KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

ÜST TARAFINDAN RİJİT OLARAK MESNETLENMİŞ ELASTİK BİR TABAKA İLE RİJİT BİR BLOK ARASINDAKİ SÜRTÜNMESİZ DEĞME PROBLEMİ

İnş. Müh. Volkan KAHYA

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
" İnşaat Yüksek Mühendisi "
Ünvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 13.06.1997

Tezin Sözlü Savunma Tarihi : 14.07.1997

Tezin Danışmanı : Prof. Dr. Ragıp ERDÖL

Jüri Üyesi : Prof. Dr. A. Osman ÇAKIROĞLU

Jüri Üyesi : Doç. Dr. Ümit UZMAN

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Fazlı ARSLAN

Haziran 1997

TRABZON

ÖNSÖZ

Bu çalışma Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı' nda Yüksek Lisans tezi olarak gerçekleştirilmiştir.

Üst tarafından rijit olarak mesnetlenmiş elastik bir tabaka ile rijit bir blok arasındaki sürtünmesiz değme problemi konulu çalışmayı bana önererek, diğer önemli görevlerine rağmen çalışmamı başlangıcından sonuna kadar sürekli takip edip, çalışmam boyunca bana araştırma zevki ve bilimsel düşünce disiplini aşılayan, tezimin her aşamasında geniş bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım yönetici hocam, Sayın Prof. Dr. Ragıp ERDÖL' e şükran ve saygılarımı sunmayı zevkli bir görev sayarım.

Öğrenim hayatım boyunca bana emeği geçen tüm hocalarımı saygıyla anar, kendilerine minnettar olduğumu belirtmek isterim.

Çalışmalarım sırasında bilgi ve tecrübelerinden büyük ölçüde yararlandığım, üzerimden sürekli olarak yardımlarını esirgemeyen değerli ağabeyim, Sayın Arş. Gör. Ahmet BİRİNCİ' ye teşekkür ederim.

Özellikle tezimin yazım aşamasında büyük yardımlarını gördüğüm bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım Sayın Arş. Gör. Zihni ZERİN' e teşekkür ederim.

Çalışmalarım sırasında çeşitli konularda yardımlarını gördüğüm, Sayın Arş. Gör. Talat Şükrü ÖZŞAHİN, Sayın İnşaat Mühendisi Yusuf KOÇ ve Sayın İnşaat Yüksek Mühendisi Işıltan ÖZŞAHİN' e teşekkür ederim.

Çalışmalarım süresince beni sabır ve şefkatle destekleyen ailemin tüm fertlerine müteşekkir olduğumu belirtir, bu çalışmamın ülkeme yararlı olmasını gönülden dilerim.

Trabzon, Haziran 1997

Volkan KAHYA

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

Sayfa No

ÖZET

Pratikte, mühendislik yapılarının çoğunda uygulama alanı bulması nedeniyle elastik bir tabakada değme problemi üzerine pek çok çalışmalar yapılmıştır. Temeller, karayolları, demiryolları, havaalanı pistleri, silindirik miller ve bilyeler değme mekaniğinin uygulama alanı bulduğu mühendislik problemlerinden bazılarıdır.

Bu çalışmada, üst tarafından rijit olarak mesnetlenmiş, sabit yükseklikli, elastik sonsuz bir tabaka ile rijit bir blok arasındaki sürtünmesiz değme problemi elastisite teorisine göre çözülmüştür. Tabakaya alt kenarından rijit blok aracılığıyla tekil kuvvet etki etmektedir. Kütle kuvvetlerinin etkisi ihmal edilmiştir.

Birinci bölümde değme problemleri üzerine yapılmış çalışmalardan bazıları kısaca özetlendikten sonra, elastisitenin temel denklemleri ve integral dönüşüm teknikleri kullanılarak düzlem haldeki genel gerilme ve yerdeğiştirme ifadeleri elde edilmiştir. İkinci bölümde problemin tanıtımı yapılmıştır. Gerilme ve yerdeğiştirme ifadeleri problemin sınır şartlarına uygulanarak dört bilinmeyenli dört cebrik denklemden oluşan bir denklem sistem elde edilmiştir. Bu cebrik denklem sisteminin çözülmesiyle sabit katsayılar bilinmeyen değme gerilmesine bağlı olarak ifade edilmiştir. Blok ile tabaka arasındaki düşey yerdeğiştirme fonksiyonunun türevinin, blok profilini tanımlayan F(x) gibi bir fonksiyonun türevine eşit olması şartı kullanılarak problem bir tekil integral denkleme indirgenmiştir. Bu integral denklem uygun Gauss-Chebyshev integrasyon formülü kullanılarak sayısal çözüme hazır hale getirilmiştir. Daha sonra, genel gerilme ve yerdeğiştirme ifadeleri kullanılarak yerdeğiştirmeler, normal gerilmeler ve kayma gerilmesi değme gerilmesine bağlı olarak elde edilmiştir. Üçüncü bölümde çeşitli yükleme durumları ve blok profilleri için integral denklem çözülerek değme gerilmesi yayılışı bulunmuş; buradan da normal gerilmeler ve kayma gerilmeleri elde edilmiştir. Bulunan değerler grafiklerle verilmiştir. Bu grafiklerden faydalanılarak bir irdeleme yapılmıştır. Çalışmadan çıkarılan sonuçlar dördüncü bölümde sıralanmıştır.

Anahtar Kelimeler : Elastik Tabaka, Değme Mekaniği, Elastisite Teorisi, İntegral Dönüşüm Tekniği, Tekil İntegral Denklem, Gauss-Chebyshev İntegral Formülü, Rijit Blok, Değme Gerilmesi.

SUMMARY

FRICTIONLESS CONTACT PROBLEM BETWEEN AN ELASTIC LAYER BONDED TO A RIGID SUPPORT AND A RIGID STAMP

A great deal of research on the contact problem for an elastic layer has been carried out because of its possible application to a variety of structures of practical interest. Foundations, higways, railways, airfield pavements, rolling mills, ball and roller bearings are some of the application areas of the contact mechanics.

In this study, a frictionless contact problem between a rigid stamp and an infinite layer of a constant thickness, which is perfectly bonded to a rigid support on its top surface, is considered according to the theory of elasticity. The layer is subjected to a concentrated load by means of a rigid stamp. The effect of gravity is neglected.

In the first chapter, studies on contact problems are briefly introduced. Then, general equations of stresses and displacements are obtained by using governing equations of elasticity and integral transform techniques. The problem is described in the second chapter. A set of linear algebraic equation is obtained by applying the expressions of stresses and displacements to boundary conditions of the problem. When this set of algebraic equation is solved, the unknown constant coefficients are expressed by depending on the contact pressure which is unknown. Using the condition that derivative of vertical diplacements under the rigid stamp is equal to derivative of the function F(x) which defines the profile of the rigid stamp, the problem is formulated in terms of a singular integral equation for the contact pressure. In order to obtain the contact pressure, the singular integral equation is evaluated numerically by using appropriate Gauss-Chebyshev integration formula. In the third chapter, numerical results for various dimensionless quantities are presented in graphical forms and discussed. The conclusions drawn from the study are presented in the fourth chapter.

Key Words : Elastic Layer, Contact Mechanics, Theory of Elasticity, Integral Transform Technique, Singular Integral Equation, Gauss-Chebyshev Integration Formula, Rigid Stamp, Contact Pressure.

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

TABLO LİSTESİ

Sayfa No

SEMBOL LİSTESİ

x, y, z	: Kartezyen koordinatlar
X, Y, Z	: x, y ve z eksenleri doğrultusundaki kütle kuvveti bileşenleri
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	: x, y ve z eksenlerine paralel doğrultudaki normal gerilme bileşenleri
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	: Kayma gerilmesi bileşenleri
λ	: Lame sabiti
e	: Hacim değiştirme oranı
μ	: Kayma modülü
E	: Elastisite modülü
ν	: Poisson oranı
u, v, w	: Kartezyen koordinatlardaki yerdeğiştirme bileşenleri
κ	: Tabakaya ait elastik sabit
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	: x, y ve z doğrultusundaki birim uzamalar
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	: Kayma şekildeğiştirme bileşenleri
ρ	: Yoğunluk
g	: Yerçekimi ivmesi
ϕ, ψ	: Bilinmeyen fonksiyonlar
$p(x)$	: Değme gerilmesi
c	: Yarım değme uzunluğu
$F(x)$	: Blok profilini tanımlayan fonksiyon
$f(x)$	: F(x) fonksiyonunun x' e göre türevi
P	: Tekil yük
R	: Dairesel bloğun yarıçapı
C	: Parabolik bloğun eğriliğini ifade eden bir sabit
h	: Tabakanın yüksekliği

Not : Bu listede verilmeyen bazı semboller metin içerisinde ilgili oldukları yerlerde tanımlanmışlardır.

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Pratik öneme sahip mühendislik yapılarında uygulama alanı bulması nedeniyle, değme problemleri üzerine pek çok araştırmalar yapılmıştır. Temeller, karayolları, havaalanı pistleri, silindirik bilyeler ve miller değme mekaniğinde uygulanması mümkün olan mühendislik problemlerinden bazılarıdır.

1.1.1. Değme Problemlerinin Tarihsel Gelişimi

Değme problemleri ile ilgili ilk çalışmalar Hertz tarafindan yapılmıştır [1]. Bu nedenle değme problemleri dilimiz literatürüne ' Hertz Değme Problemleri ' olarak geçmiştir [2]. Değme problemleri üzerine yapılan araştırmaların 1950' li yıllara kadar olan literatürü ve çözüm metodları Galin' in eserinden bulunabilir [3]. İntegral dönüşümlerin değme problemlerinin çözümünde uygulanma metodları ise Ufliand' ın eserinde verilmiştir [4].

Bilgisayar teknolojisindeki ve sayısal çözüm metodlarındaki gelişmelere paralel olarak, değme problemleri üzerinde çalışan bilim adamlarının sayısı artmıştır. Değme problemleri üzerine yapılan çalışmalardan bazıları aşağıdaki gibi özetlenebilir.

Ratwani ve Erdoğan [5], elastik bir yarım düzlem üzerine sonlu kısımda temas eden kirişe, sürtünmesiz bir blok aracılığıyla etkiyen yük halini incelemişlerdir. Blok profilinin dikdörtgen ve eğrisel olması durumlarında değme yüzeyindeki gerilme yayılışını elde etmişlerdir.

Civelek ve Erdoğan [6], sürtünmesiz, elastik bir tabakada simetrik çift değme problemini ele almışlardır. Araştırmacılar, elastik yarım düzlem üzerine sonlu kısımda temas eden kirişe, elastik ve rijit blokların aracılığıyla yük etkimesi durumunda değme yüzeyinde meydana gelen gerilme yayılışını incelemişlerdir.

Geçit [7, 8], elastik zemin üzerine oturan elastik bir tabakanın, yayılı yükle bastırılıp tekil yükle kaldırılması ve yayılı yükle bastırılıp simetrik tekil yükle kaldırılması durumlarına ait değme problemlerini incelemiştir.

Keer ve Silva [9], rijit yarım düzlem üzerine oturan yarı sonsuz bir kirişin tekil yükle kaldırılması halini incelemişlerdir.

Civelek ve Erdoğan [10, 11], rijit bir düzlem üzerine oturan sabit yükseklikli elastik bir tabakada kütle kuvvetlerinin olması durumunda sürtünmesiz değme problemini incelemişlerdir. Tabakanın tekil yükle bastırılması ve tekil yükle kaldırılması hallerinde, rijit düzlemden ayrılma noktasını ve ilk ayrılma yükünü bularak bu yükten küçük ve büyük yükler için değme yüzeyindeki gerilme yayılışını elde etmişlerdir.

Geçit ve Erdoğan [12], simetrik yük etkisi altındaki elastik bir tabakada sürtünmesiz değme problemini incelemişlerdir.

Civelek, Erdoğan ve Çakıroğlu [13], rijit yarım düzlem üzerine oturan bir kirişe, rijit bir blok aracılığıyla yük uygulanması durumunda, kirişin yarım düzlemden ayrıldığı ilk noktayı, ilk ayrılma yükünü, bu yükten küçük ve büyük yükler için değme yüzeyindeki gerilme dağılımını elde etmişlerdir.

Erdoğan ve Ratwani [14], iki elastik çeyrek düzlem ile mesnetlenmiş elastik bir tabakada değme problemini ele almışlardır.

Geçit ve Gökpınar [15], eğri yüzey profiline sahip rijit bir mesnete oturan elastik tabakada sürtünmesiz değme problemini incelemişlerdir. Problemi bir tekil integral denkleme indirgeyerek çeşitli yükleme durumları ve blok profilleri için değme gerilmesi ve eksenel normal gerilme dağılımlarını elde etmişlerdir.

Geçit ve Yapıcı [16], rijit düz mesnetlere oturan elastik bir tabakada sürekli ve süreksiz değme problemlerini ele almışlardır. Problemi bir tekil integral denkleme indirgeyerek değme gerilmesi, eksenel gerilme ve ayrılma mesafelerini elde etmişlerdir.

Adams ve Bogy [17], farklı elastik özelliklere sahip yarım düzlem ile yarı sonsuz şerit arasındaki düz ve sınırlı değme durumları için çözümler elde etmişlerdir.

Adams [18], farklı elastik özelliklere ve farklı genişliklere sahip şeritler arasındaki düz ve sınırlı değme durumlarını incelemiştir. Problemi tekil integral denkleme indirgeyerek çeşitli malzeme özellikleri ve genişlik oranları için sayısal sonuçlar elde etmiş ve bu sonuçları daha önceki çalışmaların sonuçları ile karşılaştırmıştır.

Loboda [19], yarı sonsuz bir şerit ile sonlu genişliğe sahip bir şerit arasındaki elastik değme problemi için çözüm elde etmiştir.

Fabrikant ve Sankar [20], elastik değme problemlerinde açısal noktalardaki singülariteleri (tekillik) incelemişlerdir.

Çakıroğlu ve Çakıroğlu [21], üzerinde sonlu genişlikte yayılı yük bulunan bir elastik şerit ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki sürekli ve süreksiz değme durumlarını incelemişlerdir. Yayılı yük genişliğinin şerit yüksekliğine olan oranına bağlı olarak ilk ayrılma yükünü, bu yükten büyük ve küçük yükler için değme yüzeyindeki gerilme dağılışını elde etmişlerdir.

Çakıroğlu ve Erdöl [22], elastik zemine oturan bileşik şeritte sürekli değme problemini incelemişlerdir. Elastisite teorisinin temel denklemlerini ve Fourier dönüşüm tekniğini kullanarak gerilme ve yerdeğiştirme ifadelerini elde etmişlerdir. Çeşitli yükleme durumları, malzeme özellikleri ve tabaka yüksekliklerinin oranları için bileşik şeritteki gerilme dağılımlarını elde etmişlerdir.

Dempsey, Zhao ve Li [23], Winkler temeli ile mesnetlenmiş elastik bir tabakanın tekil yük, yayılı yük, rijit düz blok ve rijit silindir ile simetrik olarak yüklenmesi durumlarına ait değme problemlerini incelemişlerdir.

Adams [24], yarı sonsuz düzlem ile rijit bir blok arasındaki değme problemini incelemiştir.

Bakırtaş [25], homojen olmayan elastik yarı düzlem ile rijit bir blok arasındaki değme problemini ele almıştır. Yarı sonsuz düzlemde homojenliğin derinlikle değiştiği kabul edilmiştir. Problem, Foruier dönüşüm tekniği kullanılarak tekil integral denkleme indirgenmiş ve sayısal çözüm yapılmıştır.

1. 1. 2. Çalışmanın Kapsamı

Bu çalışmada, üst tarafından rijit olarak mesnetlenmiş, sabit yükseklikli elastik bir tabaka ile rijit bir blok arasındaki sürtünmesiz değme problemi elastisite teorisine göre çözülmüştür. Tabakaya, rijit blok aracılığıyla simetrik olarak tekil kuvvet etkimektedir. Problemin çözümünde kütle kuvvetlerinin etkisi ihmal edilmiştir.

Birinci bölümde genel olarak konuyla ilgili kaynaklardan bahsedildikten sonra, elastisite teorisine ait temel denklemler ve integral dönüşüm teknikleri kullanılarak düzlem haldeki genel gerilme ve yerdeğiştirme ifadeleri elde edilmiştir.

İkinci bölümde problemin tanıtımı yapılmıştır. Gerilme ve yerdeğiştirme ifadeleri problemin sınır şartlarına uygulanarak dört bilinmeyenli dört cebrik denklemden oluşan bir denklem sistemi elde edilmiştir. Bu cebrik denklem sisteminin çözülmesiyle sabit katsayılar değme gerilmesine bağlı olarak ifade edilmiştir. Blok altındaki değme gerilmesi yayılışı bilinmeyendir. Blok ile tabaka arasındaki düşey yerdeğiştirme fonksiyonunun türevinin, blok profilini tanımlayan F(x) gibi bir fonksiyonun türevine eşit olması şartı kullanılarak problem bir tekil integral denkleme indirgenmiştir. Bu integral denklem uygun Gauss-Chebyshev integrasyon formülü kullanılarak sayısal çözüme hazır hale getirilmiştir. Daha sonra, gerilme ve yerdeğiştirme ifadeleri kullanılarak yerdeğiştirmeler, normal gerilmeler ve kayma gerilmesi değme gerilmesine bağlı olarak elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde çeşitli yükleme durumları ve blok profilleri için integral denklem çözülerek değme gerilmesi yayılışı bulunmuş; buradan da normal gerilmeler ve kayma gerilmeleri elde edilmiştir. Bulunan değerler grafik ve tablolarla verilmiştir. Bu grafik ve tablolardan faydalanılarak bir irdeleme yapılmıştır.

Dördüncü bölümde çalışmadan çıkarılan sonuçlar sıralanmıştır. Bu son bölümü yararlanılan kaynaklar izlemektedir.

1.2. Genel Denklemlerin Elde Edilmesi

Üst tarafından rijit olarak mesnetlenmiş elastik bir tabakaya rijit bir blok aracılığıyla simetrik tekil kuvvet etkimesi problemi elastisite teorisine göre çözülecek; gerilme ve yerdeğiştirme ifadeleri bulunacaktır. Bu amaçla; önce bünye denklemleri ve yerdeğiştirme-şekildeğiştirme bağıntıları kullanılmak suretiyle elastisitenin denge denklemleri yerdeğiştirmeler cinsinden yazılarak Navier denklemleri elde edilecektir. Daha sonra yerdeğiştirme-şekildeğiştirme bağıntıları ve bünye denklemleri kullanılarak gerilme bileşenlerine ait ifadeler elde edilecektir.

Üç boyutlu halde X, Y, Z kütle kuvvetlerini, σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz} de gerilme bileşenlerini göstermek üzere, denge denklemleri aşağıda verilmiştir [2].

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+X=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+Y=0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+Z=0 \tag{3}$$

Bu denklemlerdeki gerilme bileşenleri, bünye denklemleri ve yerdeğiştirme-şekildeğiştirme bağıntıları kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir [2].

$$\sigma_x = \lambda e + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \tag{4}$$

$$\sigma_y = \lambda e + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \tag{5}$$

$$\sigma_z = \lambda e + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \tag{6}$$

$$\tau_{xy} = \mu(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) \tag{7}$$

$$\tau_{yz} = \mu(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}) \tag{8}$$

$$\tau_{zx} = \mu(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}) \tag{9}$$

Bu ifadelerde;

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{10}$$

$$\lambda = \frac{vE}{(1+v)(1-2v)} \tag{11}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+v)} \tag{12}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Yukarıdaki ifadelerde geçen e, E, μ, λ ve ν sırasıyla hacim değiştirme oranını, elastisite modülünü, kayma modülünü, Lame sabitini ve poisson oranını göstermektedir. u, v ve w ise sırasıyla x, y ve z eksenleri doğrultusundaki yerdeğiştirme bileşenlerini göstermektedir. Ayrıca; $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ ve $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ olduğu bilinmektedir.

Bünye denklemlerinin gerekli türevlerinin alınıp denge denklemlerinde yerlerine yazılması ile aşağıdaki ifadeler elde edilir [2].

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial e}{\partial x}+\mu\nabla^2 u+X=0 \tag{13}$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial e}{\partial y}+\mu\nabla^2 v+Y=0 \tag{14}$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial e}{\partial z}+\mu\nabla^2 w+Z=0 \tag{15}$$

Bu ifadelere Navier denklemleri adı verilir. İfadelerdeki ∇^2 Laplace operatörü olup;

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

şeklinde yazılmaktadır. İki boyutlu elastisitede Navier denklemleri;

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial e}{\partial x}+\mu\nabla^2 u+X=0 \tag{16}$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial e}{\partial y}+\mu\nabla^2 v+Y=0 \tag{17}$$

şeklini alırlar. Eğer kütle kuvvetleri ihmal edilirse bu ifadeler aşağıdaki şekilde yazılabilirler.

