

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**ELASTİK YARIM DÜZLEME OTURAN VE İKİ RİJİT BLOK ARACILIĞIYLA
YÜKLENMİŞ FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ TABAKANIN TEMAS
PROBLEMİ**

DOKTORA TEZİ

Alper POLAT

ŞUBAT 2019

TRABZON



KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**ELASTİK YARIM DÜZLEME OTURAN VE İKİ RİJİT BLOK ARACILIĞIYLA
YÜKLENMİŞ FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ TABAKANIN TEMAS
PROBLEMİ**

Alper POLAT

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
“DOKTOR (İNŞAAT MÜHENDİSİ)”
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 14 / 01 / 2019

Tezin Savunma Tarihi : 08 / 02 / 2019

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Talat Şükrü ÖZŞAHİN

Trabzon 2019

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalında
Alper POLAT Tarafından Hazırlanan**

**ELASTİK YARIM DÜZLEME OTURAN VE İKİ RİJİT BLOK ARACILIĞIYLA
YÜKLENMİŞ FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ TABAKANIN TEMAS
PROBLEMİ**

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 15 /01 /2019 gün ve 1787 sayılı
kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda
DOKTORA TEZİ
olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

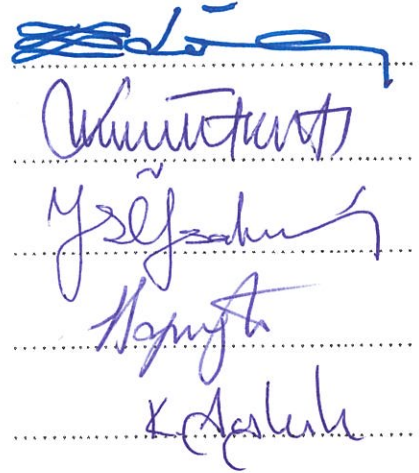
Başkan : Prof. Dr. Ragıp ERDÖL

Üye : Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ

Üye : Prof. Dr. Talat Şükrü ÖZŞAHİN

Üye : Prof. Dr. Hasan SOFUOĞLU

Üye : Prof. Dr. Kurtuluş SOYLUK


The image shows five handwritten signatures in blue ink, each written on a horizontal dotted line. The signatures correspond to the names of the jury members listed on the left: Ragıp Erdöl, Ahmet Birinci, Talat Şükrü Özşahin, Hasan Sofuoğlu, and Kurtuluş Soyuluk.

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışma Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Doktora tezi olarak hazırlanmıştır.

Bu tez çalışma konusunu bana öneren, çalışmamın her aşamasında bilgi ve birikimlerinden faydalandığım, bu zorlu yolda beni hep iyiye ve doğruya yönlendiren ve öğrencisi olmaktan şeref duyduğum danışmanım Sn. Prof. Dr. Talat Şükrü ÖZŞAHİN hocama sonsuz minnet ve şükranlarımı sunarım.

Çalışmamın tüm aşamasında tecrübe, bilgi ve birikimlerinden faydalandığım kıymetli hocalarım Sn. Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ, Sn. Prof. Dr. Hasan SOFUOĞLU, Sn. Doç. Dr. Volkan KAHYA, Sn. Doç. Dr. İsa ÇÖMEZ ve Sn. Arş. Gör. Gökhan ADIYAMAN'a yürekten teşekkür ederim.

Tez çalışmam süresince desteklerini esirgemeyen Sn. Prof. Dr. Ragıp ERDÖL'e, Sn. Prof. Dr. Kurtuluş SOYLUK'a, Sn. Prof. Dr. Abdullah AVEY'e, Sn. Prof. Dr. Ayşe DALOĞLU'na, Sn. Prof. Dr. Ömer KELEŞOĞLU'na, Sn. Prof. Dr. Hikmet ESEN'e, Sn. Prof. Dr. S. Serkan NAS'a, Sn. Dr. Öğr. Üyesi Hasan Basri BAŞAĞA'ya, Dr. Kouider BENDINE'e, Sn. Arş. Gör. Sebahat KARACA'ya ve Sn. Ayşe BAYRAKTAR'a ayrıca teşekkür ederim.

Doktora eğitimine birlikte başladığımız günden itibaren hep yanımda olan kardeşim Sn. Arş. Gör. Yusuf KAYA'ya, Trabzon'da bulunduğum süre içerisinde bana her türlü kolaylığı sağlayan Sn. Emrah KARLIDAĞ ve ailesine de teşekkürü bir borç bilirim.

Eğitim hayatım boyunca benden desteklerini esirgemeyen ve bugünlere gelmeme vesile olan POLAT ailesinin tüm fertlerine ayrıca tez çalışmam süresince hep yanımda olan ve desteklerini bir an olsun esirgemeyen YILMAZER ailesine de minnet ve şükranlarımı sunarım.

Beni sabırla destekleyen bir eşten fazlası; bir dost, bir meslektaş, bir hayat arkadaşı, evlatlarım Âlim Toprak ve Ömür Kuzey'in annesi Sn. Öğr. Gör. Berivan POLAT ve çocuklarıma, şükran, minnet ve sevgilerimi sunar, tezimin ülkemize yararlı olmasını yürekten temenni ederim...

Alper POLAT
Trabzon, 2019

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Doktora tezi olarak sunduğum “Elastik Yarım Düzleme Oturan ve İki Rijit Blok Aracılığıyla Yüklendiş Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabakanın Temas Problemi” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Profesör Doktor Talat Şükrü ÖZŞAHİN’in sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 08/02/2019

Alper POLAT

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET	VII
SUMMARY	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ	IX
TABLolar DİZİNİ.....	XIV
KISALTMALAR VE SİMGELER DİZİNİ	XVI
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş.....	1
1.1.1. Temas Problemlerinin Tarihsel Gelişimi	2
1.1.2. Çalışmanın Amacı ve Kapsamı	13
1.2. Genel Denklemlerin Elde Edilmesi.....	14
1.2.1. Kütle Kuvvetlerinin Dahil Edilmemesi Durumunda Genel Denklemler	15
1.2.1.1. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabakaya Ait Genel Denklemler	15
1.2.1.2. Elastik Yarı Sonsuz Düzleme Ait Genel Denklemler	21
1.3. Kütle Kuvvetlerinin Bulunması Durumunda Genel Denklemler	27
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR	32
2.1. Giriş.....	32
2.2. Sürekli Temas Problemi	32
2.2.1. Problemin Tanımı ve Sınır Şartları	32
2.2.2. Katsayıların Belirlenmesi	34
2.2.3. İntegral Denklemlerin Elde Edilmesi	36
2.2.4. Gerilmelerin Bulunması	41
2.2.5. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabaka ile Elastik Yarı Sonsuz Düzlem Arasındaki İlk Ayrılma Yüğü ve Uzaklığının Bulunması.....	42
2.3. Süreksiz Temas Problemi.....	44
2.3.1. Problemin Tanımı ve Sınır Şartları	44
2.3.2. Katsayıların Belirlenmesi	46

2.3.3.	İntegral Denklemlerin Elde Edilmesi	48
2.3.4.	Ara Yüzeydeki Açılmaların Bulunması	56
2.4.	Problemin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Çözümü	57
3.	BULGULAR VE İRDELEME.....	62
3.1.	Sürekli Temas Çözümleri.....	62
3.1.2.	Rijit Bloklar Altındaki Temas Gerilmelerinin İncelenmesi	62
3.1.3.	FD Tabaka ile Elastik Yarı Sonsuz Düzlem Arasındaki İlk Ayrılma Yükleri ve Uzaklıklarının İncelenmesi.....	66
3.1.4.	Gerilmelerin İrdelenmesi.....	74
3.2.	Süreksiz Temas Çözümleri.....	88
3.2.1.	Açılmaların İrdelenmesi	94
3.3.	Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Elde Edilen Çözümlerin Analitik Çözümle Karşılaştırılması.....	98
4.	SONUÇLAR	107
5.	ÖNERİLER	112
6.	KAYNAKLAR	113
ÖZGEÇMİŞ		

Doktora Tezi

ÖZET

ELASTİK YARIM DÜZLEME OTURAN VE İKİ RİJİT BLOK ARACILIĞIYLA YÜKLENMİŞ
FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ TABAKANIN TEMAS PROBLEMİ

Alper POLAT

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Talat Şükrü ÖZŞAHİN
2019, 119 Sayfa

Bu çalışmada, elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan ve iki rijit blok ile yüklü ağırlık etkisinin dikkate alındığı fonksiyonel derecelendirilmiş tabakada sürekli ve süreksiz temas probleminin çözümü elastisite teorisine göre yapılmıştır. Fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) tabaka üst yüzeyinden $(b-a)/h$ ve $(d-c)/h$ genişliğinde iki rijit blok vasıtasıyla P ve Q dış yükleriyle yüklenmiştir. Birinci bölümde, temas problemleri üzerine yapılan çalışmalar özetlenmiş ayrıca elastisitenin genel denklemlerinden yola çıkılarak, integral dönüşüm teknikleri yardımıyla hem FD tabaka hem de elastik yarı sonsuz düzlem için genel denklemler elde edilmiştir. İkinci bölümde sürekli ve süreksiz temas problemi ayrı ayrı ele alınmıştır. Sürekli temas halinde, bloklar ile fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka arasındaki düşey yer değiştirme fonksiyonunun türevinin sıfıra eşit olması şartı kullanılarak problem tekil integral denklem sistemine indirgenip uygun Gauss-Chebyshev integrasyonu ile çözülmüştür. Bu bölümde ayrıca bloklar altındaki temas gerilmeleri, FD tabaka ile elastik düzlem arasındaki ilk ayrılma yükü ve uzaklıkları ve gerilmeler incelenmiştir. Süreksiz temas probleminde, bloklar altındaki bilinmeyen temas gerilmeleriyle beraber temas yüzeyinde meydana gelen açılmanın eğimi de bilinmeyen olarak alınmıştır. Bu bilinmeyenler, tekil integral denklem sistemine indirgenen problemin Gauss-Chebyshev integrasyonu ile çözümünden elde edilmiştir. Böylece ayrılma başlangıç ve bitiş noktaları, tabaka eksenini boyunca oluşan gerilmeler ve ara yüzeyde meydana gelen açılmalar bulunmuştur. Burada ANSYS programına eklenen bir makro ile FD malzemelerin özellikleri ve ağırlara bölme işlemi tanımlanmıştır. Son bölümde ise çözümlerden elde edilen bulgular grafik ve tablolarla yorumlanmıştır. Sonuç olarak, FD tabakada rijitlik ve yoğunluk parametrelerinin değişiminin ilk ayrılma yükleri, ilk ayrılma uzaklıkları ve gerilme değerleri üzerinde homojen tabakaya kıyasla olumlu yönde etkileri görülmüştür. Ayrıca SEM ile yapılan çözümün analitik çözümle yapılan kıyaslamasında da oldukça uyumlu sonuçlar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka, Temas problemi, Elastisite teorisi, Sürekli temas, Süreksiz temas, İntegral denklem, İlk ayrılma uzaklığı, İlk ayrılma yükü, Sonlu elemanlar yöntemi, ANSYS

PhD. Thesis

SUMMARY

CONTACT PROBLEM OF FUNCTIONALLY GRADED LAYER LOADED BY TWO RIGID
STAMPS AND RESTING ON AN ELASTIC HALF PLANE

Alper POLAT

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Civil Engineering Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Talat Şükrü ÖZŞAHİN
2019, 119 Pages

In this study, the analytical solution is derived according to the theory of elasticity for the continuous and discontinuous contact problems in the functionally graded layer which the weight effect is considered and resting on the elastic semi-infinite plane and loaded with two rigid blocks. The functionally graded (FG) layer is loaded from the top surface with external loads P and Q by means of two rigid blocks with widths $(b-a)/h$ and $(d-c)/h$. In the first chapter, the studies on contact problems are summarized and also general equations for both FG layer and elastic semi-infinite plane is obtained using the integral transformation techniques based on general equations of elasticity. In the second chapter, the problem of continuous and discontinuous contact is examined separately. In the case of continuous contact, using the condition that the derivative of the vertical displacement function between the blocks and the functionally graded layer equals zero, the problem is demeaned to the singular integral equation system and solved by the appropriate Gauss-Chebyshev integration formulas. In this section, the contact stresses under the blocks, the initial separation load, initial separation distances and stresses between the FG layer and the elastic half plane are investigated. In the case of discontinuous contact, besides the unknown contact stresses under the blocks, the gradient of the separation occurring at the interface assumed as unknown. The problem is demeaned to the system of singular integral equations solved by Gauss-Chebyshev integration formulas and unknowns are determined. Thus, the starting and ending points of separation, the stresses along the axis of the layer and the separations at the interface are determined. Also in this section the properties of the FG materials and the meshing are defined with a macro added into the ANSYS program. In the last section, the findings are interpreted with graphics and tables. In addition, the results obtained with FEM are found to be quite compatible with the analytical solution.

Key Words: Functionally graded layer, Contact problem, Theory of elasticity, Continuous contact, Discontinuous contact, Integral equation, Initial separation distance, Initial separation load, Finite element method, ANSYS

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 1.	Sürekli temasta problemin geometrisi ve yükleme durumu	33
Şekil 2.	Süreksiz temasta problemin geometrisi ve yükleme durumu.....	44
Şekil 3.	Problemin ANSYS ile sonlu elemanlar modeli.....	60
Şekil 4.	Serbest üçgen ağlara bölme	61
Şekil 5.	Problemin sonlu elemanlar modeline ait akış şeması.....	61
Şekil 6.	Rijitlik parametresi (βh) değişimine göre bloklar altındaki temas gerilmeleri dağılımı ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$, $y=0$, $h=1$, $\mu_2/\mu_{-h}=1$)	64
Şekil 7.	1. Blok genişliğinin ($(b-a)/h$) değişimine göre bloklar altındaki temas gerilmeleri dağılımı ($a/h=3$, $(c-b)/h=1$, $(d-c)/h=1$, $\beta h=0.6931$, $\mu_0=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$, $y=0$, $h=1$, $\mu_2/\mu_{-h}=1$).....	64
Şekil 8.	Bloklar arası mesafe ($(c-b)/h$) değişimine göre bloklar altındaki temas gerilmeleri dağılımı ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\beta h=-1.3863$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=P$, $y=0$, $h=1$, $\mu_2/\mu_{-h}=1$).....	65
Şekil 9.	2. Blok genişliği ($(d-c)/h$) değişimine göre bloklar altındaki temas gerilmeleri dağılımı ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=1$, $\beta h=0.6931$, $\mu_0=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$, $y=0$, $h=1$, $\mu_2/\mu_{-h}=1$).....	65
Şekil 10.	Kayma modülleri oranı (μ_2/μ_{-h}) değişimine göre bloklar altındaki temas gerilmeleri dağılımı ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=1$, $(d-c)/h=1$, $\beta h=0.6931$, $\mu_0=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$, $h=1$)	66
Şekil 11.	Bloklar arası mesafe ($(c-b)/h$) değişimine göre FD tabaka ve elastik düzlem arasındaki boyutsuz $\sigma_{1y}(x,-h)/P/h$ temas gerilmesi dağılımı ($a/h=2$, $(b-a)/h=0.5$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $Q=2P$, $\beta h=-1.0986$, $\gamma h=-1.0986$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $y=-h$, $h=1$, $\mu_2/\mu_{-h}=1$).....	72
Şekil 12.	Yoğunluk değişim parametresi (γh) için FD tabaka ve elastik düzlem arasındaki boyutsuz $\sigma_{1y}(x,-h)/P/h$ temas gerilmesi dağılımı ($a/h=3$, $Q=2P$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $h=1$, $\beta h=0.4055$, $\mu_2/\mu_{-h}=1$).....	73
Şekil 13.	Rijitlik parametresi (βh) değişimine göre FD tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki boyutsuz $\sigma_{1y}(x,-h)/P/h$ temas gerilmesi dağılımı ($a/h=2$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $Q=2P$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\mu_2/\mu_{-h}=1$, $\gamma h=-0.6931$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $y=-h$, $h=1$).....	73
Şekil 14.	Blok genişliklerine göre FD tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki boyutsuz $\sigma_{1y}(x,-h)/P/h$ temas gerilmesi dağılımı ($a/h=2$, $Q=2P$, $(c-b)/h=2$, $\mu_0=1$, $\mu_2/\mu_{-h}=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $y=-h$, $h=1$, $\gamma h=-0.9163$, $\beta h=-0.9163$).....	74

- Şekil 15. Rijitlik parametresi (βh) değişimine göre FD tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki boyutsuz $\sigma_{1x}(x,-h)/P/h$ temas gerilmesi dağılımı ($a/h=2$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$, $h=1$, $\gamma h=-1.3863, \mu_2/\mu_{-h}=1$) 75
- Şekil 16. Yoğunluk değişim parametresine (γh) göre FD tabaka ve elastik düzlem arasındaki boyutsuz $\sigma_{1x}(x,-h)/P/h$ temas gerilmesi dağılımı ($a/h=1$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=1$, $Q=P$, $(d-c)/h=0.5$, $\mu_0=1$, $\mu_2/\mu_{-h}=1$, $\beta h=-1.0986$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $y=-h$, $h=1$)..... 76
- Şekil 17. Bloklar arası mesafe ($(c-b)/h$) değişimine göre FD tabaka ve elastik düzlem arasındaki boyutsuz $\sigma_{1x}(x,-h)/P/h$ temas gerilmesi dağılımı ($a/h=2$, $(b-a)/h=1$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$, $h=1$, $\beta h=-0.6931$, $\gamma h=-0.6931$, $\mu_2/\mu_{-h}=1$)..... 77
- Şekil 18. $\sigma_x(3.25,y)/P/h$ temas gerilmesi dağılımının çeşitli βh değerleri için FD tabaka ve elastik yarı sonsuz düzleme göre analizi ($a/h=3$, $(b-a)/h=0.5$, $(c-b)/h=1.5$, $(d-c)/h=2$, $\mu_0=1$, $h=1$, $\mu_2/\mu_{-h}=1$, $\gamma h=-1.0986$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$) 78
- Şekil 19. $\sigma_x(6,y)/P/h$ temas gerilmesi dağılımının çeşitli βh değerleri için FD tabaka ve elastik yarı sonsuz düzleme göre analizi ($a/h=3$, $(b-a)/h=0.5$, $(c-b)/h=1.5$, $(d-c)/h=2$, $\mu_0=1$, $h=1$, $\mu_2/\mu_{-h}=1$, $\gamma h=-1.0986$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$) 79
- Şekil 20. $\sigma_x(x,y)/P/h$ bloklar arası mesafe ($(c-b)/h$) değişimine göre FD tabaka ve elastik düzlem derinliği boyunca boyutsuz temas gerilmesi dağılımı ($a/h=2$, $(b-a)/h=1$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$, $h=1$, $\beta h=-0.6931$, $\gamma h=-0.6931$, $\mu_2/\mu_{-h}=1$) 79
- Şekil 21. $\sigma_x(5.5,y)/P/h$ boyutsuz temas gerilmesi dağılımının yoğunluk değişim parametresi (γh) için FD tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin derinliği boyunca analizi ($a/h=2$, $(b-a)/h=1$, $Q=2P$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $h=1$, $\beta h=1.0986$, $\mu_2/\mu_{-h}=1$)..... 80
- Şekil 22. $\sigma_y(3.125,y)/P/h$ temas gerilmesi dağılımının bloklar arası mesafe ($(c-b)/h$) değişimi için FD tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin derinliği boyunca analizi ($\mu_0=1$, $a/h=2$, $(b-a)/h=1$, $(d-c)/h=1$, $\mu_2/\mu_{-h}=1$, $Q=P$, $\beta h=-1.0986$, $\gamma h=-1.0986$, $\kappa_1=\kappa_2=2$) 81
- Şekil 23. $\sigma_y(2.25,y)/P/h$ temas gerilmesi dağılımının çeşitli βh değerleri için FD tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin derinliği boyunca analizi ($a/h=2$, $(b-a)/h=0.5$, $(c-b)/h=1$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $h=1$, $\mu_2/\mu_{-h}=1$, $\gamma h=-0.6931$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$) 82
- Şekil 24. $\sigma_y(3.5,y)/P/h$ temas gerilmesi dağılımının çeşitli γh değerleri için FD tabaka ve elastik yarı sonsuz düzleme göre derinlik boyunca analizi ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $Q=2P$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $h=1$, $\beta h=0.4055$, $\mu_2/\mu_{-h}=1$) 82
- Şekil 25. $\sigma_y(5,y)/P/h$ temas gerilmesi dağılımının çeşitli γh değerleri için FD tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin derinliği boyunca analizi ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $Q=2P$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $h=1$, $\beta h=0.4055$, $\mu_2/\mu_{-h}=1$)..... 83

Şekil 26.	$\sigma_y(x,y)/P/h$ blok ortasındaki temas gerilmesi dağılımının blokların genişliklerine bağlı olarak FD tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin derinliği boyunca analizi ($a/h=3$, $(c-b)/h=2$, $\mu_0=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$, $h=1$, $\beta h=-0.9163$, $\gamma h=-0.9163$, $\mu_2/\mu_h=1$).....	83
Şekil 27.	$\tau_{xy}(2.5,y)/(P/h)$ kayma gerilmesi dağılımının çeşitli βh değerleri için FD tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin derinliği boyunca analizi ($a/h=2$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_2/\mu_h=1$, $\gamma h=0.6931$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$, $h=1$, $\mu_0=1$)	84
Şekil 28.	$\tau_{xy}(4,y)/(P/h)$ kayma gerilmesi dağılımının çeşitli βh değerleri için FD tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin derinliği boyunca analizi ($a/h=2$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_2/\mu_h=1$, $\gamma h=0.6931$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$, $h=1$, $\mu_0=1$)	85
Şekil 29.	$\tau_{xy}(5.5,y)/(P/h)$ kayma gerilmesi dağılımının çeşitli βh değerleri için FD tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin derinliği boyunca analizi ($a/h=2$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_2/\mu_h=1$, $\gamma h=0.6931$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$, $h=1$, $\mu_0=1$)	85
Şekil 30.	$\tau_{xy}(2.5,y)/(P/h)$ kayma gerilmesi dağılımının bloklar arası mesafe $((c-b)/h)$ değişiminin çeşitli değerleri için FD tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin derinliği boyunca analizi ($Q=2P$, $a/h=2$, $(b-a)/h=1$, $(d-c)/h=1$, $\mu_2/\mu_h=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $h=1$, $\mu_0=1$, $\gamma h=-0.6931$, $\beta h=-0.6931$)	86
Şekil 31.	$\tau_{xy}(x,y)/(P/h)$ kayma gerilmesi dağılımının bloklar arası mesafe $((c-b)/h)$ değişiminin çeşitli değerleri için FD tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin derinliği boyunca analizi ($Q=2P$, $a/h=2$, $(b-a)/h=1$, $(d-c)/h=1$, $\mu_2/\mu_h=1$, $\gamma h=-0.6931$, $\beta h=-0.6931$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $h=1$, $\mu_0=1$)	87
Şekil 32.	$\tau_{xy}(x,y)/(P/h)$ kayma gerilmesi dağılımının bloklar arası mesafe $((c-b)/h)$ değişiminin çeşitli değerleri için FD tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin derinliği boyunca analizi ($Q=2P$, $a/h=2$, $(b-a)/h=1$, $(d-c)/h=1$, $\mu_2/\mu_h=1$, $\gamma h=-0.6931$, $\beta h=-0.6931$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $h=1$, $\mu_0=1$)	87
Şekil 33.	$\tau_{xy}(3.5,y)/(P/h)$ kayma gerilmesi dağılımının kayma modülleri oranına (μ_2/μ_h) göre FD tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin derinliği boyunca analizi ($Q=P$, $\mu_0=1$, $a/h=2$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=1$, $(d-c)/h=0.5$, $\beta h=-0.6931$, $\gamma h=-0.6931$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $h=1$)	88
Şekil 34.	Rijitlik parametresi (βh) değişimine göre $\sigma_{1y}(x,-h)/P/h$ boyutsuz gerilme dağılımı ($\kappa_1=\kappa_2=2$, $h=1$, $Q=2P$, $\mu_0=1$, $a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\gamma h=0.4055$, $\mu_2/\mu_h=1$, $\lambda=90>\lambda_{cr}$)	91
Şekil 35.	Yoğunluk parametresi (γh) değişimine göre $\sigma_{1y}(x,-h)/P/h$ boyutsuz gerilme dağılımı ($\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$, $\mu_0=1$, $a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\beta h=0.4055$, $\mu_2/\mu_h=1$, $\lambda=105>\lambda_{cr}$)	92
Şekil 36.	Bloklar arası mesafe $((c-b)/h)$ değişimine göre $\sigma_{1y}(x,-h)/P/h$ boyutsuz gerilme dağılımı ($\kappa_1=\kappa_2=2$, $h=1$, $Q=2P$, $\mu_0=1$, $a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(d-c)/h=1.5$, $\gamma h=0.4055$, $\beta h=0.4055$, $\mu_2/\mu_h=1$, $\lambda=85>\lambda_{cr}$)	92
Şekil 37.	Kayma modülleri oranına (μ_2/μ_h) göre $\sigma_{1y}(x,-h)/P/h$ boyutsuz gerilme dağılımı ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\gamma h=0.4055$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $h=1$, $Q=2P$, $\mu_0=1$, $\beta h=0.4055$, $\lambda=85>\lambda_{cr}$)	93

- Şekil 38. Kayma modülleri oranına (μ_2/μ_h) göre $\sigma_{1y}(x,-h)/P/h$ boyutsuz gerilme dağılımı ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $h=1$, $Q=2P$, $\mu_0=1$, $\gamma h=-0.3364$, $\beta h=-0.3364$, $\lambda=130>\lambda_{cr}$)..... 93
- Şekil 39. Yük faktörünün ilk ayrılma yükünden küçük, eşit ve büyük olması durumuna göre $\sigma_{1y}(x,-h)/P/h$ boyutsuz gerilme dağılımı ($Q=2P$, $a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\gamma h=0.4055$, $\beta h=-0.4055$, $\mu_2/\mu_h=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $h=1$, $\mu_0=1$)..... 94
- Şekil 40. Rijitlik parametresi (βh) değişimine göre FD tabaka ile elastik düzlem arasındaki açılma ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\gamma h=0.4055$, $\mu_2/\mu_h=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $h=1$, $Q=2P$, $\mu_0=1$, $\lambda=105>\lambda_{cr}$)..... 95
- Şekil 41. Yoğunluk değişim parametresine (γh) göre FD tabaka ile elastik düzlem arasındaki açılma ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\beta h=0.4055$, $\mu_2/\mu_h=1$, $Q=2P$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $h=1$, $\mu_0=1$, $\lambda=109>\lambda_{cr}$)..... 96
- Şekil 42. Bloklar arası mesafe ($(c-b)/h$) değişimine göre FD tabaka ile elastik düzlem arasındaki açılma ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(d-c)/h=1.5$, $\beta h=0.4055$, $\gamma h=0.4055$, $\mu_2/\mu_h=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $h=1$, $Q=2P$, $\mu_0=1$, $\lambda=90>\lambda_{cr}$)..... 96
- Şekil 43. Kayma modülü oranlarına (μ_2/μ_h) göre FD tabaka ile elastik düzlem arasındaki açılma ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\beta h=0.3364$, $\gamma h=0.3364$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $h=1$, $Q=2P$, $\mu_0=1$, $\lambda=90>\lambda_{cr}$)..... 97
- Şekil 44. Kayma modülü oranlarına (μ_2/μ_h) göre FD tabaka ile elastik düzlem arasındaki açılma ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\beta h=-0.3364$, $\gamma h=-0.3364$, $Q=2P$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $h=1$, $\mu_0=1$, $\lambda=140>\lambda_{cr}$) 97
- Şekil 45. Sürekli temasta analitik ve SEM çözümlerinden elde edilen bloklar altındaki temas gerilmesi dağılımının karşılaştırılması ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$, $y=0$, $h=1$, $\mu_2/\mu_h=1$, $\beta h=2.0794$)..... 98
- Şekil 46. Sürekli temasta analitik ve SEM çözümlerinden elde edilen bloklar altındaki temas gerilmesi dağılımının karşılaştırılması ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$, $y=0$, $h=1$, $\mu_2/\mu_h=1$, $\beta h=-2.0794$) 99
- Şekil 47. Analitik ve SEM çözümlerinden elde edilen FD tabaka ve elastik düzlem arasındaki $\sigma_{1y}(x,-h)/P/h$ sürekli temas gerilmesi dağılımının karşılaştırılması ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $Q=2P$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $y=0$, $h=1$, $\mu_2/\mu_h=1$, $\beta h=-0.4055$, $\gamma h=1.3863$) 99
- Şekil 48. Analitik ve SEM çözümlerinden elde edilen FD tabaka ve elastik düzlem arasındaki $\sigma_{1y}(x,-h)/P/h$ sürekli temas gerilmesi dağılımının karşılaştırılması ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $Q=2P$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $y=0$, $h=1$, $\mu_2/\mu_h=1$, $\beta h=-0.4055$, $\gamma h=1.3863$) 100
- Şekil 49. ANSYS çözümünden elde edilen σ_y sürekli temas gerilmesi dağılımı 100
- Şekil 50. Analitik ve SEM çözümlerinden elde edilen FD tabaka ve elastik düzlem arasındaki $\sigma_{1y}(x,-h)/P/h$ süreksiz temas gerilmesi dağılımının karşılaştırılması ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $Q=2P$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $y=0$, $h=1$, $\mu_2/\mu_h=2$, $\beta h=0.3364$, $\gamma h=0.3364$)..... 101

Şekil 51.	ANSYS çözümünden elde edilen σ_y süreksiz temas gerilmesi dağılımı	101
Şekil 52.	Sürekli temasta analitik ve SEM çözümlerinden elde edilen 1.blok ortasında derinlik boyunca oluşan $\sigma_{1y}(3.5,y)/P/h$ gerilme dağılımının karşılaştırılması ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$, $y=0$, $h=1$, $\mu_2/\mu_{-h}=1$, $\beta h=-0.4055$, $\gamma h=1.3863$)	102
Şekil 53.	Sürekli temasta analitik ve SEM çözümlerinden elde edilen iki blok arasında derinlik boyunca oluşan $\sigma_{1y}(5,y)/P/h$ gerilme dağılımının karşılaştırılması ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$, $y=0$, $h=1$, $\mu_2/\mu_{-h}=1$, $\beta h=-0.4055$, $\gamma h=1.3863$)	102
Şekil 54.	Sürekli temasta analitik ve SEM çözümlerinden elde edilen 1.blok ortasında derinlik boyunca oluşan $\sigma_{1x}(3.5,y)/P/h$ temas gerilme dağılımının karşılaştırılması ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $Q=2P$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $y=0$, $h=1$, $\mu_2/\mu_{-h}=1$, $\beta h=-0.4055$, $\gamma h=1.3863$)	103
Şekil 55.	Sürekli temasta analitik ve SEM çözümlerinden elde edilen iki blok arasında derinlik boyunca oluşan $\sigma_{1x}(5,y)/P/h$ gerilme dağılımının karşılaştırılması ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $y=0$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$, $h=1$, $\mu_2/\mu_{-h}=1$, $\beta h=-0.4055$, $\gamma h=1.3863$)	103
Şekil 56.	ANSYS çözümü ile elde edilen sürekli temasta σ_x gerilme dağılımı.....	104
Şekil 57.	Sürekli temasta analitik ve SEM çözümlerinden elde edilen iki blok arasında derinlik boyunca oluşan $\tau_{1xy}(5,y)/P/h$ gerilmesi dağılımının karşılaştırılması ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$, $y=0$, $h=1$, $\mu_2/\mu_{-h}=1$, $\beta h=-0.4055$, $\gamma h=1.3863$)	104
Şekil 58.	ANSYS çözümü ile elde edilen sürekli temasta σ_y gerilme dağılımı.....	105

TABLolar DİZİNİ

Sayfa No

- Tablo 1. Kayma modülleri oranının (μ_2/μ_h) çeşitli değerleri için FD tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve uzaklıklarının karşılaştırması ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\beta h=0.0001$, $\gamma h=0.0001$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $y=-h$, $h=1$)..... 67
- Tablo 2. Çeşitli βh ve γh değerleri için FD tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve uzaklıklarının incelenmesi ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\mu_2/\mu_h=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$, $y=-h$, $h=1$).. 69
- Tablo 3. Kayma modülleri oranı, yoğunluk ve rijitlik parametreleri değişimine göre FD tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve uzaklıklarının incelenmesi ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$, $y=-h$, $h=1$)..... 70
- Tablo 4. Yük oranları, yoğunluk ve rijitlik parametreleri değişimine göre FD tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve uzaklıklarının incelenmesi ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\mu_2/\mu_h=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $y=-h$, $h=1$)..... 70
- Tablo 5. Bloklar arası mesafe ($(c-b)/h$) değişimine göre FD tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve uzaklıklarının incelenmesi ($\beta h=0.4055$, $Q=2P$, $\gamma h=0.4055$, $a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(d-c)/h=1.5$, $\mu_0=1$, $h=1$, $\mu_2/\mu_h=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $y=-h$)..... 71
- Tablo 6. Bloklar arası mesafe ($(c-b)/h$) değişimine göre FD tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve uzaklıklarının incelenmesi ($\beta h=-0.4055$, $Q=2P$, $\gamma h=0.4055$, $a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(d-c)/h=1.5$, $\mu_0=1$, $h=1$, $\mu_2/\mu_h=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $y=-h$)..... 71
- Tablo 7. Rijitlik parametresi (βh) ve yük faktörü (λ) değişimine göre ayrılma başlangıç ve bitiş noktaları ($a/h=3$, $b/h=4$, $c/h=6$, $d/h=7$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $\mu_0=1$, $Q=2P$, $\gamma h=0.4055$, $\mu_2/\mu_h=1$) 89
- Tablo 8. Yoğunluk parametresi (γh) ve yük faktörü (λ) değişimine göre ayrılma başlangıç ve bitiş noktaları ($a/h=3$, $b/h=4$, $c/h=6$, $d/h=7$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $\mu_0=1$, $Q=2P$, $\beta h=0.4055$, $\mu_2/\mu_h=1$) 89
- Tablo 9. Bloklar arası mesafe ($(c-b)/h$) ve yük faktörü (λ) değişimine göre ayrılma başlangıç ve bitiş noktaları ($a/h=3$, $b/h=4$, $d-c/h=1.5$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $\mu_0=1$, $Q=2P$, $\beta h=0.4055$, $\gamma h=0.4055$, $\mu_2/\mu_h=1$) 90
- Tablo 10. Rijitlik parametresinin (βh) çeşitli değerleri için analitik ve SEM çözümlerinden elde edilen FD tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve uzaklıklarının karşılaştırılması ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $Q=2P$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\mu_2/\mu_h=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $h=1$, $\gamma h=-0.6931$, $y=-h$,)..... 105

- Tablo 11. Çeşitli kayma modülü oranları (μ_2/μ_h) için analitik ve SEM çözümlerinden elde edilen FD tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve uzaklıklarının karşılaştırılması ($Q=2P$, $a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $\beta h=\gamma h=-0.3364$ 106
- Tablo 12. Yük faktörü değişimine göre analitik ve SEM çözümlerinden elde edilen FD tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ayrılma başlangıç ve bitiş noktalarının karşılaştırılması ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $\mu_0=1$, $(c-b)/h=2$, $Q=2P$, $(d-c)/h=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $\mu_2/\mu_h=1$, $\gamma h=0.4055$, $\beta h=-0.4055$) 106



KISALTMALAR VE SEMBOLLER DİZİNİ

E	Elastisite modülü
X, Y, Z	Kütle kuvveti bileşenleri
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	x, y, z doğrultularındaki normal gerilme bileşenleri
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Kayma gerilmesi bileşenleri
∂	Türev operatörü
$\mu_1(y)$	FD tabakaya ait kayma modülü
κ_1	FD tabakaya ait Kolosov Sabiti
κ_2	Elastik yarı sonsuz düzleme ait Kolosov Sabiti
u, v	x ve y doğrultularındaki yer değiştirme bileşenleri
μ_0	FD tabakanın üst yüzeyindeki kayma modülü
β	Rijitlik parametresi
ν	Poisson oranı
$\varphi_1(\xi, y), \psi_1(\xi, y)$	FD tabakanın ters Fourier dönüşüm fonksiyonları
$\varphi_2(\xi, y), \psi_2(\xi, y)$	Elastik düzlemin ters Fourier dönüşüm fonksiyonları
μ_2	Elastik düzlemin kayma modülü
g	Yerçekimi ivmesi
$\rho_1(y)$	FD tabakanın yoğunluğu
ρ_0	FD tabakanın üst yüzey yoğunluğu
γ	Yoğunluk değişim parametresi
h	FD tabakanın yüksekliği
$p(x)$	1. blok altındaki temas gerilmesi fonksiyonu
$q(x)$	2. blok altındaki temas gerilmesi fonksiyonu
a	1. blok başlangıç noktasının y eksenine olan uzaklığı
b	1. blok bitiş noktasının y eksenine olan uzaklığı
c	2. blok başlangıç noktasının y eksenine olan uzaklığı
d	2. blok bitiş noktasının y eksenine olan uzaklığı

e	Ayrılma başlangıç noktası
f	Ayrılma bitiş noktası
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	x, y, z doğrultularındaki uzama şekil değiştirme bileşenleri
P	1. bloğa uygulanan tekil kuvvet
Q	2. bloğa uygulanan tekil kuvvet
∇^2	Laplace operatörü
λ_{cr}	Kritik yük faktörü (ilk ayrılma yükü)
x_{cr}	İlk ayrılma uzaklığı
x, y, z	Kartezyen koordinatlar

Not: Bu listede verilmeyen bazı semboller ilgili bölümde tanımlanmıştır.

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Temas problemleri günümüze kadar çeşitli mühendislik dallarında geniş uygulama alanlarına sahip olmuştur. Özellikle yapı ve makine elemanları temas içeren sistemlerden oluşmaktadır. Mühendisler için bu sistemlerde meydana gelen temasın karakteri, uzunlukları ve temas bölgelerindeki gerilme dağılımlarının bilinmesi, malzemenin tasarım ve üretiminde büyük kolaylık sağlamaktadır.

Gelişen dünyada canlıların ihtiyaçlarını karşılayan teknolojik kolaylıklar aynı zamanda mühendislik yapılarının da değişmesine yol açmıştır. Daha kompleks olan bu yapılarda fiziksel ve mekaniksel özellikleri geliştirilmiş yeni nesil malzemeler kullanılmaktadır. Özellikle birden fazla malzemenin en iyi özelliklerini bir araya getiren kompozit malzemeler bu noktada ideal bir çözüm oluşturmaktadır.

Bilim insanları tarafından son yıllarda kompozit malzemeler üzerinde farklı çalışmalar yapılmış ve yeni ürünler ortaya çıkarılmıştır. Bu malzemeler, üstün mekanik özellikleri nedeniyle çeşitli endüstrilerde yaygın olarak kendine yer bulmuştur. Ancak kompozit malzemelerin katmanlı yapısı tabakalar arasında gerilme yığılmalarına ve mekanik uyumsuzluklara neden olabilmektedir. Bu sorunlara çözüm olarak, katmanlı yapının aksine sürekli yapısıyla malzemenin bir yüzeyinden diğer yüzeyine fonksiyonel olarak değişim gösteren *fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler* (FDM) ortaya çıkmıştır. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler havacılık, uzay, savunma sanayii, otomotiv endüstrisi gibi alanlarda termal direnç ve yüksek mukavemet özelliklerinden dolayı yaygın olarak tercih edilmektedir.

Bu çalışmada, elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan ve iki rijit blok ile yüklü fonksiyonel derecelendirilmiş tabakada sürekli ve süreksiz temas problemi ele alınmıştır. Problemin çözümünde elastisite teorisi ve integral dönüşüm tekniklerinden faydalanılmıştır.

1.1.1. Temas Problemlerinin Tarihsel Gelişimi

1882 yılında Hertz tarafından yazılan ve birçok araştırmacıya ışık tutan "On the contact of elastic solids" adlı makalenin temas mekaniği konusunun temelini oluşturduğu söylenebilir (Johnson, 1985). Hertz'in çalışması tam elastik cisimler ve sürtünmesiz yüzeyler için geçerlidir. Bu teoriye göre temas bölgeleri sürekli ve ana gövdeye göre oldukça küçük olduğundan ana gövde yarı sonsuz bir düzlem olarak alınmıştır. Bu kabul, temas problemlerinin çözümünde matematiksel olarak kolaylık sağlamaktadır. Galin, 1950'li yıllara kadar yapılan temas problemlerinin çözüm yöntemlerini ve literatür araştırmasını özetlemiştir (Galin, 1961). Muskhelishvili tarafından sürtünmesiz temas problemlerinin genel çözümü yapılmış ve kompleks değişkenler metodu geliştirilmiştir (Muskhelishvili, 1953). Özellikle elastisite teorisinde Sneddon'un integral dönüşüm tekniklerini kullanmasıyla (Sneddon, 1951) temas problemlerine ilgi giderek artmış, bilgisayar ve sayısal çözüm yöntemlerindeki gelişmelere paralel olarak daha da yaygınlaşmıştır.

Weitsman (1969), elastik yarı sonsuz düzlem ve plak arasındaki temas bölgesinin uzunluğu ile ilgili bilgi sağlamak amacıyla elastik plak ve elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki sürekli teması incelemiştir.

Conway (1971), iki sabit silindir ile bastırılan ve silindirler arasından bir kuvvetle yatay olarak çekilen tabakanın sürtünmeli temas problemini incelemiştir. Ayrıca sürtünmenin normal temas gerilmesine etkisi incelenmiş ve bu etkinin çok az miktarlarda olduğu görülmüştür.

Chan ve Tuba (1971), temas halinde olan cisimlerde çözüm için modifiye edilmiş bir sonlu eleman yöntemi geliştirmişlerdir. Yöntem genel olup, elastik problemlerden başka problemler için de çözüm üretecek şekilde yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar analitik sonuçlarla karşılaştırıldıklarında birbirleriyle uyumlu oldukları görülmüştür.

Erdoğan ve Gupta (1972) çalışmalarında, mühendislik ve fizik problemlerinde karışık sınır değer problemi formülasyonlarında ortaya çıkan tekil integral denklemlerin sayısal çözümünü vermişlerdir.

Erdoğan ve Ratwani (1974), iki elastik çeyrek düzlem üzerine oturan elastik tabakada sürtünmesiz temas problemini incelemiştir. Fourier ve Mellin integral dönüşüm tekniklerinin kullanıldığı çalışmada, temas bölgesinin dış yükün büyüklüğünden bağımsız fakat yük genişliğine bağlı olduğu gösterilmiştir. Çeşitli yükleme durumlarının

verildiği problem, genelleştirilmiş Cauchy çekirdekli bir tekil integral denkleme indirgenmiş ve sayısal sonuçlar sunulmuştur.

Spence (1975) yaptığı çalışmada, dikdörtgen ve eğrisel profillerdeki dönel simetrik blok aracılığıyla yüklenmiş yarı sonsuz düzlemin sürtünmeli değme problemini incelemiştir. Sürtünme Coulomb kanuna göre incelenmiş, problemin formülasyonu karışık sınır değer problemi olarak yapılmıştır.

Civelek ve Erdoğan (1975), kütle kuvveti etkisi altındaki tabakada sürtünmesiz bir temas problemini incelemiştir. Tabakanın doğrusal yayılı bir yük altında olduğu düşünülmüştür. Temas düzlemi boyunca ilk ayrılmayı meydana getirecek kritik yük hesabı yapılmıştır. Ayrıca ayrılma bölgesinin uzunluğu ve temas gerilme dağılımları grafiksel ve sayısal olarak sunulmuştur.

Adams ve Boggy (1977), farklı elastik özelliklere sahip değişik kalınlıklardaki iki yarı sonsuz tabakanın temasını incelemiştir. Çalışmada, integral denklemler çıkarılmış ve değişik malzeme kombinasyonları ve kalınlık oranları için sonuçlar elde edilmiştir.

Adams (1978), elastik yarı sonsuz bir düzlem üzerine oturan ve sabit hızla hareket eden tekil bir yükü yüklenmiş elastik tabakada temas problemini incelemiştir. Bu karışık sınır değer problemi Fredholm integral denklemlerine indirgenerek çeşitli malzeme kombinasyonları altında çözülmüştür.

Geçit (1980), çalışmasında elastik yarı sonsuz bir düzlem üzerine uzanan düzgün yayılı yükü yüklenmiş sonsuz uzunluklu tabakanın sürtünmesiz temas problemini incelemiştir. Kütle kuvvetlerinin ele alındığı problemde, sürekli ve süreksiz temas durumları ayrı ayrı ele alınmıştır.

Bakırtaş (1980), elastik yarı sonsuz düzlem üzerindeki rijit bir bloğun elastostatik problemini ele almıştır. Bu çalışmada ortamın derinlik boyunca homojen olmayan bir yapı sergilediği varsayılmıştır. Ayrıca Poisson oranının sonuçlar üzerindeki etkisi incelenmiştir.

Keer ve Miller (1983) çalışmalarında, eğrisel bir blok ile kenarlarından basit veya ankastre mesnetlere oturan dairesel plağın temas problemini incelemiştir.

Adams ve Zeid (1984), elastik yarı sonsuz düzlem üzerinde sabit bir hızla hareket eden elastik bir blok üzerinde çalışmışlardır. Çalışmada elastisite teorisi kullanılarak farklı malzeme kombinasyonları, kayma hızı ve sürtünme katsayıları için temas yüzeyi boyunca gerilme dağılımları ele alınmıştır.

Geçit ve Gökpinar (1985), rijit dairesel bir mesnete oturan elastik bir tabakanın temas problemini incelemiştir. Temas yüzeylerinde sürtünme olmadığı ve sadece basınç

gerilmelerinin aktarıldığı düşünülmüştür. Tabakaların üst yüzüne üniform bir basınç uygulanmış, farklı blok şekilleri için temas yüzeyindeki gerilme yayılımı, temas uzunluğu ve normal gerilmeler hesaplanmıştır.

Geçit (1986) çalışmasında, yarım bir düzlem üzerinde elastik yarı sonsuz bir silindir ile bastırılan tabakada aksenal simetrik problemi incelemiştir. Problem, integral dönüşüm tekniği kullanılarak ikinci tür tekil integral denklem sistemine indirgenerek çözülmüştür.

Nowell ve Hills (1988), iki silindir blok ile bastırılan ince elastik bir tabakada sürtünmeli ve sürtünmesiz temas problemini incelemiştir. Problemin çözümünde hibrid bir yöntem kullanılarak temas gerilmeleri elde edilmiştir.

Sabin ve Kaloni (1989), elastik yarım düzlem üzerinde düşey eksen etrafında dönen rijit bir cismin temas problemini sürtünmeyi de hesaba katarak elastisite teorisi ile çözmüşlerdir.

Çakıroğlu ve Erdöl (1989), elastik zemine oturan bileşik tabaka problemini elastisite teorisi ve integral dönüşüm tekniğini kullanarak çözmüşlerdir. Problemde farklı malzeme kombinasyonları ve tabaka yükseklikleri için bulunan gerilme değerleri hem sayısal hem de grafik olarak sunulmuştur.

Çakıroğlu (1990), elastik yarı sonsuz düzleme oturan bileşik tabakaların değme problemini çözmüştür. Çalışma, y eksenine göre simetrik düzgün yayılı yak etkisinde ve bütün yüzeylerin sürtünmesiz olduğu kabul edilerek elastik zemine oturan bileşik tabaka problemi elastisite teorisine göre çözülmüştür. Navier denklemlerine Fourier integral dönüşüm tekniği uygulanarak gerilme ve yerdeğiştirme bileşenleri elde edilmiş, sürekli temasa ilişkin problemin tanımı yapılmış ve sınır şartları altında elde edilen denklem takımı çözülmüştür.

Dempsey vd. (1990), Winkler zeminine oturan elastik, homojen ve izotrop tabakada temas problemini incelemiştir. Problemde yüklemeler, rijit bir blok ve rijit silindir aracılığıyla ayrı ayrı yapılmış ve sonuçlar incelenmiştir.

Çakıroğlu ve Çakıroğlu (1991), simetrik olarak yüklenmiş ve elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan bir şeritte temas problemini incelemiştir. Problem sürekli ve süreksiz temas olarak iki kısımda ele alınmıştır. Tekil integral denklemlerin çözümünde Gauss-Chebyshev integrasyon yöntemi kullanılmıştır.

