

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**RİJİT BİR BLOK ARACILIĞIYLA YÜKLENMİŞ VE ELASTİK YARIM DÜZLEME  
OTURAN FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ TABAKANIN SÜREKLİ VE  
SÜREKSİZ TEMAS PROBLEMİ**

**DOKTORA TEZİ**

**İnş. Yük. Müh. Erdal ÖNER**

**HAZİRAN 2017**

**TRABZON**



**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**RİJİT BİR BLOK ARACILIĞIYLA YÜKLENMİŞ VE ELASTİK YARIM DÜZLEME  
OTURAN FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ TABAKANIN SÜREKLİ VE  
SÜREKSİZ TEMAS PROBLEMİ**

**İnş. Yük. Müh. Erdal ÖNER**

**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde**

**"DOKTOR (İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ)"**

**Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 02 / 06 / 2017**

**Tezin Savunma Tarihi : 22 / 06 / 2017**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ**

**Trabzon 2017**

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalında  
Erdal ÖNER Tarafından Hazırlanan

RİJİT BİR BLOK ARACILIĞIYLA YÜKLENMİŞ VE ELASTİK YARIM DÜZLEME  
OTURAN FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ TABAKANIN SÜREKLİ VE  
SÜREKSİZ TEMAS PROBLEMİ

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 06 /06 /2017 gün ve 1705 sayılı  
kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda  
DOKTORA TEZİ  
olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Ragıp ERDÖL

Üye : Prof. Dr. Mehmet ÜLKER

Üye : Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ

Üye : Prof. Dr. Hasan SOFUOĞLU

Üye : Prof. Dr. Talat Şükrü ÖZŞAHİN


Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Enstitü Müdürü

## ÖNSÖZ

Bu çalışma Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Doktora Tezi olarak hazırlanmıştır.

“Rijit Bir Blok Aracılığıyla Yüklenmiş ve Elastik Yarım Düzleme Oturan Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabakanın Sürekli ve Süreksiz Temas Problemi” isimli tez çalışmasını bana öneren ve her aşamasında bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım, öğrencisi olmaktan ve kendisi ile çalışmaktan onur duyduğum danışman Hocam Sayın Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ'ye minnet ve şükranlarımı sunarım.

Öğrenim hayatım boyunca bana emeği geçen tüm hocalarımı saygıyla anar, kendilerine minnettar olduğumu belirtmek isterim.

Çalışmalarım sırasında tezim ile ilgili birçok konuda yardım ve değerli fikirlerini esirgemeyen Sayın Arş. Gör. Gökhan ADIYAMAN'a ayrıca teşekkür etmek isterim.

Tez çalışmam boyunca yardımlarını gördüğüm Sayın Yrd. Doç. Dr. Fatih YILMAZ'a, Sayın Yrd. Doç. Dr. Muhammet YURDAKUL'a, Sayın Arş. Gör. Hakan Alper KAMILOĞLU'na, Sayın Arş. Gör. Nurullah ÖKSÜZER'e, Sayın Arş. Gör. Bilal TAYFUR'a, Sayın Arş. Gör. Muhittin TURAN'a ve isimlerini burada tek tek sayamadığım hocalarıma ve arkadaşlarıma ayrı ayrı teşekkür ederim.

Çalışmam boyunca beni sabırla destekleyen ailemin tüm fertlerine müteşekkir olduğumu belirtir çalışmamın ülkemize faydalı olmasını içtenlikle temenni ederim.

Erdal ÖNER  
Trabzon 2017

## TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Doktora Tezi olarak sunduğum ‘‘Rijit Bir Blok Aracılığıyla Yüklenmiş ve Elastik Yarım Düzleme Oturan Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabakanın Sürekli ve Süreksiz Temas Problemi’’ başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ’nin sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 22/06/2017

  
Erdal ÖNER

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET .....	VII
SUMMARY .....	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	IX
TABLolar DİZİNİ.....	XII
SEMBOLLER DİZİNİ .....	XIV
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş .....	1
1.2. Çalışmanın Önemi ve Amacı.....	2
1.3. Literatür Özeti.....	2
1.3.1. Homojen Tabakalı Ortamlarda Temas Problemlerine İlişkin Çalışmalar ...	2
1.3.2. Fonksiyonel Derecelendirilmiş (FD) Tabakalı Ortamlarda Temas Problemlerine İlişkin Çalışmalar .....	11
1.4. Çalışmanın Kapsamı.....	17
1.5. Genel Denklemlerin Elde Edilmesi .....	19
1.5.1. Kütle Kuvvetlerinin Bulunmaması Durumunda Genel Denklemlerin Elde Edilmesi.....	19
1.5.1.1. Fonksiyonel Derecelendirilmiş (FD) Tabaka için Genel Denklemlerin Elde Edilmesi.....	19
1.5.1.2. Elastik Yarım Düzlem için Genel Denklemlerin Elde Edilmesi .....	26
1.5.2. Fonksiyonel Derecelendirilmiş (FD) Tabakanın Kütle Kuvvetinin Bulunması Durumunda Genel Denklemlerin Elde Edilmesi.....	33
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	38
2.1. Giriş .....	38
2.2. Sürekli Temas Problemi .....	38
2.2.1. Problemin Tanımı, Kullanılacak Denklemler ve Sınır Şartları .....	38
2.2.2. Katsayıların Belirlenmesi .....	42
2.2.3. İntegral Denklemin Elde Edilmesi .....	44

2.2.4.	İntegral Denklemin Sayısal Çözümü ve FD Tabaka ile Elastik Yarım Düzlem Arasındaki İlk Ayrılma Yükünün ve Uzaklığının Belirlenmesi ....	49
2.2.4.1.	Rijit Blok Profilinin Düz Olması Hali .....	49
2.2.4.2.	Rijit Blok Profilinin Dairesel Olması Hali .....	53
2.2.5.	Gerilmelerin Bulunması.....	56
2.3.	Süreksiz Temas Problemi .....	56
2.3.1.	Problemin Tanımı, Sınır Şartları ve İntegral Denklem Sisteminin Elde Edilmesi .....	56
2.3.2.	İntegral Denklem Sisteminin Sayısal Çözümü .....	71
2.3.2.1.	Rijit Blok Profilinin Düz Olması Hali .....	71
2.3.2.1.1.	FD Tabaka ile Elastik Yarım Düzlemin Ara Yüzeyindeki Açılma Miktarı	75
2.3.2.2.	Rijit Blok Profilinin Dairesel Olması Hali .....	76
2.3.2.2.1.	FD Tabaka ile Elastik Yarım Düzlemin Ara Yüzeyindeki Açılma Miktarı	80
3.	BULGULAR VE İRDELEME .....	81
3.1.	Giriş .....	81
3.2.	Problemin Sürekli Temasına İlişkin Bulgular .....	81
3.3.	Problemin Süreksiz Temasına İlişkin Bulgular .....	107
4.	SONUÇLAR.....	121
5.	ÖNERİLER .....	127
6.	KAYNAKLAR.....	128
ÖZGEÇMİŞ		

Doktora Tezi

ÖZET

RİJİT BİR BLOK ARACILIĞIYLA YÜKLENMİŞ VE ELASTİK YARIM DÜZLEME  
OTURAN FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ TABAKANIN SÜREKLİ VE SÜREKSİZ  
TEMAS PROBLEMİ

Erdal ÖNER

Karadeniz Teknik Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı  
Danışman: Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ  
2017, 136 Sayfa

Bu çalışmada, rijit bir blok aracılığıyla yüklenmiş ve elastik yarım düzleme oturan fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) tabakanın sürekli ve süreksiz temas problemi elastisite teorisine göre çözülmüştür. Problemden ele alınan tabaka fonksiyonel olarak derecelendirilmiş (FD) olup kayma modülü ve yoğunluğu tabaka yüksekliği boyunca üstel bir fonksiyona bağlı olarak değişmektedir. Elastik yarım düzlem ise homojen olarak dikkate alınmıştır. Çözümde FD tabakanın kütle kuvveti hesaba katılırken elastik yarım düzlemin kütle kuvveti ihmal edilmiştir. Gerek FD tabakanın gerekse elastik yarım düzlemin Poisson oranlarının değişmediği kabul edilmiştir. Ayrıca ele alınan problemde tüm yüzeyler sürtünmesiz olup ara yüzeylerde sadece basınç gerilmelerine izin verilmektedir. Elastisite teorisi ve integral dönüşüm teknikleri kullanılarak; sürekli temas problemi rijit blok altındaki temas gerilmesinin bilinmeyen olduğu bir integral denkleme, süreksiz temas problemi de rijit blok altındaki temas gerilmesinin ve FD tabaka ile elastik yarım düzlemin ara yüzeyinde meydana gelen ayrılmanın eğiminin bilinmeyen olduğu iki integral denkleme indirgenmiştir. Bu integral denklemler Gauss-Chebyshev integrasyon formülasyonu kullanılarak, rijit blok profilinin düz veya dairesel olması durumları için ayrı ayrı sayısal olarak çözülmüşlerdir. Çalışma sonucunda; sürekli temas durumu için blok altındaki temas gerilmesi yayılışları, simetri ekseninde meydana gelen normal gerilmeler ve simetri eksenine yakınındaki kayma gerilmeleri, FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklığı, süreksiz temas durumu için ise FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki gerilme yayılışları, ayrılma bölgesinin başlangıç-bitiş noktaları ve açılma miktarı çeşitli boyutsuz büyüklükler için elde edilmiştir. FD tabakanın üst yüzeyinden alt yüzeyine doğru rijitliğinin veya yoğunluğunun giderek azalması durumunda FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki ayrılmanın daha kolay gerçekleşeceği sonucuna varılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka, İntegral denklem, Rijit blok, Sürekli Temas, Süreksiz temas, İlk ayrılma uzaklığı, İlk ayrılma yükü



PhD. Thesis

SUMMARY

CONTINUOUS AND DISCONTINUOUS CONTACT PROBLEMS OF A FUNCTIONALLY  
GRADED LAYER LOADED BY A RIGID STAMP AND RESTING ON AN ELASTIC HALF  
PLANE

Erdal ÖNER

Karadeniz Technical University  
The Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Civil Engineering Graduate Program  
Supervisor: Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ  
2017, 136 Pages

In this study, continuous and discontinuous contact problems of a functionally graded layer resting on an elastic half-plane and loaded by a rigid stamp are solved using the theory of elasticity. The layer considered in the problem is functionally graded (FG) and its shear modulus and density vary according to an exponential function. The elastic half-plane is considered as homogeneous; in the solution of the problem, the body force of the elastic half-plane is neglected, while the body force of the FG layer is taken into consideration. It is assumed that Poisson's ratios of both the FG layer and the elastic half-plane do not change. Furthermore, all surfaces are frictionless and only compressive tractions are allowed at the interfaces in the discussed problem. Using the elasticity theory and the integral transform techniques, the continuous contact problem is reduced to an integral equation in which the contact stress under the rigid stamp is unknown; in the case of discontinuous contact, the problem was reduced to two integral equations in which the contact stress under the rigid stamp and the slope of the separation at the interface between the FG layer and the elastic half-plane are unknown. Using Gauss–Chebyshev integration formula, these integral equations are numerically solved separately for cases wherein the rigid stamp profile is either flat or circular. As a result of the study, the contact stress distribution under the rigid stamp, the normal stresses at the axis of symmetry, the shear stresses near the axis of symmetry, the initial separation load, and the initial separation distance between the FG layer and the elastic half-plane are obtained in the case of continuous contact for various dimensionless parameters. Further, a parametric study is conducted for the stress distributions between the FG layer and the elastic half-plane, the starting and ending points of the separation zone, and the separation amount in the case of discontinuous contact. In the event that the rigidity or density decreases from the upper surface to the lower surface of the FG layer, the separation between the FG layer and the elastic half-plane can be occurred easier.

**Key Words:** Functionally graded layer, Continuous contact, Discontinuous contact, Integral equation, Initial separation distance, Initial separation load, Rigid stamp

## ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1. Sürekli temas probleminin geometrisi.....	39
Şekil 2. Süreksiz temas probleminin geometrisi.....	57
Şekil 3. Düz blok durumunda çeşitli blok genişlikleri için blok altındaki boyutsuz temas gerilme yayılımı ( $\kappa_1=\kappa_2=2, \beta h=-0.6931, \mu_{-h}/\mu_2=1$ ).....	82
Şekil 4. Düz blok durumunda çeşitli rijitlik parametresi ( $\beta h$ ) değerleri için blok altındaki boyutsuz temas gerilme yayılımı ( $\kappa_1=\kappa_2=2, a/h=1, \mu_{-h}/\mu_2=1$ ).....	83
Şekil 5. Düz blok durumunda çeşitli $\mu_{-h}/\mu_2$ değerleri için blok altındaki boyutsuz temas gerilme yayılımı ( $\kappa_1=\kappa_2=2, a/h=2, \beta h=-0.6931$ ).....	83
Şekil 6. Dairesel blok durumunda çeşitli blok yarıçapı değerleri için blok altındaki boyutsuz temas gerilme yayılımı ( $\kappa_1=\kappa_2=2, \beta h=-0.6931, \mu_0/(P/h)=100, \mu_{-h}/\mu_2=1$ ).....	86
Şekil 7. Dairesel blok durumunda yük oranının çeşitli değerleri için blok altındaki boyutsuz temas gerilme yayılımı ( $\kappa_1=\kappa_2=2, R/h=500, \beta h=-1.3863, \mu_{-h}/\mu_2=1$ ).....	87
Şekil 8. Dairesel blok durumunda çeşitli rijitlik parametresi değerleri için blok altındaki boyutsuz temas gerilme yayılımı ( $\kappa_1=\kappa_2=2, R/h=100, \mu_0/(P/h)=500, \mu_{-h}/\mu_2=1$ ).....	87
Şekil 9. Dairesel blok durumunda blok yarıçapının çeşitli değerleri için boyutsuz $\sigma_x(0,y)/(P/h)$ normal gerilme yayılımı ( $\kappa_1=\kappa_2=2, \mu_0/(P/h)=100, \beta h=-0.6931, \gamma h=-1.0986, \lambda=20, \mu_{-h}/\mu_2=1$ ).....	89
Şekil 10. Düz blok durumunda blok genişliğinin çeşitli değerleri için boyutsuz $\sigma_x(0,y)/(P/h)$ normal gerilme yayılımı ( $\kappa_1=\kappa_2=2, \beta h=-0.6931, \gamma h=-0.5, \lambda=100, \mu_{-h}/\mu_2=1$ ).....	89
Şekil 11. Dairesel blok durumunda çeşitli yük oranı değerleri için boyutsuz $\sigma_x(0,y)/(P/h)$ normal gerilme yayılımı ( $\kappa_1=\kappa_2=2, R/h=500, \beta h=-1.3863, \gamma h=-0.6931, \lambda=10, \mu_{-h}/\mu_2=1$ ).....	90
Şekil 12. Düz blok durumunda çeşitli rijitlik parametresi değerleri için boyutsuz $\sigma_x(0,y)/(P/h)$ normal gerilme yayılımı ( $\kappa_1=\kappa_2=2, a/h=0.5, \gamma h=-1.0986, \lambda=100, \mu_{-h}/\mu_2=1$ ).....	90
Şekil 13. Dairesel blok durumunda çeşitli rijitlik parametresi değerleri için boyutsuz $\sigma_x(0,y)/(P/h)$ normal gerilme yayılımı ( $\kappa_1=\kappa_2=2, R/h=100, \mu_0/(P/h)=500, \gamma h=-1.0986, \lambda=100, \mu_{-h}/\mu_2=1$ ).....	91
Şekil 14. Dairesel blok durumunda blok yarıçapının çeşitli değerleri için boyutsuz $\sigma_y(0,y)/(P/h)$ normal gerilme yayılımı ( $\kappa_1=\kappa_2=2, \mu_0/(P/h)=100, \beta h=-0.6931, \gamma h=-1.0986, \lambda=200, \mu_{-h}/\mu_2=1$ ).....	92
Şekil 15. Dairesel blok durumunda çeşitli yük oranı değerleri için boyutsuz $\sigma_y(0,y)/(P/h)$ normal gerilme yayılımı ( $\kappa_1=\kappa_2=2, R/h=500, \beta h=-1.3863, \gamma h=-1.0986, \lambda=200, \mu_{-h}/\mu_2=1$ ).....	92

Şekil 16. Dairesel blok durumunda çeşitli rijitlik parametresi değerleri için boyutsuz $\sigma_y(0,y)/(P/h)$ normal gerilme yayılımı ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ , $R/h=100$ , $\mu_0/(P/h)=500$ , $\gamma h=-1.0986$ , $\lambda=150$ , $\mu_{-h}/\mu_2=1$ ) .....	93
Şekil 17. Dairesel blok durumunda blok yarıçapının çeşitli değerleri için boyutsuz $\tau_{xy}(0.5,y)/(P/h)$ kayma gerilmesi yayılımı ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ , $\mu_0/(P/h)=100$ , $\beta h=-0.6931$ , $\mu_{-h}/\mu_2=1$ ) .....	94
Şekil 18. Dairesel blok durumunda yük oranının çeşitli değerleri için boyutsuz $\tau_{xy}(0.5,y)/(P/h)$ kayma gerilmesi yayılımı ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ , $R/h=500$ , $\beta h=-1.3863$ , $\mu_{-h}/\mu_2=1$ ) .....	94
Şekil 19. Dairesel blok durumunda çeşitli rijitlik parametresi değerleri için boyutsuz $\tau_{xy}(0.5,y)/(P/h)$ kayma gerilmesi yayılımı ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ , $R/h=10$ , $\mu_0/(P/h)=200$ , $\mu_{-h}/\mu_2=1$ ) .....	95
Şekil 20. Düz blok durumunda çeşitli rijitlik parametresi değerleri için boyutsuz $\tau_{xy}(0.5,y)/(P/h)$ kayma gerilmesi yayılımı ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ , $a/h=0.5$ , $\mu_{-h}/\mu_2=1$ ) .....	95
Şekil 21. Düz blok durumunda FD tabakanın alt yüzeyinin kayma modülünün elastik yarım düzlemin kayma modülüne oranının ( $\mu_{-h}/\mu_2$ ) çeşitli değerleri için boyutsuz $\tau_{xy}(0.5,y)/(P/h)$ kayma gerilmesi yayılımı ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ , $a/h=0.5$ , $\beta h=0.6931$ ) .....	96
Şekil 22. Düz blok durumunda çeşitli blok genişlikleri için FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki boyutsuz temas gerilme yayılışları ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ , $\beta h=-0.6931$ , $\gamma h=1.0986$ , $\mu_{-h}/\mu_2=1$ ) .....	100
Şekil 23. Düz blok durumunda çeşitli rijitlik parametresi ( $\beta h$ ) değerleri için FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki boyutsuz temas gerilme yayılışları ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ , $a/h=2$ , $\gamma h=1.6094$ , $\mu_{-h}/\mu_2=1$ ) .....	101
Şekil 24. Düz blok durumunda çeşitli yoğunluk parametresi ( $\gamma h$ ) değerleri için FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki boyutsuz temas gerilme yayılışları ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ , $a/h=1$ , $\beta h=0.6931$ , $\mu_{-h}/\mu_2=1$ ) .....	101
Şekil 25. Düz blok durumunda çeşitli $\mu_{-h}/\mu_2$ değerleri için FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki boyutsuz temas gerilme yayılışları ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ , $a/h=4$ , $\gamma h=1.0986$ , $\beta h=0.6931$ ) .....	102
Şekil 26. Düz blok durumunda ilk ayrılma yükü ve bu yükten küçük bir yük için FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki boyutsuz temas gerilme yayılışları ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ , $a/h=0.5$ , $\gamma h=0.0001$ , $\beta h=0.001$ ) .....	102
Şekil 27. Dairesel blok durumunda çeşitli blok yarıçapı değerleri için FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki boyutsuz temas gerilme yayılışları ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ , $\mu_0/(P/h)=100$ , $\beta h=-0.6931$ , $\gamma h=-1.0986$ , $\mu_{-h}/\mu_2=1$ ) .....	105
Şekil 28. Dairesel blok durumunda yük oranının çeşitli değerleri için FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki boyutsuz temas gerilme yayılışları ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ , $R/h=500$ , $\beta h=-1.3863$ , $\gamma h=-1.0986$ , $\mu_{-h}/\mu_2=1$ ) .....	105
Şekil 29. Dairesel blok durumunda çeşitli rijitlik parametresi değerleri için FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki boyutsuz temas gerilme yayılışları ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ , $R/h=100$ , $\mu_0/(P/h)=500$ , $\gamma h=-1.0986$ , $\mu_{-h}/\mu_2=1$ ) .....	106

Şekil 30. Dairesel blok durumunda çeşitli yoğunluk parametresi değerleri için FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki boyutsuz temas gerilme yayılışları ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ , $R/h=100$ , $\mu_0/(P/h)=500$ , $\beta h=-0.6931$ , $\mu_{-h}/\mu_2=1$ ) .....	106
Şekil 31. Düz blok durumunda boyutsuz $\sigma_y(x,-h)/(\rho_0gh)$ temas gerilme yayılışının blok genişliği ( $a/h$ ) ile değişimi ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ , $\beta h=-0.6931$ , $\gamma h=1.0986$ , $\lambda=500>\lambda_{cr}$ , $\mu_{-h}/\mu_2=1$ ) .....	112
Şekil 32. Düz blok durumunda boyutsuz $\sigma_y(x,-h)/(\rho_0gh)$ temas gerilme yayılışının rijitlik parametresi ( $\beta h$ ) ile değişimi ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ , $a/h=1$ , $\gamma h=1.6094$ , $\lambda=250>\lambda_{cr}$ , $\mu_{-h}/\mu_2=1$ ) .....	112
Şekil 33. Düz blok durumunda boyutsuz $\sigma_y(x,-h)/(\rho_0gh)$ temas gerilme yayılışının yük faktörü ( $\lambda$ ) ile değişimi ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ , $a/h=1$ , $\beta h=-1.3863$ , $\gamma h=1.6094$ , $\mu_{-h}/\mu_2=1$ ).....	113
Şekil 34. Düz blok durumunda boyutsuz $\sigma_y(x,-h)/(\rho_0gh)$ temas gerilme yayılışının $\mu_{-h}/\mu_2$ oranı ile değişimi ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ , $a/h=4$ , $\beta h=0.6931$ , $\gamma h=1.0986$ , $\lambda=400>\lambda_{cr}$ ) .....	113
Şekil 35. Düz blok durumunda FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasında meydana gelen açılmaların blok genişliği ( $a/h$ ) ile değişimi ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ , $\beta h=-0.6931$ , $\gamma h=1.0986$ , $\lambda=500>\lambda_{cr}$ , $\mu_{-h}/\mu_2=1$ ) .....	114
Şekil 36. Düz blok durumunda FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasında meydana gelen açılmaların yük faktörü ( $\lambda$ ) ile değişimi ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ , $a/h=1$ , $\beta h=0.6931$ , $\gamma h=1.6094$ , $\mu_{-h}/\mu_2=1$ ) .....	115
Şekil 37. Düz blok durumunda FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasında meydana gelen açılmaların rijitlik parametresi ( $\beta h$ ) ile değişimi ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ , $a/h=1$ , $\gamma h=1.6094$ , $\lambda=350>\lambda_{cr}$ , $\mu_{-h}/\mu_2=1$ ).....	115
Şekil 38. Düz blok durumunda FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasında meydana gelen açılmaların yoğunluk parametresi ( $\gamma h$ ) ile değişimi ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ , $a/h=0.5$ , $\beta h=1.3863$ , $\lambda=400>\lambda_{cr}$ , $\mu_{-h}/\mu_2=1$ ).....	116
Şekil 39. Dairesel blok durumunda boyutsuz $\sigma_y(x,-h)/(P/h)$ temas gerilme yayılışının rijitlik parametresi ( $\beta h$ ) ile değişimi ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ , $R/h=10$ , $\mu_0/(P/h)=200$ , $\lambda=200>\lambda_{cr}$ , $\gamma h=1.0986$ , $\mu_{-h}/\mu_2=1$ ) .....	119
Şekil 40. Dairesel blok durumunda boyutsuz $\sigma_y(x,-h)/(P/h)$ temas gerilme yayılışının blok yarıçapı ( $R/h$ ) ile değişimi ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ , $\mu_0/(P/h)=500$ , $\lambda=150>\lambda_{cr}$ , $\beta h=0.6931$ , $\gamma h=1.0986$ , $\mu_{-h}/\mu_2=1$ ) .....	119
Şekil 41. Dairesel blok durumunda FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasında meydana gelen açılmaların rijitlik parametresi ( $\beta h$ ) ile değişimi ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ , $R/h=10$ , $\mu_0/(P/h)=200$ , $\gamma h=1.0986$ , $\lambda=200>\lambda_{cr}$ , $\mu_{-h}/\mu_2=1$ ).....	120
Şekil 42. Dairesel blok durumunda FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasında meydana gelen açılmaların yük faktörü ( $\lambda$ ) ile değişimi ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ , $R/h=10$ , $\mu_0/(P/h)=200$ , $\beta h=-1.3863$ , $\gamma h=1.0986$ , $\mu_{-h}/\mu_2=1$ ).....	120

## TABLULAR DİZİNİ

### Sayfa No

Tablo 1. Dairesel blok durumunda blok yarıçapı ve yük oranına bağlı olarak FD tabaka ile rijit blok arasındaki yarı temas uzunluklarının değişimi ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ , $\beta h=0.6931$ , $\mu_{-h}/\mu_2=1$ ).....	84
Tablo 2. Dairesel blok durumunda rijitlik parametresi ve $\mu_{-h}/\mu_2$ oranına bağlı olarak FD tabaka ile rijit blok arasındaki yarı temas uzunluklarının değişimi ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ , $R/h=100$ , $\mu_0/(P/h)=250$ , $\mu_{-h}/\mu_2=1$ ) .....	85
Tablo 3. Dairesel blok durumunda rijitlik parametresi ve $\mu_{-h}/\mu_2$ oranına bağlı olarak FD tabaka ile rijit blok arasındaki yarı temas uzunluklarının değişimi ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ , $R/h=10$ , $\mu_0/(P/h)=200$ , $\mu_{-h}/\mu_2=1$ ) .....	85
Tablo 4. Düz blok durumunda çeşitli rijitlik parametresi ( $\beta h$ ) ve yoğunluk parametresi ( $\gamma h$ ) değerleri için FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki ilk ayrılma yükünün ve ilk ayrılma uzaklığının değişimi ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ , $a/h=0.5$ , $\mu_{-h}/\mu_2=1$ ) .....	97
Tablo 5. Düz blok durumunda, $\beta h \rightarrow 0$ ve $\gamma h \rightarrow 0$ için bulunan FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki ilk ayrılma yüklerinin ve ilk ayrılma uzaklıklarının Çakıroğlu (1979) ile karşılaştırılması ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ , $\beta h=0.001$ , $\gamma h=0.0001$ ).....	98
Tablo 6. Düz blok durumunda, $\beta h \rightarrow 0$ ve $\gamma h \rightarrow 0$ için bulunan FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki ilk ayrılma yüklerinin ve ilk ayrılma uzaklıklarının Civelek ve Erdoğan (1976) ve Civelek vd. (1978) ile karşılaştırılması ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ , $\beta h=0.001$ , $\gamma h=0.0001$ ) .....	98
Tablo 7. Düz blok durumunda, $\beta h \rightarrow 0$ ve $\gamma h \rightarrow 0$ için bulunan FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki ilk ayrılma yüklerinin ve ilk ayrılma uzaklıklarının Geçit (1980) ile karşılaştırılması ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ , $\beta h=0.001$ , $\gamma h=0.0001$ ) .....	99
Tablo 8. Dairesel blok durumunda çeşitli blok yarıçapı ve yük oranı değerleri için FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki ilk ayrılma yükünün ve ilk ayrılma uzaklığının değişimi ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ , $\beta h=0.6931$ , $\gamma h=1.0986$ , $\mu_{-h}/\mu_2=1$ ) .....	104
Tablo 9. Dairesel blok durumunda çeşitli rijitlik parametresi ( $\beta h$ ) ve yoğunluk parametresi ( $\gamma h$ ) değerleri için FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki ilk ayrılma yükünün ve ilk ayrılma uzaklığının değişimi ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ , $R/h=10$ , $\mu_0/(P/h)=200$ , $\mu_{-h}/\mu_2=1$ ) .....	104
Tablo 10. Düz blok durumunda çeşitli blok genişliği ( $a/h$ ) ve yük faktörü ( $\lambda$ ) değerleri için ayrılma başlangıç ( $b/h$ ) ve bitiş ( $c/h$ ) noktalarının değişimi ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ , $\beta h=1.3863$ , $\gamma h=1.6094$ , $\mu_{-h}/\mu_2=1$ ) .....	107
Tablo 11. Düz blok durumunda çeşitli rijitlik parametresi ( $\beta h$ ) ve yük faktörü ( $\lambda$ ) değerleri için ayrılma başlangıç ( $b/h$ ) ve bitiş ( $c/h$ ) noktalarının değişimi ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ , $a/h=1$ , $\gamma h=1.6094$ , $\mu_{-h}/\mu_2=1$ ).....	108

Tablo 12. Düz blok durumunda çeşitli yoğunluk parametresi ( $\gamma h$ ) ve yük faktörü ( $\lambda$ ) değerleri için ayrılma başlangıç (b/h) ve bitiş (c/h) noktalarının değişimi ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ , $a/h=0.5$ , $\beta h=1.3863$ , $\mu_{-h}/\mu_2=1$ ).....	109
Tablo 13. Düz blok durumunda, $\beta h \rightarrow 0$ ve $\gamma h \rightarrow 0$ için bulunan ayrılma başlangıç (b/h) ve bitiş (c/h) noktalarının Çakıroğlu (1979) ile karşılaştırılması ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ , $\beta h=0.001$ , $\gamma h=0.0001$ ) .....	110
Tablo 14. Düz blok durumunda, $\beta h \rightarrow 0$ ve $\gamma h \rightarrow 0$ için bulunan ayrılma başlangıç (b/h) ve bitiş (c/h) noktalarının Civelek vd. (1978) ve Civelek ve Erdoğan (1976) ile karşılaştırılması ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ , $\beta h=0.001$ , $\gamma h=0.0001$ ) .....	110
Tablo 15. Düz blok durumunda, $\beta h \rightarrow 0$ ve $\gamma h \rightarrow 0$ için bulunan ayrılma başlangıç (b/h) ve bitiş (c/h) noktalarının Geçit (1980) ile karşılaştırılması ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ , $\beta h=0.001$ , $\gamma h=0.0001$ ).....	111
Tablo 16. Dairesel blok durumunda çeşitli yük faktörü ( $\lambda$ ) değerleri için yarı temas uzunluğunun (a/h), ayrılma başlangıç (b/h) ve bitiş (c/h) noktalarının değişimi ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ , $R/h=10$ , $\gamma h=1.0986$ , $\mu_{-h}/\mu_2=1$ ) .....	118
Tablo 17. Dairesel blok durumunda çeşitli yük faktörü ( $\lambda$ ) değerleri için yarı temas uzunluğunun (a/h), ayrılma başlangıç (b/h) ve bitiş (c/h) noktalarının değişimi ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ , $R/h=10$ , $\mu_0/(P/h)=200$ , $\gamma h=1.0986$ , $\mu_{-h}/\mu_2=1$ ) .....	118



## SEMBOLLER DİZİNİ

$a$	Rijit blok ile FD tabaka arasındaki yarı değme uzunluğu
$e_2$	Elastik yarım düzlemin hacim değiştirme oranı
$E_2$	Elastik yarım düzlemin elastisite modülü
$F(x)$	Rijit blok profilini tanımlayan fonksiyon
$f(x)$	$F(x)$ fonksiyonunun $x$ ' e göre türevi
$X, Y$	$x$ ve $y$ eksenleri doğrultularındaki kütle kuvveti bileşenleri
$x, y$	Kartezyen koordinatlar
$h$	FD tabakanın yüksekliği
$\sigma_x, \sigma_y$	$x$ ve $y$ doğrultularındaki normal gerilme bileşenleri
$\tau_{xy}$	Kayma gerilmesi bileşeni
$P$	Rijit bloğa uygulanan tekil kuvvet
$p(x)$	Rijit blok altındaki temas gerilmesi fonksiyonu
$\varphi(x)$	FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki ayrılmanın eğimini veren fonksiyon
$R$	Dairesel bloğun yarıçapı
$u, v$	Düzlem halde kartezyen koordinatlardaki yer değiştirme bileşenleri
$x_{cr}$	Kritik ayrılma uzaklığı (ilk ayrılma uzaklığı)
$\partial$	Türev operatörü
$\lambda_2$	Elastik yarım düzlemin Lamé sabiti
$\lambda$	Yük faktörü
$\lambda_{cr}$	Kritik yük faktörü (ilk ayrılma yükü)
$\mu_1(y)$	FD tabakanın kayma modülü
$\mu_0$	FD tabakanın üst yüzeyinin kayma modülü
$\mu_2$	Elastik yarım düzlemin kayma modülü
$\kappa_1$	FD tabakanın Kolosov sabiti
$\kappa_2$	Elastik yarım düzlemin Kolosov sabiti
$\nu$	Poisson oranı
$\nabla^2$	Laplace operatörü
$\rho_1(y)$	FD tabakanın yoğunluğu

$\rho_0$	FD tabakanın üst yüzeyinin yoğunluğu
$g$	Yer çekimi ivmesi
$\phi_1, \psi_1$	FD tabaka için ters Fourier dönüşüm fonksiyonları
$\phi_2, \psi_2$	Elastik yarım düzlem için ters Fourier dönüşüm fonksiyonları
$\delta$	Rijit dairesel bloğun altında meydana gelen en büyük yer değiştirme
$\beta$	Rijitlik parametresi
$\gamma$	Yoğunluk parametresi
$b$	Ayrılmanın başlangıç noktası
$c$	Ayrılmanın bitiş noktası



**Not:** Bu listede verilmeyen bazı semboller metin içerisinde ilgili oldukları yerlerde tanımlanmıştır.



# 1. GENEL BİLGİLER

## 1.1. Giriş

Bilimin ve teknolojinin hızla gelişmesiyle birlikte geçmişte kullanılan malzemelere oranla daha fonksiyonel özelliğe sahip malzeme ihtiyacı giderek artmaktadır. Bu bağlamda uluslararası literatürde Functionally Graded Material (FGM) olarak adlandırılan, Türkçe’de ise Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme (FDM) olarak tanımlanan ve çoğunlukla metal-seramik çiftinden oluşan kompozit malzemeler geliştirilmiştir. Bu malzemeler, mekanik özellikleri bir noktadan diğer bir noktaya düzenli ve sürekli olarak değişen heterojen özel mikro yapılarıdır. Klasik kompozit malzemelerde, farklı malzemelerin birleşim noktasında meydana gelen keskin değişiklikler, bu noktada gerilme yığılmalarına ve çatlak oluşumuna sebep olabilmektedir. FDM’lerde ise bir malzemedan diğer malzemeye dereceli şekilde bir geçiş sağlandığından bu sorunların en aza indirgenmesi hedeflenmiştir. Klasik kompozit malzemelerde ana faz içinde yer tutan takviyelendirici ikinci fazın malzeme içindeki dağılımı homojen olduğundan bu malzemeler izotropiktir. FDM’ler ise malzeme özellikleri bir yüzeyden diğerine derecelendirilmiş olarak değiştiğinden izotropik değildirler. Ayrıca, FDM’ler homojen malzemelerin sağlayamadığı yüksek ısı direnç ve ısı iletkenlik gibi malzeme özelliklerini sağlamada etkin rol oynamaktadırlar (Öztürk, 2009).

FDM’ler ısı direnç ve ısı iletkenlik gibi özelliklerinin yanında sağlamlık, aşınmaya karşı gösterdiği direnç, tokluk ve hafiflik özellikleriyle de ilk olarak uzay taşıtlarında kullanılmaya başlanmıştır. Daha sonra FDM’ler makine, inşaat, elektronik, optik, kimya, biyomedikal, nükleer vb. birçok alanda kendine geniş uygulama alanı bulmuştur. FDM’lerin avantajlarını ve dezavantajlarını aşağıdaki şekilde özetlemek mümkündür:

Avantajları:

- a) Korozyon dirençleri daha yüksektir.
- b) Bünyelerinde farklı malzemelerin üstün özellikleri bir araya getirilmiştir.
- c) Biyolojik dokularla diğer geleneksel malzemelere göre daha yüksek uyumluluk göstermektedirler.
- d) Termal bariyer kaplamalarda termal yorulma ömrünü uzatırlar.

Dezavantajları:

- a) Özel üretim teknikleri gerektirirler ve pahalıdırlar.

b) Birçok malzeme bileşenin bir arada olması nedeniyle çatlak oluşumuna müsaittirler.

## **1.2. Çalışmanın Önemi ve Amacı**

1984 yılında Japonya’da bir uzay mekiği projesi sırasında ısıl bariyer malzemesi önerisi ile ortaya çıkan fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme kavramı, daha sonra mühendisliğin birçok alanında kendine kayda değer bir uygulama alanı bulmuştur. Şüphesiz bu alanlardan biri de temas mekaniğidir. Temas problemlerinin tarihsel gelişimi incelendiğinde FDM’lerin ortaya çıkışına kadarki süreçte temas problemlerinin çözümünde tabakaların homojen olduğu kabul edilmiştir. Gelişen bilim ve teknoloji ile birlikte son yıllarda temas problemleri konusunda yapılan çalışmalarda tabakaların fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) olarak göz önünde bulundurulduğu görülmektedir. Yapılan literatür araştırması sonucunda, FDM’den oluşan tabakalı bir ortamdaki temas probleminin çözümünde FD tabakanın kütle kuvvetinin hesaba katılmasına ilişkin herhangi bir çalışma olmadığı saptanmıştır. Literatürdeki bu eksikliğin giderilmesine katkıda bulunmak, bu çalışmanın içerdiği yenilik olarak düşünülmektedir.

## **1.3. Literatür Özeti**

Temas problemleri ile ilgili günümüze kadar yapılmış çalışmalar iki ana başlık altında toplanabilir. Bunlardan birincisi tabakaların homojen olmasına ilişkin yapılmış çalışmalar olup diğeri tabakaların FD olmasına ilişkin çalışmalardır.

### **1.3.1. Homojen Tabakalı Ortamlarda Temas Problemlerine İlişkin Çalışmalar**

Homojen tabakalı ortamlarda temas problemlerine ilişkin literatürde yapılan çalışmalar aşağıdaki gibi özetlenebilir:

Temas problemleri konusunda ilk çalışma elastik cisimlerin temasını inceleyen Heinrich Hertz tarafından yapılmıştır (Johnson, 1985).

Weitsman (1969), elastik yarım düzlem ve plak arasındaki yapışık olmayan teması irdelemiştir. Çalışmada plağın ve elastik yarım düzlemin rijitliklerinin çeşitli durumları için temas uzunlukları bulunmuştur.

Elastik yarım düzleme oturan ve rijit dairesel bir blok aracılığıyla yüklenen tabaka için temas problemi Dhaliwal (1970) tarafından ele alınmıştır. Çalışmada; Fredholm integral denkleminde indirgenen karışık sınır değer problemi, kuvvet serileri ve sayısal yöntemler yardımıyla çözülmüştür.

Keer ve Chantaramungkorn (1972), elastik yarım düzlem ile elastik tabaka arasında sürtünmesiz temas problemini incelemiştir. Çalışmada; tabakanın belirli bir uzunluğu dışında tüm yüzeyi üniform yayılı yük ile yüklenmiş olup tabaka ile düzlem arasında yayılı yükün etki etmediği mesafeden daha küçük bir ayrılma bölgesi meydana geleceği kabul edilerek, problem Papkovich-Neuber potansiyelleri kullanılarak çözülmüştür.

Yayılı yük aracılığıyla yüklenmiş ve yarım düzlem üzerine oturan elastik tabakanın temas problemi Keer vd. (1972) tarafından çalışılmıştır. Problemden dönele simetrik durum için Hankel dönüşümleri ve düzlem şekil değiştirme durumu için üstel Fourier dönüşümleri kullanılmıştır. Problem bilinmeyen olarak tabaka ile yarım düzlem arasındaki gerilme dağılımının alındığı ikinci tür Fredholm integral denklemi olarak ifade edilmiştir.

Erdoğan ve Ratwani (1974), iki elastik çeyrek düzlemle mesnetlenmiş tabakanın sürtünmesiz temas problemini irdelemiştir. Çalışmada, temas bölgesinin dış yükün büyüklüğünden bağımsız, fakat yük genişliğine bağlı olduğu gösterilmiştir.

Rijit temele oturan ve simetri eksenine doğrultusunda tekil yük aracılığıyla çekilen elastik tabakanın sürekli ve süreksiz temas problemi Civelek ve Erdoğan (1975) tarafından çözülmüştür. Tekil yükün basınç olması durumunda aynı problemin sürekli ve süreksiz temas hali Civelek ve Erdoğan (1976) tarafından ele alınmıştır. Sürekli temas durumu için; temas yüzeyindeki temas gerilmesi dağılımları, ilk ayrılma yükü ve uzaklığı, süreksiz temas durumu için ise temas bölgesindeki temas gerilmesi dağılımları, ayrılma başlangıç-bitiş noktaları ve açılma bölgeleri elde edilmiştir.

Adams ve Bogy (1977), farklı elastik özelliklere sahip elastik yarım düzlem ile yarı sonsuz tabaka arasındaki temas problemini çözmüşlerdir. Tabaka ile yarım düzlem arasında sürtünme olmaması ve tam yapışık olması durumlarını ayrı ayrı ele almışlardır. Çalışma sonucunda, ara yüzeydeki normal gerilmeler ve kayma gerilmeleri çeşitli malzeme kombinasyonları için sunulmuştur.

Rijit temele oturan ve düz bir blok aracılığıyla yüklenmiş tabakanın sürekli ve süreksiz temas problemi Civelek vd. (1978) tarafından incelenmiştir. Çalışma sonucunda tabaka ile rijit temel arasındaki ilk ayrılma yükü ve uzaklığı, ayrılma başlangıç ve bitiş noktaları, ayrılma bölgesinde meydana gelen yer değiştirmeler çeşitli boyutsuz büyüklükler için elde edilmiştir.

Elastik bir tabakanın rijit bir düzlem üzerine oturduğu ve eksenel simetrik yük etkisinde olduğu sürtünmesiz temas problemi Geçit ve Erdoğan (1978) tarafından araştırılmıştır. Çalışma sonucunda; ayrılma bölgesinin büyüklüğü ve temas gerilmesinin dağılımı ile ilgili sonuçlar verilmiştir.

Çakıroğlu (1979), elastik yarım düzleme oturan ve rijit düz bir blok aracılığıyla yüklenmiş homojen tabakanın sürekli ve süreksiz temas problemini elastisite teorisine göre çözmüştür. Çalışmada; sürekli temas hali için tabaka ile yarım düzlem arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklığı, bu yükten büyük yükler için meydana gelen ayrılma bölgesinin boyu ile ilgili sayısal sonuçlar verilmiştir. Ayrıca, her iki durumda blok altındaki ve tabaka ile yarım düzlem arasındaki temas gerilmelerinin değişimi ile ilgili sonuçlar verilmiştir.

Elastik tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki sürekli ve süreksiz temas problemi Geçit (1980) tarafından irdelenmiştir. Çalışmada, tabaka üst tarafından düzgün yayılı yük ile yüklenmiş olup bu yüke ilave olarak tabakayı kaldırmaya çalışan veya tabakayı bastıran tekil yük etki ettirilmesi durumları için ayrı ayrı çözümler yapılarak ilk ayrılmayı başlatan kritik yük ve tabaka ile yarım düzlem arasındaki temas gerilmesi yayılışı elde edilmiştir.

Kravchuk ve Vasilev (1980), sonlu lineer ve lineer olmayan elastik cisimler için temas probleminin çözümünde nümerik metotları araştırmışlardır.

Keer vd. (1984), üzerine rijit bir bloğun etkidiği elastik çeyrek düzlem problemini araştırmışlardır. Problemin çözümünde iteratif yöntem kullanılmıştır. Önce tahmini bir temas bölgesi seçilmiş ve bu bölge dikdörtgensel bölgelere ayrılarak her bir bölgede gerilmelerin sabit olduğu düşünülmüştür. Bu şekilde integral denklem lineer denklem sisteminin çözümüne dönüştürülerek iterasyonlar sonucunda gerçek temas bölgesi ve temas bölgesindeki gerilme dağılımı elde edilmiştir.

Fabrikant ve Sankar (1984), homojenliği derinliğiyle değişen dönel simetrik elastik yarım düzlem probleminin kesin çözümünü araştırmışlardır. Çalışma sonucunda panç altındaki temas gerilmesini veren ifadeler elde edilmiştir.

Farklı ortotropik yarı sonsuz ve sonsuz şeritler için elastik temas problemi Loboda ve Tauchert (1985) tarafından ele alınmıştır. Çalışmada; alttan tam bağlı, sonsuz uzunluklu ortotropik tabakaya sonlu ucuyla oturan yarı sonsuz ortotropik tabakanın yapışık olması ve olmaması durumları irdelenmiştir. Çalışma sonucunda, temas bölgesinden sonlu bir mesafede yarı sonsuz tabakayı boyuna veya enine çekmeye çalışan simetrik tekil kuvvetler etkisinde ara yüzdeki normal ve kayma gerilmelerinin dağılımı elde edilmiştir.

Geçit (1986), elastik yarı sonsuz dairesel silindir ile elastik yarım düzleme oturan tabaka için aksenal simetrik temas problemini çözmüştür. Çalışmada, sürtünme olmadığı ve çekme gerilmelerinin temas yüzeyi boyunca aktarılmadığı kabul edilmiştir. Yer değiştirme ve gerilmeler integral dönüşüm teknikleri kullanılarak elde edilmiştir. Sayısal çözümler yapılmış, değişik malzeme özellikleri ve kesit boyutları için temas uzunlukları ve temas gerilmesi dağılımları bulunarak grafiklerle sunulmuştur.

King ve O'Sullivan (1987), rijit dairesel panç aracılığıyla yüklenmiş, tabakalı elastik yarım düzlemin sürtünmeli temas problemini ele almışlardır. Tek bir tabaka ve elastik yarım düzlemin temas problemi düzlem şekil değiştirme hali için detaylı olarak incelenmiş ve ara yüzdeki gerilme dağılımları belirlenmiştir.

Nowell ve Hills (1988), bir hibrid metot kullanarak ince bir elastik şerit ile simetrik yerleştirilmiş tekerlekler arasında meydana gelen düzlemsel temas problemini ele almışlardır. Çalışmada, sürtünmesiz ve sürtünmeli temas problemleri için yüzey gerilmeleri elde edilmiştir. Ayrıca, yapışma ve kayma bölgelerinin detaylı bir analizi gerçekleştirilmiştir.

Çakıroğlu ve Erdöl (1989), elastik zemine oturan malzeme sabitleri ve yükseklikleri farklı iki tabakanın birbiri üzerine oturmasından meydana gelen bileşik tabaka problemini çözmüşlerdir. Bütün yüzeylerin sürtünmesiz olduğu ve elastik zemine ait kütle kuvvetinin olmadığı kabul edilmiştir. Ayrıca, tabakalar üstten düzgün yayılı yük ve tekil yük ile kendi ağırlığı etkisi altında bulunmakta olup gerilmeler, yer değiştirmeler, ilk ayrılma uzaklıkları ve bu ilk ayrılmayı meydana getiren dış yüklere ait nümerik sonuçlar elde edilmiştir.

Dempsey vd. (1990), Winkler temeline oturan sonsuz uzunluktaki elastik tabakanın değişik yüklemeler altındaki temas problemini ele almışlardır. Tabakaya üst kısmından tekil yük veya düzgün yayılı yük etki etmesi, tekil yükün eğrisel bir blok veya dikdörtgen bir blok aracılığıyla tabakaya iletilmesi durumları elastisite teorisi ve kiriş teorisine göre ayrı ayrı çözülmüş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Çakıroğlu ve Çakıroğlu (1991), yarı sonsuz düzlem üzerine oturan elastik bir tabakanın sürekli ve süreksiz temas problemini çeşitli yükleme durumları için sürtünmeyi ihmal ederek çözmüşlerdir. Tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki ilk ayrılma yükü ve uzaklığı, ayrılma başlangıç ve bitiş noktaları, ara yüzeyde meydana gelen temas gerilmeleri çalışmada elde edilen sonuçlardır.

Rijit mesnetli ve sonlu yüksekliğe sahip elastik bir tabakanın rijit silindirik bir blok ile sürtünmesiz temas problemi Jaffar (1993) tarafından incelenmiştir. Çalışmada, tabakanın blok ile sürtünmesiz temasından meydana gelen yüzey deformasyonları Chebyshev serileri yardımıyla sayısal olarak hesaplanmıştır.

Fan ve Keer (1994), yarı sonsuz elastik bir ortamda iki boyutlu temas problemini ele almışlardır. Çözümde, analitik fonksiyonların sürekliliği yaklaşımı kullanılmıştır.

Rijit düzlem üzerindeki elastik bir tabakanın silindirik iki rijit blok aracılığıyla yüklenmesi durumuna ait temas problemi Lan vd. (1996) tarafından ele alınmış ve temas yüzeyindeki gerilme yayılışları elde edilmiştir.

Elastik sabitleri ve yükseklikleri farklı iki tabakadan oluşan ve alt tabakasında simetri ekseninde düşey bir çatlak bulunan bileşik tabakada temas ve çatlak problemi Birinci (1998) tarafından irdelenmiştir. Çalışmada; tabaka kalınlıkları, blok yarıçapı, mesnet genişliği, blok genişliği ve malzeme sabitlerinin oranlarının çeşitli değerleri için temas gerilmeleri, normal gerilmeler, tabakalar arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklığı, çatlak uçlarındaki gerilme şiddet faktörü ve çatlak yüzey yer değiştirmeleri elde edilmiştir.

İki elastik çeyrek düzlem üzerine oturan bir elastik tabakanın yüklemeye göre simetrik olması ve olmaması durumlarında temas problemi Akavcı (1999) tarafından incelenmiştir. Çalışmada, tabaka ile çeyrek düzlemler arası sürtünmesiz kabul edilip temas bölgesinde yalnız normal basınç gerilmelerinin olduğu düşünülmüştür. Problem, tekil integral denklemlere uygulanabilen sayısal bir çözüm tekniğiyle birlikte integral dönüşüm tekniğinden yararlanılarak formüle edilmiştir. Elde edilen tekil integral denklem takımında bilinmeyen fonksiyon olarak temas bölgesi boyunca tabaka ile çeyrek düzlemler arasındaki temas gerilmeleri bulunmuştur. Elde edilen denklem takımını, Jacobi polinomlarından yararlanılarak uygulanan bir kolokasyon metodu ile çözmek için bir bilgisayar programı hazırlanmıştır.

Özşahin (2000), rijit iki düz blok üzerine oturan bileşik tabakada sürekli ve süreksiz temas problemini çözmüştür. Süreksiz temas durumuna ilişkin bileşik tabaka ile rijit düz



bloklar arasındaki ayrılma ve tabakalar arasındaki ayrılma ele alınmıştır. Sürekli temasta iki elastik tabaka arasında sürtünme bulunması ve bulunmaması hallerinde ilk ayrılmayı meydana getiren kritik yük bulunmuştur. Süreksiz temas durumunda sürtünme dikkate alınmamış olup, ayrılmanın iki elastik tabaka arasında veya bileşik tabaka ile rijit düz bloklar arasında meydana gelmesi durumları için problem çözülmüştür.

Kahya vd. (2001), dairesel, parabolik ve dikdörtgen olarak alınan farklı panç profilleri için rijit bir temele oturan elastik tabakanın temas problemini kütle kuvvetlerini ve sürtünmeyi ihmal ederek çözmüşlerdir.

Birinci vd. (2002), elastik temele oturan, farklı elastik sabitlere ve yüksekliklere sahip iki malzemedan yapılmış tabakalara ait temas problemini elastisite teorisine göre incelemişlerdir. Gerilme ve yer değiştirme bileşenleri integral dönüşüm teknikleri kullanılarak elde edilmiş, tabakaların herhangi bir noktasında gerilme ve yer değiştirme değerleri araştırılarak grafikleri çizilmiştir.

Kahya (2003), rijit bir temel üzerine yapıştırılmış, üst tarafından sonlu yayılı yüklerle bastırılan iki ortotrop, elastik ve sonsuz uzunluklu tabakadan meydana gelen bileşik tabakada sürekli ve süreksiz temas problemini incelemiştir. Tabakalar arasında ilk ayrılmayı başlatan kritik yük değeri, ilk ayrılma uzaklığı, kritik yükün aşılması durumunda tabakalar arasında meydana gelen ayrılma bölgesinin büyüklüğü, açılma miktarı ve her iki problem için tabakaların ara yüzeyindeki temas gerilmesi dağılışı elde edilmiştir.

Alt tarafından rijit olarak mesnetlenmiş yapışık olmayan iki elastik tabakanın ve rijit pançın sürtünmesiz temas problemi Çömez vd. (2003; 2004) tarafından incelenmiştir.

Ma ve Korsunsky (2004; 2006), ince bir tabakayla kaplanmış elastik yarım düzleme, elastik pançla tekil kuvvet ve buna dik doğrultuda sürtünme kuvvetleri etki etmesi durumunda oluşan temas problemi için genel bir çözüm yöntemini Airy gerilme fonksiyonları yardımıyla geliştirmişlerdir.

