KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ*SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

EKONOMETRİ ANABİLİM DALI

EKONOMETRİ PROGRAMI

DERS PROGRAMI ÇİZELGELEME PROBLEMİNE 0 - 1 TAMSAYILI PROGRAMLAMA UYGULAMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Emrah SÜRE

HAZİRAN - 2015

TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ*SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

EKONOMETRİ ANABİLİM DALI

EKONOMETRİ PROGRAMI

DERS PROGRAMI ÇİZELGELEME PROBLEMİNE 0 - 1 TAMSAYILI PROGRAMLAMA UYGULAMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Emrah SÜRE

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hilmi ZENGİN

HAZİRAN - 2015

TRABZON

ONAY

Emrah SÜRE tarafından hazırlanan “Ders Programı Çizelgeleme Problemine 0 - 1 Tamsayılı Programlama Uygulaması” adlı bu çalışma 17/06/2015 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda oybirliği ile başarılı bulunarak jürimiz tarafından Ekonometri Anabilim dalında **yüksek lisans tezi** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Hilmi ZENGİN (Başkan – Danışman)

Doç. Dr. Tuba YAKICI AYAN (Üye)

Yrd. Doç. Dr. Arzu DENİZ (Üye)

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduklarını onaylarım. 17/06/2015

Prof. Dr. Ahmet ULUSOY

Enstitü Müdürü

BİLDİRİM

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını, aksinin ortaya çıkması durumunda her tür yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ediyorum.

Emrah SÜRE
17.06.2015

ÖNSÖZ

Günümüz işletmelerinin, kurumlarının ve kuruluşlarının belli misyon ve vizyonları vardır. Bu misyon ve vizyona uygun, en iyi kararları almak için şartlar veya kısıtlamalar vardır. Kurumların başında bulunan ve karar alıcılar takımı olarak bilinen kişiler, belli koşullar altında kurumun en iyi şekilde çalışmasını isterler. Bu isteklerin temelinde karlarını maksimum seviyeye çıkarmak ya da maliyetlerini minimum seviyede tutmak yatmaktadır. Bunların haricinde farklı hedeflere de sahip olabilecekleri varsayıldığında ve aynı zamanda iktisadi açıdan düşünüldüğünde, bu istekler rasyonel bir düşüncenin gereği olarak karşımıza çıkmaktadır. İşte bu rasyonel davranışları etkileyecek kararların alınması için yöneylem araştırması ve onun bize sağlamış olduğu tekniklerden yararlanırız.

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde; yöneylem araştırmasının tanımı, tarihi, uygulama alanları, içerdiği varsayımlar ve özelliklerinden bahsedilecektir. İkinci bölümde doğrusal programlamanın tanımı, tarihsel gelişimi, varsayımları, çözümde kullanılan yöntemler, örnekler üzerinde uygulamaları ile birlikte açıklanmıştır. Üçüncü bölümde bu çalışmaya kaynak teşkil eden tamsayılı programlamanın tanımı, özellikleri, örnekler üzerinde uygulamaları ile birlikte verilecektir. Dördüncü bölümde tamsayılı programlamaya ait literatür çalışması yer alacaktır. Son bölümde ise bir ortaokul ders çizelgeleme problemi üzerinde tamsayılı programlama yöntemi uygulanıp sonuçları değerlendirilecektir.

Gerek ders aşamasında gerekse tez konumun seçiminde benden ilgisini ve desteğini esirgemeyen tez danışmanım K.T.Ü. İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Ekonometri Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğretim üyelerinden Prof. Dr. Hilmi ZENGİN' e sonsuz teşekkür ederim. Ayrıca desteklerinden dolayı Doç. Dr. Tuba Yakıcı AYAN' a saygılarımı sunarım. Öğrenim hayatım boyunca beni destekleyen aileme ve eşim Kübra SÜRE' ye gönülden teşekkürlerimi sunarım.

Haziran, 2015 Emrah SÜRE

İÇİNDEKİLER

BİRİNCİ BÖLÜM

İKİNCİ BÖLÜM

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

BEŞİNCİ BÖLÜM

ÖZET

Bu çalışmanın amacı, tamsayılı programlama yönteminden yararlanarak bir ortaokul ders çizelgeleme probleminin matematiksel modelini oluşturmak ve bu modelin çözümünü gerçekleştirmektir.

Çalışmanın birinci bölümü, yöneylem araştırmasını ve onun teorik altyapısını, ikinci bölümü, doğrusal programlama yönteminin temellerini ve örneklere uygulanmasını, üçüncü bölümü, tamsayılı programlama yönteminin ana hatlarını ve uygulama örneklerini, dördüncü bölümü, tamsayılı programlama yöntemine ait literatürdeki çalışmaları ele almıştır. Beşinci bölümde ise daha önceden teorik altyapısı incelenen tamsayılı programlama yönteminin, bir ortaokul çizelgeleme problemine uygulanması üzerinde durulmuştur.

Uygulama kısmında Sakarya İlinin, Erenler İlçesine bağlı bulunan, Erenler İmam Hatip Ortaokulu' nun ders çizelgeme problemi için bir model kurularak, bu model GAMS 23.3.3. sürümlü paket program ile çözülmüştür. Oluşturulan modelin çözümleri tablolar halinde sunularak sonuçları çizelgeler halinde sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Yöneylem Araştırması, Tamsayılı Programlama, Ders Çizelgeleme.

ABSTRACT

Aim of this study is to create mathematical model of a secondary school course timetabling program and present solution for this model using integer programming method.

First chapter of study analyzes operations research and its theoretical background; second chapter analyzes basics of linear programming method and its application on examples; third chapter analyzes main features of integer programming method and its applied examples; and fourth chapter analyzes studies pertaining to integer programming on technical literature. Fifth chapter elaborates on application of integer programming method, theoretical background of which has already been set on previous chapters, on a secondary school timetabling problem.

For the application, a model of timetabling problem for Erenler İmam Hatip Ortaokulu in Erenler County of Sakarya Province has been developed and this created model has been resolved with the help of Gams 23.3.3 packaged software. Solutions belonging to this model will be discussed upon on charts.

Keywords: Operations Research, Integer Programming, Timetabling.

TABLOLAR LİSTESİ

ŞEKİLLER LİSTESİ

GRAFİKLER LİSTESİ

KISALTMALAR LİSTESİ

GAMS	:	The General Algebraic Modeling System
a_i	:	Karar Değişkenlerinin Üretimi İçin Gerekli Kaynak Miktarı
a_{ij}	:	İ. Kıt Kaynağın, J. Madde Üretimi İçin Kullanılması Gereken Miktarı
b_j	:	İ. Kıt Kaynağın Kullanılabilir Miktarı
s	:	Aylak Değişken
v	:	Artık Değişken
A	:	Yapay Değişken
x_{ij}	:	Karar Değişkenleri
z	:	Amaç Fonksiyonunun Değeri
U.Ç.A	:	Uygun Çözüm Alanı
c	:	Karar Değişkenlerinin Amaç Fonksiyonuna Katkısı
M	:	Yapay Değişken Katsayısı

GİRİŞ

İnsan hayatının olmazsa olmazlarından birisi karar alma sürecidir. Her türlü yaşamsal aktivite düşünüldüğünde, karar almanın çok kolay olmadığı, bir takım farklı alternatif durumlardan bazılarını, diğerlerine tercih etmek gerektiği söz konusu olabilmektedir. Bu gibi durumlarda karar alma sürecini farklı kriterler, öncelikler, zevkler, duygu ve düşünceler doğrudan ya da dolaylı olarak etkilemektedir.

İnsanoğlunun bir oluşumu olan işletmelere ve kurumlara bakıldığında, onların da yukarıda saydığımız durumlarda daha kolay seçim yapması beklenemez. İşletmelerin ve kurumların kuruluş amaçlarının, mal veya hizmet üretmek yoluyla beklentileri en üst seviyede karşılamak olduğu düşünüldüğünde, üretilecek mal ve hizmetin her aşamasında karar alma süreci yoğun bir şekilde yaşanmaktadır. Karar alma sürecinde gerek maddi gerekse manevi bir takım ihtiyaçların optimal düzeyde karşılanması temel amaç olmalıdır.

Karar verme sürecinin daha kolay olması için, optimal şartların tespit edilmesi zorunluluktur. Bu optimal düzeyin belirlenmesi aşaması ise matematiksel modellerin kurulması ve çözümlerinin incelenmesinden geçmektedir. Bu şekilde karar vericiler için işletmelerin ve kurumların hangi üründen ne kadar üretmesi gerektiği, uygun stok miktarının düzeyi, lojistik için kullanılacak yöntemlerin seçilmesi, mal ve hizmetin fiyatının belirlenmesi, üretimde kullanılacak fiziki-beşeri kaynakların miktarı ve gerçekleştirilecek işlere atanması, zaman planlaması ve uygulanması gibi önemli sorular cevap bulmuş olacaktır.

Yönetim bilimi tanımıyla ortaya konan yöneylem kavramının temel varsayımı gereği bir tek çözüm yolundan bahsedilemeyeceği, bunun aksine alternatif çözüm yollarının bulunması gerektiği, bunun göz ardı edilemeyeceği unutulmamalıdır. İktisadın tanımında da olduğu gibi sınırsız istekler ve ihtiyaçlar, kıt kaynaklardan temin edilmek durumundadır. Bu durumda en iyi alternatifin seçilmesi kaçınılmaz olacaktır.

Çeşitli yollardan hedefe en kısa sürede, en az maliyetle, en fazla karı sağlayacak şekilde gidilmesi, bunun kararının alınması için yöneylem araştırmasından ve onun yöntemlerinden yararlanılması, karar verme eylemini kolaylaştırmaktadır. İşletmeler ve kurumlar açısından bu yöntemlerin takip edilmesi, işletmeleri hedefledikleri noktaya sağlıklı bir şekilde taşıyabilecektir. İstenilen hedeflere kolay ve hızlı bir şekilde ulaşılabilmesi için kullanılan temel yöntemlerden birisi de, aslında değişkenlerinin tamsayılı değerler alması istenen ve bu yönde uygun olabilecek kısıtlayıcıların eklenmesi ile oluşturulmuş doğrusal programlama modeli olarak tanımlanabilecek tamsayılı programlamadır.

Bu çalışmada amaç, tamsayılı programlama tekniğinin teorik olarak verilen kısımlarını örneklerle açıklayarak, uygulamasının Sakarya ilinin Erenler ilçesine bağlı Erenler İmam Hatip Ortaokulu’ nda uygulanması ve sonuçlarının tartışılmasıdır.

Çalışmanın birinci bölümünde yöneylem araştırmasının tanımı, tarihi akış içerisinde gelmiş olduğu nokta ve geleceği, özellikleri, kapsamı ve uygulama alanları gibi konular üzerinde durulacaktır.

İkinci bölümde doğrusal programlama yönteminin teorik kısmı anlatılarak, uygulama aşamasında karşımıza çıkacak durumlara, bir nevi hazırlık basamağı oluşturulacaktır. Bunun sebebi ise, daha önce de bahsedildiği üzere tamsayılı programlamanın, doğrusal programlama tekniğinin özel bir durumu olmasıdır. Doğrusal programlamanın tanımı, varsayımları ve özellikleri, matematiksel bir modelin temel elemanları ve yapısı, oluşturulan matematiksel modelin çözüm yöntemleri ve bunun devamında çözümü, çözümde ortaya çıkabilecek durumlar incelenecektir. Son olarak ise dualite kavramı anlatılarak, örneklerle izah edilecektir.

Üçüncü bölümde tamsayılı programlama yönteminin tanımlamalarına yer verilecektir. Tamsayılı programlamanın çeşitleri ve çözüm yöntemleri tanıtıldıktan sonra, bu çalışmanın temelini oluşturan 0-1 tamsayılı programlamanın örnek bir problem üzerinde modeli kurularak, çözümü açıklanacaktır.

Dördüncü bölümde ise literatürde bulunan, tamsayılı programlama yöntemi üzerindeki çalışmalara değinilecektir.

Çalışmanın beşinci bölümünü ise teorik olarak altyapısı hazırlanan tamsayılı programlama tekniğinin, bir ortaokula ait ders çizelgesinin hazırlanması aşamasında uygulanması ve ortaya çıkan sonuçların değerlendirilip, analizinin yapılması oluşturmaktadır. Bu bölümde sonuçlara ilişkin çıkarımlara önerilerle eşlik edilmektedir. Oluşturulan matematiksel modelin çözümünde ise GAMS 23.3.3 sürümlü bilgisayar paket programı ve CPLEX çözücüsü kullanılmıştır. Sonuçlara uygun şekilde hazırlanan ders çizelgeleri tablolar halinde Ekler bölümünde verilmiştir.

BİRİNCİ BÖLÜM

1. YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Yöneylem araştırmasını tam manasıyla anlayabilmek, işlevini kavrayabilmek için farklı tanımlarına, özelliklerine, varsayımlarına ait bilgilerin incelenmesi önemlidir. Bu şekilde yöneylem araştırmasının amacı daha sağlıklı bir şekilde anlaşılacaktır.

Yöneylem araştırması, insan, makine, para ve malzemeden oluşan endüstriyel, ticari ve askeri sistemlerin yönetiminde karşılaşılan problemleri çözerek, bu sistemleri bulundukları durumdan daha iyi bir konuma götürmeyi amaçlayan bir bilim dalı olarak ifade edilebilir (Zengin, 1987: 2). Yöneylem araştırmasının temel prensibi, sistemin şans ve risk ölçüsünü de içeren ve alternatif karar, strateji ve kontrollerin sonuçlarını tahmin ve karşılaştırmaya yarayan bilimsel bir modelini geliştirmektir. Amacı, yönetimin politika ve eylemlerini, bilimsel olarak saptamasına yardımcı olmak yönündedir (Doğrusöz, 1976: 7).

Yöneylem araştırması, "mevcut koşullar altında sahip olunan kaynakların doğru paylaşımı ile en iyi tasarımı oluşturmak ve sistemi yönetmek için kullanılan basit bir bilim yaklaşımıdır" şeklinde de ifade edilebilir (Winston, 2004: 11).

Yöneylem araştırmasının tanımlarından birisi de, "kısıtlı kaynaklarla en iyi çözümün elde edilmesine yarayan bilimsel bir yaklaşım" şeklindedir (Taha, 1987: 1).

Yöneylem ile ilgili tanımlamaların ortak noktasında karar verme sürecine etki eden bilimsel bir yöntem olması yer almaktadır.

Yöneylem araştırmasının temel amacı, yönetimin vermesi gereken kararlara bilimsel bir şekilde yardımcı olmaktır. Kararı alacak kişi, kuruluş ya da firmanın ölçek bazında değerlendirilmesi düşünüldüğünde, kararın etkileyeceği kitlenin büyüklüğü hata veya eksik bir durumu kaldıramayacak durumda olabilmektedir. Böylesi kompleks bir durum düşünüldüğünde tecrübeler ve sezgisel yaklaşımlar karar vermede sağlıklı etki oluşturamayacaktır. İşte bu nedenle yöneylem araştırması bilimsel yöntem ve tekniklerden yararlanma olanağı sunarak, karar sürecinin rasyonel bir şekilde gerçekleşmesini sağlayacaktır.

1.1. Yöneylem Araştırmasının Tarihsel Süreci

Yöneylem, ilk olarak 2. Dünya savaşı yıllarında İngiltere' nin Alman ordusuna karşı envanterini en verimli, koordineli ve optimal şekilde kullanması için yapılan askeri araştırmalar olarak adını duyurmuştur. Bu askeri araştırmaların işlemine de Operational Research denilmiştir. Yöneylem araştırması 1938' lerde Operational Research olarak anılmaktayken, sonraları Amerika' da "Operations Research" olarak değiştirilmiştir (Larnder, 1984: 4).

Patrick Maynard Stuart Blackett radar kullanımına yönelik araştırmaları için Blackett' s Cisrcuss olarak tanınan yöneylem araştırması ekibini kurmuştur. Blackett' in takımında farklı disiplinlerden bilim adamları yer almıştır. Blackett İngiltere' de yöneylem araştırması açısından çok önemli bir isim olarak ön plana çıkmıştır. Yöneylem araştırmasına önemli katkıları bulunan Blackett, 1948 yılında fizik alanında Nobel ödülü almıştır (Gass ve Arjang, 2011' den aktaran: Öztürk, 2013: 4).

İngiltere' deki başarısının fark edilmesinden sonra yöneylem araştırması kavramı ABD' de yer edinmiştir. Philip Morse 1942 yılında denizaltı hücumlarının etkinliğinin artırılması için ABD Deniz Kuvvetleri bünyesinde bir ekip oluşturmuştur. Morse ve ekibindeki arkadaşları farklı problem durumlarına uygun matematiksel formüller elde ederek bunları rapor haline getirmiştir.

II. Dünya Savaşının ardından, yöneylem araştırmasının önemli konularından birisi konumunda bulunan doğrusal programlamanın algoritmasını, Rus bilim adamı Leonid Vitaliyevich Kantorovich 1939 yılında basılan The Mathematical Method of Production Planing and Organization isimli kitabında incelemiştir. 1941 yılında Frank Lauren Hitchcock ulaştırma problemlerini formüle etmiş, 1944 yılında J. Von Neumann' ın ve O.

Morgenstern Oyun Teorisi ve Ekonomik Davranış adlı çalışmalarıyla günümüzde rekabet ortamında karar vermede kullanılan oyun teorisine katkı sağlamışlardır (Öztürk, 2013: 5).

G. B. Dantzig, ABD' nin askeri faaliyetlerinin planlanmasına yönelik doğrusal programlama yaklaşımını geliştirmiş ve simpleks çözüm yöntemini ortaya koymuştur. Simpleks çözüm yönteminin geliştirilmesinden sonra doğrusal programlama teorisinde de önemli gelişmeler sağlanmıştır. Robert Dorfman, doğrusal programlama yaklaşımını iktisadi öğeler üzerinde uygulamıştır. İktisatçılar ve matematikçiler Dualite Teorisi' ni geliştirmişlerdir. 1950' lerden itibaren R. Bellman dinamik programlama ve H. Kuhn ile A. Tucker doğrusal olmayan programlama modellerinin gelişimine katkıda bulunmuşlardır (Aygüneş ve diğerleri, 2001: 9).

Ülkemizde oluşturulan ilk yöneylem araştırması birimi, 19 Ağustos 1954 tarihinde Genelkurmay Başkanlığı bünyesinde kurulan İlmi İstişare Kurulu Müdürlüğü olup, ciddi manada ilk yöneylem araştırması grubu 1 Haziran 1956 tarihinde yaklaşık 10 yedek subaydan oluşturulmuştur. Bu müdürlüğün adı 1957 yılında İlmi İstişare ve Geliştirme Kurumu, kısaca İLGE olarak değiştirilmiştir. 1958 yılında adı ARGE olarak değiştirilen birim, 1970 yılına kadar Genelkurmay Başkanlığı' na bağlı olarak, 1970 sonundan itibaren ise Milli savunma Bakanlığı bünyesinde faaliyette bulunmuştur. 1973 yılında Genelkurmay Başkanlığı' nda Savunma Araştırması Dairesi Başkanlığı kurulmuş ve yöneylem araştırması faaliyetleri bu başkanlık bünyesinde devam ettirilmiştir. 1993 yılında başkanlığın adı Silahlanma ve Savunma Araştırma Dairesi olmuştur (Aygüneş ve diğerleri, 2001: 7).

Sivil anlamda ilk olarak 1 Eylül 1965 tarihinde TÜBİTAK bünyesinde bir yöneylem araştırması ünitesi oluşturulmuştur. Eğitim alanında ilk çalışmalar, İstanbul Teknik Üniversitesi ve Orta Doğu Teknik Üniversitesi' nde başlamış, daha sonra Kara Harp Okulu da yöneylem araştırması derslerini ders programına eklemiştir. Bu çalışmaları daha sonra diğer üniversiteler, gerek yöneylem araştırması derslerini programlarına koyarak, gerekse yüksek lisans ve doktora programları açarak takip etmişlerdir (Aygüneş ve diğerleri, 2001: 18).

1.2. Yöneylem Araştırmasının Uygulama Alanları

Yöneylem araştırması bilimsel ve teknolojik avantajları getirisi sebebiyle birçok alanda kendisine yer edinmiştir. Tanımı gereği yaygın bir kullanım alanına sahip olması da doğaldır. Verilerin karmaşık olduğu durumlarda, kısa ve etkili şekilde sayısal sonuçlar vererek karar alma mekanizmasına bilimsel veriler sunmaktadır. Ayrıca çok sayıda disiplinle eşgüdüm içerisinde çalışarak bu alanlarda uygulama şansı bulmaktadır. İşletme, iktisat ve istatistik gibi alanlar yöneylemin etkileşimde olduğu alanların başında gelmektedir.

Gelişmiş ve gelişmekte olan ülkelerin ekonomik koşullarında görülen belirsizlik, ilişkilerin çokluğu ve dinamik olma özellikleri, bu koşullarda sürekliliğini korumaya çalışan örgütleri, bütün değişkenlerin dikkate alınabilmesine olanak sağlayan yöneylem araştırması tekniklerini kullanmaya zorlamaktadır (Ada, 1990: 432).

Tablo 1: Yöneylem Araştırmasının Uygulama Alanları

Üretim planlama	Malzeme ve envanter yönetimi
Üretim çizelgeleme	Tahmin ve kestirme yöntemleri
Verimlilik analizi	Esnek imalat sistemleri
Toplam kalite yönetimi	Karar modelleri
Proje yönetimi	Rassal süreçler
Taşıma/Ulaşım	Tesis yer seçimi ve dağıtım
Stratejik planlama	Maliyet analizi
Kent hizmetleri yönetimi	Finansal planlama
Yatırım planlama	Bütçe planlama ve kontrol
Savunma uygulamaları	Bakım planlaması
Optimizasyon	Enerji planlaması
Benzetim	Performans ölçümü
Bilgisayarla bütünleşik imalat	Reorganizasyon
Tam zamanında üretim	İnsan gücü planlaması
Karar destek sistemleri	Yönetim bilişim sistemleri

Kaynak: http://enm.blogcu.com/yoneylem-arastirmasi-nedir/8172485

1.3. Yöneylem Araştırmasının Özellikleri

Yöneylem araştırması, problemleri kendisine has bir yaklaşımla ele alır (Esin, 1981: 4). Yöneylem araştırması disiplinler arası araştırma, sistem yaklaşımı ve bilimsel yöntem kullanım özellikleriyle, gerçek hayatın problemlerine optimal çözümler arayan, bilimsel bir alan olarak ortaya çıkmıştır (Kara, 1979: 3).