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial e}{\partial x}+\mu\nabla^2 u=0 \tag{18}$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial e}{\partial y}+\mu\nabla^2 v=0 \tag{19}$$

Eğer e hacim değiştirme oranını veren (10) ifadesi yerine yazılırsa (18) ve (19) denklemleri aşağıdaki şekli alırlar.

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\mu\nabla^2 u=0 \qquad (20)$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\mu\nabla^2 v=0 \qquad (21)$$

Problemin y eksenine göre simetrik olması durumunda u(x,y) ve v(x,y) yerdeğiştirme bileşenleri aşağıdaki eşitlikleri sağlarlar.

$$u(x,y) = -u(-x,y) \qquad (22)$$

$$v(x,y) = v(-x,y) \qquad (23)$$

u(x,y) ve v(x,y) yerdeğiştirme fonksiyonları, Fourier kosinüs ve Fourier sinüs dönüşümleri şeklinde aşağıdaki gibi yazılabilirler.

$$u(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \phi(\alpha,y)\sin(\alpha x)d\alpha \qquad (24)$$

$$v(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \psi(\alpha,y)\cos(\alpha x)d\alpha \qquad (25)$$

Bunların ters dönüşümleri ise;

$$\phi(\alpha,y)=\int_0^\infty u(x,y)\sin(\alpha x)dx \qquad (26)$$

$$\psi(\alpha,y)=\int_0^\infty v(x,y)\cos(\alpha x)dx \qquad (27)$$

şeklinde yazılabilirler.Bu ifadelerdeki $\phi(\alpha, y)$ ve $\psi(\alpha, y)$ fonksiyonları $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ fonksiyonlarının ters fourier dönüşümleri olup bilinmeyen fonksiyonlardır. Bu fonksiyonların belirlenebilmesi için (20) ifadesi $\sin(\alpha x)dx$, (21) ifadesi de $\cos(\alpha x)dx$ ile çarpılıp $(0, \infty)$ aralığında integre edilirse,

$$\int_0^\infty \left[\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]\sin(\alpha x)dx = 0 \tag{28}$$

$$\int_0^\infty \left[\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]\cos(\alpha x)dx = 0 \tag{29}$$

ifadeleri elde edilir. (24) ve (25) ifadelerinden faydalanılarak u ve v nin gerekli türevleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin(\alpha x)dx = -\alpha^2\phi \tag{30}$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin(\alpha x)dx = \frac{d^2\phi}{dy^2} \tag{31}$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\sin(\alpha x)dx = -\alpha\frac{d\psi}{dy} \tag{32}$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\cos(\alpha x)dx = -\alpha^2\psi \tag{33}$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\cos(\alpha x)dx = \frac{d^2\psi}{dy^2} \tag{34}$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cos(\alpha x)dx = \alpha\frac{d\phi}{dy} \tag{35}$$

Bu eşitliklerin elde edilmesinde kısmi integrasyon uygulanmış ve aşağıdaki sınır şartları dikkate alınmıştır.

$$u(0) = u(\infty) = v(\infty) = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\infty} = \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=\infty} = \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0$$

Yukarıda elde edilen türev ifadeleri (28) ve (29) denklemlerinde yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$-(\lambda + 2\mu)\alpha^2\phi + \mu\phi^{II} - (\lambda + \mu)\alpha\psi^{I} = 0 \tag{36}$$

$$(\lambda + 2\mu)\psi^{II} - \alpha^2\mu\psi + (\lambda + \mu)\alpha\phi^{I} = 0 \tag{37}$$

şeklinde bir adi diferansiyel denklem takımı elde edilir.Bu diferansiyel denklemlerde üsler y ye göre türevleri göstermektedir.Bu denklem sisteminin çözümü için (36) denklemi y ye göre iki defa, (37) denklemi y ye göre bir defa türetilirse;

$$-(\lambda + 2\mu)\alpha^2\phi^{II} + \mu\phi^{IV} - (\lambda + \mu)\alpha\psi^{III} = 0 \tag{38}$$

$$(\lambda + 2\mu)\psi^{III} - \alpha^2\mu\psi^{I} + (\lambda + \mu)\alpha\phi^{II} = 0 \tag{39}$$

denklemleri elde edilir. (38) denkleminden ψ^{III} çekilip (39) denkleminde yerine yazılır ve buradan da ψ^{I} çekilip (36) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\phi^{IV} - 2\alpha^2\phi^{II} + \alpha^4\phi = 0 \tag{40}$$

şeklinde $\phi(\alpha, y)$ ye göre dördüncü mertebeden sabit katsayılı, lineer, homojen diferansiyel denklem elde edilir. Bu diferansiyel denklemin çözümü $\phi(\alpha, y) = e^{sy}$ şeklinde aranır ve gerekli türevler alınıp (40) denkleminde yerlerine yazılırsa;

$$s^4 - 2\alpha^2 s^2 + \alpha^4 = 0 \tag{41}$$

karakteristik denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri; $s_1 = s_2 = \alpha$ ve $s_3 = s_4 = -\alpha$ olarak bulunur. Buna göre (40) diferansiyel denkleminin çözümü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\phi(\alpha, y) = (A_1 + A_2 y)e^{-\alpha y} + (A_3 + A_4 y)e^{\alpha y} \tag{42}$$

(36) denkleminin y ye göre bir defa türevi alınıp ψ^{II} değeri çekilerek (37) denkleminde yerine yazılırsa, bilinmeyen $\psi(\alpha, y)$ fonksiyonu, $\phi(\alpha, y)$ fonksiyonuna ve türevlerine bağlı olarak elde edilir.Buradan gerekli türevler yerlerine konularak;

$$\psi(\alpha, y) = \left[A_1 + (\frac{\kappa}{\alpha} + y)A_2\right]e^{-\alpha y} + \left[-A_3 + (\frac{\kappa}{\alpha} - y)A_4\right]e^{\alpha y} \tag{43}$$

Bu ifadedeki κ bir malzeme sabiti olup, düzlem gerilme ve düzlem şekildeğiştirme hallerine ait tek bir formülasyon kullanılmasını sağlar. Düzlem gerilme halinde $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ ve düzlem şekildeğiştirme halinde ise $\kappa = 3-4\nu$ olarak bilinmektedir. (42) ve (43) ifadelerindeki A_1, A_2, A_3, A_4 katsayıları problemin sınır şartlarına göre belirlenecek olan sabitlerdir. $\phi(\alpha, y)$ ve $\psi(\alpha, y)$ ifadeleri (24) ve (25) denklemlerinde yerlerine yazılırsa, $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ yerdeğiştirme ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilirler.

$$u_h(x, y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[(A_1 + A_2 y)e^{-\alpha y} + (A_3 + A_4 y)e^{\alpha y}\right]\sin(\alpha x)d\alpha \tag{44}$$

$$v_h(x, y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left\{\left[A_1 + \left(\frac{\kappa}{\alpha} + y\right)A_2\right]e^{-\alpha y} + \left[-A_3 + \left(\frac{\kappa}{\alpha} - y\right)A_4\right]e^{\alpha y}\right\}\cos(\alpha x)d\alpha \tag{45}$$

Bu ifadelerdeki h indisi kütle kuvvetsiz hali göstermektedir. (4), (5) ve (7) ifadelerinden σ_x, σ_y, τ_{xy} gerilme bileşenleri de yerdeğiştirmelere bağlı olarak;

$$\sigma_x = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\frac{\partial v}{\partial y} \tag{46}$$

$$\sigma_y = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda\frac{\partial u}{\partial x} \tag{47}$$

$$\tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{48}$$

şeklinde yazılırlar. (44) ve (45) ifadelerinde gerekli türevler alınarak (46), (47) ve (48) ifadelerinde yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa, kütle kuvvetlerinin olmaması durumunda gerilme bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilirler.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\mu}\sigma_{xh}(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \Bigg\{ & \left[\alpha(A_1 + A_2 y) - \frac{3-\kappa}{2}A_2\right] e^{-\alpha y} \\ & + \left[\alpha(A_3 + A_4 y) + \frac{3-\kappa}{2}A_4\right] e^{\alpha y} \Bigg\} \cos(\alpha x)\, d\alpha\end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\mu}\sigma_{yh}(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \Bigg\{ & -\left[\alpha(A_1 + A_2 y) + \frac{\kappa+1}{2}A_2\right] e^{-\alpha y} \\ & + \left[-\alpha(A_3 + A_4 y) + \frac{\kappa+1}{2}A_4\right] e^{\alpha y} \Bigg\} \cos(\alpha x)\, d\alpha\end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\mu}\tau_{xyh}(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \Bigg\{ & -\left[\alpha(A_1 + A_2 y) + \frac{\kappa-1}{2}A_2\right] e^{-\alpha y} \\ & + \left[\alpha(A_3 + A_4 y) - \frac{\kappa-1}{2}A_4\right] e^{\alpha y} \Bigg\} \sin(\alpha x)\, d\alpha\end{aligned} \tag{51}$$

Bu çalışmada incelenmemekle beraber; kütle kuvvetlerinin olması durumunda gerilme ve yerdeğiştirme ifadelerinin hesabı ise şu şekilde verilmektedir. Şekildeğiştirmelerle yerdeğiştirmeler arasındaki bağıntılar,

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{52}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{53}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{54}$$

olarak bilinmektedir [2]. Burada ε_x, ε_y ve γ_{xy} sırasıyla x, y doğrultularındaki şekildeğiştirme bileşenlerini ve dik koordinatlardaki kayma şekildeğiştirme bileşenini göstermektedir. Gerilmelerle şekildeğiştirmeler arasındaki bağıntıyı ifade eden Hooke kanunları da,

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right) \tag{55}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right) \tag{56}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \tag{57}$$

şeklinde yazılabilirler [2]. Ayrıca kütle kuvvetlerinin olması durumunda Navier denklemleri aşağıdaki gibi yazılırlar.

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial e}{\partial x} + \mu\nabla^2 u = 0 \tag{58}$$

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial e}{\partial y} + \mu\nabla^2 v - \rho g = 0 \tag{59}$$

Burada ρ ve g sırasıyla yoğunluk ve yerçekimi ivmesini göstermektedir. (58) ve (59) denklemlerinin açık formda yazılmış hali aşağıdaki gibi olur.

$$(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0 \tag{60}$$

$$(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)=\rho g \tag{61}$$

Yerdeğiştirme fonksiyonları u = u(x) ve v = v(y) şeklinde seçilirse, (60) denkleminden,

$$\frac{d^2 u}{dx^2}=0 \tag{62}$$

$$\frac{du}{dx}=a \tag{63}$$

$$u=ax+b \tag{64}$$

(61) denkleminden de,

$$\frac{d^2 v}{dy^2}=\frac{\rho g}{(\lambda+2\mu)} \tag{65}$$

$$\frac{dv}{dy}=\frac{\rho g}{(\lambda+2\mu)}y+c \tag{66}$$

$$v=\frac{\rho g}{2(\lambda+2\mu)}y^2+cy+d \tag{67}$$

olarak elde edilirler. Yukarıdaki ifadelerde geçen a, b, c ve d integrasyon sabitleri olup şu şekilde belirlenirler. Kütle kuvveti ρg ve kalınlığı h olan tek tabaka için, x ekseni tabakanın altından geçmek üzere, aşağıdaki sınır şartları yazılabilir.

$$u(0)=0 \tag{68}$$

$$v(0)=0 \tag{69}$$

$$\sigma_y = \rho g(y-h) \tag{70}$$

$$\int_0^\infty \sigma_x dy = 0 \tag{71}$$

Yazılan bu sınır şartlarının (62), (63), (64), (65), (66) ve (67) denklemlerine uygulanması ile integrasyon sabitleri aşağıdaki gibi bulunurlar.

$$a = \frac{(3-\kappa)\rho g h}{16\mu}, \quad b = 0, \quad c = -\frac{\rho g h}{2\mu}\left(\frac{1+\kappa}{8} + \frac{\kappa-1}{\kappa+1}\right), \quad d = 0$$

İntegrasyon sabitlerinin yerlerine konulmasıyla kütle kuvvetlerinin olması haline karşılık gelen yerdeğiştirme ifadelerinin özel çözümleri şu şekilde yazılırlar.

$$u_p = \frac{(3-\kappa)\rho g h}{16\mu} x \tag{72}$$

$$v_p = \frac{\rho g}{2\mu} y\left[\frac{\kappa-1}{\kappa+1}(y-h) - \frac{\kappa+1}{8}h\right] \qquad 0 \le y \le h \tag{73}$$

Kütle kuvvetlerinin olması halinde gerilme ifadelerinin özel çözümleri ise şekildeğiştirmelerden faydalanılarak şu şekilde yazılabilir.

$$\sigma_{xp} = \frac{3-\kappa}{1+\kappa} \rho g (y - \frac{h}{2}) \tag{74}$$

$$\sigma_{yp} = \rho g(y-h) \tag{75}$$

$$\tau_{xyp} = 0 \tag{76}$$

Genel gerilme ifadeleri homojen çözüm ile özel çözümün toplamı olacağından;

$$u(x,y) = u_h(x,y) + u_p(x,y) \tag{77}$$

$$v(x,y) = v_h(x,y) + v_p(x,y) \tag{78}$$

$$\sigma_x(x,y) = \sigma_{xh}(x,y) + \sigma_{xp}(x,y) \tag{79}$$

$$\sigma_y(x,y) = \sigma_{yh}(x,y) + \sigma_{yp}(x,y) \tag{80}$$

$$\tau_{xy}(x,y) = \tau_{xyh}(x,y) + \tau_{xyp}(x,y) \tag{81}$$

şeklinde yazılabilirler. Sonuç olarak elde edilen gerilme ve yerdeğiştirme ifadeleri aşağıdaki gibi yazılabilirler.

$$u(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[(A_1 + A_2 y)e^{-\alpha y} + (A_3 + A_4 y)e^{\alpha y}\right]\sin(\alpha x)d\alpha + \frac{(3-\kappa)\rho g h}{16\mu}x \tag{82}$$

$$\begin{aligned} v(x,y) = {} & \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left\{\left[A_1 + \left(\frac{\kappa}{\alpha} + y\right)A_2\right]e^{-\alpha y} + \left[-A_3 + \left(\frac{\kappa}{\alpha} - y\right)A_4\right]e^{\alpha y}\right\}\cos(\alpha x)d\alpha \\ & + \frac{\rho g}{2\mu}y\left[\frac{\kappa-1}{\kappa+1}(y-h) - \frac{\kappa+1}{8}h\right] \end{aligned} \tag{83}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu}\sigma_x(x,y) = {} & \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left\{\left[\alpha(A_1 + A_2 y) - \frac{3-\kappa}{2}A_2\right]e^{-\alpha y}\right. \\ & \left. + \left[\alpha(A_3 + A_4 y) + \frac{3-\kappa}{2}A_4\right]e^{\alpha y}\right\}\cos(\alpha x)d\alpha \\ & + \frac{1}{2\mu}\frac{3-\kappa}{1+\kappa}\rho g\left(y - \frac{h}{2}\right) \end{aligned} \tag{84}$$

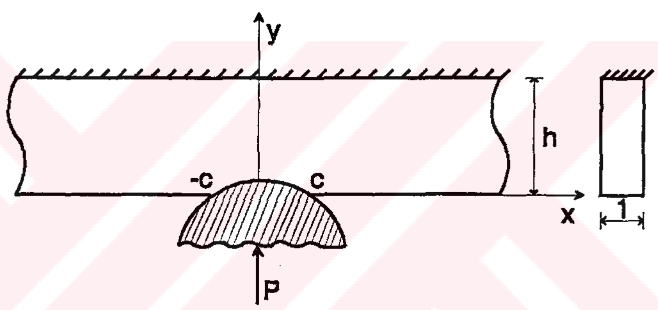
$$\frac{1}{2\mu}\sigma_y(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left\{-\left[\ \alpha\,(A_1+A_2y)+\frac{\kappa+1}{2}A_2\ \right]e^{-\alpha y}\right.$$
$$\left.+\left[\ -\alpha\,(A_3+A_4y)+\frac{\kappa+1}{2}\ A_4\right]e^{\alpha y}\ \right\}\cos(\alpha x)d\alpha \tag{85}$$
$$+\frac{1}{2\mu}\rho g(y-h)$$

$$\frac{1}{2\mu}\tau_{xy}(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left\{-\left[\ \alpha\,(A_1+A_2y)+\frac{\kappa-1}{2}A_2\ \right]e^{-\alpha y}\right.$$
$$\left.+\left[\ \alpha\,(A_3+A_4y)-\frac{\kappa-1}{2}\ A_4\right]e^{\alpha y}\ \right\}\sin(\alpha x)d\alpha \tag{86}$$

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Problemin Tanımı

Üst tarafından rijit olarak mesnetlenmiş elastik bir tabaka ile rijit bir blok arasındaki sürtünmesiz değme problemi elastisite teorisine göre incelenecektir. Tabakaya, rijit blok aracılığıyla bir tekil kuvvet simetrik olarak etki ettirilmektedir. Çözümlerde kütle kuvvetlerinin etkisi ihmal edilecektir. Tabaka x ekseni boyunca $(-\infty, +\infty)$ arasında uzanmaktadır. Rijit blok ile elastik tabaka y eksenine göre simetrik olduğundan hesaplar $(0, \infty)$ aralığında yapılacaktır. Problem düzlem hal için inceleneceğinden z ekseni doğrultusundaki kalınlık birim olarak alınacaktır.



Şekil 1. Rijit mesnetlenmiş elastik tabaka ile rijit bir blok arasındaki değme problemi

2. 2. Kullanılacak Denklemler

Kütle kuvvetleri ihmal edildiğinden çözümde (44), (45) yerdeğiştirme ifadeleri ile (49), (50) ve (51) gerilme ifadeleri kullanılacaktır.Bu ifadelerdeki A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ katsayıları problemin sınır şartları kullanılarak belirlenecektir.

2.3. Problemin Sınır Şartları

$u(x, y)$ ve $v(x, y)$ yerdeğiştirmeleri, $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$ ve $\tau_{xy}(x, y)$ de gerilmeleri göstermek üzere problemin sınır şartları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$u(x, h)=0 \qquad 0 \le x < \infty \tag{87}$$

$$v(x, h)=0 \qquad 0 \le x < \infty \tag{88}$$

$$\tau_{xy}(x, 0)=0 \qquad 0 \le x < \infty \tag{89}$$

$$\sigma_y(x, 0)=\begin{cases} -p(x) & 0 \le x < c \\ 0 & c \le x < \infty \end{cases} \tag{90}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[v(x,0)\right] = f(x) \qquad 0 \le x < c \tag{91}$$

(90) ifadesindeki p(x), rijit blok ile tabaka arasındaki değme gerilmesini ifade etmekte olup bilinmemektedir. (91) ifadesindeki f(x), rijit bloğun profilini tanımlayan F(x) gibi bir fonksiyonun türevini göstermektedir. Yine bu ifadelerde geçen c ise yarım değme bölgesidir.

