

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**RİJİT DÜZLEM ÜZERİNE OTURAN VE İKİ RİJİT DÜZ BLOK ARACILIĞIYLA
YÜKLENMİŞ BİRİ FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ İKİ TABAKANIN
TEMAS PROBLEMİ**

DOKTORA TEZİ

Yusuf KAYA

**KASIM 2020
TRABZON**



KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNŞAAT ANABİLİM DALI

**RİJİT DÜZLEM ÜZERİNE OTURAN VE İKİ RİJİT DÜZ BLOK ARACILIĞIYLA
YÜKLENMİŞ BİRİ FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ İKİ TABAKANIN
TEMAS PROBLEMİ**

Yusuf KAYA

ORCID : 0000 -0002 -1894 - 1146

**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
"DOKTOR (İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.**

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 20 / 10 /2020

Tezin Savunma Tarihi : 19 / 11 /2020

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Talat Şükrü ÖZŞAHİN
ORCID : 0000 -0002 - 1179 - 6556

Trabzon 2020

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı'nda doktora tezi olarak hazırlanmıştır.

“Rijit Düzlem Üzerine Oturan ve İki Rijit Düz Blok Aracılığıyla Yüklenmiş Biri Fonksiyonel Derecelendirilmiş İki Tabakanın Temas Problemi” isimli tez çalışmamı bana öneren ve doktora boyunca yaptığım çalışmalarımı özenle takip eden, bilgi birikimi, deneyimi ve hoşgörüsünü esirgemeyen, bana her konuda yol gösteren, öğrencisi olmaktan ve kendisi ile çalışmaktan onur duyduğum kıymetli tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Talat Şükrü ÖZŞAHİN'e teşekkürlerimi sunarım.

Öğrenim hayatım boyunca bana emeği geçen tüm hocalarımı saygıyla anar, kendilerine minnettar olduğumu belirtmek isterim.

Çalışmamın tüm aşamasında bilgi ve birikimlerinden faydalandığım değerli hocalarım Sn. Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ, Sn. Prof. Dr. Hasan SOFUOĞLU, ve Sn. Dr. Öğretim Üyesi Gökhan ADIYAMAN'a teşekkür ederim.

Çalışmalarım sırasında bana yardımcı olan değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Volkan KAHYA'ya, Sn. Doç. Dr. İsa ÇÖMEZ'e, Sn. Prof. Dr. Ali Osman ÇAKIROĞLU'na, Sn. Prof. Dr. Ragıp ERDÖL'e, Sn. Prof. Dr. S. Serkan NAS'a, Sn. Arş. Gör. Sebahat KARACA'ya, Sn. Cansu UYSAL'a ve Sn. Arş. Gör. Murat ŞAN'a teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca doktora çalışmam esnasında her ihtiyacım olduğunda benden yardımını esirgemeyen, sabırla yol gösteren değerli abim Sn. Dr. Öğretim Üyesi Alper POLAT'a ve tüm POLAT ailesine çok teşekkür ederim.

Tüm hayatım boyunca olduğu gibi bana doktora tezi çalışmam esnasında da maddi ve manevi destek olan annem Cemile KAYA, babam Mustafa KAYA'ya, abim Yunus KAYA'ya, ablam Bahar KAYA BAYRAK'a ve kardeşlerim Burcu KAYA ve Uğur KAYA'ya tüm kalbimle teşekkür ederim.

Yusuf KAYA
Trabzon, 2020

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Doktora tezi olarak sunduğum ‘‘Rijit Düzlem Üzerine Oturan ve İki Rijit Düz Blok Aracılığıyla Yüklenmiş Biri Fonksiyonel Derecelendirilmiş İki Tabakanın Temas Problemi’’ başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Talat Şükrü ÖZŞAHİN’ in sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdığimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 19/11/2020

Yusuf KAYA

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET	VIII
SUMMARY	IX
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	X
TABLolar DİZİNİ.....	XVI
KISALTMALAR VE SEMBOLLER DİZİNİ	XIX
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Giriş.....	1
1.1.1. Literatür Taraması.....	2
1.1.2. Çalışmanın Amacı ve Kapsamı.....	16
1.2. Genel Denklemlerin Elde Edilmesi.....	18
1.2.1. Kütle Kuvvetlerinin Bulunmaması Durumunda Genel Denklemlerin Elde Edilmesi	18
1.2.1.1. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabaka İçin Genel Denklemlerin Elde Edilmesi	18
1.2.1.2. Homojen Tabaka İçin Genel Denklemlerin Elde Edilmesi.....	25
1.3. Kütle Kuvvetlerinin Bulunması Durumunda Özel Çözümlerin Elde Edilmesi	31
1.3.1. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabaka İçin Özel Çözümlerin Elde Edilmesi	31
1.3.2. Homojen Tabaka İçin Özel Çözümlerin Elde Edilmesi.....	34
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR	38
2.1. Problemin Tanımı	38
2.2. Sürekli Temas Durumu	39
2.2.1. Problemin Sınır Şartları	39
2.2.2. Katsayıların Belirlenmesi.....	40
2.2.3. İntegral Denklemlerin Elde Edilmesi.....	44

2.2.4.	İntegral Denklemlerin Sayısal Çözümü	46
2.2.5.	Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabaka ile Homojen Tabaka ve Homojen Tabaka ile Rijit Düzlem Arasındaki İlk Ayrılma Yükleri ve İlk Ayrılma Uzaklıklarının Belirlenmesi	49
2.3.	Sürekli Temas Durumu	52
2.3.1.	Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabaka ile Homojen Tabakaya Ait Ara Yüzeyde Meydana Gelen Süreksizlik	52
2.3.1.1.	Problemin Sınır Şartları	53
2.3.1.2.	Katsayıların Belirlenmesi.....	54
2.3.1.3.	İntegral Denklemlerin Elde Edilmesi.....	57
2.3.1.4.	Tabakalara Ait Ara Yüzeyde Meydana Gelen Ayrılmanın Belirlenmesi	60
2.4.1.	Homojen Tabaka ile Rijit Düzleme Ait Ara Yüzeyde Meydana Gelen Süreksizlik.....	65
2.4.1.1.	Problemin Sınır Şartları	66
2.4.1.2.	Katsayıların Belirlenmesi.....	67
2.4.1.3.	İntegral Denklemlerin Elde Edilmesi.....	71
2.4.1.4.	Tabakalara Ait Ara Yüzeyde Meydana Gelen Ayrılmanın Belirlenmesi	75
2.5.	Sonlu Elemanlar Yöntemi.....	80
2.5.1.	Sonlu Elemanlar Yönteminin Tarihsel Gelişim Süreci.....	81
3.	BULGULAR VE İRDELEME	86
3.1.	Sürekli Temas Problemi.....	86
3.1.1.	Rijit Bloklar Altındaki Temas Gerilmelerinin İrdelenmesi	86
3.1.2.	Normal Kayma Gerilmelerinin İrdelenmesi	91
3.1.2.1.	σ_x Normal Gerilmesinin İrdelenmesi	91
3.1.2.2.	σ_y Normal Gerilmesinin İrdelenmesi	99
3.1.2.2.1.	Tabaka Ara Yüzeylerindeki İlk Ayrılma Yükleri ve Uzaklıklarının Belirlenmesi	99
3.1.2.2.2.	Tabaka Derinliği Boyunca Meydana Gelen σ_y Gerilme Yayılışları.....	114
3.1.2.3.	τ_{xy} Kayma Gerilmesinin İrdelenmesi	118
3.2.	Sürekli Temas Problemi.....	121
3.2.1.	Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabaka ile Homojen Tabaka Ara Yüzeyindeki Sürekli Temas Durumu	121
3.2.2.	Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabaka ile Homojen Tabaka Ara Yüzeyindeki Düşey Yer Değiştirmeler Farkının İrdelenmesi.....	126
3.3.1.	Homojen Tabaka ile Rijit Düzlem Ara Yüzeyindeki Sürekli Temas Durumu	129

3.3.2.	Homojen Tabaka ile Rijit Düzlem Ara Yüzeyindeki Düşey Yer Değiş-tirmeler Farkının İrdelenmesi	132
3.4.	Sonlu Elemanlar Yöntemini Esas Alan ANSYS Programından Elde Edilen Çözümler ile Analitik Çözümlerin Kıyaslanması.....	134
4.	SONUÇLAR VE ÖNERİLER	142
5.	ÖNERİLER.....	147
6.	KAYNAKLAR	148
7.	EKLER.....	155

ÖZGEÇMİŞ



Doktora Tezi

ÖZET

RİJİT DÜZLEM ÜZERİNE OTURAN VE İKİ RİJİT DÜZ BLOK ARACILIĞIYLA
YÜKLENMİŞ BİRİ FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ İKİ TABAKANIN TEMAS
PROBLEMİ

Yusuf KAYA

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Talat Şükrü ÖZŞAHİN
2020, 154 Sayfa

Bu çalışmada, rijit düzlem üzerine oturan ve iki düz rijit blok ile yüklenmiş ağırlık etkisinin dikkate alındığı biri fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) iki tabakada sürekli ve süreksiz temas probleminin çözümü elastisite teorisi kullanılarak yapılmıştır. FD tabaka üst yüzeyinden, genişlikleri (b-a) ve (d-c) olan iki rijit düz blok aracılığıyla P ve Q dış yükleriyle yüklenmiştir. Birinci bölümde, temas problemleri ile ilgili yapılan çalışmalar araştırılarak özetlenmiş, elastisite teorisi ve integral dönüşüm teknikleri kullanılarak, her iki tabaka için genel denklemler elde edilmiştir. İkinci bölümde ise, problemin, sürekli ve süreksiz temas durumları ayrı ayrı ele alınmıştır. Problem, sürekli temas durumunda, bloklar ile FD tabaka arasında meydana gelen düşey yer değiştirme fonksiyonunun türevinin sıfıra eşit olması şartı kullanılarak iki integral denkleme, süreksiz temas için durumunda ise bu iki integral denkleme ek olarak temas yüzeyinde meydana gelen ayrılmanın eğimi de bilinmeyen olduğu üç integral denklem sistemine indirgenmiş olup, uygun Gauss-Chebyshev integrasyonu yardımıyla çözülmüştür. Bu bölümde sürekli temas durumu için blokların altında meydana gelen temas gerilmeleri, tabakalarda meydana gelen gerilmeler, tabakaların altlarında ayrılmayı meydana getirecek ilk ayrılma yükü ve uzaklıkları incelenmiştir. Süreksiz temas durumu için, tabakaların alt yüzeylerinde meydana gelen ayrılmalar ayrı ayrı ele alınmıştır. Bu bölümde tabakaların alt yüzeylerinde meydana gelen ayrılmaların başlangıç ve bitiş noktaları, tabakaların yatay eksenleri boyunca oluşan gerilmeler ve temas yüzeylerinde meydana gelen kabarmalar elde edilmiştir. Yine bu bölümde, ANSYS Mechanical APDL paket programı kullanılarak sonlu elemanlar metodu (SEM) ile analizler yapılmıştır. Son bölümde ise, yapılan çözümlerden elde edilen bulgular grafik ve tablolarla verilmiş ve yorumlanmıştır. Analitik çözümün, SEM çözümü ve literatürdeki çalışmalar yapılan kıyaslamalarında oldukça uyumlu sonuçlar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Ayrılma, Elastisite teorisi, Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabaka, İlk ayrılma uzaklığı, İlk ayrılma yükü, İntegral denklem, Rijit düzlem, Sonlu elemanlar yöntemi, Sürekli temas, Süreksiz temas.

PhD Thesis

SUMMARY

THE CONTACT PROBLEM OF TWO LAYERS ONE OF WHICH IS FUNCTIONALLY GRADED RESTING ON A RIGID PLANE AND LOADED BY TWO RIGID FLAT BLOCKS

Yusuf KAYA

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Civil Engineering Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Talat Şükrü ÖZŞAHİN
2020, 154 Pages

In this study, the solution of the continuous and discontinuous contact problem in two layers with different heights one of which functionally graded (FG) on a rigid plane and loaded with two flat rigid blocks was considered according to the elasticity theory. The FG layer was loaded from the upper surface by two rigid blocks (b-a) and (d-c) with external loads P and Q. In the first part, studies on contact problems were summarized. In addition, general equations for both two layer were obtained with the help of general equations of elasticity. In the second part, the problem of continuous and discontinuous contact was discussed separately. In the case of continuous contact, the problem was solved by the appropriate Gauss-Chebyshev integration by using the condition that the derivative of the vertical displacement function between the blocks and the functionally graded layer was equal to zero. In this section, contact stresses under blocks, initial separation load and distances under the layers and stresses were examined. In the problem of discontinuous contact, initial separation under the layers were discussed. In case of discontinuous contact, the unknown contact stresses under the blocks as well as the slope of the separation at the contact surface were taken as unknowns. These unknowns were obtained from the solution of the problem reduced to the system of singular integral equation by Gauss-Chebyshev integration. Thus, separation start and end points, stresses along the layer axis and openings at the interface were found. In addition problem analyzed with finite element method (FEM) using by the ANSYS Mechanical APDL program. In the last section, the results obtained from the solutions were interpreted with graphics and tables. In the comparisons of the analytical solution, the FEM solution and the studies in the literature, quite compatible results were obtained.

Key Words: Separation, Functionally graded layer, Elasticity theory, Initial separation distance, Initial separation load, Integral equation, Rigid plane, Finite element method, Continuous contact, Discontinuous contact.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 1.	Problemin geometrisi	36
Şekil 2.	FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki süreksiz temas probleminin geometrisi	51
Şekil 3.	Homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki süreksiz temas probleminin geometrisi	64
Şekil 4.	Sonlu eleman yönteminde eleman tipleri	80
Şekil 5.	Dairenin çevresinin sonlu elemanlar yaklaşımı ile bulunmasında kullanılan yöntem	81
Şekil 6.	Problemin ANSYS modeli	84
Şekil 7.	Serbest üçgen ağlara bölme	84
Şekil 8.	Problemin algoritması	85
Şekil 9.	Çeşitli yük oranı değerleri için blok altındaki temas gerilmesi yayılışları ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=1.5$; $(d-c)/h_1=2$; $\beta_{h_1}=0.9163$; $\gamma_{h_1}=0.9163$; $\kappa_1=\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{-h_1})=1$; $h_1=h_2$)	88
Şekil 10.	Çeşitli blok genişliği değerleri için blok altındaki temas gerilmesi yayılışları ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=1$; $\beta_{h_1}=0.6931$; $\gamma_{h_1}=0.6931$; $Q=2P$; $\kappa_1=\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{-h_1})=1$; $h_1=h_2$)	89
Şekil 11.	Çeşitli β_{h_1} değerleri için blok altındaki temas gerilmesi yayılışları ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=1$; $(d-c)/h_1=1$; $\gamma_{h_1}=-1.38629$; $Q=2P$; $(\mu_2/\mu_{-h_1})=1$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $h_1=h_2$)	89
Şekil 12.	Çeşitli μ_2/μ_{-h_1} değerleri için blok altındaki temas gerilmesi yayılışları ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1.5$; $\beta_{h_1}=-1.3862$; $\gamma_{h_1}=-1.3862$; $Q=2P$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $h_1=h_2$)	90
Şekil 13.	Çeşitli bloklar arası uzaklıklar için blok altındaki temas gerilmesi yayılışları ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(d-c)/h_1=1$; $\beta_{h_1}=-1.38629$; $\gamma_{h_1}=-1.38629$; $Q=2P$; $(\mu_2/\mu_{-h_1})=1$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $h_1=h_2$)	90
Şekil 14.	Çeşitli h_1/h değerleri için blok altındaki temas gerilmesi yayılışları ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1$; $\beta_{h_1}=-1.0986$; $\gamma_{h_1}=-1.3862$; $Q=2P$; $(\mu_2/\mu_{-h_1})=1$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$)	91
Şekil 15a.	Çeşitli β_{h_1} değerleri için tabakalar arasındaki $\sigma_{x_1}(x,-h_1)/(P/h_1)$ temas gerilmesi yayılışları ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=1$; $(d-c)/h_1=1$; $Q=2P$; $\gamma_{h_1}=-1.38629$; $(\mu_2/\mu_{-h_1})=1$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $h_1=h_2$)	93
Şekil 15b.	Çeşitli β_{h_1} değerleri için homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki $\sigma_{x_2}(x,-h)/(P/h_1)$ boyutsuz normal gerilmesinin yayılışı ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=1$; $(d-c)/h_1=1$; $\gamma_{h_1}=-1.38629$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{-h_1})=1$; $h_1=h_2$)	94

Şekil 16a. Çeşitli blok uzaklıkları için tabakalar arasındaki $\sigma_{x1}(x,-h_1)/(P/h_1)$ temas gerilmesi yayılışları ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(d-c)/h_1=1$; $\beta h_1=-1.38629$; $\gamma h_1=-1.38629$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{-h1})=1$; $h_1=h_2$)	94
Şekil 16b. Çeşitli blok uzaklıkları için homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki $\sigma_{x2}(x,-h)/(P/h_1)$ temas gerilmesi yayılışları ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(d-c)/h_1=1$; $\beta h_1=-1.38629$; $\gamma h_1=-1.38629$; $\kappa_1=\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{-h1})=1$; $h_1=h_2$)	95
Şekil 17a. Çeşitli blok genişliği değerleri için tabakalar arasındaki $\sigma_{x1}(x,-h_1)/(P/h_1)$ temas gerilmesi yayılışları ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=1$; $\beta h_1=0.6931$; $\gamma h_1=0.6931$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{-h1})=1$; $h_1=h_2$)	95
Şekil 17b. Çeşitli blok genişliği değerleri için homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki $\sigma_{x2}(x,-h)/(P/h_1)$ temas gerilmesi yayılışları ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=1$; $\beta h_1=0.6931$; $\gamma h_1=0.6931$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{-h1})=1$; $h_1=h_2$)	96
Şekil 18a. Çeşitli μ_2/μ_{-h1} değerleri için tabakalar arasındaki $\sigma_{x1}(x,-h_1)/(P/h_1)$ temas gerilmesi yayılışları ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1.5$; $\beta h_1=-1.38629$; $\gamma h_1=-1.38629$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $h_1=h_2$)	96
Şekil 18b. Çeşitli μ_2/μ_{-h1} değerleri için homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki $\sigma_{x2}(x,-h)/(P/h_1)$ temas gerilmesi yayılışları ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1.5$; $\beta h_1=-1.38629$; $\gamma h_1=-1.38629$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $h_1=h_2$)	97
Şekil 19a. Çeşitli yük oranı değerleri için tabakalar arasındaki $\sigma_{x1}(x,-h_1)/(P/h_1)$ temas gerilmesi yayılışları ($a/h_1=3$; $\beta h_1=-1.38629$; $(b-a)/h_1=1$; $(d-c)/h_1=1$; $\gamma h_1=-1.38629$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{-h1})=1$; $h_1=h_2$)	97
Şekil 19b. Çeşitli yük oranı değerleri için homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki $\sigma_{x2}(x,-h)/(P/h_1)$ temas gerilmesi yayılışları ($a/h_1=3$; $\beta h_1=-1.38629$; $(b-a)/h_1=1$; $(d-c)/h_1=1$; $\gamma h_1=-1.38629$; $Q=2P$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{-h1})=1$; $h_1=h_2$)	98
Şekil 20. Çeşitli μ_2/μ_{-h1} değerleri için derinlik boyunca boyutsuz $\sigma_x(5,y)/(P/h_1)$ normal gerilme yayılışları ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1.5$; $\beta h_1=-1.38629$; $\gamma h_1=-1.38629$; $\kappa_1=\kappa_2=2$; $h_1=h_2$)	98
Şekil 21. Çeşitli βh_1 değerleri için derinlik boyunca boyutsuz $\sigma_x(3.5,y)/(P/h_1)$ boyutsuz normal gerilmesinin yayılışı ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=1$; $(d-c)/h_1=1$; $\gamma h_1=-1.38629$; $\kappa_1=\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{-h1})=1$; $h_1=h_2$)	99
Şekil 22a. Çeşitli βh_1 değerleri için FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki $\sigma_{y1}(x,-h_1)/(P/h_1)$ gerilme yayılışları ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(d-c)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $\gamma h_1=-1.38629$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{-h1})=1$; $h_1=h_2$)	102
Şekil 22b. Çeşitli βh_1 değerleri için homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki $\sigma_{y2}(x,-h)/(P/h_1)$ gerilme yayılışları ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(d-c)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $\gamma h_1=-1.38629$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{-h1})=1$; $h_1=h_2$)	103
Şekil 23. Çeşitli rijitlik parametresi (βh_1) değerleri için boyutsuz $\sigma_{y1}(x,-h_1)/(P/h_1)$ gerilme yayılışının literatürdeki çalışmayla karşılaştırılması ($a/h_1=2$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1$; $\mu_2/\mu_{-h1}=1$; $\gamma h_1=-0.6931$; $y=-h_1$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $h_1=0.1h$)	104

Şekil 24a. Çeşitli blok aralıkları için tabakalar arasındaki $\sigma_{y1}(x,-h_1)/P/h_1$ normal gerilme yayılışları ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $Q=2P$; $(d-c)/h_1=1$; $\beta_{h1}=-1.38629$; $\gamma_{h1}=-1.38629$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{-h1})=1$; $h_1=h_2$)	105
Şekil 24b. Çeşitli blok aralıkları için homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki $\sigma_{y2}(x,-h)/P/h_1$ normal gerilme yayılışları ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $Q=2P$; $(d-c)/h_1=1$; $\beta_{h1}=-1.38629$; $\gamma_{h1}=-1.38629$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{-h1})=1$; $h_1=h_2$)	105
Şekil 25. Bloklar arasındaki mesafe $(c-b)/h_1$ değişimine göre FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki boyutsuz $\sigma_{y1}(x,-h_1)/P/h_1$ temas gerilmesi dağılışı ($a/h_1=2$; $(b-a)/h_1=0.5$; $(d-c)/h_1=1$; $\mu_0=1$; $Q=2P$; $\beta_{h1}=-1.0986$; $\gamma_{h1}=-1.0986$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $y=-h_1$; $h_1=0.1h$; $(\mu_2/\mu_{-h1})=1$)	107
Şekil 26a. Çeşitli blok genişliği değerleri için tabakalar arasındaki $\sigma_{y1}(x,-h_1)/P/h_1$ temas gerilmesi yayılışları ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=1$; $\beta_{h1}=0.6931$; $\gamma_{h1}=0.6931$; $Q=2P$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{-h1})=1$; $h_1=h_2$)	108
Şekil 26b. Çeşitli blok genişliği değerleri için homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki $\sigma_{y2}(x,-h)/P/h_1$ temas gerilmesi yayılışları ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=1$; $\beta_{h1}=0.6931$; $\gamma_{h1}=0.6931$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{-h1})=1$; $h_1=h_2$)	108
Şekil 27a. Çeşitli μ_2/μ_{-h1} değerleri için tabakalar arasındaki $\sigma_{y1}(x,-h_1)/P/h_1$ temas gerilmesi yayılışları ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $h_1=h_2$; $(d-c)/h_1=1.5$; $\beta_{h1}=-1.38629$; $\gamma_{h1}=-1.38629$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$)	109
Şekil 27b. Çeşitli μ_2/μ_{-h1} değerleri için homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki $\sigma_{y2}(x,-h)/P/h_1$ temas gerilmesi yayılışları ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $h_1=h_2$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1.5$; $\beta_{h1}=-1.38629$; $\gamma_{h1}=-1.38629$; $Q=2P$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$)	110
Şekil 28a. Çeşitli h_1/h değerleri için FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki $\sigma_{y1}(x,-h_1)/P/h_1$ normal gerilme yayılışları ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1$; $\beta_{h1}=-1.0986$; $\gamma_{h1}=-1.38629$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{-h1})=1$)	111
Şekil 28b. Çeşitli h_1/h değerleri için homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki $\sigma_{y2}(x,-h)/P/h_1$ gerilme yayılışları ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1$; $\beta_{h1}=-1.0986$; $\gamma_{h1}=-1.38629$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{-h1})=1$)	111
Şekil 29a. Çeşitli γ_{h1} değerleri için FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki $\sigma_{y1}(x,-h_1)/P/h_1$ normal gerilme yayılışları ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1.5$; $\beta_{h1}=-0.6931$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{-h1})=1$; $h_1=h_2$)	112
Şekil 29b. Çeşitli γ_{h1} değerleri için homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki $\sigma_{y2}(x,-h)/P/h_1$ normal gerilme yayılışları ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1.5$; $\beta_{h1}=-0.6931$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{-h1})=1$; $h_1=h_2$)	113
Şekil 30a. Çeşitli β_{h1} değerleri için birinci bloğun solundaki kesitte $\sigma_y(2.5,y)/P/h_1$ gerilme yayılışları ($\gamma_{h1}=1.38629$; $a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=0.5$; $(d-c)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=1$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{-h1})=1$; $h_1=h_2$)	116
Şekil 30b. Çeşitli β_{h1} değerleri için bloklar arasındaki kesitte $\sigma_y(3.25,y)/P/h_1$ gerilme yayılışları ($\gamma_{h1}=1.38629$; $a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=0.5$; $(d-c)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=1$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{-h1})=1$; $h_1=h_2$)	116

Şekil 31a.	Çeşitli γ_{h_1} değerleri için bloklar arasındaki kesitte $\sigma_y(3.5,y)/P/h_1$ gerilme yayılışları ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1$; $h_1=h_2$; $\beta_{h_1}=0.6931$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $\mu_2/\mu_{-h_1}=1$)	117
Şekil 31b.	Çeşitli γ_{h_1} değerleri için bloklar arasındaki kesitte $\sigma_y(5,y)/P/h_1$ gerilme yayılışları ($\beta_{h_1}=0.6931$; $a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $h_1=h_2$; $(d-c)/h_1=1$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{-h_1})=1$; $\rho_0=\rho_2=1$;)	117
Şekil 32a.	Çeşitli blok genişliği değerleri için ikinci bloğun ortasındaki kesitte $\sigma_y(x,y)/P/h_1$ temas gerilmesi yayılışları ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $\beta_{h_1}=0.6931$; $\gamma_{h_1}=0.6931$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{-h_1})=1$; $h_1=h_2$)	118
Şekil 32b.	Çeşitli blok genişliği değerleri için bloklar arasındaki kesitte $\sigma_y(5,y)/P/h_1$ temas gerilmesi yayılışları ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $\beta_{h_1}=0.6931$; $\gamma_{h_1}=0.6931$; $Q=2P$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{-h_1})=1$; $h_1=h_2$)	118
Şekil 33.	Çeşitli μ_2/μ_{-h_1} değerleri için ikinci bloğun orta noktasına denk gelen kesitte derinlik boyunca kayma gerilme yayılışları ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1.5$; $\beta_{h_1}=-1.38629$; $\gamma_{h_1}=-1.38629$; $Q=2P$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $h_1=h_2$)	120
Şekil 34.	Çeşitli β_{h_1} değerleri için bloklar arasındaki bölgede derinlik boyunca kayma gerilme yayılışları ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=1$; $(d-c)/h_1=1.5$; $\mu_2/\mu_{-h_1}=1$; $\gamma_{h_1}=-1.38629$; $Q=2P$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $h_1=h_2$)	120
Şekil 35.	Çeşitli $(c-b)/h_1$ değerleri için bloklar arasındaki kesitte derinlik boyunca kayma gerilme yayılışları ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(d-c)/h_1=1.5$; $\mu_2/\mu_{-h_1}=1$; $\beta_{h_1}=-1.38629$; $\gamma_{h_1}=-1.38629$; $Q=2P$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $h_1=h_2$)	121
Şekil 36.	Çeşitli Q/P değerleri için birinci bloğun altındaki kesitte derinlik boyunca kayma gerilme yayılışları ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(d-c)/h_1=1$; $\mu_2/\mu_{-h_1}=1$; $\beta_{h_1}=-1.38629$; $\gamma_{h_1}=-1.38629$; $(d-c)/h_1=1$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $h_1=h_2$)	121
Şekil 37.	Rijitlik parametresi (β_{h_1}) değişimine göre tabakalar arasındaki boyutsuz $\sigma_{y1}(x,-h_1)/P/h_1$ gerilme yayılışı ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1$; $\mu_0=1$; $Q=2P$; $\gamma_{h_1}=-1.0986$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $y=-h_1$; $h_1/h_2=0.5$; $\mu_2/\mu_{-h_1}=1$; $\lambda=180 > \lambda_{cr1}$)	124
Şekil 38.	Yoğunluk parametresi (γ_{h_1}) değişimine göre tabakalar arasındaki boyutsuz $\sigma_{y1}(x,-h_1)/P/h_1$ gerilme yayılışı ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1$; $\mu_0=1$; $Q=2P$; $\beta_{h_1}=-1.0986$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $y=-h_1$; $h_1/h_2=0.5$; $\mu_2/\mu_{-h_1}=1$; $\lambda=180 > \lambda_{cr1}$)	125
Şekil 39.	Bloklar arası mesafe ($(c-b)/h_1$) değişimine göre tabakalar arasındaki boyutsuz $\sigma_{y1}(x,-h_1)/P/h_1$ gerilme yayılışı ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $Q=2P$; $(d-c)/h_1=1$; $\beta_{h_1}=-1.0986$; $\gamma_{h_1}=-1.0986$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $y=-h_1$; $h_1/h_2=0.5$; $\mu_2/\mu_{-h_1}=1$; $\lambda=180 > \lambda_{cr1}$)	125
Şekil 40.	Tabakaların kayma modülü oranı (μ_2/μ_{-h_1}) değişimine göre tabakalar arasındaki boyutsuz $\sigma_{y1}(x,-h_1)/P/h_1$ gerilme yayılışı ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1$; $Q=2P$; $\beta_{h_1}=-1.0986$; $\gamma_{h_1}=-1.0986$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $y=-h_1$; $h_1/h_2=0.5$; $\lambda=180 > \lambda_{cr1}$)	126
Şekil 41.	Tabakalar arasındaki ayrılmaların rijitlik parametresi (β_{h_1}) ile değişimi ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1$; $\mu_0=1$; $Q=2P$; $\gamma_{h_1}=-1.0986$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $y=-h_1$; $h_1/h_2=0.5$; $\mu_2/\mu_0=1$; $\lambda=180 > \lambda_{cr1}$)	128

- Şekil 42. Tabakalar arasındaki ayrılmaların yoğunluk parametresi (γh_1) ile değişimi ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1$; $\mu_0=1$; $Q=2P$; $\beta h_1=-1.0986$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $y=-h_1$; $h_1/h_2=0.5$; $\mu_2/\mu_0=1$; $\lambda=180 > \lambda_{cr1}$)..... 128
- Şekil 43. Tabakalar arasındaki ayrılmaların bloklar arası mesafe ($(c-b)/h_1$) ile değişimi ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(d-c)/h_1=1$; $Q=2P$; $\beta h_1=-1.0986$; $\gamma h_1=-1.0986$; $\kappa_1=\kappa_2=2$; $y=-h_1$; $h_1/h_2=0.5$; $\mu_2/\mu_{-h_1}=1$; $\lambda=180 > \lambda_{cr1}$) 129
- Şekil 44. Tabakalar arasındaki ayrılmaların tabakaların kayma modülü oranı (μ_2/μ_{-h_1}) ile değişimi ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1$; $Q=2P$; $\beta h_1=-1.0986$; $\gamma h_1=-1.0986$; $\kappa_1=\kappa_2=2$; $y=-h_1$; $h_1/h_2=0.5$; $\lambda=180 > \lambda_{cr1}$) 129
- Şekil 45. Rijitlik parametresi (βh_1) değişimine göre homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki $\sigma_{y2}(x,-h)/P/h_1$ gerilme yayılımı ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=3$; $(d-c)/h_1=1$; $\mu_0=1$; $Q=2P$; $\gamma h_1=-2.07944$; $\kappa_1=\kappa_2=2$; $y=-h$; $h_1/h_2=0.5$; $\mu_2/\mu_0=1$; $\lambda=160 > \lambda_{cr2}$) 131
- Şekil 46. Bloklar arası mesafe $(c-b)/h_1$ değişimine göre homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki $\sigma_{y2}(x,-h)/P/h_1$ gerilme yayılımı ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(d-c)/h_1=1$; $\mu_0=1$; $Q=2P$; $\gamma h_1=-2.07944$; $\beta h_1=-1.38629$; $\kappa_1=\kappa_2=2$; $y=-h$; $h_1/h_2=0.5$; $\mu_2/\mu_0=1$; $\lambda=160 > \lambda_{cr2}$) 132
- Şekil 47. Tabakaların kayma modülü oranı (μ_2/μ_{-h_1}) değişimine göre homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki $\sigma_{y2}(x,-h)/P/h_1$ gerilme yayılımı değişimi ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1$; $Q=2P$; $\gamma h_1=-2.07944$; $\beta h_1=-1.38629$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $y=-h$; $h_1/h_2=0.5$; $\lambda=160 > \lambda_{cr2}$) 132
- Şekil 48. Yük faktörünün ilk ayrılma yükünden küçük; eşit ve büyük olması durumuna göre $\sigma_{y2}(x,-h)/P/h_1$ boyutsuz gerilme yayılımı ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=3$; $(d-c)/h_1=1$; $\gamma h_1=-2.07944$; $\beta h_1=-1.38629$; $\mu_2/\mu_0=1$; $h_1/h_2=0.5$) 133
- Şekil 49. Homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki kabarmaların rijitlik parametresi (βh_1) ile değişimi ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=3$; $(d-c)/h_1=1$; $\mu_0=1$; $Q=2P$; $\gamma h_1=-2.07944$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $y=-h$; $h_1/h_2=0.5$; $\mu_2/\mu_0=1$; $\lambda=160 > \lambda_{cr2}$) 134
- Şekil 50. Homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki kabarmaların bloklar arası mesafe $(c-b)/h_1$ ile değişimi ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(d-c)/h_1=1$; $\mu_0=1$; $Q=2P$; $\gamma h_1=-2.07944$; $\beta h_1=-1.38629$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $y=-h$; $h_1/h_2=0.5$; $\mu_2/\mu_0=1$; $\lambda=160 > \lambda_{cr2}$) 134
- Şekil 51. Homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki kabarmaların tabakaların kayma modülü (μ_2/μ_{-h_1}) oranı ile değişimi ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1$; $\mu_0=1$; $Q=2P$; $\gamma h_1=-2.07944$; $\beta h_1=-1.38629$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $y=-h$; $h_1/h_2=0.5$; $\lambda=160 > \lambda_{cr2}$) 135
- Şekil 52. Rijitlik parametresi (βh_1) değişimine göre bloklar altındaki temas gerilmesi dağılışının SEM ve analitik sonuçlarının karşılaştırılması ($(\mu_2/\mu_{-h_1})=1$; $Q=2P$; $\gamma h_1=-1.3863$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1$; $h_1/h_2=1$) 136

- Şekil 53a. Rijitlik parametresi (βh_1) değişimine göre FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki boyutsuz $\sigma_{y1}(x, -h_1)/P/h_1$ gerilme yayılımının SEM ve analitik sonuçlarının karşılaştırılması ($(\mu_2/\mu_{-h_1})=1$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $Q=2P$; $(d-c)/h_1=1$; $\gamma h_1=-1.3863$; $h_1/h_2=1$) 136
- Şekil 53b. Rijitlik parametresi (βh_1) değişimine göre homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki boyutsuz $\sigma_{y2}(x, -h)/P/h_1$ gerilme yayılımının SEM ve analitik sonuçlarının karşılaştırılması ($(\mu_2/\mu_{-h_1})=1$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $Q=2P$; $(d-c)/h_1=1$; $\gamma h_1=-1.38629$; $h_1/h_2=1$) 137
- Şekil 54a. Tabakaların kayma modülü (μ_2/μ_{-h_1}) oranı değişimine göre FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki boyutsuz $\sigma_{y1}(x, -h_1)/P/h_1$ gerilme yayılımının SEM ve analitik sonuçlarının karşılaştırılması ($\beta h_1=-1.38629$; $Q=2P$; $\gamma h_1=-1.38629$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1.5$; $h_1=h_2$) 139
- Şekil 54b. Tabakaların kayma modülü (μ_2/μ_{-h_1}) oranı değişimine göre homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki boyutsuz $\sigma_{y2}(x, -h)/P/h_1$ gerilme yayılımının SEM ve analitik sonuçlarının karşılaştırılması ($Q=2P$; $h_1=h_2$; $\beta h_1=-1.38629$; $(b-a)/h_1=1$; $\gamma h_1=-1.38629$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1.5$) 140
- Şekil 55. Sürekli temas durumu için ANSYS çözümünden elde edilen σ_y temas gerilme yayılımı ($\beta h_1=-1.38629$; $\gamma h_1=-1.38629$; $(b-a)/h_1=1$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1.5$; $Q=2P$; $h_1=0.5h_2$) 141
- Şekil 56. Süreksiz temas durumu için ANSYS çözümünden elde edilen temas gerilme yayılımı ($\beta h_1=0.6931$; $\gamma h_1=-1.3862$; $\lambda=80 > \lambda_{cr}$; $a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=1$; $(d-c)/h_1=1$; $Q=2P$; $\mu_2/\mu_0=1$; $h_1=0.5h_2$) 141
- Şekil 57. Analitik ve SEM çözümünden elde edilen FD tabaka ile homojen tabaka ara yüzeyindeki $\sigma_{y1}(x, -h_1)/P/h_1$ boyutsuz gerilme yayılımı ($\beta h_1=0.6931$; $\gamma h_1=-1.3862$; $\lambda=80 > \lambda_{cr}$; $a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=1$; $(d-c)/h_1=1$; $Q=2P$; $\mu_2/\mu_0=1$; $h_1=h_2$) 142

TABLolar DİZİNİ

Sayfa No

Tablo 1a.	Çeşitli βh_1 değerleri için FD tabaka ile homojen arasındaki ilk ayrılma yükleri ve uzaklıklarının incelenmesi ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(d-c)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $\gamma h_1=-1.38629$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $\mu_2/\mu_{h_1}=1$; $h_1=h_2$).....	103
Tablo 1b.	Çeşitli βh_1 değerleri için homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve uzaklıklarının incelenmesi ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(d-c)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $\gamma h_1=-1.3862$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $\mu_2/\mu_{h_1}=1$; $h_1=h_2$).....	103
Tablo 2.	Çeşitli rijitlik parametresi (βh_1) değerleri için ilk ayrılma yükü ve uzaklıklarının değişiminin literatürdeki çalışmayla karşılaştırılması ($a/h_1=2$; $Q=2P$ $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1$; $\mu_0=1$; $\mu_2/\mu_{h_1}=1$; $\gamma h_1=-0.6931$; $y=-h_1$; $h_1=0.1h$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$).....	104
Tablo 3a.	Farklı bloklar arası mesafe değerleri için FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki ilk ayrılma yükleri ve uzaklıklarının incelenmesi ($a/h_1=3$ $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(d-c)/h_1=1$; $\beta h_1=-1.38629$; $\gamma h_1=-1.38629$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $\mu_2/\mu_{h_1}=1$; $h_1=h_2$)	105
Tablo 3b.	Farklı bloklar arası mesafe değerleri için homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve uzaklıklarının incelenmesi ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(d-c)/h_1=1$; $\beta h_1=-1.38629$; $\gamma h_1=-1.38629$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $\mu_2/\mu_{h_1}=1$; $h_1=h_2$)	106
Tablo 4.	Çeşitli bloklar arası mesafe ($(c-b)/h_1$) değerleri için ilk ayrılma yükü ve uzaklıklarının değişiminin literatürdeki çalışmayla karşılaştırılması ($a/h_1=2$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=0.5$; $(d-c)/h_1=1$; $\beta h_1=-1.0986$; $\gamma h_1=-1.0986$; $\kappa_1=\kappa_2=2$; $y=-h_1$; $h_1=0.1h$; $\mu_2/\mu_{h_1}=1$)	107
Tablo 5a.	Çeşitli blok genişliği değerleri için FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki ilk ayrılma yükleri ve uzaklıklarının incelenmesi ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=1$; $\beta h_1=-0.6931$; $\gamma h_1=-0.6931$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $\mu_2/\mu_{h_1}=1$)	108
Tablo 5b.	Çeşitli blok genişliği değerleri için homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve uzaklıklarının incelenmesi ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=1$; $\beta h_1=-0.6931$; $\gamma h_1=-0.6931$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $\mu_2/\mu_{h_1}=1$)	108
Tablo 6a.	Çeşitli μ_2/μ_{h_1} değerleri için FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklıklarının incelenmesi ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1.5$; $\beta h_1=-1.38629$; $\gamma h_1=-1.38629$; $h_1=h_2$)	110

Tablo 6b. Çeşitli μ_2/μ_{-h_1} değerleri için FD tabaka ile rijit düzlem arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklıklarının incelenmesi ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1.5$; $\beta_{h_1}=-1.3862$; $\gamma_{h_1}=-1.3862$; $h_1/h=0.5$)	110
Tablo 7a. Çeşitli h_1/h değerleri için FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklıklarının incelenmesi ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1$; $\beta_{h_1}=-1.0986$; $\gamma_{h_1}=-1.3862$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=1$; $\mu_2/\mu_{-h_1}=1$).....	111
Tablo 7b. Çeşitli h_1/h değerleri için FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklıklarının incelenmesi ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1$; $\beta_{h_1}=-1.0986$; $\gamma_{h_1}=-1.3862$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $\mu_2/\mu_{-h_1}=1$).....	111
Tablo 8a. Çeşitli γ_{h_1} değerleri için FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklıklarının incelenmesi ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1.5$; $\beta_{h_1}=-0.6931$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $\mu_2/\mu_{-h_1}=1$; $h_1=h_2$).....	113
Tablo 8b. Çeşitli γ_{h_1} değerleri için homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklıklarının incelenmesi ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1.5$; $\beta_{h_1}=-0.6931$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $\mu_2/\mu_{-h_1}=1$; $h_1=h_2$).....	113
Tablo 9a. Yoğunluk ve rijitlik parametreleri değişimine göre FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıklarının incelenmesi ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1$; $h_1=h_2$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $\mu_2/\mu_{-h_1}=1$)	113
Tablo 9b. Yoğunluk ve rijitlik parametreleri değişimine göre FD tabaka ile homojen tabaka arasında ilk bloğa yakın yerde ayrılma yükleri ve ayrılma uzaklıklarının incelenmesi ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1$; $h_1=h_2$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $\mu_2/\mu_{-h_1}=1$).....	114
Tablo 10. Rijitlik parametresi (β_{h_1}) ve yük faktörü (λ) değişimine göre tabakalar arasındaki ayrılma başlangıç ve bitiş noktaları ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1$; $\gamma_{h_1}=-1.0986$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $y=-h_1$; $h_1/h_2=0.5$; $\mu_2/\mu_{-h_1}=1$)	123
Tablo 11. Rijitlik parametresi (β_{h_1}) değişimine göre FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki ayrılma başlangıç ve bitiş noktalarının karşılaştırılması ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1$; $\mu_0=1$; $\gamma_{h_1}=0.4055$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $y=-h_1$; $h_1=0.1h$; $\mu_2/\mu_{-h_1}=1$; $\lambda=105 > \lambda_{cr1}$)	125
Tablo 12. Birinci blok genişliğinin ($(b-a)/h_1$) değişimine göre FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki ayrılma başlangıç ve bitiş noktalarının karşılaştırılması ($a/h_1=-1$; $Q=2P$; $(c-b)/h_1=30$; $(d-c)/h_1=2$; $\mu_0=1$; $\beta_{h_1}=-0.6931$; $\kappa_1=\kappa_2=2$; $y=-h_1$; $h_1=0.1h$; $\mu_2/\mu_{-h_1}=1$; $\lambda=500 > \lambda_{cr}$).....	126
Tablo 13a. Rijitlik parametresi (β_{h_1}) değişimine göre FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma mesafelerinin SEM ve analitik sonuçlarının karşılaştırılması ($(\mu_2/\mu_{-h_1})=1$; $(b-a)/h_1=1$; $Q=2P$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1$; $\gamma_{h_1}=-1.38629$).....	137

- Tablo 13b. Rijitlik parametresi (β_{h_1}) değişimine göre homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma mesafelerinin SEM ve analitik sonuçlarının karşılaştırılması ($(\mu_2/\mu_{h_1})=1$; $(b-a)/h_1=1$; $Q=2P$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1$; $\gamma_{h_1}=-1.38629$) 138
- Tablo 14a. Tabakaların kayma modülü (μ_2/μ_{h_1}) oranı değişimine göre FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıklarının SEM ve analitik sonuçlarının karşılaştırılması ($\beta_{h_1}=-1.38629$; $\gamma_{h_1}=-1.38629$; $(b-a)/h_1=1$; $Q=2P$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1.5$; $h_1=h_2$) 139
- Tablo 14b. Tabakaların kayma modülü (μ_2/μ_{h_1}) oranı değişimine göre homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıklarının SEM ve analitik sonuçlarının karşılaştırılması ($\beta_{h_1}=-1.38629$; $\gamma_{h_1}=-1.38629$; $(b-a)/h_1=1$; $Q=2P$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1.5$; $h_1=h_2$) 140



KISALTMALAR VE SEMBOLLER DİZİNİ

- a : Birinci bloğun başlangıç noktasının y eksenine olan mesafesi
- b : Birinci bloğun bitiş noktasının y eksenine olan mesafesi
- c : İkinci bloğun başlangıç noktasının y eksenine olan mesafesi
- d : İkinci bloğun bitiş noktasının y eksenine mesafesi
- E : Elastisite modülü (MPa)
- e : FD tabaka ile homojen tabaka arasında meydana gelen ayrılmanın başlangıç noktası
- f : FD tabaka ile homojen tabaka arasında meydana gelen ayrılmanın bitiş noktası
- FDM : Fonksiyel derecelendirilmiş malzeme fonksiyon
- g : Yerçekimi ivmesi
- h : Tabakaların toplam yüksekliği
- h_1 : FD tabakanın yüksekliği
- h_2 : Homojen tabakanın yüksekliği
- k : Homojen tabaka ile rijit düzlem arasında meydana gelen ayrılmanın başlangıç noktası
- l : Homojen tabaka ile rijit düzlem arasında meydana gelen ayrılmanın bitiş noktası
- P : Birinci bloğa uygulanan tekil kuvvet
- $p(x)$: Birinci blok altındaki temas gerilmesi fonksiyonu
- Q : İkinci bloğa uygulanan tekil kuvvet
- $q(x)$: İkinci blok altındaki temas gerilmesi fonksiyonu
- u : x doğrultusundaki yer değiştirme bileşeni
- v : y doğrultusundaki yer değiştirme bileşeni
- x, y : Kartezyen koordinatlar
- X,Y,Z : Kütle kuvveti bileşenleri
- x_{cr1} : FD tabaka ile homojen tabaka ara yüzeyindeki ilk ayrılma uzaklığı
- x_{cr2} : Homojen tabaka ile rijit düzlem ara yüzeyindeki ilk ayrılma uzaklığı
- ∂ : Türev operatörü

∇^2	: Laplace operatörü
β	: FD tabaka için rijitlik parametresi
γ	: FD tabaka için yoğunluk parametresi
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$: x, y, z doğrultularındaki uzama şekil değiştirme bileşenleri
κ_1	: FD tabakaya ait Kolosov sabiti
κ_2	: Homojen tabakaya ait Kolosov sabiti
λ_{cr1}	: FD tabaka ile homojen tabaka ara yüzeyindeki kritik yük faktörü
λ_{cr2}	: Homojen tabaka ile rijit düzlem ara yüzeyindeki kritik yük faktörü
μ_0	: FD tabakanın üst yüzeyine ait kayma modülü
$\mu_1(y)$: FD tabakaya ait kayma modülü fonksiyonu
μ_2	: Homojen tabakaya ait kayma modülü
ρ_0	: FD tabakanın üst yüzeyinin yoğunluğu
$\rho_1(y)$: FD tabakanın yoğunluk fonksiyonu
ρ_2	: Homojen tabakanın yoğunluğu
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$: x, y, z doğrultularındaki normal gerilme bileşenleri
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$: Kayma gerilmesi bileşenleri
ν	: Poisson oranı
$\varphi(x)$: FD tabaka ile homojen tabaka ara yüzeyindeki ayrılmanın eğimini veren
ϕ, ψ	: Ters Fourier dönüşüm fonksiyonları
$\omega(x)$: Homojen tabaka ile rijit düzlem ara yüzeyindeki ayrılmanın eğimini veren fonksiyon

Not : Bu listede yer almayan bazı semboller, metin içerisinde uygun olan yerlerde tanımlanmıştır.

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Çoğu yapıların ve mekanik sistemlerin elemanları birbirleri ile temas halindedir. Bu temasın karakteri, temas halindeki cisimlerin gerilmeleri birbirlerine iletme şekilleri, cisimlerde meydana gelen şekil değiştirmeler, temas uzunlukları ve temas bölgesindeki temas gerilmesi yayılışları yapıların davranışında önemli bir rol oynamaktadır. 1984 yılında Japonya’da bir uzay mekiği projesinde ısı bariyer amacıyla bir özelliği kalınlık boyunca değişen bir kompozit malzeme geliştirilmiş ve Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme kavramı ortaya çıkmıştır. Daha sonra fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerle ilgili birçok mühendislik alanında başta temas mekaniği olmak üzere çok sayıda çalışma yapılmıştır.

Malzeme özellikleri bir noktadan diğer bir noktaya, bir fonksiyona bağlı olarak düzenli ve sürekli olarak değişen heterojen özel mikro yapılar, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler (FDM) olarak tanımlanır. Birden çok malzemenin fazlarının tek bir hacim içerisinde düzenli geçişi ile özel malzeme davranışlarına sahip olan bu mikroskobik malzemeler, yüzey gerilmelerini azaltma özelliklerinden dolayı, ortaya çıktıkları günden itibaren başta havacılık ve uzay endüstrisi (roket motoru parçaları, uzay aracı gövdesi) olmak üzere kimyasal (ısı değiştiricisi, reaktör kazanı) biometaller (implantlar, yapay deri), mekanik, inşaat (yapı malzemeleri) ve elektrik (yarı iletkenler, sensör) devre endüstrisi gibi geniş kullanım aralıkları içermektedir. FDM’lerdeki dereceli yapı sayesinde, farklı özelliklere sahip tabakalı malzemelerde sıkça karşılaşılan sorunlar olan, korozyon, oksidasyon veya aşınmaya karşı korumanın yanında, ani kesit değişiminden dolayı meydana gelen kırılmaları, arayüz ve yüzey çatlaklarını da en aza indirmektedir. Kullanılacak yere ve seçilen üretim tekniğine göre, FDM’lerde dereceli yapının özelliği, güç yasasına göre tabakalı olarak veya üstel bir fonksiyona göre sürekli olarak değişebilmektedir. Gün geçtikçe FDM’lerle ilgili yeni bir çalışma yapılmasına karşın, FDM’lerde ağırlık etkisinin dikkate alındığı ve kabarmaların meydana geldiği temas problemleri ile ilgili yapılan çalışmalar sınırlıdır.

Şimdiye kadar yapılan çalışmalar incelendiğinde, farklı yüklerle yüklenmiş farklı sayıda homojen tabakada temas probleminin ayrılmalı, sürekli ve süreksiz temas

durumlarına ait çok sayıda çalışmaya rastlanmıştır. Ayrıca, fonksiyonel derecelendirilmiş tabakada sadece tek bir tabakanın altında süreksizlik durumunun incelendiği çalışmalar mevcuttur. Ancak, birden fazla rijit blok ile yüklenmiş, hem fonksiyonel derecelendirilmiş hem de homojen tabaka bulunan ve iki tabaka için de ağırlık etkisinin dikkate alındığı sistemde, her iki tabaka için de ayrı ayrı sürekli ve süreksiz temas durumlarının incelendiği probleme ait herhangi bir çözüme rastlanmamıştır. Bu sebeple yapılacak bu çalışmanın literatüre katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

1.1.1. Literatür Taraması

Temas mekaniği konusu ilk olarak 1882 yılında Hertz tarafından ele alınmıştır. Hertz "Elastik Tabakaların Teması" başlıklı makalesinde temas halindeki iki elastik cismin dengesini, temas bölgesinin eliptik olduğu varsayımı ile irdelemiş ve temas gerilmeleri ve şekil değiştirmeler için formülasyon geliştirmiştir.

Chen ve Engel 1972 yılında yaptıkları çalışmada rijit bir blok ile yüklenmiş ve elastik yarım düzleme oturan bir veya iki tabakalı sistemin temas problemini ele almıştır. Çalışma sonucunda farklı panç şekilleri için düşey yer değiştirmeler ve panç altı gerilmeleri elde edilmiştir.

Loboda ve Tauchert 1985 yılında yaptıkları çalışmada ortotropik sonsuz bir tabaka ile mesnetlenmiş ve ucundan simetrik olarak yüklenmiş yarı sonsuz ortotropik tabakanın gerilme durumunu ele almışlardır. Problem Fourier dönüşümleri uygulanarak tekil integral denkleme indirgenmiştir. Çalışma sonucunda farklı yük ve malzeme özelliklerine göre temas gerilmeleri sayısal olarak elde edilmiştir.

Geçit 1986 yılında yaptığı çalışmada elastik yarım düzleme bastırılan elastik yarı sonsuz dairesel bir silindirin aksel simetrik temas problemini ele almıştır. Sürtünme ihmal edilmiş ve çekme gerilmelerinin temas yüzeyi boyunca aktarılmadığı kabul edilmiştir. Çalışma sonucunda farklı malzeme özellikleri ve boyutları için temas gerilmeleri ve temas uzunlukları sayısal olarak elde edilmiştir.

Klarbring 1986 yılında yaptığı çalışmada matematiksel bir programlama tekniği ile üç boyutlu sürtünmeli temas problemini ele almıştır. Geliştirilen yöntem, elastik yarım düzleme oturan elastik dikdörtgen blok problemine uygulanmıştır. Yapılan çalışma sonucunda geliştirilen yöntem ile elde edilen temas bölgesindeki normal gerilme ve kayma

gerilmesi dağılımları ile literatürdeki çalışmalarda bulunan gerilme yayılımları karşılaştırılmış ve birbirleriyle uyumlu olduğu görülmüştür.

Birinci vd. 1997 yılında yaptıkları çalışmada elastik mesnete oturan, yükseklikleri ve elastik sabitleri farklı sonsuz uzunluktaki iki tabaka arasındaki temas problemini ele almışlardır. Problemin çözümünde Elastisite Teorisi ve İntegral Dönüşüm Tekniklerinden yararlanılmıştır. Çalışma sonucunda kütle kuvvetleri dikkate alınarak, tabakanın üzerine etkiyen dış yüklerden dolayı tabakalar arasındaki ilk ayrılma noktası ve ilk ayrılma yükleri belirlenmiştir.

Birinci 1998 yılında yaptığı çalışmada, farklı elastik sabitlere ve yüksekliklere sahip iki tabakadan oluşan ve alttaki tabakada düşey bir çatlakın mevcut olduğu, rijit bir blok vasıtasıyla yüklenmiş bileşik tabakadaki temas ve çatlak problemlerini Elastisite teorisi kullanarak ele almıştır. Çalışmada bileşik tabakanın basit mesnet üzerine oturduğu ve tüm yüzeylerin sürtünmesiz olduğu kabul edilmiştir. Yapılan çalışma sonucunda farklı tabaka kalınlığı, blok yarıçapı, mesnet genişliği ve malzeme sabitlerine göre, temas gerilmeleri, normal gerilmeler, ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıkları, çatlak uçlarındaki gerilme şiddeti faktörleri ve çatlak yüzey yer değiştirmeleri belirlenmiştir.

Giannakopoulos ve Pallot, 2000 yılında yaptıkları çalışmada fonksiyonel derecelendirilmiş bir alt tabaka üzerindeki rijit bir silindirin iki boyutlu sürtünmeli ve hareketli temasını incelenmişlerdir. Fonksiyonel derecelendirilmiş alt tabakanın Poisson oranının sabit olduğu elastisite modülünün yüksekliğe bağlı olarak güç yasasına göre değiştiği ve temas yüzeylerinin sürtünmesiz olduğu kabul edilmiştir. Yapılan çalışma sonucunda, kayan yüzeylerin tasarımında güç yasası ile derecelendirilmiş tabakanın, güçlü ve aşınmaya karşı daha dirençli olabileceği görülmüştür.

Özşahin 2000 yılında yaptığı çalışmada yükseklikleri ve elastik sabitleri farklı olan ve rijit iki düz blok üzerine oturan, homojen izotrop iki elastik tabakaya ait sürekli ve süreksiz temas problemini analitik olarak ele almıştır. Çalışma sonucunda farklı mesnet açıklığı, mesnet genişliği, ve malzeme özellikleri için gerilme ve yer değiştirme değerleri belirlenmiştir.

Çakıroğlu vd. 2001 yılında yaptıkları çalışmada elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan iki elastik tabakanın sürekli ve süreksiz temas problemini irdelemişlerdir. Yapılan çalışmada ortamın sürtünmesiz olduğu kabul edilmiştir. Yapılan çalışma sonucunda sürekli temas için ilk ayrılma yükü ve uzaklığı bulunmuştur. Daha sonra süreksiz temas için

ayrılmanın yarı sonsuz düzlem ile tabaka arasında ve iki tabaka arasında olması durumları ayrı ayrı irdelenmiştir.

Kahya, 2003 yılında yaptığı çalışmada rijit düz temel üzerine yapıştırılmış ve yayılı bir yük ile yüklenmiş, iki sonsuz uzunluklu, ortotrop ve elastik tabakanın sürekli ve süreksiz temas problemlerini ayrı ayrı irdelenmiştir.

Özşahin ve Çakıroğlu, 2003 yılında yaptıkları çalışmada, rijit yarım daire şeklindeki iki mesnete oturan, farklı yüksekliklere ve elastik sabitlere sahip iki tabakada temas problemini irdelenmiştir. Tabakalar arasındaki sürtünmeler dikkate alınmış ve kütle kuvvetleri ihmal edilmiştir. Çalışma sonucunda farklı rijit blok profillerine, farklı yayılı yük genişliği ve şiddetine göre, birleşik tabaka ile mesnetler arasındaki temas gerilmeleri belirlenmiştir.

Güler ve Erdoğan, 2004 yılında yaptıkları çalışmada fonksiyonel derecelendirilmiş bir tabaka ile kaplı elastik yarı sonsuz düzlemdeki sürtünmeli temas problemini analitik olarak ele almışlardır. Kaplamanın kayma modülünün tabaka yüksekliği boyunca üstel olarak değiştiği fakat Poisson oranının değişmediği kabul edilmiştir. Yatay ve düşey kuvvetler, hareketli rijit bir panç vasıtasıyla fonksiyonel derecelendirilmiş tabakaya iletilmiştir. Çalışma sonucunda fonksiyonel derecelendirilmiş tabakalar için, malzeme homojenliği sabitleri, sürtünme katsayısı ve çeşitli uzunluk parametrelerinin ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklığına etkisi incelenmiştir.

Ma ve Korsunsky, 2004 ve 2006 yıllarında yaptıkları çalışmalarda, ince bir tabakayla kaplanmış elastik yarım düzleme, elastik blokla tekil kuvvet ve buna dik doğrultuda sürtünme kuvvetleri etki etmesi durumunda oluşan değme problemleri için genel bir çözüm yöntemini, Airy gerilme fonksiyonları yardımıyla geliştirmişlerdir. Bu genel çözümden bloğun rijit olması, kaplamanın ve sürtünmenin olmaması gibi özel çözümler elde edilmiştir.

El-Borgi vd., 2006 yılında yaptığı çalışmada, yayılı yük ile yüklenmiş ve elastik yarı sonsuz düzleme oturan fonksiyonel derecelendirilmiş bir tabakanın sürtünmesiz ve ayrılmalı temas problemini ele almışlardır.

Kahya vd., 2007 yılında yaptıkları çalışmada, rijit dairesel bir blok ile yüklenmiş anizotropik bir tabaka ile anizotropik elastik bir yarı sonsuz düzlem arasındaki, sürtünmesiz ve ayrılmalı temas problemini irdelenmiştir. Problemden kütle kuvvetleri ihmal edilmiştir. Problem, temas gerilmelerinin ve temas uzunluklarının bilinmeyen fonksiyonlar olduğu tekil integral denklem sistemine indirgenmiştir. Yapılan çalışma

sonucunda çeşitli malzeme özellikleri için temas gerilmeleri ve temas uzunlukları belirlenmiştir.

Çömez, 2009 yılında yaptığı çalışmada rijit silindirik bir blok vasıtasıyla yüklenmiş ve elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan homojen, elastik ve izotrop tabakanın sürtünmeli temas problemini, elastisite teorisi ve integral dönüşüm teknikleri yardımıyla analitik olarak irdelemiştir. Yapılan çalışmada kütle kuvvetleri ihmal edilmiştir.

Elloumi vd., 2010 yılında yaptıkları çalışmada, fonksiyonel derecelendirilmiş yarı sonsuz düzlem ile tekil yükü yüklenmiş keyfi şekilli bir blok arasında meydana gelen iki boyutlu doğrusal olmayan kayma teması problemini incelemişlerdir. Çalışmada ele alınan fonksiyonel derecelendirilmiş yarı sonsuz düzlemin, kayma modülünün üstel olarak değiştiği ve Poisson oranının sabit olduğu kabul edilmiştir.

Adıbelli, 2010 yılında yaptığı çalışmada rijit bir blok vasıtasıyla tekil yük uygulanan ve elastik yarı düzlem oturmuş, farklı elastik sabitlere ve yüksekliklere sahip yapışık iki tabakanın temas problemini, elastisite teorisi ve integral dönüşüm tekniklerinden yararlanarak analitik olarak incelemiştir. Çalışma sonucunda farklı yük, malzeme ve geometrik özelliklere bağlı olarak, temas uzunlukları ve temas gerilmeleri, gerilme ve yer değiştirme bileşenleri ve gerilme şiddet faktörleri sayısal olarak elde edilmiştir.

Rekik vd., 2010 yılında yaptıkları çalışmada homojen yarı düzlem bağlanmış fonksiyonel derecelendirilmiş bir tabakada gömülü bir çatlakla ilgili eksenel simetrik bir problemi analitik olarak incelemişlerdir. Aynı zamanda çalışmada SEM kullanılarak çatlak incelenip analitik çözümle karşılaştırılmıştır.

Öner, 2011 yılında yaptığı çalışmada rijit dairesel bir blok ile yüklenmiş ve elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan iki elastik tabakanın sürekli temas problemini incelemiştir. Problem çözülürken tüm yüzeylerin sürtünmesiz olduğu kabul edilmiştir. Çalışma sonucunda farklı yük, malzeme ve geometrik özelliklere göre temas gerilmeleri, temas uzunlukları, gerilme bileşenleri, ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıkları elde edilmiştir.

Güler vd., 2012 yılında yaptıkları çalışmada rijit bir silindir ile fonksiyonel derecelendirilmiş bir kaplama arasındaki sürtünmeli yuvarlanma durumundaki temas problemini araştırmışlardır. Kayma modülünün kaplamanın kalınlığı boyunca üstel olarak değiştiği varsayılarak, probleme ait integral denklemler oluşturulmuştur. Tekil integral denklemlerin ayrıştırılması için geleneksel Goodman yaklaşımı kullanılmış, integral

denklemlerinin sayısal çözümü Gauss-Chebyshev integrasyon metodu kullanılarak elde edilmiştir.

Chidlow ve Teodorescu, 2013 yılında yaptıkları çalışmada rijit bir blok vasıtasıyla yüklenmiş homojen olmayan bir malzemenin sürtünmesiz temas problemini incelemişlerdir. Homojen olmayan katı, yarı sonsuz düzlem üzerine oturan ve üzerinde elastik bir tabaka bulunan, kayma modülü yüksekliğe bağlı eksponansiyel olarak değişen fonksiyonel derecelendirilmiş bir ara katman şeklinde tanımlanmıştır. Yapılan çalışmada kaplama kalınlığı ve malzeme homojenliğinin, silindirik blok problemi üzerindeki etkileri incelenmiş ve en büyük gerilmenin, homojen olmayan tabakanın kalınlığına ve mekanik özelliklerine bağımlı olduğu görülmüştür.

Yaylacı, 2013 yılında yaptığı çalışmada düzgün yayılı yük ile yüklenmiş ve homojen, izotrop ve simetrik iki çeyrek düzlem üzerine oturan, yükseklikleri ve elastik özellikleri birbirinden farklı homojen ve izotrop iki elastik tabakanın sürtünmesiz temas problemini hem analitik olarak hem de SEM kullanarak incelemiştir. Çalışma sonucunda farklı yük genişliği ve şiddeti, malzeme özellikleri, tabaka yükseklikleri ve elastik özellikler için gerilmelere ait sonuçlar analitik ve Sonlu Elemanlar Yöntemi yardımıyla elde edilmiş ve sonuçların birbiriyle uyumlu olduğu görülmüştür.

Adıyaman, 2013 yılında yaptığı çalışmada iki çeyrek düzleme oturan elastik tabakanın sürtünmesiz ve ayrılmalı temas problemini elastisite teorisine göre ele almıştır. Yapılan çalışma sonucunda blok altındaki temas gerilmeleri ve temas uzunlukları çeşitli boyutsuz büyüklükler için elde edilmiştir.

Jin vd., 2013 yılında yaptıkları çalışmada, Greenwood ve Johnson'un 1998 yılında yaptıkları çift-Hertz modelini genişleterek rijit bir küre ve güç yasası ile derecelendirilmiş yarım düzlem arasındaki eksenel simetrik temasa ait kohezyonlu bölge modeli oluşturmuşlardır. Yapılan çalışma ile uygulanan yüke bağlı olarak, girinti derinliği, kohezyon bölgesinin iç ve dış yarıçapları arasındaki yüzey gerilmesi, deformasyon alanları analitik olarak elde edilmiş ve elde edilen sonuçlar sonlu elemanlar simülasyonları ile doğrulanmıştır.

Nikbakht vd., 2013 yılında yaptıkları çalışmada, fonksiyonel olarak derecelendirilmiş düşük karbonlu çelik plaka ile rijit küresel bir blok arasındaki sürtünmesiz elastik teması incelemişlerdir. Derecelendirilmiş tabakanın elastisite modülünün, kalınlık boyunca değiştiği varsayılmış ve değerler, nano girinti tekniği ile deneysel olarak bulunmuştur. Ayrıca Tamura, Tomota ve Ozawa (TTO modeli) tarafından orijinal olarak önerilen bir

matematiksel model ile de problem çözülmüştür. Tabaka ve rijit kürenin temas problemi hem analitikolarak hem de ABAQUS sonlu elemanlar paket programı vasıtasıyla sayısal olarak incelenmiştir. Yapılan çalışma sonucunda fonksiyonel derecelendirilmiş malzemenin metal faz hacim kırılmasının artırılmasının, FD plakadaki temas kuvvetini ve gerilmeyi arttırdığı görülmüştür.

Abhilash ve Murthy, 2014 yılında yaptıkları çalışmada, bir blok vasıtasıyla yüklenmiş ve FDM ile kaplı yarı sonsuz düzlemin iki boyutlu temas problemini SEM kullanarak incelemiştir. İlk durum için bloklar rijit olarak kabul edilmiş ve sonuçlar, literatürde sunulan çözümlerle karşılaştırılarak doğruluğu görülmüştür. Daha sonra bloklar elastik kabul edilip analizler yapılarak sonuçlar irdelenmiştir.

Küçüksucu vd. 2015 yılında yaptığı çalışmada, rijit bir blok ile fonksiyonel derecelendirilmiş ortotropik yarı sonsuz düzlem arasındaki temas problemini ele almışlardır. Problemden elastisite modülünün, yarı sonsuz düzlemin derinliği boyunca değiştiği kabul edilmiştir. Rijitlik parametresi, rijit blok ve yarı sonsuz düzlem arasındaki sürtünme katsayısı ve ortotropik elastik malzeme parametrelerinin (rijitlik oranı, Poisson oranı ve kayma parametresi) gerilme yayılışlarına etkisi belirlenmiştir.

Nyqvist vd., 2015 yılında yaptıkları çalışmada, tabakalı bir kaplamaya sahip olan ve birbirlerine temas eden cisimlerin, uyuşmayan kaba yüzey temaslarının analizi için bir model geliştirmişlerdir. Yapılan bu modelle temas gerilme yayılışı, yüzey deformasyonları ve tam yüzey altı gerilme alanı belirlenmiştir.

Bora, 2016 yılında yaptığı çalışmada iki rijit dikdörtgen blok ile yüklenmiş ve elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan, yükseklikleri ve elastik özellikleri farklı homojen ve izotrop iki tabakanın sürekli ve süreksiz temas problemlerini analitik ve Sonlu Elemanlar Yöntemini kullanarak ayrı ayrı incelemiştir. Çalışma sonucunda farklı blok genişlikleri, bloklar arası mesafeler, malzeme özellikleri, tabaka yükseklikleri ve elastik özellikler için yer değiştirmeler ve gerilmelere ait sonuçlar hem analitik olarak hem de Sonlu Elemanlar Yöntemi kullanılarak elde edilmiş ve sonuçların birbiriyle uyumlu olduğu görülmüştür.

Talezadehlari vd., 2016 yılında yaptıkları çalışmada elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan fonksiyonel derecelendirilmiş tabakada yüzey çatlağının olması halinde, sürtünmeli iki boyutlu temas problemini, rijit dairesel ve düz bloklar için incelemiştir. Yapılan çalışmada kırılma parametreleri ve temas gerilmelerini değerlendirmek için sonlu farklara dayalı bir hesaplama yöntemi geliştirilmiştir. Temas bölgesinde Coulomb'un kuru sürtünme yasasının var olduğu kabul edilmiştir. Çalışma sonucunda malzemelerin homojen

olmamasının etkisi, oluşturan fazların etkileşimi, fonksiyonel dereceli tabakanın kalınlığı, bloğun boyutu ve sürtünme katsayısının farklı değerleri için incelenmiştir ve genel bir durumda, bloğun boyutunu, sürtünme katsayısını ve tabakanın kalınlığını arttırmanın temas kuvvetini ve dolayısıyla temas gerilmesini artırdığı görülmüştür.

Li vd., 2017 yılında yaptıkları çalışmada, statik ve dinamik yükler altında ortotropik fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerde gerilme şiddeti faktörlerini belirlemek için sonlu blok yöntemini geliştirmişlerdir. Dinamik problemler için Laplace dönüşüm yöntemi ve Durbin ters dönüşüm yöntemi kullanılmıştır. Yapılan çalışma sonucunda sonlu blok yönteminin doğruluğunu ve yakınsamasını göstermek için, sonlu elemanlar yöntemi ve analitik çözümlerle çeşitli örnekler verilmiş ve karşılaştırmalar yapılmıştır.

Patra vd., 2017 yılında yaptıkları çalışmada rijit bir blok ile piezoelektrik özelliklere sahip elastik bir tabaka arasındaki sürtünmesiz temas problemini ele almışlardır. Tabakanın rijit bir düzlem üzerinde olduğu ve rijit bloğun girinti miktarına kıyasla yeterince kalın olduğu kabul edilmiştir. Analitik çözüm yapılırken Hankel dönüşüm tekniklerinden faydalanılmıştır. Problemin çözümü sonucunda farklı blok geometrilerine bağlı olarak, tabaka yüzeyindeki gerilmeler, temas uzunlukları ve elektriksel yer değiştirmeler elde edilmiştir.

Yan ve Mi, 2017 yılında yaptıkları çalışmada elastik düzleme oturan ve fonksiyonel derecelendirilmiş bir tabaka ile kaplanmış, dairesel rijit bir panç ile yüklü homojen tabakanın ayrılmalı temas problemini analitik olarak incelemişlerdir. Çalışma sonucunda temas gerilmesinin, temas yüzeyindeki temas alanıyla ters orantılı olduğu ve büyük çentik yüklerinin hem büyük temas basınçlarına, hem de temas alanına neden olduğu görülmüştür.

Öner vd., 2017 yılında yaptıkları çalışmada rijit düz bir blok vasıtasıyla yüklenmiş ve elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan FD tabakanın sürekli temas problemini analitik olarak irdelemişlerdir. Çalışmada, çeşitli boyutsuz büyüklükler için, blok altı gerilmeler, gerilme yayılışları, FD tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında meydana gelen ilk ayrılma uzaklıkları ve ilk ayrılma yükleri elde edilmiştir.

Güler vd., 2017 yılında yaptıkları çalışmada, fonksiyonel dereceli ortotropik bir yarım düzlem ile bu düzlem üzerinde kayan rijit silindirik bir blok arasındaki sürtünmeli temas problemini irdelemişlerdir. Yapılan bu çalışma sonucunda temas gerilmelerini elde etmek için hem analitik hem de sayısal yöntemler geliştirilmiştir.

Adıyaman vd., 2017 yılında yaptıkları çalışmada, yayılı yük ile çekilen ve rijit bir düzlem üzerine oturan FD tabakanın sürekli ve süreksiz temas problemini elastisite teorisi kullanılarak analitik olarak incelemişlerdir. Çalışma sonucunda tabakanın üstündeki rijitlik ve yoğunluğun azaltılmasının, sürekli temas durumunda kritik yükte ve süreksiz temas durumunda ayrılma mesafesinde bir artışa yol açtığı görülmüştür.

El Borgi ve Çömez, 2017 yılında yaptıkları çalışmada elastik yarım düzleme oturan ve dairesel bir blokla yüklenmiş FD tabakada ayrılmalı temas problemini ele almışlardır. Çalışmada rijitlik parametresi, blok yarıçapı gibi çeşitli boyutsuz büyüklükler için ayrılma bölgesindeki temas gerilmeleri ve temas uzunlukları belirlenmiştir.

