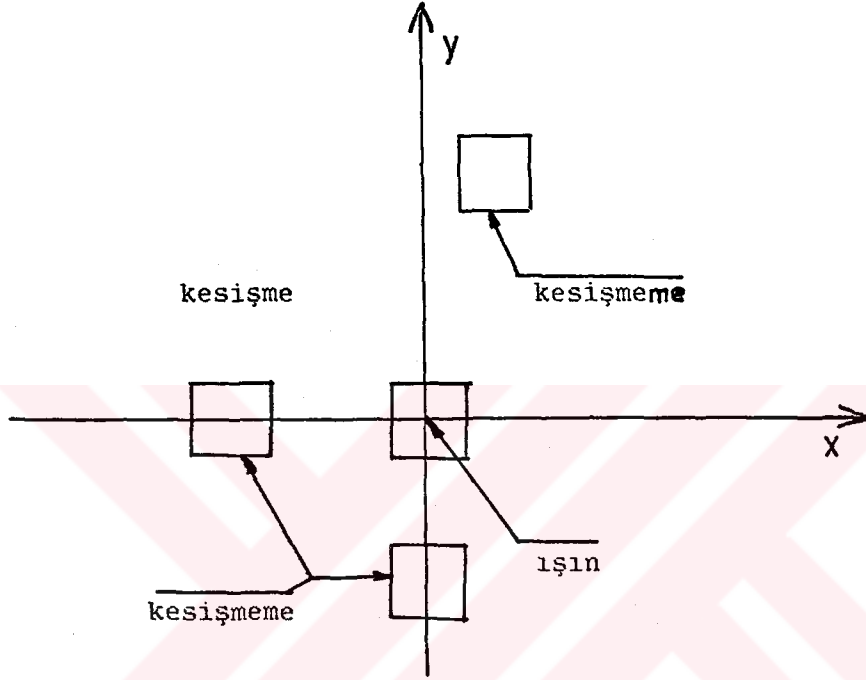
Burada üs işareti, transform edilmiş yönlendirmede genel quadric yüzeyin katsayılarını gösterir. Eğer  $c_3^2 - 4a_3 d < 0$  ise çözümler komplekstir ve ışın yüzeyi kesmez. Eğer sonsuz quadric yüzey, mesela koniler ve silindirler, limit düzlemleri tarafından sınırlanırsa, o zaman limit düzlemleri de transform edilip, kesişimler için incelenmelidir. Sonsuz limit düzlemi ile kesişme bulunacaksa, içerde olma testi gerçekleştirilmelidir. Bununla beraber, transform edilmiş koordinat sisteminde, limit düzlemiyle quadric yüzeyin kesişimi iki-boyutlu projeksiyon üzerinde gerçekleştirilebilir. Orijinal yöntemlerde kesişmeyi elde etmek için, ters transformasyon uygulanır.

Bipolinomsal parametrik yüzey parçaları için kesişim hesapları daha az açıktır. Whitted, bikübik yüzey yamaları için basit bir altbölmeleme tekniği gerçekleştirdi. Burada hesaplama yüzey yaması üzerinde yüzey yamasının orijinal yerinde yürütülür. Eğer başlangıçta bir yama için ışın, kuşatan küreyi keserse, bu yama Catmull alt bölmeleme algoritması kullanılarak bölümlenir. Sözkonusu ışın, alt yamaların kuşatan kürelerine karşı test edilir. Eğer kesişim yoksa, ışın yamayı kesmez. Eğer bu ışın bir alt yamanın kuşatan küresini keserse, bu yama bir daha alt bölümlenir. Bu işlem, kuşatan küreler kesilmeyinceye kadar veya kuşatan küreler önceden belirlenen minimum boyuta erişinceye kadar devam eder. Bu minimum boyutlu kuşatan küreler ışın ile yamanın kesişimlerini belirler.

z eksenine çakışık olması için ışın transform edilerek, alt bölmeleme tekniği, kuşatan küreden daha çok



kuşatan kutu ile kullanılabilir. Bu durum alt bölünmelerinin sayısını azaltarak bu algoritmanın verimliliğini artırır. Konveks kabuk özelliğini gösteren parametrik yüzeyler için, örneğin Bezier ve B-spline yüzeyler için, alt bölmelerin sayısı, altyamalar için kuşatan kutu yerine konveks kabuk kullanılarak daha da azaltılabilir.



Şekil 4.5 Transform Edilmiş Koordinat sisteminde,  
Kuşatan Kutu Kesişimleri

Kajiya polinomsal parametrik yüzeyler için altbölmeleme gerektirmeyen bir teknik geliştirdi. Bu yöntem cebirsel geometriden gelen kavramlara dayanır. Ortaya çıkan yüksek-dereceli cebirsel denklemlerin çözümleri sayısal olarak elde edilir. Benzer bir teknik transform edilmiş koordinat sisteminde gerçekleştirilebilir. Bipolinomsal parametrik yüzeyin bileşenleri,

$$x=f(u,w)$$

$$y=g(u,w)$$

$$z=h(u,W)$$

olmak üzere

$Q(u,w)=0$  ile tanımlandığını ikinci bölümden hatırlayabiliriz. Transform edilmiş koordinat sisteminde  $x=y=0$  olduğundan dolayı,

$$f(u,w)=0$$

$$g(u,w)=0$$

dır.

Bu denklem takımının simultane çözümü kesişimler için  $u$  ve  $w$  değerlerini verir.  $z=\lambda(u,w)$  de yerine koyulması kesişim noktasının  $z$  bileşenini verir. Gerçek çözümün bulunamaması ışının yüzeyi kesmemesi anlamına gelir.  $u$  ve  $w$  için denklem sisteminin derecesi, bipolinomsal yüzey derecelerinin çarpımıdır. Mesela bikübik yüzey için altıncı derecedir. Sonuç olarak sayısal çözüm teknikleri genellikle gerekmektedir. Uygulanabilen yerlerde, ışın ile konveks kabuğun kesişimleri,  $u$  ve  $w$  nin ilk tahminini elde etmek için kullanılabilir. Keza, orijinal yönlendirme kesişimleri elde etmek için ters transformasyon uygulanır.

Çizilen ışın ile manzaradaki cisimlerin çoklu kesişimleri görünebilen kesişimleri belirlemek için gereklidir. Bu kısımda incelenen basit saydam olmayan yüzey algoritmaları için, maksimum  $z$  koordinatlı kesişim, görünebilen yüzeydir. Yansıma ve kırılmaları içeren daha karmaşık algoritmalar için, kesişimler ışının orijin noktasına olan mesafesine göre dizilir. Transform edilmiş koordinat sistemi, basit bir  $z$  tasnifiyle bu ışın başarılmasına izin verir.

Basit bir saydam olmayan yüzey ışın çizme algoritması için izlenecek yöntem aşağıda verilmiştir.

En azından aşağıdaki bilgileri taşıyan bir cisim listesi oluşturunuz:

a. Cismin tam tanımı: Tipi, yüzeyi, karakteristikleri ve v.b .

b. Kuşatan küre tanımı: merkez ve yarıçapı,

c. Kuşatan kutu bayrağı: Eğer bayrak doğru 'true' ise kuşatan kutu testi gerçekleştirilecektir, değilse bu test atlanacaktır. Kuşatan kutu testi tüm cisimler "mesela küre" için uygun olmadığına dikkat ediniz. Kuşatan kutu tanımı  $x_{min}, x_{max}, y_{min}, y_{max}, z_{min}, z_{max}$ .

d. Çizilecek her bir ışın için, her bir cisme üç-boyutlu küre testini orijinal yerde gerçekleştiriniz. Eğer ışın kuşatan küreyi keserse, o cisim aktif cisim listesine koyunuz. Eğer aktif cisim listesi boş ise, pikseli zemin intensitisinde görüntüleyerek devam ediniz. Yoksa, ışını z eksenineyle çakışacak şekilde ötele ve döndür ve bu birleşik transformasyonu saklayınız.

e. Aktif cisimler için: eğer kuşatan kutu bayrağı doğru ise, birleşik transformasyon kullanarak kuşatan kutuyu ışın ile aynı yönlendirmeye transform ediniz ve kuşatan kutu testini gerçekleştiriniz. Eğer ışın kuşatan kutuyu kesmezse bir sonraki cisim ile olaya devam ediniz. Yoksa birleşik transformasyonları kullanarak cisim ışın ile aynı yönlendirmeye transform ediniz, ve ışının cisim ile, eğer varsa, kesişimlerini belirleyiniz. Kesişimleri kesişim listesine koyunuz. Eğer kesişim listesi boşsa pikseli zemin intensitisinde görüntüleyiniz. Yoksa kesişim listesi için  $z'$ 'yi belirleyiniz.

Birleşik transformasyonun tersini hesaplayınız. Ters transformasyonu kullanarak, orijinal yönlendirmedeki kesişim noktasını tayin ediniz. Kesişen cismin özelliklerini ve uygun aydınlatma modelini kullanarak pikseli görüntüleyiniz

Dikkat edinizki basit bir saydam olmayan görünebilen yüzey algoritması için, yüzey özelliklerini veya kesişim noktasındaki yönlendirmeyi gerektirmeyen bir aydınlatma modeli, algoritma içerilmedikçe, ters birleşik transformasyon belirlemek veya orijinal yönlendirmedeki kesişim noktasını belirlemek gerekmez. Bu adımların burada

bulunması, global aydınlatma modeli ile ışın çizme algoritması gerçekleştirildiği zaman uygunluk ve bütünlük sağlanması amaçlanmıştır.



## 5 AYDINLATMA MODELİNİN KURULMASI

### 5.1 Giriş

Cisim görüntülerinin doğallaştırılması, gözlemciye cismin çeşitli noktalarından yansıyıp gelen parlaklık düzeylerinin ilgili noktalarda görüntülenmesine bağlıdır. Cismin aydınlatılması iki ayrı yoldan olabilir. Bunlardan biri doğrudan ışık kaynağından çıkan ışınlar tarafından cismin aydınlatılması, diğeri ise ortam ışığı veya başka cisimlerden yansıyarak gelen ışınların cismi aydınlatmasıdır.

Bir cismin yüzeyine gelen ışık yutulabilir, yansıtılabilir, veya geçirebilir. Gözlemcinin ışığı görmesi, yansıyan veya geçirilen ışığa göre olur. Cisimdeki renklenme ise aydınlatan kaynağının rengine ve yüzeyin özelliklerine bağlı olarak gerçekleşir.

Cismin yüzeyinden yansıyan ışık, yüzeye ışık gönderen kaynağın özelliğine, yönüne , geometrisine, cisim yüzeyinin şekline ve özelliklerine bağlıdır. Bu koşullar altında aydınlatma medeli yansımanın iki ayrı şekline göre ayrı ayrı kurulur ve sonra, toplamları ile gerçek model oluşturulur. Buna göre yansıma iki kısımda incelenir.

a. Yeknesak "diffusely" yansıma, cismin içine giren ve yutulan ve daha sonra yeniden dışarı çıkan ışıkları temsil eder. Yeknesak yansıyan ışığın, tüm doğrultularda homojen yansımından dolayı gözlemcinin konumunun önemi yoktur.

b. Aynasal "speculary" yansımayı cismin dış yüzeyinden yansıyan ışık oluşturur. Yansımayı cismin yüzeyinin aynasal özelliğinden kaynaklandığından, bu yansıma yönlü olacaktır. Yansımanın yönlü olması modeli gözlemcinin konumuna bağlı kılmaktadır.

## 5.2 Modelleme

Lambert'in kosinüs kanunu, mükemmel nüfuz edici yüzeyden olan yansımayı ifade etmektedir. Bu kanuna göre yansıyan ışık miktarı; ışık kaynağının parlaklığına, yansıtıcının yüzey özelliğine, ışık kaynağının doğrultusuna ve yüzeyin normali arasındaki açının kosinüsüne bağlı olarak kurulur, (Şekil 5.1).

$$I = I_1 K_d \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2 \quad 5.1$$

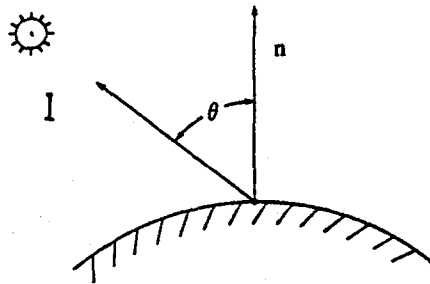
$I$  :Yeknesak yansıyan ışığın şiddeti,

$I_1$  :Işık kaynağının yoğunluğu,

$K_d$  :Yeknesak yansıma katsayısı,

$\theta$  :Gelen ışığın doğrultusu ile yüzey normali arasındaki açıyı gösterir (Rogers 1985).

$\theta$ 'nın  $\pi/2$  'den büyük olması durumunda, ışık cismin arkasında olduğunu için doğrudan ışık kaynağından gelen ışınlar cisimi aydınlatamaz. Burada  $K_d$  sabiti yeknesak yansıma katsayısı, cismin yapısal özelliklerine göre ( $0 \leq K_d \leq 1$ ) değişir.



Şekil 5.1 Yeknesak Yansıma

Bu modelde çevreden gelen ışıklar bulunmadığı için aydınlatma donuk bir görünüm vermiştir. Dağınık ışık kaynağını hesaplamak çok zor olduğu için, yerine homojen adınlatan sabit değerli kaynak alınmıştır. Buna göre yeni model,

$$I = I_a K_a + I_1 k_d \cos(\theta) / (d+k) \quad 5.2$$

şeklini alır.

$I_a$ :Temsili homojen ışık kaynağı.

$k_a$ :Ortam nüfuz yansıma sabiti. ( $0 \leq k_a \leq 1$ )

Eğer yukarıdaki ifade gözlemciden farklı uzaklıktaki iki cisim için uygulanırsa, her iki cismin parlalıklarının aynı olduğu görülür. Gerçekte farklı uzaklıktaki iki cisim aydınlatıldığında, cisimlerin parlalıklarının, gözlemciden cisme olan uzaklığın karesi ile ters orantılı olduğu görülür. Yani cisimler uzaklaştıkça daha az parlak görürlürler.

Perspektif transformasyon uygulandığında, bakış noktasından cisme olan uzaklık  $d$  olsun. Bu durumda, parlalık  $d$ 'nin karesi ile ters orantılı olarak değiştiğinde, gözlemciye çok yakın cisimler için, gerçekçi olmayan değerler elde edilmiştir. En gerçekçi sonuç bu katsayının doğrusal değişiminden elde edilmiştir.

$$I = I_a K_a + \frac{I_1 K_d \cos \theta}{d+K} \quad 5.3$$

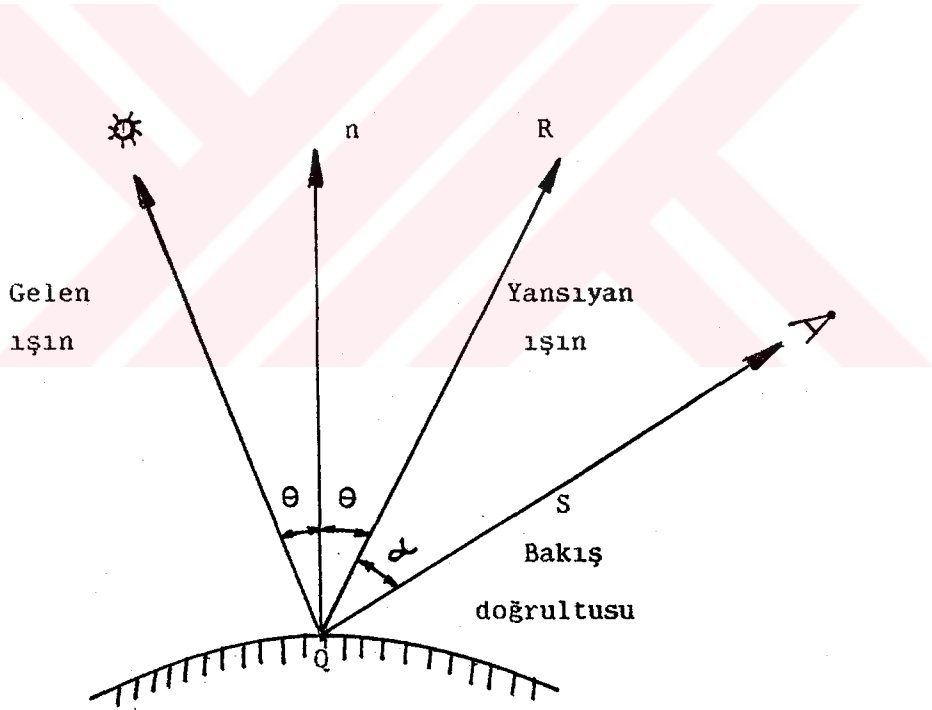
Burada,

$K$  :Görüntüye gerçekçilik veren keyfi bir sabit,

$d$  :Bakış noktasına en yakın cisim ile bakış noktası arasındaki uzaklıktır. Böylece Bakış noktasına en yakın cisim, noktasal ışık kaynağının tam parlaklığı ile, daha

uzak cisimler ise daha düşük parlaklıkta görüntülenirler. Eğer model renkli ise, bu model tüm renkler için ayrı ayrı uygulanır.

Aynasal yansımış ışığın parlaklığı, ışığın geliş açısına, dalga boyuna, ve yansıtan cismin yapısal özelliklerine bağlıdır. Mükemmel yansıtan bir yüzeyde ışığın geliş açısı yansıma açısına eşittir. Bu durumda gözlemci ışığı ancak yansıma doğrultusunda görebilir. Aynasal yansıtma niteliği iyi olmayan yüzeyler için, gözlemciye ulaşan ışık miktarı aynasal yansımış ışığın uzaysal dağılımına bağlıdır. Bu durum pürüzsüz yüzeyler için ışık topu "odaklaşma, highlight" görüntüsü verirken, pürüzlü yüzeyler için ise dağılmış odaklaşma görüntüsü verir.