2. 4. Katsayıların Belirlenmesi

Yukarıda yazılan sınır şartlarının gerilme ve yerdeğiştirme ifadelerinde kullanılması ve ters fourier dönüşümü alınması sonucunda bilinmeyen A_i (i = 1, 2, 3, 4) katsayılarını içeren dört tane cebrik denklem elde edilir. Bu denklemler aşağıda verilmiştir.

$$(A_1 + A_2 h)e^{-\alpha h} + (A_3 + A_4 h)e^{\alpha h} = 0 \tag{92}$$

$$\left[A_1 + \left(\frac{\kappa}{\alpha} + h\right)A_2\right]e^{-\alpha h} + \left[-A_3 + \left(\frac{\kappa}{\alpha} - h\right)A_4\right]e^{\alpha h} = 0 \tag{93}$$

$$-\left[\alpha A_1 + \frac{\kappa - 1}{2}A_2\right] + \left[\alpha A_3 - \frac{\kappa - 1}{2}A_4\right] = 0 \tag{94}$$

$$-\left[\alpha A_1 + \frac{\kappa + 1}{2}A_2\right] + \left[-\alpha A_3 + \frac{\kappa + 1}{2}A_4\right] = -\frac{1}{2\mu}\int_0^c p(t)\cos(\alpha t)dt \tag{95}$$

Bu dört denklemden A_i (i =1, 2, 3, 4) katsayıları, bilinmeyen p(t) değme gerilmesine bağlı olarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\alpha A_1 = \frac{P(\alpha)}{4\Delta}\left\{\left[(1-\kappa)(\kappa+2\alpha h)-4\alpha^2h^2\right]e^{-2\alpha h}-(1-\kappa)\kappa\right\} \tag{96}$$

$$A_2 = -\frac{P(\alpha)}{2\Delta}\left\{(1-2\alpha h)e^{-2\alpha h}+\kappa\right\} \tag{97}$$

$$\alpha A_3 = \frac{P(\alpha)}{4\Delta}\left\{\left[(1-\kappa)(\kappa-2\alpha h)-4\alpha^2h^2\right]e^{-2\alpha h}-(1-\kappa)\kappa e^{-4\alpha h}\right\} \tag{98}$$

$$A_4 = \frac{P(\alpha)}{2\Delta}\left\{(1+2\alpha h)e^{-2\alpha h}+\kappa e^{-4\alpha h}\right\} \tag{99}$$

Bu ifadelerde geçen P(α) ve Δ aşağıdaki gibi tariflenmişlerdir.

$$P(\alpha) = -\frac{1}{\mu}\int_0^c p(t)\cos(\alpha t)dt \tag{100}$$

$$\Delta = \left(1+\kappa^2+4\alpha^2h^2+\kappa e^{-2\alpha h}\right)e^{-2\alpha h}+\kappa \tag{101}$$

2. 5. İntegral Denklemin Elde Edilmesi

Blok ile tabaka arasındaki p(x) gerilme yayılışının bilinmeyen olduğu daha önce belirtilmişti. Bu gerilme yayılışını elde edebilmek için kullanılmayan (91) sınır şartından faydalanılacaktır. (91) sınır şartının açık formda yazılmış şekli aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left[v(x,y)\right] = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \Bigg\{&\left[A_1+\left(\frac{\kappa}{\alpha}+y\right)A_2\right]e^{-\alpha y} \\ &+\left[-A_3+\left(\frac{\kappa}{\alpha}-y\right)A_4\right]e^{\alpha y}\Bigg\}(-\alpha)\sin(\alpha x)d\alpha = f(x)\end{aligned} \tag{102}$$

(102) ifadesinde, A_i katsayıları yerlerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}[v(x,y)] = \frac{2}{\mu\pi}\int_0^c p(t)dt\int_0^\infty [\frac{1}{4\Delta}[\{[(1-\kappa)(\kappa+2\alpha h)-4\alpha^2h^2]e^{-2\alpha h}-(1-\kappa)\kappa\} \\ -2(\kappa+\alpha y)\{(1-2\alpha h)e^{-2\alpha h}+\kappa\}]e^{-\alpha y} \\ -[\{[(1-\kappa)(\kappa-2\alpha h)-4\alpha^2h^2]e^{-2\alpha h}-(1-\kappa)\kappa e^{-4\alpha h}\} \\ +2(\kappa-\alpha y)\{(1+2\alpha h)e^{-2\alpha h}+\kappa e^{-4\alpha h}\}]e^{\alpha y}]\sin(\alpha x)\cos(\alpha t)d\alpha \\ = f(x)\end{aligned} \tag{103}$$

olarak elde edilir. Burada geçen Δ terimi (101) ifadesinde verilmiştir. (103) ifadesinde y→0 limitine geçilirken dikkatli davranmak gerekir. Çünkü y→0 limitine geçilirken integralin çekirdeğinin yakınsamasının bozulduğu görülmüştür. Değme gerilmesi yayılışının doğru bir şekilde elde edilebilmesi için (103) ifadesinin çekirdeğinin sıfıra yanaşması yani yakınsaması gerekmektedir. Yakınsamayı bozan terimler (singüler terimler) araştırıldığında;

$$-\int_0^\infty e^{-\alpha y}\sin(\alpha x)\cos(\alpha t)d\alpha \tag{104}$$

olarak elde edilir.Yakınsamayı bozan bu terimin çekirdek içinden çıkartılarak integrali hesaplandıktan sonra limit işlemine geçmek gerekir. Bu işlemler sıra ile yapılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}[v(x,0)] = -\frac{1+\kappa}{2\mu\pi}\lim_{y\to 0}\int_0^c p(t)dt\int_0^\infty e^{-\alpha y}\sin(\alpha x)\cos(\alpha t)d\alpha \\ +\frac{1+\kappa}{2\mu\pi}\int_0^c p(t)dt\int_0^\infty \frac{1}{\Delta}\left(1+\kappa^2+4\alpha h(1+\alpha h)+2\kappa e^{-2\alpha h}\right)e^{-2\alpha h} * \\ \sin(\alpha x)\cos(\alpha t)d\alpha = f(x)\end{aligned} \tag{105}$$

Trigonometriden;

$$\cos(\alpha x)\sin(\alpha t) = (1/2)[\sin\alpha(t+x) - \sin\alpha(t-x)] \tag{106}$$

şeklinde olduğu bilinmektedir. (106) ifadesi (105) ifadesinde yerine yazılırsa;

$$\frac{\partial}{\partial x}[v(x,0)] = -\frac{1+\kappa}{4\mu\pi}\lim_{y\to 0}\int_0^c p(t)dt\int_0^\infty e^{-\alpha y}\left[\sin\alpha(t+x)-\sin\alpha(t-x)\right]d\alpha$$
$$+\frac{1+\kappa}{4\mu\pi}\int_0^c p(t)dt\int_0^\infty \frac{1}{\Delta}\left(1+\kappa^2+4\alpha h(1+\alpha h)+2\kappa e^{-2\alpha h}\right)e^{-2\alpha h} *$$
$$\left[\sin\alpha(t+x)-\sin\alpha(t-x)\right]d\alpha = f(x) \tag{107}$$

ifadesi elde edilir. (107) ifadesinde geçen

$$-\int_0^\infty e^{-\alpha y}\left[\sin\alpha(t+x)-\sin\alpha(t-x)\right]d\alpha \tag{108}$$

integralinin değeri integral dönüşüm tablolarından kolaylıkla bulunabilir [34]. Buna göre singüler terimin kapalı integrali aşağıdaki gibi elde edilir.

$$-\int_0^\infty e^{-\alpha y}\left[\sin\alpha(t+x)-\sin\alpha(t-x)\right]d\alpha = -\left[\frac{t+x}{y^2+(t+x)^2}-\frac{t-x}{y^2+(t-x)^2}\right] \tag{109}$$

(109) ifadesinde y→0 limitine gidilirse;

$$\left[\frac{t+x}{y^2+(t+x)^2}-\frac{t-x}{y^2+(t-x)^2}\right]_{y=0} = \frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x} \tag{110}$$

şeklinde singüler terimin kapalı integrali elde edilir. Sonuç olarak p(t) değme gerilmesi yayılışını elde etmekte kullanılacak olan integral denklemin son şekli aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\int_0^c \left[\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x}+K(x,t)\right]p(t)dt = M(x) \qquad 0<x<c \tag{111}$$

Bu ifadede;

$$K(x,t)=\int_0^\infty \frac{1}{T}\left(1+\kappa^2+4\alpha h(1+\alpha h)+2\kappa e^{-2\alpha h}\right)e^{-2\alpha h} *$$
$$\left[\sin\alpha(t+x)-\sin\alpha(t-x)\right]d\alpha \tag{112}$$

$$T=\left(1+\kappa^2+4\alpha^2h^2+\kappa e^{-2\alpha h}\right)e^{-2\alpha h}+\kappa \tag{113}$$

$$M(x)=\frac{4\mu\pi}{1+\kappa}f(x) \tag{114}$$

olarak verilmektedir. (112) ve (113) ifadelerinde $\alpha h = z$ dönüşümü yapılırsa;

$$K(x,t)=\int_0^\infty \frac{1}{T}\left(1+\kappa^2+4z(1+z)+2\kappa e^{-2z}\right)e^{-2z}\left[\sin\frac{z}{h}(t+x)-\sin\frac{z}{h}(t-x)\right]\frac{dz}{h} \tag{115}$$

$$T=\left(1+\kappa^2+4z^2+\kappa e^{-2z}\right)e^{-2z}+\kappa \tag{116}$$

bulunur. Simetri şartından blok altındaki gerilme yayılışının

p(t) = p(-t)

şeklinde olduğu göz önünde bulundurulursa, integral denklem aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\int_{-c}^{c}\left[\frac{1}{t-x}+\frac{1}{h}K^*(x,t)\right]p(t)dt=M(x) \qquad -c< x < c \tag{117}$$

$$K^*(x,t)=-\int_0^\infty \frac{1}{T}\left(1+\kappa^2+4z(1+z)+2\kappa e^{-2z}\right)e^{-2z}\sin\frac{z}{h}(t-x)dz \tag{118}$$

$K^*(x, t)$ çekirdeği $-c \le x \le c$ kapalı aralığında sınırlıdır. Blok için denge şartı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\int_{-c}^{c}p(t)dt=P \tag{119}$$

İntegral denklemin sayısal çözümünü kolaylaştırmak için aşağıdaki boyutsuz büyüklükler tanımlanabilir.

$$x = cw\,, \quad t = cs\,, \quad g(s) = \frac{p(cs)}{P/h}\,, \quad m(w) = \frac{M(cw)}{P/h} \tag{120}$$

Tanımlanan bu büyüklükler (117), (118) ve (119) ifadelerinde yazılırsa;

$$\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{s-w}+\frac{c}{h}K^{*}(cw,cs)\right]g(s)ds = m(w) \qquad -1 < w < 1 \tag{121}$$

$$\frac{c}{h}\int_{-1}^{1} g(s)ds = 1 \tag{122}$$

olarak elde edilir. (121) ifadesi problemimiz için integral denklemin en genel halidir. Denklemin sağ tarafındaki m(w) ifadesi blok profiline bağlı bir büyüklüktür. Değişik blok profilleri için integral denklem sayısal olarak çözülerek değme gerilmesi yayılışları bulunacaktır.

2.6. İntegral Denklemin Sayısal Çözümü

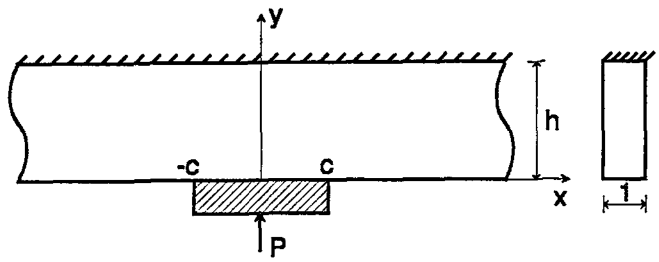
İntegral denklemin sayısal çözümü için, blok profilinin yüzeyini tanımlayan F(x) fonksiyonunun bilinmesi gerekmektedir. Bu çalışmada üç değişik blok profili için hesaplar yapılacaktır. Bunlar aşağıda sıralanmıştır.

2. 6. 1. Düz Yüzeyli Rijit Blok Hali

Blok profili sabit olduğundan;

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) = 0 \tag{123}$$

olacaktır. Blok kenarlarında değme gerilmesi sonsuza gideceğinden integral denklemin indisi +1 olarak alınır [27].



Şekil 2. Düz yüzeyli rijit blok hali

İntegral denklemin çözümünün;

$$g(s)=G(s)\,/\,(1-s^2) \qquad -1 < s < 1 \tag{124}$$

şeklinde olduğu kabul edilir ve uygun Gauss-Chebyshev integrasyon formülü kullanılırsa, (121) integral denklemi ve (122) denge şartı aşağıdaki şekilde değiştirilebilir [27].

$$\sum_{i=1}^{n} C_i \left[\frac{1}{s_i - w_j} + \frac{c}{h} K^*(w_j, s_i) \right] G(s_i) = 0 \qquad (\,j = 1, n\text{-}1\,) \tag{125}$$

$$\frac{c}{h} \sum_{i=1}^{n} C_i G(s_i) = 1 \tag{126}$$

Bu ifadelerde;

$$C_1 = C_n = \frac{\pi}{2n-2} \quad , \quad C_i = \frac{\pi}{n-1} \qquad (i = 2, n\text{-}1\,) \tag{127}$$

$$s_i = \cos\left(\frac{i-1}{n-1} \pi \right) \qquad (i = 1, n\,) \tag{128}$$

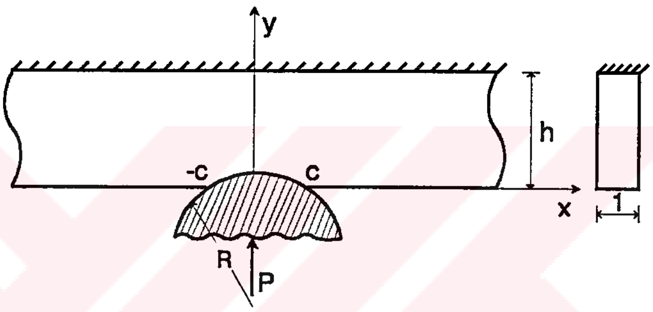
$$w_j = \cos\left(\frac{2j-1}{2n-2} \pi \right) \qquad (j = 1, n\text{-}1\,) \tag{129}$$

olarak verilmektedir. (125) ve (126) ifadelerinden n bilinmeyenli n tane lineer cebrik denklem elde edilir. Bu cebrik denklem sisteminin çözülmesiyle bulunan $G(s_i)$ değerleri (124) denkleminde yerine konulursa g(s) boyutsuz değme gerilmesi dağılımı elde edilir.

2. 6. 2. Dairesel Rijit Blok Hali

Bloğun yüzeyini tanımlayan F(x) fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$F(x) = (R^2 - x^2)^{1/2} - R \qquad (130)$$



Şekil 3. Dairesel rijit blok hali

Burada R dairenin yarıçapını göstermektedir. Buna göre;

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) = -\frac{x}{(R^2 - x^2)^{1/2}} \qquad (131)$$

olarak bulunur. Tabaka ile blok arasındaki değme, değme bölgesinin uç noktalarında düz (smooth contact) olduğundan $g(\pm 1) = 0$ dır. Bu nedenle integral denklemin indisi -1 dir [27]. İntegral denklemin çözümü,

$$g(s)=G(s)(1-s^2) \qquad -1 < s < 1 \qquad (132)$$

şeklinde aranır ve uygun Gauss-Chebyshev integrasyon formülü kullanılırsa; (121) ve (122) ifadeleri aşağıdaki formlara indirgenirler [27].

$$\sum_{i=1}^{n}(1-s_i^2)\left[\frac{1}{s_i-w_j}+\frac{c}{h}K^*(w_j,s_i)\right]G(s_i)=\frac{n+1}{\pi}m(w_j) \qquad (j=1, n+1) \qquad (133)$$

$$\frac{c}{h}\sum_{i=1}^{n}(1-s_i^2)G(s_i)=\frac{n+1}{\pi} \qquad (134)$$

(133) ifadesindeki $m(w_j)$ aşağıda verilmiştir.

$$m(w_j)=-\frac{4\pi}{1+\kappa}\frac{\frac{c}{h}w_j}{\sqrt{\frac{R^2}{h^2}-\frac{c^2}{h^2}w_j^2}}\frac{\mu}{P/h} \qquad (j=1, n+1) \qquad (135)$$

Bu ifadelerde;

$$s_i=\cos\left(\frac{i\pi}{n+1}\right) \qquad (i=1, n) \qquad (136)$$

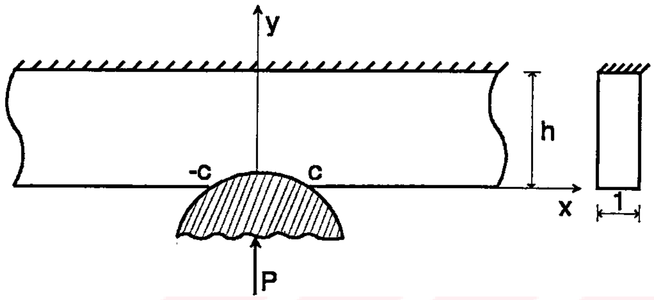
$$w_j=\cos\left(\frac{2j-1}{2n+2}\pi\right) \qquad (j=1, n+1) \qquad (137)$$

olarak verilmektedir. Eğri yüzeyli rijit blok hallerinde değme gerilmelerinin yanısıra, değme bölgesi de bilinmeyendir. (133) ve (134) denklem sistemlerindeki ekstra denklem orjinal integral denklemin, yani (121) dekleminin, uygunluk şartına karşılık gelir [15, 27]. Bu durumda (133) ifadesinde (1+n/2). ci denklem otomatik olarak sağlandığı için ihmal edilecektir. Böylece $G(s_i)$ (i = 1, n) ve c bilinmeyenleri için (n+1) denklemden oluşan bir lineer cebrik denklem sistemi elde edilecektir. Değme gerilmesi yayılışının ve değme bölgesinin belirlenmesi için şu yol izlenecektir. Önce seçilen bir değme bölgesi değeri için (133) denklem sisteminden değme gerilmeleri hesaplanacak ve ardından bulunan bu değme gerilmeleri (134) denkleminde yazılarak uygunluk şartının sağlanıp sağlanmadığı kontrol edilecektir. Sağlanmıyorsa değme bölgesi değerine artımlar verilerek tekrar (133) denklem sisteminde yazılacak ve (134) denklemi sağlanıncaya kadar bu işleme devam edilecektir.

2. 6. 3. Parabolik Rijit Blok Hali

Bloğun parabolik bir profile sahip olması durumunda F(x) fonksiyonu C blok eğriliğini gösteren bir sabit olmak üzere şu şekilde yazılır.

$$F(x) = -Cx^2 \tag{138}$$



Şekil 4. Parabolik rijit blok hali

Buna bağlı olarak;

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) = -2Cx \tag{139}$$

şeklinde elde edilir.Blok profilinin parabol olması durumunda kısım 2. 6. 2' deki ifadeler m(w) dışında aynı kalacaktır. m(w) ifadesi ise aşağıda verilmiştir.

$$m(w_j) = -\frac{8\pi}{1+\kappa}\frac{\mu}{P/h}Ch\frac{c}{h}w_j \qquad \text{(j=1, n+1)} \tag{140}$$

Değme gerilmelerinin ve değme bölgesinin hesabı da kısım 2. 6. 2' deki gibidir.

2. 7. Gerilme ve Yerdeğiştirme İfadeleri

A_i katsayılarının ve p(t) değme gerilmelerinin, gerilme ve yerdeğiştirme ifadelerinde yerlerine yazılmasıyla σ_x, σ_y, τ_{xy} gerilmeleri ile u, v yerdeğiştirmeleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$u(x,y) = -\frac{1}{\mu}\int_0^c p(t)dt \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[(A_1 + A_2 y)e^{-\alpha y} + (A_3 + A_4 y)e^{\alpha y}\right] \left[\sin\alpha(t+x) - \sin\alpha(t-x)\right]d\alpha \tag{141}$$

$$v(x,y) = -\frac{1}{\mu}\int_0^c p(t)dt \; \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left\{\left[A_1 + \left(\frac{\kappa}{\alpha}+y\right)A_2\right]e^{-\alpha y} + \left[-A_3 + \left(\frac{\kappa}{\alpha}-y\right)A_4\right]e^{\alpha y}\right\} \left[\cos\alpha(t+x) + \cos\alpha(t-x)\right]d\alpha \tag{142}$$

$$\sigma_x(x,y) = -\frac{2}{\pi}\int_0^c p(t)dt\int_0^\infty \left\{\left[\alpha(A_1 + A_2 y) - \frac{3-\kappa}{2}A_2\right]e^{-\alpha y} + \left[\alpha(A_3 + A_4 y) + \frac{3-\kappa}{2}A_4\right]e^{\alpha y}\right\}\left[\cos\alpha(t+x) + \cos\alpha(t-x)\right]d\alpha \tag{143}$$

$$\sigma_y(x,y) = -\frac{2}{\pi}\int_0^c p(t)dt\int_0^\infty \left\{-\left[\alpha(A_1 + A_2 y) + \frac{\kappa+1}{2}A_2\right]e^{-\alpha y} + \left[-\alpha(A_3 + A_4 y) + \frac{\kappa+1}{2}A_4\right]e^{\alpha y}\right\}\left[\cos\alpha(t+x) + \cos\alpha(t-x)\right] \tag{144}$$

$$\tau_{xy}(x,y) = -\frac{2}{\pi}\int_0^c p(t)dt\int_0^\infty \left\{-\left[\alpha(A_1 + A_2 y) + \frac{\kappa-1}{2}A_2\right]e^{-\alpha y} + \left[\alpha(A_3 + A_4 y) - \frac{\kappa-1}{2}A_4\right]e^{\alpha y}\right\}\left[\sin\alpha(t+x) - \sin\alpha(t-x)\right]d\alpha \tag{145}$$

Hesaplarda integral işleminin sağlıklı bir biçimde yapılabilmesi için gerilme ve yerdeğiştirme ifadelerinde çekirdeklerin yakınsama durumunun incelenmesi gerekmektedir.

2. 7. 1. Gerilme Çekirdeklerinin Yakınsama Kontrolü

Tabakada meydana gelen gerilme dağılımları, y ekseni boyunca simetri kesitinde; x ekseni boyunca da mesnette ve tabaka ortasında incelenecektir. Ancak gerilmeler elde edilmeden önce kısım 2. 7. de verilen ifadelerin çekirdeklerinin yakınsayıp yakınsamadığının kontrol edilmesi gerekmektedir.