Yaylacı vd., 2017 yılında yaptıkları çalışmada, dairesel bir blok vasıtasıyla yüklenmiş ve rijit bir düzlem üzerine oturan iki elastik tabakanın simetrik ve çift ayrılmalı temas problemini incelemişlerdir. Yaptıkları çalışmada problemi hem elastisite teorisi kullanarak analitik hem de SEM kullanarak yaklaşık olarak çözüp sonuçları kıyaslamışlardır.

Karabulut vd., 2018 yılında yaptıkları çalışmada, yayılı bir yükte yüklenmiş ve elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan homojen bir tabakanın sürekli ve süreksiz temas problemini ele almışlardır. İncelenen problem hem analitik yöntemle hem de sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak çözülmüş ve sonuçlar birbiriyle kıyaslanmıştır.

Yılmaz vd., 2018 yılında yaptıkları çalışmada rijit bir blok vasıtasıyla yüklenmiş iki FD tabakanın ayrılmalı temas problemini irdelemişlerdir. Çalışmada rijit blok hem yatay hem de düşey yüklü olduğu için temasta sürtünme etkisi de dikkate alınmıştır. Yaptıkları çalışmada problemi hem elastisite teorisinden yararlanarak analitik hem de SEM'den yararlanarak yaklaşık olarak çözüp sonuçları kıyaslamışlardır.

Balcı ve Dağ, 2018 yılında yaptıkları çalışmada sabit bir hızla hareket eden rijit bir blok ile bastırılmış elastik kaplamaların dinamik sürtünmeli teması için bir teori geliştirmişlerdir. Geliştirdikleri bu yöntemi mevcut hesaplamaları kıyaslayarak doğrulamışlardır.

Adıyaman ve Birinci, 2018 yılında yaptıkları çalışmada Winkler elastik zemini üzerine oturan FD tabakada ayrılmalı temas problemini ele almışlardır. Yapılan çalışma sonucunda hem simetrik hem de asimetric yükleme durumları için temas gerilmeleri ve temas mesafeleri elde edilmiştir.

Adıyaman vd., 2018 yılında yaptıkları çalışmada rijit düzlem üzerine oturan tabakalı ortam için ayrılmalı temas problemini incelemişlerdir. Yapılan bu çalışmada bilgisayar

programı yazılarak temas problemleri çözülmüş ve literatürdeki çalışmalarla kıyaslanmıştır.

Polat vd., 2018 yılında yaptıkları çalışmada elastik yarı sonsuz düzleme oturan bir FD tabakada sürekli temas problemini elastisite teorisi ve Fourier integral dönüşümlerini kullanarak çözmüşlerdir. Çalışmada FD tabaka iki rijit blokla yüklenmiş ve tabaka ağırlığı dikkate alınmıştır.

Su vd., 2018 yılında yaptıkları çalışmada hareketli dairesel rijit bir zımba ile fonksiyonel derecelendirilmiş piezoelektrik malzeme kaplı yarım düzlem arasındaki sürtünme etkisinin dikkate alındığı temas problemini ele almışlardır. Problem çözülrken süperpozisyon yöntemi ve Fourier integral dönüşümleri kullanılarak problem bir çift Cauchy tekil integral denklem sistemine indirgenmiştir. Problemin çözümünde sürtünme katsayısı ve gradyan indeksinin yüzey elektro-mekanik alanları üzerindeki etkileri irdelenmiştir.

Alinia vd., 2018 yılında yaptıkları çalışmada ortotropik kaplamanın yüzeyinde malzeme ortotropi parametrelerinin, bağıl rijitliğin, sürtünme katsayısının ve kaplama kalınlığının, gerilme dağılımı üzerindeki etkilerini analitik olarak araştırmışlardır. Çalışma sonucunda, yükün sabit bir değeri için, rijitlik oranının ve kayma parametresinin yüzey gerilmesi bileşenleri üzerinde Poisson oranından daha belirgin bir etkiye sahip olduğu görülmüştür.

Liu vd., 2018 yılında yaptıkları çalışmada yarı sonsuz düzlem üzerine oturan yapışık iki tabakanın temas problemini irdemişlerdir. Çalışmada, alt tabakanın FD malzemedan oluştuğu, üst tabakanın ise homojen olduğu kabul edilmiş olup sistem yayılı yüklerle yüklenmiştir. Problem hem elastisite teorisi kullanılarak analitik olarak çözülmüş hem de SEM kullanılarak yaklaşık sonuçları elde edilmiş olup temas gerilmeleri ve temas uzunlukları için elde edilen sayısal sonuçlar karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçların birbirleriyle oldukça uyumlu olduğu görülmüştür.

Yaylacı ve Terzi 2018 yılında yaptıkları çalışmada, rijit dairesel bir panç ile bir elastik yarım düzlem üzerine bağlanmış iki tabakanın simetrik ağırlıksız temas problemini sonlu elemanlar yöntemi kullanarak incelemişlerdir. Problem çözülrken ANSYS ve ABAQUS paket programlarından yararlanılmıştır. Çalışmada tabaka yüksekliklerinin ve malzeme özelliklerinin farklı olduğu kabul edilmiş ve kütle kuvvetleri ihmal edilmiştir. Çalışma sonucunda, farklı parametreler için temas uzunlukları ve temas gerilmeleri elde edilmiştir.

Balci ve Dağ, 2019 yılında yaptıkları çalışmada fonksiyonel derecelendirilmiş bir kaplama ile hareketli bir rijit blok arasındaki dinamik sürtünmeli temas problemini analitik olarak ele almışlardır. Problemin çözümünde Galilean ve Fourier dönüşümlerini kullanmışlardır.

Çömez, 2019 yılında yaptığı çalışmada rijit bir düzlem üzerine oturan bir FD tabakanın sürekli ve süreksiz temas problemini analitik olarak irdelemiştir. Yapılan çalışmada fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka dairesel bir rijit blok ile yüklenmiştir. Yapılan bu çalışmada blok yarıçapı ve rijitlik parametrelerine göre temas mesafesi, blok altındaki gerilme yayılışları ve ayrılma bölgelerinin değişimi belirlenmiştir.

Çömez 2019 yılında yaptığı çalışmada rijit bir hareketli dairesel blok ile ortotropik bir tabakanın sürtünmeli temas problemini analitik olarak ele almıştır. Yapılan çalışmada ortotropik tabakanın, rijit düzleme tam bağlanmış olduğu, dairesel bloğun ses altı hızla ortotropik tabakanın üst yüzeyinde hareket ettiği kabul edilmiştir. Yapılan çalışma sonucunda bloğun hareket hızının, blok çapının ve sürtünme katsayısının, temas genişliği ve temas gerilmesi üzerine etkileri belirlenmiştir.

Yılmaz vd., 2019 yılında yaptıkları çalışmada monoklinik kaplama ile izotropik alt tabaka sistemi ile rijit hareketli bir blok arasındaki sürtünmeli temas problemini hem analitik olarak hem de sonlu elemanlar yöntemi kullanarak incelemiştir. Çalışmada dairesel, parabolik ve düz olmak üzere üç çeşit rijit blok için ayrı ayrı analizler gerçekleştirilmiştir. Çalışma sonucunda analitik çözümle sonlu elemanlar çözümünün birbiriyle uyumlu olduğu görülmüştür.

Polat, 2019 yılında yaptığı çalışmada elastik yarım düzleme oturan ve düz iki rijit blok ile yüklenmiş FD tabakada sürekli ve süreksiz temas problemini incelemiştir. Problem, analitik ve Sonlu Elemanlar Yöntemi kullanılarak ayrı ayrı incelenmiştir. Çalışma sonucunda farklı rijitlik parametreleri, blok genişlikleri, bloklar arası mesafeler, malzeme özellikleri ve yük oranları için yer değiştirmeler ve gerilmelere ait sonuçlar hem analitik olarak hem de SEM kullanılarak elde edilmiş ve sonuçların birbiriyle uyumlu olduğu görülmüştür.

Çömez vd., 2019 yılında yaptıkları çalışmada rijit silindirik bir blokla yüklenmiş ortotropik bir tabakanın sürtünme etkisindeki temas problemini hem analitik olarak hem de sonlu elemanlar yöntemini kullanarak incelemiştir. Ele alınan ortotropik tabaka rijit düzleme bağlanmı olup, rijit dairesel bloğun bu tabaka üzerinde kaydığı kabul edilmiştir. Yapılan çalışma sonucunda, ortotropik malzeme özelliklerinin, geometrik özelliklerin ve

sürtünme katsayısının sert silindirik bloğun kayma hareketinden kaynaklanan gerilmeler üzerindeki etkileri belirlenmiştir.

Adıyaman, 2019 yılında yaptığı çalışmada tabakalı ortamlarda sürtünmesiz temas problemlerinin genel çözümünü yaparak bu çözümleri esas alan MATLAB tabanlı bir bilgisayar programı geliştirmiştir. Yapılan çalışma sonucunda temas gerilmeleri ve temas uzunlukları ile birlikte tabakalı ortamın herhangi bir noktasındaki gerilme ve yer değiştirme değerleri hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçların literatürdeki çalışmalar ile oldukça uyumlu olduğu görülmüştür.

Çömez vd., 2019 yılında yaptıkları çalışmada, homojen bir tabakayla kaplanmış ve elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan fonksiyonel derecelendirilmiş bir tabakanın ayrılmalı temas problemini analitik olarak çözmüşlerdir. Fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka dairesel bir blok vasıtasıyla yatay ve düşey yüklerle yüklenmiştir. Çalışmada sürtünme etkisi dikkate alınırken tabakanın ağırlıksız olduğu kabul edilmiştir. homojen tabakanın eklenmesiyle temas gerilmelerinin ve temas alanlarının kontrol edilebilmesidir. Çalışma sonucunda homojen tabakanın eklenmesiyle temas gerilmelerinin ve temas alanlarının kontrol edilebildiği görülmüştür.

Lopes ve Hills 2019 yılında yaptıkları çalışmada, yarım düzleme oturan ve tekil bir yükü yüklenmiş bir tabakanın aksel simetrik sürtünmeli temas problemini analitik olarak çözmüşlerdir. Yapılan çalışma sonucunda arayüzey çekimlerinin, temas bölgesinden bağımsız olmasına rağmen uygulanan yük ile orantılı olduğu belirlenmiştir. Ayrıca temas yüzeyindeki gerilmelerin Poisson oranından bağımsız olduğu görülmüştür.

Çömez vd., 2019 yılında yaptıkları çalışmada, rijit dairesel bir blok ile yüklenmiş ve Winkler temeli üzerine oturan homojen bir tabakanın hareketli temas problemini, düzlem gerilme koşulları altında ele almışlardır. Dairesel blok bir yükü yüklenmiş ve tabaka üzerinde belli bir hızla hareket etmektedir. Çalışma sonucunda, Winkler temelinin rijitliğinin ve hareket hızının temas genişliği ve gerilme alanının davranışı üzerinde önemli bir etkiye sahip olduğunu görülmüştür.

Polat vd., 2018 ve 2019 yılında yaptıkları çalışmalarda rijit düz bir blok vasıtasıyla yüklenmiş ve elastik yarım düzlem üzerine oturan kompozit bir tabakanın sürekli temas problemini, sonlu elemanlar yöntemini kullanarak çözmüşlerdir. Yapılan çalışmada, kompozit tabakada sadece bloğun alt kısmının fonksiyonel derecelendirilmiş mazleme olduğu geri kalan kısımların ise homojen olduğu kabul edilmiştir. Yapılan çalışma sonucunda temas gerilmeleri ve gerilme yayılışları elde edilmiş ve elde edilen sonuçlar

literatürde bulunan tamamı fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeye ait sonuçlarla kıyaslanarak oldukça uyumlu sonuçlar elde edilmiştir.

Yılmaz vd., 2019 yılında yaptıkları çalışmada, homojen bir tabakaya bağlanmış fonksiyonel derecelendirilmiş ortotropik bir tabakanın kayıcı temas problemini analitik olarak ve sonlu elemanlar yöntemini kullanarak incelemiştir. Ortotropik tabaka rijit silindirik kayıcı bir blok aracılığıyla yatay ve düşey yüklerle yüklenmiştir. Çalışma sonucunda analitik çözümlerle sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen çözümlerin uyumlu olduğu görülmüştür.

Yaylı, 2019 yılında yaptığı çalışmada simetrik iki yayılı yük ile yüklenmiş ve elastik yarım düzleme oturan FD tabakanın temas problemini elastisite teorisini kullanarak analitik olarak çözmüştür. Yapılan çalışma sonucunda yük genişliği ve rijitlik parametrelerine göre, temas uzunlukları ve temas gerilmesi yayılışlarının değişimleri belirlenmiştir.

Yıldırım vd., 2019 yılında yaptıkları çalışmada, homojen izotropik bir tabaka üzerine oturan homojen ortotropik bir tabakanın çift ayrılmalı temas problemini analitik ve sonlu elemanlar yöntemi kullanarak incelemiştir. Homojen ortotropik tabaka rijit silindirik kayıcı bir blok vasıtasıyla yüklenmiştir. Çalışmada tabakanın ağırlıksız olduğu kabul edilmiş ve sürtünme dikkate alınmıştır. Çalışma sonucunda, yüzey ve ara yüzey gerilmeleri, yüzey ve ara yüzey temas sınırları, gerilme tekilliklerinin kuvvetleri, ağırlık fonksiyonu üzerindeki ortotropi etkileri belirlenmiştir.

Çömez ve Yılmaz, 2019 yılında yaptıkları çalışmada, monoklinik malzeme özelliğine sahip yarım düzlemin sürtünmeli temas problemi doğrusal elastisite teorisini kullanarak ele almışlardır. Monoklinik yarım düzlem, hem normal hem de teğet yükleri ileten rijit bir silindirik blok ile yüklenmiştir. Ayrıca problem sonlu elemanlar yöntemiyle çözümlenerek analitik çözümle kıyaslanmıştır. Çalışma sonucunda sürtünme katsayısı, blok yarıçapı, malzeme türü ve dış yükün, temas gerilmesi üzerindeki etkisi belirlenmiştir.

Abanoz, 2019 yılında yaptığı çalışmada alt yüzeyinden rijit olarak mesnetlenmiş fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ile rijit bir blok arasındaki sürtünmesiz temas problemini elastisite teorisine göre analitik olarak incelemiştir.

Yılmaz vd., 2019 yılında yaptıkları çalışmada, homojen ortotropik kaplama ve izotropik alt tabakadan oluşan sistem için temas problemini analitik ve sonlu elemanlar yöntemiyle incelemiştir. Ortotropik tabaka rijit dairesel bir blok aracılığıyla yatay ve düşey yüklerle yüklenmiş olup izotropik alt tabakaya tam bağlanmıştır. Çalışma

sonucunda, ortotropik ve izotropik malzeme özelliklerinin, kayan yüzeyler arasındaki sürtünme katsayısının ve geometrik özelliklerin, temas gerilmeleri ve temas genişlikleri üzerindeki etkileri belirlenmiştir.

Polat vd., 2019 yılında yaptıkları çalışmada elastik yarım düzleme oturan fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın sürekli temas problemini sonlu elemanlar yöntemini kullanarak çözmüşlerdir. Çalışmada fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka düz iki rijit blok vasıtasıyla yüklenmiştir. Yapılan çalışma kapsamında ANSYS paket programına bir makro eklenerek, yazılımın kendi içinde olmayan fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme tanımlanmıştır. Daha sonra farklı rijitlik parametreleri ve blok genişlikleri için temas gerilmeleri, bloklar altındaki gerilmeler, ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıkları belirlenmiştir. Son olarak malzeme özellikleri homojen kabul edilecek şekilde analizler yapılarak literatürdeki çalışmalarla kıyaslanmış ve sonuçların uyumlu olduğu görülmüştür.

Yaylacı vd., 2019 yılında yaptıkları çalışmada, rijit temel üzerine oturan elastik bir tabakanın temas problemi sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak incelenmişlerdir. Yapılan çalışmada homojen tabaka rijit dairesel bir blok aracılığıyla yüklenmiş ve tabakanın kütle kuvvetleri ihmal edilmiştir. Problemin çözümü için ANSYS paket programını kullanılmışlardır. Çalışma sonucunda dairesel blok ile tabaka arasındaki temas uzunluğu ve ortaya çıkan temas gerilmeleri, çeşitli boyutsuz parametreler için elde edilmiştir.

Wu vd., 2019 yılında yaptıkları çalışmada, rijit düzleme oturan elastik ince bir filmin ayrılmalı temas problemini analitik olarak ve sonlu elemanlar yardımıyla çözmüşlerdir. Ele alınan problemde film tabakası bir küre vasıtasıyla yüklenmiş ve tabakanın ağırlığı ihmal edilmiştir. Ayrıca rijit düzlem ile film tabakası arayüzeyinin sürtünmesiz olduğu varsayılmıştır. Çalışma sonucunda temas gerilmeleri ve temas uzunlukları belirlenerek analitik çözüm ile sonlu elemanlar çözümü birbiriyle kıyaslanmıştır.

Birinci ve Eyüboğlu, 2019 ve 2020 yıllarında yaptıkları çalışmada, Winkler temeli üzerine oturan malzeme özellikleri ve yükseklikleri farklı bir fonksiyonel derecelendirilmiş diğeri homojen olan iki tabakanın ayrılmalı temas problemini elastisite teorisine göre analitik olarak incelemiştir. Çalışmada kütle kuvvetleri ihmal edilmiş olup sistem dairesel rijit bir blok vasıtasıyla yüklenmiştir. Yapılan çalışma sonucunda farklı malzeme özellikleri, tabaka yükseklikleri ve Winkler temeli özellikleri ve blok yarıçapları için, FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki temas gerilmeleri ve temas uzunlukları belirlenmiştir.

Çömez, 2020 yılında yaptığı çalışmada fonksiyonel derecelendirilmiş monoklinik bir tabakanın sürtünmeli temas problemini analitik olarak irdelemiştir. Yapılan çalışmada fonksiyonel derecelendirilmiş monoklinik tabaka rijit düzleme bağlanmış olup, dairesel bir blok vasıtasıyla hem yatay hem de düşey yüklerle yüklenmiştir. Yapılan çalışma sonucunda homojenliğin monoklinik malzemelerdeki temasa etkisi belirlenmiştir.

Yan ve Mi, 2020 yılında yaptıkları çalışmada yarı sonsuz düzlem üzerine oturan ve FD tabaka ile güçlendirilmiş homojen bir tabakanın ayrılmalı temas problemini irdelemiştir. Problemde silindirik bir blok vasıtasıyla yüklenmiş olan homojen tabaka FD tabakanın üstüne oturmaktadır. Ayrıca tabakaların kütle kuvvetleri ihmal edilmiştir. Problem, Fourier integral dönüşümleri ve Gauss–Chebyshev integral formülasyonlarından yararlanılarak sayısal olarak çözülmüştür. Yapılan bu çalışma ile, malzeme rijitliğinin ve tabakaların kalınlık oranlarının, temas uzunlukları ve temas gerilmeleri üzerindeki etkileri belirlenmiştir.

Çömez vd., 2020 yılında yaptıkları çalışmada, elektriksel olarak iletken bir rijit düz blok ile homojen bir tabaka arasındaki sürtünmesiz sürekli ve süreksiz temas problemlerini analitik olarak çözmüşlerdir. Ele alınan problemde homojen piezoelektrik tabaka rijit düzleme oturmuş olup, dikdörtgen bir blok vasıtasıyla yüklenmiştir. Ayrıca tabakadaki kütle kuvvetleri dikkate alınmıştır. Yapılan bu çalışma kütle kuvvetinin dikkate alındığı piezoelektrik malzemelerin temas problemini araştıran ilk çalışmadır.

Arslan, 2020 yılında yaptığı çalışmada iki yönde fonksiyonel derecelendirilmiş malzemedan oluşan yarım düzlem ile keyfi olarak şekillendirilmiş blok arasındaki hareketli ve sürtünmeli temas problemini incelemiştir. Problem Fourier integral dönüşüm teknikleri kullanılarak analitik olarak, sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak sayısal olarak çözülmüştür. Çalışma sonucunda temas tepkilerinin, elastik bir malzemeye çift yönlü derecelendirme uygulanmasından sonra etkili bir şekilde kontrol edilebildiği belirlenmiştir.

Şengül Şabano, 2020 yılında yaptığı çalışmada, elastik yarım düzlem üzerine oturan ve düzgün yayılı yüklerle yüklenmiş, yükseklikleri ve malzeme özellikleri farklı 2 tabakanın ayrılmalı temas problemini analitik olarak ele almıştır. Yapılan çalışma sonucunda tabakalar arasındaki ve alt tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki temas gerilmeleri ile temas uzunlukları belirlenmiştir.

Öner ve Birinci 2017 ve 2020 yılında yaptıkları çalışmada dikdörtgen bir blokla yüklenmiş ve elastik yarım düzleme oturan fonksiyonel derreclendirilmiş bir tabakada süreksiz temas problemini elastisite teorisini kullanarak çözmüşlerdir. Yapılan çalışma

sonucunda blok genişliği, rijitlik ve yoğunluk parametreleri gibi çeşitli boyutsuz büyüklükler için fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki gerilme yayılışları, ayrılmanın başlangıç ve bitiş noktaları ile kabarmalar elde edilmiştir.

1.1.2. Çalışmanın Amacı ve Kapsamı

Bu çalışmada, rijit düzlem üzerine oturan malzeme özellikleri ve yükseklikleri farklı iki tabakanın sürtünmesiz temas problemi, elastisite teorisi ve integral dönüşüm teknikleri kullanılarak incelenmiştir. P ve Q dış yükleri, genişlikleri farklı iki rijit blok vasıtasıyla tabakalara aktarılmaktadır. Tüm temas yüzeyleri sürtünmesizdir. Problemin çözümünde elastisite teorisinin temel denklemleri olan denge denklemleri, bünye denklemleri, yer değiştirme ve şekil değiştirme bağıntıları ile bunlara bağlı olarak elde edilen Navier denklemlerinden ve integral dönüşüm tekniklerinden yararlanılmıştır. Aynı zamanda bloklar ile FD tabaka ara yüzeyindeki düşey yer değiştirme fonksiyonunun türevinin sıfır olması koşulu kullanılarak problem tekil integrsl denklem sistemine indirgenmiştir. Daha sonra uygun Gauss-Chebyshev integrasyon formüllerinden yararlanarak problem sayısal olarak çözülmüştür. Problemin çözümlenirken MATLAB dilinde yazılan bilgisayar programından yararlanılmıştır. Ayrıca bu problem, sonlu elemanlar yöntemini (SEM) kullanarak çözüm yapan ANSYS Mechanical APDL paket programı kullanılarak sayısal olarak da analiz edilmiştir.

Ele alınan problem sürekli ve süreksiz temas olmak üzere iki kısımdan oluşmaktadır. Sürekli temas durumunda, tabakalar arasında herhangi bir ayrılma meydana gelmemektedir. Süreksiz temas durumunda ise iki farklı durum söz konusudur. Bu durumlardan ilki, Fonksiyonel Derecelendirilmiş (FD) tabaka ile homojen tabaka arasında meydana gelen ayrılma, ikincisi ise homojen tabaka ile rijit düzlem arasında meydana gelen ayrılma durumudur.

Birinci bölümde, temas problemlerinin tarihsel gelişimi ile birlikte, Fonksiyonel Derecelendirilmiş (FD) malzemeler hakkında bilgi verilip kullanım alanlarından bahsedilmiştir. Probleme kullanılan çözüm yöntemi hakkında kısa bilgi verildikten sonra elastisite teorisine ait denklemler ve integral dönüşüm teknikleri kullanılarak düzlem hal için, Fonksiyonel Derecelendirilmiş tabaka ve homojen tabakaya ait genel gerilme ve yer değiştirme ifadeleri elde edilmiştir.

İkinci bölümde problemin tanımı yapılarak önce sürekli temas durumu incelenmiştir. Gerilme ve yer değiştirme ifadeleri problemin sınır şartlarına uygulanarak sekiz bilinmeyenli sekiz cebrik denklemden oluşan bir denklem takımı elde edilmiştir. Blokların altındaki temas gerilmeleri bilinmeyen fonksiyonlardır. Bloklar ile fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) tabaka arasındaki düşey yer değiştirme fonksiyonlarının türevinin sıfıra eşit olması şartından faydalanılarak problem, tekil integral denklemlere indirgenmiştir. Elde edilen bu integral denklemler sayısal olarak çözülerek blokların altındaki boyutsuz temas gerilmeleri hesaplanmıştır. Bu çözümden elde edilen temas gerilmelerine göre x eksenini boyunca, tabakalar arasındaki ve homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki yüzeylerde oluşan normal gerilmeler incelenmiştir. Aynı zamanda y eksenini boyunca, blok yakınlarında, bloklar altında ve bloklar arasındaki kesitlerde meydana gelen normal gerilme ve kayma gerilmesi değişimleri irdelenmiştir. Ayrıca tabakalar arası ve homojen tabaka ile rijit düzleme ait ara yüzeylerde ilk ayrılmayı meydana getirecek yük ve ilk ayrılmanın meydana geleceği uzaklıklar araştırılmıştır.

Sürekli temas durumu incelendikten sonra süreksiz temas durumu irdelenmiş, ilk olarak FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki süreksizlik ele alınmıştır. Gerilme ve yer değiştirme ifadeleri sınır şartlarına uygulanarak sekiz bilinmeyenli sekiz cebrik denklemden oluşan bir denklem takımı elde edilmiştir. Denklem takımının çözülmesiyle elde edilen katsayılar, bloklar altındaki temas gerilmeleri ve tabakalar arasındaki yüzeyde meydana gelecek ayrılmanın eğimini ifade eden bilinmeyen fonksiyonlara bağlı olarak belirlenmiştir. Rijit blokların düşey yer değiştirmesinin türevi ve ayrılmanın meydana geldiği bölgedeki düşey yer değiştirme farkının türevi ifadelerinden faydalanılarak tekil integral denklemler elde edilmiş, bu denklem sistemi Gauss-Chebyshev integrasyon formülleri yardımıyla çözülmüştür. Bu şekilde, temas gerilmeleri ve ayrılmanın eğimine bağlı olan katsayılar belirlenmiştir. Ardından homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki yüzeyde meydana gelen ayrılma durumu ele alınmıştır. Yazılan yeni sınır şartlarına göre yeni katsayılar elde edilmiş olup önceki süreksiz temas durumuna ait benzer işlemler tekrarlanmıştır. Çözümlerde karşılaşılan tekil terimler ve bunlara ait kapalı integraller bu bölümde verilmiştir.

Üçüncü bölümde rijitlik ve yoğunluk parametreleri, blok genişliği, kayma modülleri oranı, bloklar arasındaki mesafe değişimi, tabaka yükseklikleri oranı, yük oranı gibi çeşitli boyutsuz büyüklüklerin farklı değerleri için, rijit bloklar altındaki temas gerilmesi yayılışları, y eksenini boyunca bloklar altında, bloklar arasında ve blok yakınlarında

meydana gelen normal gerilme ve kayma gerilmesi dağılımları, tabakalara ait ara yüzeyde ve homojen tabaka ile rijit düzlem ara yüzeyindeki normal gerilme yayılışları, bu ara yüzeylerde meydana gelen ayrılma bölgeleri için ayrılma başlangıç ve bitiş noktaları, ayrılma bölgelerindeki düşey yer değiştirmeler ve gerilme yayılışları belirlenmiştir. Bu bölümde ayrıca analitik çözümden elde edilen sonuçlar, SEM kullanılarak gerçekleştirilen analizden elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Bu analize ek olarak, homojen tabaka yüksekliğinin artırılmasıyla, elastik yarım düzleme oturan FD tabakada temas problemine benzer problem elde edilmiş ve literatürde bulunan bu çalışmayla kıyaslanmıştır. Elde edilen tüm sonuçlar grafik ve tablolar halinde sunulmuştur.

Dördüncü bölümde bu çalışmadan elde edilen sonuçlar ve öneriler kısmına yer verilmiştir.

1.2. Genel Denklemlerin Elde Edilmesi

Bu bölümde elastisite teorisi yardımıyla, rijit düzlem üzerine oturan ve rijit iki düz blok vasıtasıyla yüklenmiş malzeme özellikleri farklı iki tabakaya ait temas probleminin çözümünde kullanılacak, yer değiştirme ve gerilmelere ait genel ifadeler elde edilecektir.

1.2.1. Kütle Kuvvetlerinin Bulunmaması Durumunda Genel Denklemlerin Elde Edilmesi

1.2.1.1. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabaka İçin Genel Denklemlerin Elde Edilmesi

Üç boyutlu durumda dengede olan bir cisim için, kartezyen koordinat takımında $(\sigma_x)_1$, $(\sigma_y)_1$, $(\sigma_z)_1$, $(\tau_{xy})_1$, $(\tau_{xz})_1$ ve $(\tau_{yz})_1$ gerilme bileşenlerini göstermek üzere, gerilmelerin herhangi bir nokta civarındaki değişimlerine ait denge denklemleri aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\frac{\partial(\sigma_x)_1}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xy})_1}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{xz})_1}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\tau_{yx})_1}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_y)_1}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{yz})_1}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\tau_{zx})_1}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{zy})_1}{\partial y} + \frac{\partial(\sigma_z)_1}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

Düzlem hal için kütle kuvvetlerinin bulunmaması durumunda denge denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{\partial(\sigma_x)_{1h}}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xy})_{1h}}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial(\tau_{yx})_{1h}}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_y)_{1h}}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

Bu denklemlerde geçen l indisi FD tabakayı, h indisi ise Fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın kütle kuvvetlerinin olmaması durumundaki homojen çözümü göstermektedir. Bünye denklemleri ve yer değiştirme-şekil değiştirme bağıntılarından yararlanılarak gerilme bileşenleri, aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$(\sigma_x)_{1h} = \frac{\mu_1(y)}{(\kappa_1 - 1)} \left[(\kappa_1 + 1) \frac{\partial u_{1h}}{\partial x} + (3 - \kappa_1) \frac{\partial v_{1h}}{\partial y} \right] \quad (6)$$

$$(\sigma_y)_{1h} = \frac{\mu_1(y)}{(\kappa_1 - 1)} \left[(3 - \kappa_1) \frac{\partial u_{1h}}{\partial x} + (\kappa_1 + 1) \frac{\partial v_{1h}}{\partial y} \right] \quad (7)$$

$$(\tau_{xy})_{1h} = \mu_1(y) \left[\frac{\partial u_{1h}}{\partial y} + \frac{\partial v_{1h}}{\partial x} \right] \quad (8)$$

Yukarıdaki eşitliklerde geçen u, v sırasıyla x ve y doğrultularındaki yer değiştirmeleri göstermekte, κ bir malzeme sabiti (Kolosov Sabiti) olup düzlem şekil değiştirme halinde $\kappa = 3 - 4\nu$, düzlem gerilme halinde $\kappa = \frac{(3 - \nu)}{(1 + \nu)}$ olarak bilinmektedir. Çözümlerde, Poisson oranının (ν) sabit olduğu kabul edilmiştir. Ayrıca $\mu_1(y)$, fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın kayma modülünü göstermekte olup aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\mu_1(y) = \mu_0 e^{\beta y} \quad (9)$$

Burada μ_0 , $y=0$ 'daki yani FD tabakanın üst yüzeyindeki kayma modülü, β ise tabakanın derinliği boyunca kayma modülünün değişimini belirleyen rijitlik parametresidir.

(6), (7) ve (8) numaralı denklemlerin gerekli türevleri alınıp (4) ve (5) numaralı denklemlerde yerlerine yazılırsa aşağıdaki Navier denklemleri elde edilir:

$$(\kappa_1 + 1) \frac{\partial^2 u_{1h}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 v_{1h}}{\partial x \partial y} + (\kappa_1 - 1) \frac{\partial^2 u_{1h}}{\partial y^2} + \beta(\kappa_1 - 1) \frac{\partial u_{1h}}{\partial y} + \beta(\kappa_1 - 1) \frac{\partial v_{1h}}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

$$(\kappa_1 - 1) \frac{\partial^2 v_{1h}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u_{1h}}{\partial x \partial y} + (\kappa_1 + 1) \frac{\partial^2 v_{1h}}{\partial y^2} + \beta(3 - \kappa_1) \frac{\partial u_{1h}}{\partial x} + \beta(\kappa_1 + 1) \frac{\partial v_{1h}}{\partial y} = 0 \quad (11)$$

Navier denklemlerinin, kısmi türevli diferansiyel denklem takımı oluşturması, problemin çözümünü zorlaştırmaktadır. Navier denklemlerini adi diferansiyel denklem takımına dönüştürmek ve çözümü kolaylaştırmak için yer değiştirmeler $u_{1h}(x,y)$ ve $v_{1h}(x,y)$, bilinmeyen fonksiyonlar $\phi_1(\xi,y)$ ve $\psi_1(\xi,y)$ 'nin Fourier dönüşümleri olarak tanımlanırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$u_{1h}(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(\xi,y) e^{i\xi x} d\xi \quad (12)$$

$$v_{1h}(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(\xi,y) e^{i\xi x} d\xi \quad (13)$$

(12) ve (13) numaralı denklemlerin ters Fourier dönüşümleri alınır:

$$\phi_1(\xi,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_{1h}(x,y) e^{-i\xi x} dx \quad (14)$$

$$\psi_1(\xi,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v_{1h}(x,y) e^{-i\xi x} dx \quad (15)$$

ifadeleri elde edilir. Burada ξ dönüşüm değişkeni olup $\phi_1(\xi,y)$ ve $\psi_1(\xi,y)$ fonksiyonları, $u_{1h}(x,y)$ ve $v_{1h}(x,y)$ yer değiştirme ifadelerinin ters Fourier dönüşüm fonksiyonlarıdır. Bu

fonksiyonların belirlenebilmesi için (10) ve (11) numaralı denklemler $e^{-i\xi x}$ ile çarpılıp bu denklemlerin $(-\infty, \infty)$ aralığında x 'e göre integralleri alınırsa;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[(\kappa_1 + 1) \frac{\partial^2 u_{1h}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 v_{1h}}{\partial x \partial y} + (\kappa_1 - 1) \frac{\partial^2 u_{1h}}{\partial y^2} + \beta (\kappa_1 - 1) \frac{\partial u_{1h}}{\partial y} + \beta (\kappa_1 - 1) \frac{\partial v_{1h}}{\partial x} \right] e^{-i\xi x} dx = 0 \quad (16)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[(\kappa_1 - 1) \frac{\partial^2 v_{1h}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u_{1h}}{\partial x \partial y} + (\kappa_1 + 1) \frac{\partial^2 v_{1h}}{\partial y^2} + \beta (3 - \kappa_1) \frac{\partial u_{1h}}{\partial x} + \beta (\kappa_1 + 1) \frac{\partial v_{1h}}{\partial y} \right] e^{-i\xi x} dx = 0 \quad (17)$$

denklem sistemi elde edilir. İntegral içindeki ifadeler ayrı ayrı çözülürse:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u_{1h}}{\partial x^2} e^{-i\xi x} dx = i^2 \xi^2 \phi_1 \quad (18)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 v_{1h}}{\partial x \partial y} e^{-i\xi x} dx = i \xi \psi_1' \quad (19)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u_{1h}}{\partial y^2} e^{-i\xi x} dx = \phi_1'' \quad (20)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u_{1h}}{\partial y} e^{-i\xi x} dx = \phi_1' \quad (21)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial v_{1h}}{\partial x} e^{-i\xi x} dx = i \xi \psi_1 \quad (22)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 v_{1h}}{\partial x^2} e^{-i\xi x} dx = i^2 \xi^2 \psi_1 \quad (23)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u_{1h}}{\partial x \partial y} e^{-i\xi x} dx = i \xi \phi_1' \quad (24)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 v_{1h}}{\partial y^2} e^{-i\xi x} dx = \psi_1'' \quad (25)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u_{1h}}{\partial x} e^{-i\xi x} dx = i \xi \phi_1 \quad (26)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial v_{1h}}{\partial y} e^{-i\xi x} dx = \psi_1' \quad (27)$$

elde edilir. (18-27) ifadeleri (16) ve (17) numaralı denklemlerde yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\left[(\kappa_1 - 1)\phi_1'' + \beta(\kappa_1 - 1)\phi_1' + (\kappa_1 + 1)i^2\xi^2\phi_1 + 2i\xi\psi_1' + \beta(\kappa_1 - 1)i\xi\psi_1 \right] = 0 \quad (28)$$

$$\left[(\kappa_1 + 1)\psi_1'' + \beta(\kappa_1 + 1)\psi_1' + (\kappa_1 - 1)i^2\xi^2\psi_1 + 2i\xi\phi_1' + \beta(3 - \kappa_1)i\xi\phi_1 \right] = 0 \quad (29)$$

şeklinde adi diferansiyel denklem takımı elde edilmiş olur.

(28) ve (29) numaralı denklemler incelendiğinde $\frac{d\mathbf{y}}{dy} = \mathbf{a}y + \mathbf{b}y$ şeklinde bir diferansiyel denklem takımı oluşturduğu görülebilir (Apatay, 2010). Bu denklem sisteminin çözümü için;

$$\phi_1 = y_1 \quad (a)$$

$$\psi_1 = y_2 \quad (b)$$

$$\phi_1' = y_3 \quad (c)$$

$$\psi_1' = y_4 \quad (d) \quad (30 \text{ a-d})$$

tanımlamaları yapılarak denklem sistemi $\frac{d\mathbf{y}}{dy} = \mathbf{a}y$ şeklinde matris formatında yazılabilir.

(28) numaralı denklemde ϕ_1'' ve (29) numaralı denklemde ψ_1'' yalnız bırakılırsa:

$$\phi_1'' = -\beta\phi_1' - \frac{(\kappa_1 + 1)}{(\kappa_1 - 1)}i^2\xi^2\phi_1 - \frac{2i\xi}{(\kappa_1 - 1)}\psi_1' - \beta i\xi\psi_1 \quad (31)$$

$$\psi_1'' = -\beta\psi_1' - \frac{(\kappa_1 - 1)}{(\kappa_1 + 1)}i^2\xi^2\psi_1 - \frac{2i\xi}{(\kappa_1 + 1)}\phi_1' - \beta\frac{(3 - \kappa_1)}{(\kappa_1 + 1)}i\xi\phi_1 \quad (32)$$

ifadeleri elde edilir. (31) ve (32) numaralı denklemler düzenlenirse;

$$\frac{d\mathbf{y}}{dy} = -\frac{(\kappa_1 + 1)}{(\kappa_1 - 1)}i^2\xi^2y_1 - \beta i\xi y_2 - \beta y_3 - \frac{2i\xi}{(\kappa_1 - 1)}y_4 \quad (33)$$

$$y_4^g = -\beta \frac{(3-\kappa_1)}{(\kappa_1+1)} i\xi y_1 - \frac{(\kappa_1-1)}{(\kappa_1+1)} i^2 \xi^2 y_2 - \frac{2i\xi}{(\kappa_1+1)} y_3 - \beta y_4 \quad (34)$$

şeklinde denklem takımı elde edilir. $y_1^g = \frac{d\phi_1}{dy}$ ve $y_2^g = \frac{d\psi_1}{dy}$ olacağından, denklem takımı aşağıdaki matris formunda yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} y_1^g \\ y_2^g \\ y_3^g \\ y_4^g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{(\kappa_1+1)}{(\kappa_1-1)} \xi^2 & -\beta i \xi & -\beta & \frac{-2i\xi}{(\kappa_1-1)} \\ \frac{(3-\kappa_1)}{(\kappa_1+1)} \beta i \xi & \frac{(\kappa_1-1)}{(\kappa_1+1)} \xi^2 & \frac{-2i\xi}{(\kappa_1+1)} & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Burada;

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{(\kappa_1+1)}{(\kappa_1-1)} \xi^2 & -\beta i \xi & -\beta & \frac{-2i\xi}{(\kappa_1-1)} \\ \frac{(3-\kappa_1)}{(\kappa_1+1)} \beta i \xi & \frac{(\kappa_1-1)}{(\kappa_1+1)} \xi^2 & \frac{-2i\xi}{(\kappa_1+1)} & -\beta \end{bmatrix} \quad (36)$$

olarak tanımlanırsa; $|\varepsilon-sI|=0$ yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\left[s^4 + 2\beta s^3 + (\beta^2 - 2\xi^2) s^2 - 2\beta \xi^2 s + \xi^4 + \xi^2 \beta^2 \frac{(3-\kappa_1)}{(\kappa_1+1)} \right] = 0 \quad (37)$$

şeklinde diferansiyel denklem sisteminin karakteristik denklemi elde edilir. Diferansiyel denklem sisteminin çözümünün e^{sy} şeklinde olduğu kabul edilirse;

$$\phi_1 = \sum_{j=1}^4 A_j e^{s_j y} \quad (j=1, 2, 3, 4) \quad (38)$$

$$\psi_1 = \sum_{j=1}^4 A_j n_j e^{s_j y} \quad (j=1, 2, 3, 4) \quad (39)$$

şeklinde yazılabilir. (38) ve (39) nolu ifadelerin gerekli türevleri alınıp (28) ve (29) numaralı denklemlerde yerlerine yazılır ve çözüm yapılırsa;

$$n_j = \frac{(\kappa_1 - 3)\beta i\xi - 2i\xi s_j}{(\kappa_1 - 1)i^2\xi^2 + (\kappa_1 + 1)(s_j^2 + \beta s_j)}, \quad (j=1, 2, 3, 4) \quad (40)$$

ifadesi elde edilir. Karakteristik denklemin kökleri ise;

$$s_1 = -\frac{1}{2} \left(\beta - \sqrt{4\xi^2 + \beta^2 - 4|\xi||\beta|i\sqrt{\frac{(3-\kappa_1)}{(\kappa_1+1)}}} \right) \quad (41)$$

$$s_2 = -\frac{1}{2} \left(\beta - \sqrt{4\xi^2 + \beta^2 + 4|\xi||\beta|i\sqrt{\frac{(3-\kappa_1)}{(\kappa_1+1)}}} \right) \quad (42)$$

$$s_3 = -\frac{1}{2} \left(\beta + \sqrt{4\xi^2 + \beta^2 + 4|\xi||\beta|i\sqrt{\frac{(3-\kappa_1)}{(\kappa_1+1)}}} \right) \quad (43)$$

$$s_4 = -\frac{1}{2} \left(\beta + \sqrt{4\xi^2 + \beta^2 - 4|\xi||\beta|i\sqrt{\frac{(3-\kappa_1)}{(\kappa_1+1)}}} \right) \quad (44)$$

şeklinde dir. $\phi_1(\zeta, y)$ ve $\psi_1(\zeta, y)$ fonksiyonları sırasıyla (12) ve (13) numaralı denklemlerde yerlerine yazılırsa, fonksiyonel derecelendirilmiş tabakaya ilişkin yer değiştirme ifadeleri, kütle kuvvetlerinin olmadığı durum için aşağıdaki gibi elde edilirler;

$$u_{1h}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 A_j e^{s_j y + i\xi x} d\xi \quad (j=1, 2, 3, 4) \quad (45)$$

$$v_{1h}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 A_j n_j e^{s_j y + i\xi x} d\xi \quad (j=1, 2, 3, 4) \quad (46)$$

Yukarıdaki eşitliklerde geçen A_j ($j=1, \dots, 4$) katsayıları probleme ait sınır şartlarından elde edileceklerdir. (45) ve (46) numaralı ifadeler (6-8) numaralı denklemlerde yerlerine yazılırsa, fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka için kütle kuvvetlerinin olmaması durumunda gerilme ifadeleri:

$$(\sigma_x)_{1h}(x, y) = \frac{\mu_1(y)}{(\kappa_1 - 1)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 [i\xi(\kappa_1 + 1) + s_j n_j (3 - \kappa_1)] A_j e^{s_j y + i\xi x} d\xi \quad (47)$$

$$(\sigma_y)_{1h}(x, y) = \frac{\mu_1(y)}{(\kappa_1 - 1)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 [i\xi(3 - \kappa_1) + s_j n_j (\kappa_1 + 1)] A_j e^{s_j y + i\xi x} d\xi \quad (48)$$

$$(\tau_{xy})_{1h}(x, y) = \mu_1(y) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 [s_j + i\xi n_j] A_j e^{s_j y + i\xi x} d\xi \quad (49)$$

şeklinde elde edilir.

1.2.1.2. Homojen Tabaka İçin Genel Denklemlerin Elde Edilmesi

Bu bölümde kütle kuvvetlerinin olmaması durumunda homojen tabakaya ait genel ifadeler Navier denklemleri yardımıyla elde edilecektir. Düzlem halde σ_x , σ_y ve τ_{xy} gerilme bileşenlerini göstermek üzere, kütle kuvvetlerinin bulunmaması durumunda denge denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{\partial(\sigma_x)_{2h}}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xy})_{2h}}{\partial y} = 0 \quad (50)$$

$$\frac{\partial(\tau_{yx})_{2h}}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_y)_{2h}}{\partial y} = 0 \quad (51)$$

Bu denklemlerde bünye denklemleri ve yer değiştirme-şekil değiştirme bağıntılarından yararlanılarak gerilme bileşenleri, aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$(\sigma_x)_{2h} = Lmed + 2\mu_2 \frac{\partial u_{2h}}{\partial x} \quad (52)$$

$$(\sigma_y)_{2h} = Lmed + 2\mu_2 \frac{\partial v_{2h}}{\partial y} \quad (53)$$

$$(\tau_{xy})_{2h} = \mu_2 \left[\frac{\partial u_{2h}}{\partial y} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x} \right] \quad (54)$$

Yukarıdaki eşitliklerde bulunan u ve v ifadeleri sırasıyla homojen tabakada x ve y doğrultularındaki yer değiştirmeleri göstermektedir. İfadelerde geçen 2 indisi homojen tabakayı, h indisi homojen tabakanın kütle kuvvetlerinin olmaması durumundaki homojen çözümü göstermektedir. Ayrıca ed hacim değiştirme oranı, Lm ve μ ise Lamé sabitlerini göstermekte olup aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$ed = \frac{\partial u_{2h}}{\partial x} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial y} \quad (55)$$

$$Lm = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (56)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (57)$$

(56) ve (57) numaralı denklemlerdeki E ve ν sırasıyla homojen tabakaya ilişkin elastisite modülü ve Poisson oranını göstermektedir.

(52-54) numaralı denklemlerin gerekli türevleri alınıp (50) ve (51) numaralı denklemlerde yerlerine yazılırsa, Navier denklemleri aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$(Lm + \mu) \frac{\partial ed}{\partial x} + \mu \nabla^2 u_{2h} = 0 \quad (58)$$

$$(Lm + \mu) \frac{\partial ed}{\partial y} + \mu \nabla^2 v_{2h} = 0 \quad (59)$$

Burada ∇^2 , Laplace operatörü olup aşağıdaki gibi tanımlanabilmektedir:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (60)$$

(58) ve (59) numaralı denklemler düzenlenirse:

$$(Lm + \mu) \left[\frac{\partial^2 u_{2h}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{2h}}{\partial x \partial y} \right] + \mu \left[\frac{\partial^2 u_{2h}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{2h}}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (61)$$

$$(Lm + \mu) \left[\frac{\partial^2 u_{2h}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_{2h}}{\partial y^2} \right] + \mu \left[\frac{\partial^2 v_{2h}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{2h}}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (62)$$

Burada iki tane bilinmeyen olan ve bulunmak istenen $u_{2h}(x,y)$ ve $v_{2h}(x,y)$ yer değiştirme fonksiyonları için, iki denklemden oluşan bir kısmi türevli diferansiyel denklem takımı elde edilmiştir. Problem, bu kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümlerinden ibarettir.

İlk olarak $u_{2h}(x,y)$ ve $v_{2h}(x,y)$, bilinmeyen yer değiştirme fonksiyonları, $\phi_2(\xi,y)$ ve $\psi_2(\xi,y)$ ' nin üstel Fourier dönüşümleri olarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$u_{2h}(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 \phi_2(\xi,y) e^{i\xi x} d\xi \quad (63)$$

$$v_{2h}(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 \psi_2(\xi,y) e^{i\xi x} d\xi \quad (64)$$

(63) ve (64) numaralı denklemlerin ters dönüşümleri alınır;

$$\phi_2(\xi,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 u_{2h}(x,y) e^{-i\xi x} dx \quad (65)$$

$$\psi_2(\xi,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 v_{2h}(x,y) e^{-i\xi x} dx \quad (66)$$

ifadeleri elde edilir. Burada ξ dönüşüm değişkeni olup $\phi_2(\xi,y)$ ve $\psi_2(\xi,y)$ fonksiyonları, $u_{2h}(x,y)$ ve $v_{2h}(x,y)$ yer değiştirme ifadelerinin ters Fourier dönüşüm fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonların belirlenebilmesi için (65) ve (66) numaralı denklemlerin $e^{-i\xi x}$ ile çarpılıp $(-\infty, \infty)$ aralığında x ' e göre integrali alınır;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[(Lm + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_{2h}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{2h}}{\partial x \partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_{2h}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{2h}}{\partial y^2} \right) \right] e^{-i\xi x} dx = 0 \quad (67)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[(Lm + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_{2h}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_{2h}}{\partial y^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 v_{2h}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{2h}}{\partial y^2} \right) \right] e^{-i\xi x} dx = 0 \quad (68)$$

denklem sistemi elde edilir. İntegral içindeki ifadeler ayrı ayrı çözülürse;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u_{2h}}{\partial x^2} e^{-i\xi x} dx = i^2 \xi^2 \phi_2 \quad (69)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 v_{2h}}{\partial x \partial y} e^{-i\xi x} dx = i \xi \psi_2' \quad (70)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u_{2h}}{\partial y^2} e^{-i\xi x} dx = \phi_2'' \quad (71)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u_{2h}}{\partial y} e^{-i\xi x} dx = \phi_2' \quad (72)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial v_{2h}}{\partial x} e^{-i\xi x} dx = i \xi \psi_2 \quad (73)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 v_{2h}}{\partial x^2} e^{-i\xi x} dx = i^2 \xi^2 \psi_2 \quad (74)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u_{2h}}{\partial x \partial y} e^{-i\xi x} dx = i \xi \phi_2' \quad (75)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 v_{2h}}{\partial y^2} e^{-i\xi x} dx = \psi_2'' \quad (76)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u_{2h}}{\partial x} e^{-i\xi x} dx = i \xi \phi_2 \quad (77)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial v_{2h}}{\partial y} e^{-i\xi x} dx = \psi_2' \quad (78)$$

elde edilir. (69-78) ifadeleri (67) ve (68) numaralı denklemlerde yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$-(\kappa_2 + 1) \xi^2 \phi_2 + (\kappa_2 - 1) \phi_2'' + 2i \xi \psi_2' = 0 \quad (79)$$

$$-(\kappa_2 - 1) \xi^2 \psi_2 + (\kappa_2 + 1) \psi_2'' + 2i \xi \phi_2' = 0 \quad (80)$$

adi diferansiyel denklem takımı elde edilmiş olur. Burada κ bir malzeme sabiti (Kolosov Sabiti) olup, düzlem şekil değiştirme durumunda $\kappa=3-4\nu$, düzlem gerilme durumunda ise $\kappa = \frac{(3-\nu)}{(1+\nu)}$ olarak bilinmektedir. ν Poisson oranıdır. $\psi_2(\xi, y)$ ifadesini bulmak için (80) ifadesinin y' ye göre bir kez, (79) ifadesinin de iki kez türevi alınır ve gerekli işlemler yapılırsa;

$$-(\kappa_2 + 1)\xi^2 \phi_2' + \left(\frac{(\kappa_2 - 1)^2 \xi^2}{2i\xi} + 2i\xi \right) \psi_2'' - \frac{(\kappa_2^2 - 1)}{2i\xi} \psi_2^{iv} = 0 \quad (81)$$

ifadesi elde edilir. Bu denklemden ϕ_2' ifadesi çekilip (80) numaralı denklemde yerine yazılır ve düzenlenirse;

$$\xi^4 \psi_2 - 2\xi^2 \psi_2'' + \psi_2^{iv} = 0 \quad (82)$$

ifadesi elde edilmiş olur. Elde edilen ifade, ψ_2' ye göre dördüncü mertebeden sabit katsayılı, lineer, homojen diferansiyel denklemdir. Bu diferansiyel denklemin çözümü $\psi_2 = e^{\xi y}$ olarak kabul edilir ve bu çözümün gerekli türevleri alınıp (82) numaralı denklemde yerine yazılırsa;

$$\xi^4 - 2\xi^2 \xi^2 + \xi^4 = 0 \quad (83)$$

ifadesi elde edilmiş olur. Bu denklemin kökleri $\xi_1 = \xi_2 = |\xi|$ ve $\xi_1 = \xi_2 = -|\xi|$ olarak bulunur. Buradan (83) denkleminin çözümü B_1, B_2, B_3 ve B_4 bilinmeyen sabitler olmak üzere;

$$\psi_2(\xi, y) = B_1 e^{-|\xi|y} + B_2 y e^{-|\xi|y} + B_3 e^{|\xi|y} + B_4 y e^{|\xi|y} \quad (84)$$

şeklinde bulunur.

$\phi_2(\xi, y)$ bilinmeyen fonksiyonun çözümü için (80) numaralı denklemde $\psi_2(\xi, y)$ ifadesinin gerekli türevleri alındıktan sonra yerlerine yazılırsa ϕ' bilinmeyen fonksiyonu, $\psi_2(\xi, y)$ ve türevlerine bağlı olarak elde edilmiş olur. Bulunan ifadenin y' ye göre integrali alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\phi_2(\xi, y) = ie^{-|\xi|y} \left[-B_1 \frac{|\xi|}{\xi} + B_2 \left(\frac{\kappa_2}{\xi} - \frac{|\xi|}{\xi} y \right) \right] + ie^{|\xi|y} \left[B_3 \frac{|\xi|}{\xi} + B_4 \left(\frac{\kappa_2}{\xi} + \frac{|\xi|}{\xi} y \right) \right] \quad (85)$$

elde edilir. (84) ve (85) numaralı denklemler (63) ve (64) numaralı denklemlerde yerlerine yazılırsa kütle kuvvetlerinin olmaması durumunda homojen tabaka için $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ yer değiştirme ifadeleri aşağıdaki şekilde elde edilirler:

$$u_{2h}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ ie^{-|\xi|y} \left[-B_1 \frac{|\xi|}{\xi} + B_2 \left(\frac{\kappa_2}{\xi} - \frac{|\xi|}{\xi} y \right) \right] + ie^{|\xi|y} \left[B_3 \frac{|\xi|}{\xi} + B_4 \left(\frac{\kappa_2}{\xi} + \frac{|\xi|}{\xi} y \right) \right] \right\} e^{i\xi x} d\xi \quad (86)$$

$$v_{2h}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ [B_1 + B_2 y] e^{-|\xi|y} + [B_3 + B_4 y] e^{|\xi|y} \right\} e^{i\xi x} d\xi. \quad (87)$$

(86, 87) denklemleri (52-54) numaralı denklemlerde yerlerine yazılırsa, homojen tabaka için kütle kuvvetlerinin olmaması durumunda gerilme ifadeleri aşağıdaki şekilde elde edilirler:

$$(\sigma_x)_{2h}(x, y) = \frac{\mu_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} \left\{ e^{-|\xi|y} \left\{ 2|\xi| B_1 - [(\kappa_2 + 3) - 2|\xi|y] B_2 \right\} - e^{|\xi|y} \left\{ 2|\xi| B_3 + [(\kappa_2 + 3) + 2|\xi|y] B_4 \right\} \right\} d\xi \quad (88)$$

$$(\sigma_y)_{2h}(x, y) = \frac{\mu_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} \left\{ e^{-|\xi|y} \left\{ -2|\xi| B_1 + [(\kappa_2 - 1) - 2|\xi|y] B_2 \right\} + e^{|\xi|y} \left\{ 2|\xi| B_3 + [(\kappa_2 - 1) + 2|\xi|y] B_4 \right\} \right\} d\xi \quad (89)$$

$$(\tau_{xy})_{2h}(x, y) = \frac{i\mu_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} \left\{ e^{-|\xi|y} \left\{ 2\xi B_1 + \left[-\frac{|\xi|}{\xi} (\kappa_2 + 1) - 2\xi y \right] B_2 \right\} + e^{|\xi|y} \left\{ 2\xi B_3 + \left[\frac{|\xi|}{\xi} (\kappa_2 + 1) + 2\xi y \right] B_4 \right\} \right\} d\xi \quad (90)$$

Burada B_1, B_2, B_3 ve B_4 büyüklükleri bilinmeyen sabit katsayılardır ve probleme ait sınır şartları kullanılarak elde edileceklerdir.

1.3. Kütle Kuvvetlerinin Bulunması Durumunda Özel Çözümlerin Elde Edilmesi

1.3.1. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabaka İçin Özel Çözümlerin Elde Edilmesi

Bu bölümde kütle kuvvetleri etkisi altındaki FD tabakaya ait genel denklemler elde edilmiştir. FD tabakanın kütle kuvvetlerinin, $X=0$ ve $Y=-\rho_I(y)g$ olduğu kabul edilmiştir.

Burada g yer çekimi ivmesini, $\rho_I(y)$ ise FD tabakanın yoğunluğunu ifade etmektedir. $\rho_I(y)$ ifadesi aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\rho_I(y) = \rho_0 e^{\gamma y} \quad (91)$$

(91) nolu ifadede geçen ρ_0 , fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın üst yüzeyindeki yoğunluk değerini, γ ise derinlik boyunca değişimi belirleyen parametreyi ifade etmektedir.

σ_x , σ_y ve τ_{xy} düzlem halde gerilme bileşenlerini göstermek üzere, kütle kuvvetlerinin bulunması durumunda denge denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{\partial(\sigma_x)_{1\delta}}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xy})_{1\delta}}{\partial y} + X_1 = 0 \quad (92)$$

$$\frac{\partial(\tau_{yx})_{1\delta}}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_y)_{1\delta}}{\partial y} + Y_1 = 0 \quad (93)$$

Bu denklemlerde geçen δ indisi kütle kuvvetinin olması halinde, özel çözümü ifade etmektedir. Fonksiyonel derecelendirilmiş tabakaya ait gerilme bileşenleri ise yer değiştirmeler cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$(\sigma_x)_{1\delta} = \frac{\mu_1(y)}{(\kappa_1 - 1)} \left[(\kappa_1 + 1) \frac{\partial u_{1\delta}}{\partial x} + (3 - \kappa_1) \frac{\partial v_{1\delta}}{\partial y} \right] \quad (94)$$

$$(\sigma_y)_{1\delta} = \frac{\mu_1(y)}{(\kappa_1 - 1)} \left[(3 - \kappa_1) \frac{\partial u_{1\delta}}{\partial x} + (\kappa_1 + 1) \frac{\partial v_{1\delta}}{\partial y} \right] \quad (95)$$

$$(\tau_{xy})_{1\bar{y}} = \mu_1(y) \left[\frac{\partial u_{1\bar{y}}}{\partial y} + \frac{\partial v_{1\bar{y}}}{\partial x} \right]. \quad (96)$$

(94-96) ifadeleri (92, 93) denklemlerinde yerlerine yazılır ve düzenlenirse aşağıdaki Navier denklemleri elde edilir:

$$(\kappa_1 + 1) \frac{\partial^2 u_{1\bar{y}}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 v_{1\bar{y}}}{\partial x \partial y} + (\kappa_1 - 1) \frac{\partial^2 u_{1\bar{y}}}{\partial y^2} + \beta(\kappa_1 - 1) \frac{\partial u_{1\bar{y}}}{\partial y} + \beta(\kappa_1 - 1) \frac{\partial v_{1\bar{y}}}{\partial x} = 0 \quad (97)$$

$$(\kappa_1 - 1) \frac{\partial^2 v_{1\bar{y}}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u_{1\bar{y}}}{\partial x \partial y} + (\kappa_1 + 1) \frac{\partial^2 v_{1\bar{y}}}{\partial y^2} + \beta(3 - \kappa_1) \frac{\partial u_{1\bar{y}}}{\partial x} + \beta(\kappa_1 + 1) \frac{\partial v_{1\bar{y}}}{\partial y} = \frac{\rho_0 e^{\gamma y} g (\kappa_1 - 1)}{\mu_0 e^{\beta y}} \quad (98)$$

Yer değiştirme ifadeleri $u_{1\bar{y}} = u_{1\bar{y}}(x)$ ve $v_{1\bar{y}} = v_{1\bar{y}}(y)$ olarak kabul edilir ve gerekli türevler alınır, (97) numaralı denklemden:

$$(\kappa_1 + 1) \frac{\partial^2 u_{1\bar{y}}}{\partial x^2} = 0 \quad (99)$$

$$\frac{\partial u_{1\bar{y}}}{\partial x} = L_1 \quad (100)$$

$$u_{1\bar{y}}(x) = L_1 x + L_2 \quad (101)$$

ifadeleri elde edilir. (98) numaralı denklemden de,

$$(\kappa_1 + 1) \frac{\partial^2 v_{1\bar{y}}}{\partial y^2} + \beta(3 - \kappa_1) \frac{\partial u_{1\bar{y}}}{\partial x} + \beta(\kappa_1 + 1) \frac{\partial v_{1\bar{y}}}{\partial y} = \frac{\rho_0 g (\kappa_1 - 1) e^{(\gamma - \beta)y}}{\mu_0} \quad (102)$$

denklemini elde edilir. (102) numaralı diferansiyel denklem çözülürse;

$$v_{1\bar{y}}(y) = \frac{(e^{\beta y} y \beta (\beta - \gamma) \gamma (\kappa_1 - 3) \mu_0 L_1 - (\beta - \gamma) \gamma (\kappa_1 + 1) \mu_0 M_1 + \beta (e^{\beta y} (\beta - \gamma) \gamma (\kappa_1 + 1) \mu_0 M_2 - e^{\gamma y} g (\kappa_1 - 1) \rho_0))}{\beta e^{\beta y} (\beta - \gamma) \gamma (\kappa_1 + 1) \mu_0} \quad (103)$$

ifadesi bulunur. u ve v yer değiştirme ifadelerinde geçen L_1 , L_2 , M_1 ve M_2 katsayıları bilinmeyenler olup, kütle kuvveti $-\rho g$ ve kalınlığı h olan fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka için x eksenine tabakanın üstünden geçmek üzere, aşağıdaki gibi yazılan sınır şartları ile çözülecektir:

$$u_{1\ddot{o}}(0) = 0 \quad (104)$$

$$v_{1\ddot{o}}(-h) = 0 \quad (105)$$

$$\sigma_{1y\ddot{o}} = \int_y^0 -\rho_0 g e^{\gamma y} dy \quad (106)$$

$$\int_{-h}^0 \sigma_{1x\ddot{o}} dy = 0. \quad (107)$$

(104-107) denklemlerinden yararlanılarak L_1 , L_2 , M_1 ve M_2 katsayıları aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$L_1 = \frac{e^{(\beta-\gamma)h} \beta \rho_0 g h^2 (3 - \kappa_1) (1 + e^{\gamma h} (\gamma h - 1))}{8\gamma^2 \mu_0 (e^{\beta h} - 1)} \quad (108)$$

$$L_2 = 0 \quad (109)$$

$$M_1 = -\frac{\rho_0 g (\kappa_1 - 1)}{\gamma \mu_0 (\kappa_1 + 1)} \quad (110)$$

$$M_2 = \frac{\rho_0 g \{AA + BB - CC\}}{8\gamma \mu_0 (\kappa_1 + 1)}. \quad (111)$$

(111) nolu ifadede geçen AA, BB ve CC ifadeleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$AA = \frac{\beta h e^{h(\beta-\gamma)} (1 + e^{\gamma h} (h\gamma - 1)) (\kappa_1 - 3)^2}{\gamma (e^{\beta h} - 1)} \quad (112)$$

$$BB = \frac{8e^{\beta h} (\kappa_1 - 1)}{\beta} \quad (113)$$

$$CC = \frac{8e^{h(\beta-\gamma)} (\kappa_1 - 1)}{\beta - \gamma}. \quad (114)$$

Bu ifadeler (101) ve (103) nolu denklemlerde yerlerine yazıldığında, kütle kuvvetlerinin dikkate alınması durumuna ait fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın yer değiştirme bileşenleri aşağıdaki şekilde edilir:

$$u_{1\delta} = \frac{e^{(\beta-\gamma)h} \beta \rho_0 g e^{\beta h} (\kappa_1 - 3) (1 + e^{\gamma h} (\gamma h - 1))}{8\gamma^2 \mu_0 (e^{\beta h} - 1)} x \quad (115)$$

$$v_{1\delta} = \frac{\rho_0 g \beta \left\{ \mu_0 \left[\frac{e^{(\beta-\gamma)h} h \beta (1 + e^{\gamma h} (\gamma h - 1)) (3 - \kappa_1)^2}{\gamma (e^{\beta h} - 1)} \right] + \left[\frac{8e^{\beta h} (\kappa_1 - 1)}{\beta} \right] - \left[\frac{8e^{(\beta-\gamma)h} (\kappa_1 - 1)}{\beta - \gamma} \right] \right\}}{8\gamma \mu_0 (\kappa_1 + 1)} + \frac{\left[\frac{-e^{(\beta-\gamma)h} g \beta \rho_0 (\kappa_1 - 3) (1 + e^{\gamma h} (\gamma h - 1))}{8\gamma^2 \mu_0 (e^{\beta h} - 1)} \right] + \left[\frac{\rho_0 g (\kappa_1 - 1) e^{-\beta y}}{\beta} \right] - \left[\frac{\rho_0 g (\kappa_1 - 1) e^{y(\gamma - \beta)}}{\beta - \gamma} \right]}{\gamma \mu_0 (\kappa_1 + 1)} \quad (116)$$

Yer değiştirmelere ait ifadelerin gerekli türevleri alınıp (94-96) nolu denklemlerde yerlerine yazılırsa yalnız kütle kuvveti etkisi altında fonksiyonel derecelendirilmiş tabakaya ait gerilme bileşenleri;

$$(\sigma_x)_{1\delta} = \frac{\rho_0 g (\kappa_1 - 3) \left[e^{\beta y + h(\beta - \gamma)} \beta + \gamma - e^{\beta h} \gamma - e^{\gamma y} \gamma + e^{\beta h + \gamma y} \gamma + e^{\beta(h + y)} \beta (\gamma h - 1) \right]}{\gamma^2 (\kappa_1 + 1) (e^{\beta h} - 1)} \quad (117)$$

$$(\sigma_y)_{1\delta} = \frac{\rho_0 g (e^{\gamma y} - 1)}{\gamma} \quad (118)$$

$$(\tau_{xy})_{1\delta} = 0 \quad (119)$$

olarak elde edilir. Burada l indisi fonksiyonel derecelendirilmiş tabakayı, δ indisi kütle kuvveti olması durumunda belirlenen yer değiştirme ve gerilme bileşenlerine ait özel çözümü ifade etmektedir.

1.3.2. Homojen Tabaka İçin Özel Çözümlerin Elde Edilmesi

Kütle kuvvetleri etkisindeki homojen tabakanın çözümü elde edilirken, tabakaya ilişkin kütle kuvvetlerinin $X_2=0$ ve $Y_2=-\rho_2 g$ olduğu kabul edilmiştir. Burada ρ_2 , homojen

tabakanın yoğunluğunu ve g yer çekimi ivmesini ifade etmektedir. Düzlem hal için Navier denklemler aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\mu_2 \nabla^2 u_{2\ddot{o}} + \frac{2\mu_2}{(\kappa_2 - 1)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_{2\ddot{o}}}{\partial x} + \frac{\partial v_{2\ddot{o}}}{\partial y} \right) = 0 \quad (120)$$

$$\mu_2 \nabla^2 v_{2\ddot{o}} + \frac{2\mu_2}{(\kappa_2 - 1)} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_{2\ddot{o}}}{\partial x} + \frac{\partial v_{2\ddot{o}}}{\partial y} \right) = \rho_2 g \quad (121)$$

burada ∇^2 Laplace operatörü olup düzlem hal için aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (122)$$

Yer değiştirme ifadeleri $u=u(x)$ ve $v=v(y)$ olarak kabul edilirse, (120) numaralı denklemden,

$$\frac{\partial^2 u_{2\ddot{o}}}{\partial x^2} = 0 \quad (123)$$

$$\frac{\partial u_{2\ddot{o}}}{\partial x} = N_1 \quad (124)$$

$$u_{2\ddot{o}}(x) = N_1 x + N_2 \quad (125)$$

(121) numaralı denklemden de,

$$(\lambda_2 + 2\mu_2) \frac{\partial^2 v_{2\ddot{o}}}{\partial y^2} = \rho_2 g \quad (126)$$

$$\frac{\partial^2 v_{2\ddot{o}}}{\partial y^2} = \frac{\rho_2 g}{(Lm_2 + 2\mu_2)} \quad (127)$$

$$\frac{\partial v_{2\ddot{o}}}{\partial y} = \frac{\rho_2 g}{(Lm_2 + 2\mu_2)} y + O_1 \quad (128)$$

$$v_{2\ddot{o}}(y) = \frac{\rho_2 g}{2(Lm_2 + 2\mu_2)} y^2 + O_1 y + O_2 \quad (129)$$

elde edilir. u ve v yer değiştirme ifadelerinde geçen N_1 , N_2 , O_1 ve O_2 katsayıları bilinmeyenler olup, kütle kuvveti $\rho_2 g$ ve kalınlığı h olan homojen tabaka için x eksenini tabakanın üstünden geçmek üzere, aşağıdaki gibi yazılan sınır Şartları ile elde edilecektir:

$$u_{2\ddot{o}}(0) = 0 \quad (130)$$

$$v_{2\ddot{o}}(-h) = 0 \quad (131)$$

$$(\sigma_y)_{2\ddot{o}} = \int_y^0 -\rho_2 g dy \quad (132)$$

$$\int_{-h}^0 (\sigma_x)_{2\ddot{o}} dy = 0 \quad (133)$$

Sınır Şartlarının (130-133) numaralı denklemlerde yerlerine yazılması ile N_1 , N_2 , O_1 ve O_2 katsayıları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$N_1 = \frac{(3-\kappa_2)}{8\mu_2} \rho_2 ghx \quad (134)$$

$$N_2 = 0 \quad (135)$$

$$O_1 = \frac{\rho_2 gh}{8\mu_2} \left(\frac{(\kappa_2 - 1)}{(\kappa_2 + 1)} + \frac{(\kappa_2 + 1)}{8} \right) \quad (136)$$

$$O_2 = \frac{\rho_2 gh^2}{2\mu_2} \left(\frac{(\kappa_2 + 1)}{8} \right) \quad (137)$$

Bu eşitlikler (125) ve (129) nolu denklemlerde yerlerine yazılırsa, kütle kuvvetinin dikkate alınması durumunda yer değiştirmelere ait özel zmler aşağıdaki gibi elde edilir:

$$u_{2\ddot{o}} = \frac{(3-\kappa_2)}{8\mu_2} \rho_2 ghx \quad (138)$$

$$v_{2\ddot{o}} = \frac{\rho_2 gy}{2\mu_2} \left[\frac{(\kappa_2 - 1)}{(\kappa_2 + 1)} y - \frac{(\kappa_2 + 1)}{8} h \right] \quad (139)$$

Yer değiştirmelerin gerekli turevleri alınıp (52-54) numaralı denklemlerde yerlerine yazılırsa, homojen tabakaya ilişkin ktle kuvveti olması durumundaki özel çözüme ait gerilmeler aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$(\sigma_y)_{2\delta} = \rho_2 g (y + h_1) \quad (140)$$

$$(\sigma_x)_{2\delta} = \rho_2 g \frac{(3 - \kappa_2)}{(1 + \kappa_2)} \left(y + \frac{h}{2} \right) \quad (141)$$

$$(\tau_{xy})_{2\delta} = 0 \quad (142)$$

Genel yer değiştirme ve gerilme ifadeleri, homojen çözümden elde edilen ifadelerle özel çözüm sonucu elde edilen ifadelerin toplamı olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$u_g(x, y) = u_h(x, y) + u_{\delta}(x, y) \quad (143)$$

$$v_g(x, y) = v_h(x, y) + v_{\delta}(x, y) \quad (144)$$

$$\sigma_{x_g}(x, y) = \sigma_{x_h}(x, y) + \sigma_{x_{\delta}}(x, y) \quad (145)$$

$$\sigma_{y_g}(x, y) = \sigma_{y_h}(x, y) + \sigma_{y_{\delta}}(x, y) \quad (146)$$

$$\tau_{xy_g}(x, y) = \tau_{xy_h}(x, y) + \tau_{xy_{\delta}}(x, y) \quad (147)$$

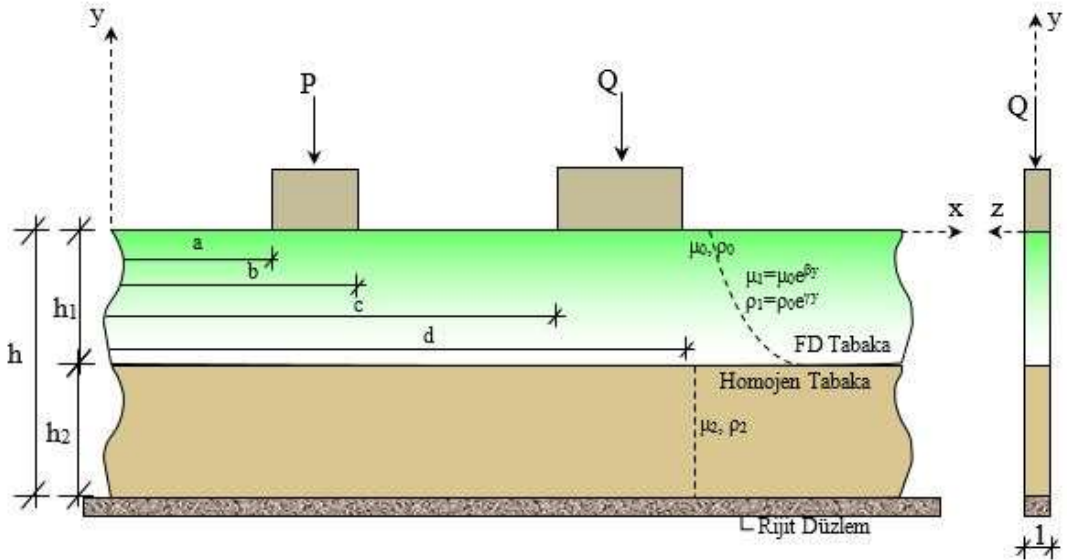
İfadelerde bulunan h indisi ktle kuvvetlerinin bulunmaması durumuna ait homojen çözümlerle, δ indisi, ktle kuvvetinin olduğu durumuna ait özel çözümleri ifade etmektedir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Problemin Tanımı

Rijit düzlem üzerine oturan ve iki rijit düz blok aracılığıyla yüklenmiş biri fonksiyonel derecelendirilmiş iki tabakanın temas problemi, elastisite teorisi ve integral dönüşüm teknikleri kullanılarak ele alınmıştır. P ve Q dış yükleri farklı iki rijit düz blok ile tabakalara aktarılmaktadır. Problemden bütün yüzeylerin sürtünmesiz olduğu kabul edilmiştir. Ayrıca rijit bloklar (a, b) ve (c, d) aralığında fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ile temas halindedir. Çözümde tabakaların kütle kuvvetleri dikkate alınmıştır.