Şekil 5.2 Aynasal Yansıma

Buna göre aynasal yansımadan kaynaklanan odaklaşmalar gözlemcinin konumuna bağlı olarak hareket ederler. Aynasal yansımış ışığın fiziksel özelliklerinden dolayı, uygun deneysel model basit aydınlatma için,

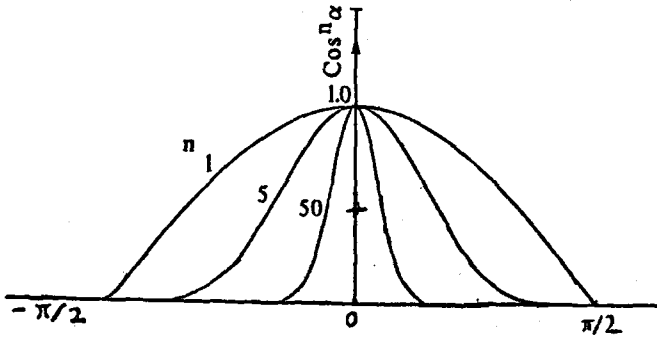


$$I_s = I_1 W(i, \lambda) \cos^n \alpha$$

5.4

bağıntısı ile verilir (Rogers 1985). Burada  $W(i, \lambda)$  yansımaya eğrisi  $\lambda$  dalga boyu ve  $i$  geliş açısının fonksiyonu olarak aynasal yansımış ışığın gelen ışığa oranını verir.  $n$  ise aynasal yansımış ışığın uzaysal dağılımını yaklaşımlandıran bir kuvvettir. Şekil 5.3'de  $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$  ve  $n$ 'nin çeşitli değerleri için  $\cos^n \alpha$  nın değişimi çizilmiştir. Büyük  $n$  değerleri için yüzey metalik özellik gösterir ve yansıyan ışık odaklaşır. Küçülen  $n$  değerleri için, yüzey metalik olmayan "kağıt, odun v.b." özellik gösterir ve odaklaşmanın genişlediği görülür.

Yeknesak ve aynasal yansımaya için yukarıda verilen bağıntılar birleştirilerek,



Şekil 5.3 Aynasal Yansımış Işığın Yaklaşık Uzaysal Dağılımı

$$I = I_a K_a + \frac{I_1}{d+K} (K_d \cos \theta + W(i, \lambda) \cos^n \alpha)$$

5.6

aydınlatma modeli elde edilir.  $W(i,\lambda)$  çok karmaşık bir fonksiyon olduğundan bunun yerine deneysel olarak belirlenen  $k_s$  sabiti kullanılabilir.

$$I = I_a K_a + \frac{I_1}{d+K} (K_d \cos \theta + k_s \cos^n \alpha) \quad 5.7$$

Model 5.7'ye bilgisayar grafiklerinde bazen shading modeli adıda verilir. Renkli görüntü oluşturmak için, üç ayrı ana renk için de shading modeli uygulanarak renk değeri elde edilir. Burada aynasal yansımış ışığın rengi, gelen ışığın rengine bağlı olduğundan  $k_s$  üç ayrı renk içinde sabit değer alır. Eğer cisim birden fazla aydınlatan ışık kaynağı bulunuyorsa, kaynakların doğrusal toplamı alınarak aydınlatma modeli,

$$I = I_a K_a + \sum_{j=1}^m \frac{I_{1j}}{d+K} (K_d \cos \theta_j + k_s \cos^{n_j} \alpha_j) \quad 5.8$$

kurulur.

$m$  : Işık kaynağının sayısını temsil etmektedir.

ve

-

$n$  : Yüzey normalinin birim vektörü,

-

$L$  : Cisimden ışık kaynağına giden doğrultunun birim vektörü,

-

$R$  : Yansıma doğrultusunun birim vektörü,

-

$S$  : Gözlemciden cisme doğru olan doğrultunun birim

vektörü,

olmak üzere düzenleme yaparsak,

$$I = I_a K_a + \frac{I_l}{d+k} [K_d(n \cdot L) + K_s(R \cdot S)^n] \quad 5.9$$

Bulunur, burada

$$\cos \theta = \frac{n \cdot L}{|n| |L|} \quad 5.10$$

$$\cos \alpha = \frac{R \cdot S}{|n| |L|} \quad 5.11$$

dir. 5.9 bağıntısı ile istenilen her hangi bir yüzeyi aydınlatabiliriz.

### 5.3 Düzlem Yüzeylerde Yüzey Normalinin Bulunması

Önceki bölümde, formüle edilen aydınlatma modelinde aynasal yansıma için, yüzey normali gerekmektedir. Yüzeyin eğriliğine bağlı olarak normali değişmekte ve değişen bu sonuç aynasal yansımayı etkilemektedir. Yüzey normali yüzeyin analitik ifadesine bağlı olarak kolayca bulunabilir.

Düzlem yüzeyler, poligonlar veya eğriler tarafından sınırlanmış, basit yüzey parçaları olduklarından işlemlerde kolaylık sağlayan ve çok kullanılan yapı taşları olmuşlardır.

Düzlem denklemi,

$$ax+by+cz+d=0$$

5.12

olan herhangi bir düzlemin normal vektörü,

$$n=ai+bj+ck$$

5.13

olmaktadır. Burada,  $i, j, k$  sırasıyla  $x, y$  ve  $z$  yönündeki birim vektörlerdir. Düzlem denklemindeki  $d$  değeri ise, düzlem üzerindeki her hangi bir noktanın değeri düzlem denkleminde yerine koyulması ile bulunabilir.  $P(x_1, y_1, z_1)$  noktası için,

$$d=-(ax_1+by_1+cz_1)$$

dir.

Diğer taraftan, düzlem üzerinde kalan ve birbirinden farklı yeterli sayıda nokta biliniyorsa, yüzey normali kolayca bulunabilir (Rogers 1985).

Buna göre,

$$n$$

$$a = \sum_{i=1}^n (y_i - y_j)(z_i + z_j)$$

5.14

$$n$$

$$b = \sum_{i=1}^n (z_i - z_j)(x_i + x_j)$$

5.15

$$n$$

$$c = \sum_{i=1}^n (x_i - x_j)(y_i + y_j)$$

5.16

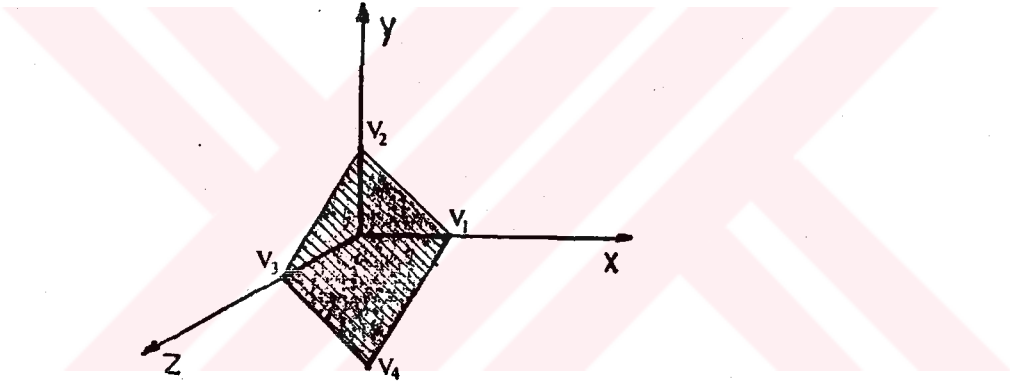
dir. Eğer  $i=n$  ise  $j=1$ , değilse  $j=j+1$  dir. Aşağıda, kenarları dört poligon tarafından sınırlanmış ve dört noktası olan,  $(n=4)$  bir düzlem yüzey için, normal hesabı verilmiştir, şekil 5.4

Yüzey için  $n=4$  olacağından,

$$a=(y_1-y_2)(z_1+z_2)+(y_2-y_3)(z_2+z_3) \\ +(y_3-y_4)(z_3+z_4)+(y_4-y_1)(z_4+z_1)$$

$$b=(z_1-z_2)(x_1+x_2)+(z_2-z_3)(x_2+x_3) \\ +(z_3-z_4)(x_3+x_4)+(z_4-z_1)(x_4+x_1)$$

$$c=(x_1-x_2)(y_1+y_2)+(x_2-x_3)(y_2+y_3) \\ +(x_3-x_4)(y_3+y_4)+(x_4-x_1)(y_4+y_1)$$



Şekil 5.4 Düzlem Yüzey

$$n=ai+bj+ck$$

olur.

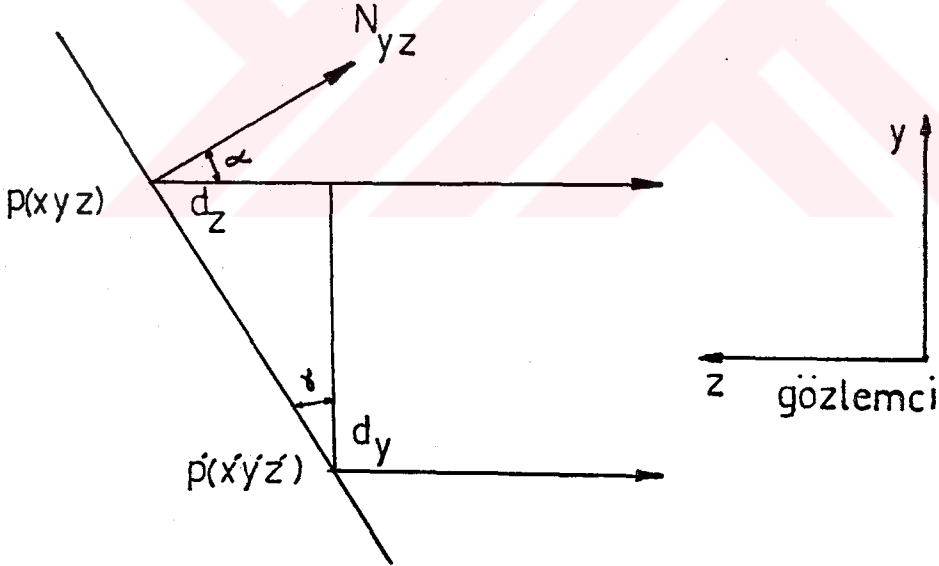
#### 5.4 Fraktal Cisimlerin Aydınlatılması

Daha sonraki bölümde değinilecek olan fraktal cisimler düzenli veya düzensiz yapılarına bağlı olarak değişik şekiller alırlar. Fraktal cisimlerden olan bulutlar genellikle saçılmış ışık yaydığından yeknesak yansımalar oluştururlar. Diğer taraftan, yer yüzeyi yapısından dolayı

çok karmaşık yansıma özellikleri göstermektedir.

Fraktal yüzey üzerinde değişik noktalardaki parlaklık değerlerini hesaplamak için o noktadaki yüzey normalini bilmemiz gerekmektedir. Yüzey normalini belirlemenin bir (Newman 1979). Yöntemi, yüzey parçacıklarının küçük düzlemlerden oluştuğu kabul edilerek, cismi oluşturan o yüzey parçalarının herbirine bir normal karşı düşürülür. Aslında bir fraktal cisim bütün noktalarında sonsuz ayrıntı içerir. Bundan dolayı herhangi bir noktada kesin yüzey normalini bulmak mümkün olamayabilir. Bu durumda yüzey normalini bulmak için yüzey üzerindeki komşu noktaların koordinatlarının farklarından yararlanır.

x-z Düzleminde P(x,y,z) noktasının komşusu P'(x',y',z') ise Şekil 5.5 N<sub>yz</sub> normalinin z doğrultusu ile yaptığı  $\alpha$  açısı aşağıdaki şekilde bulunabilir.



Şekil 5,5 Fraktal Yüzeyin Normal için Yaklaşım

$$\tan \alpha = \frac{\delta Z}{\delta Y}$$

5.17

$$\delta Z = z - z' \text{ ve } \delta Y = y - y'$$

Benzer şekilde  $N_{xz}$  normali de bulunabilir.

Görüldüğü gibi komşu P ve P' noktalarından hareketle yüzeyin normaline ilişkin birim vektörler kolayca hesaplanır. Bu yöntemin, aydınlatılan cismin yüzeyindeki bütün noktalara uygulanması ile elde edilen sonuçlar, daha sonra aydınlatma modelinde kullanılır.

### 5.5 Boyama

Yüzeyin boyanması, görüntü uzayındaki her piksele, cisim uzayında karşı düşürülen yüzey parçasının, yüzeyin matematiksel ifadesinden hesaplaması ilkesine dayanır. Parlaklığın bir pikselden diğerine geçişte değişmesi pek olası olmadığı durumda, değişimin yalnız belirli sayıda pikselden oluşan takımlar arasında olabileceğini varsaymak en akılcı yoldur. Belirlenen piksel takımının cisim uzayında kaplayacağı alanın hesaplanması için, cisim yüzeyi, seçilen matematiksel yüzey üretim tekniği ile üretilirken parametrelere bağlı olarak uygun sayıda düzlemsel altparçalara bölünür. Bu altparçacıkların herbirine bir normal karşı düşürülerek, bu parçaya ilişkin parlaklık değeri hesaplanıp, belirlenen piksel takımında görüntülenir. Fakat bu durum fraktal cisimler için geçerli değildir, çünkü fraktal cisimlerde parlaklık, pikselden piksele çok farklı değerler alabilmektedir (Yazıcı, Köse 1989).

Görüntü uzayındaki bir alanın belirli bir parlaklıkla boyanması için çeşitli yüzey doldurma yöntemleri vardır. Yöntemin basitliği ve hızlı çalışması yüzeyin biçimine de bağlıdır. Burada yüzey doldurma için hızlı çalışan bir algoritma geliştirilmiştir. Fraktal cisimlerde, bu işlem piksel piksel gerçekleştirilmiştir.

## 6 DOKU ÜRETİMİ ve İZDÜŞÜM

### 6.1 Giriş

Bilgisayar grafikleri biliminde, bir cismin yüzey ayrıntısına "doku=texture" denir. Daha çok dokular iki görünüm altında incelenirler. Birincisi, inşa edilecek cisimden ayrı olarak belirlenmiş bir dokunun, cismin pürüzsüz yüzeyine ilave edilmesidir. Burada cismin yüzeyine kazandırılan ayrıntının, yüzeyin pürüzsüz görünümünü bozmadığı gözülür. Pürüzsüz bir yüzeye bir dokunun eklenmesi aslında bir izdüşürme olayıdır. İkinci yöntem ise yüzeye pürüzlü bir görünüm kazandırmak için kullanılır. Bir yüzeyin pürüzlü görünüm alması, bir alt-üst etme (perturbation) işlemi gibi düşünülebilir.

Doku olabilecek unsurlar arasında şunlar sayılabilir. Bir matematiksel ifadenin çizimi veya izdüşümü sonucunun doku olarak seçilebileceği gibi bir sanatçının çizdiği sanat resmi, çekilen fotoğraf, ve benzeri ürünler doku olarak seçilebilirler. Bu dokulardan bilgisayar yardımı ile üretilenler aynen, dışarıdan alınan diğer doku çeşitleri ise sayısala dönüştürülerek kullanılırlar.

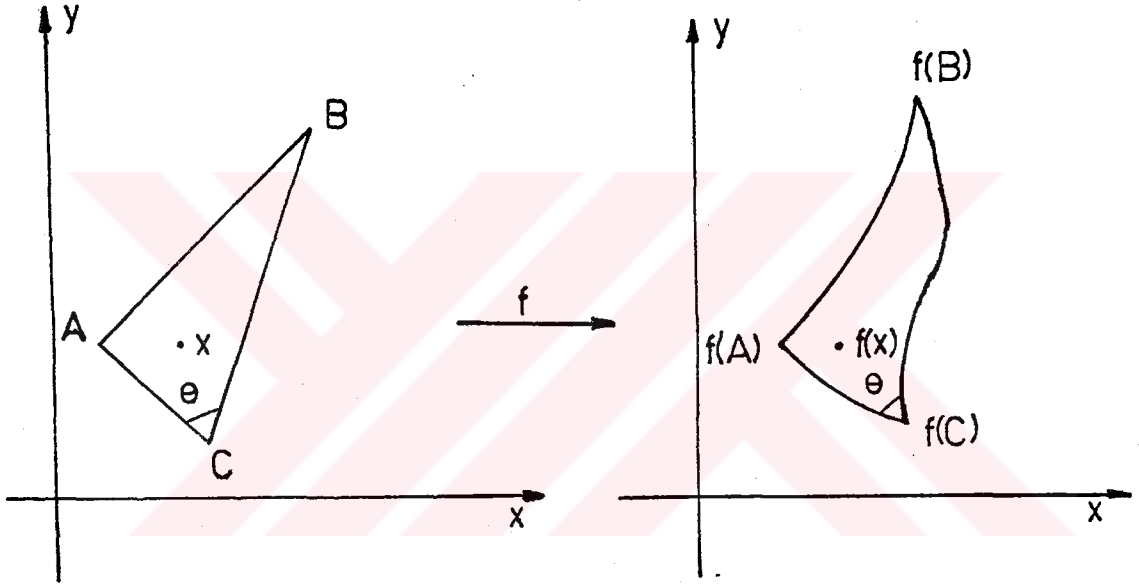
### 6.2 İzdüşüm (Mapping)

Tek değişkenli gerçel işlevlerin tanınmasında ve incelenmesinde, eğri çiziminin çok önemli yeri vardır. Oysa  $w=f(z)$  gibi,  $w$  ve  $z$  karmaşık sayılar olmak üzere, karmaşık işlevlerin çizimi mümkün olamamaktadır. Çünkü burada işleme giren değişkenleri veya değişkenlerin kümesini belirten  $z$ , gerçel sayılar gibi bir doğru üzerinde değil, bir düzlem içinden değerler almaktadır. Buna rağmen bazen  $w=f(x,y)$  veya  $w=f(u,v)$  işlevlerinin ayrı ayrı çizimlerinden



yararlanılır (Ruel,James,roger 1974). Çizimler basitçe  $z$  ve  $w$  düzlemleri üzerinde yapılır. Bir  $f$  işlevi ile gerçekleştirilen bu transformasyona izdüşüm denir.

izdüşümler yapıllı biçimlerine göre çeşitli adlar alırlar. Bunlardan biri olan conformal izdüşüm şekil 6.1'de verilmiştir. Bilgisayar grafiklerinde, temeli izdüşüme dayanan " transformasyon, rotasyon, yansıma v.b" bir çok dönüşümler kullanılmaktadır.