Kahya vd. (2007), rijit bir pançla anizotrop elastik yarım düzleme oturan anizotrop elastik tabakanın temas problemini incelemişlerdir. Problem temas uzunluğunun ve temas gerilmelerinin bilinmeyen olduğu tekil integral denkleme indirgenmiştir.

Özşahin vd. (2007), rijit iki düz blok üzerine oturan değişik elastik sabitlere ve yüksekliklere sahip tabakalardan oluşan sistemin sürtünmesiz temas problemini elastisite teorisine göre çözmüşlerdir. Bileşik tabaka üst yüzeyinden sınırlı bir bölgede yayılı basınç yükünün etkisinde bırakılmış, bileşik tabaka ile rijit düz bloklar arasında sürtünmenin bulunmadığı kabul edilirken, tabakalar arasındaki sürtünme dikkate alınmıştır. Problem

temas gerilmelerinin bilinmeyen olduğu tekil integral denkleme indirgenmiş ve bu denklem sayısal olarak çözülerek sonuçları grafiklerle sunulmuştur.

Adıbelli (2010), rijit bir panç aracılığıyla yüklenmiş ve elastik yarım düzlem üzerine oturan yapışık iki tabakaya ait temas problemini ve aynı problemin alt tabakasında çatlak olması halini elastisite teorisi ve integral dönüşüm tekniğini kullanarak çözmüştür. Çalışmada; farklı yük, malzeme ve geometrik verilere göre temas uzunlukları, temas gerilmeleri, gerilme ve yer değiştirme bileşenleri ile gerilme şiddet faktörleri sayısal olarak elde edilmiştir.

Homojen yarım düzlem üzerine oturan ve rijit bir blok aracılığıyla yüklenmiş tabakanın sürtünmeli temas problemi Çömez (2010) tarafından elastisite teorisi kullanılarak ele alınmıştır. Çözümde tabaka ile blok arasındaki ve tabaka ile yarım düzlem arasındaki sürtünme hesaba katılmıştır.

İki elastik çeyrek düzleme oturan ve tekil yükü ileten dairesel rijit bir panç aracılığıyla yüklenmiş sürtünmesiz elastik tabaka problemi ve bu probleme yapay sinir ağı yönteminin uygulanması Çakıroğlu (2011) tarafından çalışılmıştır. Problemin çözümünde elastisite teorisi ve integral dönüşüm tekniği kullanılarak yer değiştirme ve gerilme ifadeleri elde edilmiş, değişik yükleme, malzeme ve geometri durumlarında temas mesafeleri ve temas gerilmeleri hesaplanmıştır.

Öner (2011), rijit dairesel bir panç aracılığıyla yüklenmiş ve elastik yarı sonsuz düzleme oturan elastik iki tabakanın sürekli temas problemini incelemiştir. Söz konusu problem elastisite teorisi ve integral dönüşüm tekniği kullanılarak çözülmüş; panç altındaki temas gerilmeleri, temas uzunlukları, simetri eksenine boyunca normal gerilmeler ve kayma gerilmeleri, tabakalar arasındaki ve alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve uzaklıkları belirlenmiştir. Aynı problemin ANSYS programı kullanılarak yaklaşık çözümü, Öner vd. (2015) tarafından gerçekleştirilmiş ve elde edilen sonuçlar analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Zhupanska (2011), iki özdeş elastik kürenin temas problemini incelemiştir. Çalışmada, problemi çift serili denklemlere indirgemek için Legendre serisi açılımlar biçiminde genel bir çözüm kullanılmış, ardından ikinci tür Fredholm integral denklemine indirgenmiştir. Küre için temas gerilmesi ve yüzeyinde meydana gelen deplasmanların analizi yapılmıştır.

Chen vd. (2011), elastik yarım düzleme rijit olarak bağlı pançların olması durumundaki temas problemini için singüler integral denklem metodunu kullanmışlardır.



Çalışmada, elde edilen tekil gerilme dağılımından panç tekil gerilme faktörü (kısaca PSSF) tanımlanmıştır. Elastik yarım düzlemdeki çoklu düz panç problemleri için temel çözüm, pançların ayrıldığı ve pançlara uygulanan kuvvetlerin keyfi olduğu durumlar için araştırılmıştır.

Çömez ve Erdöl (2013), homojen bir katmana bağlı ve rijit bir blok aracılığıyla yüklenmiş elastik bir tabakanın sürtünmeli temas problemini irdelemişlerdir. Elastisite teorisi ve integral dönüşüm tekniği kullanılarak, problem temas uzunluğunun ve temas gerilmesinin bilinmeyen olduğu ikinci tip bir singüler integral denkleme indirgenmiştir. İntegral denklem Gauss-Jacobi integrasyon formülü ve Jacobi polinomları kullanılarak çözülmüş; temas uzunlukları, temas gerilmeleri, normal gerilmeler ve kayma gerilmeleri elde edilmiştir.

Long ve Wang (2013), aksenal simetrik Hertzian temas problemine yüzey gerilmesinin etkilerini araştırmışlardır. Çalışma sonucunda; temas yarıçapı ile yüzey gerilmesi/elastisite modülü oranı karşılaştırılabilir olduğunda, yüzey gerilmesinin temas bölgesi üzerindeki basınç dağılımını önemli ölçüde etkilediği bulunmuştur.

Anizotropik bir tabaka ile kaplı anizotropik yarım düzlem için temas probleminin çözümü Bagault vd. (2013) tarafından yapılmıştır. Çalışmada, temas uzunlukları ve gerilme dağılımı üzerine anizotropinin etkisi araştırılmıştır.

İki çeyrek düzlem üzerine oturan elastik iki tabakanın sürekli ve ayrılmalı temas probleminin elastisite teorisi ve integral dönüşüm teknikleri kullanılarak analitik çözümü (Yaylacı, 2013; Yaylacı ve Birinci, 2013) tarafından gerçekleştirilmiştir. Aynı problemin ANSYS programı kullanılarak yaklaşık çözümü Yaylacı vd. (2014) tarafından yapılmış ve sonuçların analitik sonuçlarla üst üste düştüğü görülmüştür.

Adıyaman (2013), iki elastik çeyrek düzlem üzerine oturan, homojen, izotrop elastik bir tabakanın sürtünmesiz ve ayrılmalı temas problemini elastisite teorisine göre çözmüştür. Çözümde tabakaya üstten rijit bir panç aracılığıyla iletilen tekil bir yük ve simetrik şekilde yerleştirilmiş iki sabit yayılı yük etki ettirilmiştir.

Adıbelli vd. (2013), rijit silindirik bir blok aracılığıyla yüklenmiş ve elastik yarım düzleme oturan iki tabakanın ayrılmalı temas problemini incelemişlerdir. İntegral dönüşüm tekniği ve problemin sınır şartları kullanılarak söz konusu problem iki singüler integral denkleme indirgenmiştir. Bu integral denklem sistemi çözülerek temas uzunlukları ile temas gerilmeleri elde edilmiş ve sonuçlar literatürle karşılaştırılmıştır.

Özşahin ve Taşkner (2013), üç rijit panç aracılığıyla yüklenmiş ve elastik yarım düzleme oturan tabaka için temas problemini çözmüşlerdir. Probleme ilişkin ilk ayrılma yükleri ve uzunlukları elde edilmiştir. Çalışmada, problemin süreksiz temas haline ilişkin açılma mesafeleri de araştırılmıştır.

Elastik yarım düzlem üzerine oturan ve rijit bir blok aracılığıyla yüklenmiş elastik iki tabakanın sürekli temas problemi Öner ve Birinci (2014) tarafından çalışılmıştır. Çözümde, bütün yüzeylerin sürtünmesiz olduğu kabul edilmiş olup düz ve dairesel olmak üzere iki farklı blok profili göz önüne alınmıştır.

Öner vd. (2014), Winkler zemine oturan elastik iki tabakanın ayrılmalı temas problemini elastisite teorisi ve sonlu elemanlar yöntemini kullanarak çözmüşler ve elde edilen sonuçların birbiriyle oldukça uyumlu olduğu sonucuna varmışlardır.

Zhang ve Li (2015), lineer elastisitede temas problemleri için sınır genişletilmiş lagrange yöntemini araştırmışlar ve bu metodun çözümde verimli bir yöntem olduğu sonucuna varmışlardır.

Katı cisimlerin ideal temas bölgeleri için elastisite teorisi problemlerinin singüler çözümleri analitik olarak Romashchenko (2015) tarafından araştırılmıştır. Çalışmada; serbest, sabit veya hareketli mesnetli yüzeye sahip iki elastik ortamın ideal temas yüzeyinin, normal kesişme noktası civarındaki tekil çözümleri analitik olarak araştırılmıştır.

Winkler zemine oturan elastik iki tabakanın sürekli ve süreksiz temas probleminin çözümü analitik ve sonlu elemanlar yöntemleri ile Birinci vd. (2015) tarafından incelenmiştir.

Rijit dikdörtgen iki blok aracılığıyla yüklenmiş ve elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan homojen, izotrop elastik bir tabakanın sürtünmesiz ve ayrılmalı temas problemi Karabulut (2016) tarafından irdelenmiştir. Problemde, tabakaya üstten rijit dikdörtgen iki blok aracılığıyla iki tekil yük etki etmektedir. Çalışmada; blok-tabaka ve tabaka-yarım düzlem arasındaki boyutsuz temas uzunlukları ve boyutsuz gerilme dağılımları, y eksenini boyunca tabaka ve yarım düzlemde oluşacak normal gerilme ve kayma gerilmesi dağılımları ile ilgili sayısal değerler çeşitli boyutsuz büyüklükler için elde edilmiştir.

Bora (2016), asimetrik iki düz blok aracılığıyla yüklenmiş ve elastik yarım düzleme oturan iki tabakanın sürekli ve süreksiz temas problemini, elastisite teorisi ve integral dönüşüm tekniklerini kullanarak çözmüştür. Ayrıca, problem sonlu elemanlar yöntemini

esas alan ANSYS paket programı ile modellenerek elde edilen yaklaşık sonuçlar analitik yöntemden bulunan sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

### **1.3.2. Fonksiyonel Derecelendirilmiş (FD) Tabakalı Ortamlarda Temas Problemlerine İlişkin Çalışmalar**

Temas mekaniğinde tabakaların FD olmasına ilişkin literatürde yapılan çalışmalar aşağıda özetlenmektedir.

Sürtünmesiz düz, konik ve küresel rijit pançlar aracılığıyla yüklenmiş eksenel simetrik fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerde temas gerilmeleri Giannakopoulos ve Suresh (1997a,1997b) tarafından araştırılmıştır.

Giannakopoulos ve Pallot (2000), FD yarım düzleme oturan rijit bir silindirin iki boyutlu temasını araştırmışlardır. Derecelendirilmiş yarım düzlem, sabit bir Poisson oranı ve üstel bir fonksiyona bağlı olarak derinlikle değişen elastisite modülü ile yerel izotropik olacak şekilde modellenmiştir. Çalışmada, sürtünmesiz temasta yapışma etkisi de irdelenmiştir. Sonuçlar, üstel fonksiyona bağlı olarak sağlanan elastik gradasyonun, aşınmaya dirençli kayan yüzeylerin tasarımında çok avantajlı olabileceğini göstermiştir.

Güler ve Erdoğan (2004; 2007), fonksiyonel derecelendirilmiş özellikteki tabaka ile kaplı olan elastik yarım düzlemin sürtünmeli temas problemini incelemiştirlerdir. Kayma modülü derinliği boyunca üstel olarak değişen tabakaya, düşey ve yatay kuvvetler dikdörtgen ve eğrisel profillerde olan değişik şekillerdeki pançlar aracılığıyla etki ettirilmiştir. Problem, integral dönüşüm tekniği kullanılarak bir tekil integral denkleme dönüştürülerek temas yüzeyindeki gerilme dağılımları elde edilmiştir.

Transfer Matrix ve Fourier dönüşüm metotları kullanılarak fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka, tabakalı bir sistem olarak ele alınarak sürtünmeli ve sürtünmesiz temas problemleri Ke ve Wang (2006; 2007) tarafından çalışılmıştır.

Yang ve Ke (2008), rijit silindirik bir panç altındaki kaplama tabakası-FD tabaka-alt tabaka yapısı için iki boyutlu sürtünmesiz temas problemini irdemiştirlerdir. Kaplama tabakası ve alt tabaka, farklı fiziksel özelliklere sahip homojen malzemelerdir. Ara tabaka kalınlık boyunca keyfi olarak değişen kayma modülü ile homojen değildir. Kalınlık-kalınlık varyasyonuna yaklaşmak için parçalı doğrusal çok katmanlı bir model kullanılarak FD tabaka kayma modülü doğrusal olarak değiştiği varsayılmış olan birkaç alt katmana bölünmüştür. Poisson oranı çözümü kolaylaştırmak için sabit olarak alınmıştır.

Eksenel simetrik sürtünmesiz bir panç aracılığıyla yüklenmiş FD kaplamalı yarım düzlemin temas problemi Liu ve Wang (2008) tarafından araştırılmıştır. FD kaplamanın kayma modülünün üstel bir fonksiyon olduğu, Poisson oranının ise sabit olduğu kabul edilmiştir. Hankel integral dönüşüm tekniği kullanılarak eksenel simetrik sürtünmesiz temas problemi, Cauchy tipi tekil bir integral denkleme indirgenmiştir. Bu denklemler sayısal olarak çözümlenerek; temas gerilmesi, temas yarıçapı ve pançın kaplamaya girme derinliği çeşitli panç profilleri için hesaplanmıştır.

El-Borgi vd. (2006), homojen yarım düzlem üzerine oturan ve yayılı yük ile yüklenmiş FD bir tabakanın ayrılmalı temas problemini incelemiştir. Söz konusu problem El-Borgi vd. (2014) tarafından sürtünme olması durumu için yeniden ele alınmış ve çözüm genişletilmiştir. FD bir tabakanın eksenel simetrik temas problemi, Henkel integral dönüşümü kullanılarak Rhimi vd. (2009) tarafından araştırılmıştır. Rhimi vd. (2009) aynı problemi dairesel panç hali için ele alarak çözmüşlerdir.

Choi (2009), sürtünmeli kayan düz bir panç aracılığıyla yüklenmiş, FD bir tabakanın temas problemini incelemiştir. Araştırmacı, sürtünme katsayısının sabit olduğunu ve FD tabakanın alt tarafının sağlam bir temel üzerine sıkıca bağlı olduğunu kabul etmiştir. Ortamın FD homojen olmayan özelliği, kayma modülünün üstel bir değişimi ile temsil edilirken Poisson oranı sabit tutulmuştur. Düzlem elastisite denklemleri ve Fourier integral dönüşüm tekniği kullanılarak problemin formülasyonu, sayısal olarak çözülen bilinmeyen temas basıncı için ikinci türdeki Cauchy tipi tekil integral denkleme indirgenmiştir. Sonuç olarak, temas gerilmesinin ve düzlem içi yüzey gerilme bileşeninin dağılımlarının çeşitli parametrelere göre (malzemenin homojen olmaması, sürtünme katsayısı, panç genişliği ve Poisson oranı) değişimleri araştırılmıştır.

Apatay vd. (2010), fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme (FDM)'den yapılan bir kaplamada yüzey altında, temas yüzeyindeki düzgün profilli sürtünmeli rijit zımba etkisiyle oluşan gerilme dağılımlarını hesaplamak için tekil integral denklemlere dayalı bir yöntem geliştirmişlerdir. Çalışmada; düzlem elastisite durumu ele alınmış ve Poisson oranının, homojen gövde ve FDM kaplama için aynı olduğu kabul edilmiştir. Problem, bir tekil integral denkleme indirgenmiş ve bu denklem bir açılım-sıralama tekniği kullanılarak sayısal olarak çözülmüştür.

Aizikovich vd. (2011), derinlik boyunca rastgele değişen özelliklere sahip malzemeler için temas problemlerinin verimli bir şekilde çözümünü veren yaklaşık analitik bir yöntem geliştirmiştir.

FD malzemelerle kaplı elastik olarak benzer iki silindirin yuvarlanma temas problemi Güler vd. (2012) tarafından araştırılmıştır. Tekil integral denklem yaklaşımı problemin temel denklemlerini çıkarmak için kullanılmıştır. Çözümde temel denklemler, Gauss-Chebyshev integrasyon formülasyonu ile cebirsel denklem sistemine indirgenmiştir. Mekanik özelliklerin, kaplama kalınlığının ve dış yüklerin; yüzey gerilme bileşenleri, sürtünme oranı ve güç kaybı üzerine etkilerini incelemek için kapsamlı bir parametrik çalışma yapılmıştır.

Chen ve Chen (2012), derecelendirilmiş bir tabaka ile kaplı homojen elastik yarım düzlem ve rijit panç arasındaki temas davranışlarını incelemişlerdir. Çalışmada; temas ara yüzündeki yer değiştirmelerin ve normal gerilmelerin ilişkisini tanımlayan temel denklem, Fourier dönüşümü ve Transfer matrisi yöntemi vasıtasıyla elde edilmiştir. Çalışma sonunda, elde edilen tüm sonuçların güçlü ve aşınmaya dirençli kaplama yüzeylerinin tasarımı için yararlı olduğu sonucuna varılmıştır.

Volkov vd. (2013), düz bir tabanı olan dairesel bir pançın yumuşak FD elastik bir tabakaya nüfuz etmesi durumundaki temas problemini irdelemişlerdir. Çalışmada, FD tabakanın elastik özelliklerinin keyfi olarak derinliğe göre değiştiği, üzerine oturduğu temel ise elastik olduğu ancak tabakadan çok daha rijit olduğu varsayılmıştır. Yaklaşık bir analitik çözüm oluşturulmuş ve çözümlerin problemin karakteristik boyutsuz geometrik parametresinin hem büyük hem de küçük değerleri için asimptotik olarak doğru olduğu gösterilmiştir.

FD malzemeler içeren yapışık ve yapışık olmayan temas problemlerinin iki boyutlu çözümü Chidlow vd. (2013) tarafından ele alınmıştır. Çalışmada; fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemeler (FDM) içeren hem yapışık hem de yapışık olmayan temas problemlerinden kaynaklanan temas yarı genişliği ve yüzey basıncının saptanması için yarı analitik bir algoritma sunulmuştur. Ele alınan homojen olmayan elastik cisim, kayma modülü derinlik boyunca üstel olarak değişen bir elastik kaplamadan ve homojen elastik bir tabakadan oluşmaktadır. Çözüm, düzlem şekil değiştirme hali için yapılmıştır.

Çömez (2013), Winkler zemine oturan FD tabaka için temas problemini lineer elastisite teorisini kullanarak çözmüştür. Tabaka, normal doğrultuda rijit silindirik bir panç aracılığıyla tekil yüklerle yüklenmiştir. Çalışmada, Poisson oranı sabit olarak alınmış ve elastisite modülünün tabakanın kalınlığı boyunca üstel olarak değiştiği varsayılmıştır. Problem, Fourier integral dönüşüm tekniği ve sınır koşulları kullanılarak Cauchy tipi bir tekil integral denkleme indirgenmiştir. İntegral denklemin sayısal çözümü Gauss-

Chebyshev integral formülasyonu kullanarak gerçekleştirilmiştir. Çalışma sonucunda; malzeme homojenliği, Winkler temelinin rijitliği ve panç yarıçapının; temas gerilmeleri, temas alanı ve normal gerilmeler üzerindeki etkileri elde edilmiştir.

FD sonlu boyutlu bir plaka ve rijit küresel bir panç arasındaki temas problemi Nikbakht vd. (2014) tarafından analiz edilmiştir. Çalışmada ele alınan plaka, altta sünek (metal) bir faz ve üst yüzeyde kırılğan (seramik) bir fazdan oluşmaktadır. Rijit panç plakanın seramik açısından daha zengin olan üst yüzeyine etki etmektedir. Çalışma sonucunda; FD bir plaka için temas yasasının, elastisite modülünün ve malzeme özellikleri dağılımının gevrek sünek faz oranına bağlı olduğu sonucuna varılmıştır.

FD iki tabakalı kirişin elastisite çözümü, Çömez (2014) tarafından ele alınmıştır. Çalışmada, üst ve alt tabaka birbirine tam bağlıdır ve kenarlarından basit mesnetlidir. Çözümde; Poisson oranları sabit olarak alınmakta ve Elastisite modülleri tabakaların kalınlığı boyunca üstel olarak değişmektedir.

Gün ve Gao (2014), sürtünmeli homojen olmayan, izotropik ve lineer elastik FD malzemeli temas problemleri için kuadratik bir sınır elemanı formülasyonu geliştirmişlerdir. Çalışmada; Poisson oranı sabit olarak kabul edilirken, fonksiyonel dereceli malzemelerin elastisite modülü için uzaysal koordinatlarla üstel bir değişim varsayılmıştır. Temas koşulları altında sonsuz sürtünme, sürtünmesiz ve Coulomb sürtünmesi de dahil olmak üzere temas durumları için farklı denklem sistemleri birleştirilmiştir.

Vasiliev vd. (2014), homojen olmayan tabakalar için elastisite teorisi yardımıyla temas problemlerinde yarı analitik çözümler üretmek için bir yaklaşım geliştirmişlerdir. Sunulan yaklaşımın, sürekli homojen olmayan (fonksiyonel derecelendirilmiş) veya parçalı homojen olan (farklı elastik özelliklere sahip homojen tabakalar kümesi) keyfi kalınlık tabakası için etkili olduğu vurgulanmıştır.

Rijit silindirik bir panç ve FD tabaka için hareketli temas problemi Çömez (2015) tarafından çalışılmıştır. Panç tekil normal bir yüke maruz olup ses altı bir hızda sabit bir şekilde hareket etmektedir. Tabakanın Poisson oranı sabit olarak alınmış olup hem kayma modülünün hem de yoğunluğunun derinlik boyunca üstel olarak değiştiği varsayılmıştır. Çalışma sonucunda; temas bölgesi, temas gerilmesi ve normal gerilmeler için sayısal sonuçlar verilmiştir.

Yan ve Li (2015), FD bir tabaka ile elastik bir tabaka arasında pürüzsüz ayrılmalı temas problemini incelemiştir. Çalışmada; FD tabakanın izotropik olduğu kabul edilmiş



olup, tabakanın kayma modülü kalınlık boyunca üstel bir fonksiyona bağılı olarak değişmektedir. Çalışma sonucunda, temas gerilmeleri ve temas bölgeleri için sayısal sonuçlar çeşitli boyutsuz büyüklükler için grafik ve tablolarla verilmiştir.

Liu vd. (2016), rijit bir blok aracılığıyla yüklenmiş FD tabaka için eksenel simetrik temas problemini dikkate almışlardır. Çalışmada, rijit blok profilinin silindirik ve küresel olması durumları irdelenmiştir. Çözümde, kayma modülünün rastgele bir fonksiyon olarak değiştigi FD tabakanın modellenmesi için lineer çok tabakalı bir model uygulanmıştır.

Rijit silindirik bir blok aracılığıyla yüklenmiş iki FD tabakanın ayrılmalı temas problemi ara yüzeydeki malzeme özelliklerinin uyumsuz olması durumu göz önünde bulundurularak Çömez vd. (2016) tarafından çözülmüştür. Çözümde tabakaların kayma modüllerinin kalınlık boyunca üstel bir fonksiyon olarak değiştigi kabul edilmiştir. Çalışma sonucunda, homojensizlik parametresinin ve ara yüzeydeki malzeme özelliğinin uyumsuz olmasının temas gerilmelerine ve temas bölgesinin büyüklüğüne etkisi araştırılmıştır.

Heß (2016), rijit pañç ile homojen olmayan FD yarım düzlem arasındaki eksenel simetrik ve sürtünmesiz temas problemlerinin çözümü için etkili bir yöntem sunmuştur. Sunulan bu yöntem, üç boyutlu temas problemlerinin doğru tanımlanmış bir winkler temeli olan tek boyutlu problemlerle eşleştirilebileceğini göstermektedir.

Homojen iki çeyrek düzlem üzerine oturan FD tabakanın ayrılmalı temas problemi Adıyaman vd. (2016) tarafından irdelenmiştir. Çalışmada, FD tabakanın kayma modülü üstel bir fonksiyona bağılı olarak değişmektedir. Malzemenin rijitlik parametresinin temas gerilmelerine ve temas bölgesinin uzunluğuna etkisi, çalışma sonunda elde edilen bulgulardır.

Elloumi vd. (2016), manyetik elektro-mekanik yüklere maruz, mükemmel derecede iletken rijit pañç ve FD bir manyeto-elektro-elastik malzeme arasındaki sürtünmeli temas problemini ele almışlardır. Problem, düzlem gerilme koşulları altında formüle edilmiştir. Fourier dönüşümü kullanılarak elde edilen düzlem manyeto-elektro elastiklik denklemleri analitik olarak; bilinmeyenlerin normal temas gerilmesi, elektriksel yer değiştirme ve manyetik indüksiyon olduğu üç tekil integral denkleme dönüştürülmüştür. Rijitlik parametresinin, sürtünme katsayısının ve elastik, elektriksel ve manyetik katsayıların yüzey temas gerilmesi, elektriksel yer değiştirme ve manyetik indüksiyon dağılımları üzerindeki etkisi düz ve dairesel pañç profilleri için elde edilmiştir.

Eksenel simetrik yükleme altında homojen zemine oturan FD tabakanın temas problemi Turan vd. (2016) tarafından incelenmiştir. FD tabakanın kayma modülünün, kalınlık boyunca üstel bir biçimde değiştiği kabul edilmiştir. Yer değiştirmeler ve gerilmeler için sayısal sonuçlar elde edilmiş, klasik elastisite teorisi ve sonlu elemanlar çözümleri için elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Çalışmanın sonuçlarına göre; kullanılan yaklaşımın, FD malzemelerin elasto-statik problemleri için doğru ve etkili olduğu vurgulanmıştır.

Jobin vd. (2017), FD malzemeyle kaplı yüzeyin rastgele şekilli rijit blokla iki boyutlu sürtünmeli temasının sayısal analizini sunmuşlardır. Yükler, rijit blok tamamen kayacak şekilde uygulanmıştır. Rastgele profil için ara yüzdeki basınç dağılımı, modifiyeli bir kosinüs serisi olarak ifade edilmiştir.

Piezoelektrik özelliklere sahip FD tabaka ile rijit panç arasındaki sürtünmesiz temas problemi Patra vd. (2017) tarafından irdelenmiştir. Çalışmada, rijit pançın eksenel olarak simetrik olduğu ve uygulanan bir yük aracılığıyla elastik tabaka üzerine bastırıldığı varsayılmış ve tabaka rijit tabana oturtulmuştur. Tabaka yüzeyindeki gerilmelerin ve elektriksel yer değiştirmelerin değişimi ile normal gerilme üzerindeki piezoelektrik etkiler, sayısal olarak değerlendirilmiş ve grafik olarak gösterilmiştir.

Fonksiyonel derecelendirilmiş bir kaplamadan ve homojen alt tabakadan oluşan termoelastik temas problemi Balcı vd. (2017) tarafından incelenmiştir. Çalışmada, ısı üretimi ile sürtünmeli temasa maruz bırakılan fonksiyonel derecelendirilmiş kaplamalardaki yüzey altı gerilmelerinin hesaplanması için bir sonlu eleman metodolojisi önerilmiştir. Geliştirilen yöntem, temas bölgesi ısı akısı değerlerinde yakınsama gözlenene kadar devam eden yinelemelere dayanmaktadır. Sunulan sonuçlar, çeşitli geometrik parametrelerin ve malzeme parametrelerinin yüzey altı gerilmeleri üzerindeki etkilerini göstermektedir.

Fonksiyonel derecelendirilmiş piezoelektrik malzeme ile kaplanmış ve rijit dairesel bir pança maruz yarım düzlemin eksenel simetrik burulma teması problemi Su vd. (2017) tarafından çalışılmıştır. Çalışmada; Hankel integral dönüşüm tekniği kullanılmış ve problem tekil bir integral denkleme indirgenmiştir. Daha sonra temas yüzeyindeki bilinmeyen temas gerilmesi ve elektrik yer değiştirmesi sayısal olarak belirlenmiştir.

Fonksiyonel olarak derecelendirilmiş enine izotropik kaplamaya sahip olan elastik enine izotropik bir yarım düzleme, rijit konik bir pançın bastırılması durumunda eksenel simetrik temas problemi Vasiliev vd. (2017) tarafından ele alınmıştır. Çalışmada;



kaplamanın elastisite modülü, birbirinden bağımsız olarak rastgele sürekli pozitif fonksiyonlara göre derinlikle değişmektedir. Problemin çözümü, elastisite teorisine göre yapılmıştır.

Çömez ve Güler (2017), rijit silindirik bir panç aracılığıyla yüklenmiş ve fonksiyonel olarak derecelendirilmiş iki tabakanın düzlem temas problemini çözmüşlerdir. Çalışmada, normal ve teğetsel kuvvetler üst tabakaya rijit silindirik bir panç aracılığıyla uygulanmıştır ve alt tabaka rijit temele tam yapışıktır. Ayrıca, tabakaların Poisson oranları sabit olarak alınmıştır ve elastisite modülleri tabakaların kalınlığı boyunca üstel olarak değişmektedir. Fourier integral dönüşüm tekniği kullanılarak düzlem temas problemi temas gerilmesinin ve temas uzunluğunun bilinmeyen olduğu bir singüler integral denkleme indirgenmiştir. Singüler integral denklem Gauss-Jacobi integrasyon formülü kullanılarak sayısal olarak çözülmüştür. Çeşitli fiziksel ve geometrik parametrelere bağlı olarak temas gerilmeleri ve temas uzunlukları çalışma sonucunda elde edilmiştir.

FD enine izotropik kaplama ile enine izotropik bir yarım düzleme düz bir pançın bastırılması durumunda düzlem temas problemi Vasiliev vd. (2017) tarafından araştırılmıştır. Çalışmada, kaplamanın elastisite modülü rastgele fonksiyonlara göre derinlikle değişmektedir. Problemin geometrik parametresinin tüm aralığı için etkili olan yaklaşık analitik bir çözüm oluşturulmuştur.

#### **1.4. Çalışmanın Kapsamı**

Bu çalışmada; rijit bir blok aracılığıyla yüklenmiş, elastik yarım düzleme oturan FD tabakanın sürekli ve süreksiz temas problemi elastisite teorisine göre çözülmüştür. Çözümde bütün yüzeylerin sürtünmesiz olduğu kabul edilmiş olup, FD tabakanın kütle kuvveti hesaba katılırken elastik yarım düzlemin kütle kuvveti ihmal edilmiştir.

Birinci bölümde; öncelikle FDM'ler hakkında genel bilgiler verilmiş, daha sonra konuyla ilgili literatür özeti sunulmuştur. Ayrıca, düzlem elastisite teorisine ait temel denklemler ve integral dönüşüm teknikleri kullanılarak, düzlem haldeki genel gerilme ve yer değiştirme ifadeleri elde edilmiştir.

İkinci bölümde; problemin tanımı yapılmış ve öncelikle sürekli temas durumu incelenmiştir. Birinci bölümde FD tabaka ve yarım düzlem için elde edilen gerilme ve yer değiştirme ifadelerine problemin sınır şartları uygulanarak, FD tabaka ve yarım düzlem için altı bilinmeyenli altı cebrik denklem elde edilmiştir. Bu denklemlerin çözümü

sonucunda gerilme ve yer deęiřtirme ifadelerindeki bilinmeyen katsayılar rijit blok altındaki temas gerilmesine baęlı olarak elde edilmiřtir. Rijit blok ile FD tabaka arasındaki dūřey yer deęiřtirme fonksiyonunun tūrevinin, blok profilini tanımlayan fonksiyonun tūrevine eřit olması řartı kullanılarak problem bir singūler integral denkleme indirgenmiřtir. Daha sonra bu integral denklem rijit blok profilinin dairesel veya dūz olması durumları iēin sayısal olarak çōzūlmūř ve blok altındaki boyutsuz temas gerilmeleri hesaplanmıřtır. Bu boyutsuz temas gerilmelerinden faydalanılarak simetri eksenini boyunca normal gerilmelerin ve bu eksen yakınındaki kayma gerilmesinin deęiřimini incelenmiřtir. Ayrıca, FD tabaka ile elastik yarım dūzlem arasında ilk ayrılmayı meydana getirecek yūk ve ilk ayrılmanın meydana geleceęi uzaklık arařtırılmıřtır. Yine bu bōlūmde, sūrekli temas durumunun ardından sūreksiz temas durumu incelenmiřtir. Sūreksiz temas haline iliřkin sınır řartları gerilme ve yer deęiřtirme ifadelerine uygulanarak altı bilinmeyenli altı cebrik denklemden oluřan bir denklem sistemi elde edilmiřtir. Bu denklem takımının çōzūmū sonucunda bilinmeyen katsayılar, rijit blok altındaki temas gerilmesine ve FD tabaka ile elastik yarım dūzlem arasındaki yūzeyde meydana gelecek sonlu ayrılmanın eęimini ifade eden bilinmeyen fonksiyona baęlı olarak elde edilmiřtir. Rijit blok ile FD tabaka arasındaki temas yūzeyi boyunca tabakanın dūřey yer deęiřtirme fonksiyonunun tūrevinin, blok profilini tanımlayan fonksiyonun tūrevine eřit olması řartı kullanılarak problemin sūreksiz temasına iliřkin birinci integral denklem elde edilmiřtir. Ayrılmanın meydana geldięi bōlgedeki dūřey gerilme deęerlerinin sıfır olması řartı kullanılarak problemin sūreksiz temasına iliřkin ikinci integral denklem elde edilmiřtir. Elde edilen integral denklem sistemi, Gauss-Chebyshev integrasyon formūlasyonu kullanılarak cebirsel bir denklem sistemine indirgenerek çōzūm sayısal olarak gerēekleřtirilmiřtir.

ūēūncū bōlūmde; blok geniřlięi, blok yarıçapı, yūk oranı, rijitlik parametresi ve yoęunluk parametresi gibi parametrelere baęlı olarak, blok altındaki temas gerilmesi yayılıřı, FD tabaka ile elastik yarım dūzlem arasındaki ilk ayrılmayı bařlatan kritik yūk deęeri ve ilk ayrılma uzaklıęı incelenmiřtir. Kritik yūkūn ařılması durumunda; FD tabaka ile elastik yarım dūzlem arasında meydana gelen ayrılma bōlgesinin būyūklūęū, aēılma miktarı ve her iki durum iēin FD tabaka ile elastik yarım dūzlem arasındaki temas gerilmesi yayılıřına iliřkin sayısal bulgular sunulmuř ve irdelenmiřtir. Yine aynı bōlūmde, simetri eksenini boyunca meydana gelen normal gerilmeler ve bu eksen yakınındaki kayma gerilmesi daęılımlarına iliřkin sonuēlar da arařtırılarak sunulmuřtur.

Dördüncü bölümde; çalışmadan çıkarılan sonuçlar verilmiş olup bu bölümü kaynaklar ve özgeçmiş takip etmektedir.

## 1.5. Genel Denklemlerin Elde Edilmesi

Bu kısımda, elastisite teorisinden yararlanılarak FD tabaka ve elastik yarım düzlem için gerilme ve yer değiştirme bileşenlerinin genel ifadeleri elde edilecektir. Bu amaçla, önce bünye denklemleri ve yer değiştirme-şekil değiştirme bağıntıları kullanılmak suretiyle denge denklemleri, yer değiştirmeler cinsinden yazılarak Navier denklemleri elde edilecektir. Yer değiştirme bileşenlerinin gerekli türevleri Navier denklemlerinde yerine yazılarak elde edilecek adi diferansiyel denklem takımının çözümü sonucunda da yer değiştirme bileşenlerinin genel ifadeleri bulunacaktır. Bu ifadelerin bünye denklemlerinde yerine yazılması ile de gerilme bileşenlerinin genel ifadeleri belirlenecektir.

### 1.5.1. Kütle Kuvvetlerinin Bulunmaması Durumunda Genel Denklemlerin Elde Edilmesi

#### 1.5.1.1. Fonksiyonel Derecelendirilmiş (FD) Tabaka için Genel Denklemlerin Elde Edilmesi

Düzlem halde;  $\sigma_{1x}$ ,  $\sigma_{1y}$  ve  $\tau_{1xy}$  gerilme bileşenlerini göstermek üzere, kütle kuvvetlerinin bulunmaması durumunda denge denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{\partial \sigma_{1xh}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{1xyh}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{1yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{1yh}}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

(1) ve (2) ifadelerinde geçen 1 ve  $h$  indisleri sırasıyla, FD tabakayı ve FD tabakanın kütle kuvvetinin olmaması durumuna ilişkin homojen çözümü temsil etmektedirler. Bu ifadelerde geçen gerilme bileşenleri, bünye denklemleri ve yer değiştirme-şekil değiştirme bağıntıları kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\sigma_{1,xh} = \frac{\mu_1(y)}{\kappa_1 - 1} \left[ (\kappa_1 + 1) \frac{\partial u_{1h}}{\partial x} + (3 - \kappa_1) \frac{\partial v_{1h}}{\partial y} \right] \quad (3)$$

$$\sigma_{1,yh} = \frac{\mu_1(y)}{\kappa_1 - 1} \left[ (3 - \kappa_1) \frac{\partial u_{1h}}{\partial x} + (\kappa_1 + 1) \frac{\partial v_{1h}}{\partial y} \right] \quad (4)$$

$$\tau_{1,xyh} = \mu_1(y) \left[ \frac{\partial u_{1h}}{\partial y} + \frac{\partial v_{1h}}{\partial x} \right] \quad (5)$$

(3-5) ifadelerinde geçen  $u_{1h}$ ,  $v_{1h}$  ve  $\kappa_1$  sırasıyla FD tabakanın  $x$  doğrultusundaki yer değiştirme bileşenini,  $y$  doğrultusundaki yer değiştirme bileşenini ve Kolosov sabitini ifade etmektedir.  $\mu_1(y)$  ise FD tabakanın kayma modülünü göstermekte olup aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\mu_1(y) = \mu_0 e^{\beta y} \quad (6)$$

Burada  $\mu_0$ , FD tabakanın üst yüzeyindeki kayma modülünün değerini,  $\beta$  ise sıfırdan farklı değişimi belirleyen rijitlik parametresini göstermektedir. Poisson oranının ( $\nu_1$ ) gerilme dağılımı üzerindeki etkisinin fazla olmadığı bilindiğinden değişmediği kabul edilmiştir. Buna bağlı olarak da  $\kappa_1$  sabit bir değer almakta ve düzlem şekil değiştirme halinde  $\kappa_1 = 3 - 4\nu_1$  olmaktadır.

(3-5) denklemlerinin gerekli türevleri alınıp (1) ve (2) denge denklemlerinde yerlerine yazılırlarsa, Navier denklemleri düzlem şekil değiştirme halinde aşağıdaki şekilde elde edilirler:

$$(\kappa_1 + 1) \frac{\partial^2 u_{1h}}{\partial x^2} + (\kappa_1 - 1) \frac{\partial^2 u_{1h}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 v_{1h}}{\partial x \partial y} + \beta(\kappa_1 - 1) \frac{\partial u_{1h}}{\partial y} + \beta(\kappa_1 - 1) \frac{\partial v_{1h}}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

$$(\kappa_1 - 1) \frac{\partial^2 v_{1h}}{\partial x^2} + (\kappa_1 + 1) \frac{\partial^2 v_{1h}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 u_{1h}}{\partial x \partial y} + \beta(3 - \kappa_1) \frac{\partial u_{1h}}{\partial x} + \beta(\kappa_1 + 1) \frac{\partial v_{1h}}{\partial y} = 0 \quad (8)$$

FD tabakanın; yükleme, malzeme özellikleri ve geometrik olarak  $y$  eksenine göre simetrik olması halinde,  $u_{1h}$  ve  $v_{1h}$  yer değiştirmeleri aşağıdaki eşitlikleri sağlarlar:

$$u_{1h}(x, y) = -u_{1h}(-x, y) \quad (9)$$

$$v_{1h}(x, y) = v_{1h}(-x, y) \quad (10)$$

Navier denklemlerinin kısmi türevli diferansiyel denklem takımı oluşturması problemin çözümünü zorlaştırmaktadır. Navier denklemlerini adi diferansiyel denklem takımına dönüştürmek ve dolayısıyla da çözümü kolaylaştırmak için yer değiştirmeler  $u_{1h}(x, y)$  ve  $v_{1h}(x, y)$ , bilinmeyen fonksiyonlar  $\phi_1(\xi, y)$  ve  $\psi_1(\xi, y)$ ' nin Fourier sinüs ve Fourier kosinüs dönüşümleri olarak tanımlanarak aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$u_{1h}(x, y) = F_s[\phi_1(\xi, y); \xi \rightarrow x] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \phi_1(\xi, y) \sin \xi x d\xi \quad (11)$$

$$v_{1h}(x, y) = F_c[\psi_1(\xi, y); \xi \rightarrow x] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \psi_1(\xi, y) \cos \xi x d\xi \quad (12)$$

Bu ifadelerin ters Fourier dönüşümleri ise,

$$\phi_1(\xi, y) = F_s^{-1}[u_{1h}(x, y); x \rightarrow \xi] = \int_0^{\infty} u_{1h}(x, y) \sin(\xi x) dx \quad (13)$$

$$\psi_1(\xi, y) = F_c^{-1}[v_{1h}(x, y); x \rightarrow \xi] = \int_0^{\infty} v_{1h}(x, y) \cos(\xi x) dx \quad (14)$$

olarak yazılabilir. Burada,  $\xi$  dönüşüm değişkeni olup;  $\phi_1(\xi, y)$  ve  $\psi_1(\xi, y)$  fonksiyonları  $u_{1h}(x, y)$  ve  $v_{1h}(x, y)$  yer değiştirme ifadelerinin ters Fourier dönüşüm fonksiyonlarıdır.

Bu fonksiyonların belirlenebilmesi için (7) nolu denklem  $\sin(\xi x) dx$  ve (8) nolu denklem de  $\cos(\xi x) dx$  ile çarpılıp  $(0, +\infty)$  aralığında integre edilirse,

$$\int_0^{\infty} \left[ (\kappa_1 + 1) \frac{\partial^2 u_{1h}}{\partial x^2} + (\kappa_1 - 1) \frac{\partial^2 u_{1h}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 v_{1h}}{\partial x \partial y} + \beta(\kappa_1 - 1) \frac{\partial u_{1h}}{\partial y} + \beta(\kappa_1 - 1) \frac{\partial v_{1h}}{\partial x} \right] \sin(\xi x) dx = 0 \quad (15)$$

$$\int_0^{\infty} \left[ (\kappa_1 - 1) \frac{\partial^2 v_{1h}}{\partial x^2} + (\kappa_1 + 1) \frac{\partial^2 v_{1h}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 u_{1h}}{\partial x \partial y} + \beta(3 - \kappa_1) \frac{\partial u_{1h}}{\partial x} + \beta(\kappa_1 + 1) \frac{\partial v_{1h}}{\partial y} \right] \cos(\xi x) dx = 0 \quad (16)$$

ifadeleri elde edilir. Bu ifadelerde,  $u_{1h} = u_{1h}(x, y)$  ve  $v_{1h} = v_{1h}(x, y)$  olduğu bilinmektedir.

(15) ve (16) nolu denklemlerde  $u_{1h}$  ve  $v_{1h}$  'ın bazı türevlerinin Fourier dönüşümleri,

$$F_s \left[ \frac{\partial^2 u_{1h}}{\partial x^2}; x \rightarrow \xi \right] = -\xi^2 \phi_1 \quad (17)$$

$$F_s \left[ \frac{\partial^2 u_{1h}}{\partial y^2}; x \rightarrow \xi \right] = \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} \quad (18)$$

$$F_s \left[ \frac{\partial^2 v_{1h}(x, y)}{\partial x \partial y}; x \rightarrow \xi \right] = -\xi \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \quad (19)$$

$$F_c \left[ \frac{\partial^2 v_{1h}(x, y)}{\partial x^2}; x \rightarrow \xi \right] = -\xi^2 \psi_1 \quad (20)$$

$$F_c \left[ \frac{\partial^2 v_{1h}(x, y)}{\partial y^2}; x \rightarrow \xi \right] = \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} \quad (21)$$

$$F_c \left[ \frac{\partial^2 u_{1h}(x, y)}{\partial x \partial y}; x \rightarrow \xi \right] = \xi \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \quad (22)$$

şeklinde elde edilirler. Kısmi integrasyon kullanılarak elde edilen bu eşitliklerde aşağıdaki sınır şartlarından faydalanılmıştır:

$$u_{1h}(0, y) = u_{1h}(\infty, y) = v_{1h}(\infty, y) = \frac{\partial u_{1h}(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=\infty} = \frac{\partial v_{1h}(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=\infty} = \frac{\partial v_{1h}(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (23)$$

(17-22) ifadeleri (15) ve (16) nolu denklemlerde yerlerine konular ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$-(\kappa_1 + 1)\xi^2 \phi_1 + (\kappa_1 - 1) \frac{d^2 \phi_1}{dy^2} - 2\xi \frac{d\psi_1}{dy} + \beta(\kappa_1 - 1) \left[ \frac{d\phi_1}{dy} - \xi \psi_1 \right] = 0 \quad (24)$$

$$-(\kappa_1 - 1)\xi^2 \psi_1 + (\kappa_1 + 1) \frac{d^2 \psi_1}{dy^2} + 2\xi \frac{d\phi_1}{dy} + \beta \left[ (3 - \kappa_1)\xi \phi_1 + (\kappa_1 + 1) \frac{d\psi_1}{dy} \right] = 0 \quad (25)$$

adi diferansiyel denklem takımı elde edilmiş olur. (24) ve (25) denklemleri  $\ddot{y} = \mathbf{U} \dot{y} + k y$  şeklinde bir diferansiyel denklem takımıdır (Apatay, 2010). Bu denklem sisteminin çözümü için,

$$\phi_1 = y_1 \quad \text{ve} \quad \frac{d\phi_1}{dy} = y_3 \quad (26)$$

$$\psi_1 = y_2 \quad \text{ve} \quad \frac{d\psi_1}{dy} = y_4 \quad (27)$$

tanımlamaları yapılarak diferansiyel denklem sistemi,  $\dot{y} = \mathbf{U}y$  şeklinde aşağıdaki matris formda yazılabilir:

$$\begin{pmatrix} \cdot \\ y_1 \\ \cdot \\ y_2 \\ \cdot \\ y_3 \\ \cdot \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\kappa_1+1}{\kappa_1-1} \xi^2 & \beta \xi & -\beta & \frac{2\xi}{\kappa_1-1} \\ -\frac{\beta \xi (3-\kappa_1)}{\kappa_1+1} & \frac{\kappa_1-1}{\kappa_1+1} \xi^2 & -\frac{2\xi}{\kappa_1+1} & -\beta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \quad (28)$$

Burada,

$$\mathfrak{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\kappa_1+1}{\kappa_1-1} \xi^2 & \beta \xi & -\beta & \frac{2\xi}{\kappa_1-1} \\ -\frac{\beta \xi (3-\kappa_1)}{\kappa_1+1} & \frac{\kappa_1-1}{\kappa_1+1} \xi^2 & -\frac{2\xi}{\kappa_1+1} & -\beta \end{bmatrix} \text{ olarak tanımlanır ve } |\mathfrak{U} - nI| = 0 \text{ yazılırsa,}$$

$$n^4 + 2\beta n^3 + (\beta^2 - 2\xi^2)n^2 - 2\xi^2 \beta n + \frac{\xi^2 (3\beta^2 + \xi^2 + (\xi^2 - \beta^2)\kappa_1)}{\kappa_1 + 1} = 0 \quad (29)$$

şeklinde diferansiyel denklem sisteminin karakteristik denklemi elde edilir. Diferansiyel denklem sisteminin çözümü  $e^{n,y}$  şeklinde aranır;

$$\phi_1 = \sum_{j=1}^4 A_j e^{n_j y} \quad (30)$$

$$\psi_1 = \sum_{j=1}^4 A_j m_j e^{n_j y} \quad (31)$$

olarak elde edilir. (30) ve (31) ifadeleri (24) ve (25) ifadelerinde yerlerine yazılırsa,

$$m_j = \frac{(3\beta + 2n_j - \beta\kappa_1) [n_j (\beta + n_j) (\kappa_1 + 1) - \xi^2 (\kappa_1 + 3)]}{\xi [4\xi^2 - \beta^2 (\kappa_1 - 3) (\kappa_1 + 1)]}, \quad (j = 1, \dots, 4) \quad (32)$$



şeklinde elde edilir. Karakteristik denklemin kökleri ise aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır:

$$n_1 = -\frac{1}{2} \left( \beta + \sqrt{4\xi^2 + \beta^2 - 4\xi\beta i \sqrt{\frac{3-\kappa_1}{\kappa_1+1}}} \right) \quad (33)$$

$$n_2 = -\frac{1}{2} \left( \beta - \sqrt{4\xi^2 + \beta^2 - 4\xi\beta i \sqrt{\frac{3-\kappa_1}{\kappa_1+1}}} \right) \quad (34)$$

$$n_3 = -\frac{1}{2} \left( \beta + \sqrt{4\xi^2 + \beta^2 + 4\xi\beta i \sqrt{\frac{3-\kappa_1}{\kappa_1+1}}} \right) \quad (35)$$

$$n_4 = -\frac{1}{2} \left( \beta - \sqrt{4\xi^2 + \beta^2 + 4\xi\beta i \sqrt{\frac{3-\kappa_1}{\kappa_1+1}}} \right) \quad (36)$$

(30) ve (31) ifadeleriyle tanımlanan  $\phi_1(\xi, y)$  ve  $\psi_1(\xi, y)$  fonksiyonları sırasıyla (11) ve (12) nolu denklemlerde yerlerine yazılırsa; FD tabakaya ilişkin yer değiştirme ifadeleri tabakanın kütle kuvvetinin olmaması durumu için aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$u_{1h}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 A_j e^{n_j y} \sin(\xi x) d\xi \quad (37)$$

$$v_{1h}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 A_j m_j e^{n_j y} \cos(\xi x) d\xi \quad (38)$$

Bu denklemlerde geçen  $A_j$  ( $j=1, \dots, 4$ ) ifadeleri, bilinmeyen katsayılar olup probleme ait sınır şartlarından elde edileceklerdir. (37-38) ifadeleri (3-5) denklemlerinde yerlerine yazılırlarsa, FD tabaka için kütle kuvvetlerinin olmaması durumunda gerilme ifadeleri aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\sigma_{1xh} = \frac{2\mu_0 e^{\beta y}}{\pi(\kappa_1 - 1)} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 A_j [(3 - \kappa_1)m_j n_j + \xi(\kappa_1 + 1)] e^{n_j y} \cos(\xi x) d\xi \quad (39a)$$

$$\sigma_{1yh} = \frac{2\mu_0 e^{\beta y}}{\pi(\kappa_1 - 1)} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 A_j C_j e^{n_j y} \cos(\xi x) d\xi \quad (39b)$$

$$\tau_{1xyh} = \frac{2\mu_0 e^{\beta y}}{\pi} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 A_j D_j e^{n_j y} \sin(\xi x) d\xi \quad (39c)$$

Burada,

$$C_j = [(\kappa_1 + 1)m_j n_j + \xi(3 - \kappa_1)] \quad (j = 1, \dots, 4) \quad (40)$$

$$D_j = [n_j - \xi m_j] \quad (j = 1, \dots, 4) \quad (41)$$

olarak tanımlanmaktadır.