Yapılan incelemeler sonucunda $y \to 0$ durumunda, yani değme yüzeyinde, $\sigma_x(x, y)$ ve $\sigma_y(x, y)$ normal gerilmelerine ait çekirdeklerde yakınsamanın bozulduğu görülmüştür. Diğer durumlarda gerilmelere ait çekirdeklerin yakınsadığı yani sürekli olarak sıfıra yaklaştıkları görülmüştür.

$\sigma_x(x, y)$ ve $\sigma_y(x, y)$ normal gerilmelerine ait çekirdekleri bozan singüler terimler aşağıdaki gibi elde edilmişlerdir.

$$\sigma_{xs}(x,y) = -\frac{1}{\pi}\int_0^c p(t)dt\int_0^\infty (1-\alpha y)e^{-\alpha y}[\cos\alpha(t+x)+\cos\alpha(t-x)]d\alpha \tag{146}$$

$$\sigma_{ys}(x,y) = -\frac{1}{\pi}\int_0^c p(t)dt\int_0^\infty (1+\alpha y)e^{-\alpha y}[\cos\alpha(t+x)+\cos\alpha(t-x)]d\alpha \tag{147}$$

Bu singüler terimlerin kapalı integralleri ise;

$$\sigma_{xk}(x,y) = -\frac{2}{\pi}\int_0^c p(t)y\left[\frac{(t+x)^2}{\left[y^2+(t+x)^2\right]^2}+\frac{(t-x)^2}{\left[y^2+(t-x)^2\right]^2}\right]dt \tag{148}$$

$$\sigma_{yk}(x,y) = -\frac{2}{\pi}\int_0^c p(t)y^3\left[\frac{1}{\left[y^2+(t+x)^2\right]^2}+\frac{1}{\left[y^2+(t-x)^2\right]^2}\right]dt \tag{149}$$

olarak elde edilirler.

Yakınsamayı bozan (146) ve (147) ifadelerindeki singüler terimlerin gerilme ifadelerinden çıkarılarak, bunların kapalı integrallerinin ilave edilmesi sonucunda çekirdeklerde meydana gelen bozulmalar giderilmiş olur. Eğer bu işlemler sıra ile yapılırsa sonuçta normal gerilme ifadeleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\sigma_x^*(x,y) = \sigma_x(x,y) - \sigma_{xs}(x,y) + \sigma_{xk}(x,y) \qquad (150)$$

$$\sigma_y^*(x,y) = \sigma_y(x,y) - \sigma_{ys}(x,y) + \sigma_{yk}(x,y) \qquad (151)$$

(120) ifadesinde tanımlanan dönüşümler gerilme ifadelerine de aynen uygulanarak ifadelerin boyutsuz olması sağlandıktan sonra; basit bir bilgisayar programı yardımıyla tabakada meydana gelen gerilme yayılışları elde edilebilir.

3. BULGULAR VE İRDELEME

3. 1. Giriş

Bu bölümde, üst tarafından rijit olarak mesnetlenmiş elastik bir tabaka ile rijit bir blok arasındaki sürtünmesiz değme problemine ait çeşitli boyutsuz büyüklükler (değme yüzeyi, değme gerilmesi, normal gerilmeler, kayma gerilmesi vs.) için elde edilen değerler grafik ve tablolarla verilerek bunlarla ilgili bir irdeleme yapılmıştır.

3. 2. Eğri Yüzeyli Rijit Blok Hali

Blok profilinin dairesel ve parabolik olması durumlarında kısım 2. 6. 2 ve 2. 6. 3' te verilen ifadelerden faydalanılarak integral denklem sayısal olarak çözülmüş; blok eğriliği, yük ve malzemeye bağlı olarak değme yüzeyleri ve değme gerilmeleri elde edilmiştir. Daha sonra kısım 2. 7' de verilen gerilme ifadeleri kullanılarak tabakada y ekseni boyunca simetri kesitinde; x ekseni boyunca mesnette ve tabaka ortasında meydana gelen σ_x , σ_y ve τ_{xy} gerilme yayılışları bulunmuştur.

3. 2. 1. Değme Yüzeyleri ve Değme Gerilmeleri

Dairesel rijit blok durumunda; yükün ve dairesel bloğun yarıçapının çeşitli değerleri için değme yüzeyleri ve değme gerilmeleri bulunmuştur.

Şekil 5' te blok yarıçapının çeşitli değerleri için değme yüzeyinin yük ile değişimi görülmektedir. Burada yüke, kayma modülüne ve tabaka yüksekliğine bağlı boyutsuz bir büyüklük olan $\dfrac{\mu}{P/h}$ oranının büyümesi kayma modülü ve yükseklik sabitken yükün küçülmesi anlamına gelmektedir. Şekle dikkat edilirse yük küçüldükçe değme yüzeyi de küçülmektedir. Blok yarıçapının büyümesi durumunda değme yüzeyinin de büyüyeceği açıktır. Bu durum, sabit bir yük değeri için değme bölgesi ile blok yarıçapının değişimini gösteren şekil 6' da daha iyi görülmektedir. Çeşitli yük ve yarıçap değerleri için bulunan değme yüzeyleri tablo 1 ve tablo 2' de verilmiştir.

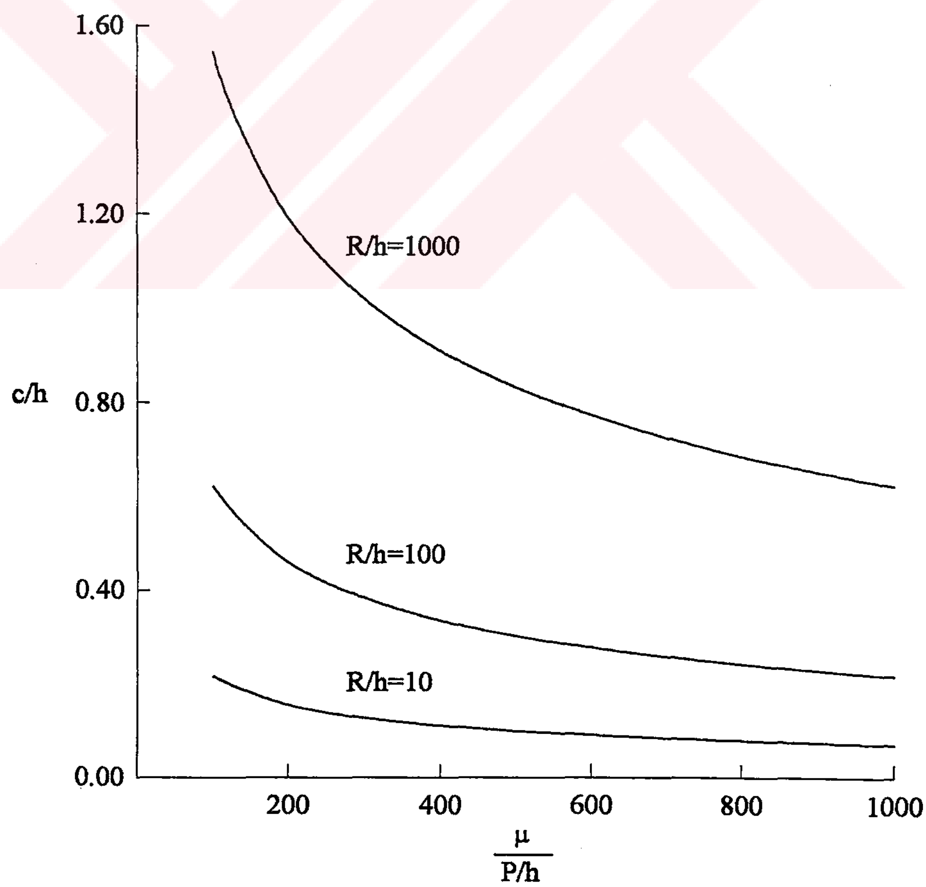
Yük faktörünün sabit bir değeri için blok yarıçapı ile değme bölgesinin κ' ya bağlı olarak değişimi şekil 7' de verilmiştir. κ, ν poisson oranına bağlı bir sabit olup; poisson oranı büyüdükçe küçülmektedir. Poisson oranının büyümesi malzemenin daha boşluksuz dolayısıyla daha rijit bir yapıya sahip olması anlamına gelmektedir. Şekilden de görüleceği üzere malzeme yapısının daha rijit olması durumunda tabaka ile blok arasında meydana gelen değme yüzeyi küçülmektedir. Değme yüzeyi küçüldükçe değme gerilmeleri büyüyeceğinden; rijit malzemede daha büyük gerilmeler ortaya çıkacaktır. Tablo 3' te sabit bir yük değeri için çeşitli κ değerlerinin alınması durumunda bulunan değme yüzeyleri verilmektedir.

Eğrisel blok hallerinde değme gerilmeleri değme yüzeyinin yanısıra uygulanan yüke de bağlıdırlar. Grafiklerde değme gerilmeleri yüke bağlı boyutsuz bir oran şeklinde verilmektedirler. Dolayısıyla yük büyüdüğünde bu boyutsuz oran küçülecektir. Bu oranın küçülmesi değme gerilmelerinin de küçüleceği anlamına gelmez. Değme gerilmeleri x=0' da en büyük değeri almakta ve buradan uzaklaştıkça düzgün bir şekilde azalarak değmenin son bulduğu noktada (x = c) sıfır olmaktadırlar. Değişik c/h değerleri için elde edilen boyutsuz değme gerilmesi yayılışları şekil 8, şekil 9 ve şekil 10' da verilmektedir. Şekil 11' de ise sabit bir yük değeri için yarıçapa bağlı olarak değme gerilmeleri ile değme yüzeyleri arasındaki ilişki görülmektedir.

Blok profilinin parabol olması durumunda; parabolün eğrilik yarıçapı ile ilgili bir terim olan Ch değeri azaldıkça değme yüzeyi büyüyecektir. Ch=0.05 ve Ch=0.005 alınarak elde edilen değme yüzeyleri şekil 12' de verilmiştir. Dikkat edilecek olursa; parabolik blok durumunda Ch=0.05 ve Ch=0.005 için elde edilen değme yüzeyleri, dairesel blok durumunda sırasıyla R/h=10 ve R/h=100 için elde edilen değme yüzeyleri ile birbirine çok benzer değerler almaktadırlar. Tablo 4' te parabolik blok için elde edilen değme yüzeylerinin değerleri verilmiştir.

Tablo 1. Değişik yarıçap değerleri için yüke bağlı olarak bulunan değme yüzeyleri (κ=2)

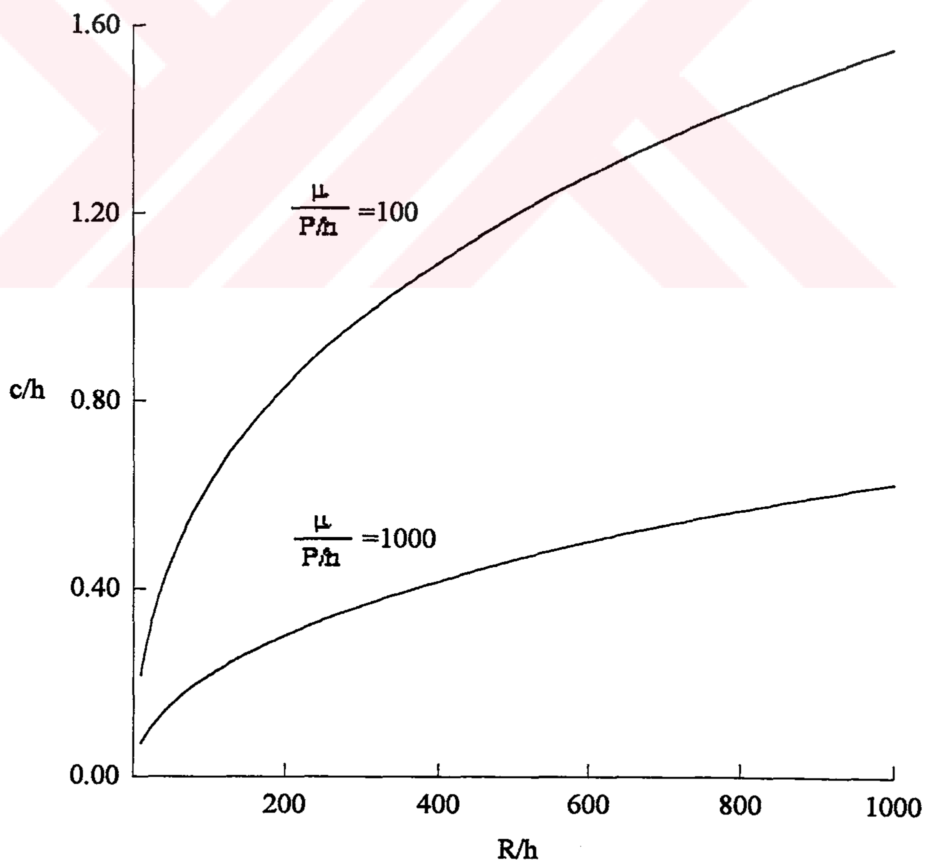
$\frac{\mu}{P/h}$	c/h		
	R/h=10	R/h=100	R/h=1000
100	0.215190	0.622161	1.545286
200	0.153296	0.458907	1.190627
300	0.125488	0.381396	1.017721
400	0.108818	0.333571	0.908304
500	0.097407	0.300239	0.830313
600	0.088967	0.275281	0.770750
700	0.082399	0.255682	0.723157
800	0.077099	0.239760	0.683892
900	0.072706	0.226490	0.650717
1000	0.068987	0.215208	0.622166



Şekil 5. Dairesel bloğun yarıçapına bağlı olarak, değme yüzeyinin yük ile değişimi (κ=2)

Tablo 2. Değişik yük değerleri için yarıçapa bağlı olarak bulunan değme yüzeyleri (κ=2)

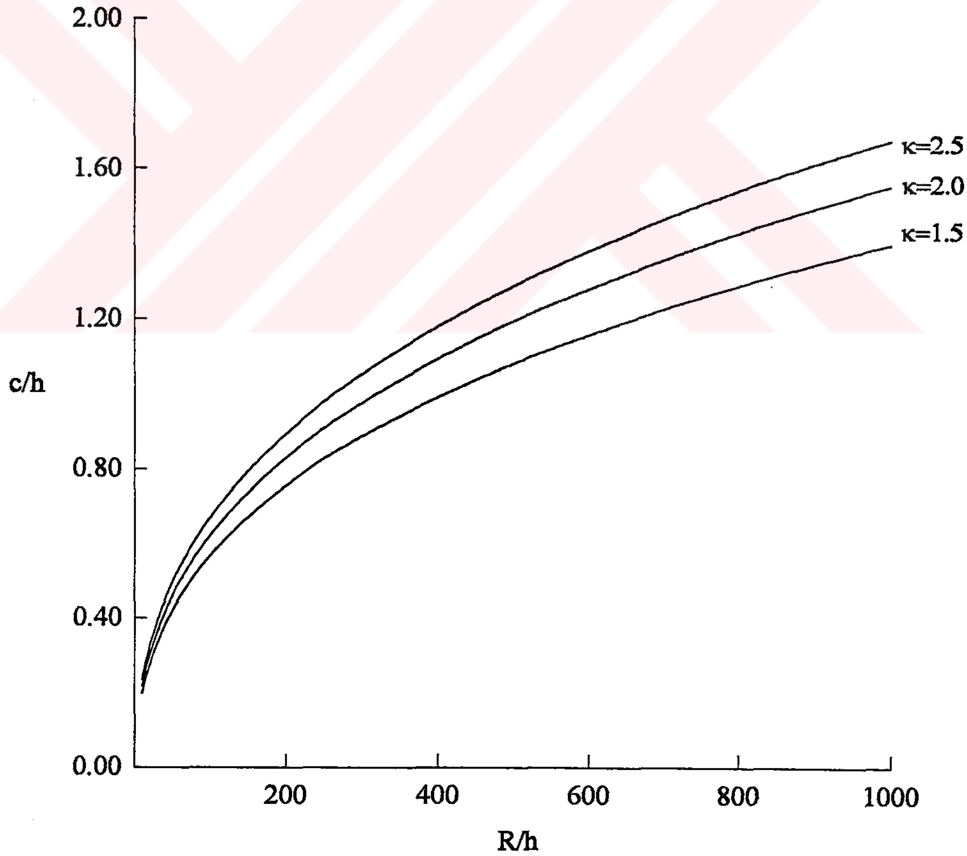
R/h	c/h	
	$\frac{\mu}{P/h}=100$	$\frac{\mu}{P/h}=1000$
10	0.215190	0.068987
50	0.458901	0.153303
100	0.622161	0.215208
250	0.908300	0.333571
500	1.190621	0.458908
750	1.388200	0.549386
1000	1.545286	0.622166



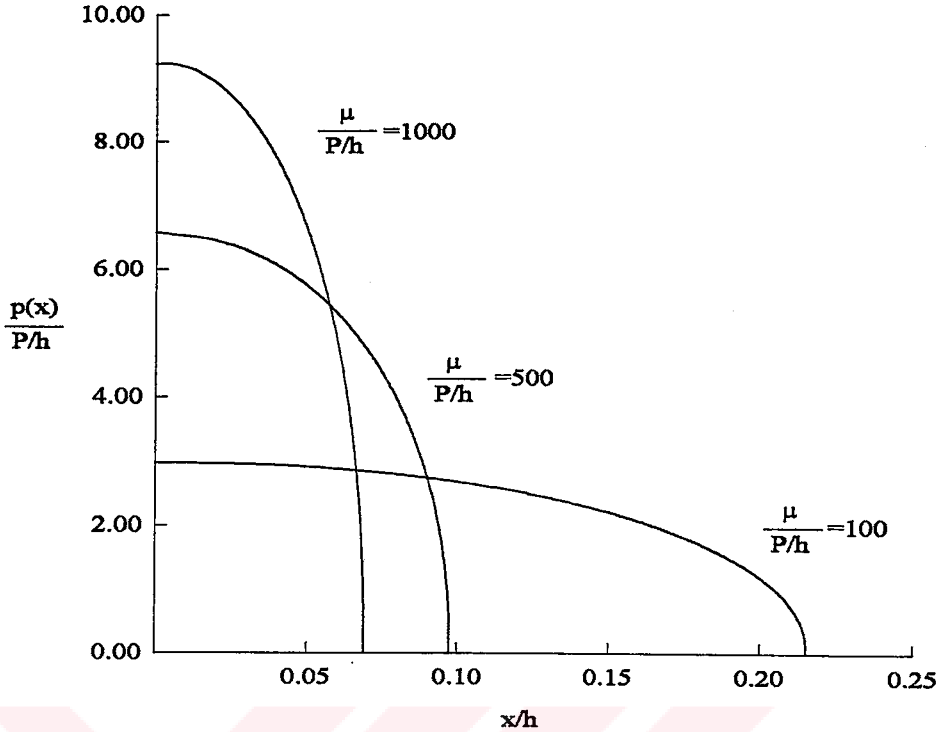
Şekil 6. Yüke bağlı olarak, değme yüzeyinin dairesel bloğun yarıçapı ile değişimi (κ=2)

Tablo 3. κ' ya bağlı olarak, değme yüzeyinin yarıçap ile değişimi ($\frac{\mu}{P/h} = 100$)

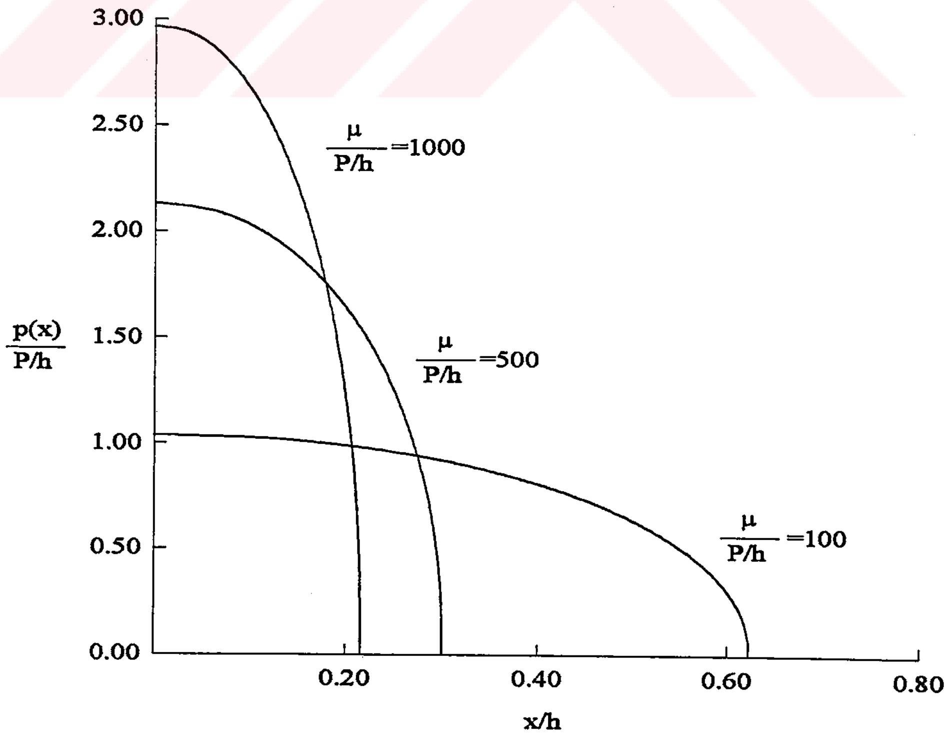
R/h	c/h		
	κ=1.5	κ=2.0	κ=2.5
10	0.196497	0.215190	0.232257
50	0.419015	0.458901	0.494604
100	0.567560	0.622161	0.670244
250	0.825868	0.908300	0.978700
500	1.077900	1.190621	1.283940
750	1.252800	1.388200	1.497932
1000	1.391103	1.545286	1.668223