1.3.1. Bilimsel Yöntem

Yöneylem araştırması bilimsel yöntemin kullanmış olduğu gözlem, veri toplama, hipotez kurma, analiz, değerlendirme ve sentez basamaklarından yararlanmaktadır.

Yöneylem araştırmaları genel olarak birbirini izleyen şu adımlardan oluşmaktadır:

i) Problemin belirlenmesi
ii) Model geliştirilmesi
iii) Modelin çözümü
iv) Modelin ve çözümün test edilmesi
v) Sonuçların yeniden kontrol edilmesi
vi) Çözümün yerleştirilmesi

1.3.2. Bütünleşik (Sistem) Yaklaşım

Çözümü aranan sorunlarla ilgili, çözüm sonuçlarını ihmal edilemeyecek biçimde etkileyecek, problemin ilişkili olduğu örgütün içindeki veya dışındaki tüm etkenlerin göz önüne alınması bütünleşik yaklaşımının gereği olarak ortaya çıkmaktadır.

Bir işletme içinde, bölümlerin kararları ancak toplamda uygun bir çözüme ulaşacaksa kabul edilebilirdir. Yöneylem araştırmaları işte bu noktada hem her bölüm için en uygun kararın alınmasında yardımcı olacak, hem de bu kararların işletmenin genel amaçlarına uygun olmasını sağlayacaktır. Bunların yanı sıra günümüzde oldukça karmaşık yapıya bürünen işletme problemlerine yöneylem araştırması tekniklerinin uygulanması, yöneylem araştırmasının klasik tanımının çok üzerinde bir seyir izlemektedir (Ada, 1990: 424).

1.3.3. Disiplinler Arası Yaklaşım

Herhangi bir sorunu yöneylem araştırması yöntemiyle çözümleyebilmek için bir araştırma ekibinin oluşturulması gerekmektedir. Yöneylem araştırmasının temel özelliklerinden birisi de, disiplinler arası ekip çalışması biçiminde olmasıdır. Çünkü problemi her yönüyle görebilmek, dolayısıyla doğru bir çözüme ulaşabilmek için, yöneylem araştırmalarında çeşitli bilim dallarından gelen uzman araştırmacılardan yararlanılır. Bu nedenle, yöneylem araştırması projelerini yürütecek araştırmacı ekiplerin, değişik uzmanlık alanlarında bulunan kişilerden oluşması arzulanmaktadır.

Bir yöneylem araştırmasına ait problemin çözümünde farklı alanlardan yararlanmak üzere, değişik uzmanlardan bir ekip oluşturulabilir. Bu sayede problemin çözümüne ilişkin geniş bir perspektif elde etmekle birlikte, yenilikçi bir tutum da sergilenmiş olunacaktır.

İKİNCİ BÖLÜM

2. DOĞRUSAL PROGRAMLAMA

Yöneylem araştırması tekniklerinden birisi olan doğrusal programlama, sahip olduğu modeller ve onların çözümleri sayesinde işletmelerin, kurum ve kuruluşların hedeflerine yönelik pozitif yönde katkı sağlamaktadır. Karar vericilere sayısal veriler sunması ve onlara karar almada yol gösteriyor olması, doğrusal programlama yöntemini cazip hale getirmektedir. Yapısı itibari ile çok karmaşık olmadığından, özellikle kısa dönem faaliyetlerde, işletmelere önemli getirileri olan bir yöntem olarak ortaya çıkmaktadır.

Doğrusal programlama bir optimizasyon tekniğidir. Yöneylem araştırmasının klasik optimizasyon modellerinden biri olup, üretim sistemlerinin planlanmasında yaygın bir biçimde kullanılmaktadır (Yamak, 1994: 221).

Doğrusal programlama, belirli doğrusal eşitlik ya da eşitsizliklerin kısıtlayıcı koşulları altında, doğrusal bir amaç fonksiyonunun optimum sonucunu bulmak olarak tanımlanmaktadır (Alan ve Yeşilyurt, 2004: 152). Belirli bir amacı gerçekleştirmek için, sınırlı kaynakların etkin kullanımını ve çeşitli alternatifler arasında optimum dağılımını sağlayan bir matematiksel programlama tekniği olarak ifade edilmektedir.

Bir başka tanıma göre "doğrusal programlama, doğrusal eşitlik veya eşitsizlikler halinde bulunan kısıtlayıcı şartlar altında, belli bir amaç fonksiyonunun en iyilenmesidir" şeklinde de tarif edilmektedir (Esin, 1998: 24).

2.1. Doğrusal Programlamanın Tarihsel Süreci

Doğrusal programlama alanında ilk çalışmalar Joseph Fourier' e uzanmaktadır. Doğrusal anlamda, eşitsizlikler sistemi şeklinde bir problemin incelenmesine yönelik çalışmaları vardır.

1920' li yıllarda, Rus ekonomisinin teorik anlamda planlanmasına dönük olarak Leonid Kantaroviç' in çalışması bulunmaktadır. Ayrıca Leonid Kantaroviç, herhangi bir çözüm yöntemi göstermemesine karşın, doğrusal programlama modelini ilk defa 1942 yılında formüle eden kişidir.

İkinci Dünya Savaşı' ndan sonraki dönemde ABD Hava Kuvvetleri' nde bir ekiple çalışmakta olan George Dantzig, 1947 yılında doğrusal programlama modellerinin çözümü için simpleks algoritmasını geliştirmiştir.

1947' de John Von Neumann oyunlar teorisi ve ikincillik teorisi üzerinde çalışmalarda bulunmuştur.

1953 yılında A. Charnes, W. W. Cooper ve A. Hernderson doğrusal programlama modelinin matematiksel açıklamasını yapmışlardır.

1958 yılında Earl A. Heady ve Wilfred Candler tarım alanında, doğrusal programlama ile maksimizasyon ve minimizasyon problemlerine yönelik olarak optimizasyon çalışmaları yapmışlardır.

Doğrusal programlama alanında sağlamış oldukları gelişmelerden dolayı Kantoroviç, Dantzing ve Von Neumann' a 1975' de Nobel Ekonomi Ödülü verilmiştir.

Doğrusal programlama modeli tarihsel süreç içerisinde gelişimini sürdürmüştür. Bununla birlikte doğrusal modellere değişik çözüm yöntemleri geliştirilmiştir. Doğrusal programlama başta askeri sebeplerden dolayı ortaya çıkmış olsa da, daha sonra etkinliğinin ve getirilerinin anlaşılmasıyla kendisine geniş kullanım alanı bulmuştur.

2.2. Doğrusal Programlama Modelinin Varsayımları

Doğrusal programlama modellerinin sağlıklı sonuçlar vermesi bir takım varsayımları ihtiva etmesiyle mümkündür. Aksi takdirde ortaya çıkacak sonuçlar hem kendi aralarında hem de sistemin bütünüyle tutarlı olmayıp, matematiksel bakımdan çelişkili sonuçlar doğuracaktır. Doğrusal programlama modellerinin, aşağıda açıklamaları verilen varsayımları bulundurdukları kabul edilerek kurulması ve çözülmesi mümkün olacaktır.

i) Doğrusallık Varsayımı:

Amaç ve kısıt fonksiyonlarındaki değişkenlerin, birinci dereceden değişkenler olması gerektiğini belirten varsayımdır. Değişkenlerin kuvvetleri 1 olarak kabul edilmekte ve model bu şekilde kurulmaktadır. Örnek vermek gerekirse, 1 adet pantolonun satış fiyatı 30 dolar ise 100 adet pantolonun satış fiyatı 100 x 30 = 3000 dolar olarak bulunacaktır. Buna aykırı bir durumda model doğrusallık özelliğini kaybedecektir.

ii) Toplanabilirlik Varsayımı:

Üretime kaynak teşkil eden faktörlerin toplamının, bu faktörlerin her birinin getirmiş olduğu katkıların toplamına eşit olması durumudur. Diğer bir açıdan düşünüldüğünde değişkenlerin her birinin katkısı toplam katkıyı oluşturmaktadır.

iii) Negatif Olmama Varsayımı:

Doğrusal modele konu olan temel, aylak ve artık değişkenlerin değerlerinin sıfırdan küçük olmaması gerektiği varsayımıdır. Kullanım amaçları gerçek yaşam problemlerini çözmek olan doğrusal modellerin, karar değişkenleri negatif değerler alamazlar. Diğer bir ifadeyle negatif kaynak kullanımına doğrusal programlama modellerinde yer verilmez. İşte bu sebeplerden dolayı doğrusal modellerin grafik çözümlerinde, koordinat sisteminin birinci bölgesi kullanılmaktadır.

Tüm doğrusal programlama modellerinde, değişkenlerin pozitif olması koşulu vardır. Yani $x_j \geq 0$ dır. Bu koşul, doğrusal programlama probleminin birçok geçersiz çözümünü bir anda ortadan kaldırmakta ve en uygun çözüme ulaşmayı önemli ölçüde kolaylaştırmaktadır (Bakoğlu, 1982: 7).

iv) Bölünebilirlik Varsayımı:

Modelin karar değişkenleri, tamsayılı değerlerin yanı sıra, kesirli değerler de alabiliyorsa, bölünebilirlik varsayımı gerçekleşmiş olmaktadır. Karar değişkenleri, bazı faaliyetlerin düzeyini gösterdiğinden, faaliyetlerin kesirli düzeylerde çalışabileceği varsayılmaktadır. Bölünmezlik durumunda ise devreye tamsayılı programlama girmektedir.

v) Belirlilik (Kesinlik) Varsayımı:

Doğrusal modele konu olan üretim faktörlerinin ve kıt kaynakların önceden belirlenebilir olduğu varsayımıdır. Doğrusal programlama genellikle gelecekteki faaliyetlerin seçiminde kullanılır. Bu yüzden de parametre değerleri gelecekteki koşullar dikkate alınarak belirlenir. Optimal çözüm bulunduktan sonra, bu çözümün parametrelere olan duyarlılığını göstermede duyarlılık analizi kullanılmaktadır.

Bölünebilirlik ve belirlilik varsayımları yapısı gereği doğrusal programlama modellerini kısıtlamaktadır. Bir başka ifade ile bu iki varsayım geleceğe yönelik tahmini süreçler içerdiğinden dolayı, doğrusal programlama yapısını bozucu yönde etki göstermektedirler.

2.3. Doğrusal Programlama Modelinin Matematiksel Yapısı

Doğrusal programlama modeli üç ana unsurdan oluşmaktadır:

i) Amaç fonksiyonu
ii) Kaynaklara ait kısıtlar
iii) Negatif olmama kısıtı

Amaç fonksiyonu gerçekleştirilmek istenen fonksiyondur. Modelin amaç fonksiyonunda karar değişkenleri $x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n$ ve kar veya maliyet parametreleri de $c_1, c_2, \ldots, c_j, \ldots, c_n$ ile gösterildiği durumda:

Maksimum veya Minimum $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots, c_nx_n$

şeklinde yazılır.

Karar değişkenleri, karar vericinin kontrolünde bulunan ve modelin performansına etki eden değişkenlerdir (Winston, 2004: 2).Karar değişkenleri x_j $(j=1,2,\ldots,n)$ notasyonuyla ifade edilebilir. Çoğu durumda karar değişkenleri belirli değerler için mümkündür. Karar değişkenleri bu değerlerin kısıtlaması altında değerler alabilmektedir.

İşletmenin üretimde kullanacağı kaynak miktarları b_i $(i=1,2,\ldots,n)$ ve teknoloji katsayıları da a_{ij} notasyonlarıyla ifade edilmektedir.

Doğrusal programlama modellerinin genel yapıları aşağıdaki gibidir:

Amaç fonksiyonu:

Maksimum (Minimum) $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots c_nx_n$

Kısıtlayıcılar:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n \leq (\geq) b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n \leq (\geq) b_2$

. . .

. . .

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n \leq (\geq) b_m$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$

2.4. Doğrusal Programlama Modelinin Avantajları ve Dezavantajları

Doğrusal programlama yöntemine avantajları yönünden bakmak gerekirse, belirlenmiş tek bir amacın maksimize ya da minimize edilmesinin istenildiği durumlarda, karar vericiye hızlı ve güvenilir şekilde bilgi vermesi bakımından, kullanılabilir bir yöntem olarak ortaya çıkmaktadır. Aynı zamanda çok fazla matematiksel işlem gerektirmeyen bir yöntemdir.

Doğrusal programlamaya dezavantajları yönünden bakmak gerekirse, günlük hayat problemlerinin çoğunun genel yapısı doğrusal olmadığından ve geleceğe yönelik belirsizlikler barındıracağından, doğrusal programlama yöntemi böyle karmaşık yapıdaki problemlerin çözümünde yetersiz kalmaktadır.

2.5. Doğrusal Programlama Modelleme Örnekleri

Doğrusal programlamanın modelleme örnekleri iki örnek üzerinde incelenmiştir. İlk olarak bir firmanın optimum üretim karması bulunarak, maksimum kar miktarı belirlenecektir. İkinci örnekte de bir firmanın reklam stratejisi, maliyetleri minimum seviyede tutacak şekilde oluşturulacaktır.

Örnek: Giapetto firması tahtadan oyuncak asker ve tren yapmaktadır. Satış fiyatları, bir oyuncak asker için $ 27, bir oyuncak tren için $ 21' dır. Bir asker için $ 10' lık hammadde ve $ 14' lık işçilik kullanılmaktadır. Bir tren için ise söz konusu rakamlar sırasıyla $ 9 ve $ 10' dır. Her bir asker için 2 saat montaj ve 1 saat marangozluk gerekirken, her bir tren için 1 saat montaj ve 1 saat marangozluk gerekmektedir. Eldeki hammadde miktarı sınırsızdır. Haftada en çok 100 saat montaj ve 80 saat marangozluk kullanabilen Giapetto' nun haftada en fazla 40 oyuncak asker satabileceğini göz önünde bulundurarak karını maksimum yapabilmek için, hangi oyuncaktan haftada kaç adet üretmesi gerektiği problemini çözmek için kullanılacak model aşağıdaki gibi olacaktır (Winston, 2004: 49):

Amaç fonksiyonu:

Maksimum $z = 3x_1 + 2x_2$

Kısıtlayıcılar:

$2x_1 + x_2 \leq 100$

$x_1 + x_2 \leq 80$

$x_1 \leq 40$

$x_1, x_2 \geq 0$

Örnek: Dorian firması, yüksek gelirli müşterileri için otomobil ve jip üretmektedir. Televizyondaki tiyatro oyunlarına ve futbol maçlarına 1 dakikalık spot reklamlar vererek satışlarını arttırmayı hedeflemektedir. Tiyatro oyununa verilen reklamın maliyeti $ 50 bin ve hedef kitledeki 7 milyon kadın ve 2 milyon erkek tarafından seyredilmektedir. Futbol maçına verilen reklamın maliyeti ise $ 100 bin ve hedef kitledeki 2 milyon kadın ve 12 milyon erkek tarafından seyredilmektedir. Dorian firması yüksek gelirli 28 milyon kadın ve 24 milyon erkeğe en az maliyetle nasıl ulaşır problemini çözmek için kullanılacak model aşağıdaki gibi olacaktır (Winston, 2004: 60):

Amaç fonksiyonu:

Minimum $z = 50x_1 + 100x_2$

Kısıtlayıcılar:

$7x_1 + 2x_2 \geq 28$

$2x_1 + 12x_2 \geq 24$

$x_1, x_2 \geq 0$

2.6. Doğrusal Programlama Modelinin Çözüm Yöntemleri

Bu aşamada, doğrusal programlama modellerinin çözümünde kullanılan yöntemlerden, grafik çözümü ve simpleks algoritması ele alınacaktır. Bu yöntemlerin çeşitli örnekler üzerinde uygulamaları yapılarak, çözümde ortaya çıkabilecek sonuçlar üzerinde durulacaktır.

2.6.1. Grafik Çözüm Yöntemi

Grafik çözüm yönteminin uygulanması, genellikle iki değişken barındıran modeller üzerinde uygun olmakla birlikte, çözüm sırasında aşağıdaki işlem basamakları uygulanır:

i) Kısıtlar bölümünü oluşturan eşitsizlikler, eşitlik biçimine dönüştürülerek çözülür ve koordinat sisteminin birinci bölgesinde çizilir. Bu basamakta uygun çözüm alanı (U.Ç.A) grafikte taranır.

ii) U.Ç.A' nın köşe noktaları belirlenip, bu noktalar amaç fonksiyonunda yerine yazılarak değerler bulunur.

iii) Optimal sonucu veren köşe noktası bulunduktan sonra, ortaya çıkan değer kendiliğinden optimal değer olarak adlandırılacaktır.

Grafik çözüm yöntemini minimizasyon ve maksimizasyon tarzındaki örneklere uygulayarak ifade etmek için, Bölüm 2.5' te yer alan doğrusal programlamaya ait örnekler çözülerek, grafiklerinin çizilmesi ve U.Ç.A' nın bulunması bu bölümde ele alınacaktır.

2.6.1.1. Maksimizasyon Modelinin Grafik Çözümü

İki boyutlu doğrusal programlama modelinin çözümü için etkin ve elverişli bir yöntem, grafik çözüm yöntemidir. Grafik çözüm yöntemi Bölüm 2.5' te verilen maksimizasyon türündeki örnek üzerinden açıklanacaktır.

Amaç fonksiyonu:

Maksimum $z = 3x_1 + 2x_2$

Kısıtlayıcılar:

$2x_1 + x_2 \leq 100$

$x_1 + x_2 \leq 80$

$x_1 \leq 40$

$x_1, x_2 \geq 0$

İlk olarak Bölüm 2.6.1' de açıklaması verilen işlem basamaklarından birincisi modele uygulanır.

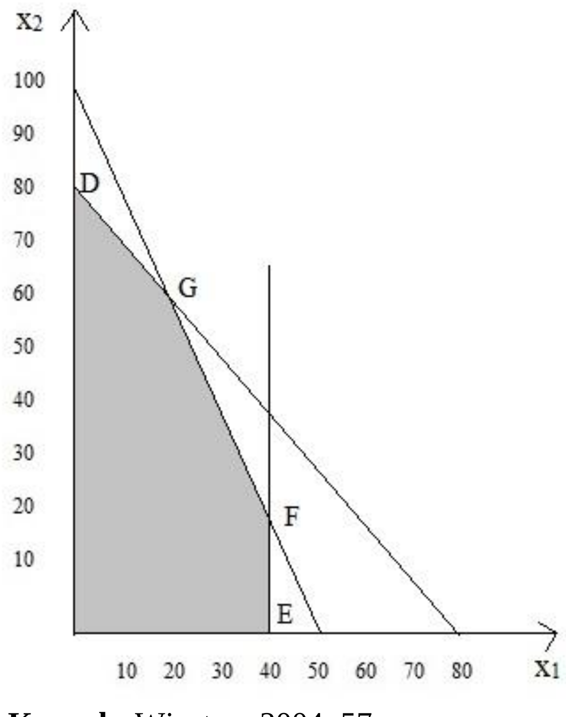
Montaj zaman kısıtlamasına ait olan $2x_1 + x_2 \leq 100$ eşitsizliği, $2x_1 + x_2 = 100$ biçiminde eşitliğe dönüştürülerek, $x_1 = 0$ için $x_2 = 100$ ve $x_2 = 0$ için de $x_1 = 50$ olarak bulunur.

Marangozluk zaman kısıtlamasına ait olan $x_1 + x_2 \leq 80$ eşitsizliği, $x_1 + x_2 = 80$ biçiminde eşitliğe dönüştürülerek, $x_1 = 0$ için $x_2 = 80$ ve $x_2 = 0$ için de $x_1 = 80$ olarak bulunur.

Talep miktarı kısıtlamasına ait olan $x_1 \leq 40$ eşitsizliği, $x_1 = 40$ biçiminde eşitliğe dönüştürülür.

Yukarıda verilen birinci işlem basamağından sonra bulunan değerlere uygun olarak grafik çizilir ve U.Ç.A taranır. Böylece ikinci işlem basamağı tamamlanmış olur.

Grafik 1: Maksimizasyon Modelinin Grafik Çözümü



Kaynak: Winston, 2004: 57

Son işlem basamağında ise Grafik 1' de U.Ç.A' nın köşelerinde bulunan D, G, F ve E noktaları amaç fonksiyonunda teker teker yerine yazılarak değerleri tespit edilir.

D(0,80) köşe noktası için; $3x_1 + 2x_2 = 3.(0) + 2.(80) = 160$

G(20,60) köşe noktası için; $3x_1 + 2x_2 = 3.(20) + 2.(60) = 180$

F(40,20) köşe noktası için; $3x_1 + 2x_2 = 3.(40) + 2.(20) = 160$

E(40,0) köşe noktası için; $3x_1 + 2x_2 = 3.(40) + 2.(0) = 120$

Yukarıda bulunan köşe noktalarının amaç fonksiyonunda yerine yazılması sonucunda bulunan değerler incelendiğinde, G köşe noktası sonucu, amaç fonksiyonunu maksimum yapmıştır.

2.6.1.2. Minimizasyon Modelinin Grafik Çözümü

Minimizasyon problemi için grafik çözüm yöntemi, birkaç küçük farklılık dışında maksimizasyon problemine benzemektedir. Söz konusu farklılıklar, çözüm alanının ve optimum çözüm noktasının belirlenmesi aşamasında ortaya çıkmaktadır.

Bölüm 2.5' te modeli kurulmuş olan minimizasyon türündeki örnek için grafik çözüm yönteminin uygulanması aşağıdaki gibi olacaktır.

Amaç fonksiyonu:

Minimum $z = 50x_1 + 100x_2$

Kısıtlayıcılar:

$7x_1 + 2x_2 \geq 28$

$2x_1 + 12x_2 \geq 24$

$x_1, x_2 \geq 0$

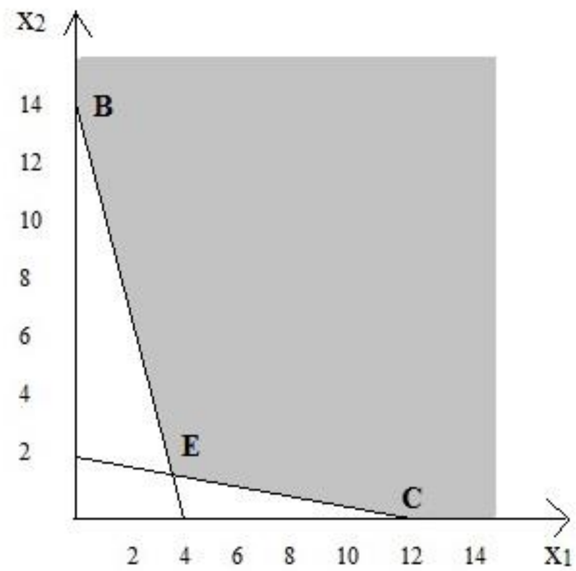
Bölüm 2.6.1.1.' de uygulanmış olan işlem basamakları, benzer şekilde modele uygulanır. Birinci işlem basamağına uygun olarak aşağıdaki işlemler uygulanır.