Pindera ve Lane (1993), keyfi sayıda izotropik, ortotropik ve monoklinik katmanlardan oluşan ve rijit parabolik bir blokla yüklenmiş tabakada sürtünmesiz temas problemini incelemiştir.

Urquhart ve Pindera (1994), düz bir rijit blok ile yüklü çok katmanlı anizotrop tabakadaki temas problemini, Fourier integral dönüşüm tekniği ile lokal-global rijitlik matrisi tekniğini kullanarak çözmüşlerdir.

Erdoğan (1994), fonksiyonel derecelendirilmiş kaplamalarda temas problemini incelemiştir.

Aksoğan vd. (1996,1997) iki elastik çeyrek düzleme oturan tabakada sürtünmesiz temas problemini farklı çözüm teknikleri altında incelemiştir. Tabaka üzerine yüklemeler tekil ve yayılı olarak ayrı ayrı yapılmış her bir çözüm tekniği için karşılaştırmalar gerçekleştirilmiştir.

Giannakopoulos ve Suresh (1997a, 1997b), sürtünmesiz düz, konik ve küresel rijit baticı uçlarla yüklenmiş aksenal simetrik fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerde temas gerilmelerini incelemiştir.

Birinci vd. (1997), farklı malzeme özellikleri ve yüksekliklerden oluşan tam bağlı iki elastik tabakadan oluşan bileşik tabaka ile üzerine oturdukları elastik zemin arasındaki sürekli değme problemini incelemiştir.

Birinci (1998), alt tabakasında düşey bir çatlak bulunan ve rijit bir blok aracılığı ile yüklenen bileşik tabaka problemini incelemiştir. Çalışmada, elastik sabitleri ve yükseklikleri farklı iki tabakadan oluşan ve alt tabakasında simetri ekseninde düşey bir çatlak bulunan bileşik tabakada temas ve çatlak problemleri Elastisite teorisine göre incelenmiştir. Bileşik tabaka basit mesnetler üzerine oturmakta olup, üstten rijit bir blok aracılığı ile yüklenmiş ve bütün yüzeylerin sürtünmesiz olduğu kabul edilmiştir.

Birinci ve Erdöl (1999) çalışmalarında, iki ağırlıksız tabakadan meydana gelen ve basit mesnetlere oturan bileşik tabakada temas problemini incelemiştir. Temas yüzeylerinde sürtünme olmadığı kabul edilmiştir. Bileşik tabaka üzerindeki yüklemeler dairesel ve dikdörtgen bloklar aracılığıyla yapılarak temas uzunlukları ve gerilmeleri bulunmuştur.

Özşahin (2000), rijit iki düz blok üzerinde farklı sabit yükseklik ve malzeme özelliklerine sahip homojen ve izotrop iki tabakadan oluşan ve üst yüzeyinden düzgün yayılı yük etkisindeki bileşik tabakayı incelemiştir. Problem sürekli ve süreksiz temas durumları için elastisite teorisi kullanılarak çözülmüştür.

Dağ ve Erdoğan (2000), herhangi bir profile sahip sürtünmeli rijit zımba etkisindeki yarı sonsuz fonksiyonel derecelendirilmiş düzlemdeki temas ve yüzey çatlak problemlerini çözmüştür.

Güler (2000), homojen gövde üzerindeki fonksiyonel derecelendirilmiş kaplama için temas problemini çözmüştür. Bu çalışmalarda fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme için kayma modülünün derinlik boyunca $\mu = \mu_0 e^{\gamma x}$ şeklinde üstel bir fonksiyonla temsil edildiği kabul edilmiştir.

Kahya vd. (2001), üst yüzeyinden rijit bağlı bir temele oturan bir tabakanın temas problemini elastisite teorisine göre çözmüşlerdir. Tabaka alt yüzeyinden rijit bir zımba etkisindedir. Bu zımba profili dairesel, dikdörtgen ve parabolik şekilde alınmıştır.

Wozniak vd. (2002), bir küre veya bir silindir ile bastırılan aksel simetrik temas problemini incelemiştir. Katmanın deforme olabilen bir malzeme ile doldurulduğu varsayılmıştır. Bu malzeme bir Winkler ortamı ile modellenmiş olup çözümde Hankel integral dönüşüm tekniği kullanılmıştır.

Kahya (2003), iki tabakalı elastik ortamda sürekli ve süreksiz değme problemlerini incelemiştir. Çalışmada, sabit yükseklikli, sonsuz uzun, ortotrop iki elastik şeritten meydana gelen bileşik tabakanın sürekli ve süreksiz değme problemleri incelenmiştir. Üst yüzeyinden rijit düz bir blok vasıtasıyla sıkıştırılan bileşik tabaka, alt yüzeyinden rijit bir düzleme yapıştırılmıştır. Çözümde sürtünme etkileri ihmal edilmiş ve ara yüzeylerde sadece basma gerilmelerine izin verildiği kabul edilmiştir.

Çömez (2003), Çömez vd. (2003; 2004), alt tarafından rijit mesnetli, birbirine yapışık olmayan iki elastik tabakanın ve tekil yükle bu tabakaları bastıran rijit, dairesel veya parabolik blokun değme problemlerini incelemiştir. Tabakalar arasındaki ve blok ile tabaka arasındaki değme uzunlukları ve bu iki değme bölgesindeki değme gerilmesi dağılımı değişik malzeme özellikleri ve geometrileri ile yük değerleri için elde edilmiştir.

Yıldırım (2004), çalışmada, derecelendirilmiş malzemedeki kenar çatlağı içeren bir tabakanın ısı şok kırılmasını sonlu elemanlar metodu ile incelenmiştir. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeleri modellemek ve gerilme şiddeti faktörünü hesaplamak için özel bir yazılım eklenen sonlu elemanlar metodu kullanılmıştır.

Borgi vd. (2006) çalışmalarında, fonksiyonel derecelendirilmiş bir tabaka ile homojen tabaka arasındaki ayrılmalı temas problemini irdelemiştir. Çalışmada, yayılı olarak yüklenmiş fonksiyonel derecelendirilmiş tabakaya ait temas gerilmeleri ve ayrılma uzaklıkları belirlenmiştir.

Ke ve Wang (2007), fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ile kaplanmış elastik yarım düzlemin hareketli sürtünmeli temas problemini incelemiştir. Yapılan çalışmada transfer matris yöntemi ve integral dönüşüm teknikleri beraber kullanılmıştır.

Kahya vd. (2007) çalışmalarında, anizotrop düzlem ile anizotrop tabaka arasındaki ayrılmalı ve sürtünmesiz temas problemini incelemiştir. Tabakada rijit dairesel bir zımba etkisi bulunmaktadır. Çözümde temas gerilmeleri ve temas uzunlukları elde edilmiştir.

Özşahin vd. (2007), iki rijit düz blok üzerine oturan farklı malzeme özelliklerine sahip iki tabakanın ağırlıksız temas problemini çözmüşlerdir. Çalışmada tabakalar arasında sürtünme dikkate alınırken, bloklar ile tabaka arasında sürtünme ihmal edilmiştir.

Zhang vd. (2007), Hertz temas koşulları altında tek tabakalı, fonksiyonel olarak derecelendirilmiş sandviç kaplamalardaki yüzey ve yüzey altı gerilmelerin dağılımını sonlu elemanlar yöntemini kullanarak belirlemiştir. Çalışma sonucunda tek tabakalı kaplamayla karşılaştırıldığında, fonksiyonel derecelendirilmiş kaplama veya sandviç kaplamadaki maksimum kayma gerilmesi ve Von Mises gerilmesinin daha düşük olduğu görülmüştür.

Yang ve Ke (2008), rijit silindirik bir blok ile yüklenmiş homojen bir tabaka ile kaplı ve elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan fonksiyonel derecelendirilmiş bir tabakanın iki boyutlu temas problemini analitik olarak incelemiştir. Çalışmada, temas gerilmelerinin ve temas alanlarının, kayma modülüne ve fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın kalınlığına bağlı olarak önemli oranda değişim gösterdiği belirlenmiştir.

Dağ (2008), ortotropik fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin kırılma ve temas mekaniğini incelemiştir. Yapılan bu çalışma ile derecelendirilmiş ortotropik ortamlarda kırılma ve temas mekaniği problemlerini çözebilmek için hem analitik hem de hesaplamalı yöntemler ortaya konulmuştur. Analitik tekniklerin geliştirilmesinde tekil integral denklemler yaklaşımı kullanılmış, hesaplamalı teknikler ise sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak geliştirilmiştir.

Rekik vd. (2010), homojen yarı-sonsuz bir düzleme bağlanmış fonksiyonel derecelendirilmiş bir tabakada bir çatlak problemini analitik olarak irdelemiştir. Ayrıca çalışmada sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak çatlak incelenmiş ve analitik çözümle kıyaslanmıştır.

Elloumi vd (2010), homojen olmayan ve izotropik bir fonksiyonel derecelendirilmiş yarı-düzlem ile normal yüke tabi tutulan keyfi şekilli bir blok arasındaki iki boyutlu doğrusal olmayan kayma teması problemini ele almışlardır. Çalışmada incelenen derecelendirilmiş ortam, üstel olarak değişen kayma modülü ve sabit bir Poisson oranına sahip homojen olmayan bir izotropik malzeme olarak kabul edilmiştir.

Shahzamanian vd. (2010), fonksiyonel derecelendirilmiş eksenel simetrik fren disklerinde termoelastik temas problemini sonlu elemanlar yöntemini kullanarak incelemişlerdir.

Adıbelli (2010), simetrik yüklü, rijit blokla elastik yarım düzlem üzerine bastırılan yapışık çift tabakaya ait değme problemini ve aynı problemin alt tabakasında çatlak olması halini, elastisite teorisi ve integral dönüşüm tekniğini kullanılarak çözmüştür.

Apatay (2010), fonksiyonel derecelendirilmiş malzemedен yapılan bir kaplamada yüzeye temas eden düzgün profilli sürtünmeli rijit bir zımba etkisindeki kaplamada yer alan bir kenar çatlak için gerilme şiddeti faktörlerini hesaplamıştır. Zımba genişliği, zımba konumu, sürtünme katsayısı ve malzeme parametrelerinin yüzey altı gerilmelerine ve gerilme şiddeti faktörlerine etkilerini incelemiştir.

Öner (2011), rijit dairesel bir blok aracılığı ile yüklenmiş ve elastik yarı sonsuz düzleme oturan elastik özellikleri ve yükseklikleri farklı iki elastik tabakanın sürekli temas problemini elastisite teorisine göre çözmüştür.

Yıldırım vd. (2011), fonksiyonel derecelendirilmiş bir yarım düzlemdeki periyodik çatlak problemini analitik olarak çözmüşlerdir. Çalışmada poisson oranı ve termal yayılmanın sabit olduğu, elastisite modülü, iletim katsayısı, termal genleşme katsayısının derinliğe bağlı olarak eksponansiyel bir fonksiyon şeklinde değiştiği kabul edilmiştir.

Rhimi vd. (2011), rijit küresel bir blok ile yüklenmiş ve homojen yarım düzleme oturan elastik fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın eksenel simetrik çift ayrılmalı temas problemini analitik olarak incelemişlerdir.

Kaman ve Cetişli (2011), fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme ile kaplı silindirde çatlak problemini sayısal olarak incelemişlerdir. Yapılan çalışmada ANSYS paket programı kullanılarak, farklı iç ve dış silindir malzemeleri ve yarıçaplarında, çatlak boylarının değişimi için gerilme şiddet faktörleri hesaplanmıştır.

Küçüksucu (2011), ortotropik derecelendirilmiş malzemelerde temas mekaniği analizini gerçekleştirmiştir. Yapılan çalışmada kayma temasına maruz kalmış ortotropik fonksiyonel derecelendirilmiş malzemedeki gerilme dağılımları analitik olarak hesaplanmıştır.

Güler vd. (2012), fonksiyonel derecelendirilmiş kaplamalara bağlanan ince filmlerin temas mekaniğini hem analitik hem de sayısal olarak araştırmışlardır. Yapılan çalışmada sistemin hem mekanik hem de geometrik parametreleri ile yükleme türünün, film bitimlerinde gerilme dağılımına büyük etkisi olduğunu ortaya koymuşlardır.

Chidlow ve Teodorescu (2013), rijit bir blok ile yüklenmiş homojen olmayan bir malzemenin sürtünmesiz iki boyutlu temas problemini araştırmışlardır. Kayma modülü yüksekliğe bağlı eksponansiyel değişim gösteren fonksiyonel derecelendirilmiş olarak tanımlanmıştır. Yapılan çalışmada malzeme homojenliği ve kaplama kalınlığının silindirik blok problemi üzerindeki etkileri araştırılmış ve maksimum gerilmenin, tabakanın kalınlığına ve mekanik özelliklerine önemli oranda bağlı olduğu bulunmuştur.

Özşahin ve Taşkın (2013) çalışmalarında, üç rijit blok ile yüklenmiş ve elastik yarım düzleme oturan tabaka için temas problemini çözmüşlerdir. Probleme ilişkin ilk ayrılma yükleri ile uzunlukları elde edilmiş ve süreksiz temas durumuna ilişkin açılma mesafeleri araştırılmıştır.

Chidlow vd. (2013) yaptığı çalışmada fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme (FGM) içeren hem yapışık hem de yapışık olmayan temas problemlerinden kaynaklanan temas genişliği ve yüzey basıncının saptanması için yarı analitik bir algoritma geliştirmişlerdir.

Abhilash ve Murthy (2014), fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme ile kaplanmış ve bir blok ile yüklenmiş yarı sonsuz düzlemin iki boyutlu elastik temasını sonlu elemanlar yöntemini kullanarak belirlemişlerdir. Başlangıçta bloklar rijit olarak kabul edilmiş ve sonuçlar, literatürde sunulan çözümlerle doğrulanmıştır. Daha sonra bloklar elastik kabul edilerek analizler yapılmıştır.

Gun ve Gao, (2014), fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler için sürtünmeli temas probleminin sınır elemanlar yöntemini kullanarak analizini gerçekleştirmişlerdir. Yapılan çalışma ile homojen olmayan, izotropik ve lineer elastik fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin sürtünmeli temas problemleri için kuadratik bir sınır elemanı formülasyonu geliştirmişlerdir.

Yaylacı vd. (2014), ayrılmalı bir temas problemini elastisite teorisine ve sonlu elemanlar metoduna göre çözümleri karşılaştırmışlardır.

Borgi vd, (2014), yayılı bir yük ile yüklenmiş ve elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan fonksiyonel derecelendirilmiş bir tabakanın sürtünmeli ve ayrılmalı temas problemini analitik olarak araştırmışlardır. Bu çalışmadaki tabakanın, üstel olarak değişen kayma modülü ve sabit bir Poisson oranına sahip olduğu ve homojen olmadığı kabul edilmiştir.

Alinia vd. (2014), silindirik bir blok ile yüklenmiş fonksiyonel derecelendirilmiş bir kaplamanın temas problemini analitik olarak incelemişlerdir. Çalışmada tekil integral

denklem yaklaşımı kullanılarak, silindirik temas probleminin temel denklemleri olası tüm sistemler için oluşturulmuştur.

Öner vd. (2015), rijit dairesel bir blokla yüklenmiş ve yarı sonsuz düzleme oturan iki elastik tabakanın sürekli temas problemini hem analitik hem de sonlu elemanlar yöntemini kullanarak incelemiştir. Çalışmada rijit dairesel bloğun altındaki temas gerilmeleri, temas uzunlukları ve simetri eksenine boyunca normal gerilmeler her iki çözüm için de elde edilmiştir.

Chen vd. (2015), gelişigüzel yönde derecelendirilmiş tabaka ve silindirik bloğun sürtünmeli temas problemini incelemiştir.

Küçüksucu vd. (2015), rijit bir blok ve fonksiyonel derecelendirilmiş ortotropik yarım düzlemin temas problemini incelemiştir. Problemden elastisite modülünün derinlikle değiştiği kabulü yapılmıştır. Nonhomojenite parametresi, rijit blok ve yarım düzlem arasındaki sürtünme ve ortotropik elastik malzeme parametrelerinin (rijitlik oranı, poisson oranı, kayma parametresi) gerilme dağılımlarına etkisi elde edilmiştir.

Adıyaman vd. (2015), iki çeyrek düzleme oturan bir blok ve yayılı yüklenmiş elastik bir tabaka için ayrılmalı temas problemini hem analitik yöntem hem de sonlu elemanlar yöntemi ile çözmüşlerdir. Her iki çözüm için de temas uzunlukları ve temas basınçları çeşitli yük koşulları ve boyutsuz büyüklükler için hesaplanmıştır. Çalışma sonucunda sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen sonuçların analitik sonuçlarla uyumlu olduğu görülmüştür.

Yan ve Li (2015), elastik bir tabakaya oturan ve dairesel bir blokla yüklü fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın ayrılmalı temas problemini incelemiştir. Çalışma sonucunda temas gerilmeleri ve temas alanlarının sayısal sonuçları çeşitli değerler için belirlenmiştir.

Çömez (2015), hareketli rijit bir blok vasıtasıyla yüklenmiş fonksiyonel derecelendirilmiş tabakadaki temas problemini incelemiştir. Hareketli sürtünmesiz rijit silindirik bloğun temas gerilmeleri, temas uzunlukları ve normal gerilme dağılımları Gauss-Chebyshev integrasyonu kullanılarak sayısal olarak elde edilmiştir.

Su vd. (2015), silindirik bir blok ile yüklenmiş piezoelektrik bir yarım düzlemin iki boyutlu aşınma teması problemini analitik yöntem kullanarak ele almışlardır. Çalışma sonucunda piezoelektrik etkinin, normal temas basıncının ve teğetsel çekmenin birleşmesine yol açtığını ve bunun aşınma teması hasarında ciddi bir etkiye neden olabileceğini ortaya koymuşlardır.

Kulchytsky vd. (2015), yayılı yükte yüklenmiş bir fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ile kaplanmış yarı sonsuz düzlemin üç boyutlu temas problemini ele almışlardır. Çalışmada fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın poisson oranının sabit olduğu, kayma modülünün de yüksekliğe bağlı olarak üstel bir şekilde değiştiği kabul edilmiştir. Çalışmada Fourier dönüşümü kullanılarak analitik çözüm gerçekleştirilmiştir.

Alinia vd. (2016), fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme ile kaplanmış yarı sonsuz düzlemin hareketli temas analizini gerçekleştirmişlerdir. Yapılan çalışmada düzlem gerilme ve genelleştirilmiş düzlem gerilme kayma koşulları altında, düz silindir ile yüklenmiş ve homojen yarı sonsuz düzleme bağlanmış fonksiyonel derecelendirilmiş bir tabakanın sürekli temas problemini analitik olarak irdelemişlerdir.

Adıyaman vd. (2016) iki homojen çeyrek düzlem üzerine oturan fonksiyonel derecelendirilmiş tabakada ayrılmalı temas problemini analitik olarak incelemişlerdir. Problem Cauchy tipi tekil integral denkleme dönüştürülmüş ve Gauss-Jakobi integrasyon yöntemi ile sayısal olarak çözülmüştür.

Liu vd. (2016), fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme katmanına ait ayrılmalı temas probleminin aksel simetrik gerilme analizini dairesel ve dikdörtgen blok ile yükleyerek ayrı ayrı elde etmişlerdir. Çalışma sonucunda rijitlik oranının ve eğim indeksinin temas bölgesi ve temas gerilmesi üzerinde büyük etkiye sahip olduğu görülmüştür.

Çömez vd. (2016), rijit bir silindirik punch ile yüklenmiş fonksiyonel derecelendirilmiş iki tabakanın ayrılmalı ve sürtünmesiz temas problemini analitik olarak ele almışlardır. Çalışmada her iki tabakanın kayma modülü de derinlik boyunca fonksiyonel olarak değişmektedir.

Su vd. (2016), dairesel, küresel ve konik olmak üzere üç tipik rijit blok ile yüklenmiş ve piezoelektrik yarı sonsuz düzleme oturan, fonksiyonel derecelendirilmiş bir piezoelektrik tabakanın sürtünmesiz temasını incelemişlerdir. Çalışmada eğim indeksinin ve blok geometrisinin yüzey elektro-mekanik temas davranışlarına etkisi ayrıntılı olarak irdelenmiştir.

Heß (2016), rijit bir blok ile yüklenmiş, güçlü-zayıf şeklinde derecelendirilmiş tabaka ile, homojen olmayan yarım düzlem arasındaki aksel simetrik, sürtünmesiz temas problemlerini çözmek için etkili bir yöntem geliştirmişlerdir. Bu yöntem rijit bloklar ile derecelendirilmiş malzemeler olarak da bilinen elastik homojen olmayan ortamlar arasındaki sürtünmesiz, keyfi şekillendirilmiş, aksel simetrik, normal temas problemleri için tam çözümlerin belirlenmesine imkân veren bir yöntem olmuştur.

Güler vd. (2017), silindirik fonksiyonel derecelendirilmiş ortotropik bir ortam üzerinde kayan silindirik rijit bloğun sürtünmeli temas problemini incelemişlerdir. Yaptıkları bu çalışmada temas gerilmelerini elde etmek için hem analitik hem de sayısal yöntemler geliştirmişlerdir.

Jobin vd. (2017), elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan ve keyfi şekilli rijit bir blokla yüklenmiş fonksiyonel derecelendirilmiş bir tabakanın iki boyutlu hareketli sürtünmeli temas problemini analitik olarak incelemişlerdir. Çalışmada, geliştirilen model ile simetrik ve simetrik olmayan bloklar için analizler yapılmış ve literatürdeki çalışmalarla kıyaslanmıştır.

Öner vd. (2017), rijit bir blok aracılığıyla yüklenmiş ve elastik yarım düzleme oturan fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın sürekli ve süreksiz temas problemini elastisite teorisine göre çözmüştür. Problemden ele alınan tabaka fonksiyonel olarak derecelendirilmiş olup kayma modülü ve yoğunluğu tabaka yüksekliği boyunca üstel bir fonksiyona bağlı olarak değişmektedir. Elastik yarım düzlem ise homojen olarak dikkate alınmıştır. Çözümde FD tabakanın kütle kuvveti hesaba katılırken elastik yarım düzlemin kütle kuvveti ihmal edilmiştir.

El-Borgi vd. (2017), elastik yarı sonsuz düzlem üzerinde bulunan ve moment etkisindeki rijit bir blok ile yüklü fonksiyonel derecelendirilmiş tabakada sürtünmenin dikkate alındığı ayrılmalı temas problemini incelemişlerdir.

Adıyaman vd., (2017), yaptıkları çalışmada rijit bir düzleme oturan ve yayılı yük ile çekmeye maruz kalan FD tabakanın sürekli ve süreksiz temas problemini analitik olarak ele almışlardır.

Yan vd. (2017), elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan ve dairesel bir blokla yüklü fonksiyonel derecelendirilmiş iki tabakada, sürtünmenin ihmal edildiği ayrılma problemini analitik olarak irdelemişlerdir.

Yaylacı vd., (2017) yaptıkları çalışmada, rijit bir düzleme oturan ve dairesel blokla yüklenmiş iki elastik tabakanın simetrik ve çift ayrılmalı temas problemini ele almışlardır. Yaptıkları çalışmada problemi hem elastisite teorisine hem de sonlu elemanlar metoduna göre çözümleri karşılaştırmışlardır.

Karabulut vd., (2018), yaptıkları çalışmada elastik yarım düzlem üzerine oturan ve yayılı yüklerle yüklenmiş elastik bir tabakanın sürekli ve süreksiz temas problemini sonlu elemanlar yöntemi ile ele almışlardır.

Yılmaz vd. (2018), rijit silindirik bir blok ile yüklü iki fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın hem analitik hem de sonlu elemanlar yöntemi ile çözümünü irdelemişlerdir. Rijit blok ile FD tabaka arasında sürtünme olduğu kabul edilmiştir. Her iki yöntemle elde edilen sonuçların birbirleriyle uyumlu olduğu görülmüştür.

Çömez vd. (2018), iki rijit silindirik blok ile desteklenmiş ve rijit bir silindirik blok ile yüklü fonksiyonel derecelendirilmiş tabakada temas problemini analitik olarak incelemişlerdir. Çalışmada farklı blok aralıkları ve yarıçapları altında çeşitli yüklemeler yapılarak temas gerilmeleri ve uzunlukları araştırılmıştır.

1.1.2. Çalışmanın Amacı ve Kapsamı

Bu çalışmada elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan ve iki rijit blok ile yüklü fonksiyonel derecelendirilmiş tabakada sürekli ve süreksiz temas problemi ele alınmıştır. Problemin çözümünde, Elastisite teorisi ve integral dönüşüm tekniklerinden faydalanılmıştır. Ayrıca bloklar ile fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka arasındaki düşey yer değiştirme fonksiyonunun türevinin sıfıra eşit olması şartı kullanılarak problem tekil integral denklem sistemine indirgenip uygun Gauss-Chebyshev integrasyonu ile sayısal olarak çözülmüştür. Problemin homojen tabakaya göre çözümü Özşahin (2007) tarafından yapılmıştır. Ancak iki rijit blok ile yüklü fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın sürekli ve süreksiz temas durumları için incelendiği temas probleminin çözümüne literatürde rastlanmamıştır. Problem iki aşamada incelenmiştir.

Birinci aşamada fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında ve FD tabaka ile bloklar arasında herhangi bir ayrılmanın meydana gelmediği sürekli temas durumu incelenmiştir. Elastisitenin temel denklemleri yardımıyla genel ifadeler elde edildikten sonra problemin sınır şartlarından, genel denklemlerdeki bilinmeyen katsayılar bulunmuştur. Bloklar altında ve tabaka-yarı sonsuz düzlem arasında oluşan temas gerilmeleri, ilk ayrılmayı meydana getirebilecek kritik yük ve ilk ayrılma noktası elde edilmiştir.

İkinci aşamada tabaka-yarı sonsuz düzlem arasında meydana gelebilecek süreksiz temas durumu incelenmiştir. Birinci aşamaya benzer olarak genel denklemler ve yeni sınır şartları için katsayılar bulunmuştur. Tekil integral denklem sistemine indirgenen problem Gauss-Chebyshev integrasyon formülasyonu ile çözülerek ilk ayrılma yükleri λ_{cr} , ilk ayrılma noktası x_{cr} belirlenmiştir. Ayrılma bölgesinin başlangıç ve bitiş noktaları,

fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem ve bloklar arasındaki yüzeyler boyunca temas gerilmesi dağılımları ve deplasmanların sayısal sonuçları boyutsuz büyüklükler olarak elde edilmiştir.

Bu çalışmanın amacı, elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan ve iki rijit blok ile yüklü fonksiyonel derecelendirilmiş tabakada temas probleminin sürekli ve süreksiz temas durumlarında ayrı ayrı incelenip ilk ayrılma yükleri, ilk ayrılma noktaları, temas gerilmesi dağılımları ve deplasmanların analitik olarak elde edilmesidir. Ayrıca diğer bir amaç, sonlu elemanlar yöntemi prensibine dayanan ANSYS programı ile de problemin çözülmesidir. Ancak FD malzemelerin tanımlanması ve mesh işlemi ANSYS paket programının standart menüleri ile yapılamamaktadır. Bu nedenle, programın LOGFILE dosyasını kullanarak özel bir yazılım eklenmiştir. Eklenen bu yazılım genel amaçlı olup, temas problemlerinin yanı sıra FD malzemeden üretilen çeşitli mühendislik problemlerinin de çözümüne yönelik olarak kodlanmıştır.

Bu amaçlar doğrultusunda;

- FD tabakanın rijitlik ve yoğunluk parametreleri değişiminin bloklar arası uzaklık, farklı blok genişlikleri, farklı yükleme durumlarına etkisinin araştırılması,
- Analitik çözümde elde edilen verilerin, homojen tabaka için ve sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen çözümle karşılaştırılması hedeflenmektedir.

1.2. Genel Denklemlerin Elde Edilmesi

Bu bölümde elastisite teorisi kullanılarak elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan ve iki rijit blok ile yüklü fonksiyonel derecelendirilmiş tabakada temas problemine ait gerilme ve yer değiştirme bileşenlerinin genel ifadeleri elde edilmiştir. İlk olarak, denge denklemlerinin yer değiştirmeler cinsinden ifade edildiği Navier denklemleri, bünye denklemleri kullanılarak elde edilmiştir. Navier denklemlerinde, yer değiştirme ifadelerinin gerekli türevleri alınarak oluşacak adi diferansiyel denklem takımının çözümü ile yer değiştirmelerin genel ifadeleri bulunacaktır.

1.2.1. Kütle Kuvvetlerinin Dahil Edilmemesi Durumunda Genel Denklemler

1.2.1.1. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabakaya Ait Genel Denklemler

Üç boyutlu halde dengede olan bir cisim için, kartezyen koordinat takımında X, Y, Z kütle kuvveti bileşenlerini, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ gerilme bileşenlerini göstermek üzere gerilmelerin noktadan noktaya değişimini ifade eden denge denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \quad (3)$$

Denge denklemlerinde $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$ olduğu bilinmektedir. Kütle kuvvetleri ihmal edildiğinde düzlem halde denge denklemleri:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

şeklinde. Denge denklemlerinde bulunan gerilme bileşenleri, bünye denklemleri ve yer değiştirme-şekil değiştirme bağıntıları kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\sigma_x = \frac{\mu_1(y)}{\kappa_1 - 1} \left[(\kappa_1 + 1) \frac{\partial u}{\partial x} + (3 - \kappa_1) \frac{\partial v}{\partial y} \right] \quad (6)$$

$$\sigma_y = \frac{\mu_1(y)}{\kappa_1 - 1} \left[(3 - \kappa_1) \frac{\partial u}{\partial x} + (\kappa_1 + 1) \frac{\partial v}{\partial y} \right] \quad (7)$$

$$\tau_{xy} = \mu_1(y) \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \quad (8)$$

Bu eşitliklerde geçen u ve v sırasıyla x ve y doğrultularındaki yer değiştirmeleri ifade etmektedir. Bu denklemlerde bulunan $\mu_1(y)$ ise, fonksiyonel derecelendirilmiş tabakaya ait kayma modülünü göstermektedir ve üstel bir fonksiyon olarak tanımlanmıştır.

$$\mu_1(y) = \mu_0 e^{\beta y} \quad (9)$$

Burada μ_0 , $y=0$ 'daki kayma modülünü β ise tabakanın derinliği boyunca değişimi belirleyen rijitlik parametresidir. Ayrıca denklemlerde geçen κ Kolosov sabitidir ve düzlem şekil değiştirme halinde $3-4\nu$, düzlem gerilme halinde $\frac{3-4\nu}{1+\nu}$ olmaktadır. Çözümlerde Poisson oranının (ν) değişmediği kabul edilmiştir.

(6-8) numaralı denklemlerle belirlenen gerilme ifadelerinin ilgili türevleri alınıp (4-5) nolu denge denklemlerinde yerlerine yazıldığında aşağıdaki Navier denklemleri elde edilir:

$$(\kappa_1 + 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\kappa_1 - 1) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \beta(\kappa_1 - 1) \frac{\partial u}{\partial y} + \beta(\kappa_1 - 1) \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

$$(\kappa_1 - 1) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\kappa_1 + 1) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \beta(3 - \kappa_1) \frac{\partial u}{\partial x} + \beta(\kappa_1 + 1) \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (11)$$

Navier denklemlerinin kısmi türevli diferansiyel denklem takımı oluşturması çözümü zorlaştırmaktadır. Çözümü kolaylaştırmak için Navier denklemleri adi diferansiyel denklem takımına dönüştürülür. Bu amaçla $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ bilinmeyen ϕ ve ψ fonksiyonlarının Fourier dönüşümleri olarak tanımlandığında:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\xi, y) e^{i\xi x} d\xi \quad (12)$$

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi, y) e^{i\xi x} d\xi \quad (13)$$

şeklinde yazılır. Bu fonksiyonların ters Fourier dönüşümleri:

$$\phi(\xi, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, y) e^{-i\xi x} dx \quad (14)$$

$$\psi(\xi, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(x, y) e^{-i\xi x} dx \quad (15)$$

olarak elde edilir. Burada ξ dönüşüm değişkenini göstermektedir. Bilinmeyen $\phi(\xi, y)$ ve $\psi(\xi, y)$ fonksiyonlarının belirlenebilmesi için (10-11) numaralı denklemler $e^{-i\xi x} dx$ ile çarpılıp $(-\infty, +\infty)$ aralığında integre edilirse:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[(\kappa_1 + 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\kappa_1 - 1) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \beta(\kappa_1 - 1) \frac{\partial u}{\partial y} + \beta(\kappa_1 - 1) \frac{\partial v}{\partial x} \right] e^{-i\xi x} dx = 0 \quad (16)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[(\kappa_1 - 1) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\kappa_1 + 1) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \beta(3 - \kappa_1) \frac{\partial u}{\partial x} + \beta(\kappa_1 + 1) \frac{\partial v}{\partial y} \right] e^{-i\xi x} dx = 0 \quad (17)$$

elde edilir. Bu denklemlerde bulunan yer değiştirme bileşenleri u ve v in gerekli türevleri alınır:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-i\xi x} dx = -\xi^2 \phi \quad (18)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} e^{-i\xi x} dx = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad (19)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} e^{-i\xi x} dx = i\xi \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (20)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial y} e^{-i\xi x} dx = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (21)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial v}{\partial x} e^{-i\xi x} dx = i\xi\psi \quad (22)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} e^{-i\xi x} dx = -\xi^2\psi \quad (23)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} e^{-i\xi x} dx = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad (24)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} e^{-i\xi x} dx = i\xi \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (25)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x} e^{-i\xi x} dx = i\xi\phi \quad (26)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial v}{\partial y} e^{-i\xi x} dx = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (27)$$

ifadeleri bulunur. Bulunan bu türev ifadeleri (16) ve (17) numaralı denklemlerde yerlerine yazılıp düzenlenirse:

$$-(\kappa_1 + 1)\xi^2\phi + (\kappa_1 - 1)\frac{d^2\phi}{dy^2} + 2i\xi\frac{d\psi}{dy} + \beta(\kappa_1 - 1)\frac{d\phi}{dy} + \beta(\kappa_1 - 1)i\xi\psi = 0 \quad (28)$$

$$-(\kappa_1 - 1)\xi^2\psi + (\kappa_1 + 1)\frac{d^2\psi}{dy^2} + 2i\xi\frac{d\phi}{dy} + \beta(\kappa_1 + 1)\frac{d\psi}{dy} + \beta(3 - \kappa_1)i\xi\phi = 0 \quad (29)$$

şeklinde adi diferansiyel denklem takımı elde edilir. Bu denklem takımı incelendiğinde $\ddot{y} = a\dot{y} + by$ formunda bir diferansiyel denklem sistemi oluşturduğu görülebilir (Apatay, 2010). Bu sistemin çözümü için:

$$\phi = y_1 \quad \text{ve} \quad \psi = y_2 \quad (30)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = y_3 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = y_4 \quad (31)$$

tanımlamaları yapılarak (28) ve (29) numaralı denklemler:

$$-\beta y_3 - \frac{2i\xi}{(\kappa_1 - 1)} y_4 + \frac{(\kappa_1 + 1)}{(\kappa_1 - 1)} \xi^2 y_1 - \beta i \xi y_2 = \frac{d^2 \varphi}{dy^2} = \dot{y}_3 \quad (32)$$

$$-\beta y_4 - \frac{2i\xi}{(\kappa_1 + 1)} y_3 - \frac{\beta(3 - \kappa_1)}{(\kappa_1 + 1)} i \xi y_1 + \frac{(\kappa_1 - 1)}{(\kappa_1 + 1)} \xi^2 y_2 = \frac{d^2 \psi}{dy^2} = \dot{y}_4 \quad (33)$$

olarak elde edilir. Bu ifadeler $\dot{y} = ay$ matris formatında düzenlenebilir.

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ y_1 \\ \dot{y}_2 \\ y_2 \\ \dot{y}_3 \\ y_3 \\ \dot{y}_4 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{(\kappa_1 + 1)\xi^2}{(\kappa_1 - 1)} & -\beta i \xi & -\beta & \frac{-2i\xi}{(\kappa_1 - 1)} \\ \frac{\beta(3 - \kappa_1)i\xi}{(\kappa_1 + 1)} & \frac{(\kappa_1 - 1)\xi^2}{(\kappa_1 + 1)} & \frac{-2i\xi}{(\kappa_1 + 1)} & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Burada;

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{(\kappa_1 + 1)\xi^2}{(\kappa_1 - 1)} & -\beta i \xi & -\beta & \frac{-2i\xi}{(\kappa_1 - 1)} \\ \frac{\beta(3 - \kappa_1)i\xi}{(\kappa_1 + 1)} & \frac{(\kappa_1 - 1)\xi^2}{(\kappa_1 + 1)} & \frac{-2i\xi}{(\kappa_1 + 1)} & -\beta \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır ve $|a - sI| = 0$ yazıldığında:

$$s^4 + 2\beta s^3 + (\beta^2 - 2\xi^2)s^2 - 2\beta\xi^2 s + \xi^2 \beta^2 \left(\frac{3 - \kappa_1}{\kappa_1 + 1} \right) = 0 \quad (35)$$

karakteristik denklemi elde edilir. Denklemden düzenleme yapılarak;

$$(s^2 + \beta s - \xi^2)^2 + \xi^2 \beta^2 \left(\frac{3 - \kappa_1}{\kappa_1 + 1} \right) = 0 \quad (36)$$

formunda yazılabilir. Diferansiyel denklem sisteminin çözümünün $e^{s_j y}$ olduğu kabul edilirse:

$$\phi = \sum_{j=1}^4 M_j e^{s_j y} \quad (37)$$

$$\psi = \sum_{j=1}^4 M_j n_j e^{s_j y} \quad (38)$$

ifadeleri elde edilir. (37) ve (38) ifadeleri, (28) ve (29)'da yerlerine yazılırsa:

$$n_j = \frac{-2\xi i s_j + \xi i \beta (\kappa_1 - 3)}{\xi^2 i^2 (\kappa_1 - 1) + (\kappa_1 + 1)(s_j \beta + s_j^2)} \quad (j = 1, \dots, 4) \quad (39)$$

ifadesi bulunur. Karakteristik denkleme ait kökler ise:

$$s_1 = -\frac{1}{2} \beta - \frac{1}{2} \sqrt{4\xi^2 + \beta^2 + 4i\xi\eta} \quad (40)$$

$$s_2 = -\frac{1}{2} \beta - \frac{1}{2} \sqrt{4\xi^2 + \beta^2 - 4i\xi\eta} \quad (41)$$

$$s_3 = -\frac{1}{2} \beta + \frac{1}{2} \sqrt{4\xi^2 + \beta^2 + 4i\xi\eta} \quad (42)$$

$$s_4 = -\frac{1}{2} \beta + \frac{1}{2} \sqrt{4\xi^2 + \beta^2 - 4i\xi\eta} \quad (43)$$

olarak elde edilir. Bu denklemlerde geçen η ifadesi $\eta = |\beta| \sqrt{\frac{3 - \kappa_1}{1 + \kappa_1}}$ olarak tanımlanmıştır.

(12), (13) eşitliklerinde verilen yer değiştirmeler, (37) ve (38) numaralı eşitliklerdeki $\phi(\xi, y)$ ve $\psi(\xi, y)$ ifadeleri yardımıyla

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^4 M_j e^{s_j y + i\xi x} d\xi \quad (44)$$

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^4 M_j n_j e^{s_j y + i\xi x} d\xi \quad (45)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada geçen M_j ($j=1, \dots, 4$) ifadeleri sabit katsayılardır ve probleme ait sınır şartları kullanılarak elde edilecektir. Bulunan yer değiştirme ifadeleri (6-8) numaralı denklemlerde yerlerine yazılarak fonksiyonel derecelendirilmiş tabakaya ait gerilme bileşenleri:

$$\sigma_x(x, y) = \frac{\mu_1(y)}{(\kappa_1 - 1)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^4 [i\xi(\kappa_1 + 1) + (3 - \kappa_1)n_j s_j] M_j e^{s_j y + i\xi x} d\xi \quad (46)$$

$$\sigma_y(x, y) = \frac{\mu_1(y)}{(\kappa_1 - 1)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^4 [i\xi(3 - \kappa_1) + (\kappa_1 + 1)n_j s_j] M_j e^{s_j y + i\xi x} d\xi \quad (47)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \mu_1(y) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^4 [s_j + i\xi n_j] M_j e^{s_j y + i\xi x} d\xi \quad (48)$$

şeklinde elde edilir.

1.2.1.2. Elastik Yarı Sonsuz Düzleme Ait Genel Denklemler

Bu bölümde, kütle kuvvetlerinin ihmal edilmesi durumunda homojen elastik yarı düzleme ait genel ifadeler Navier denklemleri yardımıyla elde edilecektir. Düzlem gerilme halinde denge denklemleri;

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (49)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (50)$$

Gerilme ifadeleri de:

$$\sigma_x = \lambda e + 2\mu_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (51)$$

$$\sigma_y = \lambda e + 2\mu_2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (52)$$

$$\tau_{xy} = \mu_2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (53)$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitliklerde bulunan e hacim değiştirme oranını, λ ve μ Lamé sabitlerini göstermektedir. Bu ifadeler aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$e = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (54)$$

$$\lambda = \left(\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right) \quad (55)$$

$$\mu_2 = \left(\frac{E}{2(1+\nu)} \right) \quad (56)$$

Bu denklemlerdeki E Elastisite modülünü, ν ise Poisson oranını göstermektedir. Gerilme ifadeleri (49-50) numaralı denge denklemlerinde yerlerine yazılır ve düzenlenirse Navier denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$(\lambda + \mu_2) \left(\frac{\partial e}{\partial x} \right) + \mu_2 \nabla^2 u = 0 \quad (57)$$

$$(\lambda + \mu_2) \left(\frac{\partial e}{\partial y} \right) + \mu_2 \nabla^2 v = 0 \quad (58)$$

bu eşitliklerdeki Laplace operatörü ∇^2 iki boyutlu problemlerde:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (59)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Navier denklemlerinin kısmi türevli diferansiyel denklem takımı oluşturması çözümü zorlaştırmaktadır. Çözümü kolaylaştırmak için Navier denklemleri adi diferansiyel denklem takımına dönüştürülür. Bu amaçla u ve v bilinmeyen fonksiyonlarının Fourier dönüşümleri olarak tanımlandığında:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\xi, y) e^{i\xi x} d\xi \quad (60)$$

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi, y) e^{i\xi x} d\xi \quad (61)$$

şeklinde yazılır. Bu ifadelerin ters Fourier dönüşümleri:

$$\phi(\xi, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, y) e^{-i\xi x} dx \quad (62)$$

$$\psi(\xi, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(x, y) e^{-i\xi x} dx \quad (63)$$

şeklinde olur. Bilinmeyen $\phi(\xi, y)$ ve $\psi(\xi, y)$ ifadelerinin belirlenebilmesi için (57-58) numaralı denklemler $e^{-i\xi x} dx$ ile çarpılıp $(-\infty, +\infty)$ aralığında integre edilirse:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\mu_2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + (\lambda + \mu_2) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right] e^{-i\xi x} dx = 0 \quad (64)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\mu_2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + (\lambda + \mu_2) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] e^{-i\xi x} dx = 0 \quad (65)$$

elde edilir. Bu denklemlerde bulunan yer değiştirme ifadeleri u ve v nin gerekli türevleri denklem (60) ve (61)'den alınır:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-i\xi x} dx = -\xi^2 \phi \quad (66)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} e^{-i\xi x} dx = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad (67)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} e^{-i\xi x} dx = i\xi \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (68)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} e^{-i\xi x} dx = -\xi^2 \psi \quad (69)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} e^{-i\xi x} dx = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad (70)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} e^{-i\xi x} dx = i\xi \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (71)$$

ifadeleri elde edilir. Bu ifadeler (64-65)'de yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa:

$$-(\lambda + 2\mu_2)\xi^2 \phi + \mu_2 \phi'' + (\lambda + \mu_2)i\xi \psi' = 0 \quad (72)$$

$$(\lambda + 2\mu_2)\psi'' - \xi^2 \mu_2 \psi + (\lambda + \mu_2)i\xi \phi' = 0 \quad (73)$$

şeklinde adi diferansiyel denklem takımı meydana gelir. Bu sistemin çözümü için:

$$\phi = y_1 \quad \text{ve} \quad \psi = y_2 \quad (74)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = y_3 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = y_4 \quad (75)$$

tanımlamaları yapılarak (72) ve (73) numaralı denklemler:

$$\frac{\xi^2 (\lambda + 2\mu_2)}{\mu_2} y_1 - \frac{i\xi (\lambda + \mu_2)}{\mu_2} y_4 = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \dot{y}_3 \quad (76)$$

$$\frac{\xi^2 \mu_2}{(\lambda + 2\mu_2)} y_2 - \frac{i\xi (\lambda + \mu_2)}{(\lambda + 2\mu_2)} y_3 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \dot{y}_4 \quad (77)$$

olarak elde edilir. Bu ifadeler $\dot{y} = by$ matris formatında aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{(\lambda + 2\mu_2)\xi^2}{\mu_2} & 0 & 0 & -\frac{i\xi(\lambda + \mu_2)}{\mu} \\ 0 & \frac{\xi^2 \mu_2}{(\lambda + 2\mu_2)} & -\frac{i\xi(\lambda + \mu_2)}{(\lambda + 2\mu_2)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \quad (78)$$

Burada;

$$b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{(\lambda + 2\mu_2)\xi^2}{\mu_2} & 0 & 0 & -\frac{i\xi(\lambda + \mu_2)}{\mu} \\ 0 & \frac{\xi^2 \mu_2}{(\lambda + 2\mu_2)} & -\frac{i\xi(\lambda + \mu_2)}{(\lambda + 2\mu_2)} & 0 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır ve $|b - kI| = 0$ yazılırsa karakteristik denklem;

$$k^4 - 2\xi^2 k^2 + \xi^4 = 0 \quad (79)$$

şeklinde elde edilir. Bu denklemin kökleri ise $k_1 = k_2 = |\xi|$ ve $k_3 = k_4 = -|\xi|$ olarak bulunur. Bu durumda adi diferansiyel denklemin çözümü aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\psi(\xi, y) = [A_1 + A_2 y] e^{-|\xi|y} + [A_3 + A_4 y] e^{|\xi|y} \quad (80)$$

$\phi(\xi, y)$ bilinmeyen fonksiyonun çözümünün yapılması için, (73) numaralı denklemin y 'ye göre bir kez türevi alınır, türevi alınan denklemden $\phi''(\xi, y)$ ifadesi bulunur. $\phi''(\xi, y)$, (72) numaralı denklemde yerine yazılarak $\phi(\xi, y)$ ifadesi, $\psi(\xi, y)$ fonksiyonu ve türevlerine bağlı olarak elde edilir. Gerekli türevler alınıp denklem yeniden düzenlenirse:

$$\phi(\xi, y) = \left\{ \left(-iA_1 \frac{|\xi|}{\xi} e^{-|\xi|y} \right) + \left[iA_2 \left(\frac{\kappa_2}{\xi} - y \frac{|\xi|}{\xi} \right) e^{-|\xi|y} \right] + \left(iA_3 \frac{|\xi|}{\xi} e^{|\xi|y} \right) + \left[iA_4 \left(\frac{\kappa_2}{\xi} + y \frac{|\xi|}{\xi} \right) e^{|\xi|y} \right] \right\} \quad (81)$$

olarak bulunur. Bu ifadeler (60-61) numaralı denklemlerde yerlerine yazılarak x ve y doğrultularındaki yer değiştirme ifadeleri elde edilir. Bu ifadeler:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ i e^{-|\xi|y} \left[-A_1 \frac{|\xi|}{\xi} + A_2 \left(\frac{\kappa_2}{\xi} - \frac{|\xi|}{\xi} y \right) \right] + i e^{|\xi|y} \left[A_3 \frac{|\xi|}{\xi} + A_4 \left(\frac{\kappa_2}{\xi} + \frac{|\xi|}{\xi} y \right) \right] \right\} e^{i\xi x} d\xi \quad (82)$$

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ e^{-|\xi|y} [A_1 + A_2 y] + e^{|\xi|y} [A_3 + A_4 y] \right\} e^{i\xi x} d\xi \quad (83)$$

şeklinde yazılabilir. Elastik yarı sonsuz düzlemde yer değiştirmeler $y \rightarrow -\infty$ için sıfır olacağından A_1 ve A_2 katsayıları düşecektir. Kütle kuvvetlerinin de ihmal edilmesiyle yer değiştirme ve gerilme ifadeleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$u_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[A_3 \frac{|\xi|}{\xi} + A_4 \left(\frac{\kappa_2}{\xi} + \frac{|\xi|}{\xi} y \right) \right] i e^{|\xi|y + i\xi x} d\xi \quad (84)$$

$$v_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [A_3 + A_4 y] e^{|\xi|y + i\xi x} d\xi \quad (85)$$

$$\sigma_{2x} = -\frac{\mu_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ 2A_3 |\xi| + A_4 [(\kappa_2 + 3) + 2|\xi| y] \right\} e^{|\xi|y + i\xi x} d\xi \quad (86)$$

$$\sigma_{2,y} = \frac{\mu_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ 2A_3 |\xi| + A_4 [(\kappa_2 - 1) + 2|\xi|y] \right\} e^{|\xi|y + i\xi x} d\xi \quad (87)$$

$$\tau_{2,xy} = \frac{i\mu_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ 2\xi A_3 + A_4 \left[(\kappa_2 + 1) \frac{|\xi|}{\xi} + 2\xi y \right] \right\} e^{|\xi|y + i\xi x} d\xi \quad (88)$$

Gerilme ve yer değiştirme ifadelerinde A_3 ve A_4 bilinmeyen katsayılar olup bunlar probleme ait sınır şartları kullanılarak bulunacaktır. Bu ifadelerdeki 2 indisi elastik yarı sonsuz düzlemi göstermektedir.