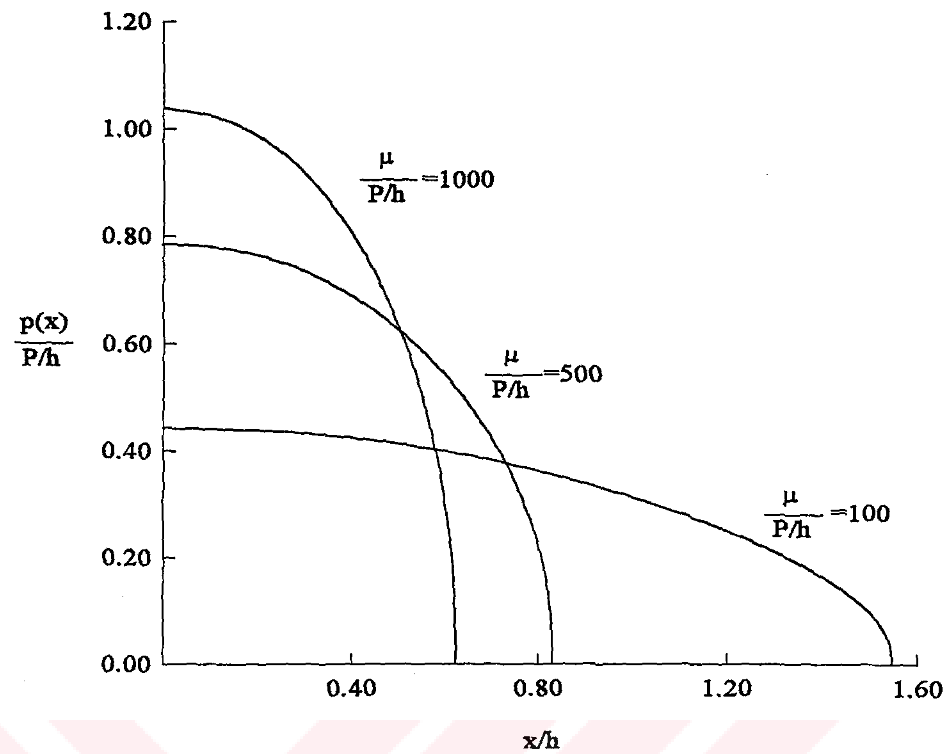
Şekil 7. κ' ya bağlı olarak, değme yüzeyinin yarıçap ile değişimi ($\frac{\mu}{P/h} = 100$)



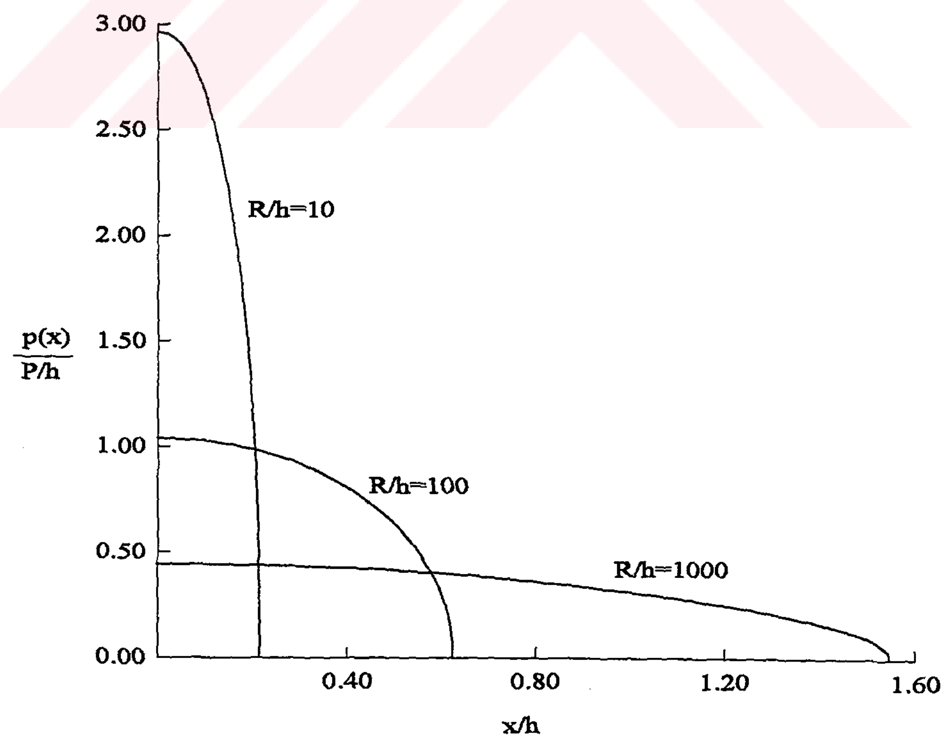
Şekil 8. Çeşitli yük değerleri için değme gerilmesi yayılışı (R/h=10, κ=2)



Şekil 9. Çeşitli yük değerleri için değme gerilmesi yayılışı (R/h=100, κ=2)



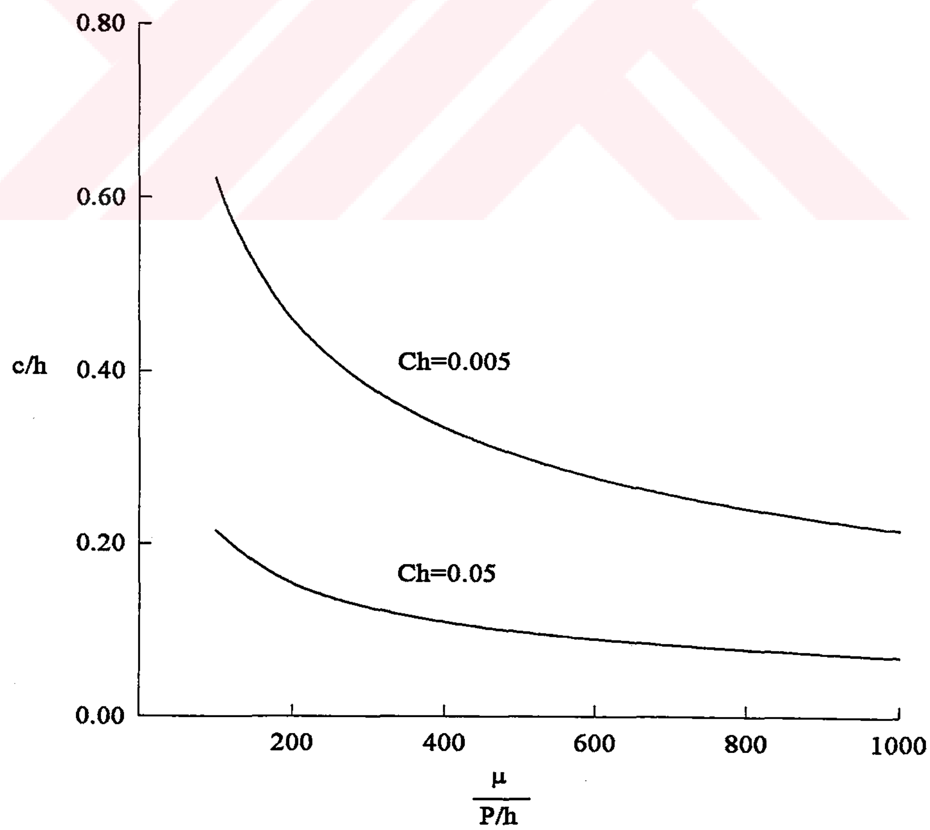
Şekil 10. Çeşitli yük değerleri için değme gerilmesi yayılışı (R/h=1000, κ=2)



Şekil 11. Çeşitli yarıçap değerleri için değme gerilmesi yayılışı ($\frac{\mu}{P/h} = 100$, κ=2)

Tablo 4. Parabolik blok durumunda çeşitli yük değerleri için bulunan değme yüzeyleri (κ=2)

$\dfrac{\mu}{P/h}$	c/h	
	Ch=0.05	Ch=0.005
100	0.215208	0.622166
200	0.153303	0.458909
300	0.125492	0.381397
400	0.108821	0.333571
500	0.097409	0.300239
600	0.088969	0.275281
700	0.082400	0.255683
800	0.077100	0.239760
900	0.072707	0.226490
1000	0.068988	0.215208



Şekil 12. Parabolik bloğun eğriliğine bağlı olarak, değme yüzeyinin yük ile değişimi (κ=2)

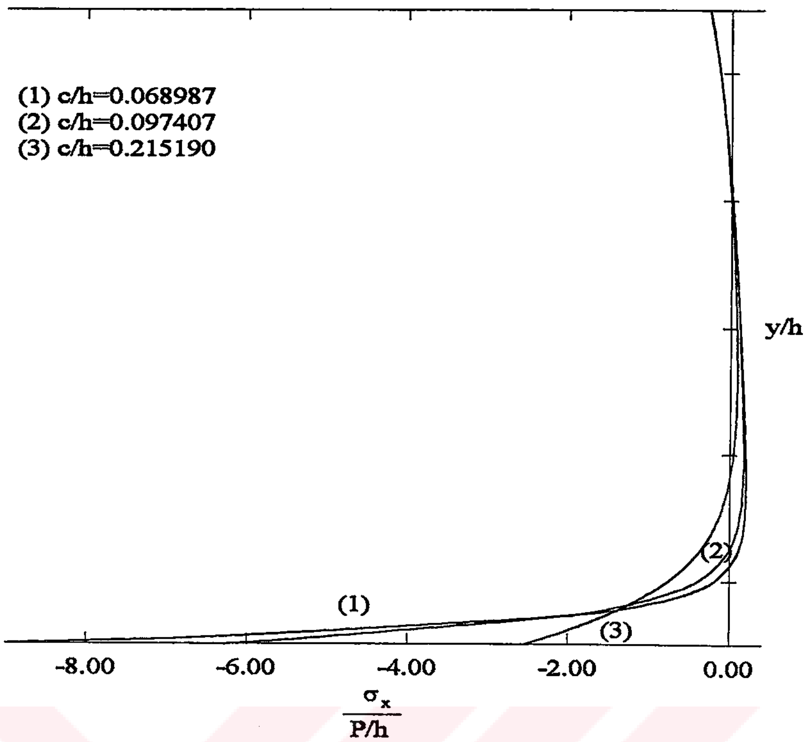
3. 2. 2. Tabakada Meydana Gelen Gerilmelerin İncelenmesi

Kısım 2. 7' de verilen ifadeler kullanılarak, mesnet ve tabaka ortasında x ekseni boyunca ve tabakanın x = 0 simetri kesiti boyunca σ_x , σ_y , τ_{xy} normal ve kayma gerilmesi dağılımları elde edilmiştir. Ele alınan dairesel ve parabolik blok profillerinden birbirine benzer sonuçlar elde edildiği için, sadece dairesel blok profili durumundaki gerilme dağılımları incelenmiştir.

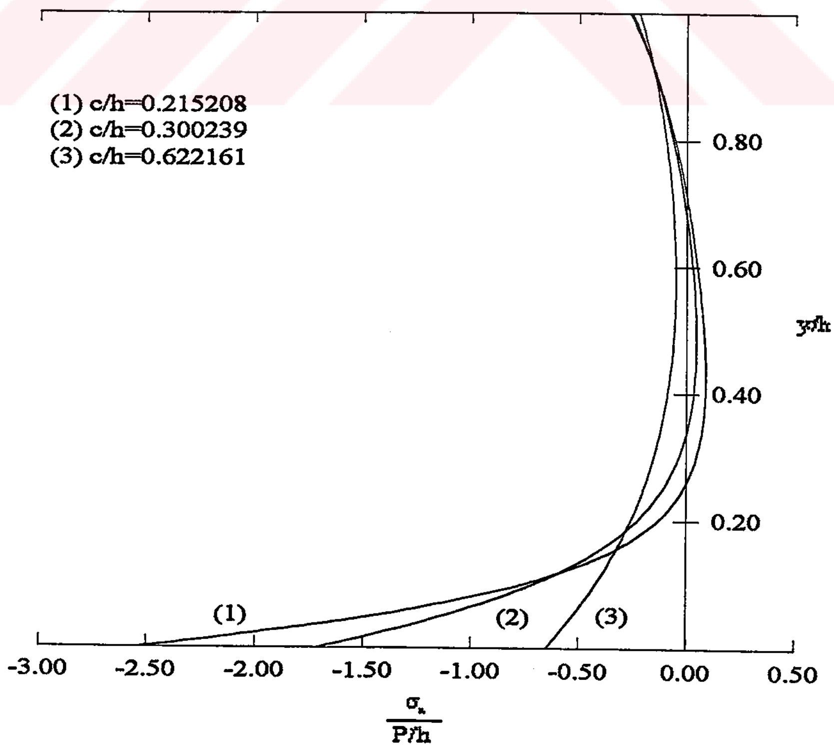
3. 2. 2. 1. σ_x Normal Gerilmelerinin İncelenmesi

Değme yüzeyi küçüldükçe, simetri kesitinde y/h=0 noktasında meydana gelen σ_x normal gerilmesinin hızla büyüdüğü görülmektedir. y/h=1 mesnet noktasında ise büyüme daha yavaş meydana gelmektedir. Tabakada simetri kesiti boyunca σ_x normal gerilmelerinin değme yüzeyinde ve mesnette her zaman basınç gerilmeleri şeklinde ortaya çıktıkları görülmektedir. Bu basınç gerilmeleri değme yüzeyi büyüdükçe küçülmektedirler. Küçük değme yüzeyleri için, özellikle R/h=10 iken, tabakada simetri kesiti boyunca değme yüzeyine ve mesnete yakın bölgelerde basınç, iç bölgelerde ise çekme gerilmeleri ortaya çıktığı görülmektedir. Bu göstermektedir ki; tekil yük haline yaklaşıldıkça tabakada simetri kesiti boyunca her zaman iç kısımlarda çekme, diğer kısımlarda basınç gerilmeleri ortaya çıkacaktır. Dikkati çeken bir nokta, bu çekme bölgelerinin değme yüzeyi büyüdükçe küçülmesidir. Bu bölgeler değme yüzeyinin beli bir değerinden sonra kaybolmakta ve kesit tamamen basınç gerilmelerinin etkisine girmektedir. Kesit tamamen basınç gerilmelerinin etkisindeyken değme yüzeyleri büyüdükçe iç kesimlerde meydana gelen basınç gerilmelerinin büyüdüğü görülmüştür. Bu durum R/h = 100 ve R/h = 1000 olduğunda açık bir şekilde görülmektedir. R/h=1000 iken, tabaka simetri kesitinde tamamen basınç gerilmelerinin meydana gelmekte olduğu ve gerilme değerlerinin değme yüzeyi büyüdükçe mesnette ve değme yüzeyinde küçülürken, iç kesimlerde büyümekte oldukları görülür.

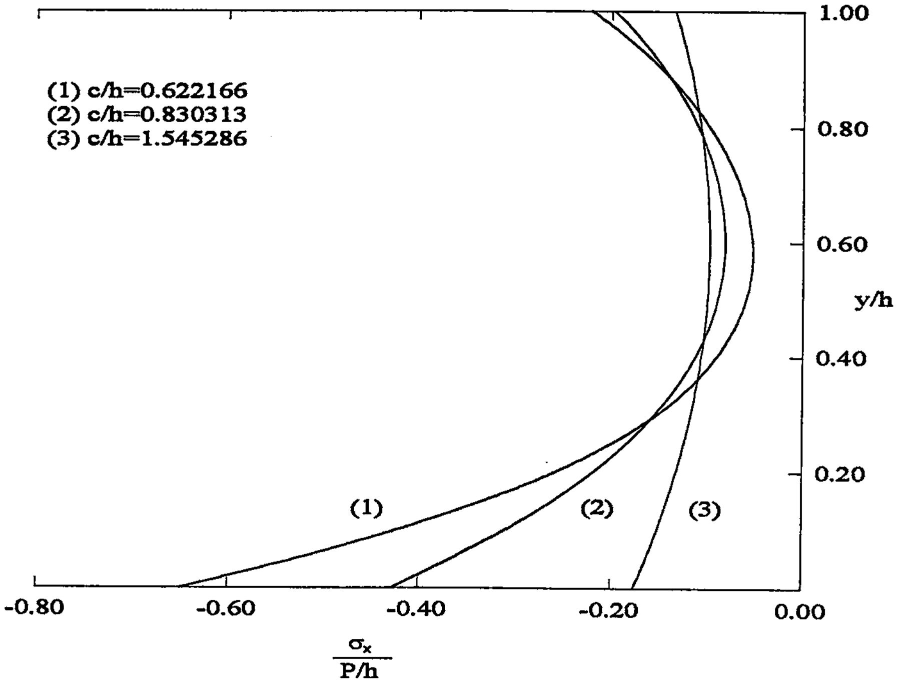
R/h=10, R/h=100, R/h=1000 olması durumlarında elde edilen değme yüzeyleri için tabaka simetri kesiti boyunca hesaplanan boyutsuz σ_x normal gerilme değerleri ile bunların dağılımları şekil 13, şekil 14 ve şekil 15' te verilmiştir.



Şekil 13. Dairesel blok durumunda $\dfrac{\sigma_x(0,y)}{P/h}$ normal gerilme yayılışı (R/h=10, κ=2)



Şekil 14. Dairesel blok durumunda $\dfrac{\sigma_x(0,y)}{P/h}$ normal gerilme yayılışı (R/h=100, κ=2)



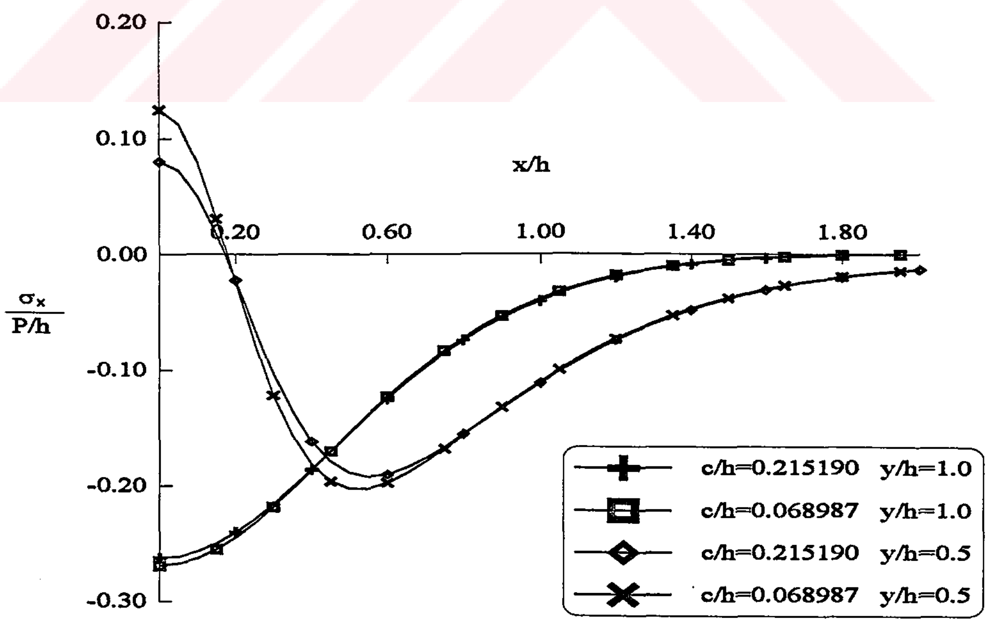
Şekil 15. Dairesel blok durumunda $\dfrac{\sigma_x(0,y)}{P/h}$ normal gerilme yayılışı (R/h=1000, κ=2)

Tabakada x ekseni boyunca mesnette ve tabaka ortasında meydana gelen σ_x normal gerilme dağılımı, R/h=10, R/h=100 ve R/h=1000 olması durumlarına ait en büyük ve en küçük değme yüzeyleri için elde edilmiş ve şekil 16, 17 ve 18' de verilmiştir.