Tabakalar ve rijit düzlem x eksenini boyunca $(-\infty, +\infty)$ aralığında uzanmaktadır. Problem düzlem durum için inceleneceğinden z eksenini doğrultusundaki kalınlık birim olarak alınmıştır. Problemden h_1 ve h_2 sırasıyla, FD tabakanın yüksekliğini ve homojen tabakanın yüksekliğini, h ise tabakaların toplam yüksekliğini ifade etmektedir. g yer çekimi ivmesini, ρ_i ($i=1,2$) ise malzemelerin yoğunluğunu göstermektedir. FD tabaka için β ve γ sırasıyla rijitlik ve yoğunluk değişimlerini belirten parametrelerdir.



Şekil 1. Problemin geometrisi

2.2. Sürekli Temas Durumu

2.2.1. Problemin Sınır Şartları

$u(x,y)$ ve $v(x,y)$ yer değiştirme bileşenlerini, $\sigma_x(x,y)$, $\sigma_y(x,y)$ ve $\tau_{xy}(x,y)$ gerilme bileşenlerini ifade etmek üzere problemin sınır şartları Şekil 1' deki eksen takımına göre aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$(\sigma_y)_1(x,0) = \begin{cases} -p(x) & a < x < b \\ -q(x) & c < x < d \\ 0 & -\infty < x < a, b < x < c, d < x < \infty \end{cases} \quad (148)$$

$$(\tau_{xy})_1(x,0) = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (149)$$

$$(\tau_{xy})_1(x, -h_1) = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (150)$$

$$(\sigma_y)_1(x, -h_1) = (\sigma_y)_2(x, -h_1) \quad -\infty < x < \infty \quad (151)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_2(x, -h_1) - v_1(x, -h_1)] = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (152)$$

$$(\tau_{xy})_2(x, -h_1) = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (153)$$

$$(\tau_{xy})_2(x, -h) = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (154)$$

$$v_2(x, -h) = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (155)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, 0)] = 0 \quad a < x < b \quad (156)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, 0)] = 0 \quad c < x < d \quad (157)$$

Probleme ilişkin denge şartları ise;

$$\int_a^b p(x) dx = P \quad (158a)$$

$$\int_c^d q(x) dx = Q \quad (158b)$$

şeklinde olup, $p(x)$ ve $q(x)$, rijit bloklarla fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka arasındaki bilinmeyen temas gerilmeleridir.

2.2.2. Katsayıların Belirlenmesi

(148-155) denklemleri ile verilen sınır şartlarının, daha önce fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ve homojen tabaka için elde edilen gerilme ve yer değiştirme ifadelerinde yerlerine yazılması ve ters Fourier dönüşümü alınmasıyla, $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3$ ve B_4 katsayılarını içeren sekiz bilinmeyenli sekiz cebrik denklem aşağıdaki gibilerde elde edilir.

$$\begin{aligned} (\sigma_y)_1(x, 0) = \frac{\mu_0}{(\kappa_1 - 1)} \sum_{j=1}^4 \left[i\xi (3 - \kappa_1) + s_j n_j (\kappa_1 + 1) \right] A_j = \\ \int_a^b -p(t) e^{-i\xi t} dt + \int_c^d -q(t) e^{-i\xi t} dt \end{aligned} \quad (159)$$

$$\sum_{j=1}^4 [s_j + i\xi n_j] A_j = 0 \quad (160)$$

$$\sum_{j=1}^4 [s_j + i\xi n_j] A_j \cdot e^{-s_j h_1} = 0 \quad (161)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 E_j A_j \cdot e^{-h_1(s_j + \beta)} - m \left\{ e^{|\xi| h_1} \left[-2|\xi| B_1 + ((\kappa_2 - 1) + 2|\xi| h_1) B_2 \right] \right. \\ \left. + e^{-|\xi| h_1} \left[2|\xi| B_3 + ((\kappa_2 - 1) - 2|\xi| h_1) B_4 \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (162)$$

$$\sum_{j=1}^4 i\xi n_j A_j \cdot e^{-s_j h_1} - i\xi \{ (B_1 - B_2 h_1) e^{|\xi| h_1} + (B_3 - B_4 h_1) e^{-|\xi| h_1} \} = 0 \quad (163)$$

$$\begin{aligned}
(\tau_{xy})_2(x, -h_1) = e^{|\xi|h_1} \left\{ 2\xi B_1 - \left[\frac{|\xi|}{\xi} (\kappa_2 + 1) + 2\xi h_1 \right] B_2 \right\} \\
+ e^{-|\xi|h_1} \left\{ 2\xi B_3 + \left[\frac{|\xi|}{\xi} (\kappa_2 + 1) - 2\xi h_1 \right] B_4 \right\} = 0
\end{aligned} \quad (164)$$

$$\begin{aligned}
(\tau_{xy})_2(x, -h) = e^{|\xi|h} \left\{ 2\xi B_1 - \left[\frac{|\xi|}{\xi} (\kappa_2 + 1) + 2\xi h \right] B_2 \right\} \\
+ e^{-|\xi|h} \left\{ 2\xi B_3 + \left[\frac{|\xi|}{\xi} (\kappa_2 + 1) - 2\xi h \right] B_4 \right\} = 0
\end{aligned} \quad (165)$$

$$[B_1 - B_2 h] e^{|\xi|h} + [B_3 - B_4 h] e^{-|\xi|h} = 0 \quad (166)$$

Sekiz bilinmeyenli sekiz denklem takımından $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3$ ve B_4 aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$\begin{aligned}
\Delta = (\kappa_2 + 1) \left\{ (\kappa_2 + 1) \left[(D_1 D_4 F_2 F_3 - D_1 D_3 F_2 F_4 + D_2 D_3 F_1 F_4 - D_2 D_4 F_1 F_3) (2A_{13} + 2A_{14} - A_{23} - A_{24} - A_{33} - A_{34}) \right. \right. \\
+ (D_1 D_2 F_3 F_4 - D_1 D_4 F_2 F_3 - D_2 D_3 F_1 F_4 + D_3 D_4 F_1 F_2) (2A_{12} + 2A_{15} - A_{22} - A_{25} - A_{32} - A_{35}) \\
+ (D_1 D_3 F_2 F_4 - D_1 D_2 F_3 F_4 + D_2 D_4 F_1 F_3 - D_3 D_4 F_1 F_2) (2A_{11} + 2A_{16} - A_{21} - A_{26} - A_{31} - A_{36}) \left. \right] \\
+ 4\xi m \left[(D_1 D_4 F_3 n_2 - D_1 D_3 F_4 n_2 + D_2 D_3 F_4 n_1 - D_2 D_4 F_3 n_1) (4\xi(h - h_1) A_{44} - A_{54} + A_{64}) \right. \\
+ (D_1 D_2 F_4 n_3 - D_1 D_4 F_2 n_3 + D_3 D_4 F_2 n_1 - D_2 D_3 F_4 n_1) (4\xi(h - h_1) A_{45} - A_{55} + A_{65}) \\
+ (D_1 D_3 F_2 n_4 - D_1 D_2 F_3 n_4 + D_2 D_4 F_3 n_1 - D_3 D_4 F_2 n_1) (4\xi(h - h_1) A_{46} - A_{56} + A_{66}) \\
+ (D_1 D_3 F_4 n_2 - D_3 D_4 F_1 n_2 + D_2 D_4 F_4 n_3 - D_1 D_2 F_4 n_3) (4\xi(h - h_1) A_{41} - A_{51} + A_{61}) \\
+ (D_1 D_2 F_3 n_4 - D_2 D_3 F_1 n_4 + D_3 D_4 F_1 n_2 - D_1 D_4 F_3 n_2) (4\xi(h - h_1) A_{42} - A_{52} + A_{62}) \\
\left. \left. + (D_2 D_3 F_1 n_4 - D_1 D_3 F_2 n_4 + D_1 D_4 F_2 n_3 - D_2 D_4 F_1 n_3) (4\xi(h - h_1) A_{43} - A_{53} + A_{63}) \right] \right\} \quad (167)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_1 = (P + Q) (\kappa_2 + 1) \left\{ (\kappa_2 + 1) \left[(D_2 D_4 F_3 - D_3 D_4 F_2) (2A_{11} - A_{21} - A_{31}) \right. \right. \\
+ (D_3 D_4 F_2 - D_2 D_3 F_4) (2A_{12} - A_{22} - A_{32}) \\
+ (D_2 D_3 F_4 - D_2 D_4 F_3) (2A_{13} - A_{23} - A_{33}) \left. \right] \\
+ 4\xi m \left[(D_3 D_4 n_2 - D_2 D_4 n_3) (4\xi(h_1 - h) A_{41} - A_{51} + A_{61}) \right. \\
+ (D_2 D_3 n_4 - D_4 D_3 n_2) (4\xi(h_1 - h) A_{42} - A_{52} + A_{62}) \\
\left. \left. + (D_4 D_2 n_3 - D_3 D_2 n_4) (4\xi(h_1 - h) A_{43} - A_{53} + A_{63}) \right] \right\} / \Delta \quad (168)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 = (P + Q) (\kappa_2 + 1) \left\{ (\kappa_2 + 1) \left[(D_3 D_4 F_1 - D_1 D_4 F_3) (2A_{15} - A_{25} - A_{35}) \right. \right. \\
+ (D_1 D_3 F_4 - D_3 D_4 F_1) (2A_{16} - A_{26} - A_{36})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (D_1 D_4 F_3 - D_1 D_3 F_4)(2A_{13} - A_{23} - A_{33})] \\
& + 4\xi m [(D_1 D_4 n_3 - D_3 D_4 n_1)(4\xi(h_1 - h)A_{45} - A_{55} + A_{65}) \\
& + (D_3 D_4 n_1 - D_1 D_3 n_4)(4\xi(h_1 - h)A_{46} - A_{56} + A_{66}) \\
& + (D_1 D_3 n_4 - D_1 D_4 n_3)(4\xi(h_1 - h)A_{43} - A_{53} + A_{63})] / \Delta
\end{aligned} \tag{169}$$

$$\begin{aligned}
A_3 = & (P + Q)(\kappa_2 + 1) \{ (\kappa_2 + 1) [(D_1 D_4 F_2 - D_2 D_4 F_1)(2A_{14} - A_{24} - A_{34}) \\
& + (D_2 D_4 F_1 - D_1 D_2 F_4)(2A_{16} - A_{26} - A_{36}) \\
& + (D_1 D_2 F_4 - D_1 D_4 F_2)(2A_{12} - A_{22} - A_{32})] \\
& + 4\xi m [(D_2 D_4 n_1 - D_1 D_4 n_2)(4\xi(h_1 - h)A_{44} - A_{54} + A_{64}) \\
& + (D_1 D_2 n_4 - D_2 D_4 n_1)(4\xi(h_1 - h)A_{46} - A_{56} + A_{66}) \\
& + (D_1 D_4 n_2 - D_1 D_2 n_4)(4\xi(h_1 - h)A_{42} - A_{52} + A_{62})] \} / \Delta
\end{aligned} \tag{170}$$

$$\begin{aligned}
A_4 = & (P + Q)(\kappa_2 + 1) \{ (\kappa_2 + 1) [(D_2 D_3 F_1 - D_1 D_3 F_2)(2A_{14} - A_{24} - A_{34}) \\
& + (D_1 D_2 F_3 - D_2 D_3 F_1)(2A_{15} - A_{25} - A_{35}) \\
& + (D_1 D_3 F_2 - D_1 D_2 F_3)(2A_{11} - A_{21} - A_{31})] \\
& + 4\xi m [(D_1 D_3 n_2 - D_2 D_3 n_1)(4\xi(h_1 - h)A_{44} - A_{54} + A_{64}) \\
& + (D_2 D_3 n_1 - D_1 D_2 n_3)(4\xi(h_1 - h)A_{45} - A_{55} + A_{65}) \\
& + (D_1 D_2 n_3 - D_1 D_3 n_2)(4\xi(h_1 - h)A_{41} - A_{51} + A_{61})] \} / \Delta
\end{aligned} \tag{171}$$

Bu katsayılar da geçen;

$$\begin{array}{lll}
A_{11} = e^{-h_1(s_2+s_3+\beta)} & A_{12} = e^{-h_1(s_2+s_4+\beta)} & A_{13} = e^{-h_1(s_3+s_4+\beta)} \\
A_{14} = e^{-h_1(s_1+s_2+\beta)} & A_{15} = e^{-h_1(s_1+s_3+\beta)} & A_{16} = e^{-h_1(s_1+s_4+\beta)} \\
A_{21} = e^{-2\xi h+h_1(2\xi-s_2-s_3-\beta)} & A_{22} = e^{-2\xi h+h_1(2\xi-s_2-s_4-\beta)} & A_{23} = e^{-2\xi h+h_1(2\xi-s_3-s_4-\beta)} \\
A_{24} = e^{-2\xi h+h_1(2\xi-s_1-s_2-\beta)} & A_{25} = e^{-2\xi h+h_1(2\xi-s_1-s_3-\beta)} & A_{26} = e^{-2\xi h+h_1(2\xi-s_1-s_4-\beta)} \\
A_{31} = e^{2\xi h+h_1(-2\xi-s_2-s_3-\beta)} & A_{32} = e^{2\xi h+h_1(-2\xi-s_2-s_4-\beta)} & A_{33} = e^{2\xi h+h_1(-2\xi-s_3-s_4-\beta)} \\
A_{34} = e^{2\xi h+h_1(-2\xi-s_1-s_2-\beta)} & A_{35} = e^{2\xi h+h_1(-2\xi-s_1-s_3-\beta)} & A_{36} = e^{2\xi h+h_1(-2\xi-s_1-s_4-\beta)} \\
A_{41} = e^{-h_1(s_2+s_3)} & A_{42} = e^{-h_1(s_2+s_4)} & A_{43} = e^{-h_1(s_3+s_4)} \\
A_{44} = e^{-h_1(s_1+s_2)} & A_{45} = e^{-h_1(s_1+s_3)} & A_{46} = e^{-h_1(s_1+s_4)} \\
A_{51} = e^{-2\xi h+h_1(2\xi-s_2-s_3)} & A_{52} = e^{-2\xi h+h_1(2\xi-s_2-s_4)} & A_{53} = e^{-2\xi h+h_1(2\xi-s_3-s_4)} \\
A_{54} = e^{-2\xi h+h_1(2\xi-s_1-s_2)} & A_{55} = e^{-2\xi h+h_1(2\xi-s_1-s_3)} & A_{56} = e^{-2\xi h+h_1(2\xi-s_1-s_4)} \\
A_{61} = e^{2\xi h+h_1(-2\xi-s_2-s_3)} & A_{62} = e^{2\xi h+h_1(-2\xi-s_2-s_4)} & A_{63} = e^{2\xi h+h_1(-2\xi-s_3-s_4)} \\
A_{64} = e^{2\xi h+h_1(-2\xi-s_1-s_2)} & A_{65} = e^{2\xi h+h_1(-2\xi-s_1-s_3)} & A_{66} = e^{2\xi h+h_1(-2\xi-s_1-s_4)}
\end{array} \tag{172}$$

şeklinde ifade edilmiştir.

$$\begin{aligned}
B_1 = & -(P+Q)(\kappa_2+1)B_{41} \left\{ B_{11} \left[(2\xi h_1 + (\kappa_2+1))B_{21} - (4\xi h - 2\xi h_1 + (\kappa_2+1))B_{31} \right] \right. \\
& + B_{12} \left[(2\xi h_1 + (\kappa_2+1))B_{22} - (4\xi h - 2\xi h_1 + (\kappa_2+1))B_{32} \right] \\
& + B_{13} \left[(2\xi h_1 + (\kappa_2+1))B_{23} - (4\xi h - 2\xi h_1 + (\kappa_2+1))B_{33} \right] \\
& \left. + B_{14} \left[(2\xi h_1 + (\kappa_2+1))B_{24} - (4\xi h - 2\xi h_1 + (\kappa_2+1))B_{34} \right] \right\} / \Delta \quad (173)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_2 = & -(P+Q)B_{41} \left\{ B_{11} [B_{21} - B_{31}] + B_{12} [B_{22} - B_{32}] \right. \\
& \left. B_{13} [B_{23} - B_{33}] + B_{13} [B_{23} - B_{33}] \right\} / \Delta \quad (174)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_3 = & -(P+Q)(\kappa_2+1)B_{42} \left\{ B_{11} \left[(-4\xi h - 2\xi h_1 + (\kappa_2+1))B_{21} - (-2\xi h_1 + (\kappa_2+1))B_{31} \right] \right. \\
& + B_{12} \left[(-4\xi h - 2\xi h_1 + (\kappa_2+1))B_{22} - (-2\xi h_1 + (\kappa_2+1))B_{32} \right] \\
& + B_{13} \left[(-4\xi h - 2\xi h_1 + (\kappa_2+1))B_{23} - (-2\xi h_1 + (\kappa_2+1))B_{33} \right] \\
& \left. + B_{14} \left[(-4\xi h - 2\xi h_1 + (\kappa_2+1))B_{24} - (-2\xi h_1 + (\kappa_2+1))B_{34} \right] \right\} / \Delta \quad (175)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_4 = & -(P+Q)B_{42} \left\{ B_{11} [B_{21} - B_{31}] + B_{12} [B_{22} - B_{32}] \right. \\
& \left. B_{13} [B_{23} - B_{33}] + B_{13} [B_{23} - B_{33}] \right\} / \Delta \quad (176)
\end{aligned}$$

Ayrıca,

$$\begin{aligned}
B_{11} &= D_1 D_2 (F_3 n_4 - F_4 n_3) - D_2 D_3 (F_1 n_4 - F_4 n_1) + D_2 D_4 (F_1 n_3 - F_3 n_1) \\
B_{12} &= -D_1 D_2 (F_3 n_4 - F_4 n_3) + D_1 D_3 (F_2 n_4 - F_4 n_2) - D_1 D_4 (F_2 n_3 - F_3 n_2) \\
B_{13} &= -D_1 D_3 (F_2 n_4 - F_4 n_2) + D_2 D_3 (F_1 n_4 - F_4 n_1) - D_3 D_4 (F_1 n_2 - F_2 n_1) \\
B_{14} &= D_1 D_4 (F_2 n_3 - F_3 n_2) - D_2 D_4 (F_1 n_3 - F_3 n_1) + D_3 D_4 (F_1 n_2 - F_2 n_1) \\
B_{21} &= e^{h_1(3\beta+2\xi+s_1+2s_2+s_3+s_4)} & B_{22} &= e^{h_1(3\beta+2\xi+2s_1+s_2+s_3+s_4)} \\
B_{23} &= e^{h_1(3\beta+2\xi+s_1+s_2+3s_3+s_4)} & B_{24} &= e^{h_1(3\beta+2\xi+s_1+s_2+s_3+2s_4)} \\
B_{31} &= e^{2\xi h+h_1(3\beta+s_1+2s_2+s_3+s_4)} & B_{32} &= e^{2\xi h+h_1(3\beta+2s_1+s_2+s_3+s_4)} \\
B_{33} &= e^{2\xi h+h_1(3\beta+s_1+s_2+2s_3+s_4)} & B_{34} &= e^{2\xi h+h_1(3\beta+s_1+s_2+s_3+2s_4)} \\
B_{41} &= e^{-2\xi h-h_1(4\beta+\xi+2s_1+2s_2+2s_3+2s_4)} & B_{42} &= e^{-h_1(4\beta+\xi+2s_1+2s_2+2s_3+2s_4)} \quad (177)
\end{aligned}$$

olarak belirlenmiştir. Ayrıca bu ifadelerde geçen D_j ve F_j ($j=1, 2, 3, 4$), m , P , Q , ifadeleri de aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$D_j = [s_j + i\xi n_j] \quad (178)$$

$$F_j = \frac{[i\xi(3 - \kappa_1) + s_j n_j (\kappa_1 + 1)]}{(\kappa_1 - 1)} \quad (179)$$

$$m = \frac{\mu_2}{\mu_0} \quad (180)$$

$$P = -\frac{1}{\mu_0} \int_a^b p(t) dt \quad (181)$$

$$Q = -\frac{1}{\mu_0} \int_c^d q(t) dt \quad (182)$$

2.2.3. İntegral Denklemlerin Elde Edilmesi

Rijit blokların altlarındaki $p(x)$ ve $q(x)$ temas gerilmesi yayılışlarının bilinmeyenler olduğu daha önceki kısımlarda belirtilmişti. Bu gerilme yayılışlarını elde edebilmek için (156) ve (157) nolu sınır şartlarından yararlanılacaktır. Bu eşitlikler $y=0$ 'da ($a < x < b$) ve ($c < x < d$) aralıklarında sıfıra eşittir. (156) ve (157) numaralı sınır şartları aşağıda açık biçimde yazılmıştır.

$$\frac{\partial v_1(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\xi \sum_{j=1}^4 A_j n_j e^{s_j y + i\xi x} d\xi = 0 \quad a < x < b \quad (183)$$

$$\frac{\partial v_1(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\xi \sum_{j=1}^4 A_j n_j e^{s_j y + i\xi x} d\xi = 0 \quad c < x < d \quad (184)$$

Bu ifadelerde gerekli işlemler yapıldıktan sonra, integral sınırları 0'dan ∞ 'a gidecek şekilde düzenlenir ve denklemlerde geçen üstel ifadeler için gerekli dönüşümler yapılırsa her iki ifade de;

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1(x, y)}{\partial x} &= 2P \int_0^{\infty} \left(\xi A_1 n_1 e^{s_1 y} + \xi A_2 n_2 e^{s_2 y} + \xi A_3 n_3 e^{s_3 y} + \xi A_4 n_4 e^{s_4 y} \right) i [\cos \xi(t-x) - i \sin \xi(t-x)] d\xi \\ &+ 2Q \int_0^{\infty} \left(\xi A_1 n_1 e^{s_1 y} + \xi A_2 n_2 e^{s_2 y} + \xi A_3 n_3 e^{s_3 y} + \xi A_4 n_4 e^{s_4 y} \right) i [\cos \xi(t-x) - i \sin \xi(t-x)] d\xi \end{aligned} \quad (185)$$

şeklinde yazılabilir. (183) ve (184) numaralı denklemleri birbirinden x değişkeni ayırmaktadır. (183) numaralı denklemde ($a < x < b$), (184) numaralı denklemde ($c < x < d$)'dir.

Bu eşitlikler için gerekli düzenlemeler ve sadeleştirmeler yapıldığında (183) ve (184) numaralı denklemlerin her ikisi de aşağıdaki hali alır:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1(x, y)}{\partial x} &= -2 \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\mu_0} \int_a^b p(t) dt \int_0^{\infty} \left(\xi A_1 n_1 e^{s_1 y} + \xi A_2 n_2 e^{s_2 y} + \xi A_3 n_3 e^{s_3 y} + \xi A_4 n_4 e^{s_4 y} \right) [\sin \xi(t-x)] d\xi \\ &- 2 \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\mu_0} \int_c^d q(t) dt \int_0^{\infty} \left(\xi A_1 n_1 e^{s_1 y} + \xi A_2 n_2 e^{s_2 y} + \xi A_3 n_3 e^{s_3 y} + \xi A_4 n_4 e^{s_4 y} \right) [\sin \xi(t-x)] d\xi \end{aligned} \quad (186)$$

(186) nolu denklemde $y \rightarrow 0$ limitine geçerken pay paydaya bölüldüğünde temas gerilmelerinin düzgün bir şekilde elde edilmesine engel olan singüler terim ortaya çıkmaktadır. Bu durumu gidermek için ortaya çıkan singüler terim (186) numaralı integral denklemin çekirdeğinden ayıklanıp kapalı integralleri denkleme ilave edildikten sonra limit işlemine geçilmelidir. Bulunan singüler terim;

$$ST_1 = \int_0^{\infty} e^{\xi y} \left(\frac{\kappa_1 + 1}{4} \right) [\sin \xi(t-x)] d\xi \quad (187)$$

şeklinde yazılabilir. (187) ifadesinin kapalı integrali, integral dönüşüm tabloları yardımıyla belirlendikten sonra $y \rightarrow 0$ limitine geçilmelidir. Singüler terimin kapalı integrali;

$$ST_1 = \left(\frac{\kappa_1 + 1}{4} \right) \frac{(t-x)}{y^2 (t-x)^2} \quad (188)$$

olarak elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapıldıktan sonra (183) ve (184) numaralı denklemler yeniden düzenlendiğinde integral denklemler aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_0} \int_a^b p(t_1) dt_1 \left[k_1^*(x_1, t_1) + \left(\frac{\kappa_1 + 1}{4} \right) \frac{1}{(t_1 - x_1)} \right] \\
& -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_0} \int_c^d q(t_2) dt_2 \left[k_1^*(x_1, t_2) + \left(\frac{\kappa_1 + 1}{4} \right) \frac{1}{(t_2 - x_1)} \right] = 0, \quad (a < x < b)
\end{aligned} \tag{189}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_0} \int_a^b p(t_1) dt_1 \left[k_1^*(x_2, t_1) + \left(\frac{\kappa_1 + 1}{4} \right) \frac{1}{(t_1 - x_2)} \right] \\
& -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_0} \int_c^d q(t_2) dt_2 \left[k_1^*(x_2, t_2) + \left(\frac{\kappa_1 + 1}{4} \right) \frac{1}{(t_2 - x_2)} \right] = 0, \quad (c < x < d)
\end{aligned} \tag{190}$$

Denklemlerde geçen $k_1^*(x, t)$ çekirdeği aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$k_1^*(x, t) = \int_0^\infty \left(k_1(x, t) - \left(\frac{\kappa_1 + 1}{4} \right) \right) \sin \xi(t - x) d\xi \tag{191}$$

Burada;

$$k_1(x, t) = \int_0^\infty \xi (A_1 n_1 + A_2 n_2 + A_3 n_3 + A_4 n_4) [\cos \xi(t - x)] d\xi \tag{192}$$

2.2.4. İntegral Denklemlerin Sayısal Çözümü

İntegral denklemlerin sayısal çözümünü kolaylaştırmak için $\xi = z/h_1$ değişken dönüşümü yapılmış ve $(a < x_1 < b)$, $(c < x_2 < d)$ olmak üzere aşağıdaki boyutsuz büyüklükler tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{b-a}{2} r_1 + \frac{b+a}{2} & (a) \quad t_1 &= \frac{b-a}{2} s_1 + \frac{b+a}{2} & (b) \\
x_2 &= \frac{d-c}{2} r_2 + \frac{d+c}{2} & (c) \quad t_2 &= \frac{d-c}{2} s_2 + \frac{d+c}{2} & (d) \\
\alpha_1(s_1) &= \frac{p \left(\frac{b-a}{2} s_1 + \frac{b+a}{2} \right)}{P/h_1} & (e) \quad \alpha_2(s_2) &= \frac{q \left(\frac{b-a}{2} s_1 + \frac{b+a}{2} \right)}{P/h_1} & (f) \tag{193}
\end{aligned}$$

Tanımlanan boyutsuz büyüklükler (189) ve (190) nolu integral denklemlerde yerlerine yazılırsa;

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \alpha_1(s_1) \frac{b-a}{2h_1} ds_1 + \left[m_1(r_1, s_1) + \left(\frac{\kappa_1 + 1}{4} \right) \frac{1}{\frac{b-a}{2}(s_1 - r_1)} \right] \\ - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \alpha_2(s_2) \frac{d-c}{2h_1} ds_2 + \left[m_2(r_1, s_2) + \left(\frac{\kappa_1 + 1}{4} \right) \frac{1}{\left[\frac{d-c}{2}s_2 + \frac{d+c}{2} \right] - \left[\frac{b-a}{2}r_1 + \frac{b+a}{2} \right]} \right] = 0 \quad (194)$$

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \alpha_1(s_1) \frac{b-a}{2h_1} ds_1 + \left[m_3(r_2, s_1) + \left(\frac{\kappa_1 + 1}{4} \right) \frac{1}{\left[\frac{b-a}{2}s_1 + \frac{b+a}{2} \right] - \left[\frac{d-c}{2}r_2 + \frac{d+c}{2} \right]} \right] \\ - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \alpha_2(s_2) \frac{d-c}{2h_1} ds_2 + \left[m_4(r_2, s_2) + \left(\frac{\kappa_1 + 1}{4} \right) \frac{1}{\frac{d-c}{2}(s_2 - r_2)} \right] = 0 \quad (195)$$

eşitlikleri elde edilir. Burada $\alpha_i(s_i)$ rijit blok altında meydana gelen boyutsuz temas gerilmesidir. $\alpha_i(s_i)$, $s_i = \pm 1$ 'de tekilliğe sahip olduğundan integral denklemin indeksi +1'dir ve çözüm;

$$\alpha_i(s_i) = G_i(s_i) [1 - s_i^2]^{-1/2} \quad (-1 < s_i < 1) \quad (i=1,2) \quad (196)$$

olarak aranabilir (Erdoğan ve Gupta, 1972). Uygun Gauss Chebyshev integrasyon formülü kullanılırsa (194) ve (195) nolu denklemler;

$$-\sum_{i=1}^n W_i G_1(s_{1i}) \frac{b-a}{2h_1} \left[m_1(r_{1j}, s_{1i}) + \left(\frac{\kappa_1 + 1}{4} \right) \frac{1}{\frac{b-a}{2}(s_{1i} - r_{1j})} \right] \\ - \sum_{i=1}^n W_i G_2(s_{2i}) \frac{d-c}{2h_1} \left[m_2(r_{1j}, s_{2i}) + \left(\frac{\kappa_1 + 1}{4} \right) \frac{1}{\left[\frac{d-c}{2}s_{2i} + \frac{d+c}{2} \right] - \left[\frac{b-a}{2}r_{1j} + \frac{b+a}{2} \right]} \right] = 0 \\ (j=1, \dots, n-1) \quad (197)$$

$$\begin{aligned}
& -\sum_{i=1}^n W_i G_1(s_{1i}) \frac{b-a}{2h_1} \left[m_3(r_{2j}, s_{1i}) + \left(\frac{\kappa_1+1}{4} \right) \frac{1}{\left[\frac{b-a}{2} s_{1i} + \frac{b+a}{2} \right] - \left[\frac{d-c}{2} r_{2j} + \frac{d+c}{2} \right]} \right] \\
& -\sum_{i=1}^n W_i G_2(s_{2i}) \frac{d-c}{2h_1} \left[m_4(r_{2j}, s_{2i}) + \left(\frac{\kappa_1+1}{4} \right) \frac{1}{\frac{d-c}{2}(s_{2i} - r_{2j})} \right] \quad (j=1, \dots, n-1) \quad (198)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. (197) ve (198) numaralı ifadelerde geçen m_i ($i=1, \dots, 4$) büyüklükleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned}
m_1(r_1, s_1) &= k_1^*(x_1, t_1); & m_2(r_1, s_2) &= k_1^*(x_1, t_2); \\
m_3(r_2, s_1) &= k_1^*(x_2, t_1); & m_4(r_2, s_2) &= k_1^*(x_2, t_2);
\end{aligned} \quad (199)$$

Probleme ait denge şartları;

$$\int_a^b p(t_1) dt_1 = P \quad (a)$$

$$\int_c^d q(t_2) dt_2 = Q \quad (b) \quad (200 \text{ a-b})$$

şeklinindedir. Bu şartlarda (193) nolu denklemde tanımlanan boyutsuz büyüklükler kullanılırsa;

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \alpha_1(s_1) \frac{b-a}{2h_1} ds_1 = 1 \quad (a)$$

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \alpha_2(s_2) \frac{d-c}{2h_1} ds_2 = \frac{Q}{P} \quad (b) \quad (201 \text{ a-b})$$

elde edilir.

Uygun Gauss Chebyshev integrasyon formüllerinden yararlanılarak denge denklemleri;

$$\sum_{i=1}^n \pi W_i G_1(s_{1i}) \frac{b-a}{2h_1} = 1 \quad (a)$$

$$\sum_{i=1}^n \pi W_i G_2(s_{2i}) \frac{d-c}{2h_1} = \frac{Q}{P} \quad (b) \quad (202a-b)$$

şeklinde elde edilir. Bu eşitliklerde;

$$W_1 = W_n = \frac{1}{2n-2} \quad W_i = \frac{1}{n-1} \quad (i=2, \dots, n-1) \quad (203)$$

$$s_{1i} = s_{2i} = \cos\left(\frac{i-1}{n-1} \pi\right) \quad (i=1, \dots, n) \quad (204)$$

$$r_{1i} = r_{2i} = \cos\left(\frac{2j-1}{2n-2} \pi\right) \quad (j=1, \dots, n-1) \quad (205)$$

olarak tanımlanmıştır. Böylece (197), (198) ve (202) nolu denklemlerden $2n$ bilinmeyenli $2n$ tane denklem elde edilmiş olur. Bilinmeyen temas gerilmeleri $p(x)$ ve $q(x)$ ve bu denklem sisteminin çözümünden belirlenebilir.

2.2.5. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabaka ile Homojen Tabaka ve Homojen Tabaka ile Rijit Düzlem Arasındaki İlk Ayrılma Yükleri ve İlk Ayrılma Uzaklıklarının Belirlenmesi

Tabakaların birbirlerine ve rijit düzleme temas ettikleri yüzeydeki $\sigma_y(x,y)$ gerilme dağılımı ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklığının belirlenmesinde kullanılır. Bu sebeple temas yüzeylerinde meydana gelen $(\sigma_y)_1(x, -h_1)/P/h_1$ ve $(\sigma_y)_2(x, -h)/P/h_1$ gerilmelerinin elde edilmesi gerekir. Öncelikle Fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ile homojen tabaka arasındaki gerilme dağılımının bulunması için belirlenen A_i ($i=1, \dots, 4$) katsayıları ile Fonksiyonel derecelendirilmiş tabakaya ait kütle kuvvetleri için elde edilen özel çözüm (146) nolu denklemde yerlerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} (\sigma_y)_1(x, y) = & 2P \frac{e^{\beta y}}{(\kappa_1 - 1)} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 \left[i\xi (3 - \kappa_1) + s_j n_j (\kappa_1 + 1) \right] A_j e^{s_j y} [\cos \xi(t-x)] d\xi + \\ & 2Q \frac{e^{\beta y}}{(\kappa_1 - 1)} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 \left[i\xi (3 - \kappa_1) + s_j n_j (\kappa_1 + 1) \right] A_j e^{s_j y} [\cos \xi(t-x)] d\xi + \frac{\rho_0 g (e^{\gamma y} - 1)}{\gamma} \end{aligned} \quad (206)$$

ifadesi elde edilir. Fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ile homojen tabaka arasındaki ilk ayrılma yükü ve uzaklığını belirlemek için $y=-h_1$ değeri alınıp $\xi=z/h_1$ dönüşümü yapılarak boyutsuzlaştırma işlemi gerçekleştirilirse;

$$\begin{aligned} \frac{(\sigma_y)_1(x, -h_1)}{P/h_1} &= \frac{(e^{-\gamma h_1} - 1)}{\gamma h_1} \frac{1}{\lambda_1} - \sum_{j=1}^4 W_j G_1(s_{1j}) \frac{b-a}{2h_1} m_5(r_{1j}, s_{1j}) \\ &\quad - \sum_{j=1}^4 W_j G_2(s_{2j}) \frac{d-c}{2h_1} m_6(r_{2j}, s_{2j}), \\ &\quad (-1 < r_1, r_2 < 1) \end{aligned} \quad (207)$$

olur. FD tabaka ile homojen arasındaki temas yüzeyi boyunca normalize edilmiş $(\sigma_y)_1(x,y)/P/h_1$ gerilmesi elde edilir. Homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki gerilme dağılımının bulunması için daha önce belirlenen B_i ($i=1, \dots, 4$) katsayıları ile homojen tabakaya ait kütle kuvvetleri için elde edilen özel çözüm (146) nolu denklemde yerlerine yazılır ve gerekli ara işlemler yapılırsa;

$$\begin{aligned} \frac{(\sigma_y)_2(x, -h)}{P/h_1} &= \left[\frac{(e^{-\gamma h_1} - 1)}{\gamma h_1} + \frac{\rho_2(-h+h_1)}{\rho_0 h_1} \right] \frac{1}{\lambda_2} - \sum_{j=1}^4 W_j G_1(s_{1j}) \frac{b-a}{2h_1} m_7(r_{1j}, s_{1j}) \\ &\quad - \sum_{j=1}^4 W_j G_2(s_{2j}) \frac{d-c}{2h_1} m_8(r_{2j}, s_{2j}), \\ &\quad (-1 < r_1, r_2 < 1) \end{aligned} \quad (208)$$

ifadesi elde edilir. Burada λ_1 , FD tabakaya ait, λ_2 ise homojen tabakaya ait yük faktörleri olup aşağıdaki gibi tanımlanmışlardır:

$$\lambda_1 = \frac{P_1}{\rho_0 g h_1^2} \text{ ve} \quad (209)$$

$$\lambda_2 = \frac{P_2}{\rho_0 g h_1^2} \quad (210)$$

(207) ve (208) nolu denklemlerde geçen m_5 , m_6 , m_7 , m_8 ifadeleri aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}
m_5(r_1, s_1) &= k_2(x_1, t_1) \\
m_6(r_2, s_2) &= k_2(x_2, t_2) \\
m_7(r_1, s_1) &= k_3(x_1, t_1) \\
m_8(r_2, s_2) &= k_3(x_2, t_2)
\end{aligned} \tag{211}$$

(207) ve (208) nolu denklemlerin çekirdekleri sırasıyla;

$$k_2(x_2, t_2) = \frac{e^{\beta y}}{(\kappa_1 - 1)} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 \left[i\xi (3 - \kappa_1) + s_j n_j (\kappa_1 + 1) \right] A_j e^{s_j y} [\cos \xi(t - x)] d\xi \tag{212}$$

$$\begin{aligned}
k_3(x_2, t_2) &= \int_0^\infty \left\{ e^{-\xi y} \left\{ -2\xi B_1 + [(\kappa_2 - 1) - 2\xi y] B_2 \right\} \right. \\
&\quad \left. + e^{\xi y} \left\{ 2\xi B_3 + [(\kappa_2 - 1) + 2\xi y] B_4 \right\} \right\} d\xi [\cos \xi(t - x)] d\xi
\end{aligned} \tag{213}$$

olarak elde edilmiştir.

λ_1 yük faktörünün belirli bir kritik değeri aşması (λ_{cr1}) durumunda, tabakalar arasında ayrılma oluşarak problem süreksiz temas problemi halini alır. Bu nedenle sürekli temas durumunun gerçekleşmesi için temas gerilmelerinin, temas yüzeyi boyunca basınç gerilmesi olması gerekir. Bu durum yalnızca $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_{cr1}$ olması şartıyla sağlanabilir. $\lambda_1 > \lambda_{cr1}$ olması durumunda problem süreksiz temas problemine dönüşür.

Tabakaların arasındaki, ilk ayrılma yükleri ve uzaklıklarının bulunabilmesi için (207) nolu denklemin sıfıra eşitlenmesi gerekmektedir. Bu eşitlik yardımıyla tabakalar arasındaki ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıkları birlikte bulunabilir. Bu eşitliği sağlayan x mesafesi, ilk ayrılma uzaklığı (x_{cr1}) ve ilk ayrılma uzaklığına karşılık gelen yük faktörü de kritik yük faktörü (λ_{cr1}) olarak adlandırılır.

$$\lambda_{cr1} = \frac{P_{cn}}{\rho_0 g h_1^2} \tag{214}$$

λ_2 yük faktörünün belli bir kritik değere ulaşması durumunda (λ_{cr2}) homojen tabaka ile rijit düzlem arasında ayrılma meydana gelir ve problem süreksiz temas problemi halini alır. Homojen tabaka ile rijit düzlem ara yüzeyindeki ilk ayrılma yükleri ve uzaklıklarının belirlenebilmesi için (208) nolu ifadenin sıfıra eşitlenmesi gerekir. Bu durum için

belirlenen x mesafesi ilk ayrılma uzaklığı (x_{cr2}) ve bu uzaklığa karşılık gelen yük faktörü de kritik yük faktörü (λ_{cr2}) olarak ifade edilir.

$$\lambda_{cr2} = \frac{P_{cr2}}{\rho_0 g h_1^2} \quad (215)$$

Bulunan bu yük faktöründen daha büyük yük faktörleri için yani ($\lambda > \lambda_{cr2}$) olması durumunda yukarıda belirtildiği gibi homojen tabaka ile rijit düzlem arasında ayrılmalar meydana geleceğinden problem süreksiz temas problemi halini alır.

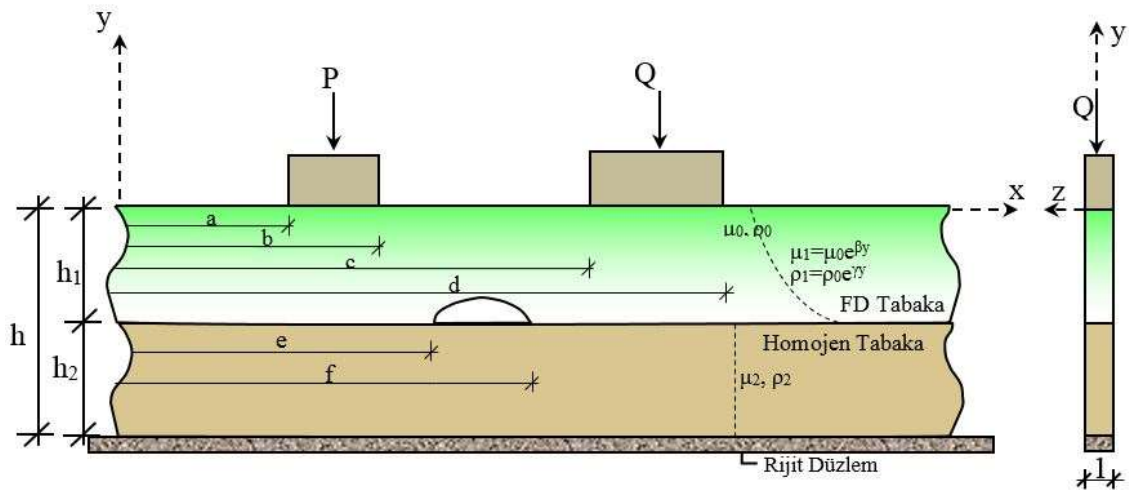
2.3. Süreksiz Temas Durumu

İki rijit düz blok vasıtasıyla yüklenmiş rijit düzlem üzerine oturan malzeme özellikleri farklı tabakalara ait süreksiz temas problemi iki farklı durum için ayrı ayrı incelenecektir. Bunlardan ilki FD tabaka ile homojen tabaka ara yüzeyinde meydana gelen süreksizlik, ikincisi ise homojen tabaka ile rijit düzlem arasında oluşacak süreksizlik durumudur.

Problemin çözümü yapılırken tüm yüzeylerin sürtünmesiz olduğu varsayılmış ve elastisite teorisinden yararlanılmıştır.

2.3.1. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabaka ile Homojen Tabakaya Ait Ara Yüzeyde Meydana Gelen Süreksizlik

FD tabaka ile homojen tabakaya ait ara yüzeyde ayrılma meydana gelebilmesi için yükün (λ_1) bu yüzeyde ilk ayrılmayı meydana getirecek yükten (λ_{cr1}) daha büyük bir değer alması gerekir ($\lambda_1 > \lambda_{cr1}$). Bu koşulun meydana gelmesi durumunda sürekli temasta kullanılan (152) numaralı sınır şartı geçerli olmayacaktır. FD tabaka ile homojen tabakanın birbirinden ayrıldığı (e, f) aralığında düşey yer değiştirmeler farkının türevi $\varphi(x)$ gibi bilinmeyen bir fonksiyona eşit olacaktır. Bu fonksiyonun integrali ise (e, f) aralığındaki tabakalar arasındaki ayrılmayı verecektir. FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki süreksizlikler incelenirken, ara yüzeylerde sürtünmenin olmadığı kabul edilmiştir. Tabakalara ait kütle kuvvetleri dikkate alınmıştır.



Şekil 2. FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki süreksiz temas probleminin geometrisi

2.3.1.1. Problemin Sınır Şartları

$u(x,y)$ ve $v(x,y)$ yer değiştirme bileşenlerini, $\sigma_x(x,y)$, $\sigma_y(x,y)$ ve $\tau_{xy}(x,y)$ gerilme bileşenlerini ifade etmek üzere problemin sınır şartları Şekil 2' deki eksen takımına göre aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$(\sigma_y)_1(x,0) = \begin{cases} -p(x) & a < x < b \\ -q(x) & c < x < d \\ 0 & -\infty < x < a, b < x < c, d < x < \infty \end{cases} \quad (216)$$

$$(\tau_{xy})_1(x,0) = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (217)$$

$$(\tau_{xy})_1(x,-h_1) = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (218)$$

$$(\sigma_y)_1(x,-h_1) = (\sigma_y)_2(x,-h_1) = 0 \quad e < x < f \quad (219)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_2(x,-h_1) - v_1(x,-h_1)] = \begin{cases} 0 & -\infty < x < e, f < x < \infty \\ \varphi(x) & e < x < f \end{cases} \quad (220)$$

$$(\tau_{xy})_2(x,-h_1) = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (221)$$

$$(\tau_{xy})_2(x,-h) = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (222)$$

$$v_2(x, -h) = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (223)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, 0)] = 0 \quad a < x < b \quad (224)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, 0)] = 0 \quad c < x < d \quad (225)$$

(216) ifadesindeki $p(x)$ ve $q(x)$ rijit bloklar ile fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka arasındaki bilinmeyen temas gerilmeleridir.

Probleme ilişkin denge şartları (158) numaralı ifadelerdeki gibidir. Ayrıca probleme ait tek değerlilik şartı aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\int_e^f \varphi(x) dx = 0 \quad (226)$$

2.3.1.2. Katsayıların Belirlenmesi

(216-223) denklemleri ile verilen sınır şartlarının daha önce fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ve homojen tabaka için elde edilen gerilme ve yer değiştirme ifadelerinde yerine yazılması ve ters Fourier dönüşümlerinin alınmasıyla A_1^* , A_2^* , A_3^* , A_4^* , B_1^* , B_2^* , B_3^* ve B_4^* katsayılarını içeren sekiz bilinmeyenli sekiz cebrik denklem elde edilir. Bu denklemler aşağıda verilmiştir:

$$(\sigma_y)_1(x, 0) = \frac{\mu_0}{(\kappa_1 - 1)} \sum_{j=1}^4 [i\xi(3 - \kappa_1) + s_j n_j (\kappa_1 + 1)] A_j^* = \int_a^b -p(t) e^{-i\xi t} dt + \int_c^d -q(t) e^{-i\xi t} dt \quad (227)$$

$$\sum_{j=1}^4 [s_j + i\xi n_j] A_j^* = 0 \quad (228)$$

$$\sum_{j=1}^4 [s_j + i\xi n_j] A_j^* e^{-s_j/h} = 0 \quad (229)$$

$$\sum_{j=1}^4 E_j A_j^* e^{-h_1(s_j+\beta)} - m \left\{ e^{|\xi|h_1} \left[-2|\xi| B_1^* + ((\kappa_2 - 1) + 2|\xi|h_1) B_2^* \right] + e^{-|\xi|h_1} \left[2|\xi| B_3^* + ((\kappa_2 - 1) - 2|\xi|h_1) B_4^* \right] \right\} = 0 ; \quad (230)$$

$$\sum_{j=1}^4 i\xi n_j A_j^* e^{-s_j h_1} - i\xi \left\{ (B_1^* - B_2^* h_1) e^{|\xi|h_1} + (B_3^* - B_4^* h_1) e^{-|\xi|h_1} \right\} = R \quad (231)$$

$$\begin{aligned} (\tau_{xy})_2(x, -h_1) = e^{|\xi|h_1} \left\{ 2\xi B_1^* - \left[\frac{|\xi|}{\xi} (\kappa_2 + 1) + 2\xi h_1 \right] B_2^* \right\} \\ + e^{-|\xi|h_1} \left\{ 2\xi B_3^* + \left[\frac{|\xi|}{\xi} (\kappa_2 + 1) - 2\xi h_1 \right] B_4^* \right\} = 0 \end{aligned} \quad (232)$$

$$\begin{aligned} (\tau_{xy})_2(x, -h) = e^{|\xi|h} \left\{ 2\xi B_1^* - \left[\frac{|\xi|}{\xi} (\kappa_2 + 1) + 2\xi h \right] B_2^* \right\} \\ + e^{-|\xi|h} \left\{ 2\xi B_3^* + \left[\frac{|\xi|}{\xi} (\kappa_2 + 1) - 2\xi h \right] B_4^* \right\} = 0 \end{aligned} \quad (233)$$

$$[B_1^* - B_2^* h] e^{|\xi|h} + [B_3^* - B_4^* h] e^{-|\xi|h} = 0 \quad (234)$$

$$R = \frac{1}{2\pi\xi i} \int_a^b \varphi(t) dt \quad (235)$$

Sekiz bilinmeyenli sekiz denklem takımından, problemin çözümünde kullanılan A_1^*, A_2^*, A_3^* ve A_4^* katsayıları aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} \Delta = (\kappa_2 + 1) \left\{ (\kappa_2 + 1) \left[(D_1 D_4 F_2 F_3 - D_1 D_3 F_2 F_4 + D_2 D_3 F_1 F_4 - D_2 D_4 F_1 F_3) (2A_{13} + 2A_{14} - A_{23} - A_{24} - A_{33} - A_{34}) \right. \right. \\ + (D_1 D_2 F_3 F_4 - D_1 D_4 F_2 F_3 - D_2 D_3 F_1 F_4 + D_3 D_4 F_1 F_2) (2A_{12} + 2A_{15} - A_{22} - A_{25} - A_{32} - A_{35}) \\ + (D_1 D_3 F_2 F_4 - D_1 D_2 F_3 F_4 + D_2 D_4 F_1 F_3 - D_3 D_4 F_1 F_2) (2A_{11} + 2A_{16} - A_{21} - A_{26} - A_{31} - A_{36}) \left. \right] \\ + 4\xi m \left[(D_1 D_4 F_3 n_2 - D_1 D_3 F_4 n_2 + D_2 D_3 F_4 n_1 - D_2 D_4 F_3 n_1) (4\xi(h - h_1) A_{44} - A_{54} + A_{64}) \right. \\ + (D_1 D_2 F_4 n_3 - D_1 D_4 F_2 n_3 + D_3 D_4 F_2 n_1 - D_2 D_3 F_4 n_1) (4\xi(h - h_1) A_{45} - A_{55} + A_{65}) \\ + (D_1 D_3 F_2 n_4 - D_1 D_2 F_3 n_4 + D_2 D_4 F_3 n_1 - D_3 D_4 F_2 n_1) (4\xi(h - h_1) A_{46} - A_{56} + A_{66}) \\ + (D_1 D_3 F_4 n_2 - D_3 D_4 F_1 n_2 + D_2 D_4 F_4 n_3 - D_1 D_2 F_4 n_3) (4\xi(h - h_1) A_{41} - A_{51} + A_{61}) \\ + (D_1 D_2 F_3 n_4 - D_2 D_3 F_1 n_4 + D_3 D_4 F_1 n_2 - D_1 D_4 F_3 n_2) (4\xi(h - h_1) A_{42} - A_{52} + A_{62}) \\ \left. \left. + (D_2 D_3 F_1 n_4 - D_1 D_3 F_2 n_4 + D_1 D_4 F_2 n_3 - D_2 D_4 F_1 n_3) (4\xi(h - h_1) A_{43} - A_{53} + A_{63}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (236)$$

$$\begin{aligned}
A_1^* = & (\kappa_2 + 1) \left\{ (P + Q) \left\{ (\kappa_2 + 1) \left[(D_2 D_4 F_3 - D_3 D_4 F_2) (2A_{11} - A_{21} - A_{31}) \right. \right. \right. \\
& + (D_3 D_4 F_2 - D_2 D_3 F_4) (2A_{12} - A_{22} - A_{32}) \\
& \left. \left. + (D_2 D_3 F_4 - D_2 D_4 F_3) (2A_{13} - A_{23} - A_{33}) \right] \right\} \\
& + 4\xi m \left[(D_3 D_4 n_2 - D_2 D_4 n_3) (4\xi (h_1 - h) A_{41} - A_{51} + A_{61}) \right. \\
& + (D_2 D_3 n_4 - D_4 D_3 n_2) (4\xi (h_1 - h) A_{42} - A_{52} + A_{62}) \\
& \left. + (D_4 D_2 n_3 - D_3 D_2 n_4) (4\xi (h_1 - h) A_{43} - A_{53} + A_{63}) \right] \left. \right\} \\
& + R(4\xi m) \left\{ (D_2 D_4 F_3 - D_3 D_4 F_2) (4\xi (h - h_1) A_{74} - A_{84} + A_{94}) \right. \\
& + (D_3 D_4 F_2 - D_2 D_3 F_4) (4\xi (h - h_1) A_{73} - A_{83} + A_{93}) \\
& \left. + (D_2 D_3 F_4 - D_2 D_4 F_3) (4\xi (h - h_1) A_{72} - A_{82} + A_{92}) \right\} / \Delta \tag{237}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2^* = & (\kappa_2 + 1) \left\{ (P + Q) \left\{ (\kappa_2 + 1) \left[(D_3 D_4 F_1 - D_1 D_4 F_3) (2A_{15} - A_{25} - A_{35}) \right. \right. \right. \\
& + (D_1 D_3 F_4 - D_3 D_4 F_1) (2A_{16} - A_{26} - A_{36}) \\
& \left. \left. + (D_1 D_4 F_3 - D_1 D_3 F_4) (2A_{13} - A_{23} - A_{33}) \right] \right\} \\
& + 4\xi m \left[(D_1 D_4 n_3 - D_3 D_4 n_1) (4\xi (h_1 - h) A_{45} - A_{55} + A_{65}) \right. \\
& + (D_3 D_4 n_1 - D_1 D_3 n_4) (4\xi (h_1 - h) A_{46} - A_{56} + A_{66}) \\
& \left. + (D_1 D_3 n_4 - D_1 D_4 n_3) (4\xi (h_1 - h) A_{43} - A_{53} + A_{63}) \right] \left. \right\} \\
& + R(4\xi m) \left\{ (D_3 D_4 F_1 - D_1 D_4 F_3) (4\xi (h - h_1) A_{74} - A_{84} + A_{94}) \right. \\
& + (D_1 D_3 F_4 - D_3 D_4 F_1) (4\xi (h - h_1) A_{73} - A_{83} + A_{93}) \\
& \left. + (D_1 D_4 F_3 - D_1 D_3 F_4) (4\xi (h - h_1) A_{71} - A_{81} + A_{91}) \right\} / \Delta \tag{238}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3^* = & (\kappa_2 + 1) \left\{ (P + Q) \left\{ (\kappa_2 + 1) \left[(D_1 D_4 F_2 - D_2 D_4 F_1) (2A_{14} - A_{24} - A_{34}) \right. \right. \right. \\
& + (D_2 D_4 F_1 - D_1 D_2 F_4) (2A_{16} - A_{26} - A_{36}) \\
& \left. \left. + (D_1 D_2 F_4 - D_1 D_4 F_2) (2A_{12} - A_{22} - A_{32}) \right] \right\} \\
& + 4\xi m \left[(D_2 D_4 n_1 - D_1 D_4 n_2) (4\xi (h_1 - h) A_{44} - A_{54} + A_{64}) \right. \\
& + (D_1 D_2 n_4 - D_2 D_4 n_1) (4\xi (h_1 - h) A_{46} - A_{56} + A_{66}) \\
& \left. + (D_1 D_4 n_2 - D_1 D_2 n_4) (4\xi (h_1 - h) A_{42} - A_{52} + A_{62}) \right] \left. \right\} \\
& + R(4\xi m) \left\{ (D_1 D_2 F_4 - D_1 D_4 F_2) (4\xi (h - h_1) A_{71} - A_{81} + A_{91}) \right. \\
& + (D_2 D_4 F_1 - D_1 D_2 F_4) (4\xi (h - h_1) A_{72} - A_{82} + A_{92}) \\
& \left. + (D_1 D_4 F_2 - D_2 D_4 F_1) (4\xi (h - h_1) A_{74} - A_{84} + A_{94}) \right\} / \Delta \tag{239}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_4^* = & (\kappa_2 + 1) \left\{ (P + Q) \left\{ (\kappa_2 + 1) \left[(D_2 D_3 F_1 - D_1 D_3 F_2) (2A_{14} - A_{24} - A_{34}) \right. \right. \right. \\
& + (D_1 D_2 F_3 - D_2 D_3 F_1) (2A_{15} - A_{25} - A_{35}) \\
& \left. \left. + (D_1 D_3 F_2 - D_1 D_2 F_3) (2A_{11} - A_{21} - A_{31}) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +4\xi m \left[(D_1 D_3 n_2 - D_2 D_3 n_1) (4\xi (h_1 - h) A_{44} - A_{54} + A_{64}) \right. \\
& + (D_2 D_3 n_1 - D_1 D_2 n_3) (4\xi (h_1 - h) A_{45} - A_{55} + A_{65}) \\
& \left. + (D_1 D_2 n_3 - D_1 D_3 n_2) (4\xi (h_1 - h) A_{41} - A_{51} + A_{61}) \right] \} \\
& + R(4\xi m) \left\{ (D_2 D_3 F_1 - D_1 D_3 F_2) (4\xi (h - h_1) A_{73} - A_{83} + A_{93}) \right. \\
& + (D_1 D_2 F_3 - D_2 D_3 F_1) (4\xi (h - h_1) A_{72} - A_{82} + A_{92}) \\
& \left. + (D_1 D_3 F_2 - D_1 D_2 F_3) (4\xi (h - h_1) A_{71} - A_{81} + A_{91}) \right\} / \Delta \quad (240)
\end{aligned}$$

Bu ifadelerde geçen;

$$\begin{aligned}
A_{71} &= e^{-s_1 h_1}; A_{72} = e^{-s_2 h_1}; A_{73} = e^{-s_3 h_1}; A_{74} = e^{-s_4 h_1} \\
A_{81} &= e^{-2\xi h + h_1(2\xi - s_1)}; A_{82} = e^{-2\xi h + h_1(2\xi - s_2)}; A_{83} = e^{-2\xi h + h_1(2\xi - s_3)}; A_{84} = e^{-2\xi h + h_1(2\xi - s_4)} \\
A_{91} &= e^{2\xi h - h_1(2\xi - s_1)}; A_{92} = e^{2\xi h - h_1(2\xi - s_2)}; A_{93} = e^{2\xi h - h_1(2\xi - s_3)}; A_{94} = e^{2\xi h - h_1(2\xi - s_4)} \quad (241 \text{ a-1})
\end{aligned}$$

olarak elde edilmiştir.

2.3.1.3. İntegral Denklemlerin Elde Edilmesi

FD tabaka ile homojen tabaka arasında ayrılma meydana gelmesi durumunda sınır şartlarından elde edilen A_1^*, A_2^*, A_3^* ve A_4^* katsayıları $p(x)$, $q(x)$ ve $\varphi(x)$ gibi bilinmeyen üç fonksiyona bağlı olarak belirlenmiştir. Bu fonksiyonların bulunabilmesi için (224, 225) numaralı sınır şartları ve (242) numaralı denklemden faydalanılacaktır.

$$\left[(\sigma_y)_1(x, -h_1) \right] + \frac{\rho_0 g (e^{-\gamma h_1} - 1)}{\gamma} = 0, \quad (e < x < f) \quad (242)$$

A_1^*, A_2^*, A_3^* ve A_4^* katsayıları $\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, 0)] = 0$ denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_1(x, y)}{\partial x} &= -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\mu_0} \int_a^b p(t) e^{-i\xi t} dt \int_{-\infty}^{\infty} i e^{i\xi x} \left(\begin{aligned} &\xi A_1 n_1 e^{s_1 y} + \xi A_2 n_2 e^{s_2 y} \\ &+ \xi A_3 n_3 e^{s_3 y} + \xi A_4 n_4 e^{s_4 y} \end{aligned} \right) d\xi \\
&- \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\mu_0} \int_c^d q(t) e^{-i\xi t} dt \int_{-\infty}^{\infty} i e^{i\xi x} \left(\begin{aligned} &\xi A_1 n_1 e^{s_1 y} + \xi A_2 n_2 e^{s_2 y} \\ &+ \xi A_3 n_3 e^{s_3 y} + \xi A_4 n_4 e^{s_4 y} \end{aligned} \right) d\xi \\
&+ \frac{1}{2\pi i} \int_e^f \varphi(t) e^{-i\xi t} dt \int_{-\infty}^{\infty} i e^{i\xi x} \left(\begin{aligned} &\xi A_1^{**} n_1 e^{s_1 y} + \xi A_2^{**} n_2 e^{s_2 y} \\ &+ \xi A_3^{**} n_3 e^{s_3 y} + \xi A_4^{**} n_4 e^{s_4 y} \end{aligned} \right) d\xi \quad (243)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradaki $A_1^{**}, A_2^{**}, A_3^{**}$ ve A_4^{**} ifadeleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$A_1^{**} = R(4\xi m)(\kappa_2 + 1) \left\{ (D_2 D_4 F_3 - D_3 D_4 F_2)(4\xi(h-h_1)A_{74} - A_{84} + A_{94}) \right. \\ \left. + (D_3 D_4 F_2 - D_2 D_3 F_4)(4\xi(h-h_1)A_{73} - A_{83} + A_{93}) \right. \\ \left. + (D_2 D_3 F_4 - D_2 D_4 F_3)(4\xi(h-h_1)A_{72} - A_{82} + A_{92}) \right\} / \Delta \quad (244)$$

$$A_2^{**} = R(4\xi m)(\kappa_2 + 1) \left\{ (D_3 D_4 F_1 - D_1 D_4 F_3)(4\xi(h-h_1)A_{74} - A_{84} + A_{94}) \right. \\ \left. + (D_1 D_3 F_4 - D_3 D_4 F_1)(4\xi(h-h_1)A_{73} - A_{83} + A_{93}) \right. \\ \left. + (D_1 D_4 F_3 - D_1 D_3 F_4)(4\xi(h-h_1)A_{71} - A_{81} + A_{91}) \right\} / \Delta \quad (245)$$

$$A_3^{**} = R(4\xi m)(\kappa_2 + 1) \left\{ (D_1 D_2 F_4 - D_1 D_4 F_2)(4\xi(h-h_1)A_{71} - A_{81} + A_{91}) \right. \\ \left. + (D_2 D_4 F_1 - D_1 D_2 F_4)(4\xi(h-h_1)A_{72} - A_{82} + A_{92}) \right. \\ \left. + (D_1 D_4 F_2 - D_2 D_4 F_1)(4\xi(h-h_1)A_{74} - A_{84} + A_{94}) \right\} / \Delta \quad (246)$$

$$A_4^{**} = R(4\xi m)(\kappa_2 + 1) \left\{ (D_2 D_3 F_1 - D_1 D_3 F_2)(4\xi(h-h_1)A_{73} - A_{83} + A_{93}) \right. \\ \left. + (D_1 D_2 F_3 - D_2 D_3 F_1)(4\xi(h-h_1)A_{72} - A_{82} + A_{92}) \right. \\ \left. + (D_1 D_3 F_2 - D_1 D_2 F_3)(4\xi(h-h_1)A_{71} - A_{81} + A_{91}) \right\} / \Delta \quad (247)$$

İntegral sınırları değiştirilip (243) numaralı denklem düzenlenirse;

$$\frac{\partial v_1(x, y)}{\partial x} = -2 \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\mu_0} \int_a^b p(t) dt \int_0^\infty \left(\xi A_1 n_1 e^{\xi t} + \xi A_2 n_2 e^{\xi t} \right. \\ \left. + \xi A_3 n_3 e^{\xi t} + \xi A_4 n_4 e^{\xi t} \right) [\sin \xi(t-x)] d\xi \\ - 2 \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\mu_0} \int_c^d q(t) dt \int_0^\infty \left(\xi A_1 n_1 e^{\xi t} + \xi A_2 n_2 e^{\xi t} \right. \\ \left. + \xi A_3 n_3 e^{\xi t} + \xi A_4 n_4 e^{\xi t} \right) [\sin \xi(t-x)] d\xi \\ + 2 \frac{1}{2\pi \xi_1} \int_e^f \varphi(t) e^{-i\xi t} dt \int_0^\infty \left(\xi A_1^{**} n_1 e^{\xi t} + \xi A_2^{**} n_2 e^{\xi t} \right. \\ \left. + \xi A_3^{**} n_3 e^{\xi t} + \xi A_4^{**} n_4 e^{\xi t} \right) [\sin \xi(t-x)] d\xi \quad (248)$$

halini alır.

(248) numaralı denklemde $y \rightarrow -h_1$ limitine geçilirken pay paydaya bölündüğünde, ortaya integral denklemin yakınsamasını bozan singüler terimler ortaya çıkmaktadır. $p(t)$ ve $q(t)$ ' nin çarpan olduğu çekirdekler sürekli temas durumundakiyle aynı olacağından, singüler terimler de sürekli temastakinin aynısı olur.

Bu durumda (224) ve (225) nolu denklemlerden ($a < x < b$) ve ($c < x < d$) aralıklarında elde edilen integral denklemler aşağıdaki gibi düzenlenebilir:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_0} \int_a^b p(t_1) dt_1 \left[k_1^*(x_1, t_1) + \left(\frac{\kappa_1 + 1}{4} \right) \frac{1}{(t_1 - x_1)} \right] \\
& -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_0} \int_c^d q(t_2) dt_2 \left[k_1^*(x_1, t_2) + \left(\frac{\kappa_1 + 1}{4} \right) \frac{1}{(t_2 - x_1)} \right] \\
& + \frac{1}{\pi} \int_e^f \varphi(t_3) dt_3 [k_{22}(x_1, t_3)] = 0 \quad (a < x < b) \quad (249)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_0} \int_a^b p(t_1) dt_1 \left[k_1^*(x_2, t_1) + \left(\frac{\kappa_1 + 1}{4} \right) \frac{1}{(t_1 - x_2)} \right] \\
& -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_0} \int_c^d q(t_2) dt_2 \left[k_1^*(x_2, t_2) + \left(\frac{\kappa_1 + 1}{4} \right) \frac{1}{(t_2 - x_2)} \right] \\
& + \frac{1}{\pi} \int_e^f \varphi(t_3) dt_3 [k_{22}(x_2, t_3)] = 0 \quad (c < x < d) \quad (250)
\end{aligned}$$

İntegral denklemde geçen $k_1^*(x, t)$ ifadesi (192) nolu eşitlik ile tanımlanmıştır. $k_{22}(x, t)$ çekirdeği ise aşağıda verilmiştir.

$$k_{22}(x, t) = \int_0^\infty \xi (A_1 **n_1 + A_2 **n_2 + A_3 **n_3 + A_4 **n_4) [\cos \xi(t - x)] d\xi \quad (251)$$

Bilinmeyen fonksiyonların $p(x)$, $q(x)$ ve $\varphi(x)$ ' in belirlenmesinde kullanılacak üçüncü denklem ise (244) numaralı eşitliktir.

Kütle kuvvetlerinin dikkate alındığı durum için katsayılar $(\sigma_y)_I$ gerilme ifadesinde yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa;

$$\begin{aligned}
(\sigma_y)_1(x, y) = & \frac{\mu_0 e^{\beta y}}{(\kappa_1 - 1)} \left\{ -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_0} \int_a^b p(t) dt \int_0^\infty \sum [i\xi(3 - \kappa_1) + (\kappa_1 + 1)n_j s_j] A_j e^{s_j y} [\cos \xi(t - x)] d\xi \right. \\
& - \frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_0} \int_c^d q(t) dt \int_0^\infty \sum [i\xi(3 - \kappa_1) + (\kappa_1 + 1)n_j s_j] A_j e^{s_j y} [\cos \xi(t - x)] d\xi \\
& \left. - \frac{1}{\pi} \int_e^f \varphi(t) dt \int_0^\infty \sum [i\xi(3 - \kappa_1) + (\kappa_1 + 1)n_j s_j] A_j **e^{s_j y} [i \sin \xi(t - x)] d\xi \right\} \\
& + \frac{\rho_0 g (e^{\gamma y} - 1)}{\gamma} = 0 \quad (252)
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemde $y \rightarrow -h_1$ limitine geçilirken pay paydaya bölündüğünde, integral denklemin yakınmasını bozan singüler terimler ortaya çıkmaktadır. Bulunan singüler terimler;

$$ST_2 = \int_0^{\infty} e^{-\xi(h_1+y)} \left[-\frac{4m}{(1+\kappa_2) + e^{\beta h_1} m(1+\kappa_1)} \right] \sin \xi(t-x) d\xi dt \quad (253)$$

olarak belirlenmiştir. Yakınsamanın bozulmasına sebep olan bu singüler terim (252) nolu integral denklemden çıkarılarak, (253) numaralı eşitliğin integral dönüşüm tabloları yardımıyla (Erdelyi vd. 1954) kapalı integrali alındıktan sonra $y \rightarrow -h_1$ limitine geçilmiştir. Bu işlemler yapıldığında üçüncü integral denklem aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi} \int_a^b p(t) dt [k_2(x,t) \cos \xi(t-x)] - \frac{1}{\pi} \int_c^d q(t) dt [k_2(x,t) \cos \xi(t-x)] \\ & - \frac{\mu_0}{\pi} \int_e^f \varphi(t) dt [k_4^*(x,t) i \sin \xi(t-x)] d\xi \\ & - \frac{4m}{(1+\kappa_2) + e^{\beta h_1} m(1+\kappa_1)} \frac{1}{(t-x)} = -\frac{(e^{\gamma h_1} - 1)}{\gamma h_1} \frac{1}{\lambda_1}, \quad (e < x < f) \end{aligned} \quad (254)$$

Burada $k_4(x,t)$ ve $k_4^*(x,t)$ ifadeleri;

$$k_4(x,t) = \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{\beta y}}{(\kappa_1 - 1)} \sum_{j=1}^4 [i\xi(3 - \kappa_1) + (\kappa_1 + 1)n_j s_j] A_j^* e^{s_j y} \sin \xi(t-x) \right) d\xi \quad (255)$$

$$k_4^*(x,t) = \int_0^{\infty} \left(k_4(x,t) - \left[-\frac{4m}{(1+\kappa_2) + e^{\beta h_1} m(1+\kappa_1)} \right] \sin \xi(t-x) \right) d\xi \quad (256)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

2.3.1.4. Tabakalara Ait Ara Yüzeyde Meydana Gelen Ayrılmanın Belirlenmesi

FD tabaka ile homojen tabaka ara yüzeyinde ortaya çıkan ayrılma bölgesinin belirlenmesi için (249), (250) ve (254) nolu integral denklemler birlikte çözülmüştür.