1.3. Kütle Kuvvetlerinin Bulunması Durumunda Genel Denklemler

Bu bölümde, kütle kuvveti etkisinde bulunan fonksiyonel derecelendirilmiş tabakaya ait genel denklemler elde edilmiştir. Tabakaya ait kütle kuvvetleri $X=0$ ve $Y=-\rho_1(y)g$ olarak alınmıştır. Bu denklemlerde g yerçekimi ivmesini, $\rho_1(y)$ ise fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın yoğunluğunu ifade etmekte olup aşağıdaki gibi değişmektedir.

$$\rho_1(y) = \rho_0 e^{\gamma y} \quad (89)$$

Burada ρ_0 tabakanın $y=0$ 'daki yoğunluğunu ve γ ise derinlik boyunca değişen yoğunluk parametresini göstermektedir. Kütle kuvvetlerinin olması durumunda düzlem halde denge denklemleri:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \quad (90)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 \quad (91)$$

şeklinde yazılır. Fonksiyonel derecelendirilmiş tabakaya ait gerilme bileşenleri, bünye denklemleri ve yer değiştirme-şekil değiştirme bağıntıları kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\sigma_x = \frac{\mu_1(y)}{\kappa_1 - 1} \left[(\kappa_1 + 1) \frac{\partial u}{\partial x} + (3 - \kappa_1) \frac{\partial v}{\partial y} \right] \quad (92)$$

$$\sigma_y = \frac{\mu_1(y)}{\kappa_1 - 1} \left[(3 - \kappa_1) \frac{\partial u}{\partial x} + (\kappa_1 + 1) \frac{\partial v}{\partial y} \right] \quad (93)$$

$$\tau_{xy} = \mu_1(y) \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \quad (94)$$

(92-94) numaralı denklemlerde bulunan gerilme ifadelerinin ilgili türevleri alınıp (90-91) numaralı denge denklemlerinde yerlerine yazıldığında aşağıdaki Navier denklemleri elde edilir:

$$(\kappa_1 + 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\kappa_1 - 1) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \beta (\kappa_1 - 1) \frac{\partial u}{\partial y} + \beta (\kappa_1 - 1) \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (95)$$

$$(\kappa_1 - 1) \frac{\partial^2 v_{1p}}{\partial x^2} + (\kappa_1 + 1) \frac{\partial^2 v_{1p}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 u_{1p}}{\partial x \partial y} + \beta (3 - \kappa_1) \frac{\partial u_{1p}}{\partial x} + \beta (\kappa_1 + 1) \frac{\partial v_{1p}}{\partial y} = \frac{\rho_0 e^{(\gamma - \beta)y} g (\kappa_1 - 1)}{\mu_0 e^{\beta y}} \quad (96)$$

(95) ve (96) numaralı denklemlerde yer değiştirme fonksiyonları $u=u(x)$ ve $v=v(y)$ olarak seçilir ve gerekli türevler alınıp denklemler yeniden düzenlenirse (95) numaralı denklemden:

$$(\kappa_1 + 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (97)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A \quad (98)$$

$$u(x) = Ax + B \quad (99)$$

ifadeleri elde edilir. Aynı şekilde (96) numaralı denklemden:

$$(\kappa_1 + 1) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \beta (3 - \kappa_1) \frac{\partial u}{\partial x} + \beta (\kappa_1 + 1) \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\rho_0 e^{(\gamma - \beta)y} g (\kappa_1 - 1)}{\mu_0} \quad (100)$$

denklemi elde edilir. $u(x) = Ax + B$ yazılarak (100) numaralı denklem yeniden düzenlenirse:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \beta \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\left[\frac{\rho_0}{\mu_0} e^{(\gamma-\beta)y} g (\kappa_1 - 1) \right] - \beta(3 - \kappa_1) A}{(\kappa_1 + 1)} \quad (101)$$

diferansiyel denklemi elde edilmiş olur. Bu denklemin çözülmesiyle:

$$v = \frac{e^{-\beta y} \left\{ \left[A y e^{\beta y} (\kappa_1 - 3) \gamma \mu_0 \beta (\beta - \gamma) \right] - \left[\gamma \mu_0 C_1 (\beta - \gamma) (\kappa_1 + 1) \right] \right\} + e^{\beta y} \left\{ \left[\gamma \mu_0 \beta C_2 (\beta - \gamma) (\kappa_1 + 1) \right] - e^{\gamma y} \left[g \rho_0 \beta (\kappa_1 - 1) \right] \right\}}{\gamma \mu_0 \beta (\kappa_1 + 1) (\beta - \gamma)} \quad (102)$$

ifadesi bulunur. Yer değiştirme bileşenleri $u(x)$ ve $v(x)$ de bulunan A, B, C_1 , C_2 bilinmeyenlerdir ve probleme ait sınır şartlarından elde edilecektir. x eksenini h yüksekliğindeki tabakanın üstünden geçmekte ve tabakanın kütle kuvveti $-\rho g$ olmak koşuluyla aşağıdaki sınır şartları yazılabilir:

$$u(0) = 0 \quad (103)$$

$$v(-h) = 0 \quad (104)$$

$$\sigma_y = \int_y^0 -\rho_0 g e^{\gamma y} dy \quad \Rightarrow \quad \sigma_y = \frac{\rho_0 g (e^{\gamma y} - 1)}{\gamma} \quad (105)$$

$$\int_{-h}^0 \sigma_x dy = 0 \quad (106)$$

(103-106) numaralı sınır şartlarından yararlanarak bilinmeyen katsayılar:

$$A = - \frac{\beta \rho_0 g (\kappa_1 - 3) e^{(\beta-\gamma)h} [1 - e^{\gamma h} (1 - \gamma h)]}{8 \gamma^2 \mu_0 (e^{\beta h} - 1)} \quad (107)$$

$$B = 0 \quad (108)$$

$$C_1 = -\frac{\rho_0 g (\kappa_1 - 1)}{\gamma \mu_0 (\kappa_1 + 1)} \quad (109)$$

$$C_2 = -\frac{\rho_0 g [DD + EE - FF]}{8\gamma \mu_0 (\kappa_1 + 1)} \quad (110)$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca (107-110) numaralı eşitliklerde;

$$DD = \frac{e^{h(\beta-\gamma)} h \beta [1 + e^{h\gamma} (h\gamma - 1)] (\kappa_1 - 3)^2}{\gamma (h\beta - 1)} \quad (111)$$

$$EE = \frac{8e^{h\beta} (\kappa_1 - 1)}{\beta} \quad (112)$$

$$FF = \frac{8e^{h(\beta-\gamma)} (\kappa_1 - 1)}{\beta - \gamma} \quad (113)$$

olarak tanımlanmıştır. Bu ifadeler (99) ve (102) numaralı denklemlerde yerlerine yazılırsa kütle kuvvetlerinin bulunması durumunda FD tabakaya ait yer değiştirme bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$u = -\frac{\beta \rho_0 g (\kappa_1 - 3) e^{(\beta-\gamma)h} [1 - e^{\gamma h} (1 - \gamma h)]}{8\gamma^2 \mu_0 (e^{\beta h} - 1)} x \quad (114)$$

$$v = -\rho_0 g \left\{ \begin{array}{l} \frac{e^{h(\beta-\gamma)} (\kappa_1 - 3)^2 \beta h [1 - e^{\gamma h} (1 - \gamma h)]}{\gamma (e^{h\beta} - 1)} + \frac{8e^{h\beta} (\kappa_1 - 1)}{\beta} - \frac{8e^{h(\beta-\gamma)} (\kappa_1 - 1)}{(\beta - \gamma)} \\ \frac{e^{h(\beta-\gamma)} \gamma \mu_0 (\kappa_1 - 3)^2 \beta [1 - e^{\gamma h} (1 - \gamma h)]}{8\gamma^2 \mu_0 (e^{h\beta} - 1)} - \frac{e^{-\gamma \beta} (\kappa_1 - 1)}{\beta} + \frac{e^{y(-\beta+\gamma)} (\kappa_1 - 1)}{(\beta - \gamma)} \end{array} \right\} \quad (115)$$

Elde edilen yer değiştirme bileşenlerinin gerekli türevleri alınıp (92-94) numaralı denklemlerde yerlerine yazılmasıyla gerilme bileşenleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\sigma_x = -\rho_0 g (\kappa_1 - 3) \left\{ \frac{e^{\beta(h+y)} [\beta(-1 + \gamma h + e^{-\gamma h})] + \gamma [1 - e^{\beta h} - e^{\gamma y} + e^{\beta h + \gamma y}]}{\gamma^2 (\kappa_1 + 1) (e^{\beta h} - 1)} \right\} \quad (116)$$

$$\sigma_y = \frac{\rho_0 g (e^{\gamma y} - 1)}{\gamma} \quad (117)$$

$$\tau_{xy} = 0 \quad (118)$$

Fonksiyonel derecelendirilmiş tabakaya ait gerilme ve yer değiştirme bileşenleri en genel haliyle aşağıdaki gibi yazılır.

$$u_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^4 M_j e^{s_j y + i\xi x} d\xi - \frac{\beta \rho_0 g (\kappa_1 - 3) e^{(\beta-\gamma)h} [1 - e^{\gamma h} (1 - \gamma h)]}{8\gamma^2 \mu_0 (e^{\beta h} - 1)} x \quad (119)$$

$$v_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^4 M_j n_j e^{s_j y + i\xi x} d\xi - \rho_0 g \left\{ \frac{\frac{e^{h(\beta-\gamma)} (\kappa_1 - 3)^2 \beta h [1 - e^{\gamma h} (1 - \gamma h)]}{\gamma (e^{h\beta} - 1)} + \frac{8e^{h\beta} (\kappa_1 - 1)}{\beta} - \frac{8e^{h(\beta-\gamma)} (\kappa_1 - 1)}{(\beta-\gamma)}}{8\mu_0 (\kappa_1 + 1)} + \frac{\frac{e^{h(\beta-\gamma)} \gamma \mu_0 (\kappa_1 - 3)^2 \beta [1 - e^{\gamma h} (1 - \gamma h)]}{8\gamma^2 \mu_0 (e^{h\beta} - 1)} - \frac{e^{-\gamma\beta} (\kappa_1 - 1)}{\beta} + \frac{e^{y(-\beta+\gamma)} (\kappa_1 - 1)}{(\beta-\gamma)}}{\gamma \mu_0 (\kappa_1 + 1)} \right\} \quad (120)$$

$$\sigma_{1x}(x, y) = \frac{\mu_1(y)}{(\kappa_1 - 1)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^4 [i\xi (\kappa_1 + 1) + (3 - \kappa_1) n_j s_j] M_j e^{s_j y + i\xi x} d\xi - \rho_0 g (\kappa_1 - 3) \left\{ \frac{e^{\beta(h+y)} [\beta(-1 + \gamma h + e^{-\gamma h})] + \gamma [1 - e^{\beta h} - e^{\gamma y} + e^{\beta h + \gamma y}]}{\gamma^2 (\kappa_1 + 1) (e^{\beta h} - 1)} \right\} \quad (121)$$

$$\sigma_{1y}(x, y) = \frac{\mu_1(y)}{(\kappa_1 - 1)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^4 [i\xi (3 - \kappa_1) + (\kappa_1 + 1) n_j s_j] M_j e^{s_j y + i\xi x} d\xi + \frac{\rho_0 g (e^{\gamma y} - 1)}{\gamma} \quad (122)$$

$$\tau_{1xy}(x, y) = \mu_1(y) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^4 [s_j + i\xi n_j] M_j e^{s_j y + i\xi x} d\xi \quad (123)$$

Bu ifadelerde yer alan 1 indisi fonksiyonel derecelendirilmiş tabakaya sembolize etmektedir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

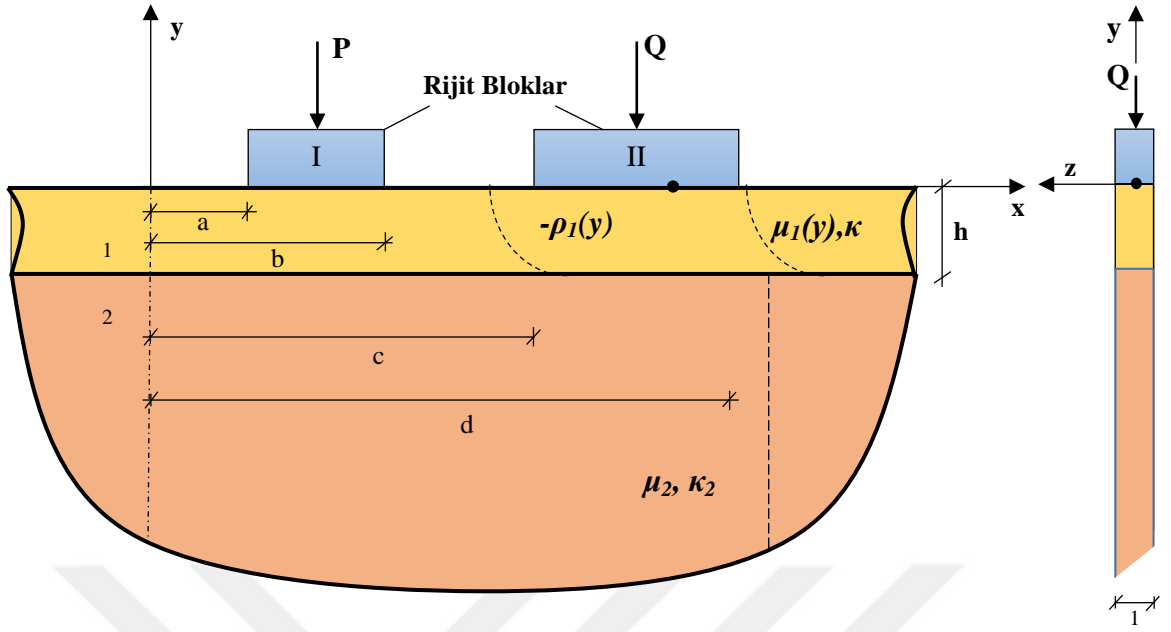
2.1. Giriş

Bu çalışma, elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan ve iki rijit blok ile yüklü fonksiyonel derecelendirilmiş tabakada sürekli ve süreksiz temas problemlerinin elastisite teorisine göre çözümünü içermektedir. Problemden tüm yüzeylerin sürtünmesiz ve z eksenini doğrultusundaki kalınlığın birim olduğu kabul edilmiştir. FD tabakada kütle kuvvetleri çözüme dahil edilirken, elastik düzlemde ihmal edilmiştir.

2.2. Sürekli Temas Problemi

2.2.1. Problemin Tanımı ve Sınır Şartları

Elastik yarı düzlem üzerine oturan ve kayma modülü $\mu_1(y) = \mu_0 e^{by}$, yoğunluğu $\rho_1(y) = \rho_0 e^{vy}$ olan h yüksekliğindeki tabaka Şekil 1'de verilmiştir. Tabaka $(-\infty, +\infty)$ aralığında uzanmaktadır. Blokların rijit olduğu ve temas yüzeylerinin sadece basınç gerilmeleri aktardığı kabul edilmiştir. Bu nedenle kritik yükün aşılması durumunda FD tabaka ile yarı düzlem arasında ayrılmalar meydana gelebilmektedir.



Şekil 1. Sürekli temasta problemin geometrisi ve yükleme durumu

Sürekli temas problemine ait sınır şartları $y=0$ ve $y=-h$ 'de aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\tau_{1xy}(x, 0) = 0 \quad (-\infty < x < \infty) \quad (124)$$

$$\tau_{1xy}(x, -h) = 0 \quad (-\infty < x < \infty) \quad (125)$$

$$\tau_{2xy}(x, -h) = 0 \quad (-\infty < x < \infty) \quad (126)$$

$$\sigma_{1y}(x, 0) = \begin{cases} -p(x) & a < x < b \\ -q(x) & c < x < d \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad (127)$$

$$\sigma_{1y}(x, -h) = \sigma_{2y}(x, -h) \quad (-\infty < x < \infty) \quad (128)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[v_1(x, -h) - v_2(x, -h)] = 0 \quad (-\infty < x < \infty) \quad (129)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[v_1(x, 0)] = 0 \quad (a < x < b) \quad (130)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[v_1(x, 0)] = 0 \quad (c < x < d) \quad (131)$$

Probleme ait denge şartları;

$$\int_a^b p(x)dx = P \quad (132)$$

$$\int_c^d q(x)dx = Q \quad (133)$$

olup, bu denklemlerden gelen $p(x)$ ve $q(x)$ bloklar altındaki bilinmeyen temas gerilmeleridir.

2.2.2. Katsayıların Belirlenmesi

(124-129) numaralı sınır şartlarında hem fonksiyonel derecelendirilmiş tabakaya hem de elastik yarım düzleme ait gerilme ve yer değiştirme ifadeleri yazılıp ters Fourier dönüşümleri uygulandığında aşağıdaki 6 cebrik denklem elde edilir:

$$\sum_{j=1}^4 [s_j + n_j i\xi] M_j = 0 \quad (134)$$

$$\sum_{j=1}^4 [s_j + n_j i\xi] M_j e^{-s_j h} = 0 \quad (135)$$

$$\{2\xi A_3 + A_4 [(\kappa_2 + 1) - 2\xi h]\} e^{-\xi h} = 0 \quad (136)$$

$$\frac{1}{\kappa_1 - 1} \sum_{j=1}^4 [i\xi (3 - \kappa_1) + (\kappa_1 + 1) n_j s_j] M_j = p' + q' \quad (137)$$

$$\sum_{j=1}^4 [i\xi n_j M_j e^{-s_j h}] - [i\xi (A_3 - A_4 h)] e^{-\xi h} = 0 \quad (138)$$

$$\frac{e^{-\beta h}}{\kappa_1 - 1} \sum_{j=1}^4 [i\xi (3 - \kappa_1) + (\kappa_1 + 1) n_j s_j] M_j e^{-s_j h} - m \{2\xi A_3 + A_4 [(\kappa_2 - 1) - 2\xi h]\} e^{-\xi h} = 0 \quad (139)$$

Bu denklemlerin ortak çözümünden elde edilen 6 adet bilinmeyen katsayı, rijit bloklar altındaki bilinmeyen temas gerilmelerine bağlı olarak aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\begin{aligned}
M_1 = & (\xi e^{-h(\beta+2\xi+s_2+s_3+s_4)}(p^i + q^i)i((\kappa_2 + 1)(e^{hs_2}(D_2D_3E_4 - D_2D_4E_3) + e^{hs_3}(-D_2D_3E_4 + D_3D_4E_2) \\
& + e^{hs_4}(D_2D_4E_3 - D_3D_4E_2)) + 4\xi m(e^{h(\beta+s_2)}(-D_2D_3n_4 + D_2D_4n_3) \\
& + e^{h(\beta+s_3)}(D_2D_3n_4 - D_3D_4n_2) + e^{h(\beta+s_4)}(-D_2D_4n_3 + D_3D_4n_2)))) / \Delta \quad (140)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_2 = & (-\xi e^{-h(\beta+2\xi+s_1+s_3+s_4)}(p^i + q^i)i((\kappa_2 + 1)(e^{hs_1}(D_1D_3E_4 - D_1D_4E_3) + e^{hs_3}(-D_1D_3E_4 + D_3D_4E_1) \\
& + e^{hs_4}(D_1D_4E_3 - D_3D_4E_1)) + 4\xi m(e^{h(\beta+s_1)}(-D_1D_3n_4 + D_1D_4n_3) \\
& + e^{h(\beta+s_3)}(D_1D_3n_4 - D_3D_4n_1) + e^{h(\beta+s_4)}(-D_1D_4n_3 + D_3D_4n_1)))) / \Delta \quad (141)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_3 = & (\xi e^{-h(\beta+2\xi+s_1+s_2+s_4)}(p^i + q^i)i((\kappa_2 + 1)(e^{hs_1}(D_1D_2E_4 - D_1D_4E_2) + e^{hs_2}(-D_1D_2E_4 + D_2D_4E_1) \\
& + e^{hs_4}(D_1D_4E_2 - D_2D_4E_1)) + 4\xi m(e^{h(\beta+s_1)}(-D_1D_2n_4 + D_1D_4n_2) \\
& + e^{h(\beta+s_2)}(D_1D_2n_4 - D_2D_4n_1) + e^{h(\beta+s_4)}(-D_1D_4n_2 + D_2D_4n_1)))) / \Delta \quad (142)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_4 = & (-\xi e^{-h(\beta+2\xi+s_1+s_2+s_3)}(p^i + q^i)i((\kappa_2 + 1)(e^{hs_1}(D_1D_2E_3 - D_1D_3E_2) + e^{hs_2}(-D_1D_2E_3 + D_2D_3E_1) \\
& + e^{hs_4}(D_1D_3E_2 - D_2D_3E_1)) + 4\xi m(e^{h(\beta+s_1)}(-D_1D_2n_3 + D_1D_3n_2) \\
& + e^{h(\beta+s_2)}(D_1D_2n_3 - D_2D_3n_1) + e^{h(\beta+s_3)}(-D_1D_3n_2 + D_2D_3n_1)))) / \Delta \quad (143)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3 = & (-\xi e^{-h(\beta+\xi+s_1+s_2+s_3+s_4)}(p^i + q^i)i(\kappa_2 - 2\xi h + 1)((e^{hs_1}(D_1D_2E_3n_4 - D_1D_2E_4n_3 \\
& - D_1D_3E_2n_4 + D_1D_3E_4n_2 + D_1D_4E_2n_3 - D_1D_4E_3n_2) + e^{hs_2}(-D_1D_2E_3n_4 + D_1D_2E_4n_3 \\
& + D_2D_3E_1n_4 - D_2D_3E_4n_1 - D_2D_4E_1n_3 + D_2D_4E_3n_1) + e^{hs_3}(D_1D_3E_2n_4 - D_1D_3E_4n_2 \\
& - D_2D_3E_1n_4 + D_2D_3E_4n_1 + D_3D_4E_1n_2 - D_3D_4E_2n_1) + e^{hs_4}(-D_1D_4E_2n_3 + D_1D_4E_3n_2 \\
& + D_2D_4E_1n_3 - D_2D_4E_2n_1 - D_3D_4E_1n_2 + D_3D_4E_2n_1)))) / \Delta \quad (144)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_4 = & (\xi^2 e^{-h(\beta+\xi+s_1+s_2+s_3+s_4)}(p^i + q^i)2i((e^{hs_1}(D_1D_2E_3n_4 - D_1D_2E_4n_3 - D_1D_3E_2n_4 + D_1D_3E_4n_2 \\
& + D_1D_4E_2n_3 - D_1D_4E_3n_2) + e^{hs_2}(-D_1D_2E_3n_4 + D_1D_2E_4n_3 + D_2D_3E_1n_4 - D_2D_3E_4n_1 \\
& - D_2D_4E_1n_3 + D_2D_4E_3n_1) + e^{hs_3}(D_1D_3E_2n_4 - D_1D_3E_4n_2 - D_2D_3E_1n_4 + D_2D_3E_4n_1 \\
& + D_3D_4E_1n_2 - D_3D_4E_2n_1) + e^{hs_4}(-D_1D_4E_2n_3 + D_1D_4E_3n_2 + D_2D_4E_1n_3 - D_2D_4E_3n_1 \\
& - D_3D_4E_1n_2 + D_3D_4E_2n_1)))) / \Delta \quad (145)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta = & (-\xi e^{-h(\beta+2\xi+s_1+s_2+s_3+s_4)}) i((\kappa_2+1)(e^{h(s_1+s_2)}(D_1D_3E_2E_4 - D_1D_4E_2E_3 - D_2D_3E_1E_4 + D_2D_4E_1E_3) \\
& e^{h(s_1+s_3)}(-D_1D_2E_3E_4 + D_1D_4E_2E_3 + D_2D_3E_1E_4 - D_3D_4E_1E_2) + e^{h(s_1+s_4)}(D_1D_2E_3E_4 - D_1D_3E_2E_4 \\
& - D_2D_4E_1E_3 + D_3D_4E_1E_2) + e^{h(s_2+s_3)}(D_1D_2E_3E_4 - D_1D_3E_2E_4 - D_2D_4E_1E_3 + D_3D_4E_1E_2) \\
& + e^{h(s_2+s_4)}(-D_1D_2E_3E_4 + D_1D_4E_2E_3 + D_2D_3E_1E_4 - D_3D_4E_1E_2) + e^{h(s_3+s_4)}(D_1D_3E_2E_4 - D_1D_4E_2E_3 \\
& - D_2D_3E_1E_4 + D_2D_4E_1E_3)) + 4\xi m(e^{h(\beta+s_1+s_2)}(-D_1D_3E_2n_4 + D_1D_4E_2n_3 + D_2D_3E_1n_4 - D_2D_4E_1n_3) \\
& + e^{h(\beta+s_1+s_3)}(D_1D_2E_3n_4 - D_1D_4E_3n_2 - D_2D_3E_1n_4 + D_3D_4E_1n_2) + e^{h(\beta+s_1+s_4)}(-D_1D_2E_4n_3 + D_1D_3E_4n_2 \\
& + D_2D_4E_1n_3 - D_3D_4E_1n_2) + e^{h(\beta+s_2+s_3)}(-D_1D_2E_3n_4 + D_1D_3E_2n_4 + D_2D_4E_3n_1 - D_3D_4E_2n_1) \\
& + e^{h(\beta+s_2+s_4)}(D_1D_2E_4n_3 - D_1D_4E_2n_3 - D_2D_3E_4n_1 + D_3D_4E_2n_1) + e^{h(\beta+s_3+s_4)}(-D_1D_3E_4n_2 + D_1D_4E_3n_2 \\
& + D_2D_3E_4n_1 - D_2D_4E_3n_1))) \tag{146}
\end{aligned}$$

Bu ifadelerde geçen D_i , E_i ($i=1, \dots, 4$), p^1 , q^1 ve m büyüklükleri aşağıda verilmiştir.

$$D_i = (s_i + n_i i \xi) \quad i = (1, \dots, 4) \tag{147}$$

$$E_i = \frac{1}{(\kappa_1 - 1)} [i \xi (3 - \kappa_1) + (\kappa_1 + 1) n_i s_i] \quad i = (1, \dots, 4) \tag{148}$$

$$p^1 = -\frac{1}{\mu_0} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) d\xi = -\frac{1}{\mu_0} \int_a^b p(t) dt \tag{149}$$

$$q^1 = -\frac{1}{\mu_0} \int_{-\infty}^{+\infty} q(x) d\xi = -\frac{1}{\mu_0} \int_c^d q(t) dt \tag{150}$$

$$m = \frac{\mu_2}{\mu_0} \tag{151}$$

2.2.3. İntegral Denklemlerin Elde Edilmesi

Yer değiştirme ve gerilme ifadelerinde yer alan M_j ($j=1, \dots, 4$) ve A_j ($j=3, 4$) katsayıları, rijit bloklar altındaki $p(x)$ ve $q(x)$ temas gerilme fonksiyonlarına bağlı olarak yukarıdaki gibi elde edilmiştir. Bilinmeyen $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonları daha önce kullanılmayan (130-131) numaralı sınır şartlarından elde edilen integral denklemlerin

çözülmesiyle belirlenecektir. (130) ve (131) numaralı sınır şartlarının açık hali aşağıdaki gibidir;

$$\frac{\partial v_1(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi \sum_{j=1}^4 M_j n_j e^{s_j y + i\xi x} d\xi = 0 \quad (a < x < b) \quad (152)$$

$$\frac{\partial v_1(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi \sum_{j=1}^4 M_j n_j e^{s_j y + i\xi x} d\xi = 0 \quad (c < x < d) \quad (153)$$

(140-146) numaralı denklemlerde verilen M_i ($i=1, \dots, 4$) katsayıları (152-153) denklemlerinde yerlerine yazıldıktan sonra $y \rightarrow 0$ limitine geçilmiştir. Ancak bu geçişte pay, paydaya bölününce temas gerilmelerinin düzgün yayılmasını engelleyen bazı terimler ortaya çıkmaktadır. Diğer bir ifadeyle çekirdeğin yakınsamasını bozan bir singüler terim ifadesi bulunmaktadır. Bu ifade çekirdek içinden ayıklanıp kapalı integralleri eklendikten sonra limit işlemi uygulanmalıdır. Bulunan singüler terim ifadesi;

$$SINTER_1 = \int_0^{\infty} \left(\frac{\kappa_1 + 1}{4} \right) e^{\xi y} \sin \xi (t - x) d\xi \quad (154)$$

şeklindedir. Bu ifadenin kapalı integrali, integral dönüşüm tabloları yardımıyla alındıktan sonra $y \rightarrow 0$ limitine geçilirse;

$$\left(\frac{\kappa_1 + 1}{4} \right) \frac{(t - x)}{y^2 + (t - x)^2} \quad (155)$$

olarak elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapıлып (152) ve (153) numaralı denklemler yeniden düzenlendiğinde integral denklemler aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi \mu_0} \int_a^b p(t) dt \left[k_1^*(x, t) + \frac{(1 + \kappa_1)}{4} \frac{1}{t_1 - x_1} \right] \\ & -\frac{1}{\pi \mu_0} \int_c^d q(t) dt \left[k_1^*(x, t) + \frac{(1 + \kappa_1)}{4} \frac{1}{t_2 - x_2} \right] = 0 \quad (a < x < b) \end{aligned} \quad (156)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\pi \mu_0} \int_a^b p(t) dt \left[k_1^*(x, t) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{t_1 - x_1} \right] \\
& -\frac{1}{\pi \mu_0} \int_c^d q(t) dt \left[k_1^*(x, t) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{t_2 - x_2} \right] = 0 \quad (c < x < d)
\end{aligned} \tag{157}$$

Bu denklemlerde geçen $k_1^*(x, t)$ ifadesinin açık formu aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}
k_1^*(x, t) &= \left(k_1(x, t) - \left(\frac{\kappa_1 + 1}{4} \right) \right) [\sin \xi(t - x) d\xi] \\
&= \int_0^\infty \left\{ \begin{aligned} & (\kappa_2 + 1) \left[\begin{aligned} & e^{h(s_1+s_2)} (D_1 D_3 E_4 n_2 - D_1 D_4 E_3 n_2 - D_2 D_3 E_4 n_1 + D_2 D_4 E_3 n_1) \\ & + e^{h(s_1+s_3)} (-D_1 D_2 E_4 n_3 + D_1 D_4 E_2 n_3 + D_2 D_3 E_4 n_1 - D_3 D_4 E_2 n_1) \\ & + e^{h(s_1+s_4)} (D_1 D_2 E_3 n_4 - D_1 D_3 E_2 n_4 - D_2 D_4 E_3 n_1 + D_3 D_4 E_2 n_1) \\ & + e^{h(s_2+s_3)} (D_1 D_2 E_4 n_3 - D_1 D_3 E_4 n_2 - D_2 D_4 E_1 n_3 + D_3 D_4 E_1 n_2) \\ & + e^{h(s_2+s_4)} (-D_1 D_2 E_3 n_4 + D_1 D_4 E_3 n_2 + D_2 D_3 E_1 n_4 - D_3 D_4 E_1 n_2) \\ & + e^{h(s_3+s_4)} (D_1 D_3 E_2 n_4 - D_1 D_4 E_2 n_3 - D_2 D_3 E_1 n_4 + D_2 D_4 E_1 n_3) \end{aligned} \right] \\ & + 4\xi^2 m \left[\begin{aligned} & e^{h(\beta+s_1+s_2)} (-D_1 D_3 n_2 n_4 + D_1 D_4 n_2 n_3 + D_2 D_3 n_1 n_4 - D_2 D_4 n_1 n_3) \\ & + e^{h(\beta+s_1+s_3)} (D_1 D_2 n_3 n_4 - D_1 D_4 n_2 n_3 - D_2 D_3 n_1 n_4 + D_3 D_4 n_1 n_2) \\ & + e^{h(\beta+s_1+s_4)} (-D_1 D_2 n_3 n_4 + D_1 D_3 n_2 n_4 + D_2 D_4 n_1 n_3 - D_3 D_4 n_1 n_2) \\ & + e^{h(\beta+s_2+s_3)} (-D_1 D_2 n_3 n_4 + D_1 D_3 n_2 n_4 + D_2 D_4 n_1 n_3 - D_3 D_4 n_1 n_2) \\ & + e^{h(\beta+s_2+s_4)} (D_1 D_2 n_3 n_4 - D_1 D_4 n_2 n_3 - D_2 D_3 n_1 n_4 + D_3 D_4 n_1 n_2) \\ & + e^{h(\beta+s_3+s_4)} (-D_1 D_3 n_2 n_4 + D_1 D_4 n_2 n_3 + D_2 D_3 n_1 n_4 - D_2 D_4 n_1 n_3) \end{aligned} \right] \end{aligned} \right\} / \Delta \tag{158}
\end{aligned}$$

(156) ve (157) numaralı integral denklemlerin sayısal çözümü için $z = \xi h$ dönüşümü yapılmış ve aşağıdaki gibi çeşitli boyutsuz büyüklükler tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{b-a}{2} r_1 + \frac{b+a}{2} & (a), \quad t_1 &= \frac{b-a}{2} s_1 + \frac{b+a}{2} & (b) \\
x_2 &= \frac{d-c}{2} r_2 + \frac{d+c}{2} & (c), \quad t_2 &= \frac{d-c}{2} s_2 + \frac{d+c}{2} & (d) \\
g_1(s_1) &= p \left(\frac{b-a}{2} s_1 + \frac{b+a}{2} \right) / P/h & (e), \quad g_2(s_2) &= q \left(\frac{d-c}{2} s_2 + \frac{d+c}{2} \right) / P/h, & (f)
\end{aligned} \tag{159}$$

(159 a-f) denklemlerinde tanımlanan bu boyutsuz büyüklükler (132-133) numaralı denge şartlarında ve (156-157) numaralı integral denklemlerde yerlerine yazılırsa;

$$\int_{-1}^1 g_1(s_1) \frac{b-a}{2h} ds_1 = 1 \quad (160)$$

$$\int_{-1}^1 g_2(s_2) \frac{d-c}{2h} ds_2 = Q/P \quad (161)$$

1. tekil integral denklem;

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} g_1(s_1) \frac{b-a}{2} ds_1 \left[\Phi_1(r_1, s_1) - \frac{(1+\kappa_1)}{4} \left[\sin \xi \left(\left(\frac{b-a}{2} \right) (s_1 - r_1) \right) \right] d\xi + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{\left(\frac{b-a}{2} \right) (s_1 - r_1)} \right] \\ & -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} g_2(s_2) \frac{d-c}{2} ds_2 \left[\Phi_2(r_1, s_2) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{\left(\left(\frac{d-c}{2} s_2 + \frac{d+c}{2} \right) - \left(\frac{b-a}{2} r_1 + \frac{b+a}{2} \right) \right)} \right] = 0 \\ & \qquad \qquad \qquad (-1 < r_1 < +1), \quad (162) \end{aligned}$$

2. tekil integral denklem;

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} g_1(s_1) \frac{b-a}{2} ds_1 \left[\Phi_3(r_2, s_1) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{\left(\left(\frac{b-a}{2} s_1 + \frac{b+a}{2} \right) - \left(\frac{d-c}{2} r_2 + \frac{d+c}{2} \right) \right)} \right] \\ & -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} g_2(s_2) \frac{d-c}{2} ds_2 \left[\Phi_4(r_2, s_2) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{\left(\frac{d-c}{2} \right) (s_2 - r_2)} \right] = 0 \quad (-1 < r_2 < +1), \quad (163) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilirler. $g_1(s_1)$ ve $g_2(s_2)$ büyüklükleri, rijit bloklar altında ortaya çıkan boyutsuz temas gerilmeleridir. Rijit blokların köşe noktalarında $g_i(s_i)$ temas gerilmeleri

singülariteye sahip olduğundan (162) ve (163) numaralı integral denklemlerin indisi +1 olur. Böylece çözüm aşağıdaki gibi aranabilir. (Erdoğan ve Gupta,1972).

$$g_i(s_i) = G_i(s_i)(1-s_i^2)^{\frac{1}{2}} \quad -1 \leq s_i \leq +1 \quad (i=1,2) \quad (164)$$

$G_i(s_i)$ $[-1,+1]$ ($i=1,2$) aralığında kapalı fonksiyonlardır ve $z=\xi h$ dönüşümü yapıлып uygun Gauss-Chebyshev integrasyon formülasyonu kullanıldığında (160-163) numaralı denklemler aşağıdaki gibi cebirsel denklem sistemine dönüşürç

$$\sum_{i=1}^N \pi W_i \frac{b-a}{2h} G_1(s_{1i}) = 1 \quad (165)$$

$$\sum_{i=1}^N \pi W_i \frac{d-c}{2h} G_2(s_{2i}) = Q/P \quad (166)$$

$$-\sum_{i=1}^N W_i G_1(s_{1i}) \frac{b-a}{2h} \left[\Phi_1(r_{1j}, s_{1i}) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{\left(\frac{b-a}{2}\right)(s_{1i} - r_{1j})} \right]$$

$$-\sum_{i=1}^N W_i G_2(s_{2i}) \frac{d-c}{2h} \left[\Phi_2(r_{1j}, s_{2i}) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{\left(\left(\frac{d-c}{2}s_{2i} + \frac{d+c}{2}\right) - \left(\frac{b-a}{2}r_{1j} + \frac{b+a}{2}\right)\right)} \right] = 0$$

$$(j=1, \dots, N-1) \quad (167)$$

$$\begin{aligned}
& -\sum_{i=1}^N W_i G_1(s_{1i}) \frac{b-a}{2h} \left[\Phi_3(r_{2j}, s_{1i}) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{\left(\left(\frac{b-a}{2} s_{1i} + \frac{b+a}{2} \right) - \left(\frac{d-c}{2} r_{2j} + \frac{d+c}{2} \right) \right)} \right] \\
& -\sum_{i=1}^N W_i G_2(s_{2i}) \frac{d-c}{2h} \left[\Phi_4(r_{2j}, s_{2i}) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{\left(\frac{d-c}{2} \right) (s_{2i} - r_{2j})} \right] = 0 \\
& \qquad \qquad \qquad (j=1, \dots, N-1) \qquad \qquad \qquad (168)
\end{aligned}$$

Bu denklemlerde yer alan W_i, r_j, s_i ifadeleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$W_1 = W_N = \frac{1}{2n-2}, \quad W_i = \frac{1}{N-1}, \quad (i=2, \dots, N-1) \quad (169)$$

$$s_{1i} = s_{2i} = \cos\left(\frac{i-1}{N-1} \pi\right) \quad (i=1, \dots, N) \quad (170)$$

$$r_{1j} = r_{2j} = \cos\left(\frac{2j-1}{2N-2} \pi\right) \quad (j=1, \dots, N-1) \quad (171)$$

(165-168) ifadelerinden $2N$ bilinmeyenli $2N$ tane cebrik denklem elde edilir. Bu denklem sistemlerinin çözümü yapılarak $G_1(s_i)$ ve $G_2(s_i)$ ($i=1, \dots, N$) hesaplanabilir. Böylece (164) numaralı denklemde aranan bloklar altındaki $g_i(s_i)$ boyutsuz büyüklükleri elde edilmiş olur.

2.2.4. Gerilmelerin Bulunması

FD tabakada ve elastik yarı sonsuz düzlemde σ_x ve σ_y ve τ_{xy} gerilmeleri incelenmiştir. (140-146) numaralı eşitlikler olarak elde edilen katsayılar (121-123) numaralı gerilme bağıntılarında yerlerine yazılmıştır. Önceki bölümlerde tanımlanmış olan boyutsuz büyüklükler kullanılıp gerekli sadeleştirmeler yapılarak;

- FD tabakanın $\sigma_y(x, y)/P/h$ normal gerilmeleri;
- FD tabakanın $\sigma_x(x, y)/P/h$ normal gerilmeleri;
- FD tabakanın derinliği boyunca $\tau_{xy}(x, y)/P/h$ kayma gerilmeleri;
- Elastik yarı sonsuz düzlemin derinliği boyunca $\sigma_y(x, y)/P/h$, $\sigma_x(x, y)/P/h$, $\tau_{xy}(x, y)/P/h$ gerilmeleri elde edilmiştir.

2.2.5. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabaka ile Elastik Yarı Sonsuz Düzlem Arasındaki İlk Ayrılma Yüğü ve Uzaklığının Bulunması

Temas problemlerinde temas yüzeylerindeki gerilmelerin bilinmesi önemlidir. Ancak bir başka önemli husus da, temas eden yüzeyler arasında ayrılmayı oluşturabilecek yük değerinin ve ayrılmanın başladığı noktanın belirlenmesidir. Bu nedenle ara yüzeydeki $\sigma_y(x, y)/P/h$ değerlerinin bulunması gerekmektedir. (140-146) da bulunan katsayılar (122) numaralı denklemde yerlerine yazılırsa;

$$\sigma_y(x, y) = \left\{ \begin{array}{l} 2P \frac{e^{\beta y}}{\kappa_1 - 1} \int_0^{+\infty} \sum_{j=1}^4 [i\xi(3 - \kappa_1) + (\kappa_1 + 1)n_j s_j] M_j e^{s_j y} [\cos \xi(t - x)] d\xi \\ + 2Q \frac{e^{\beta y}}{\kappa_1 - 1} \int_0^{+\infty} \sum_{j=1}^4 [i\xi(3 - \kappa_1) + (\kappa_1 + 1)n_j s_j] M_j e^{s_j y} [\cos \xi(t - x)] d\xi \end{array} \right\} + \frac{\rho_0 g (e^{\gamma y} - 1)}{\gamma} \quad (172)$$

ifadesi elde edilir. FD tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükü ve uzaklığının bulunabilmesi için $y = -h$ değeri alınıp ve $z = \xi h$ dönüşümü yapılarak gerilme ifadesi boyutsuzlaştırılırsa;

$$\frac{\sigma_y(x, -h)}{P/h} = \frac{(e^{-\gamma h} - 1)}{\gamma h} \frac{1}{\lambda} - \sum_{i=1}^n W_i G_1(s_{1i}) \frac{b-a}{2h} \Phi_5(r_{1j}, s_{1i}) - \sum_{i=1}^n W_i G_2(s_{2i}) \frac{d-c}{2h} \Phi_6(r_{2j}, s_{2i})$$

$$(-1 < r_1, r_2 < +1) \quad (173)$$

temas yüzeyi boyunca boyutsuz $\sigma_y(x, -h)/P/h$ gerilmesi elde edilmiş olur. (167-168) ve (173) numaralı denklemlerde bulunan Φ_i ($i = 1, \dots, 6$) ifadesi aşağıda tanımlanmıştır.

$$\Phi_1(r_1, s_1) = k_1^*(x_1, t_1), \quad (\text{a}) \quad \Phi_2(r_1, s_2) = k_1^*(x_1, t_2), \quad (\text{b})$$

$$\Phi_3(r_2, s_1) = k_1^*(x_2, t_1), \quad (\text{c}) \quad \Phi_4(r_2, s_2) = k_1^*(x_2, t_2) \quad (\text{d})$$

$$\Phi_5(r_1, s_1) = k_2(x_1, t_1), \quad (\text{e}) \quad \Phi_6(r_2, s_2) = k_2(x_2, t_2) \quad (\text{f})$$

(173) numaralı denklemin çekirdeği ise;

$$k_2(x, t) = \frac{e^{\beta y}}{\kappa_1 - 1} \int_0^{+\infty} \sum_{j=1}^4 \left[i \xi (3 - \kappa_1) + (\kappa_1 + 1) n_j s_j \right] M_j e^{s_j y} \quad (\text{g}) \quad (174)$$

olarak elde edilmiştir. Ayrıca (173) numaralı denklemde geçen λ ifadesi yük faktörü olup bu problemde

$$\lambda = P / \rho_0 g h^2 \quad (175)$$

olarak tanımlanmıştır. λ 'nın kritik bir değeri aşması durumunda FD tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında ayrılma meydana gelmekte ve problem süreksiz temas problemine dönüşmektedir ($\lambda > \lambda_{cr}$). Bu nedenle problemin sürekli temas problemi ($\lambda \leq \lambda_{cr}$) olabilmesi için temas gerilmelerinin temas yüzeyi boyunca her noktada basınç olması gerekmektedir. Bu durumda ayrılmayı meydana getirecek kritik yük değerinin bulunması önemlidir. Kritik yükün bulunabilmesi için (173) numaralı denklem sıfıra eşitlenmiştir.

$$\frac{(e^{-\gamma h} - 1)}{\gamma h} \frac{1}{\lambda} - \sum_{i=1}^n W_i G_1(s_{1i}) \frac{b-a}{2h} \Phi_5(r_{1j}, s_{1i}) - \sum_{i=1}^n W_i G_2(s_{2i}) \frac{d-c}{2h} \Phi_6(r_{2j}, s_{2i}) = 0 \quad (176)$$

Bu eşitliği sağlayan λ_{cr} değeri ayrılmanın başladığı noktayı ve buna karşılık gelen λ_{cr} değeri de kritik yük değerini vermektedir.

$$\sigma_{1y}(x,0) = \begin{cases} -p(x) & a < x < b \\ -q(x) & c < x < d \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad (180)$$

$$\sigma_{1y}(x,-h) = \sigma_{2y}(x,-h) \quad (-\infty < x < \infty) \quad (181)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[v_1(x,-h) - v_2(x,-h)] = \eta(x) \quad (e < x < f) \quad (182)$$

$$\sigma_{1y}(x,-h) = 0 \quad (e < x < f) \quad (183)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[v_1(x,0)] = 0 \quad (a < x < b) \quad (184)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[v_1(x,0)] = 0 \quad (c < x < d) \quad (185)$$

Probleme ait denge şartları;

$$\int_a^b p(t)dt = P \quad (186)$$

$$\int_c^d q(t)dt = Q \quad (187)$$

ve tek değerlik şartı;

$$\int_e^f \eta(t)dt = 0 \quad (188)$$

olarak yazılabilir. Bu sınır şartlarında yer alan e ve f , ayrılmanın başlangıç ve bitiş noktalarıdır. $\eta(x)$ ise FD tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında oluşan ayrılma bölgesindeki düşey yer değiştirmelerin farkının türevine eşit olan bilinmeyen bir fonksiyondur.