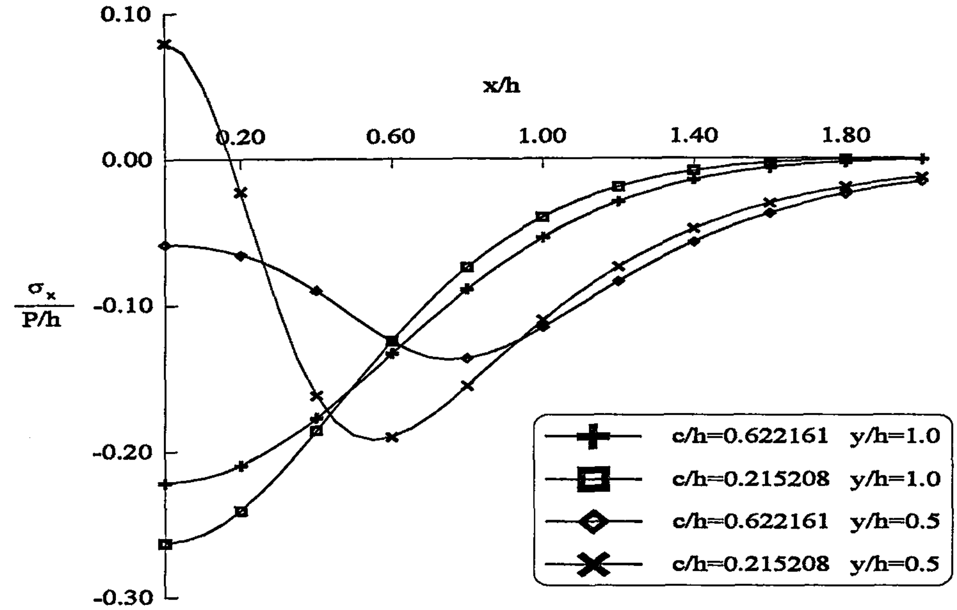
R/h=10 olması durumunda, mesnet boyunca meydana gelen gerilme değerleri her iki değme yüzeyi için yaklaşık olarak aynı değerleri almaktadırlar. Her iki değme yüzeyi için de mesnette basınç gerilmeleri elde edildiği ve bunların sürekli azalarak sıfıra yaklaştıkları görülmektedir. Bu beklenen bir durumdur. Çünkü Elastisite teorisine göre sonsuzda tüm gerilmeler sıfırdır (Etkinin sonsuzda kaybolması). Tabaka ortasında ise; küçük değme yüzeyi için elde edilen gerilme değerleri diğerine nazaran biraz daha büyük çıkmaktadır. Şekil 16' ya dikkat edilirse; simetri eksenine yakın yerlerde çekme gerilmeleri ortaya çıktığı görülmektedir. Bu çekme gerilmeleri en büyük değerini simetri ekseni üzerinde almakta; eksenden uzaklaşıldıkça azalarak basınç gerilmesine dönüşmektedirler. Gerilmeler işaret değiştirdikten sonra bir müddet artmakta ve maksimum bir değere ulaşarak buradan sıfıra yaklaşmaya başlamaktadırlar.

R/h=100 olması durumunda, mesnette simetri eksenine yakın kesitlerde σ_x gerilmeleri küçük değme yüzeyi için daha büyük çıkmaktadırlar. Ancak simetri ekseninden uzaklaşıldıkça bu gerilmeler büyük değme yüzeyi için elde edilenlere nazaran daha hızlı bir şekilde sıfıra yaklaşmaktadırlar. Tabaka ortasında ise; küçük değme yüzeyleri için simetri eksenine yakın yerlerde çekme gerilmeleri oluşmakta ve simetri ekseninden uzaklaşıldıkça bu gerilmeler işaret değiştirerek basınç gerilmelerine dönüşmektedirler. Değme yüzeyi büyüdükçe bu çekme bölgesi yavaş yavaş azalarak kaybolmakta ve tamamen basınç etkisi hakim olmaktadır. Ancak; dikkat edilirse tabaka ortasında meydana gelen bu basınç gerilmelerinin en büyük değeri simetri kesiti üzerinde oluşmamaktadır. Basınç gerilmesinin değeri simetri ekseninden uzaklaştıkça bir müddet arttıktan sonra maksimum değerine ulaşarak azalmaya başlamaktadır.

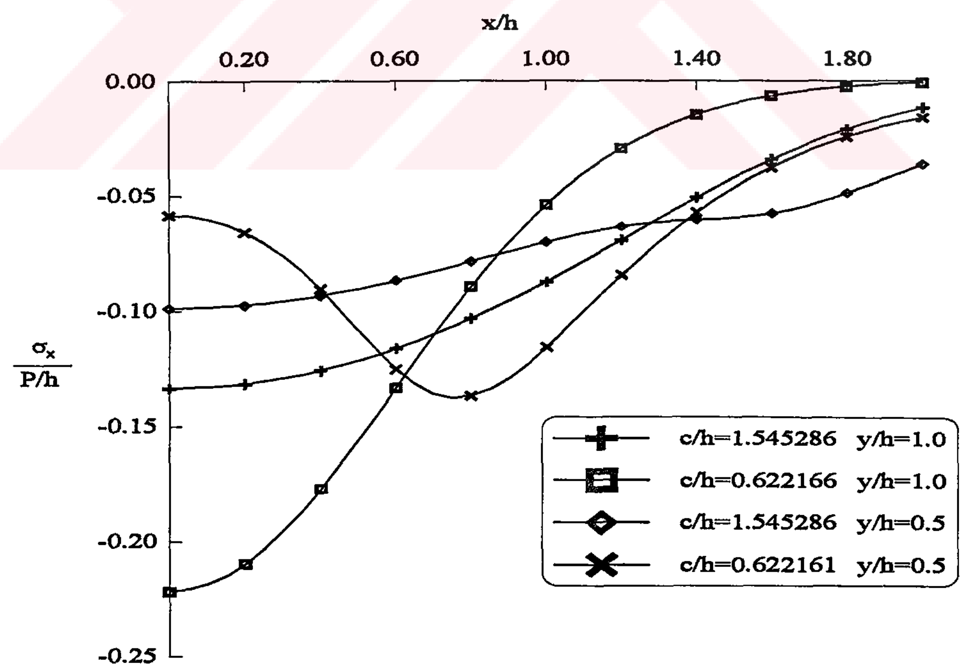
R/h=1000 olması durumunda, tabakada, mesnette ve ortada x ekseni boyunca tamamen basınç gerilmeleri meydana gelmekte olup; mesnetteki σ_x normal gerilme dağılımı ile ilgili olarak R/h=100 durumunda söylenenler aynen geçerlidir. R/h=100 durumunda, tabaka ortasında x ekseni boyunca meydana gelen basınç gerilmelerinin en büyük değerinin simetri ekseni üzerinde oluşmadığı söylenmişti. Benzer özellik R/h=1000 için de geçerlidir. Ancak dikkat edilirse; değme yüzeyi büyüdükçe σ_x ' in en büyük değerine ulaştığı nokta simetri kesitine yaklaşmakta ve nihayet σ_x bu kesit üzerinde maksimum olmaktadır.



Şekil 16. Dairesel blok durumunda, x ekseni boyunca mesnet ve tabaka ortasında meydana gelen $\frac{\sigma_x}{P/h}$ normal gerilme yayılışı (R/h=10, κ=2)



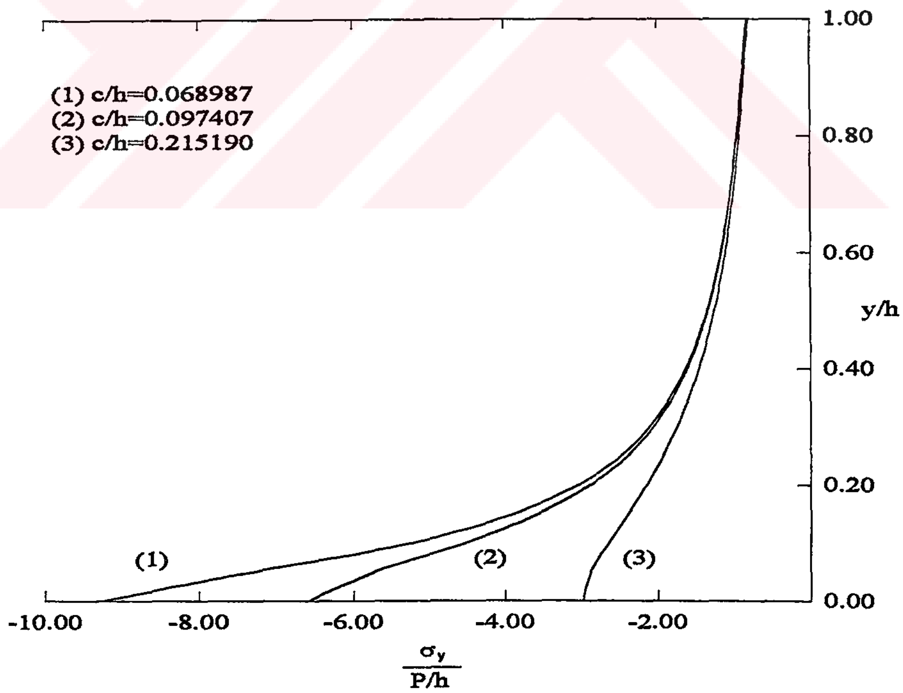
Şekil 17. Dairesel blok durumunda, x ekseni boyunca mesnet ve tabaka ortasında meydana gelen $\frac{\sigma_x}{P/h}$ normal gerilme yayılışı (R/h=100, κ=2)



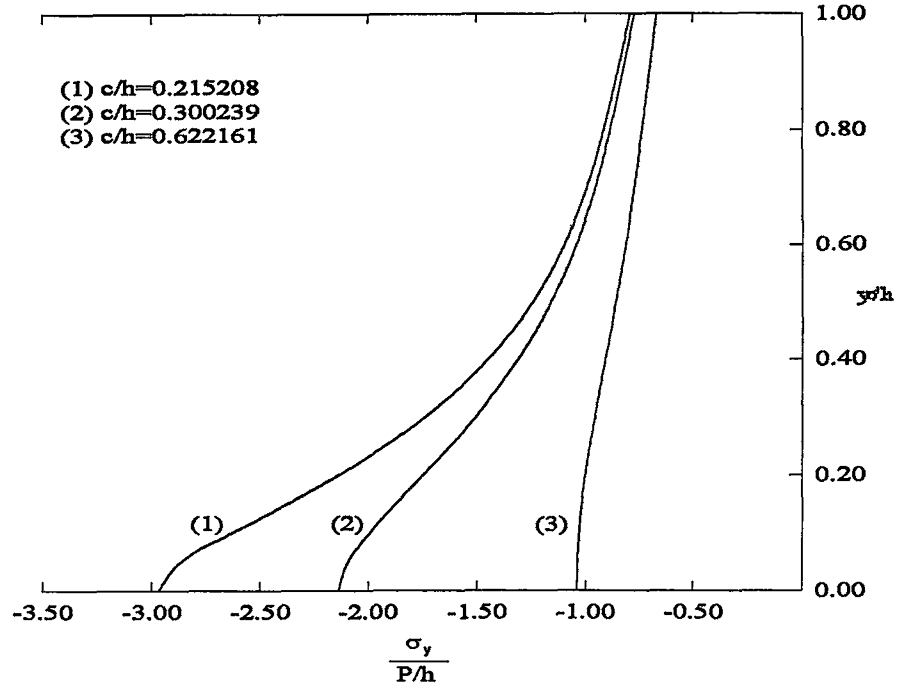
Şekil 18. Dairesel blok durumunda, x ekseni boyunca mesnet ve tabaka ortasında meydana gelen $\frac{\sigma_x}{P/h}$ normal gerilme yayılışı (R/h=1000, κ=2)

3. 2. 2. 2. σ_y Normal Gerilmelerinin İncelenmesi

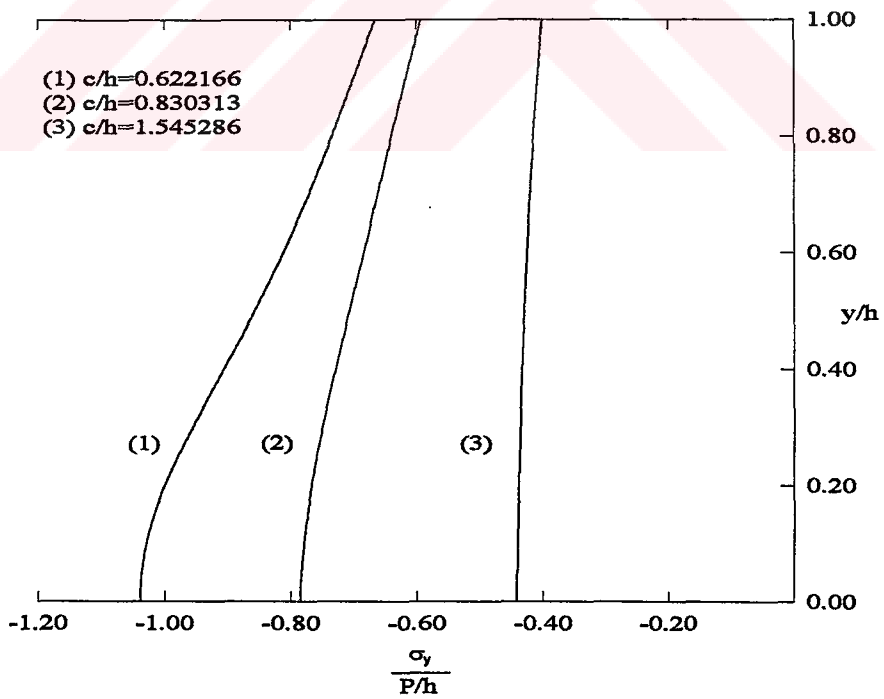
Simetri ekseni x = 0 boyunca σ_y normal gerilmeleri incelendiğinde; değme yüzeyinde değme gerilmeleri ile aynı değeri alarak sınır şartını sağladıkları görülür. Elastisite teorisinden, tekil yükün altında düşey normal gerilmenin sonsuza gittiği bilinmektedir. Değme yüzeyi küçüldükçe tekil yük haline yaklaşılacağından σ_y gerilmelerinin değme yüzeyinde hızla büyümekte oldukları görülür. Tabaka içerisinde ise; mesnete yaklaşıldıkça σ_y gerilmeleri düzgün bir şekilde azalmaktadırlar. Şekillerde dikkati çeken bir nokta; değme yüzeyi büyüdükçe tabakada meydana gelen σ_y gerilmesi değerlerinin küçülerek birbirlerine yaklaşmakta olmalarıdır. Özellikle c/h=1.545286 olması durumunda tabaka simetri ekseni boyunca değme yüzeyindeki ve mesnetli yüzeydeki σ_y gerilmeleri birbirlerine çok yakın değerler aldıklarından, kesitte hemen hemen doğrusal bir gerilme yayılışının elde edildiği görülmektedir.



Şekil 19. Dairesel blok durumunda $\dfrac{\sigma_y(0,y)}{P/h}$ normal gerilme yayılışı (R/h=10, κ=2)



Şekil 20. Dairesel blok durumunda $\dfrac{\sigma_y(0,y)}{P/h}$ normal gerilme yayılışı (R/h=100, κ=2)

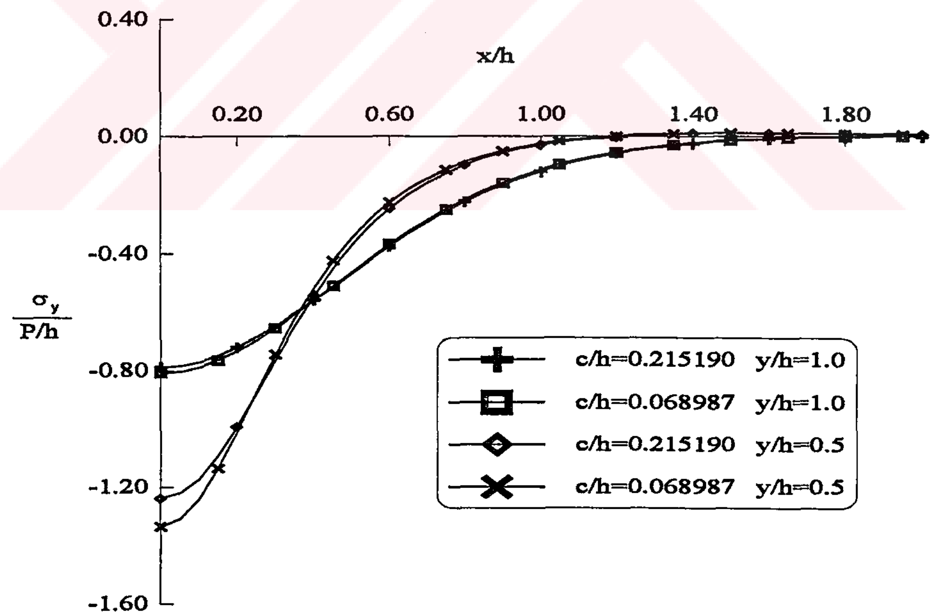


Şekil 21. Dairesel blok durumunda $\dfrac{\sigma_y(0,y)}{P/h}$ normal gerilme yayılışı (R/h=1000, κ=2)

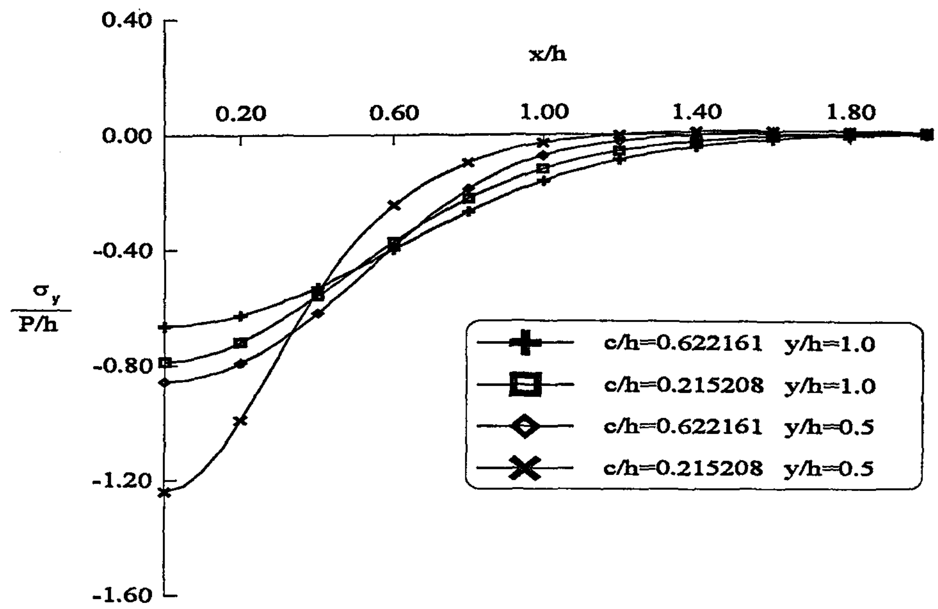
Mesnette ve tabaka ortasında meydana gelen σ_y gerilmelerinin en büyük değeri simetri ekseni üzerinde ortaya çıkmaktadır. Simetri ekseninden uzaklaşıldıkça gerilmeler azalmakta ve sıfıra yaklaşmaktadırlar. Değme yüzeyi büyüdükçe gerilmeler daha yavaş sıfıra yaklaşmaktadırlar. Ayrıca tabaka ortasında meydana gelen σ_y gerilmeleri mesnette meydana gelenlere nazaran daha hızlı bir şekilde sıfıra gitmektedirler.

R/h=10 olması durumunda, x ekseni boyunca gerek mesnette gerekse tabaka ortasında meydana gelen σ_y gerilmelerinin birbirlerine çok yakın değerler aldıkları görülür. Tabaka ortasında meydana gelen σ_y gerilmeleri simetri eksenine yakın yerlerde mesnetteki gerilmelerden büyük olurken; simetri ekseninden uzaklaştıkça mesnetteki gerilmelere nazaran daha hızlı bir şekilde sıfıra yaklaşmaktadırlar.