İntegral denklem takımının sayısal çözümünde $z = \xi h_1$ dönüşümü yapılmış olup (193 a-f) numaralı denklemlere ek olarak aşağıdaki boyutsuz büyüklükler tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned}
 x_3 &= \frac{f-e}{2} r_3 + \frac{f+e}{2} & (a) & & t_3 &= \frac{f-e}{2} s_3 + \frac{f+e}{2} & (b) \\
 \alpha_3(s_3) &= \mu_0 \varrho \frac{\left(\frac{f-e}{2} s_3 + \frac{f+e}{2} \right)}{P/h_1} & (c) & & & & (257)
 \end{aligned}$$

Bu boyutsuz büyüklükler tekil integral denklemlerde yerlerine yazılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

Birinci integral denklem:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \alpha_1(s_1) \frac{b-a}{2h_1} ds_1 \left[m_1^*(r_1, s_1) + \left(\frac{\kappa_1+1}{4} \right) \frac{1}{\frac{b-a}{2}(s_1-r_1)} \right] \\
 & -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \alpha_2(s_2) \frac{d-c}{2h_1} ds_2 \left[m_2^*(r_1, s_2) + \left(\frac{\kappa_1+1}{4} \right) \frac{1}{\left[\frac{d-c}{2} s_2 + \frac{d+c}{2} \right] - \left[\frac{b-a}{2} r_1 + \frac{b+a}{2} \right]} \right] + \\
 & -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \alpha_3(s_3) \frac{f-e}{2h_1} m_3^*(r_1, s_3) ds_3 = 0, \quad (-1 < r_2 < 1) \quad (258)
 \end{aligned}$$

İkinci integral denklem,

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \alpha_1(s_1) \frac{b-a}{2h_1} ds_1 \left[m_4^*(r_2, s_1) + \left(\frac{\kappa_1+1}{4} \right) \frac{1}{\left[\frac{b-a}{2} s_1 + \frac{b+a}{2} \right] - \left[\frac{d-c}{2} r_2 + \frac{d+c}{2} \right]} \right] \\
 & -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \alpha_2(s_2) \frac{d-c}{2h_1} ds_2 \left[m_5^*(r_2, s_2) + \left(\frac{\kappa_1+1}{4} \right) \frac{1}{\frac{d-c}{2}(s_2-r_2)} \right] + \\
 & -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \alpha_3(s_3) \frac{f-e}{2h_1} m_6^*(r_2, s_3) ds_3 = 0, \quad (-1 < r_3 < 1) \quad (259)
 \end{aligned}$$

Üçüncü integral denklem:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \alpha_1(s_1) \frac{b-a}{2h_1} m_7^*(r_3, s_1) ds_1 - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \alpha_2(s_2) \frac{d-c}{2h_1} m_8^*(r_3, s_2) ds_2 + \\
& -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \alpha_3(s_3) \frac{f-e}{2h_1} \left[m_9^*(r_3, s_3) - \frac{4m}{(1+\kappa_2) + e^{\beta h_1} m(1+\kappa_1)} \frac{1}{\frac{f-e}{2h_1}(s_3-r_3)} \right] ds_3 = -\frac{(e^{-\gamma h} - 1)}{\gamma h_1} \frac{1}{\lambda_1},
\end{aligned}$$

(-1 < r₁ < 1) (260)

şeklinde yazılabilir. Denklemlerdeki çekirdekler (192), (212), (213), (251) ve (256) olmak üzere;

$$\begin{aligned}
m_1^*(r_1, s_1) &= k_1^*(x_1, t_1), & m_2^*(r_1, s_2) &= k_1^*(x_1, t_2), & m_3^*(r_1, s_3) &= k_{22}(x_1, t_3), \\
m_4^*(r_2, s_1) &= k_1^*(x_2, t_1), & m_5^*(r_2, s_2) &= k_1^*(x_2, t_2), & m_6^*(r_2, s_3) &= k_{22}(x_2, t_3), \\
m_7^*(r_3, s_1) &= k_2(x_3, t_1), & m_8^*(r_3, s_2) &= k_2(x_3, t_2), & m_9^*(r_3, s_3) &= k_4^*(x_3, t_3)
\end{aligned} \quad (261)$$

şeklinde dir. Probleme ilişkin denge denklemleri ve (228) nolu eşitlikte verilen tek değerlik şartı boyutsuzlaştırılarak, sırasıyla;

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 \alpha_1(s_1) \frac{b-a}{2h_1} ds_1 = 0 & (a) \\
& \int_{-1}^1 \alpha_2(s_2) \frac{d-c}{2h_1} ds_2 = Q/P & (b) \\
& \int_{-1}^1 \alpha_3(s_3) ds_3 = 0 & (c)
\end{aligned} \quad (262 \text{ a-c})$$

olarak yazılabilir. Burada $\alpha_1(s_1)$ ve $\alpha_2(s_2)$ boyutsuz temas gerilmeleri ve $\alpha_3(s_3)$ eğim fonksiyonudur.

(249) ve (250) nolu integral denklemlerin indeksi $s_1, s_2 = \pm 1$ ' de, $\alpha_1(s_1)$ ve $\alpha_2(s_2)$ tekilliğe sahip olduğundan +1'dir. $s_2 = \pm 1$ 'de $\alpha_3(s_3)$ sıfır olduğundan (254) numaralı integral denklemin indeksi ise -1'dir. Ancak ayrılma bölgesinin uç noktalarında ayrılma gayet yatkın olacağından $G_3(-1) = 0$, $G_3(1) = 0$ olup integral denklem takımının birlikte çözümü için (254) numaralı integral denklemin indeksini de +1 almak uygun olmaktadır (Erdoğan ve Gupta, 1972). Böylece integral denklemlerin çözümü (196) nolu eşitlik olarak aranabilir.

Uygun Gauss Chebyshev integrasyon formülü kullanılırsa (258-260) nolu denklemler;

$$\begin{aligned}
& -\sum_{i=1}^n W_i G_1(s_{1i}) \frac{b-a}{2h_1} \left[m_1^*(r_{1j}, s_{1i}) + \left(\frac{\kappa_1+1}{4} \right) \frac{1}{\frac{b-a}{2}(s_{1i} - r_{1j})} \right] \\
& -\sum_{i=1}^n W_i G_2(s_{2i}) \frac{d-c}{2h_1} \left[m_2^*(r_{1j}, s_{2i}) + \left(\frac{\kappa_1+1}{4} \right) \frac{1}{\left[\frac{d-c}{2}s_{2i} + \frac{d+c}{2} \right] - \left[\frac{b-a}{2}r_{1j} + \frac{b+a}{2} \right]} \right] + \\
& -\sum_{i=1}^n W_i G_3(s_{3i}) \frac{f-e}{2h_1} m_3^*(r_{1j}, s_{3i}) ds_3 = 0 \quad (j=1, \dots, n-1) \quad (263)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\sum_{i=1}^n W_i G_1(s_{1i}) \frac{b-a}{2h_1} \left[m_4^*(r_{2j}, s_{1i}) + \left(\frac{\kappa_1+1}{4} \right) \frac{1}{\left[\frac{b-a}{2}s_{1i} + \frac{b+a}{2} \right] - \left[\frac{d-c}{2}r_{2j} + \frac{d+c}{2} \right]} \right] \\
& -\sum_{i=1}^n W_i G_2(s_{2i}) \frac{d-c}{2h_1} \left[m_5^*(r_{2j}, s_{2i}) + \left(\frac{\kappa_1+1}{4} \right) \frac{1}{\frac{d-c}{2}(s_{2j} - r_{2i})} \right] + \\
& -\sum_{i=1}^n W_i G_3(s_{3i}) \frac{f-e}{2h_1} m_6^*(r_{2j}, s_{3i}) ds_3 = 0 \quad (j=1, \dots, n-1) \quad (264)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\sum_{i=1}^n W_i G_1(s_{1i}) \frac{b-a}{2h_1} m_7^*(r_{3j}, s_{1i}) ds_3 - \sum_{i=1}^n W_i G_2(s_{2i}) \frac{d-c}{2h_1} m_8^*(r_{3j}, s_{2i}) ds_3 + \\
& -\sum_{i=1}^n W_i G_3(s_{3i}) \frac{f-e}{2h_1} \left[m_9^*(r_{3j}, s_{3i}) - \frac{4m}{(1+\kappa_2) + e^{\beta h_1} m(1+\kappa_1)} \frac{1}{\frac{f-e}{2h_1}(s_{3i} - r_{3j})} \right] ds_3 = -\frac{(e^{-\gamma h} - 1)}{\gamma h_1} \frac{1}{\lambda_1} \\
& (j=1, \dots, n-1) \quad (265)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilirler. Denge ve tek değerlik şartları da;

$$\sum_{i=1}^n \pi W_i \frac{b-a}{2h_1} G_1(s_{1i}) = 1 \quad (\text{a})$$

$$\sum_{i=1}^n \pi W_i \frac{d-c}{2h_1} G_2(s_{2i}) = Q/P \quad (\text{b})$$

$$\sum_{i=2}^{n-1} \pi W_i \frac{f-e}{2h_1} G_3(s_{3i}) = 1 \quad (\text{c}) \quad (266 \text{ a-c})$$

olarak yazılabilir. Bu eşitliklerde geçen W_i , s_i , r_j büyüklükleri aşağıda tanımlanmıştır.

$$W_1 = W_n = \frac{1}{2n-2} \quad W_i = \frac{1}{n-1} \quad (i = 2, \dots, n-1) \quad (267)$$

$$s_{1i} = s_{2i} = \cos\left(\frac{i-1}{n-1} \pi\right) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (268)$$

$$s_{1i} = s_{2i} = \cos\left(\frac{i-1}{n-1} \pi\right) \quad (i = 1, \dots, n-1) \quad (269)$$

$$r_{1i} = r_{2i} = r_{3i} = \cos\left(\frac{2j-1}{2n-2} \pi\right) \quad (j = 1, \dots, n-1) \quad (270)$$

Böylece $G_1(s_i)$, $G_2(s_i)$, $G_3(s_i)$, e ve f için (263-265) ve (266 a-c) nolu eşitliklerle $3n$ bilinmeyenli $3n$ denklem takımı elde edilmiş olur.

$\lambda_1 > \lambda_{cr}$ olması durumunda seçilen bir yük faktörü değeri için, x_{cr} arada kalacak şekilde e ve f 'ye aynı anda değerler verilir. Seçilen e , f değerleri için (266 a-c) denklemleri aynı anda sağlanmalıdır. Eğer sağlanmıyorsa çözüm için yeniden e ve f değeri belirlenmeli ve çözüm sağlanana kadar bu döngü devam etmelidir. Alınan yük faktörü değeri için e ve f değerleri bulunduğu (e, f) aralığı dışındaki temas yüzeyinde $(\sigma_y)_I(x, -h_I)$ gerilme dağılışı da elde edilmiş olur.

(e, f) ayrılma bölgesinde $[v_2(x, -h_I) - v_1(x, -h_I)]$ yer değiştirme farkı, yani FD tabaka ile homojen tabakaya ait ara yüzeyde meydana gelen ayrılmanın belirlenebilmesi için

$$v^*(x, -h_I) = v_2(x, -h_I) - v_1(x, -h_I) = \int_e^x \alpha_3(t) dt, \quad (e < x < f) \quad (271)$$

$$\frac{\mu_0}{P/h_1} v^*(x, -h_1) = \frac{f-e}{2h_1} \int_{-1}^{r_3} \alpha_3(t) dt, \quad (-1 < r_3 < 1) \quad (272)$$

$$x = \frac{f-e}{2} r_3 + \frac{f+e}{2} \quad (273)$$

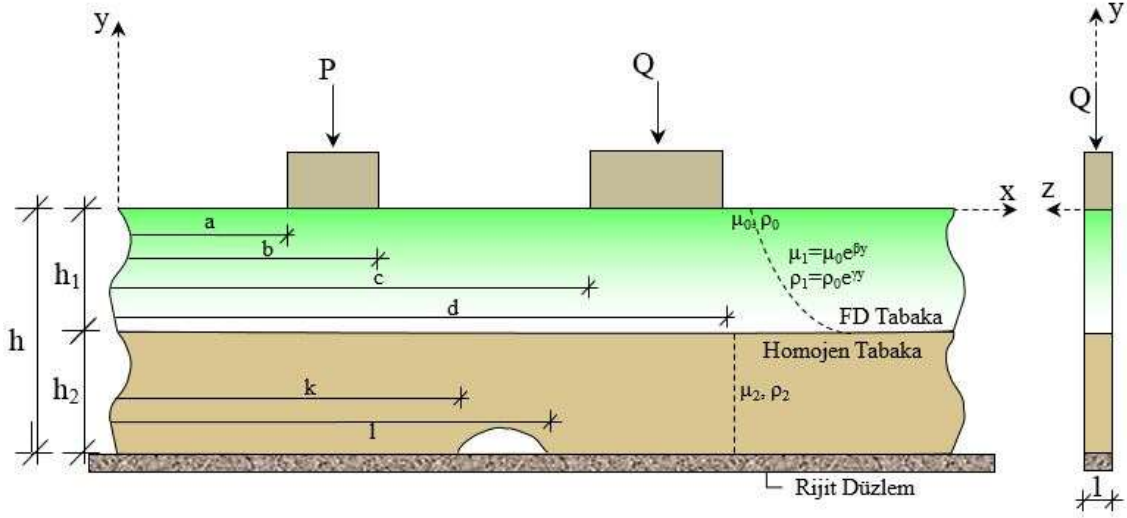
yazılıp (272) numaralı denklemin indeksi +1 alınırsa denklemin çözümü;

$$\frac{\mu_0}{P/h_1} v^*(x, -h_1) = \frac{f-e}{2h_1} \sum_{i=2}^{m-1} W_i G_3(s_{3i}) \quad (m = 2, \dots, n-1) \quad (274)$$

şeklinde aranabilir ve tabakalar arasında meydana gelen ayrılmalar belirlenebilir.

2.4.1. Homojen Tabaka ile Rijit Düzleme Ait Ara Yüzeyde Meydana Gelen Süreksizlik

Homojen tabaka ile rijit düzleme ait ara yüzeyde ayrılma meydana gelebilmesi için yükün (λ_2) bu yüzeyde ilk ayrılmayı meydana getirecek yükten (λ_{cr2})' den daha büyük bir değer alması gerekir. Bu koşulun meydana gelmesi durumunda sürekli temasta kullanılan (152) numaralı sınır şartı geçerli olmayacaktır. Homojen tabaka ile rijit düzlemin birbirinden ayrıldığı (k, l) aralığında düşey yer değiştirmeler farkının türevi $\omega(x)$ gibi bilinmeyen bir fonksiyona eşit alınmıştır. Homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki süreksizlikler incelenirken, ara yüzeylerde sürtünmenin olmadığı kabul edilmiştir. Tabakalara ait kütle kuvvetleri dikkate alınmıştır.



Şekil 3. Homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki süreksiz temas probleminin geometrisi

2.4.1.1. Problemin Sınır Şartları

$u(x,y)$ ve $v(x,y)$ sırasıyla x ve y doğrultularındaki yer değiştirme bileşenlerini, $\sigma_x(x,y)$, $\sigma_y(x,y)$ ve $\tau_{xy}(x,y)$ gerilme bileşenlerini ifade etmek üzere problemin sınır şartları Şekil 3' teki eksen takımına göre aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$(\sigma_y)_1(x,0) = \begin{cases} -p(x) & a < x < b \\ -q(x) & c < x < d \\ 0 & -\infty < x < a, \quad b < x < c, \quad d < x < \infty \end{cases} \quad (275)$$

$$(\tau_{xy})_1(x,0) = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (276)$$

$$(\tau_{xy})_1(x, -h_1) = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (277)$$

$$(\sigma_y)_1(x, -h_1) = (\sigma_y)_2(x, -h_1) \quad -\infty < x < \infty \quad (278)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_2(x, -h_1) - v_1(x, -h_1)] = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (279)$$

$$(\tau_{xy})_2(x, -h_1) = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (280)$$

$$(\tau_{xy})_2(x, -h) = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (281)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_2(x, -h)] = \begin{cases} 0 & -\infty < x < k, \quad l < x < \infty \\ \omega(x) & k < x < l \end{cases} \quad (282)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, 0)] = 0 \quad a < x < b \quad (283)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, 0)] = 0 \quad c < x < d \quad (284)$$

$$\left[(\sigma_y)_2(x, -h) \right] + \frac{\rho_0 g (e^{-\gamma h} - 1)}{\gamma} - \rho_0 g h_2 = 0 \quad k < x < l \quad (285)$$

(275) ifadesindeki $p(x)$ ve $q(x)$ rijit bloklar ile fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka arasındaki bilinmeyen temas gerilmeleridir.

Probleme ilişkin denge şartları (158) numaralı ifadelerdeki gibidir. Ayrıca probleme ait tek değerlilik şartı aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\int_k^l \omega(x) dx = 0 \quad (286)$$

2.4.1.2. Katsayıların Belirlenmesi

(275-282) denklemleri ile verilen sınır şartlarının daha önce fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ve homojen tabaka için elde edilen gerilme ve yer değiştirme ifadelerinde yerlerine yazılması ve ters Fourier dönüşümlerinin alınmasıyla $A_1^{*\sigma}$, $A_2^{*\sigma}$, $A_3^{*\sigma}$, $A_4^{*\sigma}$, $B_1^{*\sigma}$, $B_2^{*\sigma}$, $B_3^{*\sigma}$ ve $B_4^{*\sigma}$ katsayılarını içeren sekiz bilinmeyenli sekiz cebrik denklem elde edilir. Bu denklemler aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} (\sigma_y)_1(x, 0) = \frac{\mu_0}{(\kappa_1 - 1)} \sum_{j=1}^4 \left[i\xi (3 - \kappa_1) + s_j n_j (\kappa_1 + 1) \right] A_j^{*\sigma} = \\ \int_a^b -p(t) e^{-i\xi t} dt + \int_c^d -q(t) e^{-i\xi t} dt \end{aligned} \quad (287)$$

$$\sum_{j=1}^4 \left[s_j + i\xi n_j \right] A_j^{*\sigma} = 0 \quad (288)$$

$$\sum_{j=1}^4 [s_j + i\xi n_j] A_j^{*\varpi} e^{-s_j h_1} = 0 \quad (289)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 E_j A_j^{*\varpi} e^{-h_1(s_j + \beta)} - m \left\{ e^{|\xi| h_1} \left[-2|\xi| B_1^{*\varpi} + ((\kappa_2 - 1) + 2|\xi| h_1) B_2^{*\varpi} \right] \right. \\ \left. + e^{-|\xi| h_1} \left[2|\xi| B_3^{*\varpi} + ((\kappa_2 - 1) - 2|\xi| h_1) B_4^{*\varpi} \right] \right\} = 0 ; \end{aligned} \quad (290)$$

$$\sum_{j=1}^4 i\xi n_j A_j^{*\varpi} e^{-s_j h_1} - i\xi \left\{ (B_1^{*\varpi} - B_2^{*\varpi} h_1) e^{|\xi| h_1} + (B_3^{*\varpi} - B_4^{*\varpi} h_1) e^{-|\xi| h_1} \right\} = 0 \quad (291)$$

$$\begin{aligned} (\tau_{xy})_2(x, -h_1) = e^{|\xi| h_1} \left\{ 2\xi B_1^{*\varpi} - \left[\frac{|\xi|}{\xi} (\kappa_2 + 1) + 2\xi h_1 \right] B_2^{*\varpi} \right\} \\ + e^{-|\xi| h_1} \left\{ 2\xi B_3^{*\varpi} + \left[\frac{|\xi|}{\xi} (\kappa_2 + 1) - 2\xi h_1 \right] B_4^{*\varpi} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (292)$$

$$\begin{aligned} (\tau_{xy})_2(x, -h) = e^{|\xi| h} \left\{ 2\xi B_1^{*\varpi} - \left[\frac{|\xi|}{\xi} (\kappa_2 + 1) + 2\xi h \right] B_2^{*\varpi} \right\} \\ + e^{-|\xi| h} \left\{ 2\xi B_3^{*\varpi} + \left[\frac{|\xi|}{\xi} (\kappa_2 + 1) - 2\xi h \right] B_4^{*\varpi} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (293)$$

$$\left[B_1^{*\varpi} - B_2^{*\varpi} h \right] e^{|\xi| h} + \left[B_3^{*\varpi} - B_4^{*\varpi} h \right] e^{-|\xi| h} = S \quad (294)$$

$$S = \frac{1}{2\pi} \int_k^l \omega(t) dt \quad (295)$$

Sekiz bilinmeyenli sekiz denklem takımından, problemin çözümünde kullanılan $A_1^{*\varpi}, A_2^{*\varpi}, A_3^{*\varpi}, A_4^{*\varpi}, B_1^{*\varpi}, B_2^{*\varpi}, B_3^{*\varpi}$ ve $B_4^{*\varpi}$ katsayıları aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} \Delta = (\kappa_2 + 1) \left\{ (\kappa_2 + 1) \left[(D_1 D_4 F_2 F_3 - D_1 D_3 F_2 F_4 + D_2 D_3 F_1 F_4 - D_2 D_4 F_1 F_3) (2A_{13} + 2A_{14} - A_{23} - A_{24} - A_{33} - A_{34}) \right. \right. \\ + (D_1 D_2 F_3 F_4 - D_1 D_4 F_2 F_3 - D_2 D_3 F_1 F_4 + D_3 D_4 F_1 F_2) (2A_{12} + 2A_{15} - A_{22} - A_{25} - A_{32} - A_{35}) \\ \left. \left. + (D_1 D_3 F_2 F_4 - D_1 D_2 F_3 F_4 + D_2 D_4 F_1 F_3 - D_3 D_4 F_1 F_2) (2A_{11} + 2A_{16} - A_{21} - A_{26} - A_{31} - A_{36}) \right] \right\} \\ + 4\xi m \left[(D_1 D_4 F_3 n_2 - D_1 D_3 F_4 n_2 + D_2 D_3 F_4 n_1 - D_2 D_4 F_3 n_1) (4\xi(h - h_1) A_{44} - A_{54} + A_{64}) \right. \\ + (D_1 D_2 F_4 n_3 - D_1 D_4 F_2 n_3 + D_3 D_4 F_2 n_1 - D_2 D_3 F_4 n_1) (4\xi(h - h_1) A_{45} - A_{55} + A_{65}) \\ + (D_1 D_3 F_2 n_4 - D_1 D_2 F_3 n_4 + D_2 D_4 F_3 n_1 - D_3 D_4 F_2 n_1) (4\xi(h - h_1) A_{46} - A_{56} + A_{66}) \\ \left. + (D_1 D_3 F_4 n_2 - D_3 D_4 F_1 n_2 + D_2 D_4 F_4 n_3 - D_1 D_2 F_4 n_3) (4\xi(h - h_1) A_{41} - A_{51} + A_{61}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (D_1 D_2 F_3 n_4 - D_2 D_3 F_1 n_4 + D_3 D_4 F_1 n_2 - D_1 D_4 F_3 n_2) (4\xi(h-h_1)A_{42} - A_{52} + A_{62}) \\
& + (D_2 D_3 F_1 n_4 - D_1 D_3 F_2 n_4 + D_1 D_4 F_2 n_3 - D_2 D_4 F_1 n_3) (4\xi(h-h_1)A_{43} - A_{53} + A_{63}) \Big] \Big\} \quad (296)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_1^{*\varpi} = & (\kappa_2 + 1) \Big\{ (P + Q) \Big\{ (\kappa_2 + 1) \Big[(D_2 D_4 F_3 - D_3 D_4 F_2) (2A_{11} - A_{21} - A_{31}) \\
& + (D_3 D_4 F_2 - D_2 D_3 F_4) (2A_{12} - A_{22} - A_{32}) + (D_2 D_3 F_4 - D_2 D_4 F_3) (2A_{13} - A_{23} - A_{33}) \Big] \\
& + 4\xi m \Big[(D_3 D_4 n_2 - D_2 D_4 n_3) (4\xi(h_1 - h)A_{41} - A_{51} + A_{61}) \\
& + (D_2 D_3 n_4 - D_4 D_3 n_2) (4\xi(h_1 - h)A_{42} - A_{52} + A_{62}) \\
& + (D_4 D_2 n_3 - D_3 D_2 n_4) (4\xi(h_1 - h)A_{43} - A_{53} + A_{63}) \Big] \Big\} \\
& + S(4\xi m) \Big\{ (D_2 D_4 F_3 - D_3 D_4 F_2) (4\xi(h-h_1)A_{74} - A_{84} + A_{94}) \\
& + (D_3 D_4 F_2 - D_2 D_3 F_4) (4\xi(h-h_1)A_{73} - A_{83} + A_{93}) \\
& + (D_2 D_3 F_4 - D_2 D_4 F_3) (4\xi(h-h_1)A_{72} - A_{82} + A_{92}) \Big\} \Big\} / \Delta \quad (297)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2^{*\varpi} = & (\kappa_2 + 1) \Big\{ (P + Q) \Big\{ (\kappa_2 + 1) \Big[(D_3 D_4 F_1 - D_1 D_4 F_3) (2A_{15} - A_{25} - A_{35}) \\
& + (D_1 D_3 F_4 - D_3 D_4 F_1) (2A_{16} - A_{26} - A_{36}) + (D_1 D_4 F_3 - D_1 D_3 F_4) (2A_{13} - A_{23} - A_{33}) \Big] \\
& + 4\xi m \Big[(D_1 D_4 n_3 - D_3 D_4 n_1) (4\xi(h_1 - h)A_{45} - A_{55} + A_{65}) \\
& + (D_3 D_4 n_1 - D_1 D_3 n_4) (4\xi(h_1 - h)A_{46} - A_{56} + A_{66}) \\
& + (D_1 D_3 n_4 - D_1 D_4 n_3) (4\xi(h_1 - h)A_{43} - A_{53} + A_{63}) \Big] \Big\} \\
& + S(4\xi m) \Big\{ (D_3 D_4 F_1 - D_1 D_4 F_3) (4\xi(h-h_1)A_{74} - A_{84} + A_{94}) \\
& + (D_1 D_3 F_4 - D_3 D_4 F_1) (4\xi(h-h_1)A_{73} - A_{83} + A_{93}) \\
& + (D_1 D_4 F_3 - D_1 D_3 F_4) (4\xi(h-h_1)A_{71} - A_{81} + A_{91}) \Big\} \Big\} / \Delta \quad (298)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3^{*\varpi} = & (\kappa_2 + 1) \Big\{ (P + Q) \Big\{ (\kappa_2 + 1) \Big[(D_1 D_4 F_2 - D_2 D_4 F_1) (2A_{14} - A_{24} - A_{34}) \\
& + (D_2 D_4 F_1 - D_1 D_2 F_4) (2A_{16} - A_{26} - A_{36}) + (D_1 D_2 F_4 - D_1 D_4 F_2) (2A_{12} - A_{22} - A_{32}) \Big] \\
& + 4\xi m \Big[(D_2 D_4 n_1 - D_1 D_4 n_2) (4\xi(h_1 - h)A_{44} - A_{54} + A_{64}) \\
& + (D_1 D_2 n_4 - D_2 D_4 n_1) (4\xi(h_1 - h)A_{46} - A_{56} + A_{66}) \\
& + (D_1 D_4 n_2 - D_1 D_2 n_4) (4\xi(h_1 - h)A_{42} - A_{52} + A_{62}) \Big] \Big\} \\
& + S(4\xi m) \Big\{ (D_1 D_2 F_4 - D_1 D_4 F_2) (4\xi(h-h_1)A_{71} - A_{81} + A_{91}) \\
& + (D_2 D_4 F_1 - D_1 D_2 F_4) (4\xi(h-h_1)A_{72} - A_{82} + A_{92}) \\
& + (D_1 D_4 F_2 - D_2 D_4 F_1) (4\xi(h-h_1)A_{74} - A_{84} + A_{94}) \Big\} \Big\} / \Delta \quad (299)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_4^{*\varpi} = & (\kappa_2 + 1) \left\{ (P + Q) \left\{ (\kappa_2 + 1) \left[(D_2 D_3 F_1 - D_1 D_3 F_2) (2A_{14} - A_{24} - A_{34}) \right. \right. \right. \\
& + (D_1 D_2 F_3 - D_2 D_3 F_1) (2A_{15} - A_{25} - A_{35}) + (D_1 D_3 F_2 - D_1 D_2 F_3) (2A_{11} - A_{21} - A_{31}) \left. \right. \\
& + 4\xi m \left[(D_1 D_3 n_2 - D_2 D_3 n_1) (4\xi (h_1 - h) A_{44} - A_{54} + A_{64}) \right. \\
& + (D_2 D_3 n_1 - D_1 D_2 n_3) (4\xi (h_1 - h) A_{45} - A_{55} + A_{65}) \\
& \left. \left. + (D_1 D_2 n_3 - D_1 D_3 n_2) (4\xi (h_1 - h) A_{41} - A_{51} + A_{61}) \right] \right\} \\
& + S(4\xi m) \left\{ (D_2 D_3 F_1 - D_1 D_3 F_2) (4\xi (h - h_1) A_{73} - A_{83} + A_{93}) \right. \\
& + (D_1 D_2 F_3 - D_2 D_3 F_1) (4\xi (h - h_1) A_{72} - A_{82} + A_{92}) \\
& \left. \left. + (D_1 D_3 F_2 - D_1 D_2 F_3) (4\xi (h - h_1) A_{71} - A_{81} + A_{91}) \right\} \right\} / \Delta \quad (300)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_1^{*\varpi} = & -(P + Q)(\kappa_2 + 1) B_{41} \left\{ B_{11} \left[(2\xi h_1 + (\kappa_2 + 1)) B_{21} - (4\xi h - 2\xi h_1 + (\kappa_2 + 1)) B_{31} \right] \right. \\
& + B_{12} \left[(2\xi h_1 + (\kappa_2 + 1)) B_{22} - (4\xi h - 2\xi h_1 + (\kappa_2 + 1)) B_{32} \right] \\
& + B_{13} \left[(2\xi h_1 + (\kappa_2 + 1)) B_{23} - (4\xi h - 2\xi h_1 + (\kappa_2 + 1)) B_{33} \right] \\
& \left. + B_{14} \left[(2\xi h_1 + (\kappa_2 + 1)) B_{24} - (4\xi h - 2\xi h_1 + (\kappa_2 + 1)) B_{34} \right] \right. \\
& + S(4\xi m) \left\{ (D_2 D_4 F_3 - D_3 D_4 F_2) (4\xi (h - h_1) B_{74} - B_{84} + B_{94}) \right. \\
& + (D_3 D_4 F_2 - D_2 D_3 F_4) (4\xi (h - h_1) B_{73} - B_{83} + B_{93}) \\
& \left. \left. + (D_2 D_3 F_4 - D_2 D_4 F_3) (4\xi (h - h_1) B_{72} - B_{82} + B_{92}) \right\} \right\} / \Delta \quad (301)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_2^{*\varpi} = & -(P + Q) B_{41} \left\{ B_{11} [B_{21} - B_{31}] + B_{12} [B_{22} - B_{32}] \right. \\
& \left. B_{13} [B_{23} - B_{33}] + B_{13} [B_{23} - B_{33}] \right. \\
& + S(4\xi m) \left\{ (D_3 D_4 F_1 - D_1 D_4 F_3) (4\xi (h - h_1) B_{74} - B_{84} + B_{94}) \right. \\
& + (D_1 D_3 F_4 - D_3 D_4 F_1) (4\xi (h - h_1) B_{73} - B_{83} + B_{93}) \\
& \left. \left. + (D_1 D_4 F_3 - D_1 D_3 F_4) (4\xi (h - h_1) B_{71} - B_{81} + B_{91}) \right\} \right\} / \Delta \quad (302)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_3^{*\varpi} = & -(P + Q)(\kappa_2 + 1) B_{42} \left\{ B_{11} \left[(-4\xi h - 2\xi h_1 + (\kappa_2 + 1)) B_{21} - (-2\xi h_1 + (\kappa_2 + 1)) B_{31} \right] \right. \\
& + B_{12} \left[(-4\xi h - 2\xi h_1 + (\kappa_2 + 1)) B_{22} - (-2\xi h_1 + (\kappa_2 + 1)) B_{32} \right] \\
& + B_{13} \left[(-4\xi h - 2\xi h_1 + (\kappa_2 + 1)) B_{23} - (-2\xi h_1 + (\kappa_2 + 1)) B_{33} \right] \\
& \left. \left[(-4\xi h - 2\xi h_1 + (\kappa_2 + 1)) B_{24} - (-2\xi h_1 + (\kappa_2 + 1)) B_{34} \right] \right. \\
& + S(4\xi m) \left\{ (D_1 D_2 F_4 - D_1 D_4 F_2) (4\xi (h - h_1) B_{71} - B_{81} + B_{91}) \right. \\
& + (D_2 D_4 F_1 - D_1 D_2 F_4) (4\xi (h - h_1) B_{72} - B_{82} + B_{92}) \\
& \left. \left. + (D_1 D_4 F_2 - D_2 D_4 F_1) (4\xi (h - h_1) B_{74} - B_{84} + B_{94}) \right\} \right\} / \Delta \quad (303)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_4^{*\sigma} = & -(P+Q)B_{42} \left\{ \left\{ B_{11} [B_{21} - B_{31}] + B_{12} [B_{22} - B_{32}] \right. \right. \\
& \left. \left. B_{13} [B_{23} - B_{33}] + B_{13} [B_{23} - B_{33}] \right\} \right\} \\
& + S(4\xi m) \left\{ (D_2 D_3 F_1 - D_1 D_3 F_2) (4\xi(h-h_1)B_{73} - B_{83} + B_{93}) \right. \\
& + (D_1 D_2 F_3 - D_2 D_3 F_1) (4\xi(h-h_1)B_{72} - B_{82} + B_{92}) \\
& \left. + (D_1 D_3 F_2 - D_1 D_2 F_3) (4\xi(h-h_1)B_{71} - B_{81} + B_{91}) \right\} / \Delta \quad (304)
\end{aligned}$$

Bu ifadelerde geçen,

$$\begin{aligned}
A_{71} &= e^{-s_1 h_1}; A_{72} = e^{-s_2 h_1}; A_{73} = e^{-s_3 h_1}; A_{74} = e^{-s_4 h_1} \\
A_{81} &= e^{-2\xi h + h_1(2\xi - s_1)}; A_{82} = e^{-2\xi h + h_1(2\xi - s_2)}; A_{83} = e^{-2\xi h + h_1(2\xi - s_3)}; A_{84} = e^{-2\xi h + h_1(2\xi - s_4)} \\
A_{91} &= e^{2\xi h - h_1(2\xi - s_1)}; A_{92} = e^{2\xi h - h_1(2\xi - s_2)}; A_{93} = e^{2\xi h - h_1(2\xi - s_3)}; A_{94} = e^{2\xi h - h_1(2\xi - s_4)} \quad (305 \text{ a-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{71} &= e^{-s_1 h_1}; B_{72} = e^{-s_2 h_1}; B_{73} = e^{-s_3 h_1}; B_{74} = e^{-s_4 h_1} \\
B_{81} &= e^{-2\xi h + h_1(2\xi - s_1)}; B_{82} = e^{-2\xi h + h_1(2\xi - s_2)}; B_{83} = e^{-2\xi h + h_1(2\xi - s_3)}; B_{84} = e^{-2\xi h + h_1(2\xi - s_4)} \\
B_{91} &= e^{2\xi h - h_1(2\xi - s_1)}; B_{92} = e^{2\xi h - h_1(2\xi - s_2)}; B_{93} = e^{2\xi h - h_1(2\xi - s_3)}; B_{94} = e^{2\xi h - h_1(2\xi - s_4)} \quad (306 \text{ a-1})
\end{aligned}$$

olarak elde edilmiştir.

2.4.1.3. İntegral Denklemlerin Elde Edilmesi

Homojen tabaka ile rijit düzlem arasında ayrılma meydana gelmesi durumunda sınır şartlarından elde edilen $A_1^{*\sigma}$, $A_2^{*\sigma}$, $A_3^{*\sigma}$, $A_4^{*\sigma}$, $B_1^{*\sigma}$, $B_2^{*\sigma}$, $B_3^{*\sigma}$ ve $B_4^{*\sigma}$ katsayıları $p(x)$, $q(x)$ ve $\omega(x)$ gibi bilinmeyen üç fonksiyona bağlı olarak belirlenmiştir. Bu fonksiyonların bulunabilmesi için (283-285) numaralı sınır şartlarından ve faydalanılacaktır.

$$A_1^{*\sigma}, A_2^{*\sigma}, A_3^{*\sigma} \text{ ve } A_4^{*\sigma} \text{ katsayıları } \frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, 0)] = 0 \text{ denkleminde yerlerine}$$

yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_1(x, y)}{\partial x} = & -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\mu_0} \int_a^b p(t) e^{-i\xi t} dt \int_{-\infty}^{\infty} i e^{i\xi x} \left(\begin{aligned} & \xi A_1 n_1 e^{s_1 y} + \xi A_2 n_2 e^{s_2 y} \\ & + \xi A_3 n_3 e^{s_3 y} + \xi A_4 n_4 e^{s_4 y} \end{aligned} \right) d\xi \\
& -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\mu_0} \int_c^d q(t) e^{-i\xi t} dt \int_{-\infty}^{\infty} i e^{i\xi x} \left(\begin{aligned} & \xi A_1 n_1 e^{s_1 y} + \xi A_2 n_2 e^{s_2 y} \\ & + \xi A_3 n_3 e^{s_3 y} + \xi A_4 n_4 e^{s_4 y} \end{aligned} \right) d\xi \\
& + \frac{1}{2\pi i} \int_k^l \omega(t) e^{-i\xi t} dt \int_{-\infty}^{\infty} i e^{i\xi x} \left(\begin{aligned} & \xi A_1^{*\sigma} n_1 e^{s_1 y} + \xi A_2^{*\sigma} n_2 e^{s_2 y} \\ & + \xi A_3^{*\sigma} n_3 e^{s_3 y} + \xi A_4^{*\sigma} n_4 e^{s_4 y} \end{aligned} \right) d\xi \quad (307)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradaki $A_1^{**\sigma}$, $A_2^{**\sigma}$, $A_3^{**\sigma}$ ve $A_4^{**\sigma}$ ifadeleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned} A_1^{**\sigma} = & S(4\xi m) \left\{ (D_2 D_4 F_3 - D_3 D_4 F_2) (4\xi(h-h_1)A_{74} - A_{84} + A_{94}) \right. \\ & + (D_3 D_4 F_2 - D_2 D_3 F_4) (4\xi(h-h_1)A_{73} - A_{83} + A_{93}) \\ & \left. + (D_2 D_3 F_4 - D_2 D_4 F_3) (4\xi(h-h_1)A_{72} - A_{82} + A_{92}) \right\} / \Delta \end{aligned} \quad (308)$$

$$\begin{aligned} A_2^{**\sigma} = & S(4\xi m) \left\{ (D_3 D_4 F_1 - D_1 D_4 F_3) (4\xi(h-h_1)A_{74} - A_{84} + A_{94}) \right. \\ & + (D_1 D_3 F_4 - D_3 D_4 F_1) (4\xi(h-h_1)A_{73} - A_{83} + A_{93}) \\ & \left. + (D_1 D_4 F_3 - D_1 D_3 F_4) (4\xi(h-h_1)A_{71} - A_{81} + A_{91}) \right\} / \Delta \end{aligned} \quad (309)$$

$$\begin{aligned} A_3^{**\sigma} = & S(4\xi m) \left\{ (D_1 D_2 F_4 - D_1 D_4 F_2) (4\xi(h-h_1)A_{71} - A_{81} + A_{91}) \right. \\ & + (D_2 D_4 F_1 - D_1 D_2 F_4) (4\xi(h-h_1)A_{72} - A_{82} + A_{92}) \\ & \left. + (D_1 D_4 F_2 - D_2 D_4 F_1) (4\xi(h-h_1)A_{74} - A_{84} + A_{94}) \right\} / \Delta \end{aligned} \quad (310)$$

$$\begin{aligned} A_4^{**\sigma} = & S(4\xi m) \left\{ (D_2 D_3 F_1 - D_1 D_3 F_2) (4\xi(h-h_1)A_{73} - A_{83} + A_{93}) \right. \\ & + (D_1 D_2 F_3 - D_2 D_3 F_1) (4\xi(h-h_1)A_{72} - A_{82} + A_{92}) \\ & \left. + (D_1 D_3 F_2 - D_1 D_2 F_3) (4\xi(h-h_1)A_{71} - A_{81} + A_{91}) \right\} / \Delta \end{aligned} \quad (311)$$

İntegral sınırları değiştirilip düzenlendikten sonra (307) numaralı denklem düzenlenirse;

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1(x, y)}{\partial x} = & -2 \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\mu_0} \int_a^b p(t) dt \int_0^\infty \left(\begin{array}{l} \xi A_1 n_1 e^{s_1 y} + \xi A_2 n_2 e^{s_2 y} \\ + \xi A_3 n_3 e^{s_3 y} + \xi A_4 n_4 e^{s_4 y} \end{array} \right) [\sin \xi(t-x)] d\xi \\ & -2 \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\mu_0} \int_c^d q(t) dt \int_0^\infty \left(\begin{array}{l} \xi A_1 n_1 e^{s_1 y} + \xi A_2 n_2 e^{s_2 y} \\ + \xi A_3 n_3 e^{s_3 y} + \xi A_4 n_4 e^{s_4 y} \end{array} \right) [\sin \xi(t-x)] d\xi \\ & +2 \frac{1}{2\pi} \int_k^l \omega(t) e^{-i\xi t} dt \int_0^\infty \left(\begin{array}{l} \xi A_1^{**\sigma} n_1 e^{s_1 y} + \xi A_2^{**\sigma} n_2 e^{s_2 y} \\ + \xi A_3^{**\sigma} n_3 e^{s_3 y} + \xi A_4^{**\sigma} n_4 e^{s_4 y} \end{array} \right) [\cos \xi(t-x)] d\xi \end{aligned} \quad (312)$$

olarak yazılabilir.

(312) numaralı denklemde $y \rightarrow 0$ limitine geçilirken pay paydaya bölündüğünde, integral denklemin yakınmasını bozan singüler terimler ortaya çıkmaktadır. $p(t)$ ve $q(t)$ 'nin çarpan olduğu çekirdekler sürekli temas durumundakiyle aynı olacağından, singüler terimler de sürekli temastakinin aynısı olur.

Bu durumda (312) nolu denklemi esas alan (283,285) sınır şartlarından elde edilen integral denklemler aşağıdaki gibi düzenlenebilir:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_0} \int_a^b p(t_1) dt_1 \left[k_1^*(x_1, t_1) + \left(\frac{\kappa_1 + 1}{4} \right) \frac{1}{(t_1 - x_1)} \right] \\ & -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_0} \int_c^d q(t_2) dt_2 \left[k_1^*(x_1, t_2) + \left(\frac{\kappa_1 + 1}{4} \right) \frac{1}{(t_2 - x_1)} \right] \\ & + \frac{1}{\pi} \int_e^f \omega(t_3) dt_3 [k_5(x_1, t_3)] = 0, \end{aligned} \quad (a < x < b) \quad (313)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_0} \int_a^b p(t_1) dt_1 \left[k_1^*(x_2, t_1) + \left(\frac{\kappa_1 + 1}{4} \right) \frac{1}{(t_1 - x_2)} \right] \\ & -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_0} \int_c^d q(t_2) dt_2 \left[k_1^*(x_2, t_2) + \left(\frac{\kappa_1 + 1}{4} \right) \frac{1}{(t_2 - x_2)} \right] \\ & + \frac{1}{\pi} \int_e^f \omega(t_3) dt_3 [k_5(x_2, t_3)] = 0, \end{aligned} \quad (c < x < d) \quad (314)$$

İntegral denklemlerde geçen $k_1^*(x, t)$ çekirdeği (191) nolu eşitlik ile tanımlanmıştır. $k_5(x, t)$ ifadesi ise;

$$k_5(x, t) = \int_0^\infty \xi^\zeta \left(A_1^{**\varpi} n_1 + A_2^{**\varpi} n_2 + A_3^{**\varpi} n_3 + A_4^{**\varpi} n_4 \right) [\cos \xi(t - x)] d\xi \quad (315)$$

dir. Bilinmeyen fonksiyonlar $p(x)$, $q(x)$ ve $\omega(x)$ 'in belirlenmesinde kullanılacak üçüncü denklem ise (285) numaralı sınır şartıdır.

Kütle kuvvetleri dikkate alındığı durum için $B_1^{*\varpi}$, $B_2^{*\varpi}$, $B_3^{*\varpi}$ ve $B_4^{*\varpi}$ katsayıları $(\sigma_y)_2$ gerilme ifadesinde yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılır;

$$\begin{aligned} (\sigma_y)_2(x, y) = & \left\{ -2 \frac{1}{2\pi} \frac{\mu_2}{\mu_0} \int_a^b p(t) e^{-i\xi t} dt \int_0^\infty i e^{i\xi x} \left\{ e^{-\xi y} \left\{ -2\xi B_1 + [(\kappa_2 - 1) - 2\xi y] B_2 \right\} \right. \right. \\ & \left. \left. + e^{\xi y} \left\{ 2\xi B_3 + [(\kappa_2 - 1) + 2\xi y] B_4 \right\} \right\} \right\} [\cos \xi(t - x)] d\xi \\ & - 2 \frac{1}{2\pi} \frac{\mu_2}{\mu_0} \int_c^d q(t) e^{-i\xi t} dt \int_0^\infty i e^{i\xi x} \left\{ e^{-\xi y} \left\{ -2\xi B_1 + [(\kappa_2 - 1) - 2\xi y] B_2 \right\} \right. \\ & \left. \left. + e^{\xi y} \left\{ 2\xi B_3 + [(\kappa_2 - 1) + 2\xi y] B_4 \right\} \right\} \right\} [\cos \xi(t - x)] d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2\frac{\mu_2}{2\pi} \int_k^l \omega(t) e^{-i\xi t} dt \int_0^\infty i e^{i\xi x} \left\{ e^{-\xi y} \left\{ -2\xi B_1^{**\sigma} + [(\kappa_2 - 1) - 2\xi y] B_2^{**\sigma} \right\} \right. \\
& \left. + e^{\xi y} \left\{ 2\xi B_3^{**\sigma} + [(\kappa_2 - 1) + 2\xi y] B_4^{**\sigma} \right\} \right\} [i \sin \xi(t-x)] d\xi \\
& + \frac{\rho_0 g(e^{\gamma y} - 1)}{\gamma} + \rho_2 g(y + h_1) = 0
\end{aligned} \tag{316}$$

elde edilir. Buradaki $B_1^{**\sigma}$, $B_2^{**\sigma}$, $B_3^{**\sigma}$ ve $B_4^{**\sigma}$ katsayıları aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned}
B_1^{**\sigma} = S(4\xi m) \{ & (D_2 D_4 F_3 - D_3 D_4 F_2)(4\xi(h-h_1)B_{74} - B_{84} + B_{94}) \\
& + (D_3 D_4 F_2 - D_2 D_3 F_4)(4\xi(h-h_1)B_{73} - B_{83} + B_{93}) \\
& + (D_2 D_3 F_4 - D_2 D_4 F_3)(4\xi(h-h_1)B_{72} - B_{82} + B_{92}) \} / \Delta
\end{aligned} \tag{317}$$

$$\begin{aligned}
B_2^{**\sigma} = S(4\xi m) \{ & (D_3 D_4 F_1 - D_1 D_4 F_3)(4\xi(h-h_1)B_{74} - B_{84} + B_{94}) \\
& + (D_1 D_3 F_4 - D_3 D_4 F_1)(4\xi(h-h_1)B_{73} - B_{83} + B_{93}) \\
& + (D_1 D_4 F_3 - D_1 D_3 F_4)(4\xi(h-h_1)B_{71} - B_{81} + B_{91}) \} / \Delta
\end{aligned} \tag{318}$$

$$\begin{aligned}
B_3^{**\sigma} = S(4\xi m) \{ & (D_1 D_2 F_4 - D_1 D_4 F_2)(4\xi(h-h_1)B_{71} - B_{81} + B_{91}) \\
& + (D_2 D_4 F_1 - D_1 D_2 F_4)(4\xi(h-h_1)B_{72} - B_{82} + B_{92}) \\
& + (D_1 D_4 F_2 - D_2 D_4 F_1)(4\xi(h-h_1)B_{74} - B_{84} + B_{94}) \} / \Delta
\end{aligned} \tag{319}$$

$$\begin{aligned}
B_4^{**\sigma} = S(4\xi m) \{ & (D_2 D_3 F_1 - D_1 D_3 F_2)(4\xi(h-h_1)B_{73} - B_{83} + B_{93}) \\
& + (D_1 D_2 F_3 - D_2 D_3 F_1)(4\xi(h-h_1)B_{72} - B_{82} + B_{92}) \\
& + (D_1 D_3 F_2 - D_1 D_2 F_3)(4\xi(h-h_1)B_{71} - B_{81} + B_{91}) \} / \Delta
\end{aligned} \tag{320}$$

Yukarıdaki denklemde $y \rightarrow h$ limitine geçilirken pay paydaya bölündüğünde, ortaya integral denklemin yakınmasını bozan singüler terimler ortaya çıkmaktadır. Gerekli işlemler yapıldığında singüler terim;

$$ST_3 = \int_0^\infty e^{-\xi(h+y)} \left[-\frac{4m}{(1+\kappa_2) + m(1+\kappa_1)} \right] \sin \xi(t-x) d\xi \tag{321}$$

olarak belirlenmiştir. Yakınsamayı bozan bu terimler (316) nolu integral denklemden çıkarılmalıdır. (321) numaralı eşitliğin kapalı integrali alınarak integral denkleme eklendikten sonra $y \rightarrow h$ limitine geçilip gerekli sadeleştirmeler yapıldığında üçüncü integral denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$-\frac{1}{\pi} \int_a^b k_3(x_4, t_1) p(t_1) dt_1 - \frac{1}{\pi} \int_c^d k_3(x_4, t_2) q(t_2) dt_2 - \frac{\mu_2}{\pi} \int_k^l i k_6^*(x_4, t_4) \omega(t_4) dt_4$$

$$\left[-\frac{4m}{(1+\kappa_2) + m(1+\kappa_1)} \right] \frac{1}{(t_4 - x_4)} = -\frac{\rho_0 g (e^{-\gamma h_1} - 1)}{\gamma} - \rho_2 g h_2, \quad (k < x < l) \quad (322)$$

Burada $k_6(x, t)$ ve $k_6^*(x, t)$ çekirdekleri;

$$k_6(x_4, t_4) = \int_0^\infty i e^{i\xi x} \left\{ e^{-\xi y} \left\{ -2\xi B_1^{**\omega} + [(\kappa_2 - 1) - 2\xi y] B_2^{**\omega} \right\} \right. \\ \left. + e^{\xi y} \left\{ 2\xi B_3^{**\omega} + [(\kappa_2 - 1) + 2\xi y] B_4^{**\omega} \right\} \right\} [i \sin \xi (t_4 - x_4)] d\xi \quad (323)$$

$$k_6^*(x_4, t_4) = \int_0^\infty \left(k_6(x_4, t_4) - \left[-\frac{4m}{(1+\kappa_2) + m(1+\kappa_1)} \right] \sin \xi (t_4 - x_4) \right) d\xi \quad (324)$$

olarak belirlenmiştir.

2.4.1.4. Tabakalara Ait Ara Yüzeyde Meydana Gelen Ayrılmanın Belirlenmesi

FD tabaka ile homojen tabaka ara yüzeyinde ortaya çıkan ayrılma bölgesinin belirlenmesi için (313), (314) ve (316) nolu integral denklemler birlikte çözülecektir.

İntegral denklem takımının sayısal çözümünde $z = \xi h_1$ dönüşümü yapılmış olup (193 a-f) numaralı denklemlere ek olarak aşağıdaki gibi boyutsuz büyüklükler tanımlanmıştır.

$$x_4 = \frac{l-k}{2} r_4 + \frac{l+k}{2} \quad (a) \quad t_4 = \frac{l-k}{2} s_4 + \frac{l+k}{2} \quad (b)$$

$$\alpha_4(s_4) = \mu_2 \omega \frac{\left(\frac{l-k}{2} s_4 + \frac{l+k}{2} \right)}{P/h_1} \quad (c) \quad (325)$$

Bu boyutsuz büyüklükler integral denklemlerde yerlerine yazılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

Birinci integral denklem:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \alpha_1(s_1) \frac{b-a}{2h_1} ds_1 \left[m_1^{**}(r_1, s_1) + \left(\frac{\kappa_1+1}{4} \right) \frac{1}{\frac{b-a}{2}(s_1-r_1)} \right] \\
& -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \alpha_2(s_2) \frac{d-c}{2h_1} ds_2 \left[m_2^{**}(r_1, s_2) + \left(\frac{\kappa_1+1}{4} \right) \frac{1}{\left[\frac{d-c}{2}s_2 + \frac{d+c}{2} \right] - \left[\frac{b-a}{2}r_1 + \frac{b+a}{2} \right]} \right] + \\
& -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \alpha_4(s_4) \frac{l-k}{2h_1} m_3^{**}(r_1, s_4) ds_4 = 0, \quad (-1 < r_1 < 1) \quad (326)
\end{aligned}$$

İkinci integral denklem,

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \alpha_1(s_1) \frac{b-a}{2h_1} ds_1 \left[m_4^{**}(r_2, s_1) + \left(\frac{\kappa_1+1}{4} \right) \frac{1}{\left[\frac{b-a}{2}s_1 + \frac{b+a}{2} \right] - \left[\frac{d-c}{2}r_2 + \frac{d+c}{2} \right]} \right] \\
& -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \alpha_2(s_2) \frac{d-c}{2h_1} ds_2 \left[m_5^{**}(r_2, s_2) + \left(\frac{\kappa_1+1}{4} \right) \frac{1}{\frac{d-c}{2}(s_2-r_2)} \right] + \\
& -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \alpha_4(s_4) \frac{l-k}{2h_1} m_6^{**}(r_2, s_4) ds_4 = 0, \quad (-1 < r_2 < 1) \quad (327)
\end{aligned}$$

Üçüncü integral denklem:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \alpha_1(s_1) \frac{b-a}{2h_1} m_7^{**}(r_4, s_1) ds_4 - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \alpha_2(s_2) \frac{d-c}{2h_1} m_8^{**}(r_4, s_2) ds_4 + \\
& -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \alpha_4(s_4) \frac{l-k}{2h_1} \left[m_9^{**}(r_4, s_4) - \frac{4m}{(1+\kappa_2) + m(1+\kappa_1)} \frac{1}{\frac{l-k}{2h_1}(s_4-r_4)} \right] ds_4 \\
& - \left[\frac{(e^{-\gamma h_1} - 1)}{\gamma h_1} + \frac{\rho_2(-h+h_1)}{\rho_0 h_1} \right] \frac{1}{\lambda_2}, \quad (-1 < r_4 < 1) \quad (328)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Denklemlerdeki çekirdekler daha önce de ifade edildiği gibi yeniden aşağıdaki şekilde yazılabilirler:

$$\begin{aligned}
m_1^{**}(r_1, s_1) &= k_1^*(x_1, t_1), & m_2^{**}(r_1, s_2) &= k_1^*(x_1, t_2), & m_3^{**}(r_1, s_4) &= k_5(x_1, t_4), \\
m_4^{**}(r_2, s_1) &= k_1^*(x_2, t_1), & m_5^{**}(r_2, s_2) &= k_1^*(x_2, t_2), & m_6^{**}(r_2, s_4) &= k_5(x_2, t_4), \\
m_7^{**}(r_4, s_1) &= k_6(x_4, t_1), & m_8^{**}(r_4, s_2) &= k_6(x_4, t_2), & m_9^{**}(r_4, s_4) &= k_6^*(x_4, t_4)
\end{aligned} \quad (329)$$

Probleme ilişkin denge denklemleri ve (226) nolu eşitlikte verilen tek değerlik şartı boyutsuzlaştırılarak, sırasıyla;

$$\int_{-1}^1 \alpha_1(s_1) \frac{b-a}{2h_1} ds_1 = 0 \quad (a)$$

$$\int_{-1}^1 \alpha_2(s_2) \frac{d-c}{2h_1} ds_2 = Q/P \quad (b)$$

$$\int_{-1}^1 \alpha_4(s_4) ds_4 = 0 \quad (c) \quad (330 \text{ a-c})$$

olarak yazılabilir. Burada $\alpha_1(s_1)$, $\alpha_2(s_2)$ boyutsuz temas gerilmeleri ve $\alpha_4(s_4)$ eğim fonksiyonudur.

(317) ve (318) nolu integral denklemlerin indeksi $s_1, s_2 = \pm 1$ ' de $\alpha_1(s_1)$, $\alpha_2(s_2)$ tekilliğe sahip olduğundan +1'dir. $s_4 = \pm 1$ 'de $\alpha_4(s_4)$ sıfır olduğundan (322) numaralı integral denklemin indeksi ise -1'dir. Ancak ayrılma bölgesinin uç noktalarında ayrılma gayet yatık olacağından $G_4(-1)=0$, $G_4(1)=0$ olup integral denklem takımının birlikte çözümü için (322) numaralı integral denklemin indeksini de +1 almak uygun olmaktadır. Böylece integral denklemlerin çözümü (193) nolu eşitlikte olduğu gibi aranabilir.

Uygun Gauss Chebyshev integrasyon formülü kullanılırsa (326-328) nolu denklemler;

Birinci integral denklem için;

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^n W_i G_1(s_{1i}) \frac{b-a}{2h_1} \left[m_1^{**}(r_{1j}, s_{1i}) + \left(\frac{\kappa_1 + 1}{4} \right) \frac{1}{\frac{b-a}{2}(s_{1i} - r_{1j})} \right] \\
& - \sum_{i=1}^n W_i G_2(s_{2i}) \frac{d-c}{2h_1} \left[m_2^{**}(r_{1j}, s_{2i}) + \left(\frac{\kappa_1 + 1}{4} \right) \frac{1}{\left[\frac{d-c}{2}s_{2i} + \frac{d+c}{2} \right] - \left[\frac{b-a}{2}r_{1j} + \frac{b+a}{2} \right]} \right] + \\
& - \sum_{i=1}^n W_i G_4(s_{4i}) \frac{l-k}{2h_1} m_3^{**}(r_{1j}, s_{4i}) ds_4 = 0, \quad (j=1, \dots, n-1) \quad (331)
\end{aligned}$$

İkinci integral denklem için;

$$\begin{aligned}
& -\sum_{i=1}^n W_i G_1(s_{1i}) \frac{b-a}{2h_1} \left[m_4^{**}(r_{2j}, s_{1i}) + \left(\frac{\kappa_1+1}{4} \right) \frac{1}{\left[\frac{b-a}{2} s_{1i} + \frac{b+a}{2} \right] - \left[\frac{d-c}{2} r_{2j} + \frac{d+c}{2} \right]} \right] \\
& -\sum_{i=1}^n W_i G_2(s_{2i}) \frac{d-c}{2h_1} \left[m_5^{**}(r_{2j}, s_{2i}) + \left(\frac{\kappa_1+1}{4} \right) \frac{1}{\frac{d-c}{2}(s_{2j} - r_{2i})} \right] + \\
& -\sum_{i=1}^n W_i G_4(s_{4i}) \frac{l-k}{2h_1} m_6^{**}(r_{2j}, s_{4i}) ds_4 = 0, \quad (j=1, \dots, n-1) \tag{332}
\end{aligned}$$

Üçüncü integral denklem için;

$$\begin{aligned}
& -\sum_{i=1}^n W_i G_1(s_{1i}) \frac{b-a}{2h_1} m_7^{**}(r_{4j}, s_{1i}) ds_4 - \sum_{i=1}^n W_i G_2(s_{2i}) \frac{d-c}{2h_1} m_8^{**}(r_{4j}, s_{2i}) ds_4 + \\
& -\sum_{i=1}^n W_i G_4(s_{4i}) \frac{f-e}{2h_1} \left[m_9^{**}(r_{4j}, s_{4i}) - \frac{4m}{(1+\kappa_2) + m(1+\kappa_1)} \frac{1}{\frac{l-k}{2h_1}(s_{4i} - r_{4j})} \right] ds_4 \\
& = -\left[\frac{(e^{-\gamma h_1} - 1)}{\gamma h_1} + \frac{\rho_2(-h + h_1)}{\rho_0 h_1} \right] \frac{1}{\lambda_2}, \quad (j=1, \dots, n-1) \tag{333}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

Denge ve tek değerlik şartları da;

$$\sum_{i=1}^n \pi W_i \frac{b-a}{2h_1} G_1(s_{1i}) = 1 \tag{a}$$

$$\sum_{i=1}^n \pi W_i \frac{d-c}{2h_1} G_2(s_{2i}) = Q/P \tag{b}$$

$$\sum_{i=2}^{n-1} \pi W_i \frac{l-k}{2h_1} G_4(s_{4i}) = 1 \tag{c} \tag{334 a-c}$$

olarak yazılabilir.

Bu eşitliklerde geçen W_i , s_i , r_j büyüklükleri aşağıda tanımlanmıştır.

$$W_1 = W_n = \frac{1}{2n-2} \quad W_i = \frac{1}{n-1} \quad (i=2, \dots, n-1) \quad (335)$$

$$s_{1i} = s_{2i} = \cos\left(\frac{i-1}{n-1}\pi\right) \quad (i=1, \dots, n) \quad (336)$$

$$s_{1i} = s_{2i} = \cos\left(\frac{i-1}{n-1}\pi\right) \quad (i=1, \dots, n-1) \quad (337)$$

$$r_{1i} = r_{2i} = r_{4i} = \cos\left(\frac{2j-1}{2n-2}\pi\right) \quad (j=1, \dots, n-1) \quad (338)$$

Böylece $G_1(s_i)$, $G_2(s_i)$, $G_3(s_i)$, ($i=1, \dots, n$), e ve f 'nin bilinmeyen olduğu $3n$ bilinmeyenli $3n$ denklem elde edilmiş olur.

$\lambda_2 > \lambda_{cr}$ olması durumunda seçilen bir yük faktörü değeri için, x_{cr} ifadesi arada kalacak şekilde k ve l 'ye aynı anda değerler verilir. Seçilen k , l değerleri için (334 a-c) denklemleri aynı anda sağlanmalıdır. Eğer sağlanmıyorsa çözüm için yeniden k ve l değeri belirlenmeli ve çözüm sağlanana kadar bu döngü devam etmelidir. Alınan yük faktörü değeri için k ve l değerleri bulunduğu (k, l) aralığı dışındaki temas yüzeyinde $(\sigma_y)_2(x, -h)$ gerilme dağılışı elde edilir.

(k, l) ayrılma bölgesinde $v_2(x, -h)$ yer değiştirme, yani homojen tabaka ile rijit düzleme ait ara yüzeyinde meydana gelen ayrılmanın belirlenebilmesi için

$$v_2^*(x, -h) = \frac{\partial v_2(x, -h)}{\partial x} = \int_k^x \alpha_4(t) dt \quad (k < x < l) \quad (339)$$

$$\frac{\mu_2}{P/h_1} v_2^*(x, -h) = \frac{l-k}{2h_1} \int_{-1}^{r_4} \alpha_4(t) dt \quad (-1 < r_4 < 1) \quad (340)$$

$$x = \frac{l-k}{2} r_4 + \frac{l+k}{2} \quad (341)$$

yazılıp (339) numaralı denklemin indeksi +1 alınırsa çözüm;

$$\frac{\mu_2}{P/h_1} v_2^*(x, -h) = \frac{l-k}{2h_1} \sum_{i=2}^{m-1} W_i G_4(s_{4i}), \quad (m=2, \dots, n-1) \quad (342)$$

şeklinde olur. Bu ifade yardımıyla homojen tabaka ile rijit düzlem arasında meydana gelen ayrılmalar belirlenebilir.

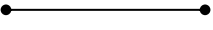






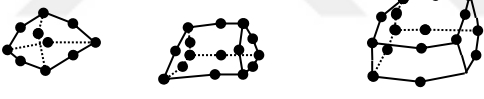
2.5. Sonlu Elemanlar Yöntemi

Sonlu elemanlar yöntemi, genel olarak analitik olarak hesaplanması zor, karmaşık problemlerin, belirli kabuller yapılarak sayısal yöntemler ile çözülmesine dayanır. Bu yöntemin temel yaklaşımı; sıcaklık, basınç, gerilme veya deplasman gibi herhangi bir sürekli büyüklüğün küçük ve sürekli parçaların birleşmesi ile oluşan bir modele dönüştürülmesidir. İlk defa 1950'li yıllarda uçak gövdelerinin gerilme analizi için geliştirilen bu yöntemin, ilerleyen yıllarda uygulamalı bilimler ve mühendislik problemlerinin çözümünde de başarılı bir şekilde kullanılabilceği görülmüştür. Sonrasında ise sonlu elemanlar yöntemi ve çözüm teknikleri hızlı ilerlemeler kaydetmiş ve günümüzde birçok problemin çözümü için kullanılan en güvenilir yöntemlerden birisi haline gelmiştir. Yöntemin farklı mühendislik alanları için bu kadar popüler olmasının ana nedenlerinden birisi de genel bir bilgisayar yazılımının yalnız verilerini değiştirerek herhangi bir özel problemin çözümü için kullanılabilir olmasıdır. Gerçek problem, daha basit bir probleme indirgendiğinden kesin çözüm yerine yaklaşık bir çözüm elde edilmektedir. Mevcut matematiksel yöntemlerin kesin çözüme, hatta yaklaşık bir çözüme dahi ulaşmakta yetersiz kalması halinde, sonlu elemanlar yöntemi tercih edilebilecek alternatif bir yöntemdir (Erhan, 2011).

Sonlu Elemanlar Yönteminde, modeller sonlu sayıda elemanlara bölünür ve bu elemanlar düğüm noktası (node) adı verilen belli noktalardan birbirlerine bağlanır. Örneğin, katı modellerde elemanlardaki yer değiştirmeler direkt olarak düğüm noktalarının yer değiştirmelerine bağlıdır. Düğüm noktalarındaki yer değiştirmeler ise elemanın maruz kaldığı gerilmelerle ilişkilidir. Sonlu Elemanlar Yöntemi bu düğüm noktalarındaki yer değiştirmeleri çözmeye çalışır. Düğüm noktaları için tanımlanmış şartlar, yöntem ile matematiksel doğrusal denklemlere çevrilir, ilk olarak bu denklemler çözülür ve tüm elemanlardaki gerçek gerilmeler belirlenmeye çalışılır. Sonuç olarak model ne kadar fazla sayıda elemana ayrılırsa o modele uygulanan yüke göre daha gerçekçi sonuç alınır.

İlk başlarda sonlu elemanlar yönteminde tüm işlemler elle yapıldığı için, işlemler 10–100 eleman için yapılmıştır. Ancak eleman sayısının az oluşu sonuçların hassasiyetini sınırlandırmıştır. İncelenen probleme bağlı olarak düğüm noktalarından elde edilen denge

denklemlerinin sayısı yüzlerce hatta binlerce olabilmektedir (Akın 2006). Bilgisayar teknolojisindeki ilerlemelerle bu işlemler artan eleman sayıları ile bilgisayarlara aktarılmıştır (Şekil 4). Bugün problemlerin çözümünde milyonlarca eleman kullanılabilir.

Boyut	Eleman Derecesi	Eleman Şekli	Eleman Tipi
1-D (Eğri)	Lineer		Kiriş
	Kuadratik		Kiriş
	Kübik		Kiriş
2-D (Alan)	Lineer		Kabuk
	Kuadratik		
	Kübik		
3-D (Hacim)	Lineer		
	Kuadratik		

Şekil 4. Sonlu eleman yönteminde eleman tipleri

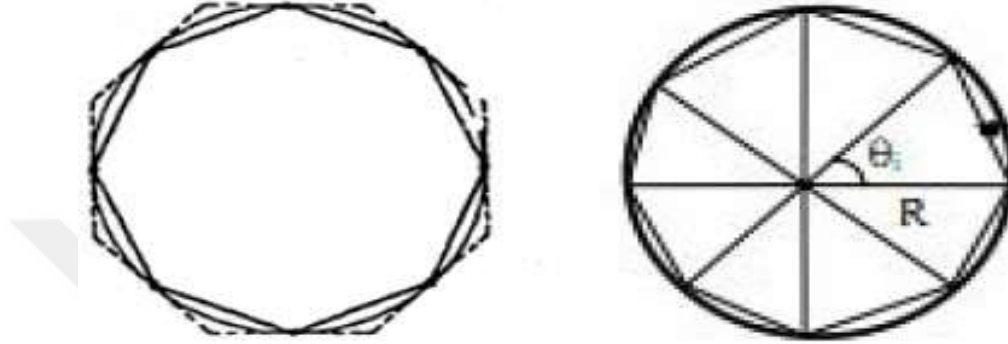
Sonlu elemanlar yöntemi birkaç malzemenin birleştirildiği cisimlerde uygulanabilir. Düzgün olmayan sınırlara sahip şekiller, eğri kenarlı elemanlar kullanılarak analiz edilebilirler. Eleman boyutları kullanıcı tarafından değiştirilebilir. Böylece önemli değişiklikler beklenen bölgelerde eleman boyutu küçültülerek daha hassas işlemler yapılabilirken, aynı parçanın diğer bölgeleri daha büyük elemanlara bölünerek işlem hızı artırılabilir (Yıldız, 2011).

2.5.1. Sonlu Elemanlar Yönteminin Tarihsel Gelişim Süreci

Modern sonlu elemanlar yönteminin izlerine 18. yy. başlarında rastlansa da yöntemin arkasında bulunan ana fikirler yüzyıllar öncesine dayanmaktadır. Örnek olarak, yüzyıllar

önce bilim insanları çembere ait çevre uzunluğunu bulmak için çember etrafına çizilen poligonlardan faydalanmışlardır. Poligonların köşe sayılarının artmasına bağlı olarak sonuca daha da yaklaşılmaktaydı (Erhan, 2011, Erken, 2009).

İlk matematikçiler dairenin çevresini hesaplariken daireyi Şekil 5'teki gibi çokgene indirgemiş ve problemi basitleştirmiştir.



Şekil 5. Dairenin çevresinin sonlu elemanlar yaklaşımı ile bulunmasında kullanılan yöntem

Başka bir ifade ile bu çokgenin her kenarı bir sonlu elemandır. Bu basitleştirilmiş çözüme baktığımızda genel sonlu eleman uygulamaları için de geçerli olan iki özellik görülmektedir. İlk olarak dairenin dışında ve içinde bulunan çokgenlerin çevreleri, daire çevresinin üst ve alt sınırlarını oluşturmaktadır. Bir diğeri ise çokgenin kenar sayısının artırılmasıyla, bu yöntem ile bulunacak yaklaşık çözüm gerçek çözüme ulaşacaktır (Erhan, 2011, Güven ve Madenci, 2006).

Sonlu elemanlar yöntemini ortaya atan ilk kişi, 1943 yılında üçgensel bölgeler üzerinde parçasal sürekli fonksiyonlar tanımlayan Courant olarak bilinmektedir. Boeing'in 1950'lerde uçak kanatlarını modellemede üçgen gerilme elemanları kullanması bu yöntemin kullanıldığı diğeri bir önemli adımdır. Sonrasında, 1956 yılında Turner, Clough, Martin ve Top tarafından yapılan çalışma ile günümüzde bilinen sonlu elemanlar yöntemi fikri sunulmuştur. Çalışma, perçin bağlantılı profil ile üçgensel iç gerilmeli tabakadaki sonlu elemanların uçak analizinde kullanımını içermektedir (Erhan, 2011, Erken, 2009).

Sonlu Elemanlar Yönteminin gelişim sürecini aşağıdaki şekilde özetleyebiliriz :

- 1943 - Courant (Varyasyonel yöntem)
- 1956 - Turner, Clough, Martin ve Topp (Rijitlik yöntemi)
- 1960 - Clough (İki boyutlu Sonlu Eleman problemleri)

- 1970'ler - Bilgisayarlarda ilk uygulamalar
- 1980'ler - Mikro işlemciler, Pre ve Post İşlemciler
- 1990'lar - Büyük yapısal sistemlerin analizleri

Öncesinde de ifade edildiği gibi çağımızın en büyük teknolojik gelişmesi olarak adlandırılan bilgisayar teknolojisinin, bu yöneme çok büyük katkısı olmuştur. Bugünkü bilgisayarlarla, çözülmesi aylar süren problemler kısa zamanda çözebilir ve gerçek sonuçlara çok yakın sonuçlar elde edilebilir (Erhan, 2011; Erken, 2009).

Bilgisayar teknolojisindeki değişimlere bağlı olarak, sonlu elemanlar yönteminin kullanımını sağlayan çeşitli paket programlar geliştirilmiştir. Bu programlardan bazıları ABAQUS, ADINA, ALGOR, ANSYS, LINFLOW, LS-DYNA VE NASTRAN'dır. Yapılan bu çalışmada paket program olarak ANSYS programının MECHANICAL APDL versiyonu kullanılmıştır.

Önceki bölümde rijit düzleme oturan ve iki blok ile yüklenmiş biri FD diğeri homojen olan iki tabakadaki temas problemi, analitik olarak çözülmüştür. Bu bölümde ise sonlu elemanlar yöntemi (SEM) kullanılarak yapılan çözüm verilmiştir. Sonlu elemanlar paket programı yardımıyla sayısal analiz gerçekleştirilirken problemin çözümü ve analiz sonuçlarının elde edilebilmesi için çeşitli işlemler gerçekleştirilmiştir. Modelleme yapılırken ilk önce standart ANSYS menüleri kullanılarak problem geometrisi oluşturulmuştur. Ardından eleman tipi belirlenmiştir. İrdelenen problem, statik ve 2 boyutlu düzlem problem olduğu için eleman tipi, 8 düğüm noktasına sahip ve düğüm noktalarında dönme rijitliği olmayan PLANE183 seçilmiştir. Bu işlem sonrasında malzeme özellikleri programa tanıtılmıştır. ANSYS paket programında homojen malzemeler standart ANSYS menüleri yardımıyla tanımlanabilmektedir. FD malzemenin tanımlanması için, program içerisine daha önce literatüre eklenen bir makro kullanılmıştır (Polat vd. 2019).