Şekil 6.1 Conformal izdüşüm

### 6.3 Doku Eklenmesi

Pürüzsüz bir yüzeye dokunun eklenmesi, Catmull tarafından, eğrisel yüzeyler için bulunan altbölmeleme algoritmasının sonucu olarak ilk kez önerilmiştir. Bu yöntem, eğrisel yüzeyler üzerindeki ışık odaklanmalarını "highlight" ve yansımaları da kapsayacak şekilde Blinn ve Newell tarafından genişletilmiştir. Pürüzsüz yüzeylere doku eklenmesinin, temeli bir izdüşürme olayı olduğundan, işlem

bir koordinat sisteminden diğesine olan bir transformasyona indirgenir. Eğer ayrıntı, doku uzayında bir ortogonal koordinat sisteminde  $(u,w)$  ile tanımlanır, ve yüzey de ikinci bir ortagonal koordinat sisteminde  $(\theta,\phi)$  ile tanımlanırsa, bu yüzeye doku eklenmesi iki uzay arasındaki izdüşürme işlevinin belirlenmesiyle olur. Yani,

$$\theta=f(u,w) ; \quad \phi=g(u,w) \quad 6.1$$

veya

$$u=r(\theta,\phi) ; \quad w=s(\theta,\phi) \quad 6.2$$

Kolaylık sağlaması açısından zorunlu olmamakla beraber, izdüşürme işlevinin doğrusal olduğu kabul edilebilir. Bu durumda,

$$\theta=Au+B ; \quad \phi=Cw+D \quad 6.3$$

dir. Buradaki  $A,B,C,D$  sabitleri, iki koordinat sistemindeki bilinen noktalar arasındaki ilişkiden elde edilir. Bir örnekle bu tekniği incelemek için. Şekil 6.2 (a) da gösterilen doku, şekil 6.2 (b)'de temsil edilen küre yüzeyi parçasına izdüşürelim. Görüldüğü gibi doku kesişen doğruların oluşturduğu iki boyutlu basit bir ağdır. Küre parçasının parametrik gösterimi aşğıdaki biçimde verilebilir.

$$x=\sin\theta\sin\phi$$

$$0 \leq \theta \leq \pi/2$$

$$y=\cos\phi$$

$$z=\cos\theta\sin\phi$$

$$\pi/4 \leq \phi \leq \pi/2$$

Doğrusal dönüşüm fonksiyonu seçilir ve dokunun dört köşesinin, yüzey parçasının köşelerine izdüştüğü farz edildiğinde,

$$\theta=0, \quad \emptyset=\pi/2 \text{ iken } u=0, \quad w=0$$

$$\theta=\pi/2, \quad \emptyset=\pi/2 \text{ iken } u=1, \quad w=0$$

$$\theta=0, \quad \emptyset=\pi/4 \text{ iken } u=0, \quad w=1$$

$$\theta=\pi/2, \quad \emptyset=\pi/4 \text{ iken } u=1, \quad w=1$$

sonucu elde edilir. Bu sonuca göre,

$$A=\pi/2, \quad B=0, \quad C=-\pi/4, \quad D=\pi/2$$

bulunur. Doku uzayından  $(u,w)$ , cisim uzayına  $(\theta,\emptyset)$  yapılan doğrusal izdüşüm işlevini yazarsak,

$$\theta = \frac{\pi}{2} u ; \quad \emptyset = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} w$$

dir. Cisim uzayından  $(u,w)$  doku uzayına  $(\theta,\emptyset)$  olan ters izdüşürme fonksiyonu,

$$u = \frac{\theta}{\pi/2} ; \quad w = \frac{\pi/2 - \emptyset}{\pi/4}$$

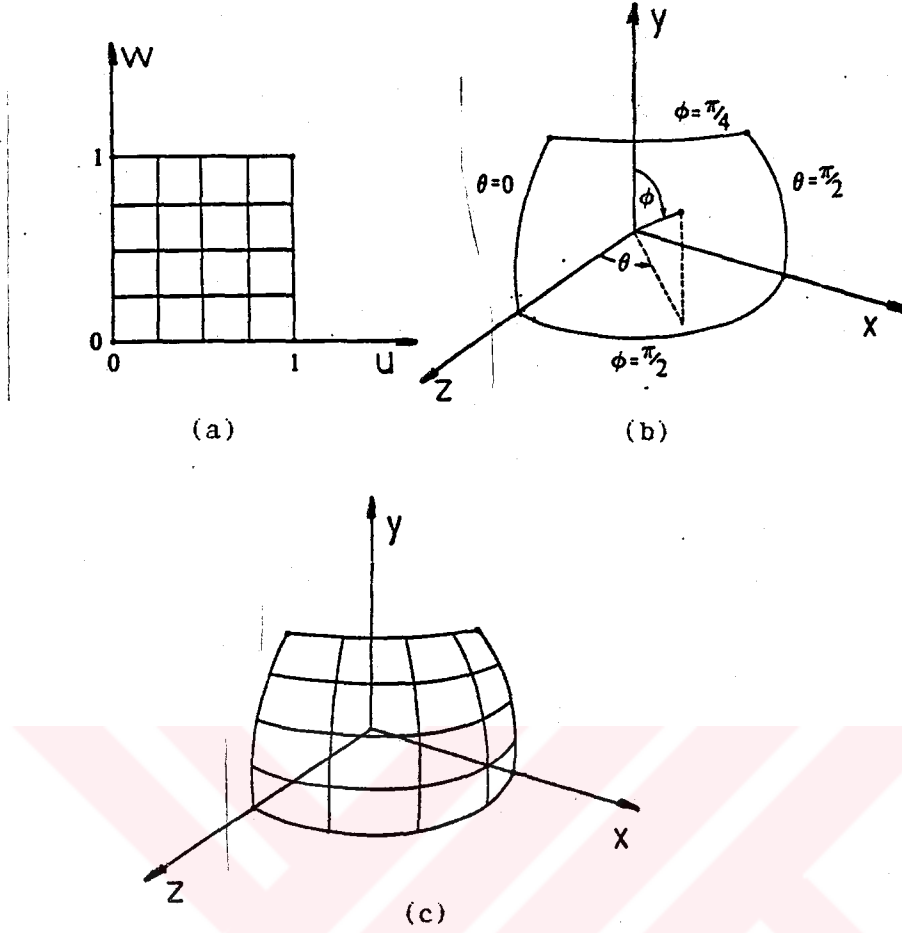
olur. Aynı şekilde bir Bezier yüzey parçası için dönüşüm yaparsak,

$$u_b=0, \quad w_b=0 \text{ iken } u=0, \quad w=0$$

$$u_b=0, \quad w_b=1 \text{ iken } u=0, \quad w=1$$

$$u_b=1, \quad w_b=0 \text{ iken } u=1, \quad w=0$$

$$u_b=1, \quad w_b=1 \text{ iken } u=1, \quad w=1$$



Şekil 6.2 Küreye Karesel Ağın İzdüşümü

olur. Yine doku uzayından cisim uzayına izdüşüm işlevini yazarsak

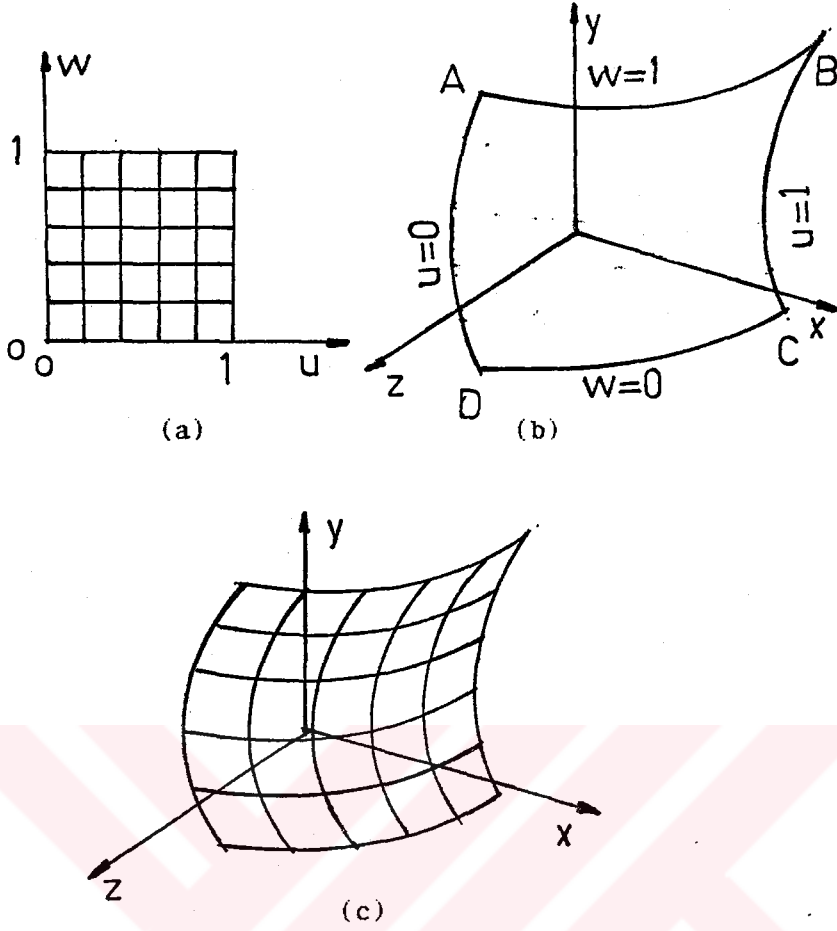
$$u_b = u ; \quad w_b = w$$

Ters izdüşüm fonksiyonu ise

$$u = u_b ; \quad w = w_b$$

olur.

Şekil 6.2 (a) ve 6.3 (a) da verilen doku temsilleri basit birer matematiksel gösterimdir. Gösterimlerde verilen her iki yüzey parçalarına ve dokulara ilişkin doğrusal izdüşüm işlevlerinin ifadeleri tanımlanmıştır.



Şekil 6.3 Bir Bezier Yüzeyine, Karesel Ağıın İzdüşümü

#### 6.4 Doku İzdüşümleri ve Antialiasing

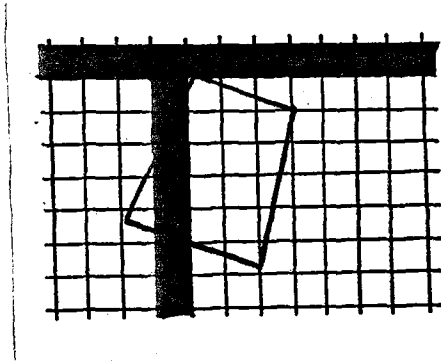
Bir yüzey üzerindeki doku deseninin görüntülenmesi doku uzayından cisim uzayına olan transformasyondan başka cisim uzayından görüntü uzayına izdüşümü gerektirir. Burada görüntü uzayının bir ekran olduğu düşünülürse, karşımıza birbirinden az farklı iki yöntem çıkmaktadır.

Birincisi Catmull'un altparçalara bölme yöntemine dayanır. Bu yöntem, ele alınan bir yüzey parçasının bölünmesi ile elde edilen her bir altparçanın, bir pixel tarafından örtülmesine kadar altparçalara bölünmesine dayanır. Böylece elde edilen cismin en küçük yüzey parçasının ifade ettiği ayrıntının, ekran ayrıntısından

daha küçük olması sağlanır ve altparçalara bölme algoritmasından doğacak ayrıntı kayıpları minimuma indirilmiş olur.

İkinci yöntemde, görüntü uzayındaki pikselin, cisim uzayındaki izdüşümü belirlenir. Daha sonra cisim uzayından doku uzayına olan geçiş ilişkisi kullanılarak, altparçanın merkezinin parametrik değeri veya pixel merkezinin doku uzayına izdüşürülmesi ile elde edilen noktadaki doku deseni, o pikselin parlaklığını belirlemede kullanılır (Rogers 1985).

Catmull'un da belirttiği gibi, bu nokta örnekleme tekniği bazı antialiasing etkilerine yol açmaktadır. Bu tekniğin ılımlılığını sağlamak için Catmull, doku desenini yüzey yamasıyla birlikte altparçalara böler. Böylece bir altyamanın yalnız bir piksel tarafından örtülmesi ile, ilgilenen doku altyamasının merkezindeki parlaklığının ortalamasını, piksel parlaklığını belirlemede kullanır. Burada doku altyaması dikdörtgen olmayabilir. Bu durumda doku deseni rasterlanarak, doku altyamasının merkezinin parlaklığı, o altyamadaki doku piksellerinin parlaklıklarının ağırlıklı ortalaması alınarak belirlenir.



Şekil 6.4 Doku Uzayındaki Görüntü Pikseli

Ağırlık işlevi, altyamanın içindeki doku piksellerinin alanına, bu yamanın toplam alanının oranıdır.

Kavramsal olarak Catmull altparçalara bölme algoritması cisim uzayındaki yüzey yaması ile başlayan ve biri görüntü diğeri doku uzayında olmak üzere iki yönde yapılan bir dönüşüm işlemidir. Burada, yeknesak yansımadaki parlaklık değeri, görüntü uzayındaki bir pikselin parlaklığının ve altparçalara bölünmüş doku uzayındaki piksellerin parlalıklarının ortalaması alınarak belirlenir. Ortaya çıkan antialiasing etkilerini gidermek için Blinn, Newell, ve Crow tarafından önerilen 2X2 lik piramitsel antialiasing (tablo 6-1) filitresi ile birlikte, yukarıdaki doku üretim tekniği kullanılmıştır.

				1	2	3	4	3	2	1
				2	4	6	8	6	4	2
1	2	1		3	6	9	12	9	6	3
2	4	2		4	8	12	16	12	8	4
1	2	1		3	6	9	12	9	6	3
				2	4	6	8	6	4	2
				1	2	3	4	3	2	1

Tablo 6.1 Piramitsel Antialiasing Azaltıcı

Daha önce incelenen teknikler, doku desenlerini pürüzsüz yüzeylere eklemek için kullanılmıştır. Bu durumda elde edilen dokulu yüzeyler pürüzsüz gözükür. Bundan dolayı yüzeye her zaman istenen doğal görünüm kazandırılmamıştır. Örneğin bir taş parçasını ele alalım. Taş parçasının yüzeyindeki her noktası, değişik parlaklık değerlerine sahip olduğu için, yüzeyi pürüzlü gözükmektedir. İşte bu noktadan hareketle, bir yüzeye pürüzlü bir görünüm kazandırabilmek için, önceleri pürüzlü doku desenleri sayısala dönüştürülerek elde edilen dokular yüzeylere izdüşürülmüştür. Bu durumda elde edilen sonuçlar istenen

pürüzlü görünümü verememiştir. Çünkü yöntemin uygulanması ile, özellikle parlaklığın yüksek olduğu bölgelerde yüzeyin pürüzlülüğü tamamen yok olmuştur. Oysa gerçek bir pürüzlü yüzeyde parlaklığın yüksek olduğu bölgelerde de düşük parlaklıklı noktalar bulunabilmektedir. Kısaca bu girişim pürüzsüz bir yüzey üzerine, boyalanmış pürüzlü doku desenli yüzey hissini vermiştir. Burada yatan asıl neden, gerçek pürüzlü dokulu yüzeylerin, yüzey normallerinin kendi doğrultusuna yakın doğrultuda küçük bir rasgele bileşene sahip olması ve bundan ışık yansıtma doğrultusunda doğrudan etkilenmesidir.

İlk olarak Blinn bunun farkına vardı ve yüzey normalini alt-üst eden bir yöntem geliştirdi. Böylece elde ettiği sonuçlar pürüzlü-dokulu yüzey görünümü yanılgısını vermiştir.  $Q(u,w)$  ile belirtilen yüzeyin üzerindeki her hangi bir noktada  $u,w$  parametreleri yönündeki kısmi türevleri yani  $Q_u$  ve  $Q_w$ , o noktada yüzey teğet düzleminde kalır.  $Q_u$  ve  $Q_w$  nin vektörel çarpımı o noktadaki yüzey  $n$  normalini tanımlar,

$$n = Q_u \otimes Q_w$$

6.4

Blinn,  $P(u,w)$  altüst etme işlevini, işlenen yüzeyin normali doğrultusunda yüzeye ekleyerek pürüzlü bir doku görüntüsü hissini veren yeni bir yüzey tanımlamıştır. Bu yüzden,  $Q(u,w)$  yeni yüzeyin üzerindeki her hangi bir nokta için konum vektörü,

$$Q'(u,w) = Q(u,w) + P(u,w) \frac{n}{|n|}$$

6.5

dür. Altüst edilmiş yüzeyin normal vektörü ise,

$$n' = Q_u \otimes Q_w$$

6.6



olur.  $Q_u$  ve  $Q_w$  nin kısmi türevleri,

$$Q'_u = Q_u + P_u \frac{\partial}{\partial n} + P \frac{\partial}{\partial n} \quad (6.7)$$

$$Q'_w = Q_w + P_w \frac{\partial}{\partial n} + P \frac{\partial}{\partial n} \quad (6.8)$$

olur. Burada  $P$  çok küçük olduğundan, son terim gözardı edilebilir. böylece,

$$Q'_u = Q_u + P_u \frac{\partial}{\partial n} \quad (6.9)$$

$$Q'_w = Q_w + P_w \frac{\partial}{\partial n} \quad (6.10)$$

oluşur. 6.9 ve 6.10 bağıntılarından yeni oluşturulan yüzeyin normali 6.1'de verilmiştir. Birinci terim  $n$ 'yi ,ikinci ve üçüncü yeni yüzeyin normalini ve son terim de  $n$  0  $n$  olduğundan sıfırdır. 6.12 'de elde edilen son iki terim yüzey normali üzerine ve dolayısıyla da, birim uzunluğa ölçekleme yaptıktan sonra, aydınlatma modeli üzerinde de altüst etme

$$n = Q_u \otimes Q_w + \frac{P_u(n \otimes Q_w) + P_u(Q_w \otimes n)}{|n|} + \frac{P_u P_w (n \otimes n)}{|n|^2} \quad (6.11)$$

$$\begin{array}{c}
 \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\
 \text{---} \quad \text{---} \quad P_u(n \otimes Q_w) \quad P_u(Q_w \otimes n) \quad \text{---} \\
 n^* = n + \text{---} + \text{---} \\
 \quad \quad \quad |n| \quad \quad \quad |n|
 \end{array}$$

6.12

yönteminin etkisini gösterir.