Kadın seyirci kısıtlamasına ait olan $7x_1 + 2x_2 \geq 28$ eşitsizliği, $7x_1 + 2x_2 = 28$ biçiminde eşitliğe dönüştürülerek, $x_1 = 0$ için $x_2 = 14$ ve $x_2 = 0$ için de $x_1 = 4$ olarak bulunur.

Erkek seyirci kısıtlamasına ait olan $2x_1 + 12x_2 \geq 24$ eşitsizliği, $2x_1 + 12x_2 = 24$ biçiminde eşitliğe dönüştürülerek, $x_1 = 0$ için $x_2 = 2$ ve $x_2 = 0$ için de $x_1 = 12$ olarak bulunur.

Yukarıda verilen birinci işlem basamağından sonra bulunan değerlere uygun olarak grafik çizilir ve U.Ç.A taranır. Böylece ikinci işlem basamağı tamamlanmış olur.

Grafik 2: Minimizasyon Modelinin Grafik Çözümü



Kaynak: Winston, 2004: 61

Son işlem basamağında ise Grafik 2' de U.Ç.A' nın köşelerinde bulunan B, E ve C noktaları amaç fonksiyonunda teker teker yerine yazılarak değerleri tespit edilir.

B(0,14) köşe noktası için; $50x_1 + 100x_2 = 50.(0) + 100.(14) = 1400$

C(12,0) köşe noktası için; $50x_1 + 100x_2 = 50.(12) + 100.(0) = 600$

E(3,6,1,4) köşe noktası için; $50x_1 + 100x_2 = 50.(3,6) + 100.(1,4) = 320$

Yukarıda bulunan köşe noktalarının amaç fonksiyonunda yerine yazılması sonucunda bulunan değerler incelendiğinde, E köşe noktası sonucu, amaç fonksiyonunu minimum yapmıştır.

2.6.2. Simpleks Çözüm Yöntemi

Simpleks yöntemi George B. Dantzig tarafından ortaya atılmıştır. Simpleks yöntemde optimum çözüme ardışık işlemler yoluyla ulaşılmaktadır (Zengin, 1987: 10).

Simpleks algoritması, tek bir noktada en iyi çözüm, birden fazla uç noktada en iyi çözüm, sınırsız çözüm ve uygun çözüm alanı boş gibi karşılaşılabilir tüm durumlara da cevap vermektedir. Bunların yanı sıra, modelin yapısında veya parametrelerinde meydana gelebilecek olası değişimlerin en iyi çözümü nasıl etkileyecekleri de, bu algoritmayla analiz edilebilmektedir (Kara, 1991: 56).

2.6.2.1. Maksimizasyon Modelinin Simpleks Çözümü

Simpleks yöntem kullanılarak yapılan hesaplamalarla, işletmelerin karlarını maksimum yapabilmesi için, farklı ürünlerden hangi miktarda üretmesi gerektiği kolaylıkla belirlenebilmektedir. Bölüm 2.5' te modeli kurulmuş olan maksimizasyon türündeki örnek için simpleks çözüm yönteminin uygulanması aşağıdaki gibi olacaktır.

Amaç fonksiyonu:
Maksimum $z = 3x_1 + 2x_2$

Kısıtlayıcılar:
$2x_1 + x_2 \leq 100$
$x_1 + x_2 \leq 80$
$x_1 \leq 40$
$x_1, x_2 \geq 0$

şeklindeki problem standart forma dönüştürülecektir.

Maksimum $z = 3x_1 + 2x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$

$2x_1 + x_2 + s_1 = 100$

$x_1 + x_2 + s_2 = 80$

$x_1 + s_3 = 40$

$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

Problemin standart formu elde edildikten, bu forma uygun şekilde hazırlanmış başlangıç simpleks tablosunun oluşturulması gerekmektedir. Tablo 2' de maksimizasyon probleminin başlangıç simpleks tablosu verilmiştir.

Tablo 2: Başlangıç Simpleks Tablosu (Maksimizasyon)

c_j	**Temel Değişkenler**	**Miktar**	3	2	0	0	0
			x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
0	s_1	100	2	1	1	0	0
0	s_2	80	1	1	0	1	0
0	s_3	40	1	0	0	0	1
	z_j	0	0	0	0	0	0
	$c_j - z_j$		3	2	0	0	0

$c_j - z_j$ satırının en büyük değerini aldığı sütun yani x_1 sütunu, anahtar sütun olarak seçilir. Miktar sütununda bulunan değerler sırasıyla anahtar sütunda bulunan değerlere bölünerek, bunların içinden negatif veya sıfır olmayan en küçük değer seçilir.

100 : 2 = 50, 80 : 1 = 80 ve 40 : 1 = 40 işlemleri incelendiğinde 40 değeri daha küçük olacağından s_3 temel değişkeninin bulunduğu satır, anahtar satır olarak seçilir. Anahtar satır ve anahtar sütunun kesişimlerinde bulunan değer, anahtar sayı olarak isimlendirilir. Anahtar sayı değeri 1 olacak şekilde, anahtar satırda bulunan bütün değerler anahtar sayıya bölünür. Sonuç olarak anahtar sütunda bulunan değişken, anahtar satırda bulunan değişkenin yerine çözüme girmiş olur. Gauss – Jordan eliminasyon yönteminden

yararlanılarak gerekli matris işlemleri yapılır. Gerekli işlemler yapıldıktan sonra Tablo 3 oluşturulur.

Tablo 3: Birinci Simpleks Tablosu

c_j	Temel Değişkenler	Miktar	3	2	0	0	0
			x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
0	s_1	20	0	1	1	0	-2
0	s_2	40	0	1	0	1	-1
3	x_1	40	1	0	0	0	1
	z_j	120	3	0	0	0	3
	c_j - z_j		0	2	0	0	-3

Tablo 3' ün oluşturulmasında olduğu gibi, $c_j - z_j$ satırının en büyük değerini aldığı sütun yani x_2 sütunu, anahtar sütun olarak seçilir.

20 : 1 = 20 ve 40 : 1 = 40 işlemleri incelendiğinde 20 değeri daha küçük olacağından, s_1 temel değişkeninin bulunduğu satır, anahtar satır olarak seçilir. Tablo 3' ün oluşturulmasında uygulanan işlemler tekrarlanarak Tablo 4 oluşturulur.

Tablo 4: İkinci Simpleks Tablosu

c_j	Temel Değişkenler	Miktar	3	2	0	0	0
			x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
2	x_2	20	0	1	1	0	-2
0	s_2	20	0	0	-1	1	1
3	x_1	40	1	0	0	0	1
	z_j	160	3	2	2	0	-1
	c_j - z_j		0	0	0	0	1

Tablo 4' ün oluşturulmasında olduğu gibi, $c_j - z_j$ satırının en büyük değerini aldığı sütun yani s_3 sütunu, anahtar sütun olarak seçilir. 20 : 1 = 20 ve 40 : 1 = 40 işlemleri incelendiğinde 20 değeri daha küçük olacağından, s_2 temel değişkeninin bulunduğu satır, anahtar satır olarak seçilir. İşlemler tamamlandıktan sonra Tablo 5 oluşturulur.

Tablo 5: Üçüncü Simpleks Tablosu

c_j	Temel Değişkenler	Miktar	3	2	0	0	0
			x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
2	x_2	60	0	1	-1	2	0
0	s_3	20	0	0	-1	1	1
3	x_1	20	1	0	1	-1	0
	z_j	180	3	2	1	1	-1
	$c_j - z_j$		0	0	-1	-1	-1

Tablo 5' in $c_j - z_j$ satırı incelendiğinde pozitif bir sayı bulunmadığı görülmektedir. Bu nedenle $x_1 = 20$ ve $x_2 = 60$ değişken değerleri için bulunacak $z = 180$ değeri, amaç fonksiyonunu maksimum yapan değer olarak karşımıza çıkacaktır.

2.6.2.2. Minimizasyon Modelinin Simpleks Çözümü

İşletmeleri, kurum veya kuruluşları yöneten karar alıcılar, karlarını maksimum yapabilmek için, maliyetlerini minimum seviyede tutmak zorundadır. Bu sebeple maliyetlerin minimum seviyesinin hesaplanmasında, simpleks çözüm yönteminden yararlanmak faydalı olacaktır. Bölüm 2.5' te modeli kurulmuş olan minimizasyon türündeki örnek için simpleks çözüm yönteminin uygulanması aşağıdaki gibi olacaktır.

Amaç fonksiyonu:

Minimum $z = 50x_1 + 100x_2$

Kısıtlayıcılar:

$7x_1 + 2x_2 \geq 28$

$2x_1 + 12x_2 \geq 24$

$x_1, x_2 \geq 0$

şeklindeki problemi standart forma dönüştürdüğümüzde aşağıdaki gibi olacaktır.

Minimum $z = 50x_1 + 100x_2 + 0s_1 + 0s_2 + MA_1 + MA_2$

$7x_1 + 2x_2 – s_1 + A_1 = 28$

$2x_1 + 12x_2 – s_2 + A_2 = 24$

$x_1, x_2, s_1, s_2, A_1, A_2 \geq 0$

Problemin standart formu elde edildikten sonra, bu forma uygun şekilde hazırlanmış başlangıç simpleks tablosunun oluşturulması gerekmektedir. Tablo 6' da minimizasyon probleminin başlangıç simpleks tablosu verilmiştir.

Tablo 6: Başlangıç Simpleks Tablosu (Minimizasyon)

c_j	**Temel Değişkenler**	**Miktar**	50	100	0	0	M	M
			x_1	x_2	s_1	s_2	A_1	A_2
M	A_1	28	7	2	-1	0	1	0
M	A_2	24	2	12	0	-1	0	1
	z_j	0	9M	14M	-M	-M	M	M
	$z_j - c_j$		9M - 50	14M - 100	-M	-M	0	0

Maksimizasyon probleminin simpleks yöntemi ile çözümünden farklı olarak, burada c_j - z_j satırı – 1 sayısı ile çarpılarak z_j - c_j elde edilir ve tabloda yerine yazılır. Burada M yerine keyfi olarak büyük bir değer atanır. M = 100 olarak alınırsa bu durumda;

$9M – 50 = 9(100) – 50$

$= 900 – 50$

$= 850$

$14M - 100 = 14(100) - 100$

$= 1400 – 100$

$= 1300$

olarak sonuçlar bulunacaktır. z_j - c_j satırının en büyük değerini aldığı sütun yani x_2 sütunu, anahtar sütun olarak seçilir. Miktar sütununda bulunan değerler sırasıyla anahtar sütunda bulunan değerlere bölünerek, bunların içinden negatif veya sıfır olmayan en küçük değer seçilir. 28 : 2 = 14 ve 24 : 12 = 2 işlemleri incelendiğinde 2 değeri daha küçük olacağından, A_2 yapay değişkeninin bulunduğu satır, anahtar satır olarak seçilir. Maksimizasyon probleminin çözümünde kullanılan yöntemler burada da aynı şekilde uygulanır. Gerekli işlemler yapıldıktan sonra Tablo 7 oluşturulur.

Tablo 7: Birinci Simpleks Tablosu

c_j	**Temel Değişkenler**	**Miktar**	50	100	0	0	M	M
			x_1	**x_2**	**s_1**	**s_2**	**A_1**	**A_2**
M	**A_1**	24	20/3	0	-1	1/6	1	-1/6
100	**x_2**	2	1/6	1	0	-1/12	0	1/12
	z_j	200	20M/3 + 100/6	100	-M	M/6 – 100/12	M	M
	z_j - c_j		20M/3 – 100/3	0	-M	-M	0	0

z_j - c_j satırına dikkat edildiği takdirde, en büyük değerin yer aldığı sütun x_1 olarak açıkça görülmektedir. Çünkü diğer sütunlarda bulunan değerler ya negatif ya da sıfır olarak Tablo 7' nin z_j - c_j satırında yer almışlardır. Bu durumda x_1 sütunu, anahtar sütun olarak seçilir.

24 : 20/3 = 3,6 ve 2 : 1/6 = 12 işlemleri incelendiğinde 3,6 değeri daha küçük olacağından, A_1 yapay değişkeninin bulunduğu satır, anahtar satır olarak seçilir. Gerekli işlemler tamamlandıktan sonra Tablo 8 oluşturulur.

Tablo 8: İkinci Simpleks Tablosu

c_j	Temel Değişkenler	Miktar	50	100	0	0	M	M
			x_1	x_2	s_1	s_2	A_1	A_2
50	x_1	3,6	1	0	-3/20	1/40	3/20	-1/40
100	x_2	1,4	0	1	1/40	-21/240	-1/40	21/240
	z_j	320	50	100	-5	-7,5	5	7,5
	z_j - c_j		0	0	-5	-7,5	5 - M	7,5 - M

Tablo 8' in $z_j - c_j$ satırı incelendiğinde pozitif bir sayı bulunmadığı görülmektedir. Bu nedenle $x_1 = 3,6$ ve $x_2 = 1,4$ değişken değerleri için bulunacak z = 320 değeri, amaç fonksiyonunu minimum yapan değer olarak ortaya çıkacaktır.

2.6.2.3. Simpleks Çözümde Karşılaşılan Özel Durumlar

Bu bölümde simpleks yönteminin çözümlerinde ortaya çıkabilecek özel durumlar ve ortaya çıkma sebepleri örnek uygulamalarla birlikte ifade edilecektir.

2.6.2.3.1. Bozulma (Dejenerasyon)

Bir standart doğrusal programlama probleminin, sınır denklemlerinin bir temel çözümünde sıfırdan farklı değişkenlerin sayısı denklem sayısından az ise veya aynı anlama gelmek üzere temel değişkenlerden en az biri sıfır ise, o temel çözüme dejenere çözüm denir (Özgüven, 1986: 181). Aşağıda bozulma (dejenerasyon) durumunun sebebi, örnek problem üzerinden açıklanmıştır.

Örnek: Taha, 2006: 113

Amaç fonksiyonu:

Maksimum $z = 3x_1 + 9x_2$

Kısıtlayıcılar:

$x_1 + 4x_2 \leq 8$

$x_1 + 2x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

Yukarıda modeli verilen örnek problem standart forma dönüştürüldüğünde aşağıdaki gibi elde edilecektir:

Amaç fonksiyonu:

Maksimum $z = 3x_1 + 9x_2 + 0s_1 + 0s_2$

Kısıtlayıcılar:

$x_1 + 4x_2 + s_1 = 8$

$x_1 + 2x_2 + s_2 = 4$

$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

Yukarıda standart formuyla verilen modelin simpleks çözüm tabloları aşağıda verilmiştir.

Tablo 9: Başlangıç Simpleks Tablosu (Bozulma)

c_j	Temel Değişkenler	Miktar	3	9	0	0
			x_1	x_2	s_1	s_2
0	s_1	8	1	4	1	0
0	s_2	4	1	2	0	1
	z_j	0	0	0	0	0
	$c_j - z_j$		3	9	0	0

Tablo 10: Birinci Simpleks Tablosu

c_j	Temel Değişkenler	Miktar	3	9	0	0
			x_1	x_2	s_1	s_2
9	x_2	2	1/4	1	1/4	0
0	s_2	0	1/2	0	-1/2	1
	z_j	18	9/4	9	9/4	0
	$c_j - z_j$		3/4	0	-9/4	0

Tablo 11: İkinci Simpleks Tablosu

c_j	Temel Değişkenler	Miktar	3	9	0	0
			x_1	x_2	s_1	s_2
9	x_2	2	0	1	1/2	-1/2
3	x_1	0	1	0	-1	2
	z_j	18	9/4	9	9/4	0
	$c_j - z_j$		3/4	0	-9/4	0

İkinci simpleks tablosuna göre, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ ve $z = 18$ olduğu anlaşılmaktadır. Bu durumda, x_1 temel değişkeni sıfır değerli olduğundan, ulaşılan çözüm optimal bozulan çözüm olarak ortaya çıkacaktır.

2.6.2.3.2. Sınırsız Çözüm

En uygun çözümün sınırsız olması demektir. Böyle bir durum, doğrusal programlama modelinin kuruluşunda hata yapıldığı, problemin yanlış ifade edildiği ya da doğru olmayan bir varsayımın öngörüldüğü şeklinde izah edilebilir (Turban ve Meredith, 1994: 102).

Bir maksimizasyon probleminde uygun çözüm alanının yukarıdan sınırlandırılmamış olması halinde, karar değişkenlerinin ve amaç fonksiyonunun değerini sonsuza kadar arttırmak, bir minimizasyon probleminde ise uygun çözüm alanının aşağıdan sınırlandırılmamış olması halinde, karar değişkenlerinin ve amaç fonksiyonunun değerini sonsuza kadar azaltmak mümkün olur. İşte bu durumda sınırsız çözümler ortaya çıkmaktadır (Özgüven, 1986: 167). Aşağıda sınırsız çözüm durumunun sebebi, örnek problem üzerinden açıklanmıştır.

Örnek: Winston, 2004: 67

Amaç fonksiyonu:

Maksimum $z = 2x_1 - x_2$

Kısıtlayıcılar:

$x_1 - x_2 \leq 1$

$2x_1 + x_2 \geq 6$

$x_1, x_2 \geq 0$

Yukarıda modeli verilen örnek problem standart forma dönüştürüldüğünde aşağıdaki gibi elde edilecektir:

Amaç fonksiyonu:

Maksimum $z = 2x_1 - x_2 + 0s + 0v - MA$

Kısıtlayıcılar:

$x_1 - x_2 + s = 1$

$2x_1 + x_2 - v + A = 6$

$x_1, x_2, s, v, A \geq 0$

Yukarıda standart formuyla verilen modelin simpleks çözüm tabloları aşağıda verilmiştir.

Tablo 12: Başlangıç Simpleks Tablosu (Sınırsız Çözüm)

c_j	Temel Değişkenler	Miktar	2	-1	0	-M	0
			x_1	x_2	v	A	s
-M	A	1	1	-1	0	0	1
0	s	6	2	1	-1	1	0
	z_j	-M	0	0	0	0	0
	$c_j - z_j$		2	-1	0	-M	0

Tablo 13: Birinci Simpleks Tablosu

c_j	Temel Değişkenler	Miktar	2	-1	0	-M	0
			x_1	x_2	v	A	s
2	x_1	1	1	-1	0	0	1
0	s	4	0	3	-1	1	-2
	z_j	-M	2	-2	0	0	2
	$c_j - z_j$		0	1	0	-M	-2

Tablo 14: İkinci Simpleks Tablosu

c_j	Temel Değişkenler	Miktar	2	-1	0	-M	0
			x_1	x_2	v	A	s
2	x_1	7/3	1	0	-1/3	1/3	1/3
-1	x_2	4/3	0	1	-1/3	1/3	-2/3
	z_j	10/3	2	-1	-1/3	1/3	4/3
	$c_j - z_j$		0	0	1/3	-M-1/3	-4/3

Herhangi bir doğrusal programlama problemini simpleks yöntemi ile çözerken çözümün sınırsız olduğunu söyleyebilmek için maksimizasyon probleminde c_j - z_j satırında işleme girecek pozitif değerli sütundaki elemanların hepsi negatif veya sıfır değerli olmalıdır. Minimizasyon probleminde ise c_j - z_j satırında işleme girecek mutlak değerce en büyük negatif değerli sayı sütunundaki tüm elemanlar, negatif veya sıfır değerli olursa çözüme sınırsız çözüm denmektedir (Öztürk, 2011: 135).

Yukarıdaki ifadelerden anlaşılacağı üzere, c_j - z_j satırına bakıldığında hala pozitif değerli sayı olduğundan çözüm optimal değildir. Çünkü c_j - z_j satırında bulunan 1/3 değerinin bulunduğu sütundaki diğer değerler negatif olmuştur. Bu durumda:

$$x_1 = \frac{7}{3} + \frac{1}{3}v \qquad\qquad x_2 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}v$$

olduğundan dolayı, x_1 ve x_2 değişkenleri istenildiği kadar artırılabilmektedir. Tüm bu koşullar sınırsız çözümün varlığının göstergesidir.

2.6.2.3.3. Seçenekli Optimal Çözüm

Doğrusal programlama modelleri için optimal çözüm tek değildir. Bu sebeple doğrusal programlama problemlerinde, amaç fonksiyonunun aynı optimal değerini veren karar değişkenleri takım değeri, birden fazla olabilir. Bu durum simpleks yöntemi ve grafik çözüm yöntemi ile anlaşılabilmektedir (Öztürk, 2011: 139). Aşağıda seçenekli optimal çözüm durumunun sebebi, örnek problem üzerinden açıklanmıştır.

Örnek: Hillier ve Lieberman, 1995: 131

Amaç fonksiyonu:
Maksimum $z = 3x_1 + 2x_2$

Kısıtlayıcılar:
$x_1 \leq 4$
$2x_1 \leq 12$

$3x_1 + 2x_2 \leq 18$

$x_1, x_2 \geq 0$

Yukarıda modeli verilen örnek problem standart forma dönüştürüldüğünde aşağıdaki gibi elde edilecektir:

Amaç fonksiyonu:

Maksimum $z = 3x_1 + 2x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$

Kısıtlayıcılar:

$x_1 + s_1 = 4$

$2x_1 + s_2 = 12$

$3x_1 + 2x_2 + s_3 = 18$

$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

Yukarıda standart formuyla verilen modelin simpleks çözüm tabloları aşağıda verilmiştir.