Daha sonra problem geometrisine malzeme özellikleri atanarak ağırlara bölme (meshing) işlemi gerçekleştirilmektedir. Her türlü geometriye uygun olan serbest üçgen ağ (Free Triangular Mesh) çeşidiyle ağırlara bölme işlemi yapılmıştır. Çalışmada 218.640 düğümlü serbest üçgen ağ kullanılmıştır. FD tabakanın ağırlara bölme işlemi için de programa ek makro ilave edilmiştir. Daha önce literatürde bulunan makronun bir bölümü aşağıda verilmiştir (Polat vd. 2019):

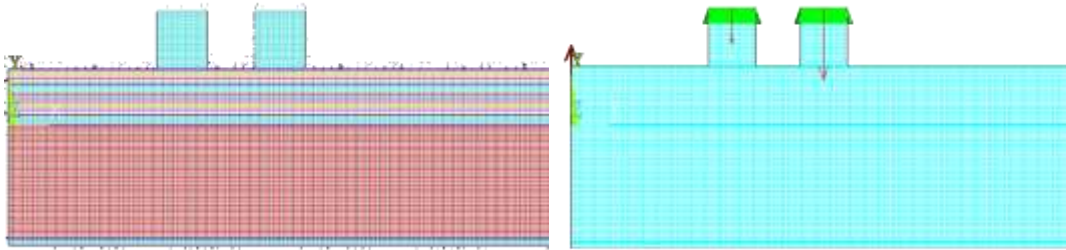
```

*do, j, 1, ele_numb_y, 1
y_coord = length_e_y*(j)
*use, mat_fgm_pol, y_coord
mp, ex, cntr, E_fgm
mp, prxy, cntr, nu_fgm
mp, dens, cntr, den_fgm
esel, r, cent, x, 0, lngt_lyr
emodif, all, mat, counter
esel, all

```

Ağlara bölme işlemi tamamlandıktan sonra rijit blokların üst yüzeyindeki düğüm noktalarının yük etkisi altında birbirinden bağımsız yer değiştirme yapmasını engelleyen COUPLING işlemi gerçekleştirilerek temas çiftleri tanımlanmıştır. Bu çalışmada düğüm noktalarının üst üste gelmemesi durumunda da çözüm yapılmasına olanak sağlayan yüzey yüzey temas modeli kullanılmıştır. Modelde bloklar ile FD tabaka arasında, FD tabaka ile homojen tabaka arasında ve homojen tabaka ile rijit düzlem arasında temas söz konusudur ve bu yüzeyler için temas çiftleri tanımlanmıştır. Temas çifti oluşturulurken hedef yüzeyi TARGE169, temas yüzeyi ise CONTA172 elemanı ile tanımlanmıştır. Burada, birbirine temas edecek yüzeylerden elastisite modülü küçük olan temas yüzeyi olarak seçilir. Seçilen bu iki eleman 3 düğüm noktası içerir ve bu düğüm noktaları PLANE183 elemanındaki düğüm noktaları ile örtüşür.

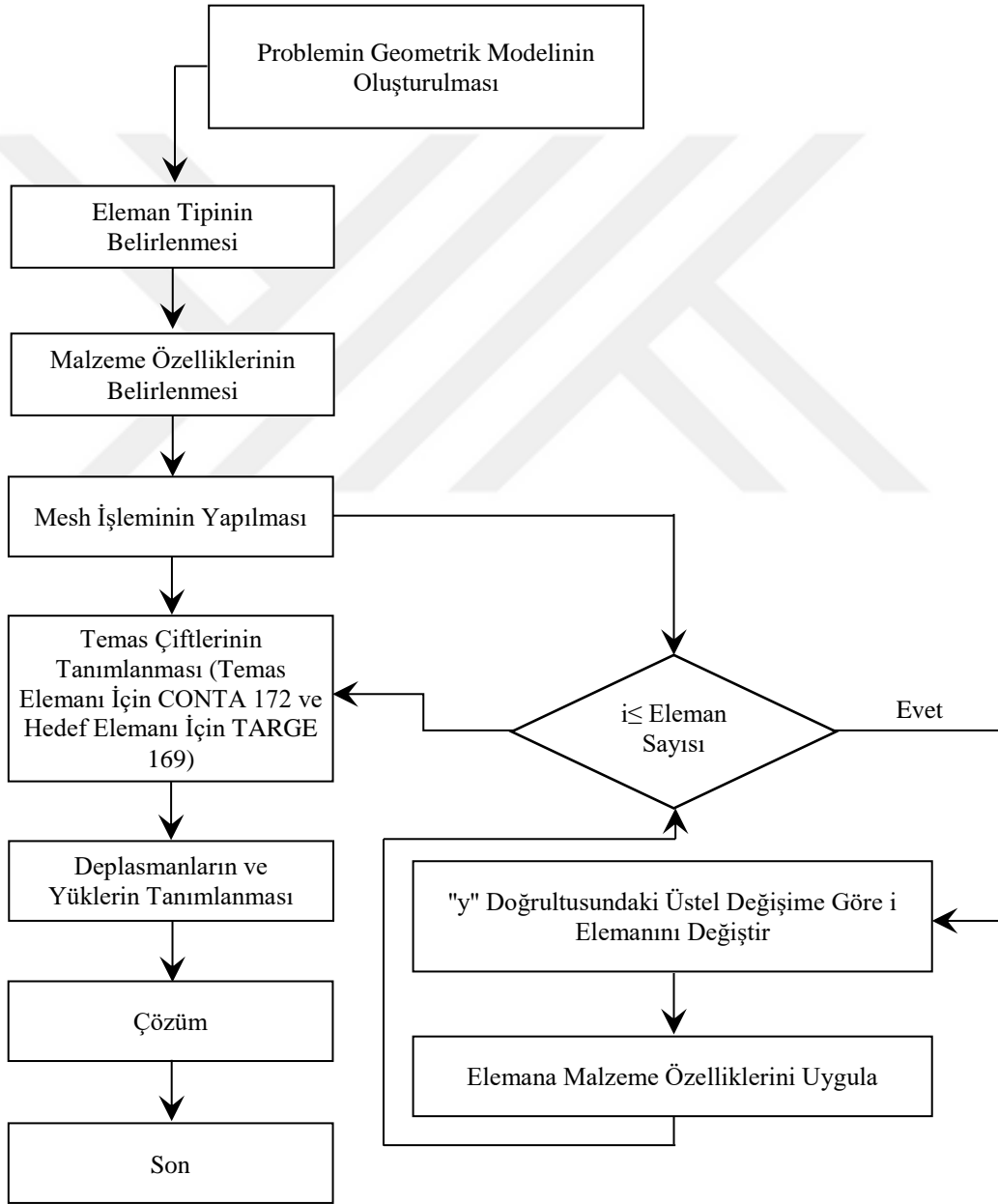
ANSYS paket programında problem tipine bağlı olarak farklı temas algoritmaları vardır. Bu çalışmada Augmented Lagrangian Metodu kullanılmıştır. Temas işlemlerinin tamamlanmasından sonra sınır koşulları ve bloklar üzerindeki yükler tanımlanmış ve analiz gerçekleştirilmiştir. Problemin sonlu elemanlar modeli Şekil 6 ve Şekil 7’de, sonlu elemanlar modeline ait algoritma ise Şekil 8’de verilmiştir.



Şekil 6. Problemin ANSYS modeli



Şekil 7. Serbest tüçgen ağlara bölme



Şekil 8. Problemin algoritması

3. BULGULAR VE İRDELEME

3.1. Sürekli Temas Problemi

Bu bölümde, rijit düzlem üzerine oturan ve iki rijit düz blok aracılığıyla yüklenmiş biri fonksiyonel derecelendirilmiş iki tabakanın temas problemi çözülmüştür. Çalışmada βh_1 , γh_1 , Q/P , $(c-b)/h_1$, $(d-c)/h_1$, (μ_2/μ_{h1}) gibi çeşitli boyutsuz büyüklükler için aşağıdaki analizler gerçekleştirilmiştir.

- Bloklar altındaki temas gerilmeleri belirlenerek grafikler halinde sunulmuştur.
- Fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ve homojen tabakalar için blok altında, bloklar arasında ve bloklar yakınındaki gerilmelerin (σ_x , σ_y , τ_{xy}) tabaka derinlikleri boyunca değişimi grafikler halinde sunulmuştur.
- FD tabaka ile homojen tabaka ara yüzeyindeki ve homojen tabaka ile rijit düzlem ara yüzeyindeki normal gerilmeler (σ_x , σ_y) grafiklerle verilmiştir. Ayrıca ara yüzeylerde meydana gelecek ilk ayrılma yükleri (λ_{cr}) ve ilk ayrılma uzaklıkları (x_{cr}) belirlenerek grafik ve tablolar halinde verilmiştir.
- Homojen tabaka yüksekliği artırılıp kütle kuvveti ihmal edilerek, tabaka elastik yarım düzleme dönüştürülüp, sonuçlar literatürdeki çalışmayla kıyaslanmıştır. Yapılan kıyaslama sonuçları tablo ve grafikler yardımıyla sunulmuştur.

3.1.1. Rijit Bloklar Altındaki Temas Gerilmelerinin İrdelenmesi

Yük oranı (Q/P), blok genişlikleri ($(b-a)/h_1$, $(d-c)/h_1$), rijitlik parametresi (βh_1), tabakaların kayma modülü oranı (μ_2/μ_{h1}), bloklar arası mesafe ($(c-b)/h_1$) ve FD tabakanın toplam tabaka yüksekliğine oranı (h_1/h) gibi boyutsuz büyüklüklerin çeşitli değerleri için temas gerilmeleri belirlenmiştir. Şekillerde (a) ile belirtilen kısım birinci blok altındaki temas gerilmesini, (b) ile belirtilen kısım ise ikinci blok altındaki temas gerilmesini göstermektedir.

Şekil 9'da çeşitli yük oranları (Q/P) için blok altlarında meydana gelen temas gerilmeleri verilmiştir. Grafiklerden görüldüğü üzere yük oranının arttırılması durumunda hem blok kenarlarına yakın bölgelerde hem de blok orta bölgelerinde temas gerilmesi

değerlerinin arttığı görülmektedir. Aynı şekilde, temas gerilmeleri rijit blokların ortalarına doğru azalırken blok kenarlarında sonsuza gittiği görülmektedir. Bunun sebebi rijit blok kenarlarının gerilme için singüler noktalar olmasıdır. İkinci blok yükünün birinci blok yükünden 15.7 kat fazla olması durumunda birinci bloğun sağ köşesinde ayrılma başlayacağından buradaki temas gerilmesi sıfır olmaktadır. Şekil 10'da ikinci bloğun çeşitli genişlik değerleri için blok altındaki boyutsuz temas gerilme yayılımı verilmiştir. Şekilden de görüleceği üzere blok genişliği arttıkça kuvvet daha geniş bir alana yayıldığından blok altındaki gerilmeler azalmaktadır. İkinci bloğun genişliği belli bir sınırın üzerine çıkması halinde $((d-c/h_1)=13.25)$ ilk ayrılma ikinci bloğun sol köşesinde meydana geleceği için problem farklı bir problem halini alacak ve yapılan çözüm bu durum için geçerli olmayacaktır. Yapılan tüm analizlerde söz konusu kritik genişlik dikkate alınarak gerilmeler elde edilmiştir.

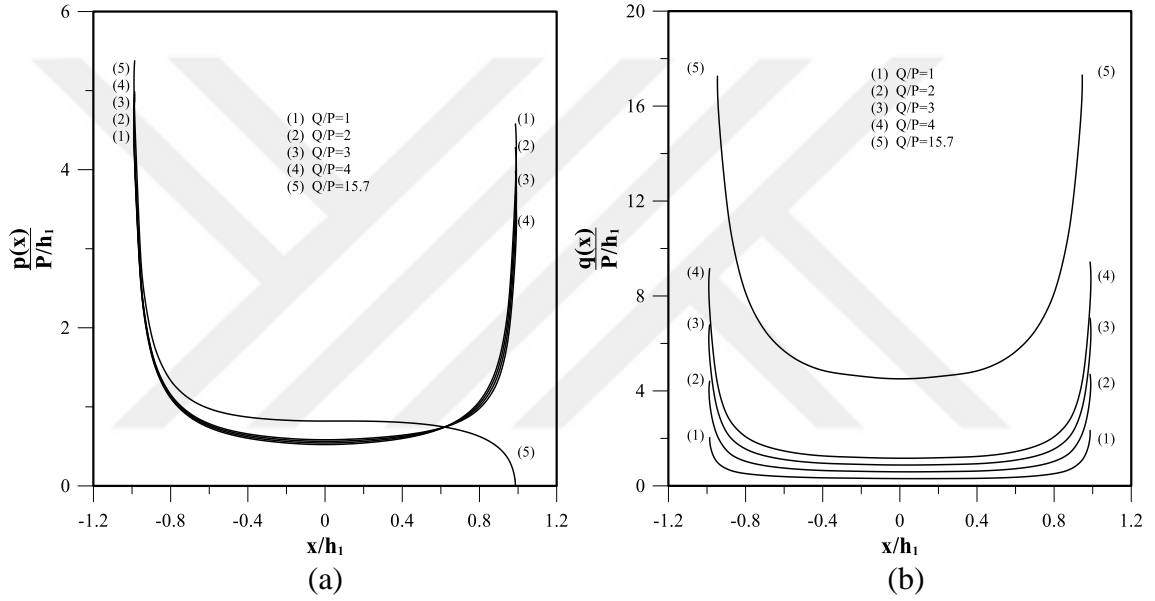
Şekil 11'de çeşitli β_{h_1} değerleri için blok altındaki boyutsuz temas gerilmesi yayılışları görülmektedir. β_{h_1} değerinin pozitif olması, üst yüzeyden alt yüzeye doğru derinlik boyunca rijitliğin azaldığını ifade ederken, negatif olması, üst yüzeyden alt yüzeye doğru derinlik boyunca rijitliğin arttığını ifade etmektedir. Şekilden de anlaşılacağı gibi, β_{h_1} değeri arttıkça yani fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın üst yüzeyinin rijitliği alt yüzeyine oranla arttıkça blok altındaki temas gerilmesi blok kenarlarında artarken blok ortasına doğru gittikçe azalmaktadır. Bu yükleme koşulları için, β_{h_1} değerinin belli bir limitin üzerine çıkması halinde ($\beta_{h_1}=3.55635$) ikinci bloğun ortasında ayrılma meydana geleceğinden yapılan analizlerde bu sınır değerini aşılmasına dikkat edilmiştir.

Şekil 12'de çeşitli (μ_2/μ_{-h_1}) değerleri için blok altındaki boyutsuz temas gerilme yayılımı görülmektedir. (μ_2/μ_{-h_1}) değeri arttıkça yani homojen tabakanın rijitliğinin, fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın alt yüzeyinin rijitliğine oranı arttıkça blok altındaki temas gerilmesi blok kenarlarına doğru azalırken, blok ortalarına doğru artış göstermektedir. Şekilde görüldüğü gibi, bu yükleme koşulları için, (μ_2/μ_{-h_1}) değerinin belli bir limitin altına düşmesi halinde $(\mu_2/\mu_{-h_1}=0.0175)$ birinci bloğun sağ köşesinde ayrılma meydana geleceğinden yapılan analizlerde bu limitin aşılmasına dikkat edilmiştir.

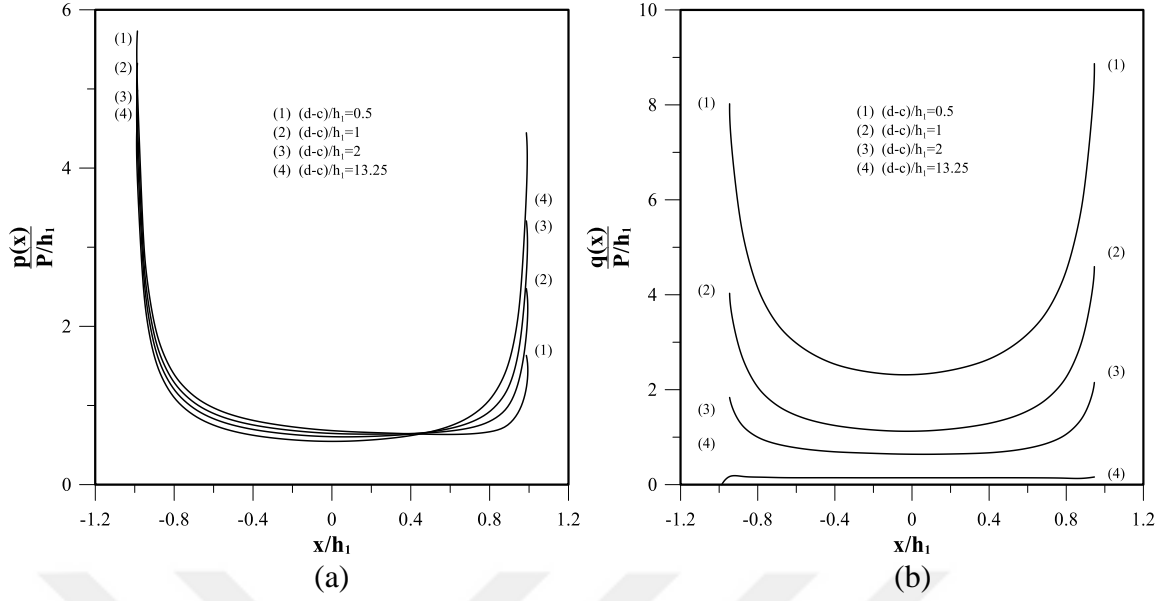
Şekil 13'te çeşitli bloklar arası mesafe değerleri için blok altlarındaki boyutsuz temas gerilmesi yayılışları görülmektedir. Şekilden görüldüğü gibi, bloklar birbirinden uzaklaştıkça blokların birbirlerine uzak olan dış kenarlarında ve blok ortalarında gerilme değerlerinde azalmalar meydana gelmektedir. Blokların birbirlerine yakın olan kısımlarında yani birinci bloğun sağ kenarı ve ikinci bloğun sol kenarında ise blok

mesafelerinin artması durumunda, blokların birbirleriyle etkileşimi azalacağından daha yüksek gerilme değerleri meydana gelmektedir. Bu yükleme koşulları için, bloklar arası mesafenin belli bir limitin altına düşmesi halinde $((c-b)/h_1=0.135)$ birinci bloğun sağ kenarında ayrılma meydana geleceğinden yapılan analizlerde bu limitin aşılmamasına özen gösterilmiştir.

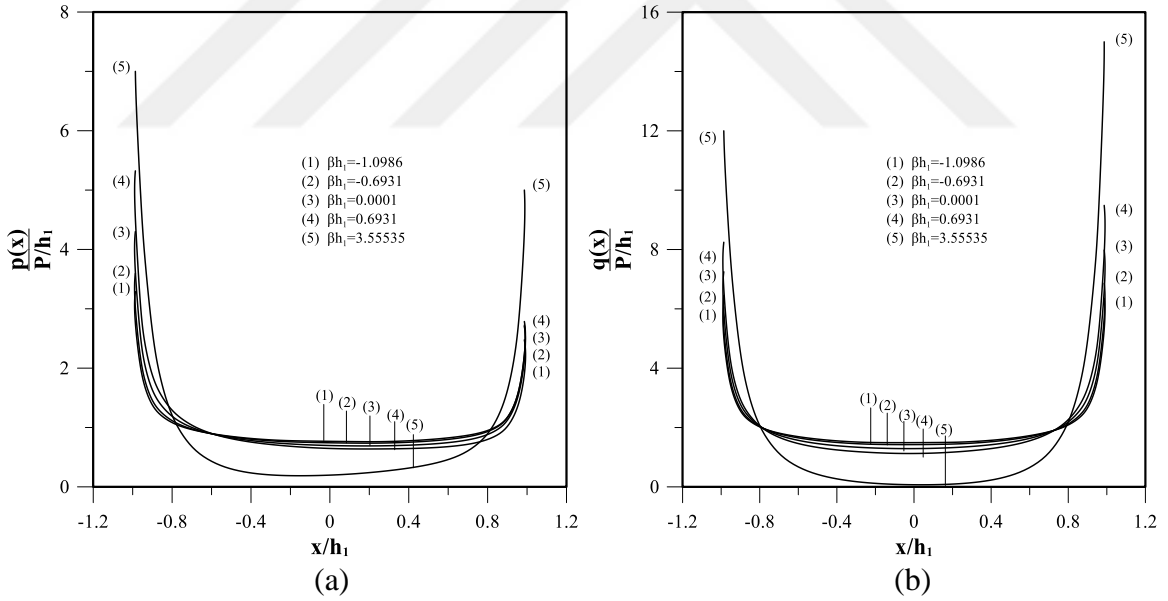
Şekil 14'te çeşitli tabaka yükseklikleri oranları için blok altlarındaki boyutsuz temas gerilmesi yayılışları görülmektedir. Şekilden anlaşılacağı üzere, tabaka yükseklik oranlarının temas gerilmelerine çok büyük bir etkisi olmamaktadır.



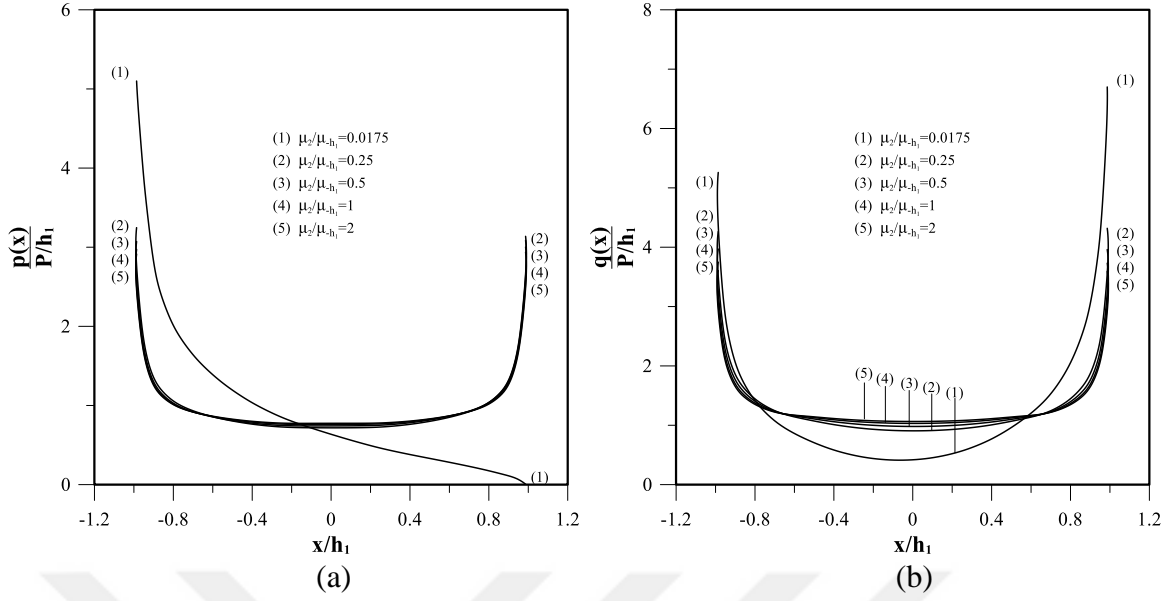
Şekil 9. Çeşitli yük oranı değerleri için blok altındaki temas gerilmesi yayılışları ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=1.5$; $(d-c)/h_1=2$; $\beta h_1=0.9163$; $\gamma h_1=0.9163$; $\kappa_1=\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu-h_1)=1$; $h_1=h_2$)



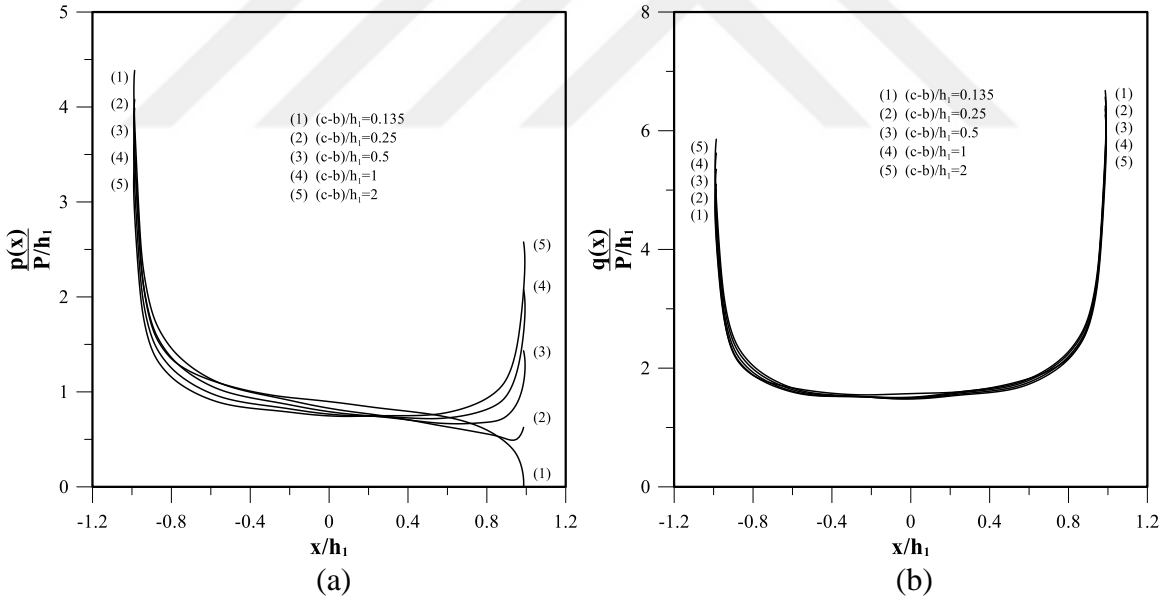
Şekil 10. Çeşitli blok genişliği değerleri için blok altındaki temas gerilmesi yayılışları (a) $h_1=3$; (b-a) $h_1=1$; (c-b) $h_1=1$; $\beta_{h_1}=0.6931$; $\gamma_{h_1}=0.6931$; $Q=2P$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{-h_1})=1$; $h_1=h_2$)



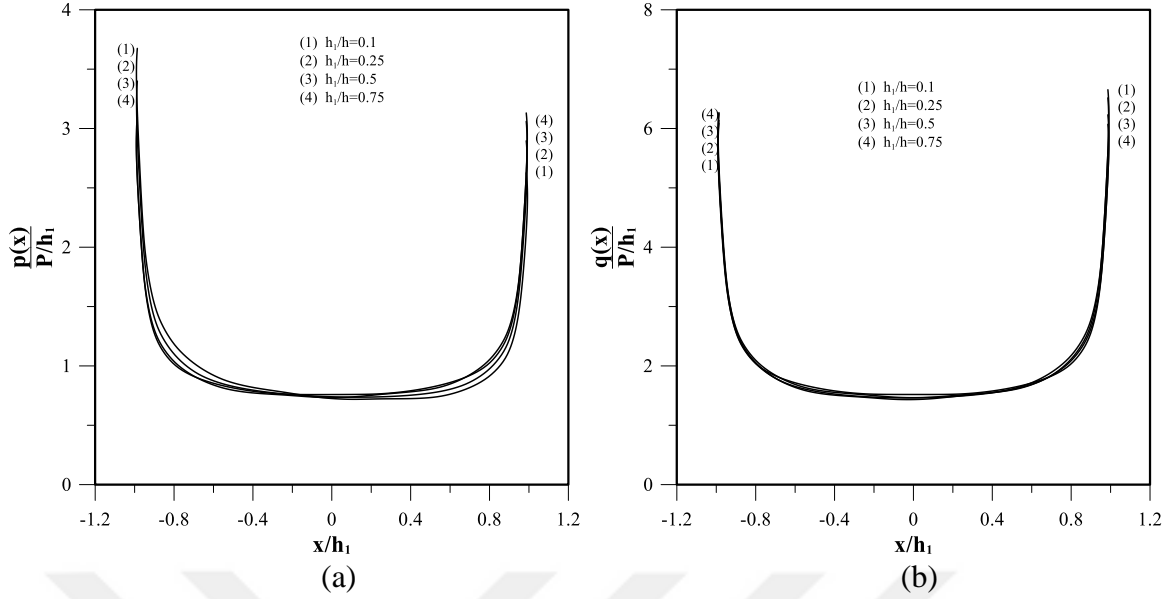
Şekil 11. Çeşitli β_{h_1} değerleri için blok altındaki temas gerilmesi yayılışları (a) $h_1=3$; (b-a) $h_1=1$; (c-b) $h_1=1$; (d-c) $h_1=1$; $\gamma_{h_1}=-1.38629$; $Q=2P$; $(\mu_2/\mu_{-h_1})=1$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $h_1=h_2$)



Şekil 12. Çeşitli μ_2/μ_{h1} değerleri için blok altındaki temas gerilmesi yayılışları ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1.5$; $\beta h_1=-1.3862$; $\gamma h_1=-1.3862$; $Q=2P$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $h_1=h_2$)



Şekil 13. Çeşitli bloklar arası mesafeler için blok altındaki temas gerilmesi yayılışları ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(d-c)/h_1=1$; $\beta h_1=-1.38629$; $\gamma h_1=-1.38629$; $Q=2P$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{h1})=1$; $h_1=h_2$)



Şekil 14. Çeşitli h_1/h oranları için blok altındaki temas gerilmesi yayılışları ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1$; $\beta h_1=-1.0986$; $\gamma h_1=-1.3862$; $Q=2P$; $(\mu_2/\mu_{h1})=1$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$)

3.1.2. Normal ve Kayma Gerilmelerinin İrdelenmesi

Bu kısımda, tabakaların x eksenini boyunca normalize edilmiş $\sigma_x(x,-h)/(P/h_1)$ gerilme yayılışları ile hem fonksiyonel derecelendirilmiş tabakada hem de homojen tabakada σ_x , σ_y normal gerilmeleri ve τ_{xy} kayma gerilmelerinin tabaka derinliği boyunca çeşitli boyutsuz büyüklüklere bağlı olarak değişimleri elde edilmiş, elde edilen sonuçlar grafikler ve tablolar yardımıyla sunulmuştur.

3.1.2.1. σ_x Normal Gerilmesinin İrdelenmesi

İlk olarak x eksenini boyunca rijitlik parametresinin (β) çeşitli değerleri için normalize edilmiş $\sigma_{x1}(x,-h_1)/(P/h_1)$ gerilme yayılışları Şekil 15a'da ve $\sigma_{x2}(x,-h)/(P/h_1)$ gerilme yayılışları Şekil 15b'de verilmiştir. Bu analizde birinci bloğun yükü ikinci bloğun yükünden iki kat fazla alınmıştır. βh_1 değerlerinin artması halinde, başka bir deyişle tabaka rijitliğinin alt yüzeye doğru azalması halinde çekme gerilmelerinde azalma meydana gelmiş ve en büyük değerleri blok altlarında meydana gelmiştir. En büyük basınç gerilmesi değerleri ise bloklara yakın bölgelerde meydana gelmiş olup çekme gerilmesine benzer olarak rijitliğin azalmasıyla azalış göstermiştir.

Bloklar arası uzaklığın çeşitli değerlerine göre her iki tabaka altındaki normalize edilmiş $\sigma_{x1}(x,-h_1)/(P/h_1)$ gerilme yayılışları Şekil 16a'da ve $\sigma_{x2}(x,-h)/(P/h_1)$ gerilme yayılışları Şekil 16b'de verilmiştir. Bu analizde FD tabakanın alt yüzeyinin üst yüzeye göre 4 kat daha rijit olduğu kabul edilmiştir. $(c-b)/h_1$ değerlerinin artması durumunda, bir başka ifadeyle bloklar arasındaki mesafenin artması durumunda bloklar arasında basınç gerilmeleri artış gösterirken, ikinci bloğun altında ise sadece çekme gerilmeleri artmıştır. Buna karşın birinci bloğun altındaki çekme gerilmesi bloklar arasındaki mesafenin artmasıyla azalmıştır.

İkinci bloğun genişliğinin değişmesi durumunda, normalize edilmiş $\sigma_{x1}(x,-h_1)/(P/h_1)$ gerilme yayılışı Şekil 17a'da ve $\sigma_{x2}(x,-h)/(P/h_1)$ gerilme yayılışı Şekil 17b'de verilmiştir. Bu analizde FD tabakanın üst yüzeyinin alt yüzeye göre iki kat daha rijit olduğu kabul edilmiştir. $(d-c)/h_1$ değerlerinin artması durumunda bir başka ifadeyle ikinci blok genişliğinin artması durumunda blok kenarlarına yakın bölgelerde basınç gerilmelerinde azalma görülürken, ikinci bloğun altındaki çekme gerilmeleri de azalmıştır. Buna rağmen ikinci bloğun genişliğinin artması durumunda, birinci bloğun altında çekme gerilmeleri artış göstermiştir.

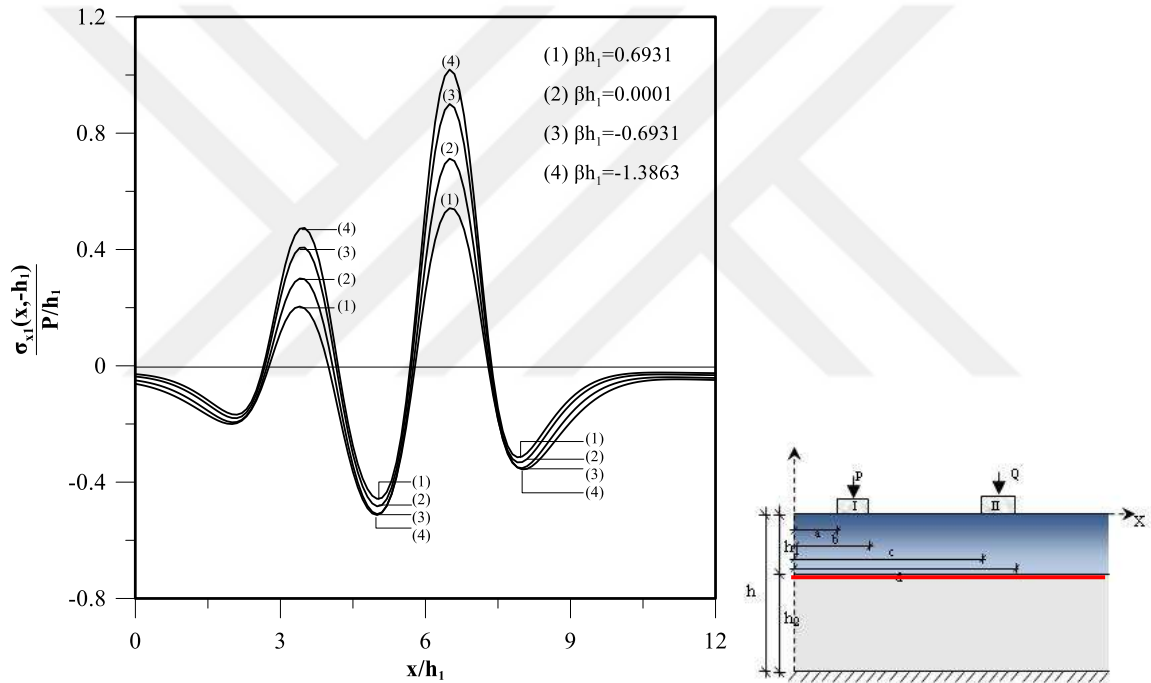
Kayma modülü oranına bağlı olarak normalize edilmiş $\sigma_{x1}(x,-h_1)/(P/h_1)$ ve $\sigma_{x2}(x,-h)/(P/h_1)$ gerilme yayılışları sırasıyla Şekil 18a'da Şekil 18b'de verilmiştir. Bu analizde tabakanın alt yüzeyi üst yüzeye göre dört kat daha rijit olarak seçilmiştir. μ_2/μ_{-h1} değerlerinin artması durumunda bir başka ifadeyle homojen tabakanın, FD tabakanın alt yüzeyine göre daha rijit olması durumunda hem blok kenarlarına yakın bölgelerdedeki basınç gerilmelerinde hem de blok altlarındaki çekme gerilmelerinde azalma görülmüştür.

Yük oranına bağlı olarak normalize edilmiş $\sigma_{x1}(x,-h_1)/(P/h_1)$ gerilme yayılışı Şekil 19a'da ve $\sigma_{x2}(x,-h)/(P/h_1)$ gerilme yayılışı Şekil 19b'de verilmiştir. Bu analizde tabakanın alt yüzeyinin rijitliği üst yüzeye göre dört kat daha rijit seçilmiştir. Q/P oranının artması durumunda bir başka ifadeyle ikinci bloktaki yükün birinci bloktaki yüke göre artması durumunda, hem blok kenarlarına yakın bölgelerdeki basınç gerilmelerinde hem de ikinci bloğun altındaki çekme gerilmelerinde artış görülmüştür. Fakat ikinci blok yükünün artması durumunda birinci bloğun altındaki çekme gerilmelerinde bir azalma görülmüştür.

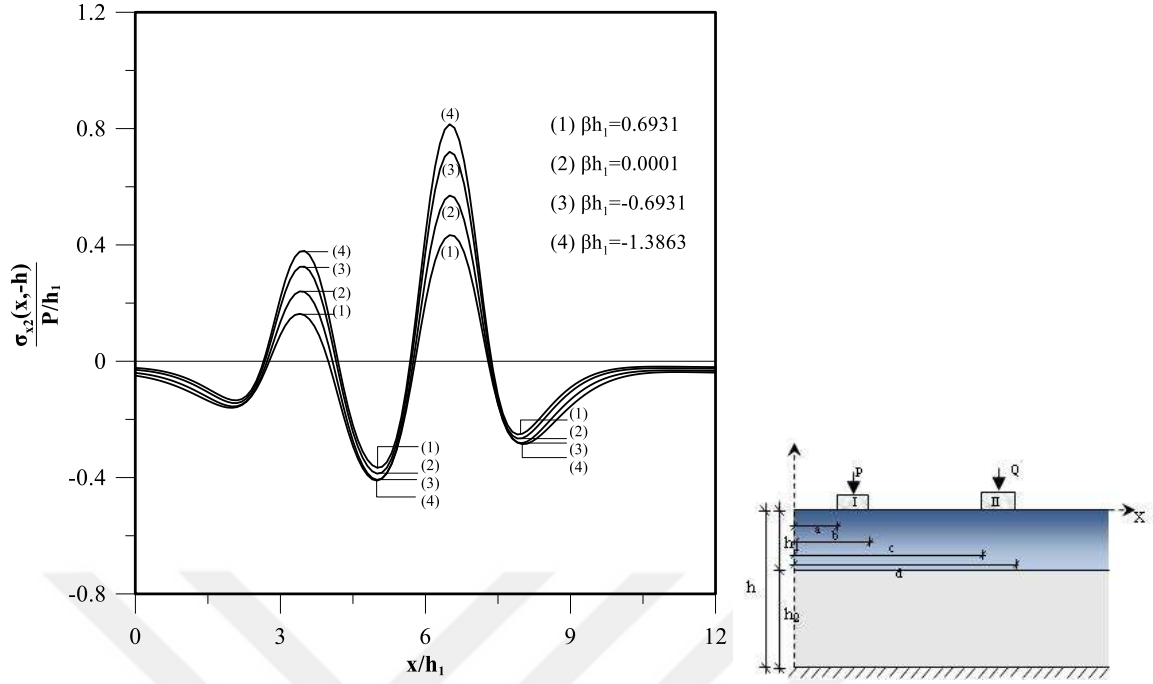
Şekil 20'de çeşitli μ_2/μ_{-h1} değerleri için derinlik boyunca bloklar arasındaki normalize edilmiş $\sigma_x(5,y)/(P/h_1)$ normal gerilme yayılışları ele alınmıştır. Burada homojen tabakanın kayma modülünün fonksiyonel derecelendirilmiş tabakadan küçük olması

halinde gerilme değerlerinde FD tabaka için bir artış olurken homojen tabaka için bir azalma görülmüştür.

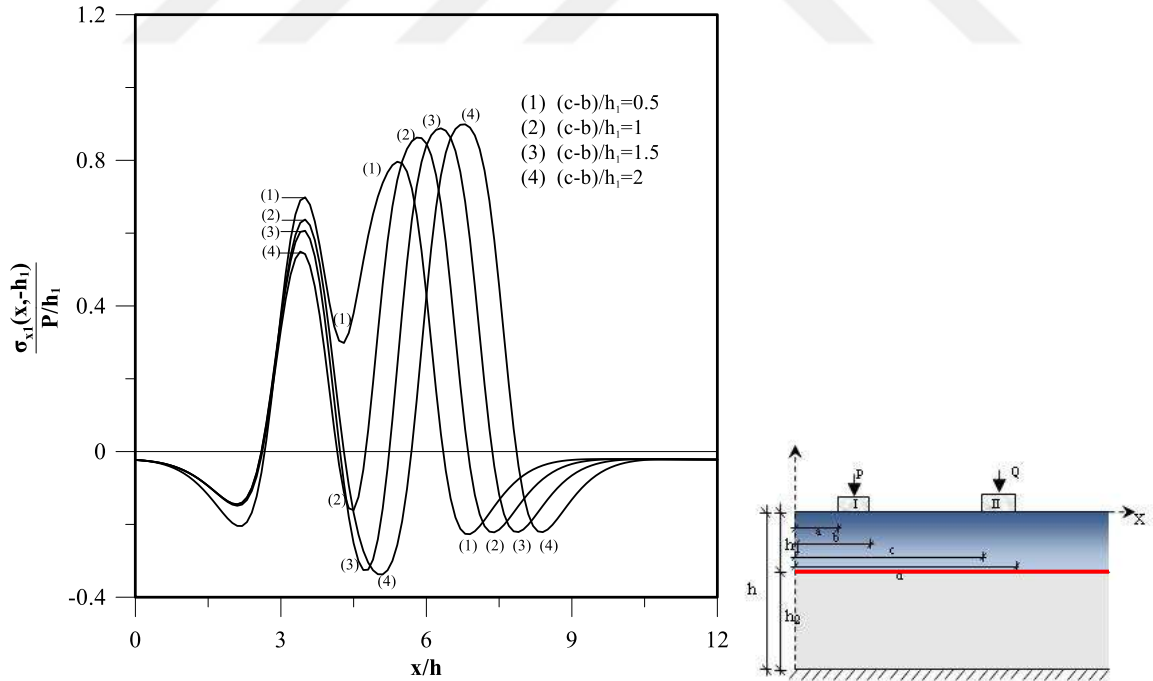
Şekil 21’de çeşitli βh_1 değerleri için derinlik boyunca birinci bloğun ortasındaki kesitte normalize edilmiş $\sigma_x(3.5,y)/(P/h_1)$ normal gerilme yayılışları ele alınmıştır. Tabakaların üst yüzeyinde basınç gerilmeleri oluşurken, alt yüzeylerde çekme gerilmesi ortaya çıkmıştır. Rijitliğin tabaka derinliği boyunca artması halinde fonksiyonel derecelendirilmiş tabakada çekme ve basınç gerilmelerinde artış gözlenmiştir. Homojen tabakada en büyük çekme ve basınç gerilme değerlerinde rijitliğin artmasıyla doğru orantılı olarak artış görülmüştür.



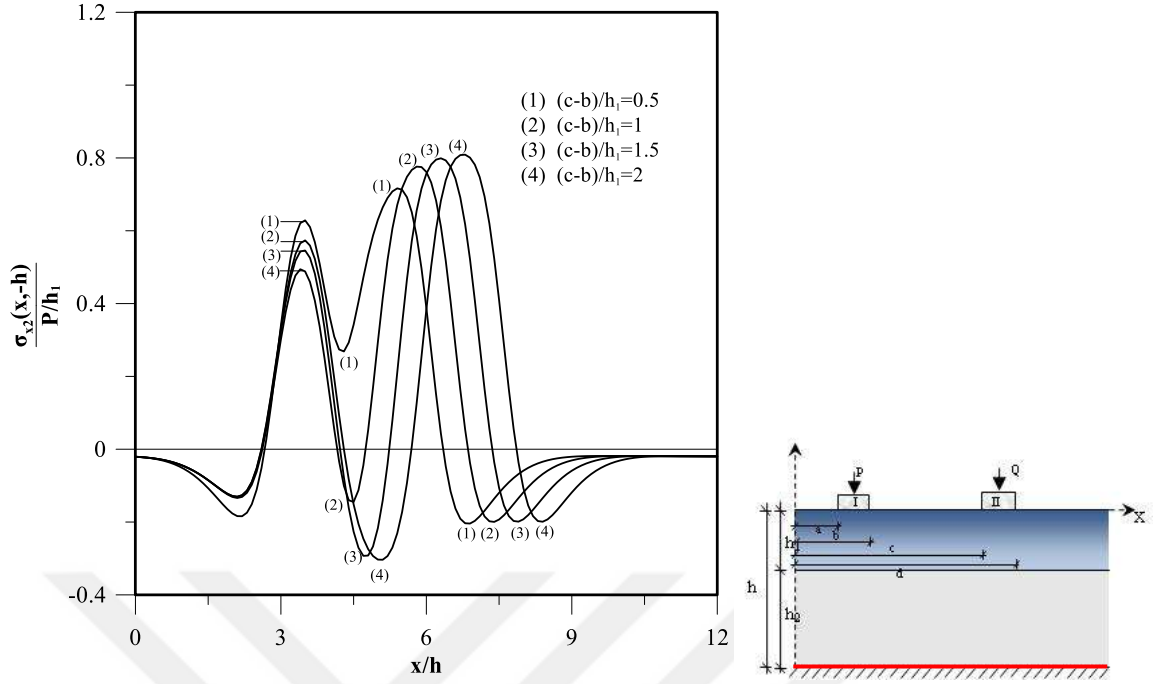
Şekil 15a. Çeşitli βh_1 değerleri için tabakalar arasındaki $\sigma_{x1}(x, -h_1)/(P/h_1)$ temas gerilmesi yayılışları ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=1$; $(d-c)/h_1=1$; $\gamma h_1=-1.38629$; $Q=2P$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{-h1})=1$; $h_1=h_2$)



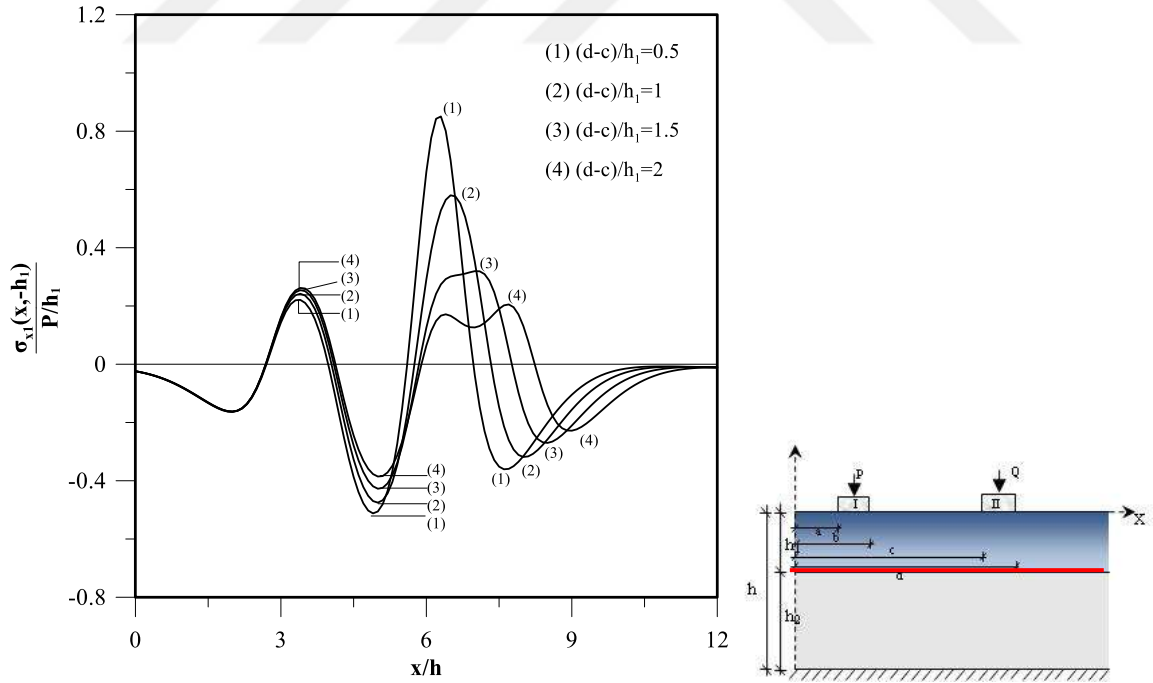
Şekil 15b. Çeşitli βh_1 değerleri için homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki $\sigma_{x2}(x, -h)/(P/h_1)$ normal gerilme yayılışları ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=1$; $(d-c)/h_1=1$; $\gamma h_1=-1.38629$; $Q=2P$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{-h_1})=1$; $h_1=h_2$)



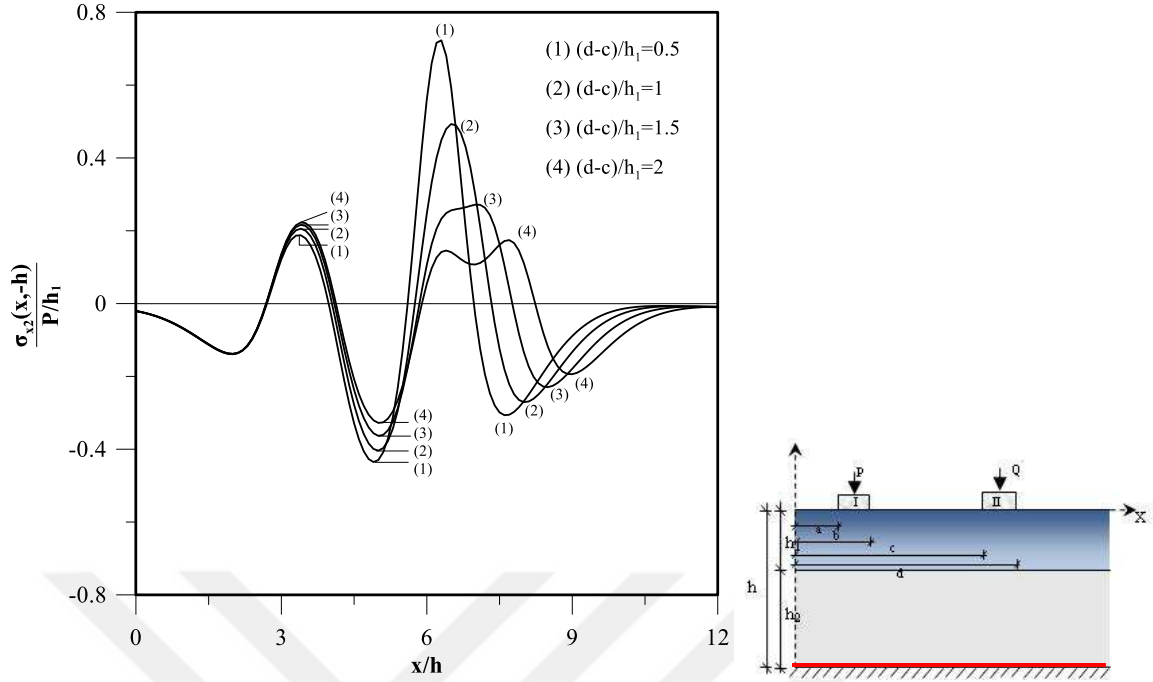
Şekil 16a. Çeşitli bloklar arası mesafeler için tabakalar arasındaki $\sigma_{x1}(x, -h_1)/(P/h_1)$ temas gerilmesi yayılışları ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(d-c)/h_1=1$; $\beta h_1=-1.38629$; $\gamma h_1=-1.38629$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{-h_1})=1$; $h_1=h_2$)



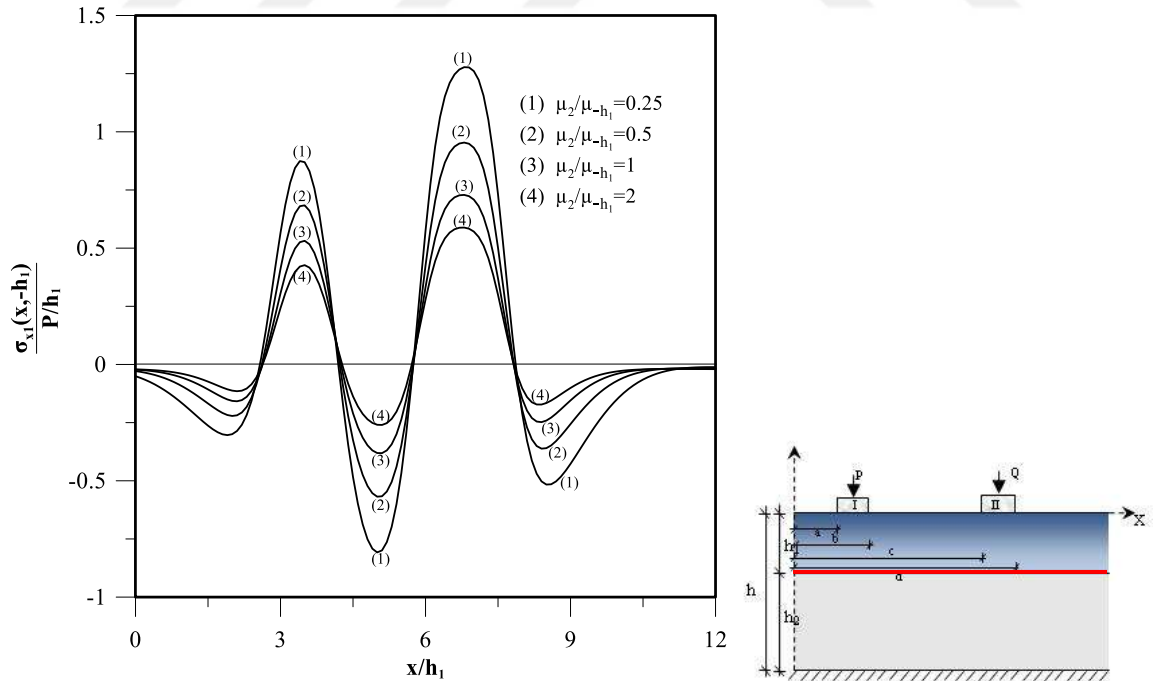
Şekil 16b. Çeşitli bloklar arası mesafeler için homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki $\sigma_{x_2}(x, -h)/(P/h_1)$ temas gerilmesi yayılışları ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(d-c)/h_1=1$; $\beta h_1=-1.38629$; $\gamma h_1=-1.38629$; $Q=2P$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{-h_1})=1$; $h_1=h_2$)



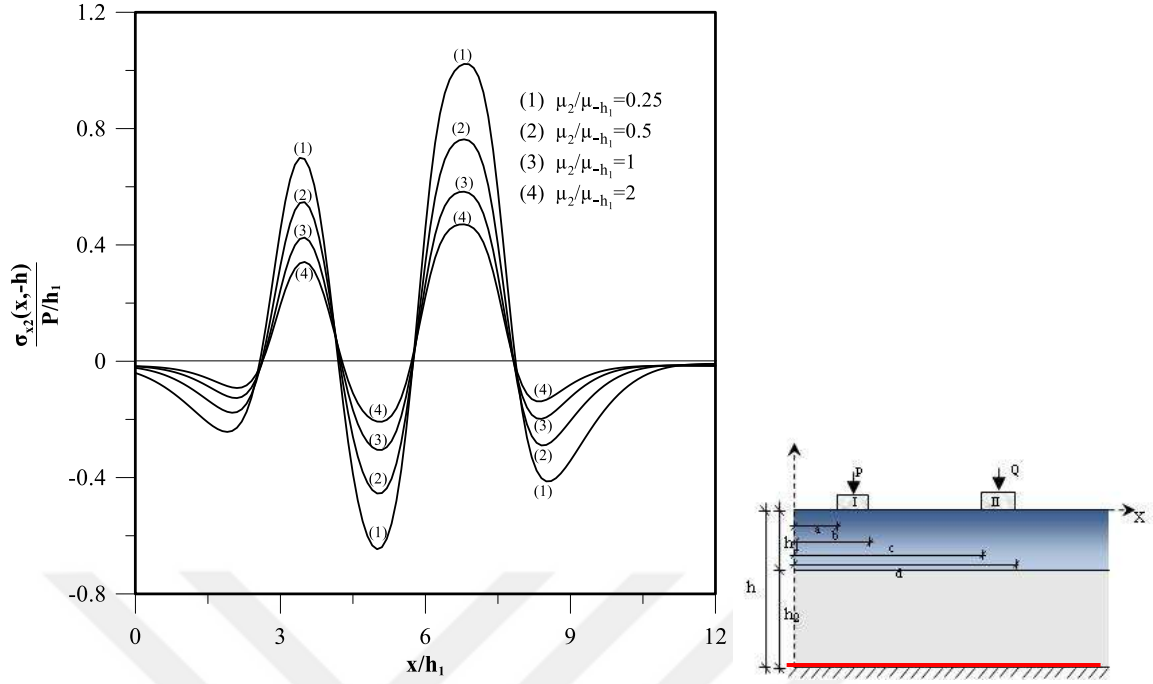
Şekil 17a. Çeşitli blok genişliği değerleri için tabakalar arasındaki $\sigma_{x_1}(x, -h_1)/(P/h_1)$ temas gerilmesi yayılışları ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=1$; $\beta h_1=0.6931$; $\gamma h_1=0.6931$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{-h_1})=1$; $h_1=h_2$)



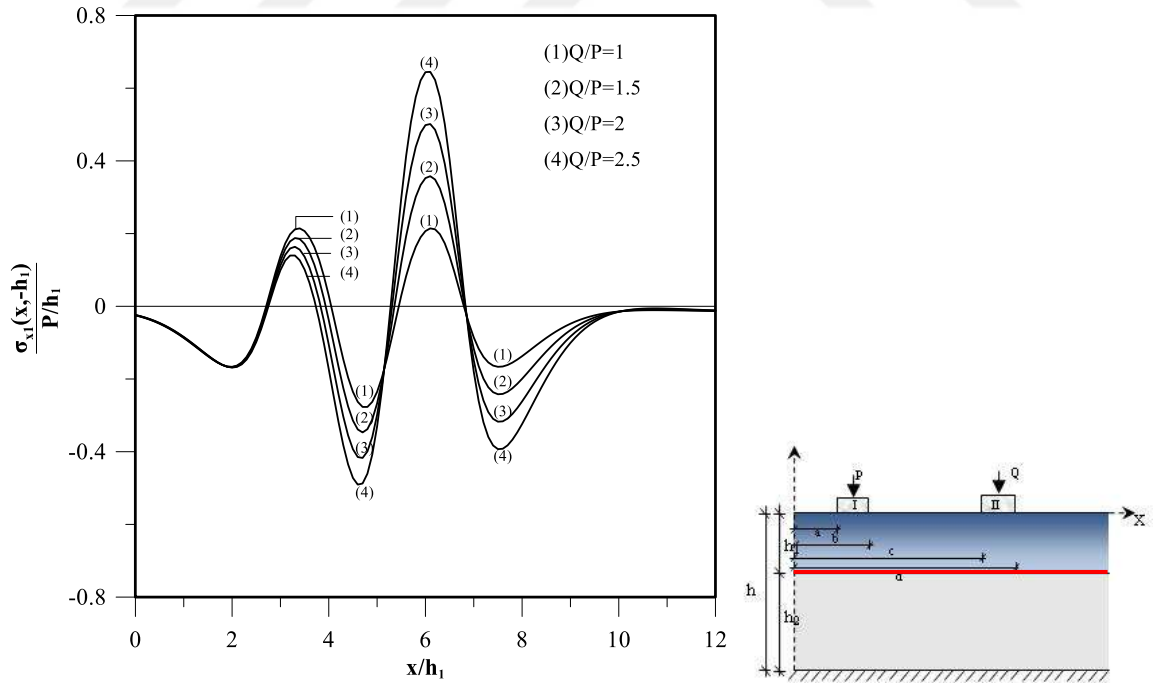
Şekil 17b. Çeşitli blok genişliği değerleri için homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki $\sigma_{x2}(x,-h)/(P/h_1)$ temas gerilmesi yayılışları ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=1$; $\beta h_1=0.6931$; $\gamma h_1=0.6931$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{-h_1})=1$; $h_1=h_2$)



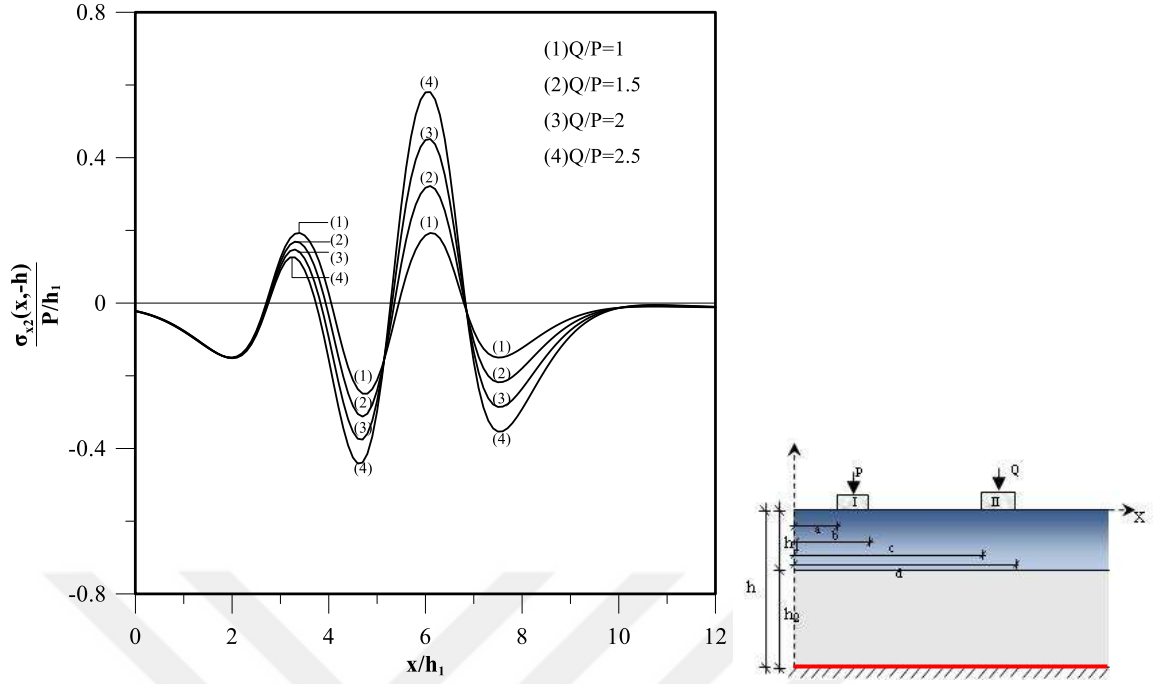
Şekil 18a. Çeşitli μ_2/μ_{-h_1} değerleri için tabakalar arasındaki $\sigma_{x1}(x,-h_1)/(P/h_1)$ temas gerilmesi yayılışları ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1.5$; $\beta h_1=-1.38629$; $\gamma h_1=-1.38629$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $h_1=h_2$)



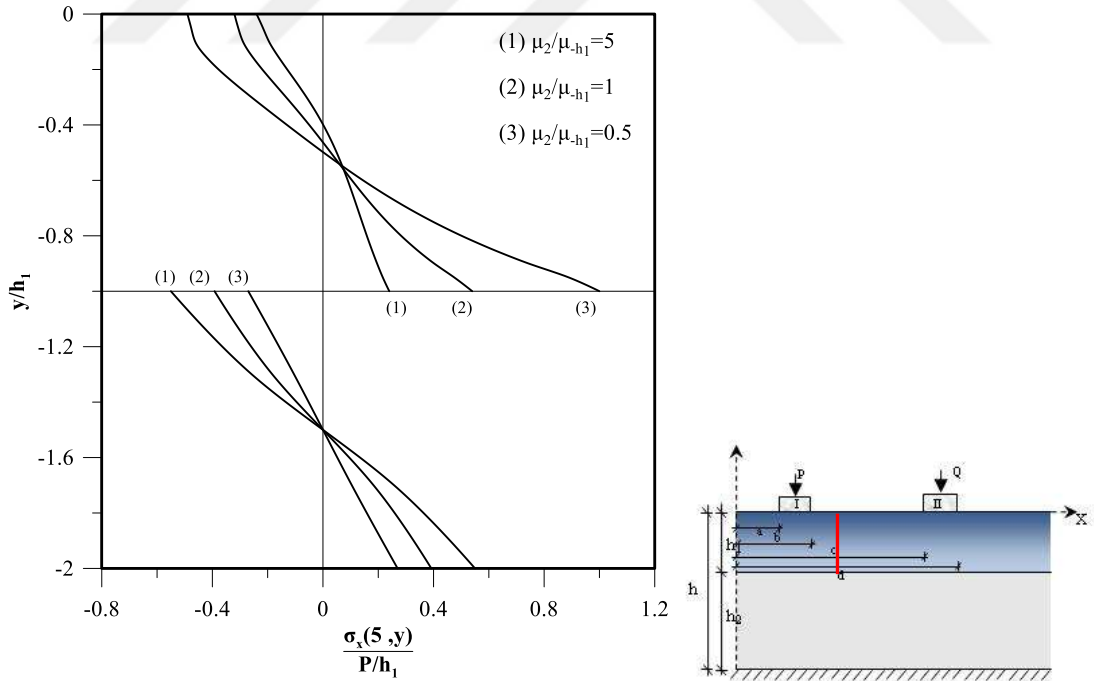
Şekil 18b. Çeşitli μ_2/μ_{-h_1} değerleri için homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki $\sigma_{x_2}(x, -h)/(P/h_1)$ temas gerilmesi yayılışları ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1.5$; $\beta_{h_1}=-1.38629$; $\gamma_{h_1}=-1.38629$; $h_1=h_2$)



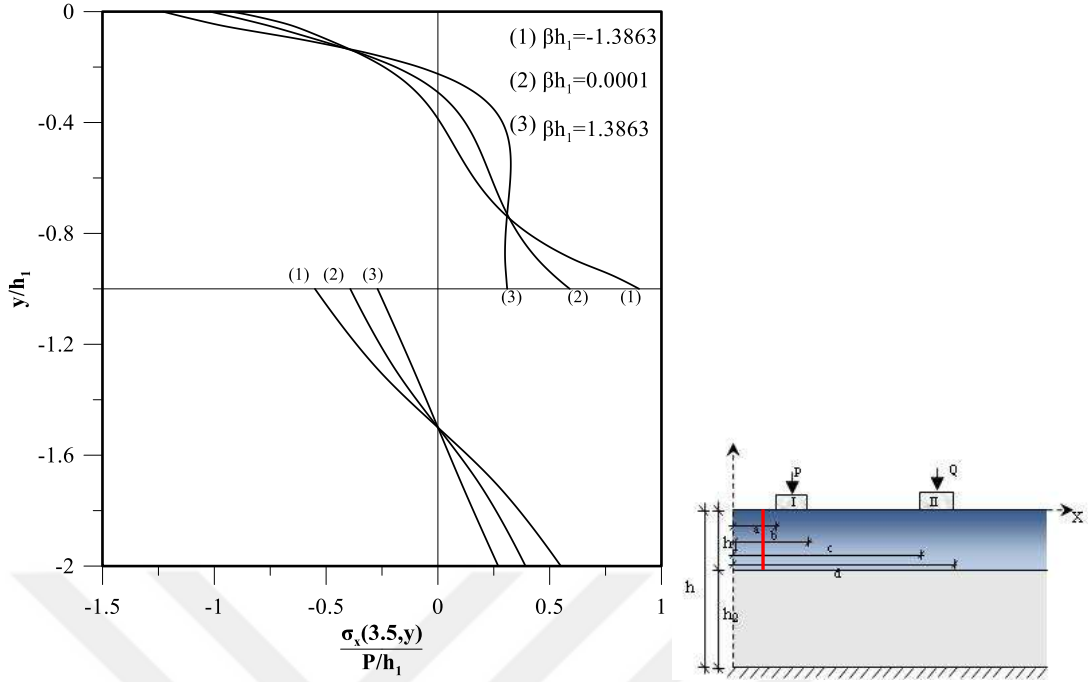
Şekil 19a. Çeşitli yük oranı (Q/P) değerleri için tabakalar arasındaki $\sigma_{x_1}(x, -h_1)/(P/h_1)$ temas gerilmesi yayılışları ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(d-c)/h_1=1$; $\gamma_{h_1}=-1.38629$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{-h_1})=1$; $h_1=h_2$)



Şekil 19b. Çeşitli yük oranı (Q/P) değerleri için homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki $\sigma_{x_2}(x, -h_2)/(P/h_1)$ temas gerilmesi yayılışları ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(d-c)/h_1=1$; $\gamma_{h_1}=-1.38629$; $(\mu_2/\mu_{h_1})=1$; $h_1=h_2$)



Şekil 20. Çeşitli μ_2/μ_{h_1} değerleri için derinlik boyunca $\sigma_x(5, y)/(P/h_1)$ normal gerilme yayılışları ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1.5$; $\beta_{h_1}=-1.38629$; $\gamma_{h_1}=-1.38629$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $h_1=h_2$)



Şekil 21. Çeşitli βh_1 değerleri için derinlik boyunca $\sigma_x(3.5,y)/(P/h_1)$ normal gerilme yayılışları ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=1$; $(d-c)/h_1=1$; $\gamma h_1=-1.38629$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{h_1})=1$; $h_1=h_2$

3.1.2.2. σ_y Normal Gerilmesinin İrdelenmesi

3.1.2.2.1. Tabaka Ara Yüzeylerindeki İlk Ayrılma Yükleri ve Uzaklıklarının Belirlenmesi

Çeşitli βh_1 değerlerine göre Şekil 22a'da normalize edilmiş $\sigma_{y1}(x,-h_1)/(P/h_1)$ temas gerilme yayılışı, Şekil 22b'de normalize edilmiş $\sigma_{y2}(x,-h)/(P/h_1)$ gerilme dağılımı verilmiştir. Ayrıca çeşitli βh_1 değerleri için Tablo 1a'da FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki, Tablo 1b'de homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıkları verilmiştir. Burada ilk ayrılmalar ikinci bloğa yakın bölgede meydana gelmiştir. Tablo 1 incelendiğinde, iki ayrılma yükü ve iki ayrılma uzaklığı olduğu görülmektedir. Bunun sebebi iki blok yakınında da ayrılma olabilme olasılığıdır. Bu yük değerlerinden küçük olan değer ilk ayrılma yükünü, bu yük sebebiyle ayrılmanın meydana geldiği uzaklık ise ilk ayrılma uzaklığını belirtmektedir. Bu değerlerden daha büyük değerde ise iki tarafta da ayrılma meydana gelmektedir. Şekil 22 a ve b ile Tablo 1 a ve b incelendiğinde, ikinci bloğun yükünün birinci bloğa göre 2 kat daha fazla alındığı bu yükleme durumu için, tabakanın üst yüzeyinin rijitliğinin alt yüzeyinden fazla olması

durumunda, diğ er bir deyiş le βh_1 rijitlik parametresi değ eri arttı kça, ayrılma daha uzak noktada meydana gelirken, ilk ayrılma yüklerinde azalmalar meydana gelmiştir. Tabakanın alt yüzeyinin rijitliğini üst yüzeye göre daha fazla olması halinde ise, tabaka düzlemden bloklara daha yakın bir noktadan ayrılırken, ayrılma yükünde de bir artış meydana gelmektedir.

Homojen tabakanın yüksekliğ inin yeterince artırılması durumunda homojen tabaka, elastik yarım düzlem gibi düşünülebilir. Yapılan ç alışma, homojen tabakanın yüksekliğ i artırılarak literatürdeki ç alışmayla (Polat, 2019) kıyaslanmıştır. Ç eş itli βh_1 değ erlerine göre Ş ekil 23'te normalize edilmiş $\sigma_{y1}(x,-h_1)/(P/h_1)$ temas gerilme yayılış ı, Tablo 2'de FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklıkları literatürle karşılaşt ırılmalı olarak verilmiştir. Ş ekil 23 ve Tablo 2 incelendiğ inde gerilme yayılış larının literatürle oldukça uyumlu olduğ u ve ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklıklarının birbirlerine oldukça yakın olduğ u görülmektedir.

Ç eş itli $(c-b)/h_1$ değ erlerine göre Ş ekil 24a'da normalize edilmiş $\sigma_{y1}(x,-h_1)/(P/h_1)$ temas gerilme yayılış ı, Ş ekil 24b'de normalize edilmiş $\sigma_{y2}(x,-h)/(P/h_1)$ gerilme dağ ılımı verilmiştir. Ayrıca Tablo 3a'da FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki, Tablo 3b'de ise homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklıklarının bloklar arası mesafelere göre değ iş imi verilmiştir. Ş ekil 24a,b ile Tablo 3a,b incelendiğ inde, 2. Blok yükünün 2 kat daha fazla alındığ ı bu yükleme durumunda bloklar arasındaki mesafenin fazla olması durumunda diğ er bir deyiş le bloklar birbirlerinden uzaklaşt ıkça, ayrılma daha uzak noktada meydana gelirken, ilk ayrılma yüklerinde küçük artışlar ortaya çı kmıştır. Yani ayrılmalar daha zorlaş mıştır.

Rijitlik parametresi değ iş iminde olduğ u gibi bloklar arası mesafelerin değ iş imi için de homojen tabakanın yüksekliğ i artırılarak literatürdeki ç alışmayla karşılaşt ırılmalar yapılmıştır. Ç eş itli $(c-b)/h_1$ değ erlerine göre Ş ekil 25'da normalize edilmiş $\sigma_{y1}(x,-h_1)/(P/h_1)$ temas gerilme yayılış ı, Tablo 4'de FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklıkları literatürle karşılaşt ırılmalı olarak verilmiştir. Ş ekil 25 ve Tablo 4 incelendiğ inde, mevcut ç alışma ile literatürdeki ç alışmadan elde edilen sonuçların oldukça uyumlu olduğ u görülmektedir.