### 1.5.1.2. Elastik Yarım Düzlem için Genel Denklemlerin Elde Edilmesi

$\sigma_{2x}$ ,  $\sigma_{2y}$  ve  $\tau_{2xy}$  gerilme bileşenlerini göstermek üzere, kütle kuvvetlerinin bulunmaması durumunda elastik yarım düzlem için denge denklemleri düzlem halde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{\partial \sigma_{2x}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{2xy}}{\partial y} = 0 \quad (42)$$

$$\frac{\partial \tau_{2yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{2y}}{\partial y} = 0 \quad (43)$$

(42) ve (43) nolu ifadelerde geçen 2 indisi elastik yarım düzlemi temsil etmektedir. Yine bu ifadelerde geçen gerilme bileşenleri; bünye denklemleri ve yer değiştirme-şekil değiştirme bağıntıları kullanılarak düzlem hal için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\sigma_{2x} = \hat{\lambda}_2 e_2 + 2\mu_2 \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \quad (44)$$

$$\sigma_{2y} = \hat{\lambda}_2 e_2 + 2\mu_2 \left( \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) \quad (45)$$

$$\tau_{2xy} = \mu_2 \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \quad (46)$$

Yukarıdaki eşitliklerde geçen  $u_2$  ve  $v_2$ , sırasıyla  $x$  ve  $y$  doğrultularındaki yer değiştirme bileşenlerini göstermektedir. Ayrıca,  $e_2$  hacim değiştirme oranını,  $\hat{\lambda}_2$  ve  $\mu_2$  ise Lamé sabitlerini göstermekte olup aşağıdaki gibi tanımlanabilirler:

$$e_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \quad (47)$$

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{\nu_2 E_2}{(1 + \nu_2)(1 - 2\nu_2)} \quad (48)$$

$$\mu_2 = \frac{E_2}{2(1 + \nu_2)} \quad (49)$$

(48) ve (49) nolu denklemlerdeki  $E_2$ ,  $\mu_2$  ve  $\nu_2$  sırasıyla, elastik yarım düzlemin Elastisite modülünü, kayma modülünü ve Poisson oranını göstermektedir. (44-46) denklemlerinin gerekli türevleri alınıp (42-43) denge denklemlerinde yerlerine yazılırlarsa, düzlem şekil değiştirme halinde elastik yarım düzlem için Navier denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$(\lambda_2 + \mu_2) \frac{\partial e_2}{\partial x} + \mu_2 \nabla^2 u_2 = 0 \quad (50)$$

$$(\lambda_2 + \mu_2) \frac{\partial e_2}{\partial y} + \mu_2 \nabla^2 v_2 = 0 \quad (51)$$

Burada  $\nabla^2$ , Laplace operatörü olup aşağıdaki gibi tanımlanabilmektedir:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (52)$$

Elastik yarım düzlemin; yükleme, malzeme özellikleri ve geometrik olarak  $y$  eksenine göre simetrik olması halinde,  $u_2$  ve  $v_2$  yer değiştirmeleri aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$$u_2(x, y) = -u_2(-x, y) \quad (53)$$

$$v_2(x, y) = v_2(-x, y) \quad (54)$$

(50) ve (51) ifadeleri ile tanımlanan Navier denklemlerini adi diferansiyel denklem takımına dönüştürmek için yer değiştirmeler  $u_2(x, y)$  ve  $v_2(x, y)$ , bilinmeyen fonksiyonlar  $\phi_2(\xi, y)$  ve  $\psi_2(\xi, y)$ ' nin Fourier Sinüs ve Fourier Kosinüs dönüşümleri olarak tanımlanarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$u_2(x, y) = F_s[\phi_2(\xi, y); \xi \rightarrow x] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \phi_2(\xi, y) \sin \xi x d\xi \quad (55)$$

$$v_2(x, y) = F_c[\psi_2(\xi, y); \xi \rightarrow x] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \psi_2(\xi, y) \cos \xi x d\xi \quad (56)$$

Bu ifadelerin ters Fourier dönüşümleri ise,

$$\phi_2(\xi, y) = F_s^{-1} [u_2(x, y); x \rightarrow \xi] = \int_0^{\infty} u_2(x, y) \sin(\xi x) dx \quad (57)$$

$$\psi_2(\xi, y) = F_c^{-1} [v_2(x, y); x \rightarrow \xi] = \int_0^{\infty} v_2(x, y) \cos(\xi x) dx \quad (58)$$

şeklinde yazılabilir. Bilinmeyen  $\phi_2(\xi, y)$  ve  $\psi_2(\xi, y)$  fonksiyonlarının belirlenebilmesi için (50) nolu denklem  $\sin(\xi x) dx$ , (51) nolu denklemde  $\cos(\xi x) dx$  ifadeleri ile çarpılıp  $(0, +\infty)$  aralığında integre edilirse,

$$\int_0^{\infty} \left[ \mu_2 \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) + (\tilde{\lambda}_2 + \mu_2) \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y} \right) \right] \sin(\xi x) dx = 0 \quad (59)$$

$$\int_0^{\infty} \left[ \mu_2 \left( \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} \right) + (\tilde{\lambda}_2 + \mu_2) \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} \right) \right] \cos(\xi x) dx = 0 \quad (60)$$

ifadeleri elde edilir. (59) ve (60) nolu denklemlerde  $u_2$  ve  $v_2$ 'nin bazı türevlerinin Fourier dönüşümleri,

$$F_s \left[ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}; x \rightarrow \xi \right] = -\xi^2 \phi_2 \quad (61)$$

$$F_s \left[ \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}; x \rightarrow \xi \right] = \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} \quad (62)$$

$$F_s \left[ \frac{\partial^2 v_2(x, y)}{\partial x \partial y}; x \rightarrow \xi \right] = -\xi \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \quad (63)$$

$$F_c \left[ \frac{\partial^2 v_2(x, y)}{\partial x^2}; x \rightarrow \xi \right] = -\xi^2 \psi_2 \quad (64)$$

$$F_c \left[ \frac{\partial^2 v_2(x, y)}{\partial y^2}; x \rightarrow \xi \right] = \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} \quad (65)$$

$$F_c \left[ \frac{\partial^2 u_2(x, y)}{\partial x \partial y}; x \rightarrow \xi \right] = \xi \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \quad (66)$$

şeklinde elde edilir. Kısmi integrasyon kullanılarak elde edilen bu eşitliklerde aşağıdaki sınır şartlarından faydalanılmıştır:

$$u_2(0, y) = u_2(\infty, y) = v_2(\infty, y) = \frac{\partial u_2(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=\infty} = \frac{\partial v_2(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=\infty} = \frac{\partial v_2(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0. \quad (67)$$

(61-66) nolu denklemler olarak elde edilen türev ifadeleri (59) ve (60) nolu denklemlerde yerlerine konular ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$-(\tilde{\lambda}_2 + 2\mu_2) \xi^2 \phi_2 + \mu_2 \phi_2'' - (\tilde{\lambda}_2 + \mu_2) \xi \psi_2' = 0 \quad (68)$$

$$(\tilde{\lambda}_2 + 2\mu_2) \psi_2'' - \xi^2 \mu_2 \psi_2 + (\tilde{\lambda}_2 + \mu_2) \xi \phi_2' = 0 \quad (69)$$

adi diferansiyel denklem takımı elde edilmiş olur. Bu adi diferansiyel denklem takımında üsler  $y$ 'ye göre türevleri göstermektedir. (68) nolu denklem  $y$ 'ye göre iki defa, (69) nolu denklem de  $y$ 'ye göre bir defa türetilirse,

$$-(\tilde{\lambda}_2 + 2\mu_2) \xi^2 \phi_2'' + \mu_2 \phi_2'''' - (\tilde{\lambda}_2 + \mu_2) \xi \psi_2''' = 0 \quad (70)$$

$$(\tilde{\lambda}_2 + 2\mu_2) \psi_2''' - \xi^2 \mu_2 \psi_2' + (\tilde{\lambda}_2 + \mu_2) \xi \phi_2'' = 0 \quad (71)$$

olarak elde edilirler. (70) nolu denklemden  $\psi_2'''$  çekilip (71) nolu denklemde yerine konulursa,

$$(\lambda_2 + 2\mu_2) \frac{1}{\xi(\lambda_2 + \mu_2)} [\mu_2 \phi_2^{IV} - (\lambda_2 + 2\mu_2) \xi^2 \phi_2^{II}] - \xi^2 \mu_2 \psi_2^I + (\lambda_2 + \mu_2) \xi \phi_2^{II} = 0 \quad (72)$$

yazılabilir. Bu denklemden de  $\psi_2^I$  çekilip (68) nolu denklemde yerine yazılır ve düzenlenirse;  $\phi_2$ 'ye göre dördüncü mertebeden sabit katsayılı, lineer ve homojen bir diferansiyel denklem aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\phi_2^{IV} - 2\xi^2 \phi_2^{II} + \xi^4 \phi_2 = 0 \quad (73)$$

Bu diferansiyel denklemin çözümü  $\phi_2 = e^{by}$  şeklinde aranır ve gerekli türevler alınıp (73) nolu denklemde yerine yazılırsa,

$$b^4 - 2\xi^2 b^2 + \xi^4 = 0 \quad (74)$$

karakteristik denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri,  $b_1 = b_2 = \xi$  ve  $b_3 = b_4 = -\xi$  olarak belirlenir. Dolayısıyla da; (73) nolu adi diferansiyel denklem sisteminin çözümü aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\phi_2(\xi, y) = (B_1 + B_2 y) e^{-\xi y} + (B_3 + B_4 y) e^{\xi y} \quad (75)$$

$\psi_2(\xi, y)$ 'nin çözümü için (68) nolu denklemin  $y$ 'ye göre bir defa türevi alınıp, elde edilecek denklemden  $\psi_2^{II}$  ifadesi çekilerek (69) nolu denklemde yerine yazılırsa;  $\psi_2(\xi, y)$  fonksiyonu,  $\phi_2(\xi, y)$  fonksiyonuna ve türevlerine bağlı olarak bulunur. Buradan gerekli türevler alınır ve yerlerine konulduktan sonra benzer işlemler yapılırsa,

$$\psi_2(\xi, y) = \left[ B_1 + \left( \frac{\kappa_2}{\xi} + y \right) B_2 \right] e^{-\xi y} + \left[ -B_3 + \left( \frac{\kappa_2}{\xi} - y \right) B_4 \right] e^{\xi y} \quad (76)$$

ifadesi elde edilir. Burada  $\kappa_2$ , elastik yarım düzlemin Kolosov sabitidir ve düzlem şekil değiştirme halinde  $\kappa_2 = 3 - 4\nu_2$  olmaktadır.  $\phi_2(\xi, y)$  ve  $\psi_2(\xi, y)$  fonksiyonları sırasıyla (55) ve (56) nolu denklemlerde yerlerine yazılır ve elastik yarım düzlem için gerilme ve yer değiştirmelerin  $y \rightarrow -\infty$  için sıfır olması şartı kullanılırsa; elastik yarım düzlem için yer değiştirme ifadeleri kütle kuvvetinin olmaması durumunda aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$u_2(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [(B_1 + B_2 y) e^{\xi y}] \sin(\xi x) d\xi \quad (77)$$

$$v_2(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ -B_1 + \left( \frac{\kappa_2}{\xi} - y \right) B_2 \right] e^{\xi y} \cos(\xi x) d\xi \quad (78)$$

Burada;  $B_i$  ( $i = 1, 2$ ) 'ler bilinmeyen katsayılar olup probleme ilişkin sınır şartlarından bulunacaktır. (77) ve (78) ifadelerinin gerekli türevleri (44-46) gerilme bağıntılarında yerlerine yazılırsa, elastik yarım düzlem için kütle kuvvetsiz halde gerilme ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{1}{2\mu_2} \sigma_{2x}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \xi (B_1 + B_2 y) + \left( \frac{3 - \kappa_2}{2} \right) B_2 \right] e^{\xi y} \cos(\xi x) d\xi \quad (79)$$

$$\frac{1}{2\mu_2} \sigma_{2y}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ -\xi (B_1 + B_2 y) + \left( \frac{1 + \kappa_2}{2} \right) B_2 \right] e^{\xi y} \cos(\xi x) d\xi \quad (80)$$

$$\frac{1}{2\mu_2} \tau_{2xy}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \xi (B_1 + B_2 y) + \left( \frac{1 - \kappa_2}{2} \right) B_2 \right] e^{\xi y} \sin(\xi x) d\xi \quad (81)$$



### 1.5.2. Fonksiyonel Derecelendirilmiş (FD) Tabakanın Kütle Kuvvetinin Bulunması Durumunda Genel Denklemlerin Elde Edilmesi

Problemin çözümünde elastik yarım düzlemin kütle kuvveti ihmal edildiğinden sadece FD tabaka için özel çözüm elde edilmiştir. Yalnız kütle kuvvetleri etkisindeki FD tabaka için genel denklemler elde edilirken, tabakaya ilişkin kütle kuvvetlerinin  $X = 0$  ve  $Y = -\rho_1(y)g$  olduğu kabul edilmiştir. Burada;  $g$  yerçekimi ivmesini,  $\rho_1(y)$  ise FD tabakanın yoğunluğunu göstermekte olup aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\rho_1(y) = \rho_0 e^{\gamma y} \quad (82)$$

(82) nolu ifadede geçen  $\rho_0$ , FD tabakanın üst yüzeyindeki yoğunluğunun değerini,  $\gamma$  ise sıfırdan farklı değişimi belirleyen yoğunluk parametresini ifade etmektedir.

Kütle kuvvetlerinin bulunması durumunda denge denklemleri düzlem halde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{\partial \sigma_{1x\ddot{o}}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{1xy\ddot{o}}}{\partial y} + X = 0 \quad (83)$$

$$\frac{\partial \tau_{1yx\ddot{o}}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{1y\ddot{o}}}{\partial y} + Y = 0 \quad (84)$$

Burada  $\ddot{o}$  indisi kütle kuvvetinin olması durumundaki özel çözümü ifade etmektedir. FD tabaka için yer değiştirmeler cinsinden gerilme bileşenleri aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\sigma_{1x\ddot{o}} = \frac{\mu_1(y)}{\kappa_1 - 1} \left[ (\kappa_1 + 1) \frac{\partial u_{1\ddot{o}}}{\partial x} + (3 - \kappa_1) \frac{\partial v_{1\ddot{o}}}{\partial y} \right] \quad (85)$$

$$\sigma_{1y\ddot{o}} = \frac{\mu_1(y)}{\kappa_1 - 1} \left[ (3 - \kappa_1) \frac{\partial u_{1\ddot{o}}}{\partial x} + (\kappa_1 + 1) \frac{\partial v_{1\ddot{o}}}{\partial y} \right] \quad (86)$$

$$\tau_{1xy\bar{o}} = \mu_1(y) \left[ \frac{\partial u_{1\bar{o}}}{\partial y} + \frac{\partial v_{1\bar{o}}}{\partial x} \right] \quad (87)$$

Yukarıda geçen  $\mu_1(y)$  ifadesi daha önceki kısımlarda belirtildiği gibi FD tabakanın kayma modülü olup  $\mu_1(y) = \mu_0 e^{\beta y}$  olarak tanımlanmaktadır. (85-87) ifadeleri (83-84) denge denklemlerinde yerlerine yazılırlarsa Navier denklemleri aşağıdaki şekilde elde edilirler:

$$(\kappa_1 + 1) \frac{\partial^2 u_{1\bar{o}}}{\partial x^2} + (\kappa_1 - 1) \frac{\partial^2 u_{1\bar{o}}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 v_{1\bar{o}}}{\partial x \partial y} + \beta(\kappa_1 - 1) \frac{\partial u_{1\bar{o}}}{\partial y} + \beta(\kappa_1 - 1) \frac{\partial v_{1\bar{o}}}{\partial x} = 0 \quad (88)$$

$$\begin{aligned} (\kappa_1 - 1) \frac{\partial^2 v_{1\bar{o}}}{\partial x^2} + (\kappa_1 + 1) \frac{\partial^2 v_{1\bar{o}}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 u_{1\bar{o}}}{\partial x \partial y} + \beta(3 - \kappa_1) \frac{\partial u_{1\bar{o}}}{\partial x} + \beta(\kappa_1 + 1) \frac{\partial v_{1\bar{o}}}{\partial y} \\ = \frac{\rho_0}{\mu_0} (\kappa_1 - 1) g e^{(\gamma - \beta)y} \end{aligned} \quad (89)$$

Yer değiştirme fonksiyonları  $u_{1\bar{o}} = u_{1\bar{o}}(x)$  ve  $v_{1\bar{o}} = v_{1\bar{o}}(y)$  olarak seçilirse ve gerekli türevleri alınıp (88) ve (89) nolu eşitliklerle verilen Navier denklemlerinde yerlerine yazılırlarsa (88) nolu denklemden,

$$(\kappa_1 + 1) \frac{d^2 u_{1\bar{o}}}{dx^2} = 0 \quad (90)$$

$$\frac{du_{1\bar{o}}}{dx} = R_1 \quad (91)$$

$$u_{1\bar{o}}(x) = R_1 x + R_2 \quad (92)$$

elde edilir. Benzer şekilde (89) nolu denklemden de,

$$(\kappa_1 + 1) \frac{\partial^2 v_{1\bar{o}}}{\partial y^2} + \beta(3 - \kappa_1) \frac{\partial u_{1\bar{o}}}{\partial x} + \beta(\kappa_1 + 1) \frac{\partial v_{1\bar{o}}}{\partial y} = \frac{\rho_0}{\mu_0} (\kappa_1 - 1) g e^{(\gamma - \beta)y} \quad (93)$$

$$v_{1\bar{o}}(y) = \frac{e^{-\beta y} \left( e^{\beta y} y \beta (\beta - \gamma) \gamma R_1 (\kappa_1 - 3) \mu_0 - (\beta - \gamma) \gamma S_1 (\kappa_1 + 1) \mu_0 + \beta (e^{\beta y} (\beta - \gamma) \gamma S_2 (\kappa_1 + 1) \mu_0 - e^{\gamma y} g (\kappa_1 - 1) \rho_0) \right)}{\beta \gamma \mu_0 (\kappa_1 + 1) (\beta - \gamma)} \quad (94)$$

bulunur. Bu ifadelerde geçen bilinmeyen  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $S_1$  ve  $S_2$  katsayılarının belirlenebilmesi için kütle kuvveti  $\rho_0 e^{\gamma y} g$  ve kalınlığı  $h$  olan tek tabaka için  $x$  eksenini tabakanın üstünden geçmek üzere aşağıdaki gibi yazılan sınır şartlarından yararlanılacaktır.

$$u_{1\bar{o}}(0) = 0 \quad (95)$$

$$v_{1\bar{o}}(-h) = 0 \quad (96)$$

$$\sigma_{1,y\bar{o}} = \int_y^0 -\rho_0 g e^{\gamma y} dy \quad (97)$$

$$\int_{-h}^0 \sigma_{1,x\bar{o}} dy = 0 \quad (98)$$

(95-98) sınır şartları kullanılarak;  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $S_1$  ve  $S_2$  katsayıları aşağıdaki şekilde elde edilirler:

$$R_1 = -\frac{e^{(\beta-\gamma)h} g \beta \rho_0 (\kappa_1 - 3) (1 + e^{\gamma h} (\gamma h - 1))}{8\gamma^2 \mu_0 (e^{\beta h} - 1)} \quad (99)$$

$$R_2 = 0 \quad (100)$$

$$S_1 = -\frac{\rho_0 g (\kappa_1 - 1)}{\gamma \mu_0 (\kappa_1 + 1)} \quad (101)$$

$$S_2 = -\frac{\rho_0 g (AA + BB - CC)}{8\gamma \mu_0 (\kappa_1 + 1)} \quad (102)$$

(102) nolu ifadede geçen  $AA$ ,  $BB$  ve  $CC$  ifadeleri aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$AA = \frac{e^{h(\beta-\gamma)} h \beta (1 + e^{h\gamma} (h\gamma - 1)) (\kappa_1 - 3)^2}{\gamma (e^{h\beta} - 1)} \quad (103)$$

$$BB = \frac{8 e^{h\beta} (\kappa_1 - 1)}{\beta} \quad (104)$$

$$CC = \frac{8 e^{h(\beta-\gamma)} (\kappa_1 - 1)}{\beta - \gamma} \quad (105)$$

Bulunan bu eşitlikler (92) ve (94) nolu denklemlerde yerlerine yazılırlarsa, FD tabakanın kütle kuvveti olması durumunda yer değiştirmelere ait özel çözümler aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$u_{1\delta} = - \frac{e^{(\beta-\gamma)h} g \beta \rho_0 (\kappa_1 - 3) (1 + e^{\gamma h} (\gamma h - 1))}{8 \gamma^2 \mu_0 (e^{\beta h} - 1)} x \quad (106)$$

$$v_{1\delta} = - \frac{\rho_0 g \left( \frac{e^{h(\beta-\gamma)} h \beta (1 + e^{h\gamma} (h\gamma - 1)) (\kappa_1 - 3)^2}{\gamma (e^{h\beta} - 1)} + \frac{8 e^{h\beta} (\kappa_1 - 1)}{\beta} - \frac{8 e^{h(\beta-\gamma)} (\kappa_1 - 1)}{\beta - \gamma} \right)}{8 \gamma \mu_0 (\kappa_1 + 1)} \quad (107)$$

$$+ \frac{-e^{(\beta-\gamma)h} g \beta \rho_0 (\kappa_1 - 3) (1 + e^{\gamma h} (\gamma h - 1))}{8 \gamma^2 \mu_0 (e^{\beta h} - 1)} + \frac{\rho_0 g (\kappa_1 - 1) e^{-y\beta}}{\beta} - \frac{\rho_0 g (\kappa_1 - 1) e^{y(\gamma-\beta)}}{\beta - \gamma}}{\gamma \mu_0 (\kappa_1 + 1)}$$

Yer değiştirmelere ait bu denklemlerin gerekli türevleri alınıp (85-87) nolu ifadelerde yerlerine yazılırlarsa, yalnız kütle kuvveti etkisinde FD tabakaya ait gerilme ifadeleri;

$$\sigma_{1x\delta} = - \frac{\rho_0 g (\kappa_1 - 3) \left( e^{\beta y + h(\beta-\gamma)} \beta + \gamma - e^{h\beta} \gamma - e^{\gamma y} \gamma + e^{h\beta + y\gamma} \gamma + e^{(h+y)\beta} \beta (\gamma h - 1) \right)}{\gamma^2 (\kappa_1 + 1) (e^{h\beta} - 1)} \quad (108)$$

$$\sigma_{1y\delta} = \frac{\rho_0 g (e^{\gamma y} - 1)}{\gamma} \quad (109)$$

$$\tau_{1xy\delta} = 0 \quad (110)$$

olarak elde edilir. FD tabaka için genel yer değiştirme ve gerilme ifadeleri; homojen çözümden elde edilen ifadelerle özel çözüm sonucu elde edilen ifadelerin toplamı olarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$u_{1g}(x, y) = u_{1h}(x, y) + u_{1\delta}(x, y) \quad (111)$$

$$v_{1g}(x, y) = v_{1h}(x, y) + v_{1\delta}(x, y) \quad (112)$$

$$\sigma_{1xg}(x, y) = \sigma_{1xh}(x, y) + \sigma_{1x\delta}(x, y) \quad (113)$$

$$\sigma_{1yg}(x, y) = \sigma_{1yh}(x, y) + \sigma_{1y\delta}(x, y) \quad (114)$$

$$\tau_{1xyg}(x, y) = \tau_{1xyh}(x, y) \quad (115)$$

Bu ifadelerde geçen  $g$  indisi kütle kuvvetlerinin olmaması durumuna ilişkin homojen çözümle kütle kuvvetlerinin hesaba katılmasına ilişkin özel çözümün toplamı olan genel çözümleri ifade etmektedir.

## 2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

### 2.1. Giriş

Rijit bir blok aracılığıyla P tekil yükü ile simetrik olarak yüklenmiş ve elastik yarım düzleme oturan, fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) bir tabakanın sürekli ve süreksiz temas problemi elastisite teorisine göre çözülmüştür. FD tabakanın yüksekliği  $h$  olup  $2a$  genişliğinde temas yüzeyine sahip rijit bir blokla temas halindedir. Çözümler rijit blok profilinin düz veya dairesel olması durumları için ayrı ayrı yapılmıştır. Problemin çözümünde bütün yüzeylerin sürtünmesiz olduğu kabul edilmiştir. Çözümde FD tabakanın kütle kuvveti hesaba katılırken elastik yarım düzlemin kütle kuvveti ihmal edilmiştir. Problem  $y$  eksenine göre simetrik olduğundan hesaplar  $(0, +\infty)$  aralığında yapılmıştır. Problem düzlem hal için inceleneceğinden,  $z$  eksenini doğrultusundaki kalınlık birim olarak alınmıştır.

### 2.2. Sürekli Temas Problemi

#### 2.2.1. Problemin Tanımı, Kullanılacak Denklemler ve Sınır Şartları

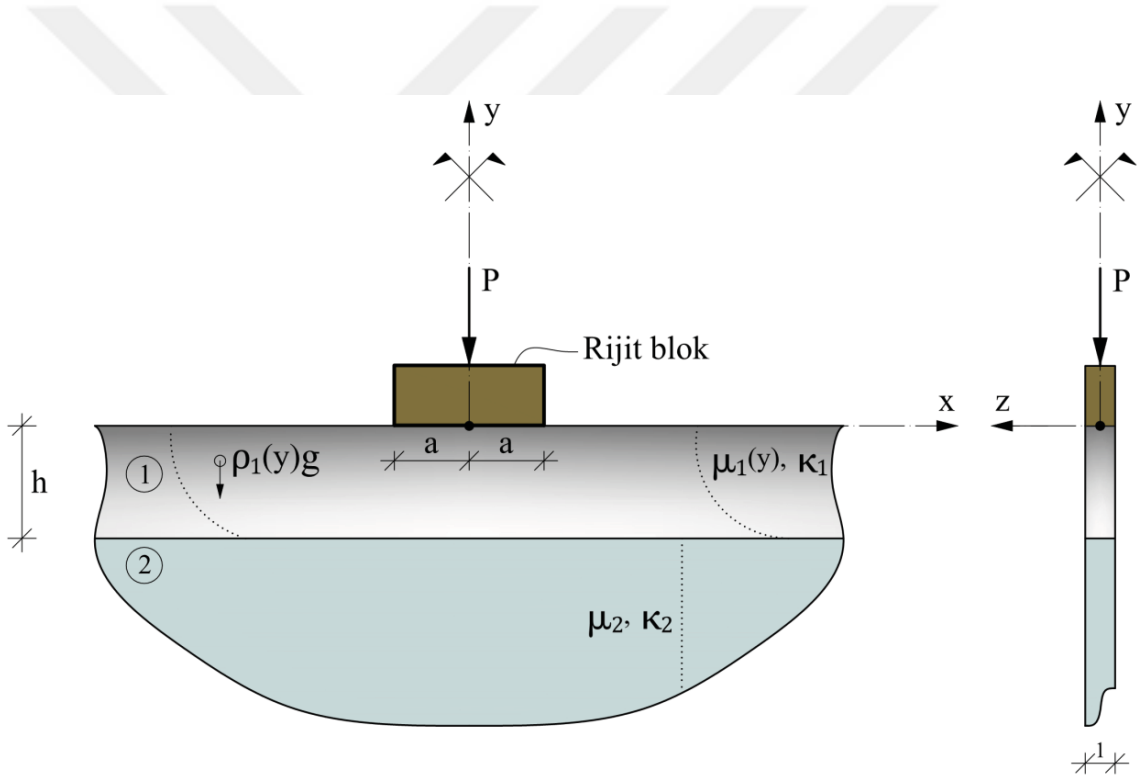
Problemin sürekli temasına ilişkin geometrisi Şekil 1'de verilmiştir. (1) nolu tabaka FD tabaka olup, hem kayma modülü hem de yoğunluğu (116-117) denklemlerinde verildiği gibi tabaka yüksekliği boyunca üstel bir fonksiyona bağlı olarak değişmektedir. Gerek FD tabakanın gerekse elastik yarım düzlemin Poisson oranlarının değişmediği kabul edilmiştir. (2) nolu elastik yarım düzlemin homojen olduğu yani kayma modülünün her yerde sabit olduğu kabul edilmiştir.

$$\mu_1(y) = \mu_0 e^{\beta y}, \quad (-h \leq y \leq 0) \quad (116)$$

$$\rho_1(y) = \rho_0 e^{\gamma y}, \quad (-h \leq y \leq 0) \quad (117)$$

Burada  $\mu_0$  ve  $\rho_0$  sırasıyla FD tabakanın üst yüzeyindeki ( $y = 0$ ) kayma modülü ve yoğunluğu olup;  $\beta$  ve  $\gamma$  ise sıfırdan ve birbirinden farklı sırasıyla, rijitlik ve yoğunluk

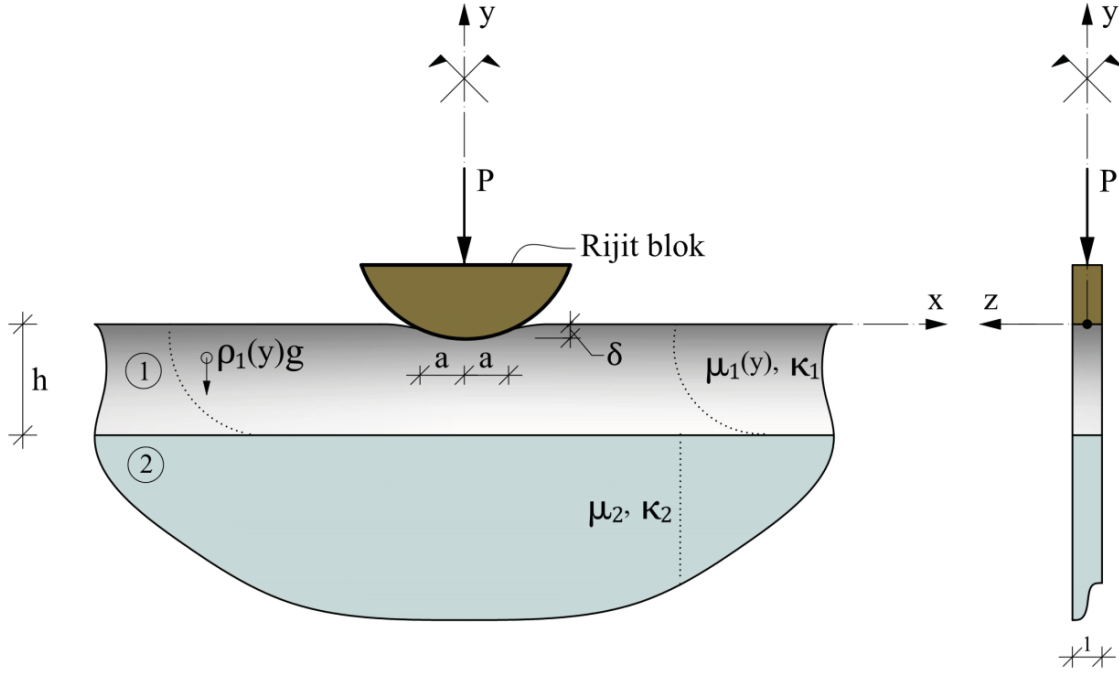
parametreleridir. FD tabakaya rijit bir blok (düz veya dairesel) aracılığıyla P tekil yükü simetrik olarak etki etmektedir. FD tabakanın kütle kuvveti hesaplarda dikkate alınırken elastik yarım düzlemin kütle kuvveti ihmal edilmiştir. Tüm yüzeyler sürtünmesizdir ve FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasında herhangi bir yapışma yoktur. FD tabaka ile elastik yarım düzlemin ara yüzeyinde sadece basınç gerilmelerinin aktarılabildiği kabul edildiğinden, dış yükün belli bir değeri aşması durumunda FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasında ayrılma meydana gelebilir. Bu istenmeyen bir durum olduğundan, ayrılmayı meydana getirecek en küçük yük değeri (ilk ayrılma yükü) ve ayrılmanın başlayacağı ilk noktanın (ilk ayrılma uzaklığı) belirlenmesi pratik açıdan önemlidir.



(a) Düz blok durumu

Şekil 1. Sürekli temas probleminin geometrisi

Şekil 1'in devamı



(b) Dairesel blok durumu

Problemin sürekli temasının çözümünde kullanılacak yer değiştirme ve gerilme bağıntıları FD tabaka ve elastik yarım düzlem için aşağıdaki gibi yazılabilir:

FD Tabaka İçin:

$$u_1(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^4 A_j e^{n_j y} \sin(\xi x) d\xi \quad (118)$$

$$v_1(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^4 A_j m_j e^{n_j y} \cos(\xi x) d\xi \quad (119)$$

$$\sigma_{1x} = \frac{2\mu_0 e^{\beta y}}{\pi(\kappa_1 - 1)} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^4 A_j [(3 - \kappa_1) m_j n_j + \xi(\kappa_1 + 1)] e^{n_j y} \cos(\xi x) d\xi \quad (120)$$

$$\sigma_{1y} = \frac{2\mu_0 e^{\beta y}}{\pi(\kappa_1 - 1)} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^4 A_j C_j e^{n_j y} \cos(\xi x) d\xi \quad (121)$$



$$\tau_{1xy} = \frac{2\mu_0 e^{\beta y}}{\pi} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^4 A_j D_j e^{n_j y} \sin(\xi x) d\xi \quad (122)$$

Elastik Yarım Düzlem İçin:

$$u_2(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [(B_1 + B_2 y) e^{\xi y}] \sin(\xi x) d\xi \quad (123)$$

$$v_2(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ -B_1 + \left( \frac{\kappa_2}{\xi} - y \right) B_2 \right] e^{\xi y} \cos(\xi x) d\xi \quad (124)$$

$$\frac{1}{2\mu_2} \sigma_{2x}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \xi (B_1 + B_2 y) + \left( \frac{3 - \kappa_2}{2} \right) B_2 \right] e^{\xi y} \cos(\xi x) d\xi \quad (125)$$

$$\frac{1}{2\mu_2} \sigma_{2y}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ -\xi (B_1 + B_2 y) + \left( \frac{1 + \kappa_2}{2} \right) B_2 \right] e^{\xi y} \cos(\xi x) d\xi \quad (126)$$

$$\frac{1}{2\mu_2} \tau_{2xy}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \xi (B_1 + B_2 y) + \left( \frac{1 - \kappa_2}{2} \right) B_2 \right] e^{\xi y} \sin(\xi x) d\xi \quad (127)$$

Problemin sürekli temasına ilişkin sınır şartları ise aşağıdaki gibi yazılabilirler:

$$\tau_{1xy}(x, 0) = 0 \quad (0 \leq x < \infty) \quad (128)$$

$$\sigma_{1y}(x, 0) = \begin{cases} -p(x) & ; & (0 \leq x < a) \\ 0 & ; & (a \leq x < \infty) \end{cases} \quad (129)$$

$$\tau_{1xy}(x, -h) = 0 \quad (0 \leq x < \infty) \quad (130)$$

$$\tau_{2xy}(x, -h) = 0 \quad (0 \leq x < \infty) \quad (131)$$

$$\sigma_{1y}(x, -h) = \sigma_{2y}(x, -h) \quad (0 \leq x < \infty) \quad (132)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, -h) - v_2(x, -h)] = 0 \quad (0 \leq x < \infty) \quad (133)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, 0)] = f(x) ; \quad (0 \leq x < a) \quad (134)$$

(129) ifadesindeki  $p(x)$ ; rijit blok ile FD tabaka arasındaki bilinmeyen temas gerilmesini,  $a$  ise rijit blok ile FD tabaka arasındaki yarı temas uzunluğunu göstermektedir. (134) ifadesinde geçen  $f(x)$ , FD tabaka üzerindeki rijit bloğun profilini tanımlayan fonksiyonun türevini ifade etmektedir.

### 2.2.2. Katsayıların Belirlenmesi

(128-133) ifadeleri ile verilen sınır şartlarının daha önce FD tabaka ve elastik yarım düzlem için elde edilen gerilme ve yer değiştirme bağıntılarında (118-127) yerine yazılması ve ters Fourier dönüşüm alınması sonucunda;  $A_j$  ( $j=1, \dots, 4$ ),  $B_1$  ve  $B_2$  katsayılarını içeren altı bilinmeyenli altı cebrik denklem aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\sum_{j=1}^4 A_j D_j = 0 \quad (135)$$

$$\frac{\mu_0}{\kappa_1 - 1} \sum_{j=1}^4 A_j C_j = -p(\xi) \quad ; \quad p(\xi) = \int_0^{\infty} p(x) \cos(\xi x) d\xi = \int_0^a p(t) \cos(\xi t) d\xi \quad (136)$$

$$\sum_{j=1}^4 A_j D_j e^{-n_j h} = 0 \quad (137)$$

$$2\xi e^{-\xi h} B_1 + (1 - 2\xi h - \kappa_2) e^{-\xi h} B_2 = 0 \quad (138)$$

$$\frac{\mu_0 e^{-\beta h}}{\kappa_1 - 1} \sum_{j=1}^4 A_j C_j e^{-n_j h} = -2\mu_2 \xi e^{-\xi h} B_1 + \mu_2 (1 + 2\xi h + \kappa_2) e^{-\xi h} B_2 \quad (139)$$

$$\sum_{j=1}^4 A_j m_j e^{-n_j h} + e^{-\xi h} B_1 - \left(\frac{\kappa_2}{\xi} + h\right) e^{-\xi h} B_2 = 0 \quad (140)$$

Bu altı denklemden  $A_j$  ( $j=1, \dots, 4$ ),  $B_1$  ve  $B_2$  katsayıları, bilinmeyen temas gerilmesine bağlı olarak aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} A_1 = & (-e^{hn_1} \bar{p} (e^{hn_3} C_2 D_3 D_4 - e^{hn_4} C_2 D_3 D_4 - 4e^{hn_3} F \xi D_3 D_4 m_2 + 4e^{hn_4} F \xi D_3 D_4 m_2 + 4e^{hn_2} F \xi D_2 D_4 m_3 \\ & - 4e^{hn_4} F \xi D_2 D_4 m_3 - 4e^{hn_2} F \xi D_2 D_3 m_4 + 4e^{hn_3} F \xi D_2 D_3 m_4 + e^{hn_3} C_2 D_3 D_4 \kappa_2 - e^{hn_4} C_2 D_3 D_4 \kappa_2 \\ & + (e^{hn_2} - e^{hn_3}) C_4 D_2 D_3 (1 + \kappa_2) - (e^{hn_2} - e^{hn_4}) C_3 D_2 D_4 (1 + \kappa_2))) / \Delta \end{aligned} \quad (141)$$

$$\begin{aligned} A_2 = & (e^{hn_2} \bar{p} (e^{hn_3} C_1 D_3 D_4 - e^{hn_4} C_1 D_3 D_4 - 4e^{hn_3} F \xi D_3 D_4 m_1 + 4e^{hn_4} F \xi D_3 D_4 m_1 + 4e^{hn_1} F \xi D_1 D_4 m_3 \\ & - 4e^{hn_4} F \xi D_1 D_4 m_3 - 4e^{hn_1} F \xi D_1 D_3 m_4 + 4e^{hn_3} F \xi D_1 D_3 m_4 + e^{hn_3} C_1 D_3 D_4 \kappa_2 - e^{hn_4} C_1 D_3 D_4 \kappa_2 \\ & + (e^{hn_1} - e^{hn_3}) C_4 D_1 D_3 (1 + \kappa_2) - (e^{hn_1} - e^{hn_4}) C_3 D_1 D_4 (1 + \kappa_2))) / \Delta \end{aligned} \quad (142)$$

$$\begin{aligned} A_3 = & (-e^{hn_3} \bar{p} (e^{hn_2} C_1 D_2 D_4 - e^{hn_4} C_1 D_2 D_4 - 4e^{hn_2} F \xi D_2 D_4 m_1 + 4e^{hn_4} F \xi D_2 D_4 m_1 + 4e^{hn_1} F \xi D_1 D_4 m_2 \\ & - 4e^{hn_4} F \xi D_1 D_4 m_2 - 4e^{hn_1} F \xi D_1 D_2 m_4 + 4e^{hn_2} F \xi D_1 D_2 m_4 + e^{hn_2} C_1 D_2 D_4 \kappa_2 - e^{hn_4} C_1 D_2 D_4 \kappa_2 \\ & + (e^{hn_1} - e^{hn_2}) C_4 D_1 D_2 (1 + \kappa_2) - (e^{hn_1} - e^{hn_4}) C_2 D_1 D_4 (1 + \kappa_2))) / \Delta \end{aligned} \quad (143)$$

$$\begin{aligned} A_4 = & (e^{hn_4} \bar{p} (e^{hn_2} C_1 D_2 D_3 - e^{hn_3} C_1 D_2 D_3 - 4e^{hn_2} F \xi D_2 D_3 m_1 + 4e^{hn_3} F \xi D_2 D_3 m_1 + 4e^{hn_1} F \xi D_1 D_3 m_2 \\ & - 4e^{hn_3} F \xi D_1 D_3 m_2 - 4e^{hn_1} F \xi D_1 D_2 m_3 + 4e^{hn_2} F \xi D_1 D_2 m_3 + e^{hn_2} C_1 D_2 D_3 \kappa_2 - e^{hn_3} C_1 D_2 D_3 \kappa_2 \\ & + (e^{hn_1} - e^{hn_2}) C_3 D_1 D_2 (1 + \kappa_2) - (e^{hn_1} - e^{hn_3}) C_2 D_1 D_3 (1 + \kappa_2))) / \Delta \end{aligned} \quad (144)$$

$$\begin{aligned} B_1 = & (-e^{h\xi} \bar{p} (e^{hn_3} C_2 D_3 D_4 m_1 - e^{hn_4} C_2 D_3 D_4 m_1 - e^{hn_3} C_1 D_3 D_4 m_2 + e^{hn_4} C_1 D_3 D_4 m_2 - e^{hn_1} C_2 D_1 D_4 m_3 \\ & + e^{hn_4} C_2 D_1 D_4 m_3 + e^{hn_2} C_1 D_2 D_4 m_3 - e^{hn_4} C_1 D_2 D_4 m_3 + C_4 ((e^{hn_3} - e^{hn_1}) D_1 D_3 m_2 \\ & + D_2 ((e^{hn_2} - e^{hn_3}) D_3 m_1 + (e^{hn_1} - e^{hn_2}) D_1 m_3)) + e^{hn_1} C_2 D_1 D_3 m_4 - e^{hn_3} C_2 D_1 D_3 m_4 \\ & - e^{hn_2} C_1 D_2 D_3 m_4 + e^{hn_3} C_1 D_2 D_3 m_4 + C_3 ((e^{hn_1} - e^{hn_4}) D_1 D_4 m_2 + D_2 ((e^{hn_4} - e^{hn_2}) D_4 m_1 \\ & - (e^{hn_1} - e^{hn_2}) D_1 m_4))) (\kappa_2 + 2\xi h - 1)) / \Delta \end{aligned} \quad (145)$$

$$\begin{aligned}
B_2 = & (-2e^{h\xi} \xi \bar{p} (e^{hm_3} C_2 D_3 D_4 m_1 - e^{hm_4} C_2 D_3 D_4 m_1 - e^{hm_3} C_1 D_3 D_4 m_2 + e^{hm_4} C_1 D_3 D_4 m_2 - e^{hm_1} C_2 D_1 D_4 m_3 \\
& + e^{hm_4} C_2 D_1 D_4 m_3 + e^{hm_2} C_1 D_2 D_4 m_3 - e^{hm_4} C_1 D_2 D_4 m_3 + C_4 ((e^{hm_3} - e^{hm_1}) D_1 D_3 m_2 \\
& + D_2 ((e^{hm_2} - e^{hm_3}) D_3 m_1 + (e^{hm_1} - e^{hm_2}) D_1 m_3)) + e^{hm_1} C_2 D_1 D_3 m_4 - e^{hm_3} C_2 D_1 D_3 m_4 \\
& - e^{hm_2} C_1 D_2 D_3 m_4 + e^{hm_3} C_1 D_2 D_3 m_4 + C_3 ((e^{hm_1} - e^{hm_4}) D_1 D_4 m_2 + D_2 ((e^{hm_4} - e^{hm_2}) D_4 m_1 \\
& - (e^{hm_1} - e^{hm_2}) D_1 m_4)))) / \Delta
\end{aligned} \tag{146}$$

Bu ifadelerde geçen  $F$  ,  $\bar{p}$  ve  $\Delta$  büyüklükleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$F = \frac{\mu_2(\kappa_1 - 1)}{\mu_0 e^{-\beta h}} \tag{147}$$

$$\bar{p} = \frac{(\kappa_1 - 1)}{\mu_0} \int_0^\infty p(x) \cos(\xi x) dx \tag{148}$$

$$\begin{aligned}
\Delta = & 4e^{hm_4} F \xi C_4 \left( - (e^{hm_1} - e^{hm_3}) D_1 D_3 m_2 + D_2 \left( (e^{hm_2} - e^{hm_3}) D_3 m_1 + (e^{hm_1} - e^{hm_2}) D_1 m_3 \right) \right) \\
& + C_1 (-4e^{hm_1} F \xi \left( - (e^{hm_2} - e^{hm_4}) D_2 D_4 m_3 + D_3 \left( (e^{hm_3} - e^{hm_4}) D_4 m_2 + (e^{hm_2} - e^{hm_3}) D_2 m_4 \right) \right) \\
& + (e^{hm_2} - e^{hm_3}) (e^{hm_1} - e^{hm_4}) C_4 D_2 D_3 (1 + \kappa_2) + C_3 (-4e^{hm_3} F \xi \left( - (e^{hm_1} - e^{hm_4}) D_1 D_4 m_2 \right. \\
& \left. + D_2 \left( (e^{hm_2} - e^{hm_4}) D_4 m_1 + (e^{hm_1} - e^{hm_2}) D_1 m_4 \right) \right) \\
& + (e^{hm_1} - e^{hm_2}) (e^{hm_3} - e^{hm_4}) C_4 D_1 D_2 (1 + \kappa_2) + (e^{hm_2} - e^{hm_3}) (e^{hm_1} - e^{hm_4}) C_2 D_1 D_4 (1 + \kappa_2) \\
& - (e^{hm_1} - e^{hm_3}) (e^{hm_2} - e^{hm_4}) C_1 D_2 D_4 (1 + \kappa_2) + C_2 (4e^{hm_2} F \xi \left( - (e^{hm_1} - e^{hm_4}) D_1 D_4 m_3 \right. \\
& \left. + D_3 \left( (e^{hm_3} - e^{hm_4}) D_4 m_1 + (e^{hm_1} - e^{hm_3}) D_1 m_4 \right) \right) \\
& - (e^{hm_1} - e^{hm_3}) (e^{hm_2} - e^{hm_4}) C_4 D_1 D_3 (1 + \kappa_2) + (e^{hm_1} - e^{hm_2}) (e^{hm_3} - e^{hm_4}) C_1 D_3 D_4 (1 + \kappa_2))
\end{aligned} \tag{149}$$

### 2.2.3. İntegral Denklemin Elde Edilmesi

FD tabakanın ve elastik yarım düzlemin herhangi bir noktasındaki gerilme veya yer değiştirme değerinin hesaplanması için öncelikle rijit blok altındaki bilinmeyen  $p(x)$  temas gerilme fonksiyonunun belirlenmesi gerekmektedir. Bu fonksiyon (134) nolu sınır

şartı kullanılarak elde edilecek integral denklemin çözümünden bulunacaktır. Eğer

$\frac{\partial}{\partial x}[v_1(x, y)]$  teşkil edilirse, (134) nolu sınır şartı;

$$\frac{\partial}{\partial x}[v_1(x, y)] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^4 (-\xi A_j m_j e^{n_j y}) \right\} \sin(\xi x) d\xi = f(x) \quad (150)$$

şeklinde elde edilir. Daha önce hesaplanan  $A_j$  ( $j=1, \dots, 4$ ) katsayıları bu ifadede yerlerine yazılırlarsa ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa, (150) ifadesi;

$$\frac{\partial}{\partial x}[v_1(x, y)] = \frac{2}{\pi \mu_0} \int_0^a p(t) k_1(x, t) dt = f(x) \quad (151)$$

haline dönüşür. Burada,

$$\begin{aligned} k_1(x, t) = \int_0^{\infty} \{ & [ \{ e^{hm_1} \xi m_1 (-1 + \kappa_1) (-4F \xi \left( - (e^{hm_2} - e^{hm_4}) D_2 D_4 m_3 + D_3 \left( \begin{array}{l} (e^{hm_3} - e^{hm_4}) D_4 m_2 \\ + (e^{hm_2} - e^{hm_3}) D_2 m_4 \end{array} \right) \right) \right. \\ & + (e^{hm_2} - e^{hm_3}) C_4 D_2 D_3 (1 + \kappa_2) - (e^{hm_2} - e^{hm_4}) C_3 D_2 D_4 (1 + \kappa_2) \\ & + (e^{hm_3} - e^{hm_4}) C_2 D_3 D_4 (1 + \kappa_2) \} / \Delta] e^{n_1 y} + [ \{ -e^{hm_2} \xi m_2 (-1 + \kappa_1) \\ & (-4F \xi \left( - (e^{hm_1} - e^{hm_4}) D_1 D_4 m_3 + D_3 \left( (e^{hm_3} - e^{hm_4}) D_4 m_1 + (e^{hm_1} - e^{hm_3}) D_1 m_4 \right) \right) \\ & + (e^{hm_1} - e^{hm_3}) C_4 D_1 D_3 (1 + \kappa_2) - (e^{hm_1} - e^{hm_4}) C_3 D_1 D_4 (1 + \kappa_2) + \\ & (e^{hm_3} - e^{hm_4}) C_1 D_3 D_4 (1 + \kappa_2) \} / \Delta] e^{n_2 y} + [ \{ e^{hm_3} \xi m_3 (-1 + \kappa_1) \\ & (-4F \xi \left( - (e^{hm_1} - e^{hm_4}) D_1 D_4 m_2 + D_2 \left( (e^{hm_2} - e^{hm_4}) D_4 m_1 + (e^{hm_1} - e^{hm_2}) D_1 m_4 \right) \right) \\ & + (e^{hm_1} - e^{hm_2}) C_4 D_1 D_2 (1 + \kappa_2) - (e^{hm_1} - e^{hm_4}) C_2 D_1 D_4 (1 + \kappa_2) \\ & + (e^{hm_2} - e^{hm_4}) C_1 D_2 D_4 (1 + \kappa_2) \} / \Delta] e^{n_3 y} + [ \{ -e^{hm_4} \xi m_4 (-1 + \kappa_1) \\ & (-4F \xi \left( - (e^{hm_1} - e^{hm_3}) D_1 D_3 m_2 + D_2 \left( (e^{hm_2} - e^{hm_3}) D_3 m_1 + (e^{hm_1} - e^{hm_2}) D_1 m_3 \right) \right) \\ & + (e^{hm_1} - e^{hm_2}) C_3 D_1 D_2 (1 + \kappa_2) - (e^{hm_1} - e^{hm_3}) C_2 D_1 D_3 (1 + \kappa_2) \\ & + (e^{hm_2} - e^{hm_3}) C_1 D_2 D_3 (1 + \kappa_2) \} / \Delta] e^{n_4 y} \} \sin(\xi x) \cos(\xi t) d\xi \end{aligned} \quad (152)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

(134) nolu sınır şartı  $y=0$  için yazıldığından, (152) ifadesinde  $y \rightarrow 0$  limitine geçmek gerekmektedir.  $y \rightarrow 0$  limitine geçildiğinde, (152) ifadesindeki  $k_1(x,t)$  integralinin çekirdeğinin yakınsaması bozulmaktadır. Diğer bir deyişle  $\xi$ 'nin büyük değerlerinde integralin çekirdeğini oluşturan fonksiyon sifira yakınsamayıp  $\xi$ 'nin belli bir değerinden sonra sıfırdan farklı sabit bir değere yaklaşmaktadır. Çekirdeğin içindeki yakınsamayı bozan bu terime singüler terim (ST) adı verilmekte olup aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır:

$$ST = \int_0^{\infty} \left[ \frac{1 + \kappa_1}{4} \right] e^{\xi y} \sin(\xi x) \cos(\xi t) d\xi \quad (153)$$

Singüler terimin kapalı integrali, integral dönüşüm tabloları yardımıyla (Erdelyi vd., 1954) hesaplanıp  $y \rightarrow 0$  limitine geçilirse,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{\xi y} \left[ \frac{1 + \kappa_1}{4} \right] \sin(\xi x) \cos(\xi t) d\xi = \frac{1}{2} \frac{1 + \kappa_1}{4} \left[ \frac{1}{t+x} - \frac{1}{t-x} \right] \quad (154)$$

ifadesi elde edilir. (152) nolu integralin çekirdeğinin yakınsamasını bozan bu singüler terim çekirdek içinden çıkarılıp, (154) ifadesinde elde edilen kapalı integralinin eklenmesiyle (151) denklemini aşağıdaki gibi bir integral denkleme indirgenmiş olur:

$$\int_0^a \left[ \frac{1}{t+x} - \frac{1}{t-x} + k_2(x,t) \right] p(t) dt = \frac{4\pi\mu_0}{1 + \kappa_1} f(x) \quad (0 \leq x < a) \quad (155)$$

Bu ifadedeki  $k_2(x,t)$  ;

$$\begin{aligned}
k_2(x, t) = & \int_0^\infty [(-16F\xi^2 (D_3 \left( \begin{array}{l} (e^{hm_1} - e^{hm_2})(e^{hm_3} - e^{hm_4}) D_4 m_1 m_2 \\ (e^{hm_2} - e^{hm_3})(e^{hm_1} - e^{hm_4}) D_2 m_1 \\ -(e^{hm_1} - e^{hm_3})(e^{hm_2} - e^{hm_4}) D_1 m_2 \end{array} \right) m_4 \\ & - m_3 \left( \begin{array}{l} -(e^{hm_2} - e^{hm_3})(e^{hm_1} - e^{hm_4}) D_1 D_4 m_2 \\ (e^{hm_1} - e^{hm_3})(e^{hm_2} - e^{hm_4}) D_4 m_1 \\ -(e^{hm_1} - e^{hm_2})(e^{hm_3} - e^{hm_4}) D_1 m_4 \end{array} \right) ) (\kappa_1 - 1) \\ & + 4\xi (C_4 \left( \begin{array}{l} -e^{hm_2} (e^{hm_1} - e^{hm_3}) D_1 D_3 m_2 + D_2 \left( \begin{array}{l} e^{hm_1} (e^{hm_2} - e^{hm_3}) D_3 m_1 \\ + e^{hm_3} (e^{hm_1} - e^{hm_2}) D_1 m_3 \end{array} \right) \right) \\ - C_3 \left( \begin{array}{l} -e^{hm_2} (e^{hm_1} - e^{hm_4}) D_1 D_4 m_2 + D_2 \left( \begin{array}{l} e^{hm_1} (e^{hm_2} - e^{hm_4}) D_4 m_1 \\ + e^{hm_4} (e^{hm_1} - e^{hm_2}) D_1 m_4 \end{array} \right) \right) \\ + C_2 \left( \begin{array}{l} -e^{hm_3} (e^{hm_1} - e^{hm_4}) D_1 D_4 m_3 + D_3 \left( \begin{array}{l} e^{hm_1} (e^{hm_3} - e^{hm_4}) D_4 m_1 \\ + e^{hm_4} (e^{hm_1} - e^{hm_3}) D_1 m_4 \end{array} \right) \right) \\ - C_1 \left( \begin{array}{l} -e^{hm_3} (e^{hm_2} - e^{hm_4}) D_2 D_4 m_3 + D_3 \left( \begin{array}{l} e^{hm_2} (e^{hm_3} - e^{hm_4}) D_4 m_2 \\ + e^{hm_4} (e^{hm_2} - e^{hm_3}) D_2 m_4 \end{array} \right) \right) \right) \\ (\kappa_1 - 1)(1 + \kappa_2) \} / \Delta^*) - 1] [\sin \xi(t+x) - \sin \xi(t-x)] d\xi \quad (156)
\end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir. Burada,

$$\Delta^* = \Delta(1 + \kappa_1) \quad (157)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Simetri nedeniyle rijit blok altındaki gerilme yayılımının,

$$p(t) = p(-t) \quad (158)$$

eşitliğini sağladığı göz önünde bulundurularak, (155) nolu denklemin integral aralığı  $[-a, +a]$  aralığına dönüştürülebilir. Bu söylenenler göz önünde bulundurulur ve  $z = \xi h$

değişken dönüşümü yapılırsa, söz konusu tekil integral denklem aşağıdaki hale dönüştürülmüş olur.

$$\int_{-a}^a \left[ \frac{1}{t-x} + k_3(x,t) \right] p(t) dt = -\frac{4\pi\mu_0}{1+\kappa_1} f(x) \quad (-a < x < a) \quad (159)$$

Bu denklemde,

$$\begin{aligned} k_3(x,t) = & \frac{1}{h} \int_0^\infty [(-16F \xi^2 (D_3 \left( \begin{aligned} & \left( (e^{hm_1} - e^{hn_2})(e^{hn_3} - e^{hn_4}) D_4 m_1 m_2 \right. \\ & + \left. \left( \begin{aligned} & \left( (e^{hn_2} - e^{hn_3})(e^{hm_1} - e^{hn_4}) D_2 m_1 \right) \\ & \left. - (e^{hm_1} - e^{hn_3})(e^{hm_2} - e^{hn_4}) D_1 m_2 \right) \right) m_4 \right) \right. \\ & \left. - m_3 \left( \begin{aligned} & \left( - (e^{hm_2} - e^{hn_3})(e^{hm_1} - e^{hn_4}) D_1 D_4 m_2 \right) \right. \\ & \left. + D_2 \left( \begin{aligned} & \left( (e^{hm_1} - e^{hn_3})(e^{hm_2} - e^{hn_4}) D_4 m_1 \right) \right. \\ & \left. - (e^{hm_1} - e^{hn_2})(e^{hn_3} - e^{hn_4}) D_1 m_4 \right) \right) \right) \right) (\kappa_1 - 1) \\ & + 4\xi (C_4 \left( -e^{hn_2} (e^{hm_1} - e^{hn_3}) D_1 D_3 m_2 + D_2 \left( \begin{aligned} & \left( e^{hm_1} (e^{hn_2} - e^{hn_3}) D_3 m_1 \right) \right. \\ & \left. + e^{hn_3} (e^{hm_1} - e^{hn_2}) D_1 m_3 \right) \right) \right) \\ & - C_3 \left( -e^{hn_2} (e^{hm_1} - e^{hn_4}) D_1 D_4 m_2 + D_2 \left( \begin{aligned} & \left( e^{hm_1} (e^{hn_2} - e^{hn_4}) D_4 m_1 \right) \right. \\ & \left. + e^{hn_4} (e^{hm_1} - e^{hn_2}) D_1 m_4 \right) \right) \right) \\ & + C_2 \left( -e^{hn_3} (e^{hm_1} - e^{hn_4}) D_1 D_4 m_3 + D_3 \left( \begin{aligned} & \left( e^{hm_1} (e^{hn_3} - e^{hn_4}) D_4 m_1 \right) \right. \\ & \left. + e^{hn_4} (e^{hm_1} - e^{hn_3}) D_1 m_4 \right) \right) \right) \\ & - C_1 \left( -e^{hn_3} (e^{hm_2} - e^{hn_4}) D_2 D_4 m_3 + D_3 \left( \begin{aligned} & \left( e^{hm_2} (e^{hn_3} - e^{hn_4}) D_4 m_2 \right) \right. \\ & \left. + e^{hn_4} (e^{hm_2} - e^{hn_3}) D_2 m_4 \right) \right) \right) \\ & (\kappa_1 - 1)(1 + \kappa_2) \} / \Delta^* - 1] \left[ \sin \frac{z}{h} (t-x) \right] dz \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \end{aligned} \quad (160)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Ayrıca rijit bloğun dengesinden yararlanılarak,



$$\int_{-a}^a p(t)dt = P \quad (161)$$

ifadesi yazılabilir.  $p(x)$  temas gerilme yayılışının hesaplanabilmesi için (159) nolu integral denklem ile (161) nolu denge denklemi birlikte çözümlenmelidir.