Türevi tanımlanabilen her hangi bir işlev, doku altüst etme işlevi P olarak seçilebilir. Blinn, basit matematiksel tanımla verilen ızgara desenini, karakter bit izdüşümlerini, Z-bellek desenlerini, ve rasgele elle çizilmiş doku desenlerini kullandı. Daha sonra T.Van Hook, u,w parametreleriyle belirlenen Bikübik yüzey parçasına uygulayarak yöntemin gerçekçiliğini incelemiştir.

Sonuçta pürüzlü doku etkisinin, cismin ölçek değişimleri ile değiştiği gözlenmiştir. Örneğin cismin boyutu 2 faktörü ile ölçeklendiğinde, normal vektörünün altüst edilmesi yalnız 2 faktörüyle ölçeklendiği halde, normal vektörünün genliği 4 faktörü ile ölçeklenir. Bu durum, cismin boyutunun artmasıyla, doku etkisinin pürüzsüzleştiğini göstermiştir. Diğer taraftan, perspektif uzayda cismin gözlemciye doğru veya gözlemciden dışarı doğru hareketinden kaynaklanan ölçek değişimleri doku ölçeğine etki etmez.

Altüst etme yöntemiyle elde edilen dokunun izdüşümünün sonuçları da antialiasing etkisi göstermiştir. Burada yine, doku alanının ortalamasını almak veya önfiltrilemeli antialiasing teknikleri kullanılarak, sonuçta elde edilen pürüzlü doku etkisinin düzgünleştiği veya azaldığı görülmektedir. Blinn, uygun bir antialiasing tekniği için, görüntüyü, ekran ayrıntısından daha yüksek bir ayrıntıda hesaplamıştır. Daha sonra yüksek ayrıntılı görüntülerden düşük ayrıntıda gösterilecek görüntüler elde edilmiştir. Düşük ayrıntılı görüntüler, yüksek ayrıntılı görüntülere, sonradan filitreleme veya ortalama alma tekniğinin

uygulanması sonucunda elde edilir.

Yukarıda değinilen nedenlerden dolayı pürüzlü doku üretebilmek için, son zamanlarda fraktal doku üretimi tekniğinden yararlanma yoluna gidilmiştir.



## 7 FRAKTAL GEOMETRİ

### 7.1 Giriş

Önceki bölümlerde, fraktal olmayan dokuların, üretim tekniklerine ve üretilen doku desenlerinin, fraktal olmayan her hangi bir cismin yüzeyine izdüşürülmesi işlemine değinilmişti. Sonuçta fraktal olmayan desenlerin, cisme her zaman istenen doğal görünüm kazandıramadığı görülmüştür. Bilindiği gibi doğadaki, dağlar, taşlar, bulutlar ve benzeri bir çok cisim, kırılmış, düzensiz ve sonsuz ayrıntı içeren görünüme veya yapıya sahiptirler. Bu tür cisimlerin matematiksel olarak incelenip incelenemeyeceği, insanoğlunu her zaman meşgul etmiştir. Matematikçilerin ve fizikçilerin çalışmaları sonucu, bu tür doğal olayların ve görünümlerin matematiksel olarak incelenebileceği anlaşılmıştır.

Yetmişli yılların başında, bu konuya en çok emek veren kişilerden biri olan Mandelbrot, "Fraktal" (fractal) kavramını ortaya atmıştır. Fraktal kavramı veya sözcüğü, o yıllarda bilimsel ve sanatsal ortamlarda en çok konuşulan, düşünülen, ve tartışılan konu olma özelliğinin yanı sıra, çok geniş uygulama alanlarında bulmuştur.

Kavramın getirdiği yeni düşünceye göre, basit bir fraktal cisim, Euclidean geometri yardımıyla tanımlanamaz, fakat fraktal geometri yardımıyla tanımlanabilir. Geometriye getirdiği diğer kavramlardan biri de "örtünme boyutu"dur (fractional dimension). Bu boyut kavramına göre, bir fraktal cismin örtünme boyutu, topolojik boyutundan büyük olan bir gerçel sayı ile ifade edilir. Aynı düşünce noktasal ve hacimsel cisimler için de geçerlidir. Çünkü fraktal cisim "kırılmış" (fractional) boyutludur. Doğadaki bir çok cisim ve olay, Mandelbrot tarafından kurulmuş olan fraktal

geometri yardımıyla analiz edilebilir duruma gelmiştir.

Diğer taraftan fraktal kavramının ilgilendiği konuların içinde yer alan rasgele süreçler çok değişik bilimsel alanlarda karşımıza çıkmaktadır. Bu tür bilimsel uygulamalarda, zaman değişkeninin yeri ve önemi büyüktür. Örneğin, bir iletişim sistemindeki gürültü analizinde, değişkeni zaman olan rasgele sinyaller (burst gürültüsü) söz konusudur. Diğer örnekler arasında, havadaki toz yığınlarının, bulutların ve benzeri sistemlerin ortamdaki hareketlerinin ve dağılımlarının zaman süreci içinde, ısı, rüzgâr, nem, ve benzeri çevre etkileri de göz önüne alınarak modellenmesi, çarpıcı örnekler arasında sayılabilir. Aynı bir uygulama alını olarak da, ekonomik tahminler düşünülebilir.

Bu örneklerde, zaman rasgele süreçlerin incelenmesinde önemli bir değişken olarak karşımıza çıkmaktadır. Burada zamanın getirdiği önemli bir özellik, doğal bir akış yönüne sahip olmasıdır. Bu akış yönü geçmiş, şimdiki ve gelecek zaman olarak bilinmektedir. Diğer bir yardımcı unsur ise, değişkeni zaman olan olayların, geçmişten izler taşıyabileceği fakat gelecekte taşıyamayacağını (nedensellik ilkesi) benimsenmesidir. İşte bu gibi kolaylık sağlayan veya olayın karmaşıklığını indirgeyen unsurlardan da yararlanarak, basit tekrarlamalardan oluşan fraktal model kurulur.

Fraktal kavramının getirdiği düşünme kolaylığı olayların temelden, basitten kavranarak bütüne ulaşılması fikrinden kaynaklanmaktadır. Buna çarpıcı bir örnek havadaki bulut verilebilir. Bilindiği gibi bulut; su, azot, oksijen ve diğer moleküllerin belirli oranlarda karışımından oluşmaktadır. Burada bulutun parlaklığını belirleyen, bu karışım oranı ve çevre etkileri ile buluta kazandırılan şekil olmaktadır. Uygun bir şekilde çevre etkilerini ve diğer unsurları dikkate alan bir model, bulutun hareketini ve parlaklığını belirlememizi sağlayacaktır.

Diğer taraftan istatiksels sonuçlar kullanılarak fraktal cisim veya doku üretimi yapılabilmektedir. Üretilen veya incelenen istatiktel özellikleri belli fraktal cisimlerin, örtünme boyutunun ve lakunaritesinin hesaplanması sonucunda, cisimlerin otomatik olarak tanınması gerçekleştirilmiştir. Bu yöntemle, doğadaki çoğu dokular veya yapılar kolayca tanımlanabilir ve tanınabilir olmuştur.

## 7.2 Örtünme Boyutu

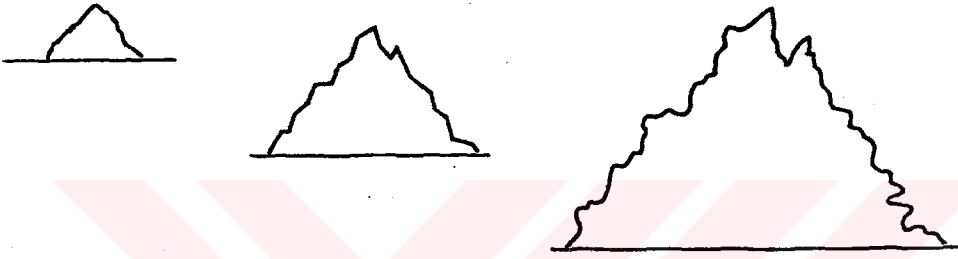
Fraktal olmayan doğruların veya eğrilerin, bilinen iki noktası arasındaki uzunluğu, kesin olarak belirlenebilir. Oysa bir fraktal eğrinin iki nokta arasındaki uzunluğu, hiç bir zaman kesin olarak belirlenemez. Aynı düşünceden hareketle, matematiksel olarak düşünülebilen her hangi bir fraktal olmayan cismin yüzey alanının veya haciminin kesin olarak belirlenebilmesine rağmen, fraktal cisimlerin yüzey alanları veya hacimleri hakkında kesin bir şey söylenemez. Çünkü bir fraktal eğri veya cisim her noktasında sonsuz ayrıntıya sahiptir.

Gerçekten bir fraktal eğriye veya cisme tepeden yaklaştığımızda (zoom yaptığımızda), görebiliriz ki ayrıntı değişecek ve daha da artacaktır. Bu durum, cisme ne kadar yaklaşırsak yaklaşalım, fraktal cisimler için her zaman en büyük özelliklerden biri olacaktır. Örnek olarak bir dağı düşünelim (şekil 7.1). Dağa yaklaştıkça, ilk olarak dağın kenarı ve büyük taş parçaları gözükecek, daha sonra kayalar, ağaçlar, çayırlar ve daha da yaklaşıncaya otlar ve toprak görülecektir. Yani, her bir yeni adımda, değişik, karmaşık ve ilginç manzaralar ortaya çıkmaktadır. Fraktal eğriler, cisimler veya manzaralar iki-boyutlu uzayda verilirse, örtünme boyutunun, 1 ile 2 arasında, üç-boyutlu uzayda verilirse, 1 ile 3 arasında değiştiği görülmektedir.

Bir cismin fraktal olup olmadığının belirlenmesini sağlayan faktörlerin en önemlisi, örtünme boyutu veya

farktal boyut kavramıdır. Bu kavrama göre, fraktal cisim, örtünme boyutu topolojik boyutundan daha büyük olan cisimlerdir.

Örtünme boyutuna geçmeden önce kısaca  $D_T$  topolojik boyuta değinelim. Kavrama göre, bir noktanın topolojik boyutu 0, kalınlığı olmayan bir eğrinin 1, hacmi sıfır olan her hangi bir yüzeyin 2, bir hacmi dolduran cismin ise 3 olduğu düşünülebilir.



Şekil 7.1 Fraktal Dağ

Örtünme boyutu, çeşitli biçimlerde tanımlanabilir. Bu tanımlama, sürekli fraktaller için sürekli uzayda, ayrışık fraktaller için de ayrışık uzayda yapılabilir. Bunlardan sürekli uzayda yapılacak olan tanımlamanın anlaşılması oldukça zor ve yorucudur. Anlaşılmasının daha kolay olmasından dolayı, örtünme boyutunun tanımı ayrışık uzayda verilecektir.

Tanım için  $n$ -boyutlu bir uzayda, topolojik boyutu  $D_T$  olan bir fraktal cisim düşünelim. Burada  $n$  ve  $D_T$  negatif olmayan tam sayılardır. Cismin, sürekli uzayda veya ayrışık uzayda, ayrışık noktalardan oluşmuş düzgün bir dikdörtgensel kafes üzerinde bulunduğunu düşünelim. Cismin bu uzayda kapladığı noktaların değerine 1, açıkta kalan noktaların değerine 0 verelim. Aynı zamanda, elimizde aynı uzayda ölçüm yapmakta kullanılacak birim hücreler olsun. Buna göre

iki-boyutlu uzayda, değişik  $N$  uzunluklu için  $N \times N$  boyunda kareler alınsın. Elimizdeki bu kareleri kullanarak cismin örtünme boyutunu ölçtüğümüzde, cismin alanı birim hücrelerin sayısına bağlı olarak bulunur. Bu durumda, cisim hiç açıkta kalmayacak şekilde örten en az sayıdaki hücre sayısı sonuç olarak alınacaktır. Diğer bir olasılık da, örten hücreler, cismin tümünü örtebildiği gibi birazda taşabilirler. Ölçme işlemi, değişik  $N \times N$  boyundaki hücreler ile yapıldığında her hücre için değişik sayısal sonuçlar elde edilecektir. Bu sonuçlar  $L(N)$  ile temsil edilirse,

$$N = \frac{1}{L(N)^{1/D}} \quad 7.1$$

oranı belirlenebilir. Burada  $D$ , ele alınan fraktal cismin örtünme boyutudur ve  $D_T < D < n$  arasında değişen bir gerçel sayıdır.

Her  $N$  için 7.1'de verilen ilişkinin sağlanması gerekir, fakat bu ideal durumda geçerlidir. Gerçekte ise 7.1 bağıntısı  $N$ 'nin geniş değişim aralığında geçerli ise, ele alınan cisim o değişim aralığında "fraktal"dir denir (James,Susan,Richard 1989).

$$\text{Log} N = \frac{1}{D} - \text{Log} L(N) \quad 7.2$$

$$D = -\text{Log} L(N) / \text{log} N = \text{Log} L(N) / [\text{Log}(1/N)]$$

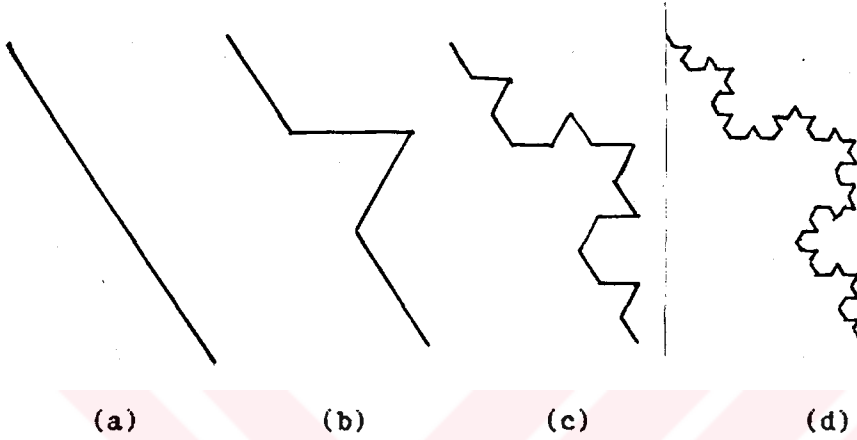
buradan,

$$D = \frac{\text{log} L(N)}{\text{log}(1/N)} \quad 7.3$$



$$D = \frac{\ln L(N)}{\ln(1/N)}$$

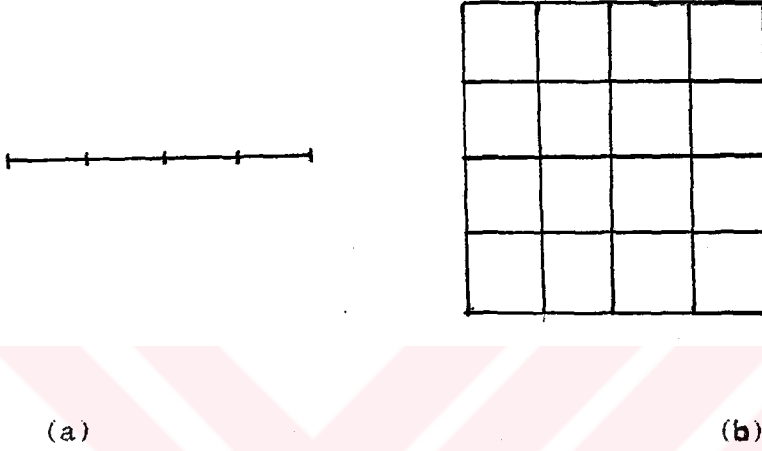
7.4



Şekil 7.2 Fraktal Cisim Modeli

Şekil 7.2 (a), (b), (c) ve (d) de verilen fraktal modelin her bir adımdaki örtünme boyutunu ayrı ayrı bulalım. İlk olarak, ele alınan doğru parçası  $1/3$  faktörü ile ölçeklenerek, dört ayrı nokta ile ifade edilebilen, üç adet eşit uzunluktaki altparçaya indirgenmiştir. Daha sonra beşinci bir noktanın eklenmesi ile fraktal model oluşturulmuştur. Bu yeni oluşan durumda, modelin dört eşit uzunluktaki altparçalardan oluştuğu görülebilir. Yöntem, desenin içerdiği her bir altparçaya aynen uygulanarak yeni altparçalar elde edilmiştir. Tekrarlamalara devam edilerek, istenilen ayrıntıda fraktal eğri üretilir. Üretime ilişkin adımlar şekil 7.2 (a), (b), (c), ve (d) de gösterilmiştir. Buna göre (b), (c), ve (d) için örtünme boyutlarını ayrı ayrı hesaplırsak, ilk durumda  $L(N)=4$  ve  $N=1/3$  olduğundan  $D=1.2619$  bulunur. İkinci durumda  $L(N)=16$ ,  $N=1/9$  ve yine  $D=1.2619$  olur. Son durum için  $L(N)=64$  ve  $N=1/27$  olduğundan,  $D=1.2619$  olacaktır.