Tablo 15: Başlangıç Simpleks Tablosu (Seçenekli Optimal Çözüm)

c_j	Temel Değişkenler	Miktar	3	2	0	0	0
			x_1	x_2	s_1	s_2	s_2
0	s_1	4	1	0	1	0	0
0	s_2	12	0	2	0	1	0
0	s_3	18	3	2	0	0	1
	z_j	0	0	0	0	0	0
	$c_j - z_j$		3	2	0	0	0

Tablo 16: Birinci Simpleks Tablosu

c_j	Temel Değişkenler	Miktar	3	2	0	0	0
			x_1	x_2	s_1	s_2	s_2
3	x_1	4	1	0	1	0	0
0	s_2	12	0	2	0	1	0
0	s_3	6	0	2	-3	0	1
	z_j	12	3	0	3	0	0
	$c_j - z_j$		0	2	-3	0	0

Tablo 17: İkinci Simpleks Tablosu

c_j	Temel Değişkenler	Miktar	3	2	0	0	0
			x_1	x_2	s_1	s_2	s_2
3	x_1	4	1	0	1	0	0
0	s_2	6	0	0	3	1	-1
2	x_2	3	0	1	-3/2	0	1/2
	z_j	18	3	2	0	0	1
	$c_j - z_j$		0	0	0	0	-1

Tablo 18: Üçüncü Simpleks Tablosu

c_j	Temel Değişkenler	Miktar	3	2	0	0	0
			x_1	x_2	s_1	s_2	s_2
3	x_1	2	1	0	0	-1/3	1/3
0	s_1	2	0	0	1	1/3	-1/3
2	x_2	6	0	1	0	1/2	0
	z_j	18	3	2	0	0	1
	$c_j - z_j$		0	0	0	0	-1

Tablo 18' e göre $c_j - z_j \leq 0$ olduğundan bulunan sonuç optimaldir. Ayrıca tabloda, temel olmayan değişken s_2' nin $c_j - z_j$ satırındaki katsayısı sıfırdır. Bu durum seçenekli optimal çözümün göstergesi olarak kabul edilmektedir. s_2' nin katsayısı sıfır olduğundan temel değişken olarak işleme girmesi kara sıfır değerde katkı yapacaktır. Bu nedenle temel olmayan değişken s_2' nin işleme girmesi ile optimal çözüm değişmeyecektir.

İkinci simpleks çözüm tablosunun verdiği optimal değerler $x_1 = 4$, $x_2 = 3$, $s_2 = 6$ ve $z = 18$ olarak görülmektedir. Üçüncü simpleks çözüm tablosunun verdiği optimal değerler ise $x_1 = 2$, $x_2 = 6$, $s_1 = 2$ ve $z = 18$ olarak görülmektedir.

İkinci ve üçüncü optimal simpleks çözüm tablolarının ortaya koyduğu, temel değişkenlerin optimal değerleri farklı olmasına karşın, amaç fonksiyonunun optimal değeri 18 olarak aynı kalmıştır. Bu da problemin seçenekli optimal çözümü olduğunu göstermektedir.

2.6.2.3.4. Uygun Çözüm Bulunmama

Problemin tüm kısıtlayıcı koşulları, karar değişkenleri tarafından sağlanmaz ise problemin uygun çözümü yoktur. Eğer optimal çözüm tablosunun, temel değişkenler sütununda yapay değişken yer alır ve çözüm değeri sıfırdan farklı olursa, problemin uygun çözümü olmadığı söylenir. Optimal çözüme ise yalancı optimal denir (Öztürk, 2011: 140).

Aşağıda seçenekli uygun çözüm bulunmama durumunun sebebi, örnek problem üzerinden açıklanmıştır.

Örnek: Taha, 2006: 121

Amaç fonksiyonu:

Maksimum $z = 3x_1 + 2x_2$

Kısıtlayıcılar:

$2x_1 + x_2 \leq 2$

$3x_1 + 4x_2 \geq 12$

$x_1, x_2 \geq 0$

Yukarıda modeli verilen örnek problem standart forma dönüştürüldüğünde aşağıdaki gibi elde edilecektir:

Amaç fonksiyonu:

Maksimum $z = 3x_1 + 2x_2 + 0s + 0v - MA$

Kısıtlayıcılar:

$2x_1 + x_2 + s = 2$

$3x_1 + 4x_2 – v + A = 12$

$x_1, x_2, s, v, A \geq 0$

Yukarıda standart formuyla verilen modelin simpleks çözüm tabloları Tablo 19 ve Tablo 20’ de verilmiştir.

Tablo 19: Başlangıç Simpleks Tablosu (Uygun Çözüm Bulunmama)

c_j	Temel Değişkenler	Miktar	3	2	0	0	-M
			x_1	x_2	s	v	A
0	s	2	2	1	1	0	0
-M	A	12	3	4	0	-1	1
	z_j	-12M	-3M	-4M	0	M	-M
	$c_j - z_j$		3+3M	2+4M	0	-M	0

Tablo 20: Birinci Simpleks Tablosu

c_j	Temel Değişkenler	Miktar	3	2	0	0	-M
			x_1	x_2	s	v	A
2	x_2	2	2	1	1	0	0
-M	A	4	-5	0	-4	-1	1
	z_j	4-4M	4+5M	2	2+4M	M	-M
	$c_j - z_j$		-5M-1	0	-4M-2	-M	0

Birinci simpleks çözüm tablosu optimal çözümü vermektedir. Fakat yapay değişken A, temel değişken olarak çözümde yer almakta ve A = 4 olmaktadır. Bu da problemin uygun çözümü olmadığını göstermektedir. Çünkü burada karar değişkeni A' nın değeri ikinci kısıtlayıcı koşulunu sağlamamaktadır.

2.6.2.3.5. Sınırsız Uygun Bölge ve Sınırlı Optimal Çözüm

Uygun bölge sınırsız olmasına karşın optimal çözüm sınırlı, yani amaç fonksiyonu sonlu optimal değerde bir sayıya sahiptir. Bu durumun c_j - z_j ve z_j satırları haricinde herhangi bir sütundaki değerlerin negatif ve sıfır olması halinde ortaya çıktığı görülmektedir (Öztürk, 2011: 144). Aşağıda sınırsız uygun bölge ve sınırlı optimal çözüm durumunun sebebi, örnek problem üzerinden açıklanmıştır.

Örnek: Öztürk, 2011: 144

Amaç fonksiyonu:
Maksimum $z = 3x_1 - 2x_2$

Kısıtlayıcılar:
$x_1 - x_2 \leq 3$
$x_1 \leq 5$
$x_1, x_2 \geq 0$

Yukarıda modeli verilen örnek problem standart forma dönüştürüldüğünde aşağıdaki gibi elde edilecektir:

Amaç fonksiyonu:
Maksimum $z = 3x_1 - 2x_2 + 0s_1 + 0s_2$

Kısıtlayıcılar:
$x_1 - x_2 + s_1 = 3$
$x_1 + s_2 = 5$
$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

Yukarıda standart formuyla verilen modelin simpleks çözüm tabloları Tablo 21, Tablo 22 ve Tablo 23' te verilmiştir.

Tablo 21: Başlangıç Simpleks Tablosu

(Sınırsız Uygun Bölge ve Sınırlı Optimal Çözüm)

c_j	Temel Değişkenler	Miktar	3	-2	0	0
			x_1	x_2	s_1	s_2
0	s_1	3	1	-1	1	0
0	s_2	5	1	0	0	1
	z_j	0	0	0	0	0
	$c_j - z_j$		3	-2	0	0

Tablo 22: Birinci Simpleks Tablosu

c_j	Temel Değişkenler	Miktar	3	-2	0	0
			x_1	x_2	s_1	s_2
3	x_1	3	1	-1	1	0
0	s_2	2	0	1	-1	1
	z_j	9	3	-3	3	0
	$c_j - z_j$		0	1	-3	0

Tablo 23: İkinci Simpleks Tablosu

c_j	Temel Değişkenler	Miktar	3	-2	0	0
			x_1	x_2	s_1	s_2
3	x_1	5	1	0	0	1
-2	x_2	2	0	1	-1	1
	z_j	11	3	-2	2	1
	$c_j - z_j$		0	0	-2	-1

Tablo 23' e göre optimal çözüm $x_1 = 5$, $x_2 = 2$ ve $z = 11$ olarak görülmektedir. Problemin başlangıç simpleks tablosunun x_2 sütununda, x_2 karar değişkeninin altında -1 ve 0 elemanları bulunmaktadır. Bu durum uygun alanın sınırsız olduğunun bir göstergesidir. Ayrıca çözüm ise sınırlıdır. Çünkü x_2 sütununun altındaki c_j - z_j satırı elemanının değeri -2 olarak ortaya çıkmaktadır.

2.7. Doğrusal Programlamada Dualite

Birçok fiziksel problemde olduğu gibi, olayların değişkenleri arasındaki ilişkiler amaca göre farklı biçimler almaktadır. Örneğin, kazancın maksimum kılınması, zararın minimum kılınmasıyla ile ilgilidir. Bunlar sadece probleme bakış çeşitleridir. Bunlardan birinin çözümü bazen diğerine de açıklık getirmektedir. Bu problemlerin özel bir simetrilik gösteren grubuna dual problemler denilmektedir. Bu problemlerden önce çözülene primal, bunun tersi (simetri) olan probleme de dual problem denilmektedir. Birçok durumda primal ve dual problemin çözümleri arasında çok yakın bir ilişki bulunmaktadır (Bakoğlu, 1982: 102).

2.7.1. Dual Problem

Her doğrusal programlama problemi, kendisiyle ilgili olan dual doğrusal programlama problemiyle ilişkilendirilmektedir. Bu problemlerden biri minimizasyon ise diğeri maksimizasyon formundadır (Luenberger, 2003: 85). Eğer primal bir maksimum problem ise duali minimum problem veya bunun tersi olmaktadır. Maksimum problemlerin değişkenleri z_j, x_1, x_2, …, x_n ve minimum problemlerin değişkenleri de y_0, y_1, y_2,…, y_n olarak tanımlanmaktadır.

Primal ve dual problemlerde değişken ve kısıtlayıcı sayısı farklı olduğundan, birinin diğerinden daha kolay çözülmesi beklenmektedir. Ayrıca her bir primal kısıt için bir dual değişken vardır. Her dual değişken, karşılık geldiği kısıtın sağ tarafında bulunan değerlerdeki bir birimlik artışa neden olan değişim oranını ifade etmektedir. Bu nedenle dual değişkenler marjinal maliyetler olarak da isimlendirilmektedir (Erdoğan, 2005: 42).

Maksimum veya minimum problemin dualinin bulunması:

i) Optimizasyon yönü tersine çevrilir, dualde minimizasyon maksimizasyona ve maksimizasyonda minimizasyona dönüştürülür.
ii) Kısıtlardaki eşitsizlik işaretleri tersine çevrilir. Ama karar değişkenleri için söz konusu olan negatif olmama kısıtları olduğu gibi kalmaktadır.
iii) Primaldeki kısıtların katsayı matrisindeki satırlar, dualdeki kısıtların matrisinde sütunlar durumuna çevrilmektedir.
iv) Primaldeki hedef fonksiyonun katsayılarını içeren satır, dualdeki kısıtlar için sabitler sütununa çevrilmektedir.
v) Primaldeki kısıtların sabitler sütunu, dualdeki hedef fonksiyonun katsayılar satırını oluşturmaktadır.

yukarıda maddeler halinde verilen işlem basamaklarının takip edilmesi ve uygulanması ile mümkün olmaktadır (Dowling, 1993: 201).

2.7.1.1. Maksimizasyon Probleminin Dual Modeli, Çözümü ve Ekonomik Yorumu

Maksimizasyon türündeki bir problemin duali, minimizasyon türündeki bir doğrusal programlama modeli olarak elde edilecektir. Bölüm 2.5’ te modeli kurulmuş olan maksimizasyon türündeki problemin duali aşağıda verilmiştir.

Amaç fonksiyonu:
Minimum $y_0 = 100y_1 + 80y_2 + 40y_3$

Kısıtlayıcılar:
$2y_1 + y_2 + y_3 \geq 3$
$y_1 + y_2 \geq 2$
$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

Yukarıda duali verilen problemden yararlanılarak simpleks çözümde kullanılmak üzere oluşturulmuş standart form:

Minimum $y_0 = 100y_1 + 80y_2 + 40y_3$

$2y_1 + y_2 + y_3 - s_1 + A_1 = 3$

$y_1 + y_2 - s_2 + A_2 = 2$

$y_1, y_2, y_3, s_1, s_2, A_1, A_2 \geq 0$

şeklinde olacaktır.

Primal problem bir üretim olayına dair çeşitli kısıtlar altında maksimum sorunu ise dual değişkenler karar vericiye, sağlanabilecek kaynakların değerine ilişkin bilgi vermektedir. Bu nedenle değişkenlere genellikle gölge fiyat adı verilmektedir. Gölge fiyatlar fayda – maliyet analizi yapmak için kullanılabilmektedir. Gölge fiyatların hesaplanması karar vericiye, kazancının ne kadarının her bir girdiden kaynaklandığını belirlemesini sağlamaktadır. Bölüm 2.6.2.2' de verilmiş olan bilgiler ışığında, Bölüm 2.7.1.1' de verilen dual probleme ait standart formdan yararlanılarak oluşturulmuş başlangıç simpleks tablosu aşağıda verilmiştir.

Tablo 24: Başlangıç Simpleks Tablosu (Minimizasyon Türündeki Dual Model)

c_j	Temel Değişkenler	Miktar	100	80	40	0	0	M	M
			y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	A_1	A_2
M	A_1	3	2	1	1	-1	0	1	0
M	A_2	2	1	1	0	0	-1	0	1
	z_j	0	3M	2M	M	-M	-M	M	M
	$z_j - c_j$		3M - 100	2M - 80	M - 40	-M	-M	0	0

Tablo 24' te z_j - c_j satırının en büyük değerini aldığı sütun yani y_1 sütunu, anahtar sütun olarak seçilir.

3 : 2 = 1,5 ve 2 : 1 = 2 işlemleri incelendiğinde 1,5 değeri daha küçük olacağından, A_1 temel değişkeninin bulunduğu satır, anahtar satır olarak seçilir. Gerekli işlemler yapıldıktan sonra Tablo 25 oluşturulur.

Tablo 25: Birinci Simpleks Tablosu

c_j	Temel Değişkenler	Miktar	100	80	40	0	0	M	M
			y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	A_1	A_2
100	y_1	3/2	1	1/2	1/2	-1/2	0	1/2	0
M	A_2	1/2	0	1/2	-1/2	1/2	-1	-1/2	1
	z_j	150 + M/2	100	50 + M/2	50 - M/2	M/2 - 50	-M	50 - M/2	M
	z_j - c_j		0	M/2 - 30	10 – M/2	M/2 - 50	-M	50 – 3M/2	0

Tablo 25' te z_j - c_j satırının en büyük değerini aldığı sütun yani y_2 sütunu, anahtar sütun olarak seçilir.

3/2 : 1/2 = 3 ve 1/2 : 1/2 = 1 işlemleri incelendiğinde 1 değeri daha küçük olacağından, A_2 temel değişkeninin bulunduğu satır, anahtar satır olarak seçilir. Gerekli işlemler yapıldıktan sonra Tablo 26 oluşturulur.

Tablo 26: İkinci Simpleks Tablosu

c_j	Temel Değişkenler	Miktar	100	80	40	0	0	M	M
			y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	A_1	A_2
100	y_1	1	1	0	1	-1	1	0	-1
80	y_2	1	0	1	-1	1	-2	-1	2
	z_j	180	100	0	20	-20	-60	20	60
	z_j - c_j		0	-80	-20	-20	-60	20 - M	60 - M

Tablo 26' da z_j - c_j satırındaki değerlerin hepsi sıfır veya negatif olduğu için bu çözüm tablosu, optimal çözümü veren tablodur. y_1 ve y_2 dual değişkenleri elverişli kaynakların değerleri olup, onlara kaynak gölge fiyatı denilmektedir.

Tablo 26 incelendiği takdirde $y_1 = 1$ ve $y_2 = 1$ olarak bulunduğu görülmektedir. Bunun anlamı montaj ve işgücü maliyetlerinin her birinin 1 dolar olduğudur. Asker ve tren üretimi için kullanılan montaj ve işgücüne ödenen minimum maliyette 180 dolardır.

Tahta asker üretiminde kullanılan kaynak karması ele alındığında, 2 saat montajın ve 1 saat işgücünün kara etkisi $2y_1 + y_2 + y_3 = 2(1) + 1 + 0 = 3$ dolar olarak hesaplanacaktır.

Tahta tren üretiminde kullanılan kaynak karması ele alındığında, 1 saat montajın ve 1 saat işgücünün kara etkisi $y_1 + y_2 = 1 + 1 = 2$ dolar olarak hesaplanacaktır.

Tablo 26' da dikkat edilmesi gereken diğer bir husus, primal problemin çözümünde bulunan $x_1 = 20$ ve $x_2 = 60$ değerlerine, $z_j - c_j$ satırında bulunan M değerlerine sıfır değeri verilerek ulaşılabilecek olmasıdır.

2.7.1.2. Minimizasyon Probleminin Dual Modeli, Çözümü ve Ekonomik Yorumu

Minimizasyon türündeki bir problemin duali, maksimizasyon türündeki bir doğrusal programlama modeli olarak elde edilecektir. Bölüm 2.5' te modeli kurulmuş olan minimizasyon türündeki problemin duali aşağıda verilmiştir.

Amaç fonksiyonu:
Minimum $y_0 = 28y_1 + 24y_2$

Kısıtlayıcılar:
$7y_1 + 2y_2 \leq 50$
$2y_1 + 12y_2 \leq 100$
$y_1, y_2 \geq 0$

Yukarıda duali verilen problemden yararlanılarak simpleks çözümde kullanılmak üzere oluşturulmuş standart form:

Amaç fonksiyonu:

Maksimum $y_0 = 28y_1 + 24y_2 + 0s_1 + 0s_2$

Kısıtlayıcılar:

$7y_1 + 2y_2 + s_1 = 3$

$2y_1 + 12y_2 + s_2 = 2$

$y_1, y_2, s_1, s_2 \geq 0$

şeklinde olacaktır.

Maliyetlerin minimum olması, karın maksimum olması bakımından oldukça önemlidir. Maksimum karın elde edildiği bir dual simpleks tablosu, primal değerleri minimum olarak ortaya koyacaktır. Bu şekilde primal problemi minimum olan bir modelin ekonomik yorumu yapılabilecektir. Bölüm 2.6.2.1' de vermiş olduğumuz bilgiler ışığında, Bölüm 2.7.1.2' de verilen dual probleme ait standart formdan yararlanılarak oluşturulmuş başlangıç simpleks tablosu aşağıda verilmiştir.

Tablo 27: Başlangıç Simpleks Tablosu
(Maksimizasyon Türündeki Dual Model)

c_j	Temel Değişkenler	Miktar	28	24	0	0
			y_1	y_2	s_1	s_2
0	s_1	50	7	2	1	0
0	s_2	100	2	12	0	1
	z_j	0	0	0	0	0
	$c_j - z_j$		28	24	0	0

Tablo 27' de c_j - z_j satırının en büyük değerini aldığı sütun yani y_1 sütunu, anahtar sütun olarak seçilir.

50 : 7 ≈ 7 ve 100 : 2 = 50 işlemleri incelendiğinde 7 değeri daha küçük olacağından s_1 temel değişkeninin bulunduğu satır, anahtar satır olarak seçilir. Gerekli işlemler yapıldıktan sonra Tablo 28 oluşturulur.

Tablo 28: Birinci Simpleks Tablosu

c_j	Temel Değişkenler	Miktar	28	24	0	0
			y_1	y_2	s_1	s_2
28	y_1	50/7	1	2/7	1/7	0
24	s_2	600/7	0	80/7	-2/7	1
	z_j	200	28	8	4	0
	$c_j - z_j$		0	16	-4	0

Tablo 28' de c_j - z_j satırının en büyük değerini aldığı sütun yani y_2 sütunu, anahtar sütun olarak seçilir.

50/7 : 2/7 = 25 ve 600/7 : 80/7 = 7,5 işlemleri incelendiğinde, 7,5 değeri daha küçük olacağından s_2 temel değişkeninin bulunduğu satır, anahtar satır olarak seçilir. Gerekli işlemler yapıldıktan sonra Tablo 29 oluşturulur.

Tablo 29: İkinci Simpleks Tablosu

c_j	Temel Değişkenler	Miktar	28	24	0	0
			y_1	y_2	s_1	s_2
28	y_1	5	1	0	3/20	-1/40
24	y_2	7,5	0	1	-1/40	7/80
	z_j	320	28	24	3,6	1,4
	$c_j - z_j$		0	0	-3,6	-1,4

Tablo 29’ da c_j - z_j satırındaki değerlerin hepsi sıfır veya negatif olduğu için bu çözüm tablosu optimal çözümü veren tablodur.

Tablo 29 incelendiği takdirde $y_1 = 5$ ve $y_2 = 7,5$ olarak bulunduğu görülmektedir. Bunun anlamı bir kadın seyirciye ulaşabilmenin maliyeti 5 ve bir erkek seyirciye ulaşabilmenin maliyeti ise 7,5 dolardır. Tiyatro oyununa ve futbol maçına verilen reklamların minimum maliyeti ise 320 dolardır.

Tiyatro oyununa ait kaynak karması ele alındığında, 7 kadın ve 2 erkeğe ulaşmanın kara katkısı $7y_1 + 2y_2 = 7(5) + 2(7,5) = 50$ dolar olarak hesaplanacaktır.

Futbol maçına ait kaynak karması ele alındığında, 2 kadın ve 12 erkeğe ulaşmanın kara katkısı $2y_1 + 12y_2 = 2(5) + 12(7,5) = 100$ dolar olarak hesaplanacaktır.

Tablo 29’ da dikkat edilmesi gereken diğer bir husus, primal problemin çözümünde bulunan $x_1 = 3,6$ ve $x_2 = 1,4$ değerlere, c_j - z_j satırında bulunan ve aylak değişken sütunlarının altında yer alan değerlerin ters işaretlileri alınarak ulaşılabilecek olunmasıdır.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

3. TAMSAYILI PROGRAMLAMA

Gerçek yaşam problemlerinde, değişkenlerin alacağı değerlerin tamsayı olmasını gerektiren bir takım durumlar ortaya çıkabilmektedir. Örneğin; Beyaz eşya üretimi gerçekleştiren bir işletmenin haftalık üretim planını hazırlarken, dikkate aldığı; eldeki kaynakların aşılmaması, taleplerin karşılanması gibi bir takım kısıtların yanı sıra değişkenlerin de tamsayı olması gerektiği koşuluna matematiksel modelde yer verilmelidir. Bazı durumlarda da modelde yer alan değişkenlerin bir kısmının tamsayı olması gerekirken bir diğer kısmı sürekli değişken olarak tanımlanabilir. Örneğin; Kesme şeker ve toz şeker üreten bir fabrikanın haftalık üretim programı yapılırken, kesme şeker miktarının tamsayı değer alması gerekirken, toz şeker miktarının kesirli değer alabilmesi mümkün olacaktır. Yine bir lojistik işletmesinin; çimento üretimi yapan ve buzdolabı kompresörü üreten iki farklı müşterisinin, taşınmasını talep ettikleri toplam ürünlerinin dağıtımında, ilk müşteri için farklı partilerde dağıtılacak en iyi miktarlar kesirli değer alabilirken, ikinci müşterinin ürünlerinin tamsayılı miktarlarda olması mümkün olabilmektedir. Bu durumda toplam maliyeti minimum yapacak şekilde haftalık dağıtılması gereken miktarları belirlerken, çimento dağıtım miktarını temsil eden değişken sürekli, kompresör dağıtım miktarını temsil eden değişken ise tamsayılı değişken şeklinde ifade edilmelidir (Sağır, 2013: 23).