#### 2.2.4. İntegral Denklemin Sayısal Çözümü ve FD Tabaka ile Elastik Yarım Düzlem Arasındaki İlk Ayrılma Yükünün ve Uzaklığının Belirlenmesi

İntegral denklemin sayısal çözümü için rijit bloğun yüzey profilini tanımlayan  $F(x)$  fonksiyonunun bilinmesi gerekmektedir. Çünkü integral denklemin sayısal çözümü her bir blok profili için farklı olmaktadır. Bu çalışmada, iki farklı rijit blok profili göz önüne alınarak integral denklemin sayısal çözümü gerçekleştirilmektedir. Bunlar sırasıyla aşağıda verilmektedir.

##### 2.2.4.1. Rijit Blok Profilinin Düz Olması Hali

Rijit blok profilinin düz olması halinde; integral denkleminin sayısal çözümünü kolaylaştırmak için aşağıdaki boyutsuz büyüklükler tanımlanabilir:

$$x = aw, \quad t = a\eta, \quad B(w) = \frac{b(aw)}{\rho_0gh}, \quad g(\eta) = \frac{p(a\eta)}{\rho_0gh} \quad (162)$$

Bu ifadede geçen  $b(aw)$  büyüklüğü,

$$b(aw) = -\frac{4\pi\mu_0}{1+\kappa_1} f(aw) \quad (163)$$

olarak verilmektedir. Tanımlanan bu büyüklükler (159-161) denklemlerinde yerlerine yazılırsa, söz konusu denklemler;

$$\int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{\eta - w} + \frac{a}{h} k_3(w, \eta) \right] g(\eta) d\eta = B(w) \quad (-1 \leq \eta \leq 1) \quad (164)$$

$$\frac{a}{h} \int_{-1}^1 g(\eta) d\eta = \frac{P}{\rho_0 g h^2} = \lambda \quad (165)$$

olarak elde edilirler. Burada,  $\lambda$  yük faktörü olarak tanımlanmaktadır.

Düz yüzey profiline sahip rijit bloğun  $F(x)$  fonksiyonu sabit bir değere eşit olduğundan bu fonksiyonun türevi,

$$f(x) = \frac{d}{dx} [F(x)] = 0 \quad (166)$$

olarak elde edilir. (164) nolu integral denklemin indisi +1 olduğundan (Erdoğan ve Gupta, 1972), bu integral denklemin sayısal çözümü aşağıdaki şekilde aranabilir:

$$g(\eta) = G(\eta)(1 - \eta^2)^{-1/2}, \quad (-1 \leq \eta \leq 1) \quad (167)$$

Uygun Gauss-Chebyshev integrasyon formülü kullanılarak, (164) nolu integral denklem ve (165) nolu denge şartı aşağıdaki cebirsel denklem sistemine indirgenebilirler:

$$\sum_{i=1}^n \Gamma_i \left[ \frac{1}{\eta_i - w_j} + \frac{a}{h} k_3(w_j, \eta_i) \right] G(\eta_i) = 0, \quad (j = 1, \dots, n-1) \quad (168)$$

$$\frac{a}{h} \sum_{i=1}^n \Gamma_i G(\eta_i) = \frac{\lambda}{\pi} \quad (169)$$

Bu ifadelerde,

$$\Gamma_1 = \Gamma_n = \frac{1}{2n-2}, \quad \Gamma_i = \frac{1}{n-1}, \quad (i = 2, \dots, n-1) \quad (170)$$

$$\eta_i = \cos\left(\frac{i-1}{n-1}\pi\right), \quad (i=1, \dots, n) \quad (171)$$

$$w_j = \cos\left(\frac{2j-1}{2n-2}\pi\right), \quad (j=1, \dots, n-1) \quad (172)$$

olarak verilmektedir. (168) ve (169) ifadelerinden  $n$  bilinmeyenli  $n$  tane cebrik denklem elde edilir. Bu denklem takımının çözümü sonucunda  $G(\eta_i)$  ( $i=1, \dots, n$ )' ler yük faktörü  $\lambda$  'ya bağlı olarak elde edilirler.

FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki ilk ayrılma yükünün ve ilk ayrılma uzaklığının belirlenmesi için ara yüzeydeki  $\sigma_{1,yg}(x, -h)$  temas gerilmesinin hesaplanması gerekmektedir. Bunun için daha önce belirlenmiş olan  $A_j$  ( $j=1, \dots, 4$ ) katsayılarının (114) denkleminde yerine konulması ve  $y = -h$  alınması durumunda temas yüzeyindeki  $\sigma_{1,yg}(x, -h)$  normal gerilmesi,

$$\sigma_{1,yg}(x, -h) = \frac{\rho_0 g (e^{-\gamma h} - 1)}{\gamma} + \frac{1}{\pi} \int_0^a k_4(x, t) p(t) dt, \quad (0 \leq x < \infty) \quad (173)$$

olarak elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned} k_4(x, t) = \int_0^\infty [ & \{-4e^{-h\beta} F \xi (C_4 \left( -(e^{hm_1} - e^{hm_3}) D_1 D_3 m_2 + D_2 \left( (e^{hm_2} - e^{hm_3}) D_3 m_1 + (e^{hm_1} - e^{hm_2}) D_1 m_3 \right) \right) \right. \\ & - C_3 \left( -(e^{hm_1} - e^{hm_4}) D_1 D_4 m_2 + D_2 \left( (e^{hm_2} - e^{hm_4}) D_4 m_1 + (e^{hm_1} - e^{hm_2}) D_1 m_4 \right) \right) \\ & + C_2 \left( -(e^{hm_1} - e^{hm_4}) D_1 D_4 m_3 + D_3 \left( (e^{hm_3} - e^{hm_4}) D_4 m_1 + (e^{hm_1} - e^{hm_3}) D_1 m_4 \right) \right) \\ & \left. - C_1 \left( -(e^{hm_2} - e^{hm_4}) D_2 D_4 m_3 + D_3 \left( (e^{hm_3} - e^{hm_4}) D_4 m_2 + (e^{hm_2} - e^{hm_3}) D_2 m_4 \right) \right) \right] / \Delta] \\ & [\cos \xi(t+x) + \cos \xi(t-x)] d\xi \end{aligned} \quad (174)$$

şeklinde tanımlanabilir. Simetri nedeniyle  $p(t) = p(-t)$  olarak alınır ve  $z = \xi h$  değişken dönüşümü yapılırsa  $\sigma_{1,yg}(x, -h)$  gerilmesi aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\sigma_{1,yg}(x, -h) = \frac{\rho_0 g (e^{-\gamma h} - 1)}{\gamma} + \frac{1}{\pi h} \int_{-a}^a k_5(x, t) p(t) dt, \quad (0 \leq x < \infty) \quad (175)$$

Burada,

$$\begin{aligned} k_5(x, t) = \int_0^\infty [ & \{-4e^{-h\beta} F \frac{z}{h} (C_4 \left( -(e^{hm_1} - e^{hm_3}) D_1 D_3 m_2 + D_2 \left( (e^{hm_2} - e^{hm_3}) D_3 m_1 + (e^{hm_1} - e^{hm_2}) D_1 m_3 \right) \right) \right. \\ & - C_3 \left( -(e^{hm_1} - e^{hm_4}) D_1 D_4 m_2 + D_2 \left( (e^{hm_2} - e^{hm_4}) D_4 m_1 + (e^{hm_1} - e^{hm_2}) D_1 m_4 \right) \right) \\ & + C_2 \left( -(e^{hm_1} - e^{hm_4}) D_1 D_4 m_3 + D_3 \left( (e^{hm_3} - e^{hm_4}) D_4 m_1 + (e^{hm_1} - e^{hm_3}) D_1 m_4 \right) \right) \\ & \left. - C_1 \left( -(e^{hm_2} - e^{hm_4}) D_2 D_4 m_3 + D_3 \left( (e^{hm_3} - e^{hm_4}) D_4 m_2 + (e^{hm_2} - e^{hm_3}) D_2 m_4 \right) \right) \right] / \Delta] \\ & [\cos \frac{z}{h} (t - x)] dz \end{aligned} \quad (176)$$

şeklinde tanımlanabilir. (162) ifadesinde verilen boyutsuz büyüklükler (175) ifadesinde yerlerine yazılırlarsa,

$$\frac{\sigma_{1,yg}(x, -h)}{\rho_0 gh} \frac{1}{\lambda} = \frac{(e^{-\gamma h} - 1)}{\gamma h} \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\pi h} \frac{a}{h} \int_{-1}^1 k_5(x, a\eta) \frac{g(\eta)}{\lambda} d\eta, \quad (0 \leq x < \infty) \quad (177)$$

olarak elde edilir. Daha önce  $\lambda$  değerine bağlı olarak hesaplanan  $g(\eta)$  değerlerinin (177) ifadesinde yerine konulması ve Gauss integrasyon formülasyonunun kullanılması ile de FD

tabaka ile elastik yarım düzlemin temas yüzeyi boyunca  $\frac{\sigma_{1,yg}(x, -h)}{\rho_0 gh}$  boyutsuz temas

gerilmesi elde edilmiş olur. (165) ifadesi ile tanımlanmış olan  $\lambda$  yük faktörünün belli bir kritik değere ( $\lambda_{cr}$ ) ulaşması halinde tabakalar arasında ayrılımlar söz konusu olur. Bu

nedenle (175) denkleminin geçerli olabilmesi için  $\frac{\sigma_{1,yg}(x, -h)}{\rho_0 gh}$  temas gerilmesinin temas

yüzeyi boyunca her yerde basınç olması gerekir. Bu da ancak  $0 \leq \lambda \leq \lambda_{cr}$  olması ile

sağlanabilir.  $\lambda > \lambda_{cr}$  olması durumunda ise FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasında

ayrılma başlar ve problem süreksiz temas problemine dönüşür. Dolayısıyla da sürekli

temas durumundaki sınır şartları geçersiz olur.

FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki ilk ayrılma yükünün ve ilk ayrılma uzaklığının belirlenebilmesi için (177) denkleminin sıfıra eşitlenmesi gerekir.

$$\frac{(e^{-\gamma h} - 1)}{\gamma h} \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\pi} \frac{a}{h} \int_{-1}^1 k_5(x, a\eta) \frac{g(\eta)}{\lambda} d\eta = 0, \quad (0 \leq x < \infty) \quad (178)$$

Bu eşitlikten yararlanılarak ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklığı (noktası) birlikte bulunurlar. Bu eşitliği sağlayan  $x$  uzaklığı ilk ayrılma noktası ( $x_{cr}$ ) ve buna karşılık gelen yük faktörü de kritik yük faktörü ( $\lambda_{cr}$ ) olarak bulunur. İlk ayrılmayı meydana getiren kritik yük faktörünün,

$$\lambda_{cr} = \frac{P_{cr}}{\rho_0 g h^2} \quad (179)$$

olduğu açıktır. Bu yük faktöründen daha büyük yük faktörleri için ( $\lambda > \lambda_{cr}$ ) yukarıda belirtildiği gibi tabakalar arasında açılmalar meydana gelir. Bu durumda problemi süreksiz temas problemi olarak incelemek gerekir.

#### 2.2.4.2. Rijit Blok Profilinin Dairesel Olması Hali

Rijit blok profilinin dairesel olması halinde integral denklemin sayısal çözümünü kolaylaştırmak için aşağıdaki boyutsuz büyüklükler tanımlanabilir:

$$x = aw, \quad t = a\eta, \quad B(w) = \frac{b(aw)}{(P/h)}, \quad g(\eta) = \frac{p(a\eta)}{(P/h)} \quad (180)$$

Bu ifadede geçen  $b(aw)$  büyüklüğü,

$$b(aw) = -\frac{4\pi\mu_0}{1 + \kappa_1} f(aw) \quad (181)$$

olarak verilmektedir. Tanımlanan bu büyüklükler (159-161) denklemlerinde yerlerine yazılırsa, (159) ve (161) ifadeleri,

$$\int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{\eta - w} + \frac{a}{h} k_3(w, \eta) \right] g(\eta) d\eta = B(w) \quad (-1 \leq \eta \leq 1) \quad (182)$$

$$\frac{a}{h} \int_{-1}^1 g(\eta) d\eta = 1 \quad (183)$$

olarak elde edilir. Rijit dairesel bloğun yüzey profilini veren  $F(x)$  fonksiyonu,

$$F(x) = -\delta - \left[ (R^2 - x^2)^{1/2} - R \right] \quad (184)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadede  $R$  dairenin yarıçapını,  $\delta$  ise bir sabit olup rijit bloğun altındaki FD tabakada meydana gelen en büyük yer değiştirmeyi göstermektedir.  $F(x)$  fonksiyonunun  $x$ 'e göre türevi,

$$f(x) = \frac{d}{dx} [F(x)] = \frac{x}{(R^2 - x^2)^{0.5}} \cong \frac{x}{R} \quad (R \gg x) \quad (185)$$

olarak elde edilir. (182) nolu integral denklemin indisi  $-1$  olduğundan (Erdoğan ve Gupta, 1972), bu integral denklemin sayısal çözümü aşağıdaki şekilde aranabilir:

$$g(\eta) = G(\eta)(1 - \eta^2)^{1/2}, \quad (-1 \leq \eta \leq 1) \quad (186)$$

Uygun Gauss-Chebyshev integrasyon formülü kullanılarak, (182) nolu integral denklem ve (183) nolu denge şartı aşağıdaki cebirsel denklem sistemine indirgenebilir:

$$\sum_{i=1}^n (1 - \eta_i^2) \left[ \frac{1}{\eta_i - w_j} + \frac{a}{h} k_3(w_j, \eta_i) \right] G(\eta_i) = \frac{n+1}{\pi} B(w_j), \quad (j = 1, \dots, n+1) \quad (187)$$

$$\frac{a}{h} \sum_{i=1}^n (1 - \eta_i^2) G(\eta_i) = \frac{n+1}{\pi} \quad (188)$$

Bu ifadelerde,

$$\eta_i = \cos\left(\frac{i\pi}{n+1}\right), \quad (i=1, \dots, n) \quad (189)$$

$$w_j = \cos\left(\frac{2j-1}{n+1} \frac{\pi}{2}\right), \quad (j=1, \dots, n+1) \quad (190)$$

olarak verilmektedir. (187) ifadesindeki  $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ 'inci denklem uygunluk şartına karşılık geldiği için otomatik olarak sağlanır. Böylece (187) ve (188) ifadeleri ile verilmiş denklemlerden  $g(\eta_i)$ ,  $(i=1, \dots, n)$  ve yarı temas uzunluğu olan  $a$ 'ya bağlı  $n+1$  bilinmeyenli  $(n+1)$  denklem elde edilmiş olur. Bu denklem takımının çözümünden, temas gerilme yayılışı ve yarı temas uzunluğu  $a$  hesaplanabilir. Ancak, bu hesaplar yapılırken interpolasyon işleminin yapılması gerekmektedir. Önce seçilen bir temas uzunluğu ( $a$ ) için (187) nolu denklemin çözümünden  $g(\eta_i)$ 'ler hesaplanır ve bulunan değerler (188) denklemde yerine yazılarak bu eşitliğin sağlanıp sağlanmadığı kontrol edilir. Eğer eşitlik sağlanmıyorsa ( $a$ )'ya artımlar verilerek yukarıdaki işlemler tekrarlanır. Bu şekilde yapılacak işlemler sonucunda; bulunacak  $g(\eta_i)$  değerleri (186) ifadesinde yerine yazılarak,  $G(\eta_i)$  boyutsuz temas gerilmeleri ve yarı temas uzunluğu  $a$  belirlenmiş olur.

Blok profilinin dairesel olması durumunda FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki ilk ayrılma yükünün ve ilk ayrılma uzaklığının belirlenmesi için, düz blok profili için izlenen yol takip edilir. Daha önce dairesel blok durumu için hesaplanan  $g(\eta)$  değerleri kullanılırsa ve (180) ifadesinde verilen boyutsuz büyüklükler tanımlanırsa, FD tabaka ile elastik yarım düzlemin ara yüzeyinde meydana gelen,  $\sigma_{1,yg}(x, -h)/(P/h)$  boyutsuz temas gerilmesi elde edilmiş olur. Bu ifade sıfıra eşitlenirse,

$$\frac{(e^{-\gamma h} - 1)}{\gamma h} \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\pi} \frac{a}{h} \int_{-1}^1 k_5(x, a\eta) g(\eta) d\eta = 0, \quad (0 \leq x < \infty) \quad (191)$$

olarak elde edilir. Bu eşitlikten yararlanılarak ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklığı (noktası) birlikte bulunurlar. Bu eşitliği sağlayan  $x$  uzaklığı ilk ayrılma noktası ( $x_{cr}$ ) ve buna karşılık gelen yük faktörü de kritik yük faktörü ( $\lambda_{cr}$ ) olarak bulunur. İlk ayrılmayı meydana getiren kritik yük faktörü daha önce (179) ifadesinde verildiği gibidir.

### 2.2.5. Gerilmelerin Bulunması

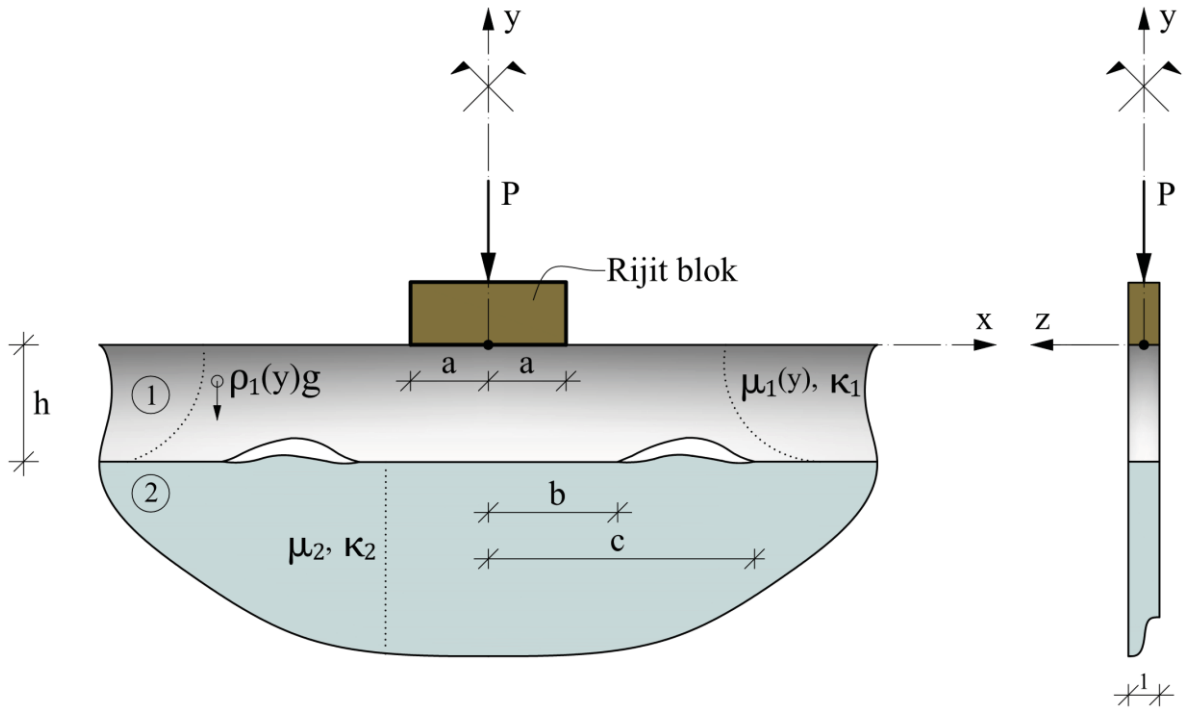
FD tabakada ve elastik yarım düzlemde meydana gelecek normal gerilmeler  $\sigma_{ixg}$  ve  $\sigma_{iyg}$  ( $i=1,2$ )  $y$  simetri eksenini boyunca,  $\tau_{ixyg}$  ( $i=1,2$ ) kayma gerilmeleri de simetri eksenini yakınında incelenmiştir. Kısım 2.2.2.' de elde edilen katsayılar (113-115) nolu denklemlerde yerlerine yazılıp önceki kısımlarda tanımlanan boyutsuz büyüklükler kullanılır ve gerekli sadeleştirmeler de yapılırsa; FD tabakanın ve elastik yarım düzlemin  $y$  simetri eksenini boyunca meydana gelen boyutsuz normal gerilmeler  $\sigma_{ixg}(0,y)/(P/h)$  ve  $\sigma_{iyg}(0,y)/(P/h)$  ( $i=1,2$ ) ile simetri eksenini yakınındaki boyutsuz kayma gerilmeleri  $\tau_{ixyg}(0.5,y)/(P/h)$  ( $i=1,2$ ) elde edilmiş olur.

## 2.3. Süreksiz Temas Problemi

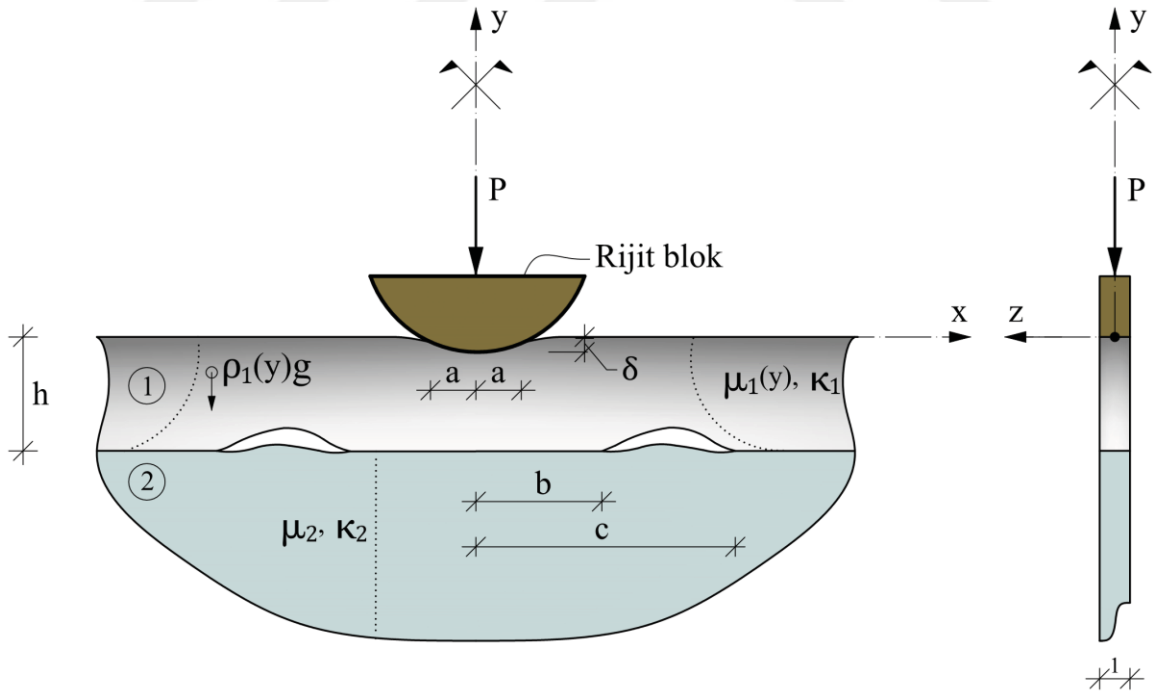
### 2.3.1. Problemin Tanımı, Sınır Şartları ve İntegral Denklem Sisteminin Elde Edilmesi

Sürekli temasa ilişkin çözümde belirtildiği gibi yükün belli bir değeri (kritik yük) aşması durumunda ( $\lambda > \lambda_{cr}$ ) FD tabaka ile elastik yarım düzlemin ara yüzeyinde sonlu bir bölgede ayrılma meydana gelmektedir (Şekil 2). FD tabaka ile elastik yarım düzlemin ara yüzeyinde herhangi bir ayrılma olduğunda, ara yüzey boyunca  $\sigma_{1yg}(x,-h)$  gerilme bileşeni sıfır olmakta ve düşey yer değiştirmeler farkı da artık birbirine eşit olmamaktadır. Dolayısıyla, sürekli temas halinde verilen sınır şartları süreksiz temas halinde geçerli olmamaktadır. Bu nedenle problemin süreksiz temasına ilişkin sınır şartlarının yeniden yazılması gerekmektedir.





(a) Düz blok durumu



(b) Dairesel blok durumu

Şekil 2. Süreksiz temas probleminin geometrisi

Sürekli temas durumunda problemin sınır şartları aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\tau_{1xy}(x, 0) = 0 \quad (0 \leq x < \infty) \quad (192)$$

$$\tau_{1xy}(x, -h) = 0 \quad (0 \leq x < \infty) \quad (193)$$

$$\tau_{2xy}(x, -h) = 0 \quad (0 \leq x < \infty) \quad (194)$$

$$\sigma_{1y}(x, 0) = \begin{cases} -p(x) & ; \quad (0 \leq x < a) \\ 0 & ; \quad (a \leq x < \infty) \end{cases} \quad (195)$$

$$\sigma_{1y}(x, -h) = \sigma_{2y}(x, -h) \quad (0 \leq x < \infty) \quad (196)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, -h) - v_2(x, -h)] = \varphi(x) \quad (b < x < c) \quad (197)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, 0)] = f(x) ; \quad (0 \leq x < a) \quad (198)$$

$$\sigma_{1yg}(x, -h) = 0 \quad (b < x < c) \quad (199)$$

Bu ifadelerde;  $b$  ve  $c$  sırasıyla ayrılma bölgesinin başlangıç ve bitiş noktalarını,  $p(x)$  rijit blok altındaki bilinmeyen temas gerilmesini ve  $\varphi(x)$  FD tabakanın elastik yarım düzlemden ayrıldığı  $(b, c)$  aralığındaki düşey yer değiştirmelerin farkının türevi olan bilinmeyen bir fonksiyonu göstermektedir. (192-197) nolu eşitliklerle verilen sınır şartlarında gerilme ve yer değiştirme ifadelerinin yerlerine yazılması sonucu aşağıdaki gibi 6 tane cebrik denklem elde edilir:

$$\sum_{j=1}^4 A_j D_j = 0 \quad (200)$$

$$\sum_{j=1}^4 A_j D_j e^{-n_j h} = 0 \quad (201)$$

$$2\xi e^{-\xi h} B_1 + (1 - 2\xi h - \kappa_2) e^{-\xi h} B_2 = 0 \quad (202)$$

$$\sum_{j=1}^4 A_j C_j = -\frac{\kappa_1 - 1}{\mu_0} p(\xi) \quad ; \quad p(\xi) = \int_0^{\infty} p(x) \cos(\xi x) dx = \int_0^a p(t) \cos(\xi t) dt \quad (203)$$

$$\frac{\mu_0 e^{-\beta h}}{\kappa_1 - 1} \sum_{j=1}^4 A_j C_j e^{-n_j h} = -2\mu_2 \xi e^{-\xi h} B_1 + \mu_2 (1 + 2\xi h + \kappa_2) e^{-\xi h} B_2 \quad (204)$$

$$\left( \sum_{j=1}^4 -\xi A_j m_j e^{-n_j h} \right) - \xi e^{-\xi h} B_1 + \left( \frac{\kappa_2}{\xi} + h \right) e^{-\xi h} B_2 = \int_b^c \varphi(t) \sin \xi t dt \quad (205)$$

(200-205) denklem sisteminin çözümünden  $A_j$  ( $j=1, \dots, 4$ ) ve  $B_j$  ( $j=1, 2$ ) katsayıları, rijit blok altındaki temas gerilmesi  $p(x)$  ve FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki ayrılmanın eğimini veren fonksiyon  $\varphi(x)$  'e bağlı olarak aşağıdaki şekilde elde edilirler:

$$\begin{aligned} A_1 = & [-e^{hm_1} \bar{p}(-1 + \kappa_1) (-4F\xi \left( (-e^{hm_2} + e^{hm_4}) D_2 D_4 m_3 + D_3 \left( (e^{hm_3} - e^{hm_4}) D_4 m_2 \right) \right) \right. \\ & + (e^{hm_2} - e^{hm_3}) C_4 D_2 D_3 (1 + \kappa_2) - (e^{hm_2} - e^{hm_4}) C_3 D_2 D_4 (1 + \kappa_2) + (e^{hm_3} - e^{hm_4}) \\ & \left. C_2 D_3 D_4 (1 + \kappa_2) \right) - 4e^{hm_1} F \varphi \left( \begin{array}{c} e^{hm_4} (e^{hm_2} - e^{hm_3}) C_4 D_2 D_3 \\ (e^{hm_3} (e^{hm_2} - e^{hm_4}) C_3 D_2 \\ - (e^{hm_2} (e^{hm_3} - e^{hm_4}) C_2 D_3) \end{array} \right) D_4 \left. \right] \mu_0 / \Delta \quad (206) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 = & [e^{hm_2} (\bar{p}(-1 + \kappa_1)) (-4F\xi \left( \begin{array}{l} -(e^{hm_1} - e^{hm_4}) D_1 D_4 m_3 \\ + D_3 \left( (e^{hm_3} - e^{hm_4}) D_4 m_1 + (e^{hm_1} - e^{hm_3}) D_1 m_4 \right) \end{array} \right) \\
& + (e^{hm_1} - e^{hm_3}) C_4 D_1 D_3 (1 + \kappa_2) - (e^{hm_1} - e^{hm_4}) C_3 D_1 D_4 (1 + \kappa_2) + (e^{hm_3} - e^{hm_4}) \\
& C_1 D_3 D_4 (1 + \kappa_2)) + 4F\varphi \left( \begin{array}{l} e^{hm_4} (e^{hm_1} - e^{hm_3}) C_4 D_1 D_3 \\ - \left( \begin{array}{l} e^{hm_3} (e^{hm_1} - e^{hm_4}) C_3 D_1 \\ - e^{hm_1} (e^{hm_3} - e^{hm_4}) C_1 D_3 \end{array} \right) D_4 \end{array} \right) \mu_0) ] / \Delta \quad (207)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3 = & [e^{hm_3} (-\bar{p}(-1 + \kappa_1)) (-4F\xi \left( \begin{array}{l} -(e^{hm_1} - e^{hm_4}) D_1 D_4 m_2 \\ + D_2 \left( (e^{hm_2} - e^{hm_4}) D_4 m_1 + (e^{hm_1} - e^{hm_2}) D_1 m_4 \right) \end{array} \right) \\
& + (e^{hm_1} - e^{hm_2}) C_4 D_1 D_2 (1 + \kappa_2) - (e^{hm_1} - e^{hm_4}) C_2 D_1 D_4 (1 + \kappa_2) + (e^{hm_2} - e^{hm_4}) \\
& C_1 D_2 D_4 (1 + \kappa_2)) - 4F\varphi \left( \begin{array}{l} e^{hm_4} (e^{hm_1} - e^{hm_2}) C_4 D_1 D_2 \\ - \left( \begin{array}{l} e^{hm_2} (e^{hm_1} - e^{hm_4}) C_2 D_1 \\ - e^{hm_1} (e^{hm_2} - e^{hm_4}) C_1 D_2 \end{array} \right) D_4 \end{array} \right) \mu_0) ] / \Delta \quad (208)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_4 = & [e^{hm_4} (\bar{p}(-1 + \kappa_1)) (-4F\xi \left( \begin{array}{l} -(e^{hm_1} - e^{hm_3}) D_1 D_3 m_2 \\ + D_2 \left( (e^{hm_2} - e^{hm_3}) D_3 m_1 + (e^{hm_1} - e^{hm_2}) D_1 m_3 \right) \end{array} \right) \\
& + (e^{hm_1} - e^{hm_2}) C_3 D_1 D_2 (1 + \kappa_2) - (e^{hm_1} - e^{hm_3}) C_2 D_1 D_3 (1 + \kappa_2) + (e^{hm_2} - e^{hm_3}) \\
& C_1 D_2 D_3 (1 + \kappa_2)) + 4F\varphi \left( \begin{array}{l} e^{hm_3} (e^{hm_1} - e^{hm_2}) C_3 D_1 D_2 \\ - \left( \begin{array}{l} e^{hm_2} (e^{hm_1} - e^{hm_3}) C_2 D_1 \\ - e^{hm_1} (e^{hm_2} - e^{hm_3}) C_1 D_2 \end{array} \right) D_3 \end{array} \right) \mu_0) ] / \Delta \quad (209)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_1 = & \left[ -\frac{1}{\xi} e^{h\xi} (-1 + 2h\xi + \kappa_2) (\xi \bar{p} (C_4 \left( - (e^{hm_1} - e^{hm_3}) D_1 D_3 m_2 + D_2 \left( \begin{array}{l} (e^{hm_2} - e^{hm_3}) D_3 m_1 \\ + (e^{hm_1} - e^{hm_2}) D_1 m_3 \end{array} \right) \right) \right. \right. \\
& - C_3 \left( - (e^{hm_1} - e^{hm_4}) D_1 D_4 m_2 + D_2 \left( (e^{hm_2} - e^{hm_4}) D_4 m_1 + (e^{hm_1} - e^{hm_2}) D_1 m_4 \right) \right) \\
& + C_2 \left( - (e^{hm_1} - e^{hm_4}) D_1 D_4 m_3 + D_3 \left( (e^{hm_3} - e^{hm_4}) D_4 m_1 + (e^{hm_1} - e^{hm_3}) D_1 m_4 \right) \right) \\
& \left. \left. - C_1 \left( - (e^{hm_2} - e^{hm_4}) D_2 D_4 m_3 + D_3 \left( (e^{hm_3} - e^{hm_4}) D_4 m_2 + (e^{hm_2} - e^{hm_3}) D_2 m_4 \right) \right) \right) \right. \\
& \left. (-1 + \kappa_1) + \varphi \left( -C_3 \left( \begin{array}{l} (e^{hm_1} - e^{hm_2}) (e^{hm_3} - e^{hm_4}) C_4 D_1 D_2 \\ + \left( \begin{array}{l} (e^{hm_2} - e^{hm_3}) (e^{hm_1} - e^{hm_4}) C_2 D_1 \\ - (e^{hm_1} - e^{hm_3}) (e^{hm_2} - e^{hm_4}) C_1 D_2 \end{array} \right) D_4 \end{array} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + D_3 \left( \begin{array}{l} - (e^{hm_2} - e^{hm_3}) (e^{hm_1} - e^{hm_4}) C_1 C_4 D_2 \\ + C_2 \left( \begin{array}{l} (e^{hm_1} - e^{hm_3}) (e^{hm_2} - e^{hm_4}) C_4 D_1 \\ - (e^{hm_1} - e^{hm_2}) (e^{hm_3} - e^{hm_4}) C_1 D_4 \end{array} \right) \end{array} \right) \right) \mu_0 \right] / \Delta \quad (210)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_2 = & \left[ -2e^{h\xi} (\xi \bar{p} (C_4 \left( - (e^{hm_1} - e^{hm_3}) D_1 D_3 m_2 + D_2 \left( (e^{hm_2} - e^{hm_3}) D_3 m_1 + (e^{hm_1} - e^{hm_2}) D_1 m_3 \right) \right) \right) \right. \\
& - C_3 \left( - (e^{hm_1} - e^{hm_4}) D_1 D_4 m_2 + D_2 \left( (e^{hm_2} - e^{hm_4}) D_4 m_1 + (e^{hm_1} - e^{hm_2}) D_1 m_4 \right) \right) \\
& + C_2 \left( - (e^{hm_1} - e^{hm_4}) D_1 D_4 m_3 + D_3 \left( (e^{hm_3} - e^{hm_4}) D_4 m_1 + (e^{hm_1} - e^{hm_3}) D_1 m_4 \right) \right) \\
& \left. - C_1 \left( - (e^{hm_2} - e^{hm_4}) D_2 D_4 m_3 + D_3 \left( (e^{hm_3} - e^{hm_4}) D_4 m_2 + (e^{hm_2} - e^{hm_3}) D_2 m_4 \right) \right) \right) (-1 + \kappa_1) \\
& + \varphi \left( -C_3 \left( \begin{array}{l} (e^{hm_1} - e^{hm_2}) (e^{hm_3} - e^{hm_4}) C_4 D_1 D_2 + \left( \begin{array}{l} (e^{hm_2} - e^{hm_3}) (e^{hm_1} - e^{hm_4}) C_2 D_1 \\ - (e^{hm_1} - e^{hm_3}) (e^{hm_2} - e^{hm_4}) C_1 D_2 \end{array} \right) D_4 \end{array} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + D_3 \left( \begin{array}{l} - (e^{hm_2} - e^{hm_3}) (e^{hm_1} - e^{hm_4}) C_1 C_4 D_2 \\ + C_2 \left( \begin{array}{l} (e^{hm_1} - e^{hm_3}) (e^{hm_2} - e^{hm_4}) C_4 D_1 \\ - (e^{hm_1} - e^{hm_2}) (e^{hm_3} - e^{hm_4}) C_1 D_4 \end{array} \right) \end{array} \right) \right) \mu_0 \right] / \Delta \quad (211)
\end{aligned}$$

(206-211) ifadelerinde geçen  $\bar{p}$ ,  $\varphi$  ve  $\Delta$  ifadeleri aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\bar{p} = \int_0^a p(t) \cos(\xi t) dt \quad (212)$$

$$\varphi = \int_b^c \varphi(t) \sin(\xi t) dt \quad (213)$$

$$\begin{aligned} \Delta = & (4e^{hm_4} F \xi C_4 \left( -(e^{hm_1} - e^{hm_3}) D_1 D_3 m_2 + D_2 \left( (e^{hm_2} - e^{hm_3}) D_3 m_1 + (e^{hm_1} - e^{hm_2}) D_1 m_3 \right) \right) \\ & + C_1 (-4e^{hm_1} F \xi \left( -(e^{hm_2} - e^{hm_4}) D_2 D_4 m_3 + D_3 \left( (e^{hm_3} - e^{hm_4}) D_4 m_2 + (e^{hm_2} - e^{hm_3}) D_2 m_4 \right) \right) \\ & + (e^{hm_2} - e^{hm_3}) (e^{hm_1} - e^{hm_4}) C_4 D_2 D_3 (1 + \kappa_2) C_3 (-4e^{hm_3} F \xi \left( \begin{array}{l} -(e^{hm_1} - e^{hm_4}) D_1 D_4 m_2 \\ + D_2 \left( \begin{array}{l} (e^{hm_2} - e^{hm_4}) D_4 m_1 \\ + (e^{hm_1} - e^{hm_2}) D_1 m_4 \end{array} \right) \end{array} \right) \\ & + (e^{hm_1} - e^{hm_2}) (e^{hm_3} - e^{hm_4}) C_4 D_1 D_2 (1 + \kappa_2) + (e^{hm_2} - e^{hm_3}) (e^{hm_1} - e^{hm_4}) C_2 D_1 D_4 (1 + \kappa_2) \\ & - (e^{hm_1} - e^{hm_3}) (e^{hm_2} - e^{hm_4}) C_1 D_2 D_4 (1 + \kappa_2) + C_2 (4e^{hm_2} F \xi \left( \begin{array}{l} -(e^{hm_1} - e^{hm_4}) D_1 D_4 m_3 \\ + D_3 \left( \begin{array}{l} (e^{hm_3} - e^{hm_4}) D_4 m_1 \\ + (e^{hm_1} - e^{hm_3}) D_1 m_4 \end{array} \right) \end{array} \right) \\ & - (e^{hm_1} - e^{hm_3}) (e^{hm_2} - e^{hm_4}) C_4 D_1 D_3 (1 + \kappa_2) + (e^{hm_1} - e^{hm_2}) (e^{hm_3} - e^{hm_4}) C_1 D_3 D_4 (1 + \kappa_2) \left. \right) \mu_0 \quad (214) \end{aligned}$$

(206-211) ifadelerinde geçen  $p(t)$  ve  $\varphi(t)$  bilinmeyen fonksiyonları daha önce kullanılmayan (198) ve (199) nolu sınır şartlarından elde edilecektir.  $\frac{\partial}{\partial x}[v_1(x, y)]$  teşkil edilir ve (206-209) ifadelerinde verilen katsayılar bu ifadede yerlerine yazılırsa,

$$\frac{\partial}{\partial x}[v_1(x, y)] = \frac{2}{\pi \mu_0} \left\{ \int_0^a p(t) N_1(x, t) dt + \int_b^c \varphi(t) N_2(x, t) dt \right\} \quad (215)$$

olarak elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned}
N_1(x, t) = & \int_0^{\infty} [\xi (-1 + \kappa_1) (-4F\xi (D_3((e^{(h+y)n_1} - e^{(h+y)n_2})(e^{hn_3} - e^{hn_4}) D_4 m_1 m_2 \\
& + (e^{hn_2} - e^{hn_3})(e^{(h+y)n_1} - e^{(h+y)n_4}) D_2 m_1 - (e^{hn_1} - e^{hn_3})(e^{(h+y)n_2} - e^{(h+y)n_4}) D_1 m_2) m_4) \\
& - m_3 (- (e^{(h+y)n_2} - e^{(h+y)n_3})(e^{hn_1} - e^{hn_4}) D_1 D_4 m_2 + D_2 ((e^{(h+y)n_1} - e^{(h+y)n_3})(e^{hn_2} - e^{hn_4}) D_4 m_1 \\
& - (e^{hn_1} - e^{hn_2})(e^{(h+y)n_3} - e^{(h+y)n_4}) D_1 m_4)))] + C_4 \left( \begin{array}{l} -e^{(h+y)n_2} (e^{hn_1} - e^{hn_3}) D_1 D_3 m_2 \\ + D_2 \left( \begin{array}{l} e^{(h+y)n_1} (e^{hn_2} - e^{hn_3}) D_3 m_1 \\ + e^{(h+y)n_3} (e^{hn_1} - e^{hn_2}) D_1 m_3 \end{array} \right) \end{array} \right) (1 + \kappa_2) \\
& - C_3 \left( \begin{array}{l} -e^{(h+y)n_2} (e^{hn_1} - e^{hn_4}) D_1 D_4 m_2 + D_2 \left( \begin{array}{l} e^{(h+y)n_1} (e^{hn_2} - e^{hn_4}) D_4 m_1 \\ + e^{(h+y)n_4} (e^{hn_1} - e^{hn_2}) D_1 m_4 \end{array} \right) \end{array} \right) \\
& (1 + \kappa_2) + C_2 \left( \begin{array}{l} -e^{(h+y)n_3} (e^{hn_1} - e^{hn_4}) D_1 D_4 m_3 + D_3 \left( \begin{array}{l} e^{(h+y)n_1} (e^{hn_3} - e^{hn_4}) D_4 m_1 \\ + e^{(h+y)n_4} (e^{hn_1} - e^{hn_3}) D_1 m_4 \end{array} \right) \end{array} \right) (1 + \kappa_2) \\
& - C_1 \left( \begin{array}{l} -e^{(h+y)n_3} (e^{hn_2} - e^{hn_4}) D_2 D_4 m_3 + D_3 \left( \begin{array}{l} e^{(h+y)n_2} (e^{hn_3} - e^{hn_4}) D_4 m_2 \\ + e^{(h+y)n_4} (e^{hn_2} - e^{hn_3}) D_2 m_4 \end{array} \right) \end{array} \right) (1 + \kappa_2) \} / \Lambda] \\
& \cos(\xi t) \sin(\xi x) d\xi
\end{aligned} \tag{216}$$

$$\begin{aligned}
N_2(x, t) = & \int_0^{\infty} [4F\xi (e^{hn_4} C_4 \left( \begin{array}{l} -e^{(h+y)n_2} (e^{hn_1} - e^{hn_3}) D_1 D_3 m_2 + D_2 \left( \begin{array}{l} e^{(h+y)n_1} (e^{hn_2} - e^{hn_3}) D_3 m_1 \\ + e^{(h+y)n_3} (e^{hn_1} - e^{hn_2}) D_1 m_3 \end{array} \right) \end{array} \right) \\
& - C_3 (-e^{(h+y)n_2} (e^{h(n_1+n_3)} - e^{h(n_3+n_4)}) D_1 D_4 m_2 + D_2 (e^{(h+y)n_1} (e^{h(n_2+n_3)} - e^{h(n_3+n_4)}) D_4 m_1 \\
& + e^{h(n_3+(h+y)n_4}) (e^{hn_1} - e^{hn_2}) D_1 m_4)) + C_2 (-e^{(h+y)n_3} (e^{h(n_1+n_2)} - e^{h(n_2+n_4)}) D_1 D_4 m_3 \\
& + D_3 (e^{(h+y)n_1} (e^{h(n_2+n_3)} - e^{h(n_2+n_4)}) D_4 m_1 + e^{(h+y)n_4} (e^{h(n_1+n_2)} - e^{h(n_2+n_3)}) D_1 m_4)) \\
& - e^{hn_1} C_1 (-e^{(h+y)n_3} (e^{hn_2} - e^{hn_4}) D_2 D_4 m_3 + D_3 (e^{(h+y)n_2} (e^{hn_3} - e^{hn_4}) D_4 m_2 \\
& + e^{(h+y)n_4} (e^{hn_2} - e^{hn_3}) D_2 m_4)))] \mu_0 \} / \Lambda] \sin(\xi t) \sin(\xi x) d\xi
\end{aligned} \tag{217}$$

olarak elde edilir. Bu ifadelerde geçen  $\Lambda$ , aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\begin{aligned}
\Lambda = & 4e^{hm_4} F \xi C_4 \left( -(e^{hm_1} - e^{hm_3}) D_1 D_3 m_2 + D_2 \left( (e^{hm_2} - e^{hm_3}) D_3 m_1 + (e^{hm_1} - e^{hm_2}) D_1 m_3 \right) \right) \\
& - 4e^{hm_3} F \xi C_3 \left( -(e^{hm_1} - e^{hm_4}) D_1 D_4 m_2 + D_2 \left( (e^{hm_2} - e^{hm_4}) D_4 m_1 + (e^{hm_1} - e^{hm_2}) D_1 m_4 \right) \right) \\
& + 4e^{hm_2} F \xi C_2 \left( -(e^{hm_1} - e^{hm_4}) D_1 D_4 m_3 + D_3 \left( (e^{hm_3} - e^{hm_4}) D_4 m_1 + (e^{hm_1} - e^{hm_3}) D_1 m_4 \right) \right) \\
& - 4e^{hm_1} F \xi C_1 \left( -(e^{hm_2} - e^{hm_4}) D_2 D_4 m_3 + D_3 \left( (e^{hm_3} - e^{hm_4}) D_4 m_2 + (e^{hm_2} - e^{hm_3}) D_2 m_4 \right) \right) \\
& + \left( (e^{hm_1} - e^{hm_2}) (e^{hm_3} - e^{hm_4}) C_3 C_4 D_1 D_2 + (-e^{hm_1} + e^{hm_3}) (e^{hm_2} - e^{hm_4}) C_2 C_4 D_1 D_3 \right. \\
& + \left. (e^{hm_2} - e^{hm_3}) (e^{hm_1} - e^{hm_4}) C_1 C_4 D_2 D_3 + (e^{hm_2} - e^{hm_3}) (e^{hm_1} - e^{hm_4}) C_2 C_3 D_1 D_4 \right. \\
& + \left. (-e^{hm_1} + e^{hm_3}) (e^{hm_2} - e^{hm_4}) C_1 C_3 D_2 D_4 + (e^{hm_1} - e^{hm_2}) (e^{hm_3} - e^{hm_4}) C_1 C_2 D_3 D_4 \right) (1 + \kappa_2). \quad (218)
\end{aligned}$$

(198) nolur sınır şartı  $y = 0$  için yazıldığından, (216-217) nolu ifadelerde  $y \rightarrow 0$  limitine geçmek gerekmektedir. Ancak, limite geçilirken  $N_1(x, t)$  çekirdeğinin yakınsaması bozulmaktadır. Çekirdeğin yakınsamasını bozan singüler terim ( $ST_2$ ) aşağıdaki şekilde elde edilebilir:

$$ST_2 = \int_0^{\infty} e^{\xi y} \left[ \frac{\kappa_1 + 1}{4} \right] \sin(\xi x) \cos(\xi t) d\xi \quad (219)$$

Sürekli temas durumunda da belirtildiği gibi (216) nolu ifadeden yakınsamayı bozan singüler terim çıkarılıp, bu terimin kapalı integrali integral dönüşüm tabloları yardımıyla alındıktan sonra söz konusu denkleme eklenir ve  $y \rightarrow 0$  limitine geçilirse birinci integral denklem aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, 0)] = \frac{1 + \kappa_1}{4\pi\mu_0} \int_0^a \left[ \frac{1}{t+x} - \frac{1}{t-x} + N_3(x, t) \right] p(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_b^c \varphi(t) N_4(x, t) dt = f(x) \quad (220)$$

Burada,  $N_3(x, t)$  ve  $N_4(x, t)$  ifadeleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir:



$$\begin{aligned}
N_3(x, t) = & \int_0^\infty [(-16F\xi^2 (D_3 \left( \begin{aligned} & \left( (e^{hm_1} - e^{hm_2})(e^{hn_3} - e^{hn_4}) D_4 m_1 m_2 \right. \\ & \left. + \left( (e^{hm_2} - e^{hm_3})(e^{hm_1} - e^{hn_4}) D_2 m_1 \right) \right. \\ & \left. - \left( (e^{hm_1} - e^{hn_3})(e^{hn_2} - e^{hn_4}) D_1 m_2 \right) \right) m_4 \right) \\ & - m_3 \left( \begin{aligned} & - (e^{hn_2} - e^{hn_3})(e^{hm_1} - e^{hn_4}) D_1 D_4 m_2 \\ & + D_2 \left( \begin{aligned} & (e^{hm_1} - e^{hn_3})(e^{hn_2} - e^{hn_4}) D_4 m_1 \\ & - (e^{hm_1} - e^{hm_2})(e^{hn_3} - e^{hn_4}) D_1 m_4 \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) (\kappa_1 - 1) \\ & + \xi (C_4 \left( \begin{aligned} & -e^{hn_2} (e^{hm_1} - e^{hn_3}) D_1 D_3 m_2 + D_2 \left( \begin{aligned} & e^{hm_1} (e^{hm_2} - e^{hn_3}) D_3 m_1 \\ & + e^{hn_3} (e^{hm_1} - e^{hn_2}) D_1 m_3 \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \\ & - C_3 \left( \begin{aligned} & -e^{hn_2} (e^{hm_1} - e^{hn_4}) D_1 D_4 m_2 + D_2 \left( \begin{aligned} & e^{hm_1} (e^{hm_2} - e^{hn_4}) D_4 m_1 \\ & + e^{hn_4} (e^{hm_1} - e^{hm_2}) D_1 m_4 \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \\ & + C_2 \left( \begin{aligned} & -e^{hn_3} (e^{hm_1} - e^{hn_4}) D_1 D_4 m_3 + D_3 \left( \begin{aligned} & e^{hm_1} (e^{hn_3} - e^{hn_4}) D_4 m_1 \\ & + e^{hn_4} (e^{hm_1} - e^{hn_3}) D_1 m_4 \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \\ & - C_1 \left( \begin{aligned} & -e^{hn_3} (e^{hm_2} - e^{hn_4}) D_2 D_4 m_3 + D_3 \left( \begin{aligned} & e^{hm_2} (e^{hn_3} - e^{hn_4}) D_4 m_2 \\ & + e^{hn_4} (e^{hm_2} - e^{hn_3}) D_2 m_4 \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \\ & (\kappa_1 - 1)(1 + \kappa_2) \} / \Lambda^* - 1] [\sin \xi(t + x) - \sin \xi(t - x)] d\xi \tag{221}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_4(x, t) = & \int_0^\infty \left[ \{ 4F\xi \left( C_4 \left( -e^{h(n_2+n_4)} (e^{hm_1} - e^{hm_3}) D_1 D_3 m_2 + D_2 \left( e^{h(n_1+n_4)} (e^{hm_2} - e^{hm_3}) D_3 m_1 \right) \right) \right) \right. \\
& - C_3 \left( -e^{h(n_2+n_3)} (e^{hm_1} - e^{hm_4}) D_1 D_4 m_2 + D_2 \left( e^{h(n_1+n_3)} (e^{hm_2} - e^{hm_4}) D_4 m_1 \right) \right) \\
& + C_2 \left( -e^{h(n_2+n_3)} (e^{hm_1} - e^{hm_4}) D_1 D_4 m_3 + D_3 \left( e^{h(n_1+n_2)} (e^{hm_3} - e^{hm_4}) D_4 m_1 \right) \right) \\
& \left. - C_1 \left( -e^{h(n_1+n_3)} (e^{hm_2} - e^{hm_4}) D_2 D_4 m_3 + D_3 \left( e^{h(n_1+n_2)} (e^{hm_3} - e^{hm_4}) D_4 m_2 \right) \right) \right\} \mu_0 / \Lambda ] \\
& [\cos \xi(t-x) - \cos \xi(t+x)] d\xi . \tag{222}
\end{aligned}$$

(221) ifadesinde geçen  $\Lambda^*$  ise,

$$\Lambda^* = (1 + \kappa_1) \Lambda \tag{223}$$

olarak tanımlanabilir.