Ç eş itli $(d-c)/h_1$ değ erlerine göre Ş ekil 26a'da normalize edilmiş $\sigma_{y1}(x,-h_1)/(P/h_1)$ temas gerilme yayılış ı, Ş ekil 26b'de normalize edilmiş $\sigma_{y2}(x,-h)/(P/h_1)$ temas gerilme yayılış ı verilmiştir. Ayrıca ç eş itli $(d-c)/h_1$ değ erleri için Tablo 5a'da FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki, Tablo 5b'de homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki ilk ayrılma yükü

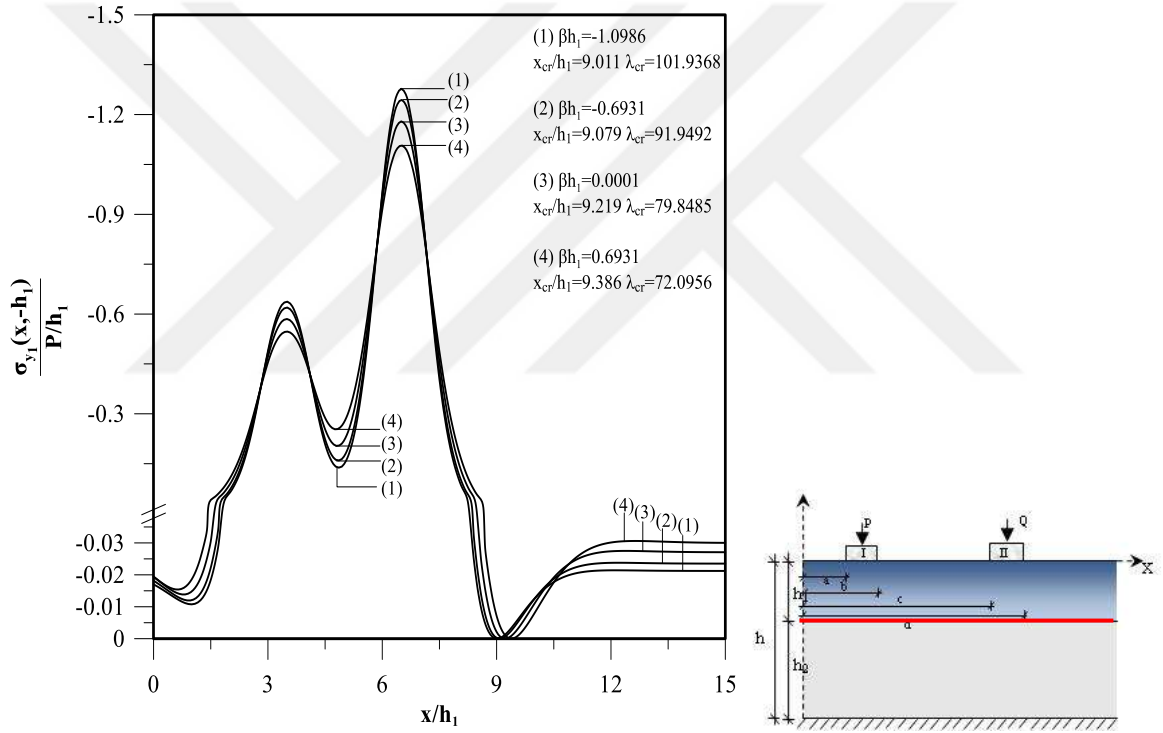
ve ilk ayrılma uzaklıkları verilmiştir. Şekil 26a,b ve Tablo 5a,b incelendiğinde, 2. Blok yükünün 2 kat daha fazla alındığı bu yükleme durumunda $(d-c)/h_1$ oranının artması durumunda yani ikinci blok genişliğinin artması durumunda, ikinci blok altındaki gerilmelerin azaldığı görülmektedir. Buna rağmen birinci blok altındaki gerilmelerde önemli değişiklik görülmemiştir. Ayrıca Tablo 5a,b incelendiğinde, blok genişliği arttıkça ilk ayrılmanın meydana geldiği nokta uzaklaşmakta, ilk ayrılma yükü de artmakta olduğu görülmektedir.

Çeşitli μ_2/μ_{-h1} değerlerine göre Şekil 27a'da normalize edilmiş $\sigma_{y1}(x,-h_1)/(P/h_1)$ temas gerilme yayılımı, Şekil 27b'de normalize edilmiş $\sigma_{y2}(x,-h)/(P/h_1)$ gerilme dağılımı verilmiştir. Ayrıca çeşitli μ_2/μ_{-h1} değerleri için Tablo 6a'da FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki, Tablo 6b'de ise homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklıkları verilmiştir. μ_2/μ_{-h1} oranının azalması FD tabakanın alt yüzeyinin kayma modülünün, homojen tabakanın kayma modülüne göre artması anlamına gelmekte, bu durum da FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki ilk ayrılma yükünün azalmasına fakat ilk ayrılma uzaklığının artmasına sebep olmaktadır. Buna karşın μ_2/μ_{-h1} oranının azalması durumunda homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki ilk ayrılma yükünün ve ilk ayrılma uzaklığının artmasına sebep olmaktadır.

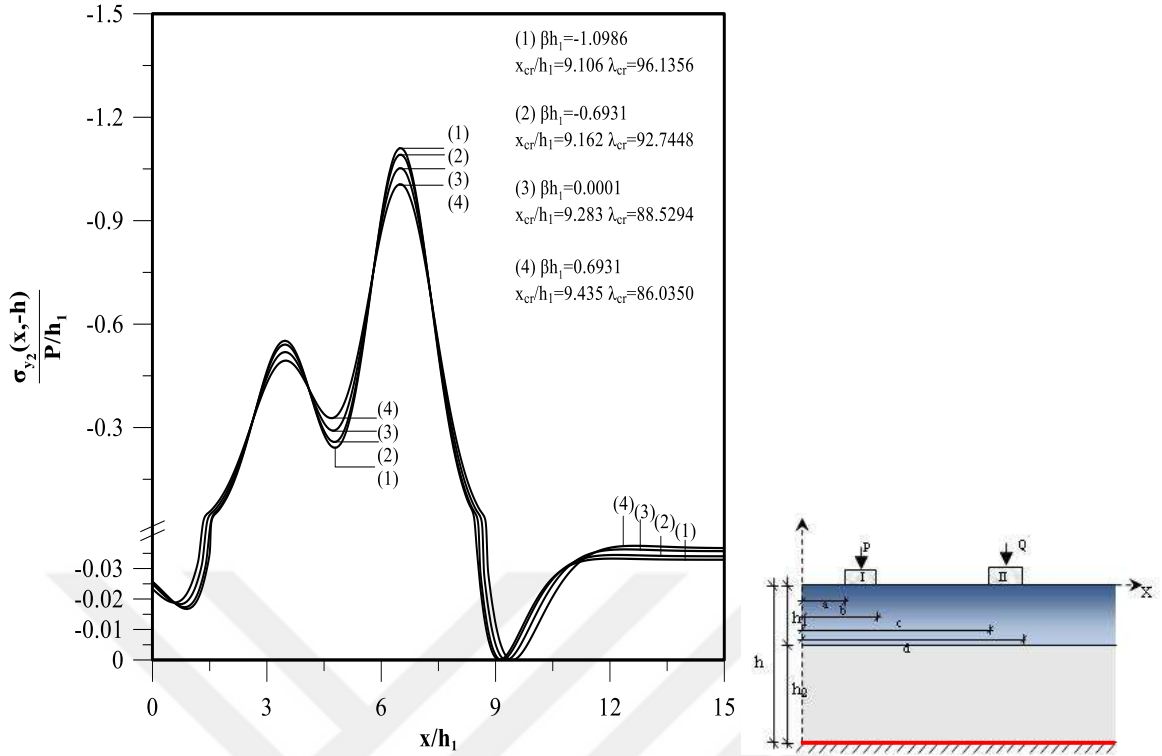
Çeşitli h_1/h değerlerine göre Şekil 28a'da normalize edilmiş $\sigma_{y1}(x,-h_1)/(P/h_1)$ temas gerilme yayılımı, Şekil 28b'de normalize edilmiş $\sigma_{y2}(x,-h)/(P/h_1)$ gerilme dağılımı verilmiştir. Ayrıca çeşitli h_1/h değerleri için Tablo 7a'da FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki, Tablo 7b'de homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklıkları verilmiştir. h_1/h oranı arttıkça, ilk ayrılma uzaklıkları, her iki tabakanın altında, ikinci bloğa yaklaşmaktadır. h_1/h oranı azalması halinde, ilk ayrılma yükü hem fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka için homojen tabaka için artmaktadır. Yani homojen tabakanın yüksekliğinin azalması durumunda iki tabaka daha da zor bir şekilde ayrılmaktadır.

Yoğunluk değişim parametresi γ_{h1} için FD tabaka ile homojen tabaka ara yüzeyindeki ve homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki normalize edilmiş $\sigma_{y1}(x,-h_1)/(P/h_1)$ ve $\sigma_{y2}(x,-h)/(P/h_1)$ gerilme yayılışları sırasıyla Şekil 29a'da ve Şekil 29b'de verilmektedir. Ayrıca çeşitli γ_{h1} değerleri için Tablo 8a'da FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki, Tablo 8b'de homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklıkları verilmiştir. Şekil 29a,b incelendiğinde, FD tabakanın yoğunluğu tabaka derinliği boyunca azaldığı durumda yani yoğunluk parametresinin (γ_{h1}) artması

durumunda her iki tabakada da gerilme değerlerinde bir artış olmaktadır. Tablo 8a,b incelendiğinde ise her iki tabakanın altında meydana gelen ilk ayrılma uzaklıkları için bir değişim olmazken, ilk ayrılma yükleri için ise bir azalma meydana gelmektedir. Rijitlik ve yoğunluk parametrelerinin değişimine göre, FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki ve homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıklarının değişimleri sırasıyla Tablo 9a'da ve Tablo 9b'de verilmiştir. FD tabakanın hem rijitliği hem de yoğunluğu derinlik boyunca arttırıldığında yani βh_1 ve γh_1 değerlerinin azalması durumunda ilk ayrılmayı meydana getirecek yük büyümekte fakat ayrılmanın meydana geleceği yer başlangıç noktasına yaklaşmaktadır.



Şekil 22a. Çeşitli βh_1 değerleri için FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki $\sigma_{y1}(x, -h_1)/(P/h_1)$ gerilme yayılışları ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(d-c)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $\kappa_1=2$, $\kappa_2=2$; $\gamma h_1=-1.38629$, $(\mu_2/\mu_{-h_1})=1$; $h_1=h_2$)



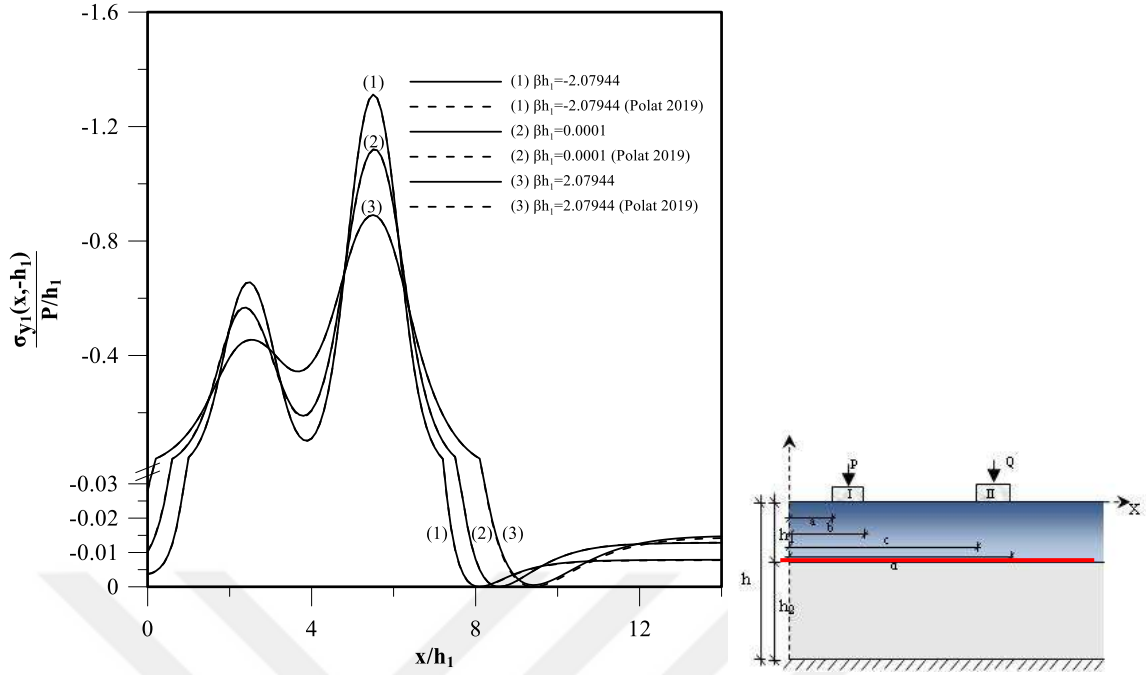
Şekil 22b. Çeşitli βh_1 değerleri için homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki $\sigma_{y_2}(x, -h)/(P/h_1)$ gerilme yayılışları ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(d-c)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $\kappa_1=2$, $\kappa_2=2$; $\gamma h_1=-1.38629$, $(\mu_2/\mu_{h_1})=1$; $h_1=h_2$)

Tablo 1a. Çeşitli βh_1 değerleri için FD tabaka ile homojen arasındaki ilk ayrılma yükleri ve uzaklıkları ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(d-c)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $\gamma h_1=-1.38629$, $\kappa_1=2$, $\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{h_1})=1$; $h_1=h_2$)

βh_1	x_{sol}/h_1	λ_{sol}	$x_{crsağ}/h_1$	$\lambda_{crsağ}$
0.6931	0.6284	148.0242	9.3857	72.0956
0.0001	0.7893	163.1908	9.2188	79.8485
-0.6931	0.9252	186.9572	9.0793	91.9492
-1.0986	0.9917	206.7071	9.0111	101.9368

Tablo 1b. Çeşitli βh_1 değerleri için homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve uzaklıkları ($a/h_1=3$, $(b-a)/h_1=1$, $(d-c)/h_1=1$, $(c-b)/h_1=2$, $\gamma h_1=-1.3862$, $Q/P=2$, $\kappa_1=1$, $\kappa_2=1$; $\mu_2/\mu_{h_1}=1$)

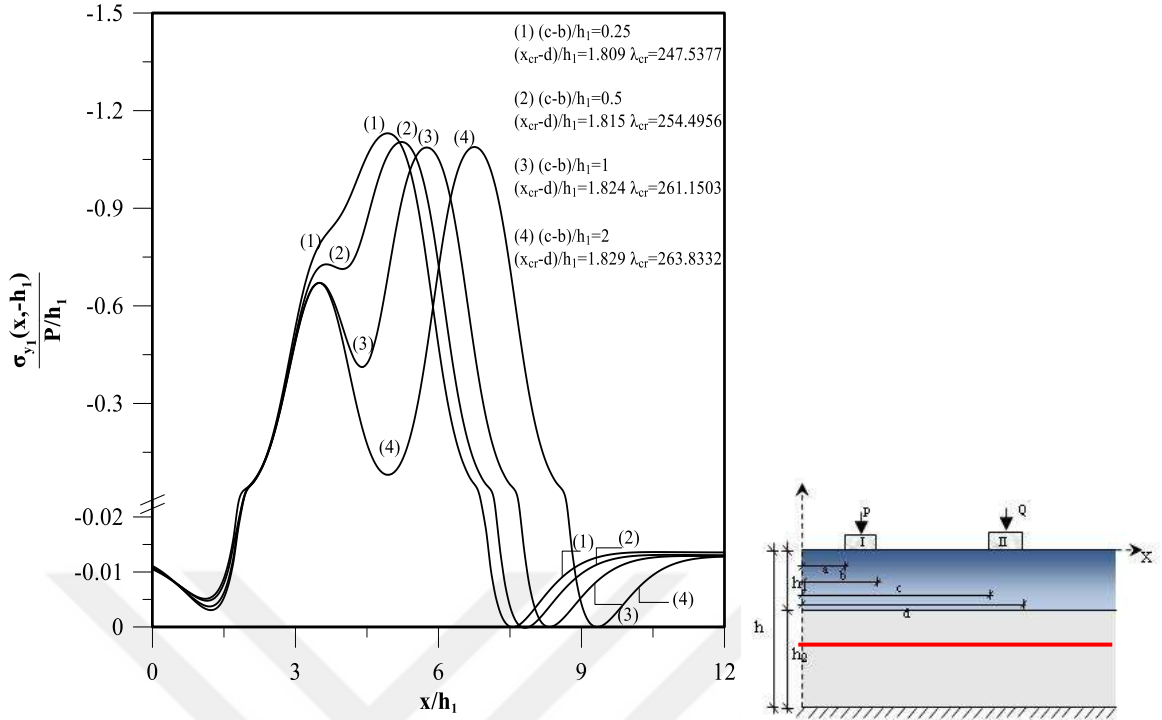
βh_1	x_{cr}/h_1	λ_{sol}	$x_{crsağ}/h_1$	$\lambda_{crsağ}$
0.6931	0.6	177.092	9.435	86.0350
0.001	0.7	181.502	9.283	88.5294
-0.6931	0.8	189.586	9.162	92.7448
-1.0986	0.9	195.540	9.106	96.1356



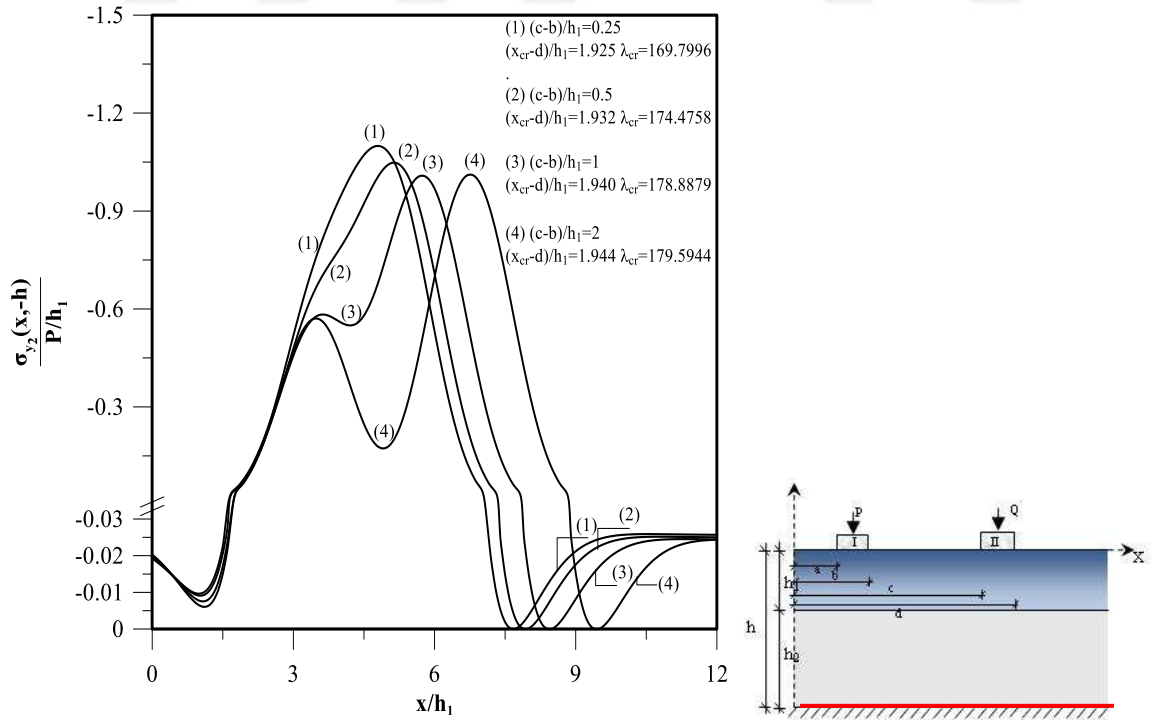
Şekil 23. Çeşitli rijitlik parametresi (β_{h_1}) değerleri için normalize edilmiş $\sigma_{y1}(x, -h_1)/(P/h_1)$ gerilme yayılımının literatürdeki çalışmayla karşılaştırılması ($a/h_1=2$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1$; $\mu_0=1$; $(\mu_2/\mu_{-h_1})=1$; $\gamma_{h_1}=-0.6931$; $y=-h_1$; $\kappa_1=\kappa_2=2$; $h_1=0.1h$)

Tablo 2. Çeşitli rijitlik parametresi (β_{h_1}) değerleri için ilk ayrılma yükü ve uzaklıklarının değişiminin literatürdeki çalışmayla karşılaştırılması ($a/h_1=2$; $(b-a)/h_1=1$; $\kappa_1=\kappa_2=2$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1$; $\mu_0=1$; $\mu_2/\mu_{-h_1}=1$; $\gamma_{h_1}=-0.6931$; $y=-h_1$; $h_1/h=0.1$; $Q=2P$)

β_{h_1}	x_{cr}/h_1		Hata (%)	λ_{cr}		Hata (%)
	Bu çalışma	Polat (2019)		Bu çalışma	Polat (2019)	
-2.07944	8.12	8.13	0.12	181.724	181.958	0.128
0.0001	8.58	8.58	0.00	110.998	110.784	0.193
2.07944	9.44	9.41	0.31	99.302	99.011	0.294



Şekil 24a. Çeşitli blok aralıkları için tabakalar arasındaki $\sigma_{y1}(x, -h_1)/P/h_1$ normal gerilme yayılışları ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(d-c)/h_1=1$; $\beta h_1=-1.38629$; $\gamma h_1=-1.38629$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{-h_1})=1$; $h_1=h_2$)



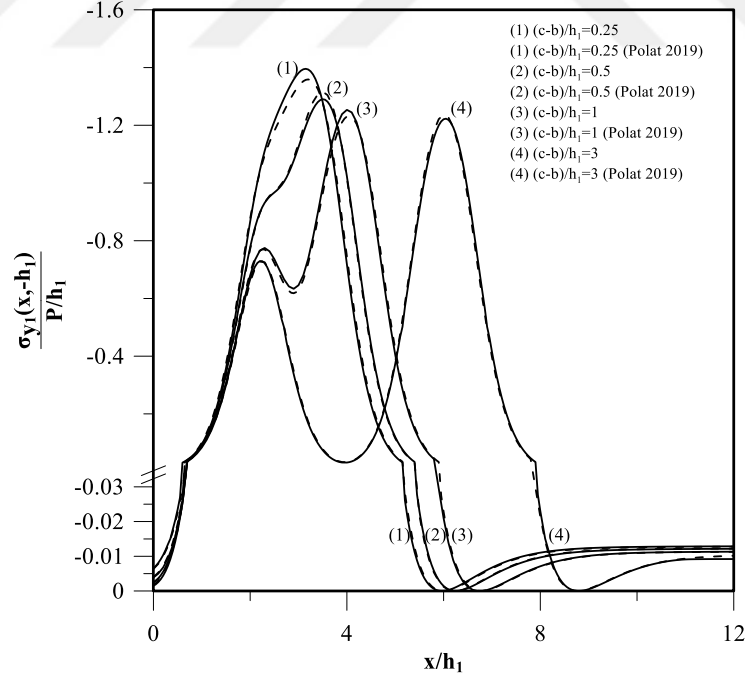
Şekil 24b. Çeşitli blok aralıkları için homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki $\sigma_{y2}(x, -h)/P/h_1$ normal gerilme yayılışları ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(d-c)/h_1=1$; $\beta h_1=-1.38629$; $\gamma h_1=-1.38629$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{-h_1})=1$; $h_1=h_2$)

Tablo 3a. Farklı bloklar arası mesafe değerleri için FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki ilk ayrılma yükleri ve uzaklıkları ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(d-c)/h_1=1$; $\beta h_1=-1.38629$; $\gamma h_1=-1.38629$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{-h_1})=1$; $h_1=h_2$)

$(c-b)/h_1$	x_{sol}/h_1	λ_{sol}	$x_{crsağ}/h_1$	$\lambda_{crsağ}$
0.25	1.2272	320.4732	7.5588	247.5377
0.5	1.1991	360.5906	7.8179	254.4956
1	1.1459	417.0015	8.3243	261.1503
1.5	1.1184	433.8893	8.8279	262.4289
2	1.1094	441.4433	9.3288	263.8332

Tablo 3b. Farklı bloklar arası mesafe değerleri için homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve uzaklıkları ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(d-c)/h_1=1$; $\beta h_1=-1.38629$; $\gamma h_1=-1.38629$; $Q/P=2$; $\kappa_1=1$; $\kappa_2=1$; $\mu_2/\mu_{-h_1}=1$; $h_1/h=0.5$)

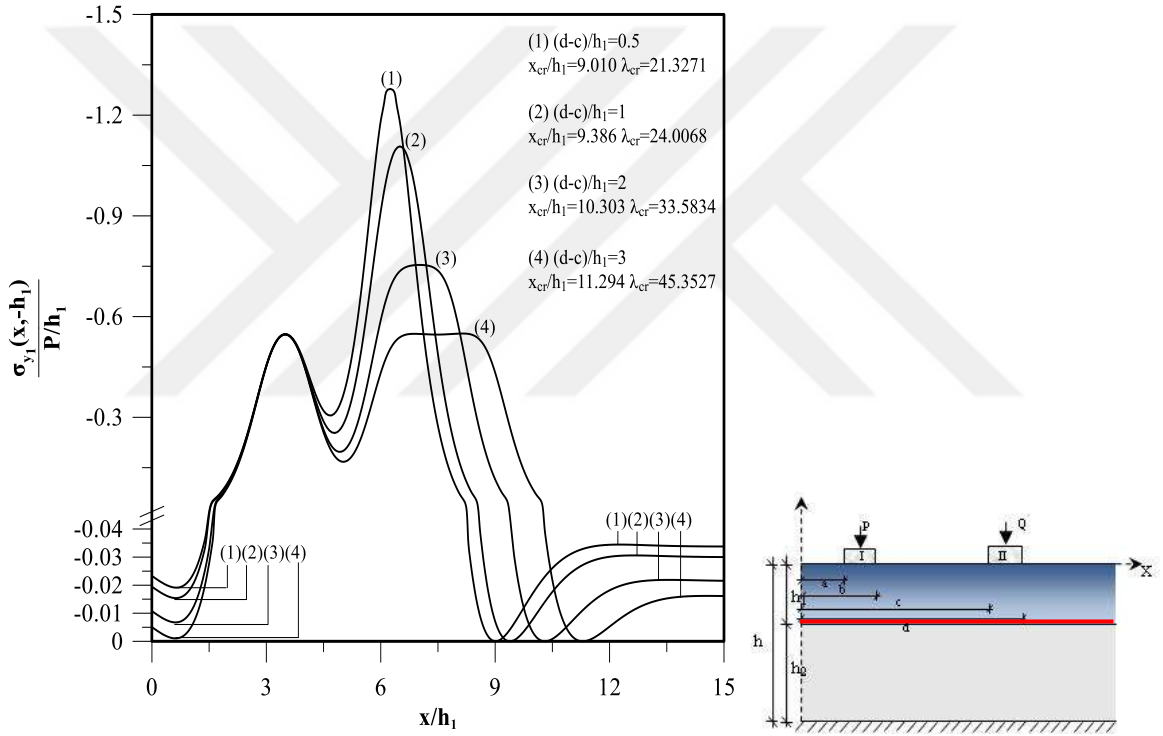
$(c-b)/h_1$	x_{sol}/h_1	λ_{sol}	$x_{crsağ}/h_1$	$\lambda_{crsağ}$
0.25	1.1103	222.0628	7.6749	169.7996
0.5	1.0792	250.1136	7.9315	174.4758
1	1.0243	286.3974	8.4402	178.8879
1.5	0.9989	298.1552	8.9433	179.483
2	0.9918	299.0870	9.4438	179.5944



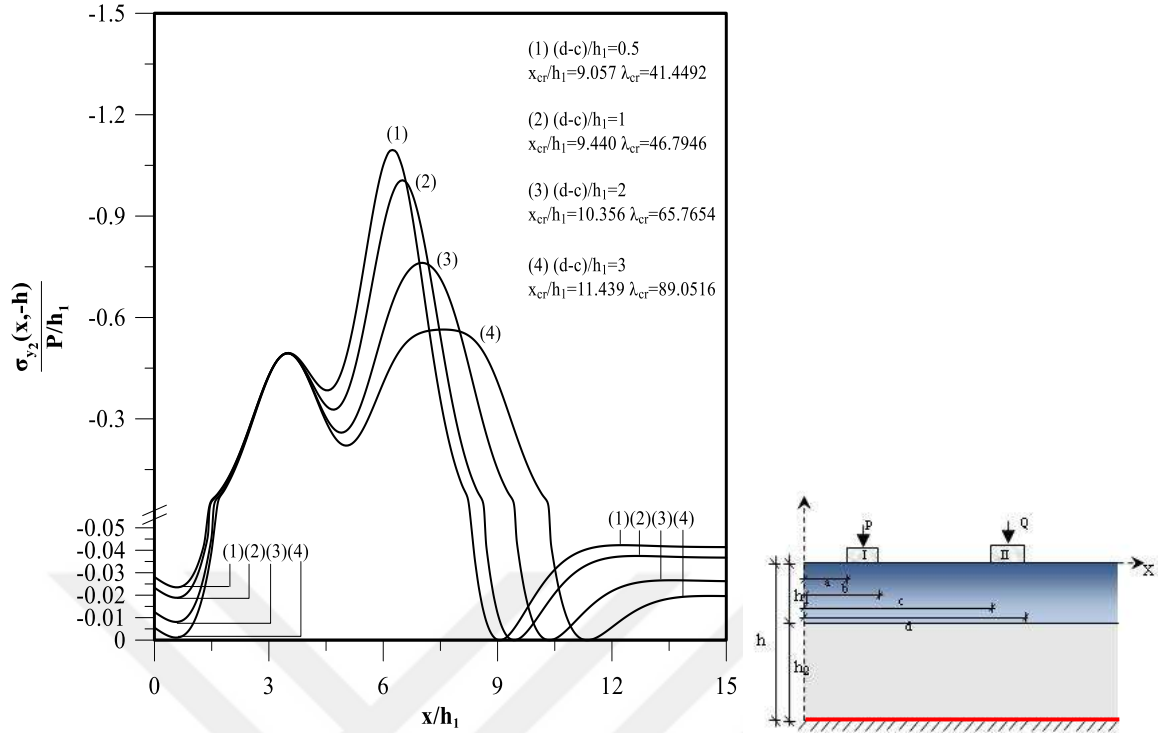
Şekil 25. Bloklar arası mesafe $(c-b)/h_1$ değişimine göre FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki normalize edilmiş $\sigma_{y1}(x, -h_1)/P/h_1$ temas gerilmesi yayılışları ($a/h_1=2$; $(b-a)/h_1=0.5$; $(d-c)/h_1=1$; $\mu_0=1$; $Q=2P$; $\beta h_1=-1.0986$; $\gamma h_1=-1.0986$; $\kappa_1=\kappa_2=2$; $y=-h_1$; $h_1=0.1h$; $(\mu_2/\mu_{-h_1})=1$)

Tablo 4. Çeşitli bloklar arası mesafe ((c-b)/h₁) değerleri için ilk ayrılma yükü ve uzaklıklarının değişiminin literatürdeki çalışmayla karşılaştırılması (a/h₁=2; (b-a)/h₁=0.5; (d-c)/h₁=1; μ₀=1; Q=2P; βh₁=-1.0986; γh₁=-1.0986; κ₁=κ₂=2; y=-h₁; h₁=0.1h; (μ₂/μ_{-h₁})=1)

(c-b)/h ₁	(x _{cr} -d)/h ₁		Hata (%)	λ _{cr}		Hata (%)
	Bu çalışma	Polat (2019)		Bu çalışma	Polat (2019)	
0.25	2.23	2.25	0.889	140.722	141.594	0.615
0.5	2.24	2.26	0.884	147.289	148.302	0.683
1	2.26	2.28	0.877	158.403	158.666	0.631
3	2.27	2.29	0.873	172.165	172.379	0.580



Şekil 26a. Çeşitli blok genişliği değerleri için tabakalar arasındaki $\sigma_{y1}(x, -h_1)/P/h_1$ temas gerilmesi yayılışları (a/h₁=3; Q=2P; (b-a)/h₁=1; (c-b)/h₁=1; βh₁=0.6931; γh₁=0.6931; κ₁=κ₂=2; (μ₂/μ_{-h₁})=1; h₁=h₂)



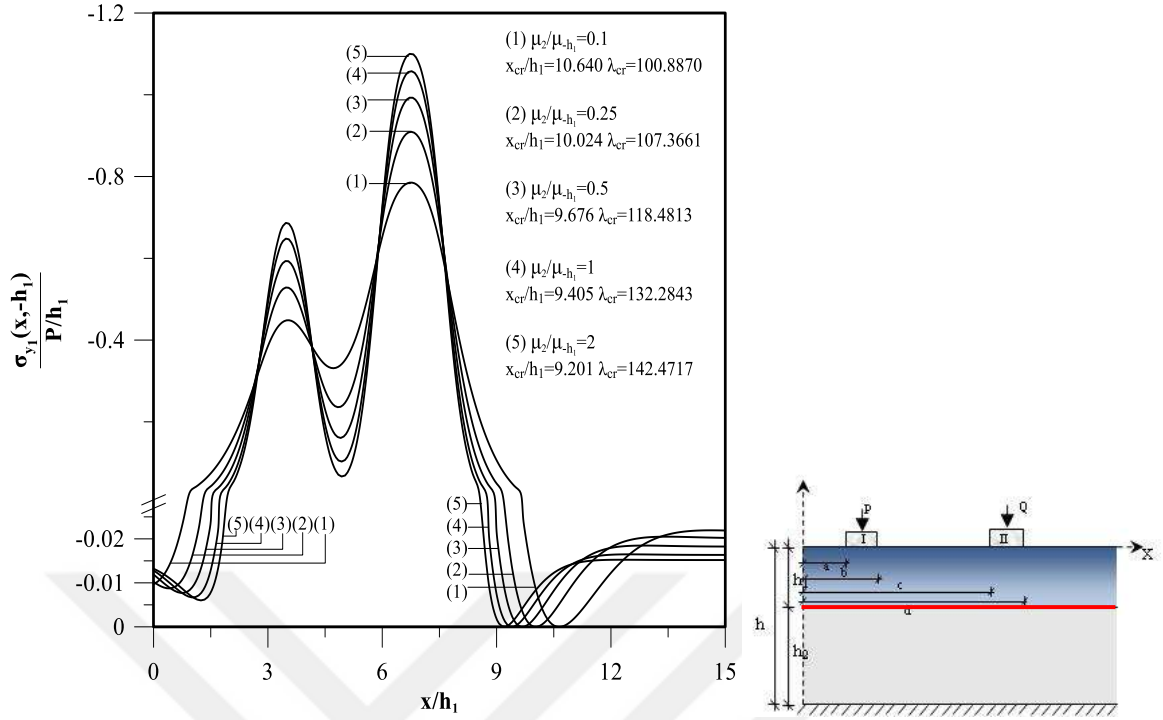
Şekil 26b. Çeşitli blok genişliği değerleri için homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki $\sigma_{y2}(x, -h)/P/h_1$ temas gerilmesi yayılışları ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=1$; $\beta h_1=0.6931$; $\gamma h_1=0.6931$; $\kappa_1=\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{-h_1})=1$; $h_1=h_2$)

Tablo 5a. Çeşitli blok genişliği değerleri için FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki ilk ayrılma yükleri ve uzaklıkları ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=1$; $\beta h_1=0.6931$; $\gamma h_1=0.6931$; $\kappa_1=\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{-h_1})=1$; $h_1=h_2$)

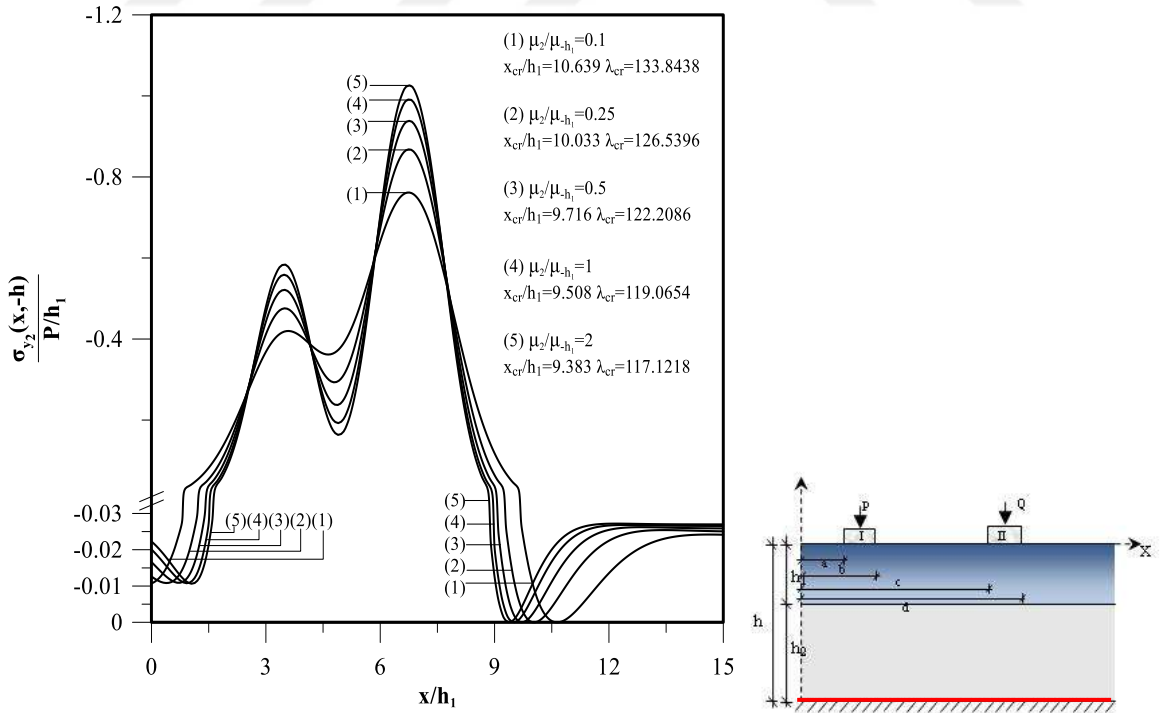
$(d-c)/h_1$	x_{sol}/h_1	λ_{sol}	$x_{crsağ}/h_1$	$\lambda_{crsağ}$
0.5	0.6395	49.0926	9.0097	21.3271
1	0.6284	49.2745	9.3858	24.0068
2	0.6201	48.9264	10.3025	33.5834
3	0.6172	48.5867	11.2943	45.3527

Tablo 5b. Çeşitli blok genişliği değerleri için homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve uzaklıkları ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=1$; $\beta h_1=0.6931$; $\gamma h_1=0.6931$; $\kappa_1=\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{-h_1})=1$; $h_1=h_2$)

$(d-c)/h_1$	x_{sol}/h_1	λ_{sol}	$x_{crsağ}/h_1$	$\lambda_{crsağ}$
0.5	0.6	93.736	9.057	41.4492
1	0.6	94.158	9.440	46.7946
2	0.6	95.386	10.356	65.7654
3	0.6	96.706	11.439	89.0516



Şekil 27a. Çeşitli μ_2/μ_{h_1} değerleri için tabakalar arasındaki $\sigma_{y1}(x, -h_1)/P/h_1$ temas gerilmesi yayılışları ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $Q=2P$; $(c-b)/h_1=2$; $h_1=h_2$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(d-c)/h_1=1.5$; $\beta_{h_1}=-1.38629$; $\gamma_{h_1}=-1.38629$;



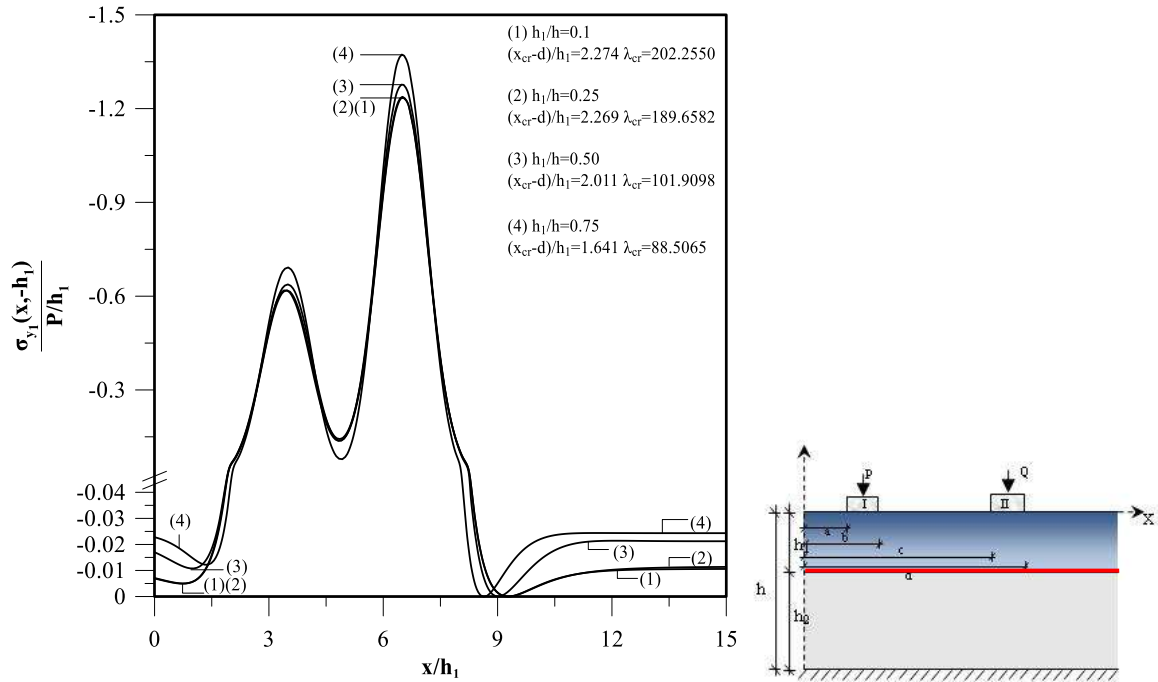
Şekil 27b. Çeşitli μ_2/μ_{h_1} değerleri için homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki $\sigma_{y2}(x, -h)/P/h_1$ temas gerilmesi yayılışları ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $Q=2P$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(c-b)/h_1=2$; $h_1=h_2$; $(d-c)/h_1=1.5$; $\beta_{h_1}=-1.38629$; $\gamma_{h_1}=-1.38629$;

Tablo 6a. Çeşitli μ_2/μ_{-h_1} değerleri için FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklıkları ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $Q=2P$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(c-b)/h_1=2$; $h_1=h_2$; $(d-c)/h_1=1.5$; $\beta h_1=-1.38629$; $\gamma h_1=-1.38629$)

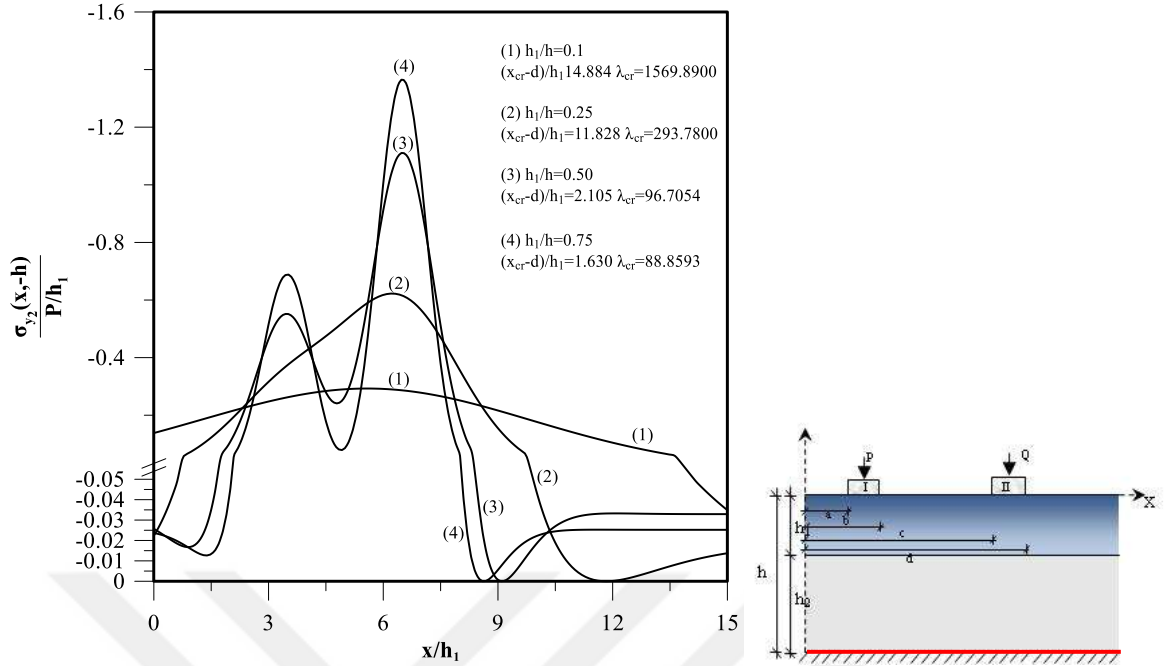
μ_2/μ_{-h_1}	x_{sol}/h_1	λ_{sol}	$x_{crsağ}/h_1$	$\lambda_{crsağ}$
0.1	0.0912	177.989	10.640	100.8870
0.25	0.4237	182.637	10.024	107.3661
0.5	0.7893	197.082	9.676	118.4813
1	1.0326	214.008	9.405	132.2843
2	1.1209	225.588	9.201	142.4717

Tablo 6b. Çeşitli μ_2/μ_{-h_1} değerleri için FD tabaka ile rijit düzlem arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklıkları ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $Q=2P$; $(c-b)/h_1=2$; $h_1=h_2$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(d-c)/h_1=1.5$; $\beta h_1=-1.38629$; $\gamma h_1=-1.38629$)

μ_2/μ_{-h_1}	x_{sol}/h_1	λ_{sol}	$x_{crsağ}/h_1$	$\lambda_{crsağ}$
0.1	0.1	256.698	10.639	133.8438
0.25	0.4	223.600	10.033	126.5396
0.5	0.7	210.856	9.716	122.2086
1	0.9	200.536	9.508	119.0654
2	1.1	193.956	9.383	117.1218



Şekil 28a. Çeşitli h_1/h değerleri için FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki $\sigma_{y1}(x, h_1)/P/h_1$ normal gerilme yayılışları ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1$; $\beta h_1=-1.0986$; $\gamma h_1=-1.38629$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{-h_1})=1$)



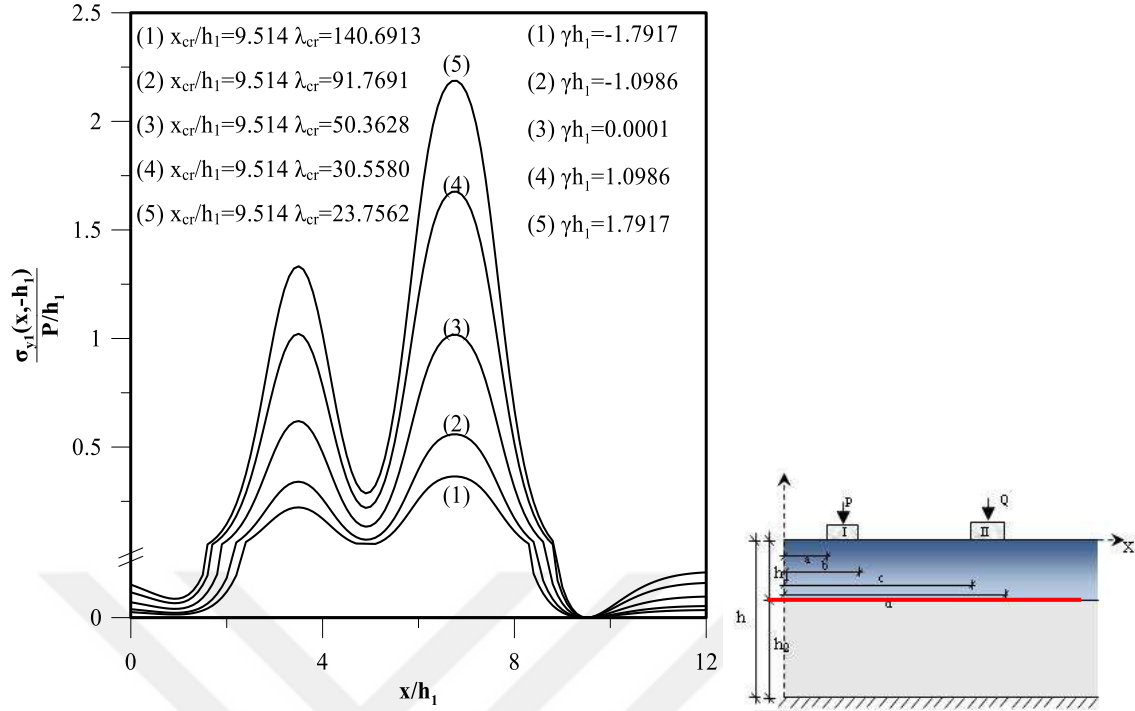
Şekil 28b. Çeşitli h_1/h değerleri için homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki $\sigma_{y2}(x, -h)/P/h_1$ gerilme yayılışları ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $\beta h_1=-1.0986$; $\gamma h_1=-1.38629$; $(\mu_2/\mu_{-h_1})=1$)

Tablo 7a. Çeşitli h_1/h değerleri için FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklıkları ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1$; $\beta h_1=-1.0986$; $\gamma h_1=-1.38629$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{-h_1})=1$)

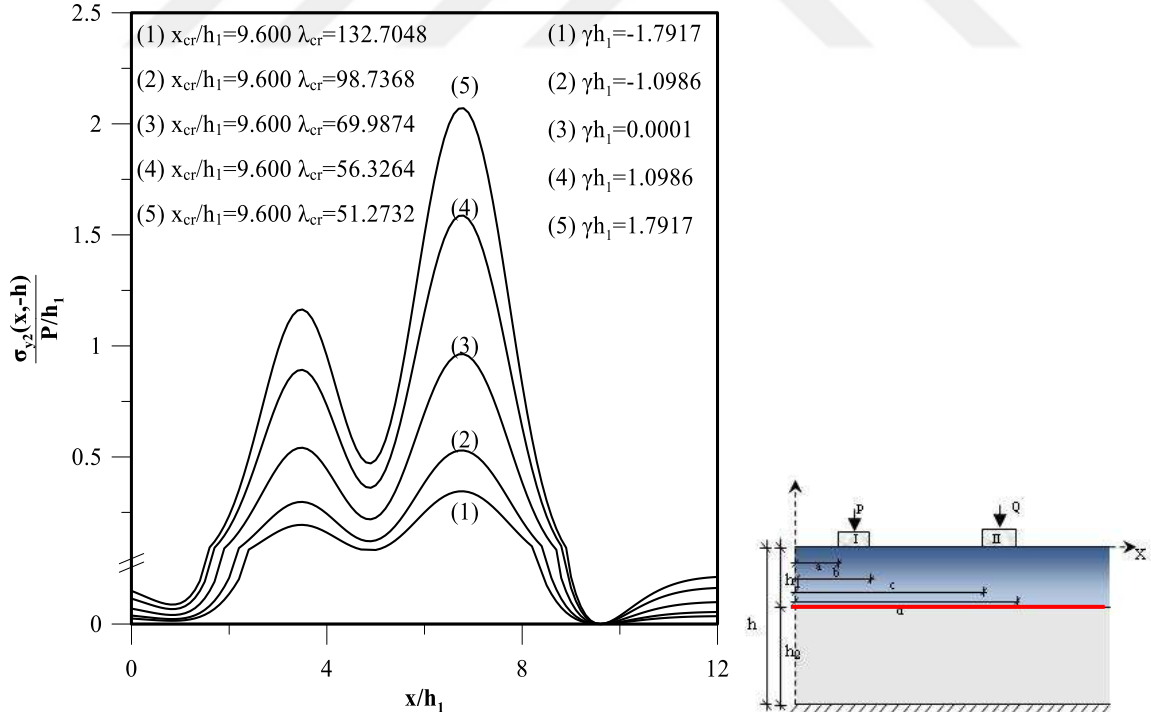
h_1/h	x_{sol}/h_1	λ_{sol}	$x_{crsağ}/h_1$	$\lambda_{crsağ}$
0.1	0.7365	375.9782	9.2740	202.2550
0.2	0.7425	359.1647	9.2725	199.2178
0.4	0.8305	258.4544	9.191	129.7170
0.5	0.992	206.6580	9.011	101.9098
0.75	1.360	177.7494	8.641	88.5065

Tablo 7b. Çeşitli h_1/h değerleri için homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklıkları ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1$; $\beta h_1=-1.0986$; $\gamma h_1=-1.38629$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{-h_1})=1$)

h_1/h Değişimi	$x_{crsağ}/h_1$	$\lambda_{crsağ}$
0.1	21.884	1569.8900
0.2	13.431	228.3270
0.4	9.678	123.9277
0.5	9.105	96.7054
0.75	8.630	88.8593



Şekil 29a. Çeşitli γh_1 değerleri için FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki $\sigma_{y1}(x, -h_1)/P/h_1$ normal gerilme yayılışları ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1.5$; $h_1=h_2$; $\beta h_1=-0.6931$; $Q=2P$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{-h_1})=1$;



Şekil 29b. Çeşitli γh_1 değerleri için homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki $\sigma_{y2}(x, -h)/P/h_1$ normal gerilme yayılışları ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1.5$; $\beta h_1=-0.6931$; $Q=2P$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{-h_1})=1$; $h_1=h_2$)

Tablo 8a. Çeşitli γh_1 değerleri için FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklıkları ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1.5$; $\beta h_1=-0.6931$; $Q=2P$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{h1})=1$; $h_1=h_2$)

γh_1	x_{sol}/h_1	λ_{sol}	x_{crsag}/h_1	λ_{crsag}
-1.7917	0.9182	240.474	9.514	140.6913
-1.0986	0.9182	156.989	9.514	91.7691
0.001	0.9182	86.086	9.514	50.3628
1.0986	0.9182	52.233	9.514	30.5580
1.7917	0.9182	40.017	9.514	23.7562

Tablo 8b. Çeşitli γh_1 değerleri için homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklıkları ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1.5$; $\beta h_1=-0.6931$; $Q=2P$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{h1})=1$; $h_1=h_2$)

γh_1	x_{sol}/h_1	λ_{sol}	x_{crsag}/h_1	λ_{crsag}
-1.7917	0.8	226.168	9.600	132.7048
-1.0986	0.8	168.278	9.600	98.7368
0.001	0.8	119.276	9.600	69.9874
1.0986	0.8	95.856	9.600	56.3264
1.7917	0.8	87.388	9.600	51.2732

Tablo 9a. Yoğunluk ve rijitlik parametrelerinin değişimine göre FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıkları ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1$; $h_1/h=0.5$ ($\mu_2/\mu_{h1})=1$)

γh_1	βh_1									
	-0.9162		-0.4055		0.0001		0.4055		0.9162	
	x_{cr}/h_1	λ_{cr}	x_{cr}/h_1	λ_{cr}	x_{cr}/h_1	λ_{cr}	x_{cr}/h_1	λ_{cr}	x_{cr}/h_1	λ_{cr}
-0.9162	8.974	69.7024	9.067	61.5989	9.152	56.7837	9.248	53.0598	9.834	49.5856
-0.4055	8.974	52.4977	9.067	46.3943	9.152	42.7677	9.248	39.9630	9.834	37.3464
0.0001	8.974	42.5601	9.067	37.6121	9.152	35.5089	9.248	32.3982	9.834	30.2768
0.4055	8.974	34.9814	9.067	30.9145	9.152	28.4979	9.248	26.6291	9.834	24.8854
0.9162	8.974	27.8550	9.067	24.6166	9.152	22.6923	9.248	21.2042	9.834	19.8158

Tablo 9b. Yoğunluk ve rijitlik parametrelerinin değişimine göre FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki ilk bloğa yakın yerdeki ayrılma yükleri ve ayrılma uzaklıkları ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1$; $h_1=h_2$ $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(\mu_2/\mu_{h1})=1$)

γh_1	βh_1									
	-0.9162		-0.4055		0.0001		0.4055		0.9162	
	x_{cr}/h_1	λ_{cr}	x_{cr}/h_1	λ_{cr}	x_{cr}/h_1	λ_{cr}	x_{cr}/h_1	λ_{cr}	x_{cr}/h_1	λ_{cr}
-0.9162	0.983	146.3776	0.897	129.7241	0.818	119.6724	0.731	111.7108	0.608	103.9236
-0.4055	0.983	110.2472	0.897	97.7041	0.818	90.1335	0.731	84.1372	0.608	78.2721
0.0001	0.983	89.3778	0.897	79.2091	0.818	73.0715	0.731	68.2102	0.608	63.4554
0.4055	0.983	73.4622	0.897	65.1044	0.818	60.0597	0.731	56.0641	0.608	52.1559
0.9162	0.983	58.4965	0.897	51.8413	0.818	47.8244	0.731	44.6427	0.608	41.5308

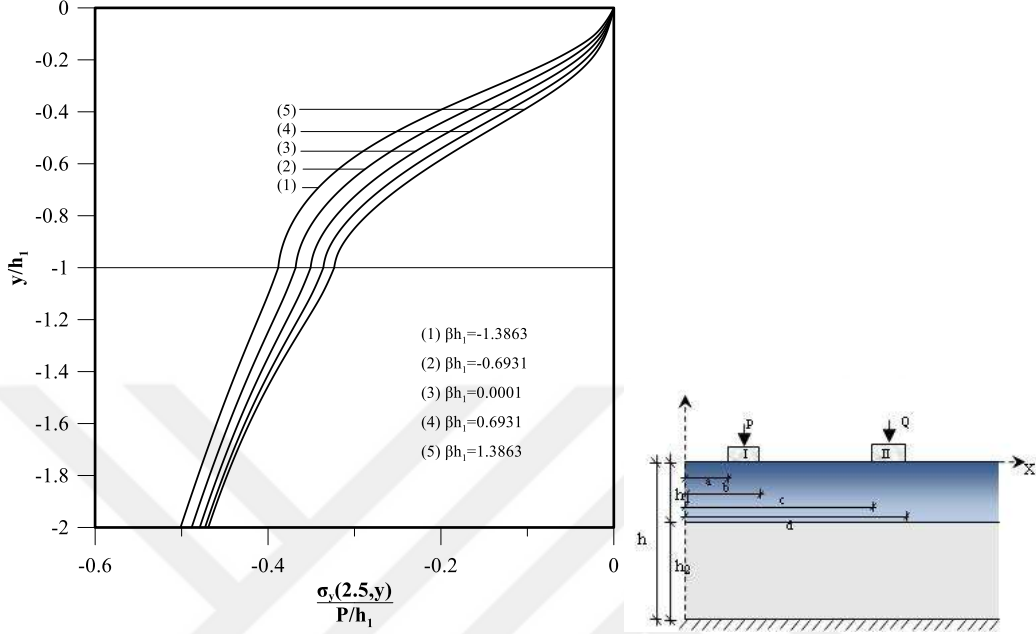
3.1.2.2.2. Tabaka Derinliği Boyunca Meydana Gelen σ_y Gerilme Yayılışları

Bu kısımda tabakaların derinliği boyunca meydana gelen normalize edilmiş $\sigma_y(x,y)/P/h_1$ gerilmeleri irdelenmiştir. Şekil 30a'da birinci bloğun soluna denk gelen kesitte, Şekil 30b'de ise birinci bloğun ortasına denk gelen kesitteki normalize edilmiş $\sigma_y(x,y)/P/h_1$ gerilmeleri, rijitlik parametresinin değişimine göre irdelenmiştir. Şekil 30a'da üst yüzeyde gerilmenin sıfır olması (148) numaralı sınır şartını sağlarken, $y/h_1=-1$ yüzeyinde her iki tabakadaki gerilmelerin birbirine eşit olması (151) numaralı sınır şartını sağlamaktadır. Şekil 30 (a,b) incelendiğinde, fonksiyonel derecelendirilmiş tabakada rijitliğin aşağı doğru artması durumunda gerilme değerlerinde artış olduğu görülmektedir. Ayrıca blok altlarında meydana gelen gerilmelerin bloğa yakın yerlerde meydana gelen gerilmelerden çok daha yüksek olduğu görülmüştür.

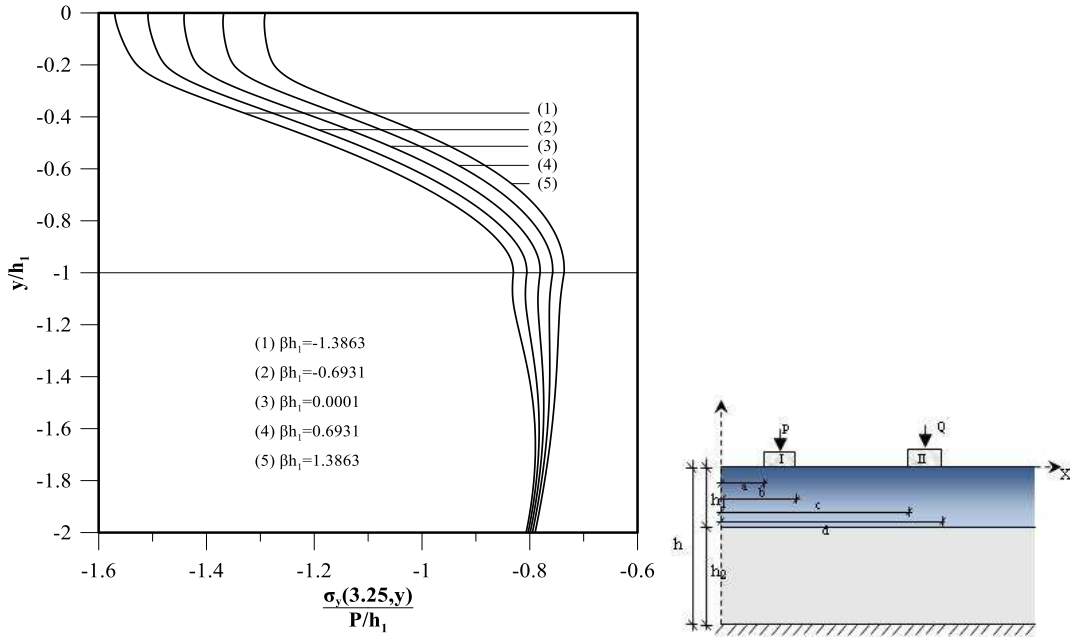
Şekil 31a'da birinci bloğun ortasına denk gelen kesitte, Şekil 31b'de ise iki bloğun arasındaki orta noktaya denk gelen kesitteki normalize edilmiş $\sigma_y(x,y)/P/h_1$ gerilmeleri farklı yoğunluk parametrelerine göre incelenmiştir. Hem birinci blok altında hem de bloklar arasındaki kesitte tabaka altına doğru yoğunluk arttıkça gerilmelerin de arttığı belirlenmiştir. Ayrıca birinci blok altındaki kesitteki gerilmelerin, bloklar arasındaki kesitte ortaya çıkan gerilmelerden daha büyük olduğu görülmüştür.

Şekil 32a'da ikinci bloğun ortasına denk gelen kesitte, Şekil 32b'de ise iki bloğun arasındaki orta noktaya denk gelen kesitteki normalize edilmiş $\sigma_y(x,y)/P/h_1$ gerilmeleri, ikinci blok genişliğinin değişimine göre incelenmiştir. Şekil 32 (a,b) incelendiğinde en büyük gerilme değerleri blok genişliğinin en küçük olduğu durumda elde edilmiştir. Bunun

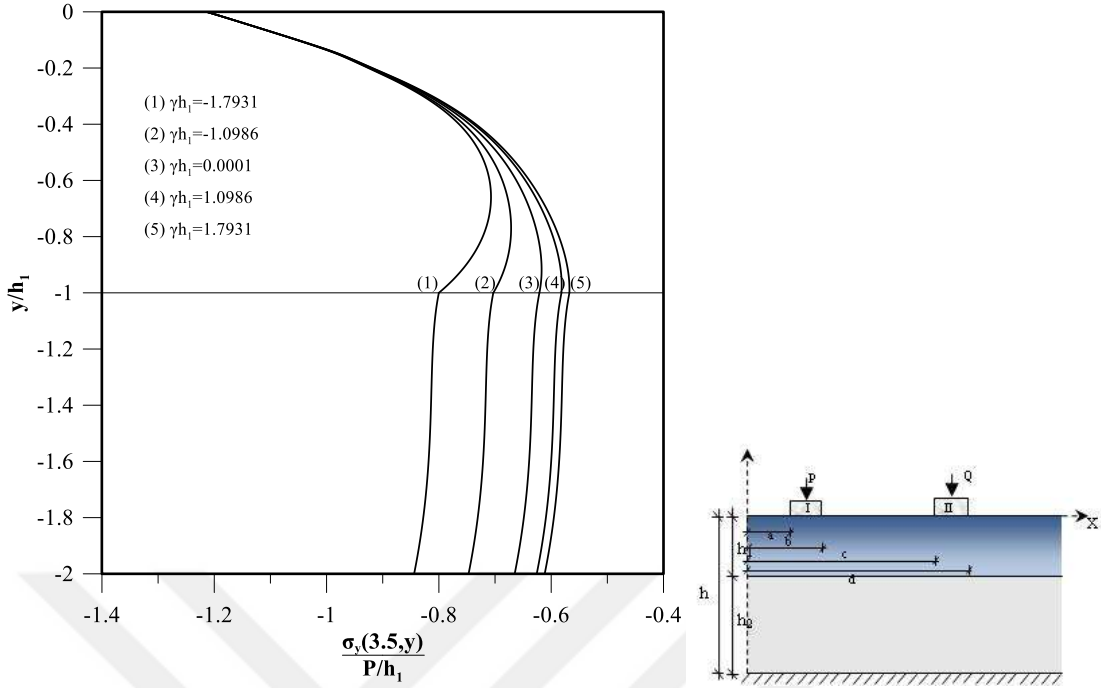
sebebi blok genişliği arttıkça yük daha geniş bir alana yayılacağından gerilme değerlerinin azalmasıdır.



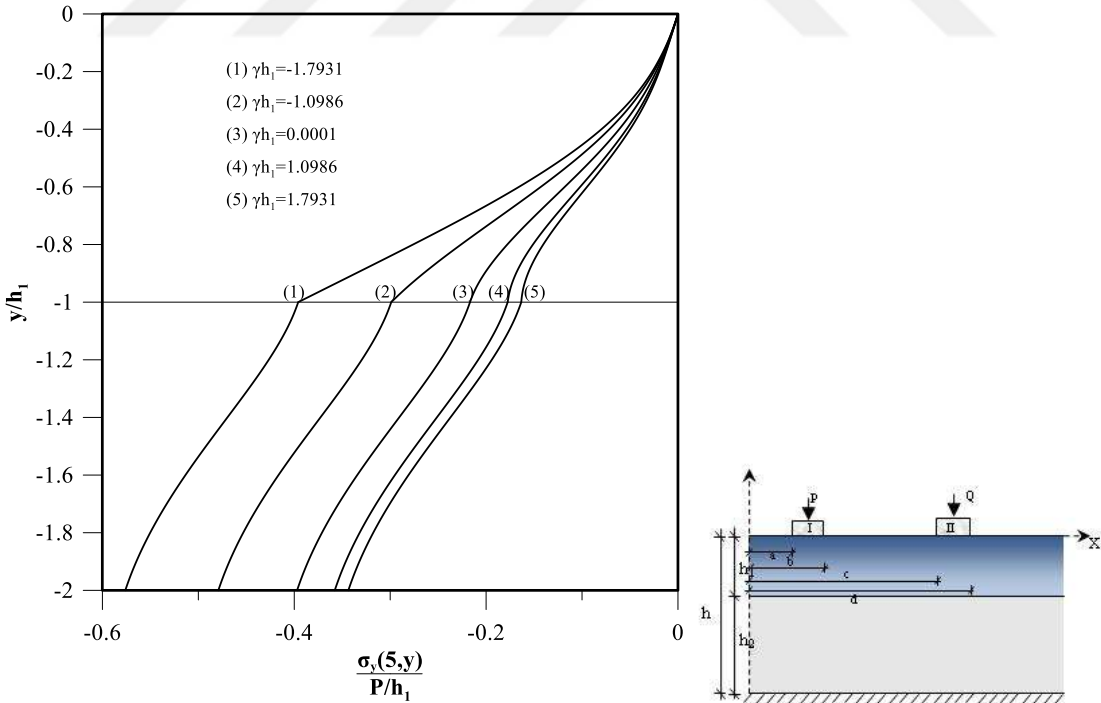
Şekil 30a. Çeşitli βh_1 değerleri için birinci bloğun solundaki kesitte $\sigma_y(2.5,y)/P/h_1$ gerilme yayılışları ($\gamma h = -1.3863$; $a/h_1 = 3$; $Q = 2P$; $(b-a)/h_1 = 0.5$; $(d-c)/h_1 = 1$; $(c-b)/h_1 = 1$; $\kappa_1 = 2$; $\kappa_2 = 2$; $(\mu_2/\mu_{h_1}) = 1$; $h_1 = h_2$)



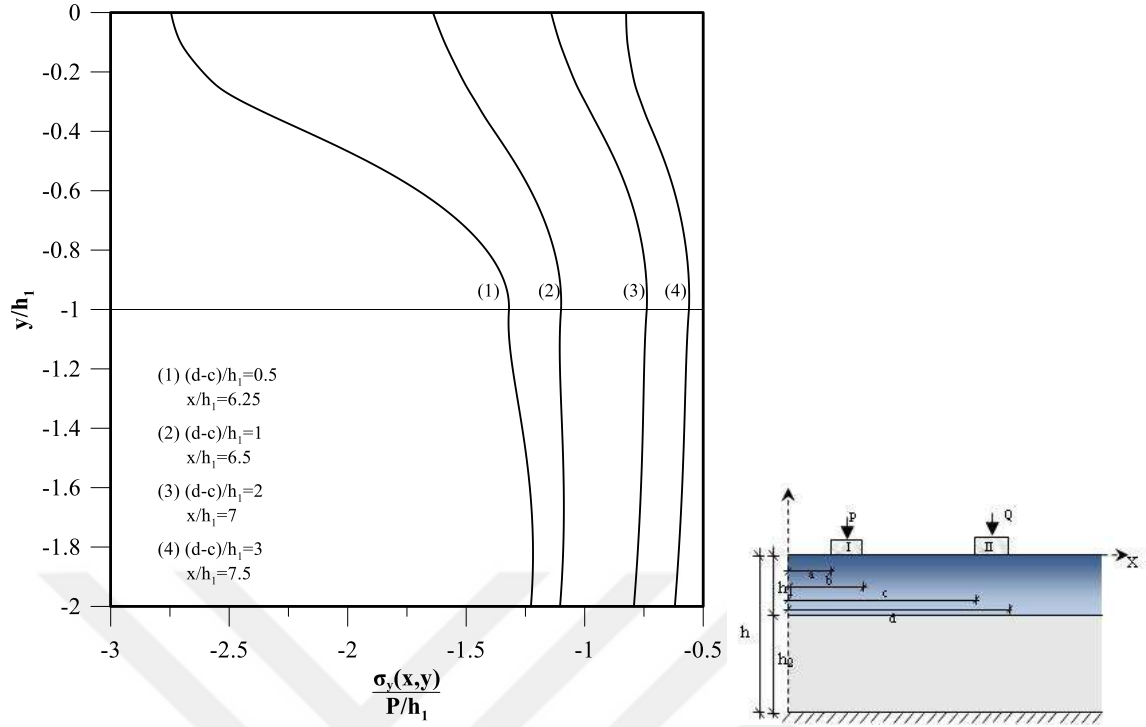
Şekil 30b. Çeşitli βh_1 değerleri için birinci bloğun ortasına denk gelen kesitte $\sigma_y(3.25,y)/P/h_1$ gerilme yayılışları ($\gamma h = -1.3863$; $a/h_1 = 3$; $Q = 2P$; $(b-a)/h_1 = 0.5$; $(d-c)/h_1 = 1$; $(c-b)/h_1 = 1$; $(\mu_2/\mu_{h_1}) = 1$; $h_1 = h_2$)



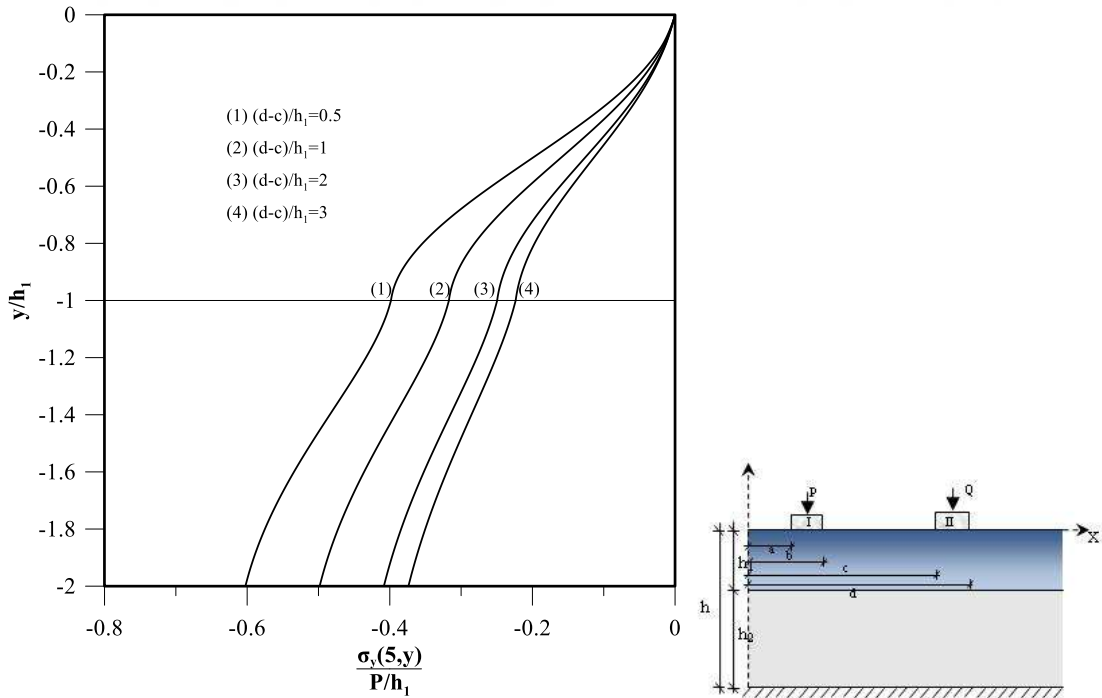
Şekil 31a. Çeşitli γh_1 değerleri için birinci bloğun ortasına denk gelen kesitte $\sigma_y(3.5,y)/P/h_1$ gerilme yayılışları ($\beta h_1 = 0.6931$; $a/h_1 = 3$; $Q = 2P$; $(b-a)/h_1 = 1$; $(c-b)/h_1 = 2$; $(d-c)/h_1 = 1$; $\kappa_1 = 2$; $\kappa_2 = 2$; $\mu_2/\mu_{h1} = 1$; $\rho_0 = \rho_2 = 1$)



Şekil 31b. Çeşitli γh_1 değerleri için bloklar arasındaki kesitte $\sigma_y(5,y)/P/h_1$ gerilme yayılışları ($\beta h_1 = 0.6931$; $a/h_1 = 3$; $Q = 2P$; $(b-a)/h_1 = 1$; $(c-b)/h_1 = 2$; $(d-c)/h_1 = 1$; $\kappa_1 = 2$; $\kappa_2 = 2$; $\mu_2/\mu_{h1} = 1$; $\rho_0 = \rho_2 = 1$)



Şekil 32a. Çeşitli blok genişliği değerleri için ikinci bloğun ortasındaki kesitte $\sigma_y(x,y)/P/h_1$ temas gerilmesi yayılışları ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $\beta h_1=0.6931$; $\gamma h_1=0.6931$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $\mu_2/\mu_{-h_1}=1$; $h_1=h_2$)



Şekil 32b. Çeşitli blok genişliği değerleri için bloklar arasındaki kesitte $\sigma_y(5,y)/P/h_1$ temas gerilmesi yayılışları ($a/h_1=3$; $Q=2P$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $\beta h_1=0.6931$; $\gamma h_1=0.6931$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $\mu_2/\mu_{-h_1}=1$; $h_1=h_2$)

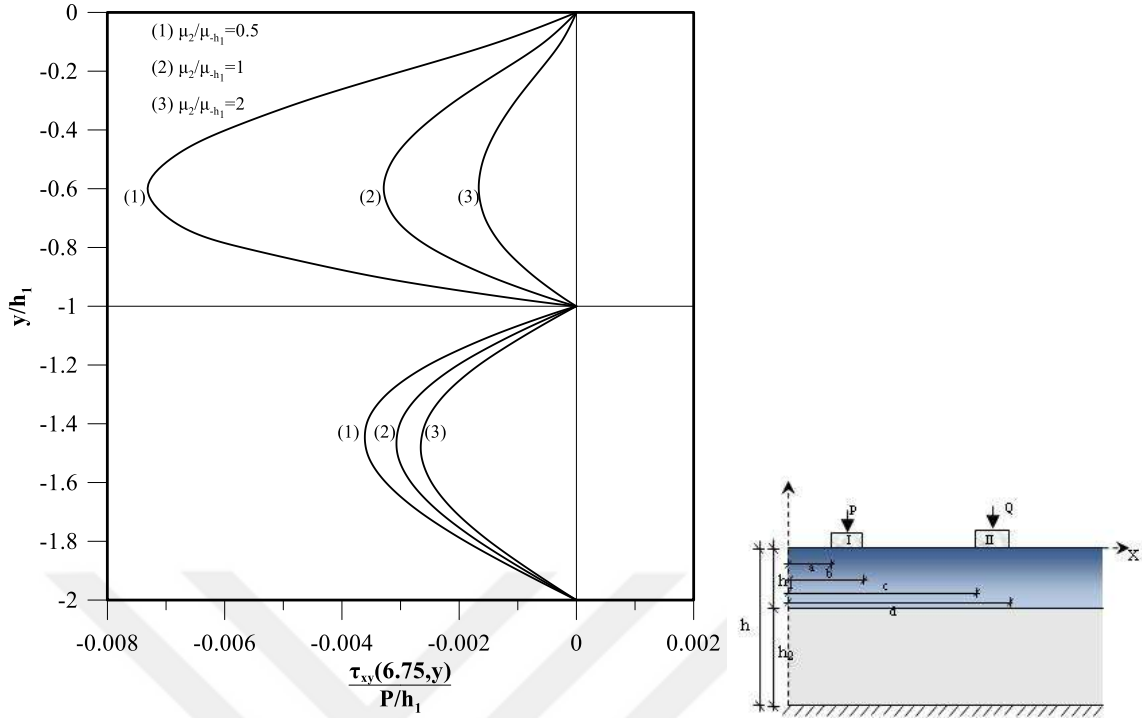
3.1.2.3. τ_{xy} Kayma Gerilmesinin İrdelenmesi

Şekil 33'te, FD tabakanın alt yüzeyinin kayma modülünün homojen tabakanın kayma modülüne oranının çeşitli değerleri için, ikinci bloğun ortasına denk gelen kesitteki kayma gerilmesi yayılışları verilmiştir. Şekilde görüldüğü gibi, FD tabakanın üst yüzeyindeki, FD tabaka ile homojen tabaka ara yüzeyindeki ve homojen tabaka ile rijit düzlem ara yüzeyindeki kayma gerilmeleri sıfır olup problemin sınır şartlarını sağlamaktadır. Ayrıca FD tabaka için μ_2/μ_{-h1} oranının artması, FD tabakanın alt yüzeyinde rijitliği azaltacağından kayma gerilmesini düşürmektedir.