Diğer taraftan, fraktal olmayan motifler kullanıldığında üretilen cisimlerin fraktal olmayacağı kolayca görülebilir. Örneğin, motif olarak bir doğru parçası seçilsin ve bu doğru parçası, şekil 7.3 (a)'da görüldüğü gibi eşit parçalara bölünsün. Bu durumda



Şekil 7.3 Fraktal Olmayan Modeller

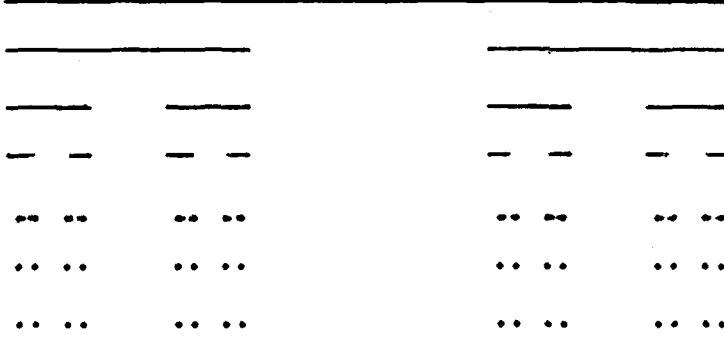
$L(N)=4$ ,  $N=1/4$  ve  $D=1$  olmaktadır. Yine bir yüzey parçasını (şekil 7.3 (b)) eşit kareciklere bölersek  $L(N)=16$ ,  $N=1/4$  ve  $D=2$  olduğu görülecektir. Görüldüğü gibi uzunlukta, alanda veya hacimde, belirlenen yöntemin uygulanması sonucunda bir değişme olmuyorsa, üretilen cisim fraktal olmamaktadır.

### 7.3 En Basit Fraktal Cisim, Cantor Tozu

Örtünme boyutu 0 ile 1 arasında olan cisimlere Cantor tozu denir. Cantor tozunun, doğrusal olmayan dönüşümle üretilmesine basit bir örnek, triadic Cantor tozu verilebilir. Bu üretilen cisim fraktaldır ve üretim oranı  $3^{-k}$  dır.

Fraktal cisimlerin en büyük özelliklerinden biri olan kendine-benzerlik (self-similarity) burada canlıdır, fakat yeterince kesin olarak C Cantor kümesini belirlemez.

Cantor kümesi aşağıdaki doğrusal olmayan  $V$  dönüşümü altında değişmezdir.



$$D = \log 2 / \log [1/1(1/3)] = 0.6309$$

Şekil 7.4 Triadic Cantor Tozu (barlı yapı)

$$x \longrightarrow f(x) = \{1/2 - |x - 1/2|\} / r$$

7.5

Basit tekrarlamalar için başlangıç değeri olarak seçilen  $x_0$  gerçel eksen üzerinde yayılırsa, sonuçların  $x = -\infty$  indirgendiği görülür (yapılan basit tekrarlama sayısı  $n$  ile temsil edilmektedir). Burada  $x_0$  noktaları ile  $x=0$ ,  $x=3/4$  noktaları da  $C$ 'nin içinde bulunmaktadır.  $C$ 'nin değişmezliğinin bir örneği,  $x_0 < 0$  seçildiğinde, yapılan tekrarlamaların sonuçlarının  $-\infty$  a yakınsamasıdır.  $x_0 > 1$  durumunda  $k \geq 1$  için  $x_n < 0$  olduğundan ilk adımda direk yakınsama görülür. Eğer başlangıç noktası  $1/3 < x_0 < 2/3$  arasında ise ilk iki adımda  $k \geq 2$  için  $x_1 > 0$  fakat  $x_k < 0$  olmaktadır. Eğer başlangıç noktaları  $1/9 < x_0 < 2/9$  veya  $7/9 < x_0 < 8/9$  aralığında ise yakınsama üç adımda gerçekleşir. Buradan  $C$ 'nin bütün noktalarının  $-\infty$  a yakınsamadığı görülebilir (Mandelbrot 1983).

En büyük ayrıntının sınırsızlığı sonucunda,  $L(N)=2$  ve  $N=0-1/2$  arasında değişirken uygun eğri yapısına sahip,  $f(x)$  yardımı ile her hangi bir Cantor tozu elde edilebilir. Yukarıdaki Yönteme rağmen, Cantor tozu için gerçel eksen

çizilmiş uygun bir karşılaştırma ölçütü yoktur. Bunun nedenlerinden biri de, doğrusal olmayan  $f(x)$ ,  $\Omega$ 'nın sonlu değeri için temsil edilebilmektedir. Oysa doğrusal bir işlevde, temsil edilme genellikle  $\Omega=\infty$  için gerçekleştirildiğinde, işlevin karakteristik özelliği açıkça görülebilmekte, sonlu bir  $\Omega$  için yapay bir durum ortaya çıkmaktadır.  $\Omega$  (outer cutoff) ve  $\epsilon$  veya  $N$  (inner cutoff) sırasıyla en büyük ve en küçük ayrıntı olarak bilinmektedir.

Cantor kümesinin çok zayıf bir küme olmasından dolayı  $f(x)$ 'in tekrarlanmasının görünümüne etkisi, noktalar arasındaki farktan yararlanarak çok kesin olarak henüz anlaşılammıştır.

#### 7.4 Fraktal Cisim Modelleme

Fraktaller, örtünme boyutu 1 ile 4 arasında olan ve üç-boyutta gözlenebilen bir cisim gibi düşünülebilir. Fraktal eğri, yüzey, ve hacim üretimi fraktal cisim üretimi olarak tanımlanabilir. Seçilen taslak üzerindeki nokta veya noktalar, her tekrarlama adımında uygun şekilde transform edilerek fraktal cisim üretilir. Aynı şekilde belirlenen fraktal motifler de uygun şekilde transform edilerek fraktal cisimler üretilebilir.

Transformasyon işlevi eğri boyunca veya cisim üzerinde, her bir adımda rasgele veya düzenli değişimler oluşturarak, üretilen modele değişik biçimler kazandırabilir. Bu üretim yöntemi, bazen "Koch eğri" üretim tekniği olarak adlandırılır (Mandelbrot 1983). Bu tür üretim tekniğinden biri olan düzenli tekrarlamalara ilişkin modeller ve sonuçları şekil 7.5,7.6 de verilmiştir.

Diğer örnekler arasında nehirler, deniz kıyıları ve benzeri yapılar verilebilir. Bu yapıların, istatikselsel olarak kendine-benzerlik özelliği taşıdıkları görülmüştür.

İstatiksel özellikleride göz önüne alınarak, bu tür görüntüler, Koch modelleri kullanılarak değişik örtünme boyutuna sahip eğriler üretilmiştir (şekil 7.6). Şekillerden görüleceği gibi, örtünme boyutunun kurulan yapı (kıvrımlı) üzerinde büyük etkisi olmaktadır.



Şekil 7.5 Fraktal Nehir ve Kıyı

Burada üretilen cismin ayrıntısı, tekrarlama sayısına ve görüntünün sergileneceği ekranın özelliğine bağlıdır. Cismin ayrıntısının, ekran ayrıntı seviyesine ulaşması,  $P_0=f(x_0, y_0)$  başlangıç noktasına bağlı olarak,  $f$  transformasyon işlevinin her tekrarında, yeni ayrıntıların elde edilmesi sonucunda sağlanacaktır (Newman 1979).

### 7.5 Markov Rasgele Süreçlerinin Fraktal Modeli

Rasgele süreçler uzun zamandır bilim adamlarının meşgul oldukları konular arasında yer almaktadır. Önemli örnekler arasında haberleşme sistemindeki gürültü ve ekonomik sistemler sayılabilir.

Bu ve benzeri rasgele süreçlerin incelenmesinde, Markov'un rasgele süreçler tanımının kullanılması, olayı

basite indirgeyerek yeni kolaylıklar sağlamıştır. Markov sürecinin en önemli özelliklerinden biri, şimdiki durumu verilmiş bir sürecin gelecekteki davranışının istatistiksel özelliklerini bilmek için, geçmişteki durumunu bilmeye gerek duyulmamasıdır. Bu durum olayların daha basit istatistiksel modeller ile ifade edilmesini sağlamıştır. Kavramının temelini oluşturan komşuluk tanımıdır. Tanıma göre, herhangi bir uzayda dağılmış  $i$  vektörel noktalarının oluşturduğu küme  $N$  olsun, her  $i$  noktası için  $i \in n_i$  olduğunda  $n_i \in N$  gerçekleşsin ve 7.6 özelliğini sağlasın.

$$i \in n_i \iff i \in n_i' \quad 7.6$$

Bu durumda  $n_i$  ye  $i$ 'nin komşuluğu denir.

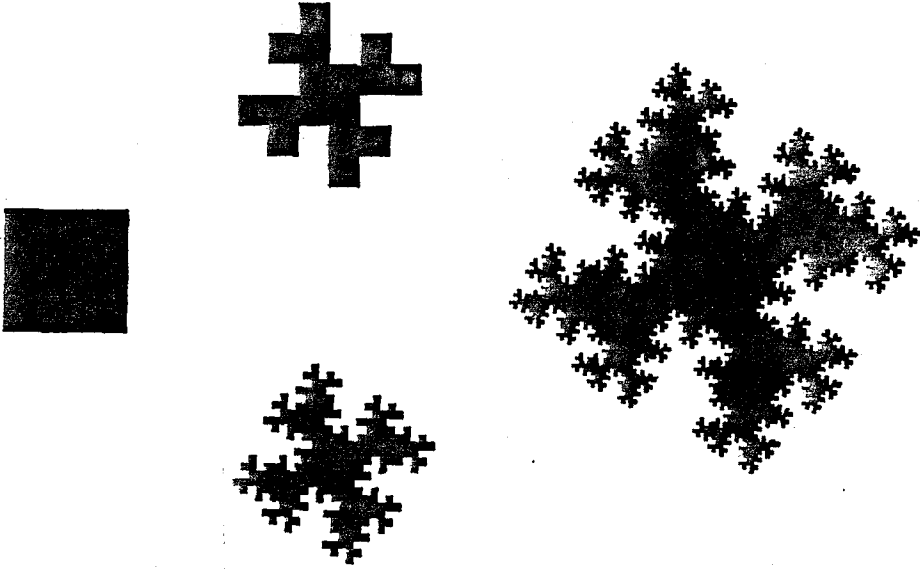
Kavramın uygulanabilirliği yerel olmayan kısıtlamaların azlığına ve komşuluk bölgesinin genişliğine bağlıdır. Yöntem, komşuluk bölgesinin genişlemesi ile denetim parametrisinin ve işlem miktarının oldukça artmasına neden olduğu için her zaman istenen kolaylığı sağlayamaz.

Bu koşullar altında Markov rasgele alanının tanımı şöyle verilebilir.  $n$ -boyutlu uzayda birbirinden farklı vektörel  $i$  noktaları ele alınsın. Bu  $i$  vektörel noktalarının oluşturduğu küme  $N$  olsun.  $N$  kümesindeki her  $i$  noktasına rasgele  $X(i)$  değişkeni karşı düşürülsün. Böylece herhangi bir  $i$  vektörel noktasındaki,  $X(i)$  değişkeninin alabileceği  $X(j)$  değerleri ( $j \in N - \{i\}$ ), 7.7 koşullu olasılığı ile ifade,

$$P(X(i)=x(i) | X(j), j \in n_i) \quad 7.7$$

edilsin. Bu ifade her  $i$  noktası için koşulsuz geçerli ise bu alana rasgele Markov alanı denir. Görüldüğü gibi noktanın istatistiksel davranışını bilmek için yalnızca komşuluktaki durumu bilmek yeterlidir.

Noktaların düzgün bir ağ üzerinde durduğu düşünülerek ikinci dereceden komşuluk temsili şekil 7.7 de verilmiştir.



Şekil 7.6

İkinci dereceden komşuluk tanımında göz önüne alarak Besag tarafından önerilen bağıntı 7.8 ile verilen uyumlu bir koşullu olasılık işlevi kullanılmıştır (7.8).

$$P\{X(i)=a|X(j)=x(j), j \in n_1\} = \frac{e^{aT}}{1+e^T} \quad a, x(j) \in \{0,1\} \quad 7.8$$

v	u	w'
t		t'
w	u'	v'

Şekil 7.7

Koşullu olasılık ifadesindeki T, komşuluk bölgesindeki

özellikleri belirlemektedir.

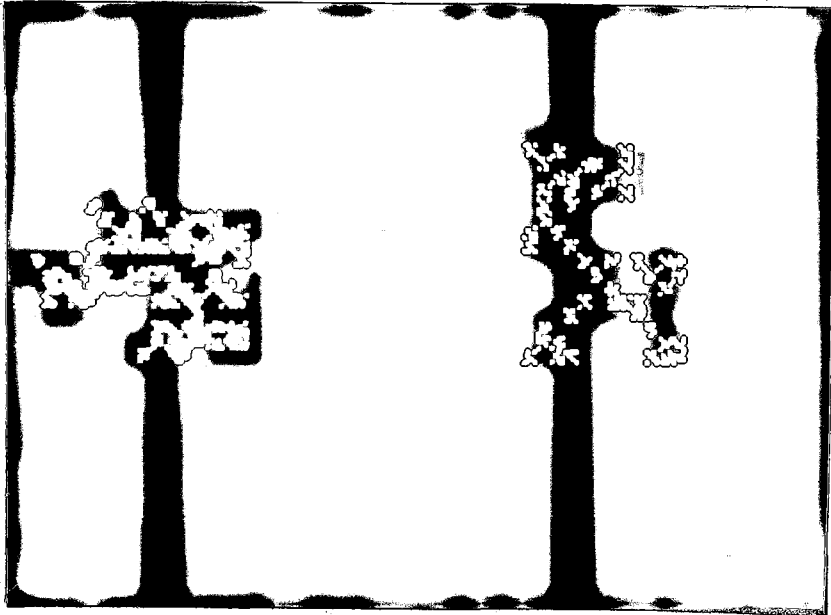
$$T = \alpha + \beta(t + t' + u + u') + \delta(v + v' + w + w') + \phi(tu + u'w + w't' + tv + u'v' + u't' + tw + w'u + u't' + t'u + uv + v't') + \Omega(tuv + t'u'v' + tu'w + t'u'w') \quad 7.9$$

$t, t', u, u', v, v', w, w' \in \{0, 1\}$

Yukarıdaki ifadede  $\alpha$ , 0'ların sayısının 1'lerin sayısına oranı ile belirlenen ve örtünme boyutunu belirleyen büyüklüklerden biridir.  $\beta$  düşey ve yatay birikmeleri belirleyen bir büyüklük, benzer şekilde  $\delta$  köşegen üzerindeki yığılmaları,  $\phi$  L şeklindeki birikmeleri, ve  $\Omega$  ise 2X2'lik birikme eğilimlerini temsil etmektedir (Onural 1989).

Yukarıdaki basit Markov modeli kullanılarak çok değişik fraktal doku çeşitleri elde edilmektedir. Modelin kullanıldığı yerler arasında, mühendislikte ve fizikte kristalleşme ve kristal yığınları, maden dağılımları, görüntü işleme görüntü tanıma ve şehircilik, tıpta bakteri ve virüs kolonilerinin temsili ve doğada bitki örtüsünün incelenmesinde kullanılmaktadır.

Modelin pahalılığı komşuluk bölgesinin artmasına ve yerel olmayan kısıtlamaların çokluğuna bağlıdır. Aşağıda bu yöntem kullanılarak elde edilen iki değişik doku biçimi verilmiştir (şekil 7.8).



Şekil 7.8



## 7.6 Fraktal Doku Tanımlama ve Kutulama

Doğal dokuların ayırt edilmesinde insanoğlunun yeteneği belli olduğu halde, bu işlemin otomatik olarak gerçekleştirilmesi oldukça karmaşık olmaktadır. En iyi doku tanımlama yaklaşımları, görüntünün istatistiksel özelliklerine dayanan altparçalara bölünmesi ile gerçekleştirilmektedir.

Önceleri örtünme boyutunun görüntünün tanınmasında önemli yardımcılardan biri olabileceği düşünülmüştür. Fakat görülmüştürki, aynı örtünme boyutuna sahip değişik bir çok manzaralar doğada bulunmaktadır. Bunun sonucu olarak dokuları sınıflandırmak için, örtünme boyutu yalnız başına yeterli olamamaktadır. Bundan dolayı değişik tanımlar verilmiştir. Bu yeni tanımlara geçmeden önce örtünme boyutunun hesaplanmasına ilişkin değişik bir kaç yöntemini inceleyelim.

N tane  $\alpha$  boyutunda kendine-benzer kümeden oluşan bir A kümesi için örtünme boyutu aşağıdaki gibi verilebilir. ( $\alpha=N$ ),

$$1=N \alpha^D \quad 7.10$$

$R^n$ 'deki A kümesinin örtünme boyutunun hesaplanabilmesi için, A kümesini örten  $\Gamma_{\max}$  kenarlı bir kutu düşünölsün, bu durumda fraktal olan A kümesinin en küçük kendine-benzer kümesi A'nın  $\alpha$  kadar küçölmüşü olacağından, A  $N=\alpha^{-D}$  tane kendine-benzer alt kümeden oluşacaktır. Bu durum göz önüne alındığında, A kümesini örtmek için  $\Gamma=\alpha\Gamma_{\max}$  kenarlı,

$$N(\Gamma)=\frac{1}{\alpha^D} \left[ \frac{\Gamma_{\max}}{\Gamma} \right]^D \quad 7.11$$

$N(\Gamma)$  tane benzer küme olacaktır.