$p(t) = p(-t)$  olduğu düşünülür ve  $z = \xi h$  değişken dönüşümü yapılırsa (220) ifadesiyle verilen birinci integral denklem,

$$-\frac{1 + \kappa_1}{4\pi\mu_0} \int_{-a}^a \left[ \frac{1}{t-x} + \frac{1}{h} N_5(x, t) \right] p(t) dt - \frac{1}{\pi h} \int_b^c \varphi(t) N_6(x, t) dt = f(x) \tag{224}$$

şeklinde yazılabilir.

Burada,

$$\begin{aligned}
N_5(x, t) = & \int_0^{\infty} \left[ \left( \{-16F \frac{z^2}{h^2} (D_3 \left( \begin{aligned} & \left( (e^{hm_1} - e^{hm_2})(e^{hm_3} - e^{hm_4}) D_4 m_1 m_2 \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \left( (e^{hm_2} - e^{hm_3})(e^{hm_1} - e^{hm_4}) D_2 m_1 \right) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \left( (e^{hm_1} - e^{hm_3})(e^{hm_2} - e^{hm_4}) D_1 m_2 \right) \right) \right) m_4 \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - m_3 \left( \begin{aligned} & - \left( (e^{hm_2} - e^{hm_3})(e^{hm_1} - e^{hm_4}) D_1 D_4 m_2 \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + D_2 \left( \begin{aligned} & \left( (e^{hm_1} - e^{hm_3})(e^{hm_2} - e^{hm_4}) D_4 m_1 \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \left( (e^{hm_1} - e^{hm_2})(e^{hm_3} - e^{hm_4}) D_1 m_4 \right) \right) \right) \right) \right) \right) (\kappa_1 - 1) \right. \\ & \left. + \frac{z}{h} (C_4 \left( \begin{aligned} & -e^{hm_2} (e^{hm_1} - e^{hm_3}) D_1 D_3 m_2 + D_2 \left( \begin{aligned} & e^{hm_1} (e^{hm_2} - e^{hm_3}) D_3 m_1 \right) \right. \\ & \left. + e^{hm_3} (e^{hm_1} - e^{hm_2}) D_1 m_3 \right) \right) \right) \right. \\ & - C_3 \left( \begin{aligned} & -e^{hm_2} (e^{hm_1} - e^{hm_4}) D_1 D_4 m_2 + D_2 \left( \begin{aligned} & e^{hm_1} (e^{hm_2} - e^{hm_4}) D_4 m_1 \right) \right. \\ & \left. + e^{hm_4} (e^{hm_1} - e^{hm_2}) D_1 m_4 \right) \right) \right) \\ & + C_2 \left( \begin{aligned} & -e^{hm_3} (e^{hm_1} - e^{hm_4}) D_1 D_4 m_3 + D_3 \left( \begin{aligned} & e^{hm_1} (e^{hm_3} - e^{hm_4}) D_4 m_1 \right) \right. \\ & \left. + e^{hm_4} (e^{hm_1} - e^{hm_3}) D_1 m_4 \right) \right) \right) \\ & - C_1 \left( \begin{aligned} & -e^{hm_3} (e^{hm_2} - e^{hm_4}) D_2 D_4 m_3 + D_3 \left( \begin{aligned} & e^{hm_2} (e^{hm_3} - e^{hm_4}) D_4 m_2 \right) \right. \\ & \left. + e^{hm_4} (e^{hm_2} - e^{hm_3}) D_2 m_4 \right) \right) \right) \right. \\ & \left. (\kappa_1 - 1)(1 + \kappa_2) \right\} / \Lambda^* - 1 \left] \left[ \sin \frac{z}{h} (t - x) \right] dz \right. \tag{225}
\end{aligned}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_6(x, t) = & \int_0^\infty \left[ \{ 4F \frac{z}{h} (C_4 \left( -e^{h(n_2+n_4)} (e^{hm_1} - e^{hm_3}) D_1 D_3 m_2 + D_2 \left( e^{h(n_1+n_4)} (e^{hm_2} - e^{hm_3}) D_3 m_1 \right. \right) \right. \right. \\
& - C_3 \left( -e^{h(n_2+n_3)} (e^{hm_1} - e^{hm_4}) D_1 D_4 m_2 + D_2 \left( e^{h(n_1+n_3)} (e^{hm_2} - e^{hm_4}) D_4 m_1 \right. \right. \\
& + C_2 \left( -e^{h(n_2+n_3)} (e^{hm_1} - e^{hm_4}) D_1 D_4 m_3 + D_3 \left( e^{h(n_1+n_2)} (e^{hm_3} - e^{hm_4}) D_4 m_1 \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - C_1 \left( -e^{h(n_1+n_3)} (e^{hm_2} - e^{hm_4}) D_2 D_4 m_3 + D_3 \left( e^{h(n_1+n_2)} (e^{hm_3} - e^{hm_4}) D_4 m_2 \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left. + e^{h(n_3+n_4)} (e^{hm_1} - e^{hm_2}) D_1 m_4 \right) \right) \right) \right) \mu_0 \} / \Lambda ] \\
& \left[ \cos \frac{z}{h} (t+x) - \cos \frac{z}{h} (t-x) \right] dz \tag{226}
\end{aligned}$$

olarak tanımlanmaktadır. (224) ifadesinde, eşitliğin her iki tarafı  $-\frac{4\mu_0}{1+\kappa_1}$  ile çarpılırsa birinci integral denklem,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \left[ \frac{1}{t-x} + \frac{1}{h} N_5(x, t) \right] p(t) dt + \frac{4\mu_0}{1+\kappa_1} \frac{1}{\pi h} \int_b^c \varphi(t) N_6(x, t) dt = -\frac{4\mu_0}{1+\kappa_1} f(x) \tag{227}$$

ifadesine dönüşür.

$p(t)$  ve  $\varphi(t)$  bilinmeyen fonksiyonlarının belirlenmesinde kullanılacak ikinci integral denklemi elde etmek için (199) ifadesiyle verilen sınır şartı kullanılacaktır.

İkinci integral denklemin elde edilmesinde, birinci integral denklemin elde edilmesinde izlenen yol takip edilmektedir.  $A_j$  ( $j=1, \dots, 4$ ) katsayıları (121) ifadesinde yerlerine yazıldıktan sonra,  $y \rightarrow -h$  limitine geçilirken çekirdeğin yakınsamasını bozan singüler terim ( $ST_3$ ) aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$ST_3 = \int_0^\infty e^{-\xi(h+y)} \left[ \frac{4\mu_2\mu_0}{(1+\kappa_2)\mu_0 + e^{\beta h}\mu_2(1+\kappa_1)} \right] \sin(\xi t) \cos(\xi x) d\xi \tag{228}$$



$$\begin{aligned}
Z = & (4e^{hm_4} F \frac{Z}{h} C_4 \left( -(e^{hm_1} - e^{hm_3}) D_1 D_3 m_2 + D_2 \left( (e^{hm_2} - e^{hm_3}) D_3 m_1 + (e^{hm_1} - e^{hm_2}) D_1 m_3 \right) \right) \\
& - 4e^{hm_3} F \frac{Z}{h} C_3 \left( -(e^{hm_1} - e^{hm_4}) D_1 D_4 m_2 + D_2 \left( (e^{hm_2} - e^{hm_4}) D_4 m_1 + (e^{hm_1} - e^{hm_2}) D_1 m_4 \right) \right) \\
& + 4e^{hm_2} F \frac{Z}{h} C_2 \left( -(e^{hm_1} - e^{hm_4}) D_1 D_4 m_3 + D_3 \left( (e^{hm_3} - e^{hm_4}) D_4 m_1 + (e^{hm_1} - e^{hm_3}) D_1 m_4 \right) \right) \\
& - 4e^{hm_1} F \frac{Z}{h} C_1 \left( -(e^{hm_2} - e^{hm_4}) D_2 D_4 m_3 + D_3 \left( (e^{hm_3} - e^{hm_4}) D_4 m_2 + (e^{hm_2} - e^{hm_3}) D_2 m_4 \right) \right) \\
& (-1 + \kappa_1) \mu_2 + ((e^{hm_1} - e^{hm_2}) (e^{hm_3} - e^{hm_4}) C_3 C_4 D_1 D_2 + (-e^{hm_1} + e^{hm_3}) (e^{hm_2} - e^{hm_4}) C_2 C_4 D_1 D_3 \\
& + (e^{hm_2} - e^{hm_3}) (e^{hm_1} - e^{hm_4}) C_1 C_4 D_2 D_3 + (e^{hm_2} - e^{hm_3}) (e^{hm_1} - e^{hm_4}) C_2 C_3 D_1 D_4 + (-e^{hm_1} + e^{hm_3}) \\
& (e^{hm_2} - e^{hm_4}) C_1 C_3 D_2 D_4 + (e^{hm_1} - e^{hm_2}) (e^{hm_3} - e^{hm_4}) C_1 C_2 D_3 D_4) (\kappa_1 - 1) (\kappa_2 + 1) \mu_2 \quad (233)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T = & (4e^{hm_4} F \frac{Z}{h} C_4 \left( -(e^{hm_1} - e^{hm_3}) D_1 D_3 m_2 + D_2 \left( (e^{hm_2} - e^{hm_3}) D_3 m_1 + (e^{hm_1} - e^{hm_2}) D_1 m_3 \right) \right) \\
& - 4e^{hm_3} F \frac{Z}{h} C_3 \left( -(e^{hm_1} - e^{hm_4}) D_1 D_4 m_2 + D_2 \left( (e^{hm_2} - e^{hm_4}) D_4 m_1 + (e^{hm_1} - e^{hm_2}) D_1 m_4 \right) \right) \\
& + 4e^{hm_2} F \frac{Z}{h} C_2 \left( -(e^{hm_1} - e^{hm_4}) D_1 D_4 m_3 + D_3 \left( (e^{hm_3} - e^{hm_4}) D_4 m_1 + (e^{hm_1} - e^{hm_3}) D_1 m_4 \right) \right) \\
& - 4e^{hm_1} F \frac{Z}{h} C_1 \left( -(e^{hm_2} - e^{hm_4}) D_2 D_4 m_3 + D_3 \left( (e^{hm_3} - e^{hm_4}) D_4 m_2 + (e^{hm_2} - e^{hm_3}) D_2 m_4 \right) \right) \\
& (\kappa_1 - 1) + ((e^{hm_1} - e^{hm_2}) (e^{hm_3} - e^{hm_4}) C_3 C_4 D_1 D_2 + (-e^{hm_1} + e^{hm_3}) (e^{hm_2} - e^{hm_4}) C_2 C_4 D_1 D_3 \\
& + (e^{hm_2} - e^{hm_3}) (e^{hm_1} - e^{hm_4}) C_1 C_4 D_2 D_3 + (e^{hm_2} - e^{hm_3}) (e^{hm_1} - e^{hm_4}) C_2 C_3 D_1 D_4 + (-e^{hm_1} + e^{hm_3}) \\
& (e^{hm_2} - e^{hm_4}) C_1 C_3 D_2 D_4 + (e^{hm_1} - e^{hm_2}) (e^{hm_3} - e^{hm_4}) C_1 C_2 D_3 D_4) (\kappa_1 - 1) (\kappa_2 + 1) \quad (234)
\end{aligned}$$

olarak tanımlanmaktadır. Diğer yandan probleme ilişkin denge ve tek değerlilik şartları sırasıyla,

$$\int_{-a}^a p(t) dt = P \quad (235)$$

$$\int_b^c \varphi(t) dt = 0 \quad (236)$$

olarak yazılabilir.

### 2.3.2. İntegral Denklem Sisteminin Sayısal Çözümü

Problemin süreksiz temasına ilişkin integral denklem sisteminin sayısal çözümünde iki farklı blok profili göz önüne alınmıştır. Bunlardan ilki rijit blok profilinin düz olması hali, ikincisi ise rijit blok profilinin dairesel olması halidir.

#### 2.3.2.1. Rijit Blok Profilinin Düz Olması Hali

Süreksiz temas durumuna ilişkin elde edilen integral denklemler yeniden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \left[ \frac{1}{t-x} + \frac{1}{h} N_5(x,t) \right] p(t) dt + \frac{4\mu_0}{1+\kappa_1} \frac{1}{\pi h} \int_b^c \varphi(t) N_6(x,t) dt = -\frac{4\mu_0}{1+\kappa_1} f(x) \quad (237)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \frac{4\mu_0 e^{-\beta h}}{(1+\kappa_1)(1+\varpi)} \int_b^c \left[ \frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x} + \frac{1}{h} N_{11}(x,t) \right] \varphi(t) dt \\ + \frac{1}{\pi h} \int_{-a}^a N_{22}(x,t) p(t) dt + \left( \frac{e^{-\gamma h} - 1}{\gamma} \rho_0 g \right) = 0 \end{aligned} \quad (238)$$

(237) ve (238) denklemleri ile verilmiş olan integral denklem sisteminin çözümü için aşağıdaki boyutsuz büyüklükler tanımlanabilir:

$$t_1 = a\eta_1, \quad t_2 = \frac{c-b}{2}\eta_2 + \frac{c+b}{2} \quad (239)$$

$$x_1 = aw_1, \quad x_2 = \frac{c-b}{2}w_2 + \frac{c+b}{2} \quad (240)$$

$$g_1(\eta_1) = \frac{p(t_1)}{\rho_0 gh}, \quad g_2(\eta_2) = \frac{4\mu_0}{(1+\kappa_1)} \frac{\varphi(t_2)}{\rho_0 gh} \quad (241)$$

Tanımlanan bu boyutsuz büyüklükler (237-238) integral denklemlerinde yerlerine yazılırsa,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{\eta - w} + \frac{a}{h} f_1(w, \eta) \right] g_1(\eta) d\eta + \frac{1}{\pi} \frac{c-b}{2h} \int_{-1}^1 f_2(w, \eta) g_2(\eta) d\eta = -\frac{4\mu_0}{1+\kappa_1} \frac{f(x)}{\rho_0 g h} \quad (242)$$

$$\frac{1}{\pi} \frac{e^{-\beta h}}{(1+\varpi)} \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{\eta - w} + \frac{1}{\eta + w + 2 \frac{c+b}{c-b}} + \frac{c-b}{2h} f_4(w, \eta) \right] g_2(\eta) d\eta \quad (243)$$

$$+ \frac{1}{\pi} \frac{a}{h} \int_{-1}^1 f_3(w, \eta) g_1(\eta) d\eta = \frac{1 - e^{-\gamma h}}{\gamma h}$$

ifadeleri elde edilir. Burada,

$$f_1(w_1, \eta_1) = N_5(x_1, t_1) \quad (244)$$

$$f_2(w_1, \eta_2) = N_6(x_1, t_2) \quad (245)$$

$$f_3(w_2, \eta_1) = N_{22}(x_2, t_1) \quad (246)$$

$$f_4(w_2, \eta_2) = N_{11}(x_2, t_2) \quad (247)$$

olarak tanımlanabilirler. (242-247) ifadelerinde geçen  $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$  değişkenlerinin hepsi  $-1, +1$  aralığında tanımlandığı için alt indislerin kaldırılabilceği görülmelidir. (235-236) ifadeleri ile tanımlanmış olan denge ve tek değerlilik şartları (239-241) boyutsuz büyüklükleri yardımıyla,

$$\frac{a}{h} \int_{-1}^1 g_1(\eta) d\eta = \frac{P}{\rho_0 g h^2} = \lambda \quad (248)$$

$$\int_{-1}^1 g_2(\eta) d\eta = 0 \quad (249)$$



şeklini alırlar. (248) ifadesinde geçen  $\lambda$  daha önce de tanımlandığı gibi yük faktörüdür. Düz yüzey profiline sahip rijit bloğun  $F(x)$  fonksiyonu sabit bir değere eşit olduğundan bu fonksiyonun türevi (166) nolu ifadede olduğu gibi sıfırdır.

Blok altındaki temas gerilmesi için  $g_1(\pm 1) \rightarrow \infty$  iken açılma bölgesinin uçlarında  $g_2(\pm 1) = 0$  olmaktadır. (242-243) integral denklem çiftinin birlikte çözülebilmesi için indis +1 alınmalıdır (Civelek vd., 1978; Çakıroğlu, 1979). (242-243) integral denklem sisteminin indisi +1 olarak alınırsa, denklem sisteminin çözümü,

$$g_1(\eta) = G_1(\eta) / (1 - \eta^2)^{1/2} \quad (250)$$

$$g_2(\eta) = G_2(\eta) / (1 - \eta^2)^{1/2} \quad (251)$$

şeklinde aranabilir (Erdoğan ve Gupta, 1972). Bu ifadelerde,  $G_i(\eta)$  ( $i=1,2$ ),  $-1 \leq \eta \leq 1$  kapalı aralığında sınırlıdır. FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki açılma gayet yatık olduğundan ayrılmanın başlangıç ve bitim noktaları için  $G_2(1) = 0$  ve  $G_2(-1) = 0$  şartları koşulur ve uygun Gauss-Chebyshev integrasyon formülü kullanılırsa; (242-243) denklemleri,

$$\sum_{i=1}^n \Gamma_i \left\{ G_1(\eta_i) \left[ \frac{1}{\eta_i - w_j} + \frac{a}{h} f_1(w_j, \eta_i) \right] + \frac{c-b}{2h} G_2(\eta_i) f_2(w_j, \eta_i) \right\} = 0 \quad (j=1, \dots, n-1) \quad (252)$$

$$\sum_{i=1}^n \Gamma_i \left\{ \begin{aligned} & G_2(\eta_i) \frac{e^{-\beta h}}{1 + \varpi} \left[ \frac{1}{\eta_i - w_j} + \frac{1}{\eta_i + w_j + 2 \frac{c+b}{c-b}} + \frac{c-b}{2h} f_4(w_j, \eta_i) \right] \\ & + \frac{a}{h} G_1(\eta_i) f_3(w_j, \eta_i) \end{aligned} \right\} = \frac{1 - e^{-\gamma h}}{\gamma h} \quad (253)$$

(248-249) ifadeleri de;

$$\frac{a}{h} \sum_{i=1}^n \Gamma_i G_1(\eta_i) = \frac{\lambda}{\pi} \quad (254)$$

$$\sum_{i=1}^n \Gamma_i G_2(\eta_i) = 0 \quad (255)$$

ifadelerine indirgenirler. Bu ifadelerdeki  $\Gamma_i$ ,  $\eta_i$  ve  $w_j$  aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\Gamma_1 = \Gamma_n = \frac{1}{2n-2}, \quad \Gamma_i = \frac{1}{n-1}, \quad (i = 2, \dots, n-1) \quad (256)$$

$$\eta_i = \cos\left(\frac{i-1}{n-1} \pi\right), \quad (i = 1, \dots, n) \quad (257)$$

$$w_j = \cos\left(\frac{2j-1}{2n-2} \pi\right), \quad (j = 1, \dots, n-1) \quad (258)$$

(252-255) ifadeleri,  $2n$  bilinmeyenli  $2n$  denklemden oluşan bir cebrik denklem sistemi oluşturur. Açılma bölgesinin uç noktaları olan  $b$  ve  $c$  bilinmeyenleri nedeniyle iteratif çözüme ihtiyaç vardır. Önce  $b$  ve  $c$  değerleri  $b < x_{cr} < c$  olacak şekilde seçilerek (252-253) denklem takımı çözülür. Buradan elde edilen  $G_1(\eta_i)$  ve  $G_2(\eta_i)$  değerleri (254-255) ifadelerinde yerlerine yazılarak bu ifadelerin sağlanıp sağlanmadığı kontrol edilir. Eğer söz konusu ifadeler sağlanmıyorsa  $x$  eksenini boyunca ilk ayrılma uzaklığı arada kalacak şekilde sağa veya sola kaydırılmak suretiyle elde edilen yeni  $b$  ve  $c$  değerleri için aynı işlemler tekrarlanarak (254-255) şartları sağlanıncaya kadar iterasyona devam edilir.

İntegral denklem sisteminin çözümünden sonra, FD tabaka ile elastik yarım düzlemin ara yüzeyindeki temas gerilmesi yayılışı;

$$\frac{\sigma_{1,yg}(x, -h)}{\rho_0 gh} = \frac{1}{\pi} \frac{e^{-\beta h}}{(1+\varpi)} \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{\eta - \frac{x}{h}} + \frac{1}{\eta + \frac{x}{h} + 2\frac{c+b}{c-b}} + \frac{c-b}{2h} f_4\left(\frac{x}{h}, \eta\right) \right] g_2(\eta) d\eta \quad (259)$$

$$+ \left( \frac{1}{\pi} \frac{a}{h} \int_{-1}^1 f_3\left(\frac{x}{h}, \eta\right) g_1(\eta) d\eta \right) - \frac{1 - e^{-\gamma h}}{\gamma h}$$

ifadesinden faydalanılarak bulunabilir. Bu ifade; Gauss-Chebyshev integrasyon formülasyonu kullanılarak,

$$\frac{\sigma_{1,yg}(x,-h)}{\rho_0gh} = \left( \sum_{i=1}^n \Gamma_i \left\{ G_2(\eta_i) \frac{e^{-\beta h}}{1+\varpi} \left[ \frac{1}{\eta_i - \frac{x}{h}} + \frac{1}{\eta_i + \frac{x}{h} + 2\frac{c+b}{c-b}} \right] + \frac{c-b}{2h} f_4\left(\frac{x}{h}, \eta_i\right) \right\} + \frac{a}{h} G_1(\eta_i) f_3\left(\frac{x}{h}, \eta_i\right) \right) - \frac{1-e^{-\gamma h}}{\gamma h} \quad (260)$$

şekline dönüştürülebilir. Bu ifade yardımıyla kritik yükten büyük yükler için FD tabaka ile elastik yarım düzlemin ara yüzeyindeki temas gerilmesi dağılımı elde edilebilir.

### 2.3.2.1.1. FD Tabaka ile Elastik Yarım Düzlemin Ara Yüzeyindeki Açılma Miktarı

$(b, c)$  ayrılma bölgesinde FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki  $\bar{v}(x, -h) = v_1(x, -h) - v_2(x, -h)$  yer değiştirmeler farkı (açılma miktarı);

$$\bar{v}(x, -h) = v_1(x, -h) - v_2(x, -h) = \int_b^x \varphi(t) dt \quad (b < x < c) \quad (261)$$

ifadesinden elde edilebilir. (239-241) ifadeleri ile tanımlanmış boyutsuz büyüklüklerin kullanılması ile (261) ifadesi

$$\frac{\bar{v}(x, -h)}{\rho_0gh^2} \frac{4\mu_0}{(1+\kappa_1)} = \frac{c-b}{2h} \int_{-1}^w g_2(\eta) d\eta \quad (-1 < w < 1) \quad (262)$$

olarak elde edilir. Bu ifadede,

$$w = \frac{2x}{c-b} - \frac{c+b}{c-b} \quad (263)$$

şeklinde tanımlanabilir. Uygun Gauss-Chebyshev integrasyon formülü kullanılarak (262) ifadesi,

$$\frac{4\mu_0}{(1+\kappa_1)\pi} \frac{\bar{v}(x, -h)}{\rho_0 g h^2} = \frac{c-b}{2h} \sum_{i=2}^j \Gamma_i G_2(\eta_i) \quad (j = 2, \dots, n-1) \quad (264)$$

denklemine indirgenebilir. Burada geçen  $\Gamma_i$  ve  $\eta_i$  daha önce (256-257) ifadelerinde tanımlanmıştır. Bu denklemin çözümü ile FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki açılmalar hesaplanabilir.

### 2.3.2.2. Rijit Blok Profiline Dairesel Olması Hali

Daha önce (237) ve (238) denklemleri ile verilmiş olan integral denklem sisteminin çözümü için aşağıdaki boyutsuz büyüklükler tanımlanabilir:

$$t_1 = a\eta_1, \quad t_2 = \frac{c-b}{2}\eta_2 + \frac{c+b}{2} \quad (265)$$

$$x_1 = aw_1, \quad x_2 = \frac{c-b}{2}w_2 + \frac{c+b}{2} \quad (266)$$

$$g_1(\eta_1) = \frac{p(t_1)}{(P/h)}, \quad g_2(\eta_2) = \frac{4\mu_0}{(1+\kappa_1)} \frac{\varphi(t_2)}{(P/h)} \quad (267)$$

(265-267) ifadeleri ve daha önce (165) ifadesi ile tanımlanan boyutsuz büyüklükler (237-238) integral denklemlerinde yerlerine yazılırsa, söz konusu denklemler,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{\eta-w} + \frac{a}{h} f_1(w, \eta) \right] g_1(\eta) d\eta + \frac{1}{\pi} \frac{c-b}{2h} \int_{-1}^1 f_2(w, \eta) g_2(\eta) d\eta = -\frac{4\mu_0}{1+\kappa_1} \frac{f(x)}{(P/h)} \quad (268)$$

$$\frac{1}{\pi} \frac{e^{-\beta h}}{(1+\varpi)} \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{\eta-w} + \frac{1}{\eta+w+2\frac{c+b}{c-b}} + \frac{c-b}{2h} f_4(w,\eta) \right] g_2(\eta) d\eta \quad (269)$$

$$+ \frac{1}{\pi} \frac{a}{h} \int_{-1}^1 f_3(w,\eta) g_1(\eta) d\eta + \left( \frac{e^{-\gamma h} - 1}{\gamma h} \frac{1}{\lambda} \right) = 0$$

olarak elde edilirler. Burada  $f_1(w_1, \eta_1)$ ,  $f_2(w_1, \eta_2)$ ,  $f_3(w_2, \eta_1)$ ,  $f_4(w_2, \eta_2)$  ifadeleri daha önce (244-247) ifadelerinde tanımlanmıştır. (235-236) ifadeleri ile tanımlanmış olan ek şartlar yukarıda tanımlanmış olan boyutsuz büyüklüklerle,

$$\frac{a}{h} \int_{-1}^1 g_1(\eta) d\eta = 1 \quad (270)$$

$$\int_{-1}^1 g_2(\eta) d\eta = 0 \quad (271)$$

şeklini alırlar. Rijit blok profilinin dairesel olması durumunda (268) nolu denklemde geçen  $f(x)$  fonksiyonu daha önce (185) nolu ifadede verildiği gibi elde edilmiştir.

(268-269) integral denklem çiftinin indisi  $-1$  olarak alınır, denklem sisteminin çözümü,

$$g_1(\eta) = G_1(\eta)(1-\eta^2)^{1/2} \quad (272)$$

$$g_2(\eta) = G_2(\eta)(1-\eta^2)^{1/2} \quad (273)$$

şeklinde aranabilir (Erdoğan ve Gupta, 1972). Uygun Gauss-Chebyshev integrasyon formülasyonu kullanılırsa (268-269) boyutsuz denklemleri,

$$\sum_{i=1}^n \Gamma_i \left\{ \begin{array}{l} G_1(\eta_i) \left[ \frac{1}{\eta_i - w_j} + \frac{a}{h} f_1(w_j, \eta_i) \right] \\ + \frac{c-b}{2h} G_2(\eta_i) f_2(w_j, \eta_i) \end{array} \right\} = - \frac{4}{(1+\kappa_1)} \frac{\mu_0}{(P/h)} \frac{(a/h)}{(R/h)} w_j \quad (j=1, \dots, n+1) \quad (274)$$

$$\sum_{i=1}^n \Gamma_i \left\{ \begin{aligned} & G_2(\eta_i) \frac{e^{-\beta h}}{1+\varpi} \left[ \frac{1}{\eta_i - w_j} + \frac{1}{\eta_i + w_j + 2\frac{c+b}{c-b}} + \frac{c-b}{2h} f_4(w_j, \eta_i) \right] \\ & + \frac{a}{h} G_1(\eta_i) f_3(w_j, \eta_i) \end{aligned} \right\} = -\frac{e^{-\gamma h} - 1}{\gamma h} \frac{1}{\lambda} \quad (275)$$

(270-271) yan şartları da;

$$\frac{a}{h} \sum_{i=1}^n \Gamma_i G_1(\eta_i) = \frac{1}{\pi} \quad (276)$$

$$\sum_{i=1}^n \Gamma_i G_2(\eta_i) = 0 \quad (277)$$

ifadelerine indirgenebilir. Bu ifadelerdeki  $\Gamma_i$ ,  $\eta_i$  ve  $w_j$  aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\Gamma_i = \frac{1 - \eta_i^2}{n+1}, \quad (i=1, \dots, n) \quad (278)$$

$$\eta_i = \cos\left(\frac{i\pi}{n+1}\right), \quad (i=1, \dots, n) \quad (279)$$

$$w_j = \cos\left(\frac{2j-1}{2n-2}\pi\right), \quad (j=1, \dots, n+1) \quad (280)$$

(274) ifadesindeki  $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ . denklem otomatik olarak sağlandığından, (275)

ifadesindeki  $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ . denklem ise daha sonra sağlatılmak üzere ilgili denklemlerden

çıkarılırlarsa  $2n$  adet denklem elde edilmiş olur. Bu denklemlerde  $G_1(\eta_i)$ ,  $G_2(\eta_i)$ ,  $a$ ,  $b$  ve  $c$  olmak üzere  $2n+3$  bilinmeyen ortaya çıkmaktadır. Yarı temas uzunluğu olan  $a$  ve açılma bölgesinin başlangıç ve bitiş noktaları olan  $b$  ve  $c$  bilinmeyenleri nedeniyle iteratif

çözümüne ihtiyaç vardır. Önce  $a$ ,  $b$  ve  $c$  değerleri seçilerek (274-275) denklem takımı çözülür. Buradan elde edilen  $G_1(\eta_i)$  ve  $G_2(\eta_i)$  değerleri (276-277) ifadelerinde ve daha önce (275) nolu denklemden çıkarılan  $(\frac{n}{2}+1)$ . denklemde yerlerine yazılarak bu şartların sağlanıp sağlanmadıkları kontrol edilir. Eğer şartlar sağlanmıyorsa yeni  $a$ ,  $b$  ve  $c$  değerleri için aynı işlemler tekrarlanarak bu üç şart sağlanıncaya kadar iterasyona devam edilir.

İntegral denklem sisteminin çözümünden sonra FD tabaka ile elastik yarım düzlemin ara yüzeyindeki temas gerilmesi yayılışı,

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{1,yg}(x,-h)}{P/h} = & \frac{1}{\pi} \frac{e^{-\beta h}}{(1+\varpi)} \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{\eta - \frac{x}{h}} + \frac{1}{\eta + \frac{x}{h} + 2\frac{c+b}{c-b}} + \frac{c-b}{2h} f_4\left(\frac{x}{h}, \eta\right) \right] g_2(\eta) d\eta \\ & + \left( \frac{1}{\pi} \frac{a}{h} \int_{-1}^1 f_3\left(\frac{x}{h}, \eta\right) g_1(\eta) d\eta \right) + \left( \frac{e^{-\gamma h} - 1}{\gamma h} \frac{1}{\lambda} \right) \end{aligned} \quad (281)$$

ifadesinden faydalanılarak elde edilir. Bu ifade Gauss-Chebyshev integrasyon formülasyonu kullanılarak,

$$\frac{\sigma_{1,yg}(x,-h)}{P/h} = \left( \sum_{i=1}^n \Gamma_i \left\{ \begin{aligned} & G_2(\eta_i) \frac{e^{-\beta h}}{1+\varpi} \left[ \frac{1}{\eta_i - \frac{x}{h}} + \frac{1}{\eta_i + \frac{x}{h} + 2\frac{c+b}{c-b}} \right] \\ & + \frac{c-b}{2h} n_4\left(\frac{x}{h}, \eta_i\right) \\ & + \frac{a}{h} G_1(\eta_i) n_3\left(\frac{x}{h}, \eta_i\right) \end{aligned} \right\} + \left( \frac{e^{-\gamma h} - 1}{\gamma h} \frac{1}{\lambda} \right) \right) \quad (282)$$

şekline dönüştürülür. Bu ifade yardımıyla kritik yükten büyük yükler için FD tabaka ile elastik yarım düzlemin ara yüzeyindeki temas gerilmesi dağılımı dairesel blok durumu için elde edilir.

### 2.3.2.2.1. FD Tabaka ile Elastik Yarım Düzlemin Ara Yüzeyindeki Açılma Miktarı

$(b, c)$  ayrılma bölgesinde FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki  $\bar{v}(x, -h) = v_1(x, -h) - v_2(x, -h)$  yer değiştirmeler farkı (açılma miktarı), (265-267) ifadeleri ile tanımlanmış boyutsuz büyüklüklerin (261) ifadesinde kullanılması ile,

$$\frac{\bar{v}(x, -h)}{P} \frac{4\mu_0}{(1 + \kappa_1)} = \frac{c - b}{2h} \int_{-1}^w g_2(\eta) d\eta \quad (-1 < w < 1) \quad (283)$$

olarak elde edilir. (283) nolu denklemde geçen  $w$  ifadesi daha önce (263) nolu ifade tanımlandığı gibidir.

Uygun Gauss-Chebyshev integrasyon formülü kullanılmasıyla (283) ifadesi,

$$\frac{4\mu_0}{(1 + \kappa_1)\pi} \frac{\bar{v}(x, -h)}{P} = \frac{c - b}{2h} \sum_{i=1}^j \Gamma_i G_2(\eta_i) \quad (j = 1, \dots, n) \quad (284)$$

denklemine indirgenebilir. Burada geçen  $\Gamma_i$  ve  $\eta_i$  daha önce (278-279) ifadelerinde tanımlanmıştır. (284) denkleminin çözümü ile FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki açılmalar hesaplanabilir.



### 3. BULGULAR VE İRDELEME

#### 3.1. Giriş

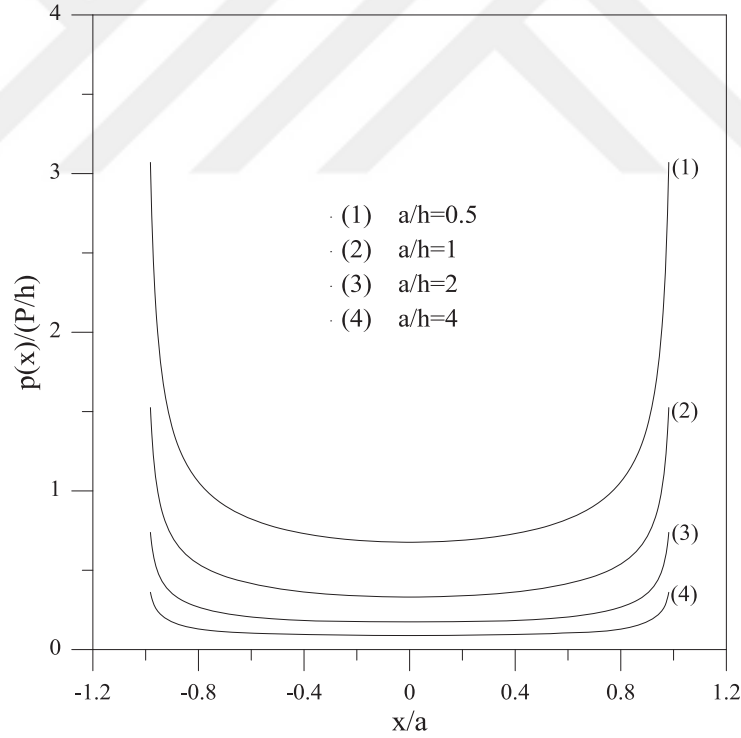
Bu bölümde, bir önceki bölümde verilmiş olan formülasyondan faydalanılarak ele alınan temas probleminin sürekli ve süreksiz temas hallerine ilişkin sayısal çözümü düz ve dairesel blok profilleri için ayrı ayrı gerçekleştirilmiştir. Problemin sürekli temas haline ilişkin çözümünde; blok genişliğine, blok yarıçapına, yük oranına, rijitlik parametresine, yoğunluk parametresine ve FD tabakanın alt yüzeyinin kayma modülünün elastik yarım düzlemin kayma modülüne oranına çeşitli değerler verilerek bu boyutsuz büyüklüklerin; blok altındaki temas gerilme yayılışlarına, simetri ekseninde meydana gelen normal gerilme yayılışlarına, simetri eksenine yakın bir kesitte meydana gelen kayma gerilmesi yayılışlarına, FD tabaka ile elastik yarım düzlemin ara yüzeyindeki temas gerilme yayılışlarına, FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki ilk ayrılma yüklerine ve ilk ayrılma uzaklıklarına etkileri incelenmiştir. Problemin süreksiz temas durumuna ilişkin çözümü sonucunda ise; blok genişliğine, blok yarıçapına, yük oranına, yük faktörüne, rijitlik parametresine, yoğunluk parametresine ve FD tabakanın alt yüzeyinin kayma modülünün elastik yarım düzlemin kayma modülüne oranına çeşitli değerler verilerek söz konusu boyutsuz büyüklüklerin; FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasında meydana gelen ayrılma bölgesinin büyüklüğüne, ayrılma bölgesinin başlangıç ve bitiş noktalarına, FD tabaka ile yarım düzlemin ara yüzeyindeki temas gerilmesi yayılışlarına etkileri araştırılmıştır.

#### 3.2. Problemin Sürekli Temasına İlişkin Bulgular

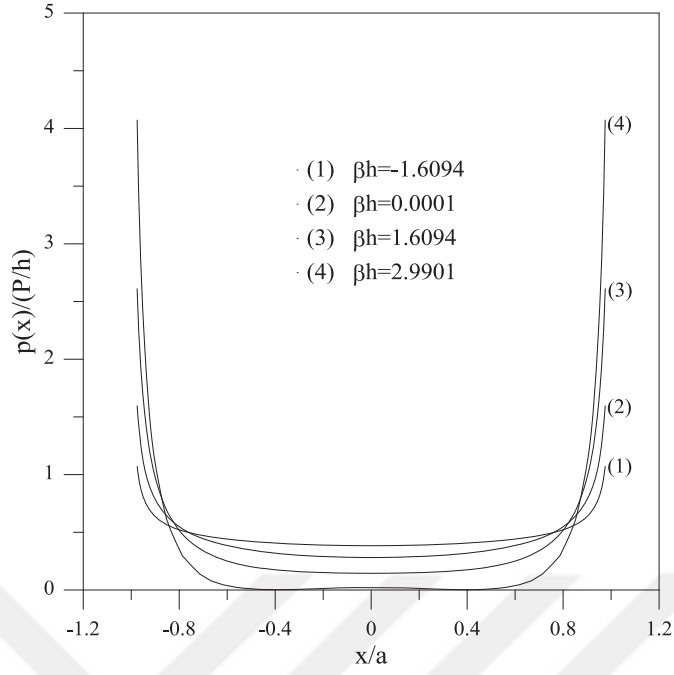
Dış yükün büyüklüğünün kritik yük (ilk ayrılma yükü) değerini aşmaması durumunda, FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasında herhangi bir ayrılma meydana gelmemekte ve problem sürekli temas problemi adını almaktadır. Bu kısımda problemin sürekli temasına ilişkin elde edilen bulgular verilmektedir.

Şekil 3-5’de düz blok durumunda blok genişliğinin ( $a/h$ ), rijitlik parametresinin ( $\beta h$ ) ve FD tabakanın alt yüzeyinin kayma modülünün elastik yarım düzlemin kayma modülüne oranının ( $\mu_1/\mu_2$ ) çeşitli değerleri için blok altındaki boyutsuz temas gerilme yayılışları verilmektedir. Şekillerden de görülebileceği gibi temas gerilmeleri bloğun kenarlarında

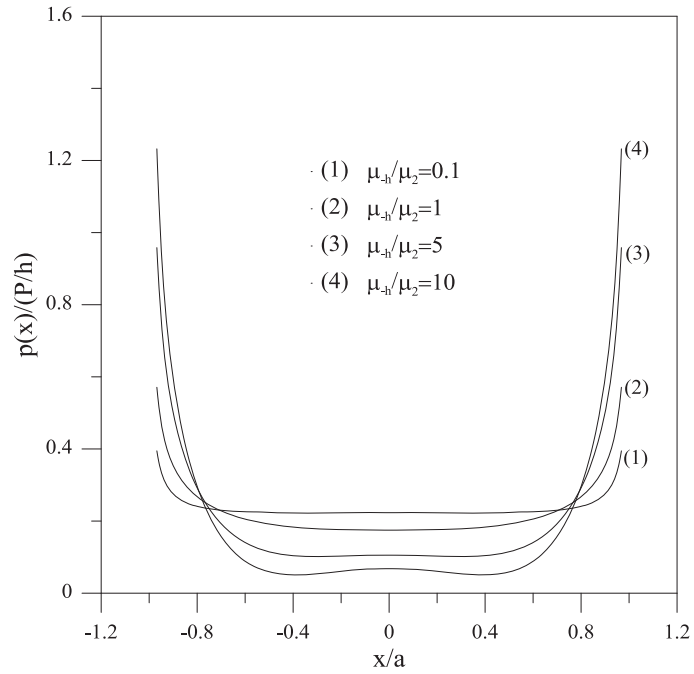
sonsuzu gitmektedir. Bu duruma ilişkin integral denklem incelendiğinde bloğun kenarlarının gerilme için singüler noktalar olduğu görülmekte dolayısıyla da bloğun kenarlarında gerilmelerin sonsuzluğa gitmesi durumu beklenen bir sonuç olarak ortaya çıkmaktadır. Şekil 3’de düz blok durumunda çeşitli blok genişlikleri için blok altındaki boyutsuz temas gerilme yayılışları görülmektedir. Şekilden de anlaşılacağı gibi blok genişliği arttıkça kuvvet daha geniş alana yayılacağından blok altındaki boyutsuz temas gerilmeleri azalmaktadır. Şekil 4’de düz blok durumunda çeşitli rijitlik parametresi ( $\beta h$ ) değerleri için blok altındaki boyutsuz temas gerilme yayılışları verilmektedir. Şekilden de görülebileceği gibi  $\beta h$  değeri arttıkça yani FD tabakanın rijitliği üst yüzeyinden alt yüzeyine doğru giderek azaldıkça blok altındaki boyutsuz temas gerilmesi yayılışları blok kenarlarında artarken simetri ekseninde azalmaktadır. Şekilden çıkarılabilecek bir diğer sonuç ise, rijitlik parametresinin değerinin giderek artırılması halinde belli bir değerden sonra ( $\beta h \cong 2.9901$ ) FD tabaka ile rijit blok arasında ayrılma meydana geleceğidir.



Şekil 3. Düz blok durumunda çeşitli blok genişlikleri için blok altındaki boyutsuz temas gerilme yayılışları ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $\beta h=-0.6931$ ,  $\mu_{-h}/\mu_2=1$ )



Şekil 4. Düz blok durumunda çeşitli rijitlik parametresi ( $\beta h$ ) değerleri için blok altındaki boyutsuz temas gerilme yayılımı ( $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $a/h = 1$ ,  $\mu_{-h}/\mu_2 = 1$ )



Şekil 5. Düz blok durumunda çeşitli  $\mu_{-h}/\mu_2$  değerleri için blok altındaki boyutsuz temas gerilme yayılımı ( $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $a/h = 2$ ,  $\beta h = -0.6931$ )

Şekil 5’de FD tabakanın alt yüzeyinin kayma modülünün elastik yarım düzlemin kayma modülüne oranının ( $\mu_{-h}/\mu_2$ ) çeşitli değerleri için blok altındaki boyutsuz temas gerilmesi yayılışları verilmiştir.  $\mu_{-h}/\mu_2$  değeri arttıkça yani FD tabakanın alt yüzeyinin rijitliğinin elastik yarım düzlemin rijitliğine oranı arttıkça blok altındaki temas gerilmesi yayılışları blok kenarlarına doğru artarken simetri ekseninde azalma göstermektedir.

Dairesel blok durumunda blok yarıçapı ve yük oranına bağlı olarak FD tabaka ile rijit blok arasındaki yarı temas uzunluklarının değişimi Tablo 1’de verilmektedir. Tablodan da görülebileceği gibi blok yarıçapı arttıkça FD tabaka ile rijit blok arasındaki yarı temas uzunluğu artarken, yük oranının artması durumunda yarı temas uzunluğu azalmaktadır. Tablo 2-3’de dairesel blok durumunda çeşitli rijitlik parametresi ve  $\mu_{-h}/\mu_2$  değerleri için FD tabaka ile rijit blok arasındaki yarı temas uzunluklarının değişimi görülmektedir. Tablolar incelendiğinde kolaylıkla görülebilir ki rijitlik parametresi ( $\beta h$ ) değeri arttıkça, yani FD tabakanın rijitliği üst yüzeyinden alt yüzeyine doğru giderek azaldıkça FD tabaka ile rijit blok arasındaki yarı temas uzunluğu artmaktadır. Tablolardan çıkarılabilecek bir diğer sonuç ise, FD tabakanın alt yüzeyinin rijitliğinin elastik yarım düzlemin rijitliğine oranı arttıkça yarı temas uzunluğunun da artmasıdır.