2.3.2. Katsayıların Belirlenmesi

(177-182) numaralı sınır şartlarında hem fonksiyonel derecelendirilmiş tabakaya hem de elastik yarım düzleme ait gerilme ve yer değiştirme ifadeleri yazılıp ters Fourier dönüşümleri uygulandığında aşağıdaki gibi 6 adet cebrik denklem elde edilmiştir. Bu denklem takımlarında bilinmeyenler M_j^* $j=(1,...4)$, A_3^* ve A_4^* katsayılarıdır.

$$\sum_{j=1}^4 [s_j + n_j i\xi] M_j^* = 0 \quad (189)$$

$$\sum_{j=1}^4 [s_j + n_j i\xi] M_j^* e^{-s_j h} = 0 \quad (190)$$

$$\{2\xi A_3^* + A_4^* [(\kappa_2 + 1) - 2\xi h]\} e^{-\xi h} = 0 \quad (191)$$

$$\frac{1}{\kappa_1 - 1} \sum_{j=1}^4 [i\xi(3 - \kappa_1) + (\kappa_1 + 1)n_j s_j] M_j^* = p' + q' \quad (192)$$

$$\sum_{j=1}^4 [i\xi n_j M_j^* e^{-s_j h}] - [i\xi (A_3^* - A_4^* h)] e^{-\xi h} = \int_e^f \eta(t) e^{-i\xi t} dt = \eta' \quad (193)$$

$$\frac{e^{-\beta h}}{\kappa_1 - 1} \sum_{j=1}^4 [i\xi(3 - \kappa_1) + (\kappa_1 + 1)n_j s_j] M_j^* e^{-s_j h} - m \{2\xi A_3^* + A_4^* [(\kappa_2 - 1) - 2\xi h]\} e^{-\xi h} = 0 \quad (194)$$

Altı bilinmeyenli altı denklem takımının çözümünden elde edilen katsayılar, rijit bloklar altındaki bilinmeyen temas gerilmeleri $p(x)$ ve $q(x)$ ile ayrılma fonksiyonunun eğimini veren $\eta(x)$ 'e bağlı olarak aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} M_1^* = & (\xi e^{-h(\beta + 2\xi + s_2 + s_3 + s_4)}) i((p' + q')((\kappa_2 + 1)(e^{hs_2}(D_2 D_3 E_4 - D_2 D_4 E_3) + e^{hs_3}(-D_2 D_3 E_4 + D_3 D_4 E_2) \\ & + e^{hs_4}(D_2 D_4 E_3 - D_3 D_4 E_2)) + (4\xi m(e^{h(\beta + s_2)}(-D_2 D_3 n_4 + D_2 D_4 n_3) + e^{h(\beta + s_3)}(D_2 D_3 n_4 - D_3 D_4 n_2) \\ & + e^{h(\beta + s_4)}(-D_2 D_4 n_3 + D_3 D_4 n_2)))) + (4i\eta' m(e^{h(\beta + s_2 + s_3)}(D_2 D_4 E_3 + D_3 D_4 E_2) \\ & + e^{h(\beta + s_2 + s_4)}(-D_2 D_3 E_4 + D_3 D_4 E_2) + e^{h(\beta + s_3 + s_4)}(D_2 D_3 E_4 - D_2 D_4 E_3)))) / \Delta \end{aligned} \quad (195)$$

$$\begin{aligned}
M_2^* = & (-\xi e^{-h(\beta+2\xi+s_1+s_3+s_4)})i((p' + q')((\kappa_2 + 1)(e^{hs_1}(D_1D_3E_4 - D_1D_4E_3) + e^{hs_3}(-D_1D_3E_4 + D_3D_4E_1) \\
& + e^{hs_4}(D_1D_4E_3 - D_3D_4E_1)) + (4\xi m(e^{h(\beta+s_1)}(-D_1D_3n_4 + D_1D_4n_3) + e^{h(\beta+s_3)}(D_1D_3n_4 - D_3D_4n_1) \\
& + e^{h(\beta+s_4)}(-D_1D_4n_3 + D_3D_4n_1)))) + (4i\eta' m(e^{h(\beta+s_1+s_3)}(D_1D_4E_3 - D_3D_4E_1) \\
& + e^{h(\beta+s_1+s_4)}(-D_1D_3E_4 + D_3D_4E_1) + e^{h(\beta+s_3+s_4)}(D_1D_3E_4 - D_1D_4E_3)))))) / \Delta \quad (196)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_3^* = & (\xi e^{-h(\beta+2\xi+s_1+s_2+s_4)})i((p' + q')((\kappa_2 + 1)(e^{hs_1}(D_1D_2E_4 - D_1D_4E_2) + e^{hs_2}(-D_1D_2E_4 + D_2D_4E_1) \\
& + e^{hs_4}(D_1D_4E_2 - D_2D_4E_1)) + (4\xi m(e^{h(\beta+s_1)}(-D_1D_2n_4 + D_1D_4n_2) + e^{h(\beta+s_2)}(D_1D_2n_4 - D_2D_4n_1) \\
& + e^{h(\beta+s_4)}(-D_1D_4n_2 + D_2D_4n_1)))) + (4i\eta' m(e^{h(\beta+s_1+s_2)}(D_1D_4E_2 - D_2D_4E_1) \\
& + e^{h(\beta+s_1+s_4)}(-D_1D_2E_4 + D_2D_4E_1) + e^{h(\beta+s_2+s_4)}(D_1D_2E_4 - D_1D_4E_2)))))) / \Delta \quad (197)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_4^* = & (-\xi e^{-h(\beta+2\xi+s_1+s_2+s_3)})i((p' + q')((\kappa_2 + 1)(e^{hs_1}(D_1D_2E_3 - D_1D_3E_2) + e^{hs_2}(-D_1D_2E_3 + D_2D_3E_1) \\
& + e^{hs_4}(D_1D_3E_2 - D_2D_3E_1)) + (4\xi m(e^{h(\beta+s_1)}(-D_1D_2n_3 + D_1D_3n_2) + e^{h(\beta+s_2)}(D_1D_2n_3 - D_2D_3n_1) \\
& + e^{h(\beta+s_3)}(-D_1D_3n_2 + D_2D_3n_1)))) + (4i\eta' m(e^{h(\beta+s_1+s_2)}(D_1D_3E_2 - D_2D_3E_1) \\
& + e^{h(\beta+s_1+s_3)}(-D_1D_2E_3 + D_2D_3E_1) + e^{h(\beta+s_2+s_3)}(D_1D_2E_3 - D_1D_3E_2)))))) / \Delta \quad (198)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3^* = & (e^{-h(\beta+\xi+s_1+s_2+s_3+s_4)})(\kappa_2 - 2\xi h + 1)((-p' + q')i\xi(e^{hs_1}(D_1D_2E_3n_4 - D_1D_2E_4n_3 - D_1D_3E_2n_4 \\
& + D_1D_3E_4n_2 + D_1D_4E_2n_3 - D_1D_4E_3n_2) + e^{hs_2}(-D_1D_2E_3n_4 + D_1D_2E_4n_3 + D_2D_3E_1n_4 \\
& - D_2D_3E_4n_1 - D_2D_4E_1n_3 + D_2D_4E_3n_1) + e^{hs_3}(D_1D_3E_2n_4 - D_1D_3E_4n_2 - D_2D_3E_1n_4 + D_2D_3E_4n_1 \\
& + D_3D_4E_1n_2 - D_3D_4E_2n_1) + e^{hs_4}(-D_1D_4E_2n_3 + D_1D_4E_3n_2 + D_2D_4E_1n_3 - D_2D_4E_3n_1 - D_3D_4E_1n_2 \\
& + D_3D_4E_2n_1))) + (\eta'((e^{h(s_1+s_2)}(D_2D_4E_1E_3 - D_2D_3E_1E_4 - D_1D_4E_2E_3 + D_1D_3E_2E_4)) \\
& + (e^{h(s_1+s_3)}(-D_2D_1E_4E_3 + D_2D_3E_1E_4 + D_1D_4E_2E_3 - D_4D_3E_2E_1)) + (e^{h(s_1+s_4)}(D_2D_1E_4E_3 \\
& - D_2D_4E_1E_3 - D_1D_3E_2E_4 + D_3D_4E_2E_1)) + (e^{h(s_2+s_3)}(D_2D_1E_4E_3 - D_2D_4E_1E_3 - D_1D_3E_2E_4 \\
& + D_4D_3E_2E_1)) + (e^{h(s_2+s_4)}(-D_2D_1E_4E_3 + D_2D_3E_1E_4 + D_1D_4E_2E_3 - D_4D_3E_2E_1)) \\
& + (e^{h(s_3+s_4)}(D_2D_4E_1E_3 - D_2D_3E_1E_4 - D_1D_4E_2E_3 + D_1D_3E_2E_4)))))) / \Delta \quad (199)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_4^* = & (-2\xi e^{-h(\beta+\xi+s_1+s_2+s_3+s_4)}((-p' + q')(e^{hs_1}(D_1D_2E_3n_4 - D_1D_2E_4n_3 - D_1D_3E_2n_4 + D_1D_3E_4n_2 \\
& + D_1D_4E_2n_3 - D_1D_4E_3n_2) + e^{hs_2}(-D_1D_2E_3n_4 + D_1D_2E_4n_3 + D_2D_3E_1n_4 - D_2D_3E_4n_1 \\
& - D_2D_4E_1n_3 + D_2D_4E_3n_1) + e^{hs_3}(D_1D_3E_2n_4 - D_1D_3E_4n_2 - D_2D_3E_1n_4 + D_2D_3E_4n_1 \\
& + D_3D_4E_1n_2 - D_3D_4E_2n_1) + e^{hs_4}(-D_1D_4E_2n_3 + D_1D_4E_3n_2 + D_2D_4E_1n_3 - D_2D_4E_3n_1 \\
& - D_3D_4E_1n_2 + D_3D_4E_2n_1))) + (\eta'((e^{h(s_1+s_2)}(D_2D_4E_1E_3 - D_2D_3E_1E_4 - D_1D_4E_2E_3 \\
& + D_1D_3E_2E_4)) + (e^{h(s_1+s_3)}(-D_2D_1E_4E_3 + D_2D_3E_1E_4 + D_1D_4E_2E_3 - D_4D_3E_2E_1)) \\
& + (e^{h(s_1+s_4)}(D_2D_1E_4E_3 - D_2D_4E_1E_3 - D_1D_3E_2E_4 + D_3D_4E_2E_1)) + (e^{h(s_2+s_3)}(D_2D_1E_4E_3 \\
& - D_2D_4E_1E_3 - D_1D_3E_2E_4 + D_4D_3E_2E_1)) + (e^{h(s_2+s_4)}(-D_2D_1E_4E_3 + D_2D_3E_1E_4 + D_1D_4E_2E_3 \\
& - D_4D_3E_2E_1)) + (e^{h(s_3+s_4)}(D_2D_4E_1E_3 - D_2D_3E_1E_4 - D_1D_4E_2E_3 + D_1D_3E_2E_4)))))) / \Delta \quad (200)
\end{aligned}$$

p' ve q' (149) ve (150) numaralı denklemlerde tanımlanmışken η' ;

$$\eta' = \int_e^f \eta(t) dt \quad (201)$$

olarak tanımlanmıştır.

2.3.3. İntegral Denklemlerin Elde Edilmesi

Sürekli temas için elde edilen katsayılar $p(t)$, $q(t)$ ve $\eta(t)$ bilinmeyen fonksiyonları (183-185) numaralı sınır şartlarından faydalanılarak elde edilecektir. (184) ve (185) numaralı sınır şartlarının açık hali aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_1(x,0)}{\partial x} = & -\frac{1}{\mu_0} \frac{1}{2\pi} \int_a^b p(t) e^{-i\xi t} dt \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi \sum_{j=1}^4 M_j n_j e^{i\xi x} d\xi - \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{2\pi} \int_c^d q(t) e^{-i\xi t} dt \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi \sum_{j=1}^4 M_j n_j e^{i\xi x} d\xi \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_e^f \eta(t) e^{-i\xi t} dt \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi \sum_{j=1}^4 M_j^{**} n_j e^{i\xi x} d\xi = 0 \quad (202)
\end{aligned}$$

(202) numaralı denklemde integral sınırları $(-\infty, +\infty)$ yerine $(0, +\infty)$ olarak değiştirilip yeniden düzenlenirse;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_1(x,0)}{\partial x} = & -2 \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{2\pi} \int_a^b p(t) dt \int_0^{+\infty} \sum_{j=1}^4 \xi M_j n_j [\sin \xi(t-x)] d\xi \\
& -2 \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{2\pi} \int_c^d q(t) dt \int_0^{+\infty} \sum_{j=1}^4 \xi M_j n_j [\sin \xi(t-x)] d\xi \\
& + 2 \frac{1}{2\pi} \int_e^f \eta(t) dt \int_0^{+\infty} \sum_{j=1}^4 \xi M_j^{**} n_j [\cos \xi(t-x)] d\xi = 0
\end{aligned} \tag{203}$$

olarak elde edilir. Bu ifadelerde geçen M_j^{**} ($j=1,..4$) bilinmeyen $\eta(t)$ fonksiyonuna bağlı olarak belirlenmiş katsayılarıdır. Bu katsayılar;

$$M_1^{**} = (4me^{h(\beta+s_1)} (-e^{hs_3}(e^{hs_2} - e^{hs_4})D_2D_4E_3 + D_3(e^{hs_2}(e^{hs_3} - e^{hs_4})D_4E_2 + e^{hs_4}(e^{hs_2} - e^{hs_3})D_2E_4))) / \Delta \tag{204}$$

$$M_2^{**} = -(4me^{h(\beta+s_2)} (-e^{hs_3}(e^{hs_1} - e^{hs_4})D_1D_4E_3 + D_3(e^{hs_1}(e^{hs_3} - e^{hs_4})D_4E_1 + e^{hs_4}(e^{hs_1} - e^{hs_3})D_1E_4))) / \Delta \tag{205}$$

$$M_3^{**} = (4me^{h(\beta+s_3)} (-e^{hs_2}(e^{hs_1} - e^{hs_4})D_1D_4E_2 + D_2(e^{hs_1}(e^{hs_2} - e^{hs_4})D_4E_1 + e^{hs_4}(e^{hs_1} - e^{hs_2})D_1E_4))) / \Delta \tag{206}$$

$$M_4^{**} = -(4me^{h(\beta+s_4)} (-e^{hs_2}(e^{hs_1} - e^{hs_3})D_1D_3E_2 + D_2(e^{hs_1}(e^{hs_2} - e^{hs_3})D_3E_1 + e^{hs_3}(e^{hs_1} - e^{hs_2})D_1E_3))) / \Delta \tag{207}$$

şeklinde elde edilmiştir. (203) numaralı denklemde yer alan bilinmeyen $p(t)$ ve $q(t)$ fonksiyonlarına bağlı olarak belirlenmiş M_j ($j=1,..4$) katsayıları sürekli temas halindeki katsayılar ile aynıdır. Singüler terim ifadesi de yalnızca bu ifadelerden ortaya çıkacak ve sürekli temastaki (155) numaralı denklem ile aynı olacaktır. Bu durumda 1. ve 2. integral denklemlerdeki singüler terim ifadeleri de $p(t)$ ve $q(t)$ 'ye bağlı olarak belirlenmiş bu katsayılardan elde edilmiştir. Singüler terimler ayıklanıp kapalı integralleri alındığında 1. ve 2. integral denklemler;

$$-\frac{1}{\pi} \int_a^b p(t) dt \left[k_1^*(x,t) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{t_1 - x_1} \right] \tag{208}$$

$$-\frac{1}{\pi} \int_c^d q(t) dt \left[k_1^*(x,t) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{t_2 - x_2} \right] + \frac{\mu_0}{\pi} \int_e^f \eta(t) dt [k_3(x,t)] = 0 \quad (a < x < b)$$

$$-\frac{1}{\pi} \int_a^b p(t) dt \left[k_1^*(x, t) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{t-x} \right] \quad (209)$$

$$-\frac{1}{\pi} \int_c^d q(t) dt \left[k_1^*(x, t) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{t-x} \right] + \frac{\mu_0}{\pi} \int_e^f \eta(t) dt [k_3(x, t)] = 0 \quad (c < x < d)$$

olarak yazılabilir. Bu denklemlerde yer alan $k_1^*(x, t)$ çekirdeği (158) numaralı denklemde verilmiştir. $k_3(x, t)$ çekirdeği de aşağıdaki gibidir:

$$k_3(x, t) = \int_0^\infty \left\{ \begin{array}{l} 4\xi m((e^{h(\beta+s_1+s_2+s_3)} - e^{h(\beta+s_2+s_3+s_4)})D_1D_4(n_3E_2 + n_2E_3) \\ + e^{h(\beta+s_2)}(-e^{hs_1}(e^{hs_3} - e^{hs_4})D_3D_4(n_2E_1 + n_1E_2) \\ + e^{hs_4}(e^{hs_1} - e^{hs_3})D_1D_3(n_4E_2 + n_2E_4) \\ + D_2(-(e^{h(\beta+s_1+s_2+s_4)} - e^{h(\beta+s_1+s_3+s_4)})D_3(n_4E_1 + n_1E_4) \\ + e^{h(\beta+s_3)}(-e^{hs_1}(e^{hs_2} - e^{hs_4})D_4(n_3E_1 - n_1E_3) \\ - e^{hs_4}(e^{hs_1} - e^{hs_2})D_1(n_4E_3 + n_3E_4))) \end{array} \right\} \frac{[\cos \xi(t-x)]d\xi}{\Delta} \quad (210)$$

Bilinmeyen fonksiyonların bulunmasında kullanılacak 3. integral denklem için (183) numaralı sınır şartından yararlanılacaktır. (183) numaralı sınır şartının açık hali aşağıdaki gibidir;

$$\sigma_y(x, -h) = \frac{\mu_0 e^{-\beta h}}{(\kappa_1 - 1)} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2\pi} \int_a^b p(t) e^{-i\xi t} dt \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^4 [i\xi(3-\kappa_1) + (\kappa_1+1)n_j s_j] M_j e^{-s_j h + i\xi x} d\xi \\ -\frac{1}{2\pi} \int_c^d q(t) e^{-i\xi t} dt \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^4 [i\xi(3-\kappa_1) + (\kappa_1+1)n_j s_j] M_j e^{-s_j h + i\xi x} d\xi \\ + \frac{1}{2\pi} \int_a^b \eta(t) e^{-i\xi t} dt \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^4 [i\xi(3-\kappa_1) + (\kappa_1+1)n_j s_j] M_j^{**} e^{-s_j h + i\xi x} d\xi \end{array} \right\} + \frac{\rho_0 g(e^{\gamma y} - 1)}{\gamma} = 0 \quad (211)$$

3. integral denklemin sınırları $(-\infty, +\infty)$ yerine $(0, +\infty)$ olarak değiştirilip yeniden düzenlendiğinde denklem aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$-\frac{1}{\pi} \int_a^b p(t) dt [k_2(x, t)] - \frac{1}{\pi} \int_c^d q(t) dt [k_2(x, t)] - \frac{\mu_0}{\pi} \int_e^f \eta(t) dt [k_4(x, t)] = -\frac{\rho_0 g(e^{-\gamma h} - 1)}{\gamma} \quad (212)$$

$e < x < f$

Bu denklemde $y \rightarrow -h$ limitine geçildiğinde çekirdeğin yakınsamasını engelleyen singüler terim aşağıdaki gibi elde edilmiştir;

$$SINTER2 = \int_0^{\infty} e^{-\xi(h+y)} \left\{ \frac{-4\mu_2/\mu_0}{e^{\beta h} \mu_2/\mu_0(\kappa_1+1) + (\kappa_2+1)} \right\} \sin \xi(t-x) d\xi dt \quad (213)$$

Yakınsamayı bozan bu terim (211) numaralı denklemden çıkarılmış, (212) numaralı eşitliğin integral dönüşüm tabloları yardımıyla (Erdelyi vd.1954) kapalı integralleri alınıp integral denkleme eklendikten sonra $y \rightarrow -h$ limitine geçilmiştir. Bu işlemler sonucu elde edilen 3. integral denklem aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi} \int_a^b p(t) dt [k_2(x,t)] - \frac{1}{\pi} \int_c^d q(t) dt [k_2(x,t)] \\ & - \frac{\mu_0}{\pi} \int_e^f \eta(t) dt [k_4^*(x,t)] + \frac{-4\mu_2/\mu_0}{e^{\beta h} \mu_2/\mu_0(\kappa_1+1) + (\kappa_2+1)} \frac{1}{(t-x)} = -\frac{(e^{-\gamma h} - 1)}{\gamma h} \frac{1}{\lambda} \end{aligned} \quad (214)$$

$(e < x < f)$

(212) ve (214) numaralı ifadelerde yer alan $k_4(x,t)$ ve $k_4^*(x,t)$ çekirdekleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned} k_4(x,t) = & \int_0^{\infty} \left(\frac{4m}{(\kappa_1-1)} ((e^{hs_3}(e^{hs_2} - e^{hs_4})D_2D_4E_3 + D_3(-e^{hs_2}(e^{hs_3} - e^{hs_4})D_4E_2 \right. \right. \\ & * (-e^{hs_4}(e^{hs_2} - e^{hs_3})D_2E_4))[-i\xi(\kappa_1-3) + n_1s_1(\kappa_1+1)] \\ & + (e^{hs_3}(e^{hs_1} - e^{hs_4})D_1D_4E_3 + D_3(-e^{hs_1}(e^{hs_3} - e^{hs_4})D_4E_1 \\ & * (-e^{hs_4}(e^{hs_1} - e^{hs_3})D_1E_4))[-i\xi(\kappa_1-3) + n_2s_2(\kappa_1+1)] \\ & + (e^{hs_2}(e^{hs_1} - e^{hs_4})D_1D_4E_2 + D_2(-e^{hs_1}(e^{hs_2} - e^{hs_4})D_4E_1 \\ & * (-e^{hs_4}(e^{hs_1} - e^{hs_2})D_1E_4))[-i\xi(\kappa_1-3) + n_3s_3(\kappa_1+1)] \\ & + (e^{hs_2}(e^{hs_1} - e^{hs_3})D_1D_3E_2 + D_2(-e^{hs_1}(e^{hs_2} - e^{hs_3})D_3E_1 \\ & * (-e^{hs_3}(e^{hs_1} - e^{hs_2})D_1E_3))[-i\xi(\kappa_1-3) + n_4s_4(\kappa_1+1)] \Big) / \Delta \sin \xi(t-x) d\xi \end{aligned} \quad (215)$$

$$k_4^*(x,t) = k_4(x,t) - \left(\frac{-4\mu_2/\mu_0}{e^{\beta h} \mu_2/\mu_0(\kappa_1+1) + (\kappa_2+1)} \right) \sin \xi(t-x) d\xi \quad (216)$$

(208), (209) ve (214) numaralı integral denklemlerin sayısal çözümü için $z=\xi h$ dönüşümü yapılmış ve aşağıdaki gibi çeşitli boyutsuz büyüklükler tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{b-a}{2} r_1 + \frac{b+a}{2} & \text{(a)}, & & t_1 &= \frac{b-a}{2} s_1 + \frac{b+a}{2} & \text{(b)} \\
 x_2 &= \frac{d-c}{2} r_2 + \frac{d+c}{2} & \text{(c)}, & & t_2 &= \frac{d-c}{2} s_2 + \frac{d+c}{2} & \text{(d)} \\
 x_3 &= \frac{f-e}{2} r_3 + \frac{f+e}{2} & \text{(e)}, & & t_3 &= \frac{f-e}{2} s_3 + \frac{f+e}{2} & \text{(f)} \\
 g_1(s_1) &= p \left(\frac{b-a}{2} s_1 + \frac{b+a}{2} \right) / P/h & \text{(g)}, & & g_2(s_2) &= q \left(\frac{d-c}{2} s_2 + \frac{d+c}{2} \right) / P/h, & \text{(h)} \\
 g_3(s_3) &= \mu_0 \eta \left(\frac{f-e}{2} s_3 + \frac{f+e}{2} \right) / P/h & \text{(i)} & & & & \text{(217)}
 \end{aligned}$$

(217 a-i) numaralı denklemlerle tanımlanan boyutsuz büyüklükler (186) ve (187) numaralı denge denklemleri ile 188 numaralı tek değerlilik şartında yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 g_1(s_1) \frac{b-a}{2h} ds_1 &= 1 & \text{(a)}, & & \int_{-1}^1 g_2(s_2) \frac{d-c}{2h} ds_2 &= Q/P & \text{(b)} \\
 \int_{-1}^1 g_3(s_3) \mu_0 \frac{f-e}{2h} ds_3 &= 0 & \text{(c)} & & & & \text{(218)}
 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu boyutsuz büyüklükler integral denklemlerde yerlerine yazılıp integral denklemler yeniden düzenlendiği takdirde aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

1. integral denklem için;

(219-220) numaralı integral denklemlerin indisi $s_1 = \pm 1$ 'de $g_1(s_1)$ ve $s_2 = \pm 1$ 'de $g_2(s_2)$ tekilliğe sahip olduğundan +1'dir. (221) numaralı integral denklemin indisi ise $s_3 = \pm 1$ de $g_3(s_3)=0$ olduğundan -1'dir. Ancak ayrılma bölgesinin uç noktalarında ayrılma fonksiyonu gayet yatık olacağından $G_3(-1)=0$ ve $G_3(+1)=0$ olup integral denklem takımının birlikte çözümü için (221) numaralı denklemin indisini de +1 almak uygun olmaktadır. Böylece çözüm aşağıdaki gibi aranabilir (Erdoğan ve Gupta, 1972).

$$g_i(s_i) = G_i(s_i) (1 - s_i^2)^{-\frac{1}{2}} \quad -1 \leq s_i \leq +1 \quad (i=1,2,3) \quad (222)$$

Uygun Gauss-Chebyshev integrasyon formülasyonu kullanılarak (218-221) numaralı denklemler aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\sum_{i=1}^N \pi W_i \frac{b-a}{2h} G_1(s_{1i}) = 1 \quad (223)$$

$$\sum_{i=1}^N \pi W_i \frac{d-c}{2h} G_2(s_{2i}) = Q/P \quad (224)$$

$$\sum_{i=1}^N \pi W_i \frac{f-e}{2h} G_3(s_{3i}) = 0 \quad (225)$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^N W_i G_1 s_{1i} \frac{b-a}{2h} \left[\Phi_1^*(r_{1j}, s_{1i}) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{\left(\frac{b-a}{2}\right)(s_{1i} - r_{1j})} \right] \\ & - \sum_{i=1}^N W_i G_2 s_{2i} \frac{d-c}{2h} \left[\Phi_2^*(r_{1j}, s_{2i}) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{\left(\left(\frac{d-c}{2} s_{2i} + \frac{d+c}{2}\right) - \left(\frac{b-a}{2} r_{1j} + \frac{b+a}{2}\right)\right)} \right] \\ & + \sum_{i=2}^{N-1} W_i G_3 s_{3i} \frac{f-e}{2h} \left[\Phi_3^*(r_{1j}, s_{3i}) \right] = 0 \quad (j=1, \dots, N-1) \end{aligned} \quad (226)$$

$$\begin{aligned}
& -\sum_{i=1}^N W_i G_1 s_{1i} \frac{b-a}{2h} \left[\Phi_4^*(r_{2j}, s_{1i}) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{\left(\left(\frac{b-a}{2} s_{1i} + \frac{b+a}{2} \right) - \left(\frac{d-c}{2} r_{2j} + \frac{d+c}{2} \right) \right)} \right] \\
& -\sum_{i=1}^N W_i G_2 s_{2i} \frac{d-c}{2h} \left[\Phi_5^*(r_{2j}, s_{2i}) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{\frac{d-c}{2}(s_{2i} - r_{2j})} \right] \tag{227}
\end{aligned}$$

$$+\sum_{i=2}^{N-1} W_i G_3 s_{3i} \frac{f-e}{2h} [\Phi_6^*(r_{2j}, s_{3i})] = 0 \quad (j=1, \dots, N-1)$$

$$\begin{aligned}
& -\sum_{i=1}^N W_i G_1(s_{1i}) \frac{b-a}{2h} [\Phi_7^*(r_{3j}, s_{1i})] - \sum_{i=1}^N W_i G_2(s_{2i}) \frac{d-c}{2h} [\Phi_8^*(r_{3j}, s_{2i})] \\
& -\sum_{i=2}^{N-1} W_i G_3(s_{3i}) \frac{f-e}{2h} \left[\Phi_9^*(r_{3j}, s_{3i}) + \frac{-4\mu_2/\mu_0}{e^{\beta h} \mu_2/\mu_0(\kappa_1+1) + (\kappa_2+1)} \frac{1}{\frac{f-e}{2}(s_{3i} - r_{3j})} \right] = -\frac{(e^{-\gamma h} - 1)}{\gamma h} \frac{1}{\lambda} \tag{228} \\
& \quad (j=1, \dots, N-1)
\end{aligned}$$

Bu denklemlerde yer alan $W_i, r_j, s_i, \Phi^*(r_j, s_i)$ ifadeleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$W_1 = W_N = \frac{1}{2N-2}, \quad W_i = \frac{1}{N-1}, \quad (i=2, \dots, N-1) \tag{229}$$

$$s_{1i} = s_{2i} = \cos\left(\frac{i-1}{N-1}\pi\right) \quad (i=1, \dots, N) \tag{230}$$

$$s_{3i} = \cos\left(\frac{i-1}{N-1}\pi\right) \quad (i=2, \dots, N-1) \tag{231}$$

$$r_{1j} = r_{2j} = r_{3j} = \cos\left(\frac{2j-1}{2N-2}\pi\right) \quad (j=1, \dots, N-1) \tag{232}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_1^*(r_1, s_1) &= k_1^*(x_1, t_1), & (a) & & \Phi_2^*(r_1, s_2) &= k_1^*(x_1, t_2), & (b) \\
\Phi_3^*(r_1, s_3) &= k_3^*(x_1, t_3), & (c) & & \Phi_4^*(r_2, s_1) &= k_1^*(x_2, t_1), & (d) \\
\Phi_5^*(r_2, s_2) &= k_1^*(x_2, t_2), & (e) & & \Phi_6^*(r_2, s_3) &= k_3^*(x_2, t_3), & (f) \\
\Phi_7^*(r_3, s_1) &= k_2^*(x_3, t_1), & (g) & & \Phi_8^*(r_3, s_2) &= k_2^*(x_3, t_2), & (h) \\
\Phi_9^*(r_3, s_3) &= k_4^*(x_3, t_3) & (i) & & & & (233)
\end{aligned}$$

Böylece $G_1(s_i)$, $G_2(s_i)$, $G_3(s_i)$ ($i = 1, \dots, N$), ($k = 2, \dots, N-1$), e ve f için (223-228) numaralı eşitliklerle $3N$ bilinmeyenli $3N$ denklem takımı elde edilmiş olur. $\lambda > \lambda_{cr}$ şartını sağlayan bir λ değeri için x_{cr} ifadesi arada kalacak şekilde e ve f değerleri seçilir. Bu değerler için (223-225) şartlarının aynı anda sağlanması gerekmektedir. (223-225) numaralı denklemleri sağlayan e ve f değerleri bulunana kadar bu işlemler yinelenir. Alınan λ ile e ve f değeri bulunduğunda (e, f) aralığı dışındaki $\sigma_y(x, -h)$ gerilme dağılımı elde edilir.

2.3.4. Ara Yüzeydeki Açılmaların Bulunması

Süreksiz temas probleminde ele alınması gereken diğer bir önemli husus, e ve f ayrılma bölgesinde $v_1(x, -h) - v_2(x, -h)$ yer değiştirmeler farkı veya bir başka ifadeyle fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında meydana gelen açılmalardır. Bu açılmalar;

$$\frac{\partial [v_1(x, -h) - v_2(x, -h)]}{\partial x} = \eta(x) \quad (e < x < f) \quad (234)$$

veya

$$v^*(x, -h) = v_1(x, -h) - v_2(x, -h) = \int_e^x \eta(t) dt \quad (e < x < f) \quad (235)$$

sınır şartından bulunacaktır. Boyutsuz büyüklüklerin kullanılmasıyla (235) numaralı denklem aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{\mu_0}{P/h} v^*(x, -h) = \frac{f-e}{2h} \int_{-1}^{r_3} G_3(s_3) ds_3 \quad (-1 < r_3 < 1) \quad (236)$$

Bu denklemde;

$$x = \frac{f-e}{2} r_3 + \frac{f+e}{2} \quad (237)$$

olarak tanımlanmıştır. İndis +1 alınarak Gauss-Chebyshev integrasyon formülü denkleme uygulanıp düzenlendiğinde (236) numaralı ifade ayrılma aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\frac{\mu_0}{P/h} v^*(x, -h) = \frac{f-e}{2h} \sum_{i=2}^{k-1} W_i G_3(s_{3_i}) \quad (k = 2, \dots, N-1) \quad (238)$$

2.4. Problemin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Çözümü

Sonlu elemanlar yöntemi (SEM), mühendislikte özellikle analiz ve boyutlandırma aşamasında oldukça yaygın kullanılan bir metottur. Yöntemin en temel özelliği, karmaşık bir problemin çözümünü daha basit bir yöntemle değiştirerek bulmaktır. Bu yöntem, sonlu elemanlar olarak adlandırılan birçok küçük ve birbirine bağlı alt bölgeden oluşan çözüm bölgesini ele alır. Her parçada veya elemanda, uygun bir yaklaşık çözüm varsayılır ve genel denge koşulları türetilir. Yöntem, yapı mekaniği alanında yaygın bir şekilde kullanılması yanında, ısı iletimi, akışkanlar dinamiği, sızıntı akışı ve elektrikmanyetik alanlar gibi çeşitli mühendislik problemlerinin çözümünde de başarılı bir şekilde uygulanmıştır. Son yıllarda, özellikle teknolojinin gelişimine paralel olarak mühendislik çözümlerinde de geçmişe kıyasla büyük değişimler meydana gelmiştir. Bu değişimlerin başında bilgisayar teknolojisinin yaygın kullanımı gelmektedir. Mühendislik yapılarının tasarımı, boyutlandırması ve sistem analizlerinde geliştirilen bilgisayar programları ile hem daha hızlı hem de daha güvenilir sonuçlar elde etmek mümkündür. Analitik çözümlere alternatif olarak geliştirilen yöntemler de bilgisayar programlarının hızına ve gücüne ihtiyaç duymaktadır.

Sonlu elemanlar yöntemi, sonlu farklar yöntemi, sınır elemanlar yöntemi vb. gibi çözüm metotları, mühendislik yapılarına farklı bakış açıları ile çözümler bulmaktadır. Bu

yöntemleri baz alarak geliştirilen çeşitli paket programlar vardır. En yaygın kullanılanlardan biri de ANSYS Mechanical APDL Product Launcher programıdır [ANSYS, 2015]. Bu program, sonlu elemanlar yöntemi prensibine dayanarak sayısal çözümler üreten genel amaçlı bir mühendislik programıdır. ANSYS çözümü üç aşamada incelenir:

- Problemin Tanımı: Bu kısımda:
 - Geometri oluşturulur,
 - Eleman tipi ve malzeme/geometri özellikleri tanımlanır,
 - Ağlara bölme işlemi yapılır (Meshing).
- Çözüm Aşaması: Yükler ve deplasmanlar tanımlanarak çözüm yapılır.
- Sonuçların Değerlendirilmesi: Bu aşamada problemin tipine bağlı olarak elde edilen çözümler incelenir. Grafiklerin elde edilmesi, sonuçların listeler halinde alınması, sıcaklık haritaları, kuvvet-moment grafikleri, frekans değerleri gibi tüm sonuçlar bu aşamada değerlendirilir.

Paket programlarda çözüm yapılırken dikkat edilmesi gereken husus problemi iyi tanımdır. Problemin iyi tanınması demek, aynı zamanda programa ne verilir ne istendiğini bilmek demektir. Örneğin giriş problemi çözülürken BEAM eleman yerine PIPE eleman tanımlanması çözümün hatalı olmasına sebebiyet verecektir. Bu nedenle eleman tipinin tanımlanması aşaması ve ağlara bölme işlemi oldukça önemlidir. Sonlu elemanlar yönteminin en temel özelliği, problemin bütünü yerine geometriyi sonlu sayıda ağlara bölerek çözüm aramasıdır. Ancak ağ sayısının çok fazla olması işlem süresini uzatabilirken, sayının az olması çözümde yakınsamayı sağlamayabilir.

Her programda olduğu gibi ANSYS programında da klasik menülerle çözüm yapılamayan özel problem tipleri mevcuttur. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler bu özel problem tanımına girmektedir. Programda malzeme özellikleri tanımlanırken FD malzemelerin özelliklerine uygun bir bölüm bulunmamaktadır. Ancak Mechanical Launcher, LOGFILE dosyasına erişim imkânı tanıdığından programa yazılım eklemek mümkündür. Böylece FDM'ler gibi malzeme özellikleri sabit sayısal değerler yerine fonksiyona bağlı olarak değişen özel üretimli ürünlerin çözümü programa eklenen bir makro ile yapılabilir.

Önceki bölümde elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan ve iki rijit blok ile yüklü fonksiyonel derecelendirilmiş tabakada temas problemi analitik olarak çözülmüştür. Bu bölümde ise sonlu elemanlar yöntemine ait çözüm verilmiştir. Modellemede ilk olarak

ANSYS standart menüleri kullanılarak problemin geometrisi oluşturulmuştur. Çalışma, statik ve 2 boyutlu düzlem problem olduğundan eleman tipi olarak 8 düğüm noktalı PLANE183 kullanılmıştır. Bu elemanın düğüm noktalarında dönme serbestliği yoktur ancak hem x hem de y yönünde serbestlik derecesi bulunmaktadır. Bu işlemten sonra malzeme özelliklerinin programa tanıtılması bölümüne geçilmiştir. Malzeme özellikleri doğrusal, doğrusal olmayan, izotropik, anizotropik, ortotropik, sabit sıcaklık veya değişken sıcaklıklı olarak tanımlanabilir. Bu aşamada homojen malzemeler ANSYS standart menüler yardımıyla tanımlanırken, FD tabaka için eklenen makroda bir doloop kullanılarak değiştirilmiş ve derecelendirilmiş tabaka özelliklerinin üstel olarak değiştirildiği programa tanımlanmıştır. Aşağıda malzeme özellikleri için eklenen makroya ait bir bölüm verilmiştir.

```
!!Material Top
*set, E_t, 100000
*set, nu_t, 0.25
*set,dens_t,1
*set,B,1.3864
*set,A,0.00001
*set,G,-0.6931
*create, mat_fgm_pol
/nopr
y_coord = arg1
E_fgm=E_t*EXP(B*y_coord) !!B=Beta
nu_fgm=nu_t*EXP(A*y_coord) !!A=Alfa
den_fgm=dens_t*EXP(G*y_coord) !!G=Gama
/gopr
*end !mat_fgm_pol
```

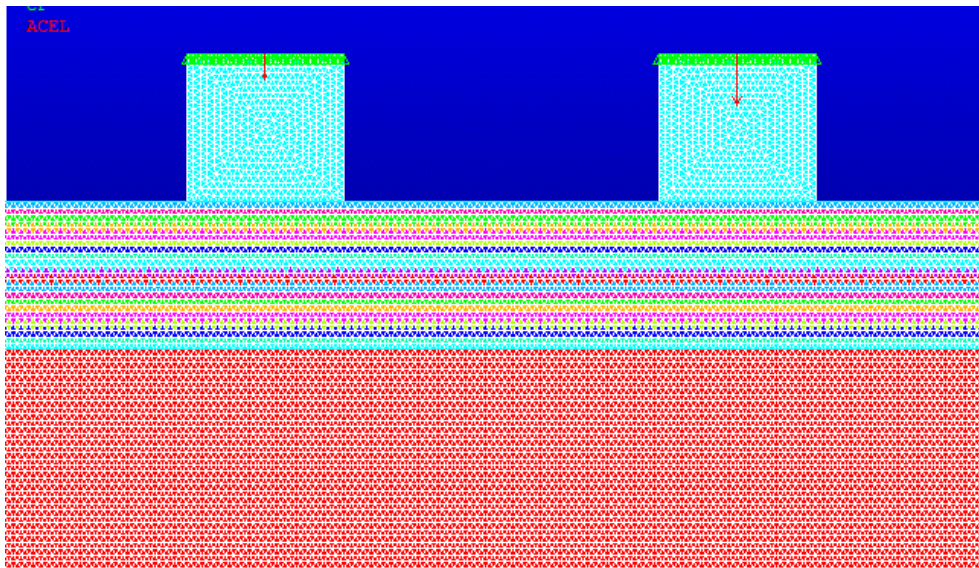
Burada *create komutu, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemedan oluşan tabaka için bir makro oluşturmak için kullanılmakta ve y_coord = arg1 adlı bir değişkeni ayarlamaktadır. Bu ek makrodan sonra geometriye malzeme özellikleri atanmıştır. Daha sonra önemli bir bölüm olan ağlara ayırma (mesh) bölümüne geçilmiştir. FD tabakanın ağlara ayrılması için de ek bir makro eklenmiştir. Tüm geometri temas bölgelerinde daha sık olmak üzere **Free Triangular Mesh** (serbest üçgen ağ) işlemine tabi tutulmuştur. Şekil 4'de verilen bu ağ çeşidinin en büyük avantajı, her türlü geometriye rahatlıkla uygulanabilir olmasıdır. Ayrıca çalışmada 467.859 düğüm noktalı serbest üçgen ağ kullanılmıştır FD tabakada mesh işlemi için eklenen makronun bir bölümü aşağıda verilmiştir.

```

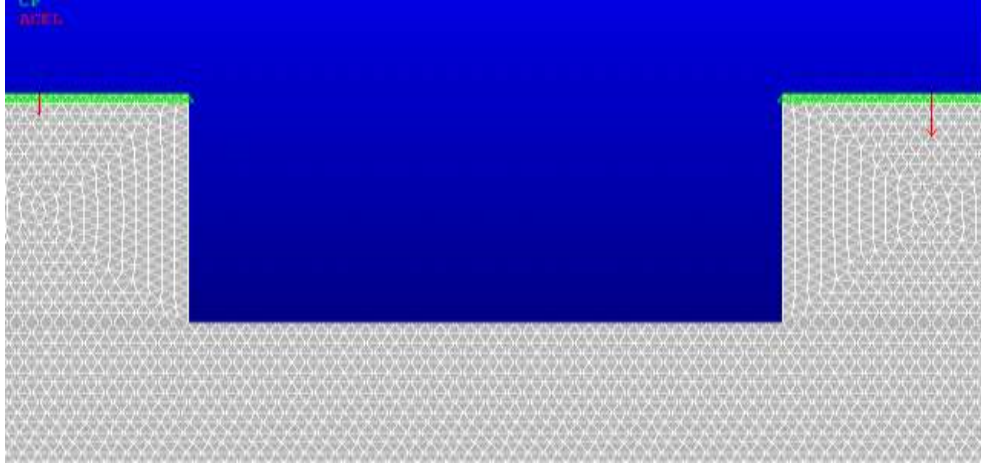
*do, j, 1, ele_num_b_y, 1
y_coord = length_e_y*(j)
*use, mat_fgm_pol, y_coord
mp, ex, cntr, E_fgm
mp, prxy, cntr, nu_fgm
mp, dens, cntr, den_fgm
esel, r, cent, x, 0, lngt_lyr
emodif, all, mat, counter
esel, all

```

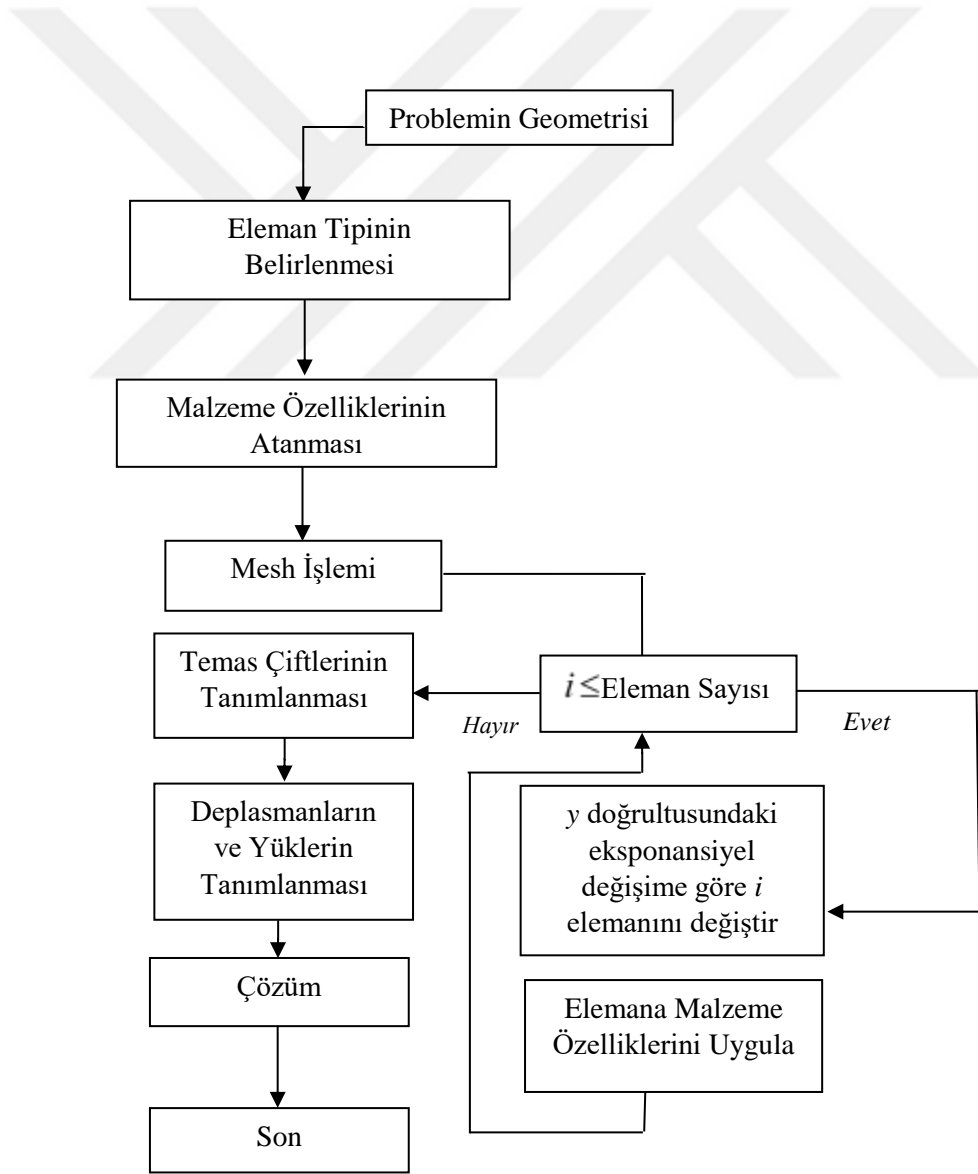
Mesh işleminin ardından rijit blokların üst düğüm noktalarının birbirinden bağımsız deplasman yapmasını engelleyen COUPLING işlemi yapılmıştır. Bu işlemden sonra temas çiftlerinin tanımlanması bölümüne geçilmiştir. Standart menülerde yer alan CONTACT bölümünden öncelikle Blok-FD tabaka temas çifti tanımlanmıştır. Yüzeyden yüzeye temas seçilerek hedef yüzey ve temas yüzeyi belirlenmiştir. Hedef eleman olarak temas elemana göre yüzeyi daha büyük olan, daha rijit ya da düz yüzeyli elemanlar seçilmesi uygun olacaktır. Bunun yanında temas bölgesinde kullanılacak formülasyon seçilirken uygun temas koşullarını sağlayacak olan matematiksel yöntem de karar verilir. ANSYS’de problem tipine bağlı olarak çeşitli temas algoritmaları mevcuttur. Temas algoritması olarak toplam potansiyel enerji teoremini kullanan hızlı sonuçlar veren Augmented Lagrangian Method tercih edilmiştir. Temas işlemin ardından yükler ve deplasmanlar tanımlanarak çözüme geçilmiştir. Problemin sonlu elemanlar ve mesh modeli Şekil 3-4’de, akış şeması ise Şekil 5’de verilmiştir.



Şekil 3. Problemin ANSYS ile sonlu elemanlar modeli



Şekil 4. Serbest üçgen ağlara bölme



Şekil 5. Problemin sonlu elemanlar modeline ait akış şeması

3. BULGULAR VE İRDELEME

3.1. Sürekli Temas Çözümleri

Bu bölümde, elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan ve iki rijit blok ile yüklü fonksiyonel derecelendirilmiş tabakada sürekli temas problemi ele alınmıştır. Çalışmada βh , $(c-b)/h$, Q/P , μ_2/μ_1 , $(b-a)/h$, γh , $(d-c)/h$ gibi çeşitli boyutsuz büyüklüklere bağlı olarak aşağıdaki analizler yapılmıştır.