Bu durumda örtünme boyutu, değişik  $\Gamma$  kenarlı kutular kullanılarak, boş olmayan kutu sayısı  $N(\Gamma)$  ve kutu boyuna bağlı olarak bir kaç kez hesaplandığında,

$$\{\ln[(\Gamma)], -\ln[N(\Gamma)]\} \quad 7.12$$

7-12 ifadesinin tanımladığı noktaların kümesinin, doğrusallaştırılmış eğimi olarak karşımıza çıkmaktadır.

Diğer taraftan Voss görüntü uzayında, örtünme boyutunu hesaplamak için bir yöntem önermiştir. Yönteme göre  $A$ 'nın keyfi bir noktası civarında merkezlenmiş bir kutuda  $m$  noktanın olması olasılığı  $p(m, \Gamma)$  olsun. Bu durumda  $\Gamma$ 'nin her hangi bir değeri için,

$$\begin{aligned} N \\ \sum_{m=1} p(m, \Gamma) = 1 \end{aligned} \quad 7.13$$

olacaktır. Burada  $N$  kutu içindeki mümkün olabilen noktaların sayısıdır. Eğer  $P(m, \Gamma)$  dağılımı belirlenmiş ise ele alınan görüntüyü örtmek için gerekli beklenen kutu sayısı,

$$\begin{aligned} N \\ N(\Gamma) = \sum_{m=1} (1/m)p(m, \Gamma) \end{aligned} \quad 7.14$$

(7.14) bağıntısı ile belirlenebilir. Bu işlemler, değişik  $\Gamma$  boyutlu kutular gerçekleştirildiğinde, örtünme boyutu 7.12 ile verilen doğrusallaştırılmış değişiminin eğimi ile belirlenmektedir.

Mandelbrot dokuları ayırt edebilmek için Lakunariti kavramını ortaya atmıştır. Lakunariti bir doku yüzeyinin ikinci dereceden istatistiklerini kendine toplayan büyüklük olmaktadır. Dokuların lakunariti değerleri, kutulama veya dilimleme tekniklerinin yardımı ile hesaplanmaktadır. Bu

yeni doku tanıma büyüklüğü için değişik tanımlamalar verilmiştir. Bunlardan en kullanışlı olanı Mandelbrot tarafından önerileni 7.15 bağıntısında,

$$\tau = E\left[\left(\frac{M}{E(M)} - 1\right)^2\right] \quad 7.15$$

verilmiştir. Burada M fraktal kümenin kütesidir, ve E(M) ise beklenen kütedir. Bu tanımlama gerçek kütle ile beklenen kütle arasındaki farkı ölçmektedir. Sonuç olarak, ikinci-dereceden istatistik olan lakunariti, doku yoğun olduğu zaman küçük, kaba olduğu zaman ise büyüktür.

Diğer bir lakunariti tanımında, Voss tarafından yapılmıştır (7.16). (James, Susan 1989)

$$\tau = \frac{M^2(\Gamma) - [M(\Gamma)]^2}{[M(\Gamma)]^2} \quad 7.16$$

$$M(\Gamma) = \sum_{m=1}^N m p(m, \Gamma) \quad 7.17$$

$$M^2(\Gamma) = \sum_{m=1}^N m^2 p(m, \Gamma) \quad 7.18$$

Voss'un önerdiği tanım kutulanma yöntemine dayandığından, yöntemin uygulanması sonucunda elde edilen istatistiksel dağılım, lakunariti hesabı için de kullanılır.  $p(m, \Gamma)$  istatistiksel doku özelliği, fraktal cismin kütle dağılımına veya ekrandaki gri değerlerine bağlı olarak oluşturulmaktadır.

Örtünme boyutu ve lakunariti değeri hesaplanan cisim

artık otomatik olarak tanımlanabilir olmuştur. Bu yöntem kullanılarak, doğal manzaralar (ağaçlar topraklar ve benzeri) kolaylıkla birbirinden ayırt edilerek, makina yardımı ile tanımlanabilir olmuştur.

Diğer taraftan matematiksel olarak doğrusal olmayan tekrarlamalar ile fraktal cisim oluşturulabileceği ve oluşan fraktallerin öz-benzerlik (self-similarity) gösterebilecekleri bilinmektedir. Öz-benzerlik, bir geometrik özelliğin değişik ölçeklerde aynı kalması olarak düşünülebilir. Bu basit tekrarlamaların sonuçta çok karmaşık fraktal yapıları ortaya çıkarabilmesi, ve pek çok fiziksel yapının fraktal olduğunun gözlenmesi, karmaşık gözüken bir çok olayın temelde bilinen basit tekrarların ilişkiler sonucu ortaya çıkabileceği, anlamını vermiştir.

Yeni kavram olan fraktal düşüncesi, getirdiği özelliklerden dolayı, çok yaygın uygulama alanı bulmuştur. Şu anda büyük ölçüde sınıflandırma amaçlı uygulamalarda ve gözleme dayalı bilimsel çalışmalarda kullanılmaktadır. Bu düşüncenin, gelecekte yeni analiz imkanları sağlaması ile çok büyük önem kazanacağı ve uygulamada önemli yer tutacağı düşünülmektedir.

## 8 KARMAŞIK SİSTEMLERDE DİNAMİK DAVRANIŞ

### 8.1 Giriş

Basit doğrusal olmayan transformasyonların veya izdüşümlerin tekrarlanmalarının, üreteç gibi kullanılması ile, fraktal cisimlerin üretilebileceği daha önceki bölümde incelenmişti. Son zamanlarada büyük emeklerin harcadığı bu konunun gelişmesinde, matematikçilerin önemli rolleri ve yardımları olmuştur. Konu, analitik (yani seriye açılabilen) ve türevi olan işlevlerin veya tersi olmayan dinamik sistemlerin, Riemann küresi üzerinde, süpriz ve ilginç sonuçlarını sunmaktadır. Yine Quadratic transformasyonların, ve gerçel "Fatou tozu"nun fraktal olduğu gözlenmiştir. Bu kümelerin çoğunun ayrıştırılabilir kesin değişmez oldukları ve fraktal özellik taşıdıkları görülmüştür. Çünkü bu kümeler hayali-kendine-benzerdirler. Bazen hiç bir şekilde türevlenemeyen "jordan eğrilerinden", örtünme boyutu 1 den büyük olanlarının da fraktal özellik taşıdığı görülmüştür. İlginc sonuçlarından ve cazibesinden dolayı konuya olan ilgi daha da artarak devam etmektedir.

Konunun ilk ürünleri, birinci dünya savaşı sırasında Pierre Fatou (1878-1929) ve Gaston Julia (1893-1978) tarafından verilmiştir. İki bilim adamı birbirlerinden ayrı olarak başladıktan sonra bir araya gelerek, birlikte çalışmalarına devam etmişlerdir. Bu çalışmalar genellikle kutupları dışında analitik olan "meromorf işlevler" üzerinde olmuştur. Bu bilim adamları çıkardıkları sonuçları, dinamik sistemlerin normal ailesine uygulamışlar ve bazı süpriz sonuçlar elde etmişlerdir. Yazdıkları makaleler, karmaşık analizde birer şaheserdir. Aynı zamanda ünlü matematikçiler tarafından da takdir edilmiş olan bilginlerin teorilerinin uygulamaları ise çok zordur.

Daha çok sezgisel olarak yapılan analizler sonucunda sayısız ilginç sonuçlar ortaya çıkmıştır. Geçmişte genellikle sezgi ile geliştirilen karmaşık analiz, günümüzde bilgisayarın getirdiği kolaylıklar sayesinde çok hızlı bir gelişme göstermiştir.

## 8.2 Karmaşık Düzlemde Dinamik

Karmaşık düzlemde Karesel polinomların geometrik özelliklerini incelemek için aşağıdaki basit formülü ele alabiliriz.

$$p(z)=z^2 +\mu$$

8.1

Bu formül  $z$  noktası ile  $p(z)$ 'yi belirlemektedir. Karşımıza geometrik bir kural olarak çıkan  $P(z)$  polinomu gerçel bir işlev olabileceği gibi karmaşık bir işlev de olabilir.

Yukarıdakine benzer matematiksel dönüşümler ve tanımlar ile ilgilenen karmaşık dinamiğin fiziksel yönü ise, zorlama, itme, çekme ve benzeri etkilerin altındaki, sistemde meydana gelen fiziksel veya geometrik değişimleri, zaman içinde incelemesidir (Norton 1989). Bu duruma, Newton yasasına göre hareketleri belirlenen gezegenlerin veya güneş sisteminin, bilinen kurallar kümesine uygun olarak modellenmesi örnek verilebilir. Bu modellemeye göre bugünkü yeri ve hızı bilinen güneş sisteminin yarın hangi konumda olacağı ve hızının ne olabileceği yaklaşık olarak belirlenebilir.

Benzer şekilde karmaşık bir oransal işlev olan  $p(z)$ , karmaşık düzlemdeki noktaların hareketlerini belirleyen bir kural olarak karşımıza çıkmaktadır. Buna göre eğer bir nokta  $t=0$  anında  $z_0$  da bulunuyorsa  $t=1$  anında  $z_1=f(z_0)$  da ,  $t=2$  anında  $z_2=f(z_1)$  de ve , v.s. konumunda olacaktır. İncelenen ifadeler, her hangi bir fiziksel olay veya kuralın sonucu olmadığından, hesaplanan izdüşümler veya değerler,

fiziksel bir gerçeği yansıtmamaktadır.

Bir dinamik sistemin ilgi alanına, bir zamandan gelecek zamana geçişte oluşan ve açık, kesin kuralları ile bilinen olaylardan daha ziyade uzun dönemli olaylar girmektedir. Örneğin; biz genellikle havanın bu günkü durumundan çok, yarın nasıl olacağını ihtimalini öğrenmek isteriz. Yine  $p(z)$  polinomunun iterasyonu sonucunda uzun dönemli etkilerini, limit etkilerini, veya kendisini anlamak isteriz.

$z_0$  noktasından başlanarak  $p(z)$ 'yi  $n$  kez tekrarladığımızda oluşan  $f^n(z)$ 'in hangi sonuçları yansıtabileceğini düşünelim. Konunun anlaşılabilir olması açısından,  $f(z)=z^2$  yi  $z_0$  başlangıç nokasına bağlı olarak seçelim.  $z_0=2$  için,  $f^n(z)$ 'nin sonsuza yakınsadığı çok belirgin olarak görülür. Benzer şekilde  $z_0=1/2$  olduğunda tekrarlamamanın sıfıra yakınsadığı görülecektir. Bu tekrarlamalar, çok sayıda noktalar ile yapıldığında, merkezi orijinde olan ve çapı 1 olan dairenin içindeki noktaların sıfıra, dışındaki noktalarında sonsuza yakınsadığı ortaya çıkar. Canlandırılan olay "çekici" (attraction) adını alır. Tekrarlama ile sıfıra yaklaşan noktalara sıfır, sonsuza yaklaşanlara sonsuz çekicileri denir.

Çekiciliğin karşıtıda "püskürtme" (repulsive) dir. Eğer  $f^n(z)$ 'nin  $z_0=1.01$  başlangıç değeri ile ikinci adımda  $z_1=1.0201$ , üçüncü adımda  $z_2=1.406$ , ....., 1.08,.. değerini alır. Bu durumda 1'e yakın noktalara, püskürtme noktaları denir.

Diğer bir durumda ise,  $z_0=0$  ve  $z_0=1$  değerleri için tekrarlamaların sabit kaldığı görülür. Benzer özellik gösteren periyodik yörüngelerdeki noktaların da, az sayıda tekrarlanmaları sonucunda, başlangıç değerlerine döndükleri görülmüştür. Matematiksel ifadesi ise  $f^n(z_0)=z_0$  şeklindedir. Tanımdan, sabit noktaların periyodunun bir olduğu hemen anlaşılır. Çekicilik veya püskürtülmüslük, bir bakıma noktaların periyodik yörüngeye götürülmesine veya uzaklaştırılmasına bağlıdır.

Periyodların hesaplanması karmaşık türeğe dayanmaktadır. Buna göre, sonuç 1 den küçük ise periyot çekici, büyük ise püskürtülmüş, eşit ise durgun olarak adlandırılır.

$z_0$  başlangıç noktası  $k$  periyotlu bir nokta olduğunda, periyodik yörüngenin türü,

$$\lambda_{z_0} = (R^n)'(z_0) \quad 8.2$$

8.2 bağıntısı ile belirlenir.  $\lambda_{z_0}$ 'ın değerine bağlı olarak dört değişik sonuç karşımıza çıkar.

- a.  $0 < |\lambda| < 1$  için çekici yörünge,
- b.  $\lambda = 0$  için süper çekici,
- c.  $|\lambda| > 1$  için püskürtülmüş,
- d.  $|\lambda| = 1$  için durgun,

Bu sonuçlardan hangi noktaların çekici, hangilerinin püskürtülmüş periyotlu oldukları kolayca görülebilir.

Cazip periyotlu noktaların kümesine caziplik havuzu denir. Bu cazip noktaların havuza akması aynen yeryüzündeki suların göllere veya denizlere akmasına benzer. İşte bu havuzların bilgisayar ile hesaplanması sonucunda ilginç dinamik davranış görünümleri sergilenmektedir.

### 8.3 Karmaşık Türev

Türev genellikle bir eğrinin eğimi olarak düşünülür. Oysa türevin tanımında bir limit durumu söz konusudur.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{p(z+h) - p(z)}{h} \quad 8.3$$



Burada  $z$  ve  $h$  karmaşık sayılar oldukları için,  $p(z)$  de karmaşık değer alacaktır. Gerçek polinomların türevleri için geçerli olan kurallar, karmaşık fonksiyonlar için de aynen geçerlidir. Buna göre karmaşık işlevlerde türev,

$$\frac{d}{dz} az^n = anz^{n-1} \quad 8.4$$

$f'(z)$  ile temsil edilebilir.

#### 8.4 Karesel Üreteçler

Bu tür kümeler analitik işlevler yardımıyla belirlenebilir.

$$x \longrightarrow f^*(x) = x^2 - \mu \quad 8.5$$

$x$  ve  $\mu$  birer gerçek sayılardır.

$$z \longrightarrow f^*(z) = z^2 - \mu \quad 8.6$$

$z = x + jy$  ve  $\mu$  karmaşık sayılardır. Genel olarak bu tür işlevler,

$$z_{n+1} = R(z_n) \quad 8.7$$

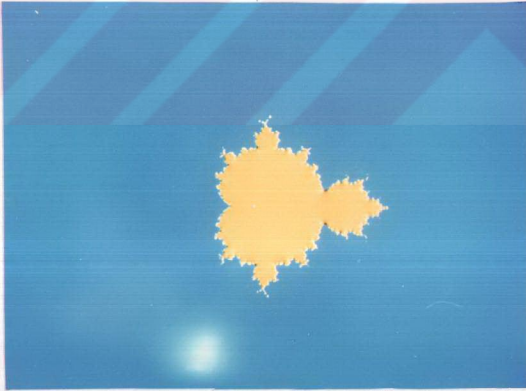
şeklinde ifade edilebilir. Tekrarlamalarda kullanılacak başlangıç koşulları  $x_0$  veya  $z_0$  ile gösterilir.  $k$  kez tekrarlanan transformasyon  $f^*$  ve  $k$  kez tekralanan transformasyonun sonuçları  $x_k$ ,  $z_k$  ile gösterilmiştir.

Dinamik sistemlerin tanınmasında önemli rolü olan karesel işlevlerin, dinamik noktalar civarındaki

gösterdikleri davranışlar, klasik analizlerde incelenmiştir (Blanchard 1984).

Fatou ve Julia'nın klasik analiz çalışmalarından da yararlanarak, analitik işlevler teorisinde, belirli bölgede dinamik sistemlerin normalitesinin sınıflandırılması için, Mandelbrot ve Douady ve Hubbard önemli çalışmalar yapmışlardır. Yapılan incelemelerde, Montel teoreminin bazı sonuçlarından da yararlanılmıştır. Genellikle, yapılan çalışmalar karesel ve polinomsal ifadelerin dinamiği üzerinde yoğunlaşmıştır (Mandelbrot 1983).

Mandelbrot çalışmalarında, sezgisel olarak karmaşık analizi tarayarak elde ettiği gerçekleri, az öz çizimleri ve sayısız sonuçları sergilemiştir. Ayrıca ortaya çıkan fiziksel gerçeklere de, ayrıntılı biçimde yer ayırmıştır. Her fraktal üretim tekniğinde olduğu gibi yine sonuçlar, bilinen basit tekrarların uygulanması ile elde edilmiştir. Şekil 8.1 fraktal özellik gösteren, Mandelbrot kümesi verilmiştir.