Tablo 1. Dairesel blok durumunda blok yarıçapı ve yük oranına bağlı olarak FD tabaka ile rijit blok arasındaki yarı temas uzunluklarının değişimi ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $\beta h=0.6931$ ,  $\mu_{-h}/\mu_2=1$ )

$\mu_0/ (P/h)$ ↓	a/h				
	R/h=10	R/h=100	R/h=250	R/h=500	R/h=1000
10	0.918932	3.181162	5.036589	7.107381	10.015203
100	0.239567	0.918932	1.5454400	2.232860	3.181162
250	0.146035	0.531118	0.9189320	1.366926	1.986742
500	0.101471	0.353784	0.607137	0.918932	1.366926
750	0.082232	0.281109	0.476575	0.721406	1.086918
1000	0.070906	0.239567	0.402499	0.607137	0.918932

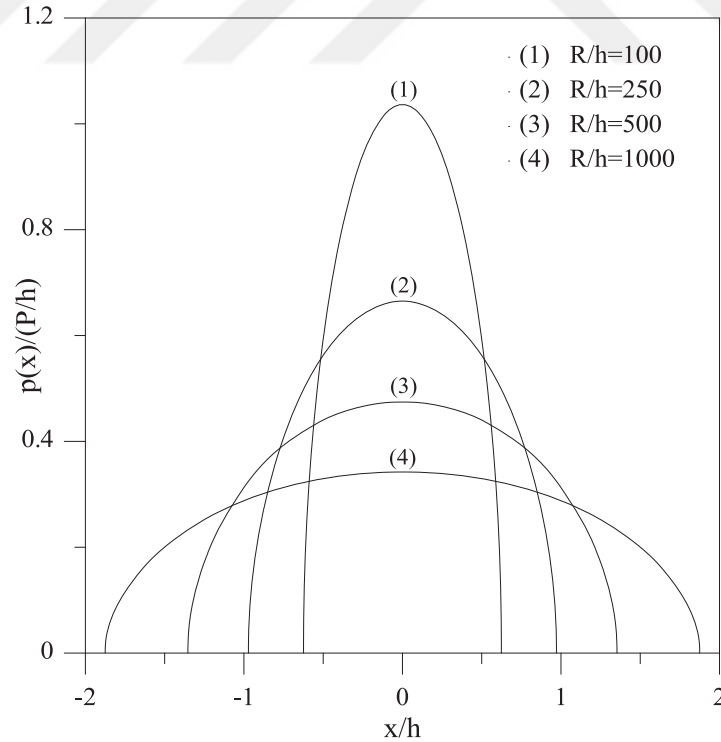
Tablo 2. Dairesel blok durumunda rijitlik parametresi ve  $\mu_{-h}/\mu_2$  oranına bağlı olarak FD tabaka ile rijit blok arasındaki yarı temas uzunluklarının değişimi ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $R/h=100$ ,  $\mu_0/(P/h)=250$ ,  $\mu_{-h}/\mu_2=1$ )

$\beta h$ ↓	a/h				
	$\mu_{-h}/\mu_2=0.25$	$\mu_{-h}/\mu_2=0.5$	$\mu_{-h}/\mu_2=1$	$\mu_{-h}/\mu_2=2$	$\mu_{-h}/\mu_2=4$
-4.6052	0.294705	0.294771	0.294898	0.295126	0.295515
-2.3026	0.337145	0.337902	0.339265	0.341570	0.345189
-1.6094	0.356502	0.358057	0.360813	0.365381	0.372425
-1.3863	0.363800	0.365757	0.369209	0.374905	0.383691
-0.6931	0.391116	0.395167	0.402251	0.413846	0.431615
0.001	0.428615	0.437022	0.451673	0.475992	0.515403
0.6931	0.482195	0.499859	0.531118	0.584932	0.678485
1.3863	0.563095	0.600703	0.668411	0.790346	1.008831
1.6094	0.597445	0.645199	0.732028	0.888433	1.164090
2.3026	0.741211	0.840282	1.017268	1.321969	1.813375
4.6052	1.967425	2.574759	3.530150	4.960965	7.059256

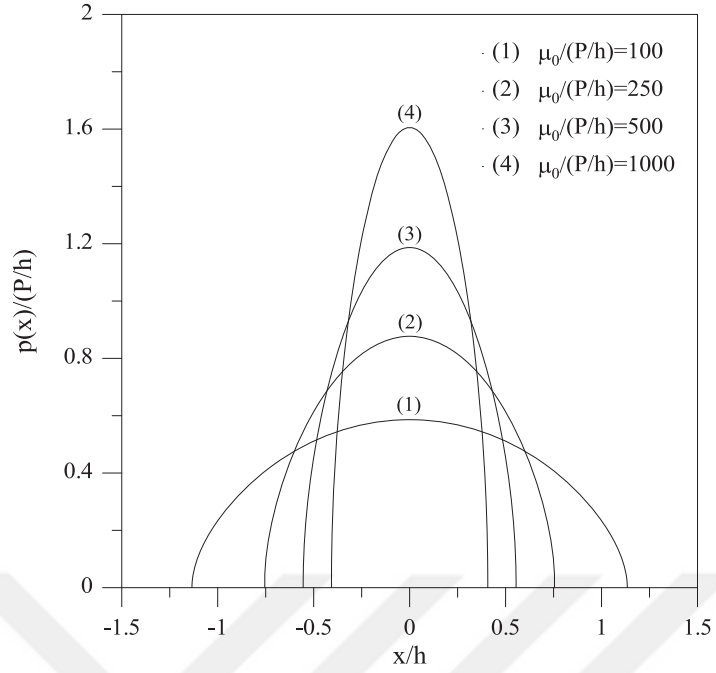
Tablo 3. Dairesel blok durumunda rijitlik parametresi ve  $\mu_{-h}/\mu_2$  oranına bağlı olarak FD tabaka ile rijit blok arasındaki yarı temas uzunluklarının değişimi ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $R/h=10$ ,  $\mu_0/(P/h)=200$ ,  $\mu_{-h}/\mu_2=1$ )

$\beta h$ ↓	a/h				
	$\mu_{-h}/\mu_2=0.25$	$\mu_{-h}/\mu_2=0.5$	$\mu_{-h}/\mu_2=1$	$\mu_{-h}/\mu_2=2$	$\mu_{-h}/\mu_2=4$
-4.6052	0.125650	0.125654	0.125662	0.125676	0.125700
-2.3026	0.136473	0.136519	0.136601	0.136736	0.136939
-1.6094	0.140758	0.140851	0.141010	0.141265	0.141637
-1.3863	0.142286	0.142401	0.142598	0.142910	0.143359
-0.6931	0.147616	0.147843	0.148221	0.148798	0.149606
0.001	0.154113	0.154554	0.155271	0.156333	0.157789
0.6931	0.162262	0.163115	0.164466	0.166428	0.169092
1.3863	0.172953	0.174612	0.177192	0.180909	0.186012
1.6094	0.177155	0.179217	0.182412	0.187022	0.193408
2.3026	0.193717	0.197842	0.204251	0.213729	0.227593
4.6052	0.371882	0.442109	0.575715	0.829008	1.273587

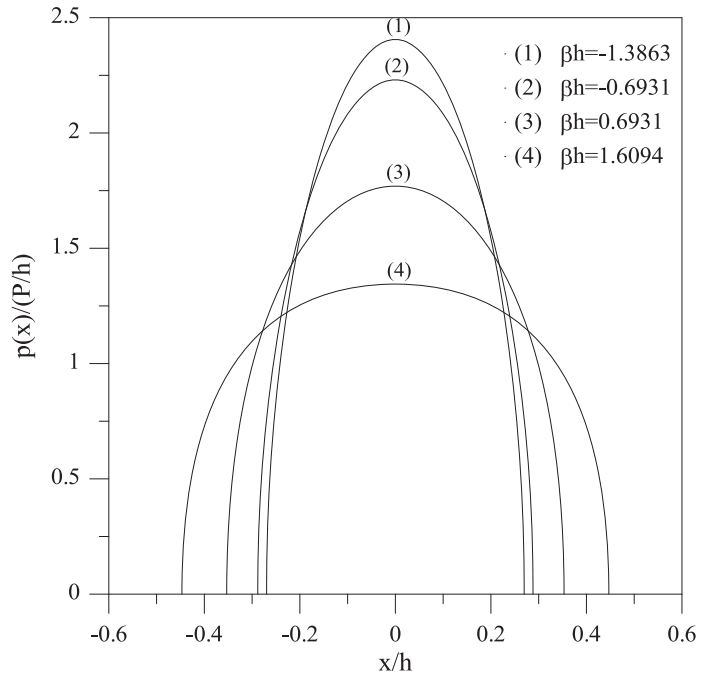
Dairesel blok durumunda çeşitli blok yarıçapı değerleri için blok altındaki boyutsuz temas gerilme yayılışları Şekil 6'da verilmektedir. Şekilden de görülebileceği gibi blok yarıçapı arttıkça blok altındaki boyutsuz temas gerilmesinin maksimum değeri azalmaktadır. Dairesel blok durumunda yük oranının çeşitli değerleri için blok altındaki boyutsuz temas gerilme yayılışları Şekil 7'de verilmektedir. Yük oranı arttıkça blok altındaki boyutsuz temas gerilmesinin maksimum değeri de artmaktadır. Şekil 8'de dairesel blok durumunda çeşitli rijitlik parametresi değerleri için blok altındaki boyutsuz temas gerilme yayılışları verilmektedir. Şekilden de görülebileceği gibi rijitlik parametresi ( $\beta h$ ) değeri arttıkça blok altındaki boyutsuz temas gerilmesinin maksimum değeri azalmaktadır. Şekil 6-8 birlikte incelendiğinde görülebilir ki; blok altındaki boyutsuz temas gerilmelerinin en büyük değeri simetri ekseninde meydana gelmekte, buradan uzaklaştıkça azalarak rijit blok ile FD tabakanın birbirine temasının son bulduğu  $x = \pm a$  noktasında sıfır olmaktadır.



Şekil 6. Dairesel blok durumunda çeşitli blok yarıçapı değerleri için blok altındaki boyutsuz temas gerilme yayılışı ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $\beta h=-0.6931$ ,  $\mu_h/\mu_2=1$ ,  $\mu_0/(P/h)=100$ )



Şekil 7. Dairesel blok durumunda yük oranının çeşitli değerleri için blok altındaki boyutsuz temas gerilme yayılımı ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $R/h=500$ ,  $\beta h=-1.3863$ ,  $\mu_{-h}/\mu_2=1$ )



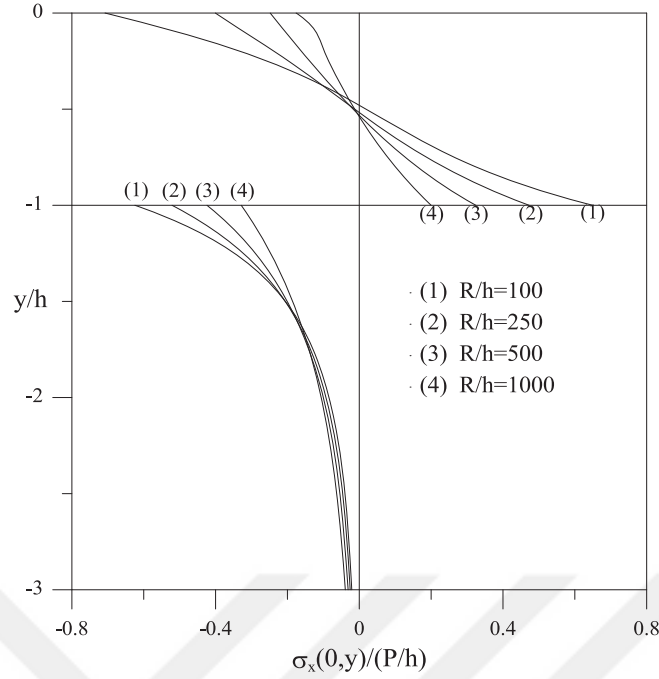
Şekil 8. Dairesel blok durumunda çeşitli rijitlik parametresi değerleri için blok altındaki boyutsuz temas gerilme yayılımı ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $R/h=100$ ,  $\mu_0/(P/h)=500$ ,  $\mu_{-h}/\mu_2=1$ )

Şekil 9’da dairesel blok durumunda blok yarıçapının çeşitli değerleri için simetri eksenini boyunca oluşan boyutsuz  $\sigma_x(0,y)/(P/h)$  normal gerilme yayılışları görülmektedir. Şekilden de görülebileceği gibi blok yarıçapı arttıkça boyutsuz  $\sigma_x(0,y)/(P/h)$  normal gerilme değerleri azalmaktadır. Ayrıca FD tabakanın üst bölgesinde basınç gerilmeleri oluşmakta, tabakanın alt kısımlarına doğru inildikçe değeri azalarak sıfır olmakta daha sonra işaret değiştirerek çekme gerilmesi olarak artmaktadır. Elastik yarım düzlem için ise boyutsuz normal gerilmeler en büyük değerini FD tabaka ile elastik yarım düzlemin ara yüzeyinde almakta ve derine inildikçe ( $y \rightarrow -\infty$ ) her yerde basınç gerilmesi olacak şekilde azalarak sıfıra yaklaşmaktadır. Düz blok durumunda blok genişliğinin çeşitli değerleri için boyutsuz  $\sigma_x(0,y)/(P/h)$  normal gerilme yayılışları Şekil 10’da verilmektedir. Şekilden de görülebileceği gibi blok genişliği arttıkça boyutsuz  $\sigma_x(0,y)/(P/h)$  normal gerilme değerleri azalmaktadır.

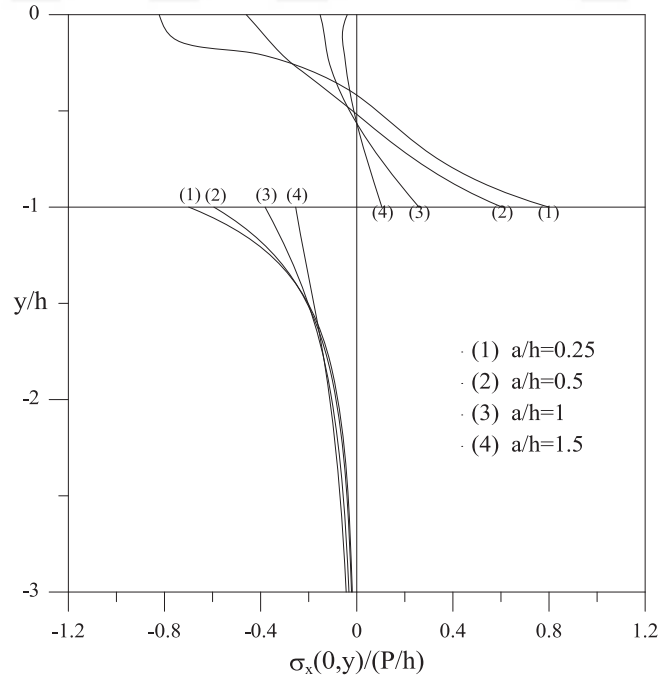
Dairesel blok durumunda çeşitli yük oranı değerleri için boyutsuz  $\sigma_x(0,y)/(P/h)$  normal gerilme yayılışları Şekil 11’de verilmektedir. Şekil incelendiğinde yük oranı arttıkça FD tabakada ve elastik yarım düzlemde boyutsuz  $\sigma_x(0,y)/(P/h)$  normal gerilmesinin arttığı görülmektedir. Yarıçap değişiminde olduğu gibi yük oranının değişiminde de FD tabaka, basit bir giriş gibi davranmaktadır. Elastik yarım düzlem için ise yine gerilme en büyük değerini FD tabaka ile temas yüzeyinde almakta ve derine inildikçe her yerde basınç gerilmesi olacak şekilde azalarak sıfıra doğru gitmektedir.

Düz blok durumunda çeşitli rijitlik parametresi değerleri için boyutsuz  $\sigma_x(0,y)/(P/h)$  normal gerilme yayılışları Şekil 12’de verilmektedir. Şekilden de görülebileceği gibi rijitlik parametresi değeri arttıkça yani FD tabakanın rijitliği üst yüzeyinden alt yüzeyine doğru giderek azaldıkça, FD tabakanın üst yüzeyinde boyutsuz  $\sigma_x(0,y)/(P/h)$  normal gerilme değerleri artarken alt yüzeyinde azalmaktadır. Elastik yarım düzlem için ise söz konusu gerilme değerleri azalmaktadır. Şekil 13’de dairesel blok durumunda çeşitli rijitlik parametresi değerleri için boyutsuz  $\sigma_x(0,y)/(P/h)$  normal gerilme yayılışları görülmektedir. Şekilden de görülebileceği gibi rijitlik parametresi değeri arttıkça FD tabakanın üst yüzeyinde boyutsuz  $\sigma_x(0,y)/(P/h)$  normal gerilme değerleri artarken alt yüzeyinde azalmakta, elastik yarım düzlemde ise söz konusu gerilme değerleri azalmaktadır.

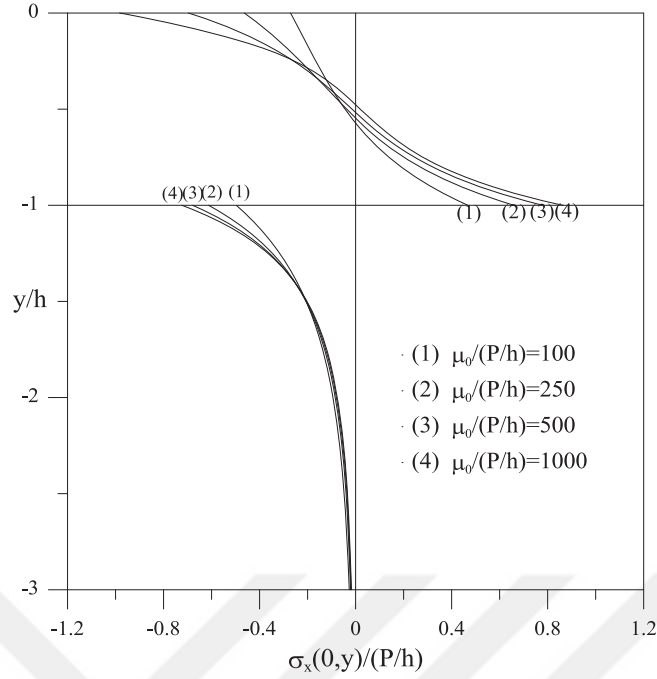




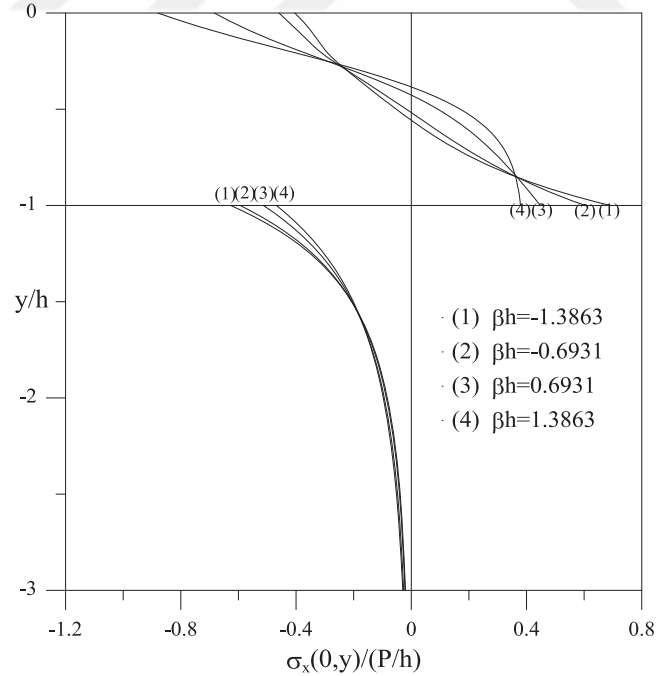
Şekil 9. Dairesel blok durumunda blok yarıçapının çeşitli değerleri için boyutsuz  $\sigma_x(0,y)/(P/h)$  normal gerilme yayılımı ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $\mu_0/(P/h)=100$ ,  $\beta h=-0.6931$ ,  $\gamma h=-1.0986$ ,  $\lambda=20$ ,  $\mu_{-h}/\mu_2=1$ )



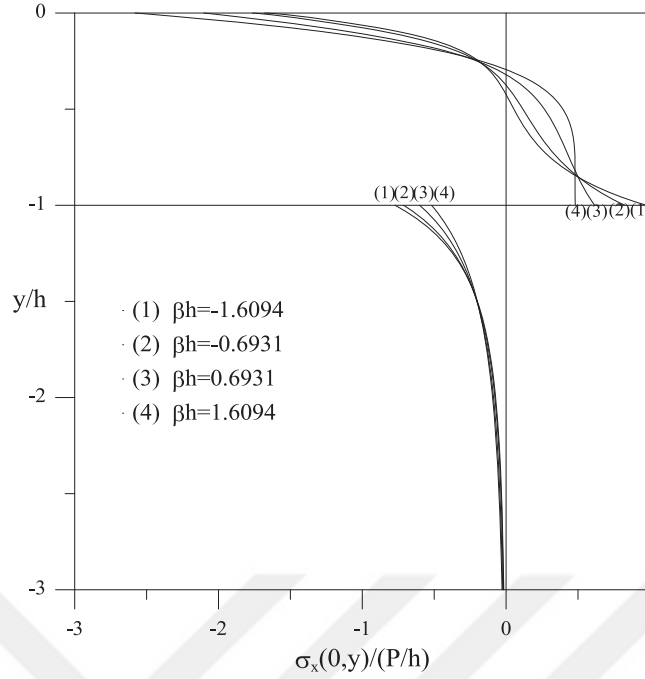
Şekil 10. Düz blok durumunda blok genişliğinin çeşitli değerleri için boyutsuz  $\sigma_x(0,y)/(P/h)$  normal gerilme yayılımı ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $\beta h=-0.6931$ ,  $\gamma h=-0.5$ ,  $\lambda=100$ ,  $\mu_{-h}/\mu_2=1$ )



Şekil 11. Dairesel blok durumunda çeşitli yük oranı değerleri için boyutsuz  $\sigma_x(0,y)/(P/h)$  normal gerilme yayılımı ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $R/h=500$ ,  $\beta h=-1.3863$ ,  $\gamma h=-0.6931$ ,  $\lambda=10$ ,  $\mu_{-h}/\mu_2=1$ )

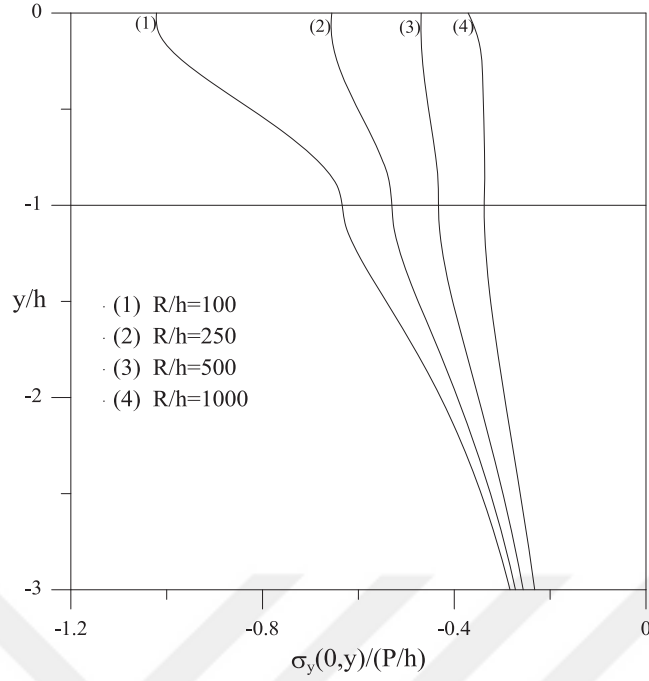


Şekil 12. Düz blok durumunda çeşitli rijitlik parametresi değerleri için boyutsuz  $\sigma_x(0,y)/(P/h)$  normal gerilme yayılımı ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $a/h=0.5$ ,  $\gamma h=-1.0986$ ,  $\lambda=100$ ,  $\mu_{-h}/\mu_2=1$ )

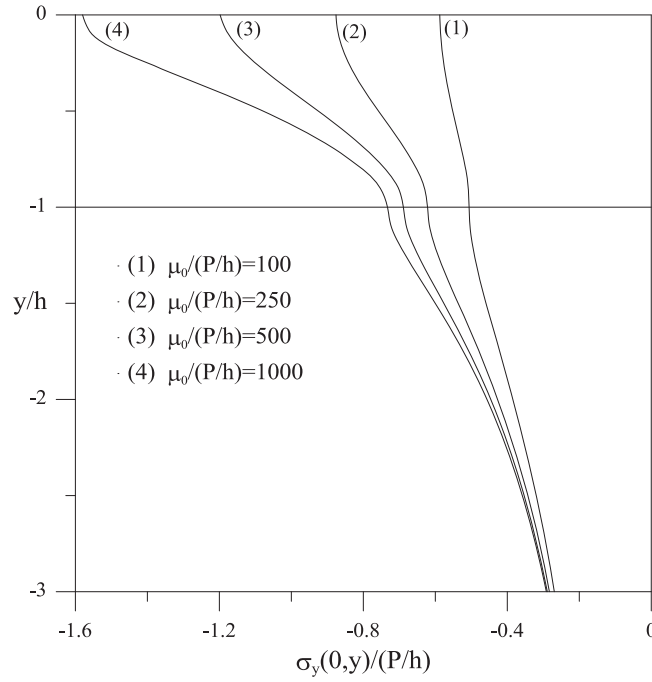


Şekil 13. Dairesel blok durumunda çeşitli rijitlik parametresi değerleri için boyutsuz  $\sigma_x(0,y)/(P/h)$  normal gerilme yayılımı ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $R/h=100$ ,  $\mu_0/(P/h)=500$ ,  $\gamma h=-1.0986$ ,  $\lambda=100$ ,  $\mu_{-h}/\mu_2=1$ )

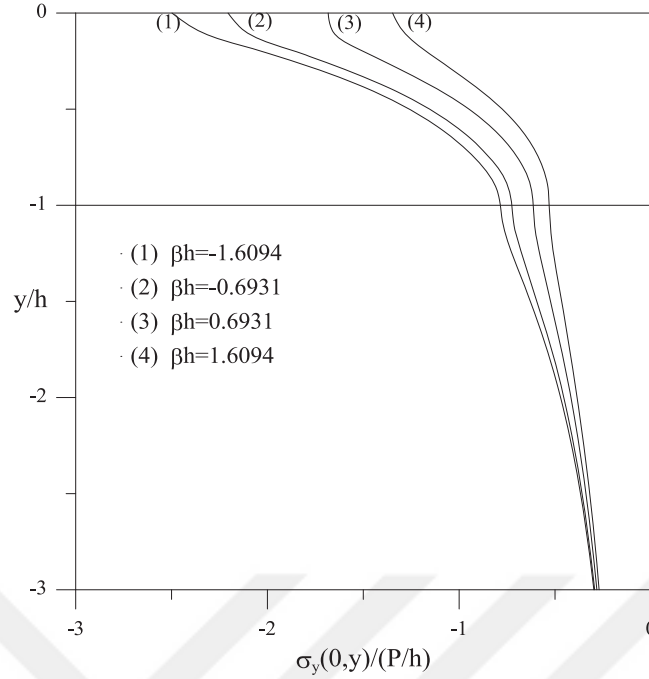
Şekil 14-16'da dairesel blok durumunda  $y$  simetri eksenini boyunca meydana gelen boyutsuz  $\sigma_y(0,y)/(P/h)$  normal gerilme yayılışlarının sırasıyla blok yarıçapının, yük oranının ve rijitlik parametresinin çeşitli değerleri için değişimi verilmektedir. Boyutsuz  $\sigma_y(0,y)/(P/h)$  normal gerilmeleri en büyük değerini blok ile FD tabakanın temas yüzeyinde ( $y=0$ ) almakta ve bloktan uzaklaştıkça ( $y \rightarrow -\infty$ ) azalarak sıfıra yaklaşmaktadır. FD tabaka ile elastik yarım düzlemin ara yüzeyinde gerilmeler aynı değerleri almakta ve problemin tanımında verilen sınır şartlarının sağlandığı görülmektedir. Şekil 14 incelendiğinde kolaylıkla görülebilir ki blok yarıçapı arttıkça boyutsuz  $\sigma_y(0,y)/(P/h)$  normal gerilme değerleri azalmaktadır. Elastisite teorisinden, tekil yükün altında düşey normal gerilmenin teorik olarak sonsuza gittiği bilinmektedir. Burada da yarıçapın azalması sonucu bloğun temas yüzeyi azalmakta ve tekil yük haline yaklaşılmaktadır. Şekil 15'den görülebileceği gibi yük oranının artması halinde boyutsuz  $\sigma_y(0,y)/(P/h)$  normal gerilmeleri artmaktadır. Şekil 16'dan rijitlik parametresinin artması durumunda FD tabakanın rijitliğinin üst yüzeyinden alt yüzeyine doğru azaldığı ve bu durumun boyutsuz  $\sigma_y(0,y)/(P/h)$  normal gerilmelerinin azalmasına neden olduğu açıkça görülmektedir.



Şekil 14. Dairesel blok durumunda blok yarıçapının çeşitli değerleri için boyutsuz  $\sigma_y(0,y)/(P/h)$  normal gerilme yayılımı ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $\mu_0/(P/h)=100$ ,  $\beta h=-0.6931$ ,  $\gamma h=-1.0986$ ,  $\lambda=200$ ,  $\mu_{-h}/\mu_2=1$ )

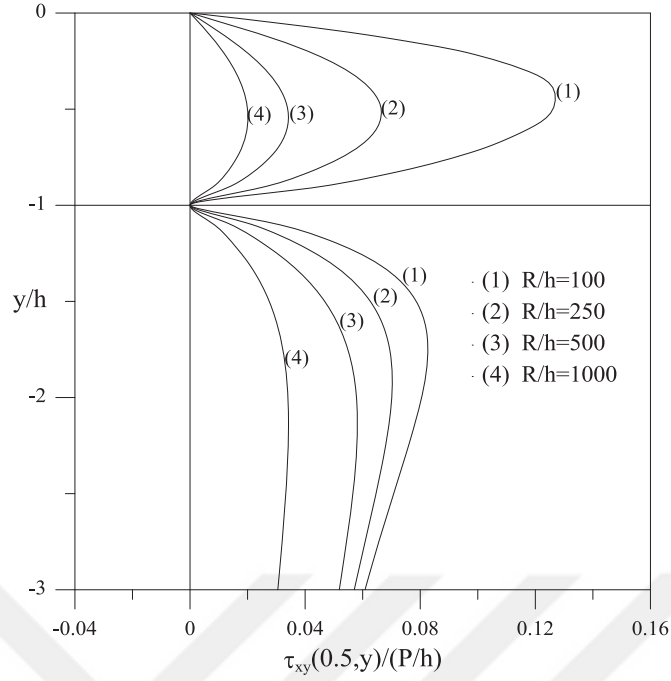


Şekil 15. Dairesel blok durumunda çeşitli yük oranı değerleri için boyutsuz  $\sigma_y(0,y)/(P/h)$  normal gerilme yayılımı ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $R/h=500$ ,  $\beta h=-1.3863$ ,  $\gamma h=-1.0986$ ,  $\lambda=200$ ,  $\mu_{-h}/\mu_2=1$ )

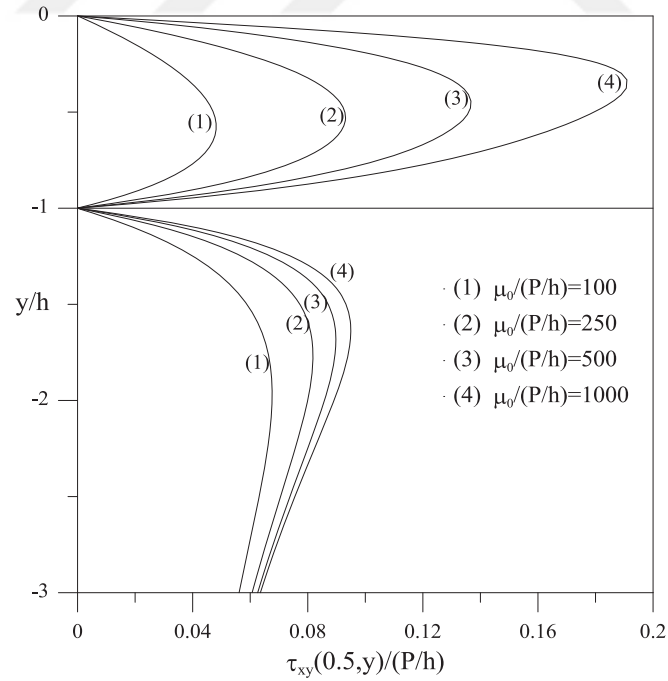


Şekil 16. Dairesel blok durumunda çeşitli rijitlik parametresi değerleri için boyutsuz  $\sigma_y(0,y)/(P/h)$  normal gerilme yayılımı ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $R/h=100$ ,  $\mu_0/(P/h)=500$ ,  $\gamma h=-1.0986$ ,  $\lambda=150$ ,  $\mu_{-h}/\mu_2=1$ )

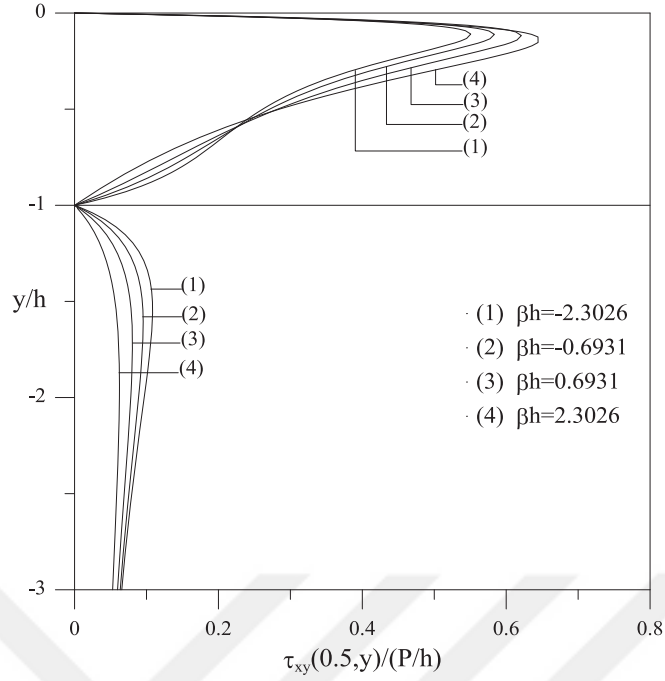
$y$  simetri eksenine boyunca kayma gerilmeleri sıfır olduğundan kayma gerilmelerinin yayılımını görebilmek amacıyla simetri eksenine yakın bir kesitte ( $x/h=0.5$ ) inceleme yapılmıştır. Dairesel blok durumunda boyutsuz  $\tau_{xy}(0.5,y)/(P/h)$  kayma gerilmesi yayılışlarının sırasıyla blok yarıçapının, yük oranının ve rijitlik parametresinin çeşitli değerlerine göre değişimleri Şekil 17-19'da verilmiştir. Söz konusu boyutsuz kayma gerilmeleri FD tabaka ile elastik yarım düzlemin ara yüzeyleri boyunca sıfır olmakta ve problemin tanımında verilen sınır şartlarının sağlandığı görülmektedir. Şekil 17'den anlaşılacağı gibi blok yarıçapı arttıkça boyutsuz  $\tau_{xy}(0.5,y)/(P/h)$  kayma gerilmesi değerleri azalmaktadır. Şekil 18'den yük oranının artışının boyutsuz  $\tau_{xy}(0.5,y)/(P/h)$  kayma gerilmelerinin değerlerinde artışa neden olduğu açıkça görülmektedir. Şekil 19'dan da görülebileceği gibi rijitlik parametresi değeri arttıkça FD tabakanın rijitliği üst yüzeyinden alt yüzeyine doğru azalmakta, boyutsuz kayma gerilmesi değerleri ise FD tabakanın üst yüzeyine doğru artarken alt yüzeyine doğru azalmaktadır. Elastik yarım düzlem için ise rijitlik parametresi artışı boyutsuz kayma gerilmelerinin azalmasına neden olmaktadır.



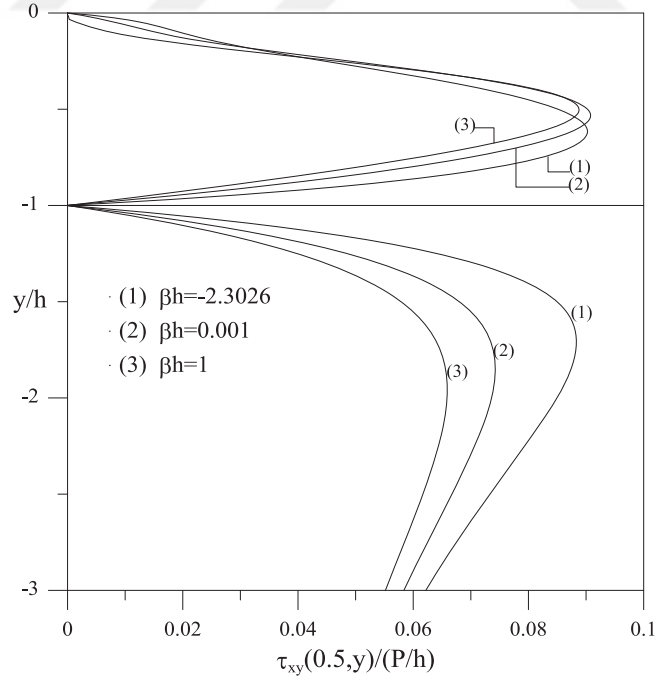
Şekil 17. Dairesel blok durumunda blok yarıçapının çeşitli değerleri için boyutsuz  $\tau_{xy}(0.5,y)/(P/h)$  kayma gerilmesi yayılımı ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $\mu_0/(P/h)=100$ ,  $\beta h=-0.6931$ ,  $\mu_{-h}/\mu_2=1$ )



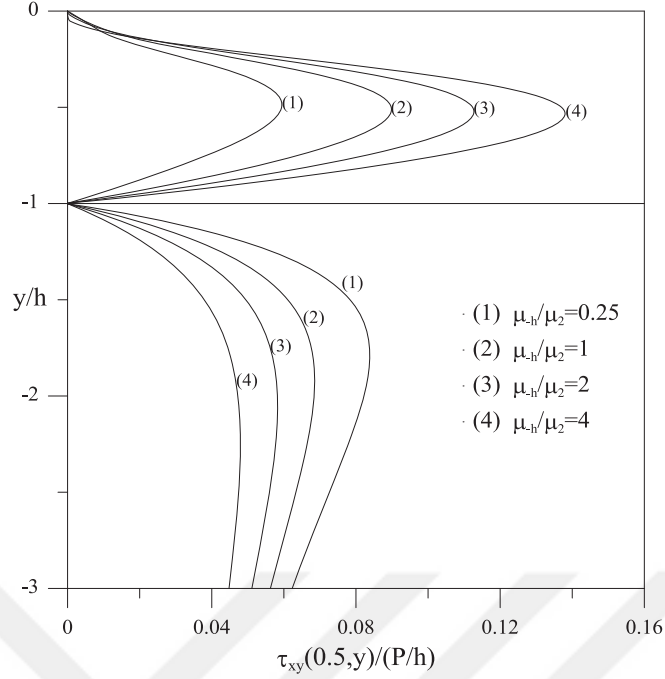
Şekil 18. Dairesel blok durumunda yük oranının çeşitli değerleri için boyutsuz  $\tau_{xy}(0.5,y)/(P/h)$  kayma gerilmesi yayılımı ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $R/h=500$ ,  $\beta h=-1.3863$ ,  $\mu_{-h}/\mu_2=1$ )



Şekil 19. Dairesel blok durumunda çeşitli rijitlik parametresi değerleri için boyutsuz  $\tau_{xy}(0.5,y)/(P/h)$  kayma gerilmesi yayılımı ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $R/h=10$ ,  $\mu_0/(P/h)=200$ ,  $\mu_{-h}/\mu_2=1$ )



Şekil 20. Düz blok durumunda çeşitli rijitlik parametresi değerleri için boyutsuz  $\tau_{xy}(0.5,y)/(P/h)$  kayma gerilmesi yayılımı ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $a/h=0.5$ ,  $\mu_{-h}/\mu_2=1$ )



Şekil 21. Düz blok durumunda FD tabakanın alt yüzeyinin kayma modülünün elastik yarım düzlemin kayma modülüne oranının ( $\mu_1/\mu_2$ ) çeşitli değerleri için boyutsuz  $\tau_{xy}(0.5,y)/(P/h)$  kayma gerilmesi yayılımı ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $a/h=0.5$ ,  $\beta h=0.6931$ )

Düz blok durumunda boyutsuz  $\tau_{xy}(0.5,y)/(P/h)$  kayma gerilmesi yayılışlarının sırasıyla rijitlik parametresinin ve FD tabakanın alt yüzeyinin kayma modülünün elastik yarım düzlemin kayma modülüne oranının çeşitli değerlerine göre değişimleri Şekil 20-21'de verilmiştir. Dairesel blok durumunda olduğu gibi düz blok durumunda da boyutsuz kayma gerilmeleri FD tabaka ile elastik yarım düzlemin ara yüzeyleri boyunca sıfır olmakta ve problemin tanımında verilen sınır şartları sağlanmaktadır. Şekil 20'den görülebileceği gibi rijitlik parametresi değeri arttıkça FD tabakanın rijitliği üst yüzeyinden alt yüzeyine doğru azalmakta, boyutsuz kayma gerilmesi değerleri ise FD tabakanın üst yüzeyine doğru artarken alt yüzeyine doğru azalmaktadır. Elastik yarım düzlem için ise rijitlik parametresi artışı boyutsuz kayma gerilmelerinin azalmasına neden olmaktadır. Şekil 21'den görülebileceği gibi ( $\mu_1/\mu_2$ ) oranı arttıkça yani FD alt yüzeyinin rijitliği elastik yarım düzlemin rijitliğine oranla artırıldıkça FD tabakada boyutsuz  $\tau_{xy}(0.5,y)/(P/h)$  kayma gerilmesi değerleri artarken elastik yarım düzlemde söz konusu değerler azalmaktadır.



Tablo 4. Düz blok durumunda çeşitli rijitlik parametresi ( $\beta h$ ) ve yoğunluk parametresi ( $\gamma h$ ) değerleri için FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki ilk ayrılma yükünün ve ilk ayrılma uzaklığının değişimi ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $a/h=0.5$ ,  $\mu_{-h}/\mu_2=1$ )

$(\gamma h)$	$\beta h$									
	-1.3863		-0.6931		0.001		0.6931		1.3863	
$\downarrow$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$
-1.6094	510.968	2.708	436.812	2.868	393.518	3.074	370.304	3.325	361.753	3.624
-1.0986	374.284	2.708	319.965	2.868	288.251	3.074	271.247	3.325	264.984	3.624
0.0001	205.588	2.708	175.751	2.868	158.331	3.074	148.991	3.325	145.551	3.624
1.0986	124.763	2.708	106.656	2.868	96.0849	3.074	90.4168	3.325	88.329	3.624
1.6094	102.198	2.708	87.3658	2.868	78.7065	3.074	74.0636	3.325	72.3533	3.624

Tablo 4’de düz blok durumunda çeşitli rijitlik parametresi ( $\beta h$ ) ve yoğunluk parametresi ( $\gamma h$ ) değerleri için FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki ilk ayrılma yükünün ve ilk ayrılma uzaklığının değişimi verilmektedir. Tablo incelendiği zaman görülebilir ki, rijitlik parametresi ( $\beta h$ ) değeri arttıkça yani FD tabakanın rijitliği üst yüzeyinden alt yüzeyine doğru giderek azaldıkça FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki ilk ayrılma yükü azalırken ilk ayrılma uzaklığı artmaktadır. Tablodan çıkarılabilecek bir diğer sonuç ise, yoğunluk parametresi ( $\gamma h$ ) değeri arttıkça yani FD tabakanın yoğunluğu üst yüzeyinden alt yüzeyine doğru azaldıkça dolayısıyla tabaka ağırlığı azaldıkça FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki ilk ayrılma yükü azalırken ilk ayrılma uzaklığı değişmemektedir. Düz blok durumunda blok genişliğine, rijitlik parametresine, yoğunluk parametresine ve elastik yarım düzlemin kayma modülüne çeşitli değerler verilerek; ele alınan problem birtakım özel hallere dönüştürülmüş ve bu özel hallere ilişkin elde edilen sonuçlar literatürde daha önce yapılmış olan çalışmalarla karşılaştırılarak doğrulanmıştır (Tablo 5-7). Tablo 5’de düz blok durumunda,  $\beta h \rightarrow 0$  ve  $\gamma h \rightarrow 0$  için bulunan FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki ilk ayrılma yüklerinin ve ilk ayrılma uzaklıklarının Çakıroğlu (1979) ile karşılaştırılması verilmektedir. Tablo incelendiğinde görülebilir ki, rijitlik parametresine ve yoğunluk parametresine sıfıra çok yakın değerler verildiğinde FD tabaka homojen tabaka haline dönüşmekte ve elde edilen sonuçlar Çakıroğlu (1979) ile oldukça uyumlu çıkmaktadır. Tablo 6-7’de düz blok durumunda,  $\beta h \rightarrow 0$  ve  $\gamma h \rightarrow 0$  için bulunan FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki ilk ayrılma yüklerinin ve ilk ayrılma uzaklıklarının Civelek ve Erdoğan (1976), Civelek vd. (1978) ve Geçit (1980) ile karşılaştırılması verilmektedir. Burada, rijitlik parametresine ve yoğunluk parametresine sıfıra çok yakın değerler verilerek FD tabaka homojen tabaka haline dönüştürülmüş, elastik yarım düzlemin kayma modülüne çok büyük değer verilerek

FD tabakanın rijit temel üzerine oturması durumu elde edilmiştir. Ayrıca, blok genişliğine ( $a/h$ ) sıfıra çok yakın değer verilerek tekil yükü yüklenmiş tabaka durumu elde edilmiştir. Tablo 6-7'deki sonuçlar incelendiğinde; bu özel haller için elde edilen ilk ayrılma yüklerinin ve uzaklıklarının Civelek ve Erdoğan (1976), Civelek vd. (1978) ve Geçit (1980) ile oldukça uyumlu olduğu görülmektedir.

Tablo 5. Düz blok durumunda,  $\beta h \rightarrow 0$  ve  $\gamma h \rightarrow 0$  için bulunan FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki ilk ayrılma yüklerinin ve ilk ayrılma uzaklıklarının Çakıroğlu (1979) ile karşılaştırılması ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $\beta h=0.001$ ,  $\gamma h=0.0001$ )

$\frac{(1+\kappa_2)\mu_1}{(1+\kappa_1)\mu_2}$ ↓	$a/h=0.5$				$a/h=1$			
	Bu Çalışma		Çakıroğlu (1979)		Bu Çalışma		Çakıroğlu (1979)	
	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$
0.5	120.399	2.584	120.396	2.584	168.037	3.029	168.017	3.029
1	158.331	3.074	158.305	3.074	209.809	3.506	209.738	3.506
3	206.705	4.211	206.577	4.212	255.633	4.629	255.514	4.630

$\frac{(1+\kappa_2)\mu_1}{(1+\kappa_1)\mu_2}$ ↓	$a/h=2$				$a/h=4$			
	Bu Çalışma		Çakıroğlu (1979)		Bu Çalışma		Çakıroğlu (1979)	
	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$
0.5	273.514	4.044	273.489	4.044	439.034	6.060	438.900	6.060
1	325.987	4.532	325.881	4.532	502.989	6.556	502.854	6.555
3	370.666	5.678	370.147	5.679	545.567	7.718	546.273	7.718

$\frac{(1+\kappa_2)\mu_1}{(1+\kappa_1)\mu_2}$ ↓	$a/h=10^{-10}$			
	Bu Çalışma		Çakıroğlu (1979)	
	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$
1/7	60.0579	1.944	60.078	1.944
1	139.013	2.903	139.03	2.903
5/3	164.899	3.394	164.900	3.394
7	230.161	5.319	230.022	5.320

Tablo 6. Düz blok durumunda,  $\beta h \rightarrow 0$  ve  $\gamma h \rightarrow 0$  için bulunan FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki ilk ayrılma yüklerinin ve ilk ayrılma uzaklıklarının Civelek ve Erdoğan (1976) ve Civelek vd. (1978) ile karşılaştırılması ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $\beta h=0.001$ ,  $\gamma h=0.0001$ )

$a/h$ ↓	$\mu_2 \rightarrow \infty$							
	Bu Çalışma		Civelek vd. (1978)		Bu Çalışma		Civelek ve Erdoğan (1976)	
	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$
0.5	58.8677	2.00	58.88	1.96				
1	92.3704	2.46	92.40	2.42				
2	169.517	3.46	169.57	3.42				
$\rightarrow 0$					44.1247	1.77	44.13924	1.77055

Tablo 7. Düz blok durumunda,  $\beta h \rightarrow 0$  ve  $\gamma h \rightarrow 0$  için bulunan FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki ilk ayrılma yüklerinin ve ilk ayrılma uzaklıklarının Geçit (1980) ile karşılaştırılması ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $\beta h=0.001$ ,  $\gamma h=0.0001$ )

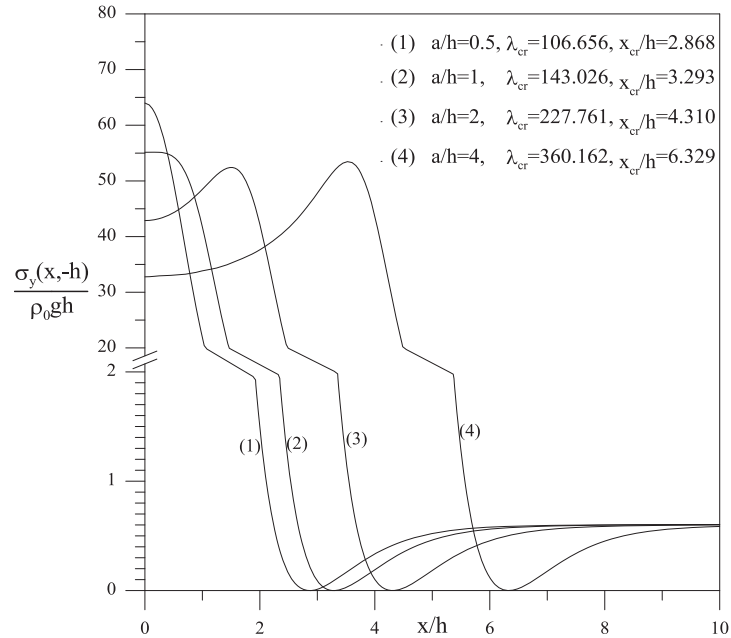
$\frac{(1+\kappa_2)\mu_1}{(1+\kappa_1)\mu_2}$ ↓	a/h $\rightarrow 0$			
	Bu Çalışma		Geçit (1980)	
	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$
0.1	55.0723	1.89	56.42	1.86
1	139.015	2.90	140.39	2.94
10	249.953	5.96	250.67	5.87

Şekil 22-26'da düz blok durumunda, FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki ilk ayrılma yükü ve bu yükten daha küçük yük değerleri için FD tabaka ile elastik yarım düzlemin temas yüzeyi boyunca ortaya çıkan boyutsuz temas gerilme yayılışları çeşitli boyutsuz büyüklükler için sunulmaktadır. Şekillerden de görülebileceği gibi sürekli temas durumunda iki bölge ortaya çıkmaktadır. Bunlardan birincisi dış yükün etkisinin büyük olduğu ( $x < x_{cr}$ ) temas bölgesi, bir diğeri ise dış yükün etkisinin azalarak kaybolduğu ( $x > x_{cr}$ ) temas bölgesidir. Dış yükün etkisinin görüldüğü temas bölgesinde ( $x < x_{cr}$ ) temas gerilmeleri; maksimum değerini rijit bloğun kenarlarında almakta ve bu noktalar temas gerilmelerinin tepe noktalarını oluşturmaktadır. Dış yükün etkisinin kaybolduğu temas bölgesinde ( $x > x_{cr}$ ) yalnızca FD tabakanın kütle kuvvetinin etkisi ortaya çıkmakta ve bu bölgedeki temas gerilmeleri kütle kuvvetlerine eşdeğer olmaktadır.

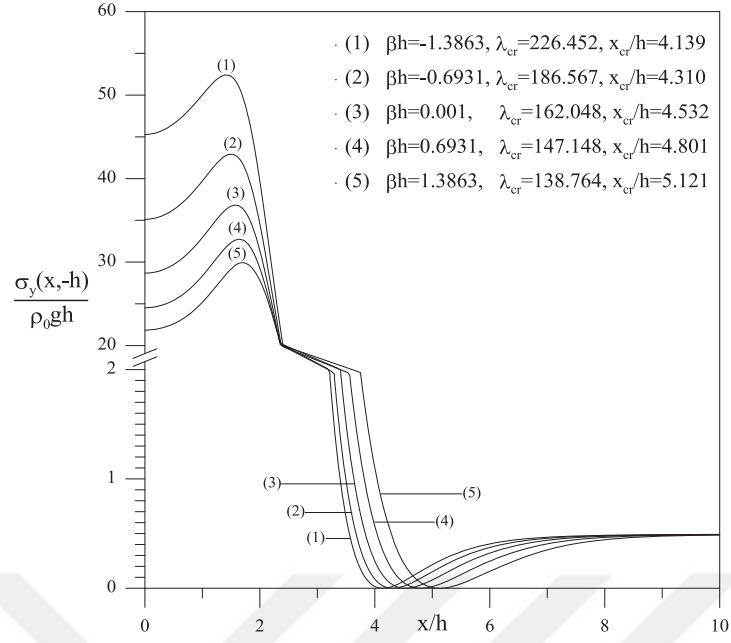
Şekil 22'de düz blok durumunda, çeşitli blok genişlikleri için FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki boyutsuz temas gerilme yayılışları verilmektedir. Şekilden görülebileceği gibi blok genişliği arttıkça FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki ilk ayrılma yükü ve uzaklığı artmakta, dolayısıyla ayrılma daha zor gerçekleşmektedir. Şekil 23'de düz blok durumunda, çeşitli rijitlik parametresi ( $\beta h$ ) değerleri için FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki boyutsuz temas gerilme yayılışları görülmektedir. Şekilden anlaşılacağı üzere rijitlik parametresi değeri arttıkça FD tabakanın elastik yarım düzleme oturduğu temas yüzeyi giderek yumuşamaktadır. Bunun sonucu olarak ilk ayrılma yükü azalmakta yani ayrılma daha kolay gerçekleşmekte, ilk ayrılma uzaklığı ise artarak simetri ekseninden uzaklaşmaktadır. Şekil 24'de düz blok durumunda, çeşitli yoğunluk parametresi ( $\gamma h$ ) değerleri için FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki boyutsuz temas gerilme yayılışları görülmektedir. Şekilden de görülebileceği gibi yoğunluk

parametresi değeri arttıkça FD tabakanın yoğunluğu üst yüzeyinden alt yüzeyine doğru giderek azalmakta dolayısıyla FD tabaka hafifleşmekte, bunun sonucu olarak da FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki ilk ayrılma yükü azalırken ilk ayrılma uzaklığının yeri değişmemektedir. Şekil 25’de düz blok durumunda, çeşitli  $\mu_{-h}/\mu_2$  değerleri için FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki boyutsuz temas gerilme yayılışları verilmektedir.  $\mu_{-h}/\mu_2$  oranının artması FD tabakanın alt yüzeyinin kayma modülünün elastik yarım düzlemin kayma modülüne oranının artması anlamına gelmekte, bu durum FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki ilk ayrılma yükünün ve uzaklığının artmasına neden olmaktadır.

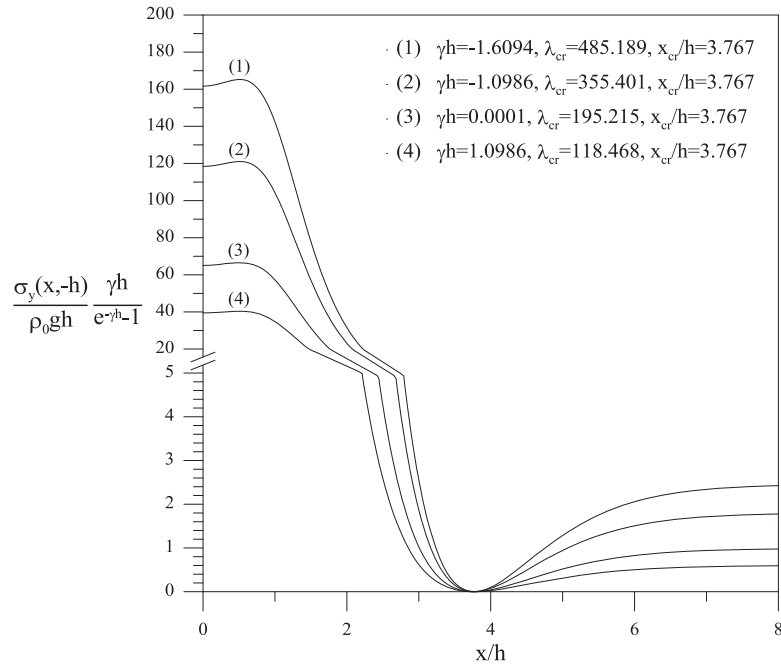
Şekil 26’da düz blok durumunda, ilk ayrılma yükü ve bu yükten daha küçük bir yük için FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki boyutsuz temas gerilme yayılışları verilmektedir. Şekil incelendiğinde, ilk ayrılma yükü için temas yüzeyinde meydana gelen gerilmelerin ilk ayrılma uzaklığının olduğu noktada sıfır olduğu görülmektedir. Bu durum, bu yükten daha büyük bir yük değerinde temas gerilmesinin işaret değiştireceğini dolayısıyla da temas yüzeyinde ayrılmanın meydana geleceğini göstermektedir. Yine şekilden kolaylıkla görülebilir ki; ilk ayrılma yükünden küçük yük değerleri için temas yüzeyinde meydana gelen gerilmeler ayrılma sınırından uzaklaşmakta, dolayısıyla ilk ayrılma yükünden küçük yük değerleri için sürekli temas hali korunmaktadır.