- Rijit bloklar altındaki temas gerilmeleri grafiksel olarak incelenmiştir.
- Fonksiyonel derecelendirilmiş tabakada gerilmelerin $(\sigma_{1x}, \sigma_{1y}, \tau_{1xy})$ derinlik boyunca değişimi çeşitli grafiklerle sunulmuştur.
- FD tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlem arasında oluşan $(\sigma_{1x}, \sigma_{1y})$ normal gerilmeler grafik ve tablolarla verilmiştir. Ayrıca çalışma, bu problemin homojen tabakaya göre çözümüyle karşılaştırılmış ve sonuçlar Tablo 1'de sunulmuştur.
- FD tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve uzaklıkları bulunmuştur.
- Elastik yarı sonsuz düzleme ait derinlik boyunca gerilme değerleri grafik olarak sunulmuştur.
- Şekillerde görülen (a) sembolü 1. blok altındaki, (b) ise 2. blok altındaki temas gerilmelerini göstermektedir.

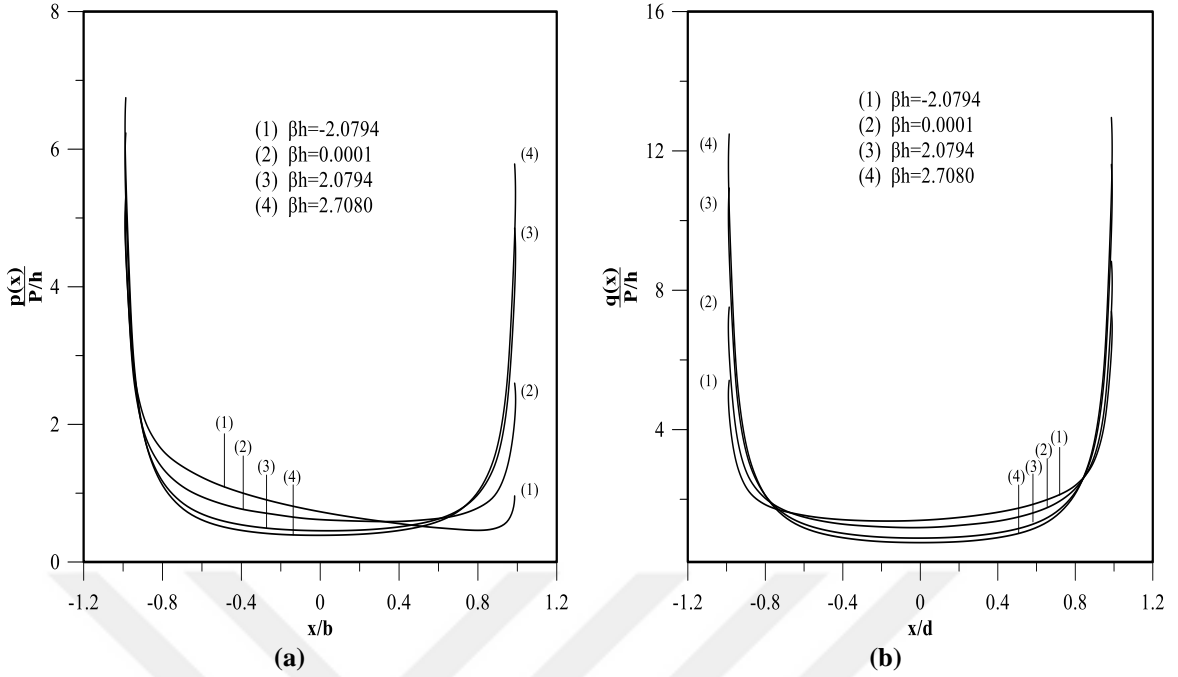
3.1.2. Rijit Bloklar Altındaki Temas Gerilmelerinin İncelenmesi

Bu bölümde, iki düz rijit blok ile FD tabaka arasında meydana gelen temas gerilmeleri çeşitli boyutsuz büyüklükler için incelenmiştir. Bu çalışmada rijitlik parametresi βh ve yoğunluk parametresi γh değerlerinin değişimi aşağıdaki gibidir.

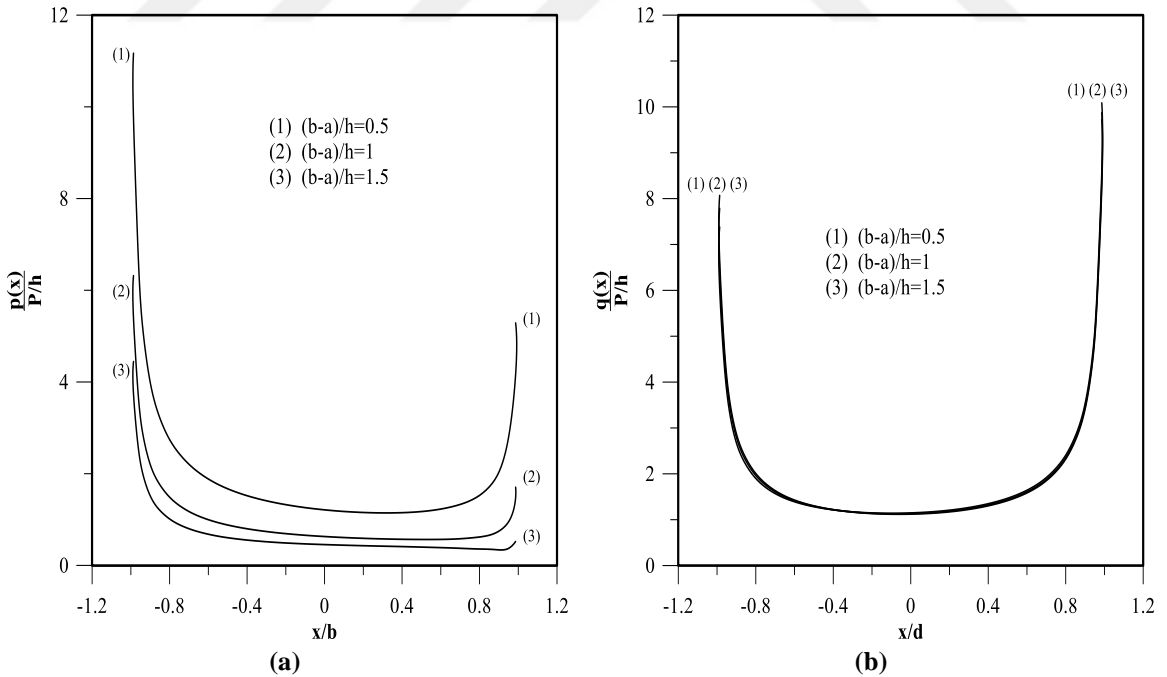
- βh ve γh 'ın pozitif değerlerinde, fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın üst yüzeyindeki rijitlik ve yoğunluk alt yüzeyinden fazladır.
- βh ve γh değerleri sıfıra çok yakın olduğunda tabaka homojen davranış gösterir.

- βh ve γh 'ın negatif değerlerinde ise, fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın alt yüzeyindeki rijitlik ve yoğunluk üst yüzeyine göre fazladır.

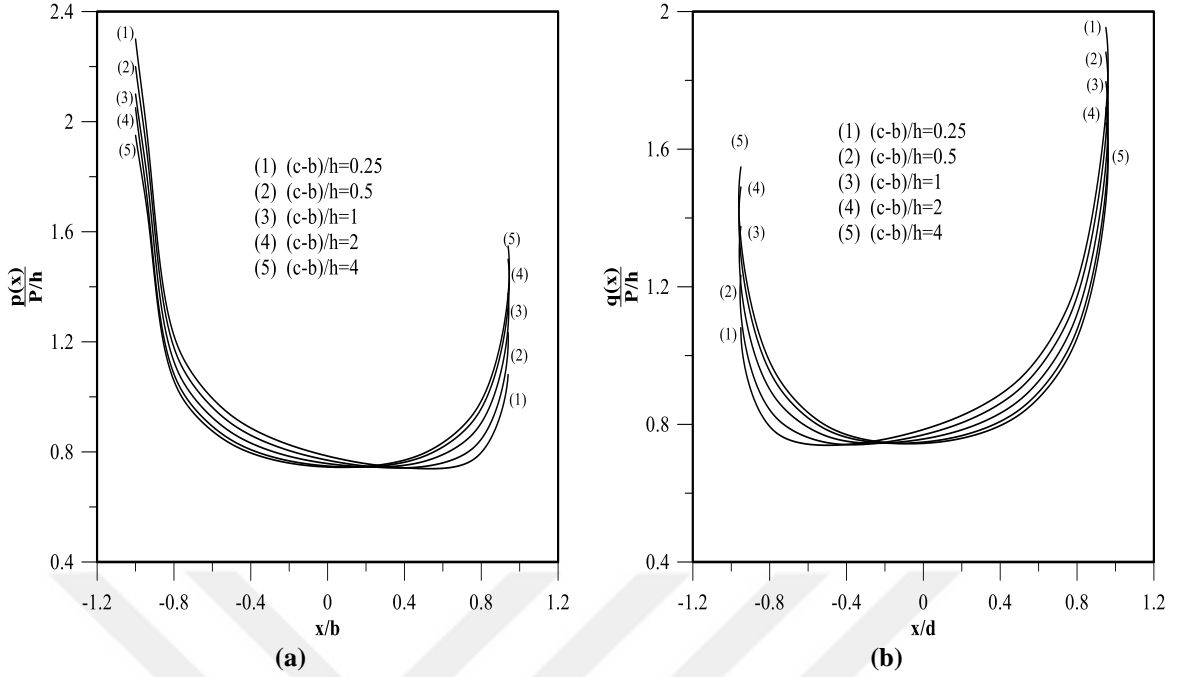
Şekil 6 (a-b), 1. ve 2. blok altındaki temas gerilme dağılımlarının rijitlik parametresi βh 'a göre değişimini vermektedir. Şekil 6(a) incelendiğinde βh değerleri arttıkça ya da başka bir ifadeyle tabaka üst yüzeyindeki rijitlik fazla olduğunda blok köşelerinde gerilmelerde artış gözlenirken, blok ortalarına doğru boyutsuz temas gerilme değerleri azalmaktadır. Tabaka alt yüzeyine doğru rijitliğin çok fazla artırılması durumunda iki blok arasında da ayrılma meydana getirebileceği görülmektedir. Şekil 6(b)'de 2. blok yükü 1.blok yükünün iki katıdır. Bu durumda 2. blok altındaki temas gerilmesi değerlerinde artış meydana gelmiştir. Şekil 7 (a-b)'de çeşitli 1. blok genişlikleri için $((b-a)/h)$ temas gerilmesi dağılımları incelenmiştir. Şekil 7(a)'da görüldüğü üzere 1. blok genişliği azaldığında temas daha küçük bir alana yayılacağından gerilme değerleri artmaktadır. Ancak 1. bloktaki bu değişimlerin Şekil 7(b)'de verilen 2. blok altındaki temas gerilmelerine etkisi yok denecek kadar az olduğu görülmüştür. Şekil 8(a-b)'de iki blok arasındaki uzaklığın $((c-b)/h)$, bloklar altındaki temas gerilmeleri üzerine etkisi araştırılmıştır. Bu şekillerden de anlaşılacağı gibi iki blok yaklaştırıldığında, blokların birbirlerine yakın köşelerinde boyutsuz temas gerilmeleri azalırken uzak köşelerde en büyük gerilme değerleri elde edilmiştir. Aynı zamanda bu analiz her iki blok yükünün eşit olduğu durum için incelenmiştir ve sonuçların her iki blokta da aynı olduğu görülmüştür. Şekil 9'da 2. blok genişliğinin değişimi incelenmiştir. Grafikler Şekil 7'deki sonuçları desteklemektedir. Burada farklı olarak 2. blok yükünün 1. blok yükünden iki kat fazla olmasından ötürü gerilme değerleri bu grafiklerde daha büyük çıkmıştır. Ancak Şekil 7(a)'da elde edilen değerlerin iki katı kadar değildir. Şekil 10'da ise elastik yarı sonsuz düzlem ve FD tabakanın alt yüzeyinin kayma modüllerinin oranına göre (μ_2 / μ_{-h}) bloklar altındaki temas gerilmeleri ele alınmıştır. Grafiklerden açıkça görüleceği üzere elastik düzlemin kayma modülü FD tabakanın alt yüzeyine göre arttıkça, 1.bloğun 2. bloktan uzak olan köşesinde gerilmeler azalmış ancak 2. bloğa yaklaştıkça gerilmeler artmıştır. Tabaka alt yüzeyinin rijitliği arttırıldığında 1.blok ile FD tabaka arasında ayrılma olasılığı ortaya çıkmıştır.



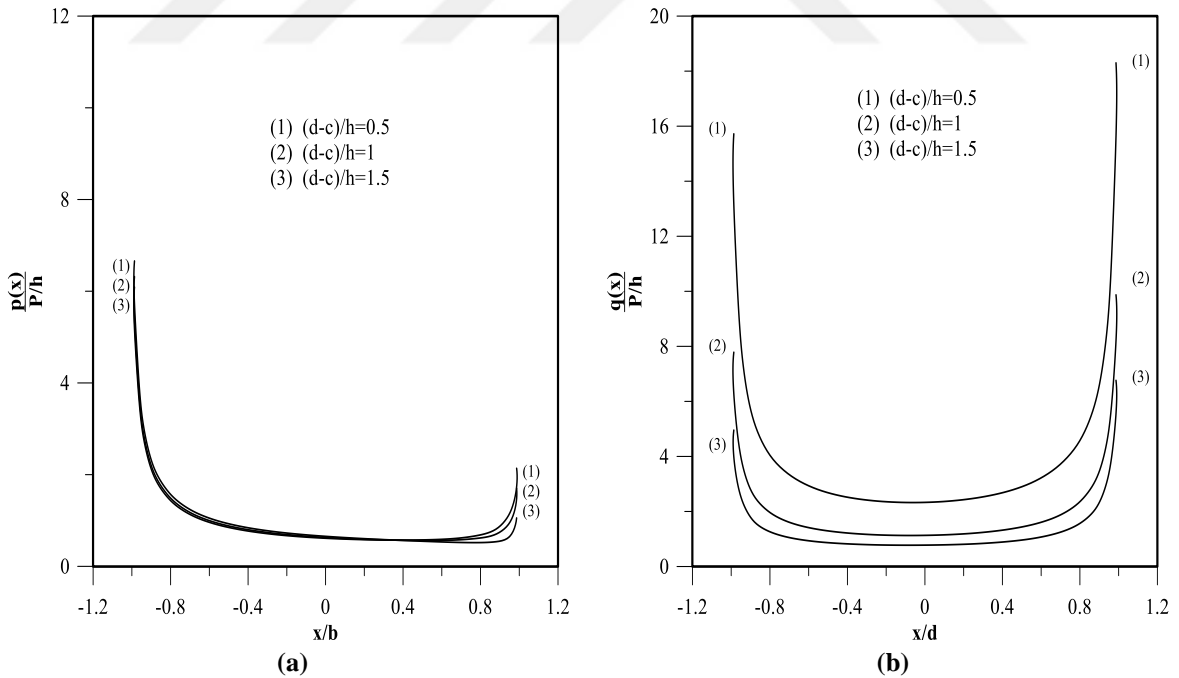
Şekil 6. Rijitlik parametresi (βh) değişimine göre bloklar altındaki temas gerilmeleri dağılımı ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$, $y=0$, $h=1$, $\mu_2/\mu_{-h}=1$)



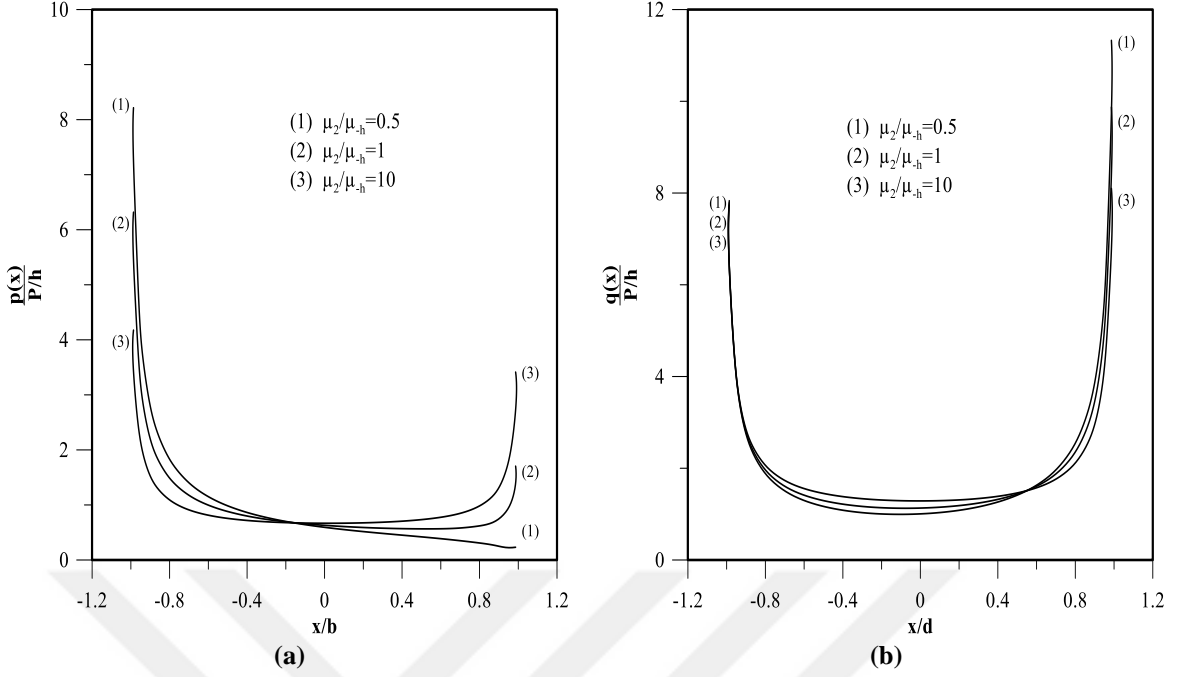
Şekil 7. 1. Blok genişliğinin ($(b-a)/h$) değişimine göre bloklar altındaki temas gerilmeleri dağılımı ($a/h=3$, $(c-b)/h=1$, $(d-c)/h=1$, $\beta h=0.6931$, $\mu_0=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$, $y=0$, $h=1$, $\mu_2/\mu_{-h}=1$)



Şekil 8. Bloklar arası mesafe $((c-b)/h)$ değişimine göre bloklar altındaki temas gerilmeleri dağılımı ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\beta h=-1.3863$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=P$, $y=0$, $h=1$, $\mu_2/\mu_h=1$)



Şekil 9. 2. Blok genişliği $((d-c)/h)$ değişimine göre bloklar altındaki temas gerilmeleri dağılımı ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=1$, $\beta h=0.6931$, $\mu_0=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$, $y=0$, $h=1$, $\mu_2/\mu_h=1$)



Şekil 10. Kayma modülleri oranı (μ_2/μ_h) değişimine göre bloklar altındaki temas gerilmeleri dağılımı (a/h=3, (b-a)/h=1, (c-b)/h=1, (d-c)/h=1, $\beta h=0.6931$, $\mu_0=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$, $h=1$)

3.1.3. FD Tabaka ile Elastik Yarı Sonsuz Düzlem Arasındaki İlk Ayrılma Yükleri ve Uzaklıklarının İncelenmesi

Fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yüklerinin ve uzaklıklarının bilinmesi temas problemlerinde tasarım ve boyutlandırma açısından büyük önem arz etmektedir. Bu bölümde, ilk ayrılmanın meydana geldiği nokta ve bu ayrılmaya sebep olan kritik yükün değerleri tablo ve grafiklerle sunulmuştur. Tablo 1'de elastik yarı sonsuz düzlem ve FD tabakaya ait kayma modüllerinin farklı yükleme durumlarında değişimine göre elde edilen ilk ayrılma yükleri ve uzaklıklarının literatürle kıyası yapılmıştır. Özşahin (2007) çalışmasında, bu problemin homojen tabakaya göre çözümünü yapmıştır. Bu tez çalışmasında rijitlik parametresi ve $\beta h=0.0001$ ve $\gamma h=0.0001$ alındığında FD tabaka homojen davranış göstereceğinden sonuçların birbirleriyle kıyası mümkün olmuştur. Elde edilen ilk ayrılma yükleri ve uzaklıkları, Özşahin (2007)'nin çalışması ile kıyaslanmış ve sonuçların oldukça uyumlu olduğu görülmüştür.

Tablo 1. Kayma modülleri oranının (μ_2/μ_{-h}) çeşitli değerleri için FD tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve uzaklıklarının Özşahin(2007) ile karşılaştırması ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\beta h=0.0001$, $\gamma h=0.0001$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $y=-h$, $h=1$)

μ_2/μ_{-h} ↓	Q=P					Q=2P				
	Bu Çalışma		Özşahin(2007)		Hata (%)	Bu Çalışma		Özşahin(2007)		Hata (%)
	x_{cr}/h	λ_{cr}	x_{cr}/h	λ_{cr}		x_{cr}/h	λ_{cr}	x_{cr}/h	λ_{cr}	
0.1	12.58	205.614	12.58	199.258	3.09	12.58	118.203	12.58	116.93	1.07
1	9.58	148.555	9.58	146.663	1.28	9.58	76.759	9.58	76.137	0.81
5	8.74	83.401	8.74	83.005	0.48	8.73	41.946	8.73	41.827	0.28
10	8.62	70.082	8.62	70.806	1.03	8.62	35.614	8.62	35.534	0.22

Rijitlik parametresi (βh) ve yoğunluk değişim parametresinin (γh) çeşitli değerleri için FD tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve uzaklıklarının değişimi Tablo 2’de verilmiştir. FD tabakanın hem rijitliği hem de yoğunluğu tabaka derinliği boyunca arttırıldığında, ilk ayrılmayı meydana getirecek yük büyümektedir. Ancak ayrılmanın başlangıç noktası giderek bloklara yaklaşmaktadır. Tabaka üst yüzeyinin rijitliği arttırıldığında ilk ayrılma noktasının 2. bloktan daha uzakta meydana geldiği görülmüştür. Bu tabloda seçilen malzeme özellikleri ve geometrik değişkenler, bloklar arasında ayrılmanın oluşması için yeterli büyüklükte değildirler. Ancak yüklerin çok daha büyük seçilmesi, bloklar arası mesafelerin daha fazla alınması durumunda bloklar arasında da ayrılmalar meydana gelebilir. Tablo (3-5)’de 1. blok öncesinde meydana gelen muhtemel ayrılma noktası ve ayrılma yükü sırasıyla x_{crsol}/h ve λ_{crsol} 2. blok sonrasında meydana gelen muhtemel ayrılma noktası ve ayrılma yükü ise sırasıyla $x_{crsağ}/h$ ve $\lambda_{crsağ}$ olarak tanımlanmıştır.

Tablo 3’de kayma modülleri oranı, yoğunluk ve rijitlik parametreleri değişimine göre FD tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve uzaklıkları belirlenmiştir. Tablo incelendiğinde, elastik düzlemin kayma modülünün tabakanın alt yüzeyine göre arttırılması durumunda hem ilk ayrılma noktasında hem de ayrılma yüklerinde azalmanın meydana geldiği görülebilir. Kayma modülü oranlarının her koşulunda, rijitlik ve yoğunluk parametrelerinin tabaka derinliği boyunca artması halinde ayrılma uzaklıkları bloklara doğru yaklaşarak azalırken ayrılmayı meydana getirecek yük değeri artmaktadır.

Tablo 4’de yük oranları, yoğunluk ve rijitlik parametreleri değişimine göre FD tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve uzaklıklarının değişimi ele alınmıştır. 2.blok yükünün artması durumunda ilk ayrılma uzaklıkları değişmezken, tabaka elastik düzlemde daha kolay ayrılmıştır. Rijitlik ve yoğunluk parametrelerinin tabaka derinliği boyunca artması durumunda, Q/P oranının her değeri için ayrılma zorlaşmış ancak ayrılma başlangıç noktası bloklara doğru giderek yaklaşmıştır.

Tablo 5 ve 6’da bloklar arası mesafe değişimine göre FD tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve uzaklıkları incelenmiştir. Tablo 5’te FD tabaka üst yüzeyinin tabaka alt yüzeyine göre daha rijit olduğu duruma bakılmıştır. Tablo 6’da ise FD tabakanın alt yüzeyinin üst yüzeye göre rijit olduğu durum incelenmiştir. Her iki durumda da yoğunluk değişim parametresi tabaka üst yüzeyinde daha büyük seçilmiştir. Her iki tabloda da ayrılmayı başlatan yük değerlerinde artışlar görülmüştür. Tablo 6’da ayrılma başlangıç noktaları Tablo 5’e kıyasla daha küçük olurken, ayrılma yük değerleri daha büyük olmuştur. Ayrıca, her iki tabloda da bloklar arası etkileşimin bittiği $((c-b)/h)$ değerleri verilmiştir. Bu noktada her bir bloğun sağında ve solundaki ayrılma uzaklıkları ve ayrılma yükleri eşit çıkmaktadır. Bu durum bloklar arasındaki etkileşimin bittiği anlamını taşımaktadır.

Tablo 2. Çeşitli βh ve γh değerleri için FD tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve uzaklıklarının incelenmesi
 ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\mu_2/\mu_{-h}=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$, $y=-h$, $h=1$)

	γh									
	1.0986		0.6931		0.0001		-0.6931		-1.0986	
βh ↓	x_{cr}/h	λ_{cr}	x_{cr}/h	λ_{cr}	x_{cr}/h	λ_{cr}	x_{cr}/h	λ_{cr}	x_{cr}/h	λ_{cr}
1.0986	9.969	42.3683	9.969	50.3613	9.969	69.7887	9.969	100.747	9.969	127.145
0.6931	9.811	43.4403	9.811	51.6317	9.811	71.5486	9.811	103.2952	9.811	130.3547
0.0001	9.577	46.6052	9.577	55.5486	9.577	76.7582	9.577	110.8226	9.577	139.8544
-0.6931	9.384	52.0726	9.384	61.8895	9.384	85.7569	9.384	123.8267	9.384	156.2264
-1.0986	9.292	56.8165	9.292	67.5261	9.292	93.5634	9.292	135.1100	9.292	170.5067

Tablo 3. Kayma modülleri oranı, yoğunluk ve rijitlik parametreleri değişimine göre FD tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve uzaklıklarının incelenmesi ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$, $y=-h$, $h=1$)

μ_2 / μ_{-h}	$\beta h, \gamma h$											
	0.3364				0.0001				-0.3364			
	$x_{cr_{sol}} / h$	$\lambda_{cr_{sol}}$	$x_{cr_{sağ}} / h$	$\lambda_{cr_{sağ}}$	$x_{cr_{sol}} / h$	$\lambda_{cr_{sol}}$	$x_{cr_{sağ}} / h$	$\lambda_{cr_{sağ}}$	$x_{cr_{sol}} / h$	$\lambda_{cr_{sol}}$	$x_{cr_{sağ}} / h$	$\lambda_{cr_{sağ}}$
0.5	-	127.4592	10.391	75.2606	-	154.9541	10.244	90.6903	-	191.8310	10.109	111.3727
1	0.319	113.9129	9.687	62.7985	0.416	139.6295	9.577	76.7605	0.505	174.8836	9.478	95.8408
2	0.832	91.2442	9.165	47.9122	0.906	112.6670	9.087	59.2160	0.971	142.5893	9.017	74.9458

Tablo 4. Yük oranları, yoğunluk ve rijitlik parametreleri değişimine göre FD tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve uzaklıklarının incelenmesi ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\mu_2/\mu_{-h}=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $y=-h$, $h=1$)

Q / P	$\beta h, \gamma h$											
	0.4055				0.0001				-0.4055			
	$x_{cr_{sol}} / h$	$\lambda_{cr_{sol}}$	$x_{cr_{sağ}} / h$	$\lambda_{cr_{sağ}}$	$x_{cr_{sol}} / h$	$\lambda_{cr_{sol}}$	$x_{cr_{sağ}} / h$	$\lambda_{cr_{sağ}}$	$x_{cr_{sol}} / h$	$\lambda_{cr_{sol}}$	$x_{cr_{sağ}} / h$	$\lambda_{cr_{sağ}}$
1.5P	0.296	112.8630	9.708	79.5483	0.419	143.9563	9.578	101.2204	0.529	188.9165	9.461	132.5929
2P	0.299	109.2896	9.709	60.3440	0.417	139.6224	9.577	76.7582	0.522	183.5565	9.459	100.5532
2.5P	0.301	105.9268	9.710	48.6089	0.414	135.5540	9.577	61.8214	0.517	178.1383	9.458	80.9168

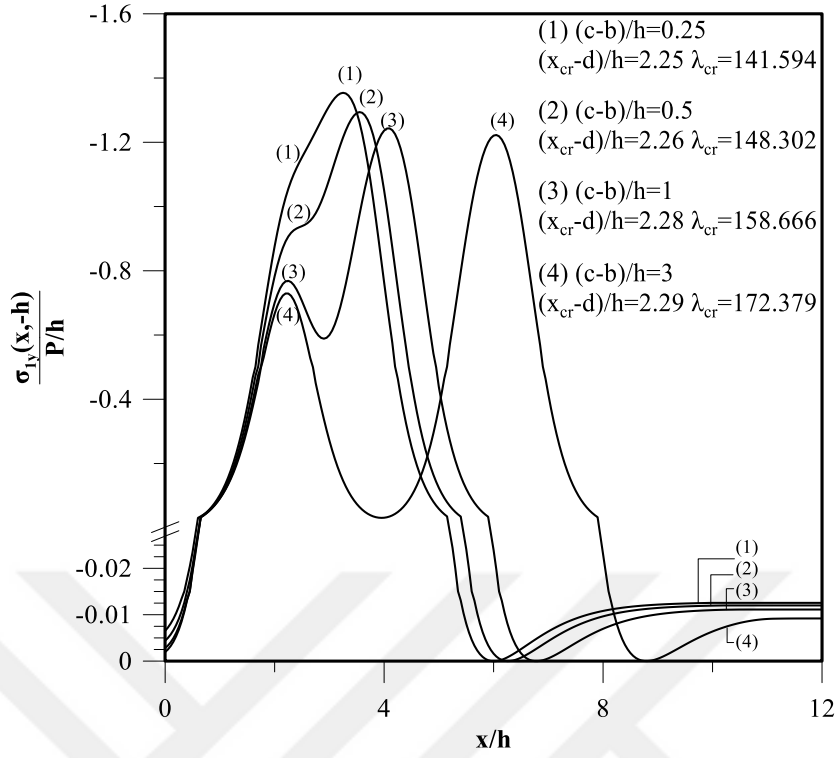
Tablo 5. Bloklar arası mesafe $((c-b)/h)$ değişimine göre FD tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve uzaklıklarının incelenmesi ($\beta h=0.4055$, $Q=2P$, $\gamma h=0.4055$, $a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(d-c)/h=1.5$, $\mu_0=1$, $\mu_2/\mu_h=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $y=-h$, $h=1$)

$(c-b)/h$	BLOK I				BLOK II			
	$x_{cr_{sol}}/h$	$\lambda_{cr_{sol}}$	$x_{cr_{sağ}}/h$	$\lambda_{cr_{sağ}}$	$x_{cr_{sol}}/h$	$\lambda_{cr_{sol}}$	$x_{cr_{sağ}}/h$	$\lambda_{cr_{sağ}}$
1	0.356	92.6303	-	-	-	-	9.151	65.4789
2	0.291	111.4869	-	-	-	-	10.161	68.5433
4	0.264	121.1242	5.919	158.7347	5.919	158.7343	12.162	69.9896
8.376	0.252	125.8807	6.748	125.8807	9.415	65.4020	16.837	70.4020

Tablo 6. Bloklar arası mesafe $((c-b)/h)$ değişimine göre FD tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve uzaklıklarının incelenmesi ($\beta h=-0.4055$, $Q=2P$, $\gamma h=0.4055$, $a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(d-c)/h=1.5$, $\mu_0=1$, $\mu_2/\mu_h=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $y=-h$, $h=1$)

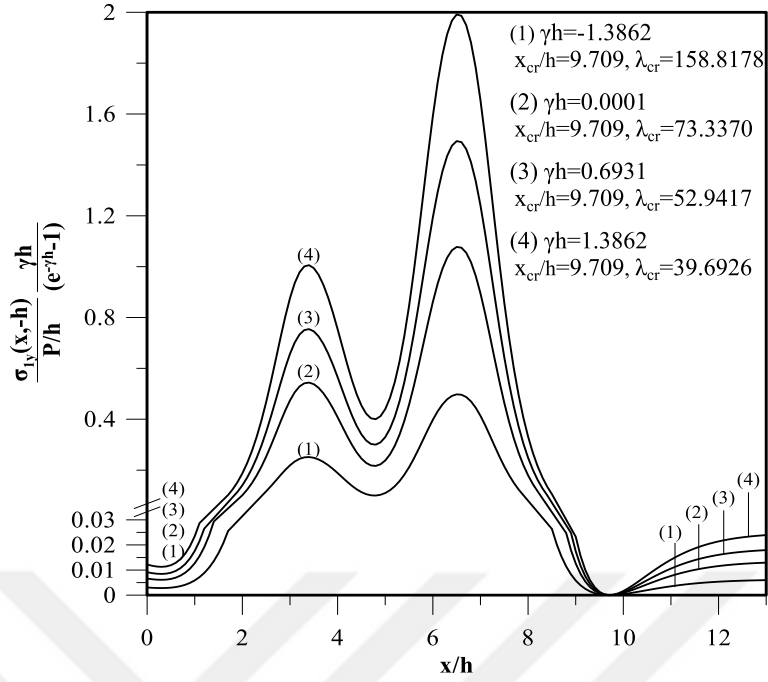
$(c-b)/h$	BLOK I				BLOK II			
	$x_{cr_{sol}}/h$	$\lambda_{cr_{sol}}$	$x_{cr_{sağ}}/h$	$\lambda_{cr_{sağ}}$	$x_{cr_{sol}}/h$	$\lambda_{cr_{sol}}$	$x_{cr_{sağ}}/h$	$\lambda_{cr_{sağ}}$
1	0.559	106.4023	-	-	-	-	8.921	73.7650
2	0.520	124.5299	-	-	-	-	9.923	76.8243
4	0.516	133.8751	5.943	69.2849	5.943	69.2849	11.919	78.4978
8.169	0.515	136.4161	6.485	136.4161	9.481	79.2243	16.357	79.2243

Şekil 11’de bloklar arası mesafe değişimlerine göre boyutsuz $\sigma_{1y}(x, -h)/P/h$ temas gerilmeleri verilmiştir. Bloklar arasındaki mesafe arttıkça, ilk ayrılmanın meydana geldiği noktanın 2. blok köşesine olan uzaklığında önemli bir değişiklik görülmemiştir. Ayrıca blokların birbirlerine yaklaştıkça 2. blok altındaki gerilme değerlerinde artış gözlenmiştir. Tablolarda elde edilen sayısal veriler aynı zamanda grafiklerle de desteklenmiştir.

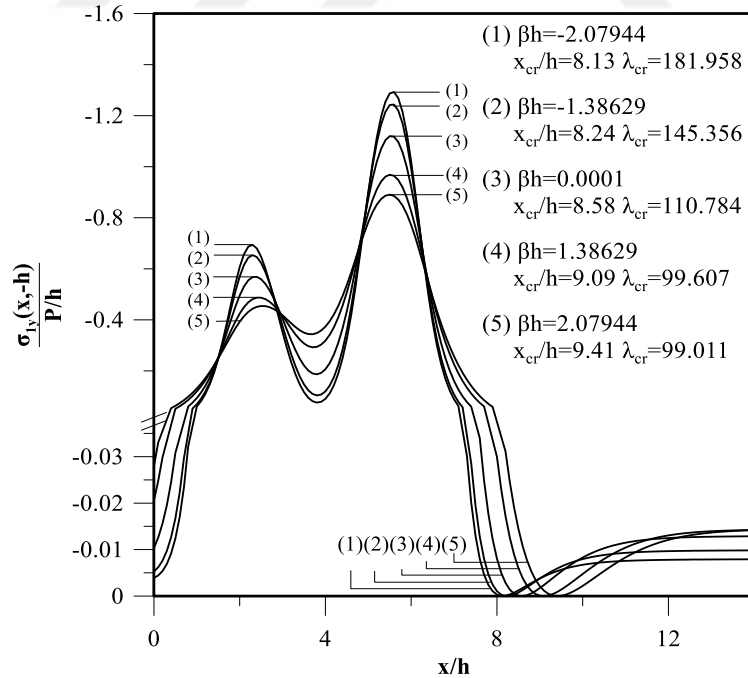


Şekil 11. Bloklar arası mesafe ((c-b)/h) değişimine göre FD tabaka ve elastik yarım düzlem arasındaki boyutsuz $\sigma_{1y}(x, -h)/P/h$ temas gerilmesi dağılımı ($a/h=2$, $(b-a)/h=0.5$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $Q=2P$, $\beta h=-1.0986$, $\gamma h=-1.0986$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $y=-h$, $h=1$, $\mu_2/\mu_{-h}=1$)

Şekil 12’de yoğunluk değişim parametresi γh için FD tabaka ve elastik yarım düzlem arasındaki boyutsuz $\sigma_{1y}(x, -h)/P/h$ temas gerilmesi dağılımı grafiği verilmiştir. Grafik incelendiğinde, FD tabakanın yoğunluğu tabaka derinliği boyunca arttığı durumda ilk ayrılma uzaklıkları değişmezken ilk ayrılma yüklerinde artış meydana gelmiştir. Bir başka ifadeyle yoğunluk tabaka derinliği boyunca büyüdükçe ayrılma çok daha zor meydana gelecektir. Şekil 13’te, çeşitli βh değerlerine göre boyutsuz $\sigma_{1y}(x, -h)/P/h$ temas gerilme dağılımı verilmiştir. 2. blok yükünün 2 kat daha fazla alındığı bu yükleme durumunda, tabakanın üst yüzey rijitliği alt yüzeyden fazla olduğunda ayrılma bloklardan daha uzak bir noktada meydana gelirken, ilk ayrılma yükü azalmıştır. Tabakanın alt yüzeyinin rijitliğin üste göre fazla olması durumunda ise ayrılma yükünde artış meydana gelirken, tabaka elastik yarı sonsuz düzlemde bloklara daha yakın bir noktadan ayrılmıştır.

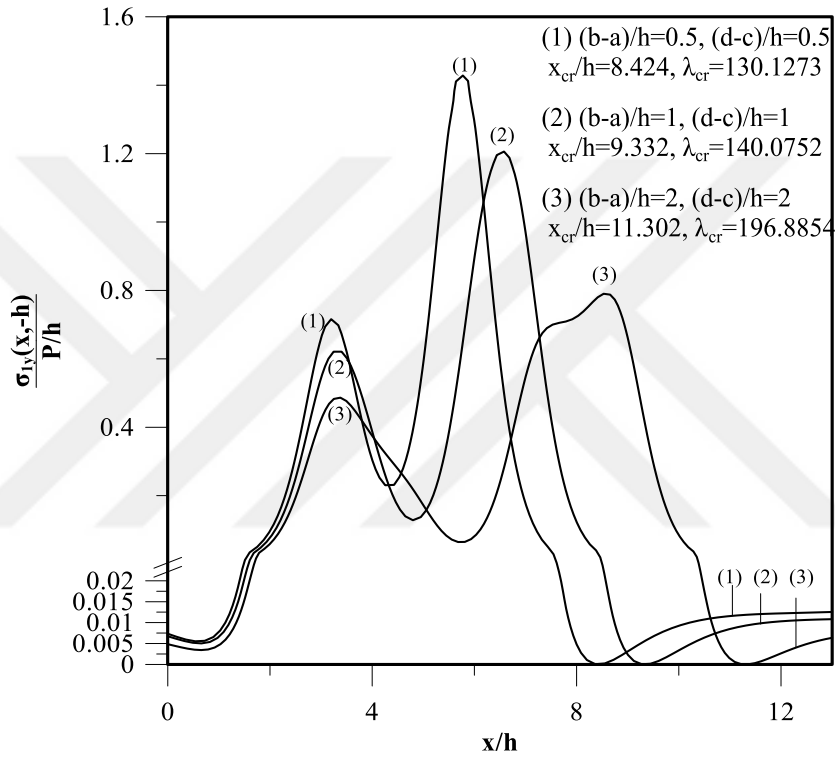


Şekil 12. Yoğunluk değişim parametresi (γh) için FD tabaka ve elastik yarım düzlem arasındaki boyutsuz $\sigma_{1y}(x,-h)/P/h$ temas gerilmesi dağılımı ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$, $h=1$, $\beta h=0.4055$, $\mu_2/\mu_h=1$)



Şekil 13. Rijitlik parametresi (βh) değişimine göre FD tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki boyutsuz $\sigma_{1y}(x,-h)/P/h$ temas gerilmesi dağılımı ($a/h=2$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $Q=2P$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\mu_2/\mu_h=1$, $\gamma h=-0.6931$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $y=-h$, $h=1$)

Şekil 14'te blok genişliklerine göre FD tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki boyutsuz $\sigma_{1y}(x,-h)/P/h$ temas gerilmesi dağılımı grafiği verilmiştir. Blok genişlikleri azaldığında, tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin ayrılmaya başladığı nokta 2. bloktan daha uzak bir bölgede meydana gelirken ayrılmayı başlatacak yük daha küçüktür. Blok genişlikleri azaldığında bloklar altında oluşan gerilme değerlerinde de artış meydana geldiği grafikten görülebilir.

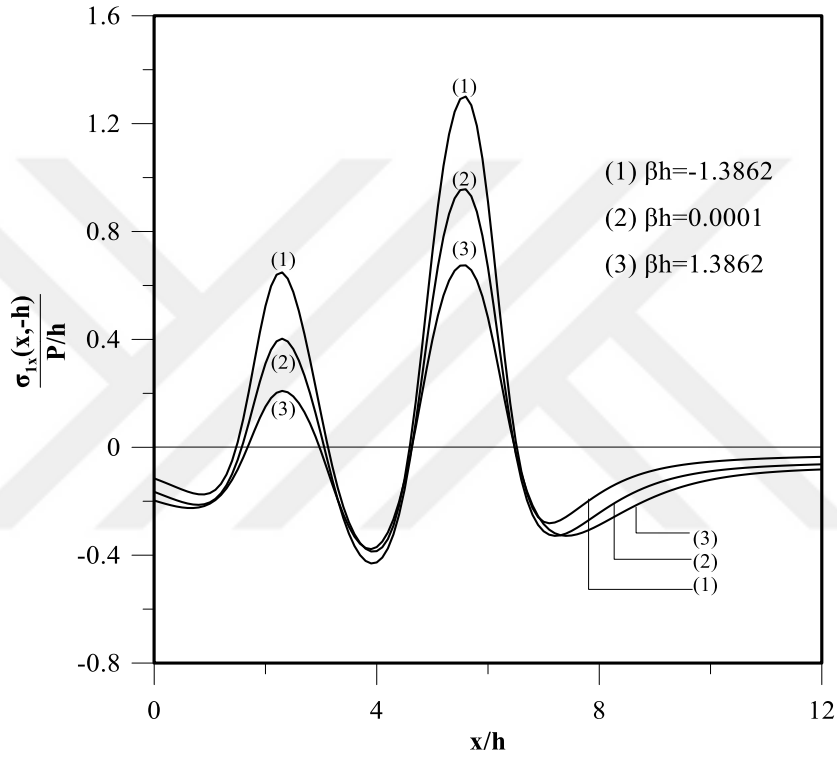


Şekil 14. Blok genişliklerine göre FD tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki boyutsuz $\sigma_{1y}(x,-h)/P/h$ temas gerilmesi dağılımı ($a/h=2$, $(c-b)/h=2$, $\mu_0=1$, $\mu_2/\mu_{-h}=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$, $y=-h$, $h=1$, $\gamma h=-0.9163$, $\beta h=-0.9163$)

3.1.4. Gerilmelerin İrdelenmesi

Bu bölümde, tabakanın x eksenini boyunca $\sigma_{1x}(x,-h)/P/h$ gerilme dağılımı, tabaka derinliği boyunca hem FD tabakaya hem de elastik yarı sonsuz düzleme ait $\sigma_y, \sigma_x, \tau_{xy}$ gerilme değerleri çeşitli boyutsuz büyüklüklere bağlı olarak analiz edilmiş ve grafiklerle gösterilmiştir.

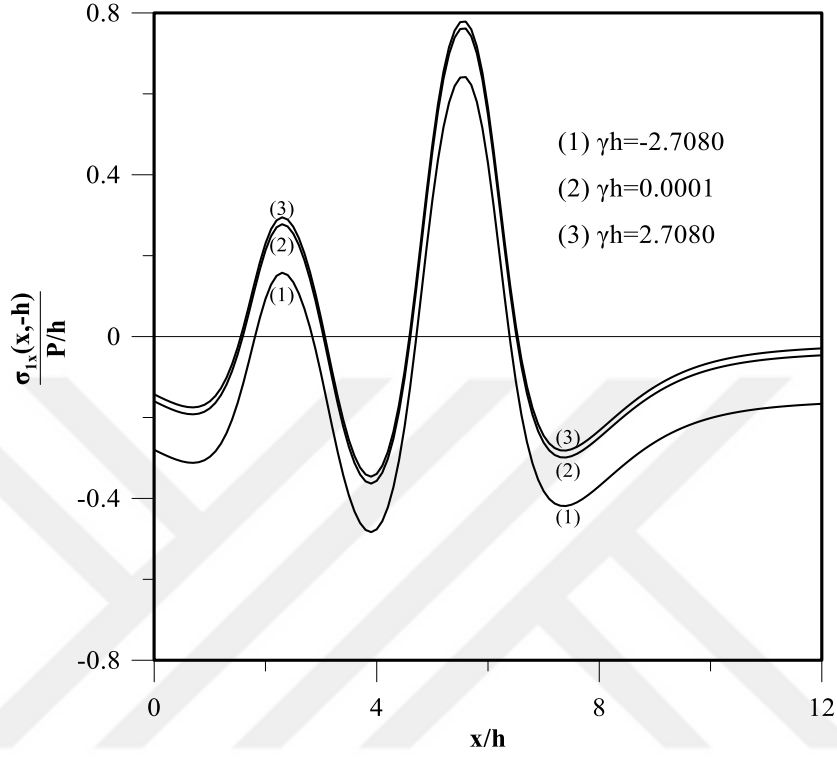
Rijitlik parametresinin çeşitli değerlerine göre boyutsuz $\sigma_{1x}(x,-h)/P/h$ gerilme dağılımı Şekil 15’de verilmiştir. Bu analizde 2. blok yükü 1. blok yükünden iki kat fazla alınmıştır ve elde edilen gerilme değerleri bu yükleme durumuyla uyumlu sonuçlar vermiştir. βh değerlerinin azalması durumunda bir başka ifadeyle tabaka alt yüzeyinin rijitliğinin artması durumunda çekme gerilmeleri artış göstermiş ve bloklar altında en büyük değerleri almıştır.