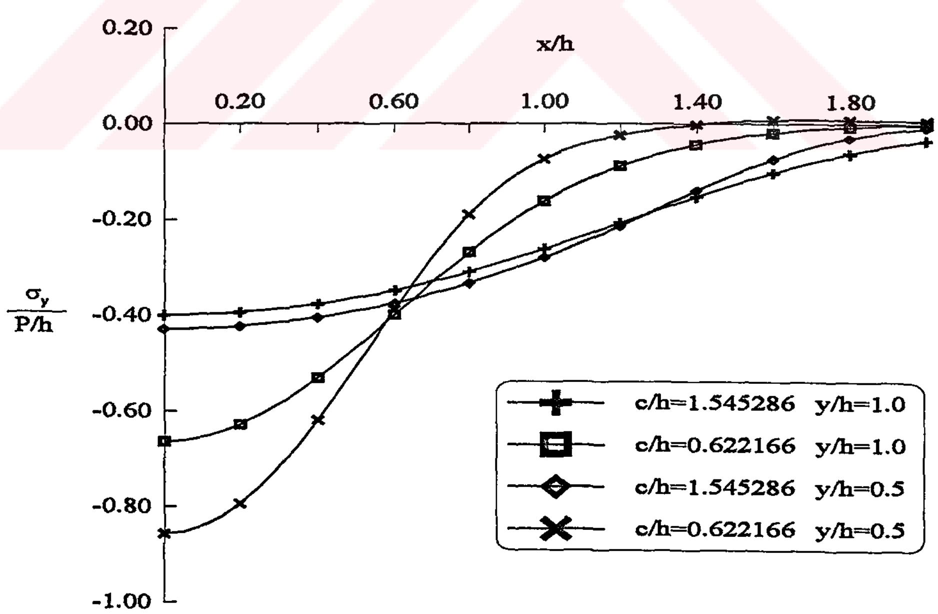
R/h=100 ve R/h=1000 olması durumlarında ise, küçük değme yüzeyleri için daha büyük gerilme değerleri elde edilmektedir. Değme yüzeyi büyüdükçe mesnetteki ve değme yüzeyindeki σ_y gerilme değerleri birbirlerine yaklaşmaktadır.



Şekil 22. Dairesel blok durumunda, x ekseni boyunca mesnette ve tabaka ortasında meydana gelen $\frac{\sigma_y}{P/h}$ normal gerilme yayılışı (R/h=10, κ=2)



Şekil 23. Dairesel blok durumunda, x ekseni boyunca mesnette ve tabaka ortasında meydana gelen $\frac{\sigma_y}{P/h}$ normal gerilme yayılışı (R/h=100, κ=2)

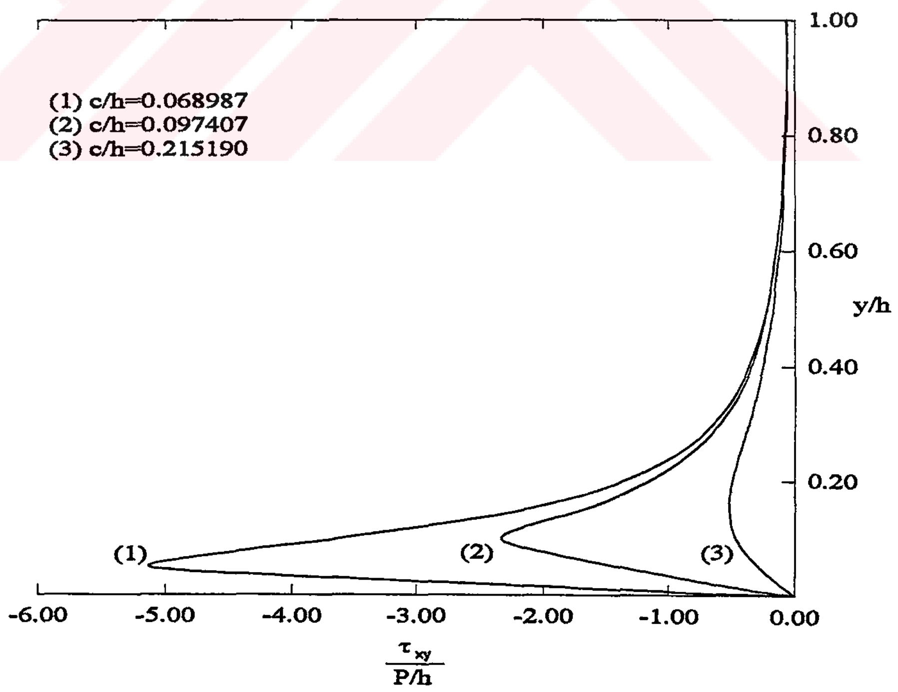


Şekil 24. Dairesel blok durumunda, x ekseni boyunca mesnette ve tabaka ortasında meydana gelen $\frac{\sigma_y}{P/h}$ normal gerilme yayılışı (R/h=1000, κ=2)

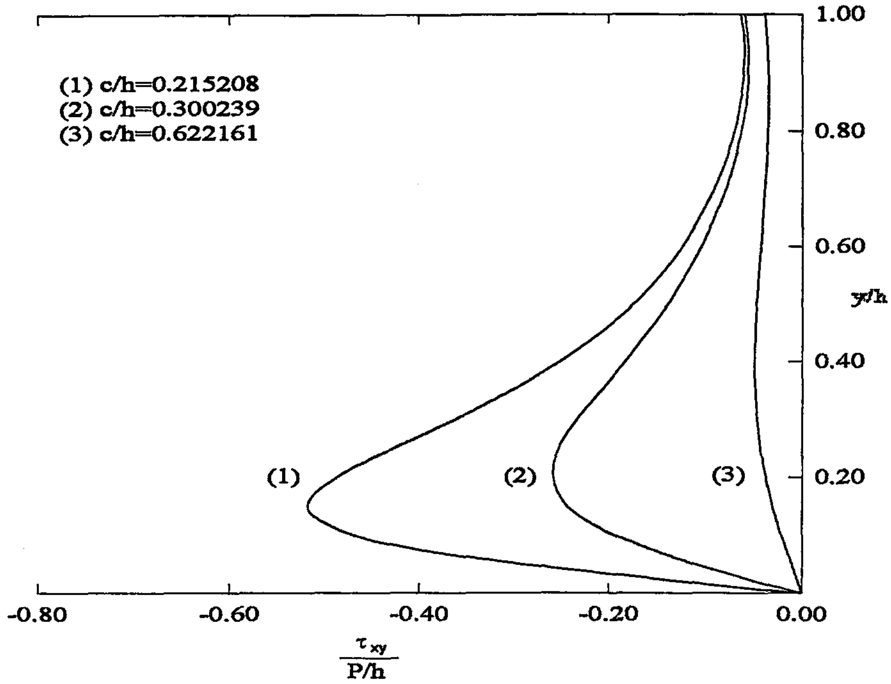
3. 2. 2. 3. τ_{xy} Kayma Gerilmelerinin İncelenmesi

Tabakada simetri kesitinde kayma gerilmeleri sıfırdır. Bu nedenle x=0.0001 kesitindeki kayma gerilmesi dağılımı incelenmiştir. Bu kesitte kayma gerilmesi değerleri çok küçük olmasına rağmen; kesitte nasıl bir dağılımın olduğu konusunda bir fikir vermektedir.

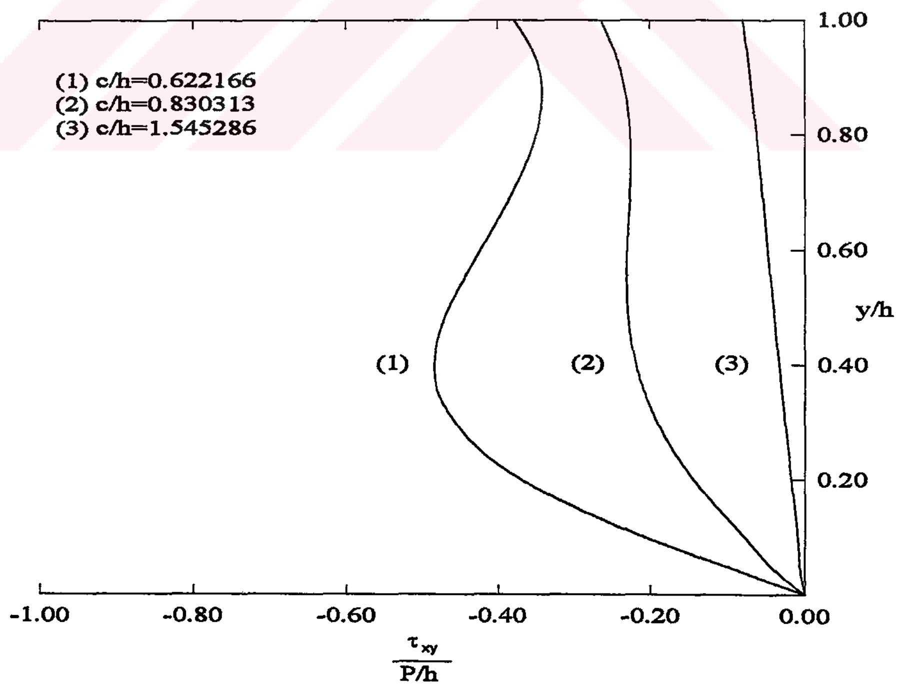
Değme yüzeyi büyüdükçe kesitte meydana gelen kayma gerilmeleri küçülmektedir. Küçük değme yüzeyleri için kayma gerilmesinin maksimum değeri değme yüzeyine yakın bir yerde meydana gelmektedir. Değme yüzeyinde kayma gerilmeleri sıfır olmakta ve sınır şartı sağlanmaktadır. Değme yüzeyinin büyümesi durumunda kesitte kayma gerilmesinin maksimum olduğu nokta mesnete yaklaşmakta ve nihayet en büyük kayma gerilmesi mesnette meydana gelmektedir. Şekil 25, 26 ve 27' de kayma gerilmesi dağılımları verilmiştir. Ancak incelenen kesitte kayma gerilmeleri çok küçük olduğundan dağılımın daha iyi görülebilmesi için şekil 25 ve 26' daki değerler 1000 ile şekil 27' deki değerler ise 10000 ile çarpılmıştır.



Şekil 25. Dairesel blok durumunda $\dfrac{\tau_{xy}(0.0001,y)}{P/h}$ kayma gerilmesi yayılışı (R/h=10, κ=2)



Şekil 26. Dairesel blok durumunda $\dfrac{\tau_{xy}(0.0001,y)}{P/h}$ kayma gerilmesi yayılışı (R/h=100, κ=2)



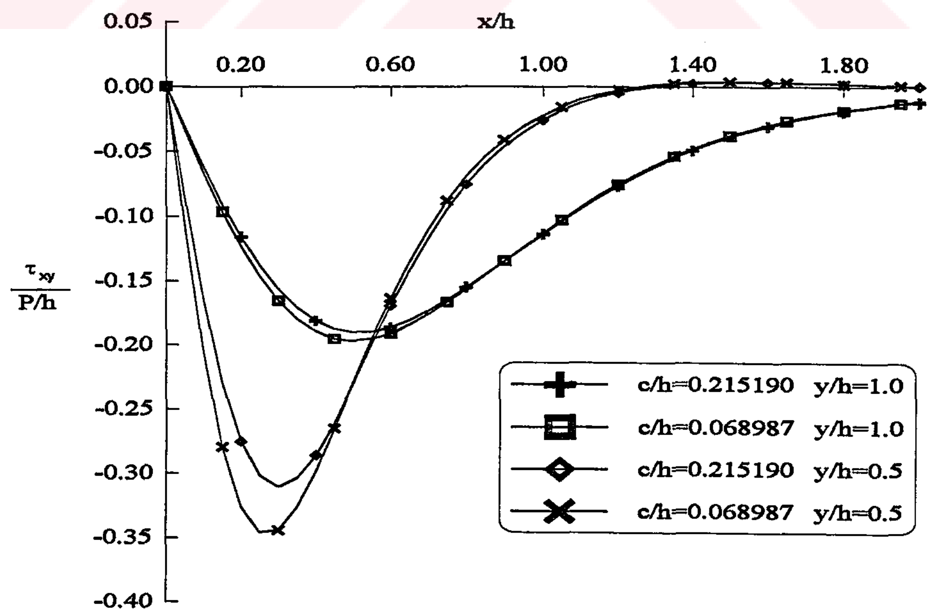
Şekil 27. Dairesel blok durumunda $\dfrac{\tau_{xy}(0.0001,y)}{P/h}$ kayma gerilmesi yayılışı (R/h=1000, κ=2)

Değme yüzeyleri küçüldükçe, mesnette ve tabaka ortasında x ekseni boyunca meydana gelen kayma gerilmesi değerleri büyümektedir. Gerek mesnet gerekse tabaka ortası boyunca kayma gerilmelerinin simetri ekseninden uzaklaştıkça büyüyerek maksimum bir değerden geçtikten sonra azalarak sıfıra yaklaştıkları görülmektedir.

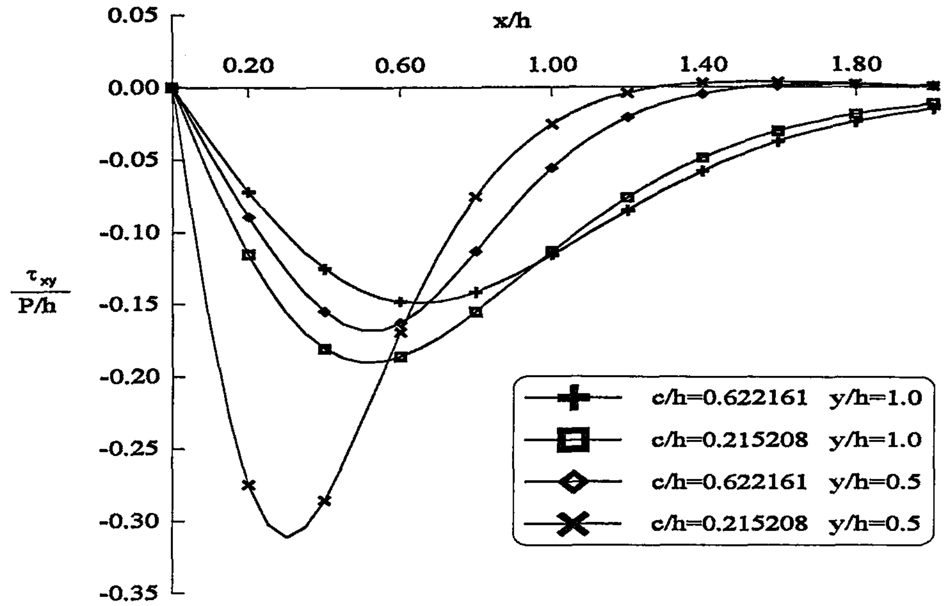
R/h=10 iken, mesnet boyunca meydana gelen kayma gerilmelerinin birbirlerine çok yakın çıktıkları görülmüştür. Tabaka ortasında ise durum daha farklı olmakta; küçük değme yüzeyleri için elde edilen kayma gerilmelerinin eksen boyunca belli bir yere kadar daha büyük çıktığı buradan sonra ise yakın değerler alarak azaldıkları görülmektedir. Ayrıca; tabaka ortasında meydana gelen kayma gerilmelerinin mesnette meydana gelen kayma gerilmelerine nazaran daha hızlı bir şekilde sıfıra yaklaştıkları görülmüştür.

R/h=100 ve R/h=1000 durumlarında daha büyük değme yüzeyleri elde edildiğinden kayma gerilmeleri giderek küçülmektedir. Değme yüzeyleri büyüdükçe tabaka ortasında meydana gelen kayma gerilmesi değerleri mesnetli yüzeyde meydana gelen değerlere nazaran daha hızlı bir şekilde küçülmekte ve sonunda tüm kesitlerde mesnetli yüzeydeki değerler en büyük değerler olmaktadırlar.

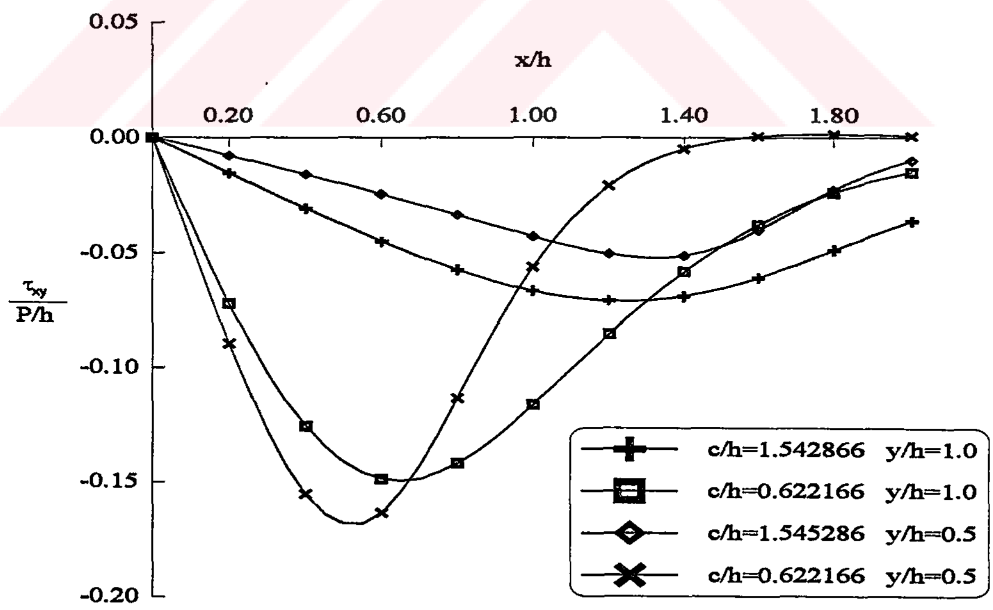
Grafiklerde dikkati çeken diğer bir özellik; değme yüzeyi büyüdükçe gerek mesnet gerekse tabaka ortası boyunca kayma gerilmelerinin maksimum olduğu noktanın simetri ekseninden uzaklaşmakta olduğudur.



Şekil 28. Dairesel blok durumunda, x ekseni boyunca mesnette ve tabaka ortasında meydana gelen $\frac{\tau_{xy}}{P/h}$ kayma gerilmesi yayılışı (R/h=10, κ=2)



Şekil 29. Dairesel blok durumunda, x ekseni boyunca mesnette ve tabaka ortasında meydana gelen $\dfrac{\tau_{xy}}{P/h}$ kayma gerilmesi yayılışı (R/h=100, κ=2)



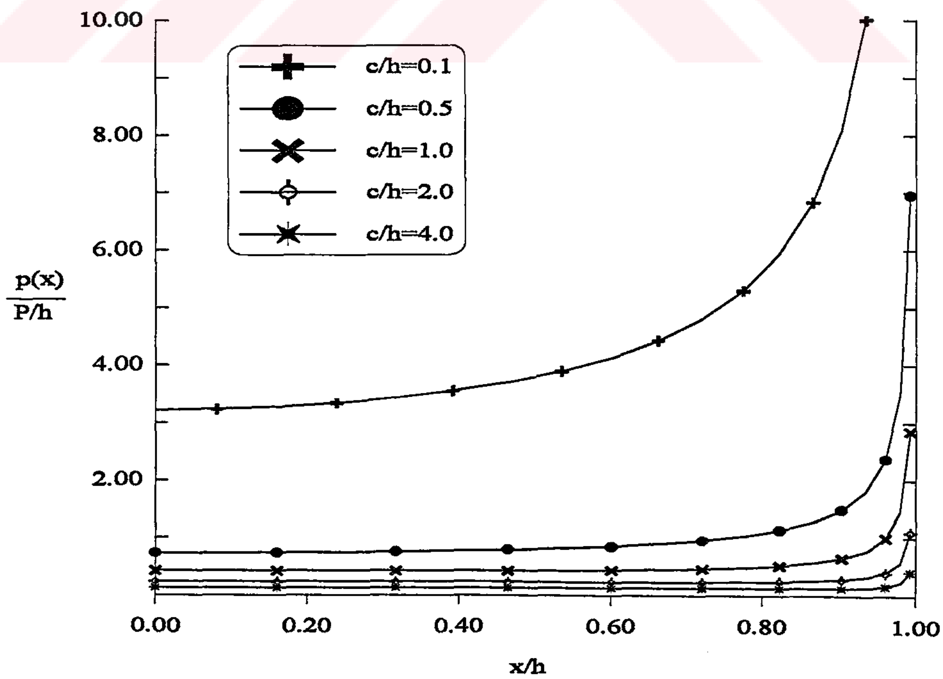
Şekil 30. Dairesel blok durumunda, x ekseni boyunca mesnette ve tabaka ortasında meydana gelen $\dfrac{\tau_{xy}}{P/h}$ kayma gerilmesi yayılışı (R/h=1000, κ=2)

3. 3. Düz Yüzeyli Rijit Blok Hali

Kısım 2. 6. 1' de verilen ifadelerin kullanılmasıyla integral denklem çözülerek değme gerilmeleri hesaplanmış ve buradan 2. 7' deki gerilme ifadelerinin yardımıyla tabakada simetri kesitindeki ve x ekseni boyunca mesnet ve tabaka ortasındaki gerilme yayılışları elde edilmiştir.