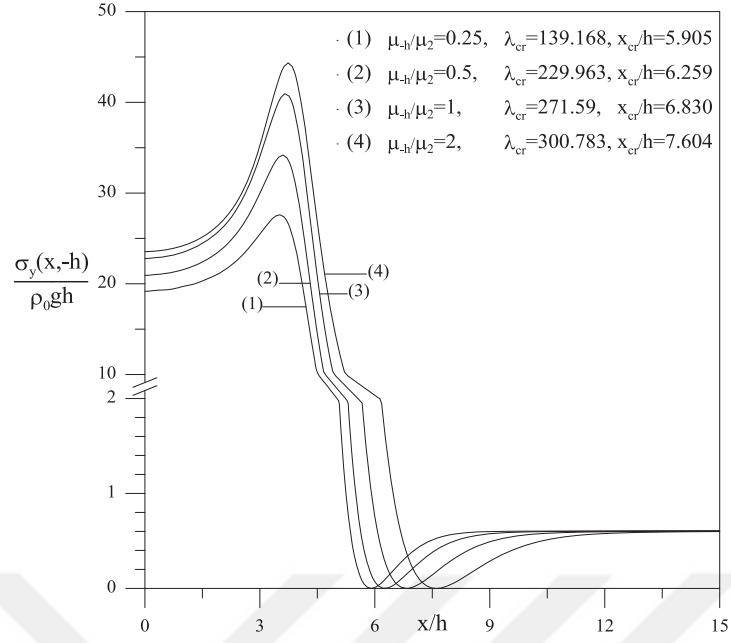
Şekil 22. Düz blok durumunda çeşitli blok genişlikleri için FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki boyutsuz temas gerilme yayılışları ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $\beta h=-0.6931$ ,  $\gamma h=1.0986$ ,  $\mu_{-h}/\mu_2=1$ )



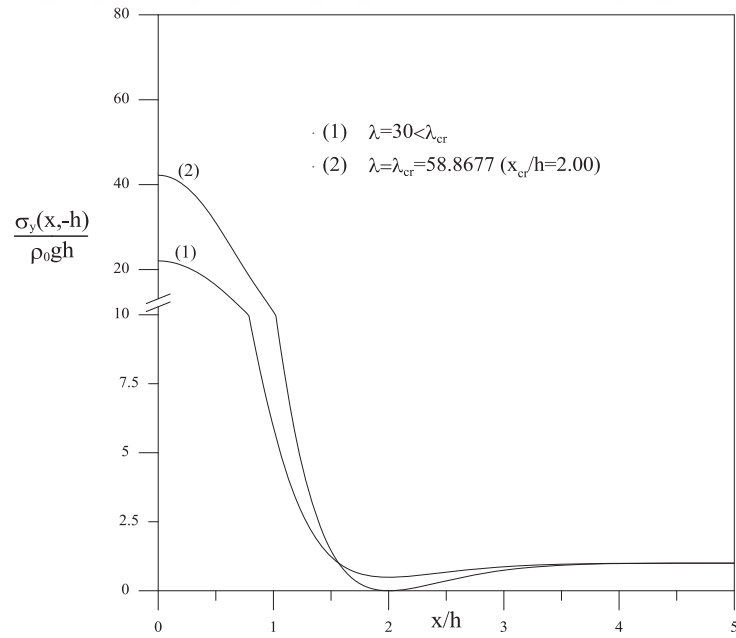
Şekil 23. Düz blok durumunda çeşitli rijitlik parametresi ( $\beta h$ ) değerleri için FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki boyutsuz temas gerilme yayılışları ( $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $a/h = 2$ ,  $\gamma h = 1.6094$ ,  $\mu_{-h}/\mu_2 = 1$ )



Şekil 24. Düz blok durumunda çeşitli yoğunluk parametresi ( $\gamma h$ ) değerleri için FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki boyutsuz temas gerilme yayılışları ( $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $a/h = 1$ ,  $\beta h = 0.6931$ ,  $\mu_{-h}/\mu_2 = 1$ )



Şekil 25. Düz blok durumunda çeşitli  $\mu_1/\mu_2$  değerleri için FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki boyutsuz temas gerilme yayılışları ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $a/h=4$ ,  $\gamma h=1.0986$ ,  $\beta h=0.6931$ )



Şekil 26. Düz blok durumunda ilk ayrılma yükü ve bu yükten küçük bir yük için FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki boyutsuz temas gerilme yayılışları ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $a/h=0.5$ ,  $\gamma h=0.0001$ ,  $\beta h=0.001$ )

Tablo 8’de dairesel blok durumunda, çeşitli blok yarıçapı ve yük oranı değerleri için FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki ilk ayrılma yükünün ve ilk ayrılma uzaklığının değişimi sunulmaktadır. Tablodan da görülebileceği gibi; blok yarıçapı arttıkça FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki ilk ayrılma yükü ve uzaklığı artmakta, dolayısıyla da ayrılma daha zor gerçekleşmektedir. Tablodan çıkarılabilecek bir diğer sonuç ise, yük oranının artışı ilk ayrılma yükünün azalmasına ilk ayrılma uzaklığının artmasına neden olmaktadır. Tablo 9’da dairesel blok durumunda, çeşitli rijitlik parametresi ( $\beta h$ ) ve yoğunluk parametresi ( $\gamma h$ ) değerleri için FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki ilk ayrılma yükünün ve ilk ayrılma uzaklığının değişimi verilmektedir. Rijitlik parametresi ve yoğunluk parametresi değerleri arttıkça FD tabakanın rijitliği ve yoğunluğu üst yüzeyinden alt yüzeyine doğru azalmaktadır. Tablo incelendiğinde, rijitlik parametresi değerinin artışının FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki ilk ayrılma yükünün azalmasına ilk ayrılma uzaklığının ise artmasına yani simetri ekseninden uzaklaşmasına neden olduğu görülmektedir. Diğer yandan, yoğunluk parametresi artışının ilk ayrılma uzaklığına etkisinin olmadığı göze çarparken, ilk ayrılma yükünde azalmalara neden olduğu görülmektedir. Yoğunluk parametresinin artması FD tabakanın hafifleşmesine neden olduğu düşünülürse, bunun beklenen bir sonuç olacağı açıktır.

Şekil 27-30’da dairesel blok durumunda FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki ilk ayrılma yükü için FD tabaka ile elastik yarım düzlemin temas yüzeyi boyunca ortaya çıkan boyutsuz temas gerilme yayılışları çeşitli boyutsuz büyüklükler için verilmektedir. Şekillerden de görülebileceği gibi blok profilinin düz olması durumundakine benzer olarak blok profilinin dairesel olması durumunda da iki bölge ortaya çıkmaktadır. Bunlardan birincisi dış yükün etkisinin büyük olduğu ( $x < x_{cr}$ ) temas bölgesi, bir diğeri ise dış yükün etkisinin azalarak kaybolduğu ( $x > x_{cr}$ ) temas bölgesidir. Dış yükün etkisinin görüldüğü temas bölgesindeki ( $x < x_{cr}$ ) gerilmeler; maksimum değerini simetri ekseninde almakta ve bu noktalar temas gerilmelerinin tepe noktalarını oluşturmaktadır. Dış yükün etkisinin kaybolduğu temas bölgesinde ( $x > x_{cr}$ ) yalnızca FD tabakanın kütle kuvvetinin etkisi ortaya çıkmakta ve bu bölgedeki temas gerilmeleri kütle kuvvetlerine eşdeğer olmaktadır.

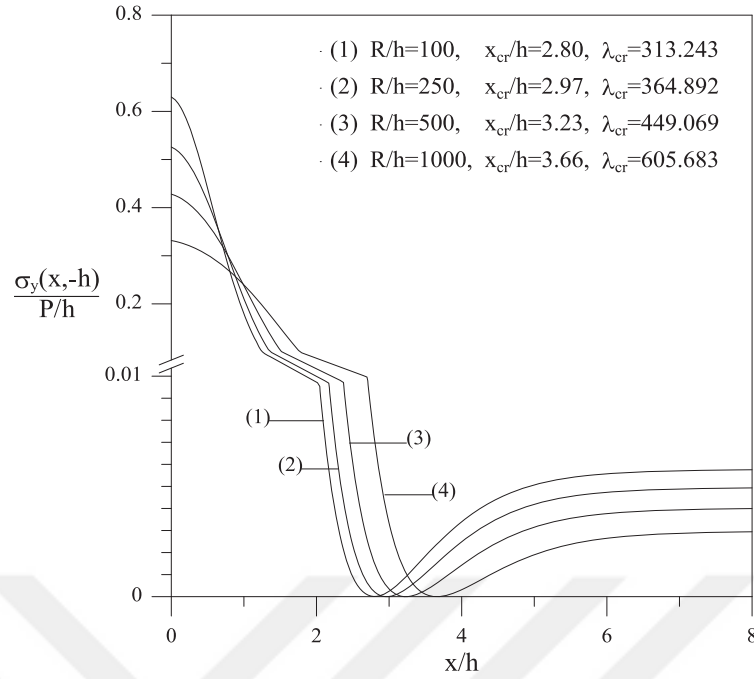
Tablo 8. Dairesel blok durumunda çeşitli blok yarıçapı ve yük oranı değerleri için FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki ilk ayrılma yükünün ve ilk ayrılma uzaklığının değişimi ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $\beta h=0.6931$ ,  $\gamma h=1.0986$ ,  $\mu_h/\mu_2=1$ )

$\mu_0/(P/h)$ ↓	R/h							
	100		250		500		1000	
	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$
10	279.849	5.258	519.639	7.052	856.019	9.084	1443.08	11.947
100	97.3905	3.369	131.058	3.790	184.742	4.375	279.849	5.258
250	85.5799	3.212	97.3905	3.369	119.765	3.654	163.855	4.157
500	82.4545	3.172	87.3408	3.235	97.3905	3.369	119.765	3.654
1000	81.141	3.158	83.1803	3.181	87.3408	3.235	97.3905	3.369

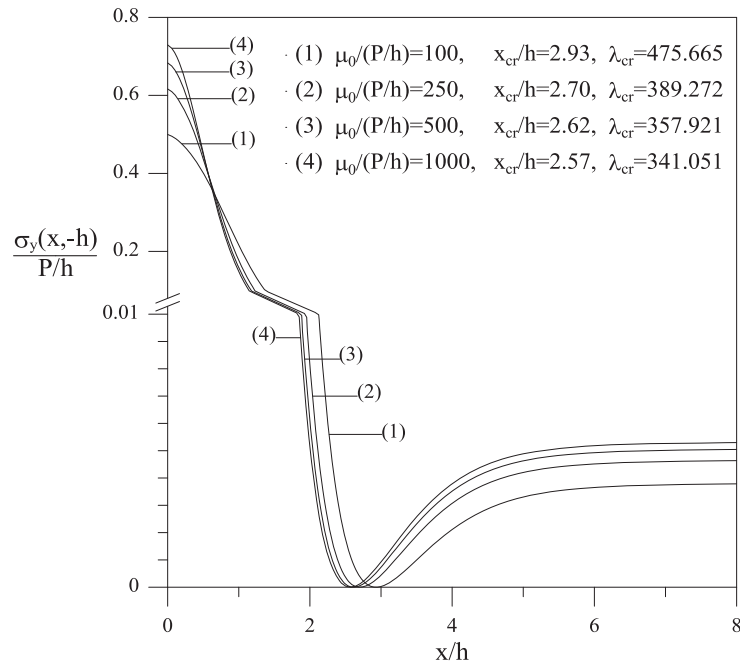
Tablo 9. Dairesel blok durumunda çeşitli rijitlik parametresi ( $\beta h$ ) ve yoğunluk parametresi ( $\gamma h$ ) değerleri için FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki ilk ayrılma yükünün ve ilk ayrılma uzaklığının değişimi ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $R/h=10$ ,  $\mu_0/(P/h)=200$ ,  $\mu_h/\mu_2=1$ )

$\gamma h$ ↓	$\beta h$									
	-2.3026		-1.3863		0.001		0.6931		1.3863	
	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$
-1.6094	594.010	2.38	442.004	2.53	347.798	2.90	329.945	3.15	324.501	3.45
-1.0986	435.112	2.38	323.767	2.53	254.762	2.90	241.684	3.15	237.697	3.45
0.0001	238.999	2.38	177.84	2.53	139.936	2.90	132.753	3.15	130.563	3.45
1.0986	145.039	2.38	107.924	2.53	84.9217	2.90	80.5624	3.15	79.2332	3.45
1.6094	118.806	2.38	88.4042	2.53	69.5623	2.90	65.9915	3.15	64.9027	3.45

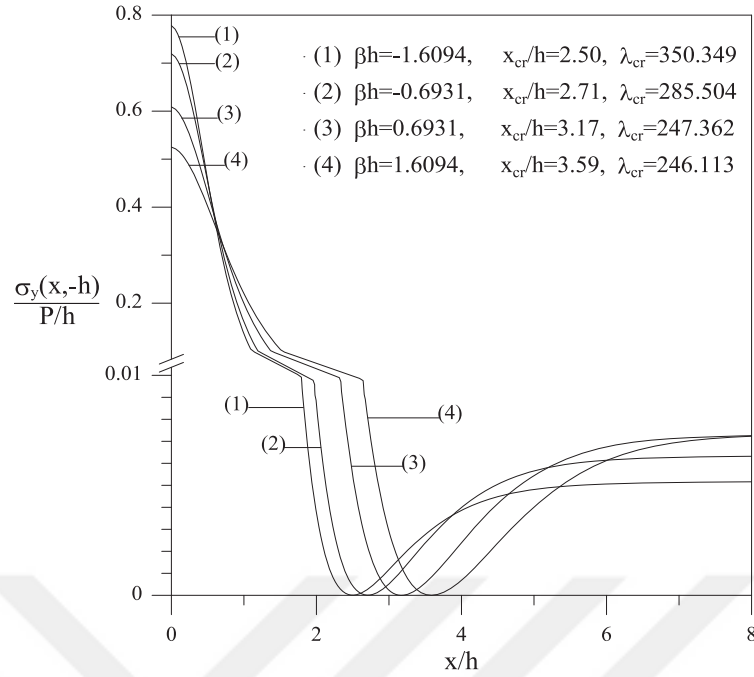




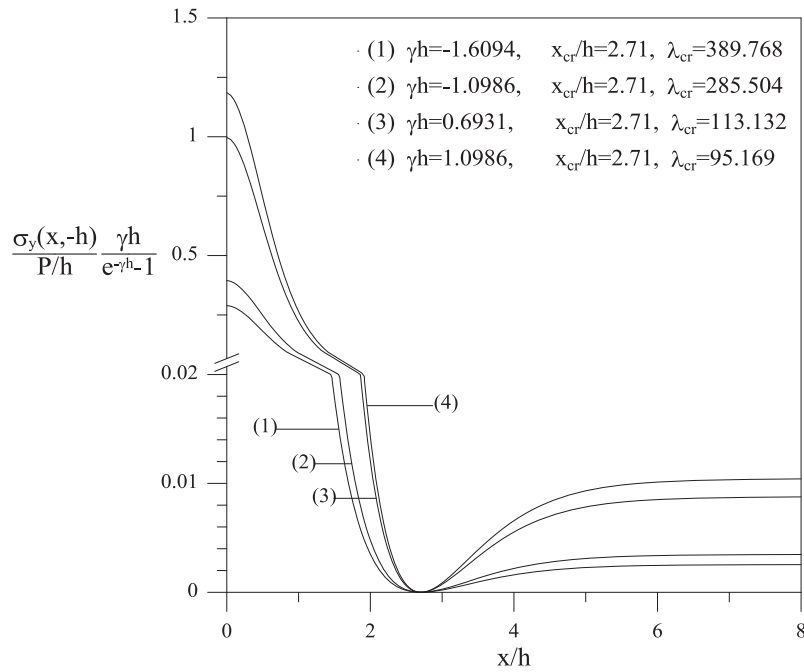
Şekil 27. Dairesel blok durumunda çeşitli blok yarıçapı değerleri için FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki boyutsuz temas gerilme yayılışları ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $\mu_0/(P/h)=100$ ,  $\beta h=-0.6931$ ,  $\gamma h=-1.0986$ ,  $\mu_{-h}/\mu_2=1$ )



Şekil 28. Dairesel blok durumunda yük oranının çeşitli değerleri için FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki boyutsuz temas gerilme yayılışları ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $R/h=500$ ,  $\beta h=-1.3863$ ,  $\gamma h=-1.0986$ ,  $\mu_{-h}/\mu_2=1$ )



Şekil 29. Dairesel blok durumunda çeşitli rijitlik parametresi değerleri için FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki boyutsuz temas gerilme yayılışları ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $R/h=100$ ,  $\mu_0/(P/h)=500$ ,  $\gamma h=-1.0986$ ,  $\mu_h/\mu_2=1$ )



Şekil 30. Dairesel blok durumunda çeşitli yoğunluk parametresi değerleri için FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki boyutsuz temas gerilme yayılışları ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $R/h=100$ ,  $\mu_0/(P/h)=500$ ,  $\beta h=-0.6931$ ,  $\mu_h/\mu_2=1$ )

### 3.3. Problemin Süreksiz Temasına İlişkin Bulgular

FD tabaka ile elastik yarım düzlemin ara yüzeyinde çekme gerilemesinin karşılanamadığı kabul edildiğinden, dış yükün belli bir değeri (ilk ayrılma yükü) aşması durumunda, FD tabaka ile elastik yarım düzlemin ara yüzeyinde sonlu bir bölgede ayrılma meydana gelmektedir. Bu durumda problem süreksiz temas problemi olarak adlandırılmakta olup, problemin süreksiz temas haline ilişkin çözümünden elde edilen bulgular aşağıda verilmektedir.

Tablo 10'da düz blok durumunda, çeşitli blok genişliği (a/h) ve yük faktörü ( $\lambda$ ) değerleri için ayrılmanın başlangıç (b/h) ve bitiş (c/h) noktalarının değişimi verilmektedir. Tablodan da görülebileceği gibi, aynı yük değeri için blok genişliği arttıkça ayrılmanın başlangıç noktasını tanımlayan (b/h) değerleri büyümekte ve dolayısıyla da ayrılmanın başlangıç noktası simetri ekseninden uzaklaşmaktadır. Ancak, ayrılmanın bitiş noktasını tanımlayan (c/h) değerlerinin artış ya da azalış eğilimi blok genişliğine bağlı olarak değişkenlik göstermektedir. Tablodan çıkarılabilecek bir başka sonuç ise; yük faktörü arttıkça ayrılmanın başlangıç noktasını tanımlayan (b/h) değerinin azalması, ayrılmanın bitiş noktasını tanımlayan (c/h) değerinin ise artmasıdır. Yani yük faktöründeki artış; ayrılmanın başladığı noktanın simetri eksenine yaklaşmasına neden olurken, ayrılmanın sona erdiği noktanın simetri ekseninden uzaklaşmasına neden olmaktadır. Ayrıca, tablo incelendiğinde görülebilir ki; yük faktörünün artışı ayrılma bölgesinin uzunluğunun ((c-b)/h) artmasına, blok genişliğinin artışı ise ayrılma bölgesinin uzunluğunun azalmasına neden olmaktadır.

Tablo 10. Düz blok durumunda çeşitli blok genişliği (a/h) ve yük faktörü ( $\lambda$ ) değerleri için ayrılma başlangıç (b/h) ve bitiş (c/h) noktalarının değişimi ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $\beta h=1.3863$ ,  $\gamma h=1.6094$ ,  $\mu_{-h}/\mu_2=1$ )

$\lambda$	(a/h)							
	0.5		1		2		4	
	b/h	c/h	b/h	c/h	b/h	c/h	b/h	c/h
250	2.3780	7.8490	2.9197	7.4592	4.1598	7.2585	6.5511	8.0735
275	2.3457	8.2047	2.8813	7.7877	4.1006	7.5602	6.4365	8.3734
300	2.3186	8.5522	2.8493	8.0886	4.0539	7.8340	6.3522	8.6392
325	2.2971	8.8319	2.8218	8.3815	4.0147	8.0937	6.2856	8.8832
350	2.2765	9.1564	2.7978	8.6455	3.9791	8.3478	6.2308	9.1108
400	2.2445	9.6776	2.7570	9.1524	3.9234	8.8003	6.1452	9.5255
450	2.2165	10.1830	2.7250	9.6346	3.8807	9.2114	6.0807	9.8990
500	2.1938	10.6543	2.6996	10.0501	3.8432	9.6083	6.0297	10.2461
550	2.1736	11.0619	2.6766	10.4342	3.8118	9.9688	5.9865	10.5745
600	2.1558	11.4695	2.6556	10.8260	3.7877	10.2958	5.9513	10.8731

Tablo 11’de düz blok durumunda, çeşitli rijitlik parametresi ( $\beta h$ ) ve yük faktörü ( $\lambda$ ) değerleri için ayrılmanın başlangıç (b/h) ve bitiş (c/h) noktalarının değişimi sunulmaktadır. Tablodan da görülebileceği gibi, aynı yük değeri için rijitlik parametresi değeri arttıkça yani FD tabakanın rijitliği üst yüzeyinden alt yüzeyine doğru giderek azaldıkça, ayrılmanın başlangıç noktasını tanımlayan (b/h) ve bitiş noktasını tanımlayan (c/h) değerleri artmaktadır. Yine tablodan, yük faktörü artışının ayrılmanın başlangıç ve bitiş noktası değerlerinin artmasına neden olduğu açıkça görülmektedir. Diğer yandan, rijitlik parametresi değeri arttıkça ayrılma bölgesinin uzunluğu ((c-b)/h) da artmakta olup bu beklenen bir sonuçtur. Zira; rijitlik parametresi değerinin artışının, FD tabakanın rijitliğinin üst yüzeyinden alt yüzeyine doğru azalmasına neden olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla da rijitlik parametresi değeri arttıkça FD tabakanın elastik yarım düzleme oturduğu yüzey (ayrılma yüzeyi) daha yumuşak hale gelmektedir. Bu da, ayrılma bölgesinin uzunluğunun büyümesini kaçınılmaz hale getirmektedir.

Tablo 11. Düz blok durumunda çeşitli rijitlik parametresi ( $\beta h$ ) ve yük faktörü ( $\lambda$ ) değerleri için ayrılma başlangıç (b/h) ve bitiş (c/h) noktalarının değişimi ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $a/h=1$ ,  $\gamma h=1.6094$ ,  $\mu_h/\mu_2=1$ )

$\lambda$	$(\beta h)$							
	-1.3863		0.001		0.6931		1.3863	
	b/h	c/h	b/h	c/h	b/h	c/h	b/h	c/h
150	2.8370	3.5196	2.8388	4.7547	2.9887	5.3064	3.2051	5.8412
175	2.6556	3.9222	2.7365	5.1598	2.8884	5.7432	3.0999	6.3137
200	2.5574	4.2367	2.6650	5.5165	2.8167	6.1293	3.0236	6.7340
225	2.4902	4.5104	2.6111	5.8390	2.7616	6.4816	2.9676	7.1047
250	2.4395	4.7606	2.5685	6.1353	2.7189	6.7998	2.9197	7.4592
300	2.3681	5.1958	2.5043	6.6683	2.6529	7.3787	2.8493	8.0886
350	2.3178	5.5827	2.4575	7.1417	2.6039	7.9002	2.7978	8.6455
400	2.2810	5.9275	2.4214	7.5708	2.5663	8.3648	2.7570	9.1524
450	2.2484	6.2604	2.3924	7.9642	2.5353	8.8083	2.7250	9.6346
500	2.2258	6.5399	2.3684	8.3289	2.5110	9.1924	2.6996	10.0501

Tablo 12’de düz blok durumunda, çeşitli yoğunluk parametresi ( $\gamma h$ ) ve yük faktörü ( $\lambda$ ) değerleri için ayrılmanın başlangıç (b/h) ve bitiş (c/h) noktalarının değişimi görülmektedir. Tablo incelendiğinde, aynı yük değeri için yoğunluk parametresi değeri artışının sonucu olarak ayrılmanın başlangıç noktasının simetri eksenine yaklaştığı, ayrılmanın sona erdiği noktanın ise simetri ekseninden uzaklaştığı kolaylıkla görülebilir. Ayrıca, ayrılma bölgesinin uzunluğu ((c-b)/h) da yoğunluk parametresi değerinin artması nedeniyle büyümekte olup, beklenen bir sonuç olarak ortaya çıkmaktadır. Zira, yoğunluk parametresi değeri arttıkça FD tabakanın yoğunluğu üst yüzeyden alt yüzeye doğru

azalmakta ve FD tabaka hafifleşmektedir. Bunun tam tersi de geçerlidir. Yoğunluk parametresi değeri azaldıkça (eksi bölgede sayısal değeri mutlak değerce arttıkça) FD tabakanın yoğunluğu üst yüzeyinden alt yüzeyine doğru giderek artmaktadır. Yani, yoğunluk parametresinin azalması FD tabakanın ağırlaşmasına neden olmakta, bunun sonucu olarak da ayrılma bölgesinin uzunluğu azalmaktadır.

Tablo 12. Düz blok durumunda çeşitli yoğunluk parametresi ( $\gamma h$ ) ve yük faktörü ( $\lambda$ ) değerleri için ayrılma başlangıç (b/h) ve bitiş (c/h) noktalarının değişimi ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $a/h=0.5$ ,  $\beta h=1.3863$ ,  $\mu_{-h}/\mu_2=1$ )

$\lambda$ ↓	$(\gamma h)$							
	-1.0986		0.0001		1.0986		1.6094	
	b/h	c/h	b/h	c/h	b/h	c/h	b/h	c/h
275	3.3427	3.9590	2.6436	5.8746	2.4117	7.4998	2.3457	8.2047
300	3.1351	4.3054	2.5937	6.1436	2.3833	7.7893	2.3186	8.5522
325	3.0136	4.5686	2.5532	6.3906	2.3550	8.0946	2.2971	8.8319
350	2.9259	4.7973	2.5188	6.6251	2.3330	8.3563	2.2765	9.1564
375	2.8574	5.0044	2.4864	6.8597	2.3122	8.6288	2.2601	9.3921
400	2.8008	5.1981	2.4595	7.0756	2.2951	8.8606	2.2445	9.6776
425	2.7535	5.3777	2.4372	7.2672	2.2774	9.1413	2.2304	9.8975
450	2.7122	5.5505	2.4141	7.4773	2.2643	9.3272	2.2165	10.1830
475	2.6768	5.7124	2.3956	7.6604	2.2515	9.5618	2.2061	10.3815
500	2.6444	5.8706	2.3797	7.8308	2.2381	9.7757	2.1938	10.6543

Tablo 13-15’de daha önce sürekli temas durumunda da belirtildiği gibi, düz blok durumunda blok genişliğine, rijitlik parametresine, yoğunluk parametresine ve elastik yarım düzlemin kayma modülüne çeşitli boyutsuz değerler verilerek; ele alınan problem çeşitli özel hallere dönüştürülmüş ve bu özel hallere ilişkin elde edilen ayrılmanın başlangıç ve bitiş noktaları için elde edilen sonuçlar literatürde daha önce yapılmış olan çalışmalarla karşılaştırılmıştır. Tablo 13’de düz blok durumunda,  $\beta h \rightarrow 0$  ve  $\gamma h \rightarrow 0$  için bulunan ayrılmanın başlangıç noktasını tanımlayan (b/h) ve bitiş noktasını tanımlayan (c/h) değerlerinin Çakıroğlu (1979) ile karşılaştırılması verilmektedir. Rijitlik parametresi ve yoğunluk parametresi değerleri sıfıra yaklaştırıldığında FD tabaka homojen tabaka haline dönüşmekte ve elde edilen sonuçlar Çakıroğlu (1979) ile iyi bir uyum göstermektedir. Tablo 14-15’de düz blok durumunda,  $\beta h \rightarrow 0$  ve  $\gamma h \rightarrow 0$  için bulunan ayrılmanın başlangıç ve bitiş noktası değerlerinin Civelek ve Erdoğan (1976), Civelek vd. (1978) ve Geçit (1980) ile karşılaştırılması verilmektedir. Rijitlik ve yoğunluk parametresi değerleri sıfıra yaklaştırılarak FD tabaka homojen tabaka haline dönüştürülmüş olup, elastik yarım düzlemin kayma modülü de sonsuza yaklaştırılarak rijit temel gibi davranması sağlanmıştır. Ayrıca, blok genişliği de sıfıra yaklaştırılarak tekil yük durumu elde

edilmiştir. Bu özel hallere ilişkin elde edilen ayrılma başlangıç ve bitiş noktası değerleri incelendiğinde, sonuçların Civelek ve Erdoğan (1976), Civelek vd. (1978) ve Geçit (1980) çalışmalarında elde edilen bulgular ile çok yakın olduğu söz konusu tablolardan da görülmektedir.

Tablo 13. Düz blok durumunda,  $\beta h \rightarrow 0$  ve  $\gamma h \rightarrow 0$  için bulunan ayrılma başlangıç (b/h) ve bitiş (c/h) noktalarının Çakıroğlu (1979) ile karşılaştırılması ( $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $\beta h = 0.001$ ,  $\gamma h = 0.0001$ )

a/h ↓	$\frac{(1+\kappa_2)\mu_1}{(1+\kappa_1)\mu_2} = \frac{1}{2}$				$\frac{(1+\kappa_2)\mu_1}{(1+\kappa_1)\mu_2} = 1$			
	Bu Çalışma		Çakıroğlu (1979)		Bu Çalışma		Çakıroğlu (1979)	
	b/h	c/h	b/h	c/h	b/h	c/h	b/h	c/h
0.5	2.086854023	3.44816996	2.1	3.4	2.483789525	4.079108317	2.5	4
1	2.481708183	4.058707667	2.5	4	2.935347658	4.45550538	2.95	4.5
2	3.479299282	5.136189859	3.5	5	3.987138452	5.410700991	4	5.4
4	5.47665191	7.223795963	5.5	7.1	5.985206738	7.503585144	6	7.5

a/h ↓	$\frac{(1+\kappa_2)\mu_1}{(1+\kappa_1)\mu_2} = 2$				$\frac{(1+\kappa_2)\mu_1}{(1+\kappa_1)\mu_2} = 3$			
	Bu Çalışma		Çakıroğlu (1979)		Bu Çalışma		Çakıroğlu (1979)	
	b/h	c/h	b/h	c/h	b/h	c/h	b/h	c/h
0.5	3.203086655	4.514322245	3.2	4.5	3.548527985	5.204433151	3.5	5.3
1	3.604132109	4.980494578	3.6	5	4.031735578	5.481719479	4	5.5
2	4.605477782	6.104019647	4.6	6.1	5.041988727	6.610189731	5	6.7
4	6.703397641	7.997860986	6.7	8	7.049524689	8.721265235	7	8.8

Tablo 14. Düz blok durumunda,  $\beta h \rightarrow 0$  ve  $\gamma h \rightarrow 0$  için bulunan ayrılma başlangıç (b/h) ve bitiş (c/h) noktalarının Civelek vd. (1978) ve Civelek ve Erdoğan (1976) ile karşılaştırılması ( $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $\beta h = 0.001$ ,  $\gamma h = 0.0001$ )

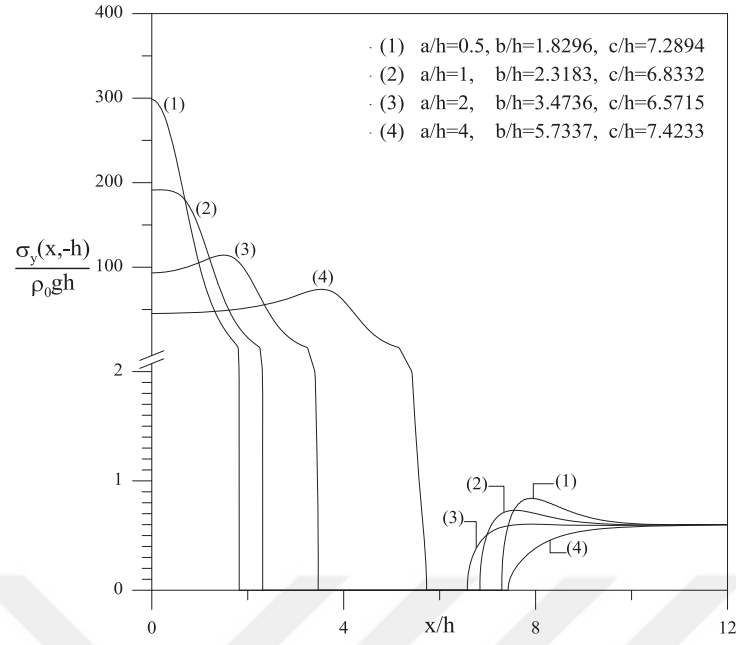
a/h ↓	$\mu_2 \rightarrow \infty$					
	Bu Çalışma		Civelek vd. (1978)		Civelek ve Erdoğan (1976)	
	b/h	c/h	b/h	c/h	b/h	c/h
0.5	1.599971778	2.71205801	1.58	2.7		
1	1.999934886	3.394932464	2	3.38		
2	2.999935008	4.377258219	3	4.38		
$\rightarrow 0$	1.307637493	2.718889009			1.28	2.72
$\rightarrow 0$	1.228430578	3.140533652			1.2	3.16

Tablo 15. Düz blok durumunda,  $\beta h \rightarrow 0$  ve  $\gamma h \rightarrow 0$  için bulunan ayrılma başlangıç (b/h) ve bitiş (c/h) noktalarının Geçit (1980) ile karşılaştırılması ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $\beta h=0.001$ ,  $\gamma h=0.0001$ )

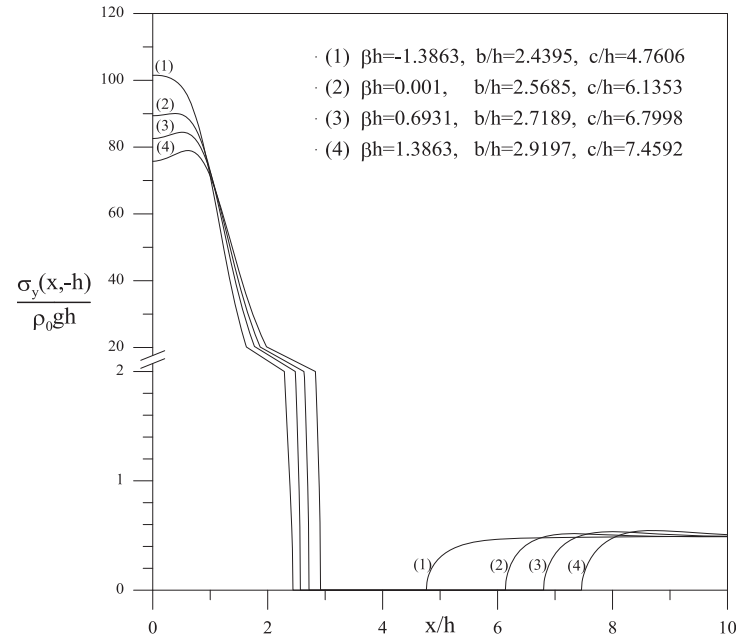
$\frac{(1+\kappa_2)\mu_1}{(1+\kappa_1)\mu_2}$ ↓	a/h $\rightarrow 0$			
	Bu Çalışma		Geçit (1980)	
	b/h	c/h	b/h	c/h
0.1	1.300070824	3.480035269	1.33	3.5
1 ( $\lambda=168$ )	2.400951981	3.677457435	2.42	3.67
1 ( $\lambda=257$ )	2.086446869	4.788948503	2.08	4.8
10	4.601293399	8.482457158	4.67	8.5

Şekil 31-34'de düz blok durumunda, FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki boyutsuz  $\sigma_y(x,-h)/(\rho_0gh)$  temas gerilme yayılışlarının blok genişliği, rijitlik parametresi, yük faktörü ve FD tabakanın alt yüzeyinin kayma modülünün elastik yarım düzlemin kayma modülüne oranı gibi çeşitli parametrelere bağlı olarak değişimleri verilmektedir. Şekillerden de görülebileceği gibi, FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki süreksiz temasta; dış yükün etkisinin büyük olduğu sürekli temas bölgesi, ayrılma bölgesi ve dış yükün etkisinin azalarak kaybolduğu sürekli temas bölgesi olmak üzere üç bölge oluşmaktadır. Dış yükün etkisinin görüldüğü sürekli temas bölgesinde boyutsuz  $\sigma_y(x,-h)/(\rho_0gh)$  temas gerilmeleri rijit bloğun kenarlarında maksimum değerine ulaşmaktadır. Ayrılma bölgesinde temas gerilmelerinin sıfır olduğu yine şekillerden kolaylıkla görülmektedir. Dış yükün etkisinin azalarak kaybolduğu sürekli temas bölgesinde yalnızca kütle kuvvetinin etkisi görülmektedir.

Şekil 34'de düz blok durumunda, FD tabakanın alt yüzeyinin kayma modülünün elastik yarım düzlemin kayma modülüne oranına bağlı olarak FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki boyutsuz  $\sigma_y(x,-h)/(\rho_0gh)$  temas gerilme yayılışları görülmektedir. Şekilden de görülebileceği gibi  $\mu_{-h}/\mu_2$  oranı arttıkça yani FD tabakanın alt yüzeyi elastik yarım düzleme oranla rijitleştikçe ayrılmanın başlangıç ve bitiş noktaları simetri ekseninden uzaklaşmaktadır.

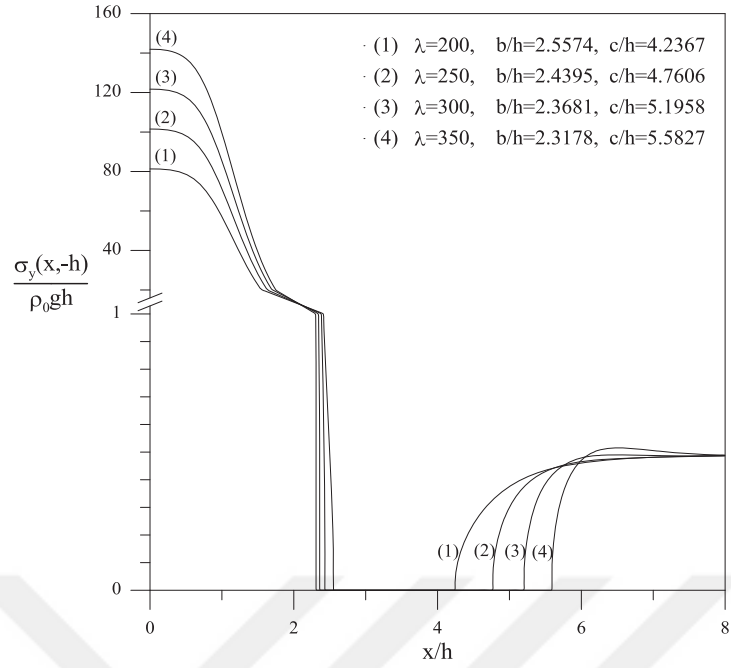


Şekil 31. Düz blok durumunda boyutsuz  $\sigma_y(x,-h)/(\rho_0gh)$  temas gerilme yayılışının blok genişliği ( $a/h$ ) ile değişimi ( $\kappa_1=\kappa_2=2, \beta h=-0.6931, \gamma h=1.0986, \lambda=500>\lambda_{cr}, \mu_{-h}/\mu_2=1$ )

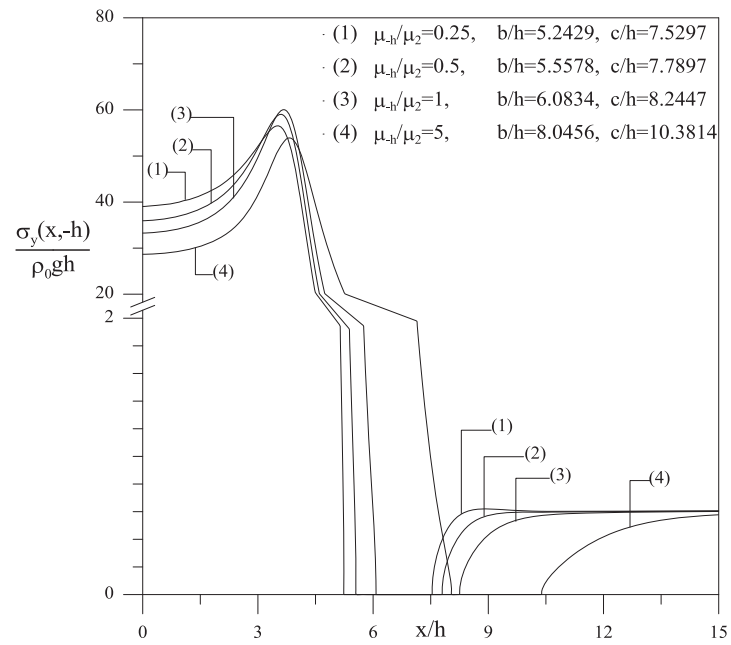


Şekil 32. Düz blok durumunda boyutsuz  $\sigma_y(x,-h)/(\rho_0gh)$  temas gerilme yayılışının rijitlik parametresi ( $\beta h$ ) ile değişimi ( $\kappa_1=\kappa_2=2, a/h=1, \gamma h=1.6094, \lambda=250>\lambda_{cr}, \mu_{-h}/\mu_2=1$ )





Şekil 33. Düz blok durumunda boyutsuz  $\sigma_y(x,-h)/(\rho_0gh)$  temas gerilme yayılımının yük faktörü ( $\lambda$ ) ile değişimi ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $a/h=1$ ,  $\beta h=-1.3863$ ,  $\gamma h=1.6094$ ,  $\mu_{-h}/\mu_2=1$ )



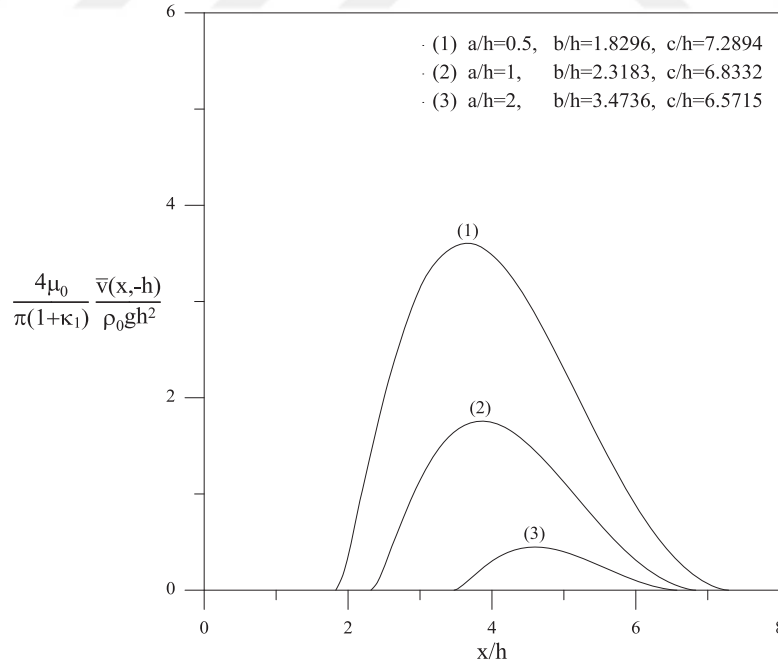
Şekil 34. Düz blok durumunda boyutsuz  $\sigma_y(x,-h)/(\rho_0gh)$  temas gerilme yayılımının  $\mu_{-h}/\mu_2$  oranı ile değişimi ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $a/h=4$ ,  $\beta h=0.6931$ ,  $\gamma h=1.0986$ ,  $\lambda=400 > \lambda_{cr}$ )

Şekil 35-38’de düz blok durumunda, FD tabaka ile elastik yarım düzlemin ara yüzeyinde ilk ayrılma yükünden daha büyük yükler için meydana gelen açılmalar verilmektedir.

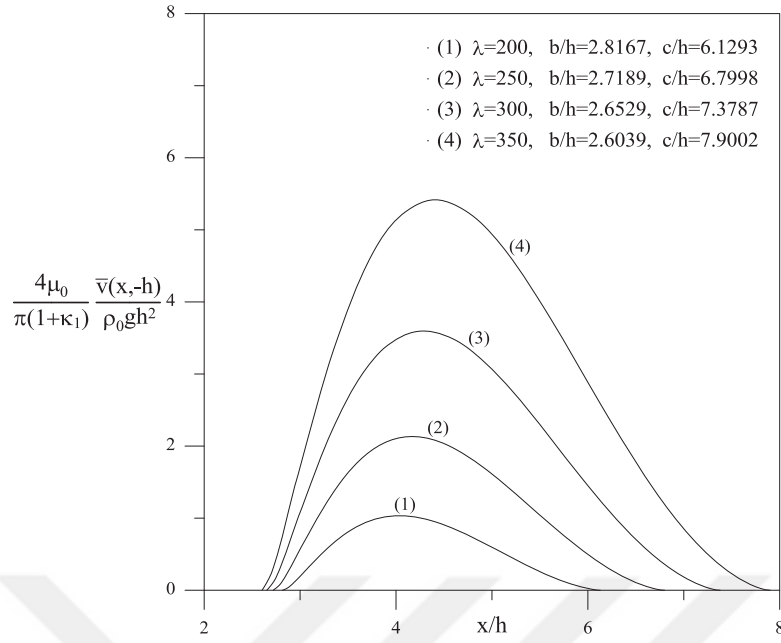
Şekil 35’de düz blok durumunda, FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasında meydana gelen açılmaların blok genişliği ( $a/h$ ) ile değişimi sunulmaktadır. Şekilden de anlaşılacağı gibi blok genişliği arttıkça FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki açılmalar küçülmektedir.

Şekil 36’de düz blok durumunda, FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasında meydana gelen açılmaların yük faktörü ( $\lambda$ ) ile değişimi verilmektedir. Şekilden de görülebileceği gibi yük faktörü arttıkça FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki açılmalar büyümektedir.

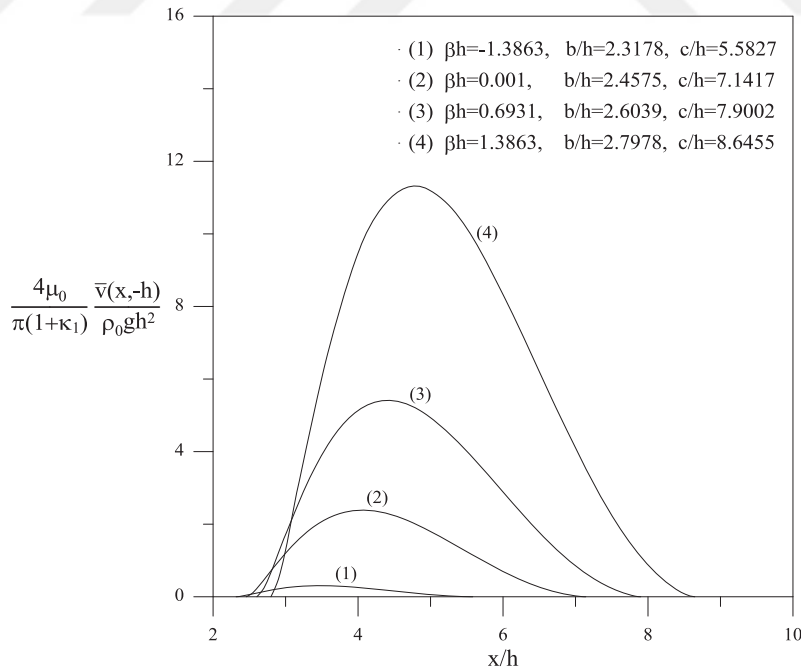
Şekil 37’de düz blok durumunda, FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasında meydana gelen açılmaların rijitlik parametresi ( $\beta h$ ) ile değişimi görülmektedir. Şekil incelendiğinde kolaylıkla görülebilir ki; rijitlik parametresi değeri arttıkça, yani FD tabakanın rijitliği üst yüzeyinden alt yüzeyine doğru giderek azaldıkça (FD tabaka yumuşadıkça), FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki açılmalar büyümektedir.



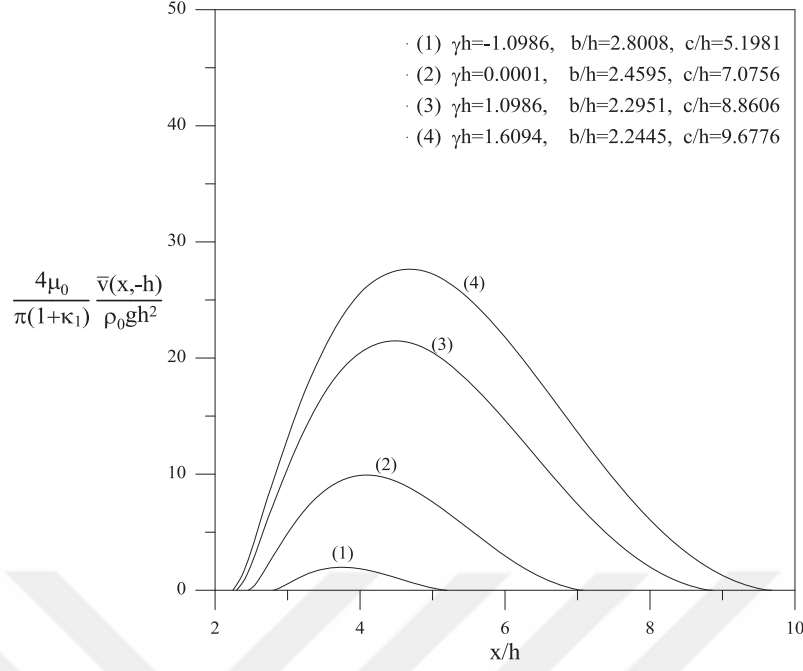
Şekil 35. Düz blok durumunda FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasında meydana gelen açılmaların blok genişliği ( $a/h$ ) ile değişimi ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $\beta h=-0.6931$ ,  $\gamma h=1.0986$ ,  $\lambda=500 > \lambda_{cr}$ ,  $\mu_{-h}/\mu_2=1$ )



Şekil 36. Düz blok durumunda FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasında meydana gelen açılmaların yük faktörü ( $\lambda$ ) ile değişimi ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $a/h=1$ ,  $\beta h=0.6931$ ,  $\gamma h=1.6094$ ,  $\mu_{-h}/\mu_2=1$ )



Şekil 37. Düz blok durumunda FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasında meydana gelen açılmaların rijitlik parametresi ( $\beta h$ ) ile değişimi ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $a/h=1$ ,  $\gamma h=1.6094$ ,  $\lambda=350>\lambda_{cr}$ ,  $\mu_{-h}/\mu_2=1$ )



Şekil 38. Düz blok durumunda FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasında meydana gelen açılmaların yoğunluk parametresi ( $\gamma h$ ) ile değişimi ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $a/h=0.5$ ,  $\beta h=1.3863$ ,  $\lambda=400>\lambda_{cr}$ ,  $\mu_{-h}/\mu_2=1$ )

Şekil 38’de düz blok durumunda, FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasında meydana gelen açılmaların yoğunluk parametresi ( $\gamma h$ ) ile değişimi verilmektedir. Şekilden de görülebileceği gibi yoğunluk parametresi değeri arttıkça yani FD tabakanın yoğunluğu alt yüzeyine doğru azaldıkça, FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki açılmalar büyümektedir.

Tablo 16-17’de dairesel blok durumunda, çeşitli yük faktörü ( $\lambda$ ) değerleri için yarı temas uzunluğunun ( $a/h$ ), ayrılmanın başlangıç ( $b/h$ ) ve bitiş ( $c/h$ ) noktalarının değişimi sunulmaktadır. Tablo 16’da yük faktörü değerinin artışı  $\rho_0 g h^2$  değeri sabit tutulmak suretiyle  $P$  yükünün artışı ile elde edilmiş olup, tablodan da görülebileceği üzere yük faktörü değeri arttıkça FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki yarı temas uzunluğu artmakta, ayrılmanın başlangıç noktası simetri eksenine yaklaşmakta ve ayrılmanın bitiş noktası simetri ekseninden uzaklaşmaktadır. Dolayısıyla da, ayrılma bölgesinin uzunluğu  $(c-b)/h$  da artmaktadır. Tablo 17’de ise yük faktörü değerinin artışı  $P$  yükü sabit tutularak  $\rho_0 g h^2$  değerinin azalışı ile gerçekleştirilmiştir. Bu durumda yük faktörünün artması halinde FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki yarı temas uzunluğunda çok küçük artışlar görülmektedir. Yine bu tablodan, yük faktörü arttıkça ayrılmanın başlangıç noktası

değerlerinin azaldığı, ayrılmanın bitiş noktası değerlerinin ise arttığı dolayısıyla ayrılma bölgesinin uzunluğunun büyüdüğü görülmektedir.