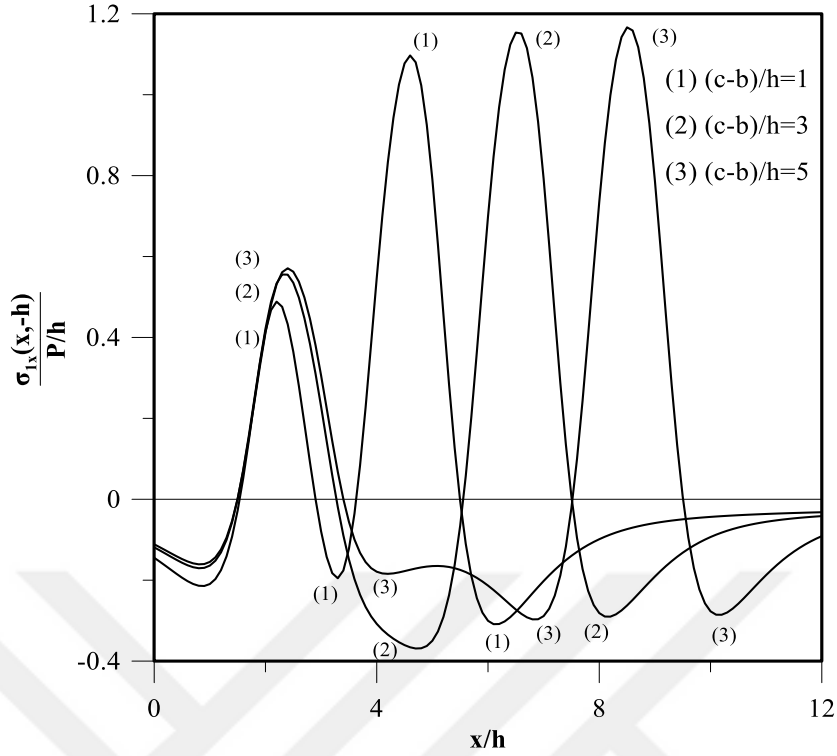
Şekil 15. Rijitlik parametresi (βh) değişimine göre FD tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki boyutsuz $\sigma_{1x}(x,-h)/P/h$ temas gerilmesi dağılımı ($a/h=2$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$, $h=1$, $\gamma h=-1.3863$, $\mu_2/\mu_{-h}=1$)

Şekil 16’da yoğunluk parametresi değişimine göre x eksenini boyunca boyutsuz $\sigma_{1x}(x,-h)/P/h$ gerilme dağılımının analizi yapılmıştır. Tabaka derinliği boyunca yoğunluk değerlerinin artmasıyla özellikle blok altlarında çekme gerilmelerinde azalma meydana gelirken tabakanın diğer bölgelerinde basınç gerilmeleri artış göstermiştir. Ancak tabaka üst yüzeyindeki yoğunluğunun artması ile yoğunluğun sabit kalması arasında bu yükleme durumlarında kayda değer bir farklılık meydana gelmemiştir. Şekil 17’de bloklar arası mesafe değişimine göre FD tabaka ve elastik düzlem arasındaki boyutsuz

$\sigma_{1x}(x,-h)/P/h$ temas gerilme dağılımı grafiği verilmiştir. Bloklar arası mesafe arttığında çekme ve basınç gerilmeleri artış göstermiştir. Ancak bu artış çok fazla olmamıştır.



Şekil 16. Yoğunluk değişim parametresine (γh) göre FD tabaka ve elastik düzlem arasındaki boyutsuz $\sigma_{1x}(x,-h)/P/h$ temas gerilmesi dağılımı ($a/h=1$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=1$, $Q=P$, $(d-c)/h=0.5$, $\mu_0=1$, $\mu_2/\mu_h=1$, $\beta h=-1.0986$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $y=-h$, $h=1$)

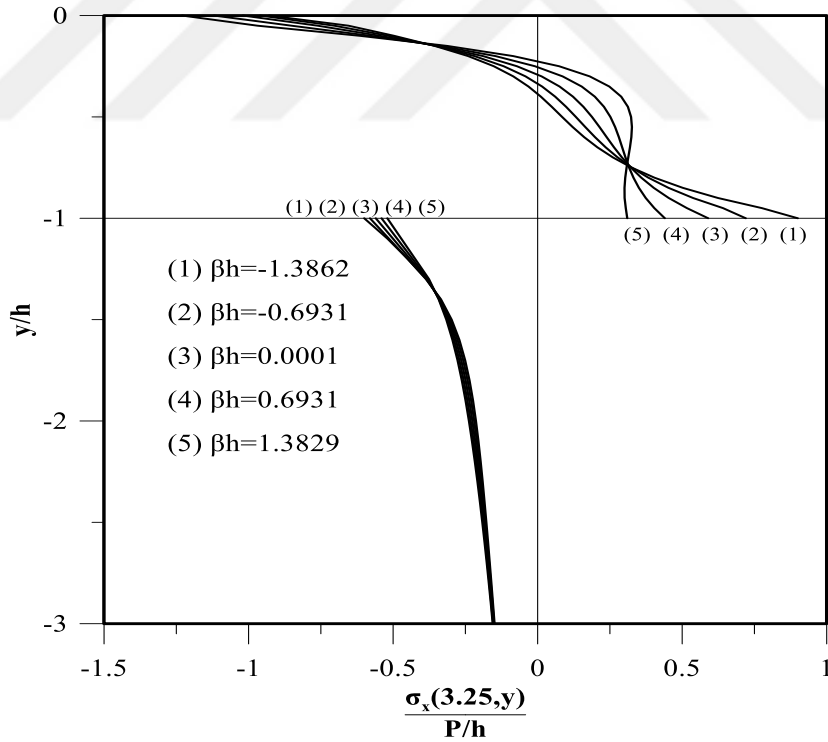


Şekil 17. Bloklar arası mesafe $((c-b)/h)$ değişimine göre FD tabaka ve elastik düzlem arasındaki boyutsuz $\sigma_{1x}(x, -h)/P/h$ temas gerilmesi dağılımı ($a/h=2$, $(b-a)/h=1$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$, $h=1$, $\beta h=-0.6931$, $\gamma h=-0.6931$, $\mu_2/\mu_h=1$)

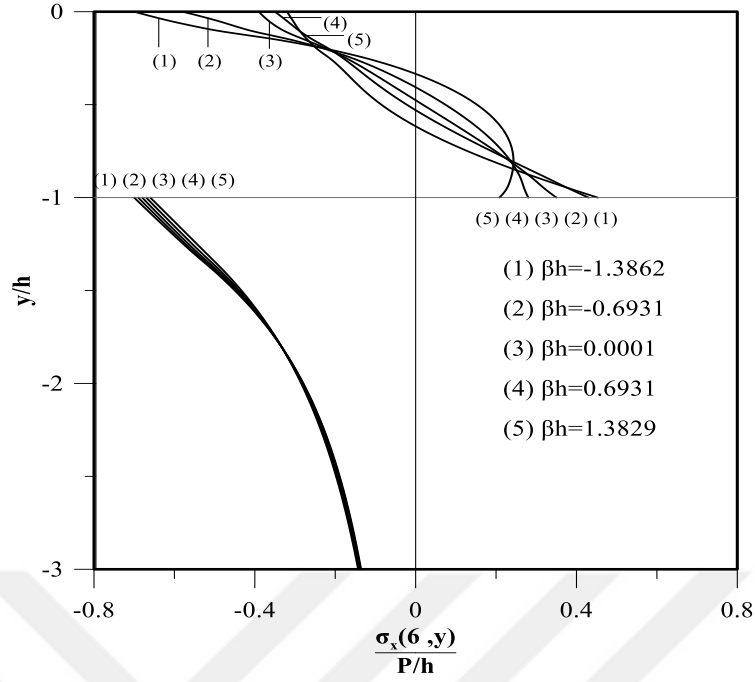
Şekil 18 ve 19'da $\sigma_x(x, y)/P/h$ gerilmelerinin sırasıyla 1. blok ve 2. blok ortasına denk gelen kesitte FD tabaka ve elastik yarım düzlem derinliği boyunca değişimi verilmiştir. Bu analizlerde 2. blok genişliği 1. blok genişliğinden 4 kat daha büyük alınmıştır. Aynı zamanda bu analizlerde FD tabakanın alt yüzeyinin yoğunluğu tabakanın üst yüzeyine göre 3 kat fazla, 2. blok yükü de 1. bloktan 2 kat fazla alınmıştır. Tabaka üst yüzeyinde basınç gerilmeleri oluşurken, tabakanın alt yüzeyine doğru belirli bir noktada değişerek çekme gerilmesine geçiş yapmıştır. Her iki şekil birlikte incelendiğinde, 1. blok genişliğinin 2. bloğa göre daha küçük olmasından dolayı Şekil 18'deki çekme ve basınç gerilmesi değerlerinin Şekil 19'a göre arttığı görülmüştür. Rijitliğin tabaka derinliği boyunca artması durumunda çekme gerilmesi değerlerinde artış meydana gelmiştir. Rijitliğin tabaka derinliği boyunca azalması durumunda ise FD tabakanın derinlik boyunca basınçtan çekmeye daha erken geçmesine neden olmuştur. Elastik yarı sonsuz düzlemde her iki şekilde de en yüksek basınç değerlerini tabakanın alt yüzeyinde almıştır ve elastik

düzlem derinliği boyunca ($y \rightarrow -\infty$) her noktada basınç gerilmesi olacak şekilde sıfıra doğru azalmıştır.

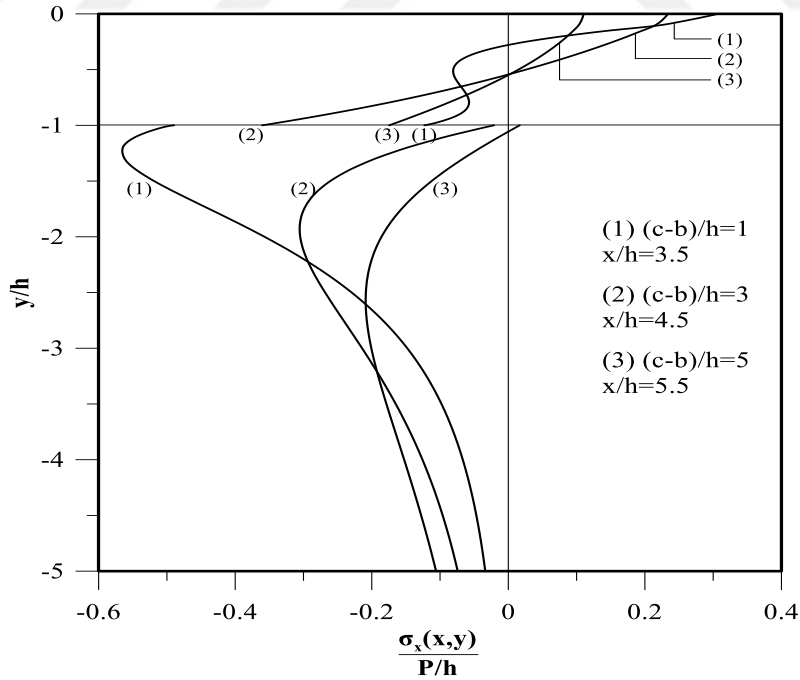
Şekil 20’de bloklar arası mesafeler değiştirilerek, iki blok ortasına denk gelen kesitte FD tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin derinliği boyunca meydana gelen boyutsuz $\sigma_x(x, y) / P / h$ gerilme dağılımları verilmiştir. Bloklar arası mesafe arttıkça çekme gerilmelerinin azaldığı görülmüşken ve basınç gerilmeleri için bu durum farklıdır. En büyük basınç gerilmesi değeri $(c-b)/h=2$ durumunda meydana gelmiştir. Elastik yarı sonsuz düzlem için en büyük gerilmeler FD tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında meydana gelmiş ve derinlik boyunca ($y \rightarrow -\infty$) giderek sıfıra yaklaşmıştır. Şekil 21’de ikinci blok ortasına denk gelen kesitte, FD tabaka ve elastik düzlemin derinliği boyunca yoğunluk değişim parametresine (γh) göre boyutsuz temas gerilmesi dağılımının analizi yapılmıştır. FD tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemde yoğunluk değişiminin, derinlik boyunca $\sigma_x(x, y) / P / h$ gerilmeleri üzerinde etkisi olmadığı görülmüştür.



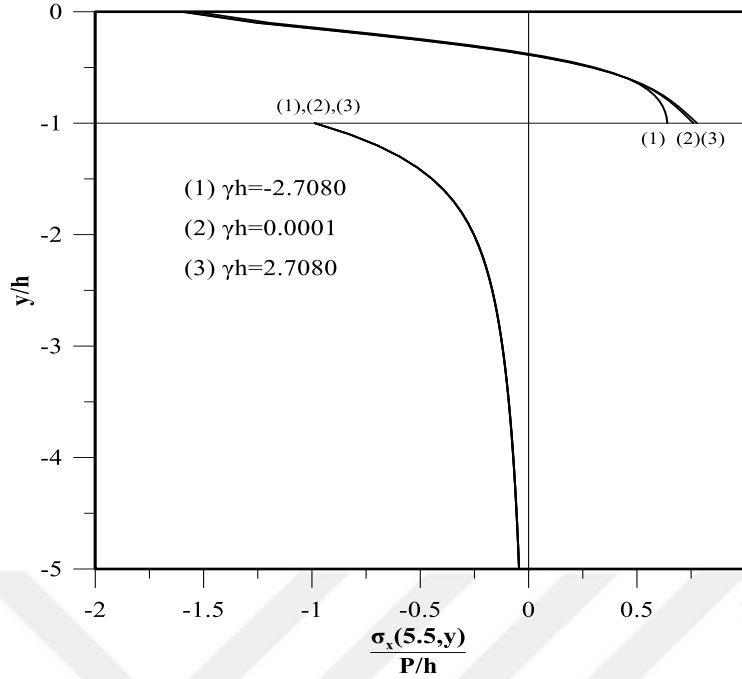
Şekil 18. $\sigma_x(3.25,y)/P/h$ temas gerilmesi dağılımının çeşitli βh değerleri için FD tabaka ve elastik yarı sonsuz düzleme göre analizi ($a/h=3$, $(b-a)/h=0.5$, $(c-b)/h=1.5$, $(d-c)/h=2$, $\mu_0=1$, $h=1$, $\mu_2/\mu_1=1$, $\gamma h=-1.0986$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$)



Şekil 19. $\sigma_x(6,y)/P/h$ temas gerilmesi dağılımının çeşitli βh değerleri için FD tabaka ve elastik yarı sonsuz düzleme göre analizi ($a/h=3$, $(b-a)/h=0.5$, $(c-b)/h=1.5$, $(d-c)/h=2$, $\mu_0=1$, $h=1$, $\mu_2/\mu_n=1$, $\gamma h=-1.0986$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$)



Şekil 20. $\sigma_x(x,y)/P/h$ bloklar arası mesafe $((c-b)/h)$ değişimine göre FD tabaka ve elastik düzlem derinliği boyunca boyutsuz temas gerilmesi dağılımı ($a/h=2$, $(b-a)/h=1$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$, $h=1$, $\beta h=-0.6931$, $\gamma h=-0.6931$, $\mu_2/\mu_n=1$)

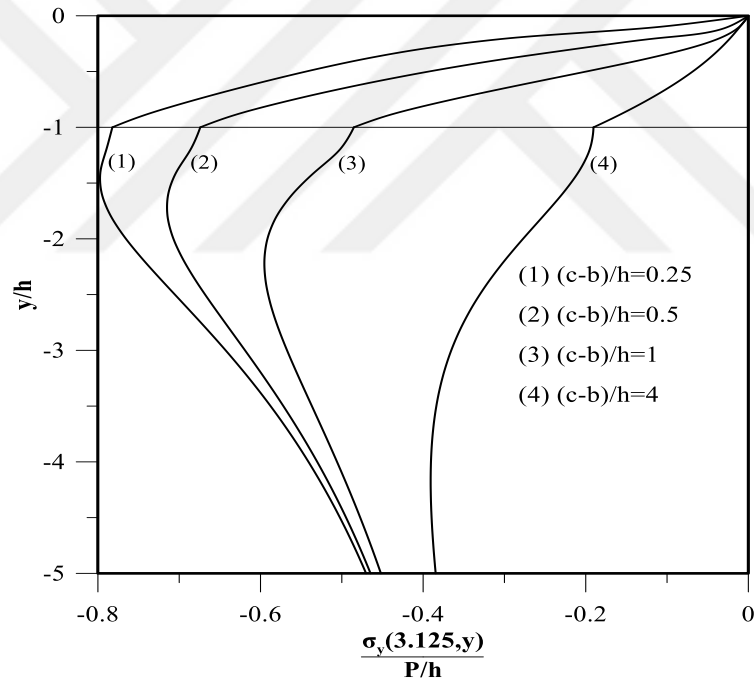


Şekil 21. $\sigma_x(5.5,y)/P/h$ boyutsuz temas gerilmesi dağılımının yoğunluk değişim parametresi (γh) için FD tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin derinliği boyunca analizi ($a/h=2$, $(b-a)/h=1$, $Q=2P$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $h=1$, $\beta h=1.0986$, $\mu_2/\mu_h=1$)

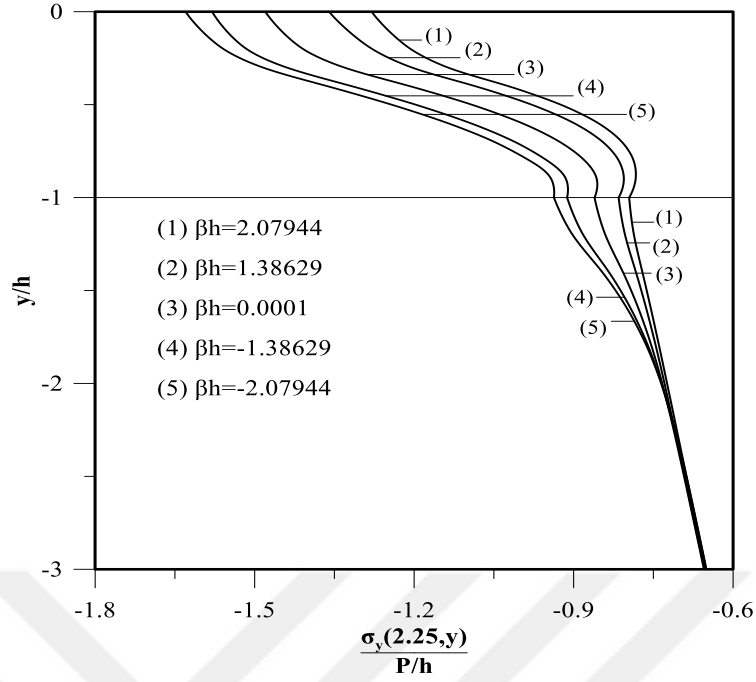
Şekil 22’de iki blok ortasına denk gelen kesitte meydana gelen boyutsuz $\sigma_y/P/h$ gerilmelerinin derinlik boyunca analizi, bloklar arası uzaklık değişimine göre yapılmıştır. Bu analizde bloklar üzerindeki yükler eşit ve tabaka alt yüzeyinin rijitliği ile yoğunluğu tabaka üst yüzeyine göre 3 kat fazla olacak şekilde alınmıştır. Bloklar birbirlerine yaklaştıkça gerilme değerlerinde artış olduğu görülmüştür. Tabaka üst yüzeyinde gerilme değerleri sıfır olmuştur ki bu durum (127) numaralı sınır şartını sağlamıştır. Şekil 23’de rijitlik parametresi değişimine göre 1. blok ortasına denk gelen kesitte oluşan boyutsuz $\sigma_y(x,y)/P/h$ gerilmelerinin derinlik boyunca analizi yapılmıştır. Şekil 22’den farklı olarak en büyük gerilme değerleri blok altlarında oluşmuştur. Ayrıca tabaka üst yüzeyinin rijitliği alt yüzeye göre arttıkça gerilme değerlerinde azalma meydana gelmiştir. Her iki şekilde de temas bölgesindeki FD tabaka ile elastik düzlemin gerilme değerleri eşittir. Bu durumda (128) numaralı denklemdeki sınır şartı sağlanmıştır. Elastik yarım düzlemin gerilme ($y \rightarrow -\infty$) doğru gittikçe etkisini kaybedip sıfıra yaklaşmıştır.

Şekil 24 ve 25’te yoğunluk değişim parametresine göre derinlik boyunca boyutsuz $\sigma_y(x,y)/P/h$ gerilme değerleri incelenmiştir. Şekil 24’te 1. blok ortasına denk gelen

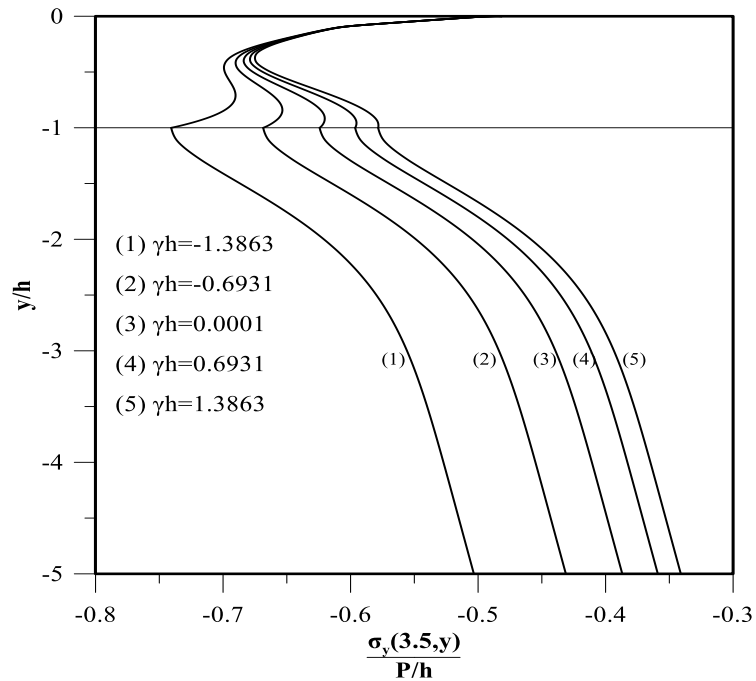
kesitte, Şekil 25’de ise iki blok ortasına denk gelen kesitte FD tabakanın yoğunluğunun değişimine göre meydana gelen gerilme değerleri incelenmiştir. Her iki durumda da tabaka altına doğru yoğunluğun arttığı durumlarda gerilmeler en büyük çıkmıştır. Benzer şekilde elastik yarı sonsuz düzlem için de bu durum geçerlidir. Ancak 1. blok ortasına denk gelen kesitte oluşan gerilme değerleri bloklar ortasına denk gelen kesitteki gerilme değerlerinden daha büyük çıkmıştır. Şekil 26’da ise $\sigma_y(x, y)/P/h$ temas gerilmesi dağılımının bloklar arasına denk gelen kesitte, blokların genişliklerine bağlı olarak FD tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlem için derinlik boyunca analizleri yapılmıştır. Bu grafikte blok genişliklerinin değişiminin her durumunda da bloklar arası mesafe eşit alınmıştır. Blok genişlikleri arttıkça hem FD tabakada hem de elastik yarı sonsuz düzlemde meydana gelen gerilme değerlerinin azaldığı görülmektedir.



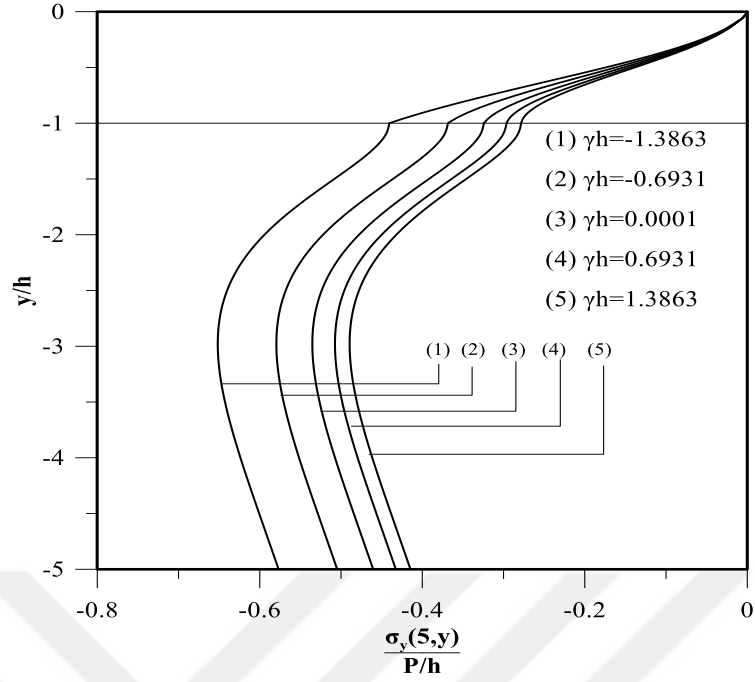
Şekil 22. $\sigma_y(3.125,y)/P/h$ temas gerilmesi dağılımının bloklar arası mesafe $((c-b)/h)$ değişimi için FD tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlem için derinlik boyunca analizi ($\mu_0=1$, $a/h=2$, $(b-a)/h=1$, $(d-c)/h=1$, $\mu_2/\mu_{-h}=1$, $Q=P$, $\beta h=-1.0986$, $\gamma h=-1.0986$, $\kappa_1=\kappa_2=2$)



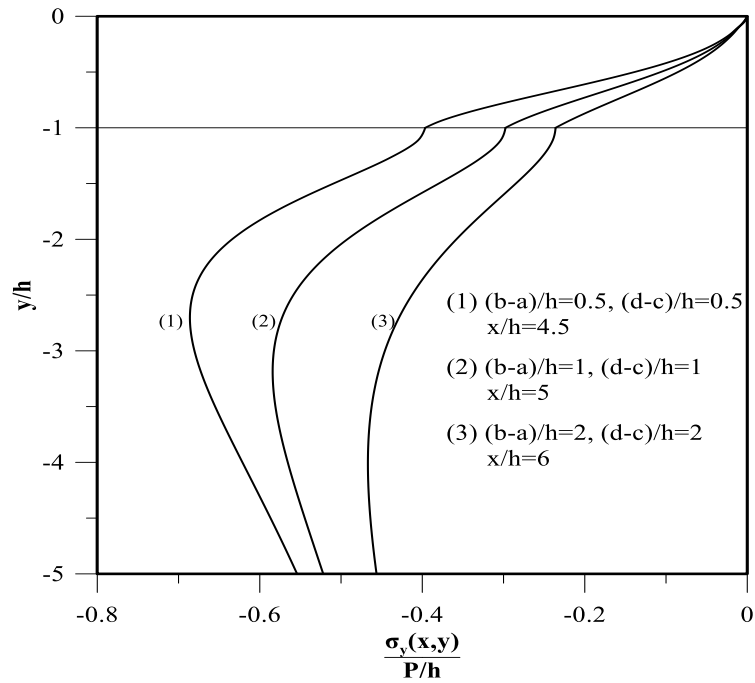
Şekil 23. $\sigma_y(2.25,y)/P/h$ temas gerilmesi dağılımının çeşitli βh değerleri için FD tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin derinliği boyunca analizi ($a/h=2$, $(b-a)/h=0.5$, $(c-b)/h=1$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $h=1$, $\mu_2/\mu_h=1$, $\gamma h=-0.6931$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$)



Şekil 24. $\sigma_y(3.5,y)/P/h$ temas gerilmesi dağılımının çeşitli γh değerleri için FD tabaka ve elastik yarı sonsuz düzleme göre derinlik boyunca analizi ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $Q=2P$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $h=1$, $\beta h=0.4055$, $\mu_2/\mu_h=1$)

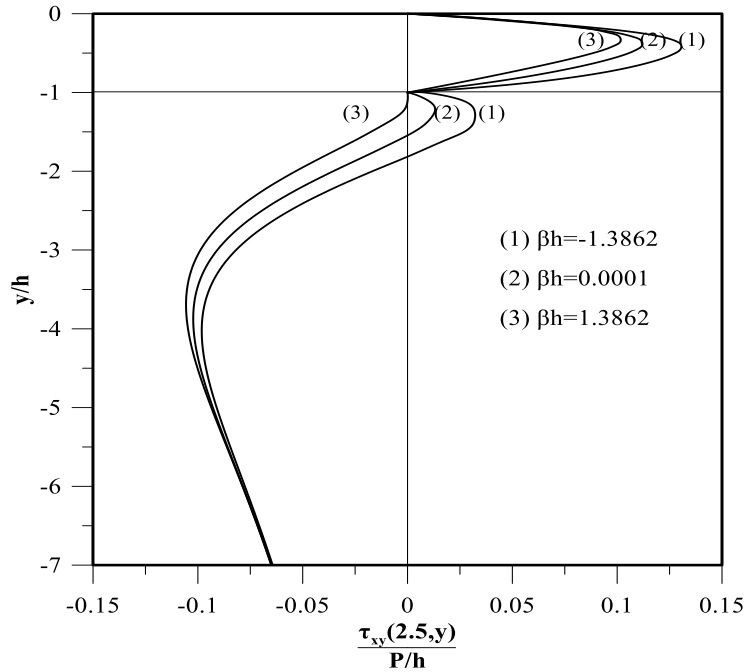


Şekil 25. $\sigma_y(5,y)/P/h$ temas gerilmesi dağılımının çeşitli γh değerleri için FD tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin derinliği boyunca analizi ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $Q=2P$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $h=1$, $\beta h=0.4055$, $\mu_2/\mu_{-h}=1$)

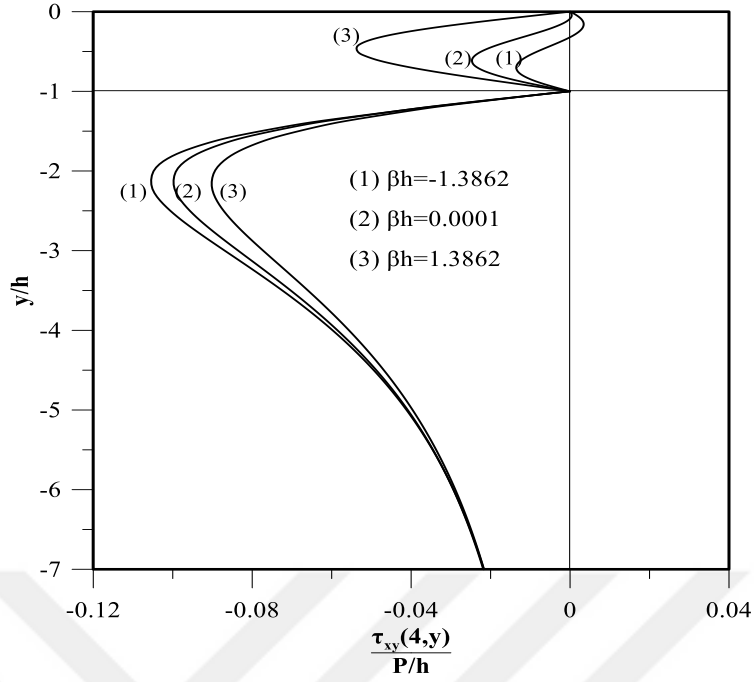


Şekil 26. $\sigma_y(x,y)/P/h$ blok ortasındaki temas gerilmesi dağılımının blokların genişliklerine bağlı olarak FD tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin derinliği boyunca analizi ($a/h=3$, $(c-b)/h=2$, $\mu_0=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$, $h=1$, $\beta h=-0.9163$, $\gamma h=-0.9163$, $\mu_2/\mu_{-h}=1$)

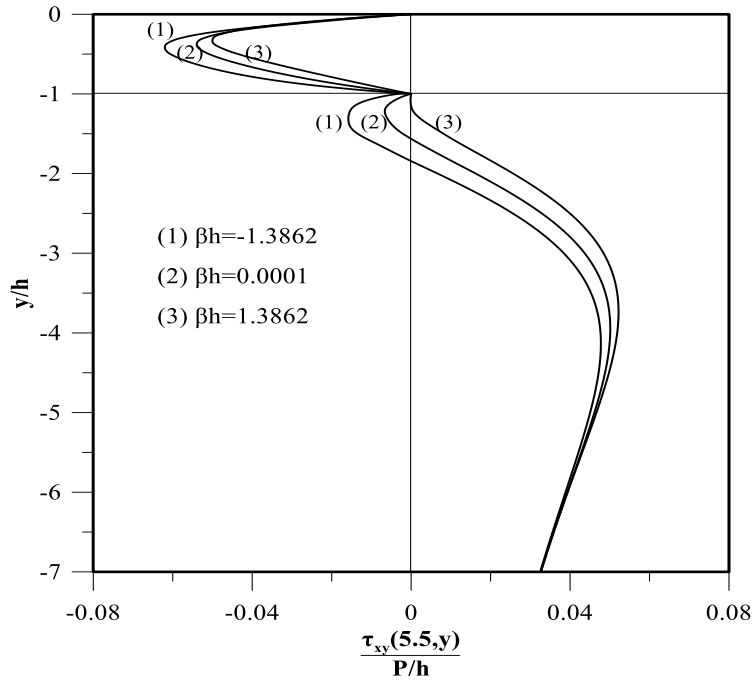
Şekil 27-28’de boyutsuz $\tau_{xy}/P/h$ kayma gerilmesi değerlerinin x ekseninin çeşitli noktalarında tabaka derinlik boyunca değişimi farklı rijitlik parametreleri için verilmiştir. Şekiller incelendiğinde temas yüzeylerinde kayma gerilmesi değerlerinin sıfır olduğu görülebilir. Bu durumda (124-126) numaralı sınır şartları sağlanmıştır. Şekil 27’de rijitlik parametresi değişimine göre, kayma gerilmesi değerlerinin 1. blok ortasına denk gelen kesitte derinlik boyunca değişimi incelenmiştir. Bu grafikte tabaka derinliği boyunca rijitlik artışının aynı zamanda gerilme artışına da sebep olduğu görülmüştür. Şekil 28’de iki blok ortasındaki kesit incelenmiştir. Burada kayma gerilmeleri negatif yönde oluşmuş ancak Şekil 27’den farklı olarak tabaka üst yüzeyinin rijitliğinin daha fazla olması durumunda gerilme değerleri daha büyük çıkmıştır. Şekil 29’da ise 2. blok ortasındaki kesitte meydana gelen kayma gerilmesi değerleri ele alınmıştır. Bu kesitte de kayma gerilmesi değerleri yine negatif bölgede oluşmuş fakat en büyük gerilme 1. blok altındaki kesite benzer olarak tabaka alt yüzey rijitliğinin fazla olduğu durumda oluşmuştur. Elastik yarı sonsuz düzlemdeki gerilme değerleri, 1.blok altındaki kesit ile iki blok ortasındaki kesitte negatif bölgeden azalarak sıfıra doğru gitmişken, 2. blok ortasındaki kesitte gerilmeler pozitif bölgeden azalarak etkisini kaybetmiştir.



Şekil 27. $\tau_{xy}(2.5,y)/(P/h)$ kayma gerilmesi dağılımının çeşitli βh değerleri için FD tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin derinliği boyunca analizi ($a/h=2$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_2/\mu_h=1$, $\gamma h=0.6931$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$, $h=1$, $\mu_0=1$)

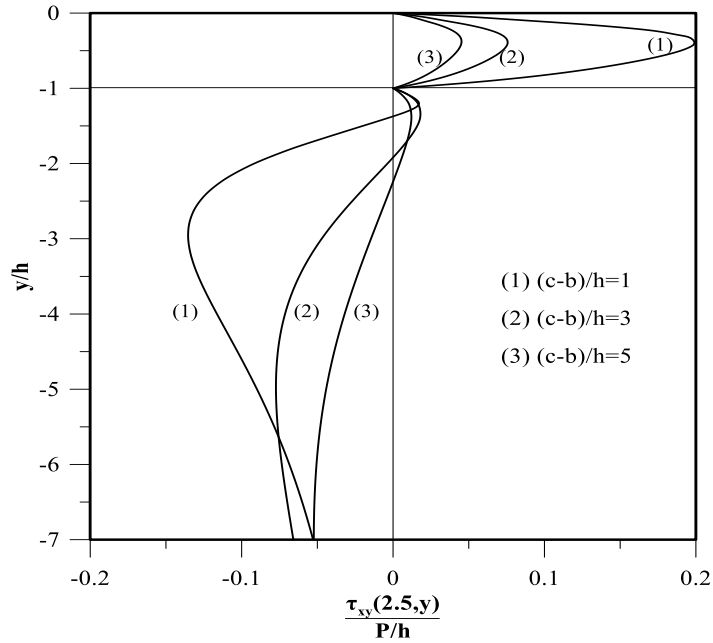


Şekil 28. $\tau_{xy}(4,y)/(P/h)$ kayma gerilmesi dağılımının çeşitli βh değerleri için FD tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin derinliği boyunca analizi ($a/h=2$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_2/\mu_n=1$, $\gamma h=0.6931$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$, $h=1$, $\mu_0=1$)

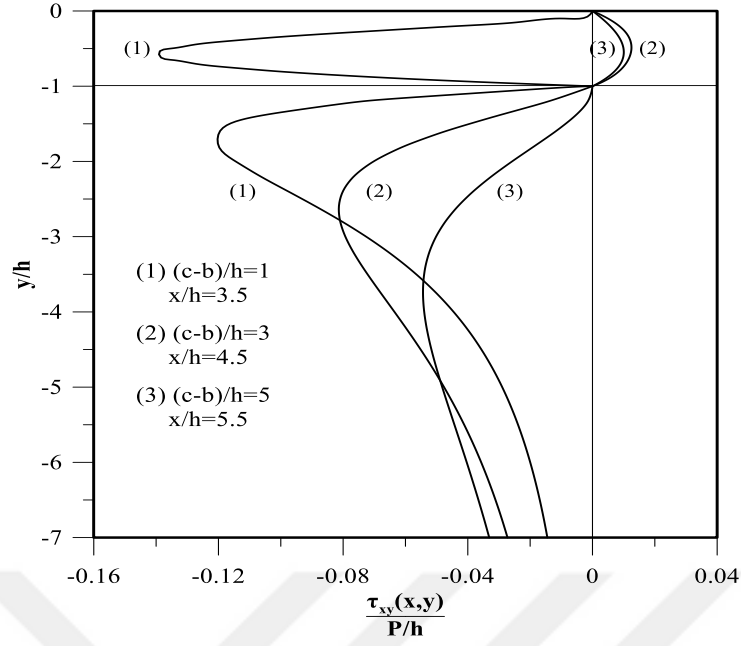


Şekil 29. $\tau_{xy}(5.5,y)/(P/h)$ kayma gerilmesi dağılımının çeşitli βh değerleri için FD tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin derinliği boyunca analizi ($a/h=2$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_2/\mu_n=1$, $\gamma h=0.6931$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$, $h=1$, $\mu_0=1$)

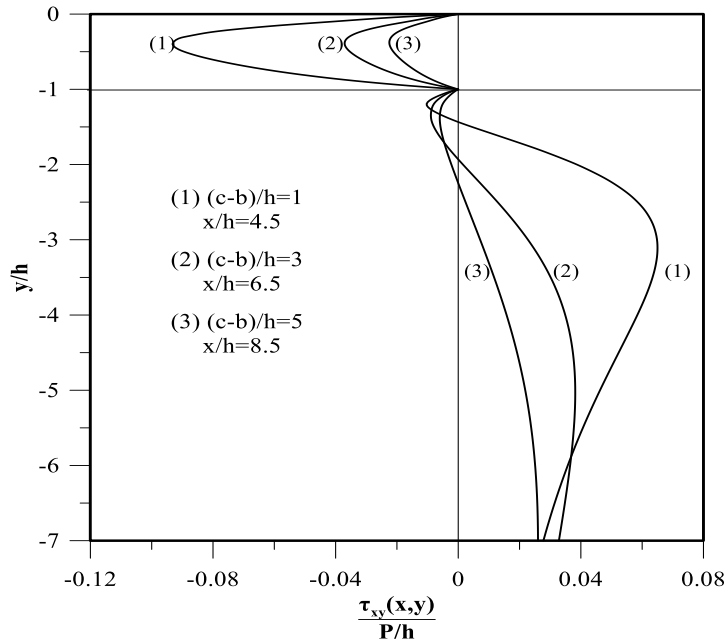
Şekil 30-32’de, bloklar arası mesafe değişiminin kayma gerilmeleri üzerindeki etkisi incelenmiştir. Şekil 30’da, 1. blok ortasına denk gelen kesit baz alınarak blok mesafeleri arttırılmış ve bu noktadaki gerilme değerleri irdelenmiştir. Blok mesafeleri arttıkça kayma gerilmelerinde azalmalar meydana gelmiştir. Bunun sebebi ise blokların birbirlerinden etkileşimleridir. Şekil 31’de ise iki blok ortasındaki gerilme değerleri incelenmiştir. Burada iki bloğun birbirine en yakın olduğu durumda negatif yönde ve büyük gerilmeler oluşurken bloklar arası mesafe açıldığında pozitif yönde daha küçük kayma gerilmeleri meydana gelmiştir. Şekil 32’de bu kez 2. blok ortasına denk gelen kesitte oluşan kayma gerilmeleri incelenmiştir. Bu grafikte tüm gerilmeler negatif olarak oluşmuş ancak en büyük gerilmeler yine blokların birbirlerine yakın olduğu durumda elde edilmiştir. Elastik yarı sonsuz düzlemde de FD tabakaya benzer olarak en büyük kayma gerilmeleri bloklar yakinken oluşmuş ve derinlik boyunca sonsuza doğru ilerledikçe gerilme değerleri sıfıra yaklaşmıştır. Şekil 33’de, elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülü ile FD tabakanın alt yüzeyinin kayma modülü oranlarına göre kayma gerilmeleri ele alınmıştır. Burada FD tabakanın alt yüzeyinin kayma modülünün büyük olması halinde gerilme değerleri artmış ancak elastik yarı düzlemde bu değerler azalmıştır.



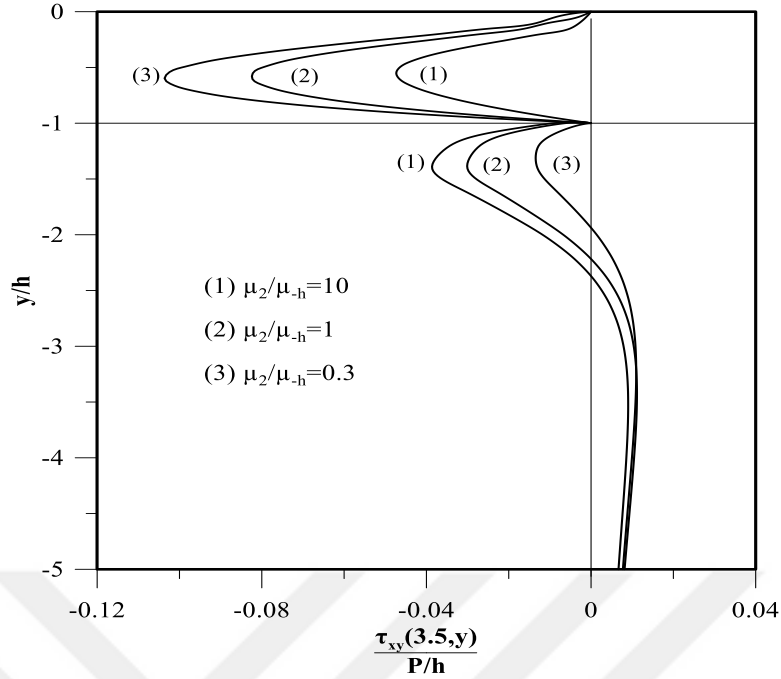
Şekil 30. $\tau_{xy}(2.5,y)/(P/h)$ kayma gerilmesi dağılımının blok arası mesafe $((c-b)/h)$ değişiminin çeşitli değerleri için FD tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin derinliği boyunca analizi ($Q=2P$, $a/h=2$, $(b-a)/h=1$, $(d-c)/h=1$, $\mu_2/\mu_{-h}=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $h=1$, $\mu_0=1$, $\gamma h=-0.6931$, $\beta h=-0.6931$)



Şekil 31. $\tau_{xy}(x,y)/(P/h)$ kayma gerilmesi dağılımının bloklar arası mesafe $((c-b)/h)$ değişiminin çeşitli değerleri için FD tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin derinliği boyunca analizi ($Q=2P$, $a/h=2$, $(b-a)/h=1$, $(d-c)/h=1$, $\mu_2/\mu_h=1$, $\gamma h=-0.6931$, $\beta h=-0.6931$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $h=1$, $\mu_0=1$)



Şekil 32. $\tau_{xy}(x,y)/(P/h)$ kayma gerilmesi dağılımının bloklar arası mesafe $((c-b)/h)$ değişiminin çeşitli değerleri için FD tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin derinliği boyunca analizi ($Q=2P$, $a/h=2$, $(b-a)/h=1$, $(d-c)/h=1$, $\mu_2/\mu_h=1$, $\gamma h=-0.6931$, $\beta h=-0.6931$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $h=1$, $\mu_0=1$)



Şekil 33. $\tau_{xy}(3.5,y)/(P/h)$ kayma gerilmesi dağılımının kayma modülleri oranına (μ_2/μ_h) göre FD tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemin derinliği boyunca analizi ($Q=P$, $\mu_0=1$, $a/h=2$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=1$, $(d-c)/h=0.5$, $\beta h=-0.6931$, $\gamma h=-0.6931$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $h=1$)

3.2. Süreksiz Temas Çözümleri

Bu bölümde, yük faktörünün kritik yükten büyük olması durumunda ($\lambda > \lambda_{cr}$) FD tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında meydana gelen ayrılma durumu tablo ve grafiklerle incelenmiştir. Oluşan ayrılma bölgesi tabaka ağırlığı etkisi ile sonlu bir bölgede meydana gelmektedir. Bu sonlu bölge tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında bir süreksizlik durumu yaratacağı için problem süreksiz temas olarak adlandırılmaktadır.

Tablo 7'de rijitlik parametresi ve yük faktörü değişimine göre ayrılma başlangıç ve bitiş noktaları verilmiştir. Rijitlik parametresi sabit alınıp yük faktörünün artırılması durumunda daha büyük bir ayrılma bölgesi oluşmuştur ve yük arttıkça ayrılmanın başlangıç noktası giderek 2. bloğa yaklaşmıştır. Yük faktörünün sabit alınıp rijitlik parametresinin tabaka altına doğru artırılması durumunda ayrılma bölgesinin küçüldüğü tablodan görülebilir. Tablo 8'de bu kez yoğunluk parametresi ve yük faktörü değişimine göre ayrılma bölgeleri incelenmiştir. Tablo 7'ye benzer olarak yük faktörünün artması durumunda ayrılma bölgeleri artarken, yoğunluğun tabaka altına doğru büyük alınması durumunda ayrılma bölgelerinde küçülme meydana gelmiştir. Her iki tablo $\lambda = 105$ değeri

için birlikte ele alınırsa, rijitlik parametresi değişiminin tabaka derinliği boyunca arttırılması durumunda ayrılmanın başlangıç ve bitiş noktaları arasındaki farkın yoğunluk parametresi değişiminin tabaka derinliği boyunca arttırılması durumuna göre daha büyük olduğu görülebilir.

Tablo 7. Rijitlik parametresi (βh) ve yük faktörü (λ) değişimine göre ayrılma başlangıç ve bitiş noktaları ($a/h=3, b/h=4, c/h=6, d/h=7, \kappa_1=\kappa_2=2, \mu_0=1, Q=2P, \gamma h=0.4055, \mu_2/\mu_h=1$)

λ	$\beta h = 0.4055$		$\beta h = 0.0001$		$\beta h = -0.4055$	
	e/h	f/h	e/h	f/h	e/h	f/h
80	9.086325	10.813601	9.011052	10.512493	8.967130	10.198262
85	9.033084	10.981144	8.955544	10.674930	8.905280	10.358801
90	8.988512	11.137973	8.909500	10.826404	8.855335	10.506397
105	8.887305	11.563474	8.806561	11.234878	8.747211	10.899637

Tablo 8. Yoğunluk parametresi (γh) ve yük faktörü (λ) değişimine göre ayrılma başlangıç ve bitiş noktaları ($a/h=3, b/h=4, c/h=6, d/h=7, \kappa_1=\kappa_2=2, \mu_0=1, Q=2P, \beta h=0.4055, \mu_2/\mu_h=1$)

λ	$\gamma h = 0.4055$		$\gamma h = 0.0001$		$\gamma h = -0.4055$	
	e/h	f/h	e/h	f/h	e/h	f/h
95	8.950303	11.286069	9.109445	10.746894	9.420253	10.093719
100	8.916313	11.427469	9.061499	10.889378	9.313158	10.277667
105	8.887305	11.563474	9.020630	11.023545	9.237262	10.430719
109	8.865921	11.668581	8.991774	11.125886	9.188655	10.541409

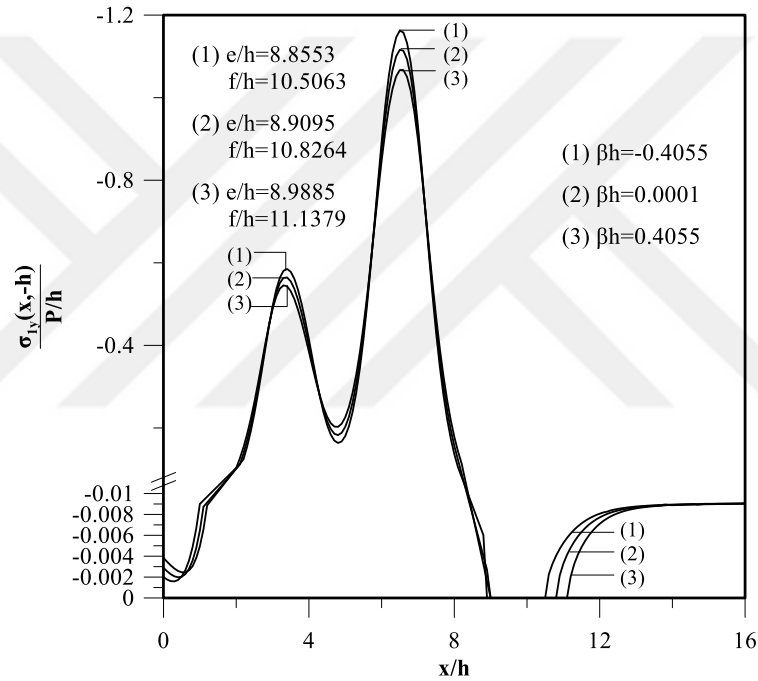
Tablo 9’da bloklar arası mesafe ve yük faktörü değişimine göre ayrılma mesafeleri incelenmiştir. Bu tabloda da benzer olarak yük faktörünün artması durumunda ayrılma mesafeleri artmıştır. Ancak bloklar birbirlerinden uzaklaştıkça bloklar arası etkileşim azaldığından ayrılma bölgesi küçülmüştür.