Tamsayılı programlama modellerinde, karar değişkenleri tamsayı değerlerine sahipse ise çözüm anlam ifade etmektedir. Örneğin; İnsan, makine, teçhizat ve araç planlama problemlerinde, karar değişkenlerinin tamsayı olması gerekmektedir. Eğer bir problemin doğrusal programlama formülasyonundan tek farklılığı, tamsayılı değerlerin elde edilmek istenmesi ise, bu durumda tamsayılı programlama probleminden bahsedilebilmektedir. Tamsayılı programlamanın matematiksel modeli, doğrusal programlama modeline, değişkenlerin tamsayılı olma kısıtının ilave edildiği model olarak tanımlanabilir (Hillier ve Lieberman, 1989: 391).

Doğrusal programlama problemlerinin çeşitlerine bağlı olarak, bir kısım veya bütün değişkenlerin tam sayılı değerler alması durumlarında tam sayılı programlama ortaya çıkmaktadır. Doğrusal programlama kısıtlayıcı koşulları arasında değişkenlerin tam sayılı değerler olmasını ifade eden bir kısıtlayıcı koşul daha bulunur. Bu ise amaç fonksiyonunda bulunan değişkenlerin tamsayılı değerler almasını ifade eder ve doğrusal programlama sürekli fonksiyonlarla ilgili olurken, tam sayılı programlama kesikli fonksiyonlarla ilgilenmektedir (Hallaç, 1991: 458).

Doğrusal programlamanın genel ifadesi:

Amaç fonksiyonu:

Maksimum (Minimum) $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_jx_j + \dots, c_nx_n$

Kısıtlayıcılar:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1j}x_j + \dots\dots + a_{1n}x_n \leq (\geq)\ b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2j}x_j + \dots\dots + a_{2n}x_n \leq (\geq)\ b_2$

. . .

. . .

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots + a_{mj}x_j + \dots\dots + a_{mn}x_n \leq (\geq)\ b_m$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \dots\dots,\ x_n \geq 0$

şeklindedir. “Tamsayılı programlamanın matematiksel modeli, değişkenlerinin tamsayı değerli olması istenen bir ek kısıtlayıcılı doğrusal programlama modelinden başka bir şey değildir" ifadesi gereği (Öztürk, 2011: 267), yukarıdaki doğrusal programlama modeline çeşitli kısıtlar eklenerek, tamsayılı programlama modeline dönüştürülebilmektedir. Tüm değişkenlerin tamsayı değerli olması istenen bir saf tamsayılı problemde x_1, x_2, ….., x_n karar değişkenlerinin tamamı tamsayılı olacak şekilde modelde belirtilmelidir. Eğer bazı karar değişkenlerinin kesikli, bazılarının ise sürekli değerler alması isteniyor ise yukarıdaki modele buna uygun kısıtlar ilave edilmelidir. 0 - 1 tamsayılı programlama modellerinde ise

$x_i = 0$ veya 1 kısıtı modele ilave edilerek, değişkenlerin tamamının 0 ya da 1 değerini alması sağlanmaktadır.

3.1. Tamsayılı Programlama Problemleri ve Türleri

Tamsayılı programlama problemleri genelde:

i) Bütünüyle (Saf) Tamsayılı Problemler: Değişkenlerinin tamamının tamsayılı olmasının istendiği matematiksel modellere denir.
ii) Karma Tamsayılı Problemler: Değişkenlerinden sadece bazılarının tam sayılı olarak ifade edildiği matematiksel modellere denir.
iii) 0 - 1 Tamsayılı Problemler: Tüm değişkenlerin değerinin 0 ya da 1 olması gereken matematiksel modellere denir.

olarak sınıflandırılabilmektedir. 0 - 1 tamsayılı programlama yapısı gereği, bütünüyle (Saf) tamsayılı programlamanın özel bir durumu olarak ortaya çıkmaktadır.

3.2. Tamsayılı Programlama Modelinin Avantajları ve Dezavantajları

Tamsayılı programlama, karar değişkenlerinin kesikli değerler biçiminde tanımlandığı, gerçek problemlerin doğası gereği en sık karşılaşılan durumlara çözüm arar. Bu durum hem problemlerin modellenmesinde hem de bu modellerin çözümünde kullanılmasında, etkin ve hızlı çalışan algoritmalar gereksinimini beraberinde getirmiştir (Bakır ve Altunkaynak, 2003: 148). Doğrusal programlama problemlerinin çözüm sonuçları, çoğunlukla tam sayı olmayan rastgele pozitif sayılardır. Ancak pratikte, sonuçların tamsayılar olmasını gerektiren birçok problem bulunmaktadır. Örneğin; Otomobil, buzdolabı, takım tezgâhları v.b. üretiminde üretilecek miktarların pozitif tamsayılarla ifade edilmesi gerekir. Böylesi mamullerin, doğrusal programlama yöntemlerinden yararlanılarak üretilecek miktarlarının saptanmasında tamsayılı programlama kullanılır (Tulunay, 1987:491).

Tamsayılı programlama modellerinin formülasyonu, doğrusal matematiksel modellerin formülasyonuna önemli derecede benzerlik gösterir. Amaç fonksiyonu ve kısıtlayıcıların cebirsel ifadesi iki modelde de aynı gibi durmasına rağmen, bazı ya da tüm değişkenlerin tam sayı olmasını sağlayan bazı kısıtların eklenmesi, hesaplama bakımından tamsayılı problemleri daha zor hale getirir. Doğrusal programlama modelleri, polinominal zamanda çözülebilirken, aynı problemin tamsayılı çözümünü bulmak üssel hesaplama zamanı gerektirebilir (Bakır ve Altunkaynak, 2003: 148). Burada polinominal zamanla kastedilen, problemin büyüklüğü doğrusal olarak artarken, çözmek için gereken zamanın doğrusal olarak artmasıdır. Üssel zaman ifadesi ise problemin büyüklüğü doğrusal olarak artarken, çözmek için gereken zamanın üssel olarak artmasıdır.

Tamsayılı programlama ilk bakışta doğrusal programlamadan daha kolay çözülebileceği görünümünü verir. Çünkü doğrusal programlamada sonsuz sayıda olurlu çözüm varken, tamsayılı programlamada sınırlı sayıda olurlu çözüm vardır. Ancak bu gerçeğin yanı sıra, simpleks çözüm yöntemi, optimal çözümün bulunması için birkaç köşe noktasının değerlendirilmesini yeterli kılar, olurlu alanı araştırmak gerekmez. Tamsayılı programlamada ise, tüm köşe ve olurlu alan içindeki noktaların araştırılması gerekebilir. Çünkü küçük bir tamsayı programlama sorununun bile çok büyük sayıda olurlu çözümü bulunabilir. Şimdiye kadar bilinen yöntemlerin hiçbiri, tamsayı değerlendirmelerini, simpleks yöntemde olduğu gibi minimumda tutmayı sağlayamamıştır (Taha, 1987: 306).

3.3. Tamsayılı Programlama Modelinin Çözüm Yöntemleri

Bu bölümde tamsayılı programlama problemlerinin çözümünde kullanılan yöntemler ele alınacaktır. Özellikle Gomory kesim düzlemi ve dal – sınır yöntemi ayrıntılı bir şekilde anlatılarak, uygulama basamakları izah edilecektir.

3.3.1. Yuvarlama Yöntemi

Matematiksel modelin tamsayı koşulu gözardı edilerek optimum çözümünün bulunmasına ve daha sonra bu çözümün tamsayı olarak elde edilememesi halinde, tamsayı değeri elde edilmeyen değişkenlerin değerlerinin en yakın tamsayılara yuvarlanmasına ve diğer değişkenlerle birlikte olası tüm kombinasyonların bu şekilde aday birer çözüm gibi irdelenmeleri yaklaşımına dayanmaktadır. Yöntem kolay ve pratik olmakla birlikte, yuvarlama yöntemi ile elde edilen noktaların uygun çözüm alanının dışına çıkma ve kısıtları sağlamama olasılığı bulunmaktadır (Sağır, 2003: 38).

3.3.2. Sayımlama Yöntemi

Kesin çözümü vermesine karşın işlem yükü olan bir yöntemdir. Genellikle 0 - 1 tamsayılı değişkenlerin olduğu durumlarda kullanılır. Problemde yer alan tüm değişkenlerin alabileceği 0 ve 1 değerleri düşünülerek, olası tüm çözüm kombinasyonları belirlenir, her birinin kısıtları sağlayıp sağlamadığı araştırılır ve varsa problemin kısıtlarını sağlayan uygun çözümler içerisinden amaç fonksiyonun değerini optimum yapan nokta çözüm olarak seçilir (Winston, 2004: 542).

Tüm olası çözümleri saymak ve olurlular içinden en iyisini seçmek kavramsal olarak bir sorun yaratmasa da sayısal olarak zor olabilmektedir.

3.3.3. Dal-Sınır Yöntemi

Yuvarlama yönteminde olduğu gibi problemin tamsayı koşulu gözardı edilerek çözülmesinin ardından, tamsayı olması istenen fakat tamsayı olarak elde edilemeyen değişkenler için uygun çözüm alanının parçalanması ve alt parçalarda optimum tamsayı çözümünün aranması yaklaşımını benimsemektedir. Alt problemlerin en iyileri arasından, tüm problemin optimum noktasının seçilmesi için, verilen amaç fonksiyonunun durumuna göre, önceden belirlenen bir üst sınır veya alt sınır değeri referans kabul edilmektedir. Örneğin; Maksimum problemi için, tamsayı koşulu olmadığı durumda elde edilen çözümün amaç fonksiyonu değeri üst sınır, problemin uygun çözüm alanından alınan bir başka değer alt sınır kabul edilerek işlemlere başlanılmaktadır. İzleyen adımlarda tamsayılı bir çözüm bulundukça, mevcut alt sınır değerinden büyükse alt sınır güncellenerek, üst sınıra yaklaşılmaya çalışılmaktadır.

Bir tamsayılı programlama probleminin doğrusal programlama gevşetmesi kavramı, tamsayılı programlama çözümünde önemli rol oynar. Değişkenler üzerindeki tüm tamsayı veya 0 - 1 kısıtlarının atılarak, elde edilen doğrusal programlama modeline, tamsayılı programlamanın doğrusal programlama gevşetmesi adı verilmektedir (Hillier ve Lieberman, 1995: 601).

Dal – sınır yöntemi ile minimizasyon türündeki bir problem çözülürken uyulması gereken işlem adımları:

i) Dal – sınır yöntemi, problemi önce değişkenlerin tamsayı koşulu olmadan çözmektedir. Eğer elde edilen optimum çözüm tamsayılı bir çözüm ise, bu çözüm aynı zamanda tamsayılı probleminde çözümü olacaktır.
ii) Elde edilen çözüm tamsayılı değil ise, tamsayılı olmayan değişkenin (birden fazla ise herhangi birisinin) en yakınındaki iki değer kullanılarak, yeni ek kısıtlarla uygun çözüm alanı daraltılır. Daraltılmış alanların çözümleri araştırılır.

şeklinde olacaktır (Sağır, 2013: 29).

Problem maksimizasyon türünde ise, çözüm yöntemi alt ve üst sınır seçimi dışında minimizasyon türündeki problem gibidir (Anderson ve diğerleri, 1991' den aktaran: Çevik, 2006: 161 – 162).

3.3.4. Gomory Kesim Düzlemi

Doğrusal problemlerin tamsayılı çözümlerini sağlayacak hesaplama yöntemi 1959 yılında Gomory tarafından geliştirilmiştir. Gomory' nin geliştirdiği hesaplama yöntemine tamsayılı algoritma veya kesim düzlemi adı verilmiştir. Bu yöntemde takip edilecek aşamalar (Çevik, 2006: 160):

i) Bir tamsayılı programlama probleminde ilk aşama, eğer gerekli ise orijinal sınırlamaları tamsayılaştırmadır. Bu işlem, katsayılar tamsayı olsun diye, tüm sınırların değiştirilmesi anlamına gelmektedir.
ii) Doğrusal problemin optimal çözüm tablosu elde edilmektedir. Eğer optimal çözüm değerleri tamsayı ise, tamsayı programlama problemi için çözüm elde edilmiştir. Çözüm elde edilemediyse bir sonraki aşamaya geçilmektedir.

iii) Bu aşamada kesme düzlemi oluşturulmaktadır. Bu amaçla optimal çözüm tablosundan tamsayı olmayan değişkenlerin biri seçilmekte ve yeni bir kısıtlama elde edilmektedir.

iv) Gomory' nin kesme düzlemi optimal çözüm tablosuna yeni bir sıra olarak eklenmektedir. Eklenen sınırlamadaki katsayılar tüm sayıyı verecek şekildedir. Daha sonra yönteme doğrusal programlama çözüm yöntemleri uygulanarak optimal çözüm tablosu bulunmaktadır.

şeklinde olmalıdır.

3.4. Tamsayılı Programlama Modeli ve Uygulaması

Tamsayılı programlamanın model kurma ve uygulama aşamasında, örnek bir problem üzerinde Gomory kesim düzlemi ve dal – sınır yöntemi ayrı ayrı uygulanarak sonuçları elde edilmiştir. Sonuçlar karşılaştırılarak birbirlerini doğruladıkları gösterilmiştir.

Örnek: Taha, 2006: 379

Amaç fonksiyonu:

Maksimum $z = 7x_1 + 10x_2$

Kısıtlayıcılar:

$-x_1 + 3x_2 \leq 6$

$7x_1 + x_2 \leq 35$

$x_1, x_2 \geq 0$ ve tamsayı

şeklindedir. Bu problemi doğrusal gevşetme altında standart forma dönüştürdüğümüzde:

Maksimum $(z) = 7x_1 + 10x_2 + 0s_1 + 0s_2$

$-x_1 + 3x_2 + s_1 = 6$

$7x_1 + x_2 + s_2 = 35$

$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

şeklinde olacaktır.

Problemin standart formu elde edildikten, bu forma uygun şekilde hazırlanmış başlangıç simpleks tablosunun oluşturulması gerekmektedir. Tablo 30' da maksimizasyon probleminin başlangıç simpleks tablosu verilmiştir.

Tablo 30: Başlangıç Simpleks Tablosu (Doğrusal Gevşetme Modeli)

c_j	**Temel Değişkenler**	**Miktar**	7	10	0	0
			x_1	x_2	s_1	s_2
0	s_1	6	-1	3	1	0
0	s_2	35	7	1	0	1
	z_j	0	0	0	0	0
	$c_j - z_j$		7	10	0	0

Bölüm 2' de maksimizasyon problemine uygulanan satır ve sütun işlemleri, aynı tekniklerle bu problem için uygulandığında ortaya çıkacak diğer simpleks tabloları, Tablo 31 ve Tablo 32' deki gibi olacaktır.

Tablo 31: Birinci Simpleks Tablosu

c_j	**Temel Değişkenler**	**Miktar**	7	10	0	0
			x_1	x_2	s_1	s_2
10	x_2	2	-1/3	1	1/3	0
0	s_2	33	22/3	0	-1/3	1
	z_j	20	-10/3	10	10/3	0
	$c_j - z_j$		31/3	0	-10/3	0

Tablo 32: İkinci Simpleks Tablosu

c_j	Temel Değişkenler	Miktar	7	10	0	0
			x_1	x_2	s_1	s_2
10	x_2	7/2	0	1	7/22	1/22
7	x_1	9/2	1	0	-1/22	3/22
	z_j	133/2	7	10	63/22	31/22
	$c_j - z_j$		0	0	-63/22	-31/22

Tablo 32' nin $c_j - z_j$ satırı incelendiğinde pozitif bir sayı bulunmadığı görülmektedir. Bu nedenle, $x_1 = 9/2$ ve $x_2 = 7/2$ değişken değerleri için bulunacak $z = 133/2$ değeri, amaç fonksiyonunu maksimum yapan değer olarak elde edilecektir.

Yukarıda doğrusal gevşetme altında sonuçları bulunan örnek probleme, Gomory kesim düzlemi yöntemi uygulanarak sonuçları aşağıdaki gibi bulunacaktır.

Tamsayılı olmayan x_2 değişkenini seçerek kesim düzlemi;

$$x_2 + \frac{7}{22} s_1 + \frac{1}{22} s_2 = \frac{7}{2}$$

$$x_2 + (0 + \frac{7}{22}) s_1 + (0 + \frac{1}{22}) s_2 = 3 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{7}{22} s_1 + \frac{1}{22} s_2 = \frac{1}{2} + (3 - x_2)$$

$$\frac{7}{22} s_1 + \frac{1}{22} s_2 = \frac{1}{2} + \text{bazı tamsayılar}$$

$$\frac{7}{22} s_1 + \frac{1}{22} s_2 \geq \frac{1}{2}$$

$$- \frac{7}{22} s_1 - \frac{1}{22} s_2 \leq - \frac{1}{2}$$

$$- \frac{7}{22} s_1 - \frac{1}{22} s_2 + s_3 = - \frac{1}{2}$$

olarak elde edilecektir. Bu kesim düzlemi Tablo 32' de elde edilen çözüm tablosunda yerine yazılırsa Tablo 33 elde edilecektir.

Tablo 33: Başlangıç Simpleks Tablosu (Gomory Kesim Düzlemi)

c_j	Temel Değişkenler	Miktar	7	10	0	0	0
			x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
10	x_2	7/2	0	1	7/22	1/22	0
7	x_1	9/2	1	0	-1/22	3/22	0
0	s_3	-1/2	0	0	-7/22	-1/22	1
	z_j	133/2	7	10	63/22	31/22	0
	$c_j - z_j$		0	0	-63/22	-31/22	0

Tablo 33' te gerekli işlemler yapıldıktan sonra Tablo 34 elde edilecektir.

Tablo 34: Birinci Simpleks Tablosu

c_j	Temel Değişkenler	Miktar	7	10	0	0	0
			x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
10	x_2	3	0	1	0	0	1
7	x_1	32/7	1	0	0	1/7	-1/7
0	s_1	11/7	0	0	1	1/7	-22/7
	z_j	62	7	10	0	1	9
	$c_j - z_j$		0	0	0	-1	-9

Tablo 34' te değişkenlerin hepsi tamsayılı değerler almadığı için x_2 değişkeni için bulunan kesim düzlemine benzer şekilde x_1 değişkeninin kesim düzlemi;

$x_1 + \frac{1}{7} s_2 - \frac{1}{7} s_3 = \frac{32}{7}$

$x_1 + (0 + \frac{1}{7}) s_2 + (-1 + \frac{6}{7}) s_3 = 4 + \frac{4}{7}$

$\frac{1}{7} s_2 + \frac{6}{7} s_3 = \frac{4}{7} + (4 - x_1 + s_3)$

$\frac{1}{7} s_2 + \frac{6}{7} s_3 = \frac{4}{7} +$ bazı tamsayılar

$\frac{1}{7} s_2 + \frac{6}{7} s_3 \geq \frac{4}{7}$

$- \frac{1}{7} s_2 - \frac{6}{7} s_3 \leq - \frac{4}{7}$

$- \frac{1}{7} s_2 - \frac{6}{7} s_3 + s_4 = - \frac{4}{7}$

olarak elde edilecektir. Bu kesim düzlemi Tablo 34' te elde edilen çözüm tablosunda yerine yazılırsa Tablo 35 elde edilecektir.

Tablo 35: İkinci Simpleks Tablosu

c_j	Temel Değişkenler	Miktar	7	10	0	0	0	0
			x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4
10	x_2	3	0	1	0	0	1	0
7	x_1	32/7	1	0	0	1/7	-1/7	0
0	s_1	11/7	0	0	1	1/7	-22/7	0
0	s_4	-4/7	0	0	0	-1/7	-6/7	1
	z_j	62	7	10	0	1	9	0
	$c_j - z_j$		0	0	0	-1	-9	0

Tablo 35' te gerekli işlemler yapıldıktan sonra Tablo 36 elde edilecektir.

Tablo 36: Üçüncü Simpleks Tablosu

c_j	Temel Değişkenler	Miktar	7	10	0	0	0	0
			x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4
10	x_2	3	0	1	0	0	1	0
7	x_1	4	1	0	0	0	-1	1
0	s_1	1	0	0	1	0	-4	1
0	s_2	4	0	0	0	1	6	-7
	z_j	58	7	10	0	0	3	7
	$c_j - z_j$		0	0	0	0	-3	-7

Böylelikle problemin optimal çözümü bulunmuştur. Optimal çözüme ait değerler; $x_1 = 4$, $x_2 = 3$, $s_1 = 1$, $s_2 = 4$ ve $z = 58$ olarak elde edilmiştir. Bu değerler amaç fonksiyonunu maksimum yapan optimum değerler olarak görülmektedir.

Yukarıda örnek probleme doğrusal gevşetme uygulandıktan sonra Gomory kesim düzlemi yöntemiyle problemin çözümü bulunmuştur. Doğrusal gevşetme sonuçları ele alınarak aynı problem dal – sınır yöntemi ile çözülecek olursa sonuçlar aşağıdaki gibi bulunacaktır.

Örnek problemin doğrusal gevşetme altındaki sonuçları, $x_1 = 9/2$, $x_2 = 7/2$ ve $z = 133/2$ olarak elde edilmiştir. Bu sonuçlara dayanarak dal – sınır yöntemi uygulanırsa, ilk olarak x_1 değişkeninin $x_1 = 4$, $x_1 = 5$ alt ve üst tamsayı değerleri için problem dallandırılarak iki alt probleme ayrılacaktır.

Alt Problem 1: $x_1 = 4$ değeri doğrusal gevşetme altındaki modelde yerine yazılırsa;

Amaç fonksiyonu:
Maksimum $z = 28 + 10x_2$

Kısıtlayıcılar:
$3x_2 \leq 10$

$x_2 \leq 7$

x_1, x_2 tamsayı

olarak elde edilir.

Alt problem 1' de $x_2 = 10/3$ olarak elde edilmektedir. x_2' nin bu değeri için $z = 28 + 10x_2 = 28 + 10(10/3) = 184/3$ olarak bulunacaktır.

Alt Problem 2: $x_1 = 5$ değeri doğrusal gevşetme altındaki modelde yerine yazılırsa;

Amaç fonksiyonu:

Maksimum $z = 35 + 10x_2$

Kısıtlayıcılar:

$3x_2 \leq 11$

$x_2 \leq 0$

x_1, x_2 tamsayı

olarak elde edilir.