3. 3. 1. Değme Gerilmeleri

Blok profilinin düz olması durumunda değme gerilmeleri sadece yük genişliğine yani değme yüzeyine bağlıdırlar. Çeşitli değme yüzeyi değerleri için elde edilen değme gerilmeleri şekil 31' de verilmiştir. Blok kenarlarında değme gerilmeleri sonsuza gitmektedir. İntegral denkleme dikkat edilirse blok kenarlarının gerilme için tekil noktalar olduğu görülür. Küçük değme yüzeyleri için x = 0' a yaklaşıldıkça değme gerilmeleri sürekli küçülürken; büyük değme yüzeyleri için durum daha farklı olmakta gerilmeler önce azalmakta, belli bir değerden sonra ise artmaya başlamaktadır. Ancak bu artış çok küçük miktarlarda olmaktadır. Nitekim; değme yüzeyi büyüdükçe gerilme yayılışı, tekil noktalara yakın yerler hariç, hemen hemen doğrusal olmaktadır.

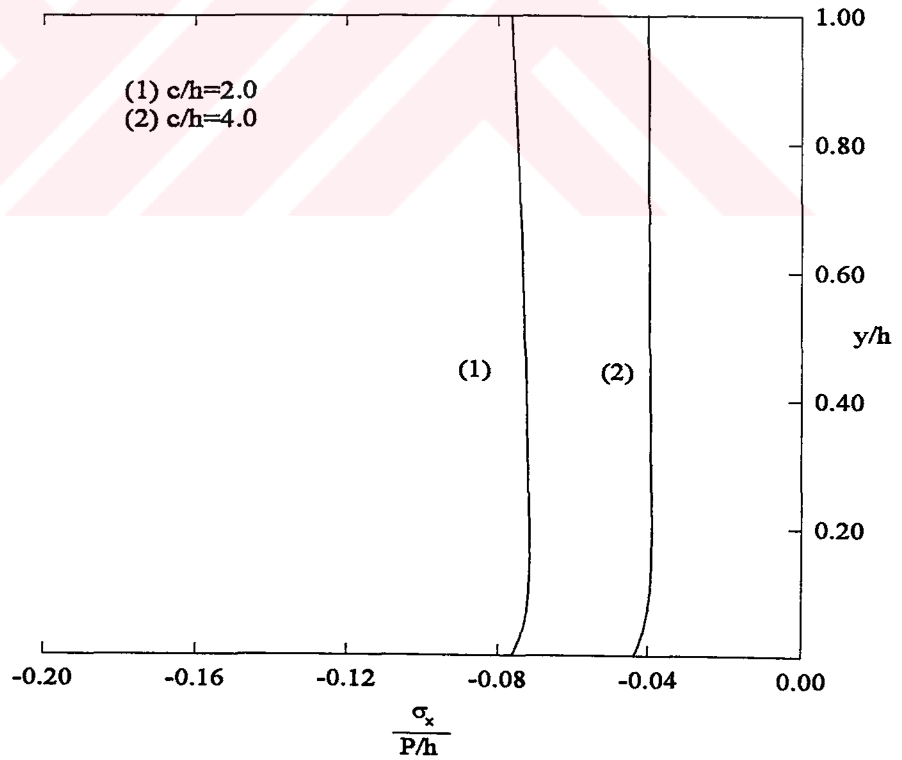


Şekil 31. Düz rijit blok durumunda değme gerilmeleri ($\kappa = 2$)

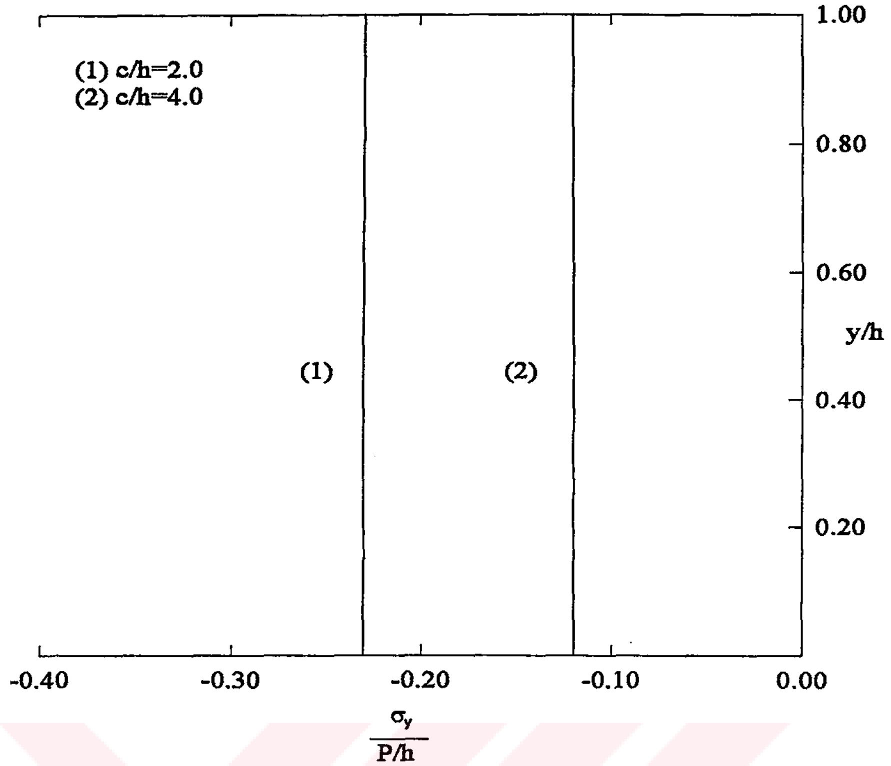
3. 3. 2. Tabakada Meydana Gelen Gerilmelerin İncelenmesi

Değme yüzeylerinin c/h=0.1, c/h=0.5 ve c/h=1.0 olması durumlarında simetri kesitinde elde edilecek σ_x ve σ_y gerilmelerinin dağılımları eğri yüzeyli rijit blok hallerinde elde edilen σ_x ve σ_y dağılımları ile aynı özellikleri taşıdıkları için verilmeyecektir. Burada, dairesel blok halinde incelenen değme yüzeylerinden daha büyük olan c/h=2.0 ve c/h=4.0 değme yüzeyleri için simetri kesitindeki gerilmeler incelenmiştir. Bundaki amaç, değme yüzeyi büyüdükçe gerilmelerde nasıl bir değişimin olduğunu görmektir.

Daire yüzeyli blok halinde; simetri ekseni boyunca gerek σ_x gerilmelerinin gerekse σ_y gerilmelerinin, değme yüzeyi büyüdükçe doğrusala yakın bir dağılım gösterdiği söylenmişti. Gerçekten de, c/h=2.0 ve c/h=4.0 olması durumlarında bu gerilmelerin neredeyse doğrusal bir dağılıma sahip olduğu görülmektedir. Yani tabaka simetri ekseninde, değme yüzeyi büyüdükçe hem x hem de y doğrultusunda doğrusal basınç gerilmeleri ortaya çıkmaktadır. Şekil 32 ve şekil 33' te simetri ekseni boyunca gerilme dağılımları verilmiştir.



Şekil 32. Düz blok durumunda simetri kesitindeki $\frac{\sigma_x}{P/h}$ normal gerilme yayılışı (κ=2)



Şekil 33. Düz blok durumunda, simetri kesitindeki $\dfrac{\sigma_y}{P/h}$ normal gerilme yayılışı (κ=2)

4. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Üst tarafından rijit olarak tutulmuş elastik bir tabaka ile rijit bir blok arasındaki sürtünmesiz değme probleminin incelendiği bu çalışmada; bloğun düz, dairesel ve parabolik profillere sahip olması durumlarında elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Dairesel blok profili durumunda, sabit bir yük değeri için blok yarıçapı büyüdükçe değme yüzeyi büyümekte ve dolayısıyla yük daha geniş bir alana yayılacağından değme gerilmeleri küçülmektedir. Ayrıca malzeme yapısının daha rijit olması durumunda, yani poisson oranının büyümesi durumunda, değme yüzeylerinin küçüldüğü görülmektedir. Malzeme özellikleri sabitken yük büyütüldüğünde değme yüzeyleri de büyümektedir. Değme gerilmeleri yüke bağlı boyutsuz büyüklükler şeklinde tanımlandıklarından yük büyüdükçe bu oranlar küçülmektedir. Bu oranların küçülmesi değme gerilmelerinin küçülmesi anlamına gelmemektedir. Aksine yük büyüdükçe hem değme yüzeyi hem de değme gerilmeleri büyür. Değme gerilmeleri $x = 0$ noktasında maksimum değerine ulaşmakta ve bloğun profiline uygun bir şekilde azalarak değmenin bittiği noktada sıfır olmaktadır.

Blok profilinin parabolik ve dairesel olması durumlarında elde edilen değme yüzeyleri karşılaştırıldığında; $Ch = 0.05$ için elde edilen değme yüzeylerinin $R/h = 10$ için elde edilen değme yüzeylerine ve $Ch = 0.005$ için elde edilen değme yüzeylerinin ise $R/h = 100$ için elde edilen değme yüzeylerine çok yakın değerler aldıkları görülmüştür.

Düz blok profili durumunda ise, değme gerilmeleri blok kenarlarında sonsuza gitmektedir. Değme yüzeyi büyüdükçe gerilmeler küçülmekte ve blok kenarlarına yakın yerler hariç, hemen hemen doğrusal bir dağılım elde edilmektedir.

Tüm blok profilleri için simetri kesitinde meydana gelen σ_x gerilmelerinin incelenmesi sonucunda; değme yüzeyi küçüldükçe iç kesimlerde çekme gerilmelerinin etkisinde bulunan bir bölgenin meydana geldiği görülür. Ancak bu bölge değme yüzeyi büyüdükçe küçülerek kaybolmakta ve kesit tamamen basınç gerilmelerinin etkisine girmektedir. Bundan sonra değme yüzeylerinin büyümesi durumunda ise basınç gerilmelerinin büyüdüğü görülmüştür. Değme yüzeyi büyüdükçe σ_x gerilmelerinin kesit boyunca birbirlerine yakın değerler aldığı ve kesitin giderek doğrusala yakın bir basınç etkisine girdiği görülmüştür. Ayrıca; gerek mesnet gerekse tabaka ortasında x ekseni boyunca σ_x gerilmelerinin en büyük değeri simetri kesitinde meydana gelmemektedir. Bununla beraber, değme yüzeyi büyüdükçe σ_x' in en büyük değerine ulaştığı noktanın simetri eksenine yaklaştığı ve nihayet bu kesit üzerinde maksimum değeri aldığı görülmektedir. Küçük değme yüzeyleri için x ekseni boyunca tabaka ortasında simetri kesitine yakın yerlerde, en büyük değeri simetri kesitinde olan çekme gerilmeleri meydana gelmekte ve simetri kesitinden uzaklaşıldıkça bu gerilmeler azalarak işaret değiştirmektedirler.

Rijit bloğun altında meydana gelen σ_y gerilmeleri değme yüzeyi küçüldükçe hızla büyümektedirler. Kesit boyunca σ_y normal gerilme değerleri, küçük değme yüzeyleri için mesnete yaklaşıldıkça azalmaktadırlar. Değme yüzeyi büyüdükçe, simetri kesiti boyunca meydana gelen σ_y gerilme değerleri birbirlerine yaklaşmakta ve hemen hemen doğrusal bir gerilme dağılımı elde edilmektedir. x ekseni boyunca mesnette ve tabaka ortasında meydana gelen σ_y gerilme dağılımı incelendiğinde; değme gerilmesi yayılışının karakteri nedeniyle σ_y gerilmesinin en büyük değerinin, eğri yüzeyli blok durumunda simetri kesitinde; düz yüzeyli blok durumunda ise mesnette simetri kesitinde, tabaka ortasında simetri kesitinin biraz daha ilerisinde meydana geldiği görülmüştür.

Tabaka ile blok arasında sürtünme olmadığı kabul edildiğinden değme yüzeyinde kayma gerilmeleri sıfırdır. x ekseni boyunca kayma gerilmesi değerlerinin, simetri ekseninden uzaklaşıldıkça büyüyerek en büyük değere ulaştıktan sonra, küçülerek sıfıra yaklaşmakta oldukları görülmüştür. Değme yüzeyi büyüdükçe kayma gerilmesi değerleri küçülmektedirler. Simetri kesitine çok yakın bir kesitte kayma gerilmeleri incelendiğinde; değme yüzeyi küçüldükçe en büyük kayma gerilmesi değerinin değme yüzeyine yakın bir noktada meydana geldiği görülmüştür. Bu nokta değme yüzeyi büyüdükçe mesnete doğru yaklaşmaktadır.

Bu problemde, elastik tabakanın üst yüzeyi tamamen ankastre mesnetli olduğundan bu yüzeyde herhangi bir yerdeğiştirme ve dönme ortaya çıkmamaktadır. Bu yüzeyde ,yani $y = h$ yüzeyinde, meydana gelen τ_{xy} kayma gerilmeleri, simetri kesitinde iç bölgelerde meydana gelen çekme gerilmelerinin azalarak kaybolmasında ve kesit tamamen basınç etkisindeyken de yine bu bölgelerde meydana gelen basınç gerilmelerinin artmasında etkili olmaktadırlar. Üst yüzeydeki bu kayma gerilmeleri nedeniyle elastik tabaka iki ucundan eksantrik olarak yüklenmiş basınç kuvvetlerinin etkisindeymiş gibi davranmaktadır.

5. KAYNAKLAR

1. Hertz, H., Gesammelte Werke von Heinrich Hertz, Volume 1, Leipzig, 1895.

2. İnan, M., Düzlemde Elastisite Teorisi, İTÜ Yayınları, İstanbul, 1969.

3. Galin, L.A., Contact Problems in the Theory of Elasticity, North Carolina State College Translation Series, Raleigh, N.C., 1961.

4. Ufliand, I.S., Survey of Articles on the Application of Integral Transforms in the Theory of Elasticity, North Carolina State College Translation Series, Raleigh, N.C.,1965.

5. Ratwani, M.ve Erdoğan, F., On the Plane Contact Problem for a Frictionless Elastic Layer, International Journal of Solids and Structures, 9 (1973), 921-936.

6. Civelek, M.B. ve Erdoğan, F., The Axisymmetrik Double Contact Problem for a Frictionless Elastic Layer, International Journal of Solids and Structures, 10 (1974), 639-659

7. Geçit, M.R., A Tensionless Contact without Friction between an Elastic Layer and an Elastic Foundation, International Journal of Solids and Structures, 16 (1980), 387-396.

8. Geçit, M.R., Axisymmetric Contact Problem for an Elastic Layer and an Elastic Foundation, International Journal of Engineering Science, 19 (1981), 747-755.

9. Keer, L.M. ve Silva, M.A.G., Two Mixed Problems for a Semi Infinite Layer, Journal of Applied Mechanics, Transactions of ASME, 39, 94 (1972), 1121-1124.

10. Civelek, M.B. ve Erdoğan, F., The Frictionless Contact Problem for an Elastic Layer under Gravity, Journal of Applied Mechanics, Transactions of ASME, 42, 97 (1975), 136-140.

11. Civelek, M.B. ve Erdoğan, F., Interface Seperation in a Frictionless Contact Problem for an Elastic Layer, Journal of Applied Mechanics, Transactions of ASME, 43, 98 (1976), 175-177.

12. Geçit, M.R. ve Erdoğan, F., Frictionless Contact Problem for an Elastic Layer under Axisymmetric Loading, International Journal of Solids and Structures, 14 (1978), 771-785.

13. Civelek, M.B., Erdoğan, F. ve Çakıroğlu, A.O., Interface Seperation for an Elastic Layer Loaded by a Rigid Stamp, International Journal of Engineering Science, 16 (1978), 669-679.

14. Erdoğan, F. ve Ratwani, M., The Contact Problem for an Elastic Layer Supported by Two Quarter Planes, Journal of Applied Mechanics, Transactions of ASME, 41, 96 (1974), 673-678.

15. Geçit, M.R. ve Gökpınar, S., Frictionless Contact between an Elastic Layer and a Rigid Rounded Support, The Arabian Journal for Science and Engineering, 10, 3 (1985), 243-251.

16. Geçit, M.R. ve Yapıcı, H., Contact Problem for an Elastic Layer Resting on Rigid Flat Supports, The Arabian Journal for Science and Engineering, 11, 3 (1986), 235-242.

17. Adams, G.G. ve Boggy, D.B., The Plane Solutions for the Elastic Contact Problem of a Semi-Infinite Strip and Half Plane, Journal and Applied Mechanics, Transactions of ASME, 43 (1976), 603-607.

18. Adams, G.G., The Plane Symmetric Contact Problem for Dissimilar Elastic Semi-Infinite Strips of Different Widths, Journal of Applied Mechanics, Transactions of ASME, (1977), 604-610.

19. Lododa, V.V., Plane Solution for Elastic Contact Problem of a Strip and Semi-Infinite Strip, Mechanics of Solids, 22, 1 (1987), 62-71.

20. Fabrikant, V.I. ve Sankar, T.S., Singularities at Angular Points in Elastic Contact Problems, Communications in Applied Numerical Methods, 4, 2 (1988), 173-178.

21. Çakıroğlu, A.O. ve Çakıroğlu, F.L., Continuous and Discontinuous Contact Problems for Strips on an Elastic Semi-Infinite Plane, International Journal of Engineering Science, 29, 1 (1991), 99-111.

22. Çakıroğlu, F.L. ve Erdöl, R., Elastik Zemine Oturan Bileşik Şeritte Sürekli Temas Problemi, 6. Ulusal Mekanik Kongresi, 1990, Bursa, Bildiriler Kitabı, Cilt 1, 234-248.

23. Dempsey, J.P., Zhao, Z.G. ve Li, H., Plane Contact of an Elastic Layer Supported by a Winkler Foundation, Journal of Applied Mechanics, Transactions of ASME, 57, (1990), 974-980.

24. Adams G.G., A Rigid Punch Bonded to a Half Plane, Journal of Applied Mechanics, Transactions of ASME, 46, (1979), 844-848.

25. Bakırtaş, İ., The Problem of a Rigid Punch on a Non-Homogeneous Elastic Half Space, International Journal of Engineering Science, 18, (1980), 597-610.

26. Çakıroğlu, F.L. ve Erdöl, R., Bileşik Çubukların Elastisite Teorisine Göre Çözümü, A.Ü. Isparta Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Dergisi, Mart 1987, 53-60.

27. Erdoğan, F. ve Gupta, G.D., On The Numerical Solution of Singular Integral Equations, Quarterly Journal of Applied Mathematics, 29, (1972), 525-534.

28. Weitsman, Y., A Tensionless Contact Between a Beam and an Elastic Half Space, International Journal of Engineering Science, 10, (1972), 73-81.

29. Gladwell, G.M.L., Contact Problems in The Classical Theory of Elasticity, Alphen aan den Rijn : Sijthoff and Noordhoff, 1980.

30. Sneddon, I.N., Fourier Transforms, Mc Graw-Hill, New York, 1951.

31. Muskhelishvili, N.I., Singular Integral Equations, P. Noordhoff, Groningen, 1953.

32. Little, R.W., Elasticity, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.

33. Sneddon, I.N., The Use of Integral Transforms, Mc Graw-Hill, Inc., New York, 1972.

34. Erdèlyi, A., Magnus, W., Oberthettinger, F. ve Tricomi, F.G., Tables of Integral Transforms, vol 1, Mc Graw-Hill, Inc., New York, 1954.

35. Johnson, K.L., Contact Mechanics, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

36. Çakıroğlu, A.O., Elastik Yarım Düzleme Oturan Plaklarda Temas Problemi, Doçentlik Tezi, KTÜ İnşaat Mühendisliği Bölümü, Trabzon, 1979.

37. Birinci, A., Elastik Mesnete Oturan Çift Şerit Problemi, Yüksek Lisans Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 1994.

7. ÖZGEÇMİŞ

Volkan KAHYA, 1973 yılında İstanbul' da doğdu. İlköğrenimini Diyarbakır' da, Orta ve Lise öğrenimini de Konya' da tamamladıktan sonra 1990 yılında KTÜ Mühendislik-Mimarlık Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü' nü kazandı. 1993-94 öğretim yılı Haziran döneminde bu bölümden mezun oldu. Aynı yıl mezun olduğu bölümde Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Ocak 1995' te KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Araştırma Görevlisi kadrosuna atandı. Ağustos 1996' da da açılan sınavı kazanarak aynı bölümde Mekanik Anabilim Dalı' nda Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı. Halen Araştırma Görevliliği ile birlikte Lisansüstü çalışmalarına devam etmektedir. Bekar olan Volkan KAHYA, İngilizce bilmektedir.