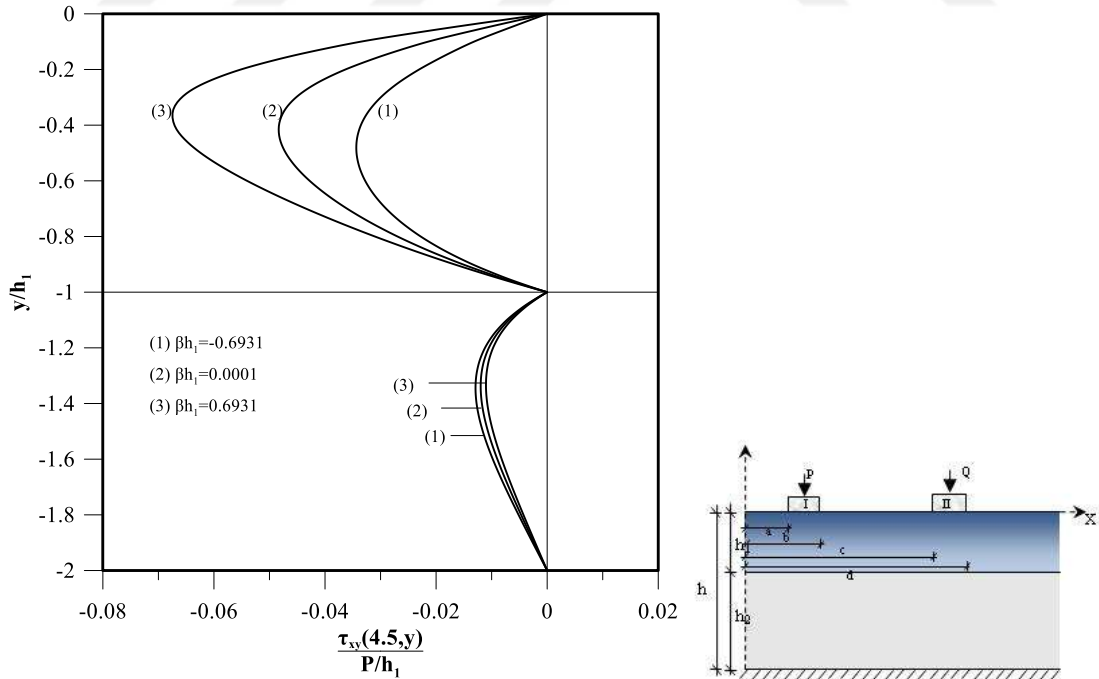
Şekil 34'te normalize edilmiş $\tau_{xy}(x,y)/P/h_1$ kayma gerilmesi değerlerinin bloklar arasındaki bölgede derinlik boyunca değişimi, farklı rijitlik parametreleri için verilmiştir. Şekil 34 incelendiğinde tabaka yüzeylerinde gerilmelerin sıfır olduğu ve (149, 150, 153, 154) numaralı sınır şartlarının sağlandığı görülmektedir. FD tabakanın rijitliğinin yukarıdan aşağı doğru azalması durumunda bloklar arasındaki gerilme değerlerinin FD tabakada arttığı, homojen tabakada ise azaldığı görülmektedir.

Şekil 35'te normalize edilmiş $\tau_{xy}(x,y)/P/h_1$ kayma gerilmesi değerlerinin ikinci bloğun orta noktasındaki kesitte derinlik boyunca farklı bloklar arası mesafe değerlerine göre değişimi verilmiştir. Bloklar birbirine yaklaştıkça gerilme değerlerinde artış olduğu görülmektedir.

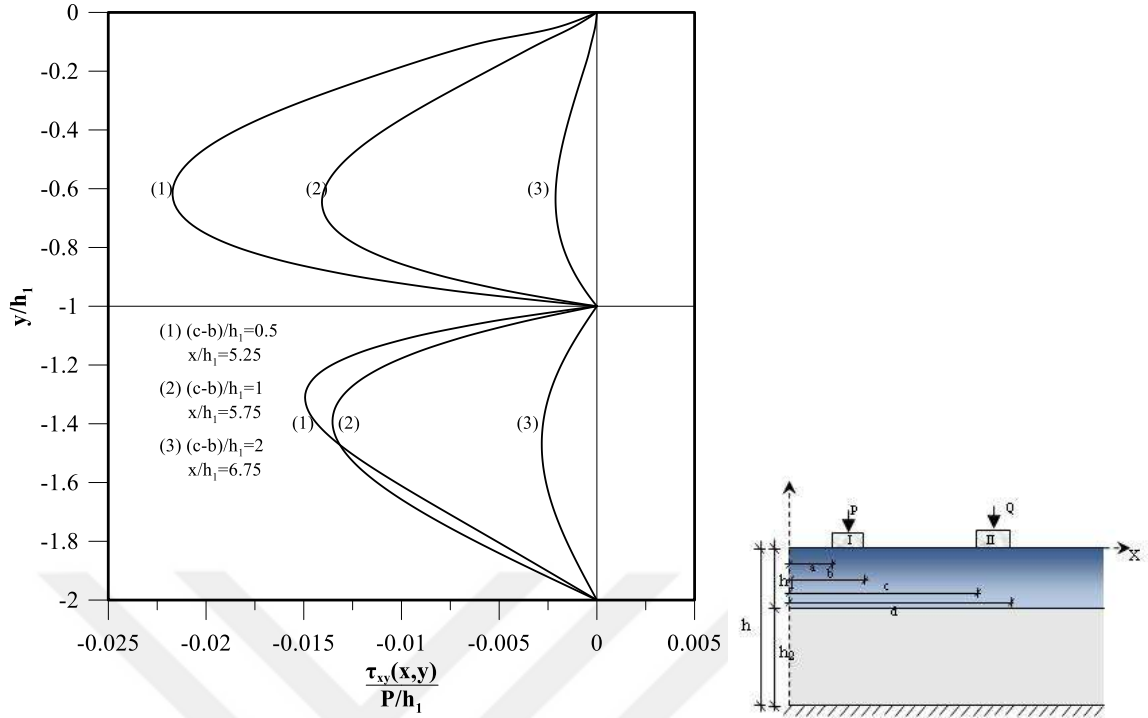
Şekil 36'da yük oranının kayma gerilmeleri üzerindeki etkisi irdelenmiştir. İki blok arasındaki mesafenin orta noktasındaki kesit baz alınarak ikinci bloğun üzerindeki yük büyüklüğü değiştirilerek gerilme değişimi incelenmiştir. Yük oranı arttıkça gerilme değerlerinde artış olduğu görülmektedir.



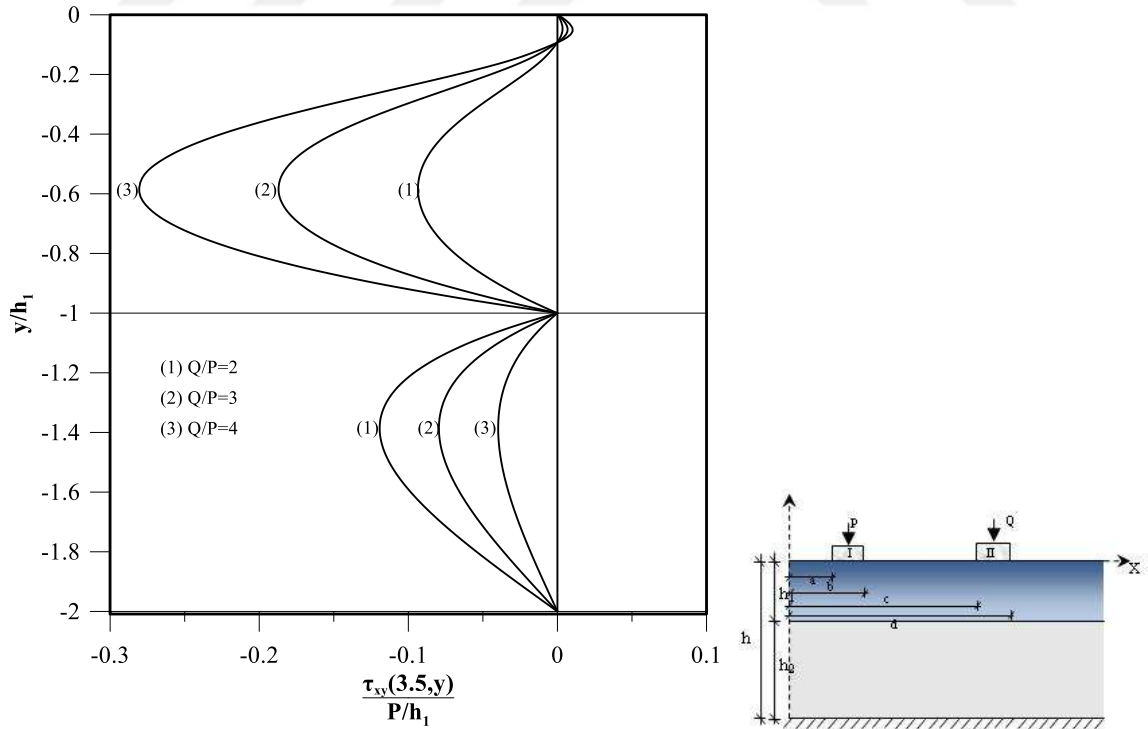
Şekil 33. Çeşitli μ_2/μ_{h1} değerleri için ikinci bloğun orta noktasına denk gelen kesitte derinlik boyunca kayma gerilmesi yayılışları ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $(d-c)/h_1=1.5$; $\beta_{h1}=-1.38629$; $\gamma_{h1}=-1.38629$; $Q=2P$; $h_1=h_2$)



Şekil 34. Çeşitli β_{h1} değerleri için bloklar arasındaki bölgede derinlik boyunca kayma gerilmesi yayılışları ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=1$; $(d-c)/h_1=1.5$; $\mu_2/\mu_{h1}=1$; $\gamma_{h1}=-1.3862$; $Q=2P$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $h_1=h_2$)



Şekil 35. Çeşitli $(c-b)/h_1$ değerleri için bloklar arasındaki kesitte derinlik boyunca kayma gerilmesi yayılışları ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(d-c)/h_1=1.5$; $\mu_2/\mu_{-h_1}=1$; $\beta h_1=-1.38629$; $\gamma h_1=-1.38629$; $Q=2P$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $h_1=h_2$)



Şekil 36. Çeşitli Q/P değerleri için birinci bloğun altındaki kesitte derinlik boyunca kayma gerilmesi yayılışları ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(d-c)/h_1=1$; $\mu_2/\mu_{-h_1}=1$; $\beta h_1=-1.38629$; $\gamma h_1=-1.38629$; $(d-c)/h_1=1$; $\kappa_1=2$; $\kappa_2=2$; $h_1=h_2$)

3.2. Süreksiz Temas Problemi

Bu kısımda, yük faktörünün kritik yükten büyük olması durumunda ($\lambda > \lambda_{cr}$) tabaka ara yüzeylerinde veya homojen tabaka ile rijit düzlem ara yüzeyinde meydana gelen ayrılma durumları ayrı ayrı incelenerek tablo ve grafikler halinde sunulmuştur. Tabakaların ağırlıkları dikkate alındığından ayrılan tabaka tekrar ara yüzeylere temas ederek sınırlı bir ayrılma bölgesini oluşturur. Bu sebeple sürekli temas durumundaki sınır şartları değişir. Temas yüzeylerine ait ilk ayrılma yükleri belirlendikten sonra iki temas yüzeyinde aynı anda süreksizlik meydana getirmeyecek yükler seçilerek çeşitli boyutsuz büyüklükler için süreksizlikler belirlenmiştir.

3.2.1. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabaka ile Homojen Tabaka Ara Yüzeyindeki Süreksiz Temas Durumu

Fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ile homojen tabaka ara yüzeyindeki $\sigma_{y1}(x, -h_1)/P/h_1$ gerilme dağılımını veren grafikler incelendiğinde sürekli temas ve süreksiz temas bölgeleri görülmektedir. $\sigma_{y1}(x, -h_1)/P/h_1$ birinci blok kenarından itibaren artarak blok altında en büyük değerini almaktadır. Bloklar arasına doğru yaklaştıkça gerilme değerleri azalmakta, daha sonra tekrar artarak ikinci blok altında en büyük değerine ulaşmaktadır. Daha sonra gerilme değeri tekrar azalarak tabakalar arasında ayrılmanın başladığı yerde sıfır olmakta ve ayrılma bölgesi boyunca $(e/h_1, f/h_1)$ sıfır kalmaktadır. Ayrılmanın sona erdiği noktadan sonra ise gerilme değerleri artarak kritik yük faktörü olan λ_{cr} 'ye yakınsamaktadır.

Rijitlik parametresinin değişimine (βh_1) göre boyutsuz $\sigma_{1y}(x, -h_1)/P/h_1$ gerilme dağılımının grafiği Şekil 37'de verilmiştir. Rijitlik parametresi arttıkça veya diğer bir deyişle tabakanın rijitliğinin tabakanın derinliği boyunca azalması durumunda ayrılma bölgesi büyümektedir. Ayrıca βh_1 değerleri arttıkça ayrılmanın başlama noktası 2. bloktan uzaklaşmaktadır. Ayrıca Tablo 10 incelendiğinde yük faktörünün rijitlik parametresi ile değişimine göre ayrılma başlangıç ve bitiş noktaları görülmektedir. Tablodan da anlaşılacağı üzere, rijitlik parametresi sabit alınıp yük faktörünün azaltılması durumunda daha küçük bir ayrılma bölgesi oluşmaktadır. Ayrıca yük azaldıkça ayrılmanın başladığı nokta, 2. bloktan uzaklaşmaktadır. Yük faktörünün sabit alınıp rijitlik parametresinin tabaka altına doğru azaltılması durumunda ise ayrılma bölgesinin büyüdüğü görülmektedir.

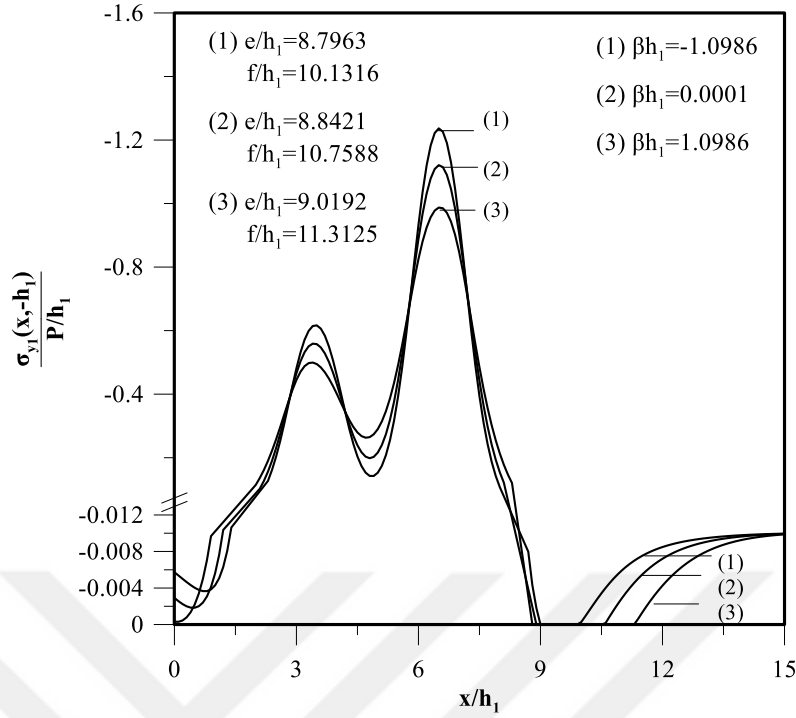
Şekil 38’de ise yoğunluk parametresinin değişimine (γh_1) göre normalize edilmiş $\sigma_{1y}(x, -h_1)/P/h_1$ gerilme dağılımının grafiği verilmiştir. Şekil 38 incelendiğinde, γh_1 değerleri arttıkça yani yoğunluğun tabaka derinliği boyunca azalması durumunda ayrılma mesafelerinin arttığı görülmektedir.

Şekil 39’da bloklar arası mesafe değişimine göre $((c-b)/h_1)$ tabakaların ara yüzeyindeki gerilme yayılımı verilmiştir. Bloklar birbirlerinden uzaklaştıkça gerilme değerlerinde azalma gözlenmiştir. Ayrıca ayrılma başlangıç ve bitiş mesafelerinde de bir artış meydana gelmektedir. Bloklar arası mesafe azaldıkça bloklar birbirleriyle daha fazla etkileşimde bulunduğundan, gerilme değerlerinde bir artış görülmüştür. Bu grafikte birlikte, bloklar arası etkileşimin sadece sürekli temas durumu için değil aynı zamanda süreksiz temas durumu için oldukça önemli olduğu anlaşılmaktadır.

Homojen tabakanın kayma modülü ile FD tabakanın alt yüzeyinin kayma modülüne oranına göre (μ_2/μ_{h1}) normalize edilmiş $\sigma_{1y}(x, -h_1)/P/h_1$ gerilme yayılımı Şekil 40’da verilmiştir. Homojen düzlemin kayma modülünün fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın alt yüzeyine ait kayma modülüne göre azalması durumunda gerilme değerlerinde bir azalma görülmektedir. Ayrıca oran azaldıkça ayrılmanın başlangıç noktasının uzaklaştığı tespit edilmiştir. Tüm bu analizler gerçekleştirilirken sadece FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki bir bölgede ayrılma meydana getirecek yükler seçilmiştir ($\lambda_{cr2} > \lambda > \lambda_{cr1}$). Seçilen yüklerin, blok altlarında, FD tabakanın solunda ve homojen tabaka ile rijit düzlem arasında ayrılma meydana getirmeyecek yükler olmasına dikkat edilmiştir.

Ayrıca homojen tabakanın yüksekliği artırılarak problem (Polat,2019) ile, homojen tabakanın yüksekliğinin artırılıp bloklar arasındaki mesafe yeterince uzaklaştırılırsa (Öner, 2018) ile benzer problemler olmaktadır. Tablo 11’de homojen tabakanın yüksekliği artırılarak rijitlik parametresi değişimine göre ayrılma başlangıç ve bitiş noktaları belirlenerek sonuçlar, (Polat, 2019) ile kıyaslanmıştır. Tablo 11 incelendiğinde, rijitlik parametresi arttıkça ayrılmanın başlangıç ve bitiş noktalarının ikinci bloktan uzaklaştığı ve sonuçların literatürdeki çalışmaya oldukça yakın olduğu görülmektedir.

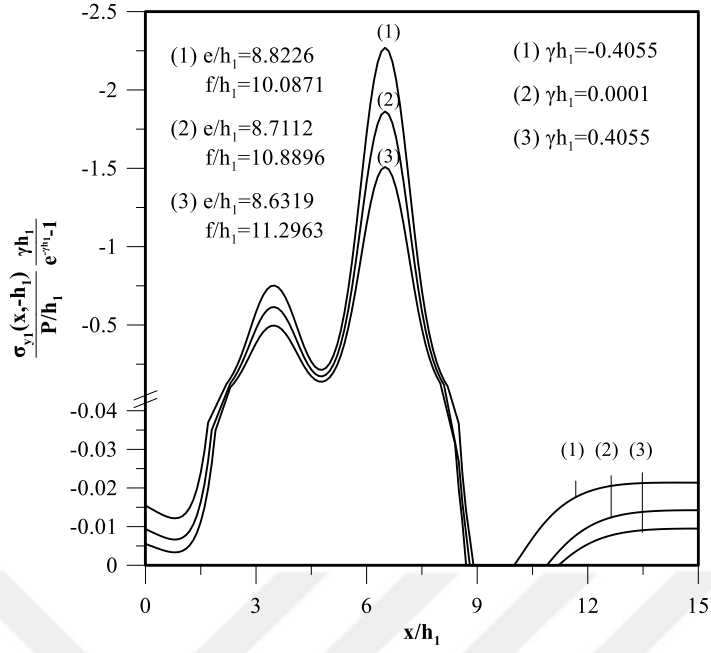
Tablo 12’de homojen tabakanın yüksekliği artırılmış ve ikinci blok birinci bloktan blok etkileşiminin sona erdiği noktaya kadar uzaklaştırılmıştır. Bu şartlar altında birinci blok genişliğinin değişimine göre ayrılma başlangıç ve bitiş noktaları belirlenerek sonuçlar (Öner, 2019) ile kıyaslanmıştır. Tablo 12 incelendiğinde, blok genişliği arttıkça gerilme azalacağından ayrılma bölgesinin küçüldüğü görülmekte ve sonuçların literatürdeki çalışmayla oldukça uyumlu olduğu anlaşılmaktadır.



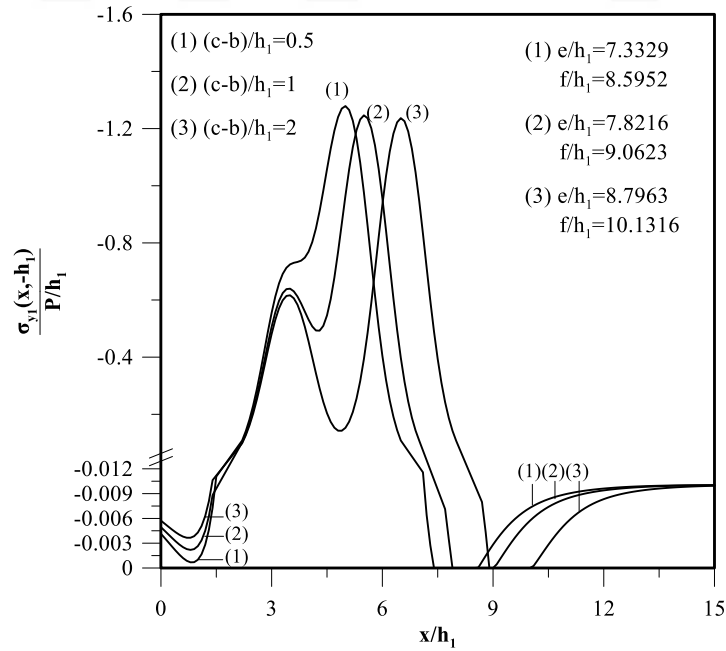
Şekil 37. Rijitlik parametresi (βh_1) değişimine göre tabakalar arasındaki normalize edilmiş $\sigma_{y1}(x, -h_1)/P/h_1$ gerilme yayılımı ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1$; $\mu_0=1$; $Q=2P$; $\gamma h_1=-1.0986$; $\kappa_1=\kappa_2=2$; $y=-h_1$; $h_1/h_2=0.5$; $\mu_2/\mu_{-h_1}=1$; $\lambda=180 > \lambda_{cr1}$)

Tablo 10. Rijitlik parametresi (βh_1) ve yük faktörü (λ) değişimine göre tabakalar arasındaki ayrılma başlangıç ve bitiş noktaları ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1$; $\mu_0=1$; $Q=2P$; $\gamma h_1=-1.0986$; $\kappa_1=\kappa_2=2$; $y=-h_1$; $h_1/h_2=0.5$; $\mu_2/\mu_{-h_1}=1$)

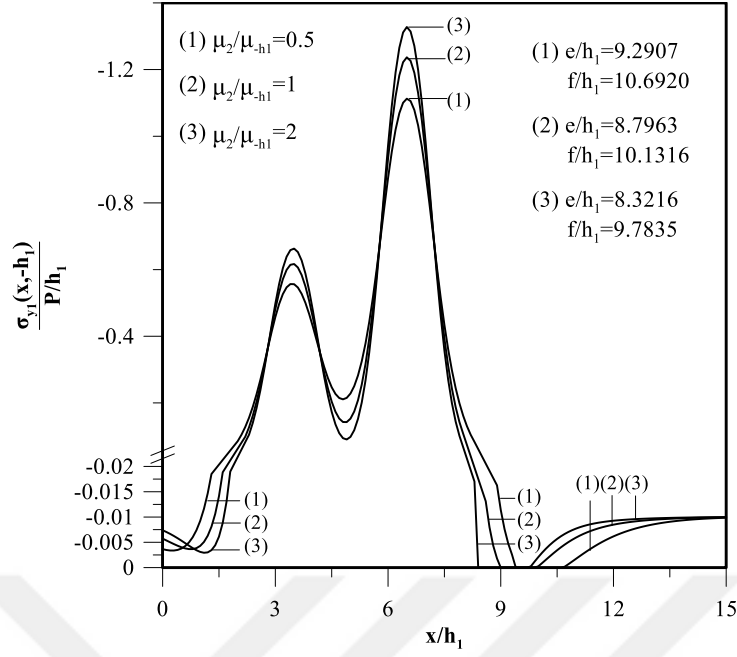
λ	$\beta h_1=-0.4055$		$\beta h_1=0.0001$		$\beta h_1=0.4055$	
	e/h_1	f/h_1	e/h_1	f/h_1	e/h_1	f/h_1
80	9.2761	9.7023	9.2913	9.9304	9.3196	10.0516
85	9.2203	9.7416	9.2507	9.9852	9.2931	10.1463
90	9.1622	9.7823	9.1802	10.0666	9.2354	10.3266
95	9.1140	9.8135	9.1348	10.1173	9.1807	10.4397



Şekil 38. Yoğunluk parametresi (γh_1) değişimine göre tabakalar arasındaki normalize edilmiş $\sigma_{y1}(x, -h_1)/P/h_1$ gerilme yayılımı ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1$; $\mu_0=1$; $Q=2P$; $\beta h_1=-1.0986$; $\kappa_1=\kappa_2=2$; $y=-h_1$; $h_1/h_2=0.5$; $\mu_2/\mu_{-h_1}=1$; $\lambda=180 > \lambda_{cr1}$)



Şekil 39. Bloklar arası mesafenin ($(c-b)/h_1$) değişimine göre tabakalar arasındaki normalize edilmiş $\sigma_{y1}(x, -h_1)/P/h_1$ gerilme yayılımı ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(d-c)/h_1=1$; $Q=2P$, $\beta h_1=-1.0986$; $\gamma h_1=-1.0986$; $\kappa_1=\kappa_2=2$; $y=-h_1$; $h_1/h_2=0.5$; $\mu_2/\mu_{-h_1}=1$; $\lambda=180 > \lambda_{cr1}$)



Şekil 40. Tabakaların kayma modülü oranının (μ_2/μ_{h1}) değişimine göre tabakaların ara yüzeyindeki normalize edilmiş $\sigma_{y1}(x, -h_1)/P/h_1$ gerilme yayılımı ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1$; $Q=2P$; $\beta h_1=-1.0986$; $\gamma h_1=-1.0986$; $\kappa_1=\kappa_2=2$; $y=-h_1$; $h_1/h_2=0.5$; $\lambda=180 > \lambda_{cr1}$)

Tablo 11. Rijitlik parametresinin (βh_1) değişimine göre FD tabaka ile homojen tabaka ara yüzeyindeki ayrılma başlangıç ve bitiş noktalarının kıyaslanması ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1$; $\mu_0=1$; $Q=2P$; $\gamma h_1=0.4055$; $\kappa_1=\kappa_2=2$; $y=-h_1$; $h_1/h=0.1$; $\mu_2/\mu_{h1}=1$; $\lambda=105 > \lambda_{cr1}$)

βh_1 Değişimi	e/h_1		Hata (%)	f/h_1		Hata (%)
	Bu çalışma	Polat (2019)		Bu çalışma	Polat (2019)	
-0.4055	8.7331	8.7472	0.161	10.9013	10.8996	0.016
0.0001	8.8023	8.8065	0.048	11.2564	11.2348	0.192
0.4055	8.8798	8.8873	0.084	11.6708	11.5634	0.928

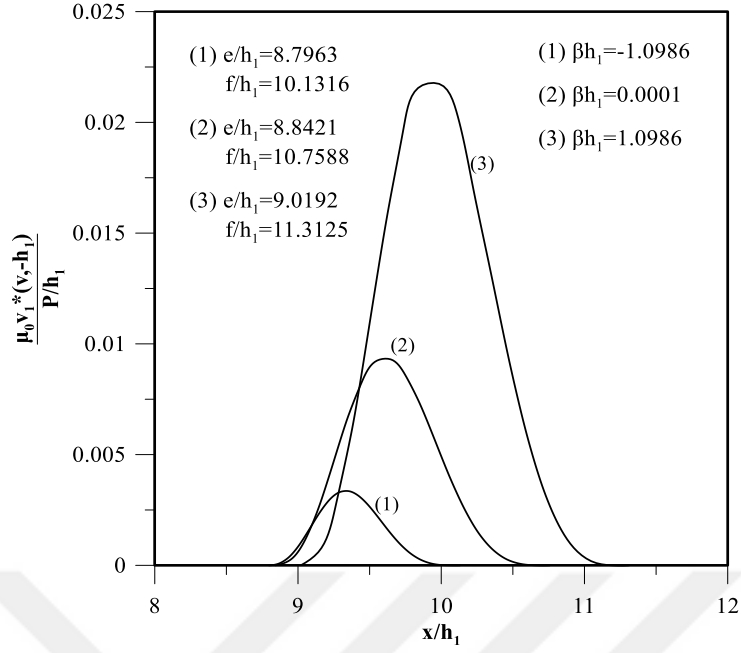
Tablo 12. Birinci blok genişliğinin $(b-a)/h_1$ değişimine göre FD tabaka ile homojen tabaka ara yüzeyindeki ayrılma başlangıç ve bitiş noktalarının kıyaslanması ($a/h_1=1$; $y=-h_1$; $h_1/h=0.1$; $(c-b)/h_1=30$; $(d-c)/h_1=2$; $\mu_0=1$; $Q=2P$; $\beta h_1=-0.6931$; $\kappa_1=\kappa_2=2$; $\mu_2/\mu_{h1}=1$; $\lambda=500 > \lambda_{cr}$)

$(b-a)/h_1$	e/h_1		Hata (%)	f/h_1		Hata (%)
	Bu çalışma	Öner (2018)		Bu çalışma	Öner (2018)	
1	1.8335	1.8296	0.213	7.3001	7.2894	0.148
2	2.3241	2.3183	0.250	6.8573	6.8332	0.353
4	3.4910	3.4736	0.501	6.6023	6.5715	0.469

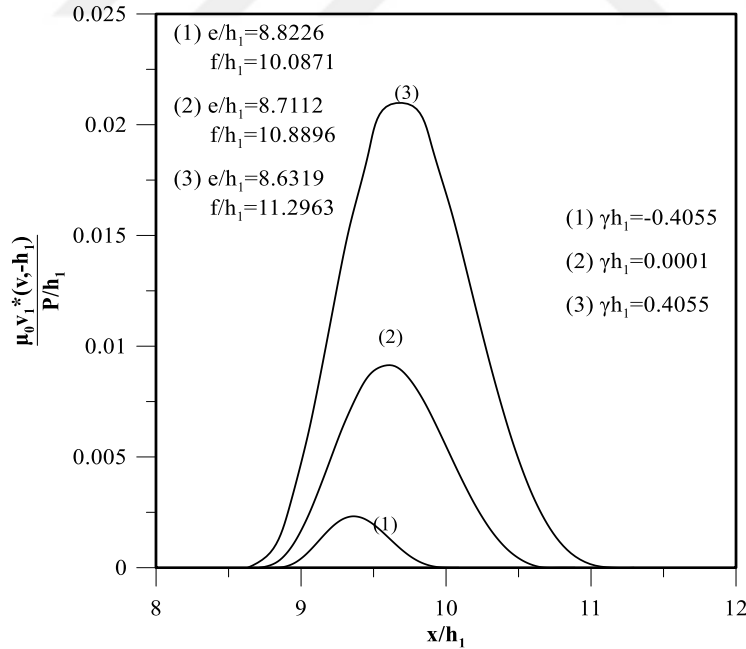
3.2.2. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabaka ile Homojen Tabaka Ara Yüzeyindeki Düşey Yer Değişirmeler Farkının İrdelenmesi

Uygulanan yükün, ilk ayrılma yükü λ_{cr1} 'den daha büyük olması durumunda ($\lambda > \lambda_{cr1}$) düşey yer değişirmeler farkı ($v_1(x, -h_1) - v_2(x, -h_1)$) yani FD tabaka ile homojen tabaka arasında meydana gelen ayrılmalar, rijitlik parametresi değişimi (β_{h_1}), yoğunluk parametresi değişimi (γ_{h_1}), bloklar arası mesafe değişimi $(c-b)/h_1$ ve tabakaların kayma modülü oranı (μ_2/μ_{-h_1}) ile değişimi gibi çeşitli boyutsuz büyüklüklere göre ele alınmıştır. Şekil 41'de rijitlik parametresi değişimine göre (β_{h_1}), FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki kabarma grafiği verilmiştir. Rijitliğin FD tabakanın altına doğru azalması durumunda ayrılma bölgelerindeki artışa ek olarak yer değişirmeler farkı da daha büyük olmaktadır. Ayrılmanın başlangıç noktaları birbirlerine çok yakınken, rijitlik parametresi arttıkça bitiş noktaları ikinci bloktan uzaklaşmaktadır. Şekil 42'de yoğunluk parametresi değişimine göre (γ_{h_1}), FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki kabarma grafiği verilmiştir. Grafikten görüleceği gibi tabaka yoğunluğu FD tabakanın alt kısmına doğru azaldıkça, yani (γ_{h_1}) değeri arttıkça kabarmalarda bir artış meydana gelmiştir.

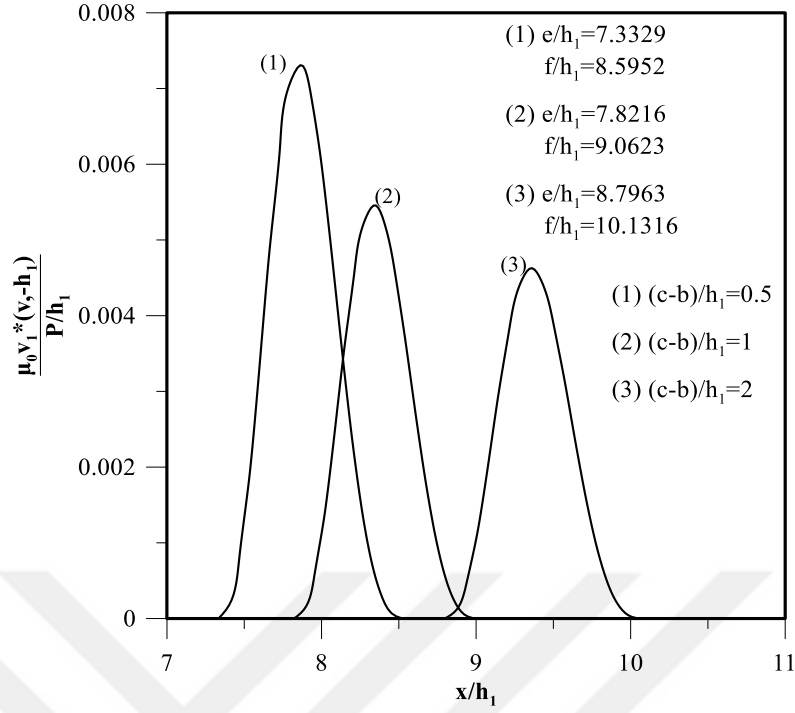
Bloklar arası mesafe değişimine ($(c-b)/h_1$) göre, FD tabaka ile homojen tabaka ara yüzeyindeki ayrılma grafiği Şekil 43'te verilmiştir. Bloklar birbirinden uzaklaştıkça ayrılma bölgelerinde küçülme gözlenmiştir. Şekil 44'te, homojen tabakanın kayma modülü oranının FD tabakanın alt yüzeyinin kayma modülü oranına göre (μ_2/μ_{-h_1}) kabarmaların grafiği verilmiştir. Alt tabakanın rijitliği üstteki tabakanın alt yüzeyinin rijitliğine göre azaldıkça yani (μ_2/μ_{-h_1}) oranı küçüldükçe, ayrılma bölgesi küçülmekte ve kabarma miktarları azalmaktadır.



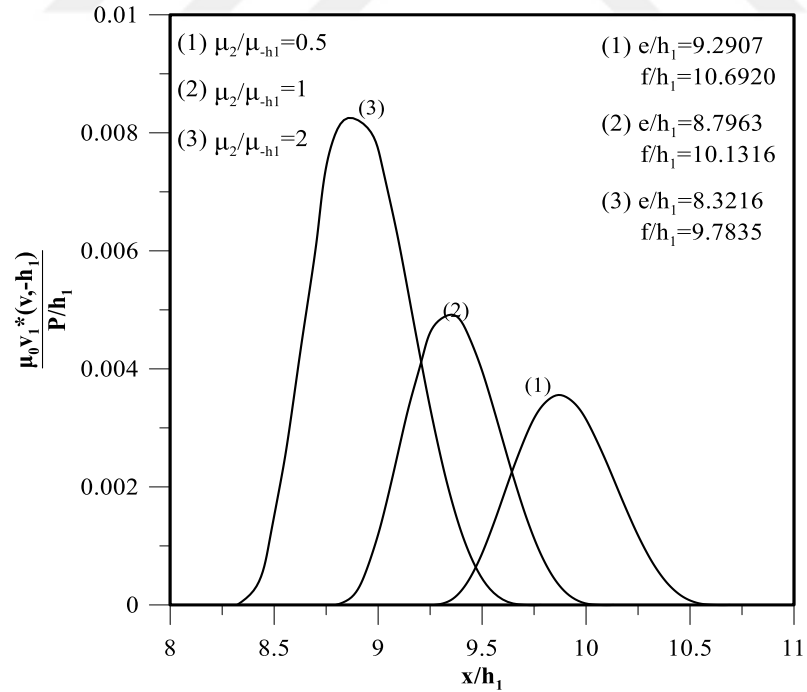
Şekil 41. Tabakalar arasındaki kabarmaların rijitlik parametresi (βh_1) ile değişimi ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1$; $\mu_0=1$; $Q=2P$; $\gamma h_1=-1.0986$; $\kappa_1=\kappa_2=2$; $y=-h_1$; $h_1/h_2=0.5$; $\mu_2/\mu_0=1$; $\lambda=180 > \lambda_{cr1}$)



Şekil 42. Tabakalar arasındaki kabarmaların yoğunluk parametresi (γh_1) ile değişimi ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1$; $\mu_0=1$; $Q=2P$; $\beta h_1=-1.0986$; $\kappa_1=\kappa_2=2$; $y=-h_1$; $h_1/h_2=0.5$; $\mu_2/\mu_0=1$; $\lambda=180 > \lambda_{cr1}$)



Şekil 43. Tabakalar arasındaki kabarmaların bloklar arası mesafe $((c-b)/h_1)$ ile değişimi ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(d-c)/h_1=1$; $Q=2P$; $\beta_{h_1}=-1.0986$; $\gamma_{h_1}=-1.0986$; $\kappa_1=\kappa_2=2$; $y=-h_1$; $h_1/h_2=0.5$; $\mu_2/\mu_{-h_1}=1$; $\lambda=180>\lambda_{cr1}$)



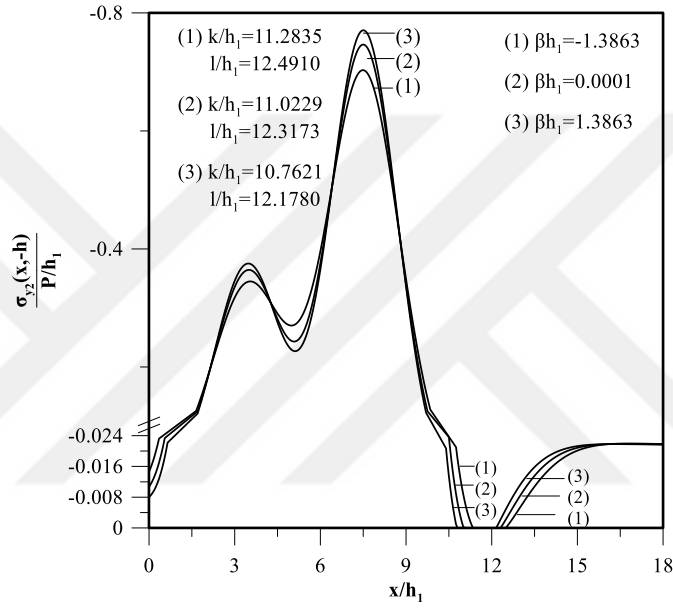
Şekil 44. Tabakalar arasındaki kabarmaların tabakaların kayma modülü oranı (μ_2/μ_{-h_1}) ile değişimi ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1$; $Q=2P$; $\beta_{h_1}=-1.0986$; $\gamma_{h_1}=-1.0986$; $\kappa_1=$; $\kappa_2=2$; $y=-h_1$; $h_1=0.5h_2$; $\lambda=180>\lambda_{cr1}$)

3.3.1. Homojen Tabaka ile Rijit Düzlem Ara Yüzeyindeki Süreksiz Temas Durumu

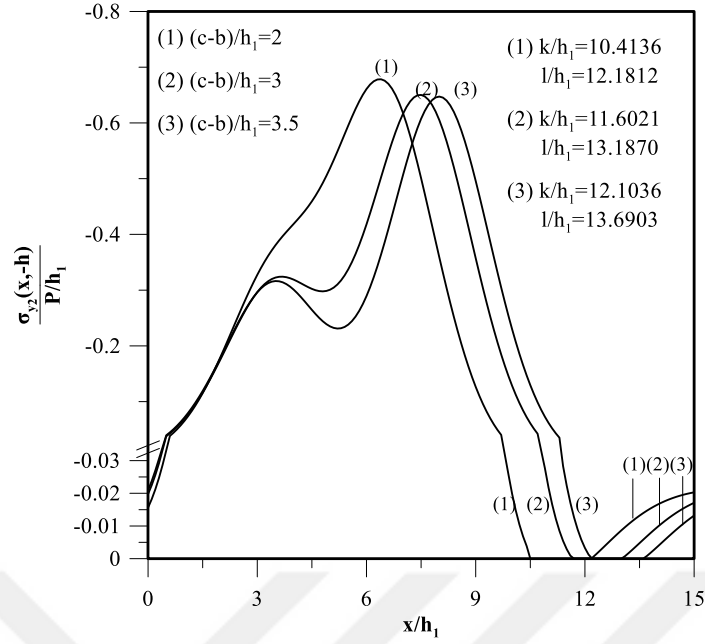
Homojen tabaka rijit düzlem ara yüzeyindeki $\sigma_{y2}(x,-h)/P/h_1$ gerilme dağılımını veren grafikler incelendiğinde, temas yüzeylerinde sürekli ve süreksiz temas bölgeleri görülmektedir. FD tabaka ile homojen tabaka ara yüzeyindeki normalize edilmiş gerilme yayılışında olduğu gibi, $\sigma_{y2}(x,-h)/P/h_1$ birinci blok kenarından itibaren artarak blok altında en büyük değerini almaktadır. Bloklar arasına doğru yaklaştıkça gerilme değerleri azalmakta, daha sonra tekrar artarak ikinci blok altında en büyük değere ulaşmaktadır. Daha sonra gerilme değeri tekrar azalarak tabakalar arasında ayrılmanın başladığı yerde sıfır olmakta ve ayrılma bölgesi boyunca $(k/h_1, l/h_1)$ sıfır kalmaktadır. Ayrılmanın sona erdiği noktadan sonra ise gerilme değerleri artarak kritik yük faktörü olan λ_{cr2} 'ye yakınsamaktadır. Şekil 45'te rijitlik parametresi değişimine göre normalize edilmiş $\sigma_{y2}(x,-h)/P/h_1$ gerilme yayılışının grafiği verilmiştir. Tabakalar arasındaki temas gerilmesinde olduğu gibi, rijitlik parametresi değeri arttıkça yani tabakanın rijitliği derinlik boyunca azaldıkça ayrılma bölgesi büyümektedir. Ayrıca βh_1 değeri arttıkça ayrılmanın başlangıç noktası ikinci bloğa yakınsamaktadır. Şekil 46'da bloklar arası mesafe değişimine göre $((c-b)/h_1)$ homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki yüzeyde ortaya çıkan gerilme yayılışı verilmiştir. Tabakalar arasındaki gerilme yayılışına benzer olarak bloklar birbirlerinden uzaklaştıkça gerilme değerlerinde azalma gözlenmektedir. Ayrıca, ayrılma başlangıç ve bitiş mesafelerinde de bir artış olmuştur. Bloklar arası mesafe azaldıkça bloklar birbirlerinden daha fazla etkilendiğinden, gerilme değerleri ve ayrılma bölgelerinde bir artış görülmektedir. Şekil 47'de homojen tabakanın kayma modülü ile FD tabakanın alt yüzeyinin kayma modülüne oranına göre (μ_2/μ_{-h1}) normalize edilmiş $\sigma_{y2}(x,-h)/P/h_1$ gerilme yayılışı verilmiştir. Homojen tabakanın kayma modülünün, FD tabakanın alt yüzeyine ait kayma modülüne göre azalması halinde ayrılma bölgelerinde bir küçülme görülmektedir. Oran azaldıkça ayrılmanın başlangıç noktasının ikinci bloktan uzaklaştığı görülmüştür.

Şekil 48'de yük faktörünün (λ) homojen tabakaya ait ilk ayrılma yükü (λ_{cr2}) ile karşılaştırması verilmiştir. Birinci durum için yük faktörü, kritik yük faktöründen daha küçük alınmış ve gerilme yayılışı elde edilmiştir. Yük faktörü, ilk ayrılma yükünden daha küçük olması sebebiyle tabaka ile rijit düzlem ara yüzeyinde bir süreksizlik oluşmamaktadır. İkinci durum için, yük faktörü, ilk ayrılma yüküne eşit olarak alınmış ve gerilme yayılışları elde edilmiştir. Burada, gerilmeler ayrılmanın başlayabileceği noktada yani ilk ayrılma uzaklığında sıfır olup daha sonra tekrar artmaktadır. Üçüncü durum da yük

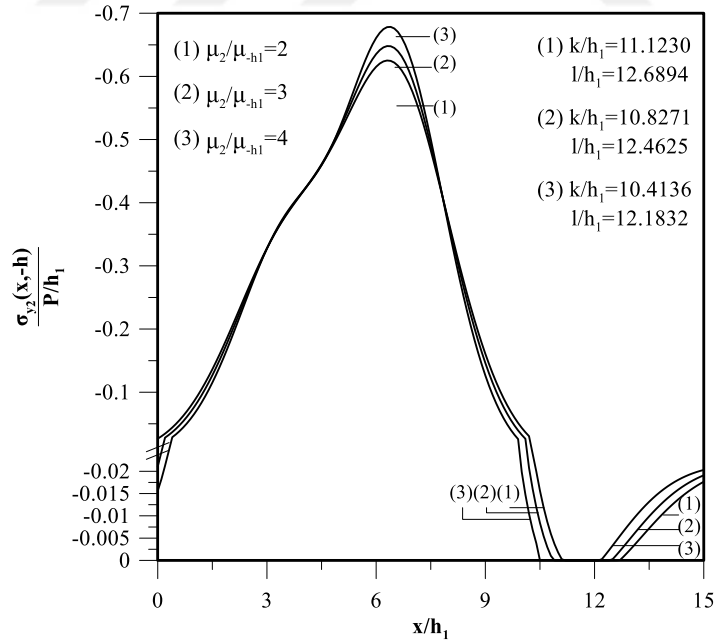
faktörünün ilk ayrılma yükünden büyük olduğu ($\lambda > \lambda_{cr2}$) durumdur. İlk ayrılma yükünden büyük bir yük verilmesi durumunda, homojen tabaka ile rijit düzlem ara yüzeyinde bir süreksizlik bölgesi ortaya çıkmaktadır. Tüm bu analizler gerçekleştirilirken sadece homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki yüzeyin bir bölgesinde ayrılma meydana getirecek yükler seçilmiştir ($P_{cr1} > P > P_{cr2}$). Seçilen yüklerin, blok altlarında, homojen tabakanın solunda ve FD tabakada ayrılma meydana getirmeyecek yükler olmasına dikkat edilmiştir.



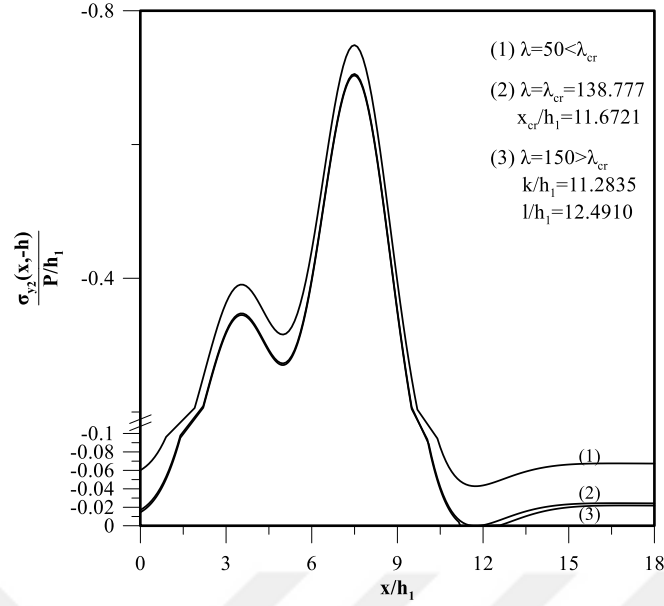
Şekil 45. Rijitlik parametresi (βh_1) değişimine göre homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki $\sigma_{y2}(x,-h)/P/h_1$ gerilme yayılımı ($a/h_1=3$, $(b-a)/h_1=1$, $(c-b)/h_1=3$, $(d-c)/h_1=1$, $\mu_0=1$, $Q=2P$, $\gamma h_1=-2.07944$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $y=-h_1$, $h_1/h_2=0.5$, $\mu_2/\mu_0=1$, $\lambda=160 > \lambda_{cr2}$)



Şekil 46. Bloklar arası mesafenin $(c-b)/h_1$ değişimine göre homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki $\sigma_{y_2}(x, -h)/P/h_1$ gerilme yayılımı ($a/h_1=3$, $(b-a)/h_1=1$, $(d-c)/h_1=1$, $\mu_0=1$, $Q=2P$, $\gamma h_1=-2.07944$, $\beta h_1=-1.38629$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $y=-h_1$, $h_1/h_2=0.5$, $\mu_2/\mu_0=1$, $\lambda=160 > \lambda_{cr2}$)



Şekil 47. Tabakaların kayma modülü oranının (μ_2/μ_{-h_1}) değişimine göre homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki $\sigma_{y_2}(x, -h)/P/h_1$ gerilme yayılımı değişimi ($a/h_1=3$, $(b-a)/h_1=1$, $(c-b)/h_1=2$, $(d-c)/h_1=1$, $\mu_0=1$, $Q=2P$, $\gamma h_1=-2.07944$, $\beta h_1=-1.38629$, $\kappa_1=\kappa_2=2$, $y=-h_1$, $h_1/h_2=0.5$, $\lambda=160 > \lambda_{cr2}$)

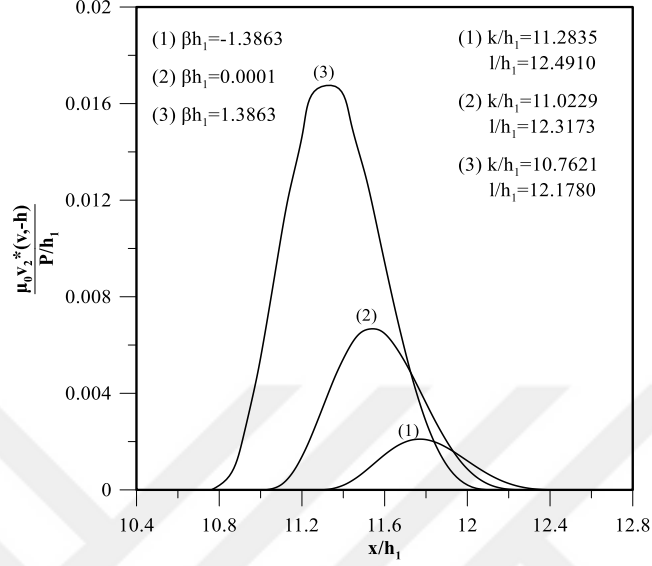


Şekil 48. Yük faktörünün ilk ayrılma yükünden küçük, eşit ve büyük olması durumuna göre $\sigma_{y2}(x,-h)/P/h_1$ normalize edilmiş gerilme yayılımı ($a/h_1=3$, $(b-a)/h_1=1$, $(c-b)/h_1=3$, $(d-c)/h_1=1$, $\gamma h_1=-2.07944$, $\beta h_1=-1.38629$, $Q=2P$, $\mu_2/\mu_0=1$, $h_1/h_2=0.5$)

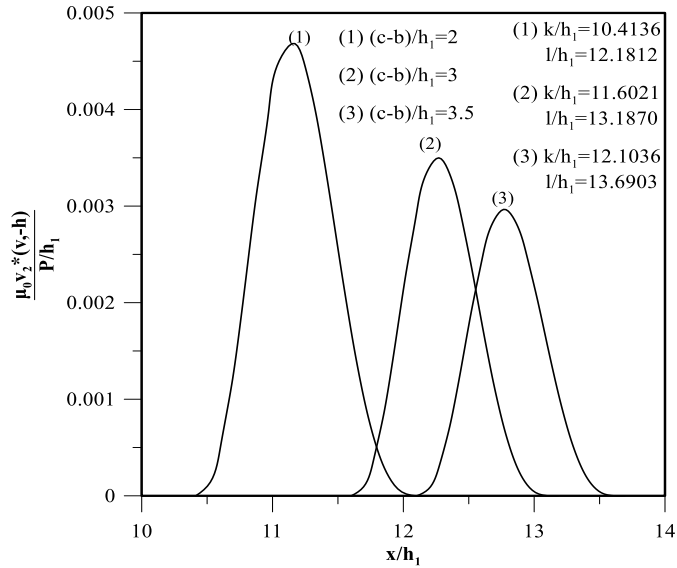
3.3.2. Homojen Tabaka ile Rijit Düzlem Ara Yüzeyindeki Düşey Yer Değiştirmeler Farkının İrdelenmesi

Uygulanan yükün, ilk ayrılma yükü λ_{cr2} 'den daha büyük olması durumunda ($\lambda > \lambda_{cr2}$) düşey yer değiştirme değeri ($v_2(x,-h)$) yani homojen tabaka ile rijit düzlem arasında meydana gelen ayrılmalar, rijitlik parametresi değişimi (βh_1), bloklar arası mesafe değişimi $(c-b)/h_1$ ve tabakaların kayma modülü oranı (μ_2/μ_{-h1}) ile değişimi gibi çeşitli normalize edilmiş büyüklüklere göre ele alınmıştır. Şekil 49'da rijitlik parametresi değişimine göre (βh_1), homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki kabarma grafiği verilmiştir. Rijitliğin, FD tabakanın altına doğru azalması durumunda ayrılma bölgelerindeki artışa ek olarak ayrılmalar da daha büyümektedir. Ayrıca, rijitlik parametresi artması halinde yani FD tabakanın rijitliğinin tabakanın alt yüzeyine doğru azalması durumunda ayrılmanın başlangıç ve bitiş noktaları ikinci bloğa yaklaşmaktadır. Bloklar arası mesafenin değişimine ($(c-b)/h_1$) göre, FD tabaka ile homojen tabaka ara yüzeyindeki kabarma grafiği Şekil 50'de verilmiştir. Bloklar birbirinden uzaklaştıkça ayrılma bölgelerinde ($(c-b)/h_1$)'ın belli bir değerine kadar küçülme gözlenmiştir. Şekil 51'de, homojen tabakanın kayma modülü oranının FD tabakanın alt yüzeyinin kayma modülü oranına göre (μ_2/μ_{-h1}) kabarmaların grafiği verilmiştir. Alt tabakanın rijitliği üstteki tabakanın alt yüzeyinin

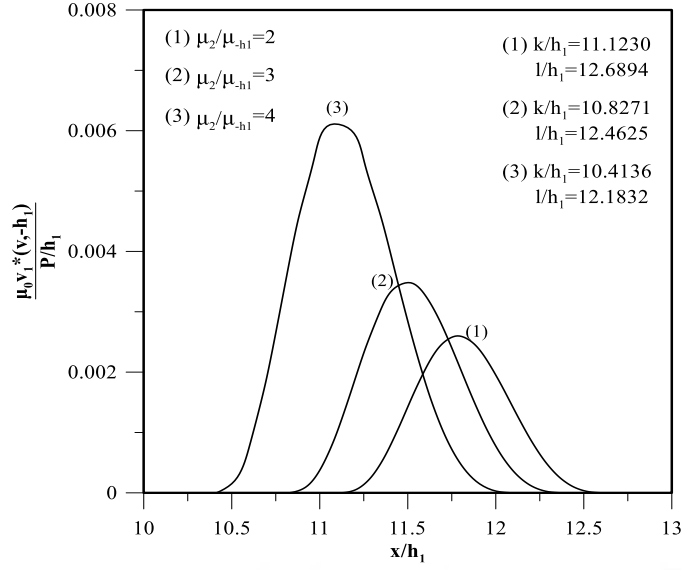
rijitliğine göre azaldıkça yani (μ_2/μ_{h1}) oranı küçüldükçe, ayrılma bölgesi küçülmekte ve kabarma miktarları azalmaktadır.



Şekil 49. Homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki kabarmaların rijitlik parametresi (βh_1) ile değişimi ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=3$; $(d-c)/h_1=1$; $\mu_0=1$; $Q=2P$; $\gamma h_1=-2.07944$; $\kappa_1=\kappa_2=2$; $y=-h_1$; $h_1/h_2=0.5$; $\mu_2/\mu_0=1$; $\lambda=160 > \lambda_{cr2}$)



Şekil 50. Homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki kabarmaların bloklar arası mesafe $(c-b)/h_1$ ile değişimi ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(d-c)/h_1=1$; $\mu_0=1$; $Q=2P$; $\gamma h_1=-2.07944$; $\beta h_1=-1.38629$; $\kappa_1=\kappa_2=2$; $y=-h_1$; $h_1/h_2=0.5$; $\mu_2/\mu_0=1$; $\lambda=160 > \lambda_{cr2}$)



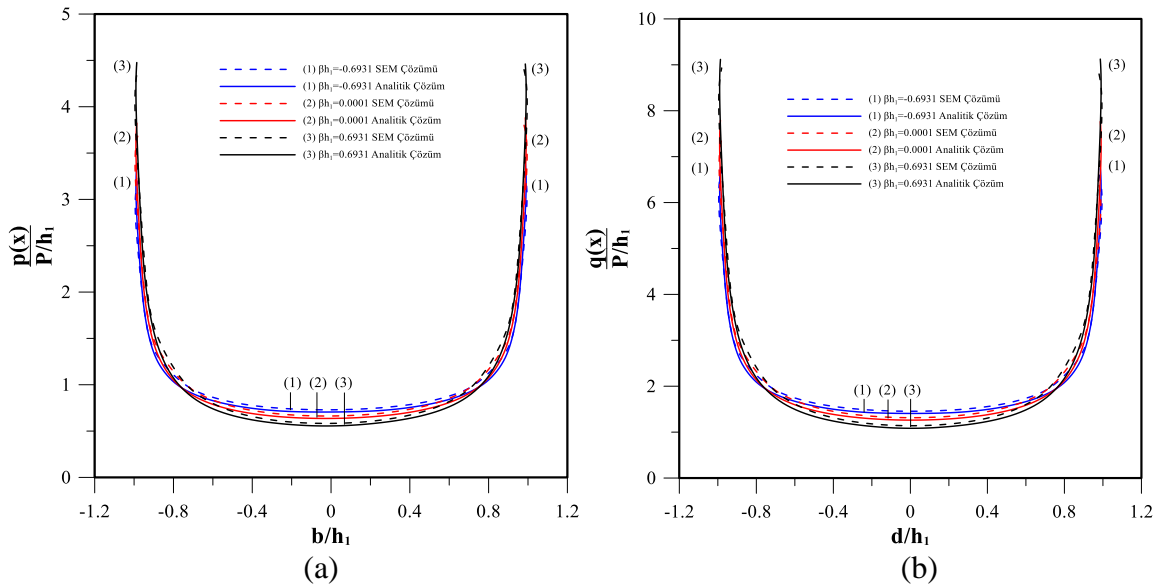
Şekil 51. Homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki kabarmaların tabakaların kayma modülü (μ_2/μ_{h1}) oranı ile değişimi ($a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1$; $Q=2P$; $\gamma_{h1}=-2.07944$; $\beta_{h1}=-1.38629$; $\kappa_1=\kappa_2=2$; $y=-h$; $h_1/h_2=0.5$; $\lambda=160 > \lambda_{cr2}$)

3.4. Sonlu Elemanlar Yöntemini Esas Alan ANSYS Programından Elde Edilen Çözümler ile Analitik Çözümlerin Kıyaslanması

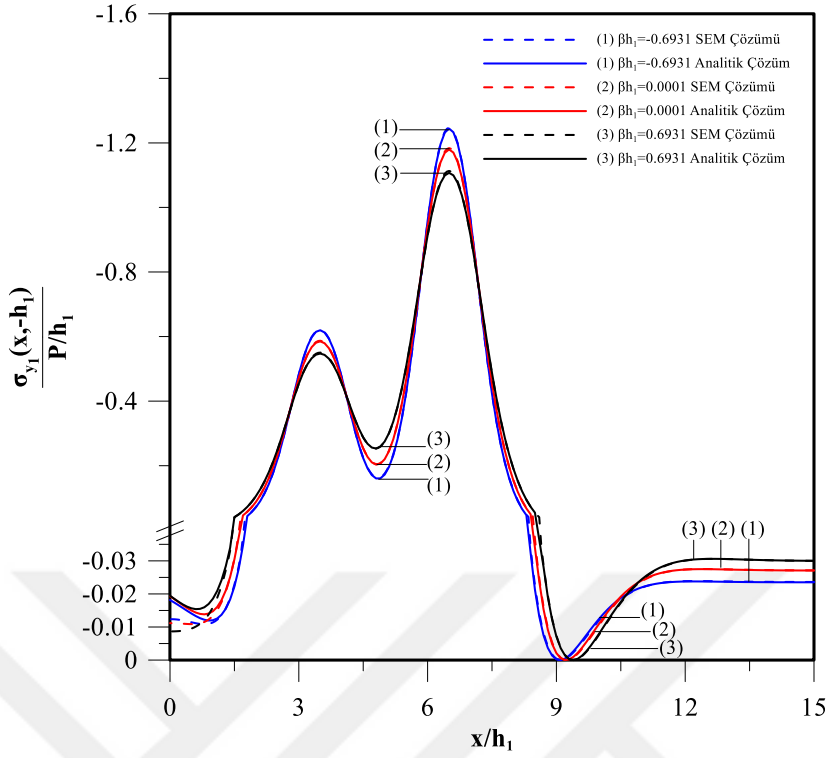
Bu kısımda, rijit iki farklı blok ile yüklenmiş ve rijit düzleme oturan malzeme özellikleri farklı iki tabakanın temas problemi, sonlu elemanlar yöntemi ile analiz edilmiş ve elde edilen sonuçlar, analitik çözümle kıyaslanmıştır. Yapılan analizlerde çeşitli normalize edilmiş büyüklükler için blok altındaki temas gerilmeleri, FD tabaka ile homojen tabaka ara yüzeyindeki ve homojen tabaka ile rijit düzlem ara yüzeyindeki normalize edilmiş $\sigma_y(x,y)/P/h_1$ normal gerilme yayılışları, ilk ayrılma yükleri, ilk ayrılma uzaklıkları, süreksiz temas durumunda yük faktörünün kritik yük faktöründen büyük olması halinde, gerilme yayılışı ve ayrılma bölgesinin başlangıç ve bitiş noktaları belirlenmiştir. Bulunan sonuçlar analitik yöntemle elde edilen sonuçlarla kıyaslanarak tablo ve grafikler halinde sunulmuştur. Yapılan analizlerde kütle kuvvetleri dikkate alınmış, tüm yüzeylerdeki sürtünmeler ihmal edilmiştir.

Şekil 52(a,b)'de sırasıyla birinci ve ikinci blok için, çeşitli rijitlik parametrelerine göre blok altındaki temas gerilmeleri, analitik çözümlerden elde edilen sonuçlarla kıyaslanmıştır. Şekil 53 (a,b)'de rijitlik parametrelerine göre (β_{h1}) sırasıyla FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki normalize edilmiş $\sigma_{y1}(x,y)/P/h_1$ normal gerilme yayılışı ve

homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki normalize edilmiş $\sigma_{y2}(x,y)/P/h_1$ normal gerilme yayılımı karşılaştırmalı olarak verilmektedir. Ayrıca rijitlik parametrelerine göre Tablo 13(a,b)'de sırasıyla FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki ve homojen tabaka ile rijit düzlem ara yüzeyindeki ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılmanın meydana geldiği mesafeler karşılaştırmalı olarak verilmektedir. Şekil 54 (a,b)'de tabakaların çeşitli kayma modülü oranları (μ_2/μ_{-h1}) için sırasıyla FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki normalize edilmiş $\sigma_{y1}(x,y)/P/h_1$ normal gerilme yayılımı ve homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki normalize edilmiş $\sigma_{y2}(x,y)/P/h_1$ normal gerilme yayılımı karşılaştırmalı olarak verilmektedir. Ayrıca tabakaların çeşitli kayma modülü oranlarına (μ_2/μ_{-h1}) göre Tablo 14(a,b)'de sırasıyla FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki ve homojen tabaka ile rijit düzlem ara yüzeyindeki ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılmanın meydana geldiği mesafeler karşılaştırmalı olarak verilmektedir. Şekil 55'te sürekli temas durumu için, Şekil 56'da süreksiz temas durumu için ANSYS çözümünden elde edilen σ_y temas gerilmesi dağılımları görülmektedir. Şekil 56 incelendiğinde kritik yük faktöründen daha yüksek bir yük uygulandığında, tabakalar arasında gerilmenin sıfır olduğu bir süreksizlik bölgesi yani bir ayrılma bölgesinin olduğu görülmektedir. Şekil 57'de süreksiz temas durumu için sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen normalize edilmiş $\sigma_{y1}(x,-h)/P/h_1$ normal gerilme yayılımı ile analitik çözümlerle elde edilen gerilme yayılımı karşılaştırmalı olarak verilmiştir.