Alt problem 2' de $x_2 = 0$ olarak elde edilmektedir. x_2' nin bu değeri için $z = 35 + 10x_2 = 35 + 10(0) = 35$ olarak bulunacaktır.

Alt problem 1 için $z = 184/3$ ve alt problem 2 için ise $z = 35$ olarak bulunmuştur. Bu durumda alt problem 2 bağlanarak, dallandırma işlemine alt problem 1 ile devam edilmektedir. Bundan sonraki dallandırma aşamasında ise x_2 değişkeninin $x_2 = 3$, $x_2 = 4$ alt ve üst tamsayı değerleri için problem dallandırılarak iki alt probleme ayrılacaktır.

Alt Problem 3: $x_1 = 4$ ve $x_2 = 3$ değerleri doğrusal gevşetme altındaki modelde yerine yazılırsa;

Amaç fonksiyonu:

Maksimum $z = 58$

Kısıtlayıcılar:

$9 \leq 10$

$3 \leq 7$

x_1, x_2 tamsayı

olarak elde edilir.

Alt problem 3 için x_2 değeri kısıtları sağlamaktadır. Bulunan optimal çözümler; $x_1 = 4$, $x_2 = 3$ ve $z = 58$ olarak bulunmuştur.

Alt Problem 4: $x_1 = 4$ ve $x_2 = 4$ değerleri doğrusal gevşetme altındaki modelde yerine yazılırsa;

Amaç fonksiyonu:

Maksimum (z) = 75

Kısıtlayıcılar:

$12 \leq 10$

$4 \leq 7$

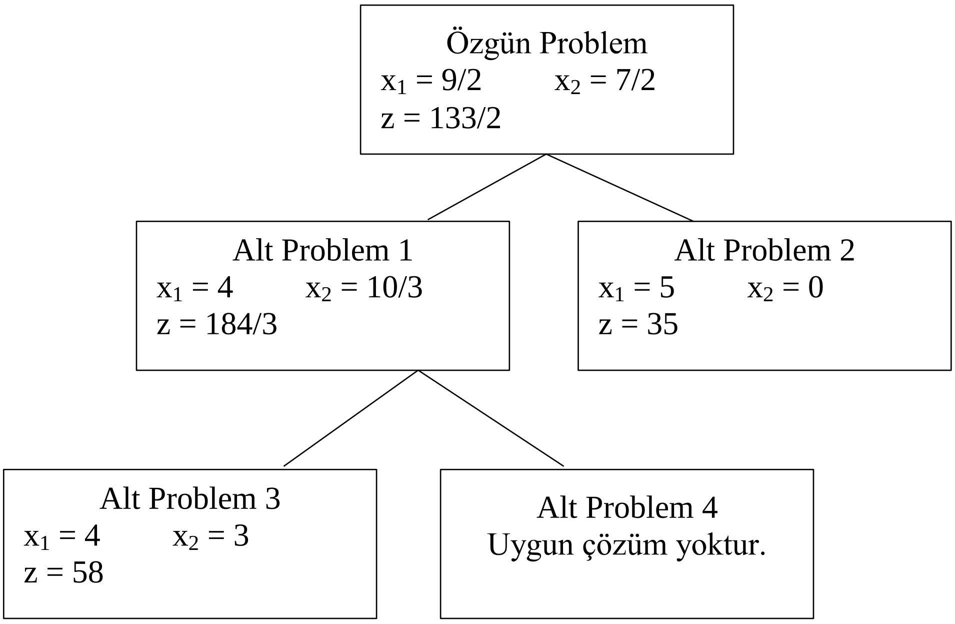
x_1, x_2 tamsayı

olarak elde edilir.

Alt problem 4 için bulunan çözümler; $x_1 = 4$, $x_2 = 4$ ve $z = 75$ olarak elde edilmiştir. Fakat $12 \leq 10$ eşitsizliği mantıksal açıdan yanlış olacağından, bulunan $z = 75$ değeri optimal çözüm olmayacaktır. Yani alt problem 4 için uygun bir çözüm alanı bulunamamıştır.

Sonuç olarak optimal çözüm; $x_1 = 4$, $x_2 = 3$ ve $z = 58$ olarak bulunur. Şekil 1' de örnek problemin dal – sınır yöntemine ait çözüm ağacı verilmiştir.

Şekil 1: 0 - 1 Tamsayılı Programlama Probleminin Çözüm Ağacı



Yukarıdaki örnek çözümlere ait Gomory kesim düzlemi ve dal – sınır yöntemi sonuçları karşılaştırıldığında, sonuçların birbirlerini doğruladıkları görülmektedir. Bahsi geçen iki yöntem de tamsayılı programlama problemlerinin çözümünde etkin ve kullanışlı yöntemler olarak kabul görmektedir.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

4. LİTERATÜR ÇALIŞMASI

Çizelgeleme problemlerinin çözümü için birçok araştırmacı, çeşitli yöntemler kullanarak, farklı alanlarda uygulamalar yapmışlardır. Çalışmanın bu bölümünde literatürde bulunan, özellikle tamsayılı programlama yöntemini kullanan çalışmalara, uygulama yılları göz önünde bulundurularak yer verilmiştir.

Tripathy (1984) dersliklerin, öğrencilerin ve konuların yönetilebilmesi için uygun şekilde kategorize edilmesi üzerinde çalışmıştır. Bu çalışmada tamsayılı programlamadan yararlanılmıştır.

Loo ve arkadaşları (1985), Aubin ve Ferland (1989) ve Wright (1996) çizelgeleme problemleri için bir takım sezgisel yöntemler sunmuşlardır. Üniversite çizelgeleme problemleri üzerinde bu sezgisel yöntemleri kullanmışlardır. Çözüm için ortaya koymuş oldukları sert ve yumuşak kısıtlar çalıştıkları modellere göre farklılıklar içermektedir.

Eiselt ve Laporte (1987) bazı sezgisel yöntemlerin iki aşamada olduğunu ortaya koymuşlardır. Bunları başlangıç ve gelişme şeklinde tanımlamışlardır. İlk aşamada probleme ait uygun bir çözümün bulunması gerektiğini, bulunmadığı takdirde bazı gereksinimlerin veya kısıtlamaların gevşetilmesinin zorunlu olduğunu ortaya koymuşlardır. Gelişme aşamasında ise optimum çözüme ulaşana dek eldeki çözümler geliştirilmeye devam edilmektedir.

Büyük verilere sahip problemler için, özellikle kısa işlem süreleri içinde, optimal çözümün varlığını kanıtlamanın zor olacağından dolayı Costa (1994) çalışmasında, makul bir süre içinde iyi bir çözüm bulmak için sezgisel yaklaşımlar geliştirmenin gerekli olduğunu ortaya koymuştur.

Badri (1996) ilk aşamada öğretim üyelerini derslere atayan, ikinci aşamada ise öğretimin gereksinimlerine ve kapasitesine ihtiyaç veren, kurslara zaman dilimi tahsis eden, çok amaçlı 0-1 tamsayılı programlama üzerinde çalışmıştır. Model hedef programlama için modifiye edilmiş bir simpleks yöntemi kullanılarak çözülmüştür.

Birbas ve arkadaşları (1997) yunan liselerinde haftalık ders programını veren bir modeli, 0-1 tamsayılı programlama kullanarak çözmüşlerdir.

Deris ve arkadaşları (1997) ile Abdennadher ve Marte (2000) kısıt tabanlı muhakeme, Dimopoulou ve Miliotis (2001) karar destek sistemleri, Burke (2000, 2001) ve Burke ile Petrovic (2002) vaka tabanlı muhakeme ve bilgi tabanlı sistemler üzerinde sezgisel yaklaşımları kullanmışlardır. Buna ek olarak Carter ve Laporte (1998), Schaerf (1999), Burke ve arkadaşları (1997) ile Petrovic ve Burke (2004) yukarıda bahsi geçen konular üzerinde çalışmalarda bulunmuşlardır.

Hertz ve Robert (1998), ders çizelgeleme problemini daha basit alt problemlere bölmüşlerdir. Öğretim elemanları ve sınıflar açısından çakışmalar olduğunu gözlemlemişlerdir. Bu çakışmaları engellemek maksatıyla grafik renklendirme sezgisellerini kullanarak ve istenilen sonuçlara ulaşmışlardır.

Burke ve Newall (1999), Thompson ve Dowsland (1998), Alvarez (2002) metasezgisel yöntemlerden yararlanarak çizelgeleme problemlerine çözüm aramışlardır.

Boronico (2000), matematiksel programlama ile benzetim yöntemlerini birleştirerek bir model ortaya koymuştur. Oluşturulan bu modelle her ders için ihtiyaç duyulan şube sayıları belirlenerek, öğretim görevlilerinin bu derslere atanması işlemi gerçekleştirilmiştir.

Botsalı (2000), ele aldığı ders çizelgeleme probleminin çözümü için matematiksel modelleri ve kısıt programlama yaklaşımını birlikte kullanmıştır. Üç aşamada ele alınan problemin ilk iki aşamasında kısıt programlama yöntemi kullanılarak derslerin günlere atanması ve gün içinde derslerin saatlere atanması basamakları tamamlanmıştır. Üçüncü aşamada ise, matematiksel programlama kullanılarak derslerin sınıflara atanması işlemi gerçekleştirilmiştir.

Dimopoulou ve Miliotis (2001) tamsayılı programlamadan yararlanarak üniversite çizelgeleme problemi üzerinde çalışmışlardır. İlgili ders gruplarının, görmeleri gereken dersleri uygun zaman aralıklarında almasını sağlayacak bir model ortaya koymuşlardır.

Müller (2002), ders çizelgeleme problemini bir kısıt tatmin problemi olarak ele almış ve bununla birlikte problemin çözümü için bir kısıt modeli ve çözüm algoritması ortaya koymuştur. Geliştirilen algoritma, ileri bir arama algoritmasıdır ve içerisinde hem yerel arama hem de geri izleme yaklaşımlarını bulundurmaktadır. Sonuç olarak, Charles Üniversitesi Matematik ve Fizik Fakültesi'nde uygulanan algoritmanın tüm kısıtları sağlayarak çok iyi sonuçlar verdiği gözlenmiştir.

Hinkin ve Thompson (2002) Cornell Üniversitesi Otel İşletmeciliği bölümünde 0-1 tamsayılı programlama kullanarak çizelgeleme yazılımı geliştirmişlerdir. Fakülte tercihlerini etkin biçimde kullanan öğrenci dostu bir yazılım geliştirmeyi amaç edinmişlerdir. Yazılım öğretim elemanlarının ve öğrenci gruplarının beklentilerinin değişebileceği varsayılarak gereken esneklikte hazırlanmıştır. Ek bölümler ya da seçmeli dersler eklenmesi bakımından bu esneklik oldukça önemlidir.

Wang (2002), ders çizelgeleme problemleri kapsamında öğretim elemanlarının kişisel tercihlerine göre derslere atanması gerektiği üzerinde yoğunlaşmış ve bu amaçla problemin çözümü için genetik algoritmaları kullanmayı tercih etmiştir. Genetik algoritmalar ile öğretim görevlilerinin atanmalarında harcanan zamanın oldukça azaltıldığını gözlemleyerek, diğer yöntemlere göre daha etkin ve esnek çizelgelere ulaşıldığını belirlemiştir. Çalışmanın devamında, aşırı kısıtlandırılmış problemleri çözmek, öğretim elemanlarının ders yüklerini dengelemek ve tüm sistemin memnuniyetini ölçmek amacıyla oluşturduğu genetik algoritmayı geliştirmiş ve oldukça iyi sonuçlar elde etmeyi başarmıştır.

Papoutsis ve arkadaşları (2003) yunan okullarındaki 0-1 tamsayılı çizelgeleme problemi için sütun üretme yaklaşımını kullanmışlardır. Maksimum öğretim zamanının, öğretim elemanlarının istekleri doğrultusunda verimli bir şekilde dağılmasını sağlamışlardır.

Dimopoulou ve Miliotis (2004) tüm uygun bilgileri içeren bilgisayar merkezli ağ sistemi üzerinde bir tamsayılı programlama modeli geliştirmişlerdir. Departmanların çalışma takvimi göz önünde bulundurularak çakışma olmasının önüne geçilmesi konusunda çalışmışlardır.

Daskalaki ve arkadaşları (2004) 0-1 tamsayılı programlama kullanarak üniversite çizelgeleme problemi üzerinde çözüm sunmuşlardır. Bu çözüm farklı öğrenci gruplarının ihtiyaçlarını karşılamakla birlikte, öğrencilere ait kurs programını da ortaya koymuştur.

Mushi (2004) çizelgeleme problemlerinin çözümü için çeşitli tamsayılı programlama modellerinin varlığını ortaya koymuştur. Sınav çizelgeleme problemlerinin çözümünde üç adet modelle çözüm sunmuştur. Saf 0-1 tamsayılı modeli ortaya koyduğu diğer iki modelden daha iyi performans ortaya koymuştur.

Gunawan ve arkadaşları (2006) bazı gerçek kurumların verilerini kullanarak, onlara ait çizelgeme problemlerinin basit matematiksel modeller yardımıyla çözülebileceğini göstermişlerdir.

Yiğit (2006), meslek liselerinde kullanılmak macıyla; uygun ders çizelgelerinin hazırlanabilmesi için genetik algoritmaları kullanmıştır. Ders çizelgeleme işlemi için, C++ programlama dilini kullanarak kullanıcı ara yüzlü bir bilgisayar programı geliştirmiştir. Geliştirilen program sayesinde, kullanıcılar modeli anlamalarına gerek kalmaksızın, istenen verileri programa girebilmekte ve çıktılara, yani ders çizelgelerine rahatlıkla ulaşabilmektedirler. Bu çalışmanın sonunda yapılan deneysel çalışmalar ve genetik algoritmalar ile uygun ders çizelgeleri elde edilebileceği kanıtlanmıştır.

Yakup ve Sherali (2006) Kuveyt Üniversitesinde, karma tamsayılı programlama modelini benimseyerek, öğrencilerin öğretim ve laboratuvar trafiğini, cinsiyet faktörünü göz önünde bulundurarak çözmeye çalışmışlardır.

Mir Hassani (2006) amaç fonksiyonunda cezaları kullanarak İran'daki bir üniversite için 0-1 tamsayılı programlama modeli ortaya koymuştur. Bir takım paket programlar kullanarak, el ile yapılan çözümlerden daha iyi sonuçlar ortaya konduğunu göstermiştir.

Mayer ve arkadaşları (2007), ders çizelgeleme problemlerinin çözümü için son yıllarda sıklıkla kullanılmaya başlanan sezgisel yaklaşımlardan karınca kolonisi optimizasyonunu ele almışlardır. Bu çözüm yaklaşımında yapay karıncalar doğal olayları ve yerel bilgileri kullanarak çözümleri üretmektedir. Geliştirilen algoritmanın en dikkat çekici özelliği, zaman aralıkları ve olaylar gibi birbiriyle ilişkili ve birbirinden farklı matrisleri kullanmasıdır. Buradaki amaç, yakınsamanın geliştirilmesidir. Böylelikle yerel bir iyileştirme metodu üretilmiştir. Deneysel çalışmalar sonucunda, oldukça esnek ve başarılı çözümler elde edilmiş, birçok örnek durum için ise en iyi çözümün elde edildiği kanıtlanmıştır.

Guyon (2010) birbirine entegre çalışan çizelgeleme ve üretim planlama problemini çözmek için kesin bir yöntem önermiştir. Guyon ve arkadaşları (2010) karma tamsayılı programlama kullanarak çizelgeleme ve üretim planlama entegrasyonu üzerinde çalışmışlardır. İlk aşamada klasik çalışan çizelgeleme problemi üzerinde durulmuştur. İkinci aşamada ise çalışan çizelgeleme programına uygun bir üretim planlaması üzerinde durulmuştur. Çözüm yönteminde dal-sınır algoritmasından yararlanılmıştır.

BEŞİNCİ BÖLÜM

5. DERS PROGRAMI ÇİZELGELEME PROBLEMİNE 0 - 1 TAMSAYILI PROGRAMLAMA UYGULAMASI

Zaman çizelgeleme, üretim ve hizmet endüstrisinde önemli rol oynayan bir karar verme süreci olup, makineden ulaşıma, sağlıktan eğitime birçok alanda kullanılmaktadır (Köçken ve diğerleri, 2014: 29).

Ders programı çizelgeleme, karmaşık bir kombinasyon sorunu olarak tanımlanmaktadır. Ders programı çizelgeme aktivitesinde, belli kısıtlamalara sahip yer, zaman ve atama işleminin arzu edilen hedeflere en yakın şekilde gerçekleştirilmesi amaçlanmaktadır (Wren, 1996: 148).

Ders çizelgeleme problemlerinin çözümü için birçok teknik geliştirilmiştir. Tamsayılı programlama, grafik boyama, yapay zeka teknikleri, tabu arama, genetik algoritmalar ve karınca kolonileri öne çıkan tekniklerdir (Oladokun ve Badmus, 2008: 426).

Bu bölümde tamsayılı programlama uygulamasının gerçekleştirileceği ortaokulun, derslerin ve dersleri verecek öğretim elemanlarının tanıtımı yapılacaktır. Son aşamada ise problemin yapısına uygun bir şekilde matematiksel model kurulacaktır.

5.1. Uygulama Yapılacak Ortaokulun Tanıtılması

0 - 1 tamsayılı programlama modelinin uygulanması için, Sakarya İline bağlı Erenler İlçesi sınırlarında bulunan Erenler İmam Hatip Ortaokulu seçilmiştir. Erenler İmam Hatip Ortaokulu bünyesinde 21 derslik barındırmaktadır. 1 okul müdürü, 2 müdür yardımcısı ile toplamda 36 öğretmenle birlikte eğitim - öğretim faaliyetleri

sürdürülmektedir. Okulda, çarşamba günleri 8 ve diğer günler 7 ders saati olacak şekilde dersler işlenmektedir. Okul bünyesinde 5., 6., ve 7. sınıflar bulunmaktadır.

5.2. Derslerin ve Dersleri Verecek Öğretim Elemanlarının Tanıtımı

Erenler İmam Hatip Ortaokulu bünyesinde toplam 9 adet 5. sınıf bulunmaktadır. 5. sınıflar bir haftada 14 farklı ders almakla birlikte, bu derslerin bir haftalık toplam saati ise 36 ders saati olmaktadır. Tablo 37' de bu derslerin isimleri ve haftalık ders saatleri verilmiştir.

Tablo 37: 5. Sınıflara Ait Dersler ve Haftalık Ders Saatleri

Ders Adı	Haftalık Ders saati
Matematik	5
İngilizce	3
Görsel Sanatlar	1
Fen Bilimleri	4
Müzik	1
Sosyal Bilgiler	3
Türkçe	6
Arapça	4
Temel Dini Bilgiler	1
Beden Eğitimi ve Spor	1
Kur' an- ı Kerim	2
Din Kültürü ve Ahlak Bilgisi	1
Bilişim Teknolojileri ve Yazılım	2
Hazreti Muhammed' in Hayatı	2

Erenler İmam Hatip Ortaokulu bünyesinde toplam 6 adet 6. sınıf bulunmaktadır. 6. sınıflar bir haftada 15 farklı ders almakla birlikte, bu derslerin bir haftalık toplam saati ise 36 ders saati olmaktadır. Tablo 38' de bu derslerin isimleri ve haftalık ders saatleri verilmiştir.

Tablo 38: 6. Sınıflara Ait Dersler ve Haftalık Ders Saatleri

Ders Adı	Haftalık Ders saati
Türkçe	6
Matematik	5
Sosyal Bilgiler	3
İngilizce	3
Din Kültürü ve Ahlak Bilgisi	1
Görsel Sanatlar	1
Müzik	1
Beden Eğitimi ve Spor	2
Fen Bilimleri	4
Kur’ an- ı Kerim	2
Hazreti Muhammed’ in Hayatı	2
Temel Dini Bilgiler	1
Bilişim Teknolojileri ve Yazılım	2
Arapça	2
Uygulamalı Matematik	1

Erenler İmam Hatip Ortaokulu bünyesinde toplam 6 adet 7. sınıf bulunmaktadır. 7. sınıflar bir haftada 15 farklı ders almakla birlikte, bu derslerin bir haftalık toplam saati ise 36 ders saati olmaktadır. Tablo 39’ da bu derslerin isimleri ve haftalık ders saatleri verilmiştir.

Tablo 39: 7. Sınıflara Ait Dersler ve Haftalık Ders Saatleri

Ders Adı	Haftalık Ders saati
Türkçe	5
Matematik	5
Sosyal Bilgiler	3
İngilizce	4
Din Kültürü ve Ahlak Bilgisi	1
Görsel Sanatlar	1
Müzik	1
Teknoloji ve Tasarım	2
Beden Eğitimi ve Spor	2
Fen Bilimleri	4
Kur' an- ı Kerim	2
Hazreti Muhammed' in Hayatı	2
Temel Dini Bilgiler	1
Arapça	2
Uygulamalı Matematik	1

5. sınıfların alması gereken dersler, sayısal kodlarla birbirinden ayrılmış ve çözüm aşamasında kullanılmak üzere aşağıdaki tablolara aktarılmıştır. Örneğin; 5-A sınıfı için Matematik dersi 1 sayısal kodunu taşırken, 5-B sınıfı için 15 kodunu taşımaktadır. Aynı şekilde 5-C sınıfı için İngilizce dersi 30 sayısal kodunu taşırken, 5-D sınıfı için 44 kodunu taşımaktadır. Bu yöntemle, ders - sınıf eşleştirilmesinde karışıklık çıkmaması amaçlanmıştır. Tablo 40' ta 5. sınıfların almış oldukları derslere karşılık gelen sayısal kodlar verilmiştir.

Tablo 40: 5. Sınıflara Ait Ders – Sayısal Kod Eşleştirmesi

Ders Kodları	**5-A**	**5-B**	**5-C**	**5-D**	**5-E**	**5-F**	**5-G**	**5-H**	**5-I**
Matematik	1	15	29	43	57	71	85	99	113
İngilizce	2	16	30	44	58	72	86	100	114
Görsel Sanatlar	3	17	31	45	59	73	87	101	115
Fen Bilimleri	4	18	32	46	60	74	88	102	116
Müzik	5	19	33	47	61	75	89	103	117
Sosyal Bilgiler	6	20	34	48	62	76	90	104	118
Türkçe	7	21	35	49	63	77	91	105	119
Arapça	8	22	36	50	64	78	92	106	120
Temel Dini Bilgiler	9	23	37	51	65	79	93	107	121
Beden Eğitimi ve Spor	10	24	38	52	66	80	94	108	122
Kur’ an- ı Kerim	11	25	39	53	67	81	95	109	123
Din Kültürü ve Ahlak Bilgisi	12	26	40	54	68	82	96	110	124
Bilişim Teknolojileri ve Yazılım	13	27	41	55	69	83	97	111	125
Hazreti Muhammed’ in Hayatı	14	28	42	56	70	84	98	112	126

Tablo 41’ de 6. sınıfların almış oldukları derslere karşılık gelen sayısal kodlar verilmiştir.