Tablo 9. Bloklar arası mesafe $((c-b)/h)$ ve yük faktörü (λ) değişimine göre ayrılma başlangıç ve bitiş noktaları ($a/h=3$, $b/h=4$, $d-c/h=1.5$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $\mu_0=1$, $Q=2P$, $\beta h=0.4055$, $\gamma h=0.4055$, $\mu_2/\mu_h=1$)

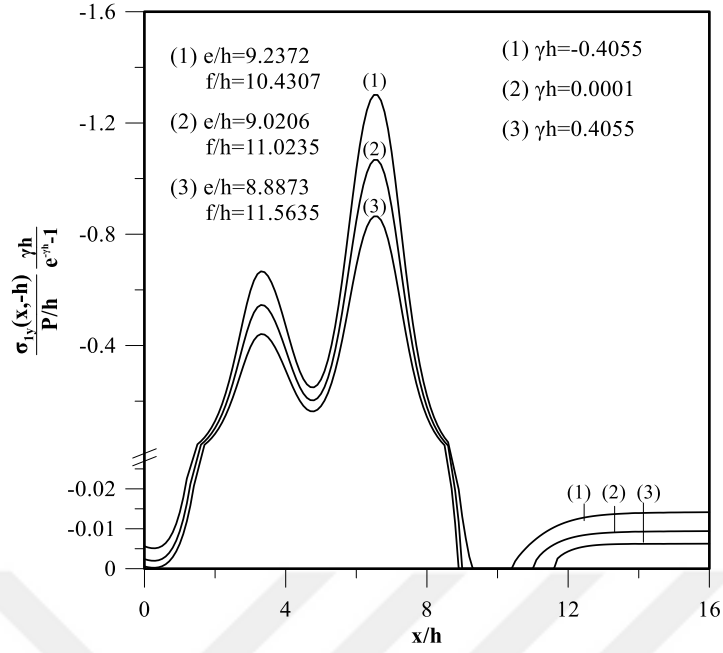
λ	$(c-b)/h=1$		$(c-b)/h=2$		$(c-b)/h=4$	
	$(e-d)/h$	$(f-d)/h$	$(e-d)/h$	$(f-d)/h$	$(e-d)/h$	$(f-d)/h$
75	8.710464	9.848930	9.789693	10.711035	11.833609	12.627547
80	8.626030	10.041393	9.687800	10.915205	11.718688	12.841653
85	8.560758	10.214252	9.613613	11.092718	11.638501	13.022523
90	8.507695	10.373849	9.554568	11.254216	11.575700	13.185756

Şekil 34-38’de sunulan grafiklerin tablolarda verilen değerlerle uyumlu olduğu görülebilir. Şekil 34’de rijitlik parametresi değişimine göre boyutsuz $\sigma_{1y}(x,-h)/P/h$ gerilme dağılımı grafiği verilmiştir. Tablo 7’ye benzer şekilde rijitlik parametresi tabaka derinliği boyunca azaldıkça veya bir başka ifadeyle tabakanın rijitliği tabaka derinliği boyunca büyüdükçe ayrılma bölgesi küçülmüştür. Ayrıca βh değerleri azaldıkça ayrılmanın başladığı nokta ise 2. bloğa doğru yaklaşmıştır. Şekil 35’de ise yoğunluk parametresi değişimine göre boyutsuz $\sigma_{1y}(x,-h)/P/h$ gerilme dağılımı grafiği verilmiştir. Tablo 8’deki sonuçlara paralel olarak γh değerleri azaldıkça yani yoğunluk tabaka derinliği boyunca arttıkça ayrılma mesafeleri azalmıştır. Şekil 36’da bloklar arası mesafe değişimine göre gerilme dağılımı verilmiştir. Bloklar birbirlerine doğru yaklaştıkça gerilme değerlerinde artış meydana gelmiştir. Bu artışa paralel olarak ayrılma mesafelerinde de büyüme olmuştur. Bloklar arası mesafe arttıkça blokların birbirleriyle olan etkileşimi giderek kaybolduğundan hem gerilme değerleri azalmış hem de ayrılma bölgesi küçülmüştür. Bu grafikte birlikte, bloklar arası etkileşimin sadece sürekli temasta değil aynı zamanda süreksiz temasta da ne denli önemli olduğu anlaşılabilir. Şekil 37-38’de elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülü ile fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın alt yüzeyine ait kayma modülünün oranına göre boyutsuz $\sigma_{1y}(x,-h)/P/h$ gerilme dağılımı grafikleri verilmiştir. Şekil 37’de FD tabakanın üst yüzeyinin yoğunluğu ve rijitliği alt yüzeyine göre daha büyük seçilmişken, Şekil 38’de ise FD tabakanın alt yüzeyinin yoğunluğu ve rijitliği üst yüzeye göre daha büyüktür. Elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülünün FD tabakanın alt yüzeyinin kayma modülüne göre artması durumunda her iki grafikte de daha büyük bir ayrılma bölgesi oluşmuştur. Yine bu grafikte ayrılmanın başlangıç noktasının bloklara daha yakın bir bölgede meydana geldiği görülmüştür. Şekil

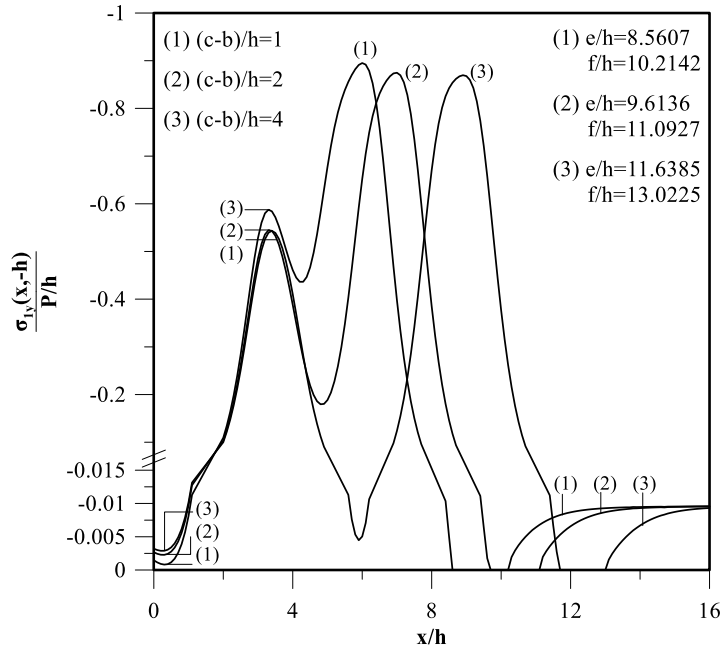
39’da yük faktörünün (λ) ilk ayrılma yükü (λ_{cr}) ile kıyası verilmiştir. 1. durumda yük faktörü ilk ayrılma yükünden küçük alınmış ve gerilme grafiği çizilmiştir. Yük faktörü, kritik yükten daha küçük olduğundan tabaka ile elastik düzlem arasında ayrılma durumu meydana gelmemiştir. 2. durumda bu kez yük faktörü kritik yüke eşit seçilmiş ve gerilme dağılımları elde edilmiştir. Burada gerilmeler ayrılmanın başlayabileceği noktada sıfıra değip tekrar artış göstermiştir. 3. durumda ise $\lambda > \lambda_{cr}$ durumu incelenmiştir. Kritik yükten daha büyük bir yük verildiğinden dolayı FD tabaka ile elastik düzlem arasında ayrılma meydana gelmiştir.



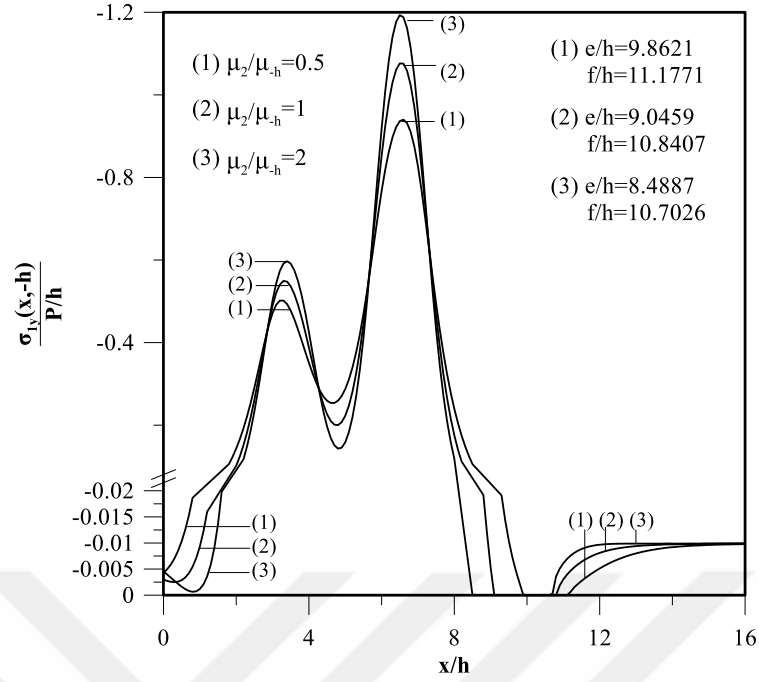
Şekil 34. Rijitlik parametresi (βh) değişimine göre $\sigma_{1y}(x,-h)/P/h$ boyutsuz gerilme dağılımı ($\kappa_1=\kappa_2=2$, $h=1$, $Q=2P$, $\mu_0=1$, $a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\gamma h=0.4055$, $\mu_2/\mu_{-h}=1$, $\lambda=90>\lambda_{cr}$)



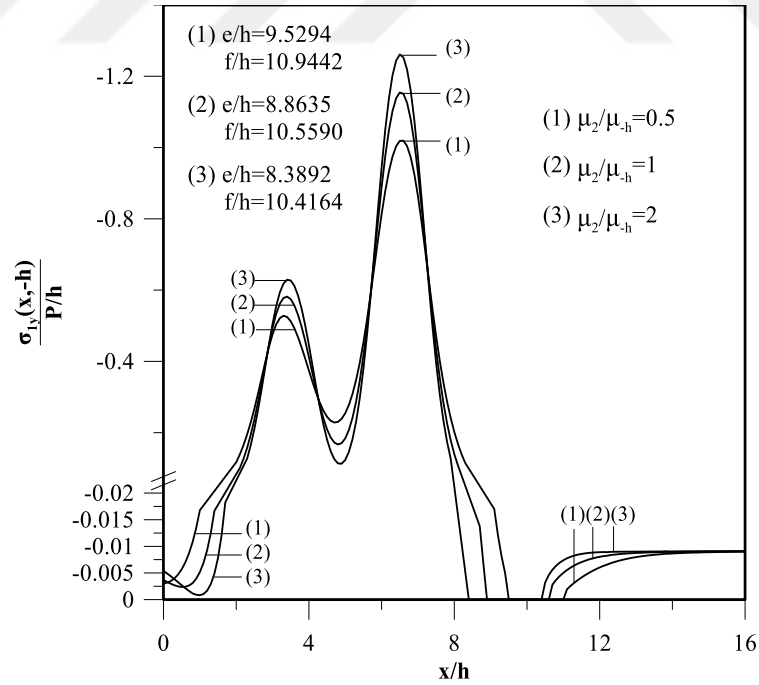
Şekil 35. Yoğunluk parametresi (γh) değişimine göre $\sigma_{1y}(x,-h)/P/h$ boyutsuz gerilme dağılımı ($\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$, $\mu_0=1$, $a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\beta h=0.4055$, $\mu_2/\mu_{-h}=1$, $\lambda=105>\lambda_{cr}$)



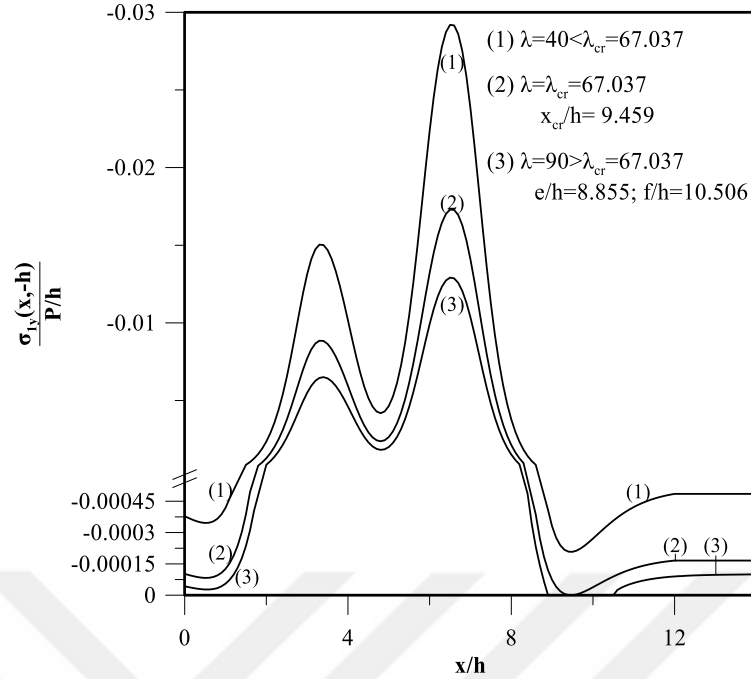
Şekil 36. Bloklar arası mesafe $((c-b)/h)$ değişimine göre $\sigma_{1y}(x,-h)/P/h$ boyutsuz gerilme dağılımı ($\kappa_1=\kappa_2=2$, $h=1$, $Q=2P$, $\mu_0=1$, $a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(d-c)/h=1.5$, $\gamma h=0.4055$, $\beta h=0.4055$, $\mu_2/\mu_{-h}=1$, $\lambda=85>\lambda_{cr}$)



Şekil 37. Kayma modülleri oranına (μ_2/μ_h) göre $\sigma_{1y}(x,-h)/P/h$ boyutsuz gerilme dağılımı ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\gamma h=0.4055$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $h=1$, $Q=2P$, $\mu_0=1$, $\beta h=0.4055$, $\lambda=85>\lambda_{cr}$)



Şekil 38. Kayma modülleri oranına (μ_2/μ_h) göre $\sigma_{1y}(x,-h)/P/h$ boyutsuz gerilme dağılımı ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $h=1$, $Q=2P$, $\mu_0=1$, $\gamma h=-0.3364$, $\beta h=-0.3364$, $\lambda=130>\lambda_{cr}$)



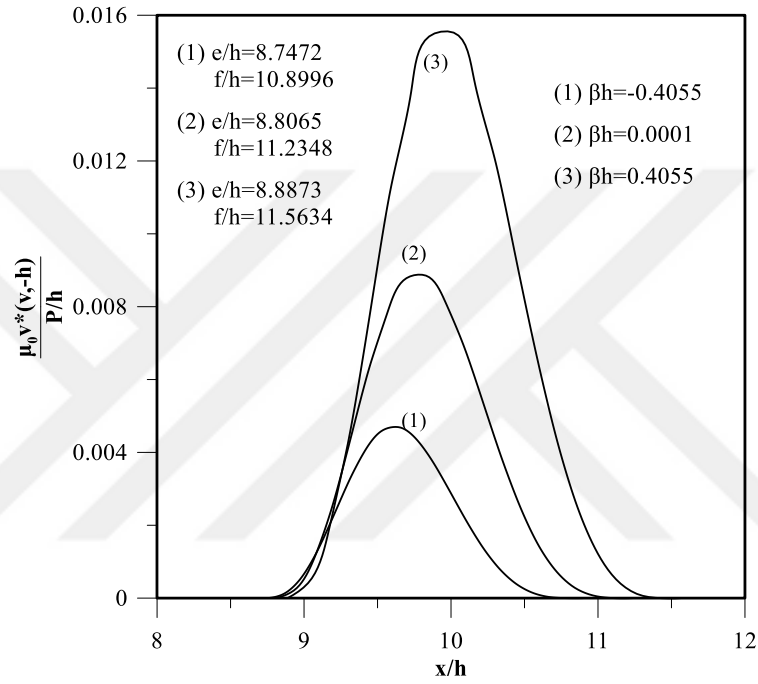
Şekil 39. Yük faktörünün ilk ayrılma yükünden küçük, eşit ve büyük olması durumuna göre $\sigma_{1y}(x,-h)/P/h$ boyutsuz gerilme dağılımı ($Q=2P$, $a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\gamma h=0.4055$, $\beta h=-0.4055$, $\mu_2/\mu_{-h}=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $h=1$, $\mu_0=1$)

3.2.1. Açılmaların İrdelenmesi

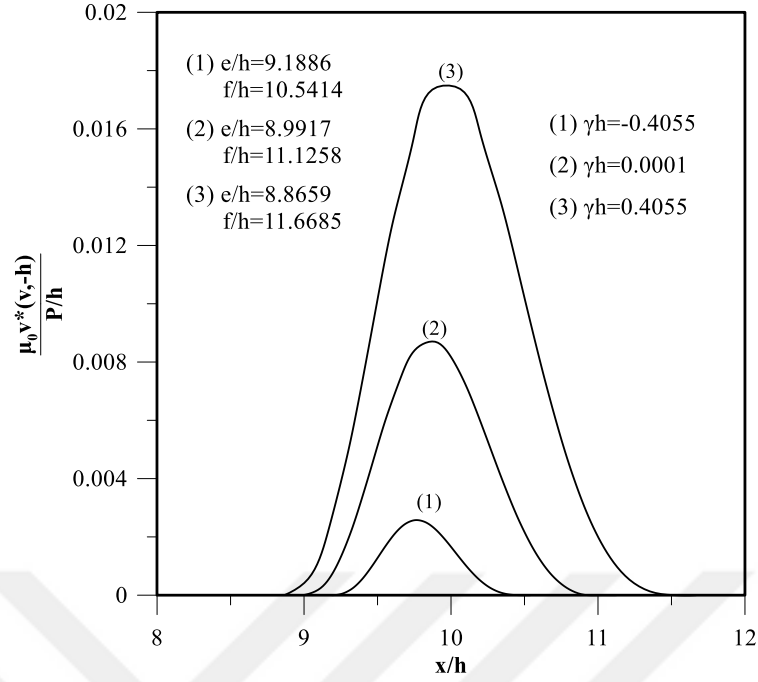
Şekil 40-44'de e ve f noktaları arasında kalan ayrılma bölgesinde $v_1(x,-h) - v_2(x,-h)$ yer değiştirmeler farkı veya bir başka ifadeyle fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında meydana gelen açılmalar çeşitli boyutsuz büyüklükler için incelenmiştir.

Şekil 40'da rijitlik parametresi değişimine göre FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki açılma grafiği verilmiştir. Tabaka altına doğru rijitliğin artması durumunda ayrılma bölgelerindeki küçülmeye paralel olarak açılmalar da diğer durumlara göre daha küçük olmuştur. Açılmanın başlangıç noktaları birbirlerine çok yakinken, bitiş noktaları rijitliğe göre farklılık göstermiştir. Şekil 41'de yoğunluk parametresi değişimine göre FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki açılma grafiği sunulmuştur. Burada Şekil 40'a benzer bir durum ortaya çıkmıştır. Tabaka yoğunluğu FD tabakanın alt kısmına doğru arttıkça açılmalar daha küçük olmuştur. Bloklar arası mesafe değişimine göre FD tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki açılma grafiği Şekil 42'de verilmiştir. Bloklar birbirine yakinken açılma miktarı daha fazla olmuştur.

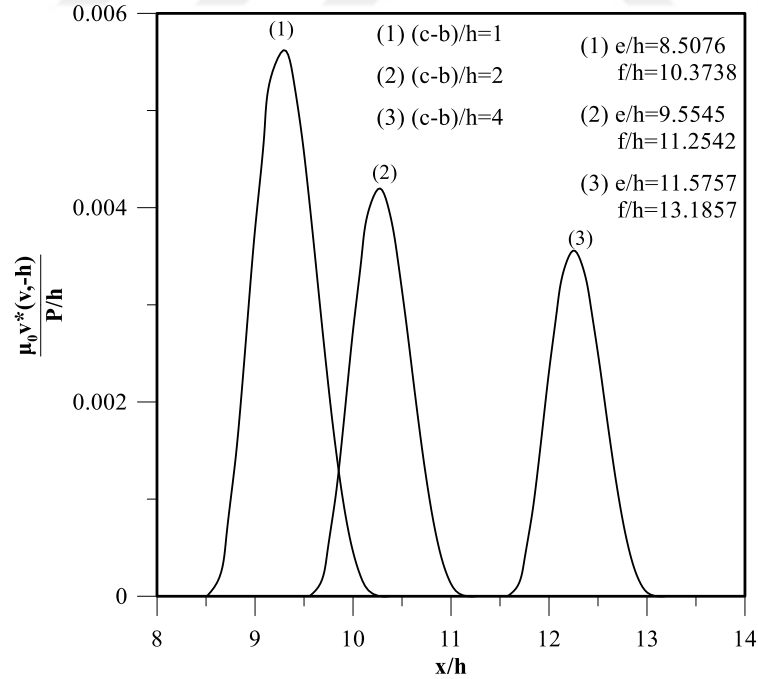
Şekil 43 ve 44’de, elastik yarım düzlemin kayma modülü oranının FD tabakanın alt yüzeyinin kayma modülü oranına göre değişimine göre açılmaların grafiği verilmiştir. Şekil 43’de FD tabakanın üst yüzeyi, Şekil 44’de FD tabakanın alt yüzeyi daha rijit alınmıştır. Her iki şekilde de elastik düzlemin kayma modülü büyüdükçe açılma bölgesinin arttığı açıkça görülebilir. Ancak FD tabaka altının daha rijit olması durumunda açılma değerleri diğer duruma göre daha küçük olmuştur.



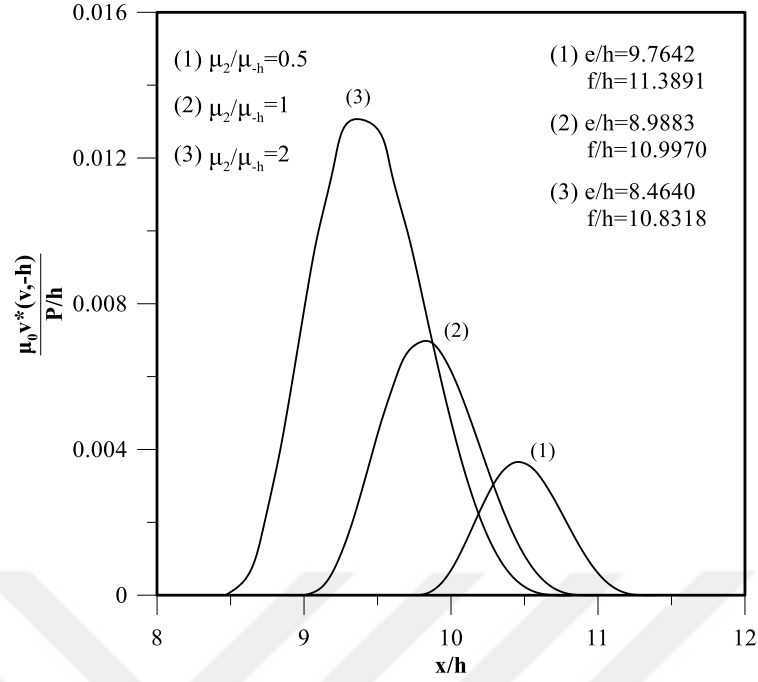
Şekil 40. Rijitlik parametresi (βh) değişimine göre FD tabaka ile elastik düzlem arasındaki açılma ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\gamma h=0.4055$, $\mu_2/\mu_h=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $h=1$, $Q=2P$, $\mu_0=1$, $\lambda=105>\lambda_{cr}$)



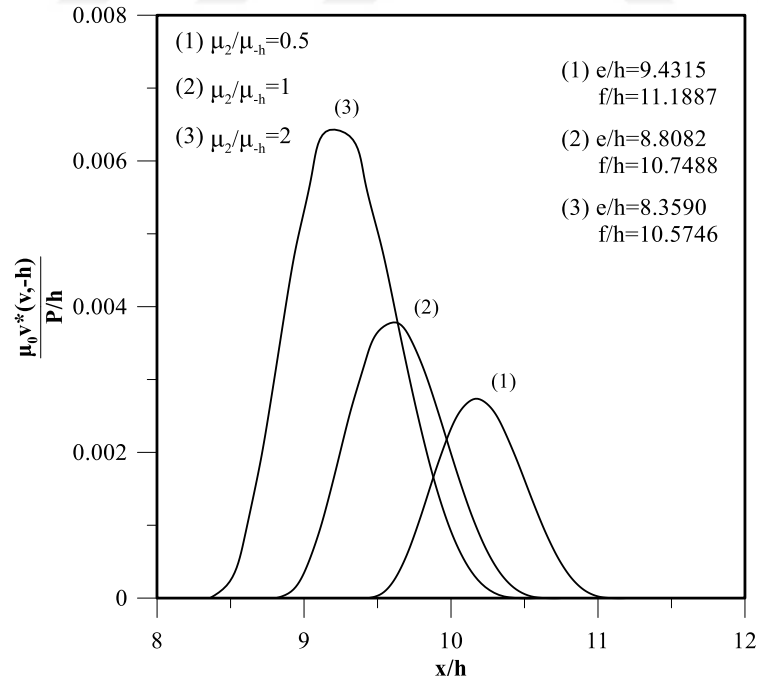
Şekil 41. Yoğunluk değişim parametresine (γh) göre FD tabaka ile elastik düzlem arasındaki açılma ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\beta h=0.4055$, $\mu_2/\mu_h=1$, $Q=2P$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $h=1$, $\mu_0=1$, $\lambda=109>\lambda_{cr}$)



Şekil 42. Bloklar arası mesafe ($(c-b)/h$) değişimine göre FD tabaka ile elastik düzlem arasındaki açılma ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(d-c)/h=1.5$, $\beta h=0.4055$, $\gamma h=0.4055$, $\mu_2/\mu_h=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $h=1$, $Q=2P$, $\mu_0=1$, $\lambda=90>\lambda_{cr}$)



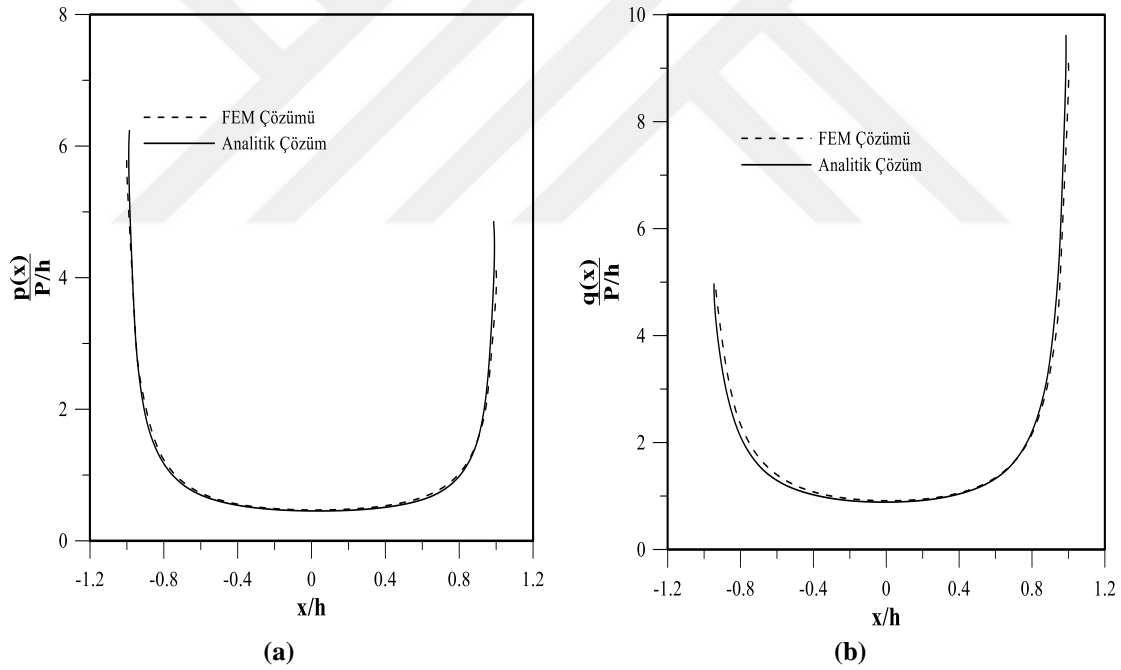
Şekil 43. Kayma modülü oranlarına (μ_2/μ_h) göre FD tabaka ile elastik düzlem arasındaki açılma ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\beta h=0.3364$, $\gamma h=0.3364$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $h=1$, $Q=2P$, $\mu_0=1$, $\lambda=90>\lambda_{cr}$)



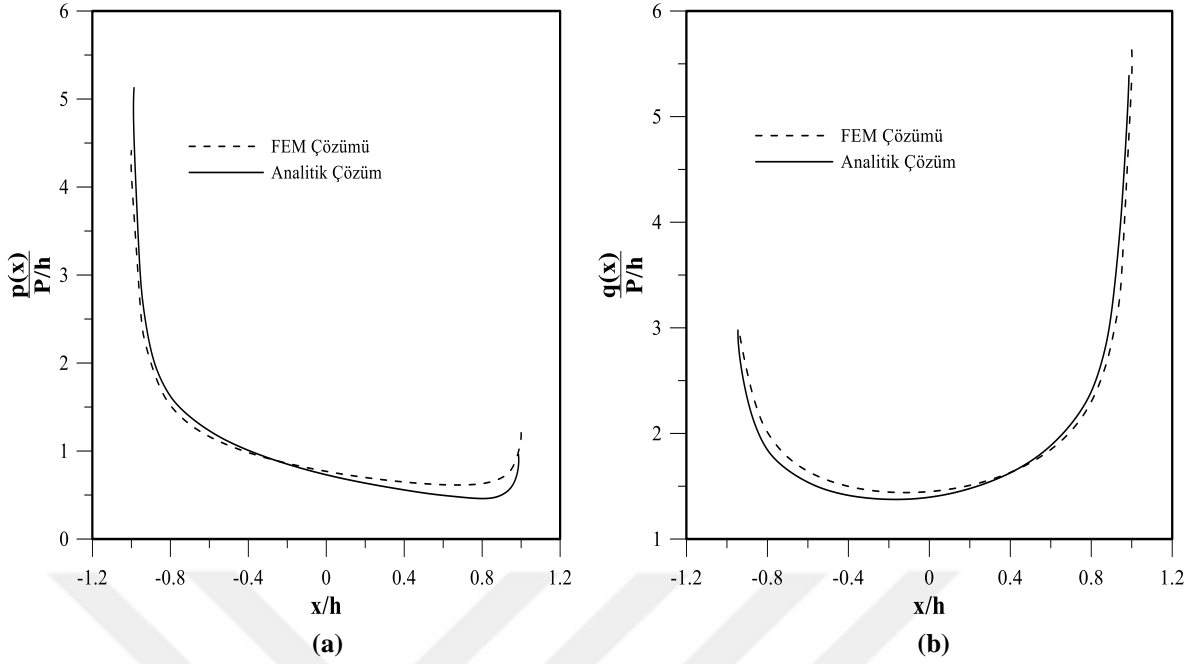
Şekil 44. Kayma modülü oranlarına (μ_2/μ_h) göre FD tabaka ile elastik düzlem arasındaki açılma ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\beta h=-0.3364$, $\gamma h=-0.3364$, $Q=2P$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $h=1$, $\mu_0=1$, $\lambda=140>\lambda_{cr}$)

3.3. Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Elde Edilen Çözümlerin Analitik Çözümle Karşılaştırılması

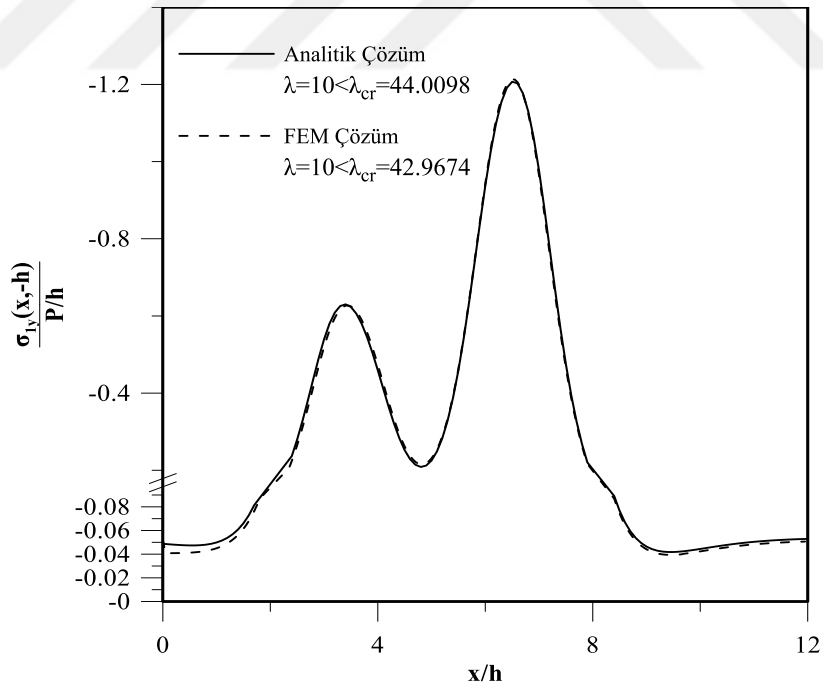
Şekil 45-58’de çeşitli boyutsuz büyüklükler için analitik çözüm ve sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen çözümler kıyaslanmıştır. Karşılaştırılan bu boyutsuz büyüklükler sürekli temas için; blok altlarında ortaya çıkan temas gerilmeleri, elastik yarı sonsuz düzlem ile FD tabaka arasında meydana gelen ilk ayrılma yükleri, ilk ayrılma uzaklıkları, yük faktörünün çeşitli değerleri için elastik yarı sonsuz düzlem ile FD tabaka arasında oluşan σ_y gerilme dağılımları ile FD tabaka derinliği boyunca meydana gelen gerilme dağılımlarıdır. Süreksiz temas durumunda ise ayrılmanın başlangıç ve bitiş noktalarının yanı sıra yük faktörünün kritik yükten büyük olması durumunda meydana gelen gerilme dağılımları karşılaştırılmıştır.



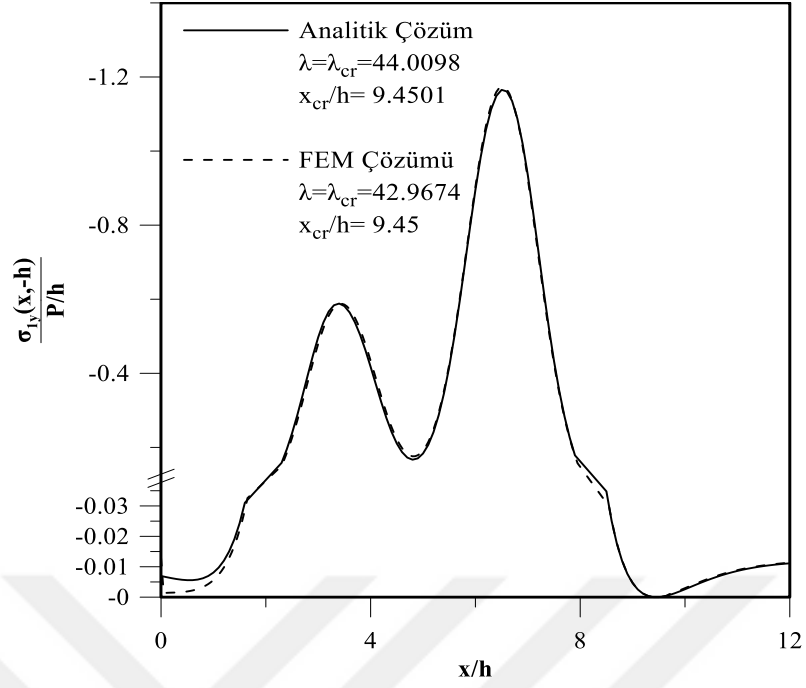
Şekil 45. Sürekli temasta analitik ve SEM çözümlerinden elde edilen bloklar altındaki temas gerilmesi dağılımının karşılaştırılması ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$, $y=0$, $h=1$, $\mu_2/\mu_h=1$, $\beta h=2.0794$)



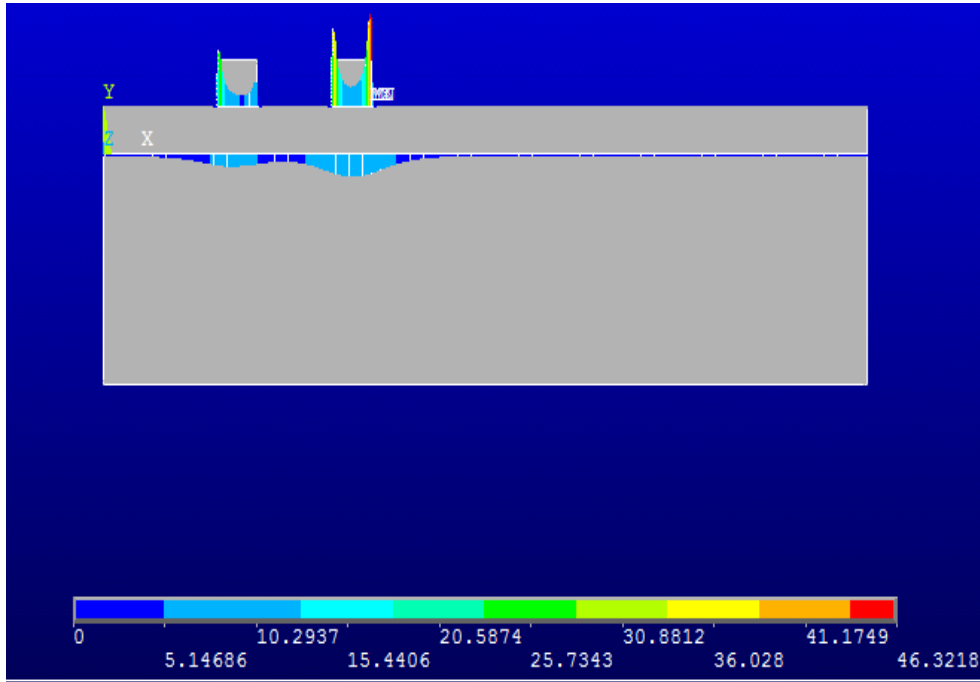
Şekil 46. Sürekli temasta analitik ve SEM çözümlerinden elde edilen bloklar altındaki temas gerilmesi dağılımının karşılaştırılması ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$, $y=0$, $h=1$, $\mu_2/\mu_h=1$, $\beta h=-2.0794$)



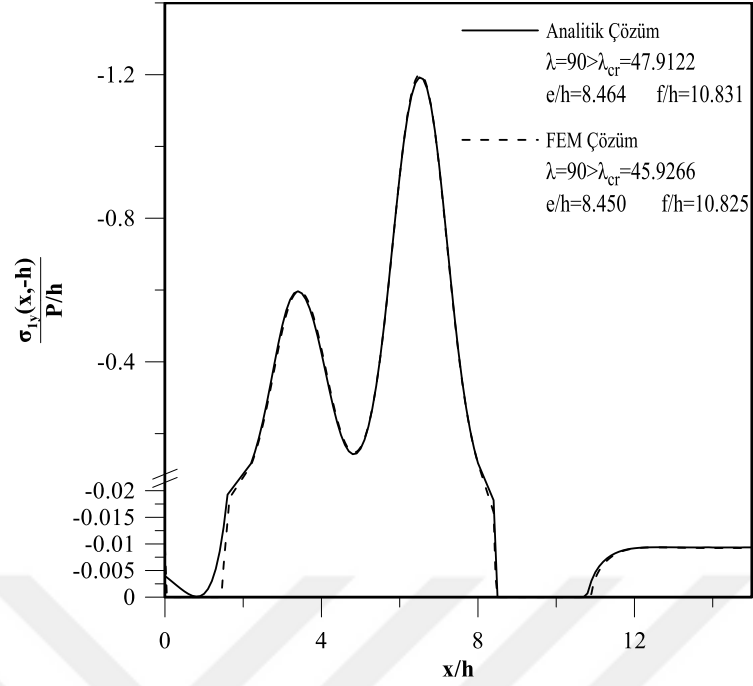
Şekil 47. Analitik ve SEM çözümlerinden elde edilen FD tabaka ve elastik düzlem arasındaki $\sigma_{1y}(x,-h)/P/h$ sürekli temas gerilmesi dağılımının karşılaştırılması ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $Q=2P$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $y=0$, $h=1$, $\mu_2/\mu_h=1$, $\beta h=-0.4055$, $\gamma h=1.3863$)



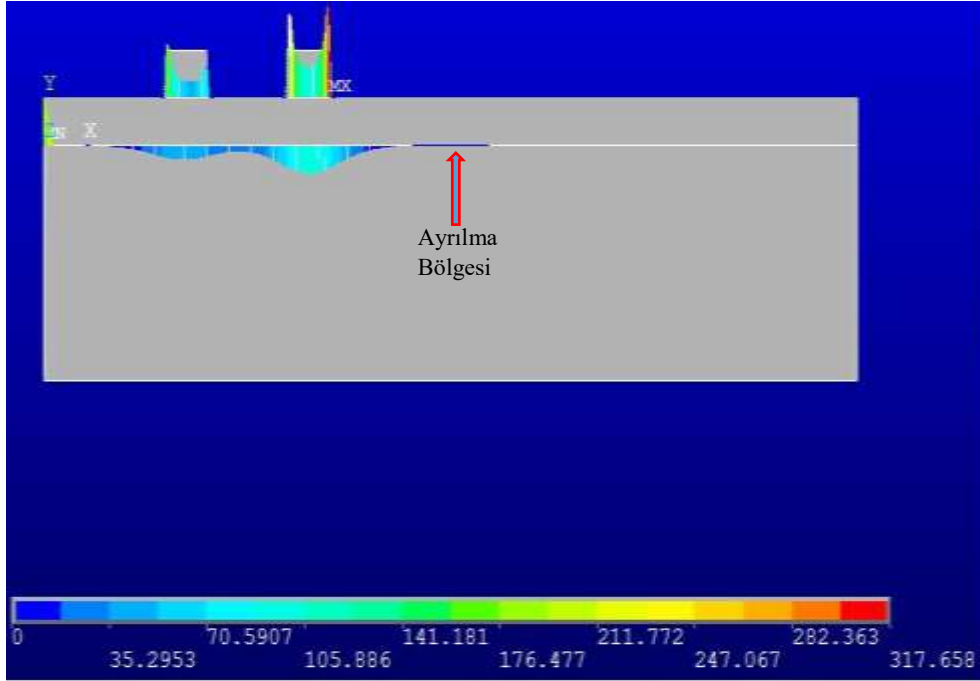
Şekil 48. Analitik ve SEM çözümlerinden elde edilen FD tabaka ve elastik düzlem arasındaki $\sigma_{1y}(x,-h)/P/h$ sürekli temas gerilmesi dağılımının karşılaştırılması ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $Q=2P$ $\kappa_1=\kappa_2=2$, $y=0$, $h=1$, $\mu_2/\mu_h=1$, $\beta h=-0.4055$, $\gamma h=1.3863$)



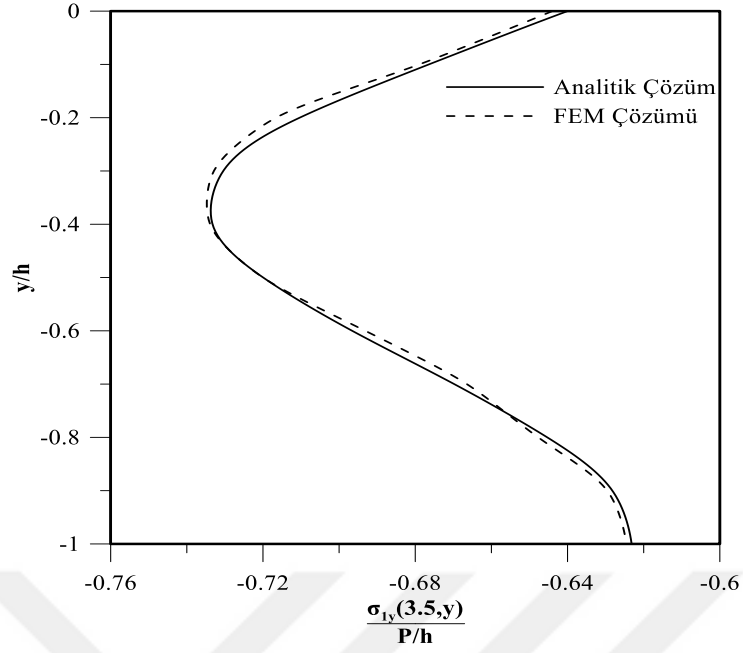
Şekil 49. ANSYS çözümünden elde edilen σ_y sürekli temas gerilmesi dağılımı



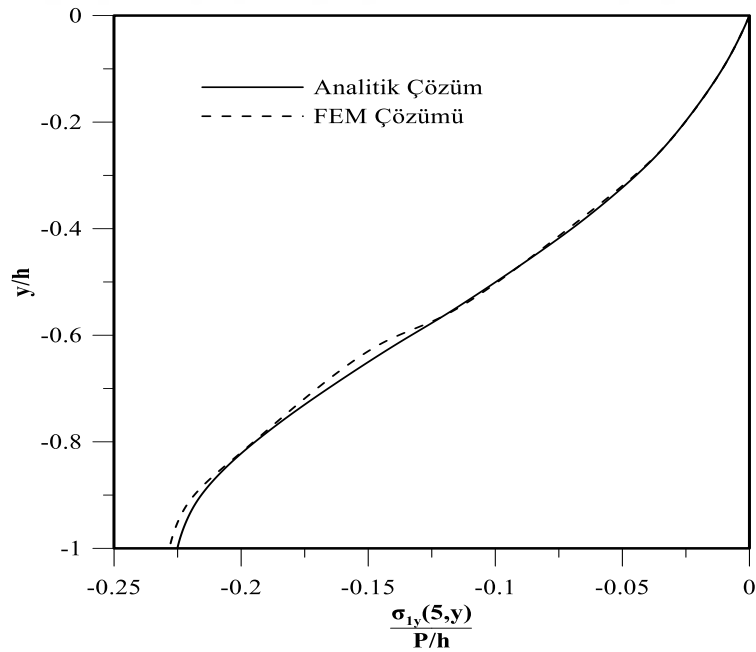
Şekil 50. Analitik ve SEM çözümlerinden elde edilen FD tabaka ve elastik düzlem arasındaki $\sigma_{1y}(x,-h)/P/h$ süreksiz temas gerilmesi dağılımının karşılaştırılması ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $Q=2P$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $y=0$, $h=1$, $\mu_2/\mu_h=2$, $\beta h=0.3364$, $\gamma h=0.3364$)