Şekil 8.1 Mandelbrot Kümesi

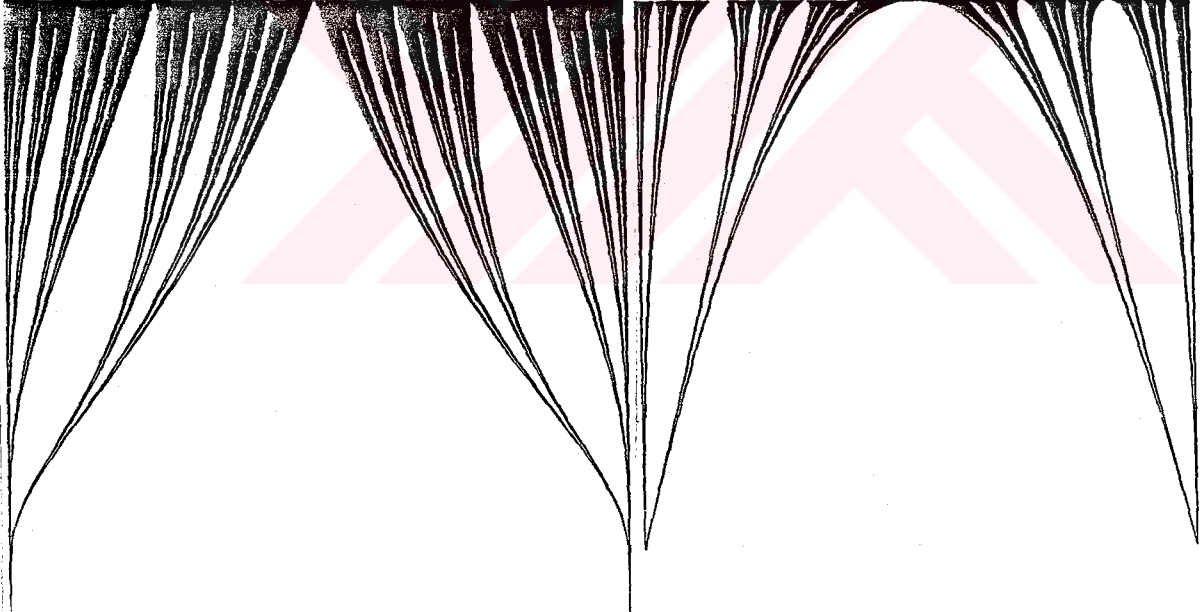
Diğer bir karesel üreteçte 8.8 de verilmiştir.

$$x \longrightarrow f(x) = \lambda x(1-x)$$

8.8

Kareleme işlemi aslında cebirsel bir işlem olmasına rağmen, geometrik yorumunda değişmez özellikler gösteren kümeler gözlenmektedir. Bu özellikler "kendinden-karelenmiş" (self-squared) adını almaktadır. Kareleme işlemi,  $x^2$  eksenindeki noktalar tarafından  $x$  eksenindeki noktaların tekrarlanmasıdır. Bu kareleme işleminin, 8.1 ve 8.2'de  $\mu=0$  için, bir doğru üzerinde  $x=\infty$ ,  $x=0$  ve  $x=1$  değerlerine yakınsadıkları görülür.  $\mu$ 'nün sıfırdan farklı değerler alması basit bir işlem olmasına rağmen sonuçta, bize beklenmedik olasılıklar sunmaktadır.

Fatou  $\lambda$  'nın gerçel ekseninde  $\lambda > 4$  'de uygun şartları sağlandığını kabul ederek  $\mathbb{R}$  üzerinde sınırlanmış kümenin en geniş sınırını buldu. Bu küme  $f(x)$  altında değişmez kalmaktadır ve Cantor tozu ile benzerlikler göstermektedir. Karmaşık düzlemde geniş sınırlı kendinden-karelenmiş



(a)

(b)

Şekil 8.2 Cantor ve Fatou Tozu

kümeler, mevcut  $\lambda$ 'lar için bu kez gerçel Fatou tozu adını alırlar. Şekil 8.2 (a)'da Cantor tozu (b)'de ise gerçel Fatou tozu verilmiştir (Mandelbrot 1983).

## 8.5 Oransal Polinomlar ve izdüşümleri

Stereografik projeksiyon yapılarak,  $C$  "karmaşık küme" üzerindeki standart koordinat sistemini temsil etmek üzere,  $w=f(z)$  ifadesi temsilci seçilebilir. Öyleki,  $f$  işlevi  $z=x+iy$  değerinde  $w=u+iv$  değerini almaktadır. Bu koşul altında analitik dönüşüm aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$R(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \quad 8.9$$

$p(z)$  ve  $q(z)$  birer karmaşık polinomlardır, ve ortak çarpanları yoktur. Bu oransal işlevlerin, bire bir karşılıkları ve analitik izdüşümleri mevcuttur. Aynı zamanda oransal işlevlerin kutuplarının izdüşümleri  $\bar{C}$ 'nin içinde sonsuzda bulunmaktadır.

Burada  $C$  Karmaşık düzlemin temsil ettiği noktaların kümesi olmak üzere, belirlenen uzayda  $\bar{C} = C \cup \{\infty\}$  basit birleşiminden oluşan, analitik Riemann küresidir.

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} \quad 8.10$$

dir. Aynı zamanda aşağıdaki analitik ilişki mevcuttur.

$$R: C \longrightarrow C$$

Oransal fonksiyonların izdüşümleri çok değişik şekillerde yapılabilmesine rağmen, temel olanlardan biri  $R^n$  dir.  $R^n$ ,  $R$ 'nin kendisi ile  $n$  kez katlanması gösterir. Diğer bir deyişle  $R$ 'nin  $n$  katlı bileşke fonksiyonu adını alır.

$$R^n = R(R(\dots R(z) \dots)) = R \circ R \circ R \circ \dots \circ R \quad 8.11$$

ifadenin diğeri bir gösterimi ise,  $Q^+(z_0)$  şeklindedir ve ileri yörünge adını alır. Burada ileri yörünge  $z_0$  değeri ile başlayan aşağıdaki tekrarlı işlevi temsil eder.

$$z_{n+1} = R(z_n) \quad 8.12$$

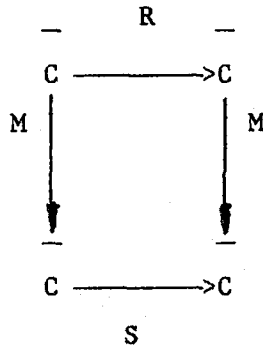
Polinomların dinamik davranışını incelemeye kullanılan diğeri yardımcı da Newton yöntemidir.

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \quad 8.13$$

Bu iki yöntem kullanılarak elde edilen izdüşümler sonuç kısmında verilmiştir.

Dinamik sistem teorisinde, oransal işlevler bize çok kullanışlı sonuçlar sunmaktadır. Fakat henüz kesin çözüm yöntemleri belirlenememiş olduğundan, sonuçlar, bilinen karesel işlevlere benzetilerek anlaşılmaya çalışılmıştır.

Dinamik sistemlerin tanınmasında önemli yardımcılardan biri de Möbius (M) transformasyonudur. Bu dönüşüm oransal işlevler ile karesel işlevler arasında ilişki kurmamızı sağlar. Buna göre,



Şekil 8.3 Möbius Transformasyonu

R ve S analitik şekillendiricilerdir. R ve S, M tarafından şekillendirilirse  $R^n$  ve  $S^n$  de aynı şekilde M tarafından

şekillendirilir.

$$R = M^{-1} \circ S \circ M(z)$$

8.14

Möbius transformasyonu "Bijektive oransal izdüşüm" R tarafından üretilen ve cevaplanamayan problemlere, S ve M işlevleri yardımı ile çözüm bulmayı sağlar.

Örnek : Herhangi bir karesel polinom olarak  $R(z) = az^2 + 2bz + d$  seçilsin. Benzer karesel polinom  $P(z) = z^2 + c$  olsun, ve şekillendirici olarak da  $M(z) = az + b$  alınır,  $c = ad + b - b^2$  olduğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\begin{aligned} M^{-1} \circ S \circ M(z) &= M^{-1} [(az+b)^2 + c] \\ &= M^{-1} (a^2 z^2 + 2abz + b^2 + c) \\ &= \frac{(a^2 z^2 + 2abz + b^2 + c) - b}{a} = R(z) \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır.

### 8.6 Dinamik Sistemlerde Değişmezlik

Dinamik sistemlerin uzun dönemli davranışının, önemli özelliklerinden biride "değişmezlik"tir. Değişmezlik, karmaşık sayılar kümesi olan S'ye, f işlevi uygulandığında  $S = f(S)$  sonucu ile belirlenir. Örneğin; bir durgun nokta veya periyodik nokta değişmezlik özelliğini taşır.

Eğer bir  $S = f(S)$  değişmezliği gösteren f işlevi,  $f^{-1}(S) = S$ 'i sağlıyorsa, f'in çift yönlü değişmezlik özelliği vardır.  $f(z) = z^2$  işlevinde,  $z=0$  ve  $1$  değerleri için çift yönlü değişmezlik söz konusudur.

## 8.7 Dinamik Sistemlerde Julia Kümesi

Yirminci yüzyılda, Gaston Julia tarafından bir çok niteliği belirlenen  $J$  "Julia kümesi" bir çok polinomsal işlevlerin izdüşümlerinin sonucu olarak karşımıza çıkmaktadır. Her Julia kümesinin fraktal olamamasına rağmen, bir çoğu fraktaldır.

Fraktal veya fraktal olmayan Julia kümelerinin bilgisayar yardımı ile hesaplanması iki temel kurala dayandırılabilir.

a. Polinomların püskürtülen periyodlarınının kapalı kümesi, Julia kümesini belirler.

b. Julia kümesini, sonsuzdaki çekici kümeler ile çekici olmayan kümeler arasındaki sınır değerleri belirler.

Julia kümesi, bu iki ilkedén biri seçilerek hesaplanabilir. Bu ilkelerin uygulanması ile karşımıza iki basit yöntem çıkar.

Birinci yöntem, birinci ilkeye dayandırılarak,  $p(z)$  polinomunun,  $z_0$  başlangıç değeri ile belirlediği Julia kümesini hesaplar. Bu hesaplama işlemi iki adımdan ibarettir.

1. Önce, ele alınan  $p(z)$  işlevinin,  $z_n$  değeri için tersi bulunur. Bunun ardından  $z_n$  değeri ile işleme başladıktan sonra,  $z$  çözümü,  $p(z)=z_n$  eşitliğinden bulunur. Seçilen  $p(z)$  polinomunun derecesine bağlı olarak, birden fazla çözüm olabilir. Örneğin karesel fonksiyonun tersinde, karekök alma işlemi olduğundan, iki çözüm oluşacaktır.

2. Yukarıda bulunan çözüm kümesinden rasgele birini seçerek ( $z_{n+1}$ ) ekranda görüntüleyiniz.

$z_n$  değeri ile başlayan tekraralama sonunda, elde edilen değerler Julia kümesine yakınsar. Elli veya daha farklı nokta ekrana düşürüldüğünde, fraktal iz gözükür.

İkinci yöntem, ikinci tanıma dayanmaktadır. Yöntemin, ekran ile aynı ayrıntıdaki karesel ızgara üzerindeki her bir

noktaya uygulanması ile Julia kümesi oluşur. İşlem için çekici periyodları  $k$  olan  $x_1, x_2, \dots, x_n$  noktalarını içeren  $p(z)$  polinomunu seçelim. Diğer yardımcıları ise, yeterince büyük  $N$  ve yeterince küçük  $\epsilon$  değerleridir. Buna göre Julia kümesini üreten yöntem, üç adımdan ibarettir.

1.  $z=z_0$  karmaşık sayısını hesapla ve pikselin merkezine izdüşür.
2. Aşağıdaki adımları elli veya daha fazla kez tekrarla.
  - a. Bir sonraki tekrarı hesapla.  $\{z_n=p(z_{n-1})\}$
  - b.  $z_n$ 'nin mutlak değerinin  $N$  değerinden büyük olup olmadığını kontrol et. Eğer büyük ise, tekrarı sonlandır ve pikseli, uygun renkte boy.
  - c.  $z_n$ 'nin  $x_1$ 'e  $\epsilon$  uzaklığında olup olmadığını kontrol et. Eğer bu uzaklık  $\epsilon$  dan küçük ise uygun yeni rengi seçerek, pikseli boy.
3. Elliden daha fazla sayıdaki tekrarlama sonucunda,  $z_n$   $N$  den büyük olmuyorsa, bu çekilemeyen pikseli, uygun renk ile boy.

### 8.8 Dinamik Sistemlerde, Julia ve Mandelbrot Kümelerinin Özellikleri

Yukarıdaki yöntemlerin uygulanması ile elde edilen sonuçların bazılarının fraktal olmamasına rağmen, bir çoğu fraktaldir. Örneğin;  $\mu$  karmaşık sayı olmak üzere,  $f_\mu = z^2 - \mu$  karesel işlevi düşündüğümüzde, Mandelbrot kümesini, aşağıdaki koşulu sağlayan  $\mu$  değerleri belirler.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_\mu^n(0)| < \infty \quad 8.15$$

Fraktal geometrik bir şekil büyütüldüğünde, ayrıntı değişir ve artar. Bu büyütme işlemi ne kadar yapılırsa yapılsın ayrıntı yok olmaz hatta çoğalır. Fraktal olmanın diğer bir niteliği ise değişmezliktir. Çünkü fraktal cismin



veya kümenin tekrarlı yapısı onun değişmezlik özelliği ile açıklanabilir. Burada  $f$  işlevinin tekrarlanması ile belirlenen bir fraktal Julia kümesindeki her hangi bir görüntü parçası dönmüş, buruşmuş, veya ötelenmiş olarak tekrar tekrar benzer biçimde gözükür. Bu tekrarlı görünüm bir veya iki tane değil sonsuz sayıda olur.

Mandelbrot ve Julia kümelerinin değişik özelliklerinden bir kaç tanesine değinelim. Mandelbrot kümesi karesel polinomların temel bir resmi gibi düşünülebilir. Aynı duyarlılıkla, Julia kümesi ise polinomsal işlevlerin özel bir resmidir. Yani farklı karesel polinomların, farklı farklı Julia kümeleri ve farklı farklı görünüşleri vardır.

Bu iki fraktal kümenin her ikisinin de, ilginç bilgi birikimi içeren görünüşler sergiledikleri bilinmektedir. Fakat, Julia kümesinin daha fazla bilgi birikimi içerdiği sonuçlarından görülmektedir.

#### 8.9 Dördüncü Boyutta Karmaşık Sistem

Julia ve Mandelbroth kümelerinin, karmaşıklıkları, güzellikleri, ve doğallığı daha yüksek boyuta genelleştirilmiş durumlarda aranmıştır. Uygun boyutu belirleme sorununa verilecek çözüm, sadece matematik bilimi için değil, aynı zamanda diğer bilim dallarından fizik ve bilgisayar grafikleri için de yeni ufuklar açacaktır. Dördüncü boyut kavramı 1843'de fizikçi ve matematikçi olan R. Hamilton tarafından ortaya atılmış ve en uygun ortamın dördüncü boyut olabileceği düşünülmüştür.

Buna göre karmaşık sayıların genişletilmiş bir şekli olan quaternion sayı türü belirlenmiştir. Bu durumda yeni toplama, çıkarma, çarpma, ve bölme kuralları oluşmuştur. Bu kurallara göre bir quaternion sayı,

$$Q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$$

şeklinde tanımlanmıştır. 8.16 bağıntısındaki  $i, j,$  ve  $k,$  karmaşık sayıya benzer ve üç ortogonal yöndeki birim vektörlerdir. Birim vektörlerin kendi aralarındaki çarpımları aşağıdaki biçimlerde verilir.

$$i^2=j^2=k^2=-1; \quad 8.17$$

$$ij=-ji=k; \quad 8.18$$

$$jk=-kj=i; \quad 8.29$$

$$ki=-ik=j; \quad 8.20$$

Bu kuralara göre ,

$$ax^2+bx+c$$

çarpımı, aşağıdaki çarpımların hiç birine eşit olamayacaktır (Norton 1989).

$$x^2+a+bx+c$$

vaya

$$x^2+a+xb+c$$

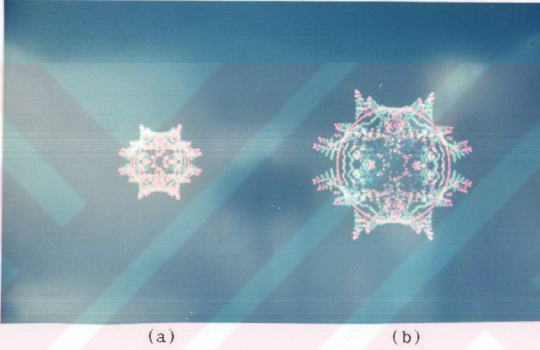
veya

$$xax+bx+c$$

Bu yeni kurallar ışığında, dört boyutta yeni fraktal kümeler oluşturulup iki-boyutlu ekranda sergilenebilir.

## 9 SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu çalışmada cisimlerin ve değişik fraktal veya fraktal olmayan dokularınının üretimi gerçekleştirilmiştir. Şekil 9.1 deki doku bir surahi yüzeyine eklenerek değişik konumlarda görüntülenmiştir. Burada, şekil 9.1 (a) ve 9.1 (b) gözlemcinin cisme yaklaşması ile oluşan ayrıntı artışı açık biçimde görülmektedir.



Şekil 9.1 Fraktal Doku Çeşitleri

Cisim üretiminde değişik üretim teknikleri kullanılmıştır. Şekil 9.2 ve 9.3 de Bezier yüzey parçası üretme tekniği kullanılarak surahi oluşturulmuştur. Yüzey eliminasyonu için, cisimi oluşturan yüzey parçaları yeterli derecede altparçalara bölünmüştür. Daha sonra, oluşan yüzey parçacıklarına, ışın çizme yöntemi uygulanmıştır. Diğer adımda ise, görüntülenecek yüzey parçaları, doku uzayından gelen doku ve aydınlatma modeli ile belirlenen ışık etkilerine uygun olarak boyanmıştır.

Görüntülerin doğallaştırılmasını sağlayan fraktal dokuların, Sonsuz ayrıntı içerdikleri şekil 9.4'de verilmiştir. Şekillerden de görüleceği gibi şekil 9.4 (a)

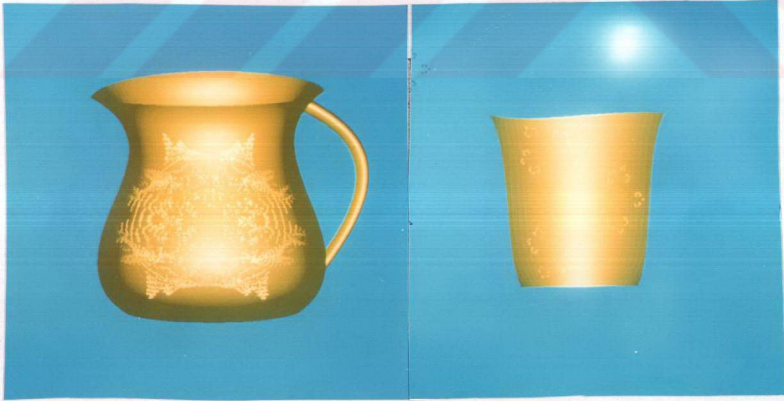
nın bir kısmı büyütülerek, (b) de sergilenmiştir. Aynı işlem (b), (c) ve (d) için devam ettirilmiştir.