Tablo 41: 6. Sınıflara Ait Ders – Sayısal Kod Eşleştirmesi

Ders Kodları	**6-A**	**6-B**	**6-C**	**6-D**	**6-E**	**6-F**
Türkçe	127	142	157	172	187	202
Matematik	128	143	158	173	188	203
Sosyal Bilgiler	129	144	159	174	189	204
İngilizce	130	145	160	175	190	205
Din Kültürü ve Ahlak Bilgisi	131	146	161	176	191	206
Görsel Sanatlar	132	147	162	177	192	207
Müzik	133	148	163	178	193	208
Beden Eğitimi ve Spor	134	149	164	179	194	209
Fen Bilimleri	135	150	165	180	195	210
Kur’ an- ı Kerim	136	151	166	181	196	211
Hazreti Muhammed’ in Hayatı	137	152	167	182	197	212
Temel Dini Bilgiler	138	153	168	183	198	213
Bilişim Teknolojileri ve Yazılım	139	154	169	184	199	214
Arapça	140	155	170	185	200	215
Uygulamalı Matematik	141	156	171	186	201	216

Tablo 42’ de 7. sınıfların almış oldukları derslere karşılık gelen sayısal kodlar verilmiştir.

Tablo 42: 7. Sınıflara Ait Ders – Sayısal Kod Eşleştirmesi

Ders Kodları	**7-A**	**7-B**	**7-C**	**7-D**	**7-E**	**7-F**
Türkçe	217	232	247	262	277	292
Matematik	218	233	248	263	278	293
Sosyal Bilgiler	219	234	249	264	279	294
İngilizce	220	235	250	265	280	295
Din Kültürü ve Ahlak Bilgisi	221	236	251	266	281	296
Görsel Sanatlar	222	237	252	267	282	297
Müzik	223	238	253	268	283	298
Teknoloji ve Tasarım	224	239	254	269	284	299
Beden Eğitimi ve Spor	225	240	255	270	285	300
Fen Bilimleri	226	241	256	271	286	301
Kur’ an- ı Kerim	227	242	257	272	287	302
Hazreti Muhammed’ in Hayatı	228	243	258	273	288	303
Temel Dini Bilgiler	229	244	259	274	289	304
Arapça	230	245	260	275	290	305
Uygulamalı Matematik	231	246	261	276	291	306

Dersleri verecek öğretim elemanlarının isimleri, girmiş oldukları sınıflar ve şubeler, haftalık ders saatleri ile birlikte aşağıda verilmiştir;

1. Haluk Takçı: 5-B, 5-G, 6-C ve 7-C sınıflarının Türkçe dersini vermektedir. Haftalık toplam 23 ders saati görevi vardır.
2. Yasemin Kayabaşı: 5-A, 6-B, 6-E ve 7-D sınıflarının Türkçe dersini vermektedir. Haftalık toplam 23 ders saati görevi vardır.
3. Erdal Tazıcı: 5-D, 5-E, 5-H, 6-A ve 7-E sınıflarının Türkçe dersini vermektedir. Haftalık toplam 29 ders saati görevi vardır.
4. Mukaddes Turan: 5-C, 5-I, 6-F ve 7-F sınıflarının Türkçe dersini vermektedir. Haftalık toplam 23 ders saati görevi vardır.
5. Servet Elele Sezgin: 5-F, 6-D, 7-A ve 7-B sınıflarının Türkçe dersini vermektedir. Haftalık toplam 22 ders saati görevi vardır.
6. Zafer Çeler: 5-I, 6-B, 6-D, 7-A ve 7-D sınıflarının Matematik ve Uygulamalı Matematik derslerini vermektedir. Haftalık toplam 29 ders saati görevi vardır.

7. Gülden Han Yüksel: 5-B, 5-G ve 6-C sınıflarının Matematik ve Uygulamalı Matematik derslerini vermektedir. Haftalık toplam 16 ders saati görevi vardır.
8. Emrah Süre: 5-E, 5-H, 6-A, 7-C ve 7-E sınıflarının Matematik ve Uygulamalı Matematik derslerini vermektedir. Haftalık toplam 28 ders saati görevi vardır.
9. Banu Tepe: 5-F, 6-E, 7-B ve 7-F sınıflarının Matematik ve Uygulamalı Matematik derslerini vermektedir. Haftalık toplam 23 ders saati görevi vardır.
10. Burcu Bulut: 5-A, 5-C, 5-D ve 6-F sınıflarının Matematik ve Uygulamalı Matematik derslerini vermektedir. Haftalık toplam 21 ders saati görevi vardır.
11. Merve Çelik: 5-D, 5-F, 6-C, 6-E, 7-C ve 7-F sınıflarının Fen Bilimleri derslerini vermektedir. Haftalık toplam 24 ders saati görevi vardır.
12. Merve Okur: 5-H, 6-B, 6-D ve 7-B sınıflarının Fen Bilimleri derslerini vermektedir. Haftalık toplam 16 ders saati görevi vardır.
13. Zuhal Can Ertekin: 5-C, 5-G, 6-A, 6-F, 7-A ve 7-E sınıflarının Fen Bilimleri dersini vermektedir. Haftalık toplam 24 ders saati görevi vardır.
14. Gökhan Ayer: 5-B, 5-G, 6-C, 6-D, 7-C ve 7-D sınıflarının İngilizce dersini vermektedir. Haftalık toplam 24 ders saati görevi vardır.
15. Pelin Arda: 5-A, 5-D, 5-F, 5-I, 6-B, 6-F ve 7-B sınıflarının İngilizce dersini vermektedir. Haftalık toplam 22 ders saati görevi vardır.
16. Selda Çam: 5-C, 5-E, 5-H, 6-A, 6-E, 7-A ve 7-F sınıflarının İngilizce dersini vermektedir. Haftalık toplam 23 ders saati görevi vardır.
17. Nazan Özgül: 5-A sınıfında Hazreti Muhammed’ in Hayatı dersini vermektedir. Haftalık toplam 2 ders saati görevi vardır.
18. Ahmet Yakupoğlu: 5-E sınıfında Kur’ an- ı Kerim dersini vermektedir. Haftalık toplam 2 ders saati görevi vardır.
19. Mehtap Yıldırım: 6-E, 7-A ve 7-C sınıflarının Hazreti Muhammed’ in Hayatı, Din Kültürü ve Ahlak Bilgisi, Kur’ an- ı Kerim ve Temel Dini Bilgiler derslerini vermektedir. Haftalık toplam 18 ders saati görevi vardır.
20. Durmuş Esen: 5-C, 5-F, 5-H, 6-D, 7-B ve 7-D sınıflarının Hazreti Muhammed’ in Hayatı, Din Kültürü ve Ahlak Bilgisi, Kur’ an- ı Kerim ve Temel Dini Bilgiler derslerini vermektedir. Haftalık toplam 26 ders saati görevi vardır.
21. Goncagül Açıkgöz: 6-A, 6-C, 6-D, 6-F, 7-E ve 7-F sınıflarının Hazreti Muhammed’ in Hayatı, Din Kültürü ve Ahlak Bilgisi, Kur’ an- ı Kerim, Temel

Dini Bilgiler ve Arapça derslerini vermektedir. Haftalık toplam 28 ders saati görevi vardır.

22. Nurdan Mutlu: 5-B, 5-C, 5-D, 5-E, 5-G, 5-I, 6-A, 6-B, 6-C ve 7-D sınıflarının Hazreti Muhammed' in Hayatı, Din Kültürü ve Ahlak Bilgisi, Kur' an- ı Kerim ve Temel Dini Bilgiler derslerini vermektedir. Haftalık toplam 23 ders saati görevi vardır.
23. Büşra Alavant: 5-A, 5-B, 5-D, 5-E, 5-G, 5-H, 5-I, 6-B, 6-C ve 7-D sınıflarının Hazreti Muhammed' in Hayatı, Din Kültürü ve Ahlak Bilgisi, Kur' an- ı Kerim ve Temel Dini Bilgiler derslerini vermektedir. Haftalık toplam 29 ders saati görevi vardır.
24. Kerime Koyun: Tüm sınıfların Görsel Sanatlar dersini vermektedir. Haftalık toplam 21 ders saati görevi vardır.
25. Meral Yaşar Semiz: 5-D, 6-C, 6-E, 7-E ve 7-F sınıflarının Sosyal Bilgiler dersini vermektedir. Haftalık toplam 15 ders saati görevi vardır.
26. Kerim Özen: 5-A, 5-B, 5-E, 5-F, 5-G, 6-A, 6-B, 7-B ve 7-C sınıflarının Sosyal Bilgiler dersini vermektedir. Haftalık toplam 27 ders saati görevi vardır.
27. Damla Belipek: 5-C, 5-H, 6-D, 6-F, 7-A ve 7-E sınıflarının Sosyal Bilgiler dersini vermektedir. Haftalık toplam 18 ders saati görevi vardır.
28. Vedat Göl: 5-I sınıfının Sosyal Bilgiler dersini vermektedir. Haftalık toplam 2 ders saati görevi vardır.
29. Yasemin Çelebi: 7.sınıfların Teknoloji – Tasarım dersini vermektedir. Haftalık toplam 12 ders saati görevi vardır.
30. Osman Türklü: 5-E, 5-F, 5-G, 5-H, 5-I, 6-D, 6-E, 6-F, 7-C, 7-D ve 7-E sınıflarının Beden Eğitimi ve Spor dersini vermektedir. Haftalık toplam 17 ders saati görevi vardır.
31. Halit Sağlam: 5-A, 5-B, 5-E, 5-F, 6-A, 6-C, 6-D, 7-C ve 7-F sınıflarının Arapça dersini vermektedir. Haftalık toplam 28 ders saati görevi vardır.
32. Esra Adanur: 5-C, 5-D, 5-G, 5-H, 5-I, 6-B, 6-E, 7-B, 7-D ve 7-E sınıflarının Arapça dersini vermektedir. Haftalık toplam 30 ders saati görevi vardır.
33. Mehmet Daydaş: 5. ve 6. sınıfların Bilişim Teknolojileri ve Yazılım dersini vermektedir. Haftalık toplam 30 ders saati görevi vardır.
34. Nejla Sevim: Tüm sınıfların Müzik dersini vermektedir. Haftalık toplam 21 ders saati görevi vardır.

35. Pelin Demiroğlu: 5-A, 5-B, 5-C, 5-D, 6-A, 6-B, 6-C, 7-A, 7-B ve 7-F sınıflarının Beden Eğitimi ve Spor dersini vermektedir. Haftalık toplam 16 ders saati görevi vardır.
36. Esra Özgüney: 5-A, 5-B, 5-E, 5-I ve 7-D sınıflarının Fen Bilimleri derslerini vermektedir. Haftalık toplam 20 ders saati görevi vardır.

5.3. Matematiksel Modelin Oluşturulması

Ders zaman çizelgeleme problemleri, tüm zaman çizelgeleme problemleri gibi kesin ve esnek olmak üzere çok sayıda kısıt içermektedir. Bu kısıtlardan kesin olarak adlandırılan kısıtlar, mutlaka sağlanması gereken, sağlanmaması durumunda geçerli bir çizelgenin oluşturulmasının mümkün olmayacağı kısıtlardır. Esnek kısıtlar ise oluşturulacak çizelgenin kalitesini arttırma açısından olabildiğince sağlanması istenen fakat sağlanmaması durumunda geçerli bir çizelge oluşturulmasını engellemeyen kısıtlardır (Köçken ve diğerleri, 2014: 30).

Yukarıda sözü geçen kısıtlar, ders zaman çizelgeleri için aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

Kesin kısıtlar:

i) Öğretim elemanlarının, aynı saatte, aynı sınıfa derslerinin olmasını önleyecek çakışmama kısıtı,
ii) Bütün sınıfların, müfredatta bulunan derslerin tamamını alması gerektiği kısıtı,
iii) Herhangi bir dersin hafta içerisinde, alınması gereken ders saati kadar alınması gerektiği kısıtı,
iv) Herhangi bir dersin gün içerisinde maksimum kaç saat alınabileceğini düzenleyen kısıt

şeklinde tanımlanabilmektedir.

Esnek kısıtlar:

i) Öğretim elemanlarının, öğretim yapacakları zaman aralıklarını tercih edebilme kısıtı
ii) Öğrencilerin teneffüs zamanlarının ayarlanabilmesi kısıtı,
iii) Derslikler arasındaki mesafeleri, öğretim elemanları için minimum yapabilecek mesafe kısıtı

şeklinde tanımlanabilmektedir (Daskalaki ve diğerleri, 1996: 121-122).

Ders çizelgeleme modelinin oluşturulması aşamasında bir takım varsayımlara ihtiyaç duyulacaktır. Bu varsayımlar aşağıdaki şekilde olacaktır:

i) Sınıflara atanacak branş öğretmenleri sene başı öğretmenler kurulunda kararlaştırılmıştır.
ii) Sınıf rehber öğretmenliği görevi, idare tarafından öğretim elemanlarına atanmıştır.
iii) Gün içerisinde okutulacak ders saatleri ve teneffüs araları önceden belirlenmiştir.
iv) Öğretim elemanlarının girecekleri saatler mevzuata uygun şekilde belirlenmiştir.

Modelde, dersler 1’ den 306’ ya, günler 1’ den 5’ e ve günlük ders saatleri ise 1’ den 8’ e kadar sayısal kodlarla eşleştirilerek tanımlanmıştır. Modelde kullanılacak indisler ve kümeler aşağıdaki gibi olacaktır:

i:	Okutulacak derslerin indisi	$i \in I = \{1, 2, \ldots, 306\}$
j:	Hafta içindeki günlerin indisi	$j \in J = \{1,2, \ldots, 5\}$
k:	Ders saati indisi	$k \in K = \{1, 2, \ldots, 8\}$

Yukarıdaki tanımlamalara göre i indisi, 1’ den 306’ ya kadar sayısal kodlarla ifade edilen dersleri temsil etmektedir. Her sınıf düzeyinde verilmesi gereken dersler I kümesini oluşturarak, modelde kullanılabilmek için bu şekilde sayısal kodlarla tanımlanmıştır. j indisi, hafta içerisinde bulunan günleri temsil etmektedir. 1, 2, ….., 5 sayıları sırasıyla Pazartesi, Salı, Çarşamba, Perşembe ve Cuma günlerine karşılık gelen sayısal kodlardır. k indisi ise, gün içerisinde kullanılabilecek ders saatlerini ifade etmektedir. 1, 2, …, 8 sayıları sırasıyla, 1. ders saati, 2. ders saati, ….., 8. ders saati olarak tanımlanmaktadır.

Uygulama yapılacak okulda, her bir sınıf düzeyinde haftalık verilmesi gereken 36 ders saati bulunmaktadır. Bu derslerin dağılımında Pazartesi, Salı, Perşembe ve Cuma günleri 7, Çarşamba günü ise 8 ders saati olacak şekilde ayarlama yapılması okul idaresi tarafından kararlaştırılmıştır. Bunun yanı sıra okulda toplam 21 şubede eğitim – öğretim olduğundan ve her şubenin haftalık 36 ders saati alması gerektiğinden, ders çizelgesinde 21 x 36 = 756 dersin olması gerekecektir. Bu nedenle amaç fonksiyonu, Pazartesi, Salı, Perşembe ve Cuma günlerinin 8. ders saatlerine atama yapmayacak şekilde oluşturulmuştur. Amaç fonksiyonun maksimum türünde oluşturulmasının hedefinde ise ortaokul ders çizelgelerinde, herhangi bir şubede, gün içerisinde boş ders olmasının önüne geçilmek istenmesi vardır. Aksi takdirde şubelerde gün içerisinde boş ders saatleri oluşacak, aynı zamanda ders müfredatında bulunan bazı derslerin tamamlanamaması sorunu ortaya çıkacaktır.

Modelin amaç fonksiyonu:

Maksimum z =

$$\sum_{i=1,j=1,k=1}^{i=306,j=5,k=8} x(i,j,k) - \sum_{i=1,j=1,k\in\{8\}}^{i=306,j=2,k\in\{8\}} x(i,j,k) - \sum_{i=1,j=4,k\in\{8\}}^{i=306,j=5,k\in\{8\}} x(i,j,k)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu amaç fonksiyonunun açık formatı Ekler bölümünde yer almaktadır.

Herhangi bir dersin gün içerisinde aynı sınıfta en fazla 2 ders saati görülmesini sağlayacak kısıt:

$$x(i,j,'1') + x(i,j,'2') + x(i,j,'3') + x(i,j,'4') + x(i,j,'5') + x(i,j,'6') + x(i,j,'7') + x(i,j,'8') \leq 2$$

şeklinde olacaktır. Bu sayede sınıflardan birisinde aynı gün içerisinde bir ders maksimum 2 ders saati görülecektir. Aynı gün içerisinde 3 veya 4 ders saati alınması pedagojik yönden uygun olmadığından modele bu şekilde bir kısıt eklenmiştir.

Öğretim elemanlarının vermiş oldukları derslerin çakışmasını engellemek için gerekli kısıtlar;

Haluk Takçı: x('21',j,k) + x('91',j,k) + x('157',j,k) + x('247',j,k) ≤ 1

Yasemin Kayabaşı: x('7',j,k) + x('142',j,k) + x('187',j,k) + x('262',j,k) ≤ 1

Erdal Tazıcı: x('49',j,k) + x('105',j,k) + x('127',j,k) + x('277',j,k) + x('63',j,k) ≤ 1

Mukaddes Turan: x('202',j,k) + x('292',j,k) + x('119',j,k) + x('35',j,k) ≤ 1

Servet Elele Sezgin: x('217',j,k) + x('77',j,k) + x('232',j,k) + x('172',j,k) ≤ 1

Zafer Çeler: x('231',j,k) + x('156',j,k) + x('263',j,k) + x('173',j,k) + x('218',j,k) + x('113',j,k) + x('143',j,k) + x('276',j,k) + x('186',j,k) ≤ 1

Gülden Han Yüksel: x('15',j,k) + x('85',j,k) + x('158',j,k) + x('171',j,k) ≤ 1

Emrah Süre: x('99',j,k) + x('57',j,k) + x('128',j,k) + x('141',j,k) + x('248',j,k) + x('261',j,k) + x('278',j,k) + x('291',j,k) ≤ 1

Banu Tepe: x('188',j,k) + x('233',j,k) + x('293',j,k) + x('201',j,k) + x('71',j,k) + x('246',j,k) + x('306',j,k) ≤ 1

Burcu Bulut: x('29',j,k) + x('43',j,k) + x('1',j,k) + x('203',j,k) + x('216',j,k) ≤ 1

Merve Çelik: x('74',j,k) + x('195',j,k) + x('46',j,k) + x('301',j,k) + x('256',j,k) + x('165',j,k) ≤ 1

Merve Okur: x('241',j,k) + x('180',j,k) + x('150',j,k) + x('102',j,k) ≤ 1

Zuhal Can Ertekin: x('286',j,k) + x('88',j,k) + x('135',j,k) + x('32',j,k) + x('210',j,k) + x('226',j,k) ≤ 1

Gökhan Ayer: x('265',j,k) + x('86',j,k) + x('280',j,k) + x('175',j,k) + x('160',j,k) + x('16',j,k) + x('250',j,k) ≤ 1

Pelin Arda: x('235',j,k) + x('205',j,k) + x('72',j,k) + x('2',j,k) + x('145',j,k) + x('114',j,k) + x('44',j,k) ≤ 1

Selda Çam: x('295',j,k) + x('220',j,k) + x('100',j,k) + x('58',j,k) + x('190',j,k) + x('30',j,k) + x('130',j,k) ≤ 1

Nazan Özgül: x('14',j,k) ≤ 1

Ahmet Yakupoğlu: x('67',j,k) ≤ 1

Mehtap Yıldırım: x('228',j,k) + x('221',j,k) + x('258',j,k) + x('259',j,k) + x('229',j,k) + x('197',j,k) + x('191',j,k) + x('198',j,k) + x('227',j,k) + x('196',j,k) + x('251',j,k) + x('257',j,k) ≤ 1

Durmuş Esen: x('243',j,k) + x('176',j,k) + x('84',j,k) + x('236',j,k) + x('40',j,k) + x('183',j,k) + x('42',j,k) + x('107',j,k) + x('181',j,k) + x('37',j,k) + x('242',j,k) + x('244',j,k) + x('81',j,k) + x('82',j,k) + x('266',j,k) + x('79',j,k) + x('112',j,k) + x('109',j,k) ≤ 1

Goncagül Açıkgöz: x('166',j,k) + x('213',j,k) + x('215',j,k) + x('289',j,k) + x('288',j,k) + x('212',j,k) + x('303',j,k) + x('211',j,k) + x('206',j,k) + x('137',j,k) + x('296',j,k) + x('281',j,k) + x('287',j,k) + x('304',j,k) + x('161',j,k) + x('138',j,k) + x('302',j,k) + x('182',j,k) ≤ 1

Nurdan Mutlu: x('274',j,k) + x('96',j,k) + x('168',j,k) + x('51',j,k) + x('25',j,k) + x('39',j,k) + x('65',j,k) + x('136',j,k) + x('152',j,k) + x('153',j,k) + x('272',j,k) + x('146',j,k) + x('93',j,k) + x('131',j,k) + x('121',j,k) + x('23',j,k) + x('28',j,k) ≤ 1

Büşra Alavant: x('68',j,k) + x('53',j,k) + x('11',j,k) + x('9',j,k) + x('54',j,k) + x('167',j,k) + x('12',j,k) + x('124',j,k) + x('56',j,k) + x('110',j,k) + x('95',j,k) + x('273',j,k) + x('26',j,k) + x('70',j,k) + x('123',j,k) + x('126',j,k) + x('98',j,k) + x('151',j,k) ≤ 1

Kerime Koyun: x('73',j,k) + x('132',j,k) + x('17',j,k) + x('31',j,k) + x('297',j,k) + x('59',j,k) + x('3',j,k) + x('162',j,k) + x('115',j,k) + x('267',j,k) + x('207',j,k) + x('177',j,k) + x('282',j,k) + x('101',j,k) + x('237',j,k) + x('192',j,k) + x('87',j,k) + x('45',j,k) + x('252',j,k) + x('147',j,k) + x('222',j,k) ≤ 1

Meral Yaşar Semiz: x('48',j,k) + x('159',j,k) + x('189',j,k) + x('279',j,k) + x('294',j,k) ≤ 1

Kerim Özen: x('6',j,k) + x('20',j,k) + x('62',j,k) + x('76',j,k) + x('90',j,k) + x('129',j,k) + x('144',j,k) + x('234',j,k) + x('249',j,k) ≤ 1

Damla Belipek: x('174',j,k) + x('219',j,k) + x('34',j,k) + x('204',j,k) + x('104',j,k) + x('264',j,k) ≤ 1

Vedat Göl: x('118',j,k) ≤ 1

Yasemin Çelebi: x('224',j,k) + x('239',j,k) + x('254',j,k) + x('269',j,k) + x('284',j,k) + x('299',j,k) ≤ 1

Osman Türklü: x('94',j,k) + x('270',j,k) + x('122',j,k) + x('80',j,k) + x('66',j,k) + x('179',j,k) + x('285',j,k) + x('255',j,k) + x('108',j,k) + x('209',j,k) + x('194',j,k) ≤ 1

Halit Sağlam: x('185',j,k) + x('230',j,k) + x('78',j,k) + x('8',j,k) + x('22',j,k) + x('140',j,k) + x('170',j,k) + x('64',j,k) + x('305',j,k) + x('260',j,k) ≤ 1

Esra Adanur: x('120',j,k) + x('106',j,k) + x('155',j,k) + x('245',j,k) + x('50',j,k) + x('92',j,k) + x('275',j,k) + x('36',j,k) + x('200',j,k) + x('290',j,k) ≤ 1

Mehmet Daydaş: x('13',j,k) + x('27',j,k) + x('41',j,k) + x('55',j,k) + x('69',j,k) + x('83',j,k) + x('97',j,k) + x('111',j,k) + x('125',j,k) + x('139',j,k) + x('154',j,k) + x('169',j,k) + x('184',j,k) + x('199',j,k) + x('214',j,k) ≤ 1
Nejla Sevim: x('5',j,k) + x('19',j,k) + x('33',j,k) + x('47',j,k) + x('61',j,k) + x('75',j,k) + x('89',j,k) + x('103',j,k) + x('117',j,k) + x('133',j,k) + x('148',j,k) + x('163',j,k) + x('178',j,k) + x('193',j,k) + x('208',j,k) + x('223',j,k) + x('238',j,k) + x('253',j,k) + x('268',j,k) + x('283',j,k) + x('298',j,k) ≤ 1
Pelin Demiroğlu: x('10',j,k) + x('24',j,k) + x('38',j,k) + x('52',j,k) + x('134',j,k) + x('149',j,k) + x('164',j,k) + x('225',j,k) + x('240',j,k) + x('300',j,k) ≤ 1
Esra Özgüney: x('4',j,k) + x('18',j,k) + x('60',j,k) + x('116',j,k) + x('271',j,k) ≤ 1

şeklinde olacaktır. Bu kısıtın modele eklenmesi, aynı gün içerisinde aynı ders saatinde, öğretim elemanının farklı şubelerde derse girmesinin önüne geçilmesi içindir.