Şekil 39-40'da dairesel blok durumunda, FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki boyutsuz  $\sigma_y(x,-h)/(P/h)$  temas gerilme yayılışlarının rijitlik parametresi ve blok yarıçapına bağlı olarak değişimleri verilmektedir. Düz blok halindeki gibi, FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki süreksiz temasta; dış yükün etkisinin büyük olduğu sürekli temas bölgesi, ayrılma bölgesi ve dış yükün etkisinin azalarak kaybolduğu sürekli temas bölgesi olmak üzere üç bölge oluştuğu şekillerden de görülebilir. Dış yükün etkisinin görüldüğü sürekli temas bölgesinde, boyutsuz  $\sigma_y(x,-h)/(P/h)$  temas gerilmeleri simetri ekseninde maksimum değerine ulaşmaktadır. Ayrılma bölgesinde temas gerilmelerinin sıfır olduğu yine şekillerden kolaylıkla görülmektedir. Dış yükün etkisinin azalarak kaybolduğu sürekli temas bölgesinde yalnızca kütle kuvvetinin etkisi ortaya çıkmaktadır.

Şekil 39'da dairesel blok durumunda, FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki boyutsuz  $\sigma_y(x,-h)/(P/h)$  temas gerilme yayılışlarının rijitlik parametresi ile değişimi görülmektedir. Şekilden de görülebileceği gibi rijitlik parametresi değeri arttıkça yani FD tabakanın rijitliği üst yüzeyinden alt yüzeyine doğru azaldıkça, rijit blok ile FD tabaka arasındaki yarı değme uzunluğu artmakta, ayrılmanın başlangıç ve bitiş noktaları simetri ekseninden uzaklaşmaktadır. Ayrıca şekil incelendiğinde, rijitlik parametresi artışının ayrılma bölgesinin uzunluğunu artırdığı kolaylıkla görülebilir. Şekil 40'da dairesel blok durumunda, boyutsuz  $\sigma_y(x,-h)/(P/h)$  temas gerilme yayılışının blok yarıçapı (R/h) ile değişimi görülmektedir. Şekilden de görülebileceği gibi blok yarıçapı arttıkça, rijit blok ile FD tabaka arasındaki yarı değme uzunluğu ile ayrılmanın başlangıç noktası değerleri artarken ayrılmanın bitiş noktası değerleri azalmaktadır. Bu da blok yarıçapı artışının ayrılma bölgesinin uzunluğunu azalttığı sonucunu doğurmaktadır.

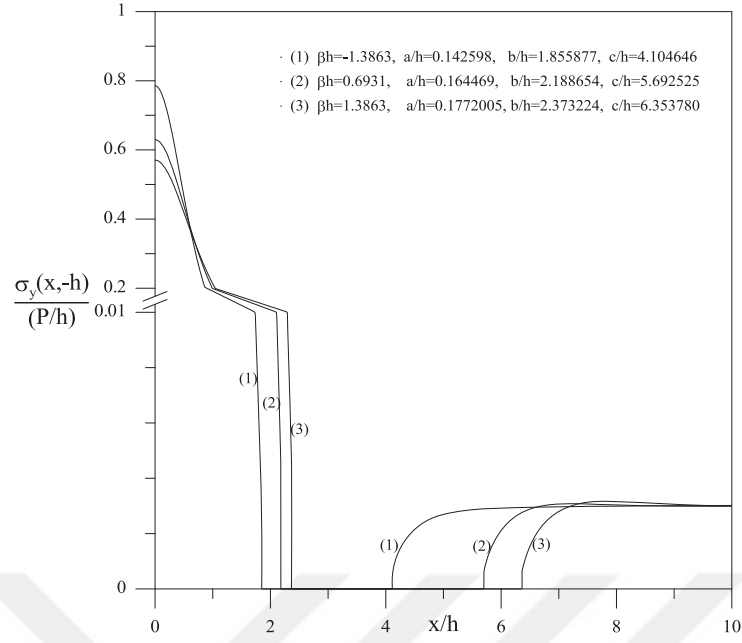
Dairesel blok durumunda FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasında meydana gelen açılmaların rijitlik parametresi ( $\beta h$ ) ile değişimi Şekil 41'de verilmektedir. Şekilden de görüleceği üzere; rijitlik parametresi değeri arttıkça, yani FD tabakanın rijitliği üst yüzeyinden alt yüzeyine doğru azaldıkça, FD tabaka ile elastik yarım düzlemin ara yüzeyinde meydana gelen açılmalar büyümektedir. Şekil 42'de dairesel blok durumunda, FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasında meydana gelen açılmaların yük faktörü ( $\lambda$ ) ile değişimi sunulmaktadır. Şekilden de anlaşılacağı gibi, yük faktörü değeri arttıkça FD tabaka ile elastik yarım düzlemin ara yüzeyinde meydana gelen açılmalar büyümektedir.

Tablo 16. Dairesel blok durumunda çeşitli yük faktörü ( $\lambda$ ) değerleri için yarı temas uzunluğunun (a/h), ayrılma başlangıç (b/h) ve bitiş (c/h) noktalarının değişimi ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $R/h=10$ ,  $\gamma h=1.0986$ ,  $\mu_h/\mu_2=1$ )

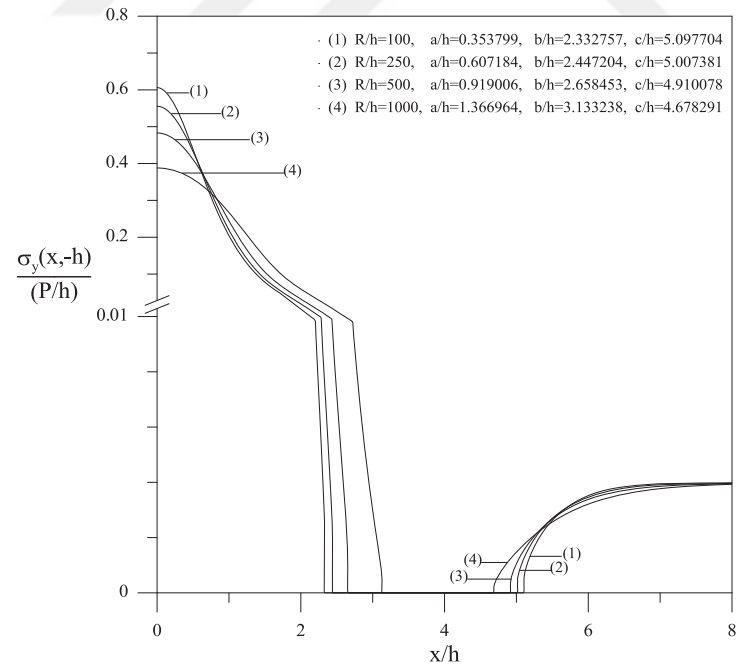
$\lambda$ ↓	$\beta h=-1.3863$		
	a/h	b/h	c/h
200	0.1899349919	1.864936088	4.098890428
250	0.210486848	1.789082879	4.565138449
300	0.2288311245	1.756441299	4.827561173
350	0.2455193756	1.739029872	4.998384633
400	0.2609804373	1.721478818	5.196556303
450	0.2753253314	1.702926588	5.407786622

Tablo 17. Dairesel blok durumunda çeşitli yük faktörü ( $\lambda$ ) değerleri için yarı temas uzunluğunun (a/h), ayrılma başlangıç (b/h) ve bitiş (c/h) noktalarının değişimi ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $R/h=10$ ,  $\mu_0/(P/h)=200$ ,  $\gamma h=1.0986$ ,  $\mu_h/\mu_2=1$ )

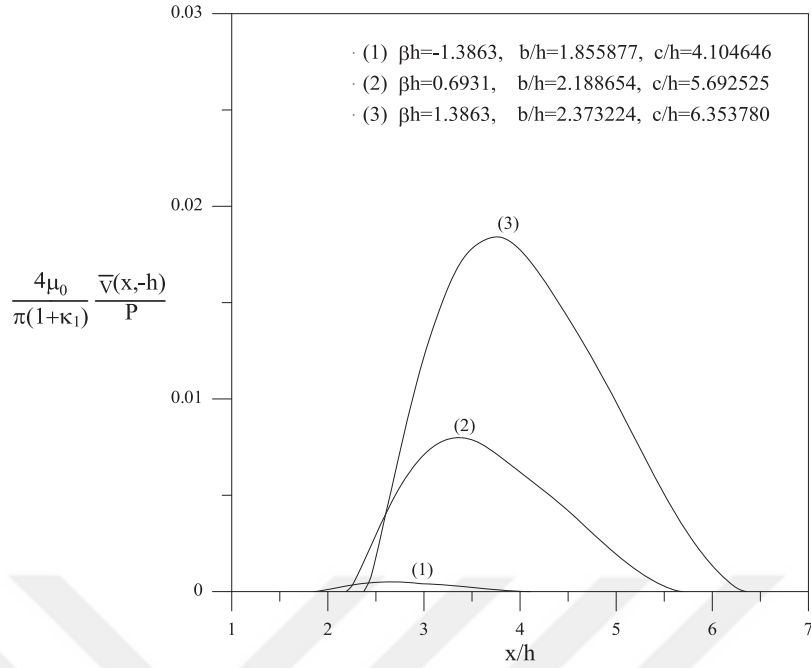
$\lambda$ ↓	$\beta h=-1.3863$		
	a/h	b/h	c/h
200	0.1425988059	1.855877796	4.104646907
250	0.1425989314	1.777590833	4.564624607
300	0.1425990127	1.742204575	4.820525697
350	0.1425990697	1.72115256	4.990547163
400	0.1425991573	1.69625792	5.217085787
450	0.1425993263	1.662133307	5.557960996
500	0.1425994881	1.632468773	5.91174394



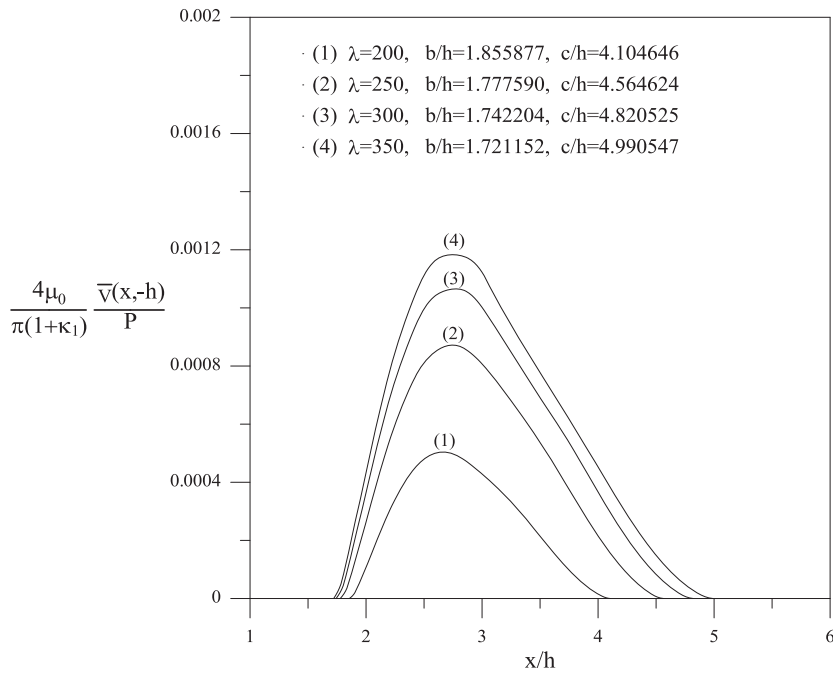
Şekil 39. Dairesel blok durumunda boyutsuz  $\sigma_y(x,-h)/(P/h)$  temas gerilme yayılımının rijitlik parametresi ( $\beta h$ ) ile değişimi ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $R/h=10$ ,  $\mu_0/(P/h)=200$ ,  $\lambda=200>\lambda_{cr}$ ,  $\gamma h=1.0986$ ,  $\mu_{-h}/\mu_2=1$ )



Şekil 40. Dairesel blok durumunda boyutsuz  $\sigma_y(x,-h)/(P/h)$  temas gerilme yayılımının blok yarıçapı ( $R/h$ ) ile değişimi ( $\kappa_1=\kappa_2=2$ ,  $\mu_0/(P/h)=500$ ,  $\lambda=150>\lambda_{cr}$ ,  $\beta h=0.6931$ ,  $\gamma h=1.0986$ ,  $\mu_{-h}/\mu_2=1$ )



Şekil 41. Dairesel blok durumunda FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasında meydana gelen açılmaların rijitlik parametresi ( $\beta h$ ) ile değişimi ( $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $R/h = 10$ ,  $\mu_0/(P/h) = 200$ ,  $\gamma h = 1.0986$ ,  $\lambda = 200 > \lambda_{cr}$ ,  $\mu_{-h}/\mu_2 = 1$ )



Şekil 42. Dairesel blok durumunda FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasında meydana gelen açılmaların yük faktörü ( $\lambda$ ) ile değişimi ( $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $R/h = 10$ ,  $\mu_0/(P/h) = 200$ ,  $\beta h = -1.3863$ ,  $\gamma h = 1.0986$ ,  $\mu_{-h}/\mu_2 = 1$ )



#### 4. SONUÇLAR

Bu çalışmada; rijit bir blok aracılığıyla yüklenmiş, elastik yarım düzleme oturan FD tabakanın sürekli ve süreksiz temas problemi incelenmiştir. Problemin çözümünde bütün yüzeylerin sürtünmesiz olduğu kabul edilmiş olup, FD tabakanın kütle kuvveti hesaba katılırken elastik yarım düzlemin kütle kuvveti ihmal edilmiştir. İlk olarak problemin sürekli temas haline ilişkin çözümü gerçekleştirilmiştir. Söz konusu hale ilişkin çözüm sonucunda; rijit blok altındaki boyutsuz temas gerilmeleri, y simetri eksenine boyunca oluşan boyutsuz normal gerilmeler ve simetri eksenine yakın bir kesit boyunca oluşan boyutsuz kayma gerilmeleri, FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki boyutsuz temas gerilme yayılışları, ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklığı rijit blok profilinin düz veya dairesel olması halleri için ayrı ayrı elde edilmiştir. Problemin sürekli temas haline ilişkin çözümünün ardından süreksiz temas haline ilişkin çözümü gerçekleştirilmiştir. Bu hale ilişkin çözüm sonucunda ise; FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki boyutsuz temas gerilme yayılışları, ayrılmanın başlangıç-bitiş noktaları ve açılmalar yine düz veya dairesel blok durumları için ayrı ayrı elde edilmiştir. Sürekli ve süreksiz temas hallerine ilişkin çözüm sonucunda elde edilen gerilme, yer değiştirme, ilk ayrılma yükü, ilk ayrılma uzaklığı ve açılma mesafelerinin; blok genişliği, blok yarıçapı, yük oranı, rijitlik parametresi, yoğunluk parametresi, yük faktörü, FD tabakanın alt yüzeyinin kayma modülünün elastik yarım düzlemin kayma modülüne oranı gibi boyutsuz büyüklüklerle değişiminin irdelenmesinden elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir:

- Düz blok durumunda, blok altındaki boyutsuz temas gerilmeleri bloğun kenarlarında ( $x = \pm a$ ) sonsuza gitmektedir.
- Düz blok durumunda, blok genişliği arttıkça kuvvet daha geniş alana yayılacağından blok altındaki boyutsuz temas gerilmeleri azalmaktadır.
- Düz blok durumunda, rijitlik parametresi değeri arttıkça yani FD tabakanın rijitliği üst yüzeyinden alt yüzeyine doğru giderek azaldıkça blok altındaki boyutsuz temas gerilmeleri, blok kenarlarında artarken simetri ekseninde azalmaktadır. Ayrıca, rijitlik parametresinin ( $\beta h$ ) değerinin giderek artırılması halinde belli bir değerden sonra ( $\beta h \cong 2.9901$ ) FD tabaka ile rijit blok arasında ayrılma meydana gelmektedir.

- Düz blok durumunda, FD tabakanın alt yüzeyinin kayma modülünün elastik yarım düzlemin kayma modülüne oranı ( $\mu_1/\mu_2$ ) arttıkça blok altındaki boyutsuz temas gerilmeleri blok kenarlarına doğru artarken simetri ekseninde azalma göstermektedir.
- Dairesel blok durumunda, blok yarıçapı arttıkça FD tabaka ile rijit blok arasındaki yarı temas uzunluğu artarken, yük oranının artması durumunda yarı temas uzunluğu azalmaktadır.
- Dairesel blok durumunda, rijitlik parametresi ( $\beta h$ ) değeri arttıkça, yani FD tabakanın rijitliği üst yüzeyinden alt yüzeyine doğru giderek azaldıkça FD tabaka ile rijit blok arasındaki yarı temas uzunluğu artmaktadır.
- Dairesel blok durumunda, FD tabakanın alt yüzeyinin rijitliğinin elastik yarım düzlemin rijitliğine oranı arttıkça yarı temas uzunluğu artmaktadır.
- Dairesel blok durumunda, blok altındaki boyutsuz temas gerilmelerinin en büyük değeri simetri ekseninde meydana gelmekte, buradan uzaklaştıkça azalarak rijit blok ile FD tabakanın birbirine temasının son bulunduğu  $x = \pm a$  noktasında sıfır olmaktadır.
- Dairesel blok durumunda, blok yarıçapı arttıkça blok altındaki boyutsuz temas gerilmesinin maksimum değeri azalırken, yük oranının artışı söz konusu gerilmenin maksimum değerinde artışa neden olmaktadır.
- Dairesel blok durumunda, rijitlik parametresi ( $\beta h$ ) değeri arttıkça blok altındaki boyutsuz temas gerilmesinin maksimum değeri azalmaktadır.
- Gerek düz blok durumunda gerekse daireysel blok durumunda, y simetri eksenini boyunca oluşan  $\sigma_x$  boyutsuz gerilme yayılışında FD tabakada çekme ve basınç bölgeleri meydana gelmekte, kirişlerin eğilme halinde olduğu gibi FD tabakanın üst bölgesinde basınç, alt bölgesinde ise çekme gerilmeleri oluşmaktadır. Elastik yarım düzlem için ise  $\sigma_x$  boyutsuz gerilmesi, en büyük değerini FD tabaka ile elastik yarım düzlemin temas yüzeyinde almakta ve derine inildikçe ( $y \rightarrow -\infty$ ) her yerde basınç gerilmesi olacak şekilde azalarak sifira yaklaşmaktadır.
- Düz blok durumunda, blok genişliği arttıkça simetri eksenini boyunca oluşan boyutsuz  $\sigma_x$  normal gerilmeleri azalmaktadır.

- Dairesel blok durumunda; blok yarıçapı arttıkça simetri ekseni boyunca oluşan boyutsuz  $\sigma_x$  normal gerilme değerleri azalırken, söz konusu gerilme değerleri yük oranının artışı ile artmaktadır.
- Gerek düz blok gerekse dairesel blok durumunda, rijitlik parametresi değeri arttıkça yani FD tabakanın rijitliği üst yüzeyinden alt yüzeyine doğru giderek azaldıkça, FD tabakanın üst yüzeyinde boyutsuz  $\sigma_x$  normal gerilme değerleri artarken alt yüzeyinde azalmaktadır. Elastik yarım düzlem için ise söz konusu gerilme değerleri azalmaktadır.
- Dairesel blok durumunda, simetri ekseni boyunca oluşan boyutsuz  $\sigma_y$  normal gerilmeleri en büyük değerini blok ile FD tabakanın temas yüzeyinde ( $y=0$ ) almakta ve bloktan uzaklaştıkça azalarak sifira yaklaşmaktadır. FD tabaka ile elastik yarım düzlemin ara yüzeyinde gerilmeler aynı değerleri almakta ve problemin tanımında verilen sınır şartları sağlanmaktadır.
- Dairesel blok durumunda, y simetri ekseni boyunca oluşan boyutsuz  $\sigma_y$  normal gerilme değerleri blok yarıçapı artışı ile azalırken yük oranının artışı ile artmaktadır.
- Dairesel blok durumunda, rijitlik parametresinin artması halinde FD tabakanın rijitliği üst yüzeyinden alt yüzeyine doğru azalmakta ve bu durum y simetri ekseni boyunca oluşan boyutsuz  $\sigma_y$  normal gerilmelerinin azalmasına neden olmaktadır.
- Gerek düz blok gerekse dairesel blok durumunda, simetri ekseni yakınındaki kesit boyunca oluşan kayma gerilmeleri, FD tabaka ile elastik yarım düzlemin ara yüzeyleri boyunca sıfır olmakta ve problemin tanımında verilen sınır şartları sağlanmaktadır.
- Gerek düz blok gerekse dairesel blok durumunda, rijitlik parametresi değeri arttıkça FD tabakanın rijitliği üst yüzeyinden alt yüzeyine doğru azalmakta, boyutsuz kayma gerilmesi değerleri FD tabakanın üst yüzeyine doğru artarken alt yüzeyine doğru azalmaktadır. Elastik yarım düzlem için ise rijitlik parametresi artışı boyutsuz kayma gerilmelerinin azalmasına neden olmaktadır.
- Düz blok durumunda, FD alt yüzeyinin rijitliği elastik yarım düzlemin rijitliğine oranla artırıldıkça FD tabakada boyutsuz  $\tau_{xy}$  kayma gerilmesi değerleri artarken elastik yarım düzlemde söz konusu değerler azalmaktadır.

- Dairesel blok durumunda, blok yarıçapı arttıkça simetri eksenini yakınındaki kesit boyunca oluşan boyutsuz  $\tau_{xy}$  kayma gerilmesi değerleri azalmaktadır. Yük oranının artışı ise boyutsuz kayma gerilmelerinin değerlerinde artışa neden olmaktadır.
- Gerek düz blok gerekse dairesele blok durumunda, sürekli temas halinde iki bölge ortaya çıkmaktadır. Bunlardan birincisi dış yükün etkisinin büyük olduğu ( $x < x_{cr}$ ) temas bölgesi, diğeri ise dış yükün etkisinin azalarak kaybolduğu ( $x > x_{cr}$ ) temas bölgesidir. Dış yükün etkisinin görüldüğü temas bölgesinde ( $x < x_{cr}$ ), temas gerilmeleri maksimum değerini düz blok durumunda rijit bloğun kenarlarında, dairesele blok durumunda ise y simetri ekseninde almakta ve bu noktalar temas gerilmelerinin tepe noktalarını oluşturmaktadır. Dış yükün etkisinin kaybolduğu temas bölgesinde ( $x > x_{cr}$ ) yalnızca FD tabakanın kütle kuvvetinin etkisi ortaya çıkmakta ve her iki blok durumu için de bu bölgedeki temas gerilmeleri kütle kuvvetlerine eşdeğer olmaktadır.
- Düz blok durumunda, blok genişliği veya FD tabakanın alt yüzeyinin rijitliğinin elastik yarım düzlemin rijitliğine oranı arttıkça FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki ilk ayrılma yükü ve uzaklığı artmakta, ayrılma daha zor gerçekleşmektedir.
- Dairesel blok durumunda, blok yarıçapı arttıkça FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki ilk ayrılma yükü ve uzaklığı artmaktadır. Yük oranının artması durumunda ise ilk ayrılma yükünün ve uzaklığının azaldığı görülmektedir.
- Gerek düz blok gerekse dairesele blok durumunda, rijitlik parametresi değeri ( $\beta h$ ) arttıkça yani FD tabakanın rijitliği üst yüzeyinden alt yüzeyine doğru giderek azaldıkça ilk ayrılma yükü azalırken ilk ayrılma uzaklığı artmaktadır. Rijitlik parametresi artışının FD tabakanın elastik yarım düzleme temas yüzeyinin yumuşamasına neden olduğu düşünülürse, ilk ayrılma yükünün azalması yani ayrılmanın daha kolay gerçekleşmesi beklenen bir sonuç olarak ortaya çıkmaktadır.

- Gerek düz blok gerekse dairesel blok durumunda; yoğunluk parametresi değeri ( $\gamma h$ ) arttıkça yani FD tabakanın yoğunluğu üst yüzeyinden alt yüzeyine doğru giderek azaldıkça dolayısıyla FD tabaka hafifleştikçe ilk ayrılma yükü azalmakta, ancak ilk ayrılma uzaklığı yoğunluk parametresinin değişiminden etkilenmemektedir.
- Problemin süresiz temasına ilişkin gerek düz blok gerekse dairesel blok hallerinde; dış yükün etkisinin büyük olduğu sürekli temas bölgesi, ayrılma bölgesi ve dış yükün etkisinin azalarak kaybolduğu sürekli temas bölgesi olmak üzere üç bölge oluşmaktadır. Dış yükün etkisinin görüldüğü sürekli temas bölgesinde boyutsuz  $\sigma_y$  temas gerilmeleri maksimum değerini düz blok durumunda rijit bloğun kenarlarında, dairesel blok durumunda ise y simetri ekseninde almaktadır. Her iki durumda da ayrılma bölgesinde temas gerilmeleri sıfır olmakta ve dış yükün etkisinin azalarak kaybolduğu sürekli temas bölgesinde yalnızca kütle kuvvetinin etkisi görülmektedir.
- Düz blok durumunda, aynı yük değeri için blok genişliği arttıkça ayrılmanın başlangıç noktasını tanımlayan (b/h) değerleri büyümekte ve dolayısıyla da ayrılmanın başlangıç noktası simetri ekseninden uzaklaşmaktadır. Ancak, ayrılmanın bitiş noktasını tanımlayan (c/h) değerlerinin artış ya da azalış eğilimi blok genişliğine bağlı olarak değişkenlik göstermektedir. Ayrıca, blok genişliğinin artışı ayrılma bölgesinin uzunluğunun ((c-b)/h) azalmasına neden olmaktadır.
- Gerek düz blok gerekse dairesel blok durumunda yük faktöründeki artış; ayrılmanın başladığı noktanın simetri eksenine yaklaşmasına neden olurken, ayrılmanın sona erdiği noktanın simetri ekseninden uzaklaşmasına neden olmaktadır. Bu durumda ayrılma bölgesinin uzunluğu da ((c-b)/h) artmaktadır.
- Gerek düz blok gerekse dairesel blok durumunda, aynı yük değeri (yük oranı) için rijitlik parametresi değeri arttıkça yani FD tabakanın rijitliği üst yüzeyinden alt yüzeyine doğru giderek azaldıkça, sırasıyla ayrılmanın başlangıç ve bitiş noktalarını tanımlayan (b/h) ve (c/h) değerleri artmaktadır. Diğer yandan, rijitlik parametresi değeri arttıkça ayrılma bölgesinin uzunluğu ((c-b)/h) da artmaktadır.
- Düz blok durumunda, aynı yük değeri için yoğunluk parametresi değeri arttıkça ayrılmanın başlangıç noktası simetri eksenine yaklaşmakta, ayrılmanın sona erdiği nokta ise simetri ekseninden uzaklaşmaktadır. Ayrıca, ayrılma bölgesinin

uzunluğu  $((c-b)/h)$  da yoğunluk parametresi değerinin artması nedeniyle büyümektedir.

- Düz blok durumunda, FD tabakanın alt yüzeyinin rijitliğinin elastik yarım düzlemin rijitliğine oranı  $(\mu_1/\mu_2)$  arttıkça yani FD tabakanın alt yüzeyi elastik yarım düzleme oranla rijitleştikçe ayrılmanın başlangıç ve bitiş noktaları simetri ekseninden uzaklaşmaktadır.
- Dairesel blok durumunda; blok yarıçapı arttıkça, rijit blok ile FD tabaka arasındaki yarı değme uzunluğu ile ayrılmanın başlangıç noktası değerleri artarken ayrılmanın bitiş noktası değerleri azalmaktadır. Bu da blok yarıçapı artışının ayrılma bölgesinin uzunluğunu azalttığı sonucunu doğurmaktadır
- Gerek düz blok gerekse dairesel blok durumunda, yük faktörü değeri arttıkça FD tabaka ile elastik yarım düzlemin ara yüzeyinde meydana gelen açılmalar büyümektedir.
- Gerek düz blok gerekse dairesel blok durumunda, rijitlik parametresi değeri arttıkça yani FD tabakanın rijitliği üst yüzeyinden alt yüzeyine doğru azaldıkça FD tabaka ile elastik yarım düzlemin ara yüzeyinde meydana gelen açılmalar büyümektedir.
- Düz blok durumunda, blok genişliği arttıkça FD tabaka ile elastik yarım düzlemin ara yüzeyinde meydana gelen açılmalar küçülmektedir.
- Düz blok durumunda, yoğunluk parametresi değeri arttıkça yani FD tabakanın yoğunluğu üst yüzeyinden alt yüzeyine doğru azaldıkça, FD tabaka ile elastik yarım düzlemin ara yüzeyinde meydana gelen açılmalar büyümektedir.
- Bu problemin çeşitli özel hallerinden elde edilen sonuçlar, literatürde daha önceden yapılmış olan çalışmalardaki (Çakıroğlu, 1979; Civelek ve Erdoğan, 1976; Civelek vd., 1978; Geçit, 1980) sonuçlar ile karşılaştırılmış ve oldukça uyumlu sonuçlar elde edilmiştir.

## 5. ÖNERİLER

Bu tez çalışmasından elde edilen sonuçlardan hareketle gelecekte yapılacak çalışmalara ışık tutması amacıyla aşağıdaki önerilerin dikkate alınması tavsiye edilmektedir.

- Problem dönel simetrik temas problemi olarak ele alınıp problemin çözümü kutupsal koordinatlarda gerçekleştirilebilir.
- ANSYS paket programına; fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın kayma modülünün, elastisite modülünün ve/veya yoğunluğunun tabaka yüksekliği boyunca bir fonksiyona bağlı olarak değişimini sağlayacak ek bir program kodu yazılması suretiyle problemin çözümü nümerik olarak gerçekleştirilebilir.
- Problemden yükü ileten bloğun rijit olması yerine elastik olması durumu göz önünde bulundurularak, elde edilecek sonuçlar rijit blok olması haliyle karşılaştırılabilir.
- Problem rijit bloğun hareketli olması (moving punch) durumu için de çözülebilir.
- Problem, elastik yarım düzleme oturan fonksiyonel derecelendirilmiş iki tabakanın olması durumu için çözülüp ilk ayrılmanın hangi temas yüzeyinde gerçekleşeceği araştırılabilir.



## 6. KAYNAKLAR

- Adams, G., G. ve Bogy D., B., 1977. The Plane Symmetric Contact Problem for Dissimilar Elastic Semi-Infinite Strips of Different Widths, ASME Journal of Applied Mechanics, 44, 604-610.
- Adıbelli, H., 2010. Elastik Yarım Düzleme Oturan Simetrik Yüklü Yapışık Çift Tabakada Değme ve Çatlak Problemi, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Adıbelli, H., Çömez, İ. ve Erdöl, R., 2013. Receding Contact Problem for a Coated Layer and a Half-Plane Loaded by a Rigid Cylindrical Stamp, Archives of Mechanics, 65, 3, 219-236.
- Adıyaman, G., 2013. İki Çeyrek Düzlem Üzerine Oturan Elastik Bir Tabakanın Sürtünmesiz ve Ayrılmalı Temas Problemi, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Adıyaman, G., Birinci, A., Öner, E. ve Yaylacı, M., 2016. A Receding Contact Problem Between a Functionally Graded Layer and Two Homogeneous Quarter Planes, Acta Mechanica, 227, 6, 1753-1766.
- Aizikovich, S., M., Vasil'ev, A., S., Krenev, L., I., Trubchik, I., S. ve Seleznev, N., M., 2011. Contact Problems for Functionally Graded Materials of Complicated Structure, Mechanics of Composite Materials, 47, 5, 539-548.
- Akavcı, S., S., 1999. İki Elastik Çeyrek Düzlem Üzerine Oturan Elastik Bir Tabakanın Sürtünmesiz Temas Problemi, Doktora Tezi, Çukurova Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Adana.
- Apatay, T., 2010. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Kaplamalarda Çatlak ve Temas Problemi, Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Apatay, T., Dağ, S., Güler, M., A. ve Gülgeç, M., 2010. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Kaplamalarda Sürtünmeli Rijit Zimba Etkisiyle Oluşan Yüzeyaltı Temas Gerilmeleri, Gazi Üniv. Müh. Mim. Fak. Der., 25, 3, 611-623.
- Bagault, C., Nélias, D., Baietto, M., C. ve Ovaert, T., C., 2013. Contact Analyses for Anisotropic Half-Space Coated with an Anisotropic Layer: Effect of the Anisotropy on the Pressure Distribution and Contact Area, International Journal of Solids and Structures, 50, 743-754.
- Balcı, M., N., Dağ, S. ve Yıldırım, B., 2017. Subsurface Stresses in Graded Coatings Subjected to Frictional Contact with Heat Generation, Journal of Thermal Stresses, 40, 4, 517-534.
- Birinci, A., 1998. Alt Tabakasında Düşey Bir Çatlağı Bulunan ve Rijit Bir Blok Aracılığı ile Yüklenen Bileşik Tabaka Problemi, Doktora Tezi, K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.



- Birinci, A., Çakıroğlu, M. ve Erdöl, R., 2002. Two Strips Problems Resting on an Elastic Foundation, Mathematical & Computational Applications, 7, 3, 275-286.
- Birinci, A., Adıyaman, G., Yaylacı, M. ve Öner, E., 2015. Analysis of Continuous and Discontinuous Cases of a Contact Problem using Analytical Method and FEM, Latin American Journal of Solids and Structures, 12, 1771-1789.
- Bora, P., 2016. Rijit İki Blok Aracılığı ile Yüklenmiş Elastik Yarı Sonsuz Düzleme Oturan İki Elastik Tabakanın Temas Problemi, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Chen, Y., Z., Lin, X., Y. ve Wang, Z., X., 2011. Singular Integral Equation Method for Contact Problem for Rigidly Connected Punches on Elastic Half-Plane, Applied Mathematics and Computation, 217, 5680-5694.
- Chen, P. ve Chen, S., 2012. Contact Behaviors of a Rigid Punch and a Homogeneous Half-Space Coated with a Graded Layer, Acta Mechanica, 223, 563-577.
- Chidlow, S., J., Chong, W., W., F. ve Teodorescu, M., 2013. On the Two-Dimensional Solution of Both Adhesive and Non-Adhesive Contact Problems Involving Functionally Graded Materials, European Journal of Mechanics A/Solids, 39, 86-103.
- Civelek, M., B. ve Erdoğan, F., 1975. The Frictionless Contact Problem for an Elastic Layer under Gravity, ASME Journal of Applied Mechanics, 42, 97, 136-140.
- Civelek, M., B. ve Erdoğan, F., 1976. Interface Separation in a Frictionless Contact Problem for an Elastic Layer, Journal of Applied Mechanics, 43, 1, 175-177.
- Civelek, M., B., Erdoğan, F. ve Çakıroğlu, A., O., 1978. Interface Separation for an Elastic Layer Loaded by a Rigid Stamp, International Journal of Engineering Science, 16, 9, 669-679.
- Çakıroğlu, A., O., 1979. Elastik Yarım Düzleme Oturan Plaklarda Temas Problemi, Doçentlik Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.
- Çakıroğlu, E., 2011. İki Elastik Çeyrek Düzleme Oturan ve Rijit Bir Panç ile Bastırılan Elastik Tabaka Probleminin Çözümü ve Yapay Sinir Ağı Uygulaması, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Çakıroğlu, F., L. ve Erdöl, R., 1989. Elastik Zemine Oturan Bileşik Şeritte Sürekli Temas Problemi, 6. Ulusal Mekanik Kongresi, Bursa, Bildiriler Kitabı I: 243-248.
- Çakıroğlu, A., O. ve Çakıroğlu, F., L., 1991. Continuous and Discontinuous Contact Problems for Strips on an Elastic Semi-Infinite Plane, International Journal of Engineering Science, 29, 1, 99-111.

- Çömez, İ., Birinci, A. ve Erdöl, R., 2003. Rijit Bir Panç Aracılığıyla Bastırılmış ve Alttan Tam Bağlı Ağırlıksız Çift Şeritte Değme Problemi, TUMTMK, XIII. Ulusal Mekanik Kongresi, Eylül, Gaziantep, Bildiriler Kitabı: 321-332.
- Çömez, İ., Birinci, A. ve Erdöl, R., 2004. Double Receding Contact Problem for a Rigid Stamp and two Elastic Layers, European Journal of Mechanics A/Solids, 23, 301-309.
- Çömez, İ., 2010. Frictional Contact Problem for a Rigid Cylindrical Stamp and an Elastic Layer Resting on a Half Plane, International Journal of Solids and Structures, 47, 1090-1097.
- Çömez, İ. ve Erdöl, R., 2013. Frictional Contact Problem of a Rigid Stamp and an Elastic Layer Bonded to a Homogeneous Substrate, Archive of Applied Mechanics, 83, 1, 15-24.
- Çömez, İ., 2013. Contact Problem of a Functionally Graded Layer Resting on a Winkler Foundation, Acta Mechanica, 224, 11, 2833-2843.
- Çömez, İ., 2014. Elasticity Solution for a Functionally Graded Two-Layer Beam with Simple Supported Edges, Turkish Journal of Engineering & Environmental Sciences, 38, 373-381.
- Çömez, İ., 2015. Contact Problem for a Functionally Graded Layer Indented by a Moving Punch, International Journal of Mechanical Sciences, 100, 339-344.
- Çömez, İ., El-Borgi, S., Kahya, V. ve Erdöl, R., 2016. Receding Contact Problem for Two-Layer Functionally Graded Media Indented by a Rigid Punch, Acta Mechanica, 227, 9, 2493-2504.
- Çömez, İ. ve Güler, M., A., 2017. The Contact Problem of a Rigid Punch Sliding Over a Functionally Graded Bilayer, Acta Mechanica, 228, 6, 2237-2249.
- Dempsey, J., P., Zhao, Z., G., Minnetyan, L. ve Li, H., 1990. Plane Contact of an Elastic Layer Supported by a Winkler Foundation, International Journal of Mechanics, Transactions of ASME, 57, 974-980.
- Dhaliwal, R., S., 1970. Punch Problem for an Elastic Layer Overlying an Elastic Foundation, Internatinonal Journal of Engineering Science, 8, 273-288.
- El-Borgi, S., Abdelmoula, R. ve Keer, L., 2006. A Receding Contact Plane Problem Between a Functionally Graded Layer and a Homogeneous Substrate, International Journal of Solids and Structures, 43, 658-674.
- El-Borgi, S., Usman, S. ve Güler, M., A., 2014. A Frictional Receding Contact Plane Problem Between a Functionally Graded Layer and a Homogeneous Substrate, International Journal of Solids and Structures, 51, 4462-4476.

- Elloumi, R., El-Borgi, S., Guler, M., A. ve Kallel-Kamoun, I., 2016. The Contact Problem of a Rigid Stamp with Friction on a Functionally Graded Magneto-Electro-Elastic Half-Plane, Acta Mechanica, 227, 1123-1156.
- Erdelyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F. ve Tricomi, F., G., 1954. Tables of Integral Transforms, 1, Mc Graw-Hill, Inc., New York.
- Erdoğan, F. ve Gupta, G., D., 1972. On the Numerical Solution of Singular Integral Equations, Quarterly of Applied Mathematics, 29, 525-534.
- Erdoğan, F. ve Ratwani, M., 1974. The Contact Problem for an Elastic Layer Supported by Two Elastic Quarter Planes, ASME Journal of Applied Mechanics, 41, 673-677.
- Fabrikant, V., I. ve Sankar, T., S., 1984. On Contact Problems in an Inhomogeneous Half-Space, International Journal of Solids and Structures, 20, 2, 159-166.
- Fan, H. ve Keer, L., M., 1994. Two-Dimensional Contact on an Anisotropic Elastic Half-Space, Journal of Applied Mechanics, 61, 2, 250-255.
- Geçit, M., R. ve Erdoğan, F., 1978. Frictionless Contact Problem for an Elastic Layer under Axisymmetric Loading, International Journal of Solids and Structures, 14, 771-785.
- Geçit, M., R., 1980. A Tensionless Contact Without Friction Between an Elastic Layer and an Elastic Foundation, International Journal of Solids and Structures, 16, 387-396.
- Geçit, M., R., 1986. The Axisymmetric Double Contact Problem for a Frictionless Elastic Layer Indented by an Elastic Cylinder, International Journal of Engineering Science, 24, 1571-1584.
- Giannakopoulos, A., E. ve Suresh, S., 1997. Indentation of Solids with Gradients in Elastic Properties: Part I. Point Force, International Journal of Solids and Structures, 34, 19, 2357-2392.
- Giannakopoulos, A., E. ve Suresh, S., 1997. Indentation of Solids with Gradients in Elastic Properties: Part II. Axisymmetric Indentors, International Journal of Solids and Structures, 34, 19, 2393-2428.
- Giannakopoulos, A., E. ve Pallot, P., 2000. Two-Dimensional Contact Analysis of Elastic Graded Materials, Journal of Mechanics and Physics of Solids, 48, 1597-1631.
- Guler, M., A. ve Erdogan, F., 2004. Contact Mechanics of Graded Coatings, International Journal of Solids and Structures, 41, 3865-3889.
- Guler, M., A. ve Erdogan, F., 2007. The Frictional Sliding Contact Problems of Rigid Parabolic and Cylindrical Stamps on Graded Coatings, International Journal of Mechanical Sciences, 49, 161-182.
- Guler, M., A., Alinia, Y. ve Adibnazari, S., 2012. On the Rolling Contact Problem of Two Elastic Solids with Graded Coatings, International Journal of Mechanical Sciences, 64, 1, 62-81.

- Gün, H. ve Gao, X., W., 2014. Analysis of Frictional Contact Problems for Functionally Graded Materials using BEM, Engineering Analysis with Boundary Elements, 38, 1-7.
- Heß, M., 2016. A Simple Method for Solving Adhesive and Non-Adhesive Axisymmetric Contact Problems of Elastically Graded Materials, International Journal of Engineering Science, 104, 20-33.
- Jaffar, M., J., 1991. Elastic Strips in Sliding Contact, Journal of Strain Analysis, 26, 3, 193-199.
- Jobin, K., J., Abhilash, M., N. ve Murthy, H., 2017. A Simplified Analysis of 2D Sliding Frictional Contact Between Rigid Indenters and FGM Coated Substrates, Tribology International, 108, 174-185.
- Johnson, K., L., 1985. Contact Mechanics, Cambridge University Press, Cambridge.
- Kahya, V., Birinci A. ve Erdöl R., 2001. Frictionless Contact Problem Between an Elastic Layer Bonded to a Rigid Support and a Rigid Stamp, Mathematical & Computational Applications, 6, 1, 13-22.
- Kahya, V., 2003. İki Tabakalı Elastik Ortamda Sürekli ve Süreksiz Değme Problemlerinin İncelenmesi, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Kahya, V., Özşahin, T., Ş., Birinci, A. ve Erdöl, R., 2007. A Receding Contact Problem for an Anisotropic Elastic Medium Consisting of a Layer and a Half Plane, International Journal of Solids and Structures, 44, 5695-5710.
- Karabulut, P., M., 2015. Yarım Düzlem Üzerine Oturan Elastik Tabakanın Sürtünmesiz Temas Problemi, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Ke, L. ve Wang, Y., 2006. Two-Dimensional Contact Mechanics of Functionally Graded Materials with Arbitrary Spatial Variations of Material Properties, International Journal of Solids and Structures, 43, 5779-5798.
- Ke, L. ve Wang, Y., 2007. Two-Dimensional Sliding Frictional Contact of Functionally Graded Materials, European Journal of Mechanics A/Solids, 26, 171-188.
- Keer, L., M. ve Chantaramunkorn, K., 1972. Loss of Contact Between an Elastic Layer and Half-Space, Journal of Elasticity, 2, 3, 191-197.
- Keer, L., M., Dundurs, J. ve Tsai, K., C., 1972. Problems Involving of a Receding Contact Between a Layer and a Half Space, ASME Journal of Applied Mechanics, 39, 1115-1120.
- Keer, L., M., Lee, J., C. ve Mura, T., 1984. A Contact Problem for the Elastic Quarter Space, International Journal of Solids and Structures, 20, 2, 513-524.

- King, R., B. ve O'Sullivan, T., C., 1987. Sliding Contact Stress in a Two-Dimensional Layered Elastic Half-Space, International Journal of Solids and Structures, 23, 5, 581-597.
- Kravchuk, A., S. ve Vasil'ev, V., A., 1980. Numerical Methods of Solving Contact Problem for Finite Linearly and Nonlinearly Elastic Bodies, Soviet Applied Mechanics, 16, 462-467.
- Lan, Q., Graham, G., A., C. ve Selvadurai, A., P., S., 1996. Certain Two-Punch Problems for an Elastic Layer, International Journal of Solids and Structures, 33, 19, 2759-2774.
- Liu, T. ve Wang, Y., S., 2008. Axisymmetric Frictionless Contact Problem of a Functionally Graded Coating with Exponentially Varying Modulus, Acta Mechanica, 199, 1, 151-165.
- Liu, T., J., Zhang, C., Wang, Y., S. ve Xing, Y., M., 2016. The Axisymmetric Stress Analysis of Double Contact Problem for Functionally Graded Materials Layer with Arbitrary Graded Materials Properties, International Journal of Solids and Structures, 96, 229-239.
- Loboda, V., V. ve Tauchert, T., R., 1985. The Elastic Contact Problem for Dissimilar Orthotropic Semi-Infinite and Infinite Strips, International Journal of Engineering Science, 23, 12, 1337-1349.
- Long, J., M. ve Wang, G., F., 2013. Effects of Surface Tension on Axisymmetric Hertzian Contact Problem, Mechanics of Materials, 56, 65-70.
- Ma, L., F. ve Korsunsky, A., M., 2004. Fundamental Formulation for Frictional Contact Problems of Coated Systems, International Journal of Solids and Structures, 41, 2837-2854.
- Ma, L., Korsunsky, A., M. ve Sun, K., 2006. Contact of Coated Systems under Sliding Conditions, Journal of Tribology, 128, 4, 886-890.
- Nikbakht, A., Arezoodar, A., F., Sadighi, M. ve Talezadeh, A., 2014. Analyzing Contact Problem Between a Functionally Graded Plate of Finite Dimensions and a Rigid Spherical Indenter, European Journal of Mechanics A/Solids, 47, 92-100.
- Nowell, D. ve Hills, D., A., 1988. Contact Problems Incorporating Elastic Layers, International Journal of Solids and Structures, 24, 1, 105-111.
- Öner, E., 2011. Rijit Dairesel Bir Panç Aracılığıyla Yüklenmiş ve Elastik Yarı Sonsuz Düzleme Oturan İki Elastik Tabakanın Sürekli Temas Problemi, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Öner, E. ve Birinci, A., 2014. Continuous Contact Problem for Two Elastic Layers Resting on an Elastic Half-Infinite Plane, Journal of Mechanics of Materials and Structures, 9, 1, 105-119.

- Öner, E., Yaylacı, M. ve Birinci, A., 2014. Solution of a Receding Contact Problem Using an Analytical Method and a Finite Element Method, Journal of Mechanics of Materials and Structures, 9, 3, 333-345.
- Öner, E., Yaylacı, M. ve Birinci, A., 2015. Analytical Solution of a Contact Problem and Comparison with the Results from FEM, Structural Engineering and Mechanics, 54, 4, 607-622.
- Özşahin, T.Ş., 2000. Rijit İki Blok Üzerine Oturan Bileşik Tabakada Sürekli ve Süreksiz Temas Problemi, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Özşahin, T., Ş., Kahya, V. ve Çakıroğlu, A., O., 2007. Contact Problem For an Elastic Layered Composite Resting on Rigid Flat Supports, International Journal of Computational and Mathematical Sciences, 1,2, 154-159.
- Ozsahin, T., S. ve Taskıner, O., 2013. Contact Problem for an Elastic Layer on an Elastic Half Plane Loaded by means of Three Rigid Flat Punches, Mathematical Problems in Engineering, 1-14.
- Öztürk, A., 2009. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Bir Silindirde Malzeme Özelliklerinin Isıl Gerilme Dağılımına Etkisinin Parametrik İncelenmesi, Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Patra, R., Barik, S., P. ve Chaudhuri, P., K., 2017. Frictionless Contact of a Rigid Punch Indenting an Elastic Layer Having Piezoelectric Properties, Acta Mechanica, 228, 2, 367-384.
- Rhimi, M., El-Borgi, S., Saïd, W., B. ve Jemaa, F., B., 2009. A Receding Contact Axisymmetric Problem between a Functionally Graded Layer and a Homogeneous Substrate, International Journal of Solids and Structures, 46, 3633-3642.
- Rhimi, M., El-Borgi, S. ve Lajnef, N., 2011. A Double Receding Contact Axisymmetric Problem Between a Functionally Graded Layer and a Homogeneous Substrate, Mechanics of Materials, 43, 787-798.
- Romashchenko, V., A., 2015. Singular Solutions of Elasticity Theory Problems for Ideal Contact Zones of Solids, Strength of Materials, 47, 6, 810-819.
- Su, J., Ke, L., -L., Wang, Y., -S. ve Xiang, Y., 2017. The Axisymmetric Torsional Contact Problem of a Functionally Graded Piezoelectric Coated Half-Space, Acta Mechanica Sinica, 33, 2, 406-414.
- Turan, M., Adiyaman, G., Kahya, V. ve Birinci, A., 2016. Axisymmetric Analysis of a Functionally Graded Layer Resting on Elastic Substrate, Structural Engineering and Mechanics, 58, 3, 423-442.



- Vasiliev, A., Volkov, S., Aizikovich, S. ve Jeng, Y., -R., 2014. Axisymmetric Contact Problems of the Theory of Elasticity for Inhomogeneous Layers, ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 94, 9, 705-712.
- Vasiliev, A., S., Volkov, S., S., Belov, A., A., Litvinchuk, S., Y. ve Aizikovich, S., M., 2017. Indentation of a Hard Transversely Isotropic Functionally Graded Coating by a Conical Indenter, International Journal of Engineering Science, 112, 63–75.
- Vasiliev, A., S., Volkov, S., S., Aizikovich, S., M. ve Mitrin, B., I., 2017. Plane Contact Problem on Indentation of a Flat Punch Into a Transversely-Isotropic Half-Plane with Functionally Graded Transversely-Isotropic Coating, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, 68, 4.
- Volkov, S., Aizikovich, S., Wang, Y., S. ve Fedotov, I., 2013. Analytical Solution of Axisymmetric Contact Problem about Indentation of a Circular Indenter into a Soft Functionally Graded Elastic Layer, Acta Mechanica Sinica, 29, 196-201.
- Weitsman, Y., 1969. On the Unbounded between Plates and an Elastic Half Space, ASME Journal of Applied Mechanics, 36, 198-202.
- Yan, J. ve Li, X., 2015. Double Receding Contact Plane Problem between a Functionally Graded Layer and an Elastic Layer, European Journal of Mechanics A/Solids, 53, 143-150.
- Yang, J. ve Ke, L., 2008. Two-Dimensional Contact Problem for a Coating-Graded Layer-Substrate Structure under a Rigid Cylindrical Punch, International Journal of Mechanical Sciences, 50, 985-994.
- Yaylacı, M., 2013. İki Elastik Çeyrek Düzleme Oturan İki Elastik Tabakanın Temas Problemi, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Yaylacı, M. ve Birinci, A., 2013. The Receding Contact Problem of Two Elastic Layers Supported by Two Elastic Quarter Planes, Structural Engineering and Mechanics, 48, 2, 241-255.
- Yaylacı, M., Öner, E. ve Birinci, A., 2014. Comparison Between Analytical and ANSYS Calculations for a Receding Contact Problem, Journal of Engineering Mechanics, 140, 9, 1-10.
- Zhang, S. ve Li, X., 2015. Boundary Augmented Lagrangian Method for Contact Problems in Linear Elasticity, Engineering Analysis with Boundary Elements, 61, 127-133.
- Zhupanska, O., I., 2011. Contact Problem for Elastic Spheres: Applicability of the Hertz Theory to Non-Small Contact Areas, International Journal of Engineering Science, 49, 576-588.

## ÖZGEÇMİŞ

Erdal ÖNER, 1988 yılında Bayburt’da doğdu. İlköğrenimini Bayburt Veysel Efendi İlköğretim Okulu’nda, orta öğrenimini Bayburt Anadolu Lisesi’nde tamamladı. 2005 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümünü kazandı ve 2009 yılında bu bölümden mezun oldu. Aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı Mekanik Bilim Dalı’nda yüksek lisans öğrenimine başladı. Şubat 2010’da Bayburt Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü Mekanik Anabilim Dalı’na Araştırma Görevlisi olarak atandı. 2011 yılında yüksek lisans öğrenimini tamamlayarak Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı Mekanik Bilim Dalı’nda doktora öğrenimine başladı. Öner, iyi derecede İngilizce bilmekte ve halen Bayburt Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümündeki görevine devam etmektedir.