(a) Surahi

(b) Bezier yüzeyi

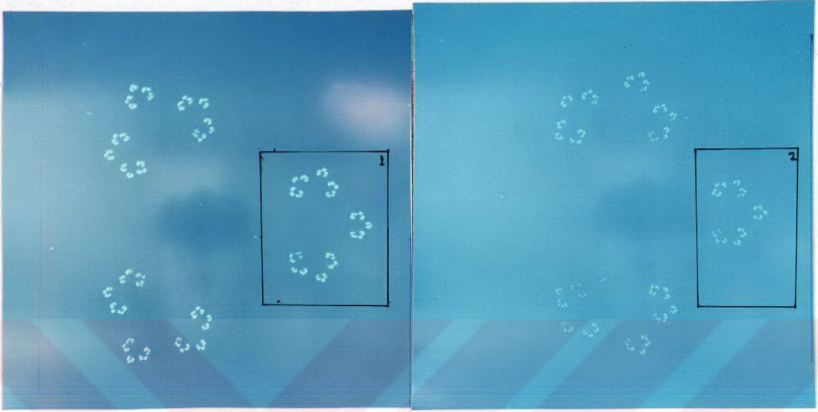
Şekil 9.2 Uzaktaki Cisim



(a) Surahi

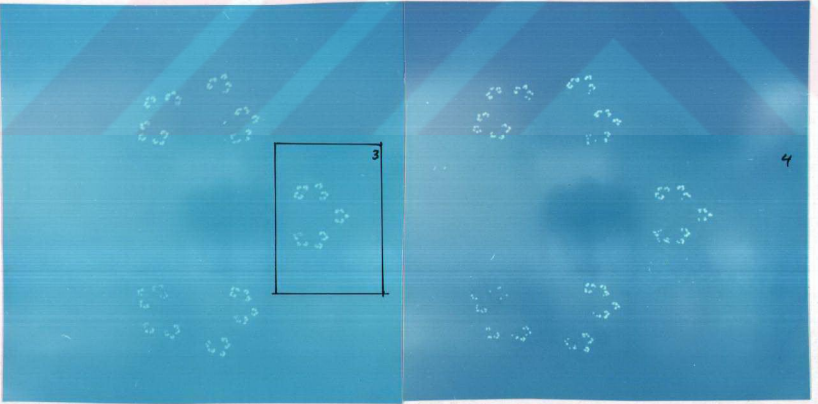
(b) Bezier yüzeyi

Şekil 9.3 Yakındaki Cisim



(a)

(b)

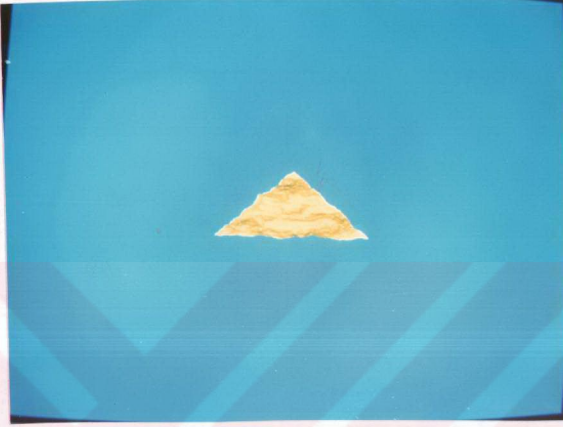


(c)

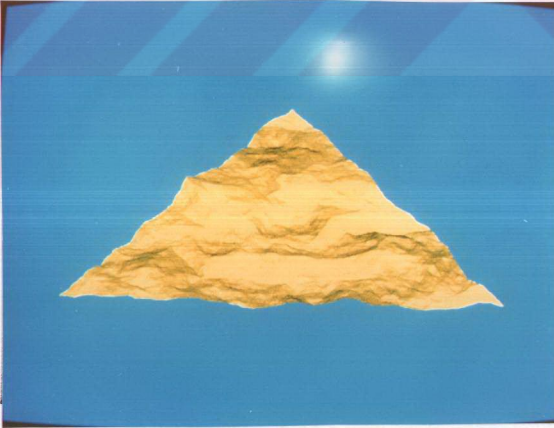
(d)

Şekil 9.4 Fraktal Cisimlerin Sonsuz  
Ayrıntı Taşımaları  $f(z)=z^3-1$  ile Gösterilmiştir.

Şekil 9.5 (a) ve (b) de bir fraktal dağ incelenmiştir. Burada Şekil 9.5 (a) 96,864 küçük üçgen parçacığından oluşturulmuştur. Diğer bir örnekte ise, Şekil 9-6 da dörtgen parçacıklardan oluşmuş cisim sergilenmektedir.

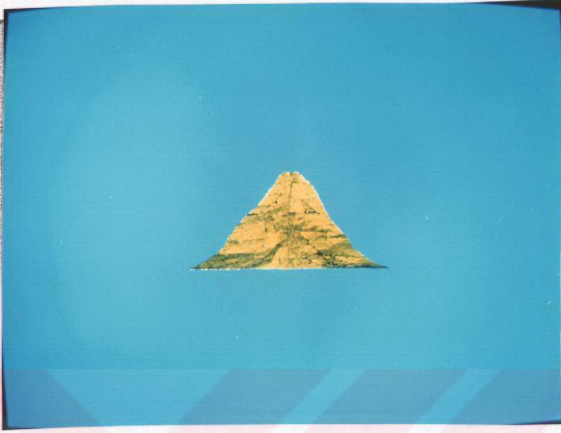


(a)

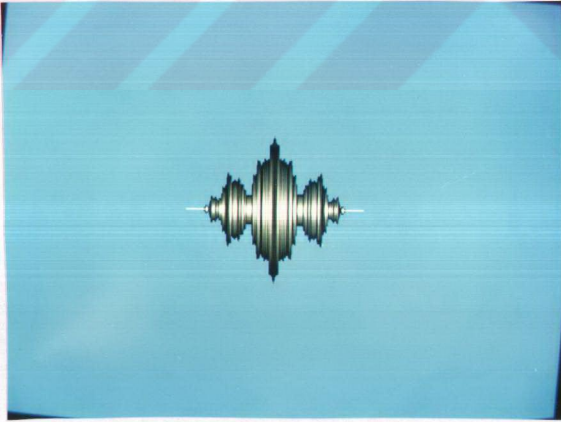


(b)

Şekil 9.5 Fraktal Dağ

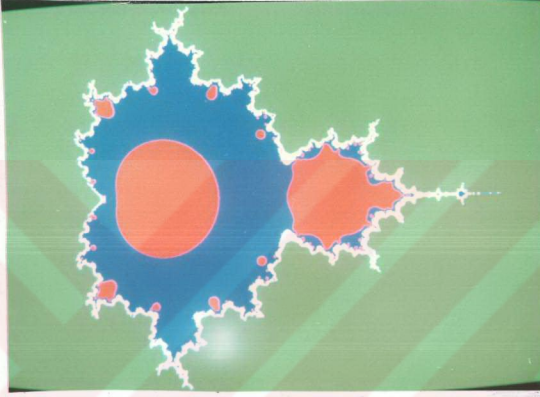


Şekil 9.6 Fraktal Dörtgen  
Yüzeyciklerden Oluşan Cisim



Şekil 9.7 Julia Kümesi, x Ekseni  
Etrafında  $90^{\circ}$  Derece Döndürülmüş

Bilgisayar grafikleri biliminin uğraştığı ve fraktal sonuçlar veren cisimlere, karmaşık dinamik sistemlerin izdüşümlerinden çeşitli örnekler verilmiştir. Aşağıda Şekil 9.8 ve 9.9 da sırası ile  $f(z)=z^2-\mu$  ve  $f(z)=\lambda z(z-1)$   $z_0=0.25+j0.75$  için, Mandelbrot kümelerinin çeşitli izdüşümleri sergilenmiştir.



Şekil 9.8  $f(z)=z^2-\mu$  İçin Izdüşüm



Şekil 9.9  $f(z)=\lambda z(z-1)$  için Izdüşüm



Karmaşık dinamik sistemlerin incelenmesinde kullanılan Newton izdüşüm yöntemi ile üretilmiş diğer bir örnek Şekil 9.10 da gösterilmiştir. Burada  $z^3-1=0$  işlevi kullanılmıştır.

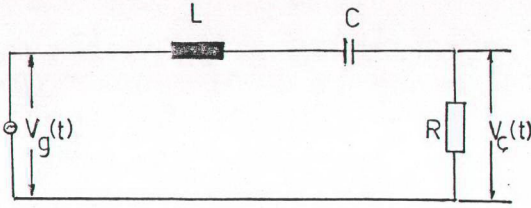


Şekil 9.10 Newton Yöntemi ile İzdüşüm ( $Z^3-1=0$ )

Bilindiği gibi transfer işlevleri de, bir çeşit oransal polinomlardır. Aşağıda izdüşüm işlemine değişik bir örnek olarak, fraktal özellik taşımayan, seri rezonans devresinin transfer fonksiyonunun izdüşümü sergilenmiştir. Bu işlem L-C düzleminde gerçekleştirilmiş ve rezonans olayı geçiş ifadesinin sonucundan açıkça görülmüştür. Bu yöntemle transfer işlevlerinin ve dolayısıyla sistemlerin dinamik davranışının, incelenebileceği düşünülmüştür. Devre için (Şekil 9-11),

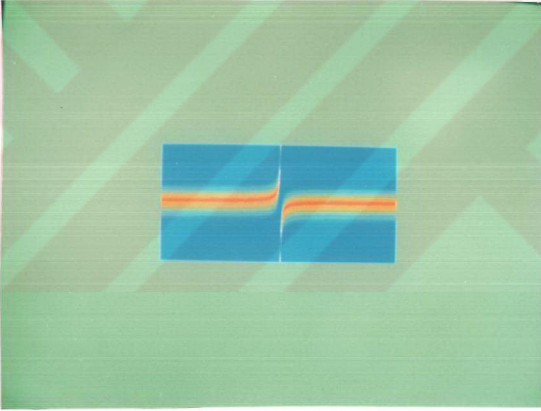
$$T(s) = \frac{V_{\phi}(s)}{V_g(s)} \quad 9.1$$

dir. ve  $s=f(l,c,r,f)=f(l,c,l,l)$  olmak üzere, izdüşüm sonucu Şekil 9.12 de sergilenmiştir.



Şekil 9.11 Seri Rezonans Devresi

Sonuçlardan görüleceği gibi, çalışma sırasında çeşitli cisim ve doku üretim, teknikleri uygulanmış ve bazı sonuçları öz olarak sergilenmiştir.



Şekil 9.12 Rezonans Devresi için İzdüşüm

## KAYNAKLAR

Rogers, D.F., Adams, J.A., Mathematical Elements for  
Computer Graphics, McGraw-Hill Book Company, 1976.

Rogers, D.F., Procedural Elements for Computer Graphics,  
McGraw-Hill Book Company, 1985.

Newman, M. W., Sproull, R.F., Principles of Interactive  
Computer Graphics, McGraw-Hill Book Company, 1979.

Mandelbrot, Benoit B. The Fractal Geometry of Nature  
W. H. Freeman and Company, New York, 1983.

Hearn Donald, Baker M. Pauline, Computer Graphics, Prentice-  
Hall international editions, Western illions university  
USA, 1986.

Heinz Georg Schuster, Deterministic Chaos, Physik-  
Vergal GmbH, Federal Republic of Germany, 1984.

Ruel V. Churchill, James W. Brown, Roger F. Verhey, complex  
Variable and Application, McGraw-Hill Book Company,  
1974.

Norton Alan, Julia Sets in the Quaternions, Computer &  
Graphics Vol 13. No 2. pp 267-278, Great Britain, 1989.

Blanchard Paul, Complex Analytic Dynamics on the  
Riemann Sphere, American Mathematical Society Vol 11.  
No 1, July 1984.

Stephen T.Welstead And Thomas L. Cromer, Coloring

- Periodicities of Two-dimensional Mappings, Computer & Graphics Vol 13. No 4. pp 539-543, Great Britain, 1989.
- Mieczyslaw Szyszkowicz, Computer Graphics Generated by Numerical Iteration, Computer & Graphics Vol 13. No 1. pp 121-126, Great Britain, 1989.
- Arney D. C. and Robinson B.T, Exhibiting Chaos and Fractal with Microcomputer, Computer & Graphics Vol 19. No 3. pp 1-11, Great Britain, 1990.
- Ian D. Entwistle, Methods of Displaying the Behaviour of the Mapping  $Z \rightarrow Z^2 + \mu$ , Computer & Graphics Vol 13. No 4. pp 549-551, Great Britain, 1989.
- Ian D. Entwistle, Julia Set Art and Fractals in the Complex Plane, Computer & Graphics Vol 13. No 3. pp 389-392, Great Britain, 1989.
- Seeley G, Keyes T, and Ohtsuki T, Higher-Order Fractal Geometry; Application to Multiple Light Scattering, The American Physical Society, Vol 60. No 4. pp 290-293, USA, 1988.
- Paul Meakin, Simulation of the Effects of Fractal Geometry on the Selectivity of Heterogeneous Catalysts North Holland Physics Publishing Division, Vol 123. No 5. pp 428-432, 1986.
- Mcleod R.D, Lui D, Pries W, Kao K.C. and Card H., Polarity Dependence of Fractal Geometry in Partial Discharge in Dielectrics, Solid State Communications, Vol 56. No 2. pp 197-199, Great Britain, 1985.
- Paul G. Okubo, Keiiti Aki, Fractal Geometry in the San

Andreas Fault System, Journal of Geophysical Research,  
Vol 92. No B1. pp 345-355, 1987.

James M. Susan Chen, and Richard M. Crownower, Texture  
Description and Segmentation Through Fractal Geometry,  
Computer Vision, Graphics, and Image Processing, Vol  
45. pp 150-166, 1989.

Jeffery Tom, Mimicking Mountain, BYTE, December, pp 337-344,  
1987.

Yazıcı Rifat, Köse Cemal, Eğrisel Yüzeyle Cisim  
Görüntülerinin Üretimi, Elektrik Mühendisliği III.  
Ulusal Kongresi pp. 708-711, İstanbul, 1989.

Onural Levent, Markov Rasgele Alan Modellerine Yerel  
Olmayan Kısıtlamaların Katılması: Koşullu Markov  
Rasgele Alanları, Elektrik Mühendisliği II. Ulusal  
kongresi pp. 74-77, Ankara, 1989.

Onural Levent, Aerosol Yığınları için Doku Yapısı  
Belirlenebilen bir Fraktal Modeli, Elektrik  
Mühendisliği II. Ulusal kongresi pp. 93-96, Ankara,  
1989.

## ÖZGEÇMİŞ

Cemal KÖSE, 1964 yılında Trabzon'un Beşikdüzü ilçesinde doğdu. İlk öğrenimini, aynı ilçeye bağlı Yeşilköy ilkokulunda tamamladı. Orta ve lise öğrenimini 1982 yılında Şalpazarı lisesinde bitirdi. Aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği bölümünde yüksek öğrenimine başladı. 1986 yılında bu öğrenimini tamamladıktan sonra, bir yıl Türkiye Radyo Televizyon Kurumunda işletme bakım mühendisi olarak çalıştı. Hemen Karadeniz Teknik Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalında Araştırma görevlisi olarak çalışmalarına devam etmektedir.

Anahtar kelimeler:Doku, Fraktal, Gizli yüzeylerin yok edilmesi, Modelleme, Antialiasing.

Özet: Tez çalışmasının konusu, bilgisayar yardımı ile üretilen cisimlerin yalın yüzeylerine doku eklenerek, cismin doğal görünüm kazandırılmasıdır. Birinci bölümde, eğri, yüzey, ve cisim üretim tekniklerine değinilmiştir. Daha sonra cisimlerin döndürülmesi, ötelenmesi, ve perspektif projeksiyon işlemleri incelenmiştir. Görüntülemenin önemli aşamaları arasında yer alan gizli yüzeylerin yok edilmesi, üretilen cismin aydınlatılması ve boyanması tekniklerine ayrı ayrı dördüncü ve beşinci bölümlerde geniş şekilde yer verilmiştir. Son bölümlerde ise fraktal veya fraktal olmayan doku çeşitlerinin üretilmesine, ve bu dokuların yalın cisim yüzeyine eklenmesi işlemlerine değinilmiştir. Yapılan çalışmaların ürünleri, sonuç bölümünde sergilenmiştir.

Computer Generation of Surface Texture and  
Fractal Objects

Keywords: Texture, Fractal, Hidden surface elimination, Modelling, Antialiasing.

Abstract: The subject of the thesis is based on the generation of texture for featureless surfaces produced by classical methods in computer. The thesis is organized into nine chapters. After providing an overview of techniques available for producing curves, surfaces and objects, perspective transformations of three-dimensional objects, which consist of rotation, translation, and perspective projection, is discussed up to forth chapter. Then, the principles and techniques of hidden surface elimination methods given in detail to produce more realistic images. After discussing illumination problems related to the painting of objects, a simple illumination model giving acceptable effects has been developed. Adding a texture pattern to smooth surfaces of objects is performed essentially with the aid of a mapping function which can be either linear or nonlinear. Fractal construction of objects and generation methods of fractal texture patterns are investigated and the resulting texture pictures are given at the end.