

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**





KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce

Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : / /

Tezin Savunma Tarihi : / /

Tez Danışmanı :

Trabzon

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Bilgisayar Mühendisliği Anabilim Dalında

Hossein BARGHI JOND Tarafından Hazırlanan

**ÇOK ETMENLİ SİSTEMLERDE DÜZEN KONTROLÜNÜN DOĞRUSAL VE KARELİ
DİFERANSİYEL OYUN YAKLAŞIMI İLE GERÇEKLEŞMESİ**

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 19 /03 /2019 gün ve 1796 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda
DOKTORA TEZİ
olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

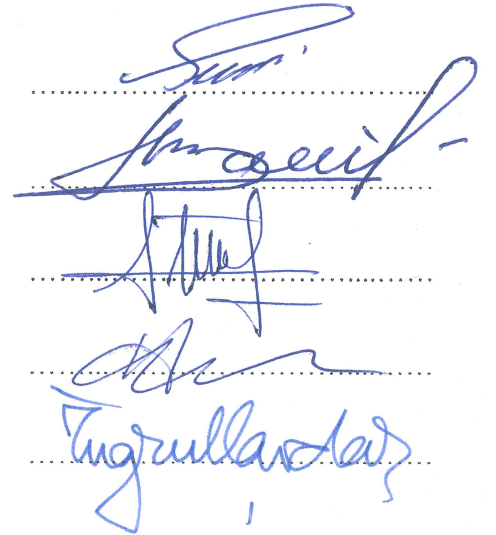
Başkan : Prof. Dr. Sezai TOKAT

Üye : Prof. Dr. Vasif V. NABİYEV

Üye : Prof. Dr. Ayten ATASOY

Üye : Doç. Dr. Abdullah BAŞÇI

Üye : Doç. Dr. Tuğrul ÇAVDAR



Prof. Dr. Asim KADIOĞLU

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Çok etmenli sistemlerde düzen kontrolü bir geometrik yapının etmenler tarafından gerçekleşmesi ve korunmasıdır. Bu sistemlerin arama ve kurtarma, hedef takibi, kapsama, gözetim, işbirlikçi keşif, büyük ve eşlenmemiş alanların araştırılması gibi gerçek dünya uygulamalarının temeli düzen kontrolüne dayanmaktadır. Bu nedenle düzen kontrolü probleminin incelenmesi önem arz etmektedir. Bu doktora çalışmasında doğrusal-kareli modelleme teknikleri kullanılarak, düzen kontrolü diferansiyel oyun şeklinde formüle edilmiş ve ilgili oyunun çözümü araştırılmıştır.

Değerli danışman hocam Prof. Dr. Vasif V. Nabiyev'e bana kendisi ile çalışma fırsatı verdiği için ve doktora çalışmalarım boyunca verdikleri destek ve yönlendirmeleri için, doktora jürimdeki hocalarım Prof. Dr. Ayten Atasoy ve Doç. Dr. Tuğrul Çavdar'a verdikleri değerli fikirleri için, Dr. Öğr. Üyesi Nurhan Gürsel Özmen hocama KTÜ'de bulunduğum süre boyunca verdiği destekleri için, KTÜ'deki tüm arkadaşlarıma, özellikle bölüm arkadaşlarım Aref Yelghi, Saeid Agahian ve Zhaleh Sadreddini'ye verdikleri moral için ve Ostrava Teknik Üniversitesi Uygulamalı Matematik bölümü öğretim üyesi Doç. Dr. Dalibor Lukáš'a kendisiyle Çek Cumhuriyeti'nde çalışma fırsatı verdiği için teşekkürlerimi sunarım.

Hossein BARGHI JOND

Trabzon 2019

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Doktora Tezi olarak sunduğum “Çok Etmenli Sistemlerde Düzen Kontrolünün Doğrusal ve Kareli Diferansiyel Oyun Yaklaşımı ile Gerçekleşmesi” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Vasif V. Nabiyev‘ın sorumluluğunda tamamladığımı, verileri kendim topladığımı, analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim.

09/04/2019

Hossein BARGHI JOND

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ	IV
İÇİNDEKİLER	V
ÖZET	VIII
SUMMARY	IX
ŞEKİLLER DİZİNİ	X
TABLolar DİZİNİ	XII
SEMBOLLER DİZİNİ	XIII
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Giriş	1
1.2. Çok Etmenli Sistemlerin Kontrolü	11
1.3. Düzen Kontrolü	12
1.3.1. Bilgi Ağı	14
1.3.2. Dağıtık Kontrol	15
1.3.3. Düzen Kontrolü Tanımı	17
1.3.4. Etmen Dinamikleri	17
1.3.5. Yörünge Planlaması	18
1.4. Düzen Kontrolü ile İlgili Literatür Araştırması	19
1.4.1. Davranış-tabanlı Yaklaşım	20
1.4.2. Sanal Yapı Yaklaşım	23
1.4.3. Lider-takipçi Yaklaşım	24
1.4.4. Lidersiz Yaklaşım	26
1.4.5. Konsensüs-tabanlı Yaklaşım	26
1.4.6. Optimal Kontrol Yaklaşımı	27
1.4.7. Diferansiyel Oyun Yaklaşımı	27
1.5. Oyun Teorisi	29
1.5.1. <i>Nash</i> ve <i>Stackelberg</i> Dengesi	32
1.5.2. Bilgi Yapıları	33
1.6. Ön Bilgiler	35

1.6.1.	Graf Teorisi	35
1.6.1.1.	Laplasyen Matrisi	36
1.6.2.	Doğrusal-Kareli Diferansiyel Oyun	40
1.6.2.1.	Açık Döngü <i>Nash</i> Dengesi	41
1.6.2.2.	<i>Riccati</i> Diferansiyel Denklemleri	46
1.6.2.3.	<i>Nash</i> Dengesi Kontrolü	49
1.7.	Çalışmanın Amacı ve Kapsamı	53
2.	YAPILAN ÇALIŞMALAR, BULGULAR VE İRDELEME	54
2.1.	Lidersiz Düzen Kontrolüne Diferansiyel Oyun Yaklaşımı	54
2.1.1.	Problemin Tanımı	54
2.1.1.1.	Sistem Dinamikleri	54
2.1.1.2.	Düzen Maliyet Fonksiyonları	57
2.1.2.	Açık Döngü <i>Nash</i> Düzen Kontrolü	59
2.1.3.	Dağıtık Kontrol Yasası	60
2.1.4.	Matlab <i>ODE</i> (Sayısal) Çözümünün Simülasyonu	64
2.2.	Düzen Kontrolüne Analitik Oyun Yaklaşımı	70
2.2.1.	Problemin Tanımı	70
2.2.1.1.	Sistem Dinamikleri ve Düzen Grafi	70
2.2.1.2.	Maliyet Fonksiyonları ve <i>Nash</i> Dengesi	72
2.2.2.	Analitik Sonuçlar	74
2.2.3.	Analitik Çözümünün Simülasyonu	82
2.3.	Düzen Kontrolüne Dinamik Oyun Yaklaşımı	87
2.3.1.	Problemin Sürekli Zamanda Tanımı	87
2.3.2.	Problemi Ayrıklaştırma	92
2.3.3.	<i>Riccati</i> Fark Denklemlerinin Çözümü	95
2.3.4.	Analitik Yaklaşık Çözümünün Simülasyonu	102
2.3.5.	Sayısal ve Analitik Yaklaşık Çözümlerinin Karşılaştırması	108
3.	SONUÇLAR VE ÖNERİLER	111
4.	KAYNAKLAR	116
5.	EKLER	127
5.1.	Matlab <i>ODE</i> Çözücüsü	127
5.2.	Matlab <i>ODE</i> 'ye Karşı Yaklaşık Çözüm	129
5.3.	Grafik Arayüzü Görüntüleri	133

5.4. Matlab Kodu	138
------------------------	-----

ÖZGEÇMİŞ



Doktora Tezi

ÖZET

ÇOK ETMENLİ SİSTEMLERDE DÜZEN KONTROLÜNÜN DOĞRUSAL VE KARELİ
DİFERANSİYEL OYUN YAKLAŞIMI İLE GERÇEKLEŞMESİ

Hossein BARGHI JOND

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Bilgisayar Mühendisliği Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Vasif V. NABİYEV
2019, 126 Sayfa, 29 Sayfa Ek

Arama ve kurtarma, haritalama, hedef izleme, taşıma gibi görevlerin gerçekleştirilmesinde çok etmenli sistemlerin belirli geometrik yapı içerisinde toplu hareketi söz konusudur. Bu nedenle bu sistemlerde ana problemlerden biri toplu hareket halinde düzen kontrolünün sağlanmasıdır. Bu kontrolde temel amaç tüm etmenleri durum uzayında istenilen düzene yönlendiren denetleyicileri tasarlamaktır. Bir düzenin sürdürülebilmesi için mobil etmenlerin konum ve hız bilgilerini paylaşmaları gerekmektedir. Bu tez çalışmasında, yönlü graf topolojisi ile temsil edilen doğrusal dinamiklere sahip çok etmenli sistemin lidersiz düzen kontrolü problemi diferansiyel oyun yaklaşımı ile ele alınmıştır. Doğrusal-kareli diferansiyel oyun çerçevesinde çok etmenli düzen kontrolü probleminin oyun modeli oluşturularak, işbirlikçi olmayan oyunun sonlu ufuk *Nash* dengesinin varlık koşulları ve analitik çözümü araştırılmıştır.

Çalışmada üç farklı alt problem oluşturulmuştur. İlk olarak, düzen kontrolü doğrusal-kareli diferansiyel oyun şeklinde modellenmiştir. Modelde her etmen için kareli yapıda olan bir bireysel maliyet fonksiyonu oluşturulmuştur. Sonuç olarak, bir lidersiz yaklaşımla düzen kontrolü için özgün doğrusal-kareli modelleme ortaya konulmuştur. Bu modelde, ilgili çözüm sayısal yaklaşım gerektirmektedir. Diğer bir alt problem olarak, etmenlerin düzen kontrolünün analitik olarak gerçekleştirilebilmesi için her birey yeni maliyet fonksiyonu ile değerlendirilmiştir. Sonuç olarak, her ufuk sonu için düzen kontrolü kurallarının varlığını sağlayan diferansiyel oyun formülasyonu önerilmiştir. Üçüncü alt problem olarak, düzen kontrolü ayrık zamanda dinamik oyun şeklinde formüle edilmiştir. Sonuç olarak, ayrık zamanda bağlı *Riccati* fark denklemler kümesinin çözümünün varlık koşulları belirlenmiş ve bu denklemlerin analitik yaklaşık çözümü elde edilmiştir. Tezde, modellerin ve çözümlerin doğruluğunu gösteren simülasyonlar yer almaktadır.

Anahtar Kelimeler: Düzen kontrolü, Oyun teorisi, Diferansiyel oyun, *Nash* dengesi, Bağlı *Riccati* diferansiyel denklemleri, Dağıtık kontrol

PhD. Thesis

SUMMARY

MULTI-AGENT FORMATION CONTROL WITH THE LINEAR QUADRATIC
DIFFERENTIAL GAME APPROACH

Hossein BARGHI JOND

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Computer Engineering Graduate Program
Supervisor: Prof. Vasif V. NABIYEV
2019, 126 Pages, 29 Pages Appendix

In many applications such as search and rescue, mapping, target tracking, transportation, a multi-agent system must maintain a formation when accomplishing the planned task(s). Therefore, formation control is one of the fundamental problems in motion control of multi-agent systems. The formation control objective is to design a controller that drives all individuals to the desired formation in the state space. To maintain a formation, mobile agents need to exchange information such as relative positions and velocities. In this dissertation, the differential game approach to the leaderless formation control problem of a linear dynamical multi-agent system with the directed graph topology is considered. Under the framework of the linear-quadratic differential game, the game model of the multi-agent formation control is constituted, and for the non-cooperative mode of play the finite horizon *Nash* equilibrium solution is investigated.

In this study, three different subproblems are constituted. First, the formation control problem is modeled as a linear-quadratic differential game. In this model, for every agent, an individual quadratic cost function is defined. As a result, with a leaderless approach, novel linear-quadratic modeling for the formation control is introduced. The solution has to be obtained numerically. In order to obtain an analytic formation control law as another subproblem in this study, each agent has been evaluated under a new cost function. As a result, a differential game formulation to formation control ensuring the existence of the formation control for every finite horizon time is proposed. As the third subproblem, the formation control problem is formulated a discrete-time dynamic game. As a result, the conditions for the existence of the discrete-time coupled *Riccati* difference equations are determined, and an analytical approximate solution of these equations is obtained. Throughout the dissertation, illustrative simulations approving the models and solutions are given.

Key Words: Formation control, Game theory, Differential game, *Nash* equilibrium; Coupled *Riccati* differential equations, Distributed control

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1.1.	Üçgen şeklinde bir düzen ile uçan kaz grubu 2
Şekil 1.2.	THY'ye ait Boeing 777 uçağına eşlik eden Türk Yıldızları ekibinin İstanbul Havacılık, Uzay ve Teknoloji Festivali Teknofest'de düzen uçuşu 3
Şekil 1.3.	İHA'ların bir düzen uçuşu gösterimi [11] 4
Şekil 1.4.	<i>GUARDIANS</i> takımının düzen teşkili deneylerinin anlık görüntüleri: (a) başlangıç kurulum, (b) düzen oluşum süreci (c) düzenin tamamlanması [15] 5
Şekil 1.5.	(a) <i>UWE-3</i> uydu modeli [19], (b) uydu düzen uçuş şeması [20] 6
Şekil 1.6.	Bir modern kontrol sisteminin bileşenleri [29] 8
Şekil 1.7.	Bazı optimizasyon yaklaşımları (gri bölgeler tezin kapsadığı alanlardır) 9
Şekil 1.8.	Basit <i>Boids</i> 'da uygulanan kurallar, (a) ayırma, (b) hizalama, (c) uyuşma [32] 12
Şekil 1.9.	Dört mobil robot için farklı düzen şekilleri, (a) dikey çizgi, (b) yatay çizgi, (c) üçgen şekli, ve (d) köşegen çizgi düzen 13
Şekil 1.10.	(a) Bireyleri yöneltmez mesafe sensörleriyle donatılmış bir çok etmenli sistemi, (b) bu sistemin etkileşim ağ modelinin graf gösterimi 14
Şekil 1.11.	(a) Bireyleri farklı çap aralığına sahip ve yöneltmez mesafe sensörleriyle donatılmış bir çok etmenli sistemi, (b) bu sistemin komuta zinciri yönlü graf ile gösterilmiştir 16
Şekil 1.12.	Düzende konum belirlemenin çeşitli teknikleri: (a) birim-merkez, (b) lider, (c) komşu [34] 21
Şekil 1.13.	Davranış-tabanlı yaklaşımı [85] 22
Şekil 1.14.	Sanal yapı kontrol algoritmasındaki adımlar [88] 24
Şekil 1.15.	Kutupsal koordinatlar göstergesinde lider-takipçi kurulumu [96] 25
Şekil 1.16.	(a) Evrensel açık döngü bilgi yapısı, (b) Evrensel kapalı döngü bilgi yapısı, (c) Dağıtık açık döngü bilgi yapısı, ve (d) Dağıtık kapalı döngü bilgi yapısı 34
Şekil 1.17.	Beş düğümlü altı kenarlı bir yönlü graf 36
Şekil 2.1.	İki boyutlu koordinat sisteminde takım düzeninin bir gösterimi. Daireler etmenleri ve oklar bilgi alışverişi bağlantılarını göstermektedir 56
Şekil 2.2.	Üçgen düzen şekli ve düzenin bilgi grafi 64
Şekil 2.3.	Etmenlerin çizdikleri yörüngeler 67

Şekil 2.4.	Etmen arası bağıl mesafe yörüngeleri (a) x ve (b) y ekseninde	67
Şekil 2.5.	Etmenler arası bağıl hız yörüngeleri (a) x ve (b) y ekseninde	68
Şekil 2.6.	Kontrol girdilerinin yörüngeleri (a) x ve (b) y ekseninde	68
Şekil 2.7.	Etmenlerin farklı başlangıç konumları için düzen teşkili sırasındaki çizdikleri yörüngeler	69
Şekil 2.8.	Eşkenar dörtgen düzen şekli ve düzen grafi	82
Şekil 2.9.	Etmenlerin çizdikleri yörüngeler	84
Şekil 2.10.	Etmenler arası bağıl mesafe değişimi, (a) x ve (b) y ekseninde	84
Şekil 2.11.	Etmenler arası bağıl hız yörüngeleri, (a) x ve (b) y ekseninde	85
Şekil 2.12.	Kontrol girdilerinin yörüngeleri, (a) x ve (b) y ekseninde	85
Şekil 2.13.	Etmenlerin farklı başlangıç konumları için düzen teşkili sırasındaki yörüngeleri	86
Şekil 2.14.	Beş etmenli üçgen düzen şekli ve düzenin grafi	102
Şekil 2.15.	Etmenlerin çizdikleri yörüngeler	104
Şekil 2.16.	Etmenlerin bağıl mesafe yörüngeleri, (a) x ve (b) y ekseninde	105
Şekil 2.17.	Etmenlerin bağıl hızlarının yörüngeleri (a) x ve (b) y ekseninde	106
Şekil 2.18.	Kontrol girdilerinin yörüngeleri (a) x ve (b) y ekseninde	106
Şekil 2.19.	Etmenlerin düzen teşkili sırasında çizdikleri yörüngeler	107
Şekil 2.20.	<i>Riccati</i> 'nin sayısal ve analitik yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması	110
Şekil 5.1.	Düzen kontrolü için Matlab'de tasarlanmış grafik arayüzü	131
Şekil 5.2.	Üçgen düzenin teşkil edilmesinin ekran görüntüsü	132
Şekil 5.3.	Kare düzenin teşkil edilmesinin ekran görüntüsü	132
Şekil 5.4.	Beşgen düzenin teşkil edilmesinin ekran görüntüsü	133
Şekil 5.5.	Altıgen düzenin teşkil edilmesinin ekran görüntüsü	133
Şekil 5.6.	<i>C</i> -harfi düzenin teşkil edilmesinin ekran görüntüsü	134
Şekil 5.7.	<i>J</i> -harfi düzenin teşkil edilmesinin ekran görüntüsü	134
Şekil 5.8.	<i>P</i> -harfi düzenin teşkil edilmesinin ekran görüntüsü	135
Şekil 5.9.	<i>Z</i> -harfi düzenin teşkil edilmesinin ekran görüntüsü	135

TABLolar DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 2.1. $i = 4$ için analitik yaklaşık çözümün ve Matlab ODE çözücünün sonuçları	109
Tablo 5.1. $i = 1$ için analitik yaklaşık çözümün ve Matlab ODE çözücünün sonuçları	127
Tablo 5.2. $i = 2$ için analitik yaklaşık çözümün ve Matlab ODE çözücünün sonuçları	128
Tablo 5.3. $i = 3$ için analitik yaklaşık çözümün ve Matlab ODE çözücünün sonuçları	129
Tablo 5.4. $i = 5$ için analitik yaklaşık çözümün ve Matlab ODE çözücünün sonuçları	130

SEMBOLLER DİZİNİ

$\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^n$	n -boyutlu uzayda konum/durum vektörü
$\dot{\mathbf{x}}_i, \mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n$	n -boyutlu uzayda hız vektörü
N_i	i 'inci bireyin komşular kümesi
$\mathbf{d}_{ij} \in \mathbb{R}^n$	i ve j arası istenilen mesafe vektörü
$\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^n$	n -boyutlu uzayda ivme vektörü veya kontrol değişkeni
t_f	ufuk sonu
$J_i(\mathbf{u})$	maliyet fonksiyonu
g_i, C_i, \mathbf{f}	durum, kontrol değişken ve zamanın işlevleri
\mathbf{x}, \mathbf{z}	durum/konum vektörü
$\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0$	başlangıç durum/konum vektörü
\mathcal{G}	yönlü graf (düzenin bilgi grafi)
\mathcal{V}	\mathcal{G} 'nin düğüm kümesi
\mathcal{E}	\mathcal{G} 'nin kenar kümesi
ω_{ij}, ω_{ij}	artı sayı
L, \mathcal{L}	graf Laplasyen matrisi, n -boyutlu graph Laplasyen matrisi
D, \mathcal{D}	\mathcal{G} 'nin ilişki matrisi, n -boyutlu ilişki matrisi
W, \mathcal{W}	köşegen ağırlık matrisi, n -boyutlu köşegen ağırlık matrisi
\otimes	<i>Kronecker</i> çarpımı
X, Y, U, V, A, B, C, D	kare matris
I_n	n -boyutlu birim matrisi
$\ \cdot\ $	Öklit normu \mathbb{R}^n 'de
H	<i>Hamiltonian</i>
λ	<i>Lagrange</i> çarpanı vektörü
Q_{if}, Q_i, R_{ii}	kare reel ağırlık matrisler
$\text{col}(\cdot)$	sütun vektörü
$\text{diag}(\cdot)$	köşegen matris
Γ_i	strateji seçim kümesi
e^M	üstel matris
$H(t_f), M, P, Q, \emptyset$	block matrisler

P_i	bağlı <i>Riccati</i> diferansiyel denkleminin çözüm matrisi
K_i	<i>Riccati</i> diferansiyel denkleminin çözüm matrisi
$\Phi(t, 0)$	geçiş denkleminin çözüm matrisi
İHA	İnsansız Hava Aracı
GPS	<i>Global Positioning System</i> (küresel konum belirleme sistemi)
ODE	<i>Ordinary Differential Equations</i> (adi diferansiyel denklemler)
GUARDIANS	<i>Group of Unmanned Assistant Robots Deployed in Aggregative Navigation by Scent</i> (Koku ile Toplu Navigasyonda Sevk Edilmiş İnsansız Yardımcı Robot Grubu)
GUI	<i>Graphical User Interface</i> (Grafik Kullanıcı Arayüzü)



1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Günümüzde, çok etmenli sistemler geniş yeteneklere sahip olması nedeniyle birçok alanda yaygın olarak kullanılmakta ve bu sistemlere olan ihtiyaç gün geçtikçe daha da artmaktadır. Bu nedenle, son zamanlarda bilimsel araştırmalar çok etmenli sistemlere yoğunlaşmıştır. Bir etmen bulunduğu ortamı algılama, karar verme, bilgi iletme ve alma yeteneği ile tanımlı dinamik yazılımsal veya donanımsal varlıktır [1]. Bu kavram, doğadaki biyolojik sistemlerin toplu davranış şeklerinden esinlenmiştir. Örneğin, kuş sürüleri, balık sürüleri ve arı kolonisi gibi biyolojik toplumlar çok etmenli sistemlerin gelişmesinde model alınmıştır. Grup halinde yaşama davranışının yırtıcılardan kaçınma, yiyecek bulma şansını artırma, enerji tasarrufu gibi birtakım avantajları olduğu bilinmektedir. Çok etmenli sistemler genel olarak ağ bağlantılı bir etkileşimli etmenler topluluğuna ifade eder.

Robotik araştırmalarında, çok-robotlu sistemlerin gelişimi çok-etmenli sistemler kavramıyla başlamıştır. Başka bir ifadeyle, çok-robotlu sistemler bu kavramın mühendislik uygulamalarından biridir. Yapay zeka, otonom robotlar, sensörler, otomatik kontrol ve bilgisayarlı görme gibi sistemlerin hızla gelişmesi, çok etmenli sistemlerinin çeşitli gerçek dünya uygulamalarında kullanılmasına yol açmaktadır. Çok-robotlu yiyecek arama davranışı (*foraging behavior*) [2], arama ve kurtarma [3], hedef takibi [4], kapsama [5], gözetim [6], işbirlikçi keşif [7], büyük ve eşlenmemiş alanların araştırılması [8] gibi görevler çok etmenli sistemlerinin gerçek dünya uygulamalarındandır. Ayrıca, insansız kara ve hava araçları, deniz araçları, uzay araçları ve benzeri birçok teknolojik ürün çok etmenli sistemler kapsamında değerlendirilebilmektedir.

Çok etmenli sistemler gürbüzlük, esneklik ve ölçeklenebilirlik avantajlarını sunmaktadır [9]. Bu sistemler tek bir etmen için mümkün olmayan karmaşık davranışları gerçekleştirebilmektedir. Etmen gruplarının hataya dayanıklılığı vardır; tek bir modül başarısız olursa, grubun geri kalanı bu modül yokmuş gibi kendi işlerini yapmaya devam edebilmektedir. Çok etmenli sistemlerinin bir özelliği de ölçeklenebilir olmalarıdır. Yani etkinliği arttırmak için yapılması gereken sadece gruba daha fazla etmen eklemektir. Çok etmenli sistemlerin güvenilirliği yüksek olduğu için kullanıldıkları ortamda görevi başarılı

bir şekilde yerine getirme olasılıkları fazladır. Çok etmenli sistemlerinin bu özellikleri bu sistemlerin çeşitli ortamlarda kullanılmasına olanak sağlamaktadır.

Günümüzde çok etmenli sistemleri günlük yaşamda hissetmek mümkündür. Örneğin, akıllı şebekeler, yazılım sistemleri, çoklu sensör sistemler, kablosuz ağlar, çok-robotlu sistemler ve benzeri günlük yaşamı büyük ölçüde etkilemektedir. Diğer yandan, bu sistemler etmenler arası koordinasyon ve işbirliği, dağıtık bilgi, haberleşme protokolleri, ve kontrol kurallarının tasarımı gibi yeni zorluklar getirmektedir.

Bu tez çalışmasında, mobil çok etmenli sistemlerde meydana gelebilecek koordinasyon ve işbirliği problemlerinden, düzen kontrolü (*formation control*) ele alınmıştır. Genel anlamda, düzen kontrolü, geniş anlamda bir geometrik yapının bir mobil çok etmenli sistem tarafından gerçekleştirilmesi ve korunmasıdır. Düzen kontrolü bazı biyolojik sistemlerde görülmektedir. Örneğin Şekil 1.1.'de kazlarda ve bazı göçmen kuş gruplarında kullanılan üçgen düzen biçimi görülmektedir. Düzen içinde yapılan grup uçuşu bireysel kuşların ihtiyaç duyduğu enerjiyi azaltır [10].



Şekil 1.1. Üçgen şeklinde bir düzen ile uçan kaz grubu.

Üçgen veya V düzeni, hava kuvvetlerinde askeri uçaklar için temel bir uçuş düzenidir. Şekil 1.2.'de görüldüğü gibi üçgen düzeni törenlerde ve hava gösterisi uçuşlarında da yaygındır. Düzen kontrolünde, verilen problemin amacına bakmaksızın, tüm düzen ile ilgili problemlerin ortak özelliği toplu hareket halinde belirli bir geometrik şekli korumaktır. Düzen kontrolünün otonom araç sistemlerde, çok-robotlu keşif, taşıma, uçuş kontrolü, uydu sistemleri, dağıtık sensör ağı gibi çeşitli uygulamaları vardır.



Şekil 1.2. THY'ye ait Boeing 777 uçağına eşlik eden Türk Yıldızları ekibinin İstanbul Havacılık, Uzay ve Teknoloji Festivali Teknofest'de düzen uçuşu.

Günümüzde hava araçları, sivil, askeri, ticari ve profesyonel alanların tamamında yoğun olarak kullanılmaktadır. Bu araçlar arasında Şekil 1.3.'te görüldüğü gibi uçak modelinde olanlar manevra kabiliyetlerinden dolayı daha çok ilgi çekmektedir. ABD havacılık uzmanları Kasım 2017'de, insansız hava araçlarının (İHA) kontrolüyle ilgili hava sahasında ticari uçaklarla güvenli bir şekilde uymasına yardımcı olacak teknolojilerin kullanılmasına yönelik 2020 yılının yaz döneminde düzen kontrolüne ait uçuş gösterisinin planını sunmuşlardır [11]. Yeterli güvenceler olmadan, hükümet yetkilileri insansız uçakların ticari ve genel havacılık uçaklarıyla bir çarpışma riski oluşturmasından korkmaktadır. Bu uçuş gösterisi, insansız hava araçlarını ulusal hava sahasına getirmeye yardımcı olmak için havacılık endüstrisine araştırma bulguları sunacaktır.



Şekil 1.3. İHA'ların bir düzen uçuşu gösterimi [11].

Çok etmenli düzen kontrolünün gerçek dünya uygulamaları geniş bir alanı kapsar. Bu kullanım alanlarının bazılarını şu şekilde sıralayabiliriz:

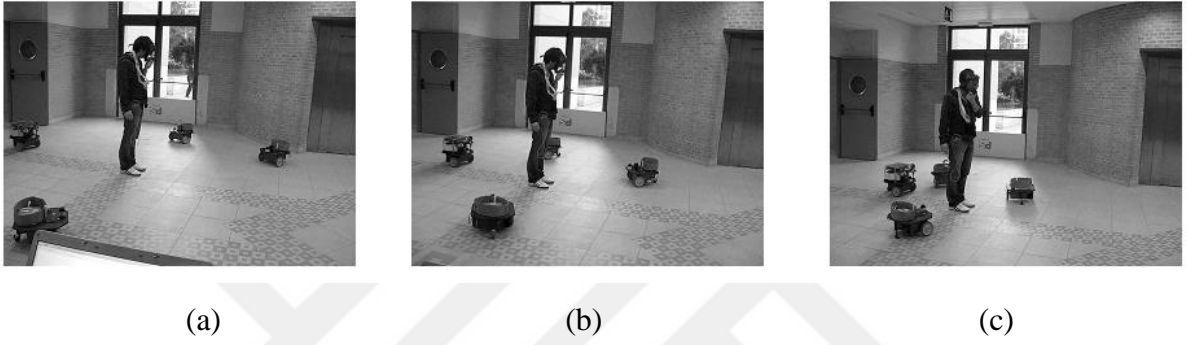
1. Arama ve Kurtarma Operasyonları

Çok etmenli sistemler bir kaza durumunda arama ve kurtarma amaçlı kullanılabilir. [12]'de yangın söndürme operasyonları için ağ bağlantılı çok-robotlu sistem tasarlanmıştır. Bu uygulama insan itfaiyecilerin ve ilk müdahalecilerin itfaiye yeteneklerini önemli ölçüde artırabilmektedir. Bir motive edici senaryo şöyledir:

- i. Altı robottan oluşan bir ekip yangın halindeki bir binaya girer, radyo etiketlerini ve *Mote* sıcaklık sensörlerini dağıtır.
- ii. Ekip, hareket yeteneğini kaybeden (arızalı olan) robotları statik sensörler ve röleler olarak kullanmaktadır.
- iii. Ağ, insan itfaiyecilerini kurtarma operasyonlarında hedeflere ve yangının kaynağına yönlendirirken, tehlikeli alanlarda uyarmaktadır.

Mote sıcaklık sensörleri insan veya robot tarafından sıcaklık, nem ve toksinlerin kimyasal konsantrasyonları gibi çevresel koşulları ölçmek için yerleştirilmektedir. Robotlar dar geçitlerden grup halinde geçmek için çizgi düzeni halinde hareket etmektedir. Ayrıca, grup mevcut düzenin sıkışmasıyla geçitten geçebilmektedir. Düzen sıkışması kavramı düzen ölçeklendirme (*formation scale*) adıyla bilinmektedir. Düzen ölçekleme [13] ve [14]'te araştırılmıştır.

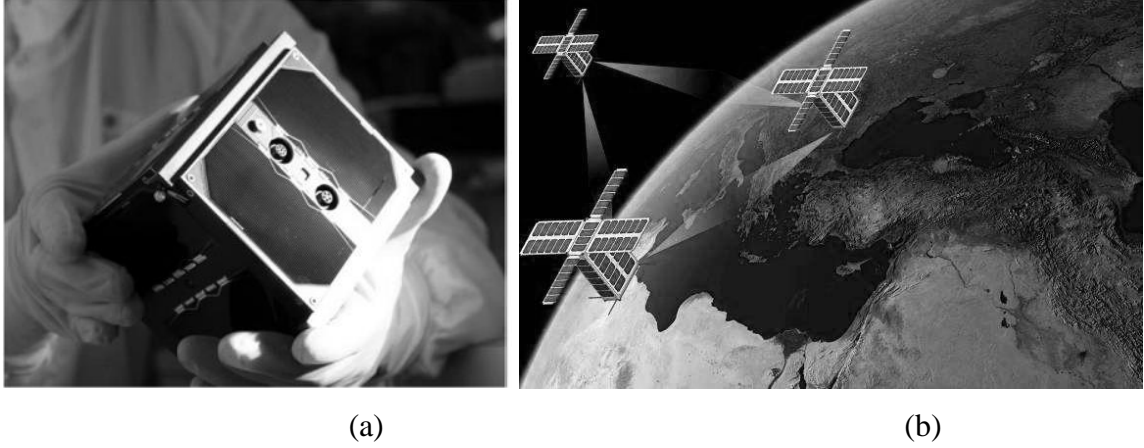
Koku ile Toplu Navigasyonda Sevk Edilmiş İnsansız Yardımcı Robot Grubu (*GUARDIANS*) adlı projede bir çok-robotlu ekip dumanla kaplanan büyük bir depoda konuşlandırılmıştır [15]. Ekip yangın veya yangın tehlikesi durumunda itfaiyecilere depoyu aramalarında yardımcı olmaktadır. *GUARDIANS* robotları bir itfaiyeci ile birlikte hareket etmekte, olası engelleri ve tehlikenin yerlerini belirlemekte, iletişim bağlantılarını koruyarak sahadaki itfaiyecilere eşlik etmektedir (Şekil 1.4).



Şekil 1.4. *GUARDIANS* takımının düzen teşkili deneylerinin anlık görüntüleri: (a) başlangıç kurulum, (b) düzen oluşum süreci (c) düzenin tamamlanması [15].

2. Düzen Uçuşu

İHA'ların düzen kontrolü, gözetleme ve keşif, radyasyon tespiti ve çevre haritalama, hedef arama ve yerini belirleme, telekomünikasyon rölesi vb. gibi sivil ve askeri alanlarda geniş potansiyel uygulamaları nedeniyle, son yıllarda çok ilgi görmüştür [16]. Deneysel kolaylığı nedeniyle bu alanda yapılan çalışmaların çoğu *quadrotor* üzerinedir. [17]'de beş adet *quadrotor*dan oluşan bir *quadrotor* düzen platformu tanıtılmış ve açık hava deneysel sonuçları sunulmuştur. [18]'de üçlü küçük *quadcopter* filosunun düzen kontrolü, merkezi ve merkezi olmayan kontrol yapıları altında, *ROS* çerçevesinde uygulanmış ve *CrazyFlie quadcopter* üzerinde test edilmiştir. Nano uyduların düzen uçuş projesi *NetSat*'de nano uydular uzaya fırlatılacaktır (Şekil 1.5). Bu proje nano uydulardan oluşan bir uydu grubunun bir düzen içerisinde uçuşunu gerçekleştirmeyi hedeflemektedir [19].



Şekil 1.5. (a) UWE-3 uydu modeli [19], (b) uydu düzen uçuş şeması [20].

3. Nesne Taşıma

Çok etmenli sistemler nesne taşıma görevlerinde kullanılabilir. [21]'de düşük maliyetli robotlar kullanılarak bir 2-boyutlu dışbükey nesnenin, topluca taşınması deneylerle incelenmiştir. Önce, robotlar nesnenin etrafında bir başlangıç düzende yer almakta, sonra düzen yeniden yönlendirilmekte ve en son hareket ettirilmektedir. [22]'de bir nesneyi taşıyan küçük bir işbirlikçi mobil manipülatör ekibi deneysel olarak değerlendirmiştir. Denemeler üç mobil manipülatörden oluşan bir ekip ile yapılmıştır. [23]'te bir mobil çok robotlu takımıyla nesne kafesleme (*object caging*) ve taşıma problemi incelenmiştir. Deneylerde robot takımının engellerden kaçınarak, poligonal nesneyi hedef konumlarına kafesleyerek taşıyabildiği gösterilmiştir. Kafes düzeni (*caging formation*) iki bitişik robot arasındaki Öklid mesafelerinin, poligonal nesnenin minimum genişliğinden daha küçük olmasını ve böylece nesnenin kaçamamasını garanti etmektedir. [24]'te düzen tabanlı işbirlikçi bir taşıma yaklaşımı önerilmiştir. Bu yaklaşımda taşınan nesne sanal lider robot olarak düşünülmektedir. Referans yörünge sanal lider için üretilmiş ve her takipçi robot düzen kısıtları altında kendi yörüngesini hesaplamıştır. Gerçek dünya ortamlarında yapılan deneylerle bir nesnenin taşınmasının gerçekleştirildiği gösterilmiştir.

4. Temizlik

Temizlik (süpürge) robotları ev robotları piyasasının büyük kısmını ele geçirmiştir. Günümüzdeki temizlik robotları artık otomatik temizlik yapabileceği yanında, makine öğrenme algoritmaları yardımıyla öğrenme ve karar verme yetenekleriyle donatılmıştır. Temizlik evde, işyerlerinde, okullarda, alışveriş merkezlerinde, hastanelerde ve

havaalanlarında bir zorunluluktur ve sıklıkla yapılmaktadır. [25]'te havaalanlarında kar kaldırma görevi için tasarlanmış olan arabaya-benzer (*car-like*) robotlar üzerinde düzen kontrolü algoritmaları kullanılarak deneyler yapılmıştır. Modele Dayalı Öngörülü Kontrol (*Model Predictive Control*) odaklı bu algoritmalar, dinamik ortamda engellerden kaçınma yeteneklerine sahip olmaktadır. Bu algoritmalar düzen kontrolü kurallarına entegre edilmiştir.

5. İnsan-Robot İşbirliği

İnsan-robot işbirliğinde robot ve insan bir görevi gerçekleştirmek için birlikte çalışmaktadır. Örneğin, arama ve kurtarma ve yangın söndürme gibi tehlikeli görevlerde robotlarla insanların birlikte çalışmaları itfaiyeciler için tehlikeyi azaltabilmektedir. [26]'da insan-robot düzen kontrolü için bir görsel-dokunsal (*visual-haptic*) etkileşim mekanizması önerilmiştir. Önerilen kurulum bir insan lider ve bir N mobil robotlu takımdan oluşmaktadır. Robotlar yalnızca RGB-D kameralarla donatılmıştır. Robotlar, insan hareketini RGB-D sensörleri üzerinden tahmin etmekte ve bu bilgileri lideri takip etmek için kullanmaktadır. Bir titreşim-uyaranlı (*vibrotactile*) bilezik lideri düzen kısıtlamalarının olası ihlalleri konusunda uyarır. İnsan-robot işbirliği bu titreşim-uyaranlı bilezik ile sağlanmaktadır.

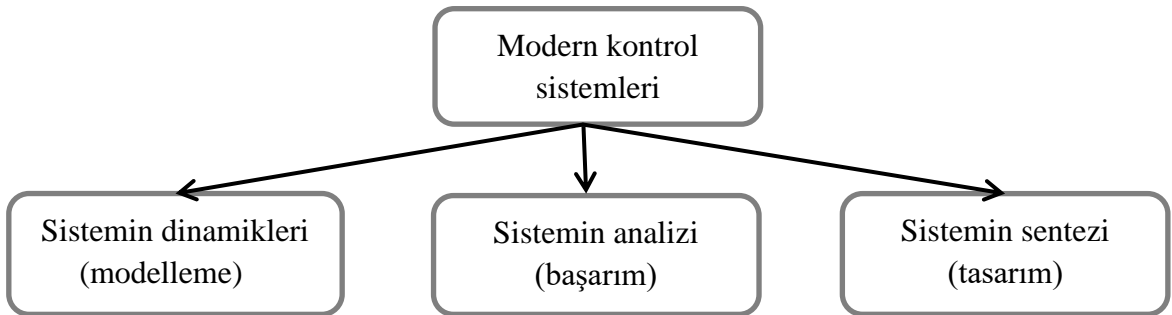
6. RoboCup Yarışları

RoboCup'ın Dünya Federasyonu bu yarışmanın en son hedefinin, robotlar-insanlar dünya şampiyonası maçının FIFA kurallarına göre 2050'de yapılması olduğunu belirtmiştir. Bu maçta, futbolculardan oluşan bir takımla, sadece robotlardan oluşan diğer bir takım maç yapacak ve robotlar takımı insanlara galip gelecektir. RoboCup maçlarında kullanılmak üzere, bir çok yönlü mobil futbol robotu grubunun düzen kontrolü [27]'de çalışılmıştır. Düzen kontrolü stratejisi, doğrusal olmayan Modele Dayalı Öngörülü denetleyici tarafından uygulanmıştır. Her robot, düzen durum bilgisini (robotların düzendeki konumu ve hızı, izlenmesi gereken topun konumu ve hızı) her kontrol döngüsünde güncellemektedir. Bu bilgi her robotun denetleyicisi tarafından alınmaktadır. Denetleyici robotun düzen yörüngelerini üretmektedir. Kalabalık ortamlarda gerçek deneyler yapılmıştır.

7. Denizcilik

Deniz ortamında mobil robot platformların konuşlandırılması topluma önemli faydalar sağlamaktadır. Fakat, robot gemilerini gezilebilir su yollarına bırakmak, diğer gemilerle (insanlı ve insansız) çarpışma, personellerin yaralanması ve maddi hasar riskini beraberinde getirmektedir. [28]'de güvenli navigasyon için bir davranış-tabanlı çok amaçlı optimizasyon yöntemi önerilmiştir. Her navigasyon kuralı bir davranışa karşılık gelmektedir. Her araç bir amaç fonksiyonuna göre karar vermektedir. Deneyler iki kayık temelli otonom yüzey gemi üzerinde yapılmıştır. Araçların GPS'e erişimi vardır ve şu anki konumlarını ve yörüngelerini diğerleriyle paylaşabilmektedir. Deneylerde önce araç 1 ve 2 kafa kafaya çarpışma rotasına yerleştirilmiştir. Araç 1 ara nokta izleme davranışından ve çarpışmadan kaçınma davranışından yararlanmaktadır. Araç 2 sadece bir ara nokta izleme davranışını kullanmakta ve araç 1 ile çarpışmadan kaçınma girişiminde bulunmamaktadır. Deneylerin sonunda araçlar hedeflerine doğru engellenmeden ilerlemektedir.

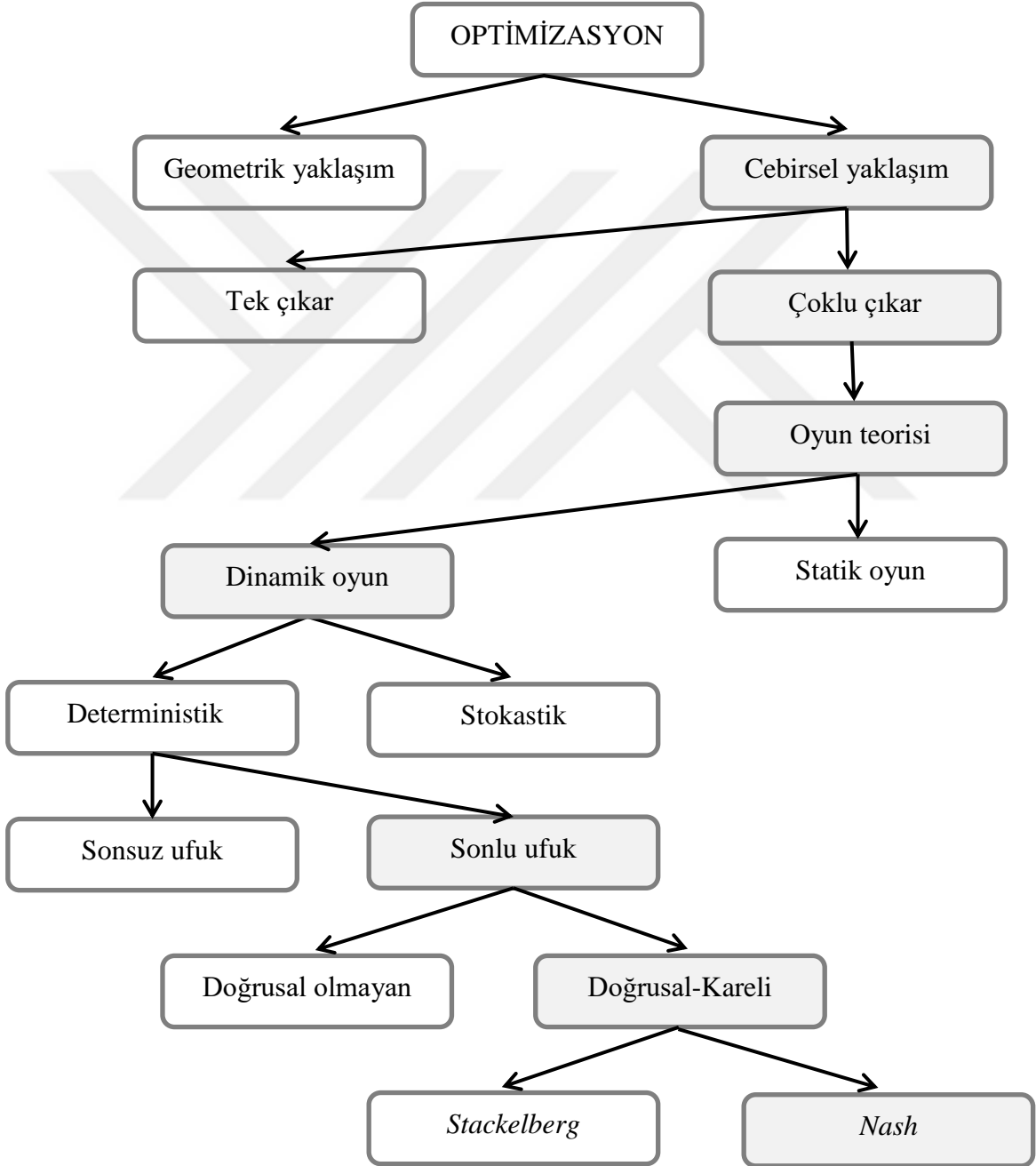
Şekil 1.6. modern bir kontrol sisteminin bileşenlerini göstermektedir. Herhangi bir kontrol sisteminde ilk aşama, sistem dinamiklerini veya modelini diferansiyel veya fark denklemleri gibi dinamik denklemler ile elde etmek veya formüle etmektir. Daha sonra, sistem, başarımı için analiz edilmektedir. Son olarak, sistem başarımını eniyilemek için, kontrol girdilerinin tasarımı yapılmaktadır. Optimal kontrol teorisinde, tasarım genellikle bir başarım ölçütüne (veya maliyet fonksiyonuna) bağlıdır.



Şekil 1.6. Bir modern kontrol sisteminin bileşenleri [29].

Tasarım aşamasında optimizasyon kullanılmaktadır. Optimizasyon ise yaklaşıma (cebirsal veya geometrik), çıkara (*interest*) (tek veya çoklu), sinyallerin niteliğine (deterministik veya stokastik) ve aşamaya (tek veya çoklu) bağlı olarak farklı şekillerde

yapılabilmektedir. Geometrik optimizasyon belirli kriterler ve kısıtlamalara en uygun olan geometrik nesnelerin hesaplanması problemleriyle ilgilenmektedir. Örneğin, d -boyutlu Öklid uzayında belirli bir nokta kümesini içeren en küçük yarıçaplı küreyi hesaplama problemi bu cinstendir. Düzen kontrolü için diferansiyel oyun teorisi yaklaşımı bu tez çalışmasında ele alınmıştır (Şekil 1.7).



Şekil 1.7. Bazı optimizasyon yaklaşımları (gri bölgeler tezin kapsadığı alanlardır).

Genel olarak, kontrol amacı doğrultusunda bir ortak grup çıkarı tanımlanmaktadır (Şekil 1.7’de “Tek çıkar” durumu). Burada tüm bireysel etmenlerin çıkarları tek başarımla ölçüldü şeklinde bir araya getirilmektedir. Fakat, bu yaklaşım etmenler arasındaki etkileşim dinamiklerini göz önünde bulundurmadan bireysel çıkarların tam olarak ifade edilmesini garanti etmemektedir.

Çok etmenli bir sistemde her bireyin diğerlerinden farklı olarak kendine özel çıkarları olabilmektedir (Şekil 1.7’de “Çoklu çıkar” durumu). Bunun yanında, etmenler arası etkileşim dinamikleri de dikkate alınmalıdır. Bu dinamiklerin kontrol amacıyla dikkate alınması daha uygun bir düzen kontrolüne yol açmaktadır [30]. Daha gerçek durumları kontrol sisteminde yansıtmak için çok etmenli düzen kontrolü problemini çoklu çıkar durumu altında analiz etmek önem taşımaktadır.

Düzen kontrolünde sadece komşu etmenlerin dinamiklerini dikkate alan maliyet fonksiyonlarının kullanımıyla dağıtık kontrol uygulanabilmektedir. Çoklu çıkar karar alma problemlerinde bireylerin davranış biçimi her bireyin kendi maliyet fonksiyonunu minimize eden kararlardan oluşmaktadır. Çok etmenli kontrol problemlerinin büyük bir kısmı, optimal kontrol ve oyun teorisinin birleşimiyle gelişmekte olan dinamik oyun teorisi yaklaşımıyla incelenebilmektedir.

Yukarıda belirtilen iki husus, yani bireysel çıkarların gerçekleşmesi ve dağıtık kontrolün uygulanması, bu çalışmanın yapılmasının motivasyon faktörleri olmuştur. Bu tez çalışmasında, düzen kontrolü için sonlu ufuk doğrusal-kareli diferansiyel *Nash* oyunu yaklaşımı seçilmiştir (Şekil 1.7). Bu yaklaşımın sonucu olarak düzen kontrolü bağlı *Riccati* diferansiyel denklemler problemine dönüşmektedir. Burada, çok önemli olan iki konu ele alınmalıdır,

1. Bu denklemlerin çözülebilirlik koşullarının belirlenmesi
2. Bu denklemlerin çözümünün bulunması

Şu ana kadar sonlu ufuk doğrusal-kareli diferansiyel *Nash* oyununun sonucu olarak elde edilen bağlı *Riccati* diferansiyel denklemlerinin çözülebilirliği koşulları ve çözümüyle ilgili kesin ve genel kanıtlar bulunmamaktadır. Uç (terminal) değerler kullanılarak geriye doğru iterasyon yaklaşımıyla sayısal çözümler aranmaktadır. Bu tez çalışmasında, düzen kontrolü probleminde karşılaşılan bağlı *Riccati* diferansiyel denklemlerinin çözülebilirliği koşulları ve bu denklemlerin analitik yaklaşım çözümü araştırılmıştır.

1.2. Çok Etmenli Sistemlerin Kontrolü

Tüm ağ bağımlı çok etmenli sistemler iki bileşenden oluşmaktadır. Birinci bileşen, karar verme, bilgi iletme ve alma yeteneği ile tanımlı dinamik etmenlerdir. İkincisi ise, bilgi (sinyal) alışveriş ağıdır. Mühendislik sistemlerinde bilgi alışveriş ağı kablolu veya kablosuz, biyolojik sistemlerde kimyasal reaksiyon ve sosyal medya’da ise psikolojik ve sosyolojik etkileşim şeklinde gerçekleştirilmektedir. Ağ bağımlı çok etmenli sistemler dinamik sistem teorisi (kararlılık, kontrol edilebilirlik, optimallik ve benzeri) ve bilgi ağı matematiği (graf teorisi, graf Laplasyen matrisi ve benzeri) karışımı ile teorik olarak analiz edilmektedir.

Birden fazla etmenin işbirlikçi kontrolü hem teorik hem de pratik anlamda çok karmaşıktır. Örneğin, sistemin bant genişliği sınırlıdır ve etmenler arasındaki bilgi alışveriş her zaman güvenli olmayabilmektedir. Hangi etmenle ne zaman hangi bilginin paylaşılmasına karar verilmesi çok zor ve kritik bir karardır. Aynı zamanda, grup hedefleri ve bireysel hedefler arasında bir ortak nokta bulmak da kolay olmamaktadır.

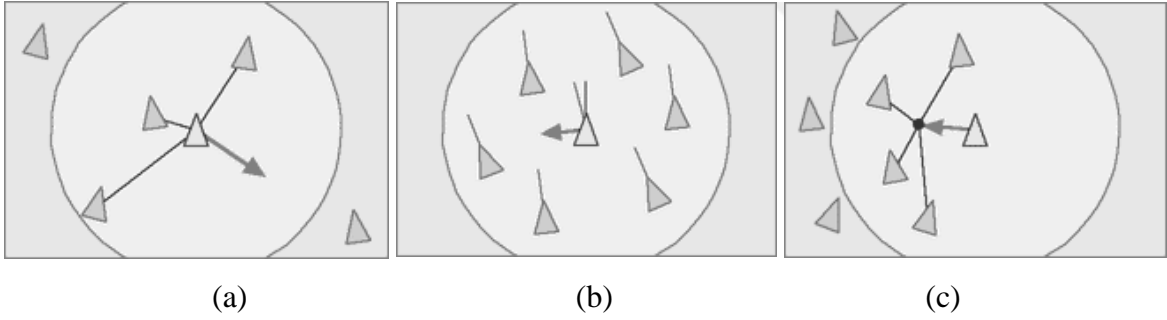
Doğal sistemler bu zorlukların karşısında kendilerine has strateji ve yetenekler geliştirmiştir. Biyolojik sistemlerde, her birey sadece yakınındaki komşularla temastadır. İlginç biçimde, biyolojik sürülerde davranış biçimi dağınık ve merkezsizleşmiştir. Bireyler kendi yerel algılama yetenekleriyle evrensel bilgiye erişmeden karar vermektedirler [31]. Komşu bireylerden bilginin algısı her biyolojik sistemde farklıdır. Bu da her tür sistemin farklı toplu hareket senaryosuna sahip olmasına neden olmaktadır. Kuş sürüsünde, her kuş sadece önünde ve kenarlarda olan bir kaç kuşun farkındadır. Bu nedenle, kazlar ve ördeklerin grup hareketleri göç zamanında alımlı (şık) ve uyumludur. Balık sürüsünde, her balık göremediği komşularının hareketlerini sudan aldığı dalga darbeleriyle algılamaktadır. Bu nedenle, balık sürüleri hızlı ve ani hareketlere sahiptir. Büyükbaş hayvan sürüsünde, her birey yerin titreşimiyle uzakta olan diğer bireylerin eğilimlerini algılamaktadır. Bir başka ifadeyle, sürü hareketinin şekli bireyler arasındaki bilgi alışverişinin yapısına bağlıdır. Bireyler daha çok sayıda komşusu ile iletişimde ise verilen tepki daha hızlı olmaktadır.

Doğal sistemlerin dağınık ve yerel olan bu davranış biçimi mühendislik sistemlerinde taklit edilmeye çalışılmıştır. *Reynolds*’un *boids* modeli çok etmenli sistemlerde dağınık kontrol kuralı tasarımı için bir başlangıç olmuştur. Bu model bir

bireyler toplumu için kitlesel biçimde bir evrensel (toplu harekt) görevi yerel etkileşim kurallarıyla gerçekleştirebilmesi için bir çözüm sunmaktadır [32]. *Reynolds*, toplu hareketlerde bireylerin eğilimlerini üç kural ile belirlemiştir (Şekil 1.8):

1. Komşular ile çarpışmadan kaçınmak veya ayırma (*separation*): yerel sürüde komşuların toplanmasını önle,
2. Hareket hızını ve yönünü komşular ile eşleştirmek veya hizalama (*alignment*): yerel sürüde komşuların ortalama rotası yönünde kal,
3. Komşulara yakın kalmak veya uyuşma (*cohesion*): yerel sürüde komşuların konumlarının ortalaması yönünde hareket et.

Reynolds'un kuralları biyolojik sistemlerde sürü hareketini yansıtmak için yeterli bir model oluşturmaya imkan vermektedir. Ayrıca, bu kurallar mühendislik sistemlerinde kontrol tasarımı için kullanılmaktadır. Sürü toplanma (*swarm flocking*) [33] ve araç düzen kontrolü [34] bu kuralları kullanan çalışmalardandır.

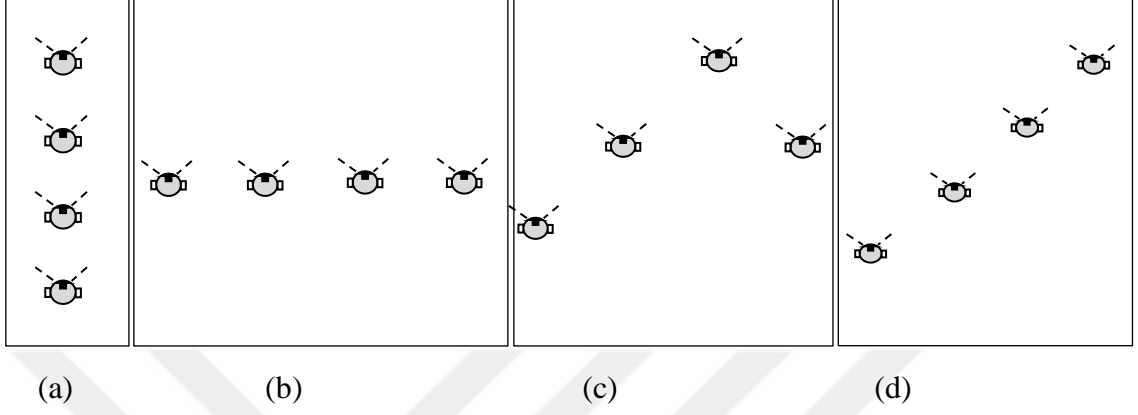


Şekil 1.8. Basit *Boids*'da uygulanan kurallar, (a) ayırma, (b) hizalama, (c) uyuşma [32].

1.3. Düzen Kontrolü

Çok etmenli sistemlerdeki temel problemlerden bazıları aşağıdaki şekilde sıralanabilmektedir: konsensüs (*consensus*) veya uzlaşma, düzen, görevlendirme, kapsama (*coverage*), randevulaşma, toplanma, dağıtık tahminleme, vb. Düzen kontrolü çok popüler bir araştırma konusudur ve bu alandaki bulgular diğer problemlerin çözümü için katkı

sağlamaktadır. Şekil 1.9’da dikey çizgi, yatay çizgi, üçgen ve köşegen çizgi gibi bazı temel düzen şekilleri gösterilmiştir.



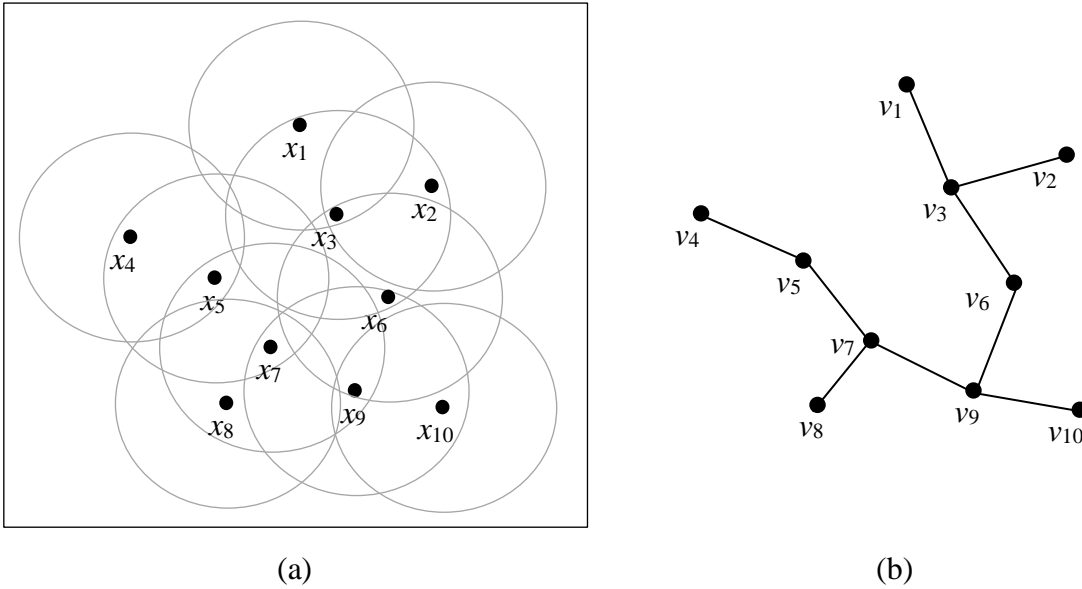
Şekil 1.9. Dört mobil robot için farklı düzen şekilleri, (a) dikey çizgi, (b) yatay çizgi, (c) üçgen şekli, ve (d) köşegen çizgi düzeni.

Düzen kontrol problemlerinin eğer etmenlerin mutlak konumları bir merkezi kontrol noktası vasıtasıyla (örneğin *GPS* sistemi kullanımıyla) elde edilebilir ise, çözümleri oldukça kolaydır. Ancak, çoğu zaman sistem için böyle bir imkan sunulmamakta veya bu imkanların kullanımı uygun sonuçlar doğurmamaktadır. Örneğin, *GPS*'in bazı çalışma ortamlarında kısıtlı duyarlılığı vardır. Bu nedenle düzen kontrol problemi için yerel bilgilere dayalı dağıtık kontrol kurallarının tasarımı büyük önem taşımaktadır. Bir başka ifadeyle, her etmenin sensör veya haberleşme ağı yoluyla sadece yerel bilgilere ulaşabildiği varsayımıyla uygun (geçerli) kontrol yasasının elde edilmesi arzu edilmektedir.

Bir çok etmenli sistemde bireyler çevreleri ile haberleşme kanalları yoluyla bilgi paylaşımı yapabilmektedir. Ancak, bilgiyi iletmek ve almak enerji içeren bir işlemdir. Bu nedenle bireylerin sadece sınırlı bir haberleşme mesafesi içerisinde doğrudan bilgi alışverişi yapma imkanları bulunmaktadır. Bilgi alışverişinde ise, bilgi aracı düğümler yoluyla ağ içerisinde yayılabilmektedir. Diğer bir haberleşme kısıtı bant genişliğine uyma zorunludur. Eğer bireylerin büyük bir kısmı eşzamanlı olarak büyük miktarda veri yayımlarsa, haberleşme kanalı çökebilmektedir. Dolayısıyla, büyük ağlarda bilgi alışveriş işlemi bant genişliği göz önünde bulundurularak yapılmaktadır.

1.3.1. Bilgi Ağı

Çok etmenli bir sistemde doğrudan haberleşme dışında bireyler ayrıca sensörler yoluyla diğer bireyler ve ortam hakkında bilgi elde edebilmektedir. Her sensörün kendine özgü mesafe ve algılama sınırı olmaktadır. Örneğin, görsel sensörlerin ve tek ışınlı mesafe sensörünün kendilerine özgü geometrik sınırları vardır. Bu geometrik kısıtlamalar, bireylerin bilgi alışveriş ağı ve bütün sistemin etkileşimi üzerindeki etkisi graf teorisi ile yorumlanabilmektedir. Genel olarak, her çok etmenli sistem bir graf üzerinde gösterilebilmektedir. Bu durumda, graftaki her düğüm bir etmene karşılık gelmekte ve bu düğümlerin arasındaki bağlantılar da (yani graftaki kenarlar) etmenler arasındaki haberleşmeyi göstermektedir. İki düğüm bir kenarla ilişkilendiriliyor ise bu düğümlere komşu düğümler denir. Ayrıca, bu kenar bu iki düğümle bitişiktir denir. Graftaki her kenar bitişik düğümlerin tek taraflı veya çift taraflı olarak birbirlerini algılama mesafesi içinde olduklarını göstermektedir. Örneğin, Şekil 1.10.(a)'da çok etmenli bir sistemin etkileşim geometrisi yöneltmez (*omni directional*) mesafe sensörleri ile tanımlanmıştır. Şekil 1.10.(b)'de bu sistemin etkileşim ağ modelinin graf gösterimi verilmiştir. Burada düğümler etmenleri ve kenarlar etmenler arası etkileşimleri göstermektedir.



Şekil 1.10. (a) Bireyleri yöneltmez mesafe sensörleriyle donatılmış bir çok etmenli sistem, (b) bu sistemin etkileşim ağ modelinin graf gösterimi.

1.3.2. Dağıtık Kontrol

Grafa dayalı kontrolde her etmenin kontrol yasasının graf topolojisindeki sadece yakın komşularından gelen bilgilere dayalı olması anlamında dağıtık olması arzu edilmektedir. Dağıtık olmayan kontrol yaklaşımının aksine, dağıtık kontrol yapılarında bir birey tüm bileşenlere ilişkin evrensel bilgiye sahip değildir. Dağıtık yerel karar ve kontrol algoritmaları hesaplama kolaylığı ve esnekliğinden dolayı tercih edilmektedir. Bu tez çalışmasında, graf teorisi ve Laplasyen matrisinin özelliklerini kullanılarak bir çok etmenli sisteminin her bireyine özel ve sadece komşulardan gelen yerel bilgilere dayalı yeni bir karesel maliyet fonksiyonu (başarım ölçütü) ortaya konulmuştur. Böylece, tezde ele alınan düzen kontrolü problemi için bir dağıtık kontrol yasasının elde edilmesi söz konusudur.

Graf üzerindeki sistemlerde iki düğüm arasındaki bilgi akışının sağlanması bir kenarla yorumlanabilmektedir. Bu akış tek yönlü veya çift yönlü olabilmektedir. Örneğin, eğer etmen i birey j 'yi algılayabiliyorsa ama farklı sensör kullanımı nedeniyle birey j birey i 'yi algılayamıyorsa, bilgi akışı tek yönlü olmaktadır. Bu durum için graf gösterimindeki kenarın yalnızca i ve j düğümlerine bağlı olması ve bu kenarın yönü j 'den öteye ve i düğümüne doğru olmaktadır. Statik ağlarda kenarların durumu zamanda değişmez. Bu tür ağların analizi doğrusal zamanda değişmez sistem teorisi ile yapılır.

Üç etmeden oluşan ağ bağımlı bir sistem varsayalım (Şekil 1.11). Bu sistemde bireylerin bağıl hızlarını aşağıdaki komuta zinciri ile:

1. Birinci etmenin hızını ikinci ve üçüncü etmenlerin konumuna göre,
2. İkinci etmenin hızını birinci etmenin konumuna göre,
3. Üçüncü etmenin hızını ikinci etmenin konumuna göre,

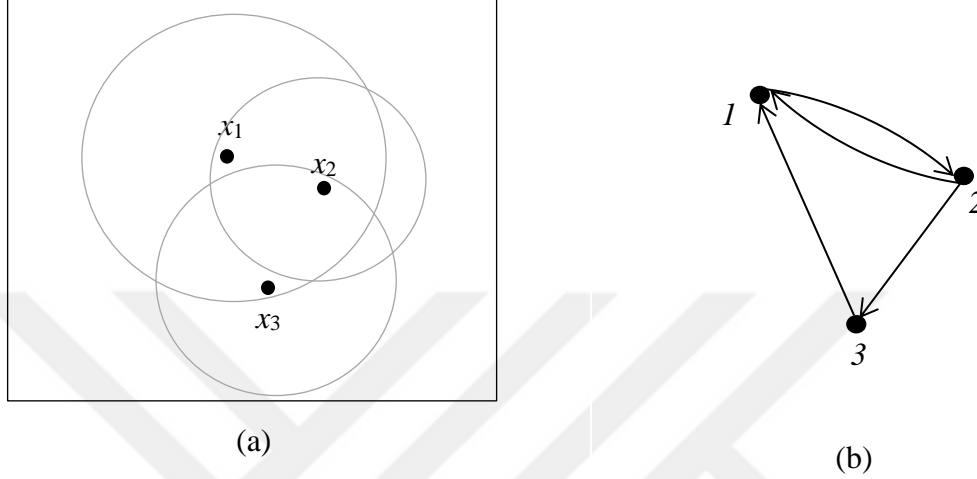
düzenlediğini varsayalım. Bu sistemin dinamiklerini şu şekilde ifade edebiliriz,

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = (\mathbf{x}_3(t) - \mathbf{x}_1(t)) + (\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t)) \quad (1.1)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2(t) = \mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t) \quad (1.2)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_3(t) = \mathbf{x}_3(t) - \mathbf{x}_2(t) \quad (1.3)$$

Burada $\mathbf{x}_{1\dots 3}, \dot{\mathbf{x}}_{1\dots 3} \in \mathbb{R}^2$ sırasıyla bireylerin konum ve hız vektörünü iki-boyutlu koordinat uzayında göstermektedir. Yukarıdaki komuta zinciri uzlaşma protokolü olarak da bilinmektedir.



Şekil 1.11. (a) Bireyleri farklı çap aralığına sahip ve yöneltmez mesafe sensörleriyle donatılmış bir çok etmenli sistem, (b) bu sistemin yönlü graf ile gösterilmiş komuta zinciri.

Uzlaşma protokolü bilgi alışverişi linkleriyle birbirine bağlanmış bireylerin bir konum değeri üzerinde evrensel anlaşmaya varmalarını sağlamaktadır. Bu bireylerin hepsinin aynı dinamiklere sahip olduklarını ve tek integratör (*single integrator*) modelini kullandıklarını varsayalım. Birey i 'nin ($i = 1, \dots, m$) konum ve hız vektörü sırasıyla $\mathbf{x}_i, \dot{\mathbf{x}}_i \in \mathbb{R}^n$ olsun. Böylece uzlaşma protokolü her birey için aşağıdaki şekilde ifade edilebilmektedir [35].

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \sum_{j \in N_i} (\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_i(t)) \quad (1.4)$$

Burada, N_i , i 'inci bireyin komşularından oluşan bir kümedir.

Randevu probleminde bir grup mobil etmen tek bir mekanda görüşmektedir [35]. Bu mekân önceden bilinmemekte ve etmenler birbirlerinin evrensel konum bilgilerine sahip olamamaktadır.

1.3.3. Düzen Kontrolü Tanımı

i ve j 'nin iki bitişik etmen olduklarını varsayalım. $\mathbf{d}_{ij} \in \mathbb{R}^n$ bu etmenlerin arasındaki istenilen mesafe vektörünü gösterebilir. Eğer düzen topolojisini temsil eden bilgi grafi statik ise, o zaman düzenin gerçekleşmesi için

$$\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t) \rightarrow \mathbf{d}_{ij}, \quad t \rightarrow \infty \quad (1.5)$$

olmalıdır. Burada $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$, etmen i 'nin konum vektörünü n -boyutlu koordinat uzayında göstermekte ve \rightarrow yakınsama anlamına gelmektedir. Eğer etmenler arasındaki istenilen mesafe bir sayısal değer ise, yani $d_{ij} \in \mathbb{R}$ ve $d_{ij} > 0$ ise bu durumda d_{ij} sayılar kümesinin bir elverişli düzeni temsil etmesi gerekmektedir. Elverişli koşulu, düzenin gerçekleşebilmesi anlamına gelmektedir. Bu konu, graf teorisi kavramında graf rijitliği (*graph rigidity*) teorisiyle açıklanmaktadır [36]. Graf rijitliği, düzen grafları üzerine rijit hareketlerin incelenmesidir. Bu konu bu çalışmanın kapsamı dışındadır.

1.3.4. Etmen Dinamikleri

Bir çok etmenli sisteminin (gerçek) davranışı, arabağlantı ağ yapısı ve bireylerin doğrusal olmayan dinamiklerine bağlı olmaktadır. Bilgi iletme ve alma yeteneğiyle tanımlı bireylerin (diferansiyel denklemler ile ifade edilen) dinamikleri sistemin analizi için büyük önem ifade etmektedir. Düzen kontrolünde etmenlerin bağıl konumlarının kontrolü düzenin teşkil edilmesi için gereklidir. Bu da, düzen kontrolünün tasarımı aşamasında etmenlerin hareket modeline (yani dinamiklerine) bağlıdır. Teorik çalışmalarda genellikle bireyler için gerçek mekanik dinamik model yerine basitleştirilmiş dinamik model kullanılmaktadır. Tek ve çift integratör (*double integrator*) modelleri, doğrusal zamanda değişmez modelleri ve tek tekerlekli taşıt basitleştirilmiş dinamik modellerindedir. Bu modellerin hiç biri doğrudan gerçek bir çok etmenli sistemine uygulanamaz. Bunun nedeni, sürücü-düzeyi (yani kuvvet ve bükme) girdilerini öngörülemezliğindedir. Bu modeller sadece iç düzey kontrol döngülerde gömülenirler. İç düzey kontrol döngülerde aracın gerçek dinamikleri görmezden gelinmektedir.

Bir çok etmenli sistemin kontrolünde, çoğu zaman etmenlerin konum bilgileri önemli olmaktadır. Bu tür sistemlere tek integratör sistemler denir. Her zaman konum değil bazen üyelerin hız bilgileri de önemli olmaktadır. Bu tür sistemlere çift integratör denir. Hızlanmanın insan sağlığı üzerinde fizyolojik etkileri olmaktadır. İnsan vücudu herhangi büyüklükte bir sabit hıza dayanabiliyor olsa da (ister saatte 20 km olsun ister saatte 20 milyar km), yalnızca bu seyahat oranı yavaş bir şekilde değiştirilebilir. Federal Havacılık İdaresi Başkanlığı'na (*Federal Aviation Administration*) göre hızlanmanın etkileri değişimin oranına bağlı olarak gözlerdeki kanın azalmasından kaynaklanan görmenin grileşmesi, görmenin tamamen kaybolması ve bilinç kaybı şeklindedir [37]. Görme ile ilgili durumlar ışığa duyarlı retina hücrelerine oksijen beslemesi ciddi oranda azaldığından ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle, beyindeki kan akışı belli bir seviyeye düştüğünde, pilot bilincini yitirir. İnsan vücudu, süresi oldukça kısa olduğu sürece (0,2 saniye veya altı) zarar görmeden nispeten yüksek büyüklükte bir darbe ivmesini kabul edebilmektedir.

1.3.5. Yörünge Planlaması

Düzenin kurulması ve korunması için grup toplu hareket halinde olmalıdır. Ayrıntılı olarak, düzenin kontrol yaklaşımından önce toplu hareket planı türetilmelidir. Düzenin toplu hareketi her mobil etmenin (aracın) istenilen hareketine çevrilmektedir [38]. Her etmen bireysel hareket planını izlemek zorundadır. Bireysel hareket planlama üç adımda gerçekleştirilmektedir. Birincisi, yol planlama, ikincisi, yörünge planlama ve üçüncüsü etmen kontrolüdür. Yol planlaması için, etmenin başlangıç konumu ve içerisinde bulunduğu çalışma alanının bilgilerine erişilir ve şu anki konumundan hedef noktaya doğru bir eğri oluşturulur. Oluşturulan eğri(ler)den etmenin kinematik ve dinamiklerine bağlı olan yörüngeleri üretmek için yörünge planlaması yapılmaktadır. Yörüngeler en son denetleyici tarafından uygulanmaktadır.

Noktadan noktaya hareket eden mobil etmenler için yörünge planlaması yaparken yüksek dereceli polinomlar tercih edilmektedir. Pürüzsüz ve sürekli yörüngelere ulaşmak için, yüksek dereceli polinomlar kullanılmaktadır. [39]'da noktadan noktaya hareket eden bir mobil etmenin yörünge planlaması için iki katsayılı yüksek dereceli polinomlar önerilmiştir. Analitik yöntem ile katsayıların optimal değerleri belirlenmiştir.

1.4. Düzen Kontrolü ile İlgili Literatür Araştırması

Düzen kontrolü çalışmalarının başlangıcı 1990'lerdedir. Bu araştırma alanı çok hızlı büyüdü ve çok sayıda araştırma içermektedir. Bir çok etmenli sistemin düzen kontrolünü yapmak için aşağıdaki hususlar dikkate alınmalıdır:

1. Etmen modelleri; sistemin davranışını tanımlar,
2. Düzen kontrolü stratejisi; bir istenilen düzeni oluşturmak ve korumak için etmen takımının nasıl kontrol edilmesini tanımlar,
3. Etmenlerin algılayıcı yetenekleri (sensör donanımları); ve
4. Etkileşim topolojisi (bilgi ağı).

Yukarıdaki hususların farklı durumları dikkate alınarak çeşitli düzen kontrolü problemleri literatürde incelenmiştir. Çok-robotlu sistemlerin düzen kontrolüne yönelik literatür incelemeleri [40-48]'de, dört pervaneli robot helikopterler (*quadrotor*) ile ilgili [49]'da, uydular ile ilgili [50]'de ve özerk kara araçları ile ilgili [51]'de bulunmaktadır.

[48]'de düzen kontrolünün literatür çalışmaları konum, yerdeğişim ve mesafe tabanlı olarak sınıflandırılmıştır. Bu sınıflandırma algılanan ve kontrol edilen değişkenlerin türlerine dayanmaktadır. Konum-tabanlı kontrolde etmenler evrensel koordinat sistemine göre kendi konumlarını algılamaktadır. Etmenler bu koordinat sistemine göre öngörülen istenilen konumlarda istenilen düzeni teşkil etmek için kendi konumlarını etkin olarak kontrol etmektedir. [52]'de çift integratörlü dinamikleri ile modellenmiş etmenler için bir konum-tabanlı kontrol şeması önerilmiştir. Bu modelde etmenlerin birbiriyle etkileşime girmesi gerekmektedir. Konum-tabanlı kontrol sınıfında; [53] ve [54]'te holonom olmayan etmenler; [55]'te tek-tekerlekli bisiklet (*unicycle*) tipi kinematik modeliyle modellenen robotlar; geribeslemeli düzenleşim [56]'da; tek-tekerlekli bisiklet türü robotların geribeslemeli düzenleşimi [57]'de; iki-tekerlekli sürülen mobil robotların geribeslemeli düzenleşimi [58]'de; ve [59-60]'da genel doğrusal dinamikleriyle modellenmiş etmenlerin konum-tabanlı kontrolü incelenmiştir.

Yerdeğişim-tabanlı kontrolde her etmen komşu etmenlerin yerdeğişimine göre, istenilen düzenin elde edilmesi için, kendi yerdeğişimini etkin olarak kontrol etmektedir. Her etmen komşularının evrensel koordinat sisteminde görelî konumlarını algılayabilmektedir. İstenilen düzen evrensel koordinat sistemindeki yerdeğişimler

şeklinde belirlenmektedir. Bu da, etmenlerin evrensel koordinat sisteminin yönünü bilmelerinin gerektiğini ima etmektedir. Fakat, etmenler için evrensel koordinat sistemi ve bu koordinat sistemine göre kendi konumları hakkında bilgi gerektirmemektedir. Yerdeğişim-tabanlı kontrol sınıfında; [61] ve [62]'de sırasıyla yönsüz ve yönlü etkileşim graf olan durumlar; [63] ve [64]'te aralık-zaman etmen modeli; sürekli-zaman etmen modeli [65]'te; kesirli-mertebe (*fractional-order*) tek integratorlü sistemler [66]'da; bağırlık koruma tek integratorlü sistemlerde [67]'de; aralık-zaman tek integratorlü sistemlerde başarısızlığa karşı gürbüzlük [68]'de; çift integratorlü sistemler [52]'de; kesik kesik etkileşimi olan genel doğrusal etmenler [69]'da; ve tek-tekerlekli bisiklet [70-72]'de incelenmiştir.

Mesafe-tabanlı kontrolde etmenler arası mesafeler istenilen düzenin elde edilmesi için etkin olarak kontrol edilmektedir. Her etmen kendi yerel koordinat sistemlerinde komşularının bağıl konumlarını algılayabilmektedir. Yerel koordinat sistemlerinin yönelimleri ile de birbiriyle uyumlu olmamaktadır. Mesafe-tabanlı kontrol sınıfında; tek integratorlü sistemlerin mesafe-tabanlı düzeni ve graf rijitliği [73-74], [45]'te; çift integratorlü sistemlerin mesafe-tabanlı düzeni [75] ve [76]'da; düzen grafının rijitliği [77] ve [78]'de; dikdörtgen biçiminde düzen [79]'da; graf rijitliği kalıcılığı [80]'de; lider-takipçi düzen [81]'de; liderin bağıl hızını tahmin ederek lider-takipçi düzen [82]'de; üç-boyutlu dört robotlu eşkenarlı düzen [83]'te; n -boyutlu mesafe-tabanlı yönsüz düzen [84]'te incelenmiştir.

Başka bir açıdan düzen kontrolünde yaklaşımlar üç temel strateji altında sınıflandırılmıştır. Bu stratejiler davranış-tabanlı, sanal yapı ve lider-takipçi yaklaşımlarıdır [30]. Bu bölümde bu üç temel stratejiye ek olarak lidersiz, konsensüs-tabanlı, optimal kontrol ve diferansiyel oyun yaklaşımları ile ilgili literatür incelenmiştir.

1.4.1. Davranış-tabanlı Yaklaşım

Doğadaki gruplaşma ve okullaşma (*schooling*) davranışları grupta kalma arzusunun ve aynı anda grubun diğer üyelerinden belirli mesafenin korunmasının kombinasyonudur. Bu davranış biçimi çok etmenli sistemlerde davranış-tabanlı yaklaşımının temelini oluşturmuştur [34]. Davranışa dayalı sistemlerde aynı anda birden fazla hedefe yönelik davranış bütünleştirebilmektedir. Bu tekniği kullanan sistemler ara yol noktalarına doğru

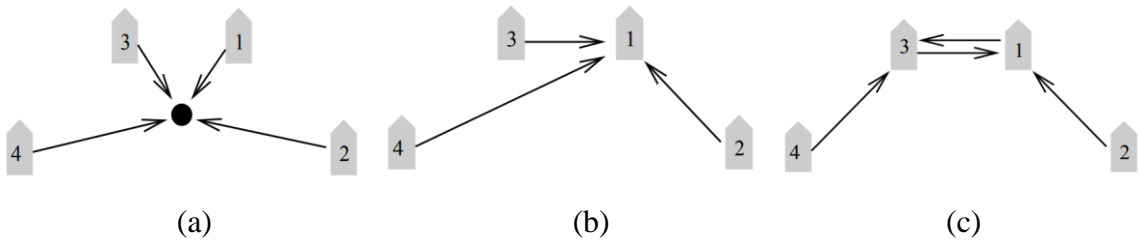
hareket edebilmekte, engellerden kaçınabilmekte ve aynı anda düzene devam edebilmektedir. Düzenin sürdürülmesi iki aşamada gerçekleştirilmelidir:

1. Düzen-pozisyonu-algılama; algısal bir süreçte çalışma ortamındaki verilere dayanarak etmenin düzendeki doğru konumu belirlenir.
2. Motor düzeyinde düzen-sürdürülme işlemi; etmeni doğru yere yönlendirmek için motor komutları üretilir.

Her etmen diğer etmenlerin konumlarına bağlı olarak, düzendeki uygun konumunu hesaplar. Düzende konum belirlemek için üç teknik verilmiştir [34]:

1. Birim-merkez referanslı: her etmen tarafından düzene katılan tüm etmenlerin x ve y pozisyonlarının ortalaması alınarak bir birim-merkez hesaplanır. Her etmen düzendeki konumunu o merkeze göre belirler.
2. Lider referanslı: her etmen lider etmene göre düzendeki konumunu belirler. Lider düzeni sürdürmeye çalışmaz; diğer etmenler düzenin sürdürülmesinden sorumlular.
3. Komşu referanslı: her etmen bir başka etmene göre önceden belirlenmiş bir mesafeyi korur.

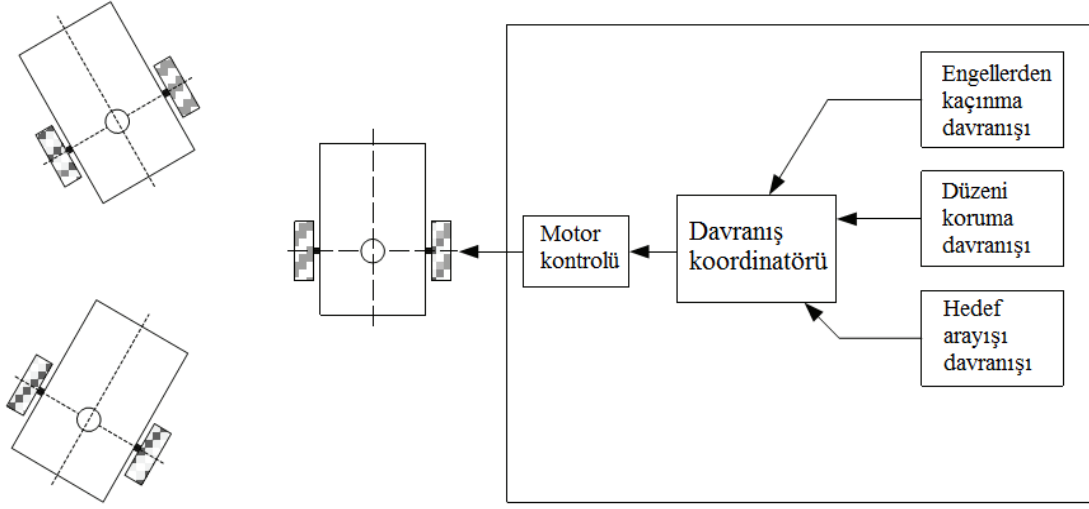
Bu düzen ilişkileri Şekil 1.12'de gösterilmiştir. Oklar düzen konumlarının nasıl belirlendiğini göstermektedir. Her ok bir etmenden ilgili referansa işaret etmektedir.



Şekil 1.12. Düzende konum belirlemenin çeşitli teknikleri: (a) birim-merkez, (b) lider, (c) komşu [34].

Hedef noktasına hareket ederken her etmen amaca-doğru-hareket-et, statik-engelden-kaçın, etmenden-kaçın ve düzeni-sürdür komutlarını uygulamaktadır. Bu komutlar engellerden kaçınma, diğer etmenlerle çarpışmama ve düzende kalmayı sağlayan

genel davranış biçimlerini uygulamaktadır. Bu temel davranışlar etmenler arası etkileşimin ağırlıklı toplamı şeklinde kullanılmasıyla karmaşık hareket desenleri üretilebilmektedir (Şekil 1.13).



Şekil 1.13. Davranış-tabanlı yaklaşım [85].

Davranış-tabanlı yaklaşım dağıtık çok etmenli sistemler için uygun olmaktadır. Bu yaklaşımda her etmen iyi derecede özerktir. Ancak, etmen sürüleri için grup davranışlarının açık tanımı olmamaktadır. Davranış-tabanlı şemaların avantajı düzende geri bildirim olmasıdır. Bu geri bildirim komşu etmenlerin bağıl konumlarına bağlı olan eylemlerin ağırlıkları şeklinde tümlenmektedir. Davranış-tabanlı yaklaşımlar, dinamik ortamlarda yerel duyuşal bilgilere dayalı çalışan çok etmenli sistemlerin yönlendirilmesi için uygundur.

Davranış-tabanlı navigasyon yöntemi sürü robot sistemlerinde [86]'da uygulanmıştır. Çeşitli davranışlar iki tipik düzen kontrolü problemi için tanımlanmış ve incelenmiştir. Bu problemler başlangıç düzeni oluşturmak ve engellerden kaçınarak düzeni kontrol etmek problemleridir. Bir robot takımı için engellerden kaçınmayı göz önünde bulundurarak merkezi olmayan davranış temelli düzen kontrol algoritması [87]'de önermiştir. Algoritma, her robotun komşu robotlar ve engeller arasındaki görece konum bilgisini kullanarak, davranış temelli yaklaşımla düzen kontrolünü gerçekleştirmektedir.

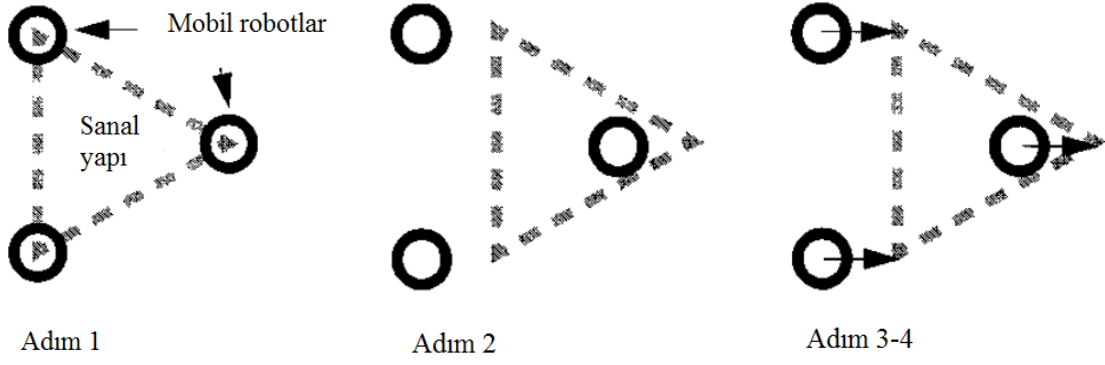
1.4.2. Sanal Yapı Yaklaşım

Sanal yapı yaklaşımı [88]'de önerilmiştir. Sanal yapı (yarı-) katı geometrik ilişkiyi birbirleriyle bir referans çerçeveye göre koruyan etmenler topluluğudur. Başka bir ifadeyle, sanal yapı yaklaşımında tüm düzen bir rijit cisim olarak görülmektedir. Her aracın kontrol kuralı sanal yapının dinamiklerinden türetilmektedir. Diğer bir deyişle, sanal yapının hareketi her aracın istenilen hareketine dönüşmektedir. Sanal yapı yaklaşımının ana avantajı grubun koordineli davranışının belirlenmesinin kolay olmasıdır. Bu yaklaşım, düzen şeklinin sık sık yeniden yapılandırması gereken uygulamalar için uygun olmamaktadır.

Sanal yapı davranış-tabanlı yaklaşım gibi bir tepkisel kontrol yöntemidir. Bu sınıfa ait kontrol yaklaşımlarında etmenler çalışma ortamıyla ilgili genel bilgiye sahip olmadan yalnızca yerel sensör bilgilerine göre hareket edebilmektedir. [88]'de bir robotun arızalanması durumunda sanal yapının dağılıp dağılmadığı denetlenmiştir. Lider-takipçi yaklaşımında gruptan ayrılan birey geride kalarak takımdan kopmaktadır. Sanal yapı uygulamasında robotlardan birisinin arızalanması durumunda sanal yapı bir bütün olarak kendisini belirtilen hedefin yönünde döndürmüştür. Fakat hedef konuma doğru hareket edememektedir. Lider-takipçi düzende lider başarısız (arızalı) robotu geride bırakarak harekete devam etmektedir.

Sanal yapı davranışı aşağıdaki algoritma ile simüle edilebilmektedir [88] (Şekil 1.14).

1. Sanal yapayı etmenlerin şü anki konumlarına göre oluştur.
2. Sanal yapayı Δx ve $\Delta \theta$ kadar hareket ettir.
3. Sanal yapayı istenilen noktaya taşımak için bireysel etmenlerin yörüngelerini hesapla.
4. Hesaplanan yörüngeleri uygulamak için tekerlek hızlarını ayarla.
5. Adım 1'e git.



Şekil 1.14. Sanal yapı kontrol algoritmasındaki adımlar [88].

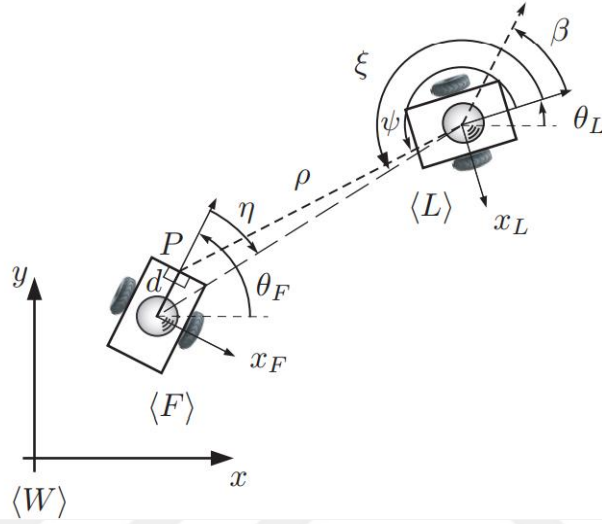
Bu yaklaşımın başarılı olması için etmenler arası iletişim bantın genişliği gerekmektedir [89]. Eğer etmeden sanal yapıya düzen geri bildirim yoksa, sanal yapı çok hızlı hareket ettiğinde bireyler için düzeni izlemeleri sıkıntılı olmaktadır. Bu durumda etmenlerin düzende kalabilmeleri için bütün sistemin hızını yavaşlatmak gerekmektedir. Etmenden sanal yapıya düzen geri bildirim [90]'da incelenmiştir. [91]'de esnek sanal yapıya dayanan düzen kontrol şemaları sunmuştur.

Katı geometrik sanal yapı üzerine kurulan düzen kontrol şemalarının tersine, esnek sanal yapı üzerine olan düzen şeması düzenin sarsıntısız şekilde dönmesini sağlamaktadır. [92]'de *Lyapunov* tekniği ve sanal yapıya gömülü graf teorisi kombinasyonu üzerine bir model önerilmiştir. Sanal yapıya dayalı düzen kontrolün yüksek iletişim kalitesi gereksinim problemini çözmek için [93]'te davranışa-dayalı düzen kontrol yöntemi tasarlanmıştır. Bu davranışa-dayalı yöntem, kablosuz veri güncelleme gereksinimini azaltır ve etmenlerin engellerden kaçınma yeteneğini artırır. [94]'te birden fazla insansız su altı aracının düzen yolu izleme kontrolü ele alınmış ve sanal yapı ile lider-takipçi kombinasyonuna dayanan bir düzen kontrolü yöntemi önerilmiştir.

1.4.3. Lider-takipçi Yaklaşım

Lider-takipçi yaklaşımında lider olarak tanımlanan etmen(ler) belirlenmiş yörüngede hareket ederken diğer etmenler (takipçiler) lider(ler)e göre arzu edilen duruşu (mesafe ve yönelimi) oluşturmaktadır [95]. Lider-takipçi kurulumu Şekil 1.15'te kutupsal koordinat sisteminde gösterilmiştir. Bu modelde (x, y) her robotun konumunu göstermekte

ve θ robotun evrensel koordinat sistemi $\langle W \rangle$ 'ye göre yönlendirmesini tanımlamaktadır. Lider $\langle L \rangle$ 'in düzenleşim vektörü $[x_L \ y_L \ \theta_L]^T$ ve takipçi $\langle F \rangle$ 'in düzenleşim vektörü $[x_F \ y_F \ \theta_F]^T$ olmaktadır. Liderin ve takipçinin kontrol girişleri sırasıyla doğrusal $[v_L \ \omega_L]^T$ ve açısal $[v_F \ \omega_F]^T$ hızlardır. Bu modelde ρ , liderin merkezinden takipçinin d mesafesindeki P işaretine olan mesafedir. Değişken ψ , liderin y -ekseninden işaret P 'ye bakış-açısıdır, β ise robotların bağıl yönelimidir, yani, $\beta \equiv \theta_L - \theta_F$.



Şekil 1.15. Kutupsal koordinatlar göstergesinde lider-takipçi kurulumu [96].

Lider-takipçi yaklaşımı basittir. Fakat, lider(ler)den takipçilere geri bildirimler verilmediyse düzen ayrışabilmektedir. Ayrıca, bu yaklaşım zayıf belirsizlik söndürüme özelliğine katlanmaktadır. [97]'de önerilen lider-takipçi kontrolünde bir takipçi liderin konumuna ve bir referans yörüngeyi, liderin hızına ve dinamiklerine ihtiyaç duymadan izlemektedir. Bu yöntem zayıf iletişimi ve düşük bant genişliği olan ortamlarda (örneğin sualtı ortamı ve deniz robotlarında) tercih edilmektedir.

İletişimsiz mobil robotların lider-takipçisi düzen kontrolü [98]'de incelenmiştir. Bu çalışmada, döner kafa-kontrollü kamera takipçi tarafından liderleri gözlemlemek için kullanılan tek sensördür. Robotlar arası mesafe tahminini gerektirmeyen yeni bir görme tabanlı düzen yapısı önerilmiştir. Düzen denetleyicisi için kamera sürekli olarak görsel ölçümler sağlamaktadır. [99]'da hız sınırlamalarına tabi olan lider-takipçi düzen kontrolü problemi ele alınmıştır. Sistemin iletişim topolojisi yönlü graf ile modellenmiştir.

Tasarlanan kontrol kuralı her takipçinin denetleyicisinin sadece kendi ve komşu araçlarının bilgilerini kullanması anlamında dağıtıktır.

1.4.4 Lidersiz Yaklaşım

Lider-takipçi yaklaşımının anlaşılması ve uygulanması kolaylığı yanısıra bazı sınırlamaları olmaktadır. Örneğin, lider düzenin tek başarısızlık noktası olabilmektedir. Takipçiden liderine açık geri bildirim olmamaktadır. Bu da, lider bozulularla etkilenirse, düzenin sürdürülemez olması anlamına gelmektedir. Bu nedenlerle lidersiz düzen kontrolü yaklaşımı ilgi çekmektedir. [100]'deki önerilen konsensüs-tabanlı yaklaşımda takımda açık bir lider yoktur. Bu yaklaşımda sadece komşuların bilgileri kullanılmaktadır. Sonuç olarak, önerilen yaklaşım düzen için tek başarısızlık noktasının üstesinden gelmekte ve komşu etmenler arasında bilgi alışverişi yoluyla açık şekilde geri bildirim uygulamaktadır. [101]'de kayan kipli (*sliding mode*) kontrol kavramı kullanılarak bir etmen grubunun belirli bir düzen şeklini sürdürebilmesi için lidersiz denetleyici önerilmiştir. Lidersiz düzen kontrolü ile ilgili son bulgular [102-105]'te sunulmuştur.

1.4.5. Konsensüs-tabanlı Yaklaşım

Konsensüs algoritmaları ağ bağımlı bir sistemin tüm bireylerinin bilgi durumlarını ortak bir değere yaklaştırmak için, değer/durum güncelleme yasaları tasarlamayı amaçlamaktadır. Düzen kontrolü problemlerinde konsensüs algoritmaları kullanılmaktadır. Bilgi durumlarının uygun şekilde seçilmesiyle düzen gerçekleştirilebilmektedir. Konsensüs algoritması çift integratörlü sistemlerin düzen kontrolü için [106]'da kullanılmıştır. Konsensüs temelli stratejiler merkezi liderliğin yokluğunda ve bilgi akışının tek yönlü olduğu durumlar için düzenin doğru şekilde elde edilmesini garanti edebilmektedir. Mevcut lider-takipçi, davranış-tabanlı ve sanal yapı/sanal lider düzen kontrolü yaklaşımların genel konsensüs oluşturma çerçevesinde birleştirilebileceği gösterilmiştir. [107]'de konsensüs temelli bir yaklaşım kullanılarak dağıtık düzen kontrolü problemi ele alınmıştır. Bir dönüşüm yoluyla düzen kontrolü problemi durum konsensüs problemine dönüştürülmüştür. [108]'de çarpışmadan kaçınma yeteneğine sahip konsensüs tabanlı işbirlikçi düzen kontrolü stratejisi önermiştir. Etmenlere konsensüs tabanlı bir algoritma ve

lider-takipçi yapısı uygulanmaktadır. Çarpışmadan-kaçınma stratejisi, yapay potansiyel yaklaşıma dayanmaktadır. Etmenler arasındaki çarpışmaların önlenme koşulları ağırlıklı grafların özelliklerinden yararlanılarak [109]'da elde edilmiştir.

1.4.6. Optimal Kontrol Yaklaşımı

Optimal kontrol teorisi çerçevesinde düzen kontrolü, yörünge izleme ve engelden/çarpışmadan kaçınma birleştirilerek tek bir kontrol problemi şeklinde [110]'da modellenmiştir. Karesel olmayan bir maliyet fonksiyonu ters optimal kontrol yaklaşımıyla düzenlenmiştir. Bu maliyet fonksiyonu analitik, dağıtık ve optimal düzen kontrolü yasasının elde edilmesine imkan sağlamaktadır. Optimal düzen kontrolü yasası Laplasyen matrisinin doğrusal fonksiyonu olarak elde edilmiştir. Bu nedenle bu yasa iletişim topolojisinde sadece komşulara dayanan yerel bilgileri içermektedir. Etmenler arasında yakın komşu etkileşimleri olan sistemin tek-boyutlu düzen kontrolü [111]'de ele alınmıştır. Yakın komşular arasındaki yerel bilgi alışverişinin (yani etmenlerin bağlı konumlarının) üzerine bir optimal kontrol problemi formüle edilmiştir. [112]'de çok etmenli sistemlerin işbirlikçi uyarlanır optimal kontrol problemi lider-takipçi yapısı ve değişken ağ topolojisi altında incelenmiştir. Takipçilerin dinamikleri bilinmemekte ve lider, belirsiz eksosistem (*perturbed exosystem*) ile modellenmiştir. Uyarlamalı dinamik programlama ve iç model prensibi birleşimiyle yaklaşık optimal kontrol yasası, gerçek zamanda giriş-durumu verileri kullanılarak, yenilemeli olarak öğrenilmektedir.

1.4.7. Diferansiyel Oyun Yaklaşımı

Çift integratörlü dinamikleriyle modellenen mobil etmenlerin düzen kontrolü problemi işbirlikçi olmayan diferansiyel oyun şeklinde [30]'da formüle edilmiş ve uzaklaşan ufuk *Nash* dengesi incelenmiştir. Bu formülasyon şu iki gerçeğe dayanmaktadır; (i) çift integratörlü etmenler kontrol edilebilir doğrusal sistem olarak ifade edilebilme, ve (ii) düzen kontrolünün maliyet fonksiyonları graf teorisi kullanılarak karesel matris biçimine dönüşebilmektedir. Sonuç olarak, çift integratörlü dinamiklerine sahip olan mobil etmenlerin düzen kontrolü doğrusal-kareli *Nash* diferansiyel oyun olarak modellenebilmektedir. Amaç kendini-zorlayan (*self-enforcing*) *Nash* dengesinin düzen

kontrolü stratejisi olarak kullanılmasıdır. Kendini-zorlayan kavramı hiçbir oyuncunun *Nash* dengesinden sapmaya teşebbüste bulunmadığına işaret etmektedir. Aksi durumda, oyuncu tek taraflı sapma ile kazanamamaktadır. Düzeni kurma ve koruma sürecinde etmenler bu mekanizmayı diğer takım üyeleriyle etkileşim stratejilerini oluşturmak için kullanmaktadırlar. Analitik izlenebilirliği nedeniyle açık döngü *Nash* dengesi düzen kontrolü için uygun bir seçimdir.

Bu alanda sadece birkaç araştırma çalışması yapılmıştır. [113]'te düzen kontrolü probleminin özel bir durumu olan konsensüs sorunu işbirlikli diferansiyel oyun olarak formüle edilmiş ve *Pareto*-verimli çözümler arasında *Nash* pazarlık çözümü doğrusal matris eşitsizliği yaklaşımı kullanılarak bulunmuştur. [114]'te bir grup İHA için diferansiyel oyun teorisi kullanılarak dağıtık düzen kontrolü yasası önerilmiştir. İHA'lar yönlü bir grafa göre bilgilerini değiştirebildikleri varsayılmıştır. Oyunda her İHA kendi kontrol çabasını en aza indirirken, aynı anda uçbirim düzen hataları ve uçbirim hız farklılıklarını graf yapısına göre ve diğer İHA'lara göre en aza indirmeye çalışmıştır. Önce klasik *Nash* dengesi çözümünün bilgi graf kısıtlamalarına uygun stratejileri üretmediği gösterilmiştir. Bu nedenle tamamen dağıtık *Nash* dengesi denetleyicileri oluşturulmuştur. Bu dağıtık kontrol yasası yaklaşımında uçbirim durumunun tahmini kullanılmıştır.

Bir lider ve N takipçiden oluşan bir ekip için düzen oluşturma ve sürdürme problemi [115]'te incelenmiştir. Lider hedefe ulaşmaya çalışırken takipçiler çarpışmalardan kaçınarak lideri izlemekteler. Problem doğrusal olmayan diferansiyel oyun çerçevesinde formüle edilmiştir. Çarpışmalardan kaçınma kısıtı doğrusal-kareli diferansiyel oyun formülasyonuna imkan vermemektedir. Çarpışmadan kaçınma dikkate alınmadığında problem doğrusal-kareli diferansiyel oyuna dönüşmektedir. Bu problemin *Nash* ve *Stackelberg* denge çözümleri eşdeğer olmaktadır. Doğrusal olmayan diferansiyel oyunun analitik yaklaşık çözümü oluşturulmuştur. Bir n - *quadrotor* ekibin düzen uçuşunun kontrolü diferansiyel oyun yaklaşımı ile [116]'da ele alınmıştır. Bu *quadrotor* ekibinin matematiksel modelinde bozulma durumları da dahil edilmiş ve *Newton-Euler* formülasyonu kullanılarak ortaya konulmuştur. Düzen uçuş planı lider-takipçi yapısını kullanmaktadır. Bu yapıda tasarlanmış yörüngeyi takip eden bir lider araç vardır. Diğer araçlar işaret bozulmaları altında sadece lideri takip etmekle yükümlüdürler. İstenen düzenleşimi elde etmek için bir boyutu indirgenmiş olan *Riccati* denklemi çözülmüştür.

1.5. Oyun Teorisi

Oyun teorisi iktisat, siyaset bilimi, psikoloji, mantık, bilgisayar bilimi ve biyoloji gibi bilim alanlarında ilgi görmektedir. Oyun teorisi, temelde iki ya da daha fazla sayıda oyuncunun aynı ortamda iş birliği yapmalarının ve aynı anda bu oyuncuların bireysel amaçlarının sağlanmasını dikkate alarak karar verme durumlarının matematik yoluyla incelenmesidir. Bu amaç oyuncunun kazancını, verimliliğini veya bir kar fonksiyonunu yükseltmek olabilmektedir. Her oyuncu kendi kararlarını belli bir amaç fonksiyonunun çıkarlarına göre vermektedir. Bu kararlar oyuncunun stratejileri olarak adlandırılır ve gerçekleşmesi mümkün olabilecek tüm stratejilerin oluşturduğu kümeyle ise oyuncunun geçerli olabilecek stratejiler kümesi denir.

Oyunlar tipik olarak 3 farklı şekilde sınıflandırılabilir [117]:

1. Statik ve dinamik oyunlar
2. İşbirlikçi ve işbirlikçi olmayan oyunlar
3. Sıfır-toplam ve sıfır-toplamsız oyunlar

Statik bir oyunda her oyuncu önceden strateji kümesini oluşturmaktadır. İki-oyunculu statik oyunda her oyuncunun geçerli olabilecek strateji kümesi sonlu sayı içeriyorsa ona bir matris oyunu denir. Bu adlandırmanın nedeni, iki-oyunculu oyunların geçerli olabilecek strateji kümelerinin tüm olası birleşmelerinin matris formuna getirilebilmesidir.

Dinamik oyunlarda her oyuncu zamanın (sürekli veya ayrık) fonksiyonu olan bir strateji profiline veya yörüngesine sahiptir. Oyuncuların dinamikleri diferansiyel denklemler ile ifade edilebiliyorsa, ona diferansiyel oyun denir. Oyuncuların yükseltmeye veya düşürmeye çalıştıkları amaç fonksiyonuna sırasıyla başarı ölçütü veya maliyet fonksiyonu denir.

Bir işbirlikçi olmayan oyunda, her oyuncu başkalarıyla işbirliği içerisine girmeden sadece kendi amacına odaklanmaktadır. Bu, literatürde, her oyuncunun graftaki diğer bireylerin değil, yalnızca kendi politikasını göz önünde bulundurduğu anlamında işbirlikçi olmayan oyun olarak adlandırılmaktadır. İşbirlikçi olmayan oyun için bilinen bir çözüm *Nash* dengesidir. *Nash* dengesi hiçbir oyuncunun tek taraflı sahip olduğu stratejide sapma yapma niyetinde olmadığı durum şeklinde yorumlanmaktadır. Bu durumdan saparsa, kendi

amaç fonksiyonunda kayıp meydana gelmektedir. *Nash* dengesi statik oyunda standart statik optimizasyon teknikleri kullanılarak, dinamik oyunda ise optimal kontrol teorisi kullanılarak incelenmektedir. İşbirlikçi olmayan oyun için *Nash* dengesinin varlığı veya eşsizliği her zaman garanti edilememektedir.

İşbirlikçi olmayan *Nash* oyunlarında tüm oyuncular aynı anda karar almaktalar. Eğer oyuncuların bazıları öncülük yapma amacıyla öncelikli olarak karar alıp ve kendi stratejilerini diğer oyunlara bildiriyorlarsa ve geride kalan oyuncular tepkisel hareket ediyorsa, bu oyunlar *Stackelberg* olarak oyunu adlandırılır.

Bir işbirlikçi oyunda, her oyuncunun kendine ait bireysel amacı olmasına rağmen, oyuncular ortaklaşarak kendi amaç fonksiyonlarını iyileştirmek için birbirleriyle işbirliği yapmaktadır. Bu nedenle, bir işbirlikçi oyun çok-amaçlı optimizasyon problemi olarak tanımlanmaktadır. İşbirlikçi oyunun tipik bir çözümü *non-inferior* veya *Pareto* optimumudur. *Non-inferior* çözüm bir oyuncunun amaç fonksiyonunda kayıp olmadan herhangi diğer bir oyuncunun amaç fonksiyonunda geliştirmenin imkansız olması durum olarak yorumlanmaktadır.

Bir sıfır-toplamlı oyunda, tüm oyuncuların amaç fonksiyonlarının toplamı sifıra eşittir. Dolayısıyla, bazı oyuncuların amaç fonksiyonlarının toplam kazancı diğer oyuncuların amaç fonksiyonlarında toplam kayba eşittir. Bu yüzden, oyuncuların çekişen amaçları vardır. Sıfır-toplamlı oyunda, *Nash* dengesi bir eyer noktası (*saddle point*) olarak bilinmektedir. Sıfır-toplamsız oyunda, tüm oyuncuların amaç fonksiyonlarının toplamı sifıra eşit olmamaktadır.

Çok etmenli sistem düzeyi problemlerin bir oyun sınıfıyla modellenerek uygun (ve olası optimal) çözümlerinin araştırılması yapılabilmektedir. Genel olarak bir oyunun mutlak optimum çözümü olmamaktadır. Çeşitli kavramlarda çözümleri vardır. Bir çözüm için oyunun uygun yapı içerisinde olması gerekmektedir. Oyunculara sunulan bilgilere ve aralarında işbirlik yapma gönüllüklerine bağlı olarak uygun çözümler sunulabilmektedir. Bir oyunun klasik çözümlerinden bazıları aşağıda verilmiştir.

1. *Pareto* optimal: bir oyuncunun refahını (*payoff*) arttırmanın diğerinin refahını azaltmadan mümkün olmadığı durumu ifade etmektedir.

2. *Stackelberg* dengesi: bilgi asimetrisi ile ilgili bir durumdur. Bir (öncü) oyuncu önceden kendi stratejilerini açıklar, diğer oyuncular tercihlerini öncü oyuncunun tercihini göz önünde bulundurarak yapar.
3. *Nash* dengesi: bilgi simetrisi olan durumdur. Oyuncular işbirlik talebinde bulunmaz ve kendi stratejileri hakkında bilgi paylaşmazlar.

İkiden fazla oyuncunun bulunduğu ve her oyuncunun kendi bireysel maliyet fonksiyonunu en aza indirmek için uğraştığı bir oyunu ele alalım. Her oyuncunun durumu keyfi mertebeden bir diferansiyel denklem ile tanımlanmaktadır. Tüm oyuncuların maliyet fonksiyonlarının toplamı sıfırdan farklı ve aynı zamanda sabit değildir. Bu bir diferansiyel oyunun tanımıdır. Diferansiyel oyunların araştırılması *Isaacs* tarafından başlatılmıştır [118]. Genel olarak sıfır-toplamlı olmayan bir m oyunculu diferansiyel oyunda i 'inci ($i = 1, \dots, m$) oyuncu kendi \mathbf{u}_i kontrol değişken sinyalini

$$J_i(\mathbf{u}) = g_i(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_0^{t_f} C_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad (1.6)$$

bireysel maliyet fonksiyonunu

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.7)$$

durum kısıtlarına altında en aza indirmek arzusuyla seçmektedir. Burada \mathbf{x} , n -boyutlu durum vektörüdür. Terminal zaman parametresi t_f değişken ya da sabit olabilmektedir. Sabit olduğu duruma sonlu ufuk durumu denir.

Oyunda, hangi nitelikte bir çözümün talep edildiğinin belirtilmesi gerekmektedir. Örneğin, *minimax*, *Nash* dengesi, *Pareto-optimal* gibi çözüm nitelikleri önceden belirlenmelidir. Ayrıca, oyunun bilgi sunumu durumu tanımlanmalıdır. (1.6) ve (1.7) ile tanımlanan diferansiyel oyunda her oyuncu kendi durum vektörünün şu anki değeriyle birlikte tüm sistem parametrelerini ve maliyet fonksiyonlarını bildiği, fakat rakip oyuncuların stratejilerini bilmediği varsayılmaktadır. Her oyuncunun stratejileri zamanın ve durum vektörünün fonksiyonu olarak ifade edilebilmektedir.

Pontryagin'nin ilkesinin [119] geliştirilmesiyle diferansiyel oyunlar ve optimal kontrol teorisi arasında bir bağlantının olduğu ortaya çıkmıştır. Aslında, diferansiyel oyun problemleri optimal kontrol problemlerinin genelleştirilmesi yani birden fazla

denetleyicinin (oyuncunun) olduğu durumları temsil etmektedir. Fakat, diferansiyel oyunlar kavramsal olarak kontrol problemlerinden çok daha karmaşıktır. Bu da çözümün ne olduğunun belirgin olmaması, yani çok sayıda farklı çözüm olmasından kaynaklanmaktadır.

1.5.1. Nash ve Stackelberg Dengesi

(1.6)-(1.7)'deki oyun için oyuncular arasında işbirliği kabul edilemez veya en azından uygulaması zor olduğu durumda, doğal olarak bir *Nash* dengesi özelliğine sahip çözümler ilgi çekmektedir. [120]'de bir strateji kümesinde *Nash* dengesinin gerekli koşullarını elde etmek için iki yöntem kullanılmıştır. Bu yöntemler değer-fonksiyon ve varyasyon (*variational*) yaklaşımıdır. Bir oyuncu eğer diğer oyuncuların *Nash* dengesi oynadıklarına inanıyorsa, o oyuncu da *Nash* oynamalıdır. Fakat eğer, rakiplerinin strateji seçimlerinden emin değilse, onların en kötü kümeyi seçmelerine karşı, kendi maliyetini en aza indirmek için seçimini yapmalıdır. İki oyunculu sıfır-toplamlı oyunda, *Nash* çözümü varsa eğer, ayrıca *minimax* olduğu bilinmektedir. Ancak bu, hem $m > 2$ olduğu durumda, hem de sıfır-toplamlı olmayan oyunda söz konusu olmamaktadır.

Denklem (1.6) doğrusal ve maliyet fonksiyonları (1.7) durum vektörü (\mathbf{x}) ve kontrollerin (\mathbf{u}) kareli fonksiyonları olduğu durumunda bu oyuna doğrusal-kareli diferansiyel oyunu denir. Optimal kontrol teorisindeki doğrusal-kareli problemlerin karşılığı gibi, doğrusal-kareli diferansiyel oyun analitik işlenebilmektedir [121].

İki temel bilgi yapısı, açık döngü ve kapalı döngü olarak bilinmektedir. Tüm oyuncular eğer bütün oyun süresi $t \in [0, t_f]$ 'de sadece başlangıç durum vektörü $\mathbf{x}(0)$ erişebilir ise, oyunun açık döngü bilgi yapısı vardır. Başka bir ifadeyle, oyuncular eş zamanlı olarak oyunun başında bütün oyun süresi için kendi stratejilerini belirlemek zorundalar. Toplamı sıfır olmayan oyunlarda *Nash* çözümünün gerekli koşullarını elde etmek için, açık döngü ve kapalı döngü kontroller arasında ayırım yapılmalıdır. Analitik işlenebilir olması nedeniyle, açık döngü kontrol türü popülerdir. Kapalı döngü bilgi yapısı, oyuncuların $\forall t$ anında durum vektörü $\mathbf{x}(t)$ 'ye erişebilir olmaları durumudur. Kontrol uygulamalarında kapalı döngü kontrol sıkça kullanılmaktadır. Fakat kapalı döngü

diferansiyel oyunlarda bilgi yapısının karışıklığı nedeniyle analitik işlenebilirlik kolay değildir.

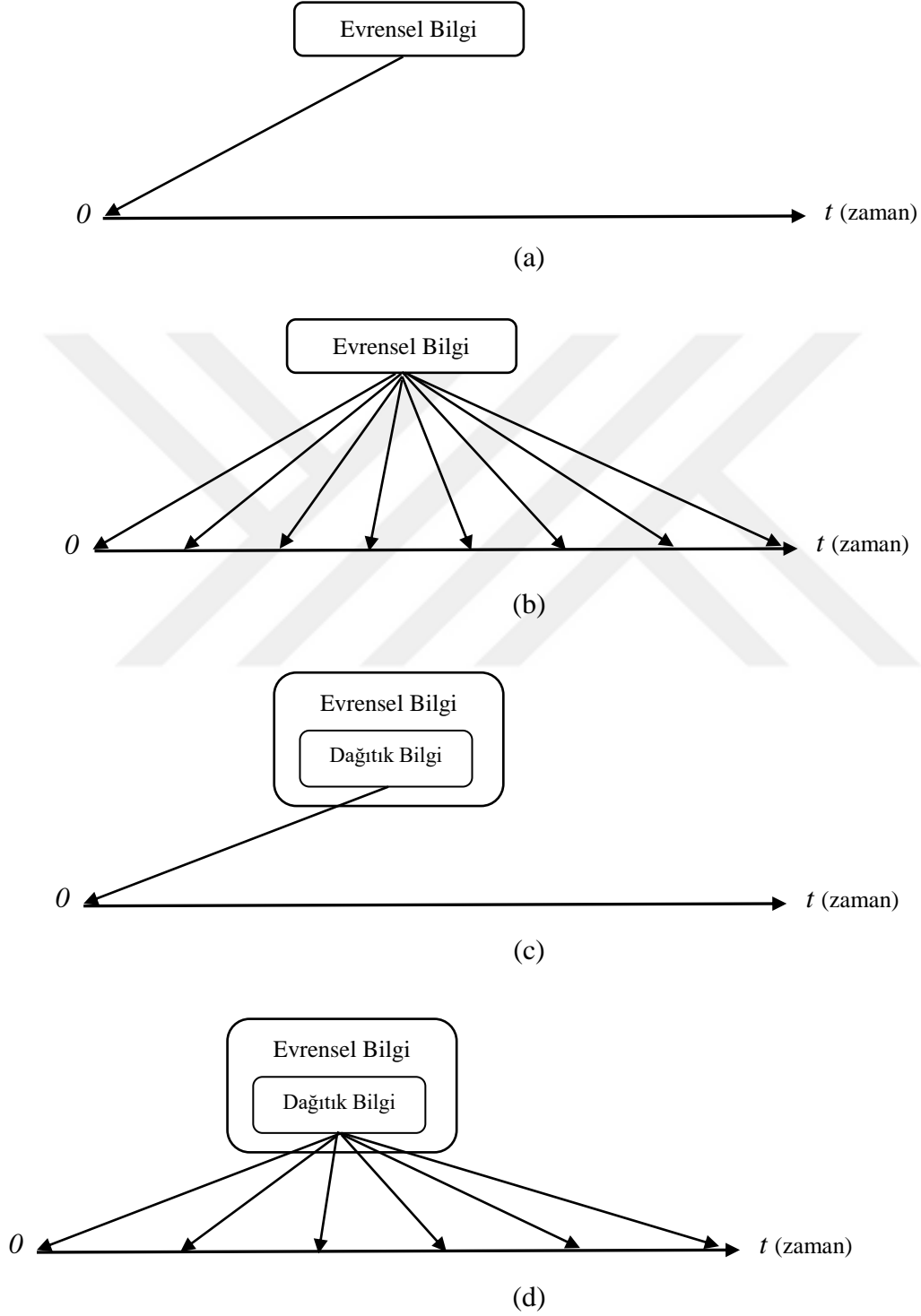
Nash oyunlarında, tüm oyuncuların aynı anda kararlarını verdikleri varsayılmaktadır. Diğer diferansiyel oyun türünde oyuncular kararlarını aşamalı bir şekilde vermektedirler. İlk hareket etme hakkına sahip oyuncuya lider, diğer oyuncuya ise takipçi denir. İki veya daha fazla liderin olması durumunda liderler *Nash* oynarlar ve aynı takipçiler için de geçerlidir.

Bir oyuncunun diğer oyuncuya egemenliği olan aşamalı oyun durumları için çözüm kavramı, 1934 yılında *von Stackelberg* tarafından tanımlanmıştır [122]. Liderler, takipçilerinin optimal stratejilerini dikkate alarak, azami kazanç elde ettikleri zaman bir *Stackelberg* çözümü elde edilmektedir [123]. *Stackelberg* diferansiyel oyunlarının çözümleri açısından açık döngü ve kapalı döngü çözüm türleri olmaktadır. Açık döngü *Stackelberg* dengesinde, oyuncular başlangıçta ($t = 0$) bütün ufuk süresi için tüm kararlarını almaktalar. Genel olarak açık döngü çözümlerinin, herhangi bir $t > 0$ zamanında geriye kalan kararların artık optimal olamayacağı anlamında, zamansal tutarlılıkları yoktur. Kapalı döngü *Stackelberg* dengesi şu anki durum ve zamanın işlevleri olarak ifade edilen kararlardan oluşmaktadır. Bu çözümlerin zamansal tutarlılıkları olmaktadır [124].

1.5.2. Bilgi Yapıları

Diferansiyel oyunlarda önemli bir faktör oyunun bilgi yapısıdır. Bir oyunda, oyuncuya sunulan bilgiler evrensel ise, oyuncu bütün diğer oyuncuların bilgilerine erişebilmektedir. Eğer oyuncunun evrensel bilgilere sadece başlangıç aşamada erişimi var ise, oyuncu açık döngü bilgi yapısı altındadır (Şekil 1.16 (a)). Eğer oyuncunun evrensel bilgilerine oyunun her aşamasında erişimi var ise, oyuncu kapalı döngü bilgi yapısı altındadır (Şekil 1.16 (b)). Büyük ölçekli çok etmenli sistemlerde her etmen sensör ağları üzerinden sadece bireylerin bir alt kümesinin (yakın komşularının) bilgilerine erişebilmektedir. Diğer bir ifadeyle, oyuncu dağıtık bilgiye sahiptir. Dağıtık açık döngü bilgi yapısında oyuncunun erişimi için sadece evrensel bilginin altkümesi olan dağıtık bilgi vardır (Şekil 1.16 (c)). Dağıtık kapalı döngü bilgi yapısı Şekil 1.16 (d)'de gösterilmiştir.

Dağıtık açık döngü bilgi yapısı altında stratejiye dağıtık açık döngü stratejisi ve dağıtık kapalı döngü bilgisi altındaki stratejiye dağıtık kapalı döngü stratejisi denir.



Şekil 1.16. (a) Evrensel açık döngü bilgi yapısı, (b) Evrensel kapalı döngü bilgi yapısı, (c) Dağıtık açık döngü bilgi yapısı, ve (d) Dağıtık kapalı döngü bilgi yapısı.

1.6. Ön Bilgiler

Bu tez çalışmasında düzen kontrolünün modellenmesi temel düzeyde graf teorisi ve işbirlikçi olmayan doğrusal-kareli diferansiyel oyun teorisi ile yakından ilgilidir. Bu nedenle, bu bölümde çalışmanın gerektirdiği kadarıyla bu teorilerin temel kavramları ve notasyonu anlatılmıştır.

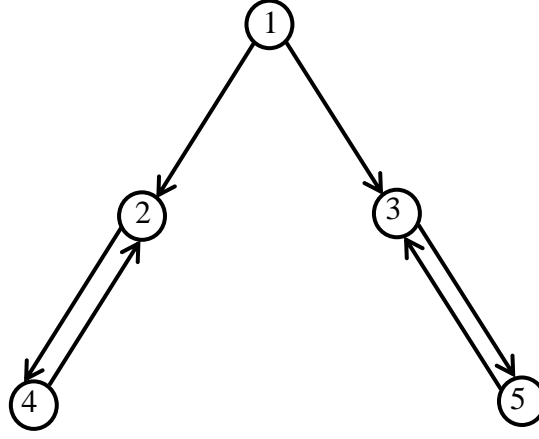
1.6.1. Graf Teorisi

Bir yönlü graf $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ düğüm kümesi $\mathcal{V} = \{1, \dots, m\}$ ve kenar kümesi $\mathcal{E} \subseteq \{(i, j) : i, j \in \mathcal{V}\}$ 'den oluşmaktadır. Burada $(i, j) \in \mathcal{E} \Rightarrow i \neq j$ ve $(i, j) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow (j, i) \in \mathcal{E}$, sırasıyla grafın döngü içermediği ve sadece farklı düğümlerden olan sıralı çiftleri içerdiği anlamına gelmektedir. \mathcal{G} hakkında aşağıdaki varsayımlar yapılmıştır.

Varsayım 1.1. Aşağıdaki ifadeler yönlü graf $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ için geçerlidir:

- i. \mathcal{G} 'nin zamanda değişmez sabit yapısı var, yani \mathcal{E} sabit bir kümedir.
- ii. \mathcal{G} 'deki her (i, j) kenarı bir artı sayısı $\omega_{ij} > 0$ ile ilişkilidir.
- iii. \mathcal{G} bağlantılıdır, yani her $(i, j) \in \mathcal{V}$ çift düğüm için, i 'den j 'ye tüm $j = 1, \dots, m$, $j \neq i$, \mathcal{E} 'deki kenarlardan oluşan bir yol vardır.

Örneğin, Şekil 1.17'de bir yönlü graf gösterilmiştir. Bu graf için, $\mathcal{V} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $\mathcal{E} = \{(1,2), (1,3), (2,4), (4,2), (3,5), (5,3)\}$ şeklindedir.



Şekil 1.17. Beş düğümlü altı kenarlı bir yönlü graf.

1.6.1.1. Laplasyen Matrisi

Graf Laplasyen matrisi L graf $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 'ile ilişkilendirilmiş bir $m \times m$ matrisdir ($L \in \mathbb{R}^m$). Bu matrisin tanımı

$$L = DWD^T \quad (1.8)$$

şeklindedir [125]. Burada D graf \mathcal{G} 'nin ilişki matrisi ve $W = \text{diag}(\omega_{ij})$ bir köşegen (ağırlık) matrisidir. D ve W matrislerinin boyutları sırasıyla $m \times |\mathcal{E}|$ ve $|\mathcal{E}|$ dir ($D \in \mathbb{R}^{m \times |\mathcal{E}|}$, $W \in \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|}$). Burada $|\mathcal{E}|$ kenar kümesi \mathcal{E} 'nin içerdiği kenar sayısıdır. D 'nin satırları ve sütunleri sırayla \mathcal{V} 'deki düğümler ve \mathcal{E} 'deki kenarlar ile endekslenir. D 'de uv elemanı eğer v kenarının yönü u düğümünden öteye doğru ise 1'e eşitlenir, eğer v kenarının yönü u düğümüne doğru ise -1'e eşitlenir, aksi halde 0'a eşitlenir. Şekil 1.17'deki yönlü grafi için, ilişki ve graf Laplasyen matrisleri aşağıda verilmiştir (W 'nin birim matrisi olduğu varsayılmıştır).

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Laplasyen matrisi literatürde bilgi matrisi olarak da ifade edilmiştir. Çok etmenli sistemlerin koordinasyonu için n -boyutlu graph Laplasyen \mathcal{L}

$$\mathcal{L} = \mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_n \quad (1.9)$$

şekilinde tanımlanmaktadır ($\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{mn}$) [33]. Burada $\mathbf{I}_n \in \mathbb{R}^n$ n -boyutlu birim matris ve \otimes işleği *Kronecker* çarpımıdır.

Açıklama 1.1. $\mathbf{X} = [\alpha_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ve $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{p \times q}$ matrisleri için *Kronecker* çarpımı sonucu elde edilen matris

$$\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}\mathbf{Y} & \dots & \alpha_{1n}\mathbf{Y} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1}\mathbf{Y} & \dots & \alpha_{mn}\mathbf{Y} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mp \times nq}.$$

şeklindedir [126].

İki matrisin *Kronecker* çarpımı aşağıda gösterilmiştir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1 \times \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} & 2 \times \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \\ 3 \times \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} & 4 \times \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} [1 \times 0 & 1 \times 5] & [2 \times 0 & 2 \times 5] \\ [1 \times 6 & 1 \times 7] & [2 \times 6 & 2 \times 7] \\ [3 \times 0 & 3 \times 5] & [4 \times 0 & 4 \times 5] \\ [3 \times 6 & 3 \times 7] & [4 \times 6 & 4 \times 7] \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \times 0 & 1 \times 5 & 2 \times 0 & 2 \times 5 \\ 1 \times 6 & 1 \times 7 & 2 \times 6 & 2 \times 7 \\ 3 \times 0 & 3 \times 5 & 4 \times 0 & 4 \times 5 \\ 3 \times 6 & 3 \times 7 & 4 \times 6 & 4 \times 7 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 10 \\ 6 & 7 & 12 & 14 \\ 0 & 15 & 0 & 20 \\ 18 & 21 & 24 & 28 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Açıklama 1.2. \mathbf{X} , \mathbf{Y} , \mathbf{U} ve \mathbf{V} reel matrisleri için aşağıdaki ifadeler *Kronecker* çarpımı özellikleri içerisinde yer almaktadır.

$$(\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y})^T = \mathbf{X}^T \otimes \mathbf{Y}^T \quad (1.10)$$

$$(\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y})(\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}) = (\mathbf{XU}) \otimes (\mathbf{YV}) \quad (1.11)$$

Açıklama 1.3. Köşegen, simetrik ve pozitif (yarı)tanımlı iki matrisin *Kronecker* çarpımı sonucu sırayla aynı özellikleri taşıyan bir matristir.

Açıklama 1.2'deki *Kronecker* çarpımı özellikleri kullanılarak (1.9)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathbf{DWD}^T \otimes \mathbf{I}_n \\
&= (\mathbf{D} \otimes \mathbf{I}_n)(\mathbf{W} \otimes \mathbf{I}_n)(\mathbf{D} \otimes \mathbf{I}_n)^T
\end{aligned} \quad (1.12)$$

veya

$$\mathcal{L} = \mathbf{DWD}^T \quad (1.13)$$

şeklinde ifade edilebilmektedir. Burada $\mathbf{D} = \mathbf{D} \otimes \mathbf{I}_n$ ve $\mathbf{W} = \mathbf{W} \otimes \mathbf{I}_n$. Aşağıdaki açıklama graf Laplasyenin temel özelliklerini özetlemiştir.

Açıklama 1.4. Aşağıdaki ifadeler yönlü graf $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ için doğrudur:

- i. \mathcal{L} simetrik ve pozitif yarıtanımlıdır.
- ii. \mathcal{L} aşağıdaki karelerin-toplamı (*sum-of-squares*) özelliğini her $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{nm}$ için sağlamaktadır:

$$\mathbf{z}^T \mathcal{L} \mathbf{z} = \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} \omega_{ij} \|\mathbf{z}_j - \mathbf{z}_i\|^2 \quad (1.14)$$

Burada $\mathbf{z} = [\mathbf{z}_1^T, \dots, \mathbf{z}_m^T]^T$, $\mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^n$ her $i = 1, \dots, m$, ve $\|\cdot\|$ simgesi Öklit normunu \mathbb{R}^n 'de göstermektedir.

Açıklama 1.4'te (b)'deki ifade graf teorisinde iyi bilinen bir sonuçtur ve onun ispatı örneğin [127]'de bulunabilmektedir. Matris teorisinde reel matris \mathbf{M} için iyi bilinen iki özellik söyler: (i) \mathbf{M} pozitif yarıtanımlıdır ancak ve ancak $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ için $\mathbf{y}^T \mathbf{M} \mathbf{y} \geq 0$, ve (ii) $\mathbf{M} \mathbf{M}^T$ simetriktir. (1.14)'te sol taraf (karelerin-toplamı) her zaman $\mathbf{z}^T \mathcal{L} \mathbf{z} \geq 0$ olmaktadır. Bu da \mathcal{L} 'in pozitif yarıtanımlı matris olduğunu doğrulamaktadır. Ayrıca, \mathcal{L} 'in simetrik olduğu (1.13)'teki tanımından anlaşılmaktadır. Burdan Açıklama 1.4'te (a)'nın sağlanması anlaşılmaktadır.

Açıklama 1.5. Aşağıdaki özellik her $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{nm}$ için sağlanmaktadır.

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} \omega_{ij} (\mathbf{z}_j - \mathbf{z}_i) = \mathbf{z}^T \mathcal{D} \mathcal{W} \quad (1.15)$$

Açıklama 1.6. Öklit normu çok boyutlu durum uzayı \mathbb{R}^n 'de uzaklık ve mesafe belirtmek için kullanılan en yaygın normdur ve şöyle tanımlanır, $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

$$\|\mathbf{y}\|^2 = \mathbf{y}^T \mathbf{y} = \sum \mathbf{y}_i^2 \quad (1.16)$$

$$\|\mathbf{y}\| = \sqrt{\sum \mathbf{y}_i^2} \quad (1.17)$$

1.6.2. Doğrusal-Kareli Diferansiyel Oyun

m -oyunculu bir oyunu varsayalım. Oyunun dinamikleri bir doğrusal diferansiyel denklemle aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir.

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \sum_{i=1}^m \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i(t), \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0 \quad (1.18)$$

Burada $\mathbf{z}(t)$ oyunun durum vektörü, \mathbf{z}_0 başlangıç durum vektörü ve \mathbf{u}_i i 'inci ($i = 1, \dots, m$) oyuncunun kontrol değişken girdisidir. Her oyuncu bir amacı doğrultusunda bir bireysel dışbükey maliyet fonksiyonu J^i 'ye sahiptir.

$$J^i = \mathbf{z}(t_f)^T \mathbf{Q}_{if} \mathbf{z}(t_f) + \int_0^{t_f} \left(\mathbf{z}(t)^T \mathbf{Q}_i \mathbf{z}(t) + \sum_{j=1}^m \mathbf{u}_j(t)^T \mathbf{R}_{ij} \mathbf{u}_j(t) \right) dt \quad (1.19)$$

Burada t_f ufuk sonu süresidir. Tüm ağırlık matrisler simetriktir. Ayrıca, \mathbf{Q}_{if} , \mathbf{Q}_i pozitif yarıtanımlı (\mathbf{Q}_{if} , $\mathbf{Q}_i \geq 0$), \mathbf{R}_{ii} ise pozitif tanımlıdır ($\mathbf{R}_{ii} > 0$). Bu maliyet fonksiyonları tüm oyunculara bilinmektedir. i 'inci ($i = 1, \dots, m$) oyuncunun isteği, bireysel maliyet fonksiyonu J^i 'i, oyunun temeldeki dinamiklerine göre uygun kontrol \mathbf{u}_i^* 'yi seçerek minimize yapmaktır.

Oyuncular işbirliği içerisinde olmadıkları durumunda *Nash* stratejisi oynanmaktadır. Eğer tüm oyuncular biri hariç hepsi *Nash* stratejilerini kullanmaktalarsa, sapan oyuncu maliyetini düşüremez [128]. Doğrusal-kareli diferansiyel oyun (1.18) ve (1.19)'ün açık döngü bilgi yapısına sahip olduğunu varsayalım. Böylece, tüm oyuncuların $\forall t$ anında ($t \in [0, t_f]$) sadece başlangıç durumu \mathbf{z}_0 'a erişimleri olmaktadır. Bu durum için açık döngü *Nash* dengesi aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 1.1. Tüm kabul edilebilir strateji seçim kümeleri $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m)$ için

$$J^i(\mathbf{u}_1^*, \dots, \mathbf{u}_{i-1}^*, \mathbf{u}_i^*, \mathbf{u}_{i+1}^*, \dots, \mathbf{u}_m^*) \leq J^i(\mathbf{u}_1^*, \dots, \mathbf{u}_{i-1}^*, \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i+1}^*, \dots, \mathbf{u}_m^*) \quad (1.20)$$

$$\mathbf{u}_i(t) \in \Gamma_i, i = 1, \dots, m, t \geq 0$$

eşitsizliği sağlanırsa, o zaman strateji seçim küme bileşimi $(\mathbf{u}_1^*, \dots, \mathbf{u}_m^*)$ Nash dengesidir. Burda i 'inci ($i = 1, \dots, m$) oyuncu strateji seçim kümesi Γ_i 'den tercih yapmaktadır.

1.6.2.1. Açık Döngü Nash Dengesi

Bu bölümde doğrusal-kareli diferansiyel oyun (1.18) ve (1.19)'un eşsiz açık döngü Nash dengesi araştırılmıştır. J^i tüm \mathbf{z}_0 için \mathbf{u}_i 'nin kesinlikle dışbükey fonksiyonudur ($i = 1, \dots, m$). Bu nedenle *minimum* prensip'den gelen koşullar hem gerekli ve hemde yeterli olmaktadır [129].

Hamiltonian

$$H^i(t) = \mathbf{z}(t)^T \mathbf{Q}_i \mathbf{z}(t) + \sum_{j=1}^m \mathbf{u}_j(t)^T \mathbf{R}_{ij} \mathbf{u}_j(t) + \lambda_i(t)^T \left(\mathbf{A} \mathbf{z}(t) + \sum_{i=1}^m \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i(t) \right) \quad (1.21)$$

\mathbf{u}_i 'ye göre minimize edilmesi aşağıdaki koşulu verir.

$$\frac{\partial H^i}{\partial \mathbf{u}_i} = \mathbf{R}_{ii} \mathbf{u}_i(t) + \lambda_i(t)^T \mathbf{B}_i = 0 \quad (1.22)$$

Buradan \mathbf{u}_i

$$\mathbf{u}_i(t) = -\mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{B}_i^T \lambda_i(t) \quad (1.23)$$

olarak elde edilir. Ayrıca, λ_i vektörleri aşağıdaki diferansiyel denklemini sağlamaktadır.

$$\dot{\lambda}_i(t) = -\frac{\partial H^i}{\partial \mathbf{z}}$$

$$= -\mathbf{Q}_i \mathbf{z}(t) - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda}_i(t), \quad \boldsymbol{\lambda}_i(t_f) = \mathbf{Q}_{if} \mathbf{z}(t_f) \quad (1.24)$$

Denklem (1.18) ve (1.23)'ten (1.25) elde edilmektedir.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{z}(t) - \sum_{i=1}^m \mathbf{B}_i \mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{B}_i^T \boldsymbol{\lambda}_i(t) \\ &= \mathbf{A} \mathbf{z}(t) - \sum_{i=1}^m \mathbf{S}_i \boldsymbol{\lambda}_i(t) \end{aligned} \quad (1.25)$$

Burada $\mathbf{S}_i = \mathbf{B}_i \mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{B}_i^T$.

Bir başka ifadeyle, oyunun bir eşsiz açık döngü *Nash* dengesi vardır eğer diferansiyel denklemi

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}_1(t) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\lambda}_m(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -\mathbf{A} & \mathbf{S}_1 & \dots & \mathbf{S}_m \\ \mathbf{Q}_1 & \mathbf{A}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}_m & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}_1(t) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\lambda}_m(t) \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

sınır koşulları

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0, \quad \boldsymbol{\lambda}_i(t_f) = \mathbf{Q}_{if} \mathbf{z}(t_f) \quad (1.27)$$

ile birlikte bir eşsiz çözümü var ise. Varsayalım

$$\boldsymbol{\zeta}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}_1(t) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\lambda}_m(t) \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A} & \mathbf{S}_1 & \dots & \mathbf{S}_m \\ \mathbf{Q}_1 & \mathbf{A}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}_m & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}^T \end{bmatrix}$$

Böylece, iki-nokta sınır-değer problemi (1.26) ve (1.27)

$$\dot{\zeta}(t) = -\mathbf{M}\zeta(t) \quad (1.29)$$

$$\mathbf{P}\zeta(0) + \mathbf{Q}\zeta(t_f) = [\mathbf{z}_0^T \ 0 \ \dots \ 0]^T \quad (1.30)$$

şeklinde ifade edebilir. Burada

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ -\mathbf{Q}_{1f} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \vdots \\ -\mathbf{Q}_{mf} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

ve \mathbf{I} birim matrisidir.

Matris diferansiyel denklemi (1.29)'un eşsiz çözümü $\zeta(t) = e^{-t\mathbf{M}}\zeta(0)$ şeklindedir. Bu çözümün sınır değeri t_f anında

$$\zeta(t_f) = e^{-t_f\mathbf{M}}\zeta(0) \quad (1.31)$$

olmaktadır. (1.30)'dan, her \mathbf{z}_0 için denklem

$$(\mathbf{P} + \mathbf{Q}e^{-t_f\mathbf{M}})\zeta(0) = [\mathbf{z}_0^T \ 0 \ \dots \ 0]^T \quad (1.32)$$

veya eşiti olan

$$(\mathbf{P}e^{t_f\mathbf{M}} + \mathbf{Q})e^{-t_f\mathbf{M}}\zeta(0) = [\mathbf{z}_0^T \ 0 \ \dots \ 0]^T \quad (1.33)$$

denkleminin eşsiz çözümünün varlığı oyunun her \mathbf{z}_0 için eşsiz açık döngü *Nash* dengesinin varlığı anlamına gelmektedir. Bu durum da $(\mathbf{P}e^{t_f M} + \mathbf{Q})$ matrisinin tersi alınabilirliği ile eşdeğerdir. Varsayalım

$$\mathbf{H}(t_f) = \mathbf{C}_{11}(t_f) + \mathbf{C}_{12}(t_f)\mathbf{Q}_{1f} + \dots + \mathbf{C}_{1,m+1}(t_f)\mathbf{Q}_{mf} \quad (1.34)$$

Burada $\mathbf{C}_{ij}(t_f)$ blok matrislerinin tanımı

$$e^{t_f M} = [\mathbf{C}_{ij}(t_f)], \quad (i = 1, \dots, m+1, j = 1, \dots, m) \quad (1.35)$$

şeklindedir.

Teorem 1.1. Doğrusal-kareli diferansiyel oyun (1.18) ve (1.19)'un her başlangıç durum vektörü \mathbf{z}_0 için bir eşsiz açık döngü *Nash* dengesi vardır eğer $\mathbf{H}(t_f)$ tersi alınabilir bir matris ise. Bu durumda, dengenin durum yörüngesi iki-nokta sınır-değer problemi (1.30)'dan

$$\mathbf{z}(t) = [\mathbf{I} \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0}]e^{(t_f-t)M} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{Q}_{1f} \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_{mf} \end{bmatrix} \mathbf{H}(t_f)^{-1} \mathbf{z}_0 \quad (1.36)$$

olarak hesaplanabilmektedir.

İspat: Varsayalım

$$\emptyset = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{C}_{12} & \dots & -\mathbf{C}_{1,m+1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

Matris işlemleriyle

$$\begin{aligned} \emptyset(\mathbf{P}e^{t_f M} + \mathbf{Q})e^{-t_f M} \boldsymbol{\zeta}(0) &= \emptyset[\mathbf{z}_0^T \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0}]^T \\ &= [\mathbf{z}_0^T \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0}]^T \end{aligned} \quad (1.38)$$

olduğu gösterilebilmektedir. Burada $\Phi(\mathbf{P}e^{t_f\mathbf{M}} + \mathbf{Q})$ 'nin sol üst bloku $\mathbf{H}(t_f)$ ile eşittir.

$$\Phi(\mathbf{P}e^{t_f\mathbf{M}} + \mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}(t_f) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ -\mathbf{Q}_{1f} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ -\mathbf{Q}_{mf} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

Matris $\Phi(\mathbf{P}e^{t_f\mathbf{M}} + \mathbf{Q})$ 'nin tersi aşağıdaki şekildedir.

$$[\Phi(\mathbf{P}e^{t_f\mathbf{M}} + \mathbf{Q})]^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}(t_f)^{-1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}_{1f}\mathbf{H}(t_f)^{-1} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}_{mf}\mathbf{H}(t_f)^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (1.40)$$

Böylece, aşağıdaki sonuca varılmaktadır.

$$\begin{aligned} \zeta(t_f) &= e^{-t_f\mathbf{M}}\zeta(0) \\ &= [\Phi(\mathbf{P}e^{t_f\mathbf{M}} + \mathbf{Q})]^{-1}[\mathbf{z}_0^T \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{Q}_{1f} \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_{mf} \end{bmatrix} \mathbf{H}(t_f)^{-1} \mathbf{z}_0 \end{aligned} \quad (1.41)$$

Özetlemek gerekirse, $[\Phi(\mathbf{P}e^{t_f\mathbf{M}} + \mathbf{Q})]^{-1}$ var olması iki-nokta sınır-değer problemi (1.30)'un çözümünün olması demektir. $[\Phi(\mathbf{P}e^{t_f\mathbf{M}} + \mathbf{Q})]^{-1}$ matrisinin varlığı da $\mathbf{H}(t_f)^{-1}$ matrisinin varlığına bağlıdır. Bir başka ifadeyle, eğer $\mathbf{H}(t_f)$ tersi alınabilir ise, (1.30)'un çözümü vardır. Bu durumda, doğrusal-kareli diferansiyel oyun (1.18) ve (1.19)'un her başlangıç durum vektörü \mathbf{z}_0 için bir eşsiz açık döngü *Nash* dengesi vardır.

Diğer yandan, eğer oyunun bir açık döngü *Nash* dengesi var ise ($\mathbf{H}(t_f)$ tersi alınabilir ise), $\zeta(0)$ ve $\zeta(t)$ aşağıdaki şekilde elde edilmektedir.

$$\zeta(0) = e^{t_f M} \begin{bmatrix} I \\ Q_{1f} \\ \vdots \\ Q_{mf} \end{bmatrix} H(t_f)^{-1} z_0 \quad (1.42)$$

$$\zeta(t) = e^{-tM} \zeta(0)$$

$$= e^{(t_f-t)M} \begin{bmatrix} I \\ Q_{1f} \\ \vdots \\ Q_{mf} \end{bmatrix} H(t_f)^{-1} z_0 \quad (1.43)$$

Nash dengesinin durum yörüngesi $\zeta(t)$ 'den (1.36) şeklinde hesaplanabilmektedir. ■

1.6.2.2. Riccati Diferansiyel Denklemleri

Bu bölümde *Nash* dengesinin varlığı bir matris diferansiyel denklemler kümesinin çözümüyle doğrudan ilişkili olduğu gösterilmektedir.

(1.34)'ten $H(t_f)$ aşağıdaki şekilde ifade edilebilmektedir.

$$\begin{aligned} H(t_f) &= [C_{11} \quad C_{12} \quad \dots \quad C_{1,m+1}] \begin{bmatrix} I \\ Q_{1f} \\ \vdots \\ Q_{mf} \end{bmatrix} \\ &= [I \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0}] e^{t_f M} \begin{bmatrix} I \\ Q_{1f} \\ \vdots \\ Q_{mf} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.44)$$

Durum yörüngesi (1.36) $H(t_f)$ notasyonu $t \in [0, t_f]$ için genişletilmesiyle

$$z(t) = H(t_f - t) H(t_f)^{-1} z_0 \quad (1.45)$$

formunda yeniden düzenlenebilmektedir. Buradan

$$\mathbf{H}(t_f - t)^{-1} \mathbf{z}(t) = \mathbf{H}(t_f)^{-1} \mathbf{z}_0 \quad (1.46)$$

elde edilmektedir. Bu denklemde $\mathbf{H}(t_f)$ 'nin tersi alınabilir olması $\mathbf{H}(t_f - t)$ 'ninde tersi alınabilir olması anlamına gelmektedir.

Diğer bir taraftan, $\boldsymbol{\zeta}(t)$ 'den

$$\boldsymbol{\lambda}_i(t) = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{I} \quad \dots \quad \mathbf{0}] e^{(t_f-t)\mathbf{M}} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{Q}_{1f} \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_{mf} \end{bmatrix} \mathbf{H}(t_f)^{-1} \mathbf{z}_0 \quad (1.47)$$

elde edilmektedir. Şimdi, varsayalım

$$\mathbf{G}_i(t_f - t) = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{I} \quad \dots \quad \mathbf{0}] e^{(t_f-t)\mathbf{M}} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{Q}_{1f} \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_{mf} \end{bmatrix} \quad (1.48)$$

(1.46) ve (1.48)'den (1.47) aşağıdaki şekilde yeniden düzenlenebilmektedir.

$$\boldsymbol{\lambda}_i(t) = \mathbf{G}_i(t_f - t) \mathbf{H}(t_f - t)^{-1} \mathbf{z}(t) \quad (1.49)$$

Burada $\mathbf{G}_i(t_f - t) \mathbf{H}(t_f - t)^{-1}$ 'yi $\mathbf{P}_i(t)$ 'ile ifade edisin. O zaman (1.49)

$$\boldsymbol{\lambda}_i(t) = \mathbf{P}_i(t) \mathbf{z}(t) \quad (1.50)$$

şeklinde gösterilebilmektedir. $\mathbf{H}(\cdot)^{-1}$ ve $\mathbf{G}_i(\cdot)$ sürekli türevlenebilir matris fonksiyonları olduğu için $\dot{\boldsymbol{\lambda}}_i(t)$ matrisi

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_i(t) = \dot{\mathbf{P}}_i(t) \mathbf{z}(t) + \mathbf{P}_i(t) \dot{\mathbf{z}}(t) \quad (1.51)$$

olarak hesaplanabilmektedir. (1.24)'den $\dot{\boldsymbol{\lambda}}_i(t)$ ve (1.25)'ten $\dot{\mathbf{z}}(t)$ 'nin bu ifade de kullanılmasıyla

$$\dot{\mathbf{P}}_i(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{P}_i(t)\mathbf{A}\mathbf{z}(t) - \mathbf{P}_i(t) \sum_{i=1}^m \mathbf{S}_i \boldsymbol{\lambda}_i(t) + \mathbf{Q}_i \mathbf{z}(t) + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda}_i(t) = 0 \quad (1.52)$$

matris diferansiyel denklemi elde edilmektedir. Bu denklemde (1.50)'den $\mathbf{P}_i(t)\mathbf{z}(t)$ (1.52)'de kullanıldığında

$$\dot{\mathbf{P}}_i(t) + \mathbf{P}_i(t)\mathbf{A} - \mathbf{P}_i(t) \sum_{j=1}^m \mathbf{S}_j \mathbf{P}_j(t) + \mathbf{Q}_i + \mathbf{A}^T \mathbf{P}_i(t) = 0 \quad (1.53)$$

matris diferansiyel denkleme varılmaktadır. Bu denklemin sınır koşulları $\mathbf{P}_i(t_f) = \mathbf{Q}_{if}$ şeklindedir. Özetlemek gerekirse,

$$\mathbf{P}_i(t) = \mathbf{G}_i(t_f - t)\mathbf{H}(t_f - t)^{-1} \quad (1.54)$$

(1.53)'ü sağlamaktadır.

Matris denklemleri (1.53) bağlı *Riccati* diferansiyel denklemleri adıyla bilinmektedir. Çözüm matrisi $\mathbf{P}_i(t)$ genel olarak asimetriktir. Nedeniyse $\mathbf{P}_i(t)\mathbf{S}_j\mathbf{P}_j(t)$ ifadesinin varlığı ama karşılıklı ifade $\mathbf{P}_j(t)\mathbf{S}_j\mathbf{P}_i(t)$ 'nin olmamasıdır. Buraya kadar sunulan sonuçlar aşağıdaki teorem şeklinde (ispatsız olarak) ifade edilmektedir.

Teorem 1.2. Doğrusal-kareli diferansiyel oyun (1.18) ve (1.19)'un her başlangıç durum vektörü \mathbf{z}_0 için her $t_1 \in [0, t_f]$ 'de bir eşsiz açık döngü *Nash* dengesi vardır eğer bağlı *Riccati* diferansiyel denklemleri (1.54)'ün $[0, t_f]$ 'de $\mathbf{P}_i(t)$ ($i = 1, \dots, m$) çözümü var ise.

Bazen (1.53)'teki bağlı *Riccati* diferansiyel denklemlerinin çözümü olmayabilir, halbuki oyunun bir açık döngü *Nash* dengesi vardır ([130] örenk 7.4). Açık döngü *Nash* dengesinin (ortaklaşa) m adet bağlı optimal kontrol probleminin çözümüyle yakın ilişkisi olduğu bilinmektedir [128]. Doğrusal-kareli optimal kontrol problemlerinde *minimum* prensibine göre simetrik *Riccati* diferansiyel denklemlerinin optimal çözümünün bulunmasında önemli rolü olmaktadır. Bu denklemler doğrusal-kareli diferansiyel oyun (1.18) ve (1.19) için aşağıda verilmiştir.

$$\dot{K}_i(t) = -A^T K_i(t) - K_i(t)A + K_i(t)S_i K_i(t) - Q_i, \quad K_i(t_f) = Q_{if} \quad (1.55)$$

Burada Q_{if} matrisi simetrik olması nedeniyle $K_i(t)$, $[0, t_f]$ 'de simetriktir.

(1.53)'ün çözülebilirliği dışbükeylik koşulu yani Q_{if} ve Q_i matrislerinin pozitif yarıtanımlı ($Q_{if}, Q_i \geq 0$) ve R_{ii} pozitif tanımlı ($R_{ii} > 0$) olmasıyla bağlaçtır [131]. Bu da bir eşsiz Nash dengesinin var olması için yeterli koşul olabilmektedir. Ayrıca, (1.53) ve (1.55)'in birlikte çözülebilirliği eşsiz Nash dengesinin varlığı için yeterli koşuldur. [131] bu son koşulun daha güçsüz olduğu kanaatindedir. Aşağıdaki teorem ispatsız olarak sunulmuştur.

Teorem 1.3. Doğrusal-kareli diferansiyel oyun (1.18) ve (1.19) ile ilişkili bağlı *Riccati* diferansiyel denklemleri (1.53)'ün her başlangıç durum vektörü z_0 için $[0, t_f]$ 'de bir $P_i(t)$ ($i = 1, \dots, m$) çözümü vardır eğer $H(t_f)$ tersi alınabilir ise.

1.6.2.3. Nash Dengesi Kontrolü

Vektör $\lambda_i(t)$ (1.50)'den kullanıldığında

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i(t) &= -\mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{B}_i^T \lambda_i(t) \\ &= -\mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{B}_i^T \mathbf{P}_i(t) \mathbf{z}(t) \end{aligned} \quad (1.56)$$

elde edilmektedir. Burada $\mathbf{u}_i(t)$ bir kapalı döngü kontrol stratejisidir.

Ayrıca, (1.25) aşağıdaki biçiminde yeniden ifade edebilmektedir.

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}_{cl}(t) \mathbf{z}(t) \quad (1.57)$$

Burada

$$\mathbf{A}_{cl}(t) = \mathbf{A} - \sum_{i=1}^m \mathbf{S}_i \mathbf{P}_i(t) \quad (1.58)$$

Böylece, (1.56)

$$\mathbf{u}_i(t) = -\mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{B}_i^T \mathbf{P}_i(t) \boldsymbol{\Phi}(t, 0) \mathbf{z}_0 \quad (1.59)$$

şeklinde yazılabilmektedir. Burada $\boldsymbol{\Phi}(t, 0)$ aşağıdaki geçiş denkleminin çözümüdür.

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t, 0) = \mathbf{A}_{cl}(t) \boldsymbol{\Phi}(t, 0), \quad \boldsymbol{\Phi}(0, 0) = \mathbf{I} \quad (1.60)$$

$\boldsymbol{\Phi}(t, t_f)$ notasyonu uğraşılan denklemlerin $t = t_f$ 'de bir sınır değeri olduğuna vurgu yapmaktadır. Aşağıdaki teoreme göre $\mathbf{u}_i(t)$ kontrol stratejisi açık döngü *Nash* dengesidir.

Teorem 1.4. Doğrusal-kareli diferansiyel feransiyel oyun (1.18) ve (1.19)'un bağlı *Riccati* diferansiyel denklemleri (1.53)'ün $[0, t_f]$ 'de $\mathbf{P}_i(t)$ çözümünün var olduğunu varsayalım. O zaman (1.59) bir eşsiz açık döngü *Nash* dengesi kontrolüdür.

İspat: Varsayalım

$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_i(t) = \boldsymbol{\lambda}_i(t) - \mathbf{P}_i(t) \mathbf{z}(t) \quad (1.61)$$

Vektör $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_i(t)$ 'nin türevini hesaplayarak, (1.18) ve (1.50) kullanıldığında

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}}_i(t) &= \dot{\boldsymbol{\lambda}}_i(t) - \dot{\mathbf{P}}_i(t) \mathbf{z}(t) - \mathbf{P}_i(t) \dot{\mathbf{z}}(t) \\ &= -\mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda}_i(t) + \mathbf{A}^T \mathbf{P}_i(t) \mathbf{z}(t) - \mathbf{P}_i(t) \sum_{j=1}^m \mathbf{S}_j \mathbf{P}_j(t) \mathbf{z}(t) + \mathbf{P}_i(t) \sum_{j=1}^m \mathbf{S}_j \boldsymbol{\lambda}_j(t) \\ &= -\mathbf{A}^T (\boldsymbol{\lambda}_i(t) - \mathbf{P}_i(t) \mathbf{z}(t)) - \mathbf{P}_i(t) \sum_{j=1}^m \mathbf{S}_j (\mathbf{P}_j(t) \mathbf{z}(t) - \boldsymbol{\lambda}_j(t)) \end{aligned}$$

$$= -\mathbf{A}^T \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_i(t) + \mathbf{P}_i(t) \sum_{j=1}^m \mathbf{S}_j \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_j(t) \quad (1.61)$$

sonucuna varılmaktadır. Varsayalım $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(t) = [\boldsymbol{\lambda}_1(t)^T, \dots, \boldsymbol{\lambda}_m(t)^T]^T$. Böylece,

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}}(t) = \boldsymbol{\psi}(t) \tilde{\boldsymbol{\lambda}}(t) \quad (1.62)$$

şeklinde ifade edilebilmektedir. Burada

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}^T + \mathbf{P}_1(t)\mathbf{S}_1 & \mathbf{P}_1(t)\mathbf{S}_2 & \mathbf{P}_1(t)\mathbf{S}_3 & \dots & \mathbf{P}_1(t)\mathbf{S}_m \\ \mathbf{P}_2(t)\mathbf{S}_1 & -\mathbf{A}^T + \mathbf{P}_2(t)\mathbf{S}_2 & \mathbf{P}_2(t)\mathbf{S}_3 & \dots & \mathbf{P}_2(t)\mathbf{S}_m \\ \mathbf{P}_3(t)\mathbf{S}_1 & \mathbf{P}_3(t)\mathbf{S}_2 & -\mathbf{A}^T + \mathbf{P}_3(t)\mathbf{S}_3 & \dots & \mathbf{P}_3(t)\mathbf{S}_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{P}_m(t)\mathbf{S}_1 & \mathbf{P}_m(t)\mathbf{S}_2 & \mathbf{P}_m(t)\mathbf{S}_3 & \dots & -\mathbf{A}^T + \mathbf{P}_m(t)\mathbf{S}_m \end{bmatrix} \quad (1.63)$$

Eğer $\dot{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}}(t_f) = 0$ ise, $\dot{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}}(t) = 0$ olmalıdır. Buradan, $\boldsymbol{\lambda}_i(t) = \mathbf{P}_i(t)\mathbf{z}(t)$. Başka bir ifadeyle, sonuç eşsiz olmaktadır.

İki oyunculu oyun için \mathbf{u}_2^* kontrolü

$$\mathbf{u}_2^*(t) = -\mathbf{R}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2^T (\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_i(t) + \mathbf{P}_i(t)\mathbf{z}(t)) \quad (1.64)$$

şeklinde olsun. Minimizasyon problemi

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{u}_1} J_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2^*) \\ & = \mathbf{z}(t_f)^T \mathbf{Q}_{1f} \mathbf{z}(t_f) + \int_0^{t_f} (\mathbf{z}(t)^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{z}(t) + \mathbf{u}_1(t)^T \mathbf{R}_{11} \mathbf{u}_1(t) + \mathbf{u}_2^*(t)^T \mathbf{R}_{12} \mathbf{u}_2^*(t)) dt \end{aligned} \quad (1.65)$$

kısıt

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}_1(t) + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_2^*(t) \quad (1.66)$$

göre,

$$\tilde{\mathbf{u}}_1(t) = -\mathbf{R}_{11}^{-1}\mathbf{B}_1^T \left(\mathbf{P}_1(t)\tilde{\mathbf{z}}(t) + \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_1(t) \right) \quad (1.67)$$

şeklinde bir eşsiz çözümü vardır. Burada $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_1(t)$ and $\tilde{\mathbf{z}}(t)$ aşağıdaki diferansiyel denklemlerinin çözümüdür [130].

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}}_1(t) = (\boldsymbol{\lambda}_1(t)\mathbf{S}_1 - \mathbf{A}^T)\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_1(t) - \boldsymbol{\lambda}_1(t)\mathbf{B}_2\mathbf{u}_2^*(t), \quad \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_1(t_f) = \mathbf{0} \quad (1.68)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{S}_1\boldsymbol{\lambda}_1(t))\tilde{\mathbf{z}}(t) - \mathbf{S}_1\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_1(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}_2^*(t), \quad \tilde{\mathbf{z}}(0) = \mathbf{z}_0 \quad (1.69)$$

Kontrol giridisi $\mathbf{u}_2^*(t)$, (1.68) ve (1.69)'da kullanıldığında aşağıdaki denklemler elde edilmektedir.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}}_1(t) &= (\boldsymbol{\lambda}_1(t)\mathbf{S}_1 - \mathbf{A}^T)\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_1(t) + \boldsymbol{\lambda}_1(t)\mathbf{S}_2(\boldsymbol{\lambda}_2(t)\mathbf{z}(t) + \boldsymbol{\lambda}_2(t)), \\ \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_1(t_f) &= 0 \end{aligned} \quad (1.70)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{z}}}(t) &= (\mathbf{A} - \mathbf{S}_1\boldsymbol{\lambda}_1(t) - \mathbf{S}_2\boldsymbol{\lambda}_2(t))\tilde{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{S}_2\boldsymbol{\lambda}_2(t)(\tilde{\mathbf{z}}(t) - \mathbf{z}(t)) - \\ &\quad \mathbf{S}_1\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_1(t) - \mathbf{S}_2\boldsymbol{\lambda}_2(t), \quad \tilde{\mathbf{z}}(0) = \mathbf{z}_0 \end{aligned} \quad (1.71)$$

Bu diferansiyel denklemlerinin eşsiz çözümleri, $\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{z}$ ve $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_1 = \boldsymbol{\lambda}_1$ şeklindedir. Çözümler eşsiz olduklarından dolayı, $\tilde{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{u}_1^*$. Başka bir ifadeyle, tüm $\mathbf{u}_1(t) \in \Gamma_1$ için

$$J_1(\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*) \leq J_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2^*) \quad (1.72)$$

eşitsizliği sağlanmaktadır. Benzeri biçimde tüm $\mathbf{u}_2(t) \in \Gamma_2$ için

$$J_2(\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*) \leq J_2(\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2) \quad (1.73)$$

sağlanmaktadır. Bu da $(\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*)$ 'nin *Nash* dengesi olduğunu göstermektedir. Bu sonuçlar m -oyunculu oyuna genişletilebilmektedir. ■

1.7. Çalışmanın Amacı ve Kapsamı

Tez çalışmasının amacı çok etmenli sistemlerin düzen kontrolünün gerçekleştirilmesi için doğrusal-kareli diferansiyel oyun çerçevesinde uygun çözümleri araştırmaktır. Etmenler arasında işbirliği olmadığı ve oyunda açık döngü bilgi yapısı olduğu durum dikkate alınmaktadır. Bu sebepten dolayı işbirlikçi olmayan oyunlar için kullanılan *Nash* dengesinin çözümü incelenmektedir. Çalışmanın diğer amacı düzen kontrolü için dağıtık denetleyiciler tasarlamaktır. Bu amaç doğrultusunda, her etmenin sadece bitişik komşularıyla bilgi alışverişinde olduğu ve diğer etmenlerle iletişimde olmadığı varsayılmaktadır. Bir başka ifadeyle, bilgi grafının bir tam graf (*complete graph*) olması gerektiği durum dikkate alınmaktadır. Ayrıca, her etmenin çift integratör dinamiklerine sahip olduğu, etmenler arasında lider-takipçi ayrımı yapılmadığı, yani sistemin lidersiz olduğu ve bilgi ağının yapısında zamanda değişmez (statik) olması varsayılmaktadır.

Çalışmanın kapsamında düzen kontrolünün doğrusal-kareli diferansiyel oyun biçiminde formülasyonu için graf teorisi, Laplasyen matrisi ve doğrusal-kareli modelleme yöntemleri kullanılmaktadır. Açık döngü bilgi yapısı altında formülasyonun sonucu elde edilen bağlı *Riccati* diferansiyel denklemlerinin çözülebilirliği koşulları ve analitik çözümü aranmaktadır. Tüm modellerin ve çözümlerin doğruluğu uygu simülasyonlar ile Matlab 2013 ortamında gösterilmektedir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR, BULGULAR VE İRDELEME

Bu bölümde bir lidersiz çok etmenli sisteminin düzen kontrolü doğrusal ve kareli diferansiyel oyun teorisi platformunda modellenmiş ve ilgi çözümler aranmıştır. Tez kapsamında, sadece lidersiz düzen kontrolü dikkate alınmış, diğer temel kontrol stratejiler (yani davranış-tabanlı, sanal yapı ve lider-takipçi yaklaşımları) tez çalışmasının kapsamı dışında tutulmuştur. Lidersiz yaklaşımda takımdaki her etmen aynı kontrol stratejisini izlemektedir.

2.1. Lidersiz Düzen Kontrolüne Diferansiyel Oyun Yaklaşımı

Bu bölümde, bir m etmenli sisteminin düzen kontrolü doğrusal-kareli diferansiyel oyun şeklinde formüle edilmiştir. Lidersiz düzen kontrolü için Laplasyen matrisinin özellikleri kullanılarak bir özgün doğrusal-kareli modelleme yöntemi ortaya konulmuştur. Matlab ortamında ilgili bağlı *Riccati* diferansiyel denklemlerinin sayısal çözümü bulunmuştur. Bu çözüm üzerine yapılan simülasyonlarla modeller doğrulanmıştır. Simülasyonlarda etmenler nokta modeli mobil robotlar şeklinde çizilmiştir.

2.1.1. Problemin Tanımı

2.1.1.1. Sistem Dinamikleri

m sayıda etmenden oluşan ağ-bağımlı bir etmen takımı varsayalım. Her etmen çift integratör dinamiklerine sahiptir. Etmen i ($i = 1, \dots, m$) için n -boyutlu koordinat sisteminde ($n = 2, 3$) dinamik denklemleri

$$\dot{q}_i = v_i, \quad \dot{v}_i = u_i \quad (2.1)$$

şeklindedir. Burada $q_i, v_i, u_i \in \mathbb{R}^n$ sırayla i 'inci etmenin konum, hız ve ivme vektörünü göstermektedir. Bu modelde ivme vektörü u_i, i 'inci etmenin kontrol girdisidir. Düzen kontrolü aşağıdaki biçimde tanımlanmaktadır.

Tanım 2.1. m adet üyeden oluşan ve herhangi bir i 'inci ($i = 1, \dots, m$) üye (2.1) dinamiklerine bağlı olan bir çok etmenli sistemini varsayalım. Her etmen herhangi bir $t \geq 0$ anına kendi konumunu, hızını ve sistemdeki diğer (komşu) etmenlerin konumlarını ve hızlarını algılayabildiğini varsayalım. Düzen kontrolü, \mathbf{u}_i kontrol girdilerini sistem üyeleri arasındaki istenilen mesafelere ulaşılacak ve öylece korunacak şekilde, tasarlamaktır ($i = 1, \dots, m$).

Düzen oluşturmak için kontrolün amacı \mathbf{u}_i 'yi

$$\|\mathbf{q}_i(t) - \mathbf{q}_j(t) - \mathbf{d}_{ij}\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty \quad (2.2)$$

sağlamak üzere tasarlamaktır. Burada $\mathbf{d}_{ij} \in \mathbb{R}^n$ graf topolojisinde ($(i, j) \in \mathcal{E}$ ve) bitişik i ve j etmenlerin arasındaki istenilen mesafe vektörüdür (Şekil 2.1). Etmen takımını düzen uyumu (*cohesion*) içerisinde tutabilmek için, kontrolün ikinci amacı

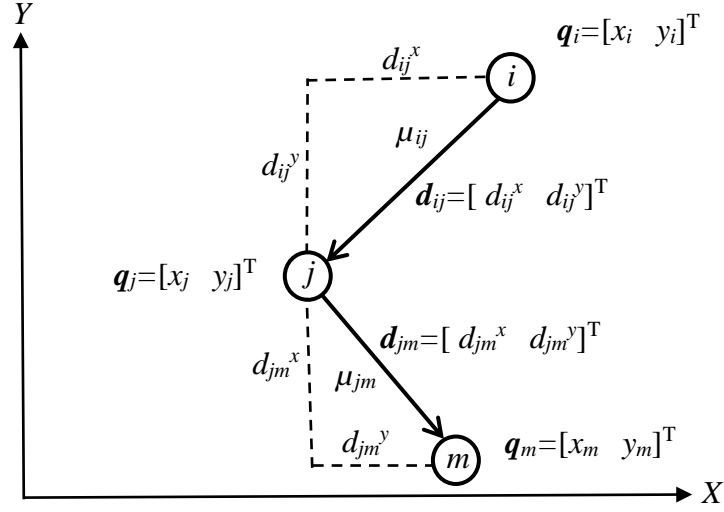
$$\|\dot{\mathbf{q}}_i(t) - \dot{\mathbf{q}}_j(t)\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty \quad (2.3)$$

olmaktadır. Düzen hata vektörüyle hız farkı hata vektörünün toplamı t anında

$$\|\mathbf{q}_i(t) - \mathbf{q}_j(t) - \mathbf{d}_{ij}\| + \|\dot{\mathbf{q}}_i(t) - \dot{\mathbf{q}}_j(t)\| \quad (2.4)$$

şeklindedir. Bu durumda, bütün takımın düzen hataları ve hız farkı hataları toplamı t anında karesel biçimde aşağıdaki gibi tanımlanabilmektedir.

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} \mu_{ij} \left(\|\mathbf{q}_i(t) - \mathbf{q}_j(t) - \mathbf{d}_{ij}\|^2 + \|\dot{\mathbf{q}}_i(t) - \dot{\mathbf{q}}_j(t)\|^2 \right) \quad (2.5)$$



Şekil 2.1. İki boyutlu koordinat sisteminde takım düzeninin bir gösterimi. Daireler etmenleri ve oklar bilgi alışverişi bağlantılarını göstermektedir.

Açıklama 1.4 ve 1.5 göre (2.5) matris biçimine dönüştürülebilmektedir.

$$\begin{aligned}
& \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} \mu_{ij} \left(\| \mathbf{q}_i(t) - \mathbf{q}_j(t) - \mathbf{d}_{ij} \|^2 + \| \dot{\mathbf{q}}_i(t) - \dot{\mathbf{q}}_j(t) \|^2 \right) \\
&= \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} \mu_{ij} \| \mathbf{q}_i(t) - \mathbf{q}_j(t) \|^2 - 2 \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} \mu_{ij} \left(\mathbf{q}_i(t) - \mathbf{q}_j(t) \right)^T \mathbf{d}_{ij} \\
&\quad + \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} \mu_{ij} \| \mathbf{d}_{ij} \|^2 + \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} \mu_{ij} \| \dot{\mathbf{q}}_i(t) - \dot{\mathbf{q}}_j(t) \|^2 \\
&= \mathbf{q}(t)^T \mathcal{D} \mathcal{W} \mathcal{D}^T \mathbf{q}(t) - 2 \mathbf{q}(t)^T \mathcal{D} \mathcal{W} \mathbf{d} + \mathbf{d}^T \mathcal{W} \mathbf{d} + \mathbf{v}(t)^T \mathcal{D} \mathcal{W} \mathcal{D}^T \mathbf{v}(t) \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ 1 \\ \mathbf{v}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{L} & -\mathcal{D} \mathcal{W} \mathbf{d} & \mathbf{0} \\ -(\mathcal{D} \mathcal{W} \mathbf{d})^T & \mathbf{d}^T \mathcal{W} \mathbf{d} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathcal{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ 1 \\ \mathbf{v}(t) \end{bmatrix} \tag{2.6}
\end{aligned}$$

Burada $\mathbf{q}(t) = [\mathbf{q}_1(t)^T, \dots, \mathbf{q}_m(t)^T]^T \in \mathbb{R}^{nm}$, $\mathbf{v}(t) = [\dot{\mathbf{q}}_1(t)^T, \dots, \dot{\mathbf{q}}_m(t)^T]^T \in \mathbb{R}^{nm}$ ve $\mathbf{d} = \text{col}[\mathbf{d}_{ij}] \in \mathbb{R}^{nm}$. Bu matris ifadesi daha kompakt formda gösterilebilmektedir.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ 1 \\ \mathbf{v}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{L} & -\mathcal{D}\mathcal{W}d & \mathbf{0} \\ -(\mathcal{D}\mathcal{W}d)^T & d^T\mathcal{W}d & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathcal{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ 1 \\ \mathbf{v}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{z}(t)^T \mathbf{Q} \mathbf{z}(t) \quad (2.7)$$

Burada $\mathbf{z}(t) = [\mathbf{q}(t)^T, 1, \mathbf{v}(t)^T]^T \in \mathbb{R}^{2nm+1}$ ve

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathcal{L} & -\mathcal{D}\mathcal{W}d & \mathbf{0} \\ -(\mathcal{D}\mathcal{W}d)^T & d^T\mathcal{W}d & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathcal{L} \end{bmatrix}.$$

Açıklama 2.1. $\mathbf{z}(t)^T \mathbf{Q} \mathbf{z}(t) \geq 0$ olması nedeniyle düzen matrisi \mathbf{Q} pozitif yarıtanımlıdır ($\mathbf{Q} \geq 0$).

Çift integratör dinamikleriyle ifade edilen mobil etmenler kontrol edilebilir doğrusal sistem olarak modellenebilir. Durum vektörü $\mathbf{z}(t)$ zaman değişkeni t göre törevi

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = [\dot{\mathbf{q}}(t)^T, 0, \dot{\mathbf{v}}(t)^T]^T \quad (2.8)$$

şeklindedir. Burada $\dot{\mathbf{v}}(t) = [\mathbf{u}_1(t)^T, \dots, \mathbf{u}_m(t)^T]^T$. Yukarıdaki $\dot{\mathbf{z}}(t)$ vektörü aşağıdaki durum-uzay gösterim şeklinde gösterilebilmektedir.

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{z}(t) + \sum_{i=1}^m \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i(t) \quad (2.9)$$

Burada $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{nm} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2nm+1}$, $\mathbf{B}_i = [\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{b}_i^T]^T$ ve $\mathbf{b}_i = [\mathbf{0} \dots \mathbf{I}_n \dots \mathbf{0}]^T$. Doğrusal diferansiyel durum denklemi (2.9) etmen takımının dinamiklerinin denklemidir.

2.1.1.2. Düzen Maliyet Fonksiyonları

Düzen grafi \mathcal{G} 'de her düğüm (veya etmen) $i \in \mathcal{V}$ bireysel ağırlık matrisini \mathbf{W}_i 'ye sahip olabilir. Dört düğümlü ($m = 4$) ve üç kenarlı ($|\mathcal{E}| = 3$) bir düzen grafını varsayalım. İkinci düğümün ($i = 2$) komşular kümesi birinci ve üçüncü düğümü içersin. Bu durumda, \mathbf{W}_2 aşağıdaki gibi seçilmektedir.

$$\mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} \mu_{21} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

\mathbf{W}_i 'nin elemanları μ_{ij} tüm j 'lere, $(i,j) \in \mathcal{E}$ olmalıdır. Böylece, her etmen bireysel \mathcal{L}_i ve \mathbf{Q}_i ağırlık matrislerine sahip olabilmektedir.

Takımın düzen hatası ve takımın hız farkı toplamı $\mathbf{z}(t)^T \mathbf{Q} \mathbf{z}(t)$, optimal kontrol teorisinde sonlu ufuk maliyet fonksiyonu kavramına göre, i 'inci ($i = 1, \dots, m$) etmenin minimize etmesi için

$$J_i = \mathbf{z}(t_f)^T \mathbf{Q}_{if} \mathbf{z}(t_f) + \int_0^{t_f} \left(\mathbf{z}(t)^T \mathbf{Q}_i \mathbf{z}(t) + \sum_{j=1}^m \mathbf{u}_j(t)^T \mathbf{R}_{ij} \mathbf{u}_j(t) \right) dt \quad (2.10)$$

sonlu ufuk kareli maliyet fonksiyonu şeklinde tanımlanmaktadır. Burada $\mathbf{R}_{ij} > 0$ ağırlık katsayıları, t_f sonlu ufuk süresidir ve

$$\mathbf{Q}_{if} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{if} & -\mathcal{D} \mathbf{W}_{if} \mathbf{d} & \mathbf{0} \\ -(\mathcal{D} \mathbf{W}_{if} \mathbf{d})^T & \mathbf{d}^T \mathbf{W}_{if} \mathbf{d} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathcal{L}_{if} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_i & -\mathcal{D} \mathbf{W}_i \mathbf{d} & \mathbf{0} \\ -(\mathcal{D} \mathbf{W}_i \mathbf{d})^T & \mathbf{d}^T \mathbf{W}_i \mathbf{d} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathcal{L}_i \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}_{if} = \mathcal{D} \mathbf{W}_{if} \mathcal{D}^T, \mathbf{W}_{if} = \mathbf{W}_{if} \otimes \mathbf{I}_n, \mathbf{W}_{if} = \text{diag}(\omega_{ij})$$

$$\mathcal{L}_i = \mathcal{D} \mathbf{W}_i \mathcal{D}^T, \mathbf{W}_i = \mathbf{W}_i \otimes \mathbf{I}_n, \mathbf{W}_i = \text{diag}(\mu_{ij}), \mu_{ij} > 0$$

Ayrıca, (2.6) ve (2.10)'dan:

$$\mathbf{z}(t_f)^T \mathbf{Q}_{if} \mathbf{z}(t_f) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} \omega_{ij} \left(\|\mathbf{q}_i(t_f) - \mathbf{q}_j(t_f) - \mathbf{d}_{ij}\|^2 + \|\dot{\mathbf{q}}_i(t_f) - \dot{\mathbf{q}}_j(t_f)\|^2 \right)$$

$$\mathbf{z}(t)^T \mathbf{Q}_i \mathbf{z}(t) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} \mu_{ij} \left(\|\mathbf{q}_i(t) - \mathbf{q}_j(t) - \mathbf{d}_{ij}\|^2 + \|\dot{\mathbf{q}}_i(t) - \dot{\mathbf{q}}_j(t)\|^2 \right)$$

Açıklama 2.2. Q_{if} ve Q_i ($i = 1, \dots, m$) matrisleri pozitif yarıtanımlıdır. Bunu göz önünde bulundurarak ve tüm matrislerin (R_{ij} , $i \neq j$ içinde) reel ve simetrik olduğu yanısıra R_{ii} (tanıma göre) pozitif tanımlı olmasını dikkate alarak, J^i tüm kabul edilebilir kontrol fonksiyonları u_j , $j \neq i$ ve tüm z_0 için ($z(0) = z_0$), u_i 'nin kesinlikle dışbükey fonksiyonudur. Bu nedenle minimum prensip'den gelen koşullar hem gerekli ve hem de yeterlidir.

R_{ii} 'nin elemanlarının büyük olduğu durumda kontrol çabası üzerine uygulanan ceza da büyüktür. R_{11} , ... , R_{mm} ağırlık matrislerinin mutlaka aynı olmadığına dikkat edilmelidir. Bu matrislerin elemanlarının seçimleri gerçek durumu yansıtmalıdır. Örneğin, bir bireysel etmen için bu matrisin elemanları kendi yakıt deposundaki yakıt seviyesine göre seçilebilir. Eğer yeterince yakıt varsa, düzen kontrolüne vurgu yapmak için, bu matrisin elemanları küçük seçilmelidir. Aksine, eğer yakıt deposunda fazla yakıt kalmamışsa, enerjisini veya yakıt maliyetini korumak için, bu matrisin elemanları büyük seçilmelidir.

Doğrusal diferansiyel durum denklemi (2.9) ve kareli maliyet fonksiyonları (2.10)'dan görüldüğü üzere düzen kontrolü doğrusal-kareli diferansiyel oyun şeklinde ortaya çıkmıştır. İşbirlikçi olmayan tutum altında tüm oyuncular kendi kararlarını başlangıç durum vektörü z_0 üzerine aldıklarını varsayalım. Dolayısıyla, bu durumda oyun açık döngü bilgi yapısı altındadır. Bu nedenle Teorem 1.1'deki açık döngü *Nash* dengesi çözümü düzen kontrolü stratejisi olarak tüm etmenler için kullanılabilir.

2.1.2. Açık Döngü *Nash* Düzen Kontrolü

Açık döngü bilgi yapısı altındaki bu oyun Teorem 1.1'de verilen açık döngü *Nash* dengesi çözümünü (var ise,) kabul etmektedir. Ayrıca, denge ile ilişkili durum yörüngesi

$$z(t) = [I \quad 0 \quad \dots \quad 0] e^{M(t_f-t)} \begin{bmatrix} I \\ Q_{1f} \\ \vdots \\ Q_{mf} \end{bmatrix} H(t_f)^{-1} z_0 \quad (2.11)$$

şeklinde verilmektedir. Burada

$$\mathbf{H}(t_f) = [\mathbf{I} \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0}] e^{t_f \mathbf{M}} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{Q}_{1f} \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_{mf} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A} & \mathbf{S}_1 & \dots & \mathbf{S}_m \\ \mathbf{Q}_1 & \mathbf{A}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}_m & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}^T \end{bmatrix}$$

Görüldüğü üzere, sadece $\mathbf{H}(t_f)$ tersi alınabilir bir matris ise denge ile ilişkili durum yörüngesi bulunabilmektedir. Buna ek olarak, $\mathbf{H}(t_f)$ 'nin tersi alınabilirliği bir eşsiz açık döngü Nash dengesinin varlığına eşdeğerdir. $\mathbf{H}(t_f)$ 'nin tersi alınabilirliği, seçilen ufuk uzunluğu t_f ve \mathbf{M} matrisine bağlıdır [130].

Düzen kontrolünün, (2.9) ve (2.10)'daki diferansiyel oyun olarak, bir eşsiz açık döngü Nash dengesinin olduğunu varsayalım. Bu durumda her başlangıç durum vektörü \mathbf{z}_0 için m -adet bağlı *Riccati* diferansiyel denklemleri (1.53)'ün $[0, t_f]$ 'de bir $\mathbf{P}_i(t)$ ($i = 1, \dots, m$) çözümü vardır. Başka bir ifadeyle, $\mathbf{H}(t_f)$ 'nin tersi alınabiliridir.

Açıklama 2.3. [130]'da bir iki oyunculu doğrusal-kareli oyunda $t_f = 0.1$ için matris $\mathbf{H}(t_f)$ ters alınabilir değilken, hesaplamalar $t_f = 0.11$ için $\mathbf{H}(t_f)$ matrisinin ters alınabilir olduğunu göstermiştir.

2.1.3. Dağıtık Kontrol Yasası

Açık döngü Nash dengesi

$$\mathbf{u}_i(t) = -\mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{B}_i^T \mathbf{P}_i(t) \Phi(t, 0) \mathbf{z}_0 \quad (2.12)$$

uygulanabilmesi için tüm etmenlere başlangıç durum vektörü \mathbf{z}_0 sunulmalıdır. Bu vektör takımdaki tüm bireylerin başlangıç durum bilgisini (yani konumlarını ve hızlarını) içermektedir. [30] açık döngü Nash dengesi çözümü (2.12)'nin dağıtık kontrol yasası olabileceğini ortaya çıkarmak için bir yaklaşım sunmaktadır. Bu yaklaşıma göre, düzen maliyet fonksiyonlarındaki ağırlık parametreleri ω_{ij} ve μ_{ij} , eğer etmen j graf topolojisinde

bitişiği değilse etmen i için sıfır olarak seçilir. Bu Varsayım 1.1'deki ağırlık parametreleri ω_{ij} (ve μ_{ij}) tanımında görülmektedir. [30]'daki yaklaşım bu bölümde sunulan düzen kontrolü formülasyonu için aşağıdaki şekilde uygunlanmıştır.

Ağırlık matrisi \mathbf{W}_i 'de köşegen girişleri ω_{ij} sıfırsa etmen i ile j graf topolojisinde bitişik değildir. Dolayısıyla, düzen grafında i ve j düğümü arasında herhangi bir kenar yoktur, yani $(i, j) \notin \mathcal{E}$ ve tersi. \mathbf{W}_i yapısına göre, Laplasyen \mathcal{L}_i (ve \mathcal{L}_{if}) ve blok vektörleri $\mathcal{D}\mathbf{W}_i \mathbf{d}$ (ve $\mathcal{D}\mathbf{W}_{if} \mathbf{d}$) ve dolayısıyla düzen ağırlık matrisleri \mathbf{Q}_i (ve \mathbf{Q}_{if}) aşağıdaki formlarda olacaktır.

\mathcal{L}_i (ve \mathcal{L}_{if}):

$$\begin{bmatrix} l_i^{1,1} & \dots & l_i^{1,j-1} & 0 & l_i^{1,j+1} & \dots & l_i^{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_i^{j-1,1} & \dots & l_i^{j-1,j-1} & 0 & l_i^{j-1,j+1} & \dots & l_i^{j-1,m} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_i^{j+1,1} & \dots & l_i^{j+1,j-1} & 0 & l_i^{j+1,j+1} & \dots & l_i^{j+1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_i^{m,1} & \dots & l_i^{m,j-1} & 0 & l_i^{m,j+1} & \dots & l_i^{m,m} \end{bmatrix},$$

$\mathcal{D}\mathbf{W}_i \mathbf{d}$ (ve $\mathcal{D}\mathbf{W}_{if} \mathbf{d}$):

$$\begin{bmatrix} f_i^1 \\ \vdots \\ f_i^{j-1} \\ 0 \\ f_i^{j+1} \\ \vdots \\ f_i^m \end{bmatrix}$$

\mathbf{Q}_i (ve \mathbf{Q}_{if}):

$$\begin{bmatrix}
l_i^{1,1} & \dots & l_i^{1,j-1} & \mathbf{0} & l_i^{1,j+1} & \dots & l_i^{1,m} & f_i^1 & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
l_i^{j-1,1} & \dots & l_i^{j-1,j-1} & \mathbf{0} & l_i^{j-1,j+1} & \dots & l_i^{j-1,m} & f_i^{j-1} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\
l_i^{j+1,1} & \dots & l_i^{j+1,j-1} & \mathbf{0} & l_i^{j+1,j+1} & \dots & l_i^{j+1,m} & f_i^{j+1} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
l_i^{m,1} & \dots & l_i^{m,j-1} & \mathbf{0} & l_i^{m,j+1} & \dots & l_i^{m,m} & f_i^m & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\
f_i^{m+1,1} & \dots & f_i^{m+1,j-1} & \mathbf{0} & f_i^{m+1,j+1} & \dots & f_i^{m+1,m} & q_i & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & l_i^{1,1} & \dots & l_i^{1,j-1} & \mathbf{0} & l_i^{1,j+1} & \dots & l_i^{1,m} \\
\mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & l_i^{j-1,1} & \dots & l_i^{j-1,j-1} & \mathbf{0} & l_i^{j-1,j+1} & \dots & l_i^{j-1,m} \\
\mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & l_i^{j+1,1} & \dots & l_i^{j+1,j-1} & \mathbf{0} & l_i^{j+1,j+1} & \dots & l_i^{j+1,m} \\
\mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & l_i^{m,1} & \dots & l_i^{m,j-1} & \mathbf{0} & l_i^{m,j+1} & \dots & l_i^{m,m}
\end{bmatrix}$$

Burada $l_i^{u,v}$, f_i^u , q_i 'lar $n \times n$ boyutlu bloklardır.

Q_i ve Q_{if} matrisleri $(2m + 1) \times (2m + 1)$ bloktan oluşmaktadır. Görüldüğü gibi, j ve $(m + j + 1)$ blok satır ve sütunu $2m + 1$ sıfır bloktan oluşmaktadır. Diğer bir taraftan, A matrisinin blok köşegen yapıya sahip olduğundan dolayı, bağlı *Riccati* diferansiyel denklemlerinin çözüm matrisi P_i 'de j ve $(m + j + 1)$ satırları $2m + 1$ sıfır bloklardan oluşur, yani P_i aşağıdaki forma sahiptir.

$$P_i = \begin{bmatrix} X_i^1 & X_i^2 & X_i^3 \\ X_i^4 & X_i^5 & X_i^6 \\ X_i^7 & X_i^8 & X_i^9 \end{bmatrix}$$

$$X_i^1 = \begin{bmatrix} p_i^{1,1} & \dots & p_i^{1,j-1} & p_i^{1,j} & p_i^{1,j+1} & \dots & p_i^{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_i^{j-1,1} & \dots & p_i^{j-1,j-1} & p_i^{j-1,j} & p_i^{j-1,j+1} & \dots & p_i^{j-1,m} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ p_i^{j+1,1} & \dots & p_i^{j+1,j-1} & p_i^{j+1,j} & p_i^{j+1,j+1} & \dots & p_i^{j+1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_i^{m,1} & \dots & p_i^{m,j-1} & p_i^{m,j} & p_i^{m,j+1} & \dots & p_i^{m,m} \end{bmatrix}, X_i^2 = \begin{bmatrix} p_i^{1,m+1} \\ \vdots \\ p_i^{j-1,m+1} \\ \mathbf{0} \\ p_i^{j+1,m+1} \\ \vdots \\ p_i^{m,m+1} \end{bmatrix}$$

$$X_i^3 = \begin{bmatrix} p_i^{1,m+2} & \dots & p_i^{1,m+j} & p_i^{1,m+j+1} & p_i^{1,m+j+2} & \dots & p_i^{1,2m+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_i^{j-1,m+2} & \dots & p_i^{j-1,m+j} & p_i^{j-1,m+j+1} & p_i^{j-1,m+j+2} & \dots & p_i^{j-1,2m+1} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ p_i^{j+1,m+2} & \dots & p_i^{j+1,m+j} & p_i^{j+1,m+j+1} & p_i^{j+1,m+j+2} & \dots & p_i^{j+1,2m+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_i^{m,m+2} & \dots & p_i^{m,m+j} & p_i^{m,m+j+1} & p_i^{m,m+j+2} & \dots & p_i^{m,2m+1} \end{bmatrix}$$

$$X_i^4 = [p_i^{m+1,1} \quad \dots \quad p_i^{m+1,j-1} \quad p_i^{m+1,j} \quad p_i^{m+1,j+1} \quad \dots \quad p_i^{m+1,m}],$$

$$X_i^5 = [p_i^{m+1,m+1}]$$

$$X_i^6 = [p_i^{m+1,m+2} \quad \dots \quad p_i^{m+1,m+j} \quad p_i^{m+1,m+j+1} \quad p_i^{m+1,m+j+2} \quad \dots \quad p_i^{m+1,2m+1}]$$

$$X_i^7 = \begin{bmatrix} p_i^{m+2,1} & \dots & p_i^{m+2,j-1} & p_i^{m+2,j} & p_i^{m+2,j+1} & \dots & p_i^{m+2,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_i^{m+j,1} & \dots & p_i^{m+j,j-1} & p_i^{m+j,j} & p_i^{m+j,j+1} & \dots & p_i^{m+j,m} \\ p_i^{m+j+2,1} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ p_i^{m+j+2,1} & \dots & p_i^{m+j+2,j-1} & p_i^{m+j+2,j} & p_i^{m+j+2,j+1} & \dots & p_i^{m+j+2,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_i^{2m+1,1} & \dots & p_i^{2m+1,j-1} & p_i^{2m+1,j} & p_i^{2m+1,j+1} & \dots & p_i^{2m+1,m} \end{bmatrix},$$

$$X_i^8 = \begin{bmatrix} p_i^{m+2,m+1} \\ \vdots \\ p_i^{m+j,m+1} \\ 0 \\ p_i^{m+j+2,m+1} \\ \vdots \\ p_i^{2m+1,m+1} \end{bmatrix}$$

$$X_i^9 = \begin{bmatrix} p_i^{m+2,m+2} & \dots & p_i^{m+2,m+j} & p_i^{m+2,m+j+1} & p_i^{m+2,m+j+2} & \dots & p_i^{m+2,2m+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_i^{m+j,m+2} & \dots & p_i^{m+j,m+j} & p_i^{m+j,m+j+1} & p_i^{m+j,m+j+2} & \dots & p_i^{m+j,2m+1} \\ p_i^{m+j+2,m+2} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ p_i^{m+j+2,m+2} & \dots & p_i^{m+j+2,m+j} & p_i^{m+j+2,m+j+1} & p_i^{m+j+2,m+j+2} & \dots & p_i^{m+j+2,2m+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_i^{2m+1,m+2} & \dots & p_i^{2m+1,m+j} & p_i^{2m+1,m+j+1} & p_i^{2m+1,m+j+2} & \dots & p_i^{2m+1,2m+1} \end{bmatrix}$$

Burada $p_i^{u,v}$ boyutu X_i^1, X_i^3, X_i^7 ve X_i^9 'da $n \times n$, X_i^2 ve X_i^8 'de $n \times 1$, X_i^4 ve X_i^6 'da $1 \times n$ ve X_i^5 'te 1×1 olan bloklardır.

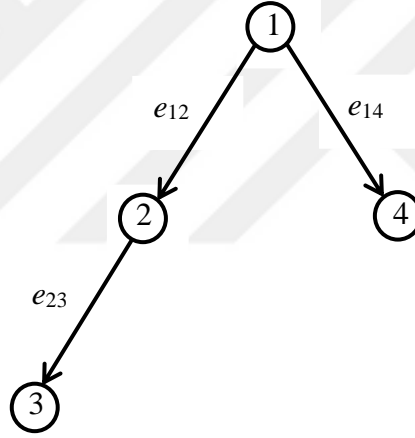
Bu durum, $\Phi(0,0) = I$ ile birleştirildiğinde, açık döngü Nash dengesi çözümü (2.12)'de, $u_i(t)$ başlangıç durum vektörü $z_0 = [q_1(0)^T, \dots, q_m(0)^T, 1, v_1(0)^T, \dots, v_m(0)^T]^T$ de $q_j(0)$ ve $v_j(0)$ vektörlerini kullanmayacağı anlaşılmaktadır. Bu sonuç, i ile bitişik olmayan tüm etmenlere doğrudan genelleştirilebilmektedir. Böylece, açık döngü Nash dengesi çözümü (2.12) dağıtık kontrol yasasıdır.

2.1.4. Matlab ODE (Sayısal) Çözümünün Simülasyonu

Bu bölümde, simülasyon ile modellerin ve yaklaşımların doğruluğu gösterilmiştir. İki-boyutlu koordinat sisteminde ($n = 2$) dört etmenli ($m = 4$) bir takımla istenilen üçgen düzen şeklinin oluşturulması problemini ele alalım (Şekil 2.2). Düzen grafının kenar kümesi ve ilişki matrisi şöyle verilmiştir:

$$\mathcal{E} = \{e_{12}, e_{14}, e_{23}\}$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Şekil 2.2. Üçgen düzen şekli ve düzenin bilgi grafi.

Maliyet fonksiyonlarındaki ağırlık matrisleri W_i ve W_{if} düzen grafi topolojisinde doğrudan komşuluk üzerine seçilmiştir. Şekil 2.2'den görüldüğü üzere, etmen 1'in komşuları 2 ve 4'tür, etmen 2'nin komşuları 1 ve 3'tür, etmen 3'ün komşusu 2 ve etmen 4'ün komşusu 1'dir. Böylece, ağırlık matrisleri aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, W_{1f} = 5W_1$$

$$\mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{W}_{2f} = 5\mathbf{W}_2$$

$$\mathbf{W}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{W}_{3f} = 5\mathbf{W}_3$$

$$\mathbf{W}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{W}_{4f} = 5\mathbf{W}_4$$

Düzendeki etmenler arası istenilen ofset vektörleri

$$\mathbf{d}_{12} = \mathbf{d}_{23} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}_{14} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

olarak verilmiştir. Etmenlerin başlangıç konumları ve başlangıç hızları şöyledir:

$$\mathbf{q}_1(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \dot{\mathbf{q}}_1(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_2(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \dot{\mathbf{q}}_2(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_3(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \dot{\mathbf{q}}_3(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_4(0) = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \dot{\mathbf{q}}_4(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Maliyet fonksiyonlarındaki kontrol uğraşı ağırlık matrisleri \mathbf{R}_{ii}

$$\mathbf{R}_{11} = \mathbf{R}_{22} = \mathbf{R}_{33} = \mathbf{R}_{44} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

birim matrisi olarak seçilmiştir.

Ufuk sonu süresi $t_f = 7s$ olarak belirlenmiştir. Simülasyon için örnekleme zaman dilimi $0.1s$ olarak dikkate alınmıştır. Eşsiz açık döngü *Nash* dengesinin varlık koşullarını

incelemek için $H(7)$ 'nin tersinin alınabilir olup olmadığı incelenmiş ve bu matrisin tersi alınabilir olduğu gözlemlenmiştir. Dolayısıyla, Teorem 1.1'e dayanarak bu oyun problemi bir eşsiz açık döngü *Nash* dengesine sahiptir. Bu denge (2.12) ile hesaplanabilmekte ve etmenlerin durum yörüngesi (2.11) ile elde edilebilmektedir. Bu oyun için bağlı *Riccati* diferansiyel denklemleri (1.53), aşağıdaki şekilde standart bir cebirsel *Riccati* denklemi formunda yeniden yazılabilmektedir.

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = -\mathbf{D}\mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{A} + \mathbf{P}(t)\mathbf{S}\mathbf{P}(t) - \mathbf{Q} \quad (2.13)$$

$$\mathbf{P}(t_f) = [\mathbf{Q}_{1f}^T \quad \mathbf{Q}_{2f}^T \quad \mathbf{Q}_{3f}^T \quad \mathbf{Q}_{4f}^T]^T$$

Burada

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1(t) \\ \mathbf{P}_2(t) \\ \mathbf{P}_3(t) \\ \mathbf{P}_4(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}^T \end{bmatrix}$$

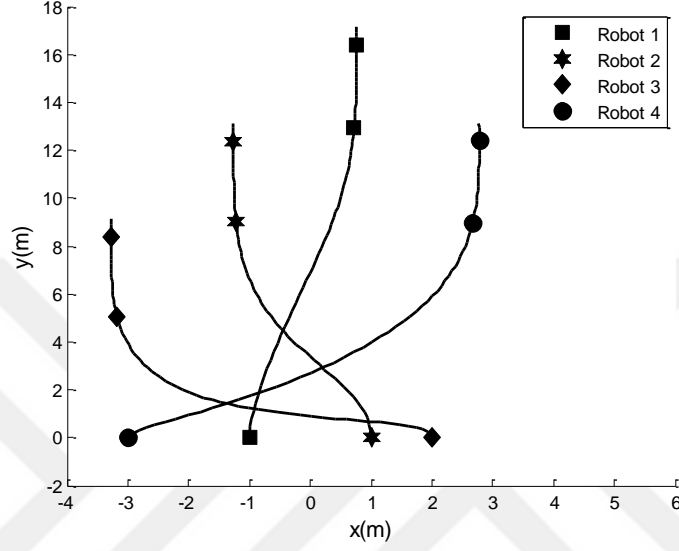
$$\mathbf{S} = [\mathbf{S}_1 \quad \mathbf{S}_2 \quad \mathbf{S}_3 \quad \mathbf{S}_4]$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}_3 \\ \mathbf{Q}_4 \end{bmatrix}$$

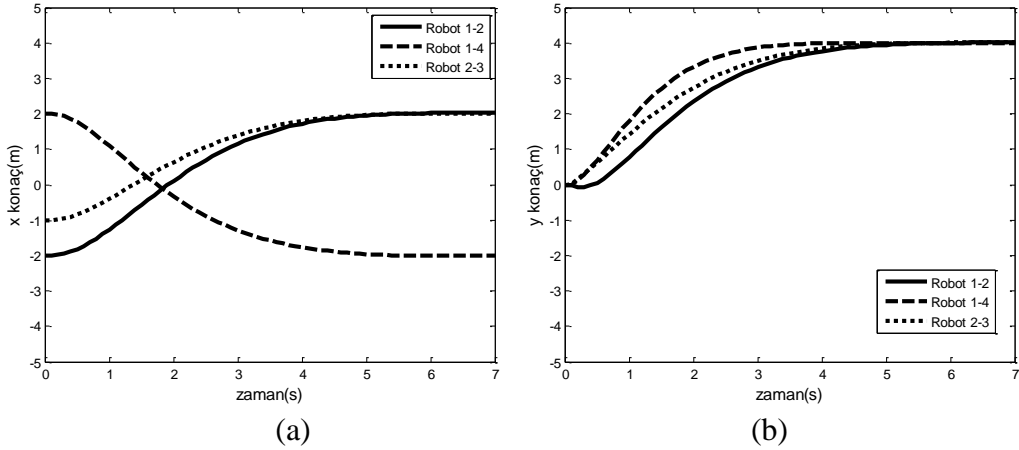
Bu *Riccati* diferansiyel denkleminin çözümü terminal değerleriyle ve geriye doğru yineleme yoluyla Matlab *ODE* ortamındaki fonksiyonları kullanılarak bulunmuştur.

Düzen grafi ve etmenler arası ofset vektörlerine göre, arzu edilen düzen şeklini oluşturmak için sırasıyla x ve y ekseninde, (i) etmen 1 ve 2 bağıl mesafe 2 ve 4'e, (ii) etmen 1 ve 4 bağıl mesafe -2 ve 4'e, ve (iii) etmen 2 ve 3 bağıl mesafe 2 ve 4'e ulaşmak zorundadır. Etmenlerin çizdikleri yörüngeler Şekil 2.3'te $x - y$ düzleminde gösterilmiştir. Etmenler $t = 0s$, $t = 3s$ ve $t = 9.8s$ 'de görüntülenmiştir. Buradan dört etmenin arasında

arzulanan üçgen düzen şeklinin belirlenen ufuk sonunda gerçekleştiği görülmektedir. Düzenin teşkili sürecinde bitişik etmenlerin bağıl mesafe yörüngeleri Şekil 2.4'te gösterilmiştir. Tüm bağıl mesafelerin gerçekleştiği görülmektedir.



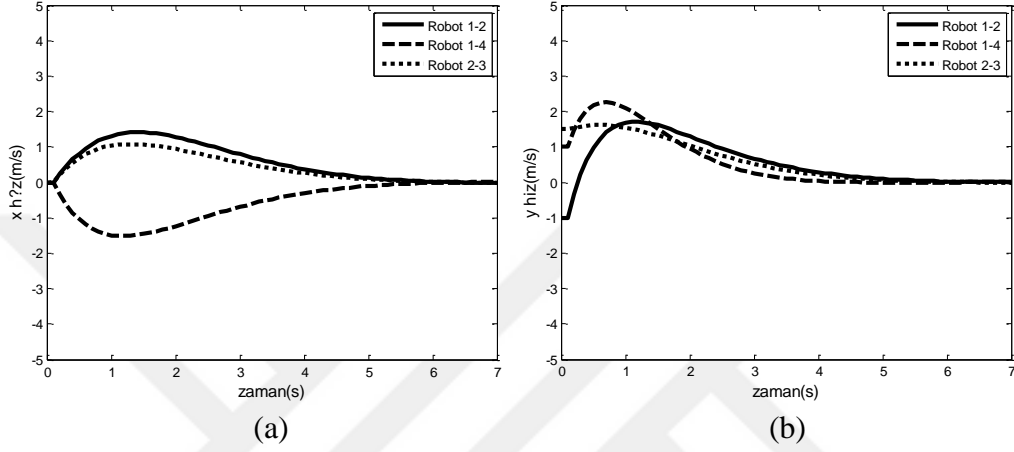
Şekil 2.3. Etmenlerin çizdikleri yörüngeler.



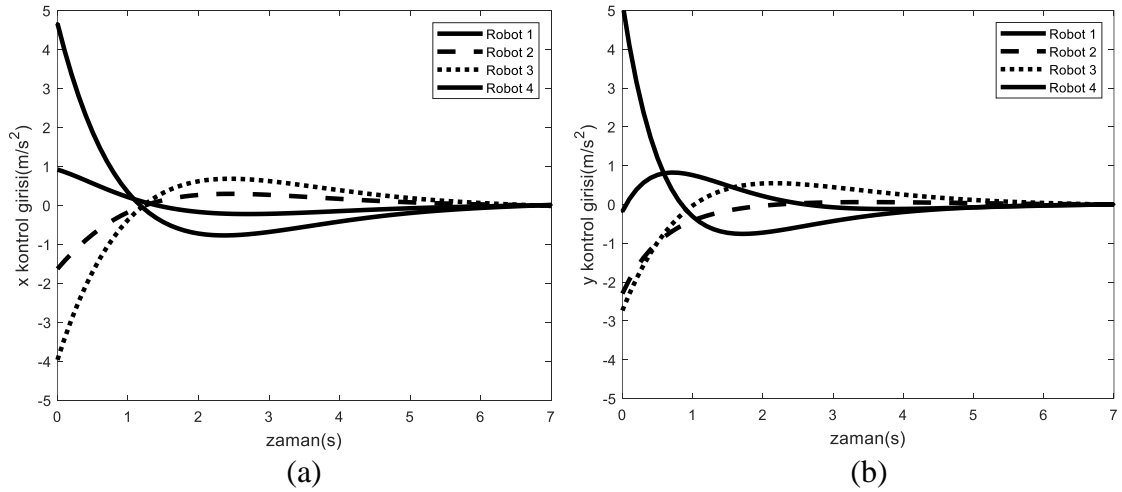
Şekil 2.4. Etmen arası bağıl mesafe yörüngeleri (a) x ve (b) y ekseninde.

Ayrıca, bitişik olan etmenler hem x hem de y ekseninde sıfır bağıl hıza ulaşmak zorundadır. Düzenin teşkili sürecinde bitişik etmenlerin bağıl hız yörüngeleri Şekil 2.5'te

gösterilmiştir. Bu şekilde ufuk sonunda tüm bağıl hızların sıfıra ulaştığı görülmektedir. Kontrol girdilerinin yörüngeleri Şekil 2.6'da verilmiştir. Buradan kontrol girdilerinin bütün zaman aralığı için sürtünmesiz olduğu ve herhangi bir ani değişiminin olmadığı görülmektedir.

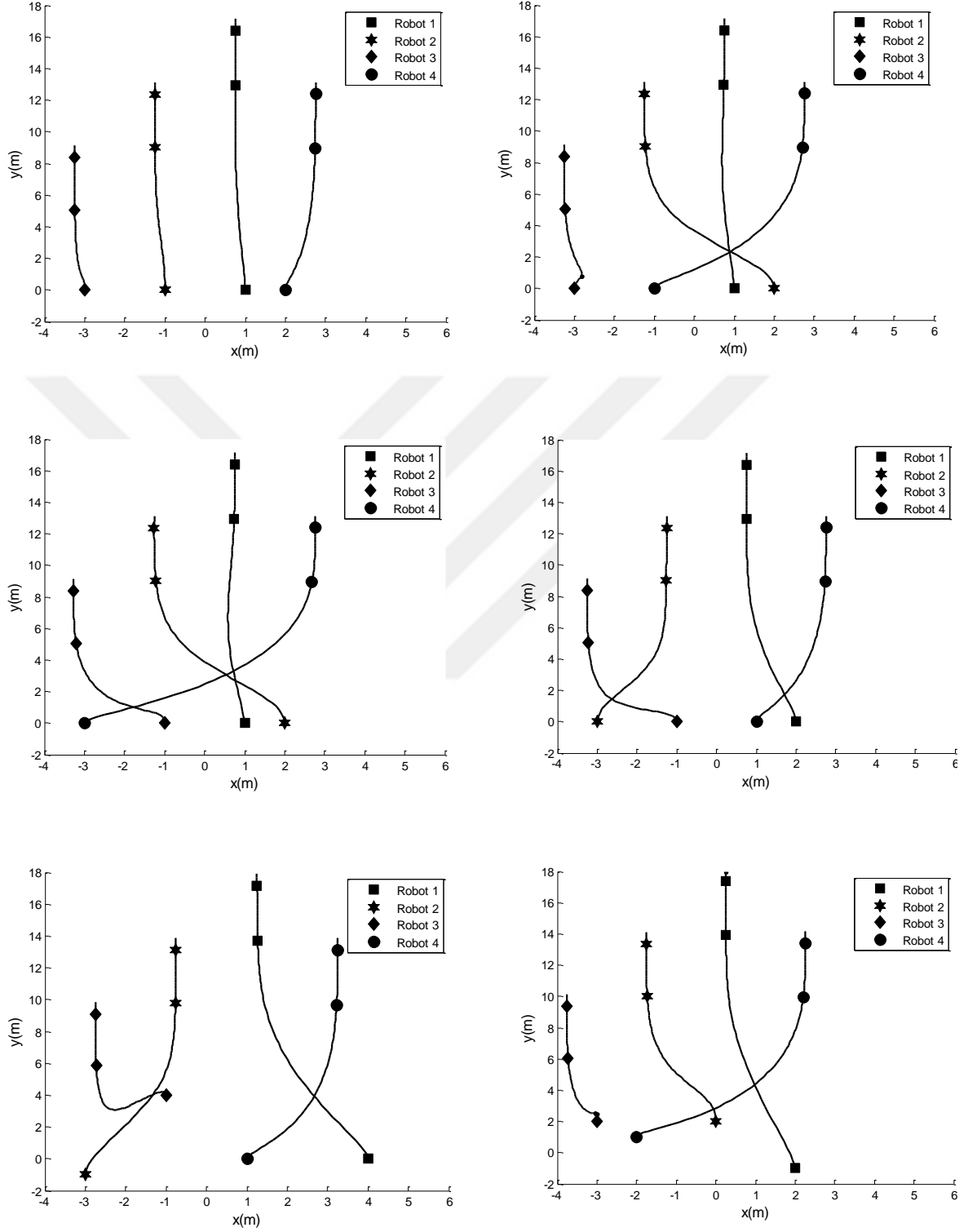


Şekil 2.5. Etmenler arası bağıl hız yörüngeleri (a) x ve (b) y ekseninde.



Şekil 2.6. Kontrol girdilerinin yörüngeleri (a) x ve (b) y ekseninde.

Ayrıca, etmenlerin farklı başlangıç konumları için yeniden simülasyon yapılmış ve bu denemeler Şekil 2.7'de gösterilmiştir.



Şekil 2.7. Etmenlerin farklı başlangıç konumları için düzen teşkili sırasındaki çizdikleri yörüngeler.

2.2. Düzen Kontrolüne Analitik Oyun Yaklaşımı

Bölüm 2.1'deki yaklaşımda bağlı *Riccati* diferansiyel denklemler kümesi sayısal olarak çözülmüştür. Fakat, bu denklemleri çözmeden, çözüm kümesinin varlığı her seçilmiş ufuk sonu için gözlemlenmelidir. Bu da $\mathbf{H}(t_f)$ 'nin tersi alınabilirliğinin gözlemlenmesiyle eş anlamlıdır. Bu bölümde, düzen kontrolüne bir eşsiz *Nash* dengesini kazandıran diferansiyel oyun formülasyonu ortaya konulmuştur. Bu formülasyonda her seçilen ufuk sonu için etmenlerin kontrol kurallarının varlığı garantidir. Ayrıca, oyunun kabul ettiği bu açık döngü eşsiz *Nash* dengesi zamanın doğrusal işlevi ve dağıtık kontrol yasası olduğu gösterilmiştir.

2.2.1. Problemin Tanımı

2.2.1.1. Sistem Dinamikleri ve Düzen Grafi

m sayıda etmenden oluşan ağ-bağımlı bir etmen takımı varsayalım. Her etmen çift integratör dinamikleri ile tanımlanır. Takımın dinamiklerinin durum-uzay gösterimi

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \sum_{i=1}^m \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i \quad (2.14)$$

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$$

şeklindedir. Burada

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{nm} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2nm+1}$$

$$\mathbf{B}_i = [\mathbf{0}_{n \times nm}, \mathbf{0}_{n \times 1}, \mathbf{b}_i^T]^T \in \mathbb{R}^{(2nm+1) \times n}$$

$$\mathbf{b}_i = [\mathbf{0} \dots \mathbf{I}_n \dots \mathbf{0}]^T \in \mathbb{R}^{nm \times n}$$

\mathbf{I}_n n -boyutlu birim matrisini, $\mathbf{z} = [\mathbf{q}_1^T, \dots, \mathbf{q}_m^T, \mathbf{1}, \mathbf{v}_1^T, \dots, \mathbf{v}_m^T]^T \in \mathbb{R}^{2nm+1}$ bütüm sistemin durum vektörünü, \mathbf{z}_0 başlangıç durum vektörünü ve $\mathbf{q}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^n (i = 1, \dots, m)$ n -boyutlu koordinat sisteminde sırayla i 'inci etmenin konum, hız ve ivmesini göstermektedir.

Yönlü graf $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ düğüm kümesi \mathcal{V} ve sıralı düğüm çiftleri içeren kenar kümesi \mathcal{E} 'den oluşmaktadır. Düzen kontrolü için düğüm kümesi $\mathcal{V} = \{1, \dots, m\}$ düzende yer alan etmenlere karşılıklı olabilmektedir. Bu durumda kenar kümesi $\mathcal{E} \subseteq \{(i, j) : i, j \in \mathcal{V}\}$ arabağlantıları temsil etmektedir. \mathcal{G} 'deki her kenar $(i, j) \in \mathcal{E}$ bir ağırlık sayısı $\omega_{ij} > 0$ ile ilişkilidir.

Varsayım 2.1. Düzen grafi \mathcal{G} bağlantılıdır, yani her çift düğüm $i, j \in \mathcal{V}$ için, i 'den j 'ye tüm $j = 1, \dots, m, j \neq i$, \mathcal{E} 'deki kenarlardan oluşan (yönsüz) bir yol vardır.

Graf Laplasyen matrisi L

$$L = DWD^T \in \mathbb{R}^m \quad (2.15)$$

olarak tanımlanır. Burada $D \in \mathbb{R}^{m \times |\mathcal{E}|}$ ilişki matrisi ve $W = \text{diag}(\omega_{ij}) \in \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|}$ köşegen ağırlık matrisidir. D 'de uv elemanı eğer v kenarının yönü u düğümünden öteye doğru ise 1'e eşitlenir, eğer v kenarının yönü u düğümüne doğru ise -1'e eşitlenir, aksi halde 0'a eşitlenir. n -boyutlu graph Laplasyen matrisi \mathcal{L} aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\mathcal{L} = L \otimes I_n \in \mathbb{R}^{nm} \quad (2.16)$$

Burada \otimes işleci *Kronecker* çarpımıdır.

Kronecker çarpımı özelliklerini kullanarak \mathcal{L} aşağıdaki şekilde yeniden ifade edilebilmektedir.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= DWD^T \otimes I_n \\ &= (D \otimes I_n)(W \otimes I_n)(D \otimes I_n)^T \\ &= \mathcal{D}\mathcal{W}\mathcal{D}^T \end{aligned} \quad (2.17)$$

Burada $\mathcal{D} = D \otimes I_n$ ve $\mathcal{W} = W \otimes I_n$. Varsayalım $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_1^T, \dots, \mathbf{q}_m^T]^T$ ve $\mathbf{v} = [\mathbf{v}_1^T, \dots, \mathbf{v}_m^T]^T$. Laplasyen matrisi \mathcal{L} simetrik ve pozitif yarıtanımlıdır ve aşağıdaki karelerin-toplamı özelliğini sağlamaktadır.

$$\begin{aligned}\mathbf{q}^T \mathcal{L} \mathbf{q} &= \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} \omega_{ij} \|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|^2 \\ \mathbf{v}^T \mathcal{L} \mathbf{v} &= \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} \omega_{ij} \|\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i\|^2\end{aligned}\quad (2.18)$$

Burada $\|\cdot\|$ simgesi Öklit normunu \mathbb{R}^n 'de göstermektedir. Buradan

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} \omega_{ij} (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i) = \mathbf{q}^T \mathcal{D} \mathbf{W} \quad (2.19)$$

Her etmen sadece graf topolojisindeki komşularından gelen yerel bilgilere sahip olduğu varsayılmaktadır. Etmen i 'nin graf topolojisindeki komşular kümesi $N_i = \{j \in \mathcal{V} : (i,j) \in \mathcal{E}\}$ ile tanımlanır. Bu nedenle, matris \mathbf{W} etmen i için $\mathbf{W}_i = \text{diag}(0, \dots, \omega_{ij}, \dots, 0), j \in N_i$ ile değiştirilmektedir.

2.2.1.2. Maliyet Fonksiyonları ve Nash Dengesi

$\mathbf{d}_{ij} \in \mathbb{R}^n ((i,j) \in \mathcal{E})$ graf topolojisinde bitişik olan i ve j etmenlerinin arasındaki istenilen mesafe vektörü olsun. Ufuk süresi sonu t_f 'de, bütün takımın düzen hataları ve bağıl hızların toplamı düzen grafına göre aşağıdaki gibi tanımlanabilmektedir.

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} \omega_{ij} \left(\|\mathbf{q}_i(t_f) - \mathbf{q}_j(t_f) - \mathbf{d}_{ij}\|^2 + \|\mathbf{v}_i(t_f) - \mathbf{v}_j(t_f)\|^2 \right) \quad (2.20)$$

Karelerin-toplamı özelliği (2.18) ve (2.19)'dan (2.20) aşağıdaki şekilde matris formuna dönüştürülebilmektedir.

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} \left(\omega_{ij} \|\mathbf{q}_i(t_f) - \mathbf{q}_j(t_f)\|^2 - 2\omega_{ij} (\mathbf{q}_i(t_f) - \mathbf{q}_j(t_f))^T \mathbf{d}_{ij} \right. \\ \left. + \omega_{ij} \|\mathbf{d}_{ij}\|^2 + \omega_{ij} \|\mathbf{v}_i(t_f) - \mathbf{v}_j(t_f)\|^2 \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{q}(t_f)^T \mathcal{L}_i \mathbf{q}(t_f) - 2\mathbf{q}(t_f)^T \mathcal{D} \mathcal{W}_i \mathbf{d} + \mathbf{d}^T \mathcal{W}_i \mathbf{d} + \mathbf{v}(t_f)^T \mathcal{L}_i \mathbf{v}(t_f) \\
&= \mathbf{z}(t_f)^T \mathbf{Q}_i \mathbf{z}(t_f)
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Burada

$$\mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_i & -\mathcal{D} \mathcal{W}_i \mathbf{d} & \mathbf{0} \\ -(\mathcal{D} \mathcal{W}_i \mathbf{d})^T & \mathbf{d}^T \mathcal{W}_i \mathbf{d} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathcal{L}_i \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}_i = \mathcal{D} \mathcal{W}_i \mathcal{D}^T$$

$$\mathcal{W}_i = \mathbf{W}_i \otimes \mathbf{I}_n$$

$$\mathbf{d} = \text{col}(\mathbf{d}_{ij}) \in \mathbb{R}^{nm}$$

ve $\text{col}(\cdot)$ sütun vektörü anlamına gelmektedir. $\mathbf{z}(t_f)^T \mathbf{Q}_i \mathbf{z}(t_f) \geq 0$ olduğundan dolayı düzen matrisi \mathbf{Q}_i pozitif yarıtanımlıdır.

Terminal düzen hataları ve terminal bağıl hızların toplamı (2.21) toplam kontrol uğraş gideriyle birlikte en aza indirmek için aşağıdaki sonlu ufuk kareli maliyet fonksiyonu şeklinde tanımlanmıştır.

$$J_i = \mathbf{z}(t_f)^T \mathbf{Q}_i \mathbf{z}(t_f) + \int_0^{t_f} \sum_{j=1}^m \mathbf{u}_j^T \mathbf{R}_{ij} \mathbf{u}_j dt \tag{2.22}$$

Burada ağırlık matrisi \mathbf{R}_{ij} simetrik ve pozitif tanımlıdır. Bu nedenle, etmen i 'in düzen kontrolü amacı, altta yatan sistem dinamikleri (2.14) dikkate alarak bireysel maliyet fonksiyonu J_i 'yi en aza indirmeyeyle \mathbf{u}_i 'yi tasarlamaktır.

Bu problemde m sayıda farklı maliyet fonksiyonları olduğundan dolayı klasik optimal kontrol teorisi optimal kontrol yasasını bulmak için kullanılamaz. Bu durumda, optimal kontrol stratejilerinin türetilmesi için diferansiyel oyun teorisiyle yaklaşılabilir. Açık döngü kontrol yapısı altında, açık döngü Nash dengesi çözümü düzen kontrolü

stratejileri olabilmektedir. Açık döngü bilgi yapısında tüm oyuncular kendi kararlarını başlangıç durum vektörü \mathbf{z}_0 temel alarak vermekteler. Bir *Nash* dengesi (oyundaki) tüm oyuncuların bir strateji kombinasyonudur. Bu kombinasyonda tüm oyuncular biri hariç hepsi *Nash* stratejilerini kullanmaktalarsa, sapan oyuncu maliyetini düşüremez. Açık döngülü *Nash* dengesi bir kabul edilebilir strateji seçim küme bileşimi $(\mathbf{u}_1^*, \dots, \mathbf{u}_m^*)$ şekilde tanımlanır eğer tüm kabul edilebilir strateji seçim kümeleri $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m)$ için

$$J^i(\mathbf{u}_1^*, \dots, \mathbf{u}_{i-1}^*, \mathbf{u}_i^*, \mathbf{u}_{i+1}^*, \dots, \mathbf{u}_m^*) \leq J^i(\mathbf{u}_1^*, \dots, \mathbf{u}_{i-1}^*, \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i+1}^*, \dots, \mathbf{u}_m^*) \quad (2.23)$$

eşitsizliği, $i = 1, \dots, m$ için sağlanırsa. Burada $\mathbf{u}_i \in \Gamma_i$ ve Γ_i i 'inci oyuncu için kabul edilir strateji seçim kümesidir.

2.2.2. Analitik Sonuçlar

Bu bölümde, düzen kontrolünün diferansiyel oyun (2.14) ve (2.22) çerçevesinde açık döngü *Nash* dengesinin çözümü araştırılmıştır. [129]'a göre maliyet fonksiyonları J_i ($i = 1, \dots, m$), \mathbf{u}_i 'nin tüm kabul edilebilir kontrol fonksiyonları \mathbf{u}_j , $j \neq i$ ve tüm \mathbf{z}_0 için kesinlikle dışbükeydir. Bu durum, minimum ilkeyi izleyen koşulların gerekli ve yeterli olduğunu göstermektedir.

Etmen i için *Hamiltonian*

$$H_i = \sum_{j=1}^m \mathbf{u}_j^T \mathbf{R}_{ij} \mathbf{u}_j + \lambda_i^T \left(\mathbf{A} \mathbf{z} + \sum_{i=1}^m \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i \right) \quad (2.24)$$

olarak tanımlanır. Burada λ_i vektörü *Lagrange* çarpanıdır. *Hamiltonian*'un \mathbf{u}_i 'ye göre en aza indirgenmesi optimal kontrol yasası \mathbf{u}_i 'yi verir.

$$\mathbf{u}_i = -\mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{B}_i^T \lambda_i \quad (2.25)$$

Burada λ_i ($i = 1, \dots, m$) vektörü aşağıdaki denklemi sağlamaktadır.

$$\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial H_i}{\partial \mathbf{z}} = -\mathbf{A}^T \lambda_i \quad (2.26)$$

$$\lambda_i(t_f) = \mathbf{Q}_i \mathbf{z}(t_f)$$

(2.25) ve (2.14)'ten

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{A}\mathbf{z} - \sum_{i=1}^m \mathbf{B}_i \mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{B}_i^T \lambda_i \\ &= \mathbf{A}\mathbf{z} - \sum_{i=1}^m \mathbf{S}_i \lambda_i \end{aligned} \quad (2.27)$$

elde edilmektedir. Burada $\mathbf{S}_i = \mathbf{B}_i \mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{B}_i^T$. Varsayalım

$$\mathbf{S} = [\mathbf{S}_1 \quad \dots \quad \mathbf{S}_m]$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}^T \end{bmatrix}$$

(2.26) $i = 1, \dots, m$ için, (2.27) ile birlikte aşağıdaki standart biçimde gösterilebilmektedir.

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = -\mathbf{M}\boldsymbol{\zeta}$$

$$\mathbf{P}\boldsymbol{\zeta}(0) + \mathbf{V}\boldsymbol{\zeta}(t_f) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0^T & \mathbf{0}_{(2nm+1) \times m} \end{bmatrix}^T \quad (2.28)$$

Burada

$$\boldsymbol{\zeta} = [\mathbf{z}^T \quad \lambda_1^T \quad \dots \quad \lambda_m^T]^T$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A} & \mathbf{S} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2nm+1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2nm+1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{Q} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

(2.28)'in eşdeğeri

$$(\mathbf{P}e^{t_f\mathbf{M}} + \mathbf{V})e^{-t_f\mathbf{M}}\boldsymbol{\zeta}(0) = [\mathbf{z}_0^T \quad \mathbf{0}_{(2nm+1)\times m}]^T \quad (2.29)$$

şeklindedir. Eğer (2.29) her \mathbf{z}_0 için eşsiz şekilde çözülebilir ise, o zaman problem bir eşsiz açık döngü Nash dengesine sahiptir.

Varsayalım

$$\mathbf{H}(t_f) = \mathbf{C}_{11} + \sum_{i=1}^m \mathbf{C}_{1,i+1}\mathbf{Q}_i \quad (2.30)$$

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2nm+1} & -\mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = [\mathbf{C}_{12} \quad \dots \quad \mathbf{C}_{1,m+1}]$$

Burada $e^{t_f\mathbf{M}} = [\mathbf{C}_{ij}]$. Temel matris analizleriyle aşağıdaki sonuç elde edilmektedir.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\zeta}(t_f) &= e^{-t_f\mathbf{M}}\boldsymbol{\zeta}(0) \\ &= [\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{P}e^{t_f\mathbf{M}} + \mathbf{V})]^{-1}[\mathbf{z}_0^T \quad \mathbf{0}_{(2nm+1)\times m}]^T \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2nm+1} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix} \mathbf{H}(t_f)^{-1} \mathbf{z}_0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

(2.31)'in eşdeğeri

$$\boldsymbol{\zeta}(0) = e^{t_f\mathbf{M}} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2nm+1} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix} \mathbf{H}(t_f)^{-1} \mathbf{z}_0 \quad (2.32)$$

şeklindedir. Buradan

$$\zeta = e^{(t_f-t)M} \begin{bmatrix} I_{2nm+1} \\ Q \end{bmatrix} H(t_f)^{-1} z_0 \quad (2.33)$$

elde edilmektedir. Denge ile ilişkili durum yörüngesi

$$z = [I_{2nm+1} \quad \mathbf{0}] e^{(t_f-t)M} \begin{bmatrix} I_{2nm+1} \\ Q \end{bmatrix} H(t_f)^{-1} z_0 \quad (2.34)$$

olarak bulunmaktadır. $H(t_f)$ 'nin tanımını kullanılarak (2.34)'ün eşdeğeri

$$z = H(t_f - t) H(t_f)^{-1} z_0 \quad (2.35)$$

şeklinde elde edilmektedir. Görüldüğü üzere bir eşsiz açık döngü Nash dengesinin varlığı $H(t_f)$ matrisinin tersi alınabilirliği ile eşdeğerdir.

Açıklama 2.4. A , B , C , D 'nin aynı boyuta sahip kare matrisler olduğunu varsayalım. Eğer $CD = DC$, bu durumda matris $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ determinanı $AD - BC$ matrisinin determinanı ile eşdir [132].

Teorem 2.1. $H(t_f)$ matrisi tüm $t_f \geq 0$ için tersi alınabilir.

İspat: $A^2 = \mathbf{0}$, $D^2 = \mathbf{0}$, $M^4 = \mathbf{0}$ olduğu gözlemlenmektedir. Üstel matris $e^{t_f M}$ için kuvvet serisini kullanılarak

$$e^{t_f M} = \begin{bmatrix} I - t_f A & t_f S + \frac{t_f^2}{2} (SD - AS) - \frac{t_f^3}{6} ASD \\ \mathbf{0} & I + t_f D \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

olarak elde edilmektedir. Buradan

$$H(t_f) = I - t_f A + \left(t_f S + \frac{t_f^2}{2} (SD - AS) - \frac{t_f^3}{6} ASD \right) Q$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{I} + t_f \left(\sum_{i=1}^m \mathbf{S}_i \mathbf{Q}_i - \mathbf{A} \right) + \frac{t_f^2}{2} \left(\sum_{i=1}^m \mathbf{S}_i \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_i - \mathbf{A} \sum_{i=1}^m \mathbf{S}_i \mathbf{Q}_i \right) \\
&\quad - \frac{t_f^3}{6} \mathbf{A} \sum_{i=1}^m \mathbf{S}_i \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_i \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \frac{t_f^3}{6} \mathbf{K} & \frac{t_f^3}{6} \mathbf{N} & -t_f \left(\mathbf{I} + \frac{t_f}{2} \mathbf{K} \right) \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{t_f^2}{2} \mathbf{K} & -\frac{t_f^2}{2} \mathbf{N} & \mathbf{I} + t_f \mathbf{K} \end{bmatrix} \tag{2.37}
\end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned}
\mathbf{K} &= \sum_{i=1}^m \mathbf{b}_i \mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{b}_i^T \mathcal{L}_i \\
\mathbf{N} &= \sum_{i=1}^m \mathbf{b}_i \mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{b}_i^T (\mathcal{D} \mathbf{W}_i \mathbf{d}) \tag{2.38}
\end{aligned}$$

$\mathbf{H}(t_f)$ 'nin determinanı aşağıdaki matrisin determinantıyla eşdir.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} - \frac{t_f^3}{6} \mathbf{K} & -t_f \left(\mathbf{I} + \frac{t_f}{2} \mathbf{K} \right) \\ \frac{t_f^2}{2} \mathbf{K} & \mathbf{I} + t_f \mathbf{K} \end{bmatrix} \tag{2.39}$$

(2.39)'un blokları aynı boyuttan kare matrislerden oluşmaktadır. Ayrıca, $\frac{t_f^2}{2} \mathbf{K}$ matrisi ile $\mathbf{I} + t_f \mathbf{K}$ matrisi yer değişim özelliğine sahipler. Bu durumda, Açıklama 2.4'e göre bu matrisin determinanı

$$\mathbf{I} + \left(t_f + \frac{t_f^3}{6} \right) \mathbf{K} + \frac{t_f^4}{12} \mathbf{K}^2 \tag{2.40}$$

matrisin determinantıyla eşdir. (2.40)'daki matris pozitif tanımlıdır, ve bu teoremi ispatlar. ■

Teorem 2.1'e göre düzen kontrolünün diferansiyel oyun (2.14) ve (2.22)'deki formülasyonunun açık döngü *Nash* dengesinin çözümü vardır. Aşağıdaki dönüşümü varsayalım.

$$\mathbf{z} = \Psi \tilde{\mathbf{z}} \quad (2.41)$$

Burada Ψ temel matris olarak bilinmektedir. Bu matris tekil değildir ve

$$\dot{\Psi} = A\Psi \quad (2.42)$$

$$\Psi(t_f) = I$$

denklemini sağlamaktadır. (2.41)'in t 'ye göre türevi sistem dinamikleri (2.14) ile birleştirildiğinde

$$\Psi \dot{\tilde{\mathbf{z}}} + \dot{\Psi} \tilde{\mathbf{z}} = A\mathbf{z} + \sum_{i=1}^m \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i \quad (2.43)$$

elde edilmektedir. Buradan doğrusal eş sistem aşağıdaki şekilde bulunmaktadır.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{z}}} &= \Psi^{-1} \left((A\Psi - \dot{\Psi})\mathbf{z} + \sum_{i=1}^m \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i \right) \\ &= \Psi^{-1} \sum_{i=1}^m \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\tilde{\mathbf{z}}(0) = \Psi(0)\mathbf{z}_0$$

Bu eş sistem için $\tilde{\mathbf{z}}(t_f) = \mathbf{z}(t_f)$ olduğundan dolayı maliyet fonksiyonları (2.22) kullanılabilir.

Teorem 2.2. Lidersiz düzen kontrolünün (2.14) ve (2.22)'deki diferansiyel oyun formülasyonunun bir açık döngü eşsiz *Nash* dengesi çözümü vardır. Bu çözüm

$$\mathbf{u}_i = -\mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{B}_i^T (\mathbf{I} + (t_f - t) \mathbf{A}^T) \mathbf{Q}_i \mathbf{H}(t_f)^{-1} \mathbf{z}_0 \quad (2.45)$$

olarak verilmektedir.

İspat: i 'inci oyuncu için *Hamiltonian*

$$\tilde{H}_i = \sum_{j=1}^m \mathbf{u}_j^T \mathbf{R}_{ij} \mathbf{u}_j + \tilde{\lambda}_i^T \Psi^{-1} \sum_{i=1}^m \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i \quad (2.46)$$

olarak tanımlanır. *Hamiltonian*'nu \mathbf{u}_i 'ye göre en aza indirmek optimal kontrolü vermektedir.

$$\mathbf{u}_i = -\mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{B}_i^T (\Psi^{-1})^T \tilde{\lambda}_i \quad (2.47)$$

Burada

$$\dot{\tilde{\lambda}}_i = \mathbf{0} \quad (2.48)$$

$$\tilde{\lambda}_i(t_f) = \mathbf{Q}_i \mathbf{z}(t_f)$$

(2.48)'den görüldüğü üzere $\tilde{\lambda}_i$ sabit bir vektördür. Böylece

$$\tilde{\lambda}_i = \mathbf{Q}_i \mathbf{z}(t_f) \quad (2.49)$$

Dönüşüm (2.42) ve $\mathbf{A}^2 = \mathbf{0}$ 'dan aşağıdaki sonuçlar elde edilmektedir.

$$\begin{aligned} \Psi &= e^{(t-t_f)\mathbf{A}} \\ &= \mathbf{I} + (t - t_f)\mathbf{A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Psi}^{-1} &= e^{(t_f-t)\mathbf{A}} \\
&= \mathbf{I} + (t_f - t)\mathbf{A}
\end{aligned} \tag{2.50}$$

$\mathbf{z}(t_f)$ 'yi (2.35)'ten hesaplayarak (2.49) aşağıdaki şekilde elde edilmektedir.

$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_i = \mathbf{Q}_i \mathbf{H}(t_f)^{-1} \mathbf{z}_0 \tag{2.51}$$

Sonuç olarak, (2.50) ve (2.51)'den (2.45) elde edilmektedir. Teorem 2.1'e göre $\mathbf{H}(t_f)$ tersi alınabilir. Buradan (2.45)'in eşsiz ve var olması görülmektedir. ■

Oyunun kabul ettiği açık döngü eşsiz *Nash* dengesi (2.45) zamanın doğrusal işlevi olduğu görülmektedir. Ağ-bağımlı çok etmenli sistemlerin kontrolünde dağıtık kontrol tasarımları tercih edilmektedir. Açıklama 2.5'te *Nash* dengesinin çözümü (2.45)'in dağıtık kontrol yasası olduğu gösterilmiştir.

Açıklama 2.5. Açık döngü *Nash* dengesi (2.45) dağıtık kontrol yasasıdır.

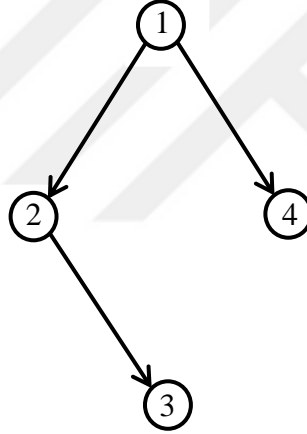
İspat: Graf topolojisinde etmen i ve etmen j 'nin doğrudan komşu olmadıklarını varsayalım. Bu durumda, ağırlık matrisi \mathbf{W}_i 'nin köşegen elemanı ω_{ij} sıfıra ayarlanacaktır. *Kronecker* çarpım operatörü özelliklerine göre \mathcal{L}_i matrisi $m \times m$ blok yapısına sahiptir. Burada her bloğun boyutu n 'dir. $\omega_{ij} = 0$ ayarı, \mathcal{L}_i ve $\mathcal{D}\mathbf{W}_i\mathbf{d}$ 'nin j 'inci blok satır ve sütununu sıfır bloklara çevirmektedir. Böylece, \mathbf{Q}_i matrisinde j 'inci ve $(m + j + 1)$ 'inci blok satırları ve sütunları $2m + 1$ sıfır bloklardan oluşacaktır. Dolayısıyla, $\mathbf{Q}_i \mathbf{H}(t_f)^{-1}$ çarpımı sonucunda, j 'inci ve $(m + j + 1)$ 'inci blok satırları $2m + 1$ sıfır bloklardan oluşacaktır. Bu durum, açık döngü *Nash* dengesi çözümü \mathbf{u}_i , j 'inci etmenin başlangıç durum vektörleri $\mathbf{q}_j(0)$ ve $\mathbf{v}_j(0)$ 'in bütün sistemin başlangıç durum vektörü $\mathbf{z}_0 = [\mathbf{q}_1(0)^T, \dots, \mathbf{q}_m(0)^T, 1, \mathbf{v}_1(0)^T, \dots, \mathbf{v}_m(0)^T]^T$ 'da kullanmayacağını göstermektedir. Bu sonuç, i ile komşu olmayan tüm etmenlere doğrudan genelleştirilebilmektedir. Böylece, açık döngü *Nash* dengesinin çözümü \mathbf{u}_i dağıtık kontrol yasasıdır. ■

2.2.3. Analitik Çözümünün Simülasyonu

İki-boyutlu koordinat sisteminde ($n = 2$) dört etmenli ($m = 4$) bir takım varsayalım. Takımın bir eşkenar dörtgen düzen şeklini teşkil etmesi beklenmektedir (Şekil 2.8). Düzenin graf kenar kümesi ve ilişki matrisi aşağıdaki formda verilmiştir.

$$\mathcal{E} = \{(1,2), (1,4), (2,3)\}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Şekil 2.8. Eşkenar dörtgen düzen şekli ve düzen grafi.

Maliyet fonksiyonlarındaki ağırlık matrisi \mathbf{W}_i düzen grafi topolojisinde doğrudan komşuluk üzerine seçilmiştir. Böylece ağırlık matrisleri

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanmıştır. Düzen şeklinde etmenler arası istenilen ofset vektörler

$$\mathbf{d}_{12} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}_{14} = \mathbf{d}_{23} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

olarak belirlenmiştir. Etmenlerin başlangıç konumları ve başlangıç hızları

$$\mathbf{q}_1(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

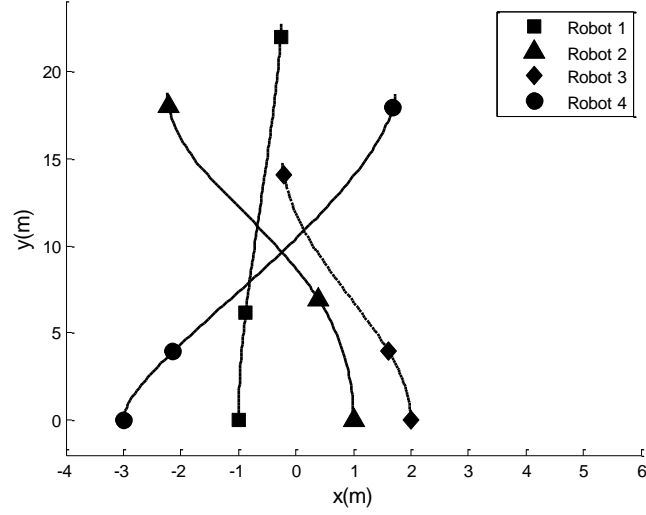
$$\mathbf{q}_2(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_3(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_4(0) = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

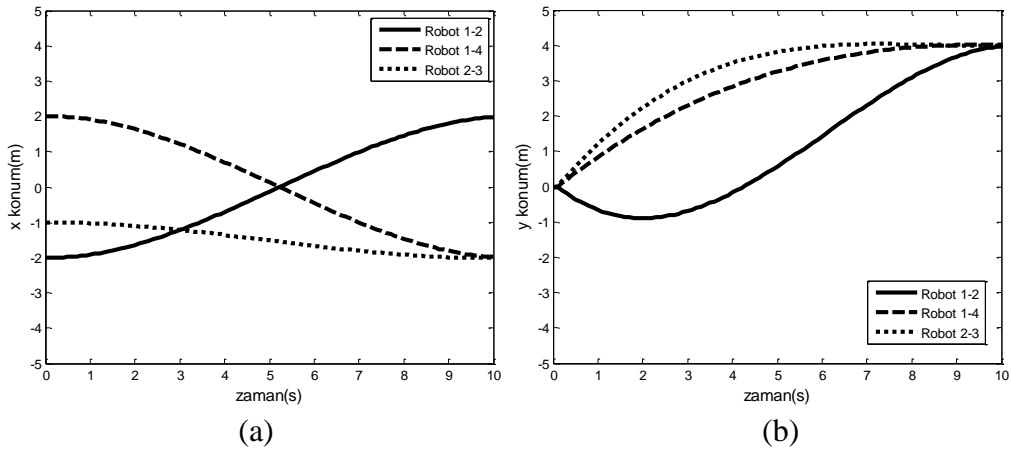
olarak tanımlanmıştır.

Maliyet fonksiyonundaki kontrol uğraşı ağırlık matrisi $\mathbf{R}_{ii} = \mathbf{I}_2$ ($i = 1, \dots, 4$) birim matris olarak seçilmiştir. Sonlu ufuk süresi $t_f = 10s$ olarak belirlenmiş ve simülasyon için örnekleme zaman dilimi $0.1s$ olarak dikkate alınmıştır. Teorem 2.1'e göre bir eşsiz açık döngü *Nash* dengesi var ve (2.45) ile hesaplanabilir. Etmenlerin denge ile ilişkili yörüngeleri zaman aralığı $[0,10]$ için (2.35) ile elde edilmektedir. Eşkenar dörtgen düzeninin teşkili sırasında etmenlerin çizdikleri yörüngeler $x - y$ düzleminde Şekil 2.9'da gösterilmiştir. Etmenler $t = 0s$, $t = 3s$ ve $t = 9.8s$ 'de görüntülenmiştir. Bu grafik dört etmen arasında arzulan düzenin gerçekleştiğini kanıtlamaktadır.



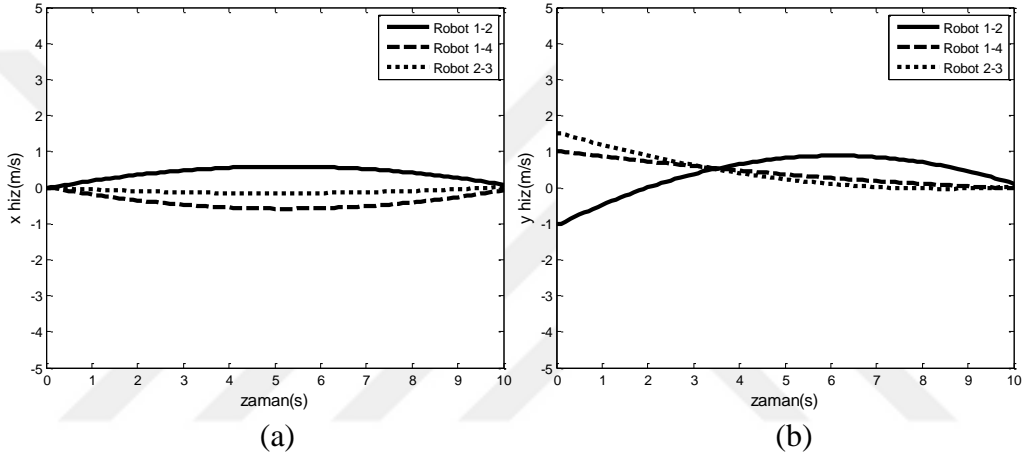
Şekil 2.9. Etmenlerin çizdikleri yörüngeler.

Ofset vektörleri d_{12} , d_{14} ve d_{23} 'e göre etmen 1 ile 2 x ve y ekseninde sırayla -2 and -4 , etmen 1 ile 4, x ve y ekseninde sırayla 2 and -4 ve etmen 2 ile 3, x ve y ekseninde sırayla 2 and -4 mesafelerine ulaşmalıdır. Etmenler arası bağıl konum değişim çizgileri Şekil 2.10'da gösterilmiştir. Bu grafikten ofset vektörleriyle tanımlanan tüm bağıl mesafelerin gerçekleştiği görülmektedir.

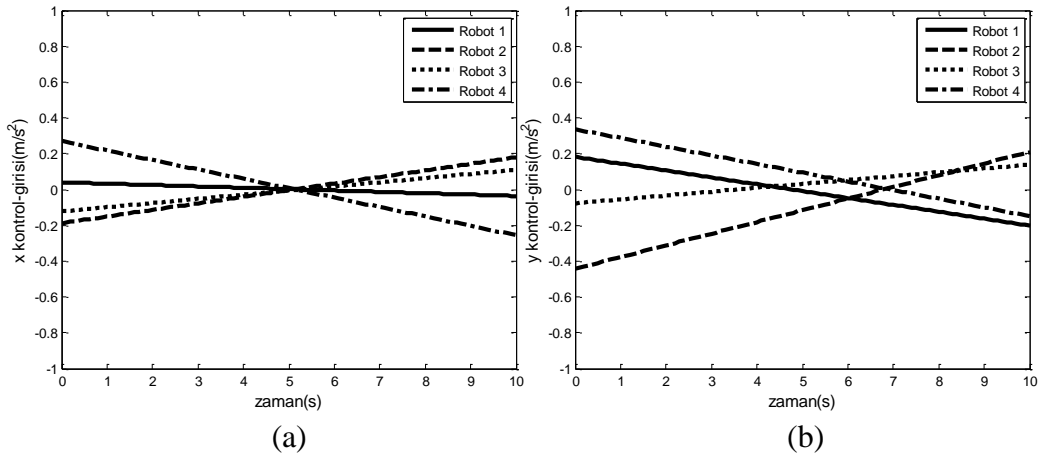


Şekil 2.10. Etmenler arası bağıl mesafe değişimi, (a) x ve (b) y ekseninde.

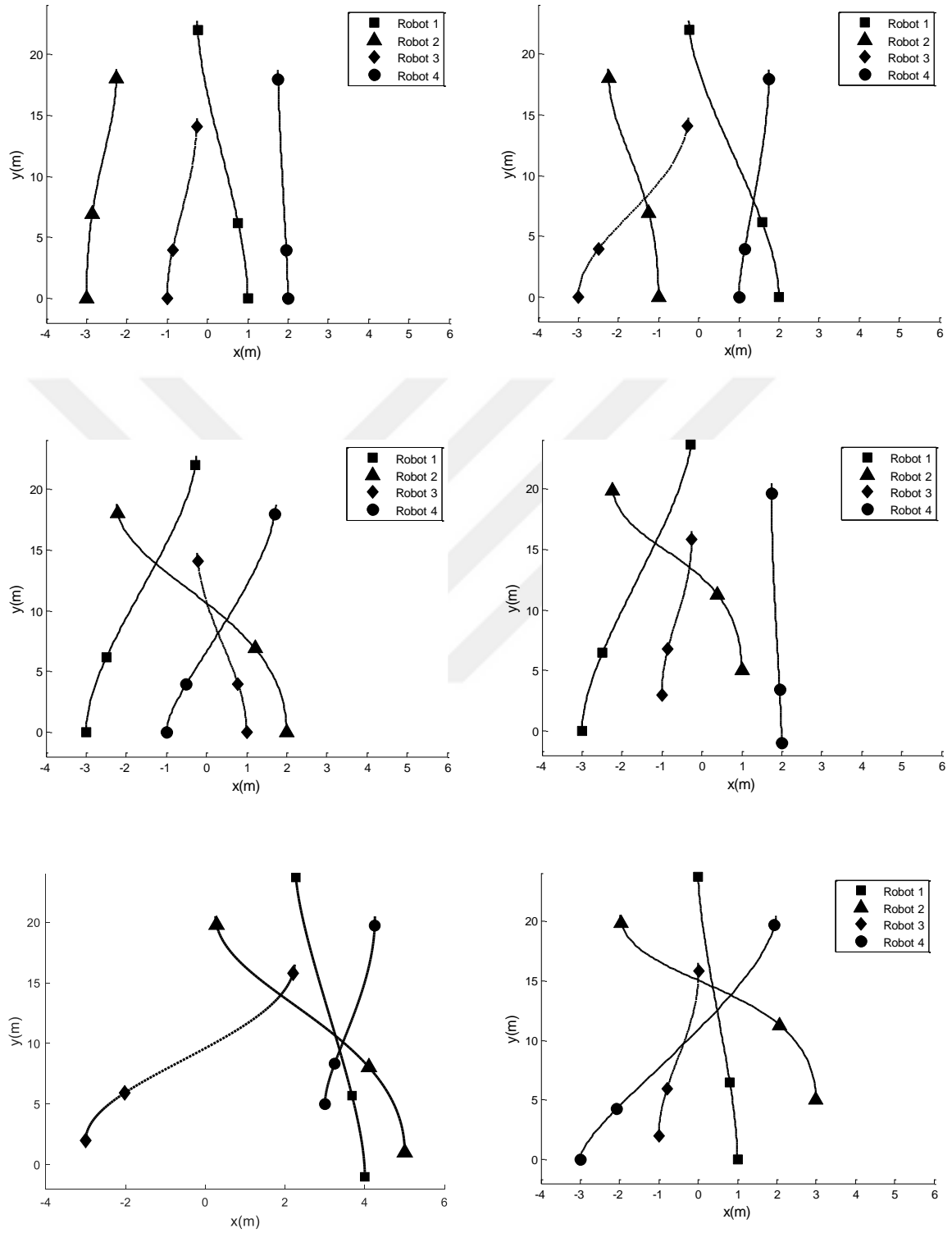
Ayrıca, etmenler sıfır bağıl hıza ulaşmak zorundadır. Etmenler arası bağıl hız yörüngeleri Şekil 2.11’de gösterilmiştir. Bu grafikten, etmen 1 ile 2, etmen 1 ile 4 ve etmen 2 ile 3 arası bağıl hızların sıfıra ulaştığı görülmektedir. Kontrol girdilerinin yörüngeleri Şekil 2.12’de gösterilmiştir. Bu şekilden, oyunun kabul ettiği *Nash* dengesinin zamanın doğrusal bir işlevi olduğu açıktır. Ayrıca, görüldüğü üzere kontrol girdileri bütün zaman aralığı için sürtünmesizdir ve ani değişimler görülmemektedir. Etmenlerin farklı başlangıç konumları için simülasyon yeniden yapılmış ve bu denemeler Şekil 2.13’te gösterilmiştir.



Şekil 2.11. Etmenler arası bağıl hız yörüngeleri, (a) x ve (b) y ekseninde.



Şekil 2.12. Kontrol girdilerinin yörüngeleri, (a) x ve (b) y ekseninde.



Şekil 2.13. Etmenlerin farklı başlangıç konumları için düzen teşkili sırasındaki yörüngeleri.

2.3. Düzen Kontrolüne Dinamik Oyun Yaklaşımı

Bu bölümde düzen kontrolünün sürekli zamanda diferansiyel oyun formülasyonu ayırık zamanda doğrusal-kareli dinamik oyun biçimine dönüştürülmüştür. Ayırık zamanda bağlı *Riccati* fark denklemlerinin çözümlerinin varlığı koşulları ve bu denklemlerin analitik yaklaşık çözümü bulunmuştur.

İlk olarak, düzen kontrolü sürekli zamanda diferansiyel oyun olarak formüle edilmiştir. Daha sonra, bu diferansiyel oyun ayrıklaştırılarak ayırık zamanda bir dinamik oyun elde edilmiştir. Dinamik oyun için, *Levy-Desplanques* teoremi kullanılarak, bağlı *Riccati* fark denklemlerinin çözülebilirliği koşulları bulunmuştur. En son, *Gerschgorin*'in disk teoremini ve spektral yarıçapı (*spectral radius*) temel alan matris yakınsama (*convergence*) kriteri kullanılarak, bağlı *Riccati* diferansiyel denklemlerinin (geriye doğru yinelemeli) analitik yaklaşık çözümü elde edilmiştir. Simülasyon yoluyla modellerin ve analitik yaklaşık çözümün doğruluğu gösterilmiştir. Ayrıca, analitik yaklaşık çözümünün başarımını göstermek için bu çözüm Matlab *ODE* yolu ile elde edilen sayısal çözüm ile karşılaştırılmıştır.

2.3.1. Problemin Sürekli Zamanda Tanımı

Bireyleri çift integratörlü dinamiklerle modellenmiş bir ağ-bağımlı etmen takımını varsayalım. Bu takım m sayıda etmeden oluşmakta ve bütün takımın dinamiklerine ait durum-uzay gösterimi aşağıdaki şekilde verilmektedir.

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \sum_{i=1}^m \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i \quad (2.52)$$

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$$

Burada

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{nm} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2nm+1}$$

$$\mathbf{B}_i = [\mathbf{0}_{n \times nm} \quad \mathbf{0}_{n \times 1} \quad \mathbf{b}_i^T]^T \in \mathbb{R}^{(2nm+1) \times n}$$

$$\mathbf{b}_i = [\mathbf{0} \dots \mathbf{I}_n \dots \mathbf{0}]^T \in \mathbb{R}^{nm \times n}$$

ve $\mathbf{I}_n \in \mathbb{R}^n$ birim matrisidir. $\mathbf{z} = [\mathbf{q}_1^T \dots \mathbf{q}_m^T \quad 1 \quad \mathbf{v}_1^T \dots \mathbf{v}_m^T]^T \in \mathbb{R}^{2nm+1}$ ve \mathbf{z}_0 sırayla sistemin durum vektörü ve sistemin başlangıç durum vektörüdür. $\mathbf{q}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^n$ ($i = 1, \dots, m$) sırayla n -boyutlu koordinat sisteminde (yani, $n = 2, 3$) i 'inci etmenin konum, hız ve ivmesini göstermektedir.

Graf $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, düğüm kümesi \mathcal{V} ve sıralı düğüm çiftleri içeren kenar kümesi \mathcal{E} 'den oluşur. Düzen kontrolü için düğüm kümesi $\mathcal{V} = \{1, \dots, m\}$ düzendeki etmenlere karşılıklı olabilir. Bu durumda kenar kümesi $\mathcal{E} \subseteq \{(i, j) : i, j \in \mathcal{V}\}$ arabağlantıları temsil etmektedir. \mathcal{G} 'deki her kenar $(i, j) \in \mathcal{E}$ bir artı olan ağırlık sayısı ($\mu_{ij} > 0$) ile ilişkilidir. Etmen i 'nin graf topolojisindeki komşular kümesi $N_i = \{j \in \mathcal{V} : (i, j) \in \mathcal{E}\}$ olarak tanımlanır. Düzen grafi \mathcal{G} bağlantılıdır, yani her bir çift düğüm $i, j \in \mathcal{V}$ için, i 'den j 'ye tüm $j = 1, \dots, m, j \neq i$, \mathcal{E} 'deki kenarlardan oluşan bir yol vardır.

Robot i için graf Laplasyen \mathbf{L}_i

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{D}\mathbf{W}_i\mathbf{D}^T \in \mathbb{R}^m$$

formunda tanımlanır. Burada $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m \times |\mathcal{E}|}$ ilişki matrisi ve $\mathbf{W}_i = \text{diag}(0, \dots, \mu_{ij}, \dots, 0), j \in N_i$, $\mathbf{W}_i \in \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|}$ bir köşegen ağırlık matrisidir. \mathbf{D} 'de uv elemanı eğer v kenarının yönü u düğümünden öteye doğru ise 1'e eşitlenir, eğer v kenarının yönü u düğümüne doğru ise -1'e eşitlenir, aksi halde 0'a eşitlenir.

n -boyutlu graf Laplasyen \mathcal{L}_i

$$\mathcal{L}_i = \mathbf{L}_i \otimes \mathbf{I}_n \in \mathbb{R}^{nm} \tag{2.53}$$

şeklinde tanımlanır. Burada \otimes işleci *Kronecker* çarpımıdır. *Kronecker* çarpımı özellikleri kullanılarak \mathcal{L}_i aşağıdaki şekilde yeniden ifade edilebilmektedir.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i &= \mathbf{D}\mathbf{W}_i\mathbf{D}^T \otimes \mathbf{I}_n \\ &= (\mathbf{D} \otimes \mathbf{I}_n)(\mathbf{W}_i \otimes \mathbf{I}_n)(\mathbf{D} \otimes \mathbf{I}_n)^T \end{aligned}$$

$$= \mathcal{D} \mathbf{W}_i \mathcal{D}^T \quad (2.54)$$

Burada $\mathcal{D} = \mathbf{D} \otimes \mathbf{I}_n$ ve $\mathbf{W}_i = \mathbf{W}_i \otimes \mathbf{I}_n$.

Varsayalım $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_1^T, \dots, \mathbf{q}_m^T]^T$ ve $\mathbf{v} = [\mathbf{v}_1^T, \dots, \mathbf{v}_m^T]^T$. \mathcal{L}_i simetrik ve pozitif yarıtanımlıdır ve aşağıdaki karelerin-toplamı özelliğini sağlamaktadır.

$$\mathbf{q}^T \mathcal{L}_i \mathbf{q} = \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} \mu_{ij} \|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|^2$$

$$\mathbf{v}^T \mathcal{L}_i \mathbf{v} = \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} \mu_{ij} \|\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i\|^2 \quad (2.55)$$

Burada $\|\cdot\|$ Öklit normunu \mathbb{R}^n 'de göstermektedir.

Düzen gereksinimi bilgi grafına göre aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir.

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} \mu_{ij} \left(\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j - \mathbf{d}_{ij}\|^2 + \|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\|^2 \right) \quad (2.56)$$

Burada $\mathbf{d}_{ij} \in \mathbb{R}^n$ ($(i,j) \in \mathcal{E}$) graf topolojisinde bitişik olan i ve j için etmenler arası istenilen mesafe vektörünü göstermektedir. Karelerin-toplamı özelliğine göre (2.56) matris biçimine dönüştürülebilmektedir.

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} \left(\mu_{ij} \|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|^2 - 2\mu_{ij} (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j)^T \mathbf{d}_{ij} + \mu_{ij} \|\mathbf{d}_{ij}\|^2 + \mu_{ij} \|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\|^2 \right)$$

$$= \mathbf{q}^T \mathcal{L}_i \mathbf{q} - 2\mathbf{q}^T \mathcal{D} \mathbf{W}_i \mathbf{d} + \mathbf{d}^T \mathbf{W}_i \mathbf{d} + \mathbf{v}^T \mathcal{L}_i \mathbf{v}$$

$$= \mathbf{z}^T \mathbf{Q}_i \mathbf{z} \quad (2.57)$$

Burada

$$Q_i = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_i & -\mathcal{D}\mathcal{W}_i d & \mathbf{0} \\ -(\mathcal{D}\mathcal{W}_i d)^T & d^T \mathcal{W}_i d & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathcal{L}_i \end{bmatrix}$$

$\mathbf{d} = \text{col}(\mathbf{d}_{ij}) \in \mathbb{R}^{nm}$ ve $\text{col}(\cdot)$ sütun vektörü anlamına gelmektedir. $\mathbf{z}^T Q_i \mathbf{z} \geq 0$ olması nedeniyle düzen matrisi Q_i pozitif yarıtanımlıdır.

Etmen i için düzen kontrolü sonlu-ufuk kareli maliyet fonksiyonu aşağıdaki formda tanımlanmıştır.

$$J_i = \mathbf{z}(t_f)^T Q_{if} \mathbf{z}(t_f) + \int_0^{t_f} \left(\mathbf{z}^T Q_i \mathbf{z} + \sum_{j=1}^m \mathbf{u}_j^T R_{ij} \mathbf{u}_j \right) dt \quad (2.58)$$

Burada

$$Q_{if} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{if} & -\mathcal{D}\mathcal{W}_{if} d & \mathbf{0} \\ -(\mathcal{D}\mathcal{W}_{if} d)^T & d^T \mathcal{W}_{if} d & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathcal{L}_{if} \end{bmatrix}$$

$\mathcal{L}_{if} = \mathcal{D}\mathcal{W}_{if}\mathcal{D}^T$, $\mathcal{W}_{if} = \mathbf{W}_{if} \otimes \mathbf{I}_n$, $\mathbf{W}_{if} = \text{diag}(0, \dots, \omega_{ij}, \dots, 0)$, $j \in N_i$, $\omega_{ij} > 0$, t_f ufuk sonudur ve R_{ii} simetrik ve pozitif tanımlı ağırlık matrisidir. Etmen i 'nin düzen kontrolündeki amacı, altta yatan sistem dinamikleri (2.52)'yi dikkate alarak bireysel maliyet fonksiyonu J_i 'yi en aza indirgeyen \mathbf{u}_i 'yi tasarlamaktır.

(2.52) ve (2.58) problemi için, açık döngü kontrol yapısı altında, açık döngü *Nash* dengesi çözümü düzen kontrolü stratejileri olabilmektedir. Düzen kontrolü için *Nash* dengesinin çözümü Teorem 2.3'te ifade edilmiştir. Teoremin ispatı verilmemiştir.

Teorem 2.3. Düzen kontrolünün (2.52) ve (2.58)'deki formülasyonunu bir işbirlikçi olmayan doğrusal-kareli diferansiyel oyun olduğunu varsayalım. Bağlı *Riccati* diferansiyel denklemleri (2.59) P_i 'yi ($i = 1, \dots, m$) çözümü olarak kabul ettiğini varsayalım.

$$\dot{P}_i + P_i A - P_i \sum_{j=1}^m S_j P_j + Q_i + A^T P = \mathbf{0} \quad (2.59)$$

$$\mathbf{P}_i(t_f) = \mathbf{Q}_{if}$$

Burada $\mathbf{S}_i = \mathbf{B}_i \mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{B}_i^T$. Bu durumda düzen kontrolünün doğrusal-kareli diferansiyel oyun formülasyonu için bir eşsiz açık döngü *Nash* dengesi çözümü vardır. Bu çözüm aşağıdaki şekilde verilmektedir.

$$\mathbf{u}_i = -\mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{B}_i^T \mathbf{P}_i \Phi(t, 0) \mathbf{z}_0 \quad (2.60)$$

Burada

$$\dot{\Phi}(t, 0) = \left(\mathbf{A} - \sum_{j=1}^m \mathbf{S}_j \mathbf{P}_j \right) \Phi(t, 0) \quad (2.61)$$

$$\Phi(0, 0) = \mathbf{I}$$

Denge ile ilişkili durum yörüngesi

$$\mathbf{z} = \Phi(t, 0) \mathbf{z}_0 \quad (2.62)$$

olarak verilmektedir. Burada

$$\dot{\mathbf{z}} = \left(\mathbf{A} - \sum_{j=1}^m \mathbf{S}_j \mathbf{P}_j \right) \mathbf{z} \quad (2.63)$$

Bilindiği kadarıyla, bağlı *Riccati* diferansiyel denklemlerinin bir çözümünün varlığını (oyununun/düzenin parametreleri üzerinde) garanti edecek bir dizi koşul yoktur. Ayrıca, bu denklemler kümesinin çözümünü bulmak için de genel analitik yöntem bulunmamakta; uç değerleri ve geriye doğru iterasyon kullanılarak sayısal olarak çözümleri gerekmektedir.

2.3.2. Problemi Ayrıklaştırma

Bağlı *Riccati* diferansiyel denklemler (2.59)'u çözmek için sürekli zaman parametresi bir dizi zaman aralığına ayrılmalıdır. Zaman aralığı $[0, t_f]$ 'yi K eşit aralıkları $[0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{K-1}, t_K = t_f]$ 'ye ayrıklaştırılmıştır. Aralık uzunluğu (veya diğer bir ifadeyle örnekleme zamanı) $t_k - t_{k-1} = \delta$ olarak tanımlanır. K bir çift sayıdır. Kontrol girdiler değişkenleri parçalı süreklidir.

Sürekli zamanda olan sistem dinamikleri (2.52) aşağıdaki ayırık zamanda sistem modeline dönüştürülmektedir [133].

$$\mathbf{z}_{k+1} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \sum_{i=1}^m \tilde{\mathbf{B}}_i \mathbf{u}_k^i \quad (2.64)$$

Burada $k = 0, \dots, K - 1$ ve

$$\tilde{\mathbf{A}} = e^{\delta \mathbf{A}}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_i = \int_0^\delta e^{t\mathbf{A}} dt \mathbf{B}_i$$

Maliyet fonksiyonu (2.58)'in kontrol uğraşı kısmı aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilmektedir.

$$\int_0^{t_f} \sum_{j=1}^m \mathbf{u}_j^T \mathbf{R}_{ij} \mathbf{u}_j dt =$$

$$\sum_{j=1}^m \int_0^{t_f} \mathbf{u}_j^T \mathbf{R}_{ij} \mathbf{u}_j dt =$$

$$\delta \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{K-1} (\mathbf{u}_k^j)^T \mathbf{R}_{ij} \mathbf{u}_k^j =$$

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{K-1} (\mathbf{u}_k^j)^T \tilde{\mathbf{R}}_{ij} \mathbf{u}_k^j \quad (2.65)$$

Burada $\tilde{\mathbf{R}}_{ij} = \delta \mathbf{R}_{ij}$. Kontrol sinyalleri birim-basamak olduğundan dolayı (2.65) bir yaklaşım (*approximation*) olmamaktadır. Maliyet fonksiyonu (2.58)'in geri kalanı belirli integrallerin sayısal hesaplanmasında kullanılan *Simpson* kuralı ile aşağıdaki gibi yaklaşılabilmektedir.

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t_f)^T \mathbf{Q}_{if} \mathbf{z}(t_f) + \int_0^{t_f} \mathbf{z}^T \mathbf{Q}_i \mathbf{z} dt \approx \\ \delta \sum_{k=0}^K \mathbf{z}_k^T \mathbf{Q}_i^k \mathbf{z}_k = \\ \sum_{k=0}^K \mathbf{z}_k^T \tilde{\mathbf{Q}}_i^k \mathbf{z}_k \end{aligned} \quad (2.66)$$

Burada

$$\mathbf{Q}_i^0 = \frac{1}{3} \mathbf{Q}_i$$

$$\mathbf{Q}_i^{1,3,\dots,K-1} = \frac{4}{3} \mathbf{Q}_i$$

$$\mathbf{Q}_i^{2,4,\dots,K-2} = \frac{2}{3} \mathbf{Q}_i$$

$$\mathbf{Q}_i^K = \frac{1}{3} \mathbf{Q}_i + \mathbf{Q}_{if}$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}_i^k = \delta \mathbf{Q}_i^k$$

(2.65) ve (2.66) birleştirerek maliyet fonksiyonu (2.58) aşağıdaki formda ayrılmaktadır (ve aynı anda yaklaşılmaktadır).

$$\begin{aligned}
J^i &= \sum_{k=0}^K \mathbf{z}_k^T \tilde{\mathbf{Q}}_i^k \mathbf{z}_k + \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{K-1} (\mathbf{u}_k^j)^T \tilde{\mathbf{R}}_{ij} \mathbf{u}_k^j \\
&= \mathbf{z}_K^T \tilde{\mathbf{Q}}_i^K \mathbf{z}_K + \sum_{k=0}^{K-1} \left(\mathbf{z}_k^T \tilde{\mathbf{Q}}_i^k \mathbf{z}_k + \sum_{j=1}^m (\mathbf{u}_k^j)^T \tilde{\mathbf{R}}_{ij} \mathbf{u}_k^j \right)
\end{aligned} \tag{2.67}$$

Açıklama 2.6. $\mathbf{A}^2 = \mathbf{0}$ olduğu gözlemlenmektedir. Bu durumda üstel matrisi $e^{t\mathbf{A}}$ ve $e^{t\mathbf{A}^T}$

$$e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{I} + t\mathbf{A}$$

$$e^{t\mathbf{A}^T} = \mathbf{I} + t\mathbf{A}^T \tag{2.68}$$

olarak ifade edilebilmektedir.

(2.68)'den

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \delta\mathbf{A}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_i = \delta\mathbf{B}_i + \frac{\delta^2}{2}\mathbf{A}\mathbf{B}_i \tag{2.69}$$

elde edilmektedir.

Ayrıklaştırılmış düzen kontrolü (2.64) ve (2.67) aynı anda ayırık zamanda doğrusal-kareli dinamik oyun şeklindedir. Bu oyun için açık döngü Nash dengesinin çözümü aşağıdaki teorem ile nitelendirilir [134].

Teorem 2.4. \mathbf{A}^k ve \mathbf{M}_i^{k+1} matrislerinin aşağıdaki formda üretilmelerini varsayalım.

$$\mathbf{M}_i^k = \tilde{\mathbf{Q}}_i^k + \tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{M}_i^{k+1} (\mathbf{A}^k)^{-1} \tilde{\mathbf{A}}$$

$$\mathbf{M}_i^K = \tilde{\mathbf{Q}}_i^K$$

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{I} + \sum_{j=1}^m \tilde{\mathbf{S}}_j \mathbf{M}_j^{k+1} \quad (2.70)$$

Burada $\tilde{\mathbf{S}}_j = \tilde{\mathbf{B}}_j \tilde{\mathbf{R}}_{ii}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_i^T$. Eğer \mathbf{A}^k matrisleri $k = 0, \dots, K - 1$ için tersi alınabilir ise, oyun bir eşsiz açık döngü Nash dengesi çözümünü kabul etmektedir. Bu çözüm

$$\mathbf{u}_k^i = -\tilde{\mathbf{R}}_{ii}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_i^T \mathbf{M}_i^{k+1} (\mathbf{A}^k)^{-1} \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{z}_k \quad (2.71)$$

olarak verilmektedir. Denge ile ilişkili durum yörüngesi aşağıdaki şekilde bulunmaktadır.

$$\mathbf{z}_{k+1} = (\mathbf{A}^k)^{-1} \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{z}_k \quad (2.71)$$

Görüldüğü gibi, (\mathbf{A}^k ile bağlı olmuş) *Riccati* fark denklemlerinin çözümlerinin varlığı için gerekli ve yeterli koşul \mathbf{A}^k 'nin tersi alınabilir olmasıdır. Bu durumda ayrık zamanda düzen kontrolünün Nash dengesinin denetleyicileri var olmaktadır.

2.3.3. Riccati Fark Denklemlerinin Çözümü

Bu bölümde Teorem 2.4'teki *Riccati* fark denklemlerinin çözülebilirliği koşulları ve olası çözümü araştırılmıştır. Önce aşağıdaki tanım sunulmuştur.

Tanım 2.2. $\mathbf{X} = [x_{ij}] \in \mathbb{R}^n$ bir kare matris olsun. Eğer tüm $i = 1, \dots, n$ için

$$|x_{ii}| > \sum_{j \neq i} |x_{ij}| \quad (2.72)$$

olursa, \mathbf{X} bir kesin köşegen baskın (*strictly diagonally dominant*) matristir.

İyi bilinen *Levy-Desplanques* Teoremi kesin köşegen baskın matrisin tekil olmadığını belirtmektedir [135]. Bu sonuçtan faydalanarak aşağıdaki teorem verilmektedir.

Teorem 2.5. Büyük olmayan her t_f için \mathbf{A}^k ($k = 0, \dots, K - 1$) matrisleri tekildir.

İspat: Terminal değerleri kullanılarak geriye doğru iterasyon ile

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}^K &= \mathbf{I} + \sum_{j=1}^m \tilde{\mathbf{S}}_j \mathbf{M}_j^K \\
 &= \mathbf{I} + \sum_{j=1}^m \tilde{\mathbf{S}}_j \tilde{\mathbf{Q}}_j^K
 \end{aligned} \tag{2.73}$$

olarak elde edilmektedir. Burada

$$\sum_{j=1}^m \tilde{\mathbf{S}}_j \tilde{\mathbf{Q}}_j^K = \begin{bmatrix} \frac{\delta^4}{4} \mathbf{H} & \frac{\delta^4}{4} \mathbf{V} & \frac{\delta^3}{2} \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{\delta^3}{2} \mathbf{H} & \frac{\delta^3}{2} \mathbf{V} & \delta^2 \mathbf{H} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \sum_{j=1}^m \mathbf{b}_j \mathbf{R}_{jj}^{-1} \mathbf{b}_j^T \left(\frac{1}{3} \mathcal{L}_i + \mathcal{L}_{if} \right)$$

$$\mathbf{V} = - \sum_{j=1}^m \mathbf{b}_j \mathbf{R}_{jj}^{-1} \mathbf{b}_j^T \mathcal{D} \left(\frac{1}{3} \mathcal{W}_i + \mathcal{W}_i \right) \mathbf{d}$$

(2.73) aşağıdaki şekilde doğrulanabilmektedir. Tanımlara göre:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{nm} & \mathbf{0} & \delta \mathbf{I}_{nm} \\ \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}_{nm} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{nm} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_i = \begin{bmatrix} \frac{\delta^2}{2} \mathbf{b}_i \\ 0 \\ \delta \mathbf{b}_i \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_i = \begin{bmatrix} \frac{\delta^3}{4} \mathbf{b}_i \mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{b}_i^T & \mathbf{0} & \frac{\delta^2}{2} \mathbf{b}_i \mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{b}_i^T \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} \\ \frac{\delta^2}{2} \mathbf{b}_i \mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{b}_i^T & \mathbf{0} & \delta \mathbf{b}_i \mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{b}_i^T \end{bmatrix}$$

Ayrıca,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Q}}_j^K &= \delta \mathbf{Q}_j^K = \delta \left(\frac{1}{3} \mathbf{Q}_j + \mathbf{Q}_{jf} \right) \\ &= \begin{bmatrix} \delta \left(\frac{1}{3} \mathcal{L}_j + \mathcal{L}_{jf} \right) & \delta \mathcal{D} \left(-\frac{1}{3} \mathbf{w}_j - \mathbf{w}_{jf} \right) \mathbf{d} & \mathbf{0} \\ \delta \left(\mathcal{D} \left(-\frac{1}{3} \mathbf{w}_j - \mathbf{w}_{jf} \right) \mathbf{d} \right)^T & \delta \mathbf{d}^T \left(\frac{1}{3} \mathbf{w}_j + \mathbf{w}_{jf} \right) \mathbf{d} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \delta \left(\frac{1}{3} \mathcal{L}_j + \mathcal{L}_{jf} \right) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.74)$$

Böylece, $\sum_{j=1}^m \tilde{\mathbf{S}}_j \tilde{\mathbf{Q}}_j^K$ 'nin matris formu doğrulanmıştır.

Öte yandan, Laplasyen matrisinin tanımına göre \mathcal{L}_i ve \mathcal{L}_{if} matrisleri aşağıdaki yapılara sahiptir.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i &= \begin{bmatrix} \mu_{i,1} & \dots & -\mu_{i,1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mu_{i,1} & \dots & \sum_{(i,k) \in \mathcal{E}} \mu_{i,k} & \dots & -\mu_{i,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -\mu_{i,m} & \dots & \mu_{i,m} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_n \\ \mathcal{L}_{if} &= \begin{bmatrix} \omega_{i,1} & \dots & -\omega_{i,1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\omega_{i,1} & \dots & \sum_{(i,k) \in \mathcal{E}} \omega_{i,k} & \dots & -\omega_{i,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -\omega_{i,m} & \dots & \omega_{i,m} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_n \end{aligned} \quad (2.75)$$

Ayrıca,

$$\mathcal{D} \mathbf{W}_i \mathbf{d} = \begin{bmatrix} (\mu_{i,1} \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{d}_{i,1} \\ \vdots \\ \sum_{(i,k) \in \mathcal{E}} (\mu_{i,k} \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{d}_{i,k} \\ \vdots \\ (\mu_{i,m} \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{d}_{i,m} \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

\mathcal{L}_i , \mathcal{L}_{if} ve $\mathcal{D}\mathcal{W}_i\mathbf{d}$ 'den aşağıdaki matrisler elde edilmektedir.

$$\sum_{j=1}^m \mathbf{b}_j \mathbf{R}_{jj}^{-1} \mathbf{b}_j^T \left(\frac{1}{3} \mathcal{L}_j + \mathcal{L}_{jf} \right) = \text{diag}(\mathbf{R}_{11}^{-1}, \dots, \mathbf{R}_{mm}^{-1})$$

$$\left[\begin{array}{cccc} \sum_{(1,k) \in \mathcal{E}} \left(\frac{1}{3} \mu_{1,k} + \omega_{1,k} \right) & \dots & \left(-\frac{1}{3} \mu_{1,k} - \omega_{1,k} \right) & \dots & \left(-\frac{1}{3} \mu_{1,m} - \omega_{1,m} \right) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(-\frac{1}{3} \mu_{i,1} - \omega_{i,1} \right) & \dots & \sum_{(i,k) \in \mathcal{E}} \left(\frac{1}{3} \mu_{i,k} + \omega_{i,k} \right) & \dots & \left(-\frac{1}{3} \mu_{i,m} - \omega_{i,m} \right) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(-\frac{1}{3} \mu_{m,1} - \omega_{m,1} \right) & \dots & \left(-\frac{1}{3} \mu_{m,k} - \omega_{m,k} \right) & \dots & \sum_{(m,k) \in \mathcal{E}} \left(\frac{1}{3} \mu_{m,k} + \omega_{m,k} \right) \end{array} \right]$$

$\otimes \mathbf{I}_n$

ve

$$\sum_{j=1}^m \mathbf{b}_j \mathbf{R}_{jj}^{-1} \mathbf{b}_j^T \mathcal{D} \left(-\frac{1}{3} \mathcal{W}_j - \mathcal{W}_{jf} \right) \mathbf{d}$$

$$= \text{diag}(\mathbf{R}_{11}^{-1}, \dots, \mathbf{R}_{mm}^{-1}) \left[\begin{array}{c} \sum_{(1,k) \in \mathcal{E}} \left(\left(\frac{1}{3} \mu_{1,k} + \omega_{1,k} \right) \otimes \mathbf{I}_n \right) \mathbf{d}_{1,k} \\ \vdots \\ \sum_{(i,k) \in \mathcal{E}} \left(\left(\frac{1}{3} \mu_{i,k} + \omega_{i,k} \right) \otimes \mathbf{I}_n \right) \mathbf{d}_{i,k} \\ \vdots \\ \sum_{(m,k) \in \mathcal{E}} \left(\left(\frac{1}{3} \mu_{m,k} + \omega_{m,k} \right) \otimes \mathbf{I}_n \right) \mathbf{d}_{m,k} \end{array} \right] \quad (2.77)$$

Kesin köşegen baskın tanımının uygulanmasıyla

$$\delta^3 \sum_{(i,k) \in \mathcal{E}} \left(\frac{1}{3} \mu_{i,k} + \omega_{i,k} \right) \left(1 + \frac{\delta}{4} |[\mathbf{d}_{i,k}]_j| \right) < [\mathbf{R}_{ii}]_j \quad (2.78)$$

eşitsizliği, tüm $i = 1, \dots, m$, ve $j = 1, \dots, n$ için, elde edilmektedir. Burada $[\mathbf{d}_{i,k}]_j$ sütun vektörü $\mathbf{d}_{i,k}$ 'nin j 'inci elemanını göstermektedir. $[\mathbf{R}_{ii}]_j$ notasyonu \mathbf{R}_{ii} 'nin j 'inci köşegen elemanını ifade etmektedir. Bu sonuç (yani (2.78) eşitsizliği) \mathbf{A}^{K-1} için teoremi kanıtlamaktadır.

Pratikte, δ parametresinin küçüklüğü nedeniyle (2.78)'in sol tarafı sağdan çok daha az değeri olmaktadır. Böylece, bir sonraki tekrarlama $\sum_{j=1}^m \tilde{\mathbf{S}}_j \mathbf{M}_j^{K-1}$ matrisinin de kesin köşegen baskın olacağı garanti olmaktadır. Bu da, \mathbf{A}^{K-2} 'nin kesinlikle pozitif tanımlı olduğunu ifade etmektedir. Sonlu ufuk süresi büyük olmayan bir sabit değer seçilirse, $\mathbf{A}^{K-3}, \dots, \mathbf{A}^0$ matrisleri aynı şekilde yargılanabilmektedir. ■

Teorem 2.5'e göre ayırık zamanda düzen kontrolünün *Nash* dengesi denetleyicilerinin varlığı kanıtlanmıştır. Bir sonraki teoremden bağlı *Riccati* diferansiyel denklemler (2.59)'un analitik yaklaşık çözümü sunulmuştur. Aşağıdaki açıklamanın ispatı [136]'da bulunmaktadır.

Açıklama 2.7. $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^n$ bir kare matris olsun. Varsayalım $\text{sprad}(\mathbf{G}) < 1$. Burada $\text{sprad}(\mathbf{G})$, " \mathbf{G} 'nin spektral yarıçapı" anlamındadır. Bu durum için $\sum_{f=0}^{\infty} \mathbf{G}^f$ dizisi kesinlikle yakınsar, ve

$$(\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} = \sum_{f=0}^{\infty} \mathbf{G}^f \quad (2.79)$$

Teorem 2.6. Düzen kontrolünün (2.52) ve (2.58)'deki sonlu ufuk doğrusal-kareli diferansiyel oyun formülasyonu ile ilişkili (2.59)'deki bağlı *Riccati* diferansiyel denklemlerinin k 'inci örnek zamanındaki analitik yaklaşık çözümü (2.80) ile hesaplanabilmektedir.

$$\mathbf{P}_k^i \approx (\tilde{\mathbf{A}}^T)^{\frac{1}{2}} \mathbf{M}_i^{k+1} \left(\mathbf{I} - \sum_{j=1}^m \tilde{\mathbf{S}}_j \mathbf{M}_j^{k+1} \right) \tilde{\mathbf{A}} \quad (2.80)$$

Burada \mathbf{M}_i^k , terminal değerleri kullanılarak geriye doğru iterasyon yolu ile

$$\mathbf{M}_i^k = \tilde{\mathbf{Q}}_i^k + \tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{M}_i^{k+1} \left(\mathbf{I} - \sum_{j=1}^m \tilde{\mathbf{S}}_j \mathbf{M}_j^{k+1} \right) \tilde{\mathbf{A}} \quad (2.81)$$

$$\mathbf{M}_i^K = \tilde{\mathbf{Q}}_i^K$$

denkleminde bulunmaktadır.

İspat: $\sum_{j=1}^m \tilde{\mathbf{S}}_j \tilde{\mathbf{Q}}_j^K$ matrisi için ($h = 1, \dots, n$)

$$\max \left\{ [\mathbf{R}_{11}^{-1}]_h \sum_{(1,k) \in \mathcal{E}} \left(\frac{1}{3} \mu_{1,k} + \omega_{1,k} \right), \dots, [\mathbf{R}_{ii}^{-1}]_h \sum_{(i,k) \in \mathcal{E}} \left(\frac{1}{3} \mu_{i,k} + \omega_{i,k} \right), \dots, [\mathbf{R}_{mm}^{-1}]_h \sum_{(m,k) \in \mathcal{E}} \left(\frac{1}{3} \mu_{m,k} + \omega_{m,k} \right) \right\} = [\mathbf{R}_{jj}^{-1}]_h \sum_{(j,k) \in \mathcal{E}} \left(\frac{1}{3} \mu_{j,k} + \omega_{j,k} \right)$$

olduğunu varsayalım. Bir matrisin özdeğerlerinin yeri *Gerschgorin* disk teoremi ile sınırlandırılmıştır [137].

Bu teoreme göre

$$\begin{aligned} & \text{sprad} \left(\sum_{j=1}^m \tilde{\mathbf{S}}_j \tilde{\mathbf{Q}}_j^K \right) \\ & < [\mathbf{R}_{jj}^{-1}]_h (\delta^3 + 2\delta^2) \sum_{(j,k) \in \mathcal{E}} \left(\frac{1}{3} \mu_{j,k} + \omega_{j,k} \right) \\ & + [\mathbf{R}_{jj}^{-1}]_h \frac{\delta^3}{2} \left| \left(\sum_{(i,k) \in \mathcal{E}} \left(\frac{1}{3} \mu_{j,k} + \omega_{j,k} \right) \otimes \mathbf{I}_n \right) [d_{j,k}]_h \right| \end{aligned}$$

sonucuna varılmaktadır. Eşitsizlik (2.78) için yapılan yorum burada da geçerlidir. Bu nedenle:

$$\text{sprad} \left(\sum_{j=1}^m \tilde{\mathbf{S}}_j \tilde{\mathbf{Q}}_j^K \right) < 1$$

Aynıısı $\sum_{j=1}^m \tilde{\mathbf{S}}_j \tilde{\mathbf{M}}_j^{K-1}, \dots, \sum_{j=1}^m \tilde{\mathbf{S}}_j \tilde{\mathbf{M}}_j^0$ matrisleri için de ifade edilebilmektedir.

Açıklama 2.7'ye göre

$$\mathbf{A}_k^{-1} = \sum_{f=0}^{\infty} \left(- \sum_{j=1}^m \tilde{\mathbf{S}}_j \mathbf{M}_j^{k+1} \right)^f \quad (2.82)$$

olarak verilmektedir. Bu seri $f = 1$ 'de kesilir ve böylece

$$\mathbf{A}_k^{-1} \approx \mathbf{I} - \sum_{j=1}^m \tilde{\mathbf{S}}_j \mathbf{M}_j^{k+1} \quad (2.83)$$

olarak elde edilmektedir.

(2.83)'den \mathbf{A}_k^{-1} (2.70)'de kullanılmasıyla (2.81) elde edilmektedir. Ayrıca, (2.69)'dan $\tilde{\mathbf{A}}$ ve $\tilde{\mathbf{B}}_i$ matrisleri (2.71)'de kullanılarak aşağıdaki sonuca varılmaktadır.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k^i &\approx -\frac{1}{\delta} \mathbf{R}_{ii}^{-1} \left(\delta \mathbf{B}_i^T + \frac{\delta^2}{2} \mathbf{B}_i^T \mathbf{A}^T \right) \mathbf{M}_i^{k+1} \left(\mathbf{I} - \sum_{j=1}^m \tilde{\mathbf{S}}_j \mathbf{M}_j^{k+1} \right) \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{z}_k \\ &= -\mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{B}_i^T \left[\left(\mathbf{I} + \frac{\delta}{2} \mathbf{A}^T \right) \mathbf{M}_i^{k+1} \left(\mathbf{I} - \sum_{j=1}^m \tilde{\mathbf{S}}_j \mathbf{M}_j^{k+1} \right) \tilde{\mathbf{A}} \right] \mathbf{z}_k \end{aligned} \quad (2.84)$$

(2.84) ve (2.60)'dan (2.80) ortaya çıkmaktadır. ■

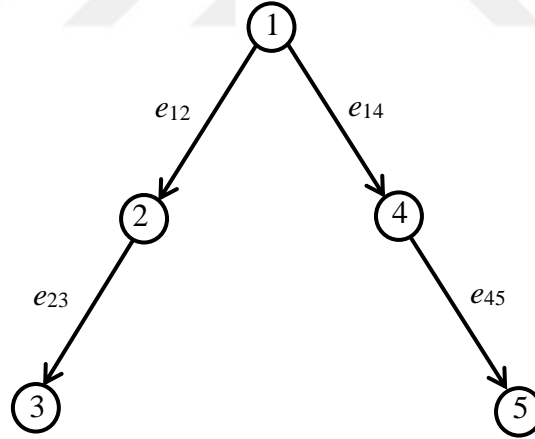
2.3.4. Analitik Yaklaşık Çözümünün Simülasyonu

Bu bölümde Teorem 2.5 ve Teorem 2.6'daki teorik bulguların başarımı simülasyon ile gösterilmektedir. İki-boyutlu koordinat sisteminde ($n = 2$) beş etmenli ($m = 5$) bir takım varsayılmıştır. Takım düzen kontrolü amacı bir üçgen şeklini oluşturmaktır (Şekil 2.14). Düzenin bilgi grafinin kenar kümesi ve ilişki matrisi

$$\mathcal{E} = \{e_{12}, e_{14}, e_{23}, e_{45}\}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak verilmiştir.



Şekil 2.14. Beş etmenli üçgen düzen şekli ve düzenin grafi.

Düzenin \mathbf{W}_i ağırlık parametreleri Teorem 2.5'e göre ayarlanmış ve aşağıdaki matrisler şeklinde tanımlanmıştır.

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_{if} = 5\mathbf{W}_i, (i = 1, \dots, 5)$$

Maliyet fonksiyonundaki kontrol çabası ağırlık matrisleri $\mathbf{R}_{ii} = \mathbf{I}_2$, $i = 1, \dots, 5$ olarak seçilmiştir. İstenen düzen şeklinde etmenler arası ofset vektörleri

$$\mathbf{d}_{12} = \mathbf{d}_{23} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}_{14} = \mathbf{d}_{45} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanmıştır. Etmenlerin başlangıç konumları ve başlangıç hızları

$$\mathbf{q}_1(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_2(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_3(0) = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

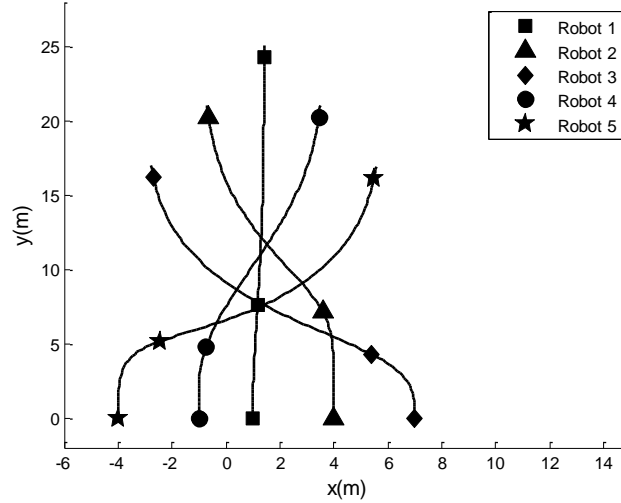
$$\mathbf{q}_4(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_5(0) = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_5(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

olarak verilmiştir.

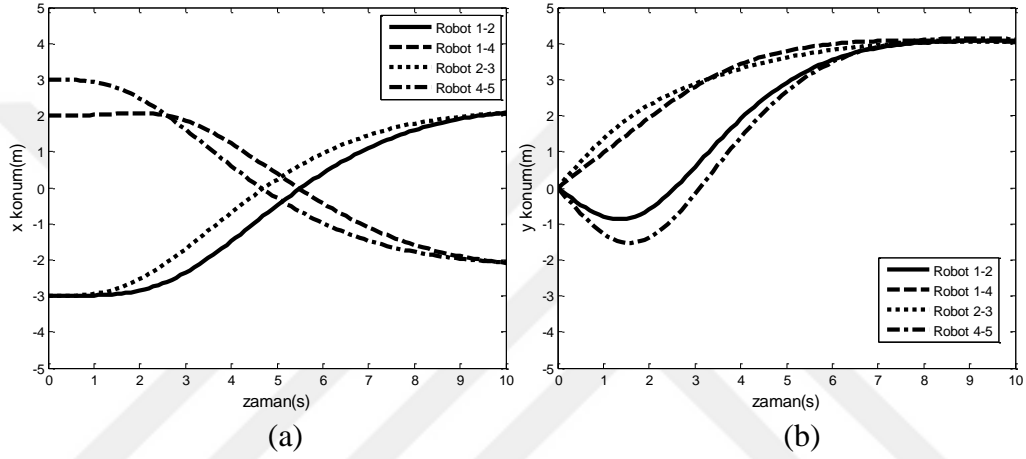
Ufuk sonu $t_f = 10s$ seçilmiş ve simülasyon için örnekleme zaman dilimi $0.1s$ olarak dikkate alınmıştır. Bağlı *Riccati* diferansiyel denklemler (2.59)'un analitik yaklaşık çözümü (2.80) ve (2.81)'den hesaplanmıştır. Dolayısıyla, bu denklemler düzen kontrolünün açık döngülü *Nash* dengesinin analitik yaklaşık çözümü de buradan hesaplanmıştır. Etmenlerin durum yörüngesi (2.71)'den elde edilmiştir.

Etmenlerin çizdikleri yörüngeler Şekil 2.15'te $x - y$ düzleminde gösterilmiştir. Etmenler $t = 0s$, $t = 3s$, ve $t = 9.8s$ anında görüntülenmiştir. Bu grafikten, tüm etmenlerin belirtilen ufuk sonunda istenilen düzen şeklini teşkil ettikleri görülebilmektedir. Bir başka ifadeyle, analitik yaklaşık çözüm ile ilgili beklenen başarı yakalanmıştır.



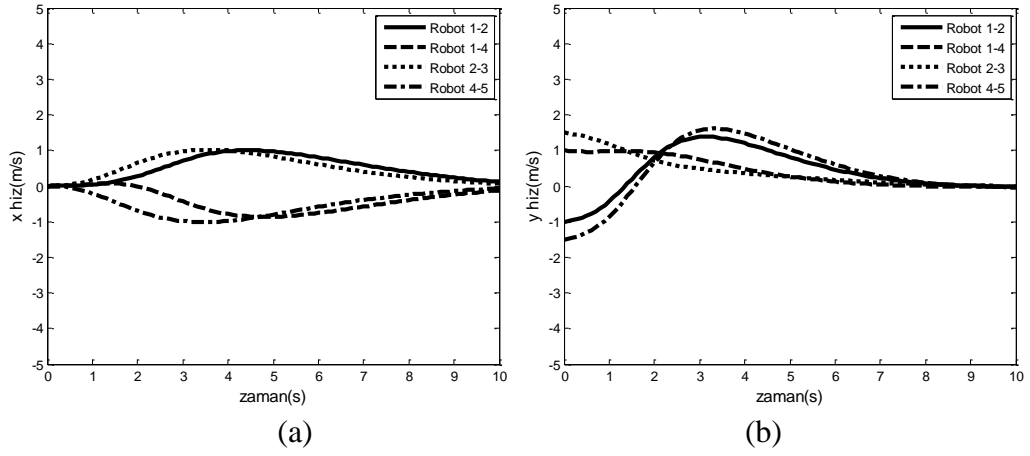
Şekil 2.15. Etmenlerin çizdikleri yörüngeler.

Ofset vektörlerine göre etmen 1 ve 2, x ve y ekseninde sırayla -2 ve -4 , etmen 1 ve robot 4, x ve y ekseninde sırayla 2 ve -4 , etmen 2 ve robot 3, x ve y ekseninde sırayla -2 ve -4 , etmen 4 ve 5, x ve y ekseninde sırayla 2 ve -4 bağıl mesafelerine ulaşmalıdır. Şekil 2.16'da etmenlerin bağıl mesafelerinin yörüngeleri gösterilmiştir. Bu grafikten belirlenen bağıl mesafelerine ulaşıldığı görülebilmektedir. Bir diğer ifadeyle, analitik yaklaşık çözüm düzen kontrolünün amacını gerçekleştirmiştir.

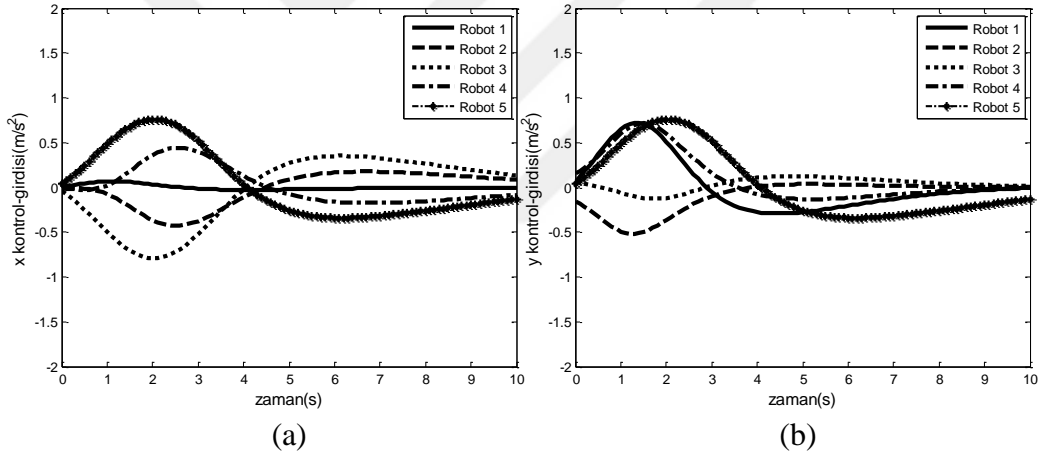


Şekil 2.16. Etmenlerin bağıl mesafe yörüngeleri, (a) x ve (b) y ekseninde.

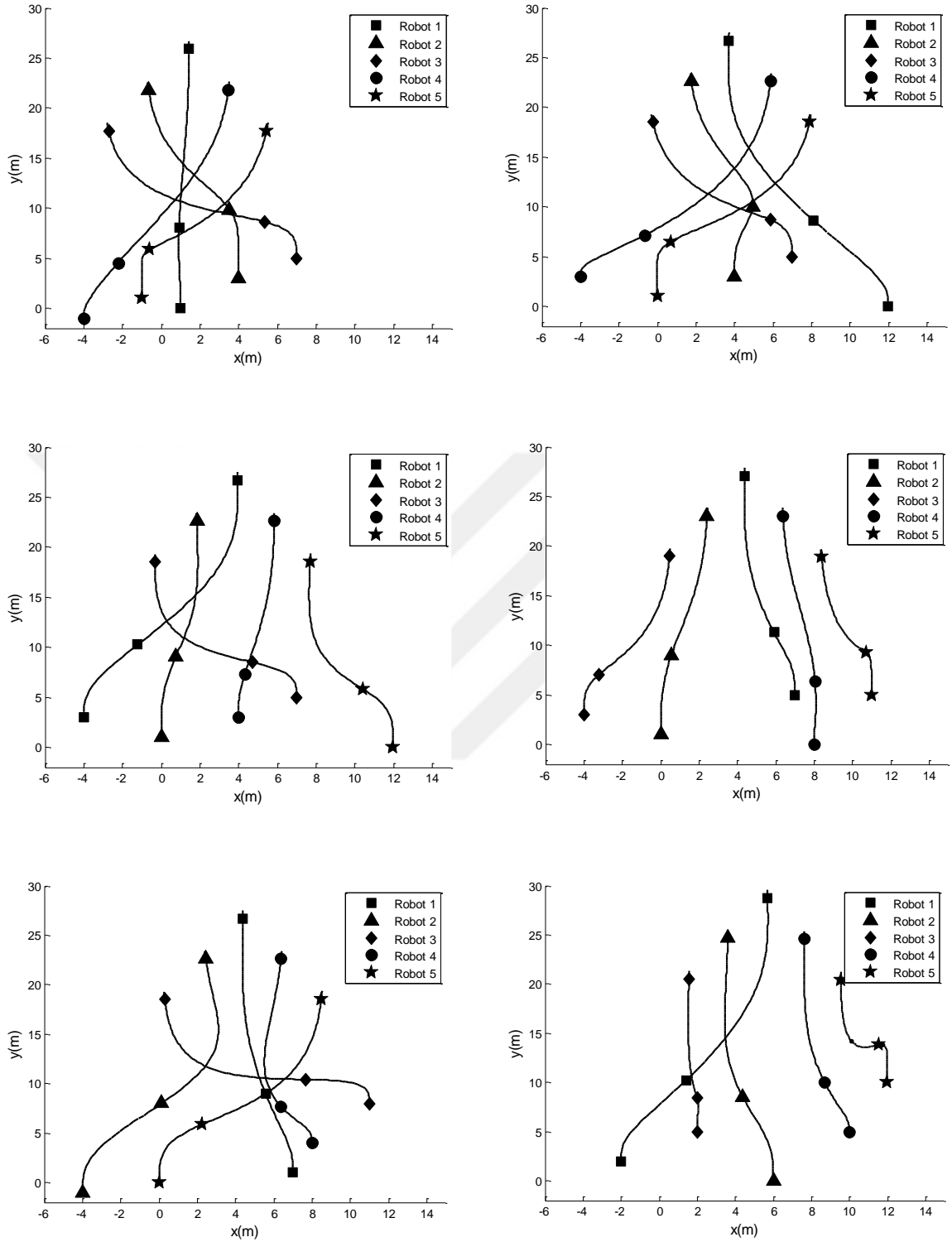
Düzen kontrolü amacıyla tüm bağıl hızların sıfıra ulaşması da yer almaktadır. Şekil 2.17'de etmenlerin bağıl hızlarının zaman geçmişleri gösterilmiştir. Bu grafikten tüm bağıl hızların sıfıra ulaştığı görülmektedir. Şekil 2.18'de etmenlerin kontrol girdilerinin yörüngeleri gösterilmiştir. Görüldüğü üzere kontrol girdiler bütün zaman aralığı için sürtünmesizdir ve herhangi bir ani değişim görülmemektedir. Ayrıca, etmenlerin farklı başlangıç konumları için simülasyon yeniden yapılmış ve Şekil 2.19'da $x - y$ düzleminde gösterilmiştir.



Şekil 2.17. Etmenlerin bağıl hızlarının yörüngeleri (a) x ve (b) y ekseninde.



Şekil 2.18. Kontrol girdilerinin yörüngeleri (a) x ve (b) y ekseninde.



Şekil 2.19. Etmenlerin düzen teşkili sırasında çizdikleri yörüngeler.

2.3.5. Sayısal ve Analitik Yaklaşık Çözümlerin Karşılaştırılması

Bağlı *Riccati* diferansiyel denklemler (2.59)'un analitik yaklaşık çözümünün başarımını kıyaslamak için bu denklemler Matlab ortamında *ODE45* çözücü ile çözülmüştür. *ODE45*, *Runge-Kutta* formülünde, *Dormand-Prince* çiftine dayanmaktadır (EK 5.1). Bu tez çalışmasında kullanılan doğrusal-kareli diferansiyel oyun yaklaşımı, Şekil 1.7'den görüldüğü üzere cebirsel yaklaşımlar grubundandır. Bu gruba ait problemler analitik olarak işlenebilmekte ve bazen kapalı formda çözümler bulunabilmektedir. Kapalı formda çözümlerin bulunamadığı durumlarda, problem sayısal yaklaşımlar yardımıyla çözülebilmektedir. Bir başka ifadeyle, cebirsel problemler için kapalı form veya sayısal çözümler araştırılır. Geometrik gruba ait optimizasyon problemlerinin çözümü için evrimsel algoritma veya genetik algoritmalar gibi yapay zeka algoritmaları kullanılabilir.

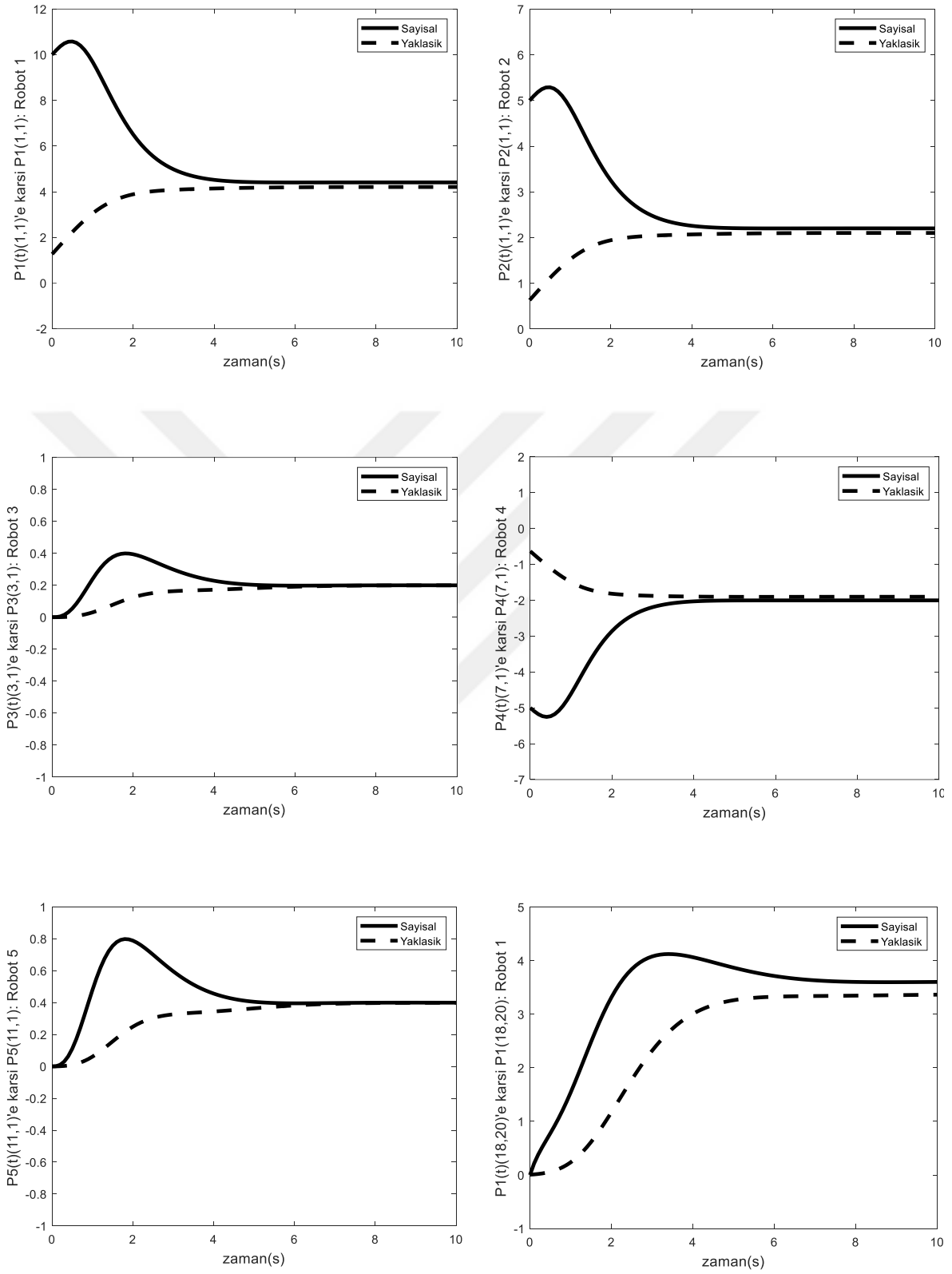
Etmen $i = 4$ için $t = 0$ anındaki analitik yaklaşık çözüm matrisi \mathbf{P}_0^4 olarak ifade edilsin ve Matlab platformundaki *ODE* çözücüsünün sonucu $\mathbf{P}_4(0)$ olarak gösterilsin. Bu matrisler Tablo 2.1'de verilmiştir. Matlab platformunda *ODE* çözücünün sonuçlarıyla karşılaştırıldığında, analitik yaklaşık çözümün oldukça doğru ve memnun edici olduğu görülmektedir. Üstelik, çözüm matrislerindeki sıfır olan satırlar bağlı *Riccati* diferansiyel denklemler (2.59)'un komşu olmayan etmenlerin bilgilerini içermediğini göstermektedir. Başka bir deyişle, düzen kontrolünün *Nash* dengesi kontrolleri (2.60) iletişim topolojisinde sadece komşuların yerel bilgilerini kullanmaktadır. Bu *Nash* dengesi (2.60)'ın bir dağıtık kontrol yasası olduğunu açıklamaktadır.

Buna ek olarak, analitik yaklaşık çözüm matrisleri $\mathbf{P}_t^1, \mathbf{P}_t^2, \mathbf{P}_t^3, \mathbf{P}_t^4$ ve \mathbf{P}_t^5 sayısal *ODE* çözüm matrisleri $\mathbf{P}_1(t), \mathbf{P}_2(t), \mathbf{P}_3(t), \mathbf{P}_4(t)$ ve $\mathbf{P}_5(t)$ ile zaman aralığı $[0,10]$ 'da karşılaştırılmıştır ($t = 0$ durumu EK 5.2'de verilmiştir). Şekil 2.20'de bu matrislerin karşılıklı elemanlarından birkaçının eğrileri gösterilmiştir. Bu matrislerin yapıları bölüm 2.1.3'te açıklanmıştır. Bu grafikten analitik yaklaşık çözüm ile elde edilen eğrilerin *ODE* çözümünün eğrileriyle ufuk sonunda yakınsadıkları görülmektedir.

Tablo 2.1. $i = 4$ için analitik yaklaşık çözümün ve Matlab *ODE* çözücünün sonuçları.

$$\mathbf{P}_0^4 = \left[\begin{array}{ccc} \left(\begin{array}{ccccc} 2.1030 & 0.2613 & 0.1514 & -2.1647 & -0.3509 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.9035 & -0.1716 & -0.0896 & 4.1781 & -2.0134 \\ -0.1995 & -0.0896 & -0.0618 & -2.0134 & 2.3640 \end{array} \right) \otimes I_2 & \begin{array}{c} (6.8610, -9.2010)^T \\ (0,0)^T \\ (0,0)^T \\ (-1.0045, -0.7981)^T \\ (-5.8565, 10.0081)^T \end{array} & \left(\begin{array}{ccccc} 1.8363 & 0.6536 & 0.4633 & -2.0404 & -0.9127 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.3868 & -0.3945 & -0.2592 & 3.6176 & -1.5772 \\ -0.4495 & -0.2592 & -0.2041 & -1.5772 & 2.4899 \end{array} \right) \otimes I_2 \\ \left(\begin{array}{c} (4.6050)^T \\ (-9.2100)^T \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} (0.7018)^T \\ (-1.4036)^T \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} (0.4262)^T \\ (-0.8525)^T \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} (-0.3027)^T \\ (0.6055)^T \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} (-5.4303)^T \\ (10.8605)^T \end{array} \right) & 102.3071 & \left(\begin{array}{c} (4.5716)^T \\ (-9.1432)^T \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} (1.8255)^T \\ (-3.6510)^T \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} (1.3348)^T \\ (-2.6696)^T \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} (-0.9265)^T \\ (1.8531)^T \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} (-6.8053)^T \\ (13.6106)^T \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{ccccc} 1.6260 & 0.6275 & 0.4482 & -1.8240 & -0.8777 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.1965 & -0.3773 & -0.2502 & 3.1998 & -1.3758 \\ -0.4295 & -0.2502 & -0.1980 & -1.3758 & 2.2535 \end{array} \right) \otimes I_2 & \begin{array}{c} (10.2062, -8.2222)^T \\ (0,0)^T \\ (0,0)^T \\ (-2.6516, -1.7181)^T \\ (-7.5545, 9.9403)^T \end{array} & \left(\begin{array}{ccccc} 3.8096 & 2.3180 & 1.9874 & -4.7488 & -3.3662 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.4308 & -1.2699 & -1.0482 & 7.5102 & -2.7614 \\ -1.3788 & -1.0482 & -0.9392 & -2.7614 & 6.1276 \end{array} \right) \otimes I_2 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{P}_4(0) = \left[\begin{array}{ccc} \left(\begin{array}{ccccc} 2.2030 & 0.2629 & 0.1537 & -2.2662 & -0.3535 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.0034 & -0.1723 & -0.0906 & 4.3788 & -2.1126 \\ -0.1998 & -0.0906 & -0.0631 & -2.1126 & 2.4660 \end{array} \right) \otimes I_2 & \begin{array}{c} (7.0867, -9.6118)^T \\ (0,0)^T \\ (0,0)^T \\ (-1.0143, -0.7991)^T \\ (-6.0724, 10.4109)^T \end{array} & \left(\begin{array}{ccccc} 1.9467 & 0.6688 & 0.4739 & -2.1557 & -0.9337 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.4870 & -0.4039 & -0.2649 & 3.8375 & -1.6818 \\ -0.4597 & -0.2649 & -0.2090 & -1.6818 & 2.6154 \end{array} \right) \otimes I_2 \\ \left(\begin{array}{c} (4.8059)^T \\ (-9.6118)^T \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} (0.7069)^T \\ (-1.4138)^T \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} (0.4335)^T \\ (-0.8670)^T \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} (-0.3074)^T \\ (0.6147)^T \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} (-5.6389)^T \\ (11.2779)^T \end{array} \right) & 106.409 & \left(\begin{array}{c} (4.8128)^T \\ (-9.6257)^T \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} (1.8673)^T \\ (-3.7347)^T \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} (1.3659)^T \\ (-2.7318)^T \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} (-0.9479)^T \\ (1.8957)^T \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} (-7.0982)^T \\ (14.1964)^T \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{ccccc} 1.9467 & 0.6688 & 0.4739 & -2.1557 & -0.9337 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.4870 & -0.4039 & -0.2649 & 3.8375 & -1.6818 \\ -0.4597 & -0.2649 & -0.2090 & -1.6818 & 2.6154 \end{array} \right) \otimes I_2 & \begin{array}{c} (11.2793, -9.6257)^T \\ (0,0)^T \\ (0,0)^T \\ (-2.8152, -1.8389)^T \\ (-8.4641, 11.4646)^T \end{array} & \left(\begin{array}{ccccc} 4.3800 & 2.4875 & 2.1112 & -5.3749 & -3.6038 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.8874 & -1.3711 & -1.1163 & 8.6385 & -3.2637 \\ -1.4926 & -1.1163 & -0.9949 & -3.2637 & 6.8674 \end{array} \right) \otimes I_2 \end{array} \right]$$



Şekil 2.20. Riccati'nin sayısal ve analitik yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.

3. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

21. yüzyılda, gerçek dünya sorunlarına çok etmenli sistemlerin kullanımıyla yeni ve etkin çözümler elde edilmetke ve bu gibi çalışmalar uygulanabilir hale geldikçe, etmenleri koordine etmek için yeni yöntemlerin geliştirilmesi gerekmektedir. Tıbbi nano robotlardan uzay araştırmalarına kadar çeşitli alanlardaki uygulamaların artması ile çok etmenli sistemlerin kontrolüne olan ilgi artmaya devam etmektedir. Oyun teorisinin, çok sayıda üyesi olan ağ-bağımlı sistemlerin kontrolü için güçlü bir araç olduğu kanıtlanmıştır. Oyun teorisi çerçevesinde, bireysel çıkarları olan etmenlerin bir ortak takım amacı doğrultusunda etmenler arası etkileşimlerinin modellenmesi yapılabilmektedir. Düzen kontrolü ağ-bağımlı mobil sistemlerinin çoğunun kontrolünün temel bir bileşenidir.

Bu tez çalışmasında, düzen kontrolünün oyun teorisi çerçevesinde olası çözümleri araştırılmıştır. Çok etmenli düzen kontrolü bir istenilen düzen şeklinin oluşturulması problemi olarak tanımlanmıştır. Probleme diferansiyel oyun teorisi yaklaşımı çerçevesinde çeşitli modeller ve çözümler önerilmiştir. Etmenler doğrusal (çift integratör) dinamikler ile tanımlanmış ve bir ağ yoluyla bilgi alışverişi yapmaktadır. Ayrıca, sistem lidersizdir ve hiçbir etmenin diğerine üstünlüğü olmamaktadır. Bilgi alışverişi ağı zamanda değişmez düğüm ve kenar kümesi olan yönlü graf ile tanımlanmıştır. Grafın Laplasyen matrisi tanımından faydalanarak düzen kontrolünün gereksinimi her etmen için bir sonlu ufuk karesel maliyet fonksiyonu biçiminde formüle edilmiştir. Düzen kontrolü için kullanılan etmen hareket denklemleri ve tanımlanan maliyeti fonksiyonları bir diferansiyel oyunun durum denklemleri ve maliyet fonksiyonları olarak yorumlanmıştır. Bu yaklaşımın ana avantajı düzen kontrolü probleminin, doğrusal-kareli diferansiyel oyun olarak, analitik işlenebilir olmasıdır. Ancak, düzen kontrolünün var olduğuna dair hiçbir garanti yoktur. Bu tez çalışmasının ana katkısı, özetlemek gerekirse, düzen kontrolünün varlığını sağlayan diferansiyel oyunların formülasyonlarıdır. Diğer bir ifadeyle, formüle edilmiş oyunlar eşsiz *Nash* dengesi kabul etmektedir. Ayrıca, analitik yaklaşık çözümün bulunması çalışmanın diğer katkısıdır.

Bu çalışmanın özeti ve ana sonuçları şöyledir:

1. Açık döngü düzen kontrolü strateji tasarımı açısından, diferansiyel oyun teorisi yaklaşımı ile lidersiz bir etmen takımı için bir özgün doğrusal-kareli modelleme ortaya konulmuştur (bölüm 2.1).
 - Her etmen bilgi alışverişi grafına göre sadece komşu etmenlerle durum bilgisi alışverişi yaptığından dolayı önerilen modelleme tekniği dağıtık strateji tasarımıdır.
 - Bağlı *Riccati* diferansiyel denklemleri standart bir cebirsel *Riccati* denklemine dönüştürülüp çözümü terminal değerleriyle ve geriye doğru yineleme yoluyla bulunmuştur.
2. Düzen kontrolünün varoluşu açısından, bir eşsiz *Nash* dengesi kazandıran (yani düzen kontrolünün varlığını sağlayan) diferansiyel oyun formülasyonu ortaya konulmuştur (bölüm 2.2).
 - Oyun ile ilgili bir karmaşık matrisin tersi alınabilir olması nedeniyle düzen kontrolünün varlığı gösterilmiştir.
 - Oyunun kabul ettiği açık döngü eşsiz *Nash* dengesinin zamanın doğrusal işlevi olduğu teorik olarak ve simülasyonlarla gösterilmiştir.
 - Oyunun kabul ettiği açık döngü eşsiz *Nash* dengesinin dağıtık kontrol yasası olduğu gösterilmiştir.
3. Ayrık zamanda açık döngü düzen kontrolü strateji tasarımı açısından, bağlı *Riccati* diferansiyel denklemlerinin çözülebilirliği koşulları ve bu denklemlerin analitik yaklaşık çözümü ortaya konulmuştur (bölüm 2.3).
 - Terminal değerlerini ve geriye doğru yineleme tekniğini esas alarak, sürekli zamanda düzen kontrolü problemi ayrık zamanda bir yaklaşık probleme dönüştürülmüştür.
 - *Levy-Desplanques* teoremi kullanılarak ayrık zamanda bağlı *Riccati* fark denklemlerinin çözülebilirliği koşulları bulunmuştur.

- *Gerschgorin*'in disk teoremi ve spektral yarıçapını temel alan matris yakınsama kriterleri kullanılarak bağlı *Riccati* diferansiyel denklemlerinin geriye doğru analitik yaklaşık çözümü elde edilmiştir.
- Matlab platformunda *ODE* çözücünün sonuçlarıyla karşılaştırıldığında, analitik yaklaşık çözümün oldukça doğru ve memnun edici olduğu gösterilmiştir.

Çeşitli simülasyon denemeleri yapılarak, tüm modellerin ve teorilerin doğruluğu göstermiştir. Bu denemelerde açık döngü bilgi yapısı altında *Nash* dengesi çözümü ile düzen kontrolünün gerçekleştirildiği gözlenmiştir. İlgili grafiklerde etmenler arası istenilen mesafelere, sıfır bağıl hızlara, bütün zaman aralığında sürtünmesiz ve ani değişimlerin olmadığı kontrol yörüngelerine (istenilen şekilde) ulaşıldığı görülmektedir.

Burada, çalışmada elde edilen sonuçlar dikkate alınarak bazı öneriler yapılmıştır. Gelecekteki araştırmalar aşağıdaki olası yönlerde gerçekleştirilebilir.

1. Zamanda değişen bilgi yapısı:

Düzen kontrolündeki beklendik değişiklikler zamanda değişen bilgi ağı yapısı ile uğraşılabilir. Bu durum graf teorisinde zamanda değişen kenar kümesi ile ve zamanın bir işlevi olan Laplasyen matrisi ile ifade edilebilmektedir. Bu çalışmadaki önerilen tasarım yaklaşımında (\mathcal{L}_i matrisi $\mathcal{L}_i(t)$ ile değiştirilerek), sistemdeki beklendik değişikliklere uyumlu *Nash* dengesinin çözümleri aranabilir. Bu durumda çözümlerin varoluşu ve eşsiz olup olmadığı gözlenmelidir.

2. Kapalı döngü kontrol:

Sistemin değişmesine anında tepki verebilmek kapalı döngü kontrolü ile gerçekleşebilmektedir. Kontrol uygulamalarında kapalı döngü kontrolüne özen gösterilmektedir. Oyunun bilgi yapısını kapalı döngü şeklinde tasarlayarak kapalı döngü *Nash* dengesinin çözümü aranabilir. Açık döngü *Nash* dengesi için olduğu gibi, kapalı döngü *Nash* dengesinin çözümü bağlı *Riccati* diferansiyel denklemlerinin çözülmesiyle belirlenebileceği açıkça ortadadır.

3. Çarpışmadan kaçınma:

Düzen kontrolü probleminde, engeller ve diğer etmenlerle çarpışmalardan kaçınırken, istenilen düzenin teşkil edilmesi dikkate alınabilir. Diğer bir deyişle, etmenlerin düzen şeklini oluşturmalarını sağlayan geribildirimli denetleyicilerinin tasarımı kapalı döngü *Nash* oyunu şeklinde modellenebilir. İlgi çeken bir yaklaşım, düzen kontrolü ve çarpışmadan kaçınmanın birleşik bir maliyet fonksiyonuna entegre edilmesidir. [110]'da karesel olmayan bir kaçınma maliyet fonksiyonu bir ters optimal kontrol yaklaşımı ile yenilikçi bir şekilde oluşturulmuştur. Bu fonksiyon analitik, dağıtık ve optimal bir düzen kontrolü yasasını doğurmaktadır. Aynı yaklaşım kapalı döngü *Nash* oyununun modellenmesinde düşünülebilir. Diğer bir yaklaşım, çarpışmadan kaçınma problemini durum kısıtlamalarına dönüştürerek kapalı döngü *Nash* oyununu tasarlamaktır.

4. Ağ-kaynaklı gecikme:

Etmenler arası bilgi alışverişi ağ yoluyla olduğundan dolayı ağ performansı kontrol sistemini etkilemektedir. Ağ-kaynaklı gecikme komşu etmenlerin iletişimi sırasında meydana gelebilmektedir. Ağ protokolü tasarımında deterministik iletişim davranışını modellemek için sabit ağ-kaynaklı gecikmeler dikkate alınmaktadır. Ağ-kaynaklı gecikme altında olan düzen kontrolü kapalı döngü *Nash* oyununun modellenmesinde düşünülebilir.

5. İletim bozuklukları (İşaretin bozulması):

İletişim ağında etmenlerin aldığı işaret gönderilen işaretle aynı olmayabilir. Bozulmalar işaretin kalitesinin bozulması veya bit hataları şeklinde olabilir ve nedenleri ise işaretin zayıflaması, gecikmesi veya gürültünün karışmasıdır. Düzen kontrolünde etmenlerin iletişimi sırasında işaret bozulmaları durumu dikkate alınabilir. Bozulmalar altında düzen kontrolünün *Nash* denetleyicileri araştırılabilir.

6. Kısmi bilgi erişimi:

Bir gerçekçi senaryoda her etmen (graf topolojisi yerine) uzaysal koordinat sisteminde bitişliği olan etmenlerin durumlarına erişimi var. Bu durumda her etmen kısmi bilgi ile düzen kontrolü denetleyicisini tasarlamalıdır. Bu senaryo

açık döngü veya kapalı döngü *Nash* oyunu çerçevesinde düşünülebilir. Kısmi gözlem durumunda uygulanabilir bir *Nash* dengisinin varoluşu araştırılabilir.



4. KAYNAKLAR

1. Russel, S. ve Norvig, P., *Artificial Intelligence: A Modern Approach*, Prentice Hall Press, 2009.
2. Hoff III, N. R., *Multi-Robot Foraging for Swarms of Simple Robots*, Harvard University, Doktora Tezi, The Department of Computer Science, Cambridge, Massachusetts, 2011.
3. Luo, C., Espinosa, A. P., Pranantha, D. ve Gloria, A. D., *Multi-Robot Search and Rescue Team*, Proc. of the IEEE International Symposium on Safety, Security and Rescue Robotics, Kasım 2011, Kyoto, Japan, 296-301.
4. Jung, B. ve Sukhatme, G. S., *Tracking Targets Using Multiple Robots: The Effect of Environment Occlusion*, Autonomous Robots, 13, 3 (2002) 191-205.
5. Batalin, M. A. ve Sukhatme, G. S., *Spreading Out: A Local Approach to Multi-robot Coverage*, 6th International Conference on Distributed Autonomous Robotic Systems (DSRS02), Haziran 2002, Fukuoka, Japan, 373-382.
6. Folgado, E., Rincón, M., Álvarez, J. R. ve Mira, J., *A Multi-robot Surveillance System Simulated in Gazebo*, Lecture Notes in Computer Science, 4528, (2007) 202-211.
7. Burgard, W., Moorsy, M., Stachniss, C. ve Schneidery, F., *Coordinated Multi-Robot Exploration*, IEEE Transactions on Robotics, 21, 3 (2005) 376-386.
8. Roldán, J. J., Garcia-Aunon, P., Garzón, M., León, J., Cerro, J. ve Barrientos, A., *Heterogeneous Multi-Robot System for Mapping Environmental Variables of Greenhouses*, Sensors, 16, 7 (2016) 1018.
9. Sycara, K. P., *Multiagent Systems*, AI magazine, 19, 2 (1998) 79-92.
10. Lissaman, P. B. S. ve Shollenberger, C. A., *Formation Flight of Birds*, Science, 168, 3934 (1970), 1003-1005.
11. <https://www.intelligent-aerospace.com/articles/2017/10/ia-uavs-commercial-aircraft-controlled-airspace.html>, 11 Kasım 2018.
12. Kumar, V., Rus, D., ve Singh, S., *Robot and Sensor Networks for First Responders*, IEEE Pervasive Computing, 3, 4 (2004) 24-33.
13. Coogan, S. ve Arcaç, M., *Scaling the Size of a Formation Using Relative Position Feedback*, Automatica, 48, 10 (2012) 2677–2685.
14. Coogan, S., Arcaç, M. ve Egerstedt, M., *Scaling the Size of a Multiagent Formation via Distributed Feedback*, In Proceedings of the 50th IEEE Conference

- on Decision and Control and 2011 European Control Conference, 12-15 Aralık 2011, Orlando, FL, USA, 994-999.
15. Saez-Pons, J., Alboul, L., Penders, J. ve Nomdedeu, L., Multi-Robot Team Formation Control in The GUARDIANS Project, Industrial Robot, 37,4 (2010) 372-383.
 16. Kahveci, M. ve Can, N., İnsansız Hava Araçları: Tarihçesi, Tanımı, Dünyada ve Türkiye'deki Yasal Durumu, Selçuk Üniversitesi Mühendislik, Bilim ve Teknoloji Dergisi, 5, 4 (2017) 511-535.
 17. Dong, X., Yu B., Shi, Z. ve Zhong, Y., Time-Varying Formation Control for Unmanned Aerial Vehicles: Theories and Applications, IEEE Transactions on Control Systems Technology, 23 , 1 (2015) 340-348.
 18. Dubois, L. ve Suzuki, S., Formation Control of Multiple Quadcopters Using Model Predictive Control, Advanced Robotics, 32, 19 (2018) 1037-1046.
 19. Schilling, K., Bangert, P., Busch, S., Dombrovski, S., Freimann, A., Kleinschrodt, A., Kramer, A., Nogueira, T., Ris, D., Scharnagl, J. ve Tzschichholz, T., NETSAT: A Four Pico/Nano-Satellite Mission for Demonstration of Autonomous Formation Flying, International Astronautical Federation (IAF) publication, Aralık 2015.
 20. <https://ats.org/news/technion-to-launch-first-autonomous-nanosatellite-formation-into-space-in-2018>, 26 Kasım 2018.
 21. Music', S., Salviatti, G., Dohmann, P. B., Chinello, F., Prattichizzo, D. ve Hirche, S., Robot Team Teleoperation for Cooperative Manipulation using Wearable Haptics, 2017 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS), 24-28 Eylül 2017, Vancouver, BC, Canada, 2556-2563.
 22. Alonso-Mora, J., Baker, S. ve Rus, D., Multi-Robot Formation Control and Object Transport in Dynamic Environments via Constrained Optimization, The International Journal of Robotics Research, 36, 9 (2017) 1000-1021.
 23. Dai Y., Kim, Y. G., Wee, S. G., Lee, D. H. ve Lee, S. G., Symmetric Caging Formation for Convex Polygonal Object Transportation by Multiple Mobile Robots Based on Fuzzy Sliding Mode Control, ISA Transactions, 60, (2015) 321-332.
 24. Yufka, A., Özkan, M. ve Parlaktuna, O., Çoklu Gezgin Robotlarla Formasyon Tabanlı Nesne Taşıma, Otomatik Kontrol Ulusal Toplantısı, Eylül 2010, Gebze, 520-525.
 25. Eckstein, F., Formation Control in Environment with Dynamic Obstacles, Faculty of Electrical Engineering, Czech Technical University in Prague, Lisans Tezi, 2012.
 26. Scheggi, S., Morbidi, F., ve Prattichizzo, D., Human-Robot Formation Control via Visual and Vibrotactile Haptic Feedback, IEEE Transactions on Haptics, 7, 4 (2014) 499-511.

27. Nascimento, T. P., Conceicao, A. G. S. ve Moreira, A. P., Multi-Robot Nonlinear Model Predictive Formation Control: The Obstacle Avoidance Problem, Robotica, 34, (2016) 549–567.
28. Benjamin, M. R., Curcio, J. A., Leonard, J. J. ve Newman, P. M., Navigation of Unmanned Marine Vehicles in Accordance with the Rules of the Road, Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Robotics and Automation Orlando, Mayıs 2006, Florida, USA, 3581-3587.
29. Naidu, D. S., Naidu, S. ve Dorf, R. C., Optimal Control Systems, CRC Press, Inc. Boca Raton, FL, USA, 2002.
30. Gu, D., A Differential Game Approach to Formation Control, IEEE Transactions on Control Systems Technology, 16, 1, (2008) 85-93.
31. Gazi, V. ve Passino, K. M., Swarm Stability and Optimization, Berlin: Springer, 2011.
32. Reynolds, C. W., Flocks, Herds, and Schools: A Distributed Behavioral Model, Computer Graphics, 21, 4 (1987) 25-34.
33. Olfati-Saber, R., Flocking for Multi-Agent Dynamic Systems: Algorithms and Theory, IEEE Transactions on Automatic Control, 51, 3 (2006) 401-420.
34. Balch, T. ve Arkin, R., Behavior-based Formation Control for Multi-Robot Systems, IEEE Transactions on Robotics and Automation, 14, 2 (1998) 926–939.
35. Mesbahi, M. ve Egerstedt, M., Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks, Princeton University Press, Princeton, 2010.
36. Cai, X. ve Queiroz, M., Adaptive Rigidity-Based Formation Control for Multirobotic Vehicles With Dynamics, IEEE Transactions on Control Systems Technology, 23, 1 (2015) 389-396.
37. <https://www.faa.gov/pilots/safety/pilotsafetybrochures/media/Acceleration.pdf>, 26 Kasım 2018.
38. Çetin, Ö., Çoklu Otonom İnsansız Hava Araçları için Paralel Programlama Tabanlı Yol Planlaması, Hava Harp Okulu, Doktora Tezi, Havacılık ve Uzay Teknolojileri Enstitüsü, Ankara, 2015.
39. Jond, H. B., Nabyev, V. V. ve Akbarimajd, A., Planning of Mobile Robots under Limited Velocity and Acceleration, 22nd Signal Processing and Communications Applications Conference (SIU), Nisan 2014, Trabzon, Turkey, 1579-1582 .
40. Scharf, D., Hadaegh, F. Y. ve Ploen, S., A Survey of Spacecraft Formation Flying Guidance and Control. Part II: control. In Proceedings of the 2004 American Control Conference, Haziran-Temmuz 2004, Boston, MA, USA, 2976–2985.

41. Chen, Y. Q. ve Wang, Z., Formation Control: A Review and a New Consideration, In Proceedings of the 2005 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, Eylül-Ekim 2005, Sendai, Japan, 3181–3186.
42. Ren, W., Beard, R.W. ve Atkins, E., A Survey of Consensus Problems in Multiagent Coordination, In Proceedings of the 2005 American Control Conference, Haziran-Temmuz 2005, Portland, Oregon, USA, 1859–1864.
43. Olfati-Saber, R., Fax, J. A. ve Murray, R. M., Consensus and Cooperation in Networked Multi-Agent Systems, Proceedings of the IEEE, 95, 1 (2007) 215–233.
44. Ren, W., Beard, R. W. ve Atkins, E., Information Consensus in Multivehicle Cooperative Control, IEEE Control Systems Magazine, 27,2 (2007) 71–82.
45. Anderson, B. D. O., Yu, C., Fidan, B. ve Hendrickx, J., Rigid Graph Control Architectures for Autonomous Formations, IEEE Control Systems Magazine, 28, 6 (2008) 48–63.
46. Mesbahi, M. ve Egerstedt, M., Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks, Princeton University Press, 2010.
47. Ren, W. ve Cao, Y., Distributed Coordination of Multi-Agent Networks: Emergent Problems, Models, and Issues, Springer, 2010.
48. Kwang-Kyo, O., Myoung-Chul, P. ve Hyo-Sung, A., A Survey of Multi-Agent Formation Control, Automatica, 53, (2015) 424-440.
49. Zhicheng, H., Weijun, W., Gong, Z. ve Changsoo, H., A Survey on The Formation Control of Multiple Quadrotors, 14th International Conference on Ubiquitous Robots and Ambient Intelligence (URAI), Haziran-Temmuz 2017, Jeju, South Korea, 219-225.
50. Guo-Ping, L. ve Shijie, Z., A Survey on Formation Control of Small Satellites, Proceedings of the IEEE, 106 , 3 (2018) 440-457.
51. Aakash, S. ve Huosheng, H., Formation Control for a Fleet of Autonomous Ground Vehicles: A Survey, Robotics, 7, 4 (2018) 1-25.
52. Ren, W. ve Atkins, E., Distributed Multi-Vehicle Coordinated Control via Local Information Exchange, International Journal of Robust and Nonlinear Control, 17, 10–11 (2007) 1002–1033.
53. Dong, W. ve Farrell, J. A., Consensus of Multiple Nonholonomic Systems, In Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision And Control, Aralık 2008, Cancun, Mexico, 2270–2275.
54. Dong, W. ve Farrell, J. A., Cooperative Control of Multiple Nonholonomic Mobile Agents, IEEE Transactions on Automatic Control, 53,6 (2008) 1434–1448.
55. Broek, T. H. A., Wouw, N. ve Nijmeijer, H., Formation Control of Unicycle Mobile Robots: A Virtual Structure Approach, In Proceedings of the 48th IEEE

- Conference on Decision and Control and The 28th Chinese Control Conference, Aralık 2009, Shanghai, China, 8328-8333.
56. Beard, R. W., Lawton, J. ve Hadaegh, F. Y., A Coordination Architecture for Spacecraft Formation Control, IEEE Transactions on Control Systems Technology, 9, 6 (2001) 777–790.
 57. Young, B., Beard, R.W. ve Kelsey, J., A Control Scheme For Improving Multivehicle Formation Maneuvers, In Proceedings of the 2001 American Control Conference, Haziran 2001, Virginia, USA, 704–709.
 58. Do, K. ve Pan, J., Nonlinear Formation Control of Unicycle-Type Mobile Robots, Robotics and Autonomous Systems, 55,3 (2007) 191–204.
 59. Fax, J. A. ve Murray, R.M., Graph Laplacians and Stabilization of Vehicle Formations, In Proceedings of the 15th IFAC World Congress, Temmuz 2002, Barcelona, Spain, 283–288.
 60. Fax, J. A. ve Murray, R. M., Information Flow and Cooperative Control of Vehicle Formations, IEEE Transactions on Automatic Control, 49,9 (2004) 1465–1476.
 61. Olfati-Saber, R. ve Murray, R. M., Consensus Problems in Networks of Agents with Switching Topology and Time-Delays, IEEE Transactions on Automatic Control, 49, 9 (2004) 1520–1533.
 62. Ren, W., Beard, R. W. ve McLain, T. W., Coordination Variables and Consensus Building in Multiple Vehicle Systems, In: Kumar V., Leonard N., Morse A.S. (eds) Cooperative Control. Lecture Notes in Control and Information Science, Springer, Berlin, Heidelberg, 2004.
 63. Jadbabaie, A., Lin, J. ve Morse, A. S., Coordination of Groups of Mobile Autonomous Agents Using Nearest Neighbor Rules, IEEE Transactions on Automatic Control, 48, 6 (2003) 988–1001.
 64. Moreau, L., Stability of Multiagent Systems with Time-Dependent Communication Links, IEEE Transactions on Automatic Control, 50, 2 (2005) 169–182.
 65. Lin, Z., Francis, B. ve Maggiore, M., State Agreement for Continuous-Time Coupled Nonlinear Systems, SIAM Journal on Control and Optimization, 46,1 (2007) 288–307.
 66. Cao, Y. ve Ren, W., Distributed Formation Control for Fractional-Order Systems: Dynamic Interaction and Absolute/Relative Damping, Systems and Control Letters, 59,3 (2010) 233–240.
 67. Ji, M. ve Egerstedt, M., Distributed Coordination Control of Multiagent Systems While Preserving Connectedness, IEEE Transactions on Robotics, 23,4 (2007) 693–703.
 68. Cortés, J., Global and Robust Formation-Shape Stabilization of Relative Sensing Networks, Automatica, 45, 12 (2009) 2754–2762.

69. Wen, W., Duan, Z., Ren, W. ve Chen, G., Distributed Consensus of Multi-Agent Systems with General Linear Node Dynamics and Intermittent Communications, International Journal of Robust and Nonlinear Control, 24,16 (2014) 2438–2457.
70. Dimarogonas, D. V. ve Kyriakopoulos, K. J., A Connection Between Formation Infeasibility and Velocity Alignment in Kinematic Multi-Agent Systems, Automatica, 44, 10 (2008) 2648–2654.
71. Lin, Z., Francis, B. A. ve Maggiore, M., Necessary and Sufficient Graphical Conditions for Formation Control of Unicycles, IEEE Transactions on Automatic Control, 50, 1 (2005) 121–127.
72. Dimarogonas, D. V. ve Kyriakopoulos, K. J. On the Rendezvous Problem for Multiple Nonholonomic Agents, IEEE Transactions on Automatic Control, 52, 5 (2007) 916–922.
73. Krick, L., Broucke, M. E. ve Francis, B. A., Stabilization of Infinitesimally Rigid Formations of Multi-Robot Networks, International Journal of Control, 82, 3 (2009) 423–439.
74. Anderson, B. D. O., Yu, C., Dasgupta, S. ve Summers, T. H., Controlling Four Agent Formations, In Proceedings of the 2nd IFAC Workshop on Distributed Estimation and Control in Networked Systems, Eylül 2010, Annecy, France, 139–144.
75. Oh, K.-K. ve Ahn, H.-S., Distance-Based Undirected Formations of Single- and Double-integrator Modeled Agents in N -Dimensional Space, International Journal of Robust and Nonlinear Control, 24, 12 (2014) 1809–1820.
76. Olfati-Saber, R. ve Murray, R. M., Graph Rigidity and Distributed Formation Stabilization of Multi-Vehicle Systems, Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, Aralık 2002, Las Vegas, Nevada, USA, 2965–2971.
77. Baillieul, J. ve Suri, A., Information Patterns and Hedging Brockett’s Theorem in Controlling Vehicle Formations, In Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control, Aralık 2003, Maui, HI, USA, 556–563.
78. Eren, T., Whiteley, W., Anderson, B. D. O., Morse, A. S. ve Belhumeur, P. N., Information Structures to Secure Control of Rigid Formations with Leader–Follower Architecture, In Proceedings of the 2005 American Control Conference, Haziran 2005, Portland, Oregon, USA, 2966–2971.
79. Belabbas, M. A., On Global Feedback Stabilization of Decentralized Formation Control, In Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and The 2011 European Control Conference, Aralık 2011, Orlando, FL, USA, 5750–5755.
80. Hendrickx, J., Anderson, B. D. O., Delvenne, J. ve Blondel, V., Directed Graphs for the Analysis of Rigidity and Persistence in Autonomous Agent Systems, International Journal of Robust and Nonlinear Control, 17, 10–11 (2007) 960–981.

81. Oh, K.-K. ve Ahn, H.-S., Distance-Based Control of Cycle-Free Persistent Formations, In Proceedings of the 2011 IEEE International Symposium on Intelligent Control, Eylül 2011, Denver, CO, USA, 816–821.
82. Kang, S. M., Park, M.-C., Lee, B.-H. ve Ahn, H.-S., Distance-Based Formation Control with a Single Moving Leader, In Proceedings of the 2014 American Control Conference, Haziran 2014, Portland, OR, USA, 305–310.
83. Park, M.-C., Jeong, K. ve Ahn, H.-S., Control of Undirected Four-Agent Formations in 3-Dimensional Space, In Proceedings of the 52nd IEEE Conference on Decision and Control, Aralık 2013, Florence, Italy, 1461–1465.
84. Oh, K.-K. ve Ahn, H.-S., Distance-Based Undirected Formations of Single- and Double-Integrator Modeled Agents in N-Dimensional Space, International Journal of Robust and Nonlinear Control, 24, 12 (2014) 1809–1820.
85. Kanjanawanishkul, K., Formation Control of Mobile Robots: Survey, eng.ubu.ac.th, (2005) 50-64.
86. Dongdong, X., Xingnan, Z., Zhangqing, Z., Chunlin, C., ve Pei, Y., Behavior-Based Formation Control of Swarm Robots, Mathematical Problems in Engineering, 2014, (2014) 1-13.
87. Lee, G. ve Chwa, D., Decentralized Behavior-Based Formation Control of Multiple Robots Considering Obstacle Avoidance, Intelligent Service Robotics, 11, 1 (2018) 127–138.
88. Lewis, M. A. ve Tan, K.-H., High Precision Formation Control of Mobile Robots Using Virtual Structures, Autonomous Robots, October, 4, 4 (1997) 387–403.
89. Consolini, L., Morbidi, F., Prattichizzo, D. ve Tosques, M., A Geometric Characterization of Leader-Follower Formation Control, Proceedings 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Nisan 2007, Roma, Italy, 2397–2402.
90. Ren, W. ve Beard, R., Virtual Structure Based Spacecraft Formation Control with Formation Feedback, AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, Guidance, Navigation, and Control and Exhibit, Ağustos 2002, Monterey, California, 1–6.
91. Low, C. B. ve Ng, Q. S., A Flexible Virtual Structure Formation Keeping Control for Fixed-Wing UAVs, 9th IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA), Aralık 2011, Santiago, Chile, 621–626.
92. Mehrjerdi, H., Ghommam, J. ve Saad, M., Nonlinear Coordination Control for a Group of Mobile Robots Using a Virtual Structure, Mechatronics, 21, 7 (2011) 1147–1155.
93. Cai, D., Sun, J. ve Wu, S., UAVs Formation Flight Control Based on Behavior and Virtual Structure. In: Xiao T., Zhang L., Fei M. (eds) AsiaSim 2012. AsiaSim

2012. *Communications in Computer and Information Science*, 325, Springer, Berlin, Heidelberg, 2012.
94. Juan, L., Duorui, X. ve Jianxin, Z., Multi-UUV Formation Coordination Control Based on Combination of Virtual Structure and Leader, 2018 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation (ICMA), Ağustos 2018, Changchun, China, 1574–1579.
95. Das, A., Fierro, R., Kumar, V., Ostrowski, J., Spletzer, J. ve Taylor, C., A Vision-Based Formation Control Framework, IEEE Transactions on Robotics and Automation, 18, 5 (2002) 813–825.
96. Mariottini, G. L., Morbidi, F., Prattichizzo, D., Valk, N. V., Michael, N., Pappas, G. ve Daniilidis, K., Vision-based Localization for Leader-Follower Formation Control, IEEE Transactions on Robotics, 25, 6 (2009) 1431–1438.
97. Cui, R., Ge, S. S., How, B. V. E. Y. ve Choo, S., Leader-Follower Formation Control of Underactuated Autonomous Underwater Vehicles, Ocean Engineering, 37, 17–18 (2010) 1491–1502.
98. Chen, X. ve Jia, Y., Adaptive Leader-Follower Formation Control of Non-Holonomic Mobile Robots Using Active Vision, IET Control Theory & Applications, 9, 8 (2015) 5–15.
99. Yu, X. ve Liu, L., Distributed Formation Control of Nonholonomic Vehicles Subject to Velocity Constraints, IEEE Transactions on Industrial Electronics, 63, 2 (2016) 1289–1298.
100. Ren, W. ve Chen, Y. Q., Leaderless Formation Control for Multiple Autonomous Vehicles, AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, Ağustos 2006, Keystone, Colorado, 1–10.
101. Zheng, Z., Spry, S. C. ve Girard, A. R., Leaderless Formation Control using Dynamic Extension and Sliding Control, IFAC Proceedings Volumes, 41, 2 (2008) 16027–16032.
102. Alonso-Mora, E., Montijano, T., Nägele, Hilliges, O., Schwager, M. ve Rus, D., Distributed Multi-Robot Formation Control in Dynamic Environments, Autonomous Robots, 43, 5 (2018) 1079–1100.
103. Meng, Y., Chen, Q., Chu, X. ve Rahmani, A., Maneuver Guidance and Formation Maintenance for Control of Leaderless Space-robot Teams, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 55, 1 (2019) 289–302.
104. Tron, R., Thomas, J., Loianno, G., Daniilidis, K. ve Kumar, V., Bearing-Only Formation Control with Auxiliary Distance Measurements, Leaders, and Collision Avoidance, 2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC), Aralık 2016, Las Vegas, USA, 1806–1813.

105. Wang, J., Luo, X., Li, X. ve Guan, X., Specified-Time Bearing-Based Formation Control of Multi-Agent Systems via a Dynamic Gain Approach, Journal of the Franklin Institute, 355, 17 (2018) 8619–8641.
106. Ren, W., Consensus Based Formation Control Strategies for Multi-Vehicle Systems, American Control Conference, Haziran 2006, Minneapolis, MN, USA, 4237-4242.
107. Peng, Z., Wen, G., Rahmani, A. ve Yu, Y., Distributed Consensus-Based Formation Control for Multiple Nonholonomic Mobile Robots with a Specified Reference Trajectory, International Journal of Systems Science, 46, 8 (2015) 1447–1457.
108. Kuriki, Y. ve Namerikawa, T., Consensus-Based Cooperative Formation Control with Collision Avoidance for a Multi-UAV System, American Control Conference, Haziran 2014, Portland, OR, USA, 2077–2082.
109. Falconi, R., Sabattini, L., Secchi, C., Fantuzzi, C. ve Melchiorri, C., Edge-Weighted Consensus-Based Formation Control Strategy with Collision Avoidance, Robotica, 33, 2 (2015) 332-347.
110. Wang, J. ve Xin, M., Integrated Optimal Formation Control of Multiple Unmanned Aerial Vehicles, IEEE Transactions on Control Systems Technology, 21, 5 (2013) 1731-1744.
111. Lin, F., Fardad, M. ve Jovanovic, M. R., Optimal Control of Vehicular Formations With Nearest Neighbor Interactions, IEEE Transactions on Automatic Control, 57, 9 (2012) 2203 – 2218.
112. Gao, W., Jiang, Z-P, Lewis, F. L. ve Wang, Y., Leader-to-Formation Stability of Multiagent Systems: An Adaptive Optimal Control Approach, IEEE Transactions on Automatic Control, 63, 10 (2018), 3581–3587.
113. Semsar-Kazerooni, E. ve Khorasani, K., Multi-Agent Team Cooperation: A Game Theory Approach, Automatica, 45, 10 (2009) 2205–2213.
114. Lin, W., Distributed UAV Formation Control Using Differential Game Approach, Aerospace Science and Technology, 35, (2014) 54-62.
115. Mylvaganam, T. ve Astolfi, A., A Differential Game Approach to Formation Control for a Team of Agents with One Leader, 2015 American Control Conference, Temmuz 2015, Chicago, IL, USA, 1469-1474.
116. Jimenez-Lizarraga, M., Garcia, O., Chapa-Garcia, R. ve Rojo-Rodriguez, E. G., Differential Game-based Formation Flight for Quadrotors, International Journal of Control, Automation and Systems, 16, 4 (2018) 1854–1865.
117. Bressan, A., Noncooperative Differential Games. A Tutorial, Department of Mathematics, Penn State University, test.scripts.psu.edu, 16 Aralık 2018.
118. Isaacs, R., Differential Games, Wiley, New York, 1965.

119. Pontryagin, L. S., Boltyanskii, V. G., Gamkrelidze, R. V. ve Mishchenko, E. F., *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. English translation. Interscience. 1962.
120. Case, J. H., *Equilibrium Points of N -person Differential Games*, Doktora Tezi, University of Michigan, Department of Industrial Engineering, Michigan, USA, 1967.
121. Ho, Y. C., Bryson, A. E. ve Baron, S., *Differential Games and Optimal Pursuit-Evasion Strategies*, IEEE Transactions on Automatic Control, 10, 4 (1965) 385-389.
122. Ferguson, T. S., *Game Theory*, Mathematics Department, University of California, Los Angeles (UCLA), https://www.math.ucla.edu/~tom/Game_Theory/bimat.pdf, 11 Kasım 2018.
123. Ferrara, M., Khademi, M., Salimi, M. ve Sharifi, S., *A Dynamic Stackelberg Game of Supply Chain for a Corporate Social Responsibility*, Discrete Dynamics in Nature and Society, 2017 (2017) 1-8.
124. Cellini, R., Lambertini, L., ve Leitmann, G., *Degenerate Feedback and Time Consistency in Dynamic Games*, University of Bologna, Department of Economics, <https://www.econstor.eu/bitstream/10419/159376/1/wp0535.pdf>, 11 Kasım 2018.
125. West, D. B., *Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall, Upper Saddle River NJ, A.B.D. , 2001.
126. Gümüş, İ. H. ve Taşkara, N., *Matrislerin Hadamard Çarpımı Üzerine*, Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Fen Dergisi, 37, (2011) 9-14.
127. Merris, R., *Laplacian Matrices of Graphs: A Survey*, Linear Algebra and its Applications, 197/198, (1994) 143–176.
128. Başar, T. ve Olsder, G. J., *Dynamic Noncooperative Game Theory*, Second Edition, Warrendale, PA: SIAM, 1995.
129. Engwerda, J., *On the Open-loop Nash Equilibrium in LQ-games*, Journal of Economic Dynamics and Control, 22, (1998) 729-762.
130. Engwerda, J., *LQ Dynamic Optimization and Differential Games*, Wiley, 2005.
131. Abou-Kandil, H., Freiling, G., Ionescu, V. ve Jank, G., *Matrix Riccati Equations in Control and Systems Theory*, Springer, 2003.
132. Sylvester, J. R., *Determinants of Block Matrices*, Mathematical Gazette, 84, (2000) 460–467.

133. Nagurka, M. L. ve Yen, V., Development of Linear Quadratic Control Laws via Control Parametrization, International Journal of Systems Science, 23, 2 (1992) 2125-2139.
134. Basar, T., Generalized Riccati Equation in Dynamic Games. In: S. Bittanti, A. J. Laub, J. C. Willems (Ed.) The Riccati Equation. Communications and Control Engineering Series, Springer, Berlin, 1991.
135. Horn, R. A. ve Johnson, C. R., Matrix Analysis, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
136. Bernstein, D. S., Matrix Mathematics Theory, Facts, and Formulas, Princeton University Press, 2009.
137. Varga, R. S., Geršgorin and His Circles, Springer-Verlag, Berlin, 2004.



5. EKLER

5.1. Matlab ODE Çözücüsü

Riccati matris diferansiyel denklemi, Matlab’de *ODE* paketindeki fonksiyonlar kullanılarak çözülebilir. Bu pakette farklı çözücüler bulunur. Bu çözücüler arasında *ode45*, çoğu *ODE* problemlerinde iyi sonuç verir ve genellikle ilk tercih edilen çözücü olmaktadır.

ode45, *Runge-Kutta* formülünde, *Dormand-Prince* çiftine dayanmaktadır. Tek adımlı bir çözücüdür. $y(t_n)$ ’nin hesaplaması için sadece hemen önceki zaman noktasında, $y(t_{n-1})$ ’nin çözümüne ihtiyaç duyar. *Runge-Kutta* yöntemleri, geçiçi ayırıklaştırma yoluyla adi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri için kullanılan yinelemeli yöntemlerdir. Bu yöntemler 1900’lerde Alman matematikçiler *Carl Runge* ve *Martin Kutta* tarafından geliştirilmiştir. *Dormand-Prince*, sayısal çözüm hatasını önceden belirlenmiş bir tolerans seviyesinin altında tutmak için otomatik olarak hata tahminini yapan ve adım boyutunu (zaman aralığı) buna göre ayarlayan bir *Runge-Kutta* yöntemidir.

Klasik dördüncü-beşinci-mertebeden *Runge-Kutta-Fehlberg* yöntemi:

Varsayalım

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

$$h = \frac{n-1}{t}$$

Dördüncü-mertebeden yöntem, her bir zaman adımında beş fonksiyon değerlendirmesi kullanan bir yöntemdir.

$$y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{25}{216} k_1 + \frac{1408}{2565} k_3 + \frac{2197}{4104} k_4 - \frac{1}{5} k_5 \right)$$

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = f \left(t_n + \frac{h}{4}, y_n + \frac{h}{4} k_1 \right)$$

$$k_3 = f \left(t_n + \frac{3h}{8}, y_n + \frac{3h}{32} k_1 + \frac{9h}{32} k_2 \right)$$

$$k_4 = f \left(t_n + \frac{12}{13} h, y_n + \frac{1932h}{2197} k_1 - \frac{7200h}{2197} k_2 + \frac{7296h}{2197} k_3 \right)$$

$$k_5 = f \left(t_n + h, y_n + \frac{439h}{216} k_1 - 8hk_2 + \frac{3680h}{513} k_3 - \frac{845h}{4104} k_4 \right)$$

İlişkili altı-aşamalı beşinci-mertebeden yöntemde

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + h \left(\frac{16}{135} k_1 + \frac{6656}{12825} k_3 + \frac{28561}{56430} k_4 - \frac{9}{50} k_5 + \frac{2}{55} k_6 \right)$$

$$k_6 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n - \frac{8h}{27}k_1 + 2hk_2 - \frac{3544h}{2565}k_3 + \frac{1859h}{4104}k_4 - \frac{11h}{40}k_5\right)$$

Yerel kesilme hatası, şöyle tahmin edilir,

$$\varepsilon = \|y_{n+1} - \tilde{y}_{n+1}\|$$

Dormand-Prince yöntemine göre optimal zaman aralığı aşağıdaki şekilde hesaplanır

$$h_{opt} = h \sqrt[5]{\frac{\varepsilon h}{2\varepsilon}}$$

Burada ε adım başına istenilen hatadır.

Pratik programlamada, bu yeni h_{opt} hesaplamasının bir sonraki adımında kullanılacaktır. Bu ekteki bilgiler aşağıdaki kaynaklardan alınmıştır.

- [1] Dormand, J. R. and P. J. Prince, "A family of embedded Runge-Kutta formulae," J. Comp. Appl. Math., Vol. 6, 1980, pp. 19–26.
- [2] Shampine, L. F. and M. W. Reichelt, "The MATLAB ODE Suite," SIAM Journal on Scientific Computing, Vol. 18, 1997, pp. 1–22.
- [3] T. Kimura, "On Dormand-Prince method. Technical report," Japan Malaysia Technical Institute, Senior Volunteer of Japan International Cooperative Association, 2009.

5.2. Matlab ODE'ye Karşı Yaklaşık Çözüm

Tablo 5.1. $i = 1$ için analitik yaklaşık çözümün ve Matlab ODE çözücünün sonuçları.

$P_0^1 =$

$$\left[\begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} 4.2060 & -1.9035 & -0.1995 & -1.9035 & -0.1995 \\ -2.1030 & 2.1647 & 0.3509 & -0.2613 & -0.1514 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.1030 & -0.2613 & -0.1514 & 2.1647 & 0.3509 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes I_2 & \begin{pmatrix} 0, -18.4200 \end{pmatrix}^T \\ \begin{pmatrix} 6.8610, 9.2100 \end{pmatrix}^T & \begin{pmatrix} 3.6726 & -1.3868 & -0.4495 & -1.3868 & -0.4495 \\ -1.8363 & 2.0404 & 0.9127 & -0.6536 & -0.4633 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.8363 & -0.6536 & -0.4633 & 2.0404 & 0.9127 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes I_2 \\ \begin{pmatrix} 0, 0 \end{pmatrix}^T & \begin{pmatrix} -6.8610, 9.2100 \end{pmatrix}^T \\ \begin{pmatrix} 0, 0 \end{pmatrix}^T & \begin{pmatrix} 0, 0 \end{pmatrix}^T \\ \begin{pmatrix} 0 \\ -16.8238 \end{pmatrix}^T & \begin{pmatrix} 4.8520 \\ 7.6138 \end{pmatrix}^T & \begin{pmatrix} 1.0045 \\ 0.7981 \end{pmatrix}^T & \begin{pmatrix} -4.8520 \\ 7.6138 \end{pmatrix}^T & \begin{pmatrix} -1.0045 \\ 0.7981 \end{pmatrix}^T & 101.1238 & \begin{pmatrix} 0 \\ -14.6905 \end{pmatrix}^T & \begin{pmatrix} 5.3881 \\ 5.5474 \end{pmatrix}^T & \begin{pmatrix} 2.7520 \\ 1.7979 \end{pmatrix}^T & \begin{pmatrix} -5.3881 \\ 5.5474 \end{pmatrix}^T & \begin{pmatrix} -2.7520 \\ 1.7979 \end{pmatrix}^T \\ \begin{pmatrix} 3.2520 & -1.1965 & -0.4295 & -1.1965 & -0.4295 \\ -1.6260 & 1.8240 & 0.8777 & -0.6275 & -0.4481 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.6260 & -0.6275 & -0.4481 & 1.8240 & 0.8777 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes I_2 & \begin{pmatrix} 0, -16.4443 \end{pmatrix}^T \\ \begin{pmatrix} 10.2062, 8.2222 \end{pmatrix}^T & \begin{pmatrix} 7.6191 & -2.4308 & -1.3788 & -2.4308 & -1.3788 \\ -3.8096 & 4.7488 & 3.3662 & -2.3180 & -1.9874 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3.8096 & -2.3180 & -1.9874 & 4.7488 & 3.3662 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes I_2 \\ \begin{pmatrix} 0, 0 \end{pmatrix}^T & \begin{pmatrix} -10.2062, 8.2222 \end{pmatrix}^T \\ \begin{pmatrix} 0, 0 \end{pmatrix}^T & \begin{pmatrix} 0, 0 \end{pmatrix}^T \end{array} \right]$$

$P_1(0)$

$$= \left[\begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} 4.4063 & -2.0034 & -0.1998 & -2.0034 & -0.1998 \\ -2.2032 & 2.2662 & 0.3534 & -0.2629 & -0.1537 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.2032 & -0.2629 & -0.1537 & 2.2662 & 0.3534 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes I_2 & \begin{pmatrix} 0, -19.2235 \end{pmatrix}^T \\ \begin{pmatrix} 7.0867, 9.6118 \end{pmatrix}^T & \begin{pmatrix} 3.8934 & -1.4869 & -0.4597 & -1.4869 & -0.4597 \\ -1.9467 & 2.1557 & 0.9337 & -0.6688 & -0.4739 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.9467 & -0.6688 & -0.4739 & 2.1557 & 0.9337 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes I_2 \\ \begin{pmatrix} 0, 0 \end{pmatrix}^T & \begin{pmatrix} -7.0867, 9.6118 \end{pmatrix}^T \\ \begin{pmatrix} 0, 0 \end{pmatrix}^T & \begin{pmatrix} 0, 0 \end{pmatrix}^T \\ \begin{pmatrix} 0 \\ -17.6253 \end{pmatrix}^T & \begin{pmatrix} 5.0582 \\ 8.0136 \end{pmatrix}^T & \begin{pmatrix} 1.0142 \\ 0.7991 \end{pmatrix}^T & \begin{pmatrix} -5.0582 \\ 8.0136 \end{pmatrix}^T & \begin{pmatrix} -1.0142 \\ 0.7991 \end{pmatrix}^T & 105.2408 & \begin{pmatrix} 0 \\ -15.5734 \end{pmatrix}^T & \begin{pmatrix} 5.6489 \\ 5.9478 \end{pmatrix}^T & \begin{pmatrix} 2.8152 \\ 1.8389 \end{pmatrix}^T & \begin{pmatrix} -5.6489 \\ 5.9478 \end{pmatrix}^T & \begin{pmatrix} -2.8152 \\ 1.8389 \end{pmatrix}^T \\ \begin{pmatrix} 3.8934 & -1.4869 & -0.4597 & -1.4869 & -0.4597 \\ -1.9467 & 2.1557 & 0.9337 & -0.6688 & -0.4739 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.9467 & -0.6688 & -0.4739 & 2.1557 & 0.9337 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes I_2 & \begin{pmatrix} 0, -19.2513 \end{pmatrix}^T \\ \begin{pmatrix} 11.2793, 9.6256 \end{pmatrix}^T & \begin{pmatrix} 8.7599 & -2.8874 & -1.4926 & -2.8874 & -1.4926 \\ -4.3800 & 5.3749 & 3.6038 & -2.4875 & -2.1112 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4.3800 & -2.4875 & -2.1112 & 5.3749 & 3.6038 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes I_2 \\ \begin{pmatrix} 0, 0 \end{pmatrix}^T & \begin{pmatrix} -11.2793, 9.6256 \end{pmatrix}^T \\ \begin{pmatrix} 0, 0 \end{pmatrix}^T & \begin{pmatrix} 0, 0 \end{pmatrix}^T \end{array} \right]$$

Tablo 5.2. $i = 2$ için analitik yaklaşık çözümün ve Matlab *ODE* çözücünün sonuçları.

$$\mathbf{P}_0^2 = \left[\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccccc} 2.1030 & -2.1647 & -0.3509 & 0.2613 & 0.1514 \\ -1.9035 & 4.1781 & -2.0134 & -0.1716 & -0.0896 \\ -0.1995 & -2.0134 & 2.3642 & -0.0896 & -0.0617 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \otimes I_2 & \begin{array}{l} (-6.8610, -9.2100)^T \\ (1.0045, -0.7981)^T \\ (5.8565, 10.0081)^T \\ (0,0)^T \\ (0,0)^T \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc} -4.6050 & 0.3027 & 5.4303 & -0.7018 & -0.4262 \\ -9.2100 & 0.6055 & 10.8605 & -1.4035 & -0.8525 \end{array} \right)^T & 102.3071 \\ \left(\begin{array}{ccccc} 1.6260 & -1.8240 & -0.8777 & 0.6275 & 0.4481 \\ -1.1965 & 3.1998 & -1.3758 & -0.3773 & -0.02502 \\ -0.4295 & -1.3758 & 2.2535 & -0.2502 & -0.1980 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \otimes I_2 & \begin{array}{l} (-10.2062, -8.2222)^T \\ (2.6516, -1.7181)^T \\ (7.5545, 9.9402)^T \\ (0,0)^T \\ (0,0)^T \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc} 1.8363 & -2.0404 & -0.9127 & 0.6536 & 0.4633 \\ -1.3868 & 3.6176 & -1.5772 & -0.3945 & -0.2591 \\ -0.4495 & -1.5772 & 2.4899 & -0.2591 & -0.2041 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \otimes I_2 & \begin{array}{l} (-4.5716)^T \\ (-9.1432)^T \\ (0.9265)^T \\ (1.8531)^T \\ (6.8053)^T \\ (13.6106)^T \\ (-1.8255)^T \\ (-3.6510)^T \\ (-1.3348)^T \\ (-2.6696)^T \end{array} \end{array} \right]$$

$$\mathbf{P}_2(0) = \left[\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccccc} 2.2032 & -2.2662 & -0.3534 & 0.2629 & 0.1537 \\ -2.0034 & 4.3788 & -2.1126 & -0.1723 & -0.0906 \\ -0.1998 & -2.1126 & 2.4660 & -0.0906 & -0.0631 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \otimes I_2 & \begin{array}{l} (-7.0867, -9.6118)^T \\ (1.0142, -0.7991)^T \\ (6.0724, 10.4109)^T \\ (0,0)^T \\ (0,0)^T \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc} -4.8059 & 0.3073 & 5.6389 & -0.7069 & -0.4335 \\ -9.6118 & 0.6147 & 11.2779 & -1.4138 & -0.8670 \end{array} \right)^T & 106.4087 \\ \left(\begin{array}{ccccc} 1.9467 & -2.1557 & -0.9337 & 0.6688 & 0.4739 \\ -1.4869 & 3.8375 & -1.6818 & -0.4038 & -0.2649 \\ -0.4597 & -1.6818 & 2.6154 & -0.2649 & -0.2090 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \otimes I_2 & \begin{array}{l} (-11.2793, -9.6256)^T \\ (2.8152, -1.8389)^T \\ (8.4641, 11.4646)^T \\ (0,0)^T \\ (0,0)^T \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc} 1.9467 & -2.1557 & -0.9337 & 0.6688 & 0.4739 \\ -1.4869 & 3.8375 & -1.6818 & -0.4038 & -0.2649 \\ -0.4597 & -1.6818 & 2.6154 & -0.2649 & -0.2090 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \otimes I_2 & \begin{array}{l} (-4.8128)^T \\ (-9.6256)^T \\ (0.9479)^T \\ (1.8957)^T \\ (7.0982)^T \\ (14.1964)^T \\ (-1.8673)^T \\ (-3.7347)^T \\ (-1.3659)^T \\ (-2.7318)^T \end{array} \end{array} \right]$$

Tablo 5.3. $i = 3$ için analitik yaklaşık çözümün ve Matlab *ODE* çözücünün sonuçları.

$$\mathbf{P}_0^3 = \left[\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1995 & 2.0134 & -2.3642 & 0.0896 & 0.0617 \\ -0.1995 & -2.0134 & 2.3642 & -0.0896 & -0.0617 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes I_2 \\ \begin{pmatrix} -0.3990 \\ -0.7981 \end{pmatrix}^T \quad \begin{pmatrix} -4.0267 \\ -8.0534 \end{pmatrix}^T \quad \begin{pmatrix} 4.7285 \\ 9.4570 \end{pmatrix}^T \quad \begin{pmatrix} -0.1792 \\ -0.3585 \end{pmatrix}^T \quad \begin{pmatrix} -0.1235 \\ -0.2470 \end{pmatrix}^T \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4295 & 1.3758 & -2.2535 & 0.2502 & 0.1980 \\ -0.4295 & -1.3758 & 2.2535 & -0.2502 & -0.1980 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes I_2 \\ \begin{pmatrix} 0,0 \\ -5.8565, -10.0081 \\ 5.8565, 10.0081 \\ 0,0 \\ 0,0 \end{pmatrix}^T \\ 51.7452 \\ \begin{pmatrix} 0,0 \\ -7.5545, -9.9402 \\ 7.5545, 9.9402 \\ 0,0 \\ 0,0 \end{pmatrix}^T \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4495 & 1.5772 & -2.4899 & 0.2591 & 0.2041 \\ -0.4495 & -1.5772 & 2.4899 & -0.2591 & -0.2041 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes I_2 \\ \begin{pmatrix} -0.8989 \\ -1.7979 \end{pmatrix}^T \quad \begin{pmatrix} -3.1543 \\ -6.3087 \end{pmatrix}^T \quad \begin{pmatrix} 4.9798 \\ 9.9597 \end{pmatrix}^T \quad \begin{pmatrix} -0.5183 \\ -1.0366 \end{pmatrix}^T \quad \begin{pmatrix} -0.4082 \\ -0.8165 \end{pmatrix}^T \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.3788 & 2.7614 & -6.1276 & 1.0482 & 0.9392 \\ -1.3788 & -2.7614 & 6.1276 & -1.0482 & -0.9392 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes I_2 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{P}_3(0) = \left[\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1998 & 2.1126 & -2.4660 & 0.0906 & 0.0631 \\ -0.1998 & -2.1126 & 2.4660 & -0.0906 & -0.0631 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes I_2 \\ \begin{pmatrix} -0.3995 \\ -0.7991 \end{pmatrix}^T \quad \begin{pmatrix} -4.2251 \\ -8.4503 \end{pmatrix}^T \quad \begin{pmatrix} 4.9320 \\ 9.8641 \end{pmatrix}^T \quad \begin{pmatrix} -0.1812 \\ -0.3624 \end{pmatrix}^T \quad \begin{pmatrix} -0.1262 \\ -0.2523 \end{pmatrix}^T \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4597 & 1.6818 & -2.6154 & 0.2649 & 0.2090 \\ -0.4597 & -1.6818 & 2.6154 & -0.2649 & -0.2090 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes I_2 \\ \begin{pmatrix} 0,0 \\ -6.0724, -10.4109 \\ 6.0724, 10.4109 \\ 0,0 \\ 0,0 \end{pmatrix}^T \\ 53.7883 \\ \begin{pmatrix} 0,0 \\ -8.4641, -11.4646 \\ 8.4641, 11.4646 \\ 0,0 \\ 0,0 \end{pmatrix}^T \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4597 & 1.6818 & -2.6154 & 0.2649 & 0.2090 \\ -0.4597 & -1.6818 & 2.6154 & -0.2649 & -0.2090 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes I_2 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4597 & 1.6818 & -2.6154 & 0.2649 & 0.2090 \\ -0.4597 & -1.6818 & 2.6154 & -0.2649 & -0.2090 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes I_2 \\ \begin{pmatrix} -0.9195 \\ -1.8389 \end{pmatrix}^T \quad \begin{pmatrix} -3.3635 \\ -6.7271 \end{pmatrix}^T \quad \begin{pmatrix} 5.2309 \\ 10.4617 \end{pmatrix}^T \quad \begin{pmatrix} -0.5298 \\ -1.0596 \end{pmatrix}^T \quad \begin{pmatrix} -0.4180 \\ -0.8361 \end{pmatrix}^T \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.4926 & 3.2636 & -6.8674 & 1.1163 & 0.9949 \\ -1.4926 & -3.2636 & 6.8674 & -1.1163 & -0.9949 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes I_2 \end{array} \right]$$

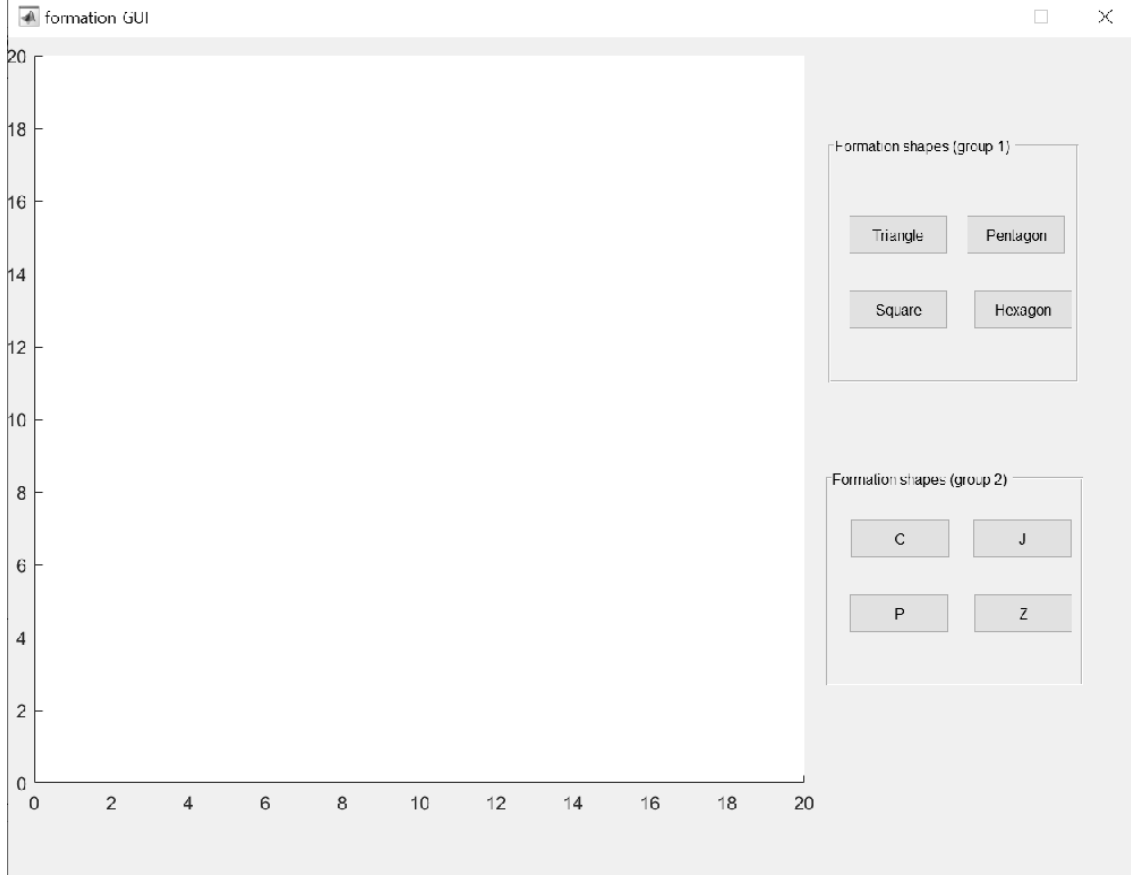
Tablo 5.4. $i = 5$ için analitik yaklaşık çözümün ve Matlab *ODE* çözücünün sonuçları.

$$\mathbf{P}_0^5 = \left[\begin{array}{ccc} \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1995 & 0.0896 & 0.0617 & 2.0134 & -2.3642 \\ -0.1995 & -0.0896 & -0.0617 & -2.0134 & 2.3642 \end{array} \right) \otimes I_2 & \begin{array}{c} (0,0)^T \\ (0,0)^T \\ (0,0)^T \\ (5.8565, -10.0081)^T \\ (-5.8565, 10.0081)^T \end{array} & \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4495 & 0.2591 & 0.2041 & 1.5772 & -2.4899 \\ -0.4495 & -0.2591 & -0.2041 & -1.5772 & 2.4899 \end{array} \right) \otimes I_2 \\ \left(\begin{array}{ccccc} 0.3990 & 0.1792 & 0.1235 & 4.0267 & -4.7285 \\ -0.7981 & -0.3585 & -0.2470 & -8.0534 & 9.4570 \end{array} \right)^T & 51.7452 & \left(\begin{array}{ccccc} 0.8989 & 0.5183 & 0.4082 & 3.1543 & -4.9798 \\ -1.7979 & -1.0366 & -0.8165 & -6.3087 & 9.9597 \end{array} \right)^T \\ \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4295 & 0.2502 & 0.1980 & 1.3758 & -2.2535 \\ -0.4295 & -0.2502 & -0.1980 & -1.3758 & 2.2535 \end{array} \right) \otimes I_2 & \begin{array}{c} (0,0)^T \\ (0,0)^T \\ (0,0)^T \\ (7.5545, -9.9402)^T \\ (-7.5545, 9.9402)^T \end{array} & \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.3788 & 1.0482 & 0.9392 & 2.7614 & -6.1276 \\ -1.3788 & -1.0482 & -0.9392 & -2.7614 & 6.1276 \end{array} \right) \otimes I_2 \end{array} \right]$$

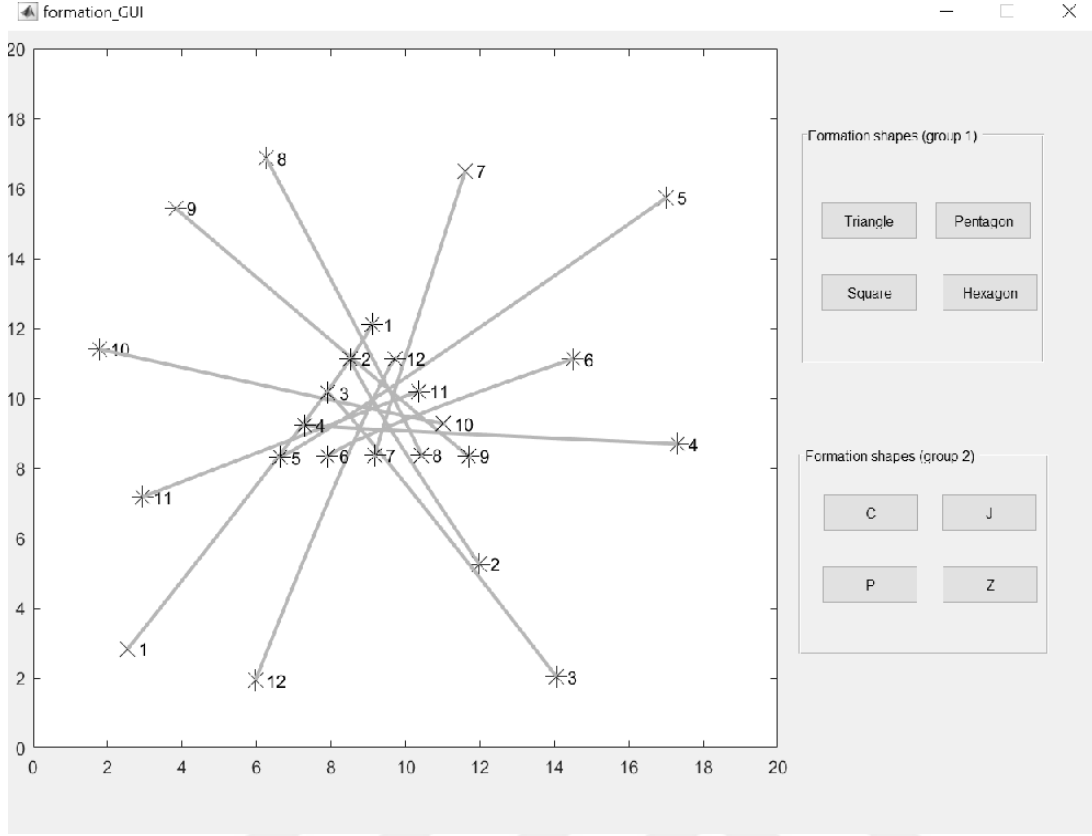
$$\mathbf{P}_5(0) = \left[\begin{array}{ccc} \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1998 & 0.0906 & 0.0631 & 2.1126 & -2.4660 \\ -0.1998 & -0.0906 & -0.0631 & -2.1126 & 2.4660 \end{array} \right) \otimes I_2 & \begin{array}{c} (0,0)^T \\ (0,0)^T \\ (0,0)^T \\ (6.0724, -10.4109)^T \\ (-6.0724, 10.4109)^T \end{array} & \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4597 & 0.2649 & 0.2090 & 1.6818 & -2.6154 \\ -0.4597 & -0.2649 & -0.2090 & -1.6818 & 2.6154 \end{array} \right) \otimes I_2 \\ \left(\begin{array}{ccccc} 0.3995 & 0.1812 & 0.1262 & 4.2251 & -4.9320 \\ -0.7991 & -0.3624 & -0.2523 & -8.4503 & 9.8641 \end{array} \right)^T & 53.7883 & \left(\begin{array}{ccccc} 0.9195 & 0.5298 & 0.4180 & 3.3635 & -5.2309 \\ -1.8389 & -1.0596 & -0.8361 & -6.7271 & 10.4617 \end{array} \right)^T \\ \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4597 & 0.2649 & 0.2090 & 1.6818 & -2.6154 \\ -0.4597 & -0.2649 & -0.2090 & -1.6818 & 2.6154 \end{array} \right) \otimes I_2 & \begin{array}{c} (0,0)^T \\ (0,0)^T \\ (0,0)^T \\ (8.4641, -11.4646)^T \\ (-8.4641, 11.4646)^T \end{array} & \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.4926 & 1.1163 & 0.9949 & 3.2636 & -6.8674 \\ -1.4926 & -1.1163 & -0.9949 & -3.2636 & 6.8674 \end{array} \right) \otimes I_2 \end{array} \right]$$

5.3. Grafik Arayüzü Görüntüleri

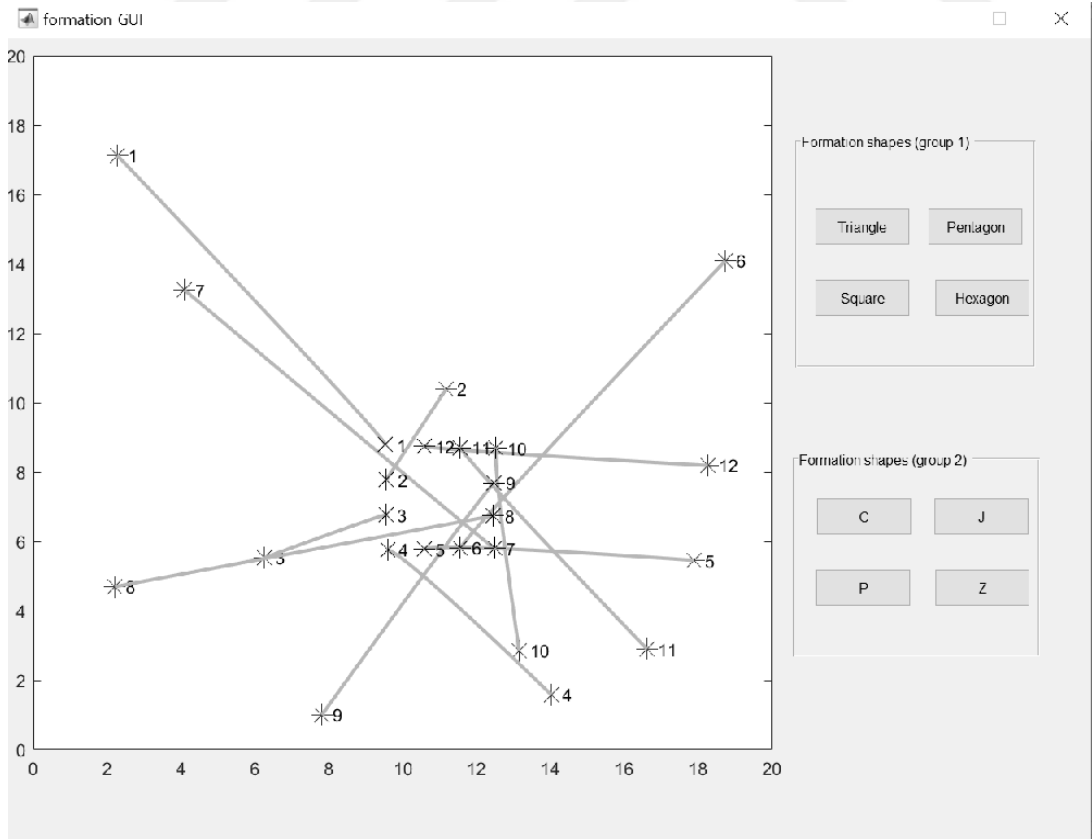
Tez çalışmasında teorik sonuçların doğruluğunun, farklı düzen kontrolü şekillerinin teşkil edilmesi ve incelenmesi için Matlab *GUI* ile Şekil 5.1'deki arayüz tasarlanmıştır. Hazırlanan bu arayüz 2.2'deki analitik bulgular üzerine programlanmıştır. Arayüzün çalışırken ekran görüntüleri Şekil 5.1-5.9'da verilmektedir. Bu görüntüler bulguların doğruluğunu kanıtlamaktadır.



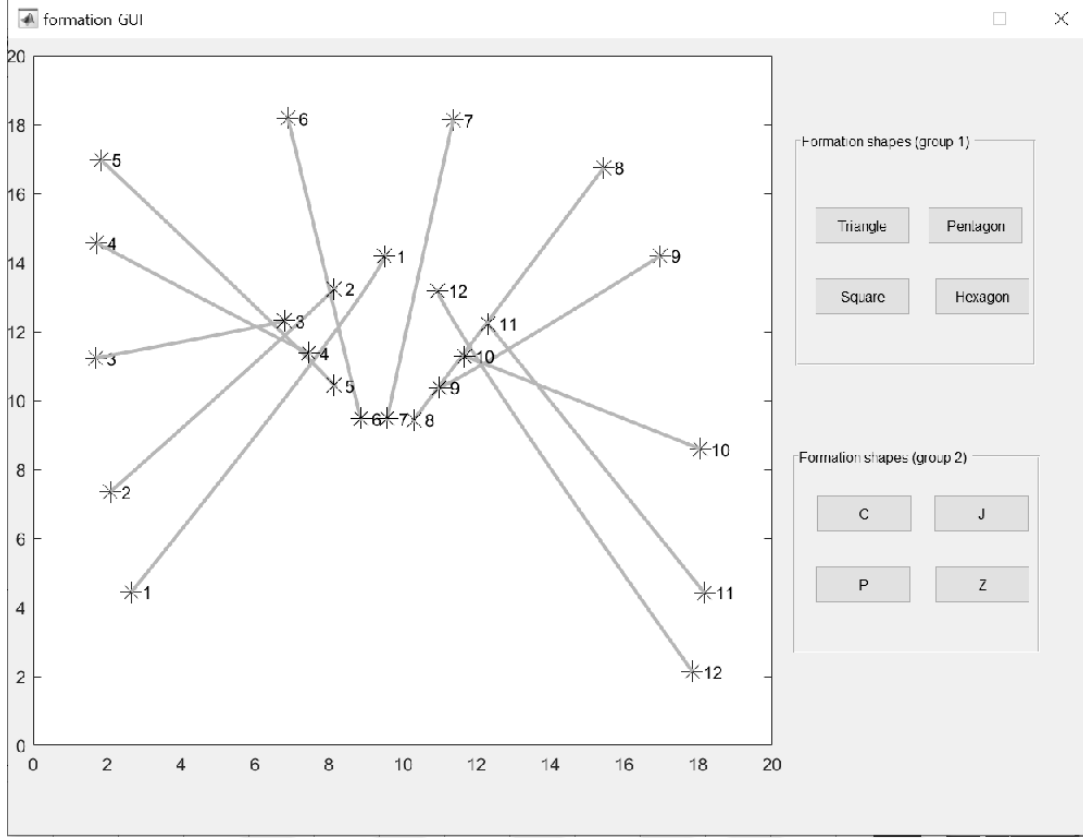
Şekil 5.1. Düzen kontrolü için Matlab'de tasarlanmış grafik arayüzü.



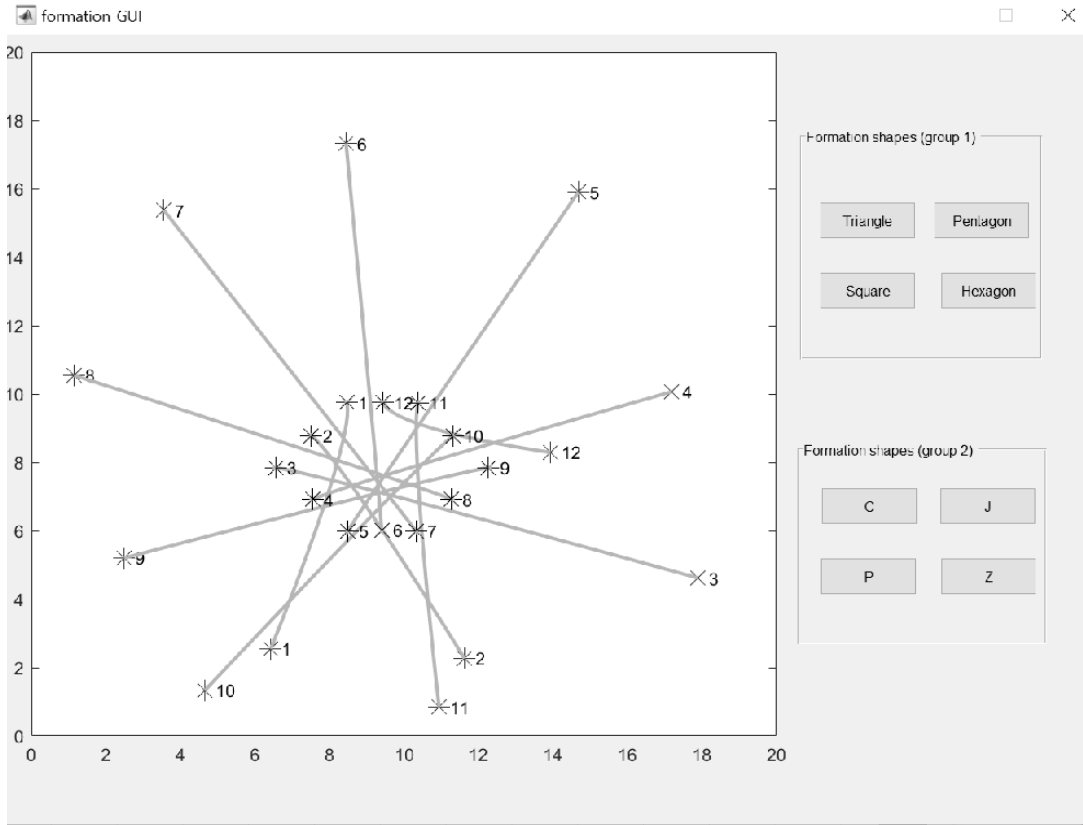
Şekil 5.2. Üçgen düzenin teşkil edilmesinin ekran görüntüsü.



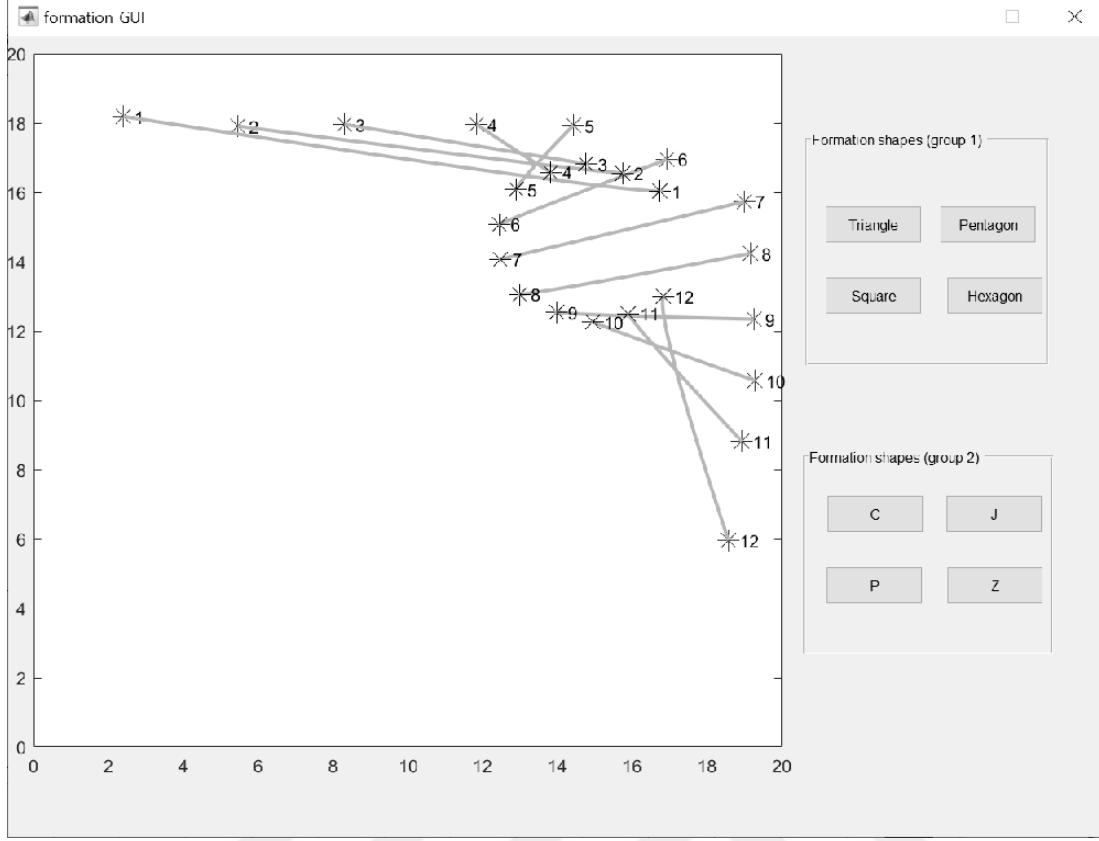
Şekil 5.3. Kare düzenin teşkil edilmesinin ekran görüntüsü.



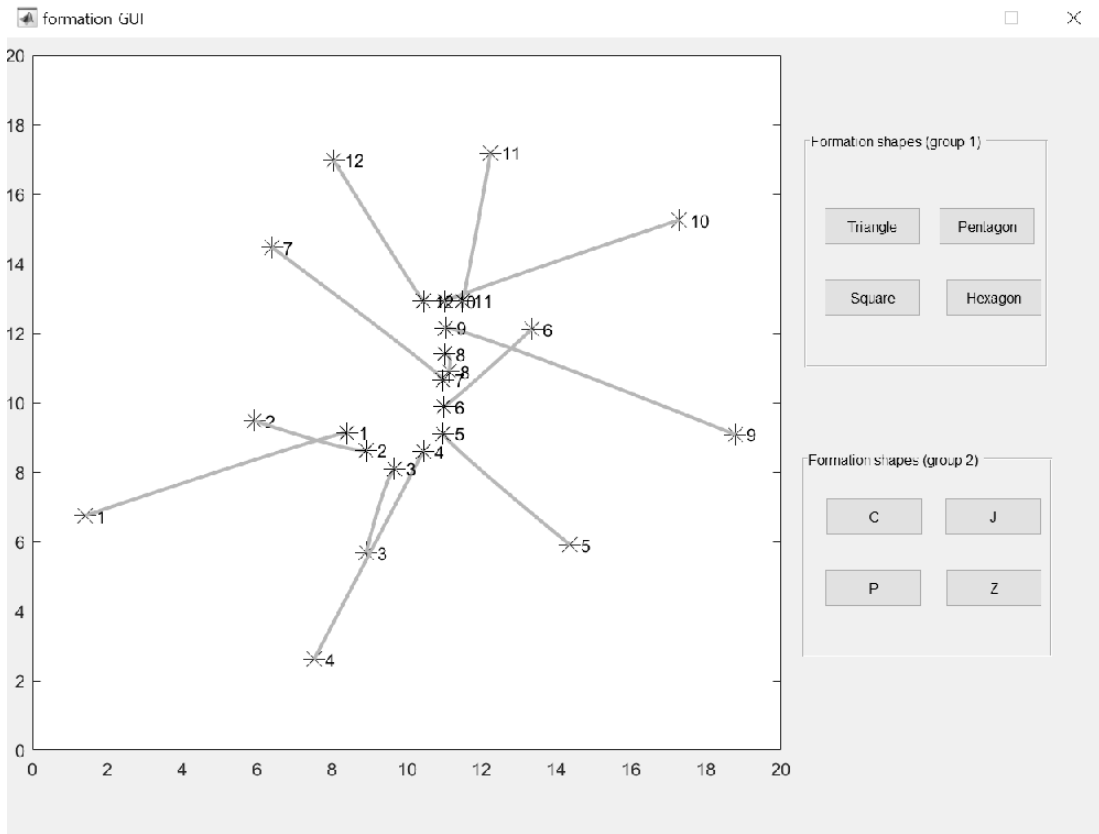
Şekil 5.4. Beşgen düzenin teşkil edilmesinin ekran görüntüsü.



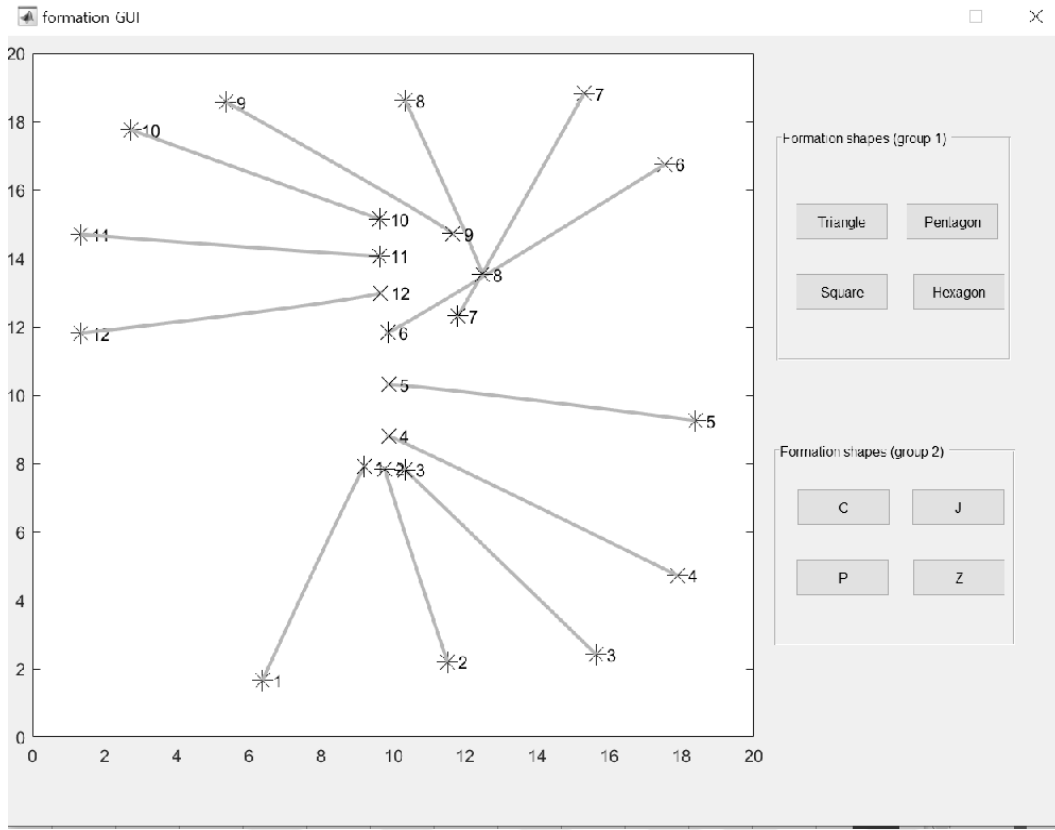
Şekil 5.5. Altıgen düzenin teşkil edilmesinin ekran görüntüsü.



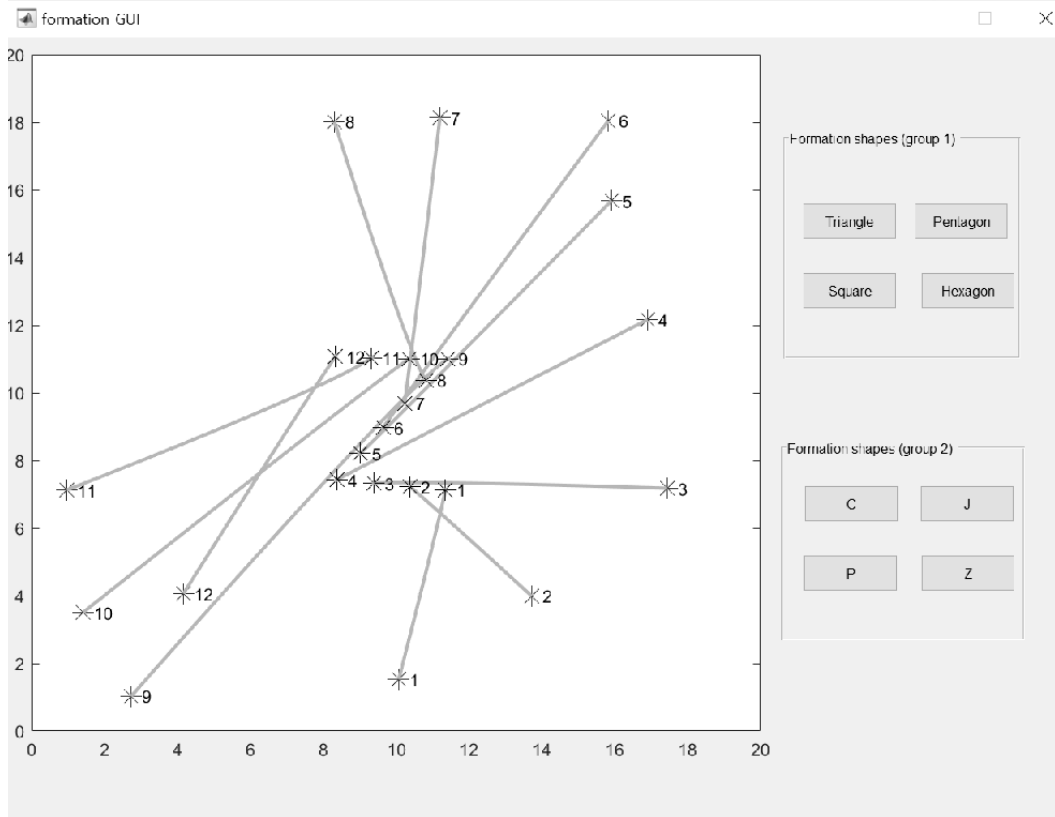
Şekil 5.6. C-harfı düzenin teşkil edilmesinin ekran görüntüsü.



Şekil 5.7. J-harfı düzenin teşkil edilmesinin ekran görüntüsü.



Şekil 5.8. P-harfı düzenin teşkil edilmesinin ekran görüntüsü.



Şekil 5.9. Z-harfı düzenin teşkil edilmesinin ekran görüntüsü.

5.4. Matlab Kodu

Bölüm 2.1'deki simülasyonun Matlab kodu:

```

clc
clear all
close all

T=7; % finite horizon time
n=2; % dimension of the coordinates
m=4; % size of multi robot system

A=[zeros(n*m) zeros(n*m,1) eye(n*m); zeros(1,n*m) zeros(1,1) zeros(1,n*m)
; ...
zeros(n*m) zeros(n*m,1) zeros(n*m)];

b1=[eye(n); zeros(n); zeros(n); zeros(n)];
b2=[ zeros(n); eye(n); zeros(n); zeros(n)];
b3=[ zeros(n); zeros(n); eye(n); zeros(n)];
b4=[ zeros(n); zeros(n); zeros(n); eye(n)];

B1=[zeros(n);zeros(n);zeros(n);zeros(n); zeros(1,n); b1];
B2=[zeros(n);zeros(n);zeros(n);zeros(n); zeros(1,n); b2];
B3=[zeros(n);zeros(n);zeros(n);zeros(n); zeros(1,n); b3];
B4=[zeros(n);zeros(n);zeros(n);zeros(n); zeros(1,n); b4];

B=[B1 B2 B3 B4];
C=ctrb(A,B);
num_uncontl_states=length(A)-rank(C); % number of uncontrollable
states, i.e. check that system is controllable.

D=[-1 -1 0; 1 0 -1; 0 0 1; 0 1 0]; %Incidence Matrix D
D=kron(D, eye(n));
% Weight Matrics W
W1=0*[1 0 0; 0 1 0; 0 0 0];
W1=kron(W1, eye(n));
W2=0*[1 0 0; 0 0 0; 0 0 1];
W2=kron(W2, eye(n));
W3=0*[0 0 0; 0 0 0; 0 0 1];
W3=kron(W3, eye(n));
W4=0*[0 0 0; 0 1 0; 0 0 0];
W4=kron(W4, eye(n));

W1T=5*[1 0 0; 0 1 0; 0 0 0];
W1T=kron(W1T, eye(n));
W2T=5*[1 0 0; 0 0 0; 0 0 1];
W2T=kron(W2T, eye(n));
W3T=5*[0 0 0; 0 0 0; 0 0 1];
W3T=kron(W3T, eye(n));
W4T=5*[0 0 0; 0 1 0; 0 0 0];
W4T=kron(W4T, eye(n));

R11=1*eye(n);
R22=1*eye(n);
R33=1*eye(n);
R44=1*eye(n);

% Desired Offset vectors for formation
d12=[-2 -4]';

```

```

d14=[ 2 -4]';
d23=[-2 -4]';

d=[d12' d14' d23']';
%initial state vector q(0)
q1=[-1 0 ]'; v1=[0 2]';
q2=[ 1 0 ]'; v2=[0 3]';
q3=[ 2 0 ]'; v3=[0 1.5]';
q4=[-3 0 ]'; v4=[0 1]';

q0=[q1' q2' q3' q4']';
v0=[v1' v2' v3' v4']';
x0=[q0' 1 v0']';

x=[q0' 1 v0']';

Q1=[D*W1*D' -D*W1*d zeros(n*m); -(D*W1*d)' d'*W1*d zeros(1,n*m);
zeros(n*m) zeros(n*m,1) D*W1*D'];
Q2=[D*W2*D' -D*W2*d zeros(n*m); -(D*W2*d)' d'*W2*d zeros(1,n*m);
zeros(n*m) zeros(n*m,1) D*W2*D'];
Q3=[D*W3*D' -D*W3*d zeros(n*m); -(D*W3*d)' d'*W3*d zeros(1,n*m);
zeros(n*m) zeros(n*m,1) D*W3*D'];
Q4=[D*W4*D' -D*W4*d zeros(n*m); -(D*W4*d)' d'*W4*d zeros(1,n*m);
zeros(n*m) zeros(n*m,1) D*W4*D'];

Q1T=[D*W1T*D' -D*W1T*d zeros(n*m); -(D*W1T*d)' d'*W1T*d zeros(1,n*m);
zeros(n*m) zeros(n*m,1) D*W1T*D'];
Q2T=[D*W2T*D' -D*W2T*d zeros(n*m); -(D*W2T*d)' d'*W2T*d zeros(1,n*m);
zeros(n*m) zeros(n*m,1) D*W2T*D'];
Q3T=[D*W3T*D' -D*W3T*d zeros(n*m); -(D*W3T*d)' d'*W3T*d zeros(1,n*m);
zeros(n*m) zeros(n*m,1) D*W3T*D'];
Q4T=[D*W4T*D' -D*W4T*d zeros(n*m); -(D*W4T*d)' d'*W4T*d zeros(1,n*m);
zeros(n*m) zeros(n*m,1) D*W4T*D'];

S1=B1*R11^(-1)* B1';
S2=B2*R22^(-1)* B2';
S3=B3*R33^(-1)* B3';
S4=B4*R44^(-1)* B4';

PT= [Q1T; Q2T; Q3T; Q4T]; % Riccati Matrix terminal value
ZeroM = zeros(size(A'));
D= [A' ZeroM ZeroM ZeroM ;...
ZeroM A' ZeroM ZeroM ;...
ZeroM ZeroM A' ZeroM ;...
ZeroM ZeroM ZeroM A' ];

S= [S1 S2 S3 S4];

Q= [Q1; Q2; Q3; Q4];

% Solving m-Coupled Riccati Matrix Differential Equation Backward in
time
[T1 P] = ode45(@(t,P)mRiccati(P, A, D, S, Q), [T:-0.1:0], PT(:));

[m1 n1] = size(P);
PP = mat2cell(P, ones(m1,1), n1);
fh_reshape = @(x) reshape(x,size(Q));
PP = cellfun(fh_reshape,PP,'UniformOutput',false);

```

```

M1=[-A S ; zeros(size(Q)) D];
H=[eye(2*n*m+1) zeros(2*n*m+1,length(M1)-2*n*m-
1)]*(expm(M1*T))*[eye(2*n*m+1); PT];
fi0=eye(2*n*m+1);
% *****

% *****
t=T:-0.1:0;
for i=1:length(T1)
    Pp=PP{length(T1)-i+1}
    E=A-(S1*Pp(1:17,:)+S2* Pp(18:34,:)+S3* Pp(35:51,:)+S4* Pp(52:68,:));
    u1(i,:)= -R11^(-1)* B1'* Pp(1:17,:)*expm(i*E)*fi0*x0;
    u2(i,:)= -R22^(-1)* B2'* Pp(18:34,:)*expm(i*E)*fi0*x0;
    u3(i,:)= -R33^(-1)* B3'* Pp(35:51,:)*expm(i*E)*fi0*x0;
    u4(i,:)= -R44^(-1)* B4'* Pp(52:68,:)*expm(i*E)*fi0*x0;
    x(:,i)=[eye(2*n*m+1) zeros(2*n*m+1,length(M1)-2*n*m-
1)]*(expm(M1*t(i)))*[eye(2*n*m+1); PT]*inv(H)*x0;
end

x1=x0(1); y1=x0(2);
x2=x0(3); y2=x0(4);
x3=x0(5); y3=x0(6);
x4=x0(7); y4=x0(8);

for j=1:length(T1)
    if (j==1) | (j==10) | (j==20) | (j==30) | (j==40) | (j==50)...
        | (j==60) | (j==70) | (j==80) | (j==90) | (j==100)

        hold all
        line([x1 x2],[y1 y2],'LineWidth',1,'Color','k')
        line([x1 x4],[y1 y4],'LineWidth',1,'Color','k')
        line([x2 x3],[y2 y3],'LineWidth',1,'Color','k')
        legend('off')
        h1 = plot(x1,y1,'*', 'MarkerSize',12,'MarkerEdgeColor','k');
        h2 = plot(x2,y2,'p', 'MarkerSize',12,'MarkerEdgeColor','k');
        h3 = plot(x3,y3,'d', 'MarkerSize',12,'MarkerEdgeColor','k');
        h4 = plot(x4,y4,'o', 'MarkerSize',12,'MarkerEdgeColor','k');

        legend([h1 h2 h3 h4],{'Robot 1','Robot 2','Robot 3','Robot 4'});

        xlabel('x(m)','fontsize',12)
        ylabel('y(m)','fontsize',12)
    end
    x1=x(1,j); y1=x(2,j);
    x2=x(3,j); y2=x(4,j);
    x3=x(5,j); y3=x(6,j);
    x4=x(7,j); y4=x(8,j);
    pause(0.05)
    axis([-4 6 -2 18])
end

% x position error for formation
erry_vel_v1_v2=[x0(1)-x0(3) x(1,:)-x(3,:)]';
errx_v1_v4=[x0(1)-x0(7) x(1,:)-x(7,:)]';
errx_v2_v3=[x0(3)-x0(5) x(3,:)-x(5,:)]';
figure
t=0:0.1:T+0.1;
plot(t,erry_vel_v1_v2,'k','LineWidth',3);
hold on

```

```

plot(t,errx_v1_v4,'--k','LineWidth',3);
hold on
plot(t,errx_v2_v3,':k','LineWidth',3);
hold on
axis([0 T -5 5])
xlabel('time(s)','fontsize',12)
ylabel('x position(m)','fontsize',12)
legend('Robot 1-2','Robot 1-4','Robot 2-3');

% y position error for formation
erry_v1_v2=[x0(2)-x0(4) x(2,:)-x(4,:)]';
erry_v1_v4=[x0(2)-x0(8) x(2,:)-x(8,:)]';
erry_v2_v3=[x0(4)-x0(6) x(4,:)-x(6,:)]';
figure
t=0:0.1:T+0.1;
plot(t,erry_v1_v2,'k','LineWidth',3);
hold on
plot(t,erry_v1_v4,'--k','LineWidth',3);
hold on
plot(t,erry_v2_v3,':k','LineWidth',3);
hold on
axis([0 T -5 5])
xlabel('time(s)','fontsize',12)
ylabel('y position(m)','fontsize',12)
legend('Robot 1-2','Robot 1-4','Robot 2-3');

% x velocity error for formation
erry_vel_v1_v2=[x0(10)-x0(12) x(10,:)-x(12,:)]';
erry_vel_v1_v4=[x0(10)-x0(16) x(10,:)-x(16,:)]';
erry_vel_v2_v3=[x0(12)-x0(14) x(12,:)-x(14,:)]';
figure
t=0:0.1:T+0.1;
plot(t,erry_vel_v1_v2,'k','LineWidth',3);
hold on
plot(t,erry_vel_v1_v4,'--k','LineWidth',3);
hold on
plot(t,erry_vel_v2_v3,':k','LineWidth',3);
hold on
axis([0 T -5 5])
xlabel('time(s)','fontsize',12)
ylabel('x velocity(m/s)','fontsize',12)
legend('Robot 1-2','Robot 1-4','Robot 2-3');

% y velocity error for formation

erry_vel_v1_v2=[x0(11)-x0(13) x(11,:)-x(13,:)]';
erry_vel_v1_v4=[x0(11)-x0(17) x(11,:)-x(17,:)]';
erry_vel_v2_v3=[x0(13)-x0(15) x(13,:)-x(15,:)]';
figure
t=0:0.1:T+0.1;
plot(t,erry_vel_v1_v2,'k','LineWidth',3);
hold on
plot(t,erry_vel_v1_v4,'--k','LineWidth',3);
hold on
plot(t,erry_vel_v2_v3,':k','LineWidth',3);
hold on
axis([0 T -5 5])
xlabel('time(s)','fontsize',12)
ylabel('y velocity(m/s)','fontsize',12)
legend('Robot 1-2','Robot 1-4','Robot 2-3');

```

```
% x control error for formation

figure
t=0:0.1:T;
plot(t,u1(:,1),'k','LineWidth',3);
hold on
plot(t,u2(:,1),'--k','LineWidth',3);
hold on
plot(t,u3(:,1),':k','LineWidth',3);
hold on
plot(t,u4(:,1),'.-k','LineWidth',3);
hold on
axis([0 2 -1 1])
xlabel('time(s)','fontsize',12)
ylabel('x control-input (m/s^2)','fontsize',12)
legend('Robot 1','Robot 2','Robot 3','Robot 4');

% y control error for formation
figure
t=0:0.1:T;
plot(t,u1(:,2),'k','LineWidth',3);
hold on
plot(t,u2(:,2),'--k','LineWidth',3);
hold on
plot(t,u3(:,2),':k','LineWidth',3);
hold on
plot(t,u4(:,2),'.-k','LineWidth',3);
hold on
axis([0 2 -1 1])
xlabel('time(s)','fontsize',12)
ylabel('y control-input (m/s^2)','fontsize',12)
legend('Robot 1','Robot 2','Robot 3','Robot 4');
```

Riccati denklemlerini çözen fonksiyonun Matlab kodu:

```
function dPdt = mRiccati(P, A_hat, D, S, Q)
P = reshape(P, size(Q)); %Convert from "n^2"-by-1 to "n"-by-"n"
dPdt = -D*P - P*A_hat + P*S*P - Q; %Determine derivative
dPdt = dPdt(:); %Convert from "n"-by-"n" to "n^2"-by-1
```



Bölüm 2.2'deki simülasyonun Matlab kodu:

```

clc
clear all
close all

T=10; % finite horizon time
n=2; % dimension of the coordinates
m=4; % size of multi robot system

A=[zeros(n*m) zeros(n*m,1) eye(n*m); zeros(1,n*m) zeros(1,1) zeros(1,n*m)
; ...
zeros(n*m) zeros(n*m,1) zeros(n*m)];

b1=[eye(n); zeros(n); zeros(n); zeros(n)];
b2=[ zeros(n); eye(n); zeros(n); zeros(n)];
b3=[ zeros(n); zeros(n); eye(n); zeros(n)];
b4=[ zeros(n); zeros(n); zeros(n); eye(n)];

B1=[zeros(n);zeros(n);zeros(n);zeros(n); zeros(1,n); b1];
B2=[zeros(n);zeros(n);zeros(n);zeros(n); zeros(1,n); b2];
B3=[zeros(n);zeros(n);zeros(n);zeros(n); zeros(1,n); b3];
B4=[zeros(n);zeros(n);zeros(n);zeros(n); zeros(1,n); b4];

D=[-1 -1 0; 1 0 -1; 0 0 1; 0 1 0]; %Incidence Matrix D
D=kron(D, eye(n));
% Weight Matrics W

W1=5*[1 0 0; 0 1 0; 0 0 0];
W1=kron(W1, eye(n));
W2=5*[1 0 0; 0 0 0; 0 0 1];
W2=kron(W2, eye(n));
W3=5*[0 0 0; 0 0 0; 0 0 1];
W3=kron(W3, eye(n));
W4=5*[0 0 0; 0 1 0; 0 0 0];
W4=kron(W4, eye(n));

R11=1*eye(n);
R22=1*eye(n);
R33=1*eye(n);
R44=1*eye(n);

% Desired Offset vectors for formation
d12=[-2 -4]';
d14=[ 2 -4]';
d23=[ 2 -4]';

d=[d12' d14' d23']';
%initial state vector q(0)
q1=[-1 0 ]'; v1=[0 2]';
q2=[ 1 0 ]'; v2=[0 3]';
q3=[ 2 0 ]'; v3=[0 1.5]';
q4=[-3 0 ]'; v4=[0 1]';

q0=[q1' q2' q3' q4']';
v0=[v1' v2' v3' v4']';
x0=[q0' 1 v0']';

x=[q0' 1 v0']';

```

```

Q1T=[D*W1*D' -D*W1*d zeros(n*m); -(D*W1*d)' d'*W1*d zeros(1,n*m);
zeros(n*m) zeros(n*m,1) D*W1*D'];
Q2T=[D*W2*D' -D*W2*d zeros(n*m); -(D*W2*d)' d'*W2*d zeros(1,n*m);
zeros(n*m) zeros(n*m,1) D*W2*D'];
Q3T=[D*W3*D' -D*W3*d zeros(n*m); -(D*W3*d)' d'*W3*d zeros(1,n*m);
zeros(n*m) zeros(n*m,1) D*W3*D'];
Q4T=[D*W4*D' -D*W4*d zeros(n*m); -(D*W4*d)' d'*W4*d zeros(1,n*m);
zeros(n*m) zeros(n*m,1) D*W4*D'];

S1=B1*R11^(-1)* B1';
S2=B2*R22^(-1)* B2';
S3=B3*R33^(-1)* B3';
S4=B4*R44^(-1)* B4';

Q= [Q1T; Q2T; Q3T; Q4T];
ZeroM = zeros(size(A'));

% %***
L1=b1*R11^(-1)*b1'*D*W1*D'+b2*R22^(-1)*b2'*D*W2*D'+b3*R33^(-
1)*b3'*D*W3*D'+b4*R44^(-1)*b4'*D*W4*D';
%
L2=b1*R11^(-1)*b1'*D*W1*d+b2*R22^(-1)*b2'*D*W2*d+b3*R33^(-
1)*b3'*D*W3*d+b4*R44^(-1)*b4'*D*W4*d;
%
H=[eye(n*m)-((T^3)/6)*L1 ((T^3)/6)*L2 -T*eye(n*m)-((T^2)/2)*L1; ...
zeros(1,n*m) 1 zeros(1,n*m) ; ...
((T^2)/2)*L1 (- (T^2)/2)*L2 eye(n*m)+T*L1 ];

fi0=eye(2*n*m+1);
t=T:-0.1:0;
for i=1:length(t)
% del1=[1 t(i); 0 1];
% del2=[1 0; t(i) 1];
% Delt=blkdiag(del1,del1,del1,del1,1,del2,del2,del2,del2)
Ht=[eye(n*m)-(((t(i))^3)/6)*L1 (((t(i))^3)/6)*L2 -(t(i))*eye(n*m)-
(((t(i))^2)/2)*L1; ...
zeros(1,n*m) 1 zeros(1,n*m) ; ...
(((t(i))^2)/2)*L1 (-((t(i))^2)/2)*L2
eye(n*m)+(t(i))*L1 ];
x(:,i)=Ht*inv(H)*x0;
% x(:,i)=[eye(2*n*m+1) zeros(2*n*m+1,length(M)-2*n*m-
1)]*(expm(M*t(i)))*[eye(2*n*m+1); Q]*inv(H)*x0;
u1(i,:)=-R11^(-1)* B1'* (eye(size(A))+t(i)*A')*Q1T*inv(H)*x0;
u2(i,:)=-R22^(-1)* B2'* (eye(size(A))+t(i)*A')*Q2T*inv(H)*x0;
u3(i,:)=-R33^(-1)* B3'* (eye(size(A))+t(i)*A')*Q3T*inv(H)*x0;
u4(i,:)=-R44^(-1)* B4'* (eye(size(A))+t(i)*A')*Q4T*inv(H)*x0;
t(i)
end

x1=x0(1); y1=x0(2);
x2=x0(3); y2=x0(4);
x3=x0(5); y3=x0(6);
x4=x0(7); y4=x0(8);

for j=1:length(t)
if (j==1)|(j==30) |(j==98)
hold all

```



```

        legend('off')
        h1 =
plot(x1,y1,'s','MarkerSize',9,'MarkerEdgeColor','k','MarkerFaceColor','k'
);
        h2 =
plot(x2,y2,'^','MarkerSize',11,'MarkerEdgeColor','k','MarkerFaceColor','k'
');
        h3 =
plot(x3,y3,'d','MarkerSize',9,'MarkerEdgeColor','k','MarkerFaceColor','k'
);
        h4 =
plot(x4,y4,'o','MarkerSize',9,'MarkerEdgeColor','k','MarkerFaceColor','k'
);

        legend([h1 h2 h3 h4],{'Robot 1','Robot 2','Robot 3','Robot 4'});

        xlabel('x(m)','fontsize',12)
        ylabel('y(m)','fontsize',12)
end

x1=x(1,j); y1=x(2,j);
x2=x(3,j); y2=x(4,j);
x3=x(5,j); y3=x(6,j);
x4=x(7,j); y4=x(8,j);
if j>1
    line([x(1,j) x(1,j-1)], [x(2,j) x(2,j-1)], 'LineWidth',2, 'Color','k')
    line([x(3,j) x(3,j-1)], [x(4,j) x(4,j-
1)], 'LineWidth',2, 'Color','k', 'LineStyle','--')
    line([x(5,j) x(5,j-1)], [x(6,j) x(6,j-
1)], 'LineWidth',2, 'Color','k', 'LineStyle',':')
    line([x(7,j) x(7,j-1)], [x(8,j) x(8,j-
1)], 'LineWidth',2, 'Color','k', 'LineStyle','-.')
end

    pause(0.05)
    axis([-4 6 -2 24])
end

% x position error for formation
erry_vel_v1_v2=[x0(1)-x0(3) x(1,:)-x(3,:)]';
errx_v1_v4=[x0(1)-x0(7) x(1,:)-x(7,:)]';
errx_v2_v3=[x0(3)-x0(5) x(3,:)-x(5,:)]';
figure
t=0:0.1:T+0.1;
plot(t,erry_vel_v1_v2,'k','LineWidth',3);
hold on
plot(t,errx_v1_v4,'--k','LineWidth',3);
hold on
plot(t,errx_v2_v3,':k','LineWidth',3);
hold on
axis([0 T -5 5])
xlabel('time(s)','fontsize',12)
ylabel('x position(m)','fontsize',12)
legend('Robot 1-2','Robot 1-4','Robot 2-3');

% y position error for formation
erry_v1_v2=[x0(2)-x0(4) x(2,:)-x(4,:)]';
erry_v1_v4=[x0(2)-x0(8) x(2,:)-x(8,:)]';
erry_v2_v3=[x0(4)-x0(6) x(4,:)-x(6,:)]';

```

```

figure
t=0:0.1:T+0.1;
plot(t,erry_v1_v2,'k','LineWidth',3);
hold on
plot(t,erry_v1_v4,'--k','LineWidth',3);
hold on
plot(t,erry_v2_v3,':k','LineWidth',3);
hold on
axis([0 T -5 5])
xlabel('time(s)','fontsize',12)
ylabel('y position(m)','fontsize',12)
legend('Robot 1-2','Robot 1-4','Robot 2-3');

% x velocity error for formation
erry_vel_v1_v2=[x0(10)-x0(12) x(10,:)-x(12,:)]';
erry_vel_v1_v4=[x0(10)-x0(16) x(10,:)-x(16,:)]';
erry_vel_v2_v3=[x0(12)-x0(14) x(12,:)-x(14,:)]';
figure
t=0:0.1:T+0.1;
plot(t,erry_vel_v1_v2,'k','LineWidth',3);
hold on
plot(t,erry_vel_v1_v4,'--k','LineWidth',3);
hold on
plot(t,erry_vel_v2_v3,':k','LineWidth',3);
hold on
axis([0 T -5 5])
xlabel('time(s)','fontsize',12)
ylabel('x velocity(m/s)','fontsize',12)
legend('Robot 1-2','Robot 1-4','Robot 2-3');

% y velocity error for formation
erry_vel_v1_v2=[x0(11)-x0(13) x(11,:)-x(13,:)]';
erry_vel_v1_v4=[x0(11)-x0(17) x(11,:)-x(17,:)]';
erry_vel_v2_v3=[x0(13)-x0(15) x(13,:)-x(15,:)]';
figure
t=0:0.1:T+0.1;
plot(t,erry_vel_v1_v2,'k','LineWidth',3);
hold on
plot(t,erry_vel_v1_v4,'--k','LineWidth',3);
hold on
plot(t,erry_vel_v2_v3,':k','LineWidth',3);
hold on
axis([0 T -5 5])
xlabel('time(s)','fontsize',12)
ylabel('y velocity(m/s)','fontsize',12)
legend('Robot 1-2','Robot 1-4','Robot 2-3');

% x control effort
figure
t=0:0.1:T;
plot(t,u1(:,1),'k','LineWidth',3);
hold on
plot(t,u2(:,1),'--k','LineWidth',3);
hold on
plot(t,u3(:,1),':k','LineWidth',3);
hold on
plot(t,u4(:,1),'-.k','LineWidth',3);
hold on

```

```
axis([0 T -1 1])
xlabel('time(s)', 'fontsize', 12)
ylabel('x control input (m/s^2)', 'fontsize', 12)
legend('Robot 1', 'Robot 2', 'Robot 3', 'Robot 4');

% y control effort

figure
t=0:0.1:T;
plot(t, u1(:, 2), 'k', 'LineWidth', 3);
hold on
plot(t, u2(:, 2), '--k', 'LineWidth', 3);
hold on
plot(t, u3(:, 2), ':k', 'LineWidth', 3);
hold on
plot(t, u4(:, 2), '-.k', 'LineWidth', 3);
hold on

axis([0 T -1 1])
xlabel('time(s)', 'fontsize', 12)
ylabel('y control input (m/s^2)', 'fontsize', 12)
legend('Robot 1', 'Robot 2', 'Robot 3', 'Robot 4');
```

Bölüm 2.3'teki simülasyonun Matlab kodu:

```

clc
clear all
close all

T=10; % finite horizon time
n=2; % dimension of the coordinates
m=5; % size of multi robot system

A=[zeros(n*m) zeros(n*m,1) eye(n*m); zeros(1,n*m) zeros(1,1) zeros(1,n*m)
; ...
zeros(n*m) zeros(n*m,1) zeros(n*m)];

b1=[eye(n); zeros(n); zeros(n); zeros(n);zeros(n)];
b2=[ zeros(n); eye(n); zeros(n);zeros(n); zeros(n)];
b3=[ zeros(n); zeros(n);eye(n);zeros(n); zeros(n)];
b4=[ zeros(n); zeros(n); zeros(n); eye(n); zeros(n)];
b5=[ zeros(n); zeros(n); zeros(n); zeros(n); eye(n)];

B1=[zeros(n*m,n); zeros(1,n); b1];
B2=[zeros(n*m,n); zeros(1,n); b2];
B3=[zeros(n*m,n); zeros(1,n); b3];
B4=[zeros(n*m,n); zeros(1,n); b4];
B5=[zeros(n*m,n); zeros(1,n); b5];

D=[-1 -1 0 0; 1 0 -1 0; 0 0 1 0; 0 1 0 -1; 0 0 0 1]; %Incidence Matrix D
% % D=[-1 -1 0; 1 0 -1; 0 0 1; 0 1 0];
D=kron(D, eye(n));
% Weight Matrices W
W1=1*[1 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 0 0; 0 0 0 0];
W1=kron(W1, eye(n));
W2=1*[1 0 0 0; 0 0 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 0];
W2=kron(W2, eye(n));
W3=1*[0 0 0 0; 0 0 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 0];
W3=kron(W3, eye(n));
W4=1*[0 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 0 0; 0 0 0 1];
W4=kron(W4, eye(n));
W5=1*[0 0 0 0; 0 0 0 0; 0 0 0 0; 0 0 0 1];
W5=kron(W5, eye(n));

W1T=5*W1;
W2T=5*W2;
W3T=5*W3;
W4T=5*W4;
W5T=5*W5;

R11=10*eye(n);
R22=10*eye(n);
R33=10*eye(n);
R44=10*eye(n);
R55=10*eye(n);

% Desired Offset vectors for formation
d12=[-2 -4]';
d14=[ 2 -4]';
d23=[-2 -4]';
d45=[ 2 -4 ]';

```

```

d=[d12' d14' d23' d45']';
%initial state vector q(0)
q1=[ 1 0 ]'; v1=[0 2]';
q2=[ 4 0 ]'; v2=[0 3]';
q3=[ 7 0 ]'; v3=[0 1.5]';
q4=[-1 0 ]'; v4=[0 1]';
q5=[-4 0 ]'; v5=[0 2.5]';

q0=[q1' q2' q3' q4' q5']';
v0=[v1' v2' v3' v4' v5']';
x0=[q0' 1 v0']';

x=[q0' 1 v0']';

Q1=[D*W1*D' -D*W1*d zeros(n*m); -(D*W1*d)' d'*W1*d zeros(1,n*m);
zeros(n*m) zeros(n*m,1) D*W1*D'];
Q2=[D*W2*D' -D*W2*d zeros(n*m); -(D*W2*d)' d'*W2*d zeros(1,n*m);
zeros(n*m) zeros(n*m,1) D*W2*D'];
Q3=[D*W3*D' -D*W3*d zeros(n*m); -(D*W3*d)' d'*W3*d zeros(1,n*m);
zeros(n*m) zeros(n*m,1) D*W3*D'];
Q4=[D*W4*D' -D*W4*d zeros(n*m); -(D*W4*d)' d'*W4*d zeros(1,n*m);
zeros(n*m) zeros(n*m,1) D*W4*D'];
Q5=[D*W5*D' -D*W5*d zeros(n*m); -(D*W5*d)' d'*W5*d zeros(1,n*m);
zeros(n*m) zeros(n*m,1) D*W5*D'];

Q1T=[D*W1T*D' -D*W1T*d zeros(n*m); -(D*W1T*d)' d'*W1T*d zeros(1,n*m);
zeros(n*m) zeros(n*m,1) D*W1T*D'];
Q2T=[D*W2T*D' -D*W2T*d zeros(n*m); -(D*W2T*d)' d'*W2T*d zeros(1,n*m);
zeros(n*m) zeros(n*m,1) D*W2T*D'];
Q3T=[D*W3T*D' -D*W3T*d zeros(n*m); -(D*W3T*d)' d'*W3T*d zeros(1,n*m);
zeros(n*m) zeros(n*m,1) D*W3T*D'];
Q4T=[D*W4T*D' -D*W4T*d zeros(n*m); -(D*W4T*d)' d'*W4T*d zeros(1,n*m);
zeros(n*m) zeros(n*m,1) D*W4T*D'];
Q5T=[D*W5T*D' -D*W5T*d zeros(n*m); -(D*W5T*d)' d'*W5T*d zeros(1,n*m);
zeros(n*m) zeros(n*m,1) D*W5T*D'];

S1=B1*R11^(-1)* B1';
S2=B2*R22^(-1)* B2';
S3=B3*R33^(-1)* B3';
S4=B4*R44^(-1)* B4';
S5=B5*R55^(-1)* B5';

% Numerical solution of Coupled Riccati Equations
PT= [Q1T; Q2T; Q3T; Q4T; Q5T]; % Riccati Matrix terminal value
ZeroM = zeros(size(A'));
DD= [A' ZeroM ZeroM ZeroM ZeroM ;...
ZeroM A' ZeroM ZeroM ZeroM ;...
ZeroM ZeroM A' ZeroM ZeroM ;...
ZeroM ZeroM ZeroM A' ZeroM ;...
ZeroM ZeroM ZeroM ZeroM A' ];

S= [S1 S2 S3 S4 S5];

Q= [Q1; Q2; Q3; Q4; Q5];

% Solving m-Coupled Riccati Matrix Differential Equation Backward in
time
[T1 P] = ode45(@(t,P)mRiccati(P, A, DD, S, Q), [T:-0.1:0], PT(:));

```

```

[m1 n1] = size(P);
PP = mat2cell(P, ones(m1,1), n1);
fh_reshape = @(x) reshape(x, size(Q));
PP = cellfun(fh_reshape, PP, 'UniformOutput', false);
Pp=PP{length(T1)};
P1=Pp(1:21,:);
P2=Pp(22:42,:);
P3=Pp(43:63,:);
P4=Pp(64:84,:);
P5=Pp(85:105,:);
% END
%*****
delta=0.1;
K= 100;
A_hat= eye(size(A))+delta*A;

B1_hat= delta* (eye(size(A))+0.5*delta*A)*B1;
B2_hat= delta* (eye(size(A))+0.5*delta*A)*B2;
B3_hat= delta* (eye(size(A))+0.5*delta*A)*B3;
B4_hat= delta* (eye(size(A))+0.5*delta*A)*B4;
B5_hat= delta* (eye(size(A))+0.5*delta*A)*B5;

R11_hat=delta*R11;
R22_hat=delta*R22;
R33_hat=delta*R33;
R44_hat=delta*R44;
R55_hat=delta*R55;

S1_hat=B1_hat*R11_hat^(-1)* B1_hat';
S2_hat=B2_hat*R22_hat^(-1)* B2_hat';
S3_hat=B3_hat*R33_hat^(-1)* B3_hat';
S4_hat=B4_hat*R44_hat^(-1)* B4_hat';
S5_hat=B5_hat*R55_hat^(-1)* B5_hat';

Q1_hat=delta*Q1;
Q2_hat=delta*Q2;
Q3_hat=delta*Q3;
Q4_hat=delta*Q4;
Q5_hat=delta*Q5;

Q1T_hat=delta*(1/3*Q1+Q1T);
Q2T_hat=delta*(1/3*Q2+Q2T);
Q3T_hat=delta*(1/3*Q3+Q3T);
Q4T_hat=delta*(1/3*Q4+Q4T);
Q5T_hat=delta*(1/3*Q5+Q5T);

M1= Q1T_hat;
M2= Q2T_hat;
M3= Q3T_hat;
M4= Q4T_hat;
M5= Q5T_hat;

t=0:0.1:T;
SMf= S1_hat* M1+ S2_hat* M2+ S3_hat* M3+ S4_hat* M4+ S5_hat* M5;
for i=1:length(t)

    SM= S1_hat* M1+ S2_hat* M2+ S3_hat* M3+ S4_hat* M4+ S5_hat* M5;

```

```

% eig(SM);
G= eye(2*n*m+1)- SM ;
% Ginv=inv(eye(2*n*m+1)+ SM);
M1=Q1_hat + A_hat'*M1 *G* A_hat;
M2=Q2_hat + A_hat'*M2 *G* A_hat;
M3=Q3_hat + A_hat'*M3 *G* A_hat;
M4=Q4_hat + A_hat'*M4 *G* A_hat;
M5=Q5_hat + A_hat'*M5 *G* A_hat;

p1=((A_hat')^0.5)*M1*G*A_hat;
p2=((A_hat')^0.5)*M2*G*A_hat;
p3=((A_hat')^0.5)*M3*G*A_hat;
p4=((A_hat')^0.5)*M4*G*A_hat;
p5=((A_hat')^0.5)*M5*G*A_hat;

if i==1
    x(:,i)=G*A_hat*x0;
else
    x(:,i)=G*A_hat*x(:,i-1);
end

u1(i,:)= -R11_hat^(-1)* B1_hat'* M1* G* x(:,i);
u2(i,:)= -R22_hat^(-1)* B2_hat'* M2* G* x(:,i);
u3(i,:)= -R33_hat^(-1)* B3_hat'* M3* G* x(:,i);
u4(i,:)= -R44_hat^(-1)* B4_hat'* M4* G* x(:,i);
u5(i,:)= -R55_hat^(-1)* B5_hat'* M5* G* x(:,i);

end

x1=x0(1); y1=x0(2);
x2=x0(3); y2=x0(4);
x3=x0(5); y3=x0(6);
x4=x0(7); y4=x0(8);
x5=x0(9); y5=x0(10);

for j=1:length(t)
    if (j==1) | (j==30) | (j==98)
        hold all
        legend('off')
        h1 =
plot(x1,y1,'s','MarkerSize',9,'MarkerEdgeColor','k','MarkerFaceColor','k'
);
        h2 =
plot(x2,y2,'^','MarkerSize',11,'MarkerEdgeColor','k','MarkerFaceColor','k'
);
        h3 =
plot(x3,y3,'d','MarkerSize',9,'MarkerEdgeColor','k','MarkerFaceColor','k'
);
        h4 =
plot(x4,y4,'o','MarkerSize',9,'MarkerEdgeColor','k','MarkerFaceColor','k'
);
        h5 =
plot(x5,y5,'p','MarkerSize',13,'MarkerEdgeColor','k','MarkerFaceColor','k'
);

        legend([h1 h2 h3 h4 h5],{'Robot 1','Robot 2','Robot 3','Robot
4','Robot 5'});

        xlabel('x(m)','fontSize',12)

```

```

        ylabel('y(m)', 'fontsize', 12)
    end

    x1=x(1,j); y1=x(2,j);
    x2=x(3,j); y2=x(4,j);
    x3=x(5,j); y3=x(6,j);
    x4=x(7,j); y4=x(8,j);
    x5=x(9,j); y5=x(10,j);
    if j>1
        line([x(1,j) x(1,j-1)], [x(2,j) x(2,j-1)], 'LineWidth', 3, 'Color', 'r')
        line([x(3,j) x(3,j-1)], [x(4,j) x(4,j-1)], 'LineWidth', 3, 'Color', 'r')
        line([x(5,j) x(5,j-1)], [x(6,j) x(6,j-1)], 'LineWidth', 3, 'Color', 'r')
        line([x(7,j) x(7,j-1)], [x(8,j) x(8,j-1)], 'LineWidth', 3, 'Color', 'r')
        line([x(9,j) x(9,j-1)], [x(10,j) x(10,j-
1)], 'LineWidth', 3, 'Color', 'r')
    end

    pause(0.05)
    axis([-6 15 -2 28])
end

t=0:0.1:T+0.1;
% x position error
figure

plot(t, [x0(1)-x0(3) x(1,:)-x(3,:)]', 'r', 'LineWidth', 3);
hold on
plot(t, [x0(1)-x0(7) x(1,:)-x(7,:)]', 'g', 'LineWidth', 3);
hold on
plot(t, [x0(3)-x0(5) x(3,:)-x(5,:)]', 'b', 'LineWidth', 3);
hold on
plot(t, [x0(7)-x0(9) x(7,:)-x(9,:)]', 'm', 'LineWidth', 3);
hold on

axis([0 T -5 5])
xlabel('time(s)', 'fontsize', 12)
ylabel('x position(m)', 'fontsize', 12)
legend('Robot 1-2', 'Robot 1-4', 'Robot 2-3', 'Robot 4-5');

% y position error
figure
plot(t, [x0(2)-x0(4) x(2,:)-x(4,:)]', 'r', 'LineWidth', 3);
hold on
plot(t, [x0(2)-x0(8) x(2,:)-x(8,:)]', 'g', 'LineWidth', 3);
hold on
plot(t, [x0(4)-x0(6) x(4,:)-x(6,:)]', 'b', 'LineWidth', 3);
hold on
plot(t, [x0(8)-x0(10) x(8,:)-x(10,:)]', 'm', 'LineWidth', 3);
hold on

axis([0 T -5 5])
xlabel('time(s)', 'fontsize', 12)
ylabel('y position(m)', 'fontsize', 12)
legend('Robot 1-2', 'Robot 1-4', 'Robot 2-3', 'Robot 4-5');

% x velocity error
figure
plot(t, [x0(12)-x0(14) x(12,:)-x(14,:)]', 'r', 'LineWidth', 3);
hold on

```



```

plot(t, [x0(12)-x0(18) x(12,:) -x(18,:)]', 'g', 'LineWidth', 3);
hold on
plot(t, [x0(14)-x0(16) x(14,:) -x(16,:)]', 'b', 'LineWidth', 3);
hold on
plot(t, [x0(18)-x0(20) x(18,:) -x(20,:)]', 'm', 'LineWidth', 3);
hold on

axis([0 T -5 5])
xlabel('time(s)', 'fontsize', 12)
ylabel('x velocity(m/s)', 'fontsize', 12)
legend('Robot 1-2', 'Robot 1-4', 'Robot 2-3', 'Robot 4-5');

% y velocity error
figure
plot(t, [x0(13)-x0(15) x(13,:) -x(15,:)]', 'r', 'LineWidth', 3);
hold on
plot(t, [x0(13)-x0(19) x(13,:) -x(19,:)]', 'g', 'LineWidth', 3);
hold on
plot(t, [x0(15)-x0(17) x(15,:) -x(17,:)]', 'b', 'LineWidth', 3);
hold on
plot(t, [x0(19)-x0(21) x(19,:) -x(21,:)]', 'm', 'LineWidth', 3);
hold on

axis([0 T -5 5])
xlabel('time(s)', 'fontsize', 12)
ylabel('y velocity(m/s)', 'fontsize', 12)
legend('Robot 1-2', 'Robot 1-4', 'Robot 2-3', 'Robot 4-5');

% x control effort
figure
t=0:0.1:T;
plot(t, u1(:,1), 'r', 'LineWidth', 3);
hold on
plot(t, u2(:,1), 'g', 'LineWidth', 3);
hold on
plot(t, u3(:,1), 'b', 'LineWidth', 3);
hold on
plot(t, u4(:,1), 'm', 'LineWidth', 3);
hold on
plot(t, u5(:,1), 'c', 'LineWidth', 3);
hold on
axis([0 T -5 5])
xlabel('time(s)', 'fontsize', 12)
ylabel('x control input (m/s^2)', 'fontsize', 12)
legend('Robot 1', 'Robot 2', 'Robot 3', 'Robot 4');

% y control error for formation
figure
t=0:0.1:T;
plot(t, u1(:,2), 'r', 'LineWidth', 3);
hold on
plot(t, u2(:,2), 'g', 'LineWidth', 3);
hold on
plot(t, u3(:,2), 'b', 'LineWidth', 3);
hold on
plot(t, u4(:,2), 'm', 'LineWidth', 3);
hold on

```

```
plot(t,u5(:,1),'c','LineWidth',3);  
hold on  
axis([0 T -5 5])  
xlabel('time(s)','fontsize',12)  
ylabel('y control input (m/s^2)','fontsize',12)  
legend('Robot 1','Robot 2','Robot 3','Robot 4');
```



ÖZGEÇMİŞ

Hossein BARGHÍ JOND 1986 yılında İRAN'da doğdu. Üniversite öncesi öğrenimini Ahar'de, İRAN'ın Doğu Azerbaycan Eyaletinde tamamladı. Ön lisans ve lisans derecelerini Genel Bilimsel ve Teknik Üniversitesi'nden Tebriz'de sırasıyla Bilgisayar Yazılımı ve Bilgisayar Yazılımı Teknoloji Mühendisliği bölümlerinde 2007 ve 2009'da aldı. 2011 yılında Azad-e İslami Üniversitesinde Ahar'de Mekatronik Mühendisliği bölümünde yüksek lisans derecesini tamamladı. 2013 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Bilgisayar Mühendisliği Anabilim Dalında doktora öğrenimine başladı.

Doktora öğrenimi esnasında, Türkiye Bursları Başarı Bursunu 2015-2016 öğretim yılı için kazandı. Erasmus+ Programı'ndan faydalanarak bir yılını Çek Cumhuriyeti Ostrava Teknik Üniversitesinde geçirdi. İki SCI-E indeksli dergilerinde olan yaklaşık yirmi dergi ve konferans yayını vardır. 2017'de Prag'da yapılan 21'nci Uluslararası Öğrenci Elektrik Mühendisliği Konferansı'nda en iyi poster ödülünü aldı. İyi derece konuştuğu diller Azerbaycan Türkçesi, Farsça, Türkçe ve İngilizce'dir. Tezden üretilmiş yayınları aşağıda verilmiştir.

SCI, SSCI, AHCI indekslerine giren dergilerde yayımlanan makaleler

1. **H. B. Jond**, V.V. Nabiyev, N.G. Özmen, D. Lukáš, *Existence of Nash equilibrium in differential game approach to formation control*, International Journal of Robotics and Automation, 33, 4 (2018) 428-434.
2. **H.B. Jond**, V.V. Nabiyev, *On the Finite Horizon Nash Equilibrium Solution in the Differential Game Approach to Formation Control*, Journal of Systems Engineering and Electronics, yayınlanmak üzere kabul edilmiştir.

Uluslararası dergilerde yayımlanan makaleler

3. **H. B. Jond**, V. V. Nabiyev, R. Benveniste, *Trajectory Planning Using High Order Polynomials under Acceleration Constraint*, Journal of Optimization and Industrial Engineering, 10 (21), 2017.

4. **H. B. Jond**, V. V. Nabiyev, D. Lukáš, *Linear Quadratic Differential Game Formulation for Leaderless Formation Control*, Journal of Industrial and Systems Engineering (special issue on game theory application), V. 11, 2017.

Uluslararası/ulusal konferanslarda yayımlanan bildiriler

5. **H. B. Jond**, V. V. Nabiyev, A. Akbarimajd, *Planning of mobile robots under limited velocity and acceleration*, 22nd Signal Processing and Communications Applications Conference (SIU), Trabzon, Turkey, 23-25 April 2014.
6. **Jond H.B.**, Leaderless formation control based on differential game, 21th International Student Conference on Electrical Engineering, Prague, Czech Republic, 2017.