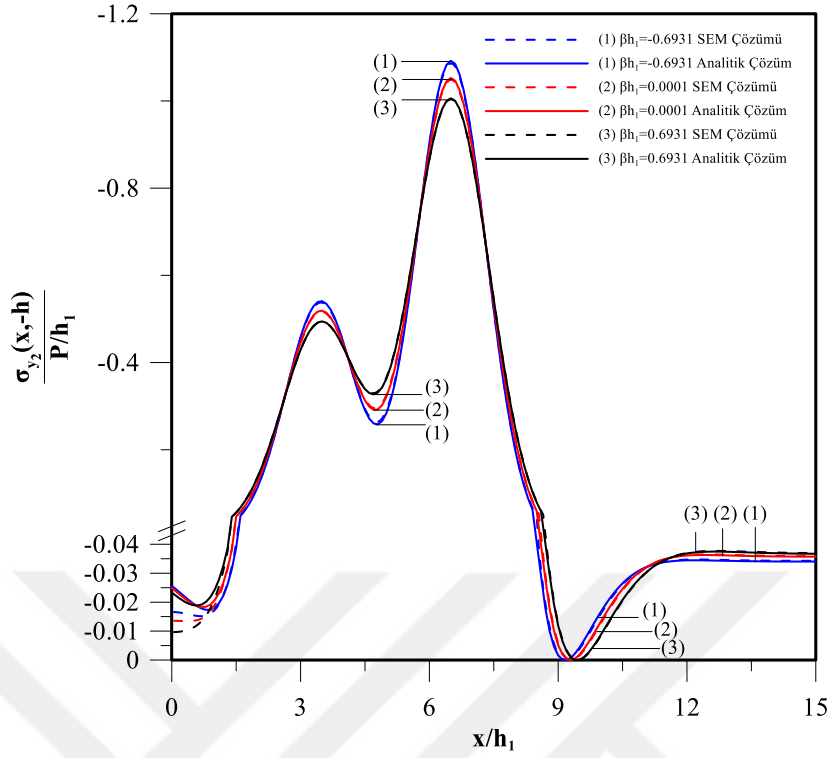
Şekil 52. Rijitlik parametresi (βh_1) değişimine göre bloklar altındaki temas gerilmesi yayılımının SEM ve analitik sonuçlarının karşılaştırılması ($(\mu_2/\mu_{-h1})=1$; $Q=2P$; $\gamma_{h1}=-1.38629$; $a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1$)



Şekil 53a. Rijitlik parametresi (βh_1) değişimine göre FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki normalize edilmiş $\sigma_{y1}(x, h_1)/P/h_1$ gerilme yayılımının SEM ve analitik sonuçlarının karşılaştırılması ($(\mu_2/\mu_{h1})=1$; $a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $Q=2P$; $(d-c)/h_1=1$; $\gamma h_1=-1.38629$)

Tablo 13a. Rijitlik parametresi (βh_1) değişimine göre FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma mesafelerinin SEM ve analitik sonuçlarının karşılaştırılması ($(\mu_2/\mu_{h1})=1$; $a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1$; $Q=2P$; $\gamma h_1=-1.38629$)

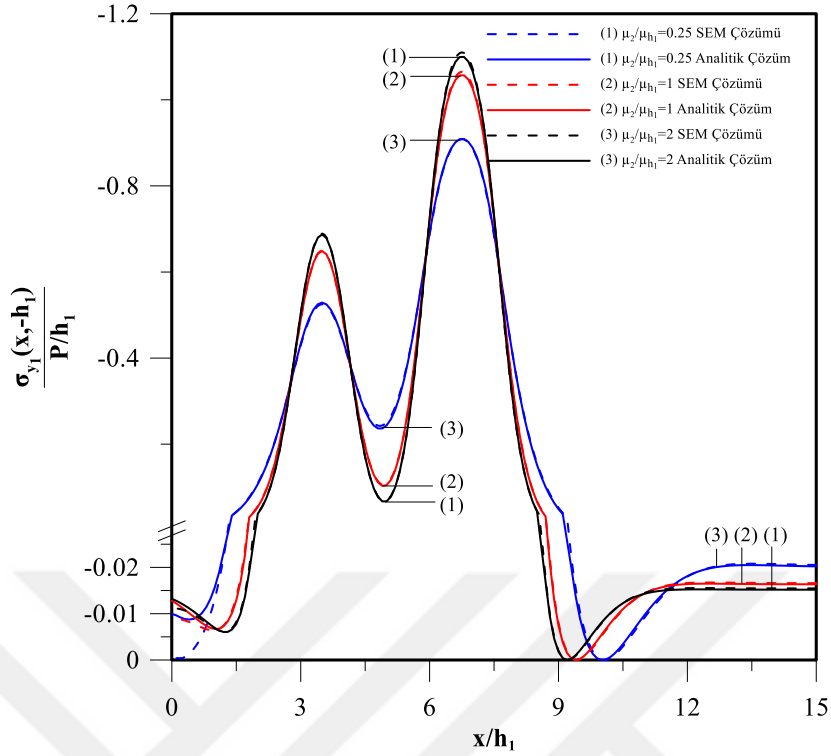
βh_1	λ_{cr}			x_{cr}/h_1		
	Analitik	SEM	Hata (%)	Analitik	SEM	Hata (%)
0.6931	72.096	74.670	3.570	9.39	9.40	0.10
0.0001	79.849	82.653	3.511	9.22	9.25	0.32
-0.6931	91.949	94.871	3.177	9.08	9.10	0.22



Şekil 53b. Rijitlik parametresi (βh_1) değişimine göre homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki normalize edilmiş $\sigma_{y2}(x, -h)/P/h_1$ gerilme yayılımının SEM ve analitik sonuçlarının karşılaştırılması ($(\mu_2/\mu_{h1})=1$; $a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $Q=2P$; $(d-c)/h_1=1$; $\gamma h_1=-1.38629$)

Tablo 13b. Rijitlik parametresi (βh_1) değişimine göre homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma mesafelerinin SEM ve analitik sonuçlarının karşılaştırılması ($(\mu_2/\mu_{h1})=1$; $a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=2$; $(d-c)/h_1=1$; $Q=2P$; $\gamma h_1=-1.38629$)

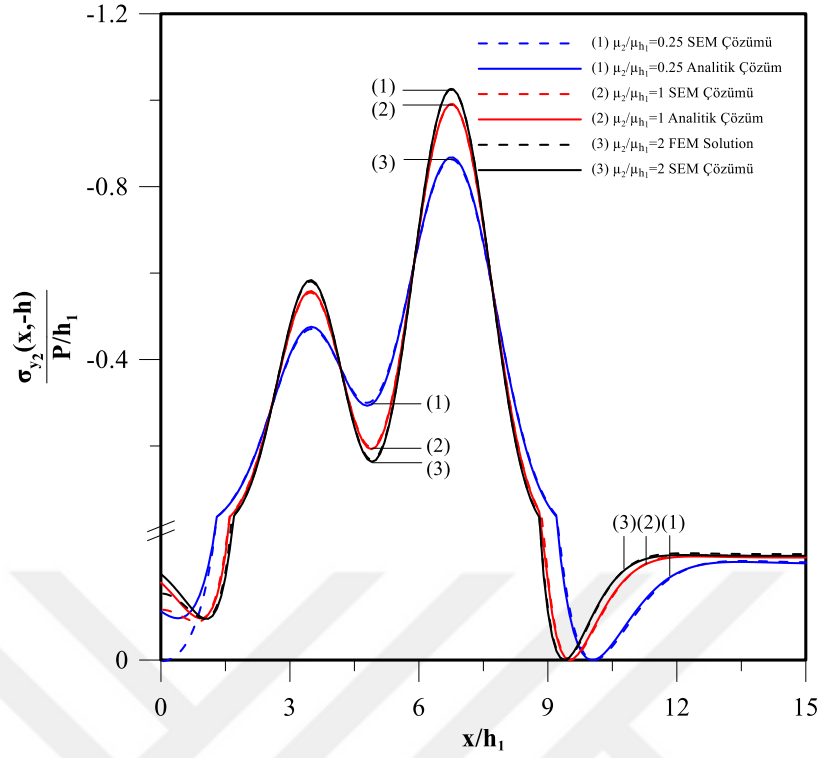
βh_1	λ_{cr}			x_{cr}/h_1		
	Analitik	SEM	Hata (%)	Analitik	SEM	Hata (%)
0.6931	86.036	87.69	1.922	9.44	9.45	0.10
0.0001	88.530	90.250	1.942	9.28	9.30	0.21
-0.6931	96.136	94.512	1.689	9.16	9.20	0.43



Şekil 54a. Tabakaların kayma modülü (μ_2/μ_{h1}) oranı değişimine göre FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki normalize edilmiş $\sigma_{y1}(x, h)/P/h_1$ gerilme yayılımının SEM ve analitik sonuçlarının karşılaştırılması ($\beta_{h1}=-1.38629$; $\gamma_{h1}=-1.38629$; $a/h_1=3$; $Q=2P$; $((b-a)/h_1)=1$; $((c-b)/h_1)=2$; $((d-c)/h_1)=1.5$; $h_1/h=0.5$)

Tablo 14a. Tabakaların kayma modülü (μ_2/μ_{h1}) oranı değişimine göre FD tabaka ile homojen tabaka arasındaki ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıklarının SEM ve analitik sonuçlarının karşılaştırılması ($\beta_{h1}=-1.38629$; $\gamma_{h1}=-1.38629$; $a/h_1=3$; $((b-a)/h_1)=1$; $((c-b)/h_1)=2$; $((d-c)/h_1)=1.5$; $h_1/h=0.5$; $Q=2P$)

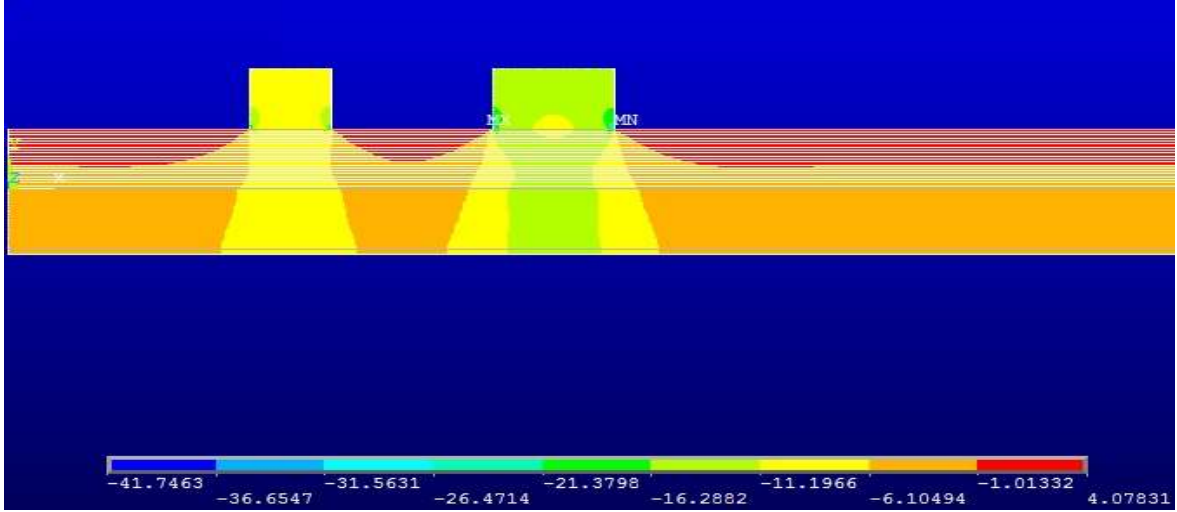
μ_2 / μ_{-h_1}	λ_{cr}			x_{cr}/h_1		
	Analitik	SEM	Hata (%)	Analitik	SEM	Hata (%)
0.25	107.366	109.210	1.717	10.02	10.05	0.29
1	132.284	135.015	2.064	9.41	9.40	0.10
2	142.472	144.883	1.692	9.20	9.20	0.00



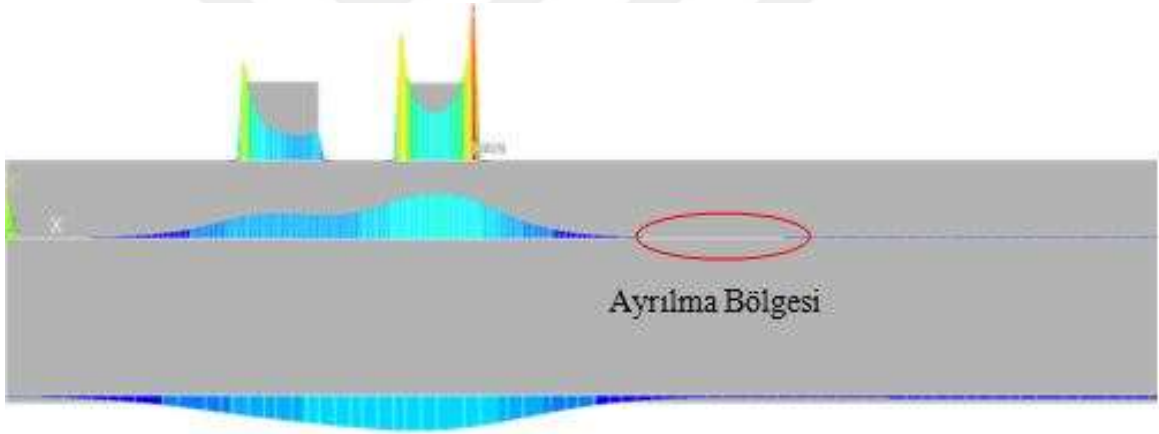
Şekil 54b. Tabakaların kayma modülü (μ_2/μ_{h_1}) oranı değişimine göre homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki normalize edilmiş $\sigma_{y_2}(x,-h)/P/h_1$ gerilme yayılımının SEM ve analitik sonuçlarının karşılaştırılması ($\beta_{h_1}=-1.38629$; $\gamma_{h_1}=-1.38629$; $a/h_1=3$; $((b-a)/h_1)=1$; $((c-b)/h_1)=2$; $((d-c)/h_1)=1.5$; $h_1=h_2$; $Q=2P$)

Tablo 14b. Tabakaların kayma modülü (μ_2/μ_{h_1}) oranı değişimine göre homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıklarının SEM ve analitik sonuçlarının karşılaştırılması ($\beta_{h_1}=-1.38629$; $\gamma_{h_1}=-1.38629$; $a/h_1=3$; $Q=2P$; $((b-a)/h_1)=1$; $((c-b)/h_1)=2$; $((d-c)/h_1)=1.5$; $h_1=h_2$)

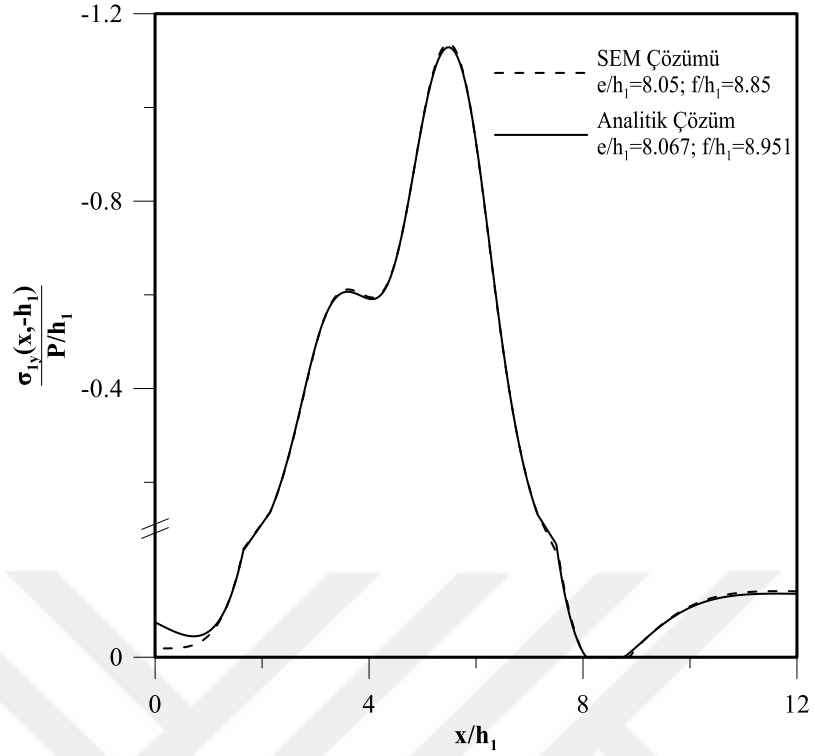
μ_2 / μ_{h_1}	λ_{cr}			x_{cr}/h_1		
	Analitik	SEM	Hata (%)	Analitik	SEM	Hata (%)
0.25	126.54	127.962	1.123	10.03	10.05	0.19
1	119.066	120.396	1.117	9.51	9.55	0.42
2	117.122	118.072	0.811	9.38	9.40	0.21



Şekil 55. Sürekli temas durumu için ANSYS çözümünden elde edilen σ_y temas gerilme yayılımı ($\beta h_1 = -1.38629$; $\gamma h_1 = -1.38629$; $a/h_1 = 3$; $((b-a)/h_1) = 1$; $((c-b)/h_1) = 2$; $((d-c)/h_1) = 1.5$, $(Q/P) = 2$; $\kappa_1 = 2$; $\kappa_2 = 2$; $h_1 = h_2$)



Şekil 56. Süreksiz temas durumu için ANSYS çözümünden elde edilen temas gerilme yayılımı ($\beta h_1 = 0.6931$; $\gamma h_1 = -1.3862$; $\lambda = 80 > \lambda_{cr}$; $a/h_1 = 3$; $(b-a)/h_1 = 1$; $(c-b)/h_1 = 1$; $(d-c)/h_1 = 1$; $Q = 2P$; $\mu_2/\mu_0 = 1$; $h_1 = 0.5h_2$)



Şekil 57. Analitik ve SEM çözümünden elde edilen FD tabaka ile homojen tabaka ara yüzeyindeki normalize edilmiş $\sigma_{y1}(x, -h_1)/P/h_1$ gerilme yayılımı ($\beta h_1=0.6931$; $\mu_2/\mu_0=1$; $\gamma h_1=-1.3862$; $\lambda=80>\lambda_{cr}$; $a/h_1=3$; $(b-a)/h_1=1$; $(c-b)/h_1=1$; $(d-c)/h_1=1$; $Q=2P$; $h_1/h_2=0.5$)

Şekil 52-57 ve Tablo 13-14 incelendiğinde sonlu elemanlar metodu ile elde edilen sonuçlarla analitik sonuçların birbiriyle oldukça uyumlu ve kabul edilebilir derecede yakın olduğu görülebilir. Hata oranı en fazla %3.5 olarak belirlenmiştir.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, rijit düzlem üzerine oturan ve iki rijit düz blok aracılığıyla yüklenmiş biri fonksiyonel derecelendirilmiş iki tabakada sürekli ve süreksiz temas problemi incelenmiştir. Tabakalardan biri fonksiyonel derecelendirilmiş diğeri homojen tabaka olup, tabakaların kütle kuvvetleri dikkate alınmıştır. Fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın elastisite modülü ve yoğunluğu tabaka derinliği boyunca üstel bir fonksiyona bağlı olarak değişmektedir. Problem irdelenirken farklı yükleme koşulları, blok genişlikleri ve blok açıklıkları için çözüm yapıldığından problem simetrik değildir. Çözüm dört aşamalı olarak gerçekleştirilmiştir. Birinci aşamada sürekli temas problemi ele alınmıştır. Sürekli temas problemi irdelenirken yük faktörünün kritik yük faktörüne eşit veya küçük olduğu ($\lambda \leq \lambda_{cr}$) durumda çeşitli boyutsuz büyüklükler için blok altı gerilmeler, tabaka altlarındaki, tabaka boyunca normal gerilmeler, derinlik boyunca normal gerilmeler ve kayma gerilmeleri elde edilmiştir. Blok altındaki gerilmeler incelenirken blok altlarında ayrılma meydana getirecek kritik büyüklükler belirlenmiş ve bu değerler dikkate alınarak ayrılma olmayacak şekilde dağılımlar elde edilmiştir. Ayrıca bu bölümde FD tabaka ile homojen tabaka arasında ve homojen tabaka ile rijit düzlem ara yüzeyinde ayrılmaya sebep olacak kritik yükler ve ayrılmanın başlayacağı ilk ayrılma mesafeleri; farklı yükleme koşulları, kayma modülü oranları, rijitlik parametreleri, yoğunluk parametreleri, blok genişlikleri, tabaka yükseklikleri, bloklar arası mesafeler gibi çeşitli boyutsuz büyüklükler için irdelenmiştir. İkinci aşamada FD tabaka ile homojen tabaka ara yüzeyinde ayrılmanın gerçekleştiği süreksiz temas durumu ele alınmıştır. Bu bölümde ayrılmanın sadece tabakaların arasında olacağı kritik yükler belirlenmiş, bu yükler dikkate alınarak çeşitli boyutsuz büyüklükler için $\sigma_{y1}(x, -h_1)/P/h_1$ gerilme yayılışları, ayrılmanın meydana geldiği bölgenin başlangıç ve bitiş noktaları ve meydana gelen kabarmalar incelenmiştir. Üçüncü aşamada ise ikinci kısımına benzer şekilde, homojen tabaka ile rijit düzlem arasındaki süreksizlik durumu incelenmiş ve çeşitli boyutsuz büyüklükler için ayrılma bölgeleri, gerilme yayılışları ve kabarmalar belirlenmiştir. Dördüncü ve son aşamada ise, söz konusu problem sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak çözülmüş, elde edilen sonuçlar analitik sonuçlarla kıyaslanarak grafik ve tablolar halinde sunulmuştur. Bu işlem yapılırken, sonlu elemanlar metodu (SEM) ile çözüm gerçekleştiren ANSYS Mechanical APDL paket programından yararlanılmıştır. ANSYS programında FDM'lere ait malzeme özelliklerinin

tanımlanabileceği bir menü olmaması sebebiyle, programa ek bir makro yazılarak çözüm yapılmıştır. Yapılan çözümler ile elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir:

- FD tabakanın üst yüzeyinin rijitliği (βh_1) azaldıkça, blokların ortasındaki temas gerilmeleri artarken, blokların köşelerindeki gerilme değerleri azalmaktadır.
- Bloklar arası mesafe ($(c-b)/h_1$) arttıkça yani bloklar birbirlerinden uzaklaştıkça blokların yakın köşelerinde oluşan gerilme değerleri artarken, uzak köşelerde en büyük gerilmeler oluşmaktadır. Belli bir mesafeye ulaştığında ise bloklar arası etkileşim son bulduğundan uçlardaki gerilme değerleri eşit olarak elde edilmiştir.
- Yük oranı (Q/P) arttıkça ve blok genişlikleri ($(b-a)/h_1$ ve $(d-c)/h_1$) azaldıkça blokların altındaki gerilmelerde bir artış gerçekleşmektedir.
- Tabaka yükseklikleri oranı (h_1/h) için blok altlarındaki normalize edilmiş temas gerilmesi yayılışları incelendiğinde tabaka yükseklik oranının temas gerilmelerine çok büyük bir etkisi olmadığı görülmektedir.
- Homojen tabakaya ait kayma modülünün, FD tabakanın alt yüzeyine ait kayma modülüne oranı (μ_2/μ_{h1}) arttıkça blok köşelerindeki gerilmeler azalırken, blok ortasına doğru blok altındaki gerilmeler artmaktadır.
- FD tabaka ile homojen tabaka ara yüzeyindeki ve homojen tabaka ile rijit düzlem ara yüzeyindeki ilk ayrılma yükleri ve ayrılma mesafelerinin belirlenmesi için çeşitli boyutsuz büyüklükler için $\sigma_y(x,y)/P/h_1$ gerilme analizleri gerçekleştirilmiştir. Blok mesafesi ($(c-b)/h_1$) fazla olması durumunda diğer bir deyişle bloklar birbirlerinden uzaklaştıkça, ayrılma daha uzak noktada meydana gelmiş, ilk ayrılma yüklerinde artışlar görülmektedir.
- Rijitlik parametresi (βh_1) arttıkça yani rijitlik derinlik boyunca azaldıkça, her iki tabaka için de ilk ayrılma yükleri azalırken, ilk ayrılma uzaklıklarında artış gerçekleşmektedir.
- Tabaka yükseklikleri oranı arttıkça yani ikinci tabakanın yüksekliği azaldıkça ilk ayrılma yüklerinde bir azalma görülmektedir. Yani homojen tabaka yüksekliği azaldıkça tabakaların ara yüzeyinde daha kolay bir şekilde ayrılma meydana gelmektedir.
- Blok genişliğinin ($(d-c)/h_1$) artması durumunda, ilk ayrılma yüklerinde ve ilk ayrılma uzaklıklarında artış görülmektedir.
- Kayma modülü oranı (μ_2/μ_{h1}) arttıkça FD tabaka ile homojen tabaka ara yüzeyindeki ilk ayrılma yüklerinde artış görülürken, ilk ayrılma uzaklığı bloklara

yaklaşmaktadır. Homojen tabaka ile rijit düzlem ara yüzeyinde ise bu oran arttıkça ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklıklarında bir azalma meydana gelmektedir.

- x eksenini boyunca her iki tabakaya ait $\sigma_x(x,y)/P/h_1$ gerilme yayılışları da irdelenmiştir. FD tabakanın alt yüzey rijitliğinin azalması halinde çekme gerilmesi değerlerinin blok altlarına doğru azaldığı görülmektedir. Yoğunluk değişim parametresine göre tabakalar boyunca meydana gelen $\sigma_{x1}(x,-h_1)/P/h_1$ ve $\sigma_{x2}(x,-h)/P/h_1$ gerilme yayılışları incelendiğinde, FD tabakanın üst yüzeyindeki yoğunluğun azalması halinde çekme gerilmelerinde bir azalma görülürken, basınç gerilmelerinde ise bir artış gözlenmektedir. Bloklar arasındaki uzaklığın değişimine göre $\sigma_{x1}(x,-h_1)/P/h_1$ ve $\sigma_{x2}(x,-h)/P/h_1$ gerilme yayılışları incelendiğinde ise, mesafe arttıkça tabaka boyunca çekme ve basınç gerilmelerinde artış gözlenmektedir.
- Blok genişlikleri ve kayma modülü oranı değişimine göre $\sigma_{x1}(x,-h_1)/P/h_1$ ve $\sigma_{x2}(x,-h)/P/h_1$ gerilme yayılışları incelendiğinde, blok genişlikleri ve kayma modülü oranı arttıkça tabakaların x eksenini boyunca çekme ve basınç gerilmelerinde azalma gözlenmektedir.
- $\sigma_{y1}(x,-h_1)/P/h_1$ ve $\sigma_{y2}(x,-h)/P/h_1$ gerilme yayılışları tabaka derinlikleri boyunca çeşitli boyutsuz büyüklükler için de incelenmiştir. Tabakanın alt yüzeyine doğru rijitliğin artması halinde blokların ortasına denk gelen kesitte en küçük gerilme değerlerine, bloklar arasındaki kesitte ise en büyük gerilme değerlerine ulaşılmaktadır. Ayrıca FD tabakanın alt yüzeyindeki gerilmeler ile homojen tabakanın üst yüzeyindeki gerilme değerleri eşit çıkmaktadır. FD tabakanın alt yüzeyinin yoğunluğu üst yüzeyin yoğunluğuna göre daha büyük olması halinde daha büyük gerilmeler elde edilmektedir. Benzer durum blokların ortasındaki kesitte meydana gelen gerilme yayılışının, yoğunluk parametresine göre değişimi için de geçerlidir. Bloklar arası mesafe arttıkça iki blok ortasındaki kesitte meydana gelen gerilmeler azalmaktadır. Blok genişliklerine göre yapılan analizde, blokların ortasında, en büyük blok genişlikleri için en küçük gerilmeler meydana gelmektedir.
- Blokların dışındaki bölgede oluşan $\sigma_{y1}(x,y)/P/h_1$ gerilmelerinin fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın üst yüzeyinde sıfır olması ve fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın alt yüzeyinde meydana gelen gerilmelerin, homojen

tabakanın üst yüzeyinde meydana gelen gerilmelere eşit olması problemin sınır şartlarının sağlandığını göstermektedir.

- Kayma gerilmesi τ_{xy} dağılımı y ekseninde; kayma modülleri oranı, rijitlik parametresi, bloklar arası mesafe ve yük oranı gibi boyutsuz büyüklükler için incelenmiştir. Tabakalarda kayma gerilmelerinin maksimum değeri tabakaların orta noktasında veya bu noktaya çok yakın bir yerde olmaktadır. Tabakaların alt ve üst yüzeylerindeki kayma gerilmeleri, yani $\tau_{xy1}(x,0)$, $\tau_{xy1}(x,-h_1)$, $\tau_{xy2}(x,-h_1)$ ve $\tau_{xy2}(x,-h)$ gerilmeleri sıfır olup, problemin tanımında verilen sınır şartlarını sağlamaktadır. Kayma gerilmesi oranı arttıkça her iki tabaka için de kayma gerilmelerinde bir azalma gerçekleşmektedir. Rijitlik parametresi (βh_1) arttıkça FD tabakanın kayma gerilmelerinde bir artış görülürken, homojen tabaka için bir azalma gerçekleşmiş fakat bu azalma önemli miktarda olmamaktadır. Bloklar arası mesafe arttıkça ve yük oranı azaldıkça kayma gerilmelerinde azalma gerçekleşmektedir.
- Yükün (λ) ilk ayrılma yükünden (λ_{cr}) büyük olması durumunda tabaka ara yüzeylerinde ve FD tabaka ile rijit düzlem ara yüzeyinde ayrılmalar meydana gelmektedir. Bu durumda her iki temas yüzeyinde de $\sigma_{y1}(x,-h_1)/P/h_1$ ve $\sigma_{y2}(x,-h)/P/h_1$ gerilme yayılışlarını veren grafikler incelendiğinde sürekli ve süreksiz temas bölgeleri görülmektedir. Gerilme değerleri birinci blok kenarından itibaren artmakta yük altında değer iyice büyümekte, bloklar arasında gerilme değerleri tekrar azalmakta daha sonra yeniden artarak ikinci blok altında en büyük değerini almakta, sonra azalarak FD tabaka ile homojen tabaka arasında (e/h , f/h) ve homojen tabaka ile rijit düzlem arasında (k/h_1 , l/h_1) ayrılma bölgeleri boyunca sıfır olmaktadır. Her iki temas yüzeyi için de ayrılmanın bittiği f/h ve l/h değerlerinden sonra ise gerilme değerleri artarak λ yük faktörüne yakınsamaktadır. Rijitlik parametresi arttıkça, her iki ayrılma yüzeyinde ayrılma bölgesi büyümekte ve bu bölgede meydana gelen kabarmalar artmaktadır. Yoğunluk parametresi arttıkça rijitlik parametresi değişimine benzer olarak ayrılma bölgesi büyümekte ve bu bölgede meydana gelen kabarmalarda artış gözlenmektedir. Bloklar arasındaki mesafe değişiminde yine tabakalar arasında ve homojen tabaka ile rijit düzlem arasında benzer durumlar gözlenmektedir. Kayma modülleri oranı artırıldığında yani alt tabakanın rijitliği, üst tabakaya göre arttığında her iki temas yüzeyinde de ayrılmanın daha kolay meydana geldiği,

ayrılma bölgelerinin büyüdüğü ve daha büyük kabarma değerlerinin elde edildiği görülmektedir.

- Bu çalışmada aynı zamanda, analitik çözümden elde edilen sonuçların kıyaslanabilmesi için sonlu elemanlar yöntemi kullanılmıştır. Sonlu elemanlar yöntemi (SEM) ile analizler gerçekleştirilirken, ANSYS Mechanical APDL paket programından yararlanılmıştır. Programa FD malzemenin özelliklerinin atanabilmesi için daha önce yazılan bir makro kullanılmıştır. Sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen normal gerilmeler ve temas gerilmeleri problemin tanımında verilen sınır şartlarını sağlamaktadır. Ayrıca sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen temas gerilmeleri, normal gerilmeler, ilk ayrılma uzaklıkları ve ayrılma bölgeleri değerlerinin analitik sonuçlarla oldukça uyumlu olduğu görülmektedir. Böylece temas problemleri için daha kısa sürede çözüm elde edilebilen sonlu elemanlar yönteminin alternatif bir çözüm olabileceği görülmüştür.
- Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler gerek üretim zorluğu gerekse pahalı olmaları sebebiyle inşaat, makine, elektronik ve otomotiv sektöründe kullanımları sınırlıdır. Buna rağmen teknolojinin ilerlemesi, FD malzemenin üretiminin yaygınlaşması ve maliyetinin düşmesi ile söz konusu sektörlerde de kullanımı artacaktır. Yapılan bu çalışma sonucunda her iki tabaka için de homojen malzeme kullanmak yerine, birini FD malzeme olarak kullanmak, blok gibi iki farklı yük etkeninin birbirleriyle etkileşimini azalttığı, malzeme tabakalarının altlarında meydana gelecek gerilmeleri düşürdüğü görülmüştür. Bu sonuçla bina altlarında kullanılacak dolgu tabakalarına, makinelerin altına yerleştirilen tabakalara, sabit yüklere maruz kalan yüzeylere FD tabaka eklemenin, tabakalara yüklenecek yapıların ve elemanların temas etkileşimini düşürüp, tabakaların alt yüzeylerindeki gerilmeleri azaltabileceği, yüzeyler arasında oluşabilecek ayrılmayı zorlaştırabileceği söylenebilir.

5. ÖNERİLER

Bu tezde “Rijit Düzlem Üzerine Oturan ve İki Rijit Düz Blok Aracılığıyla Yüklenmiş Biri Fonksiyonel Derecelendirilmiş İki Tabakanın Temas Problemi” başlıklı çalışma gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmada elde edilen sonuçlar dikkate alınarak gelecekte yapılabilecek çalışmalara yön vermesi için aşağıda bir takım önerilerde bulunulmuştur.

- Çözülen problemdeki homojen tabaka yerine FD tabaka kullanılarak temas problemi çözülebilir.
- Mesnetlenme koşulları değiştirilerek temas problemi çözülebilir.
- Her iki tabaka yüzeyinde de aynı anda ayrılmanın olacağı durum için problem çözümü yapılabilir.
- Bloğun hareketli olması durumu için problem çözülebilir.
- Bu problemde kullanılan rijit düz bloklar yerine, daha fazla sayıda dairesel bloklar kullanılarak problem çözülebilir.

6. KAYNAKLAR

- Abanoz, M., 2019. Rijit Bir Panç Aracılığıyla Yüklenmiş ve Rijit Temele Bağlanmış Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabakanın Temas Problemi, Yüksek Lisans Tezi, Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Rize.
- Abhilash, M.N. ve Murthy, H., 2014. Finite Element Analysis of 2-D Elastic Contacts Involving FGMs, International Journal of Computer Methods Engineering Science Mechanic, 15, 3, 253–257.
- Adıbelli, H., 2010. Elastik Yarım Düzleme Oturan Simetrik Yüklü Yapışık Çift Tabakada Değme ve Çatlak Problemi, Yüksek Lisans Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Adıyaman G. ve Birinci A., 2018. A general solution for the receding contact problem of a functionally graded layer resting on a Winkler foundation. Journal of Structural Engineering & Applied Mechanics, 1, 3, 136-146.
- Adıyaman G., Öner E. ve Birinci A., 2017. Continuous and discontinuous contact problem of a functionally graded layer resting on a rigid foundation, Acta Mechanica, 228, 3003-3017.
- Adıyaman G., Öner E. ve Birinci A., 2018. The general solution of a layered medium resting on a rigid foundation. Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 9, 213-222.
- Adıyaman, G., 2013. İki Çeyrek Düzlem Üzerine Oturan Elastik Bir Tabakanın Sürtünmesiz ve Ayrılmalı Temas Problemi, Yüksek Lisans Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Adıyaman, G., 2019. Tabakalı Ortamlarda Temas Problemlerinin Genel Çözümü ve Bu Çözüme İlişkin Bir Bilgisayar Programının Geliştirilmesi, Doktora Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Akın, E., 2006. Çentik Çekme Deneyinin Sonlu Elemanlar Yöntemiyle İncelenmesi, Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü. İstanbul.
- Alinia, Y., Hosseini-nasab, M. ve Güler, M.A., 2018. The sliding contact problem for an orthotropic coating bonded to an isotropic substrate, European Journal of Mechanics, 70, 156-171.
- Arslan, O., 2020. Plane Contact Problem Between a Rigid Punch and a Bidirectional Functionally Graded Medium, European Journal of Mechanics, 80, 103925,1-14.
- Balcı, N.M. ve Dağ, S., 2018. Dynamic Frictional Contact Problems Involving Elastic Coating, Tribology International, 124, 70-91.

- Balcı, N.M. ve Dağ, S., 2019. Solution of the Dynamic Frictional Contact Problem Between a Functionally Graded Coating and a Moving Cylindrical Punch, International Journal of Solids and Structures, 161, 267-281.
- Birinci, A., 1998. Alt Tabakasında Düşey Bir Çatlağı Bulunan ve Rijit Bir Blok Aracılığı İle Yüklenen Bileşik Tabaka Problemi, Doktora Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Birinci, A. ve Eyüboğlu, A., 2020. A Double Receding Contact Problem of a Functionally Graded Layer and a Homogeneous Elastic Layer Resting on a Winkler Foundation, Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 38, 2, 667-686.
- Birinci, A., Kahya, V. ve Erdöl, R., 1997. Elastik Mesnete Oturan Bileşik Tabakalarda Sürekli Değme Problemi, X. Ulusal Mekanik Kongresi, Eylül, İstanbul, Bildiriler Kitabı, 165-173.
- Bora, P., 2016. İki Rijit Dikdörtgen Blok ile Yüklenmiş Elastik Yarı Sonsuz Düzlem Üzerine Oturan İki Elastik Tabakanın Temas Problemi, Doktora Tezi, KTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Chen, W. T. ve Engel, P.A., 1972. Impact and Contact Stress Analysis in Multilayered Media, International Journal of Solids and Structure, 8, 1257-1281.
- Chidlow, S.J., Chong, W.W.F. ve Teodorescu, M., 2013. On the Two-Dimensional Solution of Both Adhesive and Non-adhesive Contact Problems Involving Functionally Graded Materials, European Journal of Mechanics, 42, 97, 136-140.
- Çakıroğlu, F. L., Çakıroğlu, M. ve Erdöl, R., 2001. Contact Problems for Two Elastic Layers Resting on Elastic Half-Plane, Journal of Engineering Mechanics, 127, 2, 113-118.
- Çömez, İ., 2009. Rijit Dairesel Bir Pançla Bastırılan Elastik Tabaka ve Yarım Düzlemin Sürtünmeli Değme Problemi, Doktora Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Çömez, İ., 2019. Continuous and Discontinuous Contact Problem of a Functionally Graded Layer Pressed by a Rigid Cylindrical Punch. European Journal of Mechanics/A Solids, 73, 437-448.
- Çömez, İ., 2019. Frictional Moving Contact Problem of an Orthotropic Layer Indented by a Rigid Cylindrical Punch, Mechanics of Materials, 133, 120-127.
- Çömez, İ., 2020. Contact Mechanics of the Functionally Graded Monoclinic Layer, European Journal of Mechanics/A Solids, 83, 104-118.
- Çömez, İ., Güler, M.A. ve El-Borgi, S., 2020. Continuous and Discontinuous Contact Problems of a Homogeneous Piezoelectric Layer Pressed by a Conducting Rigid Flat Punch, Acta Mechanica, 231, 3, 957-976.

- Çömez, İ., El-Borgi, S. ve Yıldırım, B., 2019. Frictional Receding Contact Problem of a Functionally Graded Layer Resting on a Homogeneous Coated Half-Plane, Archive of Applied Mechanics, 90, 2113-2131.
- Çömez, İ. ve Yılmaz, K. B., 2019. Mechanics of Frictional Contact for an Arbitrary Oriented Orthotropic Material, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 99, 3, e201800084.
- Çömez, İ., Yılmaz, K.B., Güler, M.A. ve Yıldırım, B., 2019. Frictionless Contact Problem Between a Rigid Moving Punch and a Homogeneous Layer Resting on a Winkler Foundation, Journal of Structural Engineering and Applied Mechanics, 2, 2, 75-87.
- Çömez, İ., Yılmaz, K.B., Güler, M.A. ve Yıldırım, B., 2019. On the Plane Frictional Contact Problem of a Homogeneous Orthotropic Layer Loaded by a Rigid Cylindrical Stamp, Archive of Applied Mechanics, 89, 7, 1403-1419.
- El-Borgi, S. ve Çömez, İ., 2017. A Receding Frictional Contact Problem Between a Graded Layer and a Homogeneous Substrate Pressed by a Rigid Punch, Mechanics of Materials, 114, 201-214.
- El-Borgi, S., Abdelmoula, R. ve Keer L., 2006. A Receding Contact Problem Between a Functionally Graded Layer and a Homogeneous Substrate, International Journal of Solids and Structures, 43, 658-674.
- Elloumi, R., Kallel-Kamoun, I. ve El-Borgi, S., 2010. A Fully Coupled Partial Slip Contact Problem in a Graded Half-Plane, Mechanics of Materials, 42, 417-428.
- Erdogan, F. ve Gupta, G.D., 1972. On the Numerical Solution of Singular Integral Equations, Quarterly Journal of Applied Mathematics, 29, 525-534.
- Erhan, E. E., 2011. Kiriş Elemanlardan Oluşan Bir Yapının Sonlu Eleman Analizi, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Erken, B., 2009. Kafes Kirişli Portal Kren Ana Kirişinin Sonlu Elemanlar Yöntemiyle Analizi ve Modellenmesi, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü 15-20.
- Eyüboğlu, A., 2019. Winkler Temele Oturan ve Rijit Dairesel Blok Aracılığıyla Yüklenen Biri Fonksiyonel Derecelendirilmiş İki Tabakanın Temas Problemi, Yüksek Lisans Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Geçit, M.R., 1986. Axisymmetric Contact Problem for a Semi Infinite Cylinder and Half Space, International Journal of Engineering Sciences, 24, 8, 1245-1256.
- Giannakopoulos, A.E. ve Pallot, P. 2000. Two-Dimensional Contact Analysis of Elastic Graded Materials. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 48, 1597-1631.

- Guler, M.A. ve Erdogan, F., 2004. Contact Mechanics of Graded Coatings. International Journal of Solids and Structures, 41, 3865–3889.
- Güler, M.A., Gülver, Y.F. ve Nart, E., 2012. Contact Analysis of Thin Films Bonded to Graded Coatings, International Journal of Mechanical Science, 55,1, 50–64.
- Güler, M.A., Kucuksucu, A., Yilmaz, K.B. ve Yildirim, B. 2017. On the Analytical and Finite Element Solution of Plane Contact Problem of a Rigid Cylindrical Punch Sliding over a Functionally Graded Orthotropic Medium, International Journal of Mechanical Sciences, 120, 12-29.
- Güven, İ. ve Madenci, E., 2006. The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS, Springer, Arizona, 686.
- Hertz, H., 1895. Gessammelte Werke von Heinrich Hertz, Leipzig.
- Jin F., Guo X. ve Gao H., 2013. Adhesive Contact on Power-Law Graded Elastic Solids: the JKR–DMT Transition Using a Double-Hertz Model, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 61, 2473-2492.
- Kahya, V., 2003. İki Tabakalı Elastik Ortamda Sürekli ve Süreksiz Temas Problemlerinin İncelenmesi, Doktora Tezi, K.T.Ü, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Kahya, V., Özşahin, T.Ş., Birinci, A. ve Erdöl, R., 2007. A Receding Contact Problem for an Anisotropic Elastic Medium Consisting of a Layer and a Half Plane, International Journal of Solids and Structures, 44, 17, 5695-5710.
- Karabulut, P. M., Yaylacı, M. ve Birinci, A., 2018. Finite Element Solution of the Contact Problem, Turkish Journal of Science & Technology, Volume 13, 1, 113-117.
- Keer, L.M. ve Chantaramungkorn, K., 1972. Loss of Contact Between an Elastic Layer and Half-Space, Journal of Elasticity, 2, 3, 191-197.
- Klarbring, A., 1986. A Mathematical Programming Approach to Three Dimensional Contact Problems with Friction, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 58, 2, 175-200.
- Küçüksucu, A., Güler, M.A ve Avcı, A., 2015. Mechanics of Sliding Frictional Contact For A Graded Orthotropic Half-Plane. Acta Mechanica, 226,10, 3333–74.
- Li J., Liu J.Z., Korakianitis T. ve Wen P.H., 2017. Finite Block Method in Fracture Analysis with Functionally Graded Materials, Engineering Analysis with Boundary Elements, 82, 57-67.
- Liu, Z.X., Yan, J. ve Mi, C.W., 2018. On The Receding Contact Between a Two-Layer Inhomogeneous Laminate and a Half-Plane, Structural Engineering and Mechanics, 66, 3, 329-341.

- Loboda, V.V. ve Tauchert, T.R., 1985. The Elastic Contact Problem for Dissimilar Orthotropic Semi-Infinite and Infinite Strips, International Journal of Engineering Sciences, 23, 12, 1337-1349.
- Lopes, J.P. ve Hills, D.A., 2019. The Axisymmetric Frictional Receding Contact of a Layer Pressed Against a Half-Space by a Point Force, International Journal of Solids and Structures, 171, 47-53.
- Ma, L. F., Korsunsky, A. M. ve Sun, K., 2006. Contact of Coated Systems under Sliding Conditions, ASME Journal of Tribology, 128, 886-890.
- Ma, L. F. ve Korsunsky, A. M., 2004. Fundamental Formulation for Frictional Contact Problems of Coated Systems, International Journal of Solids and Structures, 41, 11-12, 2837-2854.
- Nikbakht, A., Arezoodar, A.F., Sadighi, M., Zucchelli, A. ve Lari A.F., 2013. Frictionless Elastic Contact Analysis of a Functionally Graded Vitreous Enamelled Low Carbon Steel Plate and a Rigid Spherical Indenter, Composite Structures, 96, 484-501.
- Nyqvist, J., Kadiric, A., Ioannides, S. ve Sayles R., 2015. Semi-Analytical Model for Rough Multilayered Contacts. Tribology International, 87, 98–112.
- Öner, E., 2011. Rijit Dairesel Bir Panç Aracılığı ile Yüklenmiş ve Elastik Yarı Sonsuz Düzleme Oturan İki Elastik Tabakanın Sürekli Temas Problemi, Yüksek Lisans Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Öner, E., Adıyaman, G. ve Birinci, A., 2017. Continuous Contact Problem of a Functionally Graded Layer Resting on an Elastic Half-Plane, Archives of Mechanics, 69, 53-73.
- Öner E. ve Birinci, A., 2020. Investigation of the Solution for Discontinuous Contact Problem Between a Functionally Graded (FG) Layer and Homogeneous Half-Space, Archive Of Applied Mechanics, 90, 2799-2819.
- Özşahin, T.Ş. ve Çakıroğlu, A.O., 2003. İki Elastik Blok Yardımı ile Yüklenmiş Elastik Tabakada Temas Problemi, XIII. Ulusal Mekanik Kongresi, 8-12 Eylül, Gaziantep, 647-656.
- Özşahin, T.Ş., 2000. Rijit İki Blok Üzerine Oturan Bileşik Tabakada Sürekli ve Süreksiz Temas Problemi, Doktora Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Patra, Rajesh, Barik, S.P. ve Chaudhuri, P.K., 2017. Frictionless Contact of a Rigid Punch Indenting an Elastic Layer Having Piezoelectric Properties, Acta Mechanica, 228, 367-384.
- Polat, A., 2019. Elastik Yarım Düzleme Oturan ve İki Rijit Blok Aracılığıyla Yüklenmiş Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabakanın Temas Problemi, Doktora Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

- Polat, A., Kaya, Y., Bora, P., Kouider, B. ve Özşahin, T.Ş., 2019. Investigation of the Contact Problem for a Partial Functionally Graded Layer by Using Finite Element Method, Journal of Structural Engineering Applied Mechanics, 1, 4, 185-193.
- Polat, A., Kaya, Y., Kouider, B. ve Özşahin, T.Ş., 2019. Frictionless Contact Problem for a Functionally Graded Layer Loaded Through Two Rigid Punches Using Finite Element Method, Journal of Mechanics, 35, 5, 591-600.
- Polat, A., Kaya, Y. ve Özşahin, T. Ş., 2018. Analytical Solution to Continuous Contact Problem for a Functionally Graded Layer Loaded Through Two Dissimilar Rigid Punches, Meccanica, 53, 14, 3565-3577.
- Rekik M., Neifar M. ve El-Borgi S., 2010. An Axisymmetric Problem of an Embedded Crack in a Graded Layer Bonded to a Homogeneous Half-Space, International Journal of Solids and Structures, 47, 2043-2055.
- Su, J., Ke L.L., El- Borgi, S., Xiang, Y. ve Wang Y.S., 2018. An Effective Method for The Sliding Frictional Contact of Conducting Cylindrical Punch on FGPMs, International Journal of Solids and Structures, 141-142, 127-136.
- Şengül Şabano, B., 2020. Elastik Yarı Sonsuz Düzleme Oturan ve Yayılı Yük ile Yüklenen Fonksiyonel Derecelendirilmiş İki Tabakanın Temas Problemi, Yüksek Lisans Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Talezadehlari A., Nikbakht A., Sadighi M. ve Zucchelli A., 2016. Numerical Analysis of Frictional Contact in The Presence of a Surface Crack in a Functionally Graded Coating Substrate System, International Journal of Mechanical Science, 117, 286-298.
- Wu, T., Wu J. ve Zhang, L., 2019. An Analytical Analysis of Receding Contact Between a Compressible Elastic Thin Film and a Rigid Substrate Due to Spherical Indentation, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik ZAMP, 70, 126, 1-13.
- Yan J. ve Mi C., 2017. On the Receding Contact between an Inhomogeneously Coated Elastic Layer and a Homogeneous Half-Plane, Mechanics of Materials, 112, 18-27.
- Yan, J. ve Mi, C., 2020. On the Receding Contact Between a Homogeneous Elastic Layer and a Half-plane Substrate Coated with Functionally Graded Materials, International Journal of Computational Methods, 17, 1, 1-21.
- Yaylacı, M., 2013. İki Elastik Çeyrek Düzleme Oturan İki Elastik Tabakanın Temas Problemi, Doktora Tezi, K.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Yaylacı, M., 2017. Comparison Between Numerical and Analytical Solutions for the Receding Contact Problem, Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 2, 333-346.

- Yaylacı, M. ve Terzi, C., 2018. Temas Problemlerinde Sonlu Elemanlar Yönteminin Doğruluğunun İncelenmesi, Mühendislik Bilimleri ve Tasarım Dergisi, 6, 3, 511-519.
- Yaylacı, M., Terzi, C. ve Avcar, M., 2019. Numerical Analysis of the Receding Contact Problem of Two Bonded Layers Resting on an Elastic Half Plane, Structural Engineering and Mechanics, 72, 6, 775-783.
- Yaylı, M., 2019. Yarım Düzlem Üzerine Oturan Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabakanın Temas Problemi, Yüksek Lisans Tezi, Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Rize.
- Yıldırım, B., Yılmaz, K. B., Çömez, İ. ve Güler, M. A., 2019. Double Frictional Receding Contact Problem for an Orthotropic Layer Loaded by Normal and Tangential Forces, Meccanica, 54, 14, 2183-2206.
- Yıldız, A., 2011. Kaynaklı Parçaların Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Analizi, Yüksek Lisans Tezi, Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Bursa.
- Yılmaz, K. B., Çömez, İ., Yıldırım, B., Güler, M. A. ve El-Borgi, S., 2018. Frictional Receding Contact Problem for a Graded Bilayer System Indented by a Rigid Punch, International Journal of Mechanical Sciences, 141, 127-142.
- Yılmaz, K. B., Çömez, İ., Güler, M. A. ve Yıldırım, B., 2019. Analytical and Finite Element Solution of the Sliding Frictional Contact Problem for a Homogeneous Orthotropic Coating-İsotropic Substrate System, ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 99, 3, e201800117.
- Yılmaz, K.B., Çömez, İ., Güler, M.A. ve Yıldırım, B., 2019. Sliding Frictional Contact Analysis of a Monoclinic Coating/Isotropic Substrate System, Mechanics of Material, 137, 103-132.
- Yılmaz, K. B., Çömez, İ., Güler, M. A. ve Yıldırım, B., 2019. The Effect of Orthotropic Material Gradation on the Plane Sliding Frictional Contact Mechanics Problem, The Journal of Strain Analysis for Engineering Design, 54, 4, 254-275.

7. EKLER

$$k_1(x, t) = \int_0^{\infty} (\xi / \Delta) (\kappa_2 + 1) \left(\begin{aligned}
 & \left\{ (\kappa_2 + 1) \left[(D_2 D_4 E_3 - D_3 D_4 E_2) (2A_{11} - A_{21} - A_{31}) \right. \right. \\
 & + (D_3 D_4 E_2 - D_2 D_3 E_4) (2A_{12} - A_{22} - A_{32}) \\
 & + (D_2 D_3 E_4 - D_2 D_4 E_3) (2A_{13} - A_{23} - A_{33}) \left. \right] \\
 & + 4\xi m \left[(D_3 D_4 n_2 - D_2 D_4 n_3) (4\xi (h_1 - h) A_{41} - A_{51} + A_{61}) \right. \\
 & + (D_2 D_3 n_4 - D_4 D_3 n_2) (4\xi (h_1 - h) A_{42} - A_{52} + A_{62}) \\
 & + (D_4 D_2 n_3 - D_3 D_2 n_4) (4\xi (h_1 - h) A_{43} - A_{53} + A_{63}) \left. \right] \left. \right\} e^{s_1 h} \\
 & + \left\{ (\kappa_2 + 1) \left[(D_3 D_4 E_1 - D_1 D_4 E_3) (2A_{15} - A_{25} - A_{35}) \right. \right. \\
 & + (D_1 D_3 E_4 - D_3 D_4 E_1) (2A_{16} - A_{26} - A_{36}) \\
 & + (D_1 D_4 E_3 - D_1 D_3 E_4) (2A_{13} - A_{23} - A_{33}) \left. \right] \\
 & + 4\xi m \left[(D_1 D_4 n_3 - D_3 D_4 n_1) (4\xi (h_1 - h) A_{45} - A_{55} + A_{65}) \right. \\
 & + (D_3 D_4 n_1 - D_1 D_3 n_4) (4\xi (h_1 - h) A_{46} - A_{56} + A_{66}) \\
 & + (D_1 D_3 n_4 - D_1 D_4 n_3) (4\xi (h_1 - h) A_{43} - A_{53} + A_{63}) \left. \right] \left. \right\} n_2 e^{s_2 h} \\
 & + \left\{ (\kappa_2 + 1) \left[(D_1 D_4 E_2 - D_2 D_4 E_1) (2A_{14} - A_{24} - A_{34}) \right. \right. \\
 & + (D_2 D_4 E_1 - D_1 D_2 E_4) (2A_{16} - A_{26} - A_{36}) \\
 & + (D_1 D_2 E_4 - D_1 D_4 E_2) (2A_{12} - A_{22} - A_{32}) \left. \right] \\
 & + 4\xi m \left[(D_2 D_4 n_1 - D_1 D_4 n_2) (4\xi (h_1 - h) A_{44} - A_{54} + A_{64}) \right. \\
 & + (D_1 D_2 n_4 - D_2 D_4 n_1) (4\xi (h_1 - h) A_{46} - A_{56} + A_{66}) \\
 & + (D_1 D_4 n_2 - D_1 D_2 n_4) (4\xi (h_1 - h) A_{42} - A_{52} + A_{62}) \left. \right] \left. \right\} n_3 e^{s_3 h} \\
 & + \left\{ (\kappa_2 + 1) \left[(D_2 D_3 E_1 - D_1 D_3 E_2) (2A_{14} - A_{24} - A_{34}) \right. \right. \\
 & + (D_1 D_2 E_3 - D_2 D_3 E_1) (2A_{15} - A_{25} - A_{35}) \\
 & + (D_1 D_3 E_2 - D_1 D_2 E_3) (2A_{11} - A_{21} - A_{31}) \left. \right] \\
 & + 4\xi m \left[(D_1 D_3 n_2 - D_2 D_3 n_1) (4\xi (h_1 - h) A_{44} - A_{54} + A_{64}) \right. \\
 & + (D_2 D_3 n_1 - D_1 D_2 n_3) (4\xi (h_1 - h) A_{45} - A_{55} + A_{65}) \\
 & + (D_1 D_2 n_3 - D_1 D_3 n_2) (4\xi (h_1 - h) A_{41} - A_{51} + A_{61}) \left. \right] \left. \right\} n_4 e^{s_4 h}
 \end{aligned} \right) [\cos \xi(t - x)] d\xi$$

(343)

$$\begin{aligned}
k_2(x,t) = \frac{e^{\beta h} (\kappa_2 + 1)}{(\kappa_1 - 1)} \int_0^\infty (1/\Delta) & \left. \begin{aligned}
& e^{s_1 h} [i\xi (3 - \kappa_1) + s_1 n_1 (\kappa_1 + 1)] \\
& \{ (\kappa_2 + 1) [(D_2 D_4 E_3 - D_3 D_4 E_2)(2A_{11} - A_{21} - A_{31}) \\
& + (D_3 D_4 E_2 - D_2 D_3 E_4)(2A_{12} - A_{22} - A_{32}) \\
& + (D_2 D_3 E_4 - D_2 D_4 E_3)(2A_{13} - A_{23} - A_{33})] \\
& + 4\xi m [(D_3 D_4 n_2 - D_2 D_4 n_3)(4\xi(h_1 - h)A_{41} - A_{51} + A_{61}) \\
& + (D_2 D_3 n_4 - D_4 D_3 n_2)(4\xi(h_1 - h)A_{42} - A_{52} + A_{62}) \\
& + (D_4 D_2 n_3 - D_3 D_2 n_4)(4\xi(h_1 - h)A_{43} - A_{53} + A_{63})] \} + \\
& e^{s_2 h} [i\xi (3 - \kappa_1) + s_2 n_2 (\kappa_1 + 1)] \\
& \{ (\kappa_2 + 1) [(D_3 D_4 E_1 - D_1 D_4 E_3)(2A_{15} - A_{25} - A_{35}) \\
& + (D_1 D_3 E_4 - D_3 D_4 E_1)(2A_{16} - A_{26} - A_{36}) \\
& + (D_1 D_4 E_3 - D_1 D_3 E_4)(2A_{13} - A_{23} - A_{33})] \\
& + 4\xi m [(D_1 D_4 n_3 - D_3 D_4 n_1)(4\xi(h_1 - h)A_{45} - A_{55} + A_{65}) \\
& + (D_3 D_4 n_1 - D_1 D_3 n_4)(4\xi(h_1 - h)A_{46} - A_{56} + A_{66}) \\
& + (D_1 D_3 n_4 - D_1 D_4 n_3)(4\xi(h_1 - h)A_{43} - A_{53} + A_{63})] \} \\
& e^{s_3 h} [i\xi (3 - \kappa_1) + s_3 n_3 (\kappa_1 + 1)] \\
& \{ (\kappa_2 + 1) [(D_1 D_4 E_2 - D_2 D_4 E_1)(2A_{14} - A_{24} - A_{34}) \\
& + (D_2 D_4 E_1 - D_1 D_2 E_4)(2A_{16} - A_{26} - A_{36}) \\
& + (D_1 D_2 E_4 - D_1 D_4 E_2)(2A_{12} - A_{22} - A_{32})] \\
& + 4\xi m [(D_2 D_4 n_1 - D_1 D_4 n_2)(4\xi(h_1 - h)A_{44} - A_{54} + A_{64}) \\
& + (D_1 D_2 n_4 - D_2 D_4 n_1)(4\xi(h_1 - h)A_{46} - A_{56} + A_{66}) \\
& + (D_1 D_4 n_2 - D_1 D_2 n_4)(4\xi(h_1 - h)A_{42} - A_{52} + A_{62})] \} \\
& e^{s_4 h} [i\xi (3 - \kappa_1) + s_4 n_4 (\kappa_1 + 1)] \\
& \{ (\kappa_2 + 1) [(D_2 D_3 E_1 - D_1 D_3 E_2)(2A_{14} - A_{24} - A_{34}) \\
& + (D_1 D_2 E_3 - D_2 D_3 E_1)(2A_{15} - A_{25} - A_{35}) \\
& + (D_1 D_3 E_2 - D_1 D_2 E_3)(2A_{11} - A_{21} - A_{31})] \\
& + 4\xi m [(D_1 D_3 n_2 - D_2 D_3 n_1)(4\xi(h_1 - h)A_{44} - A_{54} + A_{64}) \\
& + (D_2 D_3 n_1 - D_1 D_2 n_3)(4\xi(h_1 - h)A_{45} - A_{55} + A_{65}) \\
& + (D_1 D_2 n_3 - D_1 D_3 n_2)(4\xi(h_1 - h)A_{41} - A_{51} + A_{61})] \}
\end{aligned} \right) [\cos \xi(t-x)] d\xi
\end{aligned}
\tag{344}$$

$$k_{22}(x, t) = \int_0^{\infty} (\xi / \Delta)(\kappa_2 + 1)(4\xi Rm) \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} (D_2 D_4 F_3 - D_3 D_4 F_2)(4\xi(h-h_1)A_{74} - A_{84} + A_{94}) \\ + (D_3 D_4 F_2 - D_2 D_3 F_4)(4\xi(h-h_1)A_{73} - A_{83} + A_{93}) \\ + (D_2 D_3 F_4 - D_2 D_4 F_3)(4\xi(h-h_1)A_{72} - A_{82} + A_{92}) \end{array} \right] n_1 \\ + \left[\begin{array}{l} (D_3 D_4 F_1 - D_1 D_4 F_3)(4\xi(h-h_1)A_{74} - A_{84} + A_{94}) \\ + (D_1 D_3 F_4 - D_3 D_4 F_1)(4\xi(h-h_1)A_{73} - A_{83} + A_{93}) \\ + (D_1 D_4 F_3 - D_1 D_3 F_4)(4\xi(h-h_1)A_{71} - A_{81} + A_{91}) \end{array} \right] n_2 \\ + \left[\begin{array}{l} (D_1 D_2 F_4 - D_1 D_4 F_2)(4\xi(h-h_1)A_{71} - A_{81} + A_{91}) \\ + (D_2 D_4 F_1 - D_1 D_2 F_4)(4\xi(h-h_1)A_{72} - A_{82} + A_{92}) \\ + (D_1 D_4 F_2 - D_2 D_4 F_1)(4\xi(h-h_1)A_{74} - A_{84} + A_{94}) \end{array} \right] n_3 \\ + \left[\begin{array}{l} (D_2 D_3 F_1 - D_1 D_3 F_2)(4\xi(h-h_1)A_{73} - A_{83} + A_{93}) \\ + (D_1 D_2 F_3 - D_2 D_3 F_1)(4\xi(h-h_1)A_{72} - A_{82} + A_{92}) \\ + (D_1 D_3 F_2 - D_1 D_2 F_3)(4\xi(h-h_1)A_{71} - A_{81} + A_{91}) \end{array} \right] n_4 \end{array} \right\} [\cos \xi(t-x)] d\xi \quad (345)$$

$$k_3(x, t) = \int_0^{\infty} (1/\Delta) \left\{ \begin{array}{l} e^{-\xi(h_1+y)} \left\{ \begin{array}{l} -2\xi(\kappa_2+1)B_{41} \{ B_{11} [(2\xi h_1 + (\kappa_2+1))B_{21} - (4\xi h - 2\xi h_1 + (\kappa_2+1))B_{31}] \\ + B_{12} [(2\xi h_1 + (\kappa_2+1))B_{22} - (4\xi h - 2\xi h_1 + (\kappa_2+1))B_{32}] \\ + B_{13} [(2\xi h_1 + (\kappa_2+1))B_{23} - (4\xi h - 2\xi h_1 + (\kappa_2+1))B_{33}] \\ + B_{14} [(2\xi h_1 + (\kappa_2+1))B_{24} - (4\xi h - 2\xi h_1 + (\kappa_2+1))B_{34}] \} \\ + [(\kappa_2-1) - 2\xi(h_1+y)] \left\{ \begin{array}{l} B_{41} \{ B_{11} [B_{21} - B_{31}] + B_{12} [B_{22} - B_{32}] \\ B_{13} [B_{23} - B_{33}] + B_{13} [B_{23} - B_{33}] \} \end{array} \right\} \end{array} \right\} \\ + e^{\xi(h_1+y)} \left\{ \begin{array}{l} 2\xi(\kappa_2+1)B_{42} \{ B_{11} [(-4\xi h - 2\xi h_1 + (\kappa_2+1))B_{21} - (-2\xi h_1 + (\kappa_2+1))B_{31}] \\ + B_{12} [(-4\xi h - 2\xi h_1 + (\kappa_2+1))B_{22} - (-2\xi h_1 + (\kappa_2+1))B_{32}] \\ + B_{13} [(-4\xi h - 2\xi h_1 + (\kappa_2+1))B_{23} - (-2\xi h_1 + (\kappa_2+1))B_{33}] \\ + B_{14} [(-4\xi h - 2\xi h_1 + (\kappa_2+1))B_{24} - (-2\xi h_1 + (\kappa_2+1))B_{34}] \} \\ + [(\kappa_2-1) + 2\xi(h_1+y)] \left\{ \begin{array}{l} B_{42} \{ B_{11} [B_{21} - B_{31}] + B_{12} [B_{22} - B_{32}] \\ B_{13} [B_{23} - B_{33}] + B_{13} [B_{23} - B_{33}] \} \end{array} \right\} \end{array} \right\} \end{array} \right\} [\cos \xi(t-x)] d\xi \quad (346)$$

$$k_4(x, t) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-h\beta}(\kappa_2+1)}{(\kappa_1-1)} \left\{ [i\xi^\xi(3-\kappa_1) + (\kappa_1+1)n_1s_1] \right\} \left[\begin{array}{l} (\kappa_2+1) \left[\begin{array}{l} (D_2D_4F_3 - D_3D_4F_2)(2A_{11} - A_{21} - A_{31}) \\ + (D_3D_4F_2 - D_2D_3F_4)(2A_{12} - A_{22} - A_{32}) \\ + (D_2D_3F_4 - D_2D_4F_3)(2A_{13} - A_{23} - A_{33}) \end{array} \right] \\ + 4\xi m \left[\begin{array}{l} (D_3D_4n_2 - D_2D_4n_3)(4\xi(h_1 - h)A_{41} - A_{51} + A_{61}) \\ + (D_2D_3n_4 - D_4D_3n_2)(4\xi(h_1 - h)A_{42} - A_{52} + A_{62}) \\ + (D_4D_2n_3 - D_3D_2n_4)(4\xi(h_1 - h)A_{43} - A_{53} + A_{63}) \end{array} \right] \end{array} \right] e^{-h_1s_1} \right) \frac{\sin \xi(t-x)}{\Delta} d\xi \\
 + \frac{e^{-h\beta}(\kappa_2+1)}{(\kappa_1-1)} \left\{ [i\xi^\xi(3-\kappa_1) + (\kappa_1+1)n_2s_2] \right\} \left[\begin{array}{l} (\kappa_2+1) \left[\begin{array}{l} (D_3D_4F_1 - D_1D_4F_3)(2A_{15} - A_{25} - A_{35}) \\ + (D_1D_3F_4 - D_3D_4F_1)(2A_{16} - A_{26} - A_{36}) \\ + (D_1D_4F_3 - D_1D_3F_4)(2A_{13} - A_{23} - A_{33}) \end{array} \right] \\ + 4\xi m \left[\begin{array}{l} (D_1D_4n_3 - D_3D_4n_1)(4\xi(h_1 - h)A_{45} - A_{55} + A_{65}) \\ + (D_3D_4n_1 - D_1D_3n_4)(4\xi(h_1 - h)A_{46} - A_{56} + A_{66}) \\ + (D_1D_3n_4 - D_1D_4n_3)(4\xi(h_1 - h)A_{43} - A_{53} + A_{63}) \end{array} \right] \end{array} \right] e^{-h_2s_2} \\
 + \frac{e^{-h\beta}(\kappa_2+1)}{(\kappa_1-1)} \left\{ [i\xi^\xi(3-\kappa_1) + (\kappa_1+1)n_3s_3] \right\} \left[\begin{array}{l} (\kappa_2+1) \left[\begin{array}{l} (D_1D_4F_2 - D_2D_4F_1)(2A_{14} - A_{24} - A_{34}) \\ + (D_2D_4F_1 - D_1D_2F_4)(2A_{16} - A_{26} - A_{36}) \\ + (D_1D_2F_4 - D_1D_4F_2)(2A_{12} - A_{22} - A_{32}) \end{array} \right] \\ + 4\xi m \left[\begin{array}{l} (D_2D_4n_1 - D_1D_4n_2)(4\xi(h_1 - h)A_{44} - A_{54} + A_{64}) \\ + (D_1D_2n_4 - D_2D_4n_1)(4\xi(h_1 - h)A_{46} - A_{56} + A_{66}) \\ + (D_1D_4n_2 - D_1D_2n_4)(4\xi(h_1 - h)A_{42} - A_{52} + A_{62}) \end{array} \right] \end{array} \right] e^{-h_3s_3} \\
 + \frac{e^{-h\beta}(\kappa_2+1)}{(\kappa_1-1)} \left\{ [i\xi^\xi(3-\kappa_1) + (\kappa_1+1)n_4s_4] \right\} \left[\begin{array}{l} (\kappa_2+1) \left[\begin{array}{l} (D_2D_3F_1 - D_1D_3F_2)(2A_{14} - A_{24} - A_{34}) \\ + (D_1D_2F_3 - D_2D_3F_1)(2A_{15} - A_{25} - A_{35}) \\ + (D_1D_3F_2 - D_1D_2F_3)(2A_{11} - A_{21} - A_{31}) \end{array} \right] \\ + 4\xi m \left[\begin{array}{l} (D_1D_3n_2 - D_2D_3n_1)(4\xi(h_1 - h)A_{44} - A_{54} + A_{64}) \\ + (D_2D_3n_1 - D_1D_2n_3)(4\xi(h_1 - h)A_{45} - A_{55} + A_{65}) \\ + (D_1D_2n_3 - D_1D_3n_2)(4\xi(h_1 - h)A_{41} - A_{51} + A_{61}) \end{array} \right] \end{array} \right] e^{-h_4s_4} \right) \frac{\sin \xi(t-x)}{\Delta} d\xi
 \end{array}$$

(347)

$$k_5(x, t) = \int_0^\infty \frac{S(4\xi^2m)(\kappa_2+1)}{\Delta} \left(\left[\begin{array}{l} n_1 \left[\begin{array}{l} (D_2D_4F_3 - D_3D_4F_2)(4\xi(h-h_1)A_{74} - A_{84} + A_{94}) \\ + (D_3D_4F_2 - D_2D_3F_4)(4\xi(h-h_1)A_{73} - A_{83} + A_{93}) \\ + (D_2D_3F_4 - D_2D_4F_3)(4\xi(h-h_1)A_{72} - A_{82} + A_{92}) \end{array} \right] \\ + n_2 \left[\begin{array}{l} (D_3D_4F_1 - D_1D_4F_3)(4\xi(h-h_1)A_{74} - A_{84} + A_{94}) \\ + (D_1D_3F_4 - D_3D_4F_1)(4\xi(h-h_1)A_{73} - A_{83} + A_{93}) \\ + (D_1D_4F_3 - D_1D_3F_4)(4\xi(h-h_1)A_{71} - A_{81} + A_{91}) \end{array} \right] \\ + n_3 \left[\begin{array}{l} (D_1D_2F_4 - D_1D_4F_2)(4\xi(h-h_1)A_{71} - A_{81} + A_{91}) \\ + (D_2D_4F_1 - D_1D_2F_4)(4\xi(h-h_1)A_{72} - A_{82} + A_{92}) \\ + (D_1D_4F_2 - D_2D_4F_1)(4\xi(h-h_1)A_{74} - A_{84} + A_{94}) \end{array} \right] \\ + n_4 \left[\begin{array}{l} (D_2D_3F_1 - D_1D_3F_2)(4\xi(h-h_1)A_{73} - A_{83} + A_{93}) \\ + (D_1D_2F_3 - D_2D_3F_1)(4\xi(h-h_1)A_{72} - A_{82} + A_{92}) \\ + (D_1D_3F_2 - D_1D_2F_3)(4\xi(h-h_1)A_{71} - A_{81} + A_{91}) \end{array} \right] \end{array} \right] \left[\cos \xi(t-x) \right] d\xi$$

(348)

$$k_6(x,t) = \int_0^{\infty} \frac{i e^{i\xi x} S(4\xi m)}{\Delta} \left\{ \begin{array}{l} e^{-\xi(h+y)} \left\{ \begin{array}{l} -2\xi \left(\begin{array}{l} (D_2 D_4 F_3 - D_3 D_4 F_2)(4\xi(h-h_1)B_{74} - B_{84} + B_{94}) \\ + (D_3 D_4 F_2 - D_2 D_3 F_4)(4\xi(h-h_1)B_{73} - B_{83} + B_{93}) \\ + (D_2 D_3 F_4 - D_2 D_4 F_3)(4\xi(h-h_1)B_{72} - B_{82} + B_{92}) \end{array} \right) \\ + [(\kappa_2 - 1) - 2\xi(h_1 + y)] \left(\begin{array}{l} (D_3 D_4 F_1 - D_1 D_4 F_3)(4\xi(h-h_1)B_{74} - B_{84} + B_{94}) \\ + (D_1 D_3 F_4 - D_3 D_4 F_1)(4\xi(h-h_1)B_{73} - B_{83} + B_{93}) \\ + (D_1 D_4 F_3 - D_1 D_3 F_4)(4\xi(h-h_1)B_{71} - B_{81} + B_{91}) \end{array} \right) \end{array} \right\} \\ + e^{\xi(h+y)} \left\{ \begin{array}{l} 2\xi \left(\begin{array}{l} (D_1 D_2 F_4 - D_1 D_4 F_2)(4\xi(h-h_1)B_{71} - B_{81} + B_{91}) \\ + (D_2 D_4 F_1 - D_1 D_2 F_4)(4\xi(h-h_1)B_{72} - B_{82} + B_{92}) \\ + (D_1 D_4 F_2 - D_2 D_4 F_1)(4\xi(h-h_1)B_{74} - B_{84} + B_{94}) \end{array} \right) \\ + [(\kappa_2 - 1) + 2\xi(h_1 + y)] \left(\begin{array}{l} (D_2 D_3 F_1 - D_1 D_3 F_2)(4\xi(h-h_1)B_{73} - B_{83} + B_{93}) \\ + (D_1 D_2 F_3 - D_2 D_3 F_1)(4\xi(h-h_1)B_{72} - B_{82} + B_{92}) \\ + (D_1 D_3 F_2 - D_1 D_2 F_3)(4\xi(h-h_1)B_{71} - B_{81} + B_{91}) \end{array} \right) \end{array} \right\} \end{array} \right\} [\sin \xi(t-x)] d\xi$$

(349)

ÖZGEÇMİŞ

Yusuf KAYA, 1989 yılında Gümüşhane İlinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini Gümüşhane Aysin-Rafet ATAÇ İlköğretim Okulunda tamamladıktan sonra lise öğrenimini 2006-2007 öğretim yılında Gümüşhane (YDA) Lisesi'nde bitirdi. 2012 yılında Gümüşhane Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü'nden mezun olarak aynı yıl Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği ABD'de yüksek lisans eğitimine başladı. Ağustos 2013 yılında Gümüşhane Üniversitesi Mekanik Anabilim Dalı'na Araştırma Görevlisi olarak atandı. 2014 yılında yüksek lisans çalışmasını tamamlayarak aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı Mekanik Bilim Dalı'nda doktora eğitimine başladı. Halen Gümüşhane Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümü'ndeki görevine devam eden KAYA'nın yabancı dili İngilizce'dir.