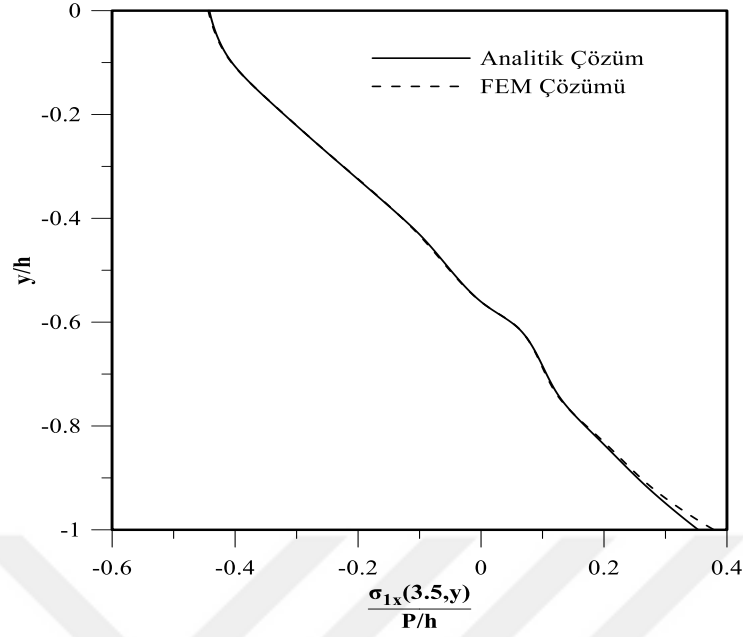
Şekil 51. ANSYS çözümünden elde edilen σ_y süreksiz temas gerilmesi dağılımı



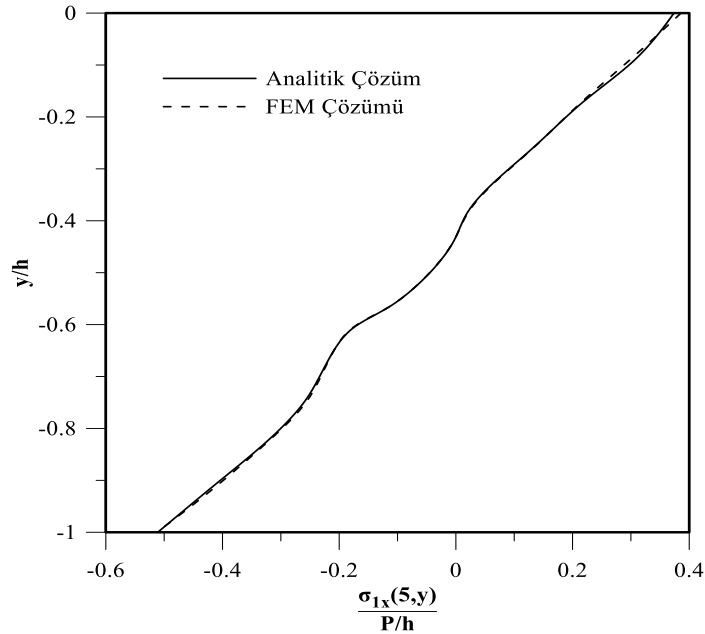
Şekil 52. Sürekli temata analitik ve SEM çözümlerinden elde edilen 1.blok ortasında derinlik boyunca oluşan $\sigma_{1y}(3.5,y)/P/h$ gerilme dağılımının karşılaştırılması ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$, $h=1$, $\mu_2/\mu_h=1$, $\beta h=-0.4055$, $\gamma h=1.3863$)



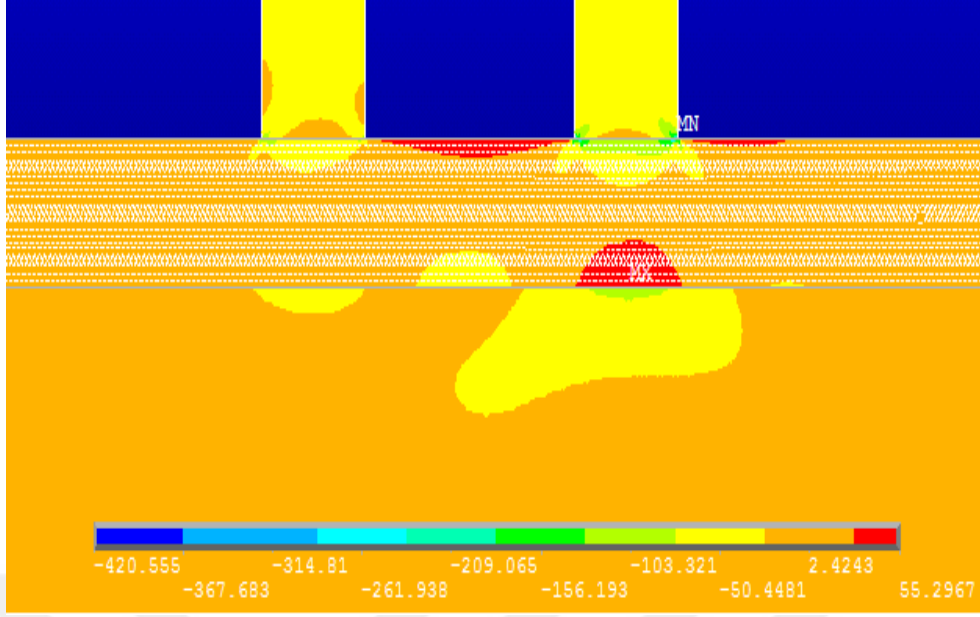
Şekil 53. Sürekli temasta analitik ve SEM çözümlerinden elde edilen iki blok arasında derinlik boyunca oluşan $\sigma_{1y}(5,y)/P/h$ gerilme dağılımının karşılaştırılması ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$, $h=1$, $\mu_2/\mu_h=1$, $\beta h=-0.4055$, $\gamma h=1.3863$)



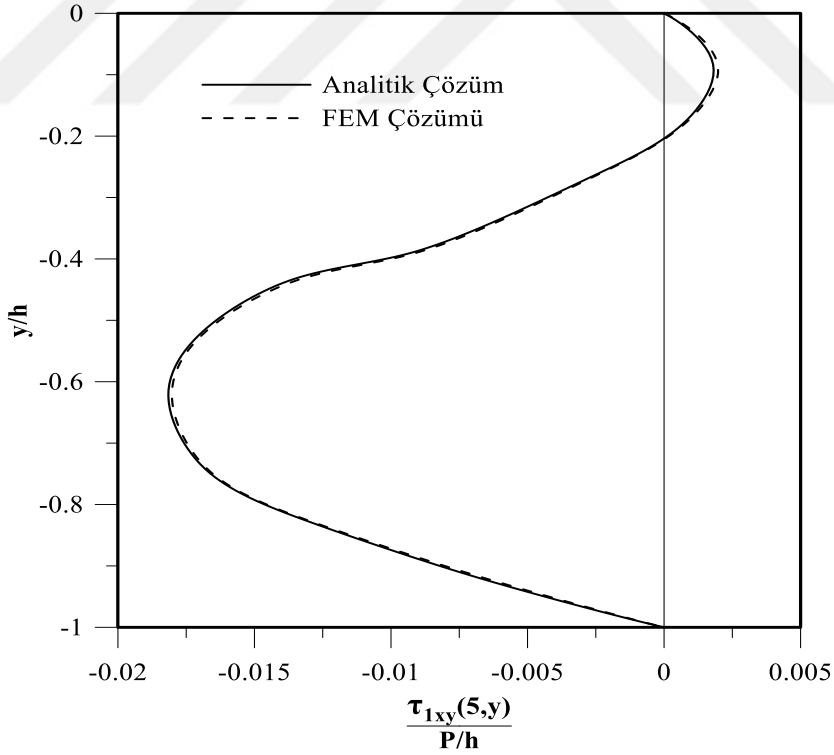
Şekil 54. Sürekli temasta analitik ve SEM çözümlerinden elde edilen 1.blok ortasında derinlik boyunca oluşan $\sigma_{1x}(3.5,y)/P/h$ temas gerilme dağılımının karşılaştırılması ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $Q=2P$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $h=1$, $\mu_2/\mu_{-h}=1$, $\beta h=-0.4055$, $\gamma h=1.3863$)



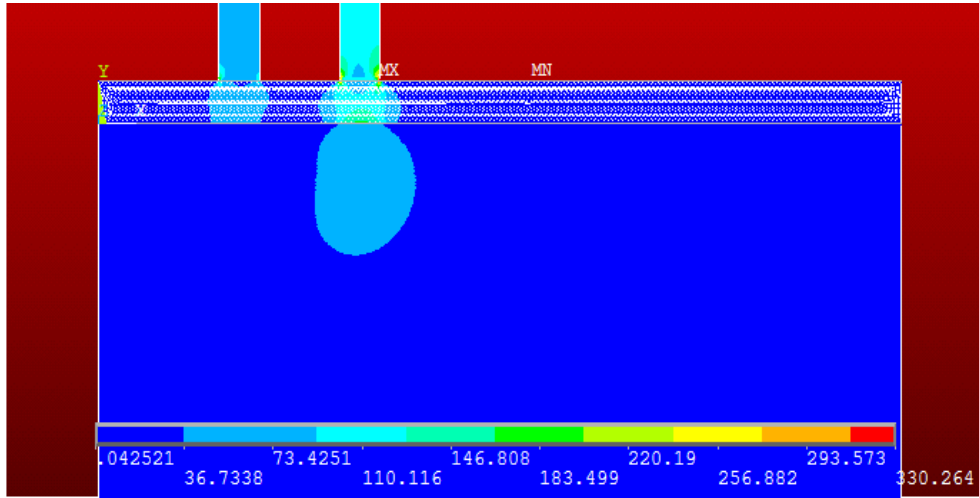
Şekil 55. Sürekli temasta analitik ve SEM çözümlerinden elde edilen iki blok arasında derinlik boyunca oluşan $\sigma_{1x}(5,y)/P/h$ gerilme dağılımının karşılaştırılması ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$, $h=1$, $\mu_2/\mu_{-h}=1$, $\beta h=-0.4055$, $\gamma h=1.3863$)



Şekil 56. ANSYS çözümü ile elde edilen sürekli temasta σ_x gerilme dağılımı ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$, $h=1$, $\mu_2/\mu_h=1$, $\beta h=-0.4055$, $\gamma h=1.3863$)



Şekil 57. Sürekli temasta analitik ve SEM çözümlerinden elde edilen iki blok arasında derinlik boyunca oluşan $\tau_{1xy}(5,y)/P/h$ gerilmesi dağılımının karşılaştırılması ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$, $h=1$, $\mu_2/\mu_h=1$, $\beta h=-0.4055$, $\gamma h=1.3863$)



Şekil 58. ANSYS çözümü ile elde edilen sürekli temasta σ_y gerilme dağılımı ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $Q=2P$, $h=1$, $\mu_2/\mu_{-h}=1$, $\beta h=-0.4055$, $\gamma h=1.3863$)

Tablo 10’da, rijitlik parametresi değişimine göre FD tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında meydana gelen ilk ayrılma yükü ve uzaklıklarının analitik ve SEM sonuçlarına ait karşılaştırmalar yapılmıştır. Tablo 11’de ise çeşitli kayma modülleri oranına göre, analitik ve SEM ile elde edilen ilk ayrılma yükü ve uzaklıklarına ait sonuçların kıyaslaması verilmiştir.

Tablo 10. Rijitlik parametresinin (βh) çeşitli değerleri için analitik ve SEM çözümlerinden elde edilen FD tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve uzaklıklarının karşılaştırılması ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $Q=2P$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\mu_2/\mu_{-h}=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $\gamma h=-0.6931$, $y=-h$, $h=1$)

βh	Analitik		SEM		Hata (%)
	x_{cr}	λ_{cr}	x_{cr}	λ_{cr}	
1.0986	9.969	100.747	9.975	100.315	0.43
0.0001	9.577	110.823	9.575	109.948	0.79
-1.0986	9.292	135.100	9.275	133.215	1.39

Tablo 11. Çeşitli kayma modülü oranları (μ_2/μ_h) için analitik ve SEM çözümlerinden elde edilen FD tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve uzaklıklarının karşılaştırılması ($Q=2P$, $a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(c-b)/h=2$, $(d-c)/h=1$, $\mu_0=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $\beta h=\gamma h=-0.3364$)

μ_2 / μ_h	Analitik		SEM		Hata (%)
	x_{cr}	λ_{cr}	x_{cr}	λ_{cr}	
0.5	10.109	111.3727	10.100	109.9173	
1	9.478	95.8408	9.450	94.3149	
2	9.017	74.9458	9.025	73.4396	

Tablo 12. Yük faktörü değişimine göre analitik ve SEM çözümlerinden elde edilen FD tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ayrılma başlangıç ve bitiş noktalarının karşılaştırılması ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $\mu_0=1$, $(c-b)/h=2$, $Q=2P$, $(d-c)/h=1$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $\mu_2/\mu_h=1$, $\gamma h=0.4055$, $\beta h=-0.4055$)

λ	Analitik	SEM	Hata (%)	Analitik	SEM	Hata (%)
	e/h	e/h		f/h	f/h	
80	8.967	8.975	0.089	10.198	10.250	0.507
85	8.905	8.900	0.056	10.358	10.400	0.403
90	8.855	8.850	0.056	10.506	10.550	0.417

Tablo 12’de yük faktörü değişimine göre süreksiz temasta meydana gelen ayrılma başlangıç ve bitiş değerlerinin analitik ve SEM ile elde edilen sonuçları karşılaştırılmıştır. Şekil 45-58 ve Tablo 10-12 birlikte incelendiğinde sonlu elemanlar metodu ile elde edilen sonuçların analitik sonuçlarla oldukça uyumlu ve kabul edilebilir derecede yakın olduğu görülebilir.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada, elastik yarı sonsuz düzleme oturan ve iki rijit blok ile yüklü fonksiyonel derecelendirilmiş tabakada sürekli ve süreksiz temas problemi incelenmiştir. Fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın elastisite modülü ve yoğunluğu tabaka üst yüzeyinden alt yüzeyine doğru fonksiyonel bir değişim göstermektedir. Tabaka, iki rijit düz blokla farklı yüklemeler altında çözüldüğünden simetrik bir problem değildir. Çözüm üç aşamalı olarak yapılmıştır. İlk olarak sürekli temas problemi ele alınmıştır. Sürekli temas probleminde, yük faktörü λ 'nın kritik değerinden (λ_{cr}) küçük veya eşit olması durumlarına göre elde edilen gerilme değerleri çeşitli boyutsuz büyüklükler için incelenmiştir. Bu boyutsuz büyüklükler rijitlik parametresi, yoğunluk değişim parametresi, blok genişlikleri, bloklar arası uzaklıklar, kayma modülleri oranı ve yüklerin değişimleridir. Ayrıca bu bölümde FD tabakanın elastik yarı sonsuz düzlemde ayrılmaya başladığı nokta ve bu ayrılmaya sebep olan yükler de araştırılmıştır. İkinci kısımda $\lambda > \lambda_{cr}$ durumunda meydana gelen süreksiz temas problemi benzer boyutsuz büyüklükler için incelenmiştir. Farklı olarak ayrılma bölgesinde oluşan açılma durumu da ele alınmıştır. Üçüncü bölümde analitik çözümü yapılan sürekli ve süreksiz temas probleminin sonlu elemanlar yöntemi ile de çözümü yapılmış, sonuçlar grafik ve tablolarla kıyaslanmıştır. Bu aşamada sonlu elemanlar metodu ile çözüm yapan ANSYS paket programı kullanılmıştır. Ancak programda fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelere ait malzeme özelliklerinin tanımlanabileceği standart bir menü olmadığından, programa özel bir yazılımla makro eklenerek çözüm yapılabilmiştir. Bu üç kısımda yapılan çözümlerden elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

- Tabakanın üst yüzey rijitliği (βh) arttıkça, blokların altındaki temas gerilmeleri azalırken, blok köşelerinde gerilme değerleri artmıştır.
- Blok üzerindeki yük arttırıldığında, bloğun altında oluşan temas gerilme değerleri de artmıştır.
- Blok genişlikleri $((b-a)/h)$ ve $((d-c)/h)$ azaldığında, temas daha küçük bir alanda meydana geldiğinden gerilme değerleri artmıştır.

- Bloklar arası mesafe yakınlaştıkça, blok köşelerinde oluşan gerilme değerleri blokların yakın köşelerinde azalırken, uzak köşelerde en büyük gerilmeler oluşmuştur.
- Elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülünün FD tabakanın kayma modülüne oranı (μ_2 / μ_{-h}) arttıkça blok köşelerindeki gerilmeler artış göstermiş, blok ortasına doğru ise azalmıştır.
- Fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında meydana gelen ilk ayrılma noktası ve ilk ayrılma yükünün belirlenmesi için $\sigma_y(x, -h) / P / h$ 'ın çeşitli analizleri yapılmıştır. Bloklar arası mesafe arttıkça ayrılmanın başladığı noktada önemli bir değişim görülmezken, ayrılmayı başlatan yük değerinde artış meydana gelmiştir. Bunun nedeni, bloklar birbirlerinden uzaklaştıkça aralarındaki etkileşim kaybolduğundan ayrılma için daha büyük bir yüke ihtiyaç duyulmasıdır. Yoğunluk değişim parametresinin (γh) tabaka alt yüzeyine doğru azalması ya da artması ayrılmanın başlangıç noktasını değiştirmezken, tabaka alt yüzey yoğunluğunun daha büyük olması durumunda ayrılmayı meydana getiren yüklerin azaldığı görülmüştür.
- Rijitlik parametresinin (βh) etkisi incelendiğinde, FD tabaka üst yüzey rijitliğinin FD tabaka alt yüzeyine göre fazla olduğu durumda ilk ayrılma yüklerinde önemli bir değişim gözlenmemiştir. Aksi durumda ise ayrılmayı başlatan yüklerde artış meydana gelmiştir. Ayrıca (βh) arttıkça ilk ayrılma noktası da 2. bloktan daha uzak bir noktada oluşarak artış göstermiştir. Blok genişlikleri azaldığında, ayrılma daha küçük bir yükte oluşurken ayrılmanın başladığı nokta 2. bloktan giderek uzakta meydana gelmiştir. Blok genişliklerinin azalması ayrıca gerilme artışına da sebep olmuştur.
- Tabakanın x eksenini boyunca $\sigma_x(x, -h) / P / h$ gerilme dağılımı da incelenmiştir. FD tabaka alt yüzey rijitliğinin artması durumunda çekme gerilmesi değerleri blok altlarına doğru artış göstermiştir. Yoğunluk değişim parametresine göre tabaka boyunca meydana gelen $\sigma_x(x, -h) / P / h$ gerilme dağılımı incelendiğinde, FD tabakanın üst yüzey yoğunluğunun artması durumunda çekme gerilmeleri artmış, basınç gerilmeleri azalmıştır. Bloklar arası mesafe değişimine göre ise, mesafe arttıkça tabaka boyunca çekme ve basınç gerilmelerinde artış gözlenmiştir.

- FD tabaka derinliği boyunca $\sigma_x(x, y)/P/h$ boyutsuz gerilme dağılımı incelendiğinde, bloklar altına denk gelen kesitlerde tabakanın üst yüzeyinde basınç alt yüzeyinde çekme oluşurken, blokların arasında tabakanın üst bölgesinde çekme alt bölgesinde ise basınç gerilmeleri elde edilmiştir. Bloklar altında kalan bölgede FD tabakanın rijitliği tabaka alt yüzeyine doğru artınca en yüksek çekme ve basınç gerilmeleri elde edilmiştir. Aynı noktada yoğunluk parametresi değişiminin gerilmeleri çok fazla etkilemediği görülmüştür. Bloklar arası mesafe değişimi blokların tam ortasındaki kesit için incelendiğinde, mesafe arttıkça tabaka üst yüzeyindeki çekme gerilmeleri azalırken tabaka altına doğru ise basınç gerilmelerinin arttığı görülmüştür. Elastik yarı sonsuz düzlemde basınç gerilmeleri meydana gelmiştir. βh ve γh değişimi elastik düzlemde çok önemli değişimler meydana getirmezken bloklar arası uzaklık arttıkça yarı sonsuz düzlemde oluşan gerilmeler azalmıştır.
- $\sigma_y(x, y)/P/h$ gerilme dağılımı fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın derinliği boyunca çeşitli boyutsuz büyüklükler için bloklar altında ve bloklar ortasındaki kesitlerde olmak üzere iki bölgede incelenmiştir. Bloklar arası mesafe arttıkça iki blok ortasındaki kesitte meydana gelen gerilmeler azalmıştır. Tabaka altına doğru rijitliğin artması durumunda bloklar ortasına denk gelen kesitte en büyük gerilme değerlerine ulaşılmıştır. FD tabaka alt yüzey yoğunluğunun üst yüzey yoğunluğundan büyük olduğu durumda gerilmeler daha büyüktür. Benzer durum bloklar ortasındaki gerilme dağılımının yoğunluk parametresine göre değişimi için de geçerlidir. Ancak her iki bölgede de tabaka derinliğinin yaklaşık yarısına kadar önemli bir gerilme değişimi gözlenmemiştir. Blok genişliklerine göre yapılan analizde, bloklar ortasında meydana gelen en büyük gerilmeler en küçük blok genişliklerinde meydana gelmiştir. Elastik yarı sonsuz düzlemin gerilme dağılımları FD tabakanın alt yüzeyindeki gerilmelere eşit çıkmış ve $y \rightarrow -\infty$ doğru gittikçe gerilmeler sıfıra yaklaşarak etkisini kaybetmiştir. Blokların dışında oluşan gerilmelerin FD tabakanın üst yüzeyinde sıfır olması ile FD tabakanın alt yüzeyindeki gerilme değerinin, elastik düzlemin üst yüzeyindeki gerilmelere eşit olması problemin sınır şartlarının sağlandığını göstermektedir.

- Boyutsuz $\tau_{xy}(x, y)/P/h$ kayma gerilmeleri sürtünme olmadığından sadece derinlik boyunca ele alınmıştır. Yapılan analizlerde FD tabaka üst ve alt yüzeyinde kayma gerilmeleri sıfır olmuştur. Bu durum problemin sınır şartlarının sağlandığını göstermektedir. Rijitlik tabaka alt yüzeyine doğru arttıkça blok orta noktasına denk gelen bölgelerde kayma gerilmeleri de artmıştır. Elastik yarım düzlemde de benzer durum oluşmuştur. Bloklar arasında, FD tabakanın üst yüzey rijitliğinin büyük olduğu durumda kayma gerilmeleri en yüksek değerlere ulaşmış ancak elastik yarım düzlem de bu kez tersi durum oluşarak en büyük gerilme tabaka alt yüzeyinin daha rijit olduğu durumda oluşmuştur. Bloklar arası mesafe arttıkça hem FD tabakada hem de elastik yarım düzlemde kayma gerilmesi değerlerinin azaldığı görülmüştür. Elastik yarım düzlemin kayma modülü FD tabakanın alt yüzey kayma modülünden küçük olduğunda meydana gelen kayma gerilmeleri FD tabakada en büyük değerleri alırken, elastik düzlemde ise en küçük gerilmeler oluşmuştur. Ayrıca elastik yarım düzlemde σ_x ve σ_y 'de olduğu gibi τ_{xy} kayma gerilmelerinde de $y \rightarrow -\infty$ 'a gittikçe gerilmeler sıfıra yaklaşarak etkisini kaybetmektedir.
- FD tabakanın alt yüzey rijitliğinin artması durumunda ayrılma bölgesi küçülmüştür. Ayrılmanın başladığı nokta ise giderek 2. bloğa yaklaşmıştır. Yoğunluğun tabaka alt yüzeyine doğru artması durumunda da benzer şekilde ayrılma daha küçük bir bölgede meydana gelmiştir. Bloklar birbirlerine yaklaştıkça ayrılma bölgesi büyümüştür. Bloklar arası mesafe arttıkça birbirleriyle olan etkileşim giderek kaybolduğundan hem gerilme azalmış hem de ayrılma bölgesi küçülmüştür. Elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülünün FD tabakanın alt yüzeyinin kayma modülüne göre artması durumunda daha büyük bir ayrılma bölgesi oluşmuştur. Yük faktörü (λ) artınca ayrılma bölgesinin büyüdüğü tespit edilmiştir.
- $v_1(x, -h) - v_2(x, -h)$ yer değiştirmeler farkı veya bir başka ifadeyle fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında meydana gelen açılmalar çeşitli boyutsuz büyüklükler için incelenmiştir. FD tabakanın alt yüzey rijitliği azaldıkça FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki açılma önemli ölçüde artış göstermiştir. Bu durum yoğunluk parametresi değişimi için de geçerlidir. Tabaka alt yüzey yoğunluğu üst yüzeye göre azaldığında, açılma

değerlerinde artış gözlemlenmiştir. Blokların birbirlerine yakın olduğu durumlarda daha büyük açılma meydana gelmiştir. Blok etkileşimlerinin açılmaları da doğrudan etkilediği söylenebilir. Kayma modülleri oranına göre meydana gelen açılmalar incelendiğinde, elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülünün FD tabaka alt yüzey kayma modülüne göre büyük seçilmesi halinde daha büyük açılma değerleri elde edilmiştir.

- Bu çalışmada ayrıca, analitik çözümden elde edilen sonuçların karşılaştırmasının yapılabilmesi için alternatif bir çözüm metodu olarak Sonlu Elemanlar Yöntemi kullanılmıştır. ANSYS paket programına eklenen bir makro ile fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme özellikleri ve ağlara bölme işlemleri tanımlanarak sonlu elemanlar çözümü gerçekleştirilmiştir. Sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen sonuçların analitik çözümle oldukça uyumlu olduğu görülmüştür. Böylece analitik çözümün uzun ve karmaşık matematiksel terimlerinin yerine çok daha kısa sürede çözüm alınabilen, çeşitli geometrilere rahatlıkla uygulanabilen sonlu elemanlar yönteminin alternatif bir çözüm metodu olarak kullanılabileceği görülmüş ve ANSYS programına eklenen bu yazılım ile literatüre katkıda bulunulmuştur.

5. ÖNERİLER

Bu tezde “Elastik Yarı Sonsuz Düzlem Üzerine Oturan ve İki Blok İle Yüklü Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabakada Temas Problemi” isimli çalışma yapılmıştır. Bu çalışmanın sonuçları dikkate alınarak gelecekteki çalışmalara yön vermesi amacıyla aşağıda bir takım önerilerde bulunulmuştur.

- Bu problemde rijit bloklar kullanılmış olup bunun yerine elastik bloklar ile fonksiyonel derecelendirilmiş tabakada temas problemi incelenebilir.
- Elastik yarı sonsuz düzlemin de fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden oluştuğu düşünülerek fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ve fonksiyonel derecelendirilmiş düzlem problemi çözülebilir.
- Fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka altına elastik yarı sonsuz düzlem yerine rijit bir düzleme oturan fonksiyonel derecelendirilmiş tabakalar eklenerek temas çözümü araştırılabilir.
- Sonlu elemanlar metodu ile çözüm geliştirilerek farklı doğrultularda derecelendirilmiş malzemeler üzerinde çözümler yapılabilir.

6. KAYNAKLAR

- Abhilash, M.N. ve Murthy, H., 2014. Finite Element Analysis of 2-D Elastic Contacts Involving Fgms., International Journal of Computer Methods Engineering Science Mechanic, 15,3, 253–7.
- Adams, G. G. ve Bogy, D. B., 1977. The Plane Symmetric Contact Problem for Dissimilar Elastic Semi-Infinite Strips of Different Widths, ASME Journal of Applied Mechanics, 44,4, 604-610.
- Adams, G.G., 1978. An Elastic Strip Pressed Against an Elastic Half Plane by a Steadily Moving Force, Journal of Applied Mechanics, 45, 89-94.
- Adams, G.G. ve Zeid, I., 1984. An Elastic Punch Moving Across the Surface of a Semi-Infinite Solid, Journal of Applied Mechanics, 51, 622-629.
- Adıbelli, H. 2010. Elastik Yarım Düzleme Oturan Simetrik Yüklü Yapışık Çift Tabakada Değme ve Çatlak Problemi, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Adıyaman, G., Yaylacı, M. ve Birinci, A., 2015. Analytical and Finite Element Solution of a Receding Contact Problem, Structural Engineering and Mechanics, 54,1, 69-85.
- Adıyaman, G., Öner, E. ve Birinci, A., 2016. A Receding Contact Problem Between a Functionally Graded Layer and Two Homogeneous Quarter Planes, Acta Mechanica, 227, 1753-1766.
- Adıyaman, G., Öner, E. ve Birinci, A., 2017. Continuous and Discontinuous Contact Problem of a Functionally Graded Layer Resting on a Rigid Foundation, Acta Mechanica, 228,9, 3003-3017.
- Aksogan, O., Akavcı, S. ve Becker, A.A., 1996. A Comparative Study of the Contact Problem of an Elastic Layer Supported by Two Elastic Quarter Planes, Journal of Faculty of Engineering And Architecture of Çukurova University, 11,1, 25-31.
- Aksogan, O., Akavcı, S. ve Becker A.A., 1997. The Solution of The Nonsymmetrical Contact Problem of an Elastic Layer Supported by Two Elastic Quarter Planes Using Three Different Methods, Journal of Faculty of Engineering and Architecture of Çukurova University, 12,1, 1-14.
- Alinia, Y., Guler, M.A. ve Adibnazari, S., 2014. On the Contact Mechanics of a Rolling Cylinder on a Graded Coating. Part 1: Analytical formulation, Mechanics of Materials, 68, 207–216.
- Alinia, Y., Beheshti, A., Guler, M.A., El-Borgi, S. ve Polycarpou, A.A., 2016. Sliding Contact Analysis of Functionally Graded Coating/Substrate System, Mechanics of Materials, 94, 142–155.

- Apatay, T., 2010. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Kaplamalarda Çatlak ve Temas Problemi, Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Bakırtaş, I., 1980. The Problem of a Rigid Punch on a Non-Homogeneous Elastic Half Space, International Journal of Engineering Science, 18, 4, 597-610.
- Birinci, A., Kahya, V. ve Erdöl, R., 1997. Elastik Mesnete Oturan Bileşik Tabakalarda Sürekli Değme Problemi, TUMTMK X. Ulusal Mekanik Kongresi, Eylül, İstanbul, Bildiriler Kitabı: 165-173.
- Birinci, A., 1998. Alt Tabakasında Düşey Bir Çatlağı Bulunan ve Rijit Bir Blok Aracılığı İle Yüklenen Bileşik Tabaka Problemi, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Birinci, A. ve Erdöl, R., 1999. Frictionless Contact Between a Rigid Stamp and an Elastic Layered Composite Resting on Simple Supports, Mathematical & Computational Applications, 4, 3, 262-272.
- Chan, S.K. ve Tuba, I.S., 1971. A Finite Element Method for Contact Problems of Solid Bodies-Part I. Theory and Validation, International Journal of Mechanical Science, 13, 519-530.
- Chen, P., Chen, S. ve Peng, J., 2015. Frictional Contact of a Rigid Punch on an Arbitrarily Oriented Gradient Half-Plane, Acta Mechanica, 226, 4207-4221.
- Chidlow, S.J. ve Teodorescu, M., 2013. Two-Dimensional Contact Mechanics Problems Involving Inhomogeneously Elastic Solids Split into Three Distinct Layers, International Journal of Engineering Science, 70, 102-123.
- Chidlow, S.J., Chong, W.W.F. ve Teodorescu, M., 2013. On the Two-Dimensional Solution of Both Adhesive and Non-adhesive Contact Problems Involving Functionally Graded Materials, European Journal of Mechanics, 39, 86-103.
- Civelek, M.B. ve Erdogan, F., 1975. The Frictionless Contact Problem for an Elastic Layer Under Gravity, ASME Journal of Applied Mechanics, 42, 1, 136-140.
- Conway, H.D., 1971. The Effect of Friction on Normal Contact Stresses, ASME Journal of Applied Mechanics, 38, 1094-1095.
- Çakıroğlu, F.L. ve Erdöl, R., 1989. Elastik Zemine Oturan Bileşik Şeritte Sürekli Temas Problemi, 6. Ulusal Mekanik Kongresi, Bursa, Bildiriler Kitabı I: 243-248.
- Çakıroğlu, F.L., 1990. Elastik Yarı Sonsuz Düzleme Oturan Bileşik Tabakaların Değme Problemi, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Çakıroğlu, A.O. ve Çakıroğlu, F.L., 1991. Continuous and Discontinuous Contact Problems for Strips on an Elastic Semi-Infinite Plane, International Journal of Engineering Science, 29, 1, 99-111.
- Çömez, İ., 2003. Rijit Bir Panç ile Bastırılmış ve Tabanda Tam Olarak Bağlı Ağırksız Çift Şerit Problemi, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

- Çömez, İ., Birinci, A. ve Erdöl, R., 2003. Rijit Bir Panç Aracılığıyla Bastırılmış ve Alttan Tam Bağlı Ağırlıksız Çift Şeritte Değme Problemi, TUMTMK XIII. Ulusal Mekanik Kongresi, Eylül, Gaziantep, Bildiriler Kitabı: 321-332.
- Çömez, İ., Birinci, A. ve Erdol, R., 2004. Double Receding Contact Problem for a Rigid Stamp and two Elastic Layers, European Journal of Mechanics, A/Solids, 23, 301-309.
- Çömez, İ., 2015. Contact Problem for a Functionally Graded Layer Indented by a Moving Punch, International Journal of Mechanical Sciences, 100, 339–344.
- Çömez, İ., El-Borgi,S., Kahya, V. ve Erdöl, R., 2016. Receding Contact Problem for Two Layer Functionally Graded Media Indented by a Rigid Punch, Acta Mechanica, 227, 2493–2504.
- Çömez, İ. ve El-Borgi,S., 2018. Contact Problem of a Graded Layer Supported by Two Rigid Punches, Archive of Applied Mechanics, 88,10, 1893-1903.
- Dağ, S., Erdoğan, F., 2000. Crack and Contact Problems in Functionally Graded Materials, Ceramic Transactions, 114, 739-746.
- Dağ, S., 2008. Ortotropik Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemelerin Kırılma ve Temas Mekanığı, TUBITAK projesi, MISAG-TUN-1, Ankara.
- Dempsey, J.P., Zhao, Z.G., Minnetyan, L. ve Li, H., 1990. Plane Contact of an Elastic Layer Supported by a Winkler Foundation, ASME Journal of Applied Mechanics, 57, 974-980.
- El-Borgi,S., Abdelmoula, R. ve Keer L., 2006. A Receding Contact Problem Between a Functionally Graded Layer and a Homogeneous Substrate, International Journal of Solids and Structures, 43, 658-674.
- El-Borgi, S., Usman, S. ve Guler, M.A., 2014. A Frictional Receding Contact Plane Problem between a Functionally Graded Layer and a Homogeneous Substrate, International Journal of Solids and Structures, 51, 4462–4476.
- El-Borgi, S. ve Çömez, İ., 2017. A Receding Frictional Contact Problem Between a Graded Layer and a Homogeneous Substrate Pressed by a Rigid Punch, Mechanics of Materials, 114, 201-214.
- Elloumi, R., Kallel-Kamoun, I. ve El-Borgi, S., 2010. A Fully Coupled Partial Slip Contact Problem in a Graded Half-Plane, Mechanics Of Materials, 42, 417–428.
- Erdogan, F. ve Gupta, G.D., 1972. On the Numerical Solution of Singular Integral Equations, Quarterly Journal of Applied Mathematics, 29, 525-534.
- Erdoğan, F. ve Ratwani, M., 1974. The Contact Problem for an Elastic Layer Supported by Two Elastic Quarter Planes, ASME Journal of Applied Mechanics, 41, 673-677.
- Erdogan, F., 1994. Fracture Problems in Functionally Graded Materials, Turkish Journal of Engineering and Environmental Sciences, 18, 185-210.

- Galın, L.A., 1961. Contact Problems in the Theory of Elasticity, North Carolina State College Translation Series, Raleigh, North Carolina.
- Geçit, M.R., 1980. A Tensionless Contact without Friction between an Elastic Layer and an Elastic Foundation, International Journal of Solids and Structures, 16, 387-396.
- Geçit, M.R. ve Gökpınar, S., 1985. Frictionless Contact Between an Elastic Layer and a Rigid Rounded Support, The Arabian Journal for Science and Engineering, 10,3, 245-251.
- Geçit, M.R., 1986. Axisymmetric Contact Problem for a Semi-Infinite Cylinder and a Half Space, International Journal of Engineering Science, 24,8, 1245-1256.
- Giannakopoulos, A. ve Suresh, S., 1997. Indentation of Solids with Gradients in Elastic Properties: Part I. Point Force Solution, International Journal of Solids and Structures, 34, 19, 2357-2392.
- Giannakopoulos, A. ve Suresh, S. 1997. Indentation of Solids With Gradients in Elastic Properties: Part II. Axisymmetric Indenters, International Journal of Solids and Structures, 34,19, 2393-2428.
- Güler, M.A. ve Erdoğan, F., 2000. Contact Mechanics of FGM Coatings, PhD. Thesis, Lehigh University, Pennsylvania, USA.
- Güler, M.A., Gülver, Y.F. ve Nart, E., 2012. Contact Analysis of Thin Films Bonded to Graded Coatings, International Journal of Mechanical Science, 55,1, 50–64.
- Güler, M.A., Kucuksucu, A., Yılmaz, K.B. ve Yildirim, B., 2017. On the Analytical and Finite Element Solution of Plane Contact Problem of a Rigid Cylindrical Punch Sliding over a Functionally Graded Orthotropic Medium, International Journal of Mechanical Sciences, 120, 12–29.
- Gun , H. ve Gao, X.W., 2014. Analysis of Frictional Contact Problems for Functionally Graded Materials Using BEM, Engineering Analysis with Boundary Elements, 381–7.
- Heß, M., 2016. A Simple Method for Solving Adhesive and Non-Adhesive Axisymmetric Contact Problems of Elastically Graded Materials, International Journal of Engineering Science, 104, 20–33.
- Jobin, K.J., Abhilash, M.N. ve Murthy, H., 2017. A Simplified Analysis of 2D Sliding Frictional Contact Between Rigid Indenters And FGM Coated Substrates, Tribology International, 108, 174–185.
- Johnson, K.L., 1985. Contact Mechanics, First Edition, Cambridge University Press, Cambridge.
- Kahya, V., Birinci A. ve Erdöl R., 2001. Frictionless Contact Problem between an Elastic Layer Bonded to a Rigid Support and a Rigid Stamp, Mathematical & Computational Applications, 6,1, 13-22.

- Kahya, V., 2003. İki Tabakalı Elastik Ortamda Sürekli ve Süreksiz Değme Problemlerinin İncelenmesi, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Kahya, V., Özşahin, T.Ş., Birinci, A. ve Erdöl, R., 2007. A Receding Contact Problem for an Anisotropic Elastic Medium Consisting of a Layer and a Half Plane, International Journal of Solids and Structures, 44, 5695-5710.
- Kaman, M.O. ve Çetişli, F., 2011. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme ile Kaplı Silindirde Çatlak Problemi, Elektrik-Elektronik ve Bilgisayar Sempozyumu, Elazığ.
- Karabulut, P.M., Yaylacı, M. ve Birinci, A., 2018. Finite Element Solution of the Contact Problem, Turkish Journal of Science & Technology, 13,1, 113-117.
- Ke, L.L. ve Wang, Y.S., 2007. Two-Dimensional Sliding Frictional Contact of Functionally Graded Materials, European Journal of Mechanics A/Solids, 26, 171-188.
- Keer, L.M. ve Miller, G.R., 1983. Contact Between an Elastically Supported Circular Plate and Rigid Indenter, International Journal of Engineering Science, 21, 681-690.
- Kulchytsky, Z.R. ve Bajkowski, A.S., 2015. Three-Dimensional Analytical Elasticity Solution for Loaded Functionally Graded Coated Half-Space, Mechanics Research Communications, 65, 43-50.
- Küçüksucu, A., 2011. Ortotropik Derecelendirilmiş Malzemelerin Temas Mekaniğinin Analizi, Doktora Tezi, Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.
- Küçüksucu, A., Güler, M.A. ve Avcı, A., 2015. Mechanics of Sliding Frictional Contact for a Graded Orthotropic Half-Plane. Acta Mechanica, 226,10, 3333-74.
- Liu, T.J., Zhang, C., Wang, Y.S. ve Xing, Y.M., 2016. The Axisymmetric Stress Analysis of Double Contact Problem for Functionally Graded Materials Layer with Arbitrary Graded Materials Properties, International Journal of Solids and Structures, 96, 229-239.
- Muskhelishvili, N.I., 1953. Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity, Noordhoff, Groningen.
- Nowell, D. ve Hills, D.A., 1988. Contact Problems Incorporating Elastic Layers, International Journal of Solids and Structures, 24,1, 105-111.
- Öner, E., 2011. Rijit Dairesel Bir Panç Aracılığıyla Yüklenmiş ve Elastik Yarı Sonsuz Düzleme Oturan İki Elastik Tabakanın Sürekli Temas Problemi, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Öner, E., Yaylacı, M. ve Birinci, A., 2015. Analytical Solution of a Contact Problem and Comparison with the Results from FEM, Structural Engineering and Mechanics, 54, 4.

- Öner, E., 2017. Rijit Bir Blok Aracılığıyla Yüklenmiş Ve Elastik Yarım Düzleme Oturan Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabakanın Sürekli Ve Süreksiz Temas Problemi, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Özşahin, T.Ş., 2000. Rijit İki Düz Blok Üzerine Oturan Bileşik Tabakada Sürekli ve Süreksiz Temas Problemi, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Özşahin, T.Ş., 2007. Frictionless Contact Problem for a Layer on an Elastic Half Plane Loaded by Means of Two Dissimilar Rigid Punches, Structural Engineering and Mechanics, 25,4, 383-403.
- Özşahin, T.Ş., Kahya, V. ve Çakıroğlu, A.O., 2007. Contact Problem for an Elastic Layered Composite Resting on Rigid Flat Supports, International Journal of Computational and Mathematical Sciences, 1,2, 154-159.
- Özşahin, T. Ş. ve Taskıner, O., 2013. Contact Problem for an Elastic Layer on an Elastic Half Plane Loaded by Means of Three Rigid Flat Punches, Mathematical Problems in Engineering, 10.1155/2013/137427.
- Pindera, M.J. ve Lane, M.S., 1993. Frictionless Contact of Layered Half Planes, Part I Analysis, ASME Journal of Applied Mechanics, 60, 633-639.
- Rekik, M., Neifar, M. ve El-Borgi, S., 2010. An Axisymmetric Problem of an Embedded Crack in a Graded Layer Bonded to a Homogeneous Half-Space, International Journal of Solids and Structures, 47, 2043–2055.
- Rhimi, M., El-Borgi, S. ve Lajnef, N., 2011. A Double Receding Contact Axisymmetric Problem between a Functionally Graded Layer and a Homogeneous Substrate, Mechanics of Materials, 43, 787–798.
- Sabin, G.C.W. ve Kaloni, P.N., 1989. Contact Problem of a Rigid Indentor with Rotational Friction in Second Order Elasticity, International Journal of Engineering Science, 27,3, 203-217.
- Shahzamanian, M.M., Sahari, B.B., Bayat M., Mustapha, F. ve Ismarrubie, Z.N., 2010. Finite Element Analysis of Thermoelastic Contact Problem in Functionally Graded Axisymmetric Brake Disks, Composite Structures, 92, 1591–1602.
- Sneddon I.N., 1951. Fourier Transforms, McGraw-Hill, New York.
- Spence, D.A., 1975. The Hertz Contact Problem with Finite Friction, Journal of Elasticity, 5, 297-319.
- Su, J., Ke, L.L. ve Wang, Y.S., 2015. Two-Dimensional Fretting Contact Analysis of Piezoelectric Materials, International Journal of Solids and Structures, 73, 41–54.
- Su, J., Ke, L.L. ve Wang, Y.S., 2016. Axisymmetric Frictionless Contact of a Functionally Graded Piezoelectric Layered Half-Space under a Conducting Punch, International Journal of Solids And Structures, 90, 45-59.

- Uruquhart, E.E. ve Pindera M.J., 1994. Incipient Separation between a Frictionless Flat Punch and an Anisotropic Multilayered Half Plane, International Journal of Solids and Structures, 31,18, 2445-2461.
- Weitsman, Y., 1969. On the Unbonded Contact Between Plates and an Elastic Half Space, ASME Journal of Applied Mechanics, 36, 198-202.
- Wozniak, M., Hummel, A. ve Pauk, V.J., 2002. Axisymmetric Contact Problems for an Elastic Layer Resting on a Rigid Base with a Winkler Type Excavitation, International Journal of Solids and Structures, 39, 4117-4131.
- Yan, J. ve Li, X., 2015. Double Receding Contact Plane Problem between a Functionally Graded Layer and an Elastic Layer, European Journal of Mechanics A/Solids, 53, 143-150.
- Yan, J. ve Mi, C., 2017. Double Contact Analysis of Multilayered Elastic Structures Involving Functionally Graded Materials, Archives of Mechanics, 69,3, 199-221.
- Yang, J. ve Ke, L.L., 2008. Two-Dimensional Contact Problem for a Coating– Graded Layer– Substrate Structure under a Rigid Cylindrical Punch, International Journal of Mechanical Sciences, 50, 985– 994.
- Yaylacı, M., Öner, E. ve Birinci, A., 2014. Comparison between Analytical and ANSYS Calculations for a Receding Contact Problem, Journal of Engineering Mechanics, 140, 9, 04014070.
- Yaylacı, M., 2017. Comparison Between Numerical and Analytical Solutions for the Receding Contact Problem, Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 2, 333-346.
- Yıldırım, B., 2004. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeden Yapılmış Kenar Çatlaklı Bir Tabakada Isıl Şok Kırılmasının Sonlu Elemanlar Metodu ile İncelenmesi, Gazi Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi, 19,3, 235-245.
- Yıldırım, B., Kutlu, Ö. ve Kadioğlu, S., 2011. Periodic Crack Problem for a Functionally Graded Half-Plane an Analytic Solution, International Journal of Solids and Structures, 48, 3020–3031.
- Yılmaz, K.B., Çömez, İ., Yıldırım, B., Güler, M.A. ve El-Borgi, S., 2018. Frictional Receding Contact Problem for a Graded Bilayer System Indented by a Rigid Punch, International Journal of Mechanical Sciences, 141, 127-142.
- Zhang, X.C., Xu, B.S., Wang, H.D., Wu, Y.X. ve Jiang, Y., 2007. Hertzian Contact Response of Single-Layer, Functionally Graded and Sandwich Coatings, Materials and Design, 28, 47–54.

ÖZGEÇMİŞ

Alper POLAT, 1980 yılında Elazığ'da dünyaya geldi. İlk, orta ve lise eğitimini Elazığ'da tamamladı. 2003 yılında Fırat Üniversitesi Teknik Eğitim Fakültesi Yapı Öğretmenliği Bölümü'nden mezun oldu. 2006 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yapı Eğitimi ABD'da "Kafes Sistemlerin Genetik Algoritma ile Çok Amaçlı Optimizasyonu" isimli yüksek lisans çalışmasını tamamladıktan sonra 2007-2010 yılları arasında İstanbul Beşiktaş Belediyesi Plan ve Projeler Müdürlüğü'nde proje kontrol ve uygulama sorumlusu olarak çalıştı. 2014 yılında Gümüşhane Üniversitesi Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü'nü tamamladı. 2015 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Anabilimdalı Mekanik Bilimdalı'nda doktora eğitimine başladı. Aynı zamanda Munzur Üniversitesi'nde Öğretim Görevlisi olarak çalışmakta olan POLAT, evli ve iki çocuk babası olup İngilizce bilmektedir.

Tez çalışmasından elde edilen verilerle SCI kapsamındaki dergilerde yayınlanan ya da kabul edilmiş çalışmalar:

1. Polat, A., Kaya, Y., Özşahin, T.Ş., (2018). "Analytical Solution to Continuous Contact Problem for a Functionally Graded Layer Loaded through two Dissimilar Rigid Punches", *Meccanica*, 53(14), 3565-3577.
2. Polat, A., Kaya, Y., Özşahin, T.Ş., Bendine, K. (2019). "Frictionless Contact Problem for a Functionally Graded Layer Loaded Through Two Rigid Punches Using Finite Element Method", *Journal of Mechanics*,