5.sınıflarda bulunan 9 şubenin derslerinin çakışmasını engellemek için gerekli kısıtlar;

5.sınıf A şubesi için çakışma engelleme: x('1',j,k) + x('2',j,k) + x('3',j,k) + x('4',j,k) + x('5',j,k) + x('6',j,k) + x('7',j,k) + x('8',j,k) + x('9',j,k) + x('10',j,k) + x('11',j,k) + x('12',j,k) + x('13',j,k) + x('14',j,k) ≤ 1
5.sınıf B şubesi için çakışma engelleme: x('15',j,k) + x('16',j,k) + x('17',j,k) + x('18',j,k) + x('19',j,k) + x('20',j,k) + x('21',j,k) + x('22',j,k) + x('23',j,k) + x('24',j,k) + x('25',j,k) + x('26',j,k) + x('27',j,k) + x('28',j,k) ≤ 1
5.sınıf C şubesi için çakışma engelleme: x('29',j,k) + x('30',j,k) + x('31',j,k) + x('32',j,k) + x('33',j,k) + x('34',j,k) + x('35',j,k) + x('36',j,k) + x('37',j,k) + x('38',j,k) + x('39',j,k) + x('40',j,k) + x('41',j,k) + x('42',j,k) ≤ 1
5.sınıf D şubesi için çakışma engelleme: x('43',j,k) + x('44',j,k) + x('45',j,k) + x('46',j,k) + x('47',j,k) + x('48',j,k) + x('49',j,k) + x('50',j,k) + x('51',j,k) + x('52',j,k) + x('53',j,k) + x('54',j,k) + x('55',j,k) + x('56',j,k) ≤ 1
5.sınıf E şubesi için çakışma engelleme: x('57',j,k) + x('58',j,k) + x('59',j,k) + x('60',j,k) + x('61',j,k) + x('62',j,k) + x('63',j,k) + x('64',j,k) + x('65',j,k) + x('66',j,k) + x('67',j,k) + x('68',j,k) + x('69',j,k) + x('70',j,k) ≤ 1
5.sınıf F şubesi için çakışma engelleme: x('71',j,k) + x('72',j,k) + x('73',j,k) + x('74',j,k) +

x('75',j,k) + x('76',j,k) + x('77',j,k) + x('78',j,k) + x('79',j,k) + x('80',j,k) + x('81',j,k) + x('82',j,k) + x('83',j,k) + x('84',j,k) ≤ 1

5.sınıf G şubesi için çakışma engelleme: x('85',j,k) + x('86',j,k) + x('87',j,k) + x('88',j,k) + x('89',j,k) + x('90',j,k) + x('91',j,k) + x('92',j,k) + x('93',j,k) + x('94',j,k) + x('95',j,k) + x('96',j,k) + x('97',j,k) + x('98',j,k) ≤ 1

5.sınıf H şubesi için çakışma engelleme: x('99',j,k) + x('100',j,k) + x('101',j,k) + x('102',j,k) + x('103',j,k) + x('104',j,k) + x('105',j,k) + x('106',j,k) + x('107',j,k) + x('108',j,k) + x('109',j,k) + x('110',j,k) + x('111',j,k) + x('112',j,k) ≤ 1

5.sınıf I şubesi için çakışma engelleme: x('113',j,k) + x('114',j,k) + x('115',j,k) + x('116',j,k) + x('117',j,k) + x('118',j,k) + x('119',j,k) + x('120',j,k) + x('121',j,k) + x('122',j,k) + x('123',j,k) + x('124',j,k) + x('125',j,k) + x('126',j,k) ≤ 1

6.sınıflarda bulunan 6 şubenin derslerinin çakışmasını engellemek için gerekli kısıtlar;

6.sınıf A şubesi için çakışma engelleme: x('127',j,k) + x('128',j,k) + x('129',j,k) + x('130',j,k) + x('131',j,k) + x('132',j,k) + x('133',j,k) + x('134',j,k) + x('135',j,k) + x('136',j,k) + x('137',j,k) + x('138',j,k) + x('139',j,k) + x('140',j,k) + x('141',j,k) ≤ 1

6.sınıf B şubesi için çakışma engelleme: x('142',j,k) + x('143',j,k) + x('144',j,k) + x('145',j,k) + x('146',j,k) + x('147',j,k) + x('148',j,k) + x('149',j,k) + x('150',j,k) + x('151',j,k) + x('152',j,k) + x('153',j,k) + x('154',j,k) + x('155',j,k) + x('156',j,k) ≤ 1

6.sınıf C şubesi için çakışma engelleme: x('157',j,k) + x('158',j,k) + x('159',j,k) + x('160',j,k) + x('161',j,k) + x('162',j,k) + x('163',j,k) + x('164',j,k) + x('165',j,k) + x('166',j,k) + x('167',j,k) + x('168',j,k) + x('169',j,k) + x('170',j,k) + x('171',j,k) ≤ 1

6.sınıf D şubesi için çakışma engelleme: x('172',j,k) + x('173',j,k) + x('174',j,k) + x('175',j,k) + x('176',j,k) + x('177',j,k) + x('178',j,k) + x('179',j,k) + x('180',j,k) + x('181',j,k) + x('182',j,k) + x('183',j,k) + x('184',j,k) + x('185',j,k) + x('186',j,k) ≤ 1

6.sınıf E şubesi için çakışma engelleme: x('187',j,k) + x('188',j,k) + x('189',j,k) + x('190',j,k) + x('191',j,k) + x('192',j,k) + x('193',j,k) + x('194',j,k) + x('195',j,k) + x('196',j,k) + x('197',j,k) + x('198',j,k) + x('199',j,k) + x('200',j,k) + x('201',j,k) ≤ 1

6.sınıf F şubesi için çakışma engelleme: x('202',j,k) + x('203',j,k) + x('204',j,k) + x('205',j,k) + x('206',j,k) + x('207',j,k) + x('208',j,k) + x('209',j,k) + x('210',j,k) + x('211',j,k) + x('212',j,k) + x('213',j,k) + x('214',j,k) + x('215',j,k) + x('216',j,k) ≤ 1

7.sınıflarda bulunan 6 şubenin derslerinin çakışmasını engellemek için gerekli kısıtlar;

7.sınıf A şubesi için çakışma engelleme: x('217',j,k) + x('218',j,k) + x('219',j,k) + x('220',j,k) + x('221',j,k) + x('222',j,k) + x('223',j,k) + x('224',j,k) + x('225',j,k) + x('226',j,k) + x('227',j,k) + x('228',j,k) + x('229',j,k) + x('230',j,k) + x('231',j,k) ≤ 1
7.sınıf B şubesi için çakışma engelleme: x('232',j,k) + x('233',j,k) + x('234',j,k) + x('235',j,k) + x('236',j,k) + x('237',j,k) + x('238',j,k) + x('239',j,k) + x('240',j,k) + x('241',j,k) + x('242',j,k) + x('243',j,k) + x('244',j,k) + x('245',j,k) + x('246',j,k) ≤ 1
7.sınıf C şubesi için çakışma engelleme: x('247',j,k) + x('248',j,k) + x('249',j,k) + x('250',j,k) + x('251',j,k) + x('252',j,k) + x('253',j,k) + x('254',j,k) + x('255',j,k) + x('256',j,k) + x('257',j,k) + x('258',j,k) + x('259',j,k) + x('260',j,k) + x('261',j,k) ≤ 1
7.sınıf D şubesi için çakışma engelleme: x('262',j,k) + x('263',j,k) + x('264',j,k) + x('265',j,k) + x('266',j,k) + x('267',j,k) + x('268',j,k) + x('269',j,k) + x('270',j,k) + x('271',j,k) + x('272',j,k) + x('273',j,k) + x('274',j,k) + x('275',j,k) + x('276',j,k) ≤ 1
7.sınıf E şubesi için çakışma engelleme: x('277',j,k) + x('278',j,k) + x('279',j,k) + x('280',j,k) + x('281',j,k) + x('282',j,k) + x('283',j,k) + x('284',j,k) + x('285',j,k) + x('286',j,k) + x('287',j,k) + x('288',j,k) + x('289',j,k) + x('290',j,k) + x('291',j,k) ≤ 1
7.sınıf F şubesi için çakışma engelleme: x('292',j,k) + x('293',j,k) + x('294',j,k) + x('295',j,k) + x('296',j,k) + x('297',j,k) + x('298',j,k) + x('299',j,k) + x('300',j,k) + x('301',j,k) + x('302',j,k) + x('303',j,k) + x('304',j,k) + x('305',j,k) + x('306',j,k) ≤ 1

şeklinde olacaktır. Bu sayede sınıflarda görülecek derslerin çakışmasının önüne geçilecektir.

Gün içerisinde işlenen derslerin mümkün olduğunca blok olmasını (ardışıklık kuralı) sağlayacak kısıt;

$$x(i,j,k) - x(i,j,k+1) - x(i,j,k-1) \leq 0$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu sayede herhangi bir şubede gün içerisinde görülecek herhangi bir ders 2 ders saati ise bunların olabildiğince ardışık olması sağlanmıştır. Fakat bu kısıtlama, model için kesin kısıt olduğundan çözümde sadece ilk iki ders için uygulanmıştır. Aksi takdirde çizelgeleme sonucunun elde edilmediği görülmüştür. Diğer bir ifade ile çözümde sorun yaratan bu kesin kısıt ilk iki ders saati için uygulanırken, diğer ders saatleri için esnetilmiştir.

Yukarıda verilen bilgiler doğrultusunda, oluşturulan matematiksel modelin çözümünde GAMS 23.3.3 sürümlü bilgisayar paket programı ve CPLEX çözücüsü kullanılmıştır. CPLEX çözücüsü doğrusal denklem çözen bir optimizasyon programıdır. Matematiksel programlamada ve koşula (kısıta) dayalı zaman programlama modellerini kısa zaman içerisinde çözmek gibi yararları bulunmaktadır. Tezin konusu olan çizelgeleme problemlerinde, veriler arasında çakışmayı engellemesi, modeli test etmesi, modelin çözümündeki ilerlemeyi tespit etmesi ve hataları ayıklaması sebebiyle çözümde tercih edilmiştir. Sonuçlara uygun şekilde hazırlanan ders programları tablolar halinde Ekler bölümünde verilmiştir (IBM ILOG OPL-CPLEX Analyst Studio (t.y.), http://www-03.ibm.com/software/products/tr/ibmilogopl-analstud).

SONUÇ VE ÖNERİLER

Literatürde ders çizelgeleme probleminin çözümüne örnek teşkil eden çok sayıda çalışma vardır. Bunlar, üniversite ders çizelgeleme, sınav tarihi çizelgeme ve kurs zaman çizelgeleme alanlarında bulunmakla birlikte, genel olarak yükseköğretim seviyesindeki kurumları ilgilendiren çalışmalar şeklindedir. Literatürde ortaokul ders çizelgeleme problemi çok kısıtlı sayıda yer almakla birlikte, ülkemizde bu konuda bir çalışma yapılmadığı anlaşılmıştır. Bu nedenle uygulamanın yapılacağı düzey ortaokul olarak seçilmiştir. Bu tez, ülkemizde ortaokul ders çizelgeleme problemine 0 – 1 tamsayılı programlama ile yaklaşan ilk çalışma olma özelliğindedir.

Çalışmanın ilk bölümünde, yöneylem konusu genel hatları ile ele alınmış olup, ikinci bölümde, doğrusal programlama yönteminin tanımı, tarihi ve uygulaması üzerinde durulmuştur. Üçüncü bölümde, teze konu olan tamsayılı programlama ve çözüm yöntemleri üzerinde durulmuş, farklı iki model üzerinde uygulaması yapılmıştır. Dördüncü bölümde, literatürde ne tarz çalışmalar üzerinde durulduğu ifade edilmiştir. Son bölümde ise bir ortaokul ders çizelgeleme problemi üzerinde, tamsayılı programlama yönteminin uygulaması yapılarak, sonuçlar GAMS 23.3.3. sürümlü paket programı ile bulunmuştur.

Oluşturulan matematiksel model, GAMS paket programı ile çalıştırılarak 39 saniyede çözüm elde edilmiştir. Sonuçlardan, çözüm için 8411 iterasyon gerçekleştirildiği anlaşılmaktadır. Elde edilen sonuçların toplam 756 tamsayılı değişkenden oluştuğu görülmektedir. Paket programın sonuçları incelendiğinde olası en iyi sonuç değeri 756 olarak verilmektedir. Buradan çıkarılacak sonuç, % 100 başarı oranıyla ders çizelgelemenin gerçekleştiğidir. Çözüme uygun olarak hazırlanan çizelgeler Ekler bölümünde bütün sınıf düzeyindeki şubeler için sırasıyla verilmiştir.

Teze konu olan çalışmanın, ortaokul ders çizelgeleme problemi konusunda ülkemizde bir ilk olması ve ihtiyaca göre gerekli değişiklikler yapılarak, farklı seviyede kurumlar için kullanılabileceği sonucuna varılmıştır. Bu anlamda daha esnek kısıtlamalarla, çeşitli ihtiyaçlara cevap veren modeller oluşturularak, pratikte kullanılması mümkün olacaktır. Farklı fiziksel yapıdaki okulların, farklı özel durumlara ve beşeri kaynaklara sahip olduğu düşünüldüğünde çalışma ek kısıtlarla genişletilip, kullanım alanı bulabilecektir.

Öğrenci sayıları, öğretmen sayıları, okul yönetiminden beklentiler sayısız ek kısıtlar kullanılarak insan ve kurum merkezli olarak çözülebilecektir. Bu anlamda, bundan sonraki çalışmalar için bir nevi altyapı ortaya konmuş olunmaktadır.

YARARLANILAN KAYNAKLAR

Ada, Erhan (1990), "İşletme Problemlerinin Çözümünde Yöneylem Araştırması Tekniklerinden Yararlanmak İçin Gerekli Koşulların Sağlanmasında Sistem Analizi", **Dokuz Eylül Üniversitesi, İ.İ.B.F Dergisi**, 5(1-2), 424-434.

Alan, M. Ali ve Yeşilyurt, Cavit (2004), "Doğrusal Programlama Problemlerinin Excel ile Çözümü", **Cumhuriyet Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi**, 5(1), 151-162.

Aygüneş, H. ve diğerleri (2001), **Yöneylem Araştırması Ders Kitabı**, Ankara: Kara Harp Okulu Matbaası.

Bakır, M. A. ve Altınkaynak, B. (2003), **Tamsayılı Programlama Teori Modeller ve Algoritmalar**, 1.Basım, Ankara: Nobel Yayınları.

Bakoğlu, Hüsamettin (1982), **Doğrusal Programlama**, İzmir: Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Baskı İşleri.

Çevik, Osman (2006), "Tamsayılı Doğrusal Programlama ile İşgücü Planlaması ve Bir Uygulama", **Afyon Kocatepe Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi**, 8(1), 157-171.

Doğrusöz, Halim (1976), "Türkiye'de Yöneylem Araştırması", **Yöneylem Araştırması Bildiriler'75**, Gebze, MAE-YAD Yayını.

Dowling, Edward T. (1993), **İşletme ve İktisat İçin Matematiksel Yöntemler**, (Çev. Ö.Faruk Çolak, M.Yıldırımoğlu), Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.

Erdoğan, N. Kemal (2005), **Lineer Programlamada İç Nokta Algoritmaları**, Eskişehir: Anadolu Üniversitesi Yayınları.

Esin, Alptekin (1981), **Yöneylem Araştırmasında Yararlanılan Karar Yöntemleri**, 1.Baskı, Ankara: A.İ.T.İ.A Yayınları.

Esin, Alptekin (1998), **Yöneylem Araştırmasında Yararlanılan Karar Yöntemleri**, 3.Baskı, Ankara: Gazi Üniversitesi Yayınları.

Hallaç, Osman (1991), **Kantitatif Karar Verme Teknikleri**, 3.Baskı, İstanbul: Evrim Dağıtım.

Hillier, S. Frederick ve Lieberman, J. Gerald (1989), **Introduction To Operations Research**, Fourth Edition, California: McGraw-Hill Publishing Company.

Hillier, S. Frederick ve Lieberman, J. Gerald (1995), **Introduction To Operations Research**, Sixth Edition, California: McGraw-Hill Publishing Company.

Hallaç, Osman (1991), **Kantitatif Karar Verme Teknikleri**, 3.Baskı, İstanbul: Evrim Dağıtım.

Kara, İmdat (1979), **Yöneylem Araştırmasının Yöntembilimi**, 1.Baskı, Eskişehir: Eskişehir İktisadi ve Ticari Bilimler Akademisi Yayınları.

Kara, İmdat (1991), **Doğrusal Programlama**, İstanbul: Bilim Teknik Yayınevi.

Köçken, Hale ve diğerleri (2014), "Üniversite Ders Zaman Çizelgeleme Problemi İçin İkili Tamsayılı Bir Model ve Bir Uygulama", **Journal of the School of Business Administration,** 43(1), 28-54.

Larnder, Harold. (1984), "The Origin Of Operational Research", **Operational Research**, 32(2), 465-475.

Luenberger, David G. (2003), **Linear and Nonlinear Programming**, Second Edition, Boston: Kluwer Academic.

Oladokun, V. O. ve S. O. Badmus. (2008), "An Integer Linear Programming Model of a University Course timetabling Problem", **Pacific Journal of Science and Technology**, 9(2), 426-431.

Özgüven, Cemal (1986), **Doğrusal Programlama**, Kayseri: Erciyes Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi.

Öztürk, Ahmet (2011), **Yöneylem Araştırmasına Giriş**, 2.Baskı, Bursa: Ekin Kitabevi Yayınları.

Öztürk, Ahmet, (2013), "Yöneylem Araştırmasının Tarihi Gelişimi ve Özellikleri", **Alphanumeric Journal**, 1(1), 1-11.

Sağır, Müjgan (2013), **"**Tamsayılı Programlama", Prof. Dr. Ahmet Özmen (Ed.), **Yöneylem Araştırması – II**, 1.Baskı içinde (22-41), Eskişehir: Anadolu Üniversitesi Açıköğretim Fakültesi Yayınları.

Taha, Hamdy A. (1987), **Operation Research: An Introduction**, Fourth Edition, New York: Macmillan Publishing Company.

Taha, Hamdy A. (2006), **Operation Research: An Introduction**, Eight Edition, New Jersey: Prentice Hall.

Tulunay, Yılmaz (1987), **Matematik Programlama ve İşletme Uygulamaları**, İstanbul: Bayrak Matbaacılık.

Turban, Efraim ve Meredith, Jack (1994), **Fundamentals Of Management Science**, Sixth Edition, Homewood, IL: Irwin.

URL, "IBM ILOG OPL-CPLEX Analyst Studio (t.y.), http://www-03.ibm.com/software/products/tr/ibmilogopl-analstud (11.05.2015).

URL, "Yöneylem Araştırmasının Uygulama Alanları" (t.y.), http://enm.blogcu.com/yoneylem-arastirmasi-nedir/8172485 (27.01.2014).

Winston, Wayne L. (2004), **Operations Research Applications and Algorithms**, Fourth Edition, Belmont, CA: Thomson Brooks Cole.

Wren, Anthony (1996), "Scheduling, Timetabling and Rostering – A special relationship?", **Practice and Theory of Automated Timetabling Lecture Notes in Computer Science**, 1153, 46-75.

Yamak, Oygur (1994), **Üretim Yönetimi**, 1.Baskı, İstanbul: Alfa Basım Yayım.

Zengin, Hilmi (1987), **Türkiye'de Paketli Çay Dağıtımının Optimizasyonu (Ulaştırma Modeli)**, Yayınlanmamış Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi.