KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SINIR KOŞULUNDA ÖZDEĞER PARAMETRESİ İÇEREN REGÜLER STURM-LİOUVİLLE PROBLEMLERİNİN ASİMPTOTİK ÇÖZÜMLERİ VE GREEN FONKSİYONLARI

DOKTORA TEZİ

Ayşe KABATAŞ

EYLÜL 2015
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SINIR KOŞULUNDA ÖZDEĞER PARAMETRESİ İÇEREN REGÜLER STURM-LİOUVİLLE PROBLEMLERİNİN ASİMPTOTİK ÇÖZÜMLERİ VE GREEN FONKSİYONLARI

Ayşe KABATAŞ

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce

DOKTOR (MATEMATİK)

Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : **10 / 08 /2015**

Tezin Savunma Tarihi : **18 / 09 /2015**

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Haskız COŞKUN

Trabzon 2015

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalında

Ayşe KABATAŞ Tarafından Hazırlanan

SINIR KOŞULUNDA ÖZDEĞER PARAMETRESİ İÇEREN REGÜLER STURM-LİOUVİLLE PROBLEMLERİNİN ASİMPTOTİK ÇÖZÜMLERİ VE GREEN FONKSİYONLARI

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 01 /09/2015 gün ve 1617 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda
DOKTORA TEZİ
olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. İhsan ÜNVER ....

Üye : Prof. Dr. Haskız COŞKUN ....

Üye : Prof. Dr. Ayşe DALOĞLU ....

Üye : Prof. Dr. Mustafa BAYRAM ....

Üye : Prof. Dr. Ahmet Yaşar ÖZBAN ....

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Konunun belirlenmesinden, çalışmanın tamamlanıp bu hale getirilmesine kadar benden yardımını ve desteğini esirgemeyen hocam Prof. Dr. Haskız COŞKUN' a emeği için saygılarımı ve şükranlarımı sunarım.

Ayrıca başta tez jüri üyelerim olmak üzere hocalarıma, araştırma görevlisi arkadaşlarıma, aileme teşekkür ederim.

Ayşe KABATAŞ
Trabzon 2015

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Doktora Tezi olarak sunduğum "SINIR KOŞULUNDA ÖZDEĞER PARAMETRESİ İÇEREN REGÜLER STURM-LİOUVİLLE PROBLEMLERİNİN ASİMPTOTİK ÇÖZÜMLERİ VE GREEN FONKSİYONLARI" başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Haskız COŞKUN' un sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 10/08/2015

Ayşe KABATAŞ

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

Doktora Tezi

ÖZET

SINIR KOŞULUNDA ÖZDEĞER PARAMETRESİ İÇEREN REGÜLER STURM-LİOUVİLLE PROBLEMLERİNİN ASİMPTOTİK ÇÖZÜMLERİ VE GREEN FONKSİYONLARI

Ayşe KABATAŞ

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Haskız COŞKUN
2015, 150 Sayfa

Bu çalışmada, potansiyel fonksiyonunun ayrı ayrı integrallenebilirlik ve türevlenebilirlik durumları için farklı sınır koşulları altında ikinci mertebeden regüler Sturm-Liouville probleminin özfonksiyonları incelenmiştir. İlk olarak; sağ sınır koşulunun sabit ve sol sınır koşulunun afin λ-bağımlı(A), bilineer λ-bağımlı(B) veya kuadratik λ-bağımlı(K) fonksiyon içermesi durumunda özfonksiyonlar için asimptotik çözümler ayrı ayrı elde edilmiştir. Daha sonra her iki sınır koşulunda özdeğer parametresi içeren problemin özfonksiyonları için asimptotik çözümler bulunmuştur. Son olarak, özfonksiyonlar için elde edilen bu sonuçlar kullanılarak Green fonksiyonları için asimptotik yaklaşımlar hesaplanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Regüler Sturm-Liouville Problemleri, Özfonksiyonlar, Green Fonksiyonları, Asimptotik Tahminler

PhD. Thesis

SUMMARY

ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF EIGENFUNCTIONS AND GREEN'S FUNCTIONS FOR REGULAR STURM-LIOUVILLE PROBLEMS HAVING EIGENVALUE PARAMETER IN THE BOUNDARY CONDITION

Ayşe KABATAŞ

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Prof. Haskız COŞKUN
2015, 150 Pages

In this thesis, eigenfunctions of the second order regular Sturm-Liouville problems have been investigated for different boundary conditions in case where the potential function is integrable and differentiable seperately. First, asymptotic solutions for eigenfunctions for the cases where the right-hand boundary condition is constant and the left-hand boundary condition contains affine λ-dependent(A), bilinear λ-dependent(B) or quadratic λ-dependent(K) function have been obtained seperately. Then, asymptotic solutions for eigenfunctions in case where both boundary conditions depend on the eigenvalue parameter have been found. Finally, asymptotic approximations for Green's functions using the derived results for eigenfunctions have been evaluated.

Key Words: Regular Sturm-Liouville Problems, Eigenfunctions, Green's Function, Asymptotic Estimates

SEMBOLLER DİZİNİ

e : Euler sayısı, yaklaşık değeri 2,71828183

O : Landau simgesi, büyük O

π : Pi sayısı, yaklaşık değeri 3,14159265

$\mathbb{R}$: Reel sayılar kümesi

$\exp(t)$: e^t

$t \to \infty$: t sayısı sonsuza yaklaşırken

$t \to t_1^+$: t sayısı t_1 sayısına sağdan yaklaşırken

$t \to t_2^-$: t sayısı t_2 sayısına soldan yaklaşırken

$|t|$: t sayısının mutlak değeri

$\|\Phi_k(t)\|$: $\Phi_k(t)$ fonksiyonunun normu

$u_r(r,t)$: $u(r,t)$ fonksiyonunun r bağımsız değişkenine göre kısmi türevi

L[a,b] : $[a,b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar kümesi

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Fransız matematikçiler Charles Sturm ve Joseph Liouville, 1836-1837 yılları arasında ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemler için sınır değer problemlerini konu alan bir dizi çalışma yayınlamışlardır. Etkin olan bu çalışmaların sonucunda, bu tür problemler Sturm-Liouville problemleri ve ilgili teori de Sturm-Liouville teorisi olarak bilinmektedir. O zamana kadar yapılan çalışmalar denklemlerin analitik çözümlerini ve bu çözümlerin incelenmesini esas almaktadır. Sturm ve Liouville, çözümlerin analitik olarak elde edilemediği durumlarda doğrudan denklemi kullanarak çözümlerin sağlayacağı bazı özelliklerin araştırılması gerektiğini vurgulayan ilk bilim adamları arasındadır. Bu konuyla ilgili matematikçilerin, fizikçilerin, mühendislerin ve diğer bilim adamlarının önemli sayıda çalışmaları mevcuttur ve bu konu günümüzde de aktif olan araştırma alanlarından biridir.

Sturm ve Liouville ortak olarak yaptıkları çalışmalarda regüler Sturm-Liouville problemlerini incelemişlerdir. 1910 yılında Hermann Weyl tarafından yayınlanan ve en çok referans alan çalışma ise singüler Sturm-Liouville problemlerinin araştırılmasının başlangıcı olan çalışmadır [28]. Genel olarak 1920 ve 1930' lu yıllarda kuantum mekaniğinin gelişmesi sonucu, Neumann ve Stone tarafından Hilbert uzayında sınırsız, kendine eş operatörler için genel spektral teoremin ispatı gerçekleştirilmiştir. Ayrıca Titchmarsh [26] tarafından yapılan esaslı bir çalışma, Sturm-Liouville operatörlerinin spektral teorisinin ileri seviyede incelenmesi için motivasyon kaynağı olmuştur.

Matematiksel fiziğin bazı problemlerinde zaman değişkenine göre kısmi türev sadece diferansiyel denklemde değil, aynı zamanda sınır şartlarında da ortaya çıkmaktadır. Bu problemlerin çözümü Fourier yöntemi ile araştırıldığında elde edilen özdeğer probleminin, sadece diferansiyel denklemde değil sınır koşullarında da özdeğer parametresi bulundurduğu görülür. Bu nedenle sınır koşullarında özdeğer parametresi içeren sınır değer problemleri hem teorik hem de pratik açıdan önem taşımaktadır. Böyle bir sınır değer problemi genel olarak

$$\begin{aligned}&\tau y(t):=\frac{1}{r(t)}\left\{-\left[p(t)y'(t)\right]'+q(t)y(t)\right\}=\lambda y(t)\\&-\left[\beta_{i1}y(a_i)-\beta_{i2}y'(a_i)\right]=\lambda\left[\alpha_{i1}y(a_i)-\alpha_{i2}y'(a_i)\right]\quad (i=1,2)\end{aligned}\tag{1.1}$$

formundadır. Burada α_{ik},β_{ik} $(i,k=1,2)$ reel sayılar öyleki $\beta_{i1}^2+\beta_{i2}^2\neq 0$ ve $p(t),p'(t)$, $q(t),r(t)$ fonksiyonları $[a_1,a_2]$ üzerinde tanımlı, reel değerli, sürekli ve ayrıca $p(t),r(t)$ fonksiyonları aynı aralıkta pozitiftir. Bu problemin $\delta_i:=(-1)^i(\alpha_{i1}\beta_{i2}-\alpha_{i2}\beta_{i1})>0$, $i=1,2$ sağlanması durumunda kendine eş, simetrik problem olduğu Walter [27] tarafından ispatlanmıştır.

Literatürde regüler Sturm-Liouville probleminin özfonksiyonlarının asimptotik tahminleriyle ilgili birçok çalışma yer almaktadır [2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 21, 25, 26]. Bu çalışmalarda $q(t)$ potansiyel fonksiyonunun farklı düzgünlük koşullarını sağlaması durumunda bazı sonuçlar elde edilmiştir. Fulton' un, sınır koşullarının sadece birinde özdeğer parametresi içeren, Sturm-Liouville problemini incelediği [16] çalışmasında $q(t)$ mevcut ve sürekli alınmıştır. Bu çalışma, Titchmarsh' ın sonlu kapalı aralık üzerindeki regüler Sturm-Liouville problemi için kullandığı yaklaşıma dayanmaktadır [25]. Aynı zamanda, Walter'ın bazı operatör-teorik sonuçlarını da içermektedir [27]. Fulton ve Walter tarafından geliştirilen bu yöntem yardımıyla Annaby ve Tharwat [2], her iki sınır koşulunda özdeğer parametresi bulunan ikinci mertebe özdeğer problemlerinin sampling (örnekleme) gösterimini incelediği çalışmasında Green fonksiyonunu kullanmıştır.

Bu çalışmada ise, genel formu (1.1) ile verilen

$$y''(t)+\left[\lambda-q(t)\right]y(t)=0,\ t\in[a,b],\tag{1.2}$$

$$-\left[\beta_{11}y(a)-\beta_{12}y'(a)\right]=\lambda\left[\alpha_{11}y(a)-\alpha_{12}y'(a)\right],\tag{1.3}$$

$$-\left[\beta_{21}y(b)-\beta_{22}y'(b)\right]=\lambda\left[\alpha_{21}y(b)-\alpha_{22}y'(b)\right]\tag{1.4}$$

regüler Sturm-Liouville probleminin $q(t)$ potansiyel fonksiyonunun integrallenebilirlik ve daha sonra türevlenebilirlik durumları için [10, 13, 20]' dekine benzer yaklaşımla özfonksiyonları için asimptotik yaklaşımlar elde edilmiştir. Bunun için (1.2) denklemi uygun bir dönüşümle

$$v'(t,\lambda) = -\lambda + q(t) - v^2(t,\lambda)$$

Riccati diferansiyel denklemine dönüştürülmüştür. Riccati denklemi için $v(t,\lambda) := i\lambda^{1/2} + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t,\lambda)$ formunda çözüm araştırılmış ve v_n ’ ler belirlenmiştir. Daha sonra $S(t,\lambda) := \operatorname{Re}\{v(t,\lambda)\}$ ve $T(t,\lambda) := \operatorname{Im}\{v(t,\lambda)\}$ olmak üzere

$$\left.\begin{matrix}\Psi(t,\lambda)\\ \Phi(t,\lambda)\end{matrix}\right\} = c_1 \exp\left(\int_a^t S(x,\lambda)dx\right)\cos\left\{c_2 + \int_a^t T(x,\lambda)dx\right\}$$

kullanılarak özfonksiyonlar için asimptotik yaklaşımlar belirlenmiştir. Son olarak ise, özfonksiyonlar için elde edilen bu sonuçlar yardımıyla Green fonksiyonları için asimptotik yaklaşımlar hesaplanmıştır.

1.2. Özdeğer Problemleri

Bu kısımda çalışmanın esasını oluşturan özdeğer problemleriyle ilgili temel kavramlara yer verilecektir.

Tanım 1.1: L, ikinci mertebeden lineer diferansiyel operatör olmak üzere

$$L = a_0(t)\frac{d^2}{dt^2} + a_1(t)\frac{d}{dt} + a_2(t) \tag{1.5}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $t \in [a,b]$; $a_i(t)$, $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar ve $a_0(t) \neq 0$ ’ dır ($i = 0,1,2$). Bu durumda, λ reel bir parametre olmak üzere,

$$Ly(t) = \lambda y(t) \tag{1.6}$$

diferansiyel denklemini ve ξ, η, a_{ij}, b_{ij}, $1 \leq i, j \leq 2$ sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned} a_{11}y(a) + a_{12}y'(a) + b_{11}y(b) + b_{12}y'(b) &= \xi, \\ a_{21}y(a) + a_{22}y'(a) + b_{21}y(b) + b_{22}y'(b) &= \eta \end{aligned} \tag{1.7}$$

koşullarını sağlayan $y(t)$ fonksiyonunu belirleme problemine "özdeğer problemi" adı verilir. Sınır veya uç noktalarında $y(t)$ ve $y'(t)$ değerlerini içeren (1.7) koşullarına ise "sınır koşulları" denir. Bu sınır koşulları "ayrılmamış sınır koşulları" olarak da adlandırılır. Eğer $b_{11} = b_{12} = 0$ ve $a_{21} = a_{22} = 0$ ise sınır koşullarına "ayrılmış sınır koşulları" denir. Ayrıca $\xi = \eta = 0$ ise sınır koşullarına "homojen sınır koşulları", $\xi \neq 0$ veya $\eta \neq 0$ ise "homojen olmayan sınır koşulları" adı verilir.

$y(t)$ fonksiyonu $[a, b]$' de özdeş olarak sıfıra eşit, yani $y(t) \equiv 0$ olduğunda (1.6) ve (1.7) sağlanır. Bu çözüm, özdeğer probleminin "trivial çözümü" olarak adlandırılır.

Tanım 1.2: $[a, b]$ aralığında bulunan bir λ_0 sayısı ve sıfırdan farklı $\Psi(t)$ fonksiyonu için $\lambda = \lambda_0$ ve $y(t) = \Psi(t)$ olduğunda (1.6) ve (1.7) sağlanıyorsa, λ_0 değerine problemin "özdeğeri" ve $\Psi(t)$ fonksiyonuna $\lambda = \lambda_0$ özdeğerine karşılık gelen "özfonksiyonu" denir.

λ_0 özdeğerine karşılık gelen iki lineer bağımsız özfonksiyon varsa, λ_0' a "iki katlı özdeğer" denir. Aksi taktirde; λ_0, "basit özdeğer" olarak adlandırılır.

Özdeğer problemine örnek olarak dairesel biçimdeki zarın titreşimi ile ilgili

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r,t) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} u(r,t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(r,t), \tag{1.8}$$

$$u(a,t) = 0, \tag{1.9}$$

$$u(r,0) = f(r), \ \frac{\partial}{\partial t} u(r,0) = g(r) \tag{1.10}$$

kısmi diferansiyel denklemi göz önüne alınsın. Burada r zarın yarıçap koordinatı ve t de bir zaman parametresidir. Zarın yarıçap uzunluğu a olarak alınmıştır ve (1.9) sınır koşulundan zarın dış halkasının $u = 0$ düzlemiyle sınırlandırıldığı görülmektedir. (1.10) ise zarın başlangıç konumunu ve hızını belirtmektedir.

Bu tarz problemler genel olarak değişkenlerine ayırma yöntemiyle çözülmektedir. Buna göre; (1.8)' in $u(r,t)$ çözümünün r ve t' ye bağlı iki fonksiyonun çarpımı olduğu varsayılsın:

$$u(r,t) = R(r)T(t). \tag{1.11}$$

Bu çözüm (1.8)' de yerine yazılırsa ve denklemin her iki tarafı RT ile bölünürse

$$\frac{\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}}{R}=c^2\frac{\frac{d^2T}{dt^2}}{T}$$

elde edilir. Denklemin bir tarafı sadece r ve diğer tarafı da sadece t bağımsız değişkenine bağlı olduğundan, her iki taraf da aynı sabite (örneğin $-\lambda$) eşit olmalıdır. Böylece aşağıdaki iki diferansiyel denklem elde edilir:

$$\frac{d^2T}{dt^2}+\frac{\lambda}{c^2}T=0, \tag{1.12}$$

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+\lambda R=0. \tag{1.13}$$

(1.9) ve (1.11)' den $R(a)=0$ bulunur. Ayrıca zarın simetrisinin korunması için merkezde R' eğiminin sıfır olması beklenir; yani $R'(0)=0$ dır. Dikkat edilirse $r=0$ ve $r=a$ ' daki bu iki sınır koşulu ile birlikte (1.13) denklemi bir özdeğer problemidir.

Diğer bir fiziksel problem ise, ince dairesel bir halka içindeki ısı akışını kapsamaktadır. Bu durum

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}u(\theta,t)=\alpha\frac{\partial}{\partial t}u(\theta,t), \tag{1.14}$$

$$u(\theta,0)=f(\theta), \tag{1.15}$$

$$u(0,t)-u(2\pi,t)=0, \tag{1.16}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial\theta}u(\theta,t)\right|_{\theta=0}-\left.\frac{\partial}{\partial\theta}u(\theta,t)\right|_{\theta=2\pi}=0 \tag{1.17}$$

kısmi diferansiyel denklemi ile ifade edilir. Burada t yine bir zaman parametresidir ve θ ise x ekseni üzerinde saatin tersi yönünde değişen açıyı tanımlar ($0\le\theta\le 2\pi$). Değişkenlerine ayırma yöntemi kullanılarak

$$u(\theta,t)=y(\theta)T(t) \tag{1.18}$$

alınırsa

$$\frac{\frac{d^2}{d\theta^2}y}{y}=\alpha\frac{\frac{d}{dt}T}{T}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{d}{dt}T=\frac{k}{\alpha}T, \tag{1.19}$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2}y-ky=0. \tag{1.20}$$

Ayrıca (1.16), (1.17) ve (1.18)' den

$$\begin{aligned}&y(0)-y(2\pi)=0,\\&y'(0)-y'(2\pi)=0\end{aligned}$$

sınır koşulları bulunur. Bu iki örnekten görüldüğü üzere değişkenlerine ayırma yöntemi kullanılarak elde edilen problemler birer özdeğer problemidir.

1.2.1. Normal Form

Bu kısımda

$$p_0(t)y''(t)+p_1(t)y'(t)+\left(p_2(t)+\lambda p_3(t)\right)y(t)=0 \tag{1.21}$$

şeklindeki özdeğer problemi ele alınacaktır. Burada $p_0(t)$ ve $p_3(t)$ katsayılarının pozitif olduğu; $p_0(t)$, $p_1(t)$ ve $p_3(t)$ katsayılarının ise iki kere türevlenebilir olduğu varsayılsın. Ayrıca

$$p(t)=\exp\int\frac{p_1(t)}{p_0(t)}dt,$$

$$q(t)=\frac{p_2(t)p(t)}{p_0(t)},$$

$$r(t)=\frac{p_3(t)p(t)}{p_0(t)}$$

tanımlansın. (1.21) denklemi $p(t)/p_0(t)$ ile çarpılırsa

$$\frac{d}{dt}\left[p(t)\frac{dy}{dt}\right]+\left(q(t)+\lambda r(t)\right)y(t)=0 \tag{1.22}$$

formunda ikinci mertebe diferansiyel denklemi elde edilir. (1.21)' e göre çok daha kullanışlı olan bu denkleme "kendine eş diferansiyel denklem" denir.

(1.22) denklemi ise

$$\zeta=\int\frac{dt}{p(t)} \tag{1.23}$$

şeklinde tanımlanan yeni bir bağımsız değişkenle daha basit bir hale dönüştürülebilir. (1.23)' ten

$$\frac{d\zeta}{dt}=\frac{1}{p(t)}$$

ve türevde zincir kuralından

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dt}=\frac{dy}{d\zeta}\frac{1}{p(t)},$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2}&=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{d\zeta}\right)\frac{1}{p(t)}+\frac{dy}{d\zeta}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{p(t)}\right)\\&=\frac{d^2y}{d\zeta^2}\left(\frac{1}{p(t)}\right)^2+\frac{dy}{d\zeta}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{p(t)}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu değerler kullanılarak (1.22) denklemi

$$\frac{d^2y}{d\zeta^2}+\left(p(t)q(t)+\lambda p(t)r(t)\right)y=0 \tag{1.24}$$

denklemine indirgenmiş olur. Benzer şekilde bu denklem de

$$y=k(\zeta)u(\xi),\ \ \xi=\int\frac{d\zeta}{k^2(\zeta)} \tag{1.25}$$

şeklinde yeni bir bağımlı ve bağımsız değişken tanımlanarak tekrar indirgenebilir. (1.25)' ten

$$\frac{d\xi}{d\zeta}=\frac{1}{k^2}$$

ve türevde zincir kuralından

$$\frac{dy}{d\zeta}=u\frac{dk}{d\zeta}+k\frac{du}{d\xi}\frac{d\xi}{d\zeta}=u\frac{dk}{d\zeta}+\frac{1}{k}\frac{du}{d\xi},$$
$$\frac{d^2y}{d\zeta^2}=\frac{d}{d\zeta}\left(u\frac{dk}{d\zeta}+\frac{1}{k}\frac{du}{d\xi}\right)=u\frac{d^2k}{d\zeta^2}+\frac{1}{k^3}\frac{d^2u}{d\xi^2}$$

elde edilir. Bu değerler kullanılarak (1.24) denklemi

$$\frac{1}{k^3}\frac{d^2u}{d\xi^2}+\left(p(t)q(t)+\frac{1}{k}\frac{d^2k}{d\zeta^2}+\lambda p(t)r(t)\right)ku=0 \tag{1.26}$$

denklemine indirgenir. Bu son denklemde $k^4p(t)r(t)=1$ seçilirse (1.26) denklemi

$$u''+\left(-\ell(\xi)+\lambda\right)u=0 \tag{1.27}$$

"normal formuna" dönüşür. Burada

$$u''=\frac{d^2u}{d\xi^2},\ \ -\ell(\xi)=k^4\left(p(t)q(t)+\frac{d^2k}{d\zeta^2}\right).$$

1.2.2. Kendine Eş Operatörler

Kendine eş bir diferansiyel denklemin operatörü de kendine eştir ve $D=\dfrac{d}{dt}$ olmak üzere

$$L:=D\left[p(t)D\right]+q(t)$$

operatörü de “kendine eş operatör” olarak adlandırılır. Dolayısıyla homojen kendine eş diferansiyel denklemler kompakt bir formda

$$L[y]+\lambda r(t)y=0$$

şeklinde ifade edilir.

Kendine eş operatörler için önemli olan simetriklik kavramı ve bu kavramla ilgili literatürde yer alan bazı temel lemma ve teoremler aşağıda verilecektir.

Tanım 1.3 [1]: L kendine eş bir operatör olmak üzere; $[t_1,t_2]$ aralığında sürekli, ikinci mertebeden türeve sahip ve verilen sınır koşullarını sağlayan her u,v fonksiyonları için

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(uL[v]-vL(u)\right)dt=0$$

sağlanıyorsa L’ ye bu aralıkta “simetrik operatör” adı verilir.

Tanım 1.4 [14]: $f_m(t),\ m=1,2,...,M,$ $[t_1,t_2]$ aralığında tanımlı ve bu aralıkta (M-1). mertebeden türevlere sahip fonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$\begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) & \cdots & f_M(t) \\ f_1^{(1)}(t) & f_2^{(1)}(t) & \cdots & f_M^{(1)}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(M-1)}(t) & f_2^{(M-1)}(t) & \cdots & f_M^{(M-1)}(t) \end{vmatrix}_{M\times M} \tag{1.28}$$

determinantı $f_1(t),f_2(t),...,f_M(t)$’ nin “Wronskian determinantı” olarak adlandırılır ve $W(f_1,f_2,...,f_M)(t)$ ile gösterilir.

Lemma 1.1 [1]: (Lagrange Eşitliği): $[t_1,t_2]$ aralığında $L=D\left[p(t)D\right]+q(t)$ sağlanıyorsa ve ayrıca u, v ikinci mertebeden sürekli türevlere sahip herhangi fonksiyonlar ise, bu durumda $W(u,v)(t):=u(t)v'(t)-u'(t)v(t)$ olmak üzere

$$uL[v]-vL[u]=\frac{d}{dt}\left[p(t)W(u,v)(t)\right]$$

eşitliği sağlanır.

Lagrange eşitliğinden

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\left(uL[v]-vL[u]\right)dt &= \int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left[p(t)W(u,v)(t)\right]dt \\ &= p(t)W(u,v)(t)\Big|_{t_1}^{t_2}\end{aligned} \tag{1.29}$$

elde edilir. Bu eşitlik, “Green formülü” olarak adlandırılır.

Aşağıdaki teorem Green formülünün basit bir sonucudur:

Teorem 1.1 [1]: Kendine eş formdaki $L=D\left[p(t)D\right]+q(t)$ operatörünün, $\left[t_1,t_2\right]$ aralığında simetrik olması için gerek ve yeter koşul, bu aralıkta ikinci mertebeden sürekli türevlere sahip, tanımlanan sınır koşullarını sağlayan herhangi u ve v fonksiyonları için

$$p(t)W(u,v)(t)\Big|_{t_1}^{t_2}=0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Simetrik operatörün özdeğer ve özfonksiyonlarıyla ilgili birçok önemli özellik mevcuttur. Bunların en önemlilerinden birisi özfonksiyonların ortogonalliğidir. Öncelikle, iki fonksiyonun ortogonal olması şöyle tanımlanır:

Tanım 1.5 [1]: f ve g**,** $\left[t_1,t_2\right]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ve $r(t)>0$ olmak üzere, eğer

$$\int_{t_1}^{t_2} r(t)f(t)g(t)dt=0$$

sağlanıyorsa bu fonksiyonlara $r(t)>0$ “ağırlık fonksiyonuna” göre $\left[t_1,t_2\right]$ üzerinde “ortogonaldir” denir.

Şimdi simetrik operatörün özdeğer ve özfonksiyonlarıyla ilgili bazı önemli teoremler verilecektir:

Teorem 1.2 [1]: $L\left[y(t)\right]+\lambda r(t)y(t)=0, t\in\left[t_1,t_2\right]$ denkleminde L operatörü simetrik olsun. Eğer λ_n ve λ_k, L operatörünün farklı iki özdeğeri ve $\Phi_n(t)$ ve $\Phi_k(t)$ de bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar ise bu durumda $\Phi_n(t)$ ve $\Phi_k(t)$ ortogonaldir. Yani

$$\int_{t_1}^{t_2} r(t)\Phi_n(t)\Phi_k(t)dt = 0, \quad n \neq k.$$

Teorem 1.3 [1]: Simetrik bir operatörün bütün özdeğerleri reeldir.
Teorem 1.4 [1]: Simetrik bir operatörün özdeğerleri artan sırayla

$$\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n < ...$$

şeklinde sonsuz bir dizi oluştururlar ve $n \to \infty$ iken $\lambda \to \infty$.

1.2.3. Regüler Sturm-Liouville Problemleri

Özdeğer problemlerinin çoğu; ayrılmış, homojen sınır koşullarına sahiptir. Bu tür problemler, $L = D[p(t)D] + q(t)$ olmak üzere,

$$L[y(t)] + \lambda r(t)y(t) = 0, \; t_1 < t < t_2, \tag{1.30}$$

$$B_1[y] = a_{11}y(t_1) + a_{12}y'(t_1) = 0, \tag{1.31}$$

$$B_2[y] = a_{21}y(t_2) + a_{22}y'(t_2) = 0 \tag{1.32}$$

şeklinde karakterize edilir. Burada $a_{11}^2 + a_{12}^2 \neq 0, \; a_{21}^2 + a_{22}^2 \neq 0$' dır. Bu sınıfa ait olan bir özdeğer problemi "regüler Sturm-Liouville problemi" olarak adlandırılır.

Regüler Sturm-Liouville probleminin L operatörünün simetrik olduğunu göstermek için, (1.30)-(1.32) probleminde verilen ayrılmış sınır koşullarını sağlayan, ikinci mertebeden sürekli türevlere sahip u ve v fonksiyonları göz önüne alınsın. Bu durumda, $t = t_1$ noktasında

$$\left.\begin{aligned} a_{11}u(t_1) + a_{12}u'(t_1) = 0, \\ a_{11}v(t_1) + a_{12}v'(t_1) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.33}$$

sağlanır. Fakat tanım gereği a_{11} ve a_{12} aynı anda sıfır olamayacağı için (1.33) sisteminin katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır. Yani,

$$\begin{vmatrix} u(t_1) & u'(t_1) \\ v(t_1) & v'(t_1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u(t_1) & v(t_1) \\ u'(t_1) & v'(t_1) \end{vmatrix} = W(u,v)(t_1) = 0.$$

Benzer şekilde, $t = t_2$ noktasında da $W(u,v)(t_2) = 0$ olduğu gösterilebilir. Böylece,

$$p(t_2)W(u,v)(t_2) - p(t_1)W(u,v)(t_1) = 0 - 0 = 0.$$

Buradan da,

$$p(t)W(u,v)(t)\Big|_{t_1}^{t_2} = 0.$$

Bu ise Teorem 1.1' e göre L operatörünün simetrik olduğunu gösterir.

Bir regüler Sturm-Liouville problemi simetrik bir operatöre sahip olduğu için, daha önce verildiği üzere,

i) Farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar birbirlerine diktir,

ii) Operatörün bütün özdeğerleri reeldir,

iii) $n \to \infty$ iken $\lambda_n \to \infty$ ve özdeğerler $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots < \lambda_n < \cdots$ şeklinde bir dizi oluşturur.

Bunlara ilaveten diğer bir özellik de aşağıdaki teoremle ifade edilir:

Teorem 1.5 [1, sayfa 55]: Bir regüler Sturm-Liouville sisteminin özdeğerleri basittir, yani bir özdeğer için birden fazla lineer bağımsız özfonksiyon mevcut değildir.

1.2.4. Singüler Sturm- Liouville Problemleri

Uygulamalarda rastlanan en ilginç Sturm-Liouville problemleri aşağıda tanımı verilen ve singüler olarak sınıflandırılan problemlerdir. Bu singülerlikler sistemin genel yapısını, özellikle de L operatörünün simetrikliği için gerekli olan sınır koşullarının şeklini değiştirir.

Tanım 1.6: Bir Sturm-Liouville probleminde, $[t_1, t_2]$ aralığı üzerinde aşağıdaki durumların biri veya daha fazlası varsa, probleme "singülerdir" denir:

i) $p(t_1) = 0$ ve (veya) $p(t_2) = 0$ ' dır.

ii) $p(t), q(t)$ veya $r(t)$, $t = t_1$ ve (veya) $t = t_2$ noktalarında sonsuzdur.

iii) t_1 ve (veya) t_2 sonsuzdur.

Bu sınıfa ait önemli diferansiyel denklemlerin bazıları aşağıdaki gibidir:

$$\frac{d}{dt}\left[\left(1-t^2\right)y'\right]+\lambda y=0,\ \ -1<t<1 \quad \text{(Legendre Denklemi)},$$

$$\frac{d}{dt}\left(ty'\right)-\frac{v^2}{t}y+\lambda ty=0,\ \ 0<t<b \quad \text{(Bessel Denklemi)},$$

$$\frac{d}{dt}\left(te^{-t}y'\right)\ +\lambda e^{-t}y=0,\ \ 0<t<\infty \quad \text{(Laguerre Denklemi)},$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-t^2}y'\right)+\lambda e^{-t^2}y=0,\ \ -\infty<t<\infty \quad \text{(Hermite Denklemi)}.$$

Bir singüler Sturm-Liouville probleminin simetrik bir operatöre sahip olması için Teorem 1.1’ e göre aşağıdaki eşitliğin sağlanması gerekir:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(uL[v]-vL[u]\right)dt=p\left(t\right)W\left(u,v\right)\left(t\right)\Big|_{t_1}^{t_2}=0.$$

Burada u ve v, Sturm-Liouville probleminin sınır koşullarını sağlayan, ikinci mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyonlardır. Örneğin, singülerlik $t=t_1$ noktasında ise, sınır koşulları aşağıdaki gibi alınabilir:

$$\lim_{t\to t_1^+}p\left(t\right)W\left(u,v\right)\left(t\right)=0 \tag{1.34}$$

ve

$$p\left(t_2\right)W\left(u,v\right)\left(t_2\right)=0. \tag{1.35}$$

İkinci olarak, eğer singülerlik $p\left(t_1\right)=0$ olmasına dayanıyorsa, sınır koşullarının

$$y\left(t\right)\ \text{ve}\ y'\left(t\right)\ \text{sonlu}\quad \left(t\to t_1^+\right) \tag{1.36}$$

alınması durumunda (1.34) doğrudan sağlanır. İkinci uçtaki, yani t_2 noktasındaki sınır koşullarının aşağıdaki şekilde alınmasıyla da (1.35) sağlanır:

$$a_{21}y(t_2)+a_{22}y'(t_2)=0.$$

Çünkü, bu durumda $a_{21}u(t_2)+a_{22}u'(t_2)=0$ ve $a_{21}v(t_2)+a_{22}v'(t_2)=0$ olacağından

$$\begin{aligned}p(t_2)W(u,v)(t_2)&=p(t_2)\left[u(t_2)v'(t_2)-u'(t_2)v(t_2)\right]\\&=p(t_2)\left[\left(-\frac{a_{22}}{a_{21}}\right)u'(t_2)v'(t_2)-u'(t_2)\left(-\frac{a_{22}}{a_{21}}\right)v'(t_2)\right]=0\end{aligned}$$

elde edilir. (1.34)' ün sağlanması için (1.36)' dan farklı sınır koşulları da verilebilir; fakat bu durumda problemin sıfırdan farklı çözümünün olmaması ile karşılaşılır. Bu nedenle, birçok örnekte bu tür sınır koşulları kullanılır. Benzer analiz $t=t_2$ noktasına dayanan singülerlikler için de mevcuttur.

Singüler özdeğer problemleri her zaman simetrik operatör içermeyebilir. Bu gibi problemlerde, özdeğer ve özfonksiyonların Teorem 1.2 - 1.4' teki özellikleri sağlaması beklenemez.

1.3. Asimptotik Analiz

Uygulamalı matematikte genel olarak, bir model için denklemler oluşturulabilir; ancak bu denklemler her zaman çözülemez. Yani özellikleri veya tablo değerleri bilinen fonksiyonlarla ifade edilebilen analitik bir çözümü bulunamaz. Bununla birlikte hata boyutu bilinen yaklaşık bir çözüm, ihtiyacı karşılamada yeterli olabilir. Bu amaçla asimptotik analiz, denklemdeki veya integraldeki bir parametre ya da bazı değişkenler parametrenin bir komşuluğunda analitik değilse ya da çok büyük veya çok küçük değerler alıyorsa bu tür problemler için teknik geliştirmeyi ve yaklaşık analitik çözüm bulmayı konu alır [24].

Asimptotik analiz ile ilgili bazı bilgiler 18 ve 19. yüzyıllarda bilinmesine rağmen asimptotik açılım ilk olarak, 1886' da Poincare tarafından tanımlanmıştır:

Tanım 1.6 [23, sayfa 112]: Bir $f(t)$ fonksiyonu için

$$\lim_{t\to\infty} t^n\left[f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}a_k t^{-k}\right]=a_n,\ \ n=0,1,2,... \tag{1.37}$$

sağlanıyorsa, bu $f(t)$ fonksiyonu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{-k}$ "asimptotik açılımına sahiptir" denir. Burada $n=0$ için parantez içindeki toplam sıfır (0) alınır.

Ayrıca Poincare, 1892 yılında bu konuda önemli teknikler geliştirmiştir. 20. yüzyılda akışkanlar mekaniği ile ilgili çalışmalar asimptotik analize ilgiyi daha da artırmıştır. Asimptotik tekniklerin kullanıldığı diğer bazı alanlar; fizik bilimleri, astrofizik, deniz bilimleri, biyo-medikal bilimler, trafik çalışmaları vb. olarak sıralanabilir [24].

Bu çalışmada sınır koşullarında özdeğer parametresi bulunan Sturm-Liouville probleminin özfonksiyonları ve Green fonksiyonları için asimptotik çözümler bulmak amaçlanmıştır. Bu nedenle genel bir çözüm formu elde edebilmek amacıyla aşağıda tanımı verilen büyük "O" notasyonu kullanılmıştır:

Tanım 1.7: t_0 ' ın herhangi bir ε_0 civarındaki tüm t' ler için

$$|f(t)| \le M|g(t)|, t \in \varepsilon_0, t \ne t_0$$

eşitsizliğini sağlayan bir $M>0$ sayısı varsa t, t_0 ' a yakınsadığında ($t \to t_0$) $f(t)$ fonksiyonu $g(t)$ ' ye göre "sınırlıdır" denir ve

$$f(t) = O(g(t)), t \to t_0$$

şeklinde yazılır.

Bu tanım kullanılarak aşağıdaki bağıntılar elde edilebilir:

$$O(O(f)) = O(f), O(fg) = O(f)O(g), O(f) + O(g) = O(\max\{f,g\}).$$

Büyük "O" ilişkisinin önemli bir sonucu da bağımsız değişkene bağlı olarak integrallenebilmesidir. Yani; $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere bu aralıkta

$$f(t) = O(g(t)), t \to t_0$$

alınırsa, bu durumda

$$\int_t^{t_0} f(x)\,dx = O\left(\int_t^{t_0} |g(x)|\,dx\right)$$

sağlanır [7,15].

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR

Bu bölümde, öncelikle potansiyel fonksiyonu olarak bilinen $q(t)$' nin integrallenebilir ve daha sonra türevlenebilir olması şartları altında

$$y''(t)+\left[\lambda-q(t)\right]y(t)=0, \quad t\in[a,b], \quad a,b\in\mathbb{R} \tag{2.1}$$

$$\frac{y'(a)}{y(a)}=R(\lambda), \tag{2.2}$$

$$\frac{y'(b)}{y(b)}=\cot\beta \tag{2.3}$$

sınır değer probleminin özfonksiyonları ve Green fonksiyonları için asimptotik çözümler elde edilecektir. Burada $\beta\in[0,\pi)$; $R(\lambda)$ ise genel formları aşağıda verilen lineer, bilineer ve kuadratik formlardaki fonksiyonlardır ($\beta=0$ olması halinde, (2.3) sınır koşulu $y(b)=0$' dır). Bu çalışmada farklı sınır koşulları için aşağıdaki gösterimler kullanılacaktır:

D-Dirichlet Şartı: $y(b)=0$,

N-Non-Dirichlet Şartı: $\dfrac{y'(b)}{y(b)}=\cot\beta, \quad \beta\in(0,\pi)$,

A-Afin λ-Bağımlı Şart: $\dfrac{y'(a)}{y(a)}=c\lambda+d$,

B-Bilineer λ-Bağımlı Şart: $\dfrac{y'(a)}{y(a)}=\dfrac{c\lambda+d}{e\lambda+f}, \quad cf-ed\neq 0$,

K-Kuadratik λ-Bağımlı Şart: $\dfrac{y'(a)}{y(a)}=c\lambda^2+d\lambda+e, \quad c,d,e,f\in\mathbb{R}$.

Bu gösterimler kullanılarak sınır koşulları aşağıdaki şekilde ifade edilecektir:

a) Lineer Durum (Afin&Non-Dirichlet(AN) ve Afin&Dirichlet(AD))

$$\mathrm{AN}: \frac{y'(a)}{y(a)} = c\lambda + d \qquad\qquad \mathrm{AD}: \frac{y'(a)}{y(a)} = c\lambda + d$$

$$\frac{y'(b)}{y(b)} = \cot\beta, \beta \in (0,\pi) \qquad\qquad y(b) = 0$$

b) Bilineer Durum (Bilineer&Non-Dirichlet(BN) ve Bilineer&Dirichlet(BD))

$$\mathrm{BN}: \frac{y'(a)}{y(a)} = \frac{c\lambda + d}{e\lambda + f}, e \neq 0 \qquad\qquad \mathrm{BD}: \frac{y'(a)}{y(a)} = \frac{c\lambda + d}{e\lambda + f}, e \neq 0$$

$$\frac{y'(b)}{y(b)} = \cot\beta, \beta \in (0,\pi) \qquad\qquad y(b) = 0$$

c) Kuadratik Durum (Kuadratik&Non-Dirichlet(KN) ve Kuadratik&Dirichlet(KD))

$$\mathrm{KN}: \frac{y'(a)}{y(a)} = c\lambda^2 + d\lambda + e, c \neq 0 \qquad\qquad \mathrm{KD}: \frac{y'(a)}{y(a)} = c\lambda^2 + d\lambda + e, c \neq 0$$

$$\frac{y'(b)}{y(b)} = \cot\beta, \beta \in (0,\pi) \qquad\qquad y(b) = 0$$

Ayrıca, bu durumlara ek olarak, her iki sınır koşulunda özdeğer parametresi bulunması durumu için de probleme ait özfonksiyonlar ve Green fonksiyonları hesaplanacaktır.

2.1. Özfonksiyon Hesaplamaları

Özfonksiyonların elde edilmesinde kullanılacak yöntem için gerekli bazı teorik bilgiler aşağıdaki gibidir:

$$y''(t) + [\lambda - q(t)]y(t) = 0, \quad t \in [a,b] \tag{2.4}$$

denkleminin kompleks değerli bir çözümü, $y(t,\lambda)$ olsun. Bu durumda λ ve q reel değerli olduğundan; $y_1(t,\lambda)$ ve $y_2(t,\lambda)$, (2.4) denkleminin reel değerli çözümleri olmak üzere,

$$y(t,\lambda) = y_1(t,\lambda) + iy_2(t,\lambda) \tag{2.5}$$

yazılabilir. Bu çözüm üstel olarak

$$y(t,\lambda) = R(t,\lambda)\exp\left(i\theta(t,\lambda)\right) \tag{2.6}$$

formunda ifade edilebilir. Burada $R(t,\lambda)$ ve $\theta(t,\lambda)$ reel değerli fonksiyonlardır.

Ele alınan (2.4) denklemine

$$v(t,\lambda) := \frac{y'(t,\lambda)}{y(t,\lambda)}$$

dönüşümü uygulansın. Bu durumda birinci ve ikinci mertebeden türevler

$$y'(t,\lambda) = y(t,\lambda)v(t,\lambda)$$

ve

$$y''(t,\lambda) = y(t,\lambda)v'(t,\lambda) + y'(t,\lambda)v(t,\lambda) = \left(v'(t,\lambda) + v^2(t,\lambda)\right)y(t,\lambda)$$

şeklindedir. Bu değerler (2.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$y(t,\lambda)v^2(t,\lambda) + y(t,\lambda)v'(t,\lambda) + \lambda y(t,\lambda) - q(t)y(t,\lambda) = 0,$$

veya

$$y(t,\lambda)\left[v^2(t,\lambda) + v'(t,\lambda) + \lambda - q(t)\right] = 0$$

elde edilir. Son eşitlik gereğince, $v(t,\lambda)$ aşağıdaki Riccati diferansiyel denklemini sağlar:

$$v'(t,\lambda) = -\lambda + q(t) - v^2(t,\lambda). \tag{2.7}$$

Ayrıca (2.6)' dan

$$\frac{y'(t,\lambda)}{y(t,\lambda)} = \frac{R'(t,\lambda)\exp\left(i\theta(t,\lambda)\right) + R(t,\lambda)i\theta'(t,\lambda)\exp\left(i\theta(t,\lambda)\right)}{R(t,\lambda)\exp\left(i\theta(t,\lambda)\right)}$$

veya

$$\frac{y'(t,\lambda)}{y(t,\lambda)} = \frac{R'(t,\lambda)}{R(t,\lambda)} + i\theta'(t,\lambda) \tag{2.8}$$

bulunur. Bu son eşitlikten

$$S(t,\lambda) := \operatorname{Re}\{v(t,\lambda)\} \tag{2.9}$$

ve

$$T(t,\lambda) := \operatorname{Im}\{v(t,\lambda)\} \tag{2.10}$$

olmak üzere

$$S(t,\lambda) = \frac{R'(t,\lambda)}{R(t,\lambda)}, \; T(t,\lambda) = \theta'(t,\lambda) \tag{2.11}$$

elde edilir.

Şimdi (2.4) denkleminin reel değerli çözümünün varlığını ispatlamak için aşağıdaki lemmalar verilecektir.

Lemma 2.1 [20]: Eğer $R^2(t_0,\lambda)\theta'(t_0,\lambda) \neq 0$ olacak şekilde bir $t_0 \in [a,b]$ mevcutsa, $y_1(t,\lambda)$ ve $y_2(t,\lambda)$ reel değerli çözümleri lineer bağımsızdır.

İspat: İlk olarak, (2.5) ve (2.6)' dan

$$\begin{aligned} y_1(t,\lambda) + iy_2(t,\lambda) &= R(t,\lambda)\left[\cos\theta(t,\lambda) + i\sin\theta(t,\lambda)\right] \\ &= R(t,\lambda)\cos\theta(t,\lambda) + iR(t,\lambda)\sin\theta(t,\lambda) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda

$$y_1(t,\lambda) = R(t,\lambda)\cos\theta(t,\lambda),$$

$$y_2(t,\lambda) = R(t,\lambda)\sin\theta(t,\lambda)$$

ve böylece

$$y_1'(t,\lambda) = R'(t,\lambda)\cos\theta(t,\lambda) - R(t,\lambda)\theta'(t,\lambda)\sin\theta(t,\lambda),$$

$$y_2'(t,\lambda) = R'(t,\lambda)\sin\theta(t,\lambda) + R(t,\lambda)\theta'(t,\lambda)\cos\theta(t,\lambda)$$

olur. Bu değerler yardımıyla y_1 ve y_2 ' nin Wronskian determinantı hesaplanacak olursa

$$
\begin{aligned}
W(y_1,y_2)(t_0,\lambda) &= \begin{vmatrix} y_1(t_0,\lambda) & y_2(t_0,\lambda) \\ y_1'(t_0,\lambda) & y_2'(t_0,\lambda) \end{vmatrix} \\
&= R(t_0,\lambda)\cos\theta(t_0,\lambda) \\
&\quad \times\left[R'(t_0,\lambda)\sin\theta(t_0,\lambda)+R(t_0,\lambda)\theta'(t_0,\lambda)\cos\theta(t_0,\lambda)\right] \\
&\quad -R(t_0,\lambda)\sin\theta(t_0,\lambda) \\
&\quad \times\left[R'(t_0,\lambda)\cos\theta(t_0,\lambda)-R(t_0,\lambda)\theta'(t_0,\lambda)\sin\theta(t_0,\lambda)\right] \\
&= R^2(t_0,\lambda)\theta'(t_0,\lambda)
\end{aligned}
$$

bulunur. Son eşitlikten $W(y_1,y_2)(t_0,\lambda)=R^2(t_0,\lambda)\theta'(t_0,\lambda)\neq 0$' dır. Böylece $y_1(t,\lambda)$ ve $y_2(t,\lambda)$ fonksiyonlarının lineer bağımsız oldukları elde edilir. ■

Lemma 2.2 [20]: $z(t,\lambda)$ fonksiyonu, (2.4) denkleminin reel değerli bir çözümü olsun. Eğer $R(t_0,\lambda)^2\,\theta'(t_0,\lambda)\neq 0$ olacak şekilde bir $t_0\in[a,b]$ mevcutsa

$$z(t,\lambda)=p(t,\lambda)\cos\Psi(t,\lambda) \tag{2.12}$$

sağlanır. Burada

$$\frac{p'(t,\lambda)}{p(t,\lambda)}=\frac{R'(t,\lambda)}{R(t,\lambda)},\ \Psi'(t,\lambda)=\theta'(t,\lambda),\ t\in[a,b]. \tag{2.13}$$

İspat: c_1 ve c_2 keyfi reel sabitler olmak üzere Lemma 2.1' den

$$z(t,\lambda)=c_1y_1(t,\lambda)+c_2y_2(t,\lambda)=c_1R(t,\lambda)\cos\theta(t,\lambda)+c_2R(t,\lambda)\sin\theta(t,\lambda)$$

elde edilir. Dikkat edilirse

$$
\begin{aligned}
(c_1-ic_2)R(t,\lambda)\exp(i\theta(t,\lambda)) &= c_1R(t,\lambda)\cos\theta(t,\lambda)-ic_2R(t,\lambda)\cos\theta(t,\lambda) \\
&\quad +ic_1R(t,\lambda)\sin\theta(t,\lambda)-i^2c_2R(t,\lambda)\sin\theta(t,\lambda) \\
&= c_1R(t,\lambda)\cos\theta(t,\lambda)+c_2R(t,\lambda)\sin\theta(t,\lambda) \\
&\quad +iR(t,\lambda)\left[c_1\sin\theta(t,\lambda)-c_2\cos\theta(t,\lambda)\right]
\end{aligned}
$$

eşitliğinden

$$c_1R(t,\lambda)\cos\theta(t,\lambda)+c_2R(t,\lambda)\sin\theta(t,\lambda)=\operatorname{Re}\left\{(c_1-ic_2)R(t,\lambda)\exp(i\theta(t,\lambda))\right\}$$

olduğu görülür. Bu durumda; ε ve δ reel sabitler olmak üzere,

$$c_1 - ic_2 := \varepsilon \exp(i\delta)$$

tanımlanırsa

$$\begin{aligned} z(t,\lambda) &= \operatorname{Re}\{\varepsilon \exp(i\delta) R(t,\lambda) \exp(i\theta(t,\lambda))\} = \operatorname{Re}\{\varepsilon R(t,\lambda) \exp(i[\theta(t,\lambda)+\delta])\} \\ &= \varepsilon R(t,\lambda) \operatorname{Re}\{\cos[\theta(t,\lambda)+\delta] + i \sin[\theta(t,\lambda)+\delta]\} \\ &= \varepsilon R(t,\lambda) \cos[\theta(t,\lambda)+\delta] \end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlikte $p(t,\lambda) := \varepsilon R(t,\lambda)$, $\Psi(t,\lambda) := \theta(t,\lambda)+\delta$ alınırsa ispat tamamlanır. ■

Sonuç olarak, (2.11) ve (2.13)' ten

$$\begin{aligned} S(t,\lambda) = \frac{p'(t,\lambda)}{p(t,\lambda)} &\Rightarrow \int_a^t S(x,\lambda)\,dx = \int_a^t \frac{dp}{p} \\ &\Rightarrow p(t,\lambda) = c_1 \exp\left(\int_a^t S(x,\lambda)\,dx \right),\ c_1 = p(a,\lambda) \end{aligned} \tag{2.14}$$

ve

$$\begin{aligned} T(t,\lambda) = \Psi' &\Rightarrow \int_a^t T(x,\lambda)\,dx = \int_a^t d\Psi \\ &\Rightarrow \Psi(t,\lambda) = c_2 + \int_a^t T(x,\lambda)\,dx,\ c_2 = \Psi(a,\lambda) \end{aligned} \tag{2.15}$$

elde edilir. $S(t,\lambda)$ ve $T(t,\lambda)$ cinsinden elde edilen $p(t,\lambda)$ ve $\Psi(t,\lambda)$ değerleri (2.12)' de yerine yazılırsa, (2.4) denkleminin sıfırdan farklı reel değerli $z(t,\lambda)$ çözümü ve türevi

$$z(t,\lambda) = c_1 \exp\left(\int_a^t S(x,\lambda)\,dx \right) \cos\left\{ c_2 + \int_a^t T(x,\lambda)\,dx \right\}, \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned} z'(t,\lambda) = {} & c_1 S(t,\lambda) \exp\left(\int_a^t S(x,\lambda)\,dx \right) \cos\left\{ c_2 + \int_a^t T(x,\lambda)\,dx \right\} \\ & - c_1 T(t,\lambda) \exp\left(\int_a^t S(x,\lambda)\,dx \right) \sin\left\{ c_2 + \int_a^t T(x,\lambda)\,dx \right\} \end{aligned} \tag{2.17}$$

bulunur.

Şimdi, özfonksiyonlar için asimptotik yaklaşımlar elde etmek amacıyla hata terimlerinin belirlenmesinde kullanılmak üzere,

$$\left|\int_t^b e^{2i\lambda^{1/2}x} q(x)\,dx\right| \le A(t)\eta(\lambda),\ t\in[a,b] \tag{2.18}$$

eşitsizliğini sağlayacak $A(t)$ ve $\eta(\lambda)$ fonksiyonları belirlenecektir öyleki,

i) $A(t)$, t değişkeninin azalan bir fonksiyonu,

ii) $A(.)\in L[a,b]$,

iii) $\lambda\to\infty$ iken $\eta(\lambda)\to 0$

olacaktır. Bu esnada $\int_t^b |q(x)|\,dx = 0$ trivial durumu göz ardı edilecektir. $q(t)\in L[a,b]$ olduğundan $\left|\int_t^b e^{2i\lambda^{1/2}x} q(x)\,dx\right| \le \int_t^b |q(x)|\,dx < \infty$ bulunur. Böylece, bir $F(t,\lambda)$ fonksiyonu,

$$F(t,\lambda) := \begin{cases} \left|\int_t^b e^{2i\lambda^{1/2}x} q(x)\,dx\right| \Big/ \int_t^b |q(x)|\,dx, & \int_t^b |q(x)|\,dx \ne 0 \text{ ise,} \\ 0 & , \int_t^b |q(x)|\,dx = 0 \text{ ise,} \end{cases} \tag{2.19}$$

şeklinde tanımlanırsa $0\le F(t,\lambda)\le 1$ olduğu açıktır. $\eta(\lambda) := \sup\limits_{a\le t\le b} F(t,\lambda)$ olarak alınırsa (2.19)' dan $\eta(\lambda)$ fonksiyonu iyi tanımlıdır ve $\lambda\to\infty$ iken $\eta(\lambda)\to 0$ [20].

$A(t) := \int_t^b |q(x)|\,dx$ olarak tanımlansın. $t_1, t_2 \in [a,b]$ olmak üzere $t_1 < t_2$ için

$$A(t_1) - A(t_2) = \int_{t_1}^b |q(x)|\,dx - \int_{t_2}^b |q(x)|\,dx = \int_{t_1}^b |q(x)|\,dx + \int_b^{t_2} |q(x)|\,dx = \int_{t_1}^{t_2} |q(x)|\,dx > 0$$

yani, $A(t_1) > A(t_2)$ olduğundan $A(t)$ fonksiyonu azalandır. Ayrıca

$$\int_a^b A(t)\,dt = \int_a^b\int_t^b |q(x)|\,dx\,dt = \int_a^b\int_a^x |q(x)|\,dt\,dx = \int_a^b |q(x)| \int_a^x dt\,dx = \int_a^b |q(x)|(x-a)\,dx$$

$$\leq (b-a)\int_a^b |q(x)|dx < \infty$$

olduğundan $A(t) \in L[a,b]$' dir.

Böylece $\eta(\lambda) = \sup_{a \leq t \leq b} F(t,\lambda)$ ve $A(t) = \int_t^b |q(x)|dx$ seçimleriyle (2.18) eşitsizliği (i), (ii) ve (iii) koşulları ile sağlanmış olur.

Bu çalışmada genelliği bozmadan $\int_a^b q(x)dx = 0$ alınacaktır ve problemlerin yaklaşık özfonksiyonlarını hesaplamak için [10, 20] çalışmasındaki yönteme benzer yöntem uygulanacaktır. Bu amaçla $[a,b]$ aralığında (2.7) ile verilen $v'(t,\lambda) = -\lambda + q(t) - v^2(t,\lambda)$ denklemini göz önünde bulundurarak

$$v(t,\lambda) := i\lambda^{1/2} + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t,\lambda) \tag{2.20}$$

oluşturulsun. Bu eşitlik (2.7) denkleminde yerine yazılırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n'(t,\lambda) = -\lambda + q(t) - i^2\lambda - 2i\lambda^{1/2}\sum_{n=1}^{\infty} v_n(t,\lambda) - \left[\sum_{n=1}^{\infty} v_n(t,\lambda)\right]^2$$

olduğundan

$$\begin{aligned} v_1'(t,\lambda) + v_2'(t,\lambda) + \sum_{n=3}^{\infty} v_n'(t,\lambda) = -\lambda + q(t) + \lambda - 2i\lambda^{1/2} v_1(t,\lambda) \\ - 2i\lambda^{1/2} v_2(t,\lambda) - 2i\lambda^{1/2}\sum_{n=3}^{\infty} v_n(t,\lambda) \\ - v_1^2(t,\lambda) - \left[v_2^2(t,\lambda) + v_3^2(t,\lambda)\right. \\ + \ldots + v_n^2(t,\lambda) + \ldots \\ + 2v_1(t,\lambda)v_2(t,\lambda) + 2v_1(t,\lambda)v_3(t,\lambda) + \ldots \\ \left. + 2v_2(t,\lambda)v_3(t,\lambda) + 2v_2(t,\lambda)v_4(t,\lambda) + \ldots\right] \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikten v_n, $n \geq 1$, aşağıdaki şekilde seçilsin:

$$v_1'(t,\lambda)+2i\lambda^{1/2}v_1(t,\lambda)=q(t),$$
$$v_2'(t,\lambda)+2i\lambda^{1/2}v_2(t,\lambda)=-v_1^2(t,\lambda), \tag{2.21}$$
$$v_n'(t,\lambda)+2i\lambda^{1/2}v_n(t,\lambda)=-\left(v_{n-1}^2(t,\lambda)+2v_{n-1}(t,\lambda)\sum_{m=1}^{n-2}v_m(t,\lambda)\right),\ n\geq 3$$

ve

$$v_1(t,\lambda)=-e^{-2i\lambda^{1/2}t}\int_t^b e^{2i\lambda^{1/2}x}q(x)dx,$$
$$v_2(t,\lambda)=e^{-2i\lambda^{1/2}t}\int_t^b e^{2i\lambda^{1/2}x}v_1^2(x,\lambda)dx, \tag{2.22}$$
$$v_n(t,\lambda)=e^{-2i\lambda^{1/2}t}\int_t^b e^{2i\lambda^{1/2}x}\left(v_{n-1}^2(x,\lambda)+2v_{n-1}(x,\lambda)\sum_{m=1}^{n-2}v_m(x,\lambda)\right)dx,\ n\geq 3.$$

Bu seçimler altında aşağıdaki lemma, $\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t,\lambda)$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}v_n'(t,\lambda)$ serilerinin yakınsaklığını ispatlamak için kullanılacaktır:

Lemma 2.3 [20]: $9\eta(\lambda)(b-a)\int_a^b|q(x)|dx\leq 1$ ise $n\geq 1$ için

$$|v_n(t,\lambda)|\leq\frac{A(t)\eta(\lambda)}{2^{n-1}},\ \ t\in[a,b]$$

eşitsizliği sağlanır.

Ayrıca Lemma 2.3’ ün bir sonucu olarak aşağıdaki lemma elde edilir:

Lemma 2.4 [20]: $\{k_n\}$ bir reel sayılar dizisi olmak üzere

$$|v_n(t,\lambda)|\leq k_n\eta^n(\lambda)$$

eşitsizliği sağlanır.

Şimdi $\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t,\lambda)$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}v_n'(t,\lambda)$ serilerinin yakınsaklığı incelensin:

- $\sum_{n=1}^{\infty}|v_n(t,\lambda)|$ serisi göz önüne alınsın. Lemma 2.3’ ten $|v_n(t,\lambda)|\leq\frac{A(t)\eta(\lambda)}{2^{n-1}}$

olarak bulunmuştu. O halde ele alınan serinin kısmi toplamlar dizisi için

$$\sum_{n=1}^{m}\left|v_n(t,\lambda)\right| \le \sum_{n=1}^{m}\frac{A(t)\eta(\lambda)}{2^{n-1}} = A(t)\eta(\lambda)\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{2^{n-1}}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte $0 \le \eta(\lambda) \le 1$, $A(t)$ sınırlı ve azalan bir fonksiyon olduğundan, C pozitif bir sabit olmak üzere, $\sum_{n=1}^{m}\left|v_n(t,\lambda)\right| \le C\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{2^{n-1}}$ bulunur. $\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{2^{n-1}}$ serisi yakınsak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t,\lambda)$ serisi mutlak yakınsaktır. Ayrıca $\sum_{n=1}^{m}\left|v_n(t,\lambda)\right|$ serisinin yakınsaklığı t değişkeninden bağımsız olduğundan, Weierstrass M-Testi' nden bu yakınsama düzgündür.

- $\sum_{n=1}^{\infty}\left|v_n'(t,\lambda)\right|$ serisi göz önüne alınsın. (2.21) eşitliğinde

$$v_n'(t,\lambda) + 2i\lambda^{1/2}v_n(t,\lambda) = -\left(v_{n-1}^2(t,\lambda) + 2v_{n-1}(t,\lambda)\sum_{m=1}^{n-2}v_m(t,\lambda)\right)$$

olarak bulunmuştu. O halde ele alınan serinin kısmi toplamlar dizisi için

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m}\left|v_n'(t,\lambda)\right| \le 2\lambda^{1/2}\sum_{n=1}^{m}\left|v_n(t,\lambda)\right| + \sum_{n=1}^{m}\left|v_{n-1}(t,\lambda)\right|^2 \\ +2\sum_{n=1}^{m}\left(\left|v_{n-1}(t,\lambda)\right|\left|\sum_{s=1}^{n-2}v_s(t,\lambda)\right|\right)\end{aligned} \tag{2.23}$$

eşitsizliği mevcuttur. Bu eşitsizliğinin sağ tarafındaki ilk serinin düzgün yakınsak olduğu bir önceki adımda gösterildi. Ayrıca $\sum_{n=1}^{m}\left|v_n(t,\lambda)\right|$ serisi yakınsak olduğundan bir $n \ge n_0$ için $n \to \infty$ iken $\left|v_n(t,\lambda)\right| \to 0$' dır. Böylece $\left|v_n(t,\lambda)\right| \le 1$ olduğundan $\left|v_n(t,\lambda)\right|^2 \le \left|v_n(t,\lambda)\right|$. O halde $n \ge n_0$ için $\sum_{n=n_0}^{m}\left|v_n(t,\lambda)\right|^2 \le \sum_{n=n_0}^{m}\left|v_n(t,\lambda)\right|$ eşitsizliği sağlanır, yani (2.23) eşitsizliğinin ikinci terimi olan $\sum_{n=1}^{m}\left|v_{n-1}(t,\lambda)\right|^2$ serisi düzgün yakınsaktır. (2.23) eşitsizliğindeki üçüncü seri için ise

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\left|v_{n-1}(t,\lambda)\right|\left|\sum_{s=1}^{n-2}v_s(t,\lambda)\right|\right) \le \sum_{n=1}^{m}\left(\left|v_{n-1}(t,\lambda)\right|\sum_{s=1}^{n-2}\left|v_s(t,\lambda)\right|\right)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{m}\left(\left|v_{n-1}(t,\lambda)\right|\sum_{s=1}^{\infty}\left|v_s(t,\lambda)\right|\right)=\sum_{n=1}^{m}\left|v_{n-1}(t,\lambda)\right|\sum_{s=1}^{\infty}\left|v_s(t,\lambda)\right|<\infty$$

sağlandığından bu eşitsizlikten serinin düzgün yakınsaklığı elde edilir. Böylece $\sum_{n=1}^{\infty} v_n'(t,\lambda)$ serisi mutlak yakınsaktır. Ayrıca $\sum_{n=1}^{m}\left|v_n'(t,\lambda)\right|$ serisinin yakınsaklığı t değişkeninden bağımsız olduğundan, Weierstrass M- Testi' ne göre bu yakınsama düzgün-dür.

Sonuç olarak $t\in[a,b]$ için $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(t,\lambda)$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n{}'(t,\lambda)$ serileri düzgün mutlak yakınsaktır ve $v(t,\lambda)=i\lambda^{1/2}+\sum_{n=1}^{\infty} v_n(t,\lambda)$, (2.7) denkleminin bir çözümüdür. Dikkat edilirse $v_n(t,\lambda)$ fonsiyonları belirlenirken $v'(t,\lambda)=\left[i\lambda^{1/2}+\sum_{n=1}^{\infty} v_n(t,\lambda)\right]'=\sum_{n=1}^{\infty} v_n'(t,\lambda)$ eşitliği kullanılmıştı. $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(t,\lambda)$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} v_n{}'(t,\lambda)$ serilerinin düzgün mutlak yakınsak olduğu bulunduğundan bu eşitlik doğrudur. Böylece $T(t,\lambda):=\operatorname{Im}\{v(t,\lambda)\}$ olduğundan

$$T(t,\lambda)=\lambda^{1/2}+\operatorname{Im}\sum_{n=1}^{\infty} v_n(t,\lambda) \tag{2.24}$$

elde edilir.

2.1.1. Potansiyel Fonksiyonunun İntegrallenebilir Olması Durumu

Bu kısımda (2.1) problemi, belirtilen sınır koşulları altında ayrı ayrı göz önüne alınacak ve $q(t)$ potansiyel fonksiyonunun integrallenebilir olma şartı altında özfonksiyonları için asimptotik yaklaşımlar elde edilecektir. Bu amaçla, öncelikle problemin özfonksiyonları, ele alınan sınır koşuluna göre (2.16) ve (2.17)' den yararlanılarak, $S(t,\lambda)$ ve $T(t,\lambda)$ cinsinden ifade edilecektir. Daha sonra, bu ifadede bulunan terimler $\lambda\to\infty$ iken hesaplanarak asimptotik çözümler belirlenecektir.

İlk olarak, teoremleri ispatlamada kullanılacak olan aşağıdaki lemma verilsin:

Lemma 2.5: $\lambda \to \infty$ iken

i)

$$\int_a^t S(x,\lambda)dx = \frac{1}{2\lambda^{1/2}}\left\{\cos\left(2\lambda^{1/2}t+\xi_t\right)-\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\right\}+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right), \qquad (2.25)$$

ii)

$$\int_a^t T(x,\lambda)dx = \lambda^{1/2}(t-a)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\left\{\begin{array}{l}\sin\left(2\lambda^{1/2}t+\xi_t\right)-\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\ +\int_a^t q(x)dx\end{array}\right\} \qquad (2.26)$$
$$+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right).$$

Burada,

$$\sin\xi_t := \int_t^b q(x)\cos 2\lambda^{1/2}x dx,\ \cos\xi_t := \int_t^b q(x)\sin 2\lambda^{1/2}x dx. \qquad (2.27)$$

İspat:

i) $S(t,\lambda)$ fonksiyonu için, Coşkun ve Başkaya [11] tarafından elde edilen

$$S(t,\lambda) = -\sin\left(2\lambda^{1/2}t+\xi_t\right)+O\left(\eta^2(\lambda)\right) \qquad (2.28)$$

asimptotik yaklaşımı kullanılacaktır. İspat için, öncelikle

$$\int_a^t S(x,\lambda)dx = \int_a^b S(x,\lambda)dx-\int_t^b S(x,\lambda)dx \qquad (2.29)$$

alınır ve daha sonra eşitliğin sağ tarafındaki integrallerde, (2.28) değeri yerine yazılarak ayrı ayrı hesaplama yapılır.

İlk olarak $\int_a^b S(x,\lambda)dx$ integralinin asimptotik değeri, integralde değişkenlerin sırasını değiştirme yöntemiyle belirlenecektir. Buna göre; (2.27) ve (2.28)' den

$$\int_a^b S(x,\lambda)dx = -\int_a^b \cos 2\lambda^{1/2}x\left(\int_x^b q(t)\cos 2\lambda^{1/2}t dt\right)dx-\int_a^b \sin 2\lambda^{1/2}x\left(\int_x^b q(t)\sin 2\lambda^{1/2}t dt\right)dx$$
$$+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)$$

$$=-\int_a^b q(t)\cos 2\lambda^{1/2}t\int_a^t \cos 2\lambda^{1/2}x\,dx\,dt-\int_a^b q(t)\sin 2\lambda^{1/2}t\int_a^t \sin 2\lambda^{1/2}x\,dx\,dt+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)$$

$$=-\int_a^b q(t)\cos 2\lambda^{1/2}t\left[\frac{\sin 2\lambda^{1/2}x}{2\lambda^{1/2}}\right]_a^t dt-\int_a^b q(t)\sin 2\lambda^{1/2}t\left[-\frac{\cos 2\lambda^{1/2}x}{2\lambda^{1/2}}\right]_a^t dt+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)$$

$$=\frac{\sin 2\lambda^{1/2}a}{2\lambda^{1/2}}\int_a^b q(t)\cos 2\lambda^{1/2}t\,dt-\frac{\cos 2\lambda^{1/2}a}{2\lambda^{1/2}}\int_a^b q(t)\sin 2\lambda^{1/2}t\,dt$$

$$+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right) \tag{2.30}$$

$$=-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)$$

elde edilir. $\int_t^b S(x,\lambda)dx$ integralinin asimptotik değeri ise, kısmi integrasyon yöntemiyle belirlenecektir. Yine (2.27) ve (2.28) kullanılarak

$$\int_t^b S(x,\lambda)dx=-\int_t^b \cos 2\lambda^{1/2}x\left(\int_x^b q(t)\cos 2\lambda^{1/2}t\,dt\right)dx-\int_t^b \sin 2\lambda^{1/2}x\left(\int_x^b q(t)\sin 2\lambda^{1/2}t\,dt\right)dx$$

$$+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)$$

$$=-\left[\frac{\sin 2\lambda^{1/2}x}{2\lambda^{1/2}}\int_x^b q(t)\cos 2\lambda^{1/2}t\,dt\right]_t^b-\int_t^b q(x)\frac{\sin 2\lambda^{1/2}x}{2\lambda^{1/2}}\cos 2\lambda^{1/2}x\,dx$$

$$+\left[\frac{\cos 2\lambda^{1/2}x}{2\lambda^{1/2}}\int_x^b q(t)\sin 2\lambda^{1/2}t\,dt\right]_t^b+\int_t^b q(x)\frac{\cos 2\lambda^{1/2}x}{2\lambda^{1/2}}\sin 2\lambda^{1/2}x\,dx$$

$$+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)$$

$$=\frac{\sin 2\lambda^{1/2}t}{2\lambda^{1/2}}\int_t^b q(x)\cos 2\lambda^{1/2}x\,dx-\frac{\cos 2\lambda^{1/2}t}{2\lambda^{1/2}}\int_t^b q(x)\sin 2\lambda^{1/2}x\,dx$$

$$+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)$$

$$=-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\cos\left(2\lambda^{1/2}t+\xi_t\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right) \tag{2.31}$$

bulunur. Son olarak (2.30) ve (2.31) değerleri (2.29)’ da yerine yazılarak ispat tamamlanır.

ii) Benzer şekilde, $T(t,\lambda)$ fonksiyonu için Coşkun ve Başkaya [11] tarafından elde edilen

$$T(t,\lambda)=\lambda^{1/2}-\cos\left(2\lambda^{1/2}t+\xi_t\right)+O\left(\eta^2(\lambda)\right) \tag{2.32}$$

asimptotik yaklaşımı kullanılacaktır. İspat için, öncelikle

$$\int_a^t T(x,\lambda)dx = \int_a^b T(x,\lambda)dx - \int_t^b T(x,\lambda)dx \tag{2.33}$$

alınır ve daha sonra eşitliğin sağ tarafındaki integrallerde, (2.32) değeri yerine yazılarak ayrı ayrı hesaplama yapılır.

İlk olarak $\int_a^b T(x,\lambda)dx$ integralinin asimptotik değeri, integralde değişkenlerin sırasını değiştirme yöntemiyle belirlenecektir. Buna göre (2.27) ve (2.32)' den

$$\begin{aligned}
\int_a^b T(x,\lambda)dx &= \int_a^b \lambda^{1/2}dx + \int_a^b \sin 2\lambda^{1/2}x\left(\int_x^b q(t)\cos 2\lambda^{1/2}tdt\right)dx \\
&\quad - \int_a^b \cos 2\lambda^{1/2}x\left(\int_x^b q(t)\sin 2\lambda^{1/2}tdt\right)dx + O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right) \\
&= \lambda^{1/2}(b-a) + \int_a^b q(t)\cos 2\lambda^{1/2}t\int_a^t \sin 2\lambda^{1/2}xdxdt \\
&\quad - \int_a^b q(t)\sin 2\lambda^{1/2}t\int_a^t \cos 2\lambda^{1/2}xdxdt + O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right) \\
&= \lambda^{1/2}(b-a) + \int_a^b q(t)\cos 2\lambda^{1/2}t\left[-\frac{\cos 2\lambda^{1/2}x}{2\lambda^{1/2}}\right]\Bigg|_a^t dt \\
&\quad - \int_a^b q(t)\sin 2\lambda^{1/2}t\left[\frac{\sin 2\lambda^{1/2}x}{2\lambda^{1/2}}\right]\Bigg|_a^t dt + O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right) \\
&= \lambda^{1/2}(b-a) - \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\left\{\int_a^b q(t)dt - \sin\left(2\lambda^{1/2}a + \xi_a\right)\right\} \\
&\quad + O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)
\end{aligned} \tag{2.34}$$

elde edilir. $\int_t^b T(x,\lambda)dx$ integralinin asimptotik değeri ise, kısmi integrasyon yöntemiyle belirlenecektir. Yine (2.27) ve (2.32)' den

$$\begin{aligned}
\int_t^b T(x,\lambda)dx &= \int_t^b \lambda^{1/2}dx + \int_t^b \sin 2\lambda^{1/2}x\left(\int_x^b q(t)\cos 2\lambda^{1/2}tdt\right)dx \\
&\quad - \int_t^b \cos 2\lambda^{1/2}x\left(\int_x^b q(t)\sin 2\lambda^{1/2}tdt\right)dx + O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda^{1/2}(b-t) - \left[\frac{\cos 2\lambda^{1/2}x}{2\lambda^{1/2}}\int_x^b q(t)\cos 2\lambda^{1/2}tdt\right]\Bigg|_t^b \\
&\quad - \int_t^b q(x)\frac{\cos^2 2\lambda^{1/2}x}{2\lambda^{1/2}}dx - \left[\frac{\sin 2\lambda^{1/2}x}{2\lambda^{1/2}}\int_x^b q(t)\sin 2\lambda^{1/2}tdt\right]\Bigg|_t^b \\
&\quad - \int_t^b q(x)\frac{\sin^2 2\lambda^{1/2}x}{2\lambda^{1/2}}dx + O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right) \\
&= \lambda^{1/2}(b-t) - \frac{1}{2\lambda^{1/2}}\left[\int_t^b q(x)dx - \sin\left(2\lambda^{1/2}t+\xi_t\right)\right] + O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)
\end{aligned} \tag{2.35}$$

bulunur. Son olarak (2.34) ve (2.35) değerleri (2.33)' te yerine yazılarak ispat tamamlanır.

■

2.1.1.1. Lineer Durum (AN ve AD)

Aşağıdaki AN sınır koşulunu içeren problem göz önüne alınsın:

$$y''(t) + [\lambda - q(t)]y(t) = 0, \quad t \in [a,b], \tag{2.36}$$

$$y'(a) - [c\lambda + d]y(a) = 0, \quad c,d \in \mathbb{R},\ c \neq 0, \tag{2.37}$$

$$y'(b)\sin\beta - y(b)\cos\beta = 0, \quad \beta \in (0,\pi). \tag{2.38}$$

$\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.36) probleminin, sırasıyla

$$\Psi(a,\lambda) = 1, \Psi'(a,\lambda) = c\lambda + d \tag{2.39}$$

ve

$$\Phi(b,\lambda) = \sin\beta, \Phi'(b,\lambda) = \cos\beta \tag{2.40}$$

koşullarını sağlayan iki çözümü olsun.

Bu çözümlerin $S(t,\lambda)$ ve $T(t,\lambda)$ cinsinden genel formu aşağıdaki gibi bulunmuştur:

Teorem 2.1: $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.36) probleminin sırasıyla (2.39) ve (2.40) sınır koşullarını sağlayan çözümleri olsun. Bu durumda,

i)

$$\Psi(t,\lambda)=\frac{1}{\cos\left\{\cot^{-1}\left[\dfrac{T(a,\lambda)}{-c\lambda-d+S(a,\lambda)}\right]\right\}}\exp\left(\int_a^t S(x,\lambda)dx\right)$$
$$\times\cos\left\{\cot^{-1}\left[\frac{T(a,\lambda)}{-c\lambda-d+S(a,\lambda)}\right]+\int_a^t T(x,\lambda)dx\right\}, \tag{2.41}$$

ii)

$$\Phi(t,\lambda)=\frac{\sin\beta}{\cos\left\{\tan^{-1}\left[\dfrac{S(b,\lambda)-\cot\beta}{T(b,\lambda)}\right]\right\}}\exp\left(-\int_t^b S(x,\lambda)dx\right)$$
$$\times\cos\left\{\tan^{-1}\left[\frac{S(b,\lambda)-\cot\beta}{T(b,\lambda)}\right]-\int_t^b T(x,\lambda)dx\right\}. \tag{2.42}$$

İspat:

i) (2.36) probleminin, (2.16) ve (2.17) ile verilen $z(t,\lambda)$ çözümü ve türevi kullanılarak (2.39)' dan

$$\Psi(a,\lambda)=c_1\cos c_2=1, \tag{2.43}$$

$$\Psi'(a,\lambda)=c_1S(a,\lambda)\cos c_2-c_1T(a,\lambda)\sin c_2=c\lambda+d \tag{2.44}$$

sağlanır. (2.43)' ten

$$c_1=\frac{1}{\cos c_2} \tag{2.45}$$

elde edilir. Bu değer (2.44)' te kullanılırsa

$$c_2=\cot^{-1}\left[\frac{T(a,\lambda)}{-c\lambda-d+S(a,\lambda)}\right] \tag{2.46}$$

bulunur. O halde,

$$c_1=\frac{1}{\cos\left\{\cot^{-1}\left[\dfrac{T(a,\lambda)}{-c\lambda-d+S(a,\lambda)}\right]\right\}}\tag{2.47}$$

olur. Son olarak elde edilen c_1 ve c_2 değerleri (2.16)' da yerine yazılarak ispat tamamlanır.

ii) Benzer şekilde; (2.16), (2.17) ve (2.40)' tan

$$\Phi(b,\lambda)=c_1\exp\left(\int_a^b S(x,\lambda)dx\right)\cos\left\{c_2+\int_a^b T(x,\lambda)dx\right\}=\sin\beta\tag{2.48}$$

$$\begin{aligned}\Phi'(b,\lambda)&=c_1S(b,\lambda)\exp\left(\int_a^b S(x,\lambda)dx\right)\cos\left\{c_2+\int_a^b T(x,\lambda)dx\right\}\\&\quad-c_1T(b,\lambda)\exp\left(\int_a^b S(x,\lambda)dx\right)\sin\left\{c_2+\int_a^b T(x,\lambda)dx\right\}=\cos\beta\end{aligned}\tag{2.49}$$

sağlanır. Bu iki eşitlikten

$$c_1=\frac{\sin\beta}{\exp\left(\int_a^b S(x,\lambda)dx\right)\cos\left\{\tan^{-1}\left[\dfrac{S(b,\lambda)-\cot\beta}{T(b,\lambda)}\right]\right\}},\tag{2.50}$$

$$c_2=\tan^{-1}\left[\frac{S(b,\lambda)-\cot\beta}{T(b,\lambda)}\right]-\int_a^b T(x,\lambda)dx\tag{2.51}$$

bulunur. Son olarak elde edilen c_1 ve c_2 değerleri (2.16)' da yerine yazılarak ispat tamamlanır. ■

Aşağıdaki teoremde $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ çözümleri, $S(t,\lambda)$ ve $T(t,\lambda)$' nın asimptotik değerleri kullanılarak $\lambda\to\infty$ iken hesaplanmıştır:

Teorem 2.2: $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.36) probleminin sırasıyla (2.39) ve (2.40) sınır koşullarını sağlayan çözümleri olmak üzere, $\lambda\to\infty$ iken

i)

$$\Psi(t,\lambda)=c\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\left(1-\frac{c}{2}\int_a^t q(x)dx\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O(\eta(\lambda)),\tag{2.52}$$

ii)

$$\Phi(t,\lambda)=\sin\beta\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+\left(\frac{\sin\beta}{2}\int_t^b q(x)dx-\cos\beta\right)\lambda^{-1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)$$
$$+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right) \tag{2.53}$$

asimptotik çözümleri elde edilir.

İspat:

i) İspat için, Teorem 2.1 (i)' de elde edilen

$$\Psi(t,\lambda)=\frac{1}{\cos\left\{\cot^{-1}\left[\dfrac{T(a,\lambda)}{-c\lambda-d+S(a,\lambda)}\right]\right\}}\exp\left(\int_a^t S(x,\lambda)dx\right)$$
$$\times\cos\left\{\cot^{-1}\left[\frac{T(a,\lambda)}{-c\lambda-d+S(a,\lambda)}\right]+\int_a^t T(x,\lambda)dx\right\}$$

eşitliğindeki terimler $\lambda\to\infty$ iken hesaplanır. İlk olarak, sırasıyla (2.28) ve (2.32) ile verilen $S(t,\lambda)$ ve $T(t,\lambda)$ değerleri kullanılarak

$$\begin{aligned}\frac{T(a,\lambda)}{-c\lambda-d+S(a,\lambda)}&=\frac{\lambda^{1/2}-\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\eta^2(\lambda)\right)}{-c\lambda-d-\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\eta^2(\lambda)\right)}\\
&=\frac{\lambda^{1/2}-\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\eta^2(\lambda)\right)}{-c\lambda\left[1+\frac{d}{c}\lambda^{-1}+\frac{1}{c}\lambda^{-1}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\right]}\\
&=\left[-\frac{1}{c}\lambda^{-1/2}+\frac{1}{c}\lambda^{-1}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\right]\\
&\quad\times\left[1-\frac{d}{c}\lambda^{-1}-\frac{1}{c}\lambda^{-1}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\right]\\
&=-\frac{1}{c}\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\end{aligned} \tag{2.54}$$

bulunur. (2.54)' ten

$$\begin{aligned}\cot^{-1}\left[\frac{T(a,\lambda)}{-c\lambda-d+S(a,\lambda)}\right]&=\cot^{-1}\left[-\frac{1}{c}\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\right]\\
&=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{c}\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\end{aligned} \tag{2.55}$$

elde edilir. Böylece

$$\cos\left\{\cot^{-1}\left[\frac{T(a,\lambda)}{-c\lambda-d+S(a,\lambda)}\right]\right\}=\cos\left[\frac{\pi}{2}+\frac{1}{c}\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\right]$$
$$=\sin\left[-\frac{1}{c}\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\right] \tag{2.56}$$
$$=-\frac{1}{c}\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right),$$

$$\sin\left\{\cot^{-1}\left[\frac{T(a,\lambda)}{-c\lambda-d+S(a,\lambda)}\right]\right\}=\sin\left\{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{c}\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\right\}$$
$$=\cos\left\{\frac{1}{c}\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\right\} \tag{2.57}$$
$$=1-\frac{1}{2c^2}\lambda^{-1}+O\left(\lambda^{-3/2}\eta(\lambda)\right),$$

$$\frac{1}{\cos\left\{\cot^{-1}\left[\frac{T(a,\lambda)}{-c\lambda-d+S(a,\lambda)}\right]\right\}}=\frac{1}{-\frac{1}{c}\lambda^{-1/2}\left[1+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right]} \tag{2.58}$$
$$=-c\lambda^{1/2}+O\left(\eta(\lambda)\right)$$

olur. (2.25) ile verilen $\int_a^t S(x,\lambda)dx$ değeri kullanılarak

$$\exp\left(\int_a^t S(x,\lambda)dx\right)=\exp\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\left[\cos\left(2\lambda^{1/2}t+\xi_t\right)-\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\right]\\+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)\end{array}\right\}$$
$$=1+\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\left\{\cos\left(2\lambda^{1/2}t+\xi_t\right)-\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\right\} \tag{2.59}$$
$$+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)$$

ve ayrıca (2.26) ile verilen $\int_a^t T(x,\lambda)dx$ değeri kullanılarak

$$\sin\left(\int_a^t T(x,\lambda)dx\right)=\sin\left[\lambda^{1/2}(t-a)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)dx+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \sin\left[\lambda^{1/2}(t-a) - \frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)\,dx\right]\cos\left[O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right] \\
&\quad + \cos\left[\lambda^{1/2}(t-a) - \frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)\,dx\right]\sin\left[O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right] \\
&= \sin\left[\lambda^{1/2}(t-a) - \frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)\,dx\right] + O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right),
\end{aligned}
\tag{2.60}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos\left(\int_a^t T(x,\lambda)\,dx\right) &= \cos\left[\lambda^{1/2}(t-a) - \frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)\,dx + O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right] \\
&= \cos\left[\lambda^{1/2}(t-a) - \frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)\,dx\right]\cos\left[O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right] \\
&\quad - \sin\left[\lambda^{1/2}(t-a) - \frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)\,dx\right]\sin\left[O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right] \\
&= \cos\left[\lambda^{1/2}(t-a) - \frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)\,dx\right] + O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)
\end{aligned}
\tag{2.61}
$$

bulunur. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
&\cos\left\{\cot^{-1}\left[\frac{T(a,\lambda)}{-c\lambda - d + S(a,\lambda)}\right] + \int_a^t T(x,\lambda)\,dx\right\} \\
&\qquad = \cos\left\{\cot^{-1}\left[\frac{T(a,\lambda)}{-c\lambda - d + S(a,\lambda)}\right]\right\}\cos\left[\int_a^t T(x,\lambda)\,dx\right] \\
&\qquad\quad - \sin\left\{\cot^{-1}\left[\frac{T(a,\lambda)}{-c\lambda - d + S(a,\lambda)}\right]\right\}\sin\left[\int_a^t T(x,\lambda)\,dx\right] \\
&\qquad = \left[-\frac{1}{c}\lambda^{-1/2} + O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\right] \\
&\qquad\quad \times\left\{\cos\left[\lambda^{1/2}(t-a) - \frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)\,dx\right] + O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right\} \\
&\qquad\quad - \left[1 - \frac{1}{2c^2}\lambda^{-1} + O\left(\lambda^{-3/2}\eta(\lambda)\right)\right] \\
&\qquad\quad \times\left\{\sin\left[\lambda^{1/2}(t-a) - \frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)\,dx\right] + O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right\}
\end{aligned}
$$

$$=-\sin\left[\lambda^{1/2}(t-a)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)dx\right]$$
$$-\frac{1}{c}\lambda^{-1/2}\cos\left[\lambda^{1/2}(t-a)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)dx\right]+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right) \tag{2.62}$$

olur. Sonuç olarak; (2.58), (2.59) ve (2.62) ile elde edilen değerler (2.41)' de yerine yazılarak

$$\Psi(t,\lambda)=\left[-c\lambda^{1/2}+O(\eta(\lambda))\right]\times\left[1+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right]$$
$$\times\left\{\begin{array}{l}-\sin\left[\lambda^{1/2}(x-a)-\dfrac{1}{2\lambda^{1/2}}\displaystyle\int_a^t q(x)dx\right]\\ -\dfrac{1}{c}\lambda^{-1/2}\cos\left[\lambda^{1/2}(t-a)-\dfrac{1}{2\lambda^{1/2}}\displaystyle\int_a^t q(x)dx\right]+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\end{array}\right\}$$
$$=c\lambda^{1/2}\sin\left[\lambda^{1/2}(t-a)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)dx\right]+\cos\left[\lambda^{1/2}(t-a)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)dx\right]$$
$$+O(\eta(\lambda))$$

bulunur. Bu son eşitliğe trigonometrik açılım uygulanırsa

$$\Psi(t,\lambda)=c\lambda^{1/2}\left\{\begin{array}{l}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)\cos\left(\dfrac{1}{2\lambda^{1/2}}\displaystyle\int_a^t q(x)dx\right)\\ -\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)\sin\left(\dfrac{1}{2\lambda^{1/2}}\displaystyle\int_a^t q(x)dx\right)\end{array}\right\}$$
$$+\left\{\begin{array}{l}\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)\cos\left(\dfrac{1}{2\lambda^{1/2}}\displaystyle\int_a^t q(x)dx\right)\\ +\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)\sin\left(\dfrac{1}{2\lambda^{1/2}}\displaystyle\int_a^t q(x)dx\right)\end{array}\right\}+O(\eta(\lambda))$$
$$=c\lambda^{1/2}\left\{\begin{array}{l}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)\times\left[1+O\left(\lambda^{-1}\right)\right]\\ -\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)\times\left[\dfrac{1}{2\lambda^{1/2}}\displaystyle\int_a^t q(x)dx+O\left(\lambda^{-3/2}\right)\right]\end{array}\right\}$$
$$+\left\{\begin{array}{l}\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)\times\left[1+O\left(\lambda^{-1}\right)\right]\\ +\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)\times\left[\dfrac{1}{2\lambda^{1/2}}\displaystyle\int_a^t q(x)dx+O\left(\lambda^{-3/2}\right)\right]\end{array}\right\}+O(\eta(\lambda))$$

$$=c\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\left[1-\frac{c}{2}\int_a^t q(x)dx\right]\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O\left(\eta(\lambda)\right)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

ii) İspat için, benzer şekilde (2.42)' deki terimler $\lambda\to\infty$ iken hesaplanır. İlk olarak, (2.28) ve (2.32)' den

$$\begin{aligned}\frac{S(b,\lambda)-\cot\beta}{T(b,\lambda)}&=\frac{-\cot\beta+O\left(\eta^2(\lambda)\right)}{\lambda^{1/2}\left[1+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)\right]}\\&=-\lambda^{-1/2}\cot\beta+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)\end{aligned}\tag{2.63}$$

elde edilir. (2.63)' ten

$$\tan^{-1}\left[\frac{S(b,\lambda)-\cot\beta}{T(b,\lambda)}\right]=-\lambda^{-1/2}\cot\beta+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)\tag{2.64}$$

bulunur. Böylece

$$\cos\left\{\tan^{-1}\left[\frac{S(b,\lambda)-\cot\beta}{T(b,\lambda)}\right]\right\}=1-\frac{\lambda^{-1}\cot^2\beta}{2}+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right),\tag{2.65}$$

$$\sin\left\{\tan^{-1}\left[\frac{S(b,\lambda)-\cot\beta}{T(b,\lambda)}\right]\right\}=-\lambda^{-1/2}\cot\beta+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right),\tag{2.66}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sin\beta}{\cos\left\{\tan^{-1}\left[\frac{S(b,\lambda)-\cot\beta}{T(b,\lambda)}\right]\right\}}&=\frac{\sin\beta}{1-\frac{\lambda^{-1}\cot^2\beta}{2}+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)}\\&=\sin\beta\times\left[1+\frac{\lambda^{-1}\cot^2\beta}{2}+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\right]\\&=\sin\beta+\lambda^{-1}\frac{\cos^2\beta}{2\sin\beta}+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\end{aligned}\tag{2.67}$$

olur. (2.31) ile verilen $\int_t^b S(x,\lambda)dx$ değeri kullanılarak

$$\exp\left(-\int_t^b S(x,\lambda)dx\right)=1+\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\cos\left(2\lambda^{1/2}t+\xi_t\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)\tag{2.68}$$

elde edilir. Ayrıca (2.35) ile verilen $\int_t^b T(x,\lambda)dx$ değeri kullanılarak

$$\begin{aligned}\sin\left(\int_t^b T(x,\lambda)dx\right) &= \sin\left[\lambda^{1/2}(b-t)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_t^b q(x)dx + O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right] \\ &= \sin\left[\lambda^{1/2}(b-t)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_t^b q(x)dx\right]+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right),\end{aligned} \tag{2.69}$$

$$\begin{aligned}\cos\left(\int_t^b T(x,\lambda)dx\right) &= \cos\left[\lambda^{1/2}(b-t)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_t^b q(x)dx + O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right] \\ &= \cos\left[\lambda^{1/2}(b-t)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_t^b q(x)dx\right]+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\end{aligned} \tag{2.70}$$

bulunur. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\cos\left\{\tan^{-1}\left[\frac{S(b,\lambda)-\cot\beta}{T(b,\lambda)}\right]-\int_t^b T(x,\lambda)dx\right\} &= \left[1+O\left(\lambda^{-1}\right)\right] \\ &\times\left\{\cos\left[\lambda^{1/2}(b-t)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_t^b q(x)dx\right]+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right\} \\ &+\left[-\lambda^{-1/2}\cot\beta+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)\right] \\ &\times\left\{\sin\left[\lambda^{1/2}(b-t)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_t^b q(x)dx\right]+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right\} \\ &= \cos\left[\lambda^{1/2}(b-t)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_t^b q(x)dx\right] \\ &\quad -\lambda^{-1/2}\cot\beta\sin\left[\lambda^{1/2}(b-t)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_t^b q(x)dx\right]+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\end{aligned} \tag{2.71}$$

olur. Sonuç olarak; (i) şıkkında olduğu gibi (2.67), (2.68) ve (2.71) ile elde edilen değerler (2.42)' de yerine yazılarak ve trigonometrik açılımlar kullanılarak ispat tamamlanır. ■

Aşağıdaki AD sınır koşulunu içeren problem göz önüne alınsın:

$$y''(t)+\left[\lambda-q(t)\right]y(t)=0, \quad t\in[a,b], \tag{2.72}$$

$$y'(a)-[c\lambda+d]y(a)=0, \tag{2.73}$$

$$y(b)=0. \tag{2.74}$$

$\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.72) probleminin, sırasıyla

$$\Psi(a,\lambda)=1, \Psi'(a,\lambda)=c\lambda+d \tag{2.75}$$

ve

$$\Phi(b,\lambda)=0, \Phi'(b,\lambda)=1 \tag{2.76}$$

koşullarını sağlayan iki çözümü olsun.

Teorem 2.3: $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.72) probleminin, sırasıyla (2.75) ve (2.76) sınır koşullarını sağlayan çözümleri olsun. Bu durumda,

i)

$$\begin{aligned}\Psi(t,\lambda)=&\frac{1}{\cos\left\{\cot^{-1}\left[\dfrac{T(a,\lambda)}{-c\lambda-d+S(a,\lambda)}\right]\right\}}\exp\left(\int_a^t S(x,\lambda)dx\right)\\&\times\cos\left\{\cot^{-1}\left[\frac{T(a,\lambda)}{-c\lambda-d+S(a,\lambda)}\right]+\int_a^t T(x,\lambda)dx\right\},\end{aligned} \tag{2.77}$$

ii)

$$\Phi(t,\lambda)=-\frac{1}{T(b,\lambda)}\exp\left(-\int_t^b S(x,\lambda)dx\right)\cos\left\{\frac{\pi}{2}-\int_t^b T(x,\lambda)dx\right\}. \tag{2.78}$$

İspat:

i) İspat, Teorem 2.1 (i)' de verilmiştir.

ii) Öncelikle (2.16), (2.17) ve (2.76) kullanılarak

$$\Phi(b,\lambda)=c_1\exp\left(\int_a^b S(x,\lambda)dx\right)\cos\left\{c_2+\int_a^b T(x,\lambda)dx\right\}=0, \tag{2.79}$$

$$\begin{aligned}\Phi'(b,\lambda)=&c_1S(b,\lambda)\exp\left(\int_a^b S(x,\lambda)dx\right)\cos\left\{c_2+\int_a^b T(x,\lambda)dx\right\}\\&-c_1T(b,\lambda)\exp\left(\int_a^b S(x,\lambda)dx\right)\sin\left\{c_2+\int_a^b T(x,\lambda)dx\right\}=1\end{aligned} \tag{2.80}$$

elde edilir. (2.79)' dan

$$c_2+\int_a^b T(x,\lambda)dx=\frac{\pi}{2}\Rightarrow c_2=\frac{\pi}{2}-\int_a^b T(x,\lambda)dx \tag{2.81}$$

bulunur. Bu değer (2.80)' de kullanılırsa

$$c_1=-\frac{1}{T(b,\lambda)\exp\left(\int_a^b S(x,\lambda)dx\right)} \tag{2.82}$$

olur. Son olarak elde edilen c_1 ve c_2 değerleri (2.16)' da yerine yazılarak ispat tamamlanır.

■

Teorem 2.4: $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.72) probleminin sırasıyla (2.75) ve (2.76) sınır koşullarını sağlayan çözümleri olmak üzere, $\lambda\to\infty$ iken

i)

$$\Psi(t,\lambda)=c\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\left[1-\frac{c}{2}\int_a^t q(x)dx\right]\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O\left(\eta(\lambda)\right), \tag{2.83}$$

ii)

$$\begin{aligned}\Phi(t,\lambda)=&-\lambda^{-1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+\frac{1}{2}\lambda^{-1}\left(\int_t^b q(x)dx\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)\\&+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\end{aligned} \tag{2.84}$$

asimptotik çözümleri elde edilir.

İspat:

i) İspat, Teorem 2.2 (i)' de verilmiştir.

ii) İspat için, (2.78)' deki terimler $\lambda\to\infty$ iken hesaplanır. İlk olarak, (2.32)' den

$$\begin{aligned}-\frac{1}{T(b,\lambda)}=-\frac{1}{\lambda^{1/2}+O\left(\eta^2(\lambda)\right)}&=-\frac{1}{\lambda^{1/2}\left[1+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)\right]}\\&=-\lambda^{-1/2}\times\left[1+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)\right]\\&=-\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\end{aligned} \tag{2.85}$$

bulunur. Ayrıca, (2.69)' dan

$$\cos\left\{\frac{\pi}{2}-\int_t^b T(x,\lambda)dx\right\}=\sin\left[\lambda^{1/2}(b-t)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_t^b q(x)dx\right]+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right) \qquad (2.86)$$

elde edilir.

Sonuç olarak; (2.68), (2.85) ve (2.86) ile elde edilen değerler (2.78)' de yerine yazılarak ve trigonometrik açılımlar kullanılarak ispat tamamlanır. ■

2.1.1.2. Bilineer Durum (BN ve BD)

Aşağıdaki BN sınır koşulunu içeren problem göz önüne alınsın:

$$y''(t)+[\lambda-q(t)]y(t)=0, \quad t\in[a,b], \qquad (2.87)$$

$$[e\lambda+f]y'(a)-[c\lambda+d]y(a)=0, \quad e\neq 0, \qquad (2.88)$$

$$y'(b)\sin\beta-y(b)\cos\beta=0, \quad \beta\in(0,\pi). \qquad (2.89)$$

$\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.87) probleminin, sırasıyla

$$\Psi(a,\lambda)=e\lambda+f, \Psi'(a,\lambda)=c\lambda+d \qquad (2.90)$$

ve

$$\Phi(b,\lambda)=\sin\beta, \Phi'(b,\lambda)=\cos\beta \qquad (2.91)$$

koşullarını sağlayan iki çözümü olsun.

Teorem 2.5: $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.87) probleminin sırasıyla (2.90) ve (2.91) sınır koşullarını sağlayan çözümleri olsun. Bu durumda,

i)

$$\Psi(t,\lambda)=\frac{e\lambda+f}{\cos\left\{\tan^{-1}\left[\frac{1}{T(a,\lambda)}\left(S(a,\lambda)-\frac{c\lambda+d}{e\lambda+f}\right)\right]\right\}}\exp\left(\int_a^t S(x,\lambda)dx\right)$$

$$\times\cos\left\{\tan^{-1}\left[\frac{1}{T(a,\lambda)}\left(S(a,\lambda)-\frac{c\lambda+d}{e\lambda+f}\right)\right]+\int_a^t T(x,\lambda)\,dx\right\}, \tag{2.92}$$

ii)

$$\Phi(t,\lambda)=\frac{\sin\beta}{\cos\left\{\tan^{-1}\left[\dfrac{S(b,\lambda)-\cot\beta}{T(b,\lambda)}\right]\right\}}\exp\left(-\int_t^b S(x,\lambda)\,dx\right)$$
$$\times\cos\left\{\tan^{-1}\left[\frac{S(b,\lambda)-\cot\beta}{T(b,\lambda)}\right]-\int_t^b T(x,\lambda)\,dx\right\}. \tag{2.93}$$

İspat:

i) Öncelikle (2.16), (2.17) ve (2.90) kullanılarak

$$\Psi(a,\lambda)=c_1\cos c_2=e\lambda+f \tag{2.94}$$

$$\Psi'(a,\lambda)=c_1S(a,\lambda)\cos c_2-c_1T(a,\lambda)\sin c_2=c\lambda+d \tag{2.95}$$

elde edilir. Bu iki eşitlikten

$$c_1=\frac{e\lambda+f}{\cos\left\{\tan^{-1}\left[\dfrac{1}{T(a,\lambda)}\left(S(a,\lambda)-\dfrac{c\lambda+d}{e\lambda+f}\right)\right]\right\}}, \tag{2.96}$$

$$c_2=\tan^{-1}\left[\frac{1}{T(a,\lambda)}\left(S(a,\lambda)-\frac{c\lambda+d}{e\lambda+f}\right)\right] \tag{2.97}$$

bulunur. Son olarak elde edilen c_1 ve c_2 değerleri (2.16)' da yerine yazılarak ispat tamamlanır.

ii) İspat, Teorem 2.1 (ii)' de verilmiştir. ■

Teorem 2.6: $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.87) probleminin sırasıyla (2.90) ve (2.91) sınır koşullarını sağlayan çözümleri olmak üzere, $\lambda\to\infty$ iken

i)

$$\Psi(t,\lambda)=e\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\lambda^{1/2}\left[c+\frac{e}{2}\int_a^t q(x)\,dx\right]\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)$$
$$+O\left(\lambda^{1/2}\eta(\lambda)\right), \tag{2.98}$$

ii)

$$\Phi(t,\lambda)=\sin\beta\left(\cos\lambda^{1/2}(b-t)\right)+\lambda^{-1/2}\left[\frac{\sin\beta}{2}\int_t^b q(x)\,dx-\cos\beta\right]\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)$$
$$+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right) \tag{2.99}$$

asimptotik çözümleri elde edilir.

İspat:

i) İspat için, (2.92)' deki terimler $\lambda\to\infty$ iken hesaplanır. İlk olarak, (2.28) ve (2.32)' den

$$\begin{aligned}
\frac{S(a,\lambda)}{T(a,\lambda)}&=\frac{-\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\eta^2(\lambda)\right)}{\lambda^{1/2}-\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\eta^2(\lambda)\right)}\\
&=-\frac{\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\eta^2(\lambda)\right)}{\lambda^{1/2}\left[1-\lambda^{-1/2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)\right]}\\
&=\left[-\lambda^{-1/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)\right]\\
&\quad\times\left[1+\lambda^{-1/2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)\right]\\
&=-\lambda^{-1/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)
\end{aligned} \tag{2.100}$$

ve

$$\begin{aligned}
\frac{c\lambda+d}{(e\lambda+f)T(a,\lambda)}&=\frac{c\lambda+d}{(e\lambda+f)\times\left[\lambda^{1/2}-\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\eta^2(\lambda)\right)\right]}\\
&=\frac{c\lambda+d}{\left[\begin{array}{l}e\lambda^{3/2}-e\lambda\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+f\lambda^{1/2}-f\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\ +O\left(\lambda\eta^2(\lambda)\right)\end{array}\right]}
\end{aligned}$$

$$=\frac{c\lambda+d}{e\lambda^{3/2}\begin{bmatrix}1-\lambda^{-1/2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+\frac{f}{e}\lambda^{-1}\\-\frac{f}{e}\lambda^{-3/2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)\end{bmatrix}}$$

$$=\left[\frac{c}{e}\lambda^{-1/2}+\frac{d}{e}\lambda^{-3/2}\right]\times\begin{bmatrix}1+\lambda^{-1/2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)-\frac{f}{e}\lambda^{-1}\\+\frac{f}{e}\lambda^{-3/2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)\end{bmatrix} \qquad (2.101)$$

$$=\frac{c}{e}\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)$$

elde edilir. Bu son iki eşitlikten

$$\begin{aligned}\frac{S(a,\lambda)}{T(a,\lambda)}-\frac{c\lambda+d}{(e\lambda+f)T(a,\lambda)}&=-\lambda^{-1/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)-\frac{c}{e}\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)\\&\quad+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\\&=-\frac{c}{e}\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right).\end{aligned} \qquad (2.102)$$

bulunur. (2.102)’ den

$$\begin{aligned}\tan^{-1}\left[\frac{S(a,\lambda)}{T(a,\lambda)}-\frac{c\lambda+d}{(e\lambda+f)T(a,\lambda)}\right]&=\tan^{-1}\left[-\frac{c}{e}\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right]\\&=-\frac{c}{e}\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right),\end{aligned} \qquad (2.103)$$

$$\begin{aligned}\cos\left\{\tan^{-1}\left[\frac{S(a,\lambda)}{T(a,\lambda)}-\frac{c\lambda+d}{(e\lambda+f)T(a,\lambda)}\right]\right\}&=\cos\left[-\frac{c}{e}\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right]\\&=1-\frac{1}{2}\left(\frac{c}{e}\right)^2\lambda^{-1}+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right),\end{aligned} \qquad (2.104)$$

$$\begin{aligned}\sin\left\{\tan^{-1}\left[\frac{S(a,\lambda)}{T(a,\lambda)}-\frac{c\lambda+d}{(e\lambda+f)T(a,\lambda)}\right]\right\}&=\sin\left[-\frac{c}{e}\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right]\\&=-\frac{c}{e}\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\end{aligned} \qquad (2.105)$$

olur. Böylece (2.104)’ ten

$$\frac{e\lambda+f}{\cos\left\{\tan^{-1}\left[\dfrac{S(a,\lambda)}{T(a,\lambda)}-\dfrac{c\lambda+d}{(e\lambda+f)T(a,\lambda)}\right]\right\}}=\frac{e\lambda+f}{1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c}{e}\right)^2\lambda^{-1}+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)}$$

$$=(e\lambda+f)\times\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{c}{e}\right)^2\lambda^{-1}+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\right] \qquad (2.106)$$

$$=e\lambda+\left(\frac{c^2}{2e}+f\right)+O\left(\eta(\lambda)\right)$$

elde edilir. Ayrıca (2.60), (2.61), (2.104) ve (2.105)’ ten

$$\cos\left\{\tan^{-1}\left[\frac{S(a,\lambda)}{T(a,\lambda)}-\frac{c\lambda+d}{(e\lambda+f)T(a,\lambda)}\right]+\int_a^t T(x,\lambda)dx\right\}$$

$$=\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{c}{e}\right)^2\lambda^{-1}+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\right]$$

$$\times\left\{\cos\left[\lambda^{1/2}(t-a)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)dx\right]+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right\}$$

$$-\left[-\frac{c}{e}\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right]$$

$$\times\left\{\sin\left[\lambda^{1/2}(t-a)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)dx\right]+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right\}$$

$$=\cos\left[\lambda^{1/2}(t-a)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)dx\right]+\frac{c}{e}\lambda^{-1/2}$$
$$\times\sin\left[\lambda^{1/2}(t-a)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)dx\right]+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right) \qquad (2.107)$$

bulunur. Sonuç olarak; (2.59), (2.106) ve (2.107) ile elde edilen değerler (2.92)’ de yerine yazılarak ve trigonometrik açılımlar kullanılarak ispat tamamlanır.

ii) İspat, Teorem 2.2 (ii)’ de verilmiştir. ■

Aşağıdaki BD sınır koşulunu içeren problem göz önüne alınsın:

$$y''(t)+\left[\lambda-q(t)\right]y(t)=0, \quad t\in[a,b], \qquad (2.108)$$

$$[e\lambda+f]y'(a)-[c\lambda+d]y(a)=0, \quad e\neq 0, \qquad (2.109)$$

$$y(b)=0. \tag{2.110}$$

$\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.108) probleminin, sırasıyla

$$\Psi(a,\lambda)=e\lambda+f,\Psi'(a,\lambda)=c\lambda+d \tag{2.111}$$

ve

$$\Phi(b,\lambda)=0,\Phi'(b,\lambda)=1 \tag{2.112}$$

koşullarını sağlayan iki çözümü olsun.

Teorem 2.7: $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.108) probleminin sırasıyla (2.111) ve (2.112) sınır koşullarını sağlayan çözümleri olsun. Bu durumda

i)

$$\begin{aligned}\Psi(t,\lambda)=&\frac{e\lambda+f}{\cos\left\{\tan^{-1}\left[\dfrac{S(a,\lambda)}{T(a,\lambda)}-\dfrac{c\lambda+d}{[e\lambda+f]T(a,\lambda)}\right]\right\}}\exp\left(\int_a^t S(x,\lambda)dx\right)\\&\times\cos\left\{\tan^{-1}\left[\frac{S(a,\lambda)}{T(a,\lambda)}-\frac{c\lambda+d}{[e\lambda+f]T(a,\lambda)}\right]+\int_a^t T(x,\lambda)dx\right\},\end{aligned} \tag{2.113}$$

ii)

$$\Phi(t,\lambda)=-\frac{1}{T(b,\lambda)}\exp\left(-\int_t^b S(x,\lambda)dx\right)\cos\left\{\frac{\pi}{2}-\int_t^b T(x,\lambda)dx\right\}. \tag{2.114}$$

İspat:

i) İspat, Teorem 2.5 (i)' de verilmiştir.

ii) İspat, Teorem 2.3 (ii)' de verilmiştir. ■

Teorem 2.8: $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.108) probleminin sırasıyla (2.111) ve (2.112) sınır koşullarını sağlayan çözümleri olmak üzere, $\lambda\to\infty$ iken

i)

$$\begin{aligned}\Psi(t,\lambda)=&e\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\lambda^{1/2}\left[c+\frac{e}{2}\int_a^t q(x)dx\right]\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)\\&+O\left(\lambda^{1/2}\eta(\lambda)\right),\end{aligned} \tag{2.115}$$

ii)

$$\Phi(t,\lambda) = -\lambda^{-1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right) + \frac{1}{2}\lambda^{-1}\left(\int_t^b q(x)\,dx\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right) + O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right) \tag{2.116}$$

asimptotik çözümleri elde edilir.

İspat:

i) İspat, Teorem 2.6 (i)' de verilmiştir.

ii) İspat, Teorem 2.4 (ii)' de verilmiştir. ■

2.1.1.3. Kuadratik Durum (KN ve KD)

Aşağıdaki KN sınır koşulunu içeren problem göz önüne alınsın:

$$y''(t) + [\lambda - q(t)]y(t) = 0, \quad t \in [a,b], \tag{2.117}$$

$$y'(a) - [c\lambda^2 + d\lambda + e]y(a) = 0, \quad c \neq 0, \tag{2.118}$$

$$y'(b)\sin\beta - y(b)\cos\beta = 0, \quad \beta \in (0,\pi). \tag{2.119}$$

$\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.117) probleminin, sırasıyla

$$\Psi(a,\lambda) = 1, \Psi'(a,\lambda) = c\lambda^2 + d\lambda + e \tag{2.120}$$

ve

$$\Phi(b,\lambda) = \sin\beta, \Phi'(b,\lambda) = \cos\beta \tag{2.121}$$

koşullarını sağlayan iki çözümü olsun.

Teorem 2.9: $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.117) probleminin sırasıyla (2.120) ve (2.121) sınır koşullarını sağlayan çözümleri olsun. Bu durumda

i)

$$\Psi(t,\lambda)=\frac{1}{\cos\left\{\cot^{-1}\left[\dfrac{T(a,\lambda)}{-c\lambda^2-d\lambda-e+S(a,\lambda)}\right]\right\}}\exp\left(\int_a^t S(x,\lambda)dx\right)$$
$$\times\cos\left\{\cot^{-1}\left[\frac{T(a,\lambda)}{-c\lambda^2-d\lambda-e+S(a,\lambda)}\right]+\int_a^t T(x,\lambda)dx\right\}, \tag{2.122}$$

ii)

$$\Phi(t,\lambda)=\frac{\sin\beta}{\cos\left\{\tan^{-1}\left[\dfrac{S(b,\lambda)-\cot\beta}{T(b,\lambda)}\right]\right\}}\exp\left(-\int_t^b S(x,\lambda)dx\right)$$
$$\times\cos\left\{\tan^{-1}\left[\frac{S(b,\lambda)-\cot\beta}{T(b,\lambda)}\right]-\int_t^b T(x,\lambda)dx\right\}. \tag{2.123}$$

İspat:

i) Öncelikle (2.16), (2.17) ve (2.120) kullanılarak

$$\Psi(a,\lambda)=c_1\cos c_2=1 \tag{2.124}$$

$$\Psi'(a,\lambda)=c_1S(a,\lambda)\cos c_2-c_1T(a,\lambda)\sin c_2=c\lambda^2+d\lambda+e \tag{2.125}$$

elde edilir. Bu iki eşitlikten

$$c_1=\frac{1}{\cos\left\{\cot^{-1}\left[\dfrac{T(a,\lambda)}{-c\lambda^2-d\lambda-e+S(a,\lambda)}\right]\right\}}, \tag{2.126}$$

$$c_2=\cot^{-1}\left[\frac{T(a,\lambda)}{-c\lambda^2-d\lambda-e+S(a,\lambda)}\right] \tag{2.127}$$

bulunur. Son olarak elde edilen c_1 ve c_2 değerleri (2.16)' da yerine yazılarak ispat tamamlanır.

ii) İspat, Teorem 2.1 (ii)' de verilmiştir. ■

Teorem 2.10: $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.117) probleminin sırasıyla (2.120) ve (2.121) sınır koşullarını sağlayan çözümleri olmak üzere, $\lambda\to\infty$ iken

i)

$$\Psi(t,\lambda)=c\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)-\frac{c}{2}\lambda\left(\int_a^t q(x)dx\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O\left(\lambda\eta(\lambda)\right), \quad (2.128)$$

ii)

$$\begin{aligned}\Phi(t,\lambda)=&\sin\beta\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+\lambda^{-1/2}\left[\frac{\sin\beta}{2}\int_t^b q(x)dx-\cos\beta\right]\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)\\&+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\end{aligned} \quad (2.129)$$

asimptotik çözümleri elde edilir.

İspat:

i) İspat için, (2.122)' deki terimler $\lambda\to\infty$ iken hesaplanır. İlk olarak, (2.28) ve (2.32)' den

$$\begin{aligned}\frac{T(a,\lambda)}{-c\lambda^2-d\lambda-e+S(a,\lambda)}&=\frac{\lambda^{1/2}-\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\eta^2(\lambda)\right)}{-c\lambda^2-d\lambda-e-\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\eta^2(\lambda)\right)}\\&=\frac{\lambda^{1/2}-\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\eta^2(\lambda)\right)}{-c\lambda^2\left[1+\frac{d}{c}\lambda^{-1}+\frac{e}{c}\lambda^{-2}+\frac{1}{c}\lambda^{-2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right)\right]}\\&=\left[-\frac{1}{c}\lambda^{-3/2}+\frac{1}{c}\lambda^{-2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right)\right]\\&\quad\times\left[1-\frac{d}{c}\lambda^{-1}-\frac{e}{c}\lambda^{-2}-\frac{1}{c}\lambda^{-2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right)\right]\\&=-\frac{1}{c}\lambda^{-3/2}+O\left(\lambda^{-2}\eta(\lambda)\right)\end{aligned} \quad (2.130)$$

elde edilir. (2.130)' dan

$$\begin{aligned}\cot^{-1}\left[\frac{T(a,\lambda)}{-c\lambda^2-d\lambda-e+S(a,\lambda)}\right]&=\cot^{-1}\left[-\frac{1}{c}\lambda^{-3/2}+O\left(\lambda^{-2}\eta(\lambda)\right)\right]\\&=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{c}\lambda^{-3/2}+O\left(\lambda^{-2}\eta(\lambda)\right),\end{aligned} \quad (2.131)$$

$$\cos\left\{\cot^{-1}\left[\frac{T(a,\lambda)}{-c\lambda^2-d\lambda-e+S(a,\lambda)}\right]\right\}=\cos\left[\frac{\pi}{2}+\frac{1}{c}\lambda^{-3/2}+O\left(\lambda^{-2}\eta(\lambda)\right)\right]$$
$$=-\sin\left[\frac{1}{c}\lambda^{-3/2}+O\left(\lambda^{-2}\eta(\lambda)\right)\right] \tag{2.132}$$
$$=-\frac{1}{c}\lambda^{-3/2}+O\left(\lambda^{-2}\eta(\lambda)\right),$$

$$\sin\left\{\cot^{-1}\left[\frac{T(a,\lambda)}{-c\lambda^2-d\lambda-e+S(a,\lambda)}\right]\right\}=\sin\left\{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{c}\lambda^{-3/2}+O\left(\lambda^{-2}\eta(\lambda)\right)\right\}$$
$$=\cos\left\{\frac{1}{c}\lambda^{-3/2}+O\left(\lambda^{-2}\eta(\lambda)\right)\right\} \tag{2.133}$$
$$=1-\frac{1}{2c^2}\lambda^{-3}+O\left(\lambda^{-7/2}\eta(\lambda)\right)$$

bulunur ve böylece (2.132)' den

$$\frac{1}{\cos\left\{\cot^{-1}\left[\dfrac{T(a,\lambda)}{-c\lambda^2-d\lambda-e+S(a,\lambda)}\right]\right\}}=\frac{1}{-\frac{1}{c}\lambda^{-3/2}\left[1+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right]} \tag{2.134}$$
$$=-c\lambda^{3/2}+O\left(\lambda\eta(\lambda)\right)$$

olur. Ayrıca (2.60), (2.61), (2.132) ve (2.133)' ten

$$\cos\left\{\cot^{-1}\left[\frac{T(a,\lambda)}{-c\lambda^2-d\lambda-e+S(a,\lambda)}\right]+\int_a^t T(x,\lambda)dx\right\}$$
$$=\left\{-\frac{1}{c}\lambda^{-3/2}+O\left(\lambda^{-2}\eta(\lambda)\right)\right\}$$
$$\times\left\{\cos\left[\lambda^{1/2}(t-a)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)dx\right]+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right\}$$
$$-\left\{1-\frac{1}{2c^2}\lambda^{-3}+O\left(\lambda^{-7/2}\eta(\lambda)\right)\right\} \tag{2.135}$$
$$\times\left\{\sin\left[\lambda^{1/2}(t-a)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)dx\right]+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right\}$$
$$=-\sin\left[\lambda^{1/2}(t-a)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)dx\right]+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)$$

elde edilir. Sonuç olarak; (2.59), (2.134) ve (2.135) ile elde edilen değerler (2.122)' de yerine yazılarak ve trigonometrik açılımlar kullanılarak ispat tamamlanır.

ii) İspat, Teorem 2.2 (ii)' de verilmiştir. ■

Aşağıdaki KD sınır koşulunu içeren problem göz önüne alınsın:

$$y''(t)+[\lambda-q(t)]y(t)=0, \quad t\in[a,b], \tag{2.136}$$

$$y'(a)-[c\lambda^2+d\lambda+e]y(a)=0, \quad c\neq 0, \tag{2.137}$$

$$y(b)=0. \tag{2.138}$$

$\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.136) probleminin, sırasıyla

$$\Psi(a,\lambda)=1, \Psi'(a,\lambda)=c\lambda^2+d\lambda+e \tag{2.139}$$

ve

$$\Phi(b,\lambda)=0, \Phi'(b,\lambda)=1 \tag{2.140}$$

koşullarını sağlayan iki çözümü olsun.

Teorem 2.11: $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.136) probleminin sırasıyla (2.139) ve (2.140) sınır koşullarını sağlayan çözümleri olsun. Bu durumda,

i)

$$\begin{aligned}\Psi(t,\lambda)=&\frac{1}{\cos\left\{\cot^{-1}\left[\dfrac{T(a,\lambda)}{-c\lambda^2-d\lambda-e+S(a,\lambda)}\right]\right\}}\exp\left(\int_a^t S(x,\lambda)dx\right)\\&\times\cos\left\{\cot^{-1}\left[\frac{T(a,\lambda)}{-c\lambda^2-d\lambda-e+S(a,\lambda)}\right]+\int_a^t T(x,\lambda)dx\right\},\end{aligned} \tag{2.141}$$

ii)

$$\Phi(t,\lambda)=-\frac{1}{T(b,\lambda)}\exp\left(-\int_t^b S(x,\lambda)dx\right)\cos\left\{\frac{\pi}{2}-\int_t^b T(x,\lambda)dx\right\}. \tag{2.142}$$

İspat:

i) İspat, Teorem 2.9 (i)' de verilmiştir.

ii) İspat, Teorem 2.3 (ii)' de verilmiştir. ■

Teorem 2.12: $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.136) probleminin sırasıyla (2.139) ve (2.140) sınır koşullarını sağlayan çözümleri olmak üzere, $\lambda\to\infty$ iken

i)

$$\Psi(t,\lambda)=c\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)-\frac{c}{2}\lambda\left(\int_a^t q(x)dx\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O\left(\lambda\eta(\lambda)\right), \tag{2.143}$$

ii)

$$\Phi(t,\lambda)=-\lambda^{-1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+\frac{1}{2}\lambda^{-1}\left(\int_t^b q(x)dx\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right) \tag{2.144}$$

asimptotik çözümleri elde edilir.

İspat:

i) İspat, Teorem 2.10 (i)' de verilmiştir.

ii) İspat, Teorem 2.4 (ii)' de verilmiştir. ■

2.1.1.4. İki Sınır Koşulunun da Özdeğer Parametresine Bağlı Olduğu Durum

Aşağıdaki problem göz önüne alınsın:

$$y''(t)+[\lambda-q(t)]y(t)=0,\quad t\in[a,b], \tag{2.145}$$

$$a_1y(a)+a_2y'(a)=\lambda\left[a_1'y(a)+a_2'y'(a)\right],\quad a_1,a_2,a_1',a_2'\in\mathbb{R} \tag{2.146}$$

$$b_1y(b)+b_2y'(b)=\lambda\left[b_1'y(b)+b_2'y'(b)\right],\quad b_1,b_2,b_1',b_2'\in\mathbb{R}. \tag{2.147}$$

$\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.145) probleminin, sırasıyla

$$\Psi(a,\lambda)=a_2-a_2'\lambda,\Psi'(a,\lambda)=a_1'\lambda-a_1 \tag{2.148}$$

ve

$$\Phi(b,\lambda)=b_2-b_2'\lambda,\Phi'(b,\lambda)=b_1'\lambda-b_1 \tag{2.149}$$

koşullarını sağlayan iki çözümü olsun.

Teorem 2.13: $\Psi(t,\lambda)$ fonksiyonu, (2.145) probleminin (2.148) sınır koşulunu sağlayan çözümü olmak üzere

(i) $a_2'\neq 0$ iken

$$\Psi(t,\lambda)=\frac{(a_2-a_2'\lambda)\exp\left(\int_a^t S(x,\lambda)dx\right)}{\cos\left[\tan^{-1}F_1(a,\lambda)\right]}\cos\left[\tan^{-1}F_1(a,\lambda)+\int_a^t T(x,\lambda)dx\right]. \tag{2.150}$$

Burada,

$$F_1(a,\lambda):=\frac{1}{T(a,\lambda)}\left[S(a,\lambda)+\frac{a_1'\lambda-a_1}{a_2'\lambda-a_2}\right]. \tag{2.151}$$

(ii) $a_2'=0$ iken

$$\Psi(t,\lambda)=\frac{a_2\exp\left(\int_a^t S(x,\lambda)dx\right)}{\cos\left[\cot^{-1}F_2(a,\lambda)\right]}\cos\left[\cot^{-1}F_2(a,\lambda)+\int_a^t T(x,\lambda)\right]. \tag{2.152}$$

Burada,

$$F_2(a,\lambda):=\frac{a_2T(a,\lambda)}{-a_1'\lambda+a_1+a_2S(a,\lambda)}. \tag{2.153}$$

İspat:

(i) $a_2'\neq 0$ iken; (2.145) probleminin (2.16) ve (2.17) ile verilen $z(t,\lambda)$ çözümü ve türevi kullanılarak (2.148)' den

$$\Psi(a,\lambda)=c_1\cos c_2=a_2-a_2'\lambda, \tag{2.154}$$

$$\Psi'(a,\lambda)=c_1S(a,\lambda)\cos c_2-c_1\sin c_2T(a,\lambda)=a_1'\lambda-a_1 \tag{2.155}$$

sağlanır. (2.154)' ten

$$c_1 = \frac{a_2 - a_2'\lambda}{\cos c_2} \tag{2.156}$$

elde edilir. Bu değer (2.155)' te kullanılırsa

$$c_2 = \tan^{-1} F_1(a,\lambda) \tag{2.157}$$

bulunur. O halde,

$$c_1 = \frac{a_2 - a_2'\lambda}{\cos\left[\tan^{-1} F_1(a,\lambda)\right]} \tag{2.158}$$

olur. Son olarak, elde edilen c_1 ve c_2 değerleri (2.16)' da yerine yazılarak ispat tamamlanır.

(ii) $a_2' = 0$ iken; benzer şekilde (2.16), (2.17) ve (2.148)' den

$$\Psi(a,\lambda) = c_1 \cos c_2 = a_2, \tag{2.159}$$

$$\Psi'(a,\lambda) = c_1 S(a,\lambda)\cos c_2 - c_1 T(a,\lambda)\sin c_2 = a_1'\lambda - a_1 \tag{2.160}$$

elde edilir. Bu iki eşitlik kullanılarak

$$c_1 = \frac{a_2}{\cos\left[\cot^{-1} F_2(a,\lambda)\right]}, \tag{2.161}$$

$$c_2 = \cot^{-1} F_2(a,\lambda) \tag{2.162}$$

bulunur. Son olarak, elde edilen c_1 ve c_2 değerleri (2.16)' da yerine yazılarak ispat tamamlanır. ■

Teorem 2.14: $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonu, (2.145) probleminin (2.149) sınır koşulunu sağlayan çözümü olmak üzere

(i) $b_2' \neq 0$ iken

$$\Phi(t,\lambda)=\frac{(b_2-b_2'\lambda)\exp\left(-\int_t^b S(x,\lambda)dx\right)}{\cos\left[\tan^{-1}F_3(b,\lambda)\right]}\cos\left[\tan^{-1}F_3(b,\lambda)-\int_t^b T(x,\lambda)dx\right]. \quad (2.163)$$

Burada,

$$F_3(b,\lambda):=\frac{1}{T(b,\lambda)}\left[S(b,\lambda)+\frac{b_1'\lambda-b_1}{b_2'\lambda-b_2}\right]. \quad (2.164)$$

(ii) $b_2'=0$ iken

$$\Phi(t,\lambda)=\frac{b_2\exp\left(-\int_t^b S(x,\lambda)dx\right)}{\cos\left[\cot^{-1}F_4(b,\lambda)\right]}\cos\left[\cot^{-1}F_4(b,\lambda)-\int_t^b T(x,\lambda)dx\right]. \quad (2.165)$$

Burada,

$$F_4(b,\lambda):=\frac{b_2T(b,\lambda)}{-b_1'\lambda+b_1+b_2S(b,\lambda)}. \quad (2.166)$$

İspat:

(i) $b_2'\neq 0$ iken; (2.16), (2.17) ve (2.149)’ dan

$$\Phi(b,\lambda)=c_1\exp\left(\int_a^b S(x,\lambda)dx\right)\cos\left[c_2+\int_a^b T(x,\lambda)dx\right]=b_2-b_2'\lambda, \quad (2.167)$$

$$\begin{aligned}\Phi'(b,\lambda)&=c_1S(b,\lambda)\exp\left(\int_a^b S(x,\lambda)dx\right)\cos\left[c_2+\int_a^b T(x,\lambda)dx\right]\\&-c_1\exp\left(\int_a^b S(x,\lambda)dx\right)\sin\left[c_2+\int_a^b T(x,\lambda)dx\right]T(b,\lambda)=b_1'\lambda-b_1\end{aligned} \quad (2.168)$$

elde edilir. Bu iki eşitlikten

$$c_1=\frac{b_2-b_2'\lambda}{\exp\left(\int_a^b S(x,\lambda)dx\right)\cos\left[\tan^{-1}F_3(b,\lambda)\right]}, \quad (2.169)$$

$$c_2 = \tan^{-1} F_3(b,\lambda) - \int_a^b T(x,\lambda)dx \tag{2.170}$$

bulunur. Son olarak, elde edilen c_1 ve c_2 değerleri (2.16)' da yerine yazılarak ispat tamamlanır.

(ii) $b_2' = 0$ iken; (2.16), (2.17) ve (2.149)' dan

$$\Phi(b,\lambda) = c_1 \exp\left(\int_a^b S(x,\lambda)dx\right)\cos\left[c_2 + \int_a^b T(x,\lambda)dx\right] = b_2, \tag{2.171}$$

$$\begin{aligned}\Phi'(b,\lambda) &= c_1 S(b,\lambda)\exp\left(\int_a^b S(x,\lambda)dx\right)\cos\left[c_2 + \int_a^b T(x,\lambda)dx\right] \\ &\quad - c_1 \exp\left(\int_a^b S(x,\lambda)dx\right)\sin\left[c_2 + \int_a^b T(x,\lambda)dx\right]T(b,\lambda) = b_1'\lambda - b_1\end{aligned} \tag{2.172}$$

elde edilir. Bu iki eşitlikten

$$c_1 = \frac{b_2}{\exp\left(\int_a^b S(x,\lambda)dx\right)\cos\left[\cot^{-1} F_4(b,\lambda)\right]}, \tag{2.173}$$

$$c_2 = \cot^{-1} F_4(b,\lambda) - \int_a^b T(x,\lambda)dx \tag{2.174}$$

bulunur. Son olarak, elde edilen c_1 ve c_2 değerleri (2.16)' da yerine yazılarak ispat tamamlanır. ■

Teorem 2.15: $\Psi(t,\lambda)$ fonksiyonu, (2.145) probleminin (2.148) sınır koşulunu sağlayan çözümü olmak üzere, $\lambda \to \infty$ iken

(i) $a_2' \neq 0$ olduğunda

$$\begin{aligned}\Psi(t,\lambda) &= -a_2'\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right) - \lambda^{1/2}\left[\frac{a_2'}{2}\int_a^t q(x)dx - a_1'\right]\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right) \\ &\quad + O\left(\lambda^{1/2}\eta(\lambda)\right),\end{aligned} \tag{2.175}$$

(ii) $a_2' = 0$ olduğunda

$$\Psi(t,\lambda)=a_1'\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\left[a_2-\frac{a_1'}{2}\int_a^t q(x)dx\right]\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)$$
$$+O\left(\eta(\lambda)\right) \tag{2.176}$$

asimptotik çözümleri elde edilir.

İspat:

(i) İspat için, (2.150)' deki terimler $\lambda\to\infty$ iken hesaplanır. İlk olarak; (2.100), (2.101) ve (2.151)' den

$$\begin{aligned}F_1(a,\lambda)&=\frac{S(a,\lambda)}{T(a,\lambda)}+\frac{a_1'\lambda-a_1}{(a_2'\lambda-a_2)T(a,\lambda)}\\&=-\lambda^{-1/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+\frac{a_1'}{a_2'}\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\\&=\frac{a_1'}{a_2'}\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\end{aligned} \tag{2.177}$$

elde edilir. Bu eşitlikten

$$\tan^{-1}F_1(a,\lambda)=\frac{a_1'}{a_2'}\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right) \tag{2.178}$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned}\cos\left[\tan^{-1}F_1(a,\lambda)\right]&=1-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a_1'}{a_2'}\right)^2\lambda^{-1}+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\right]\\&=1-\frac{1}{2}\left(\frac{a_1'}{a_2'}\right)^2\lambda^{-1}+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right),\end{aligned} \tag{2.179}$$

$$\sin\left[\tan^{-1}F_1(a,\lambda)\right]=\frac{a_1'}{a_2'}\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right), \tag{2.180}$$

$$\begin{aligned}\frac{a_2-a_2'\lambda}{\cos\left[\tan^{-1}F_1(a,\lambda)\right]}&=\frac{a_2-a_2'\lambda}{1-\frac{1}{2}\left(\frac{a_1'}{a_2'}\right)^2\lambda^{-1}+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)}\\&=\left[a_2-a_2'\lambda\right]\times\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{a_1'}{a_2'}\right)^2\lambda^{-1}+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\right]\end{aligned}$$

$$=-a_2'\lambda-\left[\frac{(a_1')^2}{2a_2'}-a_2\right]+\frac{a_2}{2}\left(\frac{a_1'}{a_2'}\right)^2\lambda^{-1}+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)+O\left(\eta(\lambda)\right) \tag{2.181}$$

olur. Ayrıca (2.60), (2.61), (2.179) ve (2.180) kullanılarak

$$\begin{aligned}\cos\left[\tan^{-1}F_1(a,\lambda)+\int_a^t T(t,\lambda)dt\right]&=\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{a_1'}{a_2'}\right)^2\lambda^{-1}+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\right]\\&\times\left\{\cos\left[\lambda^{1/2}(t-a)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)dx\right]+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right\}\\&-\left[\frac{a_1'}{a_2'}\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right]\\&\times\left\{\sin\left[\lambda^{1/2}(t-a)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)dx\right]+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right\}\\&=\cos\left[\lambda^{1/2}(t-a)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)dx\right]-\frac{a_1'}{a_2'}\lambda^{-1/2}\\&\times\sin\left[\lambda^{1/2}(t-a)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)dx\right]+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\end{aligned} \tag{2.182}$$

elde edilir. Sonuç olarak; (2.59), (2.181) ve (2.182) değerleri (2.150)' de yerine yazılarak ve trigonometrik açılımlar kullanılarak ispat tamamlanır.

(ii) İspat için, (2.152) deki terimler $\lambda\to\infty$ iken hesaplanır. İlk olarak; (2.28), (2.32) ve (2.153)' ten

$$\begin{aligned}F_2(a,\lambda)&=\frac{a_2T(a,\lambda)}{-a_1'\lambda+a_1+a_2S(a,\lambda)}\\&=\frac{a_2\lambda^{1/2}-a_2\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\eta^2(\lambda)\right)}{-a_1'\lambda+a_1-a_2\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\eta^2(\lambda)\right)}\\&=\frac{a_2\lambda^{1/2}-a_2\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\eta^2(\lambda)\right)}{-a_1'\lambda\left[1-\frac{a_1}{a_1'}\lambda^{-1}+\frac{a_2}{a_1'}\lambda^{-1}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\right]}\\&=\left[-\frac{a_2}{a_1'}\lambda^{-1/2}+\frac{a_2}{a_1'}\lambda^{-1}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\right]\\&\times\left[1+\frac{a_1}{a_1'}\lambda^{-1}-\frac{a_2}{a_1'}\lambda^{-1}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\right]\end{aligned}$$

$$=-\frac{a_2}{a_1'}\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right) \tag{2.183}$$

elde edilir. Bu eşitlikten

$$\cot^{-1}F_2(a,\lambda)=\frac{\pi}{2}+\frac{a_2}{a_1'}\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right), \tag{2.184}$$

$$\begin{aligned}\cos\left[\cot^{-1}F_2(a,\lambda)\right]&=-\sin\left[\frac{a_2}{a_1'}\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\right]\\&=-\frac{a_2}{a_1'}\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right),\end{aligned} \tag{2.185}$$

$$\begin{aligned}\sin\left[\cot^{-1}F_2(a,\lambda)\right]&=\cos\left[\frac{a_2}{a_1'}\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\right]\\&=1-\frac{1}{2}\left(\frac{a_2}{a_1'}\right)^2\lambda^{-1}+O\left(\lambda^{-3/2}\eta(\lambda)\right)\end{aligned} \tag{2.186}$$

bulunur. O halde (2.185)’ ten

$$\begin{aligned}\frac{a_2}{\cos\left[\cot^{-1}F_2(a,\lambda)\right]}&=\frac{a_2}{-\frac{a_2}{a_1'}\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)}\\&=\frac{a_2}{-\frac{a_2}{a_1'}\lambda^{-1/2}\left[1+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right]}\\&=-a_1'\lambda^{1/2}+O\left(\eta(\lambda)\right)\end{aligned} \tag{2.187}$$

olur. Ayrıca (2.60), (2.61), (2.185) ve (2.186) kullanılarak

$$\begin{aligned}\cos\left[\cot^{-1}F_2(a,\lambda)+\int_a^t T(x,\lambda)\,dx\right]&=\left[-\frac{a_2}{a_1'}\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\right]\\&\times\left\{\cos\left[\lambda^{1/2}(t-a)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)\,dx\right]+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right\}\\&-\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{a_2}{a_1'}\right)^2\lambda^{-1}+O\left(\lambda^{-3/2}\eta(\lambda)\right)\right]\\&\times\left\{\sin\left[\lambda^{1/2}(t-a)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)\,dx\right]+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right\}\end{aligned}$$

$$=-\sin\left[\lambda^{1/2}(t-a)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)dx\right]-\frac{a_2}{a_1'}\lambda^{-1/2}$$
$$\times\cos\left[\lambda^{1/2}(t-a)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)dx\right]+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right) \tag{2.188}$$

elde edilir. Sonuç olarak; (2.59), (2.187) ve (2.188) değerleri (2.152)' de yerine yazılarak ve trigonometrik açılımlar kullanılarak ispat tamamlanır. ■

Teorem 2.16: $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonu, (2.145) probleminin (2.149) sınır koşulunu sağlayan çözümü olmak üzere, $\lambda\to\infty$ iken

(i) $b_2'\neq 0$ olduğunda

$$\Phi(t,\lambda)=-b_2'\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)-\lambda^{1/2}\left[b_1'+\frac{b_2'}{2}\int_t^b q(x)dx\right]\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)$$
$$+O\left(\lambda^{1/2}\eta(\lambda)\right), \tag{2.189}$$

(ii) $b_2'=0$ olduğunda

$$\Phi(t,\lambda)=-b_1'\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+\left[b_2+\frac{b_1'}{2}\int_t^b q(x)dx\right]\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)$$
$$+O\left(\eta(\lambda)\right) \tag{2.190}$$

asimptotik çözümleri elde edilir.

İspat:

(i) İspat için, (2.163)' teki terimler $\lambda\to\infty$ iken hesaplanır. İlk olarak; (2.28) ve (2.32)' den

$$\frac{S(b,\lambda)}{T(b,\lambda)}=\frac{O\left(\eta^2(\lambda)\right)}{\lambda^{1/2}+O\left(\eta^2(\lambda)\right)}=\frac{O\left(\eta^2(\lambda)\right)}{\lambda^{1/2}\left[1+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)\right]}=O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right) \tag{2.191}$$

ve

$$\frac{b_1'\lambda-b_1}{(b_2'\lambda-b_2)T(b,\lambda)}=\frac{b_1'\lambda-b_1}{b_2'\lambda^{3/2}-b_2\lambda^{1/2}+O\left(\lambda\eta^2(\lambda)\right)}$$
$$=\frac{b_1'\lambda-b_1}{b_2'\lambda^{3/2}\left[1-\frac{b_2}{b_2'}\lambda^{-1}+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)\right]}$$

$$
\begin{aligned}
&=\left[\frac{b_1'}{b_2'}\lambda^{-1/2}-\frac{b_1}{b_2'}\lambda^{-3/2}\right]\times\left[1+\frac{b_2}{b_2'}\lambda^{-1}+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)\right]\\
&=\frac{b_1'}{b_2'}\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)
\end{aligned}
\tag{2.192}
$$

elde edilir. Bu değerler (2.164)' te yerine yazılırsa

$$
F_3(b,\lambda):=\frac{S(b,\lambda)}{T(b,\lambda)}+\frac{b_1'\lambda-b_1}{(b_2'\lambda-b_2)T(b,\lambda)}=\frac{b_1'}{b_2'}\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right). \tag{2.193}
$$

(2.193)' ten

$$
\tan^{-1}F_3(b,\lambda)=\frac{b_1'}{b_2'}\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right) \tag{2.194}
$$

bulunur. Böylece

$$
\begin{aligned}
\cos\left[\tan^{-1}F_3(b,\lambda)\right]&=1-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{b_1'}{b_2'}\right)^2\lambda^{-1}+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\right]\\
&=1-\frac{1}{2}\left(\frac{b_1'}{b_2'}\right)^2\lambda^{-1}+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right),
\end{aligned}
\tag{2.195}
$$

$$
\sin\left[\tan^{-1}F_3(b,\lambda)\right]=\frac{b_1'}{b_2'}\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right), \tag{2.196}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{b_2-b_2'\lambda}{\cos\left[\tan^{-1}F_3(b,\lambda)\right]}&=\frac{b_2-b_2'\lambda}{1-\frac{1}{2}\left(\frac{b_1'}{b_2'}\right)^2\lambda^{-1}+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)}\\
&=\left[b_2-b_2'\lambda\right]\times\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{b_1'}{b_2'}\right)^2\lambda^{-1}+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\right]\\
&=-b_2'\lambda+\left[b_2-\frac{(b_1')^2}{2b_2'}\right]+O\left(\eta^2(\lambda)\right)
\end{aligned}
\tag{2.197}
$$

olur. Ayrıca (2.69), (2.70), (2.195) ve (2.196) kullanılarak

$$
\cos\left[\tan^{-1}F_3(b,\lambda)-\int_t^b T(t,\lambda)dt\right]=\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{b_1'}{b_2'}\right)^2\lambda^{-1}+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\right]
$$

$$
\begin{aligned}
&\times\left\{\cos\left[\lambda^{1/2}(b-t)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_t^b q(x)dx\right]+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right\}\\
&+\left[\frac{b_1'}{b_2'}\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)\right]\\
&\times\left\{\sin\left[\lambda^{1/2}(b-t)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_t^b q(x)dx\right]+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right\}\\
&=\cos\left[\lambda^{1/2}(b-t)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_t^b q(x)dx\right]+\frac{b_1'}{b_2'}\lambda^{-1/2}\\
&\times\sin\left[\lambda^{1/2}(b-t)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_t^b q(x)dx\right]+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)
\end{aligned}
\tag{2.198}
$$

elde edilir. Sonuç olarak; (2.68), (2.197) ve (2.198) değerleri (2.163)’ te yerine yazılarak ve trigonometrik açılımlar kullanılarak ispat tamamlanır.

(ii) İspat için, (2.165)’ teki terimler $\lambda\to\infty$ iken hesaplanır. İlk olarak, (2.28) ve (2.32)’ den

$$
\begin{aligned}
F_4(b,\lambda)&:=\frac{b_2T(b,\lambda)}{b_1-b_1'\lambda+b_2S(b,\lambda)}\\
&=\frac{b_2\lambda^{1/2}+O\left(\eta^2(\lambda)\right)}{-b_1'\lambda\left[1-\frac{b_1}{b_1'}\lambda^{-1}+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\right]}\\
&=\left[-\frac{b_2}{b_1'}\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\right]\times\left[1+\frac{b_1}{b_1'}\lambda^{-1}+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\right]\\
&=-\frac{b_2}{b_1'}\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)
\end{aligned}
\tag{2.199}
$$

elde edilir. (2.199)’ dan

$$
\cot^{-1}F_4(b,\lambda)=\frac{\pi}{2}+\frac{b_2}{b_1'}\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)
\tag{2.200}
$$

bulunur. Böylece

$$
\begin{aligned}
\cos\left[\cot^{-1}F_4(b,\lambda)\right]&=-\sin\left[\frac{b_2}{b_1'}\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\right]\\
&=-\frac{b_2}{b_1'}\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right),
\end{aligned}
\tag{2.201}
$$

$$\sin\left[\cot^{-1}F_4(b,\lambda)\right]=\cos\left[\frac{b_2}{b_1'}\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\right]$$
$$=1-\frac{1}{2}\left(\frac{b_2}{b_1'}\right)^2\lambda^{-1}+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right), \tag{2.202}$$

$$\frac{b_2}{\cos\left[\cot^{-1}F_4(b,\lambda)\right]}=\frac{b_2}{-\frac{b_2}{b_1'}\lambda^{-1/2}\left[1+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)\right]}$$
$$=-b_1'\lambda^{1/2}\left[1+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)\right] \tag{2.203}$$
$$=-b_1'\lambda^{1/2}+O\left(\eta^2(\lambda)\right)$$

olur. Ayrıca (2.69), (2.70), (2.201) ve (2.202) kullanılarak

$$\cos\left[\cot^{-1}F_4(b,\lambda)-\int_t^b T(t,\lambda)dt\right]=\left[-\frac{b_2}{b_1'}\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\right]$$
$$\times\left\{\cos\left[\lambda^{1/2}(b-t)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_t^b q(x)dx\right]+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right\}$$
$$+\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{b_2}{b_1'}\right)^2\lambda^{-1}+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)\right]$$
$$\times\left\{\sin\left[\lambda^{1/2}(b-t)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_t^b q(x)dx\right]+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right\} \tag{2.204}$$
$$=\sin\left[\lambda^{1/2}(b-t)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_t^b q(x)dx\right]-\frac{b_2}{b_1'}\lambda^{-1/2}$$
$$\times\cos\left[\lambda^{1/2}(b-t)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_t^b q(x)dx\right]+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)$$

elde edilir. Sonuç olarak; (2.68), (2.203) ve (2.204) değerleri (2.165)' te yerine yazılarak ve trigonometrik açılımlar kullanılarak ispat tamamlanır. ■

2.1.2. Potansiyel Fonksiyonunun Türevlenebilir Olması Durumu

Bu kısımda (2.1) problemi, belirtilen sınır koşulları altında ayrı ayrı göz önüne alınacak ve $q(t)$ potansiyel fonksiyonunun türevlenebilir olması durumunda probleme ait özfonksiyonlar için asimptotik yaklaşımlar elde edilecektir.

Ele alınan sınır koşulları önceki bölümle aynı olduğu için, özfonksiyonların $S(t,\lambda)$ ve $T(t,\lambda)$ cinsinden genel ifadesi değişmeyecektir. Bu nedenle $\lambda \to \infty$ için hesaplama yapılırken, daha önce elde edilen bu sonuçlar kullanılacaktır. Ayrıca $q(t)$ fonksiyonu türevlenebilir olduğundan, (2.19) ile tanımlanan $F(t,\lambda)$ fonksiyonunun ilk integral terimine kısmi integrasyon uygulandığında

$$F(t,\lambda)=\begin{cases} \dfrac{\dfrac{1}{2\lambda^{1/2}}\left| e^{2i\lambda^{1/2}b}q(b)-e^{2i\lambda^{1/2}t}q(t)-\int\limits_t^b e^{2i\lambda^{1/2}x}q'(x)dx \right|}{\int\limits_t^b |q(x)|dx} & , \int\limits_t^b |q(x)|dx \neq 0 \text{ ise}, \\ 0 & , \int\limits_t^b |q(x)|dx = 0 \text{ ise} \end{cases} \tag{2.205}$$

elde edilir. Yani burada $\eta(\lambda)$ fonksiyonu, $\lambda^{1/2}$ kat ötelenmiş olmaktadır.

İlk olarak, teoremleri ispatlamada kullanılacak olan aşağıdaki lemma verilsin:

Lemma 2.6: $\lambda \to \infty$ iken

i)

$$\int\limits_a^t S(x,\lambda)dx = \frac{1}{4}\lambda^{-1}\left\{ \begin{array}{l} q(b)\left[\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)-\cos 2\lambda^{1/2}(b-t)\right] \\ +\int\limits_a^t q'(x)dx+\sin\left(2\lambda^{1/2}t+\xi_t\right)-\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right) \end{array} \right\} \\ +O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right), \tag{2.206}$$

ii)

$$\int\limits_a^t T(x,\lambda)dx = \lambda^{1/2}(t-a)+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\left[aq(a)-tq(t)+\int\limits_a^t xq'(x)dx \right] \\ +\frac{1}{4}\lambda^{-1}\left[\begin{array}{l} \sin 2\lambda^{1/2}(b-a)-\sin 2\lambda^{1/2}(b-t) \\ +\cos\left(2\lambda^{1/2}t+\xi_t\right)-\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right) \end{array} \right] \\ +O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right). \tag{2.207}$$

Burada

$$\sin\xi_t := \int_t^b q'(x)\cos 2\lambda^{1/2}x\,dx,\ \ \cos\xi_t := \int_t^b q'(x)\sin 2\lambda^{1/2}x\,dx. \tag{2.208}$$

İspat:

i) Burada $S(t,\lambda)$ fonksiyonu için, Başkaya [3] tarafından elde edilen

$$S(t,\lambda) = -\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\left[q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-t) - \cos\left(2\lambda^{1/2}t + \xi_t\right)\right] + O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right) \tag{2.209}$$

asimptotik yaklaşımı kullanılacaktır. İspat için, öncelikle

$$\int_a^t S(x,\lambda)\,dx = \int_a^b S(x,\lambda)\,dx - \int_t^b S(x,\lambda)\,dx \tag{2.210}$$

alınır ve daha sonra eşitliğin sağ tarafındaki integrallerde, (2.209) değeri yerine yazılarak ayrı ayrı hesaplama yapılır.

İlk olarak $\int_a^b S(x,\lambda)\,dx$ değerine asimptotik yaklaşım, integralde değişkenlerin sırasını değiştirme yöntemiyle belirlenecektir. Buna göre; (2.208) ve (2.209)' dan

$$\int_a^b S(x,\lambda)\,dx = -\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\begin{bmatrix} q(b)\int_a^b \sin 2\lambda^{1/2}(b-x)\,dx \\ +\int_a^b \sin 2\lambda^{1/2}x\left(\int_x^b q'(t)\cos 2\lambda^{1/2}t\,dt\right)dx \\ -\int_a^b \cos 2\lambda^{1/2}x\left(\int_x^b q'(t)\sin 2\lambda^{1/2}t\,dt\right)dx \end{bmatrix} + O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\left\{\begin{array}{l} \left.\dfrac{q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-x)}{2\lambda^{1/2}}\right|_a^b \\ +\int_a^b q'(t)\cos 2\lambda^{1/2}t\int_a^t \sin 2\lambda^{1/2}x\,dx\,dt \\ -\int_a^b q'(t)\sin 2\lambda^{1/2}t\int_a^t \cos 2\lambda^{1/2}x\,dx\,dt \end{array}\right\} + O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)$$

$$
=-\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{q(b)}{2\lambda^{1/2}}\left[1-\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\right]\\ +\displaystyle\int_a^b q'(t)\cos 2\lambda^{1/2}t\left[-\frac{\cos 2\lambda^{1/2}x}{2\lambda^{1/2}}\right]\Bigg|_a^t dt\\ -\displaystyle\int_a^b q'(t)\sin 2\lambda^{1/2}t\left[\frac{\sin 2\lambda^{1/2}x}{2\lambda^{1/2}}\right]\Bigg|_a^t dt\end{array}\right\}+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)
$$

$$
=-\frac{1}{4}\lambda^{-1}\left\{\begin{array}{l}q(b)\left[1-\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\right]\\ -\displaystyle\int_a^b q'(t)\cos^2 2\lambda^{1/2}t\,dt+\cos 2\lambda^{1/2}a\int_a^b q'(t)\cos 2\lambda^{1/2}t\,dt\\ -\displaystyle\int_a^b q'(t)\sin^2 2\lambda^{1/2}t\,dt+\sin 2\lambda^{1/2}a\int_a^b q'(t)\sin 2\lambda^{1/2}t\,dt\end{array}\right\}
$$

$$
+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)
$$

$$
=-\frac{1}{4}\lambda^{-1}\left\{\begin{array}{l}q(b)\left[1-\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\right]\\ -\displaystyle\int_a^b q'(t)\,dt+\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\end{array}\right\}+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right) \tag{2.211}
$$

elde edilir. $\int_t^b S(x,\lambda)\,dx$ değerine asimptotik yaklaşım ise, kısmi integrasyon yöntemiyle belirlenecektir. Yine (2.208) ve (2.209) kullanılarak

$$
\int_t^b S(x,\lambda)\,dx=-\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\left[\begin{array}{l}q(b)\displaystyle\int_t^b \sin 2\lambda^{1/2}(b-x)\,dx\\ +\displaystyle\int_t^b \sin 2\lambda^{1/2}x\left(\int_x^b q'(t)\cos 2\lambda^{1/2}t\,dt\right)dx\\ -\displaystyle\int_t^b \cos 2\lambda^{1/2}x\left(\int_x^b q'(t)\sin 2\lambda^{1/2}t\,dt\right)dx\end{array}\right]+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)
$$

$$
=-\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\left\{\begin{array}{l}
q(b)\dfrac{\cos 2\lambda^{1/2}(b-x)}{2\lambda^{1/2}}\Bigg|_t^b-\left[\dfrac{\cos 2\lambda^{1/2}x}{2\lambda^{1/2}}\displaystyle\int_x^b q'(t)\cos 2\lambda^{1/2}t\,dt\right]\Bigg|_t^b \\
-\displaystyle\int_t^b\dfrac{\cos^2 2\lambda^{1/2}x}{2\lambda^{1/2}}q'(x)\,dx-\left[\dfrac{\sin 2\lambda^{1/2}x}{2\lambda^{1/2}}\displaystyle\int_x^b q'(t)\sin 2\lambda^{1/2}t\,dt\right]\Bigg|_t^b \\
-\displaystyle\int_t^b\dfrac{\sin^2 2\lambda^{1/2}x}{2\lambda^{1/2}}q'(x)\,dx
\end{array}\right\}
$$

$$
+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)
$$

$$
=-\frac{1}{4}\lambda^{-1}\left\{\begin{array}{l}
q(b)\left[1-\cos 2\lambda^{1/2}(b-t)\right]+\cos 2\lambda^{1/2}t\displaystyle\int_t^b q'(x)\cos 2\lambda^{1/2}x\,dx \\
+\sin 2\lambda^{1/2}t\displaystyle\int_t^b q'(x)\sin 2\lambda^{1/2}x\,dx-\displaystyle\int_t^b q'(x)\,dx
\end{array}\right\} \tag{2.212}
$$

$$
+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)
$$

$$
=-\frac{1}{4}\lambda^{-1}\left\{\begin{array}{l}
q(b)\left[1-\cos 2\lambda^{1/2}(b-t)\right] \\
-\displaystyle\int_t^b q'(x)\,dx+\sin\left(2\lambda^{1/2}t+\xi_t\right)
\end{array}\right\}+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)
$$

bulunur. Son olarak (2.211) ve (2.212) değerleri (2.210)' da yerine yazılarak ispat tamamlanır.

ii) Benzer şekilde, $T(t,\lambda)$ fonksiyonu için Başkaya [3] tarafından elde edilen

$$
\begin{aligned}
T(t,\lambda)&=\lambda^{1/2}+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\left[q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-t)-q(t)-\sin\left(2\lambda^{1/2}t+\xi_t\right)\right] \\
&\quad+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)
\end{aligned} \tag{2.213}
$$

asimptotik yaklaşımı kullanılacaktır. İspat için, öncelikle

$$
\int_a^t T(x,\lambda)\,dx=\int_a^b T(x,\lambda)\,dx-\int_t^b T(x,\lambda)\,dx \tag{2.214}
$$

alınır ve daha sonra eşitliğin sağ tarafındaki integrallerde, (2.213) değeri yerine yazılarak ayrı ayrı hesaplama yapılır.

İlk olarak $\int_a^b T(x,\lambda)\,dx$ değerine asimptotik yaklaşım, integralde değişkenlerin sırasını değiştirme yöntemiyle belirlenecektir. Buna göre (2.208) ve (2.213)' ten

$$\int_a^b T(x,\lambda)\,dx = \int_a^b \lambda^{1/2}dx + \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\begin{bmatrix} q(b)\int_a^b \cos 2\lambda^{1/2}(b-x)\,dx - \int_a^b q(x)\,dx \\ -\int_a^b \cos 2\lambda^{1/2}x\left(\int_x^b q'(t)\cos 2\lambda^{1/2}t\,dt\right)dx \\ -\int_a^b \sin 2\lambda^{1/2}x\left(\int_x^b q'(t)\sin 2\lambda^{1/2}t\,dt\right)dx \end{bmatrix}$$

$$+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)$$

$$=\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\begin{Bmatrix} -\left.\frac{q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-x)}{2\lambda^{1/2}}\right|_a^b - xq(x)\Big|_a^b \\ +\int_a^b xq'(x)\,dx - \int_a^b q'(t)\cos 2\lambda^{1/2}t\int_a^t \cos 2\lambda^{1/2}x\,dx\,dt \\ -\int_a^b q'(t)\sin 2\lambda^{1/2}t\int_a^t \sin 2\lambda^{1/2}x\,dx\,dt \end{Bmatrix}$$

$$+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)$$

$$=\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\begin{Bmatrix} \frac{q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)}{2\lambda^{1/2}} - bq(b)+aq(a)+\int_a^b xq'(x)\,dx \\ -\int_a^b q'(t)\cos 2\lambda^{1/2}t\left[\frac{\sin 2\lambda^{1/2}x}{2\lambda^{1/2}}\right]\Bigg|_a^t dt \\ -\int_a^b q'(t)\sin 2\lambda^{1/2}t\left[-\frac{\cos 2\lambda^{1/2}x}{2\lambda^{1/2}}\right]\Bigg|_a^t dt \end{Bmatrix}$$

$$+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)$$

$$\begin{aligned}&=\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\left[aq(a)-bq(b)+\int_a^b xq'(x)\,dx\right]\\ &\quad+\frac{1}{4}\lambda^{-1}\left[q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)-\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\right]+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)\end{aligned} \tag{2.215}$$

elde edilir. $\int_t^b T(x,\lambda)\,dx$ değerine asimptotik yaklaşım ise, kısmi integrasyon yöntemiyle belirlenecektir. Yine (2.208) ve (2.213)' ten

$$\int_t^b T(x,\lambda)dx = \int_t^b \lambda^{1/2}dx + \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\begin{bmatrix} q(b)\int_t^b \cos 2\lambda^{1/2}(b-x)dx - \int_t^b q(x)dx \\ -\int_t^b \cos 2\lambda^{1/2}x\left(\int_x^b q'(t)\cos 2\lambda^{1/2}tdt\right)dx \\ -\int_t^b \sin 2\lambda^{1/2}x\left(\int_x^b q'(t)\sin 2\lambda^{1/2}tdt\right)dx \end{bmatrix}$$

$$+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)$$

$$=\lambda^{1/2}(b-t)+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\left\{\begin{matrix} -\left.\dfrac{q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-x)}{2\lambda^{1/2}}\right|_t^b + \int_t^b xq'(x)dx \\ -xq(x)\Big|_t^b - \left[\dfrac{\sin 2\lambda^{1/2}x}{2\lambda^{1/2}}\int_x^b q'(t)\cos 2\lambda^{1/2}tdt\right]\Bigg|_t^b \\ +\left[\dfrac{\cos 2\lambda^{1/2}x}{2\lambda^{1/2}}\int_x^b q'(t)\sin 2\lambda^{1/2}tdt\right]\Bigg|_t^b \end{matrix}\right\}$$

$$+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)$$

$$=\lambda^{1/2}(b-t)+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\left[tq(t)-bq[b]+\int_t^b xq'(x)dx\right] \tag{2.216}$$

$$+\frac{1}{4}\lambda^{-1}\left[q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-t)-\cos\left(2\lambda^{1/2}t+\xi_t\right)\right]+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)$$

bulunur. Son olarak (2.215) ve (2.216) değerleri (2.214)' te yerine yazılarak ispat tamamlanır. ■

2.1.2.1. Lineer Durum (AN ve AD)

Aşağıdaki AN sınır koşulunu içeren problem göz önüne alınsın:

$$y''(t)+\left[\lambda-q(t)\right]y(t)=0,\quad t\in[a,b], \tag{2.217}$$

$$y'(a)-[c\lambda+d]y(a)=0,\quad c,d\in\mathbb{R},\ c\neq 0, \tag{2.218}$$

$$y'(b)\sin\beta-y(b)\cos\beta=0,\quad \beta\in(0,\pi). \tag{2.219}$$

$\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.217) probleminin, sırasıyla

$$\Psi(a,\lambda)=1, \Psi'(a,\lambda)=c\lambda+d \tag{2.220}$$

ve

$$\Phi(b,\lambda)=\sin\beta,\ \Phi(b,\lambda)=\cos\beta \tag{2.221}$$

koşullarını sağlayan iki çözümü olsun.

Teorem 2.17: $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.217) probleminin sırasıyla (2.220) ve (2.221) sınır koşullarını sağlayan çözümleri olmak üzere, $\lambda\to\infty$ iken

i)

$$\begin{aligned}\Psi(t,\lambda)&=c\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\left\{1+\frac{c}{2}\left[aq(a)-tq(t)+\int_a^t xq'(x)dx\right]\right\}\\&\quad\times\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\right),\end{aligned} \tag{2.222}$$

ii)

$$\begin{aligned}\Phi(t,\lambda)&=\sin\beta\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)-\lambda^{-1/2}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sin\beta}{2}\left[tq(t)-bq(b)+\displaystyle\int_t^b xq'(x)dx\right]\\+\cos\beta\end{array}\right\}\\&\quad\times\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+O\left(\lambda^{-1}\right)\end{aligned} \tag{2.223}$$

asimptotik çözümleri elde edilir.

İspat:

i) İspat için, Teorem 2.1 (i)' de elde edilen

$$\begin{aligned}\Psi(t,\lambda)&=\frac{1}{\cos\left\{\cot^{-1}\left[\dfrac{T(a,\lambda)}{-c\lambda-d+S(a,\lambda)}\right]\right\}}\exp\left(\int_a^t S(x,\lambda)dx\right)\\&\quad\times\cos\left\{\cot^{-1}\left[\frac{T(a,\lambda)}{-c\lambda-d+S(a,\lambda)}\right]+\int_a^t T(x,\lambda)dx\right\}\end{aligned}$$

eşitliğindeki terimler $\lambda\to\infty$ iken hesaplanır. İlk olarak, sırasıyla (2.209) ve (2.213) ile verilen $S(t,\lambda)$ ve $T(t,\lambda)$ değerlerinin asimptotik yaklaşımları kullanılarak

$$\frac{T(a,\lambda)}{-c\lambda-d+S(a,\lambda)}=\frac{\lambda^{1/2}+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\begin{bmatrix}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\\-q(a)-\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\end{bmatrix}+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)}{-c\lambda\begin{Bmatrix}1+\frac{d}{c}\lambda^{-1}+\frac{1}{2c}\lambda^{-3/2}\begin{bmatrix}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)\\-\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\end{bmatrix}\\+O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right)\end{Bmatrix}}$$

$$=\begin{Bmatrix}-\frac{1}{c}\lambda^{-1/2}-\frac{1}{2c}\lambda^{-3/2}\begin{bmatrix}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)+q(a)\\+\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\end{bmatrix}\\+O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right)\end{Bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix}1-\frac{d}{c}\lambda^{-1}-\frac{1}{2c}\lambda^{-3/2}\begin{Bmatrix}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)\\-\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\end{Bmatrix}\\+O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right)\end{bmatrix} \tag{2.224}$$

$$=-\frac{1}{c}\lambda^{-1/2}-\frac{1}{2c}\lambda^{-3/2}\left[q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)-q(a)-\frac{2d}{c}\right]+O\left(\lambda^{-3/2}\eta(\lambda)\right)$$

bulunur. (2.224)' ten

$$\cot^{-1}\left[\frac{T(a,\lambda)}{-c\lambda-d+S(a,\lambda)}\right]=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{c}\lambda^{-1/2}+\frac{1}{2c}\lambda^{-3/2}\begin{bmatrix}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\\-q(a)-\frac{2d}{c}\end{bmatrix}+O\left(\lambda^{-3/2}\eta(\lambda)\right) \tag{2.225}$$

elde edilir. Böylece

$$\cos\left\{\cot^{-1}\left[\frac{T(a,\lambda)}{-c\lambda-d+S(a,\lambda)}\right]\right\}=-\sin\left\{\frac{1}{c}\lambda^{-1/2}+\frac{1}{2c}\lambda^{-3/2}\begin{bmatrix}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\\-q(a)-\frac{2d}{c}\end{bmatrix}+O\left(\lambda^{-3/2}\eta(\lambda)\right)\right\} \tag{2.226}$$

$$=-\frac{1}{c}\lambda^{-1/2}-\frac{1}{2c}\lambda^{-3/2}\begin{bmatrix}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\\-q(a)-\frac{2d}{c}\end{bmatrix}+O\left(\lambda^{-3/2}\eta(\lambda)\right),$$

$$\sin\left\{\cot^{-1}\left[\frac{T(a,\lambda)}{-c\lambda-d+S(a,\lambda)}\right]\right\}$$

$$=\cos\left\{\frac{1}{c}\lambda^{-1/2}+\frac{1}{2c}\lambda^{-3/2}\begin{bmatrix}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\\ -q(a)-\dfrac{2d}{c}\end{bmatrix}+O\left(\lambda^{-3/2}\eta(\lambda)\right)\right\} \quad (2.227)$$

$$=1-\frac{1}{2c^2}\left\{\lambda^{-1}+\lambda^{-2}\begin{bmatrix}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\\ -q(a)-\dfrac{2d}{c}\end{bmatrix}\right\}+O\left(\lambda^{-2}\eta(\lambda)\right),$$

$$\frac{1}{\cos\left\{\cot^{-1}\left[\dfrac{T(a,\lambda)}{-c\lambda-d+S(a,\lambda)}\right]\right\}}$$

$$=\frac{1}{-\dfrac{1}{c}\lambda^{-1/2}\left\{1+\dfrac{1}{2}\lambda^{-1}\begin{bmatrix}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\\ -q(a)-\dfrac{2d}{c}\end{bmatrix}+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\right\}}$$

$$=-c\lambda^{1/2}\left\{1-\frac{1}{2}\lambda^{-1}\begin{bmatrix}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\\ -q(a)-\dfrac{2d}{c}\end{bmatrix}+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\right\} \quad (2.228)$$

$$=-c\lambda^{1/2}+\frac{c}{2}\lambda^{-1/2}\begin{bmatrix}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\\ -q(a)-\dfrac{2d}{c}\end{bmatrix}+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)$$

olur. (2.206) ile verilen $\int_a^t S(x,\lambda)dx$ değerinin asimptotik yaklaşımı kullanılarak

$$\exp\left(\int_a^t S(x,\lambda)dx\right)=1+\frac{1}{4}\lambda^{-1}\left\{\begin{matrix}q(b)\left[\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)-\cos 2\lambda^{1/2}(b-t)\right]\\ +\int_a^t q'(x)dx+\sin\left(2\lambda^{1/2}t+\xi_t\right)\\ -\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\end{matrix}\right\} \quad (2.229)$$
$$+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)$$

ve ayrıca (2.207) ile verilen $\int_a^t T(x,\lambda)dx$ değerinin asimptotik yaklaşımı kullanılarak

$$\sin\left(\int_a^t T(x,\lambda)dx\right)=\sin\left\{\begin{array}{l}\lambda^{1/2}(t-a)+\dfrac{1}{2}\lambda^{-1/2}\left[aq(a)-tq(t)+\displaystyle\int_a^t xq'(x)dx\right]\\ +\dfrac{1}{4}\lambda^{-1}\left[\begin{array}{l}q(b)\left(\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)-\sin 2\lambda^{1/2}(b-t)\right)\\ +\cos\left(2\lambda^{1/2}t+\xi_t\right)-\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\end{array}\right]\\ +O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)\end{array}\right\} \tag{2.230}$$

$$=\sin\kappa+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right),$$

$$\cos\left(\int_a^t T(x,\lambda)dx\right)=\cos\left\{\begin{array}{l}\lambda^{1/2}(t-a)+\dfrac{1}{2}\lambda^{-1/2}\left[aq(a)-tq(t)+\displaystyle\int_a^t xq'(x)dx\right]\\ +\dfrac{1}{4}\lambda^{-1}\left[\begin{array}{l}q(b)\left(\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)-\sin 2\lambda^{1/2}(b-t)\right)\\ +\cos\left(2\lambda^{1/2}t+\xi_t\right)-\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\end{array}\right]\\ +O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)\end{array}\right\} \tag{2.231}$$

$$=\cos\kappa+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned}\kappa:=\lambda^{1/2}(t-a)+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\left[aq(a)-tq(t)+\int_a^t xq'(x)dx\right]\\ +\frac{1}{4}\lambda^{-1}q(b)\left[\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)-\sin 2\lambda^{1/2}(b-t)\right].\end{aligned} \tag{2.232}$$

Bu durumda (2.226), (2.227), (2.230) ve (2.231)’ den

$$\begin{aligned}\cos\left\{\cot^{-1}\left[\frac{T(a,\lambda)}{-c\lambda-d+S(a,\lambda)}\right]+\int_a^t T(x,\lambda)dx\right\}\\ =-\sin\kappa-\frac{1}{c}\lambda^{-1/2}\cos\kappa+\frac{1}{2c^2}\lambda^{-1}\sin\kappa+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\end{aligned} \tag{2.233}$$

elde edilir. Sonuç olarak; (2.228), (2.229) ve (2.233) ile elde edilen değerler (2.41)’ de yerine yazılarak ispat tamamlanır.

ii) İspat için, benzer şekilde (2.42) deki terimler $\lambda\to\infty$ iken hesaplanır. İlk olarak, (2.209) ve (2.213)’ ten

$$\frac{S(b,\lambda)-\cot\beta}{T(b,\lambda)}=\frac{-\cot\beta+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)}{\lambda^{1/2}\left[1+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)\right]}$$
$$=-\lambda^{-1/2}\cot\beta+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right) \tag{2.234}$$

elde edilir. (2.234)' ten

$$\tan^{-1}\left[\frac{S(b,\lambda)-\cot\beta}{T(b,\lambda)}\right]=-\lambda^{-1/2}\cot\beta+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right) \tag{2.235}$$

bulunur. Böylece

$$\cos\left\{\tan^{-1}\left[\frac{S(b,\lambda)-\cot\beta}{T(b,\lambda)}\right]\right\}=1-\frac{1}{2}\lambda^{-1}\cot^2\beta+O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right), \tag{2.236}$$

$$\sin\left\{\tan^{-1}\left[\frac{S(b,\lambda)-\cot\beta}{T(b,\lambda)}\right]\right\}=-\lambda^{-1/2}\cot\beta+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right) \tag{2.237}$$

$$\frac{\sin\beta}{\cos\left\{\tan^{-1}\left[\frac{S(b,\lambda)-\cot\beta}{T(b,\lambda)}\right]\right\}}=\frac{\sin\beta}{1-\frac{1}{2}\lambda^{-1}\cot^2\beta+O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right)}$$
$$=\sin\beta\times\left[1+\frac{1}{2}\lambda^{-1}\cot^2\beta+O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right)\right] \tag{2.238}$$
$$=\sin\beta+\frac{1}{2}\lambda^{-1}\frac{\cos^2\beta}{\sin\beta}+O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right)$$

olur. (2.212) ile verilen $\int_t^b S(x,\lambda)dx$ değeri kullanılarak

$$\exp\left(-\int_t^b S(x,\lambda)dx\right)=1+\frac{1}{4}\lambda^{-1}\left\{\begin{matrix}q(b)\left[1-\cos 2\lambda^{1/2}(b-t)\right]\\ -\int_t^b q'(x)dx+\sin\left(2\lambda^{1/2}t+\xi_t\right)\end{matrix}\right\} \tag{2.239}$$
$$+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)$$

elde edilir. Ayrıca (2.216) ile verilen $\int_t^b T(x,\lambda)dx$ değeri kullanılarak

$$\sin\left(\int_t^b T(x,\lambda)\,dx\right)=\sin\left\{\begin{array}{l}\lambda^{1/2}(b-t)+\dfrac{1}{2}\lambda^{-1/2}\left[tq(t)-bq[b]+\displaystyle\int_t^b xq'(x)\,dx\right]\\+\dfrac{1}{4}\lambda^{-1}\left[\begin{array}{l}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-t)\\-\cos\left(2\lambda^{1/2}t+\xi_t\right)\end{array}\right]+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)\end{array}\right\}$$
$$=\sin\sigma+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right), \tag{2.240}$$

$$\cos\left(\int_t^b T(x,\lambda)\,dx\right)=\cos\left\{\begin{array}{l}\lambda^{1/2}(b-t)+\dfrac{1}{2}\lambda^{-1/2}\left[tq(t)-bq[b]+\displaystyle\int_t^b xq'(x)\,dx\right]\\+\dfrac{1}{4}\lambda^{-1}\left[\begin{array}{l}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-t)\\-\cos\left(2\lambda^{1/2}t+\xi_t\right)\end{array}\right]+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)\end{array}\right\}$$
$$=\cos\sigma+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right) \tag{2.241}$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned}\sigma:=\lambda^{1/2}(b-t)+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\left[tq(t)-bq(b)+\int_t^b xq'(x)\,dx\right]\\+\frac{1}{4}\lambda^{-1}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-t).\end{aligned} \tag{2.242}$$

O halde (2.236), (2.237), (2.240) ve (2.241)' den

$$\begin{aligned}&\cos\left\{\tan^{-1}\left[\frac{S(b,\lambda)-\cot\beta}{T(b,\lambda)}\right]-\int_t^b T(x,\lambda)\,dx\right\}\\&=\cos\sigma-\lambda^{-1/2}\cot\beta\sin\sigma-\frac{\cot^2\beta}{2}\lambda^{-1}\cos\sigma+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\end{aligned} \tag{2.243}$$

olduğundan (2.238), (2.239) ve (2.243) ile elde edilen değerler (2.42)' de yerine yazılarak ve trigonometrik açılımlar kullanılarak ispat tamamlanır. ■

Aşağıdaki AD sınır koşulunu içeren problem göz önüne alınsın:

$$y''(t)+[\lambda-q(t)]y(t)=0, \quad t\in[a,b], \tag{2.244}$$

$$y'(a)-[c\lambda+d]y(a)=0, \tag{2.245}$$

$$y(b)=0. \tag{2.246}$$

$\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.244) probleminin, sırasıyla

$$\Psi(a,\lambda)=1, \Psi'(a,\lambda)=c\lambda+d \tag{2.247}$$

ve

$$\Phi(b,\lambda)=0, \Phi'(b,\lambda)=1 \tag{2.248}$$

koşullarını sağlayan iki çözümü olsun.

Teorem 2.18: $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.244) probleminin sırasıyla (2.247) ve (2.248) sınır koşullarını sağlayan çözümleri olmak üzere, $\lambda \to \infty$ iken

i)

$$\begin{aligned}\Psi(t,\lambda)=c\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\left\{1+\frac{c}{2}\left[aq(a)-tq(t)+\int_a^t xq'(x)dx\right]\right\}\\ \times\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\right),\end{aligned} \tag{2.249}$$

ii)

$$\begin{aligned}\Phi(t,\lambda)=-\lambda^{-1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)-\frac{1}{2}\lambda^{-1}\left[tq(t)-bq(b)+\int_t^b xq'(x)dx\right]\\ \times\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+O\left(\lambda^{-3/2}\right)\end{aligned} \tag{2.250}$$

asimptotik çözümleri elde edilir.

İspat:

i) İspat, Teorem 2.17' (i) de verilmiştir.

ii) İspat için, (2.78)' deki terimler $\lambda \to \infty$ iken hesaplanır. İlk olarak, (2.213)' ten

$$-\frac{1}{T(b,\lambda)}=-\frac{1}{\lambda^{1/2}\left[1+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)\right]}=-\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right) \tag{2.251}$$

olur. Ayrıca (2.240) ve (2.241)' den

$$\begin{aligned}\cos\left\{\frac{\pi}{2}-\int_t^b T(x,\lambda)dx\right\}&=\sin\left(\int_t^b T(x,\lambda)dx\right)\\ &=\sin\sigma+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\end{aligned} \tag{2.252}$$

bulunur. Sonuç olarak; (2.239), (2.251) ve (2.252) ile elde edilen değerler (2.78)' de yerine yazılarak ve trigonometrik açılımlar kullanılarak ispat tamamlanır. ■

2.1.2.2. Bilineer Durum (BN ve BD)

Aşağıdaki BN sınır koşulunu içeren problem göz önüne alınsın:

$$y''(t)+[\lambda-q(t)]y(t)=0, \quad t\in[a,b], \tag{2.253}$$

$$[e\lambda+f]y'(a)-[c\lambda+d]y(a)=0, \quad e\neq 0, \tag{2.254}$$

$$y'(b)\sin\beta-y(b)\cos\beta=0, \quad \beta\in(0,\pi). \tag{2.255}$$

$\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.253) probleminin, sırasıyla

$$\Psi(a,\lambda)=e\lambda+f\,,\Psi'(a,\lambda)=c\lambda+d \tag{2.256}$$

ve

$$\Phi(b,\lambda)=\sin\beta,\Phi'(b,\lambda)=\cos\beta \tag{2.257}$$

koşullarını sağlayan iki çözümü olsun.

Teorem 2.19: $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.253) probleminin sırasıyla (2.256) ve (2.257) sınır koşullarını sağlayan çözümleri olmak üzere, $\lambda\to\infty$ iken

i)

$$\begin{aligned}\Psi(t,\lambda)&=e\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\lambda^{1/2}\left\{c-\frac{e}{2}\left[aq(a)-tq(t)+\int_a^t xq'(x)dx\right]\right\}\\&\quad\times\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O(1),\end{aligned} \tag{2.258}$$

ii)

$$\begin{aligned}\Phi(t,\lambda)&=\sin\beta\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)-\lambda^{-1/2}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sin\beta}{2}\left[tq(t)-bq(b)+\displaystyle\int_t^b xq'(x)dx\right]\\+\cos\beta\end{array}\right\}\\&\quad\times\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+O\left(\lambda^{-1}\right)\end{aligned} \tag{2.259}$$

asimptotik çözümleri elde edilir.

İspat:

i) İspat için, (2.92)' deki terimler $\lambda\to\infty$ iken hesaplanır. İlk olarak, (2.209) ve (2.213)' ten

$$\frac{S(a,\lambda)}{T(a,\lambda)}=\frac{-\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\left[q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)+\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\right]+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)}{\lambda^{1/2}\times\left\{1+\frac{1}{2}\lambda^{-1}\begin{bmatrix}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)-q(a)\\-\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\end{bmatrix}+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)\right\}}$$

$$\begin{aligned}&=\left\{-\frac{1}{2}\lambda^{-1}\left[q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)+\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\right]+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)\right\}\\&\quad\times\left\{1-\frac{1}{2}\lambda^{-1}\begin{bmatrix}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)-q(a)\\-\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\end{bmatrix}+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)\right\}\\&=-\frac{1}{2}\lambda^{-1}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\end{aligned}\tag{2.260}$$

ve

$$\frac{c\lambda+d}{(e\lambda+f)T(a,\lambda)}=\frac{c\lambda+d}{(e\lambda+f)\times\left\{\begin{matrix}\lambda^{1/2}+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\begin{bmatrix}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)-q(a)\\-\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\end{bmatrix}\\+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\end{matrix}\right\}}$$

$$\begin{aligned}&=\frac{c\lambda+d}{e\lambda^{3/2}\left\{\begin{matrix}1+\frac{1}{2}\lambda^{-1}\left[q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)-q(a)+\frac{2f}{e}\right]\\+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\end{matrix}\right\}}\\&=\left[\frac{c}{e}\lambda^{-1/2}+\frac{d}{e}\lambda^{-3/2}\right]\times\left\{\begin{matrix}1-\frac{1}{2}\lambda^{-1}\begin{bmatrix}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\\-q(a)+\frac{2f}{e}\end{bmatrix}\\+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\end{matrix}\right\}\\&=\frac{c}{e}\lambda^{-1/2}+\lambda^{-3/2}\left\{\frac{c}{2e}\left[q(a)-q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\right]+\frac{de-fc}{e^2}\right\}\\&\quad+O\left(\lambda^{-3/2}\eta(\lambda)\right)\end{aligned}\tag{2.261}$$

elde edilir. Bu son iki eşitlikten

$$\frac{S(a,\lambda)}{T(a,\lambda)}-\frac{c\lambda+d}{(e\lambda+f)T(a,\lambda)}=-\frac{c}{e}\lambda^{-1/2}-\frac{1}{2}\lambda^{-1}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)$$
$$+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right) \tag{2.262}$$

bulunur. Diğer yandan (2.262)' den

$$\tan^{-1}\left[\frac{S(a,\lambda)}{T(a,\lambda)}-\frac{c\lambda+d}{(e\lambda+f)T(x,\lambda)}\right]=-\frac{c}{e}\lambda^{-1/2}-\frac{1}{2}\lambda^{-1}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)$$
$$+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right), \tag{2.263}$$

$$\cos\left\{\tan^{-1}\left[\frac{S(a,\lambda)}{T(a,\lambda)}-\frac{c\lambda+d}{(e\lambda+f)T(a,\lambda)}\right]\right\}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{c}{e}\right)^2\lambda^{-1}-\frac{c}{2e}\lambda^{-3/2}q(b)$$
$$\times\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)+O\left(\lambda^{-3/2}\eta(\lambda)\right), \tag{2.264}$$

$$\sin\left\{\tan^{-1}\left[\frac{S(a,\lambda)}{T(a,\lambda)}-\frac{c\lambda+d}{(e\lambda+f)T(a,\lambda)}\right]\right\}=-\frac{c}{e}\lambda^{-1/2}-\frac{1}{2}\lambda^{-1}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)$$
$$+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right) \tag{2.265}$$

olur. Böylece (2.264)' ten

$$\frac{e\lambda+f}{\cos\left\{\tan^{-1}\left[\frac{S(a,\lambda)}{T(a,\lambda)}-\frac{c\lambda+d}{(e\lambda+f)T(a,\lambda)}\right]\right\}}$$
$$=\frac{e\lambda+f}{1-\frac{1}{2}\left(\frac{c}{e}\right)^2\lambda^{-1}-\frac{c}{2e}\lambda^{-3/2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)+O\left(\lambda^{-3/2}\eta(\lambda)\right)} \tag{2.266}$$
$$=e\lambda+\left(\frac{c^2}{2e}+f\right)+\frac{c}{2}\lambda^{-1/2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)$$

elde edilir. Ayrıca (2.230), (2.231), (2.264) ve (2.265) kullanılırsa

$$\cos\left\{\tan^{-1}\left[\frac{S(a,\lambda)}{T(a,\lambda)}-\frac{c\lambda+d}{(e\lambda+f)T(a,\lambda)}\right]+\int_a^t T(x,\lambda)dx\right\}$$
$$=\cos\kappa+\frac{c}{e}\lambda^{-1/2}\sin\kappa-\frac{1}{2}\left(\frac{c}{e}\right)^2\lambda^{-1}\cos\kappa \tag{2.267}$$
$$+\frac{1}{2}\lambda^{-1}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)\sin\kappa+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)$$

olacağından (2.229), (2.266) ve (2.267) ile elde edilen değerler (2.92)' de yerine yazılarak ispat tamamlanır.

ii) İspat, Teorem 2.17 (ii)' de verilmiştir. ■

Aşağıdaki BD sınır koşulunu içeren problem göz önüne alınsın:

$$y''(t)+[\lambda-q(t)]y(t)=0, \quad t\in[a,b], \tag{2.268}$$

$$[e\lambda+f]y'(a)-[c\lambda+d]y(a)=0, \quad e\neq 0, \tag{2.269}$$

$$y(b)=0. \tag{2.270}$$

$\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.268) probleminin, sırasıyla

$$\Psi(a,\lambda)=e\lambda+f, \Psi'(a,\lambda)=c\lambda+d \tag{2.271}$$

ve

$$\Phi(b,\lambda)=0, \Phi'(b,\lambda)=1 \tag{2.272}$$

koşullarını sağlayan iki çözümü olsun.

Teorem 2.20: $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.268) probleminin sırasıyla (2.271) ve (2.272) sınır koşullarını sağlayan çözümleri olmak üzere, $\lambda\to\infty$ iken

i)

$$\begin{aligned}\Psi(t,\lambda)&=e\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\lambda^{1/2}\left\{c-\frac{e}{2}\left[aq(a)-tq(t)+\int_a^t xq'(x)dx\right]\right\}\\&\quad\times\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O(1),\end{aligned} \tag{2.273}$$

ii)

$$\begin{aligned}\Phi(t,\lambda)&=-\lambda^{-1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)-\frac{1}{2}\lambda^{-1}\left[tq(t)-bq(b)+\int_t^b xq'(x)dx\right]\\&\quad\times\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+O\left(\lambda^{-3/2}\right)\end{aligned} \tag{2.274}$$

asimptotik çözümleri elde edilir.

İspat:

i) İspat, Teorem 2.19 (i)' de verilmiştir.

ii) İspat, Teorem 2.18 (ii)' de verilmiştir. ■

2.1.2.3. Kuadratik Durum (KN ve KD)

Aşağıdaki KN sınır koşulunu içeren problem göz önüne alınsın:

$$y''(t)+\left[\lambda-q(t)\right]y(t)=0,\quad t\in[a,b], \tag{2.275}$$

$$y'(a)-\left[c\lambda^2+d\lambda+e\right]y(a)=0,\quad c\neq 0, \tag{2.276}$$

$$y'(b)\sin\beta-y(b)\cos\beta=0,\quad \beta\in(0,\pi). \tag{2.277}$$

$\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.275) probleminin, sırasıyla

$$\Psi(a,\lambda)=1, \Psi'(a,\lambda)=c\lambda^2+d\lambda+e \tag{2.278}$$

ve

$$\Phi(b,\lambda)=\sin\beta, \Phi'(b,\lambda)=\cos\beta \tag{2.279}$$

koşullarını sağlayan iki çözümü olsun.

Teorem 2.21: $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.275) probleminin sırasıyla (2.278) ve (2.279) sınır koşullarını sağlayan çözümleri olmak üzere, $\lambda\to\infty$ iken

i)

$$\begin{aligned}\Psi(x,\lambda)&=c\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\frac{c}{2}\lambda\left[aq(a)-tq(t)+\int_a^t xq'(x)dx\right]\\&\times\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O\left(\lambda^{1/2}\right),\end{aligned} \tag{2.280}$$

ii)

$$\begin{aligned}\Phi(t,\lambda)&=\sin\beta\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)-\lambda^{-1/2}\left\{\begin{aligned}&\frac{\sin\beta}{2}\left[tq(t)-bq(b)+\int_t^b xq'(x)dx\right]\\&+\cos\beta\end{aligned}\right\}\\&\times\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+O\left(\lambda^{-1}\right)\end{aligned} \tag{2.281}$$

asimptotik çözümleri elde edilir.

İspat:

i)) İspat için, (2.122)' deki terimler $\lambda \to \infty$ iken hesaplanır. İlk olarak, (2.209) ve (2.213)' ten

$$\frac{T(a,\lambda)}{-c\lambda^2-d\lambda-e+S(a,\lambda)}$$

$$=\frac{\lambda^{1/2}+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\begin{bmatrix} q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)-q(a) \\ -\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right) \end{bmatrix}+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)}{-c\lambda^2\left\{1+\frac{d}{c}\lambda^{-1}+\frac{e}{c}\lambda^{-2}+\frac{1}{2c}\lambda^{-5/2}\begin{bmatrix} q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a) \\ -\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right) \end{bmatrix}+O\left(\lambda^{-3}\eta^2(\lambda)\right)\right\}}$$

$$=\left\{-\frac{1}{c}\lambda^{-3/2}-\frac{1}{2c}\lambda^{-5/2}\begin{bmatrix} q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)-q(a) \\ -\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right) \end{bmatrix}+O\left(\lambda^{-3}\eta^2(\lambda)\right)\right\}$$

$$\times\left\{1-\frac{d}{c}\lambda^{-1}-\frac{e}{c}\lambda^{-2}-\frac{1}{2c}\lambda^{-5/2}\begin{bmatrix} q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a) \\ -\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right) \end{bmatrix}+O\left(\lambda^{-3}\eta^2(\lambda)\right)\right\}$$

$$=-\frac{1}{c}\lambda^{-3/2}+\frac{1}{c}\lambda^{-5/2}\left[\frac{q(a)}{2}-\frac{q(b)}{2}\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{d}{c}\right] +O\left(\lambda^{-5/2}\eta(\lambda)\right) \tag{2.282}$$

elde edilir. (2.282)' den

$$\cot^{-1}\left[\frac{T(a,\lambda)}{-c\lambda^2-d\lambda-e+S(a,\lambda)}\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{c}\lambda^{-3/2}-\frac{1}{c}\lambda^{-5/2}\left[\frac{q(a)}{2}-\frac{q(b)}{2}\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{d}{c}\right] +O\left(\lambda^{-5/2}\eta(\lambda)\right) \tag{2.283}$$

bulunur ve böylece (2.283)' ten

$$
\begin{aligned}
&\cos\left\{\cot^{-1}\left[\frac{T(a,\lambda)}{-c\lambda^2-d\lambda-e+S(a,\lambda)}\right]\right\} \\
&\qquad =-\sin\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{c}\lambda^{-3/2}-\frac{1}{c}\lambda^{-5/2}\left[\frac{q(a)}{2}-\frac{q(b)}{2}\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{d}{c}\right]\\&+O\left(\lambda^{-5/2}\eta(\lambda)\right)\end{aligned}\right\} \\
&\qquad =-\frac{1}{c}\lambda^{-3/2}+\frac{1}{c}\lambda^{-5/2}\left[\frac{q(a)}{2}-\frac{q(b)}{2}\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{d}{c}\right] \\
&\qquad\quad +O\left(\lambda^{-5/2}\eta(\lambda)\right),
\end{aligned}
\tag{2.284}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sin\left\{\cot^{-1}\left[\frac{T(a,\lambda)}{-c\lambda^2-d\lambda-e+S(a,\lambda)}\right]\right\} \\
&\qquad =\cos\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{c}\lambda^{-3/2}-\frac{1}{c}\lambda^{-5/2}\left[\frac{q(a)}{2}-\frac{q(b)}{2}\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{d}{c}\right]\\&+O\left(\lambda^{-5/2}\eta(\lambda)\right)\end{aligned}\right\} \\
&\qquad =1-\frac{1}{2c^2}\lambda^{-3}+\frac{1}{c^2}\lambda^{-4}\left[\frac{q(a)}{2}-\frac{q(b)}{2}\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{d}{c}\right] \\
&\qquad\quad +O\left(\lambda^{-4}\eta(\lambda)\right),
\end{aligned}
\tag{2.285}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\cos\left\{\cot^{-1}\left[\dfrac{T(a,\lambda)}{-c\lambda-d+S(a,\lambda)}\right]\right\}} \\
&\qquad =\frac{1}{-\dfrac{1}{c}\lambda^{-3/2}\left\{\begin{aligned}&1-\lambda^{-1}\left[\frac{q(a)}{2}-\frac{q(b)}{2}\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{d}{c}\right]\\&+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\end{aligned}\right\}} \\
&\qquad =-c\lambda^{3/2}\times\left\{\begin{aligned}&1+\lambda^{-1}\left[\frac{q(a)}{2}-\frac{q(b)}{2}\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{d}{c}\right]\\&+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\end{aligned}\right\} \\
&\qquad =-c\lambda^{3/2}-c\lambda^{1/2}\left[\frac{q(a)}{2}-\frac{q(b)}{2}\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{d}{c}\right] \\
&\qquad\quad +O\left(\lambda^{1/2}\eta(\lambda)\right)
\end{aligned}
\tag{2.286}
$$

olur. Ayrıca (2.230), (2.231), (2.284) ve (2.285)’ ten

$$\cos\left\{\cot^{-1}\left[\frac{T(a,\lambda)}{-c\lambda^2-d\lambda-e+S(a,\lambda)}\right]+\int_a^t T(x,\lambda)dx\right\}=-\sin\kappa+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right) \quad (2.287)$$

elde edilir. Sonuç olarak; (2.229), (2.286) ve (2.287) ile belirlenen değerler (2.122)' de yerine yazılarak ve trigonometrik açılımlar kullanılarak ispat tamamlanır.

ii) İspat, Teorem 2.17 (ii)' de verilmiştir. ■

Aşağıdaki KD sınır koşulunu içeren problem göz önüne alınsın:

$$y''(t)+[\lambda-q(t)]y(t)=0, \quad t\in[a,b], \quad (2.288)$$

$$y'(a)-\left[c\lambda^2+d\lambda+e\right]y(a)=0, \quad c\neq 0, \quad (2.289)$$

$$y(b)=0. \quad (2.290)$$

$\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.288) probleminin, sırasıyla

$$\Psi(a,\lambda)=1, \Psi'(a,\lambda)=c\lambda^2+d\lambda+e \quad (2.291)$$

ve

$$\Phi(b,\lambda)=0, \Phi'(b,\lambda)=1 \quad (2.292)$$

koşullarını sağlayan iki çözümü olsun.

Teorem 2.22: $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.288) probleminin sırasıyla (2.291) ve (2.292) sınır koşullarını sağlayan çözümleri olmak üzere, $\lambda\to\infty$ iken

i)

$$\begin{aligned}\Psi(x,\lambda)=c\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\frac{c}{2}\lambda\left[aq(a)-tq(t)+\int_a^t xq'(x)dx\right]\\ \times\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O\left(\lambda^{1/2}\right),\end{aligned} \quad (2.293)$$

ii)

$$\begin{aligned}\Phi(t,\lambda)=-\lambda^{-1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)-\frac{1}{2}\lambda^{-1}\left[tq(t)-bq(b)+\int_t^b xq'(x)dx\right]\\ \times\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+O\left(\lambda^{-3/2}\right)\end{aligned} \quad (2.294)$$

asimptotik çözümleri elde edilir.

İspat:

i) İspat, Teorem 2.21 (i)' de verilmiştir.

ii) İspat, Teorem 2.18 (ii)' de verilmiştir. ■

2.1.2.4 İki Sınır Koşulunun da Özdeğer Parametresine Bağlı Olduğu Durum

Aşağıdaki problem göz önüne alınsın:

$$y''(t)+[\lambda-q(t)]y(t)=0, \quad t\in[a,b], \tag{2.295}$$

$$a_1y(a)+a_2y'(a)=\lambda\left[a_1'y(a)+a_2'y'(a)\right], \quad a_1,a_2,a_1',a_2'\in\mathbb{R} \tag{2.296}$$

$$b_1y(b)+b_2y'(b)=\lambda\left[b_1'y(b)+b_2'y'(b)\right], \quad b_1,b_2,b_1',b_2'\in\mathbb{R}. \tag{2.297}$$

$\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.295) probleminin, sırasıyla

$$\Psi(a,\lambda)=a_2-a_2'\lambda, \Psi'(a,\lambda)=a_1'\lambda-a_1 \tag{2.298}$$

ve

$$\Phi(b,\lambda)=b_2-b_2'\lambda, \Phi'(b,\lambda)=b_1'\lambda-b_1 \tag{2.299}$$

koşullarını sağlayan iki çözümü olsun.

Teorem 2.23: $\Psi(t,\lambda)$ fonksiyonu, (2.295) probleminin (2.298) sınır koşulunu sağlayan çözümü olmak üzere, $\lambda\to\infty$ iken

(i) $a_2'\neq 0$ olduğunda

$$\begin{aligned}\Psi(t,\lambda)=-a_2'\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\left[a_1'+\frac{a_2'}{2}\left(aq(a)-tq(t)+\int_a^t xq'(x)dx\right)\right]\\ \times\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O(1),\end{aligned} \tag{2.300}$$

(ii) $a_2'=0$ olduğunda

$$\Psi(t,\lambda)=a_1'\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\left[\frac{a_1'}{2}\left(aq(a)-tq(t)+\int_a^t xq'(x)dx\right)+a_2\right]$$
$$\times\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\right) \tag{2.301}$$

asimptotik çözümleri elde edilir.

İspat:

(i) İspat için, (2.150)' deki terimler $\lambda\to\infty$ iken hesaplanır. İlk olarak, (2.261)' de $c=a_1',\ d=-a_1,\ e=a_2',\ f=-a_2$ alınırsa

$$\frac{a_1'\lambda-a_1}{(a_2'\lambda-a_2)T(a,\lambda)}=\frac{a_1'}{a_2'}\lambda^{-1/2}+\left\{\begin{array}{l}\dfrac{a_1'}{2a_2'}\left[q(a)-q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\right]\\+\dfrac{a_2a_1'-a_1a_2'}{(a_2')^2}\end{array}\right\}\lambda^{-3/2}$$
$$+O\left(\lambda^{-3/2}\eta(\lambda)\right) \tag{2.302}$$

bulunur. (2.260) ve (2.302) değerleri (2.151)' de yerine yazılırsa

$$F_1(a,\lambda)=\frac{S(a,\lambda)}{T(a,\lambda)}+\frac{a_1'\lambda-a_1}{(a_2'\lambda-a_2)T(a,\lambda)}$$
$$=\frac{a_1'}{a_2'}\lambda^{-1/2}-\frac{1}{2}\lambda^{-1}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right) \tag{2.303}$$

elde edilir. Bu eşitlikten

$$\tan^{-1}F_1(a,\lambda)=\frac{a_1'}{a_2'}\lambda^{-1/2}-\frac{1}{2}\lambda^{-1}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right) \tag{2.304}$$

bulunur. O halde

$$\cos\left[\tan^{-1}F_1(a,\lambda)\right]=1-\frac{1}{2}\left(\frac{a_1'}{a_2'}\right)^2\lambda^{-1}+\frac{a_1'}{2a_2'}\lambda^{-3/2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)$$
$$+O\left(\lambda^{-3/2}\eta(\lambda)\right), \tag{2.305}$$

$$\sin\left[\tan^{-1}F_1(a,\lambda)\right]=\frac{a_1'}{a_2'}\lambda^{-1/2}-\frac{1}{2}\lambda^{-1}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right), \tag{2.306}$$

$$\frac{a_2-a_2'\lambda}{\cos\left[\tan^{-1}F_1(a,\lambda)\right]}=\frac{a_2-a_2'\lambda}{\left[\begin{array}{l}1-\frac{1}{2}\left(\frac{a_1'}{a_2'}\right)^2\lambda^{-1}+\frac{a_1'}{2a_2'}\lambda^{-3/2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)\\+O\left(\lambda^{-3/2}\eta(\lambda)\right)\end{array}\right]}$$

$$=\left(a_2-a_2'\lambda\right)\times\left[\begin{array}{l}1+\frac{1}{2}\left(\frac{a_1'}{a_2'}\right)^2\lambda^{-1}-\frac{a_1'}{2a_2'}\lambda^{-3/2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)\\+O\left(\lambda^{-3/2}\eta(\lambda)\right)\end{array}\right] \tag{2.307}$$

$$=-a_2'\lambda+\left[a_2-\frac{\left(a_1'\right)^2}{2a_2'}\right]+\frac{a_1'}{2}\lambda^{-1/2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)$$
$$+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)$$

olur. Ayrıca (2.230), (2.231), (2.305) ve (2.306) kullanılarak

$$\cos\left[\tan^{-1}F_1(a,\lambda)+\int_a^t T(x,\lambda)dx\right]$$
$$=\cos\kappa-\frac{a_1'}{a_2'}\lambda^{-1/2}\sin\kappa+\frac{1}{2}\lambda^{-1}\left[\begin{array}{l}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)\sin\kappa\\-\left(\frac{a_1'}{a_2'}\right)^2\cos\kappa\end{array}\right] \tag{2.308}$$
$$+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)$$

elde edilir. Sonuç olarak; (2.229), (2.307) ve (2.308) değerleri (2.150)’ de yerine yazılarak ve trigonometrik açılımlar kullanılarak ispat tamamlanır.

(ii) İspat için, (2.152)’ deki terimler $\lambda\to\infty$ iken hesaplanır. İlk olarak, (2.209) ve (2.213)’ ten

$$F_2(a,\lambda)=\frac{a_2T(a,\lambda)}{-a_1'\lambda+a_1+a_2S(a,\lambda)}$$

$$=\frac{a_2\lambda^{1/2}+\frac{a_2}{2}\lambda^{-1/2}\left[\begin{array}{l}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\\-q(a)-\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\end{array}\right]+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)}{-a_1'\lambda\times\left[\begin{array}{l}1-\frac{a_1}{a_1'}\lambda^{-1}+\frac{a_2}{2a_1'}\lambda^{-3/2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)\\-\frac{a_2}{2a_1'}\lambda^{-3/2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right)\end{array}\right]}$$

$$=\left\{-\frac{a_2}{a_1'}\lambda^{-1/2}-\frac{a_2}{2a_1'}\lambda^{-3/2}\begin{bmatrix} q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a) \\ -q(a)-\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\end{bmatrix}+O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right)\right\}$$
$$\times\begin{bmatrix} 1+\frac{a_1}{a_1'}\lambda^{-1}-\frac{a_2}{2a_1'}\lambda^{-3/2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a) \\ +\frac{a_2}{2a_1'}\lambda^{-3/2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right)\end{bmatrix} \qquad (2.309)$$
$$=-\frac{a_2}{a_1'}\lambda^{-1/2}-\left[\frac{a_1a_2}{(a_1')^2}+\frac{a_2}{2a_1'}\left(q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)-q(a)\right)\right]\lambda^{-3/2}$$
$$+O\left(\lambda^{-3/2}\eta(\lambda)\right)$$

elde edilir. Bu eşitlikten

$$\cot^{-1}F_2(a,\lambda)=\frac{\pi}{2}+\frac{a_2}{a_1'}\lambda^{-1/2}+\left[\frac{a_1a_2}{(a_1')^2}+\frac{a_2}{2a_1'}\begin{pmatrix} q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a) \\ -q(a)\end{pmatrix}\right]\lambda^{-3/2} \qquad (2.310)$$
$$+O\left(\lambda^{-3/2}\eta(\lambda)\right),$$

bulunur. Buradan da

$$\cos\left[\cot^{-1}F_2(a,\lambda)\right]$$
$$=-\sin\begin{bmatrix} \frac{a_2}{a_1'}\lambda^{-1/2}+\left[\frac{a_1a_2}{(a_1')^2}+\frac{a_2}{2a_1'}\begin{pmatrix} q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a) \\ -q(a)\end{pmatrix}\right]\lambda^{-3/2} \\ +O\left(\lambda^{-3/2}\eta(\lambda)\right)\end{bmatrix} \qquad (2.311)$$
$$=-\frac{a_2}{a_1'}\lambda^{-1/2}-\left[\frac{a_1a_2}{(a_1')^2}+\frac{a_2}{2a_1'}\begin{pmatrix} q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a) \\ -q(a)\end{pmatrix}\right]\lambda^{-3/2}$$
$$+O\left(\lambda^{-3/2}\eta(\lambda)\right),$$

$$\sin\left[\cot^{-1}F_2(a,\lambda)\right]$$
$$=\cos\left\{\begin{matrix} \frac{a_2}{a_1'}\lambda^{-1/2}+\left[\frac{a_1a_2}{(a_1')^2}+\frac{a_2}{2a_1'}\begin{pmatrix} q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a) \\ -q(a)\end{pmatrix}\right]\lambda^{-3/2} \\ +O\left(\lambda^{-3/2}\eta(\lambda)\right)\end{matrix}\right\} \qquad (2.312)$$
$$=1-\frac{1}{2}\left(\frac{a_2}{a_1'}\right)^2\lambda^{-1}+\frac{a_2}{a_1'}\left[\frac{a_1a_2}{(a_1')^2}+\frac{a_2}{2a_1'}\begin{pmatrix} q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a) \\ -q(a)\end{pmatrix}\right]\lambda^{-2}$$
$$+O\left(\lambda^{-2}\eta(\lambda)\right),$$

$$\frac{a_2}{\cos\left[\cot^{-1}F_2(a,\lambda)\right]}=\frac{a_2}{-\frac{a_2}{a_1'}\lambda^{-1/2}\times\left\{\begin{array}{l}1+\left[\frac{a_1}{a_1'}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\\ -q(a)\end{pmatrix}\right]\lambda^{-1}\\ +O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\end{array}\right\}}$$

$$=-a_1'\lambda^{1/2}\times\left\{\begin{array}{l}1-\left[\frac{a_1}{a_1'}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\\ -q(a)\end{pmatrix}\right]\lambda^{-1}\\ +O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\end{array}\right\} \tag{2.313}$$

$$=-a_1'\lambda^{1/2}+\left[a_1+\frac{a_1'}{2}\left(q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)-q(a)\right)\right]\lambda^{-1/2}$$
$$+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)$$

olduğu görülür. Ayrıca (2.230), (2.231), (2.311) ve (2.312) kullanılarak

$$\cos\left[\cot^{-1}F_2(a,\lambda)+\int_a^t T(x,\lambda)dx\right]$$
$$=-\sin\kappa-\frac{a_2}{a_1'}\lambda^{-1/2}\cos\kappa+\frac{1}{2}\left(\frac{a_2}{a_1'}\right)^2\lambda^{-1}\sin\kappa+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right) \tag{2.314}$$

elde edilir. Sonuç olarak; (2.229), (2.313) ve (2.314) değerleri (2.152)' de yerine yazılarak ve trigonometrik açılımlar kullanılarak ispat tamamlanır. ■

Teorem 2.24: $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonu, (2.295) probleminin (2.299) sınır koşulunu sağlayan çözümü olmak üzere, $\lambda\to\infty$ iken

(i) $b_2'\neq 0$ olduğunda

$$\Phi(t,\lambda)=-b_2'\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+\left[\frac{b_2'}{2}\left(tq(t)-bq(b)+\int_t^b xq'(x)dx\right)-b_1'\right]\lambda^{1/2}$$
$$\times\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+O(1), \tag{2.315}$$

(ii) $b_2'=0$ olduğunda

$$\Phi(t,\lambda)=-b_1'\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)-\left[\frac{b_1'}{2}\left(tq(t)-bq(b)+\int_t^b xq'(x)dx\right)-b_2\right]$$
$$\times\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\right) \tag{2.316}$$

asimptotik çözümleri elde edilir.

İspat:

(i) İspat için, (2.163)' teki terimler $\lambda \to \infty$ iken hesaplanır. İlk olarak, (2.209) ve (2.213)' ten

$$\frac{S(b,\lambda)}{T(b,\lambda)} = \frac{O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)}{\lambda^{1/2}\left[1+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)\right]} = O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right) \tag{2.317}$$

ve

$$\begin{aligned}\frac{b_1'\lambda - b_1}{(b_2'\lambda - b_2)T(b,\lambda)} &= \frac{b_1'\lambda - b_1}{b_2'\lambda^{3/2} - b_2\lambda^{1/2} + O\left(\eta^2(\lambda)\right)} \\ &= \frac{b_1'\lambda - b_1}{b_2'\lambda^{3/2} \times \left[1 - \dfrac{b_2}{b_2'}\lambda^{-1} + O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)\right]} \\ &= \left[\frac{b_1'}{b_2'}\lambda^{-1/2} - \frac{b_1}{b_2'}\lambda^{-3/2}\right] \times \left[1 + \frac{b_2}{b_2'}\lambda^{-1} + O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)\right] \\ &= \frac{b_1'}{b_2'}\lambda^{-1/2} + \frac{b_1'b_2 - b_1b_2'}{(b_2')^2}\lambda^{-3/2} + O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right)\end{aligned} \tag{2.318}$$

elde edilir. Bu değerler (2.164)' te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}F_3(b,\lambda) &= \frac{S(b,\lambda)}{T(b,\lambda)} + \frac{b_1'\lambda - b_1}{(b_2'\lambda - b_2)T(b,\lambda)} \\ &= \frac{b_1'}{b_2'}\lambda^{-1/2} + \frac{b_1'b_2 - b_1b_2'}{(b_2')^2}\lambda^{-3/2} + O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)\end{aligned} \tag{2.319}$$

olduğundan (2.319) denkleminden

$$\tan^{-1} F_3(b,\lambda) = \frac{b_1'}{b_2'}\lambda^{-1/2} + \frac{b_1'b_2 - b_1b_2'}{(b_2')^2}\lambda^{-3/2} + O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right) \tag{2.320}$$

bulunur. Böylece

$$\cos\left[\tan^{-1} F_3(b,\lambda)\right] = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{b_1'}{b_2'}\right)^2\lambda^{-1} + \frac{b_1'}{b_2'}\left[\frac{b_1'b_2 - b_1b_2'}{(b_2')^2}\right]\lambda^{-2} + O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right), \tag{2.321}$$

$$\sin\left[\tan^{-1}F_3(b,\lambda)\right]=\frac{b_1'}{b_2'}\lambda^{-1/2}+\frac{b_1'b_2-b_1b_2'}{(b_2')^2}\lambda^{-3/2}+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right), \tag{2.322}$$

$$\begin{aligned}\frac{b_2-b_2'\lambda}{\cos\left[\tan^{-1}F_3(b,\lambda)\right]}&=\frac{b_2-b_2'\lambda}{1-\frac{1}{2}\left(\frac{b_1'}{b_2'}\right)^2\lambda^{-1}+\frac{b_1'}{b_2'}\left[\frac{b_1'b_2-b_1b_2'}{(b_2')^2}\right]\lambda^{-2}+O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right)}\\&=\left[b_2-b_2'\lambda\right]\times\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{b_1'}{b_2'}\right)^2\lambda^{-1}-\frac{b_1'}{b_2'}\left[\frac{b_1'b_2-b_1b_2'}{(b_2')^2}\right]\lambda^{-2}+O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right)\right]\\&=-b_2'\lambda+\left[b_2-\frac{(b_1')^2}{2b_2'}\right]+\left[\frac{b_2}{2}\left(\frac{b_1'}{b_2'}\right)^2-b_1'\left(\frac{b_1'b_2-b_1b_2'}{(b_2')^2}\right)\right]\lambda^{-1}\\&\quad+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\end{aligned} \tag{2.323}$$

olur. Ayrıca (2.240), (2.241), (2.321) ve (2.322) kullanılarak

$$\begin{aligned}&\cos\left[\tan^{-1}F_3(b,\lambda)-\int_t^b T(x,\lambda)\,dx\right]\\&\qquad=\cos\sigma+\frac{b_1'}{b_2'}\lambda^{-1/2}\sin\sigma-\frac{1}{2}\left(\frac{b_1'}{b_2'}\right)^2\lambda^{-1}\cos\sigma+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\end{aligned} \tag{2.324}$$

elde edilir. Sonuç olarak; (2.239), (2.323) ve (2.324) değerleri (2.163)' te yerine yazılarak ve trigonometrik açılımlar kullanılarak ispat tamamlanır.

(ii) İspat için, (2.165)' teki terimler $\lambda\to\infty$ iken hesaplanır. İlk olarak, (2.209) ve (2.213)' ten

$$\begin{aligned}F_4(b,\lambda)&=\frac{b_2T(b,\lambda)}{b_1-b_1'\lambda+b_2S(b,\lambda)}\\&=\frac{b_2\lambda^{1/2}+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)}{-b_1'\lambda\left[1-\frac{b_1}{b_1'}\lambda^{-1}+O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right)\right]}\\&=\left[-\frac{b_2}{b_1'}\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right)\right]\times\left[1+\frac{b_1}{b_1'}\lambda^{-1}+O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right)\right]\\&=-\frac{b_2}{b_1'}\lambda^{-1/2}-\frac{b_1b_2}{(b_1')^2}\lambda^{-3/2}+O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right)\end{aligned} \tag{2.325}$$

elde edilir. (2.325)' ten

$$\cot^{-1} F_4(b,\lambda) = \frac{\pi}{2} + \frac{b_2}{b_1'}\lambda^{-1/2} + \frac{b_1 b_2}{(b_1')^2}\lambda^{-3/2} + O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right) \tag{2.326}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} \cos\left[\cot^{-1} F_4(b,\lambda)\right] &= -\sin\left[\frac{b_2}{b_1'}\lambda^{-1/2} + \frac{b_1 b_2}{(b_1')^2}\lambda^{-3/2} + O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right)\right] \\ &= -\frac{b_2}{b_1'}\lambda^{-1/2} - \frac{b_1 b_2}{(b_1')^2}\lambda^{-3/2} + O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right), \end{aligned} \tag{2.327}$$

$$\begin{aligned} \sin\left[\cot^{-1} F_4(b,\lambda)\right] &= \cos\left[\frac{b_2}{b_1'}\lambda^{-1/2} + \frac{b_1 b_2}{(b_1')^2}\lambda^{-3/2} + O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right)\right] \\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{b_2}{b_1'}\right)^2\lambda^{-1} - \frac{b_1 (b_2)^2}{(b_1')^3}\lambda^{-2} + O\left(\lambda^{-5/2}\eta^2(\lambda)\right), \end{aligned} \tag{2.328}$$

$$\begin{aligned} \frac{b_2}{\cos\left[\cot^{-1} F_4(b,\lambda)\right]} &= \frac{b_2}{-\frac{b_2}{b_1'}\lambda^{-1/2}\left[1 + \frac{b_1}{b_1'}\lambda^{-1} + O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)\right]} \\ &= -b_1'\lambda^{1/2}\left[1 - \frac{b_1}{b_1'}\lambda^{-1} + O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)\right] \\ &= -b_1'\lambda^{1/2} + b_1\lambda^{-1/2} + O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right). \end{aligned} \tag{2.329}$$

olduğundan (2.240), (2.241), (2.327) ve (2.328) kullanılarak

$$\begin{aligned} &\cos\left[\cot^{-1} F_4(b,\lambda) - \int_t^b T(x,\lambda)\,dx\right] \\ &\qquad = \sin\sigma - \frac{b_2}{b_1'}\lambda^{-1/2}\cos\sigma - \frac{1}{2}\left(\frac{b_2}{b_1'}\right)^2\lambda^{-1}\sin\sigma + O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right) \end{aligned} \tag{2.330}$$

elde edilir. Sonuç olarak; (2.239), (2.329) ve (2.330) değerleri (2.165)' te yerine yazılarak ve trigonometrik açılımlar kullanılarak ispat tamamlanır. ■

2.2. Green Fonksiyonu Hesaplamaları

(2.1) probleminin belirtilen sınır koşulları altında elde edilen $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ özfonksiyonlarının Wronskian determinantı

$$w(\lambda) := W_t(\Psi,\Phi) = \Psi(t,\lambda)\Phi'(t,\lambda) - \Psi'(t,\lambda)\Phi(t,\lambda) \tag{2.331}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda problemin Green fonksiyonu

$$G(x,y,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\Psi(x,\lambda)\Phi(y,\lambda)}{w(\lambda)}, a \le x \le y \le b \\ \dfrac{\Psi(y,\lambda)\Phi(x,\lambda)}{w(\lambda)}, a \le y \le x \le b \end{cases} \tag{2.332}$$

şeklindedir [1]. $w(\lambda)$, Wronskian determinantı, sabit olduğundan; Green fonksiyonu, x ve y için simetriktir; yani $G(x,y,\lambda) = G(y,x,\lambda)$' dır.

2.2.1. Potansiyel Fonksiyonunun İntegrallenebilir Olması Durumu

Bu kısımda, (2.1) problemi belirtilen sınır koşulları altında ayrı ayrı ele alınacak ve $q(t)$ potansiyel fonksiyonunun integrallenebilir olma şartı altında Green fonksiyonları için asimptotik yaklaşımlar elde edilecektir. Bunun için, önceki bölümlerde verilen koşullara uygun olarak elde edilen özfonksiyonlar kullanılacaktır.

2.2.1.1. Lineer Durum (AN ve AD)

Aşağıda AN sınır koşulu için Green fonksiyonu yaklaşımları verilmiştir:

Teorem 2.25: $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.36) probleminin sırasıyla (2.39) ve (2.40) sınır koşullarını sağlayan çözümleri olmak üzere $a \le x \le y \le b$, $\lambda \to \infty$ iken

$$G(x,y,\lambda) = -\lambda^{-1/2}\frac{\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)}{\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)} + \frac{\lambda^{-1}}{\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{1}{2}\int_a^x q(t)\,dt-\frac{1}{c}\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)\\ +\left(\cot\beta-\frac{1}{2}\int_y^b q(t)\,dt\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)\\ -\left(\frac{1}{c}+\cot\beta\right)\tan\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)\end{array}\right\}$$
$$+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right) \tag{2.333}$$

ile verilir. $a\le y\le x\le b$ durumu için, bu eşitlikte x ve y' nin yerleri değiştirilir.

İspat:

AN sınır koşulu altında probleme ait özfonksiyonlar

$$\Psi(t,\lambda)=c\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\left[1-\frac{c}{2}\int_a^t q(x)\,dx\right]\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)$$
$$+O\left(\eta(\lambda)\right) \tag{2.334}$$

ve

$$\Phi(t,\lambda)=\sin\beta\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+\left[\frac{\sin\beta}{2}\int_t^b q(x)dx-\cos\beta\right]\lambda^{-1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)$$
$$+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right) \tag{2.335}$$

şeklinde elde edilmişti. Öncelikle bu özfonksiyonların Wronskian determinantı belirlenir. Bunun için (2.334) ve (2.335)' in türevleri gerekmektedir. O halde $\Psi(t,\lambda)$' nın türevi için (2.28), (2.32), (2.46), (2.47), (2.58), (2.59) ve (2.62) değerleri (2.17)' de yerine yazılırsa

$$\Psi'(t,\lambda)=\left[-c\lambda^{1/2}+O\left(\eta(\lambda)\right)\right]\times\left[1+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right]$$
$$\times\left\{\begin{array}{l}O\left(\eta(\lambda)\right)\times\left[\begin{array}{l}-\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)\,dx\right)-\frac{1}{c}\lambda^{-1/2}\\ \times\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)\,dx\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\end{array}\right]\\ -\left[\lambda^{1/2}+O\left(\eta(\lambda)\right)\right]\times\left[\begin{array}{l}\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)\,dx\right)-\frac{1}{c}\lambda^{-1/2}\\ \times\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)\,dx\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\end{array}\right]\end{array}\right\}$$

$$=\left[-c\lambda^{1/2}+O(\eta(\lambda))\right]\times\begin{bmatrix}-\lambda^{1/2}\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)-\dfrac{1}{2\lambda^{1/2}}\displaystyle\int_a^t q(x)dx\right)\\ +\dfrac{1}{c}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)-\dfrac{1}{2\lambda^{1/2}}\displaystyle\int_a^t q(x)dx\right)+O(\eta(\lambda))\end{bmatrix}$$

$$=c\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)dx\right)-\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)dx\right)$$
$$+O\left(\lambda^{1/2}\eta(\lambda)\right)$$

ve benzer şekilde $\Phi(t,\lambda)$' nın türevi için (2.28), (2.32), (2.50), (2.51), (2.67), (2.68) ve (2.71) değerleri (2.17)' de yerine yazılırsa

$$\Phi'(t,\lambda)=\left[\sin\beta+\lambda^{-1}\frac{\cos^2\beta}{2\sin\beta}+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\right]\times\left[1+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right]$$
$$\times\left\{\begin{array}{l} O(\eta(\lambda))\times\begin{bmatrix}\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)-\dfrac{1}{2\lambda^{1/2}}\displaystyle\int_t^b q(x)dx\right)-\lambda^{-1/2}\cot\beta\\ \times\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)-\dfrac{1}{2\lambda^{1/2}}\displaystyle\int_t^b q(x)dx\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\end{bmatrix}\\ -\left[\lambda^{1/2}+O(\eta(\lambda))\right]\times\begin{bmatrix}-\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)-\dfrac{1}{2\lambda^{1/2}}\displaystyle\int_t^b q(x)dx\right)-\lambda^{-1/2}\cot\beta\\ \times\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)-\dfrac{1}{2\lambda^{1/2}}\displaystyle\int_t^b q(x)dx\right)+O(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda))\end{bmatrix}\end{array}\right\}$$

$$=\left[\sin\beta+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right]\times\begin{bmatrix}\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)-\dfrac{1}{2\lambda^{1/2}}\displaystyle\int_t^b q(x)dx\right)+\cot\beta\\ \times\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)-\dfrac{1}{2\lambda^{1/2}}\displaystyle\int_t^b q(x)dx\right)+O(\eta(\lambda))\end{bmatrix}$$

$$=\lambda^{1/2}\sin\beta\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_t^b q(x)dx\right)+\cos\beta$$
$$\times\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_t^b q(x)dx\right)+O(\eta(\lambda))$$

bulunur. Son eşitliklerde trigonometrik açılım kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\Psi'(t,\lambda) &= c\lambda\left\{\begin{aligned}&\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)\cos\left(\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)\,dx\right)\\ &+\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)\sin\left(\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)\,dx\right)\end{aligned}\right\}\\
&\quad-\lambda^{1/2}\left\{\begin{aligned}&\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)\cos\left(\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)\,dx\right)\\ &-\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)\sin\left(\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)\,dx\right)\end{aligned}\right\}+O\left(\lambda^{1/2}\eta(\lambda)\right)\\
&= c\lambda\left\{\begin{aligned}&\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)\times\left[1+O\left(\lambda^{-1}\right)\right]\\ &+\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)\times\left[\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)\,dx+O\left(\lambda^{-3/2}\right)\right]\end{aligned}\right\}\\
&\quad-\lambda^{1/2}\left\{\begin{aligned}&\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)\times\left[1+O\left(\lambda^{-1}\right)\right]\\ &-\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)\times\left[\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)\,dx+O\left(\lambda^{-3/2}\right)\right]\end{aligned}\right\}\\
&\quad+O\left(\lambda^{1/2}\eta(\lambda)\right)\\
&= c\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\left[\frac{c}{2}\int_a^t q(x)\,dx-1\right]\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)\\
&\quad+O\left(\lambda^{1/2}\eta(\lambda)\right)
\end{aligned}\tag{2.336}$$

ve

$$\begin{aligned}
\Phi'(t,\lambda) &= \lambda^{1/2}\sin\beta\left\{\begin{aligned}&\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)\cos\left(\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_t^b q(x)\,dx\right)\\ &-\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)\sin\left(\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_t^b q(x)\,dx\right)\end{aligned}\right\}\\
&\quad+\cos\beta\left\{\begin{aligned}&\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)\cos\left(\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_t^b q(x)\,dx\right)\\ &+\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)\sin\left(\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_t^b q(x)\,dx\right)\end{aligned}\right\}+O\left(\eta(\lambda)\right)\\
&= \lambda^{1/2}\sin\beta\left\{\begin{aligned}&\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)\times\left[1+O\left(\lambda^{-1}\right)\right]-\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)\\ &\times\left[\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_t^b q(x)\,dx+O\left(\lambda^{-3/2}\right)\right]\end{aligned}\right\}
\end{aligned}$$

$$+\cos\beta\left\{\begin{array}{l}\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)\times\left[1+O\left(\lambda^{-1}\right)\right]+\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)\\ \times\left[\dfrac{1}{2\lambda^{1/2}}\displaystyle\int_t^b q(x)dx+O\left(\lambda^{-3/2}\right)\right]\end{array}\right\}$$

$$+O\left(\eta(\lambda)\right) \tag{2.337}$$

$$=\lambda^{1/2}\sin\beta\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+\left[\cos\beta-\frac{\sin\beta}{2}\int_t^b q(x)dx\right]$$

$$\times\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+O\left(\eta(\lambda)\right)$$

elde edilir. Şimdi (2.334), (2.335), (2.336) ve (2.337) değerleri (2.331)' de yerine yazılırsa

$$w(\lambda):=\Psi(t,\lambda)\Phi'(t,\lambda)-\Psi'(t,\lambda)\Phi(t,\lambda)$$

$$=\left\{c\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\left[1-\frac{c}{2}\int_a^t q(x)dx\right]\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O\left(\eta(\lambda)\right)\right\}$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}\lambda^{1/2}\sin\beta\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+\left[\cos\beta-\dfrac{\sin\beta}{2}\displaystyle\int_t^b q(x)dx\right]\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)\\ +O\left(\eta(\lambda)\right)\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}c\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\left[\dfrac{c}{2}\displaystyle\int_a^t q(x)dx-1\right]\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)\\ +O\left(\lambda^{1/2}\eta(\lambda)\right)\end{array}\right\}$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}\sin\beta\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+\left[\dfrac{\sin\beta}{2}\displaystyle\int_t^b q(x)dx-\cos\beta\right]\lambda^{-1/2}\\ \times\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\end{array}\right\}$$

$$=c\lambda\sin\beta\left\{\begin{array}{l}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)\\ -\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)\end{array}\right\}$$

$$+c\lambda^{1/2}\left[\cos\beta-\frac{\sin\beta}{2}\int_t^b q(x)dx\right]\left\{\begin{array}{l}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)\\ +\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)\end{array}\right\}$$

$$+\lambda^{1/2}\sin\beta\left(1-\frac{c}{2}\int_a^t q(x)dx\right)$$

$$\times\left\{\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)\right\}$$

$$+O\left(\lambda^{1/2}\eta(\lambda)\right)$$

$$= -c\lambda \sin\beta \cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right) + \lambda^{1/2}\left[c\cos\beta + \sin\beta\right]\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right) + O\left(\lambda^{1/2}\eta(\lambda)\right) \tag{2.338}$$

bulunur ve buradan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{w(\lambda)} &= \frac{1}{\left\{\begin{array}{l} -c\lambda\sin\beta\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right) + \lambda^{1/2}\left[c\cos\beta + \sin\beta\right] \\ \times \sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right) + O\left(\lambda^{1/2}\eta(\lambda)\right) \end{array}\right\}} \\
&= \frac{1}{-c\lambda\sin\beta\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\left\{\begin{array}{l} 1-\lambda^{-1/2}\left[\cot\beta + \dfrac{1}{c}\right]\tan\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right) \\ +O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right) \end{array}\right\}} \\
&= -\frac{1}{c\sin\beta\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-1} \\
&\quad \times \left\{1 + \left(\cot\beta + \frac{1}{c}\right)\lambda^{-1/2}\tan\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right) + O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right\} \\
&= -\frac{1}{c\sin\beta\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-1} - \left[\frac{c\cos\beta + \sin\beta}{c^2\sin^2\beta}\right]\lambda^{-3/2}\frac{\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}{\cos^2\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)} \\
&\quad + O\left(\lambda^{-3/2}\eta(\lambda)\right)
\end{aligned} \tag{2.339}$$

olduğu görülür. Sonuç olarak; (2.334), (2.335) ve (2.339) değerleri (2.332)' de yerine yazılarak ispat tamamlanır:

$$\begin{aligned}
G(x,y,\lambda) &= \left\{\begin{array}{l} c\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right) + \left[1 - \dfrac{c}{2}\displaystyle\int_a^x q(t)\,dt\right] \\ \times\cos\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right) + O\left(\eta(\lambda)\right) \end{array}\right\} \\
&\times \left\{\begin{array}{l} \sin\beta\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right) + \left[\dfrac{\sin\beta}{2}\displaystyle\int_y^b q(t)\,dt - \cos\beta\right]\lambda^{-1/2} \\ \times\sin\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right) + O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right) \end{array}\right\} \\
&\times \left\{\begin{array}{l} -\dfrac{1}{c\sin\beta\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-1} - \left[\dfrac{c\cos\beta + \sin\beta}{c^2\sin^2\beta}\right]\lambda^{-3/2} \\ \times\dfrac{\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}{\cos^2\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)} + O\left(\lambda^{-3/2}\eta(\lambda)\right) \end{array}\right\}
\end{aligned}$$

$$=\begin{Bmatrix} c\lambda^{1/2}\sin\beta\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)+\left[1-\dfrac{c}{2}\displaystyle\int_a^x q(t)\,dt\right]\sin\beta \\ \times\cos\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)+c\left[\dfrac{\sin\beta}{2}\displaystyle\int_y^b q(t)\,dt-\cos\beta\right] \\ \times\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)+O\left(\eta(\lambda)\right) \end{Bmatrix}$$

$$\times\begin{Bmatrix} -\dfrac{1}{c\sin\beta\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-1}-\left[\dfrac{c\cos\beta+\sin\beta}{c^2\sin^2\beta}\right]\lambda^{-3/2} \\ \times\dfrac{\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}{\cos^2\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}+O\left(\lambda^{-3/2}\eta(\lambda)\right) \end{Bmatrix}$$

$$=-\lambda^{-1/2}\frac{\sin\lambda^{1/2}(x-a)\cos\lambda^{1/2}(b-y)}{\cos\lambda^{1/2}(b-a)}+\frac{\lambda^{-1}}{\cos\lambda^{1/2}(b-a)}$$

$$\times\begin{Bmatrix} \left[\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_a^x q(t)\,dt-\dfrac{1}{c}\right]\cos\lambda^{1/2}(x-a)\cos\lambda^{1/2}(b-y) \\ +\left[\cot\beta-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_y^b q(t)\,dt\right]\sin\lambda^{1/2}(x-a)\sin\lambda^{1/2}(b-y) \\ -\left[\dfrac{1}{c}+\cot\beta\right]\tan\lambda^{1/2}(b-a)\sin\lambda^{1/2}(x-a)\cos\lambda^{1/2}(b-y) \end{Bmatrix}$$

$$+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right),\quad a\le x\le y\le b.$$

Green fonksiyonunun x ve y' ye göre simetrik oluşu kullanılarak, yukarıda ispatı verilen (2.333) eşitliğinde x ve y' nin yerlerinin değiştirilmesiyle $a\le y\le x\le b$ durumu için Green fonksiyonu kolayca elde edilir. ■

Aşağıda AD sınır koşulu için Green fonksiyonu yaklaşımları verilmiştir:

Teorem 2.26: $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.72) probleminin sırasıyla (2.75) ve (2.76) sınır koşullarını sağlayan çözümleri olmak üzere $a\le x\le y\le b$, $\lambda\to\infty$ iken

$$G(x,y,\lambda)=-\lambda^{-1/2}\frac{\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)}{\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}+\frac{\lambda^{-1}}{\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}$$

$$\times\begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\left(\int_y^b q(t)dt\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right) \\ +\left[\frac{1}{2}\int_a^x q(t)dt-\frac{1}{c}\right]\cos\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right) \\ +\frac{1}{c}\cot\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right) \end{Bmatrix} \quad (2.340)$$
$$+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)$$

ile verilir. $a\le y\le x\le b$ durumu için, bu eşitlikte x ve y' nin yerleri değiştirilir.

İspat:

AD sınır koşulu altında probleme ait $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ özfonksiyonları $\lambda\to\infty$ iken, sırasıyla (2.83) ve (2.84)' te verildiği gibi elde edilmiştir. $\Psi(t,\lambda)$' nın türevi bir önceki teoremde hesaplanmıştır. Benzer şekilde $\Phi(t,\lambda)$' nın türevi için (2.28), (2.32), (2.68), (2.81), (2.82), (2.85) ve (2.86) değerleri (2.17)' de yerine yazılırsa

$$\Phi'(t,\lambda)=\left[-\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\right]\times\left[1+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right]$$
$$\times\begin{Bmatrix} O\left(\eta(\lambda)\right)\times\left[\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_t^b q(x)dx\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right] \\ -\left[\lambda^{1/2}+O\left(\eta(\lambda)\right)\right]\times\left[\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_t^b q(x)dx\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right] \end{Bmatrix}$$
$$=\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_t^b q(x)dx\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)$$

bulunur. Bu eşitlikte trigonometrik açılım kullanılırsa

$$\Phi'(t,\lambda)=\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\left(\int_t^b q(x)dx\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right) \quad (2.341)$$
$$+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)$$

elde edilir. Şimdi (2.83), (2.84), (2.336) ve (2.341) değerleri (2.331)' de yerine yazılırsa

$$w(\lambda)=\begin{Bmatrix} c\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\left[1-\frac{c}{2}\int_a^t q(x)dx\right]\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right) \\ +O\left(\eta(\lambda)\right) \end{Bmatrix}$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\left(\int_t^b q(x)dx\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)\\ +O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\end{array}\right\}$$

$$-\left\{\begin{array}{l}c\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\left[\frac{c}{2}\int_a^t q(x)dx-1\right]\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)\\ +O\left(\lambda^{1/2}\eta(\lambda)\right)\end{array}\right\}$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}-\lambda^{-1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+\frac{1}{2}\lambda^{-1}\left(\int_t^b q(x)dx\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)\\ +O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\end{array}\right\}$$

$$=c\lambda^{1/2}\left\{\begin{array}{l}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)\\ +\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)\end{array}\right\}$$

$$-\frac{c}{2}\left(\int_t^b q(x)dx\right)\left\{\begin{array}{l}\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)\\ -\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)\end{array}\right\}$$

$$+\left[1-\frac{c}{2}\int_a^t q(x)dx\right]\left\{\begin{array}{l}\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)\\ -\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)\end{array}\right\}+O(\eta(\lambda))$$

$$=c\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+O\left(\eta(\lambda)\right) \tag{2.342}$$

bulunur ve buradan

$$\frac{1}{w(\lambda)}=\frac{1}{c\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\times\left\{1+\frac{1}{c}\lambda^{-1/2}\cot\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right\}}$$

$$=\frac{1}{c\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-1/2}\times\left\{1-\frac{1}{c}\lambda^{-1/2}\cot\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right\} \tag{2.343}$$

$$=\frac{1}{c\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-1/2}-\frac{\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}{c^2\sin^2\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-1}+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)$$

elde edilir. Sonuç olarak; (2.83), (2.84) ve (2.343) değerleri (2.332)' de yerine yazılarak ispat tamamlanır. ■

2.2.1.2. Bilineer Durum (BN ve BD)

Aşağıda BN sınır koşulu için Green fonksiyonu yaklaşımları verilmiştir:

Teorem 2.27: $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.87) probleminin sırasıyla (2.90) ve (2.91) sınır koşullarını sağlayan çözümleri olmak üzere $a \le x \le y \le b$, $\lambda \to \infty$ iken

$$G(x,y,\lambda) = \lambda^{-1/2}\frac{\cos\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)}{\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)} + \frac{\lambda^{-1}}{\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}$$
$$\times\left\{\begin{array}{l} \left[\frac{1}{2}\int_y^b q(t)\,dt - \cot\beta\right]\cos\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right) \\ +\left[\frac{1}{2}\int_a^x q(t)\,dt + \frac{c}{e}\right]\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right) \\ +\left[\frac{c}{e} - \cot\beta\right]\cot\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right) \end{array}\right\} \qquad (2.344)$$
$$+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)$$

ile verilir. $a \le y \le x \le b$ durumu için, bu eşitlikte x ve y' nin yerleri değiştirilir.

İspat:

BN sınır koşulu altında probleme ait $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ özfonksiyonları $\lambda \to \infty$ iken, sırasıyla (2.98) ve (2.99)' da verildiği gibi elde edilmiştir. $\Phi(t,\lambda)$' nın türevi (2.337) olarak bulunmuştur. Benzer şekilde $\Psi(t,\lambda)$' nın türevi için (2.28), (2.32), (2.59), (2.96), (2.97), (2.106) ve (2.107) değerleri (2.17)' de yerine yazılırsa

$$\Psi'(t,\lambda) = \left[e\lambda + \left(\frac{c^2}{2e} + f\right) + O\left(\eta(\lambda)\right)\right]\times\left[1 + O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right]$$
$$\times\left\{\begin{array}{l} O\left(\eta(\lambda)\right)\times\left[\begin{array}{l} \cos\left(\lambda^{1/2}(t-a) - \frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)\,dx\right) + \frac{c}{e}\lambda^{-1/2} \\ \times\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a) - \frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)\,dx\right) + O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right) \end{array}\right] \\ -\left[\lambda^{1/2} + O\left(\eta(\lambda)\right)\right]\times\left[\begin{array}{l} \sin\left(\lambda^{1/2}(t-a) - \frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)\,dx\right) - \frac{c}{e}\lambda^{-1/2} \\ \times\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a) - \frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)\,dx\right) + O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right) \end{array}\right] \end{array}\right\}$$

$$=-e\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)dx\right)+c\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)dx\right)$$
$$+O(\lambda\eta(\lambda))$$

bulunur. Son eşitlikte trigonometrik açılım kullanılırsa

$$\Psi'(t,\lambda)=-e\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\left[c+\frac{e}{2}\int_a^t q(x)dx\right]\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)$$
$$+O(\lambda\eta(\lambda)) \tag{2.345}$$

elde edilir. Şimdi (2.98), (2.99), (2.337) ve (2.345) değerleri (2.331)' de yerine yazılırsa

$$w(\lambda)=\begin{Bmatrix} e\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\lambda^{1/2}\left[c+\dfrac{e}{2}\displaystyle\int_a^t q(x)dx\right] \\ \times\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O\left(\lambda^{1/2}\eta(\lambda)\right)\end{Bmatrix}$$
$$\times\begin{Bmatrix}\lambda^{1/2}\sin\beta\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+\left[\cos\beta-\dfrac{\sin\beta}{2}\displaystyle\int_t^b q(x)dx\right] \\ \times\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+O(\eta(\lambda))\end{Bmatrix}$$
$$-\begin{Bmatrix}-e\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\lambda\left(c+\dfrac{e}{2}\displaystyle\int_a^t q(x)dx\right) \\ \times\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O(\lambda\eta(\lambda))\end{Bmatrix}$$
$$\times\begin{Bmatrix}\sin\beta\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+\lambda^{-1/2}\left[\dfrac{\sin\beta}{2}\displaystyle\int_t^b q(x)dx-\cos\beta\right] \\ \times\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\end{Bmatrix}$$
$$=e\lambda^{3/2}\sin\beta\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+\left[e\cos\beta-c\sin\beta\right]\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)$$
$$+O(\lambda\eta(\lambda)) \tag{2.346}$$

bulunur ve buradan

$$\frac{1}{w(\lambda)}=\frac{1}{e\sin\beta\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\times\begin{Bmatrix}1+\left[\cot\beta-\dfrac{c}{e}\right]\lambda^{-1/2}\cot\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right) \\ +O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\end{Bmatrix}}$$

$$=\frac{1}{e\sin\beta\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-3/2}\times\left\{\begin{array}{l}1-\left[\cot\beta-\frac{c}{e}\right]\lambda^{-1/2}\cot\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\\ +O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\end{array}\right\}$$

$$=\frac{1}{e\sin\beta\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-3/2}-\frac{\lambda^{-2}}{e\sin\beta}\left[\cot\beta-\frac{c}{e}\right]\frac{\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}{\sin^{2}\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)} \tag{2.347}$$
$$+O\left(\lambda^{-2}\eta(\lambda)\right)$$

olur. Sonuç olarak; (2.98), (2.99) ve (2.347) değerleri (2.332)' de yerine yazılarak ispat tamamlanır. ■

Aşağıda BD sınır koşulu için Green fonksiyonu yaklaşımları verilmiştir:

Teorem 2.28: $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.108) probleminin sırasıyla (2.111) ve (2.112) sınır koşullarını sağlayan çözümleri olmak üzere $a\le x\le y\le b$, $\lambda\to\infty$ iken

$$G(x,y,\lambda)=-\lambda^{-1/2}\frac{\cos\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)}{\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}+\frac{\lambda^{-1}}{\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}$$
$$\times\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}\left(\int_y^b q(t)\,dt\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)\\ -\left[\frac{1}{2}\int_a^x q(t)\,dt+\frac{c}{e}\right]\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)\\ +\frac{c}{e}\tan\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)\end{array}\right\} \tag{2.348}$$
$$+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)$$

ile verilir. $a\le y\le x\le b$ durumu için, bu eşitlikte x ve y' nin yerleri değiştirilir.

İspat:

BD sınır koşulu altında probleme ait $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ özfonksiyonları $\lambda\to\infty$ iken, sırasıyla (2.115) ve (2.116)' da verildiği gibi elde edilmiştir. Türevleri ise (2.341) ve (2.345) olarak bulunmuştur. Buna göre (2.115), (2.116), (2.341) ve (2.345) değerleri (2.331)' de yerine yazılırsa

$$w(\lambda)=\left\{\begin{array}{l}e\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\lambda^{1/2}\left[c+\frac{e}{2}\int_a^t q(x)\,dx\right]\\ \times\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O\left(\lambda^{1/2}\eta(\lambda)\right)\end{array}\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&\times\left\{\begin{array}{l}\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\left(\int_t^b q(x)dx\right)\\ \times\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\end{array}\right\}\\
&-\left\{\begin{array}{l}-e\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\lambda\left[c+\frac{e}{2}\int_a^t q(x)dx\right]\\ \times\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O\left(\lambda\eta(\lambda)\right)\end{array}\right\}\\
&\times\left\{\begin{array}{l}-\lambda^{-1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+\frac{1}{2}\lambda^{-1}\left(\int_t^b q(x)dx\right)\\ \times\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\end{array}\right\}\\
&=e\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+c\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+O\left(\lambda^{1/2}\eta(\lambda)\right)
\end{aligned}
\tag{2.349}
$$

bulunur ve buradan

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{w(\lambda)}&=\frac{1}{e\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\times\left\{1+\frac{c}{e}\lambda^{-1/2}\tan\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right\}}\\
&=\frac{1}{e\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-1}\times\left\{1-\frac{c}{e}\lambda^{-1/2}\tan\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right\}\\
&=\frac{1}{e\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-1}-\frac{c}{e^2}\frac{\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}{\cos^2\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-3/2}+O\left(\lambda^{-3/2}\eta(\lambda)\right)
\end{aligned}
\tag{2.350}
$$

olur. Sonuç olarak; (2.115), (2.116) ve (2.350) değerleri (2.332)' de yerine yazılarak ispat tamamlanır. ■

2.2.1.3. Kuadratik Durum (KN ve KD)

Aşağıda KN sınır koşulu için Green fonksiyonu yaklaşımları verilmiştir:

Teorem 2.29: $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.117) probleminin sırasıyla (2.120) ve (2.121) sınır koşullarını sağlayan çözümleri olmak üzere $a \le x \le y \le b$, $\lambda \to \infty$ iken

$$
G(x,y,\lambda)=-\lambda^{-1/2}\frac{\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)}{\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}+\frac{\lambda^{-1}}{\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}
$$

$$\times\begin{Bmatrix}\left[\cot\beta-\frac{1}{2}\int_y^b q(t)dt\right]\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)\\+\frac{1}{2}\left(\int_a^x q(t)dt\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)\\-\cot\beta\tan\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)\end{Bmatrix}\tag{2.351}$$
$$+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)$$

ile verilir. $a\le y\le x\le b$ durumu için, bu eşitlikte x ve y' nin yerleri değiştirilir.

İspat:

KN sınır koşulu altında probleme ait $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ özfonksiyonları $\lambda\to\infty$ iken, sırasıyla (2.128) ve (2.129)' da verildiği gibi elde edilmiştir. $\Phi(t,\lambda)$' nın türevi ise (2.337) olarak hesaplanmıştır. Benzer şekilde $\Psi(t,\lambda)$' nın türevi için (2.28), (2.32), (2.59) , (2.126), (2.127), (2.134) ve (2.135) değerleri (2.17)' de yerine yazılırsa

$$\Psi'(t,\lambda)=\left[-c\lambda^{3/2}+O\left(\lambda\eta(\lambda)\right)\right]\times\left[1+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right]$$
$$\times\begin{Bmatrix}O\left(\eta(\lambda)\right)\times\left[-\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)dx\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right]\\-\left[\lambda^{1/2}+O\left(\eta(\lambda)\right)\right]\times\left[\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)dx\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right]\end{Bmatrix}$$
$$=c\lambda^2\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)dx\right)+O\left(\lambda^{3/2}\eta(\lambda)\right)$$

bulunur. Bu eşitlikte trigonometrik açılım kullanılırsa

$$\Psi'(t,\lambda)=c\lambda^2\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\frac{c}{2}\left(\int_a^t q(x)dx\right)\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)$$
$$+O\left(\lambda^{3/2}\eta(\lambda)\right)\tag{2.352}$$

elde edilir. Şimdi (2.128), (2.129), (2.337) ve (2.352) değerleri (2.331)' de yerine yazılırsa

$$w(\lambda)=\left\{c\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)-\frac{c}{2}\lambda\left(\int_a^t q(x)dx\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O\left(\lambda\eta(\lambda)\right)\right\}$$

$$\times\begin{Bmatrix}\lambda^{1/2}\sin\beta\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+\left[\cos\beta-\dfrac{\sin\beta}{2}\displaystyle\int_t^b q(x)\,dx\right]\\ \times\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+O\left(\eta(\lambda)\right)\end{Bmatrix}$$

$$-\begin{Bmatrix}c\lambda^2\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\dfrac{c}{2}\left(\displaystyle\int_a^t q(x)\,dx\right)\lambda^{3/2}\\ \times\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O\left(\lambda^{3/2}\eta(\lambda)\right)\end{Bmatrix} \qquad (2.353)$$

$$\times\begin{Bmatrix}\sin\beta\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+\lambda^{-1/2}\left[\dfrac{\sin\beta}{2}\displaystyle\int_t^b q(x)\,dx-\cos\beta\right]\\ \times\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\end{Bmatrix}$$

$$=-c\lambda^2\sin\beta\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+c\lambda^{3/2}\cos\beta\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+O\left(\lambda^{3/2}\eta(\lambda)\right)$$

olduğu görülür ve buradan

$$\frac{1}{w(\lambda)}=\frac{1}{-c\lambda^2\sin\beta\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\times\begin{Bmatrix}1-\lambda^{-1/2}\cot\beta\tan\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\\ +O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\end{Bmatrix}}$$

$$=-\frac{1}{c\sin\beta\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-2}\times\begin{Bmatrix}1+\lambda^{-1/2}\cot\beta\tan\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\\ +O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\end{Bmatrix} \qquad (2.354)$$

$$=-\frac{1}{c\sin\beta\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-2}-\left(\frac{\cos\beta}{c\sin^2\beta}\right)\lambda^{-5/2}\frac{\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}{\cos^2\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}$$
$$+O\left(\lambda^{-5/2}\eta(\lambda)\right)$$

olur. Sonuç olarak; (2.128), (2.129) ve (2.354) değerleri (2.332)’ de yerine yazılarak ispat tamamlanır. ■

Aşağıda KD sınır koşulu için Green fonksiyonu yaklaşımları verilmiştir:

Teorem 2.30: $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.136) probleminin sırasıyla (2.139) ve (2.140) sınır koşullarını sağlayan çözümleri olmak üzere $a\le x\le y\le b$, $\lambda\to\infty$ iken

$$G(x,y,\lambda)=-\lambda^{-1/2}\frac{\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)}{\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}+\frac{\lambda^{-1}}{\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\int_y^b q(t)\,dt\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)\\ +\dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\int_a^x q(t)\,dt\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)\end{array}\right\}+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right) \tag{2.355}$$

ile verilir. $a \le y \le x \le b$ durumu için, bu eşitlikte x ve y' nin yerleri değiştirilir.

İspat:

KD sınır koşulu altında probleme ait $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ özfonksiyonları $\lambda \to \infty$ iken, sırasıyla (2.143) ve (2.144)' te verildiği gibi elde edilmiştir. Türevleri ise (2.341) ve (2.352) olarak bulunmuştur. Bu durumda (2.143), (2.144), (2.341) ve (2.352) değerleri (2.331)' de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} w(\lambda) &= \left\{c\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)-\frac{c}{2}\lambda\left(\int_a^t q(x)\,dx\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O\left(\lambda\eta(\lambda)\right)\right\}\\ &\quad\times\left\{\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\left(\int_t^b q(x)\,dx\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right\}\\ &\quad-\left\{\begin{array}{l}c\lambda^{2}\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\dfrac{c}{2}\left(\displaystyle\int_a^t q(x)\,dx\right)\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)\\ +O\left(\lambda^{3/2}\eta(\lambda)\right)\end{array}\right\}\\ &\quad\times\left\{\begin{array}{l}-\lambda^{-1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+\dfrac{1}{2}\lambda^{-1}\left(\displaystyle\int_t^b q(x)\,dx\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)\\ +O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\end{array}\right\}\\ &= c\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+O\left(\lambda\eta(\lambda)\right) \end{aligned} \tag{2.356}$$

elde edilir ve buradan

$$\begin{aligned} \frac{1}{w(\lambda)} &= \frac{1}{c\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\times\left\{1+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right\}}\\ &= \frac{1}{c\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-3/2}\times\left\{1+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right\}\\ &= \frac{1}{c\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-3/2}+O\left(\lambda^{-2}\eta(\lambda)\right) \end{aligned} \tag{2.357}$$

olur. Sonuç olarak; (2.143), (2.144) ve (2.357) değerleri (2.332)' de yerine yazılarak ispat tamamlanır. ■

2.2.1.4. İki Sınır Koşulunun da Özdeğer Parametresine Bağlı Olduğu Durum

Aşağıda (2.146)-(2.147) sınır koşulu için Green fonksiyonu yaklaşımları verilmiştir:

Teorem 2.31: $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.145) probleminin sırasıyla (2.148) ve (2.149) sınır koşullarını sağlayan çözümleri olmak üzere $a \le x \le y \le b$, $\lambda \to \infty$ iken

i) $a_2' \ne 0, b_2' \ne 0$ olduğunda

$$G(x,y,\lambda)=\frac{\cos\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)}{\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-1/2}+\frac{\lambda^{-1}}{\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}$$
$$\times\left\{\begin{array}{l}\left[\dfrac{b_1'}{b_2'}+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_y^b q(t)dt\right]\cos\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)\\ -\left[\dfrac{a_1'}{a_2'}-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_a^x q(t)dt\right]\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)\\ +\dfrac{a_2'b_1'-a_1'b_2'}{a_2'b_2'}\cot\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)\end{array}\right\} \quad (2.358)$$
$$+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)$$

ile verilir ve $a \le y \le x \le b$ durumu için, bu eşitlikte x ve y' nin yerleri değiştirilir.

ii) $a_2' \ne 0, b_2' = 0$ olduğunda

$$G(x,y,\lambda)=-\frac{\cos\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)}{\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-1/2}+\frac{\lambda^{-1}}{\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}$$
$$\times\left\{\begin{array}{l}\left[\dfrac{b_2}{b_1'}+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_y^b q(t)dt\right]\cos\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)\\ +\left[\dfrac{a_1'}{a_2'}-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_a^x q(t)dt\right]\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)\\ +\dfrac{a_2'b_2-a_1'b_1'}{a_2'b_1'}\tan\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)\end{array}\right\} \quad (2.359)$$
$$+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)$$

ile verilir ve $a \le y \le x \le b$ durumu için, bu eşitlikte x ve y' nin yerleri değiştirilir.

iii) $a_2' = 0, b_2' \neq 0$ olduğunda

$$G(x,y,\lambda) = -\frac{\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)}{\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-1/2} + \frac{\lambda^{-1}}{\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}$$
$$\times\left\{\begin{array}{l} -\left[\dfrac{b_1'}{b_2'} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_y^b q(t)\,dt\right]\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right) \\ -\left[\dfrac{a_2}{a_1'} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_a^x q(t)\,dt\right]\cos\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right) \\ +\dfrac{a_2 b_2' - a_1' b_1'}{a_1' b_2'}\tan\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right) \end{array}\right\} \quad (2.360)$$
$$+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)$$

ile verilir ve $a \le y \le x \le b$ durumu için, bu eşitlikte x ve y' nin yerleri değiştirilir.

iv) $a_2' = 0, b_2' = 0$ olduğunda

$$G(x,y,\lambda) = -\frac{\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)}{\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-1/2} + \frac{\lambda^{-1}}{\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}$$
$$\times\left\{\begin{array}{l} \left[\dfrac{b_2}{b_1'} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_y^b q(t)\,dt\right]\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right) \\ -\left[\dfrac{a_2}{a_1'} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_a^x q(t)\,dt\right]\cos\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right) \\ +\dfrac{a_2 b_1' - a_1' b_2}{a_1' b_1'}\cot\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right) \end{array}\right\} \quad (2.361)$$
$$+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)$$

ile verilir ve $a \le y \le x \le b$ durumu için, bu eşitlikte x ve y' nin yerleri değiştirilir.

İspat:

i) $a_2' \neq 0, b_2' \neq 0$ iken; $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ özfonksiyonları, sırasıyla (2.175) ve (2.189)' da verildiği gibi elde edilmiştir ($\lambda \to \infty$). O halde $\Psi(t,\lambda)$' nın türevi için (2.28), (2.32), (2.59), (2.151), (2.157), (2.158), (2.181) ve (2.182) değerleri (2.17)' de yerine yazılırsa

$$\Psi'(t,\lambda)=\left[-a_2'\lambda-\left[\frac{(a_1')^2}{2a_2'}-a_2\right]+O(\eta(\lambda))\right]\times\left[1+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right]$$

$$\times\left\{\begin{array}{l} O(\eta(\lambda))\times\left[\begin{array}{l}\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)dx\right)-\frac{a_1'}{a_2'}\lambda^{-1/2}\\ \times\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)dx\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\end{array}\right]\\ -\left[\lambda^{1/2}+O(\eta(\lambda))\right]\times\left[\begin{array}{l}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)dx\right)+\frac{a_1'}{a_2'}\lambda^{-1/2}\\ \times\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)dx\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\end{array}\right]\end{array}\right\}$$

$$=a_2'\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)dx\right)+a_1'\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)dx\right)$$
$$+O(\lambda\eta(\lambda))$$

bulunur. Bu eşitlikte trigonometrik açılım kullanılırsa

$$\Psi'(t,\lambda)=a_2'\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\left[a_1'-\frac{a_2'}{2}\int_a^t q(x)dx\right]\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)$$
$$+O(\lambda\eta(\lambda)) \qquad (2.362)$$

elde edilir. Benzer şekilde $\Phi(t,\lambda)$' nın türevi ise (2.28), (2.32), (2.68), (2.164), (2.169), (2.170), (2.197) ve (2.198) değerleri (2.17)' de yerine yazılırak

$$\Phi'(t,\lambda)=\left[-b_2'\lambda+\left(b_2-\frac{(b_1')^2}{2b_2'}\right)+O\left(\eta^2(\lambda)\right)\right]\times\left[1+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right]$$

$$\times\left\{\begin{array}{l} O(\eta(\lambda))\times\left[\begin{array}{l}\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_t^b q(x)dx\right)-\frac{b_1'}{b_2'}\lambda^{-1/2}\\ \times\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_t^b q(x)dx\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\end{array}\right]\\ -\left[\lambda^{1/2}+O(\eta(\lambda))\right]\times\left[\begin{array}{l}-\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_t^b q(x)dx\right)+\frac{b_1'}{b_2'}\lambda^{-1/2}\\ \times\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_t^b q(x)dx\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\end{array}\right]\end{array}\right\}$$

$$=-b_2'\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_t^b q(x)dx\right)+b_1'\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_t^b q(x)dx\right)$$
$$+O(\lambda\eta(\lambda))$$

olur. Son eşitlikte trigonometrik açılım kullanılırsa

$$\Phi'(t,\lambda)=-b_2'\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+\left[b_1'+\frac{b_2'}{2}\int_t^b q(x)dx\right]\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)$$
$$+O(\lambda\eta(\lambda)). \tag{2.363}$$

Şimdi (2.175), (2.189), (2.362) ve (2.363) değerleri (2.331)' de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
w(\lambda)&=\Psi(t,\lambda)\Phi'(t,\lambda)-\Psi'(t,\lambda)\Phi(t,\lambda)\\
&=\left\{\begin{aligned}&-a_2'\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\lambda^{1/2}\left[a_1'-\frac{a_2'}{2}\int_a^t q(x)dx\right]\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)\\&+O\left(\lambda^{1/2}\eta(\lambda)\right)\end{aligned}\right\}\\
&\quad\times\left\{\begin{aligned}&-b_2'\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+\left[b_1'+\frac{b_2'}{2}\int_t^b q(x)dx\right]\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)\\&+O(\lambda\eta(\lambda))\end{aligned}\right\}\\
&\quad-\left\{\begin{aligned}&a_2'\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\left[a_1'-\frac{a_2'}{2}\int_a^t q(x)dx\right]\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)\\&+O(\lambda\eta(\lambda))\end{aligned}\right\}\\
&\quad\times\left\{\begin{aligned}&-b_2'\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)-\lambda^{1/2}\left[b_1'+\frac{b_2'}{2}\int_t^b q(x)dx\right]\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)\\&+O\left(\lambda^{1/2}\eta(\lambda)\right)\end{aligned}\right\}\\
&=a_2'b_2'\lambda^{5/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+\left[a_1'b_2'-a_2'b_1'\right]\lambda^2\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\\
&\quad+O\left(\lambda^2\eta(\lambda)\right)
\end{aligned} \tag{2.364}$$

bulunur ve buradan

$$\frac{1}{w(\lambda)}=\frac{1}{a_2'b_2'\lambda^{5/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\times\left\{\begin{aligned}&1+\frac{a_1'b_2'-a_2'b_1'}{a_2'b_2'}\lambda^{-1/2}\cot\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\\&+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\end{aligned}\right\}}$$

$$=\frac{1}{a_2'b_2'\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-5/2}\times\left\{\begin{array}{l}1-\dfrac{a_1'b_2'-a_2'b_1'}{a_2'b_2'}\lambda^{-1/2}\cot\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\\ +O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\end{array}\right\}$$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{a_2'b_2'\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-5/2}-\frac{a_1'b_2'-a_2'b_1'}{\left(a_2'b_2'\right)^2}\lambda^{-3}\frac{\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}{\sin^2\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\\&\quad+O\left(\lambda^{-3}\eta(\lambda)\right)\end{aligned}\tag{2.365}$$

olur. Sonuç olarak; (2.175), (2.189) ve (2.365) değerleri (2.332)' de yerine yazılarak ispat tamamlanır.

ii) $a_2'\neq 0, b_2'=0$ iken; $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ özfonksiyonları, sırasıyla (2.175) ve (2.190)' da verildiği gibi elde edilmiştir ($\lambda\to\infty$). Ayrıca $\Psi(t,\lambda)$' nın türevi (2.362) olarak bulunmuştur. Benzer şekilde $\Phi(t,\lambda)$' nın türevi için (2.28), (2.32), (2.68), (2.166), (2.173), (2.174), (2.203) ve (2.204) değerleri (2.17)' de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\Phi'(t,\lambda)&=\left[-b_1'\lambda^{1/2}+O\left(\eta^2(\lambda)\right)\right]\times\left[1+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right]\\&\times\left\{\begin{array}{l}O\left(\eta(\lambda)\right)\times\left[\begin{array}{l}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)-\dfrac{1}{2\lambda^{1/2}}\displaystyle\int_t^b q(x)dx\right)-\dfrac{b_2}{b_1'}\lambda^{-1/2}\\ \times\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)-\dfrac{1}{2\lambda^{1/2}}\displaystyle\int_t^b q(x)dx\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\end{array}\right]\\ -\left[\lambda^{1/2}+O\left(\eta(\lambda)\right)\right]\times\left[\begin{array}{l}\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)-\dfrac{1}{2\lambda^{1/2}}\displaystyle\int_t^b q(x)dx\right)+\dfrac{b_2}{b_1'}\lambda^{-1/2}\\ \times\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)-\dfrac{1}{2\lambda^{1/2}}\displaystyle\int_t^b q(x)dx\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\end{array}\right]\end{array}\right\}\\&=b_1'\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_t^b q(x)dx\right)+b_2\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_t^b q(x)dx\right)\\&\quad+O\left(\lambda^{1/2}\eta(\lambda)\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte trigonometrik açılım kullanılırsa

$$\begin{aligned}\Phi'(t,\lambda)&=b_1'\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+\left[b_2+\frac{b_1'}{2}\int_t^b q(x)dx\right]\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)\\&\quad+O\left(\lambda^{1/2}\eta(\lambda)\right).\end{aligned}\tag{2.366}$$

Şimdi (2.175), (2.190), (2.362) ve (2.366) değerleri (2.331)' de yerine yazılırsa

$$w(\lambda)=\begin{Bmatrix} -a_2'\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\lambda^{1/2}\left[a_1'-\dfrac{a_2'}{2}\displaystyle\int_a^t q(x)\,dx\right]\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)\\ +O\left(\lambda^{1/2}\eta(\lambda)\right)\end{Bmatrix}$$

$$\times\begin{Bmatrix} b_1'\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+\left[b_2+\dfrac{b_1'}{2}\displaystyle\int_t^b q(x)\,dx\right]\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)\\ +O\left(\lambda^{1/2}\eta(\lambda)\right)\end{Bmatrix}$$

$$-\begin{Bmatrix} a_2'\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\left[a_1'-\dfrac{a_2'}{2}\displaystyle\int_a^t q(x)\,dx\right]\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)\\ +O\left(\lambda\eta(\lambda)\right)\end{Bmatrix}$$

$$\times\begin{Bmatrix} -b_1'\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+\left[b_2+\dfrac{b_1'}{2}\displaystyle\int_t^b q(x)\,dx\right]\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)\\ +O\left(\eta(\lambda)\right)\end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}&=-a_2'b_1'\lambda^2\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+\left[a_1'b_1'-a_2'b_2\right]\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\\&\quad+O\left(\lambda^{3/2}\eta(\lambda)\right)\end{aligned}\tag{2.367}$$

bulunur ve buradan

$$\begin{aligned}\frac{1}{w(\lambda)}&=\frac{1}{-a_2'b_1'\lambda^2\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\times\begin{Bmatrix}1-\dfrac{a_1'b_1'-a_2'b_2}{a_2'b_1'}\lambda^{-1/2}\tan\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\\+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\end{Bmatrix}}\\
&=-\frac{1}{a_2'b_1'\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-2}\times\begin{Bmatrix}1+\dfrac{a_1'b_1'-a_2'b_2}{a_2'b_1'}\lambda^{-1/2}\tan\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\\+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\end{Bmatrix}\\
&=-\frac{1}{a_2'b_1'\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-2}-\frac{a_1'b_1'-a_2'b_2}{\left(a_2'b_1'\right)^2}\lambda^{-5/2}\frac{\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}{\cos^2\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\\
&\quad+O\left(\lambda^{-5/2}\eta(\lambda)\right)\end{aligned}\tag{2.368}$$

olur. Sonuç olarak; (2.175), (2.190) ve (2.368) değerleri (2.332)' de yerine yazılarak ispat tamamlanır.

iii) $a_2'=0, b_2'\neq 0$ iken; $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ özfonksiyonları, sırasıyla (2.176) ve (2.189)' da verildiği gibi elde edilmiştir ($\lambda\to\infty$). Ayrıca $\Phi(t,\lambda)$' nın türevi (2.363) olarak bulunmuştur. Benzer şekilde $\Psi(t,\lambda)$' nın türevi için (2.28), (2.32), (2.59), (2.153), (2.161), (2.162), (2.187) ve (2.188) değerleri (2.17)' de yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
\Psi'(t,\lambda) &= \left[-a_1'\lambda^{1/2} + O(\eta(\lambda))\right]\times\left[1+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right] \\
&\times\left\{\begin{array}{l}
O(\eta(\lambda))\times\left[\begin{array}{l}-\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)-\dfrac{1}{2\lambda^{1/2}}\displaystyle\int_a^t q(x)dx\right)-\dfrac{a_2}{a_1'}\lambda^{-1/2} \\ \times\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)-\dfrac{1}{2\lambda^{1/2}}\displaystyle\int_a^t q(x)dx\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\end{array}\right] \\
-\left[\lambda^{1/2}+O(\eta(\lambda))\right]\times\left[\begin{array}{l}\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)-\dfrac{1}{2\lambda^{1/2}}\displaystyle\int_a^t q(x)dx\right)+\dfrac{a_2}{a_1'}\lambda^{-1/2} \\ \times\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)-\dfrac{1}{2\lambda^{1/2}}\displaystyle\int_a^t q(x)dx\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\end{array}\right]
\end{array}\right\} \\
&= a_1'\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)dx\right)-a_2\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)-\frac{1}{2\lambda^{1/2}}\int_a^t q(x)dx\right) \\
&\quad +O\left(\lambda^{1/2}\eta(\lambda)\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Son eşitlikte trigonometrik açılım kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\Psi'(t,\lambda) &= a_1'\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)-\left[a_2-\frac{a_1'}{2}\int_a^t q(x)dx\right]\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right) \\
&\quad +O\left(\lambda^{1/2}\eta(\lambda)\right).
\end{aligned} \tag{2.369}
$$

Şimdi (2.176), (2.189), (2.363) ve (2.369) değerleri (2.331)' de yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
w(\lambda) &= \left\{a_1'\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\left[a_2-\frac{a_1'}{2}\int_a^t q(x)dx\right]\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O(\eta(\lambda))\right\} \\
&\times\left\{-b_2'\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+\left[b_1'+\frac{b_2'}{2}\int_t^b q(x)dx\right]\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+O(\lambda\eta(\lambda))\right\} \\
&-\left\{\begin{array}{l}a_1'\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)-\left[a_2-\dfrac{a_1'}{2}\displaystyle\int_a^t q(x)dx\right]\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right) \\ +O\left(\lambda^{1/2}\eta(\lambda)\right)\end{array}\right\} \\
&\times\left\{\begin{array}{l}-b_2'\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)-\left[b_1'+\dfrac{b_2'}{2}\displaystyle\int_t^b q(x)dx\right]\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right) \\ +O\left(\lambda^{1/2}\eta(\lambda)\right)\end{array}\right\}
\end{aligned}
$$

$$=a_1'b_2'\lambda^2\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+\left[a_1'b_1'-a_2b_2'\right]\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+O\left(\lambda^{3/2}\eta(\lambda)\right) \tag{2.370}$$

bulunur ve buradan

$$\begin{aligned}\frac{1}{w(\lambda)}&=\frac{1}{a_1'b_2'\lambda^2\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\times\left\{\begin{array}{l}1+\dfrac{a_1'b_1'-a_2b_2'}{a_1'b_2'}\lambda^{-1/2}\tan\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\\+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\end{array}\right\}}\\&=\frac{1}{a_1'b_2'\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-2}\times\left\{\begin{array}{l}1-\dfrac{a_1'b_1'-a_2b_2'}{a_1'b_2'}\lambda^{-1/2}\\\times\tan\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\end{array}\right\}\\&=\frac{1}{a_1'b_2'\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-2}-\frac{a_1'b_1'-a_2b_2'}{\left(a_1'b_2'\right)^2}\lambda^{-5/2}\frac{\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}{\cos^2\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\\&\quad+O\left(\lambda^{-5/2}\eta(\lambda)\right)\end{aligned} \tag{2.371}$$

olur. Sonuç olarak; (2.176), (2.189) ve (2.371) değerleri (2.332)' de yerine yazılarak ispat tamamlanır.

iv) $a_2'=0, b_2'=0$ iken; $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ özfonksiyonları, sırasıyla (2.176) ve (2.190)' da verildiği gibi elde edilmiştir ($\lambda\to\infty$). Türevleri ise (2.366) ve (2.369) olarak bulunmuştur. (2.176), (2.190), (2.366) ve (2.369) değerleri (2.331)' de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}w(\lambda)&=\left\{\begin{array}{l}a_1'\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\left[a_2-\dfrac{a_1'}{2}\displaystyle\int_a^t q(x)\,dx\right]\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)\\+O\left(\eta(\lambda)\right)\end{array}\right\}\\&\times\left\{\begin{array}{l}b_1'\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+\left[b_2+\dfrac{b_1'}{2}\displaystyle\int_t^b q(x)\,dx\right]\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)\\+O\left(\lambda^{1/2}\eta(\lambda)\right)\end{array}\right\}\\&-\left\{\begin{array}{l}a_1'\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)-\left[a_2-\dfrac{a_1'}{2}\displaystyle\int_a^t q(x)\,dx\right]\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)\\+O\left(\lambda^{1/2}\eta(\lambda)\right)\end{array}\right\}\\&\times\left\{\begin{array}{l}-b_1'\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+\left[b_2+\dfrac{b_1'}{2}\displaystyle\int_t^b q(x)\,dx\right]\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)\\+O\left(\eta(\lambda)\right)\end{array}\right\}\\&=a_1'b_1'\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+\left[a_2b_1'-a_1'b_2\right]\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+O\left(\lambda\eta(\lambda)\right)\end{aligned} \tag{2.372}$$

olur ve buradan

$$\frac{1}{w(\lambda)}=\frac{1}{a_1'b_1'\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\times\left\{\begin{array}{l}1+\dfrac{a_2b_1'-a_1'b_2}{a_1'b_1'}\lambda^{-1/2}\cot\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\\+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\end{array}\right\}}$$

$$=\frac{1}{a_1'b_1'\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-3/2}\times\left\{\begin{array}{l}1-\dfrac{a_2b_1'-a_1'b_2}{a_1'b_1'}\lambda^{-1/2}\cot\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\\+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\end{array}\right\} \qquad (2.373)$$

$$=\frac{1}{a_1'b_1'\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-3/2}-\frac{a_2b_1'-a_1'b_2}{\left(a_1'b_1'\right)^2}\lambda^{-2}\frac{\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}{\sin^2\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}$$
$$+O\left(\lambda^{-2}\eta(\lambda)\right)$$

bulunur. Sonuç olarak; (2.176), (2.190) ve (2.373) değerleri (2.332)’ de yerine yazılarak ispat tamamlanır. ■

2.2.2. Potansiyel Fonksiyonunun Türevlenebilir Olması Durumu

Bu kısımda, (2.1) problemi belirtilen sınır koşulları altında ayrı ayrı göz önüne alınacak ve $q(t)$ potansiyel fonksiyonunun türevlenebilir olması şartı altında Green fonksiyonları için asimptotik yaklaşımlar elde edilecektir. Bunun için, önceki bölümlerde verilen koşullara uygun olarak elde edilen özfonksiyonlar kullanılacaktır.

2.2.2.1. Lineer Durum (AN ve AD)

Aşağıda AN sınır koşulu için Green fonksiyonu yaklaşımları verilmiştir:

Teorem 2.32: $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.217) probleminin sırasıyla (2.220) ve (2.221) sınır koşullarını sağlayan çözümleri olmak üzere $a\le x\le y\le b$, $\lambda\to\infty$ iken

$$G(x,y,\lambda)=-\lambda^{-1/2}\frac{\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)}{\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}+\frac{\lambda^{-1}}{\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}-\left(\frac{1}{c}+\cot\beta+\frac{1}{2}\big(aq(a)-bq(b)\big)\right)\tan\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\\ \times\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)\\ -\left[\frac{1}{2}\left(aq(a)-xq(x)+\int\limits_a^x tq'(t)dt\right)+\frac{1}{c}\right]\\ \times\cos\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)\\ +\left[\cot\beta+\frac{1}{2}\left(yq(y)-bq(b)+\int\limits_y^b tq'(t)dt\right)\right]\\ \times\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)\end{array}\right\}+O\left(\lambda^{-3/2}\right) \qquad (2.374)$$

ile verilir. $a\le y\le x\le b$ durumu için, bu eşitlikte x ve y' nin yerleri değiştirilir.

İspat:

AN sınır koşulu altında probleme ait $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ özfonksiyonları $\lambda\to\infty$ iken, sırasıyla (2.222) ve (2.223)' te verildiği gibi elde edilmiştir. $\Psi(t,\lambda)$' nın türevi için (2.46), (2.47), (2.209), (2.213), (2.228), (2.229) ve (2.233) değerleri (2.17)' de yerine yazılırsa

$$\Psi'(t,\lambda)=\left[-c\lambda^{1/2}+\frac{c}{2}\lambda^{-1/2}\left(q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)-q(a)-\frac{2d}{c}\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right]$$
$$\times\left\{\begin{array}{l}1+\frac{1}{4}\lambda^{-1}\left[\begin{array}{l}q(b)\left(\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)-\cos 2\lambda^{1/2}(b-t)\right)\\ +\int\limits_a^t q'(x)dx\end{array}\right]\\ +O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\end{array}\right\}$$
$$\times\left\{\begin{array}{l}\left[-\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-t)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right]\\ \times\left[-\sin\kappa-\frac{1}{c}\lambda^{-1/2}\cos\kappa+\frac{1}{2c^2}\lambda^{-1}\sin\kappa+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\right]\\ -\left[\lambda^{1/2}+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\left[q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-t)-q(t)\right]+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right]\\ \times\left[\cos\kappa-\frac{1}{c}\lambda^{-1/2}\sin\kappa-\frac{1}{2c^2}\lambda^{-1}\cos\kappa+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\right]\end{array}\right\}$$

$$
= c\lambda\cos\kappa - \lambda^{1/2}\sin\kappa + \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{c}{4}\left[\begin{array}{l} q(b)\left(\cos 2\lambda^{1/2}(b-t) - \cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\right) \\ +\displaystyle\int_a^t q'(x)\,dx \end{array} \right] \\ +\dfrac{c}{2}\left(q(a) - q(t) - \dfrac{1}{2c} \right) \end{array} \right\}
$$

$$
\times\cos\kappa - \frac{c}{2} q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-t)\sin\kappa + O\left(\eta(\lambda)\right)
$$

bulunur. Benzer şekilde $\Phi(t,\lambda)$' nın türevi için (2.50), (2.51), (2.209), (2.213), (2.238), (2.239) ve (2.243) değerleri (2.17)' de yerine yazılırsa

$$
\Phi'(t,\lambda) = \left[\sin\beta + \frac{1}{2}\lambda^{-1}\frac{\cos^2\beta}{\sin\beta} + O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right) \right]
$$

$$
\times\left[\begin{array}{l} 1 + \dfrac{1}{4}\lambda^{-1}\left[q(b)\left(1 - \cos 2\lambda^{1/2}(b-t)\right) - \displaystyle\int_t^b q'(x)\,dx \right] \\ +O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right) \end{array} \right]
$$

$$
\times\left\{ \begin{array}{l} \left[-\dfrac{1}{2}\lambda^{-1/2} q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-t) + O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right) \right] \\ \times\left[\cos\sigma - \lambda^{-1/2}\cot\beta\sin\sigma - \dfrac{\cot^2\beta}{2}\lambda^{-1}\cos\sigma + O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right) \right] \\ -\left[\lambda^{1/2} + \dfrac{1}{2}\lambda^{-1/2}\left(q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-t) - q(t)\right) + O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right) \right] \\ \times\left[-\sin\sigma - \lambda^{-1/2}\cot\beta\cos\sigma + \dfrac{1}{2}\lambda^{-1}\cot^2\beta\sin\sigma + O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right) \right] \end{array} \right\}
$$

$$
= \sin\beta\lambda^{1/2}\sin\sigma + \cos\beta\cos\sigma + \left[\begin{array}{l} \dfrac{\sin\beta}{4}\left(q(b)\left(1 + \cos 2\lambda^{1/2}(b-t)\right) - \displaystyle\int_t^b q'(x)\,dx \right) \\ -\dfrac{\sin\beta}{2} q(t) \end{array} \right]
$$

$$
\times\lambda^{-1/2}\sin\sigma - \frac{\sin\beta}{2}\lambda^{-1/2} q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-t)\cos\sigma + O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)
$$

elde edilir. Son eşitliklerde trigonometrik açılım kullanılırsa

$$
\begin{aligned} \Psi'(t,\lambda) &= c\lambda\cos\lambda^{1/2}(t-a) - \left[\frac{c}{2}\left(aq(a) - tq(t) + \int_a^t xq'(x)\,dx \right) + 1 \right] \\ &\quad\times\lambda^{1/2}\sin\lambda^{1/2}(t-a) + O(1) \end{aligned} \tag{2.375}
$$

ve

$$\Phi'(t,\lambda)=\lambda^{1/2}\sin\beta\sin\lambda^{1/2}(b-t)+\left[\begin{array}{l}\dfrac{\sin\beta}{2}\left(tq(t)-bq(b)+\int\limits_t^b xq'(x)\,dx\right)\\+\cos\beta\end{array}\right]$$
$$\times\cos\lambda^{1/2}(b-t)+O\left(\lambda^{-1/2}\right). \tag{2.376}$$

Şimdi (2.222), (2.223), (2.375) ve (2.376) değerleri (2.331)' de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
w(\lambda) &:= \Psi(t,\lambda)\Phi'(t,\lambda)-\Psi'(t,\lambda)\Phi(t,\lambda)\\
&=\left\{\begin{array}{l}c\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\left[1+\dfrac{c}{2}\left(aq(a)-tq(t)+\int\limits_a^t xq'(x)\,dx\right)\right]\\ \times\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\right)\end{array}\right\}\\
&\times\left\{\begin{array}{l}\lambda^{1/2}\sin\beta\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+\left[\cos\beta+\dfrac{\sin\beta}{2}\left(\begin{array}{l}tq(t)-bq(b)\\+\int\limits_t^b xq'(x)\,dx\end{array}\right)\right]\\ \times\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\right)\end{array}\right\}\\
&-\left\{\begin{array}{l}c\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)-\left[1+\dfrac{c}{2}\left(\begin{array}{l}aq(a)-tq(t)\\+\int\limits_a^t xq'(x)\,dx\end{array}\right)\right]\lambda^{1/2}\\ \times\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O(1)\end{array}\right\}\\
&\times\left\{\begin{array}{l}\sin\beta\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)-\left[\dfrac{\sin\beta}{2}\left(\begin{array}{l}tq(t)-bq(b)\\+\int\limits_t^b xq'(x)\,dx\end{array}\right)+\cos\beta\right]\lambda^{-1/2}\\ \times\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+O\left(\lambda^{-1}\right)\end{array}\right\}\\
&=-c\lambda\sin\beta\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+\left[\begin{array}{l}c\cos\beta+\sin\beta\\+\dfrac{c\sin\beta}{2}\left(aq(a)-bq(b)\right)\end{array}\right]\lambda^{1/2}\\
&\quad\times\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+O(1)
\end{aligned} \tag{2.377}$$

bulunur ve buradan

$$\frac{1}{w(\lambda)}=\frac{1}{-c\lambda\sin\beta\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\times\left\{\begin{array}{l}1-\left[\cot\beta+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{2}\left(aq(a)-bq(b)\right)\right]\lambda^{-1/2}\\ \times\tan\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+O\left(\lambda^{-1}\right)\end{array}\right\}}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{c\sin\beta\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-1} \\
&\quad \times\left\{1+\left[\cot\beta+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}\left(aq(a)-bq(b)\right)\right]\lambda^{-1/2}\tan\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+O\left(\lambda^{-1}\right)\right\} \\
&= -\frac{1}{c\sin\beta\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-1}-\frac{1}{c\sin\beta}\left[\cot\beta+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}\left(aq(a)-bq(b)\right)\right] \\
&\quad \times\lambda^{-3/2}\frac{\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}{\cos^2\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}+O\left(\lambda^{-2}\right)
\end{aligned}
\tag{2.378}
$$

olur. Sonuç olarak; (2.222), (2.223) ve (2.378) değerleri (2.332)' de yerine yazılarak ispat tamamlanır. ■

Aşağıda AD sınır koşulu için Green fonksiyonu yaklaşımları verilmiştir:

Teorem 2.33: $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.244) probleminin sırasıyla (2.247) ve (2.248) sınır koşullarını sağlayan çözümleri olmak üzere $a\le x\le y\le b$, $\lambda\to\infty$ iken

$$
\begin{aligned}
G(x,y,\lambda) &= -\lambda^{-1/2}\frac{\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)}{\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}+\frac{\lambda^{-1}}{\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)} \\
&\quad \times\left\{\begin{array}{l}
\left[\frac{1}{2}\left(aq(a)-bq(b)\right)+\frac{1}{c}\right]\cot\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right) \\
\times\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right) \\
-\frac{1}{2}\left[yq(y)-bq(b)+\int_y^b tq'(t)\,dt\right] \\
\times\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right) \\
-\left[\frac{1}{c}+\frac{1}{2}\left(aq(a)-xq(x)+\int_a^x tq'(t)\,dt\right)\right] \\
\times\cos\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)
\end{array}\right\}+O\left(\lambda^{-3/2}\right)
\end{aligned}
\tag{2.379}
$$

ile verilir. $a\le y\le x\le b$ durumu için, bu eşitlikte x ve y' nin yerleri değiştirilir.

İspat:

AD sınır koşulu altında probleme ait $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ özfonksiyonları $\lambda\to\infty$ iken, sırasıyla (2.249) ve (2.250)' de verildiği gibi elde edilmiştir. $\Psi(t,\lambda)$' nın türevi bir önceki teoremde hesaplanmıştır. Benzer şekilde $\Phi(t,\lambda)$' nın türevi için (2.81), (2.82), (2.209), (2.213), (2.239), (2.251) ve (2.252) değerleri (2.17)' de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\Phi'(t,\lambda) &= \left[-\lambda^{-1/2} + O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right)\right] \\
&\quad \times \left\{1 + \frac{1}{4}\lambda^{-1}\left[q(b)\left(1-\cos 2\lambda^{1/2}(b-t)\right) - \int_t^b q'(x)dx\right] + O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\right\} \\
&\quad \times \left\{\begin{array}{l}
\left[-\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-t) + O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right] \\
\times\left[\sin\sigma + O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\right] \\
-\left[\lambda^{1/2} + \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\left(q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-t) - q(t)\right) + O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right] \\
\times\left[\cos\sigma + O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\right]
\end{array}\right\} \\
&= \cos\sigma + \frac{1}{2}\lambda^{-1}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-t)\sin\sigma \\
&\quad + \left[\frac{1}{4}\left(q(b)\left(1+\cos 2\lambda^{1/2}(b-t)\right) - \int_t^b q'(x)dx\right) - \frac{1}{2}q(t)\right]\lambda^{-1}\cos\sigma + O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikte trigonometrik açılım kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\Phi'(t,\lambda) &= \cos\lambda^{1/2}(b-t) - \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\left(tq(t) - bq(b) + \int_t^b xq'(x)dx\right)\sin\lambda^{1/2}(b-t) \\
&\quad + O\left(\lambda^{-1}\right)
\end{aligned} \tag{2.380}$$

elde edilir. Şimdi (2.249), (2.250), (2.375) ve (2.380) değerleri (2.331)' de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
w(\lambda) &= \left\{\begin{array}{l}
c\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right) + \left[1 + \frac{c}{2}\left(aq(a) - tq(t) + \int_a^t xq'(x)dx\right)\right] \\
\times\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right) + O\left(\lambda^{-1/2}\right)
\end{array}\right\} \\
&\quad \times \left\{\begin{array}{l}
\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right) - \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\left(tq(t) - bq(b) + \int_t^b xq'(x)dx\right) \\
\times\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right) + O\left(\lambda^{-1}\right)
\end{array}\right\} \\
&\quad - \left\{\begin{array}{l}
c\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right) - \left[\frac{c}{2}\left(aq(a) - tq(t) + \int_a^t xq'(x)dx\right) + 1\right]\lambda^{1/2} \\
\times\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right) + O(1)
\end{array}\right\}
\end{aligned}$$

$$\times\left\{\begin{aligned}&-\lambda^{-1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)-\frac{1}{2}\lambda^{-1}\left(tq(t)-bq(b)+\int_t^b xq'(x)\,dx\right)\\&\times\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+O\left(\lambda^{-3/2}\right)\end{aligned}\right\}$$

$$=c\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+\left[\frac{c}{2}\left(aq(a)-bq(b)\right)+1\right]\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\right) \tag{2.381}$$

bulunur ve buradan

$$\begin{aligned}\frac{1}{w(\lambda)}&=\frac{1}{c\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\times\left\{\begin{aligned}&1+\left[\frac{1}{2}\left(aq(a)-bq(b)\right)+\frac{1}{c}\right]\lambda^{-1/2}\\&\times\cot\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+O\left(\lambda^{-1}\right)\end{aligned}\right\}}\\&=\frac{1}{c\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-1/2}\times\left\{\begin{aligned}&1-\left[\frac{1}{2}\left(aq(a)-bq(b)\right)+\frac{1}{c}\right]\lambda^{-1/2}\\&\times\cot\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+O\left(\lambda^{-1}\right)\end{aligned}\right\}\\&=\frac{1}{c\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-1/2}-\left[\frac{1}{2c}\left(aq(a)-bq(b)\right)+\frac{1}{c^2}\right]\lambda^{-1}\\&\quad\times\frac{\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}{\sin^2\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}+O\left(\lambda^{-3/2}\right)\end{aligned} \tag{2.382}$$

olur. Sonuç olarak; (2.249), (2.250) ve (2.382) değerleri (2.332)’ de yerine yazılarak ispat tamamlanır. ■

2.2.2.2. Bilineer Durum (BN ve BD)

Aşağıda BN sınır koşulu için Green fonksiyonu yaklaşımları verilmiştir:

Teorem 2.34: $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.253) probleminin sırasıyla (2.256) ve (2.257) sınır koşullarını sağlayan çözümleri olmak üzere $a\le x\le y\le b$, $\lambda\to\infty$ iken

$$G(x,y,\lambda)=\lambda^{-1/2}\frac{\cos\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)}{\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}-\frac{\lambda^{-1}}{\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}\left[\frac{1}{2}\left(yq(y)-bq(b)+\int\limits_y^b tq'(t)dt\right)+\cot\beta\right]\\ \times\cos\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)\\ -\left[\frac{c}{e}-\frac{1}{2}\left(aq(a)-xq(x)+\int\limits_a^x tq'(t)dt\right)\right]\\ \times\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)\\ +\left[\frac{1}{2}\left(aq(a)-bq(b)\right)+\cot\beta-\frac{c}{e}\right]\cot\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\\ \times\cos\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)\end{array}\right\}+O\left(\lambda^{-3/2}\right) \tag{2.383}$$

ile verilir. $a\le y\le x\le b$ durumu için, bu eşitlikte x ve y' nin yerleri değiştirilir.

İspat:

BN sınır koşulu altında probleme ait $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ özfonksiyonları $\lambda\to\infty$ iken, sırasıyla (2.258) ve (2.259)' da verildiği gibi elde edilmiştir. $\Phi(t,\lambda)$' nın türevi (2.376) olarak hesaplanmıştır. Benzer şekilde $\Psi(t,\lambda)$' nın türevi için (2.96), (2.97), (2.209), (2.213), (2.229), (2.266) ve (2.267) değerleri (2.17)' de yerine yazılırsa

$$\Psi'(t,\lambda)=\left[e\lambda+\left(\frac{c^2}{2e}+f\right)+\frac{c}{2}\lambda^{-1/2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right]$$
$$\times\left\{\begin{array}{l}1+\frac{1}{4}\lambda^{-1}\left[\begin{array}{l}q(b)\left(\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)-\cos 2\lambda^{1/2}(b-t)\right)\\ +\int\limits_a^t q'(x)dx\end{array}\right]\\ +O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\end{array}\right\}$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}\left[-\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-t)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right]\\ \times\left[\begin{array}{l}\cos\kappa+\frac{c}{e}\lambda^{-1/2}\sin\kappa-\frac{1}{2}\left(\frac{c}{e}\right)^2\lambda^{-1}\cos\kappa\\ +\frac{1}{2}\lambda^{-1}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)\sin\kappa+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\end{array}\right]\\ -\left[\lambda^{1/2}+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\begin{pmatrix}q(b)\\ \cos 2\lambda^{1/2}(b-t)-q(t)\end{pmatrix}+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right]\\ \times\left[\begin{array}{l}\sin\kappa-\frac{c}{e}\lambda^{-1/2}\cos\kappa-\frac{1}{2}\lambda^{-1}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)\cos\kappa\\ -\frac{1}{2}\left(\frac{c}{e}\right)^2\lambda^{-1}\sin\kappa+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\end{array}\right]\end{array}\right\}$$

$$=-e\lambda^{3/2}\sin\kappa+c\lambda\cos\kappa-\left[\begin{array}{l}\frac{e}{4}\begin{pmatrix}q(b)\left(\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)+\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\right)\\ +\int_a^t q'(x)dx\end{pmatrix}\\ -\frac{e}{2}q(t)+f\end{array}\right]$$
$$\times\lambda^{1/2}\sin\kappa+O\left(\lambda^{1/2}\eta(\lambda)\right)$$

bulunur. Son eşitlikte trigonometrik açılım kullanılırsa

$$\Psi'(t,\lambda)=-e\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\left[c-\frac{e}{2}\left(aq(a)-tq(t)+\int_a^t xq'(x)dx\right)\right]$$
$$\times\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O\left(\lambda^{1/2}\right)\tag{2.384}$$

elde edilir. Şimdi (2.258), (2.259), (2.376) ve (2.384) değerleri (2.331)' de yerine yazılırsa

$$w(\lambda)=\left\{\begin{array}{l}e\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\lambda^{1/2}\left[c-\frac{e}{2}\left(aq(a)-tq(t)+\int_a^t xq'(x)dx\right)\right]\\ \times\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O(1)\end{array}\right\}$$
$$\times\left\{\begin{array}{l}\lambda^{1/2}\sin\beta\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+\left[\cos\beta+\frac{\sin\beta}{2}\begin{pmatrix}tq(t)-bq(b)\\ +\int_t^b xq'(x)dx\end{pmatrix}\right]\\ \times\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\right)\end{array}\right\}$$

$$-\left\{\begin{array}{l}-e\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\left[c-\dfrac{e}{2}\left(aq(a)-tq(t)+\displaystyle\int_a^t xq'(x)dx\right)\right]\\ \times\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O\left(\lambda^{1/2}\right)\end{array}\right\}$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}\sin\beta\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)-\lambda^{-1/2}\left[\cos\beta+\dfrac{\sin\beta}{2}\left(\begin{array}{l}tq(t)-bq(b)\\ +\displaystyle\int_t^b xq'(x)dx\end{array}\right)\right]\\ \times\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+O\left(\lambda^{-1}\right)\end{array}\right\} \tag{2.385}$$

$$=e\lambda^{3/2}\sin\beta\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+\left[\begin{array}{l}\dfrac{e\sin\beta}{2}\left(aq(a)-bq(b)\right)\\ +e\cos\beta-c\sin\beta\end{array}\right]$$

$$\times\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+O\left(\lambda^{1/2}\right)$$

bulunur ve buradan

$$\frac{1}{w(\lambda)}=\frac{1}{e\lambda^{3/2}\sin\beta\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\times\left\{\begin{array}{l}1+\left[\dfrac{1}{2}\left(aq(a)-bq(b)\right)+\cot\beta-\dfrac{c}{e}\right]\\ \times\lambda^{-1/2}\cot\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+O\left(\lambda^{-1}\right)\end{array}\right\}}$$

$$=\frac{1}{e\sin\beta\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-3/2}\times\left\{\begin{array}{l}1-\left[\dfrac{1}{2}\left(aq(a)-bq(b)\right)+\cot\beta-\dfrac{c}{e}\right]\\ \times\lambda^{-1/2}\cot\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+O\left(\lambda^{-1}\right)\end{array}\right\} \tag{2.386}$$

$$=\frac{1}{e\sin\beta\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-3/2}-\frac{1}{e\sin\beta}\left[\frac{1}{2}\left(aq(a)-bq(b)\right)+\cot\beta-\frac{c}{e}\right]$$

$$\times\lambda^{-2}\frac{\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}{\sin^2\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}+O\left(\lambda^{-5/2}\right)$$

olur. Sonuç olarak; (2.258), (2.259) ve (2.386) değerleri (2.332)' de yerine yazılarak ispat tamamlanır. ■

Aşağıda BD sınır koşulu için Green fonksiyonu yaklaşımları verilmiştir:

Teorem 2.35: $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.268) probleminin sırasıyla (2.271) ve (2.272) sınır koşullarını sağlayan çözümleri olmak üzere $a\le x\le y\le b$, $\lambda\to\infty$ iken

$$G(x,y,\lambda)=-\lambda^{-1/2}\frac{\cos\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)}{\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}+\frac{\lambda^{-1}}{\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{1}{2}\left[yq(y)-bq(b)+\displaystyle\int_y^b tq'(t)dt\right]\\ \times\cos\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)\\ -\left[\dfrac{c}{e}-\dfrac{1}{2}\left(aq(a)-xq(x)+\displaystyle\int_a^x tq'(t)dt\right)\right]\\ \times\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)\\ +\left[\dfrac{c}{e}-\dfrac{1}{2}\left(aq(a)-bq(b)\right)\right]\tan\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\\ \times\cos\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)\end{array}\right\}+O\left(\lambda^{-3/2}\right) \tag{2.387}$$

ile verilir. $a\le y\le x\le b$ durumu için, bu eşitlikte x ve y' nin yerleri değiştirilir.

İspat:

BD sınır koşulu altında probleme ait $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ özfonksiyonları $\lambda\to\infty$ iken, sırasıyla (2.273) ve (2.274)' te verildiği gibi elde edilmiştir. Türevleri ise (2.380) ve (2.384) olarak bulunmuştur. Bu durumda (2.273), (2.274), (2.380) ve (2.384) değerleri (2.331)' de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} w(\lambda)=&\left\{\begin{array}{l}e\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\left[c-\dfrac{e}{2}\left(aq(a)-tq(t)+\displaystyle\int_a^t xq'(x)dx\right)\right]\\ \times\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O(1)\end{array}\right\}\\ &\times\left\{\begin{array}{l}\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)-\dfrac{1}{2}\lambda^{-1/2}\left(tq(t)-bq(b)+\displaystyle\int_t^b xq'(x)dx\right)\\ \times\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+O\left(\lambda^{-1}\right)\end{array}\right\}\\ &-\left\{\begin{array}{l}-e\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\left[c-\dfrac{e}{2}\left(aq(a)-tq(t)+\displaystyle\int_a^t xq'(x)dx\right)\right]\\ \times\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O\left(\lambda^{1/2}\right)\end{array}\right\}\\ &\times\left\{\begin{array}{l}-\lambda^{-1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)-\dfrac{1}{2}\left(tq(t)-bq(b)+\displaystyle\int_t^b xq'(x)dx\right)\\ \times\lambda^{-1}\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+O\left(\lambda^{-3/2}\right)\end{array}\right\}\\ =&\,e\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+\left[c-\frac{e}{2}\left(aq(a)-bq(b)\right)\right]\lambda^{1/2}\\ &\times\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+O(1) \end{aligned} \tag{2.388}$$

olur ve buradan

$$\frac{1}{w(\lambda)}=\frac{1}{e\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\times\left\{\begin{array}{l}1+\left[\frac{c}{e}-\frac{1}{2}\left(aq(a)-bq(b)\right)\right]\\ \times\lambda^{-1/2}\tan\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+O\left(\lambda^{-1}\right)\end{array}\right\}}$$

$$=\frac{1}{e\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-1}\times\left\{\begin{array}{l}1-\left[\frac{c}{e}-\frac{1}{2}\left(aq(a)-bq(b)\right)\right]\\ \times\lambda^{-1/2}\tan\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+O\left(\lambda^{-1}\right)\end{array}\right\} \tag{2.389}$$

$$=\frac{1}{e\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-1}-\left[\frac{c}{e^2}-\frac{1}{2e}\left(aq(a)-bq(b)\right)\right]$$

$$\times\lambda^{-3/2}\frac{\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}{\cos^2\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}+O\left(\lambda^{-2}\right).$$

elde edilir. Sonuç olarak; (2.273), (2.274) ve (2.389) değerleri (2.332)’ de yerine yazılarak ispat tamamlanır. ■

2.2.2.3. Kuadratik Durum (KN ve KD)

Aşağıda KN sınır koşulu için Green fonksiyonu yaklaşımları verilmiştir:

Teorem 2.36: $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.275) probleminin sırasıyla (2.278) ve (2.279) sınır koşullarını sağlayan çözümleri olmak üzere $a\le x\le y\le b$, $\lambda\to\infty$ iken

$$G(x,y,\lambda)=-\lambda^{-1/2}\frac{\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)}{\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}+\frac{\lambda^{-1}}{\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}\left[\cot\beta+\frac{1}{2}\left(yq(y)-bq(b)+\int_y^b tq'(t)\,dt\right)\right]\\ \times\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)\\ -\frac{1}{2}\left(aq(a)-xq(x)+\int_a^x tq'(t)\,dt\right)\\ \times\cos\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)\\ -\left[\frac{1}{2}\left(aq(a)-bq(b)\right)+\cot\beta\right]\tan\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\\ \times\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)\end{array}\right\}+O\left(\lambda^{-3/2}\right), \tag{2.390}$$

ile verilir. $a \le y \le x \le b$ durumu için, bu eşitlikte x ve y' nin yerleri değiştirilir.

İspat:

KN sınır koşulu altında probleme ait $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ özfonksiyonları $\lambda \to \infty$ iken, sırasıyla (2.280) ve (2.281)' de verildiği gibi elde edilmiştir. $\Phi(t,\lambda)$' nın türevi ise (2.376) olarak hesaplanmıştır. Benzer şekilde $\Psi(t,\lambda)$' nın türevi için (2.126), (2.127), (2.209), (2.213), (2.229), (2.286) ve (2.287) değerleri (2.17)' de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\Psi'(t,\lambda) &= \left\{-c\lambda^{3/2} - c\lambda^{1/2}\left[\frac{q(a)}{2} - \frac{q(b)}{2}\cos 2\lambda^{1/2}(b-a) + \frac{d}{c}\right] + O\left(\lambda^{1/2}\eta(\lambda)\right)\right\} \\ &\quad \times \left\{\begin{array}{l} 1 + \dfrac{1}{4}\lambda^{-1}\left[\begin{array}{l} q(b)\left(\cos 2\lambda^{1/2}(b-a) - \cos 2\lambda^{1/2}(b-t)\right) \\ +\displaystyle\int_a^t q'(x)dx \end{array}\right] \\ +O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right) \end{array}\right\} \\ &\quad \times \left\{\begin{array}{l} \left[-\dfrac{1}{2}\lambda^{-1/2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-t) + O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right] \\ \times\left[-\sin\kappa + O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\right] \\ -\left[\lambda^{1/2} + \dfrac{1}{2}\lambda^{-1/2}\left(q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-t) - q(t)\right) + O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right] \\ \times\left[\cos\kappa + O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\right] \end{array}\right\} \\ &= c\lambda^2\cos\kappa - \frac{c}{2}\lambda q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-t)\sin\kappa \\ &\quad + \left[\begin{array}{l} \dfrac{c}{4}\left(q(b)\left(\cos 2\lambda^{1/2}(b-t) - \cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\right) + \displaystyle\int_a^t q'(x)dx\right) \\ +\dfrac{c}{2}\left(q(a) - q(t)\right) + \dfrac{d}{2} \end{array}\right] \\ &\quad \times\lambda\cos\kappa + O\left(\lambda\eta(\lambda)\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte trigonometrik açılım kullanılırsa

$$\begin{aligned}\Psi'(t,\lambda) &= c\lambda^2\cos\lambda^{1/2}(t-a) - \frac{c}{2}\left(aq(a) - tq(t) + \int_a^t xq'(x)dx\right) \\ &\quad \times\lambda^{3/2}\sin\lambda^{1/2}(t-a) + O(\lambda)\end{aligned} \tag{2.391}$$

bulunur. Şimdi (2.280), (2.281), (2.376) ve (2.391) değerleri (2.331)' de yerine yazılırsa

$$w(\lambda)=\left\{\begin{array}{l} c\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\frac{c}{2}\left(aq(a)-tq(t)+\int_a^t xq'(x)dx\right) \\ \times\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O\left(\lambda^{1/2}\right) \end{array}\right\}$$

$$\times\left\{\begin{array}{l} \lambda^{1/2}\sin\beta\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+\left[\cos\beta+\frac{\sin\beta}{2}\left(\begin{array}{l} tq(t)-bq(b) \\ +\int_t^b xq'(x)dx \end{array}\right)\right] \\ \times\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\right) \end{array}\right\}$$

$$-\left\{\begin{array}{l} c\lambda^{2}\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)-\frac{c}{2}\left(aq(a)-tq(t)+\int_a^t xq'(x)dx\right) \\ \times\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O(\lambda) \end{array}\right\}$$

$$\times\left\{\begin{array}{l} \sin\beta\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)-\left[\cos\beta+\frac{\sin\beta}{2}\left(\begin{array}{l} tq(t)-bq(b) \\ +\int_t^b xq'(x)dx \end{array}\right)\right] \\ \times\lambda^{-1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+O\left(\lambda^{-1}\right) \end{array}\right\}$$

$$=-c\lambda^{2}\sin\beta\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+c\left[\cos\beta+\frac{\sin\beta}{2}\left(aq(a)-bq(b)\right)\right] \quad (2.392)$$

$$\times\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+O(\lambda)$$

bulunur ve buradan

$$\frac{1}{w(\lambda)}=\frac{1}{-c\lambda^{2}\sin\beta\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\times\left\{\begin{array}{l} 1-\left[\cot\beta+\frac{1}{2}\left(aq(a)-bq(b)\right)\right] \\ \times\lambda^{-1/2}\tan\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+O\left(\lambda^{-1}\right) \end{array}\right\}}$$

$$=-\frac{1}{c\sin\beta\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-2}$$

$$\times\left\{1+\left[\cot\beta+\frac{1}{2}\left(aq(a)-bq(b)\right)\right]\lambda^{-1/2}\tan\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+O\left(\lambda^{-1}\right)\right\} \quad (2.393)$$

$$=-\frac{1}{c\sin\beta\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-2}-\frac{1}{c\sin\beta}\left[\cot\beta+\frac{1}{2}\left(aq(a)-bq(b)\right)\right]$$

$$\times\lambda^{-5/2}\frac{\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}{\cos^{2}\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}+O\left(\lambda^{-3}\right)$$

olur. Sonuç olarak; (2.280), (2.281) ve (2.393) değerleri (2.332)' de yerine yazılarak ispat tamamlanır. ■

Aşağıda KD sınır koşulu için Green fonksiyonu yaklaşımları verilmiştir:

Teorem 2.37: $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.288) probleminin sırasıyla (2.291) ve (2.292) sınır koşullarını sağlayan çözümleri olmak üzere $a \le x \le y \le b$, $\lambda \to \infty$ iken

$$G(x,y,\lambda) = -\lambda^{-1/2}\frac{\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)}{\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)} - \frac{\lambda^{-1}}{\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}$$
$$\times\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\left(yq(y)-bq(b)+\int_y^b tq'(t)dt\right) \\ \times\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right) \\ +\frac{1}{2}\left(aq(a)-xq(x)+\int_a^x tq'(t)dt\right) \\ \times\cos\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right) \\ -\frac{1}{2}\left(aq(a)-bq(b)\right)\cot\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right) \\ \times\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right) \end{array}\right\} + O\left(\lambda^{-3/2}\right) \qquad (2.394)$$

ile verilir. $a \le y \le x \le b$ durumu için, bu eşitlikte x ve y' nin yerleri değiştirilir.

İspat:

KD sınır koşulu altında probleme ait $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ özfonksiyonları $\lambda \to \infty$ iken, sırasıyla (2.293) ve (2.294)' te verildiği gibi elde edilmiştir. Türevleri ise (2.380) ve (2.391) olarak bulunmuştur. Bu durumda (2.293), (2.294), (2.380) ve (2.391) değerleri (2.331)' de yerine yazılırsa

$$w(\lambda) = \left\{\begin{array}{l} c\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\frac{c}{2}\left(aq(a)-tq(t)+\int_a^t xq'(x)dx\right) \\ \times\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O\left(\lambda^{1/2}\right) \end{array}\right\}$$
$$\times\left\{\begin{array}{l} \cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)-\frac{1}{2}\left(tq(t)-bq(b)+\int_t^b xq'(x)dx\right) \\ \times\lambda^{-1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+O\left(\lambda^{-1}\right) \end{array}\right\}$$
$$-\left\{\begin{array}{l} c\lambda^{2}\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)-\frac{c}{2}\left(aq(a)-tq(t)+\int_a^t xq'(x)dx\right) \\ \times\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O(\lambda) \end{array}\right\}$$

$$\times\begin{Bmatrix}-\lambda^{-1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)-\frac{1}{2}\left(tq(t)-bq(b)+\int_t^b xq'(x)dx\right)\\ \times\lambda^{-1}\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+O\left(\lambda^{-3/2}\right)\end{Bmatrix}$$

$$=c\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+\frac{c}{2}\lambda\left(aq(a)-bq(b)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)$$
$$+O\left(\lambda^{1/2}\right) \tag{2.395}$$

bulunur ve buradan

$$\frac{1}{w(\lambda)}=\frac{1}{c\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\times\begin{Bmatrix}1+\frac{1}{2}\left(aq(a)-bq(b)\right)\\ \times\lambda^{-1/2}\cot\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+O\left(\lambda^{-1}\right)\end{Bmatrix}}$$

$$=\frac{1}{c\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-3/2}\times\begin{Bmatrix}1-\frac{1}{2}\left(aq(a)-bq(b)\right)\\ \times\lambda^{-1/2}\cot\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+O\left(\lambda^{-1}\right)\end{Bmatrix} \tag{2.396}$$

$$=\frac{1}{c\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-3/2}-\frac{1}{2c}\lambda^{-2}\left(aq(a)-bq(b)\right)\frac{\cos\lambda^{1/2}(b-a)}{\sin^2\lambda^{1/2}(b-a)}$$
$$+O\left(\lambda^{-5/2}\right).$$

Sonuç olarak; (2.293), (2.294) ve (2.396) değerleri (2.332)' de yerine yazılarak ispat tamamlanır. ■

2.2.2.4. İki Sınır Koşulunun da Özdeğer Parametresine Bağlı Olduğu Durum

Aşağıda (2.296)-(2.297) sınır koşulu için Green fonksiyonu yaklaşımları verilmiştir:

Teorem 2.38: $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ fonksiyonları, (2.295) probleminin sırasıyla (2.298) ve (2.299) sınır koşullarını sağlayan çözümleri olmak üzere $a\le x\le y\le b$, $\lambda\to\infty$ iken

i) $a_2'\neq 0, b_2'\neq 0$ olduğunda

$$G(x,y,\lambda)=\frac{\cos\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)}{\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-1/2}-\frac{\lambda^{-1}}{\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}$$

$$\times\begin{Bmatrix}\left[\dfrac{a_1'b_2'-a_2'b_1'}{a_2'b_2'}+\dfrac{1}{2}\left(aq(a)-bq(b)\right)\right]\cot\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\\ \times\cos\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)\\ +\left[\dfrac{1}{2}\left(aq(a)-xq(x)+\int_a^x tq'(t)dt\right)+\dfrac{a_1'}{a_2'}\right]\\ \times\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)\\ +\left[\dfrac{1}{2}\left(yq(y)-bq(b)+\int_y^b tq'(t)dt\right)-\dfrac{b_1'}{b_2'}\right]\\ \times\cos\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)\end{Bmatrix}+O\left(\lambda^{-3/2}\right) \qquad (2.397)$$

ile verilir ve $a\le y\le x\le b$ durumu için, bu eşitlikte x ve y' nin yerleri değiştirilir.

ii) $a_2'\ne 0, b_2'=0$ olduğunda

$$G(x,y,\lambda)=-\frac{\cos\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)}{\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-1/2}-\frac{\lambda^{-1}}{\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}$$

$$\times\begin{Bmatrix}\left[\dfrac{a_1'b_1'-a_2'b_2}{a_2'b_1'}+\dfrac{1}{2}\left(aq(a)-bq(b)\right)\right]\tan\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\\ \times\cos\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)\\ -\left[\dfrac{1}{2}\left(aq(a)-xq(x)+\int_a^x tq'(t)dt\right)+\dfrac{a_1'}{a_2'}\right]\\ \times\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)\\ -\left[\dfrac{b_2}{b_1'}-\dfrac{1}{2}\left(yq(y)-bq(b)+\int_y^b tq'(t)dt\right)\right]\\ \times\cos\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)\end{Bmatrix}+O\left(\lambda^{-3/2}\right) \qquad (2.398)$$

ile verilir ve $a\le y\le x\le b$ durumu için, bu eşitlikte x ve y' nin yerleri değiştirilir ($\lambda\to\infty$).

iii) $a_2'=0, b_2'\ne 0$ olduğunda

$$G(x,y,\lambda)=-\frac{\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)}{\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-1/2}+\frac{\lambda^{-1}}{\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}\left[\dfrac{a_1'b_1'-a_2b_2'}{a_1'b_2'}-\dfrac{1}{2}\left(aq(a)-bq(b)\right)\right]\tan\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\\ \times\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)\\ -\left[\dfrac{1}{2}\left(aq(a)-xq(x)+\displaystyle\int_a^x tq'(t)dt\right)+\dfrac{a_2}{a_1'}\right]\\ \times\cos\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)\\ +\left[\dfrac{1}{2}\left(yq(y)-bq(b)+\displaystyle\int_y^b tq'(t)dt\right)-\dfrac{b_1'}{b_2'}\right]\\ \times\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)\end{array}\right\}+O\left(\lambda^{-3/2}\right) \qquad (2.399)$$

ile verilir ve $a\le y\le x\le b$ durumu için, bu eşitlikte x ve y' nin yerleri değiştirilir.

iv) $a_2'=0, b_2'=0$ olduğunda

$$G(x,y,\lambda)=-\frac{\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)}{\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-1/2}+\frac{\lambda^{-1}}{\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}\left[\dfrac{a_2b_1'-a_1'b_2}{a_1'b_1'}+\dfrac{1}{2}\left(aq(a)-bq(b)\right)\right]\cot\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\\ \times\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)\\ -\left[\dfrac{1}{2}\left(aq(a)-xq(x)+\displaystyle\int_a^x tq'(t)dt\right)+\dfrac{a_2}{a_1'}\right]\\ \times\cos\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)\\ +\left[\dfrac{b_2}{b_1'}-\dfrac{1}{2}\left(yq(y)-bq(b)+\displaystyle\int_y^b tq'(t)dt\right)\right]\\ \sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)\end{array}\right\}+O\left(\lambda^{-3/2}\right) \qquad (2.400)$$

ile verilir ve $a\le y\le x\le b$ durumu için, bu eşitlikte x ve y' nin yerleri değiştirilir.

İspat:

i) $a_2'\ne 0, b_2'\ne 0$ iken; $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ özfonksiyonları, sırasıyla (2.300) ve (2.315)' te verildiği gibi elde edilmiştir ($\lambda\to\infty$). $\Psi(t,\lambda)$' nın türevi ise (2.151), (2.157), (2.158), (2.209), (2.213), (2.229), (2.307) ve (2.308) değerleri (2.17)' de yerine yazılırsa

$$\Psi'(t,\lambda)=\left[-a_2'\lambda+\left(a_2-\frac{(a_1')^2}{2a_2'}\right)+\frac{a_1'}{2}\lambda^{-1/2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right]$$
$$\times\left\{1+\frac{1}{4}\lambda^{-1}\begin{bmatrix}q(b)\left(\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)-\cos 2\lambda^{1/2}(b-t)\right)\\ +\int_a^t q'(x)dx\end{bmatrix}+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\right\}$$
$$\times\left\{\begin{array}{l}\left[-\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-t)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right]\\ \times\left[\cos\kappa-\frac{a_1'}{a_2'}\lambda^{-1/2}\sin\kappa+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)\sin\kappa\\ -\left(\frac{a_1'}{a_2'}\right)^2\cos\kappa\end{bmatrix}\lambda^{-1}+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\right]\\ -\left[\lambda^{1/2}+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\left(q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-t)-q(t)\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right]\\ \times\left[\sin\kappa+\frac{a_1'}{a_2'}\lambda^{-1/2}\cos\kappa-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)\cos\kappa\\ +\left(\frac{a_1'}{a_2'}\right)^2\sin\kappa\end{bmatrix}\lambda^{-1}+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\right]\end{array}\right\}$$
$$=a_2'\lambda^{3/2}\sin\kappa+a_1'\lambda\cos\kappa+\left[\frac{a_2'}{2}q(b)\left(\sin 2\lambda^{1/2}(b-t)-\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)\right)\right]\lambda^{1/2}\cos\kappa$$
$$-\left\{a_2+\frac{a_2'}{2}\left(q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-t)-q(t)\right)-\frac{a_2'}{4}\begin{bmatrix}q(b)\begin{pmatrix}\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\\ -\cos 2\lambda^{1/2}(b-t)\end{pmatrix}\\ +\int_a^t q'(x)dx\end{bmatrix}\right\}$$
$$\times\lambda^{1/2}\sin\kappa+O\left(\lambda^{1/2}\eta(\lambda)\right)$$

bulunur. Son eşitlikte trigonometrik açılım kullanılırsa

$$\Psi'(t,\lambda)=a_2'\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\left[a_1'+\frac{a_2'}{2}\left(aq(a)-tq(t)+\int_a^t xq'(x)dx\right)\right]$$
$$\times\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O\left(\lambda^{1/2}\right) \tag{2.401}$$

elde edilir. $\Phi(t,\lambda)$' nın türevi için benzer şekilde (2.164), (2.169), (2.170), (2.209), (2.213), (2.239), (2.323) ve (2.324) değerleri (2.17)' de yerine yazılırsa

$$\Phi'(t,\lambda)=\begin{Bmatrix} -b_2'\lambda-\dfrac{b_2'}{4}\left[q(b)\left(1-\cos 2\lambda^{1/2}(b-t)\right)-\displaystyle\int_t^b q'(x)\,dx\right] \\ +\left[b_2-\dfrac{(b_1')^2}{2b_2'}\right]+O(\eta(\lambda)) \end{Bmatrix}$$

$$\times\begin{Bmatrix} \left[-\dfrac{1}{2}\lambda^{-1/2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-t)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right] \\ \times\left[\cos\sigma+\dfrac{b_1'}{b_2'}\lambda^{-1/2}\sin\sigma-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b_1'}{b_2'}\right)^2\lambda^{-1}\cos\sigma+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\right] \\ -\left[\lambda^{1/2}+\dfrac{1}{2}\lambda^{-1/2}\left(q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-t)-q(t)\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right] \\ \times\left[-\sin\sigma+\dfrac{b_1'}{b_2'}\lambda^{-1/2}\cos\sigma+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b_1'}{b_2'}\right)^2\lambda^{-1}\sin\sigma+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\right] \end{Bmatrix}$$

$$=-b_2'\lambda^{3/2}\sin\sigma+b_1'\lambda\cos\sigma+\begin{Bmatrix} b_2-\dfrac{b_2'}{2}\left[q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-t)-q(t)\right] \\ -\dfrac{b_2'}{4}\left[q(b)\left(1-\cos 2\lambda^{1/2}(b-t)\right)-\displaystyle\int_t^b q'(x)\,dx\right] \end{Bmatrix}$$

$$\times\lambda^{1/2}\sin\sigma+\frac{b_2'}{2}\lambda^{1/2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-t)\cos\sigma+O\left(\lambda^{1/2}\eta(\lambda)\right)$$

bulunur. Son eşitlikte trigonometrik açılım kullanılırsa

$$\Phi'(t,\lambda)=-b_2'\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+\left[b_1'-\frac{b_2'}{2}\left(tq(t)-bq(b)+\int_t^b xq'(x)\,dx\right)\right] \\ \times\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+O\left(\lambda^{1/2}\right). \tag{2.402}$$

Şimdi (2.300), (2.315), (2.401) ve (2.402) değerleri (2.331)' de yerine yazılırsa

$$w(\lambda)=\begin{Bmatrix} -a_2'\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\left[a_1'+\dfrac{a_2'}{2}\left(aq(a)-tq(t)+\displaystyle\int_a^t xq'(x)\,dx\right)\right] \\ \times\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O(1) \end{Bmatrix}$$

$$\times\begin{Bmatrix} -b_2'\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+\left[b_1'-\dfrac{b_2'}{2}\left(tq(t)-bq(b)+\displaystyle\int_t^b xq'(x)\,dx\right)\right] \\ \times\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+O\left(\lambda^{1/2}\right) \end{Bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&-\left\{\begin{array}{l} a_2'\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\left[a_1'+\dfrac{a_2'}{2}\left(aq(a)-tq(t)+\displaystyle\int_a^t xq'(x)dx\right)\right] \\ \times\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O\left(\lambda^{1/2}\right) \end{array}\right\} \\
&\times\left\{\begin{array}{l} -b_2'\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)-\left[b_1'-\dfrac{b_2'}{2}\left(tq(t)-bq(b)+\displaystyle\int_t^b xq'(x)dx\right)\right] \\ \times\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+O(1) \end{array}\right\} \qquad (2.403) \\
&=a_2'b_2'\lambda^{5/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+\left[a_1'b_2'-a_2'b_1'+\frac{a_2'b_2'}{2}\left(aq(a)-bq(b)\right)\right] \\
&\quad\times\lambda^2\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+O\left(\lambda^{3/2}\right)
\end{aligned}
$$

bulunur ve buradan

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{w(\lambda)}&=\frac{1}{a_2'b_2'\lambda^{5/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\times\left\{\begin{array}{l}1+\left[\dfrac{a_1'b_2'-a_2'b_1'}{a_2'b_2'}+\dfrac{1}{2}\left(aq(a)-bq(b)\right)\right] \\ \times\lambda^{-1/2}\cot\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+O\left(\lambda^{-1}\right)\end{array}\right\}} \\
&=\frac{1}{a_2'b_2'\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-5/2}\times\left\{\begin{array}{l}1-\left[\dfrac{a_1'b_2'-a_2'b_1'}{a_2'b_2'}+\dfrac{1}{2}\left(aq(a)-bq(b)\right)\right] \\ \times\lambda^{-1/2}\cot\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+O\left(\lambda^{-1}\right)\end{array}\right\} \qquad (2.404) \\
&=\frac{1}{a_2'b_2'\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-5/2}-\frac{1}{a_2'b_2'}\left[\frac{a_1'b_2'-a_2'b_1'}{a_2'b_2'}+\frac{1}{2}\left(aq(a)-bq(b)\right)\right] \\
&\quad\times\lambda^{-3}\frac{\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}{\sin^2\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}+O\left(\lambda^{-7/2}\right)
\end{aligned}
$$

olur. Sonuç olarak; (2.300), (2.315) ve (2.404) değerleri (2.332)’ de yerine yazılarak ispat tamamlanır.

ii) $a_2'\neq 0, b_2'=0$ iken; $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ özfonksiyonları, sırasıyla (2.300) ve (2.316)’ da verildiği gibi elde edilmiştir ($\lambda\to\infty$). Ayrıca $\Psi(t,\lambda)$’ nın türevi (2.401) olarak bulunmuştur. Benzer şekilde $\Phi(t,\lambda)$’ nın türevi için (2.166), (2.173), (2.174), (2.209), (2.213), (2.239), (2.329) ve (2.330) değerleri (2.17)’ de yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
\Phi'(t,\lambda)&=\left[-b_1'\lambda^{1/2}-b_1\lambda^{-1/2}+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\right] \\
&\quad\times\left\{1+\frac{1}{4}\lambda^{-1}\left[q(b)\left(1-\cos 2\lambda^{1/2}(b-t)\right)-\int_t^b q'(x)dx\right]+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\right\}
\end{aligned}
$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}\left[-\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-t)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right]\\ \times\left[\sin\sigma-\frac{b_2}{b_1'}\lambda^{-1/2}\cos\sigma-\frac{1}{2}\left(\frac{b_2}{b_1'}\right)^2\lambda^{-1}\sin\sigma+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\right]\\ -\left[\lambda^{1/2}+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\left(q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-t)-q(t)\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right]\\ \times\left[\cos\sigma+\frac{b_2}{b_1'}\lambda^{-1/2}\sin\sigma-\frac{1}{2}\left(\frac{b_2}{b_1'}\right)^2\lambda^{-1}\cos\sigma+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\right]\end{array}\right\}$$

$$=b_1'\lambda\cos\sigma+b_2\lambda^{1/2}\sin\sigma+\frac{b_1'}{2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-t)\sin\sigma$$

$$+\left\{b_1-\frac{(b_2)^2}{2b_1'}+\frac{b_1'}{2}q(t)+\frac{b_1'}{4}\left[\begin{array}{l}q(b)\left(1+\cos 2\lambda^{1/2}(b-t)\right)\\ -\int_t^b q'(x)dx\end{array}\right]\right\}\cos\sigma+O\left(\eta(\lambda)\right)$$

elde edilir. Bu eşitlikte trigonometrik açılım kullanılırsa

$$\begin{aligned}\Phi'(t,\lambda)=b_1'\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+\left[b_2-\frac{b_1'}{2}\left(tq(t)-bq(b)+\int_t^b xq'(x)dx\right)\right]\\ \times\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+O(1).\end{aligned}\tag{2.405}$$

Şimdi (2.300), (2.316), (2.401) ve (2.405) değerleri (2.331)’ de yerine yazılırsa

$$w(\lambda)=\left\{\begin{array}{l}-a_2'\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\left[a_1'+\frac{a_2'}{2}\left(aq(a)-tq(t)+\int_a^t xq'(x)dx\right)\right]\\ \times\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O(1)\end{array}\right\}$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}b_1'\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+\left[b_2-\frac{b_1'}{2}\left(tq(t)-bq(b)+\int_t^b xq'(x)dx\right)\right]\\ \times\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+O(1)\end{array}\right\}$$

$$-\left\{\begin{array}{l}-b_1'\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+\left[b_2-\frac{b_1'}{2}\left(tq(t)-bq(b)+\int_t^b xq'(x)dx\right)\right]\\ \times\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\right)\end{array}\right\}$$

$$\times\begin{Bmatrix}a_2'\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\left[a_1'+\frac{a_2'}{2}\left(aq(a)-tq(t)+\int_a^t xq'(x)dx\right)\right]\\ \times\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O\left(\lambda^{1/2}\right)\end{Bmatrix}$$

$$=-a_2'b_1'\lambda^2\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+\left[a_1'b_1'-a_2'b_2+\frac{a_2'b_1'}{2}\left(aq(a)-bq(b)\right)\right]$$
$$\times\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+O(\lambda) \tag{2.406}$$

bulunur ve buradan

$$\frac{1}{w(\lambda)}=\frac{1}{-a_2'b_1'\lambda^2\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\times\begin{Bmatrix}1-\dfrac{1}{a_2'b_1'}\begin{bmatrix}a_1'b_1'-a_2'b_2+\dfrac{a_2'b_1'}{2}\\ \times\left(aq(a)-bq(b)\right)\end{bmatrix}\\ \times\lambda^{-1/2}\tan\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+O\left(\lambda^{-1}\right)\end{Bmatrix}}$$

$$=-\frac{1}{a_2'b_1'\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-2}\times\begin{Bmatrix}1+\dfrac{1}{a_2'b_1'}\begin{bmatrix}a_1'b_1'-a_2'b_2+\dfrac{a_2'b_1'}{2}\\ \times\left(aq(a)-bq(b)\right)\end{bmatrix}\\ \times\lambda^{-1/2}\tan\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+O\left(\lambda^{-1}\right)\end{Bmatrix}$$

$$=-\frac{1}{a_2'b_1'\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-2}-\frac{1}{a_2'b_1'}\begin{bmatrix}\dfrac{a_1'b_1'-a_2'b_2}{a_2'b_1'}\\ +\dfrac{1}{2}\left(aq(a)-bq(b)\right)\end{bmatrix}$$
$$\times\lambda^{-5/2}\frac{\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}{\cos^2\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}+O\left(\lambda^{-3}\right). \tag{2.407}$$

Sonuç olarak; (2.300), (2.316) ve (2.407) değerleri (2.332)' de yerine yazılarak ispat tamamlanır.

iii) $a_2'=0, b_2'\neq 0$ iken; $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ özfonksiyonları, sırasıyla (2.301) ve (2.315)' te verildiği gibi elde edilmiştir ($\lambda\to\infty$). Ayrıca $\Phi(t,\lambda)$' nın türevi (2.402) olarak bulunmuştur. Benzer şekilde $\Psi(t,\lambda)$' nın türevi için (2.153), (2.161), (2.162), (2.209), (2.213), (2.229), (2.313) ve (2.314) değerleri (2.17)' de yerine yazılırsa

$$\Psi'(t,\lambda)=\left\{\begin{array}{l}-a_1'\lambda^{1/2}+\left[a_1+\frac{a_1'}{2}\left(q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)-q(a)\right)\right]\lambda^{-1/2}\\ +O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\end{array}\right\}$$

$$\times\left\{1+\frac{1}{4}\lambda^{-1}\left[\begin{array}{l}q(b)\left(\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)-\cos 2\lambda^{1/2}(b-t)\right)\\ +\int\limits_a^t q'(x)dx\end{array}\right]+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\right\}$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}\left[-\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-t)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right]\\ \times\left[-\sin\kappa-\frac{a_2}{a_1'}\lambda^{-1/2}\cos\kappa+\frac{1}{2}\left(\frac{a_2}{a_1'}\right)^2\lambda^{-1}\sin\kappa+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\right]\\ -\left[\lambda^{1/2}+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\left(q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-t)-q(t)\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta(\lambda)\right)\right]\\ \times\left[\cos\kappa-\frac{a_2}{a_1'}\lambda^{-1/2}\sin\kappa-\frac{1}{2}\left(\frac{a_2}{a_1'}\right)^2\lambda^{-1}\cos\kappa+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)\right]\end{array}\right\}$$

$$=a_1'\lambda\cos\kappa-a_2\lambda^{1/2}\sin\kappa+\left[\begin{array}{l}\frac{a_1'}{2}\left(q(a)-q(t)\right)-a_1-\frac{(a_2)^2}{2a_1'}\\ +\frac{a_1'}{4}\left(\begin{array}{l}q(b)\left(\cos 2\lambda^{1/2}(b-t)-\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\right)\\ +\int\limits_a^t q'(x)dx\end{array}\right)\end{array}\right]$$

$$\times\cos\kappa-\frac{a_1'}{2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-t)\sin\kappa+O\left(\eta(\lambda)\right)$$

elde edilir. Son eşitlikte trigonometrik açılım kullanılırsa

$$\begin{array}{l}\Psi'(t,\lambda)=a_1'\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)-\left[a_2+\frac{a_1'}{2}\left(aq(a)-tq(t)+\int\limits_a^t xq'(x)dx\right)\right]\\ \quad\times\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O(1).\end{array}\tag{2.408}$$

Şimdi (2.301), (2.315), (2.402) ve (2.408) değerleri (2.331)' de yerine yazılırsa

$$w(\lambda)=\left\{\begin{array}{l}a_1'\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\left[a_2+\frac{a_1'}{2}\left(aq(a)-tq(t)+\int\limits_a^t xq'(x)dx\right)\right]\\ \times\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\right)\end{array}\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&\times\left\{\begin{array}{l}-b_2'\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+\left[b_1'-\dfrac{b_2'}{2}\left(tq(t)-bq(b)+\displaystyle\int_t^b xq'(x)\,dx\right)\right]\\ \times\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+O\left(\lambda^{1/2}\right)\end{array}\right\}\\
&-\left\{\begin{array}{l}-b_2'\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)-\left[b_1'-\dfrac{b_2'}{2}\left(tq(t)-bq(b)+\displaystyle\int_t^b xq'(x)\,dx\right)\right]\\ \times\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+O(1)\end{array}\right\}\\
&\times\left\{\begin{array}{l}a_1'\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)-\left[a_2+\dfrac{a_1'}{2}\left(aq(a)-tq(t)+\displaystyle\int_a^t xq'(x)\,dx\right)\right]\\ \times\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O(1)\end{array}\right\}\\
&=a_1'b_2'\lambda^2\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+\left[a_1'b_1'-a_2b_2'-\frac{a_1'b_2'}{2}\left(aq(a)-bq(b)\right)\right]\\
&\quad\times\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+O(\lambda)
\end{aligned}
\tag{2.409}
$$

bulunur ve buradan

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{w(\lambda)}&=\frac{1}{a_1'b_2'\lambda^2\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\times\left\{\begin{array}{l}1+\left[\dfrac{a_1'b_1'-a_2b_2'}{a_1'b_2'}-\dfrac{1}{2}\left(aq(a)-bq(b)\right)\right]\\ \times\lambda^{-1/2}\tan\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+O\left(\lambda^{-1}\right)\end{array}\right\}}\\
&=\frac{1}{a_1'b_2'\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-2}\times\left\{\begin{array}{l}1-\left[\dfrac{a_1'b_1'-a_2b_2'}{a_1'b_2'}-\dfrac{1}{2}\left(aq(a)-bq(b)\right)\right]\\ \times\lambda^{-1/2}\tan\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+O\left(\lambda^{-1}\right)\end{array}\right\}\\
&=\frac{1}{a_1'b_2'\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-2}-\frac{1}{a_1'b_2'}\left[\frac{a_1'b_1'-a_2b_2'}{a_1'b_2'}-\frac{1}{2}\left(aq(a)-bq(b)\right)\right]\\
&\quad\times\lambda^{-5/2}\frac{\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}{\cos^2\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}+O\left(\lambda^{-3}\right)
\end{aligned}
\tag{2.410}
$$

olur. Sonuç olarak; (2.301), (2.315) ve (2.410) değerleri (2.332)' de yerine yazılarak ispat tamamlanır.

iv) $a_2'=0, b_2'=0$ iken; $\Psi(t,\lambda)$ ve $\Phi(t,\lambda)$ özfonksiyonları, sırasıyla (2.301) ve (2.316)' da verildiği gibi elde edilmiştir ($\lambda\to\infty$). Türevleri ise (2.405) ve (2.408) olarak bulunmuştur. Elde edilen (2.301), (2.316), (2.405) ve (2.408) değerleri (2.331)' de yerine yazılırsa

$$w(\lambda)=\left\{\begin{array}{l} a_1'\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\left[a_2+\dfrac{a_1'}{2}\left(aq(a)-tq(t)+\int\limits_a^t xq'(x)dx\right)\right] \\ \times\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\right)\end{array}\right\}$$

$$\times\left\{\begin{array}{l} b_1'\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+\left[b_2-\dfrac{b_1'}{2}\left(tq(t)-bq(b)+\int\limits_t^b xq'(x)dx\right)\right] \\ \times\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+O(1)\end{array}\right\}$$

$$-\left\{\begin{array}{l} -b_1'\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+\left[b_2-\dfrac{b_1'}{2}\left(tq(t)-bq(b)+\int\limits_t^b xq'(x)dx\right)\right] \\ \times\cos\left(\lambda^{1/2}(b-t)\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\right)\end{array}\right\}$$

$$\times\left\{\begin{array}{l} a_1'\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)-\left[a_2+\dfrac{a_1'}{2}\left(aq(a)-tq(t)+\int\limits_a^t xq'(x)dx\right)\right] \\ \times\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O(1)\end{array}\right\}$$

$$=a_1'b_1'\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+\left[a_2b_1'-a_1'b_2+\frac{a_1'b_1'}{2}\left(aq(a)-bq(b)\right)\right] \qquad (2.411)$$
$$\times\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+O\left(\lambda^{1/2}\right)$$

bulunur ve buradan

$$\frac{1}{w(\lambda)}=\frac{1}{a_1'b_1'\lambda^{3/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\times\left\{\begin{array}{l}1+\left[\dfrac{a_2b_1'-a_1'b_2}{a_1'b_1'}+\dfrac{1}{2}\left(aq(a)-bq(b)\right)\right] \\ \times\lambda^{-1/2}\cot\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+O\left(\lambda^{-1}\right)\end{array}\right\}}$$

$$=\frac{1}{a_1'b_1'\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-3/2}\times\left\{\begin{array}{l}1-\left[\dfrac{a_2b_1'-a_1'b_2}{a_1'b_1'}+\dfrac{1}{2}\left(aq(a)-bq(b)\right)\right] \\ \times\lambda^{-1/2}\cot\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)+O\left(\lambda^{-1}\right)\end{array}\right\} \qquad (2.412)$$

$$=\frac{1}{a_1'b_1'\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}\lambda^{-3/2}-\frac{1}{a_1'b_1'}\left[\frac{a_2b_1'-a_1'b_2}{a_1'b_1'}+\frac{1}{2}\left(aq(a)-bq(b)\right)\right]$$
$$\times\lambda^{-2}\frac{\cos\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}{\sin^2\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)}+O\left(\lambda^{-5/2}\right)$$

olur. Sonuç olarak; (2.301), (2.316) ve (2.412) değerleri (2.332)' de yerine yazılarak ispat tamamlanır. ■

3. SONUÇLAR

1) Potansiyel fonksiyonunun integrallenebilir olması durumunda sınır koşullarının birinde özdeğer parametresi bulunan özdeğer problemleri ele alınarak, bu problemlerin özfonksiyonları için asimptotik tahminler elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar, potansiyel fonksiyonunun sürekli olması durumunda Fulton tarafından elde edilen [16] çalışmasındaki sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Fulton bu çalışmasında, tez çalışmasında kullandığımız notasyonlarla,

$$\begin{aligned} & y''(t)+\left[\lambda-q(t)\right]y(t)=0, \quad t\in[a,b] \\ & y(a)\cos\beta+y'(a)\sin\beta=0, \quad \beta\in[0,\pi), \\ & \left[e\lambda+f\right]y'(b)-\left[c\lambda+d\right]y(b)=0, \quad c,d,e,f\in\mathbb{R} \end{aligned} \tag{3.1}$$

regüler Sturm-Louville problemini ele almış ve problemin özfonksiyonları için

- $e\neq 0$ olduğunda

  $\chi(t,\lambda)=es^2\cos s(b-t)+O\left(|s|e^{|x|(b-t)}\right),$

- $e=0$ olduğunda

  $\chi(t,\lambda)=-cs\sin s(b-t)+O\left(e^{|x|(b-t)}\right)$

asimptotik yaklaşımlarını elde etmiştir. Burada $q(t)$ potansiyel fonksiyonu sürekli, $s:=\sqrt{\lambda}=:\sigma+ix$, $|\lambda|\to\infty$.

Çalışmamızda ise

$$\begin{aligned} & y''(t)+\left[\lambda-q(t)\right]y(t)=0, \quad t\in[a,b] \\ & \left[e\lambda+f\right]y'(a)-\left[c\lambda+d\right]y(a)=0, \quad c,d,e,f\in\mathbb{R}, \\ & y'(b)\sin\beta-y(b)\cos\beta=0, \quad \beta\in[0,\pi) \end{aligned} \tag{3.2}$$

regüler Sturm-Liouville problemi ele alınmış ve bu problemin özfonksiyonları için

- $e\neq 0$ olduğunda

$$\Psi(t,\lambda)=e\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\lambda^{1/2}\left(c+\frac{e}{2}\int_a^t q(x)dx\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O\left(\lambda^{1/2}\eta(\lambda)\right),$$

- $e=0$ olduğunda

$$\Psi(t,\lambda)=c\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+\left(1-\frac{c}{2}\int_a^t q(x)dx\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)+O\left(\eta(\lambda)\right)$$

asimptotik yaklaşımları bulunmuştur. Burada $q(t)$ potansiyel fonksiyonu integrallenebilir, $\lambda\to\infty$.

Bu karşılaştırmalar sonucunda çalışmamızdaki asimptotik tahminlerin daha etkili olduğu görülmüştür. Elde edilen sonuçların bir kısmı Mathematica Scandinavica [13] dergisinde yayınlanmıştır.

2) Potansiyel fonksiyonunun integrallenebilir ve sınır koşullarının her ikisinde özdeğer parametresi bulunması durumunda regüler Sturm-Liouville probleminin özfonksiyonları için asimptotik tahminler geliştirilmiştir. Literatürde bu problemin ele alındığı çalışmalardan biri [2]' dir. Ele alınan problem

$$\begin{aligned}
&y''(t)+\left[\lambda-q(t)\right]y(t)=0,\quad t\in[0,1],\\
&a_1y(0)+a_2y'(0)=\lambda\left[a_1'y(0)+a_2'y'(0)\right],\quad a_1,a_2,a_1',a_2'\in\mathbb{R}\\
&b_1y(1)+b_2y'(1)=\lambda\left[b_1'y(1)+b_2'y'(1)\right],\quad b_1,b_2,b_1',b_2'\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

şeklindedir. Özfonksiyonlar için elde edilen asimptotik yaklaşımlar ise

- $a_2'\neq 0$ olduğunda

$$\phi(t,\lambda)=-a_2's^2\cos(st)+O\left(|s|e^{|x|t}\right),$$

- $a_2'=0$ olduğunda

$$\phi(t,\lambda)=a_1's\sin(st)+O\left(e^{|x|t}\right)$$

bulunmuştur [2]. Burada $q(t)$ potansiyel fonksiyonu sürekli, $s:=\sqrt{\lambda}=:\sigma+ix$, $|\lambda|\to\infty$.

Çalışmamızda ise aynı problem, $q(t)$ potansiyel fonksiyonunun integrallenebilir olması durumunda $[a,b]$ aralığında ele alınmış ve özfonksiyonlar için

- $a_2' \neq 0$ olduğunda

$$\Psi(t,\lambda) = -a_2'\lambda\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right) - \lambda^{1/2}\left(\frac{a_2'}{2}\int_a^t q(x)dx - a_1'\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right)$$
$$+O\left(\lambda^{1/2}\eta(\lambda)\right),$$

- $a_2' = 0$ olduğunda

$$\Psi(t,\lambda) = a_1'\lambda^{1/2}\sin\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right) + \left(a_2 - \frac{a_1'}{2}\int_a^t q(x)dx\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(t-a)\right) + O\left(\eta(\lambda)\right)$$

asimptotik yaklaşımları elde edilmiştir ($\lambda \to \infty$).

Sonuçlar karşılaştırıldığında bu tez çalışmasında daha az varsayımlar altında problemin özfonksiyonları için hesaplanan asimptotik tahminlerin, [2] çalışmasında elde edilen tahminlerden daha etkili olduğu görülmüştür.

3) Türevlenebilirlik varsayımı altında yukarıdaki (1) ve (2) durumlarında belirtilen sınır koşullarını sağlayan özfonksiyonlar için asimptotik tahminler elde edilmiştir. Beklendiği gibi elde edilen hata teriminin, integrallenebilirlik varsayımı altında bulunan hata teriminden daha iyi olduğu gözlenmiştir ((2.52) vs. (2.222), (2.53) vs. (2.223), (2.84) vs. (2.250), (2.98) vs. (2.258), (2.128) vs. (2.280), (2.175) vs. (2.300), (2.176) vs. (2.301), (2.189) vs. (2.315), (2.190) vs. (2.316)).

4) İntegrallenebilirlik varsayımı altında (1) ve (2) de belirtilen sınır koşulları için bulunan özfonksiyonlar kullanılarak Green fonksiyonları için asimptotik çözümler elde edilmiştir. Çözümlerdeki iyileştirilmiş hata terimlerinin Green fonksiyonlarına da yansıdığı gözlemlenmiştir. Fulton [16] çalışmasında, (3.1) probleminin Green fonksiyonu için $e \neq 0, \beta \neq 0$ olduğunda

$$G(x,y,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\cos s(b-x)\cos s(y-a)}{s\sin s(b-a)} + O\left(\dfrac{1}{|s|^2}\exp\left[t(y-x)\right]\right), & a \leq y \leq x \\ \dfrac{\cos s(x-a)\cos s(b-y)}{s\sin s(b-a)} + O\left(\dfrac{1}{|s|^2}\exp\left[t(x-y)\right]\right), & x \leq y \leq b \end{cases}$$

asimptotik yaklaşımını elde etmiştir. Burada $q(t)$ potansiyel fonksiyonu sürekli, $s := \sqrt{\lambda} =: \sigma + ix$, $|\lambda| \to \infty$.

Çalışmamızda ise (3.2) probleminin Green fonksiyonu için $e \neq 0,\ \beta \neq 0$ olduğunda

$$
\begin{aligned}
G(x,y,\lambda) = {} & \lambda^{-1/2}\frac{\cos\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)}{\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)} + \frac{\lambda^{-1}}{\sin\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)} \\
& \times \left\{ \begin{array}{l}
\left[\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_y^b q(t)\,dt - \cot\beta\right]\cos\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\sin\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right) \\
+\left[\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_a^x q(t)\,dt + \dfrac{c}{e}\right]\sin\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right) \\
+\left[\dfrac{c}{e} - \cot\beta\right]\cot\left(\lambda^{1/2}(b-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(x-a)\right)\cos\left(\lambda^{1/2}(b-y)\right)
\end{array} \right\} \\
& + O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)
\end{aligned}
$$

asimptotik yaklaşımı bulunmuştur. Burada $q(t)$ potansiyel fonksiyonu integrallenebilir, $a \le x \le y \le b$, $\lambda \to \infty$.

5) Türevlenebilirlik varsayımı altında elde edilen özfonksiyonlar kullanılarak Green fonksiyonları için asimptotik yaklaşımlar bulunmuştur. Elde edilen hata teriminin, integrallenebilirlik varsayımı altında bulunan hata teriminden daha iyi olduğu gözlenmiştir ((2.333) vs. (2.374), (2.340) vs. (2.379), (2.344) vs. (2.383), (2.348) vs. (2.387), (2.351) vs. (2.390), (2.355) vs. (2.394), (2.358) vs. (2.397), (2.359) vs. (2.398), (2.360) vs. (2.399), (2.361) vs. (2.400)).

4. ÖNERİLER

1) $G(x,y,\lambda)$, Green fonksiyonları, λ için önceden elde edilen iyileştirilmiş asimptotik yaklaşımlar kullanılarak n'e bağlı olarak hesaplanabilir.

2) Annaby ve Tharwat' ın [2] sonuçlarına benzer olarak, çekirdeği Green fonksiyonları veya çözümler olan dönüşümler için sampling(örnekleme) gösterimleri ile ilgili çalışmalar yapılabilir.

3) Elde edilen sonuçlar kullanılarak özfonksiyon açılımlarıyla ilgili sonuçlar elde edilebilir. [16] da belirtildiği üzere, özfonksiyon açılımlarının önemli bir kullanım alanı da farklı koşullardaki ısı problemlerinin çözümleridir.

4) Potansiyel fonksiyonunun bazı özel durumları (simetrik tek kuyu potansiyel fonksiyonu vb.) için çalışmadakine benzer inceleme yapılabilir.

5) Çalışmada yer alan kuadratik sınır koşulundaki katsayıların pozitif ve negatif oluşu ayrıca incelenebilir.

5. KAYNAKLAR

1. Andrews, L. C., Elementary Partial Differential Equations with Boundary Value Problems, Academic Press Inc., London, 1986.

2. Annaby, M. H. ve Tharwat, M. M., On Sampling Theory and Eigenvalue Problems with an Eigenparameter in the Boundary Conditions, Science University of Tokyo Journal of Mathematics, 42, 2 (2006) 157-176.

3. Başkaya, E., Sınır Değerinde Özdeğer Parametresi Bulunduran Regüler Sturm-Liouville Problemleri, Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2013.

4. Bauer, W. F., Modified Sturm-Liouville Problems and Associated Integral Transforms (Univ. of Michigan: Thesis, 1951).

5. Binding, P. A., Browne, P. J. ve Watson, B. A., Equivalence of Inverse Sturm-Liouville Problems with Boundary Conditions Rationally Dependent on the Eigenparameter, J. Math. Anal. Appl.,291 (2004) 246-261.

6. Birkhoff, G. D., On the Asymptotic Character of the Solutions of Certain Linear Differential Equations Containing a Parameter, Trans Amer. Math. Soc., 9 (1908) 219-231.

7. Bleistein, N. ve Handelsman, Richard A., Asymptotic Expansions of Integrals, Dover Publications Inc., New York, 1986.

8. Chun-Tsi, S., Asymptotic Behaviour of the Eigenfunctions of Sturm-Liouville's Problem Calculated by Using Perturbation Theory, Soviet Math. Dokl.,1 (1960) 442-445.

9. Code, W. J., Sturm-Liouville Problems with Eigenparameter Dependent Boundary Conditions, MSc Thesis, University of Saskatchewan, 2003.

10. Coşkun, H., Asymptotic Approximations of Eigenvalues and Eigenfunctions for Regular Sturm-Liouville Problems, Rocky Mountain J. Math, 36, 3 (2006) 867-883.

11. Coşkun, H. ve Başkaya, E., Asymptotics of the Eigenvalues of Regular Sturm-Liouville Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Condition for Integrable Potential, Math. Scand.,107(2010) 209-223.

12. Coşkun, H. ve Harris, B. J., Estimates for the Periodic and Semi-Periodic Eigenvalues of Hill's Equation, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 130A (2000) 991-998.

13. Coşkun, H. ve Kabataş, A., Asymptotic Approximations of Eigenfunctions for Regular Sturm-Liouville Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Condition for Integrable Potential, Math. Scand.,113 (2013) 143-160.

14. Eastham, M. S. P., The Spectral Theory of Periodic Differential Equations, Scottish Academic Press, Edinburgh and London, 1973.

15. Erdelyi, A., Asymptotic Expansions, Dover Publications Inc., New York, 1956.

16. Fulton, C. T., Two Point Boundary Value Problems with Eigenvalue Parameter Contained in the Boundary Conditions, Proceedings of Royal Society Edinburgh Section A, 77 (1977) 293-308.

17. Fulton, C. T., An Integral Equation Iterative Scheme for Asymptotic Expansions of Spectral Quantities of Regular Sturm-Liouville Problems, Journal of Integral Equations, 4 (1982) 163-172.

18. Fulton, C. T. ve Pruess S. A., Eigenvalue and Eigenfunction Asymptotics for Regular Sturm-Liouville Problems, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 182 (1994) 297-340.

19. Harris, B. J., A Series Solution for Certain Riccati Equations with Applications to Sturm-Liouville Problems, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 137(2) (1989) 462-470.

20. Harris, B. J., The Form of the Spectral Functions Associated with Sturm-Liouville Problems with Continuous Spectrum, Mathematika, 44 (1997) 149-161.

21. Hellwig, G., Über die Anwendung der Laplace-Transformation auf Randwertprobleme, Math. Z.,66 (1957) 371-388.

22. Hochstadt, H., Asymptotic Estimates for the Sturm-Liouville Spectrum, Communications on Pure and Applied Mathematics, 14 (1961) 749-764.

23. Hochstadt, H., Differential Equations: A Modern Approach, Dover Publications Inc., New York, 1963.

24. Murray, J.D., Asymptotic Analysis, Clarendon Press, Oxford, 1974.

25. Titchmarsh, E. C., Eigenfunction Expansions Associated with Second Order Differential Eqautions, part I, Second Edition, Clarendon Press, Oxford, 1962.

26. Titchmarsh, E. C., Eigenfunction Expansions Associated with Second Order Differential Eqautions, part II, Second Edition, Clarendon Press, Oxford, 1962.

27. Walter, J., Regular Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions, Mathematische Zeitschrift, 153 (1973) 301-312.

28. Weyl, H., Ueber gewoehnliche Differentialgleichungen mit Singularitaeten und die zugehoerigen Entwicklungen willkuerlicher Funktionen, Math. Ann. 68 (1910) 220-269.

ÖZGEÇMİŞ

Ayşe KABATAŞ, 1983 yılında Vakfıkebir' de doğdu. İlköğrenimini Trabzon Şalpazarı İlkokulu' nda, orta öğrenimini Trabzon Şalpazarı Ortaokulu' nda, lise öğrenimini ise Trabzon Beşikdüzü Anadolu Öğretmen Lisesi' nde tamamladı.

2001-2002 Eğitim-Öğretim yılında Erzurum Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Bölümü Matematik Öğretmenliği programında lisans eğitimine başladı. 2002-2003 Eğitim-Öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Bölümü Matematik Öğretmenliği programına yatay geçiş yaparak lisans eğitimine burada devam etti. 2006 yılında lisans eğitiminden matematik öğretmeni unvanıyla bölüm ikincisi olarak mezun oldu.

2006-2007 Eğitim-Öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans (Matematik) programına başladı. Aralık 2007 tarihinde Rize Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü' ne Araştırma Görevlisi olarak atandı. Daha sonra Şubat 2008 tarihinde Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı' na Araştırma Görevlisi olarak geçiş yaptı. 2008-2009 Eğitim-Öğretim yılında "İkinci Mertebe Lineer Diferensiyel Denklemler İçin Asimptotik Çözümler" adlı teziyle yüksek lisansını bitirdi. 2009-2010 Eğitim-Öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora (Matematik) programına kabul edildi. 2009 yılı güz dönemini Erasmus Öğrenci Değişim Programı kapsamında Belçika-University of Antwerp' te geçirdi. Yabancı dili ingilizcedir.

Bu tez çalışmasının bir kısmı aşağıdaki çalışmada yayınlanmıştır:

Coşkun, H. ve Kabataş, A., Asymptotic Approximations of Eigenfunctions for Regular Sturm-Liouville Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Condition for Integrable Potential, Math. Scand. 113 (2013), 143-160.